TD 3 :

EXERCICE 21 :

$\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et dérivables au moins 2 fois sur $\mathbb{R}$.

1) Montrons que D est un $\mathbb{R}$-ev.

Pour cela il suffit de montrer que D est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on a :

→ $D \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$\mathcal{D} \neq 0$ en effet $\sin \in D$ car la fonction sinus est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.

→ Stabilité par somme.

Soit $f, g \in D$ alors f'' et g'' existent sur $\mathbb{R}$ donc, d'après le théorème de dérivation, la fonction $f+g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ deux foix et $(f+g)'' = (f'+g')'$

$= f'' + g''$ ($f+g \in D$ aussi donc D est stable par somme)

→ Stabilité pour le produit par un scalaire

Soit $f \in D$ et $\lambda \in D$

Puisque f est dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$ alors λf aussi et $(\lambda f)'' = (\lambda f')' = \lambda f''$

donc $\lambda f \in D$

En conclusion, D est un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et par conséquent $\mathcal{D}$ est un $\mathbb{R}$-ev

2) $\Phi : \begin{cases} D \to \mathbb{R}[X] \\ f \to f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 \end{cases}$

ⓐ Montrons que Φ est une A.L.

• Soit $f, g \in D$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Phi(f+g)(x) &= (f+g)(0) + (f+g)'(0)x + \tfrac{1}{2}(f+g)''(0)x^2 \\
&= f(0) + g(0) + (f'(0) + g'(0))x + \tfrac{1}{2}(f''(0) + g''(0))x^2 \\
&= \underbrace{f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2} f''(0)x^2}_{\Phi(f)(x)} + \underbrace{g(0) + g'(0)x + \tfrac{1}{2} g''(0)x^2}_{\Phi(g)(x)}
\end{aligned}$$

Donc $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$

• Soit $f \in D$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\Phi(\lambda f)(x) &= (\lambda f)(0) + (\lambda f)'(0)x + \tfrac{1}{2}(\lambda f)''(0).x^2 \\
&= \lambda f(0) + \lambda.f'(0).x + \tfrac{1}{2}\lambda.f''(0).x^2 \\
&= \lambda(f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2} f''(0)x^2) \\
&= \lambda.\Phi(f)
\end{aligned}$$

En conclusion, Φ est bien une app. linéaire.

(b) * Im Φ = ?

D'après la définition on a $\mathrm{Im}\,\Phi \subset \mathbb{R}_2[x]$

Montrons que Φ est surjective dans $\mathbb{R}_2[x]$

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$

$\Phi(P)(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{1}{2}P''(0)x^2$

$\Phi(P)(x) = c + bx + \frac{1}{2}2ax^2 = P(x)$

Alors $P \in \mathrm{Im}\,\Phi$

En conclusion $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathbb{R}_2[x]$

* $rg(\Phi) = ?$

$rg(\Phi) := \dim(\mathrm{Im}\,\Phi) = \dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$

(c) * Ker Φ = ?

$\mathrm{Ker}\,\Phi = \{f \in \mathcal{D} \,/\, \Phi(f) = \vec{0}\} = f(\{\vec{0}\})$

$= \{f \in \mathcal{D} \,/\, f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0\}$

Par exemple $f(x) = x^3$ est dans $\mathrm{Ker}\,\Phi$

Première méthode :

On considère $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^2 + x^3$

On a $f'(x) = 2x \quad f''(x) = 2$

On a $g'(x) = 2x + 3x^2 \quad g''(x) = 2 + 6x$

$\Phi(f)(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 0 + 0x + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^2 = x^2$

$\Phi\, g(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{1}{2}g''(0)x^2 = 0 + 0x + \frac{1}{2}2x^2 = x^2$

On a $\Phi(f) = \Phi(g)$ avec $f \neq g$ donc l'application Φ n'est pas injective.

Deuxième méthode : (# que pour les applications linéaires)

Une application linéaire est injective ssi son noyau ne contient que le vecteur nul.

