UNIVERSITATEA "POLITEHNICA" DIN TIMIŞOARA
Departamentul de Matematică
Piaţa Victoriei, Nr. 2, 300006 TIMIŞOARA ROMÂNIA
Tel: +40-256-403098; +40-256-403099

CALCUL INTEGRAL AVANSAT

Extras INTEGRALE DUBLE

Conferenţiar Dr. DORU PĂUNESCU
Lector Dr. ADINA JURATONI

Editura Orizonturi Universitare 2015

.

Prefaţă

Calculul integral, ca parte a analizei matematice, joacă un rol important şi bine definit atât în disciplinele matematice, cât şi în cele inginereşti.

Lucrarea de faţă este rodul experienţei acumulate de autori şi al unei colaborări îndelungate, la predarea cursurilor şi seminariilor de Matematici Speciale şi Analiză Matematică studenţilor anului I din Universitatea "Politehnica" din Timişoara.

Materialul este expus într-o manieră originală, astfel încât am socotit util, ca fiecare capitol să conţină o parte teoretică, un rezumat al teoremelor şi formulelor referitoare la tema respectivă. Teoria se adânceşte şi devine vie prin exersarea sa prin exemple şi contraexemple, capabile sa-i nuanţeze rezultatele. De aceea, am considerat ca fiind necesară rezolvarea până la detalii a unui număr mare de probleme judicios alese, însoţite în mare parte de figuri 2D şi 3D. Cea de-a doua secţiune a fiecărui capitol corespunde problemelor propuse spre rezolvare, deoarece se cunosc dificultăţile întâlnite de studenţii anului I în faţa unui curs ca acesta. Studiul individual bine organizat, învăţarea activă prin rezolvarea cât mai multor exerciţii îl conduc la succes pe cititor.

Exerciţiile şi problemele rezolvate aici în cea mai mare parte sunt originale, de aceea un cititor sau altul s-ar putea întreba de ce au fost alese aceste exemple şi nu altele. Autorii au convingerea că au cuprins în mod gradat noţiunile teoretice, dar sunt conştienţi şi de faptul că e posibilă o altă abordare. În orice caz, ei nu au găsit în literatura de specialitate o lucrare similară, deşi există culegeri multe şi bune, pe care le-au consultat cu interes.

Cartea se adresează în primul rând studenţilor din anul I ai facultăţilor cu profil tehnic, dar şi studenţilor Facultăţii de Matematică.

Timişoara, ianuarie 2015 Autorii

CALCUL INTEGRAL AVANSAT

Conf. Dr. Doru Păunescu și Lect. Dr. Adina Juratoni

de la *Departamentul de Matematică al U.P.T.*

Cartea are la bază experiența dobândită de autori în predarea de cursuri și seminarii de Analiză Matematică adresate studenților de la Universitatea Politehnică din Timișoara.

Este la modă în ultima perioadă problema creșterii calității învățământului în general și a celui superior, în particular matematic, în special.

Urmare a necesității adaptării învățământului românesc la cel european, s-au produs modificări importante atât în ceea ce privește durata studiilor universitare (de licență, master și doctorat) precum (ca și consecințe) structura planurilor de învățământ și a programelor analitice.

În acest sens, Matematica, considerată nu de puțini ca o disciplină aridă, a rezistat diverselor presiuni utilitariste sau mode trecătoare și încet-încet s-a ajuns ca predarea acestei discipline (atât în învățământul preuniversitar cât și în cel universitar) să fie armonizată cu ajutorul calculatoarelor moderne.

Este ceea ce reușește cu argumente convingătoare cartea de față care nu poate fi catalogată ca și o culegere de probleme de calcul integral în sens clasic ci ca un nou concept de material didactic care permite ca seminariile de Calcul Integral să se transforme în *Lucrări de Laborator* în acest domeniu al Analizei Matematice.

Ceea ce remarc în mod deosebit la această carte este faptul că dacă este ”citită” pe computer atunci ”cititorul” rămâne cu o satisfacție deosebită datorită faptului că majoritatea problemelor sunt însoțite de grafice 2D și 3D realizate în programele *Mathematica* și *Geo Gebra*, cel din urmă parte a unui proiect derulat în cadrul U.P.T. Ea oferă un sprijin consistent celor care au avut dificultăți la geometria în spațiu.

Prezenta carte poate fi utilizată atât de către toți cei care au studiat sau studiază cursuri avansate de calcul integral precum și de către cei care vor să-și făurească o cultură matematică în concordanță cu exigențele etapei actuale în care informatica oferă un sprijin consistent.

Materialul este bine organizat, prezentarea este riguroasă și clară, autorii reușind să convingă printr-un text logic și o exprimare relevată care crează un bun prilej de dialog al generațiilor.

Timișoara, 18 februarie 2015

Prof. Univ. Emerit

Mihail Megan

Universitatea DE Vest din Timișoara

Cuprins

Capitolul 2

Extinderi ale integralei Riemann (2): Integrale duble şi triple

2.1 Integrale duble

Numim domeniu în planul euclidian $\mathbb{R}^2$ orice submulţime cu interiorul nevid având o singură "componentă"[1] Triunghiul, dreptunghiul, discul circular sau eliptic sunt exemple de domenii. Nu este domeniu mulţimea punctelor situate în reuniunea a două discuri tangente exterior.

Spunem că familia finită de dreptunghiuri

$$\mathcal{P}_D = \{\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] | \ \Delta_{ij} \cap D \neq 0\}$$

realizează o *partiţie* a domeniului D şi numim *norma* partiţiei numărul pozitiv:

$$\nu(\mathcal{P}_D) = \max\{(x_i - x_{i-1}), \ (y_j - y_{j-1}) \ | \ \Delta_{ij} \in \mathcal{P}_D\}$$

Punctul $(s_i, t_j) \in \Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ se numeşte *punct intermediar.*

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie; pentru fiecare partiţie a domeniului D şi fiecare set de puncte intermediare $(s_i, t_j) \in \Delta_{ij} \cap D$ se poate construi suma Riemann

$$\sum f(s_i, t_j) aria(\Delta_{ij}).$$

[1] Submulţimile lui $\mathbb{R}^2$ cu interior vid (ce nu pot conţine nici un disc de rază oricât de mică ar fi ea) le numim "subţiri." Segmentul, arcul de cerc sau mai general, graficul unei funcţii sunt mulţimi "subţiri."

Spunem că funcţia f este integrabilă Riemann pe D dacă

$$\lim_{\nu(\mathcal{P}_D)\to 0} \sum f\left(s_i, t_j\right) \mathbf{aria}\left(\Delta_{ij}\right)$$

există şi este finită. În acest caz numărul

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\nu(\mathcal{P}_D)\to 0} \sum f(s_i,t_j)aria(\Delta_{ij})$$

se numeşte integrala dublă a funcţiei f pe domeniul D.

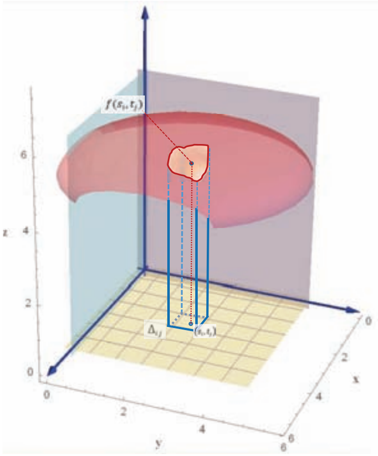

Figura 1

Domeniul D are arie dacă şi numai dacă $f(x,y) = 1$, $((x,y) \in D)$ este integrabilă pe D; în acest caz

$$\boxed{\iint_D 1dxdy = aria(D).}$$

În practică, metodele de calcul ale integralelor duble evită definiţia datorită complexităţii sale.

Proprietăţile integralei duble

(i) Orice funcţie continuă pe un domeniu mărginit şi închis este integrabilă.

(ii) Integrala dublă este liniară:

$$\iint\limits_D \left(\alpha f(x,y) + \beta g\left(x,y\right)\right) dxdy = \alpha \iint\limits_D f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_D g\left(x,y\right) dxdy$$

oricare ar fi funcţiile integrabile $f, g : D \to \mathbb{R}$ şi scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Integrala dublă a unei funcţii pozitive este un număr pozitiv

$$\left.\begin{array}{c} f : D \to \mathbb{R}, \text{ integrabilă} \\ f(x,y) \geq 0 \text{ pe } D \end{array}\right\} \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq 0$$

şi în consecinţă

$$\left.\begin{array}{c} f, g : D \to \mathbb{R}, \text{ integrabile} \\ f(x,y) \geq g(x,y) \quad \text{pe } D \end{array}\right\} \Rightarrow \iint\limits_D f(x,y)dxdy \geq \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

(iv) Integrala dublă este aditivă relativ la domeniul de integrare: dacă domeniul de integrare D este reuniunea a două domenii D_1 şi D_2 a căror frontieră comună este o reuniune finită de arce netede (mulţimi "subţiri") atunci are loc următoarea descompunere

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$$

oricare ar fi funcţia integrabilă $f : D \to \mathbb{R}$.

(v) Orice funcţie integrabilă $f : D \to \mathbb{R}$ are modulul $|f|$ integrabil şi în plus este verificată inegalitatea:

$$\left| \iint\limits_D f(x,y)dxdy \right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\, dxdy.$$

(vi) Dacă funcţia integrabilă $f : D \to \mathbb{R}$ are marginile cunoscute:

$$m \leq f(x,y) \leq M \qquad (\forall)\,(x,y) \in D$$

atunci au loc inegalităţile

$$m \cdot \mathbf{aria}\,(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot \mathbf{aria}\,(D)\,.$$

(vii) Dacă funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă atunci există cel puţin un punct $(\eta, \xi) \in D$ aşa încât este verificată formula mediei:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(\eta, \xi) \cdot \mathbf{aria}\,(D)\,.$$

$(viii)$ Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă iar $g : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă şi are valori pozitive atunci există cel puţin un punct $(\eta, \xi) \in D$ pentru care are loc formula generală a mediei

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dxdy = f(\eta,\xi) \cdot \iint\limits_D g(x,y)dxdy.$$

Metode pentru calcul integralei duble

În cele ce urmează prezentăm metode de calcul ale integralelor duble

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

unde $D \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime cu aria nenulă, iar $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Am exclus din discuţie de la bun început mulţimile de arie (măsură) zero cum ar fi segmentele, curbele plane propriu-zise şi în general frontierele "subţiri", deoarece se poate demonstra (în baza definiţiei) umătoarea teoremă:

$$\mathbf{aria}(D) = 0 \;\Rightarrow\; \iint\limits_D f(x,y)dxdy = 0.$$

1. Integrala dublă pe un dreptunghi cu laturile paralele axelor de coordonate

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ o funcţie reală continuă cu două variabile al cărei domeniu de definiţie este un dreptunghi sau mai precis $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

i) În plus, să presupunem mai întâi că funcţia de sub semnul integrală are o formă particulară şi anume că f este o **funcţie cu variabile separate**:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

unde $f_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}, \quad (i = \overline{1,2})$ sunt funcţii continue.

