Seminar 13

Procese Poisson.

13.1 Probleme rezolvate

1. Numărul clienţilor ce sosesc la un magazin este modelat de un proces Poisson cu rata $\lambda = 10$ clienti/ ora. Să se determine:

a) Să se determine probabilitatea sa nu existe niciun client sosit în intervalul $(8, 10]$.

b) Să se determine probabilitatea sa existe exact un client în fiecare din intervalele $(8, 9], (9, 10], (10, 11]$ şi $(11, 12]$.

Rezolvare:

a) Notăm cu N_t numărul de clienţilor ce sosesc în intervalul $(0, t]$, iar $N_{t+s} - N_s$ reprezintă numărul de clienţi din intervalul $(s, s + t]$. Din definiţia unui proces Poisson se ştie că variabila aleatoare $Y = N_{t+s} - N_s$ este distribuită Poisson de parametru λt.
Avem $Y = N_{10} - N_8 \sim Pois(10 \cdot 2 = 20)$. In consecinţă:

$$P(N_{10} - N_8 = 0) = P(Y = 0) = \frac{e^{-20}(20)^0}{0!} = \frac{1}{e^{20}}$$

b) Notăm cu Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 variabille aleatoare ce dau numărul de clienţi sosiţi în intervalele $(8, 9], (9, 10], (10, 11]$ şi respectiv $(11, 12]$. Se observă că aceste intervale sunt disjuncte şi fiecare dintre ele are lungimea 1. Avem $Y_i \sim Pois(\lambda \cdot 1)$ şi, în plus, sunt independente (cf. definiţiei unui proces Poisson).
In consecinţă:

$$P(Y_1 = 1, Y_2 = 1, Y_3 = 1, Y_4 = 1) = P(Y_1 = 1)P(Y_2 = 1)P(Y_3 = 1)P(Y_4 = 1) = \left[\frac{10}{e^{10}}\right]^4$$

2. Fie un proces Poisson $\{N_t\}$ de rată λ. Să se determine probabilitatea să existe 2 sosiri în intervalul $(0, 2]$ şi 3 sosiri în intervalul $(1, 4]$.
Rezolvare: Vom calcula $P(N_2 = 2, N_4 - N_1 = 3)$. Se observă că intervalele $(0, 2]$ şi $(1, 4]$ nu sunt disjuncte, deci variabilele aleatoare $N_2, N_4 - N_1$ nu sunt independente. Fie X, Y, Z variabilele aleatoare ce dau numărul de sosiri pe intervalele disjuncte $(0, 1], (1, 2], (2, 4]$.

Avem $X \sim Pois(\lambda \cdot 1), Y \sim Pois(\lambda \cdot 1), Z \sim Pois(\lambda \cdot 2)$ şi, în acest caz, variabilele X, Y, Z sunt independente. Vom calcula $P(X+Y=2, Y+Z=3)$, folosind formula probabilităţii totale:

$$
\begin{aligned}
&P(X+Y=2, Y+Z=3) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X+Y=2, Y+Z=3/Y=k)P(Y=k) = \\
&P(X=2, Z=3/Y=0)P(Y=0) + P(X=1, Z=2/Y=1)P(Y=1) + \\
&P(X=0, Z=1/Y=2)P(Y=2) \\
&= P(X=2)P(Z=3)P(Y=0) + P(X=1)P(Z=2)P(Y=1) + P(X=0)P(Z=1)P(Y=2)
\end{aligned}
$$

Pentru ultimul egalitate se foloseşte independenţa variabilelor X, Y, Z, deci, de exemplu, $P(X=2, Z=3/Y=0)P(Y=0) = P(X=2, Z=3)P(Y=0) = P(X=2)P(Z=3)P(Y=0)$. Pentru a obţine în mod explicit $P(X+Y=2, Y+Z=3)$ se va folosi faptul că $X \sim Pois(\lambda \cdot 1), Y \sim Pois(\lambda \cdot 1), Z \sim Pois(\lambda \cdot 2)$.

