

Seminarul 5

$$d) X = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & p \end{pmatrix}$$

$$a) p = 1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{12-1-2-1-4-1}{12} = \frac{1}{4}$$

b) Funcție de repartiție

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ \frac{1}{12}, & x \in [-3, -1) \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}, & x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, & x \in [1, 3) \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}, & x \in [3, 5) \\ 1, & x \geq 5 \end{cases}$$

$$c) P(X > 1) = P(X=3) + P(X=5) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

d) Distribuția variabilei X^2

$$X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 25 \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$P(X^2=0) = \frac{1}{12}$$

$$P(X^2=1) = P(X=1) + P(X=-1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(X^2=9) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(X^2=25) = \frac{1}{4}$$

$$e) H(x) = -3 \cdot \frac{1}{12} + (-1) \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{5} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{3}{12} - \frac{2}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{15}{12} = \frac{17}{12} \quad (\text{m. mediu de puncte})$$

Dispersia variabilei x

$$\sigma^2(x) = H(x^2) - [H(x)]^2$$

$$H(x^2) = 0 \cdot \frac{1}{12} + \frac{6}{12} + \frac{18}{12} + \frac{35}{12} = \frac{99}{12}$$

$$\sigma^2(x) = \frac{99}{12} - \frac{17^2}{144} = \frac{99 \cdot 12 - 17^2}{144} = \frac{899}{144} = 6,243$$

$$2) F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{10}, & x \in [1, 3) \\ \frac{3}{10}, & x \in [3, 10) \\ \frac{7}{10}, & x \in [10, 15) \\ \frac{9}{10}, & x \in [15, 20) \\ 1, & x \geq 20 \end{cases}$$

$$a) X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 15 & 20 \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{2}{10} & \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 10 & 15 & 20 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$b) P(2 \leq x < 8) = P(x=3) = \frac{1}{5}$$

3)		D	
		1	2
S	0	0,1 0,1	0,2
	1	0,2 0,2	0,5
	2	0,1 0,2	0,3
		0,5	0,5

a) Distribuții marginale

$$P(S=0) = 0,2$$

$$P(D=0) = 0,5$$

$$P(S=1) = 0,5$$

$$P(D=1) = 0,5$$

$$P(S=2) = 0,3$$

Distribuții de probabilitate

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,2 & 0,5 & 0,3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$$

b) $P(S=i, D=j) = P(S=i) \cdot P(D=j)$ 2- verificăm

$$P(S=0, D=0) = 0,1$$

$$P(S=0) \cdot P(D=0) = 0,2 \cdot 0,5 = 0,1 \quad \checkmark$$

$$P(S=1, D=0) = 0,3$$

$$P(S=1) \cdot P(D=0) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \quad \times$$

\Rightarrow nr. de postări de sâmbătă influențează nr. de postări de duminică

c) Probabilitatea ca în cele 2 zile să aflișeze 2 postări

$$P(S+D=2) = ?$$

$$P(S+D=2) = P(S=1, D=1) \cup P(S=2, D=0) = 0,2 + 0,1 = 0,3$$

d) Distribuția lui $Z = \max(S, D)$

$$D_Z = \{0, 1, 2\}$$

$$P(Z=0) = P(S=0, D=0) = 0,1$$

$$P(Z=1) = P(\max(S, D)=1) = P((S=0, D=1) \cup (S=1, D=0) \cup (S=1, D=1)) = 0,1 + 0,3 + 0,2 = 0,6$$

$$P(Z=2) = P(\max(S, D)=2) = P((S=2, D=0) \cup (S=2, D=1)) = 0,1 + 0,2 = 0,3$$

$$\Rightarrow Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0,1 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} = 1$$

4) A - pe virusat
B - fision corupt

	A	\bar{A}
B	0,01	0,19
\bar{B}	0,02	0,78
	0,03	0,97

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,19$$

a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,03 & 0,97 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

e) $P(X=1 | Y=0) = \frac{P(X=1, Y=0)}{P(Y=0)} = \frac{0,02}{0,8} = \frac{1}{40}$

5)

