Seminarul 4

Probabilități condiționate

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \qquad P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) \cdot P(E_1|E_2)$$

$$P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1|E_2)P(E_2)}{P(E_1)}$$

$$P(\bar{E_1}|E_2) = 1 - P(E_1|E_2)$$

$$P(A) = P(B) \cdot P(A \cap B) + P(\bar{B}) \cdot P(A \cap \bar{B})$$

$$P(E_1) = P(E_2) \cdot P(E_1 \cap E_2) + P(\bar{E_2}) \cdot P(E_1 \cap \bar{E_2})$$

Probab. necondiționate (independente)

$$P(E_2|E_1) = P(E_2) \iff P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

Formula lui Bayes

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)$$

$$P(H_1|A_+) = \frac{P(H_1) \cdot P(A_+|H_1)}{\underbrace{P(H_1)\,P(A_+|H_1) + P(H_2) \cdot P(A_+|H_2)}_{P(A_+)}}$$

1)
- H_1 – are boala
- $H_2 = \bar{H_1}$ – nu are boala
- A_+ – test pozitiv
- A_- – test negativ

$P(A_+|H_1) = 0,97 \Rightarrow P(A_-|H_1) = 0,03$ $\qquad P(H_1) = 0,002$

$P(A_-|H_2) = 0,95 \Rightarrow P(A_+|H_2) = 0,05$ $\qquad P(H_2) = 0,998$

$P(H_1 | A_+) = ?$

$$P(H_1 | A_+) = \frac{P(H_1) \cdot P(A_+ | H_1)}{\underbrace{P(H_1) \cdot P(A_+ | H_1) + P(H_2) \cdot P(A_+ | H_2)}_{P(A_+)}} = \frac{0,002 \cdot 0,97}{0,002 \cdot 0,97 + 0,998 \cdot 0,05} =$$

$= 0,0388$

$\Rightarrow P(H_1 | A_+) = 0,0388$

$$P(H_2 | A_+) = \frac{P(H_2) \cdot P(A_+ | H_2)}{P(H_2) \cdot P(A_+ | H_2) + P(H_1) P(A_+ | H_1)} = \frac{0,998 \cdot 0,05}{0,998 \cdot 0,05 + 0,002 \cdot 0,97} =$$

$$= \frac{0,0499}{0,05184} = 0,9628$$

2) Fiecare intrebare are 5 răspunsuri
Studentul știe 65% dintre întrebări

$P(E_1 | E_2) \cdot P(E_2) = P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)$

$\Rightarrow P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_2 | E_1) \cdot P(E_1)}{P(E_2)}$

$P(H_1) = 0,65$ (știe), $P(H_2) = 0,35$ (nu știe $\Rightarrow$ răsp. random)

$P(A_+)$ răsp. corect $P(A_-)$ răsp. greșit

a) $P(A_-) = P(H_1) \cdot P(A_- | H_1) + P(H_2) \cdot P(A_- | H_2) = 0,65 \cdot 0 + 0,35 \cdot 0,8 = 0,28$

b) $P(H_2 | A_+) = ?$

$$P(H_2 | A_+) = \frac{P(A_+ | H_2) \cdot P(H_2)}{P(A_+ | H_2) \cdot P(H_2) + P(A_+ | H_1) \cdot P(H_1)} = \frac{0,2 \cdot 0,35}{0,2 \cdot 0,35 + 1 \cdot 0,65} = \frac{0,07}{0,72} \approx 0,1$$

3) E_1 - eroare în primul modul
E_2 — " — al doilea - " -
; A - programul a eșuat

$H_1 = E_1 \cap E_2$ - erori în 1, 2
$H_2 = \overline{E_1} \cap E_2$ — " — 2
$H_3 = E_1 \cap \overline{E_2}$ — " — 1
$H_4 = \overline{E_1} \cap \overline{E_2}$ fără erori

