UNIVERSITÉ PERPIGNAN VIA DOMITIA

Algèbre Linéaire,
Année universitaire 2021-2022.

7 janvier, durée : 2h00

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.
La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Exercice 1.

1. Montrer **en revenant à la définition** que $E = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2t = 0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une famille génératrice de E. Que pouvez-vous en déduire sur la dimension de E ?
3. Donner une base de E. En déduire la dimension de E.
4. On pose $F := \text{vect}\,\{\text{u}\}$ avec $u = (1, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que E et F sont en somme directe, c'est-à-dire, $E \cap F = \{0\}$.
5. A l'aide d'un résultat du cours que vous énoncerez, déterminer $\dim(E + F)$.
6. Conclure que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 2. On considère le système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

1. Appliquer l'algorithme de Gauss sur la matrice augmentée associée au système linéaire ci-dessus.
2. Résoudre le système linéaire ci-dessus.
3. Ecrire l'ensemble des solutions du système linéaire ci-dessus sous la forme $F + u$ avec F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $u \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. On note $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. **On rappelle que** $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. On considère *l'unique* une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f(e_1) = e_2 + e_3, f(e_2) = e_1 \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 + e_2 + e_3.$$

1. Soit $u = e_1 + 2e_2$, $v = e_1 + e_3$ et $w = e_2 - e_3$. **En calculant le rang d'une certaine matrice via l'algorithme de Gauss,** montrer que $\mathcal{C} := (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.
3. Justifier l'unicité mentionnée dans l'énoncé concernant l'application linéaire f.
4. Inverser **via la méthode de la matrice augmentée** la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Utiliser la question précédente pour obtenir $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
6. Conclure en donnant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice 4. Etant donnés quatre réels a_1, a_2, a_3, a_4, on définit la matrice carrée

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse dans la suite au déterminant de A.

1. Que dire si $a_1 = 0$? Que dire dans le cas $a_1 = a_2$?
2. On suppose $a_1 \neq 0$ et $a_2 \neq a_1$. Calculer le déterminant de la matrice A.
3. Pour quelles valeurs de a_1, a_2, a_3, a_4 la matrice A est-elle inversible ?