Curs 5: Distributii clasice de probabilitate

Conf.dr. Maria Jivulescu

Departamentul de Matematică
UPT

Recapitulare: Variabile aleatoare discrete

O varb. aleatoare este descrisă prin tabelul de distribuție

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

unde: x_i-valorile lui X, iar , $p_i = P(X = x_i), 0 \le p_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

sau p.m.f.(probability mass function)

$$p(x) = \begin{cases} p_1, & \text{daca } x = x_1 \\ p_2, & \text{daca } x = x_2 \\ \ldots & \\ p_n, & \text{daca } x = x_n \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

sau c.d.f.(cumulative distrb. function=funcția de repartitie)

$$F_X(x) := P(X \le x)$$

Cuprins curs: Distributii clasice de probabilitate

Există tabele de distribuție ce pot descrie exp. aleatoare de un anumit tip?

- Distribuția Bernoulli
- Distribuția binomială
- Distribuția geometrică
- Distribuția Poisson

Distribuția Bernoulli

Experiment Bernoulli= aruncarea monedei: succesul fiind, de exemplu apariția feței ban, iar eșecul: apariția stemei.

- fiecare încercare are doar două rezultate mutual exclusive, unul numit succes (notat cu 1) și celălalt eșec (notat cu 0);
- X- variabila aleatoare ce înregistrează rezultatul unei încercări;
- p- probabilitatea succesului ($0 < p < 1$), iar q-prob eșecului

$$p = P(X = 1), \quad q = 1 - p = P(X = 0);$$

- $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$ sau $p(x) = \begin{cases} p, & \text{daca } x = 1 \\ 1-p, & \text{daca } x = 0 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$
- $M(X) = p$; $\sigma^2(X) = p(1-p)$.
- notație: $X \sim Bernoulli(p)$
- în cazul aruncării monedei: $X \sim Bernoulli(1/2)$

Run de biți

Distribuția Bernoulli se folosește în generarea de șiruri de biți aleatori.
Run-uri de biți=o succesiune de biți identici într-un șir de n biți rezultați din simularea de n ori a unei variabilei aleatoare X distribuită Bernoulli.
De exemplu în șirul de biți $0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0$, avem următoarele run-uri de biți 1:

$$11, \quad 1, \quad 111$$

În analiza șirurilor de biți aleatori folosiți în probleme de securitate (criptografie) este foarte util numărul mediu de run-uri de biți din șir.
Se poate demonstra[1]

$$M(N) = p + (n-1)(1-p)p$$

[1] vezi notite curs 5

Distribuția binomială

Experiment Bernoulli repetat de n ori $\Rightarrow$ **variabila aleatoare binomială**

- O încercare este o etapă a experimentului, ce are două rezultate mutual exclusive: unul numit *succes* și celălalt *eșec*.
- Încercările sunt independente;
- Pentru fiecare încercare probabilitatea succesului este aceeași, p;

Exemplul clasic: aruncarea de n ori a unei monede;

- succesul: cade banul(B), eșecul, cade stema (S).
- $p = 1/2$
- X - înregistrează numărul de fețe=ban ce se obțin din n aruncări.
- X se spune că este distribuită binomial de parametrii n, p.
- $D_X = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$
- Ne intereseaza $p_k = P(X = k)$

Distribuția binomială: aruncarea monedei

Cazul $n = 3$, $\Omega = \{(\text{Aruncarea } 1, \text{Aruncarea } 2, \text{Aruncarea } 3)\}$, avem:

- nu se obține banul la nicio aruncare $\leftrightarrow$ se obține (S,S,S);
  $P(X = 0) = \frac{1}{2\cdot2\cdot2} = C_3^0(\frac{1}{2})^0(\frac{1}{2})^3$
- se obține banul la o aruncare din cele trei $\leftrightarrow$ (B,S,S) sau (S,B,S) sau (S, S, B);
  $P(X = 1) = \frac{3}{2\cdot2\cdot2} = C_3^1(\frac{1}{2})^1(\frac{1}{2})^2$
- se obține banul la două aruncări din cele trei $\leftrightarrow$ (B,B,S) sau (S,B,B) sau (B, S, B);
  $P(X = 2) = \frac{3}{2\cdot2\cdot2} = C_3^2(\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2})^1$
- se obține banul la toate cele 3 aruncări $\leftrightarrow$ (B,B,B)
  $P(X = 3) = \frac{1}{2\cdot2\cdot2} = C_3^3(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^0$

