Espaces et sous-espaces vectoriels

Exercice 1. Montrer, en utilisant la définition, que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ étant l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients réels, la loi interne $+$ est l'addition des matrices et la loi externe $\cdot$ le produit d'une matrice par un réel.

Exercice 2. Montrer, en utilisant la définition, que $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ étant celui des polynômes à coefficients réels.

Exercice 3. On considère $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathscr{F}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$e.v. des suites réelles.

Exercice 5. Les sous-ensembles suivants de l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1. Le sous-ensemble des fonctions positives.
2. Celui des fonctions majorées sur $]0;1[$.
3. Celui des fonctions bornées sur $]0;1[$.
4. Celui des fonctions polynômes.
5. Celui des fonctions polynômes de degré n auquel on adjoint le polynôme nul.
6. Celui des fonctions polynômes de degré au plus n (on convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$).

Exercice 6. Les sous-ensembles suivants sont-ils des s.e.v de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en préciser une base.

1. $F_1 = \{(x, y, z) : x = z\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) : x = 0 \text{ et } y = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x, y, z) : x = 0 \text{ ou } y = 0\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}$.
5. $F_1 \cup F_4$.
6. $F_1 + F_4$.

α **Exercice 7.** E désigne un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.

1. Soit E_1 et E_2 des s.e.v. de E. Montrer que $E_1 \cup E_2$ est un s.e.v. de E ssi $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$. *(Pour la condition nécessaire, raisonner par l'absurde.)*
2. Soit A et B des parties de E. Montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}\, A \cup \text{Vect}\, B$ ssi $A \subset \text{Vect}\, B$ ou $B \subset \text{Vect}\, A$. ×

α **Exercice 8.** Soit E un $\mathbb{K}-$e.v. et E_1, E_2, F_1, F_2 des s.e.v. de E.

1. À l'aide d'un contre-exemple, montrer qu'en général $E_1 \oplus E_2 = F_1 \oplus F_2 \nRightarrow E_1 = F_1$ et $E_2 = F_2$.
2. Si l'on ajoute $E_1 \subset F_1$ et $E_2 \subset F_2$ montrer que c'est alors le cas.

α **Exercice 9.** Montrer que le sous-espace des fonctions réelles paires et celui des fonctions réelles impaires sont supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 10.

1. $F_1, \cdots, F_n$ désignent des s.e.v. d'un $\mathbb{K}-$e.v. E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) L'application $\varphi : (x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \mapsto x_1 + \cdots + x_n$ est injective.
   (ii) $\forall (x_1, \cdots, x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n,\ x_1 + \cdots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$.
   (iii) $\forall i \in \{2, \cdots, n\},\ F_i \cap \left(\sum_{j=1}^{i-1} F_j \right) = \{0\}$.
   (iv) $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ F_i \cap \left(\sum_{j \neq i} F_j \right) = \{0\}$.

   On dit alors que la somme $\sum_{i=1}^{n} F_i$ est directe.
2. Si F_1, F_2, F_3 sont en somme directe deux à deux, la somme $F_1 + F_2 + F_3$ est-elle directe ? Réciproque ?
3. Soit E le $\mathbb{R}-$e.v. des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ et $F_1 = \{f \in E,\ f \text{ constante}\}$, $F_2 = \{f \in E,\ f \text{ nulle sur }]-\infty; 0]\}$ et $F_3 = \{f \in E,\ f \text{ nulle sur } [0; +\infty[\}$. Montrer que E est somme directe de F_1, F_2, F_3.

Familles de vecteurs

Exercice 11. Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ où $u_1 = (2, 3, -1)$, $u_2 = (1, -1, -2)$, $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$. Montrer que $F = G$.

Exercice 12.

1. Montrer que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $f_k : x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$ est libre *(on pourra faire une récurrence sur n, en commençant par dériver).*
2. Le $\mathbb{R}$−e.v. $\mathscr{C}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ est-il de dimension finie ?

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{K}$−e.v. et $\mathscr{F} = (u_1, \cdots, u_p)$ une famille de vecteurs de E.
Si tout vecteur de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$, la famille $\mathscr{F}$ est-elle liée ? Réciproque ?

Exercice 14. Dans $\mathbb{R}^3$, les familles suivantes sont-elles libres ? génératrices de $\mathbb{R}^3$? Dans chaque cas, préciser la dimension du s.e.v. engendré.

1. (u, v) où $u = (1, 3, -2)$ et $v = (2, 0, 1)$.
2. (u_1, u_2, u_3, u_4) où $u_1 = (1, 5, 6)$, $u_2 = (2, 3, 0)$, $u_3 = (3, 8, 6)$ et $u_4 = (1, 0, 0)$.
3. (u, v, w) où $u = (1, -2, -1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 0, 1)$.

