FAMILLES DE VECTEURS — ALG : TD2

EXERCICE 11 :

- $u_1 = (2,3,-1)$
- $u_2 = (1,-1,-2)$

$\}$ $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$

- $v_1 = (3,7,0)$
- $v_2 = (5,0,-7)$

$\}$ $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$

⚠ Mq $F = G$ ⚠

→ On remarque que $v_1 = 2u_1 + (-1)u_2$ donc $v_1 \in F$

→ On remarque que $v_2 = 1u_1 + 3u_2$ donc $v_2 \in F$

Puisque v_1 et v_2 appartiennent à F alors toute comb. line. de v_1 et v_2 est dans F aussi

On en déduit que $\text{Vect}(v_1,v_2) \subset \text{Vect}(u_1,u_2)$

→ On remarque que $u_1 = \frac{3}{7}v_1 + \frac{1}{7}v_2$ donc $u_1 \in \text{Vect}(v_1,v_2)$

→ On remarque aussi que $u_2 = -\frac{1}{7}v_1 + \frac{2}{7}v_2$ donc $u_2 \in \text{vect}(v_1,v_2)$

$u_1, u_2 \in \text{Vect}(v_1,v_2)$ donc $\text{Vect}(u_1,u_2) \subset \text{vect}(v_1,v_2)$

En conclusion, par double inclusion, $\text{Vect}(u_1,u_2) = \text{Vect}(v_1,v_2)$

EXERCICE 12 :

Q1 : • $f_k : x \mapsto e^{kx}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

⚠ Montrons que la famille de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre ⚠

→ Pour cela montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille (finie) $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ est libre

* Initialisation : Pour $n=0$, la famille ne compote $f_0 : x \mapsto 1$ et cette famille est libre.

un vecteur tout seul non nul elle libre

* Hérédité : Supposons que pour un entier $n \geq 0$ donné, la famille $(f_k)_{0\leq k\leq n}$ soit libre alors au rang $n+1$.

Supposons que $a_0 f_0 + a_1 f_1 + \dots + a_{n+1} f_{n+1} = \tilde{0}$ ← fonction nulle

Cela signifie que (*) $\forall x \in \mathbb{R}$ $a_0 e^{0x} + a_1 e^{1x} + \dots + a_{n+1} e^{(n+1)x} = 0$

alors en dérivant on obtient $\forall x \in \mathbb{R}$ $0 + a_1 e^{x} + \dots + (n+1) a_{n+1} e^{(n+1)x} = 0$

On factorise par e^x : $e^x (a_1 e^0 + 2a_2 e^{x} + \dots + (n+1) a_{n+1} e^{nx}) = 0$

On simplifie par e^x (car il n'est jamais nul) et on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R},\ a_1 e^0 + 2a_2 e^{x} + 3a_3 e^{2x} + \dots + (n+1) a_{n+1} e^{nx} = 0$

$a_1 f_0 + 2a_2 f_1 + 3a_3 f_2 + \dots + (n+1) a_{n+1} f_n = 0$

C'est une comb. lin. de vecteurs $(f_0, f_1, f_2, \dots, f_n)$ qui est libre (hypothèse de récurrence)

Donc tous les coef sont nuls $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, …, $a_{n+1} = 0$

$\Rightarrow$ il reste à montrer que $a_0 = 0$ aussi

d'après $(*)$ $\forall x \in \mathbb{R},\ a_0 + a_1 \underbrace{f_1(x)}_{0} + a_2 \underbrace{f_2(x)}_{0} + \dots + a_{n+1} \underbrace{f_{n+1}(x)}_{0} = 0$

donc $a_0 = 0$

Donc $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n+1} = 0$

Ce qui montre que la famille (f_k) est libre et donc que la propriété est héréditaire

Q2: Non, car d'après la Q1 on a montré que $f_k : x \mapsto e^{kx}$ est libre

donc on prend n'importe quel nombre de vecteurs de cette famille

et on trouve tjr la famille des vecteurs choisis libre (dimension infinie).

EXERCICE 13:

- $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$

$\Rightarrow$ Supposons que tout vecteur de $\mathcal{F}$ est comb. lin. des autres vecteurs de $\mathcal{F}$

Alors $\mathcal{F}$ est liée. En fait il suffit que l'un des vecteurs soit comb. lin. des autres pour que la famille soit liée.

$\Rightarrow$ Réciproquement : On suppose que la famille $\mathcal{F}$ est liée. Alors tout vecteur de $\mathcal{F}$ n'est pas nécessairement une C.L. des autres.

