中国科学院研究生教学丛书

有限元方法的数学基础

王烈衡 许学军 编著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书为《中国科学院研究生教学丛书》之一.

本书是作者最近十多年为中国科学院研究生院、北京大学以及中国科学技术大学（合肥）研究生开设课程的讲稿基础上发展起来的，试图提供有限元方法比较完整的数学基础，主要包括变分原理、Sobolev 空间、椭圆边值问题、有限元离散、协调有限元方法的误差分析、数值积分影响、等参数有限元、非协调有限元、混合有限元法、多重网格法、多水平方法、区域分解法等内容. 本书内容全面，材料丰富，深入浅出，用尽可能初等的方法论述一些理论结果.

本书适合高等院校计算数学和应用数学专业的研究生及高年级本科生，也可作为有兴趣于数学理论方面的工程师的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

有限元方法的数学基础/王烈衡，许学军编著.— 北京：科学出版社，2004
(中国科学院研究生教学丛书/白春礼主编)
ISBN 7-03-013478-8

Ⅰ. 有… Ⅱ. ①王…②许… Ⅲ. 有限元方法－研究生－教材 Ⅳ.O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 050293 号

责任编辑：杨　波　姚莉丽 / 责任校对：宋玲玲
责任印制：安春生 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
源海印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2004 年 12 月第 一 版　　开本：850×1168 1/32
2004 年 12 月第一次印刷　　印张：11 1/2
印数：1—3 000　　字数：296 000

定价：20.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

《中国科学院研究生教学丛书》序

在 21 世纪曙光初露, 中国科技、教育面临重大改革和蓬勃发展之际,《中国科学院研究生教学丛书》—— 这套凝聚了中国科学院新老科学家、研究生导师们多年心血的研究生教材面世了. 相信这套丛书的出版, 会在一定程度上缓解研究生教材不足的困难, 对提高研究生教育质量起着积极的推动作用.

21 世纪将是科学技术日新月异、迅猛发展的新世纪, 科学技术将成为经济发展的最重要的资源和不竭的动力, 成为经济和社会发展的首要推动力量. 世界各国之间综合国力的竞争, 实质上是科技实力的竞争. 而一个国家科技实力的决定因素是它所拥有的科技人才的数量和质量. 我国要想在 21 世纪顺利地实施“科教兴国”和“可持续发展”战略, 实现邓小平同志规划的第三步战略目标 —— 把我国建设成为中等发达国家, 关键在于培养造就一支数量宏大、素质优良、结构合理、有能力参与国际竞争与合作的科技大军, 这是摆在我国高等教育面前的一项十分繁重而光荣的战略任务.

中国科学院作为我国自然科学与高新技术的综合研究与发展中心, 在建院之初就明确了出成果出人才并举的办院宗旨, 长期坚持走科研与教育相结合的道路, 发挥了高级科技专家多, 科研条件好, 科研水平高的优势, 结合科研工作, 积极培养研究生. 当前, 中国科学院正在按照江泽民同志关于中国科学院要努力建设好“三个基地”的指示, 在建设具有国际先进水平的科学研究基地和促进高新技术产业发展基地的同时, 加强研究生教育, 努力建设好高级人才培养基地, 在肩负起发展我国科学技术及促进高新技术产业发展重任的同时, 为国家源源不断地培养输送大批高级科技人才.

质量是研究生教育的生命, 全面提高研究生培养质量是当前我国研究生教育的首要任务. 研究生教材建设是提高研究生培养质量

的一项重要的基础性工作. 由于各种原因, 目前我国研究生教材的建设滞后于研究生教育的发展. 为了改变这种情况, 中国科学院组织了一批在科学前沿工作, 同时又具有相当教学经验的科学家撰写研究生教材, 并以专项资金资助优秀的研究生教材的出版. 希望通过数年努力, 出版一套面向 21 世纪科技发展、体现中国科学院特色的高水平的研究生教学丛书. 本丛书内容力求具有科学性、系统性和基础性, 同时也兼顾前沿性, 使阅读者不仅能获得相关学科的比较系统的科学基础知识, 也能被引导进入当代科学研究的前沿. 这套研究生教学丛书, 不仅适合于在校研究生学习使用, 也可以作为高校教师和专业研究人员工作和学习的参考书.

“桃李不言, 下自成蹊.” 我相信, 通过中国科学院一批科学家的辛勤耕耘,《中国科学院研究生教学丛书》将成为我国研究生教育园地的一丛鲜花, 也将似润物春雨, 滋养莘莘学子的心田, 把他们引向科学的殿堂, 不仅为科学院, 也为全国研究生教育的发展作出重要贡献.

路甬祥

序　言

本书是作者最近十多年为中国科学院研究生院、北京大学以及中国科学技术大学 (合肥) 研究生开设课程的讲稿基础上发展起来的. 教学实践表明, 凡是具有大学本科泛函分析、数理方程及线性代数基础的学生, 都能很好地理解本书的内容. 书中凡是超越大学课程的内容, 我们给出较为详细的论述. 比如本书中需要用到的关于 Sobolev 空间理论及非线性泛函分析方面的材料, 我们给出定理, 但一般不给出全面的证明; 然而在某些特殊情形下, 我们将给出定理较为初等的证明, 以此来加强读者对这些结果的理解. 当然我们也给出了主要的参考文献, 有兴趣的读者可以在其中找到更为全面的证明.

本书的结构如下. 引言部分给出有限元方法的一个大概的轮廓. 第 1 章论述抽象变分原理, 这是有限元方法数学理论的出发点. 第 2 章是关于 Sobolev 空间的内容, 这是有限元方法数学分析的基本工具. 第 3 章介绍某些椭圆边值问题, 只考虑它们的存在及唯一性, 基本上不涉及正则性问题. 这是有限元方法的主要应用领域. 第 4 章涉及有限元离散, 主要讨论单元的构造. 第 5 章是协调有限元逼近, 这是有限元方法数学理论的主要基础. 第 6 章到第 8 章讨论违反势能极小变分原理情形下的有限元方法. 其中第 6 章关于数值积分影响及等参数有限元; 第 7 章涉及非协调有限元; 第 8 章讨论混合有限元, 包括二阶问题及 Stokes 问题的混合有限元方法. 第 9 章到第 11 章讨论有限元离散问题的高效率算法. 其中第 9 章介绍多重网格方法, 详细给出该方法的收敛性分析; 第 10 章介绍基于预处理共轭梯度法的多水平方法, 主要包括分层基多水平方法和多水平节点基方法 (即 BPX 多水平方法); 第 11 章介绍区域分解法. 本书前 7 章由王烈衡负责编写, 后 4 章由许学军负责编写.

至今国内外已有大量关于有限元方法的专著及教材. 本书主要

参考冯康和石钟慈的《弹性结构的数学理论》(1981 年), P.G. Ciarlet 的 *The Finite Element Method for Elliptic Problems* (1978 年) 及 *Basic Error Estimates for Elliptic Problems* (Ciarlet 和 Lions 编的 *Handbook of Numerical Analysis*, Vol II, 1991 年). 另外 S.C. Brenner 和 L.R. Scott 的 *The Mathematical Theory of Finite Element Methods* (1994 年) 是一本很有特色的教材. 最后 5 章, 我们只给出了相应论题的初步介绍, 其详细的论述可分别参考石钟慈和王鸣的《非标准有限元方法》(即将出版), Brezzi 和 Fortin 的 *Mixed and Hybrid Finite Element Methods* (1991 年), Bramble 的 *Multigrid Methods* (1993 年) 以及 B.F. Smith 等的 *Domain Decomposition* (1996 年).

有许多重要的内容未写入本书, 也有大量的有关文献未列入参考文献, 其中有些可能已为作者参考过, 在此一并致歉并表示感谢.

编著者

于北京

目　　录

引　论

有限元方法是数值求解椭圆边值问题的一种方法. 此法首先于 20 世纪 50 年代初由工程师们提出, 并用于求解简单的结构问题. 有限元方法作为一种系统的数值方法, 并奠定其数学基础, 则是在 60 年代中期, 以冯康先生为代表的中国学者与西方学者独立并行地完成的. 从历史上来看, 还应该提到 Courant, 他在 1943 年已经提出过在三角形网格上用逐片线性函数去逼近 Dirichlet 问题, 这是有限元方法最原始的思想.

有限元方法不同于 20 世纪 40 年代二战后发明的数值求解偏微分方程的差分方法. 主要有下述三大特点:(i) 从数学物理问题的变分原理出发, 而不是从微分方程出发, 因此是从问题的整体描述而不是从问题的局部描述出发;(ii) 对所考虑问题的区域 (以二维情形为例) 作三角形 (或其他简单多边形) 剖分, 而不是仅仅作矩形剖分;(iii) 用剖分区域上的简单函数 (例如分片多项式) 去逼近原问题之解, 而不是只在剖分节点上的数值逼近.

至今有限元方法已为工程力学界广泛地应用于各种定常结构问题的数值求解上; 同时, 在数学上已建立了一套完整的理论, 成为计算数学、应用数学研究者、工程师 (为加深理论修养) 的学习和研究科目. 有限元方法以及与它有关的各种新的计算方法的构造及分析, 仍在不断地涌现, 目前尚未见穷期.

变分方法, 泛函分析, 特别是 Sobolev 空间的理论, 当然还有椭圆边值问题的现代理论为有限元方法的理论研究提供了基础.

