Metoda bisecției

r - rădăcină $\Leftrightarrow f(r)=0$

Teorema 1 (Teorema valorii intermediare)

Fie f o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$. Atunci f ia orice valoare între $f(a)$ şi $f(b)$. Mai precis, dacă y este un număr între $f(a)$ şi $f(b)$, atunci există un număr c care satisface $a \leq c \leq b$ astfel încât $f(c) = y$.

Teorema 2

Fie f o funcţie continuă pe $[a, b]$, care satisface $f(a)f(b) < 0$. Atunci f are o rădăcină între a şi b, adică există un număr r care satisface $a < r < b$ şi $f(r) = 0$.

Algoritmul 3 (Metoda bisecţiei)

Dându-se un interval iniţial $[a, b]$ astfel încât $f(a)f(b) < 0$
while $(b - a)/2 >$ TOL
  $c = (a + b)/2$
  if $f(c) = 0$, **stop**, **end**
  if $f(a)f(c) < 0$
    $b = c$
  else
    $a = c$
  end
end
Intervalul final $[a, b]$ conţine o rădăcină.
Aproximarea rădăcinii este $(a + b)/2$.

① $f(x) = x^3 + x - 1$ $\rightarrow r = 0,6823$

interval : $[0, 1]$

I. Verificăm $f(a) * f(b)$ $\begin{cases} < 0 \Rightarrow \exists \text{ rădăcină} \\ \geq 0 \Rightarrow \nexists \text{ rădăcină} \end{cases}$

$f(0) \cdot f(1) = (-1)(1) = -1 < 0 \Rightarrow \exists$ rădăcină

?TOL?

II. Calculăm mijlocul $c_i = (a_i + b_i)/2$ al intervalului curent $[a_i, b_i]$

$\rightarrow f(c_i)$

$\rightarrow f(c_i) \cdot f(a_i)$ $\begin{cases} < 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{i+1} = a_i \\ b_{i+1} = c_i \end{cases} \\ \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a_{i+1} = c_i \\ b_{i+1} = b_i \end{cases} \end{cases}$

$\frac{1-0}{2} > 0,0005$ ✓

pas 0: $c_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$$f(c_0) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1+4-8}{8} = -\frac{3}{8}$$

$$f(c_0)\cdot f(a_0) = \left(-\frac{3}{8}\right)(-1) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 > 0{,}0005$$

pas 1: $c_1 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$

$$f(c_1) = \frac{27}{64} + \frac{3}{4} - 1 = \frac{11}{64}$$

$$f(a_1)\, f(c_1) = \left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{11}{64}\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{\frac{3}{4} - {}^{2)}\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}125 > 0{,}0005$$

pas 2: $c_2 = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$

$$f(c_2) = \frac{125}{8^3} + \frac{5}{8} - 1 = -\frac{67}{512}$$

$$f(a_2)\cdot f(c_2) = \left(-\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{67}{512}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{5}{8} \\ b_3 = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\frac{{}^{2)}\frac{3}{4} - \frac{5}{8}}{2} = \frac{1}{16} = 0{,}0625 > 0{,}0005$$

pas 3: $c_3 = \frac{\frac{5}{8}+{}^{2)}\frac{3}{4}}{2} = \frac{11}{16}$

$$f(c_3) = \frac{1331}{4096} + \frac{11}{16} - 1 = \frac{1331+2816-4096}{4096} = \frac{51}{4096}$$

$$\underbrace{f(a_3)}_{<0}\cdot \underbrace{f(c_3)}_{>0} < 0 \Rightarrow \begin{cases} a_4 = \frac{5}{8} = 0{,}625 \\ b_4 = \frac{11}{16} = 0{,}6875 \end{cases}$$

$$\frac{\frac{11}{16} - {}^{2)}\frac{5}{8}}{2} = \frac{1}{32} = 0{,}03125 < 0{,}05$$

$x_C = \frac{a_4+b_4}{2}$; ?? $\pm TOL$

sau $\pm\ b_4 - x_C$

Se continuă câți pași se cer

Eroarea soluției: $|x_c - r| = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

calcul

răd. adev

→ evaluările de funcție: $n+2$

Definiţia 3

O soluţie este **corectă cu *p* zecimale exacte** dacă eroarea este mai mică decât 0.5×10^{-p}.

- folosiţi metoda bisecţiei pentru a găsi o rădăcină a funcţiei $f(x) = \cos x - x$ pe intervalul $[0, 1]$ cu 6 zecimale exacte

6 zecimale

$$\frac{b-a}{2^{n+1}} < \frac{1}{\cancel{2}} \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{10^6}$$

$$2^n > 10^6 \quad | \log_2$$

$$\log_2 2^3 < \log_2 10 < \log_2 2^4$$

$$3 < \log_2 10 < 4$$

$$n > 6 \log_2 10 \simeq 19{,}9$$

$\Rightarrow$ 20 de pași necesari

pas 0: $c_0 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$

$$f(c_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0{,}7}{2} = 0{,}35$$

$$f(a_0) \cdot f(c_0) = f(0) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) > 0 \quad \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Se continuă

Folosiţi teorema valorii intermediare pentru a găsi un interval de lungime unu care conţine rădăcina pozitivă a ecuaţiei $3x^2 + x = 2$ (2p). Aplicaţi metoda bisecţiei pentru a găsi o aproximare a rădăcinii care se află la cel mult 1/8 de rădăcina adevărată (6p). Calculaţi eroarea de aproximare (2p).

$$\begin{cases} f \text{ - cont pe } [a, b] \\ y \in [f(a), f(b)] \\ a \le c \le b \\ f(c) = y \end{cases}$$

II. $a < r < b$

$f(r) = 0$

$f(x) = 0$

$f(x) = 3x^2 + x - 2$

$f(x) = 0$, $\Delta = 1 + 24 = 25$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{6}$ $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{2}{3} \end{cases}$

$x_1 = \frac{2}{3}$ $\qquad f\left(\frac{2}{3}\right) = \cancel{3} \cdot \frac{4}{\cancel{9}_3} + \frac{2}{3} - 2 = 2 - 2 = 0$

f - cont pe $[0, 1]$

$f(0) = -2$

$f(1) = 2$ $\qquad 0 \in [-2, 2]$

$0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$

T. val. intermediare

$\Rightarrow [0, 1]$

$TOL = \frac{1}{8} = 0{,}125$

pas 0: $c_0 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3+2-8}{4} = -\frac{3}{4}$

$f(0)\, f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)\left(-\frac{3}{4}\right) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2} \\ b_1 = 1 \end{cases}$

pas 1: $c_1 = \frac{3}{4}$

$f\left(\frac{3}{4}\right) = 3 \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 2 = \frac{27 + 12 - 32}{16} > 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) f\left(\frac{3}{4}\right) < 0 \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{1}{2} \\ b_2 = \frac{3}{4} \end{cases}$

$\frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{\underset{2}{2}}}{2} = \frac{1}{8}$

$x_c = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{5}{8}$

$|x_c - r| = \left|\frac{5}{8} - \frac{2}{3}\right| = \left|\frac{15-16}{24}\right| = \frac{1}{24} < \frac{1-0}{2^3} = \frac{1}{8}$ ✓

Folosiţi teorema valorii intermediare pentru a găsi un interval de lungime unu care conţine rădăcina pozitivă a ecuaţiei $5x^2 + 3x = 2$ (2p). Aplicaţi metoda bisecţiei pentru a găsi o aproximare a rădăcinii care se află la cel mult $1/8$ de rădăcina adevărată (6p). Calculaţi eroarea de aproximare (2p).