Curs 1: Introducere în Teoria Probabilităților

Conf.dr. Maria Jivulescu

Departamentul de Matematică
UPT

Cuprins

- Limbajul Teoriei Probabilitatilor (TP)
- Spatiul discret de probabilitate
- Definitia axiomatica a probabilitatii
- Proprietati ale probabilitatii

Limbajul Teoriei Probabilitatilor

Experimente aleatoare= experimentele care pot avea rezultate diferite in functie de o serie de circumstante si rezultatele nu pot fi cunoscute inaintea realizarii experimentului.

- aruncarea unei monede/zar;
- înregistrarea numarului de cereri de acces la un server WEB, intr-un interval de timp $(0, t]$ (experimentul consta in observarea fluxului sosirii cererilor de acces);
- observarea numarului de comparatii intr-un algoritm de sortare;
- observarea timpului in care CPU raspunde la o comanda de la un terminal interactiv;
- observarea timpului de viata (de buna functionare pana la prima cadere) a unei componente electronice;

Limbajul Teoriei Probabilitatilor

Notiuni in TP

- Experiment aleator
- Realizare (outcome)=rezultat exp. aleator
- Multimea tuturor realizarilor(notat cu Ω) (Sample space);
- Eveniment= o colectie de realizari (o submultime a lui Ω)
- Eveniment elementar=un element al lui Ω
- Eveniment imposibil ($\emptyset$)
- Eveniment sigur

Exemplu

- Aruncarea unui zar
- un numar din $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\Omega = S$
- A=se obtine un numar par $A = \{2, 4, 6\}$
- B=se obtine numarul 3
- C= se obtine un numar negativ
- Ω

Notiuni in TP

- Experiment aleator
- Realizare=rezultat exp. aleator
- Multimea tuturor realizarilor;
- Eveniment= o colectie de realizari (o submultime a lui Ω)
- Eveniment elementar=un element al lui Ω
- Eveniment imposibil ($\emptyset$)
- Eveniment sigur (Ω)

Exemplu

- Generarea unui numar aleator in algoritmul probabilist
- un numar din $S = \{1, 2, \ldots, 100d\}$
- $\Omega = S$
- A=se obtine un numar par $A = \{2, 4, 6, \ldots\}$
- B=se obtine numarul 3
- C= se obtine un numar negativ
- $\Omega = S = \{1, 2, \ldots, 100d\}$

Evenimente versus multimi

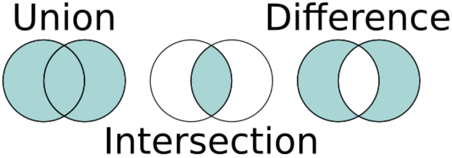
Evenimente

- Eveniment sigur=sample space
- Eveniment imposibil
- Eveniment elementar
- Eveniment contrar=nerealizarea lui A
- reuniunea a doua evenimente $A \cup B$=realizarea ev A **sau** realizarea lui B
- intersectia a doua evenimente $A \cap B$=realizarea lui A **și** B

Multimi

- Ω
- $\emptyset$
- $A \subset \Omega$
- $C_\Omega A$ sau $\bar{A}$
- $A \cup B$
- $A \cap B$

Operații cu mulțimi



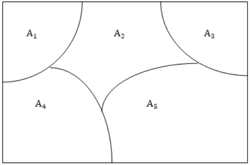
- $A \cup B = \{x/x \in A$ **sau** $x \in B\} \Leftrightarrow x$ se află în **cel puțin** una dintre mulțimi
- $A \cap B = \{x/x \in A$ **și** $x \in B\} \Leftrightarrow x$ se află în **fiecare** dintre mulțimi
- $C_\Omega A$ sau $\bar{A} = \{x/x \in \Omega$ și $x \notin A\}$
- $A \setminus B = \{x/x \in A$ dar $x \notin B\}$
- $A \setminus B \neq B \setminus A$
- $A \setminus B = A \cap CB$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Operații cu mulțimi

- Două mulțimi A și B sunt **disjuncte** dacă $A \cap B = \emptyset$
- O mulțime de mulțimi $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se numește **disjunctă** dacă oricare două mulțimi sunt disjuncte, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

O mulțime de mulțimi $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ se spune că formează o **partiție a lui** Ω dacă

- nu se suprapun: oricare două mulțimi sunt disjuncte, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$
- reprezinta o descompunere a lui Ω, i.e. $\Omega = \cup_i A_i$



Operații cu mulțimi

- Comutativitatea
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- asociativitatea
  - $(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$
  - $(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$
- distributivitatea
  - $A \cap (B \cup D) = (A \cap B) \cup (A \cap D)$
  - $A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$
- Legile lui de Morgan
  - $C(A \cup B) = CA \cap CB$
  - $C(A \cap B) = CA \cup CB$

Evenimente versus mulțimi

Probabilitatea unui eveniment A este un număr notat $P(A) \in [0, 1]$ si reprezinta sansa de a se produce acest eveniment.

