CHAP II : FAMILLES DE VECTEURS

Dans tout ce qui suit E désigne un $\mathbb{K}$-ev.

Définition : Combinaison linéaire : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ et autant de vecteur de E, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_3$. On appelle combinaison linéaire des vecteurs u_i respectivement des coefficient λ_i le vecteur $\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_n\vec{u}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$

EXEMPLE : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'ev des matrices 2×2 à coefficients réels.

La matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une comb. linéaire des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$M = 4A - 2B + 3C$. Mais aussi M est comb. linéaire des matrices $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par la relation $M = 2D - 1E$.

PROPOSITION : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A \subset E$, une partie non vide de E.

L'ensemble constitué par toutes les comb. linéaire d'un nombre fini de vecteurs de A est un sev.

On le note $Vect(A)$

DEMONSTRATION : Montrons que $Vect(A)$ est un sev. de E

- $Vect(A) \subset E$, car E est stable.
- $Vect(A) \neq \emptyset$, car A est non vide.
- $Vect(A)$ est stable par somme.

Soit u et v dans $vect(A)$

Puisque $u \in Vect(A)$, il est comb. linéaire de vecteur de A. $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$, où les $u_i \in A$, $1 \leq i \leq k$

et $v \in vect(A)$ donc $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 + \dots + \mu_m v_m$ où $v_i \in A$, $1 \leq i \leq m$

alors $u + v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 + \dots + \mu_m v_m$ est encore une comb. liné. de vecteurs de A càd $u + v \in Vect(A)$

- $Vect(A)$ est stable pour le produit par un scalaire

Soit $u \in Vect(A)$ et soit λ un scalaire

Puisque $u \in Vect(A)$, il est comb. linéaire de vecteurs A $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k$ où les $u_i \in A$ et les $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

alors $\lambda u = \lambda(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_k u_k) = \lambda\lambda_1 u_1 + \lambda\lambda_2 u_2 + \dots + \lambda\lambda_k u_k$

λu est une comb. linéaire de vecteurs de A, donc $\lambda u \in Vect(A)$

En conclusion, $Vect(A)$ est bien un sev de E

PROPOSITION : Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $A \subset E$, une partie non vide de E

L'ensemble constitué par toutes les comb. linéaire d'un nombre fini de vecteurs de A

On le note $Vect(A)$ et on l'appelle « le sev engendré par A »

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}[X]$, l'e.v. des polynômes à une ~~comb~~ variable et à coef. réels.

On considère le sous ensemble constitué des monomes unitaires et de degré pair.

$A = \{X^{2k}, k \in \mathbb{N}\}$

PROPRIÉTÉ :

Soit A une partie non vide de E.

Vect (A) est l'intersection de tous les sev de E contenant A. $\mathrm{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F\ sev}} F$

REMARQUE : Vect (A) est le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de E contenant A

DEMONSTRATION : Par double inclusion

- $\bigcap_{\substack{A \subset F \\ F\ sev}} F \subset \mathrm{Vect}(A)$, car ce dernier est un s.e.v. contenant A, c'est donc l'un des F.
- $\mathrm{Vect}(A) \subset \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F\ sev}} F$ car soit $u \in \mathrm{Vect}(A)$, alors u est une comb. lin. de vecteurs de A

Or les sv F, contiennent les vecteurs de A et par stabilité des sv car F contiennent aussi toutes les C.L. de leurs vecteurs, donc $u \in F$, pour tous les F.

$\Rightarrow$

2. Familles génératrices, libres, bases

Définition : Familles génératrice :

Une famille $\mathcal{F} = (u_i)$ de vecteurs de E est dite génératrice si $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$

REMARQUE : Quand une famille $\mathcal{F}$ est génératrice, tout vecteurs de E peut s'écrire comme une comb. lin. de vecteurs de $\mathcal{F}$

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille $\mathcal{F} = (1, x, x^2, x^3, \dots)$ des monômes est génératrice car tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ peut s'écrire comme une comb. linéai. de ces monôme.