La ~~fo~~ fonction $x \mapsto x^3$ appartient à $\mathrm{Ker}\,\Phi$ donc $\mathrm{Ker} \neq \{\vec{0}\}$ et par conséquent l'application linéaire Φ n'est pas injective. $(\Phi(x^3) = 0$.

EXERCICE 22 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad E = \mathbb{R}_n[x]$ $\quad f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n \\ P \to Q(x) = x \cdot P'(x) \end{cases}$

(1) On a bien $f : E \to E$

Il reste à vérifier que f est une A.L.

• Pour tout polynômes $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$

$f(P+Q)(x) = x(P'(x) + Q'(x)) = x.P'(x) + x.Q'(x) = f(P)(x) + f(Q)(x)$

donc on a bien $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$

• Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$

on a : $f(\lambda P)(x) = x.(\lambda P)'(x) = x.\lambda.P'(x) = \lambda.x.P'(x) = \lambda.f(P)(x)$

donc on a bien $f(\lambda P) = \lambda.f(P)$

$\Rightarrow$ En conclusion : $f(P+Q) = f(P) + f(Q)$ et $f(\lambda P) = \lambda.f(P)$ donc f est une app. lin.

Et de plus $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ donc f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$

② La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille (x^k)

Soit $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$ $f(x^k) = x.k.x^{k-1} = k x^k$

③ * $f(1) = x.(1)' = x.0 = 0$ donc $1 \in \ker f$ on a $\ker(f) \neq \{\vec{0}\}$ donc f n'est pas injective.

* On a $\ker f \neq \{\vec{0}\}$ donc $\dim(\ker f) \geq 1$

et d'après le théorème du rang

$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(f))$

$\dim(\mathrm{Im} f) = n+1 - \dim(\ker(f))$

$\dim(\mathrm{Im} f) \leq n$

$\dim(\mathrm{Im} f) < n+1$ Puisque $\dim(\mathrm{Im} f) < \dim(\mathbb{R}_n[X]) \Rightarrow \mathrm{Im} f \neq \mathbb{R}_n[X]$

donc f n'est pas surjective.

④ $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\{f(x^k) : 0 \leq k \leq n\}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\{k x^k : 0 \leq k \leq n\}$

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}\{k x^k : 1 \leq k \leq n\}$ * on retire le cas où $k=0$ car c'est le vecteur nul $\vec{0}$ *

= l'ensemble des polynômes de degré au plus n et dont la constante est nulle.

$\dim(\mathrm{Im} f) = n$.

EXERCICE 23 : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'app. linéaire définie par $f(e_1) = (-2, 1)$ $f(e_2) = (1, -2)$

$f(e_3) = (1, 1)$

* Pour $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{u} = (x,0,0) + (0,y,0) + (0,0,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1) = x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}$

$f(\vec{u}) = f(x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3}) = f(x\vec{e_1}) + f(y\vec{e_2}) + f(z\vec{e_3}) = x f(\vec{e_1}) + y f(\vec{e_2}) + z f(\vec{e_3})$

$= x.(-2,1) + y(1,-2) + z(1,1) = (-2x, x) + (y, -2y) + (z, z) = (-2x+y+z, x-2y+z)$

donc $f(x,y,z) = (-2x + y + 3 \,;\, x - 2y + 3)$

* $\ker f$ $(x,y,z) \in \ker f$ ssi $\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ x - 2y + z = 0 & L_2 \end{cases} \xleftrightarrow{L_2 - L_1} \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2y + y + z = 0 \\ x = y \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} z = y \\ x = y \end{cases}$$ donc $(x,y,z) \in \ker f$ ssi $x = y = z$

c-à-d (x,x,x) ; $x \in \mathbb{R}$ donc $x(1,1,1)$ donc $\ker f = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$

La droite vectorielle de vecteur directeur $(1,1,1)$.

