# Regresión Lineal Simple

Víctor Aceña - Isaac Martín

DSLAB

2025-09-10

# Fundamento del Modelado Estadístico

La regresión lineal constituye uno de los **pilares fundamentales** de la modelización estadística.

**¿Por qué es tan importante?**

- Es el **primer modelo predictivo** que se aprende por su simplicidad e interpretabilidad
- Los conceptos aquí desarrollados son la **base para técnicas avanzadas**: regresión múltiple, GLMs, machine learning
- Proporciona el **marco conceptual** para toda la inferencia estadística en modelos lineales

**Nuestro enfoque:**

Seguiremos el **ciclo completo** de un proyecto de modelado: exploración $\rightarrow$ formalización $\rightarrow$ estimación $\rightarrow$ inferencia $\rightarrow$ diagnóstico

# Objetivos de Aprendizaje

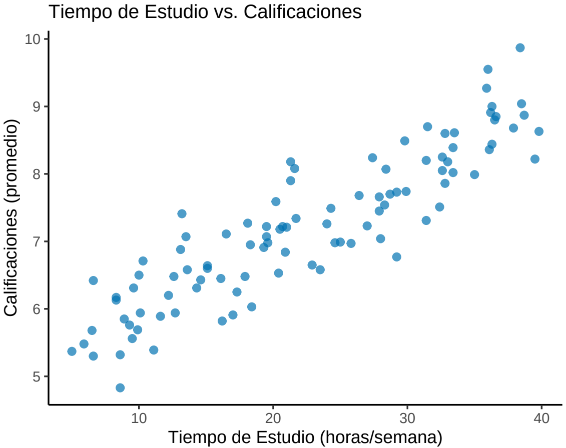
1. **Comprender y aplicar** el proceso de modelización estadística para problemas con una variable predictora
2. **Identificar y medir** la correlación lineal entre dos variables como paso previo al modelado
3. **Describir la formulación matemática** del modelo de regresión lineal simple e interpretar sus parámetros
4. **Estimar los coeficientes** mediante mínimos cuadrados ordinarios (MCO) y entender sus propiedades
5. **Realizar inferencias** sobre los parámetros del modelo y evaluar su bondad de ajuste
6. **Diagnosticar la adecuación** del modelo verificando si se cumplen los supuestos

**Pregunta de investigación:** ¿Influye el tiempo de estudio semanal en las calificaciones finales?

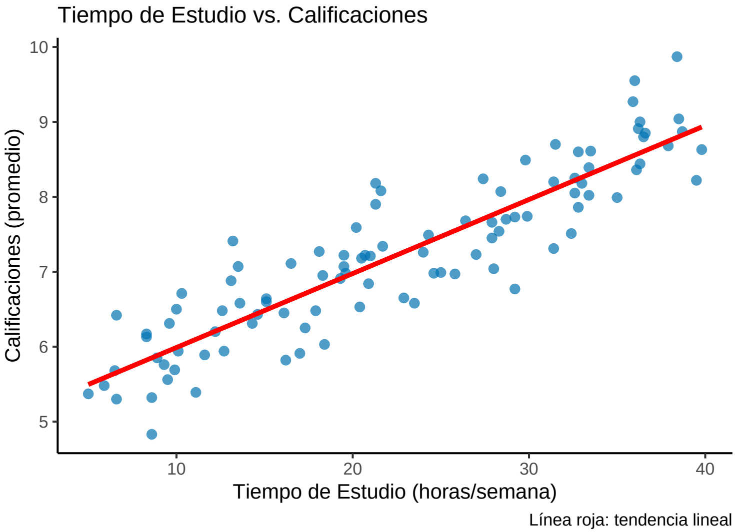
**Simulación de datos realista:**

- 100 estudiantes universitarios
- Tiempo de estudio: entre 5 y 40 horas/semana
- Calificaciones: escala de 0 a 10 puntos

**Pregunta:** ¿Qué patrón observas en los datos?



# Ejemplo Motivador: Primera Observación




- **Tendencia clara:** A más tiempo de estudio, mejores calificaciones
- **Relación lineal:** Los puntos siguen aproximadamente una línea recta
- **Dirección positiva:** Pendiente ascendente

**Conclusión:** La tendencia lineal positiva justifica un modelo de regresión lineal.

# Paso 1: Exploración Visual - El Gráfico de Dispersión

El **gráfico de dispersión** (*scatterplot*) es la herramienta más potente para examinar la relación entre dos variables continuas.

**¿Qué nos permite evaluar?**

**Características de la relación:**

- **Forma**: ¿Es lineal, curva, o sin patrón?
- **Dirección**: ¿Positiva o negativa?
- **Fuerza**: ¿Qué tan estrecha es la relación?
- **Valores atípicos**: ¿Hay observaciones extremas?

**Criterios para regresión lineal:**

- **Linealidad**: Los puntos siguen una tendencia recta
- **Variabilidad constante**: La dispersión es similar en todo el rango
- **Sin valores atípicos extremos**: No hay puntos que distorsionen la relación

**Principio:** La visualización SIEMPRE precede a la cuantificación

# Paso 2: Cuantificación - Covarianza y Correlación

Una vez que la visualización sugiere una tendencia, necesitamos métricas para cuantificarla.

**Covarianza muestral:**

$$\text{Cov}(x, y) = s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

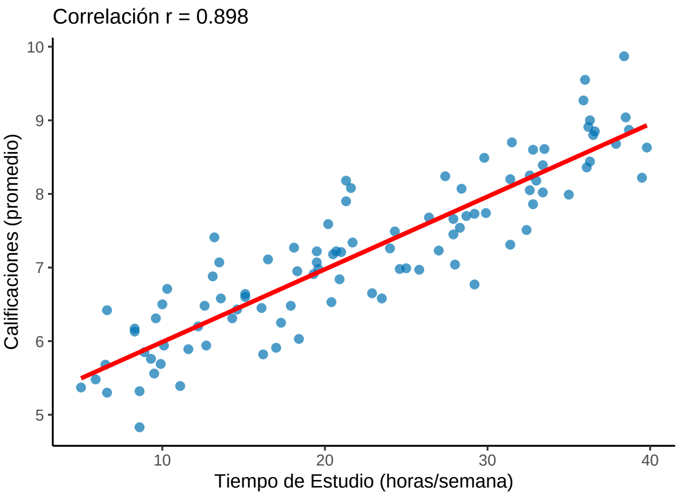
- **Problema**: Su magnitud depende de las unidades de las variables

**Coeficiente de correlación de Pearson:**

$$r = r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

- **Ventajas**: Adimensional, siempre entre -1 y 1
- **Interpretación**: Fuerza de la asociación *lineal*

# Cuantificación en Nuestro Ejemplo




**Resultados del análisis:**

- **Covarianza**: 9.82 (difícil de interpretar por las unidades)
- **Correlación**: **0.898** (asociación lineal muy fuerte y positiva)

La línea roja muestra la **tendencia lineal** de los datos.

# Correlación NO Implica Causalidad

Encontrar una **correlación fuerte** (0.898) entre tiempo de estudio y calificaciones **NO** nos autoriza a concluir que *una causa la otra*.

