Base d'Analyse

Nom : Hassan Maatouk

Email: hassan.maatouk@univ-perp.fr

Bureau: Bâtiment B - 2ème étage

Intervenants: O. Coquand (L1 Nobel) et H. Maatouk (L1-L2 Maths/Info)
Évaluation: max (CT, 30% CC + 70% CT), CC et CT sont obligatoires
CC: 19 Novembre 2025 (13h30 - 15h30)

Plan I

1. Nombres réels
   - L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
   - Propriétés de $\mathbb{R}$
     - Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$
     - Intervalles de $\mathbb{R}$
     - Valeur absolue
     - Puissances et racines carrées

Table of Contents I

1. Nombres réels
   - L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
   - Propriétés de $\mathbb{R}$
     - Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$
     - Intervalles de $\mathbb{R}$
     - Valeur absolue
     - Puissances et racines carrées

Table of Contents I

1. Nombres réels
   - L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
   - Propriétés de $\mathbb{R}$
     - Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$
     - Intervalles de $\mathbb{R}$
     - Valeur absolue
     - Puissances et racines carrées

Définition 1 (Espace des entiers)

- *Entiers naturels :*
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$
- *Entiers relatifs :*
$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}.$$

Introduisons aussi

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\};$$
$$\mathbb{Z}^* = \{\cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots\}.$$

L'ensemble $\mathbb{Z}$ a le gros défaut suivant : seuls $n = 1$ et $n = -1$ admettent un inverse, c'est-à-dire un élément $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$nm = 1.$$

Nous remédions à ce problème en introduisant l'ensemble des nombres rationnels.

Définition 2 (Espace de nombres rationnels)

*L'ensemble des **nombres rationnels** est*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \;:\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{Z}^* \right\},$$

avec des opérations $+$ et $\times$ définis par

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \quad \textit{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Exemple :

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Définition 2 (Espace de nombres rationnels)

*L'ensemble des **nombres rationnels** est*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{Z}^* \right\},$$

avec des opérations $+$ et $\times$ définis par

$$\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + p'q}{qq'} \quad \textit{et} \quad \frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}.$$

Exemple : Un important exemple de nombre rationnel, sont les *nombres décimaux*, c'est-à-dire les nombres de la forme

$$\frac{p}{10^n}, \ p \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}.$$

On peut choisir comme exemple :

- $1.375 = 1375 \times 10^{-3} = \frac{1375}{1000}$
- $0.1375 = 1375 \times 10^{-4} = \frac{1375}{10000}$
- $0.001375 = 1375 \times 10^{-6} = \frac{1375}{1000000}$

En d'autre termes, un nombre est décimal s'il admet une écriture décimale finie. Le résultat suivant donne une caractérisation des nombres rationnels.

Proposition 1

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Exemple :

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

En d'autre termes, un nombre est décimal s'il admet une écriture décimale finie. Le résultat suivant donne une caractérisation des nombres rationnels.

Proposition 1

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Exemple :

$$\frac{4}{5} = 0.8; \qquad \frac{1}{9} = 0.1111\cdots = 0.\overline{1}; \qquad 3.1414\cdots = 3.\overline{14}.$$

Nous n'allons pas démontrer la Proposition, mais voyons comment le sens ($\Longleftarrow$) marche sur un exemple : **Montrons que $x = 3.\overline{14}$ est rationnel.**

Idée de la preuve

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

En d'autre termes, un nombre est décimal s'il admet une écriture décimale finie. Le résultat suivant donne une caractérisation des nombres rationnels.

Proposition 1

Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique ou finie.

Exemple :

$$\frac{4}{5} = 0.8; \qquad \frac{1}{9} = 0.1111\cdots = 0.\overline{1}; \qquad 3.1414\cdots = 3.\overline{14}.$$

Nous n'allons pas démontrer la Proposition, mais voyons comment le sens ($\Longleftarrow$) marche sur un exemple : **Montrons que $x = 3.\overline{14}$ est rationnel.**

Idée de la preuve

L'idée est d'abord de faire apparaître la partie périodique juste après la virgule. Soit $x = 3.\overline{14}$. Alors $100x = 314.\overline{14}$. Par soustraction, on obtient

$$99x = 311 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{311}{99}.$$

Remarque : on peut aussi utiliser la somme d'une suite géométrique !

