Chapitre I

Bases de mécanique quantique

Sommaire

Introduction

Pourquoi parler de mécanique quantique ?
La mécanique quantique utilise des principes qui seront utilisés dans les champs d'applications ou les méthodes qualifiées de quantique.

Dans cette leçon, nous allons voir :
- ce qui caractérise la mécanique quantique par rapport à la mécanique classique.

- les postulats de la mécanique quantique.
- les conséquences des mesures (incertitude, réduction)
- le théorème de Bell, et en quoi il montre que la mécanique quantique est très différente d'une théorie probabiliste.

1 Approche quantique

La mécanique quantique est la branche de la physique qui décrit la façon dont se comportent les objets microscopiques (molécules, atomes, particules).

La physique quantique nous offre une vue du monde où :

(a). **La perte de certitude :** le monde est envahi par l'aléa. Il est inévitable, et il n'est pas possible de s'en débarrasser.

L'observation peut modifier le sujet observé d'une façon aléatoire incontrôlable.

(b). Un système physique se comporte comme s'il faisait des choses mutuellement exclusives simultanément.

Exemple : un électron lancé vers un obstacle avec des trous se comporte comme s'il passait à travers plusieurs trous en même temps.

(c). Des systèmes physiques séparés par de grande distance peuvent se comporter comme s'ils étaient liés, et sont corrélés d'une façon qui défie les lois des probabilités et les règles de la relativité générale.

Cette vue du monde ne satisfaisait pas Einstein, avec ses fameuses expressions "God does not play dice with the universe" ou "spooky action at a distance". Pourtant, tous ces aspects ont été testés et prouvés par des expériences physiques.

Pour une bouteille pleine d'air, il y a environ 10^{26} particules se déplaçant rapidement dans la bouteille, entrant en collision les unes avec les autres, et avec la bouteille elle-même. Nous savons que nous ne pouvons pas espérer mesurer les positions et les vitesses de toutes les particules de gaz de l'objet à un instant donné.

De manière identique, il est impossible de prédire la trajectoire d'un grain de pollen dans un liquide. La marche aléatoire (ou mouvement Brownien) du pollen est due aux collisions avec les molécules du liquide.

D'après la théorie classique, l'information qui permettrait de calculer cette trajectoire est là, mais on ne peut pas y accéder. Donc, le phénomène apparaît comme aléatoire, non par nature, mais par manque d'information.

L'utilisation de méthodes statistiques est un moyen de tenir compte de situations impliquant l'ignorance de l'information complète.

Donc, dans la vision du monde classique, si je connais à un instant donné la position et la vitesse de toutes les particules de l'univers, je serais en mesure de calculer la totalité de l'histoire future de l'univers (= tout est prédéterminé).

Cette vision (= déterminisme Laplacien) pose des problèmes philosophiques, en particulier, sur la prise de décision ou le libre arbitre.

La vue classique du monde fonctionne bien au niveau macroscopique (base de l'ingénierie moderne), mais de nombreux phénomènes ne peuvent pas être compris avec l'approche classique (couleur d'un objet chauffé, existence des objets solides, ...).

Les phénomènes non classiques sont le plus souvent observés sur des systèmes microscopiques (atomes, molécules) mais sont présents à toutes les échelles.

En général, les vibrations thermiques des objets suffisent à masquer ou à détruire les effets quantiques. C'est la raison pour laquelle ils ne sont pas en général pas visibles aux échelles plus grandes que celle de la molécule.

Les comportements qui ne peuvent pas être expliqués par la physique classique sont :

- l'imprévisibilité intrinsèque des systèmes,
- les phénomènes d'interférence,
- l'intrication

1.1 L'imprévisibilité intrinsèque

Par imprévisibilité intrinsèque, on entend qu'il est impossible de préparer un système physique de tel manière à ce que tous ses attributs physiques sont précisément spécifiés au même moment.

Il est impossible de fixer à la fois la position et le moment d'une particule (connu sous le nom de principe d'incertitude d'Einsenberg).

EXEMPLE: incertitude

Si on enferme une particule dans une petite boite (= donne une idée précise de sa position) et que l'on mesure sa vitesse, alors celle-ci varie de manière aléatoire d'une mesure à l'autre.

Pour une boite de 1μ, la variation de vitesse est de $\pm 50ms^{-1}$. Plus la boite est petite, plus la variation est importante.

Tout raffinement de l'expérience montre que cet aléa ne peut pas être retiré.

Donc, il existe des restrictions naturelles qui limitent la quantité d'information qui peuvent être collectés sur n'importe quel système physique.

1.2 L'intrication

En mécanique classique, le mouvement d'un corps a deux composantes : son mouvement extrinsèque (= son déplacement) et son mouvement intrinsèque (=sa rotation sur lui même).

Deux quantités cinétiques y sont associés : la quantité de mouvement ($m.v$) pour le déplacement, et le moment cinétique angulaire propre (vecteur représentant l'axe de rotation, de longueur proportionnelle à la vitesse angulaire).

Pour une particule, le spin est le moment cinétique angulaire de la particule, et ses valeurs sont quantifiées comme des multiples entiers ou demi-entiers de la constante de Planck $\hbar$. Les orientations des spins sont également quantifiés ($2s + 1$ orientations où s est le spin).

Exemple : l'électron a un spin de $1/2$, et $2.\frac{1}{2} + 1 = 2$ orientations.

Il est possible de construire des paires de particules de manière couplée, en faisant en sorte que leurs spins soient opposés (i.e. tel que le moment angulaire total est 0). Une telle paire est dite intriquée.

Pour une paire intriquée, on ne connait pas que est le spin de chaque particule. On sait juste qu'ils sont opposés.

Ce type de construction permet d'obtenir des corrélations plus grandes que ce qu'il serait possible d'obtenir avec la physique classique.

Cette intrication peut être testée expérimentalement (inégalité de Bell), et l'on peut démontrer qu'il est impossible de construire un système classique (y compris avec des variables cachées) permettant d'obtenir ces résultats.

Des particules intriquées semblent communiquer de manière instantanée (i.e. plus rapidement que la vitesse de la lumière). Le système physique ne semble acquérir certaines de ses propriétés qu'au moment où il est observé.

1.3 Interférence

Les systèmes physiques microscopiques peuvent se comporter comme si ils faisaient de choses mutuellement exclusives en même temps.

Exemple: expérience des deux fentes (fentes de Young)

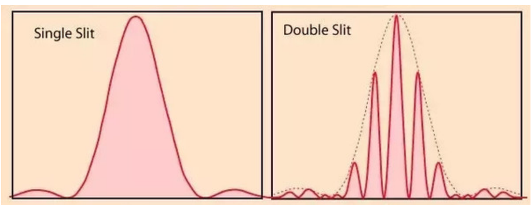
Un canon à électron tire sur un écran qui comporte des fentes, derrière lequel se trouve un écran d'observation.

Si l'écran n'a qu'une seule fente :

- si la fente est large, alors on observe aussi un motif de fente sur l'écran : les électrons se comportent comme des particules.
- si la fente est étroite, alors on observe un motif de diffraction : les électrons se comportent comme une onde.

Si l'écran a deux fentes :

- si les fentes sont larges, alors on observe deux motifs de fente sur l'écran (une par fentes).
- si les fentes sont étroites, alors on observe un motif d'interférences sur l'écran.



Si l'on bloque l'une des deux fentes, alors on observe un motif de diffraction.

Or, le motif d'interférence n'est pas la superposition des deux motifs de diffractions : certaines zones éclairées par les électrons deviennent sombres, et vice-versa.

On en déduit que les électrons envoyés passent par les deux fentes à la fois.

Essayons maintenant de comprendre l'expérience précédente en utilisant des détecteurs pour savoir dans quel fente passe chaque électron :

- avec un détecteur est placé devant chacune des fentes.
  On obtient la superposition des deux motifs de diffraction (un par fente).
- avec un détecteur est placé devant une seule des fentes.
  On obtient aussi la superpositions des deux motifs de diffraction.

Comment expliquer ce phénomène ?

- lorsque les deux détecteurs sont en place, on ne détecte le passage de chaque électron que dans une seule des deux fentes.
  conclusion : les détecteurs forcent l'électron à "choisir" la fente dans laquelle il passe.
- lorsqu'un seul des deux détecteurs est en place, si l'électron envoyé n'est pas détecté, c'est qu'il est passé par la fente sans détecteur.
  conclusion : un seul détecteur force aussi l'électron à "choisir" la fente.

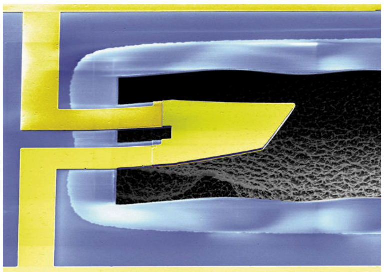
Autrement dit, l'électron passe par les deux fentes à la fois (il est dans une superposition d'état), sauf lorsqu'on essaye d'observer ce qui est en train de se passer.

En conséquence, l'observation d'une particule change aussi son état.

