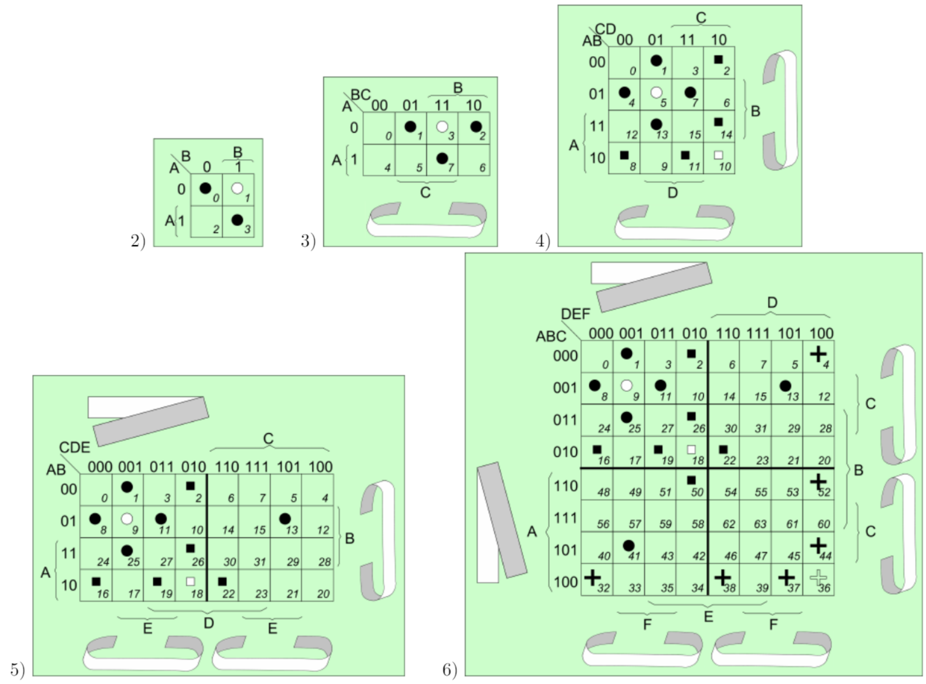
Diagrame Veich - Karnaugh
(Lecția 5)



Un *minterm* este un termen produs în care apar toate variabilele de intrare, negate sau ne-negate. Pe o diagramă V-K, un minterm care apare în expresia FCND/SOP este asociat cu o căsuţă ce conţine valoarea 1.

Un *implicant prim* este un termen produs care conţine doar anumite variabilele de intrare, negate sau ne-negate. Pe o diagramă V-K, un implicant prim asociat unei suprafeţe având toate câmpurile cu valoarea 1.

Un *implicant prim esenţial* este un implicant prim care acoperă în mod unic un câmp cu valoarea 1 şi este obligatoriu să fie prezent în expresia minimă a funcţiei.

Minimizarea funcţiilor logice presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. Se acoperă toate căsuţele cu valoare 1 cu cel puţin o suprafaţă. Suprafeţele sunt dreptunghiulare cu laturi de dimensiuni puteri ale lui 2 ($2^0 = 1, 2^1 = 2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, ...$). O suprafaţă conţine căsuţe vecine (din punct de vedere al codurilor asociate acestora).
   Căsuţele cu valoarea 1 se acoperă cu un număr minim de suprafeţe, având dimensiune maximă.

2. Din considerarea suprafeţelor care acoperă în întregime toate căsuţele cu valoare 1, se obţine expresia minimă a funcţiei.
   O suprafaţă de o căsuţă generează un minterm în expresia minimă a funcţiei.
   O suprafaţă de două căsuţe generează un implicant prim în expresia minimă a funcţiei. Implicantul prim este un produs al tuturor variabilelor de intrare cu excepţia celei ce are valoare 0 într-o căsuţă şi valoare 1 în cealaltă căsuţă.
   La fiecare dublare a suprafeţei, din implicantul prim dispare o variabilă de intrare (cea care are valoare 1 în jumătate din căsuţele suprafeţei şi valoare 0 în cealaltă jumătate).
   O suprafaţă ce acoperă jumătate din diagrama V-K va genera în expresia final a funcţiei un "produs" cu o singură literă (variabila de intrare care are aceeaşi valoare în toate căsuţele suprafeţei).

3. Pentru determinarea implicantului prim asociat unei suprafeţe se compară suprafaţa considerată cu regiunile definite de fiecare variabilă de intrare în parte. Pot exista 3 cazuri:
   (a) Suprafaţa cade integral într-o regiune asociată cu o variabilă: în acest caz, în implicantul prim se preia variabila de intrare.
   (b) Suprafaţa cade integral în afara unei regiuni asociate cu o variabilă: în acest caz, în implicantul prim se preia variabila de intrare negată.
   (c) Suprafaţa cade jumătate în interiorul unei regiuni asociate cu o variabilă, jumătate în exteriorul acesteia: în acest caz, din implicantul prim lipseşte variabila de intrare.

