Inferencia Estadística

Solución: Contrastes de Hipótesis

DSLab

junio, 2024

Ejercicio 1: Conceptos Básicos

Pregunta: Define los conceptos básicos de un contraste de hipótesis: hipótesis nula (H_0), hipótesis alternativa (H_1), nivel de significación (α), región de rechazo y valor crítico.

Solución:

En un contraste de hipótesis, se evalúa una afirmación sobre una población a partir de datos muestrales. Los conceptos básicos que se utilizan son los siguientes:

Hipótesis Nula (H_0)

La hipótesis nula (H_0) es una afirmación sobre el parámetro de la población que se asume verdadera hasta que se demuestre lo contrario. Generalmente, H_0 representa una situación de "no efecto" o "no diferencia". Es la hipótesis que se pretende refutar. Por ejemplo, H_0 podría afirmar que la media poblacional μ es igual a un valor específico.

Hipótesis Alternativa (H_1)

La hipótesis alternativa (H_1) es una afirmación que se acepta si los datos muestrales proporcionan suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. H_1 representa una situación de "efecto" o "diferencia". Puede ser una hipótesis unilateral (por ejemplo, $\mu > 0$ o $\mu < 0$) o bilateral (por ejemplo, $\mu \neq 0$).

Nivel de Significación (α)

El nivel de significación (α) es la probabilidad de cometer un error tipo I, que es rechazar la hipótesis nula cuando en realidad es verdadera. Es un umbral predefinido que determina la sensibilidad del contraste de hipótesis. Comúnmente, se usan niveles de significación como $\alpha = 0.05$, $\alpha = 0.01$ o $\alpha = 0.10$. Un α de 0.05 indica una probabilidad del 5% de rechazar H_0 incorrectamente.

Región de Rechazo

La región de rechazo es el conjunto de valores de la estadística de prueba para los cuales se rechaza la hipótesis nula. Depende del nivel de significación y de la distribución de la estadística de prueba bajo H_0. Si la estadística de prueba cae dentro de esta región, se considera que los datos muestrales proporcionan suficiente evidencia para rechazar H_0.

Valor Crítico

El valor crítico es el límite que separa la región de rechazo del resto de la distribución de la estadística de prueba. Se determina en función del nivel de significación α y de la distribución de la estadística de prueba bajo H_0. En una prueba unilateral, hay un único valor crítico, mientras que en una prueba bilateral hay dos valores críticos (uno en cada extremo de la distribución).

Ejemplo de Conceptos Aplicados

Supongamos que queremos probar si la media poblacional μ es igual a 50 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

- **Hipótesis Nula (H_0)**: $\mu = 50$
- **Hipótesis Alternativa (H_1)**: $\mu \neq 50$ (contraste bilateral)
- **Nivel de Significación (α)**: 0.05
- **Región de Rechazo**: Para un contraste bilateral con $\alpha = 0.05$, la región de rechazo estará en los extremos de la distribución de la estadística de prueba (por ejemplo, los valores de z mayores que $z_{0.025}$ o menores que $-z_{0.025}$, donde $z_{0.025}$ corresponde al valor crítico de la distribución normal estándar que deja un 2.5% de probabilidad en cada cola).
- **Valor Crítico**: Para una prueba z, los valores críticos serían ± 1.96 (aproximadamente) porque $P(Z > 1.96) = 0.025$ y $P(Z < -1.96) = 0.025$.

Si la estadística de prueba calculada a partir de los datos muestrales cae en la región de rechazo (es decir, es mayor que 1.96 o menor que -1.96), rechazamos H_0. Si no cae en la región de rechazo, no rechazamos H_0.

Ejercicio 2: Pasos en un Contraste de Hipótesis

Pregunta: Describe los pasos necesarios para realizar un contraste de hipótesis. Ilustra estos pasos con un ejemplo simple en el que se quiera comprobar si la media de una muestra es igual a un valor específico.

