线性代数建模案例汇编

目　　录

这里收集了二十个容易理解的案例. 和各类数学建模竞赛的题目相比, 这些案例确实显得过于简单. 但如果学生能通过这些案例加深对线性代数基本概念、理论和方法的理解, 培养数学建模的意识, 那么我们初步的目的也就达到了.

案例一. 交通网络流量分析问题

城市道路网中每条道路、每个交叉路口的车流量调查，是分析、评价及改善城市交通状况的基础。根据实际车流量信息可以设计流量控制方案，必要时设置单行线，以免大量车辆长时间拥堵。

图 1 某地交通实况

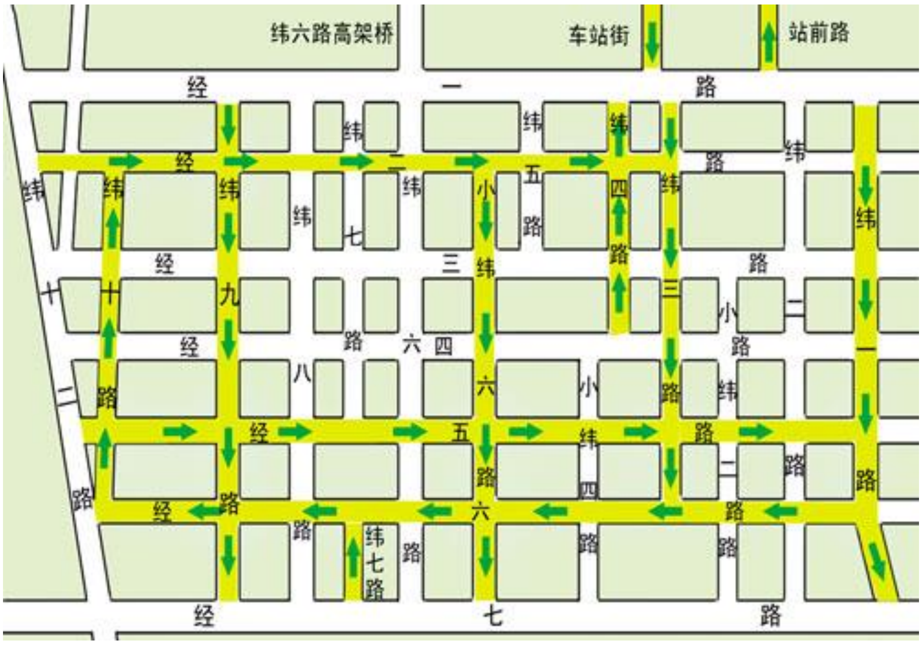

图 2 某城市单行线示意图

【模型准备】 某城市单行线如下图所示, 其中的数字表示该路段每小时按箭头方向行驶的车流量(单位: 辆).

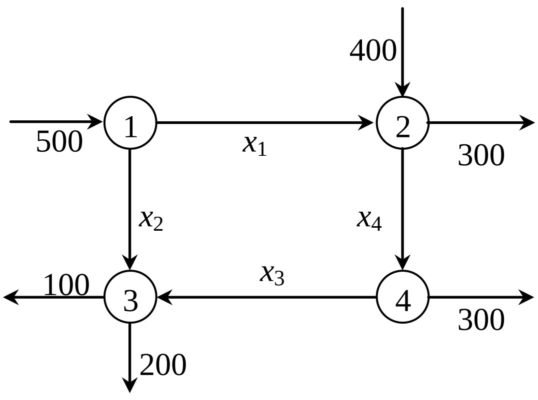

图 3 某城市单行线车流量

(1) 建立确定每条道路流量的线性方程组.

(2) 为了唯一确定未知流量, 还需要增添哪几条道路的流量统计?

(3) 当 $x_4 = 350$ 时, 确定 x_1, x_2, x_3 的值.

(4) 若 $x_4 = 200$, 则单行线应该如何改动才合理?

【模型假设】 (1) 每条道路都是单行线. (2) 每个交叉路口进入和离开的车辆数目相等.

【模型建立】 根据图 3 和上述假设, 在①, ②, ③, ④四个路口进出车辆数目分别满足

$$
\begin{aligned}
500 &= x_1 + x_2 && ① \\
400 + x_1 &= x_4 + 300 && ② \\
x_2 + x_3 &= 100 + 200 && ③ \\
x_4 &= x_3 + 300 && ④
\end{aligned}
$$

【模型求解】根据上述等式可得如下线性方程组

$$
\begin{cases}
x_1 + x_2 = 500 \\
x_1 - x_4 = -100 \\
x_2 + x_3 = 300 \\
-x_3 + x_4 = 300
\end{cases}
$$

其增广矩阵

$$
(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 300 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -100 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

由此可得

$$
\begin{cases}
x_1 - x_4 = -100 \\
x_2 + x_4 = 600 \\
x_3 - x_4 = -300
\end{cases}
$$

即

$$
\begin{cases}
x_1 = x_4 - 100 \\
x_2 = -x_4 + 600 \\
x_3 = x_4 - 300
\end{cases}.
$$

为了唯一确定未知流量，只要增添 x_4 统计的值即可.
当 $x_4 = 350$ 时，确定 $x_1 = 250, x_2 = 250, x_3 = 50$.
若 $x_4 = 200$，则 $x_1 = 100, x_2 = 400, x_3 = -100 < 0$. 这表明单行线“③←④”应该改为“③→④”才合理.

【模型分析】(1) 由$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$的行最简形可见，上述方程组中的最后一个方程是多余的. 这意味着最后一个方程中的数据“300”可以不用统计.

(2) 由 $\begin{cases} x_1 = x_4 - 100 \\ x_2 = -x_4 + 600 \\ x_3 = x_4 - 300 \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} x_2 = -x_1 + 500 \\ x_3 = x_1 - 200 \\ x_4 = x_1 + 100 \end{cases}$，$\begin{cases} x_1 = -x_2 + 500 \\ x_3 = -x_2 + 300 \\ x_4 = -x_2 + 600 \end{cases}$，$\begin{cases} x_1 = x_3 + 200 \\ x_2 = -x_3 + 300 \\ x_4 = x_3 + 300 \end{cases}$，这就是说 x_1, x_2, x_3, x_4 这四个未知量中，任意一个未知量的值统计出来之后都可以确定出其他三个未知量的值.

参考文献

陈怀琛，高淑萍，杨威，工程线性代数，北京：电子工业出版社，2007. 页码: 16-17.

Matlab 实验题

某城市有下图所示的交通图，每条道路都是单行线，需要调查每条道路每小时的车流量. 图中的数字表示该条路段的车流数. 如果每个交叉路口进入和离开的车数相等，整个图中进入和离开的车数相等.

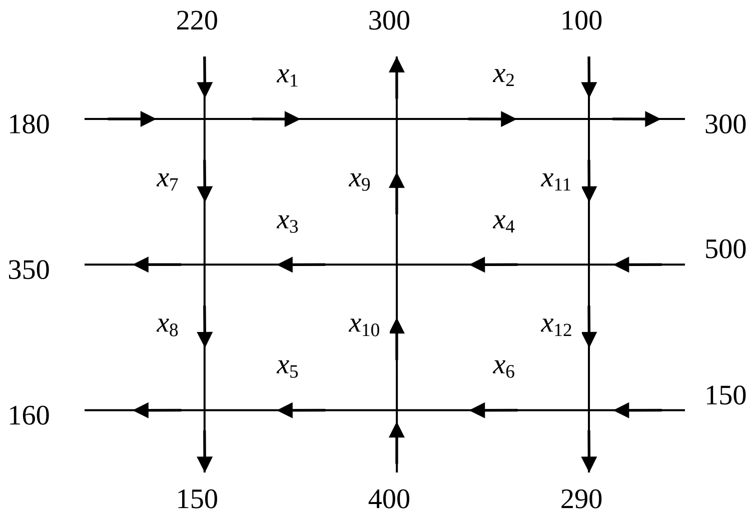

图 4 某城市单行线车流量

(1)建立确定每条道路流量的线性方程组.
(2)分析哪些流量数据是多余的.
(3)为了唯一确定未知流量，需要增添哪几条道路的流量统计.

案例二. 配方问题

在化工、医药、日常膳食等方面都经常涉及到配方问题. 在不考虑各种成分之间可能发生某些化学反应时, 配方问题可以用向量和线性方程组来建模.


图 5 日常膳食搭配


图 6 几种常见的作料

【模型准备】一种佐料由四种原料 A、B、C、D 混合而成. 这种佐料现有两种规格, 这两种规格的佐料中, 四种原料的比例分别为 2:3:1:1 和 1:2:1:2. 现在需要四种原料的比例为 4:7:3:5 的第三种规格的佐料. 问: 第三种规格的佐料能否由前两种规格的佐料按一定比例配制而成?

【模型假设】 (1) 假设四种原料混合在一起时不发生化学变化. (2) 假设四种原料的比例是按重量计算的. (3) 假设前两种规格的佐料分装成袋, 比如说第一种规格的佐料每袋净重 7 克(其中 A、B、C、D 四种原料分别为 2 克, 3 克, 1 克, 1 克), 第二种规格的佐料每袋净重 6 克(其中 A、B、C、D 四种原料分别为 1 克, 2 克, 1 克, 2 克).

【模型建立】 根据已知数据和上述假设, 可以进一步假设将 x 袋第一种规格的佐料与 y 袋第二种规格的佐料混合在一起, 得到的混合物中 A、B、C、D 四种原料分别为 4 克, 7 克, 3 克, 5 克, 则有以下线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=4, \\ 3x+2y=7, \\ x+y=3, \\ x+2y=5. \end{cases}$$

【模型求解】上述线性方程组的增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

可见 $\begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$ 又因为第一种规格的佐料每袋净重 7 克, 第二种规格的佐料每袋净重 6 克, 所以第三种规格的佐料能由前两种规格的佐料按 7:12 的比例配制而成.

【模型分析】(1) 若令$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2, 3, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta} = (4, 7, 5, 3)^{\mathrm{T}}$, 则原问题等价于"线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 是否有解", 也等价于"$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示".
(2) 若四种原料的比例是按体积计算的, 则还要考虑混合前后体积的关系(未必是简单的叠加), 因而最好还是先根据具体情况将体积比转换为重量比, 然后再按上述方法处理.
(3) 上面的模型假设中的第三个假设只是起到简化运算的作用. 如果直接设x克第一种规格的佐料与 y 克第二种规格的佐料混合得第三种规格的佐料, 则有下表

表 1 混合后四种原料的含量

佐料规格 \ 原料	A	B	C	D
第一种	$\frac{2}{7}x$	$\frac{3}{7}x$	$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$
第二种	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$
第三种	$\frac{4}{19}(x+y)$	$\frac{7}{19}(x+y)$	$\frac{3}{19}(x+y)$	$\frac{5}{19}(x+y)$

因而有如下线性方程组

$$\begin{cases} \frac{2}{7}x+\frac{1}{6}y=\frac{4}{19}(x+y), \\ \frac{3}{7}x+\frac{2}{6}y=\frac{7}{19}(x+y), \\ \frac{1}{7}x+\frac{1}{6}y=\frac{3}{19}(x+y), \\ \frac{1}{7}x+\frac{2}{6}y=\frac{5}{19}(x+y). \end{cases} \qquad (*)$$

【模型检验】把 $x = 7, y = 12$ 代入上述方程组$(*)$, 则各等式都成立. 可见模型假设中的第三个假设不影响解的正确性.

