MAC - capitolul 9

Calculați TCD-2D (4p) pentru a găsi aproximarea de tip cele mai mici pătrate pentru matricea de mai jos, folosind funcțiile de bază 1, $\cos\frac{(2s+1)\pi}{8}$, $\cos\frac{(2t+1)\pi}{8}$ (6p). $\longrightarrow m=3$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3 (Teorema de interpolare a TCD-2D)

Fie $X = (x_{ij})$ o matrice de n^2 numere reale. Fie $Y = (y_{kl})$ Transformata Cosinus Discretă bi-dimensională a lui X. Definim $a_0 = 1/\sqrt{2}$ și $a_k = 1$ pentru $k > 0$. Atunci funcția reală

$$P_n(s,t) = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{n-1} y_{kl}a_k a_l \cos\frac{k(2s+1)\pi}{2n}\cos\frac{l(2t+1)\pi}{2n}$$

satisface $P_n(i,j) = x_{ij}$, pentru $i,j = 0,\dots,n-1$.

- pentru a scrie o expresie folositoare pentru funcția de interpolare, ne reamintim definiția lui C din (1),

$$C_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n}}a_i \cos\frac{i(2j+1)\pi}{2n}, \qquad (12)$$

pentru $i,j = 0,\dots,n-1$, unde

$$a_i \equiv \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{dacă } i = 0 \\ 1 & \text{dacă } i = 1,\dots,n-1. \end{cases}$$

$$Y = CXC^T = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & a & c \\ a & c & -a & -b \\ a & -c & -a & b \\ a & -b & a & -c \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}},\ c = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}.$$

$$Y = CXC^T = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ b & c & -c & -b \\ a & -a & -a & a \\ c & -b & b & -c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b & a & c \\ & - & - & - \end{matrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4a & 0 & -4a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & a & c \\ a & c & -a & -b \\ a & -c & -a & b \\ a & -b & a & -c \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{matrix} \quad & y_{01} & \quad & y_{03} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 4ab+4ac & 8a^2 & 4ac-4ab \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$4a(b+c) = \cancel{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\cancel{2}\sqrt{2}} \to 1,85$$

$$4a(c-b) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \to -0,77$$

$$P_4(s,t) = \frac{2}{4}\sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3} y_{kl}a_k a_l \cos\frac{k(2s+1)\pi}{8}\cos\frac{l(2t+1)\pi}{8} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3}\left(y_{k0}a_k a_0 \cos\frac{k(2s+1)\pi}{8}\cos 0 + y_{k1}a_k a_1 \cos kS \cos\frac{(2t+1)\pi}{8} + \right.$$

$$y_{h2}\, a_h a_2 \cos hS \cdot \cos 2T + y_{h3}\, a_h a_3 \cos^h S \cdot \cos 3T \Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[y_{00}\, a_0 a_0 + y_{01}\, a_0 a_1 \cos T + y_{02}\, a_0 a_2 \cos 2T + y_{03}\, a_0 a_3 \cos 3T \Big] =$$

$+ y_{02}$

$$= \frac{1}{2}\Big[1{,}85 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos T^{\cos 0.5} - 0{,}77 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3T^{\cos 0.5} \Big] = \qquad i+j \leq 3$$

$y\,t$

$$P_3(s,t) = \frac{1}{2} \cdot 1{,}85 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos T - 0{,}77 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3T$$

un pic greșit ↑

Fișiere de tip arhivă .7z .bdoc .cdoc .ddoc .gtar .gz .gzip .hqx .rar .sit .tar .tgz .zip
Fișiere de tip imagine .ai .bmp .gdraw .gif .ico .jpe .jpeg .jpg .pct .pic .pict .png .svg .svgz .tif .tiff

Găsiți TCDM a celor două suprapuneri de lungime 4 ale vectorului $[-3,-2,-1,1,2,3]^T$ (6p). Reconstruiți apoi secțiunea din mijloc, folosind TCDM inversă (4p).

