Übungsaufgaben Mathematik 1 Analysis für die Übungen am 5. und 7.6.24

3. Juni 2024

Aufgabe 1

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit (skizzieren Sie jeweils den Graphen):

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1}{x-1} & \text{sonst} \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{falls } x > 0 \\ (x+4)^2 & \text{sonst} \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 & \text{falls } x > 0 \\ (x+2)^2 & \text{sonst} \end{cases}$ e) $f(x) = |x|$ f) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ g) $f(x) = \left| \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor - x \right|$

Lösung zu Aufgabe 1

a) stetig

b) unstetig

c) unstetig in $x = 0$

d) stetig

e) stetig

f) unstetig in allen $x \in \mathbb{Z}$

g) stetig

Aufgabe 2

Zeigen Sie daß $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 1 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$$

in keinem Punkt stetig ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Sei d $\in$ Menge der irrationalen Zahlen. Wende nun das Intervalhalbierungsverfahren aus der Vorlesung an mit
a, b $\in \mathbb{Q}$ und $a < d < b$

Konstruiere Folgen $(a_n), (b_n)$ mit

$$a_0 := a; \quad b_0 := b; \quad m_n := \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$a_{n+1} := \begin{cases} a_n & \text{falls } m_n > d \\ m_n & \text{falls } m_n < d \end{cases} \qquad b_{n+1} := \begin{cases} m_n & \text{falls } m_n > d \\ b_n & \text{falls } m_n < d \end{cases}$$

Es gilt: $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset ...$ mit $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$ und $d \in [a_n, b_n]$ für alle n $\in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad \forall m \geq n \quad |a_m - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n} \to 0$ für $n \to \infty$

$\Rightarrow \quad (a_n)$ ist Cauchyfolge, (b_n) ist Cauchyfolge und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: \bar{x}$

wegen $a_n \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad f(a_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ aber f(d) = 1

$\Rightarrow$ f ist unstetig für alle d $\in$ Menge der Irrationalen Zahlen

Die selbe Argumentation ist aber auch richtig falls die Stetigkeit von f auf den rationalen Zahlen betrachtet wird und es lässt sich eine Chauchy-Folge von irrationalen Zahlen konstruieren die gegen eine rationale Zahl strebt
$\Rightarrow$ f ist unstetig für alle d $\in \mathbb{Q}$
$\Rightarrow$ f ist unstetig für alle d $\in \mathbb{R}$

Aufgabe 3

Beweisen Sie, daß jedes Polynom mit ungeradem Grad n

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

mindestens eine reelle Nullstelle hat. Beweisen Sie außerdem, daß dies für geradzahliges n nicht (allgemein) gilt.

Lösung zu Aufgabe 3

Nach Sätzen der Vorlesung gilt folgendes:
1) Jedes Polynom vom Grad n hat genau n Nullstellen
2) Komplexe Nullenstellen treten immer in Paaren auf
$\Rightarrow$ Falls n ungerade gibt es höchstens $\frac{n-1}{2}$ Paare von komplexen Nullstellen $\Rightarrow$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

hat mindestens eine reelle Nullstelle .

Das Polynom p(x) = $x^2 + 2$ hat keine reele Nullstelle: p(x) = (x + i$\sqrt{2}$)(x - i$\sqrt{2}$)
Das Polynom p(x) = x^2 hat eine (doppelte)reele Nullstelle: p(x) = (x - 0)(x - 0)
Das Polynom p(x) = $x^2 - 2$ hat zwei reele Nullstelle: p(x) = (x + $\sqrt{2}$)(x - $\sqrt{2}$)
Es sind wie diese Beispiele zeigen also keine allgemeingültigen Aussagen bezüglich den reelen Nullstellen von Polynomen mit geradem Grad möglich.

