Pivotare parțială

$|a_{p1}| \geq |a_{i1}| \Rightarrow$ interschimbare $p \Leftrightarrow i$

$m_{i1} = \dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ $\quad |m_{i1}| \leq 1$

$LU \rightarrow Lc = b$

$Ux = c$

$PA = LU \rightarrow Lc = P \cdot b$

$Ux = c$

Exemplul 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + 0 \cdot c_2 = 3 \\ 3c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = 3 \Rightarrow c_2 = -7 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ -7x_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Exemplul 5

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow Lc = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 3, \; c_2 = -3, \; c_3 = -4$

$\rightarrow U \cdot X = c$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow x_1 = 3, \; x_2 = 1, \; x_3 = 2$

Exemplul 6 (nu orice matrice admite LU)

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nu are LU

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ ab & ac + d \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow b = 0, \; ab = 1$ ceea ce nu se poate întâmpla

Exemplul 8

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ -x_1 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$|a_{11}| = 1$, $|a_{21}| = 1$, $|a_{31}| = 2$ → noul pivot $\Rightarrow L_1 \leftrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{array}\right] \underset{L_3 - \frac{1}{2}L_1}{\overset{L_2 + \frac{1}{2}L_1}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

* Înainte de a elimina C2

$|a_{22}| < |a_{32}| \Rightarrow L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{L_3 + \frac{1}{2}L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & & 1 \end{bmatrix}$$

- observăm că pivotarea parţială rezolvă şi problema pivoţilor egali cu zero
- când un potenţial pivot egal cu zero este întâlnit, spre exemplu, dacă $a_{11} = 0$, acesta este imediat înlocuit cu un pivot nenul de undeva din coloana în care se află
- dacă nu există o astfel de intrare pe sau sub diagonala principală, atunci matricea este singulară şi eliminarea gaussiană oricum nu va putea oferi o soluţie

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplul 9

- găsiți factorizarea $PA = LU$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$L1 \leftrightarrow L2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2} L_1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - \frac{1}{4} L_1} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- am făcut ceva inedit—în loc să plasăm doar un zero în poziţia eliminată, am făcut zero o locaţie de stocare
- în interiorul zero-ului de la poziţia (i, j), stocăm multiplicatorul m_{ij} pe care l-am folosit pentru eliminarea acelei poziţii
- facem acest lucru pentru un motiv: acesta este mecanismul prin care multiplicatorii vor rămâne pe rândul lor în cazul efectuării unor interschimbări viitoare
- în continuare, trebuie să facem o comparaţie pentru a alege al doilea pivot
- deoarece $|a_{22}| = 1 < 2 = |a_{32}|$, o interschimbare de rânduri este necesară înaintea eliminării celei de-a doua coloane

$$\xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2} \cdot L_2} \begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ \frac{1}{4} & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

- cu aceasta, eliminarea este terminată
- acum putem citi factorizarea PA=LU:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}. \quad (18)$$

- intrările lui L se află în interiorul zerourilor din triunghiul inferior al matricii (sub diagonala principală), şi U este format de triunghiul superior
- permutarea finală (cumulativă) reprezintă matricea P

Exemplul 10

$PA = LU$ pt. $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

În exemplul anterior, am realizat $PA = LU$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{U}$$

1. $L \cdot c = P \cdot b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow c_1 = 0$

$\frac{1}{4} \cdot 0 + c_2 = 6 \Rightarrow c_2 = 6$

$\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 6 + c_3 = 5 \Rightarrow c_3 = 8$

2. $U \cdot x = c$

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 8x_3 = 8 \Rightarrow x_3 = 1$

$2x_2 + 2 \cdot 1 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$

$4x_1 + 4 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

$x = [-1, 2, 1]^T$

Exemplul 11

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=4 \\ 3x_1+2x_2=1 \end{cases}$$ cu $PA=LU$ cu pivotare parțială

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$|a_{21}| > |a_{11}| \Rightarrow L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2-\frac{2}{3}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow PA=LU$:

$$\underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}}$$

$LC=Pb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$C_1 = 1$

$\frac{2}{3}\cdot 1 + C_2 = 4 \Rightarrow C_2 = \frac{10}{3}$

$UX=C$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$$

$\frac{5}{3}x_2 = \frac{10}{3} \Rightarrow x_2 = 2$

$3x_1 + 2\cdot 2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$

$\Rightarrow x = [-1, 2]^T$

Găsiţi factorizarea LU a matricii de mai jos, folosind eliminarea gaussiană clasică. Verificaţi corectitudinea factorizării folosind înmulţirea matricilor.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Găsiţi factorizarea PA=LU a următoarei matrici, folosind pivotarea parţială (8p). Verificaţi corectitudinea factorizării folosind înmulţirea matricilor (2p).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Găsiţi factorizarea LU a matricii de mai jos, folosind e[illegible]narea gaussiană clasică. Verificaţi corectitudinea factorizării folosind înmulţirea matricilor.

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Găsiți factorizarea LU a matricii de mai jos, folosind eliminarea gaussiană clasică. Verificați corectitudinea factorizării folosind înmulțirea matricilor.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1]{L_4 - L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> L = [1 0 0 0; 0 1 0 0; 1 2 1 0; 0 1 0 1];
>> U = [1 -1 1 2; 0 2 1 0; 0 0 1 2; 0 0 0 -1];
>> A = L * U

A =

     1    -1     1     2
     0     2     1     0
     1     3     4     4
     0     2     1    -1
```

Găsiți factorizarea PA=LU a următoarei matrici, folosind pivotarea parțială (8p). Verificați corectitudinea factorizării folosind înmulțirea matricilor (2p).

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$1 < 2 \quad L_1 \Leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 + \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\frac{3}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow L_2 \Leftrightarrow L_3$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \underset{L_3 - \frac{1}{3}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = LU$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
L =

    1.0000         0         0
   -0.5000    1.0000         0
    0.5000    0.3333    1.0000


U =

    2.0000    1.0000   -1.0000
         0    1.5000   -1.5000
         0         0    1.0000


P =

     0     1     0
     0     0     1
     1     0     0
```