Curs 11: Lanturi Markov

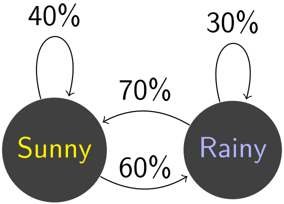
Conf.dr. Maria Jivulescu

Departamentul de Matematică
UPT

Cuprins

- Lanturile Markov: definitie, generalități
- Analiza unui lanț Markov
- Distribuția de echilibru
- Simulare
- Lanțuri Markov ireductibile și aperiodice

Lantul Markov ce descrie prognoza meteo



Lanturi Markov: definiție

- **spațiul stărilor sau al nodurilor unei rețele**: un sistem reprezentat de o mulțime finită de stări (noduri) $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ sau infinit numărabilă $S = \mathbb{N}$;
- Schimbările de stare se produc la întâmplare, la momente discrete de timp $t = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$
- Fiecărui moment de timp $n \in \mathbb{N}$ i se asociază o variabilă aleatoare X_n ce ia valori în mulțimea nodurilor:

$$X_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \pi_n(1) & \pi_n(2) & \ldots & \pi_n(m) \end{pmatrix},$$

unde $\pi_n(i)$ este probabilitatea ca la momentul n informația să ajungă în nodul $i \in S$.

.

Lanturi Markov: definiție

Definitie

Un șir de variabile aleatoare (X_n), $n \in \mathbb{N}$, definite pe același spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ cu valori în mulțimea stărilor (nodurilor) S, definește un **lanț Markov** dacă

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = s_0, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = i) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

Proprietatea markoviană: ”lipsa parțială de memorie” a lanțului Markov: doar istoria recentă, nu și cea trecută, influențează evoluția viitoare.

Un lanț Markov definește o lege de mișcare la întâmplare pe mulțimea nodurilor.

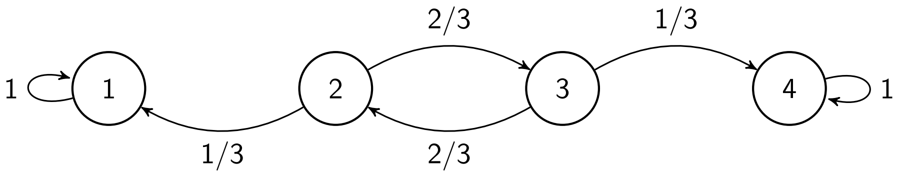
Lanturi Markov omogene

Definiție

Lanț Markov (X_n) **omogen**: $P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ nu depind de n.

p_{ij} - **probabilitate de trecere într-un singur pas din nodul** i **în nodul** j

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i), \forall i, j = \in \{1, m\}$$



Definim Q-**matricea de tranziție a lanțului Markov**-cu elementele

$Q(i,j) := p_{ij}$, $i,j \in \{1, m\}$. Avem: $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Matrice stochastică: $p_{ij} \geq 0$, $(i,j) \in S \times S$; și suma elementelor de pe fiecare linie este 1: $\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$, $i \in S$;
2. Linia i = *vector stochastic/ probabilist*, iar elementele ei sunt probab. ca lanțul Markov să treacă din starea i respectiv în stările $1, 2, \ldots, m$.

Proprietățile matricelor stochastice

- $Q\mathbf{e} = \mathbf{e}$, unde $\mathbf{e} = [1, 1, \ldots, 1]^T$, deci $\mathbf{e}$ este vector propriu al matricei Q, corespunzător valorii proprii $\lambda = 1$.
- Produsul a două matrice stochastice P, Q este o matrice stochastică;
- dc. Q este matricea de tranziție a unui lanț Markov, atunci Q^n-stochastică, $n \in \mathbb{N}$.

Mulțimea nodurilor unui lanț Markov și matricea de tranziție definesc un graf orientat: **graf de tranziție al lanțului Markov**. Există arc orientat de la i la j, dacă probabilitatea p_{ij} este nenulă.

