L8

(curs 4 - S4)

15.03.2024

Mintermi

Un minterm este o functie elementara de n variabile notata "m_i^n" unde n indica numarul de variabile ale functiei iar i este echivalentul zecimal al mintermului.

E_z	X_2	X_1	X_0	m_0^3	m_1^3	m_2^3	m_3^3	m_4^3	m_5^3	m_6^3	m_7^3
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
6	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

→ 0 în binar
⇒ 1 pe poziția 0

A	B	C	minterms	
0	0	0	$\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}$	m0
0	0	1	$\overline{A}\ \overline{B}\ C$	m1
0	1	0	$\overline{A}\ B\ \overline{C}$	m2
0	1	1	$\overline{A}\ B\ C$	m3
1	0	0	$A\ \overline{B}\ \overline{C}$	m4
1	0	1	$A\ \overline{B}\ C$	m5
1	1	0	$A\ B\ \overline{C}$	m6
1	1	1	$A\ B\ C$	m7

Sumă de mintermi

□ funcţia minterm $m_2^3(X_0, X_1, X_2) = \overline{X_2} \cdot X_1 \cdot \overline{X_0}$ are expresia 1 dacă $X_2 = 0$, $X_1 = 1$ şi $X_0 = 0$, și valoarea 0 în rest;

□ orice funcţie booleană de n variabile poate fi reprezentată ca **sumă logică de funcţii minterm**

$$f(X_{0,} X_1 \ldots\ldots X_{n-1}) = \sum_{i \in K} m_i^n$$

ex:

$$F = \sum(\overset{m_3}{3}, \overset{m_5}{5}, \overset{m_6}{6}, \overset{m_7}{7}) = \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz$$

x		y	z	F
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
0	2	1	0	0
0	3	1	1	1
1	4	0	0	0
1	5	0	1	1
1	6	1	0	1
1	7	1	1	1

□ **forma canonică disjunctivă** a funcţiei:- termenii produs logic ai funcţiei conţin **toate** variabilele funcţiei, între termeni realizându-se operaţia **SAU** (disjuncție).

Maxterm

- maxterm este o functie elementară de n variabile notate M_i^n unde i este echivalentul zecimal al n-uplului funcţiei, aplicat in „0”, interpretat ca un număr binar pe n poziţii.
- Functiei maxterm îi corespunde o expresie de n variabile în formă M_i^n care în urma evaluării pentru toate n-uplurile, ia aceeasi valoare ca si $M_i^n = \overline{m_i^n}$.

$$F = \Pi(0,1,2,4) = (x+y+z)\cdot(x+y+\bar{z})\cdot(x+\bar{y}+z)\cdot(\bar{x}+y+z)$$

Reprezentarea funcțiilor de comutație

E_z	X_2	X_1	X_0	M_0^3	M_1^3	M_2^3	M_3^3	M_4^3	M_5^3	M_6^3	M_7^3
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1
3	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1
4	1	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1
5	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

→ 0 pe poz 0, 1 în rest

- Funcţia maxterm M_3^3 de exemplu are expresia $M_3^3 = X_2 + \overline{X_1} + \overline{X_0}$ =0 pentru $X_2 = 0, X_1 = 1$, $X_0 = 1$ pentru celelalte atribuiri având valoarea „1”.
- O funcţie de comutaţie de n variabile poate fi reprezentată printr-un produs de maxtermi:

$$f(X_{0,}X_1.....X_{n-1}) = \prod_{i \in K0} M_i^n$$

unde K_0 este mulţimea indicilor M_i^n pt care care funcţia ia valoarea „0”.

Maxtermi & Mintermi: $M_i^n = \overline{m_i^n}$

A	B	C	maxterms		minterms	
0	0	0	$A + B + C$	M0	$\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C}$	m0
0	0	1	$A + B + \bar{C}$	M1	$\bar{A}\ \bar{B}\ C$	m1
0	1	0	$A + \bar{B} + C$	M2	$\bar{A}\ B\ \bar{C}$	m2
0	1	1	$A + \bar{B} + \bar{C}$	M3	$\bar{A}\ B\ C$	m3
1	0	0	$\bar{A} + B + C$	M4	$A\ \bar{B}\ \bar{C}$	m4
1	0	1	$\bar{A} + B + \bar{C}$	M5	$A\ \bar{B}\ C$	m5
1	1	0	$\bar{A} + \bar{B} + C$	M6	$A\ B\ \bar{C}$	m6
1	1	1	$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$	M7	$A\ B\ C$	m7

$$F = \sum(3,5,6,7)$$

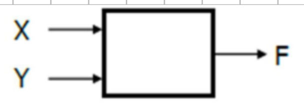
$$F = m_3^3 + m_5^3 + m_6^3 + m_7^3 = \sum(3,5,6,7)$$

$$F = M_0^3 \cdot M_1^3 \cdot M_2^3 \cdot M_4^3 = \prod(0,1,2,4)$$

- **forma canonică conjunctivă** a funcţiei:- termenii sumă logică ai funcţiei conţin **toate** variabilele funcţiei, între termeni realizându-se operaţia **ȘI**.