现在用一个简单的模型问题, 来说明有限元方法的具体实现. 考虑下述 Laplace 方程的齐次 Dirichlet 问题:

$$-\Delta u = f \quad 在\ \Omega\ 中, \quad u = 0 \quad 在\ \partial\Omega\ 上, \tag{0.1}$$

其中 Ω 是平面 R^2 中的一个有界区域, $\partial\Omega$ 为其边界, f 是 Ω 中给定的光滑函数. 从经典意义上讲, $f \in C^0(\Omega)$, 解函数 $u \in C^2(\Omega)$. 这个问题的力学意义是, 假定有一弹性薄膜 (不计厚度), 其材料性能常数均归一, 将它蒙在一平面区域 Ω 上, 且在边界 $\partial\Omega$ 上固定. 当此薄膜受外力 (比如重力) 作用, 达到平衡状态时, 其位移 u 满足的方程为 (0.1). 因此 (0.1) 是薄膜平衡状态时的微分方程形式的描述, 力学上即为作用力与反作用力平衡的描述, 即牛顿第三定律. 力学上描述此问题还有另一种形式, 即势能最小原理. 假定薄膜有一位移 v, 其势能可写成

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathrm{grad} v|^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \tag{0.2}$$

则平衡态位移 u 应满足

$$J(u) \le J(v), \quad \forall v \in V, \tag{0.3}$$

其中 V 表示 "容许位移集合". 这是一个泛函 $J(v)$ 的极小问题, 与其相应的变分问题是

$$\begin{cases} \text{求} u \in V, \text{使得} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in V. \end{cases} \tag{0.4}$$

为确定所谓 "容许位移集合" V, 考察一下问题 (0.3) 或 (0.4) 即可发现, 此时并未要求解 $u \in C^2(\Omega)$, 而只需 u 及 $\mathrm{grad} u$ 均属于 $L^2(\Omega)$, 同时也只要求 $f \in L^2(\Omega)$, 当然 $u = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上. 这样的函数组成的集合 (空间) 记为 $H_0^1(\Omega)$, 即为 V.

以后将会看到. 问题 (0.3) 等价于 (0.4), 而且在某种意义下等价于问题 (0.1). 有限元方法正是基于变分形式 (0.4) 上的一种数值方法.

为简单计, 假定 Ω 是一个多边形. 将 Ω 作三角形剖分 $\mathcal{T}_h$, h 为单元 $\tau \in \mathcal{T}_h$ 的最大直径. 设 V_h 是由在边界 $\partial\Omega$ 上为 0 的分片一次多项式所组成的集合 (空间). 由于剖分固定后, V_h 即为一个有限维

空间, 它具有有限个基函数, 例如在某个节点 P 处为 1, 而在其余节点处为 0 的分片一次函数 (称为屋顶函数)(见图 0.1).

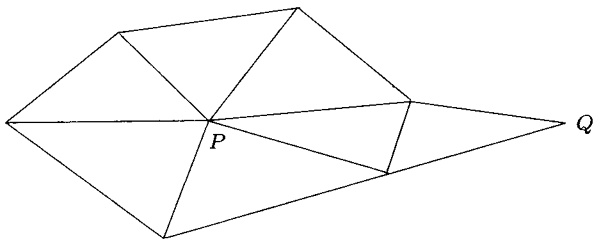

图 0.1

现设 $\dim V_h = N_h$, 其基函数为 $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{N_h}$, 则问题 (0.4) 的有限元逼近为

$$\begin{cases} \text{求} u_h \in V_h, \text{使得} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad} u_h \cdot \mathrm{grad} v_h \mathrm{d}x = \int_\Omega f v_h \mathrm{d}x, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \tag{0.5}$$

它等价于

$$\begin{cases} \text{求} u_h \in V_h, \text{使得} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad} u_h \cdot \mathrm{grad} \varphi_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi_i \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \cdots, N_h. \end{cases} \tag{0.6}$$

而令

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u_j \varphi_j(x), \tag{0.7}$$

则 (0.6) 可写成

$$\sum_{j=1}^{N_h} u_j \int_\Omega \mathrm{grad} \varphi_j \cdot \mathrm{grad} \varphi_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi_i \mathrm{d}x, \quad i = 1, 2, \cdots, N_h. \tag{0.8}$$

或写成

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}, \tag{0.9}$$

其中 $\boldsymbol{U}=(u_1,\cdots,u_{N_h})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F}=\left(\int_\Omega f\varphi_1\mathrm{d}x,\ \cdots,\int_\Omega f\varphi_{N_h}\mathrm{d}x\right)^{\mathrm{T}}$, $K=(k_{ij})_{1\le i,j\le N_h}$, $k_{ij}=\int_\Omega \mathrm{grad}\varphi_i\cdot\mathrm{grad}\varphi_j\mathrm{d}x$. 因此用有限元方法逼近问题 (0.4), 最终是求解线性方程组 (0.8).

由有限元方法导出的线性方程组 (0.8), 其系数矩阵 K 是对称的, 正定的 (这以后会看到). 而且 K 是稀疏的, 即 K 中大量元素为 0, 这从下述事实即可看出. 设 φ_i 是对应于节点 P 的基函数, 而 φ_j 是对应于节点 Q 的基函数, 则只当 P,Q 为相邻节点, 即属于同一个三角形单元时, $k_{ij}\neq 0$, 否则为 0. 方程 (0.8) 的这些性质给数值求解带来了极大的方便, 这也是有限元方法为广大工程、力学界所欢迎的重要原因.

第 1 章 变分原理

本章考虑抽象变分问题. 首先约定记号如下.

- V : 赋范向量空间, 范数记为 $\|\cdot\|$,
- $a(\cdot,\cdot): V\times V\to \mathbf{R}$ 的双线性型, 即 $\forall \alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbf{R}$,

$$\begin{cases} a(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2, v)=\alpha_1 a(u_1,v)+\alpha_2 a(u_2,v),\ \forall u_1,u_2,v\in N, \\ a(u,\beta_1 v_1+\beta_2 v_2)=\beta_1 a(u,v_1)+\beta_2 a(u,v_2),\quad \forall u,v_1,v_2\in V, \end{cases} \tag{1.0.1}$$

- 称双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 如果存在 $M=\text{const}>0$, 使得

$$|a(u,v)|\le M\|u\|\cdot\|v\|,\quad \forall u,v\in V.$$

- $l: V\to\mathbf{R}$ 连续线性泛函, 或记作 $l\in V'$, 其中 V' 是 V 的对偶空间, 对应的对偶积记作 $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
- $K: K\subset V$ 非空子集.

1.1 可微二次凸泛函的极小化问题

考虑问题

$$\begin{cases} \text{求 } u\in K, & \text{使得} \\ J(u)\le J(v), & \forall v\in K, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-\langle l,v\rangle. \tag{1.1.2}$$

定理 1.1.1 假定 (i) 空间 V 是完备的, 即 V 是 Banach 空间, (ii) K 是 V 的非空闭凸子集, (iii) 双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的, 对称

的, 且 (iv)$a(\cdot,\cdot)$ 在下述意义下是 V 椭圆的, 即存在 $\alpha = \text{const} > 0$, 使得

$$\alpha\|v\|^2 \le a(v,v), \quad \forall v \in V, \tag{1.1.3}$$

则问题 (1.1.1) 存在唯一解.

证明 由于双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称的, 因此它是空间 V 上的一种内积. 又由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续且 V 椭圆的, 因此由内积 $a(\cdot,\cdot)$ 可诱导出来的范数 $|||v||| = \sqrt{a(v,v)}$ 等价于原来的范数 $\|v\|$:

$$\sqrt{\alpha}\|v\| \le |||v||| \le M\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

由于 V 在范数 $\|\cdot\|$ 下是完备的, 因此 V 在范数 $|||\cdot|||$ 下也是完备的, 从而 V 在内积 $a(\cdot,\cdot)$ 下是 Hilbert 空间. 由 Riesz 表示定理, 存在 Riesz 映射 $\sigma : V' \to V$, 使得对 $l \in V'$, 则 $\sigma l \in V$, 且

$$\langle l, v\rangle = a(\sigma l, v), \quad \forall v \in V.$$

注意到 $a(\cdot,\cdot)$ 的对称性, 可见

$$\begin{aligned} J(v) &= \frac{1}{2}a(v,v) - \langle l,v\rangle = \frac{1}{2}a(v,v) - a(\sigma l, v) \\ &= \frac{1}{2}a(v-\sigma l, v-\sigma l) - \frac{1}{2}a(\sigma l, \sigma l) \\ &= \frac{1}{2}|||v-\sigma l|||^2 - \frac{1}{2}|||\sigma l|||^2. \end{aligned}$$

因此问题 (1.1.1), 即为求 V 中元素 σl 到子集 K 的最小距离问题, 即求 $\sigma l \in V$ 在 K 上的投影. 由于 K 是非空闭的, 则由泛函分析的投影定理可见问题的解存在.

