SEV

Définition (Combinaison linéaire)

Soient $n \geq 1$ et L une partie de $\mathbb{K}$. Une **combinaison linéaire** de p (avec $p \geq 1$) vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ de $\mathbb{K}^n$ à coefficients dans L est une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k := \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in L.$$

Les scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont appelés coefficients de la combinaison linéaire.

Définition (S.e.v. engendré par une famille)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs $\mathbb{K}^n$. L'ensemble $\mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$ est appelé **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(v_1, \ldots, v_p)$.

Définition (Famille génératrice)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. On dit qu'une famille $(v_1, \ldots, v_p)$ de vecteurs de $\mathbb{K}^n$ est **génératrice** de F lorsque

$$F = \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}.$$

Définition (Somme directe)

Soient $n \geq 1$ un entier, E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Lorsque $E \cap F = \{0\}$, on dit que E et F sont en **somme directe** : l'ensemble $E + F$ est alors noté $E \oplus F$.

Définition (Supplémentaire)

Soient $n \geq 1$ un entier, E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. On dit que E et F sont **supplémentaires** lorsque $\mathbb{K}^n = E + F$ et E et F sont en somme directe. On écrit alors $\mathbb{K}^n = E \oplus F$.

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que deux vecteurs $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^n$ sont **colinéaires** lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v_1 = \lambda v_2$ ou $v_2 = \lambda v_1$ [3].

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que trois vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}^n$ sont **coplanaires** lorsque l'un de ces vecteurs est combinaison linéaire des deux autres.

Définition (Famille libre-famille liée)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On dit que $(v_1, \ldots, v_p)$ forme une **famille libre** de $\mathbb{K}^n$ lorsque pour chaque $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$, on a

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n} \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsqu'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p = 0_{\mathbb{K}^n},$$

on dit que $(v_1, \ldots, v_p)$ forme une **famille liée** de $\mathbb{K}^n$.

Définition (Base d'un s.e.v.)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. de $\mathbb{K}^n$. Toute famille libre et génératrice de F est appelée une **base** de F.

Proposition

Soit $n \geq 1$ un entier. Ont lieu :

(a) Toute famille libre de $\mathbb{K}^n$ contient au plus n-vecteurs.

(b) Toute famille génératrice de $\mathbb{K}^n$ possède au moins n-vecteurs.

(c) Toute base de $\mathbb{K}^n$ possède exactement n-vecteurs.

Définition (Dimension)

Soient $n \geq 1$ un entier et F un s.e.v. non nul de $\mathbb{K}^n$. Le nombre commun d'éléments de toute base du s.e.v. F est noté $\dim F$ et est appelé la **dimension** de F.

Par convention, le s.e.v. nul est de dimension 0.

Définition (Rang d'une famille)

Soient $n \geq 1$ un entier et $(v_1, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. On appelle **rang** de la famille $(v_1, \ldots, v_p)$, noté $\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p)$ la dimension du s.e.v. $\mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}$, i.e.,

$$\mathrm{rg}(v_1, \ldots, v_p) := \dim \mathrm{vect}\{v_1, \ldots, v_p\}.$$

Théorème

Soient $n \geq 1$ un entier, F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Alors, on a

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

APPLICATION LINÉAIRE

Définition (Application linéaire)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application. On dit que f est **linéaire** lorsque

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{K}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Définition (Noyau, image)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. On appelle noyau de f la partie de $\mathbb{K}^n$

$$\ker(f) := \{x \in \mathbb{K}^n : f(x) = 0_{\mathbb{K}^m}\}.$$

On appelle image de f la partie de $\mathbb{K}^m$

$$\mathrm{im}(f) := \{f(x) : x \in \mathbb{K}^n\} = f(\mathbb{K}^n).$$

Définition (Rang d'une application linéaire)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une application linéaire. On appelle **rang** de f noté $\mathrm{rg}\, f$ la dimension de l'image de f, i.e.,

$$\mathrm{rg}\, f := \dim \mathrm{im}\, f.$$

Définition

On dit que f est **injective** lorsque pour tout $x, x' \in E$, on a l'implication

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

On dit que f est **surjective** lorsque pour chaque $y \in F$, il existe (au moins) un $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Lorsque f est injective et surjective, on dit que f est **bijective**.

Corollaire

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ une **application linéaire**. Ont lieu :

(a) f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = n$.

(b) f est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = m$.

(c) f est bijective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = n = m$.

(d) Lorsque $n = m$, f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

MATRICE

Définition

Pour chaque $p \in \{1, \dots, m\}$ et chaque $q \in \{1, \dots, n\}$, on appelle (p, q)-ème **matrice élémentaire** de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ notée $E_{p,q}$ la matrice de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en p-ème ligne et en q-ème colonne qui vaut 1.

