ESPACES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS — TD1 : ALGÈBRE

Exercice 1 : Mq $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

où $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ à coef. réels

et où $+$ est l'addition matricielle et $.$ est la multiplication d'une matrice par un réel.

(i) existence d'un vecteur nul :

La matrice nulle, $O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = (0)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ convient $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A + O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = A$

et $O_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} + A = A$

(ii) Associativité (+) : Pour toutes matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

et $C = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$A + (B + C) = (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij}))$ — associativité de l'addition des nombres réels

$= (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}))$

$A + (B + C) = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = ((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = (A + B) + C$

(iii) Existance d'un vecteur opposé :

Pour tout matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe la matrice

$-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour laquelle on a $A + (-A) = (a_{ij}) + (-a_{ij}) =$

$= (a_{ij} - a_{ij}) = (0)$ (vecteur nul car les matrices sont vues comme des vecteurs)

(iv) Commutativité de l'addition des matrices :

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A + B = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (b_{ij} + a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$= (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = B + A$. car l'addition des réels est commutative

(v) Montrons que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

En effet $\lambda(A + B) = \lambda((a_{ij}) + (b_{ij})) = \lambda(a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (\lambda(a_{ij} + b_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$= (\lambda a_{ij} + \lambda b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + (\lambda b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = \lambda(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} + \lambda(b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

$= \lambda A + \lambda B$ On a bien $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$

(vi) De la m̂ manière qu'au (v) on montrait que $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$

(vii) dem pour $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

(viii) et que $1A = 1(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (1 \times a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} = A$

EXERCICE 3 $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fon. déf. sur $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-ev

Et $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonct. dérivables sur $\mathbb{R}$, est une partie de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ On demande de mq $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

Pour cela, il nous faut mq :

(1) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ non vide

(2) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ stable pour somme.

(3) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ stable pour le produit par un scalaire.

(1) $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est non vide car il contient, par exemple, la fonction $x \mapsto 2x+3$ que l'on voit être dérivable sur $\mathbb{R}$.

(2) Stabilité par somme : soit $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ alors $f+g$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorème de dérivation d'une somme de fonction).

On a bien $f+g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

(3) Stabilité pour le produit par un scalaire : soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors la fonction λf est dérivable sur $\mathbb{R}$ (Théorème de dérivation de $\lambda . f$)

Donc $\lambda . f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

→ En conclusion, d'après (1), (2) et (3), $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

EXERCICE 5 :

(1) Le sous-ensemble des fonctions positives n'est pas stable pour la multiplication par un scalaire donc ce n'est pas un sev (car contre exemple si $f \geq 0$ et $\lambda = -2$ on a $\lambda f = -2f \leq 0$).

(2) Ensemble des fonctions majorées sur $]0,1[$

f est majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in]0,1[, f(x) < M$. n'est pas stable par la multiplication par un scalaire. $(\times(-\lambda))$

(3) Des fonctions bornées sur $]0,1[$ c'est un sev.

(4) Des fonctions polynômes c'est un sev.

(5) Des fonctions polynômes de degré n auquel on adjoint le polynôme nul n'est pas un sev (car $2x^3+4x^2-x+1-2x^3+5x^2+7 = 9x^2+8$).

(6) $\mathbb{R}_n[X] = \{$ $\underbrace{\text{l'ensemble}}_{\text{sev}}$ des pol de deg au plus $n\}$ est un sev.

EXERCICE 6 :

(1) Oui, F_1 est sev de $\mathbb{R}^3$, c'est le plan vectoriel d'équation $x-z=0$.

$F_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (x,y,z) = (x,y,x)\}$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (x,y,z) = x(1,0,1) + y(0,1,0)$

donc $F_1 = \text{vect}\{(1,0,1),(0,1,0)\}$

(2) F_2 est une droite vectorielle, l'intersection des plans d'éq $x=0$ et $y=0$

c'est l'axe des côtes (3ème coordonnées.

