Seminarul 13

P. rezolvate

1) $\lambda = 10$ clienți / oră

a) Prob. să nu existe niciun client sosit în intervalul $(8, 10]$

Notăm N_t nr. clienților ce sosesc în intervalul $[0, t]$

$N_{t+s} - N_s$ repr. nr. clienți din intervalul $(s, s+t]$

$Y = N_{t+s} - N_s$ distribuită Poisson de parametru λt

$$Y = N_{10} - N_8 \sim Poiss(10 \cdot 2 = 20)$$

$X \sim Poiss(\lambda)$ $\quad M(x) = \lambda$

$\sigma^2(x) = \lambda$

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$$

$$P(N_{10} - N_8 = 0) = P(Y = 0) = \frac{e^{-20} \cdot 20^0}{0!} = \frac{e^{-20}}{1} = \frac{1}{e^{20}}$$

b) P. să existe exact un client în fiecare din intervalele $\overset{Y_1}{(8,9]}$, $\overset{Y_2}{(9,10]}$, $\overset{Y_3}{(10,11]}$, $\overset{Y_4}{(11,12]}$

$$P(Y_1 = 1) = P(Y_2 = 1) = P(Y_3 = 1) = P(Y_4 = 1) = \frac{e^{-10} \cdot 10^1}{1!} = \frac{10}{e^{-10}}$$

$$P(Y_1=1, Y_2=1, Y_3=1, Y_4=1) = P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=1)\cdot P(Y_3=1)\cdot$$

$$\cdot P(Y_4=1) = \left[\frac{10}{e^{10}}\right]^4$$

2) 2 sosiri în intervalul $[0,2]$ și 3 sosiri în $(1,4]$

$$P(N_2-N_0=2, N_4-N_1=3) = P(N_2=0, N_4-N_1=3)$$

Variabilele nu sunt independente (interv $(1,2]$ e inclus în ambele)

$$\left.\begin{array}{lll} X \sim Pois(\lambda\cdot 1) & (0,1] \\ Y \sim Pois(\lambda\cdot 1) & (1,2] \\ Z \sim Pois(\lambda\cdot 2) & (2,4] \end{array}\right\} \text{independente}$$

$$P(X+Y=2, Y+Z=3)$$

folosim formula prob. totale

$$P(X+Y=2, Y+Z=3) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X+Y=2, Y+Z=3 \mid Y=k)\cdot P(Y=k) =$$

$$= P(X=2, Z=3 \mid Y=0)\cdot P(Y=0) + P(X=1, Z=2 \mid Y=1)\cdot P(Y=1) +$$

$$+ P(X=0, Z=1 \mid Y=2)\cdot P(Y=2) =$$

$$= P(X=2)\cdot P(Z=3)\cdot P(Y=0) + P(X=1)\,P(Z=2)\,P(Y=1) + P(X=0)\cdot P(Z=1)\cdot P(Y=2)$$

(Se poate scrie așa pt. că sunt independente)

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

$$P(Y=k) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!}$$

$$P(Z=k) = \frac{e^{-2\lambda}\cdot(2\lambda)^k}{k!}$$

3) $\{N_t\}$ proces Poisson de rata $\lambda = 2$; $X_1, X_2, \dots$ v.a. ce dau lungimea intervalelor dintre 2 sosiri consecutive

a) Să se det. probab. ca prima sosire să aibă loc după momentul $t=1$

$X_k \sim$ lungimea intervalului de timp dintre sosirea clientului $k-1$ și a clientului k

