Td1 (correction : suite)

EX2 :

a)

p	q	$p\wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p\wedge q)$
f	f	f	v	v	v	v
f	v	f	v	f	v	v
v	f	f	f	v	v	v
v	v	v	f	f	f	f

$\equiv$

Donc, $(\neg p)\vee(\neg q) \equiv \neg(p\wedge q)$

De même, b), c), d)

EX3

a) ⚠ $p \to q$ est v si p est faux quel que soit q

p	q	r	$p\to q$	$q \to r$	$(p\to q)\wedge(q\to r)$	$p\to r$	$[(p\to q)\wedge(q\to r)]\to(p\to r)$
v	v	v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	f	f	f	v
v	f	f	f	v	f	v	v
v	f	f	f	v	f	f	v
f	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	v	f	f	v	v
f	f	v	v	v	v	v	v
f	f	f	v	v	v	v	v

Tout v

Donc, Tautologie.

TSVP

Ex 4)

b) $p \vee \neg(p \wedge q)$

$= p \vee (\neg p \vee \neg q)$ (Loi Morgan)

$= \underbrace{(p \vee \neg p)} \vee \neg q$ (Associativité)

$= v \vee \neg q$ ($p \vee \neg p$ tous les jours v)

$= v$ (car $v \vee$ quelque soit $= v$)

<u>Ex 4</u> c) Simplifier :

$(\underline{p} \vee q) \wedge (\underline{p} \vee q')$

$= p \vee (q \wedge q')$ (factorization)

$= p \vee f$ (car $q \wedge q' = f$ tous les jours)

$= p.$

TD 1 (suite)

Solution(esquise):

Ex 1: $f \vee v = v$. $v \wedge v = v$. $v \wedge v = v$. $f \vee f = f$.(2 est le p.p. premier.)(v=vrai, f=faux)

Ex2: Prouvez que le 1er membre et le second membre de $\equiv$ ont la même table de vérité. Il y aura $4 = 2^2$ lignes dans la table de vérité.
Ex 3: a) Il y aura 8 lignes dans la table de vérité(car il y a 3 variables. donc $8 = 2^3$.)
Dans la colonne de
$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)]$
on n'obtiendra que la valeur v.
b) Il y aura 4 lignes dans la table de vérité.
Ex 4:
Notons $\neg p$ par p' , $\vee$ par $+$, $\wedge$ par $.$ ou simplement juxtaposition. v par 1 f par 0.
Avec cette notation: $p + p' = 1$, $pp' = 0$. $p \to q \equiv p' \vee q = p' + q$.
Donc, $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)]$
$= [(p' + q)(q' + r)]' + (p' + r)$
$= (p' + q)' + (q' + r)' + p' + r$ (loi de Morgan et $(p')' = p$.
$= pq' + qr' + p' + r$ (loi de Morgan)
$= pq' + qr' + p'(q + q') + r(q + q')$ (car $p + p' = 1$)
$= pq' = qr' + p'q + p'q' + rq + rq'$
$= pq' + p'q' + qr' + qr + \cdots$
$= q'(p + p') + q(r' + r) + \cdots$
$= q' + q + \cdots$ (car $p + p' = r + r' = 1 = v$)
$= 1 + \cdots = 1$.
Ex 5:
Si k est un entier divisant le nombre d'éléments de G alors il existe un sous-groupe H de k éléments.

Solutions (td2)

EX 1. parfaitement valable.

Conclusion: p est faux, q est faux

$\Rightarrow$ $(p \rightarrow q)$ est vrai.

