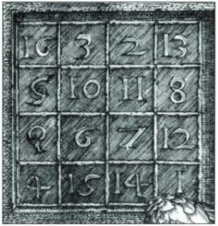
Logică și Structuri Discrete -LSD



Cursul 11 – Logica predicatelor

dr. ing. Cătălin Iapă

catalin.iapa@cs.upt.ro

Întrebare de logică

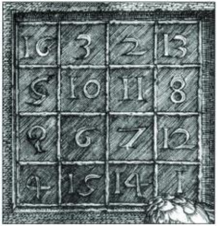
Dianei îi plac foarte mult pisicile şi are câteva. Toate, mai puţin două dintre ele sunt negre. Toate, mai puţin două sunt complet albe. Toate, mai puţin două pisici sunt complet gri. Câte pisici are Diana?

Întrebare de logică

Ana dorește să-i trimită Mariei o brățară de aur. Deoarece cele două sunt la o oarecare distanță, trebuie să folosească un mesager. Pentru a se asigura că mesagerul nu fură aurul, cutia se poate încuia cu lacăte. Ambele femei au o rezervă de lacăte cu cheile lor, dar nici una nu are cheie pentru niciunul dintre lacătele celeilalte. Cu toate acestea, este posibil să transmiteți aurul în siguranță pentru ca Maria să-l acceseze. Explicați cum.

Întrebare de logică

Sunt 2 camere în care ai acces. În prima sunt 3 becuri, iar în cea de-a doua sunt 3 întrerupătoare, fiecare pentru câte un bec. Când ești lângă întrerupătoare nu ai cum să vezi becurile. Nu ști ce întrerupător aprinde ce bec, trebuie să afli asta. Cum afli?



Limitări în Logica propozițiilor

Logica predicatelor – sintaxa

Formalizarea limbajului natural

Demonstratia prin metoda rezolutiei

Rezoluția în Logica predicatelor

Logică: recapitulare

Folosim logica pentru a exprima *riguros* (*formaliza*) raționamente.

Logica ne permite să facem *demonstrații (deducții)*
din *axiome* (totdeauna adevărate)
și *ipoteze* (considerate adevărate în problema dată)
folosind *reguli de inferență* (de deducție)

$$\frac{p \qquad p \rightarrow q}{q}$$ *modus ponens*

Modus ponens e suficient, dar sunt și alte reguli de deducție valide.

Logica propozițională e
consistentă: orice formulă demonstrată (teoremă) e validă
completă: orice formulă validă (tautologie) poate fi demonstrată

Logica propozițională nu poate exprima tot

Un exemplu clasic: (1) Toți oamenii sunt muritori.
(2) Socrate e om.
Deci, (3) Socrate e muritor.

Acesta e un *silogism* (tipar de regulă de inferență)
logica clasică: Aristotel, stoici

Seamănă cu *modus ponens*
dar premisa din (1) ("toți oamenii")
nu e la fel cu (2) (Socrate, un anumit om)

Am putea reformula (1): *Dacă X e om, atunci X e muritor*.
mai precis: *Pentru orice X, dacă X e om, atunci X e muritor*.

Logica modernă: *logica predicatelor* (logica de ordinul I)
Gottlob Frege, Charles Peirce (sec. 19)

Avem nevoie de formule mai expresive

Formulele sunt formate din *predicate* legate prin *conectori logici*

$$\forall x\,((folder(x) \wedge x \neq root) \rightarrow contains(parent(x), x))$$

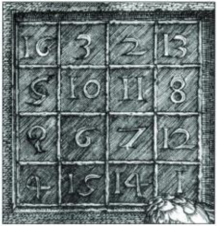
În loc de *propoziții* (a, p, q) avem *predicate*: $file(x)$, $contains(x, y)$

Un *predicat* = o afirmație relativ la una sau mai multe variabile, care, dând valori variabilelor, poate lua valoarea adevărat sau fals.