Ce phénomène peut également s'interpréter en terme de fonction d'onde, et fait ressortir le principe d'incertitude :

- l'amplitude de la fonction d'onde représente l'importance de la probabilité de l'électron à cette position.
- lorsque l'électron se déplace vers l'écran, sa direction est connue mais on ne sait rien de sa position.
- lorsque l'électron passe la fente (ou est détecté par le détecteur), cela force sa localisation, et en conséquence sa direction devient inconnue (c'est la raison de la diffraction).
- si l'électron avait une position spécifique avant d'arriver aux fentes, alors il ne serait pas en mesure de passer les deux fentes en même temps, ce qui est nécessaire pour observer le motif d'interférence.
- mieux, s'il existe une particule située derrière l'une des deux fentes, alors, comme l'électron passe dans les deux fentes, elle est touchée **ET** n'est pas touchée par l'électron. Elle se trouve dans les deux états en même temps (état superposé) et y restera tant que la position de l'électron n'aura pas été observé (et ainsi savoir dans quelle fente il est passé, et s'il a touché la particule).

1.4 Résonnateur quantique



A. Cleland (UCSB) a construit la première machine quantique macroscopique (30μm = taille d'un cheveux) de la manière suivante :

- il s'agit d'une petite lame mécanique qui vibre lorsqu'on l'excite pour une certaine gamme de fréquence (oscillateur),
- la lame est ensuite connectée à un circuit électrique superconducteur qui obéit aux règles de la mécanique quantique,
- le système est refroidit à 0.1 K, ce qui place la lame dans son plus petit état d'énergie (= état fondamental).
- quand le circuit quantique est utilisé afin de donner à la lame une poussée, et on observe qu'elle vibre avec une énergie spécifique.
- puis le circuit quantique est placé dans un état superposé ("pousser" et "ne pas pousser"). Il a pu être vérifié par des mesures que la lame vibrait ET ne vibrait pas en même temps (superposition de ces deux états).
  A savoir, une partie des mesures de vibration de la lame montrait que la lame ne vibrait pas, et l'autre qu'elle vibrait comme le prévoit la mécanique quantique pour les états superposés.

2 Postulats de la mécanique quantique

2.1 Premier postulat

Rappel : un postulat est un principe non démontré utilisé dans le cadre de la construction d'une théorie mathématique.

Postulat 1 (Premier postulat :)**.** A chaque instant, l'état d'un système quantique peut être décrit par un vecteur d'état (ou une fonction d'onde) dans un espace de Hilbert.

Traduction :

- un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.
  ici, un espace vectoriel complexe de dimension finie muni du produit scalaire hermitien.
- produit scalaire Hermitien : si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$, alors $u.v = \sum_i u_i.v_i^*$ où $*$ est l'opérateur de conjugué complexe.

En physique quantique, on utilise la notation de Dirac pour représenter les vecteurs d'état.

Important : Les vecteurs d'état sont toujours normalisés (leurs longueurs est 1).

a) Notation de Dirac

Notations de Dirac :

- un vecteur d'état u dans un espace d'état $\mathbb{C}^n$ se note $|u\rangle$. Ce n'est rien d'autre qu'un vecteur colonne complexe de dimension n.
  A savoir, $|u\rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.
- on note également $\langle u| = |u\rangle^\dagger$ où $\dagger$ est l'opérateur de transposition et conjugaison.
  A savoir, $\langle u| = [\, u_1^* \cdots u_n^* \,]$.
- avec ces notations, le produit scalaire entre deux états $|u\rangle$ et $|v\rangle$ se note $\langle u|v\rangle$.
  A savoir $\langle u|v\rangle = [\, u_1^* \cdots u_n^* \,].\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n u_i^*.v_i$.
  Noter que $\langle u|v\rangle^* = \langle v|u\rangle$.
- $|u\rangle$ s'appelle un ket. $\langle u|$ s'appelle un bra. $\langle v|u\rangle$ s'appelle un braket.

Les conséquences de ce premier postulat sont multiples.

Première conséquence : la superposition d'état

Un état peut être construit comme la superposition de plusieurs états.

Soit $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1\dots n}$ un ensemble de vecteurs orthonormés qui engendrent l'espace $\mathbb{C}^n$ (donc, une base). Par propriété de cette base, les $|\psi_i\rangle$ sont des vecteurs d'état permettent donc d'écrire un état quelconques $|\psi\rangle$ sous la forme $|\psi\rangle = \sum_i a_i\, |\psi_i\rangle$ où les a_i sont des nombres complexes.

L'amplitude $|a_i|^2$ représente la probabilité pour l'état $|\psi\rangle$ d'être dans l'état $|\psi_i\rangle$.

Alternativement, tout état peut être construit comme la superposition d'états issues d'une base. Par superposition, on entend qu'un état quantique peut être dans plusieurs états différents **à la fois**.

Définition 1 (état pur et état mixte)**.**

- Un **état pur** est un système quantique décrit par un vecteur d'état $|\psi\rangle$ de longueur 1.
- Un **état mixte** est un état construit comme une superposition d'états purs (mélange probabilistes d'états purs) et qui ne peut être réécrit sous forme d'un état pur. Cette notion sera abordée dans un chapitre ultérieur.

Exercice 1: Etats quantiques

Pour chacun des états suivants, si une mesure est effectuée, quelle est la probabilité de trouver l'état dans l'état $|0\rangle$? Même question pour l'état $|1\rangle$.

a. $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$
b. $|\phi\rangle = \frac{i}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$
c. $|\chi\rangle = \frac{1+i}{\sqrt{3}}|0\rangle - \frac{2}{\sqrt{3}}|1\rangle$

Exercice 2: bra et ket

Soit les deux états de $\mathbb{C}^3$ suivant : $|a\rangle = \begin{bmatrix} -2 \\ 4i \\ 1 \end{bmatrix}$ et $|b\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}$.

a. calculer $\langle a|$ et $\langle b|$.
b. calculer $\langle a|b\rangle$ et $\langle b|a\rangle$.
c. calculer $|c\rangle = |a\rangle + 2.|c\rangle$, puis $\langle c|a\rangle$.

Exercice 3: Normes

Calculer la norme des états suivants : $|u\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 4i \end{bmatrix}$ et $|v\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 3i \\ i \end{bmatrix}$.

Exercice 4: Norme et base

On suppose que $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ est une base orthonormale dans un espace de Hilbert à trois dimension. Un système est dans l'état suivant :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}|u_1\rangle - i\sqrt{\frac{7}{15}}|u_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|u_3\rangle$$

a. Cet état est-il normalisé ?
b. Si une mesure est effectuée, trouver la probabilité de trouver le système dans chacun des états $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$.

Deuxième conséquence : espace d'états composites.

Les espaces d'état de systèmes quantiques peuvent être composés.

Soit ξ_a (resp. ξ_b) un espace d'état quantique de dimension n (resp. m) engendré par les vecteurs d'état $\left\{|u_i^a\rangle\right\}_{i=1\ldots n}$ (resp. $\left\{|u_i^b\rangle\right\}_{j=1\ldots m}$).

Un vecteur d'état dans chacun des systèmes peut s'écrire respectivement $|A\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i |u_i^a\rangle$ et $|B\rangle = \sum_{j=1}^{m} b_i |u_i^b\rangle$.

L'espace composite ξ est obtenu par le produit tensoriel des espaces ξ_a et ξ_b (à savoir, $\xi = \xi_a \otimes \xi_b$).

Une base engendrant ξ peut être obtenue par le produit tensoriel des bases $\left\{|u_i^a\rangle\right\}_{i=1\ldots n}$ et $\left\{|u_i^b\rangle\right\}_{i=1\ldots m}$.

L'espace résultant a pour dimension $n \times m$.

La composition $|C\rangle$ de deux états $|A\rangle$ et $|B\rangle$ issus de chacun de ces systèmes s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
|C\rangle &= |A\rangle \otimes |B\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \, |u_i^a\rangle \otimes \sum_{j=1}^{m} b_j \, |u_j^b\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j (|u_i^a\rangle \otimes |u_j^b\rangle) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j \, |u_i^a u_j^b\rangle
\end{aligned}$$

où $|u_i^a u_j^b\rangle$ est juste une notation compacte pour $|u_i^a\rangle \otimes |u_j^b\rangle$.

Cela signifie que des états quantiques différents peuvent être assemblés et composés afin de former des états quantiques étendus et considérablement plus riches.

On appelle base canonique à n dimensions, la base constitué des états $(|i\rangle)_{i=0\ldots n-1}$ où $|i\rangle$ est le vecteur canonique associé au $(i+1)^{\text{ème}}$ axe de la base canonique (= 0 partout sauf à la coordonnée $i+1$).

Sans précision, on choisit généralement $n = 2$, avec $|0\rangle = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ et $|1\rangle = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$.