Exemplu: Fie $S = \{1, 2, 3\}$ mulțimea nodurilor unei rețele și Q matricea de tranziție de la un nod la altul:

$$Q = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

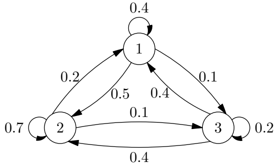


Figure: Graful de tranziție al unui lanț Markov. Pe fiecare arc este indicată probabilitatea de trecere între nodurile conectate de arc.

Probabilitatea ca lanțul să treacă din nodul inițial i în nodul j după n pași:

$$P(X_n = j|X_0 = i) = Q^n(i,j).$$

$(X_2 = j|X_0 = i)$ se poate scrie astfel:

$$(X_2 = j|X_0 = i) = \bigcup_{k=1}^{m}(X_2 = j, X_1 = k|X_0 = i),$$

deci $P(X_2 = j|X_0 = i) = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{m} P(X_0 = i, X_1 = k, X_2 = j)}{P(X_0 = i)}$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} P(X_0 = i)P(X_1 = k|X_0 = i)P(X_2 = j|X_0 = i, X_1 = k)_{P(X_2=j|X_1=k)}}{P(X_0 = i)} =$$

$$\sum_{k=1}^{m} Q(i,k)Q(k,j) = Q^2(i,j).$$

Evolutia pe o traiectorie

Probabilitatea ca lanțul să evolueze pe traiectoria $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n$ este:

$$P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_n = s_n) = \pi_0(s_0)Q(s_0, s_1)Q(s_1, s_2)\cdots Q(s_{n-1}, s_n).$$

Demo:

$$\begin{aligned}
&P(X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}, X_n = s_n) \\
&\quad = P(X_0 = s_0)P(X_1 = s_1 | X_0 = s_0)P(X_2 = s_2 | X_0 = s_0, X_1 = s_1)\cdots \\
&\qquad \cdots P(X_n = s_n | X_0 = s_0, X_1 = s_1, \ldots, X_{n-1} = s_{n-1}) \\
&\quad = \pi_0(s_0)P(X_1 = s_1 | X_0 = s_0)P(X_2 = s_2 | X_1 = s_1)\cdots P(X_n = s_n | X_{n-1} = s_{n-} \\
&\quad = \pi_0(s_0)Q(s_0, s_1)Q(s_1, s_2)\cdots Q(s_{n-1}, s_n).
\end{aligned}$$

Simularea unui lanț Markov

O realizare a lanțului Markov (X_n) sau o observație asupra lanțului este un șir de noduri ce pot fi vizitate de lanț, $(s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots)$, $s_k \in S$, și se numește **traiectorie a lanțului Markov**.

Pentru a putea analiza și simula un lanț Markov, trebuie:

- precizată **distribuția inițială de probabilitate**: distribuția de probabilitate a variabilei aleatoare discrete X_0:
  $$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \pi_0(1) & \pi_0(2) & \ldots & \pi_0(m) \end{pmatrix}.$$
- simulat în mod iterativ.
- **Algoritmul de simulare a unui LM** este prototip pentru *clasa algoritmilor iterativi aleatori*.

Simulare lanț Markov

Algoritmul de generare a segmentului de traiectorie $s_0, s_1, \dots, s_n$
begin algorithmic[1]
FunctionLantMarkov(m, π_0, Q, n)
State $s_0 =$**simulator**$(1, 2, \dots, m; \pi_0)$;
State $i = s_0$;
For $k = 1 : n$
State $p = Q[i, :]$; $//Q[i, :] =$ [linia i din matricea Q];
State $s_k =$ **simulator**$(1, 2, \dots, m; p)$;
State $i = s_k$;
EndFor
State **return** $s_0, s_1, \dots, s_n$;
EndFunction[1]

[1] https://www.mathematik.tu-clausthal.de/en/mathematics-interactive/simulation/markov-chain-discrete/

Pauza

10 minute pauză!

