CHAP IV : RAPPELS SEMESTRE 1.

I. PROPRIÉTÉ PROPOS À LA DIMENSION FINIE ET DÉFINITION

→ DÉFINITION : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$, où E et F sont de dimension finie. On appelle rang de f :

$$rg(f) = \dim(\mathrm{Im} f)$$

→ THÉORÈME DE RANG : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E, F sont de dimension finie :

$$\dim(E) = rg(f) + \dim(\ker f)$$

→ PROPRIÉTÉ : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E, F de dim finie.

f est injective $\Leftrightarrow rg(f) = \dim(E)$ f est surjective $\Leftrightarrow rg(f) = \dim(F)$

→ CAS PARTICULIER : si $E=F$ alors f injective $\Leftrightarrow$ f surjective $\Leftrightarrow$ f bijective

→ PROPOSITION : Soit E, F deux IK-ev de dimension finie alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \cdot \dim(F)$

II. CALCUL DU DÉTERMINENT D'UNE MATRICE CARRÉ

Pour une matrice carré M, le determinant est un scalaire noté $\det(A)$ ou $|A|$

→ Règle 0 : Si l'une des colonne (resp. lignes) de la matrice et combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) alors le determinant est nul.

C'est en particulier le cas si l'une des colonnes (ou lignes) ne contient que des 0.

→ Règle 1 : Le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieur ou inférieur ou diagonale) est égale au produit des éléments diagonaux.

→ Règle 2 : Le signe d'un déterminant change si l'on permute 2 colonne (ou 2 lignes)

→ Règle 3 : Si on multiplie par un scalaire λ une colonne (ou une ligne) alors le determinant est également multiplié par λ.

↳ EXEMPLE IMPORTANT

$$\det\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} = 2^3 \cdot \det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \det\left(2\cdot\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right)$$

→ Règle 4 : On ne change pas la valeur d'un determinant si à une colonne (resp. ligne) on ajoute une comb. linéaire des autres colonnes (resp. lignes).

→ CALCUL D'UNE DÉTERMINANT PAR DÉVELOPPEMENT SUIVANT UNE LIGNE OU UNE COLONE

↳ EXEMPLE :

• $A = \begin{pmatrix} \overset{+}{2} & \overset{-}{4} & \overset{+}{1} \\ \overset{-}{3} & \overset{+}{-2} & \overset{-}{5} \\ \overset{+}{7} & \overset{-}{1} & \overset{+}{3} \end{pmatrix}$ $\det(A) = +2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 2(-6-5) - 4(9-35) + 1(3+14)$

$\det(A) = -22 + 104 + 17 = 99$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \overbrace{+0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}^{0} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overbrace{+0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}^{0} -(-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\det(B) = 0 - 2\cdot\left(+1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\right) + 0 + 2\left(+\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$\det(B) = -2(2-3-0+2(6+2)) + 2(-3-2-3(6+2)+0) = -30-58 = -88$$

III. RAPPELS : MATRICES ET APPLICATION LINÉAIRE

Soit $f : E \to F$ une appl. linéaire entre 2 $\mathbb{K}$-ev ($\dim E = n$, $\dim F = m$)

Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E

et $\mathcal{B}' = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ une base de F

Soit $\vec{u} \in E$ dont les coordonnées dans base $\mathcal{B}$ sont $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ ← scalaire de $\mathbb{K}$

On a donc $\vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \cdot \vec{e}_n$

A ce vecteur on lui associe la matrice colonne constituée de ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Pour l'A.L. f on lui associe une matrice $m \times n$, où les colonnes sont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des images $f(\vec{e}_i)$ des vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

Si
$$\left.\begin{aligned} f(\vec{e}_1) &= a_{1,1}\vec{f}_1 + a_{2,1}\vec{f}_2 + \dots + a_{m,1}\vec{f}_m \\ f(\vec{e}_2) &= a_{1,2}\vec{f}_1 + a_{2,2}\vec{f}_2 + \dots + a_{m,2}\vec{f}_m \\ &\vdots \\ f(\vec{e}_n) &= a_{1,n}\cdot\vec{f}_1 + a_{2,n}\vec{f}_2 + \dots + a_{m,n}\vec{f}_m \end{aligned}\right\}$$

Alors la matrice de l'app. lin. f exprimé dans les bases $\mathcal{B}$ pour E et $\mathcal{B}'$ pour F est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{matrix} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & \dots & f(\vec{e}_n) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,n} \end{pmatrix} \end{array}$$

Avec ces notations, l'image par l'app. lin. f d'un vecteur $\vec{u} \in E$ est un vecteur $f(\vec{u})$ dont la matrice des coordonnées dans $\mathcal{B}'$ est le résultat du produit matriciel :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f\vec{u}) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\vec{u})$$

EXEMPLE : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$

f étant définie par
$$\begin{cases} f(\vec{e}_1) = 2\cdot\vec{f}_1 + 3\vec{f} \\ f(\vec{e}_2) = \vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 \\ f(\vec{e}_3) = 3\cdot\vec{f}_1 - \vec{f}_2 \end{cases}$$
donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Pour $\vec{v} = 4\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2 - 2\vec{e}_3$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f(\vec{v})) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ c-à-d } f(\vec{v}) = 7\vec{f}_1 + 4\vec{f}_2$$