**¿Por qué?**

**Posibles explicaciones alternativas:**

- **Variable oculta**: El interés del estudiante influye tanto en las horas de estudio como en las calificaciones
- **Causalidad inversa**: Los estudiantes con mejores calificaciones se motivan a estudiar más
- **Terceras variables**: Calidad del sueño, técnicas de estudio, etc.

**La regresión lineal puede:**

Demostrar que las variables se mueven juntas
Permitirnos predecir una a partir de la otra
Cuantificar la fuerza de la asociación

**NO puede:**

Explicar el porqué de la relación
Establecer causalidad sin diseño experimental

# El Modelo Poblacional

Una vez confirmada la relación lineal, **formalizamos** matemáticamente nuestra observación.

**El modelo poblacional** postula que la relación verdadera sigue una línea recta con aleatoriedad:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

**Componentes:**

**Parte sistemática:**

- $\beta_0$: **Intercepto** (parámetro poblacional desconocido)
- $\beta_1$: **Pendiente** (parámetro poblacional desconocido)

**Parte aleatoria:**

- $\varepsilon_i$: **Error aleatorio** que incluye:
  - Variables omitidas
  - Error de medición
  - Aleatoriedad intrínseca

**Nunca observamos la población** → Usamos la muestra para estimar el **modelo muestral**

# Del Modelo Poblacional al Modelo Muestral

**Modelo poblacional** (desconocido):

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$$

**Modelo muestral** (estimado):

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

**Terminología clave:**

- Los "**gorros**" ($\hat{\cdot}$) indican **estimaciones** calculadas de la muestra
- La diferencia $e_i = y_i - \hat{y}_i$ es el **residuo** (aproximación empírica del error $\varepsilon_i$)
- $\hat{y}_i$ es el **valor predicho** por el modelo

**Objetivo:** Usar la muestra para encontrar la "mejor" recta de ajuste

# Los Supuestos del Modelo

Para que nuestras estimaciones e inferencias sean válidas, asumimos que los errores $\varepsilon_i$ se comportan ordenadamente:

1. **Linealidad**: $E[Y_i|X_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i$
2. **Independencia**: $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$
3. **Homocedasticidad**: $Var(\varepsilon_i|X_i) = \sigma^2$ (varianza constante)
4. **Normalidad** (para inferencia): $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

**Importancia:** Estos supuestos garantizan las **propiedades óptimas** de los estimadores de mínimos cuadrados y la **validez** de la inferencia estadística.

# El Método de Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

**Criterio:** Encontrar la recta que **minimice** la suma de los cuadrados de los errores.

$$\text{SSE}(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_i))^2$$

**¿Por qué este criterio?**

- Los errores positivos y negativos no se cancelan
- Penaliza más los errores grandes
- Tiene solución analítica única
- Proporciona estimadores con propiedades óptimas

**Interpretación geométrica:**

Minimizamos la suma de las **distancias verticales al cuadrado** entre los puntos observados y la recta de regresión.

# Derivación de las Fórmulas de MCO

Para encontrar $\beta_0$ y $\beta_1$ que minimizan SSE, usamos cálculo:

**Derivadas parciales:**

$$\frac{\partial \text{SSE}}{\partial \beta_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

$$\frac{\partial \text{SSE}}{\partial \beta_1} = -2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$$

**Resolviendo el sistema (ecuaciones normales):**

Al resolver estas ecuaciones simultáneamente, obtenemos las fórmulas de MCO.

# Fórmulas Finales de MCO

**Fórmula para la pendiente:**

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = \frac{\text{Covarianza muestral}}{\text{Varianza muestral de } X}$$

**Fórmula para el intercepto:**

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

**Notación:**

- $s_{xy} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ (suma de productos cruzados)
- $s_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ (suma de cuadrados de $X$)

**Interpretación intuitiva:**
La pendiente es la razón entre la covariación de $X$ e $Y$ y la variación de $X$.

# Propiedades de las Predicciones

Las estimaciones MCO generan predicciones ($\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$) con **propiedades matemáticas específicas**:

1. **La recta pasa por el centro de los datos**: $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y}$$

**Demostración:** Sumando la ecuación de predicción para todas las observaciones:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

2. **Promedio de predicciones = Promedio observado**:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \bar{y}$$

**Importancia:** La recta de regresión siempre pasa por el **punto central** de los datos

# Propiedades de los Residuos

Los residuos MCO ($e_i = y_i - \hat{y}_i$) tienen **propiedades fundamentales**:

3. **Suma de residuos = 0**:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

4. **Residuos no correlacionados con $X$**:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

5. **Residuos no correlacionados con predicciones**:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i e_i = 0$$

**Implicación:** Estas propiedades garantizan que MCO es **insesgado** y **óptimo**

# Interpretación de los Coeficientes

Una vez estimados, los coeficientes tienen interpretación concreta y práctica:

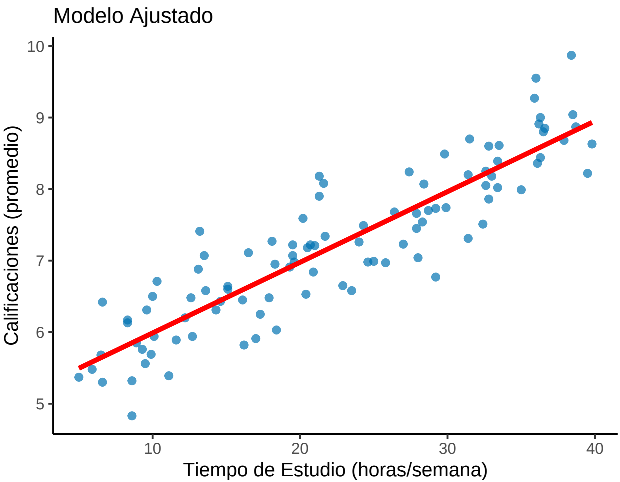
**Pendiente** ($\hat{\beta}_1$):

- Representa el **cambio promedio esperado** en $Y$ por cada **aumento de una unidad** en $X$
- En nuestro ejemplo: puntos que aumenta la calificación por cada hora adicional de estudio

**Intercepto** ($\hat{\beta}_0$):

- Valor promedio esperado de $Y$ cuando $X = 0$
- Solo tiene sentido práctico si $X = 0$ es plausible y está en el rango de los datos
- A menudo es solo un "ancla matemática" para la recta

**Nota importante:** La interpretación siempre debe considerar el contexto del problema y la plausibilidad de los valores.




**Ecuación del modelo:**

Calificaciones $= 5.001 + 0.099 \times$ Tiempo_Est

**Interpretación de coeficientes:**

- **Intercepto** ($\hat{\beta}_0 = 5.001$): Calificación esperada con 0 horas de estudio
- **Pendiente** ($\hat{\beta}_1 = 0.099$): Por cada hora adicional de estudio, la calificación aumenta en promedio 0.099 puntos

**Conclusión:** Relación positiva y significativa entre tiempo de estudio y calificaciones.

# Propiedades de los Estimadores de MCO

Bajo los supuestos de Gauss-Markov, los estimadores MCO son **MELI** (Mejores Estimadores Lineales Insesgados):

**1. Insesgadez:**

$$E[\hat{\beta}_0] = \beta_0 \quad \text{y} \quad E[\hat{\beta}_1] = \beta_1$$

Los estimadores MCO son **correctos en promedio** - no tienen sesgo sistemático.