Aufgabe 4

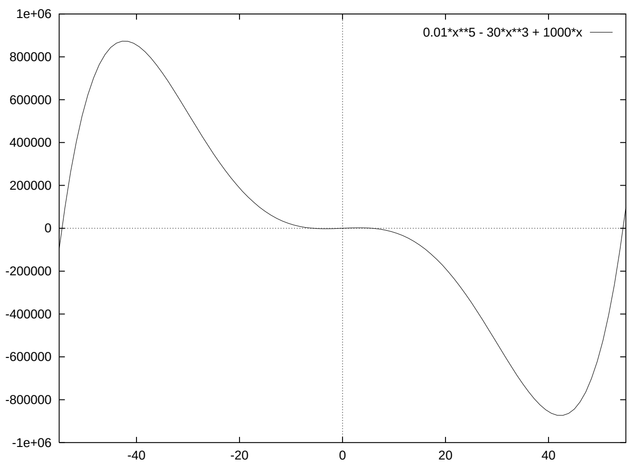
Wieviele Nullstellen hat das folgende Polynom?

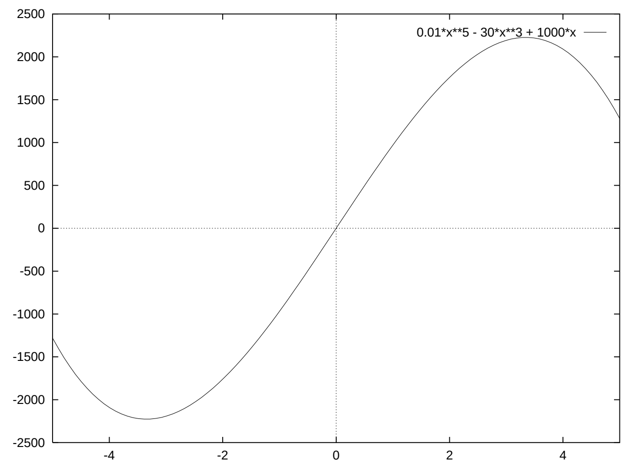
$$p(x) = \frac{x^5}{100} - 30\,x^3 + 1000\,x$$

Benutzen Sie das Intervallhalbierungsverfahren zur Berechnung aller Nullstellen mit einer Genauigkeit von 10^{-8}. Benutzen sie nach Möglichkeit einen programmierbaren Rechner für diese Aufgabe. Versuchen Sie, unnötige Berechnungen zu vermeiden, indem Sie vorher das Polynom auf evtl. Symmetrien sowie asymptotisches Verhalten untersuchen.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Nullstellen liegen bei $x_0 = 0$, $x_{1,2} = \pm 5.80621823$ und $x_{3,4} = \pm 54.46363768$.





Aufgabe 5

Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:
Zu jeder positiven Zahl a und jedem n $\in \mathbb{N}$ gibt es genau eine positive n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$

Lösung zu Aufgabe 5

Es ist also zu zeigen, dass die Gleichung x^n = a eine Lösung $x_0 \geq 0$ besitzt.
Es gilt nun aber für stetige Funktionen f(x) = x^n $\qquad f(0) < a < f(a+1)$
Nach dem Zwischenwertsatz existiert damit ein
$x_0 \in (0, \sqrt[n]{a+1})$ mit $f(x_0) = a$, $\qquad$ d.h. $x_0^n = a$
Da f auf [0,∞) streng monoton ist, ist x_0 eindeutig bestimmt. Man schreibt dafür $x_0 = \sqrt[n]{a}$

Aufgabe 6

Eine kreisförmige Scheibe Brot ist mit einem Stück Käse (mit Löchern) belegt. Ist es möglich mit einem geraden Schnitt Brot und Käse gleichzeitig zu halbieren.

