

# 빅데이터분석을 위한 수학

이용희

2023-10-10

# 목차

서론	1
<b>1 강의 일정과 내용</b>	<b>2</b>
1.1 강의 진도 . . . . .	2
<b>2 행렬의 도입</b>	<b>4</b>
2.1 일차연립방정식 . . . . .	4
2.2 행렬과 벡터 . . . . .	5
2.2.1 행렬 . . . . .	5
2.2.2 벡터 . . . . .	5
2.3 중요한 내용과 정의 . . . . .	5
<b>3 행렬의 연산</b>	<b>7</b>
3.1 행렬의 덧셈과 스칼라곱 . . . . .	7
3.1.1 덧셈 . . . . .	7
3.1.2 스칼라곱 . . . . .	7
3.2 행렬의 곱셈 . . . . .	7
3.3 중요한 내용과 정의 . . . . .	9
<b>4 행렬과 연립방정식의 해</b>	<b>10</b>
4.1 역행렬의 정의 . . . . .	10
4.2 중요한 내용과 정의 . . . . .	10
<b>5 가우스소거법과 연립방정식의 해</b>	<b>11</b>
5.1 행렬의 기본연산 . . . . .	11
5.1.1 일차연립방정식의 기본연산 . . . . .	11
5.1.2 행렬의 기본 행연산 . . . . .	11
5.2 행렬과 벡터의 곱 . . . . .	11
5.3 방정식의 근이 무한개인 경우 . . . . .	13
5.4 영공간과 일반해 . . . . .	15
5.5 중요한 내용과 정의 . . . . .	15
<b>6 행연산 행렬과 역행렬</b>	<b>16</b>
6.1 역행렬의 공식 . . . . .	16
6.2 행연산과 역행렬 . . . . .	16

<b>7 벡터공간</b>	<b>20</b>
7.1 벡터공간의 정의와 의미 . . . . .	20
7.2 중요한 내용과 정의 . . . . .	22
<b>8 벡터공간의 기저와 차원</b>	<b>23</b>
8.1 벡터의 일차독립 . . . . .	23
8.2 생성집합과 기저 . . . . .	27
8.3 중요한 내용과 정의 . . . . .	27
<b>9 행렬의 계수</b>	<b>28</b>
9.1 계수의 정의 . . . . .	28
9.2 중요공식 . . . . .	28
9.3 예제 . . . . .	29
9.3.1 부교재 . . . . .	29
9.3.2 연습문제 1 . . . . .	29
<b>10 선형사상</b>	<b>31</b>
10.1 선형사상 . . . . .	31
<b>11 선형사상의 변환행렬</b>	<b>32</b>
11.1 좌표 . . . . .	32
11.1.1 예제 (부교재 Example 2.20) . . . . .	33
11.2 변환행렬 . . . . .	35
11.2.1 정의 . . . . .	35
11.2.2 좌표와 변환행렬 . . . . .	36
11.2.3 예제 . . . . .	36
<b>12 기저변환과 변환행렬</b>	<b>37</b>
<b>13 선형변환의 핵과 상</b>	<b>38</b>
13.1 핵과 상의 정의 . . . . .	38
13.1.1 예제 . . . . .	38
<b>14 아핀공간</b>	<b>39</b>
<b>References</b>	<b>40</b>

# 서론

이 온라인 연습장은 빅데이터분석을 위한 수학의 강의 보충 노트와 연습문제를 모아 놓은 사이트입니다.

- 이 연습장은 강의에 사용된 슬라이드와 부교재 Deisenroth, Faisal, 와/과 Ong (2020) 를 참고하였다.
  - 강의에 사용된 슬라이드는 서울시립대학교 온라인 강의실에서 다운로드 받을 수 있다.
  - 강의에 사용된 부교재는 교과서 웹사이트에서 다운로드 받을 수 있다.
- 이 교재의 각 장에서는 강의에 사용된 슬라이드에서 배운 내용을 보충 설명하고 반드시 학습해야 할 주요 주제를 설명한다.

## i 노트

- 이 연습장의 각 장(chapter)의 내용은 강의에 사용된 슬라이드 번호의 내용과 일치합니다.
- 이 연습장에서 벡터와 행렬은 각각  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}$  와 같이 볼드체로 표기하며 하나의 숫자를 나타내는 변수는 보통의 서체  $x$  로 표기한다.
- 정의, 정리, 예제 등이 끝나는 표시는 ■ 로 나타낸다.

# 1 강의 일정과 내용

## 1.1 강의 진도

- 1주차

슬라이드	주제	페이지 번호	부교재 내용
2	행렬의 도입	2-9, 13-17	
3	행렬의 연산	1-3, 6-7, 9-12	

- 2주차

슬라이드	주제	페이지 번호	부교재 내용
4	역행렬과 연립방정식의 해	1-5	
5	가우스소거법과 연립방정식의 해	1-21	27-32 페이지
6	행연산 행렬과 역행렬		33-34 페이지

- 3주차

슬라이드	주제	페이지 번호	부교재 내용
7	벡터공간	6-10	37-40 페이지
8	벡터공간의 기저와 차원	1-15	40-47 페이지
9	행렬의 계수	4, 7	47-48 페이지

- 4주차

- 추석연휴

- 5주차

슬라이드	주제	페이지 번호	부교재 내용
10	선형사상	1,2,4,5,6,7	48-49 페이지
11	선형사상		50- 53 페이지
12	기저변환과 변환행렬		
13	선형변환의 핵과 상	1-2	58-60 페이지

## 1 강의 일정과 내용

슬라이드	주제	페이지 번호	부교재 내용
14	아핀공간		

## 2 행렬의 도입

### 2.1 일차연립방정식

다음과 같이  $n$  개의 변수  $x_1, x_2, \dots, x_n$  에 대한  $m$  개의 일차 방정식이 있다면 이를 일차연립방정식(a system of linear equations) 이라고 한다.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned} \quad (2.1)$$

위의 일차연립방정식(식 2.1) 에 사용된 변수  $x_1, x_2, \dots, x_n$  와 계수  $a_{ij}, y_i$  으로 좀 더 보기 좋고 효율적으로 표현 하기 위하여 행렬  $\mathbf{A}$  와 벡터  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  를 다음과 같이 표기하여

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

식 2.1 의 일차연립방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad \text{즉} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

식 2.2 은  $y_i$  의 값을 계산하는 방법이 벡터  $\mathbf{x}$  의 변수  $x_1, x_2, \dots, x_n$  와 행렬  $\mathbf{A}$  의  $i$  번째 행에 있는 계수들  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$  을 다음과 같은 식으로 계산한다는 의미이다. 즉 일차연립방정식(식 2.1) 을 행렬  $\mathbf{A}$  와 벡터  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  로 표현한 것이다.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

이제 위에서 일차연립방정식을 표현할 때 사용한 벡터와 행렬의 정의와 기본 연산에 대하여 알아보자.