$p \equiv$ 5 est un multiple de 3 (faux)

$q \equiv$ 20 ———————— 3. (faux)

EX 2.

p	q	$p \longleftrightarrow q$
f	f	v
f	v	f
v	f	f
v	v	v

EX 3 . Soit $256 = n^2$

Alors $1024 = 256 \times 4 = n^2 \times 4$

$= (2n)^2$

Réponse : OUI

. Soit $250 = n^2$ Alors $1000 = 250 \times 4$

$= 4n^2$

$= (2n)^2$

Réponse : OUI

. $1028 = 257 \times 4$

Réponse : NON

EX 4. Table de vérité de $p \rightarrow (q \vee r)$

(Il y aura 8 lignes : 000, 001, ..., 111)

2

$p \to (q \vee r) \equiv p' + q + r$

$\equiv (p'+q) + (p'+r)$ (car $p'+p' = p'$ (idempotent)).

$\equiv (p \to q) \vee (p \to r)$

EX 5. contre-exemple : $n = 41$

$41^2 + 41 + 41 = 41(41+1+1)$

EX 6. Un argument $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ est valable si Q est vrai quand $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont tous vrais (Déf).

TH : Un argument $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash Q$ est valable ssi $(P_1 \wedge P_2 \wedge \cdots \wedge P_n) \to Q$ est une tautologie.

p	q	$p \to q$
		V
f	f	V
f	V	f
V	f	V
V	V	

$p, p \to q \vdash q$ est valable car p et $p \to q$ sont simultanément V seulement dans le cas de la ligne 4 et dans ce cas q est V.

par contre, $p \to q, q \vdash p$ est non valable car (lign 2)

3

EX 8 - $\oplus$ est associative.
(vérification par la table de vérité ou par la manipulation algébrique) $x \oplus y \equiv x'y + xy'$?

$$(x \oplus y) \wedge z = (x \wedge z) \oplus (y \wedge z).$$

Mais $$(x \oplus y) \vee z \neq (x \vee z) \oplus (y \vee z)$$
(eg $x = 0,\ y = 0,\ z = 1$).

Minorité : $\quad x \oplus 1 \oplus 0 = 1$

$\downarrow$

minorité

$1 \oplus 0 \oplus 1 = 0$

$\downarrow$

minorité

Signalez-moi les erreurs/omissions SVP

Sri

Solutions (TD3)

EX 1. Il y a $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ fonctions $f(x,y)$ possibles car il y a 2 choix pour chaque $f(0,0)$, $f(0,1)$, $f(1,0)$, $f(1,1)$.

Table de vérité	Notations	Symbole ∘	Nom
0000	0	$\perp$	contradiction
0001	$x \wedge y$	$\wedge$	conjonction
0010	$x \wedge y'$	$\bar{\supset}$	Nonimplication
0011	x	L	projection gauch
0100	$x' \wedge y$	$\bar{C}$	Réciproque non impli cation
0101	y	R	Right projection
0110	$x \oplus y$	$\oplus$	ou exclusive
0111	$x \vee y$	$\vee$	Disjonction
1000	$x' \wedge y'$	$\vee'$	Nondisjonction,
1001	$x \equiv y$	$\equiv$	si et seulement
1010	y'	R'	Complémentation d-
1011	$x \vee y'$	C	si
1100	x'	$\bar{L}$	complémentation
1101	$x' \vee y$	$\supset$	si ... alors
1110	$x' \vee y'$	$\wedge'$	Nonconjonction, n
1111	1	$\top$	Tautologie

(cf. D. KNUTH)
VOL 4 p. 49

Sóln: TS

eg.

x	y	x'	y'	? $x' \wedge y'$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Ex2 : · OUI commutatif.

car $\langle xyz \rangle = \langle xzy \rangle = \langle yxz \rangle = \langle yzx \rangle = \langle zxy \rangle = \langle zyx \rangle$.

· $\langle 000 \rangle = \langle 001 \rangle = 0$ (loi de Majorité)

(0 domine)

$\langle 011 \rangle = \langle 111 \rangle = 1$ (1 domine)

· $x \wedge y = \langle x0y \rangle$, $x \vee y = \langle x1y \rangle$.

· $\langle xyz \rangle = y$ si $x \leq y \leq z$.