Predicatele au argumente *termeni*: *variabile* x / *funcții*: $parent(x)$
intuitiv: reprezintă obiecte/noțiuni și funcții din univers

Nou: apar *cuantificatori* $\forall$ (orice), $\exists$ (există)

Definim *logica predicatelor* (*first-order logic*)
numită și *logica de ordinul I* (întâi)



Limitări în Logica propozițiilor

Logica predicatelor – sintaxa

Formalizarea limbajului natural

Demonstratia prin metoda rezolutiei

Rezoluția în Logica predicatelor

Sintaxa logicii predicatelor: Termeni

Definim, structural recursiv, noțiunile de *termen* și *formulă*:

Termeni

variabilă v

$f(t_1, \cdot \cdot \cdot, t_n)$ cu f *funcție* n-ară și $t_1, \cdot \cdot \cdot, t_n$ *termeni*

Exemple: $parent(x)$, $cmmdc(x, y)$, $\max(\min(x, y), z)$

constantă c: caz particular, funcție de zero argumente

Sintaxa logicii predicatelor: Formule

Formule (well-formed formulas, formule bine formate):

$P(t_1, \cdot \cdot \cdot, t_n)$ cu P *predicat* de n argum. și $t_1, \cdot \cdot \cdot, t_n$ *termeni*

Exemple: *contains*(*empty*, x), *divide*(*cmmdc*(x, y), x)

propoziție p: caz particular, predicat de zero argumente

$\neg\alpha$ unde α e o formulă

$\alpha \to \beta$ cu α, β formule

$\forall v\, \alpha$ cu v *variabilă*, α formulă: *cuantificare universală*

Exemple: $\forall x\, \neg$*contains*(*empty*, x), $\forall x\, \forall y$ *divide*(*cmmdc*(x, y), x)

$t_1 = t_2$ cu t_1, t_2 termeni (în logica de ordinul I cu egalitate)

Exemplu: min(x, min(y, z)) = min(min(x, y), z)

Despre cuantificatori. Cuantificatorul existențial $\exists$

Notăm: $\boxed{\exists x\phi \overset{def}{=} \neg\forall x\,(\neg\phi)}$ ϕ formulă arbitrară

Există x pentru care ϕ e adevărată $\leftrightarrow$ nu pentru orice x ϕ e falsă.

Cei doi cuantificatori sunt *duali*. Putem scrie și $\forall x\phi = \neg\exists x\,(\neg\phi)$

Cuantificatorii au *precedență mai mare* decât conectorii $\neg$, $\wedge$, $\rightarrow$ ...

$\Rightarrow$ dacă formula cuantificată are $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ folosim paranteze:

$\exists x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ $\qquad$ $\forall y\,(Q(y) \wedge R(x, y))$

Altă notație: *punct* . cuantificatorul se aplică la tot restul formulei, până la sfârșit sau paranteză închisă

$P(x) \vee \forall y.Q(y) \wedge R(x, y)$ $\qquad$ $(R(y) \vee \exists x.P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge S(x)$

Distributivitatea cuantificatorilor față de ∧ și ∨

Cuantificatorul *universal* e *distributiv față de conjuncție*:

$$\forall x\,(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow \forall x\,P(x) \wedge \forall x\,Q(x)$$

dar cuantificatorul *existențial* NU ~~e distributiv~~ față de conjuncție:

$$\exists x\,(P(x) \wedge Q(x)) \not\leftrightarrow (\exists x\,P(x) \wedge \exists x\,Q(x))$$

avem implicație →, dar nu și invers, poate să nu fie același x !

Dual, ∃ e distributiv față de disjuncție:

$$\exists x\,P(x) \vee \exists x\,Q(x) \leftrightarrow \exists x.P(x) \vee Q(x)$$

∀ nu e distributiv față de disjuncție. Avem doar:

$$\forall x\,P(x) \vee \forall x\,Q(x) \rightarrow \forall x.P(x) \vee Q(x)$$

Variabile legate și libere

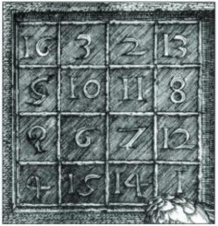
În formula $\forall v \phi$ (sau $\exists v \phi$) variabila v se numește *legată*
Variabilele care nu sunt legate se numesc *libere*

O variabilă poate fi liberă și legată în aceeași formulă.

În $(\exists x.P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$, x e *legată* în $\exists x.P(x) \rightarrow Q(x)$
și e *liberă* în $R(x)$ (e în afara cuantificatorului)

Înțelesul unei formule *nu depinde* de variabilele legate
   înțelesul lor e "*legat*" de cuantificator ("pentru orice", "există")
   pot fi redenumite, fără a schimba înțelesul formulei
$(\exists x.P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge R(x)$ la fel ca $(\exists y.P(y) \rightarrow Q(y)) \wedge R(x)$

O formulă *fără variabile libere* are înțeles de sine stătător.
(*closed formula*)



Limitări în Logica propozițiilor

Logica predicatelor – sintaxa

Formalizarea limbajului natural

Demonstratia prin metoda rezolutiei

Rezoluția în Logica predicatelor

Formalizarea limbajului natural

Formulele conțin: *variabile*, *funcții*, *predicate*.