## 2.2 행렬과 벡터

### 2.2.1 행렬

$m$  개의 행과  $n$  개의 열을 가진, 즉  $m \times n$  행렬은 보통 알파벳 대문자(upper case letter)로 표현하며 다음과 같은 형태로 나타낸다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}) \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$$

행렬  $\mathbf{A}$  가  $m$  개의 행과  $n$  개의 열을 가진 행렬이라면 다음과 같이 표시한다.

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

### 2.2.2 벡터

벡터(vector)는 일반적인 행렬의 하나의 행 또는 하나의 열을 나타내는 이름으로 사용된다.

- 행렬의 각 행은  $1 \times n$  행렬 혹은 행벡터 (row vector)라고 한다.
- 행렬의 각 열은  $m \times 1$  행렬 혹은 열벡터 (column vector)라고 한다.

벡터는 다음과 같이 숫자를 모아 놓은 형태에 따라서 행벡터( $\mathbf{r}$ )와 열벡터( $\mathbf{c}$ )로 구분할 수 있다.

$$\mathbf{r} = [1 \ 2 \ 3 \ 4], \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

또한 벡터는 위치를 나타내는 개체 (geometric vector)로 사용할 수 있다. 위치의 개념을 더 확장하면 벡터는  $n$  개의 숫자(element)를 순서 있게 모아 놓은 모든 집합, 즉 유클리디안 공간(Euclidean space;  $\mathbb{R}^n$ ) 을 구성하는 개체로 사용할 수 있다.

## 2.3 중요한 내용과 정의

- 두 행렬이 같다는 정의

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j$$

- 정방행렬(square matrix)



## 2 행렬의 도입

- 대각행렬(diagonal matrix)
- 상삼각 행렬(upper triangular matrix)과 하삼각행렬(lower triangular matrix)
- 영행렬(zero matrix)
- 단위행렬(identity matrix)
- 대칭행렬(symmetric matrix)
- 스칼라(scalar)

## 3 행렬의 연산

### 3.1 행렬의 덧셈과 스칼라곱

#### 3.1.1 덧셈

두 행렬  $A$  와  $B$  를 더하는 규칙은 다음과 같다.

- 두 행렬  $A$  와  $B$  는 행과 열의 갯수가 같아야 한다.
- $A + B = C$  라고 하면, 덧셈의 결과로 만들어진 행렬  $C$  는 두 행렬과 같은 수의 행과 열을 가지면 각 원소는 다음과 같다.

$$A + B = C \rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

#### 3.1.2 스칼라곱

임의의 실수  $\lambda$  (스칼라)가 주어졌을 때,  $\lambda$  와 행렬  $A$  의 스칼라곱(scalar product) 는 행렬의 모든 원소에  $\lambda$  를 곱해준 행렬로 정의된다.

예를 들어  $\lambda = 2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$  인 경우

$$\lambda A = 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

### 3.2 행렬의 곱셈

먼저 두 행렬  $A$  와  $B$  의 곱셈

$$A \times B \equiv AB$$

을 정의하려면 다음과 같은 조건이 만족되어야 한다.

- 행렬  $A$  의 열의 갯수와 행렬  $B$  의 행의 갯수가 같아야 한다

따라서 두 행렬의 곱셈은 순서를 바꾸면 정의 자체가 안될 수 있다.

### 3 행렬의 연산

**정의 3.1** (곱셈의 정의). 이제 두 행렬  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  와  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  의 곱셈은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C}$$

행렬  $\mathbf{C}$  는  $m$  개의 행과  $k$  개의 열로 구성된 행렬이며( $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ) 각 원소  $c_{ij}$  는 다음과 같이 정의된다.

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il}b_{lk}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, k$$

먼저 간단한 예제로 다음과 같은 두 개의 행렬의 곱을 생각해 보자.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(0) + (2)(-1) & (1)(1) + (2)(2) \\ (3)(0) + (4)(-1) & (3)(1) + (4)(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 11 \end{bmatrix}$$

곱하는 순서를 바꾸어 계산해 보자.

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0)(1) + (1)(-3) & (0)(2) + (1)(4) \\ (-1)(1) + (2)(3) & (-1)(2) + (2)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

위 두 결과를 보면 행렬의 곱셈에서는 교환법칙이 성립하지 않음을 알 수 있다.

이제 차원이 다른 두 행렬의 곱셈을 살펴보자.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

두 행렬의 곱셈은 정의 3.1 에 의하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

두 행렬의 곱하는 순서를 바꾸면 차원이 전혀 다른 행렬이 얻어진다.

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3 중요한 내용과 정의

- 행렬의 전치(transpose operation):  $\mathbf{A}^T$
- 행렬의 더하기와 스칼라곱의 성질
- 행렬의 곱셈은 교환법칙이 성립하지 않는다.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (3.1)$$

#### 주의

교환법칙이 성립하지 않는다는 의미는 식 3.1 이 언제나 성립한다는 의미는 아니다. 아래와 같이 특별한 경우 교환법칙이 성립하는 경우도 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

- 행렬의 곱셈은 결합법칙과 배분법칙은 성립한다.

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

## 4 행렬과 연립방정식의 해

### 4.1 역행렬의 정의

정방행렬  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 의 역행렬(inverse matrix)이 존재하면  $\mathbf{A}^{-1}$ 로 표시하며 다음을 만족하는 행렬이다.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- 역행렬은 유일하다.
- 예를 들어 2차원 정방행렬의 역행렬은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, ad - bc \neq 0 \rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

위의 2차원 정방행렬의 역행렬에서 만약  $ad - bc = 0$  이면 역행렬이 존재하지 않는다. 일반적으로 모든 정방행렬의 역행렬이 존재하는 것은 아니다.

