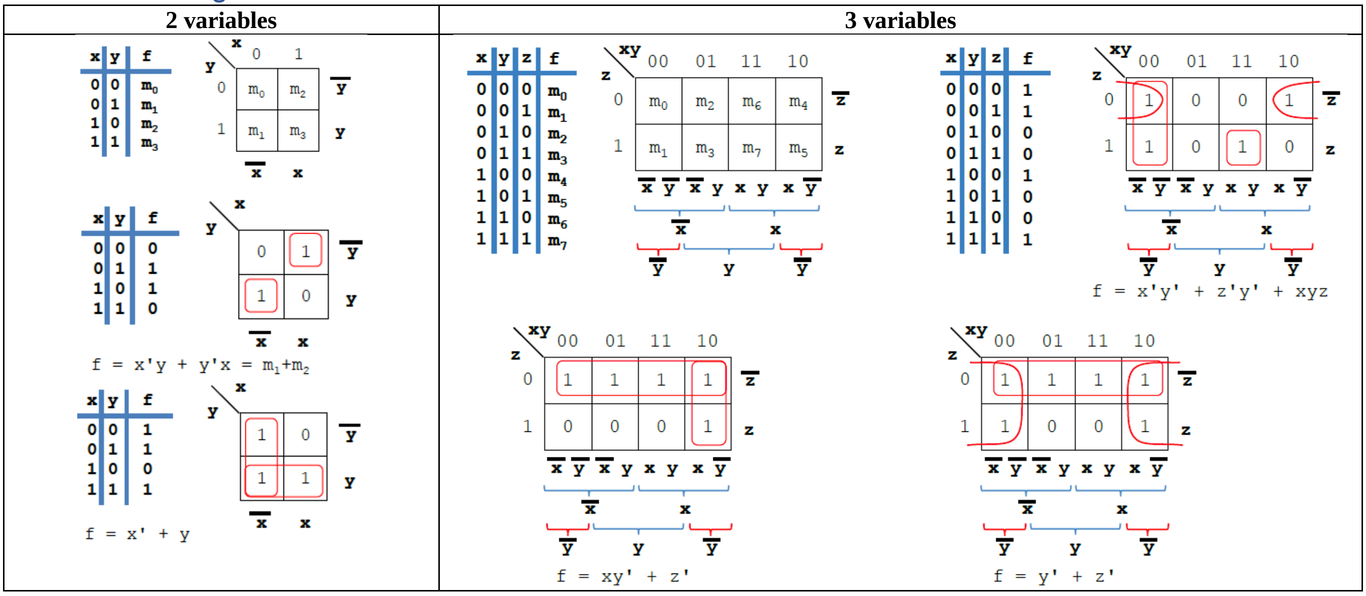
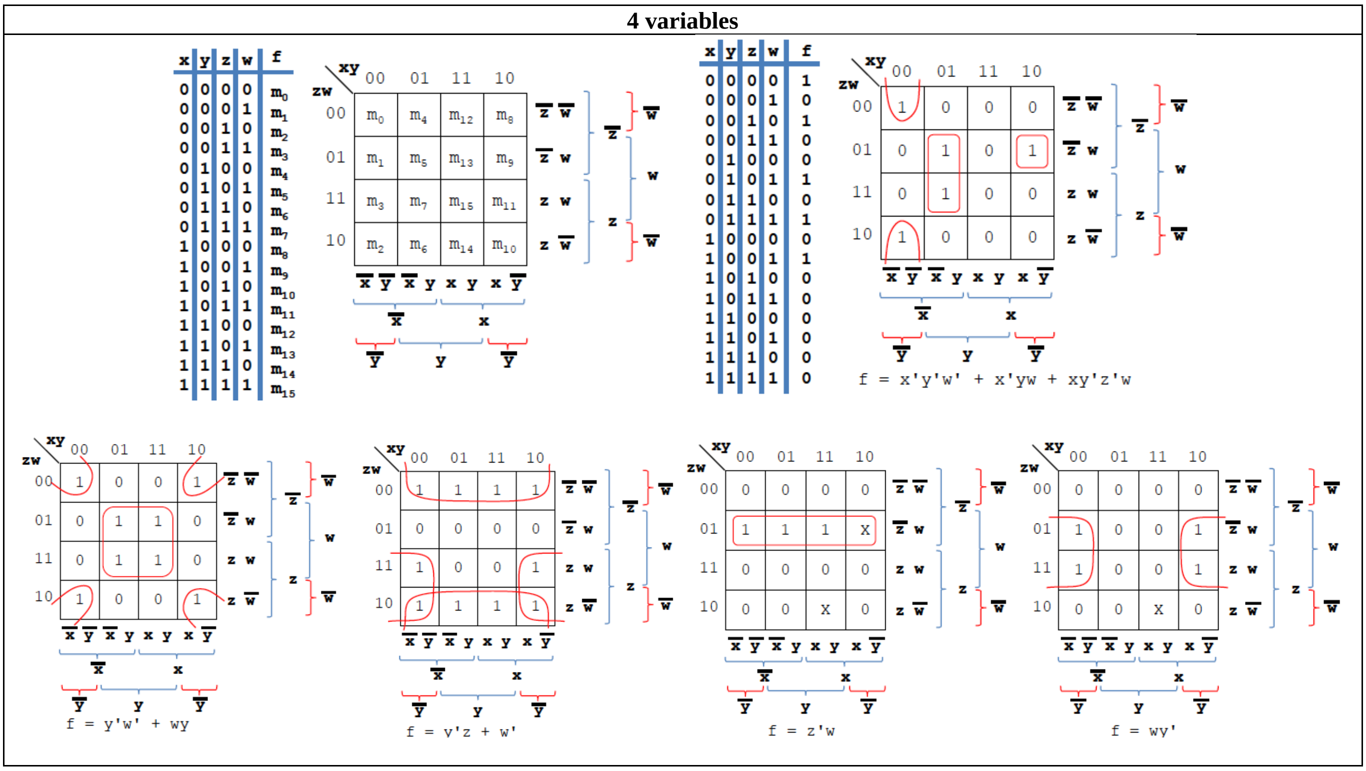
Note de COURS
2 : Implémentation optimisée de fonctions logiques