Mesaj: probabilitatea este o măsură a mulțimii A

- $\emptyset$-nu conține niciun număr, deci ne așteptăm ca $P(\emptyset) = 0$
- Ω-acoperă toate realizările unui experiment aleator, deci ne așteptăm ca $P(\Omega) = 1$

Spațiu discret de probabilitate

Vom considera experimente aleatoare in care numarul realizarilor este finit sau infinit numarabil, adica multimea realizarilor este in corespondenta bijectiva cu multimea numerelor naturale.

Exista doua modalitati de a determina probabilitatea unui eveniment:

a) **Cazul: multimea observabilelor este finita si toate realizarile experimentului sunt egal probabile**

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

De exemplu: In algoritmul probabilist de verificare a identitatii a doua polinoame, fiecare alegere a unui numar intreg r este facuta uniform, aleator, deci toate evenimentele simple au loc cu aceeasi probabilitate. Avem $|\Omega| = 100d$, deci probabilitatea unui eveniment simplu este $1/100d$.

Spațiu discret de probabilitate

b) **Cazul: experiment aleator cu un numar finit de realizari ce nu sunt egal probabile.**
In inginerie: se repeta experimentul de n ori, in acelea si conditii

$$P(A) \approx \frac{k}{n}$$

$k-$ numarul cazurilor in care evenimentul de interes s-a produs,
n- numarul experimentelor.

De exemplu: un algoritm genereaza biti aleatori (deci simuleaza doua evenimente posibile: bitul 0 si bitul 1).
Se genereaza $n = 1000$, iar numarul bitilor de 1 generati este, de exemplu, $k(1000) = 335$.

Atunci, probabilitatea de a genera bitul 1 este $335/1000 \approx 1/3$.

Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$

Spațiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este format din

- Spațiul tuturor realizărilor unui experiment Ω
  - cazul discret: aruncarea unei monede $\Omega = \{C, S\}$;
  - cazul continuu: timpul de așteptare într-o stație de autobuz $\Omega = \{t/0 \leq t \leq 30\}$
- eveniment=o submulțime a lui Ω
- Spațiu de evenimente $\mathcal{K}$-mulțimea tuturor evenimentelor asociate unui experiment
- Probabilitatea P-o funcție care atribuie un număr unui eveniment studiat; acest număr măsoara mărimea mulțimii A (care este asociata evenimentului studiat)

Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$

Definitie

Fie o experienta aleatoare, iar $\mathcal{K}$-familia tuturor evenimentelor asociate acestui experiment aleator, $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, care verifică

- $\Omega \in \mathcal{K}$;
- $A \in \mathcal{K} \Rightarrow \complement_{\Omega} A \in \mathcal{K}$
- $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{K}$;

Aceasta familie se numește **familie admisibilă de evenimente**.

Daca $\mathcal{K}$ este o familie admisibila de evenimente, atunci:

a) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{K}$;

b) $A, B \in \mathcal{K} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{K}$.

Evenimente incompatibile sau mutual exclusive (se exclud unul pe altul)$=$ producerea lor simultana este imposibila, i. e. $A \cap B = \emptyset$.

Definitia axiomatica a probabilitatii

Definitie

Fie $\mathcal{K}$ o familie admisibila de evenimente asociate multimii Ω.
O **probabilitate** pe $\mathcal{K}$ este o functie $P : \mathcal{K} \to [0, 1]$ ce verifica conditiile:

1) $P(\Omega) = 1$.
2) Daca $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{K}$ sunt evenimente doua cate doua mutual exclusive, adica $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, atunci

$$P(\cup_{i\geq 1} A_i) = \sum_{i\geq 1} P(A_i)$$

In cazul discret, functia de probabilitate este unic definita de probabilitatile evenimentelor simple.
Tripletul $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ se numeste **spatiu de probabilitate**.

Proprietati ale probabilitatii

Propozitie

a) Daca $A \in \mathcal{K}$ atunci
$$P(\complement_{\Omega} A) = 1 - P(A)$$
In consecinta, $P(\emptyset) = 0$.

b) Daca $A, B \in \mathcal{K}$ si $A \cap B \neq \emptyset$, atunci
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
.

c) Daca $A, B \in \mathcal{K}$ si $A \subseteq B$, atunci $P(A) \leq P(B)$.

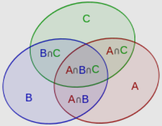
c) Daca $A, B \in \mathcal{K}$, atunci $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$(**inegalitatea lui Boole**)

Propozitie

Fie 3 evenimente arbitrare A_1, A_2, A_3. Atunci,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$$

$$-P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).$$



Observatii

1) Generalizarea la n-evenimente se gaseste in curs;
2) Daca evenimentele sunt mutual exclusive, atunci $P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Concluzii

Ev. A	Multime A	$P(A) \in [0,1]$
Ev. sigur	Ω	1
Ev. imposibil	$\emptyset$	0
Ev. contrar lui A	$\complement_\Omega A$	$P(\complement_\Omega A) = 1 - P(A)$
Ev. reuniune	$A \cup B$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Ev. intersectie	$A \cap B$	$P(A \cap B) =?$
Ev. mutual exclusive	$A \cap B = \emptyset$	$P(A \cap B) = 0$
Ev. diferenta	$A \setminus B$	$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

Vă mulțumesc pentru atenție!
Întrebări?