### 4.2 중요한 내용과 정의

- 역행렬의 성질

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$$

- 연립방정식의 해

$n$ 개의  $n$  변수 일차연립방정식  $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ 가 주어졌다고 하자. 여기서  $\mathbf{A}$ 는  $n \times n$  정방행렬이다. 만약  $\mathbf{A}^{-1}$ 가 존재하면

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$$

## 5 가우스소거법과 연립방정식의 해

### ! 중요

- 슬라이드의 1-7페이지를 반드시 먼저 학습하세요
- 부교재 Deisenroth, Faisal, 와/과 Ong (2020) 의 다음 절을 반드시 학습하세요
  - 2.3.1 Particular and General Solution
  - 2.3.2 Elementary Transformations
  - 2.3.3 The Minus-1 Trick

### 5.1 행렬의 기본연산

#### 5.1.1 일차연립방정식의 기본연산

기본연산은 일차연립방정식의 해집합을 변화시키지 않으면서 방정식을 변화시켜 해집합을 구하는 다음의 세 가지 연산을 말한다.

1. 한개의 방정식의 양변에 0이 아닌 상수를 곱하기
2. 한개의 방정식의 양변에 0이 아닌 상수를 곱한 것을 다른방정식의 양변에 각각 더하기
3. 방정식의 위치를 바꾸기

#### 5.1.2 행렬의 기본 행연산

기본 행연산(elementary row operation)은 기본연산을 행렬의 행에 시행하는 것을 말한다.

1. 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하기
2. 한 행에 0이 아닌 상수를 곱한 결과를 다른 행 에더하기
3. 두 행의 위치를 교환하기

### 5.2 행렬과 벡터의 곱

$m \times n$  인 행렬  $\mathbf{A}$  와  $n$ -차원 벡터  $\mathbf{x}$ 를 곱하는 과정을 다음과 같이 두 개의 서로 다른 형태로 나타낼 수 있다.

1. 행렬 계산법의 이용

먼저 행렬과 벡터의 곱셈은 행렬 계산법의 이용하여 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{l=1}^n a_{1l}x_l \\ \sum_{l=1}^n a_{2l}x_l \\ \vdots \\ \sum_{l=1}^n a_{ml}x_l \end{bmatrix}$$

## 2. 열벡터의 선형조합

이제 행렬과 벡터의 곱셈을 행렬  $\mathbf{A}$ 을 구성하는 열벡터들의 선형조합(linear combination)으로 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{Ax} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \cdots + x_n \mathbf{a}_n$$

위의 식에서 벡터  $\mathbf{a}_j$ 는 행렬  $\mathbf{A}$ 의  $j$ 번째 열벡터이다.

**예제 5.1.** 먼저 간단한 예제로 다음과 같은 행렬과 벡터의 곱셈을 생각해 보자.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

행렬과 벡터의 곱셈은 앞에서 배운 행렬의 곱셈 방법으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(1) + (2)(-1) \\ (1)(1) + (-1)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

이제 행렬과 벡터의 곱셈을 행렬  $\mathbf{A}$ 의 열들의 선형 조합으로 표시할 수 있다는 것도 알아두자.

$$\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

행렬과 벡터의 곱셈을 앞 행렬의 열과 뒤 벡터의 원소의 선형조합으로 나타낼 수 있다는 사실은 다양한 주제에서 유용하게 사용된다.

■

### 5.3 방정식의 근이 무한개인 경우

교재 슬라이드 4번의 5-7 페이지에는 변수가 3개이고 방정식의 개수가 2개인 경우에

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases} \leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

아래와 같이 첨가행렬(augmented matrix)을 만들고 기본 행연산을 적용하여 일반해를 구하는 예제가 있다.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \quad (5.2)$$

위의 식 5.2 에서 첨가행렬의 왼쪽 부분이 행사다리꼴 행렬(row echelon form)임을 유의하자. 식 5.2 의 두 번째 행에 2를 곱해서 첫번째 행에 더하면 다음과 같이 기약행사다리꼴 행렬(reduced row echelon form)이 된다.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right] \quad (5.3)$$

이제 방정식을 푸는 3가지 방법에 대하여 알아보자.

#### (1) 매개변수와 가우스소거법을 이용하는 법

슬라이드에 나오는 방법처럼 식 5.3 에 매개변수( $x_3 = t$ )를 사용하기 위하여 첨가행렬의 마지막 행에  $(0, 0, 1, t)$ 를 추가한 후 첨가행렬의 왼쪽을 항등행렬로 바꾸는 행연산을 적용하면(가우스 소거법) 다음과 같은 결과를 얻고

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & t+2 \\ 0 & 0 & 1 & t \end{array} \right]$$

해집합은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ t+2 \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (5.4)$$

#### (2) 특수해와 선형조합을 이용

다시 식 5.3 에서 제시된 방정식을 열벡터의 선형조합의 형태로 아래와 같이 써보자

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \leftrightarrow x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$



이제 위의 식에서  $x_3 = 0$  으로 놓으면 다음과 같이  $x_1$  과  $x_2$  만 포함된 간단한 방정식이 나타나며 이를 만족하는 특수해(particular solution)  $\mathbf{x}^*$  를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x_3 = 0, \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

위의 식 5.6 에서 구한 특수해  $\mathbf{x}^*$  는 식 5.4 에서 주어진 해집합에서 나타난 마지막 벡터이다.

이제 식 5.1 에 주어진 방정식은 특별한 해  $\mathbf{x}^*$  만 만족하는 것이 아니므로 일반해(general solution)을 구해야 한다. 일반해를 구하는 방법은 다음과 같이 행렬  $\mathbf{A}$ 의 열들의 선형 조합이 영벡터가 되는  $\mathbf{x}^{**}$ 를 찾는 것이다.

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^{**} = \mathbf{0} \quad \leftrightarrow \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

식 5.7 를 만족하는 해는 유일하지 않다. 하지만 행렬  $\mathbf{A}$ 의 두 번째 열과 세 번째 열의 부호가 반대인 점을 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

따라서 식 5.7 를 만족하는 해  $\mathbf{x}^{**}$  는 쉽게 찾을 수 있다.

$$\mathbf{x}^{**} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이제  $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}$  를 만족하는 특수해  $\mathbf{x}^*$  와  $\mathbf{A}\mathbf{x}^{**} = \mathbf{0}$  를 만족하는  $\mathbf{x}^{**}$  를 이용하여 일반해를 구해보자. 임의의 실수  $t$  에 대하여 다음과 같은 식이 만족한다.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^* + t\mathbf{x}^{**}) = \mathbf{A}\mathbf{x}^* + t\mathbf{A}\mathbf{x}^{**} = \mathbf{y} + t\mathbf{0} = \mathbf{y} \quad t \in \mathbb{R}$$

위의 식에 의하여 이제 일반해를 구하면 다음과 같이 나타나며 이는 매개변수를 이용하여 얻은 해(식 5.4)와 동일하게 나타난다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^* + t\mathbf{x}^{**} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

### (3) (-1)-추가법

이제 마지막 방법은 부교재 2.3.3 절(32 페이지)에 나온 (-1)-추가법(Minus-1 Trick)에 대하여 배워보자.