Solución:

Pasos para Realizar un Contraste de Hipótesis

Para realizar un contraste de hipótesis, se siguen los siguientes pasos:

1. **Formular las Hipótesis**
   - **Hipótesis Nula (H_0)**: Es la hipótesis que se presume cierta hasta que se demuestre lo contrario.
   - **Hipótesis Alternativa (H_1)**: Es la hipótesis que se acepta si la evidencia sugiere que H_0 es falsa.
2. **Elegir el Nivel de Significación (α)**
   - α es la probabilidad de cometer un error tipo I (rechazar H_0 cuando es verdadera). Comúnmente, $\alpha = 0.05$.
3. **Seleccionar la Estadística de Prueba**
   - Dependiendo del tipo de hipótesis y de los datos, se selecciona la estadística adecuada (por ejemplo, z para una distribución normal con varianza conocida, t para varianza desconocida).
4. **Calcular la Estadística de Prueba**
   - Utilizar los datos muestrales para calcular el valor de la estadística de prueba.
5. **Determinar la Región de Rechazo**
   - Con base en α y la distribución de la estadística de prueba, determinar los valores críticos y la región de rechazo.
6. **Tomar una Decisión**
   - Comparar el valor de la estadística de prueba con los valores críticos para decidir si se rechaza o no H_0.
7. **Conclusión**
   - Interpretar los resultados en el contexto del problema original.

Ejemplo: Comprobar si la Media de una Muestra es Igual a un Valor Específico

Supongamos que queremos comprobar si la media de una población es igual a 50. Tenemos una muestra de tamaño $n = 30$, con una media muestral de $\bar{x} = 52$ y una desviación estándar conocida de $\sigma = 5$.

Paso 1: Formular las Hipótesis

- **Hipótesis Nula (H_0)**: $\mu = 50$
- **Hipótesis Alternativa (H_1)**: $\mu \neq 50$ (contraste bilateral)

Paso 2: Elegir el Nivel de Significación (α)

- $\alpha = 0.05$

Paso 3: Seleccionar la Estadística de Prueba Dado que la varianza es conocida y la muestra es suficientemente grande, utilizamos la estadística z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Paso 4: Calcular la Estadística de Prueba

$$z = \frac{52 - 50}{5/\sqrt{30}} \approx 2.19$$

Paso 5: Determinar la Región de Rechazo Para $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral, los valores críticos $z_{0.025}$ son aproximadamente ± 1.96.

Paso 6: Tomar una Decisión

- Comparamos el valor de z calculado con los valores críticos:

$$-1.96 < 2.19 < 1.96$$

El valor 2.19 está fuera del rango de -1.96 a 1.96.

Paso 7: Conclusión

- **Decisión**: Rechazamos la hipótesis nula H_0.

Interpretación: Hay suficiente evidencia para concluir que la media poblacional es diferente de 50 al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

En este ejemplo, hemos seguido los pasos para realizar un contraste de hipótesis para determinar si la media de la población es igual a un valor específico. Hemos formulado las hipótesis, elegido un nivel de significación, seleccionado la estadística de prueba adecuada, calculado el valor de la estadística de prueba, determinado la región de rechazo, tomado una decisión basada en los valores críticos y finalmente interpretado los resultados.

Ejercicio 3: Errores tipo I y tipo II. Potencia

Pregunta: Explica la diferencia entre los errores tipo I y tipo II en un contraste de hipótesis. ¿Qué es la potencia de un test? Calcula la probabilidad de cometer un error tipo I (α) y un error tipo II (β) en un contraste de hipótesis dado.

Solución:

Errores Tipo I y Tipo II en un Contraste de Hipótesis

En un contraste de hipótesis, existen dos tipos de errores que se pueden cometer:

Error Tipo I (α)

- **Definición**: Es el error que se comete al rechazar la hipótesis nula (H_0) cuando en realidad es verdadera.
- **Probabilidad (α)**: La probabilidad de cometer un error tipo I es denotada por α, y se establece como el nivel de significación del test. Es decir, α es la probabilidad de rechazar H_0 incorrectamente.
- **Interpretación**: Si se fija $\alpha = 0.05$, significa que hay un 5% de riesgo de concluir que H_0 es falsa cuando en realidad es verdadera.

