Rândul 6

1. Aproximați integrala, folosind cuadratura gaussiană cu $n = 3$ (8p). Aflați eroarea comparând cu valoarea exactă rezultată din calculul integralei (2p).

$$\int_{-1}^{1}(3x^2+2x)dx. = \left(x^3+x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = 1+1+1-1=2$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) =$$

$$= \frac{5}{9}\left(3\cdot\frac{3}{5} \cancel{-2\sqrt{\frac{3}{5}}} + 3\cdot\frac{3}{5} \cancel{+2\sqrt{\frac{3}{5}}}\right) + \frac{8}{9}\cdot 0 =$$

$$= \frac{\cancel{5}}{\cancel{9}}\cdot\frac{\cancel{18}^{\,2}}{\cancel{5}} = 2$$

$$e = 2-2=0$$

$$t = \frac{(2x-a-b)}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+a+b}{2}\right)\cdot\frac{b-a}{2}\,dt$$

2. Folosiți separarea variabilelor pentru a găsi soluția PVI dată prin $y(0) = 1$ și ecuația diferențială de mai jos (4p). Aplicați metoda mijlocului cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Găsiți eroarea în $t = 1$ comparând cu soluția corectă (2p).

$$y' = t^2 y.$$

$$y' = t^2 y$$

$$\frac{1}{y}dy = t^2 dt \;\Big|\int \Rightarrow \ln y = \frac{t^3}{3} + C$$

$$y = e^{\frac{t^3}{3}+C}$$

$$\Rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow e^C = 1 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{\frac{t^3}{3}}$$

$$[0,1] \quad h = \frac{1}{2}$$

Algoritmul 1 (Metoda mijlocului)

$$w_0 = y_0$$

$$w_{i+1} = w_i + hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{h}{2}f(t_i, w_i)\right). \quad (4)$$

$$\Rightarrow t_0 = 0,\; t_1 = \frac{1}{2},\; t_2 = 1$$

$$f(t_i, w_i) = t_i^2 w_i$$

$$w_0 = y(0) = 1$$

$$w_1 = 1 + \frac{1}{2} f\left(0+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}f(0,1)\right) =$$

$$= 1+\frac{1}{2} f\left(\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}(0^2\cdot 1)\right) = 1+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4},1\right) = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\cdot 1 =$$

$$= 1+\frac{1}{32} = \frac{33}{32}$$

$$w_2 = \frac{33}{32} + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{33}{32} + \frac{1}{4} f\left(\frac{1}{2}, \frac{33}{32}\right)\right)$$

$\longrightarrow$ calcule

$$\text{eroare} = |w_3 - y(1)|$$

3. Găsiți soluția PVI dată prin $y(0) = 0$ și ecuația diferențială liniară de ordinul întâi de mai jos (4p). Aplicați metoda Adams-Moulton cu doi pași cu pasul $h = 1/2$ pentru această PVI pe intervalul $[0, 1]$ (4p). Folosiți metoda trapezului implicită pentru a determina w_1. Găsiți eroarea în $t = 1$ comparând cu soluția corectă (2p).

$$y' = -2y + 4t.$$

$$y' = -2y + 4t \qquad g(t) = -2 \quad h(t) = 4t \quad \left(\frac{e^{2t}}{2}\right)'$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{-\int 2dt} \int e^{+\int 2dt} 4t\,dt = e^{-2t} \int e^{2t} 4t\,dt =$$

$$= e^{-2t}\left(\frac{e^{2t}}{2}\cdot 4t - \int \frac{e^{2t}}{2}\cdot 4\,dt\right) =$$

$$= e^{-2t}\left(2e^{2t}t - 2\cdot\frac{e^{2t}}{2} + C\right) =$$

$$= 2t - 1 + e^{-2t}\cdot C$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow -1 + C = 0 \Rightarrow C = 1$$

$$y(t) = e^{-2t} + 2t$$

Algoritmul 8 (Metoda Adams–Moulton cu doi pași (de ordinul trei))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{12}[5f_{i+1} + 8f_i - f_{i-1}]. \qquad (45)$$

Algoritmul 7 (Metoda trapezului implicită (de ordinul doi))

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}[f_{i+1} + f_i]. \qquad (44)$$

$$h = \frac{1}{2} \to t_0 = 0 \quad t_1 = \frac{1}{2} \quad t_2 = 1$$

$$w_0 = y_0 = 0$$

$$y' = -2y + 4t$$

$$w_1 = 0 + \frac{1}{4}\left[f(t_1, w_1) + f(t_0, w_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2w_1 + 4t_1 - 2w_0 + 4t_0\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot 0 + 0 = -\frac{1}{2}w_1 + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}w_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{3}$$

$$w_2 = w_1 + \frac{h}{12}\left[5f(t_2, w_2) + 8f(t_1, w_1) - f(t_0, w_0)\right] =$$

$\longrightarrow$ calcule

$$\text{eroare} = |w_2 - y(1)|$$

4. Calculați TFD (4p) pentru a găsi cea mai bună aproximare în sensul celor mai mici pătrate de ordinul 3 pentru datele din tabel, folosind funcțiile de bază 1, $\cos 2\pi t$, și $\sin 2\pi t$ (6p).

t	y
0	−1
$\frac{1}{4}$	1
$\frac{1}{2}$	−1
$\frac{3}{4}$	1

Definiția 1

Transformata Fourier Discretă (TFD) a lui $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ este vectorul n-dimensional $y = [y_0, \ldots, y_{n-1}]^T$, unde $\omega = e^{-i2\pi/n}$ și

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} x_j \omega^{jk}. \tag{7}$$

$$w = e^{-\frac{i 2\pi}{n}} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = \cos -\frac{\pi}{2} + i \sin -\frac{\pi}{2} = -i$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^1 & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a_0 = a_1 = a_3 = 0$