Autre méthode:

$$\begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

On combine les colonnes jusqu'à obtenir une famille échelonnée

$$\begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1)+f(\vec{e}_3) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1)+f(\vec{e}_2)+f(\vec{e}_3) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1)+f(\vec{e}_2)+f(\vec{e}_3) & f(\vec{e}_2)-f(\vec{e}_3) & f(\vec{e}_3) \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$ donc $\dim \operatorname{Im}(f) = 2$

$\underbrace{\quad}_{2 \text{ échelo}}$

EXERCICE 24:

$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z) \mapsto (x+z, y-x \end{cases}$

* $\ker f$: $(x,y,z) \in \ker f$ ssi $f(x,y,z) = (0,0,0)$

Ce sont les solutions du système

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0 = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{L_3 - L_1 + L_2} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \xleftrightarrow{2L_3 + L_2} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2z = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = x \end{cases}$$

donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc Ker f est la droite vectorielle de vecteur directeur $(1,1,-1)$ (ce qui à lui seul constitue une base de Ker f) $\text{Ker} f = \text{Vect}\{(1,1,-1)\}$

⇒ Base de Imf ?

$\text{Im} f = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\}$ (où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$)

$f(e_1) = f(1,0,0) = (1,-1,0,1)$

$f(e_2) = f(0,1,0) = (0,1,1,1)$

$f(e_3) = f(0,0,1) = (1,0,1,2)$

On remarque que $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ donc $\text{Vect}\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \text{Vect}\{f(e_1), f(e_2)\}$

Il est clair que $f(e_1)$ et $f(e_2)$ ne sont pas colinéaires (c-à-d liés), donc la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre. C'est donc une base de Imf.

⇒ Rang $(f) = \dim(\text{Im} f) = 2$ mais on pouvait aussi utiliser le théorème du rang

$\underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3} = rg(f) + \underbrace{\dim(\text{Ker} f)}_{1}$ donc $rg(f) = 3 - 1 = 2$

EXERCICE 25 :

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ # $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$, $g \circ f$ #

① Comparer $\text{Ker}(g \circ f)$ et $f^{-1}(\text{Ker} g)$

⇒ Soit $u \in \text{Ker}(g\circ f) \iff g\circ f = \vec{0}_G \iff g(f(u)) = \vec{0}_E$ donc $f(u) \in \text{Ker}\, g$

$\iff u \in f^{-1}(\text{Ker}\, g)$ On a donc $\text{Ker}(g\circ f) \subset f^{-1}(\text{Ker}\, g)$

⇒ Soit $u \in f^{-1}(\text{Ker}\, g)$ alors $f(u) \in \text{Ker}\, g \iff g(f(u)) = \vec{0}_G \iff g\circ f(u) = \vec{0}_G$

$\iff u \in \text{Ker}(g\circ f)$ on a donc $f^{-1}(\text{Ker} g) \subset \text{Ker}(g\circ f)$

⇒ En conclusion, par double inclusion on a montré que $\text{Ker}\, g\circ f = f^{-1}(\text{Ker}\, g)$.

② Comparer $\text{Im}(g\circ f)$ et $g(\text{Im} f)$

⇒ Soit $w \in \text{Im}(g\circ f)$ donc $\exists u \in E \setminus w = g\circ f(u) = g(f(u))$ or $f(u) \in \text{Im} f$

donc $w \in g(\text{Im} f)$ on a donc $\text{Im}(g\circ f) \subset g(\text{Im} f)$

⇒ Soit $w \in g(\text{Im} f)$ alors $\exists v \in \text{Im} f \setminus w = g(v)$ et $\exists u \in E \setminus v = f(u)$ et $w = g(v)$

donc $w = g(f(u)) = g\circ f(u)$ donc $w \in \text{Im}\, g\circ f$ on a donc $g(\text{Im} f) \subset \text{Im}(g\circ f)$

⇒ En conclusion, et par double inclusion, on a $\text{Im}\, g\circ f = g(\text{Im} f)$

EXERCICE 26:

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et E_1, E_2 des s.e.v de E

On suppose que f est injective (# $f(x)=f(y) \rightarrow x=y$ et $\text{Ker} f = \{\vec{0}_E\}$ #)

et E_1 et E_2 sont en somme directe (# $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$ #)

