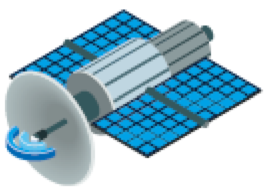
강의교안 이용 안내

- 본 강의교안의 저작권은 **김영길**과 **한빛아카데미㈜**에 있습니다.
- 이 자료를 무단으로 전제하거나 배포할 경우 저작권법 136조에 의거하여 벌금에 처할 수 있고 이를 병과(倂科)할 수도 있습니다.



기초
통신이론
디지털 통신 중심으로

CHAPTER 05

조건부 평균 및 랜덤 프로세스

한빛아카데미
Hanbit Academy, Inc.

Contents

5.1 조건부 평균 방법

5.1 조건부 평균 방법

$$E[X] = E[E[X \mid Y]] \tag{5.1}$$

- **Y 가 이산 확률변수일 때**

$$E[X] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = i] P(Y = i) \tag{5.2}$$

- **Y 가 연속확률변수일 때**

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X \mid Y = y] f_Y(y) dy \tag{5.3}$$

5.1 조건부 평균 방법

예제 5-1

기하확률변수 $X \sim$ 기하분포(p)의 평균을 조건부 평균을 이용하여 구하시오.

풀이

$$E[X] = E[X \mid Y=1]P(Y=1) + E[X \mid Y=0]P(Y=0) \qquad (5.4)$$

$$E[X] = E[X \mid Y=1]p + E[X \mid Y=0](1-p)$$

$$E[X] = p + (E[X]+1)(1-p) \qquad (5.5)$$

$$E[X] = \frac{1}{p}$$

5.1 조건부 평균 방법

예제 5-2

탐험가가 동굴에 갇혔다. 동굴에는 동서남북 네 개의 문이 있고, 동쪽으로 가면 1시간 헤매다 제자리, 서쪽으로 가면 2시간 헤매다 제자리, 남쪽으로 가면 3시간 헤매다 제자리, 북쪽으로 가면 4시간 헤매다 결국 탈출에 성공하게 된다. 탐험가는 동굴에 다시 갇히더라도 예전에 했던 선택을 기억하지 못하고 $\frac{1}{4}$의 확률로 네 가지 문 가운데 하나를 선택한다. 탐험가가 탈출할 때까지 헤매는 평균 시간은 얼마인가?

풀이

$$E[X] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} E[X|Y=i]P(Y=i) \tag{5.6}$$

$$E[X|Y=1]=1+E[X], \quad E[X|Y=2]=2+E[X], \quad E[X|Y=3]=3+E[X], \quad E[X|Y=4]=4$$

$$\therefore\ E[X]=10$$

인디케이터 확률변수

$$X=\begin{cases}1, & A \text{ 사건이 발생할 때}\\ 0, & A \text{ 사건이 발생하지 않을 때}\end{cases} \tag{5.8}$$

$$E[X]=1\cdot P(A)+0\cdot P(A^c)=P(A)$$

$$\begin{aligned} P(A)=E[X]&=\sum_{i=-\infty}^{\infty}E[X\mid Y=i]P(Y=i)\\ &=\sum_{i=-\infty}^{\infty}P(A\mid Y=i)P(Y=i)\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} P(A)=E[X]&=\int_{-\infty}^{\infty}E[X\mid Y=y]f_Y(y)dy\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}P(A\mid Y=y)f_Y(y)dy\end{aligned} \tag{5.10}$$

5.2 모멘트 생성함수와 고유함수

5.2 모멘트 생성함수와 고유 함수

- **모멘트 생성함수 (Moment generating function)**

$$M_X(s) = E[e^{sX}] \tag{5.13}$$

- **연속확률변수의 MGF**

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x) dx \tag{5.14}$$

- **이산확률변수의 MGF**

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} P(X = x) \tag{5.15}$$

5.2 모멘트 생성함수와 고유 함수

$$\frac{\partial}{\partial s}E[e^{sX}] = \frac{\partial}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f_X(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x e^{sx} f_X(x)dx \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}E[e^{sX}]\bigg|_{s=0} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = E[X] \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}E[e^{sX}]\big|_{s=0} = E[X^n]$$