식 5.3 는 기약행사다리꼴 행렬로서 첫 번째 행과 두 번째 행이 피벗을 포함한 행이다. 이제 기약행사다리꼴 행렬에 대각원소 위치에 피벗이 없는 행에 대각원소가 -1 인 행을 추가하여 정방행렬로 만들어 보자. 식 5.3 에서 3행에 피벗이 없으므로 대각원소가 -1 이고 나머지가 0인 행을 3행에 다음과 같이 추가한다.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{-1} & \color{red}{0} \end{array} \right] \quad (5.8)$$

이제 식 5.8 에서 가장 오른쪽에 있는 열이 특수해가 되며 대각원소가 -1 은 열벡터가  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  을 만족하는 해가 된다.

따라서 방정식의 일반해를 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t^* \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t = -t^*, \quad t \in \mathbb{R}$$

## 5.4 영공간과 일반해

식 5.7 에 나타난 것과 같이 주어진 행렬  $\mathbf{A}$  의 열들의 선형조합을 영벡터로 만드는 해의 집합을 영공간(Null space)라고 한다.

**정의 5.1.** 일차연립방정식(또는 행렬 방정식)  $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  의 해집합을  $\mathbf{A}$  의 영공간이라고 하고  $N(\mathbf{A})$  라고 표시한다. 즉,

$$N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}$$

위에서 방정식의 해를 찾을 때 특수한 해를 먼저 찾고 일반해를 만드는 작업은 영공간을 찾는 작업과 동일하다.

## 5.5 중요한 내용과 정의

- 행사다리꼴 행렬(row echelon form)의 정의
- 피벗(pivot 혹은 leading entry)의 정의
- 기약행사다리꼴(reduced row echelon form)의 정의
- 가우스 소거법의 절차
  - 기본변수(basic variable)와 자유변수(free variable)
  - 매개변수의 이용
- 연립일차방정식이 유일한 해를 가질 조건
- 정방행렬의 역행렬이 존재하면 영공간은 영벡터와 같다.

## 6 행연산 행렬과 역행렬

### ! 중요

강의자료 슬라이드 6번의 기본행렬은 강의 범위에 포함되지 않습니다.

단, 첨가행렬과 행연산을 이용하여 역행렬을 구하는 방법은 반드시 알아야 합니다.

이 연습장에 포함된 예제와 부교재 33-34 페이지 Calculating the Inverse 의 Example 2.9 를 공부하세요.

### 6.1 역행렬의 공식

먼저  $2 \times 2$  행렬의 역행렬을 구하는 공식을 이용해 보자. 다음과 같이  $2 \times 2$  행렬  $A$  가 주어졌을 때

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

식 4.1 를 사용하면 다음과 같이  $2 \times 2$  행렬의 역행렬을 구할 수 있다.

$$A^{-1} = \frac{1}{(1)(4) - (2)(3)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

### 6.2 행연산과 역행렬

아래에 주어진 두 예제에서 행연산을 이용하여 역행렬을 구해보자.

**예제 6.1** ( $2 \times 2$  행렬의 역행렬). 정방행렬의 역행렬을 구하는 다른 방법 중의 하나는 항등행렬  $I$  와 같이 첨가행렬을 만들고 행연산을 적용하는 것이다. 이제 행연산을 이용하여  $A$  의 역행렬을 구하는 방법을 연습해 보자

이제  $A$  과 이차원 항등행렬  $I$  을 붙여서 만든 첨가행렬은 다음과 같다.

$$[A | I] = \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

이제 위의 첨가행렬에서 행연산을 이용하여 행렬  $A$  부분을 항등행렬로 만들어 보자.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (-3)(1\text{st row}) + (2\text{nd row}) \\
& \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \quad (1)(2\text{nd row}) + (1\text{st row}) \\
& \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array} \right] \quad (-1/2)(2\text{nd row}) \\
& \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

이렇게 첨가행렬에서 행렬  $\mathbf{A}$  부분을 행연산을 이용하여 항등행렬로 만들어 주면 오른쪽의 항등행렬이  $\mathbf{A}^{-1}$ 로 나타난다.

■

**예제 6.2** ( $4 \times 4$  행렬의 역행렬).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

첨가행렬에서 행연산을 이용하여 행렬  $\mathbf{A}$  부분을 항등행렬로 만들어 보자.

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} (-1)(1\text{st row}) + (3\text{rd row}) \\ (-1)(1\text{st row}) + (4\text{th row}) \end{array} \\
\\
\rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \text{swap with 2nd and 4th row} \\
\\
\rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} (-1)(2\text{nd row}) + (3\text{rd row}) \\ (-1)(2\text{nd row}) + (4\text{th row}) \end{array} \\
\\
\rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] (-1)(4\text{th row}) + (1\text{st row}) \\
\\
\rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right] \text{swap with 3rd and 4th row} \\
\\
\rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] (-1)(3\text{rd row}) + (4\text{th row}) \\
\\
\rightarrow & \left[ \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

위의 마지막 결과로 다음과 같은 역행렬이 얻어진다.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

■

## 7 벡터공간

### i 노트

강의자료 슬라이드 2-5번(군, 필드의 정의)은 강의 범위에 포함되지 않습니다.  
부교재 37-40 페이지를 공부하세요.

### 7.1 벡터공간의 정의와 의미

벡터공간(vector space)은 어떤 집합  $S$ 에 다음과 같은 두 개의 연산이 정의된 공간을 말한다.

1. 두 개의 원소에 대한 더하기(addition,  $+$ ) 연산의 정의되어 있다.

$$+ : S + S \rightarrow S \quad (7.1)$$

2. 하나의 실수와 한 개의 원소에 대한 스칼라곱(scalar product,  $\cdot$ ) 연산이 정의되어 있다.

$$\cdot : \mathbb{R} \cdot S \rightarrow S \quad (7.2)$$

위에서 더하기 연산이 정의되어 있다는 의미는 다음에 주어진 규칙이 성립한다는 의미이다.

- 집합  $S$ 가 연산에 대하여 닫혀있다 (closure).

$$s_1 + b \in S \quad \forall s_1, b \in S$$

- 결합법칙이 성립한다 (Associativity).

$$(s_1 + s_2) + s_3 = s_1 + (s_2 + s_3) \quad \forall s_1, s_2, s_3 \in S$$

- 항등원이 존재한다 (Neutral element).

$$s + e = e + s = s \quad \exists e \quad \forall s \in S$$

- 역원이 존재한다 (Inverse element).

$$s + i = i + s = 0 \quad \exists i \quad \forall s \in S$$

일반적으로 항등원( $e$ )는 0으로 표시하며 역원( $i$ )는  $-s$ 로 표시한다.