Verbele devin *predicate* (ca în limbajul natural):

cumpără(*X* , *Y*), *scade*(*X*),

Subiectul și *complementele* (in)directe: *argumentele* predicatului

Atributele (proprietăți) devin *predicate* despre valorile-argument

bucuros(*X*), *de_aur* (*Y*)

Variabilele din formule pot lua valori *de orice fel* din *univers*

nu au un tip anume

⇒*Categoriile* devin tot *predicate*, cu argument obiectul de acel fel

copil (*X*), *caiet*(*X*)

Entitățile *unice* devin *constante*:

ion, *emptyset*, *santaclaus*

Exemplu de formalizare (1)

1. Fiecare investitor a cumpărat acțiuni sau obligațiuni.

Cuantificatorii introduc variabile cu valori *arbitrare* din univers
⇒ impunem categorii prin predicate suplimentare
⇒ introducem un predicat *inv* (X) (X e investitor)

Pentru *orice* X, *dacă* X e investitor, a făcut ceva

$$\forall X.inv(X) \rightarrow \boxed{\text{ce face } X}$$

Ce se spune despre investitor? *Există* ceva ce a cumpărat

$$\forall X.inv(X) \rightarrow \exists C.cumpără(X, C) \wedge \boxed{\text{ce știm despre } C}$$

$$\forall X.inv(X) \rightarrow \exists C.cumpără(X, C) \wedge (acțiune(C) \vee oblig(C))$$

Sursa: http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html

Exemplu de formalizare (2)

2. Dacă indicele Dow Jones scade, toate acțiunile mai puțin aurul scad.

Indicele Dow Jones e o noțiune unică ⇒ folosim o *constantă dj*

alternativ: puteam folosi și o propoziție *scadedj*

$$scade(dj) \rightarrow \boxed{\text{ce se întâmplă}}$$

$$scade(dj) \rightarrow \forall X. \boxed{\textit{condiții pentru } X} \rightarrow scade(X)$$

$$scade(dj) \rightarrow \forall X. acțiune(X) \wedge \neg aur(X) \rightarrow scade(X)$$

Exemplu de formalizare (3)

3. *Dacă trezoreria crește dobânda, toate obligațiunile scad.*

   $crestedob \rightarrow \forall X.oblig(X) \rightarrow scade(X)$

Dobânda e unicul lucru din problemă care crește ⇒ propoziție alternativ: o constantă *dobânda* + predicat *crește*

4. *Orice investitor care a cumpărat ceva care scade nu e bucuros.*

$$\forall X.inv(X) \rightarrow \boxed{\text{ce știm despre } X}$$

$$\forall X.inv(X) \rightarrow \boxed{\text{condiție pentru } X} \rightarrow \neg bucuros(X))$$

$$\forall X.inv(X) \rightarrow (\exists C.cumpără(X, C) \land scade(C)) \rightarrow \neg bucuros(X)$$

→ asociază la dreapta, $p \rightarrow q \rightarrow r = p \rightarrow (q \rightarrow r) = p \land q \rightarrow r$, echivalent:

$$\forall X.inv(X) \land (\exists C.cumpără(X, C) \land scade(C)) \rightarrow \neg bucuros(X)$$

Exemplu de formalizare (4)

5. Dacă indicele Dow Jones scade și trezoreria crește dobânda, toți investitorii bucuroși au cumpărat ceva acțiuni de aur.

$scade(dj) \wedge creștedob \rightarrow$ $\boxed{\text{ce se întâmplă}}$

$scade(dj) \wedge creștedob \rightarrow$
$\forall X.inv(X) \wedge bucuros(X) \rightarrow$ $\boxed{\text{ce știm despre } X}$

$scade(dj) \wedge creștedob \rightarrow \forall X.inv(X) \wedge bucuros(X) \rightarrow$
$\exists C.cumpără(X, C) \wedge acțiune(C) \wedge aur(C)$

Atenție la cuantificatori!

Cuantificatorul *universal* ("toți") cuantifică o *implicație*: Toți studenții sunt tineri

Studenți $\subseteq$ *Tineri*

$$\forall x.student(x) \rightarrow tânăr(x)$$

Eroare frecventă: $\wedge$ în loc de $\rightarrow$: $\cancel{\forall x.student(x) \wedge tânăr(x)}$

Oricine/orice din univers e și student și tânăr!!!