$\hookrightarrow$ contre exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}, \vec{i}+\vec{j})$. Cette famille est liée, car :

$\vec{i}+\vec{j} = 1.\vec{i} + 1.\vec{j} + 0.\vec{k}$ cependant $\vec{k}$ n'est pas C.L. des autres

EXERCICE 14:

$\dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

1 $\Rightarrow$ la famille ne peut pas être génératrice car elle comporte moins de 3 vecteurs.

$\Rightarrow$ Les coordonnées de v et v n'étant pas proportionnelles, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et par conséquent forment une famille libre.

$\Rightarrow$ $\dim(\mathrm{Vect}(v, v)) = 2$.

2 $\Rightarrow$ La famille est liée car elle a plus de 3 vecteurs

$\Rightarrow$ Calculons le rang de cette famille

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 8 & 0 \\ 6 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{3}$$

rang $= 3$ donc $\dim(\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 3$ donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathbb{R}^3$

cette famille est génératrice.

3) $u = (1,-2,-1)$ $v = (-1,1,0)$ $w = (1,0,1)$

$u + 2v = (1,-2,-1) + (-2,2,0) = (-1,0,1) = w$ on a donc $w = -u - 2v$

⇒ Cette famille n'est pas libre puisque l'un des vecteurs est C.L des autres d'où $Vect\{u,v,w\} = Vect\{u,v\}$.

⇒ u et v ne sont pas colinéaires (car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc u,v est une famille libre et $\dim(Vect(u,v)) = 2$ d'où $\dim(Vect(u,v,w)) = 2$

La famille (u,v,w) n'est pas génératrice car $\dim(Vect(u,v,w)) \neq 3 = 2$

EXERCICE 15 :

$\mathbb{R}_n[X]$ le sev formé par les polynômes de degré au plus n.

Soit $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ une famille tel que $\deg(P_k) = k$

Rappelons que la famille des monômes unitaires $(x^k)_{0 \leq k \leq n}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est la base canonique).

Puisque chaque $P_k = \sum_{i=0}^{n} a_{i,k}\, x^i$ est de degré k, on a donc $a_{k,k} \neq 0$

Si on écrit en colonne les coordonnées de chaque poly P_k dans la base canonique on obtient une matrice triangulaire dont les élément diagonaux

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} P_0 & P_1 & P_2 \cdots & P_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x^0 = 1 \\ x \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{array} & \begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,n} \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,n} \\ 0 & 0 & a_{2,2} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Les $a_{k,k}$ sont tous non nuls.

on a la une famille echelonnée donc libre

Par ailleurs elle comporte autant de vecteurs que veut la dimension de l'espace, n+1

⇒ libre + a autant de vecteur que la dim de l'espace ⇒ la famille est génératrice

⇒ libre + génératrice donc c'est une base

EXERCICE 16 :

Dans $\mathbb{R}^4$ $u_1 = (1,1,0,0)$ $u_2 = (0,-1,0,2)$

On pose $u_3 = (0,0,1,0)$ et $u_4 = (0,1,1,0)$

⇒ Montrons que la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 = \vec{0}$

$\lambda_1(1,1,0,0) + \lambda_2(0,-1,0,2) + \lambda_3(0,0,1,0) + \lambda_4(0,1,1,0) = (0,0,0,0)$

$(\lambda_1, \lambda_1, 0, 0) + (0, -\lambda_2, 0, 2\lambda_2) + (0,0,\lambda_3,0) + (0,\lambda_4,\lambda_4,0) = (0,0,0,0)$

$(a_1, a_1 - a_2 + a_4, a_3 + a_4, 2a_2) = (0,0,0,0)$

On obtient le système d'équations :

$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_3 + a_4 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases}$

- Le système n'a qu'une solution $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$
- La famille (v_1, v_2, v_3, v_4) est libre puisque $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = 0$
  $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$
- Cette famille est libre et comporte 4 vecteurs ($= \dim \mathbb{R}^4$) donc elle est génératrice
- libre + génératrice = base

EXERCICE 17 :

$\dim E = n \geq 2$ $\quad H_1, H_2$ hyperplans avec $H_1 \neq H_2$

Déterminons $\dim(H_1 \cap H_2)$

Rappel : Un hyperplan H $\dim H = n-1$.