- 교환법칙이 성립한다 (Commutativity).

$$s_1 + s_2 = s_2 + s_1 \quad \forall s_1, s_2 \in S$$

또한 위에서 스칼라곱 연산이 정의되어 있다는 의미는 다음에 주어진 규칙이 성립한다는 의미이다.

- 스칼라곱 연산의 분배법칙이 성립한다 (Distributivity).

$$r_1(s_1 + s_2) = r_1s_1 + r_2s_2, \quad (r_1 + r_2)s = r_1s + r_2s \quad \forall s_1, s_2 \in S, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

- 스칼라곱 연산의 결합법칙이 성립한다

$$r_1(r_2s) = (r_1r_2)s \quad \forall s \in S, \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

- 스칼라곱 연산의 항등원이 존재한다 (Neutral element).

$$1 \cdot s = s \quad \forall s \in S$$

일반적으로 벡터공간은  $(S, +, f)$ 라고 표시한다. 이러한 표시에서 함수  $f$ 는 스칼라곱 연산에 대한 정의를 나타내는 것이며 식 7.2에 나타나는 대응을 의미한다.

이 강좌에서는 스칼라로 실수만 사용하고 있으므로 벡터공간을 실벡터(real vector space)라고 부른다.

$$f: \mathbb{R} \cdot S \rightarrow S, \quad \text{즉} \quad f(rs) = r \cdot s = rs$$

#### 주의

벡터 공간에서 주의할 점은 두 벡터의 곱하기가 정의되어 있다는 것이 아니라 하나의 스칼라와 하나의 벡터에 대한 스칼라 곱하기가 정의되어 있다는 것이다.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = ? \quad \text{but} \quad 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

두 벡터의 곱하기는 나중에 내적(inner product)란 이름으로 따로 정의한다.



## 7.2 중요한 내용과 정의

- 벡터공간의 예제 (슬라이드 참조)
- 부분공간(subspace)의 정의와 예제(부교재 39 페이지 Example 2.12 참조)

## 8 벡터공간의 기저와 차원

### i 노트

강의자료 슬라이드 2-5 페이지(군, 필드의 정의)은 강의 범위에 포함되지 않습니다.  
이 연습장에 포함된 예제와 부교재 40-47 페이지를 공부하세요.

### 8.1 벡터의 일차독립

벡터공간에 속한 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 의 일차결합(또는 선형결합, linear combination)이란 각 벡터에 스칼라를 곱하여 더한 것들이다. 즉 다음과 같은 형태의 식을 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 의 일차결합(linear combination)이라고 한다:

$$r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \cdots + r_n\mathbf{v}_n, \quad r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{R} \quad (8.1)$$

**정의 8.1** (벡터의 일차독립과 일차종속). 벡터공간에 속한 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 가 있다고 하자. 만약 다음 식이 만약 모두 0인  $n$ 개의 스칼라  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 에 대해서만 성립하면  $n$ 개 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 들은 일차독립(linearly independent)라고 한다.

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \iff x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0 \quad (8.2)$$

또한 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 가 일차독립이 아니면 일차종속(linear dependent)라고 한다. 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ 가 일차종속이면 모두 0이 아닌  $x_1, x_2, \dots, x_n$ 이 존재하여 다음이 성립한다는 것이다.

$$\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \text{ s.t. } (x_1, x_2, \dots, x_n) \neq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

■

예를 들어 다음과 같이 주어진 3개의 3-차원 벡터들은 선형종속이다.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

왜냐하면 다음과 같이 모두 0이 아닌 스칼라에 의해서 다음 식이 성립하기 때문이다. 즉 벡터  $\mathbf{v}_3$ 는  $\mathbf{v}_2$ 에 2를 곱하여  $\mathbf{v}_1$ 에 더한 값과 같다.

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \iff \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

주어진 벡터들이 서로 일차독립임을 확인할 수 있는 일반적인 방법은 다음과 같이 가우스소거법을 이용하는 것이다.

1. 주어진 벡터들을 열로 구성하는 행렬을 만들고 가우스소거법(또는 행사다리꼴)을 적용한다.
2. 이때 피봇을 포함하는 열의 개수가 선형독립인 벡터의 개수이다.

다음과 같이 식 8.4의 3개의 벡터를 각 열로 합친  $3 \times 3$ -차원 행렬에 행연산을 적용하여 피봇이 1인 행사다리꼴을 만들어보자.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-2)(1\text{st row}) + (2\text{nd row}) \\ (-3)(1\text{st row}) + (3\text{rd row}) \end{array} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \quad (-1)(2\text{nd row}) + (3\text{rd row}) \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (-1/2)(2\text{nd row}) \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (-1)(2\text{nd row}) + (1\text{st row}) \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

위에서 마지막 행렬의 비봇(빨간 숫자 1)을 포함한 열은 첫 번째 열과 두 번째 열이고 세 번째 열은 첫 번째 열과 두 번째 열의 선형조합으로 나타낼 수 있음을 보여주고 있다. 피봇을 포함하지 않는 세 번째 열의 숫자가 각각 1과 2라는 것은 세 번째 벡터  $\mathbf{v}_3 = (1)\mathbf{v}_1 + (2)\mathbf{v}_2$ 로 나타낼 수 있다는 것을 보여준다.

이제 다음과 같이 주어진 3개의 3-차원 벡터들은 일차독립이다. 즉 3개 벡터의 선형 조합이 0이 될 수 있도록 만드는 스칼라는 모두 0인 경우 밖에 없다.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (8.5)$$

이제 식 8.5 의 3개의 벡터를 각 열로 합친  $3 \times 3$ -차원 행렬에 행연산을 적용하여 피벗이 1인 행사다리꼴을 만들어 보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-2)(1\text{st row}) + (2\text{nd row}) \\ (-3)(1\text{st row}) + (3\text{rd row}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix} \quad (-1)(2\text{nd row}) + (3\text{rd row})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1/2)(2\text{nd row}) \\ (-1)(3\text{rd row}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-1)(2\text{nd row}) + (1\text{st row}) \\ (-2)(3\text{rd row}) + (2\text{nd row}) \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (-1)(3\text{rd row}) + (1\text{st row})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

식 8.5 의 3개의 벡터로 구성된 행렬에 가우스 소거법을 적용하면 위와 같이 모든 열이 피벗을 포함한 열로 나타난다. 따라서 3개의 벡터는 서로 일차독립이다.

