4. Se consideră vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cx^2y(1+y), & \text{dacă } x \in [0,3],\ y \in [0,3], \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

a) Să se determine constanta c astfel încât f să fie o densitate de probabilitate.

b) Sa se vizualizeze evenimentul A: $(1 \le X \le 2$ şi $0 \le Y \le 1)$ şi să se calculeze probabilitatea $P(A)$.

c) Să se determine funcţia de repartiţie a vectorului (X,Y).

d) Să se determine densităţile marginale $f_X(x)$ şi $f_Y(y)$.

e) Să se determine funcţiile de repartiţie marginale $F_X(x)$şi $F_Y(y)$.

f) Să se studieze dacă cele două variabile X şi Y sunt independente.

a) $D = [0,3] \times [0,3]$

- $f_{x,y}(x,y) \ge 0$ ✓

- $\iint_D f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy = 1$

$$\int_0^3 \left(\int_0^3 c x^2 y(1+y)\, dx \right) dy = \int_0^3 c y(1+y) \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 dy =$$

$$= \int_0^3 cy(1+y) \cdot 9\, dy = \int_0^3 (9cy + 9cy^2)\, dy =$$

$$= \left(9 \cdot c \frac{y^2}{2} + 9c \frac{y^3}{3}\right) \Big|_0^3 = 9 \cdot c \cdot \frac{9}{2} + 9 \cdot c \cdot 9 =$$

$$= 81 \cdot c \left(\frac{1}{2} + 1\right) = 81 \cdot c \cdot \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{243}$$

b) A: $(1 \le x \le 2$ şi $0 \le y \le 1)$ $\quad P(A) = ?$

$$P(A) = \iint_A f_{x,y}(x,y)\, dx\, dy = \frac{2}{243} \int_1^2 \int_0^1 x^2 y(1+y)\, dy\, dx =$$

$$= \frac{2}{243} \int_1^2 \left(\int_0^1 (x^2 y + x^2 y^2)\, dy \right) dx =$$

$$= \frac{2}{243} \int_1^2 \left(x^2 \frac{y^2}{2} + x^2 \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx =$$

$$= \frac{2}{243} \int_1^2 \left(x^2 \cdot \frac{1}{2} + x^2 \cdot \frac{1}{3} \right) dx =$$

$$= \frac{2}{243} \left(\frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{2}{243} \left[\frac{1}{6}(2^3 - 1^3) + \frac{1}{9}(2^3 - 1^3) \right]$$

$$= \frac{2}{243}\left(\frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\cancel{6}}\cdot 7 + \frac{\overset{2}{\cancel{21}}}{\cancel{9}}\cdot 7\right) = \frac{\cancel{2}}{243}\cdot\frac{21+14}{\cancel{18}\,9} = \frac{35}{243}$$

c) $$F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(\underset{x}{t},\underset{y}{s})\,ds\,dt =$$

$$= \frac{2}{243}\int_0^x\int_0^y t^2 s(1+s)\,ds\,dt = \frac{2}{243}\int_0^x\int_0^y (t^2 s + t^2 s^2)\,ds\,dt =$$

$$= \frac{2}{243}\int_0^x \left(t^2\frac{s^2}{2} + t^2\frac{s^3}{3}\right)\Big|_0^y dt = \frac{2}{243}\int_0^x \left(\frac{1}{2}t^2y^2 + \frac{1}{3}t^2y^3\right)dt =$$

$$= \frac{2}{243}\left(\frac{1}{2}y^2\frac{t^3}{3} + \frac{1}{3}y^3\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^x = \frac{2}{243}\left(\frac{1}{6}y^2 x^3 + \frac{1}{9}y^3x^3\right)$$

d) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$$

$$\Rightarrow \frac{2}{243}\int_0^3 x^2 y(1+y)\,dy = \frac{2}{243}x^2\int_0^3 (y+y^2)\,dy =$$

$$= \frac{2}{243}x^2\left(\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^3 = \frac{2}{243}x^2\left(\frac{9}{2}+\overset{2)}{9}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{2}}{243}x^2\cdot\frac{27}{\cancel{2}} = \frac{x^2}{9}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9}, & x \in [0,3] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \frac{2}{243}\int_0^3 x^2(y+y^2)\,dx =$$

$$= \frac{2}{243}(y+y^2)\frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{2}{243}(y+y^2)\cdot 9 = \frac{2}{27}(y+y^2)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{27}(y+y^2), & y \in [0,3] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

e) $F_X(X \le x) = P(X \le x) = \int_0^x f_X(t)\,dt = \int_0^x \frac{t^2}{9}\,dt =$

