Estimaţi eroarea e_{i+1} în funcţie de eroarea anterioară e_i pe măsură ce metoda lui Newton converge la rădăcinile $r = -1/2$ (4p) şi $r = 1$ (6p) pentru ecuaţia $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$. Este convergenţa liniară sau pătratică?

Estimaţi eroarea e_{i+1} în funcţie de eroarea anterioară e_i pe măsură ce metoda lui Newton converge la rădăcinile $r = -1$ (4p) şi $r = 1$ (6p) pentru ecuaţia $x^5 - 2x^4 + 2x^2 - x = 0$. Este convergenţa liniară sau pătratică?

10. Aplicați 2 pași ai met. lui Newton cu valoarea inițială $x_0 = 1$ pt. ec. $3x^2 + 2x = 1$. Det. rata de conv. Calc. eroarea de aprox.

$e_i = |x_i - r|$

$\frac{e_i}{e_{i-1}^2}$ - const. $\to$ pătratică $\Leftrightarrow M = \lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} < \infty$

$\frac{e_i}{e_{i-1}}$ - const $\to$ liniară

Dacă $f'(r) \neq 0 \Rightarrow$ met. lui Newton - local și pătratic conv. lar

$$\lim_{i\to\infty} \frac{e_{i+1}}{e_i^2} = M = \left| \frac{f''(r)}{2f'(r)} \right|$$

$$e_{i+1} \simeq e_i^2 \cdot M$$

1. $f(x) = x^2$ $\quad x_0 = 1,\ r = 0 \quad e_0 = |1-0| = 1$

$f'(x) = 2x$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad e_1 = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad e_2 = \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow e_{i+1} = \frac{e_i}{2} \Rightarrow$ convergență liniară

2. $f(x) = 4x^4 - 6x^2 - \frac{11}{4}$ $\quad x_0 = \frac{1}{2}$

$f(0) = -\frac{11}{4} < 0 \Rightarrow \exists$ răd.

$f'(x) = 16x^3 - 12x$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{1}{2} - \frac{\cancel{4}\cdot\frac{1}{\cancel{16}_4} - 6\cdot\frac{1}{4} - \frac{11}{4}}{{}^4\cancel{16}\cdot\frac{1}{\cancel{8}_2} - 12\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\cancel{-16}^{2}}{\cancel{4}_2}\cdot\frac{2}{\cancel{-8}} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{f(-\frac{1}{2})}{f'(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ va alterna

Estimați eroarea e_{i+1} în funcție de eroarea anterioară e_i pe măsură ce metoda lui Newton converge la rădăcinile $r = -1/2$ (4p) și $r = 1$ (6p) pentru ecuația $2x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$. Este convergența liniară sau pătratică?

$$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1$$

pt $r=1$ $\quad x_0 = \frac{1}{2} \quad e_0 = \left|\frac{1}{2} - 1\right| = \frac{1}{2}$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2} - \frac{2\cdot\frac{1}{16} - 5\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1}{8\cdot\frac{1}{8} - 15\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{8} - \frac{5}{8} + \frac{6}{8} + \frac{4}{8} - \frac{8}{8}}{\frac{8}{8} - \frac{30}{8} + \frac{24}{8} + \frac{8}{8}} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{-2}{10} = \frac{5}{10} + \frac{2}{10} = \frac{7}{10}$$

$e_1 = \left|\frac{7}{10} - 1\right| = \frac{3}{10} = 0,3$

$\frac{e_1}{e_0^2} = \frac{3}{10} \cdot 4 = \frac{12}{10}$

$$x_2 = \frac{7}{10} - \frac{0,24 - 1,72 + 1,47 + 0,7 - 1}{2,74 - 7,35 + 0,42 + 1} = \frac{7}{10} - \frac{-0,31}{-3,19} = \frac{7}{10} - 0,1 =$$

$= 0,6 = \frac{3}{5} \qquad e_2 = \left|\frac{3}{5} - 1\right| = \frac{2}{5} = 0,4$

$$\frac{e_2}{e_1^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{100}{9} = \frac{200}{45} = 4,44$$

$$M = \left|\frac{f''(r)}{2f'(r)}\right| = \left|\frac{0}{\dots}\right| = 0 \quad (r=1)$$

$$M = \left|\frac{6 + 15 + 6}{2(-1 - \frac{15}{4} - 3 + 1)}\right| = \left|\frac{27}{-6 - \frac{15}{2}}\right| = \frac{54}{27} = 2$$

$\Rightarrow$ în $r = -\frac{1}{2}$ p. conv.

$$f''(r) = 24x^2 - 30x + 6$$

$f(-\frac{1}{2}) = 0$

$f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{27}{4}$

?? $f''(-\frac{1}{2}) = 24\cdot\frac{1}{4} + 15 + 6 = 6 + 15 + 6 = 27$

$f(1) = 0$

$f'(1) = 0$

$f''(1) = 0$

10. Aplicați 2 pași ai met. lui Newton cu valoarea inițială $x_0=1$ pt. ec. $3x^2+2x=1$. Det. rata de conv. Calc. eroarea de aprox

$x_0 = 1$ $\qquad f(x) = 3x^2+2x-1 = 0 \quad \Delta = 4+12=16 \quad x_{1,2} = \frac{-2\pm 4}{6}$ $\to x_1=-1$, $x_2 = \frac{1}{3}$

$f'(x) = 6x+2 \qquad e_0 = \left|1-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$

$x_1 = 1 - \frac{4}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad e_1 = \left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6} \qquad \frac{e_1}{e_0^2} = \frac{1}{\cancel{6}_2}\cdot\frac{\cancel{9}^3}{4} = \frac{3}{8}$

$x_2 = \frac{1}{2} - \frac{3\cdot\frac{1}{4}+1-1}{3+2} = \frac{1}{2} - \frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{1}{2} - \frac{3}{20} = \frac{7}{20} \qquad e_2 = \left|\frac{7}{20}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{60}$

$\frac{e_2}{e_1^2} = \frac{1}{60}\cdot 36 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

Dacă $f'(r) \neq 0 \Rightarrow r$ - rad

$f''(x) = 6$

$M = \left|\frac{6}{2\cdot f'(\frac{1}{3})}\right| = \left|\frac{6}{2\cdot 4}\right| = \frac{6}{8} < \infty$