再由 K 是凸的, 可知 (1.1.1) 只有唯一解. 事实上, 设 $u_1, u_2 \in K$ 均为 (1.1.1) 之解, 由于 K 是凸集, 则

$$w_t = tu_2 + (1-t)u_1 \in K, \quad \forall t \in (0,1).$$

并有

$$
\begin{aligned}
J(u_1) \le J(w_t) &= J(u_1 + t(u_2 - u_1)) \\
&= J(u_1) + t\{a(u_1, u_2 - u_1) - \langle l, u_2 - u_1\rangle\} \\
&\quad + \frac{t^2}{2} a(u_2 - u_1, u_2 - u_1),
\end{aligned}
$$

由此可见, $\forall t \in (0,1)$,

$$
t\{a(u_1, u_2 - u_1) - \langle l, u_2 - u_1\rangle\} + \frac{t^2}{2} a(u_2 - u_1, u_2 - u_1) \ge 0,
$$

上式消去 $t > 0$, 然后令 $t \to 0+$, 则得

$$
a(u_1, u_2 - u_1) \ge \langle l, u_2 - u_1\rangle.
$$

同样有

$$
a(u_2, u_1 - u_2) \ge \langle l, u_1 - u_2\rangle.
$$

上面两式相加得

$$
a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \le 0,
$$

由此及 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 椭圆性 (1.1.3), 可见

$$
\|u_1 - u_2\| = 0,
$$

此即为 $u_1 = u_2$ 在 V 中.

下面给出与泛函极小问题 (1.1.1) 等价的变分问题.

定理 1.1.2 在定理 1.1.1 的假定之下, u 是极小问题 (1.1.1) 之解, 当且仅当 u 是下述变分问题之解: $u \in K$, 使得

$$
a(u, v - u) \ge \langle l, v - u\rangle, \quad \forall v \in K. \tag{1.1.4}
$$

证明 我们给出两种证明, 几何的及分析的.

(i) 几何证明. 极小问题 (1.1.1) 之解 u, 即为 σl 在 K 上的投影. 由于 K 是闭凸的, 因此向量 $\sigma l - u$ 与 $v - u$ ($\forall v \in K$) 的夹角应为钝角 (在内积 $a(\cdot,\cdot)$ 的意义下)(见图 1.1.1), 即

$$
a(\sigma l - u, v - u) \le 0, \quad \forall v \in K,
$$

此即 (1.1.4).

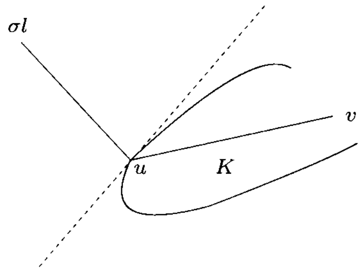

图 1.1.1

(ii) 分析证明. 设 u 是极小问题 (1.1.1) 之解, 由于 K 是凸集, 则 $\forall v \in K, \theta \in (0,1)$, 有 $\theta v + (1-\theta)u \in K$, 从而

$$
\begin{aligned}
J(u) &\leq J(\theta v + (1-\theta)u) \\
&= J(u + \theta(v-u)) \\
&= J(u) + \theta\{a(u, v-u) \\
&\quad -\langle l, v-u\rangle\} \\
&\quad +\frac{\theta^2}{2}a(v-u, v-u),
\end{aligned}
$$

由此

$$\theta\{a(u,v-u) - \langle l, v-u\rangle\} + \frac{\theta^2}{2}a(v-u,v-u) \geq 0.$$

由于 $\theta \in (0,1)$, 上式消去 θ, 且令 $\theta \to 0+$, 得

$$a(u, v-u) \geq \langle l, v-u\rangle, \quad \forall v \in K,$$

此即 (1.1.4).

反之, 设 u 是 (1.1.4) 之解, 则 $\forall v \in K$,

$$
\begin{aligned}
J(v) &= J(u + (v-u)) \\
&= J(u) + \{a(u, v-u) - \langle l, v-u\rangle\} + \frac{1}{2}a(v-u, v-u) \\
&\geq J(u),
\end{aligned}
$$

这是由于 (1.1.4) 及 $a(v-u, v-u) \geq 0$ (因为 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 椭圆, 但此地只需 $\forall v \in V, a(v,v)$ 非负).

注 1.1.1 若 K 是顶点为原点 0 的闭凸锥:

$$v \in K \Longrightarrow \lambda v \in K, \quad \forall\lambda \geq 0,$$

$$v_1, v_2 \in K \Longrightarrow v_1 + v_2 \in K.$$

则问题 (1.1.4), 可写成

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K, \quad \text{使得} \\ a(u,v) \geq \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in K, \\ a(u,u) = \langle l, u \rangle. \end{cases} \tag{1.1.5}$$

事实上, 若 u 是 (1.1.4) 之解, 取 $v = u + \lambda w \in K$, $\forall w \in K$ 及 $\lambda \geq 0$, 则得 (1.1.5) 的第一个不等式; 若取 $v = 2u$ 及 0, 即得 (1.1.5) 的第二个等式. 反之, 若 u 是 (1.1.5) 之解, 则二式相减即得 (1.1.4).

注 1.1.2 若 K 是闭的子空间 (特别地 $K = V$), 则 (1.1.4) 可写成

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K, \quad \text{使得} \\ a(u,v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{1.1.6}$$

注 1.1.3 引入微分学记号, $J'(u) \in V'$ 定义如下:

$$\begin{aligned} J'(u) \cdot v &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{J(u + tv) - J(u)\} \\ &= a(u,v) - \langle l, v \rangle, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} J''(u) \cdot (v, w) &= (J'(u) \cdot w)' \cdot v \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{J'(u + tv) \cdot w - J'(u) \cdot w\} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{a(u + tv, w) - a(u, w)\} \\ &= a(v, w). \end{aligned}$$

这样, 若 u 是极小化问题 (1.1.1) 之解, 则

$$J'(u) \cdot (v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K,$$

即

$$a(u,v-u)-\langle l,v-u\rangle \geq 0,\quad \forall v\in K.$$

反之, 若 u 是变分不等式 (1.1.4) 之解, 由 Taylor 公式

$$\begin{aligned}J(v)-J(u)&=J'(u)\cdot(v-u)+\frac{1}{2}J''(u)\cdot(v-u,v-u)\\&=\left\{a(u,v-u)-\langle l,v-u\rangle\right\}+a(v-u,v-u)\\&\geq 0,\qquad\qquad \forall v\in K.\end{aligned}$$

因此极小化问题 (1.1.1) 等价于变分不等式 (1.1.4).

下面考虑双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 非对称的情形. 前面已证明了当 $a(\cdot,\cdot)$ 对称时, 极小化问题 (1.1.1) 与变分不等式问题 (1.1.4) 等价, 且其解存在唯一 (在定理 1.1.1 的假定之下). 当双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 非对称时, 上述两个问题不再等价, 但变分不等式 (1.1.4) 仍存在唯一解 (在相应的条件下), 这就是 Lax-Milgram 定理.

定理 1.1.3 设 V 是 Hilbert 空间, $a(\cdot,\cdot):V\times V\to\mathbf{R}$ 是连续的, V 椭圆的双线性型, $l\in V'$, 且 K 是 V 的非空闭凸子集. 则变分不等式 (1.1.4) 存在唯一解.

下面给出定理的两个证明, 它们都属于 Lions 和 Stampacchia[40,54].

证明 1 由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续的双线性型, V 是 Hilbert 空间, V' 为其对偶空间, 则存在算子 $A\in L(V;V')$:

$$\langle Au,v\rangle=a(u,v),\quad \forall u,v\in V,$$

且

$$\begin{aligned}\|Au\|_{V'}&=\sup_{v\in V}\frac{\langle Au,v\rangle}{\|v\|_V}=\sup_{v\in V}\frac{a(u,v)}{\|v\|_V}\\&\leq M\|u\|_V,\quad \forall u\in V,\end{aligned}$$

因此

$$\|A\|_{L(V;V')}\leq M.$$

令 $\tau: V' \to V$ 的 Riesz 映射, 即对任一 $l \in V'$, $\tau l \in V$, 使得

$$\langle l, v \rangle = (\tau l, v), \quad \forall v \in V,$$

且

$$\|\tau l\|_V = \sup_{v \in V} \frac{(\tau l, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{\langle l, v \rangle}{\|v\|_V} = \|l\|_{V'}, \quad \forall l \in V',$$

因此

$$\|\tau\|_{L(V';V)} = 1.$$

这样可改写变分不等式 (1.1.4) 如下:

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K, \quad \text{使得} \\ (\tau A u - \tau l, v - u) \geq 0, \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{1.1.4$'$}$$

因此, 为证明问题 (1.1.4) 存在解, 只要证明问题 (1.1.4$'$) 存在解. 令 $\Phi: V \to V$ 的线性映射, 定义如下, $\forall w \in V$,

$$\Phi(w) = w - \rho(\tau A w - \tau l),$$

其中 $\rho > 0$ 待定. 现考虑辅助问题: 对任给定的 $w \in V$, 求 $u \in K$, 使得

$$(u, v - u) \geq (\Phi(w), v - u), \quad \forall v \in K.$$

由定理 1.1.1 知, 上述问题存在唯一解, 且是 $\Phi(w)$ 在 K 上的投影 (关于 V 的内积)

$$u = \mathrm{Pr}_K \Phi(w) = Tw \quad (\text{记作}).$$

下面证明, 适当选择 $\rho > 0$ 时, T 是压缩算子. 令 $u_1 = Tw_1$, $u_2 = Tw_2$, 则

$$\|Tw_1 - Tw_2\|_V^2 = \|\mathrm{Pr}_K \Phi(w_1) - \mathrm{Pr}_K \Phi(w_2)\|_V^2,$$

注意到投影算子是非扩张算子 (请读者自证), 所以

$$
\begin{aligned}
&\|Tw_1 - Tw_2\|_V^2 \le \|\Phi(w_1) - \Phi(w_2)\|_V^2 \\
&= \|(w_1 - w_2) - \rho\tau A(w_1 - w_2)\|_V^2 \\
&= \|w_1 - w_2\|_V^2 + \rho^2\|\tau A(w_1 - w_2)\|_V^2 - 2\rho a(w_1 - w_2, w_1 - w_2) \\
&\le (1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha)\|w_1 - w_2\|_V^2.
\end{aligned}
$$

因此若取 ρ, 使得 $0 < \rho < \dfrac{2\alpha}{M^2}$, 则

$$
\theta^2 = 1 + \rho^2 M^2 - 2\rho\alpha < 1,
$$

则

$$
\|Tw_1 - Tw_2\|_V \le \theta\|w_1 - w_2\|_V.
$$

因此 T 是压缩算子, 从而存在唯一的不动点 $u \in K$, 使得

$$
u = Tu = \mathrm{Pr}_K \Phi(u),
$$

即

$$
\begin{aligned}
&(u, v - u) \ge (\Phi(u), v - u) \\
&= (u, v - u) - \rho(\tau Au - \tau l, v - u), \quad \forall v \in K,
\end{aligned}
$$

此即 (1.1.14).