Error Tipo II (β)

- **Definición**: Es el error que se comete al no rechazar la hipótesis nula (H_0) cuando en realidad es falsa.
- **Probabilidad (β)**: La probabilidad de cometer un error tipo II es denotada por β.
- **Interpretación**: β representa la probabilidad de no detectar un efecto o diferencia cuando realmente existe.

Potencia de un Test

- **Definición**: La potencia de un test es la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es falsa. Es decir, es la probabilidad de detectar un efecto o diferencia cuando realmente existe.
- **Cálculo**: La potencia se denota por $1 - \beta$. A mayor potencia, mayor capacidad del test para detectar un efecto real.

Cálculo de α y β en un Contraste de Hipótesis Dado

Supongamos un ejemplo donde se quiere contrastar la media poblacional μ con el valor 50 utilizando una muestra de tamaño $n = 30$, una desviación estándar conocida $\sigma = 5$, y un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Datos:

- $\mu_0 = 50$ (hipótesis nula)
- $\mu_1 = 52$ (hipótesis alternativa específica)
- $\sigma = 5$
- $n = 30$
- $\alpha = 0.05$

Paso 1: Determinar los valores críticos para $\alpha = 0.05$ (contraste bilateral)

$$z_{\alpha/2} = \pm 1.96$$

Paso 2: Calcular los límites de la región de rechazo Para $\alpha = 0.05$ y una media $\mu_0 = 50$:

$$\text{Límite inferior} = \mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 48.21$$
$$\text{Límite superior} = \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx 51.79$$

Paso 3: Calcular β Supongamos que la verdadera media poblacional es $\mu_1 = 52$:

$$z = \frac{51.79 - 52}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{51.79 - 52}{5/\sqrt{30}} \approx -0.23$$

$$z = \frac{48.21 - 52}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{48.21 - 52}{5/\sqrt{30}} \approx -4.15$$

- La probabilidad de que $z > -0.23$ es aproximadamente 0.5910 (de la tabla Z).
- La probabilidad de que $z < -4.15$ es prácticamente 0.

Entonces, $\beta \approx 0.5910$.

Paso 4: Calcular la Potencia del Test

$$\text{Potencia} = 1 - \beta = 1 - 0.5910 = 0.4090$$

Resumen

- **Error Tipo I (α)**: En este ejemplo, α es predefinido como 0.05, lo que significa que hay un 5% de probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera.
- **Error Tipo II (β)**: Calculado como 0.5910, lo que significa que hay un 59.1% de probabilidad de no rechazar H_0 cuando $\mu = 52$.
- **Potencia del Test**: Calculada como 0.4090, lo que significa que hay un 40.9% de probabilidad de rechazar H_0 cuando $\mu = 52$.

Ejercicio 4: Contraste para la media de una población normal con varianza conocida

Problema: Se tiene una muestra de tamaño $n = 30$ con una media muestral de $\bar{x} = 50$ y una varianza conocida de $\sigma^2 = 25$. Realiza un contraste de hipótesis para verificar si la media poblacional es 52 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución:

Datos:

- Tamaño de la muestra (n): 30
- Media muestral ($\bar{x}$): 50
- Varianza poblacional (σ^2): 25 (desviación estándar $\sigma = \sqrt{25} = 5$)
- Media poblacional bajo H_0 (μ_0): 52
- Nivel de significación (α): 0.05

Paso 1: Formular las Hipótesis

- **Hipótesis Nula (H_0)**: $\mu = 52$
- **Hipótesis Alternativa (H_1)**: $\mu \neq 52$ (contraste bilateral)

Paso 2: Elegir el Nivel de Significación

- $\alpha = 0.05$

Paso 3: Seleccionar la Estadística de Prueba Como la varianza es conocida, utilizamos la estadística z:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Paso 4: Calcular la Estadística de Prueba

$$z = \frac{50 - 52}{5/\sqrt{30}} \approx -2.19$$

Paso 5: Determinar la Región de Rechazo Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral, los valores críticos son:

$$z_{\alpha/2} = \pm 1.96$$

La región de rechazo son los valores de z que son menores que -1.96 o mayores que 1.96.