고유 함수

$$C_X(jv) = E[e^{jvX}] \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} C_X(jv) &= E[e^{jvX}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx} f_X(x)\,dx \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$(-j)^n \frac{\partial^n}{\partial v^n} E[e^{jvX}]\Big|_{v=0} = E[X^n] \tag{5.20}$$

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

$$\begin{aligned} M_Z(s) &= E[e^{s(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)}] \\ &= E[e^{sX_1} e^{sX_2} \cdots e^{sX_n}] \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$M_Z(s) = E[e^{sX_1}] E[e^{sX_2}] \cdots E[e^{sX_n}] \tag{5.22}$$

$$f_Z(z) = (f_{X_1} * f_{X_2} * \cdots * f_{X_n})(z)$$

5.2 모멘트 생성함수와 고유 함수

예제 5-5

확률변수 X가 파라미터 p를 갖는 베르누이 확률변수이다. 이때 X의 MGF $M_X(s)$를 구하시오.

풀이

$X \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$ 이므로 $P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$이다.

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} e^{sx} P(X=x)$$

$$= 1 \cdot P(X=0) + e^{s} \cdot P(X=1) = 1 - p + pe^{s}$$

5.2 모멘트 생성함수와 고유 함수

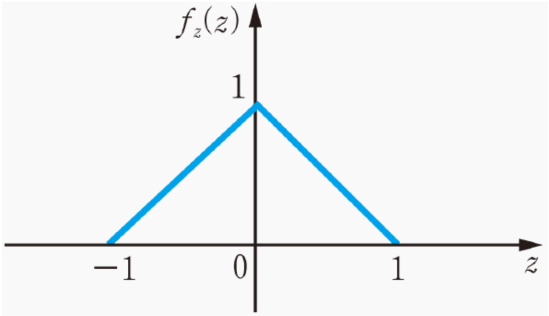
예제 5-7

X_1, X_2는 iid 유니폼 확률변수이다. 즉 $X_1 \sim \mathrm{Uniform}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$,

$X_2 \sim \mathrm{Uniform}\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$일 때, $Z = X_1 + X_2$의 PDF를 구하시오.

풀이

$$(\Pi * \Pi)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(z-u)\,\Pi(u)\,du$$



[그림 5-2] $Z = X_1 + X_2$의 PDF

5.3 랜덤 프로세스

5.3 랜덤 프로세스

- **랜덤 프로세스 $X(t, u)$**
  1) 무한 개의 확률변수를 시간 인덱스(time index)에 따라 모아 놓은 집합
  2) 여러 개의 시간에 관한 함수에 확률성을 부여하여 모아 놓은 집합

- **Joint pdf $f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 는 다음 성질을 만족한다.**
  - $f_{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{X(t_1),\,X(t_2),\,\cdots,\,X(t_n)}(x_1,\,x_2,\,\cdots,\,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n = 1$

5.3 랜덤 프로세스

- **시불변 랜덤 프로세스**

$$f_{X(t_1),\, X(t_2),\, \cdots,\, X(t_n)}(x_1,\, x_2,\, \cdots,\, x_n) = f_{X(t_1-\tau),\, X(t_2-\tau),\, \cdots,\, X(t_n-\tau)}(x_1,\, x_2,\, \cdots, x_n) \tag{5.23}$$

- **랜덤 프로세스 *X(t)*의 자기상관함수**

$$R_X(t_1,\, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \tag{5.24}$$

- **광의 시불변 (wide-sense stationary : WSS) 랜덤 프로세스**

1) $E[X(t)] = m$

2) $R_X(t_1,\, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = R_X(t_1 - t_2)$

- **자기상관함수는 우함수**

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[X(t'-\tau)X(t')] = R_X(-\tau) \tag{5.25}$$

5.3 랜덤 프로세스

예제 5-8

주사위 던지기를 이용하여 랜덤 프로세스를 다음과 같이 만들었다. 물음에 답하시오.

$$X(t,\ i) = \cos 2\pi f_i t,\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

(a) 이 랜덤 프로세스의 앙상블을 구하시오.