**2. Varianza mínima:**

Entre todos los estimadores lineales insesgados, los MCO tienen la menor varianza posible.

**3. Varianzas conocidas:**

Las varianzas de los estimadores tienen formas matemáticas específicas y conocidas.

# Varianzas de los Estimadores de MCO

**Para la pendiente:**

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}$$

donde $S_{xx} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

**Interpretación:**

- $Var(\hat{\beta}_1)$ disminuye con mayor dispersión en $X$ (mayor $S_{xx}$)
- Más datos esparcidos $\rightarrow$ mejor estimación de la pendiente

**Para el intercepto:**

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]$$

**Interpretación:**

- $Var(\hat{\beta}_0)$ aumenta cuando $\bar{x}$ está lejos de cero
- El intercepto se estima mejor cuando $\bar{x}$ está cerca de cero
- Mayor tamaño de muestra $(n)$ reduce la varianza

# Estimación de la Varianza del Error

Las fórmulas de varianza dependen de $\sigma^2$ (desconocida). La estimamos con:

**Media Cuadrática del Error (MSE):**

$$\hat{\sigma}^2 = \text{MSE} = \frac{\text{SSE}}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$

**¿Por qué $n-2$?**

- Son los **grados de libertad del error**
- Hemos "gastado" 2 grados de libertad estimando $\beta_0$ y $\beta_1$

**Error estándar de los residuos:**

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\text{MSE}}$$

También llamado **RMSE** en *machine learning* $\rightarrow$ Mide la dispersión promedio alrededor de la recta

# Análisis de la Varianza (ANOVA) para la Regresión

**Pregunta clave:** ¿Es el modelo útil o la relación observada es casualidad?

**Contraste de hipótesis:**

- $H_0 : \beta_1 = 0$ (no hay relación lineal)
- $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (sí hay relación lineal)

**Descomposición de la variabilidad total:**

$$\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$$

**Esta ecuación es fundamental:** Toda la variabilidad se divide en **explicada** y **no explicada**

# Suma Total de Cuadrados (SST)

**Definición:**

$$\text{SST} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$$

**¿Qué mide?**

- La **variabilidad total** de $Y$ respecto a su media $\bar{y}$
- Es la varianza muestral de $Y$ multiplicada por $(n-1)$
- Representa **toda la dispersión** que queremos explicar con nuestro modelo

**Interpretación:**

Si no tuviéramos ningún modelo y solo usáramos $\bar{y}$ para predecir, SST sería el **error total** que cometeríamos.

# Suma de Cuadrados de la Regresión (SSR)

**Definición:**

$$\text{SSR} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

**¿Qué mide?**

- La variabilidad que **explica** nuestro modelo de regresión
- Es la variabilidad de las predicciones $\hat{y}_i$ respecto a la media $\bar{y}$
- Representa la **señal** que nuestro modelo logra captar

**Interpretación:**

Mide cuánto **mejor** es nuestro modelo comparado con simplemente usar $\bar{y}$ como predicción.

# Suma de Cuadrados del Error (SSE)

**Definición:**

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

**¿Qué mide?**

- La variabilidad **no explicada** por nuestro modelo
- Es la suma de los cuadrados de los residuos
- Representa el **ruido** que nuestro modelo no puede captar

**Interpretación:**

Es exactamente lo que **minimiza el método MCO** para encontrar la mejor recta.

# La Descomposición Fundamental de la Variabilidad

**La ecuación clave:**

$$\text{SST} = \text{SSR} + \text{SSE}$$

**Interpretación intuitiva:**

**En palabras:**

- **SST**: "¿Cuánta variabilidad hay que explicar?"
- **SSR**: "¿Cuánta variabilidad explica mi modelo?"
- **SSE**: "¿Cuánta variabilidad queda sin explicar?"

**En porcentajes:**

- **SST**: 100% de la variabilidad
- **SSR**: % explicado por el modelo
- **SSE**: % no explicado (error)

**Consecuencia:** Si SSR es grande comparado con SSE $\rightarrow$ El modelo es útil

# El Estadístico F

**Estadístico F:**

$$F = \frac{\text{MSR}}{\text{MSE}} = \frac{\text{SSR}/1}{\text{SSE}/(n-2)}$$

**Interpretación:**

- **MSR**: Variabilidad explicada por grado de libertad
- **MSE**: Variabilidad no explicada por grado de libertad
- **F**: Ratio entre variabilidad explicada vs no explicada

# La Lógica del Contraste F (I): Si No Hay Relación

**Si $H_0 : \beta_1 = 0$ fuera cierta (no hay relación lineal):**

- El modelo lineal sería **inútil** para explicar $Y$
- Todas las predicciones $\hat{y}_i$ serían iguales a $\bar{y}$
- Por tanto: $\text{SSR} = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \approx 0$ (muy pequeña)

**Consecuencia matemática:**

$$F = \frac{\text{SSR}/1}{\text{SSE}/(n-2)} \approx \frac{0}{\text{MSE}} \approx 0$$

**En palabras:** Si no hay relación, F debería ser cercano a **cero**

# La Lógica del Contraste F (II): Si Hay Relación

**Si $H_1 : \beta_1 \neq 0$ fuera cierta (sí hay relación lineal):**

- El modelo **captura** la relación entre $X$ e $Y$
- Las predicciones $\hat{y}_i$ varían siguiendo el patrón de los datos
- Por tanto: SSR sería **grande** (el modelo explica mucha variabilidad)

**Consecuencia matemática:**

$$F = \frac{\text{SSR grande}}{\text{MSE}} >> 1$$

**Decisión estadística:**

- **F** $\approx$ **0** $\rightarrow$ No rechazamos $H_0$ $\rightarrow$ El modelo no es útil
- **F » 1** $\rightarrow$ Rechazamos $H_0$ $\rightarrow$ El modelo **sí es útil**

# Tabla ANOVA: Resumen de la Descomposición

| Fuente | $df$ | $SS$ | $MS = SS/df$ | Estadístico $F$ |
|---|---|---|---|---|
| Regresión | 1 | $SSR$ | $MSR$ | $F = MSR/MSE$ |
| Error | $n-2$ | $SSE$ | $MSE$ | |
| Total | $n-1$ | $SST$ | | |

**¿Cómo leer esta tabla?**

- **Fila "Regresión"**: Cuantifica lo que el modelo **explica**
- **Fila "Error"**: Cuantifica lo que el modelo **no explica**
- **Fila "Total"**: La variabilidad total que queremos explicar

**El estadístico F resume todo:**

$$F = \frac{\text{Variabilidad explicada por df}}{\text{Variabilidad no explicada por df}} = \frac{MSR}{MSE}$$

En regresión simple, $F = t^2$ donde $t$ es el estadístico para contrastar $\beta_1 = 0$

# Bondad del Ajuste: Coeficiente de Determinación ($R^2$)

El $R^2$ cuantifica **qué proporción** de la variabilidad total es explicada por el modelo:

$$R^2 = \frac{\text{SSR}}{\text{SST}} = 1 - \frac{\text{SSE}}{\text{SST}}$$

**Interpretación:**

- $R^2 = 0$: El modelo no explica nada (tan malo como usar $\bar{y}$)
- $R^2 = 1$: El modelo explica toda la variabilidad (ajuste perfecto)
- $R^2 = 0.7$: El modelo explica el 70% de la variabilidad

**En regresión simple:** $R^2 = r^2$ (cuadrado de la correlación)

**Precaución:** Un $R^2$ alto no garantiza un buen modelo ni implica causalidad

# Inferencia sobre los Coeficientes

Para realizar inferencias necesitamos el supuesto de **normalidad** de los errores.