Prin definiţie, integrala dublă pe domeniul $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ a funcţiei $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ este produsul integralelor

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f_1(x) \cdot f_2(y)\; dxdy = \int_{a_1}^{b_1} f_1(x)dx \cdot \int_{a_2}^{b_2} f_2(y)dy.}$$

Dacă f este o **funcţie continuă arbitrară**, integrala dublă nu mai este un produs de integrale simple ci o succesiune de două asemenea integrale:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy\right)dx}$$

sau, în altă ordine a variabilelor de integrare:

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx\right)dy.}$$

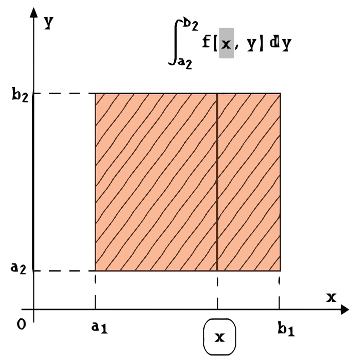

Figura 1 a)

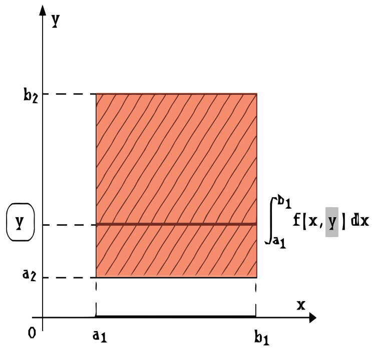

Figura 1 b)

Teorema lui Fubini *Oricare ar fi funcţia continuă* $f : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ *are loc identitatea:*

$$\boxed{\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy\right)dx = \int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx\right)dy.}$$

Utilizarea parantezelor în scrierea integralelor iterate incomodează. Fără a fi vreun pericol de a crea confuzie vom accepta în cele ce urmează exprimarea acestora în forma

$$\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy\right)dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$$

respectiv

$$\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx\right)dy = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$$

scriere ce sugerează calcularea în primă instanţă a integralei situate la dreapta şi aşezarea rezultatului în locul rămas liber între integrala din stânga şi simbolul de diferenţiere.

2. Integrala dublă pe domenii simple

Procedeul de calcul prin iterare pe care l-am prezentat mai sus poate fi însă extins la cazul integralelor duble pe domenii simple în raport cu axele (sau la reuniunea unui număr finit de asemenea domenii disjuncte).

a) *Mulţimea punctelor situate între graficele a două funcţii continue* $a_2,\ b_2 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}$

$$D_1 = \{(x, y) \mid a_1 \le x \le b_1 \text{ şi } a_2(x) \le y \le b_2(x)\}$$

se numeşte simplă în raport cu y.

$$\boxed{\iint\limits_{D_1} f(x,y)\ dxdy = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2(x)}^{b_2(x)} f(x,y)\ dy = \int_{a_1}^{b_1} [F_2\,(b_2(x)) - F_2(a_2(x))]\, dx}$$

unde $F_2\,(y)$ este primitiva lui $f(x, y)$ privită ca funcţie de y.

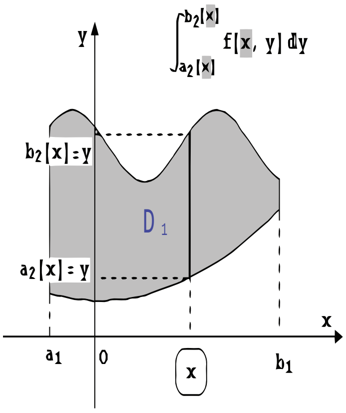

Figura 2a)

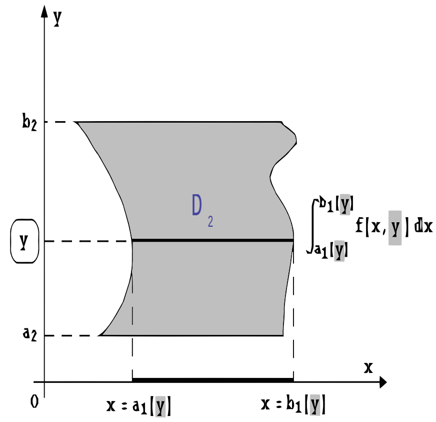

Figura 2b)

b) *Domeniul D este simplu în raport cu x dacă există două funcţii continue* $a_1,\ b_1 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ *aşa încât*

$$D_2 = \{(x, y) \mid a_2 \le y \le b_2 \text{ şi } a_1(y) \le x \le b_1(y)\}.$$

Integrala dublă se calculează prin iterare:

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\ dxdy = \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_1(y)}^{b_1(y)} f(x,y)\ dx = \int_{a_2}^{b_2} [F_1\,(b_1(y)) - F_1(a_1(y))]\, dy}$$

unde $F_1(x)$ este primitiva lui $f(x, y)$ privită ca funcţie de x.

Volumul unui corp

Din punct de vedere geometric graficul unei funcţii de clasă $\mathcal{C}^1$ este o pânză de suprafaţă netedă. *Dacă f este o funcţie pozitivă definită pe domeniul mărginit D (de arie nenulă), atunci volumul corpului mărginit superior de $z = f(x, y)$ şi inferior de domeniul plan D,*

$$M = \{(x, y, z)|\ 0 \le z \le f(x, y) \text{ şi } (x, y) \in D\}$$

se calculează cu formula

$$vol(M) = \iint_D f(x, y)\ dxdy.$$

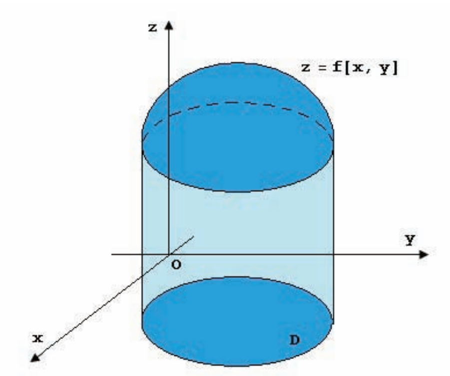

Figura 3

3. Schimbarea de variabile în integrala dublă

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ şi $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ două domenii plane şi $T : \Delta \to D$ o aplicaţie (funcţie vectorială)

$$(T) \quad \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, \qquad (u, v) \in \Delta$$

ce asociază fiecărui punct $(u, v) \in \Delta$ un unic punct $(x, y) \in D$. În practică ne aşteptăm ca domeniul D să fie imaginea prin T a unui domeniu Δ caracterizat prin ecuaţii mai simple.

Exemplu Transformarea de coordonate polare

$$(T) \quad \begin{cases} x = x_0 + \rho \cos\theta \\ y = y_0 + \rho \sin\theta \end{cases}, \text{ unde } \rho \in [0, R] \text{ şi } \theta \in [0, 2\pi].$$

Discul de rază R, centrat în punctul de coordonate (x_0, y_0), este imaginea prin T a dreptunghiului $[0, R] \times [0, 2\pi]$. (În figura de mai jos, am considerat cercul centrat în origine, adică $(x_0, y_0) = (0, 0)$).

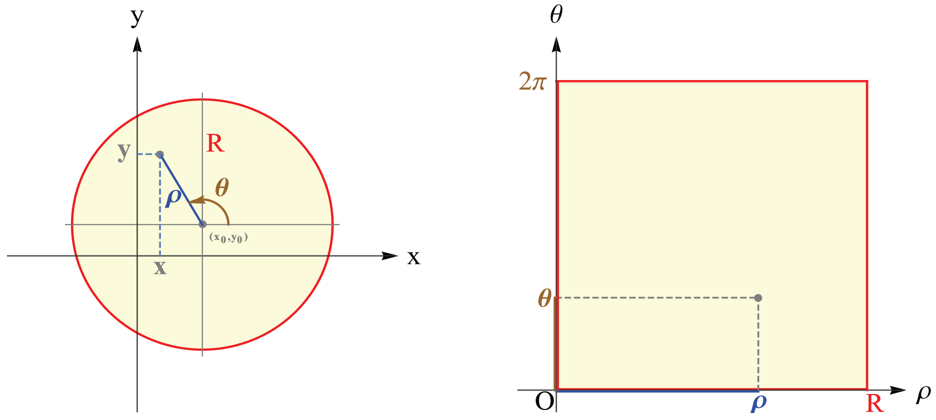

Figura 4a) Figura 4b)

Fie $T : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ o funcţie injectivă definită pe mulţimea deschisă Δ. Spunem că T este *regulată* pe domeniul Δ dacă cele două componente ale sale $x, y : \Delta \to \mathbb{R}$ sunt de clasă $\mathcal{C}^1_\Delta$ şi în plus determinantul lor funcţional

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

este nenul pe întreg domeniul Δ. Proprietatea de regularitate are drept consecin- ţă faptul că imaginea lui Δ prin T, mulţimea $D = \mathrm{Im}\,(\Delta)$, este deasemenea deschisă, prin urmare o transformare regulată stabileşte o corespondenţă biunivocă între două mulţimi deschise.

Teoremă (schimbarea de variabile în integrala dublă)

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi $T : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to D$ este o transformare regulată atunci are loc identitatea:

$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x, y)dxdy = \iint\limits_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| dudv.}$$

Transformarea de coordonate polare generalizate

Schimbarea de coordonate polare generalizate transforma discul eliptic de semiaxe a şi b $(a > 0, b > 0)$ într-un dreptunghi:

$$\begin{cases} x = x_0 + a\rho\cos\theta \\ y = y_0 + b\rho\sin\theta \end{cases} \text{unde} \quad \rho \in [0,1] \quad \text{şi} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Determinantul funcţional al transformării este:

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\sin^2\theta = ab\rho.$$

2.1.1 Probleme rezolvate

1. *Să se calculeze următoarele integrale duble pe domeniile dreptunghiulare indicate:*

i) $I_1 = \iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy$, *unde* $D = [-1,3] \times [1,2]$;

ii) $I_2 = \iint\limits_D \frac{y\ln x}{y^2+2} dxdy$, *unde* $D = [1,3] \times [0,1]$;

iii) $I_3 = \iint\limits_D \frac{\sin^2 y \cdot e^{\tan x}}{\cos^2 x} dxdy$, *unde* $D = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \times \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$;

iv) $I_4 = \iint\limits_D (2x - 3y^2 + xy + 2)dxdy$, *unde* $D = [1,2] \times [0,2]$;

v) $I_5 = \iint\limits_D (y\sqrt[3]{x} + x^2\sqrt[5]{y})dxdy$, *unde* $D = [0,1] \times [1,2]$.

Soluţie. i) Domeniul D este reprezentat în figura 5.

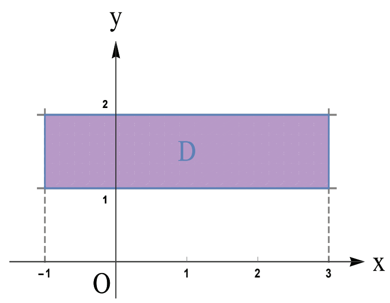

Figura 5

Deoarece, funcţia de sub integrală este cu variabile separate, avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_D \frac{x}{y} dxdy = \int_{-1}^{3} x dx \int_1^2 \frac{1}{y} dy \\ &= \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{3} \cdot \ln y \Bigg|_1^2 = 4\ln 2 = \ln 16. \end{aligned}$$

ii) Funcţia de sub semnul integrală e cu variabile separate, deci

$$I_2 = \iint\limits_D \frac{y \ln x}{y^2+2} dxdy = \int_1^3 \ln x dx \int_0^1 \frac{y}{y^2+2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\ln(y^2+2)\Bigg|_0^1 \cdot \int_1^3 \ln x \cdot x' dx = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \cdot \left[x \ln x \Bigg|_1^3 - x \Bigg|_1^3 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} \cdot \ln\frac{27}{e^2}.$$

iii) Integrala I_3 se poate calcula ca produs de două integrale, deoarece funcţia de sub integrală este cu variabile separabile, iar domeniul de integrare este dreptunghi.

$$I_3 = \iint\limits_D \frac{\sin^2 y \cdot e^{\tan x}}{\cos^2 x} dxdy = \int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 y dy.$$

Fie $J_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$, $J_2 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 y dy$. Pentru calculul integralei J_1 se face schimbarea de variabile $\tan x = t$, deci $\dfrac{1}{\cos^2 x} dx = dt$. Se obţine

$J_1 = \displaystyle\int_0^1 e^t dt = e^t \Bigg|_0^1 = e - 1.$

$$J_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 y dy = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2y}{2} dy = \left(\frac{1}{2}y - \frac{\sin 2y}{4}\right)\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Rezultă $I_3 = (e-1)\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$.

iv) Funcţia de sub integrală nu este cu variabile separabile. Calcul ei poate fi abordat în două moduri: integrând pe rând în raport cu x şi apoi cu y, respectiv în raport cu y şi apoi cu x. Aceste integrale poartă numele de integrale iterate.