Matlab 实验题

蛋白质、碳水化合物和脂肪是人体每日必须的三种营养, 但过量的脂肪摄入不利于健康. 人们可以通过适量的运动来消耗多余的脂肪. 设三种食物(脱脂牛奶、大豆面粉、乳清)每 100 克中蛋白质、碳水化合物和脂肪的含量以及慢跑 5 分钟消耗蛋白质、碳水化合物和脂肪的量如下表.

表 2 三种食物的营养成分和慢跑的消耗情况

营养	每 100 克食物所含营养(克)			慢跑 5 分钟消耗量(克)	每日需要的营养量(克)
	牛奶	大豆面粉	乳清		
蛋白质	36	51	13	10	33
碳水化合物	52	34	74	20	45
脂肪	10	7	1	15	3

问怎样安排饮食和运动才能实现每日的营养需求?

案例三. 投入产出问题

在研究多个经济部门之间的投入产出关系时, W. Leontief 提出了投入产出模型. 这为经济学研究提供了强有力的手段. W. Leontief 因此获得了 1973 年的 Nobel 经济学奖.

图 7 三个经济部门

这里暂时只讨论一个简单的情形.

【模型准备】某地有一座煤矿, 一个发电厂和一条铁路. 经成本核算, 每生产价值 1 元钱的煤需消耗 0.3 元的电; 为了把这 1 元钱的煤运出去需花费 0.2 元的运费; 每生产 1 元的电需 0.6 元的煤作燃料; 为了运行电厂的辅助设备需消耗本身 0.1 元的电, 还需要花费 0.1 元的运费; 作为铁路局, 每提供 1 元运费的运输需消耗 0.5 元的煤, 辅助设备要消耗 0.1 元的电. 现煤矿接到外地 6 万元煤的订货, 电厂有 10 万元电的外地需求, 问: 煤矿和电厂各生产多少才能满足需求?

【模型假设】假设不考虑价格变动等其他因素.

【模型建立】设煤矿, 电厂, 铁路分别产出 x 元, y 元, z 元刚好满足需求. 则有下表

表 3 消耗与产出情况

		产出(1 元)			产出	消耗	订单
		煤	电	运			
消耗	煤	0	0.6	0.5	x	$0.6y+0.5z$	60000
	电	0.3	0.1	0.1	y	$0.3x+0.1y+0.1z$	100000
	运	0.2	0.1	0	z	$0.2x+0.1y$	0

根据需求, 应该有

$$\begin{cases} x-(0.6y+0.5z)=60000 \\ y-(0.3x+0.1y+0.1z)=100000, \\ z-(0.2x+0.1y)=0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x-0.6y-0.5z=60000 \\ -0.3x+0.9y-0.1z=100000 \\ -0.2x-0.1y+z=0 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,-0.6,-0.5;-0.3,0.9,-0.1;-0.2,-0.1,1]; b = [60000;100000;0];
>> x = A\b
```

Matlab 执行后得

```
x =
  1.0e+005 *
    1.9966
    1.8415
    0.5835
```

可见煤矿要生产 1.9966×10^5 元的煤, 电厂要生产 1.8415×10^5 元的电恰好满足需求.

【模型分析】令 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0.6&0.5\\0.3&0.1&0.1\\0.2&0.1&0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}60000\\100000\\0\end{pmatrix}$, 其中 $\boldsymbol{x}$ 称为总产值列向量, $\boldsymbol{A}$ 称为消耗系数矩阵, $\boldsymbol{b}$ 称为最终产品向量, 则

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}0&0.6&0.5\\0.3&0.1&0.1\\0.2&0.1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.6y+0.5z\\0.3x+0.1y+0.1z\\0.2x+0.1y\end{pmatrix}$$

根据需求, 应该有 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$, 即$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$. 故 $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{b}$.

<u>Matlab 实验题</u>

某乡镇有甲、乙、丙三个企业. 甲企业每生产 1 元的产品要消耗 0.25 元乙企业的产品和 0.25 元丙企业的产品. 乙企业每生产 1 元的产品要消耗 0.65 元甲企业的产品, 0.05 元自产的产品和 0.05 元丙企业的产品. 丙企业每生产 1 元的产品要消耗 0.5 元甲企业的产品和 0.1 元乙企业的产品. 在一个生产周期内, 甲、乙、丙三个企业生产的产品价值分别为 100 万元, 120 万元, 60 万元, 同时各自的固定资产折旧分别为 20 万元, 5 万元和 5 万元.

(1) 求一个生产周期内这三个企业扣除消耗和折旧后的新创价值.

(2) 如果这三个企业接到外来订单分别为 50 万元, 60 万元, 40 万元, 那么他们各生产多少才能满足需求?

案例四. 平板的稳态温度分布问题

在热传导的研究中，一个重要的问题是确定一块平板的稳态温度分布. 根据…定律，只要测定一块矩形平板四周的温度就可以确定平板上各点的温度.

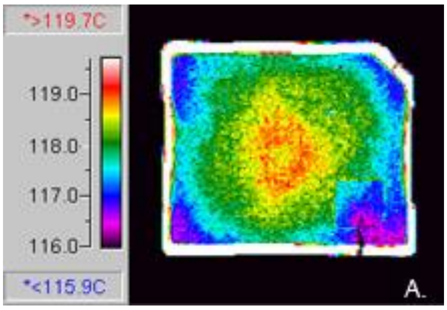

图 8 一块平板的温度分布图

【模型准备】如图 9 所示的平板代表一条金属梁的截面. 已知四周 8 个节点处的温度(单位 ℃)，求中间 4 个点处的温度 T_1, T_2, T_3, T_4.

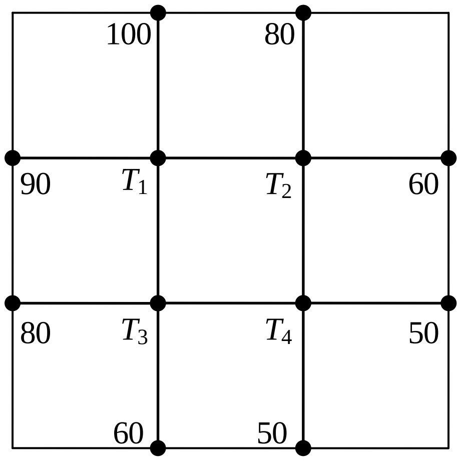

图 9 一块平板的温度分布图

【模型假设】假设忽略垂直于该截面方向上的热传导，并且每个节点的温度等于与它相邻的四个节点温度的平均值.

【模型建立】根据已知条件和上述假设，有如下线性方程组

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{1}{4}(90+100+T_2+T_3) \\ T_2 = \dfrac{1}{4}(80+60+T_1+T_4) \\ T_3 = \dfrac{1}{4}(80+60+T_1+T_4) \\ T_4 = \dfrac{1}{4}(50+50+T_2+T_3) \end{cases}$$

【模型求解】将上述线性方程组整理得

$$\begin{cases}4T_1 - T_2 - T_3 \qquad = 190 \\ -T_1 + 4T_2 \qquad - T_4 = 140 \\ -T_1 \qquad + 4T_3 - T_4 = 140 \\ \qquad - T_2 - T_3 + 4T_4 = 100\end{cases}.$$

在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [4,-1,-1,0;-1,4,0,-1;-1,0,4,-1;0,-1,-1,4]; b = [190;140;140;100];
>> x = A\b; x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =

    82.9167    70.8333    70.8333    60.4167
```

可见 $T_1 = 82.9167$, $T_2 = 70.8333$, $T_3 = 70.8333$, $T_4 = 60.4167$.

参考文献

陈怀琛, 高淑萍, 杨威, 工程线性代数, 北京: 电子工业出版社, 2007. 页码: 15-16.

Matlab 实验题

假定下图中的平板代表一条金属梁的截面, 并忽略垂直于该截面方向上的热传导. 已知平板内部有 30 个节点, 每个节点的温度近似等于与它相邻的四个节点温度的平均值. 设 4 条边界上的温度分别等于每位同学学号的后四位的 5 倍, 例如学号为 16308209 的同学计算本题时, 选择 $T_l = 40$, $T_u = 10$, $T_r = 0$, $T_d = 45$.

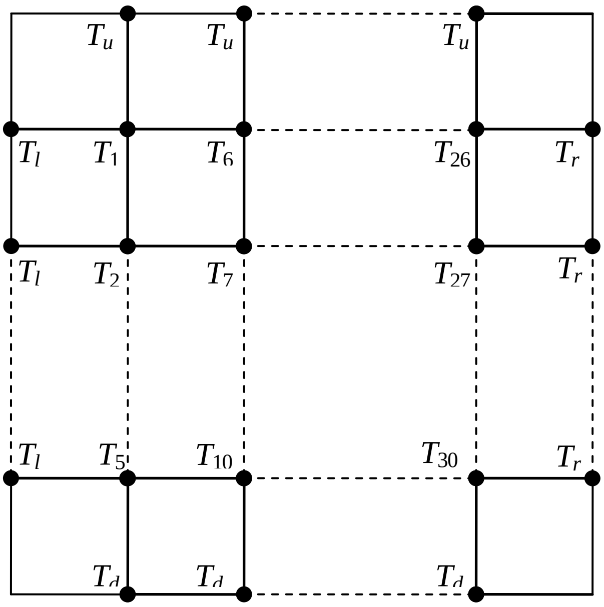

图 10 一块平板的温度分布图

(1) 建立可以确定平板内节点温度的线性方程组.
(2) 用 Matlab 软件求解该线性方程组.
(3) 用 Matlab 中的函数 mesh 绘制三维平板温度分布图.

案例五. CT 图像的代数重建问题

X 射线透视可以得到 3 维对象在 2 维平面上的投影, CT 则通过不同角度的 X 射线得到 3 维对象的多个 2 维投影, 并以此重建对象内部的 3 维图像. 代数重建方法就是从这些 2 维投影出发, 通过求解超定线性方程组, 获得对象内部 3 维图像的方法.