Exercice 5: Produit tensoriel de deux espaces avec la même base

Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$, deux espaces de Hilbert définis tous les deux avec la base canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

a. Donner la base de l'espace composé $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.
b. Soit $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ deux vecteurs respectivements de $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Décrire le vecteur $|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle$ sur $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Exercice 6: Produit tensoriel de deux espaces avec des bases différentes

Soit l'état $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ avec pour vecteurs de base $\{|x\rangle, |y\rangle\}$, tel que : $|\phi\rangle = a_x |x\rangle + a_y |y\rangle$.
Soit l'état $|\chi\rangle \in \mathcal{H}_2$ avec pour vecteurs de base $\{|u\rangle, |v\rangle\}$, tel que : $|\chi\rangle = b_u |u\rangle + b_v |v\rangle$.
Ecrire l'état $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$.

Exercice 7: Produit tensoriel des bases $\{|+\rangle, |-\rangle\}$

Utiliser la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ pour construire une base de $\mathbb{C}$, et vérifier que la base obtenue est orthonormée, où l'on a noté $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ et $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

Exercice 8: Produit scalaire sur des espaces composés

Sachant que $\langle a|b\rangle = 4$ et $\langle c|d\rangle = 7$, calculer $\langle\psi|\phi\rangle$ avec $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |c\rangle$ et $|\phi\rangle = |b\rangle \otimes |d\rangle$.

Exercice 9: Produit tensoriel d'état

Soit $|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle)$. Peut-il être écrit comme le produit tensoriel de deux états ?

Exercice 10: Produit tensoriel de deux vecteurs

Calculer le produit tensoriel de $|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ et de $|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Rappel sur les opérateurs

Définition 2 (Opérateur sur un espace de Hilbert)**.** Un opérateur $\hat{A}$ est une application linéaire de l'espace de Hilbert dans lui même.

Notes :
- Le chapeau sur le $\hat{A}$ n'a pas d'autre sens que préciser que le symbole est un opérateur.
- Les états quantiques étant des vecteurs, les opérateurs sont des matrices carrées.

Définition 3 (Adjoint)**.** L'adjoint (noté †) est obtenu en prenant la transposée et le conjuguée.

L'adjoint d'une expression quelconque s'obtient s'effectue en :
- prenant l'adjoint des opérateurs (exemple : $(\hat{A})^\dagger = \hat{A}^\dagger$)
- inversant l'ordre des produits d'opérateurs (exemple : $(\hat{A}.\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$)
- remplaçant les bras par des kets, les kets par des bras (exemples : $(\hat{A}|\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi|\hat{A}^\dagger$, $(\langle\psi|\hat{A})^\dagger = \hat{A}^\dagger|\psi\rangle$, $(\langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle)^\dagger = \langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle$),
- prenant le conjugué de toutes les constantes (exemple : $(\alpha.A)^\dagger = \alpha^*\hat{A}^\dagger$).

Définition 4 (Vecteur propre et valeur propre)**.** Un vecteur d'état $|\psi\rangle$ est un vecteur propre d'un opérateur $\hat{A}$ s'il existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\hat{A}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$. On dit que λ est la valeur propre associé au vecteur propre.

Pour trouver les valeurs propres, on résout l'équation caractéristique.

Définition 5 (équation caractéristique)**.** L'équation caractéristique pour un opérateur $\hat{A}$ est l'équation $\det|A - \lambda.I| = 0$ où A est la forme matricielle de $\hat{A}$, λ est l'inconnue, I l'identité, et det le déterminant.

Les racines λ_i de cette équation sont les valeurs propres. Pour les vecteurs propres v_i associés, ils sont classiquement obtenus en résolvant $(A - \lambda_i.I).v_i = 0$ (inconnues = coordonnées de v_i). On notera que les vecteurs v_i sont définis à une constante multiplicative près.

Mais en mécanique quantique, il est requis que les états V_i (donc les vecteurs associés) soient normalisés (donc que $V_iV_i^* = 1$). V_i sera donc le v_i tel que $v_iv_i^* = 1$.

Définition 6 (Opérateur hermitien)**.** Un opérateur $\hat{A}$ est hermitien si pour tout état $|X\rangle$ et $|Y\rangle$ on a $\langle \hat{A}X|Y\rangle = \langle X|\hat{A}Y\rangle$.

Remarques :

- cette propriété équivalente à $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$, à savoir que la matrice $\left\{A_{ij}\right\}$ représentant l'opérateur est telle que les éléments de sa diagonale A_{ii} sont réels, et $A_{ij} = A^*_{ji}$ pour les autres (les éléments symétriques sont conjugués).

Définition 7 (Opérateur unitaire)**.** Un opérateur $\hat{U}$ est unitaire si son adjoint est son inverse, donc si $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$.

Remarques : un opérateur unitaire

- conserve la norme ($|\hat{U}\,|X\rangle\,| = |\,|X\rangle\,|$) et le produit scalaire ($\langle \hat{U}X|\hat{U}Y\rangle = \langle X|Y\rangle$).
- transforme une base orthonormée en une autre base orthonormées (= rotations + miroirs).

Définition 8 (Opérateur normal)**.** Un opérateur $\hat{A}$ est normal si $\hat{A}\hat{A}^\dagger = \hat{A}^\dagger\hat{A}$.

Note : Les opérateurs Hermitien et unitaire sont normaux.

Propriété 1 (Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur Hermitien)**.** *Pour un opérateur Hermitien,*

- *les valeurs propres sont réelles ($\forall i, \lambda_i \in \mathbb{R}$).*
- *les vecteurs propres forment une base orthonormale ($\langle \psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{i,j}$)*

Propriété 2 (Valeurs et vecteurs propres d'un opérateur unitaire)**.** *Pour un opérateur unitaire,*

- *les valeurs propres sont des complexes de module 1 ($\forall i, \lambda_i.\lambda_i^* = 1$).*
- *les vecteurs propres sont orthogonaux pour toutes les valeurs propres non dégénérées (= plusieurs fois la même valeur propre, donc même vecteur propre).*

Théorème 3 (décomposition spectrale d'un opérateur Hermitien)**.** *Un opérateur $\hat{A}$ peut se décomposer sous la forme $A = \sum_i \lambda_i\,|V_i\rangle\,\langle V_i|$ où $\{\lambda_i\}$ sont les valeurs propres et $\{V_i\}$ les vecteurs propres associées.*

2.2 Second postulat

Une quantité physique mesurable est appelé un observable.

Postulat 2 (Second postulat)**.** Tout attribut observable sur un système physique est décrit par un opérateur hermitien qui agit sur les kets qui décrivent le système, et tel que :

- les états propres de l'opérateur engendrent l'espace (forment un base complète),
- les valeurs propres de l'opérateur représentent les valeurs de l'observable.

Remarque 1 :

la position, le moment, l'énergie du système sont des exemples de quantités physiques mesurables (= des observables).

Exercice 11: Opérateur sous forme quantique

Soit l'opérateur $\hat{A} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$.

a. Décrire l'effet de cet opérateur sur un état arbitraire $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.
b. Ecrire cet opérateur sous forme matricielle.
c. Conclure.

Exercice 12: Réprésentation d'un état dans une base

Soit $\{|u_i\rangle\}_{i=1...n}$ une base orthonormale d'un espace de Hilbert de dimension n.

a. Exprimer l'opérateur $\hat{I}_n$ à partir des vecteurs de cette base.
b. Soit $|\psi\rangle$ un état quelconque dans cet espace de Hilbert. Exprimer $|\psi\rangle$ dans la base $\{|u_i\rangle\}_{i=1...n}$ (on évaluera $|\psi\rangle = \hat{I}_n|\psi\rangle$).
c. Que représente $\langle u_i|\psi\rangle$?
d. Réinterpréter le résultat de la deuxième question en fonction de la précédente.
e. Rappeler le nom classique des opérations quantiques $\langle\phi|\psi\rangle$ et $|\phi\rangle\langle\psi|$

Exercice 13: Représentation d'un opérateur dans une base

Soit $\{|u_i\rangle\}_{i=1...n}$ une base orthonormale d'un espace de Hilbert de dimension n.

a. On se place dans un premier temps dans la base canonique $\{|e_i\rangle\}_{i=1...n}$, et un opérateur $\hat{A}$ quelconque.
   1) Que représente $\langle u_i|\hat{A}$?
   2) Que représente $\hat{A}|u_j\rangle$?
   3) Que représente $\langle u_i|u_j\rangle$?
   4) Que représente $\langle u_i|A|u_j\rangle$?
   5) Evaluer $\hat{A} = \hat{I}_n\hat{A}\hat{I}_n$.
b. On suppose maintenant que l'on se trouve dans une base $(|u_i\rangle)$ quelconque. Soit $|\psi\rangle = \sum_{i=k}^{n} a_k|u_k\rangle$ un état quelconque dans cette base.
   1) Soit $\hat{I}_{i,j} = |u_i\rangle\langle u_j|$. En quoi est-ce un opérateur ?
   2) Quel est le résultat de $\hat{I}_{i,i}|u_j\rangle$ en fonction des différentes valeurs de i et j ?
   3) Soit $\hat{I} = \sum_{i=1...n}\hat{I}_{i,i}$. Montrer que cet opérateur est l'identité sur l'état $|\psi\rangle$.
   4) Soit $\hat{A} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}|u_i\rangle\langle u_j|$. En quoi est-ce un opérateur ?
   5) Calculer $\hat{A}|u_p\rangle$.
   6) Calculer $\langle u_q|\hat{A}$.
   7) Calculer $\langle u_p|A|u_q\rangle$
   8) Qu'en déduit-on sur $|u_i\rangle\langle u_j|$?