Cuantificatorul *existențial* ("unii","există") cuantifică o *conjuncție*.

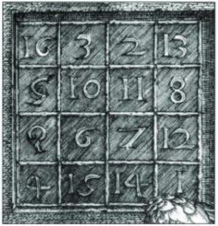
Există premianți studenți.

Premianți $\cap$ *Studenți* $\neq \emptyset$

$$\exists x.premiant(x) \wedge student(x)$$

Eroare frecventă: $\rightarrow$ în loc de $\wedge$: $\cancel{\exists x.premiant(x) \rightarrow student(x)}$

E adevărată dacă există un ne-premiant! (fals implică orice)



Limitări în Logica propozițiilor

Logica predicatelor – sintaxa

Formalizarea limbajului natural

Demonstratia prin metoda rezolutiei

Rezoluția în Logica predicatelor

După traducerea în logică, putem demonstra!

Având o *infinitate de interpretări* (valori din univers, funcții, valori pentru relații/predicate), nu putem scrie tabele de adevăr.

Putem face însă *demonstrații* (deducții) după *reguli de inferență* (pur sintactice), ca în logica propozițională.

Logica predicatelor e și ea *consistentă* și *completă*:

Orice teoremă e validă (adevărată în toate interpretările/atribuirile).

Orice formulă validă (tautologie) poate fi *demonstrată* (e teoremă).
dar dacă nu e validă, încercarea de a o demonstra (sau o refuta) poate continua la nesfârșit.

Demonstrația prin metoda rezoluției

O formulă e *validă* dacă și numai dacă *negația* ei e o *contradicție*.

Putem demonstra o teoremă prin *reducere la absurd*
arătând că *negația ei e o contradicție* (nerealizabilă).

Fie ipotezele $A_1, A_2, \ldots, A_n$ și concluzia C .
Fie teorema

$$A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n \rightarrow C$$

adică: ipotezele $A_1, A_2, \ldots A_n$ implică împreună concluzia C

Negația implicației: $\neg(H \rightarrow C) = \neg(\neg H \vee C) = H \wedge \neg C$

Deci arătăm că $A_1 \wedge A_2 \ldots \wedge A_n \wedge \neg C$ e o contradicție (*reducere la absurd*: ipoteze adevărate+concluzia falsă e imposibil)

Arătăm că o formulă e o contradicție prin *metoda rezoluției*.

Rezoluția în calculul propozițional

Rezoluția e o *regulă de inferență* care produce *o nouă clauză* din două clauze cu *literali complementari* (p și $\neg p$).

$$\frac{p \vee A \qquad \neg p \vee B}{A \vee B} \qquad \textit{rezoluție}$$

"Din clauzele $p \vee A$ și $\neg p \vee B$ deducem/derivăm clauza $A \vee B$"

Reamintim: *clauză* = *disjuncție* $\vee$ de *literali* (propoziții sau negații)

Clauza obtinută = *rezolventul* celor două clauze în raport cu p

Exemplu: $rez_p(p \vee q \vee \neg r, \neg p \vee s) = q \vee \neg r \vee s$

Modus ponens poate fi privit ca un *caz particular de rezoluție*:

$$\frac{p \vee \mathit{false} \qquad \neg p \vee q}{\mathit{false} \vee q}$$

Rezoluția e o regulă validă

$$\frac{p \vee A \qquad \neg p \vee B}{A \vee B} \qquad \textit{rezoluție}$$

Rezoluția e o regulă de inferență *validă*:

$$\{p \vee A, \neg p \vee B\} \models A \vee B$$

orice atribuire care face premisele adevărate face și concluzia adevărată

pentru $p = T$, trebuie să arătăm $B \models A \vee B$:

dacă $B = T$, atunci și $A \vee B = T$

simetric pentru $p = F$, deci regula e validă

Corolar: dacă $A \vee B$ e contradicție, la fel și $(p \vee A) \wedge (\neg p \vee B)$

dacă ajungem la contradicție, și formula inițială era contradicție

Exemplu de rezoluție (1)

$(a \vee \neg b \vee \neg d\,)$ — *b* negat
$\wedge\ (\neg a \vee \neg b)$ — *b* negat
$\wedge\ (\neg a \vee c \vee \neg d\,)$
$\wedge\ (\neg a \vee b \vee c)$ — *b* pozitiv

