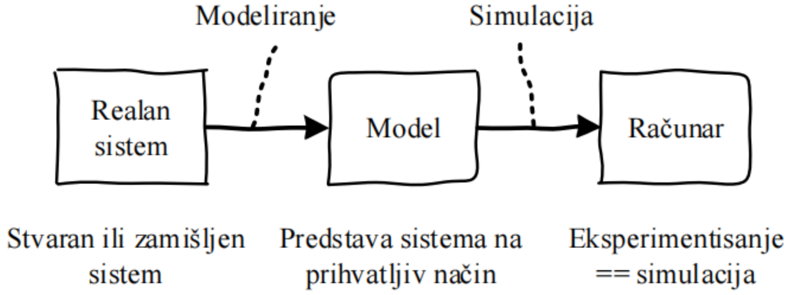
ISPITNA PITANJA

Modelovanje i simulacija sistema

1. Osnovni pojmovi modeliranja i simulacije. Model i teorija.

1.1 Koji su glavni elementi? Nacrtati crtež.



1.2 Šta je modelovanje?

Proces pravljenja modela na osnovu realnog sistema.

1.3 Šta je model?

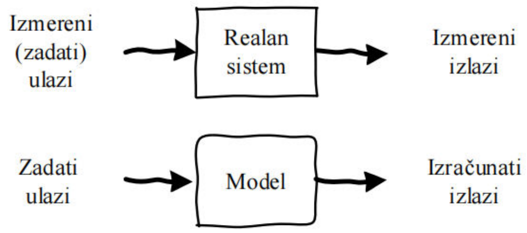
- *Pogodan način predstavljanja ukupnog čovekovog iskustva i njegovog načina razmišljanja o sistemu koji istražuje*

Logicka zamena realnog sistema.
Pravi se procesom modelovanja.
Predstavlja deo realnog sveta, neki vec postojeci realni sistem ili zamisljeni sistem,

1.4 Šta je eksperimentalni okvir?

Eksperimentalni okvir su pretpostavke koje uvodimo kod modelovanja sistema da ograničimo/suzimo posmatranje ponašanja sistema.

1.5 Slika model i realan sistem.



1.6 Šta je simulacija?

Simulacija je oponasanje funkcionisanja realnog sistema.
Realni sistem moze biti stvaran ili fiktivan.
Simulacijom postizemo da ne vrsimo skupe/zahtevne/opasne eksperimente na RS.
Odredjuje ponasanje sistema na osnovu poznatih ulaza i promenljivih stanja.

1.7 Šta je studija simulacije?

Skup eksperimenata

> Studija simulacije su dokumentovani i povezani rezultati simulacija i njihova analiza.

1.8 Šta je računarska simulacija?

Odredjivanje ponasanja sistema koje se vrsi digitalno - racunarski.
Predstavlja softver/program kojim se oponasa RS.

1.9 Zašto model ne može bez teorije?

Da bi model postojao, potrebno je razumevanje RS i poznavanje teorije.
Najcesce je nepotrebno kreirati novu teoriju, obicno se koriste vec poznati zakoni (fizike).
Teorija :
- objasnjava ponasanje RS
- povezuje RS i model
- predvidja izlaze
- povezuje posledicu i uzrok.

2. Faze modelovanja i simulacije. Neformalan i formalan opis modela.

2.1 Koraci.

1. Razumevanje RS i vrsenje merenja
2. Formiranje teorije
3. Formiranje neformalnog modela
4. Razrada u formalan model
5. Izgradnja simulacionog modela
6. Verifikacija i testiranje modela
7. Simulacija u uzem smislu
8. Analiza rezultata I dokumentacija

2.2 Bazni model.

Idealan ali nerealan model. Model koji se u potpunosti poklapa sa RS.

2.3 Eksperimentalni okvir.

Okvir u kom posmatramo ponasanje sistema. Ogranicenja u odnosu na koja formiramo model.

> Eksperimentalni okvir su pretpostavke koje uvodimo kod modelovanja sistema da ograničimo/suzimo posmatranje ponašanja sistema.

2.4 Objasniti iterativni postupak.

Formiranje neformalnog, razrada u formalni model i izgradnja simulacionog modela su iterativni.
Iterativni postupak postepeno ukljucuje dodatna ponasanja modela na osnovu kog se model menja i doradjuje.

2.5 Šta uvodi neformalan, a šta formalan model?

Neformalan: objekte, opisne promenljive i pravila ponasanja i interakcije objekata.

Formalan: nove komponente, nove opisne promenljive, pridruzuju se parametri.

2.6 Loše osobine neformalnog.

Nekompletan, nejasan, nekonzistentan.

2.7 Zašto su potrebni formalan i neformalan model?

Neformalan - treba da odrzava sustinu prirode posmatranog sistema, daje glavna desavanja u sistemu.

Formalan - neophodan za uspesnost simulacije.

2.8 Šta sadrži neformalan model?

Sadrzi osnovne pojmove o modelu - neformalan opis.

2.9 Zašto je modelovanje iterativan proces?

Jer se iterativno vrse korekcije modela kako bi na kraju nastao upotrebljiv model.

3. Klasifikacije modela.

3.1 Po kojim osobinama možemo da podelimo model?

- Brojne su – razni kriterijumi se odnose na:
  - Prirodu promenljivih i opsege vrednosti
  - Opseg vrednosti vremena
  - Vremensku zavisnost modela
  - Determinizam
  - Linearnost
  - Formalan opis modela
  - "Opipljivost" modela
  - Stanje ravnoteže
  - ...

3.2 Kakve funkcije prenosa mogu da budu?

Vremenski kontinualna i vremenski diskretna funkcija prenosa.

3.3 Šta je stohastički model?

Stohasticki model sadrzi slucajne promenljive cije su vrednosti slucajno generisane.
Koriste se kada ne znamo tacno da definisemo ponasanje sistema.
Dovoljna je samo jedna slucajna promenljiva da bi model bio stohasticki.
Kada izlaz nije uvek isti za iste ulaze.

3.4 Šta je kvazi statički (kvazi dinamički) model?

Staticki model koji se vremenom menja.

3.5 Kako možemo da ispitamo valjanost kod stohastičkog?

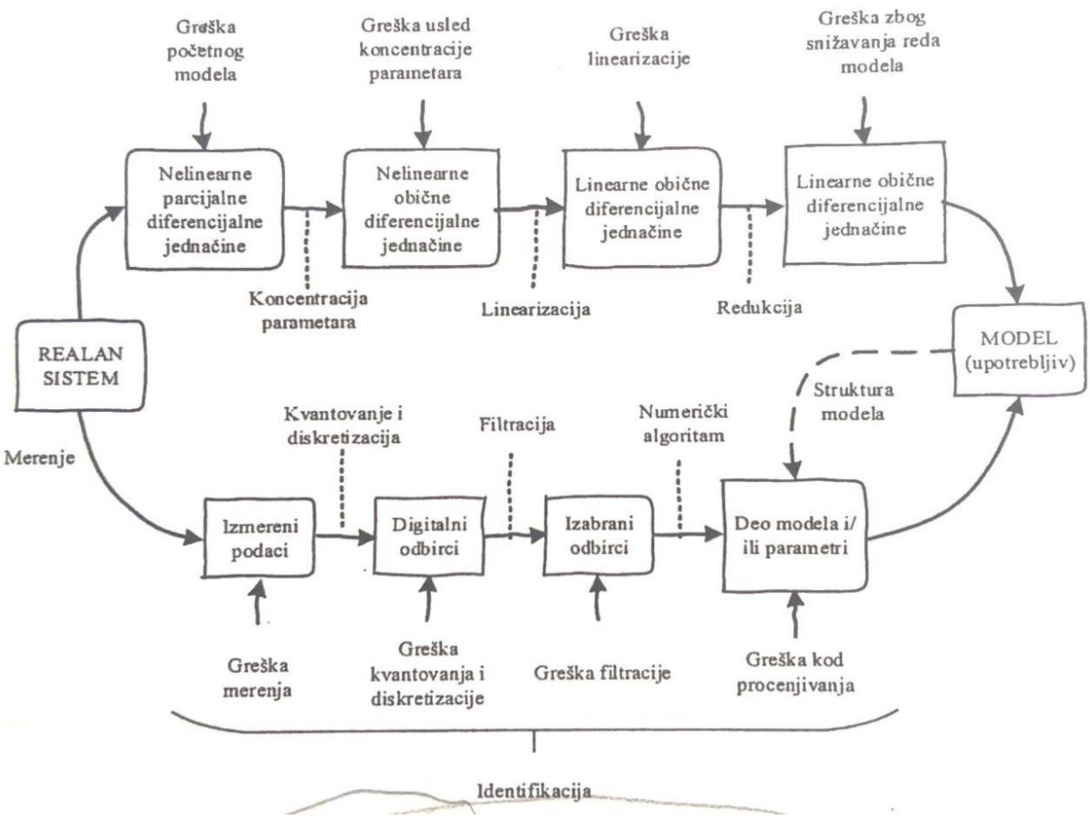
Mora se sprovesti niz eksperimenata sa istim istim vrednostima na ulazima.
Puno puta ponoviti eksperiment i na kraju obraditi rezultate statisticki.

3.6 Dinamički model.

Dinamicki model se menja vremenom.
Opisuje se diferencijalnim jednacinama.
Vreme se moze menjati kontinualno ili skokovito.

4. Primer procesa dobijanja matematičkog modela. Pojednostavljenje modela.

4.1 Blok šema sa obe grane opisati postupak. Koji je lakši a koji teži? Da li je redosled bitan?



Redosled nije bitan.
Tezi je postupak identifikacje ali i model precizniji.
Da li je?

4.2 Koji se koraci mogu izostaviti?

Ne moraju se izvrsiti sve transformacije.
Na osnovu teorije se odmah mogu pisati jednacine.
Filtriranje i redukcija. Da li?

4.3 Kako se pojednostavljuje model?

- Odbacivanjem delova modela (snizavanje reda jednacina)
- Pojednostavljivanje pravila interakcije (izbacivanje - smanjenje uslova)
- Grupisanje komponenti u vece celine (koncentracija parametara)
- Uvodjenje slucajnih promenljivih

4.4 Koji je model najprostiji, a koji najtačniji?

Grubi model je najprostiji.
Bazni model je najtacniji ali nerealan.

4.5 Gde koristimo izmerene podatke?

Kod procesa identifikacije.
Kvantovanjem i diskretizacijom ih prevodimo u brojne vrednosti

4.6 Opisati analitičko i numeričko dobijanje modela.

Analiticke metode koriste deduktivne metode matematicke analize za dobijanje formule u koju se mogu uvrstavati razlicite vrednosti ulaza i promenljivih stanja.

Numericke metode podrazumevaju pisanje programa za digitalni racunar kao i njegovo izvrsavanje nad skupom datih ulaznih podataka.

4.7 Napisati model sa ulazom u, izlazom y i a kao parametar.

$y^{n} + a_{n-1}y^{n-1}(t) + \ldots + a_{2}\ddot{y}(t) + a_{1}\dot{y}(t) + a_{0}y(t) = a_{m}u^{m}(t) + \ldots + a_{0}u(t)$

$n >= m$

5. Verifikacija i valjanost modela. Stepeni podudaranja modela.

5.1 Šta je bazni model?

Bazni model je idealan ali nerealan model. Predstavlja potpuno poklapanje sa RS.

5.2 Šta je eksperimentalni okvir?

Eksperimentalni okvir suzava (ogranicava) posmatranje ponasanja sistema.
Model se pravi u odnosu na tako ogranicen sistem.

Eksperimentalni okvir su pretpostavke koje uvodimo kod modelovanja sistema da ograničimo/suzimo posmatranje ponašanja sistema.

5.3 Formula valjanosti modela.

Porede se izlazi modela i realnog sistema sa ciljem da $\mathcal{J}$ bude dopustivo malo.

$$\mathcal{J} = \sum_{\substack{po\ svim \\ slučajevima\ (i)}} \sum_{\substack{po\ svim \\ izlazima\ (k)}} \|y_{i,k} - d_{i,k}\|$$

y - izmereni izlazi RS
d - izracunati izlazi modela

5.4 Kako se zove model kome je J=0?

Bazni model.
Nerealno je da J bude 0.
Potrebno je da J bude dovoljno malo, manje od predefinisane vrednosti J_{max}.

5.5 Stepeni valjanosti, nabrojati i objasniti.

- Replikativna - porede se izlazi sistema i modela kada su pobudjeni isitim ulaznim signalom

- Prediktivna - model je sposoban da proizvede dobre rezultate i za slucajeve koji nisu bili poznati kada je model pravljen (koji nisu testirani na RS)

- Strukturna - u potpunosti oslikava nacin funkcionisanja RS (i unutrasnju strukturu) i omogucava testiranje slucajeva koji se ne mogu meriti u RS

5.6 Kakav stepen valjanosti treba da bude kod matričnog zapisa?

Najpozeljnija je strukturna ali je prediktivna dovoljno dobra. Da li?

5.7 Kada je model valjan?

Model je valjan kad je $J < J_{max}$.
Odnosno, kada se izlazi modela i realnog sistema dovoljno malo razlikuju.

5.8 Šta se radi kada model nije valjan?

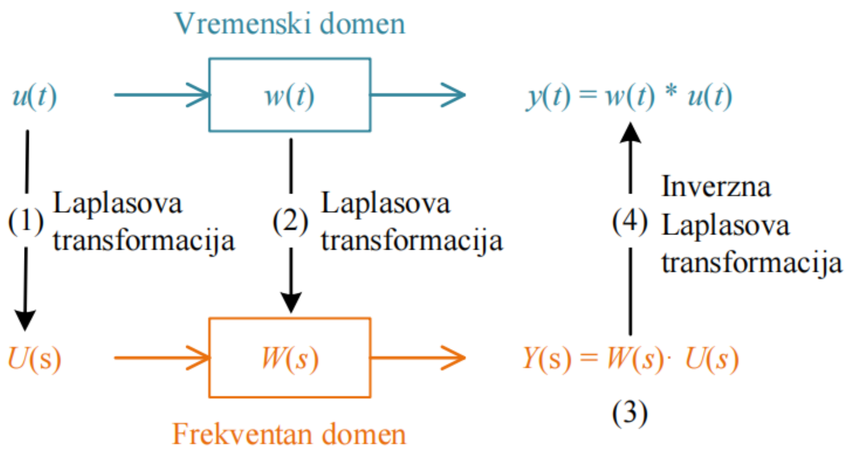
Prosirujemo ga.
Prosirenjem modela obicno postizemo bolje poklapanje sa RS.

6. Analitičko i simulaciono rešenje. Simulacija i optimizacija.

6.1 Kako se dolazi do analitičkog rešenja?

Koriscenjem deduktivnih metoda matematicke analize.
Dobija se formula (izraz) cija vrednost zavisi od parametara koji se mogu menjati.
Vrednosti se uvrstavaju u formulu bez potrebe za ponovnim resavanjem sistema jednacina.

6.2 Koji su koraci kada se za analitičko rešenje koristi Laplasova transformacija? Nacrtati dijagram procesa.



1. LT na sve ulaze u(t)
2. LT na model sistema (funkciju prenosa)
3. Izracunati kompleksne likove
4. Izracunati vremenske signale izlaza, tj. LT^{-1} nad kompleksnim likovima

6.3 Pokazati korake upotrebom LT. ẏ(t) + y(t) = u(t) y(t) = 0, u(t) = 2

$$\dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad / \mathcal{L}$$

$$sY(s) + Y(s) = U(s)$$

$$Y(s)(s+1) = U(s)$$

$$W(s) = \frac{1}{s+1} \Rightarrow Y(s) = W(s) \cdot Y(s) = \frac{1}{s+1} \cdot 2 \quad / \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = 2 \cdot e^{-t}$$

*nije W(s) * Y(s) nego W(s) * U(s)

6.4 Kada dolazi do simulacionog (numerickog) rešenja? I kako dolazimo?

Analiticko resenje ne mozemo sprovesti za proizvoljan model i tada koristimo numericko resavanje.
Podrazumeva pisanje programa za digitalne racunare i izvrsavanje istog.
Ne dobija se funkcionalna zavisnost ulaza I izlaza.

6.5 Zašto se preporučuje upotreba analitičkog rešenja?

Preciznija je i brza od numerickog.
Tacna je.
Pogodna za analize uticaja parametara i ulaznih signala - zato sto mozemo da uvrstavamo razlicite vrednosti u formulu.

6.6 Koje rešenje je tačnije? Zašto je tačno?

Analiticko je tacnije.
Zato sto se dobija koriscenjem deduktivnih metoda matematicke analize.
Matematika ne gresi.

6.7 Koje rešavanje primenjujemo na složene sisteme?

Numericko, jer za analiticko te predstavlja zahtevan, a nekad I nemoguc zadatak.

6.8 Kakva je namena simulacija u optimizaciji?

Kada postoji simulacioni model cije stanje odgovara tekucem stanju sistema koji je modelovan, onda se na modelu mogu proveriti uticaji akcija pre nego sto se primene u stvarnom svetu.
Simulacijom se moze oprobati nekoliko varijanti i izabrati najbolja od svih.
Smanjuje troskove i rizike, stedi vreme.

Matematički modeli

7. Tipovi matematičkih modela (nabrojati, osobine)

7.1 Nelinearan vremenski kontinualan u matričnoj formi.

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$
$y(t) = g(x(t), u(t), t), \qquad x(0) = x_0$

7.2 Linearan vremenski kontinualan u matričnoj formi.

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t), \qquad x(0) = x_0$

7.3 Linearan vremenski diskretan u matričnoj formi.

x(k + 1) = Ex(k) + Fu(k)
y(k) = Cx(k) + Du(k)

7.4 Primer funkcije prenosa 2. reda.

$G(s) = 1 / (s^2+2s+3)$

7.5 Primer diskretne funkcije prenosa 1. reda.

W(z) = 1 / (z + 1)

7.6 ARX model

A(z)y(k) = B(z)u(k) + v(k)

7.7 ARMAX model

A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)v(k)

7.8 Diferencna jednačina koja opisuje ARX i ARMAX modele

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) + v(k)$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) + v(k) + c_1 v(k-1) + \dots + c_r v(k-r)$$

7.9 Primer diferencijalne jednačine 2. reda.

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} = 0$$

7.10 Primer diferencne jednačine 2. reda.

$$y(k) + 2y(k-1) + 3y(k-2) = u(k)$$

8. Matematički model (nelinearan) u prostoru stanja. Koncept i izbor promenljivih stanja.

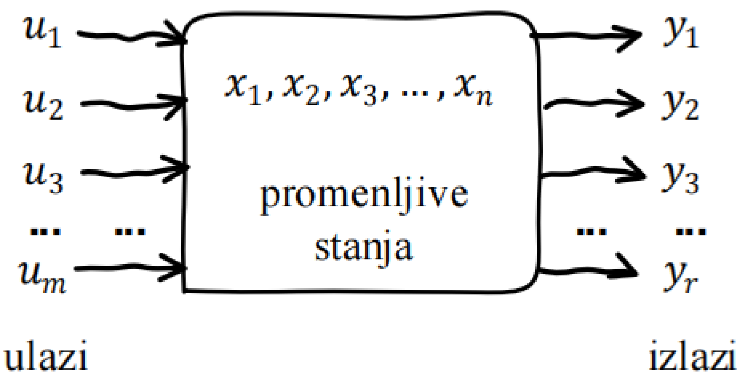
8.1 Kako izgleda? Matrični oblik.

$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$
$y(t) = g(x(t), u(t), t)$, $\quad x(0) = x_0$

8.2 Primer nelinearnog modela.

y = au + b

8.3 Multivarijabilni sistem (Slika i dimenzije).



8.4 Kako se opisuje statički model?

Algebarskim jednacinama

8.5 Kako se opisuje dinamički model?

Diferencijalnim jednacinama

8.6 Šta su promenljive stanja?

Opisuju ponasanje sistema.
Jednoznacno odredjuju stanje sistema.
Biraju se promenljive koje odredjuju zakone fizike.

8.7 Zašto je diskretizacija bitna?

Bitna je kako bismo izmerene podatke iz RS mogli dovesti u racunar.
To je proces kvantovanja kontinualnog signala u vremenski diskretan signal.

8.8 Šta se dobija transformacijom modela višeg reda?

Dobija se skup diferencijalnih jednacina prvog reda.

8.9 Šta je red modela

Red modela je broj diferencijalnih jednacina prvog reda iz sistema jednacina kojim mozemo opisati model.

8.10 Promenljive stanja za: Mehaničke, termičke, fluidne i električne.

Mehanicki sistemi - pozicija, brzina
Termicki sistemi - temperatura tela
Sistemi sa fluidima - pritisak
Elektricni sistemi - napon ili jacina struje

9. Linearan matematički model (u prostoru stanja). Transformacije.

9.1 Primer linearnog modela

$y = au_1 + au_2$

9.2 Primer nelinearnog modela

$y = au + b$

9.3 Vektorski zapis i razvijen linearni model

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
$y(t) = Cx(t) + Du(t), \qquad x(0) = x_0$

u razvijenom obliku:

Izvodi (promene u vremenu) promenljivih stanja

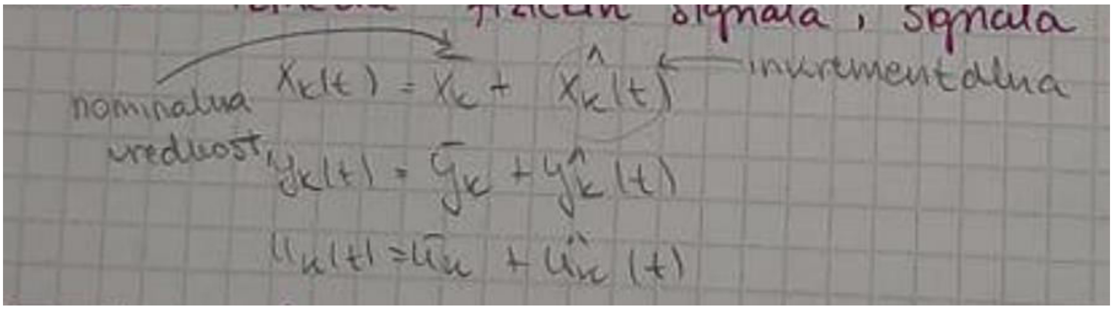
$$\dot{\hat{x}}_1(t) = a_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{1n}\hat{x}_n(t) + b_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{1m}\hat{u}_m(t) \qquad \hat{x}_1(0) = \hat{x}_{10}$$
$$\dot{\hat{x}}_2(t) = a_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{2n}\hat{x}_n(t) + b_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{2m}\hat{u}_m(t) \qquad \hat{x}_2(0) = \hat{x}_{20}$$
$$\cdots$$
$$\dot{\hat{x}}_n(t) = a_{n1}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{nn}\hat{x}_n(t) + b_{n1}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{nm}\hat{u}_m(t) \qquad \hat{x}_n(0) = \hat{x}_{n0}$$

Izlazi modela

$$\hat{y}_1(t) = c_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{1n}\hat{x}_n(t) + d_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{1m}\hat{u}_m(t)$$
$$\hat{y}_2(t) = c_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{2n}\hat{x}_n(t) + d_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{2m}\hat{u}_m(t)$$
$$\cdots$$
$$\hat{y}_r(t) = c_{r1}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{rn}\hat{x}_n(t) + d_{r1}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{rm}\hat{u}_m(t)$$

„kapice" su bitne - imaju značenje promena (razlika) vrednosti u odnosu na nominalne vrednosti.