이제 다음과 같이 주어진 4개의 3-차원 벡터들은 일차종속이다.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

식 8.6 에 나타난 4개의 벡터가 일차종속임을 어떻게 알 수 있을까? 앞에서와 마찬가지로 식 8.6 에 있는 4개의 벡터들이 열로 구성된  $3 \times 4$ -행렬에 가우스소거법을 적용해보자.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-2)(1\text{st row}) + (2\text{nd row}) \\ (-3)(1\text{st row}) + (3\text{rd row}) \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1)(2\text{nd row}) + (3\text{rd row}) \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (1/2)(2\text{nd row}) + (1\text{st row}) \\ \\ \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ (-1/2)(2\text{nd row}) \\ \end{array} \\
 &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

위와 같이 가우스소거법을 적용하여 얻은 행렬에서 피봇을 포함한 열은 1,2,4, 번째 열이고 포함하지 않은 열은 3번째 열임을 알 수 있다. 여기서 주어진 벡터들로 행렬을 구성할 때 기약행사다리꼴의 형태가 벡터들을 배열하는 순서에 따라 달라지는 것을 알 수 있다. 즉,  $3 \times 4$ -행렬을 구성할 때 순서를 바꾸어 다음과 같이  $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3]$ 로 배열하면 다음과 같은 기약행사다리꼴의 형태가 얻어진다.

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_4 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{가우스소거법}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

위와 같이 피봇이 1인 기약행사다리꼴에서 식 8.6 의 벡터  $\mathbf{v}_3$ 가 나머지 3개의 벡터의 선형조합으로 표현될 수 있다는 의미이다. 따라서 식 8.6 의 벡터는 일차종속이며 기약행사다리꼴의 마지막 열에 나타나 숫자  $(1, 2, -1)$ 은  $\mathbf{v}_3$ 가 다음과 같이 다른 벡터의 일차결합으로 나타나는 것을 보여준다.

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = (1)\mathbf{v}_1 + (2)\mathbf{v}_2 + (-1)\mathbf{v}_4 = (1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

식 8.6 와 같이 3차원 벡터가 4개인 경우 벡터의 값에 관계없이 일차종속으로 나타난다. 이러한 사실은  $\mathbb{R}^n$  의  $n+1$  개의 벡터는 항상 일차종속이라는 정리(슬라이드 6페이지의 정리 참조)의 결과이다. 즉,  $\mathbb{R}^n$  에서  $n$  개보다 더 많은 벡터들은 항상 일차종속이다.

## 8.2 생성집합과 기저

**정의 8.2** (생성집합과 기저). 벡터공간  $V$  의 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  의 일차결합을 모두 모은 집합

$$W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\} = \{r_1\mathbf{v}_1 + r_2\mathbf{v}_2 + \dots + r_m\mathbf{v}_m : r_1, r_2, \dots, r_m \in \mathbb{R}\}$$

을 벡터  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$  의 생성(span)이라고 하며  $W$  의 생성집합(generating set, spanning set) 이라고 한다.

또한 어떤 벡터공간(혹은 부분공간)의 생성집합에 속한 벡터들이 일차독립일 때 이 생성집합을 기저 (basis)라고 한다

■

## 8.3 중요한 내용과 정의

- $\mathbb{R}^n$  의 모든 기저는  $n$  개의 원소를 갖는다.
- 임의의 벡터공간  $V$  에 대해서  $V$  의 부분집합  $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$  가  $V$  의 한 기저라고 하면 다음을 보일 수 있다.
  - $V$  의 모든 벡터들은  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$  의 일차결합으로 나타낼 수 있으며 유일하다.
  - $V$  의 부분집합이  $n$  개보다 많은 벡터를 포함하면 이 부분집합의 벡터들은 일차종속이다.
  - $V$  의 또다른 기저  $C = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$  가 있다면  $m = n$  이다.
- 벡터공간  $V$  의 차원(dimension) 은 기저의 개수로 정의되며  $\dim(V)$  로 표시한다.

## 9 행렬의 계수

### 9.1 계수의 정의

정의 9.1 (계수의 정의). 행렬의 계수(rank)란 행렬의 일차 독립인 행들의 최대 수 또는 일차독립인 열들의 최대 수로 정의된다

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = rk(\mathbf{A}) = \dim(\text{Col}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Row}(\mathbf{A}))$$

■

꼭 기억해야 할 것은 행렬의 계수는 열들을 이용하여 구한 계수와 행들을 이용하여 구한 계수가 같다는 것이다. 즉, 행렬의 계수는 열의 계수와 행의 계수 중 하나만 구해도 된다는 것이다.

### 9.2 중요공식

- $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}^T)$
- 행렬  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  가 정방행렬이고 계수가  $n$  이면 역행렬이 존재한다. 역행렬이 존재하면 정칙행렬(non-singular matrix)이라고 한다.
- 더 나아가 다음에 나오는 문장은 모두 동치(equivalent)이다.

모든  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  에 대하여

$\mathbf{A}$  가 정칙행렬이다.

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  의 열들이 일차독립이다.

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  의 행들이 일차독립이다.

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  의 계수가  $n$  이다.

$\Leftrightarrow \mathbf{A}$  의 기약행사다리꼴행렬이 항등행렬이다.

$\Leftrightarrow \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$  해는 영벡터가 유일하다.

- 최대계수행렬

–  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  에 대하여  $m \leq n$  이고  $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ 이면  $\mathbf{A}$  는 최대 행계수를 갖는다. 이 때  $\mathbf{A}$  를 최대 행계수 행렬(full row rank matrix)이라고한다.

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  에 대하여  $m \leq n$  이고  $m \geq n$  이고  $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$  이면  $\mathbf{A}$ 는 최대 열계수를 갖는다  $\mathbf{A}$ 는 최대 열계수 행렬이다라고 한다.이 때  $\mathbf{A}$ 를 최대 열계수행렬(full column rank matrix)이라고 한다.
- $\mathbf{A}$ 가 최대 행계수 행렬 또는 최대 열계수 행렬인 경우  $\mathbf{A}$ 는 최대 계수를 갖는다 또는  $\mathbf{A}$ 는 최대 계수 행렬(full rank matrix) 이라고 한다.

