Inferencia Estadística

Solución: Estimación y contraste paramétrico 1

DSLab

junio, 2024

Ejercicio 1: Definición de Estadístico

Pregunta: ¿Qué es un estadístico? Da un ejemplo de un estadístico comúnmente utilizado en la estadística descriptiva.

Solución: Un estadístico es una función de una muestra que no depende de parámetros desconocidos. Ejemplo: la media muestral.

Ejercicio 2: Estimación Puntual

Pregunta: Supongamos que tienes una muestra aleatoria de tamaño $n = 10$ de una población con media desconocida μ y varianza conocida $\sigma^2 = 25$. La muestra es: $x = \{10, 12, 9, 11, 10, 13, 10, 12, 11, 14\}$ Calcula la estimación puntual de la media poblacional μ utilizando la media muestral.

Solución: La media muestral es $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 11.2$.

Ejercicio 3: Propiedades de los Estimadores

Pregunta: Demuestra que la media muestral es un estimador insesgado de la media poblacional μ.

Solución: Vamos a demostrar que $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$.

Para demostrar que la media muestral ($\bar{X}$) es un estimador insesgado de la media poblacional (μ), necesitamos mostrar que el valor esperado de la media muestral es igual a la media poblacional. Es decir, debemos demostrar que:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$$

Definición de la Media Muestral

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria de tamaño n proveniente de una población con media μ y varianza σ^2. Los valores de la muestra son $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

La media muestral ($\bar{X}$) se define como:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Propiedad de Linealidad de la Esperanza

La propiedad de linealidad de la esperanza establece que el valor esperado de una suma de variables aleatorias es igual a la suma de los valores esperados de las variables aleatorias individuales. Formalmente, para cualquier constante a y cualquier variable aleatoria X:

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X)$$
$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n)$$

Cálculo del Valor Esperado de la Media Muestral

Usamos la definición de $\bar{X}$ y la propiedad de linealidad de la esperanza para calcular $\mathbb{E}(\bar{X})$:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Aplicando la propiedad de linealidad:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Nuevamente, aplicamos la propiedad de linealidad a la suma:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$$

Esperanza de las Variables Aleatorias de la Muestra

Dado que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son una muestra aleatoria de la población con media μ, cada X_i tiene el mismo valor esperado, es decir, $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ para todo i.

Sustituyendo esto en la ecuación anterior:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu$$

Hay n términos en la suma, cada uno igual a μ:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\cdot n \cdot \mu$$

Simplificando:

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$$

Conclusión

Hemos demostrado que el valor esperado de la media muestral ($\bar{X}$) es igual a la media poblacional (μ):

$$\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$$

Por lo tanto, la media muestral ($\bar{X}$) es un estimador insesgado de la media poblacional (μ).

Ejercicio 4: Método de los Momentos

Pregunta: Dado el siguiente conjunto de datos: $x = \{2, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 5\}$ Utiliza el método de los momentos para estimar la media μ y la varianza σ^2 de la población.

Solución:

El método de los momentos es una técnica para estimar los parámetros de una distribución utilizando los momentos de la muestra. En este caso, estimaremos la media μ y la varianza σ^2 de la población utilizando los momentos de la muestra.

Paso 1: Calcular los Momentos Muestrales

Media Muestral ($\hat{\mu}$) La media muestral es el primer momento muestral, y se calcula como:

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Para el conjunto de datos $x = \{2, 4, 3, 5, 6, 4, 3, 5\}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i = \frac{1}{8}(2 + 4 + 3 + 5 + 6 + 4 + 3 + 5) = \frac{1}{8} \cdot 32 = 4$$

Por lo tanto, la estimación de la media μ es:

$$\hat{\mu} = 4$$

Varianza Muestral ($\hat{\sigma}^2$) La varianza muestral es el segundo momento central muestral y se calcula como:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Usando la media muestral $\bar{x} = 4$:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8}(x_i - 4)^2$$

Calculando cada $(x_i - \bar{x})^2$:

$$\sum_{i=1}^{8}(x_i - \bar{x})^2 = 4 + 0 + 1 + 1 + 4 + 0 + 1 + 1 = 12$$

Entonces, la varianza muestral es:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{12}{7} \approx 1.714$$

Conclusión

Usando el método de los momentos, las estimaciones para la media μ y la varianza σ^2 de la población son:

$$\hat{\mu} = 4$$
$$\hat{\sigma}^2 \approx 1.714$$

Ejercicio 5: Método de la Máxima Verosimilitud

Pregunta: Supongamos que tenemos una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución exponencial con parámetro λ. Deriva el estimador de máxima verosimilitud para λ.

