Aufgabe 1

(10 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1-\cos(x)}{x}$.

a(7) Bestimmen Sie das Taylorpolynom fünften Grades von f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ (Sie können zur Lösung bekannte Taylorreihen verwenden.).

Taylorreihe für $\cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$

$$\Rightarrow T_{f,0}(x) = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)}{x} = \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}}{x} = \frac{x}{2!} - \frac{x^3}{4!} + \frac{x^5}{6!}$$

b(3) Bestimmen Sie den Fehler an der Stelle $x = 2\pi$

$$f(2\pi) = \frac{1 - cos(2\pi)}{2\pi} = \frac{1-1}{2\pi} = 0$$

$$\begin{aligned}
T_{f,0}(2\pi) &= \frac{2\pi}{2!} - \frac{(2\pi)^3}{4!} + \frac{(2\pi)^5}{6!} \\
&= \frac{2\pi}{2} - \frac{8\pi^3}{24} + \frac{32\pi^5}{720} \\
&= \pi - \frac{\pi^3}{3} + \frac{2\pi^5}{45} \\
&= \pi \left(1 - \frac{\pi^2}{3} + \frac{2\pi^4}{45}\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

(15 Punkte, ohne Gewähr)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f(x,y) = 3x^2y + 2y^3 - 6y - 1$
Außerdem sei gegeben der Richtungsvektor $\vec{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

a(7) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(x,y)$ und die Hessematrix $Hf(x,y)$.

b(3) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f im Punkt $P(-1,1)$ in Richtung $\vec{a}$.

c(5) Bestimmen Sie alle Extrema von f und bestimmen Sie ob an diesen Stellen ein lokales Maximum, ein lokales Minimum, ein Sattelpunkt oder keines der vorhergehenden Möglichkeiten vorliegt.

Lösung

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + 6y^2 - 6$$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}6xy\\3x^2+6y^2-6\end{pmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix}6y & 6x\\6x & 12y-6\end{pmatrix}$$

b)

$$\nabla f(-1,1) = \begin{pmatrix}6(-1)(1)\\3(-1)^2+6(1)^2-6(1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3+6-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}$$

$$\nabla f(-1,1)\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-6\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-6\cdot1+3\cdot(-1)) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-6-3) = -\frac{9\sqrt{2}}{2}$$

c) Extrema $\Rightarrow \nabla f(x,y) = 0$

$$\Rightarrow 6xy = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \,\text{oder}\, y = 0$$

$$\text{für } x = 0 \Rightarrow 6y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \quad \Rightarrow y_{1,2} = \pm 1$$

$$\text{für } y = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \quad \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$P_1(0,1), P_2(0,-1), P_3(\sqrt{2},0), P_4(-\sqrt{2},0)$$

$$Hf(0,1) = \begin{pmatrix}6 & 0\\0 & 12\end{pmatrix} \text{ positiv definit} \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix}-6 & 0\\0 & -12\end{pmatrix} \text{ negativ definit} \Rightarrow \text{Maximum}$$