Définition 3 (Nombres irrartionnels)

Nous notons par $\mathbb{R}$ *l'ensemble des nombres réels. L'ensemble de nombres irrationnels* $\mathbb{I}$ *est défini par*

$$\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Exemple :

Définition 3 (Nombres irrartionnels)

Nous notons par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. L'ensemble de nombres irrationnels $\mathbb{I}$ est défini par

$$\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Exemple : Les nombres suivants sont irrationnels :

- $\sqrt{2} = 1.4142\cdots$, (démonstration en TD).
- $\pi = 3.14159265\cdots$.
- $e = 2.718\cdots$.

Ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

Les différents ensembles introduis jusqu'à maintenant, sont liés par les contentions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

- $\mathbb{Q}^*$ désigne l'ensemble $\mathbb{Q}$ privé de 0.
- $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ privé de 0.
- $\mathbb{R}_+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}_+^*$ désigne l'ensemble des réels strictement positifs, et $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

Nombres réels

Passons maintenant à une étude plus détaillée de $\mathbb{R}$. Plus précisément nous allons définir une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Ça nous permettra de :

- introduire le concept d'intervalle ;
- définir la valeur absolue ;
- définir la fonction partie entière ;
- étudier le comportement de certaines fonctions par rapport aux inégalités.

Table of Contents I

1 Nombres réels
- L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$
- Propriétés de $\mathbb{R}$
  - Relation d'ordre dans $\mathbb{R}$
  - Intervalles de $\mathbb{R}$
  - Valeur absolue
  - Puissances et racines carrées

On commence par introduire une relation d'ordre.

Définition 4 (Relation de comparaison)

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ défini comme suit : pour toute couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on définit :

$$x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$$
$$x < y \iff (x \leq y \text{ et } x \neq y) \text{ ou } (y - x \in \mathbb{R}_+^*).$$

*L'ordre $\leq$ est une **relation d'ordre (total)**, c'est à dire qu'elle possède les propriétés suivantes :*

- ***Réflexivité*** *: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.*
- ***Antisymétrie*** *: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, ($x \leq y$ et $y \leq x$) $\Longrightarrow x = y$.*
- ***Transitivité*** *: $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ($x \leq y$ et $y \leq z$) $\Longrightarrow x \leq z$.*
- ***Elle est totale*** *: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

Étudions la compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition et la multiplication.

Proposition 2

Soient a, b, c et d des nombres réels.

- ***Somme*** *:*
  - *On a $a \leq b$ si et seulement si $a + c \leq b + c$.*
  - *Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.*
- ***Produit :***
  - *Pour tout $c < 0$, $a \leq b$ si et seulement si $ac \geq bc$.*
  - *Pour tout $c > 0$, $a \leq b$ si et seulement si $ac \leq bc$.*
  - *Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $ac \leq bd$.*
- ***Passage à l'inverse :*** *Si $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ ou $a, b \in \mathbb{R}_-^*$ tels que $a \leq b$, alors*

$$\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}.$$

Remarque :

- **Majorer** une fraction de réels positifs, c'est **majorer** son numérateur et **minorer** son dénominateur.
- **Minorer** une fraction de réels positifs, c'est **minorer** son numérateur et **majorer** son dénominateur.

Exemple : Soit $x \in [1, 2]$. On souhaite encadrer grossièrement le réel

$$\frac{2x+1}{3x^2+4}$$

par un calcul simple.
Réponse :

Remarque :

- **Majorer** une fraction de réels positifs, c'est **majorer** son numérateur et **minorer** son dénominateur.
- **Minorer** une fraction de réels positifs, c'est **minorer** son numérateur et **majorer** son dénominateur.

