Iterația de punct fix

r - punct fix al lui f <=> g(r) = r

Algoritmul 1 (Iteraţia de punct fix)

x_0= valoarea iniţială
$x_{i+1} = g(x_i)$ **for** $i = 0, 1, 2, \ldots$.

$$g(r) = g\left(\lim_{i\to\infty} x_i\right) = \lim_{i\to\infty} g(x_i) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = r. \quad (1)$$

Teorema 1 (Limite continue)

Fie f o funcţie continuă într-o vecinătate a lui x_0, şi presupunem că $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Cu alte cuvinte, limitele pot fi introduse în interiorul funcţiilor continue.

Definiţia 2

Fie e_i eroarea la pasul i al unei metode iterative. Dacă

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = S < 1,$$

se spune că metoda este **liniar convergentă** cu rata S.

Teorema 2

Să presupunem că g este o funcţie derivabilă cu derivata continuă, că $g(r) = r$, şi că $S = |g'(r)| < 1$. Atunci iteraţia de punct fix converge liniar cu rata S la punctul fix r pentru o valoare iniţială suficient de apropiată de r.

S - rata de convergență

Teorema 3 (Teorema de medie)

Fie f o funcţie derivabilă cu derivata continuă pe intervalul $[a, b]$. Atunci există un număr c între a şi b astfel încât $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b - a)$.

$S = |g'(r)| < 1 \rightarrow e_{i+1} \approx e_i \cdot S$

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i} = \lim_{i\to\infty} |g'(c_i)| = |g'(r)| = S.$$

Definiţia 3

O metodă iterativă se numeşte **local convergentă** la r dacă metoda converge la r pentru valori iniţiale suficient de apropiate de r.

- pentru o anume toleranţă TOL, putem formula un criteriu de oprire cu privire la eroarea absolută

$$|x_{i+1} - x_i| < \text{TOL}, \quad (12)$$

sau, în cazul în care soluţia nu este prea aproape de zero, un criteriu de oprire cu privire la eroarea relativă

$$\frac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < \text{TOL}. \quad (13)$$

Care dintre următoarele iterații de punct fix converge la $\sqrt{5}$ (4p)? Ordonați-le pe cele care converg, descrescător în funcție de rata de convergență (6p). (A) $x \to \frac{4}{5}x + \frac{1}{x}$, (B) $x \to \frac{1}{2}x + \frac{5}{2x}$, (C) $x \to \frac{x+5}{x+1}$.

f_1 f_2 f_3

- $f_1(\sqrt{5}) = \frac{4}{5}\sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ ✓

$f_1'(x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{x^2}$

$|f_1'(\sqrt{5})| = \left|\frac{4}{5} - \frac{1}{5}\right| = \frac{3}{5} < 1$

- $f_2(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$ ✓

$f_2'(x) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$|f_2'(\sqrt{5})| = \left|\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}\right| = 0 < 1$

- $f_3(\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}+5}{\sqrt{5}+1} = \frac{(\sqrt{5}+5)(\sqrt{5}-1)}{4} = \sqrt{5}$ ✓

$f_3'(x) = \frac{x+1-(x+5)}{(x+1)^2} = -\frac{4}{(x+1)^2}$

$|f_3'(\sqrt{5})| = \frac{4}{6+2\sqrt{5}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} < 1$

Ordinea descrescător f_1, f_3, f_2

Găsiți toate punctele fixe ale funcției $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{3}{8}$ (2p) și decideți dacă iterația de punct fix este local convergentă pentru fiecare punct fix (2p). În caz de local convergență, aplicați doi pași ai iterației de punct fix cu o valoare inițială din apropierea punctului (2p) și determinați rata de convergență (2p). Calculați eroarea de aproximare (2p).

$g(r) = r$

$r^2 - \frac{1}{4}r + \frac{3}{8} = r$

$r^2 - \frac{5}{4}r + \frac{3}{8} = 0 \quad | \cdot 8$

$8r^2 - 10r + 3 = 0, \quad \Delta = 100 - 96 = 4$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 2}{16} \to x_1 = \frac{1}{2}$

$\to x_2 = \frac{3}{4}$

$$g'(x) = 2x - \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ local convergentă pt $r = \frac{1}{2}$

$g'\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4} > 1 \Rightarrow$ nu converge

$$S = |g'(x)| \Rightarrow S = \frac{3}{4}$$

$$x_0 = \frac{1}{8}$$

$$x_1 = g\left(\frac{1}{8}\right) = 0{,}359 = \frac{23}{64}$$

$$x_2 = g\left(\frac{23}{64}\right) = 0{,}414 = \frac{1697}{4096}$$

$$e = |x_c - r| = |0{,}414 - 0{,}5| = 0{,}086$$

4. Care dintre următoarele IPF converge la $\sqrt{2}$? Ord. descresc, în fct. de rata de conv.

A $x \to \frac{1}{2}x + \frac{1}{x}$

B $x \to \frac{2}{3}x + \frac{2}{3x}$

C $x \to \frac{3}{4}x + \frac{1}{2x}$