Correction TD4

Ex 1.

a) $(\exists x \in A) \neg p(x)$

b) $(\forall x \in A) \neg p(x)$

c) $\neg p(x) \vee \neg q(x)$

d) $\neg p(x) \wedge \neg q(x)$

e) $\exists x \forall y \forall z, \neg p(x,y,z)$

f) $\forall y \forall x \exists z \neg p(x,y,z)$

Ex 2

a) $\exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}^*, \exists n > n_0, |a_n - l| \geq \varepsilon$

b) $\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x$ avec $0 < |x-a| < \delta$, et $|f(x) - l| \geq \varepsilon$

Ex 3 $\left((p \Rightarrow q)^c = (\neg p \vee q)^c = p \wedge q^c\right)$

$\neg(p(x) \vee q(x)) \vee (\neg p(x) \wedge q(x))$

$\equiv (\neg p(x) \wedge \neg q(x)) \vee (\neg p(x) \wedge q(x))$ (Morgan)

$\equiv \neg p(x) \wedge (\neg q(x) \vee q(x))$ (Distributivité) factorise

$\equiv \neg p(x) \wedge v$ (v = vrai)

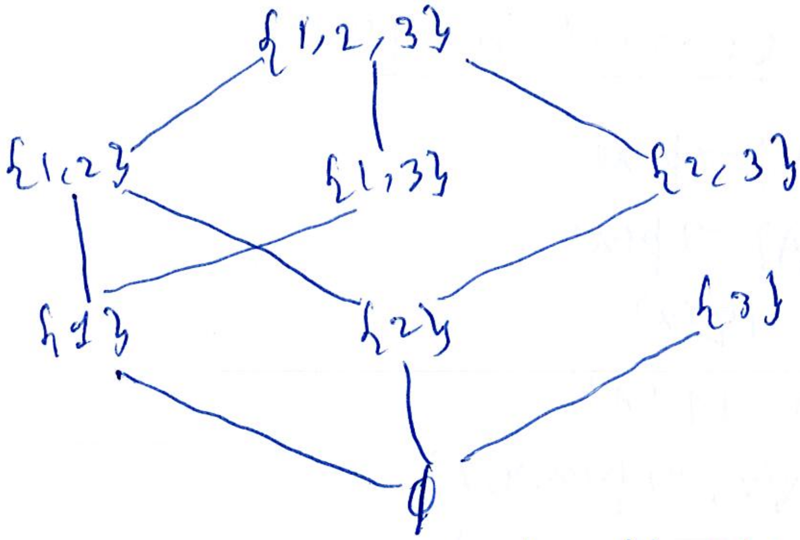
$\equiv \neg p(x)$ (loi d'identité)

Ex 4 a) Non. Une alg. de Boole finie possède exactement 2^n $(n \geq 1)$ éléments. $(2^n \neq 9)$

(Théorème de STONE) (n = Le nbr. d'Atomes)

b) OUI. $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ = Toutes les parties de $\{1,2,3\}$

T.S.V.P.

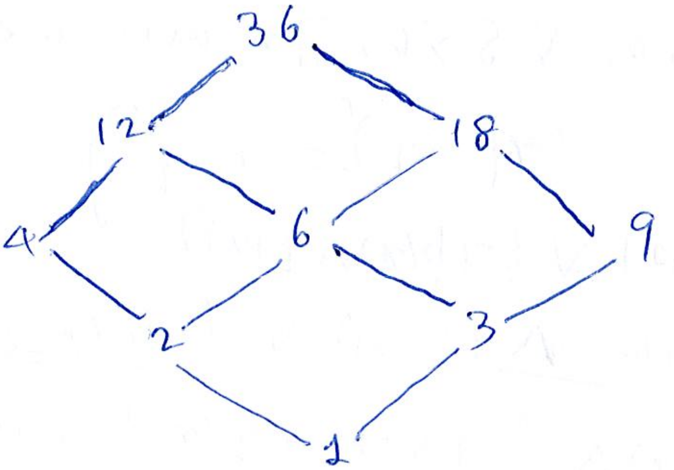


$2^3 = 8$ éléments

Diagramme de Hasse

Ex5 $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$

Diagramme de Hasse :



