# ALGEBRE LINEAIRE (2) :

## CHAP. I : ESPACES VECTORIELS

**1. Déf :** On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) un triplet $(E, +, \cdot)$ constitué d'un ensemble $E$, d'un loi interne $+$ et d'une loi externe.

$+ : E \times E \to E \quad (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$

$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E \quad (\lambda, \vec{u}) \longmapsto \lambda\vec{u}$

telles que :

(i) il existe dans $E$ un vecteur $\vec{0}_E$ (appelé vecteur nul) tel que : $\forall \vec{u} \in E$, $\vec{u} + \vec{0}_E = \vec{u}$ et $\vec{0}_E + \vec{u} = \vec{u}$

(ii) La loi + est associative $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$

(iii) Tout vecteur de $E$ possède un opposé (noté $-\vec{u}$) $\forall \vec{u} \in E$ / $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}_E$ et $(-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}_E$

(iv) L'addition + est commutative $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E$, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

(v) Et pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $\quad \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

(vi) $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$

(vii) $\lambda.(\mu\vec{u}) = (\lambda.\mu)\vec{u}$

(viii) $1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{u} = \vec{u}$

**Exemple :**

1) $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\quad$ Scalaires $\to \mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\quad$ Vecteurs $\to \mathbb{C}$ $\to$ dim $\mathbb{C} = 2 \to$ base $(1, i)$

$\to$ dim $\mathbb{C} = 1 \to$ base(3)

2) $\mathbb{C}$ peut également être vu comme étant un $\mathbb{C}$-esp. vect.

3) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés $n \times n$ à coefficients réels, est un $\mathbb{R}$-esp. vect.

4) $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes à une variable ($x$ par ex. $ax^2+bx+c$) et à coefficients réels (a et b et c sont $\mathbb{R}$ et non $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{R}$-ev. (Le vecteur nul est dans ce cas le polynome nul $P(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

5) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$, est un $\mathbb{R}$-ev. Ici le vecteur nul est la fonction nulle $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

6) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites réels, est un $\mathbb{R}$-ev. et le vecteur nul est ici la suite nulle (constante égale à 0).

**Propriétés :** Pour tous scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tous vecteurs $u, v$ dans $E$. (Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev.)

On a :

① $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$, $\quad \lambda.\vec{0}_E = \vec{0}_E \quad \lambda.(-v) = -(\lambda v)$

② $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$, $\quad 0.\vec{u} = \vec{0}_E \quad (-\mu).u = -(\mu.u)$

**Propriété :** Si $\lambda.\vec{u} = \vec{0}_E$ alors $\begin{cases} \lambda = 0 \\ \text{ou} \\ \vec{u} = \vec{0}_E \end{cases}$

**Dem :** Supposons que $\lambda.\vec{u} = \vec{0}_E$

De deux choses l'une, soit $\lambda = 0$, soit $\lambda \neq 0$

Si $\lambda \neq 0$, alors $\frac{1}{\lambda}$ existe : $\lambda.\vec{u} = \vec{0}_E \Rightarrow \frac{1}{\lambda}.\lambda.\vec{u} = \frac{1}{\lambda}\vec{0}_E \Rightarrow 1\vec{u} = \vec{0}_E \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}_E$

2) Sous-espaces vectoriels :

**Déf**: Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev, et soit $F$ une partie de $E$. On dit que $F$ est un sous espace vectoriel de $E$ si (i) $F \neq \emptyset$

(ii) $F$ est stable par addition $\forall u,v \in F$, $u+v \in F$

(iii) $F$ est stable par la multiplication par un scalaire $\forall v \in F$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ $\lambda v \in F$

**Remarques**: ① Un sev est un ev au sein d'un ev.

② Un ev $E$ possède tjr les sev $\{\vec{0}_E\}$ et $E$ lui-même.

**Théorème**: Caractérisation d'un sev : Une partie $F$ d'un $\mathbb{K}$-ev $E$ est sev de $E$.

(i') est non vide (ii') $F$ est stable par combinaisons linéaires ie $\forall u,v \in F$ $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$ $\lambda u + \mu v \in F$

**Démonstration**: ($\Rightarrow$) Supposons $F$ soit un sev alors (i') est évident car $\vec{0}_E \in F$

Mq (ii') soit $u,v \in F$, soit $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$

$u \in F$ et $F$ est un sev $\Rightarrow \lambda u \in F$ (stabilité par la multiplication par un scalaire)

$v \in F$ et $F$ est un sev $\Rightarrow \mu v \in F$ (stabilité par la multiplication par un scalaire)

$\lambda u \in F$ et $\mu v \in F \Rightarrow \lambda u + \mu v \in F$ (stabilité par addition)