Exercice 14: Produit dyadique

Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ une base orthonormale dans un espace de Hilbert à trois dimension. Soient $|\psi\rangle = a|u_1\rangle + b|u_2\rangle + c|u_3\rangle$ et $|\phi\rangle = e|u_1\rangle + f|u_2\rangle + g|u_3\rangle$.
Calculer le produit dyadique $|\psi\rangle\langle\phi|$.

EXERCICE 15: Opérateurs de Pauli

Dans la base canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, les opérateurs de Pauli sont :
$\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\hat{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

a. En utilisant les notations matricielles, trouver les actions de ces opérateurs sur les états canoniques.
b. Ecrire la représentation quantique des opérateurs de Pauli.
c. En utilisant les notations quantiques, trouver les actions des opérateurs de Pauli sur les états canoniques.

EXERCICE 16: Produit tensoriel d'opérateurs

a. Supposons que $|\psi\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle$ et $\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$, $\hat{B}|b\rangle = b|b\rangle$. Calculer $\hat{A} \otimes \hat{B}|\psi\rangle$.
b. Soient $\hat{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\hat{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calculer $\hat{X} \otimes \hat{Z}|\psi\rangle$ où $|\psi\rangle = \frac{|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}}$.
c. Suppose que $\hat{A} = |0\rangle\langle 0|$ est un opérateur de projection dans $\mathcal{H}_1$ et $\hat{B} = |1\rangle\langle 1|$ est un opérateur de projection dans $\mathcal{H}_2$. Calculer $\hat{A} \otimes \hat{B}|\psi\rangle$ où $|\psi\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$.
d. Soit $|\psi\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$. Décrire l'action de l'opérateur $\hat{X} \otimes \hat{I}$ sur cet état.

EXERCICE 17: Produit tensoriel de matrice

Trouver le produit tensoriel des matrices de Pauli $\hat{X}$ et $\hat{Z}$.

2.3 Troisième postulat

Postulat 3 (Troisième postulat :)**.** Le seul résultat possible d'une mesure par un observable $\hat{A}$ est l'une des valeurs propres et l'un des états propre de l'opérateur $\hat{A}$.

A savoir,

- soit le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ contenant l'état du système avant que la mesure soit faite,
- soit l'observable $\hat{A}$ avec l'ensemble des valeurs propres $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ et l'ensemble des vecteurs propres associés $\{|\phi_1\rangle, \ldots, |\phi_n\rangle\}$ qui engendrent l'espace.
- l'action de l'opérateur $\hat{A}$ sur un vecteur d'état $|\Psi\rangle$ est $A|\Psi\rangle = \lambda_k |\phi_k\rangle$ où k est l'indice de l'état propre observé (= effondrement sur un état propre).
- l'action de l'opérateur $\hat{A}$ sur un vecteur propre $|\phi_j\rangle$ est $A|\phi_j\rangle = \lambda_j |\phi_j\rangle$ (= sauf si l'état courant est déjà un état propre).

En conséquence, ce postulat nous dit que :

- l'état initial avant la mesure n'est pas nécessairement un état propre de l'opérateur,
- le résultat de la mesure est une valeur propre de l'opérateur,
- l'état final de la mesure est un état propre de l'opérateur,
- le résultat λ_j est la projection de $|\Psi\rangle$ sur la valeur propre $|\phi_j\rangle$.

Autrement dit, la mesure effondre l'état initial du système sur un état propre de l'opérateur, sauf si l'état initial est déjà un vecteur propre.

Donc, après la mesure, l'état initial du système n'est plus accessible à l'observateur. En général, une mesure change l'état initial du système.

Le quatrième postulat nous indique comment on obtient l'état propre sur lequel l'état s'effondre.

Exercice 18: Valeurs et états propres d'un opérateur

On appelle une porte $\pi/8$ l'opérateur qui a la représentation matricielle suivante :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$$

a. Calculer les valeurs propres de l'opérateur $\hat{T}$.
b. Calculer les états propres associées (pensez que ces états doivent être normalisés).
c. Vérifier que les états propres vérifient bien les propriétés attendues.
d. L'opérateur $\hat{T}$ est-il hermitien ?
e. Si oui, quelles sont alors les propriétés que devraient vérifier ses valeurs et ses états propres ?
f. L'opérateur $\hat{T}$ est-il unitaire ?
g. Si oui, quelles sont alors les propriétés que devraient vérifier ses valeurs et ses états propres ?
h. Que dit le théorème de décomposition spectrale ?
i. Vérifier que l'opérateur $\hat{T}$ s'y conforme.

Exercice 19: Théorème de décomposition spectrale

Soit l'opérateur :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par le calcul, on obtient ses valeurs propres sont $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, et ses états propres :

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{bmatrix}, \quad |u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{bmatrix}, \quad |u_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

a. Montrer que $\hat{T}$ vérifie le théorème de décomposation spectrale.
b. Vérifier que les vecteurs propres sont orthogonaux.
c. Quelle est l'expression de l'opérateur $\hat{T}$ dans la base de ses vecteurs propres ?
d. Vérifier que la somme des valeurs propres est égale à la trace de l'opérateur.
e. Pourquoi cette propriété est-elle toujours vrai ?

2.4 Quatrième postulat

Postulat 4 (Quatrième postulat :)**.** Quand la mesure d'un observable $\hat{A}$ est faite sur un vecteur d'état générique $|\psi\rangle$, alors la probabilité P_k d'obtenir une valeur propre λ_k est donnée en prenant le carré du produit scalaire de $|\psi\rangle$ avec l'état propre $|\phi_k\rangle$ (à savoir $P_k = |\langle\phi_k|\psi\rangle|^2$).

Remarques :

- les états ψ sont supposés être normalisés à savoir $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.
- si $\{|\psi_i\rangle\}_{i=1\ldots n}$ est une base qui engendre l'espace, alors $\langle\psi_j|\psi_k\rangle = \delta_{j,k}$ (où $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et 0 sinon).
- le nombre complexe $|\langle\phi_k|\psi\rangle|$ est appelé l'amplitude (ou amplitude de probabilité), et représente la mesure par l'observable A que $|\psi\rangle$ se trouve dans l'état $|\phi_k\rangle$.
- Noter que $P_k = |\langle\phi_k|\psi\rangle|^2 = \langle\phi_k|\psi\rangle^* \langle\phi_k|\psi\rangle = \langle\psi|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle$ où $\hat{P}_k = |\phi_k\rangle\langle\phi_k|$ est un projecteur sur ϕ_k.

a) Projecteur

Définition 9 (Opérateur de projection)**.** Un opérateur projection $\hat{P}$ est une application linéaire idempotente, à savoir $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

Remarques :

- idempotence : la projection de quelque chose déjà projeté ne fait rien de plus.
- caractérisation : c'est opérateur Hermitien idempotent.
- noter qu'un projecteur $\hat{P}$ sur l'état $|\psi\rangle$ est $\hat{P} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Définition 10 (Opérateur orthogonaux de projection)**.** Deux opérateurs de projection $\hat{P}_1$ et $\hat{P}_2$ sont orthogonaux si $\hat{P}_1\hat{P}_2 = \hat{P}_2\hat{P}_1 = 0$.

Proposition 4 (ensemble complet d'opérateurs de projection)**.** *Dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, un ensemble complet d'opérateur de projection $\left\{\hat{P}_i\right\}_{i=1\ldots m}$ (avec $m \leq \dim\mathcal{H}$) est tel que $\sum_{i=1}^{m} \hat{P}_i = \hat{I}$.*

A savoir, l'ensemble des projecteurs récupèrent la totalité de l'information initiale.

Proposition 5 (Somme de projections)**.** *Un ensemble complet d'opérateurs de projection est un opérateur de projection si et seulement si et seulement si les opérateurs de projection qui le composent sont mutuellement orthogonaux.*

On considère maintenant un opérateur de projection $\hat{P}$ construit comme un ensemble complet d'opérateurs de projection $\left\{\hat{P}_1, \ldots, \hat{P}_m\right\}$, et un système quantique dans l'état $|psi\rangle$. Alors, la probabilité $\Pr[i]$ d'être sur le sous-espace associé à $\hat{P}_i$ est :

$$\Pr[i] = |\hat{P}_i|\psi\rangle|^2 = (\hat{P}_i|\psi\rangle)^\dagger(\hat{P}_i|\psi\rangle) = \langle\psi|\hat{P}_i^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle$$

Soit un observable $\hat{A}$. D'après le théorème de décomposition spectral, comme $\hat{A}$ est un opérateur Hermitien, si on note $\{\lambda_i, |u_i\rangle\}_{i=1\ldots n}$ l'ensemble des couples de valeurs et états propres de $\hat{A}$, alors :

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |u_i\rangle\langle u_i| = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{P}_i$$

où $\hat{P}_i = |u_i\rangle \langle u_i|$ est le projecteur sur l'état propre $|u_i\rangle$.

