Seminarul 12 - partea 2

P. rezolvate

1) a)

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg\} \text{ matricea de tranziție}$$

$S_a = \{0, 4\}$ ~ stări absorbante

$S_t = \{1, 2, 3\}$ ~ stări tranzitorii

$Q' = P_\pi \cdot Q \cdot P_\pi^T$ ~ matricea de tranziție în forma standard

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q' = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 \\ 3 & 0 & 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \end{array}$$

$$Q' = \begin{pmatrix} I & O \\ R & T \end{pmatrix}$$

b) $$\boxed{\Pi = \begin{pmatrix} I & O \\ NR & O \end{pmatrix}}$$ distribuția staționară

$N = (1 - T)^{-1}$ matricea fundamentală

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$N \cdot R = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,75 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Nr. mediu de treceri prin 2 înainte de a ajunge în 0 sau 4, știind că a pornit din 1

$n_{ij} = N(i,j)$ ~ nr. mediu de vizite pe care lanțul ce pornește din i îl face stării tranzitorii j înainte de a fi absorbit

$\Rightarrow n_{12} = N(1,2) = 1$

pornește din 1 — trece prin 2

d) Nr. de pași parcurși până când e absorbit știind că a plecat din 3

timpul mediu până la absorbția

$t_i = n_{i,n_a+1} + n_{i,n_a+2} + \dots + n_{i,n_a+n_t}$; $\{n_a+1, n_a+2, \dots, n_a+n_t\}$ mulț. stărilor tranzitorii lanțului ce pleacă din i

$$t_3 = m_{31} + m_{32} + m_{33} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$$

Obs! $t = N \cdot e$

$$\begin{pmatrix} t_i \\ t_{i+1} \\ \vdots \\ t_{i+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{i,i} & m_{i,i+1} & \cdots & m_{i,i+k} \\ m_{i+1,i} & & & \\ \vdots & & & \\ m_{i+k,i} & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) Probab. ca dacă pornește din 2 să ajungă la 0

Prob. ca lanțul ce pornește din i să fie absorbit de j :

$$b_{ij} = \sum_{k \in S_t} N(i,k) \cdot R(k,j) \qquad B = N \cdot R$$

$$b_{20} = \sum_{k=1}^{3} N(2,k) \cdot R(k,0) = N(2,1) \cdot R(1,0) + N(2,2) \cdot R(2,0) + N(2,3) \cdot R(3,0) = 1 \cdot 0,5 = \frac{1}{2}$$

P. rezolvate

2.

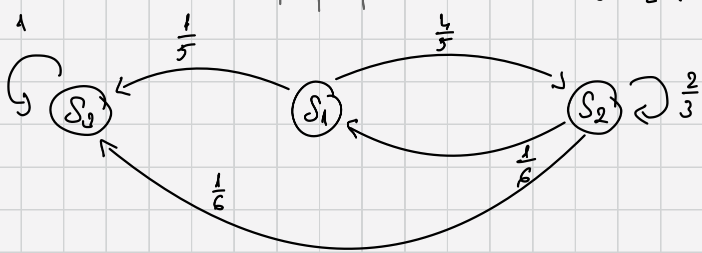
$Q =$

	1	2	3
1	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	1

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$S_a = \{3\}$ (dacă lanțul ajunge în starea 3 nu se mai poate întoarce)

$S_t = \{1, 2\}$



b) $Q' = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 2 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{array}$

$I = [1]$

$O = [0 \ \ 0]$

$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$, $T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

c) $N = (I - T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} \\ -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1}$

$\det(I - T) = -\frac{1}{3} - \left(\frac{\cancel{5}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}\right) = -\frac{^{2)}1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$

$(I - T)^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}$

$(I - T)^{-1} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{2}{5} & -2 \end{pmatrix}$

d) $b_{23} = \sum_{k=1}^{2} N(2,k) \cdot R(k,3) = N(2,1) \cdot R(1,3) + N(2,2) \cdot R(2,3) =$

$= -\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} + (-2) \cdot \frac{1}{6} = -\frac{^{3)}2}{25} - \frac{^{25)}1}{3} = -\frac{31}{75}$

3) $Q = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 3 & 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 4 & 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{array}$

a) $S_a = \{1\}$ (dacă ajunge în S_1 nu se mai întoarce)

$S_t = \{2, 3, 4\}$

b) $T = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 & 0,3 \end{bmatrix}$ $\qquad R = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ 0,2 \end{bmatrix}$

c)

- Care este probabilitatea ca un lanţ Markov absorbant ce pleacă din starea tranzitorie $i \in S_t$ să facă n paşi în mulţimea stărilor tranzitorii înainte să fie absorbit de starea absorbantă $j \in S_a$?

