

Question 1 : Exprimer la vitesse maximale V_M^x en fonction de x_M^{\max} et T_a .

La position est donnée par l'aire sous la courbe de vitesse, on en déduit :

$$x_M^{\max} = \frac{T_a V_M^x}{2} + V_M^x (T - T_a - T_a) + \frac{T_a V_M^x}{2} = V_M^x (T - T_a) \quad \text{d'où} \quad V_M^x = \frac{x_M^{\max}}{T - T_a}$$

Question 2 :

- Par application du théorème de l'énergie cinétique sur l'ensemble des pièces en mouvement, exprimer le couple moteur C_m en fonction de V^x , T_a , J_e et λ durant les trois phases du mouvement.
- Préciser à quel(s) instant(s) t la puissance fournie par le moteur est maximale (P_{\max}).
- Exprimer cette puissance P_{\max} en fonction de V_M^x , T_a , J_e et λ .
- Donner alors l'expression de P_{\max} en fonction de x_M^{\max} , T , T_a , J_e et λ .

a) On isole l'ensemble des pièces en mouvement, l'inertie cinétique de l'ensemble est :

$$Ec(S/R) = \frac{1}{2} J_e (\omega_m^x)^2$$

Les puissances intérieures sont nulles (pas de frottement)

Le puissance extérieure est donnée par : $C_m \omega_m^x$

Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'ensemble isolé donne :

$$\frac{d\left(\frac{1}{2} J_e (\omega_m^x)^2\right)}{dt} = P_{\text{int}}(S) + P_{\text{ext} \rightarrow S/R} \quad J_e \omega_m^x \dot{\omega}_m^x = C_m \omega_m^x \quad J_e \dot{\omega}_m^x = C_m \quad J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} = C_m$$

Pour la 1^{er} phase (t compris entre 0 et T_a) : $C_m = J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$

Pour 2^{eme} phase (t compris entre T_a et $T - T_a$) : $C_m = 0$

Pour la 3^{eme} phase (t compris entre $T - T_a$ et T) : $C_m = J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} = -J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a}$

b) La puissance est maximale quand C_m et ω_m^x sont maxi donc pour $t = T_a$

$$c) P_{\max} = C_m \omega_m^x = J_e \frac{\dot{V}^x}{\lambda} \omega_m^x = J_e \frac{V_M^x}{\lambda T_a} \omega_m^x = \frac{J_e}{T_a} \left(\frac{V_M^x}{\lambda} \right)^2$$

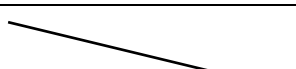
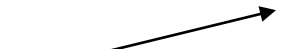
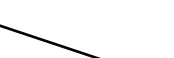
d) Avec le résultat de la 1^{er} question, on obtient :

$$P_{\max} = \frac{J_e}{T_a} \left(\frac{V_M^x}{\lambda} \right)^2 = \frac{J_e}{T_a} \left(\frac{\frac{x_M^{\max}}{T - T_a}}{\lambda} \right)^2 = \frac{J_e}{\lambda^2 T_a} \frac{(x_M^{\max})^2}{(T - T_a)^2}$$

Question 3 : A partir de cette expression, montrer que P_{max} est minimale pour un réglage du temps d'accélération T_a tel que $T_a = T/3$.

On exprime la dérivée de P_{max}

$$\begin{aligned}\frac{dP_{max}}{dT_a} &= \frac{d}{dT_a} \left(\frac{J_e}{\lambda^2 T_a} \frac{(x_M^{max})^2}{[(T - T_a)]^2} \right) = \frac{J_e (x_M^{max})^2}{\lambda^2} \frac{d}{dT_a} \left(\frac{1}{T_a [(T - T_a)]^2} \right) = \frac{J_e (x_M^{max})^2}{\lambda^2} \frac{\frac{d}{dT_a} (T_a [(T - T_a)]^2)}{(T_a [(T - T_a)]^2)^2} \\ - \frac{d}{dT_a} (T_a [(T - T_a)]^2) &= [(T - T_a)]^2 + 2T_a (-1)(T - T_a) = T^2 - 2TT_a + T_a^2 - 2T_a T + 2T_a^2 \\ - \frac{d}{dT_a} (T_a [(T - T_a)]^2) &= -T^2 + 4TT_a - 3T_a^2 \\ -T^2 + 4TT_a - 3T_a^2 &= (T_a - \frac{T}{3})(-3T_a + 3T) = 3(T_a - \frac{T}{3})(T - T_a)\end{aligned}$$

Ta	0		T/3		T	
(Pmax)'	-		0	+	0	-
Pmax						

La puissance est bien minimale pour $T_a = T/3$ sur l'intervalle $[0 ; T]$

Question 4 : Déterminer la vitesse de rotation maximum ω_{max}^x que doit atteindre le moteur. Le choix de celui-ci est-il validé ?

D'après la question 1, $V_M^x = \frac{x_M^{max}}{T - T_a}$.

On a aussi : $V^x = R_p \omega_{poulie} = R_p k \omega_m^x$ $(\omega_m^x)_{max} = \frac{V_M^x}{R_p k} = \frac{1}{R_p k} \frac{x_M^{max}}{T - T_a}$

Avec $R_p = 20$ mm, $k = 0.1$, $T = 1$ s, $T_a = 1/3$ s, $x_M^{max} = 0.55$ m

$$(\omega_m^x)_{max} = \frac{1}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 0.1} \frac{0.55}{1 - \frac{1}{3}} = 412 \text{ rad.s}^{-1} = 3940 \text{ tr.min}^{-1}$$

Ce qui est bien inférieur à la vitesse maximale de rotation du moteur (4150 tr.min⁻¹).

Le choix du moteur est donc validé pour la vitesse de rotation

Question 5 : En exprimant la condition de roulement sans glissement en I, déterminer ω_b et v , les composantes du torseur cinématique en G de la bille par rapport au rail 0, en fonction de θ et R.