Soit $v \in f(E_1) \cap f(E_2)$

donc $v \in f(E_1)$, $\exists u_1 \in E_1 \setminus v = f(u_1)$ donc $f(u_1) = f(u_2) = v$

et $v \in f(E_2)$, $\exists u_2 \in E_2 \setminus v = f(u_2)$

or f est injective donc $f(u_1) = f(u_2) \overset{inj}{\Rightarrow} u_1 = u_2 \in E_1 \cap E_2$

by me

E_1 et E_2 sont en somme directe donc $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$ donc

$u_1 = u_2 = \{\vec{0}_E\}$

or $v = f(u_1) = f(\vec{0}_E)$ et $v \in f(E_1)$ donc $v = \{\vec{0}_E\}$

et $v = f(u_2) = f(\vec{0}_E)$ et $v \in f(E_2)$ donc $v = \{\vec{0}_E\}$

et $v \in f(E_1) \cap f(E_2)$ donc $f(E_1) \cap f(E_2) = \{\vec{0}_E\}$ donc

$f(E_1)$ et $f(E_2)$ sont en somme directe. #

prof

donc $f(u_1) = f(u_2)$ or f étant injective on a $u_1 = u_2$

donc $u_1 = u_2 \in E_1 \cap E_2$ Mais $E_1 \cap E_2 = \{\vec{0}_E\}$, car E_1 et E_2 sont en somme directe d'où $u_1 = u_2 = \vec{0}_E$

On en déduit que $v = f(u_1) = f(u_2) = f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

En conclusion $f(E_1) \cap f(E_2) = \{\vec{0}_F\}$ c-à-d les s.e.v $f(E_1)$ et $f(E_2)$ sont en somme directe. #

EXERCICE 27:

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E

f est nilpotent, $\exists n \in \mathbb{N}^* \setminus f^n = \tilde{0}$ (# $fofo...of$ n fois vaut l'appli. lin. nulle #)

Mq $g = id_E - f$ est inversible (# possède une appl. réciproque #)

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + \dots + a^0 b^{n-1})$

$$\underbrace{id_E - \underbrace{f^n}_{0}}_{id_E} = \underbrace{(id_E - f)}_{=g} \circ \underbrace{(id_E + f + f^2 + f^3 + \dots + f^{n-1})}_{g^{-1}}$$

EXERCICE 28: $f \in \mathcal{L}(E)$

ⓐ Mq l'équivalence entre (1) $E = \text{Im} f + \text{Ker} f$ (2) $\text{Im} f = \text{Im} f^2$ (où $f^2 = fof$)

(1) $\Rightarrow$ (2)

Supposons que $E = \text{Im} f + \text{Ker} f$ (c-à-d tout vecteur de E peut s'écrire comme somme d'un certain vecteur de $\mathrm{Im} f$ et d'un de $\mathrm{Ker} f$)

Mq, par double inclusion que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Im} f \supset \mathrm{Im} f^2$

Si $v \in \mathrm{Im} f^2$ alors $\exists u \in E \,/\, v = f(f(u))$ donc $v \in \mathrm{Im} f$ (car c'est l'image du vecteur $f(u)$)

$\Rightarrow$ Mq $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$

Soit $v \in \mathrm{Im} f$, alors $\exists u \in E \,/\, v = f(u)$

Par ailleurs $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$ signifie qu'il existe $w \in \mathrm{Im} f$ et $w' \in \mathrm{Ker} f$ tels que $u = w + w'$

$w \in \mathrm{Im} f$ donc $\exists t \in E \,/\, w = f(t)$

donc $u = f(t) + w' \Leftrightarrow f(u) = f(f(t) + w') \Leftrightarrow \underset{v}{\underset{\shortparallel}{f(u)}} = \underbrace{f(f(t))}_{\substack{f\circ f(t) \\ \in \mathrm{Im} f^2}} + \underbrace{f(w')}_{w' \in \mathrm{Ker} f}$

donc $v = \underbrace{f\circ f(t)}_{\in \mathrm{Im} f^2} + \vec{0}$ donc $v \in \mathrm{Im} f^2$

donc $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Im} f^2$ et par double inclusion on a $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