Deci,

$$X = \begin{pmatrix} k \\ C_3^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3, p = 1/2$$

Distribuția binomială

Definiție

Variabilă aleatoare binomială este o variabilă discretă având distribuția de probabilitate: $X = \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$

- $\mathrm{Bin}(n, p)$-clasa variabilelor aleatoare binomiale, asociate unor experimente Bernoulli cu n încercări și probabilitatea p a unui succes într-o încercare
- Notație $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$
- n și p se numesc parametrii distribuției binomiale.

Distribuția binomială

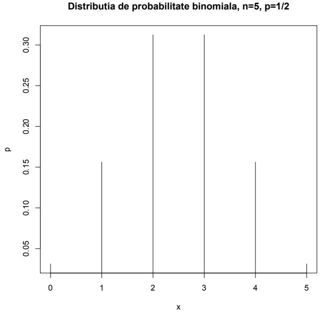


Figure: Vizualizarea distribuției binomiale

Ce se întâmplă dacă am o monedă falsă, în care Banul apare cu $p = 2/3$?

Pentru mai multe vizualizări ale distribuției binomiale vizitați `https://mathlets.org/mathlets/`

Distrib. binomială ca o sumă de varb. Bernoulli

- Mulțimea valorilor $D = \{0, 1, 2, \dots, n\}$
- $P(X = k) = ?$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ (probabilitatea ca în n încercări să înregistrăm k succese)
- Fie X_i variabila aleatoare Bernoulli, ce înregistrează rezultatul încercării i. Variabilel X_i sunt identic distribuite și independente:

$$X_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1-p \end{pmatrix}, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

- Vectorul aleator $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ are distribuția de probabilitate:

$$\begin{aligned} P((X_1, X_2, \dots, X_n) &= (i_1, i_2, \dots, i_n))) = P(X_1 = i_1, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_1 = i_1)P(X_2 = i_2)\cdots P(X_n = i_n) \\ &= p^k(1-p)^{n-k}, \end{aligned}$$

k este numărul de valori 1 în n–lista de biți $(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

- Caz particular: $n = 3$
- Numărul de succese în $n = 3$ încercări este $X = X_1 + X_2 + X_3$.
- suma variabilelor Bernoulli $X_1 + X_2 + X_3$ are valori în $\{0, 1, 2, 3\}$.
- De exemplu, pentru cazul $k = 2$
  $P(X_1 + X_2 + X_3 = 2) = P[(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) \cup (X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1) \cup (X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)] = C_3^2 p^2 (1 - p)$
- Probabilitatea ca în n încercări să avem k succese este:

$$\begin{aligned} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) &= P\Big(\bigcup_{\substack{(i_1, i_2, \ldots, i_n) \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k}} (X_1 = i_1, .., X_n = i_n)\Big) \\ &= \sum_{\substack{(i_1, i_2, .., i_n) \\ i_1 + i_2 + \cdots + i_n = k}} P(X_1 = i_1, .., X_n = i_n) \end{aligned}$$

  unde suma se calculează după toate n–listele de biți $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ pentru care suma biților este k (există C_n^k astfel de liste!).
- Deci,

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$$

Alte situații/distribuții interesante

De exemplu, cazul în care aruncăm o monedă până la primul succes (apariția banului).

- Efectuăm o succesiune de încercări independente ce pot avea ca rezultat, succes sau eșec;
- Fie Y variabila aleatoare ce înregistrează numărul de încercări până la primul succes, inclusiv.
- Mulțimea valorilor variabilei Y este $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;

Distribuția geometrică se definește în contextul unei experiment Bernoulli în care numărul de încercări nu este fixat apriori.

Distribuția geometrică

- Dorim să calculăm P(Y=k),$\forall$k $\in$N*;
- Evenimentul $(Y = k)$ se exprimă astfel

$$(Y = k) = (X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1)$$

- Dacă notăm cu p probabilitatea succesului, atunci: $P(Y = k) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)\cdots P(X_{k-1} = 0)P(X_k = 1) = (1-p)^{k-1}p$
- Fie X_i rezultatul celei de-a i-a încercări. X_i ia valoarea 1, respectiv 0 după cum în a i-a încercare rezultatul este un succes, respectiv eșec.