$$p_{i,j}(n) = \sum_{k \in S_t} T^n(i,k)R(k,j)$$

$$p_{3,1}(2) = \sum_{k=2}^{4} T^2(3,k) \cdot R(k,1)$$

$$T^2 = \begin{pmatrix} 0,18 & 0,47 & 0,18 \\ 0,18 & 0,57 & 0,14 \\ 0,18 & 0,38 & 0,22 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{3,1}(2) = T^2(3,2) \cdot R(2,1) + T^2(3,3) \cdot R(3,1) + T^2(3,4) \cdot R(4,1) =$$

$$= 0,18 \cdot 0,1 + 0,57 \cdot 0,1 + 0,14 \cdot 0,2$$

d) $N[3\,:] = [1,52, \quad 3,7, \quad 2,4]$;

Elem 3,7 repr. nr. mediu de vizite pe care lanţul Markov ce porneşte din starea 4 îl face stării tranzitorii 3 înainte de a fi absorbit

4)

$Q =$

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1/2	0	1/6	1/6	1/6
3	1/3	2/3	0	0	0
4	1/3	2/3	0	0	0
5	0	0	0	0	1

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) $$Q' = \begin{array}{c|ccccc} & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1/2 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 3 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 4 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \end{array}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $P(X_2 = 1 \mid X_0 = 2) = Q^2(2,1)$

c) $Q^3(2,1) + Q^3(2,5)$

d) $N = (1-T)^{-1}$; pe linia a 3-a a matricii N avem nr. mediu de vizite pe care le face lanțul pornit din starea 4 fiecărei stări tranzitorii

e) $N(3,1) = ?$

$N(3,1) = 0,85$

5) $Q =$

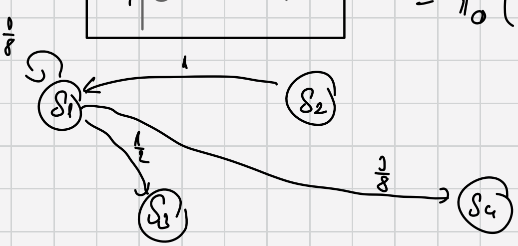
	1	2	3	4
1	1/8	0	1/2	3/8
2	1	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

a) Nu e lanț Markov abs.

b) $P(X_0=4, X_1=3, X_2=2, X_3=1, X_4=3) =$

$= \pi_0(4) \cdot Q(4,3) \cdot Q(3,2) \cdot Q(2,1) \cdot Q(1,3) = 0$

c)



d) $P(X_7=3 \mid X_2=4) = Q^5(4,3) = 0$

6) a) $P(X_0=\text{II},\ X_1=\text{III},\ X_2=\text{III},\ X_4=Ex) = \pi_0(\text{II})\cdot Q(\text{II},\text{III})\cdot Q(\text{III},\text{III})\cdot$

$\cdot\, Q(\text{III},Ex) = \frac{1}{6}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}05$

b) $p_{\text{III},Ex}(2) + p_{\text{III},AB}(2) = \sum_{k=\text{I}}^{\text{IV}} T^2(\text{III},k)\cdot R(k,Ex) + \sum_{k=\text{I}}^{\text{IV}} T^2(\text{III},k)\cdot R(k,AB) =$

$$T = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1 & 0{,}85 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}05 & 0{,}9 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}05 \end{bmatrix} ; \quad T^2 = \begin{array}{c} \\ \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \\ \text{IV} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}01 & 0{,}16 & 0{,}68 & 0 \\ 0 & 0{,}01 & 0{,}1275 & 0{,}765 \\ 0 & 0 & 0{,}0025 & 0{,}09 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}0025 \end{bmatrix} \end{array}$$

$p_{\text{III},Ex}(2) + p_{\text{III},AB}(2) = T^2(\text{III},\text{I})\cdot R(\text{I},Ex) + T^2(\text{III},\text{II})\cdot R(\text{II},Ex) +$

$+ T^2(\text{III},\text{III})\cdot R(\text{III},Ex) + T^2(\text{III},\text{IV})\cdot R(\text{IV},Ex) + T^2(\text{III},\text{I})\cdot R(\text{I},AB) + T^2(\text{III},\text{II})\cdot R(\text{II},AB)$

$+ T^2(\text{III},\text{III})\cdot R(\text{III},AB) + T^2(\text{III},\text{IV})\cdot R(\text{IV},AB) =$

$= 0\cdot \cancel{0{,}1} + \cancel{0} + 0{,}0025\cdot 0{,}05 + 0{,}09\cdot 0{,}05 + 0 + 0 + 0 + 0{,}09\cdot 0{,}9$

c) $e_{\text{I},AB} = \sum_{k=\text{I}}^{\text{IV}} N(\text{I},k)\cdot R(k,AB) = N(\text{I},\text{I})\cdot R(\text{I},AB) + N(\text{I},\text{II})\cdot R(\text{II},AB) +$

$+ N(\text{I},\text{III})\cdot R(\text{III},AB) + N(\text{I},\text{IV})\cdot R(\text{IV},AB) =$

$= 1{,}1111\cdot 0 + 0 + 0 + 0{,}8372\cdot 0{,}9$