Seminar 3

Probabilităţi condiţionate. Evenimente independente.

3.1 Probleme rezolvate

1. O cutie conţine 20 chip-uri de memorie din care 5 sunt defecte. Se aleg 3 la întâmplare. Să se calculeze a) probabilitatea ca toate trei să fie defecte; b) exact un chip să fie defect.

Rezolvare: Notăm cu E_i evenimentul "al i-lea chip ales este defect", $i = \overline{1,3}$. La a) trebuie calculată probabilitatea:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)$$

Dar $P(E_1) = 5/20 = 1/4$. $P(E_2|E_1)$ este probabilitatea ca al doilea chip extras să fie defect ştiind că şi primul a fost defect. După prima alegere au rămas 4 chipuri defecte din 19, deci $P(E_2|E_1) = 4/19$. Analog $P(E_3|E_1 \cap E_2) = 3/18$ şi deci:

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{5}{20}\frac{4}{19}\frac{3}{18}$$

b) Fie D_i evenimentul "al i-lea chip ales este defect" şi B_i evenimentul "al i-lea chip ales este bun". Prin urmare trebuie să calculăm:

$$P((D_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap D_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap B_2 \cap D_3)) = P(D_1 \cap B_2 \cap B_3)+$$
$$+P(B_1 \cap D_2 \cap B_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap D_3)$$

Fiecare din probabilităţile din membrul drept al ultimei relaţii se calculează aplicând formula de condiţionare iterată.

2. a) Fie A şi B două evenimente independente într-un experiment. Ştiind că $P(A) = 0.25, P(B) = 0.3$ să se calculeze $P(A \cup B)$, $P_B(\complement A)$ şi $P(A \cap \complement B)$.

Rezolvare:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) =$$
$$= 0.25 + 0.3 - 0.075 = 0.475$$

$P_B(\complement A) = 1 - P_B(A)$. Evenimentele A şi B fiind independente $P_B(A) = P(A) = 0.25$. Deci $P_B(\complement A) = 1 - 0.25 = 0.75$.

Cum şi evenimentele A şi $\complement B$ sunt independente, rezultă că: $P(A \cap \complement B) = P(A) \cdot P(\complement B) = P(A)(1 - P(B)) = 0.25 \cdot 0.7 = 0.175$.

3. Un proiect constă din trei sarcini independente şi probabilităţile ca aceste sarcini să fie îndeplinite la timp sunt, respectiv: 0.9, 0.8, 0.85. Să se calculeze probabilitatea:
a) ca toate cele trei sarcini să fie îndeplinite la timp.
b) ca primele două să fie îndeplinite la timp, iar a treia nu.
c) cel puţin una din sarcini să fie îndeplinită la timp.

Rezolvare: Fie A_i, $i = 1, 2, 3$, evenimentul "sarcina i este îndeplinită la timp".
a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = (0.9)(0.8)(0.85)$;
b) Evenimentul a cărui probabilitate se cere la b) este $A_1 \cap A_2 \cap \complement A_3$. Evenimentele A_1, A_2, A_3 fiind independente, sunt independente şi evenimentele: $A_1, A_2, \complement A_3$. Deci

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \complement A_3) = P(A_1)P(A_2)P(\complement A_3) = 0.9, 0.8(1 - 0.85)$$

c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.9 + 0.8 + 0.85 - (0.9)(0.8) - (0.9)(0.85) - (0.8)(0.85) + (0.9)(0.8)(0.85)$.

Mai simplu,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 1 - P(\complement(A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3) = \\ &= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3) \\ &= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) \end{aligned}$$

3.2 Probleme propuse

4. Un disc din plastic este analizat din două puncte de vedere: a rezistenţei la şoc şi al rezistentei la zgârieturi. Rezultatele analizei a 100 de discuri sunt prezentate în tabelul alăturat.

		rezistenţei la şoc	
		bună	scăzută
rezistenţei la zgârieturi	bună	70	9
	scăzută	16	5

Se definesc evenimentele: A: discul are rezistenţa buna la şoc;
A: discul are rezistenţa buna la zgârieturi. Să se determine următoarele probabilităţi: $P(A), P(B), P(A|B)$ şi $P(B|A)$. Sunt evenimentele A şi B independente?

5. Într-o lot de 100 produse sunt 5 cu defecţiuni. Se aleg aleator 3 produse din acest lot. Să se determine probabilitatea ca nici unul dintre produsele alese să fie cu defect.

6. Se consideră evenimentele A şi B astfel încât $P(A|B) = 0.4$ şi $P(B) = 0.5$. Să se determine $P(A \cap B)$ şi $P(CA \cap B)$.

7. Se consideră evenimentele A şi B astfel încât $P(A|B) = 0.2, P(B) = 0.8$ şi $P(A|CB) = 0.3$. Să se determine $P(A)$.

8. Intr-un birou se cumpără un nou computer. Firma producătoare menţionează în certificatul de garanţie că există probabilitatea de 5% ca acest calculator să se defecteze în primul an. Dacă nu s-a defectat în primul an, atunci cu probabilitate de 10% se poate defecta în al doilea an. Dacă nu s-a defectat în primii doi ani de funcţionare, atunci cu probabilitate de 30% s-ar putea defecta în al treilea an. Să se calculeze:
a) probabilitatea să nu se defecteze în primii doi ani;
b) probabilitatea să nu se defecteze în primii trei ani.

9. Un student dă un test grilă ce constă din 5 întrebări, fiecare având asociate câte 3 răspunsuri. Dacă studentul încercuieşte la întâmplare răspunsul la fiecare din cele 5 întrebări, să se determine:
a) probabilitatea de a da exact un răspuns corect;
b) probabilitatea de a da cel puţin un răspuns corect.
c) probabilitatea de a da niciun raspuns corect
d) probabilitatea de a da cel mult un raspuns corect.

Indicatie: Se va rezolva folosind faptul că răspunsul la o întrebare este independent de raspunsul la altă întrebare.

10. Dacă A şi B sunt două evenimente independente şi $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, să se calculeze $P(A \cup B)$ şi $P(A \setminus B)$.