1 Übungsaufgaben Analysis 1 für den 19. und 21.06.24

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Nullstellen, Pole und Asymptoten von

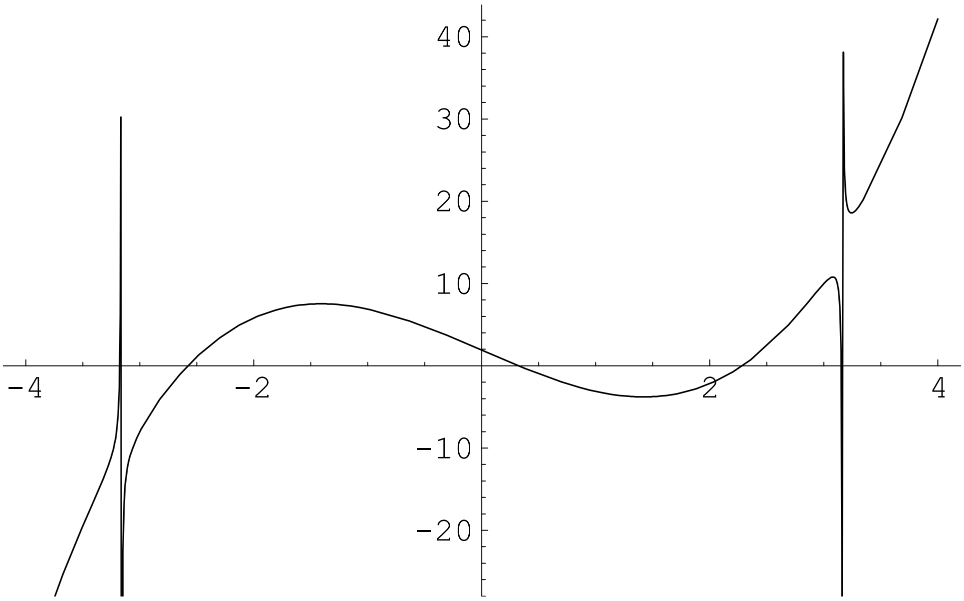
$$\frac{x^5 - 16x^3 + 2x^2 + 60x - 19}{x^2 - 10}.$$

Bei Nullstellen und Polen wird eine Genauigkeit von mindestens 10^{-3} gefordert. Wenn Sie das Verhalten der Funktion kennen, skizzieren Sie den Graphen.

Lösung zu Aufgabe 1

$$\frac{x^5 - 16x^3 + 2x^2 + 60x - 19}{x^2 - 10} = x^3 - 6x + 2 + \frac{1}{x^2 - 10}.$$

Verhalten für kleine x und für große x wie $x^3 - 6x + 2$. Im Bereich um $x = \sqrt{10}$ und $x = -\sqrt{10}$ je ein Polwechsel von $-\infty$ nach ∞.



Aufgabe 2

Welche Kurve erhalten Sie, wenn Sie eine Potenzfunktion $f(x) = c\,x^m$ auf doppelt logarithmisches Millimeterpapier zeichnen? Warum? (Beweis!). Welche Art von Millimeterpapier benötigen Sie um für eine Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ den gleichen Effekt zu erzielen?

Lösung zu Aufgabe 2

$$\begin{aligned} f(x) &= c\,x^m && (1)\\ \log(f(x)) &= \log c + m \log x && (2) \end{aligned}$$

Trägt man $\log(f(x))$ über $\log x$ auf, so erhält man eine Gerade.

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x && (3)\\ \log(f(x)) &= \log a \cdot x && (4) \end{aligned}$$

Trägt man nun $\log(f(x))$ über x auf, so erhält man eine Gerade.

Aufgabe 3

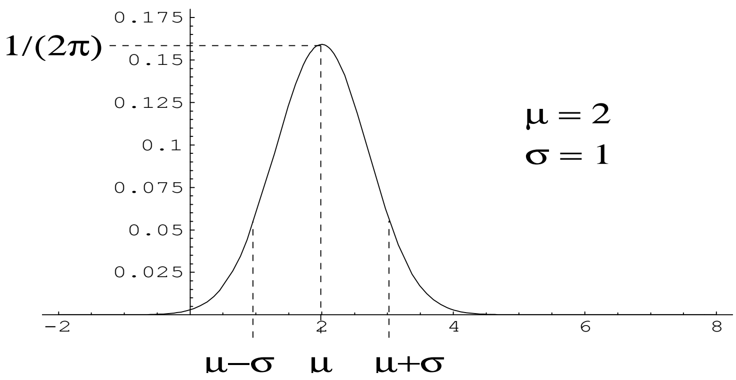
Führen Sie eine vollständige Kurvendiskussion durch für die Gauß'schen Normalverteilung mit der Dichtefunktion

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Skizzieren Sie den Graphen. Welche Bedeutung haben die Parameter μ und σ?

