

Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 2 für den 5.12.24

Emanuel Schäffer

2. Dezember 2024

Aufgabe 1

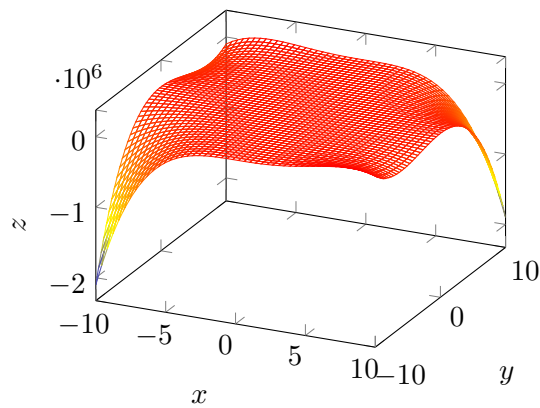
Untersuchen Sie folgende Funktionen auf Extrema und geben Sie an, ob es sich um ein lokales oder globales, bzw. ein isoliertes Extremum handelt:

a) $f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$

b) $g(x, y) = x^k + (x + y)^2 \quad (k = 0, 3, 4)$

Lösung Aufgabe 1

$$f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$$



a) $f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y) = x^3 y^2 - x^4 y^2 - x^3 y^3$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = 6xy^2 - 12x^2 y^2 - 6xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) = 2x^3 - 2x^4 - 6x^3 y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 6x^2 y - 8x^3 y - 9x^2 y^2$$

Notwendige Bedingung für ein Extremum ist, dass $\nabla f = 0$ also

$$3x^2 y^2 - 4x^3 y^2 - 3x^2 y^3 = 0 = x^2 y^2 (3 - 4x - 3y) \quad \text{und}$$

$$2x^3 y - 2x^4 y - 3x^3 y^2 = 0 = x^3 y (2 - 2x - 3y)$$

also 1. Lösung: $x = 0$, y beliebig (y -Achse)

und 2. Lösung: $y = 0$, x beliebig (x -Achse)

Außerdem $3 - 4x - 3y = 0$ und $2 - 2x - 3y = 0$ also $1 - 2x = 0$ also 3. Lösung:
 $x = \frac{1}{2}$ und $y = \frac{1}{3}$

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2 y^2 - 6xy^3 & 6x^2 y - 8x^3 y - 9x^2 y^2 \\ 6x^2 y - 8x^3 y - 9x^2 y^2 & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3 y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Hess } f(0, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{semidefinit}$$

$$\text{Hess } f(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x^3 - 2x^4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

In Abhängigkeit von x positiv oder negativ semidefinit;

positiv für $0 < x < 1$ und negativ für $x < 0$ oder $x > 1$

$$\text{Hess } f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\text{Hess } f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ ist negativ definit; also lokales Maximum

b) $g(x, y) = x^k + (x + y)^2 \quad (k = 0, 3, 4)$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = k \cdot x^{k-1} + 2(x + y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2(x + y)$$

Fall $k = 0$

Wegen $g(x, y) = 1 + (x + y)^2 \geq 1$ und $g(x, y) = 1$ für $x + y = 0$

\Rightarrow in allen Punkten der Gerade $x + y = 0$ bzw. $y = -x$ hat g ein Minimum.

Fall $k = 3, 4$

Aus der Bedingung $\nabla f = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} 2(x+y) &= 0 \text{ also } y = -x \text{ und} \\ k \cdot x^{k-1} + 2(x+y) &= k \cdot x^{k-1} + 2(x-x) = k \cdot x^{k-1} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ und } y = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Hess } f(0, y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{semidefinit}$$

Fall $k = 3$

$$g(x, -x) = x^3 \Rightarrow \text{Wendepunkt}$$

Fall $k = 4$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x^4 + (x+y)^2 > 0 \text{ f\"ur } (x, y) \neq (0, 0) \text{ und} \\ g(x, y) &= x^4 + (x+y)^2 = 0 \text{ f\"ur } (x, y) = 0 \Rightarrow \text{lokales Minimum} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegen sie die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$.

- Berechnen Sie ∇f und zeigen Sie: $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.
- Zeigen Sie, daß $(\text{Hess } f)(0)$ semidefinit ist und daß f auf jeder Geraden durch 0 ein isoliertes Minimum hat.
- Trotzdem hat f in 0 kein lokales Extremum (zu zeigen!).