La condition de roulement sans glissement en I entre la bille et le rail (0) donne :

$$\vec{V}(I \in \text{bille} / 0) = \vec{V}(G \in \text{bille} / 0) + \vec{\Omega}(\text{bille} / 0) \wedge \vec{GI} = \vec{0}$$

$$\vec{V}(G \in \text{bille} / 0) = -\vec{\Omega}(\text{bille} / 0) \wedge \vec{GI} = -\omega_b \vec{y}_0 \wedge \vec{r} = -r \omega_b \vec{x}_1$$

$$\text{On a aussi : } \vec{V}(G \in \text{bille} / 0) = \left[\frac{d\vec{OG}}{dt} \right]_0 = \left[\frac{d(R-r)\vec{z}_1}{dt} \right]_0 = (R-r) \left[\frac{d\vec{z}_1}{dt} \right]_0 = (R-r)\dot{\theta}\vec{x}_1$$

$$\text{On en déduit : } -r\omega_b\vec{x}_1 = (R-r)\dot{\theta}\vec{x}_1 \quad \omega_b = -\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r} \text{ et } v = (R-r)\dot{\theta}$$

Le torseur cinématique caractérisant le mouvement de la bille par rapport au rail (0) est donc :

$$\{V(\text{bille} / 0)\}_A : \begin{cases} -\frac{(R-r)\dot{\theta}}{r}\vec{y}_0 \\ (R-r)\dot{\theta}\vec{x}_1 \end{cases} = \begin{cases} \omega_b\vec{y}_0 \\ -r\omega_b\vec{x}_1 \end{cases}_A$$

Question 6 : En justifiant clairement la démarche et les théorèmes utilisés :

- Montrer que les efforts normal N_I et tangentiel T_I du rail sur la bille sont liés à l'angle θ par les équations suivantes :

$$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$$

$$T_I = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$$

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{z}_1 (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$\vec{\Gamma}(G \in \text{bille} / 0) = \left[\frac{d((R-r)\dot{\theta}\vec{x}_1)}{dt} \right]_0 = (R-r)\ddot{\theta}\vec{x}_1 + (R-r)\dot{\theta} \left[\frac{d\vec{x}_1}{dt} \right]_0 = (R-r)\ddot{\theta}\vec{x}_1 - (R-r)\dot{\theta}^2\vec{z}_1$$

$$-m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_1 + F(t)\vec{x}_0 \cdot \vec{z}_1 - N_I$$

$$-m(R-r)\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + F(t) \sin \theta - N_I$$

$$N_I = F(t) \sin \theta + mg \cos \theta + m(R-r)\dot{\theta}^2$$

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème du moment dynamique au point G en projection sur \vec{y}_0 (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$rT_I = \frac{2}{5}mr^2 \left(-\frac{R-r}{r}\ddot{\theta} \right) \quad T_I = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$$

On isole la bille, on applique le principe fondamental de la dynamique et on écrit le théorème de la résultante dynamique en projection sur \vec{x}_1 (le bilan des actions mécaniques est fait dans l'énoncé)

$$m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + T_I + mg\vec{z}_0 \cdot \vec{x}_1 + F(t)\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_1$$

$$m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + T_I - mg \sin \theta + F(t) \cos \theta \quad \text{avec } T_I = \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta}$$

$$m(R-r)\ddot{\theta} = -f_v(R-r)\dot{\theta} + \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} - mg \sin \theta + F(t) \cos \theta$$

$$F(t) \cos \theta = m(R-r)\ddot{\theta} + f_v(R-r)\dot{\theta} - \frac{2}{5}m(r-R)\ddot{\theta} + mg \sin \theta$$

$$F(t) \cos \theta = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg \sin \theta + m(R-r)\ddot{\theta} + \frac{2}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$$

$$F(t) \cos \theta = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg \sin \theta + \frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$$

Question 7. θ étant petit, linéariser l'équation du mouvement puis en déduire la fonction de transfert $H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)}$. Mettre (p) sous la forme canonique d'un système du second ordre dont on donnera les expressions du gain statique K_s , de la pulsation propre non amortie ω_0 et du coefficient d'amortissement ξ en fonction de f_v , R , r , m et g .

En linéarisant au premier ordre l'équation du mouvement devient :

$$F(t) = f_v(R-r)\dot{\theta} + mg\theta + \frac{7}{5}m(R-r)\ddot{\theta}$$

En supposant les conditions initiales nulles, on obtient dans le domaine symbolique :

$$F(p) = f_v(R-r)p\Theta(p) + mg\Theta(p) + \frac{7}{5}m(R-r)p^2\Theta(p)$$

$$F(p) = \left[mg + f_v(R-r)p + \frac{7}{5}m(R-r)p^2 \right] \Theta(p)$$

$$H(p) = \frac{\Theta(p)}{F(p)} = \frac{1}{mg + f_v(R-r)p + \frac{7}{5}m(R-r)p^2} = \frac{\frac{1}{mg}}{1 + \frac{f_v(R-r)}{mg}p + \frac{7(R-r)}{5g}p^2} = \frac{K_s}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$$

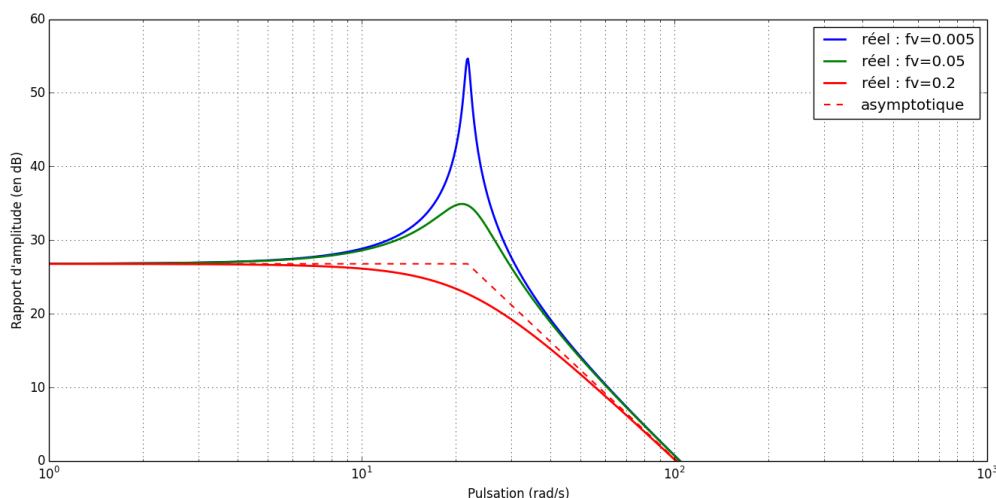
Par identification, on obtient :