Paso 6: Tomar una Decisión Comparamos el valor calculado de z con los valores críticos:

- Valor calculado: $z = -2.19$
- Valores críticos: -1.96 y 1.96

Dado que -2.19 es menor que -1.96, el valor de z cae en la región de rechazo.

Paso 7: Conclusión

- **Decisión**: Rechazamos la hipótesis nula H_0.

Interpretación: Hay suficiente evidencia para concluir que la media poblacional es diferente de 52 al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Ejercicio 5: Contraste para la media de una población normal con varianza desconocida

Problema: Una muestra de tamaño $n = 20$ tiene una media muestral de $\bar{x} = 30$ y una desviación estándar muestral de $s = 5$. Realiza un contraste de hipótesis para probar si la media poblacional es diferente de 32 con un nivel de significación $\alpha = 0.01$.

Solución:

Para realizar el contraste de hipótesis para probar si la media poblacional es diferente de 32, seguiremos estos pasos:

Paso 1: Plantear las hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $\mu = 32$
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $\mu \neq 32$

Paso 2: Seleccionar el nivel de significación

- $\alpha = 0.01$

Paso 3: Calcular el estadístico de prueba

Usaremos el estadístico t para muestras pequeñas cuando la desviación estándar poblacional no es conocida:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Donde: - $\bar{x}$ es la media muestral. - μ_0 es la media poblacional bajo la hipótesis nula. - s es la desviación estándar muestral. - n es el tamaño de la muestra.

Sustituyendo los valores:

$$\begin{gathered} \bar{x} = 30 \\ \mu_0 = 32 \\ s = 5 \\ n = 20 \end{gathered}$$

$$t = \frac{30 - 32}{5/\sqrt{20}} \approx -1.79$$

Paso 4: Determinar los grados de libertad y el valor crítico

Los grados de libertad (df) se calculan como $df = n - 1 = 20 - 1 = 19$.

Buscamos los valores críticos para un nivel de significación $\alpha = 0.01$ en una prueba bilateral (dos colas) en la distribución t de Student con 19 grados de libertad.

Para $\alpha = 0.01$, el valor crítico t_c es aproximadamente ± 2.861 (usando una tabla de valores críticos de t-Student o una calculadora estadística).

Paso 5: Tomar una decisión

Comparamos el valor absoluto del estadístico de prueba con el valor crítico:

- Si $|t| > t_c$, rechazamos H_0.
- Si $|t| \leq t_c$, no rechazamos H_0.

En este caso:

$$|t| = 1.79$$
$$t_c = 2.861$$

Dado que $|t| < t_c$, no rechazamos H_0.

Con un nivel de significación $\alpha = 0.01$, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto significa que no podemos concluir que la media poblacional sea diferente de 32.

Ejercicio 6: Contraste de hipótesis para la igualdad de medias de dos muestras independientes

Pregunta: Se tienen dos muestras independientes: - Muestra A: $x_A = \{23, 21, 22, 24, 25, 23, 24, 22,$ - Muestra B: $x_B = \{18, 19, 17, 20, 18, 19, 18, 19, 20, 18\}$ Realiza un contraste de hipótesis para verificar si las medias de las dos poblaciones son diferentes con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución:

Para realizar un contraste de hipótesis para verificar si las medias de dos poblaciones son diferentes con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, seguiremos estos pasos:

Paso 1: Plantear las hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $\mu_A = \mu_B$ (las medias de las dos poblaciones son iguales)
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $\mu_A \neq \mu_B$ (las medias de las dos poblaciones son diferentes)

Paso 2: Seleccionar el nivel de significación

- $\alpha = 0.05$

Paso 3: Calcular las estadísticas muestrales

Primero, calculemos las medias y las desviaciones estándar de ambas muestras.

