Curs 2/1: Probabilităţi condiţionate. Evenimente independente

Conf.dr. Maria Jivulescu

Departamentul de Matematică
UPT

Cuprins

- Definiția probabilității condiționate
- Formula de condiționare iterată
- Evenimente independente

Definiția probabilității condiționate

Definiție

Probabilitatea unui eveniment E_2, condiționată de evenimentul E_1, cu $P(E_1) \neq 0$, este prin definiție

$$P_{E_1}(E_2) := \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$$

$P_{E_1}(E_2)$ se mai notează $P(E_2|E_1)$.

Propoziție

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate, $E_1 \in \mathcal{K}$, un eveniment de probabilitate nenulă, $P(E_1) \neq 0$. Atunci P_{E_1} este o probabilitate pe $\mathcal{K}$:

- $0 \leq P_{E_1}(E_2) \leq 1$, $E_2 \in \mathcal{K}$;
- $P_{E_1}(\Omega) = 1$;
- Pentru E, F, mutual exclusive: $P_{E_1}(E \cup F) = P_{E_1}(E) + P_{E_1}(F)$.

Probabilități condiționate

Rezultat: Folosind probabilități condiționate putem calcula probabilitatea evenimentului intersecție:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P_{E_1}(E_2)$$

Eșantionare fără înlocuire

In experimentul generării unui număr aleator în algoritmul de verificarea a echivalenței a două polinome:

- dacă la una din iterații s-a generat numărul r, nu vom mai permite ca acest număr să fie ales la iterațiile ulterioare ale algoritmului
- E_i numărul r_i generat la iterația i a algoritmului este o rădăcină a polinomului $F - G$
- Avem $P(E_1) \leq \frac{d}{100d}$, $P_{E_1}(E_2) \leq \frac{d-1}{100d-1}$.
- în acest caz, $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P_{E_1}(E_2) \leq \frac{d(d-1)}{100d(100d-1)}$.

Acastă formulă se poate generaliza.

Formula de condiționare iterată

Fie $E_1, E_2, \ldots, E_n$, n evenimente într-un experiment. Din formula de calcul a probabilității condiționate, $P(E_2|E_1) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$ deducem recursiv modalitatea de calcul a probabilității intersecției unui număr arbitrar de evenimente din cele n:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2|E_1)$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P((E_1 \cap E_2) \cap E_3) = P(E_1 \cap E_2)P(E_3|E_1 \cap E_2) =$$

$$= P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2)$$

$$\vdots$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_k) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1 \cap E_2) \ldots P(E_k|E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_{k-1})$$

Esantionare fără înlocuire

- Avem
$$P(E_j|E_1 \cap E_2 \cap \dots E_{j-1}) \leq \frac{d-(j-1)}{100d-(j-1)}$$
-
$$P(E_1 \cap E_2 \cap \dots E_k) \leq \prod_{j=1}^{k} \frac{d-(j-1)}{100d-(j-1)} \leq (\frac{1}{100})^k$$

Evenimente independente

Definiție

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un câmp de probabilitate.
Evenimentele $E_1,\ E_2 \in \mathcal{K}$, de probabilități nenule, cu proprietatea că

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$$

se numesc **evenimente independente.**
Mai general, evenimentele $E_1, E_2, \ldots, E_n$ cu proprietatea:

$$P(E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}) = P(E_{i_1})P(E_{i_2}) \cdots P(E_{i_k}),$$

pentru orice $k \in \{2, \ldots n\}$ și indicii $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ se numesc evenimente independente.

Evenimente independente

Observații:

- Pentru a testa independența a n- evenimente $E_1, E_2, \ldots, E_n$, avem de verificat $C_n^2 + C_n^3 + \ldots C_n^n = 2^n - (1+n)$ relații.
- A nu se confunda evenimentele mutual exclusive cu evenimentele independente!
  - E_1, E_2 sunt mutual exclusive dacă $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, deci $P(E_1 \cap E_2) = 0$
  - Evenimentele E_1, E_2 sunt independente dacă $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$.
- Dacă E_1, E_2, E_3 sunt trei evenimente, două câte două independente, atunci E_1, E_2, E_3 nu sunt neapărat independente, adică relațiile: $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2), P(E_1 \cap E_3) = P(E_1)P(E_3), P(E_2 \cap E_3) = P(E_2)PE_1C)$, dar nu implică obligatoriu: $P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2)P(E_3)$.

Observații:

Dacă E_1 și E_2 sunt evenimente independente atunci

- $\complement E_1$ și E_2;
- E_1 și $\complement E_2$;
- $\complement E_1$ și $\complement E_2$

sunt independente.

Generalizarea la un număr arbitrar de evenimente independente:
dacă A_1, $A_2, \ldots, A_n$ sunt evenimente independente, atunci și evenimentele $B_1, B_2, \ldots, B_n$, sunt independente, unde:

$$B_{i_1} = A_{i_1}, B_{i_2} = A_{i_2}, \ldots, B_{i_k} = A_{i_k}, B_j = \bar{A}_j,$$

unde $i_1, i_2, \ldots, i_k$ sunt elemente distincte din $\{1, 2, \ldots, n\}$ și
$j \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}, 1 \leq k \leq n$

Esantionare cu înlocuire

- nu ne amintim ce numere au fost testate în rulările anterioare ale algoritmului;
- presupunem că reluăm algoritmul de k ori;
- la fiecare rulare, se genereaza un numă aleator, uniform din $\{1, 2, \ldots, 100d\}$, indiferent de alegerile anterioare
- la fiecare reluare a algoritmului avea prb de eroare $d/100d$
- definim E_i: la iterația i s-a găsit o rădăcină a polinomului $F - G$; avem $P(E_1) = P(E_2) \leq 1/100$;
- probabilitatea ca la ambele iterații să se găsească o rădăcină a lui $F - G$ este $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) \leq (1/100)^2$
- rezultatul unei iterații nu este influențat de rezultatul altei iterații, deci E_1, E_2 sunt independente
- probabilitatea ca la k iterații să se găsească rădăcini ale lui $F - G$ este $P(E_1 \cap \ldots E_k) \leq (1/100)^k$;

Se observă că eșantionarea fără întoarcere produce rezultate mai bune decât cea cu întoarcere.

Concluzii cu care să rămânem

- Formula probabilității condiționate
- Formula de iterare condiționată
- Definiție evenimente independente
- Observații legate de evenimente independente

Vă mulțumesc pentru atenție!
Întrebări?