CHAP III : APPLICATION LINÉAIRE

DÉFINITION : soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $f : E \to F$ une application. On dit f est une application linéaire lorsque : $\forall u, v \in E$, $f(u+v) = f(u) + f(v)$

et $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

EXEMPLE :

⇒ Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ le $\mathbb{K}$-ev des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ celui des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

On considère l'application $D : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$.

l'application "dérivation" : $\mathcal{D}(f) = f'$

Cette application est une application linéaire car, d'après le théorème de dérivation :

- $\mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g)$ • $\mathcal{D}(\lambda f) = \lambda . \mathcal{D}(f)$

Ceci pour $f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et tous $\lambda \in \mathbb{R}$.

⇒ l'application trace, $Tr : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire du $\mathbb{R}$-ev. $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ dans le $\mathbb{R}$-ev : $\mathbb{R}$

car $Tr(M+N) = Tr(M) + Tr(N)$ et $Tr(\lambda . M) = \lambda Tr(M)$

REMARQUE : Pour montrer qu'une application f est linéaire, il est équivalent de vérifier que :

$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ pour tous vecteurs $u, v \in E$ et tous scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$.

VOCABULAIRE :

⇒ Un endomorphisme d'un ev. E est une application linéaire de $E \to E$.

l'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathcal{L}(E)$.

⇒ Un isomorphisme de E dans F est une application linéaire $E \to F$ qui est, en plus, bijective.

⇒ Un automorphisme d'un e.v E est une application linéaire de $E \to E$ qui est, en plus, bijective

EXEMPLE :

⇒ l'application "transposition", qui à une matrice carré $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ lui fait correspondre sa matrice transposé ${}^tM = M^T$, est une A.L (application linéaire). car ${}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$ et c'est une endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Qui plus est, la transposition est bijective, c'est donc un isomorphisme et même un automorphisme de l'ev. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⚠ REMARQUE : Une application linéaire $f : E \to F$ où E est suivi d'une base $(e_i)_{i \in I}$ est entièrement déterminée par la connaissance des images des vecteurs de la base de E.

Pour connaître f il suffit de connaître les $f(e_i)$ pour tous $i \in I$

En effet, (en dim finie), si $u \in E$, u s'écrit sur la base $(e_i)_{1 \le i \le n}$: $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$f(u) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2) + \dots + f(x_n e_n)$

donc $f(u) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n)$.

PROPOSITION : Soit $f : E \to F$, une application entre deux $\mathbb{K}$-ev.

On a :

⇒ l'image par f d'un s.e.v de E est un sev de F

⇒ l'image réciproque par f d'un sev de F est un s.e.v de E

DEMONSTRATION (à savoir refaire)

* Soit G un s.e.v. de E et montrons que $f(G)$ est un s.e.v de F.

⇒ $f(G) \neq 0$ car $\vec{0}_E \in G$ donc $f(\vec{0}_E) \in f(G)$

⇒ Stabilité par comb. linéaire :

Soit $u', v' \in f(G)$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Puisque $u' \in f(G)$, il existe un vecteur $u \in G$ tel que $u' = f(u)$

Puisque $v' \in f(G)$, il existe un vecteur $v \in G$ tel que $v' = f(v)$

Mq $\lambda u' + \mu v' \in f(G)$ (avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$)

$$\lambda u' + \mu . v' = \lambda . f(u) + \mu . f(v) \underset{\text{car } f \text{ linéaire}}{=} f(\lambda u) + f(\mu . v) \underset{\text{car } f \text{ linéaire}}{=} f(\overbrace{\lambda u + \mu . v}^{\in G})$$

Or $\lambda u + \mu . v \in G$ car $u, v \in G$ et que G est un sev. donc $\lambda u' + \mu . v' \in f(G)$

On a montré que $f(G)$ est un s.e.v. de F.