**Distribución de los estimadores:**

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right) \qquad \hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{S_{xx}}\right]\right)$$

**Estadístico t para la pendiente:**

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\text{SE}(\hat{\beta}_1)} \sim t_{n-2}$$

donde $\text{SE}(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\frac{\text{MSE}}{S_{xx}}}$

**Contraste para la pendiente:**

- $H_0 : \beta_1 = 0$ vs $H_1 : \beta_1 \neq 0$
- Estadístico: $t_0 = \frac{\hat{\beta}_1}{\text{SE}(\hat{\beta}_1)}$
- Decisión: Rechazar $H_0$ si $|t_0| > t_{\alpha/2,n-2}$

**Intervalo de confianza al $(1-\alpha)100\%$ para $\beta_1$:**

$$\hat{\beta}_1 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot \text{SE}(\hat{\beta}_1)$$

**Interpretación:** Si el IC no contiene el cero $\rightarrow$ $\beta_1$ es significativo

# Resultados del Modelo en Nuestro Ejemplo

```
Call:
lm(formula = Calificaciones ~ Tiempo_Estudio, data = datos)

Residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-1.11465 -0.30262 -0.00942  0.29509  1.10533

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     5.00118    0.11977   41.76   <2e-16 ***
Tiempo_Estudio  0.09875    0.00488   20.23   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.4842 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.8069,    Adjusted R-squared:  0.8049
F-statistic: 409.5 on 1 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

# Interpretación de los Resultados

**Coeficientes:**

- **Intercepto:** 5.001 $\rightarrow$ Calificación esperada cuando el tiempo de estudio es 0 horas
- **Pendiente:** 0.0987 $\rightarrow$ Por cada hora adicional de estudio, la calificación aumenta en promedio 0.0987 puntos

**Bondad de ajuste:** **R-cuadrado:** 0.8069 $\rightarrow$ El modelo explica el **80.7%** de la variabilidad en las calificaciones

**Significancia:**

- **Coeficientes:** Ambos son altamente significativos (p $<$ 2e-16)
- **Modelo global:** F $=$ 409.5 con p $<$ 2.2e-16 $\rightarrow$ El modelo es **estadísticamente útil**

**Error estándar residual:** 0.484 $\rightarrow$ Dispersión típica alrededor de la recta de regresión

# Predicción con el Modelo

Una vez validado, usamos el modelo para **hacer predicciones**. Hay dos tipos:

**1. Intervalo de confianza para la respuesta media:**

- Pregunta: ¿Cuál es la calificación *promedio* esperada para todos los estudiantes que estudian $x_0$ horas?
- Estima dónde se encuentra la **línea de regresión verdadera**

**2. Intervalo de predicción para una respuesta individual:**

- Pregunta: ¿Entre qué valores esperamos la calificación de *un estudiante específico* que estudia $x_0$ horas?
- Considera tanto la incertidumbre del modelo como la variabilidad individual

**Diferencia clave:** El intervalo de predicción siempre es **más ancho** porque incluye la variabilidad $\sigma^2$ del error individual.

# Fórmulas para Predicción

**Intervalo de confianza para la respuesta media:**

$$\hat{y}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot \sqrt{\text{MSE}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}$$

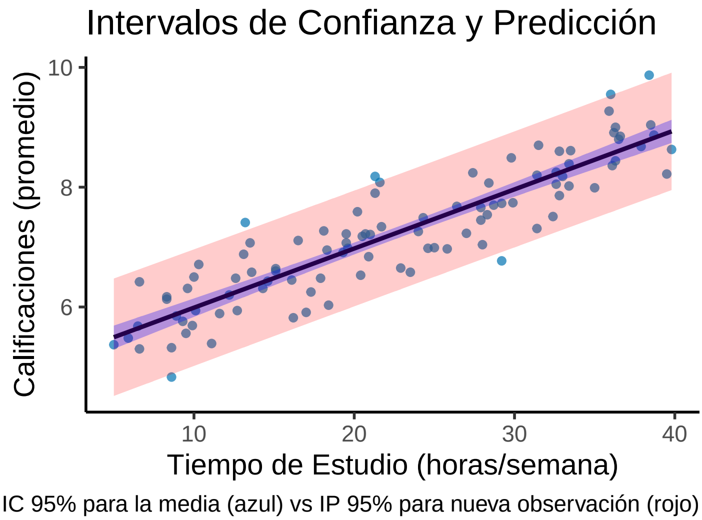
**Intervalo de predicción para respuesta individual:**

$$\hat{y}_0 \pm t_{\alpha/2,n-2} \cdot \sqrt{\text{MSE}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{S_{xx}}\right)}$$

**Observaciones importantes:**

- Ambos intervalos son más estrechos cerca del **centro** de los datos ($\bar{x}$)
- La diferencia entre ambos es el término **"+1"** que representa $\sigma^2$
- Nunca extrapolar más allá del rango de los datos observados

# Visualización de los Intervalos de Predicción




**Interpretación gráfica:**

- **Banda azul (IC)**: Incertidumbre sobre la **media poblacional**
