Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 2 für den 5.12.24

Emanuel Schäffer

2. Dezember 2024

Aufgabe 1

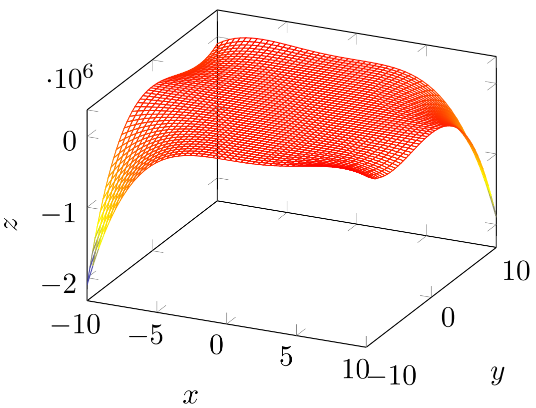
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extrema und geben Sie an, ob es sich um ein lokales oder globales, bzw. ein isoliertes Extremum handelt:

a) $f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$

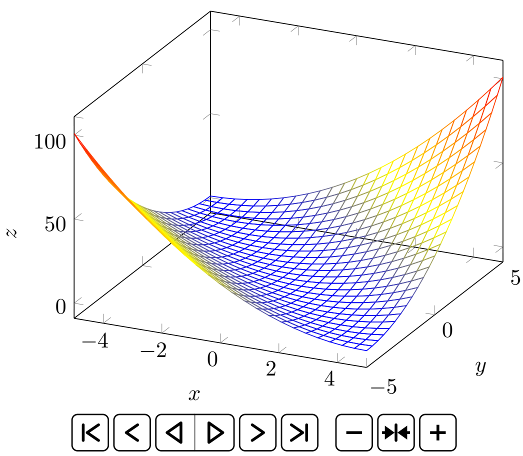
b) $g(x, y) = x^k + (x + y)^2 \qquad (k = 0, 3, 4)$

Lösung Aufgabe 1

$f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$



$g(x, y) = x^0 + (x + y)^2$



a) $f(x,y) = x^3y^2(1-x-y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x,y) = 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2$
Notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass $\nabla f = 0$ also

$$\begin{aligned} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 = 0 = x^2y^2(3-4x-3y) \quad \text{und} \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 = 0 = x^3y(2-2x-3y) \end{aligned}$$

also 1. Lösung: $x = 0$, y beliebig (y-Achse)
und 2. Lösung. $y = 0$, x beliebig (x-Achse)

Außerdem $3 - 4x - 3y = 0$ und $2 - 2x - 3y = 0$ also $1 - 2x = 0$ also 3. Lösung: $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{3}$

$$\operatorname{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Hess} f(0,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{semidefinit}$$

$$\operatorname{Hess} f(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3 - 2x^4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

In Abhängigkeit von x positiv oder negativ semidefinit;

positiv für $0 < x < 1$ und negativ für $x < 0$ oder $x > 1$

$$\operatorname{Hess} f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Hess $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ist negativ definit; also lokales Maximum

b) $g(x,y) = x^k + (x+y)^2 \qquad (k = 0,3,4)$
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = k \cdot x^{k-1} + 2(x+y)$
$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2(x+y)$

Fall $k = 0$
Wegen $g(x,y) = 1 + (x+y)^2 \geq 1$ und $g(x,y) = 1$ für $x + y = 0$
$\Rightarrow$ in allen Punkten der Gerade $x + y = 0$ bzw. $y = -x$ hat g ein Minimum.