* Soit $\mathcal{H}$ un s.e.v de F. Mq $f^{-}(\mathcal{H}) = \{ v \in E / f(v) \in \mathcal{H} \}$

⇒ $f^{-}(\mathcal{H}) \neq 0$ car elle contient au moins $\vec{0}_E$ en effet $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in \mathcal{H}$ (car $\mathcal{H}$ est un s.e.v)

⇒ Stabilité par comb. linéaire :

Soit $u, v \in f^{-}(\mathcal{H})$ et soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Pour montrer que $\lambda u + \mu v \in f^{-}(\mathcal{H})$ il faut montrer que $f(\lambda u + \mu . v) \in \mathcal{H}$.

$$f(\lambda u + \mu . v) = f(\lambda u) + f(\mu v) = \lambda . \underbrace{f(u)}_{\substack{\in \mathcal{H} \\ \text{car} \\ u \in f^{-}(\mathcal{H})}} + \mu . \underbrace{f(v)}_{\substack{\in \mathcal{H} \\ \text{car} \\ v \in f^{-}(\mathcal{H})}} \in \mathcal{H} \text{ car } \mathcal{H} \text{ est un s.e.v.}$$

PROP : Si $f : E \to F$ est une app. linéaire alors $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

DEMONSTRATION : → $f(\vec{0}_E) = f(0 \times \vec{0}_E) = 0 \cdot f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

→ $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}_E$ et $f(\vec{u} - \vec{u}) = f(\vec{0}_E)$

$f(\vec{u} - \vec{u}) = f(\vec{0}_E) \Leftrightarrow f(\vec{u}) + f(-\vec{u}) = \vec{0}_F \Leftrightarrow f(-\vec{u}) = \vec{0}_F \quad f(\vec{u}) \Leftrightarrow f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

(autre méthode) $f(-\vec{u}) = f(-1 \times \vec{u}) = -1 \cdot f(\vec{u}) = -f(\vec{u})$

DEFINITION : Soit $f : E \to F$ une A.L. entre deux $\mathbb{K}$-e.v.

⇒ L'ensemble $\mathrm{Im}(f) := \{ f(\vec{u}) : \vec{u} \in E \}$ est appelé image de f.

⇒ L'ensemble $\mathrm{Ker}(f) := \{ \vec{u} \,/\, f(\vec{u}) = \vec{0}_F \}$ est appelé noyau de f.

REMARQUE : ① $\mathrm{Im}(f) \subset F$ $\quad$ $\mathrm{Ker}(f) \subset E$

② $\mathrm{Im}(f)$ est un s.e.v. de F car c'est l'image d'un s.e.v. par une A.L, En effet

$\mathrm{Im}(f) = f(E)$ or E est un s.e.v.

$\mathrm{Ker}(f)$ est un s.e.v. de E car c'est l'image réciproque d'un s.e.v.F. En effet

$\mathrm{Ker}(f) = f^{-}(\{\vec{0}_F\})$ or $\{\vec{0}_F\}$ est un s.e.v. de F.

EXEMPLE : En reprenant l'A.L. dérivation $D: \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$

$\Rightarrow Im(D) = \mathbb{R}[X]$ $\Rightarrow Ker(D) = \mathbb{R}_0[X]$ (les sev. des polynomes constants)

PROPOSITION : Soit $f: E \to F$ une A.L. alors :

① f est injective $\Leftrightarrow Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ ② f est surjective $\Leftrightarrow Im(f) = F$

DEMONSTRATION : ① ($\Rightarrow$) Supposons que f est injective

Soit $\vec{u} \in Ker(f)$, alors $f(\vec{u}) = \vec{0}_E$

Or on a aussi $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

On a $f(\vec{u}) = f(\vec{0}_E) \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}_F$ car f est injective.

On vient de montrer que $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$ et par ailleurs on sait que $\vec{0}_F = Ker(f)$

donc $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

($\Leftarrow$) Supposons que $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$

Soit $\vec{u}, \vec{v} \in E$ tels que $f(\vec{u}) = f(\vec{v})$

$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}_F \Leftrightarrow f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}_F$ (car f est A.L.) $\Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = Ker(f) \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}_F$ (car $Ker(f) = \{\vec{0}_E\}$)

$\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$ On vient de montrer que $f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ donc f est injective.

② évident car c'est la déf de $Im(f)$

PROPOSITION : Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev. $\mathcal{L}(E, F)$ # l'ensemble de toutes les A.L. de $E \to F$

alors $(\mathcal{L}(E,F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.

