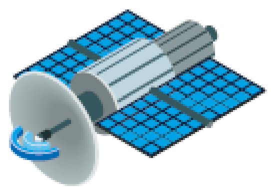
강의교안 이용 안내



기초
통신이론
디지털 통신 중심으로

CHAPTER 04
확률변수

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

Contents

4.1 확률의 정의
4.2 배반사건
4.3 조건부확률
4.4 확률변수
4.5 두 개의 확률변수
4.6 평균과 분산
4.7 두 확률변수의 독립
4.8 확률변수의 함수
4.9 잘 알려진 확률분포

4.1 확률의 정의

4.1 확률의 정의

- **확률공간**
  1) 표본공간 $\boldsymbol{S}$
  2) 사건공간 $\boldsymbol{E}$
  3) 확률함수 $\boldsymbol{P}(\cdot)$

- **확률함수 $\boldsymbol{P}(\cdot)$가 만족시켜야 하는 조건**
  1) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) \geq \mathbf{0}$
  2) $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{S}) = \mathbf{1}$
  3) $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$일 때 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{B})$

4.1 확률의 정의

예제 4-1

동전을 두 번 던질 때 다음을 구하시오.

(a) 표본 공간 S를 구하시오.

(b) 사건 공간 E의 원소의 개수를 구하시오.

풀이

(a) $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

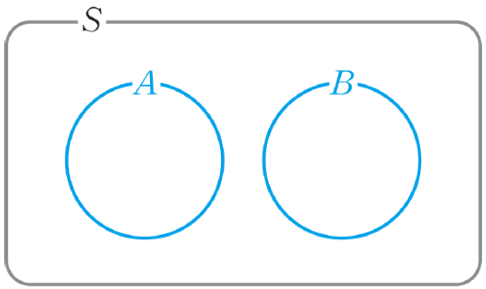
(b) E의 원소의 개수는 S의 부분집합의 개수이므로 16개이다.

4.2 배반사건

4.2 배반사건

- **배반사건**

$$A \cap B = \varnothing$$



[그림 4-1] 배반사건 A, B

- **일반적으로**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (4.1)$$

- **배반사건의 경우**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

4.2 배반사건

- A, B, C 세 개의 사건이 있을 때

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

- 합집합 상한

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B) \tag{4.4}$$

$$P(A \cup B \cup C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

4.2 배반사건

예제 4-2

한 개의 주사위를 던졌다. $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{5, 6\}$, $C=\{3, 4, 5\}$일 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$를 구하시오.

(b) $P(A\cup B)$, $P(B\cup C)$, $P(C\cup A)$를 구하시오.

(c) A, B, C 사건 가운데 서로 배반사건인 것을 고르시오. 그 사건들의 합집합 확률은 어떤 특징을 가지는가?

풀이

(a) $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(b) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B\cup C=\{3, 4, 5, 6\}$, $C\cup A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$이므로
$P(A\cup B)=1$, $P(B\cup C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(C\cup A)=\frac{5}{6}$

(c) $A\cap B=\varnothing$이므로 A와 B는 배반사건이다. 따라서 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$가 성립한다.

4.2 배반사건

예제 4-3

$P(A) = \frac{1}{20}$, $P(B) = \frac{1}{10}$, $P(C) = \frac{3}{20}$ 이다. 다음 물음에 답하시오.

(a) $P(A \cup B)$의 합집합 상한을 구하시오.

(b) $P(A \cup B \cup C)$의 합집합 상한을 구하시오.

풀이

(a) 합집합 상한을 이용하면 $P(A \cup B) \le P(A) + P(B) = \frac{3}{20}$ 이다. 따라서 $P(A \cup B)$의 합집합 상한은 $\frac{3}{20}$ 이다.

(b) $P(A \cup B \cup C) \le P(A) + P(B) + P(C) = \frac{3}{10}$

4.3 조건부확률

4.3 조건부확률

- **독립사건**

$$P(AB) = P(A)P(B) \tag{4.6}$$

- **조건부확률**

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{4.7}$$

- **베이즈 정리**

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \tag{4.10}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)} \tag{4.11}$$

4.3 조건부확률

예제 4-4

동전 하나와 주사위 하나를 동시에 던진다고 해보자. A는 동전은 앞면이 나오고 주사위는 짝수가 나오는 사건, B는 주사위가 4 이상이 나오는 사건일 때, 다음을 구하시오.

