Capitolul 11

Găsiți un interval de lungime unu pe care funcția $f(x) = x^2 - 6x + 5$ este unimodală în jurul minimului relativ (2p). Aplicați apoi un pas din căutarea secțiunii de aur pentru găsirea minimului funcției pe intervalul respectiv (8p).

Algoritmul 1 (Căutarea secțiunii de aur)

Fiind dată funcția f unimodală cu minimul în $[a, b]$
for $i = 1, 2, 3, \ldots$
  $g = (\sqrt{5} - 1)/2 \simeq 0{,}618$
  if $f(a + (1 - g)(b - a)) < f(a + g(b - a))$
    $b = a + g(b - a)$
  else
    $a = a + (1 - g)(b - a)$
  end
end
Intervalul final $[a, b]$ conține minimul.

→ Dacă se poate, aflăm rădăcinile

$$x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 1$$

$$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$$

(minimul)

x	$-\infty$		1		3		5		∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	$\searrow$		0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$\Rightarrow$ interval $= [2{,}5 ; 3{,}5]$

$\boxed{i = 1}$ $\quad g = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \simeq 0{,}618 \Rightarrow 1 - g = 0{,}382$

$$f(2{,}5 + (1-g) \cdot 1) < f(2{,}5 + g \cdot 1)$$

$$f(2{,}882) < f(3{,}118)$$

$$(2{,}882 - 5)(2{,}882 - 1) < (3{,}118 - 5)(3{,}118 - 1)$$

$$-3{,}986 < -3{,}986$$

$$a = a + (1-g)(b-a) = 2{,}5 + 0{,}382 \cdot 1 = 2{,}882$$

$\Rightarrow$ noul interval este $[2{,}882 ; 3{,}5]$

Găsiți un interval de lungime unu pe care funcția $f(x) = 2x^2 + x$ este unimodală în jurul minimului relativ (2p). Aplicați apoi un pas din interpolarea parabolică succesivă pentru găsirea minimului funcției pe intervalul respectiv (8p).

Maximum file size: 5MB, maximum number of files: 3

Algoritmul 2 (Interpolarea parabolică succesivă)

Pornim cu minimele aproximative r, s, t

for $i = 1, 2, 3, \ldots$

$$x = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t)-f(s)) - (f(s)-f(r))(t-s)]}$$

$t = s$

$s = r$

$r = x$

end

$$2x^2 + x = 0$$

$$x(2x+1) = 0 \qquad x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 4x+1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$		0	∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$			0 ↘	$-\frac{1}{8}$		↗ 0	

$$\min = f\left(-\frac{1}{4}\right) = \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{16}\,8} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8} = -0{,}125$$

$$\text{interval} = [-1, 0]$$

$$r = 0 \qquad s = -0{,}5 \qquad t = -1$$

$$x = \frac{-0{,}5}{2} - \frac{(f(-0{,}5) - f(0))(-1-0)(-1+0{,}5)}{2[(-0{,}5-0)(f(-1) - f(-0{,}5)) - (f(-0{,}5) - f(0))(-1+0{,}5)]} =$$

$$= -0{,}25 - 0 = -0{,}25 \rightarrow$$

$$t = -0{,}5$$

$$s = 0$$

$$r = -0{,}25$$

Aplicaţi un pas din metoda lui Newton cu vectorul iniţial $[1, 1]^T$ pentru găsirea minimului funcţiei $f(x, y) = 5x^2 + 2y^2 - 4xy - 2x - 4y + 1$ (10p).

- pasul Newton este, prin urmare,

$$\begin{cases} H_f(x_k)\overset{\text{trb. aflat.}}{\boxed{v}} = -\nabla f(x_k) = -f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + v. \end{cases} \quad (13)$$

$$\nabla f(x_0) = [10x - 4y - 2 \,;\, 4y - 4x - 4]$$

$$Hf(x_0) = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

pas 1: $$\begin{bmatrix} 10 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$10v_{01} - 4v_{02} = 6$$

$$-4v_{01} + 4v_{02} = -4 \Rightarrow v_{02} = -1 + v_{01}$$

$$6v_{01} = 2 \Rightarrow v_{01} = \frac{1}{3} \Rightarrow v_{02} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{01} \\ v_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Aplicați un pas din metoda gradientului cu vectorul inițial $[1,1]^T$ pentru găsirea minimului funcției $f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - y + 1$ (10p).

Algoritmul 3 (Metoda gradientului)

Fie x_0 valoarea inițială
for $i = 0, 1, 2, \ldots$
  $v = \nabla f(x_i)$
  Minimizăm $f(x - sv)$ pentru scalarul $s = s^*$
  $x_{i+1} = x_i - s^* v$
end

$$\nabla f = [4x - 4y - 2;\ 10y - 4x - 1]$$

$\boxed{i=0}$ $\quad v = \nabla f(x_0) = [-2;\ 5]$

Minimizăm $f(x_0 - s\cdot v)$ pt. $s = s^*$

$$f(x_0 - sv) = f(1 + 2\cdot s;\ 1 - 5s) = 2(1+2s)^2 + 5(1-5s)^2 - 4(1+2s)(1-5s) - 2(1+2\cdot s) - (1-5s) + 1 =$$

$$= 2(1 + 4s + 4s^2) + 5(1 - 10s + 25s^2) - 4(1 - 5s + 2s - 10s^2) - 2 - 4s - 1 + 5s + 1$$

$$= 2 + 8s + 8s^2 + 5 - 50s + 125s^2 - 4 + 12s + 40s^2 - 2 + s =$$

$$= 173s^2 - 29s + 1 = g(s)$$

$$g'(s) = 346s - 29 \Rightarrow s = \frac{29}{346}$$

$$\min = g\left(\frac{29}{346}\right) = 1,21 - 2,43 + 1 = -0,22$$

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0,22 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,56 \\ 2,1 \end{bmatrix}$$

Aplicați căutarea secțiunii de aur pentru a găsi minimul funcției $f(x) = 2x^2 + x$ pe intervalul $[-1, 0]$. Verificați rezultatul folosind funcția `fminbnd`.

Aplicați metoda lui Newton cu vectorul inițial $[1, 1]^T$ pentru a găsi minimul funcției $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2x - y + 1$.
Verificați rezultatul folosind funcția `fminsearch`.