图 11 双层螺旋 CT

图 12 CT 图像

这里我们考虑一个更简单的模型, 从 2 维图像的 1 维投影重建原先的 2 维图像. 一个长方形图像可以用一个横竖均匀划分的离散网格来覆盖, 每个网格对应一个像素, 它是该网格上各点像素的均值. 这样一个图像就可以用一个矩阵表示,其元素就是图像在一点的灰度值(黑白图像). 下面我们以 3×3 图像为例来说明.

表 4 消耗与产出情况

	3×3 图像 各点的灰度值			水平方向上 的叠加值
	$x_1 = 1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 0$	$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
	$x_4 = 0$	$x_5 = 0.5$	$x_6 = 0.5$	$x_4 + x_5 + x_6 = 1$
	$x_7 = 0.5$	$x_8 = 0$	$x_9 = 1$	$x_7 + x_8 + x_9 = 1.5$
竖直方向上 的叠加值	$x_1 + x_4 + x_7$ $= 1.5$	$x_2 + x_5 + x_8$ $= 0.5$	$x_3 + x_6 + x_9$ $= 1.5$	

每个网格中的数字 x_i 代表其灰度值, 范围在[0, 1]内. 0 表示白色, 1 表示黑色, 0.5 表示灰色. 如果我们不知道网格中的数值, 只知道沿竖直方向和水平方向的叠加值, 为了确定网格中的灰度值, 可以建立线性方程组(含有 6 个方程, 9 个未知数)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ \cdots \\ x_3 + x_6 + x_9 = 1 \end{cases}$$

显然该方程组的解是不唯一的, 为了重建图像, 必须增加叠加值. 如我们增加从右上方到左下方的叠加值, 则方程组将增加 5 个方程

$$x_1 = 1,$$
$$x_2 + x_4 = 0,$$
$$x_3 + x_5 + x_7 = 1,$$
$$x_6 + x_8 = 0.5,$$
$$x_9 = 1,$$

和上面的 6 个方程放在一起构成一个含有 11 个方程, 9 个未知数的线性方程组.

【模型准备】设 3×3 图像中第一行 3 个点的灰度值依次为 x_1, x_2, x_3, 第二行 3 个点的灰度值依次为 x_4, x_5, x_6, 第三行 3 个点的灰度值依次为 x_7, x_8, x_9. 沿竖直方向的叠加值依次为 1.5, 0.5, 1.5, 沿水平方向的叠加值依次为 1, 1, 1.5, 沿右上方到左下方的叠加值依次为 1, 0, 1, 0.5, 1. 确定 $x_1, x_2, \ldots, x_9$ 的值.

【模型建立】由已知条件可得(含有 11 个方程, 9 个未知数的)线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1 \\ \cdots \\ x_9 = 1 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,1,1,0,0,0,0,0,0;0,0,0,1,1,1,0,0,0;0,0,0,0,0,0,1,1,1;
        1,0,0,1,0,0,1,0,0;0,1,0,0,1,0,0,1,0;0,0,1,0,0,1,0,0,1;
        1,0,0,0,0,0,0,0,0;0,1,0,1,0,0,0,0,0;0,0,1,0,1,0,1,0,0;
        0,0,0,0,0,1,0,1,0;0,0,0,0,0,0,0,0,1];
>> b = [1;1;1.5;1.5;0.5;1.5;1;0;1;0.5;1];
>> x = A\b; x'
```

Matlab 执行后得

```
Warning: Rank deficient, rank = 8  tol = 4.2305e-015.

ans =

    1.0000   0.0000   0   -0.0000   0.5000   0.5000   0.5000   -0.0000   1.0000
```

可见上述方程组的解不唯一. 其中的一个特解为

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0.5, x_6 = 0.5, x_7 = 0.5, x_8 = 0, x_9 = 1.$$

【模型分析】上述结果表明, 仅有三个方向上的叠加值还不够.可以再增加从左上方到右下方的叠加值. 在实际情况下, 由于测量误差, 上述线性方程组可能是超定的. 这时可以将超定方程组的近似解作为重建的图像数据.

<u>Matlab 实验题</u>

给定一个 3×3 图像的 2 个方向上的灰度叠加值: 沿左上方到右下方的灰度叠加值依次为 0.8, 1.2, 1.7, 0.2, 0.3; 沿右上方到左下方的灰度叠加值依次为 0.6, 0.2, 1.6, 1.2, 0.6.

(1) 建立可以确定网格数据的线性方程组, 并用 Matlab 求解.

(2) 将网格数据乘以 256, 再取整, 用 Matlab 绘制该灰度图像.

案例六. 平衡结构的梁受力计算

在桥梁、房顶、铁塔等建筑结构中, 涉及到各种各样的梁. 对这些梁进行受力分析是设计师、工程师经常做的事情.

图 13 埃菲尔铁塔全景

图 14 埃菲尔铁塔局部

下面以双杆系统的受力分析为例, 说明如何研究梁上各铰接点处的受力情况.

【模型准备】在图 15 所示的双杆系统中, 已知杆 1 重 $G_1 = 200$ 牛顿, 长 $L_1 = 2$ 米, 与水平方向的夹角为$\theta_1 = \pi/6$, 杆 2 重 $G_2 = 100$ 牛顿, 长 $L_2 = \sqrt{2}$ 米, 与水平方向的夹角为$\theta_2 = \pi/4$. 三个铰接点 A, B, C 所在平面垂直于水平面. 求杆 1, 杆 2 在铰接点处所受到的力.

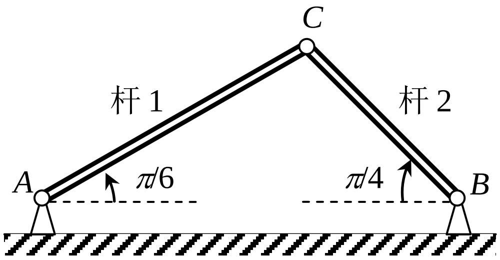

图 15 双杆系统

【模型假设】假设两杆都是均匀的. 在铰接点处的受力情况如图 16 所示.

【模型建立】对于杆 1:

水平方向受到的合力为零, 故 $N_1 = N_3$,

竖直方向受到的合力为零, 故 $N_2 + N_4 = G_1$,

以点 A 为支点的合力矩为零, 故$(L_1\sin\theta_1)N_3 + (L_1\cos\theta_1)N_4 = (\frac{1}{2}L_1\cos\theta_1)G_1$.

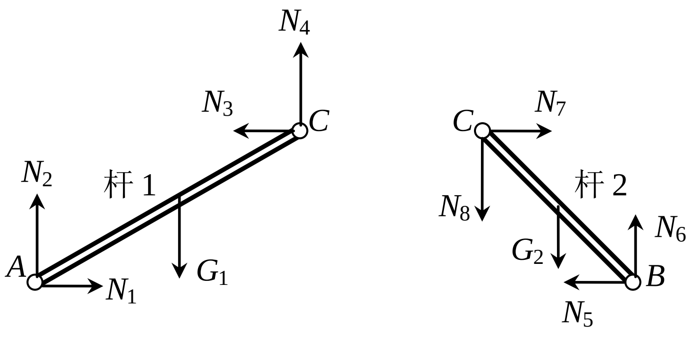

图 16 两杆受力情况

对于杆 2 类似地有

$$N_5 = N_7, \quad N_6 = N_8 + G_2, \quad (L_2\sin\theta_2)N_7 = (L_2\cos\theta_2)N_8 + (\frac{1}{2}L_2\cos\theta_2)G_2.$$

此外还有 $N_3 = N_7, N_4 = N_8$. 于是将上述 8 个等式联立起来得到关于 $N_1, N_2, \ldots, N_8$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} N_1 - N_3 = 0 \\ N_2 + N_4 = G_1 \\ \cdots \\ N_4 - N_8 = 0 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> G1=200; L1=2; theta1=pi/6; G2=100; L2=sqrt(2); theta2=pi/4;
>> A = [1,0,-1,0,0,0,0,0;0,1,0,1,0,0,0,0;
        0,0,L1*sin(theta1),L1*cos(theta1),0,0,0,0;0,0,0,0,1,0,-1,0;
        0,0,0,0,0,1,0,-1;0,0,0,0,0,0,L2*sin(theta2),-L2*cos(theta2);
        0,0,1,0,0,0,-1,0;0,0,0,1,0,0,0,-1];
>> b = [0;G1;0.5*L1*cos(theta1)*G1;0;G2;0.5*L2*cos(theta2)*G2;0;0];
>> x = A\b; x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =
     95.0962   154.9038   95.0962   45.0962   95.0962   145.0962   95.0962   45.0962
```

【模型分析】最后的结果没有出现负值, 说明图 16 中假设的各个力的方向与事实一致. 如果结果中出现负值, 则说明该力的方向与假设的方向相反.

参考文献

陈怀琛, 高淑萍, 杨威, 工程线性代数, 北京: 电子工业出版社, 2007. 页码: 157-158.

Matlab 实验题

有一个平面结构如下所示, 有 13 条梁(图中标号的线段)和 8 个铰接点(图中标号的圈)联结在一起. 其中 1 号铰接点完全固定, 8 号铰接点竖直方向固定, 并在 2 号, 5 号和 6 号铰接点上, 分别有图示的 10 吨, 15 吨和 20 吨的负载. 在静平衡的条件下, 任何一个铰接点上水平和竖直方向受力都是平衡的. 已知每条斜梁的角度都是 45º .

(1) 列出由各铰接点处受力平衡方程构成的线性方程组.

(2) 用 Matlab 软件求解该线性方程组, 确定每条梁受力情况.

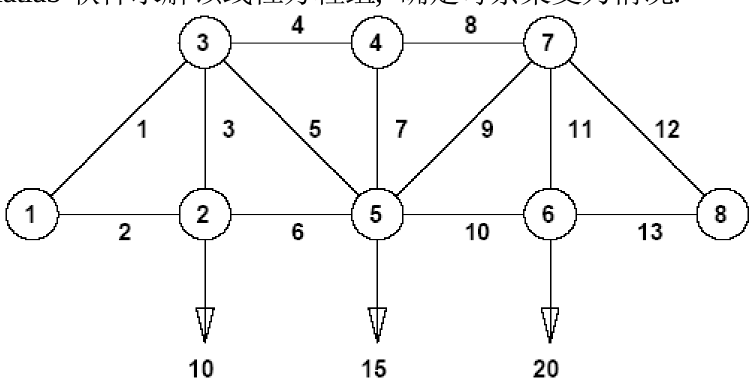

图 17 一个平面结构的梁

案例七. 化学方程式配平问题

在用化学方法处理污水过程中, 有时会涉及到复杂的化学反应. 这些反应的化学方程式是分析计算和工艺设计的重要依据. 在定性地检测出反应物和生成物之后, 可以通过求解线性方程组配平化学方程式.

