Übungsaufgaben Mathematik 1 Analysis für die Übungen am 15.5.24 und am 17.5.24

10. Mai 2024

Aufgabe 1

Berechnen Sie den unendlichen Kettenbruch

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}}},$$

d.h. den Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = 1+1/a_n$. Geben Sie sowohl die exakte Lösung als auch eine auf 10 Stellen genaue Näherung des Grenzwertes.

Lösung zu Aufgabe 1

```
In[1] := a[n_] := 1 + 1/a[n - 1]
In[2] := a[1] := 1
In[9]:= For[n = 1, n <= 20, n++, Print[N[a[n],20]]]
1.
2.
1.5
1.6666666666666666667
1.6
1.625
1.6153846153846153846
1.6190476190476190476
1.6176470588235294118
1.6181818181818181818
1.6179775280898876404
1.6180555555555555556
1.6180257510729613734
1.6180371352785145889
1.6180327868852459016
1.6180344478216818642
1.6180338134001252348
1.6180340557275541796
1.6180339631667065295
```

Ausserdem gilt wenn $a_n \to a$:
$a = 1 + \frac{1}{a}$
$a^2 = 1 + a$ bzw $a^2 - a - 1 = 0$ also
$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die ersten 8 Folgeglieder aus Aufgabe 1. Schreiben Sie dabei das Ergebnis Ihrer Berechnung in Form eines Bruches von ganzen Zahlen.
Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Fibonacci Zahlen wird im Allgemeinen rekursiv wie folgt definiert:
$f_1 := f_2 := 1$, $f_n := f_{n-1} + f_{n-2}$
Berechnen Sie die ersten 8 Folgeglieder der Fibonaccie Zahlen. Was fällt Ihnen auf?

Zeigen Sie, dass für die in Aufgabe 1 definierte Folge a_n des Kettenbruches gilt:
$a_{n-1} = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ fuer alle $n \geq 1$ wobei die f_n die oben definierten Fibonacci Zahlen sind.

Lösung zu Aufgabe 2

$a_0 = 1$ und $f_1 = 1$
$a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ und $f_2 = 1$
$a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ und $f_3 = f_1 + f_2 = 1 + 1 = 2$
$a_3 = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$ und $f_4 = f_2 + f_3 = 1 + 2 = 3$
$a_4 = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ und $f_5 = f_3 + f_4 = 2 + 3 = 5$
$a_5 = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8}$ und $f_6 = f_4 + f_5 = 3 + 5 = 8$
...

Beweis durch vollständige Induktion:

Induktionsbehauptung: $a_{n-1} = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$

Induktions verankerung : n = 1
$a_{1-1} = a_0 = \dfrac{f_{1+1}}{f_1} = \dfrac{1}{1} = 1$

Induktionsschluß: n $\to$ n+1
z.z: $a_n = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}+1}{a_{n-1}} = \frac{\frac{f_{n+1}}{f_n}+1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}} = \frac{f_{n+1}+f_n}{f_n} \cdot \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$$

Aufgabe 3

Berechnen Sie für jede der folgenden Reihen einen Näherungswert (falls möglich) und prüfen sie auf Konvergenz.

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} 4^n (n+1)!\, n^{-n} \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} 3n[4 + (1/n)]^{-n}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) $\sum_{n=0}^{k} a_n = 8., 32., 88.88888889, 208.8888889, 444.8184889, 887.2876247, 1689.435029, 3106.935029, 5562.324391, 9747.904239, 16789.60121, 28506.83944, 47823.17135, 79412.97964, 130716.903, 213531.8358, 346494.3472, 558950.5295, 896973.3599, 1.432700718\ 10^6, ...$

divergent, da $|a_{n+1}/a_n| \to 4/e > 1$ für $n \to \infty$.

b) $\sum_{n=0}^{k} a_n = 0.6, 0.8962962963, 1.006901667, 1.043682836, 1.05516027, 1.058600124, 1.059602705, 1.059889004, 1.059969492, 1.059991842, 1.059997987, 1.059999662, 1.060000116, 1.060000238, 1.060000271, ...$

konvergent, da $|a_{n+1}/a_n| \to 1/4$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 4

Berechnen Sie die beim Hornerschema zur Auswertung von Polynomen benötigte Anzahl von Multiplikationen, Additionen und Potenzierungen und vergleichen diese mit der entsprechenden Anzahl bei der direkten Auswertung.
Wie ändert sich das Ergebnis, wenn Potenzen durch ausmultiplizieren berechnet werden?

