L6 01.03.2024

(curs 2 - S2)

Algebră booleană și logică digitală

1. Noțiuni fundamentale de algebră

Set = colecție de date cu o anumită proprietate

-> $x \in S$

-> setul $A = \{2,3,4,5\}$

Un operator binar al setului S este o regulă prin care, pentru oricare pereche de elemente din S prin aplicarea regulii se obține tot un element din S.

Axiomă = propoziție considerată adevărată, fără a fi demonstrată.

Ex:

- **Comutativitatea**
  - Un operator binar • este comutativ dacă și numai dacă pentru oricare $x, y \in S$

    $$x \bullet y = y \bullet x$$
- **Elementul invers**
  - Un set S are invers (e) dacă și numai dacă pt. oricare $x \in S$, există un element $y \in S$ astfel încât

    $$x \bullet y = e$$
- **Distributivitate**
  - Dacă • și + sunt doi operatori binari asupra setului S, se spune că • e distributiv în raport cu + dacă, oricare ar fi $x, y, z \in S$

    $$\mathbf{x \bullet (y + z) = (x \bullet y) + (x \bullet z)}$$

Algebra booleană este un set de elemente B cu 2 operatori binari, + și ·, care satisfac următoarele 6 axiome:

Axioma 1 (Proprietatea închiderii):

(a) B este închisă cu privire la operatorul +;

(b) B este închisă cu privire la operatorul · ;

Axioma 2 (Element neutru):

(a) $\exists$element neutru faţă de operatorul **+** notat cu 0 a.î.: $\forall$ a$\in$B, a+0 = a;

(b) $\exists$element neutru faţă de operatorul **·** notat cu 1 a.î.: $\forall$ a$\in$B, a·1 = a;

Axioma 3 (Comutativitate):

(a) $\forall$ a,b$\in$B, a+b = b+a;

(b) $\forall$ a,b$\in$B, a·b = b·a;

Axioma 4 (Distributivitate):

(a) $\forall$ a,b,c$\in$B, a+(b·c) = (a+b) · (a+c);

(b) $\forall$ a,b,c$\in$B, a·(b+c) = a·b + a·c;

Axioma 5 (Complementul): Pentru fiecare $x \in B$, există $x' \in B$ a.î.

(a) $x + x' = 1$;

(b) $x \cdot x' = 0$;

x' se numește complementul lui x

$(se\ mai\ noteaza\ \bar{x})$

Axioma 6: Mulțimea B conține cel puțin 2 elemente diferite. x, y $\in B$, și $x \neq y$

Algebra booleană cu 2 valori:

$B = \{0, 1\}$ + 2 operatori $\begin{cases} \text{SAU (OR)} \\ \text{ȘI (AND)} \end{cases}$

x	y	x·y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

op.și

x	y	x+y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

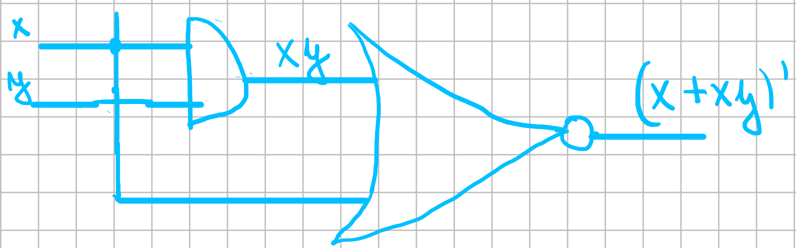
op.sau

Op. booleeni se aplică în urm. ordine:

- Paranteze ( )
- NOT ′ sau ‾
- AND ·
- OR +

ex: $(x+xy)'$ pt $x=0$ și $y=1$

$$(0+0\cdot1)' = (0+0)' = (0)' = 1$$



Principiul dualității

O axiomă se poate obține din duala sa modificând "+" cu "·" și elementul "0" cu elementul "1" (și invers).

ex: $a + a' = 1$

$$\Updownarrow$$

$a \cdot a' = 0$

Teoremele algebrei booleene

- T1 (Idempotența):
  (a) $x + x = x$;
  (b) $x \cdot x = x$;
- T2 (Prop. 0 și 1):
  (a) $x + 1 = 1$;
  (b) $x \cdot 0 = 0$;
- T3 (Absorbție):
  (a) $y \cdot x + x = x$;
  (b) $(y + x) \cdot x = x$;
- T4 (Involuție):
  $((x)')' = x$;
- T5 (Asociativitate):
  (a) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
  (b) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- T6 (De Morgan):
  (a) $(x + y)' = x' \cdot y'$;
  (b) $(x \cdot y)' = x' + y'$;

Demonstrarea teoremelor

ex: De Morgan

x	y	x ′	y′	x+y	(x+y) ′	x′ · y′
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

Funcții booleene

□ O funcţie de comutaţie de n variabile f($X_0, X_1, ..., X_{n-1}$) unde variabilele X_i iau valorile 0 şi 1, pentru i=0÷n-1, se defineşte ca o aplicaţie a mulţimii $\{0,1\}^n$ în mulţimea {0,1}.