DEMONSTRATION : Admise, mais facile et très longue.

PROPOSITION : Soit E, F et G, trois $\mathbb{K}$-e.v.

Soit $f: E \to F$ et $g: F \to G$ deux application linéaire.

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ alors l'application $g \circ f: E \to G$ est une application linéaire.

DEMONSTRATION :
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

① $\Rightarrow$ Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in E$

- $g \circ f(\vec{u} + \vec{v}) = g(f(\vec{u} + \vec{v})) \underset{\uparrow}{=} g(f(\vec{u}) + f(\vec{v})) \underset{\uparrow}{=} g(f(\vec{u})) + g(f(\vec{v})) = g \circ f(\vec{u}) + g \circ f(\vec{v})$

(car f est linéaire) (car g est linéaire)

② $\Rightarrow$ Pour tout $\vec{u} \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$g \circ f(\lambda \vec{u}) = g(f(\lambda \vec{u})) \underset{\uparrow}{=} g(\lambda f(\vec{u})) \underset{\uparrow}{=} \lambda g(f(\vec{u})) = \lambda . g \circ f(\vec{u})$

(car f est linéaire) (car g est linéaire)

De ① et ② $g \circ f$ est bien une A.L.

REMARQUE : Dans le cas particulier où $E = F = G$ la proposition précédente nous indique que $\circ$ est une loi de composition interne à $\mathcal{L}(E)$

PROPOSITION : Soit E, F dans $\mathbb{K}$-e.v et $f: E \to F$ une A.L. alors :

$\Rightarrow$ Si f est un isomorphisme alors f^{-1} est un isomorphisme.

DEMONSTRATION : Si f est un isomorphisme, de $E \to F$ alors f est bijective et f^{-1} existe et est également bijective, il reste à prouver que f^{-1} est linéaire. ($f^{-1}: F \to E$)

① ⇒ Soit $\vec{u}', \vec{v}' \in F$

Puisque f est bijective, il existe $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans E tel que $\vec{u}' = f(\vec{u})$ et $\vec{v}' = f(\vec{v})$

alors : $f^{-1}(\vec{u}' + \vec{v}') = f^{-1}(f(\vec{u}) + f(\vec{v})) \underset{\uparrow}{=} f^{-1}(f(\vec{u} + \vec{v})) = f^{-1} \circ f(\vec{u} + \vec{v}) \underset{\uparrow}{=} \vec{u} + \vec{v} = f^{-1}(\vec{u}') + f^{-1}(\vec{v}')$

(car f est linéaire) (identité)

② ⇒ Soit $\vec{u}' \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\vec{u}' = f(\vec{u})$ et $\vec{u} = f^{-1}(\vec{u}')$

alors : $f^{-1}(\lambda \vec{u}') = f^{-1}(\lambda . f(\vec{u})) \underset{\uparrow}{=} f^{-1}(f(\lambda \vec{u})) = f^{-1} \circ f(\lambda \vec{u}) = \lambda \vec{u} = \lambda . f^{-1}(\vec{u}')$

f est linéaire

De ① et ② f^{-1} est linéaire.

DEFINITION : Deux $\mathbb{K}$-ev., E et F sont dits isomorphes, s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

EXEMPLE : $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ sont isomorphes.

L'isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ étant $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \longmapsto (a_0, a_1, \dots, a_n)$

THÉOREME : Tout $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, n, est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

DEMONSTRATION : Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. avec $\dim(E) = n$

On considère $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $\mathcal{C} = (c_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$

On construit alors deux app. linéaires. $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ et $\psi : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ en donnant l'image de vecteur de la base.

$\varphi(e_i) = c_i$, pour i, $1 \leq i \leq n$ $\psi(c_i) = e_i$, pour tout i, $1 \leq i \leq n$

Montrons que les A.L. φ et ψ sont bijectives et réciproques l'un de l'autre.

Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, on a $\psi \circ \varphi(e_i) = \psi(\varphi(e_i)) = \psi(c_i) = e_i$

donc $\psi \circ \varphi = id_E$

Et de la même manière on obtient $\varphi \circ \psi = id_{\mathbb{K}^n}$

En conclusion, φ et ψ sont bijectives et réciproques donc se sont des isomorphismes et les $\mathbb{K}$-e.v E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphe.

Conséquence immédiate du précédent théorème : Deux $\mathbb{K}$-e.v de dimension n, sont toujours isomorphes.

II - PROJECTION ET SYMÉTRIES (VECTORIELLES)

DEFINITION : Projection vectorielle ⇒ soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G deux s.e.v. supplémentaires ($E = F \oplus G$)

On appelle projection vectorielle sur le s.e.v. F et au parallèlement au s.e.v. G, l'application :

$$p : \begin{cases} E = E \oplus G \longrightarrow E \\ u = u_F + u_G \longmapsto u_F \end{cases}$$

(le sens de la transformation qui va faire p) (ici l'ensemble) (préciser antécédent et image)

ici p est un endomorphisme de E. En effet :

$p(u+v) = p(u_F + u_G + v_F + v_G)$ et $p(\lambda u) = p(\lambda(u_F + u_G))$

$p(u+v) = p(\underbrace{u_F + v_F}_{\in F} + \underbrace{u_G + v_G}_{\in G})$

$p(\lambda u) = p(\underbrace{\lambda u_F}_{\in F} + \underbrace{\lambda u_G}_{\in G})$

$p(u+v) = u_F + v_F$

$p(\lambda u) = \lambda u_F$

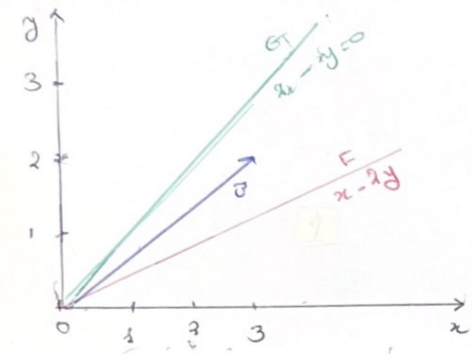
$p(u+v) = p(u) + p(v)$

$p(\lambda u) = \lambda p(u)$

Donc une projection est une app. lin. de $E \rightarrow E$, c-à-d un endomorphisme de E.

EXEMPLE :

① Dans $\mathbb{R}^2$ on considère les 2 s.e.v. $F = x - 2y = 0$ (← éq d'une droite vectorielle)
$G = 2x - y = 0$ (← idem)



On a clairement $E = F \oplus G$
Soit $\vec{v} = (2,2)$
La figure ci-dessus indique la méthode.

② Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de s.e.v de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ (s.e.v fonc paire, impaire) sont supplémentaire $\mathcal{F} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$
On peut définir la projection p sur le s.e.v $\mathcal{P}$ de fonction paire suivant la direction (parallèlement) au s.e.v. $\mathcal{I}$ des fonctions impaires.

$$p : \begin{cases} \mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I} \to \mathcal{F} \\ f : f_1 + f \end{cases}$$ par f paire

aussi $p(\exp) = ch$ car $e^x = \underbrace{ch(x)}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{sh(x)}_{\in \mathcal{I}}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

PROPOSITION : Soit $E = F \oplus G$
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ la projection sur F parallèlement à G alors :
$F = \mathrm{Im}(p)$ $\quad G = \mathrm{Ker}(p)$ $\quad E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$

DEMONSTRATION : Conséquences immédiates de la définition.

PROPOSITION : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ (un endomorphisme de E) alors p est une projection vectorielle SSi $p \circ p = p$

DEMONSTRATION : (⇒) Supposons que p soit une projection
$F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$ $\quad v = v_F + v_G$
donc $p \circ p(v) = p(p(v)) = p(v_F) = v_F = p(v)$

(⇐) Réciproquement, supposons que l'endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ et supposons que $p \circ p = p$

Mq $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ ($\forall v \in E$ $p(p(v)) = p(v)$