Solución: El estimador de máxima verosimilitud para λ es $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$. Para derivar el estimador de máxima verosimilitud para el parámetro λ de una distribución exponencial, sigamos los pasos habituales en la metodología de máxima verosimilitud:

1. Función de Densidad de la Distribución Exponencial

La función de densidad de probabilidad (f.d.p.) de una variable aleatoria X que sigue una distribución exponencial con parámetro λ es:

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0$$

2. Función de Verosimilitud

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de tamaño n de la distribución exponencial con parámetro λ. La función de verosimilitud $L(\lambda)$ es el producto de las funciones de densidad para cada observación:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i}$$

3. Log-Verosimilitud

Para simplificar el cálculo, trabajamos con la log-verosimilitud, que es el logaritmo natural de la función de verosimilitud:

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda X_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda e^{-\lambda X_i})$$

Descomponiendo el logaritmo del producto en una suma de logaritmos:

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \lambda + \ln e^{-\lambda X_i}\right)$$

Usando las propiedades de los logaritmos ($\ln ab = \ln a + \ln b$ y $\ln e^a = a$):

$$\ell(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\ln \lambda - \lambda X_i\right)$$

$$\ell(\lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$$

4. Derivar la Log-Verosimilitud

Para encontrar el estimador de máxima verosimilitud, derivamos la log-verosimilitud respecto a λ y la igualamos a cero:

$$\frac{d\ell(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

Derivando cada término por separado:

$$\frac{d}{d\lambda}(n \ln \lambda) = \frac{n}{\lambda}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i\right) = -\sum_{i=1}^{n}X_i$$

Sumando ambas derivadas:

$$\frac{d\ell(\lambda)}{d\lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}X_i$$

5. Igualar a Cero y Resolver para λ

Igualamos la derivada a cero para encontrar el valor de λ que maximiza la log-verosimilitud:

$$\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n}X_i = 0$$

Resolviendo para λ:

$$\frac{n}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\lambda = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}$$

6. Expresar en Términos de la Media Muestral

El denominador es la suma de las observaciones de la muestra. Podemos expresar esta suma en términos de la media muestral $\bar{X}$:

$$\sum_{i=1}^{n}X_i = n\bar{X}$$

Sustituyendo en la ecuación de λ:

$$\lambda = \frac{n}{n\bar{X}}$$

$$\lambda = \frac{1}{\bar{X}}$$

Conclusión

El estimador de máxima verosimilitud para el parámetro λ de una distribución exponencial es:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Este resultado muestra que el estimador de máxima verosimilitud para λ es el recíproco de la media muestral $\bar{X}$.

Ejercicio 6: Estimación por Intervalo

Pregunta: Para la misma muestra del Ejercicio 2 ($x = \{10, 12, 9, 11, 10, 13, 10, 12, 11, 14\}$), calcula un intervalo de confianza del 95% para la media poblacional μ, asumiendo que la varianza poblacional es conocida y es igual a 25.

Solución: Para calcular un intervalo de confianza para la media poblacional μ cuando la varianza poblacional σ^2 es conocida, utilizamos la distribución normal. El intervalo de confianza del 95% para la media poblacional se calcula con la siguiente fórmula:

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

donde: - $\bar{x}$ es la media muestral. - $z_{\alpha/2}$ es el valor crítico de la distribución normal estándar para un nivel de confianza del 95% (para $\alpha = 0.05$, $z_{0.025} = 1.96$). - σ es la desviación estándar poblacional. - n es el tamaño de la muestra.