Metoda I.
Se integrează mai întâi în raport cu y şi apoi în raport cu x şi se obţine:

$$I_4 = \iint_D (2x - 3y^2 + xy + 2)dxdy = \int_1^2 dx \int_0^2 (2x - 3y^2 + xy + 2)dy$$
$$= \int_1^2 \left(2xy - \frac{3y^3}{3} + \frac{xy^2}{2} + 2y\right)\Bigg|_0^2 dx = \int_1^2 (6x - 4)dx$$
$$= (3x^2 - 4x)\Bigg|_1^2 = 5$$

Metoda II.
Se integrează mai întâi în raport cu x şi apoi în raport cu y şi se obţine:

$$I_4 = \iint_D (2x - 3y^2 + xy + 2)dxdy = \int_0^2 dy \int_1^2 (2x - 3y^2 + xy + 2)dx$$
$$= \int_1^2 \left(x^2 - 3xy^2 + \frac{x^2y}{2} + 2x\right)\Bigg|_1^2 dy$$
$$= \int_1^2 \left(5 - 3y^2 + \frac{3y}{2}\right) dx = (3x^2 - 4x)\Bigg|_0^2 = 5$$

v) Se integrează mai întâi în raport cu y şi apoi în raport cu x şi se obţine:

$$I_5 = \iint_D (y\sqrt[3]{x} + x^2\sqrt[5]{y})dxdy = \int_0^1 dx \int_1^2 (y\sqrt[3]{x} + x^2\sqrt[5]{y})dy$$
$$= \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x}\frac{y^2}{2} + x^2\frac{y^{6/5}}{\frac{6}{5}}\right)\Bigg|_1^2 dx = \int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt[3]{x} + \frac{5x^2}{6}(2\sqrt[5]{2} - 1)dx$$
$$= \left[\frac{3}{2}\cdot\frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} + \frac{5}{6}(2\sqrt[5]{2} - 1)\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{9}{8} + \frac{5}{18}(2\sqrt[5]{2} - 1).$$

2. *Să se calculeze următoarele integrale duble:*

i) $I_1 = \iint_D (x - y + 1)dxdy$, *$D$ fiind domeniul cuprins între $y^2 = 10x$ şi $y = 5x$;*

ii) $I_2 = \iint_D (xy - 2)dxdy$, *$D$ fiind domeniul cuprins între parabolele $y = x^2$ şi $y = 8 - x^2$;*

iii) $I_3 = \iint_D \frac{2y}{x^2 - 3x - 4}dxdy$, *$D$ fiind domeniul mărginit de parabola $y = x^2 - 4x$ şi dreapta $y = x - 4$;*

iv) $I_4 = \iint\limits_D \ln(y+1)dxdy$, *D fiind interiorul triunghiului ABO cu* $A(1,2)$, $B(3,3)$, $O(0,0)$;

v) $I_5 = \iint\limits_D xdxdy$, *D fiind domeniul din cadranul IV, cuprins între axa Ox, parabola* $y^2 = 6x$ *şi cercul* $x^2 + y^2 = 16$.

Soluţie. i) Domeniul D este reprezentat în figura 6. Se observă că D este simplu în raport cu ambele axe. Vom prezenta în cele ce urmează ambele metode de calcul.

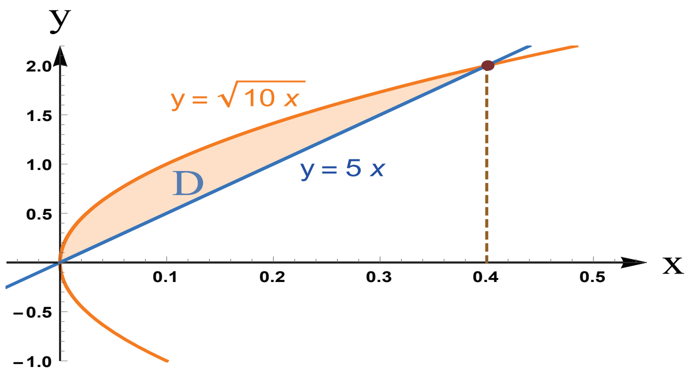

Figura 6

Metoda I. Considerând domeniul simplu în raport cu Ox, din intersecţia parabolei cu dreapta se obţine sistemul $\begin{cases} y^2 = 10x \\ y = 5x \end{cases}$, echivalent cu $y^2 - 2y = 0$, cu soluţia $y_1 = 0$, $y_2 = 2$. Prin urmare se poate scrie

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [0,2], x \in \left[\frac{y^2}{10}, \frac{y}{5}\right]\}.$$

Integrale devine

$$I_1 = \iint\limits_D (x-y+1)dxdy = \int_0^2 dy \int_{y^2/10}^{y/5} (x-y+1)dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - xy + x\right)\Bigg|_{y^2/10}^{y/5} dy = \int_0^2 \left(\frac{y}{5} - \frac{7y^2}{25} + \frac{y^3}{10} - \frac{y^4}{200}\right) dy$$
$$= \left(\frac{y}{5} - \frac{7y^2}{25} + \frac{y^3}{10} - \frac{y^4}{200}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{375}.$$

Metoda II. Considerând domeniul simplu în raport cu Oy, din intersecţia parabolei cu dreapta se obţine sistemul $\begin{cases} y^2 = 10x \\ y = 5x \end{cases}$, echivalent cu $5x^2 - 2x = 0$, cu soluţia $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{2}{5}$. Prin urmare domeniul se poate scrie sub forma

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0, 2/5], x \in \left[5x, \sqrt{10x}\right]\right\}.$$

Integrala se poate scrie

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_D (x - y + 1)dxdy = \int_0^{2/5} dx \int_{5x}^{\sqrt{10x}} (x - y + 1)dy \\ &= \int_0^{2/5} \left(xy - \frac{y^2}{2} + y\right)\Bigg|_{5x}^{\sqrt{10x}} dx \\ &= \int_0^{2/5} \left(x\sqrt{10x} + \frac{15x^2}{25} + \sqrt{10x} - 10x\right) dy \\ &= \left(\sqrt{10}\left(\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{2}{3}x^{3/2}\right) + \frac{5x^3}{2} - 5x^2\right)\Bigg|_0^{2/5} = \frac{8}{375}. \end{aligned}$$

ii) Se împarte domeniul D în două subdomenii simple în raport cu Ox, ca în figura 7a).

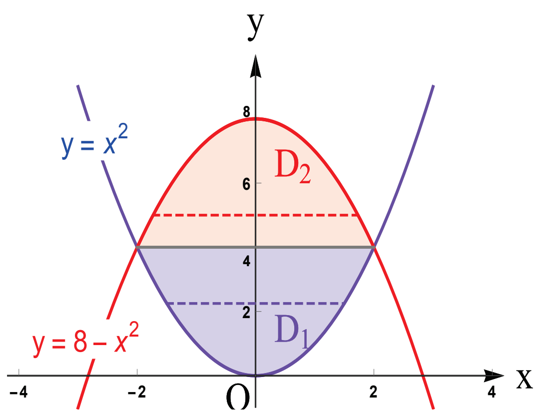

Figura 7a)

Astfel avem $D = D_1 \cup D_2$, unde

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [0,4],\ x \in [-\sqrt{y}, \sqrt{y}]\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [4, 8],\ x \in [-\sqrt{8-y}, \sqrt{8-y}]\}.$$

Folosind proprietea de aditivitate relativ la domeniu, rezultă

$$I_2 = \iint_{D_1} (xy-1)dxdy + \iint_{D_2} (xy-1)dxdy = I_{21} + I_{22}.$$

$$\iint_{D_1} (xy-1)dxdy = \int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (xy-2)dx = \int_0^4 \left(\frac{yx^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy$$
$$= \int_0^4 -4\sqrt{y}dy = \frac{-8y\sqrt{y}}{3}\Bigg|_0^4 = -\frac{64}{3}$$

$$\iint_{D_2} (xy-1)dxdy = \int_4^8 dy \int_{-\sqrt{8-y}}^{\sqrt{8-y}} (xy-2)dx = \int_4^8 \left(\frac{yx^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-\sqrt{8-y}}^{\sqrt{8-y}} dy$$
$$= \int_0^4 -4\sqrt{8-y}dy = \frac{8}{3}(8-y)^{3/2}\Bigg|_4^8 = -\frac{64}{3}$$

În concluzie $I_2 = I_{21} + I_{22} = -\dfrac{128}{3}$.

Observaţie *Dacă privim domeniul D simplu în raport cu Oy, integrala I_2 se calculează mult mai uşor.*

Din sistemul $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 8 - x^2 \end{cases}$, se obţine $2x^2 = 8$ de unde rezultă $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.
Astfel, domeniul D (figura 7b) se poate scrie

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [-2, 2],\ y \in [x^2, 8 - x^2]\},$$

iar integrala devine

$$I_2 = \iint_D (xy-2)dxdy = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^{8-x^2} (xy-2)dy$$
$$= \int_{-2}^2 \left(\frac{xy^2}{2} - 2y\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{8-x^2}} dx = \int_{-2}^2 \left[\frac{x(64-16x^2)}{2} - 16 + 4x^2\right] dx$$
$$= \int_{-2}^2 (-16 + 32x + 4x^2 - 8x^3)dx = \left(-16x + 16x^2 + \frac{4x^3}{3} - 2x^4\right)\Bigg|_{-2}^2 .$$

În final, după efectuarea calculelor, rezultă $I_2 = -\dfrac{128}{3}$.

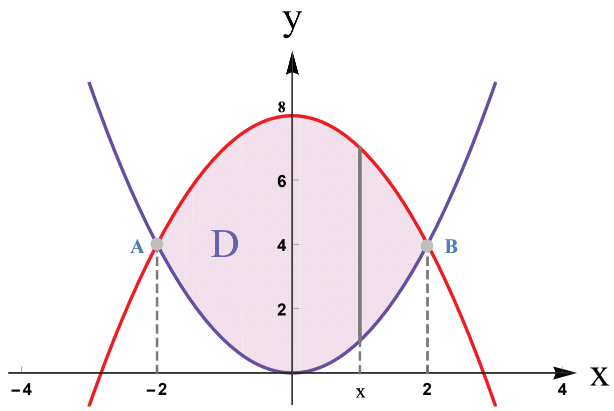

Figura 7b)

iii) Domeniul D este reprezentat în figura 8. Din intersecţia parabolei cu dreapta se obţine sistemul $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ y = x - 4 \end{cases}$, echivalent cu ecuaţia $x^2 - 5x + 4 = 0$, care are soluţiile $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Astfel se obţin punctele $A(1, -3)$, $B(4, 0)$. De asemenea vârful parabolei V are coordonatele $(2, -4)$.

