Integrale generalizate: definiție

Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, unde b este finit sau ∞. Presupunem că f este integrabilă pe orice interval $[a, t]$, unde $a < t < b$. Dacă există limita

$$\lim_{t \to b, t < b} \int_a^t f(x)dx$$

și este finită, spunem că **f este integrabilă pe** $[a, b)$ **(în sens generalizat**. Valoarea limitei o notăm cu

$$\int_a^b f(x)dx$$

și o numim **integrala funcției** f **pe [a,b) (în sens generalizat sau impropriu** .

Se mai spune că integrala este convergentă.

Dacă limita nu există sau nu este finită, atunci integrala este divergentă.

Exemple

- $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(x-2)^2}$-divergentă;
- $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{(x+1)^2}$-convergentă;
- $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x^4+1}}$-divergentă;

Rezultate generale:

- $I = \int\limits_{a}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, a > 0$: convergentă pentru $\alpha > 1$, divergentă pentru $\alpha \leq 1$.
- $I = \int\limits_{a}^{b} \frac{dx}{(b-x)^\alpha}, a >, b \in \mathbb{R}$: convergentă pentru $\alpha < 1$, divergentă pentru $\alpha \geq 1$.

Convergența integralei Euler-Poisson

Rezultat: $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ este convergentă.

Soluție:

- Scriem $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$
- Integrala $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ este integrala Riemann propiu-zisă;
- Pe intervalul $[1, \infty)$, avem că $-x^2 \leq -x$, iar funcția $x \mapsto e^x$ crescătoare, deci $e^{-x^2} \leq e^{-x}, \forall x \in [1, \infty)$.

  Dar $\int_1^\infty e^{-x}$ convergentă, deci prin comparație și $\int_1^\infty e^{-x^2}$ convergentă.

Observație :

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Funcția Gama a lui Euler

Integrala improprie cu parametru definită prin $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

Proprietățile funcției Gama:

- Γ este continuă și derivabilă pe $(0, \infty)$:

$$\Gamma^{(n)}(a) = \int_0^\infty x^{a-1} (lnx)^n e^{-x}$$

- $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \forall a > 0$
- $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Exerciții

Să se calculeze următoarele integrale, reducându-le la funcția Γ:

- $I_1 = \int\limits_0^\infty x^3 e^{-x} dx$
- $I_2 = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$
- $I_3 = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx$
- $I_4 = \int_0^\infty x \sqrt[3]{x^2 - 1} e^{-x^2} dx$

Funcția beta

Integrala improprie cu parametrii definită prin $\beta : (0, \infty) \times (0, \infty)\mathbb{R}$,

$$\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

Proprietăți:

- simetrică: $\beta(a, b) = \beta(b, a)$;
- $\beta(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$
- $\beta(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$

Exemplu: $I = \int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1-x}dx = \beta(3, \frac{4}{3}) = \frac{27}{140}$.