Distribuția de probabilitate la momentul n

Ne interesează variabila aleatoare X_n, adică distrbuția ei de probabilitate, notată cu $\pi_n = [\pi_n(1), \pi_n(2), \ldots, \pi_n(m)]^T$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- ia valorile $\{1, 2, \ldots, m\}$;
- evenimentul $(X_n = j)$ este evenimentul ca la momentul n traiectoria aleatoare să ajungă în nodul $j \in S$;
- notăm cu $\pi_n(j) = P(X_n = j)$;
- este suficient a se cunoaște distribuția inițială de probabilitate π_0 și matricea de tranziție Q a lanțului

$$\pi_n^T = \pi_0^T Q^n$$

sau detaliat:

$$\begin{bmatrix} \pi_n(1) & \pi_n(2) & \ldots & \pi_n(m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0(1) & \pi_0(2) & \ldots & \pi_0(m) \end{bmatrix} Q^n.$$

Distribuția de probabilitate la momentul n

Deci, distribuția de probabilitate X_n a stării la momentul n se poate calcula recursiv pornind de la distribuția inițială π_0:

$$\begin{aligned} \pi_1^T &= \pi_0^T Q \\ \pi_2^T &= \pi_0^T Q^2 = \pi_1^T Q \\ &\vdots \\ \pi_n^T &= \pi_{n-1}^T Q, \; n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned} \tag{1}$$

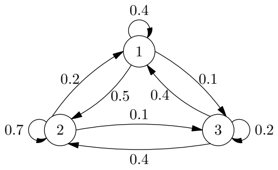


Figure: Graful de tranziție al unui lanț Markov

Exemplu

Daca considerăm distribuția inițială de probabilitate $\pi_0 = [0.2, 0.35, 0.45]^T$, distribuțiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare (stărilor) $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$, calculate conform relației de recurență de mai sus, sunt:

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= [0.33000000000 \quad 0.525000000000 \quad 0.145000000000]^T \\
\pi_2 &= [0.29500000000 \quad 0.590500000000 \quad 0.114500000000]^T \\
\pi_3 &= [0.28190000000 \quad 0.606650000000 \quad 0.111450000000]^T \\
\pi_4 &= [0.27867000000 \quad 0.610185000000 \quad 0.111145000000]^T \\
\pi_5 &= [0.27796300000 \quad 0.610922500000 \quad 0.111114500000]^T \\
\pi_6 &= [0.27781550000 \quad 0.611073050000 \quad 0.111111450000]^T \\
\pi_7 &= [0.27778539000 \quad 0.611103465000 \quad 0.111111145000]^T \\
\pi_8 &= [0.27777930700 \quad 0.611109578500 \quad 0.111111114500]^T \\
\pi_9 &= [0.27777808430 \quad 0.611110804250 \quad 0.111111111450]^T \\
\pi_{10} &= [0.27777783915 \quad 0.611111049705 \quad 0.111111111145]^T.
\end{aligned}
$$

Exemplu

Daca se continuă calculul distribuțiilor de probabilitate $\pi_{50}, \pi_{51}, \dots, \pi_{100}$ și se afișează coordonatele cu 15 zecimale, se obține

$$\pi_{50} = \pi_{51} = \cdots = \pi_{100} = [0.277777777778 \quad 0.611111111111 \quad 0.111111111111]^T.$$