Technique de base

- S'il est possible de minimiser les fonctions logiques en utilisant les théorèmes booléens, il existe des méthodes plus rapides telles que les tableaux de Karnaugh ou l'algorithme de Quine-McCluskey. Ils offrent une façon systématique d'arriver à la forme minimale d'une fonction booléenne quelconque.

Tableau de Karnaugh





Remarque :

- Devient vite impraticable au-delà de 4 variables. L'algorithme Quine-McCluskey est alors à privilégier.

Algorithme de Quine-McCluskey

- **Littéral** : Pour une fonction F à n variables, une variable apparaît sous la forme X ou $\bar{X}$.
- **Impliquant** : Pour une fonction à n variables, les impliquants correspondent aux termes produits qui peuvent apparaître dans toutes les sommes de produits (canonique ou non) qui représentent la fonction. Si P est un impliquant, alors P=1 implique que la fonction est 1. Donc tous les minterms sont des impliquants. Une façon graphique d'appréhender l'impliquant consiste à le percevoir comme un terme regroupant des cellules adjacentes d'une table de Karnaugh contenant la valeur logique 1 et formant un rectangle dont les côtés sont une puissance de 2 (1, 2, 4).
- **Impliquant premier :** C'est un impliquant dont on ne peut pas enlever de littéral. Il est défini par un rectangle dans le tableau de Karnaugh qui ne peut être circonscrit dans aucun rectangle associé à un autre.
- **Impliquant premier essentiel :** C'est un impliquant premier qui possède au moins une cellule qui n'est contenue dans aucun autre impliquant premier.

La technique de Quine-McCluskey s'applique de la même manière aux expressions disjonctives qu'aux expressions conjonctives. Nous nous concentrerons dans ce qui suit sur le cas des expressions disjonctives. L'algorithme s'exprime ainsi :

1. Exprimer la fonction sous forme canonique disjonctive ;
2. Exprimer les minterms sous forme binaire ;
3. Grouper les termes selon leur poids
   Le poids fait ici référence au nombre de 1 contenus dans la forme binaire des minterms.
4. Unir les termes deux à deux ;
   Pour unir deux termes ensemble, il faut qu'ils appartiennent à deux groupes de poids successifs et qu'ils soient identiques à un bit près. Lorsque deux termes sont unis, on retranscrit le produit de leur union dans la nouvelle colonne en remplaçant par un x le bit qui les différenciait. À chaque fois qu'un terme est utilisé pour générer un nouveau sur la nouvelle colonne, on l'indique par une coche (✓). Lorsque l'on passe d'une paire de groupes de poids successifs à la suivante, on l'indique par un trait délimitant les nouveaux groupes de poids.
5. Répéter l'étape (4) autant de fois que nécessaire ;
   Pour que deux termes soient unis, en plus des conditions précédentes, il faut que les x soient au même endroit. Si le même terme est généré plusieurs fois, on ne garde qu'une seule copie.
6. Identifier les impliquants premiers ;
7. Identifier les impliquants premiers essentiels ;
8. Si la fonction est entièrement exprimée par ses impliquants premiers essentiels, arrêter ;
9. Sinon, choisir, les impliquants premiers non essentiels permettant une couverture complète.

