Analysis 2 Formelsammlung

Emanuel Schäffer

June 28, 2024

Differentialgleichungen

Differentialgleichungen welche nicht auf dem Gesetz von Torricelli basieren:

Aquarium

In einem Meerwasseraquarium von $V_0 = 2700\text{L}$ und erwünschten Salzgehalt von 3.5% wird versehentlich Salzwasser eingefüllt (Salzgehalt 0%). Im Aquarium befinden sich kostbare Fische, die bei 0% Salzgehalt sterben werden.

Lösungsalternativen:
a) Transport ins Notbecken → 50% Verlust.
b) Meerwasser zu pumpen: Pumpleistung beträgt 18L/min. Durch Überfluss fließt die gleiche Menge Wasser ab. Solange nicht ein Salzgehalt von 2% erreicht ist, stirbt alle 3 Minuten ein Fisch.
c) Ablassen & neu füllen
Zu b):
Neue Salzmenge = Alte Salzmenge - Verlust + Zuwachs

$$S(t + \Delta t) = S(t) - \frac{1}{150} S(t)\Delta t + 0.63\Delta t$$

Mit Verlust: $\frac{18\text{kg}}{min} \cdot \frac{S(t)}{2700}\Delta t$ und Zuwachs: $18\text{L/min} \cdot 0.035 \cdot \Delta t$

$$
\begin{aligned}
S(t+\Delta t) &= S(t) - \frac{1}{150}S(t)\Delta t + 0.63\Delta t \quad | - S(t) : \Delta t \\
S'(t) &= -\frac{1}{150}S(t) + 0.63 \\
\frac{dS}{dt} &= -\frac{1}{150}S(t) + 0.63 \qquad a = 0.63, b = -\frac{1}{150} \\
\frac{dS}{dt} &= a + b \cdot S(t) \quad | \cdot dt \cdot \frac{1}{a + b \cdot S(t)} \int \\
\int \frac{1}{a + b \cdot S(t)} dS &= \int 1 dt \\
\Rightarrow \frac{1}{b} \ln(a + bS) &= t + C \quad | \cdot b \\
\ln(a + bS) &= bt + \bar{C} \quad | e^{\square} \\
a + bS &= e^{bt} \cdot \bar{C} \quad | - a : b \\
\Rightarrow S(t) &= \frac{e^{bt} \cdot \bar{C} - a}{b} \\
S(t) &= (e^{-\frac{1}{150}t} \cdot \bar{C} - 0.63)(-150) \\
S(0) &= (\bar{C} - 0.63)(-150) \\
&= -150\bar{C} + 94.5 \\
&= \bar{C} = 0.63 \\
\Rightarrow S(t) &= \frac{a}{b}e^{bt} - \frac{a}{b} S(t) = -94.5(e^{-\frac{1}{150}t} - 1)
\end{aligned}
$$

Frage: Wann sind 2% Salzgehalt erreicht?

$$
\begin{aligned}
54 &= 94.5(1 - e^{-\frac{1}{150}t}) \\
t &= 127.095 \,\mathrm{min} \\
127/3 &= 42.3 \text{ Fische tot}
\end{aligned}
$$

Tank

In einem Tank werden pro Minute 6% des Inhaltes abgelassen und 60L/min. eingelassen.

Neuer Füllstand = Alter Füllstand - Verlust + Zuwachs

$$
w(t+\Delta t) = w(t) - 0.06w(t)\Delta t + 90\Delta t
$$

$$
\begin{aligned}
w(t+\Delta t) &= w(t) - 0.06w(t)\Delta t + 90\Delta t \quad | - w(t) : \Delta t \\
\frac{dw}{dt} &= -0.06w(t) + 90 \quad | \frac{1}{-0.06w(t)+90} \cdot dt \int \\
\int \frac{1}{-0.06w(t)+90} dw &= \int 1 dt \\
-\frac{100}{6} \ln(-0.06w(t)+90) &= t + C \quad | \cdot -\frac{6}{100} e^{\square} \\
-0.06w(t) + 90 &= e^{-\frac{6}{100}t} \cdot \bar{C} \quad | - 90 \cdot \frac{1}{-0.06} \\
w(t) &= 1500 - \frac{1}{0.06} e^{-\frac{6}{100}t} \cdot \bar{C} \\
w(0) &= 1500 - \frac{1}{0.06}\bar{C} = 400 \\
\bar{C} &= 66 \\
w(t) &= 1500 - 1100e^{-\frac{6}{100}t}
\end{aligned}
$$