(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(AB)$

(d) $P(A|B)$ (e) $P(B|A)$

풀이

(a) $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

(b) $P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(c) $AB = \{H4, H6\}$ 이므로 $P(AB) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

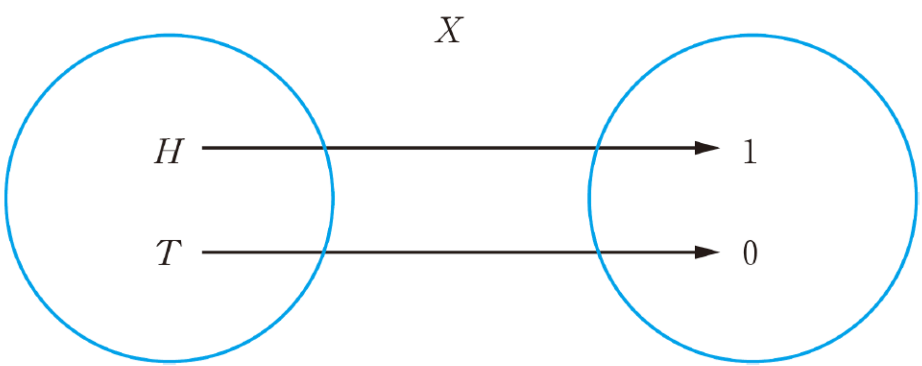
(d) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{3}$

(e) $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{2}{3}$

4.4 확률변수

4.4 확률변수

- **확률변수의 정의**
  - **정의역이 표본공간인 함수**



[그림 4-3] 정의역이 $\{H, T\}$, 치역이 $\{0, 1\}$인 확률변수 X

- **확률변수의 구분**
  - 이산확률변수, 연속확률변수

누적분포함수

- **확률변수 X의 누적분포함수 $F_X(x)$ (cumulative distribution function)**

$$F_X(x) = P(X \leq x) \tag{4.13}$$

- **CDF $F_X(x)$의 성질**
  1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$
  2. $F_X(-\infty) = 0, F_X(\infty) = 1$
  3. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$
  4. 오른쪽에서부터 연속. $F_X(x^+) = F_X(x)$
  5. 감소하지 않는 함수

4.4 확률변수

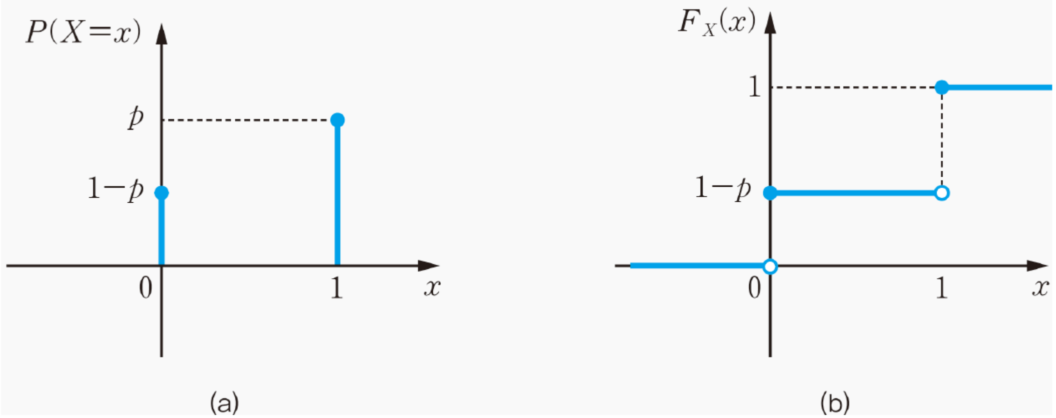
예제 4-6

파라미터 p를 갖는 베르누이 확률변수 X의 PMF와 CDF를 구하고, 이를 그리시오.