## 9.3 예제

### 9.3.1 부교재

- Example 2.18 (Rank)

### 9.3.2 연습문제 1

다음과 같은  $3 \times 4$  행렬에 행연산을 적용하여 행사다리꼴 행렬로 만들어 보자.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 14 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix} \quad (-2)(1\text{st row}) + (2\text{nd row})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 9 & 3 & 24 \end{bmatrix} \quad (-4)(1\text{st row}) + (3\text{rd row})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad (-1)(2\text{nd row}) + (3\text{rd row})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

위의 결과에서 피봇 행이 2개가 나타나며 나머지 행은 모두 0으로 나타난다. 이러한 결과를 행렬의 계수가 2인 것을 의미하며( $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ ). 계수의 정의에 의하여 선형독립인 행의 갯수가 2이다.

따라서 마지막 행은 다른 2개의 행들의 선형조합이고 행연산의 결과로 모든 원소가 0이 되는 것을 알 수 있다.



## 9 행렬의 계수

만약 식 9.1 에 나타난 행렬의 열들을 고려하면 선형독립인 열들이 2개가 될까? 식 9.1 의 행렬  $\mathbf{A}$  의 전치 행렬은 열들이 행으로 바뀐 행렬이므로 위와 유사하게 행 연산을 적용하면 선형독립인 열의 개수를 구할 수 있다.

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 14 & 24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & 14 & 24 \end{bmatrix} \quad (\text{change 1st row and 3rd row})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 14 & 24 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (-2)(1\text{st row}) + (2\text{nd row}) \\ (-1)(1\text{st row}) + (3\text{rd row}) \\ (-5)(1\text{st row}) + (4\text{th row}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{change 2nd row and 3rd row})$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (-1)(2\text{nd row}) + (3\text{rd row}) \\ (-3)(2\text{nd row}) + (4\text{th row}) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

위와 같이 4개의 열로 보아도 서로 독립인 열의 개수는 2개임을 알 수 있다.

따라서 행렬의 계수를 구하는 경우는 행을 이용한 연산과 열을 이용한 연산 중 하나만 선택하여 계산하면 된다.

# 10 선형사상

## 10.1 선형사상

$V$  와  $W$  가 벡터공간일 때 함수  $T : V \rightarrow W$  가 다음 두 가지 조건을 만족하면 선형사상(linear mapping, linear transformation, homomorphism)이라고 한다.

- (1)  $\forall v_1, v_2 \in V, \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
- (2)  $\forall r \in \mathbb{R}, \quad T(rv_1) = rT(v_1)$

- 선형사상의 종류와 성질

다음에 나오는 특별한 성질을 가진 선형사상과 특별한 함수의 정의를 반드시 학습하고 암기하세요

- Injective(단사함수, one-to-one)
- Surjective(전사함수, onto)
- Bijective(전단사함수, one-to-one correspondence)
- 항등함수( $id_V$ )
- 역함수

다음과 같은 용어는 참고로 알아두자.

- Isomorphism (동형사상):  $T : V \rightarrow W$  linear and bijective
- Automorphism (자기동형사상):  $T : V \rightarrow V$  linear and bijective

**정리 10.1.** 한 벡터공간  $V$  가 있어서  $\dim(V) = n$  이면 동형사상  $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$  이있다.

■

## 11 선형사상의 변환행렬

### i 노트

아래 열거된 사이트는 선형 변환을 시각적으로 설명하는 도구를 제공한다.

- 그림의 변환
- 2차원 좌표의 변환
- 3차원 좌표의 변환

### 11.1 좌표

벡터공간  $V$  의 차원이  $\dim(V) = n$  이고 주어진 기저를  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  이라고 하자. 참고로 기저  $B$  는 순서가 있는 집합(ordered set)이다.

벡터공간  $V$  의 원소  $\mathbf{x} \in V$  는 다음과 같이 기저  $B$  의 선형조합으로 나타난다,

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{b}_n \quad (11.1)$$

참고로  $\mathbf{x}$  를 식 11.1 과 같이 나타낼 수 있는  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  의 조합은 유일하다.

**정의 11.1** (좌표(coordinator)). 벡터공간  $V$  의 원소  $\mathbf{x} \in V$  가 기저  $B$  에 대하여 식 11.1 으로 표현된다면  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  를  $\mathbf{x}$  의 좌표(coordinator) 라고 부른다.

또한 벡터공간  $V$  의 모든 원소에 대하여 좌표를 대응해주는 좌표사상(coordinator map) 라고 부르고 다음과 같이 함수  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  로 나타낼 수 있다.

$$f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

■

## 11.1.1 예제 (부교재 Example 2.20)

이차원 벡터공간  $V = \mathbb{R}^2$  에서 다음과 같은 하나의 벡터를 생각하자.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

이제 다음과 같은 표준 기저(standard basis)  $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  를 생각하자.

$$B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = I$$

이제  $\mathbf{x}$  를 기저  $B$  에 대하여 식 11.1 으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}\boldsymbol{\alpha}_B \quad (11.2)$$

따라서 기저  $B$  에 대하여  $\mathbf{x}$  의 좌표  $\boldsymbol{\alpha}$ 는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\alpha}_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

이제 기저를 다음과 같이  $\tilde{B}$  로 바꾸어 보자.

$$\tilde{B} = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

이제  $\mathbf{x}$  를 기저  $\tilde{B}$  에 대하여 식 11.1 으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1/2)\mathbf{b}_1 + (5/2)\mathbf{b}_2 = (-\frac{1}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + (\frac{5}{2}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 \\ 5/2 \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{B}}\boldsymbol{\alpha}_{\tilde{B}} \quad (11.3)$$

따라서 기저  $\tilde{B}$  에 대하여  $\mathbf{x}$  의 좌표  $\boldsymbol{\alpha}$ 는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\alpha} \equiv \boldsymbol{\alpha}_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

이 예제에서 본 것처럼 기저가 변하면 동일한 원소에 대해서도 좌표가 달라진다.