Lösung zu Aufgabe 6

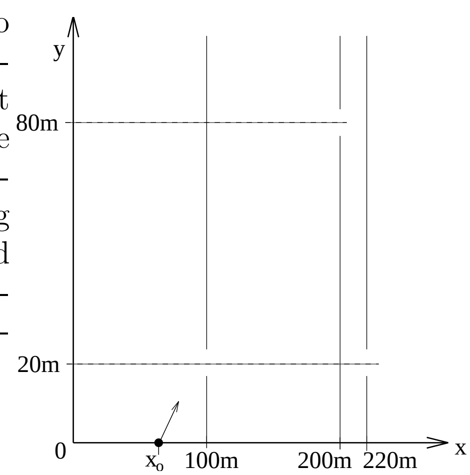
Damit das Problem überhaupt lösbar ist, muss der Schnitt durch den Mittelpunkt des Kreises des Brotes erfolgen; denn nur so wird zumindestens das Brot " gerecht " geteilt. Wähle also ein kartesisches Koordinatensystem dessen Ursprung mit dem Mittelpunkt des Kreises der Brotscheibe zusammen fällt.
Der Winkel $\alpha(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ definiert eine "orientierte " Gerade g_α durch den Ursprung.
$l(\alpha)$ bzw. $r(\alpha)$ bezeichne die "links" bzw. "rechts" der Geraden liegende Käsemenge:
l: $[0, \pi] \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto l(\alpha)$
r: $[0, \pi] \to \mathbb{R}, \alpha \mapsto r(\alpha)$ sind stetige Funktionen.

Dasselbe gilt für die Differenzenfunktion $d(\alpha) := l(\alpha) - r(\alpha)$
O.B.d.A sei nun $l(0) < r(0)$ d.h. $d(0) < 0$
Daraus folgt mit $l(\pi) = r(0)$ und $(\pi) = l(0)$: $d(\pi) = -d(0) > 0$
Nach dem Zwischenwertsatz existiert daher ein Winkel
$\alpha_0 \in [0, \pi]$ mit $d(\alpha_0) = 0$ also $l(\alpha_0) = r(\alpha_0)$
Ein Schnitt längs der Geraden g_{α_0} halbiert also Brot und Käse gleichzeitig.

Aufgabe 7

Auf welcher Bahn (Wurfparabel) muß eine Kugel fliegen, so daß sie durch die drei Löcher in den Linien der nebenstehenden Skizze trifft? Wenn Sie die Parabelgleichung bestimmt haben, berechnen Sie den Abschußpunkt x_0 und benutzen Sie folgende beiden Gleichungen zur Berechnung der für die Parabel notwendigen Anfangsgeschwindigkeiten v_x in x-Richtung sowie v_y in y-Richtung, wobei x und y den Weg in x- und y-Richtung, t die Zeit und $g = 9,81\, m/sec^2$ die Gravitationskonstante darstellen. (Der Luftwiderstand sei vernachlässigbar.)

$$x = v_x\, t + x_0 \qquad y = v_y\, t - \frac{1}{2} g\, t^2$$



Lösung zu Aufgabe 7

Die allgemeine Form einer Parabelgleichung lautet $y = ax^2 + bx + c$

Zur Bestimmung der Parameter a, b, c setzt man die drei Punkte $P_1(100/20), P_2(200/80) und P_3(220/20)$, durch die die Kugel fliegen muss in obige Gleichung ein und erhält 3 Gleichungen für die drei Unbekannten a, b uns c:

20 = 10.000a + 100b + c
80 = 40.000a + 200b + c
20 = 48.400a + 220b + c

Auflösen und Einsetzen führt dies zur Parabelgleichung:
$y = -0.03x^2 + 9,6x - 640$

Der Schnittpunkt der Parabel mit der x-Achse (zur Berechnung von x_0) bedeutet y=0
:
$0 = -0.03x^2 + 9,6x - 640$ und führt zu

$$x_{1,2} = \frac{-9,6 \pm \sqrt{9,6^2 - 4 * 0,03 * 640}}{-0,06} = 160 \pm \frac{\sqrt{15,36}}{0,06} = 160 \pm 65,32$$

Startpunkt: x_0 = 94,68 Aufschlagpunkt: x_2 = 225,32

Auch aus Symetrieüberlegungen findet man den x-Wert des Scheitels der Parabel als Mittelwert zwischen den Punkten $P_1 und P_2 : \frac{100+220}{2} = 160$

Eingesetzt in die gefundene Parbelgleichung ergibt dies:
$y = -0,03 \cdot 25.600 + 9,6 \cdot 160 - 640 = 128$ also hat der Scheitel die Koordinaten S(160/128)

Berechnung der Zeit vom Scheitel bis zum (wieder) Aufschlag auf der x-Achse:
$s = \frac{1}{2}gt^2$ also $t = \pm\sqrt{\frac{2s}{g}}$ eingesetzt ergibt dies $t = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 128}{9{,}81} \cdot \frac{m \cdot s^2}{m}}$ also $t = \pm 5,108s$
Bemerkung: Das negative Ergebnis ist die Zeit von x_0 bis zum Scheitel, der positive Wert die Zeit vom Scheitel bis zurück zur x-Achse.

