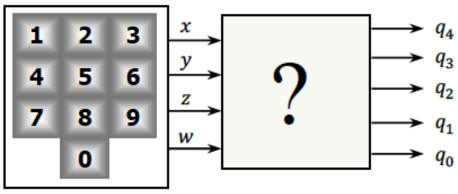
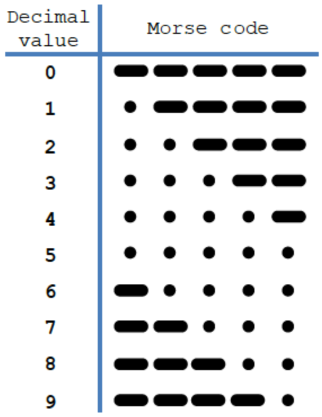
TD N°2
2 : Simplification expressions logiques

Exercice 1

Un pavé numérique produit un code sur 4-bit (*xyzw*) représentant un nombre non signé entre 0 et 9. On souhaite réaliser le circuit logique qui converti chaque code sur 4-bit en code Morse (séquence de point et tiret) comme indiqué sur la figure suivante. Le circuit génère 5 bits où les ‘0’ représente des points et les ‘1’ des tirets.





Value	x	y	z	w	q_4	q_3	q_2	q_1	q_0
0	0	0	0	0					
1	0	0	0	1					
2	0	0	1	0					
3	0	0	1	1					
4	0	1	0	0					
5	0	1	0	1					
6	0	1	1	0					
7	0	1	1	1					
8	1	0	0	0					
9	1	0	0	1					
	1	0	1	0					
	1	0	1	1					
	1	1	0	0					
	1	1	0	1					
	1	1	1	0					
	1	1	1	1					

1) Complétez la table de vérité pour chaque sortie (Q_4,Q_3,Q_2,Q_1,Q_0)
2) Donnez une expression simplifiée pour chaque sortie (Q_4,Q_3,Q_2,Q_1,Q_0). Utilisez le tableau de karnaugh pour Q_4,Q_3,Q_2, et l’algorithme de Quine-McCluskey pour Q_1,Q_0 . Vous pouvez partir du principe que les codes 1010 et 1111 ne seront jamais produit par le clavier.

Solution

Value	x	y	z	w	q_4	q_3	q_2	q_1	q_0
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	0	0	0	1
5	0	1	0	1	0	0	0	0	0
6	0	1	1	0	1	0	0	0	0
7	0	1	1	1	1	1	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	0	0
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0
	1	0	1	0	X	X	X	X	X
	1	0	1	1	X	X	X	X	X
	1	1	0	0	X	X	X	X	X
	1	1	0	1	X	X	X	X	X
	1	1	1	0	X	X	X	X	X
	1	1	1	1	X	X	X	X	X

q_4 zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	X	1
01	0	0	X	1
11	0	1	X	X
10	0	1	X	X

q_3 zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	X	1
01	1	0	X	1
11	0	1	X	X
10	0	0	X	X

q_2 zw \ xy	00	01	11	10
00	1	0	X	1
01	1	0	X	1
11	0	0	X	X
10	1	0	X	X

$q_4 = \bar{y}\bar{z}\bar{w} + x\bar{y} + yz$

$q_3 = \bar{y}\bar{z} + x\bar{y} + yzw$

$q_2 = \bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{y} + x$

- $q_1 = \sum m(0,1,2,3,9) + \sum d(10,11,12,13,14,15)$.

Number of ones	4-literal implicants	3-literal implicants	2-literal implicants
0	m_0 = 0000 ✓	$m_{0,1}$ = 000- ✓ $m_{0,2}$ = 00-0 ✓	**$m_{0,1,2,3}$ = 00--** ~~$m_{0,2,1,3}$ = 00--~~
1	m_1 = 0001 ✓ m_2 = 0010 ✓	$m_{1,3}$ = 00-1 ✓ $m_{1,9}$ = -001 ✓ $m_{2,3}$ = 001- ✓ $m_{2,10}$ = -010 ✓	**$m_{1,3,9,11}$ = -0-1** ~~$m_{1,9,3,11}$ = -0-1~~ **$m_{2,3,10,11}$ = -01-** ~~$m_{2,10,3,11}$ = -01-~~
2	m_3 = 0011 ✓ m_9 = 1001 ✓ m_{10}= 1010 ✓ m_{12}= 1100 ✓	$m_{3,11}$ = -011 ✓ $m_{9,11}$ = 10-1 ✓ $m_{9,13}$ = 1-01 ✓ $m_{10,11}$ = 101- ✓ $m_{10,14}$ = 1-10 ✓ $m_{12,13}$ = 110- ✓ $m_{12,14}$ = 11-0 ✓	**$m_{9,11,13,15}$ = 1--1** ~~$m_{9,13,11,15}$ = 1--1~~ **$m_{10,11,14,15}$ = 1-1-** ~~$m_{10,14,11,15}$ = 1-1-~~ **$m_{12,13,14,15}$ = 11--** ~~$m_{12,14,13,15}$ = 11--~~
3	m_{11}= 1011 ✓ m_{13}= 1101 ✓ m_{14}= 1110 ✓	$m_{11,15}$ = 1-11 ✓ $m_{13,15}$ = 11-1 ✓ $m_{14,15}$ = 111- ✓	
4	m_{15}= 1111 ✓		