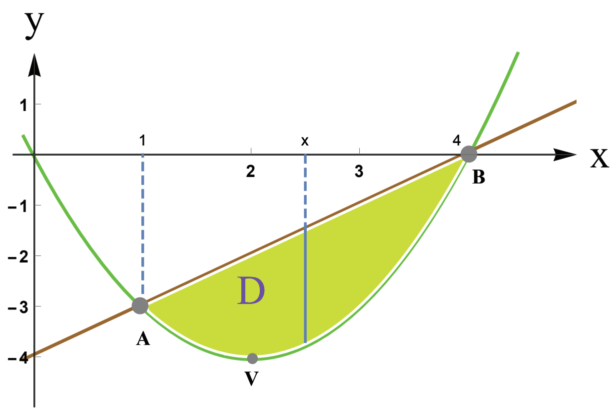

Figura 8

Se consideră D simplu în raport cu Oy. Domeniul D poate fi scris sub forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \leq x \leq 4, x^2 - 4x \leq y \leq x - 4\},$$

iar integrala devine

$$I_3 = \iint\limits_D \frac{2y}{x^2 - 3x - 4} dxdy = \int_1^4 dx \int\limits_{x^2-4x}^{x-4} \frac{2y}{x^2 - 3x - 4} dy$$
$$= \int_1^4 \frac{2}{x^2 - 3x - 4} \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_{x^2-4x}^{x-4} dx = \int_1^4 \frac{(x-4)^2 - (x^2-4x)^2}{x^2 - 3x - 4} dx$$
$$= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x \right) \Bigg|_1^4 = \frac{9}{2}.$$

iv) Se duce o paralelă la Ox prin punctul $A(1,2)$ care intersectează dreapta OB în $C(2,2)$. Atunci $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1 reprezintă interiorul triunghiului OAC, iar D_2 este interiorul triunghiului ACB din figura 9.

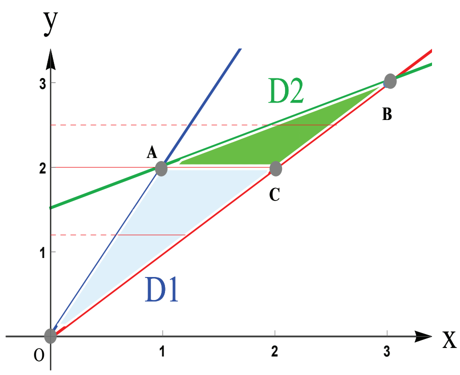

Figura 9

Se obţine

$$I_4 = \iint\limits_D \ln(y+1) dxdy = \iint\limits_{D_1} \ln(y+1) dxdy + \iint\limits_{D_2} \ln(y+1) dxdy.$$

Ecuaţia dreptei OA este $2x = y$, a dreptei OB este $y = x$, iar a dreptei AB este $x = 2y - 3$. Domeniul D_1 fiind simplu în raport cu Ox, poate fi scris sub forma

$$D_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le y \le 2, \frac{y}{2} \le x \le y \right\}.$$

$$\iint\limits_{D_1} \ln(y+1)dxdy = \int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} \ln(y+1)dx = \int_0^2 \ln(y+1)x \Big|_{y/2}^{y} dy$$
$$= \int_0^2 \frac{y}{2}\ln(y+1)dy = \int_0^2 \ln(y+1)\cdot\left(\frac{y^2}{2}\right)' dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2}\ln(y+1)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{y^2}{2}\cdot\frac{1}{y+1}dy\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\ln 3 - \frac{1}{2}\int_0^2\left(y-1+\frac{1}{y+1}\right)dy\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2\ln 3 - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - y + \ln(y+1)\right)\Big|_0^2\right] = \frac{3\ln 3}{4}.$$

În mod similar, cum $D_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 2\le y\le 3, 2y-3\le x\le y\right\}$, avem

$$\iint\limits_{D_2} \ln(y+1)dxdy = \int_2^3 dy \int_{2y-3}^{y} \ln(y+1)dx = \int_2^3 \ln(y+1)x \Big|_{2y-3}^{y} dy$$
$$= \int_2^3 \ln(y+1)(-y+3)dy = \int_2^3 \ln(y+1)\cdot\left(-\frac{(3-y)^2}{2}\right)' dy$$
$$= -\frac{(3-y)^2}{2}\ln(y+1)\Big|_2^3 + \int_2^3 \frac{(3-y)^2}{2}\cdot\frac{1}{y+1}dy$$
$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{y^2-6y+9}{y+1}dy = \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\int_2^3\left(y-7+\frac{16}{y+1}\right)dy$$
$$= \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - 7y + 16\ln(y+1)\right)\Big|_2^3 = -\frac{15}{2}\ln 3 + 8\ln 4 - \frac{9}{4}.$$

Se obţine în final, valoarea integralei $I_4 = -\frac{9}{4} - \frac{27}{4}\ln 3 + 16\ln 2$.

Propunem cititorului activ, rezolvarea acestei probleme împărţind domeniul D în două subdomenii simple în raport cu Oy.

v) Se împarte domeniul D din figura 10 în două subdomenii simple în raport cu Oy. Fie D_1, domeniul cuprins sub axa Ox, arcul de parabolă OA şi segmentul AB, iar D_2 domeniul cuprins sub axa Ox, segmentul AB şi arcul de cerc AC.

Folosind proprietăţile integralei duble avem

$$I_5 = \iint\limits_{D} xdxdy = \iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_2} xdxdy.$$

Deoarece $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 2, -\sqrt{6x} \le y \le 0\}$, se obţine

$$\iint_{D_1} x dx dy = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{6x}}^0 x dy = \int_0^2 xy \Bigg|_{-\sqrt{6x}}^{0} dx$$
$$= \int_0^2 x\sqrt{6x} dx = \frac{2}{5}\sqrt{6}x^{5/2} \Bigg|_0^2 = \frac{16\sqrt{3}}{5}$$

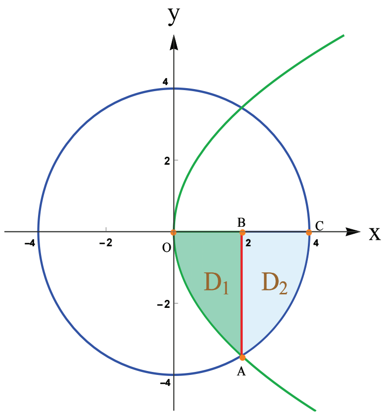

Figura 10

Analog, cum $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 2 \le x \le 4, -\sqrt{16 - x^2} \le y \le 0\}$, avem

$$\iint_{D_2} x dx dy = \int_2^4 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^0 x dy = \int_2^4 xy \Bigg|_{-\sqrt{16-x^2}}^{0} dx$$
$$= \int_2^4 x\sqrt{16 - x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{t} dt = \frac{1}{3} t^{3/2} \Bigg|_0^{12} = 8\sqrt{3}.$$

În integrala $\int_2^4 x\sqrt{16 - x^2} dx$ s-a efectuat schimbarea de variabilă $16 - x^2 = t$. Prin urmare $I_5 = \dfrac{16\sqrt{3}}{5} + 8\sqrt{3} = \dfrac{56\sqrt{3}}{5}$.

Observaţie. *Domeniul D poate fi scris sub forma*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | -2\sqrt{3} \le y \le 0, \frac{y^2}{6} \le x \le -\sqrt{16 - y^2} \right\},$$

iar integrala devine

$$I_5 = \iint\limits_D x dx dy = \int_{-\sqrt{12}}^{0} dy \int_{y^2/6}^{-\sqrt{16-x^2}} x dx = \int_{-\sqrt{12}}^{0} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{y^2/6}^{-\sqrt{16-x^2}} dy$$

$$= \int_{-\sqrt{12}}^{0} \left(\frac{16-y^2}{2} - \frac{y^4}{72}\right) dy = \left(8y - \frac{y^3}{6} - \frac{y^5}{360}\right)\Bigg|_{-\sqrt{12}}^{0} = \frac{56\sqrt{3}}{5}.$$

Propunem cititorului activ, rezolvarea aceste integrale pe domeniul din cadranul IV, cuprins între axa Oy, parabola $y^2 = 6x$ şi cercul $x^2 + y^2 = 16$.

3. *Folosind teorema de schimbare de variabilă în integrala dublă să se calculeze:* $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+1}dxdy$, *unde D reprezintă discul cu centrul în origine şi rază* 2.

Soluţie. Domeniul D este reprezentat în figura 4a) cu $R = 2$.

Se trece la coordonate polare: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, avem

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \in [0,2], \theta \in [0,2,\pi]\}$$

(reprezentat în figura 4b) şi jacobianul $J = \rho$. Integrala devine

$$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+1}dxdy = \iint\limits_\Delta \sqrt{\rho^2+1}\rho d\rho d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{\rho^1+1}\rho d\rho = \theta\Bigg|_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot\int_1^5 \sqrt{t}dt = \pi\frac{2t^{3/2}}{3}\Bigg|_1^5 = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5}-1).$$

4. *Se consideră dreptele $y = 0$, $y = 2$, $y = 2x$, $y = 2x - 8$.*

i) *Să se reprezinte grafic cele patru drepte;*

ii) *Să se calculeze folosind integrale iterate*

$$I = \iint\limits_D 2(y-x)dxdy,$$

unde D reprezintă interiorul paralelogramului obţinut la i).

iii) *Folosind transformarea $u = y$, $v = 2x - y$ să se calculeze integrala dublă de la ii).*

Soluţie. **i)** Reprezentând grafic cele patru drepte se obţine paralelogramul $OABC$ din figura 11a). A este punctul de intersecţie al dreptelor $y = 0$ şi $y = 2x - 8$, adică are coordonatele $A(4,0)$. B este punctul de intersecţie al dreptelor $y = 2$ şi $y = 2x-8$, deci $B(5,2)$, iar C are coordonatele $(1,2)$, aflându-se la intersecţia dintre $y = 2x$ şi $y = 2$.

