Übungsaufgaben Mathematik 2 Analysis für die Übungen am 21. und 22.11.24

14. November 2024

Aufgabe 1

Beweisen Sie den folgenden Satz (aus der Vorlesung): Eine Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gegen $\vec{a}$, wenn alle ihre Koordinatenfolgen gegen entsprechende Koordinaten von $\vec{a}$ konvergieren.

Lösung zu Aufgabe 1

Konvergiere also die Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\vec{a}$
dann gilt gemaess Definition:

$$||\vec{a}_n - \vec{a}|| < \varepsilon \quad \forall \quad n \geq N(\varepsilon)$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{a}_n = \vec{a}$ beziehungsweise $\lim\limits_{n\to\infty} ||\vec{a}_n - \vec{a}|| = 0$
Wegen der Definition der Norm folgt aus $||\vec{a}_n - \vec{a}|| = 0$ das alle Komponenten des Vektors $\vec{a}_n - \vec{a}$ Null sein müssen
also konvergieren alle Komponenten der Folge $\vec{a}_n$ gegen die entsprechen Komponente von $\vec{a}$

Konvergiert umgekehrt jede Komponenten i der Folge $\vec{a}_n$ gegen die entsprechende Komponente von $\vec{a}$ sprich a_i so gilt wegen $\lim\limits_{n\to\infty} |a_i^{(n)} - a_i| = 0$ dass

$\lim\limits_{n\to\infty} ||\vec{a}_n - \vec{a}|| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(a_1^{(n)} - a_1)^2 + (a_2^{(n)} - a_2) + \cdots} = 0$ also konvergiert die Vektorfolge $(\vec{a}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\vec{a}$

Aufgabe 2

a) In der industriellen Fertigung werden bei der Qualitätskontrolle Bauteile vermessen und die Werte $x_1, \ldots x_n$ ermittelt. Der Vektor $\vec{d} = \vec{x} - \vec{s}$ gibt die Abweichungen der Messungen zu den Sollwerten $s_1, \ldots, s_n$ an. Definieren Sie nun eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ derart, daß $||\vec{d}|| < \varepsilon$ gdw. alle Abweichungen vom Sollwert kleiner als eine gegebene Toleranz ε sind.

b) Beweisen Sie, daß die in a) definierte Norm alle Axiome einer Norm erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die in Frage kommende Abbildung ist die so genannte Maximum-Norm:
$||\vec{x}||_{max} := max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$

b) Die Abbildung $|| \quad ||_{max} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Norm wegen:

1.Aus $||\vec{x}||_{max} = max(|x_1|, \cdots, |x_n|) = 0$ folgt $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$
Und aus $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ folgt $max(|x_1|, \cdots, |x_n|) = ||\vec{x}||_{max} = 0$

2.Es gilt $||\lambda \cdot \vec{x}||_{max} = max(|\lambda \cdot x_1|, \cdots, |\lambda \cdot x_n|) = |\lambda| \cdot max(|x_1|, \cdots, |x_n|) = |\lambda| \cdot ||\vec{x}||_{max} \forall \lambda \in \mathbb{R}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

3.Es gilt $||\vec{x} + \vec{y}||_{max} = max(|x_1 + y_1|, \cdots, |x_n + y_n|) \leq max(|x_1| + |y_1|, \cdots, |x_n| + |y_n|) \leq max(|x_1|, \cdots, |x_n|) + max(|y_1|, \cdots, |y_n|) = ||\vec{x}||_{max} + ||\vec{y}||_{max} \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
Dreiecksungleichung

Aufgabe 3

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}$ folgender Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

a) $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$ **b)** $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3}$ **c)** $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2+x_3)}$
d) $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + x_2)$ **e)** $f(\vec{x}) = \sin(x_1 + a\, x_2)$

Lösung zu Aufgabe 3

a) $f(\vec{x}) = |\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_1 = \frac{x_1}{|\vec{x}|}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{|\vec{x}|}$, $\quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{x_3}{|\vec{x}|}$

b) $f(\vec{x}) = x_1^{x_2} + x_1^{x_3} = e^{ln(x_1^{x_2})} + e^{ln(x_1^{x_3})} = e^{x_2 \cdot ln(x_1)} + e^{x_3 \cdot ln(x_1)}$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = x_2 \cdot x_1^{x_2-1} + x_3 \cdot x_1^{x_3-1}$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = e^{x_2 \cdot ln(x_1)} \cdot ln(x_1) = x_1^{x_2} \cdot ln(x_1)$
$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{x_3} \cdot ln(x_1)$

c) $f(\vec{x}) = x_1^{(x_2+x_3)} = x_1^{x_2} \cdot x_1^{x_3}$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = (x_2 + x_3) \cdot x_1^{(x_2+x_3-1)}$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1^{x_3} \cdot x_1^{x_2} \cdot ln(x_1) = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot ln(x_1)$
$\frac{\partial f}{\partial x_3} = x_1^{(x_2+x_3)} \cdot ln(x_1)$

d) $f(\vec{x}) = sin(x_1 + x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = cos(x_1 + x_2) \cdot 1$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = cos(x_1 + x_2) \cdot 1$
$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$

e) $f(\vec{x}) = sin(x_1 + a \cdot x_2)$
$\frac{\partial f}{\partial x_1} = cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot 1$
$\frac{\partial f}{\partial x_2} = cos(x_1 + a \cdot x_2) \cdot a$

$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$

Aufgabe 4

Berechnen Sie die Ableitungsmatrix der Funktion $\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{x_1 x_2 x_3} \\ \sin(x_1 x_2 x_3) \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 4

$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 x_2 x_3)^{-\frac{1}{2}} \cdot x_2 x_3 = \frac{x_2 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}$
$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = cos(x_1 x_2 x_3) \cdot x_2 x_3$

also

$$d\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{x_2 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_3}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}}, & \frac{x_1 x_2}{2\sqrt{x_1 x_2 x_3}} \\ \cos(x_1 x_2 x_3) x_2 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_3, & \cos(x_1 x_2 x_3) x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Geben Sie für $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x\,y} \\ \sin(e^x + e^y) \end{pmatrix}$ die Tangentialebene im Punkt $\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ an.

Lösung zu Aufgabe 5

$$d\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{2\sqrt{xy}}, & \frac{y}{2\sqrt{xy}} \\ \cos(e^x + e^y) \cdot e^x, & \cos(e^x + e^y) \cdot e^y \end{pmatrix}$$

Die Funktion g der Tangentialebene lautet:

$$\vec{g}(x, y) = \vec{f}(x_0, y_0) + d\vec{f}(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$ folgt

$$\vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sin(e^1 + e^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{2\sqrt{2}}, & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cos(e^1 + e^2) \cdot e^1, & \cos(e^1 + e^2) \cdot e^2 & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x - 1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (y - 2) \\ \sin(e(1 + e)) + \cos(e(1 + e))e \cdot (x - 1) + \cos(e(1 + e))e^2 \cdot (y - 2) \end{pmatrix}$$

schreibe nun sin statt sin(e(1+e)) und cos statt cos(e(1+e))

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2 + x - 1 + \frac{y}{2} - 1) \\ sin - e \cdot cos - 2cose^2 + cos \cdot e \cdot x + cos \cdot e^2 \cdot y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (x + \frac{y}{2}) \\ sin - e \cdot cos - 2cose^2 + cos \cdot e \cdot x + cos \cdot e^2 \cdot y \end{pmatrix}$$