9.4 Veza izmedju fizickih signala i signala u lienarnom modelu



9.5 Osobine linearnosti i matematički ih opisati

Model je linearan ako ispunjava osobine:

1. superpozicija

$$y_1 + y_2 = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$
$$y_1 = f(u_1), \qquad y_2 = f(u_2)$$

2. homogenost

$$m \cdot y = f(m \cdot u) = m \cdot f(u)$$
$$y = f(u)$$

3. stacionarnost

$$y(t-\tau) = f\big(u(t-\tau)\big)$$
$$y = f(u)$$

9.6 Koje su karakteristične pobude i zašto su bitne?

Dirakov impuls, Hevisajdov signal, Rampa.
Ukoliko znamo odziv modela pobudjenog karakteristicnim signalima, znacemo i model koji je pobudjen slozenim signalom.

*Ako imamo linearni model pobudjen slozenim signalom, analiza ponasanja ovog modela se svodi na analizu ponasanje na pojedinacne ulaze i svaki od ulaza se moze predstaviti sumom elementarnih signala.

9.7 Od čega zavisi ponašanje sistema?

1. Ako ga posmatramo kao fju prenosa -> od polova

2. Ako ga posmatramo kao model u razvijenom obliku -> od promenljivih stanja

9.8 Algoritam za smanjivanje reda?

Postoji vise nacina, a jedan koji se cesto koristi je:

- Uvode se smene:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= y \\
x_2 &= \dot{y} \\
x_3 &= \ddot{y} \\
&\dots \\
x_n &= y^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

9.9 Šta je radna tačka?

Radnu tačku u modelu čine vrednosti ulaza, promenljivih stanja i izlaza.
Te vrednosti se predstavljaju zbirom nominalne i inkrementalne vrednosti

Za radnu tacku se uzimaju vrednosti u ustaljenom stanju - nominalne vrednosti.
Sistem moze menjati ustaljeno stanje. Tada se menja radna tačka i za nju važi drugačiji linearan model.

U okolini radne tacke model je linearan.

9.10 Kako svaki ulaz utiče pojedinačno na odziv?

Ukoliko imamo multivarijabilan sistem sa vise ulaza, odredjivacemo redom kako svaki ulaz pojedinacno utice na izlaz, tj izracunacemo odziv kad su svi ostali ulazi sem tog koji posmatramo postavljeni na 0.

9.11 Vremenski invarijantan i promenljiv.

Varijantan - model koji se menja vremenom.
Invarijantan - model koji se ne menja vremenom.

(In)varijantan model

- Invarijantan model

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(t), \qquad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C} \cdot \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D} \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(t)$$

  - Model nije vremenski promenljiv jer su matrice $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ sa konstantnim koeficijentima.
  - Primetiti da se vrednosti signala ulaza, izlaza i promenljivih stanja menjaju sa vremenom.

- Vremenski promenljiv model: $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B} \equiv \boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{C}(t), \boldsymbol{D} \equiv \boldsymbol{D}(t)$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{A}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(t), \qquad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{C}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{D}(t) \cdot \hat{\boldsymbol{u}}(t)$$

10. Osobine linearnog modela.

10.1 Koje su osobine i matematički ih napisati.

Model je linearan ako ispunjava osobine:

1. superpozicija
$$y_1 + y_2 = f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$$
$$y_1 = f(u_1), \qquad y_2 = f(u_2)$$

2. homogenost
$$m \cdot y = f(m \cdot u) = m \cdot f(u)$$
$$y = f(u)$$

3. stacionarnost
$$y(t - \tau) = f\big(u(t - \tau)\big)$$
$$y = f(u)$$

10.2 Primer linearnog i nelinearnog

Linearan:
$y = au_1 + au_2$

Nelinearan:
$y = au + b$

10.3 Šta je radna tačka?

Radnu tačku u modelu čine vrednosti ulaza, promenljivih stanja i izlaza.
Te vrednosti se predstavljaju zbirom nominalne i inkrementalne vrednosti

Za radnu tacku se uzimaju vrednosti u ustaljenom stanju - nominalne vrednosti.
Sistem moze menjati ustaljeno stanje. Tada se menja radna tačka i za nju važi drugačiji linearan model.

U okolini radne tacke model je linearan.

10.4 Koji pobudni signali postoje i zašto su bitni?

Dirakov impuls, Hevisajdov signal, Rampa
Ukoliko znamo odziv modela pobudjenog karakteristicnim signalima, znacemo i model koji je pobudjen slozenim signalom.

*Ako imamo linearni model pobudjen slozenim signalom, analiza ponasanja ovog modela se svodi na analizu ponasanje na pojedinacne ulaze i svaki od ulaza se moze predstaviti sumom elementarnih signala.

11. Linearizacija modela (koraci, radna tačka).

11.1 Primer nelinearne diferencijalne jednačine 2. reda.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 8x^3 = mg + f(t)$$

11.2 Primer linearne diferencijalne jednačine 2. reda.

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + k_1x_1 = 0$$

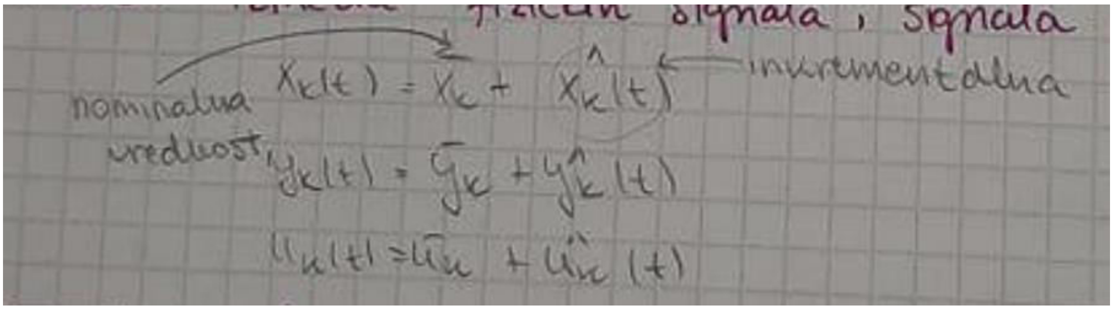
11.3 Koraci linearizacije.

1. Odredimo radnu tacku
2. Sve ulaze, izlaze i promenljive stanja napisemo kao sumu nominalne i inkrementalne vrednost
3. Sve nelinearne clanove zamenimo sa prva dva sabirka Tejlorovog reda
4. Skratimo konstantne clanove
5. Definisemo pocetne vrednosti

11.4 Čime je određena radna tačka?

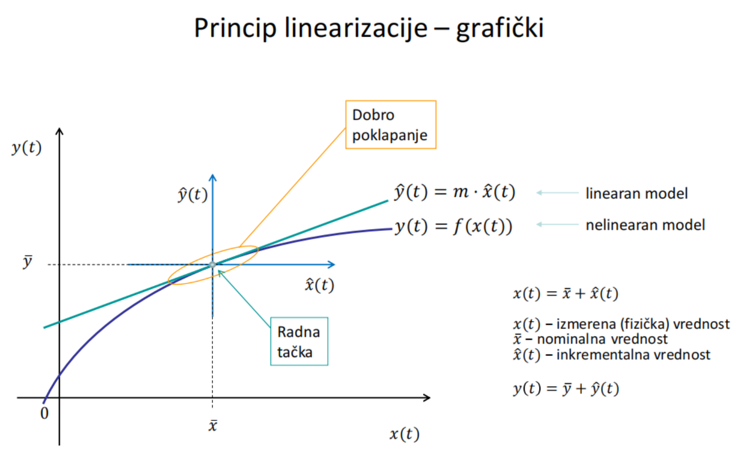
Nominalnim vrednostima ulaza, izlaza i promenljivih stanja

11.5 Veza fizičkih veličina kod linearizovanog modela.



11.6 Objasniti grafičku predstavu.

Ukoliko posmatramo funkciju 1 promenljive i prikazemo je na grafiku, radna tacka je mesto u kojoj formiramo tangentu na tu krivu.
U okolini radne tacke dobijamo solidno poklapanje linearnog modela sa nelinearnim.



11.7 Objasniti analitički postupak.
Primer:

$$\dot{x} = x^2 + 2x - 3 + u$$
$$y = x$$

1. Odredimo radnu tacku
$\dot{x} = 0 \implies x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -3$

2. Sve ulaze, izlaze I promenljive stanja napisemo kao sumu nominalne I inkrementalne vrednosti

$$(\overline{x} \dot{+} \hat{x}) = x^2 + 2(\overline{x} + \hat{x}) - 3 + \overline{u} + \hat{u}$$
$$\overline{y} + \hat{y} = \overline{x} + \hat{x}$$

3. Sve nelinearne clanove zamenimo sa prva dva sabirka Tejlorovog reda

$$F(x) = x^2$$

$$F(\overline{x} + \hat{x}) = F(\overline{x}) + \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{x=\overline{x}} \hat{x} = \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x}$$

Uvrštavanjem u (1) dobija se:

$$\dot{\hat{x}} = \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} + 2\overline{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u}$$
$$\overline{y} + \hat{y} = \overline{x} + \hat{x}$$

4. Skratimo konstantne clanove

$$\dot{\hat{x}} = \overline{x}^2 + 2\overline{x}\hat{x} + 2\overline{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u}$$
$$\hat{y} = \hat{x}$$

5. Definisemo pocetne vrednosti

Za radnu tačku $(\overline{x}_1, \overline{u}) = (1, 0)$ dobijamo:

$$\dot{\hat{x}} = 4\hat{x} + \hat{u}$$
$$\hat{y} = \hat{x}$$

Za radnu tačku $(\overline{x}_2, \overline{u}) = (-3, 0)$ dobijamo:

$$\dot{\hat{x}} = -4\hat{x} + \hat{u}$$
$$\hat{y} = \hat{x}$$

Linearizacija - str. 5 i 6.

11.8 Izvesti.

- Razvoj u Tejlorov red funkcije jedne promenljive u okolini radne tačke (nominalne vrednosti)

$$y(t) = f(x(t))$$

$$y(t) = f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \frac{x(t) - \bar{x}}{1!} + \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{\bar{x}} \frac{(x(t) - \bar{x})^2}{2!} + \left.\frac{d^3 f}{dx^3}\right|_{\bar{x}} \frac{(x(t) - \bar{x})^3}{3!} + \cdots$$

$$y(t) \approx f(\bar{x}) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}} \frac{(x(t) - \bar{x})}{1!}$$

- Smene uvode inkrementalne promenljive

$y(t) = \bar{y} + \hat{y}(t)$, tj. $\quad \hat{y}(t) = y(t) - \bar{y},\ \bar{y} = f(\bar{x})$

$x(t) = \bar{x} + \hat{x}(t)$

- Dobija se linearan model

$$\hat{y}(t) = a\hat{x}(t)$$

gde je a konstanta

$$a = \left.\frac{df}{dx}\right|_{\bar{x}}$$

12. Linearizacija modela u prostoru stanja.

12.1 Vremenski diskretan model (matrična forma).

x(k + 1) = Ex(k) + Fu(k)
y(k) = Cx(k) + Du(k), x(0) = x0

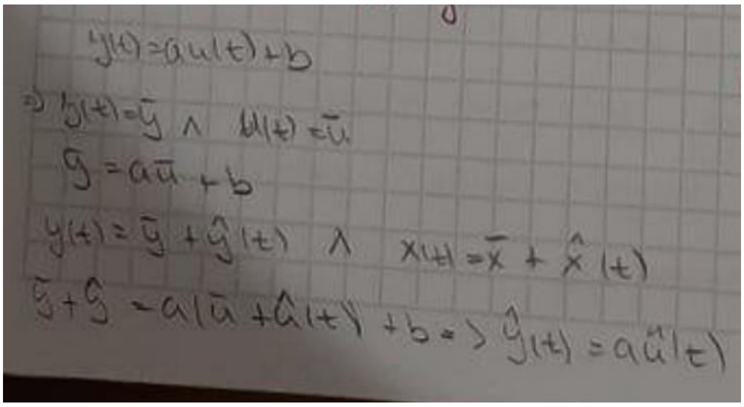
k = 0,1,2…

12.2 Nelinearan vremenski diskretan.

x(k + 1) = f(x(k),u(k),k)
y(k) = g(x(k),u(k),k),   x(0) = x0

k isto sto i kT
k = 0,1,2…

12.3 Primer linearizacije



Ovde fali u poslednjem redu uz y sa kapicom (t)

12.4 Radna tačka

Radnu tačku u modelu čine vrednosti ulaza, promenljivih stanja i izlaza.
Te vrednosti se predstavljaju zbirom nominalne i inkrementalne vrednosti

Za radnu tacku se uzimaju vrednosti u ustaljenom stanju - nominalne vrednosti.
Sistem moze menjati ustaljeno stanje. Tada se menja radna tačka i za nju važi drugačiji linearan model.

U okolini radne tacke model je linearan.

12.5 Razvoj u Tejlorov red

- Razvoj u Tejlorov red funkcije jedne promenljive u okolini radne tačke (nominalne vrednosti)

$$y(t) = f(x(t))$$

$$y(t) = f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\bigg|_{\bar{x}} \frac{x(t) - \bar{x}}{1!} + \frac{d^2 f}{dx^2}\bigg|_{\bar{x}} \frac{(x(t) - \bar{x})^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3}\bigg|_{\bar{x}} \frac{(x(t) - \bar{x})^3}{3!} + \cdots$$

$$y(t) \approx f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}\bigg|_{\bar{x}} \frac{(x(t) - \bar{x})}{1!}$$

13. Vremenski diskretni modeli: namena, kvantovanje, teorema o odabiranju.

13.1 Šta je odabirač

(komponenta)

Kvantovanje po vremenu vrši „odabirač"

- Na izlazu se pojavljuje povorka impulsa (odbiraka) u trenucima odabiranja $t=kT$, $k=0,1,2,...$
- Perioda odabiranja T

13.2 Matematički zapis povorke signala

- Povorka vremenski diskretizovanog signala i njegova Laplasova transformacija

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

$$R^*(s) = \mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t-kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot e^{-kTs}$$

- Smena uvodi novu kompleksnu promenljivu z

$$z = e^{sT}$$

- Z-transformacija povorke signala

$$\mathcal{Z}\{r(t)\} = \mathcal{Z}\{r^*(t)\} = R(z)$$

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot z^{-k}$$

13.3 Čemu služi kolo zadrške nultog reda?

Omogucava da diskretne vrednosti ostanu nepromenjene tokom trajanja jedne periode.

13.4 Formula za kolo zadrške nultog reda.

$$g_0(t) = h(t) - h(t-T)$$

$$G_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

13.5 Formula za povorku signala.

- Povorka vremenski diskretizovanog signala i njegova Laplasova transformacija

$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

$$R^*(s) = \mathcal{L}\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t - kT)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot e^{-kTs}$$

- Smena uvodi novu kompleksnu promenljivu z

$$z = e^{sT}$$

- Z-transformacija povorke signala

$$\mathcal{Z}\{r(t)\} = \mathcal{Z}\{r^*(t)\} = R(z)$$

$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT) \cdot z^{-k}$$

13.6 Teorema o odabiranju.

- Ako kontinualan signal $f(t)$ ne sadrži harmonike u području učestanosti $> \omega_0$ [rad/s], on se može kompletno okarakterisati vrednostima signala merenim u trenucima međusobno udaljenim za vreme $T = 0.5(\frac{2\pi}{\omega_0})$.

13.7 Izračunati periodu odabiranja ako je data frekvencija.

$$T = 0.5(\frac{2\pi}{\omega_0}).$$

13.8 Čemu služe AID i DIA konvertori?

AID - izmerene vrednosti iz realnog sistema dovode u racunar i prevode u digitalne reci

DIA - brojne vrednosti koje su izlazi upravljackog programa prevode se u fizicke signale

14. Vremenski diskretan model u prostoru stanja. Dobijanje modela.

14.1 Napisati u matričnom obliku.

x(k + 1) = Ex(k) + Fu(k)
y(k) = Cx(k) + Du(k), x(0) = x_0

14.2 Na osnovu kontinualnog modela izvesti odziv za diskretan model.

Vremenski diskretni modeli, od strane 19 pa na dalje…

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

1. Posmatramo u $t = kT$ trenutku

$$x(kT) = \Phi(kT)x_0 + \int_0^{kT}\Phi(kT-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

2. Posmatramo $t = kT + T$

$$x(kT+T) = \Phi(kT+T)x_0 + \int_0^{kT}\Phi(kT+T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

3. Razdvajamo integral na podintegrale

$$x(kT+T) = \Phi(kT+T)x_0 + \int_0^{kT}\Phi(kT-\tau)Bu(\tau)d\tau + \int_{kT}^{kT+T}\Phi(kT+T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

4. Primenjuje se osobina $\Phi(a+b) = \Phi(a)\Phi(b)$

$$x(kT+T) = \Phi(T)\left(\Phi(kT)x_0 + \int_0^{kT}\Phi(kT-\tau)Bu(\tau)d\tau\right) + \int_{kT}^{kT+T}\Phi(kT+T-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

5. $[kT, kT+T]$ ulazni signal je konstantan

$$x(kT+T) = \Phi(T)x(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T}\Phi(kT+T-\tau)d\tau\right)Bu(kT)$$

6. $z = \tau - kT$

$$\int_{kT}^{kT+T}\Phi(kT+T-\tau)d\tau = \int_0^T\Phi(T-z)dz$$

7. $y = T - z$

$$\int_0^T\Phi(T-z)dz = \int_0^T\Phi(y)dy$$

$$\Rightarrow x(kT+T) = \Phi(T)x(kT) + \left(\int_0^T\Phi(t)dt\right)Bu(kT)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

$$\Rightarrow E = \Phi(T) \qquad F = \left(\int_0^T\Phi(t)dt\right)B$$

14.3 Kako se računa odziv?

Računanje diskretanog odziva

- Vrednosti promenljivih stanja u diskretnim trenucima se mogu izračunati rekurzivno na osnovu poznavanja $\boldsymbol{x}(0)$ i vrednosti ulaza u svim trenucima $\boldsymbol{u}(k), k = 0,1,2,\ldots$

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(0)$$
$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(1)$$
$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(2) + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(2)$$
$$\ldots$$
$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}(k)$$

Vreme,
tj. diskretni vremenski trenuci
$t = kT, \quad k = 0,1,2,\ldots$

tj.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E}\cdot\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\cdot\mathbf{u}(k)$$
$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\Phi}(T)$$
$$\mathbf{F} = \left(\int_0^T\boldsymbol{\Phi}(t)dt\right)\cdot\mathbf{B}$$

Kontinualan odziv

- Posmatramo linearan matematički model u prostoru stanja

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \qquad (*)$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t)$$

- Odziv modela je

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad 0 \le t$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}(t)$$

gde je $\Phi(t)$ fundamentalna matrica sistema $\Phi(t) = e^{At}$

14.4 Koje su pretpostavke uvedene?

1. Tokom jedne periode T ulazi $u(t)$ su konstantni
2. Izlazi sistema nas intresuju samo u trenucima odabiranja $t = kT$

14.5 Ako se promeni perioda odabiranja T, da li se dobija drugačiji model?

Ako promenimo periodu odabiranja, necemo dobiti drugaciji model.
Jedna od perioda ce uticati na losu preciznost (rezoluciju), ali nece uticati na tacnost dobijenog ponasanja.

15. Diskretna funkcija prenosa. Diferencna jednačina.

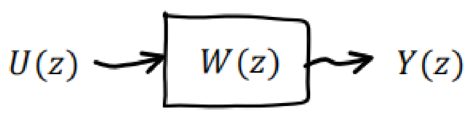
15.1 Definicija diskretne funkcije prenosa.

- Funkcija diskretnog prenosa je odnos kompleksnih likova vremenski diskretizovanih signala izlaza i ulaza, za nulte početne vrednosti

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = W(z)$$

funkcija diskretnog prenosa $W(z)$

15.2 Nacrtati predstavu diskretne funkcije prenos.



15.3 Kako matematički izgleda?

$$W(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}$$

15.4 Šta je promenljiva z?

Kompleksna promenljiva: $z = e^{sT}$,gde je s Laplasov operator, a T perioda odabiranja.

15.5 Kako se u kodu pravi funkcija prenosa?

tf(P,Q) za FP
tf(P,Q,T) za DFP

15.6 Primer diskretne funkcije prenosa 2. reda.

$W(z) = (2z + 1) / (z^2+z+1)$

Stepen u imeniocu odredjuje red.

15.7 Napisati diferencnu jednačinu za taj primer.

$$W(z^{-1}) = \frac{2z^{-1} + z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

$$(1+z^{-1}+z^{-2})Y(z) = (2z^{-1}+z^{-2})U(z)$$

$y(k) + y(k-1) + y(k-2) = 2u(k-1) + u(k-2)$ DIFERENCNA JEDNAČINA

15.8 Zašto je odziv dva ulaza jednak zbiru pojedinačnih odziva?

Zato sto je to prema principu superpozicije.

y1 + y2 = f(u1 + u2) = f(u1) + f(u2)

y1 = f(u1)
y2 = f(u2)

15.9 Kako se modeluje kašnjenje?

Čisto vremensko kašnjenje:

$$\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT}F(s)$$

za

$$z = e^{sT}$$

dobija se

$$\mathcal{Z}\{f(t-T)\} = z^{-1}F(z)$$

Za $t = kT, k = 0,1,2, \ldots$

$$\mathcal{Z}\{f(kT)\} = F(z)$$

Ili kraće

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F(z)$$

pa je

$$\mathcal{Z}\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z)$$
$$\mathcal{Z}\{f(k-2)\} = z^{-2}F(z)$$

...

$$\mathcal{Z}\{f(k+2)\} = z^{2}F(z)$$

...

$$W(z) = \frac{b_m z^m + \quad + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \quad + a_1 z + a_0} \cdot z^n$$

$$W(z^{-1}) = z^{-(n-m)} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \quad + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \quad + a_{n-1} z^{-(n-1)} + a_n z^{-n}}$$

$n-m=d$ - kašnjenje izlaznog signala u odnosu na ulazni

$$W(z^{-1}) = z^{-d} \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^{-k}}$$

16. Dobijanje funkcije prenosa od matematičkog modela u prostoru stanja. Funkcija prenosa multivarijabilnog sistema.

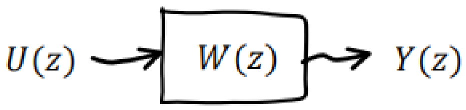
16.1 Definicija.