$F_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / x=0$ et $y=0\}$

$(0,0,z) = z(0,0,1)$ donc F_2 est un sev une base en rect $\{(0,0,1)\}$

③ $u = (0,1,0) \in F_3$ $v = (1,0,0) \in F_3$ mais $u+v = (1,1,0) \notin F_3$

donc F_3 n'est pas un sev car il n'est pas stable par somme.

④ F_4 est un sev. $F_4 \neq \emptyset$ car $(0,0,0) \in F_4$

• F_4 est stable par somme :

En effet si $u = (x,y,z) \in F_4$ $z = x+y$

si $v = (x',y',z') \in F_4$ $z' = x'+y'$

on a $u+v = (x+x', y+y', z+z')$ et $(x+x') + (y+y') - (z+z') = \underbrace{x+y-z}_{0} +$

$\underbrace{x'+y'-z'}_{} = 0$ d'où $u+v \in F_4$

• Stabilité par le produit par un scalaire

Soit $v = (x,y,z) \in F_4$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda v = \lambda(x,y,z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

$\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = \lambda . 0 = 0$ car $v \in F_4$ donc $\lambda v \in F_4$

⑤ $u = (1,1,1) \in F_1 \cup F_4$ (car $u \in F_1$) et $v = (1,1,2) \in F_1 \cup F_4$ (car $v \in F_4$)

alors $u+v = (2,2,3)$ $\left.\begin{matrix} u+v \notin F_1 \\ u+v \notin F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u+v \notin F_1 \cup F_4$

$F_1 \cup F_2$ n'est un sev car il n'est pas stable par somme.

⑥ $F_1 + F_4$ est un sev de $\mathbb{R}^3$ car F_1 et F_4 sont des sev et que d'après le cours l'ensemble somme de deux sev est encore un sev.

$\{(1,0,1), (0,1,0), (0,1,1)\}$

Exercice 7:

E_1, E_2 deux sev de E Mq $E_1 \cup E_2$ est un sev $\Leftrightarrow E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$

($\Leftarrow$) si $E_1 \subset E_2$ alors $E_1 \cup E_2 = E_2$ or E_2 étant sev on en déduit que $E_1 \cup E_2$ aussi

Si $E_1 \subset E_2$ m̂ raisonnement. Donc, on a bien $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1 \Rightarrow E_1 \cup E_2$ est un sev

($\Rightarrow$) Supposons que $E_1 \cup E_2$ sont un sev de E et supposons (par l'absurde) que $E_1 \not\subset E_2$ et $E_2 \not\subset E_1$

$E_1 \not\subset E_2 \Rightarrow \exists u \in E_1 \ / u \notin E_2$ et $E_2 \not\subset E_1 \Rightarrow \exists v \in E_2 \ / v \notin E_1$

* $\left.\begin{matrix} u \in E_1 \cup E_2 \\ v \in E_1 \cup E_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow u+v \in E_1 \cup E_2$ avec $E_1 \cup E_2$ est un sev

Puisque $u+v \in E_1 \cup E_2$ on a $\left\{\begin{matrix} u+v \in E_1 \\ \text{ou} \\ u+v \in E_2 \end{matrix}\right.$

• Si $u+v \in E_1$ on remarque $u \in E_1 \Rightarrow -u \in E_1$ donc $\left.\begin{matrix} u+v \in E_1 \\ -u \in E_1 \end{matrix}\right. \overset{\text{stabilité}}{\Rightarrow} (u+v) + (-u) \in E_1$

contradiction car $v \notin E_1$

• Si $u+v \in E_2$ on remarque $v \in E_2 \Rightarrow -v \in E_2$

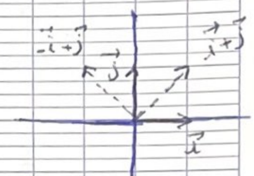
$\left.\begin{array}{l} u+v \in E_2 \\ -v \in E_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{stab.}} \underbrace{(u+v)+(-v)}_{u} \in E_2$ contradiction car $u \notin E_2$