풀이

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ 이므로 PMF는 다음과 같다.

$$P(X=1)=p, \quad P(X=0)=1-p$$



확률밀도함수

- **확률변수 X의 확률밀도함수 $f_X(x)$ (probability density function)**

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{4.14}$$

- **PDF $F_X(x)$의 성질**

❶ $f_X(x) \geq 0$

❷ $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = F_X(\infty) = 1$

❸ $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx$

4.4 확률변수

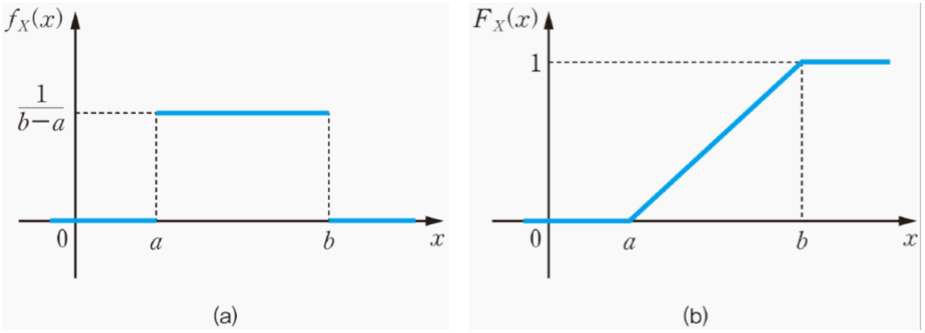
예제 4-7

구간 $[a, b]$에 있는 유니폼 확률변수 X의 PDF와 CDF를 구하고, 이를 그리시오.

풀이

$X \sim \mathrm{Uniform}(a, b)$ 이므로 PDF는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & , \quad a \le x \le b \\ 0 & , \quad x > b \end{cases}$$



(a) (b)

4.4 확률변수

★ 핵심 포인트 ★

- 누적분포함수 CDF : $F_X(x) = P(X \le x)$
- 확률질량함수 PMF : $P(X = x)$
- 확률밀도함수 PDF : $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$
- 이산확률변수의 기술 : PMF 또는 CDF
- 연속확률변수의 기술 : PDF 또는 CDF

4.5 두 개의 확률변수

4.5 두 개의 확률변수

- **두 확률변수 X, Y의 joint CDF**

$$F_{XY}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{4.16}$$

- **Joint CDF $F_{XY}(x, y)$의 성질**

  ❶ $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1$

  ❷ $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$

  ❸ $F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$

  ❹ $F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y)$

4.5 두 개의 확률변수

- **두 확률변수 X, Y의 joint PDF**

$$f_{XY}(x,\, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,\, y)}{\partial x \partial y} \qquad (4.17)$$

- **Joint PDF $f_{XY}(x, y)$의 성질**

❶ $f_{XY}(x,y) \geq 0$

❷ $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = F_{XY}(\infty,\infty) = 1$

❸ $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy$

❹ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dx$

4.5 두 개의 확률변수

- **두 이산확률변수 X, Y의 joint PMF**

$$P(X = i,\ Y = j)$$

- **Joint PMF $P(X = i, Y = j)$의 성질**

❶ $0 \le P(X = i, Y = j) \le 1$

❷ $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X = i, Y = j) = 1$

❸ $P(X = i) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} P(X = i, Y = j)$

❹ $P(Y = j) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} P(X = i, Y = j)$

조건부 확률함수

- **조건부 확률밀도함수**

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}, \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} \tag{4.19}$$

- **조건부 확률질량함수**

$$\begin{aligned} P(X=i \mid Y=j) &= \frac{P(X=i,\ Y=j)}{P(Y=j)} \\ P(Y=j \mid X=i) &= \frac{P(X=i,\ Y=j)}{P(X=i)} \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.5 두 개의 확률변수

예제 4-8

Joint PDF $f_{XY}(x, y)$가 $f_{XY}(x, y) = xe^{-x(y+1)}u(x)u(y)$이다. 다음 물음에 답하시오.
단, $u(x)$는 단위계단 함수$^{\text{unit-step function}}$이다.

(a) Marginal PDF $f_X(x)$를 구하시오.

(b) $x > 0$일 때 조건부 PDF $f_{Y|X}(y|x)$를 구하시오.

풀이

(a) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x(y+1)}u(x)u(y)dy = xe^{-x}u(x)\int_0^{\infty} e^{-xy}dy$$

$$= e^{-x}u(x)$$

(b) $$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{xe^{-x(y+1)}u(x)u(y)}{e^{-x}u(x)} = xe^{-xy}u(y)$$

4.5 두 개의 확률변수

예제 4-9

joint PMF $P(X=x,\ Y=y)$가 $P(X=1,\ Y=1)=0.2$, $P(X=2,\ Y=1)=0.3$, $P(X=2,\ Y=2)=0.5$이다. 다음 물음에 답하시오.

(a) Marginal PMF $P(X=x)$를 구하시오.

(b) Marginal PMF $P(Y=y)$를 구하시오.

