

# Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 2 für den 21.11.24

Emanuel Schäffer

20. November 2024

## Aufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Satz: Eine Vektorfolge  $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann gegen  $\vec{a}$ , wenn alle ihre Koordinatenfolgen gegen entsprechende Koordinaten von  $\vec{a}$  konvergieren.

### Lösung Aufgabe 1:

Konvergiert also die Vektorfolge  $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\vec{a}$  dann gilt gemäß Definition:

$$\|\vec{a}_n - \vec{a}\| < \varepsilon \quad \forall \quad n \geq N(\varepsilon)$$

also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{a}_n = \vec{a}$  beziehungsweise  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{a}_n - \vec{a}\| = 0$

Wegen der Definition der Norm folgt aus  $\|\vec{a}_n - \vec{a}\| = 0$  das alle Komponenten des Vektors  $\vec{a}_n - \vec{a}$  Null sein müssen. Also konvergieren alle Komponenten der Folge  $\vec{a}_n$  gegen die entsprechende Komponente von  $\vec{a}$

Konvergiert umgekehrt jede Komponente  $i$  der Folge  $\vec{a}_n$  gegen die entsprechende Komponente von  $\vec{a}$  sprich  $a_i$  so gilt wegen  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_i^{(n)} - a_i| = 0$

dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\vec{a}_n - \vec{a}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + (a_2^{(n)} - a_2)^2 + \dots} = 0$  also konvergiert die Vektorfolge  $(\vec{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen  $\vec{a}$

## Aufgabe 2

- a) In der industriellen Fertigung werden bei der Qualitätskontrolle Bauteile vermessen und die Werte  $x_1, \dots, x_n$  ermittelt. Der Vektor  $\vec{d} = \vec{x} - \vec{s}$  gibt die Abweichungen der Messungen zu den Sollwerten  $s_1, \dots, s_n$  an. Definieren Sie nun eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  derart, daß  $\|\vec{d}\| < \varepsilon$  gdw. alle Abweichungen vom Sollwert kleiner als eine gegebene Toleranz  $\varepsilon$  sind.
- b) Beweisen Sie, daß die in a) definierte Norm alle Axiome einer Norm erfüllt.

## Lösung Aufgabe 2

- a) Die in Frage kommende Abbildung ist die sogenannte Maximum-Norm:

$$\|\vec{x}\|_{\max} := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

- b) Die Abbildung  $\|\cdot\|_{\max} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine Norm wegen:

1. Aus  $\|\vec{x}\|_{\max} = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0$  folgt  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$
2. Es gilt  $\|\lambda \cdot \vec{x}\|_{\max} = \max(|\lambda \cdot x_1|, \dots, |\lambda \cdot x_n|) = |\lambda| \cdot \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|_{\max} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$
3. Es gilt  $\|\vec{x} + \vec{y}\|_{\max} = \max(|x_1 + y_1|, \dots, |x_n + y_n|) \leq \max(|x_1| + |y_1|, \dots, |x_n| + |y_n|) \leq \max(|x_1|, \dots, |x_n|) + \max(|y_1|, \dots, |y_n|) = \|\vec{x}\|_{\max} + \|\vec{y}\|_{\max} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$   
Dreiecksungleichung

## Aufgabe 3

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$  folgender Funktionen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

- a)  $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$
- b)  $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3}$
- c)  $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2+x_3)}$
- d)  $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2)$
- e)  $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + a \cdot x_2)$

## Lösung Aufgabe 3

- a)  $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
- $$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{|\vec{x}|}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{|\vec{x}|}$$
- $$\frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{x_3}{|\vec{x}|}$$

- b)  $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3} = e^{\ln(x_1^{x_2})} + e^{\ln(x_1^{x_3})} = e^{x_2 \cdot \ln(x_1)} + e^{x_3 \cdot \ln(x_1)}$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_1^{x_2-1} + x_3 \cdot x_1^{x_3-1}$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2 \cdot \ln(x_1)} \cdot \ln(x_1) = x_1^{x_2} \cdot \ln(x_1)$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{x_3} \ln(x_1)$
- c)  $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2+x_3)} = x_1^{x_2} \cdot x_1^{x_3} = e^{x_2 \ln(x_1)} \cdot e^{x_3 \ln(x_1)}$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_2 + x_3) \cdot x_1^{(x_2+x_3)-1}$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2 \ln(x_1)} \cdot e^{x_3 \ln(x_1)} \cdot \ln(x_1) = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot \ln(x_1)$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot \ln(x_1)$
- d)  $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2)$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 + x_2) \cdot 1$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos(x_1 + x_2) \cdot 1$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$
- e)  $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + a \cdot x_2)$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot 1$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_2} = \cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot a$   
 $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$

## Aufgabe 4

Berechnen Sie die Ableitungsmatrix der Funktion  $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1 x_2 x_3} \\ \sin(x_1 x_2 x_3) \end{pmatrix}$ .

### Lösung Aufgabe 4

$$d\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{x_2 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_2}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}} \\ \cos(x_1 x_2 x_3) x_2 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 5

Geben Sie für  $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{xy} \\ \sin(e^x + e^y) \end{pmatrix}$  die Tangentialebene im Punkt  $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  an.

### Lösung Aufgabe 5

$$d\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{xy}}, & \frac{x}{2\sqrt{xy}} \\ \cos(e^x + e^y) \cdot e^x, & \cos(e^x + e^y) \cdot e^y \end{pmatrix}$$

Die Funktion der Tangentialebene lautet:

$$\vec{g}(x, y) = \vec{f}(x_0, y_0) + d\vec{f}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Mit  $x_0 = 1$  und  $y_0 = 2$  folgt:

$$\begin{aligned} \vec{g}(x, y) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sin(e^1 + e^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{2\sqrt{2}}, & \cos(e^1 + e^2) \cdot e^1, & \cos(e^1 + e^2) \cdot e^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (y - 2) \\ \sin(e(1 + e)) + \cos(e(1 + e))e \cdot (x - 1) + \cos(e(1 + e))e^2 \cdot (y - 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 + x - 1 + \frac{y}{2} - 1) \\ \sin - e \cdot \cos + e \cdot x \cdot \cos - 2e^2 \cdot \cos + y \cdot e^2 \cos \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + \frac{y}{2}) \\ \sin + \cos [-e - 2e^2 + x \cdot e + y \cdot e^2] \end{pmatrix} \end{aligned}$$