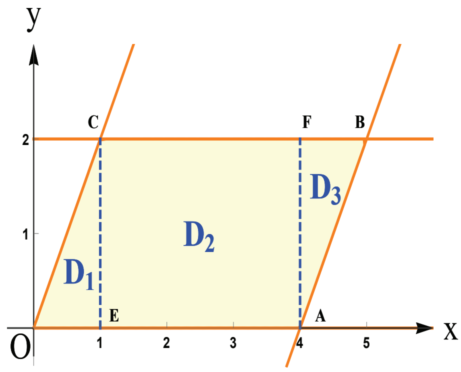

Figura 11a)

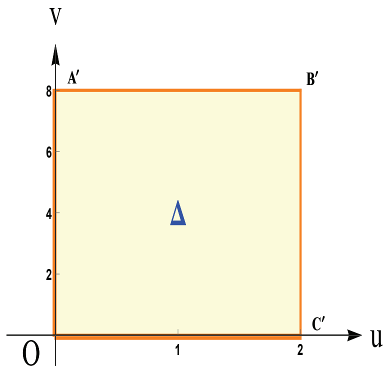

Figura 11b)

ii) Paralelogramul obţinut la i) reprezintă domeniul de integrare D, care poate fi descompus astfel $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, unde D_1 reprezintă interiorul triunghiului OCE cu $E(1,0)$, D_2 reprezintă interiorul dreptunghiului $EAFC$, $F(4,2)$ şi D_3 reprezintă interiorul triunghiului ABF. Avem

$$\begin{aligned} I &= \iint_D 2(y-x)dxdy \\ &= \iint_{D_1} 2(y-x)dxdy + \iint_{D_2} 2(y-x)dxdy + \iint_{D_3} 2(y-x)dxdy, \end{aligned}$$

cu

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [0,1], y \in [0,2x]\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [1,4], y \in [0,2]\},$$

$$D_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [4,5], y \in [2x-8,2]\}.$$

$$\iint_{D_1} 2(y-x) = 2\int_0^1 dx \int_0^{2x} (y-x)dy = 2\int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} - xy\right)\Bigg|_0^{2x} dx =$$
$$2\int_0^1 (2x^2 - 2x^2)dx = 0.$$

$$\iint_{D_2} 2(y-x) = 2\int_1^4 dx \int_0^2 (y-x)dy = 2\int_1^4 \left(\frac{y^2}{2} - xy\right)\Bigg|_0^2 dx =$$

$$2\int_1^4 (2-2x)dx = 4\left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = -18.$$

$$\iint_{D_3} 2(y-x) = 2\int_4^5 dx \int_{2x-8}^2 (y-x)dy = 2\int_4^5 \left(\frac{y^2}{2} - xy\right)\Bigg|_{2x-8}^2 dx$$

$$= 2\int_4^5 (6x-30)dx = 12\frac{(x-5)^2}{2}\Bigg|_4^5 = -6.$$

Prin urmare, se obţine valoarea integralei $I = -24$.

iii) Cu transformarea $u = y$, $v = 2x - y$ avem

$$\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u \in [0,2], v \in [0,8]\}.$$

Jacobianul transformării este

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}} = -\frac{1}{2},$$

deoarece

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Din teoreme de schimbare de variabilă în integrala dublă avem

$$\iint_D 2(y-x)dxdy = \iint_\Delta 2 \cdot \frac{u-v}{2} \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| dudv$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 du \int_0^8 (v-u)dv = -\frac{1}{2}\int_0^2 \left(\frac{v^2}{2} - uv\right)\Bigg|_0^8 du$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^2 (32-8u)du = -\frac{1}{2}(32u - 4u^2)\Bigg|_0^2 = -24.$$

5. *Se consideră dreptele* $y = 2x + 4$, $y = 2x - 3$, $y = -x + 5$, $y = -x - 2$.

i) *Să se reprezinte grafic domeniul* D *mărginit de aceste drepte.*

ii) *Să se calculeze*

$$I = \iint_D e^{3y-3x+1}dxdy,$$

folosind o schimbare de variabilă adecvată.

Soluţie. i) Domeniul D este reprezentat în figura 12a).

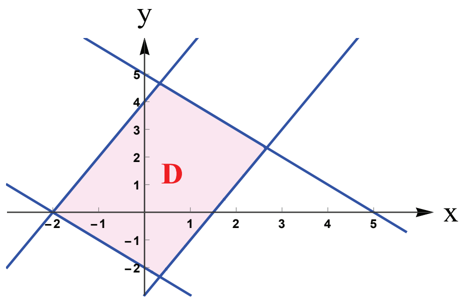

Figura 12a)

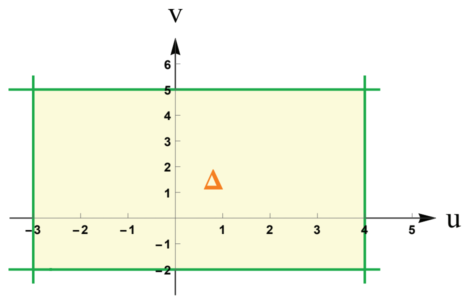

Figura 12b)

ii) Fie transformarea $\begin{cases} u = y - 2x \\ v = x + y \end{cases}$. Prin această transformare domeniul devine

$$\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \in [-3, 4], v \in [-2, 5]\}$$

ca în figura 12b). Jacobianul transformării este $J = -\dfrac{1}{3}$. Folosind teorema de schimbare de variabilă în integrala dublă se obţine:

$$\iint\limits_D e^{3y-3x+1} dxdy = \iint\limits_\Delta e^{v+2u+1} \cdot \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{3} \int_{-3}^{4} du \int_{-2}^{5} e^{v+2u+1} dv =$$

$$\frac{1}{3} \int_{-3}^{4} e^{v+2u+1} \Big|_{-2}^{5} du = \frac{1}{3} \int_{-3}^{4} (e^{2u+6} - e^{2u-1}) du =$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{e^{2u+6}}{2} - \frac{e^{2u-1}}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{4} = \frac{1}{6} (e^{14} - e^7 + e^{-7} - 1).$$

6. *Se consideră domeniul plan*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 \leq 0\}.$$

i) *Să se reprezinte grafic domeniul D.*

ii) *Să se calculeze, folosind coordonate polare, următoarea integrală dublă*

$$I = \iint\limits_D \sqrt[3]{(x+1)^2 + (y-2)^2 + 4} dxdy.$$

Soluţie. i) Domeniul D poate fi scris sub forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x+1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\},$$

care reprezintă discul cu centrul în $(-1,2)$ şi rază 1 din figura 13a).

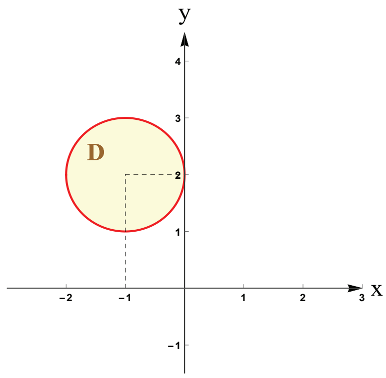

Figura 13a)

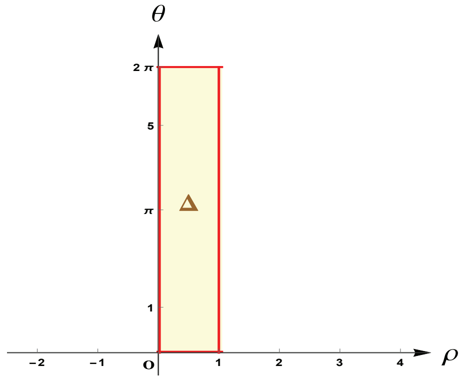

Figura 13b)

ii) Trecând la coordonate polare avem:

$$\begin{cases} x = -1 + \rho\cos\theta \\ y = 2 + \rho\sin\theta \end{cases},$$

domeniul D se transformă în domeniul Δ, (figura 13b), unde

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \in [0,1], \theta \in [0,2\pi]\},$$

iar jacobianul transformării este $J = \rho$. Se obţine

$$\iint\limits_D \sqrt[3]{(x+1)^2 + (y-2)^2 + 4}\,dxdy = \iint\limits_\Delta \sqrt[3]{\rho^2+4} \cdot \rho d\rho d\theta =$$
$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt[3]{\rho^2+4} \cdot \rho d\rho = 2\pi \int_0^1 \sqrt[3]{\rho^2+4} \cdot \rho d\rho.$$

În ultima integrală, se face schimbarea de variabilă $\rho^2 + 4 = t$, deci $2\rho d\rho = dt$, $t \in [4,5]$. Prin urmare, integrala devine

$$I = \pi \int_4^5 \sqrt[3]{t}dt = \frac{3\pi}{4} t^{\frac{4}{3}} \Big|_4^5 = \frac{3\pi}{4}(5\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{4}).$$

7. *Se consideră domeniul plan*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le 9, x^2 + \frac{y^2}{9} \ge 1, x \ge 0\}.$$

i) *Să se figureze în plan domeniul*

ii) *Să se transforme integrala dublă* $I = \iint\limits_D x dx dy$ *în integrale simple iterate şi apoi să se calculeze.*

iii) *Folosind o schimbare de variabilă adecvată, să se calculeze I.*

Soluţie. i) Domeniul D reprezintă intersecţia dintre interiorul cercului cu centrul în origine şi rază 3, exteriorul elipsei de semiaxe 1 şi 3, situate în cadranele I şi IV din figura 14.

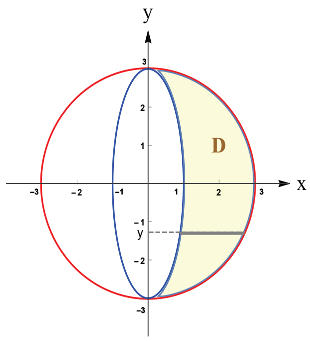

Figura 14

ii) Domeniul D este simplu în raport cu axa Ox, deci poate fi scris sub forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \in [-3,3], \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \leq x \leq \sqrt{9 - y^2}\},$$

deci

$$I = \iint\limits_D x dx dy = \int_{-3}^{3} dy \int_{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}^{\sqrt{9-y^2}} x dx = \int_{-3}^{3} \frac{x^2}{2} \Bigg|_{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}^{\sqrt{9-y^2}} dy =$$
$$\frac{1}{2} \int_{-3}^{3} \left(9 - y^2 - 1 + \frac{y^2}{9}\right) dy = \frac{1}{2} \int_{-3}^{3} \left(8 - \frac{8y^2}{9}\right) dy =$$
$$8 \int_{0}^{3} \left(1 - \frac{y^2}{9}\right) dy = 8 \left(y - \frac{y^3}{27}\right) dy \Bigg|_{0}^{3} = 16.$$

iii) Domeniul D poate fi scris sub forma $D = D_1 \setminus D_2$, unde

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + \frac{y^2}{9} \leq 1, x \geq 0\},$$

iar integrala devine $I = I_1 - I_2$, unde

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} x dx dy, \quad I_2 = \iint\limits_{D_2} x dx dy.$$

Pentru calculul integralei I_1 se face schimbarea de variabile $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, cu $\rho \in [0,3]$, $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

$$I_1 = \iint\limits_{D_1} x dx dy = \int_0^3 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \cos\theta d\theta = \int_0^3 \rho^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta =$$

$$2\int_0^3 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta = 2\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^3 \sin\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 18.$$

Pentru calculul integralei I_2 se trece la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = 3\rho\sin\theta \end{cases}$, cu $\rho \in [0,1]$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $J = 3\rho$. Rezultă

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} x dx dy = \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 3\rho^2 \cos\theta d\theta = 6\int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta =$$

$$\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 \sin\theta\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2.$$

Prin urmare, se obţine $I = 18 - 2 = 16$.

8. *Să se calculeze următoarele integrale duble, efectuând schimbări de variabile corespunzătoare:*

i) $I_1 = \iint\limits_D \frac{x\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} dx dy$,
unde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le e^2, x \ge 0, y \ge 0\}$;

ii) $I_2 = \iint\limits_D \sqrt{10 - x^2 - y^2} dx dy$, *unde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2 + y^2 \le 9\}$;

iii) $I_3 = \iint\limits_D y(x-1) dx dy$, *unde* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x+3)^2 + (y-2)^2 \le 4\}$;

iv) $I_4 = \iint\limits_D y\sqrt{4 - 9x^2 - \frac{1}{9}y^2} dx dy$, *unde* $D = \{(x,y) | 81x^2 + y^2 \le 9\}$;

v) $I_5 = \iint\limits_D xydxdy$, *unde* $D = \{(x,y)|\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 1, y \geq 0\}$.

Soluţie. i) Domeniul D este reprezentat în figura 15a). Se trece la coordonate polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$.

