Seminar 11

Partea 2: Inegalităţile Markov şi Cebîsev.

Inegalitatea Markov:

Fie X o v.a. astfel încât $X \geq 0$, adică X ia valori nenegative. Dacă X are medie finită, atunci, pentru $a > 0$, avem

$$P(X \geq a) \leq \frac{M(X)}{a}.$$

Inegalitatea Cebîşev

Fie X o v.a. arbitrară de medie $M(X)$ şi dispersie $\sigma^2(X)$ finite. Atunci:

$$P(|X - M(X)| \geq a) \leq \frac{\sigma^2(X)}{a^2}, \ a > 0.$$

11.1 Probleme rezolvate.

1. Fie $X \sim Bin(n,p)$, unde $p = 1/2$. Folosind inegalităţile Markov şi Cebîsev, să se evalueze probabilitatea $P(X \geq \frac{3n}{4})$. Să se decidă care dintre cele două inegalităţi oferă o margine superioară mai bună a acestei probabilităţi.

Rezolvare:

Variabila aleatoare $X \sim Bin(n,p)$, deci $M(X) = np = \frac{n}{2}$, $\sigma^2(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$.
Din inegalitatea Markov, pentru $a = \frac{3n}{4}$, se obţine

$$P(X \geq \frac{3n}{4}) \leq \frac{n/2}{3n/4} = \frac{2}{3}.$$

Pentru a aplica inegalitatea Cebîşev vom face următoarele transformări:

$$P(X \geq \frac{3n}{4}) = P(X - \frac{n}{2} \geq \frac{3n}{4} - \frac{n}{2}) = P(X - \frac{n}{2} \geq \frac{n}{4}) \leq P(|X - \frac{n}{2}| \geq \frac{n}{4})$$

Prin aplicarea inegalităţii Cebîşev pentru $a = \frac{3n}{4}$ avem:

$$P(X \geq \frac{3n}{4}) \leq \frac{4}{n}.$$

Se observă că inegalitatea Markov oferă o margine mai slabă, care este constantă şi care nu se modifică în funcţie de n. Marginea superioară oferită de către inegalitatea Cebîşev, anume $\frac{4}{n}$, converge către 0, pentru $n \to \infty$. Cea mai bună margine a acestei probabilităţi este oferită de către inegalităţile de tip Chernoff, şi anume limite de tip exponenţial mergând către 0:

$$P(X \geq \frac{3n}{4}) \leq (\frac{16}{27})^n.$$

11.2 Probleme propuse

2. Fie $X \sim Bin(n,p)$, unde . Folosind inegalităţile Markov şi Cebîsev, să se evalueze probabilitatea $P(X \geq \alpha n)$, $p < \alpha < 1$. Să se decidă care dintre cele două inegalităţi oferă o margine mai bună a acestei probabilităţi.

3. Fie $X_i, i = 1,2,3$ trei variabile aleatoare de tip binomial, $X_i \sim Bin(n,p_i), i = 1,2,3$. Să se folosească inegalitatea Markov pentru a determina o mărgine superioară a probabilităţii $P(Z \geq \alpha n)$, $p < \alpha < 1$, unde $Z = \sum_{i=1}^{3} X_i$. Să se studieze cazul particular $p_i = p$, iar $\alpha = 2p$.

4. Fie $X \sim Exp(\theta)$. Folosind inegalitatea Markov să se determine o margine superioară a probabilităţii $P(X \geq a)$, $a > 0$.

5. Fie $X \sim Exp(\theta)$. Folosind inegalitatea Cebîsev să se determine o margine superioară a probabilităţii $P(|X - M(X)| \geq a)$, $a > 0$.

6. O pagină Web este accesată zilnic în medie într-o zi de 25×10^3 ori pe zi, dar proprietarul paginii susţine că în 1% din zile ea este accesată de mai mult de 5×10^4 ori. Să se determine abaterea standard (faţă de medie) a numărului de accesări zilnice.
Indicaţie: Dacă X este v.a. ce dă numărul de accesări pe zi, atunci $M(X) = 25 times 10^3$, iar $P(X > 5 \times 10^4) = 0.01$. Deci, $-0.01 = P(X > 5 \times 10^4) = P(X - 25000 > 2500) = P(|X - 25000| > 25000) = P(|X - 25000| > 25001)$. Din inegalitatea Cebâev se obţine $0.01 = P(|X - M(X)| > 25001) \leq \frac{\sigma^2(X)}{2501^2}$. Deci, $\sigma \geq 2500.1$ Deci, faţa de media numărului de accesări zilnice se înregistreaza cel puţin 2500 de accesări.