Exercice 15. On reprend le sous-espace de l'exercice 5.6. Montrer que toute famille $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de polynômes telle que, pour tout k, degré $P_k = k$, est une base de cet espace.
(A connaître : en particulier, la famille des $P_k \mapsto x^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, dite ***base canonique*** *de cet espace.)*

Exercice 16. Si cela est possible, compléter (u_1, u_2) en une base de $\mathbb{R}^4$, où $u_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $u_2 = (0, -1, 0, 2)$. Préciser un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 17. E désigne un $\mathbb{K}$−e.v. de dimension n $(n \geqslant 2)$ et H_1, H_2 sont des hyperplans de E distincts. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{K}$−e.v., $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ des familles de vecteurs de E telles que $\mathrm{card}\,\mathscr{F}_1 = 3$ et $\mathrm{card}\,\mathscr{F}_2 = 6$.

1. Si $\mathscr{F}_1$ est une base de E, quelle est la dimension de E ?
2. Est-il possible que $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ soient toutes deux libres ? Et toutes deux génératrices de E ?
3. Si $\mathscr{F}_1$ et $\mathscr{F}_2$ sont génératrices de E (resp. toutes deux libres) a-t-on : $\dim E \leqslant 3$, $\dim E \geqslant 6$, $3 \leqslant \dim E \leqslant 6$?
4. Peut-on avoir $\mathscr{F}_1$ génératrice de E et $\mathscr{F}_2$ libre ? Et $\mathscr{F}_2$ génératrice de E avec $\mathscr{F}_1$ libre ?

dim génératrice et libre

Exercice 19. Soit F et G deux s.e.v. de dimension 3 dans $\mathbb{R}^5$. Peut-on avoir $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$?

Exercice 20. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, quelle est la dimension du sous-espace engendré par $x \xmapsto{f_1} \mathrm{e}^x \sin^2 x$, $x \xmapsto{f_2} \mathrm{e}^x \cos^2 x$, $x \xmapsto{f_3} \mathrm{e}^x \sin(2x)$ et $x \xmapsto{f_4} \mathrm{e}^x \cos(2x)$?

Applications linéaires

Exercice 21. Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et au moins deux fois dérivables en 0.

1. Montrer que $\mathscr{D}$ est un $\mathbb{R}$−espace vectoriel.
2. On considère l'application,

$$\Phi : \begin{cases} \mathscr{D} & \to \quad \mathbb{R}[X] \\ f & \mapsto \quad f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 \end{cases}$$

   (a) Montrer que Φ est une application linéaire.
   (b) Déterminer $\operatorname{Im}\Phi$ et préciser $\operatorname{rg}\Phi$.
   (c) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ puis montrer de deux façons différentes que Φ n'est pas injective.

Exercice 22. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'espace E des fonctions polynômes à coefficients réels et de degré au plus n. Soit $f : P \in E \mapsto Q$ où $Q : x \in \mathbb{R} \mapsto xP'(x)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer l'image de la base canonique de E par f.
3. f est-elle injective ? Est-elle une surjection sur E ? P.K $\dim(\mathbb{R}_n) = n+1$
4. Déterminer $\operatorname{Im} f$ et donner sa dimension. Donner une base de $\operatorname{Ker} f$.
??

Exercice 23. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ qui transforme la base canonique (e_1, e_2, e_3) en $f(e_1) = (-2, 1)$, $f(e_2) = (1, -2)$ et $f(e_3) = (1, 1)$. Si $u = (x, y, z)$ déterminer le couple $f(u)$. En déduire une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 24. Soit f l'application linéaire qui transforme $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ en $(x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et en préciser une base. Déterminer une base $\operatorname{Im} f$. Déterminer le rang de f et retrouver ainsi $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 25. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$. Comparer pour l'inclusion ensembliste :

1. $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ et $f^{-}(\operatorname{Ker} g)$.
2. $\operatorname{Im}(g \circ f)$ et $g(\operatorname{Im} f)$.

Exercice 26. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et E_1, E_2 des s.e.v. de E. Montrer que si f est injective et $E_1 + E_2$ directe alors $f(E_1) + f(E_2)$ est directe.

Exercice 27. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent (c-à-d qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$). Montrer que $g := \mathrm{id}_E - f$ est inversible (penser à la factorisation dans $\mathbb{R}^n$ de $1 - x^n$ par $1 - x$).

Exercice 28. Soit E un $\mathbb{K}$−e.v. et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} f$.
2. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

Puis que les proprités 3. et 4. sont équivalentes.

3. $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$. $\vec{0}$??
4. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. $g \circ g(\vec{0}) = g(\vec{0})$

Lorsque E est de dimension finie, montrer que les quatre propriétés précédentes sont équivalentes aux suivantes :

5. $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$.
6. $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 29. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$−e.v. de dimension n. Pour tout entier naturel p on pose $I_p = \operatorname{Im} f^p$ et $K_p = \operatorname{Ker} f^p$.