Luăm o propoziție cu ambele polarități (*b*) și construim rezolvenții
$rez_b(a \vee \neg b \vee \neg d,\ \neg a \vee b \vee c) = a \vee \neg d \vee \neg a \vee c = \mathrm{T}$
$rez_b(\neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee b \vee c) = \neg a \vee \neg a \vee c = \neg a \vee c$

Adăugăm noii rezolvenți (ignorăm T); eliminăm vechile clauze cu *b*
$(\neg a \vee c \vee \neg d\,)$
$\wedge\ (\neg a \vee c)$

Nu mai putem crea rezolvenți. Nu avem clauza vidă.
$\Rightarrow$ formula e realizabilă, de exemplu cu a = F. Sau cu c = T.

Pentru o atribuire suficientă ca să facă formula realizabilă, revenim la formula inițială, și dăm valori și lui *b* și/sau *d* .

Exemplu de rezoluție (2)

$$\begin{array}{l} \quad a \\ \wedge (\neg a \vee b) \\ \wedge (\neg b \vee c) \\ \wedge (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \end{array}$$

c pozitiv
c negat

Aplicăm rezoluția după c, avem o singură pereche de clauze:
$rez_c(\neg b \vee c,\ \neg a \vee \neg b \vee \neg c) = \neg b \vee \neg a \vee \neg b = \neg a \vee \neg b$

Eliminăm cele două clauze cu c și adăugăm clauza nouă:

$$\begin{array}{l} \quad a \\ \wedge (\neg a \vee b) \\ \wedge (\neg a \vee \neg b) \end{array}$$

Aplicăm rezoluția după b:
$rez_b(\neg a \vee b, \neg a \vee \neg b) = \neg a \vee \neg a = \neg a$

Eliminăm cele două clauze cu b, adăugăm clauza nouă: $\begin{array}{l} \quad a \\ \wedge \neg a \end{array}$

Aplicăm rezoluția după a: $rez_a(a, \neg a) = F$ (clauza vidă) Deci formula inițială e o contradicție (e nerealizabilă).

Aplicarea rezoluției în calculul propozițional

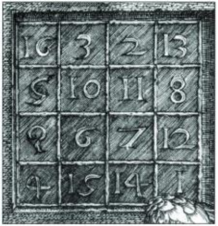
Pornind de la o formulă în formă normală conjunctivă (CNF), *adăugăm rezolvenți*, încercând să *obținem clauza vidă:*

Alegem o propoziție p și adăugăm toți rezolvenții în raport cu p:
- din m clauze cu p și n clauze cu $\neg p$, creăm $m \cdot n$ rezolvenți
- am eliminat $p \Rightarrow$ ștergem cele $m+n$ clauze inițiale

Dacă vreun rezolvent e *clauza vidă*, formula e *nerealizabilă*

Dacă nu mai putem crea rezolvenți (literalii au polaritate unică), formula e *realizabilă* (facem T toți literalii rămași)

Numărul de clauze poate crește exponențial (problematic!)



Limitări în Logica propozițiilor
Logica predicatelor – sintaxa
Formalizarea limbajului natural
Demonstratia prin metoda rezolutiei
Rezoluția în Logica predicatelor

Rezoluția: de la propoziții la predicate

În logica predicatelor, un *literal* nu e o propoziție, ci un *predicat*
nu doar p și $\neg p$, ci $P(arg\ 1)$ și $\neg P(arg\ 2)$ (argumente diferite)

Pentru a deriva o nouă clauză din $A \vee P(arg\ 1)$ și $B \vee \neg P(arg\ 2)$
trebuie să încercăm să aducem argumentele la o expresie comună.

Vom avea clauze cu variabile implicit cuantificate universal
pot lua orice valoare $\Rightarrow$ le putem *substitui* cu *termeni*

Există o substituție care aduce predicatele la o formă comună?
ex. 1: $P(x, g(y))$ și $P(a, z)$
ex. 2: $P(x, g(y))$ și $P(z, a)$

În exemplul 1, substituind $x \mapsto a$, $z \mapsto g(y)$ obținem $P(a, g(y))$ și $P(a, g(y)) \Rightarrow$ am găsit o formă comună

În ex. 2 nu putem substitui *constanta* a cu $g(y)$ (a nu e variabilă)
g e funcție arbitrară, nu știm dacă există un y cu $g(y) = a$