$(2) \Rightarrow (1)$

Supposons que $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$

Soit $u \in E$. on s'intéresse à $f(u) \in \mathrm{Im} f^2$ donc $\exists v \in E \,/\, f(u) = f\circ f(v)$

$f(u) - f\circ f(v) = \vec{0}_E \Leftrightarrow f(u - f(v)) = \vec{0}_E$ donc $u - f(v) \in \mathrm{Ker} f$

On a donc $u = \underbrace{f(v)}_{\in \mathrm{Im} f} + \underbrace{u - f(v)}_{\in \mathrm{Ker} f}$ en conclusion $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f$

b) Mq (3) $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{\vec{0}_E\} \Leftrightarrow$ (4) $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

$(3) \Rightarrow (4)$ Supposons que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{\vec{0}_E\}$

$\Rightarrow$ On a $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$ car si $u \in \mathrm{Ker} f$ alors $f(u) = \vec{0}_E \Leftrightarrow f(f(u)) = f(\vec{0}_E)$

$\Leftrightarrow f\circ f(u) = \vec{0}_E$ et donc $u \in \mathrm{Ker} f^2$

$\Rightarrow$ Mq $\mathrm{Ker} f \supset \mathrm{Ker} f^2$

Soit $u \in \mathrm{Ker} f^2$ alors $f(f(u)) = \vec{0}_E$ donc $f(u) \in \mathrm{Ker} f$ or $f(u) \in \mathrm{Im} f$

donc $f(u) \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f \Leftrightarrow f(u) \in \{\vec{0}_E\} \Leftrightarrow f(u) = \vec{0}_E \Leftrightarrow u \in \mathrm{Ker} f$

donc $\mathrm{Ker} f^2 \subset \mathrm{Ker} f$

Par double inclusion on a montré que $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

(4) $\Rightarrow$ (3)

Supposons que $\ker f = \ker f^2$

Soit $u \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$

$u \in \ker f \Rightarrow f(u) = \vec{0}_E$

$u \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists v \in E \,/\, u = f(v)$

$u = f(v) \Rightarrow f(u) = f(f(v))$

$\vec{0}$ car $u \in \ker f$

donc $f \circ f(v) = \vec{0}$ c $v \in \ker f^2$ or $\ker f^2 = \ker f$ donc $v \in \ker f$

c-à-d $f(v) = \vec{0}$ or $u = f(v)$ donc $u = \vec{0}$

En conclusion $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{\vec{0}\}$

© (2) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\operatorname{Im} f^2) \Rightarrow rg(f) = rg(f^2)$ (5)

(1) + (3) $\Leftrightarrow$ (6) # cours #

(5) $\Rightarrow$ (4)

$rg f = rg f^2$ donc d'après le théorème appliqué à f : $n = rg(f) + \dim(\ker f)$

appliqué à f^2 : $n = rg(f^2) + \dim(\ker f^2)$

Donc $\dim(\ker f) = \dim(\ker f^2)$ or $\ker f \subset \ker f^2$ et ce sont des sev donc

$\ker f = \ker f^2$ (# si deux s.e.v ont la m̂ dimension et un est inclu dans l'autre donc ils sont égaux #)

EXERCICE 30:

$f(\vec{i}) = 2\vec{i} + 2\vec{j}$ et $f(\vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j}$

→ Déterminons l'endomorphisme $f \circ f$

- $f \circ f(\vec{i}) = f(f(\vec{i})) = f(2\vec{i} + 2\vec{j}) = 2 \cdot f(\vec{i}) + 2 f(\vec{j}) = 2(2\vec{i} + 2\vec{j}) + 2(-\vec{i} - \vec{j})$
  $= 4\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{i} - 2\vec{j} = 2\vec{i} + 2\vec{j} = f(\vec{i})$
- $f \circ f(\vec{j}) = f(f(\vec{j})) = f(-\vec{i} - \vec{j}) = -f(\vec{i}) - f(\vec{j}) = -(2\vec{i} + 2\vec{j}) - (-\vec{i} - \vec{j}) =$
  $-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{i} + \vec{j} = -\vec{i} - \vec{j} = f(\vec{j})$

donc $f \circ f(\vec{i}) = f(\vec{i})$ et $f \circ f(\vec{j}) = f(\vec{j})$

Puisque $f \circ f$ et f transforme de la m̂ manière les vecteurs de la base, c'est donc qu'il s'agit de la m̂ A.L. c-à-d $f \circ f = f$