($\Leftarrow$) Réciproquement : Supposons qu'on ait (i') et (ii') et montrons (i) et (ii) et (iii)

(i') $\Leftrightarrow$ (i) (ii) stabilité par addition d'après (ii'), et en prenant $\lambda=1$ et $\mu=1$ on a $u,v \in F$ $\Rightarrow u+v \in F$

(iii) Stabilité pour le produit par un scalaire : d'après (ii') en prenant $v=\vec{0}_E$ et $\mu=0$ on a

$u \in F \Rightarrow \lambda u \in F$ ($\forall \lambda,\underset{0}{\mu} \in \mathbb{R}$, $\forall u,\underset{\vec{0}_E}{v} \in F$ on a $\lambda u + \mu v \in F$
$\lambda u + \vec{0}_E \in F$)

**Exemple**: Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{K}$-ev des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ on considère la partie $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ constituées par les fonctions s'annulant en 0.

$A = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0)=0 \}$ (i') $A \neq \emptyset$ car $\sin \in A$, en effet $\sin(0)=0$

(ii') Mq $A$ est stable par combinaisons linéaires soit $f,g \in A$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$

$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda \underbrace{f(0)}_{0} + \mu g(0) = 0+0=0$

Puisque la fonction $\lambda f + \mu g$ s'annule en 0 c'est que $\lambda f + \mu g \in A$ $\Rightarrow$ on conclue que $A$ est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$

**Proposition**: Soit $F, G$ deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev $E$ alors $F \cap G$ est un sev de $E$.

(L'intersection de deux sev est encore un sev.

**Remarque**: Plus généralement si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sev alors $\bigcap_{i \in F} F_i$ est encore un sev de $E$

**Remarque**: $F \cap G$ est aussi un sev de $F$ et un de $G$

**Démonstration**: soit $F, G$ deux sev de $E$ et montrons que $F \cap G$ est un sev de $E$ en utilisant la caractérisation des sev.

(i') $\vec{0}_E \in F$ (car $F$ est un sev) et $\vec{0}_E \in G$ (car $G$ est un sev) donc $\vec{0}_E \in F \cap G$ et $F \cap G \neq \emptyset$

(ii') Mq $F \cap G$ est stable par comb. linéaires

Soit $u, v \in F \cap G$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

$u, v \in F \cap G$ donc $u, v \in F$ or $F$ est un sev donc $\lambda u + \mu v \in F$

d'autre part $u, v \in F \cap G$ donc $u, v \in G$ or $G$ est un sev donc $\lambda u + \mu v \in F$

$\lambda u + \mu v \in F$ et $\lambda u + \mu v \in G$ alors $\lambda u + \mu v \in F \cap G$ càd $F \cap G$ est stable par comb. liné.

(i') et (ii') $\Rightarrow F \cap G$ est un sev de $E$.

Proposition: soit $F, G$ deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev alors l'ensemble $F + G := \{u+v : u \in F \text{ et } v \in G\}$ est un sev. On l'appelle le sev somme.

Démonstration: soit $F$ et $G$ deux sev de $E$. Mq $F+G$ est un sev

On a bien $F + G \subset E$ car $\left.\begin{array}{l} u \in F \Rightarrow u \in E \\ v \in G \Rightarrow v \in E \end{array}\right\} u + v \in E$

(i') $F + G \neq \emptyset$ En effet $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$ donc $\underbrace{\underset{\in F}{\vec{0}_E} + \underset{\in G}{\vec{0}_E}}_{\vec{0}_E} \in F + G$

(ii') Mq $F+G$ est stable par comb. linéaires

Soit $w$ et $w'$ dans $F+G$ et soit $\lambda, \mu \in E$

Mq $\lambda w + \mu w' \in F + G$

$w \in F + G \Rightarrow w = u + v$ où $u \in F$ et $v \in G$

$w' \in F + G \Rightarrow w' = u' + v'$ où $u' \in F$ et $v' \in G$

$\lambda w + \mu w' = \lambda(u+v) + \mu(u'+v') = \lambda u + \lambda v + \mu u' + \mu v' = \underbrace{\lambda u + \mu u'}_{\in F \text{ car cb. lin de vecteurs de } F} + \underbrace{\lambda v + \mu v'}_{\in G \text{ car comb. lin. de vecteurs de } G}$

Puisque $\lambda w + \mu w'$ est la somme d'un vecteur de $F$ et d'un $G$ on a $\lambda w + \mu w' \in F + G$

càd, $F+G$ est stable par comb. linéaires.

