Exemplul 3

- determinaţi dacă matricile

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ şi } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

sunt strict diagonal dominante

pt. A: $\begin{cases} |3| > |1| + |-1| \\ |-5| > |2| + |2| \\ |8| > |1| + |6| \end{cases}$ => A este diagonal dominantă

pt B: $\begin{cases} |3| < |2| + |6| \\ |8| > |1| + |1| \\ |-2| < |9| + |2| \end{cases}$ => B nu este diagonal dominantă

Dacă pt B $L_1 \Leftrightarrow L_3$ => B este diagonal dominantă

=> va converge M. Jacobi

Exemplul 1

Aplicați Metoda lui Jacobi pentru $\begin{cases} 3u+v=5 \\ u+2v=5 \end{cases}$

$(u_0, v_0) = (0, 0)$

$$u = \frac{5-v}{3}$$

$$v = \frac{5-u}{2}$$

Cele 2 ecuații iterate sunt

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-v_0}{3} \\ \frac{5-u_0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-0}{3} \\ \frac{5-0}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-v_1}{3} \\ \frac{5-u_1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-5/2}{3} \\ \frac{5-5/3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-v_2}{3} \\ \frac{5-u_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-5/3}{3} \\ \frac{5-5/6}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{10}{9} \\ \frac{25}{12} \end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow$ convergența către soluția $[1, 2]^T$

Exemplul 2

Aplicați Metoda lui Jacobi pentru $\begin{cases} u+2v=5 \\ 3u+v=5 \end{cases}$

$$\begin{cases} u = 5-2v \\ v = 5-3u \end{cases}$$

- cele două ecuaţii sunt iterate ca mai înainte, dar rezultatele sunt destul de diferite:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5-2v_0 \\ 5-3u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5-2v_1 \\ 5-3u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5-2v_2 \\ 5-3u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4}$$

- în acest caz, metoda lui Jacobi eşuează, deoarece iteraţia diverge

Rearanjați ecuațiile pentru a forma un sistem strict diagonal dominant (4p). Aplicați un pas din metoda lui Jacobi cu vectorul inițial $[1, 2, -1]^T$ (6p).

$$\begin{cases} u + 4v = 5 \\ v + 2w = 2 \\ 4u + 3w = 0. \end{cases}$$

Rezolvați sistemul prin metoda lui Jacobi cu vectorul inițial $[0, 0, 0]^T$. Verificați rezultatul folosind operatorul \.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

2. Rezolvați sistemul prin metoda lui Jacobi cu vectorul inițial $[0, 0, 0]^T$. Verificați rezultatul folosind operatorul \.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

```
ans =
  -2
  -1
   2
```

Rearanjați ecuațiile pentru a forma un sistem strict diagonal dominant (4p). Aplicați un pas din metoda lui Jacobi cu vectorul inițial $[1, 2, -1]^T$ (6p).

$$\begin{cases} u + 4v = 5 \\ v + 2w = 2 \\ 4u + 3w = 0. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$|1| < |4| + |0|$

$|1| < |2| + |0|$

$|3| < |4| + |0|$

$L_1 \to L_2$

$L_2 \to L_3$

$L_3 \to L_1$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$4u + 0 \cdot v + 3w = 0 \Rightarrow u = \frac{-3w}{4}$

$u + 4v = 5 \Rightarrow v = \frac{5-u}{4}$

$v + 2w = 2 \Rightarrow w = \frac{2-v}{2}$

$u_0 \quad 1$

$v_0 \quad 2$

$w_0 \quad -1$

$u_1 = \frac{-3(-1)}{4} = \frac{3}{4}$

$v_1 = \frac{5-1}{4} = 1$

$w_1 = \frac{2-2}{2} = 0$

Rezolvaţi sistemul prin metoda lui Jacobi cu vectorul iniţial $[0, 0, 0]^T$. Verificaţi rezultatul folosind operatorul \.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

```
>> b = [-3 2 7];
>> b = [-3; 2; 7];
>> x0 = [0; 0; 0];
>> jacobi(A,b,x0,5)

ans =

   -1.9558
   -0.9704
    1.9683

>> x = A \ b;
>> jacobi(A,b,x0,15)

ans =

   -2.0000
   -1.0000
    2.0000
```