$X_k \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda}\right)$

$T_n = X_1 + \dots + X_n$ dă momentul sosirii clientului n în sistem

$P(X_1 > 1)$; $X_1 \sim Exp\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P(X_1 > 1) = P(N_1 - N_0 = 0) = P(N_1 = 0) = \frac{e^{-2} \cdot 2^0}{0!} = \frac{1}{e^2}$$

sau $P(X_1 > 1) = 1 - F_{X_1}(1)$

unde $F_{X_1}(x)$ e fct. de repartiție a var. X_1 distribuită exp. de parametru $\frac{1}{2}$

$$f_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \\ 2 \cdot e^{-2x} & , x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$F_{X_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(x)\,dx = \int_0^x 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}\Big|_0^x = -\left(e^{-2x} - e^0\right) =$$

$$= 1 - e^{-2x} \Rightarrow F_{X_1}(1) = 1 - e^{-2}$$

$$\Rightarrow P(X_1 > 1) = 1 - \left(1 - e^{-2}\right) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

Fct. de repartiție

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

b) Dacă nu au existat sosiri înainte de $t = 1$, să se det. prob. ca prima sosire să aibă loc după mom. $t = 3$

$$P\left(X_1 > \overset{\text{momentul } t}{3} \,\middle|\, X_1 > 1\right)$$

X_1 = prima sosire

$$P(X_1 > 3 \mid X_1 > 1) = \frac{P(X_1 > 3, X_1 > 1)}{P(X_1 > 1)} = \frac{P(X_1 > 3)}{P(X_1 > 1)} = \frac{1 - F_{X_1}(3)}{1 - F_{X_1}(1)} =$$

$$= \frac{1-(1-e^{-6})}{1-(1-e^{-2})} = \frac{e^{-6}}{e^{-2}} = \frac{e^{2}}{e^{6}} = \frac{1}{e^{4}}$$

c) Dacă a 2-a sosire a avut loc la $t=2$, să se det. probabilitatea ca a treia sosire să aibă loc după $t=4$

$$P(\underbrace{T_3}_{T_3 = X_1+X_2+X_3} > 4 \mid \underbrace{T_2}_{T_2 = X_1+X_2} = 2) = P(X_3 > 2 \mid X_1 + X_2 = 2) = P(X_3 > 2) =$$

$$= 1 - F_{X_3}(2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4}$$

4) $\{N_t^a\}$, $\{N_t^b\}$ procese Poisson indep.

$\lambda_a = 1$ $\quad \lambda_b = 2$

$N_t = N_t^a + N_t^b$ proces Poisson suprapus $\Rightarrow \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$

a) $P(N_1 = 2, N_2 = 5) = ?$

$P(N_1 = 2, N_2 = 5)$ (2 sosiri în $(0,1]$ și 5 în $(0,2]$)

$$= P(X_1 = 2, X_1 + X_2 = 5) = P(X_1 = 2, X_2 = 3) = \frac{e^{-3} \cdot 2^3}{2!} \cdot \frac{e^{-3} \cdot 3^3}{3!}$$

b) $N_1 = 2$; $P(N_1^a = 1) = ?$

$$P(N_1^a = 1 \mid N_1 = 2) = \frac{P(N_1^a = 1, N_1 = 2)}{P(N_1 = 2)} = \frac{P(N_1^a = 1, N_1^b = 1)}{P(N_1 = 2)} =$$

$$= \frac{P(N_1^a = 1) \cdot P(N_1^b = 1)}{P(N_1 = 2)} = \frac{\cancel{e^{-1}} \cdot 1 \cdot \cancel{e^{-2}} \cdot 1}{\frac{\cancel{e^{-3}} \cdot 3^2}{2!}} = \frac{2}{9}$$

P. propuse

5) $\lambda = 4$ clienți / oră $\Rightarrow 1,(3)$ c / 20 min $\Rightarrow \lambda_1 = \frac{4}{3}$

a) $(8, 8{:}20]$; $N_{8:20} - N_8 = 2$; $X \sim Poiss\left(\lambda_1 = \frac{4}{3}\right)$

$$P(N_{8:20} - N_8 = 2) = P(X = 2) = \frac{e^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2}{2!}$$

b) $P(N_{8:20} - N_8 = 1, \ N_9 - N_{8:20} = 3)$

$Y \sim Poiss\left(\lambda_2 = \frac{8}{3}\right)$

$$P(X = 1, Y = 3) = P(X=1) \cdot P(Y=3) = \frac{e^{-\frac{4}{3}} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^3}{3!}$$

6) $\lambda = 3$ căderi / an

Distribuția de probab. a intervalului de timp X dintre 2 căderi consecutive ?