Dans tous les cas il y'a une contradiction donc si $E_1 \not\subset E_2$ alors $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sev et $E_2 \not\subset E_1$ c.à.d (par contraposition) $E_1 \cup E_2$ est un sev $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} E_1 \subset E_2 \\ \text{ou} \\ E_2 \subset E_1 \end{array}\right.$

EXERCICE 8:

① $(1,0)$ $(0,1)$ on a $\mathbb{R}^2 = \text{vect}\{(1,0)\} \oplus \text{vect}\{(0,1)\}$

d'autre part $\mathbb{R}^2 = \text{vect}\{(1,1)\} \oplus \text{vect}\{(-1,1)\}$



② Mq $\left.\begin{array}{l} E_1 \oplus E_2 = F_1 \oplus F_2 \\ \text{et} \\ E_1 \subset F_1 \text{ et } E_2 \subset F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_1 = F_1$ et $E_2 = F_2$

Supposons que $E_1 \neq F_1$ (idem pour $E_2 \neq F_2$)

$\left.\begin{array}{l} E_1 \subset F_1 \\ \text{et } E_1 \neq F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists v \in F_1$ et $v \notin E_1$

$v \in E_1 \oplus E_2$ (car $v \in F_1 \Rightarrow v \in F_1 \oplus F_2 = E_1 \oplus E_2$) donc $\exists v_1 \in E_1$ et $v_2 \in E_2$ tels que $v = v_1 + v_2$

???

• alors $\underbrace{v - v_1}_{\in F_1} = \underbrace{v_2}_{\in F_2}$ or F_1 et F_2 étant en somme directe, $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$

• donc $v - v_1 = \vec{0}_E$ $\quad v = v_1$ $\underset{\notin E_1}{}\in E_1$ contradiction !

Exercice 9:

$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires et $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires. Mq $\mathcal{I}$ et $\mathcal{P}$ sont des sev.

Pour $\mathcal{P}$: Rappel: une fonction f est pair si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$

• $\mathcal{P} \neq 0$ en effet la fonction carré est paire et appartient donc à $\mathcal{P}$.

• Montrons que $\mathcal{P}$ est stable par comb. linéaire.

Soit $f, g \in \mathcal{P}$, soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a pour tout x réel:

$(\lambda f + \mu g)(-x) = (\lambda f)(-x) + (\mu g)(-x) = \lambda . f(-x) + \mu g(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$

$= (\lambda f + \mu g)(x)$

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)(-x) = (\lambda f + \mu g)(x)$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est pair donc $\lambda f + \mu g \in \mathcal{P}$.

$\mathcal{P}$ est non vide et stable par C.L. donc $\mathcal{P}$ est un s.e.v.

Pour $\mathcal{I}$ démonstration semblable.

• Montrons que I et $\mathcal{P}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Pour cela il faut montrer que • $I \cap \mathcal{P} = \{\tilde{0}\}$ • $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = I + P$.

Mq $I \cap P = \{\tilde{0}\}$

soit $f \in I \cap P$ $\begin{cases} f \in I \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x) \\ f \in \mathcal{P} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -f(x) \Rightarrow 2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

On a conclu que $f = \tilde{0}$ (la fonction nulle) et $I \cap \mathcal{P} = \{\tilde{0}\}$

• Mq $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = I + \mathcal{P}$ càd que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme somme d'une fonction impaire et d'une paire.

soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

On défini alors deux fonctions en posant pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f_p(x) := \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ $\quad f_i(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

Il reste à vérifier que f_p est paire et f_i est impaire.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_p(-x) = \dfrac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) + f(x)}{2} = f_p(x)$ donc $f_p \in P$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f_i(-x) = \dfrac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \dfrac{f(-x) - f(x)}{2} = -\dfrac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_i(x)$

donc $f_i \in I$

donc $E = I + \mathcal{P}$ et puisque $I \cap \mathcal{P} = \{\tilde{0}\}$ on a $E = I \oplus \mathcal{P}$

Toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se décompose de manière unique comme somme d'une fonction paire (partie paire) et d'une fonction (partie impaire).