Paso 1: Calcular la Media Muestral ($\bar{x}$)

Para la muestra $x = \{10, 12, 9, 11, 10, 13, 10, 12, 11, 14\}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(10 + ... + 14) = \frac{1}{10} \cdot 112 = 11.2$$

Paso 2: Determinar los Parámetros del Intervalo de Confianza

- La varianza poblacional σ^2 es conocida y es igual a 25, por lo tanto, la desviación estándar $\sigma = \sqrt{25} = 5$.
- El tamaño de la muestra $n = 10$.

- El valor crítico $z_{0.025} = 1.96$.

Paso 3: Calcular el Margen de Error

El margen de error E es:

$$E = z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Sustituyendo los valores:

$$E = 1.96\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right) \approx 3.1$$

Paso 4: Calcular el Intervalo de Confianza

El intervalo de confianza del 95% para la media poblacional μ es:

$$\bar{x} \pm E$$

Sustituyendo los valores:

$$11.2 \pm 3.1 = (8.1, 14.3)$$

Conclusión

El intervalo de confianza del 95% para la media poblacional μ es $(8.1, 14.3)$. Esto significa que estamos un 95% seguros de que la media poblacional se encuentra dentro de este intervalo.

Ejercicio 7: Contraste de Hipótesis (Prueba Z)

Pregunta: Supón que quieres probar si la media poblacional μ es igual a 10. Utiliza la muestra del Ejercicio 2 y realiza un contraste de hipótesis con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución: Para probar si la media poblacional μ es igual a 10 utilizando la muestra del Ejercicio 2 ($x = \{10, 12, 9, 11, 10, 13, 10, 12, 11, 14\}$), realizaremos un contraste de hipótesis. Dado que la varianza poblacional es conocida ($\sigma^2 = 25$), usaremos una prueba z.

Paso 1: Definir las Hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $\mu = 10$
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $\mu \neq 10$

Paso 2: Calcular la Estadística de Prueba

La estadística de prueba z se calcula como:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

donde: - $\bar{x}$ es la media muestral. - μ_0 es la media poblacional bajo la hipótesis nula. - σ es la desviación estándar poblacional. - n es el tamaño de la muestra.

Media Muestral ($\bar{x}$) Para la muestra $x = \{10, 12, 9, 11, 10, 13, 10, 12, 11, 14\}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}(10 + ... + 14) = 11.2$$

Paso 3: Calcular el Valor de la Estadística de Prueba

$$z = \frac{11.2 - 10}{5/\sqrt{10}} \approx 0.759$$

Paso 4: Determinar el Valor Crítico y la Región de Rechazo

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral, los valores críticos $z_{\alpha/2}$ son:

$$z_{0.025} = \pm 1.96$$

Paso 5: Comparar el Valor de la Estadística de Prueba con los Valores Críticos

Comparamos el valor de z con los valores críticos:

$$-1.96 < 0.759 < 1.96$$

Paso 6: Conclusión

Dado que el valor de la estadística de prueba z está dentro del rango de los valores críticos, no rechazamos la hipótesis nula H_0. Esto significa que no hay suficiente evidencia para concluir que la media poblacional μ es diferente de 10 al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

En resumen, el contraste de hipótesis indica que no podemos rechazar la hipótesis nula de que la media poblacional es igual a 10.

Ejercicio 8: Contraste de Hipótesis (Prueba T)

Pregunta: Para una muestra aleatoria de tamaño $n = 15$ de una población con distribución normal pero con varianza desconocida,

$$x = \{15, 17, 16, 14, 18, 16, 15, 17, 16, 18, 15, 17, 16, 14, 18\}$$

realiza un contraste de hipótesis para verificar si la media poblacional es diferente de 16 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución: Para realizar un contraste de hipótesis sobre la media poblacional con una muestra de tamaño $n = 15$ y una varianza desconocida, utilizamos la distribución t de Student. A continuación, se detalla el procedimiento paso a paso:

Paso 1: Definir las Hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $\mu = 16$
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $\mu \neq 16$

Paso 2: Calcular la Estadística de Prueba

La estadística de prueba t se calcula como:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

donde: - $\bar{x}$ es la media muestral. - μ_0 es la media poblacional bajo la hipótesis nula. - s es la desviación estándar muestral. - n es el tamaño de la muestra.