1. Montrer que les suites (I_p) et (K_p) sont monotones pour l'inclusion ensembliste.
2. Prouver que (I_p) est stationnaire et qu'il en est de même pour (K_p).
3. Soit r un entier à partir duquel les suites précédentes sont stationnaires. Montrer que $I_r \oplus K_r = E$.

Exercice 30. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini, sur la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, par $f(\vec{\imath}) = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$. projection vectorielle

$\mathrm{Im} f \Rightarrow x = y$?

Exercice 31. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini, sur la base canonique $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, par $f(\vec{\imath}) = \frac{5}{4}\vec{\imath} + \frac{3}{4}\vec{\jmath}$ et $f(\vec{\jmath}) = -\frac{3}{4}\vec{\imath} - \frac{5}{4}\vec{\jmath}$.

Exercice 32. Dans $\mathbb{R}^3$ on considère $F = \mathrm{Vect}(u)$ où $u = (1, 1, 1)$ et G le plan d'équation $2x + y - z = 0$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'expression analytique de la projection sur F parallèlement à G.

$$\begin{cases} x' = ax + by + cz \\ y' = a'x + b'y + c'z \\ z' = a''x + b''y + c''z \end{cases}$$

Calcul d'un déterminant

Règle 0 : « **Un déterminant est nul si l'une des colonnes (resp. lignes) est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).** » *(Cela inclus le cas où deux colonnes ou deux lignes sont identiques et celui où une colonne ou une ligne est nulle.)*

Exercice 33. Justifier simplement que ces déterminants sont nuls.

$$|A|| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Règle 1 : « **Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.** »

Exercice 34. Calculez les déterminants suivants.

$$|A|| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Règle 2 : « **Le signe d'un déterminant change lorsqu'on permute deux colonnes ou deux lignes.** »

Exercice 35. Calculer les déterminants suivants après s'être ramené à une forme triangulaire par permutation de lignes et de colonnes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

Réponses : $|A| = -48$, $|B| = -24$, $|C| = 12$.

Règle 3 : « **Lorsqu'on multiplie une colonne (ou une ligne) par un scalaire, le déterminant est également multiplié par ce nombre.** »

Exercice 36. Simplifier l'écriture du déterminant avant de le calculer.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 50 & 30 & 0 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -6 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} \sqrt{5} & 9\sqrt{5} & 0 & 3\sqrt{5} \\ \frac{2}{3} & 2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Réponses : $|A| = -400$, $|B| = -48$, $|C| = \frac{5}{3}$

Règle 4 : « **On ne change pas un déterminant si à une colonne (resp. une ligne) on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes).** »

Exercice 37. Calculer ces déterminants par la méthode de Gauss.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 9 \end{vmatrix} \qquad |D| = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & -9 \end{vmatrix}$$

Réponses : $|A| = 6$, $|B| = -35$, $|C| = -1$, $|D| = 0$.

Exercice 38. Calculer ces déterminants en développant suivant une ligne ou une colonne.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad |C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad |D| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|E| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad |F| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad |G| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad |H| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$|A| = 28$, $|B| = -19$, $|C| = 14$, $|D| = 2$, $|E| = 21$, $|F| = -2$, $|G| = -4$, $|H| = 84$.

Exercice 39. Calculer ces déterminants en développant suivant une ligne ou une colonne après y avoir fait apparaitre plusieurs 0.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 10 & 0 & -5 & 15 \\ -2 & 7 & 3 & 0 \\ 8 & 14 & 0 & 2 \\ 0 & -21 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Réponses : $|A| = -16$, $|B| = 96$, $|C| = -1$, $|D| = -12$, $|E| = 7\,840$.

Exercice 40. Calculer le déterminant suivant après s'être ramené à une matrice triangulaire.

$$\begin{vmatrix} a+1 & a & a \\ b & b+1 & b \\ c & c & c+1 \end{vmatrix}$$

Exercice 41. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant suivant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

Exercice 42. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$. Calculer le déterminant suivant,

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 43. Pour une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on note $A(x)$ la matrice de terme général est $a_{ij} + x$.