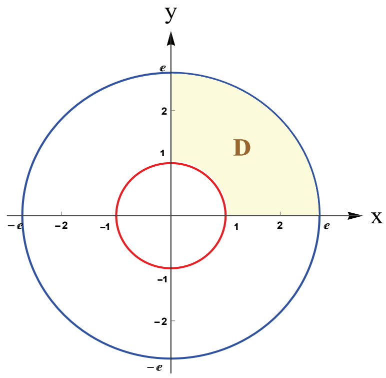

Figura 15a)

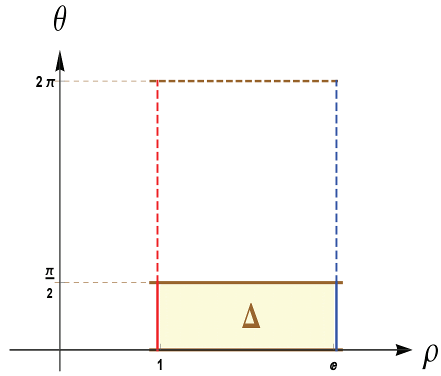

Figura 15b)

Cu această schimbare variabile domeniul D se transformă în dreptunghiul Δ din figura 15b),

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2|\rho \in [1,e], \theta \in [0,\frac{\pi}{2}]\}.$$

$$I_1 = \iint\limits_D \frac{x\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}dxdy = \iint\limits_\Delta \frac{\rho\cos\theta\ln\rho^2}{(\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \rho d\rho d\theta =$$
$$\iint\limits_\Delta \frac{2\cos\theta\ln\rho}{\rho}d\rho d\theta = 2\int_1^e \frac{\ln\rho}{\rho}d\rho\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta.$$

Cu schimbarea de variabilă $\ln\rho = t$ rezultă $\frac{1}{\rho}d\rho = dt$, $t \in [0,1]$ avem

$$I_1 = 2\int_0^1 tdt\int_0^{\pi/2}\cos\theta d\theta = 2 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

ii) Domeniul D reprezintă coroana circulară din figura 16a).

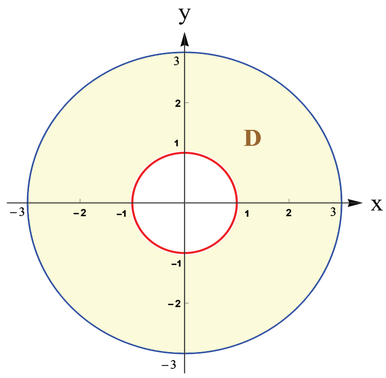

Figura 16a)

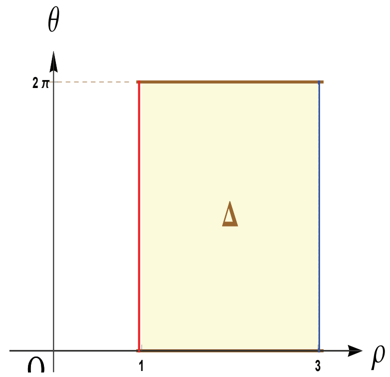

Figura 16b)

Prin trecere la coordonate polare $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, avem $J = \rho$, iar domeniul D se transformă în dreptunghiul

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \in [1,3], \theta \in [0,2\pi]\},$$

din figura 16b). Rezultă

$$I_2 = \iint\limits_D \sqrt{10 - x^2 - y^2}dxdy =$$
$$\iint\limits_\Delta \rho\sqrt{10-\rho^2}d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^3 \rho\sqrt{10-\rho^2}d\rho.$$

Cu schimbarea de variabilă $10 - \rho^2 = t$ avem $-2\rho d\rho = dt$. Pentru $\rho = 1$ rezultă $t = 9$, iar pentru $\rho = 3$, rezultă $t = 1$. Prin urmare, se obţine

$$I_2 = \pi \int_1^9 \sqrt{t}dt = \frac{2\pi}{3}t^{\frac{3}{2}} \Bigg|_1^9 = \frac{52\pi}{3}.$$

iii) Domeniul D este discul cu centrul în $(-3,2)$ şi raza 2, din figura 17a).

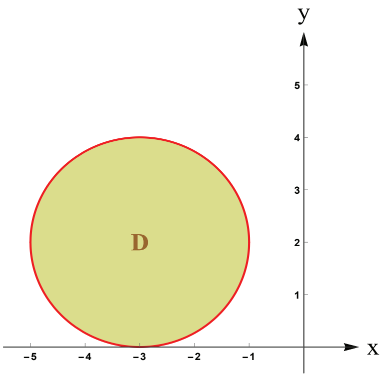

Figura 17a)

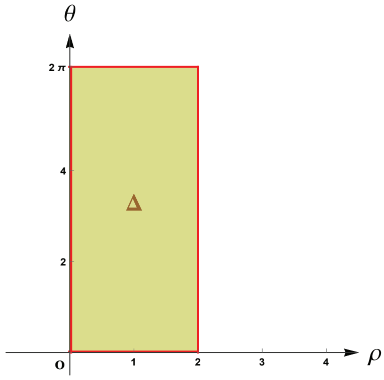

Figura 17b)

Prin trecere la coordonate polare $\begin{cases} x = -3 + \rho\cos\theta \\ y = 2 + \rho\sin\theta \end{cases}$, avem $J = \rho$, iar domeniul D se transformă în dreptunghiul

$$\Delta = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \in [0, 2], \theta \in [0, 2\pi]\},$$

din figura 17b). Rezultă

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint_D y(x-1)dxdy = \iint_\Delta (-4+\rho\cos\theta)(2+\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta \\ &= \iint_\Delta (-8\rho - 4\rho^2\sin\theta + 2\rho^2\cos\theta + \rho^3\sin\theta\cos\theta)d\rho d\theta \\ &= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} (-8\rho - 4\rho^2\sin\theta + 2\rho^2\cos\theta + \rho^3\sin\theta\cos\theta)d\theta \\ &= \int_0^2 \left(-8\rho\theta + 4\rho^2\cos\theta + 2\rho^2\sin\theta + \rho^3\frac{\sin^2\theta}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} d\rho \\ &= \int_0^2 -16\pi\rho d\rho = -16\pi\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^2 = -32\pi. \end{aligned}$$

iv) Domeniul D, reprezentat în figura 18a), este interiorul elipsei centrate în origine de semiaxe $\frac{1}{3}$ şi 3:

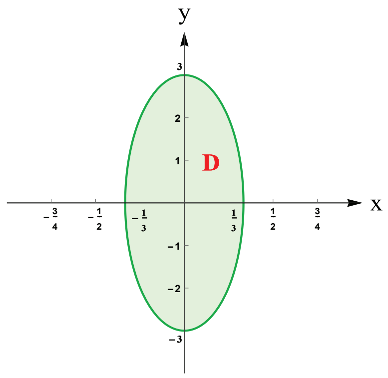

Figura 18a)

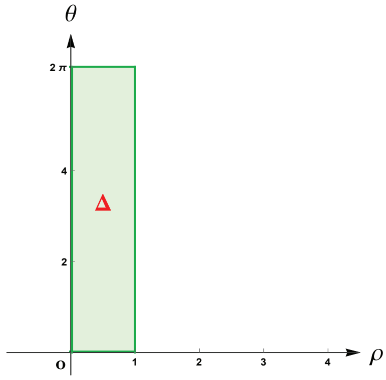

Figura 18b)

Prin trecere la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\rho\cos\theta \\ y = 3\rho\sin\theta \end{cases}$, avem $J = \dfrac{1}{3} \cdot 3 \cdot \rho$. Domeniul D se transformă în dreptunghiul

$$\Delta = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]\},$$

(figura 18b). Rezultă

$$\begin{aligned} I_4 &= \iint\limits_D y\sqrt{4 - 9x^2 - \frac{1}{9}y^2}dxdy = \iint\limits_\Delta 3\rho\sin\theta\sqrt{4-\rho^2} \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^1 3\rho^2\sqrt{4-\rho^2}d\rho \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0 \end{aligned}$$

v) D reprezintă interiorul semielipsei cu semiaxele 5 şi 3, de deasupra axei Ox, din figura 19a).

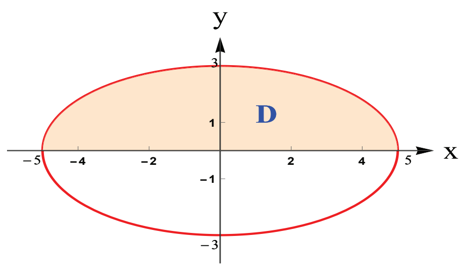

Figura 19a)

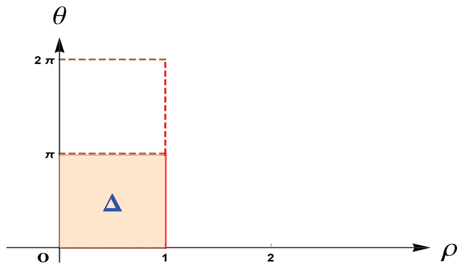

Figura 19b)

Se trece la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = 5\rho\cos\theta \\ y = 3\rho\sin\theta \end{cases}$, avem

$J(\rho,\theta) = 15\rho$. Domeniul D se transformă în dreptunghiul

$$\Delta = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 | \rho \in [0,1], \theta \in [0,\pi]\},$$

(figura 19b). Rezultă

$$\begin{aligned} I_5 &= \iint_D xy dx dy = \iint_\Delta 225\rho^3 \sin\theta\cos\theta d\rho d\theta \\ &= 225\int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^\pi \sin\theta\cos\theta d\theta = 225\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 \frac{\sin^2\theta}{2}\Big|_0^\pi = 0 \end{aligned}$$

9. *Folosind o schimbare de variabilă adecvată, să se calculeze*

$$\iint_D \left(2\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) dx dy,$$

pe domeniul $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ \frac{y}{3} \le x \le y, 1 \le xy \le 3\right\}$.

Soluţie. Domeniul D este reprezentat în figura 20a), unde $A(1,1)$, $B(\sqrt{3},\sqrt{3})$, $C(1,3)$, $E(1/\sqrt{3}, 3/\sqrt{3})$.

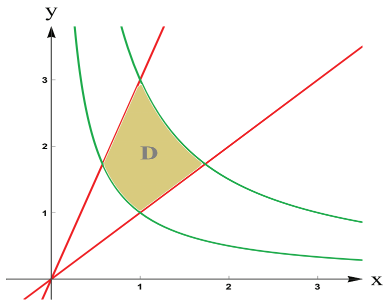

Figura 20a)

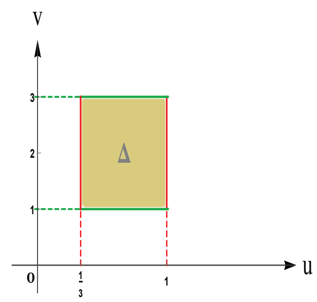

Figura 20b)

Cu schimbarea de variabilă $\begin{cases} u = \dfrac{x}{y} \\ v = xy \end{cases}$, rezultă că noul domeniu de integrare este $\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | \frac{1}{3} \le u \le 1, 1 \le v \le 3\right\}$, (figura 20b)).