图 18 污水处理

【模型准备】某厂废水中含 KCN, 其浓度为 650mg/L. 现用氯氧化法处理, 发生如下反应:

$$KCN + 2KOH + Cl_2 = KOCN + 2KCl + H_2O.$$

投入过量液氯, 可将氰酸盐进一步氧化为氮气. 请配平下列化学方程式:

$$\_\_\_KOCN + \_\_\_KOH + \_\_\_Cl_2 === \_\_\_CO_2 + \_\_\_N_2 + \_\_\_KCl + \_\_\_H_2O.$$

(注: 题目摘自福建省厦门外国语学校 2008-2009 学年高三第三次月考化学试卷)

【模型建立】设

$$x_1KOCN + x_2KOH + x_3Cl_2 === x_4CO_2 + x_5N_2 + x_6KCl + x_7H_2O,$$

则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_6 \\ x_1 + x_2 = 2x_4 + x_7 \\ x_1 = x_4 \\ x_1 = 2x_5 \\ x_2 = 2x_7 \\ 2x_3 = x_6 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 - x_7 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_7 = 0 \\ 2x_3 - x_6 = 0 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,1,0,0,0,-1,0;1,1,0,-2,0,0,-1;1,0,0,-1,0,0,0;
        1,0,0,0,-2,0,0;0,1,0,0,0,0,-2;0,0,2,0,0,-1,0];
>> x = null(A,'r'); format rat, x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =
     1        2        3/2        1        1/2        3        1
```

可见上述齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k(1, 2, 3/2, 1, 1/2, 3, 1)^T.$$

取 $k = 2$ 得 $\boldsymbol{x} = (2, 4, 3, 2, 1, 6, 2)^T$. 可见配平后的化学方程式如下

$$2KOCN + 4KOH + 3Cl_2 === 2CO_2 + N_2 + 6KCl + 2H_2O.$$

【模型分析】利用线性方程组配平化学方程式是一种待定系数法. 关键是根据化学

方程式两边所涉及到的各种元素的量相等的原则列出方程. 所得到的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 中所含方程的个数等于化学方程式中元素的种数 s, 未知数的个数就是化学方程式中的项数 n.

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n-1$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 的基础解系中含有 1 个(线性无关的)解向量. 这时在通解中取常数 k 为各分量分母的最小公倍数即可. 例如本例中

$$1, 2, 3/2, 1, 1/2, 3, 1$$

分母的最小公倍数为 2, 故取 $k = 2$.

当 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) \le n-2$ 时, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\theta}$ 的基础解系中含有 2 个以上的线性无关的解向量. 这时可以根据化学方程式中元素的化合价的上升与下降的情况, 在原线性方程组中添加新的方程.

参考文献

陈怀琛, 高淑萍, 杨威, 工程线性代数, 北京: 电子工业出版社, 2007. 页码: 84-85.

Matlab 实验题

配平下列反应式

(1) $FeS + KMnO_4 + H_2SO_4 —— K_2SO_4 + MnSO_4 + Fe_2(SO_4)_3 + H_2O + S\downarrow$

(2) $Al_2(SO_4)_3 + Na_2CO_3 + H_2O —— Al(OH)_3\downarrow + CO_2\uparrow + Na_2SO_4$

案例八．互付工资问题

互付工资问题是多方合作相互提供劳动过程中产生的．比如农忙季节，多户农民组成互助组，共同完成各户的耕、种、收等农活．又如木工，电工，油漆工等组成互助组，共同完成各家的装潢工作．由于不同工种的劳动量有所不同，为了均衡各方的利益，就要计算互付工资的标准．

图 19 农忙互助

图 20 装修互助

【模型准备】现有一个木工，电工，油漆工．相互装修他们的房子，他们有如下协议:

(1) 每人工作 10 天(包括在自己家的日子),

(2) 每人的日工资一般的市价在 60~80 元之间,

(3) 日工资数应使每人的总收入和总支出相等．

表 5 工作天数

工人 / 在谁家	木工	电工	油漆工
木工家	2	1	6
电工家	4	5	1
油漆工家	4	4	3

求每人的日工资．

【模型假设】假设每人每天工作时间长度相同．无论谁在谁家干活都按正常情况工作，既不偷懒，也不加班．

【模型建立】设木工，电工，油漆工的日工资分别为 x, y, z 元，则由下表

表 6 各家应付工资和各人应得收入

工人 / 在谁家	木工	电工	油漆工	各家应付工资
木工家	$2x$	$1y$	$6z$	$2x + y + 6z$
电工家	$4x$	$5y$	$1z$	$4x + 5y + z$
油漆工家	$4x$	$4y$	$3z$	$4x + 4y + 3z$
各人应得收入	$10x$	$10y$	$10z$	

可得

$$\begin{cases} 2x+y+6z=10x \\ 4x+5y+z=10y \\ 4x+4y+3z=10z \end{cases}，即 \begin{cases} -8x+y+6z=0 \\ 4x-5y+z=0 \\ 4x+4y-7z=0 \end{cases}$$

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [-8,1,6;4,-5,1;4,4,-7];
```

```
>> x = null(A,'r'); format rat, x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =
     31/36          8/9            1
```

可见上述齐次线性方程组的通解为 $\boldsymbol{x} = k(31/36,\ 8/9,\ 1)^{\mathrm{T}}$. 因而根据“每人的日工资一般的市价在 60~80 元之间”可知

$$60 \le \frac{31}{36}k < \frac{8}{9}k < k \le 80, \quad \text{即} \quad \frac{216}{31} \le k \le 80.$$

也就是说, 木工, 电工, 油漆工的日工资分别为 $\frac{31}{36}k$ 元, $\frac{8}{9}k$ 元, k 元, 其中 $\frac{2160}{31} \le k \le 80$.
为了简便起见, 可取 $k = 72$, 于是木工, 电工, 油漆工的日工资分别为 62 元, 64 元, 72 元.

【模型分析】事实上各人都不必付自己工资, 这时各家应付工资和各人应得收入如下

表 7 各家应付工资和各人应得收入

工人 / 在谁家	木工	电工	油漆工	各家应付工资
木工家	0	$1y$	$6z$	$y + 6z$
电工家	$4x$	0	$1z$	$4x + z$
油漆工家	$4x$	$4y$	0	$4x + 4y$
个人应得收入	$8x$	$5y$	$7z$	

由此可得

$$\begin{cases} y+6z=8x \\ 4x+z=5y \\ 4x+4y=7z \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -8x+y+6z=0 \\ 4x-5y+z=0 \\ 4x+4y-7z=0 \end{cases}$$

可见这样得到的方程组与前面得到的方程组是一样的.

<u>Matlab 实验题</u>

甲, 乙, 丙三个农民组成互助组, 每人工作 6 天(包括为自己家干活的天数), 刚好完成他们三人家的农活, 其中甲在甲, 乙, 丙三家干活的天数依次为: 2, 2.5, 1.5; 乙在甲, 乙, 丙三家各干 2 天活, 丙在甲, 乙, 丙三家干活的天数依次为: 1.5, 2, 2.5. 根据三人干活的种类, 速度和时间, 他们确定三人不必相互支付工资刚好公平. 随后三人又合作到邻村帮忙干了 2 天(各人干活的种类和强度不变), 共获得工资 500 元.

问他们应该怎样分配这 500 元工资才合理?

案例九. 平衡价格问题

为了协调多个相互依存的行业的平衡发展, 有关部门需要根据每个行业的产出在各个行业中的分配情况确定每个行业产品的指导价格, 使得每个行业的投入与产出都大致相等.



图 21 三个行业

【**模型准备**】假设一个经济系统由煤炭、电力、钢铁行业组成, 每个行业的产出在各个行业中的分配如下表所示:

表 7 行业产出分配表

产出分配			购买者
煤炭	电力	钢铁	
0	0.4	0.6	煤炭
0.6	0.1	0.2	电力
0.4	0.5	0.2	钢铁

每一列中的元素表示占该行业总产出的比例. 求使得每个行业的投入与产出都相等的平衡价格.

【**模型假设**】假设不考虑这个系统与外界的联系.

【**模型建立**】把煤炭、电力、钢铁行业每年总产出的价格分别用 x_1, x_2, x_3 表示, 则

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_2 + 0.6x_3 \\ x_2 = 0.6x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 \\ x_3 = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 \end{cases}, \text{ 即} \begin{cases} x_1 - 0.4x_2 - 0.6x_3 = 0 \\ -0.6x_1 + 0.9x_2 - 0.2x_3 = 0 \\ -0.4x_1 - 0.5x_2 + 0.8x_3 = 0 \end{cases}.$$

【**模型求解**】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1,-0.4,-0.6;-0.6,0.9,-0.2;-0.4,-0.5,0.8];
>> x = null(A,'r'); format short, x'
```

Matlab 执行后得