Comme $\hat{A}$ est un opérateur Hermitien, l'ensemble des états propres $\{|u_i\rangle\}_{i=1...n}$ forment une base orthogonale, et en conséquence, pour tout état $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i|\psi\rangle |u_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i |u_i\rangle$$

où $c_i = \langle u_i|\psi\rangle$ est la projection de $|\psi\rangle$ sur $|u_i\rangle$, mais également l'amplitude de probabilité d'obtenir la valeur λ_i lorsque le système est dans l'état $|\psi\rangle$. La probabilité de cette mesure est donnée par son module au carré :

$$\mathrm{Pr}_\psi[i] = |\langle u_i|\psi\rangle|^2$$

Si la valeur propre est dégénérée (à savoir, elle est multiple), alors la probabilité est trouvée en effectuant la somme sur tous les vecteurs propres ayant cette valeur propre :

$$\mathrm{Pr}_\psi[i] = \sum_{j/\lambda_j=\lambda_i} |\langle u_j|\psi\rangle|^2$$

L'opérateur effectuant une projection, celle-ci conduit en général à une perte d'information.

En pratique, on dit qu'il y a réduction du paquet d'onde :

- à savoir, l'état quantique original est réduit (projeté = effondré sur le sous-espace sur lequel il est projeté).
- $|\psi\rangle = c_i |u_i\rangle$ est un état superposé, donc la projection $\hat{P}_i$ réduira à l'état à $|u_i\rangle$ avec une probabilité $\mathrm{Pr}_\psi[i]$ et à 0 sinon (car $|\psi\rangle$ est dans le sous-espace orthogonal à $|u_i\rangle$).
- il se produit donc une modification irréversible de l'état.

Attention : si le vecteur $|\psi\rangle$ est normalisé, alors il est évident que sa projection $\langle u_i|\psi\rangle |u_i\rangle$ ne l'est plus.

En conséquence, après un opérateur $\hat{P}_i$ observable (i.e. une mesure), l'état doit être renormalisé de la manière suivante :

$$|\psi'\rangle = \frac{\hat{P}_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle}}$$

où l'on avait vu que $Pr[i] = \langle\psi|\hat{P}_i|\psi\rangle$. Ainsi, l'état $|\psi'\rangle$ observé est bien renormalisé, ce qui permet d'assurer que son l'amplitude de probabilité est bien 1.

Exercice 20: Projecteur

a. Écrire les projecteurs $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$ qui projettent respectivement sur les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ dans la base canonique. On vérifiera la complétude de $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$.
b. En utilisant $\hat{P}_0$ et $\hat{P}_1$, déterminer les probabilités de trouver $|0\rangle$ et de trouver $|1\rangle$ lorsqu'une mesure de l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$ est effectuée.
c. Écrire les projecteurs $\hat{P}_+$ et $\hat{P}_-$ qui projettent respectivement sur les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ dans la base canonique.
On vérifiera la complétude de $\hat{P}_+$ et $\hat{P}_-$ où l'on rappelle que $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Exercice 21: Mesure projective et valeurs propres

Soit $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle$.
Une mesure est faite relativement à $\hat{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ est effectuée.
Sachant que ses valeurs propres sont $\{\lambda_1, \lambda_2\} = \{+1, -1\}$ et les vecteurs propres $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right\}$, déterminer la probabilités que le résultat de la mesure est $+1$. Même question sur le résultat de la mesure est -1.

Exercice 22: Mesure d'un système composite

Décrire l'action de l'opérateur $\hat{P}_0 \otimes \hat{I}$ et $\hat{I} \otimes \hat{P}_0$ sur l'état $|\psi\rangle = (|01\rangle - |10\rangle)/\sqrt{2}$.

Exercice 23: Probabilité d'une mesure

Un système est dans un état : $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{8}}|00\rangle + \sqrt{\frac{3}{8}}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$.

a. Quel est la probabilité que la mesure trouve le système dans l'état $\phi = |01\rangle$?
b. Quel est la probabilité que la mesure trouve le système dans l'état $|0\rangle$ sur le premier qubit ? Quelle est la probabilité de l'état du système après la mesure ?

Exercice 24: Probabilité d'une mesure partielle

Un système à trois qubits est dans l'état :

$$|\psi\rangle = \left(\frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{20}}\right)|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|001\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|011\rangle + \frac{i}{2}|111\rangle$$

a. Cet état est-il normalisé ? Quelle est la probabilité que le système soit trouvé dans l'état $|000\rangle$ si les 3 qubits sont mesurés ?
b. Quelle est la probabilité que la mesure du premier qubit donne $|0\rangle$? Quelle est alors l'état du système après la mesure ?

Exercice 25: Probabilité après une mesure

Soit le système $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|11\rangle$. Un opérateur $|Y\rangle = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right]$ est appliqué sur le premier qubit. Après que ceci ait été fait, quelles sont les résultats de mesure possibles si les deux qubits sont mesurés, et quelles sont les probabilités respectives de chacunes des mesures ?

2.5 Cinquième postulat

Postulat 5 (Cinquième postulat :)**.** Lorsqu'une série de mesure d'un observable A est effectuée sur un système quantique $|\Psi\rangle$. Alors le résultat espéré de cette suite de mesures est l'espérance mathématique (notée $\langle\hat{A}\rangle$). Elle s'écrit : $\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$.

Remarque :

si Ψ est un état quantique, A un observable dont les états propres sont $\left\{\lambda_j, |\phi_j\rangle\right\}_{j=1...n}$.

Par définition, on a : $\hat{A}|\phi_j\rangle = \lambda_j|\phi_j\rangle$ pour tout j.

On a $|\Psi\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j|\phi_j\rangle$ où $c_j = \langle\phi_j|\Psi\rangle$ est la projection de $|\Psi\rangle$ sur $|\phi_j\rangle$.

En conséquence,

$$\begin{aligned}\langle A\rangle &= \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,\hat{A}(\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j\,|\phi_j\rangle) = \langle\Psi|\,(\sum_{j=1}^{n} c_j\hat{A}\,|\phi_j\rangle)\\ &= \langle\Psi|\,(\textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j\,|\phi_j\rangle) = \sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j\,\langle\Psi|\phi_j\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j\lambda_j c_j^*\\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j|c_j|^2\end{aligned}$$

où $P_j = |c_j|^2 = \langle\Psi|\phi_i|\Psi\rangle$ est la probabilité que l'état $|\psi\rangle$ se projette sur l'état propre $|\phi_j\rangle$.

Exercice 26: Espérance d'un opérateur

Soit l'opérateur $\hat{X} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right]$.
Soit un système quantique dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle$.
Quel est l'espérance de la valeur de $\hat{X}$ pour cet état ?

Exercice 27: Espérance d'un opérateur (2)

L'effet d'un opérateur sur la base $\{|0\rangle\,, |1\rangle\,, |2\rangle\}$ est :

$$\hat{A}\,|0\rangle = |1\rangle\,,\quad \hat{A}\,|1\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2},\quad \hat{A}\,|2\rangle = 0$$

Calculer $\langle A\rangle$ pour l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\,|0\rangle - \frac{i}{2}\,|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|2\rangle$.

Exercice 28: Mesure projective et énergie moyenne

Soit un système dans l'état :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{19}}\Big(2\,|u_1\rangle + 2\,|u_2\rangle + |u_3\rangle + 2\,|u_4\rangle + \sqrt{6}\,|u_5\rangle\Big)$$

où $\{|u_i\rangle\}$ forme un base complete et orthonormée de vecteurs.
Par ailleurs, chaque $|u_i\rangle$ est un vecteur propre d'un système Hamiltonien correspondant aux résultats de mesure suivants : $\hat{H}\,|u_i\rangle = n\epsilon\,|u_i\rangle$, avec $i = \{1, \ldots, 5\}$.

a. Donner l'ensemble des opérateurs de projection correspondant aux résultats possibles des mesures.
b. Déterminer la probabilité d'obtenir chacun des résultats des mesures. On donnera l'état du système après la mesure si l'énergie mesurée est 3ϵ.
c. Quelle est l'énergie moyenne du système ? (à savoir, calculer $\langle H\rangle$)

Exercice 29: Espérance d'un observable

Un système est dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}}\,|1\rangle$. Une mesure est faite relativement à l'observable $\hat{X}$.
Quelle est l'espérance de l'observable ?
On donne les valeurs propres de $\hat{X}$: $|+_x\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ et $|-_x\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$.

2.6 Sixième postulat

Postulat 6 (Sixième postulat :)**.** L'évolution temporelle est décrite par $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)\,|\psi(t_0)\rangle$ où $|\psi(t)\rangle$ est l'état du système quantique à l'instant t, et $\hat{U}(t, t_0)$ un opérateur unitaire permettant de faire évoluer le système quantique de l'instant t_0 à l'instant t.

