Matematici speciale

Tema 8

5. Să se scrie algoritmul de simulare a unui număr pseudo-aleator uniform distribuit pe mulţimea $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

$m = -2$

$n = 2$

$N = n - m + 1 = 2 - (-2) + 1 = 5$

```
Function radint(-2, 2)

u = urand();

k = int(5 * u); //k apartine {0, 1, 2, 3, 4}

return k - 2;

end
```

$\rightarrow p_i = \frac{1}{5}$

6. Variabila aleatoare X este uniform distribuită pe mulţimea $\{3, 6, 9, 12, 15\}$. Să se determine distribuţia de probabilitate a variabilei $Y = X/3+2$ şi să se descrie o modalitate de simulare a variabilelor X şi Y.

$Y = \frac{X}{3} + 2$

```
Function simX(5)

u = urand();

k = int ( 5 * u); // {0, 1, 2, 3, 4}

return 3 * (k + 1);

end
```

$Y = g(X)$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y = g(x) = \frac{x}{3} + 2$

$g^{-1}(y) = 3(y-2)$, $D_Y = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

$P(Y=3) = P(g(X)=3) = P(X = g^{-1}(3)) = P(X \in \{3\}) = \frac{1}{5}$

```
Function simY

u = urand();

k = int( 5 * u); // 5 nr, {0, 1, 2, 3, 4}

return k + 3;

end
```

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

7. O variabilă aleatoare X se spune că este distribuită logistic dacă are funcţia de densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Să se determine funcţia de repartiţie.

b) Să se arate că, dacă $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$, atunci $Y = \ln \frac{U}{1-U}$ este distribuită logistic.

c) Folosind rezultatul de la punctul b) si metoda de inversare, să se scrie algoritmul de simulare a unei variabile de observaţie pentru o variabilă ce este distribuită logistic.

a) $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \frac{1}{1+e^{-t}}\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$F_X(x) = \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

b) $U \sim \mathrm{Unif}(0,1)$

$0 \le U < 1$

$0 < 1-U \le 1$

$1 \le \frac{1}{1-U} < \infty$

$0 \le \frac{U}{1-U} < \infty$

$-\infty \le Y < \infty$

$P\left(\ln\frac{U}{1-U} \le x\right) = P\left(\frac{U}{1-U} \le e^x\right) = P\left(U \le -e^x \cdot U + e^x\right) =$

$= P\left(U(1+e^x) \le e^x\right) = P\left(U \le \frac{e^x}{1+e^x}\right) = F_U\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) =$

$= \left(\frac{e^x}{1+e^x} - 0\right) \cdot \frac{1}{1-0} = \frac{e^x}{1+e^x} \in [0,1]$ $\longrightarrow$ nu cred că trb. dem.

Fu(Y) are aceeasi forma ca si Fx(X) => sunt distribuite logistic.

c) F_X - s.c. pe $\mathbb{R}$

$x = F^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right) \Leftrightarrow \frac{e^x}{1+e^x} = u$

, $\forall u \in [0,1)$, $F^{-1}(u) \in \mathbb{R}$

```
Function SimU
u = urand();

x = log(u / (1 - u));

return x;
end
```

8. O variabilă aleatoare X se spune că este distribuită Cauchy dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Să se arate că X are funcţia de repartiţie $F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) Folosind metoda de inversare, să se scrie algoritmul de simulare a unei variabile de observaţie pentru o variabilă ce este distribuită Cauchy.

a) $F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi(1+t^2)}\,dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$

b) arctg - s.c. pe $\mathbb{R} \Rightarrow F_X(x)$ - s.c. pe $\mathbb{R}$

· $X = F^{-1}(u)$

$\operatorname{arctg} x = \left(u - \frac{1}{2}\right)\pi$

$x = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi u - 1}{2}\right) = F^{-1}(u) \in \mathbb{R}, \forall u \in [0,1)$

```
Function simArctg

u = urand();

k = tan((2 * pi * u - 1) / 2 ) ;

return x;

end
```