- **Banda roja (IP)**: Incertidumbre para **nueva observación**
- **Diferencia clave**: IP incluye variabilidad individual ($\sigma^2$)
- **Patrón**: Ambos intervalos se estrechan cerca de $\bar{x}$
- **Aplicación**: Usar IC para estimar tendencia, IP para predicciones individuales

# El Diagnóstico del Modelo: Fundamento Teórico

**¿Por qué es crucial el diagnóstico?**

El diagnóstico **NO es opcional**. Las inferencias estadísticas (p-valores, intervalos de confianza, predicciones) solo son válidas si se cumplen los supuestos del modelo.

**Consecuencias de ignorar el diagnóstico:**

- **Estimadores sesgados** $\rightarrow$ Conclusiones erróneas
- **Errores estándar incorrectos** $\rightarrow$ Intervalos de confianza y p-valores inválidos
- **Predicciones poco fiables** $\rightarrow$ Pérdida de poder predictivo

**Filosofía del diagnóstico:** Los residuos son la "ventana" hacia los errores verdaderos $\varepsilon_i$

# Los Cuatro Pilares del Diagnóstico

**Recordatorio de supuestos:**

1. **Linealidad**: $E[Y_i|X_i] = \beta_0 + \beta_1 X_i$
2. **Independencia**: $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$
3. **Homocedasticidad**: $Var(\varepsilon_i|X_i) = \sigma^2$ (varianza constante)
4. **Normalidad**: $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ (para inferencia)

**Herramienta fundamental:** Análisis de **residuos** $(e_i = y_i - \hat{y}_i)$

**Principio clave:** Si los supuestos se cumplen, los residuos deben comportarse como **ruido aleatorio** sin patrones sistemáticos

# Diagnóstico: Linealidad

**Supuesto:** $E[Y|X] = \beta_0 + \beta_1 X$ (relación promedio es lineal)

**Métodos de Diagnóstico:**

- **Gráfico:** Residuos vs Valores Ajustados
- **Test estadístico:** Test de Ramsey RESET (Regression Equation Specification Error Test)

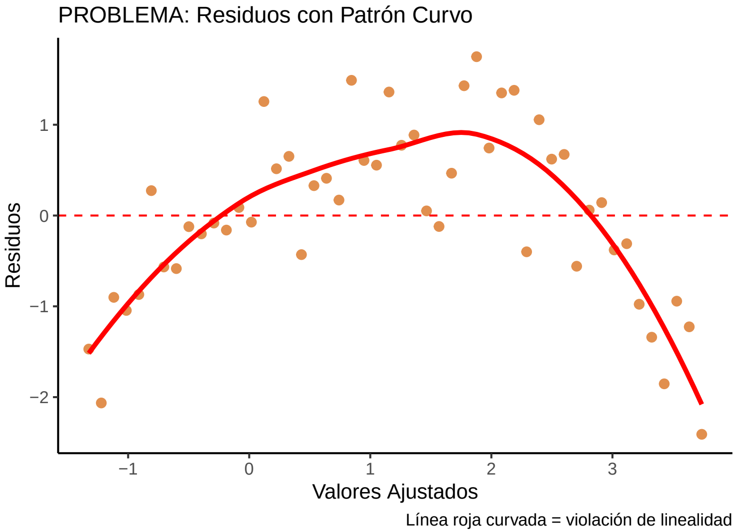
**¿Qué buscamos?**

- **Patrón ideal:** Nube aleatoria de puntos centrada en cero
- **Violación:** Patrón curvilíneo (forma de “U” o parábola)

**Test de Ramsey RESET:**

- $H_0$: La forma funcional es correcta (lineal)
- $H_1$: La forma funcional es incorrecta (no lineal)
- Añade términos $\hat{y}^2, \hat{y}^3, \ldots$ al modelo y testa su significancia

# Violación del supuesto: NO Linealidad



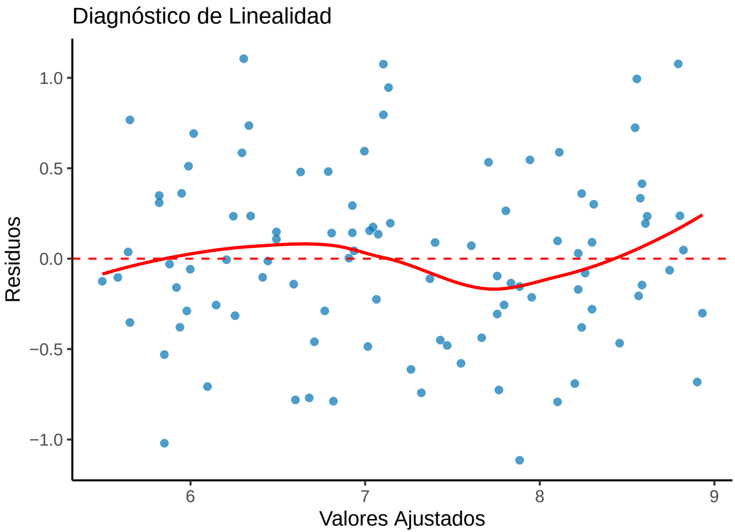

**Problema detectado:**
Ajustar un modelo **lineal** a datos con relación **cuadrática**

**¿Qué observamos?**

- **Patrón curvo** en los residuos
- Los residuos no están aleatoriamente dispersos
- La línea suavizada (roja) no es horizontal

**Diagnóstico:**
Patrón sistemático en residuos → **Violación de linealidad**

# Verificación de linealidad




**¿Qué evaluar?**
Si la relación es verdaderamente lineal

**Resultados:**

- **Gráfico:** Línea roja prácticamente plana → Linealidad
- **Test RESET:** F = 1.051, p = 0.353 → Forma funcional correcta

# Diagnóstico: Homocedasticidad

**Supuesto:** $Var(\varepsilon_i|X_i) = \sigma^2$ (varianza constante)

**Métodos de Diagnóstico:**

- **Gráficos:** Scale-Location, Residuos vs Valores Ajustados
- **Tests estadísticos:** Test de Breusch-Pagan, Test de Goldfeld-Quandt, Test de White

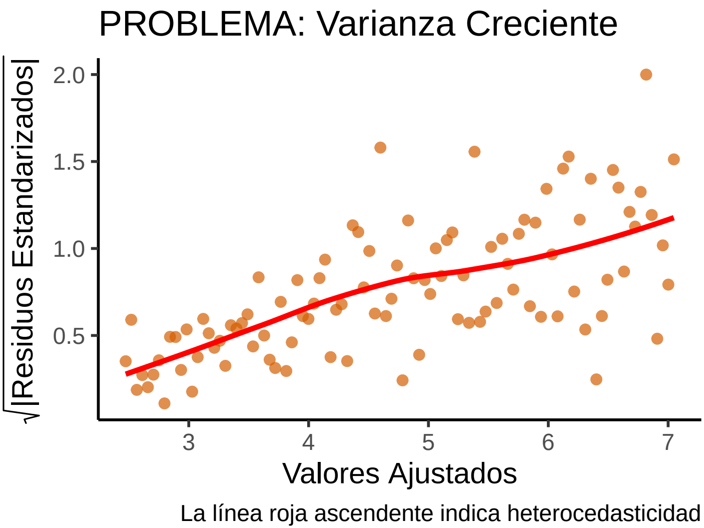
**¿Qué buscamos?**

- **Patrón ideal:** Dispersión constante a lo largo del rango
- **Violación:** Forma de "embudo" (dispersión creciente o decreciente)

**Tests de Heterocedasticidad:**

- **Breusch-Pagan:** $H_0$: Homocedasticidad, $H_1$: Heterocedasticidad
- **White:** Versión robusta que no asume forma específica de heterocedasticidad

# Violación del Supuesto: NO Homocedasticidad



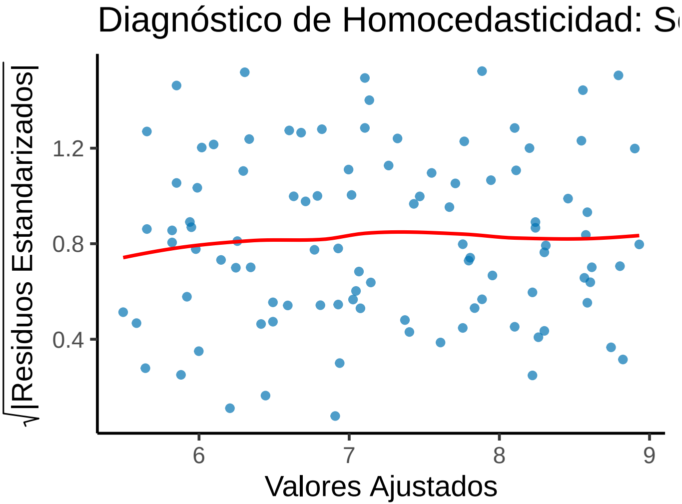