Termen	Definiţie
Literal	Variabilă booleană sau complementul ei
Termen Produs (Product Term)	Literal sau produs logic (ŞI) între mai mulţi literali
Termen Sumă (Sum Term)	Literal sau sumă logică (OR) între mai mulţi literali
Sum of Products (SOP)	Sumă logică (OR) între mai mulţi termeni produs
Products of Sums (POS)	Produs logic (ŞI) între mai mulţi termeni sumă
Minterm	Caz particular de termen produs, care conţine toate variabilele de intrare o singură dată
Maxterm	Caz particular de termen sumă, care conţine toate variabilele de intrare o singură dată
Sumă de produse canonică	Sumă logică (OR) de acei mintermi aferenţi rândurilor din tabelul de adevăr al funcţiei de ieşire unde aceasta are valoarea 1 logic
Produs de sume canonic	Produs logic (ŞI) de acei mintermi aferenţi rândurilor din tabelul de adevăr al funcţiei de ieşire unde aceasta are valoarea 0 logic

n variabile $\longrightarrow 2^{2^n}$ funcții



16 possible functions (F_0–F_{15})

X	Y																
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
		0	X AND Y		X		Y	X XOR Y	X OR Y	X NOR Y NOT (X OR Y)	X = Y	NOT Y		NOT X		X NAND Y NOT (X AND Y)	1

NAND

X	Y	Z
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

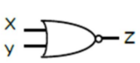
$Z = \overline{X \bullet Y}$

AND

X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$Z = X \bullet Y$

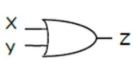
NOR



X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$Z = \overline{X + Y}$

OR



X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$Z = X + Y$

XOR
($X \oplus Y$)

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$Z = X\overline{Y} + \overline{X}Y$
X or Y but not both
("inequality", "difference")

XNOR
$\overline{(X \oplus Y)}$

X	Y	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

$Z = \overline{X}\,\overline{Y} + XY$
X and Y the same
("equality")

Minimizarea funcțiilor logice

- Găsirea a doi termeni (suma sau produs funcție de reprezentarea dorită SOP/POS) pentru care:
  - funcția ia valoare 1
  - numai o variabilă își modifică valoarea

A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

B are acești valoare $\rightarrow$ B este păstrat

A are valori diferite $\rightarrow$ A este eliminat

$$F = \bar{A}\,\bar{B} + A\bar{B} = (\bar{A} + A)\bar{B} = \bar{B}$$

Diagrame Karnaugh

- constituie o matrice de pătrate cu proprietatea ca două celule vecine corespund unor mintermi **adiacenţi**.
- doi vectori sunt adiacenţi dacă diferă valoric printr-un singur bit
- în diagramă se marchează acei mintermi care au valoarea logică 1 în tabelul de adevăr

- Numerele adiacente numărului 0100 sunt: 0101; 0110; 0000; 1100.
- Numerele adiacente numărului 000 sunt: 001; 010; 100.
- Vectorii adiacenţi mintermului $ab\bar{c}$ sunt: $\bar{a}b\bar{c}$, $a\bar{b}\bar{c}$, abc

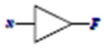
c

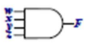
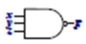
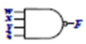
ab \ cd	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

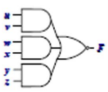
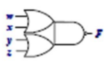
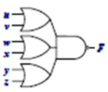
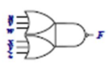
b

d

Porți logice și delay-uri

Name	Graphic Symbol	Functional Expression	Number of transistors	Delay in *ns*
Inverter		$F = x'$	2	1
Driver		$F = x$	4	2
AND		$F = xy$	6	2.4
OR		$F = x + y$	6	2.4
NAND		$F = (xy)'$	4	1.4
NOR		$F = (x + y)'$	4	1.4
XOR		$F = x \oplus y$	14	4.2
XNOR		$F = x \odot y$	12	3.2

Name	Graphic Symbol	Functional Expression	Number of transistors	Delay in *ns*
3–input AND		$F = xyz$	8	2.8
4–input AND		$F = xyzw$	10	3.2
3–input OR		$F = x + y + z$	8	2.8
4–input OR		$F = x + y + z + w$	10	3.2
3–input NAND		$F = (xyz)'$	6	1.8
4–input NAND		$F = (xyzw)'$	8	2.2
3–input NOR		$F = (x + y + z)'$	6	1.8
4–input NOR		$F = (x + y + z + w)'$	8	2.2

Name	Graphic Symbol	Functional Expression	Number of transistors	Delay in *ns*
2–wide, 2–input AOI		$F = (wx + yz)'$	8	2.0
3–wide, 2–input AOI		$F = (uv + wx + yz)'$	12	2.4
2–wide, 3–input AOI		$F = (uvw + xyz)'$	12	2.2
2–wide, 2–input OAI		$F = ((w + x)(y + z))'$	8	2.0
3–wide, 2–input OAI		$F = ((u + v)(w + x)(y + z))'$	12	2.2
2–wide, 3–input OAI		$F = ((u + v + w)(x + y + z))'$	12	2.4