# Seminar 8

# Variabile aleatoare continue.

In acest seminar ne intereseaza următoarele noţiuni legate de variabilele aleatoare continue:

- Densitatea de probabilitate;
- Funcţia de repartiţie;
- Media. Dispersia;
- Calculul probabilităţii unor evenimente;
- Distribuţiile: uniformă, exponenţială, normală;

## 8.1 Probleme rezolvate

**1**. Fie $X$ o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{dacă } x \geq 0 \\ 0 & \text{dacă } x < 0 \end{cases}, \quad \text{unde } c > 0.$$

Să se determine:

a) constanta $c$ astfel încât $f_X$ este densitate de probabilitate;

b) funcţia de repartiţie $F_X(x)$;

c) $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(X = 2)$ şi $P(X > 2)$.

d) $M(X)$ şi $\sigma^2(X)$.

**Rezolvare:**
a) Se observă că $f_X$ este pozitivă. Pentru a determina constanta $c$ vom impune condiţia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Avem $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = c\int\limits_{0}^{\infty} e^{-x}dx = c(-e^{-x})\Big|_0^{\infty} = c.$
Deci, $f_x$ este densitate de probabilitate pentru $c = 1$.

b) Pentru a determina funcţia de repartiţie a variabilie $X$, vom folosi definiţia:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Evident, pentru $x < 0$, avem $f_X(t) = 0, \forall t < x$, deci $F_X(x) = 0$.
Pentru $x \geq 0$, obţinem $F_X(x) = \int\limits_0^x f_X(t)dt = 1 - e^{-x}$.

Deci, $F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0 \\ 1 - e^{-x}, & \text{pentru } x \geq 0 \end{cases}$

c) Probabilitatea $P(1 \leq X \leq 3)$ se poate determina prin două metode: folosind densitatea de probabilitate sau funcţia de repartiţie.
Astfel, $P(1 \leq X \leq 3) = \int\limits_1^3 f_X(x)dx = \int\limits_1^3 e^{-x}dx = (-e^{-x})\Big|_1^3 = e^{-1} - e^{-3}$.
Sau, $P(1 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = [1 - e^{-3}] - [1 - e^{-1}] = e^{-1} - e^{-3}$.
Din curs avem că pentru o variabilă aleatoare continuă $P(X = a) = 0$, deci $P(X = 2) = 0$.

In plus, $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F_X(2) = 1 - (1 - e^{-2}) = e^{-2}$.

d) $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx = \int\limits_0^{\infty} xe^{-x}dx = 1$ (integrare prin părţi).
Pentru a calcula dispersia $\sigma^2(X)$ vom folosi formula $\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$.
Din LOTUS, avem $M(X^2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int\limits_0^{\infty} x^2 e^{-x}dx = 2$ ( integrare prin părţi de două ori). Deci, $\sigma^2(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2 - 1 = 1$.

**Din curs se poate observa ca variabila aleatoare $X$ este distribuită exponenţial de parametru** $\theta = 1$. Deci, $X \sim Exp(1)$.

**2**. Fie $X$ o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate:

$$f_X(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{dacă } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{in} \quad \text{rest} \end{cases}$$

Să se determine $M(X^n), \forall n \in \mathbb{N}$.

**Rezolvare:**

Din LOTUS, avem $M(X^n) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx = \int_0^1 x^n(x+\frac{1}{2}) = \left[\frac{1}{n+2}x^{n+2} + \frac{1}{2(n+1)}x^{n+1}\right]\Big|_0^1 = \frac{3n+4}{2(n+1)(n+2)}$.

**3**. Fie $X \sim Unif(-1,1)$ şi $Y = X^2$. Să se determine funcţia de repartiţie, $F_Y(y)$, şi densitatea de probabilitate, $f_Y(y)$, ale variabilei aleatoare $Y$.

**Rezolvare:** Se observă că valorile posibile nenule ale lui $Y$ se află în intervalul $[0,1]$. Pentru $y \in [0,1]$, avem:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

Se ştie că pentru $X \sim Unif(-1,1)$ funcţia de repartiţie este:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0 \\ \frac{x+1}{2}, & \text{pentru } -1 \le x < 1 \\ 1, & \text{pentru } x \ge 1 \end{cases}$$

Deci, $F_Y(y) = \frac{\sqrt{y}+1}{2} - \frac{-\sqrt{y}+1}{2} = \sqrt{y}$. In concluzie, $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } y < 0 \\ \sqrt{y}, & \text{pentru } 0 \le y < 1 \\ 1, & \text{pentru } y > 1 \end{cases}$

Se observă $F_Y(y)$ este o funcţie continuă, deci $Y$ este o variabilă aleatoare continuă. Pentru a determina $f_Y(y)$ vom deriva pe $F_Y(y)$. Obţinem: $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}, & \text{pentru } 0 \le y \le 1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$

**4**. Se consideră că numărul persoanelor ce sosesc la un magazin urmează o distribuţie Poisson, cu un număr mediu $\lambda$ de clienţi pe unitatea de timp (de exemplu, 1h). Dacă $Y$ este numărul de clienţi ce sosesc într-un interval de lungime $t$ (adică, în $t$ ore), atunci $Y \sim Pois(\lambda t)$. Se presupune că magazinul deschide la $t = 0$.
Fie $X$ variabila ce măsoară lungimea intervalului de timp până la sosirea primului client. Să se arate că $X \sim Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$.