Définition

Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$, on pose $A^0 := I_n$ et

$$A^{p+1} := A \times A^p \quad \text{pour tout entier } p \geq 0.$$

Définition

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est **nilpotente** lorsqu'il existe un entier $N \geq 1$ tel que $A^N = 0_{M_n(\mathbb{K})}$.

Définition (Matrice transposée)

Soit $m, n \geq 1$ deux entiers, $A = (a_{lk})_{1 \leq l \leq m, 1 \leq k \leq n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de A notée $A^T = (b_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m} \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ définie par

$$b_{k,l} = a_{l,k} \quad \text{pour tout } k \in \{1, \dots, n\}, l \in \{1, \dots, m\}.$$

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** (resp. **antisymétrique**) lorsque $A^T = A$ (resp. $A^T = -A$). L'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétrique) est noté $S_n(\mathbb{K})$ (resp. $A_n(\mathbb{K})$).

Définition (Trace)

Soit $n \geq 1$ un entier. On appelle **trace** de $A = (a_{l,k})_{1 \leq l,k \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ l'élément de $\mathbb{K}$ défini par

$$\mathrm{tr}(A) := \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{j,j}.$$

Définition (Inverse)

Soient $n \geq 1$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **inversible** dans $M_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, on dit que B est un **inverse** de A dans $M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est appelé **groupe spécial linéaire** et est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Définition (Noyau d'une matrice)

On appelle **noyau** de $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ avec $m, n \geq 1$ entiers l'ensemble

$$\ker(A) := \left\{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = 0\right\}.$$

Définition (Sous-matrice)

Soit A une matrice. On appelle **sous-matrice** (on dit encore **matrice extraite**) de A toute matrice obtenue par une suppression d'une ou plusieurs lignes et/ou colonnes de la matrice A.

Définition

Soit $A = (a_{pq})_{1 \leq p,q \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 1$. On dit que A est **triangulaire supérieure** lorsque

$$a_{pq} = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq q < p \leq n.$$

Définition (Largeur d'une ligne)

Soient $n \geq 1$ un entier et $L = (a_1, \ldots, a_n) \in M_{n,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ une ligne non nulle. On appelle **largeur** de L l'entier $l(L) \in \{1, \ldots, n\}$ tel que

$$a_1 = \ldots = a_{n-l(L)} = 0 \quad \text{et} \quad a_{n-l(L)+1} \neq 0.$$

On appelle **pivot** de L le 1er élément non nul de L : $a_{n-l(L)+1}$.

Lorsque $L = 0_{\mathbb{K}^n}$ (i.e., L est nulle), on convient de poser $l(L) = 0$.

Définition (Echelonnée en lignes)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. On dit que A est **échelonnée en lignes** si elle est nulle ou s'il existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tel que

$$l(L_1) > \ldots > l(L_k) > 0 \quad \text{et} \quad L_p = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{pour tout } p \in \{k+1, \ldots, m\}.$$

Définition (Matrice échelonnée réduite)

Soient $m, n \geq 1$ deux entiers et $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. On dit que A est **échelonnée réduite** lorsque:

(i) A est échelonnée,

(ii) les pivots (dans les lignes non nulles) sont égaux à 1,

(iii) dans une colonne qui contient un pivot, il n'y a pas d'élément non nul distinct du pivot.

Définition

On appelle **matrice augmentée** associée au système linéaire ci-dessus notée $(A|b)$ la matrice donnée par

$$(A|b) := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

DETERMINANT

Définition

On appelle **permutation** de E_n toute fonction $f : E_n \to E_n$ bijective, i.e., telle que pour chaque $l \in E_n$, il existe un et un seul $k \in E_n$ tel que $f(k) = l$. L'ensemble des permutations de E_n est appelé **groupe symétrique d'ordre** n et est noté $\mathfrak{S}_n$.

Définition (Inversion)

Soient $n \geq 1$ un entier et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **inversion** de σ tout couple $(i, j) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. Le nombre d'inversions de σ est noté $I(\sigma)$.

Définition (Signature)

Soient $n \geq 1$ un entier et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On appelle **signature** de σ l'entier $(-1)^{I(\sigma)}$.

Définition

Soient $n \geq 1$ un entier et $(a_{p,q})_{1 \leq p,q \leq n} = A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **déterminant** de la matrice A l'élément de $\mathbb{K}$

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Définition (Comatrice)

Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **comatrice** de A, notée $\mathrm{com}(A)$, la matrice de taille $n \times n$ dont le coefficient en ligne p et en colonne q est donné par $(-1)^{p+q}\det(A(p,q))$, où $A(p,q)$ est la sous-matrice de A obtenue par suppression de la p-ème ligne et de la q-ème colonne.