Remarques :
- l'opérateur unitaire permet la conservation de la norme de l'état quantique, et est associée à la conservation de la probabilité.
- cette écriture est une forme de l'équation de Schrödinger dans l'espace des état : $i\hbar\frac{d}{dt}\,|\psi(t)\rangle = H\,|\psi(t)\rangle$ où H est un opérateur Hamiltonien, et $\hat{U}(t) = e^{-iHt}$.
- noter que, puisque l'opérateur est unitaire, il est inversible. Les transformations d'état sont donc réversibles.

Exercice 30: Transformation unitaire

Soit $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, la base canonique et soit $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ la base où :

$$|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}, \qquad |-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$$

a. soit $|\psi\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle = a'\,|+\rangle + b'\,|-\rangle$ un état quantique exprimer dans les deux bases. En remarquant que $\hat{I} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| = |+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|$, calculer :
   1) $(|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -|)\,(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle)$
   2) $(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)\,(a'\,|+\rangle + b'\,|-\rangle)$

   et en déduire les matrices unitaires de changement de base entre $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ et $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ exprimé à partir de ces états.

b. Écrire $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

c. Écrire l'expression de l'opérateur $\hat{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{bmatrix}$ dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

2.7 Principe d'incertitude

a) Commutateur

Les commutateurs sont un moyen d'explorer la relation entre deux ensembles de mesures. Ils permettent de déterminer si oui ou non une suite d'opérations commutent, à savoir si l'ordre des opérations a une conséquence.

Définition 11 (Commutateur)**.** Soit deux opérateurs . Le commutateur entre deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ est défini par :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Remarques :
- si $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, alors $\hat{A}\hat{B} = \hat{B}\hat{A}$, les opérateurs commutent, l'ordre des opérations n'est pas important.
- inversement, si $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$, alors $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$, et l'ordre des opérations est important. On dit alors que les opérateurs sont incompatibles.

- Un commutateur est antisymétrique (*i.e.* $[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}]$) et linéaire (*i.e.* $[\hat{A}, \hat{B}+\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$).

b) Incertitude des mesures

Nous avons vu que l'espérance (ou moyenne) d'une opérateur $\hat{A}$ pour un état $|\psi\rangle$ était définie par $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$.

De la même façon, il est possible de définir des moments d'ordre plus élevé : $\langle\hat{A}^2\rangle = \langle\psi|A^2|\psi\rangle$ (moment d'ordre 2).

L'incertitude ΔA (écart-type en statistique) est une mesure statistique de la dispersion autour de la moyenne :

$$\Delta A = \sqrt{\langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2}$$

Pour deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$, on peut montrer que le produit de leurs incertitudes vérifie :

$$\Delta A.\Delta B \geq \tfrac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|$$

Cette inégalité est connue sous le nom de relation de Schrödinger-Robertson.

Elle signifie que, pour tout couple d'opérateurs qui ne commute pas (ce qui est toujours le cas pour des observables), alors la succession des mesures a obligatoirement pour conséquence une incertitude sur les mesures engendrées par les observables.

La relation de Schrödinger-Robertson est une généralisation du fameux principe d'incertitude d'Einsenberg.

En considérant les opérateurs de position $\hat{X}$ et de moment $\hat{P}$, on a :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar\hat{I}$$

D'où l'on en déduit, en appliquant la relation de Schrödinger-Robertson, en remarquant que : $|\langle i\hbar\hat{I}\rangle| = |i\hbar\langle\hat{I}\rangle| = \hbar$, car $|i| = 1$ et $|\langle\hat{I}\rangle| = 1$, on obtient :

$$\Delta\hat{X}.\Delta\hat{P} \geq \frac{\hbar}{2}$$

qui est le principe d'incertitude ou d'indétermination d'Heisenberg.

L'interprétation du principe d'incertitude est le suivant :

- plus la position est connue, moins on connaît la quantité de mouvement.
- inversement, plus on connaît la quantité de mouvement, moins on connait la position.
- autrement dit, il est impossible de connaitre précisément **à la fois** la position et la quantité de mouvement.

2.8 Opérateurs de densité

Les postulats de la mécanique quantique peuvent également être reformulé à partir de l'opérateur de densité.
Soit $|\Psi\rangle$ un état quantique, et $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1\ldots n}$, une base de l'espace sur lequel il est défini. On a $|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i\,|\phi_i\rangle$ où c_i est l'amplitude de probabilité de $|\Psi\rangle$ sur $|\phi_i\rangle$.

Définition 12 (Opérateur de densité)**.** L'opérateur de densité ρ_Ψ de $|\Psi\rangle$ est défini par $\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$.

Par définition, on a :

$$\rho_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i |\phi_i\rangle\right)\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^* \langle\phi_j|\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_j^* |\phi_i\rangle\langle\phi_j|$$

Or, l'élément ρ_{pq} à la position (p, q) de la matrice ρ est :

$$\rho_{pq}^{\Psi} = \langle\phi_p|\rho|\phi_q\rangle = \langle\phi_p|\Psi\rangle\langle\Psi|\phi_q\rangle = c_p c_q^*$$

La représentation matricielle de l'opérateur de densité (= matrice de densité) est :

	$\|\phi_1\rangle$	$\dots$	$\|\phi_n\rangle$
$\langle\phi_1\|$	$c_1c_1^*$	$\dots$	$c_1c_n^*$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\langle\phi_n\|$	$c_nc_1^*$	$\dots$	$c_nc_n^*$

On remarque que :

- sur la diagonales, $c_kc_k^*$ est la probabilité de se trouver dans l'état $|\phi_k\rangle$.
- hors de la diagonale, $c_ic_j^*$ (avec $i \neq j$) sont les effets d'interférence produits par la superposition linéaire des états $|\phi_i\rangle$ et $|\phi_j\rangle$.

On définit :

Définition 13 (Trace de l'opérateur de densité)**.** La trace de l'opérateur de densité ρ_Ψ est : $\mathrm{Tr}(\rho_\Psi) = \sum_{k=1}^{n} \rho_{kk} = \sum_{k=1}^{n} c_kc_k^* = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$

On remarque qu'un état quantique est normalisé si et seulement si la trace de son opérateur de densité est égal à 1.

D'où la reformulation du premier postulat :

Postulat 7 (Premier postulat :)**.** Un système quantique $|\Psi\rangle$ est complètement décrit par son opérateur de densité ρ_Ψ, et est tel que $\mathrm{Tr}(\rho_\Psi) = 1$.

Postulat 8 (Quatrième postulat :)**.** La probabilité P_k d'être dans l'état propre $|\phi_k\rangle$ d'un opérateur Hermitien par un observable d'un état arbitraire $|\Psi\rangle$ est : $P_k = \mathrm{Tr}(\rho_\Psi |\phi_k\rangle\langle\phi_k|) = \mathrm{Tr}(\rho_\Psi \hat{P}_{\phi_k})$
où $\hat{P}_{\phi_k}$ est le projecteur sur ϕ_k.

En effet, en notant $\{|i\rangle\}$ la base canonique, on a vu dans la formulation précédente du 4ème postulat que :

$$\begin{aligned} P_k &= |\langle\phi_k|\Psi\rangle|^2 = \langle\Psi|\phi_k\rangle\langle\phi_k|\Psi\rangle \\ &= \sum_i\sum_j \langle\Psi|i\rangle\langle i|\phi_k\rangle\langle\phi_k|j\rangle\langle j|\Psi\rangle = \sum_i\sum_j c_i^* \langle i|\phi_k\rangle\langle\phi_k|j\rangle\, c_j \end{aligned}$$

Or, $c_i^* c_j$ est l'élément (j, i) de la matrice de densité de Ψ, d'où $c_i^* c_j = \rho_{ji}^{\Psi} = \langle j|\rho_\Psi|i\rangle$, et en remarquant que $\sum_i |i\rangle\langle i| = I_n$, on a :

$$\begin{aligned} P_k &= \sum_i \sum_j \langle j|\rho_\Psi|i\rangle \langle i|\phi_k\rangle \langle\phi_k|j\rangle = \sum_j \langle j|\rho_\Psi|\phi_k\rangle \langle\phi_k|j\rangle = \sum_j \langle j|\left(\rho_\Psi |\phi_k\rangle \langle\phi_k|\right)|j\rangle \\ &= \mathrm{Tr}\left(\rho_\Psi |\phi_k\rangle \langle\phi_k|\right) \end{aligned}$$

Postulat 9 (Cinquième postulat :)**.** Le résultat espéré d'un suite de mesures par un observable $\hat{A}$ sur un système quantique $|\Psi\rangle$ a pour espérance : $\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}(\rho_\Psi \hat{A})$