pour $a, b \in D_{36}$, $a \wedge b = a \cdot b = \text{pgcd}(a,b)$,

$a \vee b = a + b = \text{ppcm}(a,b)$

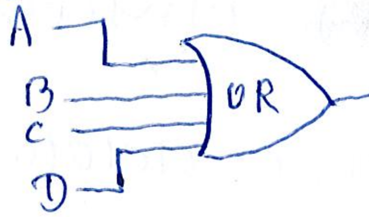
pgcd = Le plus grand commun diviseur

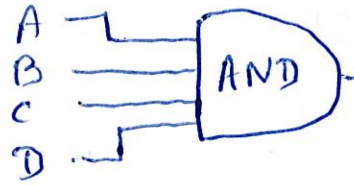
ppcm = Le plus petit commun multiple

NON. $|D_{36}| = 9 \neq 2^n$.

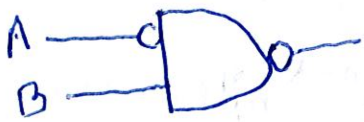
correction td5

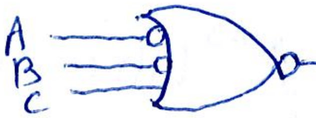
EX 1

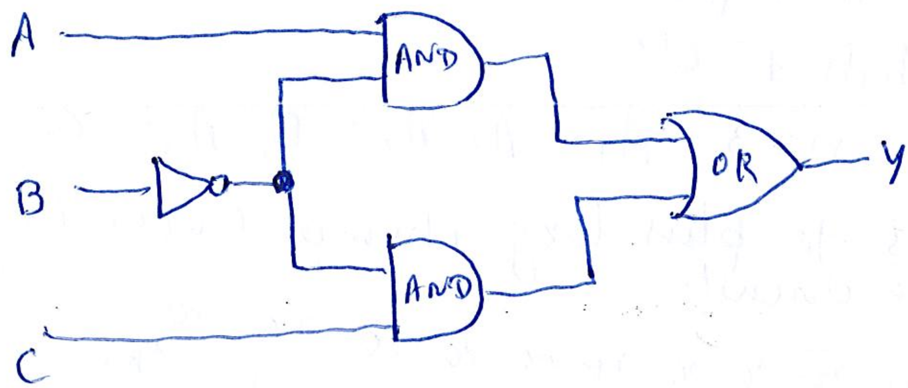
a)  $Y = A+B+C+D = 10110101$

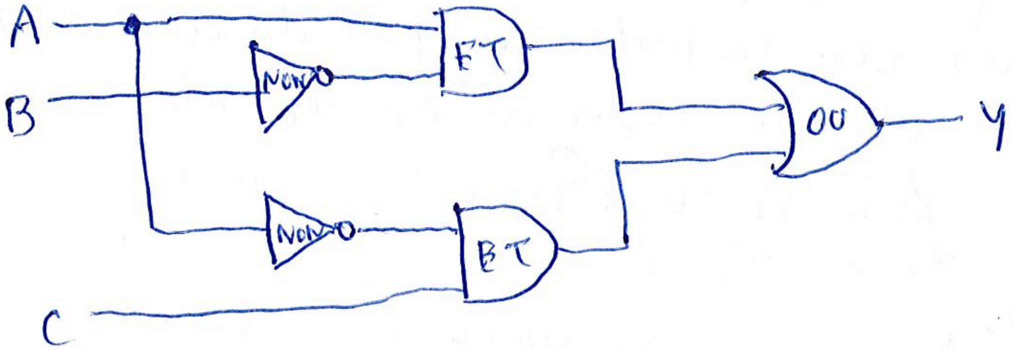
b)  $Y = A \cdot B \cdot C \cdot D = 01100010$