$q_1 = \bar{x}\bar{y} + \bar{y}w + \bar{y}z + xw + xz + xy$

Prime Implicants		Minterms				
		0	1	2	3	9
$m_{0,1,2,3}$	$\bar{x}\bar{y}$	**X**	X	X	X	
$m_{1,3,9,11}$	$\bar{y}w$		X		X	X
$m_{2,3,10,11}$	$\bar{y}z$			X	X	
$m_{9,11,13,15}$	xw					**X**
$m_{10,11,14,15}$	xz					
$m_{12,13,14,15}$	xy					

$\Rightarrow q_1 = \bar{x}\bar{y} + xw$

- $q_0 = \sum m(0,1,2,3,4) + \sum d(10,11,12,13,14,15)$.

Number of ones	4-literal implicants	3-literal implicants	2-literal implicants
0	m_0 = 0000 ✓	$m_{0,1}$ = 000- ✓ $m_{0,2}$ = 00-0 ✓ **$m_{0,4}$ = 0-00**	**$m_{0,1,2,3}$ = 00--** ~~$m_{0,2,1,3}$ = 00--~~
1	m_1 = 0001 ✓ m_2 = 0010 ✓ m_4 = 0100 ✓	$m_{1,3}$ = 00-1 ✓ $m_{2,3}$ = 001- ✓ $m_{2,10}$ = -010 ✓ **$m_{4,12}$ = -100**	**$m_{2,3,10,11}$ = -01-** ~~$m_{2,10,3,11}$ = -01-~~
2	m_3 = 0011 ✓ m_{10}= 1010 ✓ m_{12}= 1100 ✓	$m_{3,11}$ = -011 ✓ $m_{10,11}$ = 101- ✓ $m_{10,14}$ = 1-10 ✓ $m_{12,13}$ = 110- ✓ $m_{12,14}$ = 11-0 ✓	**$m_{10,11,14,15}$ = 1-1-** ~~$m_{10,14,11,15}$ = 1-1-~~ **$m_{12,13,14,15}$ = 11--** ~~$m_{12,14,13,15}$ = 11--~~
3	m_{11}= 1011 ✓ m_{13}= 1101 ✓ m_{14}= 1110 ✓	$m_{11,15}$ = 1-11 ✓ $m_{13,15}$ = 11-1 ✓ $m_{14,15}$ = 111- ✓	
4	m_{15}= 1111 ✓		

$q_0 = \bar{x}\bar{z}\bar{w} + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}z + xz + xy$

Prime Implicants		Minterms 0	1	2	3	4
$m_{0,4}$	$\bar{x}\bar{z}\bar{w}$	**X**				X
$m_{4,12}$	$y\bar{z}\bar{w}$					X
$m_{0,1,2,3}$	$\bar{x}\bar{y}$	**X**	X	X	X	
$m_{2,3,10,11}$	$\bar{y}z$			X	X	
$m_{10,11,14,15}$	xz					
$m_{12,13,14,15}$	xy					

$\Rightarrow q_0 = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{z}\bar{w}$

Exercice 2

Soit la table de vérité de la fonction F(A,B,C,D) suivante (les tirets correspondent aux cas « *don't care* ») :

N°	A	B	C	D	F
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	-
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	-
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	0

1) Donner les minterms de la fonction F sous forme binaire ET souligner les minterms facultatifs

F(A, B, C, D) = $\sum(m_0, m_1, m_2, m_5, \boldsymbol{m_6}, m_7, m_8, m_9, m_{10}, \boldsymbol{m_{12}}, m_{14}) =$
0000; 0001; 0010; 0101; **0110**; 0111; 1000; 1001; 1010; **1100**; 1110
(Les « *don't care* » sont en **Violet**)

2) Procéder par la méthode de Quinne-McCluskey pour simplifier F(A,B,C,D) et identifier les impliquants premiers

Impliquants premiers :