$= \frac{1}{9} \frac{t^3}{3} \Big|_0^x = \frac{x^3}{27}$

$F_Y(y)$

$F_Y(Y \le y) = P(Y \le y) = \int_0^y f_Y(s)\,ds = \int_0^y \frac{2}{27}(s+s^2)\,ds =$

$= \frac{2}{27}\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^3}{3}\right)\Big|_0^y = \frac{2}{27}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)$

f) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$\frac{2}{243} x^2 y(1+y) = \frac{x^2}{9} \cdot \frac{2}{27}(y+y^2) = \frac{2}{243} x^2 (y+y^2) =$

$= \frac{2}{243} x^2 y(1+y)$ ✓

$\Rightarrow$ variabilele sunt independente

5. Se consideră vectorul aleator (X,Y) cu densitatea de probabilitate

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{dacă } x \in [0,1],\ y \in [0,1], \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$$

a) Să se arate că f este o densitate de probabilitate.

b) Fie $F(x,y)$ funcţia de repartiţie a vectorului (X,Y). Să se calculeze $F(1,1)$.

c) Să se determine densităţile marginale $f_X(x)$ şi $f_Y(y)$.

d) Sunt variabilele X şi Y sunt independente?

e) Să se determine $M(XY)$.

a) $\begin{cases} f_{X,Y}(x,y) \ge 0 \quad \forall (x,y) \in [0,1]^2 \\ \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(yx + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^1 x + \frac{1}{2}\,dx = \end{cases}$

$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ✓

$\Rightarrow$ este densitate de probabilitate

b) $F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(t,s)\,dt\,ds =$

$= \int_0^x \left(ts + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^y dt = \int_0^x ty + \frac{y^2}{2}\,dt =$

$$= \left(\frac{t^2}{2} y + \frac{y^2}{2} t\right)\Big|_0^x = \frac{1}{2}\left(x^2 y + y^2 x\right)$$

$$F(1,1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

c) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^1 x+y \, dy =$

$$= \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \begin{cases} x + \frac{1}{2}, & x \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 x+y\, dx = \begin{cases} y + \frac{1}{2}, & y \in [0,1] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

d) $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$x + y = \left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot\left(y + \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{1}{2}(x+y) + \frac{1}{4}$$

fals $\Rightarrow$ X, Y - dependente

e) $M(X \cdot Y)$

$$LOTUS : M(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy.$$

$$M(X+Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y) f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy = M(X) + M(Y)$$
$$M(XY) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \neq M(X)M(Y)$$

$$M(XY) = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x^2 y + y^2 \, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\, dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{1}{3}x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} + {}^{2/}\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

6. Se consideră două variabile aleatoare X şi Y ce dau timpii de execuţie a două procese paralele, independente şi unifom distribuite pe $(0,1)$, respectiv $(0,6)$.
Să se determine probabilitatea ca primul proces să fie executat după cel de-al doilea proces.
Cum se poate determina probabilitatea ca primul proces să fie executat înaintea celui de-al doilea proces (fără a calcula integrala dublă)?
Indicaţie: Se va calcula $P(X > Y) = P((X,Y) \in G)$, unde $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y\}$.

$D = (0,1) \times (0,6)$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Aria(D)} = \frac{1}{6\cdot 1} = \frac{1}{6}, & (0,1)\times(0,6) \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

$$P(X>Y) = 1 - P(X \le Y) = 1 - \int_0^1 \int_x^6 \frac{1}{6}\, dy\, dx =$$

$$= 1 - \int_0^1 \frac{1}{6} y \Big|_x^6 = 1 - \int_0^1 1 - \frac{1}{6}x\, dx =$$

$$= 1 - \left(x - \frac{1x^2}{6\cdot 2}\right)\Big|_0^1 = 1 - \left(1 - \frac{1}{12}\right) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$$