Définition : Famille (finie) libre

Une famille finie $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ de vecteurs de E est dite libre si l'implication suivante est vraie.

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \dots + \lambda_n u_n = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ où les $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des scalaires.

On étend cette définition aux familles infinies par : « une famille infinie est libre si toutes ses sous famille finies sont libres »

REMARQUE :

① Si une famille n'est pas libre on dit qu'elle est liée.

② Si une famille est liée, elle comporte un vecteur qui est comb. linéaires des autres.

③ Si une famille est liée, il existe une comb. lin, de ses vecteurs, donnant $\vec{0}_E$ avec des scalaires λ_i non tous nulle.

④ Une famille liées composant 2 vecteurs alors ces 2 vecteurs sont colinéaires.
$\rightarrow$ Si une famille de 3 vecteurs est liées on dit que ces vecteurs sont coplanaires.

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes : $P(x) = 1 - x + 2x^2$ $\quad Q(x) = 1 + x^2$ $\quad R(x) = 1 + 2x - x^2$

forment une famille liée car : $2P - 3Q + R = 2(1 - x + 2x^2) - 3(1 + x^2) + 1 + 2x - x^2$

$= \cancel{2} - \cancel{2x} + \cancel{4x^2} - \cancel{3} - \cancel{3x^2} + \cancel{1} + \cancel{2x} - \cancel{x^2}$

$= 0$

alors R peut s'exprimer à partir des 2 autres $R = 3Q - 2P$ et P aussi: $P = \frac{3}{2}Q - \frac{1}{2}R$

Définition: Une famille base de vecteurs de E est une base si elle est libre et génératrice.

EXEMPLE: Dans $\mathbb{R}^2$ la famille $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base canonique de $\mathbb{R}^2$)

La famille $((2,1),(1,1))$ est aussi une base.

Dans $\mathbb{R}[x]$ la famille des monômes unitaires $(1, x, x^2, x^3, \dots)$ est une base (infinie)

Définition: Espace vectoriel de dimension finie.

Un e.v. est dit de dimension finie s'il est engendré par un nombre fini de vecteurs.

En d'autres termes, un ev. est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie.

THÉORÈME: de la base incomplète:

Soit $E + \{\vec{0}_E\}$ un e.v. de dimension finie.

Soit $\mathcal{F}$ une famille libre de vecteurs de E alors il existe une famille $\mathcal{F}'$ de vecteurs de E telle que $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$ est une base de E.

DEMONSTRATION: Soit E un e.v. de dimension finie, alors il existe une famille $\mathcal{E}$ finie de vecteurs de E telle que $\mathrm{Vect}(\mathcal{E}) = E$

(*) de deux choses l'une, ou bien $\mathcal{F}$ est génératrice ou bien elle ne l'est pas.
- Si $\mathcal{F}$ est génératrice alors c'est finie car $\mathcal{F}$ est aussi libre est donc une base
- Si $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice, alors il existe dans $\mathcal{E}$ au moins un vecteur u qui n'est pas comb. lin. de vecteurs de $\mathcal{F}$. On adjoint le vecteur u à la famille $\mathcal{F}$ sans qu'elle perde sa liberté et on réitère le processus à (*).

PROPOSITION: (Rappel) Dans un e.v. toutes les bases ont même cardinal (mˆ = même)

Définition (Rappel) Soit E un $\mathbb{R}$-ev.

Si E est de dimension finie, on appelle dimension de E, le nombre de vecteurs qui composent chacune de ses bases.

Dans le cas contraire on dit que E est de dimension infinie.

EXEMPLE: $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ mais $\dim(\mathbb{R}[X]) = +\infty$

Remarque: La dimension d'e.v. dépend du corps des scalaires associé $\dim(\mathbb{C}) = 2$ pour $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-ev. (base $(1, i)$)

mais $\dim(\mathbb{C}) = 1$ si $\mathbb{C}$ est en tant que $\mathbb{C}$-ev ← (base (1))

Remarque: On peut également considérer la dimension d'un sev, car un sev est avant tout une

Quelques cas remarquables Pour F un sev de E:

→ Si $\dim F = 1$ on dit que F est une droite vectorielle.