Lösung zu Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
&\text{Asymptote: } y = 0 && (5)\\
\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} = a \cdot e^{-b(x-\mu)^2} && (6)\\
\text{mit } a &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ und } b = \frac{1}{2\sigma^2} && (7)\\
\varphi \text{ ist symmetrisch zu } x &= \mu. && (8)\\
\varphi'(x) &= -2ab(x-\mu)e^{-b(x-\mu)^2} && (9)\\
\varphi'(\mu) &= 0 \text{ und } \varphi''(\mu) < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi \text{ hat Maximum in } x = \mu. && (10)\\
\varphi''(x) &= -2ab[1-2b(x-\mu)^2]e^{-b(x-\mu)^2} && (11)\\
\varphi''(x) &= 0 && (12)\\
\Leftrightarrow \quad (x-\mu)^2 - \frac{1}{2b} &= 0 && (13)\\
\Leftrightarrow \quad x_{1,2} &= \mu \pm \sigma && (14)\\
\varphi'''(x_{1,2}) &\neq 0 && (15)
\end{aligned}$$



Aufgabe 4

Führen Sie für die Funktion $f(x) = \ln(\cos x)$ eine Kurvendiskussion durch. Nehmen Sie Stellung zu: Definitionsbereich, Stetigkeit, Symmetrie, Nullstellen, Grenzwerte für $x \to \pm\pi/2$, Lokale Extrema, Wendepunkte, Grenzwert für $x \to \infty$ und erstellen Sie eine Skizze der Funktion.

Lösung zu Aufgabe 4

Def.-Bereich: $D = \{x \in \mathbb{R} | -\pi/2 + k2\pi < x < \pi/2 + k2\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}\}$

Stetigkeit: f stetig auf D, da ln und cos stetig.

Symmetrie: $f(-x) = \ln(\cos(-x)) = \ln(\cos(x)) = f(x) \quad \Rightarrow \quad$ symmetr. zur y-Achse.

Nullstellen:

$$\ln(\cos x) = 0 \tag{16}$$

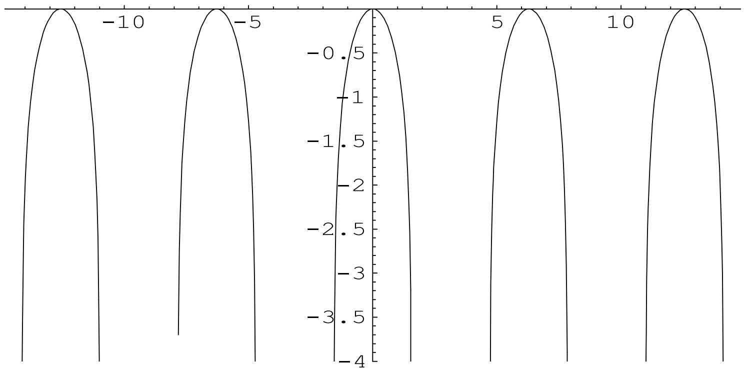
$$\cos x = e^0 = 1 \tag{17}$$

$$x = \arccos 1 \tag{18}$$

$\Rightarrow \quad$ Nullstellen für $x = k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Grenzwerte: $\lim_{x \to \pm\pi/2} \ln(\cos x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to \infty} \ln(\cos x)$ existiert nicht

Graph:



Aufgabe 5

Beweisen Sie daß für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $a^{(x+y)} = a^x a^y$.

Lösung zu Aufgabe 5

$a^{(x+y)} = \exp((x+y) \cdot lna) = \exp(x \cdot lna + y \cdot lna) = \exp(x \cdot lna) \cdot \exp(y \cdot lna) = a^x \cdot a^y$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Ableitung von arcsin mit Hilfe eines geeigneten Satzes aus der Vorlesung.