$$K_s = \frac{1}{mg} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}}$$

$$\frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{f_v(R-r)}{mg} \quad \xi = \frac{1}{2} = \frac{f_v(R-r)}{mg} \sqrt{\frac{5g}{7(R-r)}} \quad \xi = \frac{f_v}{2mg} \sqrt{\frac{5g(R-r)}{7}}$$

Question 8. On prendra les valeurs numériques suivantes pour cette question :

$\omega_0 = 21,8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$; $K_s = 25 \text{ N}^{-1}$; $\xi = 4 \cdot f_v$. Tracer, sur le document réponse, le diagramme asymptotique de Bode en gain, ainsi que l'allure du diagramme réel pour les valeurs suivantes du coefficient de frottement visqueux f_v : $f_v = 0,005$; $f_v = 0,05$; $f_v = 0,2$



Question 9. La sollicitation des bobines est sinusoïdale : $F(t) = F_0 \sin(\omega_{bob}.t)$ Préciser, en justifiant votre réponse, la valeur à laquelle il faut régler la pulsation ω_{bob} pour pouvoir observer, au mieux, l'évolution du coefficient de frottement f_v .

Il faut régler ω_{bob} sur ω_0 .

La valeur de ω_0 ne dépend pas de la valeur du coefficient de frottement contrairement à ω_r .

Question 10.

a) Exprimer, pour un système du second ordre, en fonction de ζ , le rapport des amplitudes de sortie à $\omega \rightarrow 0$ et $\omega = \omega_0$ pour une même amplitude du signal d'entrée.

Pour un système du second ordre de la forme $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K_s}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$

quand $\omega \rightarrow 0$, on a $S_0 = K_s E_0$

quand $\omega = \omega_0$, $|H(j\omega_0)| = \left| \frac{S(j\omega_0)}{E(j\omega_0)} \right| = \left| \frac{K_s}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_0}j\omega_0 + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega_0)^2} \right| = \left| \frac{K_s}{j2\zeta} \right| = \frac{K_s}{2\zeta}$

$$\frac{|H(0)|}{|H(j\omega_0)|} = 2\zeta$$

b) Les figures 13 a, b, c, d (pages 10 et 11) représentent, avec f_v constant, l'évolution de la position de la bille θ [°] en fonction du temps t [s] pour différentes valeurs de pulsation ω_{bob} . A partir de ces courbes et des résultats précédents, déterminer la valeur du coefficient d'amortissement ζ .

D'après les figures a et c, et des résultats de la question précédente, on a :

$$\frac{F_0 |H(0)|}{F_0 |H(j\omega_0)|} = 2\zeta \quad \frac{0.06}{6.75} = 2\zeta \quad \zeta = \frac{0.03}{6.75} = 4,44.10^{-3}$$

c) En déduire la valeur numérique du coefficient de viscosité η du sang correspondant.

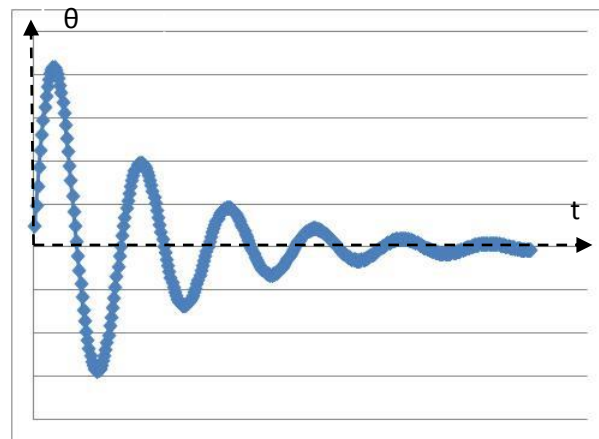
D'après l'énoncé le coefficient de frottement visqueux vaut : $f_v = 6.\pi.r.\eta$ et $\zeta = 4f_v$

$$\text{On en déduit : } f_v = 6.\pi.r.\eta = \frac{f_v}{6.\pi.r} = \frac{\zeta}{24.\pi.r}$$

il manque à priori le rayon de la bille r pour faire l'application numérique

d) A partir de ces analyses, en justifiant votre réponse, donner l'allure de la courbe θ en fonction de t obtenue à la pulsation ω_0 lorsque la viscosité du sang varie au fur et à mesure de la coagulation (si l'on suppose que f_v augmente avec la coagulation).

Lorsque la coagulation augmente, le coefficient de frottement augmente, le coefficient d'amortissement ζ augmente aussi, les oscillations de la bille vont donc être de plus en plus faibles



Partie informatique (programme réalisé en Python)

Question 11 : Donner la relation de récurrence qui lie Y_{i+1} à Y_i , $F(t_i, Y_i)$ et le pas de calcul h .

$$Y_{i+1} = Y_i + F(t_i, Y_i) \cdot h$$

Question 12 : Écrire une fonction $fi(t_i, Y_i)$, qui prend pour arguments t_i la valeur du temps discrétisé et Y_i la valeur du vecteur Y au temps discrétisé t_i et qui retourne la valeur de $F(t_i, Y(t_i))$.

