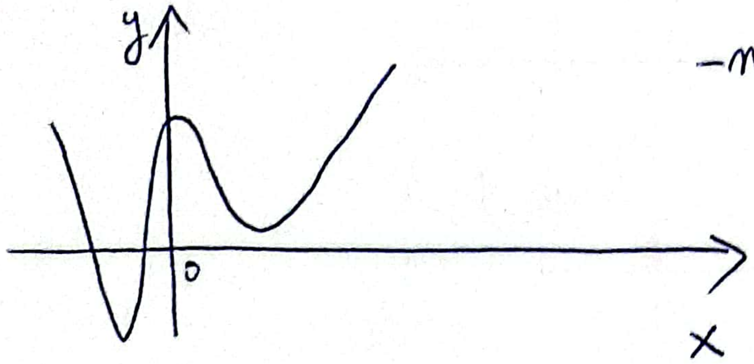
Lab 10. Optimizarea

optimizare → găsirea maximului sau minimului unei funcții
(funcții obiectiv sau de cost, vom vedea la BIA în anul 3)



- ne rezumăm la găsirea minimului

Vom discuta
1) căutarea secțiunii de aur
2) interpolarea parabolică succesivă

} aplicabile pentru funcții f de o variabilă

3) metoda lui Newton
4) metoda gradientului
5) Căutarea gradienților conjugați

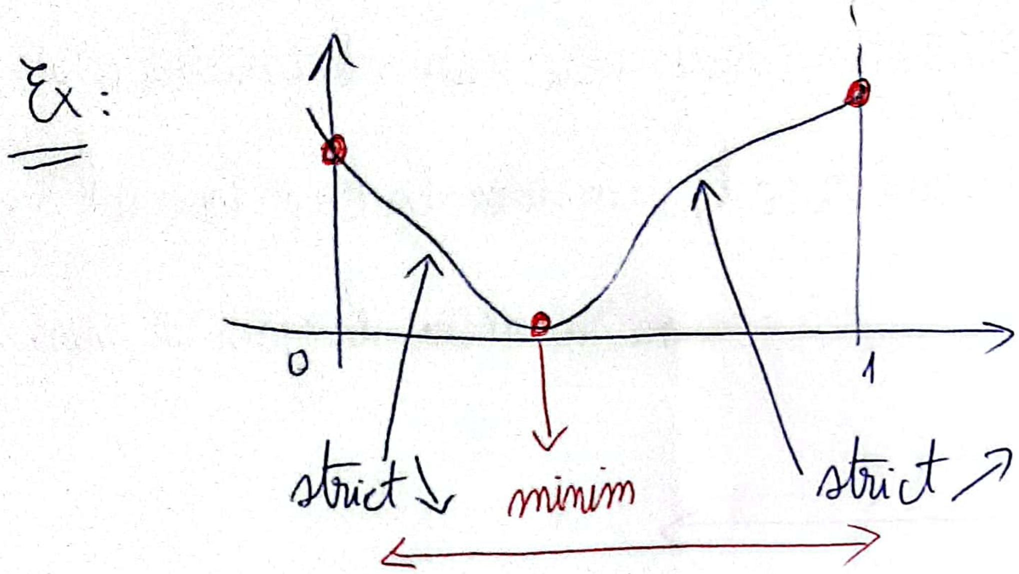
} aplicabile pentru funcții f de mai multe variabile