- Avem $P(X_{50} = k) = \cdots = P(X_{100} = k)$, pentru $k = 1, 2, 3$
- Orice distribuție de probabilitate π_n, cu $n \geq 50$, am calcula cu 15 zecimale am obține distribuții identice cu π_{50}, adică după momentul $n = 50$ distribuția este staționară, nu se mai modifică în primele 15 zecimale și deci sistemul a ajuns într-un echilibru.
- De-a lungul oricărei traiectorii încep and cu momentul $n = 50$, $s_{50}, s_{51}, \dots, s_{50+N}$, de lungime $N + 1$ avem
  - starea 1 este "vizitată" de lanțul Markov în proporție de $100\,\pi(1)\% = 27.7777777778\%$,
  - starea 2 în proporție de $100\,\pi(2)\% = 61.1111111111\%$,
  - starea 3 în proporție de $100\,\pi(3)\% = 11.1111111111\%$.
- pentru $n > 50$ avem $\|\pi_n - \pi_{n-1}\| < 10^{-15}$.

Observație: Faptul că matricei de tranziție Q și distribuției inițiale de probabilitate π_0 li se asociază un șir de vectori probabiliști (π_n), ne conduce la întrebările:

- În ce condiții este șirul (π_n) convergent?
- Dacă șirul (π_n) este convergent la π, ce reprezintă limita sa π?
- Fiecare distribuție inițială π_0 definește un alt șir (π_n) prin $\pi_n^T = \pi_0^T Q^n$.
  Ne așteptăm ca în caz de convergență să obținem mereu altă limită?

Distribuție de echilibru

- Dacă șirul (π_n) al distribuțiilor de stare este convergent, atunci limita sa este un vector probabilist π, adică un vector de coordonate mai mari sau egale cu zero și suma coordonatelor este 1.
- Dacă șirul (π_n) al distribuțiilor de stare la momentul n converge la π, atunci are loc:

$$\pi^T = \pi^T Q.$$

Definiție

O distribuție de probabilitate π, pe spațiul nodurilor unui lanț Markov, cu proprietatea că $\pi^T = \pi^T Q$ se numește *distribuție invariantă, staționară sau distribuție de echilibru*.

Distribuția de echilibru

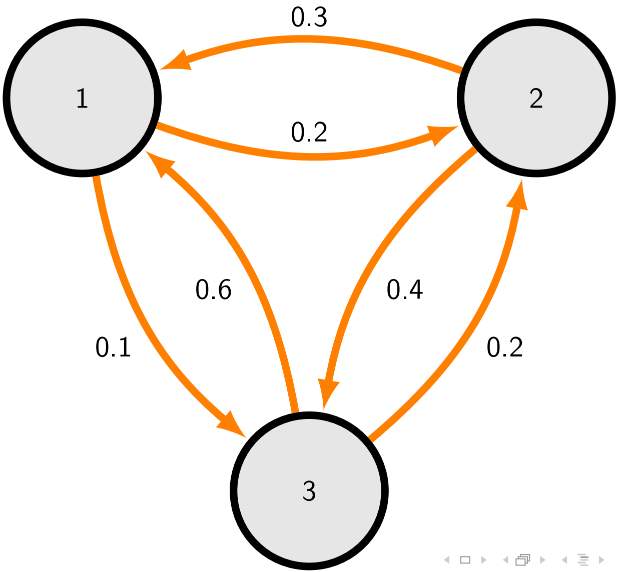
- Dacă există distribuția de echilibru $\pi = [\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(m)]^T$ (ca limită a șirului π_n), atunci $\pi(j)$ reprezintă șansa asimptotică de a fi vizitat nodul j.
- Deci, dacă mișcarea aleatoare pe S continuă indefinit și șirul (π_n) este convergent, atunci de la un moment dat mișcarea aleatoare se stabilizează și vizitează fiecare nod $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ cu aceeași frecvență $\pi(j)$.

Definiție

Un lanț Markov pe $S = \{1, 2, \ldots, m\}$ se numește *lanț ireductibil*, dacă pentru oricare două noduri $i, j \in S$ există $n = n(i,j) \in \mathbb{N}^*$ astfel înc at $Q^n(i,j) > 0$, adică cu probabilitate nenulă lanțul Markov poate trece într-un număr de pași din nodul i în nodul j.