(b) $t = 1$일 때 생기는 확률변수의 평균을 구하시오.

풀이

(a) 이 랜덤 프로세스의 샘플함수는 $\cos 2\pi f_i t,\ \ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$이다. 앙상블은 샘플함수들의 집합이므로 $\{\cos 2\pi f_i t \mid i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이다.

(b) $t = 1$일 때 생기는 확률변수는 $\cos 2\pi f_i$이다. 따라서 확률변수 $\cos 2\pi f_i$의 평균은 $\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}\cos 2\pi f_i$이다.

5.3 랜덤 프로세스

예제 5-9

랜덤 프로세스 $X(t, \theta)$를 다음과 같이 만들었다. 물음에 답하시오.

$$X(t, \theta) = \cos(2\pi f_c t + \theta), \quad \theta \sim \mathrm{Uniform}[0, 2\pi]$$

(a) 이 랜덤 프로세스의 앙상블을 구하시오.

(b) $t = 1$일 때 생기는 확률변수의 평균을 구하시오.

풀이

(a) 이 랜덤 프로세스의 샘플함수는 $\cos(2\pi f_c t + \theta)$이다. 앙상블은 샘플함수들의 집합이므로 $\{\cos(2\pi f_c t + \theta) | \theta \in [0, 2\pi]\}$이다.

(b) $t = 1$일 때 생기는 확률변수는 $\cos(2\pi f_c + \theta)$이다.

$$E[\cos(2\pi f_c + \theta)] = \int_0^{2\pi} \cos(2\pi f_c + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0$$

따라서 $t = 1$일 때 생기는 확률변수의 평균은 0이다.

5.4 전력밀도함수

5.4 전력밀도함수

- **위너 킨친의 정리**

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

즉, 자기상관 함수 $\boldsymbol{R_X(\tau)}$의 푸리에 변환은 전력 밀도 함수 $\boldsymbol{S_X(f)}$가 되고, 전력 밀도함수 $\boldsymbol{S_X(f)}$의 역 푸리에 변환은 $\boldsymbol{R_X(\tau)}$이다.

Additive white Gaussian noise (가산성 백색 잡음)

- **AWGN $n(t)$의 전력 밀도 함수 $S_n(f)$는 다음과 같다.**

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

- **AWGN의 자기상관 함수 $R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)$**

- **AWGN $n(t)$를 시간 t_0에서 값을 읽은 $n(t_0)$는 확률 변수이다.**
- $Var[n(t)] = E\left[n^2(t)\right] = R_n(\tau)\big|_{\tau=0} = \infty$

5.4 전력밀도함수

예제 5-10

랜덤 프로세스 $X(t)$의 자기상관함수 $R_X(\tau)$가 다음과 같을 때, 전력밀도함수 $S_X(f)$를 구하시오.

$$R_X(\tau) = \cos 2\pi f_0 \tau$$

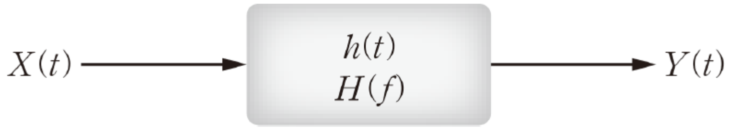
풀이

전력밀도함수 $S_X(f)$는 자기상관함수 $R_X(\tau)$의 푸리에 변환이다.

$$S_X(f) = F\{R_X(\tau)\} = F\{\cos 2\pi f_0 \tau\} = \frac{1}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]$$