唯一性的证明. 设 $l_1, l_2 \in V'$, $u_1, u_2 \in K$ 是对应于 l_1, l_2 的变分不等式 (1.1.4) 的解, 则

$$
a(u_1, u_2 - u_1) \ge \langle l_1, u_2 - u_1 \rangle,
$$

$$
a(u_2, u_1 - u_2) \ge \langle l_2, u_1 - u_2 \rangle.
$$

从而

$$
a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \le \langle l_1 - l_2, u_1 - u_2 \rangle.
$$

由 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 椭圆性, 可见

$$
\alpha\|u_1 - u_2\|_V^2 \le \|l_1 - l_2\|_{V'}\|u_1 - u_2\|_V,
$$

因此

$$\|u_1 - u_2\|_V \le \frac{1}{\alpha}\|l_1 - l_2\|_{V'}.$$

这就意味着 (1.1.4) 的解对 $l \in V'$ 的连续依赖性, 从而证明了其解的唯一性.

证明 2　定理证明的困难之处在于 $a(\cdot,\cdot)$ 是非对称的. 现构造对称及反对称双线性型:

$$a_0(u,v) = \frac{1}{2}\{a(u,v) + a(v,u)\},$$

$$\beta(u,v) = \frac{1}{2}\{a(u,v) - a(v,u)\}.$$

则

$$a(u,v) = a_0(u,v) + \beta(u,v),$$

且 $a_0(\cdot,\cdot)$ 是连续、V 椭圆的对称双线性型, 而 $\beta(\cdot,\cdot)$ 是连续的反对称双线性型. 令 $t \in [0,1]$,

$$a_t(u,v) = a_0(u,v) + t\beta(u,v),$$

它是连续的且 V 椭圆的双线性型. 考虑下述变分不等式问题: 求 $u \in K$, 使得

$$a_t(u, v-u) \ge \langle l, v-u \rangle, \quad \forall v \in K,$$

即

$$a_0(u, v-u) \ge \langle l, v-u \rangle - t\beta(u, v-u), \quad \forall v \in K. \tag{1.1.7}$$

注意到当 $t=0$ 时, 上述问题 (1.1.7) 存在唯一解 (因为此时 $a_0(\cdot,\cdot)$ 对称). 现将 (1.1.7) 右端线性化, 对任一给定的 $w \in V$, 考虑变分不等式问题: 求 $u \in K$, 使得

$$a_0(u, v-u) \ge \langle l, v-u \rangle - t\beta(w, v-u), \quad \forall v \in K. \tag{1.1.8}$$

这个问题, 同样由于定理 1.1.1 存在唯一解 $u = S_0 w$. 现考虑, 当 t 取何值时, S_0 是压缩算子. 令 $u_1 = S_0 w_1, u_2 = S_0 w_2$, 则

$$a_0(u_1, u_2 - u_1) \geq \langle l, u_2 - u_1 \rangle - t\beta(w_1, u_2 - u_1),$$

$$a_0(u_2, u_1 - u_2) \geq \langle l, u_1 - u_2 \rangle - t\beta(w_2, u_1 - u_2).$$

从而

$$a_0(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq t\beta(w_1 - w_2, u_1 - u_2),$$

由此及 $a_0(\cdot,\cdot)$ 的 V 椭圆性和 $\beta(\cdot,\cdot)$ 的连续性, 知

$$\alpha\|u_1 - u_2\|_V^2 \leq tM\|w_1 - w_2\|_V \cdot \|u_1 - u_2\|_V.$$

因此

$$\|S_0 w_1 - S_0 w_2\|_V \leq \frac{tM}{\alpha}\|w_1 - w_2\|_V,$$

从而当 $0 \leq t \leq t_0$, $t_0 < \dfrac{\alpha}{M}$ 时, S_0 是压缩算子, 且存在唯一的不动点 $u = S_0 u$, 此即 (1.1.7) 之解 (当 $0 \leq t \leq t_0$).

当 $t_0 \leq t \leq 2t_0$ 时, 考虑如下变分不等式问题: 求 $u \in K$, 使得

$$a_{t_0}(u, v - u) \geq \langle l, v - u \rangle - (t - t_0)\beta(w, v - u), \quad \forall v \in K.$$

上面已证明了它存在唯一解, 记为 $u = S_1 w$. 同样可证明

$$\|S_1 w_1 - S_1 w_2\|_V \leq \frac{(t - t_0)M}{\alpha}\|w_1 - w_2\|_V.$$

因此, 当 $t_0 \leq t \leq 2t_0$, $t_0 < \dfrac{\alpha}{M}$ 时, S_1 也是压缩算子, 从而存在唯一的不动点: $u = S_1 u$, 即

$$a_{t_0}(u, v - u) \geq \langle l, v - u \rangle - (t - t_0)\beta(u, v - u), \quad \forall v \in K,$$

即

$$a_0(u, v - u) + t\beta(u, v - u) \geq \langle l, v - u \rangle, \qquad \forall v \in K.$$

因此问题 (1.1.7) 当 $t_0 \le t \le 2t_0, t_0 < \alpha/M$ 时, 存在唯一解. 同理可证, 问题 (1.1.7) 当 $2t_0 \le t \le 3t_0, \cdots$ 时, 均存在唯一解. 由于 $[0,1]$ 是有限区间, 而 $t_0 < \alpha/M$ 是一固定正数, 因此有限步后, 即可证得, 问题 (1.1.7) 当 $0 \le t \le 1$ 时存在唯一解. 然后令 (1.1.7) 中 $t=1$, 即得定理证明.

注 1.1.4 第二种证明, 并不要求 V 是 Hilbert 空间, 而只要求 V 是 Banach 空间. 因此在定理 1.1.1 的假定之下, 除去 $a(\cdot,\cdot)$ 的对称性, 定理 1.1.3 的结论仍成立.

1.2 不可微凸泛函的极小化问题

当双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续、V 椭圆且对称时, 由 (1.1.2) 定义的泛函

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle l, v\rangle,$$

根据注 1.1.3, 可见它是一个可微的且凸的泛函. 一般地, 称泛函 $F(v)$ 是凸的, 如果

$$F(tu+(1-t)v) \le tF(u)+(1-t)F(v), \quad \forall u,v \in V, \quad t\in[0,1]. \tag{1.2.1}$$

若上述不等式, 对 $t\in(0,1)$ 且 $u \ne v$ 时严格地成立, 则称 F 是严格凸的.

现在考虑不可微凸泛函的极小化问题. 设 V 及 K 与 1.1 节一样, 泛函 $F: V \to \mathbf{R}$ 连续, 即

$$F(v_n) \to F(v), \quad \text{当 } v_n \to v \ \text{ 在 } V \text{ 中}. \tag{1.2.2}$$

称 F 是下半连续的, 如果

$$\varliminf_{v_n\to v} F(v_n) \ge F(v). \tag{1.2.3}$$

考虑泛函极小问题:

$$\begin{cases} \text{求 } u\in K, \quad \text{使得} \\ F(u) = \inf\limits_{v\in K} F(v). \end{cases} \tag{1.2.4}$$

关于问题 (1.2.4) 的解的存在性, 有下述结果.

定理 1.2.1 设 V 是自反 Banach 空间, K 是 V 的一个非空闭凸子集, F 是 K 上的一个下半连续凸泛函, 且满足下述强制性条件:

$$F(v) \to +\infty, \quad \text{当 } \|v\| \to \infty, \quad v \in K \text{ 时}, \tag{1.2.5}$$

或者 K 有界. 则极小化问题 (1.2.4) 存在解.

为证明此定理, 需要几个泛函分析中的引理 (见文献 [66]).

引理 1.2.1 若 $F: V \to \mathbf{R}$ 是凸泛函, 则对任何 n 个正实数 $q_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 使得 $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$, 及 V 中 n 个元素 $v_i, i = 1, 2, \cdots, n$, 则有

$$F\Big(\sum_{i=1}^{n} q_i v_i\Big) \le \sum_{i=1}^{n} q_i F(v_i). \tag{1.2.6}$$

其证明可由凸泛函的定义容易得到.