- Funkcija diskretnog prenosa je odnos kompleksnih likova vremenski diskretizovanih signala izlaza i ulaza, za nulte početne vrednosti

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = W(z)$$

funkcija diskretnog prenosa $W(z)$

16.2 Crtež sa signalima.



16.3 Izvesti formulu za funkciju prenosa.

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \boldsymbol{A} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{B} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(t) = \boldsymbol{C} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \boldsymbol{D} \cdot \hat{\mathbf{u}}(t)$$

$$s\boldsymbol{X}(s) - \mathbf{0} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$
$$s\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$
$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$
$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$

$$Y(s) = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{D} \cdot U(s)$$
$$Y(s) = (\boldsymbol{C} \cdot (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D})U(s)$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s) = \boldsymbol{C} \cdot (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{D}}$$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \cdot u(k) \quad /\mathcal{L}$$
$$\mathbf{X}(s)e^{sT} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{F} \cdot U(s)$$

- Ranije uvedena smena: $z = e^{sT}$

$$z \cdot \mathbf{X}(z) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{X}(z) + \mathbf{F} \cdot U(z)$$
$$(z\mathbf{I} - \mathbf{E}) \cdot \mathbf{X}(z) = \mathbf{F} \cdot U(z)$$
$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot U(z)$$

- Izlaz...

$$Y(z) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{X}(z) + \mathbf{D} \cdot U(z)$$
$$Y(z) = \mathbf{C} \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot U(z) + \mathbf{D} \cdot U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = W(z) = \mathbf{C} \cdot (z\mathbf{I} - \mathbf{E})^{-1} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{D}$$

16.4 Napisati primer funkcije prenosa 2. reda.

$G(s) = 1/(s^2+2s+3)=Y(s)/U(s) = Y(s)/U(s)$

$=> s^2Y(s) + 2sY(s) + 3Y(s) = u(s)$ $/LT^{-1}$

16.5 Diferencijalna jednačina.

=>

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

16.6 Kako se definiše funkcija prenosa multivarijabilnog sistema?

- Vektorska notacija

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s) \cdot \boldsymbol{U}(s)$$

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \dots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \dots & G_{2m}(s) \\ \dots & \dots & & \dots \\ G_{r1}(s) & G_{r2}(s) & \dots & G_{rm}(s) \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}(s) = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \dots \\ U_m(s) \end{bmatrix}, \boldsymbol{Y}(s) = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \dots \\ Y_r(s) \end{bmatrix}$$

16.7 Za šta služi operator s?

s je kompleksan lik, Laplasov operator.
Naziva se i operator diferenciranja jer mnozenje sa s u kompleksnog domenu odgovara diferenciranju po t u vremenskom domenu.

16.8 Predstave funkcije prenosa.

U(s) -> G(s) -> Y(s)

$G(s) = Y(s) / U(s) = (b_m s^m+\dots+b_1 s + b_0) / (s+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1 s + a_0)$

$W(s) = k^* ((s-r_1) \dots (s-r_m))/((s-t_1)\dots(s-t_n))$

16.9 Zašto je model na pobudu datu zbirom dve pobude jednak zbiru odziva na te dve pobude pojedinačno?

Zato sto je to prema principu superpozicije.

y1 + y2 = f(u1 + u2) = f(u1) + f(u2)

y1 = f(u1)
y2 = f(u2)

16.10 Kako se modeluje kašnjenje kod funkcije prenosa?

G(s) = (k / (1 + TS)) * e^{-tauS}

Tau - vremensko kasnjenje

Modeli fizičkih sistema

17. Translatorni mehanički sistemi – promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

Promenljive:

- pozicija tela (rastojanje) – x [m]
- brzina tela – $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}\ \left[\frac{m}{s}\right]$
- ubrzanje tela $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{d^2t} = \ddot{x}\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$

Dodatne promenljive:

- w – energija [J]
- p – snaga [W]

$$p = f \cdot v$$

$$p = \frac{dw}{dt}$$

$$w(t) = \int_{t_o}^{t_1} p(t)dt + w(t_0)$$

Ovo su bitne promenljive za translatorno mehanicko kretanje tela koje je ili u stanju mirovanja ili u stanju kretanja.
Do promene stanja kretanja dolazi pod dejstvom sile f.
Poznavanjem ovih promenljivih i njihove primene, mogu se odrediti sva zbivanja u sistemu.

Elementi:

Inercija (Masa m [kg])

-Kvantitivna mera intertnosti tela.
-Mera odupiranja tela da promeni stanje kretanja.
- 2. Njutnov zakon f = m * a

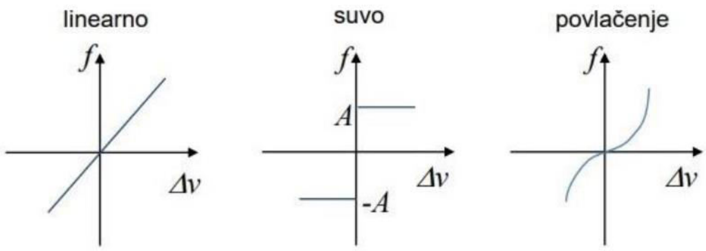
Trenje f_t [N]

- Sila otpora kretanju tela.
- Javlja se prilikom dodira sa drugim telima ili mu otpor pruža sredina u kojoj se kreće ili podloga po kojoj se kreće.
- Kod cvrstih tela naziva se suvo trenje.
- Suvo trenje ima staticki rezim - tela miruju i dinamicki rezim - tela u pokretu.
- Za malo trenje vazi linearna zavisnost.

ft = f(v_2 - v_1)

Linearna zavisnost: ft = c(v2-v1) c - koeficijent trenja

-karakteristike



Elasticnost f_e [N]

- Kad se telo nakon delovanja sile vrati u prvobitni oblik, govorimo o elasticnim deformacijama.
- Sila elasticnosti tezi da telo vrati u prvobitni oblik.
- Sila elasticnosti je uvek suprotnog smera od porasta deformacija.
- Za mala istezanja vazi linearizovano ponasanje.

fe = f(x_2 - x_1)

Linearizovano ponasanje: fe = k(x_2 - x_1) k - koeficijent elasticnosti

Zakonitosti:

1. Dalamberov (Drugacija formulacija II Njutnovog zakona)

$$\frac{d}{dt}(m \cdot v) = \sum_i f_i$$

Suma svih sila koje deluju na telo jednaka je 0.

2. III Njutnov zakon (Zakon akcije i reakcije)

Kada jedno telo deluje na drugo telo nekom silom, tada I drugo telo deluje na prvo telo silom istog inteziteta i pravca al suprotnog smera.

3. Zakon pomeraja

$$\sum_i \Delta x_i = 0$$

Suma pomeraja duz zatvorene putanje jednaka je 0.

*Pored 3 osnovna zakona, bitni su i zakoni odrzanja energije (Kineticke I potencijalne)

- Ek = 1/2 · m · v^2 – kinetička energija
- Ep = m·g·h – potencijalna energija

h - visina tezista tela u odnosu na referentnu tacku
g - gravitaciono ubrzanje

Dobijanje modela:

-Kombinuju se zakonitosti elemenata i zakonitosti interakcije elemenata.
-Za svako telo posmatramo sile koje na njega deluju.
-Na osnovu Dalamberovog zakona pisemo jednacine.

18. Rotacioni mehanički sistemi – promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

Promenljive:

- ugaoni pomeraj (ugao) – θ [rad]
- ugaona brzina – $\omega = \dot{\theta}$ [rad/s]
- ugaono ubrzanje – $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ [rad/s^2]
- moment sile – τ [Nm]

Dodatne promenljive:

- snaga rotirajućeg tela – $p = \tau \cdot \omega$
- energija – $w(t) = w(t_0) + \int_{t_0}^{t} p(t)dt$

- Sve ove promenljive opisuju kretanje rotacionih tela.
- Kad se oznacavaju referentni smerovi, ugaoni pomeraj, ugaona brzina i ugaono ubrzanje trebaju biti usmereni u istu stranu.
- Do promene stanja kretanja tela dolazi pri uzajamnom delovanju (interakciji) tela koje se opisuje delovanjem momenata sila.

Elementi:

Moment intercije J

Kvantitivna mera intertnosti tela i zavisi od oblika tela, raspodele mase i ose oko koje telo rotira.
Zahvaljujuci momentu intercije, telo moze da zadrzi stanje mirovanja ili ravnomernog pravilinijskog kretanja.

$J = m \cdot r^2$ r-rastojanje tacke od ose rotacije

Trenje pri rotaciji τ_t

Kod rotacionog kretanja, prilikom dodirivanja tela dolazi do trenja.

$$\tau_t = \tau_t(\Delta\omega), \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

$$\tau_t = c \cdot \Delta\omega,$$

c - koeficijent trenja

Elasticnost pri rotaciji τ_e

Pod dejstvom momenta sile može doći do elastičnih deformacija tela, pa se javlja moment sile elastičnosti τ_e koji teži da telo vrati u prvobitan oblik

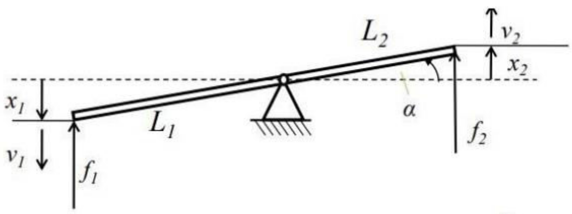
$$\tau_e = \tau_e(\Delta\theta) \qquad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\tau_e = k\Delta\theta$$

k-koeficijent elasticnosti

Poluga

- Poluga (idealna) je čvrst štap koji ima tačku oslonca oko koje može da rotira, nema masu, trenje, moment inercije ni unutrašnju energiju.



Na osnovu sličnosti trouglova važi

Σ momenata oko obrtne tačke = 0

(kada je masa = 0)

$$L_1 f_1 - L_2 f_2 = 0$$

$$x_1 = \frac{L_1}{L_2} x_2 \quad v_1 = \frac{L_1}{L_2} v_2$$

$$f_1 = \frac{L_2}{L_1} f_2$$

Zupcanici

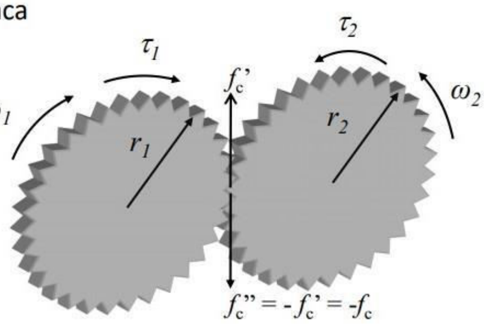
- Upotrebom zupčanika rotaciono kretanje se prenosi sa jedne ose na drugu osu rotacije, a veličina zupčanika utiče na odnose ugaonih pomeraja i brzine obrtanja tih osa.

Zupčasti prenos N - odnos broja zubaca

– z_1, z_2 - broj zubaca

$$r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1} = N$$

$$N = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} = \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = N$$



Zakonitosti:

1. Dalamberov zakon (drugacija formulacija II Njutnovog zakona)

Suma svih momenata sile koji deluju na telo jednaka je 0.

$$\sum_i \tau_i = 0$$

2. III Njutnov zakon (zakon akcije I reakcije)

Posmatramo dva tela koja rotiraju oko iste ose. Kada jedno telo deluje momentom sile na drugo, onda i drugo telo deluje na prvo telo momentom sile istog intenziteta i pravca, ali suprotnog smera

3. Zakon ugaonih pomeraja

Suma ugaonih pomeraja duz zatvorene putanje jednaka je 0.

$$\sum_i (\Delta\theta)_i = 0$$

Dobijanje modela:

- Usvojimo pozitivan smer za promenljive.
- Upotrebom zakona o sumi relativnih pomeraja duž zatvorene putanje izbegavamo višak promenljivih za opis kretanja.
- Za svako telo koje ima moment inercije ili spojnu tačku crtamo dijagram koji pokazuje sve momente sila.
- Sve momente, sem pobudnih (ulaznih) izražavamo preko θ, ω, α upotrebom zakona elemenata.
- Primenjujemo Dalamberov zakon

19. Termički sistemi – promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

Termicki sistemi su sistemi gde postoji skladistenje ili prenos toplote.
Matematicki modeli se izvode na osnovu poznatih zakona termodinamke.
Matematicke modele cine PDJ,ODJ I LDJ.

Promenljive:

Temperatura tela - θ [k]

- Obicno je u razlicitim delovima razlicita.
- Smatracemo da je u sivm delovima ista i jednaka prosecnoj temperaturi tela.
- Obicno se bira za promenljive stanja.

Kolicina toplote - q [J/s] = W

Elementi:

-pasivni-

Termicka otpornost

$$q(t) = \frac{1}{R}[\theta_1(t) - \theta_2(t)]$$

- Vezana za proces provodjenja toplote.
- Provodjenje toplote sa jednog kraja na drugi jednako je razlici tih temperatura.
- Moze se upotrebiti samo ako telo ne akumulira energiju.

Termicka kapacitivnost

$$\dot{\theta}(t) = \frac{1}{C}(q_{in}(t) - q_{out}(t))$$

- Relacija izmedju temperature i akumulirane toplote u telu.

-aktivni-

Termicki izvor - dovodi ili odvodi toplotu

Zakonitosti:

Nelinearnost - ukoliko u modelu postoji neka fizicka velicina koja je nelinearna, tada je i model nelinearan.

Dobijanje Modela:

- Kao promenljive stanja se uzimaju temperature svakog tela koja ima toplotni kapacitet.
- Prenošenje toplote u telo sa toplotnim kapacitetom zavisi od izvora toplote i prenošenja toplote preko termičkih otpornosti.

20. Sistemi sa fluidima – promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

Postoje u brojnim sistemima:
• hidraulički sistemi postoje u hemijskim procesima, sistemima automatskog upravljanja, ...
• povezani sa mehaničkim sistemima preko pumpi, ventila, klipova, ...
Npr.: turbina pokretana vodom = hidraulički + mehanički + električni sistem
Ovakva turbina je slozena zbog nelinearnih karakteristika sistema i prostorne zavisnosti fizickih sistema.

Promenljive:

Hidraulički sistemi uključuju protok i akumulaciju tečnosti, te su bitni:

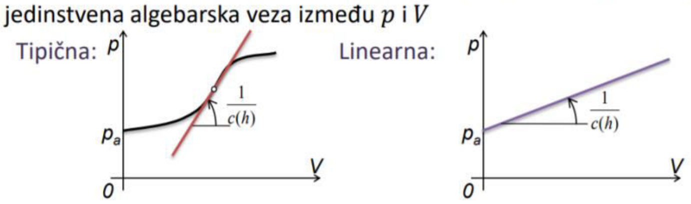
- q – zapreminski protok $[m^3/s]$
- V – zapremina $[m^3]$
- h – visina (nivo) tečnosti $[m]$
- p – pritisak $[N/m^2]$ ili $[Pa]$
  - obično se posmatra apsolutni pritisak, a ponekad relativno u odnosu na atmosferski:
    $p^*(t) = p(t) - p_a$ $\qquad p_a = 1{,}013 \cdot 105\ [N/m^2]$

Elementi i njihove zakonitosti:

Postoje 2 karakteristike koje se mogu predstaviti pojednostavljenim elementima:
– Kapacitet posude za tečnosti
– Otpor proticanju

- Kod tečnosti smeštene u otvoren sud postoji algebarska ralacija između zapremine tečnosti i pritiska u osnovi suda
- zapremina: $V = \int_0^h A(h)dh$

  $A(h)$ – površina na visini h
- apsolutni pritisak: $p = \rho g h + p_a$
- Za svaki sud određene geometrije, gustine tečnosti, atm. pritiska postoji jedinstvena algebarska veza između p i V



- za $A(h) = const$ imamo: $p = \rho g \frac{V}{A} + p_a = \frac{V}{c} + p_a$

(g – gravitaciono ubrzanje, pa – atmosferski pritisak, c – hidraulicki kapacitet)

Hidraulički kapacitet c

- recipročna vrednost nagiba krive za dato V.

Veza izmedju zapremine tecnosti u sudu i pritiska na dnu posude.
c(h) = dV/dp

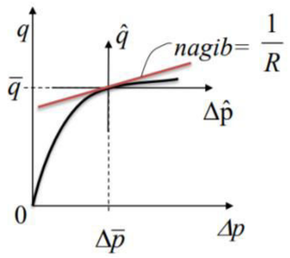
Vertikalna posuda: $$c(h) = \frac{A(h)}{\rho g} = \frac{R^2\pi}{\rho g} = const$$

Horizontalno polozena posuda: $$c(h) = \frac{A(h)}{\rho g} = \frac{2L\sqrt{R^2 - (R-h)^2}}{\rho g}$$

Otpornost R

Kada tečnost protiče kroz cev, ventil ili otvor dolazi do pada pritiska. Ova pojava se objašnjava gubitkom energije i obično je posledica nelinearne zavisnosti .
q = f (Δp)
Kod ventila: $q = k * (\Delta p)^{1/2}$, gde je k - karakteristika cevi, ventila ili otvora, a $(\Delta p)^{1/2}$ - dobro opisuje turbulentno kretanje kroz cevovod

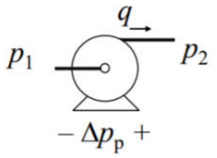
Hidraulička otpornost R je recipročna vrednost nagiba krive q = f(Δp) za datu radnu tačku.



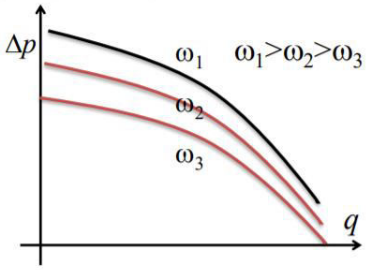
Za ventil: $R = \frac{2\bar{q}}{k^2}$ Za dva redno vezana ventila: Rc = Ra + Rb

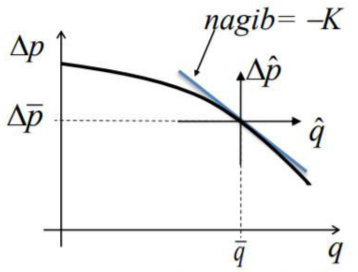
Izvor = $\bar{q} = k\sqrt{\Delta\bar{p}}$ pumpa

Pumpa – izvor energije koji dobija snagu od elektromotora.
Centrifugalna pumpa povećava pritisak na potisu u odnosu na pritisak na usisu.



- Karakteristika pumpe $\Delta p = f(q)$ se određuje eksperimentalno u ustaljenom stanju i prilično je nelinearna





$\Delta\hat{p} = -K\hat{q} \quad K > 0 \quad K[\frac{Ns}{m}]$

- Linearizacijom određujemo linearnu vezu inkrementa protoka i inkrementa povećanja pritiska (sa dato ω)

Dobijanje modela

- Posmatra se pritisak u svakom cvoru i potom u svakoj cevi.
- Za svaki cvor vezujemo jednacinu kontinuiteta.
- Za svaku cev se pise Bernulijeva jednacina prosirena gubicima.

21. Električni i elektromehanički sistemi – promenljive, elementi, zakonitosti, dobijanje modela

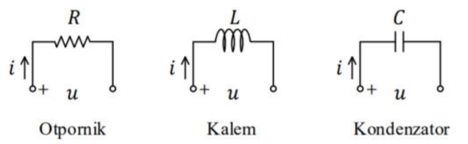
Elektricni

Promenljive i Elementi:

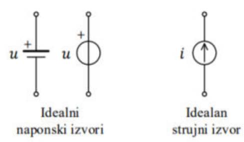
Osnovne fizičke veličine:
- napon $u\ [V]$ i
- jačina električne struje $i\ [A]$.

- električna snaga $p = ui\ [W]$ i
- električna energija $E = \int p(t)dt$

Pasivni elementi:
- otpornik otpornosti $R\ [\Omega]$ $\quad u(t) = Ri(t)$
- kalem induktivnosti $L\ [H]$ $\quad u(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$
- kondenzator kapaciteta $C\ [F]$ $\quad i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt}$



Aktivni elementi:
- Idealan naponski izvor
- Idealan strujni izvor



Zakonitosti:

- Omov zakon

$$i = \frac{u}{R}$$

- I Kirhofov zakon: algebarska suma struja koje utiču u ma koji čvor kola jednaka je nuli

$$\sum_{po\ granama\ k\ u\ čvoru} i_k = 0$$

- II Kirhofov zakon: algebarska suma padova napona u bilo kojoj petlji električnog kola ja jednaka nuli

$$\sum_{po\ elementima\ k\ u\ konturi} u_k = 0$$

Dobijanje modela:

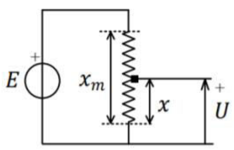
Primena ovih zakona je rešavanje električnih kola, gde su svi elementi poznati i tu je tipično potrebno odrediti jačinu struje u svim granama kola.
Ako ima m grana, onda ima m struja, i potrebno je napisati m algebarskih jednačina sa m nepoznatih i rešiti sistem.
Ako je u kolu n čvorova, onda se piše n-1 jednačina po 1. Kirhofovom zakonu, dok je preostalih m-n-1 po drugom.
Pored direktne primene Kirhofovih zakona, električno kolo se može opisati sistemom jednačina po metodi potencijala čvorova ili sistemom jednačina po metodi konturnih struja. Prednost ovih metoda je što se električno kolo opisuje manjim brojem jednačina u odnosu na direktnu upotrebu Kirhofovih zakona.