Substituții și unificări de termeni

O *substituție* e o *funcție* care asociază unor *variabile* niște *termeni*:

$$\{x_1 \mapsto t_1, \ . \ . \ . \ , x_n \mapsto t_n\}$$

Doi termeni se pot *unifica* dacă există o substituție care îi face egali
$f(x, g(y, z), t)\{x \mapsto h(z), y \mapsto h(b), t \mapsto u\} = f(h(z), g(h(b), z), u)$

Reguli de unificare

O *variabilă* x poate fi unificată cu orice *termen* t (substituție) dacă x *nu apare* în t (altfel, substituind obținem un termen infinit)
deci nu: x cu $f(h(y), g(x, z))$

Doi *termeni* $f(...)$ pot fi unificați doar dacă au aceeași funcție, și *argumentele* (termeni) pot fi unificate (poziție cu poziție)

Două *constante* (funcții cu 0 arg.) ⇒ unificate dacă sunt identice

Rezoluția în calculul predicatelor

Fie clauzele: *A* cu $P(\ldots)$ *pozitiv* și *B*, cu $\neg P(\ldots)$ (*negat*) Exemplu:

A: $P(x, g(y)) \vee P(h(a), z) \vee Q(z)$
B: $\neg P(h(z), t) \vee R(t, z)$

Alegem niște (≥ 1) $P(\ldots)$ din *A* și niște $\neg P(\ldots)$ din *B*. aici: toți

Redenumim variabilele comune (nu au legătură între *A* și *B*)
A: $P(x, g(y)) \vee P(h(a), z) \vee Q(z)$ B: $\neg P(h(z_2), t) \vee R(t, z_2)$

Unificăm (toți odată) doar acei $P(\ldots)$ din A și $\neg P(\ldots)$ din *B* aleși

$\{P(x, g(y)), P(h(a), z), P(h(z_2), t)\}$ $x \mapsto h(a)$; $z_2 \mapsto a$; $z, t \mapsto g(y)$

Eliminăm pe $P(\ldots)$ și $\neg P(\ldots)$ aleși din $A \vee B$. *Aplicăm substituția* rezultată *din unificare* și *adăugăm noua clauză* la lista clauzelor.

$$Q(g(y)) \vee R(g(y), a)$$

Păstrăm clauzele inițiale, se pot folosi cu alte alegeri de predicate.

Rezoluția: în concluzie

Generăm repetat clauze noi (*rezolvenți*) prin **rezoluție cu unificare**

Dacă repetând obținem *clauza vidă*, formula inițială e *nerealizabilă*.
Dacă *nu mai găsim rezolvenți noi*, formula inițială e *realizabilă*.

Reamintim: am pornit încercând să demonstrăm

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow C$$

prin *reducere la absurd*, negând concluzia și arătând că

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg C \quad \text{e } \textit{contradicție}$$

Metoda rezoluției e *completă* relativ la refutație
  pentru orice formulă nerealizabilă, va ajunge la clauza vidă
  dar nu poate *determina* realizabilitatea *oricărei formule*
    (există formule pentru care rulează la infinit)

Exemplu de aplicare a rezoluției

Reluăm exercițiul formalizat anterior.
Folosim () și nu . pentru a evita greșeli la aplicarea cuantificării.

A_1: $\forall X\,(inv\,(X) \rightarrow \exists C\,(cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig\,(C))))$

A_2: $scadedj \rightarrow \forall\, X\,(act(X) \wedge \neg aur\,(X) \rightarrow scade(X))$

A_3: $creștedob \rightarrow \forall\, X\,(oblig\,(X) \rightarrow scade(X))$

A_4: $\forall X\,(inv\,(X) \rightarrow (\exists C\,(cump(X, C) \wedge scade(C)) \rightarrow \neg bucur\,(X)))$

C : $scadedj \wedge creștedob \rightarrow$
$\forall\, X\,(inv\,(X) \wedge bucur\,(X) \rightarrow \exists C\,(cump(X, C) \wedge act(C) \wedge aur\,(C)))$

Negăm concluzia *la început,* înainte de a transforma cuantificatorii!

$\neg C$: $\neg(scadedj \wedge creștedob \rightarrow$
$\forall\, X\,(inv\,(X) \wedge bucur\,(X) \rightarrow \exists C\,(cump(X, C) \wedge act(C) \wedge aur\,(C))))$

Eliminăm implicația, ducem negația până la predicate

1.Eliminăm implicația: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$, $\neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$

Orice transformare *într-o formulă* NU afectează ce e în afara ei!