5.5 선형시스템과 랜덤 프로세스

5.5 선형시스템과 랜덤 프로세스



[그림 5-4] 입력이 랜덤 프로세스 $X(t)$, 출력이 랜덤 프로세스 $Y(t)$인 선형시스템

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E[h(t) * X(t)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) X(\tau) d\tau\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) E[X(\tau)] d\tau \\ &= h(t) * m_X(t) \end{aligned} \quad (5.28)$$

5.5 선형시스템과 랜덤 프로세스

$$\begin{aligned} R_{XY}(\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\ &= E\left[X(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t+\tau-u)du\right] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t)X(t+\tau-u)du\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)E[X(t)X(t+\tau-u)]du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(u)R_X(\tau-u)du \\ &= h(\tau)*R_X(\tau) \end{aligned} \tag{5.29}$$

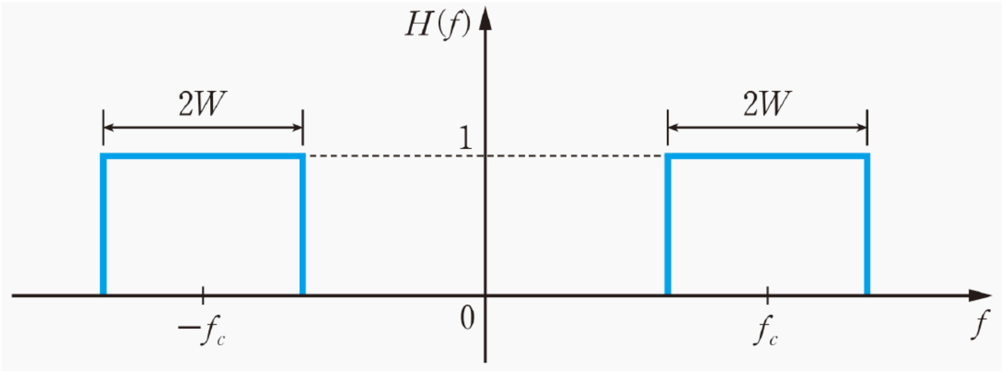
$$S_{XY}(f) = H(f)S_X(f) \tag{5.30}$$

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) \tag{5.31}$$

5.5 선형시스템과 랜덤 프로세스

예제 5-11

밴드패스 필터의 주파수 응답 $H(f)$가 [그림 5-5]와 같을 때, 백색 잡음 $n(t)$가 입력으로 가해졌다. 백색 잡음 $n(t)$의 자기상관함수가 $\frac{N_0}{2}\delta(\tau)$일 때, 출력 랜덤 프로세스 $n_b(t)$의 전력밀도함수 $S_{n_b}(f)$를 그리시오.

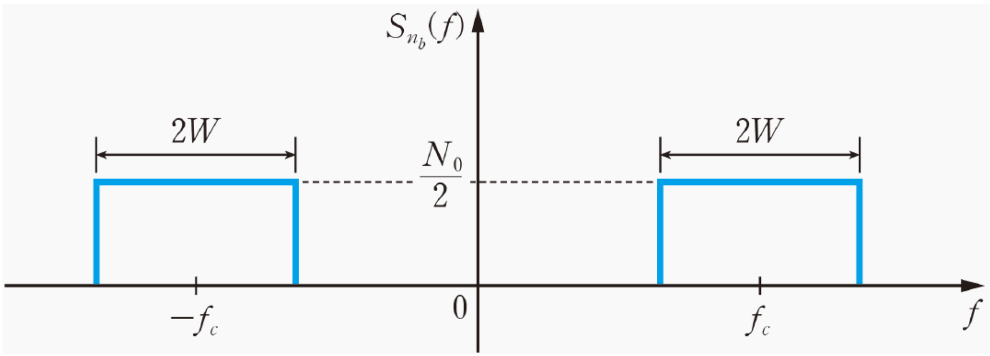


[그림 5-5] 밴드패스 필터의 주파수 응답

5.5 선형시스템과 랜덤 프로세스

풀이

$S_{n_b}(f) = |H(f)|^2 S_n(f)$, $S_n(f) = \dfrac{N_0}{2}$ 이므로, 출력 랜덤 프로세스의 전력밀도함수 $S_{n_b}(f)$는 [그림 5-6]과 같다.