$a_2 = -2$

$b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$

Corolarul 1

Pentru un întreg par n, fie $t_j = c + j(d-c)/n$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$, și fie $x = [x_0, \ldots, x_{n-1}]^T$ un vector de n numere reale. Definim $[a_0, \ldots, a_{n-1}]^T + [b_0, \ldots, b_{n-1}]^T i = F_n x$, unde F_n este Transformata Fourier Discretă. Atunci funcția

$$P_n(t) = \frac{a_0}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left(a_k \cos \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} - b_k \sin \frac{2k\pi(t-c)}{d-c} \right) + \frac{a_{n/2}}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi(t-c)}{d-c} \tag{18}$$

satisface $P_n(t_j) = x_j$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

$[c, d] = [0, 1]$

$t_j = 0 + j \frac{1-0}{4}$

Teorema 3 (Teorema interpolării prin funcții ortogonale)

Fie $f_0(t), \ldots, f_{n-1}(t)$ funcții de t și $t_0, \ldots, t_{n-1}$ numere reale. Presupunem că matricea $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} f_0(t_0) & f_0(t_1) & \cdots & f_0(t_{n-1}) \\ f_1(t_0) & f_1(t_1) & \cdots & f_1(t_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-1}(t_0) & f_{n-1}(t_1) & \cdots & f_{n-1}(t_{n-1}) \end{bmatrix} \tag{22}$$

este o matrice reală $n \times n$ ortogonală. Dacă $y = Ax$, funcția

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k f_k(t)$$

interpolează $(t_0, x_0), \ldots, (t_{n-1}, x_{n-1})$, și anume $F(t_j) = x_j$ pentru $j = 0, \ldots, n-1$.

pt. funcții

$A = \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$

$Y = A \cdot X$

5. Găsiţi TCD-2D a matricii X (4p), şi găsiţi funcţia de interpolare corespunzătoare $P_n(s,t)$ pentru punctele (i, j, x_{ij}), $i, j = 0, \ldots, n-1$ (6p).

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$Y = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & a & c \\ a & c & -a & -b \\ a & -c & -a & b \\ a & -b & a & -a \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4a & 0 & -4a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & a & c \\ a & c & -a & -b \\ a & -c & -a & b \\ a & -b & a & -a \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4ab+4ac & 8a^2 & 4ac-4ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teorema 3 (Teorema de interpolare a TCD-2D)

Fie $X = (x_{ij})$ o matrice de n^2 numere reale. Fie $Y = (y_{kl})$ Transformata Cosinus Discretă bi-dimensională a lui X. Definim $a_0 = 1/\sqrt{2}$ şi $a_k = 1$ pentru $k > 0$. Atunci funcţia reală

$$P_n(s,t) = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} y_{kl} a_k a_l \cos \frac{k(2s+1)\pi}{2n} \cos \frac{l(2t+1)\pi}{2n}$$

satisface $P_n(i,j) = x_{ij}$, pentru $i, j = 0, \ldots, n-1$.

$$P_n(s,t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3} \sum_{l=0}^{3} y_{kl} a_k a_l \cos \frac{k(2s+1)\pi}{8} \cos \frac{l(2t+1)\pi}{8}$$

$\rightarrow$ calcule

6. Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Găsiţi valorile proprii şi vectorii proprii ai lui A (4p). Aplicaţi un pas din iteraţia de putere inversă cu vectorul iniţial $x_0 = [1,1]^T$ şi deplasarea $s = -2$ (6p). Decideţi la care valoare proprie va converge iteraţia de putere inversă.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

$6 \quad 1 \longrightarrow \frac{1}{6}$ 1

$\lambda_1 = 4 \qquad \boxed{\lambda_2 = -1} \longrightarrow -1+2 = 1 \rightarrow 1$ (inversă)

$S = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}$

$\lambda_1 = 4$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} -a + b = 0 \\ b = \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow a = \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow$ v.p.p. $1 = [1, 1]^T \qquad [\alpha, \alpha], \alpha \neq 0$

$\lambda_2 = -1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} 2a + 3b = 0 \\ b = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

$\Rightarrow a = -\frac{3\alpha}{2}$

$\alpha = 1$

$\Rightarrow$ v.p.p. $2 = [-\frac{3}{2}, 1]^T$

Algoritmul 3 (Iteraţia de putere inversă)

Dându-se vectorul iniţial x_0 şi deplasarea s
for $j = 1, 2, 3, \ldots$
  $u_{j-1} = x_{j-1}/||x_{j-1}||_2$
  Rezolvăm $(A - sI)x_j = u_{j-1}$
  $\lambda_j = u_{j-1}^T x_j$
end
$u_j = x_j/||x_j||_2$

$[1, 1]^T$

$s = -2$

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = A$

$\boxed{j=1}$

$$u_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{10} + x_{11} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ x_{10} + 2x_{11} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow x_{11} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x_{10} = \frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$$

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{1}{6\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{6\sqrt{2}} \\ \frac{1}{6\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\|x_1\|_2}$$

$\Rightarrow 6 - 2 = 4$ (val. inițială)

$\left|\frac{1}{6}\right| \quad |1|$

Cea mai aproape de -2 ar fi -1

$\longrightarrow$ converge la 1

7. *Găsiţi un interval de lungime unu pe care funcţia $f(x) = x^2 - 6x + 5$ este unimodală în jurul minimului relativ (2p). Aplicaţi apoi un pas din căutarea secţiunii de aur pentru găsirea minimului funcţiei pe intervalul respectiv (8p).*

$(x-5)(x-1)$

$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$

$f(3) = 9 - 18 + 5 = -4$

+ algoritm