Muestra A:

$$x_A = \{23, 21, 22, 24, 25, 23, 24, 22, 23, 24\}$$

$$\bar{x}_A = \frac{1}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} x_{A_i} = 23.1$$

$$s_A = \sqrt{\frac{1}{n_A - 1} \sum_{i=1}^{n_A} (x_{A_i} - \bar{x}_A)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \left((23 - 23.1)^2 + ... + (24 - 23.1)^2\right)}$$

Muestra B:

$$x_B = \{18, 19, 17, 20, 18, 19, 18, 19, 20, 18\}$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n_B} \sum_{i=1}^{n_B} x_{B_i} = 18.6$$

$$s_B = \sqrt{\frac{1}{n_B - 1} \sum_{i=1}^{n_B} (x_{B_i} - \bar{x}_B)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} \left((18 - 18.6)^2 + ... + (18 - 18.6)^2\right)}$$

Vamos a calcular estas estadísticas numéricamente.

Paso 4: Calcular el estadístico de prueba

Usaremos el estadístico t para comparar las medias de dos muestras independientes:

$$t = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}}$$

Donde: - $\bar{x}_A$ y $\bar{x}_B$ son las medias muestrales. - s_A y s_B son las desviaciones estándar muestrales. - n_A y n_B son los tamaños de las muestras.

Paso 5: Determinar los grados de libertad y el valor crítico

Los grados de libertad se pueden aproximar usando la fórmula de Welch-Satterthwaite:

$$df \approx \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A}\right)^2}{n_A - 1} + \frac{\left(\frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{n_B - 1}}$$

Buscamos el valor crítico para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral en la distribución t de Student con los grados de libertad calculados.

Paso 6: Tomar una decisión

Comparamos el valor absoluto del estadístico de prueba con el valor crítico:

- Si $|t| > t_c$, rechazamos H_0.
- Si $|t| \leq t_c$, no rechazamos H_0.

Cálculos Numéricos

Realicemos los cálculos numéricos necesarios.

Resultados del Contraste de Hipótesis

Estadísticas muestrales:

- **Muestra A**:
  - Media muestral $\bar{x}_A = 23.1$
  - Desviación estándar muestral $s_A = 1.197$
- **Muestra B**:
  - Media muestral $\bar{x}_B = 18.6$
  - Desviación estándar muestral $s_B = 0.966$

Estadístico de prueba:

$$t = 9.25$$

Grados de libertad (aproximados):

$$df \approx 17.23$$

Valor crítico para $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral:

$$t_c = 2.108$$

Decisión

Comparando el valor absoluto del estadístico de prueba con el valor crítico:

$$|t| = 9.25$$

$$t_c = 2.108$$

Dado que $|t| > t_c$, rechazamos H_0.

Con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto significa que podemos concluir que las medias de las dos poblaciones son significativamente diferentes.

Ejercicio 7: Contraste de hipótesis para la diferencia de proporciones

Pregunta: En un estudio se observa que de 200 hombres, 130 prefieren el producto A, mientras que de 250 mujeres, 140 prefieren el mismo producto. Realiza un contraste de hipótesis para determinar si existe una diferencia significativa en las proporciones de hombres y mujeres que prefieren el producto A con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución: Para realizar un contraste de hipótesis sobre la diferencia en las proporciones de dos poblaciones (hombres y mujeres en este caso) que prefieren el producto A, seguiremos estos pasos:

Paso 1: Plantear las hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $p_1 = p_2$ (no hay diferencia en las proporciones de hombres y mujeres que prefieren el producto A)
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $p_1 \neq p_2$ (hay una diferencia en las proporciones de hombres y mujeres que prefieren el producto A)

Donde: - p_1 es la proporción de hombres que prefieren el producto A. - p_2 es la proporción de mujeres que prefieren el producto A.

Paso 2: Seleccionar el nivel de significación

- $\alpha = 0.05$

Paso 3: Calcular las proporciones muestrales

- $n_1 = 200$ (número de hombres)
- $x_1 = 130$ (hombres que prefieren el producto A)
- $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{130}{200} = 0.65$
- $n_2 = 250$ (número de mujeres)
- $x_2 = 140$ (mujeres que prefieren el producto A)
- $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{140}{250} = 0.56$

Paso 4: Calcular el estadístico de prueba

Utilizamos la fórmula para el contraste de dos proporciones:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

Donde: - $\hat{p}$ es la proporción combinada de las dos muestras:

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{130 + 140}{200 + 250} = 0.6$$

Paso 5: Determinar el valor crítico

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral, el valor crítico z_c es aproximadamente ± 1.96.