**Problema:** Varianza de los errores que aumenta con los valores predichos (heterocedasticidad)

**¿Qué observamos?**

- **Línea roja ascendente**: Claro patrón de aumento de varianza
- **Dispersión creciente**: Los residuos se dispersan más para valores altos
- **Violación**: Supuesto de varianza constante **NO** se cumple

**Diagnóstico:** Tendencia creciente → **Heterocedasticidad**

# Verficación de homocedasticidad




**Tests estadísticos:**

**Breusch-Pagan:**

- LM = 0.02
- p = 0.889
- **Conclusión**: Homocedasticidad

**White:**

- LM = 0.122
- p = 0.941
- **Conclusión**: Varianza constante

**Interpretación gráfica:**

- Línea roja horizontal → Varianza constante
- Sin patrones sistemáticos → Supuesto cumplido

# Diagnóstico: Normalidad

**Supuesto:** $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ (errores normalmente distribuidos)

**Métodos de Diagnóstico:**

**Gráficos:**

- Normal Q-Q Plot
- Histograma de residuos

**Tests estadísticos:**

- Test de Shapiro-Wilk
- Test de Jarque-Bera
- Test de Anderson-Darling

**¿Qué buscamos en Q-Q Plot?**

- **Ideal:** Puntos sobre la línea diagonal
- **Problema:** Desviaciones sistemáticas

**Detalles de los Tests:**

**Shapiro-Wilk:**

- $\mathrm{H}_0$: Los residuos siguen distribución normal
- Más potente para muestras pequeñas (n $<$ 50)

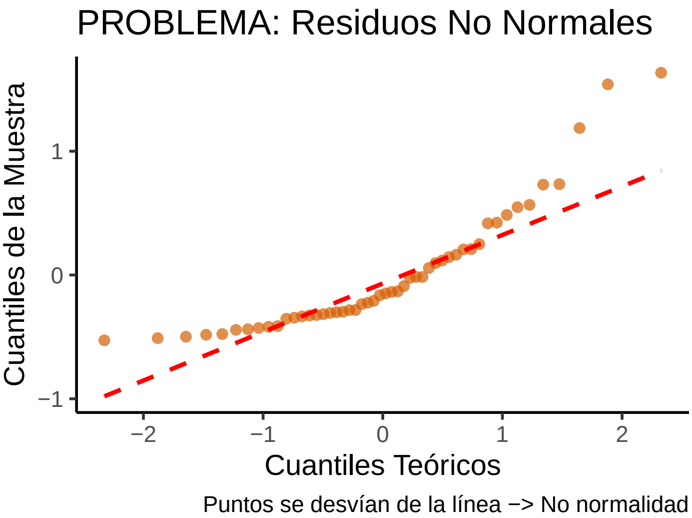
**Jarque-Bera:**

- Basado en asimetría y curtosis
- Asintóticamente válido para muestras grandes

**Anderson-Darling:**

- Más sensible en las colas de la distribución
- Mejor detección de desviaciones extremas

# Violación del Supuesto: NO Normalidad



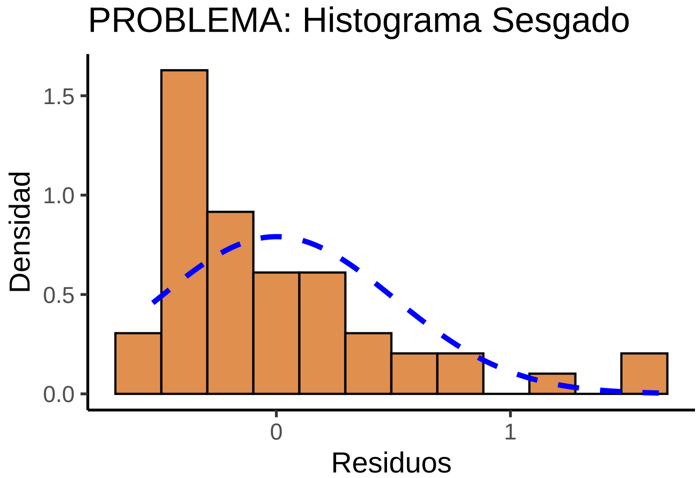

**Problema:** Errores con distribución asimétrica o con colas pesadas

**¿Qué observamos?**

- **Desviación sistemática**: Los puntos no siguen la línea diagonal
- **Curvatura**: Patrón curvo indica distribución sesgada
- **Violación**: Supuesto de normalidad **NO** se cumple

**Diagnóstico:** Puntos se alejan sistemáticamente de la línea → **NO normalidad**

# Violación del Supuesto: Histograma NO Normal




Azul: normal teórica vs Naranja: datos reales sesgados

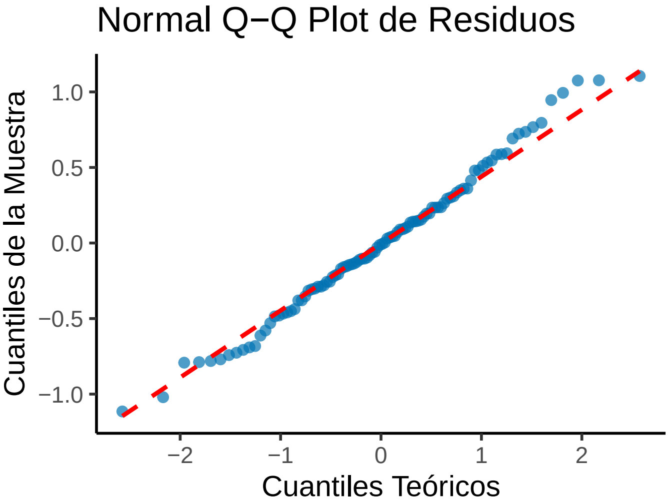
**Problema:** Distribución asimétrica de los residuos (histograma sesgado)

**¿Qué observamos?**

- **Asimetría**: Distribución sesgada hacia la derecha
- **Desajuste**: Curva normal (azul) no coincide con histograma
- **Test Shapiro-Wilk**: $p = 0 < 0.05$

**Diagnóstico:** Distribución sesgada   curva normal → **NO normalidad**

# Verificación de normalidad




**Tests estadísticos:**

**Shapiro-Wilk:**

- W = 0.99
- p = 0.671
- **Conclusión**: Normalidad

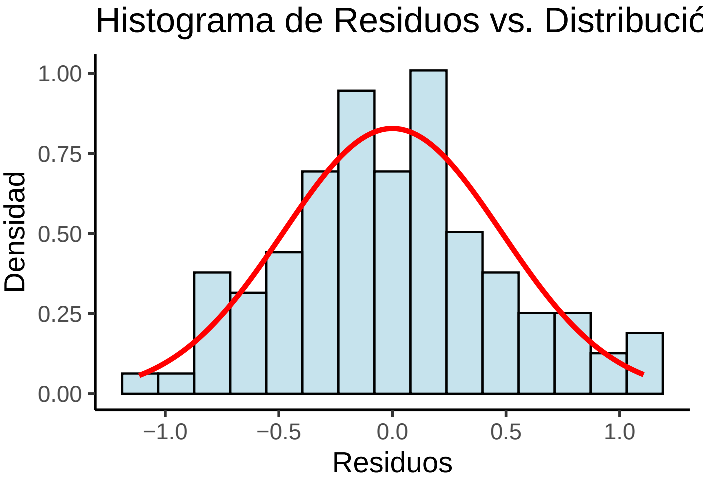
**Jarque-Bera:**

- JB = 0.685
- p = 0.71
- **Conclusión**: Normalidad

**Interpretación gráfica:**

- Puntos siguen la línea diagonal $\rightarrow$ Normalidad cumplida

# Diagnóstico: Normalidad (Histograma)




Línea roja: distribución normal teórica

**Complemento visual:**
Histograma de residuos con curva normal superpuesta

**¿Qué buscamos?**

- **Patrón ideal:** Distribución simétrica y campaniforme
- **Violación:** Asimetría marcada o múltiples modas

**Resultado:** Distribución simétrica y campaniforme → Normalidad confirmada

# Diagnóstico: Independencia

**Supuesto:** $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ para $i \neq j$ (errores independientes)

**Métodos de Diagnóstico:**

- **Gráfico:** Residuos vs Orden de observación
- **Tests estadísticos:** Test de Durbin-Watson, Test de Breusch-Godfrey (LM), Ljung-Box

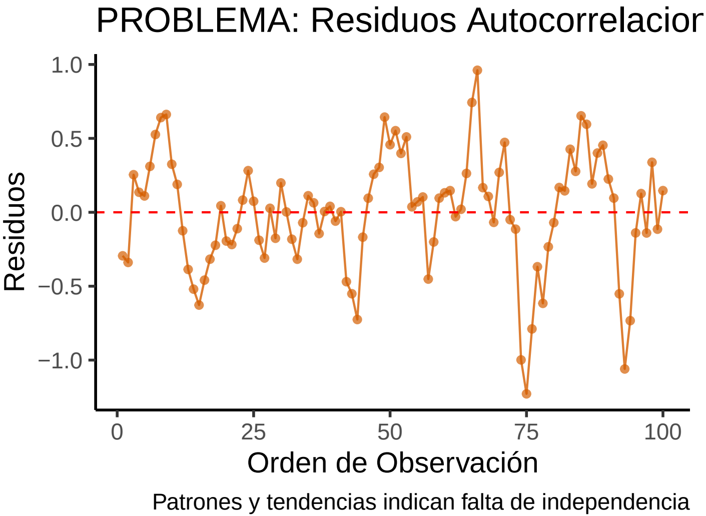
**¿Qué buscamos?**

- **Patrón ideal:** Residuos sin patrones temporales o secuenciales
- **Violación:** Tendencias, ciclos, o correlaciones entre residuos consecutivos

