Übungsaufgaben Mathematik 1 Analysis
für die Übungen am 17. und am 19.4.2024

16. April 2024

1 Binomial Koeffizienten

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Binomialkoeffizienten:

a) $\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 1

Es kann das Pascalsche Dreieck an den Stellen (13/4), (10/5) und (13/11) betrachtet oder direkt ausgerechnet werden:

$\begin{pmatrix} 13 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715$

$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} = 252$

$\begin{pmatrix} 13 \\ 11 \end{pmatrix} = 78$

Aufgabe 2

Beweisen Sie:

a) $\forall n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n : \quad \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

b) $\forall n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n : \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

c) $\forall n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n : \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

d) $\forall n, k \in \mathbb{N}_0, k \leq n : \quad \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k} = \binom{n}{k+1}$

Welchen Eigenschaften des Pascalschen Dreiecks entsprechen b), c) und d)?

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdot (n-(k-1))}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdot (n-(k-1)) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

b) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

Die Bedeutung im Pascalschen Dreieck: Spiegelungung der Mitte

c) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))!}$

$$= \frac{(k+1) \cdot n!}{(k+1) \cdot k! \cdot (n-k)!} + \frac{n! \cdot (n-k)}{(k+1)! \cdot (n-(k+1))! \cdot (n-k)}$$

$$= \frac{n! \cdot ((k+1)+(n-k))}{(k+1)! \cdot (n-k)!} = \frac{n! \cdot (n+1)}{(k+1)! \cdot (n+1-(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

Die Bedeutung im Pascalschen Dreieck: Addition Zweier Elemente (ergibt neues Element eine Zeile tiefer)

d) Beweis durch Vollständige Induktion:

Induktionsannahme: $\sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k} = \binom{n}{k+1}$

Induktionsverankerung: n=1 : 0 = 0

Induktionsschluß: n $\rightarrow$ n+1 : z.z: $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$:

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{i}{k} + \binom{n}{k} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Die Bedeutung im Pascalschen Dreieck: Summation einer Nebendiagonalen

2 Rechnen mit Teilmengen

Aufgabe 3

Wieviele k-elementige Teilmengen besitzt eine n-elementige Menge? (Beweis durch vollständige Induktion)

Lösung zu Aufgabe 3

Die Anzahl A_k^n der k-elementigen Teilemengen einer
n-elementigen Menge $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ist gleich $\binom{n}{k}$

Beweis durch vollständige Induktion nach n:
Induktionsvor.: $A_k^n = \binom{n}{k}$

Induktionsverankerung: n=1: $A_0^1 = A_1^1 = \binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ wegen
$\{e_1\}$ hat die null-elementige Teilmenge $\{\emptyset\}$ und die ein-elementige Teilmenge $\{e_1\}$
Induktionsschluß: $n \to n+1$
Zu zeigen: $A_k^{n+1} = \binom{n+1}{k}$

Die k-elementigen Teilmengen der (n+1)-elementigen Teilmege $\{e_1, e_2, ..., e_n, e_{n+1}\}$ zerfallen in zwei Klassen:
K_0: Klasse der Teilmengen die e_{n+1} nicht enthalten und
K_1: Klasse der Teilmengen die e_{n+1} enthalten.

Die Anzahl der Klasse K_0 ist gleich $A_k^n = \binom{n}{k}$ da dies wieder die Anzahl der k-elementigen Teilmengen aus einer n-elementigen Menge ist
Die Anzahl der Klasse K_1 ist gleich $A_{k-1}^n = \binom{n}{k-1}$ da das Element e_{n+1} in jeder Teilmenge enthalten ist und somit nur noch k-1 weitere Elemente verbleiben
Also ist $A_k^{n+1} = A_k^n + A_{k-1}^n = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{((n-k+1)+k)n!}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)n!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$
Daraufhin stellt sich die folgende Frage: Wieviele Teilmengen besitzt eine n-elementige Menge? (Beweis durch vollständige Induktion)

Dazu werden die Anzahlen aller k-elementigen Teilmengen zusammengezählt, also die Anzahl der 0-elemnetigen Teilmengen und die Anzahl der ein-elementigen Teilmengen und die Anzahl der zwei-elementigen Teilmengen und ... und die Anzahl der n-elementigen Teilmengen also :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = ?$$

Behauptung: $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Siehe Aufgabe 4

Bemerkung: Man spricht daher in diesem Zusammenhang von den Potenzmengen einer Menge.

Aufgabe 4

Beweisen Sie mit Hilfe der obigen Aufgabe daß $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Lösung zu Aufgabe 4

Beweis durch vollständige Induktion nach n:

Induktionsvor.: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Induktionsverankerung: n=1: $\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 = 2^1$

Induktionsschluß: $n \to n+1$

Zu zeigen: $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^{(n+1)}$.