Paso 6: Tomar una decisión

Comparamos el valor absoluto del estadístico de prueba con el valor crítico:

- Si $|z| > z_c$, rechazamos H_0.
- Si $|z| \leq z_c$, no rechazamos H_0.

Cálculos Numéricos

Realicemos los cálculos numéricos necesarios para encontrar el valor del estadístico de prueba z.

Resultados del Contraste de Hipótesis

Proporciones muestrales:

- Proporción de hombres que prefieren el producto A: $\hat{p}_1 = 0.65$
- Proporción de mujeres que prefieren el producto A: $\hat{p}_2 = 0.56$

Proporción combinada:

$$\hat{p} = 0.6$$

Estadístico de prueba:

$$z = 1.94$$

Valor crítico para $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral:

$$z_c = 1.96$$

Decisión

Comparando el valor absoluto del estadístico de prueba con el valor crítico:

$$|z| = 1.94$$

$$z_c = 1.96$$

Dado que $|z| < z_c$, no rechazamos H_0.

Con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto significa que no podemos concluir que existe una diferencia significativa en las proporciones de hombres y mujeres que prefieren el producto A.

Ejercicio 8: Aplicación en un contexto real

Pregunta: Un fabricante afirma que el peso medio de sus paquetes de galletas es 500 gramos. Una muestra de 40 paquetes tiene una media de 495 gramos y una desviación estándar de 10 gramos. Realiza un contraste de hipótesis para comprobar la afirmación del fabricante con un nivel de significación $\alpha = 0.01$.

Solución:

Para realizar un contraste de hipótesis para comprobar la afirmación del fabricante sobre el peso medio de los paquetes de galletas, seguiremos estos pasos:

Paso 1: Plantear las hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $\mu = 500$ gramos (el peso medio es 500 gramos)
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $\mu \neq 500$ gramos (el peso medio es diferente de 500 gramos)

Paso 2: Seleccionar el nivel de significación

- $\alpha = 0.01$

Paso 3: Calcular el estadístico de prueba

Utilizamos el estadístico t para muestras grandes (n > 30), especialmente cuando la desviación estándar poblacional no es conocida:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Donde: - $\bar{x}$ es la media muestral. - μ_0 es la media poblacional bajo la hipótesis nula. - s es la desviación estándar muestral. - n es el tamaño de la muestra.

Sustituyendo los valores:

$$\bar{x} = 495$$
$$\mu_0 = 500$$
$$s = 10$$
$$n = 40$$

$$t = \frac{495 - 500}{10/\sqrt{40}} = \frac{-5}{10/6.32} \approx -3.16$$

Paso 4: Determinar el valor crítico

Buscamos los valores críticos para un nivel de significación $\alpha = 0.01$ en una prueba bilateral (dos colas) en la distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad (df = 39).

Para $\alpha = 0.01$, el valor crítico t_c es aproximadamente ± 2.708 (usando una tabla de valores críticos de t-Student o una calculadora estadística).

Paso 5: Tomar una decisión

Comparamos el valor absoluto del estadístico de prueba con el valor crítico:

- Si $|t| > t_c$, rechazamos H_0.
- Si $|t| \leq t_c$, no rechazamos H_0.

En este caso:

$$|t| = 3.16$$
$$t_c = 2.708$$

Dado que $|t| > t_c$, rechazamos H_0.

Con un nivel de significación $\alpha = 0.01$, hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto significa que podemos concluir que el peso medio de los paquetes de galletas es significativamente diferente de 500 gramos.