3. Fie $\{N_t\}$ un proces Poisson de rată $\lambda = 2$. Notăm cu $X_1, X_2, \ldots$ variabilele aleatoare ce dau lungimea intervalelor dintre două sosiri consecutive (inter-sosiri).

a) Să se determine probabilitatea ca prima sosire să aibă loc după momentul $t = 1$.

b) Dacă nu au existat sosiri înainte de $t = 1$, să se determine probabilitatea ca prima sosire să aibă loc după momentul $t = 3$, adică $P(X_1 > 3/X_1 > 1)$.

c) Dacă a doua sosire a avut loc la $t = 2$, să se determine probabilitatea ca a treia sosire să aiba loc după $t = 4$.

Rezolvare: Variabila X_k reprezintă lungimea intervalului de timp dintre sosirea clientului $k-1$ şi a clientului k. Din teorie, $X_k \sim Exp(\frac{1}{\lambda})$, iar variabila $T_n = X_1 + \ldots X_n$ dă momentul sosirii clientului n in sistem.
a) Vom calcula $P(X_1 > 1)$, unde $X_1 \sim Exp(\frac{1}{2})$. In consecinţă, avem $P(X_1 > 1) = 1 - F_{X_1}(1) = 1 - (1 - e^{-2\cdot 1}) = \frac{1}{e^2}$, unde $F_{X_1}(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei X_1 distribuită exponenţial de parametru $\frac{1}{2}$.
Sau, vom folosi relaţia $(X_1 > 1) = (N_1 = 0)$, pentru că evenimentul ca prima sosire să aibă loc după momentul $t = 1$ este echivalent cu evenimentul ca în intervalul $(0, 1]$ să nu aibă loc nicio sosire. Se foloseşte faptul că $N_t \sim Pois(\lambda \cdot t = 2 \cdot 1)$.
b) $P(X_1 > 3/X_1 > 1) = \frac{P(X_1>3, X_1>1)}{P(X_1>1)} = \frac{P(X_1>3)}{P(X_1>1)} = \frac{1-F_{X_1}(3)}{1-F_{X_1}(1)}$
c) $P(T_3 > 4/T_2 = 2) = P(X_3 > 2/X_1 + X_2 = 2)$; folosind independenţa variabilelor X_i, avem $P(T_3 > 4/T_2 = 2) = P(X_3 > 2) = 1 - F_{X_3}(2)$.

4. Se consideră $\{N_t^a\}, \{N_t^b)\}$ două procese Poisson independente de rate $\lambda_a = 1, \lambda_b = 2$. Fie $N_t = N_t^a + N_t^b$ procesul Poisson suprapus.

a) Să se determine $P(N_1 = 2, N_2 = 5)$.

b) Dacă $N_1 = 2$, să se determine $P(N_1^a = 1)$.

Rezolvare: Din teorie procesul Poisson suprapus are rata $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 3$.
a) $P(N_1 = 2, N_2 = 5) = P($ 2 sosiri in (0,1] si 5 sosiri in (0,2] $) = P($ 2 sosiri in (0,1] si 3 sosiri in (1,2]).
Obţinem, $P(N_1 = 2, N_2 = 5) = [\frac{e^{-3}3^2}{2!}][\frac{e^{-3}3^3}{3!}]$
b) $P(N_1^a = 1/N_1 = 2) = \frac{P(N_1^a=1,N_1=2)}{P(N_1=2)} = \frac{P(N_1^a=1,N_1^b=1)}{P(N_1=2)} = \frac{P(N_1^a=1)P(N_1^b=1)}{P(N_1=2)} = e^{-1}\cdot 2e^{-2}/[e^{-3}3^2/2!]$.