Nb de 1	Impliquants à 4 litéraux	Impliquants à 3 litéraux	Impliquants à 2 litéraux	Impliquants à 1 litéral
0	0000 (m_0) ✓	000- ($m_{0,1}$) ✓	-00- ($m_{0,1,8,9}$)	
1	0001 (m_1) ✓	00-0 ($m_{0,2}$) ✓	-0-0 ($m_{0,2,8,10}$)	
	0010 (m_2) ✓	-000 ($m_{0,8}$) ✓	-00- ($m_{0,8,1,9}$)	
	1000 (m_8) ✓	0-01 ($m_{1,5}$)	-0-0 ($m_{0,8,2,10}$)	
2	0101 (m_5) ✓	-001 ($m_{1,9}$) ✓	--10 ($m_{2,6,10,14}$)	
	0110 (m_6) ✓	0-10 ($m_{2,6}$) ✓	--10 ($m_{2,10,6,14}$)	
	1001 (m_9) ✓	-010 ($m_{2,10}$) ✓	1--0 ($m_{8,10,12,14}$)	
	1010 (m_{10}) ✓	100- ($m_{8,9}$) ✓	1--0 ($m_{8,12,10,14}$)	
	1100 (m_{12}) ✓	10-0 ($m_{8,10}$) ✓		
3	0111 (m_7) ✓	1-00 ($m_{8,12}$) ✓		
	1110 (m_{14}) ✓	01-1 ($m_{5,7}$)		
		011- ($m_{6,7}$)		
		-110 ($m_{6,14}$) ✓		
		1-10 ($m_{10,14}$) ✓		
		11-0 ($m_{12,14}$) ✓		

Liste des **impliquants premiers** sous forme binaire :

F(A,B,C,D) = 0-01 ; 01-1 ; 011- ; -00- ; -0-0 ; --10 ; 1--0

Compléter le tableau suivant pour sélectionner les impliquants premiers essentiels :

	0000	0001	0010	0101	0111	1000	1001	1010	1110	
0-01		*		*						
01-1				*	*					
011-					*					
-00-	*	*				*	(*)			
-0-0	*		*			*		*		
--10			*					*	*	
1--0						*		*	*	

Liste des **impliquants premiers essentiels** sous forme binaire :

F(A, B, C, D) = $\bar{B}\bar{C}$

Est-ce que les impliquants premiers essentiels permettent de couvrir l'ensemble des minterms de F ? Si oui, donner l'expression simplifiée de F, autrement donner la ou les expressions simplifiées de F.

Réponse : ~~OUI~~/ NON

F(A, B, C, D) = $\bar{B}\bar{C} + \bar{A}BD + C\bar{D}$

Exercice 3 :

Soit la table de vérité de la fonction F(A,B,C,D) suivante (les tirets correspondent aux cas « *don't care* ») :

N°	**A**	**B**	**C**	**D**	**F**
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	-
6	0	1	1	0	-
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	-

1) Donner les minterms de la fonction F sous forme binaire ET souligner les minterms facultatifs

F(A, B, C, D) = $\sum(m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, \boldsymbol{m_5}, \boldsymbol{m_6}, m_8, m_9, m_{12}, m_{13}, m_{14}, \boldsymbol{m_{15}}) =$
0000; 0001; 0010; 0011; 0100; **0101**; **0110**; 1000; 1001; 1100; 1101; 1110; **1111**
(Les « *don't care* » sont en **Violet**)

2) Procéder par la méthode de Quinne-McCluskey pour simplifier F(A,B,C,D) et identifier les impliquants premiers

Impliquants premiers :

Nb de 1	Impliquants à 4 littéraux	Imp. à 3 littéraux	Imp. à 2 littéraux	Imp. à 1 littéral
0	0000 **X**	000- **X**	00--	--0-
1	0001 **X**	00-0 **X**	~~00--~~	
	0010 **X**	0-00 **X**	0-0- **X**	
	0100 **X**	-000 **X**	-00- **X**	
	1000 **X**	00-1 **X**	0--0	
2	0011 **X**	001- **X**	1-0- **X**	
	0101 **X**	0-01 **X**	-10- **X**	
	0110 **X**	010- **X**	--01	
	1001 **X**	01-0 **X**	~~1-0-~~	
	1100 **X**	0-10 **X**	~~--01~~	
3	1101 **X**	100- **X**	~~-10-~~	
	1110 **X**	-001 **X**	~~-1-0~~	
4	1111 **X**	1-00 **X**	-1-0	
		-100 **X**	11--	
		110- **X**	11--	
		1-01 **X**		
		-101 **X**		
		11-0 **X**		
		-110 **X**		
		11-1 **X**		
		111- **X**		

Liste des **impliquants premiers** sous forme binaire :

F(A,B,C,D) = 00-- ; 0--0 ; --01 ; -1-0 ; 11-- ; --0-

Compléter le tableau suivant pour sélectionner les impliquants premiers essentiels :

	0000	0001	0010	0011	0100	1000	1001	1100	1101	1110
00--	X	X	X	(X)						
0--0	X		X		X					
--01							X		X	
-1-0					X			X		X
11--								X	X	X
--0-	X	X			X	(X)	X	X	X	

Liste des **impliquants premiers essentiels** sous forme binaire :

F(A, B, C, D) = 00-- + --0- = $\bar{A}\bar{B} + \bar{C}$

Est-ce que les impliquants premiers essentiels permettent de couvrir l'ensemble des minterms de F ? Si oui, donner l'expression simplifiée de F, autrement donner la ou les expressions simplifiées de F.

Réponse : ~~OUI /~~ **NON**

F(A, B, C, D) = $\bar{A}\bar{B} + \bar{C} + AB$ ou $\bar{A}\bar{B} + \bar{C} + B\bar{D}$