(c) 조건부 PMF $P(X=x\mid Y=1)$, $P(X=x\mid Y=2)$를 구하시오.

풀이

(a) $P(X=1)=P(X=1,\ Y=1)=0.2$,

$P(X=2)=P(X=2,\ Y=1)+P(X=2,\ Y=2)=0.3+0.5=0.8$이다.

x가 1 또는 2가 아닐 때 $P(X=x)=0$이다.

4.5 두 개의 확률변수

풀이

(b) $P(Y=1)=P(X=1,\ Y=1)+P(X=2,\ Y=1)=0.2+0.3=0.5$,

$P(Y=2)=P(X=2,\ Y=2)=0.5$이다.

y가 1 또는 2가 아닐 때 $P(Y=y)=0$이다.

(c) $P(X=1|\,Y=1)=\dfrac{P(X=1,\ Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{0.2}{0.5}=\dfrac{2}{5}$,

$P(X=2|Y=1)=\dfrac{P(X=2,\ Y=1)}{P(Y=1)}=\dfrac{0.3}{0.5}=\dfrac{3}{5}$이다.

x가 1 또는 2가 아닐 때 $P(X=x\,|\,Y=1)=0$이다.

$P(X=2|\,Y=2)=\dfrac{P(X=2,\ Y=2)}{P(Y=2)}=\dfrac{0.5}{0.5}=1$이다.

x가 2가 아닐 때 $P(X=x\,|\,Y=2)=0$이다.

4.6 평균과 분산

4.6 평균과 분산

- **연속 확률변수 X의 평균**

$$m = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \tag{4.21}$$

- **이산 확률변수 X의 평균**

$$E[X] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} iP(X=i) \tag{4.22}$$

- **연속 확률변수 X의 n번째 moment**

$$E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx \tag{4.23}$$

4.6 평균과 분산

- **이산 확률변수 *X*의 n번째 moment**

$$E[X^n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i^n P(X=i) \qquad (4.24)$$

- **확률변수 *X*의 분산**

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X] = E[(X-m)^2] \qquad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[X^2 - 2mX + m^2] \\ &= E[X^2] - E[2mX] + E[m^2] \qquad (4.27) \\ &= E[X^2] - m^2 \end{aligned}$$

4.6 평균과 분산

예제 4-10

확률변수 X가 파라미터 p를 갖는 베르누이 확률변수이다. 이때 평균 $E[X]$와 분산 $Var[X]$를 구하시오.

풀이

$X \sim \text{Bernoulli}(p)$ 이므로 $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$이다.

$$E[X] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} iP(X=i) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) = p$$

$$E[X^2] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i^2 P(X=i) = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) = p$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2$$

4.6 평균과 분산

예제 4-11

확률변수 X가 구간 $[a,\ b]$ 사이에 값을 갖는 유니폼 확률변수이다. 이때 평균 $E[X]$와 분산 $Var[X]$를 구하시오.

풀이

$X \sim \mathrm{Uniform}(a,\ b)$ 이므로 PDF는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ,\ x < a \\ \dfrac{1}{b-a} & ,\ a \le x \le b \\ 0 & ,\ x > b \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx = \frac{a+b}{2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

$$Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}$$

4.7 두 확률변수의 독립

4.7 두 확률변수의 독립

- **두 확률변수 X, Y의 독립**

$$F_{XY}(x,\ y) = F_X(x)F_Y(y) \qquad (4.29)$$

$$f_{XY}(x,\ y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad (4.30)$$

- **두 확률변수의 상관(correlation)**

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x,y)dxdy \qquad (4.34)$$

- **두 확률변수가 비상관(uncorrelated)**

$$E[XY] = E[X]E[Y] \qquad (4.35)$$

- **두 확률변수가 직교(orthogonal)**

$$E[XY] = 0 \qquad (4.36)$$

4.7 두 확률변수의 독립

- **두 확률변수 X, Y의 공분산**

$$\mathrm{Cov}(X,\ Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y] \tag{4.37}$$

- **두 확률변수 X, Y의 상관계수**

$$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X,\ Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{4.38}$$

$$-1 \le \rho_{XY} \le 1$$

4.7 두 확률변수의 독립

예제 4-12

연속확률변수 X, Y가 독립일 때 X, Y가 비상관이 됨을 증명하시오.

풀이

확률변수 X, Y의 상관 $E[XY]$를 구하고, 이것이 각각의 평균의 곱 $E[X]E[Y]$와 같음을 증명하면 된다.