Pour l'ensemble des fonctions de ce corrigé, on suppose que les valeurs de m , r , R , F_0 , w_{bob} , f_v et g sont définies de manière globale.

```
def fi(ti, Yi):
    thetapoint=Yi[1]
    thetapointpoint=5/(7*m*(R-r))*(F0*sin(wbob*ti)*cos(Yi[0])-fv*(R-
r)*Yi[1]-m*g*sin(Yi[0]))
    return [thetapoint,thetapointpoint]
```

Question 13 : Écrire une fonction **Euler**(Y_{ini} , h , T_{maxi} , F) qui prend en paramètres Y_{ini} un tableau à 2 dimensions (ou une liste de listes) contenant la condition initiale Y_0 , h le pas de calcul, T_{maxi} le temps final de calcul et F la fonction du problème de Cauchy. Cette fonction renverra le tableau SY . L'appel à cette fonction dans le programme se fera par la commande $SY = \text{Euler}(Y_0, h, T_{maxi}, fi)$.

```
def Euler(Yini, h, Tmaxi, F):
    SY=[[0, Yini[0], Yini[1]]]
    n=floor(Tmaxi/h)
    Yi=Yini; ti=0;
    for i in range(n):
        ti=ti+h
        Yprime=F(ti, Yi)
        Yi[0]=Yi[0]+Yprime[0]*h
        Yi[1]=Yi[1]+Yprime[1]*h
        SY.append([ti, Yi[0], Yi[1]])
    return SY
```

Question 14 : Donner la complexité de la fonction Euler pour T_{maxi} fixée. En déduire comment évolue le temps de calcul quand le pas h est divisé par 10.

Si on note n la partie entière de T_{maxi}/h , la complexité de la fonction Euler est en $O(n)$, correspondant aux n itération de la boucle for (la complexité de la fonction F (fi) est en $O(1)$).

Question 15 : Écrire une fonction **VerifRSG**(SY, f) qui prend pour argument le tableau SY et f (coefficient d'adhérence de la bille sur le rail) et qui renvoie True si le critère d'adhérence est vérifié (c'est-à-dire si $\left| \frac{T_I}{N_I} \right| \leq f, \forall t_i$), False sinon.

```
def VerifRSG(SY, f):
    n=len(SY)
    RSG=True
    i=0
    while (RSG==True and i<n):
        ti=SY[i][0]
        theta=SY[i][1]
        thetap=SY[i][2]#d(theta)/dt
        thetapp=fi(ti, [theta, thetap])[1]#d^2(theta)/dt^2
        NI=F0*sin(wbob*ti)*sin(theta)+m*g*cos(theta)+m*(R-r)*thetap**2
        TI=2/5*m*(r-R)*thetapp
        if abs(TI/NI)>f:
            RSG=False
        i=i+1
    return RSG
```

Question 16 : A partir de ces résultats, conclure quant aux hypothèses précédentes (validation de la linéarisation, hypothèse de roulement sans glissement).

D'après la figure 15, $\left| \frac{T_I}{N_I} \right| \leq 0,1 \forall t$ il y a donc bien adhérence et roulement sans glissement.

Pour ce qui est de comparer le modèle linéarisé et non linéarisé :

- Pour $\omega_{bob} = 20 \text{ rad.s}^{-1}$ (figures 13b et 14a) et $\omega_{bob} = 24 \text{ rad.s}^{-1}$ (figures 13d et 14b), les courbes sont très similaires.
- Pour $\omega_{bob} = 21,8 \text{ rad.s}^{-1}$ (figures 13c et 14b) : les allures sont similaires. Si on compare les amplitudes à 30 secondes :
 - 6,75 ° avec le modèle linéarisé
 - 8° avec le modèle non linéarisé
 - Soit une erreur de 16% sur les valeurs des amplitudes.

Le modèle linéarisé est donc valide, il permet bien d'observer l'amplification des oscillations autour de $\omega_{bob} = 21,8 \text{ rad.s}^{-1}$.

Question 17 : Écrire la fonction **Valeur_efficace**(T, a, b), qui prend pour argument un tableau T, les entiers a et b et renvoie la valeur efficace des b éléments consécutifs du tableau à partir de l'indice a. On supposera pour cette question que a et b sont tels qu'il n'y a pas de débordement d'indice possible. Donner la complexité de la fonction **Valeur_efficace**.

```
def Valeur_efficace(T, a, b):
    S=0
    for i in range(b):
        S=S+T[a+i]**2
    S=sqrt(1/b*S)
    return S
```

Question 18 :

- Quelle est la complexité de la fonction **Temps_coagulation**(M, Te, N) ?
- On propose de modifier la ligne 7 de la façon suivante :

$$X_{eff} \leftarrow \sqrt{X_{eff} \cdot X_{eff} + M[i + N] \cdot M[i + N] - M[i] \cdot M[i]}$$

- Comparer les deux solutions en termes de temps d'exécution. Justifier.

Initialement, la complexité de **Temps_coagulation**(M, Te, N) est en $O((N_{maxi} - N) \times N)$ soit un en $O(N_{maxi} \times N)$.

En remplaçant la ligne 7, la complexité est désormais en $O(N_{\max} \times 1)$. La seconde solution sera donc bien plus rapide en temps d'exécution.

Question 19 : Pourquoi ne peut-on pas utiliser de structure de type pile pour gérer le tampon ?
Il n'est pas judicieux d'utiliser une structure de type pile, car pour déstocker la plus ancienne de mesure (positionnée tout en bas de la pile), il faudra au préalable, dépiler toutes les autres mesures.

