Blatt 3 Analysis 1 für die Übung am 3.05.24

30. April 2024

1 Folgen und Reihen

Aufgabe 1

Berechnen Sie die ersten 20 Folgeglieder einer Folge, die als Grenzwert den Wert $\sqrt{2}$ hat. Siehe dazu das Beispiel aus der Vorlesung bei der Einführung der reelen Zahlen. Tip: Falls Sie nicht viel Rechnen wollen oder noch keine Programmiersprache beherschen, können Sie auch eine Excel-Tabelle verwenden.

Lösung zu Aufgabe 1

Lösung: entsprechende Exceltabelle

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}},$$

d.h. den Limes der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = 1$ und $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$. Geben Sie sowohl die exakte Lösung als auch eine auf 10 Stellen genaue Näherung des Grenzwertes.

b) Beweisen Sie, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 2

a)

```
In[10]:= a[n_] := Sqrt[1+a[n-1]]
In[2] := a[1] := 1
In[11]:= For[n = 1, n <= 20, n++, Print[N[a[n],20]]]
1.
1.4142135623730950488
1.5537739740300373073
1.5980531824786174203
1.6118477541252515640
1.6161212065081169412
1.6174427985273905633
1.6178512906096748431
1.6179775309347391685
```

```
1.6180165422314875606
1.6180285974702324650
1.6180323227520000519
1.6180334739281508609
1.6180338296612190614
1.6180339395887896706
1.6180339735582778147
1.6180339840554270060
1.6180339872992245047
1.6180339883016130587
1.618033988611368157
```

Ausserdem gilt wenn $a_n \to a$:
$a = \sqrt{1+a}$ also
$a^2 = 1 + a$ bzw $a^2 - a - 1 = 0$ also
$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b) Zu zeigen ist die Beschränktheit und die Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sowie die Berechnung des Grenzwerts.

1. Beschränktheit: Wegen $a_0 = 1 > 0$ gilt $\forall n\ a_n > 0$. Es gilt $\forall n\ a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wegen (vollst. Induktion)

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \quad \text{und} \\ a_{n+1} &= \sqrt{1+a_n} < \sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt wegen

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} = \frac{(1+2\sqrt{5}+5)}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

2. Monotonie: Wegen $0 < a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist $a_{n+1} > a_n$, denn

$$\begin{aligned} a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} &> a_n \quad \Leftrightarrow \\ 1+a_n &> a_n^2 \quad \Leftrightarrow \\ a_n^2 - a_n - 1 &< 0 \quad \Leftrightarrow \\ a_n &< 1/2 + \sqrt{5/4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n}$ auf Konvergenz.

Lösung zu Aufgabe 3

Die Folge der einzelnen Summenglieder konvergiert gemaeß der Definition aus der Vorlesung. Die Folge der Partialsummen $S_p = \sum_{i=0}^{p}(a_i)$ konvergiert hingegen nicht, da immer 2^n Summanden durch $1/2$ abgeschätzt werden können:
$1/2 \geq 1/2,$ $\quad 1/3 + 1/4 \geq 1/2,$ $\quad 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 \geq 1/2$ ...

Es gibt also unendlich viele Teilsummen deren Wert grösser als $1/2$ ist. Also divergiert die Folge der Partialsummen

Aufgabe 4

Berechnen Sie die unendliche Summe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Wegen der geometrischen Reihe gilt:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Aufgabe 5

Beweisen Sie: Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $\forall k: \ a_k > 0$ konvergiert g.d.w. die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Lösung zu Aufgabe 5

Wenn $a_k > 0$ für alle k, dann ist $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Wenn $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zusätzlich beschränkt ist, dann ist $\sum_{k=0}^{n} a_k$ konvergent.

Aufgabe 6

Berechnen Sie für die folgende Reihe einen Näherungswert (falls möglich) und prüfen sie auf Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)2^{-n}$$

Lösung zu Aufgabe 6

$\sum_{n=0}^{k} a_n = 1.$, 1.75, 2.25, 2.5625, 2.75, 2.859375, 2.921875, 2.95703125, 2.9765625, 2.987304688, 2.993164063, 2.996337891, 2.998046875, 2.998962402, 2.999450684, 2.999710083, 2.999847412, 2.999919891, 2.999958038, 2.999978065, 2.999988556, 2.99999404, 2.999996901, ...

konvergent, da $|a_{n+1}/a_n| \to 1/2 + \epsilon$ für $n \to \infty$.