UNIVERSITÉ PERPIGNAN VIA DOMITIA

Algèbre Linéaire,
Année universitaire 2021-2022.

15 novembre, durée : 1h30

L'épreuve est constituée de dix questions indépendantes.
Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.
La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

1. Montrer **en revenant à la définition** que $E = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\big\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pouvez-vous en donner une interprétation géométrique ? Donner une base de E et sa dimension.
2. Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. Donner la définition d'une famille libre $(v_1, \ldots, v_p)$ de $\mathbb{R}^n$. La famille $\big((1,0,1),(3,0,1),(4,-2,2)\big)$ est-elle libre ou liée ?
3. Trouver $u, v \in \mathbb{R}^3$ tels que $\operatorname{vect}\{(3,-1,2),(7,5,4),(4,6,2)\} = \operatorname{vect}\{u,v\}$.
4. A l'aide d'un résultat du cours que vous énoncerez, justifier qu'il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $\big((1,2,0),(0,3,4),u\big)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer explicitement un tel vecteur u.
5. Justifier brièvement que $P = \operatorname{vect}\{(1,2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. En donner une équation cartésienne (i.e., trouver $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant $P = \ker(\varphi)$).
6. Enoncer le théorème du rang. **Application :** Soient $n \geq 1$ un entier, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linéaire. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.
7. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$f(x,y,z) = (x+y, z) \quad \text{pour tout } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
est linéaire. Quelle est la dimension de son image ? de son noyau ? Donner sa représentation matricielle $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
8. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble
$$T = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} : a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$$
est stable pour le produit matriciel, c'est-à-dire que pour tout $M_1, M_2 \in T$, on a $M_1 M_2 \in T$. Trouver six matrices $E_1, \ldots, E_6$ telles que $T = \operatorname{vect}\{E_k : k \in \{1, \ldots, 6\}\}$. Quelle est la dimension de T ?
9. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, on a
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$
10. Calculer le rang de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$
Cette matrice est-elle inversible ?