Donc f est une projection vectorielle sur le sev $\operatorname{Im} f$ et suivant la direction du sev $\ker f$

$f \circ f \begin{cases} f \to \text{projection} \\ id \to \text{symétrie} \end{cases}$

⇒ Déterminons Ker f et Im f

* Soit $(x,y) \in \text{Ker} f$ car $f(x,y) = \vec{O}_E$

$(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} \Leftrightarrow f(x,y) = f(x\vec{i} + y\vec{j}) = \vec{O}_E \Leftrightarrow x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) = \vec{O}_E$

$\Leftrightarrow x(2\vec{i} + 2\vec{j}) + y(-\vec{i} - \vec{j}) = \vec{O}_E \Leftrightarrow (2x - y)\vec{i} + (2x - y)\vec{j} = \vec{O}_E$

donc $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$ donc Ker f est la droite (vectorielle) d'équation $y = 2x$

* Soit $(x,y) \in E$ on a vu que $f(x,y) = (2x-y)\vec{i} + (2x-y)\vec{j} = (2x-y)(\vec{i} + \vec{j})$

Tous les vecteurs images sont eux colinéaires au vecteur $\vec{i} + \vec{j}$ donc

$\text{Im} f = \text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$

donc Im f est la droite vectorielle d'éq $y = x$

EXERCICE 31 : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

définie par l'image des vecteurs de la base canonique $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = 5/4\,\vec{i} + 3/4\,\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -3/4\,\vec{i} - 5/4\,\vec{j} \end{cases}$$

Rappel : un endomorphisme $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est une symétrie ssi $s \circ s = id$

⇒ Déterminons l'image des vecteurs de la base $f \circ f$

$f \circ f(\vec{i}) = f(f(\vec{i})) = f\left(\frac{5}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}\right) = \frac{5}{4} f(\vec{i}) + \frac{3}{4} f(\vec{j})$ (car f est linéaire) $=$

$= \frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}\right) + \frac{3}{4}\left(-\frac{3}{4}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}\right) = \frac{25}{16}\vec{i} + \cancel{\frac{15}{16}}\vec{j} - \frac{9}{16}\vec{i} - \cancel{\frac{15}{16}}\vec{j} = \vec{i}$

$f \circ f(\vec{j}) = f(f(\vec{j})) = f\left(-\frac{3}{4}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}\right) = -\frac{3}{4} f(\vec{i}) - \frac{5}{4} f(\vec{j})$ (car f est linéaire) $=$

$= -\frac{3}{4}\left(\frac{5}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}\right) - \frac{5}{4}\left(-\frac{3}{4}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}\right) = -\cancel{\frac{15}{16}}\vec{i} - \frac{9}{16}\vec{j} + \cancel{\frac{15}{16}}\vec{i} + \frac{25}{16}\vec{j} = \vec{j}$

→ Conclusion $f \circ f(\vec{i}) = \vec{i}$ et $f \circ f(\vec{j}) = \vec{j}$ donc $f \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$ et par conséquent l'endomorphisme f est une symétrie vectorielle.

⇒ Les éléments caractéristiques de cette symétrie :

Ce sont, le sev par rapport auquel se fait la symétrie (l'axe) et le sev direction de la symétrie.