Ejercicio 9: Prueba t de Student

Pregunta: Se tiene una muestra de tamaño $n = 25$ de una población normal con una media muestral de $\bar{x} = 20$ y una desviación estándar muestral de $s = 4$. Realiza un contraste de hipótesis para probar si la media poblacional es mayor que 18 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solucion:

Para realizar un contraste de hipótesis para probar si la media poblacional es mayor que 18, seguiremos estos pasos:

Paso 1: Plantear las hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $\mu \leq 18$ (la media poblacional es menor o igual a 18)
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $\mu > 18$ (la media poblacional es mayor que 18)

Paso 2: Seleccionar el nivel de significación

- $\alpha = 0.05$

Paso 3: Calcular el estadístico de prueba

Utilizamos el estadístico t porque la muestra es pequeña (n < 30) y la desviación estándar poblacional no es conocida:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

Donde: - $\bar{x}$ es la media muestral. - μ_0 es la media poblacional bajo la hipótesis nula. - s es la desviación estándar muestral. - n es el tamaño de la muestra.

Sustituyendo los valores:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 20 \\ \mu_0 &= 18 \\ s &= 4 \\ n &= 25 \end{aligned}$$

$$t = \frac{20 - 18}{4/\sqrt{25}} = 2.5$$

Paso 4: Determinar el valor crítico

Buscamos el valor crítico para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba unilateral (cola derecha) en la distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad (df = 24).

Para $\alpha = 0.05$, el valor crítico t_c es aproximadamente 1.711 (usando una tabla de valores críticos de t-Student o una calculadora estadística).

Paso 5: Tomar una decisión

Comparamos el valor del estadístico de prueba con el valor crítico:

- Si $t > t_c$, rechazamos H_0.
- Si $t \leq t_c$, no rechazamos H_0.

En este caso:

$$\begin{aligned} t &= 2.5 \\ t_c &= 1.711 \end{aligned}$$

Dado que $t > t_c$, rechazamos H_0.

Con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto significa que podemos concluir que la media poblacional es mayor que 18.

Ejercicio 10: Prueba z para grandes muestras

Problema: Una encuesta a 500 personas revela que 320 están a favor de una nueva ley. Realiza un contraste de hipótesis para determinar si la proporción de personas a favor de la ley es diferente de 0.6 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$.

Solución:

Para realizar un contraste de hipótesis sobre la proporción de personas a favor de una nueva ley, seguiremos estos pasos:

Paso 1: Plantear las hipótesis

- **Hipótesis nula (H_0)**: $p = 0.6$ (la proporción de personas a favor de la ley es 0.6)
- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $p \neq 0.6$ (la proporción de personas a favor de la ley es diferente de 0.6)

Paso 2: Seleccionar el nivel de significación

- $\alpha = 0.05$

Paso 3: Calcular la proporción muestral

$$\hat{p} = \frac{x}{n}$$

Donde: - x es el número de personas a favor de la ley. - n es el tamaño de la muestra.

Sustituyendo los valores:

$$x = 320$$
$$n = 500$$

$$\hat{p} = \frac{320}{500} = 0.64$$

Paso 4: Calcular el estadístico de prueba

Utilizamos el estadístico z para proporciones:

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Donde: - $\hat{p}$ es la proporción muestral. - p_0 es la proporción bajo la hipótesis nula. - n es el tamaño de la muestra.

Sustituyendo los valores:

$$p_0 = 0.6$$

$$z = \frac{0.64 - 0.6}{\sqrt{\frac{0.6 \cdot (1-0.6)}{500}}} \approx 1.826$$

Paso 5: Determinar el valor crítico

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral, el valor crítico z_c es aproximadamente ± 1.96 (usando una tabla de valores críticos de la distribución normal estándar).

Paso 6: Tomar una decisión

Comparamos el valor absoluto del estadístico de prueba con el valor crítico:

- Si $|z| > z_c$, rechazamos H_0.
- Si $|z| \leq z_c$, no rechazamos H_0.

En este caso:

$$|z| = 1.826$$
$$z_c = 1.96$$

Dado que $|z| < z_c$, no rechazamos H_0.

Con un nivel de significación $\alpha = 0.05$, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. Esto significa que no podemos concluir que la proporción de personas a favor de la ley sea diferente de 0.6.