Lösung zu Aufgabe 4

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

naiv: n Multiplikationen, n Additionen, n-1 Potenzen.
Horner: n Multiplikationen, n Additionen, 0 Potenzen.

Potenzen durch ausmultiplizieren:
naiv: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ Multiplikationen, n Additionen.
Horner: n Multiplikationen, n Additionen.

Aufgabe 5

Sie legen S EURO auf einer Bank an mit dem Zinssatz von $r\%$ bei jährlicher Verzinsung.

a) Leiten Sie eine Formel her für die Summe, die Sie nach n Jahren besitzen, wenn die Zinsen gutgeschrieben und weiter verzinst werden.

b) Leiten Sie eine Formel her für die Summe, die Sie nach n Jahren besitzen, wenn Sie am Anfang die Summe S einzahlen und zum Beginn jedes folgenden Jahres die Summe P einzahlen. Wie oben verzinst sich das gesamte angesammelte Guthaben.

Lösung zu Aufgabe 5

a) Sei S_0 das Anfangskapital im Jahr 0
Das Kapital S_1 nach einem Jahr beträgt : $S_1 = (1 + r\%) * S_0$
Das Kapital S_2 nach zwei Jahren betraegt :
$S_2 = (1 + r\%) * S_1 = (1 + r\%) * (1 + r\%) * S_0 = (1 + r\%)^2 * S_0$
Das Kapital S_n nach n Jahren beträgt $S_n = (1 + r\%)^n * S_0$

b) Das Kapital nach einem Jahr und nach Einzahlung von P betraegt:
$S_1 = (1 + r\%) * S_0 + P$
$S_2 = (1 + r\%) * S_1 + P = (1 + r\%) * [(1 + r\%) * S_0 + P] + P$ also
$S_2 = (1 + r\%)^2 * S_0 + (1 + r\%) * P + P$ und damit

$S_n = (1 + r\%)^n * S_0 + P * \sum_{i=0}^{n-1}(1 + r\%)^i$ also

$S_n = (1 + r\%)^n * S_0 + P * \frac{1-(1+r\%)^n}{1-(1+r\%)}$ also

$S_n = (1 + r\%)^n * S_0 + P * \frac{(1-r\%)^n-1}{r\%}$

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Realteil und den Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

a) $\frac{i+3}{i}$

b) $(\frac{2}{1+i})^5$

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\frac{i+3}{i} = \frac{(i+3)(-i)}{i(-i)} = \frac{-i^2-3i}{-i^2} = 1 - 3i$

b) $(\frac{2}{1+i})^5 = [\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}]^5 = [\frac{2(1-i)}{2}]^5 = (1 - i)^5 = ...$

Aufgabe 7

Berechnen Sie das Näherungspolynom $\exp_5(x)$ für die Exponentialfunktion bis zum Term fünfter Ordnung (x^5-Term). In welchem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ist der absolute Fehler

$$|\exp_5(x) - \exp(x)|$$

kleiner als 0,01? Zeichnen Sie die Graphen von $\exp_5$ und exp.

Lösung zu Aufgabe 7

$$R_n(x) \leq 2\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} < 0.01$$

$n = 5$:

$$\begin{aligned} R_5(x) \leq 2\frac{|x|^6}{6!} &< 1/100 && (1)\\ |x|^6 &< 3.6 && (2)\\ -1.24 < x &< 1.24 && (3) \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Beweisen Sie die Funktionalgleichung $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$ des Logarithmus. Benutzen Sie dazu die Tatsache daß der natürliche Logarithmus ln die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist.

Lösung zu Aufgabe 8

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x \cdot e^y && (4)\\ \Leftrightarrow \quad e^{\ln x + \ln y} &= e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = x \cdot y && (5)\\ \Leftrightarrow \quad \ln x + \ln y &= \ln(x \cdot y) && (6) \end{aligned}$$