```
ans =

    0.9394    0.8485    1.0000
```

可见上述齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = k(0.9394, 0.8485, 1)^{\mathrm{T}}.$$

这就是说, 如果煤炭、电力、钢铁行业每年总产出的价格分别 0.9394 亿元, 0.8485 亿元, 1 亿元, 那么每个行业的投入与产出都相等.

【模型分析】实际上，一个比较完整的经济系统不可能只涉及三个行业，因此需要统计更多的行业间的分配数据.

Matlab 实验题

假设一个经济系统由煤炭、石油、电力、钢铁、机械制造、运输行业组成，每个行业的产出在各个行业中的分配如下表所示:

表 8 行业产出分配表

产出分配						购买者
煤炭	石油	电力	钢铁	制造	运输	
0	0	0.2	0.1	0.2	0.2	煤炭
0	0	0.1	0.1	0.2	0.1	石油
0.5	0.1	0.1	0.2	0.1	0.1	电力
0.4	0.1	0.2	0	0.1	0.4	钢铁
0	0.1	0.3	0.6	0	0.2	制造
0.1	0.7	0.1	0	0.4	0	运输

每一列中的元素表示占该行业总产出的比例. 求使得每个行业的投入与产出都相等的平衡价格.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 49-50.

案例十．电路设计问题

电路是电子元件的神经系统．参数的计算是电路设计的重要环节．其依据来自两个方面：一是客观需要，二是物理学定律．

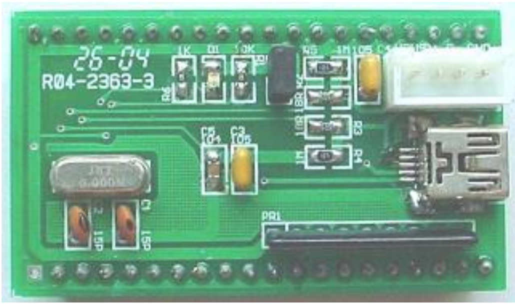

图 22 USB 扩展板

【模型准备】假设图 23 中的方框代表某类具有输入和输出终端的电路．用$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$记录输入电压和输入电流(电压 v 以伏特为单位，电流 i 以安培为单位)，用$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix}$记录输出电压和输入电流．若$\begin{pmatrix} v_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为转移矩阵．

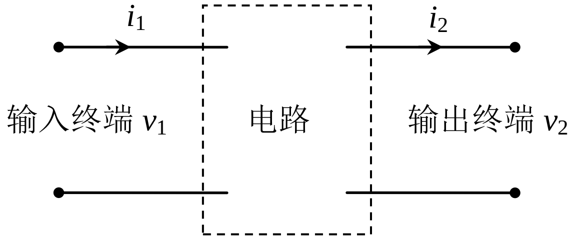

图 23 具有输入和输出终端的电子电路图

图 24 给出了一个梯形网络，左边的电路称为串联电路，电阻为 R_1(单位：欧姆)．右边的电路是并联电路，电路 R_2．利用欧姆定理和楚列斯基定律，我们可以得到串联电路和并联电路的转移矩阵分别是

$$\begin{pmatrix} 1 & -R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{和} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1 \end{pmatrix}$$

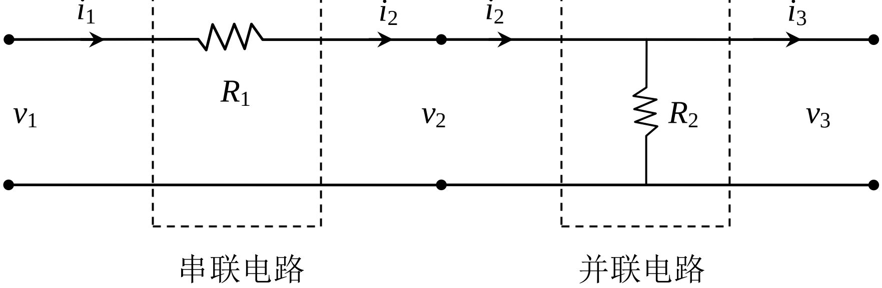

图 24 梯形网络

设计一个梯形网络，其转移矩阵是$\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -0.5 & 5 \end{pmatrix}$．

【模型假设】假设导线的电阻为零.

【模型建立】设 $\boldsymbol{A}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2$ 分别是串联电路和并联电路的转移矩阵，则输入向量 $\boldsymbol{x}$ 先变换成 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}$，再变换到 $\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x})$. 其中

$$\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/R_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -R_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -R_1\\ -1/R_2 & 1+R_1/R_2\end{pmatrix}$$

就是图 22 中梯形网络的转移矩阵.

于是，原问题转化为求 R_1, R_2 的值使得 $\begin{pmatrix}1 & -R_1\\ -1/R_2 & 1+R_1/R_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -0.5 & 5\end{pmatrix}$.

【模型求解】由 $\begin{pmatrix}1 & -R_1\\ -1/R_2 & 1+R_1/R_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ -0.5 & 5\end{pmatrix}$ 可得 $\begin{cases}-R_1=-8\\ -1/R_2=-0.5\\ 1+R_1/R_2=5\end{cases}$.

根据其中的前两个方程可得 $R_1 = 8, R_2 = 2$. 把 $R_1 = 8, R_2 = 2$ 代入上面的第三个方程确实能使等式成立. 这就是说在图 22 中梯形网络中取 $R_1 = 8, R_2 = 2$ 即为所求.

【模型分析】若要求的转移矩阵改为 $\begin{pmatrix}1 & -8\\ -0.5 & 4\end{pmatrix}$，则上面的梯形网络无法实现.

因为这时对应的方程组是 $\begin{cases}-R_1=-8\\ -1/R_2=-0.5\\ 1+R_1/R_2=4\end{cases}$. 根据前两个方程依然得到 $R_1 = 8, R_2 = 2$，但把 $R_1 = 8, R_2 = 2$ 代入上第三个方程却不能使等式成立.

参考文献

David C. Lay，线性代数及其应用，沈复兴，傅莺莺等译，北京：人民邮电出版社，2009. 页码: 129-130.

练习题

根据基尔霍夫回路电路定律(各节点处流入和流出的电流强度的代数和为零，各回路中各支路的电压降之和为零)，列出下图所示电路中电流 i_1, i_2, i_3 所满足的线性方程组，并用矩阵形式表示:

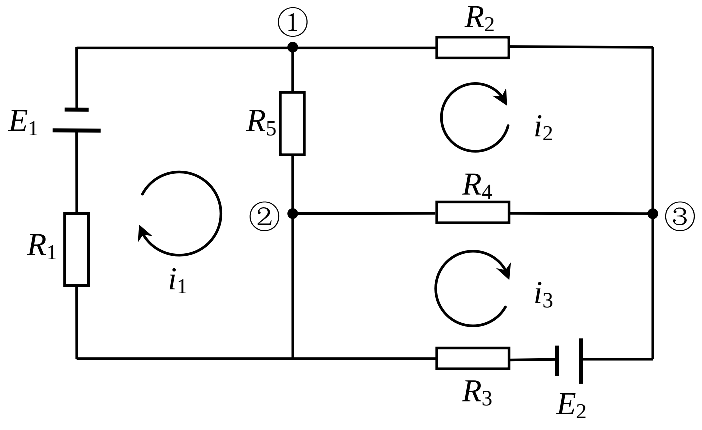

图 25 简单的回路

案例十一. 平面图形的几何变换

随着计算机科学技术的发展，计算机图形学的应用领域越来越广，如仿真设计、效果图制作、动画片制作、电子游戏开发等.

图 26 计算机图形学的广泛应用

图形的几何变换，包括图形的平移、旋转、放缩等，是计算机图形学中经常遇到的问题. 这里暂时只讨论平面图形的几何变换.

【模型准备】平面图形的旋转和放缩都很容易用矩阵乘法实现，但是图形的平移并不是线性运算，不能直接用矩阵乘法表示. 现在要求用一种方法使平移、旋转、放缩能统一用矩阵乘法来实现.

【模型假设】设平移变换为

$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$

旋转变换(绕原点逆时针旋转θ角度)为

$$(x, y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

放缩变换(沿 x 轴方向放大 s 倍，沿 y 轴方向放大 t 倍)为

$$(x, y) \to (sx, ty)$$

【模型求解】$\mathbf{R}^2$ 中的每个点(x, y)可以对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的$(x, y, 1)$. 它在 xOy 平面上方 1 单位的平面上. 我们称$(x, y, 1)$是(x, y)的齐次坐标. 在齐次坐标下，平移变换

$$(x, y) \to (x+a, y+b)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \to (x+a, y+b, 1).$$

于是可以用矩阵乘积$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{pmatrix}$实现.

旋转变换

$$(x, y) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta, 1).$$

于是可以用矩阵乘积$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ 1 \end{pmatrix}$实现.

放缩变换

$$(x, y) \to (sx, ty)$$

可以用齐次坐标写成

$$(x, y, 1) \to (sx, ty, 1).$$

于是可以用矩阵乘积$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} sx \\ ty \\ 1 \end{pmatrix}$实现.

【模型分析】由上述求解可以看出，$\mathbf{R}^2$ 中的任何线性变换都可以用分块矩阵$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & 1 \end{pmatrix}$乘以齐次坐标实现，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 2 阶方阵．这样，只要把平面图形上点的齐次坐标写成列向量，平面图形的每一次几何变换，都可通过左乘一个 3 阶变换矩阵来实现.

参考文献

David C. Lay，线性代数及其应用，沈复兴，傅莺莺等译，北京：人民邮电出版社，2009．页码: 139-141.

Matlab 实验题

在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>>clear all, clc,
>>t = [1,3,5,11,13,15]*pi/8;
>>x = sin(t); y=cos(t);
>>fill(x,y,'r');
>>grid on;
>>axis([-2.4, 2.4, -2, 2])
```

运行后得图 25.

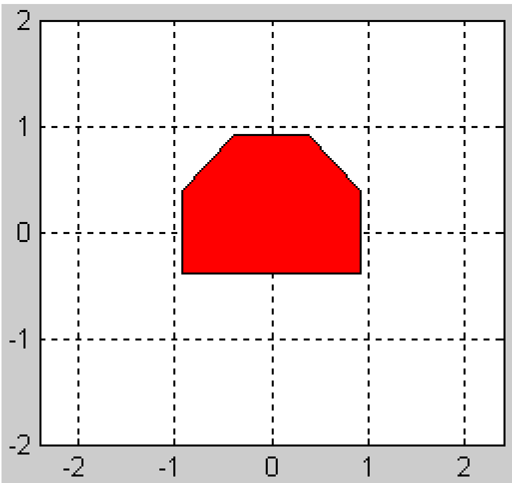

图 26 Matlab 绘制的图形

(1) 写出该图形每个顶点的齐次坐标;

(2) 编写 Matlab 程序，先将上面图形放大 0.9 倍；再逆时针旋转 $\frac{\pi}{3}$；最后进行横坐标加 0.8，纵坐标减 1 的图形平移．分别绘制上述变换后的图形.

案例十二. 太空探测器轨道数据问题

太空航天探测器发射以后，可能需要调整以使探测器处在精确计算的轨道里. 雷达监测到一组列向量 $\boldsymbol{x}_1$，…，$\boldsymbol{x}_k$，它们给出了不同时刻探测器的实际位置与预定轨道之间的偏差的信息.

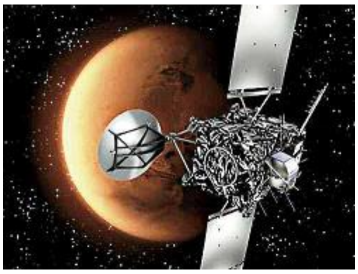

图 28 火星探测器

【模型准备】 令 $\boldsymbol{X}_k = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$. 在雷达进行数据分析时需要计算出矩阵 $\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}}$. 一旦接收到数据向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}$，必须计算出新矩阵 $\boldsymbol{G}_{k+1}$. 因为数据向量到达的速度非常快，随着 k 的增加，直接计算的负担会越来越重. 现需要给出一个算法，使得计算 $\boldsymbol{G}_k$ 的负担不会因为 k 的增加而加重.

【模型求解】 因为

$$\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{G}_{k+1} = \boldsymbol{X}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}]\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{x}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}_k + \boldsymbol{x}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}},$$

所以一旦接收到数据向量 $\boldsymbol{x}_{k+1}$，只要计算 $\boldsymbol{x}_{k+1}\boldsymbol{x}_{k+1}^{\mathrm{T}}$，然后把它与上一步计算得到的 $\boldsymbol{G}_k$ 相加即可. 这样计算 $\boldsymbol{G}_k$ 的负担不会因为 k 的增加而加重.