Fall $k = 3, 4$

Aus der Bedingung $\nabla f = 0$ folgt:

$2(x + y) = 0$ also $y = -x$ und
$k \cdot x^{k-1} + 2(x + y) = k \cdot x^{k-1} + 2(x - x) = k \cdot x^{k-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ und $y = 0$

$$\text{Hess}\, f(0, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{semidefinit}$$

Fall $k = 3$

$g(x, -x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad$ Wendepunkt

Fall $k = 4$

$g(x, y) = x^4 + (x + y)^2 > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$ und
$g(x, y) = x^4 + (x + y)^2 = 0$ für $(x, y) = 0 \Rightarrow$ lokales Minimum

Aufgabe 2

Gegen sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

a) Berechnen Sie ∇f und zeigen Sie: $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) Zeigen Sie, daß (Hess f)(0) semidefinit ist und daß f auf jeder Geraden durch 0 ein isoliertes Minimum hat.

c) Trotzdem hat f in 0 kein lokales Extremum (zu zeigen!).

Lösung Aufgabe 2

a) $f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2) = 3x^4 - 4x^2 y + y^2$
$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 12x^3 - 8xy = 4x(3x^2 - 2y)$
$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4x^2 + 2y = 2(y - 2x^2)$

Die Bedingung $\nabla f = 0$ führt auf $y - 2x^2 = 0$ bzw. $y = 2x^2$
und auf $4x(3x^2 - 2y) = 4x(3x^2 - 4x^2) = -4x^3 = 0$
$\Rightarrow \quad x = 0$ und $y = 0$

b) Zeigen Sie, daß (Hess f)(0) semidefinit ist und daß f auf jeder Geraden durch 0 ein isoliertes Minimum hat.

$$\text{Hess}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \text{positiv semidefinit}$$

Betrachte f auf der Ortskurve $y = \alpha \cdot x$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ (Alle Geraden durch den Nullpunkt)

$\Rightarrow \phi(x) = f(x, \alpha x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 3x^2) = 3x^4 - 4\alpha x^3 + \alpha^2 x^2$
$\phi'(x) = 12x^3 - 8\alpha x^2 + 2\alpha^2 x \quad \Rightarrow \phi'(x) = 0$
$\phi''(x) = 36x^2 - 16\alpha x + 2\alpha^2 \quad \Rightarrow \phi''(0) > 0$

Also hat f auf der Geraden $y = \alpha x$ in $(0,0)$ ein Minimum

c) Trotzdem hat f in 0 kein lokales Extremum (zu zeigen!).
Betrachte f auf der Ortskurve $y = 2x^2$

$\Rightarrow f(x, 2x^2) = x^2(-x^2)$

und betrachte f auf der Ortskurve $y = 0$ (x-Achse)

$\Rightarrow f(x,0) = 3x^4$ Also hat f in $(0,0)$ kein lokales Extremum (Sattelpunkt)

Aufgabe 3

Gegen sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß im Punkt $(0,0)$ alle Richtungsableitungen existieren. Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

(Hinweis: Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach. Betrachten Sie einen Kreis um den Nullpunkt und lassen Sie den den Radius des Kreises gegen Null streben).

Lösung Aufgabe 3

Gegeben sei ein Kreis um den Nullpunkt $(0,0)$ in $\mathbb{R}^2$ durch $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2 + v^2 = 1$

Betrachte nun f auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Kreisradius $\to 0$

Allgemein gilt daher:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cdot u, t\cdot v) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot u\cdot (t\cdot v)^3}{t\cdot [(t\cdot u)^2 + (t\cdot v)^6]} = \lim_{t\to 0} t\cdot \frac{u\cdot v^3}{u^2 + t^4\cdot v^6} = 0$$

sowohl für $u \neq 0$ da $\left|\frac{u \cdot v^3}{u^2+t^4 \cdot v^6}\right| < \left|\frac{u \cdot v^3}{u^2}\right| <$ Konstante, als auch $u = 0$ (und $v = 1$)

Daher existieren alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ und haben den Wert 0.

f ist aber in $(0,0)$ nicht total differenzierbar:

wegen $f(y^3, y) = \frac{y^6}{y^6+y^6} = \frac{1}{2}$ für $y \to 0$ und $f(0,0) = 0$
ist f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig, also an der Stelle $(0,0)$ nicht total differenzierbar.