Seminarul 14

P. rezolvate

1) $f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$

a) $M(X) = ?$ (media teoretică) și să se estimeze θ în fct. de media de selecție $\overline{X}$ a unei selecții aleatoare de volum n.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx = \int_0^1 x^{\theta+1}(\theta+1)\, dx = (\theta+1) \cdot \frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

Dacă $m = M(X)$ și $\overline{X}$ media de selecție a unui eșantion

$\Rightarrow \hat{m} = \overline{x}$

$$\frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2} = \overline{x} \iff \hat{\theta} = \frac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}}$$

b) Estimator al θ din sel: 0,2 0,4 0,5 0,7 0,8 0,9 0,9 0,6 0,6 0,4

$$\overline{x} = \frac{0,2+0,4+0,5+0,7+0,8+0,9+0,9+0,6+0,6+0,4}{10} = 0,6$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\overline{x}-1}{1-\overline{x}} = \frac{1,2-1}{1-0,6} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$$

2) Pt. a estima rata sosirii λ a cererilor de acces la o bază de date s-au monitorizat intervale de timp de 10 cereri consecutive și s-au înregistrat valorile: 0,2 0,1 0,1 0,05 0,05 0,2 0,8 0,5 0,2 0,8

Care este estimatorul ratei sosirilor, $\hat{\lambda}$?

Sosirea cererilor, proces Poisson $(N_t), t \geq 0$ cu rata $\lambda > 0$

$X \sim \exp\left(\theta = \frac{1}{\lambda}\right)$

$$\overline{X} = \frac{3}{10} = 0,3 \Rightarrow \hat{\theta} = 0,3 \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{0,3} = 3,33$$

3) 0,8830 ; 0,196511 ; 1,9189 ; 4,8448 ; 0,9208 ; 3,4377 ; 1,7162 ; 4,2327 ; 5,9435 ; 8,3128

exponential distribuită $\Rightarrow$

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x \geq 0 \end{cases}$$

Funcția de verosimilitate

$$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) \Rightarrow L(\theta; x_1, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}}$$

Estimatorul de verosim. max. este argumentul θ ce maximizează fct. L

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_n) = -n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$$

Pct. de max. al fct $I = \ln(L)$ este același cu pct. de max al fct. L

$$I = \ln(L) = \ln \frac{1}{\theta^n} + \ln e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\theta}} = \ln \theta^{-n} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = -n \ln \theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta}$$

$$I' = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2}$$

$$\ell'(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{\theta}}_{\text{estimator}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{X}$$

(max. absolut pt ℓ, deci și pt. L)

$$\hat{\theta} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10} = 3,525$$

$X \sim \exp(\theta = 3,5) \Rightarrow \hat{\theta} = 3,525$ e „destul de bun"

5) v.a. X

distribuție de probabilitate $p(x) = P(X = x)$,

X	$p(x)$
0	0,75
1	0,15
2	0,10

X^2	$p(x^2)$
0	0,75
1	0,15
4	0,10

a) $M(X) = 0 \cdot 0,75 + 1 \cdot 0,15 + 2 \cdot 0,10 = 0,35$

$$\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

$$\sigma^2(X) = \sum p_i \cdot (x_i - M(X))^2$$

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,75 + 1 \cdot 0,15 + 4 \cdot 0,1 = 0,55$$

$$\Rightarrow \sigma^2(X) = 0,4275$$

b) Dacă avem media/suma suficient de mare, folosim teorema limitei centrală, deci distribuția medie aritmetică poate fi aproximată la o distribuție normală

$$\overline{X}_n \sim \text{Aprox } N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$m = 0,35 \quad , \quad \Delta^2 = \frac{\sigma^2}{400} = 0,00106 \Rightarrow \Delta = 0,032$

c) $P(\overline{X}_{400} < 0,3) = P\left(\frac{\overline{X}_{400} - 0,35}{0,032} < \frac{-0,05}{0,032}\right) =$

$Z = \frac{X - m}{\sigma} \quad , \quad F_Z(x) = \Phi(x) = P(Z \leq x)$

$= \Phi(-1,5625) = 1 - \Phi(1,5625) = 1 - 0,94 = 0,06$

P. propuse

7) $p \in (0,1)$ $\qquad M(X) = \frac{1}{p}$

$X \sim Geom(p)$ $\qquad \Rightarrow$ șirul : 2, 3, 1, 14, 1, 3, 4, 1, 11, 10

a) a). Sa se determine estimatorul verosimilitatii maxime al lui p pe baza unui esantion oarecare $x_1, \ldots, x_n$ de observatii ale variablei distribuite geometric X.

b). Sa se determine numeric un estimator nedeplasat al parametrul p pe baza esantionului din problema.

$f(\theta, x_i) = p(1-p)^{x_i - 1}$

$L(\theta; x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = \prod_{i=1}^{10} \theta(1-\theta)^{x_i - 1} = \theta^{10} \cdot (1-\theta)^{36}$

$l = \ln(L) = 10 \ln\theta + (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} - 10) \cdot \ln(1-\theta)$

$l' = \frac{10}{\theta} - \frac{40}{1-\theta}$

$l' = 0$

$\Rightarrow \frac{10 - 10\theta - 40\theta}{\theta(1-\theta)} = 0$

$\Rightarrow 10 - 50\theta = 0 \quad \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{5}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} = 5 \\ M(X) = \frac{1}{p} \end{array}\right| \Rightarrow \hat{p} = \frac{1}{5}$$