Question 20 : Écrire, en n'utilisant que la fonction **Mesure**(T_e) et les fonctions spécifiques aux files, la fonction **Init_tampon**(N, T_e) qui crée une file d'attente T , réalise N mesures successives à la période T_e et stocke celles-ci dans T . Elle renvoie T .

```
def Init_tampon(N, Te):
    T = creer_file()
    for i in range(N):
        enfiler(T, Mesure(Te))
    return T
```

Question 21 : En n'utilisant que la fonction **Mesure**(T_e) et les fonctions spécifiques aux files, compléter, sur votre copie, les lignes 7 et suivantes de l'algorithme de mesure modifié.

```
defiler(T)
enfiler(T, Mesure(Te))
Xeff = Valeur_efficace(T)
```

Question 22. Déterminer l'expression de l'inertie équivalente J_{eq} , ramenée à l'arbre moteur, de S , l'ensemble des pièces en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_g , définie par :

$$E_c(S/R_g) = \frac{1}{2} J_{eq} (\omega_m)^2$$

L'énergie cinétique de l'ensemble est donnée par :

$$E_c(S/R_g) = E_c(\text{moteur}/R_g) + E_c(\text{reduc}/R_g) + E_c(\text{éléments en trans.}/R_g)$$

$$E_c(S/R_g) = \frac{1}{2} J_m \omega_m^2 + \frac{1}{2} J_r \omega_m^2 + \frac{1}{2} m_p (r_p k_r \omega_m)^2 = \frac{1}{2} (J_m + J_r + m_p (r_p k_r)^2) \omega_m^2 = \frac{1}{2} J_{eq} \omega_m^2$$

$$\text{On en déduit : } J_{eq} = J_m + J_r + m_p (r_p k_r)^2$$

Question 23.

A partir d'un théorème d'énergie-puissance, écrire l'équation du mouvement liant $c_m(t)$ et les efforts extérieurs.

$$\text{Mettre celle-ci sous la forme : } c_m(t) = c_r(t) + J_{eq} \dot{\omega}_m$$

Donner l'expression de $c_r(t)$ en fonction de c_{res} , $F_r(t)$, m_p , g , R_p et k_r .

On isole l'ensemble des pièces en mouvement.

$$\text{La somme des puissances extérieures est donnée par : } P_{\text{ext} \rightarrow S/R_g} = C_m \omega_m - mg R_p k_r \omega_m - F_R R_p k_r \omega_m$$

$$\text{La somme des puissances intérieures est donnée par } P_i = C_{res} \omega_m \text{ avec } C_{res} < 0$$

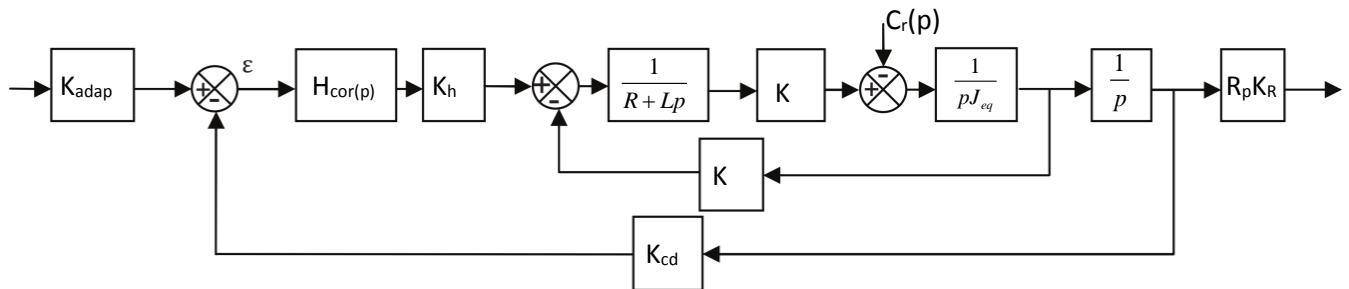
Le théorème de l'énergie-puissance donne :

$$(J_m + J_r + m_p (r_p k_r)^2) \dot{\omega}_m \omega_m = C_m \omega_m - mg R_p k_r \omega_m - F_R R_p k_r \omega_m + C_{res} \omega_m$$

$$C_m = (J_m + J_r + m_p (r_p k_r)^2) \dot{\omega}_m + mg R_p k_r + F_R R_p k_r - C_{res} = (J_m + J_r + m_p (r_p k_r)^2) \dot{\omega}_m + (mg + F_R) R_p k_r - C_{res}$$

$$\text{On a bien : } C_m(t) = c_r(t) + J_{eq} \dot{\omega}_m \text{ avec } c_r(t) = mg R_p k_r + F_R R_p k_r - C_{res}$$

Question 24. En tenant compte des notations précédentes, compléter sous forme littérale, sur le document réponse, le schéma-bloc de l'asservissement en position.



Question 25. Déterminer l'expression de K_{adap} pour que l'écart calculé (t) soit proportionnel à l'erreur $z(t) - z(t)$.

On doit avoir $K_{\text{adap}} = \frac{K_{\text{cd}}}{R_p K_R}$

Question 26. Déterminer les expressions de $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0}$ et de $\left(\frac{I(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0}$. Mettre celles-ci sous forme canonique.

$$\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{K}{(R+Lp)J_{\text{eq}}p}}{1 + \frac{K^2}{(R+Lp)J_{\text{eq}}p}} = \frac{K}{(R+Lp)J_{\text{eq}}p + K^2} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{RJ_{\text{eq}}}{K^2}p + \frac{LJ_{\text{eq}}}{K^2}p^2}$$

$$\left(\frac{I(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0} = \left(\frac{I(p)}{\Omega_m(p)}\right) \cdot \left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right) = \frac{pJ_{\text{eq}}}{K} \cdot \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{RJ_{\text{eq}}}{K^2}p + \frac{LJ_{\text{eq}}}{K^2}p^2} = \frac{\frac{pJ_{\text{eq}}}{K^2}}{1 + \frac{RJ_{\text{eq}}}{K^2}p + \frac{LJ_{\text{eq}}}{K^2}p^2}$$

Question 27. Pour cette question, vous justifierez vos résultats à l'aide des tracés nécessaires sur le document réponse.

a) A partir de ces courbes et des résultats de la question 26, indiquer si l'hypothèse d'une inductance négligeable est pertinente. Justifier la réponse.