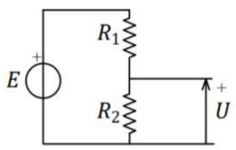
Elektro - mehanicki sistemi

Podrazumevaju se sistemi koji se sastoje iz dva podsistema: električnog i mehaničkog.
Mogu imati različite vidove interakcije:

- mehanička promena otpornosti (potenciometar),
- kretanje strujnog provodnika u magnetnom polju.

Potenciometar





$$R(x) = \frac{\rho}{A} x$$

$$R(x) = \frac{R_m}{x_m} x$$

$$U(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E(t)$$

Promenljive:

- f_e – elektromagnetna sila $[N]$
- v – brzina provodnika u odnosu na magnetno polje $[m/s]$
- l – dužina provodnika u magnetnom polju $[m]$
- Φ – magnetni fluks $[Wb]$ (izražen u Veberima)
- B – magnetna indukcija $[Wb/m^2]$
- i – jačina električne struje $[A]$
- e_m – indukovana elektromotorna sila $[V]$

Elementi:

Galvanometar
Mikrofon
Elektromotor jednosmerne struje

Zakoni i Dobijanje:

Na pravolinijski provodnik dužine *l*, kroz koji protiče struja jačine *i* i koji se kreće u homogenom magnetnom polju indukcije *B* deluje sila (Ampreova sila) intenziteta:

$$\overrightarrow{fe} = \vec{\imath}\vec{l} \times \vec{B} = ilBsin\theta$$

gde je θ ugao koji zaklapaju silnice magnetnog polja i smer proticanja struje. Smer sile se određuje pravilom desne ruke. Indukovana elektromotorna sila (razlika potencijala) je srazmerna magnetnoj indukciji polja V u kome se provodnik dužine *l* kreće brzinom *v*:

$$e_m = l\vec{v} \times \vec{B}$$

Simulacija sistema opisanog matematičkim modelom

22.Laplasova transformacija: definicija, osobine i primena u modelovanju i analizi sistema.

22.1 Definicija LT i Inverzne LT.

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} F(s)\cdot e^{st}\cdot ds, \quad t>0$$

- $L\{.\}$ – Laplasova transformacija
- $L^{-1}\{.\}$ – Inverzna Laplasova transformacija
- s – kompleksna učestanost (komp. prom. Laplasove trans.)
- $F(s)$ – kompleksan lik funkcije $f(t)$
- $f(t)$ – original funkcije $F(s)$

LT - integralna transformacija koja funkciju f(t) iz vremenskog domena prebacuje u funkciju F(s) u kompleksnom domenu.

LT^{-1} - integralna transformacija koja funkciju F(s) iz kompleksnog domena prebacuje u funkciju f(t) u vremenskom domenu.

22.2 Navesti osobine.

Br.	Naziv osobine	Izraz
1	Linearnost	$\mathcal{L}\{a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\} = a_1F_1(s)+a_2F_2(s)$
2	Čisto vremensko kašnjenje	$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-s\tau}F(s)$
3	Pomeranje kompleksnog lika	$\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = F(s+a)$
4	Konvolucija originala	$\mathcal{L}\{f_1(t) * f_2(t)\} = F_1(s)F_2(s)$
5	Izvod originala	$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
6	Integral originala	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$ $\mathcal{L}\left\{\iint_0^t \dots \int_0^t f(t)dt^n\right\} = \frac{F(s)}{s^n}$
7	Izvod kompleksnog lika	$\mathcal{L}\{t^nf(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
8	Promena vremenske skale	$\mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = aF(as)$
9	Granične vrednosti	$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$ $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

22.3 Dokaži čisto vremensko kašnjenje.

$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} =$

$= \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt =$ Smena: $t - \tau = v$

$= e^{-s\tau}\int_{-\tau}^{\infty} f(v)e^{-sv}dv =$ kauzalan signal: $f(v) \equiv 0, v < 0$

$= e^{-s\tau}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}dv =$

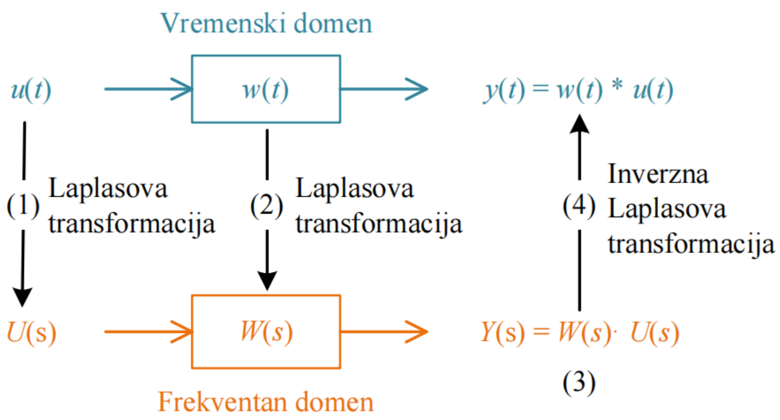
$= e^{-s\tau}\, F(s)$

22.4 Šta je promenljiva s?

s je Laplasov operator – kompleksna promenljiva.
Naziva se i operator diferenciranja jer množenje sa s u kompleksnom domenu odgovara diferenciranju po vremenu u vremenskom domenu.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

22.5 Kako se formira model Laplasa?



22.6 Kako se računa odziv kad imaš funkciju prenosa sa realnim polinomom?

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{K_k}{s-s_k}\right\} = \sum_{k=1}^{n} K_k \cdot e^{s_k t}, \quad t > 0$$

22.7 Kako se računa odziv ako imaš 2 konjugovano kompleksna pola?

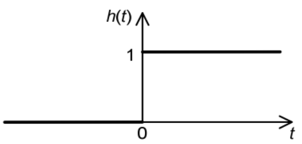
$$f(t) = 2a \cdot e^{-\alpha t} \cos \omega t - 2b \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega t + \sum_{k=3}^{n} K_k e^{s_k t}, \quad t > 0$$

22.8 Naći izlaz za dati ulaz:
22.8.a Dirakov impuls i funkcija prenosa sa realnim polinomom

22.8.b Dirakov impuls i funkcija prenosa sa konjugovano kompleksnim polovima

23. Standardni pobudni signali. Primena Laplasove transformacije na signale.

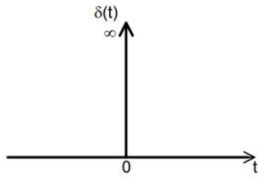
Hevisajdov signal



$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_{0+}^{\infty} 1 \cdot e^{-st} dt = -\left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_{0}^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Dirakov impuls

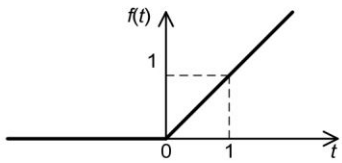


$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ \infty, & t=0\end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

$$F(s)=L\{\frac{dh(t)}{dt}\}=sL\{h(t)\}-h(0_-)=s\cdot\frac{1}{s}-0=1$$

Jedinični nagibni signal

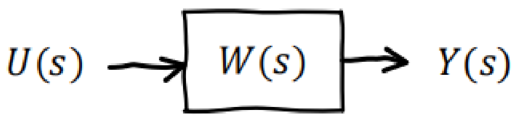


$$h(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$$

$$F(s)=L\{f(t)\}=L\{t\cdot h(t)\}=\int_0^{\infty}t\cdot e^{-st}dt=-\frac{t\cdot e^{-st}}{s}\Big|_0^{\infty}+\frac{1}{s}\int_0^{\infty}e^{-st}dt=\frac{1}{s^2}$$

24. Funkcija prenosa sistema sa jednim ulazom i jednim izlazom.

24.1 Nacrtati sliku funkcije prenosa i obeležiti signale.



U(s) - ulazni signali
Y(s) - izlazi signali

24.2 Definicija.

Funkcija prenosa je odnos Laplasovih transformacija izlaznog $Y(s)=\mathcal{L}\{y(t)\}$ i ulaznog signala $U(s)=\mathcal{L}\{u(t)\}$ (vremenski kontinualnih) kada su početne vrednosti nula.

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=W(s)$$

24.3 Kako se definiše kašnjenje?

Funkcija prenosa se pomnozi sa e^{-s*tau} Npr: k/(1+Ts) * e^{-s*tau}

24.4 Šta su polovi, šta su nule?

Faktorizovan oblik funkcije prenosa:

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = k\frac{(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_m)}{(s-t_1)(s-t_2)\dots(s-t_n)}$$

gde su:

- k – pojačanje ($k = b_m$)
- $r_1, r_2, \dots, r_m$ su **nule** sistema tj. koreni polinoma brojioca $P(s)$
- $t_1, t_2, \dots, t_n$ su **polovi** sistema $(s-t_1)(s-t_2)\dots(s-t_n)$

25. Analitičko izračunavanje izlaza primenom inverzne Laplasove transformacije.

25.1 Koraci.

Inverzna Laplasova transformacija

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Postupak:

1. Rastavljanje $F(s)$ na parcijalne sabirke
2. Prepoznavanje sabiraka u tablicama Laplasove transformacije i pisanje originala

Od posebnog značaja su **polovi** funkcije $F(s)$, tj. koreni $Q(s) = 0$, i tu se mogu uočiti četiri karakteristična slučaja:

- Svi polovi funkcije $F(s)$ su realni i prosti
- Funkcija $F(s)$ ima višestruke realne korene
- Postoje konjugovano-kompleksni polovi, a realni su, ako postoje, prosti
- Funkcija $F(s)$ ima višestruke konjugovano kompleksne polove

25.2 Šta zavisi od polova funkcije prenosa?

- Polovi sistema određuju karakter ponašanja sistema. Dobijaju se rešavanjem jednačine

$$Q(s) = 0$$

Diskriminanta: D = ξ^2 - 1

25.3 Kakvi su polovi ako je odziv kritično-aperiodičan?

Polovi su realni i jednaki. D = 0 => ξ = 1

25.4 Kakvi su polovi ako je odziv aperiodičan?

Polovi su realni i razliciti. D > 0 => $\xi > 1$

25.5 Kakvi su polovi ako je odziv prigušeno periodičan?

Konjugovani kompleksni sa negativnim realnim delom. $0 < \xi > 1$

25.6 Kakvi su polovi ako je odziv periodičan?

Konjugovano kompleksni sa realnim delom nula. D < 0 => $\xi = 0$

26. Analitičko izračunavanje izlaza linearnog modela u prostoru stanja. Fundamentalna matrica.

26.1 Linearan MMUPS matrično.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Gde su signali vremenski kontinulni: x – promenljive stanja, u – ulazi, y - izlazi

26.2 Linearan MMUPS razvijen oblik.

u razvijenom obliku:

Izvodi (promene u vremenu) promenljivih stanja

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}_1(t) &= a_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{1n}\hat{x}_n(t) + b_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{1m}\hat{u}_m(t) & \hat{x}_1(0) &= \hat{x}_{10}\\
\dot{\hat{x}}_2(t) &= a_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{2n}\hat{x}_n(t) + b_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{2m}\hat{u}_m(t) & \hat{x}_2(0) &= \hat{x}_{20}\\
&\cdots & &\cdots\\
\dot{\hat{x}}_n(t) &= a_{n1}\hat{x}_1(t) + \cdots + a_{nn}\hat{x}_n(t) + b_{n1}\hat{u}_1(t) + \cdots + b_{nm}\hat{u}_m(t) & \hat{x}_n(0) &= \hat{x}_{n0}
\end{aligned}$$

Izlazi modela

$$\begin{aligned}
\hat{y}_1(t) &= c_{11}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{1n}\hat{x}_n(t) + d_{11}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{1m}\hat{u}_m(t)\\
\hat{y}_2(t) &= c_{21}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{2n}\hat{x}_n(t) + d_{21}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{2m}\hat{u}_m(t)\\
&\cdots\\
\hat{y}_r(t) &= c_{r1}\hat{x}_1(t) + \cdots + c_{rn}\hat{x}_n(t) + d_{r1}\hat{u}_1(t) + \cdots + d_{rm}\hat{u}_m(t)
\end{aligned}$$

„kapice“ su bitne - imaju značenje promena (razlika) vrednosti u odnosu na nominalne vrednosti.

26.3 Definisati fundamentalnu matricu.

$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$

$\Phi(t) = LT^{-1}\{\Phi(s)\}$

26.4 Kako se dobijaju promenljive stanja i izlaz?

Laplasova transformacija se upotrebljava za određivanje fundamentalne matrice koja figuriše u izrazu za računanje kretanja promenljivih stanja i izlaza modela.
Vektroski zapis :

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$

Uvažavanjem nekomutativnosti matričnog množenja dobija se izraz :

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{B} \cdot U(s) \; / \cdot \, (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$$

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{x}_0 + (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} \cdot \boldsymbol{B} \cdot U(s)$$

I je jedinična matrica. **X**(s) je komleksni lik promenljivih stanja.
Dalje primenjujemo inverznu Laplasovu transformaciju i dobijamo kretanje promenljivih stanja:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\,\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau$$

$\boldsymbol{\Phi}(t)$ je fundamentalna matrica koja se računa kao $\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\}$.
Izraz za kretanja promenljivih stanja čine dva sabirka, prvi je kretanje promenljivih stanja pod dejstvom početnog uslova $\boldsymbol{x}_0$, a rešavanjem konvolucionog integrala dobija s kretanje sistema pod dejstvom drugog ulaza. Drugi sabirak je nastao primenom osobine konvolucije originala i integrali se po nezavisno promenljivoj τ, ali pošto je podintegralna funkcija zavisna i od t, integral će biti funkcija vremena i kad su obe granice određenog integrala konstante.

Izlaz iz modela određuje se kao:

$$y(t) = \boldsymbol{Cx}(t) + \boldsymbol{D}u(t)$$

Tako da je kretanje izlaza modela:

$$y(t) = \boldsymbol{C\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0 + C\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\,\boldsymbol{B}u(\tau)d\tau + \boldsymbol{D}u(t)$$

(Broj ulaza i izlaza može biti veći od jedan i tada se u označavanju umesto pojedinačnih signala ulaza i izlaza pišu vektori tih signala)

26.5 Čime je određen red modela?

Red modela je odredjen brojem promenljivih stanja, tj. dimenzijama matrice A.

26.6 Šta utiče na ponašanje modela u prostoru stanja?

Uticu opsezi vrednosti promenljivih.
Sto je veci opseg, model je vise upotrebljiv.

27. Numeričko izračunavanje izlaza linearnog vremenski diskretnog modela u prostoru stanja

Dat je Linearan vremenski diskretan model u prostoru stanja:

$$x(k+1) = Ex(k) + Fu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Gde su signali vremenski diskretni: x – promenljive stanja, u – ulazi, y – izlazi

- Na osnovu (**) odziv u trenutku $t = kT$ je

  (**) $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^t \mathbf{\Phi}(t-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$

  $\mathbf{x}(kT) = \mathbf{\Phi}(kT) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} \mathbf{\Phi}(kT-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$
- a u narednom trenutku $t = kT + T$ je

  $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(kT+T) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau + \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$

- Na osnovu osobine: $\mathbf{\Phi}(a+b) = \mathbf{\Phi}(a) \cdot \mathbf{\Phi}(b)$

  $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T) \cdot \left(\mathbf{\Phi}(kT) \cdot \mathbf{x}(0) + \int_0^{kT} \mathbf{\Phi}(kT-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau\right) + \int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(\tau) d\tau$

- period $[kT, kT+T]$ je dovoljano kratak da možemo smatrati da je $\boldsymbol{u}(kT)$ nepromenljivo tokom tog perioda.

  $\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T) \cdot \mathbf{x}(kT) + \left(\int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) d\tau\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT)$

- Rešavanje se nastavlja uvođenjem smena ...
  - Prva smena: $q = \tau - kT$

    $\int_{kT}^{kT+T} \mathbf{\Phi}(kT+T-\tau) d\tau = \int_0^T \mathbf{\Phi}(T-q) dq$
  - i još jedna smena: $y = T - q$

    $\int_0^T \mathbf{\Phi}(T-q) dq = -\int_T^0 \mathbf{\Phi}(y) dy = \int_0^T \mathbf{\Phi}(y) dy$

- Konačno:

  $$\mathbf{x}(kT+T) = \mathbf{\Phi}(T) \cdot \mathbf{x}(kT) + \left(\int_0^T \mathbf{\Phi}(t) dt\right) \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(kT)$$

  tj.

  $$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}(k)$$
  $$\mathbf{E} = \mathbf{\Phi}(T)$$
  $$\mathbf{F} = \left(\int_0^T \mathbf{\Phi}(t) dt\right) \cdot \mathbf{B}$$

28. Numerički postupak dobijanja linearnog vremenski diskretnog modela u prostoru stanja

28.1 Linearan kontinualan model u prostoru stanja.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Gde su signali vremenski kontinulni: x – promenljive stanja, u – ulazi, y - izlazi

28.2 Linearan diskretan model u prostoru stanja.

$$x(k+1) = Ex(k) + Fu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Gde su signali vremenski diskretni: x – promenljive stanja, u – ulazi, y – izlazi

28.3 Primeniti izraz x(t) = F(t)x(0)+... i odrediti (izvesti) matrice vremenski diskretnog modela.

4.1.5 Numerički postupak za vremensku diskretizaciju modela

21

Postupak računanja matrica $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{F}$ se znatno pojednostavljuje ako je matrica $\boldsymbol{A}$ u dijagonalnoj formi, te se stoga traži matrica $\boldsymbol{P}$ koja uvodi nove promenljive stanja tako da se postojeći model transformiše u model gde je matrica sistema u dijagonalnoj formi.

Kada se uvede smena

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P} \cdot \tilde{\boldsymbol{x}}(t) \tag{4.25}$$

promena novouvedenih promenljivih stanja se može opisati sa

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \boldsymbol{P}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) &= \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{4.26}$$

gde su matrice transformisanog modela

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \\ \tilde{\boldsymbol{B}} &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Kako je ranije napomenuto, namera je da se dobije matrica sistema u dijagonalnoj formi (van glavne dijagonale matrice su svuda nule)

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

jer se time pojednostavljuje izračunavanje fundamentalne matrice i ona postaje

$$\boldsymbol{\Phi}(T) = e^{\tilde{\boldsymbol{A}}T} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} & & & \boldsymbol{0} \\ & e^{\lambda_2 T} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & e^{\lambda_n T} \end{bmatrix}. \tag{4.29}$$

Da bi se ovo postiglo, potrebno je odrediti matricu $\boldsymbol{P}$, tj. rešiti matričnu jednačinu

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{A}}. \tag{4.30}$$

Za rešavanje ove jednačine, matrica $\boldsymbol{P}$ se predstavlja preko vektora kolona p_i nazvanih svojstveni vektori matrice $\boldsymbol{A}$, dok su λ_i označene svojstvene vrednosti matrice $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{p}_n] = [\boldsymbol{p}_1 \quad \boldsymbol{p}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \boldsymbol{0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

i dobija se n nezavisnih relacija

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_i\lambda_i, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{4.32}$$

Prethodna jednačina se može napisati kao

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{p}_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,n. \tag{4.33}$$

I njeno netrivijalno rešenje se dobija iz uslova

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0. \tag{4.34}$$

Kada je poznata matrica $\boldsymbol{P}$, mogu se odrediti i tražene matrice $\boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{F}$. Primenom Laplasove transformacije na (4.26) nastaje

$$\begin{aligned} s\boldsymbol{I}\tilde{\boldsymbol{X}}(s) - \tilde{\boldsymbol{x}}_0 &= \tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{X}}(s) + \tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{U}(s) \\ \tilde{\boldsymbol{X}}(s) &= \left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{x}}_0 + \left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{U}(s) \\ \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}(s) &= \left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_0 + \left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{U}(s) \\ \boldsymbol{X}(s) &= \boldsymbol{P}\left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{P}\left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{U}(s). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Poređenjem sa (4.8) dobija se tzv. *rezolventna matrica*

$$\boldsymbol{R}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{P}\left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{4.36}$$

i nakon primene inverzne Laplasove transformacije nastaje fundamentalna matrica

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{P}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(s\boldsymbol{I} - \tilde{\boldsymbol{A}}\right)^{-1}\right\}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}e^{\tilde{\boldsymbol{A}}t}\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{4.37}$$

Odatle je

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\Phi}(T) = \boldsymbol{P}e^{\tilde{\boldsymbol{A}}T}\boldsymbol{P}^{-1}, \tag{4.38}$$

a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \left(\int_0^T e^{\boldsymbol{A}t}dt\right)\boldsymbol{B} = \left(\int_0^T \boldsymbol{P}e^{\tilde{\boldsymbol{A}}t}\boldsymbol{P}^{-1}dt\right)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\left(\int_0^T e^{\tilde{\boldsymbol{A}}t}dt\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} \\ &= \boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\left(e^{\tilde{\boldsymbol{A}}T} - \boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}. \end{aligned} \tag{4.39}$$

28.4 Koje su pretpostavke uvedene u prethodnom izvođenju?

- Ulazi su konstantne vrednosti tokom periode odabiranja.
- Izlazi se mogu izracunati samo u t = kT trenutku.

28.5 Pogodna transformacija da bi se lakše izračunale matrice.

Postupak računanja matrica E i F se pojednostavljuje ako je matrica A u dijagonalnoj formi, pa se traži matrica P koja uvodi nove promenljve stanja tako da se postojeći model transformiše u model gde je matrica u dijagonalnoj formi.

Uvodimo smenu : $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{P} \cdot \widetilde{\boldsymbol{x}}(t)$

Promena novouvedenih promenljivih stanja se opisuje sa :

$\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{P}^{-1}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$

odnosno

$\dot{\widetilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \widetilde{\boldsymbol{A}}\widetilde{\boldsymbol{x}}(t) + \widetilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}(t)$

gde su matrice transformisanog modela :

$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$

$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}$

28.6 Na osnovu kog izraza se računaju sopstvene vrednosti matrica?

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

λ_i su svojstvene vrednosti matrice **A**

28.7 Kako perioda odabiranja utiče na matrice?

Perioda odabiranja ne utice na tacnost dobijenog ponasanja, ali utice na rezoluciju u vremenu.

28.8 Čemu su jednake svojstvene vrednosti dijagonale matrice?

Polinom n-tog stepena po Lambda koji za resenje daje Lambda koje se nalazi na glavnoj dijagonali.

29. Dinamički modeli prvog i drugog reda. Uticaj lokacije polova funkcije prenosa na njen odziv.

Dinamički model opisuje ponašanje sistema u prelaznim procesima, tj. opisuje promene promenljivih tokom vremena, te time sadrži izvode zavisno promenljivih.