---

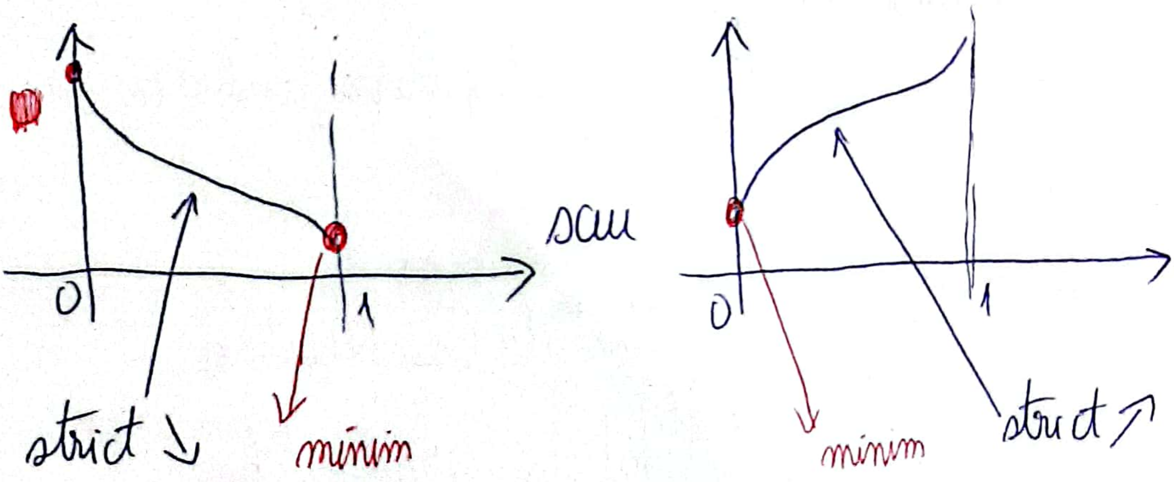
1) Căutarea secțiunii de aur → metodă de găsire a minimului unei funcții de o variabilă f, odată ce cunoaștem un interval în care se află minimul!

Def: O funcție f este unimodală pe un interval $[a,b]$ dacă are pe acel interval un SINGUR minim sau maxim!

Ex:



dar poate fi și așa:

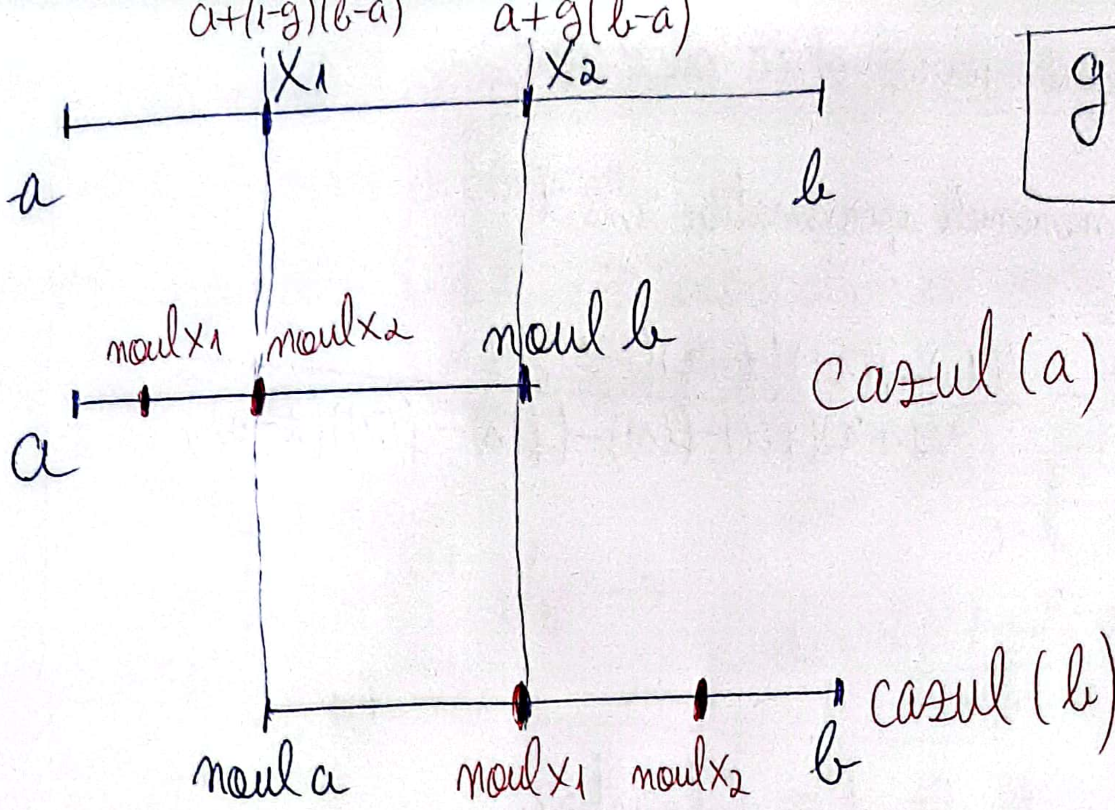


Fiind dată funcția f unimodală cu min. în $[a,b]$

```
for i=1,2,3...
  g=(√5-1)/2
  if f(a+(1-g)(b-a)) < f(a+g(b-a))
       b=a+g(b-a)
  else
       a = a+(1-g)(b-a)
  end
end
```

Intervalul final $[a,b]$ conține minimul.

- codul gata făcut în laborator
- idee: mereu înlocuim intervalul inițial cu un interval nou, mai mic
- regula → (a) $f(x_1) \le f(x_2)$ → reținem intervalul $[a, x_2]$ la următorul pas;
  (b) $f(x_1) > f(x_2)$ → reținem intervalul $[x_1, b]$ la următorul pas



$$\boxed{g = \frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

"secțiunea de aur"

```
>> f = @(x) x^6-11*x^3+17*x^2-7*x+1
>> xmin = gss(f,0,1,10)
```

Funcții predefinite în Matlab de găsire a minimului:

1) Găsirea minimului unei funcții de o variabilă

```
>> f=@(x) x^6-11*x^3+17*x^2-7*x+1
>> xmin = fminbnd(f,0,1)
```

2) Găsirea minimului unei funcții de mai multe variabile

```
>>f=@(x) 5*x(1)^4+4*x(1)^2*x(2)-x(1)*x(2)^3+4*x(2)^4-
   - x(1);
>>xmin = fminsearch(f,[1;1])
```

$f(x,y) = 5x^4 + 4x^2y - xy^3 + 4y^4 - x$

vectorul în care se atinge minimul!

2) Interpolarea parabolică succesivă

Pornim cu minimele aproximative r, s, t

```
for i = 1, 2, 3 ...
    x = (r+s)/2 - (f(s)-f(r))(t-r)(t-s) / (2[(s-r)(f(t)-f(s)) - (f(s)-f(r))(t-s)])
    t = s
    s = r
    r = x
end
```

- codul gata făcut în laborator

- idee - pornim cu 3 numere r, s, t în apropierea minimului

repetăm acești pași:

- găsim parabola care trece prin r, s, t
- găsim minimul acestei parabole ca fiind x (parabola este funcția de gradul 2)
- înlocuim pe t cu s, pe s cu r și pe r cu x-ul aflat

minimul returnat este minimul ultimei parabole găsite

Bun. De unde escaasă formula aia ciudată a lui x:

$$x = \frac{r+s}{2} - \frac{(f(s)-f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t)-f(s))-(f(s)-f(r))(t-s)]} \; ?$$

Scanat cu CamScanner

Păi am zis că ne trebuie o parabolă care să interpoleze punctele r, s, t ... cum o obținem?

Avem 3 puncte r, s, t $\Rightarrow$ interpolăm cu metoda diferențelor divizate (newtonadd din laboratorul 4):

$$\begin{array}{c|cccc} r & f(r) & & & \\ & & d_1 & & \\ s & f(s) & & d_3 & \\ & & d_2 & & \\ t & f(t) & & & \end{array} \rightarrow \begin{cases} d_1 = \dfrac{f(s)-f(r)}{s-r} \\ d_2 = \dfrac{f(t)-f(s)}{t-s} \\ d_3 = \dfrac{d_2-d_1}{t-r} \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(x) = f(r) + d_1(x-r) + d_3(x-r)(x-s)}_{\text{folosind funcția nested tot din labul 4 :)}}$$