Exemple :
Considérons la fonction ayant la table de vérité suivante :

A	B	C	D	*F*
0	0	0	0	**0**
0	0	0	1	**0**
0	0	1	0	**0**
0	0	1	1	**0**
0	1	0	0	**0**
0	1	0	1	**1**
0	1	1	0	**0**
0	1	1	1	**1**
1	0	0	0	**1**
1	0	0	1	**0**
1	0	1	0	**1**
1	0	1	1	**0**
1	1	0	0	**1**
1	1	0	1	**1**
1	1	1	0	**1**
1	1	1	1	**1**

1. Exprimer la fonction sous forme canonique disjonctive ;
$f\ (A,B,C,D)\ =\ \bar{A}B\bar{C}D + \bar{A}BCD + A\bar{B}\bar{C}\bar{D} + A\bar{B}C\bar{D} + AB\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D} + ABCD$

2. Exprimer les minterms sous forme binaire ;
f(A,B,C,D) = 0101+0111+1000+1010+1100+1101+1110+1111

3. Grouper les termes selon leur poids ;
*(**1** : 1000 ; **2** : 1010,0101,1100 ; **3** : 1101,0111,1110 ; **4** :1111)*

4. Unir les termes deux à deux ;

1.	1000	✓
2.	1010	✓
3.	0101	✓
4.	1100	✓
5.	0111	✓
6.	1101	✓
7.	1110	✓
8.	1111	✓

10x0	*Généré en combinant* 1. *et* 2.
1x00	*Généré en combinant* 1. *et* 4.
1x10	*Généré en combinant* 2. *et* 7.
01x1	*Généré en combinant* 3. *et* 5.
x101	*Généré en combinant* 3. *et* 6.
110x	*Généré en combinant* 4. *et* 6.
11x0	*Généré en combinant* 4. *et* 7.
x111	*Généré en combinant* 5. *et* 8.
11x1	*Généré en combinant* 6. *et* 8.
111x	*Généré en combinant* 7. *et* 8.

5. Répéter l'étape (4) autant de fois que nécessaire ;

1.	10x0	✓
2.	1x00	✓
3.	1x10	✓
4.	01x1	✓
5.	x101	✓
6.	110x	✓
7.	11x0	✓
8.	x111	✓
9.	11x1	✓
10.	111x	✓

1xx0	*Généré en combinant* 1. *et* 7.
1xx0	*Généré en combinant* 2. *et* 3.
x1x1	*Généré en combinant* 4. *et* 9.
x1x1	*Généré en combinant* 5. *et* 8.
11xx	*Généré en combinant* 6. *et* 10.
11xx	*Généré en combinant* 7. *et* 9.

puis :

1.	1xx0
2.	x1x1
3.	11xx

Ne pouvant plus réunir aucune paire de termes, l'étape (5) est terminée (Il n'y a pas de termes possédant les x au même endroit).

6. *Identifier les impliquants premiers ;*

On reprend ici l'ensemble des étapes effectuées :

1000	✓
1010	✓
0101	✓
1100	✓
0111	✓
1101	✓
1110	✓
1111	✓

10x0	✓
1x00	✓
1x10	✓
01x1	✓
x101	✓
110x	✓
11x0	✓
x111	✓
11x1	✓
111x	✓

1xx0
x1x1
11xx

Tous les termes qui ne sont pas marqués (✓) sont des impliquants premiers : 1xx0, x1x1, 11xx. Cette écriture binaire se lit A, BD et AB respectivement.

7. *Identifier les impliquants premiers essentiels ;*

Pour identifier les impliquants premiers essentiels, on utilise un tableau tel que sur les lignes, on dispose tous les impliquants premiers identifiés et que sur les colonnes, on pose les minterms de la fonction. On procède alors par identification :

	1000	1010	0101	1100	0111	1101	1110	1111
1xx0	*	*		*			*	
x1x1			*		*	*		*
11xx				*		*	*	*

Un impliquant premier est essentiel s'il est le seul à être associé à au moins un minterm. Ainsi, un minterm appartient à un impliquant premier essentiel si sa colonne ne comporte qu'un seul astérisque (*).

	1000	1010	0101	1100	0111	1101	1110	1111
1xx0	(*)	(*)		*			*	
x1x1			(*)		(*)	*		*
11xx				*		*	*	*

Un impliquant premier est essentiel s'il comporte au moins une étoile entre parenthèses. Dans notre exemple, les impliquants premiers essentiels sont : 1xx0 et x1x1.

8. *Vérifier si la fonction est entièrement exprimée par ses impliquants essentiels ;*

Pour ce faire, il faut refaire le tableau (il est aussi possible d'effectuer cette étape sur le même tableau précédent) en ne gardant que les impliquants essentiels :

	1000	1010	0101	1100	0111	1101	1110	1111
1xx0	(*)	(*)		*			*	
x1x1			(*)		(*)	*		*

Pour que la fonction soit entièrement décrite par ses impliquant essentiels, il faut que chaque colonne comporte au moins une étoile. C'est le cas de notre exemple. La technique de Quine-McCluskey s'arrête à ce point :

$$f(A,B,C,D) = 1xx0 + x1x1 = A\overline{D} + BD$$

Remarques :

- Choisir les impliquants premiers de l'étape (9) de la méthode Quine-McCluskey n'est pas toujours aisé. Il est alors préférable d'avoir recours à une méthode systématique. La méthode de Petrick est une méthode systématique utilisant l'algèbre de Boole. Cependant cette méthode sort du champ couvert par ce cours.