Contrôle Terminal 1

19 mai 2023

durée 2h
Aucun document ni matériel électronique n'est autorisé

Exercice 1

Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, on considère les deux sous-ensembles $F = \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des s.e.v. de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Montrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que la fonction définie, pour tout réel x, par $f(x) = h(x) - (ax + b)$ appartienne à F.
4. Déduire de la question précédente que F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et on considère $\Phi : E \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application qui à une fonction $f \in E$ lui fait correspondre la fonction $\Phi(f) = f'' - 3f' + 2f$.

1. Montrer que Φ est une application linéaire.
2. Justifier, par une simple remarque, que l'ensemble des fonctions $f \in E$ telles que $\Phi(f)$ soit impaire est un s.e.v. de E.

Exercice 3

Notons $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que $f(e_1) = -e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + e_2 - 2e_3$ et $f(e_3) = -e_1$.

1. Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f et en déduire que f est bijective.
3. Montrer que f est une symétrie.
4. Déterminer les s.e.v. caractéristiques de cette symétrie.

Dans la suite on considère la famille de vecteurs $\mathscr{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ où $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_1 + e_3$.

5. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$.
7. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 4

Calculer le déterminant suivant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}-$e.v., F et G deux s.e.v. de E.
Montrer que si $E = F \oplus G$ alors tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

L1 – A.L.2 CT1

Ex 1.

1) * $F = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1) = 0 \}$

- $F \neq \emptyset$ car la fonction nulle appartient à F.
- Stabilité par somme.
  Soit $f, g \in F$ alors $(f+g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$
  et $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + 0 = 0$

  donc $f+g \in F$
- Stabilité pour le produit par un scalaire.
  Soit $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $(\lambda f)(0) = \lambda \cdot f(0) = \lambda \times 0 = 0$
  et $(\lambda f)(1) = \lambda \cdot f(1) = \lambda \times 0 = 0$

  donc $\lambda f \in F$

En conclusion F est bien un s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

* $G = \{ x \longmapsto ax + b \ : \ a, b \in \mathbb{R} \}$
On remarque que l'application $\Phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est une application linéaire du $\mathbb{R}$-ev des polynômes dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que $G = \Phi(\mathbb{R}_1[X])$. Par ailleurs nous savons que $\mathbb{R}_1[X]$ est un s.e.v de $\mathbb{R}[X]$ par conséquent G est l'image d'un s.e.v par une application linéaire. G est donc un s.e.v. aussi.

2) Soit $f \in F \cap G$.
Puisque $f \in G$, $\exists a, b \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = ax + b$
d'autre part $f \in F$ donc $f(0) = b$ et $f(1) \stackrel{!}{=} 1$.
Les réels a et b doivent donc être solution du système d'équations

$$\begin{cases} a \times 1 + b = 0 \\ a \times 0 + b = 0 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ b = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

On en déduit que f est la fonction nulle (le vecteur nul de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$
d'où $F \cap G = \{0\}$ et F et G sont en somme directe, $F \oplus G$.

3) Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = h(x) - (ax + b)$
Pour que $f \in F$ il faut et il suffit que $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} h(0) + a \times 0 + b = 0 \\ h(1) + a \times 1 + b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -h(0) \\ a = -b - h(1) \end{cases} \iff \begin{cases} b = -h(0) \\ a = h(0) - h(1) \end{cases}$$

Donc $\forall h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ f : x \longmapsto ax + b \ \in F \}$

4) Le résultat de la question 3) peut aussi s'énoncer

$$\forall h \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \ \exists f \in F, \ \exists g \in G \ / \ h = f + g$$

c.à-d. $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F + G$
Par ailleurs, question 2), on sait que $F \cap G = \{0\}$
On en déduit que les s.e.v. F et G sont supplémentaires

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = F \oplus G$$

Ex.2:

1) * Soit f et g dans E.

$\Phi(f+g) = (f+g)'' - 3(f+g)' + 2(f+g)$

$= f'' + g'' - 3(f' + g') + 2f + 2g$, (d'après les règles de dérivati

$= f'' - 3f' + 2f + g'' - 3g' + 2g$

$= \Phi(f) + \Phi(g)$

* Soit $f \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Phi(\lambda f) = (\lambda f)'' - 3(\lambda f)' + 2(\lambda f)$

$= \lambda \cdot f'' - 3\lambda \cdot f' + 2\lambda \cdot f$ (règles de dérivation)

$= \lambda \cdot (f'' - 3f' + 2f)$

$= \lambda \cdot \Phi(f)$

En conclusion Φ est bien une application linéaire.

2) Nous savons que l'ensemble $\mathcal{I}$ des fonctions impaires sur $\mathbb{R}$ constitue un s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

D'autre part nous savons que, par une application linéaire, l'image réciproque d'un s.e.v. est un s.e.v.

Par conséquent, $\Phi^{-1}(\mathcal{I})$ est un s.e.v. de E.