Chemielabor Tank

Ein Tank im Chemielabor enthält 1000 l Wasser, in dem anfänglich 50 kg Salz gelöst sind. Pro Minute werden kontinuierlich 10 Liter Salzlösung entnommen und 10 Liter Wasser mit einem Salzgehalt von 2 kg zugeführt. (Es wird vorausgesetzt, dass die Salzverteilung im Tank stets homogen ist). Wie viel Salz befindet sich nach 1 Stunde im Tank?

Neue Salzmenge = Alte Salzmenge + Zuwachs - Abfluss

$$
S(t+\Delta t) = S(t) + 2\Delta t - \frac{S(t) \cdot 10}{1000} \Delta t
$$

$$
\begin{aligned}
S(t+\Delta t) &= S(t) + 2\Delta t - \frac{S(t)\cdot 10}{1000}\Delta t \quad | - S(t) : \Delta t \\
\frac{dS}{dt} &= 2 - 0.01S(t) \quad | \frac{1}{2-0.01S(t)} \cdot dt \int \\
\frac{1}{2-0.01S(t)} dS &= 1dt \\
\ln(2-0.01S(t))(-100) &= t + C \quad | : -100 \\
\ln(2-0.01S(t)) &= -0.01t + \bar{C} \quad | e^{\square} \\
2 - 0.01S(t) &= e^{-0.01t}\bar{C} \quad | -2 : -0.01 \\
S(t) &= 200 - e^{-0.01t}\bar{C} \\
S(0) &= 200 - \bar{C} = 50 \quad | -200 \cdot (-1) \\
S(0) &= \bar{C} = 150 \\
S(t) &= 200 - 150e^{-0.01t} \\
S(60) &= 200 - 150e^{-0.01\cdot 60} = 117.67\text{kg}
\end{aligned}
$$

Cäsium

Für Forschungszwecke wird 10g radioaktives Material Cäsium 137 beschafft. Es hat eine Halbwertszeit von 30 Jahre

a(3) Stellen Sie die zur obigen Aufgabenstellung zugehörige Differentialgleichung auf.
b(3) Lösen Sie die gefundene Differentialgleichung unter Berücksichtigung der gegebenen Anfangsbedingungen.
c(3) Bestimmen Sie aus der Halbwertszeit die Zerfallskonstante k und geben Sie das Zerfallsgesetz für Cäsium 137
d(3) Wie viel Cäsium ist nach 100 Jahren zerfallen (zur Kontrolle k = 0.0231)
e(3) Nach welcher Zeit ist noch 30% der ursprünglichen Aktivität messbar?

Neue Masse = Alte Masse - Verlust

und für den Verlust gilt:
Der Verlust ist proportional zur aktuellen vorhandenen Masse und zur Zerfallskonstanten k und zur vergangenen Zeit.

$$C(t\Delta t) = C(t) - C(t) \cdot k \cdot \Delta t$$

$$
\begin{aligned}
C(t\Delta t) &= C(t) - C(t)\cdot k\cdot \Delta t \quad | - C(t) : \Delta t \\
\frac{dC}{dt} &= -C(t)\cdot k \quad |\frac{1}{C}\cdot dt \int \\
\int \frac{1}{C} dC &= -k\int dt \\
\ln(C) &= -kt + Konst \quad |e^{\square} \\
C(t) &= e^{-kt} Konstz \\
C(0) &= Konstz = 10 \\
C(t) &= 10e^{-kt} \\
C(30) &= 10e^{-k30} = 5 \quad | : 10 \\
e^{-k30} &= \frac{1}{2} \quad | \ln \\
-k30 &= \ln(\frac{1}{2}) \quad | : -30 \\
k &= \frac{\ln(\frac{1}{2})}{-30} = 0.023104 \\
C(t) &= 10e^{-0.023104t} \\
C(100) &= 10e^{-0.023104\cdot 100} = 0.9922 \\
C(t) &= 10e^{-0.023104t} = 3 \\
t &= \frac{\ln(0.3)}{-0.023104} = 52.11 \text{ Jahre}
\end{aligned}
$$