

## Contrôle Terminal 1

25 mai 2021 - 14h-16h

*Les calculatrices, téléphones, tablettes, ordinateurs, montres connectées et tous appareils électroniques de communication ou de stockage, ainsi que les documents sont interdits.*

*La qualité de la rédaction est un facteur important d'appréciation des copies. Vous êtes donc invités à produire des raisonnements clairs, complets et concis.*

**Le sujet est constitué de 3 exercices indépendants.**

**Exercice 1.** On considère les trois vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  :

$$u = (-1, 0, 1), \quad v = (2, 1, 0) \quad \text{et} \quad w = (3, 2, 1).$$

On note  $F = \text{vect}\{u, v, w\}$ .

1. Rappeler la définition de  $\text{vect}\{f_1, \dots, f_p\}$  pour une famille  $(f_1, \dots, f_p)$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  à  $p$ -éléments.
2. La famille  $(u, v, w)$  est-elle libre ou liée ? Justifier.
3. Rappeler la définition du *rang* d'une famille de vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ . Quel est le rang de la famille  $(u, v, w)$  ?
4. Donner une famille génératrice de  $F$ .
5. Donner une base de  $F$ . En déduire la dimension de  $F$ .
6. **En utilisant la notion de déterminant**, trouver trois réels  $a, b, c$  tels que

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

7. Pour  $n \geq 2$  entier, décrire explicitement les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$  de dimension exactement  $n - 1$ . Comment sont-ils appelés ?
8. Quel théorème permet de justifier l'existence de  $a \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(u, v, a)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$  ? Déterminer explicitement un tel vecteur  $a$ .
9. Rappeler la définition de *supplémentaire*. Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
10. On définit

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 2y + z = 0\}.$$

Montrer que  $H$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ . Déterminer une base de  $H$ . Quelle est la dimension de  $H$  ?

11. Déterminer une base de  $F \cap H$ . Quelle est sa dimension ?
12. Rappeler la définition de *somme directe*. Les sous-espaces vectoriels  $F$  et  $H$  sont-ils en somme directe ?
13. Déterminer la dimension de  $F + H$ .
14. A l'aide d'un résultat du cours comparer  $F + H$  et  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 2.**

1. En utilisant l'algorithme de Gauss, déterminer le rang de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant la méthode de la matrice augmentée, inverser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

3. On s'intéresse au système linéaire d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10 \end{cases}$$

- (a) Ecrire la matrice augmentée du système linéaire  $(\mathcal{S})$ .
- (b) Appliquer l'algorithme de Gauss sur cette matrice augmentée.
- (c) Résoudre le système linéaire  $(\mathcal{S})$ .
- (d) Ecrire l'ensemble des solutions sous la forme  $F + u$  avec  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et  $u \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 3.** Soient  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & a & b & 0 \\ a & a & 0 & b \\ c & 0 & a & a \\ 0 & c & a & a \end{pmatrix}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $(a, b, c)$  pour que  $M$  soit inversible.