Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 2 für den 21.11.24

Emanuel Schäffer

19. November 2024

Aufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Satz: Eine Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $\vec{a}$, wenn alle ihre Koordinatenfolgen gegen entsprechende Koordinaten von $\vec{a}$ konvergieren.

Lösung Aufgabe 1:

Konvergiert also die Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\vec{a}$ dann gilt gemäß Definition:

$$\|\vec{a}_n - \vec{a}\| < \varepsilon \quad \forall \quad n \geq \mathbb{N}(\varepsilon)$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$ beziehungsweise $\lim\limits_{n\to\infty} \|\vec{a}_n - \vec{a}\| = 0$
Wegen der Definition der Norm folgt aus $\|\vec{a}_n - \vec{a}\| = 0$ das alle Komponenten des Vektors $\vec{a}_n - \vec{a}$ Null sein müssen. Also konvergieren alle Komponenten der Folge $\vec{a}_n$ gegen die entsprechende Komponente von $\vec{a}$

Konvergiert umgekehrt jede Komponente i der Folge $\vec{a}_n$ gegen die entsprechende Komponente von $\vec{a}$ sprich a_i so gilt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} |a_i^{(n)} - a_i| = 0$
dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|\vec{a}_n - \vec{a}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + (a_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots} = 0$ also konvergiert die Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\vec{a}$

Aufgabe 2

a) In der industriellen Fertigung werden bei der Qualitätskontrolle Bauteile vermessen und die Werte $x_1, \ldots, x_n$ ermittelt. Der Vektor $\vec{d} = \vec{x} - \vec{s}$ gibt die Abweichungen der Messungen zu den Sollwerten $s_1, \ldots, s_n$ an. Definieren Sie nun eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ derart, daß $\|\vec{d}\| < \varepsilon$ gdw. all Abweichungen vom Sollwert kleiner als eine gegebene Toleranz ε sind.

b) Beweisen Sie, daß die in a) definierte Norm alle Axiome einer Norm erfüllt.

Lösung Aufgabe 2

a) Die in Frage kommende Abbildung ist die sogenannte Maximum-Norm:

$\|\vec{x}\|_{max} := \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$

b) Die Abbildung $\| \quad \|_{max} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Norm wegen:

1. Aus $\|\vec{x}\|_{max} = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = 0$ folgt $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$
2. Es gilt $\|\lambda \cdot \vec{x}\|_{max} = \max(|\lambda \cdot x_1|, \ldots, |\lambda \cdot x_n|) = |\lambda| \cdot \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_{max} \, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
3. Es gilt $\|\vec{x} + \vec{y}\|_{max} = \max(|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|) \leq \max(|x_1| + |y_1|, \ldots, |x_n| + |y_n|) \leq \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) + \max(|y_1|, \ldots, |y_n|) = \|\vec{x}\|_{max} + \|\vec{y}\|_{max} \, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ Dreiecksungleichung

Aufgabe 3

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1}$ folgender Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

a) $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$

b) $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3}$

c) $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2 + x_3)}$

d) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2)$

e) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + a \cdot x_2)$

Lösung Aufgabe 3

a) $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{|\vec{x}|}$

$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{|\vec{x}|}$

$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{x_3}{|\vec{x}|}$

b) $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3} = e^{\ln(x_1^{x_2})} + e^{\ln(x_1^{x_3})} = e^{x_2 \cdot \ln(x_1)} + e^{x_3 \cdot \ln(x_1)}$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_1^{x_2-1} + x_3 \cdot x_1^{x_3-1}$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2 \cdot \ln(x_1)} \cdot \ln(x_1) = x_1^{x_2} \cdot \ln(x_1)$
$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{x_3} \ln(x_1)$

c) $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2+x_3)} = x_1^{x_2} \cdot x_1^{x_3} = e^{x_2 \ln(x_1)} \cdot e^{x_3 \ln(x_1)}$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_2 + x_3) \cdot x_1^{(x_2+x_3)-1}$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2 \ln(x_1)} \cdot e^{x_3 \ln(x_1)} \cdot \ln(x_1) = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot \ln(x_1)$
$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot \ln(x_1)$

d) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 + x_2) \cdot 1$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos(x_1 + x_2) \cdot 1$
$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$

e) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + a \cdot x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot 1$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot a$
$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Ableitungsmatrix der Funktion $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1 x_2 x_3} \\ \sin(x_1 x_2 x_3) \end{pmatrix}$.

Lösung Aufgabe 4

$$d\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{x_2 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_2}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}} \\ \cos(x_1 x_2 x_3) x_2 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Geben Sie für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{xy} \\ \sin(e^x + e^y) \end{pmatrix}$ die Tangentialebene im Punkt $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

Lösung Aufgabe 5

$$d\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{xy}}, & \frac{x}{2\sqrt{xy}} \\ \cos(e^x + e^y) \cdot e^x, & \cos(e^x + e^y) \cdot e^y \end{pmatrix}$$

Die Funktion der Tangentialebene lautet:

$$\vec{g}(x,y) = \vec{f}(x_0,y_0) + d\vec{f}(x_0,y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sin(e^1 + e^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{2\sqrt{2}}, & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cos(e^1 + e^2) \cdot e^1, & \cos(e^1 + e^2) \cdot e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (y-2) \\ \sin(e(1+e)) + \cos(e(1+e))e \cdot (x-1) + \cos(e(1+e))e^2 \cdot (y-2) \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 + x - 1 + \frac{y}{2} - 1) \\ \sin - e \cdot \cos + e \cdot x \cdot \cos - 2e^2 \cdot \cos + y \cdot e^2 \cos \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + \frac{y}{2}) \\ \sin + \cos\left[-e - 2e^2 + x \cdot e + y \cdot e^2\right] \end{pmatrix}
\end{aligned}$$