29.1 Šta je funkcija prenosa?

Funkcija prenosa je odnos Laplasovih transformacija izlaznog $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ i ulaznog signala $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$ (vremenski kontinualnih) kada su početne vrednosti nula.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = W(s)$$

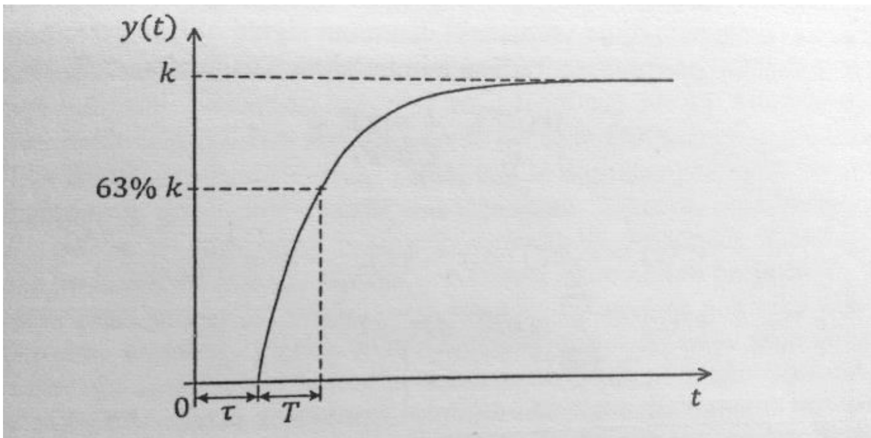
29.2 Model 1. reda - formula.

Понашање система првог реда је најједноставније и функција преноса која их описује има облик:

$$G(s) = \frac{k}{1+Ts}e^{-\tau s}$$

где је τ – временско кашњење, T - временска константа, а k - његово појачање.

29.3 Odziv modela na jediničnu pobudu - grafik.



Slika 2.5 – Jedinični odziv lineranog modela 1. reda

29.4 Kašnjenje modela 1. reda.

Funkcija prenosa se mnozi sa e^{-tau*s} gde tau predstavlja vremensko kasnjenje.

29.5 Model 2. reda - formula.

Понашање линеарног система другог реда се може описати функцијом преноса:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}e^{-\tau s}$$

где је k – статичко појачање, ω_n - непригушена природна учестаност и ξ –коефицијент пригушења. У зависности од вредности коефицијента пригушења одзив система на јединичну побуду уз нулте почетне услове је:

29.6 Kritično aperiodičan odziv.

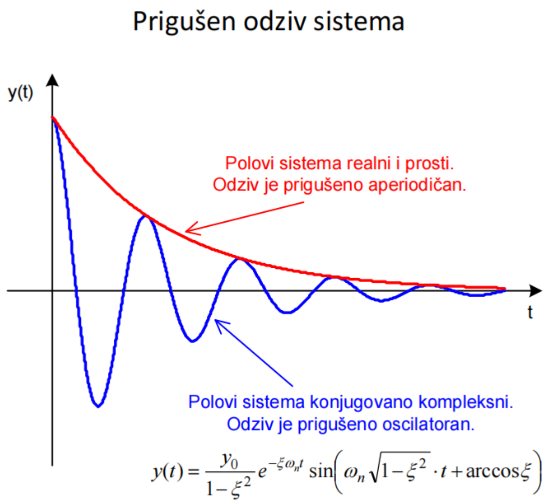
$\xi = 1$

29.7 Prigušeno periodičan odziv + grafik.

$0 < \xi < 1$

29.7.1 Periodican

$\xi = 0$



29.8 Aperiodičan odziv.

$\xi > 1$

29.9 Predstava funkcije prenosa.

Faktorizovan oblik:

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = k\frac{(s-r_1)(s-r_2)\ldots(s-r_m)}{(s-t_1)(s-t_2)\ldots(s-t_n)}$$

gde su:

- k – pojačanje ($k = b_m$)
- $r_1, r_2, \ldots, r_m$ su **nule** sistema tj. koreni polinoma brojioca $P(s)$
- $t_1, t_2, \ldots, t_n$ su **polovi** sistema $(s-t_1)(s-t_2)\ldots(s-t_n)$

Funkcija prenosa se realizuje kao količnik polinoma po s.

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_n s^m + \dots + p_1 s + p_0}{s^n + \dots + q_1 s + q_0}, m \leq n$$

30. Numeričko rešavanje algebarskih jednačina. Tipovi problema. Metoda najmanjih kvadrata.

30.1 Kako izgleda linearan model u prostoru stanja?

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Gde su signali vremenski kontinulni: x – promenljive stanja, u – ulazi, y - izlazi

30.2 Kako izgleda rešenje ako je sistem određen (regularan)?

Kada je sistem odredjen (n = m) tj.kad je broj nepoznatih jednak broju jednacina , onda postoji jedno resenje, tj. jedan skup od n vrednosti.

30.3 Kako izgleda rešenje ako sistem nije određen?

Kada je sistem neodredjen (n != m), onda resenje nije jednoznacno, i ne mora da postoji resenje.
Koristi se metoda najmanjih kvadrata.

30.4 Koja se metoda koristi ako je sistem preodređen? Definisati.

Koristi se metoda najmanjih kvadrata.

- Uvedu se greške jednačina $e_1, e_2, \dots$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n - b_1 &= e_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n - b_2 &= e_2 \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n - b_m &= e_m \end{aligned}$$

- Ukupno odstupanje:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2$$

- Problem postaje

$$\min_x \mathcal{J} = \min_x \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2 = \min_x \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n - b_k)^2$$

...

- Potreban uslov za minimum $\mathcal{J} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2$ je $\nabla \mathcal{J} = \mathbf{0}$ → $\nabla \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$
- tj.

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Kad se sredi Jakobijan =>

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{b}$$

Pseudoinverzija matrice A:

$$\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^T$$

30.5 Kako gradijentni metod obezbeđuje smanjenje funkcije cilja?

Da bi se J (odstupanje) smanjivalo iz iteracije u iteraciju, potrebno je da je $J(x_{k+1}) < J(X_k)$.

Zbog toga se usvaja deltaX.

$$\Delta \boldsymbol{x}_k = -h \cdot \nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k), \qquad h > 0$$

Ovim uslovom za h postizemo da drugi sabirak u jednacini

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}_{k+1}) = \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k + \Delta \boldsymbol{x}_k) \approx \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k) + \nabla^T \mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k) \cdot \Delta \boldsymbol{x}_k$$

Bude negativan.

30.6 Kako Levenberg-Markartov podešava λ?

λ_k se koriguje u svakoj iteraciji k na osnovu tekuće $\mathcal{J}_k$ i prethodne $\mathcal{J}_{k-1}$ vrednosti funkcije cilja $\mathcal{J}_k = \frac{1}{2}\boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$

$$\lambda_k = \nu\lambda_{k-1} \text{ za } \mathcal{J}_k \geq \mathcal{J}_{k-1}$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\nu}\lambda_{k-1} \text{ za } \mathcal{J}_k < \mathcal{J}_{k-1}$$

$\nu > 1$

30.7 Šta znači šta u konačnom izrazu kod Gaus-Njutnovog algoritma?

$$\Delta \boldsymbol{x}_k = -\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\right)^{-1}\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

$\boldsymbol{x}$ je vektor promenljvih koje se traže, $\Delta \boldsymbol{x}_k$ je korekcija u k toj iteraciji itrerativnog postupka

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \mathbf{0}$ je sistem jednačina koji se rešava

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ je Jakobijan, tj. $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$

- Jakobijan - izvodi svih funkcija po svim x

30.8 Od koje funkcije cilja kreće MNK?

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2$$

30.9 Njutnovo Δx izvođenje.

Problem: $f(x) = 0$

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k, \;\; k = 0,1,\ldots$$

$$f(x_k + \Delta x_k) \approx f(x_k) + f'(x_k)\Delta x_k = 0$$

$$\Delta x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Kriterijumi zaustavljanja:

$|\Delta x_k| \leq \varepsilon_x$ promena zavisno promenljive je dovoljno mala, manja od zadatog ε_x

$f(x_k)^2 \leq \varepsilon_J$ vrednost funkcije je bliska nuli, f^2 manja od zadatog ε_J

$k > k_{max}$ broj iteracija je veći od propisanog k_{max}

30.10 Kako funkcioniše korak kod Gradijentnog algoritma?

Brzo napredovanje u početnim iteracijama, ali sporo na kraju u okolini optimuma.
Veliki broj iteracija.
Pravi veliki broj iteracija jer su izvodi u okolini cilja (minimuma) veoma mali pa je malo Δx_k.

31. Numeričko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina: problem, Ojlerove metode

Obične diferencijalne jednačine (ODJ)

- engl. *Ordinary Differential Equation* (ODE)
- U matematici ODJ je jednačina koju čini funkcija jedne nezavisne promenljive i njenih izvoda.
- Veoma su česte u modelovanju dinamičkih sistema
  - U simulacijama nezavisno promenljiva je vreme *t*

- Generalna definicija ODJ:

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}) \quad \text{Eksplicitna forma}$$

ili

$$f(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \quad \text{Implicitna forma}$$

gde je:

$$y' = \frac{dy}{dt}, y'' = \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dt^n}$$

Linearna ODJ

- Linearna ODJ sadrži linearnu kombinaciju izvoda zavisno promenljive y

$$y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) \cdot y^{(i)} + r(t)$$

ili

$$y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y + r(t)$$

- Linearne ODJ se rešavaju na poseban način koji je dosta jednostavniji od opšteg postupka.

Svođenje ODJ na sistem DJ 1. reda

- Svaka ODJ se može napisati kao ekvivalentan sistem običnih diferencijalnih jednačina 1. reda.
- Jedan od načina za takvu transformaciju je uvođenje smena

$$y_k = y^{(k-1)}, \quad k = 1,2,\ldots,n$$

- Dobija se:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\ldots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t, y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}$$

ili zapisano u vektorskom obliku:

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y})$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \ldots \\ y_n' \end{bmatrix}, \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \ldots \\ f(t, y_1, \ldots, y_n) \end{bmatrix}$$

Problem:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t), \quad y(t_0) = y_0$$

Rešenje:

- polazi se od poznatih (t_0, y_0) i sukcesivno računaju parovi (t_i, y_i) za $i = 1,2, \ldots$
- Iterativan račun se sprovodi "korak-po-korak", gde se (t_{i+1}, y_{i+1}) računa na osnovu prethodno sračunatog (t_i, y_i).

Ojler:

U svakoj iteraciji :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dt}h + \left(\frac{dy_{i+1}}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Računanje izvoda traži vrednost y_{i+1} koju još ne znamo!

1. Uvodi se predviđena (*predicted*) vrednost

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{dy_i}{dt}h$$

metod 1. reda (ako se ne radi drugi korak)

2. I ona se koriguje

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^p}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Korekcija, a ujedno i procena greške

$$y_{i+1}^c = y_{i+1}^p + \varepsilon_i$$

metod 2. reda

32. Numeričko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina: Ojlerova metoda i promenljivi korak integracije

32.1 Definicija Ojlerovog.

Problem:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t), \quad y(t_0) = y_0$$

U svakoj iteraciji :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{dy_i}{dt}h + \left(\frac{dy_{i+1}}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Računanje izvoda traži vrednost y_{i+1} koju još ne znamo!

1. Uvodi se predviđena (*predicted*) vrednost

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{dy_i}{dt}h$$

metod 1. reda (ako se ne radi drugi korak)

2. I ona se koriguje

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^p}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Korekcija, a ujedno i procena greške

$$y_{i+1}^c = y_{i+1}^p + \varepsilon_i$$

metod 2. reda

32.2 Osnovna ideja.

Zasnovan je na odredjivanu y_{i+1} koje se moze odrediti na osnovu razvoja u Tejlorov red u okolini tacke (t_i,y_i)

32.3 Koji su početni elementi?

y_i je izracunata vrednost na osnovu t_i i znamo izvod f(y_i,t_i), => treba da se odredi y_{i+1}

32.4 Procenjena vrednost.

$$y_{i+1}^p = y_i + \frac{dy_i}{dt}h$$

32.5 Korigovana vrednost.

$$y_{i+1}^c = y_{i+1}^p + \varepsilon_i$$

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^p}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Korekcija, a ujedno i procena greške

32.6 Šta je problem kod fiksnog koraka integracije?

Ne moze da se prilagodjava po iteracijama, i samim tim je manje efikasan.
*Numericko resenje sa manjim korakom ima manju gresku.

32.7 Kako se ispravlja korak integracije?

Na osnovu velicine korekcije mozemo prilagoditi korak h.

- za veliko ε smanjiti korak, a
- za malo ε povećati korak

32.8 Formula za ε.

$$\varepsilon_i = \left(\frac{dy_{i+1}^p}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right)\frac{h}{2}$$

Korekcija, a ujedno i procena greške

32.9 Dobra osobina fiksnog koraka.

Uvek znamo vrednost pa je racunanje jednostavnije.

33. Numeričko rešavanje običnih diferencijalnih jednačina – Runge-Kuta metode

33.1 Opiši šta radi, koji je cilj, od čega kreće, šta je poznato.

Resava ODJ 1. reda.
Uopstili su Ojlerov postupak i uveli su vise clanova koji bolje aproksimiraju trazenu vrednost y.
Ako koristimo 2 clana onda se govori o metodama 2. reda itd.
Pretpostavili su da postoje neke konstante koje se koriste u proracunu i da to ne moraju da budu tacne vrednosti koje je stavio Ojler.
Poznato je y_i u t_i trenutku i izvod $f(y_i, t_i)$
Trazi se y_{i+1}

33.2 Kako Runge-Kuta rešava diferencijalne jednačine višeg reda?

Jednacine se prepisu u sistem n diferencijalnih jednacina prvog reda, uvodi se n promenljivih. Koliko ima jednacina u sistemu, toliko ce biti i promenljivih.

33.3 Kako bi Runge-Kuta realizovao Ojlerovu jednačinu drugog reda?

RK uvodi tri konstante c_1, c_2, a_2

$$y_{i+1} = y_i + c_1 k_1 + c_2 k_2$$

$$k_1 = f(y_i, t_i)h$$

$$k_2 = f(y_i + a_2 k_1, t_i + a_2 h)h$$

Dobijamo sistem 2 jednacine sa 3 nepoznate, tako da postoji vise resenja za c_1 c_2 a_2

33.4 Kruti modeli.

Kod krutih problema neke promenljive stanja se mogu menjati vrlo sporo u odnosu na interval simulacije, a druge mnogo brze.
Metode koje nisu dizajnirane za krute probleme nisu efikasne jer ne primenjuju mali korak integracije.

33.5 Dobre i loše osobine.

Dobre - bolja aproksimacija od Ojlerovog.
Lose - metode 2. reda nemaju tacnost, pa se koriste metode 3. reda.

33.6 Gde su aproksimacije?

Aproksimacije su u visim redovima Tejlorovog reda.

33.7 Šta znači Runge-Kuta 45?

Runga-Kuta 45 predstavlja metodu 4-5 reda.
Kada se iz Tejlorovog reda uzme prvih 5 sabiraka, dobijaju se Runge Kuta 45.

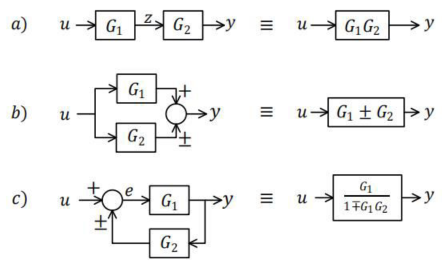
34. Strukturni blok dijagram sistema automatskog upravljanja. Algebra funkcija prenosa

34.1 Šta je strukturni blok dijagram i koji su njegovi elementi?

SBD je graficka predstava matematickog modela.
Elementi: signali, grane, cvorovi, sabiraci.

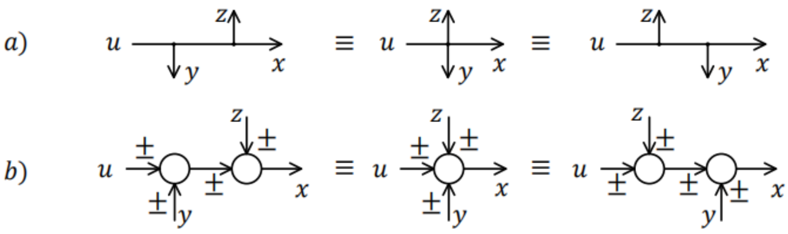
34.2 Osnovne transformacije.

- Transformacije:
  a) Redna veza
  b) Paralelna veza
  c) Povratna sprega

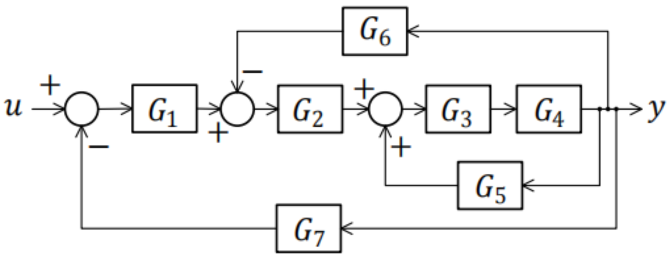


- Pravilo: isti odnos ulaz-izlaz pre i posle transformacije!

34.3 Trivijalne transformacije.



34.4 Primer blok dijagrama



34.5 Kada i zašto se koriste jednostavne transformacije?

Koristimo ih kad zelimo da uprostimo strukturni blok dijagrama kako bismo dosli do funkcije prenosa.
Zelimo dobiti model celog sistema. Ukoliko ne mozemo da iskoristimo neku od osnovnih transformacija, moramo da koristimo trivijalne (jednostavne).

Softver (Julia)

35. Rad sa matricama i vektorima (nizovi, torke, opsezi, matrice, operacjie).

35.1 Šta je opseg?

Julia omogućava jednostavno generisanje rastućih ili opadajućih nizova ekvidistantnih vrednosti upotrebom opsega.
Opsezi su definisani kao posebni tipovi u programskom jeziku Julia i definišu se upotrebom operatora ":", kojim se formira sekvenca brojeva u zadatim granicama zatvorenog intervala.

35.2 Staviti poslednju vrstu matrice na početak.

```
A = round.(10*randn(5,5))
A[1,:] .= A[end,:]
```

35.3 Transformacije matrice.

Inverzna matrica inv
Determinanta matrice det
Transponovanje matrice ‘
Faktorizacija matrice factorize

35.4 Razlika između nizova i torki.

Torke su slicne nizovima, ali se njihove vrednosti ne mogu menjati nakon inicijalizacije.

35.5 Ostaviti samo parne kolone u matrici.

A = A[:,2:2:end]

35.6 MNK.

U juliji se metoda najmanjih kvadrata realizuje operatorom desnog deljenja.
Ako je jednacina b = x * A => x = b / A
Ako je jednacina b = A * x => x = A \ b

36. Kontrola toka programa. Funkcije.

36.1 Koje su ključne reči?

global, for, while, if, elseif, else, break, continue, throw, try, catch, end, finally…

36.2 Opisati zaglavlje funkcije.

function ime(parametar)

Parametri se kod poziva funkcije menjaju konkretnim vrednostima - argumentima.

36.3 Napisati funkciju koja računa obim i površinu pravougaonika.

```
function obimPovrsina(a,b)

        O = 2*a + 2*b
        P = a*b
        return O, P

end

o, p = obimPovrsina(5,6)
```

36.4 Modifikovati prethodnu funkciju da radi sa 1 parametrom.

```
function obimPovrsina(a, b = a)
        O = 2*a + 2*b
        P = a*b
        return O, P
end

o, p = obimPovrsina(5,6)
```

36.5 Primer prebrojive petlje.

```
for i in 1:10
        println(1)
end
```

36.6 Primer neprebrojive petlje.

Beskonacan loop:

```
while(true)
    println(1)
end
```

Konacan loop:

```
while(uslov)
    println(1)
end
```

36.7 Napisati funkciju koja kao parametre prima redom vrednosti iz skupa -1, 0, 1, inf

```
function f1(x)
…
end

x = [-1,0,1,Inf]                * Inf velikim
y = f1.(x)                     *Bitna je tacka
```

37. **Izdvajanje podniza/submatrice.** *(Data matrica sa mnogo vrsta i 3 kolone)*

37.1 Opisati teorijsko izdvajanje submatrice.

Izdvajanje submatrice iz neke postojece matrice svodi se na izbor elemenata koji ce se kopirati.
Treba definisati 2 niza od kojih se prvi odnosi na zeljene vrste a drugi na zeljene kolone.

37.2 Dodati kolonu koja je zbir prve dve kolone.

```
Zbir = A[:,1] .+ A[:,2]
A = A .+ zbir
```

37.3 Obrisati poslednje dve vrste.

A = A[1:1:end-2, :]

37.4 Izvući submatricu svih vrsta čiji su svi članovi u vrsti pozitivni.

***

38. Matematičke i statističke funkcije za rad sa nizovima. Matrice "poznatih" vrednosti

38.1 Nabrojati matematičke funkcije.

Sin, cos, tan, cot, log, exp, max, min

Sum, minimum, maximum, findmax, findmin, sort, findall

38.2 Koje funkcije mogu da rade i sa nizovima i sa matricama?

Sum, minimum, maximum, findmax, findmin, sort, findall

Paziti na dimenziju, posto su matrice nizovi u dve dimenzije.

38.3 Kako te funkcije rade sa nizovima?

Niz posmatraju kao matricu koja je vektor i obrnuto.
Rade sa svim elementima pojedinacno, upotrebom tacke(.) .

