



Contrôle Terminal 1

25 mai 2021 - 14h-16h

Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électro-niques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.

La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.

Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.

Exercice 1. On considère les trois vecteurs de \mathbb{R}^3 :

$$u = (-1, 0, 1), \quad v = (2, 1, 0) \quad \text{et} \quad w = (3, 2, 1).$$

On note $F = \text{vect}\{u, v, w\}$.

1. Rappeler la définition de $\text{vect}\{f_1, \dots, f_p\}$ pour une famille (f_1, \dots, f_p) de vecteurs de \mathbb{R}^3 à p -éléments.
2. La famille (u, v, w) est-elle libre ou liée ? Justifier.
3. Rappeler la définition du *rang* d'une famille de vecteurs de \mathbb{R}^3 . Quel est le rang de la famille (u, v, w) ?
4. Donner une famille génératrice de F .
5. Donner une base de F . En déduire la dimension de F .
6. **En utilisant la notion de déterminant**, trouver trois réels a, b, c tels que

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

7. Pour $n \geq 2$ entier, décrire explicitement les sous-espaces vectoriel de \mathbb{R}^n de dimension exactement $n - 1$. Comment sont-ils appelés ?
8. Quel théorème permet de justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}^3$ tel que (u, v, a) soit une base de \mathbb{R}^3 ? Déterminer explicitement un tel vecteur a .
9. Rappeler la définition de *supplémentaire*. Déterminer un supplémentaire de F dans \mathbb{R}^3 .
10. On définit

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + z = 0\}.$$

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Déterminer une base de H . Quelle est la dimension de H ?

11. Déterminer une base de $F \cap H$. Quelle est sa dimension ?
12. Rappeler la définition de *somme directe*. Les sous-espaces vectoriels F et H sont-ils en somme directe ?
13. Déterminer la dimension de $F + H$.
14. A l'aide d'un résultat du cours comparer $F + H$ et \mathbb{R}^3 .

Exercice 2.

1. En utilisant l'algorithme de Gauss, déterminer le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la méthode de la matrice augmentée, inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. On s'intéresse au système linéaire d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

- (a) Ecrire la matrice augmentée du système linéaire (\mathcal{S}) .
- (b) Appliquer l'algorithme de Gauss sur cette matrice augmentée.
- (c) Résoudre le système linéaire (\mathcal{S}) .
- (d) Ecrire l'ensemble des solutions sous la forme $F + u$ avec F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 et $u \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) pour que M soit inversible.