Curs 4: Vectori aleatori discreți. Variabile aleatoare condiționate

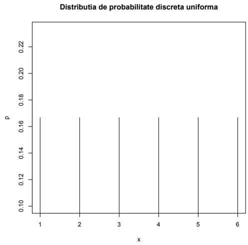
Conf.dr. Maria Jivulescu

Departamentul de Matematică
UPT

Fie v. a. $X = \#$ puncte de la aruncarea unui zar.
X are distribuția de probabilitate

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

- valorile lui X sunt $x_i \in D_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- X ia aceste valori cu prob $\frac{1}{6}$;
  $p_i = P(X = i) = \frac{1}{6}$;
- Avem $0 \leq p_i \leq 1$ și $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$;
- X are distribuție uniformă;
- Media varb X: $M(X) = \sum_{i=1}^{6} i \cdot \frac{1}{6} = 3.5$
- Dispersia varb X: $\sigma^2(X) = \sum_{i=1}^{6} (i - 3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2.91$



Funcţia de repartiţie $F_X(x) := P(X \leq x)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x < 1 \\ 1/6 & \text{pentru } 1 \leq x < 2 \\ 2/6 & \text{pentru } 2 \leq x < 3 \\ 3/6 & \text{pentru } 3 \leq x < 4 \\ 4/6 & \text{pentru } 4 \leq x < 5 \\ 5/6 & 5 \leq x \leq 6 \\ 1 & x > 6 \end{cases}$$

Cuprins curs: Vectori aleatori

Cum procedăm când avem 2 variabile aleatoare X și Y, adica un vector (X,Y)?

- Vectori aleatori discreți: Definiție. Exemple. Densitate de probabilitate comună. Funcția de repartiție.
- Variabile aleatoare condiționate $X|Y = y_0$
- Variabile aleatoare independente

Fie experiența aruncării a două zaruri. Fie X valoarea primului zar, fie Y valoarea celui de-al doilea zar. Tabelul distribuției comune este:

					Y		
		1	2	3	4	5	6
	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Definiție: O distribuție comună de probab. a vect. (X, Y) satisface:

- $0 \leq p(x_i, y_j) \leq 1$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p(x_i, y_j) = 1$

Ce putem studia cu vectorii aleatori?

Exemplu: probabilitatea unor evenimente de forma $P(D = Y - X \geq 2)$.
Un astfel de eveniment este descris de obținerea perechilor:

$$B = \{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6),(4,6)\}$$

					Y		
		1	2	3	4	5	6
	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Avem $P(B) = 10/36$.

Vectori aleatori discreți: Definiție

O pereche, (X, Y), sau mai general un n-uplu , $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, de variabile aleatoare se numește vector aleator.

- Mulțimile de valori: $D_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, respectiv $D_Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$
- Evenimentul $((X, Y) = (x_i, y_j))$ este evenimentul ca vectorul aleator (X, Y) să ia ca "valoare" perechea (x_i, y_j).
- Evenimentul: $((X, Y) = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y)$ se notează $(X = x, Y = y)$
- $p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_{ij} := P((X, Y) = (x_i, y_j))$, probabilitatea unui astfel de eveniment
- $(X, Y) = \begin{pmatrix} (x_i, y_j) \\ p_{ij} \end{pmatrix}, \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$

Vectori aleatori discreți:Distribuția de probabilitate

Distribuția de probabilitate a vectorului (X,Y) (joint distribution) se dă într-un tablou 2D de tipul:

				Y			
		y_1	y_2	...	y_j	...	y_n
	x_1	$\mathbf{p_{11}}$	$\mathbf{p_{12}}$	...	$\mathbf{p_{1j}}$	...	$\mathbf{p_{1n}}$
	x_2	$\mathbf{p_{21}}$	$\mathbf{p_{22}}$	...	$\mathbf{p_{2j}}$	...	$\mathbf{p_{2n}}$
X	$\vdots$						
	x_i	$\mathbf{p_{i1}}$	$\mathbf{p_{i2}}$	...	$\mathbf{p_{ij}}$	...	$\mathbf{p_{in}}$
	$\vdots$						
	x_m	$\mathbf{p_{m1}}$	$\mathbf{p_{m2}}$	...	$\mathbf{p_{mj}}$	...	$\mathbf{p_{mn}}$

unde $p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_{ij} := P((X, Y) = (x_i, y_j)) = P(X = x_i, Y = y_j)$,

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Funcția de repartiție a unui vector aleator

Definiție

Funcția de repartiție a unui vector aleator este

$$F_{(X,Y)}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

In cazul discret, $F_{(X,Y)}(x,y) = \sum\limits_{x_i \leq x} \sum\limits_{y_j \leq y} p(x,y)$

De exemplu, $F(3.5,4) = P(X \leq 3.5, Y \leq 4) = 12/36$

					Y		
		1	2	3	4	5	6
	1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
X	3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
	6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Distribuții marginale

Problemă: Cunoscând distribuția de probabilitate a vectorului aleator, (X, Y), ne întrebăm dacă putem afla distribuția fiecărei componente, adică a lui X, respectiv Y? Adică, $p_i = P(X = x_i)$?