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_{XY}(x, y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf_X(x)f_Y(y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dxdy \qquad (4.39) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)E[X]dy = E[X]E[Y] \end{aligned}$$

4.7 두 확률변수의 독립

예제 4-13

확률변수 X, Y의 joint PDF가 다음과 같다.

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{다른 구간} \end{cases}$$

(a) marginal PDF $f_X(x)$를 구하시오.

(b) marginal PDF $f_Y(y)$를 구하시오.

(c) X, Y가 독립인지 여부를 판별하시오.

(d) X, Y가 비상관인지 판별하시오.

(e) $E[XY]$를 구하시오.

(f) 공분산 $\mathrm{Cov}(X, Y)$를 구하시오.

(g) 상관계수 $\rho_{X,Y}$를 구하시오.

4.7 두 확률변수의 독립

풀이

(a) $0<x<1$일 때, $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dy=\int_0^1 f_{XY}(x, y)dy=1$

$x<0$ 또는 $x>1$일 때, $f_X(x)=0$

(b) $0<y<1$일 때, $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dx=\int_0^1 f_{XY}(x, y)dx=1$

$x<0$ 또는 $x>1$일 때, $f_X(x)=0$

(c) $f_{XY}(x, y)=f_X(x)f_Y(y)$이므로 확률변수 X, Y는 독립이다.

(d) 확률변수 X, Y가 독립이므로 비상관이다.

(e) 확률변수 X, Y가 비상관이므로 $E[XY]=E[X]E[Y]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ 이다.

(f) $\mathrm{Cov}(X, Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=0$

(g) $\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=0$

4.8 확률변수의 함수

4.8 확률변수의 함수

- 확률변수 $Y = g(X)$이고 X의 pdf를 알 때 Y의 pdf 구하기

$\Rightarrow$ 먼저 Y의 cdf를 구한 다음 미분한다.

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$
$$= P(g(X) \le y)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

- 확률변수 $Y = g(X)$의 평균

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$$

4.8 확률변수의 함수

예제 4-14

$X \sim \text{Uniform}[0, 1]$이고 $Y = 3X + 1$일 때, 확률변수 Y의 PDF와 평균을 구하시오.

풀이

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(3X + 1 \le y)$$
$$= P\left(X \le \frac{y-1}{3}\right) = F_X\left(\frac{y-1}{3}\right)$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{3} f_X\left(\frac{y-1}{3}\right)$$

$$E[Y] = E[3X+1] = 3E[X] + 1 = 1.5 + 1 = 2.5$$

4.8 확률변수의 함수

예제 4-15

연속확률변수 X, Y가 독립일 때 $g(X)$, $h(Y)$가 비상관이 됨을 증명하시오.

풀이

$$E[g(X)h(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_{XY}(x, y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(y)f_X(x)f_Y(y)dxdy \qquad (4.43)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(y)f_Y(y)E[g(X)]dy$$

$$= E[g(X)]\ E[h(Y)]$$

4.9 잘 알려진 확률분포

4.9.1 이항분포

- **이항 확률변수의 PMF**

$$P(X=i)=\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \qquad i=0,\,1,\,\cdots,\,n$$

- **이항 확률변수 X의 평균**

$$E[X]=np$$

- **Independent and identically distributed (iid) 확률변수분포가 같고 서로 독립인 확률변수들을 iid 확률변수라고 한다.**

4.9.1 이항분포

예제 4-16

찌그러진 동전을 10번 던진다. 이 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 0.9이다. 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) 확률변수 X는 어떤 분포를 갖는가?

(b) 확률변수 X의 PMF를 구하시오.

(c) 확률변수 X의 평균을 구하시오.

풀이

(a) 확률변수 X의 분포는 파라미터 $n=10$, $p=0.9$인 이항분포가 된다.
즉 $X \sim$ 이항분포$(10,\ 0.9)$이다.

(b) $X \sim$ 이항분포$(10,\ 0.9)$일 때 확률변수 X의 PMF는 다음과 같다.

$$P(X=i)=\binom{10}{i}0.9^{i}0.1^{n-i} \qquad i=0,1,\cdots,10$$

(c) $E[X]=np=10 \cdot 0.9=9$

4.9.2 기하분포

- **기하 확률변수의 PMF**

$$P(X=i)=(1-p)^{i-1}p \qquad i=1,\ 2,\ \cdots$$

- **기하 확률변수 *X*의 평균**

$$E[X]=\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)^{i-1}p=\frac{1}{p} \tag{4.46}$$

4.9.2 기하분포

예제 4-17

찌그러진 동전을 앞면이 나올 때까지 던진다. 이 동전을 던질 때 앞면이 나올 확률은 0.9이다. 앞면이 나올 때까지 던진 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(a) 확률변수 X는 어떤 분포를 갖는가?