38.4 Kako se definišu matrice poznatih vrednosti?

Zeros, ones, rand, randn

39. Rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina upotrebom softvera. Metoda najmanjih kvadrata.

1. Napisati Julija kod za rešavanje sistema jednačina:

$$x_1 + 2x_2 = -2.5$$
$$-x_1 + 3x_2 = 0.5$$

```
A = [1 2; -1 3];
b = [-2.5; 0.5];
x = A \ b
```

4. Opisan je sistem algebarskih jednačina matričnim izazom $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.5 \end{bmatrix}$.
Napisati kod koji nalazi rešenja.

```
A = [1 -1; 2 3];
b = [-2.5 0.5];
x = b / A
```

Objašnjenje:
Sistem jednačina je $x \cdot A = b$, te je rešenje $x = b \cdot A^{-1}$. Ne može se rešiti preko $A^{-1} \cdot b$ jer se sistem jednačina množi sa desne strane sa A^{-1}, tj.: $x \cdot A \cdot A^{-1} = b \cdot A^{-1}$

39.1 Primer linearne algebarske jednacine

$Ax_1 + Bx_2 = \text{const.}$

Tj. $X_1 + 2X_2 = -2/5$

39.2 Sta je regularan sistem jednacina? Navesti primer.

Regularan sistem linearnih algebarskih jednačina

- $n == m, \ \det(A) \neq 0$
- Primer:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -2.5$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0.5$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 = 1.5$$

- Numeričko (Julija) rešenje:

```
A = [1 2 -1; -1 3 2; -1 -1 1];
b = [-2.5; 0.5; 1.5];
x = A \ b
```

```
 2.4999999999999996
-1.0
 2.9999999999999996
```

39.3 Sta je preodredjen sistem jednacina? Navesti primer i napisati metodu kojom se resava.

Preodredjen => $(A^T A)^{-1} A^T b$ => MNK

Primer

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = -2.5$$
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0.5$$
$$-x_1 - x_2 + x_3 = 1.5$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$$

```
A = [1 2 -1; -1 3 2; -1 -1 1; 1 2 3];
b = [-2.5; 0.5; 1.5; 4];
x = A \ b                  # x = inv(A'*A)*A'*b;
3-element Array{Float64,1}:
  0.6238317757009348
 -0.7001557632398757
  1.5950155763239875

c = A*x
4-element Array{Float64,1}:
 -2.371495327102804
  0.4657320872274133
  1.6713395638629285
  4.008566978193146

e = A*x - b;
J = e'*e                  # greška
0.04711838006230538

x2 = [0.62;-0.7;1.59]     # pretpostavljeno neko drugo rešenje
e2 = A*x2 - b;
J2 = e2'*e2               # sada je greška, tj. J2 > J
0.0474999999999999

J2 - J > 0
true
```

39.4 Kako glasi funkcija cilja kod metodete najmanjih kvadrata?

Funkcija cilja kod MNK = Ukupno odstupanje:

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2$$

40. Rešavanje običnih diferencijlanih jednačina upotrebom softvera (opis jednačina, parametri modela, izbor algoritma, parametri algoritma)

Paket “DifferentialEquations”

Postupak rešavanja ima sledeće korake:
1. definisanje problema
2. rešavanje problema
3. analiza dobijenih rezultata

- uključiti upotrebu prethodno instaliranog paketa
  `using DifferentialEquations`
- Uvesti promenljivu koja „definiše problem“
  `prob = ODEProblem(f, y0, vremenskiOpseg, p)`
  gde su:
  - `f` - funkcija koja definiše izvod(e),
  - `y0` - početne vrednosti zavisno promenljive,
  - `vremenskiOpseg` - posmatrani vremenski interval,
  - `p` - parametri modela.
- Numerički „rešiti problem“
  `r = solve(prob)`
  gde je `r` resenje koje sadrži:
  - `r.t` – vremenski trenuci izračunavanja
  - `r.u` – odgovarajuće vrednosti zavisno promenljivih

Primer: parametri modela pokazani:

```
using DifferentialEquations, Plots

function lotka(du,u,p,t)
    x, y = u
    α, β, γ, δ = p
    du[1] = x*(α - β*y)
    du[2] = -y*(γ - δ*x)
   end

u0 = [80.0; 5.0]                     # početne veličine populacija
tspan = (0.0, 30.0)                  # simulacija 30 meseci
p = [0.7, 0.06, 0.6, 0.01]           # parametri modela
prob = ODEProblem(lotka,u0,tspan,p)
sol = solve(prob)
plot(sol,title = "Promena populacije",
    lab=["Plen" "Grabljivice"],
    xlabel="Vreme", ylabel="Broj jedinki")
```

Parametri algoritma i odabir algoritma:

Parametri numeričkog proračuna

(ovo NISU parametri modela!)

- Parametri koji se mogu postaviti su:
  - relativna greška - `reltol` (podrazumevana vrednost je 10^{-3}),
  - apsolutna greška - `abstol` (podrazumevana vrednost je 10^{-6}),
  - frekvenciju snimanja rešenja - `saveat`,
  - pamćenje samo krajnje tačke rešenja (`save_everystep=false`)
  - korak integracije - `dt`, maksimalni korak - `dtmax`, minimalni korak - `dtmin`

  Način postavljanja:

```
r = solve(problem, saveat = 0.01, abstol = 1e-9, reltol = 1e-6)
```

- Funkciji `solve` se može postaviti numerički algoritam za rešavanje ODJ, poput:
  - `BS3()` – varijanta Runge-Kutta 23
  - `DP5()` ili `Tsit5()` – varijante Runge-Kutta 45
  - `Rosenbrock23()` – modifikovan Runge-Kutta 23 za krute probleme, itd.

```
r = solve(problem, Tsit5(), saveat=1.0, abstol=atol, reltol=rtol)
```

Softverske biblioteke (ControlSystems)

41. Softverska biblioteka: načini predstavljanja modela, konverzije.

41.1Sta je neophodno znati, sta je LTI?

LTI - tip objekta (Linear Time Invariant) - njega nasledjuju sve sledece funkcije:

ss - matematicki model u prostoru stanja
tf - funkcija prenosa preko kolicnika polinoma
zpk - funkcija prenosa preko nula, polova i pojacanja

41.2Kako se formira model?

1. formiramo matrice:

   A = randn(5,5)
   B = randn(5,5)
   C = randn(5,5)
   D = randn(5,5)

2. Formiramo model

   * ako je vremenski diskretan - dodamo i periodu
   perioda = 0.025
   model = ss(A, B, C, D, perioda)

3. Formiramo fju prenosa

   Prvo moramo napraviti polinome p i q
   P = 3
   Q = [1 1.25 9]
   fjaPrenosa = tf(P,Q,perioda)

   Ako cemo preko zpk da pravim f-ju prenosa: Napisemo nule, polove i pojacanje

```
Nule = []
Polovi = [1 1.25]
Pojacanje = [3.8]

Hm = zpk(Nule, Polovi, Pojacanje)
#Hm = zpk(fjaPrenosa)      mozemo i ovako da je dobijemo
```

41.3Kako konvertujemo iz kontinualnog u diskretni?

Koriscenjem c2d funkcije - kao parametre prosledimo kontinualan model i vreme odabiranja

41.4Koje su osnovne veze ?

Series, parallel, Feedback, append,

41.5Neki primer povratne sprege?

```
W = tf([2, 1],[1 0])
Q = feedback(W,1)
```

Q = $W_s(s)$

$$W(s) = \frac{2s+1}{s} = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$W_s(s) = \frac{W}{1+W} = \frac{P(s)}{P(s)+Q(s)} = \frac{2s+1}{3s+1}$$

41.6Kako formiramo slozene modele i fp?

Tako sto koristimo osnovne i trivijalne veze:
series, parallel, feedback, append
Redna veza, paralelna veza, povratna sprega, spajanje delova u nepovezan modela

42. Softverska biblioteka: analiza ponašanja modela.

42.1Sta je neophodno znati, sta je LTI?

LTI - tip objekta (Linear Time Invariant) - njega nasledjuju sve sledece fnkcije:
ss - matematicki model u prostoru stanja
tf - funkcija prenosa preko kolicnika polinoma
zpk - funkcija prenosa preko nula, polova i pojacanja

42.2Formiramo model

1. formiramo matrice:

```
A = randn(5,5)
B = randn(5,5)
C = randn(5,5)
D = randn(5,5)
```

2.Formiramo model

* ako je vremenski diskretan - dodamo I
perioda= 0.025
Model = ss(A,B,C,D,perioda)

3.Formiramo fju prenosa

Prvo moramo napraviti polinome p I q
P = 3
Q = [1 1.25 9]
fjaPrenosa = tf(P,Q,perioda)

4.Napisemo nule, polove I pojacanje

Nule = []
Polovi = [1 1.25]
Pojacanje = [3.8]

Ako cemo preko zpk da pravim f-ju prenosa: Napisemo nule, polove i pojacanje
#Hm = zpk(fjaPrenosa) mozemo i ovako da je dobijemo

42.3 Pobude na Hevisajdov signal, Dirakov impuls i slozen signal

step, impulse - konkretni signali
lsim - prozivoljan signal

y, t, x = impulse(model, tu)
y, t, x = step(model, tu)

model - MMuPS
tu - opseg vremena ili krajnje vreme
y - matrica vrednosti izlaza
t - opseg vremena
x - matrica vrednosti promenljivih stanja

42.4 Pobude na slozene signale

y, t = lsim(model, u, t, x_0)

model - MMuPS
u - promene ulaza za trenutke u vremenu (t)
x_0 - pocetne vrednosti promenljivih stanja
y - matrica vrednosti izlaza
t - opseg vremena
x - matrica vrednosti promenljivih stanja

42.5 Kako se utice na korak simulacije?

Tako sto promenimo korak u t

T=0:**0.1**:10 (ili Sleep funkcija)?

43. Softverska biblioteka: formiranje složenih linearnih modela.

Složen model u simulacionom softveru

- Delovi modela su opisani promenljivima (objektima)
  - ss, zpk, tf, ...
- Na delove modela (promenljive) se mogu primeniti transformacije modela
  - algebra blokova funkcija prenosa je primenljiva na sve LTI tipove objekata (promenljivih)

- Postupno povezivanje delova modela:
  - redna veza: funkcija series ili operator množenja "*"
  - paralelna veza: funkcija parallel ili operator sabiranja "+" ili oduzimanja "-"
  - povratna sprega: funkcija feedback.

  Pored navedenih, mogu se koristiti i operatori stepenovanja "^" i delenja "/".

- Objedinjavanja delova u nepovezan model – append
  - Dobija se blok dijagonalna forma rezultujućeg modela

Postupno povezivanje delova modela

- **Paralelna veza**: povezuje dva modela u paralelnoj vezi. Modeli imaju zajedničke ulaze, a izlazi im se sabiraju/oduzimaju.
  - m = **parallel**(m1, m2)
  - m = m1 + m2 (ili operator „-“)
- **Redna veza**: povezuje dva modela u serijskoj vezi. Izlazi prvog modela se povezuju na ulaze drugog modela.
  - m = **series**(m1, m2)
  - m = m1 * m2
- **Povratna sprega**: povezuje dva modela u zatvorenu negativnu povratnu spregu (m1 je u direktnoj, a m2 u povratnoj grani)
  - m = **feedback**(m1, m2)
  - Alternativa: uneti izraz sa operatorima (uključujući i „/“)

Append objedinjuje opis više modela u jedan model

```
m = append(m1, m2, …, mn)
```

Identifikacija

44. Zadeh-ov opis problema identifikacije. Primena i načini sprovođenja. Postupak identifikacije.

44.1Cime se bavi identifikacija?

Identifikacija se bavi procesom formiranja modela na osnovu posmatranja sistema i istraživanja njegovih osobina.
Bavi se organizacijom merenja i algoritama obrade mernih podataka.

Model gradimo na osnovu:

-teorije(whitebox)
-eksperimenata(blackbox)
-kombinacije(graybox)

44.2 Definicija po Zadehu, sta je potrebno uraditi?

Def. : Identifikacija je odredjivanje na osnovu ulaznih i izlaznih signala procesa, modela iz odredjene klase modela, koji je ekvivalentan procesu na kome su izvrsena odredjena merenja.

Potrebno je:
- Usvojiti strukturu ekvivalencije
- Definisati kriterijum ekvivalencije
- Izvrsiti merenja

44.3 Koraci identifikacije.

1. Eksperiment i prikupljanje ulazno/izlaznih podataka procesa
2. Ispitivanjem izmerenih podataka, eliminisemo/filtriramo nepotrebne
3. Definisemo klasu modela
4. Odredimo konkretan model
5. Ispitujemo usvojene osobine modela
6. U slucaju greske, vracamo se korak po korak u nazad: 4->3->1,2

44.4 Nacin sprovodjenja / vrste identifikacije

On-line: sprovodi se tokom rada sistema
Off-line: sprovodi se nezavisno od rada sistema
Real-time: isto kao online, samo sto se sprovodi nakon svake periode odabiranja

44.5 Sta je rezidual?

Rezidual određuje disperziju signala šuma
$\varepsilon = y - S\hat{q}$, gde su pojedinačne vrednosti $\varepsilon_k = y_k - \psi_k \hat{q}$

Rezidual predstavlja ostatak necega nakon nestanka veceg dela, u ovom slucaju disperziju šuma.

44.6 Sta je identifiabilnost

Identifiabilnost je osobina modela koja se vezuje za mogucnost procene odredjenog modela.

44.7 Sta je parametarska identifikacija?

Određivanje modela koji je poznat sa tačnošću do nepoznatih parametara.

45. Metode parametarske identifikacije (kratak opis linearnih i nelinearni modela i metoda identifikacije)

45.1 Koje metode se koriste za parametarsku identifikaciju sistema ciji je model nelinearan po nepoznatim paramterima?

Iterativne metode parametarske identifikacije imaju mogućnost identifikacije parametara sistema čiji je model nelinearan po nepoznatim parametrima.
Iterativne metode su metode kod kojih se sledeća vrednost određuje na osnovu prethodne.

Koriste se Njutnov, Gradijentni, Gaus-Njutnov i Levenberg-Markartov algoritam.

45.2 Koje metode se koriste za parametarsku identifikaciju sistema ciji je model linearan po nepoznatim paramterima?

Za identifikaciju modela linearnog po nepoznatim parametrima se koriste: Metoda najmanjih kvadrata i Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata.

45.3 Sa koja dva modela se moze opisati kasnjenje sistema?

Dinamički, linearan proces, čije se ponašanje u okolini stacionarnog stanja može opisati:

ARX modelom - $A(z)y(k) = B(z)u(k) + v(k)$

ARMAX modelom - $A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)v(k)$

V - beli sum
Kod ARMAX-a je beli sum obojen filtriranjem sa C

45.4Osobine belog suma

1. Vrednosti se generišu po normalnoj raspodeli.
2. Srednja vrednost je 0, a standardna devijacija 1
3. Vrednost ne zavisi od prethodnih vrednosti, tj. autokorelacija je 0 za sve pomeraje signala $k = 1,2,3,\ldots$

45.5 Sta je obojen sum

Obojen šum se dobija propuštanjem belog šuma kroz filter:

a) Opisan funkcijom diskretnog prenosa
b) Koji kombinuje nekoliko poslednjih vrednosti belog šuma.

46. Parametarska identifikacija i metoda najmanjih kvadrata (LS algoritam)

- Kada je struktura modela poznata, nepoznati parametri modela se određuju na osnovu eksperimentalnih merenja, tj. ukoliko je model poznat sa tačnošću do nepoznatih parametara, tada se govori po parametarskoj identifikaciji.

- Najčešće korišćena metoda parametarske identifikacije je metoda najmanjih kvadrata.

- MNK se koristi za modele koji su linearni po nepoznatim parametrima.

- Najverovatnije vrednosti parametara su one za koje je suma kvadrata odstupanja posmatranog izlaza od izračunatog izlaza minimalna.
Mera ukupnog odstupanja se može odrediti kao srednja kvadratna greška:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1}(y_{nk} - \hat{q}\cdot u_k)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} e_k^2$$

, gde je q sa kapicom procenjena vrednsot.

Procena parametara je tačna kada je nepomerena i efikasna.

Procena je nepomerena kada je očekivana vrednost procene parametra jednaka tačnoj vrednosti $E\{\hat{q}\} = q$.

Procena parametara je efikasna kada za veliki broj merenja K važi da rasipanje procene $E\{(q-\hat{q})(q-\hat{q})^T\} = \sigma_{\hat{q}}^2$ teži nuli, tj. $\lim_{K\to\infty} \sigma_{\hat{q}}^2 \to 0$

Ukoliko imamo model koji je linearan po paramterima i ako model ima beli sum, tada ce procena biti tacna, jer da bi procena bila nepomerena moramo imati beli sum jer je srednja vrednost jedanaka nuli.

Da bi procena bila tacna:
1) beli sum na ulazu
2) mora da bude puno merenja => srednja vrednost = 0 i ujedno disperzija da tezi nuli.

Matematicko ocekivanje suma je beli sum tj. da je = 0. Zbog toga kad je na ulazu beli sum, bice zadovoljeno i matematicko ocekivanje da je procena = q

48. Ako je model $y(t) = q \cdot u(t)$ kako se određuje nepoznati parametar q?

Za više parova vrednosti ulaza u_k i izmerenog izlaza y_k, $k = 1,2.\dots K$ formiraju se vektori $Y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_K]^T$ i $U = [u_1\ u_2\ \dots\ u_K]^T$, i izračuna se $q = (U^TU)^{-1}U^TY$

49. Ako je model $y(t) = q_1u_1(t) + q_2u_2(t)$ kako se određuju nepoznati parametari q_1, q_2 ?

Za više parova vrednosti ulaza $u_{k,1}, u_{k,2}$ i izmerenog izlaza y_k, $k = 1,2.\dots K$ formiraju se $Y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_K]^T$ i $U = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \dots & u_{K,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \dots & u_{K,2} \end{bmatrix}^T$, i izračuna se $q = (U^TU)^{-1}U^TY$

47. Identifikacija parametara ARX modela

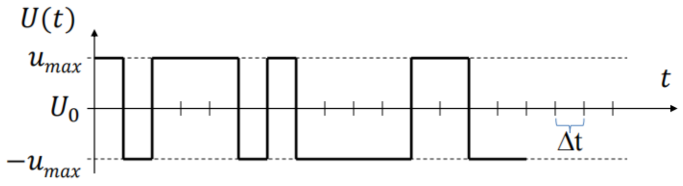
47.1 Definisati ARX model i napisati sta je sta

ARX je vremenski diskretan dinamički model:
$A(z)y(k) = B(z)u(k) + v(k)$, gde su: izlaz y, ulaz u, beli šum v, a $A(z), B(z)$ su polinomi po $z = e^{sT}$.

47.2 Postupak merenja ARX modela

Postupak merenja

- izabere se nominalni radni režim (Y_0, U_0)
- u diskretnim trenucima $t = k\,\Delta t$ se zadaju ulazi i mere izlazi ...
  (Napomena: perioda Δt se bira na osnovu teoreme o odabiranju)
  Za svaki diskretan trenutak trenutak $k = 0,1, \dots K - 1$
  - nominalnom ulazu se doda poznata inkrementalna vrednost $u(k)$, tj. $U(k) = U_0 + u(k)$ se dovede na ulaz sistema
    - kao ulaz najbolje je upotrebiti pseudoslučajni binarni signal (PRBS - *Pseudo Random Binary Signal*). Vidi sliku: Iskustveno je $u_{max} = 0.05\, U_0$.
  - Izmeri se izlaz iz sistema $Y(k)$ i izračuna inkrementalna vrednost izlaza $y(k) = Y(k) - Y_0$



47.3 Cime se potvrdjuju tacne vrednosti parametar?

Tacne vrednosti parametara modela potvrdjuju vrednost kriterijuma optimalnosti J ako je bliza 0.

47.4 Kojom metodom se identifikuju parametri ARX modela?

Metodom najmanjih kvadrata jer je izlaz linearan po nepoznatim parametrima koje množe (poznate) ranije vrednosti ulaza i izlaza. Npr.

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + v(k)$$

47.5 Sta je pseudoslucajan binarni signal?

To je vremenski diskretizovan signal sa vrednostima $\{a, -a\}$ koje se nasumično menjaju u svakom trenutku odabiranja. Koristi se kao ulaz u identifikaciji dinamičkih modela.

47.6 Osobine belog suma?

1. Vrednosti se generišu po normalnoj raspodeli.
2. Srednja vrednost je 0, a standardna devijacija 1
3. Vrednost ne zavisi od prethodnih vrednosti, tj. autokorelacija je 0 za sve pomeraje signala $k = 1,2,3,\ldots$

47.7 Kako se boji beli sum?

Obojen šum se dobija propuštanjem belog šuma kroz filter:

a) Opisan funkcijom diskretnog prenosa
b) Koji kombinuje nekoliko poslednjih vrednosti belog šuma.

47.8 Kako kasnjenje utice na procenu parametara?

Kasnjenje je dobro poznavati, jer se tada smanjuje broj parametara B koji se identifikuju. Ako kasnjenje postoji a ne modeluje se, identifikuju se parametri B iako se zna da su mu vrednosti 0.

47.9 Cemu je jednaka procena parametara?

$$\hat{\boldsymbol{q}} = (\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S})^{-1}\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{Y}$$

47.10 Nelinearan ARX Model

y(k) = f(y(k-1), … , y(k-n), u(k-1),…, u(k-m), v(k))

y - izlaza
u - ulaz
v - beli sum
f - nelinearna funkcija

48. Identifikacija parametara ARMAX modela

48.1 Definisati ARMAX model i napisati šta je šta?

ARMAX je vremenski diskretan dinamički model:

$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)v(k)$, gde su: izlaz y, ulaz u, beli šum v, a $A(z), B(z), C(z)$ su polinomi po $z = e^{sT}$.

48.2 Kojom metodom se identifikuju parametri ARMAX modela, ukratko objasniti?

Metodom najmanjih kvadrata koja se primenjuje dva puta: 1) napravi se adekvatan ARX model i procene njegovi parametri, 2) proceni se šum i odrede parametri ARMAX modela. U oba slučaja je izlaz modela linearan po nepoznatim parametrima koje množe (poznate) ranije vrednosti ulaza i izlaza (i procenjene vrednosti šuma).

48.3Kako se proceni beli šum u identifikaciji ARMAX modela?

$A(z)y(k) = B(z)u(k) + C(z)v(k)$ se podeli sa $C(z)$

$G(z)y(k) = H(z)u(k) + v(k)$, $G(z) = \frac{A(z)}{C(z)}$, $H(z) = \frac{B(z)}{C(z)}$

i metodom najmanjih kvadrata se identifikuju parametri polinoma $G(z)$ i $H(z)$.

Izračuna se procena čuma $\hat{v}(k) = G(z)y(k) - H(z)u(k)$

48.4 Kako u identifikaciji možemo proceniti red (stepene polinoma) AR(MA)X modela?

Proces računanja parametara modela se pokreće više puta za razne kombinacije dužina polinoma A i B i posmatra se vrednost funkcije cilja J. Dobro procenjen model ima malo J uz što manje dužine polinoma.

48.5 Sta je tacna procena parametara?

Procena parametara je tačna kada je nepomerena i efikasna.

48.5.1 Sta je dobra procena modela?

Dobro procenjen model ima malo J uz sto manje duzine polinoma.