În $\forall x\, A$, transformând oricum *pe A* ($\rightarrow$, $\neg$, ...) NU se schimbă $\forall x$

2. Ducem $\neg$ *înăuntru*: $\neg\forall x P(x) = \exists x\, \neg P(x)$ $\quad \neg\exists x P(x) = \forall x\, \neg P(x)$

A_1: $\forall X\, (inv(X) \rightarrow \exists C\, (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$
$\forall X\, (\neg inv(X) \vee \exists C\, (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig(C))))$

A_2: $scadedj \rightarrow \forall X\, (act(X) \wedge \neg aur(X) \rightarrow scade(X))$
$\neg scadedj \vee \forall X\, (\neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X))$

A_3: $creștedob \rightarrow \forall X\, (oblig(X) \rightarrow scade(X))$
$\neg creștedob \vee \forall X\, (\neg oblig(X) \vee scade(X))$

A_4: $\forall X\, (inv(X) \rightarrow (\exists C\, (cump(X, C) \wedge scade(C)) \rightarrow \neg bucur(X)))$
$\forall X\, (\neg inv(X) \vee \neg\exists C\, (cump(X, C) \wedge scade(C)) \vee \neg bucur(X))$
$\forall X\, (\neg inv(X) \vee \forall C\, (\neg cump(X, C) \vee \neg scade(C)) \vee \neg bucur(X))$

Eliminăm implicația, ducem negația înăuntru (cont.)

$\neg C : \neg(scadedj \wedge creștedob \rightarrow$
$\forall X\,(inv(X) \wedge bucur(X) \rightarrow \exists C\,(cump(X, C) \wedge act(C) \wedge aur(C))))$

$\neg C : scadedj \wedge creștedob \wedge$
$\neg\forall\, X\,(inv(X) \wedge bucur(X) \rightarrow \exists C\,(cump(X, C) \wedge act(C) \wedge aur(C)))$

$scadedj \wedge creștedob \wedge$
$\exists X\,(inv(X) \wedge bucur(X) \wedge \neg\exists C\,(cump(X, C) \wedge act(C) \wedge aur(C)))$

$scadedj \wedge creștedob \wedge$
$\exists X\,(inv(X) \wedge bucur(X) \wedge \forall C\,(\neg cump(X, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C)))$

Redenumim: nume unice la variabile cuantificate

3. Dăm *nume unice* variabilelor cuantificate în fiecare formulă, pentru a putea elimina ulterior cuantificatorii. De exemplu:

$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, \exists y\, Q(x, y)$ devine $\forall x\, P(x) \vee \forall z\, \exists y\, Q(z, y)$

Nu e nevoie în exemplul nostru:

A_1: $\forall X\, (\neg inv\, (X) \vee \exists\, C\, (cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig\, (C))))$

A_2: $\neg scadedj \vee \forall X\, (\neg act(X) \vee aur\, (X) \vee scade(X))$

A_3: $\neg creștedob \vee \forall X\, (\neg oblig\, (X) \vee scade(X))$

A_4: $\forall X\, (\neg inv\, (X) \vee \forall C\, (\neg cump(X, C) \vee \neg scade(C)) \vee \neg bucur\, (X))$

$\neg C$: $scadedj \wedge creștedob \wedge$
$\exists X\, (inv(X) \wedge bucur(X) \wedge \forall C\, (\neg cump(X, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C)))$

Skolemizare: eliminăm cuantificatorii existențiali

4. *Skolemizare*: În $\forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y$, alegerea lui y *depinde* de $x_1, . . . x_n$; introducem o nouă *funcție Skolem* $y = g(x_1, . . . , x_n)$, $\exists y$ dispare

A_1: $\forall X\,(\neg inv\,(X) \vee \exists C\,(cump(X, C) \wedge (act(C) \vee oblig\,(C))))$

C din $\exists$ depinde de X $\Rightarrow$ C devine *o nouă funcție* $f\,(X)$, $\exists C$ dispare

$\forall X\,(\neg inv\,(X) \vee (cump(X, f\,(X)) \wedge (act(f\,(X)) \vee oblig\,(f\,(X)))))$

Atenție! fiecare cuantificator $\exists$ primește o *nouă funcție* Skolem!