I - A.L.2 CT1

Ex.3 : 1) Sachant que la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{cases} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{cases}$
et que d'après l'énoncé

$$f(e_1) = (0,0,-1) \ , \ f(e_2) = (-2,1,-2) \ , \ f(e_3) = (-1,0,0)$$

on construit la matrice M de f dans cette base en juxtaposant, en colonnes, les images par f des vecteurs de la base

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2) Le noyau de f est constitué par les vecteurs $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(x,y,z) = (0,0,0)$. Pour le déterminer on résout le système

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y - z = 0 \\ y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -z = 0 \\ y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Le système possède une unique solution $(0,0,0)$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Puisque $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ on en déduit que f est injective.
Par ailleurs, d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$$
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) + 0 = 3$$

Puisque $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$ c'est donc que f est surjective.
L'application f est une bijection puisqu'elle est à la fois injective et bijective.

3) Pour prouver que f est une symétrie vectorielle il suffit de vérifier que $f \circ f = id_{\mathbb{R}^3}$, ce qui peut se faire matriciellement en montrant que $M^2 = I_3$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0-2+2 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 2-2+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Donc M est bien la matrice d'une symétrie vectorielle.

4) Les s.e.v. caractéristiques d'une symétrie vectorielle f sont :

- $\mathrm{Ker}(f-id)$, le s.e.v. par rapport auquel on effectue la symétrie
- $\mathrm{Ker}(f+id)$, le s.e.v. "direction" de la symétrie.

*Déterminons $\mathrm{Ker}(f-id)$.

La matrice de $f-id$ est $M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

on résout alors le système :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - 2y - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \end{cases} \iff x + 2y + z = 0$$

$\mathrm{Ker}(f-id) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y + z = 0\}$, la symétrie se fait donc par rapport au plan d'équation $x + 2y + z = 0$.

On peut donner une base de ce s.e.v. en donnant deux vecteurs non colinéaires satisfaisant cette équation. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

*Déterminons $\mathrm{Ker}(f+id)$.

La matrice de $f+id$ est $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, on résout alors le système

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ 2y = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

Le s.e.v. direction $\mathrm{Ker}(f+id)$, est donc une droite vectorielle, celle qui est intersection du plan $y=0$ et du plan $z = x$.

Un vecteur directeur de cette droite étant, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $\mathrm{Ker}(f+id) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'application f est donc la symétrie par rapport au plan d'équation $x + 2y + z = 0$ et suivant la direction de la droite $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5) Pour vérifier que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$ il suffit de vérifier que cette famille est libre ce qui peut se faire en montrant que leur déterminant est non nul.

$$\begin{array}{ccc} e'_1 & e'_2 & e'_3 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 0 \quad \text{(en développant par la } 2^{\text{nde}} \text{ ligne)}$$

$$= 1 \times (1+1)$$

$$= 2$$

Puisque ce déterminant est non nul, la famille (e'_1, e'_2, e'_3) est libre et puisqu'elle comporte 3 vecteurs c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

6) La matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$ est la matrice constituée en colonnes par e_1', e_2' et e_3'.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

7) La matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$M' = P^{-1} \cdot M \cdot P$$

* Commençons par calculer P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ L_2+L_1 \\ L_3-L_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} L_1-L_2 \\ \\ L_3+2L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ 2L_2-L_3 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \\ \frac{1}{2}L_2 \\ \frac{1}{2}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \text{d'où} \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

* Calculons M'

$$M' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

L1 - A.L.2 CT1

Ex.4.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3+L_1 \\ L_4+2L_1 \end{matrix}$$

On fait apparaître des 0 sur la 1ère colonne.

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

On développe le déterminant suivant la 1ère colonne.

$$= -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 0$$

Puis on développe suivant la 2nde colonne

$$= -1 \cdot \left(-2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -1 \cdot \left(-2 \cdot (10+2) \quad -2 \cdot (2+2) \right)$$

$$= -1 \left(-24 \quad -8 \right)$$

$$= +32$$

1 - A.L.2 CT1

.5. Soit F et G deux s.e.v. de E tels que $E = F \oplus G$.
Soit u un vecteur de E.
Puisque $E = F + G$ nous savons que u peut s'écrire
$u = u_F + u_G$ où $u_F \in F$ et $u_G \in G$.
Montrons que cette décomposition est unique.
Supposons qu'il existe une autre décomposition $u = u'_F + u'_G$
avec $u'_F \in F$ et $u'_G \in G$.

Nous avons $u = u_F + u_G$
et $u = u'_F + u'_G$

On a donc $u_F + u_G = u'_F + u'_G$

et donc $u_F - u'_F = u'_G - u_G$

Or $u_F - u'_F \in F$ car F est un s.e.v.
et $u'_G - u_G \in G$ car G est un s.e.v.

Donc le vecteur $u_F - u'_F = u'_G - u_G$ appartient simultanément à F et à G. c'est-à-dire

$$u_F - u'_F = u'_G - u_G \in F \cap G$$

Or $F \cap G = \{0_E\}$ car $E = F \oplus G$

donc $u_F - u'_F = 0_E$ et $u'_G - u_G = 0_E$

c-à-d $u_F = u'_F$ et $u'_G = u_G$.

En conclusion, les deux décompositions sont identiques.