13.2 Probleme propuse

5. Numărul clienţilor ce sosesc la un magazin este modelat de un proces Poisson cu rata $\lambda = 4$ clienti/ ora. Să se determine:

a) Să se determine probabilitatea sa existe 2 clienţi în intervalul $(8, 8:20]$.

b) Să se determine probabilitatea sa existe un client în intervalul $(8, 8:20]$ şi 3 clienţi în intervalul $(8:20, 9]$.

6. Căderea de reţea la o bancă este un proces Poisson de rată $\lambda = 3/$ an . Care este distribuţia de probabilitate a intervalului de timp, X, dintre două căderi consecutive? Care este media lui X? Care este probabilitatea ca în primul trimestru al unui an să nu cadă reţeaua?

7. Fluxul sosirilor job-urilor la un server este un proces Poisson de rata 10 joburi/ oră. Să se calculeze probabilitatea ca intervalul de timp dintre sosirile a două joburi consecutive să fie: a) mai lung de 2 minute? b) între 3 şi 5 minute?
Indicaţie: se va calcula λ'- rata pe minut si apoi se foloseşte faptul că $X \sim Exp(1/\lambda')$.

8. Căderile de conexiune într-o reţea de comunicaţie urmează o lege Poisson de rată $\lambda = 2.4/$ zi.

a) Să se calculeze probabilitatea ca intervalul de timp dintre două eşecuri consecutive să fie mai mic de 3 zile.

b) Probabilitatea să se producă 8 eşecuri în 3 zile.

c) Să se determine timpul mediu între două eşecuri consecutive.

9. Procesul Poisson al fluxului intrărilor SMS-urilor la o emisiune TV se constituie din 2 subfluxuri independente, recepţionate de receptorul A, respectiv B. Rata celor ce sosesc la A este de 10/minut, iar la B de 13/minut. Cele două receptoare transmit SMS-urile unui receptor central ce le şi afişează instantaneu pe un banner.

a) Care este timpul mediu dintre momentele afişarii a două SMS-uri consecutive pe banner.

b) Din momentul deschiderii televizorului care este timpul mediu scurs până la afişarea a 10 SMS-uri?

10. Sosirile într-un sistem coadă formează un proces Poisson cu o rată de 40 de clienţi pe oră. Serverul sistemului funcţionează între orele 9:00 şi 19:00.

a) Care este rata sosirilor într-o zi de lucru?

b) Care este probabilitatea ca nici un client să nu sosească între 9:00 şi 9:15?

c) Să se calculeze probabilitatea ca nici un client să nu sosească între 9:00 şi 9:15 ştiind că între 9:00 şi 9:30 au sosit 3 clienţi.

Indicaţie: b) Se ia minutul ca unitate de timp. În acest context rata procesului sosirilor este $\lambda = 40/60 = 2/3$. Deci (N_t) are distribuţia Poisson de parametru $2t/3$;

c) Se cere $P(N_{15} = 0 \,|\, N_{30} = 3)$.

11. Bancomatul de la Facultatea de Electrotehnică este accesat în mod independent, la momente aleatoare de timp, de către clienţii ce lucrează şi învaţă în clădire. Rata sosirilor clienţilor studenţi la bancomat este de 8 pe oră, iar cea a angajaţilor de 2 pe oră.

Dacă X este variabila aleatoare ce dă numărul clienţilor (din Electro) sosiţi la bancomat între ora 10 şi 11:30, să se calculeze $P(X = 5)$.

Indicaţie: Procesul Poisson (N_t) al sosirilor la bancomat se obţine din mixarea celor două fluxuri: fluxul sosirii studenţilor şi fluxul sosirii angajaţilor. Deci rata procesului (N_t) este $8 + 2 = 10$ clienţi pe oră sau echivalent $\lambda = 1/6$ clienţi pe minut.

Variabila aleatoare X este variabila N_{90}, adică numărul clienţilor sosiţi în 90 de minute (între ora 10 şi ora 11:30).