# Seminar 2

# Evenimente. Operaţii cu evenimente. Probabilităţi

## 2.1 Probleme rezolvate

**1**. Numerele de maşină constau din înşiruiri de 5 caractere: primele sunt cifre (între 0 şi 9), urmate de 3 litere (între A şi Z). Dacă un număr este selectat aleator, care este probabilitatea să fi fost selectat cel al maşinii tale?

**Rezolvare**:
Mulţimea realizarilor posibile este formata din stringuri de 5 caractere:

$$\Omega = \{(c_1c_2l_1l_2l_3) : c_i \in \{0, 1, \dots, 9\}, l_i \in \{A, B, \dots, Z\}\}.$$

Se observă că $\Omega$ este mulţimea tuturor 5-liste de aceasta formă, iar $|\Omega| = 10^2 \cdot 26^3$ Ne interesează să calculăm probabilitatea de a obţine evenimentul

$E$: aparitia numărului meu de maşină.

Probabilitatea lui $E$ este:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{1}{100 \cdot 26^3} \approx 5.7 \cdot 10^{-7}$$

**2**. Să se exprime fiecare din evenimentele următoare în funcţie de evenimentele $A, B, C$ folosind operaţiile de complementare, reuniune şi intersecţie:
a) cel puţin unul din evenimentele $A, B, C$ se produce;
b) cel mult unul din evenimentele $A, B, C$ se produce;
c) niciunul din evenimentele $A, B, C$ nu se produce;
d) toate trei evenimentele $A, B, C$ se produc;
e) exact unul din evenimentele $A, B, C$ se produce;
f) evenimentele $A, B$ se produc, dar $C$ nu se produce;
g) fie evenimentul $A$ se produce sau dacă nu, atunci nici $B$ nu se produce.
În fiecare caz să se vizualizeze diagrama Venn corespunzătoare.

**Rezolvare**:
a) $A \cup B \cup C$;
b) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C})$
c) $\overline{A \cup B \cup C}$,

d) $A \cap B \cap C$,
e) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$
f) $A \cap B \cap \overline{C}$
g) $A \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$

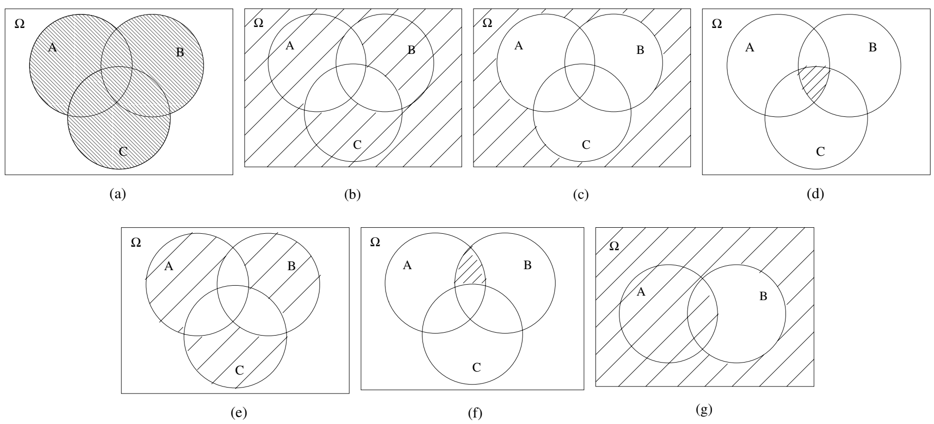


**Fig.2.1**: Evenimentul de interes este haşurat

**3**. Un student dă un test grilă ce constă din 5 întrebări, fiecare având asociate câte 3 răspunsuri. Dacă studentul încercuieşte la întâmplare răspunsul la fiecare din cele 5 întrebări, să se determine:
a) probabilitatea de a da exact un răspuns corect;
b) probabilitatea de a da cel puţin un răspuns corect.
c) probabilitatea de a da niciun raspuns corect
d) probabilitatea de a da cel mult un raspuns corect.

**Rezolvare:** Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ mulţimea întrebărilor şi $B = \{a, b, c\}$ mulţimea codurilor pentru cele 3 răspunsuri la o întrebare. Un răspuns la test este o 5–listă cu elemente din mulţimea $\{a, b, c\}$: $(r_1, r_2, \ldots, r_5) \equiv R$ unde $R$ este o aplicaţie $R : A \to B$ $R(i) = r_i$, $i = \overline{1, 5}$. Deci există $|B|^{|A|} = 3^5$ răspunsuri posibile la test.