		Y			
		1	2	3	4
X	1	0,03	0,05	0,1	0,12
	2	0,05	0,08	0,08	0,07
	3	0,07	0,06	0,06	0,02
	4	0,07	0,09	0,05	0,02
		0,22	0,28	0,29	0,23

b) $Z = P(X | Y=2)$

$$P(X=1 | Y=2) = \frac{P(X=1, Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{0,05}{0,28} = \frac{5}{28}$$

$$P(X=2 | Y=2) = \frac{6}{28}$$

$$P(X=3 | Y=2) = \frac{6}{28}$$

$$P(X=4 | Y=2) = \frac{9}{28}$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{5}{28} & \frac{6}{28} & \frac{6}{28} & \frac{9}{28} \end{pmatrix}$$

P. propose

$$6) p_X(k) = P(X=k)$$

$$p_X(-4) = P(X=-4) = \frac{1}{4}$$

$$p_X(-\pi) = \frac{1}{4}$$

$$p_X(0) = \frac{1}{4}$$

$$p_X(4) = \frac{1}{8}$$

$$p_X(\pi) = \frac{1}{8}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & -\pi & 0 & \pi & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$F_X(x) = \begin{array}{l} \uparrow \\ 0, x < -4 \\ \frac{2}{8}, x \in [-4, -\pi) \\ \frac{4}{8}, x \in [-\pi, 0) \\ \frac{6}{8}, x \in [0, \pi) \\ \frac{7}{8}, x \in [\pi, 4) \\ \downarrow \\ 1, x \geq 4 \end{array}$$

$$a) F(-5) = 0, F(-3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, F(\pi) = \frac{7}{8}, F(2\pi) = 1$$

$$b) P(X \geq 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$c) H(X) = -4 \cdot \frac{1}{4} - \pi \cdot \frac{1}{4} + 0 + \pi \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{1}{8} = -1 - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}$$

$$8) X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$H(X) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\sigma^2(x) = M(x^2) - [M(x)]^2$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$M(x^2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\sigma^2(x) = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

$$8) p_k = P(X=k) = \frac{0,4^{k-1} \cdot 0,6}{0,936}$$

$$P(X=1) = \frac{0,6}{0,936} = \frac{600}{936}$$

$$P(X=2) = \frac{0,24}{0,936} = \frac{240}{936}$$

$$P(X=3) = \frac{0,096}{0,936} = \frac{96}{936}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{600}{936} & \frac{240}{936} & \frac{96}{936} \end{pmatrix}$$

$$P(X=3) + P(X=2) = \frac{336}{936} = 0,36$$

9)

		Y			
		1	2	3	5
a)	-1	0,06	0,02	0,06	0,12
	X 0	0,08	0,12	0,20	0,10
	1	0,16	0,12	0,02	0,04
		0,3	0,16	0,28	0,26

$$P(Y \geq 2) = 1 - 0,3 = 0,7$$

$$P(X \leq 0) = 1 - 0,24 = 0,76$$

$$b) P(X=i, Y=j) = P(X=i) \cdot P(Y=j) \leftarrow \text{Verif}$$

$$P(X=0, Y=1) = 0,08$$

$$P(X=0) \cdot P(Y=1) = 0,1 \cdot 0,16 = 0,016$$

X

\Rightarrow mu sunt indep.

$$c) XY = ?$$

$$XY = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0,12 & 0,08 & 0,02 & 0,08 & 0,5 & 0,16 & 0,02 & 0,02 & 0,02 \end{pmatrix}$$

		Y			
		1	2	3	4
10) X	1	0,03	0,05	0,1	0,12
	2	0,05	0,08	0,08	0,07
	3	0,07	0,06	0,08	0,02
	4	0,04	0,5	0,05	0,02
		0,22	0,26	0,29	0,23

$$a) P(X \leq 2, Y \leq 2) = P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=2) = 0,03 + 0,05 + 0,05 + 0,07 = 0,19$$

$$b) z = P(X|Y=3)$$

$$P(X=1|Y=3) = \frac{0,1}{0,29} = \frac{10}{29}$$

$$P(X=2|Y=3) = \frac{8}{29}$$

$$P(X=3|Y=3) = \frac{6}{29}$$

$$P(X=4|Y=3) = \frac{9}{29}$$

$$z = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{10}{29} & \frac{8}{29} & \frac{6}{29} & \frac{9}{29} \end{pmatrix}$$

$$c) P(X+Y) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0,03 & 0,1 & 0,23 & 0,13 & 0,22 & 0,07 & 0,02 \end{pmatrix}$$

$$\min(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,26 & 0,06 & 0,13 & 0,02 \end{pmatrix}$$