**Tests de Autocorrelación:**

- **Durbin-Watson:** $H_0$: No hay autocorrelación de primer orden $(\rho = 0)$
- **Breusch-Godfrey:** Generaliza DW para órdenes superiores y regresores retardados
- **Ljung-Box:** Testa autocorrelación conjunta en múltiples retardos

# Violación del Supuesto: NO Independencia



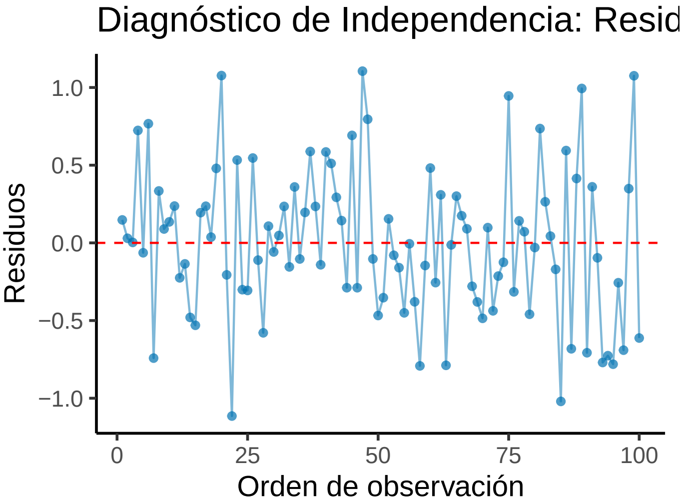

**Problema:** Residuos con autocorrelación (típico en series temporales)

**¿Qué observamos?**

- **Patrones sistemáticos**: Los residuos muestran tendencias claras
- **Conexiones**: Residuos consecutivos están correlacionados
- **Violación**: Supuesto de independencia **NO** se cumple

**Diagnóstico:** Patrones sistemáticos y tendencias → **NO independencia**

# Verificación de Independencia




**Tests estadísticos:**

**Durbin-Watson:**

- DW = 2.056
- p = 0.61
- **Conclusión**: Sin autocorrelación orden 1

**Breusch-Godfrey:**

- LM = 0.14
- p = 0.932
- **Conclusión**: Sin autocorrelación orden 2

**Interpretación gráfica:**

- Sin patrones temporales → Independencia cumplida

# Diagnóstico 5: Observaciones Influyentes

**Objetivo:** Identificar puntos que tienen influencia desproporcionada en el modelo

**Métricas Principales:**

- **Leverage** ($h_{ii}$): Distancia en el espacio X (valores atípicos en X)
- **Residuos Estudentizados**: Outliers en Y ajustado por su varianza
- **Distancia de Cook** ($D_i$): Influencia global en los coeficientes

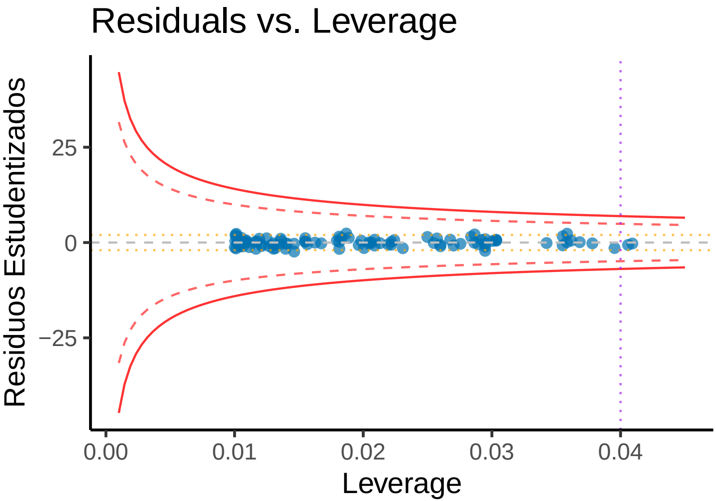
**Umbrales de Referencia:**

- **Leverage:** $h_{ii} > \frac{2(k+1)}{n}$ (k = número de predictores)
- **Cook:** $D_i > \frac{4}{n-k-1}$ (regla conservadora)
- **Residuos:** $|t_i| > 2$ (fuera de 2 desviaciones estándar)

**Combinaciones Problemáticas:**

- Alto leverage + alto residuo = **Muy influyente**
- Alto leverage + bajo residuo = **Punto de anclaje** (puede ser bueno)
- Bajo leverage + alto residuo = **Outlier sin influencia**

# Diagnóstico: Observaciones Influyentes




Curvas rojas: Cook 0.5 (discontinua) y 1.0 (continua)

**Resultados:**

- **Leverage máximo:** 0.041 (umbral: 0.04)
- **Cook máximo:** 0.095 (umbral: 0.041)
- **Outliers (|t| > 2):** 6 observaciones
- **Conclusión:** Revisar observaciones: 24, 74, 6, 20, 47, 85, 87, 89

**Interpretación por zonas:**

- **Derecha:** Alto leverage → Potencial influencia
- **Arriba/Abajo:** Outliers → Residuos grandes
- **Esquinas:** ¡Vacías!

# Análisis de Puntos Influyentes

**Identificación:**

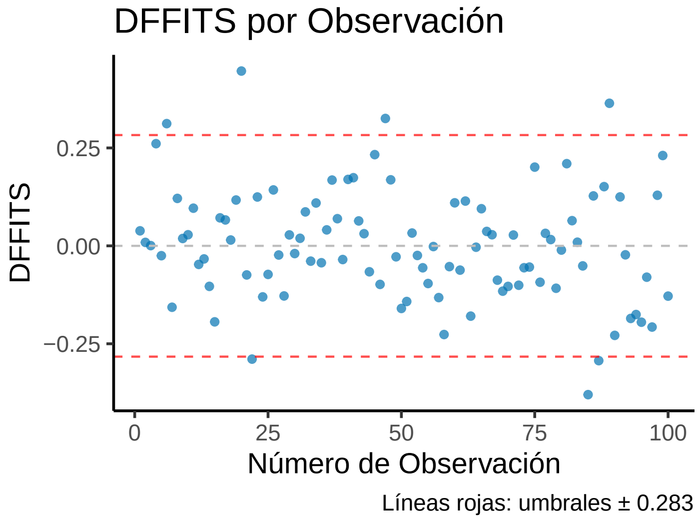
- **Outliers:** observaciones 20, 22, 47, 85, 89, 99
- **Alto leverage:** observaciones 24, 74

**Interpretación por regiones:**

- **Zona derecha:** Alto leverage (X atípicos) $\rightarrow$ Potencial influyente
- **Zona izquierda:** Outliers (Y atípicos) $\rightarrow$ Residuos grandes
- **Esquinas críticas:** ¡Vacías! (Situación favorable)
- **Distancia de Cook:** Influencia moderada ($< 1.0$)

**Conclusión:** No hay solapamiento leverage + outlier $\rightarrow$ Situación manejable

# Diagnóstico DFFITS




**DFFITS:** Evalúa cómo cada observación afecta a su propia predicción

**Resultados cuantitativos:**

- **Umbral:** 0.283
- **Influyentes:** 7 observaciones (6, 20, 22, 47, 85, 87, 89)
- **Top 5 |DFFITS|:** obs. 20, 85, 89, 47, 6
- **Valores:** 0.446, -0.38, 0.364, 0.325, 0.312 **Interpretación:**
- **Obs. 20:** DFFITS = 0.446 (más influyente)
- **Conclusión:** 7 observaciones cambían significativamente sus propias predicciones

# Análisis de Resultados DFFITS

**DFFITS:** Evalúa cómo cada observación afecta a su propia predicción

**Resultados cuantitativos:**

- **Umbral de influencia:** 0.283
- **Observaciones influyentes:** 7 observaciones (6, 20, 22, 47, 85, 87, 89)