In dieser Zeit muss die Kugel 65,32 m vom Scheitel bis zum Aufschlagpunkt in x-Richtung zurück legen. Also: $65,32m = v_x \cdot 5,108s$ bzw. $v_x = 12,78\frac{m}{s}$

Die Zeit vom Abwurf bis zum erneuten Aufschlag auf der x-Achse beträgt: 5,108s + 5,108s = 10,216s .
Gegeben war die Formel für die aktuelle Höhe der Kugal als $y(t) = v_y \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Also gilt wegen y(10,216) = 0
$0 = v_y \cdot 10,216 - \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot (10,216)^2$ bzw. $v_y = \frac{1}{2} \cdot 9,81 \cdot 10,216 \cdot \frac{m}{s} = 50,113\frac{m}{s}$

Aufgabe 8

a) Berechnen Sie alle Nullstellen und deren Vielfachheit des Polynoms

$$p(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 26x - 9.$$

Beginnen Sie, indem Sie eine Nullstelle x_1 erraten (entweder anhand einer Näherung durch Intervallhalbierung oder anhand des Graphen) und dividieren Sie dann $p(x)$ durch $(x - x_1)$.

b) Führen Sie für das Polynom p eine Kurvendiskussion durch, d.h. untersuchen Sie p auf Extrema, Wendepunkte und asymptotisches Verhalten.

Lösung zu Aufgabe 8

a) $p(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 26x - 9 = (x - 9)(x + 1)^3$

b)

Def.-Bereich: $D = \mathbb{R}$

Stetigkeit: f stetig auf R, da Polynom.

Symmetrie: keine.

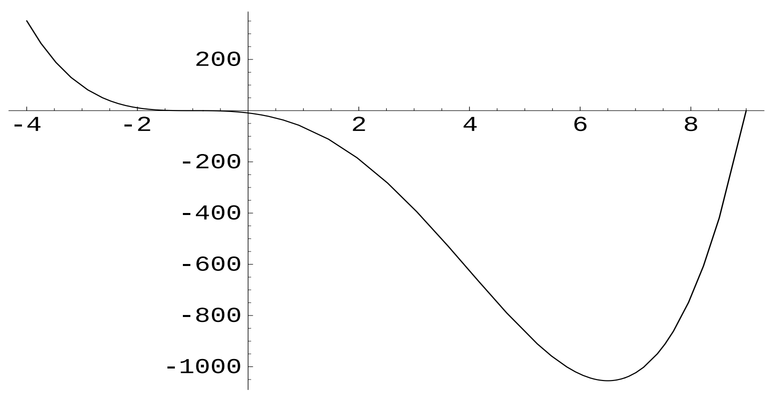
Nullstellen:s.o.

Extrema: Minimum bei $x = 6.5$.

Pole: keine

Asymptote: für $x \to \pm\infty$: $p(x) \approx x^4$

Graph:



Aufgabe 9

Beweisen das Additionstheorem für trigonometrische Funktionen aus der Vorlesung
$sin(x+y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y)$ und
$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$
mit Hilfe der Eulerschen Formel

Lösung zu Aufgabe 9

Die Eulersche Formel ist gegeben als

$$e^{i(x+y)} = cos(x+y) + i \cdot sin(x+y)$$

Für das Rechnen mit Potenzen gilt aber:

$e^{i(x+y)} = e^{ix} \cdot e^{iy} = (cos(x) + i \cdot sin(x)) \cdot (cos(y) + i \cdot sin(y))$ ausmultipliziert erhält man:

$e^{i(x+y)} = cos(x) \cdot cos(y) - sin(x) \cdot sin(y) + i(sin(x) \cdot cos(y) + cos(x) \cdot sin(y))$

Durch Vergleich des Realteils und des Imaginärteils von $e^{i(x+y)}$ in den beiden Darstellungen erhält man die gewünschte Aussage.