引理 1.2.2 (Mazur 定理[66]) 设 X 是一个赋范空间, $x_j \in X$ 且 x_j 弱收敛到 $x_\infty: x_j \rightharpoonup x_\infty$. 则对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\{x_j\}$ 的一个凸组合

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, \quad \alpha_j \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \tag{1.2.7}$$

使得

$$\Big\| x_\infty - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \Big\|_X \le \varepsilon. \tag{1.2.8}$$

引理 1.2.3 设 X 是一个赋范空间, $K \subset X$ 是一个闭凸子集, 则在 X 的弱拓扑下, K 也是闭的.

证明 此引理是上述 Mazur 定理的直接推论. 事实上, 若 $\{x_n\} \subset K$, $x_n \rightharpoonup x_\infty$, 则由 Mazur 定理, 对每个 n, 存在凸组合

$$\tilde{x}_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in K, \quad \alpha_j \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1,$$

使得

$$\|x_\infty - \tilde{x}_n\|_X \le \frac{1}{n}.$$

因此 $\{\tilde{x}_n\} \subset K$, 且 $\tilde{x}_n \to x_\infty$ (X 中强收敛). 由于 K 闭, 因此 $x_\infty \in K$.

引理 1.2.4[66] 自反的 Banach 空间是弱相对紧的.

这个引理的意思是, 若 X 是自反的 Banach 空间, C 是 X 的有界集, 则存在 $\{x_n\} \subset C$, 使得 $\{x_n\}$ 是弱收敛列: $x_n \rightharpoonup x_\infty$.

引理 1.2.5 自反的 Banach 空间中的有界闭凸子集是弱列紧的.

此是引理 1.2.3 和 1.2.4 的直接推论.

定理 1.2.1 的证明 先设 K 是有界的. 令 $m = \inf\limits_{v\in K} F(v)$, 则存在 $\tilde{v}_n \in K$, 使得

$$F(\tilde{v}_n) < m + \frac{1}{n}, \quad \forall \text{ 自然数 } n.$$

由引理 1.2.5, 存在 $\{\tilde{v}_n\}$ 的一个子列, 仍记为 $\{\tilde{v}_n\}$, 使得 $\tilde{v}_n \rightharpoonup u \in K$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_0, 当 $n \ge N_0$ 时 $F(\tilde{v}_n) < m + \varepsilon/2$. 令 $v_i = \tilde{v}_{N_0+i}$, 则

$$F(v_i) < m + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall i \ge 1,$$

且

$$v_i \rightharpoonup u \in K.$$

由于 F 是下半连续的, 再由 Mazur 定理可见, 存在 $\{v_i\}$ 的凸组合 $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, 使得

$$\begin{aligned} F(u) &< F\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\Big) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\le \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F(v_j) + \frac{\varepsilon}{2} < m + \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的, 故得

$$F(u) = m.$$

对于 K 不是有界集时, 由 F 的强制性条件, 则存在 $C = \text{const} > 0$, 使得

$$F(v) > m, \quad \forall v : \|v\|_X \geq C.$$

令

$$K_c = \{v \in K : \|v\|_X \leq C\}.$$

它是有界闭凸子集, 则问题 (1.2.4) 等价于

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K_C, \quad \text{使得} \\ F(u) = \inf\limits_{v \in K_C} F(v), \end{cases}$$

而由上面已证明了其解存在.

注 1.2.1 当 F 为凸泛函时, 问题 (1.2.4) 的解存在, 但可能不唯一; 同时可以证明其解集是 K 的一个闭凸子集. 若 F 为严格凸泛函, 则问题 (1.2.4) 的解是唯一的. 事实上, 如果 (1.2.4) 有二个不同的解 u_1 和 u_2, $u_1 \neq u_2$, 则 $\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in K$, 从而

$$F(u_1) \leq F\Big(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\Big),$$

$$F(u_2) \leq F\Big(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\Big).$$

因此

$$F(u_1) + F(u_2) \leq 2F\Big(\frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2\Big),$$

这与 F 严格凸相矛盾.

注 1.2.2 在定理 1.2.1 中, 若假定 F 是弱 (下半) 连续, 即若 $v_n \rightharpoonup v$, 则

$$\varliminf_{n} F(v_n) \geq F(v),$$

那么定理 1.2.1 中 F 为凸这一条件, 可去掉.

现在考虑一个不可微凸泛函的例子. 令

$$F(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \langle l, v\rangle + j(v), \tag{1.2.9}$$

其中 $j: V \to \mathbf{R}$ 是一个不可微的连续的凸泛函, $l \in V'$. 泛函极小问题:

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K, \text{ 使得} \\ F(u) \le F(v), \quad \forall v \in K, \end{cases} \tag{1.2.10}$$

等价于下述变分不等式 (请读者自行证明)

$$\begin{cases} \text{求 } u \in K, \text{ 使得} \\ a(u, v-u) + j(v) - j(u) \ge \langle l, v-u\rangle, \quad \forall v \in K. \end{cases} \tag{1.2.11}$$

1.3 多元函数微分学

为了以后的应用, 我们在本章末对多元函数的微分学作一介绍.

首先介绍多元函数的 Gâteaux 导数, 简记为 G 导数.

令 $v(\boldsymbol{x})$ 是定义在区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 中的函数, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \Omega$. 令 $Dv(\boldsymbol{x}): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, 称为 $v(x)$ 在点 x 处的导算子, 它作用在向量 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}}$ 上的值定义为

$$Dv(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\xi} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{v(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{\xi}) - v(\boldsymbol{x})\}, \tag{1.3.1}$$

称为在方向 $\boldsymbol{\xi}$ 的方向导数, 或 Gâteaux 导数 (G 导数). 若 $v \in C^1(\Omega)$, 则

$$Dv(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \xi_i = \mathrm{grad}\ v(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{\xi}, \tag{1.3.2}$$

取 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{e}_i = (0, \cdots, 0, \underset{\text{第 } i \text{ 个分量}}{1}, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$, 则

$$Dv(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i}. \tag{1.3.3}$$

二阶 G 导数定义为

$$D^2 v(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{Dv(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\xi} - Dv(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\xi}\}. \tag{1.3.4}$$

若 $v \in C^2(\Omega)$, 则

$$D^2 v(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}\xi_i\eta_j. \tag{1.3.5}$$

特别取 $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{e}_j$, 则

$$D^2 v(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \frac{\partial^2 v(\boldsymbol{x})}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{1.3.6}$$

一般地, m 阶 G 导数定义为

$$\begin{aligned}
&D^m v(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(1)},\boldsymbol{\xi}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{\xi}^{(m)})\\
=&\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{D^{m-1}v(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{\xi}^{(m)})\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(1)},\boldsymbol{\xi}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{\xi}^{(m-1)})\\
&-D^{m-1}v(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(1)},\boldsymbol{\xi}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{\xi}^{(m-1)})\}.
\end{aligned} \tag{1.3.7}$$

若 $v \in C^m(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}
&D^m v(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(1)},\boldsymbol{\xi}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{\xi}^{(m)})\\
=&\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m=1}^{n}\partial_{i_1,i_2,\cdots,i_m}v(x)\xi_{i_1}^{(1)}\xi_{i_2}^{(2)}\cdots\xi_{i_m}^{(m)}.
\end{aligned} \tag{1.3.8}$$

引入偏导数的多重指标记号: 令 $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) \in N^n$, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n = |\alpha|$, 那么

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha v(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial^{|\alpha|}v(\boldsymbol{x})}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}} \qquad (1.3.9)\\
&= D^{|\alpha|}v(\boldsymbol{x})\cdot\Big(\overbrace{\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_1}^{\alpha_1\text{个}},\overbrace{\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_2}^{\alpha_2\text{个}},\cdots,\overbrace{\boldsymbol{e}_n,\cdots,\boldsymbol{e}_n}^{\alpha_n\ \text{个}}\Big).
\end{aligned}$$

例如

$$\partial^{(1,0,0)}v(\boldsymbol{x}) = \partial_1 v(\boldsymbol{x}) = Dv(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_1,$$
$$\partial^{(1,1,1)}v(\boldsymbol{x}) = \partial_{123} v(\boldsymbol{x}) = D^3 v(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3),$$
$$\partial^{(3,0,0)}v(\boldsymbol{x}) = \partial_{111} v(\boldsymbol{x}) = D^3 v(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1).$$

下面介绍 (1.3.7) 定义的导算子 $D^m v(\boldsymbol{x})$ 的范数.

导算子 $D^m v(\boldsymbol{x}) : \overbrace{\mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n}^{m\text{ 个}} \to \mathbf{R}$ 的算子, 其范数定义为

$$\|D^m v(\boldsymbol{x})\| = \sup_{\left\{\substack{\|\boldsymbol{\xi}^{(i)}\|=1 \\ \boldsymbol{\xi}^{(i)} \in \mathbf{R}^n, i=1,\cdots,m}\right.} |D^m v(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(m)})|, \quad (1.3.10)$$

则

$$|D^m v(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(m)})| \le \|D^m v(\boldsymbol{x})\| \cdot \|\boldsymbol{\xi}^{(1)}\| \cdots \|\boldsymbol{\xi}^{(m)}\|, \quad (1.3.11)$$

其中 $\|\boldsymbol{\xi}^{(i)}\|$ 为向量 $\boldsymbol{\xi}^{(i)} \in \mathbf{R}^n$ 的欧氏范数.