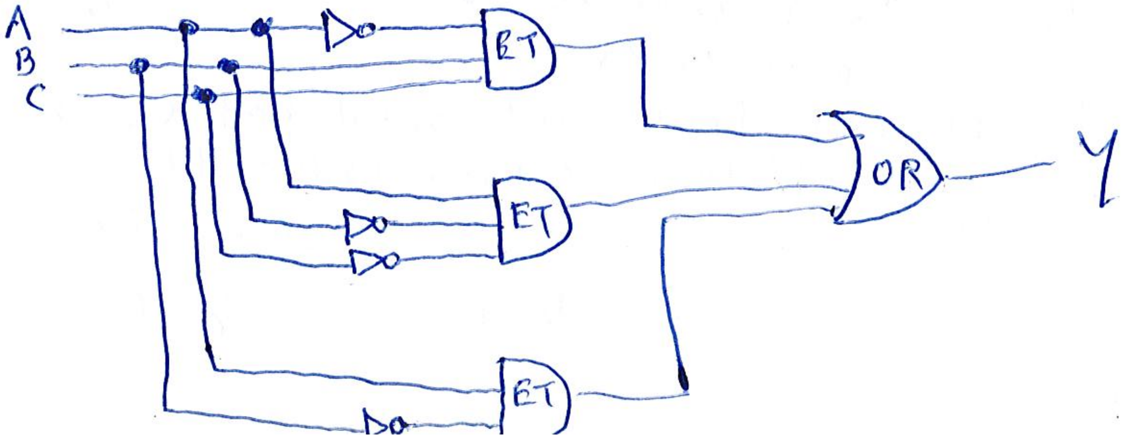
c)  $Y = A' = 01\cancel{11}010$ 01111010

d)  $Y = (A'B)'$

e)  $Y = (A' + B' + C)'$

f) 

g) 

h) 

Remarque : Un point • représente l'entrée est envoyée dans plusieurs directions. (2)

<u>EX 2</u> $A = 00001111$, $B = 00110011$, $C = 01010101$

$A' = 11110000$, $B' = 11001100$

$Y = 00110101$

<u>Défn :</u> (Suite spéciale)

Considérons n entrées $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

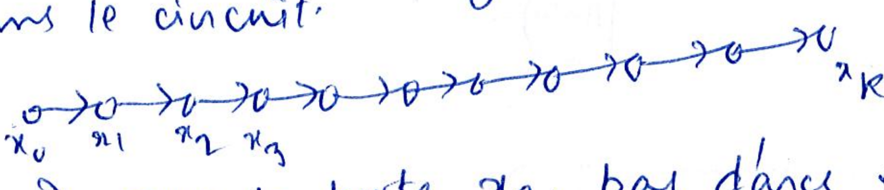
$A_1 =$ 2^{n-1} bits 0 suivi 2^{n-1} bits 1

$A_2 =$ D'une manière répétitive écrire 2^{n-2} bits 0 suivi de 2^{n-2} bits 1

$A_3 =$ D'une manière répétitive écrire 2^{n-3} bits 0 suivi de 2^{n-3} bits 1 etc.

Dans l'exo 2, $n=3$, $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$.

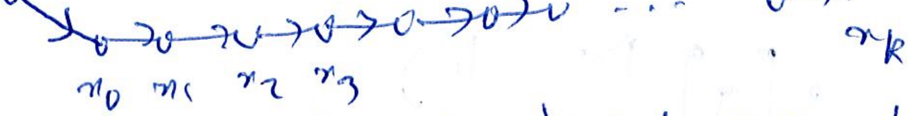
<u>EX 3</u> Considérons le plus long chemin (voir la figures) dans le circuit.



(~~Les noeuds~~ (Les portes) $\equiv$ o) pour la porte x_0, pas d'arcs entrant car s'il y a un arc entrant en x_0 alors

l'un a <u>soit</u>

<u>soit</u>



Dans le 1er cas, le circuit n'est pas combinatoire (car un cycle existe avec l'arc entrant)

Dans le 2-ème cas, on a un chemin de $k+1$ arcs, une contradiction car le + long chemin a k arcs. De même, pas d'arcs sortants de x_k.