

T.D.5: MATRICE INVERSE - MATRICES DE PASSAGE

EXERCICE 458

① $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$ donc la matrice A est inversible car $\det(A) \neq 0$
 ⇒ Calcul de A^{-1} par résolution d'un système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2(y' - 2y) + 3y \\ x = y' - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2y' - y \\ y = -x' + 2y' \end{cases} \Rightarrow$$

$$y' = x + 2(-x' + 2y') \Rightarrow y' = x - 2x' + 4y' \Rightarrow 2x' - 3y' = x$$

$$\begin{cases} x = 2x' - 3y' \\ y = -x' + 2y' \end{cases} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vérification: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

⇒ Calcul A^{-1} par la résolution d'un autre système il faut que

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+3c=1 \\ a+2c=0 \\ 2b+3d=0 \\ b+2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4c+3c=1 \\ a=-2c \\ 2-4d+3d=0 \\ b=1-2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a=2 \\ d=2 \\ b=-3 \end{cases} \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

⇒ Formule générale pour l'inverse d'une matrice 2x2

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{Si } \det(A) \neq 0 \quad \text{alors } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -ba+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \det(B) = 12 - 10 = 2 \neq 0$ donc B est inversible

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vérification: } B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12-10 & -20+20 \\ 6-6 & -10+12 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

② $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ Par la méthode de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{2L_2 - L_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 7 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{L_3 + 7L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 7 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & -15 & 14 & 7 \end{array} \right)$$

$$L_1 = L_1 - 2L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 14 & 0 & 0 & 308 & -42 & -140 \\ 0 & 7 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & -15 & 14 & 7 \end{array} \right) \quad L_1 = \frac{L_1}{14} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & -10 \\ 0 & 7 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & -15 & 14 & 7 \end{array} \right)$$

$$L_2 = L_2 - 7L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 23 & 70 \\ 0 & 0 & -28 & -15 & 14 & 7 \end{array} \right) \quad L_2 = \frac{L_2}{7} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 22 & -3 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -15 & 23 & 70 \\ 0 & 0 & -28 & -15 & 14 & 7 \end{array} \right)$$

D⁻¹

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 22 & -3 & -10 \\ 2 & 0 & -1 \\ -15 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ Par méthode de Gauss-Jordan } \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 = 4L_2 - 3L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 = L_1 + L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 = L_3 - L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 = 2L_3 + L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_2 = L_2 + L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 6 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right) \quad L_1 = L_1/20 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 = 3L_1 + 6L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right) \quad L_2 = L_2/2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -4 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{donc } E^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -5 & 0 & 5 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$* G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_1 = L_1/2 \\ L_2 = L_2/5 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 46:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_1 \leftarrow L_1/2 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 \leftarrow (-1) \cdot L_3 \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array} \right) \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 47:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 6 = -4$$

$\det(A) \neq 0$ donc la matrice A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} + & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \right) = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérification:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 50:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y + z = 13 \\ 2x - 3y - 2z = -1 \end{cases} \quad A \cdot X = B \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ce système aura un unique triplet solution ssi la matrice A est inversible, c'est-à-dire

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 24 - 10 = -35$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{35} \left(\begin{array}{ccc|ccc} + & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ - & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ + & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{array} \right) = -\frac{1}{35} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -13 \\ -8 & 6 & 1 \\ -5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 13 \\ 8 & -6 & -1 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

Résolution de système:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 13 \\ -8 & -6 & -5 \\ 5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -103 \\ -121 \\ 40 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 53:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{On cherche une "formule" reliant } A^2, A \text{ et } I_3$$

$$A^2 = -A + 2I_3$$

$$\frac{1}{2} (A^2 + A) = I_3$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} (A + I_3)}_{A^{-1}} A = I_3$$

$$\text{donc } A^{-1} = \frac{1}{2} (A + I_3)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 54:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A + 4I_3$$

$$\text{donc } A^{-1} = \frac{1}{4} (A^2 - I_3)$$

$$\frac{1}{4} (A^3 - A) = I_3$$

$$\underbrace{\frac{1}{4} (A^2 - I_3)}_{A^{-1}} A = I_3$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 55: $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ où $e'_1 = 3e_1 - e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$

1/* Matrice de passage de \mathcal{C} vers \mathcal{B} :

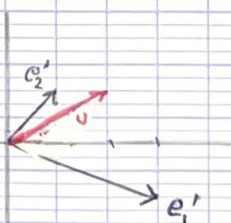
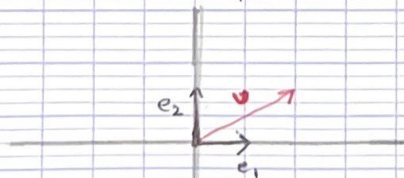
$$P = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{convertir des coordonnées dans } \mathcal{B} \text{ en} \\ \text{coord. dans } \mathcal{C} \end{matrix}$$

* Matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{C}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{convertir de } \mathcal{C} \text{ vers } \mathcal{B} \end{matrix}$$

2) Les coordonnées dans la base \mathcal{B} du vecteur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$ sont

$$P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ 1.25 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$



$$3) \quad f: \begin{cases} f(e_1) = -2e_1 + e_2 \\ f(e_2) = e_1 + 3e_2 \end{cases}$$

$$M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$$

$$4) \quad M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{E}} \cdot M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(f) \cdot P_{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -7/4 & -5/4 \\ -7/4 & 11/4 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 56:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f: (x, y) \mapsto (x+2y, 2x-y, 2x+3y)$$

\mathcal{B}_2 base canonique de \mathbb{R}^2 donc $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$

\mathcal{B}_3 base canonique de \mathbb{R}^3 donc $E_1 = (1, 0, 0)$ $E_2 = (0, 1, 0)$ $E_3 = (0, 0, 1)$

$$1) \quad e_1 = (1, 0) \Rightarrow f(e_1) = (1, 2, 2) \quad e_2 = (0, 1) \Rightarrow f(e_2) = (2, -1, 3)$$

$$M_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3) nouvelle base pour \mathbb{R}^2 (e'_1, e'_2) avec $\begin{cases} e'_1 = e_1 \\ e'_2 = e_1 - e_2 \end{cases}$

(e'_1, e'_2) libre (vecteur non colinéaire) et est constitué de 2 vecteurs, donc c'est une base de \mathbb{R}^2

4) nouvelle base de \mathbb{R}^3 (E'_1, E'_2, E'_3) avec $\begin{cases} E'_1 = E_1 \\ E'_2 = E_1 + E_2 \\ E'_3 = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{famille échelonnée donc libre (det} \neq 0)$$

et puisque compose 3 vecteurs, c'est une base de \mathbb{R}^3

3) Matrice de passage de \mathcal{B}_2 à \mathcal{B}'_2

$$P_2 = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

* Matrice de passage de \mathcal{B}_3 à \mathcal{B}'_3

$$P_3 = \begin{pmatrix} e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

* La matrice de f dans les bases

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_2}(f) = \underbrace{P_{\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}_3}}_{P_3^{-1}} \cdot \underbrace{\text{Mat}_{\mathcal{B}_3, \mathcal{B}_2}(f)}_{P_2} \cdot \underbrace{P_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}}_{P_2^{-1}}$$

$$P_3^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'_3, \mathcal{B}'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EXERCICE 48:

$$m \in \mathbb{R} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1$ (matrice triangulaire)
 $\det(A) \neq 0$ donc A est inversible

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2m \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2m & m & 1 \end{pmatrix}$$