Université Perpignan Via Domitia

Algèbre linéaire,
Année universitaire 2023-2024.

21 décembre 2023, durée : 2h00

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.
La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Exercice 1 On considère la partie de $\mathbb{R}^4$ donnée par

$$E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 3y + 2z + t = 0\right\}$$

1. Montrer **en revenant à la définition** de sous-espace vectoriel que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une famille génératrice de E contenant exactement trois éléments. Que pouvez-vous en déduire sur $\dim E$?
3. **En revenant à la définition d'une famille libre**, montrer que

$$\big((0, 7, 7, 7), (4, 2, 0, 2), (-6, 0, 2, 2)\big)$$

   est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. Vérifier que chacun des éléments de cette famille est dans E. Que pouvez-vous en déduire sur la dimension de E ?
4. Exploiter les deux questions précédentes pour obtenir la dimension de E. Quel est le cardinal maximal des familles de E libres dans $\mathbb{R}^4$? Quel est le cardinal minimal des familles de $\mathbb{R}^4$ génératrices de E ?
5. Soit $n \geq 1$ un entier. Donner la définition du *rang d'une famille de vecteurs de* $\mathbb{R}^n$.
6. Montrer que E et $F = \mathbb{R}(1, 1, 1, 1)$ sont en somme directe.
7. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$. On pourra utiliser la formule de Grassmann.

Exercice 2 On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x, y) = (x + 2y, -3x, 4y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner sa représentation matricielle dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\ker(f)$. L'application f est-elle injective ?
4. Rappeler la définition du *rang d'une application linéaire.*
5. Enoncer le théorème du rang. Déduire de ce théorème que f n'est pas surjective.
6. Donner une base de $\operatorname{im}(f)$. Est-ce en accord avec le théorème du rang ?

Exercice 3 Soient $b_2, b_3 \in \mathbb{R}$. On s'intéresse dans cet exercice à la résolution du système linéaire d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = b_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = b_3 \\ \qquad\qquad\quad x_3 + 8x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

1. Ecrire la matrice augmentée du système linéaire ci-dessus.
2. Appliquer l'algorithme de Gauss (sur les lignes) à cette matrice. **On rappelle que cet algorithme s'arrête avec l'obtention d'une matrice *échelonnée* (en lignes).**
3. En déduire que le système linéaire étudié n'a pas de solution lorsque $2b_2 + b_3 \neq 0$.
4. Résoudre le système linéaire lorsque $2b_2 + b_3 = 0$.

Exercice 4 Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & x & x & x \\ x & 1 & x & x \\ x & x & 1 & x \\ x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

1. Rappeler la définition du *rang d'une matrice.*
2. Déterminer le rang de $A_{-\frac{1}{3}}$.
3. Inverser la matrice A_2 **à l'aide de la méthode de la matrice augmentée.**
4. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque, calculer le déterminant de A_x en le développant suivant la troisième colonne.
5. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer par des opérations sur les colonnes que

$$\det(A_x) = (1 + 3x)\det(B_x),$$

   où B_x est une matrice carrée de taille 4 possédant une colonne de réels indépendants de x. En déduire $\det(A_x)$.