→ Si $\dim F = 2$ on dit que F est un plan vectoriel.

→ Si $\dim E = n$ et que $\dim F = n-1$ on dit que F est un hyperplan

PROPOSITION (Rappel) Si $\dim(E) = n \geq 1$ et $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs:

→ Si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) > n$ alors $\mathcal{F}$ est liée.

→ Si $\mathrm{card}(\mathcal{F}) < n$ alors $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice

La dimension de E est le vecteur minimum de vecteurs qu'une famille génératrice doit avoir.
La dimension de E est le vecteur maximum de vecteur qu'une famille libre peut avoir.
Une base est une famille libre maximale.
Une base est une génératrice minimale.

Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-ev avec $\dim E = n$ et $\mathcal{F}$ une famille finie de vecteurs de E

Si 2 des 3 propositions ci-dessous sont vraie alors la restante l'est aussi:

(i) $\text{Card}(\mathcal{F}) = n$
(ii) $\mathcal{F}$ est libre
(iii) $\mathcal{F}$ est génératrice.

Définition: Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension de sev qu'elle engendre:

$$rg(v_i)_{i\in I} = \dim(\text{Vect}(v_i)_{i\in I})$$

Téorème: Unicité de la décomposition

Soit $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une base de l'ev. E
Alors $\forall$ vecteurs de E s'écrit de manière unique comme comb. lini. des vecteurs B.

$$\forall v \in E,\ \exists!\ (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \ / \ v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$$

. Les a_i sont les coordonnées du vecteurs v exprimé dans la base B.

· La $a_i v_i$ sont les composantes de vecteur v.

DEMONSTRATION: Soit $v \in E$

Puisque B est une base de E, elle est génératrice de E. Donc il existe une comb. linéaire des $(e_i)_{i\in I}$ qui donne u.

c-à-d, $\exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n$

Il reste à montrer que ce n-uplet est unique

Supposons qu'il existe une comb. line de $(e_i)_{i\in I}$ qui donne v c-à-d

Supposons qu'il existe $(a_1', a_2', \dots, a_n') \in \mathbb{R}$ tel que $v = a_1' e_1 + a_2' e_2 + \dots + a_n' e_n$

On a alors:

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n = a_1' e_1 + a_2' e_2 + \dots + a_n' e_n$$

$$a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_n e_n - a_1' e_1 - a_2' e_2 - \dots - a_n' e_n = \vec{0}_E$$

$$(a_1 - a_1')e_1 + (a_2 - a_2')e_2 + \dots + (a_n - a_n')e_n = \vec{0}_E$$

On a obtenu une C.L. des $(e_i)_{i\in I}$ donnant $\vec{0}_E$ sur les $(e_i)_{i\in I}$ forment une famille libre (car c'est une base) donc tous les coéf de la C.L sont nuls:

c-à-d: $\begin{cases} a_1 - a_1' = 0 \\ a_2 - a_2' = 0 \\ \vdots \\ a_n - a_n' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = a_1' \\ a_2 = a_2' \\ \vdots \\ a_n = a_n' \end{cases}$

Les 2 n-uplet de scalaire sont identique donc les deux décompositions de v sont les mêmes
Il y a bien unicité de la décomposition d'un vecteurs sur la base.

4- S.ev. d'un ev. de dimension finie

PROPOSITION : Soit E, un e.v de dimension finie, et F un s.e.v de E.

→ $\dim F \leq \dim E$

→ si $\dim F = \dim E$ alors $F = E$

TEOREMES : Si E est un e.v de dimension finie, $\dim E = n$ et F → s.e.v de E, $\dim F = p$.

Alors :

le s.e.v F admet au moins un sev supplémentaire dans E :

$\exists G$ sev de E / $E = F \oplus G$

La dimension de ce supplémentaire est de dimension $n.p$.

TEORÈMES : Formule de Grassman

Soit E un e.v. de dimension finie et F, G deux sev. de E alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$