Găsiți TFD a vectorului $[1, 0, -1/2, 0]^T$ (10p)

Definiția 1

Transformata Fourier Discretă (TFD) a lui $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ este vectorul n-dimensional $y = [y_0, \ldots, y_{n-1}]^T$, unde $\omega = e^{-i2\pi/n}$ şi

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{jk}. \quad (7)$$

$j = 0 \Rightarrow x_0 w^0 = x_0 \cdot 1 = x_0 = 1$

$$w = e^{-\frac{i2\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = -i$$

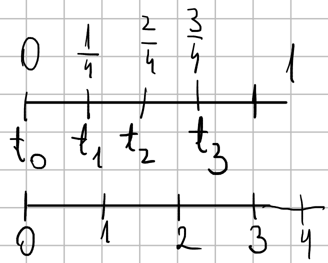
$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \cdots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & \cdots & \omega^{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

y_0: $j = 1 \Rightarrow x_1 w^0 = 0 \cdot 1 = 0$

$j = 2 \Rightarrow x_2 w^0 = -\frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$

$j = 3 \Rightarrow x_3 w^0 = 0$



Folosiți TFD (4p) pentru a găsi funcția de interpolare trigonometrică pentru următoarele date (6p):

t	x
0	1
1	1
2	−1
3	−1

$c = 0$

$d = 4$

Corolarul 1

Pentru un întreg par n, fie $t_j = c + j(d-c)/n$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$, şi fie $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $[a_0, \ldots, a_{n-1}]^T + [b_0, \ldots, b_{n-1}]^T i = F_n x$, unde F_n este Transformata Fourier Discretă. Atunci funcţia

$$P_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos\frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin\frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos\frac{n\pi(t-c)}{d-c} \quad (18)$$

satisface $P_n(t_j) = x_j$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

$$w = e^{-\frac{i2\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i$$

$x = [1 \ 1 \ -1 \ -1]^T$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-i \\ 0 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

$a_0 = a_2 = b_0 = b_2 = 0$

$a_1 = a_3 = 1 = b_3 \qquad b_1 = -1$

Corolarul 1

Pentru un întreg par n, fie $t_j = c + j(d-c)/n$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$, şi fie $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $[a_0, \ldots, a_{n-1}]^T + [b_0, \ldots, b_{n-1}]^T i = F_n x$, unde F_n este Transformata Fourier Discretă. Atunci funcţia

$$P_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t-c)}{d-c} \tag{18}$$

satisface $P_n(t_j) = x_j$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

$\frac{m}{2} - 1 = \frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1$

$P_4(t) = \frac{0}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{4}} \cdot 1 \cdot \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi (t-c)}{d-c} - (-1) \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi (t-c)}{d-c} + \frac{0}{\sqrt{4}} \cos \frac{4\pi(t-c)}{d-c} =$

$= \cos \frac{2\pi t}{4} + \sin \frac{2\pi t}{4}$

$t_0 = 0 + 0 \cdot (4-0)/4 = 0 \quad \Rightarrow P_4(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1 = x_0$

$t_1 = 0 + 1 \cdot \frac{4-0}{4} = 1 \quad \Rightarrow P_4(1) = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 1 = x_1$

$t_2 = 0 + 2 \cdot \frac{4-0}{4} = 2 \quad \Rightarrow P_4(2) = \cos \pi + \sin \pi = -1 = x_2$

$t_3 = 0 + 3 \cdot \frac{4-0}{4} = 3 \quad \Rightarrow P_4(3) = \cos \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{3\pi}{2} = -1 = x_3$ ✓

Calculaţi TFD (4p) pentru a găsi cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate de ordinul 3 pentru datele din tabel, folosind funcţiile de bază 1, $\cos 2\pi t$, şi $\sin 2\pi t$ (6p).