Exemple : Soit $x \in [1, 2]$. On souhaite encadrer grossièrement le réel

$$\frac{2x+1}{3x^2+4}$$

par un calcul simple.
Réponse : La fraction est bien définie ($3x^2 + 4 > 0$ pour tout $x \in [1, 2]$).

- Comme $1 \leq x \leq 2$ on obtient $2 \leq 2x \leq 4$ d'où $3 \leq 2x + 1 \leq 5$.
- Comme $1 \leq x \leq 2$ on obtient $1 \leq x^2 \leq 4$, puis $3 \leq 3x^2 \leq 12$ d'où $7 \leq 3x^2 + 4 \leq 16$. Ainsi, $\frac{1}{16} \leq \frac{1}{3x^2+4} \leq \frac{1}{7}$.

Par multiplication, nous obtenons :

$$\frac{3}{16} \leq \frac{2x+1}{3x^2+4} \leq \frac{5}{7}, \quad \forall x \in [1, 2].$$

Intervalles de $\mathbb{R}$

Maintenant qu'on a défini une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, rappelons le concept d'intervalle.

Définition 5 (Intervalle)

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$\forall a, b \in I,\ \forall x \in \mathbb{R} \quad (a \leq x \leq b \ \Rightarrow\ x \in I)\,.$$

Remarque

- Par définition $I = \varnothing$ est un intervalle.
- $I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle.

Définition 6 (Intervalle ouvert)

Un intervalle ouvert est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ de la forme $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}\ :\ a < x < b\}$, où a et b sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Même si cela semble évident il faut justifier qu'un intervalle ouvert est un intervalle. En effet soient a', b' des éléments de $]a, b[$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $a' \leq x \leq b'$. Alors, on a $a < a' \leq x \leq b' < b$, donc $x \in]a, b[$.

Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 7 (Intervalle semi-ouvert)

- ***Intervalle semi-ouvert à droite :***

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$
$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < +\infty\}$$

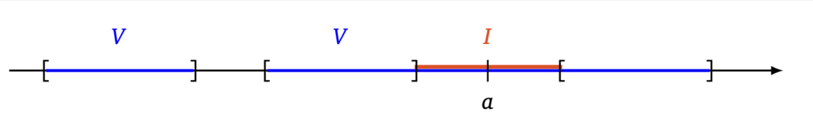
- ***Intervalle semi-ouvert à gauche :***

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$
$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : -\infty < x \leq b\}$$

La notion de voisinage sera utile pour les limites.

Définition 8 (Voisinage)

Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un voisinage de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.



Valeur Absolue

Passons maintenant à la valeur absolue.

Définition 9 (Valeur absolue)

Soit $x \in \mathbb{R}$. La ***valeur absolue*** *de x est le nombre réel noté $|x|$ défini par :*

$$|x| := \begin{cases} -x, & \text{si } x \leq 0, \\ x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ce réel est positif ou nul, et nul seulement si $x = 0$. De plus, $|x| = \max\{x, -x\}$.

Remarque : La définition même de $|\cdot|$ nous indique comment prouver que

$$|x| \leq a, \quad a \geq 0.$$

Il faut montrer que $(x \leq a$ et $x \geq 0)$ ou $(-x \leq a$ et $x \leq 0)$, c'est-à-dire qu'il nous faut montrer

$$-a \leq x \leq a.$$

Cette astuce utile est à retenir : une inégalité impliquant une valeur absolue se démontre en prouvant deux inégalités.

Valeur Absolue

Proposition 3 (Valeur absolue)

Soient a un réel quelconque et r un réel strictement positif. Alors :

- $|x-a| \leq r$ *est équivalent à* $x \in [a-r, a+r]$. *C'est-à-dire*

$$|x-a| \leq r \quad \textit{si et seulement si} \quad a-r \leq x \leq a+r.$$

- $|x-a| \geq r$ *est équivalent à* $x \in]-\infty, a-r]$ *ou* $x \in [a+r, +\infty[$. *C'est-à-dire*

$$|x-a| \geq r \quad \textit{si et seulement si} \quad x \leq a-r \quad \textit{ou} \quad a+r \leq x.$$

Remarque :

- Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalites strictes et les intervalles fermés par des intervalles ouverts.
- **Interprétation géométrique :** La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0. Si a et x sont deux réels, $|x-a|$ est la distance de a à x. Si $r \geq 0$, l'inégalité $|x-a| \leq r$ signifie que x est à une distance de a inférieure ou égale à r.