**Rezolvare:** Calculăm

$$P(X > t) = P(\text{ nu este nici o sosire in [0,t]}) = P(Y = 0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}$$

Deci, $P(X \le t) = 1 - P(X > t) = 1 - e^{-\lambda t}$
Deci, pentru $x > 0$, avem

$$F_X(x) = P(X \le x) = 1 - P(X > x) = 1 - e^{-\lambda x},$$

funcţie care este funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare distribuită exponenţial de parametru $\theta = \frac{1}{\lambda}$. Deci, $X \sim Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$. In acelaşi mod, timpul dintre sosirea primului şi celui de-al doilea este distribuit exponenţial de parametru $\theta = \frac{1}{\lambda}$. In general, timpul dintre doi clienţi consecutivi este distribuit exponenţial $Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$.

**Observaţie:** Dacă o variabilă aleatoare $Y$, ce dă numărul de produceri ale unui eveniment într-un interval de timp, are distribuţia Poisson, de parametru $\lambda$, atunci variabila $X$, ce măsoară lungimile intervalelor de timp între momentele de producere ale evenimentului, are distribuţia exponenţială , $X \sim Exp(\theta = \frac{1}{\lambda})$.

**5**. Fie $X \sim N(-5, 4)$. Să se determine:

a) $P(X < 0)$;

b) $P(-7 \leq X \leq -3)$;

c) $P(X > -3|X > -5)$

d) numărul $x$ pentru care $P(X \leq x) = 0.95$.

**Rezolvare:**

Variabila $X$ este distribuită normal, de parametrii $m = -5, \sigma^2 = 4$, deci $\sigma = 2$. Vom standardiza această variabila, prin transformarea în $Z = \frac{X-m}{\sigma}$, unde $Z \sim N(0, 1)$. Avem:

a) $P(X < 0) = P(\frac{X-(-5)}{2}) < \frac{0-(-5)}{2}) = P(Z < 2.5) = \Phi(2.5) = 0.99$

b) $P(-7 \leq X \leq -3) = P(\frac{-7-(-5)}{2} < \frac{X-(-5)}{2}) < \frac{-3-(-5)}{2}) = \Phi(1) - \Phi(-1)$.

Se ştie că $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$, deci $P(-7 < X < -3) = 2\Phi(1)-1 \approx 0.68$. ($\Phi(1) \approx 0.84$)

c) $P(X > -3|X > -5) = \frac{P(X>-3,X>-5)}{P(X>-5)} = \frac{P(X>-3)}{P(X>-5)} = \frac{1-\Phi(1)}{1-\Phi(0)} \approx \frac{0.1587}{0.5} \approx 0.32$.

d) Numărul $x$ pentru care $P(X \leq x) = 0.95$ se determină folosind cvantila distribuţiei normale standardizate ($z_{0.95}$=z-score).

Mai exact, $P(X \leq x) = P(Z = \frac{X-(-5)}{2} \leq \frac{x-(-5)}{2}) = 0.95$. Deci, $\frac{x-(-5)}{2} = z_{0.95} = 1.64$.

De aici, $x = -5 + 2 \times 1.64$.

## 8.2 Probleme propuse

**6**. Fie $X$ o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} cx^3, & \text{pentru } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Să se determine:

a) constanta $c$ astfel încât $f_X$ este densitate de probabilitate;

b) funcţia de repartiţie $F_X(x)$;

c) $P(X \leq 2/3|X > 1/3)$, $P(X = 0.4)$ şi $P(X > 1/2)$.

d) $M(X)$ şi $\sigma^2(X)$.

**7**. Fie $X$ o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} x^2(2x + \frac{3}{2}), & \text{pentru } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{in rest} \end{cases}$$

Dacă $Y = \frac{2}{X} + 3$, să se determine $\sigma^2(Y)$.

**8**. Fie $X$ o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dacă $Y = X^2$, să se determine $F_Y(y)$.

**9**. Fie $X$ o variabilă aleatoare continuă cu densitatea de probabilitate

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } x < 0 \\ 2xe^{-x^2}, & \text{ipentru } \ x \ge 0 \end{cases}$$

a) Să se verifice că $f_X$ este densitate de probabilitate;

b) Să se determine funcţia de repartiţie $F_X(x)$;

c) Să se calculeze $P(-0.5 \le X \le 3)$.

d) Să se determine mediana variabilei aleatoare $X$.

**10**. Fie $U \sim Unif(0, 1)$ şi $X = -ln(1 - U)$. Să se arate că $X \sim Exp(1)$.

**11**. Timpul în minute între sosirea a doi clienţi la o bancă este o v.a. $X \sim Exp(0.4)$. Să se calculeze probabilitatea ca timpul între două sosiri consecutive să fie mai mare de 7 minute.

**12**. Fie $X \sim N(2, 4)$ şi $Y = 3 - 2X$.

a) Să se determine $P(X > 1)$;

b) Să se determine $P(-2 \le Y \le 1)$;

c) Să se calculeze $P(X > 2 | Y \le 1)$.

**13**. Intr-un sistem de comunicaţie se transmite un semnal $X$ cu valorile $X = \pm 1$ şi se recepţionează un semnal cu zogomot, descris prin variabila $Y = X + N$, unde $N$ este o variabilă aleatoare normal distribuită de parametrii $m = 0, \sigma^2 = 0.25$. Ştiind că $X = 1$, să se determine funcţia de repartiţie a semnalului recepţionat şi să se calculeze $P(Y > 0.5)$.