Deoarece, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}$, iar

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \\ y & x \end{vmatrix} = \frac{2x}{y} = 2u,$$

din teorema de schimbare de variabilă în integrala dublă se obţine

$$\iint\limits_D \left(2\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) dxdy = \iint\limits_\Delta \left(2u - \frac{1}{u}\right) \frac{1}{2u} dudv =$$

$$\int_1^3 dv \int_{1/3}^1 \left(1 - \frac{1}{2u^2}\right) du = v\Bigg|_1^3 \left(u + \frac{1}{2u}\right)\Bigg|_{1/3}^1 = -\frac{2}{3}.$$

10. *Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de parabolele*

$$y^2 = 10x + 22 \text{ şi } y^2 = 10 - 2x.$$

Soluţie. Aria domeniul D reprezentat în figura 21 se calculează cu formula

$$Aria(D) = \iint\limits_D dxdy.$$

Pentru calculul integralei duble privim domeniul D simplu în raport cu Ox (deoarece dacă se consideră celălalt caz, domeniul D ar trebui împărţit în două subdomenii). Punctele de intersecţie ale celor două parabole se obţin rezolvând sistemul $\begin{cases} y^2 = 10x + 22 \\ y^2 = 10 - 2x \end{cases}$, echivalent cu ecuaţia $10x+22 = 10-2x$, care are soluţia $x = -1$. Prin urmare, se obţine $y = \pm\sqrt{12}$. Astfel, domeniul D poate fi scris sub forma

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -\sqrt{12} \le y \le \sqrt{12}, \frac{y^2 - 22}{10} \le x \le \frac{10 - y^2}{2}\}.$$

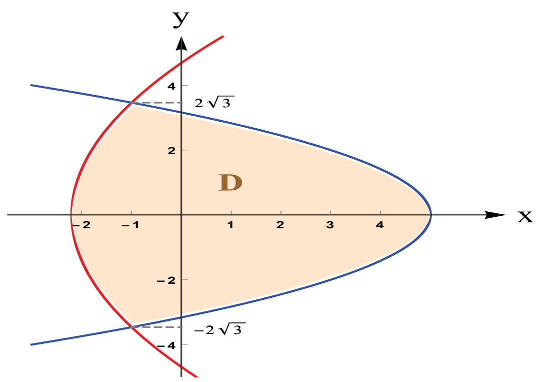

Figura 21

Înlocuind în formula ariei se obţine

$$\begin{aligned} Aria(D) &= \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} dy \int_{\frac{y^2-22}{10}}^{\frac{10-y^2}{2}} dx = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left(\frac{10-y^2}{2} - \frac{y^2-22}{10} \right) dy \\ &= \frac{36y-y^3}{5} \Bigg|_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = \frac{96\sqrt{3}}{5}. \end{aligned}$$

11. *Să se calculeze aria domeniului plan mărginit de curbele de ecuaţii*

$$y \le x^2,\ y \ge \frac{1}{4}x^2,\quad y \ge 0,\quad y \le 4.$$

Soluţie. Domeniul D reprezintă reuniunea dintre D_1 şi D_2 din figura 22.

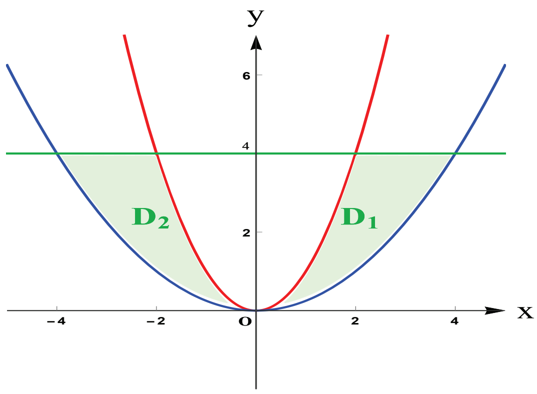

Figura 22

Deoarece graficul este simetric faţă de axa Oy, se obţine

$$Aria(D) = 2Aria(D_1) = 2\iint_{D_1} dxdy.$$

Calculul integralei duble folosind integralele iterate este destul de complicat, aşa încât vom folosi teorema de schimbare de variabilă în integrala dublă. Transformarea $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^2} \\ v = y \end{cases}$ conduce la $x = \sqrt{\dfrac{v}{u}}$, $y = v$, iar jacobianul este

$$J = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{u}}}\frac{v}{u^2} & \frac{1}{2\sqrt{\frac{v}{u}}}\frac{1}{u} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{v}{2u^2}\sqrt{\frac{u}{v}} - \frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}}.$$

Astfel, domeniul D_1 devine

$$\Delta = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 |\ u \in \left[\frac{1}{4}, 1\right], v \in [0,4]\right\}.$$

Rezultă

$$\begin{aligned} Aria(D) &= 2\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{\sqrt{u}}{2u^2} du \int_0^4 \sqrt{v} dv = \int_{\frac{1}{4}}^{1} u^{-\frac{3}{2}} du \int_0^4 v^{\frac{1}{2}} dv \\ &= -2u^{-\frac{1}{2}} \Big|_{\frac{1}{4}}^{1} \cdot \frac{2}{3} v^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

12. *Să se calculeze volumul corpului mărginit de planele de coordonate, planul $x + y = 1$ şi paraboloidul eliptic $z = 2x^2 + 2y^2 + 1$.*

Soluţie. Volumul corpului mărginit de planele de coordonate, planul $x + y = 1$ şi paraboloidul eliptic $z = 2x^2 + 2y^2 + 1$ reprezentat în figura 23a) este dat de formula

$$\mathcal{V} = \iint_D z(x,y) dx dy.$$

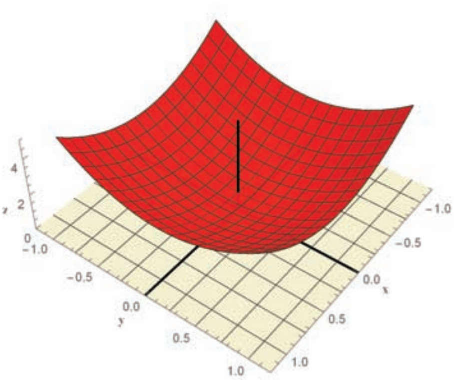

Figura 23a)

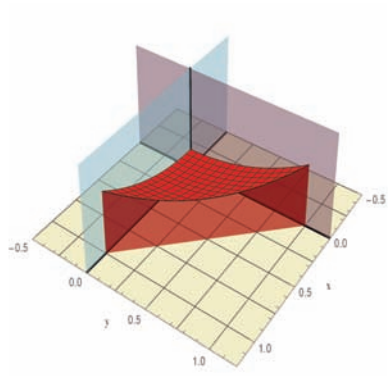

Figura 23b)

Deoarece domeniul D (figura 23b) este

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\},$$

avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \iint\limits_D (2x^2+2y^2+1)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (2x^2+2y^2+1)dy \\
&= \int_0^1 \left((2x^2+1)y + \frac{2y^3}{3} \right) \Bigg|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{3} - 3x + 4x^2 - \frac{8x^3}{3} \right) dx \\
&= \left(\frac{5x}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{4x^3}{3} - \frac{8x^4}{12} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

13. *Să se determine masa şi coordonatele centrului de greutate pentru o lamelă de densitate $\rho(x,y)$ ce ia forma domeniului plan D (aici densitatea sa este considerată ca fiind $\rho(x,y)=1$), în cazurile:*

i) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 4x^2+16y^2 \le 1, x \le 0\}$;

ii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \le 4, x \ge y\}$;

iii) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \ge 1, x-2y+2 \ge 0, 4x+3y-12 \le 0\}$.

Soluţie. Masa şi coordonatele centrului de greutate pentru o lamelă de densitate $\rho(x,y)$ sunt date de formulele

$$\mathcal{M} = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy, \quad x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy, \ y_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy.$$

În cazul **i)** lamela are forma domeniului D din figura 24a). Calculul celor trei integrale duble de mai sus se face mai uşor prin trecere la coordonate polare generalizate $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\rho\cos\theta \\ y = \frac{1}{4}\rho\sin\theta \end{cases}$. Astfel domeniul D se transformă în domeniul Δ din figura 24b), unde

$$\Delta = \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 |\ \rho \in [0,1], \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \right\}.$$

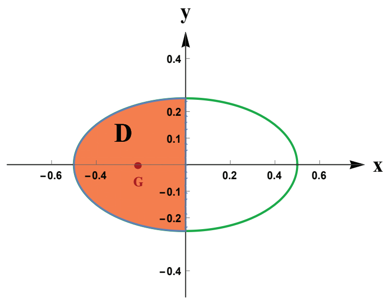

Figura 24a)

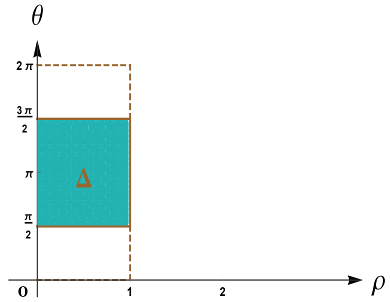

Figura 24b)

Jacobianul transformării este $J = \dfrac{1}{8}\rho$, deci

$$\mathcal{M} = \iint_D dxdy = \iint_\Delta \frac{1}{8}\rho d\rho d\theta = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{1}{8}\rho d\rho = \frac{1}{8}\cdot\pi\cdot\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{16}{\pi}\iint_D xdxdy = \frac{16}{\pi}\iint_\Delta \frac{1}{2}\rho\, cos\theta\cdot\frac{1}{8}\rho d\rho d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_0^1 \rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 \cdot(\sin\theta)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\frac{2}{3\pi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{16}{\pi}\iint_D ydxdy = \frac{16}{\pi}\iint_\Delta \frac{1}{8}\rho\frac{1}{2}\rho\, cos\theta d\rho d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int_0^1 \rho^2 d\rho \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1 \cdot(-\cos\theta)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 0. \end{aligned}$$

ii) Domeniul D este reprezentat în figura 25, ca fiind reuniunea domeniilor D_1 şi D_2 simple în raport cu Oy. Punctele de intersecţie între curbe, respectiv între curbe şi axele de coordonate sunt $A(-\sqrt{2},0)$, $B(\sqrt{2},0)$, $C(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $E(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

D_1 şi D_2 pot fi scrise sub forma

$$D_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}], y\in[-\sqrt{4-x^2},x]\},$$
$$D_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x\in[\sqrt{2},2], y\in[-\sqrt{4-x^2},\sqrt{4-x^2}]\},$$

deci

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} dy + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x + \sqrt{4-x^2})dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} 2\sqrt{4-x^2}dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\ &\quad +2\left(\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2} = 2\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{1}{2\pi}\left(\iint\limits_{D_1} xdxdy + \iint\limits_{D_2} xdxdy\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} xdy + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xdy\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (x^2 + x\sqrt{4-x^2})dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} 2x\sqrt{4-x^2}dx\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} - \frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{\sqrt{2}}^{2}\right] = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{1}{2\pi}\left(\iint\limits_{D_1} ydxdy + \iint\limits_{D_2} ydxdy\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} ydy + \int_{\sqrt{2}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} ydy\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{x} dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx\right) \\ &= \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4-x^2}{2}\right)dx + \int_{\sqrt{2}}^{2}\left(\frac{4-x^2}{2} - \frac{4-x^2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-2+x^2)dx = \frac{1}{2\pi}\left(-2x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}.\end{aligned}$$

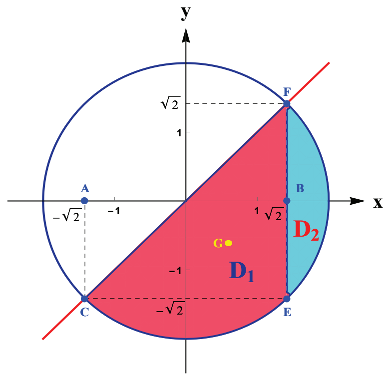

Figura 25

iii) Domeniul D este triunghiul din figura 26. Se observă că domeniul D este simplu în raport cu Ox, adică poate fi scris sub forma