Sur le document réponse, la courbe donnant l'évolution de la vitesse de rotation en fonction du temps lorsque le système est soumis à un échelon de tension présente une pente de tangente non nulle à l'origine. Ce qui est une caractéristique de la réponse d'un système du 1^{er} ordre. On peut donc négliger l'inductance du moteur devant les autres grandeurs

physiques et écrire la fonction de transfert sous la forme : $\left(\frac{\Omega_m(p)}{U(p)}\right)_{c_{r0}=0} = \frac{\frac{1}{K}}{1 + \frac{RJ_{\text{eq}}}{K^2}p}$

Idem pour la courbe donnant l'intensité $\left(\frac{I(p)}{U(p)} \right)_{c_{ro}=0} = \frac{\frac{pJ_{eq}}{K^2}}{1 + \frac{RJ_{eq}}{K^2} p}$

b) Dans cette hypothèse d'une inductance négligeable et à partir des équations (4), (5), (6) et (7), déterminer les expressions de i_0 , i_∞ et ω_∞ en fonction de u_0 , c_{ro} , R et K .

D'après (5) : $u_0 = Ri_0 + e_0$ avec $e_0 = K\omega_0 = 0$ d'où $i_0 = \frac{u_0}{R}$

D'après (4) et (7) : $c_{m\infty} = c_{ro} + J_{eq}\dot{\omega}_\infty = c_{ro} = Ki_\infty$ $i_\infty = \frac{c_{ro}}{K}$

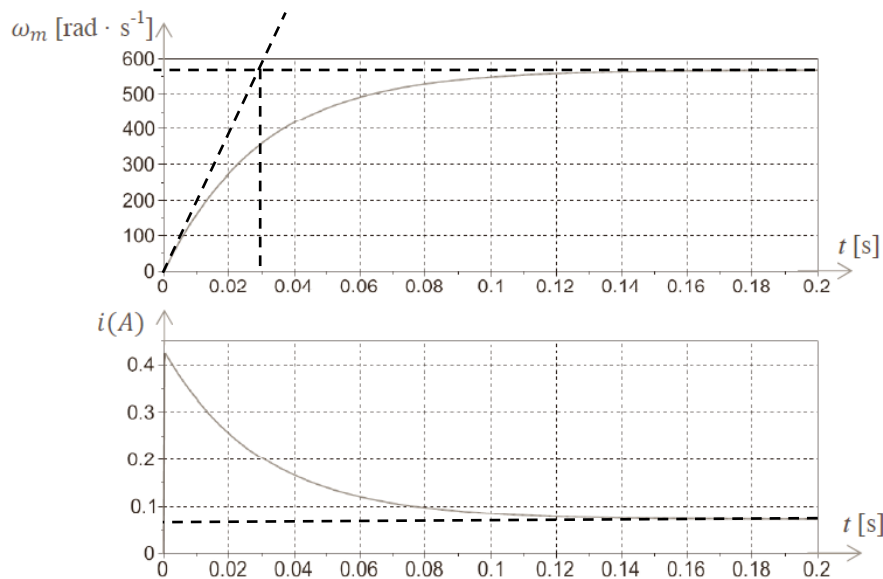
D'après (5) et (6) :

$$i_\infty = \frac{u_0 - e_\infty}{R} = \frac{u_0 - K\omega_\infty}{R} \quad \omega_\infty = \frac{-Ri_\infty + u_0}{K} = \frac{-R\frac{c_{ro}}{K} + u_0}{K} = \frac{u_0}{K} - \frac{Rc_{ro}}{K^2}$$

c) Dédurre de cette étude les valeurs numériques de K et R .

Graphiquement sur le document réponse on relève :

$$\omega_\infty = 575 \text{ rad.s}^{-1}, i_0 = 0.42 \text{ A}, i_\infty = 0.075 \text{ A}$$



Réponses en vitesse et en intensité à un échelon de tension de 24 V

On en déduit :

$$R = \frac{u_0}{i_0} = \frac{24}{0.42} = 57 \Omega$$

$$i_\infty = \frac{u_0 - K\omega_\infty}{R} \quad K = \frac{-Ri_\infty + u_0}{\omega_\infty} = \frac{-57 \cdot 0.075 + 24}{575} = 0.034 \text{ V.s.rad}^{-1} \text{ ou Nm.A}^{-1}$$

d) Déterminer la valeur numérique du couple résistant ramené à l'arbre moteur c_{ro} et de l'inertie équivalente raménée à l'arbre moteur J_{eq} .

On a $c_{ro} = Ki_\infty$ $c_{ro} = 0.034 \cdot 0.075 = 2.57 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$

$$\text{D'après (4) et (7) : } J_{eq} = \frac{c_{m0} - c_{ro}}{\dot{\omega}_0} \quad J_{eq} = \frac{Ki_0 - c_{ro}}{\dot{\omega}_0}$$

Graphiquement à partir de la figure du document réponse, on a $\dot{\omega}_0 = \frac{600}{0.03} \text{ rad.s}^{-1}$

$$\text{On en déduit } J_{eq} = \frac{0,034.0,42 - 2,57.10^3}{\frac{600}{0,03}} = 5,8.10^{-7} \text{ kg.m}^2$$

Question 28. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle ouverte

$$H_{bo}(p) = \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} \text{ ainsi que la fonction de transfert } H_{cr}(p) = \left(\frac{Z(p)}{c_r(p)} \right)_{Zc=0}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est donnée par

$$\begin{aligned} H_{bo}(p) &= \frac{Z(p)}{\varepsilon(p)} = H_{cor}(p) \frac{K_1}{p(1+T_m p)} = \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \\ Z(p) &= \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p \varepsilon(p) - K_2 C_r(p)] = \frac{K_1}{p(1+T_m p)} [K_p (-Z(p)) - K_2 C_r(p)] \\ Z(p) \left(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \right) &= - \frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)} C_r(p) \\ H_{cr}(p) &= \left(\frac{Z(p)}{c_r(p)} \right)_{Zc=0} = \frac{- \frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p)}}{\left(1 + \frac{K_p K_1}{p(1+T_m p)} \right)} = - \frac{K_1 K_2}{p(1+T_m p) + K_p K_1} = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \end{aligned}$$

Question 29. Déterminer l'erreur statique pour une entrée de type échelon d'amplitude Z_{co} dans l'hypothèse d'une perturbation nulle ($C_{ro} = 0$). Déterminer ensuite l'erreur due à une perturbation constante C_{ro} , définie comme la valeur finale de la position (z) dans le cas d'une consigne de position nulle ($zc = 0$). En déduire la valeur de K_p pour satisfaire le critère de précision du cahier des charges.