MB, număr maxim de atașamente: 3

Definiția 1

Transformata Cosinus Discretă (versiunea 4) (TCD4) a lui $x = [x_0, \dots, x_{n-1}]^T$ este vectorul n-dimensional

$$y = Ex,$$

unde E este matricea $n \times n$

$$E_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi}{n}. \qquad (1)$$

- ca în cazul TCD1, matricea E din TCD4 este o matrice reală ortogonală: este pătratică şi coloanele ei sunt vectori unitari ortogonali doi câte doi
- de fapt, coloanele lui E sunt vectorii proprii unitari ai matricii reale simetrice $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 3 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Definiția 2

Fie n un întreg pozitiv par. **Transformata Cosinus Discretă Modificată** (TCDM) a lui $x = [x_0, \dots, x_{2n-1}]^T$ este vectorul n-dimensional

$$y = Mx, \qquad (3)$$

unde M este matricea $n \times 2n$

$$M_{ij} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cos \frac{\left(i+\frac{1}{2}\right)\left(j+\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)\pi}{n}, \qquad (4)$$

pentru $0 \le i \le n-1$ şi $0 \le j \le 2n-1$.

$$MX = E \cdot \begin{bmatrix} -R \cdot x_3 - x_4 \\ x_1 - R x_2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$[-3, -2, \boxed{-1, 1,} \; 2, 3] \to$ secțiunea din mijloc

$\Rightarrow$ vom suprapune vectorii $[-3,-2,-1,1]$ și $[-1,1,2,3]^T$

Fie $n = 2$

$$\Rightarrow E_2 = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{8} & \cos\frac{3\pi}{8} \\ \cos\frac{3\pi}{8} & \cos\frac{9\pi}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c \\ c & -b \end{bmatrix}$$

$\to$ aplicăm TCDM 2×4

Teorema 1 (Inversarea TCDM prin suprapunere)

Fie M matricea TCDM $n \times 2n$, şi $\boxed{N = M^T}$. Fie u_1, u_2, u_3 n-vectori, şi luăm

$$v_1 = M \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ şi } v_2 = M \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Atunci n-vectorii w_1, w_2, w_3, w_4 definiţi prin

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = N v_1 \text{ şi } \begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = N v_2,$$

satisfac $u_2 = \frac{1}{2}(w_2 + w_3)$.

1

$$v_1 = M \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = E_2 \begin{bmatrix} -R(-1) - 1 \\ -3 - R(-2) \end{bmatrix} = E_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}$$

$$v_2 = M \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = E_2 \begin{bmatrix} -R(2) - 3 \\ -1 - R(1) \end{bmatrix} = E_2 \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5b - 2c \\ -5c + 2b \end{bmatrix}$$

semnalul transformat

$$[v_1 | v_2] = [\ - - -\ ]$$

$$c = \cos\frac{3\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad b = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

pt a inversa TCBM, definim A și B

$$E_2 = [A|B] = \begin{bmatrix} b & c \\ c & -b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = Nv_1 = \begin{bmatrix} B^T v_1 \\ -RB^T v_1 \\ -RA^T v_1 \\ -A^T v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -b \\ -c & b \\ -b & -c \\ -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7b-c \\ b-7c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = Nv_2 = \begin{bmatrix} B^T v_2 \\ -RB^T v_2 \\ -RA^T v_2 \\ -A^T v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -b \\ -c & b \\ -b & -c \\ -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11b-c \\ b-11c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 11 \\ 11 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = N \cdot v_1 = \begin{bmatrix} B^T v_1 \\ -R B^T v_1 \\ -RA^T v_1 \\ -A^T v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -b \\ -c & b \\ -b & -c \\ -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^2-b^2 \\ c^2+b^2 \\ bc-bc \\ bc-bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = N \cdot v_2 = \begin{bmatrix} B^T v_1 \\ -R B^T v_1 \\ -RA^T v_1 \\ -A^T v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -b \\ -c & b \\ -b & -c \\ -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5b-2c \\ -5c+2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5bc-2c^2+5b-2b^2 \\ +5bc+2c^2-5bc+2b^2 \\ 5b^2+2bc+5c^2-2bc \\ 5b^2+2bc+5c^2-2bc \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(w_2 + w_3) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$