Metoda lui Newton

Algoritmul 2 (Metoda lui Newton)

x_0= valoarea iniţială
$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ **for** $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Definiţia 4

Fie e_i eroarea după pasul i al unei metode iterative. Iteraţia este **pătratic convergentă** dacă

$$M = \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty.$$

Teorema 4 (Teorema lui Taylor cu rest)

Fie x şi x_0 numere reale, şi fie f o funcţie de $k+1$ ori derivabilă cu derivate continue pe intervalul dintre x şi x_0. Atunci există un număr c între x şi x_0 astfel încât

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &+ \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1}. \end{aligned}$$

Teorema 5

Fie f de două ori derivabilă cu derivata continuă şi $f(r) = 0$. Dacă $f'(r) \neq 0$, atunci metoda lui Newton este local şi pătratic convergentă la r. Eroarea e_i la pasul i satisface

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M, \text{ unde } M = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right|.$$

$$e_{i+1} \approx Me_i^2,$$

$\frac{e_i}{e_{i-1}^2}$ - const $\Rightarrow$ conv. pătratică $\Leftrightarrow M = \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty$

$\frac{e_i}{e_{i-1}}$ - const $\Rightarrow$ conv. liniară

$f'(r) \neq 0 \Rightarrow$ met. lui Newton - local şi pătratic conv.

Estimați eroarea e_{i+1} în funcție de eroarea anterioară e_i pe măsură ce metoda lui Newton converge la rădăcinile $r = -1/2$ (4p) și $r = 1$ (6p) pentru ecuația $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$. Este convergența liniară sau pătratică?

$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1$

$r_1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $r_2 = 1$

$x_0 = \frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{7}{10} = 0,7$

$x_2 = 0,809$

$x_3 = 0,875$

$x_4 = 0,917$

$e_4 = 0,083$

$\frac{e_4}{e_3^2} = 5,31$ $\quad|\quad$ $\frac{e_4}{e_3} = 0,66$

$e_i = |x_i - r|$

$e_0 = |\frac{1}{2} - 1| = \frac{1}{2} = 0,5$

$e_1 = |0,7 - 1| = 0,3$

$\frac{e_1}{e_0^2} = 1,2 < \infty$ $\quad|\quad$ $\frac{e_1}{e_0} = 0,6$

$e_2 = |0,809 - 1| = 0,191$

$\frac{e_2}{e_1^2} = 2,12 < \infty$ $\quad|\quad$ $\frac{e_2}{e_1} = 0,64$

$e_3 = |0,875 - 1| = 0,125$

$\frac{e_3}{e_2^2} = 3,43$ $\quad|\quad$ $\frac{e_3}{e_2} = 0,65$

$\frac{e_i}{e_{i-1}} = ct \Rightarrow$ conv. liniar

$\Rightarrow e_i \approx 0,66\, e_{i-1}$

... convergență (6p). (A) $x \to \frac{4}{5}x + \frac{1}{x}$, (B) $x \to \frac{1}{2}x + \frac{5}{2x}$, (C) $x \to \frac{x+5}{x+1}$. ... care converg, descrescător

2. Aplicați doi pași ai metodei lui Newton cu valoarea inițială $x_0 = 1$ pentru ecuația $3x^2 + x = 2$ (4p). Determinați rata de convergență (4p). Calculați eroarea de aproximare (2p).

3. Rearanjați ecuațiile pentru a forma un sistem strict diagonal dominant (4p). Aplicați un pas din metoda supra relaxărilor succesive (SRS) cu vectorul inițial $[1, 2, -1]^T$ și $\omega = 1.5$ (6p).

$\{ u + 4v = 5$

$x_0 = 1$

$f(x) = 3x^2 + x - 2$, $\quad x_{1,2} < \begin{matrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{matrix}$

$f'(x) = 6x + 1$ $\qquad$ $e_0 = |1 - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3}$

$x_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{5}{7}$ $\qquad$ $e_1 = |\frac{5}{7} - \frac{2}{3}| = 0,048$

$x_2 = \frac{5}{7} - \frac{f(\frac{5}{7})}{f'(\frac{5}{7})} = 0,667$ $\quad e_2 = |0,667 - 0,666| = 0,001$

$e_i \simeq 0,44\ e_{i-1}$

$f''(x) = 6$

$M = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right| = \left| \frac{6}{2 \cdot 5} \right| = 0,6$

10. Aplicați 2 pași ai met. lui Newton cu valoarea inițială $x_0 = 1$ pt. ec. $3x^2 + 2x = 1$. Det. rata de conv. a Calc. eroarea de aprox.