【模型分析】 计算机计算加法的时间与计算乘法的时间相比可以忽略不计. 因此在考虑计算矩阵乘积的负担时，只要考察乘法的次数就可以了. 设 $\boldsymbol{x}_k$ 的维数是 n，则 $\boldsymbol{X}_k = [\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$ 是 $n\times k$ 的矩阵, $\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times n$ 的矩阵. 直接计算 $\boldsymbol{G}_k = \boldsymbol{X}_k\boldsymbol{X}_k^{\mathrm{T}}$ 需要做 n^2k 次乘法. 因而计算的负担会随着 k 的增加而增加. 但是对于每一个 k，计算 $\boldsymbol{x}_k\boldsymbol{x}_k^{\mathrm{T}}$ 始终只要做 n^2 次乘法.

Matlab 实验题

用 Matlab 编写一个程序用于处理这个问题.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用，沈复兴，傅莺莺等译，北京：人民邮电出版社，2009. 页码: 123.

案例十三. 应用矩阵编制 Hill 密码

密码学在经济和军事方面起着极其重要的作用. 现代密码学涉及很多高深的数学知识. 这里无法展开介绍.

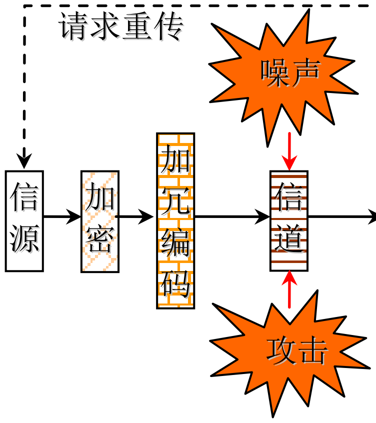

图 29 保密通信的基本模型

密码学中将信息代码称为**密码**, 尚未转换成密码的文字信息称为**明文**, 由密码表示的信息称为**密文**. 从明文到密文的过程称为**加密**, 反之为**解密**. 1929 年, 希尔(Hill)通过线性变换对待传输信息进行加密处理, 提出了在密码史上有重要地位的希尔加密算法. 下面我们略去一些实际应用中的细节, 只介绍最基本的思想.

【模型准备】若要发出信息 action, 现需要利用矩阵乘法给出加密方法和加密后得到的密文, 并给出相应的解密方法.

【模型假设】(1) 假定每个字母都对应一个非负整数, 空格和 26 个英文字母依次对应整数 0~26(见下表).

表 9 空格及字母的整数代码表

空格	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	

(2) 假设将单词中从左到右, 每 3 个字母分为一组, 并将对应的 3 个整数排成 3 维的行向量, 加密后仍为 3 维的行向量, 其分量仍为整数.

【模型建立】设 3 维向量 $\boldsymbol{x}$ 为明文, 要选一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使密文 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{xA}$, 还要确保接收方能由 $\boldsymbol{y}$ 准确地解出 $\boldsymbol{x}$. 因此 $\boldsymbol{A}$ 必须是一个 3 阶可逆矩阵. 这样就可以由 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{xA}$ 得 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{yA}^{-1}$. 为了避免小数引起误差, 并且确保 $\boldsymbol{y}$ 也是整数向量, $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的元素应该都是整数. 注意到, 当整数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式= ±1 时, $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是整数矩阵. 因此原问题转化为

(1) 把 action 翻译成两个行向量: $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$.

(2) 构造一个行列式= ±1 的整数矩阵 $\boldsymbol{A}$(当然不能取 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$).

(3) 计算 $\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{A}$.

(4) 计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

【模型求解】(1) 由上述假设可见 $\boldsymbol{x}_1 = (1, 3, 20)$, $\boldsymbol{x}_2 = (9, 15, 14)$.

(2) 对 3 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 进行几次适当的初等变换(比如把某一行的整数被加到另一行，或交换某两行)，根据行列式的性质可知，这样得到的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式为 1 或–1. 例如 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $|\boldsymbol{A}| = -1$.

(3) $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{A} = (1, 3, 20)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (67, 44, 43)$,

$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = (9, 15, 14)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = (81, 52, 43)$.

(4) 由 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

这就是说，接收方收到的密文是 67, 44, 43, 81, 52, 43. 要还原成明文，只要计算 $(67, 44, 43)\boldsymbol{A}^{-1}$ 和 $(81, 52, 43)\boldsymbol{A}^{-1}$，再对照表 9“翻译”成单词即可.

【模型分析】如果要发送一个英文句子，在不记标点符号的情况下，我们仍然可以把句子(含空格)从左到右每 3 个字符分为一组(最后不足 3 个字母时用空格补上).

【模型检验】$(67, 44, 43)\boldsymbol{A}^{-1} = (1, 3, 20)$, $(81, 52, 43)\boldsymbol{A}^{-1} = (9, 15, 14)$.

参考文献

杨威，高淑萍，线性代数机算与应用指导，西安：西安电子科技大学出版社，2009. 页码: 98-102.

Matlab 实验题

按照上面的加密方法，设密文为: 112, 76, 57, 51, 38, 18, 84, 49, 49, 68, 41, 32, 83, 55, 37, 70, 45, 25, 问恢复为原来的信息是什么?

案例十四. 显示器色彩制式转换问题

彩色显示器使用红(R)、绿(G)和蓝(B)光的叠成效应生成颜色. 显示器屏幕的内表面由微粒象素组成, 每个微粒包括三个荧光点: 红、绿、蓝. 电子枪位于屏幕的后方, 向屏幕上每个点发射电子束. 计算机从图形应用程序或扫描仪发出数字信号到电子枪, 这些信号控制电子枪设置的电压强度. 不同 RGB 的强度组合将产生不同的颜色. 电子枪由电磁石帮助瞄准以确保快速精确地屏幕刷新.

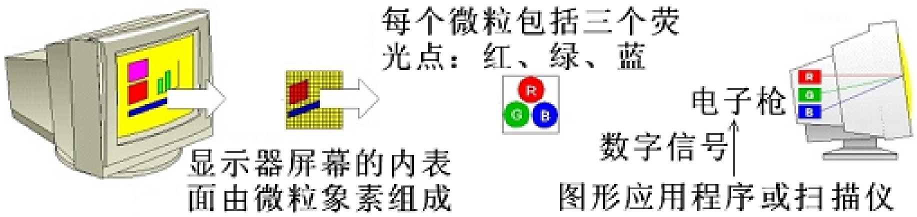

图 30 彩色显示器的工作原理

颜色模型规定一些属性或原色, 将颜色分解成不同属性的数字化组合. 这就色彩制式的转换问题.

【模型准备】观察者在屏幕上实际看到的色彩要受色彩制式和屏幕上荧光点数量的影响. 因此每家计算机屏幕制造商都必须在(R, G, B)数据和国际通行的CIE 色彩标准之间进行转换, CIE 标准使用三原色, 分别称为 X, Y 和 Z. 针对短余辉荧光点的一类典型转换是

$$\begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

计算机程序把用 CIE 数据(X, Y, Z)表示的色彩信息流发送到屏幕. 求屏幕上的电子枪将这些数据转换成(R, G, B)数据的方程.

【模型建立】令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.29 & 0.150 \\ 0.35 & 0.59 & 0.063 \\ 0.04 & 0.12 & 0.787 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\beta}$. 现在要根据CIE 数据$(X, Y, Z)$计算对应的$(R, G, B)$数据, 就是等式$\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\beta}$中$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{\beta}$已知, 求$\boldsymbol{\alpha}$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵, 则由 $\boldsymbol{A\alpha} = \boldsymbol{\beta}$可得$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{\beta}$.

【模型求解】在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [0.61,0.29,0.15;0.35,0.59,0.063;0.04,0.12,0.787];
>> if det(A)==0, 'A 不可逆'
   elseif 'A 可逆, A 的逆矩阵如下', B = inv(A),
   end
```

Matlab 执行后得

```
B =
     2.2586    -1.0395    -0.3473
    -1.3495     2.3441     0.0696
```

0. 0910　　-0. 3046　　1. 2777

于是$\alpha = \begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix}\beta$. 这就是说, 屏幕上的电子枪将 CIE 数据($X$, Y, Z)转换成(R, G, B)数据的方程为

$$\begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2586 & -1.0395 & -0.3473 \\ -1.3495 & 2.3441 & 0.0696 \\ 0.0910 & -0.3046 & 1.2777 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

<u>Matlab 实验题</u>

民用电视信号发送使用向量(Y, I, Q)来描述每种颜色. 如果屏幕是黑白的, 则只用到了 Y(这比 CIE 数据能提供更好的单色图象). YIQ 与“标准”RGB 色彩之间的对应如下

$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.528 & 0.311 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$

(屏幕制造商需要调整矩阵元素一适应其 RGB 屏幕.) 求将电视台发送的数据转换成电视机屏幕所要求数据的方程.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 147.

案例十五. 人员流动问题

【模型准备】某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将$\dfrac{1}{6}$熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有$\dfrac{2}{5}$成为熟练工. 假设第一年一月份统计的熟练工和非熟练工各占一半, 求以后每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比.

【模型建立】设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n, 记成向量$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. 因为第一年统计的熟练工和非熟练工各占一半, 所以$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. 为了求以后每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比, 先求从第二年起每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比与上一年度统计的百分比之间的关系, 即求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$的关系式, 然后再根据这个关系式求$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

【模型求解】根据已知条件可得:

$$x_{n+1} = (1-\frac{1}{6})x_n + \frac{2}{5}(\frac{1}{6}x_n + y_n) = \frac{9}{10}x_n + \frac{2}{5}y_n,$$

$$y_{n+1} = (1-\frac{2}{5})(\frac{1}{6}x_n + y_n) = \frac{1}{10}x_n + \frac{3}{5}y_n,$$

即

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/5 \\ 1/10 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9/10 & 2/5 \\ 1/10 & 3/5 \end{pmatrix}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^2\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \dots = \boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

$|\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{9}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{10} & \lambda - \frac{3}{5} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{2}),$

由此可得 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$.

解$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{0}$ 得对应于$\lambda_1 = 1$ 的一个特征向量$\boldsymbol{\xi}_1 = (4, 1)^{\mathrm{T}}$,

解$(\frac{1}{2}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})x = \boldsymbol{0}$ 得对应于$\lambda_2 = 1/2$ 的一个特征向量$\boldsymbol{\xi}_2 = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1}$, $\boldsymbol{A}^n = (\boldsymbol{P}\Lambda\boldsymbol{P}^{-1})^n = \boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^n\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= (\frac{4-3\times 2^{-n-1}}{5}, \ \frac{1+3\times 2^{-n-1}}{5})^{\mathrm{T}}.$$

注: 也可以在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [9/10,2/5;1/10,3/5]; format rat
```

```
>> [P,D] = eig(A)
```