Egalăm derivata lui $P(x)$ cu 0 pentru a găsi minimul parabolei $\Rightarrow$ calcule, calcule $\Rightarrow$ $x = \dfrac{r+s}{2} - \dfrac{(f(s)-f(r))(t-r)(t-s)}{2[(s-r)(f(t)-f(s))-(f(s)-f(r))(t-s)}$

---

3) Metoda lui Newton

Pasul Newton este

$$\begin{cases} Hf(x_k)v = -\nabla f(x_k) \\ x_{k+1} = x_k + v, \end{cases}$$

unde $\nabla f = [\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1..x_n) .. \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1..x_n)]^T$ denotă gradientul lui f iar Hf este matricea hessiană a lui f

```
function min = newton(g, H, x, k)
for i = 1:k
    x = x - H(x)\g(x);
end
min = x
end
```

vector inițial

nr de pași

```
>> f=@(x) exp(-x(1)^2 * x(2) ^2)+(x(1)-1)^2+(x(2)-1)^2;

>> g=@(x) [2*x(1)-2*x(1)* ----- ; ------ ];

>> h=@(x) [ ------ , ----- ; ---- , ---- ];
```

de calculat și completat

```
>> min =newton(g, h, [1;1], 10)
```

La distribuita pe foaie, având $Hf(x_k)v = -\nabla f(x_k)$, va trebui să îl aflați pe v rezolvând sistemul în ce fel vreți (de ex. cu eliminarea gaussiană)

4) Metoda gradientului

Fie x_0 valoarea inițială

for i = 0,1,2...
  $v = \nabla f(x_i)$
  Minimizăm $f(x-sv)$ pentru scalarul $s=s^*$
  $x_{i+1} = x_i - s*v$
end

```
function x=gradient(g,f,x,k)
for i=1:k
   v=g(x);
   s=fminbnd(@(s) f(x-s*v),0,1);
   x=x-s*v ;
end
end
```

Bun... care e faza cu "Minimizăm $f(x-sv)$ pentru scalarul $s=s^*$"?

Fie de exemplu funcția $f(x,y)=2x^2+5y^2-4xy-2x-y+1$ și vect. inițial $x_0=[1,1]$

$$\nabla f=[4x-4y-2;10y-4x-1]$$

iterația 0 $\rightarrow$ $v=\nabla f(x_0)=[4\cdot1-4\cdot1-2;10\cdot1-4\cdot1-1]=[-2;5]$

Minimizăm $f(x_i-sv)$ pentru scalarul $s=s^*$

Aici este x_i în loc de x!

$$f(x_i-s\cdot v)=f(1-s\cdot(-2),1-s\cdot5)=$$

$$=f(1+2s,1-5s)=2(1+2s)^2+5(1-5s)^2-4(1+2s)(1-5s)-$$

$$-2(1+2s)-(1-5s)+1=$$

$=g(s)$ $\rightarrow$ o fct. de o variabilă!

-aflăm minimul lui $g(s)$ ca fiind s^*

$$x_1=x_0-s^*\cdot v=...$$

---

iterația 1 $\rightarrow$ asemănător

5) Căutarea gradienților conjugați

Fie x_0 valoarea inițială și luăm $d_0 = r_0 = -\nabla f$

for $i = 1, 2, 3 \ldots$

$$\boxed{\alpha_i = \alpha \text{ care minimizează } f(x_{i-1} + \alpha d_{i-1})}$$

↓ la fel ca la metoda gradientului

$$x_i = x_{i-1} + \alpha_i d_{i-1}$$

$$r_i = -\nabla f(x_i)$$

$$\beta_i = \frac{r_i^T r_i}{r_{i-1}^T r_{i-1}}$$

$$d_i = r_i + \beta_i d_{i-1}$$

```
function x = conjgrad (g, f, x, k)
d = -g(x);
r = d;
for i = 1:k
    alfa = fminbnd(@(alfa) f(x+alfa*d), 0, 1);
    x = x + alfa*d;
    rnou = -g(x);
    beta = (rnou'*rnou)/(r'*r);
    d = rnou + beta*d;
    r = rnou;
end
end
```

Scanat cu CamScanner