En effet, en notant $\{|i\rangle\}$ la base canonique, et en remarquant que l'élément (i, j) de la matrice $\hat{A}$ s'écrit $\langle i|\hat{A}|j\rangle$ on a vu dans la formulation précédente du 5$^{\text{ème}}$ postulat que :

$$\begin{aligned} \langle\hat{A}\rangle &= \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle = \sum_i \sum_j |\Psi|i\rangle \langle i|\hat{A}|j\rangle \langle j|\Psi| = \sum_i \sum_j c_j c_i^* \langle i|\hat{A}|j\rangle \\ &= \sum_i \sum_j \rho_{ij}^{\Psi} \langle i|\hat{A}|j\rangle = \sum_i \sum_j \langle j|\rho_\Psi|i\rangle \langle i|\hat{A}|j\rangle = \sum_j \langle j|\rho_\Psi \hat{A}|j\rangle \\ &= \mathrm{Tr}(\rho_\Psi \hat{A}) \end{aligned}$$

Postulat 10 (Sixième postulat :)**.** L'évolution temporelle d'un système quantique est décrite par l'équation de Liouville-von Neumann : $i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H, \rho(t)] = H\rho(t) - \rho(t)H$

On sait que $\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|$, donc :

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|\right) = \frac{d\,|\psi(t)\rangle}{dt} \langle\psi(t)| + |\psi(t)\rangle \frac{d\,\langle\psi(t)|}{dt}$$

Or, $i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H\,|\psi(t)\rangle$, d'où on tire $-i\hbar \frac{d\langle\psi(t)|}{dt} = \langle\psi(t)|\,H^\dagger = \langle\psi(t)|\,H$ (car H hermitien). Ainsi,

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{i}{h} H\,|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)| + \frac{i}{h}\,|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|\,H = -\frac{i}{h}\left(H\rho(t) - \rho(t)H\right)$$

D'où on tire : $i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = H\rho(t) - \rho(t)H = [H, \rho(t)]$

3 Théorème de Bell

3.1 Présentation

Regardons comment l'on peut construire deux particules intriquées.

On reprend l'espace quantique à deux états $|0\rangle = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ et $|1\rangle = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$.

On considère maintenant les transformations unitaires suivantes sur l'état : l'identité : $\hat{I} = \left[\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{smallmatrix}\right]$, la transformation d'Hadamard $\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{smallmatrix}\right]$, et $\hat{X} = \left[\begin{smallmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{smallmatrix}\right]$.

Considérons les transformations suivantes :

- partir d'un état quantique constitué de deux particules dans un état $|0\rangle$, à savoir $\psi_0 = |0\rangle \otimes |0\rangle$.
- appliquer la transformation unitaire $\hat{H} \otimes \hat{I}$:
  $|\psi_1\rangle = (\hat{H} \otimes \hat{I})\,|\psi_0\rangle = (\hat{H} \otimes \hat{I})(|0\rangle \otimes |0\rangle) = \hat{H}\,|0\rangle \otimes \hat{I}\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |0\rangle$
- appliquer la transformation unitaire $C_{\text{NOT}} = |0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X}$:
  $|\psi_2\rangle = (|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I} + |1\rangle\langle 1| \otimes \hat{X})\,|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ qui s'interprète comme la superposition de l'état $|00\rangle$ avec l'état $|11\rangle$. Ces états sont dits intriqués.

En conséquence, l'existence de l'intrication découle des propriétés théoriques de la physique quantique.

Remarque : $|xy\rangle$ est juste une écriture compacte pour $|x\rangle \otimes |y\rangle$.

3.2 Le paradoxe EPR

En 1935, Einstein, Podolsky et Rosen (EPR) publient un article proposant une expérience de pensée utilisant une paire de particules intriquées (plus tard appelée paire EPR en leurs honneurs) et critiquant la description de la réalité qu'implique la mécanique quantique.

L'expérience était similaire à la suivante :

- Soit une source qui génère une paire de particules EPR $(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$.
- La première particule est envoyée à Alice et la seconde à Bob qui sont chacun placés arbitrairement loin l'un de l'autre.
- Chacun n'effectue de mesure que sur sa particule en laissant l'autre inchangée (observables de la forme : $|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I}$ pour Alice, $\hat{I} \otimes |0\rangle\langle 0|$ pour Bob).
- Si Alice mesure en premier sa particule avec l'observable $|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I}$?

  $$(|0\rangle\langle 0| \otimes \hat{I})(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} = |00\rangle / \sqrt{2}$$

  si Alice observe l'état $|0\rangle$, Bob observera toujours sa particule dans l'état $|0\rangle$.
- Si Bob mesure en premier sa particule avec l'observable $\hat{I} \otimes |0\rangle\langle 0|$?

  $$(\hat{I} \otimes |0\rangle\langle 0|)(|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2} = |00\rangle / \sqrt{2}$$

  si Bob observe l'état $|0\rangle$, Alice observera toujours sa particule dans l'état $|0\rangle$.
- remarquons que cet état est mesuré avec une probabilité $\frac{1}{2}$ mais que les deux résultats sont **toujours** corrélés.
- peu importe aussi qui effectue la mesure en premier, le second à effectuer la mesure trouve le même résultat que le premier. L'observation de l'état de l'une semble donc déterminer immédiatement l'état de l'autre.
- si les particules sont séparés par plus de distance que de temps (à savoir $(\Delta ct)^2 < (\Delta x)^2$)), cela semble impliquer qu'une information circule de l'une à l'autre à une vitesse plus grande que la vitesse de la lumière, ce que semble contredire la théorie de la relativité restreinte (principe de localité).
- mais en relativité spéciale, il est incorrect de dire qu'une mesure affecte l'autre, car il est possible de construire des scénarios où le premier qui effectue la mesure dépend de la position de l'observateur [1], et d'après la théorie de la relativité, la physique doit expliquer l'observation des deux observateurs.

1. *i.e.* pour l'observateur 1, Alice mesure avant Bob, mais pour l'observateur 2, Bob mesure avant Alice.

- cette symétrie montre donc qu'il y a une corrélation entre les deux particules. On peut seulement dire qu'Alice et Bob observent un comportement aléatoire corrélé [2].
- une paire EPR apparaît donc comme une paire de pièces de monnaie magiques, qui lorsqu'elles sont lancées retombent toutes les deux soit ensemble sur pile, soit ensemble sur face.

Afin de comprendre où se situe le problème, donnons des définitions :

- une théorie est locale si les résultats d'une expérience sur un système sont indépendants des actions effectuées sur un système différent avec lequel il n'y a pas de connexion causale avec le premier.
  Exemple : pas de relation entre la température de cette pièce et la couleur de mes chaussettes.
- une théorie est dite contre-factuelle (on dit aussi réaliste) si les expériences permettent de découvrir des propriétés préexistantes.
  Autrement dit, la valeur d'une mesure sur un système doit obligatoirement préexister (avoir une valeur réelle) avant d'être mesurée.

Par sa définition, la mécanique quantique semble :

- non contre-factuelle : la superposition d'état a pour conséquence que la propriété du système n'est connu qu'à la mesure.
- non locale : l'intrication quantique paraît induire une action à distance.

Deux visions du monde s'oppose donc :

- Les théories d'Einstein qui utilisent le principe de réalisme local.
  Les corrélations observées par l'intrication doivent être la conséquence de variables locales cachées (mais pré-existante),
- La théorie quantique.

3.3 Théorème de Bell

Afin de départager ces deux visions, Bell fournit une inégalité qui, si elle est violée, rend impossible l'hypothèse du réalisme local.

Hypothèses de l'inégalité de Bell

- Supposons que nous avons un objet qui peut prendre trois propriétés : A, B et C. Chacune de ces propriétés est binaire (ses valeurs possible sont 0 ou 1).
  L'objet considéré est une pièce de monnaie, où, par exemple, A le matériau (or/cuivre), B l'aspect (brillant/terne), C la taille (grand/petit).
- On enferme deux pièces identiques dans deux boîtes, mais sans connaître leurs propriétés. Alors on peut dire que leurs propriétés sont :
  - ◇ contre-factuelles (à savoir prédéterminée).
  - ◇ locales (l'action sur une boite ne change pas la propriété de la pièce dans l'autre boîte).
- On applique un point de vue Bayésien : l'ignorance des propriétés est exprimée par des probabilités construites à partir d'expériences répétées sur des boîtes avec des pièces.
  - ◇ $\Pr(A, C)$ = probabilité que les propriétés A et C soient les mêmes sur les deux pièces (exemple : 010, 000, 101, 111). Même idée pour $\Pr(A, B)$ et $\Pr(B, C)$.
  - ◇ $\Pr(A, A) = \Pr(B, B) = \Pr(C, C) = 1$, car la mesure d'une propriété sur les deux pièces est toujours la même (cas Bayésien = les mêmes pièces).

2. une paire EPR ne peut pas être utilisée pour communiquer plus vite que la vitesse de la lumière.

L'expression de l'inégalité de Bell est :

$$\Pr(A,B) + \Pr(A,C) + \Pr(B,C) \geq 1$$

Démonstration : Écrivons les combinaisons possibles des valeurs de A, B et C.

