Lösungen der Übungsaufgaben Analysis 2 für den 17.10.24

Emanuel Schäffer

22. Oktober 2024

Aufgabe 1

Nullstellen bestimmen

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{2x+1}{2x^2+2x-1} \\
x_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \\
x_{1,2} &= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \\
x_{1,2} &= \frac{-\cancel{2} \pm \cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{4}\ 2} \\
\Rightarrow x_1 &= -\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) \qquad x_2 = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})
\end{aligned}
$$

Produktform

$$(x + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}))(x + \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})) \overset{?}{=} 2x^2 + 2x - 1$$

Partialbruch

$$\frac{\alpha}{x + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})} + \frac{\beta}{x + \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha(x + \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})) + \beta(x + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})) \overset{!}{=} x + \frac{1}{2} \\
&\alpha x + \alpha\frac{1}{2}(1 + \underline{\sqrt{3}}) + \beta x + \beta\frac{1}{2}(1 - \underline{\sqrt{3}})
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Keine irrationalen Zahlen im Zähler, daher $\alpha = \beta$

$$\alpha x + \beta x = x \qquad \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{2}$$

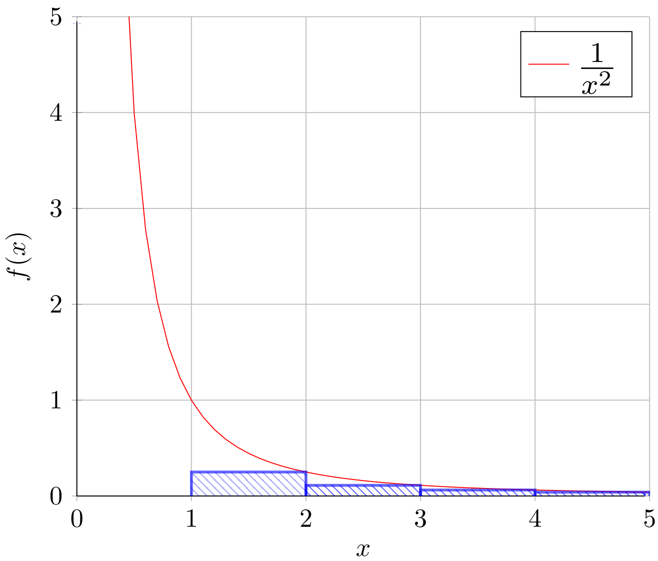
$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})} + \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{2x^2+2x-1} &= \int \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})} + \int \frac{\frac{1}{2}}{x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x+\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}) + \ln(x+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(x^2+x-\frac{1}{2}) \\
&= \ln(2x^2+2x-1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Da $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = 1$ und Fläche von $x = 1-2$ von $\frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2} < 1$



Aufgabe 3

$\rightarrow$ Siehe Musterlösung

Aufgabe 4

$\rightarrow$ Siehe Musterlösung, Script Seite 9.