simetrică: $A^T = A$

poz def: $x^T \cdot A \cdot x > 0, \forall x \neq 0$

poate fi $= 0$ pt $x = 0$

Exemplul 8

găsiţi factorizarea Cholesky a lui $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

$4 > 0$

$R_{11} = \sqrt{4} = 2$

$R_{1,2:3} = [-2, 2] / R_{11} = \underbrace{[-1, 1]}_{u^T} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$

$u \cdot u^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [-1, 1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$1 \times 2 \qquad 2 \times 1$

$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

$R_{22} = \sqrt{a_{22}} = \sqrt{1} = 1$

$R_{2,3:3} = -3 / 1 = -3 \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ & 1 & -3 \\ & & \end{bmatrix}$

$u \cdot u^T = (-3)(-3) = 9$

$10 - 9 = 1 \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

completăm cu 0

Găsiţi factorizarea Cholesky $A = R^T R$ a următoarei matrici (8p):

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Verificaţi corectitudinea factorizării folosind înmulţirea matricilor (2p).

Rezolvaţi sistemul găsind factorizarea Cholesky a matricii coeficienţilor şi folosind substituţia înapoi (8p). Verificaţi corectitudinea factorizării şi a soluţiei obţinute folosind înmulţirea matricilor (2p).

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

1. Rez. sis. găsind factorizarea Cholemsky a matricii coef. și fol. substituția înapoi
ver. corect. fact. și a sol. obt. fol. înmulțirea matricilor

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

9. Găsiți fact. Cholemsky $A = R^T \cdot R$ a lui

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Găsiţi factorizarea Cholesky $A = R^T R$ a următoarei matrici (8p):

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Verificaţi corectitudinea factorizării folosind înmulţirea matricilor (2p).

$4 > 0$

$R_{11} = \sqrt{4} = 2$

$u^T = R_{1,2:3} = [-2, 0] / 2 = [-1, 0]$

$u \cdot u^T = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1, 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ & 1 & -3 \\ & -3 & 10 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

$R_{22} = \sqrt{1} = 1$

$u^T = R_{2,3:3} = -3/1 = -3$

$u \cdot u^T = 9$

$10 - 9 = 1 \Rightarrow R = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow R_{2,3:3}$

$R^T R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 10 \end{bmatrix}$

Rezolvați sistemul găsind factorizarea Cholesky a matricii coeficienților și folosind substituția înapoi (8p). Verificați corectitudinea factorizării și a soluției obținute folosind înmulțirea matricilor (2p).

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

acum că $A = R^T R$ este un produs a două matrici triangulare, trebuie să rezolvăm sistemul inferior triangular $R^T c = b$ și sistemul superior triangular $Rx = c$ pentru a determina soluția x

```
x =

     2    -1     0
     0     1    -1
     0     0     2

>> xc = A \ b

xc =

     1
     2
    -1
```

$$R^T \cdot c = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$c_1 = 0$

$c_2 = 3$

$c_3 = \frac{-7+3}{2} = -2$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$x_3 = -1$

$x_2 = 2$

$x_1 = 1$