$P(E_1) = 0,2 \qquad P(\bar{E_1}) = 0,8$

$P(E_2) = 0,4 \qquad P(\bar{E_2}) = 0,6$

$P(H_1) = 0,2 \cdot 0,4 = 0,08$

$P(H_2) = 0,32$

$P(H_3) = 0,12$

$P(H_4) = 0,48$

$P(A \mid H_3) = 0,5$

$P(A \mid H_2) = 0,8$

$P(A \mid H_1) = 0,9$

$P(A \mid H_4) = 0$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) + \dots =$$
$$= 0,08 \cdot 0,9 + 0,32 \cdot 0,8 + 0,12 \cdot 0,5 + 0 =$$
$$= 0,072 + 0,256 + 0,06 = 0,388$$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(A \mid H_1) \cdot P(H_1)}{P(A)} = \frac{0,9 \cdot 0,08}{0,388} = \frac{0,072}{0,388} = \frac{72}{388}$$

P. propuse

4) $P(H_1) = 0,4$

$P(A \mid \bar{H_1}) = 0,2 \Rightarrow P(A \mid H_2) = 0,2$

$P(A \mid \bar{H_2}) = 0,7 \Rightarrow P(A \mid H_1) = 0,7$

$P(\bar{H_1}) = 0,6$

$P(H_2) = 1 - P(H_1) = P(\bar{H_1}) = 0,6$

$P(A \mid H_1) = 0,7$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2) = 0,4 \cdot 0,7 + 0,6 \cdot 0,2 =$$
$$= 0,28 + 0,12 = 0,4$$

5) $P(H_1) = 0,7$

$P(H_2) = 0,3$

$P(A \mid H_1) = 0,2$

$P(A \mid H_2) = 0,1$

$P(H_1 \mid A) = ?$

$$P(H_1 \mid A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1)}{P(H_1) \cdot P(A \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(A \mid H_2)} = \frac{0,7 \cdot 0,2}{0,7 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,1} = \frac{0,14}{0,14 + 0,03} = \frac{14}{17}$$

6) E_0 – emis bit-ul 0

E_1 – " — 1

R_0 – receptat bitul 0

R_1 – " — " — 1

$P(R_0 \mid E_0) = 0,7 \Rightarrow P(R_1 \mid E_0) = 0,3$

$P(R_1 \mid E_1) = 0,8 \Rightarrow P(R_2 \mid E_1) = 0,2$

$P(E_0) = 0,6$

$P(E_1) = 0,4$

$$P(E_0 \mid R_1) = \frac{P(E_0) \cdot P(R_1 \mid E_0)}{P(R_1)} = \frac{0,18}{0,5} = 0,36$$

$P(R_1) = P(E_0) \cdot P(R_1 \mid E_0) + P(E_1) \cdot P(R_1 \mid E_1) =$

$= 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,18 + 0,32 = 0,5$

7) $P(H_1) = 0,6$ → ușa deschisă

$P(H_2) = 0,4$ → ușa închisă

$P(D = d \mid H_1) = 0,7$

$P(D = d \mid H_2) = 0,1$

$P(H_1 \mid D = d) = ?$

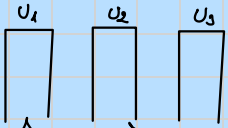
$$P(H_1 \mid D=d) = \frac{P(H_1) \cdot P(D=d \mid H_1)}{P(D=d)} = \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,46} = \frac{42}{46}$$

$$P(D=d) = P(H_1) \cdot P(D=d \mid H_1) + P(H_2) \cdot P(D=d \mid H_2) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,1 = 0,42 + 0,04 = 0,46$$

8) H_i - mașina e în spatele ușii i

U_i - deschidem ușa i



alegem U_1 — deschidem U_2

$$P(H_1 \mid U_2) = \frac{P(H_1) \cdot P(U_2 \mid H_1)}{P(U_2)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

păstrăm alegerea

$$P(H_3 \mid U_2) = \frac{P(H_3) \cdot P(U_2 \mid H_3)}{P(H_3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

schimbăm alegerea