Seminar 12

Lanturi Markov.

12.1 Probleme rezolvate

1. Se consideră lanţul Markov cu stările $S = \{1, 2, 3\}$ având matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.33 & 0 & 0.67 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

a) Să se deseneze graful asociat acestui lanţ Markov;

b) Să se determine $P(X_4 = 3/X_3 = 2)$.

c) Să se determine $P(X_3 = 1/X_2 = 1)$.

d) Dacă $P(X_0 = 1) = \frac{1}{3}$, să se determine $P(X_0 = 1, X_1 = 2)$.

e) Dacă $P(X_0 = 1) = \frac{1}{3}$, să se determine $P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3)$.

Rezolvare:
b) Din definiţia matricei de tranziţie asociata unui lanţ Markov se ştie ca elementele ei sunt $p_{ij} = P(X_{n+1} = j/X_n = i) = Q(i, j)$-elementul din matricea Q, situat pe linia i si coloana j. In consecinţă, $P(X_4 = 3/X_3 = 2) = p_{23} = Q(2, 3) = 0.67$.
c) In mod asemănător, $P(X_3 = 1/X_2 = 1) = p_{11} = Q(1, 1) = 0.25$.
d) Vom determina probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria $s_0 = 1, s_1 = 2$ folosind formula

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s_n) = \pi_0(s_0)Q(s_0, s_1)Q(s_1, s_2)\cdots Q(s_{n-1}, s_n),$$

unde $\pi_0(s_0) = P(X_0 = s_0)$. Această formulă se obţine folosind formula de condiţionare iterată şi proprietatea Markoviană. Avem:

$$P(X_0 = 1, X_1 = 2) = P(X_0 = 1)P(X_1 = 2/X_0 = 1) = P(X_0 = 1)Q(1, 2) = \frac{1}{3}0.5 = \frac{1}{6}.$$

e) In mod asemănător evoluţia pe traiectoria $s_0 = 1, s_1 = 2, s_2 = 3$ este

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3) &= \\ P(X_0 = 1)P(X_1 = 2/X_0 = 1)P(X_2 = 3/X_1 = 2, X_0 = 1) &= \\ P(X_0 = 1)P(X_1 = 2/X_0 = 1)P(X_2 = 3/X_1 = 2) &= \\ \pi_0(1)Q(1,2)Q(2,3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} & \end{aligned}$$

2. Se consideră un lanţ Markov cu $S = \{0, 1\}$ şi matricea de tranziţie

$$Q = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}.$$

Se presupune că sistemul se află în starea 0 la momentul $n = 0$, adică $P(X_0 = 0) = 1$.

a) Să se determine probabilitatea $P(X_4 = 1/X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0)$.

b) Să se determine probabilitatea ca sistemul să se găsească în starea 1 la momentul n=3.

c) Să se determine probabilitatea ca, dacă la momentul $n = 2$ lanţul se află în nodul 1, în următorii doi paşi să treacă în nodul 0, adică $P(X_4 = 0/X_2 = 1)$.

d) Să se studieze dacă acest lanţ este ireductibil şi aperiodic. In caz afirmativ, să se determine distribuţia sa de echilibru.

Rezolvare:
a) Vom folosi proprietatea Markoviană (lipsa parţială de memorie)

$$P(X_{n+1} = j|X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j|X_n = i).$$

Avem: $P(X_4 = 1/X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0) = P(X_4 = 1/X_3 = 0) = Q(0, 1) = \frac{1}{2}$.
b) Vom determina distribuţia iniţială a stărilor, adică

$$\pi_0 = [P(X_0 = 0) \quad P(X_0 = 1)]^T$$

Din enunţ avem că $\pi_0 = [1 \quad 0]^T$, adică lanţul pleacă din starea 0, cu probabilitate 1. Pentru a determina $P(X_3 = 1)$, vom afla distribuţia de probabilitate a stărilor la momentul $n = 3$, folosind formula

$$\pi_n^T = \pi_0^T Q^n$$

Avem $\pi_3^T = \pi_0^T Q^3 = [1 \quad 0] \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.33 & 0.67 \end{pmatrix}^3 = [\frac{29}{72} \quad \frac{43}{72}]$. Deci, $P(X_3 = 1) = \frac{43}{72}$.
c) Folosind formula $P(X_{n+k} = j/X_k = i) = Q^n(i, j)$, unde $Q(i, j)$ este elementul de pe linia i şi coloana j din matricea Q^2, avem: $P(X_4 = 0/X_2 = 1) = Q^2(1, 0) = \frac{7}{18}$.
d) Prin construcţia grafului acestui lanţ Markov se observă că este un graf tare conex

(există drum de arce între oricare două noduri). Avem că $Q(0,1) > 0$ şi $Q(1,0) > 0$ (acestea sunt probabilităţile de trecere din nodul 0 în nodul 1 şi invers). Deci, acest lanţ Markov este ireductibil.