Calcular la Media Muestral ($\bar{x}$) Para la muestra

$$x = \{15, 17, 16, 14, 18, 16, 15, 17, 16, 18, 15, 17, 16, 14, 18\}$$

Se tiene:

$$\bar{x} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i = \frac{240}{15} = 16$$

Calcular la Desviación Estándar Muestral (s) Primero, calculemos la varianza muestral (s^2):

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2$$

Calculando cada $(x_i - \bar{x})^2$:

$$\sum_{i=1}^{15}(x_i - \bar{x})^2 = 26$$

Entonces, la varianza muestral es:

$$s^2 = \frac{26}{14} \approx 1.857$$

La desviación estándar muestral es:

$$s = \sqrt{1.857} \approx 1.362$$

Paso 3: Calcular el Valor de la Estadística de Prueba

$$t = \frac{16 - 16}{1.362/\sqrt{15}} = 0$$

Paso 4: Determinar los Valores Críticos y la Región de Rechazo

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral con $n - 1 = 14$ grados de libertad, los valores críticos $t_{\alpha/2}$ son:

$$t_{0.025,14} \approx \pm 2.145$$

Paso 5: Comparar el Valor de la Estadística de Prueba con los Valores Críticos

El valor de la estadística de prueba t se compara con los valores críticos:

$$-2.145 < 0 < 2.145$$

Paso 6: Conclusión

Dado que el valor de t está dentro del rango de los valores críticos, no rechazamos la hipótesis nula H_0. Esto significa que no hay suficiente evidencia para concluir que la media poblacional es diferente de 16 al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

En resumen, el contraste de hipótesis indica que no podemos rechazar la hipótesis nula de que la media poblacional es igual a 16.

Ejercicio 9: Contraste de Hipótesis (Prueba Chi-Cuadrado)

Pregunta: Una muestra de tamaño $n = 20$ de una población con varianza desconocida es $x = \{5, 7, 9, 6, 8, 10, 7, 9, 8, 10, 5, 7, 9, 6, 8, 10, 7, 9, 8, 10\}$ Realiza un contraste de hipótesis para probar si la varianza poblacional es igual a 4 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución:

Para realizar un contraste de hipótesis para probar si la varianza poblacional es igual a 4, podemos usar la prueba de chi-cuadrado (χ^2) para una varianza.

Paso 1: Definir las Hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: La varianza poblacional es igual a 4 ($\sigma^2 = 4$).
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: La varianza poblacional no es igual a 4 ($\sigma^2 \neq 4$).

Paso 2: Calcular la Estadística de Prueba

La estadística de prueba para la varianza es:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

donde:

- n es el tamaño de la muestra.

- s^2 es la varianza muestral.
- σ_0^2 es la varianza bajo la hipótesis nula.

Primero, calculemos la varianza muestral (s^2).

Media Muestral ($\bar{x}$)

$$\bar{x} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = \frac{1}{20} \cdot 158 = 7.9$$

Varianza Muestral (s^2)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2$$

- Calculando cada $(x_i - \bar{x})^2$:

$$(5 - 7.9)^2 = 8.41$$

$$\ldots$$

$$(10 - 7.9)^2 = 4.41$$

Sumando estos valores:

$$\sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 51.80$$

Entonces:

$$s^2 = \frac{51.80}{19} = 2.726$$

Paso 3: Calcular la Estadística de Prueba χ^2

Usamos la varianza bajo la hipótesis nula ($\sigma_0^2 = 4$):

$$\chi^2 = \frac{(20-1) \cdot 2.726}{4} = \frac{19 \cdot 2.726}{4} = \frac{51.794}{4} = 12.9485$$

Paso 4: Determinar los Valores Críticos

Los valores críticos de la distribución χ^2 con $n - 1 = 19$ grados de libertad para $\alpha = 0.05$ (prueba bilateral) son: - $\chi^2_{0.025,19} \approx 32.852$ - $\chi^2_{0.975,19} \approx 8.907$

Paso 5: Comparar el Valor de la Estadística de Prueba con los Valores Críticos

Para no rechazar H_0, el valor de χ^2 debe estar entre los valores críticos:

$$8.907 < 12.9485 < 32.852$$

Paso 6: Conclusión

Dado que el valor de χ^2 está dentro del rango de los valores críticos, no rechazamos la hipótesis nula H_0 al nivel de significación $\alpha = 0.05$. Esto significa que no hay suficiente evidencia para concluir que la varianza poblacional es diferente de 4.