	0	1	2	3	4	5	6	7
A	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1
C	0	1	0	1	0	1	0	1

Remarquons que $\Pr[\{0,1,2,3,4,5,6,7\}] = 1$ puisqu'il s'agit de tous les cas possibles et qu'ils sont tous disjoints.
Regardons maintenant les cas d'égalités : $A = B$ dans les cas $\{0,1,6,7\}$, $A = C$ dans les cas $\{0,2,5,7\}$, et $B = C$ dans les cas $\{0,3,4,7\}$. On remarque que tous les cas sont comptés une fois, sauf les cas $\{0,7\}$ sont comptés 3 fois. En conséquence,

$$\begin{aligned}
\Pr(A,B) + \Pr(A,C) + \Pr(B,C) &= \Pr[\{0,1,6,7\}] + \Pr[\{0,2,5,7\}] + \Pr[\{0,3,4,7\}] \\
&= \Pr[\{0,1,2,3,4,5,6,7\}] + 2.\Pr[\{0,7\}] \\
&= 1 + 2.\Pr[\{0,7\}] \geq 1
\end{aligned}$$

L'égalité n'étant réalisée que dans les cas où $\Pr[\{0,7\}] = 0$. □

Regardons maintenant si le théorème de Bell est vérifié par la théorie quantique.

On part de l'état intriqué $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$, et considérons les trois propriétés A, B et C définies par les états propres :

$$A : \begin{cases} |a_0\rangle = |0\rangle \\ |a_1\rangle = |1\rangle \end{cases} \quad B : \begin{cases} |b_0\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}\,|1\rangle)/2 \\ |b_1\rangle = (\sqrt{3}\,|0\rangle - |1\rangle)/2 \end{cases} \quad C : \begin{cases} |c_0\rangle = (|0\rangle - \sqrt{3}\,|1\rangle)/2 \\ |c_1\rangle = (\sqrt{3}\,|0\rangle + |1\rangle)/2 \end{cases}$$

Ces bases sont trivialement orthonormées, et on a :

$$|\Phi^+\rangle = (|a_0a_0\rangle + |a_1a_1\rangle)/\sqrt{2} = (|b_0b_0\rangle + |b_1b_1\rangle)/\sqrt{2} = (|c_0c_0\rangle + |c_1c_1\rangle)/\sqrt{2}$$

En conséquence $P(A,A) = P(B,B) = P(C,C) = 1$, à savoir que la mesure de la même propriété sur les deux pièces conduisent à la même mesure (soit 0, soit 1). L'intrication des propriétés découlent des états propres à partir desquels elles sont construites.

Exemple :

$$\begin{aligned}
|b_0b_0\rangle &= |b_0\rangle \otimes |b_0\rangle = (|00\rangle + \sqrt{3}\,|01\rangle + \sqrt{3}\,|10\rangle + 3\,|11\rangle)/4 \\
|b_1b_1\rangle &= |b_1\rangle \otimes |b_1\rangle = (3\,|00\rangle - \sqrt{3}\,|01\rangle - \sqrt{3}\,|10\rangle + |11\rangle)/4 \\
\Rightarrow |b_0b_0\rangle + |b_1b_1\rangle &= |00\rangle + |11\rangle \text{ d'où } |\Phi^+\rangle = (|b_0b_0\rangle + |b_1b_1\rangle)/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut exprimer facilement $\{|b_0\rangle, |b_1\rangle\}$ et $\{|c_0\rangle, |c_1\rangle\}$ à partir de $\{|a_0\rangle, |a_1\rangle\}$ en remarquant que $\{|a_0\rangle, |a_1\rangle\} = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ et que les états propres de B et C sont orthogonaux et expriment un transformation unitaire. On en déduit la transformation inverse :

$$\text{pour } B : \begin{cases} |a_0\rangle = |0\rangle = (|b_0\rangle - \sqrt{3}\,|b_1\rangle)/2 \\ |a_1\rangle = |1\rangle = -(\sqrt{3}\,|b_0\rangle + |b_1\rangle)/2 \end{cases} \quad \text{pour } C : \begin{cases} |a_0\rangle = |0\rangle = (|c_0\rangle + \sqrt{3}\,|c_1\rangle)/2 \\ |a_1\rangle = |1\rangle = (-\sqrt{3}\,|c_0\rangle + |c_1\rangle)/2 \end{cases}$$

En conséquence, en remplaçant dans l'expression de $|\Phi^+\rangle = (|a_0a_0\rangle + |a_1a_1\rangle)/\sqrt{2}$, on obtient :

- pour $\Pr(A, B)$, $|\Phi^+\rangle = \big(|a_0\rangle\,(|b_0\rangle - \sqrt{3}\,|b_1\rangle) - |a_1\rangle\,(\sqrt{3}\,|b_0\rangle + |b_1\rangle)\big)/2\sqrt{2}$
  L'amplitude de probabilité pour $|a_0\rangle\,|b_0\rangle$ et $|a_1\rangle\,|b_1\rangle$ sont toutes les deux $1/2\sqrt{2}$ et donc $\Pr(A, B) = (1/2\sqrt{2})^2 + (1/2\sqrt{2})^2 = 1/8 + 1/8 = 1/4$.
- pour $\Pr(A, C)$, $|\Phi^+\rangle = \big(|a_0\rangle\,(|c_0\rangle + \sqrt{3}\,|c_1\rangle) + |a_1\rangle\,(-\sqrt{3}\,|c_0\rangle + |c_1\rangle)\big)/2\sqrt{2}$
  Idem pour les amplitudes de $|a_0\rangle\,|c_0\rangle$ et $|a_1\rangle\,|c_1\rangle$, on a aussi $\Pr(A, C) = 1/4$.
- pour $\Pr(B, C)$, $|\Phi^+\rangle = \big((|b_0\rangle - \sqrt{3}\,|b_1\rangle)(|c_0\rangle + \sqrt{3}\,|c_1\rangle) - (\sqrt{3}\,|b_0\rangle + |b_1\rangle)(-\sqrt{3}\,|c_0\rangle + |c_1\rangle)\big)/2\sqrt{2}$
  Idem pour les amplitudes de $|b_0\rangle\,|c_0\rangle$ et $|b_1\rangle\,|c_1\rangle$, on a aussi $\Pr(B, C) = 1/4$.

Donc, $\Pr(A, B) + \Pr(A, C) + \Pr(B, C) = 3/4 < 1$. L'équation de Bell n'est donc pas respectée par la théorie quantique.

Rappelons le théorème de Bell : toute théorie contrefactuelle locale doit satisfaire l'inégalité de Bell. Comme cette inégalité est violée par la mécanique quantique, elle est soit non contrefactuelle, soit non-locale.

Le théorème de Bell (1964) donne donc un moyen expérimental de vérifier si l'hypothèse des variables classiques est possible dans le modèle classique afin d'expliquer l'intrication.

De nombreuses expériences ont été menées afin de tester si le monde réel vérifiait l'inégalité de Bell :

- il s'avère qu'une telle expérience est très difficile à réaliser, car des failles dans l'expérience (échantillonnage, détection, localité, ...) peuvent venir la perturber.
- l'ensemble des expériences s'étalent jusqu'à maintenant (1972, 1981, 1998, 2001, 2001, 2007, 2008, 2009, 2013, 2014, 2015, 2018), la première expérience dite "sans faille" date de 2015.
- toutes ces tentatives ont conduit au même résultat : l'inégalité de Bell n'est pas vérifiée par l'expérience.

Conséquences du théorème de Bell

- aucune théorie classique (locale et réaliste) ne peut modéliser correctement le monde physique, et reproduire ce qui est décrit et correctement prévu par la mécanique quantique.
- les probabilités obtenues par la mécanique quantique sont différentes de ce qui peut être obtenu avec les probabilités classiques, et constituent une théorie différente à part entière.
- attention, ceci ne signifie pas qu'il existe de la téléportation instantanée d'information entre deux particules intriquées.
  Cette hypothèse est rejetée par la mécanique quantique elle-même (voir le théorème de non communication).

Remarques :

(a). Le mécanisme physique sous-jacent à l'intrication n'est toujours pas connu, et continue de faire l'objet d'hypothèses.

(b). A noter que la théorie quantique n'est pas la seule à prévoir ces propriétés. La théorie Bohmienne (David Bohm, 1952), utilise une onde pilote qui guide le chemin des particules. Cette théorie a la particularité d'être totalement déterministe (tout est prédéterminée) mais non locale (dont elle vérifie Bell). L'imprévisibilité quantique est une conséquence de l'indéterminisme de la fonction d'onde, et de l'impossibilité de la connaître.

Conclusion

Cette leçon constitue une première introduction à la mécanique quantique.

Nous avons vu :
- Une première approche des propriétés quantiques,
- Les postulats de la mécanique quantique, et des exercices afin de comprendre le fonctionnement de ces principes
- Le théorème de Bell qui a permis de démontrer qu'aucune théorie réaliste locale ne permet d'expliquer la mécanique quantique.

Lors des cours suivants, nous verrons :
- comment certains jugements et décisions humains peuvent être modélisés avec la théorie quantique,
- comment les modèles quantiques peuvent être modifiés afin de tenir compte de la présence de bruit à toutes les niveaux du modèle.
- une petite introduction à l'informatique quantique

Les outils quantique de ce premier chapirez servent de base à la compréhension de l'informatique quantique.