Fie $A_i$, $i = \overline{1, 5}$, mulţimea cu un singur element, ce reprezintă litera din mulţimea $\{a, b, c\}$, corespunzătoare răspunsului corect la întrebarea $i$. Notăm cu $F_i$, $i = \overline{1, 5}$, multimea cu două elemente din $\{a, b, c\}$, corespunzătoare răspunsurilor greşite la întrebarea $i$. Variantele de răspuns cu un singur răspuns corect, sunt 5- upluri orrdonate din mulţimile:

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4 \times F_5, \quad |B_1| = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 \\
B_2 &= F_1 \times A_2 \times F_3 \times F_4 \times F_5, \quad |B_2| = 2^4 \\
B_3 &= F_1 \times F_2 \times A_3 \times F_4 \times F_5, \quad |B_3| = 2^4 \\
B_4 &= F_1 \times F_2 \times F_3 \times A_4 \times F_5, \quad |B_4| = 2^4 \\
B_5 &= F_1 \times F_2 \times F_3 \times F_4 \times A_5, \quad |B_5| = 2^4
\end{aligned}$$

Fie $E_1$ evenimentul ”dă exact un răspuns corect”. $E_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_4$ şi evenimentele $B_i$ sunt incompatibile. Deci:

$$P(E_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{2^4 \cdot 5}{3^5} = \frac{2^4 C_5^1}{3^5}$$

b) Evenimentul ”dă exact două răspunsuri corecte” este:

$$E_2 = B_{12} \cup B_{13} \cup B_{14} \cup B_{15} \cup B_{23} \cup B_{24} \cup B_{25} \cup B_{34} \cup B_{35} \cup B_{45},$$

unde

$$B_{ij} = A_i \times A_j \times F_k \times F_l \times F_m$$

cu $i < j$ şi $\{k, l, m\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{i, j\}$. Cu alte cuvinte, $B_{ij}$ este evenimentul ca răspunsul la întrebările $i$ şi $j$ să fie corect, iar la celelalte, nu. Există $C_5^2$ evenimente de tip $B_{ij}$, cu $i < j$ şi $|B_{ij}| = 2^3$. Deci:

$$P(E_2) = \frac{2^3 C_5^2}{3^5}$$

Printr-un raţionament analog, probabilitatea să dea exact 3 răspunsuri exacte este:

$$P(E_3) = \frac{2^2 C_5^3}{3^5}$$

$$P(E_4) = \frac{2 C_5^4}{3^5}$$

$$P(E_5) = \frac{C_5^5}{3^5}$$

sau mai general:

$$P(E_i) = \frac{2^{5-i} C_5^i}{3^5}$$

Astfel probabilitatea de a da cel puţin un răspuns corect este:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_4 \cup E_5) = \sum_{i=1}^{5} \frac{2^{5-i} C_5^i}{3^5}$$

**4**. O reţea de calculatoare de comutaţie are calculatoarele dispuse în locaţiile de coordonate întregi $(i, j)$ ale unui pătrat $[0, 8] \times [0, 8]$ (Fig.2.2). Orice pachet de informaţie ajunge în nodul $(0, 0)$ şi este transmis spre nodul $(8, 8)$ pe o rută prin noduri intermediare. Şi anume, fiecare calculator(router) transmite pachetul fie în sus, fie la dreapta sa. Fig.2.2 ilustrează o rută (cea colorată în rosu) conformă cu această regulă.

a) Să se calculeze probabilitatea ca router-ul din poziţia $(4, 3)$) să participe la transferul unui pachet din nodul $(0, 0)$ spre nodul $(8, 8)$.

b) Să se deducă apoi probabilitatea $p_{ij}$ ca un nod arbitrar $(i, j)$ să facă parte din ruta unui pachet prin reţea din $(0, 0)$ spre $(8, 8)$.

c) Implementaţi formula de calcul a probabilităţii $p_{ij}$ dedusă la punctul b) şi apoi scrieţi codul pentru determinarea nodului (nodurilor) $(i, j) \neq (0, 0), (8, 8)$, în care trebuie plasat (plasate) calculatoare mai puternice, pentru că probabilitatea ca nodul (nodurile) respectiv(e) să facă parte dintr-o rută este maximă.

**Rezolvare:** Primul lucru ce trebuie stabilit: Ce este rezultatul unui experiment? Este o rută de la $(0, 0)$ la $(8, 8)$. Deci evenimentul sigur este mulţimea tuturor rutelor admise. Pentru a determina cardinalul său ţinem seama de precizările din problemă.