48.6 Sta je Pseudoslucajan signal

To je vremenski diskretizovan signal sa vrednostima $\{a, -a\}$ koje se nasumično menjaju u svakom trenutku odabiranja. Koristi se kao ulaz u identifikaciji dinamičkih modela.

48.7 ARMAX nelinearan model

- nije dobro nzm

y(k) = f(y(k-1), … , y(k-n), u(k-1),…, u(k-m), v(k))

y - izlaza
u - ulaz
v - beli sum
f - nelinearna funkcija

49. Identifikacija promenljivih parametara. Rekurzivni metod najmanjih kvadrata

49.1 MNK i RMNK koja je sustinska razlika

Za identifikaciju modela linearnog po nepoznatim parametrima se koriste: Metoda najmanjih kvadrata i Rekurzivna metoda najmanjih kvadrata.

MNK - koriscena za odredjivanje nepoznatih parametara modela kada parametri nisu promenljivi.
Primena metode u parametarskoj identifikaciji ima parametre q kao nepoznate promenljive.
Ukoliko se ti parametri menjaju tokom vremena, onda se MNK ne moze koristiti.
Tada koristimo RMNK.
RMNK ima manje dodatne pogodnosti koje se ogledaju u manjim memorijskim zahtevima - brze izvrsavanje.

49.2 Koje su pogodnosti RMNK

Doprinosi dodatne pogodnosti koje se ogledaju u manjim memorijskim zahtevima, brze izvrsavanje kada se posmatra potreban obim proracuna u svakom trenutku odabiranja.
Pogodna je za on-line i real-time identifikaciju.

49.3 Formula RMNK

$$\underbrace{\hat{\boldsymbol{q}}(k+1)}_{\substack{tekuća\\procena\\q}} = \underbrace{\hat{\boldsymbol{q}}(k)}_{\substack{prethod.\\procena\\q}} + \underbrace{\boldsymbol{P}(k+1)\boldsymbol{\phi}(k+1)}_{korekcioni\ vektor}\Big(\underbrace{y(k+1)}_{\substack{novo\\merenje}} - \underbrace{\boldsymbol{\phi}^{\boldsymbol{T}}(k+1)\hat{\boldsymbol{q}}(k)}_{predviđeno\ merenje}\Big)$$

49.4 Sta je kriterijum optimalnosti

Kriterijum optimalnosti je odstupanje od greske. Ukoliko je J = 0, tada ne postoji greska.

49.5 Koraci kod RMNK

- Koraci:
  1. prikupe se nove vrednosti ulaza $u(k+1)$ i izlaza $y(k+1)$
  2. formiraju se $\boldsymbol{\phi}(k+1)$
  3. izračuna se $\boldsymbol{P}(k+1)$
  4. izračuna se procena parametara $\hat{\boldsymbol{q}}(k+1)$
  5. memorišu se: $\boldsymbol{P}(k) = \boldsymbol{P}(k+1)$ i $\hat{\boldsymbol{q}}(k) = \hat{\boldsymbol{q}}(k+1)$ za naredni trenutak odabiranja

49.6 Identifikacija promenljivih parametara modela:

- Ako je izlaz modela linearan po nepoznatim parametrima, onda je rekurzivna metoda najmanjih kvadrata pogodna za *on-line* parametarsku identifikaciju

- Ako se parametri modela menjaju tokom rada sistema onda je potrebno vršiti parametarsku identifikaciju u realnom vremenu.
  - Tada je pogodno dati veću važnost skorijim merenjima, a davnašnja merenja potisnuti. Kriterijum optimalnosti koji ovo uzima u obzir:

$$\mathcal{J}_p = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} \rho^{k-i}\,(y(i) - \boldsymbol{U}^T(i)\boldsymbol{q})^2, \qquad 0 < \rho \leq 1$$

gde je ρ faktor zaboravljanja (tipično je $0.98 < \rho \leq 1$)
  - manja vrednost ρ omogućava „brže zaboravljanje" starih merenja.

50. Iterativne metode parametarske identifikacije (Gaus-Njutnov algoritam)

Iterativne metode:

- Posmatra se vremenski diskretan model sistema:
  $$\boldsymbol{x}(\mathrm{k}+1) = f(\boldsymbol{x}(k), u(k), \boldsymbol{q}), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
  $$y(k) = \varphi(\boldsymbol{x}(k), u(k), \boldsymbol{q})$$
  gde je izlaz modela nelinearan po parametrima. Radi jednostavnosti model ima jedan ulaz i jedan izlaz
- Određivanje parametara prema kriterijumu optimalnosti:
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} e_k^2(\boldsymbol{q})$$
  $$e_k(\boldsymbol{q}) = e(k, \boldsymbol{q}) = y_v(k) - y(k, \boldsymbol{q}),$$
  $$k = 0,1, \dots, K-1$$
  je optimizacioni problem: traženje $\hat{\boldsymbol{q}}$ minimuma za koje je $\mathcal{J}$ minimalno.

- Rešenje $\min \mathcal{J}$ se dobija iterativno
  $$\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n + \Delta\boldsymbol{q}_n$$
  gde je n oznaka iteracije, a ne merenja!

- Početna procena parametara je $\boldsymbol{q}_0$
- Kriterijum zaustavljenje algoritma:
  $$\|\Delta\boldsymbol{q}_n\| = \sum_{i=0}^{r} \Delta q_i^2 < \varepsilon_q$$
  ili relativan odnos
  $$\left\|\frac{\Delta\boldsymbol{q}_n}{\boldsymbol{q}_n}\right\| < \varepsilon_q$$
  ili
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n) < \varepsilon_J$$
  Dodatan uslov: $n \leq n_{max}$

Iterativne metode parametarske identifikacije imaju mogućnost identifikacije parametara sistema čiji je model nelinearan po nepoznatim parametrima.
Koristi Njutnov, Gradijentni, Gaus-Njutnov i Levenberg-Markartov algoritam.
Sledeća vrednost se određuje na osnovu prethodne.

Funkcije osetljivosti su izvodi izlaza modela y po parametrima q

$$\frac{\partial y(\boldsymbol{q})}{\partial q_1}, \frac{\partial y(\boldsymbol{q})}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial y(\boldsymbol{q})}{\partial q_r}$$

Funkcije osetljivosti se koriste radi provere osobine identifiabilnosti, kao i za određivanje parametara alritmima gde se koristi gradijent funkcije cilja (za njegovo računanje je potrebno odrediti i izvod izlaza modela po parametrima = funkcije osetljivosti).

Gaus Njutn (ponavljanje):

$$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} f_i^2(\boldsymbol{x})$$

Treba definisati: 1) vektor funkcija oblika $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ i 2) Jakobijan $\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Koristi:

$$\Delta\boldsymbol{x}_k = -\left(\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)\right)^{-1}\boldsymbol{J}^T(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$$

Gde je:

$\boldsymbol{x}$ je vektor promenljvih koje se traže, $\Delta\boldsymbol{x}_k$ je korekcija u k toj iteraciji itrerativnog postupka

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{0}$ je sistem jednačina koji se rešava

$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}_k)$ je Jakobijan, tj. $\nabla\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)$

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \dots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}$$

Osobine:

Brzo završavanje (konvergencija u okolini optimuma), ali moguća divergencija u početnim iteracijama. Mali broj iteracija.

Postupak se završava kada je:

- $\|\Delta \boldsymbol{x}_k\| < \varepsilon_x$ ili
- $\mathcal{J}(\boldsymbol{x}_k) < \varepsilon_J$ ili
- $k > k_{max}$

Gaus-Njutn (parametarska identifikacija)

- Gaus-Njutn algoritam

$$\Delta \boldsymbol{q}_n = -\left(\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q}_n)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_n)\right)^{-1} \nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n)$$

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_i} = -\sum_{k=0}^{K-1} e(k,\boldsymbol{q}) \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,\dots,r$$

$$\nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_r} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q})\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$$

$$\boldsymbol{U}(k,\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_r} \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}^T(0,\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{U}^T(1,\boldsymbol{q}) \\ \dots \\ \boldsymbol{U}^T(K-1,\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} e(0,\boldsymbol{q}) \\ e(1,\boldsymbol{q}) \\ \dots \\ e(K-1,\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

51. Iterativne metode parametarske identifikacije (Gradijentni i Levenberg–Markart alg.)

Iterativne metode:

- Posmatra se vremenski diskretan model sistema:
$$\boldsymbol{x}(k+1) = f(\boldsymbol{x}(k), u(k), \boldsymbol{q}), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$
$$y(k) = \varphi(\boldsymbol{x}(k), u(k), \boldsymbol{q})$$
gde je izlaz modela nelinearan po parametrima. Radi jednostavnosti model ima jedan ulaz i jedan izlaz
- Određivanje parametara prema kriterijumu optimalnosti:
$$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} e_k^2(\boldsymbol{q})$$
$$e_k(\boldsymbol{q}) = e(k, \boldsymbol{q}) = y_v(k) - y(k, \boldsymbol{q}), \quad k = 0,1,\dots,K-1$$
je optimizacioni problem: traženje $\hat{\boldsymbol{q}}$ minimuma za koje je $\mathcal{J}$ minimalno.

- Rešenje $\min \mathcal{J}$ se dobija iterativno
$$\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n + \Delta \boldsymbol{q}_n$$
gde je n oznaka iteracije, a ne merenja!

- Početna procena parametara je $\boldsymbol{q}_0$
- Kriterijum zaustavljenje algoritma:
$$\|\Delta \boldsymbol{q}_n\| = \sum_{i=0}^{r} \Delta q_i^2 < \varepsilon_q$$
ili relativan odnos
$$\left\|\frac{\Delta \boldsymbol{q}_n}{\boldsymbol{q}_n}\right\| < \varepsilon_q$$
ili
$$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n) < \varepsilon_J$$
Dodatan uslov: $n \le n_{max}$

Iterativne metode parametarske identifikacije imaju mogućnost identifikacije parametara sistema čiji je model nelinearan po nepoznatim parametrima.
Koristi Njutnov, Gradijentni, Gaus-Njutnov i Levenberg-Markartov algoritam.
Sledeća vrednost se određuje na osnovu prethodne.

Funkcije osetljivosti su izvodi izlaza modela y po parametrima q

$$\frac{\partial y(\boldsymbol{q})}{\partial q_1}, \frac{\partial y(\boldsymbol{q})}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial y(\boldsymbol{q})}{\partial q_r}$$

Funkcije osetljivosti se koriste radi provere osobine identifiabilnosti, kao i za određivanje parametara alritmima gde se koristi gradijent funkcije cilja (za njegovo računanje je potrebno odrediti i izvod izlaza modela po parametrima = funkcije osetljivosti).

Примена градијентног алгоритма на параметарску идентификацију

Потребан услов оптимума:

$$\nabla J(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) = \frac{\partial J}{\partial \mathbf{q}^{\mathrm{M}}} = \mathbf{g}(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) = 0$$

при чему градијент садржи изводе функције циља J по свим параметрима модела

$$\nabla J(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J}{\partial q_1^{\mathrm{M}}} & \frac{\partial J}{\partial q_2^{\mathrm{M}}} & \dots & \frac{\partial J}{\partial q_r^{\mathrm{M}}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

и они износе: $$\frac{\partial J}{\partial q_i^{\mathrm{M}}} = -\sum_{k=0}^{K-1} e_k(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) \frac{\partial y_k(\mathbf{q}^{\mathrm{M}})}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\dots r$$

Вредност параметра у $n+1$ итерацији :

$$\mathbf{q}_{n+1}^{\mathrm{M}} = \mathbf{q}_n^{\mathrm{M}} + \Delta \mathbf{q}_n^{\mathrm{M}} = \mathbf{q}_n^{\mathrm{M}} - h\mathbf{g}(\mathbf{q}_n^{\mathrm{M}}) = \mathbf{q}_n^{\mathrm{M}} + h\sum_{k=0}^{K-1} e_k(\mathbf{q}_n^{\mathrm{M}})\mathbf{U}_k(\mathbf{q}_n^{\mathrm{M}})$$

Вредност функција осетљивости за к-ти узорак и текуће вредности параметра $\boldsymbol{q}$

$$\mathbf{U}_k(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) = \begin{bmatrix} U_{1k}(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) & U_{2k}(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) & \dots & U_{rk}(\mathbf{q}^{\mathrm{M}}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

h – директно утиче на величину промене параметара у моделу у свакој итерацији. Веће h омогућава брже приближавање оптимуму, али се може десити да се оптимум прескочи. Малим вредностима h такав проблем се избегава али се продужава време извршавања алгоритма.

Примена Левенберг–Маркартовог алгоритма на параметарску идентификацију

Примена Левенберг-Маркартовог алгоритма на проблем одређивања параметара нелинеарног модела се своди на кориговање вредности параметара према изразу:

$$\Delta \mathbf{q}_n = -(\mathbf{S}^T(\mathbf{q}_n)\mathbf{S}(\mathbf{q}_n) + \lambda_n \mathbf{I})^{-1} \nabla J(\mathbf{q}_n).$$

Algoritmi (ponavljanje)

- Gradijentni algoritam
  $$\Delta \boldsymbol{q}_n = -h \nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n), \qquad h > 0$$
- Gaus-Njutn algoritam
  $$\Delta \boldsymbol{q}_n = -\left(\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q}_n)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_n)\right)^{-1} \nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n)$$
- Lavenberg-Markart algoritam
  $$\Delta \boldsymbol{q}_n = -(\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q}_n)\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}_n) + \lambda_n \boldsymbol{I})^{-1} \nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{q}_n)$$
  gde se λ_n menja

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_i} = -\sum_{k=0}^{K-1} e(k,\boldsymbol{q}) \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_i}, \qquad i = 1,2,\dots,r$$

$$\nabla \mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial \boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_1} \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_2} \\ \dots \\ \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial q_r} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{S}^T(\boldsymbol{q})\, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q})$$

$$\boldsymbol{U}(k,\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_1} & \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial y(k,\boldsymbol{q})}{\partial q_r} \end{bmatrix}^T$$

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}^T(0,\boldsymbol{q}) \\ \boldsymbol{U}^T(1,\boldsymbol{q}) \\ \dots \\ \boldsymbol{U}^T(K-1,\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{q}) = \begin{bmatrix} e(0,\boldsymbol{q}) \\ e(1,\boldsymbol{q}) \\ \dots \\ e(K-1,\boldsymbol{q}) \end{bmatrix}$$

Poređenje primene algoritama

Rešavanje sistema nelinearnih algebarskih jednačina $f_k(\boldsymbol{x}) = 0$

- Ukupna greška po svim jednačinama
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} e_k^2(\boldsymbol{x})$$
- greška
  $$e_k(\boldsymbol{x}) = f_k(\boldsymbol{x})$$
- Za rešavanje se obezbeđuje
  - Vektor funkcija $f_k(\boldsymbol{x})$, $k = 1,2,\dots m$
  - Jakobijan, tj. izvodi svih $\boldsymbol{f}$ po svim $\boldsymbol{x}$

Parametarska identifikacija nelinearnih modela

- Ukupna greška po svim merenjima
  $$\mathcal{J}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{K-1} e_k^2(\boldsymbol{q})$$
- greška
  $$e_k(\boldsymbol{q}) = y_v(k) - y(k,\boldsymbol{q})$$
- Za rešavanje se obezbeđuje
  - Funkcija izlaza modela $y(k,\boldsymbol{q})$ i merenje izlaza $y_v(k)$
  - Funkcije osetljivosti, tj. izvodi izlaza po svim parametrima $\boldsymbol{q}$

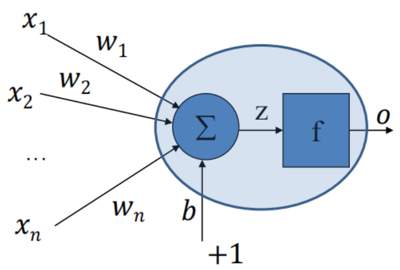
Upotreba veštačkih neuronskih mreža u modeliranju

52. Model veštačkog neurona i aktivacione funkcije

Model veštačkog neurona

- Neuron je osnovni procesni element VNM
- Sadrži:
  - ulaze - x_i
  - sinapse (težinski, ponderišući faktori ulaza) w_i
  - stanje aktivacije - z
  - Izlaznu (aktivacionu) funkciju - f
  - jedan izlaz - o
  - prag – b
- Podesivi parametri su:

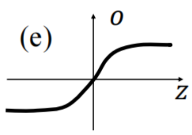
  $w_1, w_2, \ldots w_n$ i b



$$o = f(z) = f(\textstyle\sum_i w_i x_i + b)$$

Izlazne (aktivacione) funkcije neurona

a) linearna
b) pragovska funkcija
c) semi-linearna
d) log-sigmoidalna
e) hiperbolični tangens (tanh)
f) ReLU (*Rectified Linear Unit*)
g) Leaky ReLU
h) Maxout
i) ELU
...



$a)\quad f(z) = a \cdot z$

$b)\quad f(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$

$c)\quad f(z) = \begin{cases} a, & z \geq q \\ \frac{a}{q} \cdot z, & -q \leq z \leq q \\ -a, & z \leq -q \end{cases}$

$d)\quad f(z) = \dfrac{1}{1 + e^{-z}}$

$e)\quad f(z) = \dfrac{2}{1 + e^{-z}} - 1$

$f)\quad f(z) = \max(0, z)$

$g)\quad f(z) = \max(0.1z, z)$

$h)\quad f(z) = \max(W_1 x + b_1, W_2 x + b_2)$

$i)\quad f(z) = \begin{cases} z, & z \geq 0 \\ \alpha(e^z - 1), & z < 0 \end{cases}$

53. Modeli veštačkih nauronskih mreža

Вештачке неуронске мреже (НМ) су нова технологија која решева бројне научне и инжењерске проблеме где треба пронаћи информацију на основу сложених и несигурних података. Ради се о проблемима где традиционални приступи не пружају задовољавајуће решење у: анализи сигнала, препознавању облика, управљању системима, вештачкој интелигенцији...

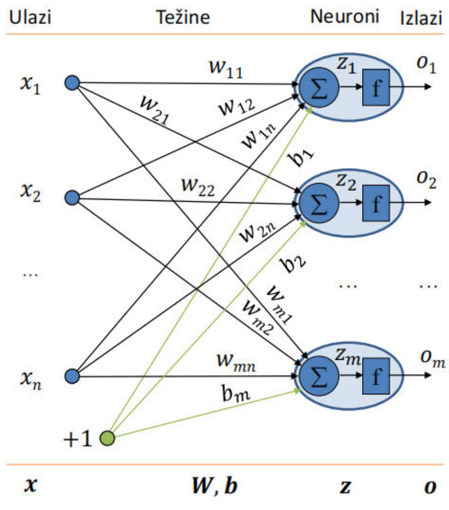
- sastoji se od međusobno povezanih neurona
- *motivacija*: značajna sposobnost mreže da „računa" kada ima dovoljno velik broj neurona
- način računanja mreže (algoritam) zavisi od vrednosti težinskih faktora w_{ij}
- obučavanje predstavlja promenu (podešavanje) težina w_{ij}
- uči na osnovu serije primera (uzoraka)

Неке могућности НМ: препознавање облика у реалном времену; управљање системима у бројним сложеним и нелинеарним ограничењима; проналази изгубљене улазе из извора на основу познавања дела улаза – асоцијација; препознаје објекте и када су изобличени; памти предмете у вези и када веза није очигледна или унапред позната; учење у реалном времену; "глатко" смањује перформансе код отказа делова мреже.

