Capitolul 10

Aplicați iterația simultană normalizată pentru matricea A. Verificați rezultatul folosind funcția eig.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 18 & -11 & 12 \\ 6 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Algoritmul 1 (Ortogonalizarea Gram–Schmidt clasică)

Fie $A_j, j = 1, \dots, n$ vectori liniar independenţi.
for $j = 1, 2, \dots, n$
  $y = A_j$
  for $i = 1, 2, \dots, j-1$
    $r_{ij} = q_i^T A_j$
    $y = y - r_{ij} q_i$
  end
  $r_{jj} = ||y||_2$
  $q_j = y / r_{jj}$
end

Algoritmul 5 (Iteraţia simultană normalizată)

Luăm $\overline{Q_0} = I$
for $j = 1, 2, 3, \dots$
  $A\overline{Q_j} = \overline{Q_{j+1}} R_{j+1}$
end

- comparând (19) şi (20) ne arată că putem alege $Q_1 = \overline{Q_1}$ şi $R_1 = R_1'$ în (19)

$$\overline{Q_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{j = 1}$ $\quad A Q_0 = A = Q_1 \cdot R_1'$

$$y_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 18 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad r_{11} = \sqrt{100 + 64 + 36} = 10\sqrt{2}$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{18}{10\sqrt{2}} \\ \frac{6}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$y_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{18}{10\sqrt{2}} \\ \frac{6}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{18}{10\sqrt{2}} & \frac{6}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$r_{12} = q_1^T \cdot A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{18}{10\sqrt{2}} & \frac{6}{10\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 \\ -11 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$r_{22} = ||y_2||_2$$

$$q_2 = y_2 / r_{22}$$

etc. . . (probabil 2×2 la E2)

Aplicați iterația de putere cu vectorul inițial $[-1, -1, -1]^T$ pentru matricea A. Verificați rezultatul folosind funcția eig.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 12 & -7 & 12 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

Algoritmul 2 (Iterația de putere)

Dându-se vectorul inițial x_0
for $j = 1, 2, 3, \ldots$
  $u_{j-1} = x_{j-1}/||x_{j-1}||_2$
  $x_j = Au_{j-1}$
  $\lambda_j = u_{j-1}^T A u_{j-1}$
end
$u_j = x_j/||x_j||_2$

$\boxed{j=1}$

$$u_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 12 & -7 & 12 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 & 6 \\ 12 & -7 & 12 \\ 6 & -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$\longrightarrow$ se calculează pt. câte val. p.p. are matricea

$u_j = x_j / ||x_j||_2 \rightarrow$ v. p.p.

$\lambda \rightarrow$ valoare p.p.

Fie $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A (4p). Aplicaţi un pas din iteraţia câtului Rayleigh cu vectorul iniţial $x_0 = [1, 1]^T$

$[1,1]^T$

$$\det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow +2\lambda + \lambda^2 - 3 = 0, \quad \Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \to \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 1$$

- $\lambda_1 = -3$

$$\Rightarrow A = \left(\begin{array}{cc|c} -2+3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$a + b = 0 \qquad a = -b$

$b = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow a = -\alpha$

$\alpha \neq 0$

$\Rightarrow span(A) = \{(-\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}^*\} = \{(-1,1) \cdot \alpha\}$

$\Rightarrow v.p.p = (-\alpha, \alpha), \quad \alpha \neq 0$

- $\lambda_2 = 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2-1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$b = \alpha \Rightarrow a = 3\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$v.p.p_2 = (3\alpha, \alpha), \quad \alpha \neq 0$

Algoritmul 4 (Iteraţia câtului Rayleigh)

Dându-se vectorul iniţial x_0

for $j = 1, 2, 3, \ldots$

$u_{j-1} = x_{j-1} / ||x_{j-1}||_2$

$\lambda_{j-1} = u_{j-1}^T A u_{j-1}$

Rezolvăm $(A - \lambda_{j-1} I) x_j = u_{j-1}$

end

$u_j = x_j / ||x_j||_2$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$j = 1$

$$u_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 1$$

$$\begin{bmatrix} -2-1 & 1 \\ 3 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -3x_{10} + x_{11} \\ 3x_{10} - x_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\det A = +3 - 3 = 0$$

matricea A - nu e inv. ??

Găsiţi cea mai bună aproximare de rang unu a matricii $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (4p), calculând DVS (6p).

$A = U \cdot S \cdot V^T$

$\rightarrow$ găsim valorile singulare și vectorii singulari

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 3 - 3\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = $$
$$= \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0 \quad , \Delta = 16 + 4 = 20$$

$$\lambda_1 = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

După calcule $\rightarrow$ v.p.p. $\overset{2-\sqrt{5}}{\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right)}$, $\overset{2+\sqrt{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1 \right)}$

$A \cdot v_1 = s \cdot u_1$ $\qquad S = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 \\ 0 & |\lambda_2| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$

v_1 este fiecare v.p.p. normat

$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \ldots$

$$u_i = \begin{cases} +v_i & \text{dacă } \lambda_i \geq 0 \\ -v_i & \text{dacă } \lambda_i < 0 \end{cases}.$$

- găsiţi cea mai bună aproximare de rang unu a matricii $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$
- scriind (2), obţinem

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix} \longrightarrow \text{un fel de eroare} \qquad (3)
\end{aligned}$$

$A = U \cdot S V^T$

- observăm cum matricea iniţială este despărţită într-o contribuţie mai mare plus o contribuţie mai mică, datorită mărimilor diferite ale valorilor singulare
- cea mai bună aproximare de rang unu este dată de prima matrice de rang unu

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix},$$

  în timp ce a doua matrice oferă mici corecţii
- aceasta este ideea de bază din spatele reducerii dimensionalităţii şi al aplicaţiilor în compresie ale DVS

Găsiți cea mai bună dreaptă de aproximare în sensul celor mai mici pătrate pentru următorii vectori (6p), și proiecțiile vectorilor pe subspațiul unu-dimensional găsit (4p): $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad A = U S V^T$$

$\rightarrow$ va trb. să găsim SVS

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 14 & -8 \\ 14 & 20 & -8 \\ -8 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

calc. val pp. și v. pp.

Eigenvectors for the matrix A:

- $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{-1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$, valoare eigen $\lambda_1 = 0$ $\longrightarrow$ $s_3 = 0$
- $v = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{65}-39}{28} \\ \frac{3\sqrt{65}-5}{14} \\ 1 \end{pmatrix}$, valoare eigen $\lambda_2 = -2\sqrt{65}+19$ $\longrightarrow$ $s_2 = \sqrt{\lambda_2}$
- $v = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{65}-39}{28} \\ \frac{-3\sqrt{65}-5}{14} \\ 1 \end{pmatrix}$, valoare eigen $\lambda_3 = 2\sqrt{65}+19$ $\longrightarrow$ $s_1 = \sqrt{\lambda_3}$

$$A_p = \sum \underbrace{u_i s_i v_i^T}_{h_i}$$

$$A_1 = U S_1 V^T \quad \text{unde } S_1 = \begin{bmatrix} \boxed{s_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A_1$ cea mai bună dreaptă

$\boxed{\rightarrow \text{ex. 2 curs 14}}$