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} =$$

$\binom{n}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{-1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$

$0 + 2^n + 0 + 2^n = 2^{(n+1)}$

Alternativ verwende man die Binomische Formel:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(n-k)} y^k \text{ mit x=y=1.}$$

3 Rationale Zahlen (Beweis des Satzes aus der Vorlesung)

Aufgabe 5

Beweisen Sie daß es zwischen je zwei rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl c gibt, d.h. $a < c < b$. Tip: Versuchen Sie's z.B. mit $c = \frac{a+b}{2}$.

Lösung zu Aufgabe 5

Sei $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Zu zeigen $\exists c \in \mathbb{Q}$ mit $a < c < b$

Sei $c := \frac{a+b}{2}$ dann gilt:
$c > a$ wegen $c = \frac{a+b}{2} > \frac{a+a}{2} = a$ wegen $b > a$
$c < b$ wegen $c = \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$ wegen $a < b$
wegen
$a \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \exists a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, a_2 \neq 0$ mit $a = \frac{a_1}{a_2}$ und
$b \in \mathbb{Q} \quad \Rightarrow \quad \exists b_1, b_2 \in \mathbb{Z}, b_2 \neq 0$ mit $b = \frac{b_1}{b_2}$

zu zeigen : $c \in \mathbb{Q}$ das heißt: $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ mit $c = \frac{c_1}{c_2}$, $c_2 \neq 0$

$c = \frac{a+b}{2} = \frac{\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2}}{2} = \frac{a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2}{2 \cdot a_2 \cdot b_2}$ wobei
$c_1 \in \mathbb{Z}$ wegen $c_1 = a_1 b_2 + b_1 a_2$ und
$a_1 \in \mathbb{Z}, b_2 \in \mathbb{Z}$ also $a_1 b_2 \in \mathbb{Z}$ und $b_1 \in \mathbb{Z}, a_2 \in \mathbb{Z}$ also $b_1 a_2 \in \mathbb{Z}$
$c_2 = 2a_2 b_2 \in \mathbb{Z}$ wegen a_2, b_2 und $2 \in \mathbb{Z}$ und
$c_2 \neq 0$ wegen $2 \neq 0, a_2 \neq 0, b_2 \neq 0$

q.e.d

4 Folgen und Reihen

Aufgabe 6

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fibonacci Zahlen wird im Allgemeinen rekursiv wie folgt definiert:
$a_1 := a_2 := 1$, $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$
Die Glieder der Fibonacci-Folge können aber auch explizit definiert werden. Zeigen Sie dazu (mittels vollständiger Induktion), dass
$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (p^n - q^n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und mit $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $q = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
und überprüfen Sie diese bewiesene Behauptung an ein paar Beispielen

Lösung zu Aufgabe 6

Fibonacci Zahlen: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsverankerung n=1 und n=2:
$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2}) = 1$
$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1$
Merke dabei :
$(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$ und
$(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}$

Induktionsschluss (n $\rightarrow$ n+1):

z.z.: $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (p^{n+1} - q^{n+1})$

Beweis:
$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$
$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (p^n - q^n) + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (p^{n-1} - q^{n-1})$
$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((p^n + p^{n-1} - (q^n + q^{n-1}))$
$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((p+1) \cdot p^{n-1} - (q+1) \cdot q^{n-1})$
$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot ((\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1) \cdot p^{n-1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1) \cdot q^{n-1})$
$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{2+2\sqrt{5}+4}{4} \cdot p^{n-1} - \frac{2-2\sqrt{5}+4}{4} \cdot q^{n-1})$
$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (\frac{6+2\sqrt{5}}{4} \cdot p^{n-1} - \frac{6-2\sqrt{5}}{4} \cdot q^{n-1})$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (p^2 \cdot p^{n-1} - q^2 \cdot q^{n-1})$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot (p^{n+1} - q^{n+1})$$

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \dfrac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 1}$ auf Konvergenz.

Lösung zu Aufgabe 7

Eine Faustregel zum Nachweis, dass eine Folge a_n gegen einen Grenzwert a strebt besteht im folgenden:
Man formt $|a_n - a|$ solange um bis man einen Ausdruck erreicht hat, den man durch eine Nullfolge abschätzen kann

Das Einsetzen von grossen n liefert fuer a_n ungefähr 3. Vermutung: $a_n \to 3$

$$|a_n - 3| = |\frac{3^{n+1} + 2^n}{3^n + 1} - 3| = |\frac{3^{n+1} + 2^n - 3^{n+1} - 3}{3^n + 1}| = |\frac{2^n - 3}{3^n + 1}| \leq |\frac{2^n}{3^n}|$$

da $(\frac{2}{3})^n$ gegen Null strebt, folgt $a_n \to 3$