⇒ Montrons que $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p$
Soit $v \in E$, on a toujours $v = p(v) + v - p(v)$
On a clairement $p(v) \in \mathrm{Im}\, p$ et d'autre part $v - p(v) \in \mathrm{Ker}\, p$ car :
$$p(v - p(v)) = p(v) - \underset{p(v)}{\underset{\shortparallel}{p(p(v))}} = p(v) - p(v) = \vec{0}_E$$
On a bien $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Ker}\, p$

⇒ Montrons que $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p = \{\vec{0}_E\}$
Soit $v \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$
$v \in \mathrm{Im}\, p \Rightarrow \exists v \in E \,/\, v = p(v)$
et
$v \in \mathrm{Ker}\, p \Rightarrow p(v) = \vec{0}_E \Rightarrow p(p(v)) = \vec{0}_E \Rightarrow p(v) = \vec{0}_E$ (car $p \circ p = p$) $\Rightarrow v = \vec{0}_E$

Donc $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p \subset \{\vec{0}_E\}$ et il est clair que $\vec{0}_E \in \mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, p$

On a $\operatorname{Im} p \cap \ker p = \{\vec{0}_E\}$

En conclusions

$$\left.\begin{array}{l} E = \operatorname{Im} p + \ker p \\ \operatorname{Im} p \cap \ker p = \{\vec{0}_E\} \end{array}\right\} \Longrightarrow E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$$

Soit $u \in E$, on a $u = \underbrace{p(u)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{u - p(u)}_{\in \ker p}$

et $p(u) = p(u)$

Donc p est la projection vectorielle sur le sev $\operatorname{Im} p$ et suivant la direction de $\ker p$.

EXEMPLE: On reprend l'exemple dans $\mathbb{R}^2$ quotient

On considère aussi la matrice dans la base canonique,

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Est-ce que la matrice d'une projection?

$$M^2 = M.M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 16-4 & -8+2 \\ 8-2 & -4+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 12 & -6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = M$$

Oui M est bien la matrice d'une projection!

Projection sur quel sev? et parallèlement à quel sev?

$\Rightarrow$ Déterminons $\operatorname{Im} p$

On sait qu'un vecteur $u \in \operatorname{Im} p$ est tel que $p(u) = u$ (c'est un vecteur invariant)

Ce qui matriciellement s'écrit:

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4x-2y}{3} \\ \frac{2x-y}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}x - \frac{2y}{3} = x \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 3x \\ 2x - y = 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3x - 2y = 0 \\ 2x - 3y - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{1}{2}x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Donc $\operatorname{Im} p$ est la droite d'eq $y = \frac{1}{2}x$ ou encore $\operatorname{vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Déterminons $\ker p$

Soit $v\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker p$

alors $$M.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y \\ \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Donc $\ker p$ est donc la droite d'eq $y = 2x$, de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ En conclusion, la matrice M est la matrice de la projection vectorielle sur la droite d'eq $y = \frac{1}{2}x$ et parallèlement à la droite d'eq $y = 2x$

Exm pour $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ sa projection est $M\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & -2\\2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/3\\2/3\end{pmatrix}$

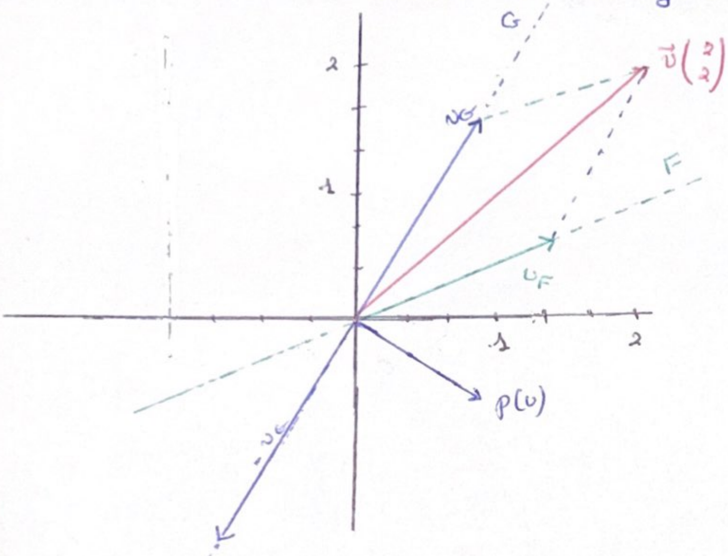
DEFENITION: Symétrie vectorielle

Soit F, G deux supplémentaires d'un e.v E

On appelle symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G l'endomorphisme:

$$s : \begin{cases} E = F \oplus G \longrightarrow E \\ v = v_F + v_G \longmapsto s(v) = v_F - v_G \end{cases}$$

