Factorizare QR

- alegerea valorilor x_i nu schimbă cu nimic partea inferioară a vectorului de eroare; evident, $(e_{n+1}, \dots, e_m) = (-d_{n+1}, \dots, -d_m)$
- prin urmare, soluţia în sensul celor mai mici pătrate este minimizată folosind vectorul x obţinut din substituţia înapoi a părţii superioare, şi eroarea în sensul celor mai mici pătrate este $||e||_2^2 = d_{n+1}^2 + \cdots + d_m^2$

Algoritmul 2 (Cele mai mici pătrate folosind factorizarea QR)

Dându-se sistemul inconsistent $m \times n$ $Ax = b$, găsim factorizarea QR completă $A = QR$ şi luăm

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \text{submatricea } n \times n \text{ superioară a lui } R \\ \hat{d} &= \text{primele } n \text{ intrări superioare ale lui } d = Q^T b. \end{aligned}$$

Rezolvăm $\hat{R}x = \hat{d}$ pentru a găsi soluţia în sensul celor mai mici pătrate $\overline{x}$.

Exemplul 6

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

QR completă

$$y_1 = A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r_{11} = \|y_1\|_2 = 3$$

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$y_2 = A_2 - q_1(q_1^T A_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \left(\cancel{-\frac{4}{3}} + 2 + \cancel{\frac{4}{3}}\right) =$$

$$= \dots$$

$$q_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \begin{bmatrix} -\frac{14}{15} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_3 = A_3 - q_1\underbrace{(q_1^T A_3)}_{r_{13}} - q_2\underbrace{(q_2^T A_3)}_{r_{23}} = \frac{2}{225}\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{10}{15} \\ -\frac{11}{15} \end{bmatrix}$$

(4.)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 15 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$d = Q^T \cdot b$$

$$R\, x = d = Q^T \cdot b$$