Matematici speciale
(curs 6 - S6)

28.03.2024

O variabilă aleatoare (v.a.) este o funcție ce atribuie un număr real fiecărui rezultat din spațiul tuturor realizărilor unui experiment aleator.

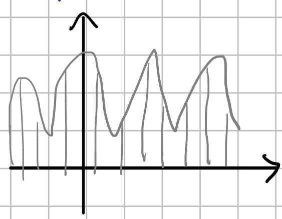
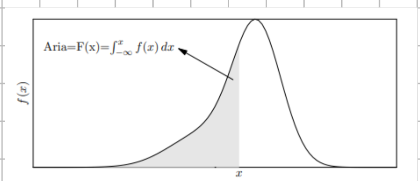
$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

Variabilă aleatoare discretă: are valori într-o mulțime finită sau infinit numărabilă

- număr de biți transmiși cu eroare într-un canal de comunicație

Variabilă aleatoare continuă: poate lua orice valoare dintr-un interval din. $\mathbb{R}$ (mărginit sau nu)

- timpul de execuție a unui program
- durata de viață a unei componente electronice
- frecvența de acces în traficul pe WEB
- dimensiunea pachetelor de date în FTP (File Transfer Protocol)

v. a. discrete	v. a. continue
Mulțimea valorilor $D_X=\{x_1, x_2, ...\}$ → finită / infinită numărabilă	$D_X =$ interval $\overset{not}{=} J$ (poate fi $\mathbb{R}$)
$p_i = P(X=x_i)$ $\sum_i p_i = 1$, $p_i \geq 0$ $p(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$	Densitatea de probabilitate $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a) $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ $\Leftrightarrow$ + f-integrabilă pe $\mathbb{R}$  **O variabilă aleatoare continuă** este o variabilă aleatoare pentru care distribuția de probabilitate este definită de o densitate de probabilitate (p.d.f.), f_X.
$P(X<a) = \sum_{x_i<a} p_i$	$P(X \in J) = \int f(x)\,dx$ J = aria de subgrafic, $x \in J$ X - v. a. continuă
Funcția de repartiție a unei v.a. X $F_X(x) = P(X \leq x)$ $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ pt. v. a. discretă $F_X(x) = \sum_{x_i<x} p_i$	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = P(X \leq x) =$ $= P[X \in (-\infty, x]]$ $P(X \in J) = \int_J f(t)\,dt$ 

Media

$M(x) = \sum_i x_i p_i$

$M(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx$

Dispersia

$\sigma^2(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 \longrightarrow M(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$

$M(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$

Densitatea de probabilitate

Ne interesează: $P(X \in I)$, unde
$I = [a, b], (a, b), (a, b], (a, b); (-\infty, b], (-\infty, b), [a, \infty), (a, \infty)$
Relația dintre p.d.f. și probabilitatea unui eveniment:

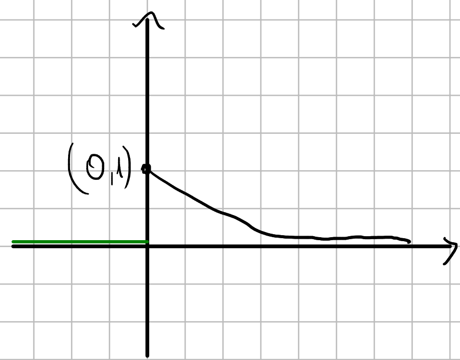
$$P(X \in I) = \int_I f_X(x) dx$$

Interpretare geometrică: $\int_I f_X(x)\, dx =$ aria domeniului de sub graficul lui f

Figure: Aria domeniului hașurat reprezintă $P(a \leq X \leq b)$

Observație: $P(X = a) = P(X \in [a, a]) = \int_a^a f_X(x) dx = 0$.

ex: $f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} & , x \geq 0 \end{cases}$



- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$?

$L.H.S = \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\, dx = -\frac{1}{\ln(e) \cdot e^{\frac{x}{2}}}\Big|_0^{\infty} = +\frac{1}{\ln e} - 0 = 1$

Funcția de repartiție

Proprietăți

Pentru o variabilă aleatoare continuă, funcția de repartiție este:

- continuă
- nedescrecătoare
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$
- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$

Observație:

$$P(X \in I) = \int_a^b f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

În cazul în care una dintre extremitățile intervalului este $\pm\infty$ notăm $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

Pt. ex:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

caz 1: $x < 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0$

de ex: $x = -1$: $\int_{-\infty}^{-1} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt = 0$

caz 2: $x \ge 0 \Rightarrow F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{2}}\,dt = \frac{1}{2} \left. \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right|_{0}^{x} = -\left(e^{-\frac{x}{2}} - 1\right)$$