考虑下述复合函数的导数. 令

$$\boldsymbol{x} = B\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}, \quad v(\boldsymbol{x}) = v(B\hat{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{b}) = \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}), \quad (1.3.12)$$

其中 $B \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, b \in \mathbf{R}^n$, 则

$$D^m \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{\xi}^{(m)}) = D^m v(\boldsymbol{x})(B\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \cdots, B\boldsymbol{\xi}^{(m)}). \quad (1.3.13)$$

事实上, 观察 $m = 1$ 的情形

$$\begin{aligned} D\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}}) \cdot \boldsymbol{\xi} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}} + t\boldsymbol{\xi}) - \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})\} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{v(B\hat{\boldsymbol{x}} + tB\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{b}) - v(\boldsymbol{x})\} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\{v(\boldsymbol{x} + tB\boldsymbol{\xi}) - v(\boldsymbol{x})\} = Dv(\boldsymbol{x}) \cdot B\boldsymbol{\xi}. \end{aligned}$$

我们有下述范数估计

$$\|D^m \hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})\| \le \|D^m v(\boldsymbol{x})\| \cdot \|B\|^m, \quad (1.3.14)$$

其中 $\|B\|$ 为矩阵 B 的欧氏范数.

事实上,

$$\begin{aligned}
\|D^m\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})\| &= \sup_{\left\{\substack{\|\boldsymbol{\xi}^{(i)}\|=1\\ i=1,\cdots,m}\right.} |D^m\hat{v}(\hat{\boldsymbol{x}})\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\xi}^{(m)})| \\
&= \sup_{\left\{\substack{\|\boldsymbol{\xi}^{(i)}\|=1\\ i=1,\cdots,m}\right.} |D^m v(\boldsymbol{x})\cdot(B\boldsymbol{\xi}^{(1)},\cdots,B\boldsymbol{\xi}^{(m)})| \\
&\le \|D^m v(\boldsymbol{x})\|\cdot \sup_{\left\{\substack{\|\boldsymbol{\xi}^{(i)}\|=1\\ i=1,\cdots,m}\right.} (\|B\boldsymbol{\xi}^{(1)}\|\cdots\|B\boldsymbol{\xi}^{(m)}\|) \\
&= \|D^m v(\boldsymbol{x})\|\cdot\|B\|^m.
\end{aligned}$$

当 $v\in C^m(\Omega)$ 时, 我们有下述估计

$$\|D^m v(\boldsymbol{x})\| \le c'(m,n)\max_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha v(\boldsymbol{x})|, \tag{1.3.15}$$

其中 $c'(m,n)$ 只与 m 和 n 有关, 而与 v 及 $\boldsymbol{x}$ 无关的常数.

事实上,

$$\begin{aligned}
\|D^m v(\boldsymbol{x})\| &= \sup_{\left\{\substack{\|\boldsymbol{\xi}^{(i)}\|=1\\ i=1,\cdots,m}\right.} |D^m v(\boldsymbol{x})\cdot(\boldsymbol{\xi}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{\xi}^{(m)})| \\
&= \sup_{\left\{\substack{\|\boldsymbol{\xi}^{(i)}\|=1\\ i=1,\cdots,m}\right.} \left|\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n}\partial_{i_1\cdots i_m}v(\boldsymbol{x})\xi_{i_1}^{(1)}\cdots\xi_{i_m}^{(m)}\right| \\
&\le \sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha v(\boldsymbol{x})| \le c'(m,n)\cdot\max_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha v(\boldsymbol{x})|.
\end{aligned}$$

第 2 章　Sobolev 空间

为了以后的应用, 我们在此给出 Sobolev 空间的一个简短的引论. 关于此论题的详细内容, 有兴趣的读者可参阅 Lions 和 Magenes[39] 及 Adams[1].

简单而言, 所谓 Sobolev 空间, 就是由其本身及其所有直到 m 阶的 "导数" 均在 $L^p(1 \le p \le \infty)$ 空间的函数所组成的空间. 因此, 函数及其导数的逐点性质 (局部性质) 不必关心, 重要的是它们的全局性质.

2.1　Lebesgue 积分

设区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是 Lebesgue 非空可测集, f 是 Ω 上实值 Lebesgue 可测函数, 记

$$\int_\Omega f(x)\mathrm{d}x \tag{2.1.1}$$

为 Lebesgue 积分. 现引入记号

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{2.1.2}$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess}\sup_{x\in\Omega} |f(x)|. \tag{2.1.3}$$

定义空间

$$L^p(\Omega) = \{f : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{2.1.4}$$

函数 f 和 g 在 $L^p(\Omega)$ 中视为同一函数, 如果 $\|f-g\|_{L^p(\Omega)} = 0$. 例如

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad 和 \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \le 0, \end{cases}$$

只在零测集上 (这里只在 $x=0$ 处) 不同, 因此在 $L^p(\Omega)$ $(1\le p<\infty)$ 中视为同一函数, 或称等价类.

几个不等式.

Minkowski 不等式 $1\le p\le\infty, f,g\in L^p(\Omega)$, 则

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)}\le\|f\|_{L^p(\Omega)}+\|g\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.1.5}$$

Hölder 不等式 $1\le p,q\le\infty, 1=1/p+1/q$, $f\in L^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$, 则 $f\cdot g\in L^1(\Omega)$, 且

$$\|f\cdot g\|_{L^1(\Omega)}\le\|f\|_{L^p(\Omega)}\cdot\|g\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.1.6}$$

Schwarz 不等式 当 $p=q=2$ 时 Hölder 不等式为

$$\|f\cdot g\|_{L^1(\Omega)}\le\|f\|_{L^2(\Omega)}\cdot\|g\|_{L^2(\Omega)}. \tag{2.1.7}$$

由 Minkowski 不等式可见,(2.1.2) 或 (2.1.3) 所定义的非负实值泛函 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, $1\le p\le\infty$, 是 $L^p(\Omega)$ 空间中的范数. 以后当我们提到 $L^p(\Omega)$ 空间, 就意味着它是一个赋范空间, 并具有下述性质.

定理 2.1.1[1] 对于 $1\le p\le\infty$, $L^p(\Omega)$ 是 Banach 空间.

定理 2.1.2[1] 对于 $1\le p<\infty$, $C_0^\infty(\Omega)$ 在 L^p 中稠密.

2.2 广义 (弱) 导数

经典导数的定义

$$u'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h},$$

刻画了函数 u 的局部 (在点 x 近旁) 性质. 当考虑 $L^p(\Omega)$ 中的函数, 只关心其全局性质, 因此不那么光滑的函数 (比如说 Lebesgue 可积函数) 也应该在某种意义下定义其导数.

下面给出广义导数的概念. 为此引入几个记号. 设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, u 是定义在 Ω 上的函数, u 的支集记作

$$\operatorname{supp} u=\{x\in\Omega:u(x)\ne 0\}. \tag{2.2.1}$$

若紧集 $\overline{\text{supp } u} \subset \Omega$— 开集, 也记作 $\text{supp } u \subset\subset \Omega$, 则称 u 在 Ω 中有紧支集. 因此当 Ω 为有界集, u 在 Ω 中具有紧支集, 即意味着 u 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 的邻域为 0.

定义 2.2.1 令区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega)$ 或 $C_0^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中具有紧支集的无穷次可微函数 (C^∞ 函数) 的集合:

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } u \subset\subset \Omega\}. \tag{2.2.2}$$

例 2.2.1

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{1}{|x|^2 - 1}\right\}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

容易验证 $\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. 令 $S = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$, 则对任何开集 $\Omega : \bar{S} \subset \Omega$, 就有 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ 为 $\mathcal{D}(\Omega)$ 的对偶空间, 亦称分布空间, 对偶积记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$. 令

$$L^1_{\text{loc}}(\Omega) = \{f : f \in L^1(D), \forall \text{ 紧集 } D \subset \Omega\}. \tag{2.2.4}$$

如果 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 则 f 等同于一个分布:

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.2.5}$$

现在给出分布的广义导数的定义.

定义 2.2.2 称 $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ 具有广义导数 $D_w^\alpha f$, 如果存在 $g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 使得

$$\int_\Omega g(x) \cdot \varphi(x)\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \cdot \partial^\alpha \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{2.2.6}$$

并记为

$$D_w^\alpha f = g. \tag{2.2.7}$$

若 $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, 则 f 的广义导数与经典导数相同.

例 2.2.2 设 $\Omega=(-1,1)$,

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & 0\leq x<1,\\ -x, & -1<x\leq 0,\end{cases}\qquad\text{(见图 2.2.1)}$$

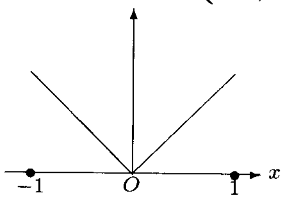

图 2.2.1

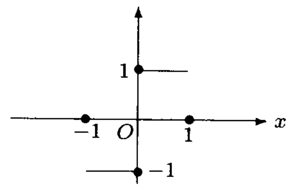

图 2.2.2

则 $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, 由分部积分,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{0}f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_{-1}^{1}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$g(x)=|x|=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ -1, & -1<x<0,\end{cases}\qquad\text{(见图 2.2.2)}$$

而 $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 因此 $D^1_w f=g$. 现在考察 f 的二阶广义导数. $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\varphi''(x)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}g(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}&=-\int_{-1}^{0}g(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}g(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{0}\varphi'(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}\varphi'(x)\mathrm{d}x\\&=2\varphi(0)=2\int_{-1}^{1}\delta(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

其中

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0,\\ 0, & x\neq 0.\end{cases}\qquad \int_{-1}^{1}\delta(x)\mathrm{d}x=1.$$

但是 $\delta(x)\notin L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 因此 f 不存在二阶广义导数.