Distribuția geometrică

Definiție

O variabilă aleatoare Y ce are distribuția geometrică, dă numărul de încercări într-un proces Bernoulli, până se obține primul succes, *inclusiv*. Y ia o mulțime numărabilă de valori.

$$Y = \begin{pmatrix} k \\ (1-p)^{k-1}p \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*, p \in (0,1)$$

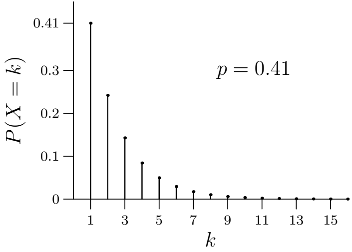
Geom(p)- clasa varb. a. cu distribuția geometrică de parametru p.

Proprietăți

Dacă $X \sim \text{Geom}(p)$, atunci $M(X) = \frac{1}{p}$ și $\sigma^2(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Distribuția geometrică

Distribuția de probabilitate geometrică, Geom($p = 0.41$),



Observație importantă

Distribuția geometrică[a] se poate defini și ca variabila W ce înregistrează numărul de eșecuri, înaintea primului succes, adică W=Y-1.

In acest caz, $D_W = \{0, 1, 2, \dots\}$, iar

$$P(W = k) = P(Y - 1 = k) = P(Y = K + 1) = (1 - p)^k p$$

[a] https://en.wikipedia.org/wiki/Geometric_distribution

Alte distribuții clasice de probabilitate?

Distribuția Poisson

Variabilă aleatoare distribuită Poisson= dă numărul de produceri ale unui eveniment rar, într-un interval de timp fixat.

Exemple clasice pentru distribuția Poisson :

- numărul de cereri de acces pe minut la un server al unei baze de date;
- număr de apeluri la o centrală telefonică într-o oră

Observații:

- evenimentele ce se pot produce în orice moment al intervalului de timp fixat sunt independente;
- presupunem că evenimentul se produce cu "intensitate" constantă: în medie, se produc λ evenimente în intervalul fixat de timp,

Rezultat

Probabilitatea ca evenimentul rar, A, să se producă de k ori într-un interval de timp fixat, este: $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$.

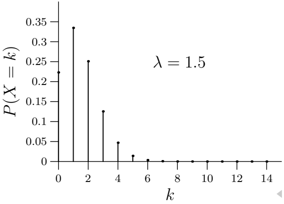
Distribuția Poisson

Definiție

Distribuția de probabilitate a variabilei aleatoare Poisson este:

$$X = \begin{pmatrix} k \\ \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \end{pmatrix} \quad k = 0, 1, 2, \ldots n, \ldots,$$

- Pois(λ) clasa variabilelor aleatoare Poisson de parametru λ.
- $X \sim$ Pois(λ). , atunci $M(X) = \lambda$ și $\sigma^2(X) = \lambda$;
- Variabilele aleatoare Poisson sunt singurele cunoscute, pentru care media este egală cu dispersia.



Distribuția Poisson este o aproximare a distribuției binomiale
($n-$ foarte mare, p-foarte mic, $\lambda = np$ constantă pozitivă)

Teoremă

Fie $X \sim B(n, p = \frac{\lambda}{n})$, cu $\lambda > 0$ fixat. Atunci, $\forall k \in \{0, 1, 2 \ldots\}$, avem

$$\lim_{n \to \infty} P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Important: In cazuri speciale (n-mare și p-mic) putem folosi distribuția Poisson, care este mult mai simplă decât distribuția binomială.

Concluzii

- Există milioane de distribuții ce apar în diferite contexte;
- Se poate folosi Wikipedia pentru alte informații (de exemplu, **distribuția hipergeometrică** `https://en.wikipedia.org/wiki/Hypergeometric_distribution` sau **distribuția uniformă** `https://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_uniform_distribution`)
- important este să reținem ce putem modela cu fiecare distribuție și să ne dezvoltăm intuiție legata de ele (chiar si prin graficul lor)

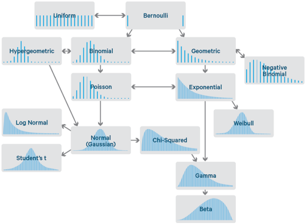


Figure: Distribuții discrete și continue