Pentru o funcţie cu N variabile de intrare, o diagramă completă are 2^N căsuţe cu valori 1 sau 0 (prin lipsa unei valori se presupune valoarea opusă celei ce apare în diagramă). Pentru un număr mare de intrări (mai mare decât 5) diagramele pot deveni mari şi greu de operat cu ele. Din acest motiv, se poate micşora dimensiunea diagramei V-K prin introducerea în căsuţe a unor funcţii de una sau mai multe variabile de intrare. Variabilele ale căror nume se regăsesc in interiorul diagramelor V-K se numesc *variabile reziduu.*

Un caz particular îl constituie *funcţiile incomplet definite* care au valori indiferente pentru anumite combinaţii ale intrărilor. În aceste cazuri, căsuţele asociate în diagramele V-K vor conţine valoare indiferentă, marcată cu X (Engl. *"don't care"*). Pentru acţiunea de minimizare, valorile indiferente poti fi considerate ca având valori 1 sau 0 astfel încât să se acopere căsuţele ce conţin 1 cu suprafeţe cât mai mari şi cât mai puţine.

Minimizarea funcţiilor cu variabile reziduu incomplet definite se realizează în următoarele etape:

- Se consideră căsuţele care au valori logice 1 şi cele cu valori indiferente. Se determină formele minime ale suprafeţelor definite.
- Căsuţele cu valoare 1 se consideră a fi cu valoare indiferentă. Se consideră căsuţele care conţin aceeaşi funcţie reziduu şi cele cu valori indiferente. Implicanţii primi rezultaţi vor fi consideraţi în conjuncţie (AND) cu funcţia reziduu.
- Forma minimă a funcţiei se obţine prin aplicarea funcţiei OR asupra tuturor implicanţilor primi obţinuţi la cele două etape anterioare.
- În cazuri particulare, dacă funcţiile reziduu au mai mult de o variabilă, expresia finală se mai poate reduce prin prelucrări analitice.

1. Să se minimizeze următoarele funcţii de 3 intrări, utilizând diagrame V-K:
   a) $F_a(A,B,C) = \sum(0,2,3,4,6)$
   b) $F_b(A,B,C) = \sum(3,5,6,7)$
   c) $F_c(A,B,C) = \sum(0,1,5,7)$

A \ BC	00	01	11	10
0	1 $_{0}$	0 $_{1}$	1 $_{3}$	1 $_{2}$
1	1 $_{4}$	0 $_{5}$	0 $_{7}$	1 $_{6}$

$\square = \bar{C}$

$\bigcirc = \bar{A}B$

$f = \bar{A}B + \bar{C} \leftarrow$ IPE

A \ BC	00	01	11	10
0	0 $_{0}$	0 $_{1}$	1 $_{3}$	0 $_{2}$
1	0 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	1 $_{6}$

$f = AC + BC + AB$

A \ BC	00	01	11	10
0	1 $_{0}$	1 $_{1}$	0 $_{3}$	0 $_{2}$
1	0 $_{4}$	1 $_{5}$	1 $_{7}$	0 $_{6}$

$(0,1) = \bar{A}\bar{B} \rightarrow$ IPE

$(1,5) = \bar{B}C \rightarrow$ IP.N

$(5,7) = AC \rightarrow$ IPE

$f = \bar{A}\bar{B} + \cancel{\bar{B}C} + AC$

2. Să se minimizeze următoarele funcţii de 4 intrări, utilizând diagrame V-K:

a) $F_a(A, B, C, D) = \sum(1, 5, 9, 15)$

b) $F_b(A, B, C, D) = \sum(1, 3, 9, 11, 12, 13, 14, 15)$

c) $F_c(A, B, C, D) = \sum(0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 13, 14, 15)$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0 (0)	1 (1)	0 (3)	0 (2)
01	0 (4)	1 (5)	0 (7)	0 (6)
11	0 (12)	0 (13)	1 (15)	0 (14)
10	0 (8)	1 (9)	0 (11)	0 (10)

$(1,5) = \bar{A}\bar{C}D$ \
$(1,9) = \bar{B}\bar{C}D$ } IPE

$(15) = ABCD$ -> minterm / IPE ?

$f = \bar{A}\bar{C}D + \bar{B}\bar{C}D + ABCD$

AB \ CD	00	01	11	10
00	(0)	1 (1)	1 (3)	(2)
01	(4)	(5)	(7)	(6)
11	1 (12)	1 (13)	1 (15)	1 (14)
10	(8)	1 (9)	1 (11)	(10)

$(12, 13, 14, 15) = AB$

$(1, 3, 9, 11) = \bar{B}D$

$(1, 3, 9, 11) = \bar{B}D$ \
$(9, 11, 13, 15) = AD$ } IPE \
$(12, 14) = AB\bar{D}$ /

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 0	1	3	1 2
01	1 4	1 5	1 7	1 6
11	12	1 13	1 15	1 14
10	1 8	9	11	1 10

$(0, 2, 4, 6) = \bar{A}\bar{D}$ ←

$(0, 2, 8, 10) = \bar{B}\bar{D}$ ←

$(5, 7, 13, 15) = BD$ ←

$(2, 6, 10, 14) = C\bar{D}$ ←