En conclusion, $F+G$ est un sev

Définition: Dans sev, $F$ et $G$, de $E$ sont dits en somme directe si $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$

si tel est le cas, leur sev somme sera noté $F \oplus G$

Proposition: soit $F, G$ deux sev de $E$. Si $F$ et $G$ sont en somme directe alors tout vecteur de $F \oplus G$ s'écrit de manière unique, en tout que somme d'un vecteur de $F$ et d'un $G$.

$\forall w \in F \oplus G, \exists! u \in F, \exists! v \in G / w = u + v$

si tel est le cas, $u$ est appelé la composante sur $F$ de $w$, et $v$ la composante sur $G$ de $w$.

Démonstration: Soit $F, G$ deux sev en somme directe et mq $w \in F \oplus G$ n'a qu'une seule décomposition sur $F$ et $G$

Soit $w \in F \oplus G$ on alors $\exists u \in F, \exists v \in G / w = u + v$

Et supposons qu'il existe un second couple $(u', v')$, $u' \in F$ et $v' \in G$ tel que $w = u' + v'$

$\left.\begin{array}{l} w = u + v \\ w = u' + v' \end{array}\right\} \Rightarrow u + v = u' + v' \Leftrightarrow \underset{\in F}{u - u'} = \underset{\in G}{v - v'}$ donc $u - u' \in F \cap G$ et $v - v' \in F \cap G$

or $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ donc $\left\{\begin{array}{l} u - u' = \vec{0}_E \\ v - v' = \vec{0}_E \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u = u' \\ v = v' \end{array}\right.$

Définition : Deux sev F et G d'un $\mathbb{R}$-ev E sont dits supplémentaires si :

(i) $E = F + G$ et (ii) $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ (cette somme est unique) on note alors $E = F \oplus G$

Exemple : Dans l'ev $\mathbb{C}$, vu en tant que $\mathbb{R}$-ev.

$\mathbb{R}$ est un sev de $\mathbb{C}$

$i\mathbb{R}$, l'ensemble des imaginaires purs, est un sev de $\mathbb{C}$

$\mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$

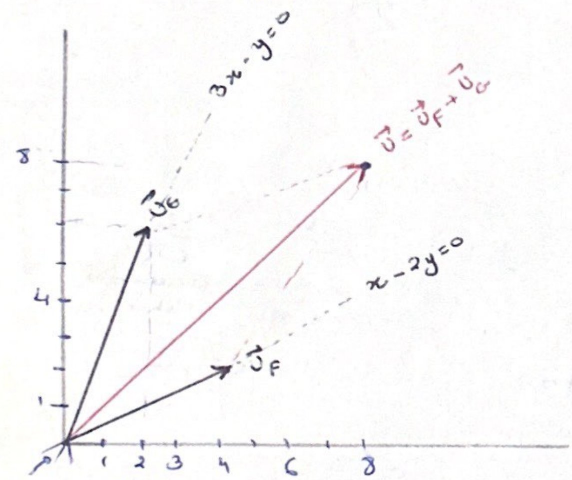
2 sev F et G sont supplémentaires dans E lorsque $F + G = E$ et $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ ou $E = F \oplus G$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, en prenant pour s.e.v. F la droite vectorielle d'équation : $x - 2y = 0$

et pour s.e.v. G, la droite vectorielle d'équation : $3x - y = 0$

Le vecteur $\vec{u}(6,8)$ se décompose sur ces 2 sev supplémentaires en $\vec{u}_F = (4,2)$ et $\vec{u}_G = (2,6)$

$\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$




$F \cap G = \{\vec{0}\}$

EXEMPLE : Notons C l'e.v. des suites réelles convergeantes

K le sev des suites constantes

Z le sev des suites convergeant vers 0.

Les sev K et Z sont supplémentaires dans C $C = K \oplus Z$

$K \cap Z = \{$suite nulle$\}$ car la suite nulle est la seule à être à la fois constante et ayant pour limite 0.

D'autre part, on a $C = K + Z$, c.à.d. toute suite convergente est la somme d'une suite constante et d'une suite tendant vers 0.

En effet, soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$ et notons $\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$

On considère la suite constante $(v_n)$ $v_n = \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(w_n)$ définie par

$w_n = u_n - \ell$, $w_n$ tend vers 0 : $\lim_{n \to +\infty} w_n = \lim_{n \to +\infty} (u_n - \ell) = \ell - \ell = 0$.

On a $(v_n) \in K$ $(w_n) \in Z$ et $(u_n) = (v_n + w_n)$

Remarques : Pour un e.v donné, il peut exister couples de sev supplémentaires.

- Attention à ne confondre les notions de supplémentaires et complémentaires.
- Les notions de s.e.v en somme directe et de s.e.v. supplémentaires peuvent être généralisées à un nombre fini de s.e.v.