Matrice de la composée de deux app. lin. $E \xrightarrow{f} F \longrightarrow G$

dim n, m, k

base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ $\quad \mathcal{B}' = (f_i)_{1 \leq i \leq m}$ $\quad \mathcal{B}'' = (g_i)_{1 \leq i \leq k}$

$$\underset{\mathcal{B}'', \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(g \circ f) = \underset{\mathcal{B}'', \mathcal{B}'}{\mathrm{Mat}}(g) \cdot \underset{\mathcal{B}', \mathcal{B}}{\mathrm{Mat}}(f)$$

IV. RAPPELS : MATRICE INVERSE

A est une matrice carré $n \times n$, est dite inversible s'il existe une matrice carré, $n \times n$, $\mathcal{B}$ telle que

$A.B = I_n$ et $B.A = I_n$ Si tel est le cas, $\mathcal{B}$ est appelée matrice inverse de A et est notée A^{-1}

THÉORÈME : Une matrice est inversible ssi son déterminant est non nul.

PROP : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E alors f est bijective ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est inversible

et si tel est le cas, $\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(f)\right)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f^{-1})$

EXEMPLE : $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ sont inverse l'une de l'autre.

En effet, $A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

$A^{-1}.A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

1. Méthodes qui inverser une matrice :

a. PAR RESOLUTION D'UN SYSTEME

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2x + y - z \\ y' = -3x - y + 2z \\ z' = -2x + y - 2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = x' - 2x - y \\ y' = -3x - y + 2(-x' + 2x + y) \\ z' = -2x + y + 2(-x' + 2x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x' + 2x + y \\ y' = -2x' + x + y \\ z' = -2x' + 2x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x' + 2x + y' + 2x' - x \\ y = y' + 2x' - x \\ z' = -2x' + 2x + 3(y' + 2x' - x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = x' + y' + x \\ y = y' + 2x' - x \\ z' = 4x' + 3y' - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x' + y' + 4x' + 3y' - z' \\ y = y' + 2x' - 4x' - 3y' + z' \\ x = 4x' + 3y' - z' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 5x' + 4y' - z' \\ y = -2x' - y' + z' \\ x = 4x' + 3y' - z' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 4x' + 3y' - z' \\ y = -2x' - y' + z' \\ z = 5x' + 4y' - z' \end{cases} \quad \text{donc } A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

2. METHODE DE GAUSS-JORDAN

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\quad\quad\quad}^{A}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad}^{I_3}} \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdots\cdots \left(\begin{array}{ccc|ccc} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\quad\quad\quad}^{I_3}} & \multicolumn{3}{c}{\overbrace{\quad\quad\quad}^{A^{-1}}} \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array}\right)$$

FORMULE D'INVERSION D'UNE MATRICE (TRANSPOSÉ DE LA COMATRICE)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^t\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'un 2x2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\det(A) = ad - bc$ $\qquad A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc} \, {}^t\begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & +a \end{pmatrix} = \dfrac{1}{ad-bc}$

V - MATRICES DE PASSAGE ET CHANGEMENTS DE BASE :

Dans $\mathbb{R}^n$ (en $\mathbb{C}^n$)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3', \dots, e_n')$ deux bases de $\mathbb{R}^n$

On appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$

La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id)$ notée $\mathcal{P}$ est dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

EXEMPLE : Dans $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est ici la base canonique et $\mathcal{B}'(e_1', e_2')$ en $\begin{cases} e_1' = 2e_1 + e_1 \\ e_2' = e_1 + e_2 \end{cases}$

Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$ est :

$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} e_1' & e_2' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cette matrice permet de convertir les colonnes des $\mathcal{B}'$ en coordonnées dans $\mathcal{B}$ ⚠

PROP : Si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$
alors $\mathcal{P}^{-1}$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$

EXEMPLE : En reprenant l'exemple précédent.

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ vers $\mathcal{B}$ est : $P^{-1} = \dfrac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

* Soit $\vec{v} = (1, 7)$ → Les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{v})$
→ Les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{v}) = P^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Donc les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}'$ sont $\begin{pmatrix} -6 \\ 13 \end{pmatrix}$ c-à-d $\vec{v} = -6e_1' + 13e_2'$

Changement de base pour la matrice d'une appl. linéaire

Dans $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une appl. linéaire

Si $\mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ est la matrice de f exprimé dans la base $\mathcal{B}$ en "entrée" et en "sortie"

alors la matrice de f exprimée dans la base $\mathcal{B}'$ est donnée par la formule :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot P$$

$$P \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{ide} \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot P$$

$$P \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} \cdot P^{-1} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \cdot \underbrace{P \cdot P^{-1}}_{ide}$$

donc $P \cdot \mathcal{M}at_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} \cdot P^{-1} = \mathcal{M}at_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$