EXEMPLE: ① Dans $\mathbb{R}^2 = F \oplus G$, où $F : x - 2y = 0$ et $G : 2x - y = 0$



② Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$

On peut alors considérer la symétrie par rapport au sev $\mathcal{P}$ des fonctions paires et parallèlement au sev $\mathcal{I}$ des fonctions impaires

$$e^x = \underset{\text{paire}}{ch(x)} + \underset{\text{impaire}}{sh(x)} \; ; \; \forall x \in \mathbb{R}$$

$s(\exp) = ch - sh$

PROPOSITION: Soit $E = F \oplus G$ et $s : \mathcal{L}(E)$ la symétrie vectorielle par rapport à F et parallèlement à G : alors $F = Ker(s - id_E)$ $\quad G = Ker(s + id_E)$

et $E = Ker(s - id_E) \oplus Ker(s + id_E)$

DEMONSTRATION: ⇒ Montrons que $F = Ker(s - id_E)$

Soit $u \in F$ alors sa décomposition sur $F \oplus G$ est $u = \underset{\in F}{u} + \underset{\in G}{\vec{0}_E}$

On a $s(u) = s(u + \vec{0}_E) = u - \vec{0}_E = u$

donc $s(u) = u \Rightarrow s(u) - u = \vec{0}_E \Rightarrow (s - id_E)(u) = \vec{0}_E \Rightarrow u \in Ker(s - id_E)$

donc $F \subset Ker(s - id_E)$

⇒ inclusion réciproque

Soit $u \in Ker(s - id_E)$ alors $(s - id_E)(u) = \vec{0}_E \Rightarrow s(u) - id_E(u) = \vec{0}_E \Rightarrow s(u) = u$

donc $u_G = \vec{0}_E$ et que $u_F = u$, c-à-d $u \in F$ d'où $Ker(s - id_E) \subset F$

et par double inclusion $F = Ker(s - id_E)$

⇒ Montrons que $G = Ker(s + id_E)$

Soit $u = u_F + u_G \in E$ alors $u \in Ker(s + id_E)$

$u \in \ker(s + id_E) \iff (s + id_E)(u) = \vec{0}$

$\iff s(u) + u = \vec{0}$

$\iff s(u) = -u$

$\iff u_F - \cancel{u_G} = -(u_F + \cancel{u_G})$

$\iff 2u_F = \vec{0}$

$\iff u_F = \vec{0}$

$\iff u \in G$

PROPRIETE CARACTERISTIQUE DES SYMETRIES : $s \in \mathcal{L}(E)$ alors s est une symétrie vectorielle ssi $s \circ s = id_E$

DEMONSTRATION: ($\Rightarrow$) Supposons que s soit une symétrie vectorielle et notons F le sev par rapport auquel se fait la symétrie et G le sev direction.

Alors $\forall u = u_F + u_G \in E$ on a $s \circ s(u) = s(s(u_F + u_G)) = s(\underbrace{u_F}_{\in F} - \underbrace{u_G}_{\in G}) = u_F - (-u_G) = u_F + u_G = u$

donc $s \circ s = id_E$.

($\Leftarrow$) admise (cette année).

EXEMPLE: On reprend l'exemple précédent de symétrie s de $\mathbb{R}^2$ par rapport $F: x - 2y = 0$ et parallèlement à $G: 2x - y = 0$.

La matrice de s dans la base canonique est $S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ et on vérifie aisément que $S^2 = I_2$

$$S.S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 25-16 & -20+20 \\ 20-20 & -16+25 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

On peut calculer l'image par s de vecteur $u\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ de l'exemple précédent:

$$S\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$$ ce qui correspond bien au résultat obtenu graphiquement.