Matlab 执行后得

```
P =
    2112/2177     -985/1393
    528/2177       985/1393
D =
      1              0
      0             1/2
```

为了进一步计算$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$, 即 $\boldsymbol{P}\Lambda^n\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, 在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> syms n  %定义符号变量
>> P*[1,0;0,1/2^n]*P^(-1)*[1/2;1/2]
```

Matlab 执行后得

```
ans =
    [ 4/5-3/10/(2^n)]
    [ 1/5+3/10/(2^n)]
```

【模型分析】当 $n\to\infty$时, $\dfrac{4-3\times 2^{-n-1}}{5}\to\dfrac{4}{5}$, $\dfrac{1+3\times 2^{-n-1}}{5}\to\dfrac{1}{5}$. 这意味着, 随着 n 增加, 熟练工和非熟练工所占百分比趋于稳定, 分别趋向于 80%和 20%.

Matlab 实验题

某地区甲、乙两公司经营同一业务. 经验表明甲公司的客户每年有 1/3 继续留作甲的客户, 而 2/3 转作乙的客户; 乙的客户有 3/5 转作甲的客户, 而 2/5 继续留作乙的客户, 假定客户的总量不变.

(1)假定起始年甲、乙两公司拥有的客户份额分别为 2/3 和 1/3, 求一年后客户市场分配情况;

(2)试确定起始年客户份额, 使甲、乙两公司在一年后市场份额不变.

参考文献

[1] 陈建龙, 周建华, 韩瑞珠, 周后型. 线性代数. 北京: 科学出版社, 2007.
[2] 俞南雁, 韩瑞珠, 周建华, 线性代数与空间解析几何. 北京: 科学出版社, 1999.
[3] 张小向, 陈建龙, 线性代数学习指导. 北京: 科学出版社, 2008.

案例十六. 金融公司支付基金的流动

【模型准备】金融机构为保证现金充分支付, 设立一笔总额 5400 万的基金, 分开放置在位于 A 城和 B 城的两家公司, 基金在平时可以使用, 但每周末结算时必须确保总额仍然为 5400 万. 经过相当长的一段时期的现金流动, 发现每过一周, 各公司的支付基金在流通过程中多数还留在自己的公司内, 而 A 城公司有 10%支付基金流动到B城公司, B城公司则有12%支付基金流动到A城公司. 起初A城公司基金为2600万, B 城公司基金为 2800 万. 按此规律, 两公司支付基金数额变化趋势如何? 如果金融专家认为每个公司的支付基金不能少于 2200 万, 那么是否需要在必要时调动基金?

【模型建立】设第 k+1 周末结算时, A 城公司 B 城公司的支付基金数分别为 a_{k+1}, b_{k+1} (单位:万元), 则有 a_0=2600, b_0=2800,

$$\begin{cases} a_{k+1} = 0.9a_k + 0.12b_k \\ b_{k+1} = 0.1a_k + 0.88b_k \end{cases}.$$

原问题转化为:

(1) 把 a_{k+1}, b_{k+1} 表示成 k 的函数, 并确定 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k$.

(2) 看 $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$ 和 $\lim\limits_{k\to+\infty} b_k$ 是否小于 2200.

【模型求解】由 $\begin{cases} a_{k+1} = 0.9a_k + 0.12b_k \\ b_{k+1} = 0.1a_k + 0.88b_k \end{cases}$ 可得

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ b_{k-1} \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.12 \\ 0.1 & 0.88 \end{pmatrix}$, 则 $\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{k+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{k+1} \begin{pmatrix} 2600 \\ 2800 \end{pmatrix}$. 为了计算 $\boldsymbol{A}^{k+1} \begin{pmatrix} 2600 \\ 2800 \end{pmatrix}$, 在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [0.9,0.12;0.1,0.88];
>> [P,D] = eig(A)
```

Matlab 执行后得

```
P =
     0.7682    -0.7071
     0.6402     0.7071
D =
     1.0000          0
          0     0.7800
```

这意味着 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.78 \end{pmatrix}$, 于是有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^{k+1}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.78^{k+1}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\begin{pmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{k+1}\begin{pmatrix}2600\\ 2800\end{pmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.78^{k+1}\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}2600\\ 2800\end{pmatrix}.$$

在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>> syms k  %定义符号变量
>> P*[1,0;0,0.78^(k+1)]*P^(-1)*[2600;2800]
```

Matlab 执行后得

```
ans =
     [ 32400/11-3800/11*(39/50)^(k+1)]
     [ 27000/11+3800/11*(39/50)^(k+1)]
```

这就是说，$\begin{pmatrix}a_{k+1}\\ b_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{32400}{11}-\dfrac{3800}{11}\bullet\left(\dfrac{39}{50}\right)^{k+1}\\ \dfrac{27000}{11}+\dfrac{3800}{11}\bullet\left(\dfrac{39}{50}\right)^{k+1}\end{pmatrix}$，其中 $\dfrac{39}{50}<1$.

可见$\{a_k\}$单调递增，$\{b_k\}$单调递减，而且 $\lim\limits_{k\to+\infty}a_k=\dfrac{32400}{11}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}b_k=\dfrac{27000}{11}$.

而 $\dfrac{32400}{11}\approx 2945.5$，$\dfrac{27000}{11}\approx 2454.5$，两者都大于 2200，所以不需要调动基金.

<u>Matlab 实验题</u>

请同学们注意，本题中的参数 a 是你的学号后三位，$b = 2a$. 例如，你的学号后三位是 216，则取 $a = 216$, $b = 432$.

金融机构为保证现金充分支付，设立一笔基金，分开放置在位于 A 城和 B 城的两家公司，基金在平时可以使用，但每周末结算时必须确保总额不变. 经过相当长的一段时期的现金流动，发现每过一周，各公司的支付基金在流通过程中多数还留在自己的公司内，而 A 城公司有 10%支付基金流动到 B 城公司，B 城公司则有 12%支付基金流动到 A 城公司. 起初 A 城公司基金为 a 万元，B 城公司基金为 b 万元. 按此规律，两公司支付基金数额变化趋势如何?

案例十七. 选举问题

【模型准备】设有 A, B, C 三个政党参加每次的选举, 每次参加投票的选民人数保持不变. 通常情况下, 由于社会、经济、各党的政治主张等多种因素的影响, 原来投某党票的选民可能改投其他政党.

【模型假设】 (1) 参与投票的选民不变, 而且没有弃权票.

(2) 每次投 A 党票的选民, 下次投票时, 分别有 r_1, r_2, r_3 比例的选民投 A, B, C 政党的票; 每次投 B 党票的选民, 下次投票时, 分别有 s_1, s_2, s_3 比例的选民投 A, B, C 各政党的票; 每次投 C 党票的选民, 下次投票时, 分别有 t_1, t_2, t_3 比例的选民投 A, B, C 各政党的票.

(3) x_k, y_k, z_k 表示第 k 次选举时分别投 A, B, C 各党的选民人数.

【模型建立】根据假设可得

$$\begin{cases} x_{k+1} = r_1 x_k + s_1 y_k + t_1 z_k \\ y_{k+1} = r_2 x_k + s_2 y_k + t_2 z_k \\ z_{k+1} = r_3 x_k + s_3 y_k + t_3 z_k \end{cases}$$

其中 $r_1 + r_2 + r_3 = 1, s_1 + s_2 + s_3 = 1, t_1 + t_2 + t_3 = 1.$

令

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{X}_k = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix},$$

上式可以表示为

$$\boldsymbol{X}_{k+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_k .$$

如果给出问题的初始值, 就可以求出任一次选举时的选民投票情况.

<u>Matlab 实验题</u>

设有 A, B, C 三个政党参加每次的选举. 每次投 A 党票的选民, 下次投票时, 分别有 80%, 10%, 10%比例的选民投 A, B, C 政党的票; 每次投 B 党票的选民, 下次投票时, 分别有 10%, 75%, 15%比例的选民投 A, B, C 各政党的票; 每次投 C 党票的选民, 下次投票时, 分别有 5%, 10%, 85%比例的选民投 A, B, C 各政党的票. 第一次 A, B, C 三个政党获得的票数分别为 1800 万, 2000 万, 1600 万. 求出第 10 次选举时的选民投票情况.

案例十八. 简单的种群增长问题

【模型准备】经过统计, 某地区猫头鹰和森林鼠的数量具有如下规律: 如果没有森林鼠做食物, 每个月只有一半的猫头鹰可以存活, 如果没有猫头鹰作为捕食者, 老鼠的数量每个月会增加 10%. 如果老鼠充足(数量为 R), 则下个月猫头鹰的数量将会增加 $0.4R$. 平均每个月每只猫头鹰的捕食会导致的 104 只老鼠的死亡数. 试确定该系统的演化情况.

【模型假设】不考虑其他因素对猫头鹰和森林鼠的数量的影响.

【模型建立】设猫头鹰和森林鼠在时刻 k 的数量为 $\boldsymbol{x}_k=\begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$, 其中 k 是以月份为单位的时间, O_k 是研究区域中猫头鹰的数量, R_k 是老鼠的数量(单位: 千只). 则

$$O_{k+1} = 0.5O_k + 0.4R_k,$$
$$R_{k+1} = -0.104O_k + 1.1R_k.$$

分析 $\boldsymbol{x}_k$ 的变化趋势.

【模型求解】令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.104 & 1.1 \end{pmatrix}$, 则的特征值 $\lambda_1 = 1.02$, $\lambda_2 = 0.58$. 对应的特征向量为

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

初始向量 $\boldsymbol{x}_0$ 可以写成 $\boldsymbol{x}_0 = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2$. 于是, 对于 $k \ge 0$,

$$\boldsymbol{x}_k = c_1(1.02)^k\boldsymbol{v}_1 + c_2(0.58)^k\boldsymbol{v}_2 = c_1(1.02)^k\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} + c_2(0.58)^k\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $k \to \infty$时, $(0.58)^k$迅速的趋向于 0. 假定 $c_1 > 0$, 则对于所有足够大的 k, $\boldsymbol{x}_k$ 近似地等于 $c_1(1.02)^k\boldsymbol{v}_1$, 写为

$$\boldsymbol{x}_k \approx c_1(1.02)^k\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

k 越大近似程度越高, 所以对于充分大的 k,

$$\boldsymbol{x}_{k+1} \approx c_1(1.02)^{k+1}\begin{pmatrix} 10 \\ 13 \end{pmatrix} = 10.2\,\boldsymbol{x}_k. \qquad (*)$$

【模型分析】上面的(*)式表明, 最后猫头鹰和老鼠的数量几乎每个月都近似增加到原来的 1.02 倍, 即有 2%的月增长率. 而且 O_k 与 R_k 的比值约为 10 比 13, 即每 10 只猫头鹰对应着约 13000 只老鼠.

参考文献

David C. Lay, 线性代数及其应用, 沈复兴, 傅莺莺等译, 北京: 人民邮电出版社, 2009. 页码: 305.

Matlab 实验题

1. 假设在一个自然生态地区生长着一群鹿, 在一段时间内, 鹿群的增长受资源制约的因素较小. 假设:

(1) 公、母鹿占群体总数的比例大致相等, 所以仅考虑母鹿的增长情况;

(2) 鹿群中母鹿的数量足够大, 因而可近似地用实数表示;

(3) 将母鹿分成两组: 一岁以下的称为幼鹿组, 其余的称为成年组;

(4) 将时间离散化, 每年观察一次, 分别用 x_k, y_k 表示第 k 年的幼鹿数及成年鹿数, 且假设各年的环境因素都是不变的;

(5) 分别用 b_1, b_2 表示两个年龄组鹿的雌性生育率, 用 d_1, d_2 表示其死亡率. 出生率、死亡率为常数, 记 $s_1 = 1-d_1$, $s_2 = 1-d_2$;

(6) 鹿的数量不受自然资源的影响;

(7) 刚出生的幼鹿在哺乳期的存活率为 s, 设 $t_1 = sb_1$, $t_2 = sb_2$.

根据以上假设, 求$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$之间的关系式, 并对下面一组数据进行实验:

$x_0 =$ 实验者学号的后三位, $y_0 = 1000$, $t_1 = 0.24$, $t_2 = 1.2$, $s_1 = 0.62$, $s_2 = 0.75$.
预测鹿群的增长趋势如何?

2. 斐波拉契(Fibonacci)兔子问题. 13 世纪初, 欧洲数学家斐波拉契写了一本叫做《算盘书》的著作. 书中有许多有趣的数学题, 其中最有趣的是下面这个题目:

如果一对兔子每月能生 1 对小兔子, 而每对小兔在它出生后的第 3 个月里, 又能开始生 1 对小兔子, 假定在不发生死亡的情况下, 由 1 对初生的兔子开始, 1 年后能繁殖成多少对兔子?

斐波拉契把推算得到的头几个数摆成一串: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

这串数里隐含着一个规律: 从第 3 个数起, 后面的每个数都是它前面那两个数的和. 而根据这个规律推算出来的数, 构成了数学史上一个有名的“斐波拉契数列”. 这个数列有许多奇特的的性质. 例如, 从第 3 个数起, 每个数与它后面那个数的比值, 都很接近于 0.618, 正好与“黄金分割律”相吻合.

记斐波拉契数列为 $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, \ldots$ 先求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 使得

$$\begin{pmatrix} F_{k+2} \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix},$$

再计算出斐波拉契数列的前 20 项, 并计算 $F_3/F_4, F_4/F_5, \ldots, F_{19}/F_{20}$.

案例十九．一阶常系数线性齐次微分方程组的求解

【模型准备】一只虫子在平面直角坐标系内爬行．开始时位于点 $P_0(1, 0)$处．如果知道虫子在点 $P(x, y)$处沿 x 轴正向的速率为 $4x-5y$，沿 y 轴正向的速率为 $2x-3y$．如何确定虫子爬行的轨迹的参数方程?

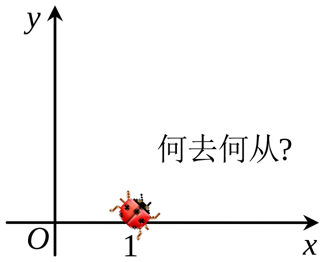

图 31 虫子爬行的轨迹

【模型假设】设 t 时刻虫子所处位置的坐标为$(x(t), y(t))$.

【模型构成】由已知条件和上述假设可知

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x-5y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x-3y, \end{cases} \quad \text{而且}(x(0), y(0)) = (1, 0).$$

现要由此得出虫子爬行的轨迹的参数方程.

【模型求解】令 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$，则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-4 & 5 \\ -2 & \lambda+3 \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-2)$．可见 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$.

$(-\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$;

$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = 0$ 的一个基础解系为: $\xi_2 = (5, 2)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P} = (\xi_1, \xi_2)$，则 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

记 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，并且作线性变换 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，则 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}$,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P}^{-1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{Y},$$

即

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}u/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

故 $u = c_1e^{-t}$, $v = c_2e^{2t}$，即 $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} \\ c_2e^{2t} \end{pmatrix}$．因而

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Y}|_{t=0} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}|_{t=0} = \begin{pmatrix} -2/3 & 5/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}e^{-t}\\ \frac{1}{3}e^{2t}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{X}=\boldsymbol{PY}=\begin{pmatrix}1&5\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}e^{-t}\\ \frac{1}{3}e^{2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{5}{3}e^{2t}\\ -\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}\end{pmatrix}.$$

这就是说，虫子爬行的轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{5}{3}e^{2t},\\ y=-\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{2}{3}e^{2t}.\end{cases}$

如果在 Matlab 命令窗口输入以下命令