[그림 5-6] 밴드패스 필터를 통과한 백색 잡음의 전력밀도함수 $S_{n_b}(f)$

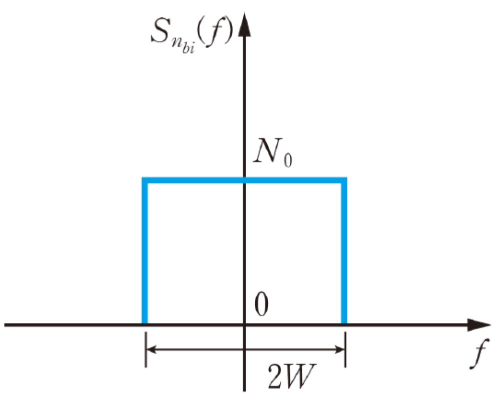
5.6 협대역 잡음

5.6 협대역 잡음

- **협대역 잡음 $n_b(t)$**

$$n_b(t) = n_{bi}(t)\cos(2\pi f_c t + \theta) - n_{bq}(t)\sin(2\pi f_c t + \theta) \qquad (5.32)$$

$\boldsymbol{\theta \sim Uniform[0,\ 2\pi]}$이고, $\boldsymbol{n_{bi}(t)}$와 $\boldsymbol{n_{bq}(t)}$는 비상관 (uncorrelated)이고 모두 전력 밀도 함수 $\boldsymbol{S_{n_{bi}}(f)}$를 갖는다.



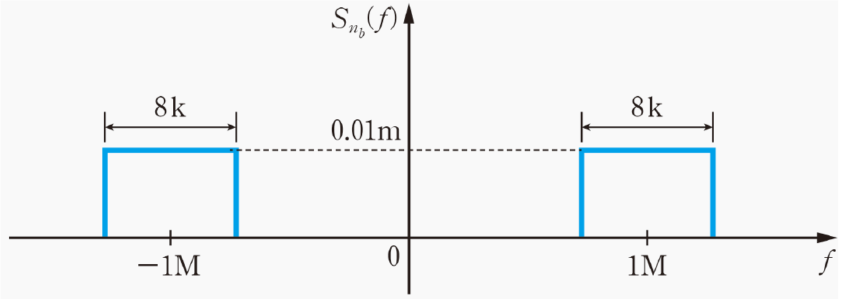
[그림 5-7] $n_{bi}(t)$의 전력밀도함수 $S_{n_{bi}}(f)$

5.6 협대역 잡음

예제 5-12

메시지 신호의 대역폭이 4kHz이다. 이 신호를 AM 변조를 이용하여 반송주파수 1MHz로 전송하고 있다. 수신단에서 AWGN $n(t)$의 전력밀도함수를 $S_n(f)=10^{-5}$[W/Hz]로 가정한다. 밴드패스필터를 통해 협대역 잡음 $n_b(t)$만이 남을 때, $n_b(t)$의 전력밀도함수 $S_{n_b}(f)$를 그리고, 전력 $E[n_b^2(t)]$를 구하시오.

풀이



[그림 5-8] [예제 5-12]의 협대역 잡음의 전력밀도함수 $S_{n_b}(f)$

전력 $E[n_b^2(t)]$는 [그림 5-8]에서 면적이므로 $8\text{k}\cdot 10^{-5}+8\text{k}\cdot 10^{-5}=0.16$[W]이다.

Q & A

수고하셨습니다.