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ y\in\left[1,\frac{20}{11}\right],x\in\left[2y-2,3-\frac{3y}{4}\right]\right\},$$

deci

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= \iint\limits_D dxdy=\int_1^{\frac{20}{11}}dy\int_{2y-2}^{3-\frac{3y}{4}}dx=\int_1^{\frac{20}{11}}\left(5-\frac{11y}{4}\right)dy\\ &= \left.\left(5y-\frac{11y^2}{8}\right)\right|_1^{\frac{20}{11}}=\frac{81}{88}.\end{aligned}$$

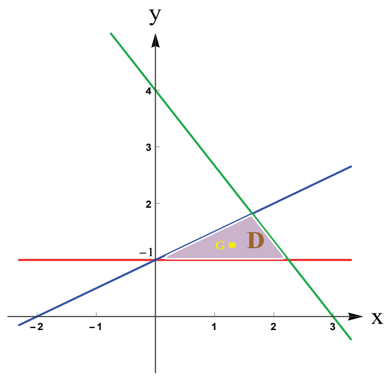

Figura 26

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{88}{81}\iint_D xdxdy = \frac{88}{81}\int_1^{\frac{20}{11}} dy \int_{2y-2}^{3-\frac{3y}{4}} xdx = \frac{88}{81}\int_1^{\frac{20}{11}} \frac{x^2}{2}\Bigg|_{2y-2}^{3-\frac{3y}{4}} dy \\
&= \frac{88}{81}\int_1^{\frac{20}{11}}\left(\frac{5}{2}+\frac{7y}{4}-\frac{55y^2}{32}\right)dy \\
&= \frac{88}{81}\left(\frac{5y}{2}+\frac{7y^2}{8}-\frac{55y^3}{96}\right)\Bigg|_1^{\frac{20}{11}} = \frac{88}{81}\cdot\frac{4617}{3872} = 1.2954.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{88}{81}\iint_D ydxdy = \frac{88}{81}\int_1^{\frac{20}{11}} dy \int_{2y-2}^{3-\frac{3y}{4}} ydx = \frac{88}{81}\int_1^{\frac{20}{11}} xy\Bigg|_{2y-2}^{3-\frac{3y}{4}} dy \\
&= \frac{88}{81}\int_1^{\frac{20}{11}} y\left(5-\frac{11y}{4}\right)dy \\
&= \frac{88}{81}\left(\frac{5y^2}{2}-\frac{11y^3}{12}\right)\Bigg|_1^{\frac{20}{11}} = \frac{88}{81}\cdot\frac{567}{484} = 1,2727.
\end{aligned}$$

14. *Să se determine coordonatele centrului de greutate ale unei lamele de densitate superficială $\rho(x,y) = y$, ce ia forma domeniului plan mărginită de curbele $y = 3 - x^2$, $x = 2y$.*

Soluţie. Lamela are forma domeniului D din figura 27.

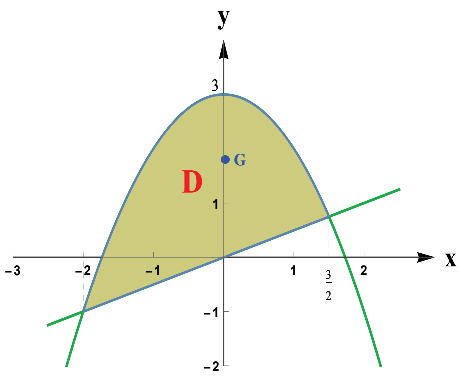

Figura 27

Se observă că domeniul D este simplu în raport cu Oy, deci poate fi scris sub forma

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 |\ x\in\left[-2,\frac{3}{2}\right], y\in\left[\frac{x}{2}, 3-x^2\right]\right\}.$$

Masa şi centrul de greutate ale unei lamele de densitate $\rho(x,y)$ care ia forma domeniului D se calculează cu formulele

$$\mathcal{M} = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy, \quad x_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy,$$
$$y_G = \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Rezultă,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \int_{-2}^{\frac{3}{2}} dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x^2} ydy = \int_{-2}^{\frac{3}{2}} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{3-x^2} dx \\
&= \int_{-2}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{2} - \frac{25x^2}{8} + \frac{x^4}{2}\right) dx = \left(\frac{9x}{2} - \frac{25x^3}{24} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_{-2}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{3773}{480} \simeq 7,86.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_G &= \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-2}^{\frac{3}{2}} dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x^2} xydy = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-2}^{\frac{3}{2}} x\frac{y^2}{2}\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{3-x^2} dx \\
&= \frac{1}{\mathcal{M}} \int\limits_{-2}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{2}x - \frac{25x^3}{8} + \frac{x^5}{2}\right) dx = \frac{1}{\mathcal{M}} \left(\frac{9x^2}{4} - \frac{25x^4}{32} + \frac{x^6}{12}\right)\Bigg|_{-2}^{\frac{3}{2}} \\
&= \frac{480}{3773}\frac{343}{1536} = \frac{5}{176} \simeq 0,028.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{\mathcal{M}} \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-2}^{\frac{3}{2}} dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x^2} y^2dy \\
&= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-2}^{\frac{3}{2}} \frac{xy^3}{3}\Bigg|_{\frac{x}{2}}^{3-x^2} dx = \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{-2}^{\frac{3}{2}} \left(9 - 9x^2 - \frac{x^3}{24} + 3x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx =
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{\mathcal{M}} \left(9x - 3x^3 - \frac{x^4}{96} + \frac{3x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{-2}^{\frac{3}{2}} = \frac{480}{3773}\frac{36701}{2560} = \frac{321}{176} \simeq 1,82.$$

15. *Să se calculeze momentele de inerţie ale unei lamele planeîn raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea în următoarele situaţii:*

i) *lamela este omogenă şi mărginită de curbele* $y = x^2$ *şi* $x = y^2$,

ii) *lamela are densitatea* $\rho(x, y) = 2x+y$ *şi este mărginită de dreptele* $x = 0,\ y = 0,\ 2x + 3y + 6 = 0$.

Soluţie. Momentele de inerţie în raport cu axele de coordonate şi în raport cu originea ale unei lamele plane de densitate $\rho(x, y)$, sunt date de formulele

$$M_{Ox} = \iint_D \rho(x,y)y^2 dxdy,\ M_{Oy} = \iint_D \rho(x,y)x^2 dxdy,$$

$$M_O = \iint_D \rho(x,y)(x^2+y^2)dxdy.$$

i) Lamela are forma domeniului D din figura 28.

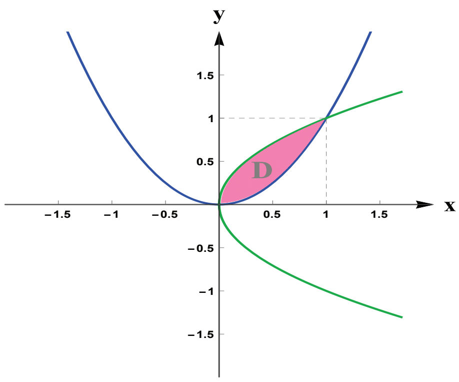

Figura 28

Domeniul D poate fi scris sub forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in [0,1], y \in [x^2, \sqrt{x}]\}.$$

În cazul nostru placa a fost presupusă având densitatea 1, deci avem

$$\begin{aligned} M_{Ox} &= \iint_D y^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2 dy = \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x^6}{3}\right) dx = \frac{1}{3}\left(\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{35}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{Oy} &= \iint\limits_D x^2 dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2 dy = \int_0^1 x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{3}{35},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_O &= \iint\limits_D (x^2+y^2) dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y^2) dy \\
&= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 x^2 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3} \right) dx \\
&= \left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{15} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{6}{35}.
\end{aligned}$$

Observaţie. *Folosind proprietăţile integralei duble se obţine uşor*

$$M_O = M_{Ox} + M_{Oy} = \frac{3}{35} + \frac{3}{35} = \frac{6}{65}.$$

ii) Lamela are forma domeniului D din figura 29. Domeniul D poate fi scris sub forma

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \in [-3,0], y \in \left[-2 - \frac{2x}{3}, 0 \right] \right\},$$

sau echivalent

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ y \in [-2,0], x \in \left[-3 - \frac{3y}{2}, 0 \right] \right\}.$$

Avem

$$\begin{aligned}
M_{Ox} &= \iint\limits_D y^2(2x+y) dxdy = \int_{-2}^0 dy \int_{-3-\frac{3y}{2}}^0 (y^3 + 2xy^2) dx \\
&= \int_{-2}^0 (y^3 x + x^2 y^2) \Bigg|_{-3-\frac{3y}{2}}^{0} dy = \int\limits_{-2}^{0} \left(-9y^2 - 6y^3 - \frac{3y^4}{4} \right) dy \\
&= \left(-3y^3 - \frac{3y^4}{2} - \frac{3y^5}{20} \right) \Bigg|_{-2}^0 dx = -\frac{24}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Oy} &= \iint\limits_D x^2(2x+y)dxdy = \int_{-3}^{0} dx \int_{-2-\frac{2x}{3}}^{0} (2x^3+x^2y)dy \\ &= \int_{-3}^{0} \left(2x^3y + x^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-2-\frac{2x}{3}}^{0} dx = \int\limits_{-3}^{0} \left(-2x^2 + \frac{8x^3}{3} + \frac{10x^4}{9}\right) dx \\ &= \left(-\frac{2x^3}{3} + \frac{2x^4}{4} + \frac{2x^5}{9}\right)\Bigg|_{-3}^{0} dx = -18. \end{aligned}$$

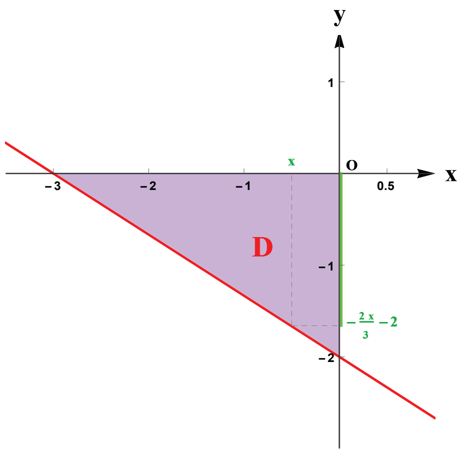

Figura 29

Atunci momentul de inerţie în raport cu centrul axelor este

$$M_O = -\frac{114}{5}.$$

Bibliografie

[1] Apostol T, *Calculus, Vol.I*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1967;

[2] Apostol T, *Calculus, Vol.II*, Ed. John Wiley and Sons, New York, 1969;

[3] Aramă L., Morozan T., *Probleme de calcul diferenţial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978;

[4] Drăguşin L., Drăguşin C., Radu C., *Calcul integral şi ecuaţii diferenţiale, exerciţii şi probleme,* Ed. Du Style, Bucureşti, 1996;

[5] Fihtenholţ G.M., *Curs de calcul diferenţial şi integral*, Vol. III, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1965;

[6] Găină S., Câmpu E., Bucur Gh., *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral, Vol. II, III,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1966;

[7] J. Marsden, A. Weinstein, *Calculus III*, Springer-Verlag, New-York, 1985;

[8] Megan M., *Bazele Analizei Matematice,* Vol. I, II, Editura Mirton, Timişoara, 1999;

[9] Postolache M., Bontaş S., Gîrţu M., *Calcul integral cu elemente de teoria câm purilor. Exerciţii şi probleme rezolvate. Exemple ilustrative*, Ed. Fair Partners, Bucureşti, 2000.