$f_0 \quad f_1 \quad f_2$

t	x
0	1
1/4	1
1/2	−1
3/4	−1

$\boxed{\begin{matrix} c = 0 \\ d = 1 \end{matrix}}$

$t_j = c + j\frac{d-c}{4} = 0 + j\frac{1}{4}$

Teorema 4 (Teorema aproximării de tip cele mai mici pătrate prin funcţii ortogonale)

Fie $m \le n$ numere întregi, şi presupunem că punctele $(t_0, x_0), \ldots, (t_{n-1}, x_{n-1})$ sunt date. Luăm $y = Ax$, unde A este o matrice ortogonală de forma (22). Atunci polinomul de interpolare pentru funcţiile de bază $f_0(t), \ldots, f_{n-1}(t)$ este

$$F_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k f_k(t), \tag{29}$$

şi cea mai bună aproximare de tip cele mai mici pătrate, folosind doar funcţiile $f_0, \ldots, f_{m-1}$, este

$$\boxed{F_m(t) = \sum_{k=0}^{m-1} y_k f_k(t).} \tag{30}$$

Corolarul 2

Fie $[c, d]$ un interval, fie $m < n$ întregi pozitivi pari, $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale, şi fie $t_j = c + j(d-c)/n$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$. Fie $\{a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_{n/2-1}, b_{n/2-1}, a_{n/2}\} = F_n x$ coeficienţii de interpolare pentru x astfel încât

$$x_j = P_n(t_j) = \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t_j-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t_j-c)}{d-c} \right) + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t_j-c)}{d-c}$$

pentru $j = 0, \ldots, n-1$. Atunci

$$\boxed{P_m(t) = \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{m/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) + \frac{2a_{m/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{m\pi(t-c)}{d-c}}$$

este cea mai bună aproximare de tip cele mai mici pătrate de ordinul m pentru punctele (t_j, x_j), pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

Teorema 3 (Teorema interpolării prin funcţii ortogonale)

Fie $f_0(t), \ldots, f_{n-1}(t)$ funcţii de t şi $t_0, \ldots, t_{n-1}$ numere reale. Presupunem că matricea $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} f_0(t_0) & f_0(t_1) & \cdots & f_0(t_{n-1}) \\ f_1(t_0) & f_1(t_1) & \cdots & f_1(t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1}(t_0) & f_{n-1}(t_1) & \cdots & f_{n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \tag{22}$$

este o matrice reală $n \times n$ ortogonală. Dacă $y = Ax$, funcţia

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k f_k(t)$$

interpolează $(t_0, x_0), \ldots, (t_{n-1}, x_{n-1})$, şi anume $F(t_j) = x_j$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

$1 \qquad \cos 2\pi t \qquad \sin 2\pi t$

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- prin urmare, soluţia în sensul celor mai mici pătrate,

$$c = A_m x, \tag{28}$$

este uşor de calculat
- am demonstrat următorul rezultat folositor, care extinde Teorema 3:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$F_3(t) = \sum_{m=0}^{m-1} c_m f_m(t) = c_0 f_0(t) + c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) =$

$$= 0 + 2\cos 2\pi t + 2\sin 2\pi t$$

Folosiţi TFD (4p) pentru a găsi funcţia de interpolare trigonometrică pentru următoarele date (6p):

t	x
0	0
1/4	1
1/2	0
3/4	−1

$c = 0$

$d = 1$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$$

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$b_0 = b_2 = 0$

$b_1 = -1 \qquad b_3 = 1$

Corolarul 1

Pentru un întreg par n, fie $t_j = c + j(d-c)/n$ pentru $j = 0, \dots, n-1$, şi fie $x = [x_0, \dots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $[a_0, \dots, a_{n-1}]^T + [b_0, \dots, b_{n-1}]^T i = F_n x$, unde F_n este Transformata Fourier Discretă. Atunci funcţia

$$P_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos\frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin\frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos\frac{n\pi(t-c)}{d-c} \qquad (18)$$

satisface $P_n(t_j) = x_j$ pentru $j = 0, \dots, n-1$.

$$P_4(t) = \frac{0}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{4}} \sum_{k=1}^{2-1=1} \left(\underbrace{a_k}_{0} \cos\frac{2k\pi(t-0)}{1-0} - b_k \sin\frac{2k\pi(t-0)}{1-0} \right) + \frac{a_2}{\sqrt{n}} \cos\frac{4\pi(t-0)}{1-0} =$$

$$= 1 \cdot \left(-b_1 \sin 2\pi t \right) = \sin 2\pi t$$

$P_4(0) = \sin 0 = 0$

$P_4\left(\frac{1}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$P_4\left(\frac{3}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$