Notăm cu

- $p_X(x_i) \stackrel{sau}{=} p_{i\bullet} = P(X = x_i)$, probabilitatea ca X să ia valoarea x_i
- $p_Y(y_j) \stackrel{sau}{=} p_{\bullet j} = P(Y = y_j)$, probabilitatea ca Y să ia valoarea y_j, $i \in \{1, m\}$, $j \in \{1, n\}$.

Exprimăm evenimentul $(X = x_i)$ ca reuniune de evenimente relativ la vectorul aleator (X,Y):

$$(X = x_i) = (X = x_i, Y = y_1) \cup (X = x_i, Y = y_2) \cup \cdots \cup (X = x_i, Y = y_n).$$

Avem,

$p_X(x_i) = p_{i\bullet} := P(X = x_i) = p_{i1} + p_{i2} + \cdots + p_{in}$, $i \in \{1, m\}$,

Distribuții marginale

				Y				
		y_1	y_2	...	y_j	...	y_n	
	x_1	$\mathbf{p_{11}}$	$\mathbf{p_{12}}$	...	$\mathbf{p_{1j}}$	...	$\mathbf{p_{1n}}$	
	x_2	$\mathbf{p_{21}}$	$\mathbf{p_{22}}$	...	$\mathbf{p_{2j}}$	...	$\mathbf{p_{2n}}$	
X	$\vdots$							
	x_i	$\mathbf{p_{i1}}$	$\mathbf{p_{i2}}$	...	$\mathbf{p_{ij}}$	...	$\mathbf{p_{in}}$	$p_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$
	$\vdots$							
	x_m	$\mathbf{p_{m1}}$	$\mathbf{p_{m2}}$	...	$\mathbf{p_{mj}}$	...	$\mathbf{p_{mn}}$	

Observație: $P(X = x_i)$ este suma elementelor de pe linia i din tabloul distribuției de probabilitate a vectorului aleator, (X, Y).
Analog avem că
$p_Y(y_j) = p_{\bullet j} := P(Y = y_j) = p_{1j} + p_{2j} + \cdots + p_{mj}, j \in \{1, n\}$
Evident că $\sum_{j=1}^{n} p_{\bullet j} = 1$ și $\sum_{i=1}^{m} p_{i\bullet} = 1$.

Distribuții marginale. Exemplu

Definiție

Distribuțiile de probabilitate ale variabilelor aleatoare X și Y:

$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_{i\bullet} \end{pmatrix}, i \in \{1, m\}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_j \\ p_{\bullet j} \end{pmatrix}, j \in \{1, n\}$, determinate din distribuția de probabilitate a vectorului aleator, (X, Y), se numesc **distribuții marginale** ale vectorului aleator (X, Y)

Exemplu: Evident, $X = Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Întrebare: Cunoscând distribuția de probabilitate a unui vector aleator, (X, Y), problema fundamentală este să stabilim interdependența dintre evenimentele de forma $(X = x_i)$, $i \in \{1, m\}$, $(Y = y_j)$, $j \in \{1, n\}$. Adică, sunt aceste evenimente independente sau nu?

Independența: $P(A \cap B) = P(A)P(B) \leftrightarrow$ **evenimente condiționate: P(B|A)=P(B)**

Vom calcula probabilitățile condiționate $P(X = x_i | Y = y_j)$, (probabilitatea ca X să ia valoarea x_i, știind că Y a luat valoarea y_j):

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}}$$

Variabile aleatoare condiționate

- Notăm $p(x_i|y_j) = P(X = x_i|Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}}$.
- Suma acestor probabilități condiționate este:

$$\sum_{i=1}^{m} p(x_i|y_j) = \sum_{i=1}^{m} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}}{p_{\bullet j}} = \frac{p_{\bullet j}}{p_{\bullet j}} = 1.$$

- Avem o variabilă aleatoare ce ia valorile x_i cu probab. $p(x_i|y_j)$.
- Notăm această variabilă prin $(X|Y = y_j)$ și citim: variabila aleatoare X condiționată de evenimentul $(Y = y_j)$, j fixat.
- $(X|Y = y_j) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots & x_m \\ p(x_1|y_j) & p(x_2|y_j) & \cdots & p(x_i|y_j) & \cdots & p(x_m|y_j) \end{pmatrix}$

Variabile aleatoare condiționate

Analog, variabila Y condiționată de $(X = x_i)$ are distribuția de probabilitate:

$$(Y|X = x_i) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots & y_n \\ p(y_1|x_i) & p(y_2|x_i) & \cdots & p(y_j|x_i) & \cdots & p(y_n|x_i) \end{pmatrix}$$

unde $p(y_j|x_i) := P(Y = y_j|X = x_i) = \frac{P(Y=y_j,X=x_i)}{P(X=x_i)} = \frac{p_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} p_{ij}}$

Exemplu:

$P(Y = 2|X = 1) = \frac{P(Y=2,X=1)}{P(X=1)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}$.