- неурони се обично постављају у слојеве
- са пропагацијом сигнала у напред - *feed-forward*
  - – једнослојне
  - – вишеслојне
- са повратним спрегама *feedback* - рекурентне мреже
  - – једнослојне и вишеслојне
  - – са дискретним и континуалним сигналима
- комбиноване

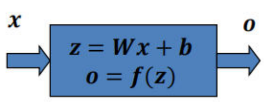
\+ fully connected

53.1 Fully Connected

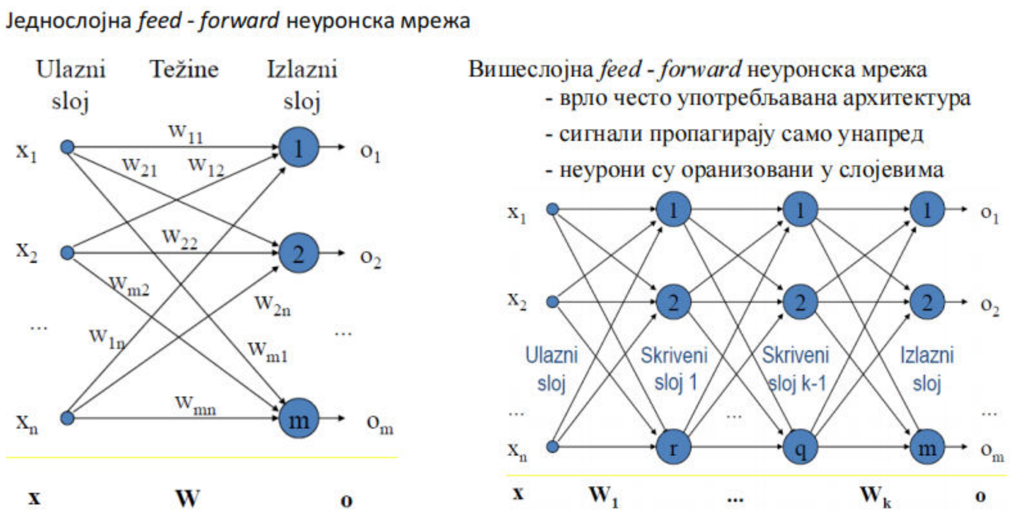


fully connected – svaki neuron se povezuje sa svim neuronima prethodnog sloja (ili ulazima)

Pogodna je za vektorska obrada podataka (rad sa matricama i vektorima)

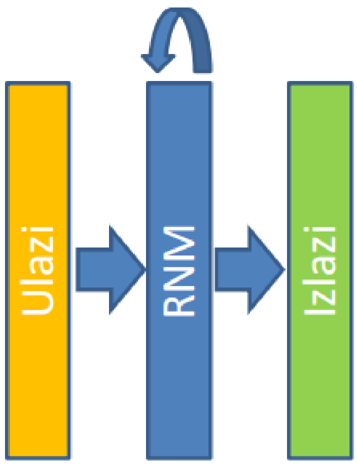


53.2 Feed Forward



53.3 Feedback - Rekurentne

- VNM sa propagacijom signala u napred (*feed-forward*) određuje izlaz samo na osnovu ulaza
- Rekurentna VNM određuje izlaz na osnovu ulaza i vektora stanja (ima internu memoriju)
- Može se posmatrati kao sloj(evi) veće VNM



Primer rekurentne VNM

54. Obučavanje veštačkih neuronskih mreža (BP algoritam)

- Cilj: Podesiti parametre mreže – težine ($\boldsymbol{W}$ i $\boldsymbol{b}$) tako da se minimizuje funkcija cilja $\mathcal{J}(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{b})$
- Funkcija cilja $\mathcal{J}$ (*Loss function*) tipično predstavlja razliku (rastojanje) željenog i ostvarenog izlaza mreže
  - Na osnovu funkcije cilja, tipa sloja i aktivacionih funkcija definiše se pravilo (algoritam) korekcije parametara mreže $\Delta w, \Delta b$

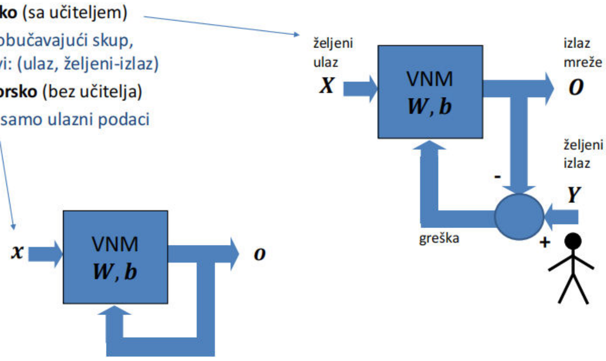
- Za obučavanje se upotrebljava **obučavajući skup** – tj. podaci za obučavanje
- Obučavanje se sprovodi **iterativno** – u više ciklusa (**epoha**) $k = 0,1,2, \ldots$
  - Jedan ciklus obučavanja je jedan prolaz kroz (ceo ili deo) obučavajućeg skupa nakon čega se ažuriraju parametri

$$w_{k+1} = w_k + \Delta w$$
$$b_{k+1} = b_k + \Delta b$$

Modeli obučavanja VNM

Modeli obučavanja su:

- **supervizorsko** (sa učiteljem)
  - postoji obučavajući skup, tj. parovi: (ulaz, željeni-izlaz)
- **nesupervizorsko** (bez učitelja)
  - postoje samo ulazni podaci



Obučavanje VNM: *Back-propagation* algoritam (BP)

- *Back-propagation* (BP) je najčešće upotrebljavan algoritam obuke VNM
- Koristi gradijentni algoritam za minimizaciju funkcije cilja: $\min_{w,b} \mathcal{J}$

$$\Delta w = -\eta \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial w}, \qquad \Delta b = -\eta \frac{\partial \mathcal{J}}{\partial b}$$

konstanta $0 < \eta < 1$ je koeficijent brzine obučavanja (*learning rate*)

- Za računanje gradijenata primenjuje se računanje izvoda složene funkcije po promenljivim parametrima
  - Proces računanja polazi od izlaza mreže i kreće se ka ulazu

Kako je

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial w} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\partial E_p}{\partial w}$$

treba odrediti

$$\frac{\partial E_p}{\partial w} = ?$$

i

Kako je

$$\frac{\partial \mathcal{J}}{\partial b} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\partial E_p}{\partial b}$$

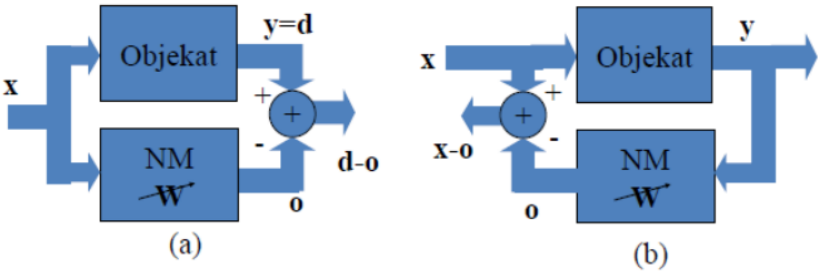
treba odrediti

$$\frac{\partial E_p}{\partial b} = ?$$

55. Uloga veštačkih neuronskih mreža u modeliranju i simulaciji

55.1 Koja je uloga neuronskih mreza u modeliranju i simulaciji

Способност неуронских мрежа да произвољно мапира улазе на излазе јој омогућава да симулира понашање другог система. Обучавање неуронских мрежа улазно-излазним подацима из објекта представља поступак идентификације система.
Могу се вршити
- директна идентификација објекта (а)
- инверзна идентификација објекта (б) - (није увек могућа)



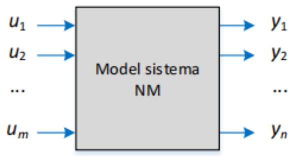
55.2 Sta se koristi za obucavanje

Za obucavanje se upotrebljava obucavajuci skup, tj. podaci za obucavanje.
Obucavanje se sprovodi iterativno.

55.3 Staticki model

Statički model

- Potrebno je da VNM nauči preslikavanje skupa ulaza na skup izlaza



- ovo preslikavanje **ne zavisi od vremena** (od stanja u kome se sistem nalazi) te se model **može realizovati *feed-forward* neuronskom mrežom.**

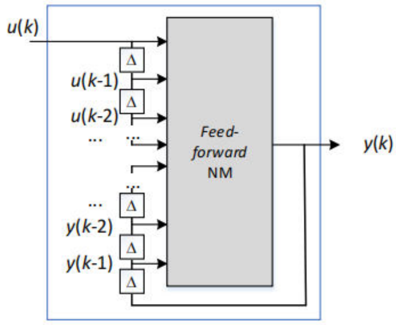
55.4 Sta se menja tokom obuke

Tokom obuke menjaju se podesivi paramteri w, b

55.5 Dinamicki model

Dinamički model

- Preslikavanje ulaza na izlaze **zavisi od vremena** (od stanja u kome se sistem nalazi) te se model **ne može realizovati *feed-forward* neuronskom mrežom**.
- Dinamički model se može realizovati upotrebom rekurzivnih neuronskih mreža (RNN)
- Potrebno je uspostaviti stanje u modelu (jer se njime realizuje memorija)
  - izlazi zavise od ulaza i od stanja
- Desni model koristi *feed-forward* mrežu, ali su njeni dodatni ulazi ranije vrednosti ulaza i izlaza (Δ predstavlja kašnjenje za trenutak odabiranja)

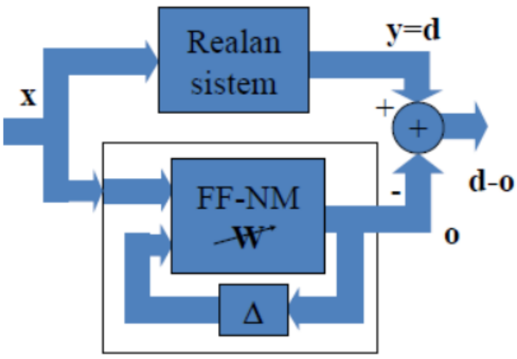


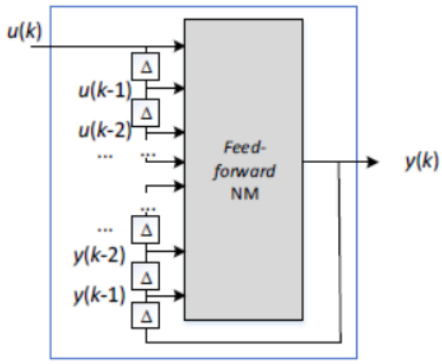
56. Veštačka neuronska mreža kao model dinamičkog sistema

•Пресликавање улаза на излазе зависи од времена (од стања у коме се систем налази) те се модел не може реализовати *feed-forward* неуронском мрежом.

•Потребно је успоставити повратне везе у моделу (јер се њима реализује меморија – памћење стања)

•Доњи модел користи феед-форвард мрежу али су њени додатни улази раније вредности улаза и излаза





57. Sofverska biblioteka za upotrebu veštačkih neuronskih mreža (Flux)

Obucavajuci skup se deli na 2 dela:

1) Podskup za obuku - koristi se da se doteraju tezine
2) Podskup za kontrolu - omogucava nam da izbegnemo pretreniranje mreze, sto vise pretreniramo mrezu, sve se vise udaljavamo od funkcije cilja.

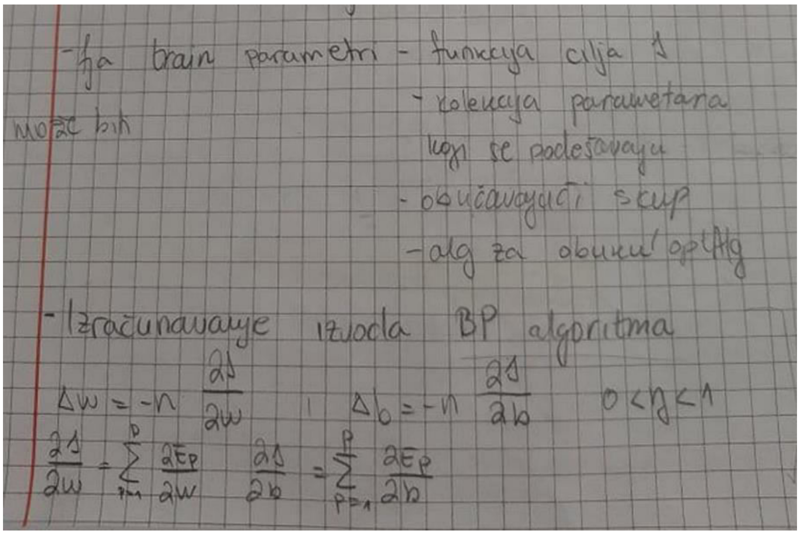
- Prilikom ucenja VNM menjaju se podesivi parametri w i b

- Neuroni se postavljaju u slojeve (par, mnogo -> deep learning)

- Ulazi se dovode do prvog sloja, pa na 2 do izlaza

- Broj neurona varira po slojevima

- Tipovi slojeva: Fully connected, Convolutional, Max pool…


-f-ja train parametri - funkcija cilja J
- kolekcija parametara koji se podešavaju
- obučavajući skup
- alg za obuku/ optAlg

može biti

- Izračunavanje izvoda BP algoritma

$$\Delta w = -\eta \frac{\partial J}{\partial w}, \quad \Delta b = -\eta \frac{\partial J}{\partial b} \quad 0<\eta<1$$

$$\frac{\partial J}{\partial w} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\partial E_p}{\partial w} \quad \frac{\partial J}{\partial b} = \sum_{p=1}^{P} \frac{\partial E_p}{\partial b}$$

Biblioteka Flux uvodi:

-gradient - za izracunavanje izvoda, obuka neuronske mreze
-dense - opis sloja neurona - modeluje fully connected sloj neurona
-descent - implementira gradijentni postupak sa zadatim koeficijentom brzine obucavanja
-train! - njenim pozivom se sprovodi obuka
-chain - povezuje slojeve neurona - izlaz jednog -> racunanje ulaza u narendom
-momentum - implementira gradijentni postupak sa inercijom

Brojni tipovi slojeva neurona: Dense, RNN, Conv, MaxPool, Maxout...

Simulacija diskretnih događaja i redovi čekanja

58. Osnovni elementi i procesi sistema sa redovima čekanja.

58.1 Osnovni elementi i osobine.

- **Компоненте система**
  - Ентитети *(клијенти* или *потрошачи*)
    - Особине:
      - Број ентитета који улазе у систем
      - Времена међудолазака ентитета
      - Назив ентитета
  - Редови (попуњавају се ентитетима)
    - Карактеристике:
      - правило управљања (начин доласка у ред и изласка из реда) – тзв. дисциплина реда
      - капацитет
  - Ресурси (*канали услуживања* или *сервиси*) - обрада или опслуживање ентитета
    - Карактеристике ресурса су:
      - заузетост (слободан/заузет)
      - активност (активан, привремено неактиван, трајно неактиван)
      - зависност

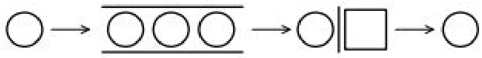
58.2 Koji su procesi i događaji?

- **Карактеристични процеси (догађаји)**
  - доласци (долазак ентитета у систем),
  - избор реда (избор реда чекања и улазак у одговарајуди ред чекања),
  - чекање (чекање у реду),
  - избор канала (долазак на ред за опслуживање и избор канала услуживања),
  - сервисирање (опслуживање)
  - напуштање система или прелазак у неки други ред чекања (у овом случају се враћа на процес 2.)

58.3 Razlika između odustajanja i napuštanja.

- **Odustajanje** – klijenti koji pristižu u sistem mogu odustati od čekanja i napustiti sistem (npr. u slučaju da je dugačak red čekanja, došao u vreme pauze, i sl.)
- **Napuštanje** – klijent stane u red čekanja i posle nekog vremena uoči da je njegov progres u redu toliko spor da odustaje od čekanja i napušta sistem.
- **Prebacivanje** – ukoliko u sistemu ima više redova čekanja, klijent koji je stao u “sporiji” red može se prebaciti u “brži” red.

58.4 Skicirati najjednostavniji primer.



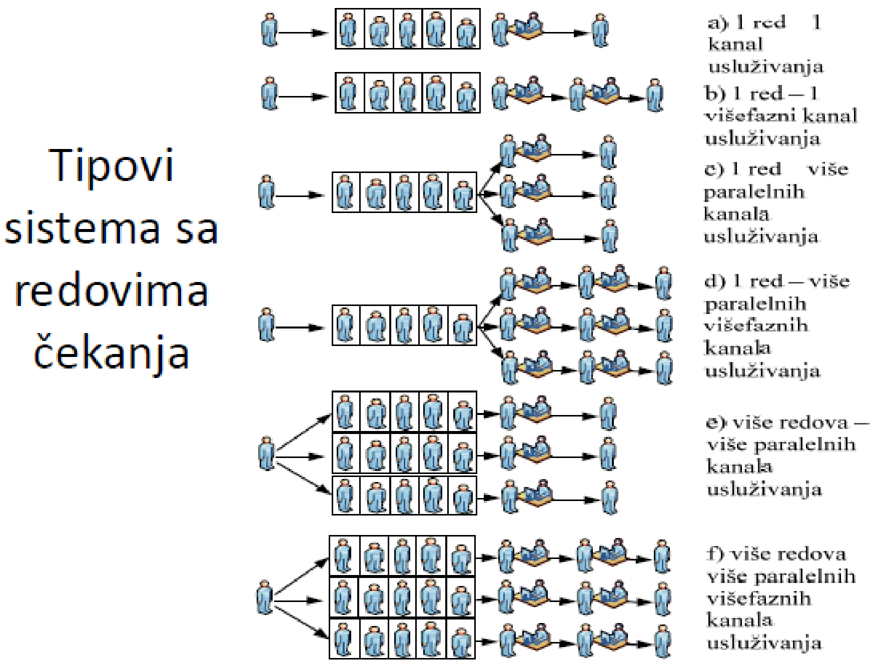
1 red – 1 kanal opsluživanja

59. Simulacije redova čekanja (Tipovi sistema. Algoritam. Parametri. Rezultati simulacije.)

59.1 Koji tipovi postoje?

Podele se vrše na osnovu:

- broja redova čekanja: jedan / više.
- broja kanala usluživanja: jedan / više.
- broja faza servisiranja (neophodnih servisa za potpuno usluživanje klijenta): jednofazni / višefazni.
- dužine reda čekanja: ograničen / neograničen.
- kapaciteta sistema (ukupan broj klijenata koji se može opslužiti): ograničen / neograničen.



59.2 Performanse na osnovu kojih se analizira sistem.

Parametri simulacije sistema

Razmatrani sistem se odlikuje sledećim parametrima:

- Trajanje simulacije
- Ukupan broj entiteta – maksimalan broj klijenata u sistemu
- Ograničenje dužine reda čekanja
- s - broj servera (paralelnih kanala opsluživanja) u sistemu
- λ – srednje vreme do dolaska novog klijenta po jedinici vremena
- μ – srednje vreme opsluživanja klijenta

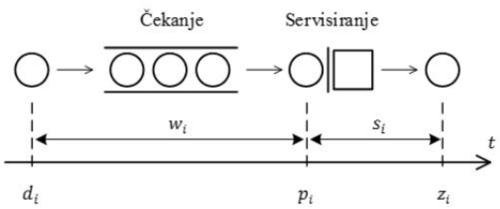
59.3 Šta je cilj simulacije?

Simulacija za cilj ima da uoci dobre i lose osobine sistema, da se tako izmeni i poboljsa struktura sistema.

59.4 Šta mi određujemo u simulaciji?

Vremena

- Posmatra se jedan (i-ti) klijent
  - vreme dolaska d_i
  - početak servisiranja p_i
  - trajanje servisiranja s_i
  - završetak servisiranja z_i (kada nastupa napuštanje sistema ili servisa)
  - čekanje u redu $w_i = p_i - d_i$



59.5 Da li se može simulirati u Juliji?

Moze se simulirati pomocu paketa SimJulia.
SimJulia je zasnovana na osnovnoj obradi dogadjaja u toku simulacije, pri cemu su oni sortirani po prioritetu, vremenu nastanka i slicno…

59.6 Šta dobijamo na kraju simulacije?Pokazatelji u simulaciji.

- prosečno vreme čekanja $= \frac{\text{ukupno zadržavanje korisnika u redu}}{\text{ukupan broj korisnika}}$
- prosečno vr. zadržavanja u sistemu $= \frac{\text{ukupno vreme koje su korisnici proveli u sistemu}}{\text{ukupan broj korisnika}}$
- prosečna dužina reda čekanja
- prosečan broj klijenata u sistemu
- verovatnoća čekanja $= \frac{\text{broj korisnika koji su čekali}}{\text{ukupan broj korisnika}}$
- prosečno vreme servisiranja $= \frac{\text{ukupno vreme servisiranja}}{\text{ukupan broj korisnika}}$
- verovatnoća slobodnog servisa $= \frac{\text{ukupno vreme slobodnog servisa}}{\text{ukupno vreme simulacije}}$
- prosečno vreme između dolazaka $= \frac{\text{suma svih vremena između dolazaka}}{\text{broj dolazaka}-1}$
- prosečno vreme čekanja (ako se čeka) $= \frac{\text{ukupno vreme čekanja korisnika}}{\text{ukupan broj korisnika koji su čekali}}$

itd...

Резултати симулације

- Просечно време чекања у реду: $\frac{Ukupno\ cekanje}{број\ klijenata}[minuta\ po\ klijentu]$
- „Искоришћеност“ реда чекања: $\frac{Vreme\ u\ kome\ ima\ klijenata\ u\ redu\ Q(t)>0}{ukupno\ vreme}$
- Искоришћеност сервера: $\frac{Zauzetost\ servera}{ukupno\ vreme}$

60. Kendalova notacija. Raspodele.

60.1 Definisati Kendelovu notaciju i odrediti granične vrednosti.

Kendalova notacija opisuje sistem sa redovima čekanja:

$$A\ /\ B\ /\ C\ /\ X\ /\ Y\ /\ Z$$

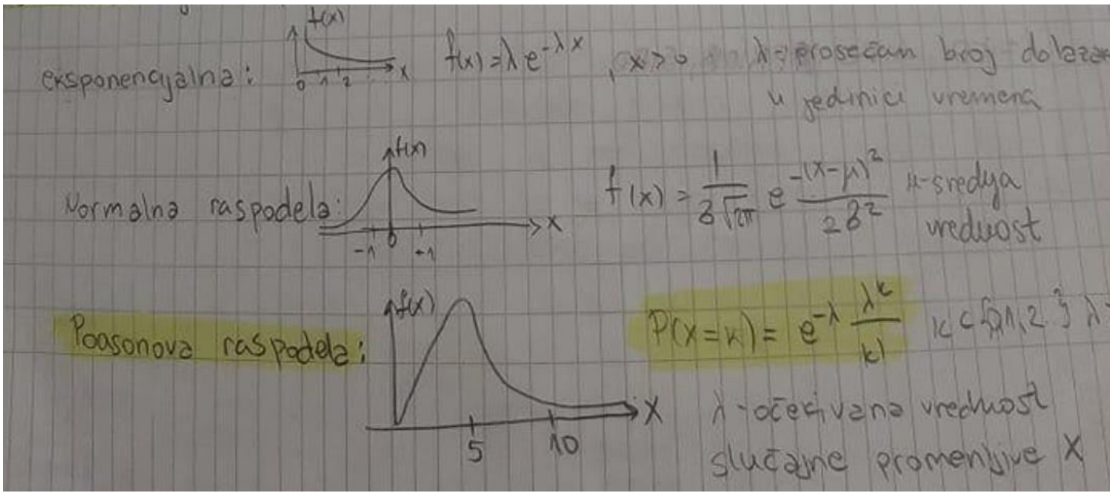
gde su:

- A – pravilo dolazaka klijenata (proces dolazaka - raspodela vremena „međudolazaka“)
- B – pravilo servisiranja (proces usluživanja – raspodela vremena servisiranja klijenata)
- C – broj paralelnih servera u sistemu
- X – pravila opsluživanja klijenata iz reda čekanja – disciplina reda
- Y – kapacitet sistema (npr. maksimalna dužina reda čekanja)
- Z – veličina populacije

60.2 Šta znači MIMI1?

Sistem sa 1 kanalom opsluzivanja kod koga su dolasci i servisiranje (vremena medjudolazaka) generisani po eksponencijalnoj raspodeli.

60.3 Grafik funkcije raspodele.



61. Sofverska biblioteka za simulaciju diskretnih događaja (SimJulia)

61.1 Koje su osnovne komponente koje učestvuju u simulaciji diskretnih događaja?

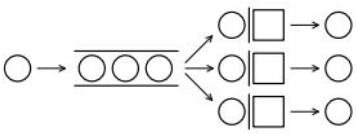
Simulaciono okruzenje
Procesi
Dogadjaji

61.2 Deljeni resursi.

Resources, Containers, Stores

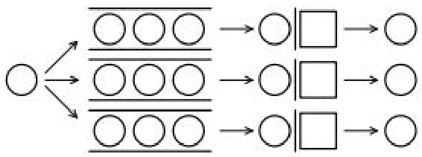
61.3 Kako modelujemo više redova čekanja, a kako više kanala opsluživanja?

Vise kanala



1 red – više paralelnih kanala opsluživanja

Vise redova:



61.4 Kako prikazujemo više događaja istovremeno?

61.5 Osnovni principi.

FIFO - first in first out
LIFO - last in first out
PRIO - priority first
SIRO - service in random order