```
>>ezplot('-2/3*exp(-t)+5/3*exp(2*t)','-2/3*exp(-t)+2/3*exp(2*t)',[0,1])
>> grid on;
>> axis([0, 12, 0, 5])
```

Matlab 执行后得

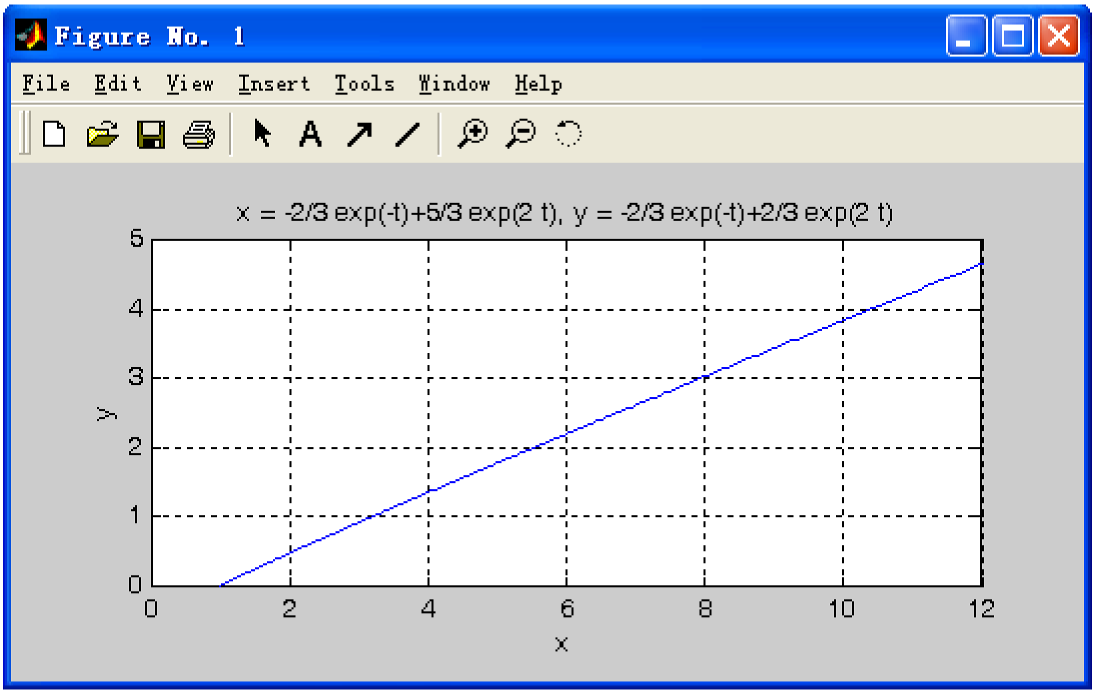

图 32 Matlab 绘制的虫子爬行轨迹

【模型分析】从图 32 可以看出虫子爬行的轨迹接近一条直线.

<u>Matlab 实验题</u>

一只虫子在平面直角坐标系内爬行. 开始时位于点 $P_0(0,\ 1)$处. 如果知道虫子在点 $P(x, y)$处沿 x 轴正向的速率为 $x+y$, 沿 y 轴正向的速率为 $2x-y$. 求虫子爬行的轨迹的参数方程, 并绘制虫子爬行的轨迹.

案例二十. 最值问题

【模型准备】某厂生产两种产品, 物价部门核准的单价分别为 4 元和 8 元. 经过测算, 若两种产品的产量分别为 Q_1, Q_2, 则成本为$(Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 2)$元. 问: 该厂应该如何安排生产, 才能使所得利润最大?

【模型假设】假设按物价部门核准的单价进行计算.

【模型建立】根据已知条件和上述假设, 若两种产品的产量分别为 Q_1, Q_2, 则利润函数为

$$P(Q_1, Q_2) = 4Q_1 + 8Q_1 - (Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 3Q_2^2 + 2).$$

于是原问题就是要确定 Q_1, Q_2 使得 $P(Q_1, Q_2)$达到最大值.

【模型求解】$4Q_1 + 8Q_1 -(Q_1^2 + 2Q_1Q_2 +3Q_2^2 +2) = -(Q_1 + Q_2)^2 -2Q_2^2 + 4Q_1 + 8Q_2 -2.$

令 $Q_1 + Q_2 = x, Q_2 = y$, 则

$$-(Q_1 + Q_2)^2 -2Q_2^2 + 4Q_1 + 8Q_2 -2 = 4 - (x - 2)^2 - (y - 1)^2.$$

由此可见当 $x = 2, y = 1$, 即 $Q_1 = Q_2 = 1$ 时, $P(Q_1, Q_2)$最大.

这就是说, 两种产品的产量相同才能使所得利润最大.

Matlab 实验题

设有半径为 1 球, 球心在坐标原点. 球上点 $P(x, y, z)$处的温度(单位°C)为

$$T(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4xz - 4yz.$$

问球面上哪些点处温度最高, 哪些点处温度最低, 最高温度和最低温度分别是多少?

参考文献

[1] 陈建龙, 周建华, 韩瑞珠, 周后型. 线性代数. 北京: 科学出版社, 2007.
[2] 张小向, 陈建龙, 线性代数学习指导. 北京: 科学出版社, 2008.

附录 数学实验报告模板

20 -20 学年第 学期《 》数学实验报告

姓名：__________ 学号：___________ 得分：__________

实验一. ××××××

【实验目的】

1.
2.

【已知条件】

1.
2.

【实验原理】

1.
2.

【实验步骤】

1.
2.

【实验结果】

【分析与结论】

实验二. ××××××

【实验目的】

1.
2.

【已知条件】

1.
2.

【实验原理】

1.
2.

【实验步骤】

1.
2.

【实验结果】

【分析与结论】