L'erreur statique par rapport à une entrée échelon, la perturbation étant nulle, est égale à 0, car il y a une intégration dans la chaîne directe

Dans le cas d'une perturbation constante égale à C_{ro} , d'après la question précédente on peut écrire :

$$Z(p) = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} c_r(p) = - \frac{\frac{K_2}{K_p}}{1 + \frac{p(1+T_m p)}{K_p K_1}} \frac{C_{ro}}{p}$$

En utilisant la propriété du gain statique, on en déduit $z_\infty = - \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}$, l'erreur vaut donc

$$\varepsilon = - \frac{K_2 C_{ro}}{K_p}.$$

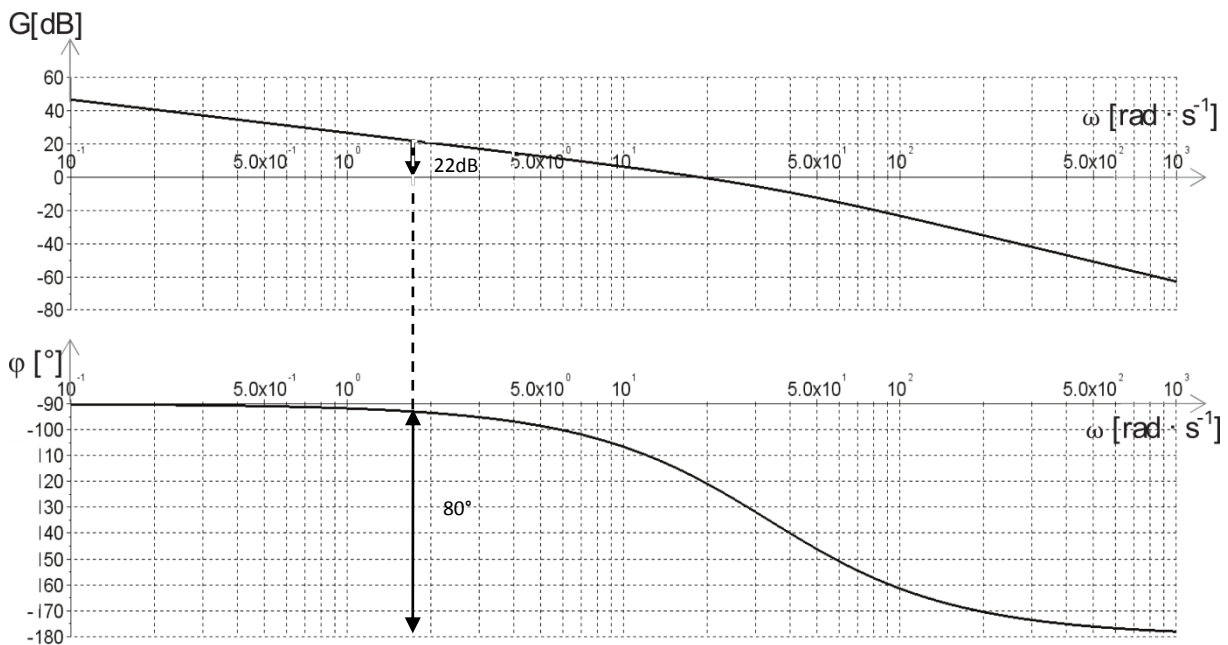
Pour répondre à l'exigence de précision, on doit avoir $\varepsilon = -\frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 1 \text{ mm}$. On en déduit

$$\varepsilon = -\frac{K_2 C_{ro}}{K_p} < 10^{-3} \text{ m} \quad K_p > \frac{K_2 C_{ro}}{10^{-3}} \quad K_p > \frac{2,78 \cdot 10^{-2} \cdot 2,3 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} \quad K_p > 0,075$$

Question 30. Les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H_{bo}(p)$ sont donnés sur le document réponse pour $K_p=1$. Pour la valeur de K_p déterminée précédemment, indiquer si le critère de stabilité est satisfait en justifiant votre démarche par les tracés nécessaires sur le document réponse.

Avec $K_p=0.075$, on translate vers le bas la courbe de gain de $20\log 0.075 = -22\text{dB}$ la courbe de phase restant inchangée.

On obtient une marge de phase de $80^\circ > 60^\circ$, le critère de stabilité est vérifié