Deci, $(Y|X = 1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Variabile aleatoare independente

Definiție

Variabilele aleatoare discrete X, Y cu proprietatea $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$, $\forall i \in \{1, m\}$, $\forall j \in \{1, n\}$ se numesc **variabile aleatoare independente**.

Condiții de independență:

- distribuția comună este produsul distribuțiilor marginale: $p_{X,Y}(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$
- distribuțiile condiționate coincid cu cele marginale: $P(X = x_i|Y = y_j) = P(X = x_i)$, sau $P(Y = y_j|X = x_i) = P(Y = y_j)$, $i, \in \{1, m\}, j \in \{1, n\}$
- $F_{(X,Y)}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$

Definiție

Fie X, Y două varb. a. $D_X = \{x_1, \ldots, x_m\}$, respectiv $D_Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Vectorul aleator (X, Y) se numește **vector aleator, uniform distribuit pe** $D_X \times D_Y$ dacă are distribuția de probabilitate
$p_{X,Y}(x, y) = P((X, Y) = (x, y)) = \frac{1}{|D_X||D_Y|} = \frac{1}{mn}$, $(x, y) \in D_X \times D_Y$.

				Y			
		y_1	y_2	...	y_j	...	y_n
	x_1	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$
X	x_2	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
	x_i	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$
	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		
	x_m	$\frac{1}{mn}$	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$	...	$\frac{1}{mn}$

- Variabilele aleatoare, X și Y, sunt uniform distribuite pe D_X, respectiv D_Y, cu distribuțiile marginale: $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ \frac{1}{m} & \frac{1}{m} & \dots & \frac{1}{m} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$.
- Variabilele aleatoare, X și Y sunt independente pentru că

$$P((X,Y) = (x,y)) = \frac{1}{mn} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n} = P(X = x) \cdot P(Y = y), \forall\, x, y$$

Rezultat

- Dacă (X, Y) **este un vector aleator uniform distribuit** pe produsul cartezian $D_X \times D_Y$, atunci X **și** Y**, sunt independente și uniform distribuite** pe D_X, respectiv D_Y.
- **Reciproc**, dacă X și Y sunt variabile aleatoare independente și uniform distribuite, pe mulțimile finite D_X, respectiv D_Y, atunci vectorul aleator discret (X, Y) este uniform distribuit pe $D_X \times D_Y$

- Fie X, Y două variabile aleatoare discrete ce au mulțimile de valori $D_X = \{x_i, i \in \{1, m\}\}$, respectiv $D_Y = \{y_j, j \in \{1, n\}\}$
- fie $h : D_X \times D_Y \to$ o funcție continuă și mărginită.
- $h(X, Y)$ este o variabilă aleatoare discretă ce ia valorile $z_{ij} = h(x_i, y_j)$, $i \in \{1, m\}$, $j \in \{1, n\}$.
- distribuția de probabilitate a variabilei imagine $h(X, Y)$: $P(h(X, Y) = z_{ij}) = P((X, Y) \in h^{-1}(\{z_{ij}\})),\ \ i \in \{1, m\}, j \in \{1, n\}$, unde $h^{-1}(\{z\}) = \{(x, y) \,|\, h(x, y) = z\}$ este preimaginea lui z.

Exemplu

Fie $h(x, y) = x + y$ și variabila aleatoare $h(X, Y) = X + Y$.
Distribuția de probabilitate a variabilei aleatoare $Z = X + Y$ se obține calculând $P(Z = z) = P(X + Y = z)$.
P(X+Y=z)=P((X,Y)∈h$^{-1}(z)) = \sum_{i,j|x_i+y_j=z} P(X = x_i, Y = y_j)$.

De reținut

- distribuția de probab. a unui vector aleator discret dată printr-un tabel
- distribuțiile marginale ale lui X și Y se obțin însumând linii/coloane
- independența varb X și Y legată de variabile aleatoare condiționate
- distribuția unei varb aleat. cond.
- condiția pentru independența variabilelor X și Y;
- distribuția unui vector uniform discret