例 2.2.3 仍令 $\Omega=(-1,1)$,

$$f(x)=|x|^t=\begin{cases}x^t, & 0<x<1,\\ (-x)^t, & -1<x<0.\end{cases}$$

考察其广义导数. $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, 有

$$\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}(-x)^t\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x^t\varphi'(x)\mathrm{d}x$$

$$=(-x)^t\varphi(x)|_{x=0-}+\int_{-1}^{0}t(-x)^{t-1}\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x$$

$$-x^t\varphi(x)|_{x=0+}-\int_{0}^{1}tx^{t-1}\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

则当 $t>0$ 时,

$$\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\varphi'(x)\mathrm{d}x=-\int_{-1}^{1}g(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$g(x)=\begin{cases}t|x|^{t-1}, & 0<x<1,\\ -t|x|^{t-1}, & -1<x<0,\end{cases}$$

且 $\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x=2$, 故 $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. 因此对 $t>0$, $D^1_w f=g$. 但对于 $t<0$ 时, f 的广义导数不存在.

例 2.2.4 考虑 2 维情形, 令 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^2:|x|<1\}$,

$$f(x)=|x|^t,\quad |x|=(x_1^2+x_2^2)^{1/2}.$$

现考察其广义导数, $\forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$, 引入极坐标

$$x_1=r\cos\theta,\quad x_2=r\sin\theta,$$

则

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Omega} f(x)\partial_1\varphi(x)\mathrm{d}x &= -\iint_{\Omega}\partial_1 f(x)\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^t)\cdot\cos\theta\cdot\varphi(r,\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= -\iint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^t)\frac{x_1}{|x|}\varphi(x)\mathrm{d}x \\
&= -\iint_{\Omega} t|x|^{t-1}\frac{x_1}{|x|}\cdot\varphi(x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

因此当 $g(x)=t|x|^{t-1}\dfrac{x_1}{|x|}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 时, 即 $r^{t-1}\cdot r\in L^1(0,1)$ 时, 此即要求 $t>-1$, f 具有广义导数

$$D_w^{(1,0)}f=t|x|^{t-1}\frac{x_1}{|x|}.$$

对于 n 维情形, 即 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n;|x|<1\}$, f 仍为上述, 当 $r^{t-1}\cdot r^{n-1}\in L^1(0,1)$ 时, 即 $t>1-n$ 时, f 有广义导数

$$D_w^{\alpha}f=t|x|^{t-1}\frac{x_\alpha}{|x|},\quad |\alpha|=1.$$

一般地, 当 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n:|x|<1\}$, $f(x)=\rho(|x|)$, 当

$$\rho'(r)r^{n-1}\in L^1(0,1),$$

即

$$\int_0^1\rho'(r)r^{n-1}\mathrm{d}r<\infty$$

时, f 具有广义导数, 且

$$D_w^{\alpha}f(x)=\rho'(|x|)\frac{x_\alpha}{|x|},\quad |\alpha|=1.$$

此例说明, 广义导数存在与否, 也与维数有关.

2.3 Sobolev 空间

以后将 f 的广义导数记为 $D^\alpha f$, 而将其经典导数 (如果存在) 记为 $\partial^\alpha f$. 引入记号, 令 $m \geq 0$ 整数,

$$\begin{cases} \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|v\|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{0,p,\Omega}^p \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|v\|_{m,\infty,\Omega} = \max\limits_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{0,\infty,\Omega}, \end{cases} \tag{2.3.1}$$

这是范数. Sobolev 空间定义如下

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) : \|v\|_{m,p,\Omega} < \infty\}. \tag{2.3.2}$$

定理 2.3.1 Sobolev 空间 $W^{m,p}(\Omega)$(装备范数 (2.3.1) 后) 是 Banach 空间.

证明 只要证明 $W^{m,p}(\Omega)$ 在范数 (2.3.1) 之下是完备的. 令 $\{v_j\} \subset W^{m,p}(\Omega)$ 是 Cauchy 列, 即 $\{D^\alpha v_j : |\alpha| \leq m\}$ 是 $L^p(\Omega)$ 中的 Cauchy 列. 由于 $L^p(\Omega)$ 是完备的, 从而存在 $v^\alpha \in L^p(\Omega)(|\alpha| \leq m)$, 使得 $D^\alpha v_j \to v^\alpha$ 在 $L^p(\Omega)$ 中, 当 $j \to \infty$ 时. 余下只要证明 $v^\alpha = D^\alpha v$, 即 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega v^\alpha \cdot \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \cdot \partial^\alpha \varphi \mathrm{d}x.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \int_\Omega v^\alpha \cdot \varphi \mathrm{d}x &= \lim_{j \to \infty} \int_\Omega D^\alpha v_j \cdot \varphi \mathrm{d}x \\ &= \lim_{j \to \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_j \cdot \partial^\alpha \varphi \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \cdot \partial^\alpha \varphi \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ 中的半范数定义如下:

$$\begin{cases} |v|_{m,p,\Omega} = \left\{ \sum\limits_{|\alpha| = m} \|D^\alpha v\|_{0,p,\Omega}^p \right\}^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ |v|_{m,\infty,\Omega} = \max\limits_{|\alpha| = m} \|D^\alpha v\|_{0,\infty,\Omega}. \end{cases} \tag{2.3.3}$$

当 $p=2$ 时, $W^{m,2}(\Omega)$ 记作 $H^m(\Omega)$, 它在下述内积下是 Hilbert 空间:

$$(u,v)_{m,\Omega}=\sum_{|\alpha|\le m}(D^\alpha u, D^\alpha v), \tag{2.3.4}$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 内积.

由于 $C^\infty(\Omega)\subset H^m(\Omega)$, 且稠密, 定义

$$H_0^m(\Omega)=\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}, \tag{2.3.5}$$

或一般地

$$W_0^{m,p}(\Omega)=\overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}, \tag{2.3.6}$$

即 $H_0^m(\Omega)$ 是 $\mathcal{D}(\Omega)$ 关于范数 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 的闭包.

引入 $H_0^m(\Omega)$ 的对偶空间

$$H^{-m}(\Omega)=(H_0^m(\Omega))', \tag{2.3.7}$$

其上范数为, 对 $f\in H^{-m}(\Omega)$,

$$\|f\|_{-m,\Omega}=\sup_{v\in H_0^m(\Omega)}\frac{\langle f,v\rangle}{\|v\|_{m,\Omega}}. \tag{2.3.8}$$

定理 2.3.2(Poincaré 不等式) 如果 Ω 为连通且在一个方向上有界的区域, 则对每个非负整数 $m\in N$, 存在 $C_m=\text{const}>0$, 使得

$$\|v\|_{m,\Omega}\le C_m|v|_{m,\Omega},\quad \forall v\in H_0^m(\Omega). \tag{2.3.9}$$

此定理由下述议论即可证明: 不等式 (2.3.9) 对 $\mathcal{D}(\Omega)$ 中的函数成立, 而 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H_0^m(\Omega)$ 中稠密. 上述定理意味着在 $H_0^m(\Omega)$ 中, 半范数 $|\cdot|_{m,\Omega}$ 也是范数, 且与 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 等价.

2.4 嵌入定理

设 X,Y 是两个赋范线性空间, 我们给出两个定义.

定义 2.4.1 称 X 嵌入 (连续地) 到 Y, 记作 $X \hookrightarrow Y$, 如果 (i) $X \subset Y$, (ii) X 到 Y 具有连续内射: 存在 $C = \text{const} > 0$,

$$\|x\|_Y \le C\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

定义 2.4.2 称 X 紧嵌入到 Y, 记作 $X \Subset Y$, 如果, (i) $X \hookrightarrow Y$, (ii) X 到 Y 的内射是紧的:X 中有界集为 Y 中的紧集; 即设 $B \subset X$ 是 X 的一个有界集, 则在 B 中存在一序列使得在 Y 中收敛.

记号 $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega}), m \in N, \alpha \in (0,1]$, 表示 $C^m(\bar{\Omega})$ 中那些 m 阶导数为 α 次 Hölder 连续的函数全体. 特别地, 设 $v \in C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$, 则存在常数 $M = \text{const} > 0$, 使得

$$|v(x) - v(y)| \le M\|x - y\|^\alpha, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}. \tag{2.4.1}$$

当 $\alpha = 1$ 时称为 Lipschitz 连续. 在 $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ 中装备范数:

$$\|v\|_{C^{m,\alpha}} = \|v\|_{m,\infty,\Omega} + \max_{|\beta|=m} \sup_{\substack{x \cdot y \in \bar{\Omega} \\ x \ne y}} \frac{|\partial^\beta v(x) - \partial^\beta v(y)|}{\|x - y\|^\alpha}, \tag{2.4.2}$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的欧氏范数, 则 $C^{m,\alpha}(\bar{\Omega})$ 是 Banach 空间.

下面是著名的嵌入定理 (见文献 [1]).