Lösung zu Aufgabe 6

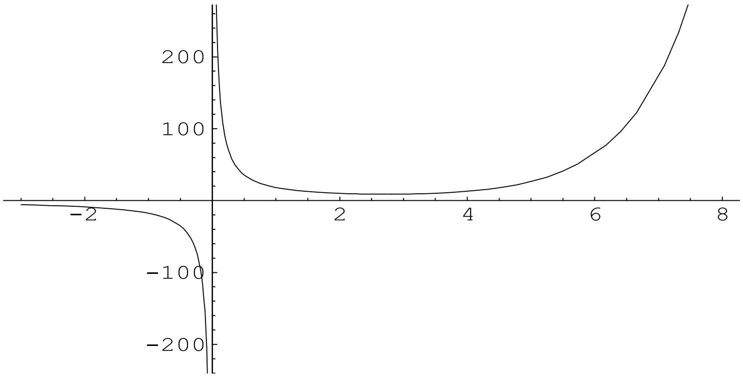
$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Aufgabe 7

Aus Messungen seien die unbekannten Parameter a und b der Funktion $y = a \cdot \exp(x) + b \cdot 1/x$ zu bestimmen. Es liegen die beiden Wertpaare $(x_1, y_1) = (2, 10)$ und $(x_2, y_2) = (3, 9)$ vor. Untersuchen Sie die gefundene Funktion auf Extrema.

Lösung zu Aufgabe 7

$a \approx 0.1539$, $b \approx 17.73$
f hat keine Nullstellen
Minimum bei $x \approx 2.735$.
Pol bei $x = 0$.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$



Aufgabe 8

Berechnen Sie die 1. Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{e^{-x}\cos(x+\pi/4)}{x}$$

Lösung zu Aufgabe 8

$$f'(x) = -e^{-x}\left[\frac{\sin(x+\pi/4)}{x} + \frac{x+1}{x}\cos(x+\pi/4)\right]$$

Aufgabe 9

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

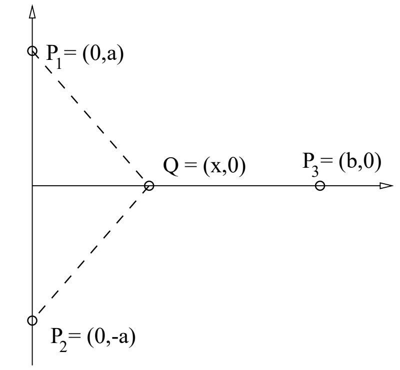
a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_{10} x}{\ln(\sin x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 5^x}{\sin x}$

Lösung zu Aufgabe 9

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log_{10} x}{\ln(\sin x)} = \frac{1}{\ln 10}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 5^x}{\sin x} = 1 - \ln 5$

Aufgabe 10

In der x-y-Ebene sind gemäß Skizze vier Punkte gegeben. Die Lage der Punkte P_1, P_2, P_3 ist vorgegeben. Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes $Q = (x, 0)$ auf der x-Achse, so daß die Summe der Abstände zu den anderen Punkten ein Minimum wird.



Lösung zu Aufgabe 10

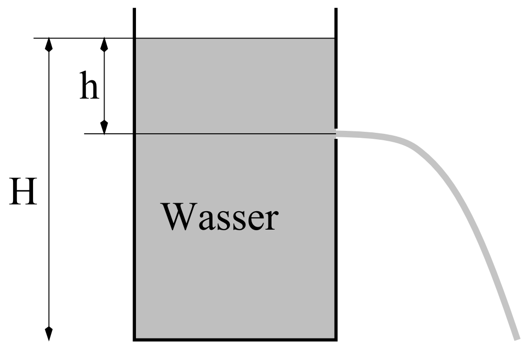
Summe der Abstände $S(x) = 2 \cdot \overline{QP_1} + \overline{OP_3} = 2 \cdot \sqrt{x^2 + a^2} + b - x$

$S'(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1/\sqrt{3} \cdot a$

$S''(x) = 1.29/a > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum.

Aufgabe 11

Das nebenstehende Bild zeigt einen mit Wasser gefüllten Zylinder. In der Höhe $H-h$ über dem Boden befindet sich eine seitliche Öffnung, aus der das Wasser mit der Geschwindigkeit $v_0 = \sqrt{2gh}$ waagerecht austritt. In welcher Höhe $H - h$ muß man diese Öffnung anbringen, damit der austretende Wasserstrahl den Boden an einer möglichst weit entfernten Stelle trifft? (Nehmen Sie an, die Wasserhöhe H sei konstant.)



Lösung zu Aufgabe 11

Papula-Übungen S. 78.