(b) 확률변수 X의 PMF를 구하시오.

(c) 확률변수 X의 평균을 구하시오.

풀이

(a) 확률변수 X의 분포는 파라미터 $p=0.9$인 기하분포가 된다. 즉 $X\sim$ 기하분포(0.9)이다.

(b) $X\sim$ 기하분포(0.9)일 때 확률변수 X의 PMF는 다음과 같다.

$$P(X=i) = 0.1^{i-1}\cdot 0.9 \qquad i=1, 2, 3, \cdots$$

(c) $E[X]=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{0.9}=\dfrac{10}{9}$

4.9.3 포아송 분포

- **포아송 확률변수의 PMF**

$$P(X=i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} \qquad i=0,\,1,\,\cdots$$

- **포아송 확률변수 X의 평균**

$$E[X]=\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=\lambda \qquad (4.47)$$

4.9.4 가우시안 확률변수

- **가우시안 확률변수 $X \sim N(m, \sigma^2)$**

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

4.9.4 가우시안 분포

- **가우시안 확률변수 $X \sim N(m, \sigma^2)$**

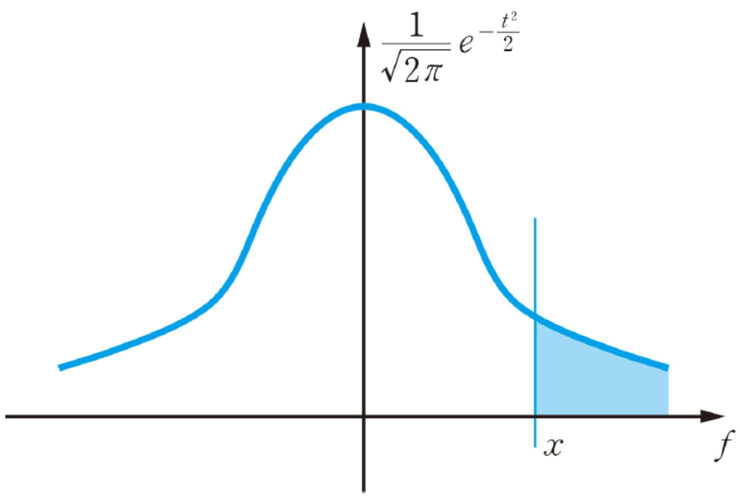
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (4.48)$$

4.9.4 가우시안 분포

- **Q-함수**

$$Q(x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \mathrm{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \tag{4.50}$$

$$Q(0) = \frac{1}{2}, \qquad Q(-\infty) = 1, \qquad Q(\infty) = 0$$



[그림 4-6] 정규 가우시안 확률변수의 PDF와 Q-함수

4.9.4 가우시안 분포

예제 4-18

표준 정규분포를 갖는 확률변수가 X가 있다. 다음 물음에 답하시오.

(a) 확률변수 X의 PDF를 구하시오.

(b) 확률변수 X의 꼬리분포함수 $P(X>x)$를 구하시오.

풀이

(a) 표준 가우시안 확률변수의 PDF는 다음과 같다.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(b) 표준 가우시안 확률변수의 꼬리분포함수 $P(X>x)$가 Q−함수의 정의식과 같다. 따라서 다음 식이 성립한다.

$$P(X>x) = Q(x)$$

중심극한정리

- 확률변수 Y가 n개의 iid 확률변수(평균이 m, 분산이 σ^2)들의 합일 때

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \tag{4.54}$$

확률변수 Y의 분포는 n 이 커짐에 따라 가우시안 분포에 접근한다.

$$Y \sim N(nm, n\sigma^2)$$

4.9 잘 알려진 확률분포

★ 핵심 포인트 ★

- 가우시안 확률변수 $N(m,\ \sigma^2)$의 꼬리분포함수 $P(X > x)$는 $Q\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$이다.
- **중심극한정리** : n개의 iid 확률변수들의 합의 분포는 n이 커짐에 따라 가우시안 분포에 접근한다.

Q & A

수고하셨습니다.