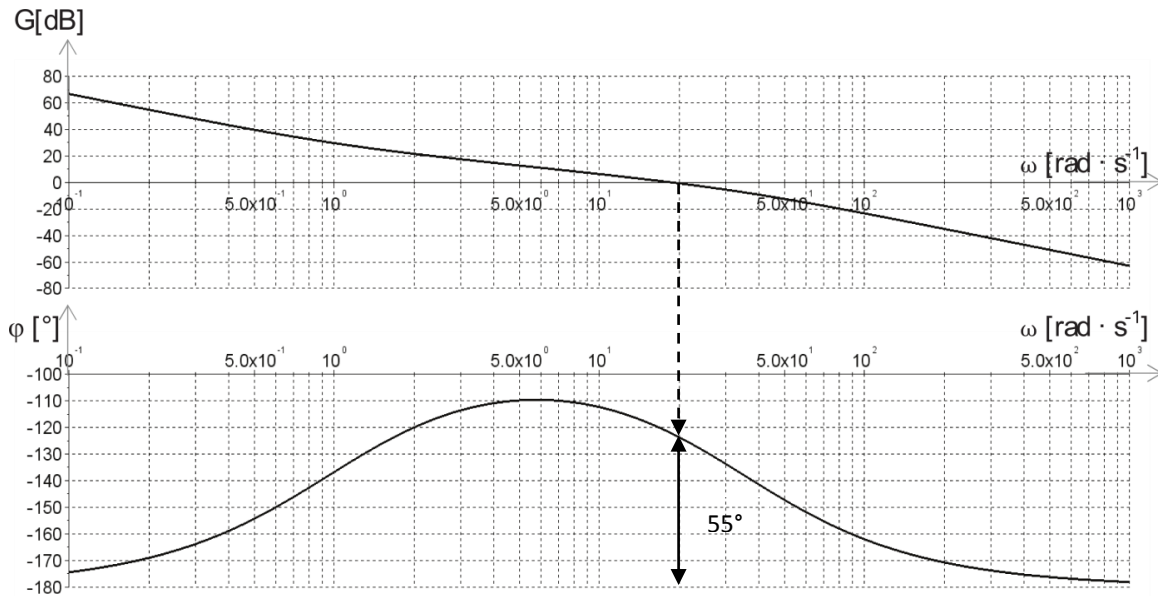
Question 31. Justifier le choix de ce correcteur. Déterminer le coefficient K_p pour satisfaire au cahier des charges. Justifier vos calculs par les tracés nécessaires sur le document réponse.

Le correcteur PI permet d'apporter un intégrateur avant la perturbation ce qui permet de respecter le critère de précision.

Sans modifier la valeur de K_p , la marge de phase est de $55^\circ < 60^\circ$ le critère de stabilité n'est pas respecté.

Pour obtenir une marge de phase de 70° , on doit avoir $A_{dB}=0$ pour $\omega = 5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On doit donc traduire vers le bas la courbe de gain d'environ 12dB.

On prend donc K_p tel que $20\log K_p = -12 \quad K_p = 10^{\frac{-12}{20}} = 0,25$



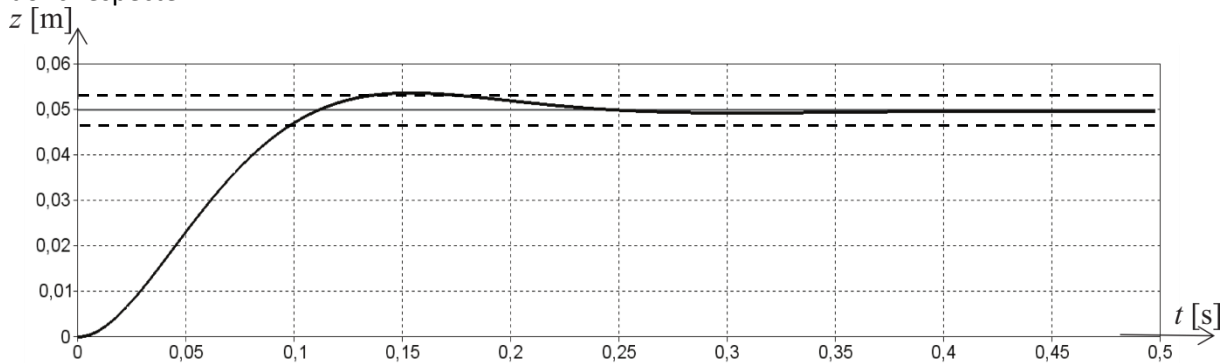
Question 32. La figure 16 (page 19) donne la réponse à un échelon de position de 50 mm avec le correcteur précédemment réglé. Vérifier qu'elle est conforme au cahier des charges. Justifier clairement vos réponses en donnant les valeurs numériques pour chaque critère.

La valeur en régime permanent vaut 50mm, l'erreur statique est nulle le critère de précision est respecté.

Le temps de réponse à 5% vaut environ 0,18s < 0,2s le critère de rapidité est respecté

Le premier dépassement vaut $D_{1\%} = \frac{0.0525 - 0.05}{0.05} = 5\% < 10\%$. Le critère d'amortissement est

donc respecté.



Question 33. Calculer les erreurs de mesure de Z_0 dues à l'échantillonnage d'une part et à la conversion analogique numérique du codeur incrémental d'autre part. En déduire l'erreur maximale de position notée ΔZ_{mes} cette erreur est-elle compatible avec le cahier des charges ?

Erreur due à l'échantillonnage :

$$Z_{mes1} = T_e V_e = T_e \omega_m R_p k_r \quad Z_{mes1} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4150 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{19,2} = 2,26 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Erreur due à la conversion analogique numérique :

$$Z_{mes2} = \frac{2\pi}{2000} R_p k_r \quad Z_{mes2} = \frac{2\pi}{2000} 10 \cdot 10^{-3} \frac{1}{19,2} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

L'erreur totale est supérieur à 1 mm donc incompatible avec l'exigence de précision du cahier des charges.

Question 34. Calculer la nouvelle erreur maximale de position $\Delta Z'm$ avec l'application de cette nouvelle procédure. Donner l'erreur de volume correspondante.

Erreur due à l'échantillonnage :

$$Z_{mes1} = T_e V_e = T_e \omega'_m R_p k_r \quad Z_{mes1} = 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1500 \cdot 2\pi}{60} \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{19,2} = 0,82 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Erreur due à la conversion analogique numérique : $Z_{mes2} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

$\Delta Z'm < 1 \text{ mm}$ l'exigence de précision est maintenant respecté.

On obtient une erreur de volume de $\Delta V = Z'_{mes} \frac{\pi D_f^2}{4} \quad \Delta V = 0,82 \cdot \frac{\pi \cdot 15^2}{4} = 144 \text{ mm}^3$

Question 35. Faire une synthèse des choix qui ont été faits pour satisfaire le critère de précision du volume prélevé.

Dans un premier temps choix d'un correcteur PI pour respecter la précision de positionnement de l'aiguille.

Dans un second temps, utilisation d'un moteur permettant d'avoir une vitesse d'approche rapide puis une vitesse de descente lente