1. Montrer que $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynomiale de degré au plus 1.
2. Déduire de la question précédente l'expression du déterminant suivant, où a, b et les λ_i sont des réels.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{vmatrix}$$

Exercice 44. Calculer le déterminant suivant, où les a_i sont des réels.

$$V(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}$$

Matrice inverse – Matrices de passage

Exercice 45. Pour chacune des matrices suivantes déterminer, lorsqu'elle existe, la matrice inverse puis contrôler par une multiplication.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 46. Inverser les matrices suivantes par la méthode de Gauss-Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 47. Inverser les matrices suivantes par la formule des cofacteurs.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 48. Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que la matrice A ci-dessous est inversible et déterminer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ m & -m & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 49. Déterminer les valeurs de λ pour que la matrice A soit inversible puis déterminer A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 50. Donner l'écriture matricielle du système suivant puis le résoudre en inversant la matrice.

$$\begin{cases} x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y + z = 13 \\ 2x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

Exercice 51. Soit le système linéaire $A \cdot X = b$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système linéaire (S) en inversant la matrice A.
2. Résoudre cette fois en utilisant la méthode de Cramer.

Exercice 52. On considère la matrice

$$A_t = \begin{pmatrix} -1+t & 0 & 1+2t \\ 0 & 1+t & 1+t \\ 1+2t & -1+t & t \end{pmatrix}$$

1. Pour quelles valeurs de t le système linéaire $A_t \cdot X = b$ admet-il une unique solution ?
2. Déterminer alors les solutions de ce système dans le cas où $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Exercice 53. Pour A définie ci-dessous, calculer A^2 et en déduire une relation permettant d'obtenir simplement A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 54. Pour A définie ci-dessous, calculer A^3 et en déduire A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 55. Dans $\mathbb{R}^2$ on considère la base canonique $\mathscr{C} = (e_1, e_2)$ et la base $\mathscr{B} = (e'_1, e'_2)$ où $e'_1 = 3e_1 - e_2$ et $e'_2 = e_1 + e_2$.

1. Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{B}$ puis celle de $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{C}$.
2. Déterminer les coordonnées, dans $\mathscr{B}$, du vecteur $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathscr{C}}$.

On considère maintenant l'endomorphisme f défini par $f(e_1) = -2e_1 + e_2$ et $f(e_2) = e_1 + 3e_2$.

3. Donner la matrice de f dans la base $\mathscr{C}$.
4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 56. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$. On note $\mathscr{B}_2 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}_3 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$. On pose $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $\varepsilon'_1 = \varepsilon_1$, $\varepsilon'_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et $\varepsilon'_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

1. Donner la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$.
2. Vérifier que $\mathscr{B}'_2 := (e'_1, e'_2)$ et $\mathscr{B}'_3 := (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \varepsilon'_3)$ sont respectivement des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de passage de $\mathscr{B}_2$ à $\mathscr{B}'_2$, puis celle de passage de $\mathscr{B}_3$ à $\mathscr{B}'_3$ et enfin la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}'_2$ et $\mathscr{B}'_3$.

Exercice 57. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on pose $E_\lambda := \{u \in E : f(u) = \lambda u\}$. Montrer qu'il s'agit d'un s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ (on proposera plusieurs démonstrations). Déterminer une base $\mathscr{B}_1$ de E_1 et une base $\mathscr{B}_2$ de E_2.
2. (a) E_1 et E_2 sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$?
   (b) Donner la matrice M' de f dans la base $\mathscr{B}' := \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ de $\mathbb{R}^2$.
   (c) Exprimer M' en fonction de M et de matrices de passage que l'on explicitera.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -15 & 10 & 8 \\ -8 & 6 & 4 \\ -24 & 15 & 13 \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $A^2 - 3A + 2\mathrm{I}_3 = 0$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2,\ A^n = a_n A + b_n \mathrm{I}_3$.
   (c) Exprimer a_n et b_n en fonction de n.

Exercice 58. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par $f(e_1) = 2e_2 + 3e_3$, $f(e_2) = 2e_1 - 5e_2 - 8e_3$, $f(e_3) = -e_1 + 4e_2 + 6e_3$.

1. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$ et le rang de f.
2. On pose $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$ et $G = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})$.
   (a) Déterminer une base (u_1) de F.
   (b) Déterminer la dimension de G. Montrer que G est stable par f et pour tout $u \in G \setminus \{0\}$, $(u, f(u))$ est une base de G.
   (c) Déterminer une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. Calculer $(M')^n$ en fonction de l'entier naturel n et en déduire comment calculer M^n.

Exercice 59. On se propose de déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la projection p sur la droite engendrée par le vecteur non nul $u = (\alpha, \beta, \gamma)$, parallèlement au plan H d'équation $ax + by + cz = 0$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'$ une base de $\mathbb{R}^3$ de premier vecteur u complétée en utilisant une base de H (pourquoi est-ce possible ?). On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, M la matrice de p dans $\mathscr{B}$ et M' sa matrice dans $\mathscr{B}'$.

1. Donner M' et en déduire PM'.
2. Vérifier que $(a, b, c)P = (\alpha a + \beta b + \gamma c)(1\ 0\ 0)$ et en déduire la 1$^{\text{re}}$ ligne de P^{-1}.
3. Déterminer M.