Département de Mathématiques
Base d'Analyse
L1 Maths, L1 Nobel et L2 Info

TD1 - Nombres réels

Exercice 1 : Montrer les inégalités suivantes.

1. $\forall x \in]0,+\infty[,\ x+\frac{1}{x} \geq 2.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right).$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx.$

Exercice 2 : Soient a et x deux nombres réels. Supposons que a est non nul et que l'on a $|x-a| < |a|$. Montrer que x est non nul et que x est de même signe que a.

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $|x+1| < 0.1$;
2. $|x-2| > 10$;
3. $|x| < |x+1|$;
4. $|2x-1| < |x-1|$;
5. $||x+3|-1| \leq 2$;
6. $\frac{x-1}{x+2} \geq 3$;
7. $\sqrt{x-3}-\sqrt{2x+1} \leq 4$;
8. $\sqrt{x^2-2x+3} \leq x-1.$

Exercice 4 : Calculer la valeur de :

1. $\sum_{i=1}^{n} 2.$
2. $\prod_{i=1}^{n} 3.$
3. $\sum_{k=1}^{n}(2a_{k+1}-3a_k+a_{k-1}).$
4. $\sum_{k=1}^{n} k.$
5. En remarquant que $(k+1)^2-k^2=2k+1$, montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2.$
6. Montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3-\sum_{k=0}^{n}k^3=3\sum_{k=0}^{n}k^2+\frac{(n+1)(3n+2)}{2}.$$
En déduire $\sum_{k=0}^{n} k^2.$

Exercice 5 : Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}5^k\binom{n}{k}; \qquad \sum_{k=0}^{n-1}(-3)^k\binom{n}{k}; \qquad \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}.$$

Exercice 6 : Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes :

$$\prod_{k=1}^{n} k^2 \qquad \prod_{k=3}^{n-1} k \qquad \prod_{k=2}^{n}(2k+1)$$

Exercice 7 : Calculer les produits suivants :

$$\prod_{k=0}^{n} 3^k \qquad \prod_{k=0}^{n} e^{-k} \qquad \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{k+2}$$

Exercice 8 : Trouver sous la forme $\frac{p}{q}$ des rationnels x dont les développements décimaux périodiques sont donnés par :

$$3.\overline{14} = 3.1414\ldots; \qquad 0.\overline{9}; \qquad 3.14\overline{9}.$$

Exercice 9 :

1. Montrer que $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est irrationnel.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 10 : Soit

$$I = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \ : \ -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \right\}.$$

Montrer que I est la réunion de deux intervalles.

Exercice 11 : On note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x.

1. Monter que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$$

2. Calculer $E(x) + E(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right)$.