Seminar 9

Simularea variabilelor aleatoare.

9.1 Probleme rezolvate

1. Să se scrie algoritmul de simulare a unui număr pseudo-aleator uniform distribuit pe mulţimea $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Rezolvare: Reamintim următorul rezultat:
Dacă U ~Unif[0,1) v.a. uniform distribuită pe $[0, 1)$, iar n este număr întreg, $n > 1$, atunci

$$X = [nU]$$

o variabilă aleatoare discretă ce are distribuţia uniformă pe mulţimea $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, adică $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n-1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$. Variabila X se poate simula prin algoritmul:

```
Function SimDiscretU(n)
u=urand();
k=int(n*u);
return k;
end.
```

Mai mult, pentru $X = [(n-m+1)U]$ avem :

$$X = \begin{pmatrix} m & m+1 & \ldots & n \\ \frac{1}{n-m+1} & \frac{1}{n-m+1} & \ldots & \frac{1}{n-m+1} \end{pmatrix}.$$

iar algoritm de simulare a unei valori de observaţie este:

```
Function randint(m,n)
u=urand();
k=int((n-m+1)*u));//k in {0, 1, 2, ..., n − m}
```

```
return k+m;
end.
```

In cazul ex 1) trebuie să determină numărul de valori ale variabilei X.
Avem $m = -3, n = 3$, deci sunt $N = n - m + 1 = 3 - (-3) + 1$ valori, adică 7 valori de observaţie ale variabilei X. Algoritmul de mai sus adaptat pentru $m = -3, N = 7$ este

```
Function randint(-3,3)
u=urand();
k=int(7*u));//k in {0, 1, 2, ..., 6}
return k-3;
end.
```

2. Variabila aleatoare X este uniform distribuită pe mulţimea $\{5, 10, 15, 20, 25\}$. Să se determine distribuţia de probabilitate a variabilei $Y = X/5 - 1$ şi sa se descrie o modalitate de simulare a variabilelor X si Y.

Rezolvare:
Variabila aleatoare X este uniform distribuită pe mulţimea $\{5, 10, 15, 20, 25\}$, deci are tabloul de repartiţie: $X = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$. Putem simula X în modul următor:

```
Function SimDiscretU(n)
u=urand();
k=int(5*u)+1;// k in {1, 2, 3, 4, 5}
return 5*k;
end.
```

Pentru a determina distribuţia variabilei Y vom observăm că $Y = g(X)$, unde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = g(x) = x/5 - 1$. Avem $g^{-1}(y) = 5(y + 1)$. In consecinţă, mulţimea de valori ale lui Y este $D_Y = \{0, 1, 2, 3, 4, \}$, iar probabilităţile cu care Y ia aceste valori sunt:
$P(Y = 0) = P(g(X) = 0) = P(X = g^{-1}(0)) = P(X \in \{5\}) = \frac{1}{5}$.
$P(Y = 1) = P(g(X) = 1) = P(X = g^{-1}(1)) = P(X \in \{10\}) = \frac{1}{5}$.
Repetând acest procedu pentru toate valorile, vom avea că: $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

Algoritmul de simulare al variabilei Y este:

```
Function RandY
u=urand();
k=int(5*u);// k in {0, 1, 2, 3, 4}
return k;
end.
```

3. Se ştie că funcţia urand() generează numere pseudo-aleatoare uniform distribuite pe $[0, 1)$.

a) Cum se pot genera numere aleatoare pe un interval $[a, b)$?

b) Să se scrie un algoritm de generare a unui număr pseudo-aleator pe intervalul $[-1, 3)$.

c) Cum se poate genera un număr pseudo-aleator pe intervalul $(-1, 3)$

Rezolvare:

a) Pentru a genera numere pseudo-aleatoare uniform distribuite pe $[a, b)$ vom executa comanda a+(b-a)*urand()

b) Pentru a genera un număr aleator pe intervalul $[-1, 3)$ folosim următorul simulator:

```
Function rand1()
u=urand();
return −1 + 4 ∗ u;
end function.
```

c)

```
Function rand1()
do
        u=urand();
while (u=0);
return −1 + 4 ∗ u;
end function.
```

4. Fie o variabilă aleatoare $X \sim \text{Exp}(\theta)$. Să se arate că X se poate simula prin metoda inversării. Să se scrie algoritmul de simulare a unei valori de observaţie a variabilei aleatoare X.

Rezolvare:
Metoda inversării: se aplică pentru a genera numere pseudo–aleatoare ca valori de observaţie asupra unei variabile aleatoare X, ce are funcţia de repartiţie inversabilă.
Si anume, dacă $U \sim [0,1)$ şi F_X o funcţie de repartiţie strict crescătoare şi continuă pe intervalul de lungime minimă din $\mathbb{R}$, pe care variabila aleatoare X ia valori cu probabilitatea 1, atunci variabila aleatoare

$$Y = F_X^{-1}(U)$$

are aceeaşi funcţie de repartiţie ca şi variabila X, adică Y şi X sunt identic distribuite şi nu se disting din punct de vedere probabilist (se simulează în acelaşi mod).

Pentru a aplica metoda inversării pentru ex 4. vom studia funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare $X \sim \text{Exp}(\theta)$. Avem următoarele rezultate:

- Din teorie se ştie că $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x < 0 \\ 1 - e^{-x/\theta} & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$
- funcţia F_X este strict crescătoare pe $[0, \infty)$
- Din $1 - e^{-x/\theta} = u$, avem $x = F^{-1}(u) = -\theta \ln(1-u)$
- $\forall u \in [0,1)$, $F^{-1}(u) \in [0, \infty)$.
- O v. a. exponenţial distribuită ia valori pozitive cu probabilitatea 1 pe $I = [0, \infty)$ $P(X \geq 0) = 1 - P(X < 0) = 1 - F_X(0) = 1 - 0 = 1$
- prin metoda inversării putem simula X.

Function SimulExp($theta$)

u=urand();

$x = -theta * log(1-u)$;

return x;

end

Obs.: În simularea unei variabile aleatoare $X \sim Exp(\theta)$ putem înlocui pe $1-u$ cu u.

9.2 Probleme propuse

5. Să se scrie algoritmul de simulare a unui număr pseudo-aleator uniform distribuit pe mulţimea $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

6. Variabila aleatoare X este uniform distribuită pe mulţimea $\{3, 6, 9, 12, 15\}$. Să se determine distribuţia de probabilitate a variabilei $Y = X/3+2$ şi să se descrie o modalitate de simulare a variabilelor X şi Y.

7. O variabilă aleatoare X se spune că este distribuită logistic dacă are funcţia de densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Să se determine funcţia de repartiţie.

b) Să se arate că, dacă $U \sim \text{Unif}(0,1)$, atunci $Y = \ln \frac{U}{1-U}$ este distribuită logistic.

c) Folosind rezultatul de la punctul b) si metoda de inversare, să se scrie algoritmul de simulare a unei variabile de observaţie pentru o variabilă ce este distribuită logistic.

8. O variabilă aleatoare X se spune că este distribuită Cauchy dacă are densitatea de probabilitate

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a) Să se arate că X are funcţia de repartiţie $F(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$

c) Folosind metoda de inversare, să se scrie algoritmul de simulare a unei variabile de observaţie pentru o variabilă ce este distribuită Cauchy.