Lösung Aufgabe 2

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= (y - x^2)(y - 3x^2) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 12x^3 - 8xy = 4x(3x^2 - 2y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -4x^2 + 2y = 2(y - 2x^2) \end{aligned}$$

Die Bedingung $\nabla f = 0$ führt auf $y - 2x^2 = 0$ bzw. $y = 2x^2$
und auf $4x(3x^2 - 2y) = 4x(3x^2 - 4x^2) = -4x^3 = 0$
 $\Rightarrow x = 0$ und $y = 0$

- Zeigen Sie, daß $(\text{Hess } f)(0)$ semidefinit ist und daß f auf jeder Geraden durch 0 ein isoliertes Minimum hat.

$$\text{Hess } f(x, y) = \begin{pmatrix} 36x^2 - 8y & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Hess } f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{positiv semidefinit}$$

Betrachte f auf der Ortskurve $y = \alpha \cdot x$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ (Alle Geraden durch den Nullpunkt)

$$\Rightarrow \phi(x) = f(x, \alpha x) = (\alpha x - x^2)(\alpha x - 3x^2) = 3x^4 - 4\alpha x^3 + \alpha^2 x^2$$

$$\phi'(x) = 12x^3 - 8\alpha x^2 + 2\alpha^2 x \Rightarrow \phi'(x) = 0$$

$$\phi''(x) = 36x^2 - 16\alpha x + 2\alpha^2 \Rightarrow \phi''(0) > 0$$

Also hat f auf der Geraden $y = \alpha x$ in $(0,0)$ ein Minimum

c) Trotzdem hat f in 0 kein lokales Extremum (zu zeigen!).

Betrachte f auf der Ortskurve $y = 2x^2$

$$\Rightarrow f(x, 2x^2) = x^2(-x^2)$$

und betrachte f auf der Ortskurve $y = 0$ (x -Achse)

$$\Rightarrow f(x, 0) = 3x^4 \text{ Also hat } f \text{ in } (0,0) \text{ kein lokales Extremum (Sattelpunkt)}$$

Aufgabe 3

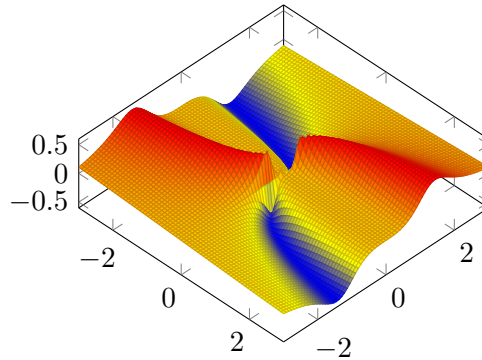
Gegen sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß im Punkt $(0,0)$ alle Richtungsableitungen existieren. Ist f in $(0,0)$ differenzierbar?

(Hinweis: Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach. Betrachten Sie einen Kreis um den Nullpunkt und lassen Sie den Radius des Kreises gegen Null streben).

Lösung Aufgabe 3



Gegeben sei ein Kreis um den Nullpunkt $(0,0)$ in \mathbb{R}^2 durch $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $u^2 + v^2 = 1$

Betrachte nun f auf dem Kreis um den Nullpunkt mit dem Kreistradius $\rightarrow 0$

Allgemein gilt daher:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t \cdot u, t \cdot v) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot u \cdot (t \cdot v)^3}{t \cdot [(t \cdot u)^2 + (t \cdot v)^6]} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \frac{u \cdot v^3}{u^2 + t^4 \cdot v^6} = 0$$

sowohl für $u \neq 0$ da $\left| \frac{u \cdot v^3}{u^2 + t^4 \cdot v^6} \right| < \left| \frac{u \cdot v^3}{u^2} \right| < \text{Konstante}$, als auch $u = 0$ (und $v = 1$)

Daher existieren alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ und haben den Wert 0.

f ist aber in $(0,0)$ nicht total differenzierbar:

wegen $f(y^3, y) = \frac{y^6}{y^6 + y^6} = \frac{1}{2}$ für $y \rightarrow 0$ und $f(0,0) = 0$

ist f an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig, also an der Stelle $(0,0)$ nicht total differenzierbar.