□ Prin $\{0,1\}^n$ s-a notat produsul cartezian al mulţimii {0,1} cu ea însăşi de n ori.

□ Domeniul de definiţie al funcţiei f este:
X= $\{0,1\}^n$ = $\{(X_0, X_1, ..., X_{n-1}) \mid X_0 \in \{0,1\}, X_1 \in \{0,1\}, ..., X_{n-1} \in \{0,1\}\}$
ale cărei elemente sunt n-upluri de 1 şi 0 $\{X_0, ..., X_{n-1}\}$

ex: $F = xy + xy'z + x'yz$

$$F = 1 \text{ dacă } \begin{cases} x=1 \text{ și } y=1 \text{ și } z=0 \text{ sau } z=1 \\ x=1 \text{ și } y=0 \text{ și } z=1 \\ x=0 \text{ și } y=1 \text{ și } z=1 \end{cases}$$

altfel F=0

x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

x	y	z	F′
0	0	0	0→1
0	0	1	0→1
0	1	0	0→1
0	1	1	1→0
1	0	0	0→1
1	0	1	1→0
1	1	0	1→0
1	1	1	1→0

Complementul funcției

$$F' = (xy + xy'z + x'yz)' = (xy)' \cdot (xy'z)' \cdot (x'yz)' =$$

$$= (x' + y')(x' + y + z') \cdot (x + y' + z')$$

Echivalența expresiilor

$$f = x\bar{y}z + xyz$$
$$= xz\,\underbrace{(\bar{y} + y)}_{1} =$$
$$= xz$$

Porți logice

Name	Graphic Symbol	Functional Expression	Number of transistors	Delay in *ns*
Inverter		$F = x'$	2	1
Driver		$F = x$	4	2
AND		$F = xy$	6	2.4
OR		$F = x + y$	6	2.4
NAND		$F = (xy)'$	4	1.4
NOR		$F = (x + y)'$	4	1.4
XOR		$F = x \oplus y$	14	4.2
XNOR		$F = x \odot y$	12	3.2

PORȚI LOGICE ELEMENTARE

Celula de însumare pe 1 bit

Aplicație: Să se realizeze descrierea prin tabel de adevăr și apoi să se găsească o formă echivalentă mai simplă pentru funcțiile logice care calculează suma, respectiv transportul (carry) pentru un rang arbitrar din cadrul adunării a două șiruri binare.

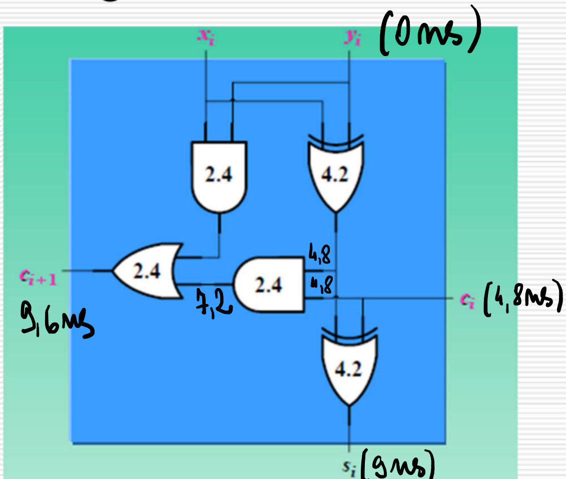
$$x_{n-1} \ldots \boxed{x_i} \; x_{i-1} \ldots x_0 + (c_0 = 0)$$
$$y_{n-1} \ldots \boxed{y_i} \; y_{i-1} \ldots y_0$$
$$c_n \quad s_{n-1} \ldots \boxed{s_i} \; s_{i-1} \ldots s_0$$

$sum = a \oplus b \oplus cin$

$cout = cin \cdot a \oplus b + a \cdot b$

Schema bloc și ecuațiile logice echivalente:

xi	yi	ci	si	c_{i+1}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1



Logic Schematic (46 Transistors)