Ejercicio 10: Contraste de Hipótesis (Comparación de Dos Medias)

Pregunta: Tienes dos muestras independientes:

- Muestra A:
$$x_A = \{23, 21, 22, 24, 25, 23, 24, 22, 23, 24\}$$
- Muestra B:
$$x_B = \{18, 19, 17, 20, 18, 19, 18, 19, 20, 18\}$$

Realiza un contraste de hipótesis para verificar si las medias de las dos poblaciones de las cuales se extrajeron las muestras son diferentes. Usa un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución:

Para realizar un contraste de hipótesis sobre si las medias de las dos poblaciones de las cuales se extrajeron las muestras son diferentes, podemos usar la prueba t para dos muestras independientes, también conocida como prueba t de Student para muestras independientes. Supongamos que las dos muestras son independientes y provienen de poblaciones con distribuciones normales y varianzas iguales.

Paso 1: Definir las Hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: Las medias de las dos poblaciones son iguales ($\mu_A = \mu_B$).
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: Las medias de las dos poblaciones son diferentes ($\mu_A \neq \mu_B$).

Paso 2: Calcular las Estadísticas Descriptivas

Para las muestras x_A y x_B:

- Tamaño de la muestra (n_A y n_B):

$$n_A = 10, \quad n_B = 10$$

- Media muestral ($\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$):

$$\bar{x}_A = \frac{1}{10}(23 + 21 + 22 + 24 + 25 + 23 + 24 + 22 + 23 + 24) = 23.1$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{10}(18 + 19 + 17 + 20 + 18 + 19 + 18 + 19 + 20 + 18) = 18.6$$

- Varianza muestral (s_A^2 y s_B^2):

$$s_A^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_{Ai} - \bar{x}_A)^2$$

$$s_B^2 = \frac{1}{10-1}\sum_{i=1}^{10}(x_{Bi} - \bar{x}_B)^2$$

Calculando las varianzas muestrales:

$$s_A^2 = \frac{1}{9}[(23 - 23.1)^2 + ... + (24 - 23.1)^2] = \frac{1}{9}[13.89] = 1.5433$$

$$s_B^2 = \frac{1}{9}[(18 - 18.6)^2 + ... + (18 - 18.6)^2] = \frac{1}{9}[8.4]s_B^2 = 0.9333$$

Paso 3: Calcular la Estadística de Prueba t

La estadística de prueba t para dos muestras independientes es:

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}}$$

donde s_p^2 es la varianza combinada (ponderada) y se calcula como:

$$s_p^2 = \frac{(n_A - 1)s_A^2 + (n_B - 1)s_B^2}{n_A + n_B - 2}$$

Sustituyendo los valores calculados:

$$s_p^2 = \frac{(10-1)\cdot 1.5433 + (10-1)\cdot 0.9333}{10+10-2} = 1.2383$$

Ahora, calculamos t:

$$t = \frac{23.1 - 18.6}{\sqrt{1.2383\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\right)}} \approx 9.04$$

Paso 4: Determinar el Valor Crítico y Decisión

Para $\alpha = 0.05$ y grados de libertad $df = n_A + n_B - 2 = 18$, el valor crítico $t_{\alpha/2,df}$ para una prueba bilateral se puede obtener de una tabla de distribución t de Student. Aproximadamente, $t_{0.025,18} \approx 2.101$.

Paso 5: Comparar el Valor de la Estadística de Prueba con el Valor Crítico

Comparamos el valor absoluto de la estadística de prueba con el valor crítico:

$$|t| = 9.04 > 2.101$$

Paso 6: Conclusión

Dado que el valor absoluto de la estadística de prueba t es mayor que el valor crítico, rechazamos la hipótesis nula H_0. Esto significa que hay evidencia suficiente para concluir que las medias de las dos poblaciones son significativamente diferentes al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

En resumen, el contraste de hipótesis indica que las medias de las dos poblaciones son diferentes.