만약 기저가 변했다면 좌표는 어떻게 변하는지를 알아야 한다. 이차원 공간의 임의의 벡터  $\mathbf{x}$  에 대하여 두 기저  $B$  와  $\tilde{B}$  에 대하여 식 11.2 과 식 11.3 의 관계를 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

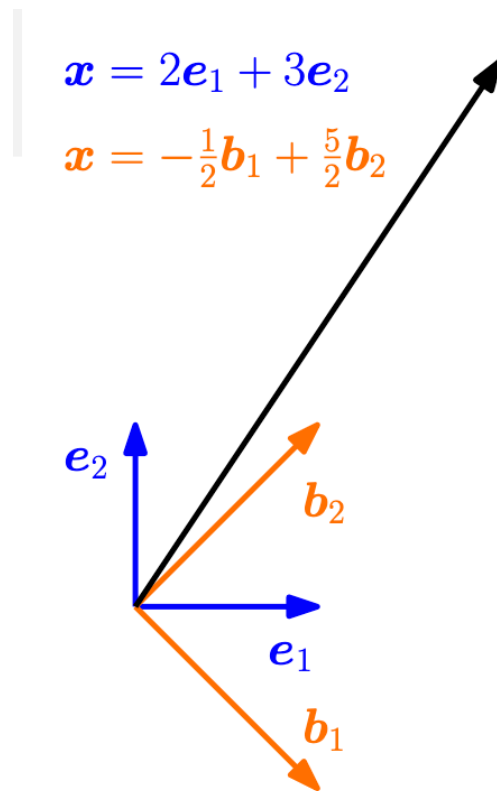


그림 11.1: 기저의 변화에 대한 좌표의 변화

$$\begin{aligned}
& \tilde{B}\alpha_{\tilde{B}} = B\alpha_B \\
\Rightarrow & \alpha_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1} B\alpha_B \\
\Rightarrow & \tilde{B}\alpha_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1} I\alpha_B \\
\Rightarrow & \tilde{B}\alpha_{\tilde{B}} = \tilde{B}^{-1} \alpha_B \\
\Rightarrow & \alpha_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \alpha_B \\
\Rightarrow & \alpha_{\tilde{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \alpha_B
\end{aligned}$$

따라서 기저가 변하면 좌표는 위와 같은 식으로 변한다.

## 11.2 변환행렬

### 11.2.1 정의

이제 두 개의 벡터공간  $V$  와  $W$  에 대하여 선형사상  $\Phi$  가 정의되어 있고

$$\Phi : V \rightarrow W$$

벡터공간  $V$  와  $W$  에 대한 기저가 각각  $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  와  $C = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_m)$  이라고 하자.

이제 벡터공간  $V$  의 기저에 대한 선형사상의 원소가 벡터공간  $W$  의 기저로 다음과 같이 표현된다고 하자.

$$\begin{aligned}
\Phi(\mathbf{b}_1) &= a_{11}\mathbf{c}_1 + a_{21}\mathbf{c}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{c}_m \\
\Phi(\mathbf{b}_2) &= a_{12}\mathbf{c}_1 + a_{22}\mathbf{c}_2 + \dots + a_{m2}\mathbf{c}_m \\
&\dots \\
\Phi(\mathbf{b}_n) &= a_{1n}\mathbf{c}_1 + a_{2n}\mathbf{c}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{c}_m
\end{aligned} \tag{11.4}$$

식 11.4 에서 나타난 계수  $a_{ij}$  을  $m \times n$ -행렬  $\mathbf{A}_\Phi$  로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{A}_\Phi = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{11.5}$$

식 11.4 에 나타난 행렬  $\mathbf{A}_\Phi$  를 **변환행렬(transformation matrix)**이라고 부르며 이 변환행렬은 각 벡터공간의 기저  $B$  와  $C$  에 따라 정의되는 것에 유의하자.

### 11.2.2 좌표와 변환행렬

만약  $\hat{x}$  가 벡터공간  $V$  에서 기저  $B$  에 대한 원소  $x$  의 좌표이고

$$x = B\hat{x}$$

$\hat{y}$  가 벡터공간  $W$  에서 기저  $C$  에 대한 선형사상  $y = \Phi(x)$  의 좌표이면

$$y = C\hat{y}$$

두 좌표  $\hat{x}$  와  $\hat{y}$  사이의 관계는 다음과 같다.

$$\hat{y} = A_{\Phi}\hat{x} \tag{11.6}$$

참고로  $\mathbb{R}^n$  에서  $\mathbb{R}^m$  으로의 선형사상  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  를 생각하고 각 공간의 기저를 표준 기저(standard basis)로 고려하면 변환행렬  $A_{\Phi}$  는 선형사상  $y = \Phi(x)$  을 나타내는  $m \times n$  행렬이다.

$$y = A_{\Phi}x \tag{11.7}$$

### 11.2.3 예제

- 부교재 Example 2.21 (Transformation Matrix) 참조
- 부교재 Example 2.22 (Linear Transformations of Vectors) 참조

## 12 기저변환과 변환행렬

### 노트

강의 슬라이드 12번 기저변환과 변환행렬의 주제는 추후에 강의합니다.



# 13 선형변환의 핵과 상

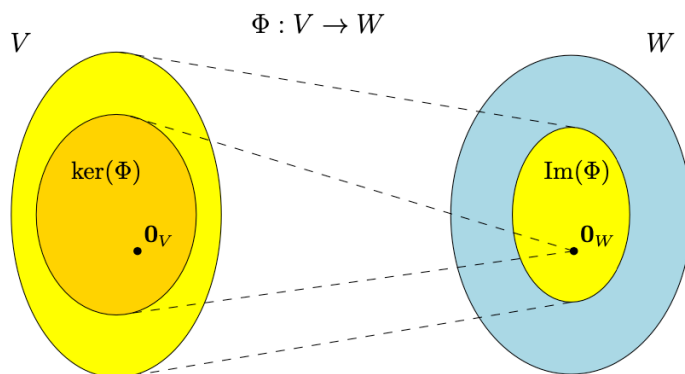
## 13.1 핵과 상의 정의

**정의 13.1** (선형변환의 핵과 상). 벡터공간  $V, W$  사이의 선형사상  $T : V \rightarrow W$ 를 고려하자. 선형사상  $T$  의핵 (kernel)  $Ker(T)$  또는 영공간(null space)  $N(T)$  는 다음과 같이 정의된다:

$$ker(T) = N(T) = \{v \in V \mid T(v) = \mathbf{0}\}$$

또한 선형사상  $T$  의 상(range) 또는 치역(image)  $Im(T)$  는 다음과 같이 정의된다:

$$Im(T) = T(V) = \{T(v) \mid v \in V\}$$



**Figure 2.2** Kernel and image of a linear mapping  $\Phi : V \rightarrow W$ .

그림 13.1: 선형변환의 핵과 상

### 13.1.1 예제

- 부교재 Example 2.25 (Image and Kernel of a Linear Mapping)

## 14 아핀공간

### 노트

강의 슬라이드 14번 아핀공간의 주제는 추후에 강의합니다.

## References

Deisenroth, Marc Peter, A Aldo Faisal, 와/과 Cheng Soon Ong. 2020. *Mathematics for machine learning*. Cambridge University Press.