. Le sev "axe de symétrie" F

$\vec{u} \in F \Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{u}$ ($\vec{u}$ est un vecteur invariant)

Posons $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow f(x\vec{i} + y\vec{j}) = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\Leftrightarrow x f(\vec{i}) + y f(\vec{j}) = x\vec{i} + y\vec{j}$

droite → tjr dim 1
plan → tjr dim 2

$$f(\vec{u}) = \vec{u} \Leftrightarrow x\left(\frac{5}{4}\vec{i} + \frac{3}{4}\vec{j}\right) + y\left(-\frac{3}{4}\vec{i} - \frac{5}{4}\vec{j}\right) = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}y\right)\vec{j} - x\vec{i} - y\vec{j} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}y\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{4}x - \frac{9}{4}y\right)\vec{j} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow (x - 3y)\vec{i} + (3x - 9y)\vec{j} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = 0 \\ 3x - 9y = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x - 3y = 0$$

L'axe de la symétrie, F, est donc le sev d'equation $x - 3y = 0$ autrement dit la droite d'equation $y = \frac{1}{3}x$, ou encore F est la droite de vecteur directeur (3,1)

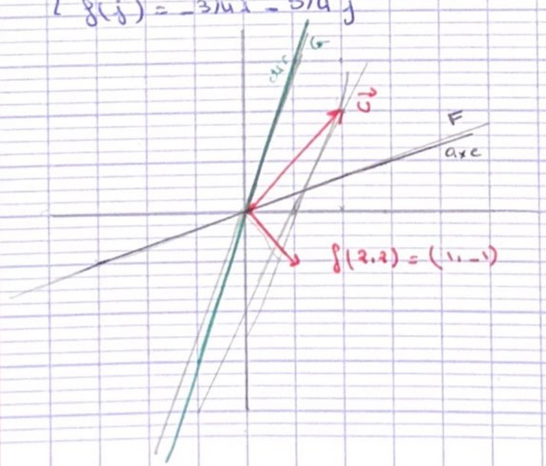
- Le sev, G, "direction" de la symétrie.

$$\vec{u} \in G \Leftrightarrow f(\vec{u}) = -\vec{u}$$
$$\Leftrightarrow f(x\vec{i} + y\vec{j}) = -(x\vec{i} + y\vec{j})$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}x - \frac{3}{4}y\right)\vec{i} + \left(\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}y\right)\vec{j} = -x\vec{i} - y\vec{j}$$
$$\Leftrightarrow (5x - 3y)\vec{i} + (3x - 5y)\vec{j} = -4x\vec{i} - 4y\vec{j}$$
$$\Leftrightarrow (9x - 3y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} 9x - 3y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{matrix}$$
$$\Leftrightarrow 3x - y = 0$$

Le sev direction, G, est donc la droite d'equation $y = 3x$

Bonus : Écriture matricielle de f

$$\begin{cases} f(\vec{i}) = \frac{5}{4}\vec{i} + 3/4\,\vec{j} \\ f(\vec{j}) = -3/4\,\vec{i} - 5/4\,\vec{j} \end{cases} \qquad M = \begin{pmatrix} 5/4 & -3/4 \\ 3/4 & -5/4 \end{pmatrix} = 1/4 \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$



$$M.\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 32 :

$E = \mathbb{R}^3 \quad u = (1,1,1). \quad F = \text{Vect}\{u\}$

$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - z = 0\}$

⇒ Montrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$

- Montrons que $F \cap G = \{\vec{0}\}$

Est ce que $u \in G$? $2 \times 1 + 1 - 1 \neq 0$ donc $u \notin G$ et $F \cap G = \{\vec{0}\}$

- Montrons que $F + G = \mathbb{R}^3$

On a $\dim F = 1$ et $\dim G = 2$

$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = 1 + 2 - 0 = 3$

$$\left.\begin{array}{l} F + G \subset \mathbb{R}^3 \\ \dim(F+G) = 3 \end{array}\right\} F + G = \mathbb{R}^3$$

En conclusion $\left.\begin{array}{l} F + G = \mathbb{R}^3 \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^3 = F \oplus G$

⇒ Déterminons l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G

c.à.d, déterminons quels sont les coefficients dans :

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = a'x + b'y + c'z \\ z' = a''x + b''y + c''z \end{cases}$$ il y a 9 inconnus

mire
à mai ↳ Le vecteur $u(1,1,1)$