UNIVERSITÉ PERPIGNAN VIA DOMITIA

Algèbre Linéaire,
Année universitaire 2022-2023.

16 novembre, durée : 1h30

L'épreuve est constituée de deux exercices indépendants.
Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.
La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Exercice 1. On considère la partie $H := \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z + 4t = 0\big\}$ de $\mathbb{R}^4$. On pose $\xi_1 := (8,0,0,-2)$, $\xi_2 := (2,-1,4,-3)$, $\xi_3 := (18,0,-6,0)$ et $\xi_4 := (2,1,0,-1)$.

1. Montrer **en revenant à la définition** de sous-espace vectoriel que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner la définition d'une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 1$ entier. Déterminer une famille génératrice de H.
3. Donner une base de H et sa dimension.
4. Montrer que
$$\mathrm{vect}\,\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\} \subset H.$$
5. Que nous dit l'inclusion ci-dessus relativement au rang de la famille $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$?
6. La famille $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ est-elle libre ou liée ? Est-elle une base de H ? Est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?
7. Montrer que la famille (ξ_1, ξ_3, ξ_4) est libre. En déduire qu'elle est génératrice de H.
8. La famille $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ est-elle génératrice de H ?
9. Enoncer le théorème du cours permettant d'affirmer l'existence de $u \in \mathbb{R}^4$ tel que (ξ_1, ξ_3, ξ_4, u) soit une base de $\mathbb{R}^4$. Déterminer un tel $u \in \mathbb{R}^4$.
10. Rappeler la notion de supplémentaires pour deux sous-espaces vectoriels F et G de $\mathbb{K}^n$. Est-ce que H et $\mathrm{vect}\{u\}$ sont en somme directe ? supplémentaires ?

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-y, z) \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Justifier (sans déterminer le noyau et l'image) que f n'est pas bijective.
3. Déterminer une base du noyau de f et une base de l'image de f. Votre résultat est-il en accord avec le théorème du rang ?
4. **(Bonus)** Donner la représentation matricielle de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.