Exemple : Pour la fonction exp. sa partie paire est $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

sa partie impaire est $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ et $e^x = ch(x) + sh(x)$

Pour la fonction carrée $x \mapsto x^2$ partie paire $x \mapsto \dfrac{x^2 + (-x)^2}{2} = x^2$

partie impaire $x \mapsto \dfrac{x^2 - (-x)^2}{2} = \dfrac{x^2 - x^2}{2} = 0$ donc $x^2 = x^2 + 0$.

Exercice 10 :

But : généraliser la notion de "somme directe" à plus de 2 sev.

(i) $\mathcal{E} : (x_1, x_2, \dots, x_n)$ est injective $\quad$ (ii) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \vec{0}_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \vec{0}_E$

(iii) $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $F_i \cap \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_j = \{\vec{0}_E\}$

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Supposons que $\mathcal{E}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ est injective et que $x_1 + x_2 + \dots x_n = \vec{0}_E$

$\mathcal{E}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \vec{0}_E$

or par ailleurs, $\mathcal{E}(\vec{0}_E, \vec{0}_E, \dots, \vec{0}_E) = \vec{0}_E + \vec{0}_E + \dots + \vec{0}_E$

on a $\mathcal{E}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{E}(\vec{0}_E, \vec{0}_E, \dots, \vec{0}_E) = \vec{0}_E$

On a :

$\mathcal{E}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{E}(\vec{0}_E, \vec{0}_E, \dots, \vec{0}_E)$ et puisque $\mathcal{E}$ est injective

$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\vec{0}_E, \vec{0}_E, \dots, \vec{0}_E)$ donc $x_1 = \vec{0}_E$ $x_2 = \vec{0}_E$ ... $x_n = \vec{0}_E$

(ii) $\Rightarrow$ (iv)

Supposons (ii), $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \vec{0}_E \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \vec{0}_E$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$

Soit $u \in F_i \cap \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_j\right)$ donc $u \in F_i$ et $u = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j$ où les $x_j \in F_j$.

$-u \in F_i$

donc on a $-u + u = \vec{0}_E \Rightarrow \underbrace{-u}_{\in F_i} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} x_j = \vec{0}_E$

d'après (ii) $u = \vec{0}$ et tous les $x_j = \vec{0}_E$, par $j \neq i$

En conclusion, $F_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_j = \vec{0}_E$

(iv) $\Rightarrow$ (i)

Supposons que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $F_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} F_j = \{\vec{0}_E\}$ et supposons qu'on ait n vecteur

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ $(x_i \in F_i)$

et supposons qu'on ait n vecteur $x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n$ $(x'_i \in F_i)$

tels que $\mathcal{E}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{E}(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x'_1 + x'_2 + \dots + x_n$$

$$\underbrace{x_1 - x'_1}_{\in F_1} = \underbrace{x'_2 - x_2}_{\in F_2} + \underbrace{x'_3 - x_3}_{\in F_3} + \dots + \underbrace{x'_n - x_n}_{\in F_n}$$

donc $x_1 - x'_1 \in F_1 \cap \sum_{j=2}^{n} F_j$

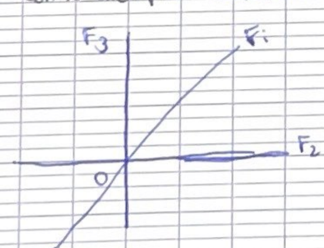
$x_1 - x'_1 = \vec{0}_E$ donc $x_1 = x'_1$ (injective)

De la m̂ on montre que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = x'_i$ donc $\mathcal{E}$ est injective.

(2) F_1, F_2 et F_3 sont en somme directe 2 à 2, $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$, $F_2 \cap F_3 = \{\vec{0}_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{\vec{0}_E\}$

Mais F_1, F_2, F_3 ne sont pas en somme directe (dans leur ensemble)

Contre exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ on prend $F_1 = \text{vect}\{\vec{i} + \vec{j}\}$ $F_2 = \text{vect}\{\vec{i}\}$ $F_3 = \{\vec{j}\}$



$F_1 \cap (F_2 + F_3) \neq \{\vec{0}_E\}$