Pentru $\exists y$ în *exteriorul* oricărui $\forall$, alegem o nouă *constantă Skolem*

$\neg C$: $scadedj \wedge creștedob \wedge \exists X\,(inv\,(X) \wedge bucur\,(X)$
$\wedge \forall C\,(\neg cump(X, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur\,(C)))$

X devine o nouă *constantă* b (nu depinde de nimic), $\exists X$ dispare

$scadedj \wedge creștedob \wedge inv\,(b) \wedge bucur\,(b)$
$\wedge \forall C\,(\neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur\,(C))$

Forma normală prenex. Eliminăm cuantificatorii universali

5.Ducem *cuantificatorii universali în față*: *forma normală prenex*

A_4: $\forall X\,(\neg inv(X) \vee \forall C\,(\neg cump(X, C) \vee \neg scade(C)) \vee \neg bucur(X))$

$\forall X\, \forall C\,(\neg inv(X) \vee \neg cump(X, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(X))$

6. Eliminăm cuantificatorii universali
(devin impliciți, o variabilă poate fi înlocuită cu orice termen).

A_1: $(\neg inv(X) \vee (cump(X, f(X)) \wedge (act(f(X)) \vee oblig(f(X)))))$

A_2: $\neg scadedj \vee \neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X)$

A_3: $\neg creștedob \vee \neg oblig(X) \vee scade(X)$

A_4: $\neg inv(X) \vee \neg cump(X, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(X)$

$\neg C$: $scadedj \wedge creștedob \wedge inv(b) \wedge bucur(b)$
$\quad \wedge(\neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C))$

Forma clauzală

7. Ducem *conjuncția în exteriorul* disjuncției (distributivitate) și scriem fiecare clauză separat (*formă clauzală*, CNF)

(1) $\neg inv(X) \vee cump(X, f(X))$

(2) $\neg inv(X) \vee act(f(X)) \vee oblig(f(X))$

(3) $\neg scadedj \vee \neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X)$

(4) $\neg creștedob \vee \neg oblig(X) \vee scade(X)$

(5) $\neg inv(X) \vee \neg cump(X, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(X)$

(6) $scadedj$

(7) $creștedob$

(8) $inv(b)$

(9) $bucur(b)$

(10) $\neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee \neg aur(C)$

Generăm rezolvenți până la clauza vidă

Căutăm predicate $P(\ldots)$ și $\neg P(\ldots)$ și unificăm, obținând rezolvenții:

(11) $\neg act(X) \vee aur(X) \vee scade(X)$ (3, 6)

(12) $\neg cump(b, C) \vee \neg act(C) \vee scade(C)$ (10, 11, $X = C$)

(13) $\neg oblig(X) \vee scade(X)$ (4, 7)

Când unificăm, redenumim clauzele să nu aibă variabile comune:

(13) $\neg oblig(Y) \vee scade(Y)$ vom unifica cu (2), redenumim X

(14) $\neg inv(X) \vee act(f(X)) \vee scade(f(X))$ (2, 13, $Y = X$)

(15) $\neg cump(b, f(X)) \vee \neg inv(X) \vee scade(f(X))$ (12, 14, $C = f(X)$)

(16) $\neg cump(b, C) \vee \neg scade(C) \vee \neg bucur(b)$ (5, 8, $X = b$)

(17) $\neg cump(b, C) \vee \neg scade(C)$ (9, 16)

(18) $\neg cump(b, f(X)) \vee \neg inv(X)$ (15, 17, $C = f(X)$)

(19) $\neg inv(b)$ (1, 18, $X = b$)

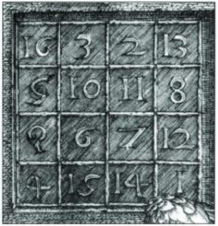
(20) $\varnothing$ (contradicție = succes în reducerea la absurd) (8, 19)

Rezumat

Putem traduce (*formaliza*) din limbaj natural în logica predicatelor

Putem *demonstra teoreme* prin reducere la absurd:

- negăm concluzia
- transformăm în *formă clauzală* (conjuncție $\wedge$ de disjuncții $\vee$)
- prin metoda *rezoluției* găsim o *contradicție* (clauza vidă)



Vă mulțumesc!

Bibliografie

Conținutul cursului se bazează pe materialele de anii trecuți de la cursul de LSD, predat de conf. dr. ing.Marius Minea și ș.l. dr. ing. Casandra Holotescu (http://staff.cs.upt.ro/~marius/curs/lsd/index.html)

Intrebarile de logica de la inceputul cursului au fost preluate din cursul Introduction to Logic de la Stanford University (https://www.coursera.org/learn/logic-introduction)