Pentru a spune ca este şi aperiodic, este suficient să arătăm că are o singură stare aperiodică, adică de perioadă 1. Acest lucru rezultă din proprietatea lanţului ireductibil, conform căreia toate stările lui au aceeaşi perioadă. Observăm că $Q(0,0) = 0.5 > 0$, deci starea 0 este aperiodică.
In concluzie acest lanţ Markov este ireductibil şi aperiodic, deci pentru orice distribuţie iniţială π_0 şirul distribuţiilor de probabilitate la momentul n, (π_n) este convergent, iar limita acestui şir este un vector probabilist π ce nu depinde de distribuţia iniţială. Această distribuţie limită se numeşte distribuţie de echilibru şi se determină din relaţia $Q^T\pi = \pi$, sau ca fiind vectorul propriu probabilist al matricei Q^T, corespunzător valorii proprii 1.
Vom prezenta determinarea efectivă a distribuţiei de echilibru, determinând vectorul propriu al matricei Q^T ce corespunde valorii proprii $\lambda = 1$: $(Q^T - I_2)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Avem

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 1/3 \\ 1/2 & -1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3a = 2b$$

Deci, mulţimea vectorilor proprii corespunde valorii proprii $\lambda = 1$ este $S_{\lambda=1} = \{(a, 3a/2)^T\}$. De exemplu, $v = (2,3)^T$. Distribuţia de echilibru este un vector probabilist, adică un vector cu suma coordonatelor egală cu 1. In consecinţa vom normaliza vectorul v, împărţind fiecare componentă la suma coordonatelor lui, adica in acest caz la 5. Se obţine $\pi = (2/5, 3/5)^T$.

3. Se consideră lanţul Markov cu $S = \{1,2,3,4\}$ şi matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Să se studieze dacă acest lanţ este ireductibil şi aperiodic.
Rezolvare:
Din graful lantului se poate vedea ca lanţul este ireductibil (chiar daca două noduri nu comunică într-un pas, ele pot comunica în mai mulţi paşi, adică $Q^n(i,j) > 0$, pentru un $n > 1$).
Reamintim că **perioada unui nod** $i \in S$ este numărul

$$\tau_i = c.m.m.d.c.\,\{n \in \mathbb{N}^* \,|\, Q^n(i,i) > 0\}.$$

Se observă că nodul 4 aparţine unui ciclu de lungime 2 şi unuia de lungime 3. Cum cel mai mare divizor comun dintre 2 şi 3 este 1, adică $(2,3) = 1$, deci $\tau_4 = 1$. Rezultă că nodul 4 este aperiodic şi cum lanţul este ireductibil, atunci toate nodurile sunt aperiodice

12.2 Probleme propuse

4. Se consideră lanţul Markov cu stările $S = \{1, 2, 3\}$ având matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}.$$

Se presupune că $P(X_1 = 1) = 1/3$ şi $P(X_1 = 2) = 1/3$.

a) Să se deseneze graful asociat acestui lanţ Markov;

b) Să se determine $P(X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 1)$.

c) Să se determine $P(X_1 = 3, X_3 = 2)$.

5. Se consideră lanţul Markov cu stările $S = \{1, 2, 3, 4\}$ având matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 & 1/2 & 3/8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Să se studieze dacă acest lanţ este ireductibil şi aperiodic;

b) Să se determine $P(X_6 = 2|X_4 = 1)$.

c) Dacă distribuţia iniţială de probabilitatea este cea uniformă pe spaţiul stărilor, să se determine probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria **2,1,4,1,3**.

6. Se consideră lanţul Markov cu stările $S = \{1, 2, 3, 4\}$ având matricea de tranziţie:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

a) Să se studieze dacă acest lanţ este ireductibil şi aperiodic;

b) Să se determine $P(X_4 = 2|X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1)$ şi $P(X_4 = 2, X_3 = 2, X_2 = 1|X_1 = 1)$.

c) Dacă distribuţia iniţială de probabilitatea este cea uniformă pe spaţiul stărilor, să se determine probabilitatea ca lanţul să evolueze pe traiectoria **1,3,4,1,2**.

7. Se consideră un lanţ Markov corespunzător parcurgerii automate a unui document ce conţine sibolurile **L,C, S**, unde L-literă, C-cifră şi S-caractere. Matricea de tranziţie este:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Să se determine $P(X_2 = L|X_1 = C)$. Dacă se presupune că simbolul curent este o cifră, adică $X_0 = C$, să se calculeze probabilitatea ca următoarele două simboluri să fie toate de tip S.