- **Top 5 |DFFITS|:** observaciones 20, 85, 89, 47, 6
- **Valores:** 0.446, -0.38, 0.364, 0.325, 0.312

**Interpretación:**

- **Observación 20:** DFFITS $= 0.446$ (la más influyente)
- **Conclusión:** 7 observaciones cambian significativamente sus propias predicciones $\rightarrow$ Investigar casos especiales

# Diagnóstico Completo: Supuestos Básicos

**Ejemplo:** Modelo `horas_estudio ~ nota_examen` (n=100)

1. **LINEALIDAD:** [OK] CUMPLIDO
   - **Gráfico:** Línea loess prácticamente plana en Residuos vs Ajustados
   - **Test RESET:** F = 1.051, p = 0.353 $\rightarrow$ Forma funcional correcta
2. **HOMOCEDASTICIDAD:** [OK] CUMPLIDO
   - **Scale-Location:** Línea horizontal, dispersión constante
   - **Breusch-Pagan:** LM = 0.02, p = 0.889 $\rightarrow$ Varianza constante
   - **White:** LM = 0.122, p = 0.941 $\rightarrow$ Confirmado

# Diagnóstico Completo: Supuestos Distribucionales

**Ejemplo:** Modelo `horas_estudio ~ nota_examen` (n=100)

3. **NORMALIDAD:** [OK] CUMPLIDO
   - **Q-Q Plot:** Puntos siguen línea diagonal perfectamente
   - **Shapiro-Wilk:** $W = 0.99$, $p = 0.671 \rightarrow$ Normalidad confirmada
   - **Jarque-Bera:** $JB = 0.685$, $p = 0.71 \rightarrow$ Distribución normal
4. **INDEPENDENCIA:** [OK] CUMPLIDO
   - **Residuos vs Orden:** Sin patrones temporales o secuenciales
   - **Durbin-Watson:** $DW = 2.056$, $p = 0.61 \rightarrow$ Sin autocorrelación
   - **Breusch-Godfrey:** $LM = 0.14$, $p = 0.932 \rightarrow$ Independencia confirmada

# Diagnóstico Completo: Observaciones Influyentes

**Ejemplo:** Modelo `horas_estudio ~ nota_examen` (n=100)

## DETECCIÓN DE PUNTOS PROBLEMÁTICOS:

- **Outliers:** 6 observaciones con $|t| > 2$
- **Alto Leverage:** 2 observaciones de alta palanca
- **DFFITS influyentes:** 7 observaciones que cambian sus predicciones
- **Cook influyentes:** 6 observaciones con alta influencia global

## EVALUACIÓN DE RIESGO:

- **Situación:** [OK] Favorable - Sin solapamiento crítico leverage + outlier
- **Acción:** Revisar 9 observaciones específicas

# Veredicto Final del Diagnóstico

**Ejemplo:** Modelo `horas_estudio ~ nota_examen` (n=100)

**Interpretación completa:**

- Por cada **hora adicional** de estudio, la calificación aumenta en promedio **0.099 puntos**
- El modelo explica el **80.7%** de la variabilidad en las calificaciones
- La relación es **altamente significativa** ($p < 0.001$)
- Todos los **supuestos se cumplen** $\rightarrow$ Las inferencias son válidas
- Existen obsrevaciones influyentes que requieren atención

# Conclusiones y Próximos Pasos

**Lo que hemos aprendido:**

**Proceso completo** de modelado: exploración $\rightarrow$ formalización $\rightarrow$ estimación $\rightarrow$ inferencia $\rightarrow$ diagnóstico

**Interpretación** de coeficientes y medidas de bondad de ajuste

**Validación** mediante diagnóstico de supuestos

**Limitaciones** de la correlación vs. causalidad

**Próximo tema: Regresión Lineal Múltiple**

- Múltiples variables predictoras
- Control de variables confusas
- Interacciones entre predictores
- Selección de variables

**La regresión simple es el fundamento** $\rightarrow$ Todos estos conceptos escalan directamente

# Referencias


- Draper, N. R., & Smith, H. (1998). *Applied regression analysis* (3rd ed.). Wiley.
- Fox, J., & Weisberg, S. (2018). *An R companion to applied regression* (3rd ed.). Sage.
- Harrell Jr, F. E. (2015). *Regression modeling strategies* (2nd ed.). Springer.
- James, G., Witten, D., Hastie, T., & Tibshirani, R. (2021). *An introduction to statistical learning* (2nd ed.). Springer.
- Kutner, M. H., Nachtsheim, C. J., Neter, J., & Li, W. (2005). *Applied linear statistical models* (5th ed.). McGraw-Hill/Irwin.