Formule de Grassman $\quad \dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$

or $\dim(H_1 + H_2) \leq \dim E \; (= n)$

donc $\quad \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2) \leq n$

$\quad \cancel{n} - 1 + n - 1 - \dim(H_1 \cap H_2) \leq \cancel{n}$

$\quad n - 2 \leq \dim(H_1 \cap H_2)$

donc 3 cas : soit $\dim(H_1 \cap H_2) = n$, ou $n-1$ ou $n-2$

$\Rightarrow$ Cas $\dim(H_1 \cap H_2) = n$ impossible !

en effet $\dim(H_1) = n-1$ $\dim(H_2) = n-1$ donc $\dim(H_1 \cap H_2) \leq n-1$

$\Rightarrow$ Cas $\dim(H_1 \cap H_2) = n-1$ $\quad H_1 \cap H_2$ est un sev de H_1 or $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_1)$

donc $H_1 = H_1 \cap H_2$ et $H_1 \cap H_2$ est un sev de H_2 or $\dim(H_1 \cap H_2) = \dim(H_2)$

donc $H_2 = H_1 \cap H_2$

On aurait donc $H_1 = H_2$. Mais ceci c'est impossible puisque d'après l'énoncé $H_1 \neq H_2$

$\Rightarrow$ Conclusion, seul le dernier cas est possible i.e $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$

EXERCICE 18 :

$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ familles card $\mathcal{F}_1 = 3$ card $\mathcal{F}_2 = 6$

1) Si $\mathcal{F}_1$ base de E alors dim E = 3.

2) il est possible

⇒ que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ soient libres si l'espace et de dim ≥ 6.

• que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ soient génératrice si l'espace est de dim ≤ 3.

3) ⇒ Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont génératrices de $\mathcal{F}$ donc dim $E \leq 3$.

⇒ Si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont libres dim $E \geq 6$.

4) ⇒ $\mathcal{F}_1$ génératrice de E (càd dim $E \leq 3$) et $\mathcal{F}_2$ libre (càd dim $E \geq 6$)

donc il est impossible.

⇒ $\mathcal{F}_1$ libre (càd dim $E \geq 3$) et $\mathcal{F}_2$ génératrice (dim $E \leq 6$) ⇒ Oui possible

On aurait alors $3 \leq$ dim $E \leq 6$.

EXERCICE 19 :

F, G deux s.e.v de $\mathbb{R}^5$ dim F = 3 et dim G = 3

Pour le s.e.v somme F + G on a :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$
$$= 3 + 3 - \underbrace{\dim(\{\vec{0}_E\})}_{0}$$
$$= 6 - 0 = 6.$$

D'une part dim (F + G) = 6 et d'autre part $\dim(F+G) \leq \dim(\mathbb{R}^5) = 5$

(car F + G est un s.e.v de $\mathbb{R}^5$)

Donc, il est impossible pour $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$

EXERCICE 20 :

Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$f_1 : x \mapsto e^x \sin^2(x)$ $f_2 : x \mapsto e^x \cos^2(x)$ $f_3 : x \mapsto e^x \sin(2x)$ $f_4 : x \mapsto e^x \cos(2x)$

On demande dim $(\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4))$

Remarquons que $f_4 = f_2 - f_1$, i.e f_4 est comb. lin. des autres.

car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) - f_1(x) = e^x \cos^2(x) - e^x \sin^2(x) = e^x(\cos^2(x) - \sin^2(x))$

$$= e^x \cos(2x) = f_4(x)$$

Puisque f_4 est C.L. des autres on a : $\text{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \text{Vect}(f_1, f_2, f_3)$

Montrons que (f_1, f_2, f_3) est libre :

Soit $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \setminus a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = \tilde{0}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = 0.$

$\forall x \in \mathbb{R} . \quad a_1 e^x \sin^2(x) + a_2 e^x \cos^2(x) + a_3 \sin(2x) = 0$

* Pour $x = 0$:

$$a_1 e^0 . \sin^2(0) + a_2 e^0 \cos^2(0) + a_3 \sin(0) = 0$$

$$a_1 . \cancel{1 . 0}^{0} + a_2 . 1 . 1 + \cancel{a_3 . 0}^{0} = 0$$

$$a_2 = 0.$$

* Pour $x = \frac{\pi}{2}$

$$a_1 e^{\pi/2} \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_2 e^{\pi/2} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + a_3 e^{\pi/2} \sin\left(2 \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$a_1 e^{\pi/2} . 1 + \cancel{0 . e^{\pi/2} . 0}^{0} + a_3 e^{\pi/2} \underbrace{\sin \pi}_{0} = 0$$

$$a_1 e^{\pi/2} + 0 + 0 = 0$$

$$a_1 e^{\pi/2} = 0$$

$$a_1 = 0$$

* Pour $x = \frac{\pi}{4}$

$$a_1 e^{\pi/4} . \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + a_2 e^{\pi/2} . \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + a_3 e^{\pi/4} . \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = 0$$

$$0 . e^{\pi/4} . \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0 . e^{\pi/2} . \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + a_3 . e^{\pi/4} . 1 = 0$$

$$a_3 e^{\pi/4} = 0$$

$$a_3 = 0$$

Donc on a $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ (donc la famille est libre).