- Practic, lanțul este ireductibil dacă și numai dacă graful de tranziție este tare conex (există drum de arce între orice două noduri).
- Dacă matricea de tranziție are toate elementele $Q(i,j) > 0$, $i, j \in 1, m$, atunci lanțul Markov este ireductibil.
- Simplul fapt că $Q(i,j) = 0$ nu asigură că i nu comunică cu j. Cele două noduri nu comunică într-un pas, dar pot comunica în mai mulți pași, adică s-ar putea ca $Q^n(i,j) > 0$, pentru un $n > 1$.

Lanțuri Markov ireductibile



Lanțuri Markov aperiodice

Un lanț Markov poate avea și *traiectorii periodice*, adică traiectorii în care succesiunea de noduri $s_0, s_1, \ldots, s_{T-1}, s_T = s_0$ se repetă indefinit într-o traiectorie a lanțului.

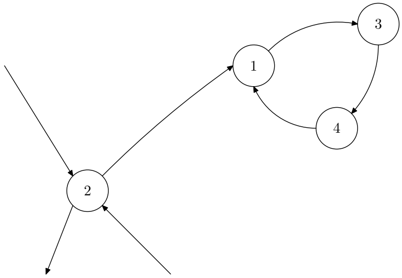


Figure: Graful de tranziție al unui lanț Markov ce are traiectoria periodică (1,3,4,1)

Lanțuri Markov aperiodice

Definiție

Perioada unui nod $i \in S$ este numărul

$$\tau_i = c.m.m.d.c.\{n \in^* \mid Q^n(i,i) > 0\}.$$

- Un nod i a cărui perioadă este 1 se numește **nod aperiodic**
- un lanț Markov care are toate nodurile aperiodice se numește **lanț Markov aperiodic**.
- Cel mai simplu exemplu de nod aperiodic este un nod i pentru care $Q(i,i) > 0$.
- Dacă matricea de tranziție are toate elementele de pe diagonala principală strict pozitive, $Q(i,i) > 0$, atunci lanțul este aperiodic.

Lanțuri ireductibile și aperiodice

Observatie: Proprietățile de ireductibilitate și aperiodicitate ale unui lanț Markov sunt proprietăți ale matricei de tranziție.

- Un lanț Markov ireductibil are toate nodurile de aceeași perioadă.
- Dacă un nod al unui lanț ireductibil este aperiodic, atunci toate nodurile sunt aperiodice.
- Pentru a arăta că un lanț ireductibil este aperiodic este suficient să identificăm un nod i pentru care $Q(i,i) > 0$.

Lanțuri ireductibile și aperiodice

Dacă un lanț Markov pe S este ireductibil și aperiodic, atunci oricare ar fi distribuția inițială de probabilitate π_0, șirul distribuțiilor de probabilitate la momentul n asociat, (π_n), este convergent.

- Limita acestui șir este un vector probabilist π care nu depinde de distribuția inițială de probabilitate (deci indiferent de distribuția inițială de probabilitate, șirurile asociate converg la aceeași limită π).
- Această limită este unica distribuție de echilibru a lanțului Markov.
- Mai mult, șirul (Q^n) este convergent la o matrice de rang 1 având fiecare linie egală cu π^T:

$$\lim_{n\to\infty} Q^n = \begin{pmatrix} \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(m) \end{pmatrix}.$$

Lanțuri ireductibile și aperiodice

Cum determinăm pe π?

π **este vector propriu probabilist al matricei** Q^T**, corespunzător valorii proprii 1** pentru ca verifică

$$Q^T\pi = \pi,$$

(distribuția de echilibru π verifică relația $\pi^T = \pi^T Q$)

Acest rezultat matematic a influențat modul de definire al navigării aleatoare pe graful WEB, ca un lanț Markov ireductibil și aperiodic pe mulțimea paginilor WEB (vezi Material Suplimentar).