Übungsaufgaben Mathematik 1 Analysis für die Übungen am 03. und 05.04.24

23. März 2024

1 Injektiv/Surjektiv/Bijektiv

Aufgabe 1

Skizzieren Sie den Graphen von je einer Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die

1. injektiv aber nicht surjektiv ist
2. surjektiv aber nicht injektiv ist
3. weder injektiv noch surjektiv ist
4. Zeigen Sie in welchen Teilmengen des Definitionsbereiches/Wertebereiches die Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen. Skizzieren Sie die Umkehrfunktion

Aufgabe 2

Beweisen Sie: Jede streng monotone Funktion ist injektiv.

Lösung zu Aufgabe 2

Beachten Sie die folgenden Definitionen:

Definition 1 *Eine Abbildung* $f : D \to B$ *heißt injektiv g.d.w.* $\forall x, y \in D \quad x \neq y \quad \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Definition 2 *Eine Funktion* $f : D \to B, \quad D, B \subset \mathbb{R}$ *heißt* **monoton wachsend**, *g.d.w.* $\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2)$.
f *heißt* **streng monoton wachsend**, *g.d.w.*
$\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$.

Also ist für die Aussage **f ist injektiv** das folgende zu zeigen:
$\forall x_1, x_2 \in D \quad x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$

Gegeben: f streng monoton wachsend

Sei also $x_1 \neq x_2$ das heißt ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x_1 < x_2$
$\Rightarrow$ wegen f streng monoton wachsend $f(x_1) < f(x_2)$ $\Rightarrow$ $f(x_1) \neq f(x_2)$

Aufgabe 3

Beweisen Sie: Jede streng monotone, surjektive Funktion $f : D \to B, \quad D \subset \mathbb{R}, \quad B \subset \mathbb{R}$, besitzt eine Umkehrfunktion.

Lösung zu Aufgabe 3

Da f streng monoton folgt aus Aufgabe 2, daß f injektiv ist.
Also ist f injektiv und surjektiv.
Also ist f bijektiv.
Jede bijektive Funktion hat eine Umkehrabbildung. Also hat auch f eine Umkehrabbildung

2 Umkehrfunktionen

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Umkehrfunktion für jede der folgenden Funktionen (falls sie existiert!). Skizzieren Sie jeweils f und f^{-1}.

$$\begin{array}{lll}
f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto 2x \\
f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto x^3 \\
f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto 4 \\
f: & \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, & x \mapsto \sqrt{x} \\
f: & \mathbb{R}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}\backslash\{0\}, & x \mapsto 1/x \\
f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto -x \\
f: & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, & x \mapsto -x+5
\end{array}$$

3 Rechnen mit Summenausdrücken

Aufgabe 5

Vereinfachen Sie folgende Summenausdrücke und geben Sie eine Formel ohne Summe an.

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i)$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i+1)$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}q^{(i+k)}$

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i) = (n-1)+(n-2)+...+1+0 = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{(n-1)n}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(n-i+1) = n + \sum_{i=1}^{n}(n-i) = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n+n^2-n}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$

c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}q^{(i+k)} = \sum_{i=1}^{n} q^i \cdot q^k = q^k \cdot \sum_{i=1}^{n} q^i = q^k \cdot (-q^0 + \sum_{i=0}^{n} q^i) = q^k \cdot (-q^0 + \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q})$