Valeur Absolue

Étudions l'effet de la valeur absolue sur une somme ou un produit.

Proposition 4 (Propriétés de la valeur absolue)

Pour tous réels x, y, on a

1. $|x| = 0$ *alors* $x = 0$.
2. $|xy| = |x||y|$.
3. ***Inégalité triangulaire*** *:*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$
$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

Démonstration de la proposition.

Démonstration de la proposition.

1. Puisque $|x| = 0$, nous avons $|x| \leq 0$ et $|x| \geq 0$. Tout d'abord,
   - $|x| \geq 0$ implique que $x \in \mathbb{R}$.
   - $|x| \leq 0$ implique que $(x \leq 0$ et $x \geq 0)$ ou $(-x \leq 0$ et $x \leq 0)$. Ceci implique que $x = 0$.

   Ainsi, $x = 0$.
2. Traitons différents cas selon les signes de x et y.
   - Si $x, y > 0$, nous obtenons $x = |x|$ et $y = |y|$ et l'égalité est claire.
   - Si $x, y < 0$, nous obtenons $|x| = -x$ et $|y| = -y$ et l'égalité est également claire.
   - Les cas $x > 0$ et $y < 0$ ou $x < 0$ et $y > 0$ suivent aussi facilement.

$\square$

Valeur Absolue

Suite de la démonstration de la proposition.

Suite de la démonstration de la proposition.

3.
- Commençons par la première inégalité. Les inégalités $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$ impliquent
$$x + y \leq |x| + |y|.$$
De même, $-x \leq |x|$ et $-y \leq |y|$ impliquent
$$-(x + y) \leq |x| + |y| \iff (x + y) \geq -(|x| + |y|).$$
Ainsi, $|x + y| \leq |x| + |y|$.
- Pour la deuxième inégalité, appliquons la première inégalité triangulaire
$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|.$$
Donc, $|x| - |y| \leq |x - y|$. Par la symétrie du rôle de x et y, on a
$$|y| - |x| \leq |x - y|.$$
Finalement, on obtient
$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

□

Puissances et racines carrées

Définition 10 (Puissance)

Soient $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

- *On appelle* x ***puissance*** n *le nombre* x^n *défini par*

$$x^n = \underbrace{x \times x \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \quad \text{avec} \quad x^0 = 1 \ (\text{par convention}).$$

- *Si* $x \neq 0$, *on appelle* x ***puissance*** *-*n *le nombre* x^{-n} *défini par*

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \cdots \times \frac{1}{x}}_{n \text{ fois}}.$$

On a les règles de calcul suivants : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ *et* $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} x^{n+m} &= x^n x^m \\ x^{nm} &= (x^n)^m \\ (xy)^n &= x^n y^n. \end{aligned}$$

Ces formules sont encore vraies si m *ou* n *est négatif à condition que* x *et* y *soient non nuls.*

Puissances et racines carrées

Définition 11 (Racine carrées)

Soit $x \geq 0$*. Il existe un et un seul réel* $r \geq 0$ *pour lequel*

$$x = r^2.$$

r *est appelé la* ***racine carrée*** *de* x *et on le note* $\sqrt{x}$*. On a les règles de calcul suivantes : pour tout* $x, y \geq 0$

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$$
$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Étudions le comportement des racines carrées par rapport aux égalités.

Proposition 5 (Racines carrées et égalités)

Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$*,* $x, y \in \mathbb{R}$*, on a* $ax = ay \iff x = y$*. De plus, pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$ *:*

$$a^2 = b^2 \iff a = b \text{ ou } a = -b \iff |a| = |b|.$$

Pour tout $a \geq 0$*, on a*

$$x = \sqrt{a} \iff x^2 = a \text{ et } x \geq 0.$$