Factorizare LU, PA=LU

$Ax = b$

L – matrice inferior triunghiulară $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

U – matrice superior triunghiulară $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Exemplul 2

LU pt $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A \overset{L_2 - 3L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$ multiplicatorul 3 în locația (2,1)

Verificare:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = A \checkmark$$

Exemplul 3

LU pt.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 + 3L_1}{\overset{L_2 - 2L_1}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \overset{L_3 + \frac{7}{3}L_2}{\sim} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{U}$$

→ L se formează prin plasarea de 1-uri pe diagonala principală și a multiplicatorilor în triunghi inferior unde au fost folosiți pt. modificări

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

→ pt. verificare $L \cdot U = A$ ✓

Pentru substituția înapoi pt. factorizarea LU

1) $L \cdot c = b$ $\qquad$ $c \to$ matrice coloană

2) $U \cdot x = c$ $\qquad$ $x \to$ matrice coloană cu soluția sistemului

$$Ax = b \iff \boxed{L \cdot U \cdot x = b}$$

! nu orice matrice admite LU

Exemplul 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\to Lc = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 3,\ c_2 = -3,\ c_3 = -4$

$\to U \cdot x = c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$

Factorizarea $PA = LU$

$|a_{p1}| \geq |a_{i1}| \to$ liniile p și i se interschimbă

Exemplul 8

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ -x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$|a_{11}| = 1$, $|a_{21}| = 1$, $|a_{31}| = 2$ → noul pivot ⇒ $L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right] \underset{L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\overset{L_2 + \frac{1}{2}L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

* Înainte de a elimina C2

$|a_{22}| < |a_{32}| \Rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3 + \frac{1}{2}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix}$$

- observăm că pivotarea parţială rezolvă şi problema pivoţilor egali cu zero
- când un potenţial pivot egal cu zero este întâlnit, spre exemplu, dacă $a_{11} = 0$, acesta este imediat înlocuit cu un pivot nenul de undeva din coloana în care se află
- dacă nu există o astfel de intrare pe sau sub diagonala principală, atunci matricea este singulară şi eliminarea gaussiană oricum nu va putea oferi o soluţie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Multiplicatorul folosit pt. a elimina $a_{i1} \Rightarrow m_{j1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$

$$PA = LU \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} L\cdot c = P\cdot b \\ U\cdot x = c \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - \left(-\frac{1}{2}\right) C_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - \left(\frac{1}{2}\right) C_1}$$

$|a_{11}| \quad |a_{21}| \quad |a_{31}|$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 - \frac{1}{3} C_2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = U$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$PA = LU$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Găsiţi factorizarea PA=LU a următoarei matrici, folosind pivotarea parţială (8p). Verificaţi corectitudinea factorizării folosind înmulţirea matricilor (2p).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1 < 2 \quad L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_2 - \frac{1}{2} L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_3 + \frac{1}{2} L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\frac{3}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{3}L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = LU$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
L =

    1.0000         0         0
   -0.5000    1.0000         0
    0.5000    0.3333    1.0000


U =

    2.0000    1.0000   -1.0000
         0    1.5000   -1.5000
         0         0    1.0000


P =

     0     1     0
     0     0     1
     1     0     0
```

Găsiți factorizarea LU a matricii de mai jos, folosind eliminarea gaussiană clasică. Verificați corectitudinea factorizării folosind înmulțirea matricilor.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_4 - L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> L = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 1 2 1 0; 0 1 0 1];
>> U = [1 -1 1 2; 0 2 1 0; 0 0 1 2; 0 0 0 -1];
>> A = L * U

A =

     1    -1     1     2
     0     2     1     0
     1     3     4     4
     0     2     1    -1
```

Găsiți factorizarea LU a matricii de mai jos, folosind eliminarea gaussiană clasică. Verificați corectitudinea factorizării folosind înmulțirea matricilor.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$