$M(x) = ?$

$Y \sim Poiss(3)$

$$X \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda}\right) \Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{\theta} \cdot e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 3 \cdot e^{-3x}, & x > 0 \end{cases}$$

$$M(X) = \theta = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{3}$$

$Z \sim Poiss(1)$ $\quad \lambda_1 = 1$ cădere / trimestru

$$P(N_{\frac{1}{3}} = 0) = P(Z = 0) = \frac{e^{-1} \cdot 0^1}{0!} = \frac{1}{e}$$

7) $\lambda = 10$ job-uri / oră , $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ job-uri / 2 min

a) $X \sim Exp\left(\frac{1}{\lambda'} = 6\right)$

$$P(X > 2) = 1 - F_X(2)$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} & , x > 0 \end{cases}$$

$$P(X > 2) = 1 - F_X(2) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{6}}\right) = e^{-\frac{1}{3}}$$

b) $P(X > 3, X < 5) = P(X < 5 \mid X > 3) \cdot P(X > 3) = P(X < 5) \cdot P(X > 3) =$

$= (1 - P(X > 5)) \cdot (1 - F_X(3)) = F_X(5) \cdot (1 - F_X(3)) = \left(1 - e^{-\frac{5}{6}}\right) \cdot e^{-\frac{1}{2}}$

8) $\lambda = 2{,}4$ căderi / zi

a) $X \sim exp\left(\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2{,}4}\right)$

$$P(X < 3) = F_X(3) = 1 - e^{-7{,}2}$$

b) $P(N_3 = 8) = \dfrac{e^{-2{,}4} \cdot (2{,}4)^8}{8!}$

c) $M(X) = \theta = 2{,}4$

9) 2 sub-fluxuri $\to$ receptorul A și B

$\lambda_a = 10$ sf/min

$\lambda_b = 13$ sf/min

a) $\lambda = \lambda_a + \lambda_b = 23$ sf/min

$X \sim \exp\left(\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{23}\right)$

$M(X) = \theta = \frac{1}{23}$

b) $T_m = X_1 + X_2 + \ldots + X_{10} = 10 \cdot \frac{1}{23} = \frac{10}{23}$

10) $\lambda = 40$ c/oră

funcționează între 9:00 și 19:00

a) $10 \cdot 40 = 400$ c/zi

b) $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ c/min

$P(N_{15} = 0) = \frac{e^{-\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \cancel{15}^{5}} \cdot 10^0}{0!} = \frac{1}{e^{10}}$

c) $P(N_{15} = 0 \mid N_{30} = 3) = P(N_{15} = 0 \mid N_{30} - N_{15} = 3) = P(N_{15} = 0) \cdot P(N_{30} - N_{15} = 3)$

$= \frac{e^{-10} \cdot 10^0}{0!} \cdot \frac{e^{-10} \cdot 10^3}{3!} = \frac{10^3}{3! \cdot e^{20}}$

11) $\lambda_s = 8/\text{oră}$
$\lambda_a = 2/\text{oră}$ $\Big| \Rightarrow \lambda = 10/\text{oră}$

$X \sim Poiss(\lambda' = 15/\text{oră jum})$

$$P(X=5) = \frac{e^{-15} \cdot 15^5}{5!}$$

sau $P(N_{90}=5) = \dfrac{e^{-\frac{1}{6}\cdot 90} \cdot \left(\frac{90}{6}\right)^5}{5!}$

$\lambda'' = \frac{1}{6} c/\text{min}$