Flavius Prodan

X – I
Y = II

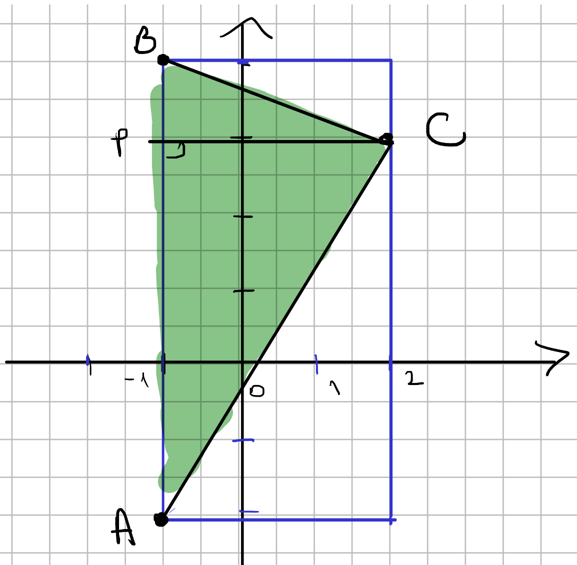
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{aria\, D}, & x \in [0,1] \text{ și } y \in [0,6] \\ 0, & rest \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{6}, & x \in [0,1],\ y \in [0,6] \\ 0, & rest \end{cases}$$

$$P(X>Y) = P(Y<X) = \int_0^1 \int_0^x \frac{1}{6}\, dy\, dx = \frac{1}{12}$$

$$P(X<Y) = P(Y>X) = \int_0^1 \int_x^6 \frac{1}{6}\, dx\, dy$$

$$\frac{11}{12} = 1 - P(X>Y) = A$$

7. Se consideră vectorul aleator (X,Y) este uniform distribuit pe mulţimea $[-1,2] \times [-2,4]$. Să se determine expresia analitică a densităţii de probabilitate şi să se calculeze $P((X,Y) \in G)$, unde G este domeniul triunghiular cu varfurile $A(-1,-2), B(-1,4), C(2,3)$.
Să se scrie algoritmul optim de generare a unui punct în triunghiul ABC.



$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{Aria\, D} = \frac{1}{18}, & (x,y) \in [-1,2] \times [-2,4] \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

$$P((X,Y) \in G) = \frac{A_{ABC}}{Aria\, D} = \frac{\frac{6\cdot 3}{2}}{18} = \frac{1}{2}$$

```
do{
     x = -1 + 3 * urand();

     y = -2 + 6 * urand();

}while( (-5*x + 3 * y + 1) < 0 &&
            (x + 3 * y - 11) > 0)
return (x, y);
```

pt. ec. dreptei AC, BC

AC: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$-2x - 3 + 2y + 4 - 3x + y = 0$

$-5x + 3y + 1 = 0$

BC: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$4x - 3 + 2y - 8 - 3x + y = 0$

$x + 3y - 11 = 0$

8. Algoritmul de generare de puncte uniform distribuite pe discul eliptic

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 1\}$$

este

```
do{
  x = −4 + 8 ∗ urand();
  y = −1 + 2 ∗ urand();
}while(x ∗ x/16 + y ∗ y > 1);
return (x, y);
```

a) Să se precizeze vectorul simulat in interiorul buclei `do-while`.

b) De ce acest algoritm este considerat optim pentru a genera puncte in G?

c) Stiind că generarea unui punct în discul eliptic imită un proces Bernoulli, să se precizeze probabilitatea de succes p (succesul este definit aici ca fiind evenimentul să se genereze un punct din G);

d) Să se calculeze probabilitatea ca primul punct generat in mulţimea G să apară la a patra parcurgere a buclei.

e) Să se determine numărul mediu de parcurgeri ale buclei până la generarea unui punct in discul G.

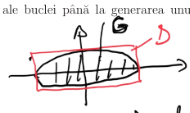
a) $(x, y) \in [-4, 4] \times [-1, 1]$;

b) $\longrightarrow$ vectorul care se află pe conturul elipsei sau chiar pe elipsă

$\longrightarrow$ e ușor de încadrat în dreptunghi

e) Să se determine numărul mediu de parcurgeri ale buclei până la generarea unui punct in discul G.

a) $D = [-4, 4] \times [-1, 1]$



b) $P((X,Y) \in G) = \frac{\text{aria } G}{\text{aria } D}$ mare – mică $\Rightarrow$ D – trb să fie de arie min

P: aria disc eliptic $= \pi a \cdot b = 4\pi$

$P = \frac{4\pi}{8 \cdot 2} = \frac{\pi}{4}$; $M(N) = 1/p$

$N \sim Geom(p)$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} \leq r^2$$

$a = 4$, $b = 1$

c) $P((x,y) \in G) = \dfrac{\text{Aria } G}{\text{Aria } D} = \dfrac{\pi a \cdot b}{8 \cdot 2} = \dfrac{4\pi}{16} = \dfrac{\pi}{4}$

d) $P(X=4) = p \cdot (1-p)^{n-1} = \dfrac{\pi}{4}\left(1 - \dfrac{\pi}{4}\right)^3$

e) $M = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}} = \dfrac{4}{\pi}$