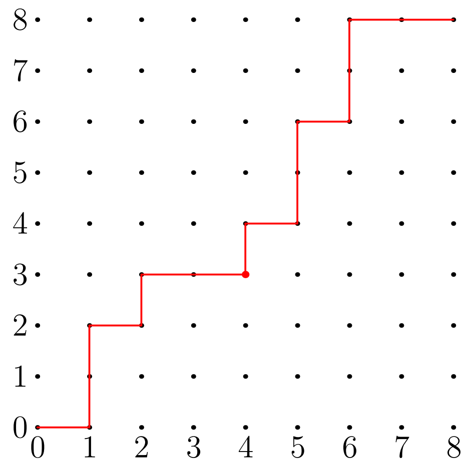


**Fig.2.2**: Dispunerea nodurilor reţelei şi o rută a unui pachet prin nodul $(4, 3)$.

Regula de transmitere a unui mesaj dintr-un nod, sus şi spre dreapta sa, ne asigură că fiecare rută de la $(0, 0)$ la $(8, 8)$ este parcursă în 16 de paşi, dintre care 8 spre dreapta şi 8 în sus. Astfel o rută poate fi codificată de un string de lungime 16 ce conţine simbolurile $d$ (dreapta) şi $s$ (sus) în număr egal, 8. Fiecare simbol corespunde unui singur pas în ruta dintr-un nod $(i, j)$. Şi anume, pasul spre dreapta până la $(i + 1, j)$ este codificat cu `d`, iar cel până la $(i, j + 1)$ cu `s`. Ruta colorată în roşu din figura figură are codul `dssdsddsdssdssdd`. Există o corespondenţă bijectivă între mulţimea $\Omega$ a rutelor de la $(0, 0)$ la $(8, 8)$ şi mulţimea stringurilor de lungime 16 ce conţin 8 simboluri `d` şi 8 simboluri `s`. Observăm că pentru un cod de rută ar fi suficient să precizăm care 8 din cele 16 poziţii conţin simbolul `d`. Astfel numărul rutelor posibile între $(0, 0)$ şi $(8, 8)$ este numărul de stringuri de lungime 16, ce conţin în 8 locaţii caracterul `d`, adică $C_{16}^{8}$.

Mulţimea $E$ a rutelor ce trec prin nodul $(4, 3)$ este produsul cartezian al mulţimii $A$ a rutelor de la $(0, 0)$ la $(4, 3)$ cu mulţimea $B$ a rutelor de la $(4, 3)$ la $(8, 8)$. Din $E = A \times B$ rezultă că, cardinalul lui $E$ este $|E| = |A| \cdot |B|$. O rută între $(0, 0)$ şi $(4, 3)$ se codifică printr-un string de lungime $7 = 4 + 3$: 4 de `d` şi 3 de `s`. Deci $|A| = C_7^4$. Analog o rută de la $(4, 3)$ la $(8, 8)$ se codifică printr-un string de lungime (8-4)+(8-3)=9. $|B| = C_9^4$. Prin urmare probabilitatea ca o rută de la $(0,0)$ la $(8,8)$ să treacă prin $(4,3)$ este:

$$p_{43} = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{C_7^4\, C_9^4}{C_{16}^8},$$

iar probabilitatea să treacă prin nodul $(i,j)$, $i,j \in \{1,2,\ldots,7\}$, este:

$$p_{ij} = \frac{C_{i+j}^{i}\, C_{8-i+8-j}^{8-i}}{C_{16}^{8}}$$

## 2.2 Probleme propuse

**5**. Un card de credit conţine 16 caractere, toate fiind numere cuprinse între 0 şi 9. Dintre acestea, doar 100 de milioane sunt valide (au fost atribuite diverselor persoane). Daca un număr de card se introduce în mod aleator (pe o pagina de cumpărături), care este probabilitatea ca el să fie al unui card activ?

**6**. Videoclipurile YouTube au adrese URL de forma

`http://www.youtube.com/watch?v=8Skd4fXYWaI`,

în care fiecare caracter din ultima suită de 11 caractere `8Skd4fXYWaI` este generat uniform şi independent, din mulţimea caracterelor formate cu literele mari şi mici ale alfabetului englezesc şi din cifrele $0,1,\ldots,9$. Să se determine care este probabilitatea generarăriii acestui string.

**7**. Într-o parcare circulară există 15 locuri şi numerotate $1,2,\ldots,15$. Când ajungi în parcare găseşti 5 locuri libere. Care este probabilitatea ca acestea să fie unul după altul?

**8**. Numerele atribuite maşinilor dintr-un judeţ este format prin alăturarea a 5 cifre, din mulţimea $\mathcal{C} = \{0,1,2,\ldots,9\}$. Poliţia generează cele 5 cifre independent şi uniform (cu aceeaşi probabilitate), iar un număr de maşină poate să înceapă cu 0.

a) Calculaţi probabilitatea de a primi un număr de maşină cu 5 cifre distincte.

b) Care este probabilitatea ca toate cele 5 cifre să fie egale?

c) Calculaţi probabilitatea ca numărul să contină două cifre egale.