定理 2.4.1 设 $m \ge 0$ 为整数, $1 \le p \le \infty$, 且设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的区域, 即有界开的连通集合, 且具有 Lipschitz 连续边界. 则下述嵌入关系成立:

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{P^*}(\Omega), \dfrac{1}{p^*}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{m}{n}, & \text{若 } m < \dfrac{n}{p}, \\ L^q(\Omega), \forall q \in [1,\infty), & \text{若 } m=\dfrac{n}{p}; \text{ 当 } p=1 \text{ 时}, q \text{ 可取 } \infty, \\ C^{0,m-n/p}(\bar{\Omega}), & \text{若 } \dfrac{n}{p} < m < \dfrac{n}{p}+1, \\ C^{0,\alpha}(\bar{\Omega}),\ \forall 0<\alpha<1, & \text{若 } m = \dfrac{n}{p}+1, \\ C^{0,1}(\bar{\Omega}), & \text{若 } \dfrac{n}{p}+1 < m. \end{cases} \tag{2.4.3}$$

定理 2.4.2 (紧嵌入定理)　在定理 2.4.1 的假定下, 下述紧嵌入关系成立:

$$W^{m,p}(\Omega) \Subset \begin{cases} L^q(\Omega),\ \forall 1\leq q<p^*,\ \dfrac{1}{p^*}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{m}{n}, & \text{若 } m<\dfrac{n}{p}, \\ L^q(\Omega),\quad \forall q\in[1,\infty), & \text{若 } m=\dfrac{n}{p}, \\ C^0(\bar{\Omega}), & \text{若} m>\dfrac{n}{p}. \end{cases} \quad (2.4.4)$$

上述定理的下述特殊情形经常有用,

(i) $H^1(\Omega)\Subset L^2(\Omega)$, 对一切 n 成立 (Rellich 定理).

(ii) $W^{1,p}(\Omega) \Subset L^p(\Omega)$, $W^{k+1,p}(\Omega) \Subset W^{k,p}(\Omega)$, 对一切 n 成立 (Rellich 定理).

(iii) 当 $n=2$ 时, 即 Ω 是 2 维区域, 则

$$H^2(\Omega)\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega}) \text{ 且 } H^2(\Omega)\Subset C^0(\bar{\Omega});$$

但

$$H^1(\Omega)\not\hookrightarrow C^0(\Omega).$$

现在举例说明上面的嵌入关系.

例 2.4.1　设 $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n : |x|<1/2\}$, 考虑函数

$$f(x)=\log|\log|x||.$$

令 $\rho(r)=\log|\log r|(0<r<1/2)$, 则 $\rho'(r)=-\dfrac{1}{r\log r}$, 从而

$$\int_0^{1/2}\rho'(r)\cdot r^{n-1}\mathrm{d}r=\int_{\log 2}^{\infty}\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-(n-1)t}\mathrm{d}t<\infty \quad (n\geq 1)$$

(上面利用变量替换 $r=\mathrm{e}^{-t}$). 因此由例 2.2.4 可见, 对 $|\alpha|=1$,

$$D^\alpha f=\frac{x_\alpha}{|x|^2|\log|x||}.$$

下面观察 f 是否属于 $W^{1,p}(\Omega)$, 只要观察

$$\begin{aligned}&\int_0^{1/2}\Big(\frac{1}{r|\log r|}\Big)^p\cdot r^{n-1}\mathrm{d}r=\int_0^{1/2}\frac{1}{|\log r|^p}r^{n-p-1}\mathrm{d}r\\ =&\int_{\log 2}^{\infty}\frac{1}{t^p}\mathrm{e}^{-(n-p)t}\mathrm{d}t<\infty\quad(\text{当 } n\geq p \text{ 时})\ (r=\mathrm{e}^{-t}).\end{aligned}$$

因此对 $p\leq n$ 时, $f\in W^{1,p}(\Omega)$. 由此可见, 一个函数是否属于某个 Sobolev 空间, 不仅与函数本身, 且与 p 及 n 有关. 同时, 这个例子也说明了, 当 $n=2$ 时, $f\in W^{1,2}(\Omega)=H^1(\Omega)$, 但显然 $f\notin C^0(\bar{\Omega})$. 这正好验证了 Sobolev 嵌入定理的结果

$$H^1(\Omega)\not\hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})\quad(\text{当 } n=2 \text{ 时}).$$

下面给出某些特殊情形下, 嵌入定理的证明.

例 2.4.2 对 $p=1$ 的情形. 先考虑 $n=1$ 的情形, 令 $\Omega=(0,1)$, 则 $\forall x\in(0,1)$, 对任一光滑函数 $u(x)$,

$$u(x)=u(x_0)+\int_{x_0}^{x}u'(t)\mathrm{d}t,$$

将上式两边对 x_0 在 $(0,1)$ 上积分, 可得

$$|u(x)|\leq\int_0^1|u(x_0)|\mathrm{d}x_0+\int_0^1|u'(t)|\mathrm{d}t=\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)}.$$

从而

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\leq\|u\|_{1,1,\Omega}.$$

因此在一维情形有 $W^{1,1}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

现考虑 $n=2$ 的情形, 令 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$(见图 2.4.1),

$$\begin{aligned}u(x,y)&=u(x_0,y)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi\\&=u(x_0,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

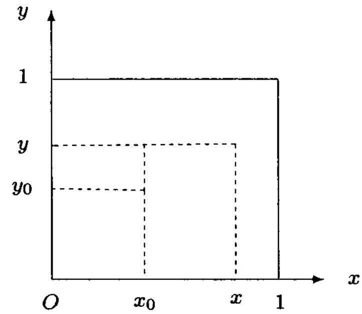

图 2.4.1

将上式对 (x_0,y_0) 在 $(0,1)^2$ 上积分, 得

$$\begin{aligned}u(x,y)= &\iint_\Omega u(x_0,y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0+\int_0^1\mathrm{d}y_0\int_0^1\int_{y_0}^y\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}x_0.\\&+\int_0^1\mathrm{d}x_0\int_0^1\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi,\end{aligned}$$

由此

$$\begin{aligned}|u(x,y)|\le &\iint_\Omega|u(x_0,y_0)|\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0+\iint_\Omega\left|\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial\eta}\right|\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y\\&+\left|\int_0^1\int_0^1\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi\right|.\end{aligned}$$

下面估计上式右端的最后积分

$$\begin{aligned}&\int_0^1\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi\\=&\int_0^1\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi+\int_0^1\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^x\Big(\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial\xi}-\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial\xi}\Big)\mathrm{d}\xi\\=&\int_0^1\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^x\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi+\int_0^1\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^x\mathrm{d}\xi\left(\int_{y_0}^y\frac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta}\mathrm{d}\eta\right),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0\int_{x_0}^{x}\frac{\partial u(\xi,y)}{\partial \xi}\mathrm{d}\xi\right|\\ \leq\ &\iint_\Omega\left|\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}y_0+\iint_\Omega\left|\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial \xi\partial\eta}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta.\end{aligned}$$

从而 $\forall (x,y)\in\bar{\Omega}$,

$$|u(x,y)|\leq \|u\|_{W^{2,1}(\Omega)},$$

即得

$$\sup_{(x,y)\in\Omega}|u(x,y)|\leq \|u\|_{2,1,\Omega},$$

因此在 2 维情形

$$W^{2,1}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega).$$

上述例子是 $W^{n,1}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ (n 维情形) 的特殊情形.

例 2.4.3 本例考察具有一阶广义导数的函数是否属于 $L^\infty(\Omega)$. 假定 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 具有锥性质, 即对任一点 $x\in\Omega$, 存在以 x 为顶点, 具有固定底面 A 和固定高度 h 的锥 $C_x\subset\Omega$(见图 2.4.2). 由

$$u(x)=u(0,\theta)=u(r,\theta)-\int_0^r\frac{\partial u(t,\theta)}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

从而

$$|u(x)|\leq |u(r,\theta)|+\int_0^h|\nabla u(t,\theta)|\mathrm{d}t.$$

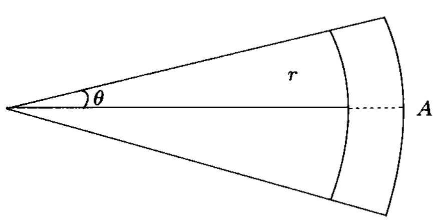

图 2.4.2

将上式乘以 $r^{n-1}\omega_\theta$ (ω_θ: 锥底 A 上的面元), 然后对 $r\in(0,h)$, $\theta\in A$ 积分, 得

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{Vol}C_x)|u(x)| &\le \int_{C_x}|u(y)|\mathrm{d}y+\int_A\omega_\theta\mathrm{d}\theta\int_0^h r^{n-1}\mathrm{d}r\int_0^h|\nabla u(t,\theta)|\mathrm{d}t\\
&= \int_{C_x}|u(y)|\mathrm{d}y+\frac{h^n}{n}\int_A\omega_\theta\mathrm{d}\theta\int_0^h|\nabla u(t,\theta)|\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

现在估计上式右端最后积分, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$,

$$
\begin{aligned}
&\int_A\omega_\theta\mathrm{d}\theta\int_0^h|\nabla u(t,\theta)|\mathrm{d}t=\int_A\omega_\theta\mathrm{d}\theta\int_0^h\left(|\nabla u(t,\theta)|\cdot t^{\frac{n-1}{p}}\right)\cdot t^{\frac{1-n}{p}}\mathrm{d}t\\
\le\ & \int_A\omega_\theta\mathrm{d}\theta\Big(\int_0^h|\nabla u(t,\theta)|^pt^{n-1}\mathrm{d}t\Big)^{1/p}\cdot\Big(\int_0^h t^{\frac{1-n}{p}\cdot p'}\mathrm{d}t\Big)^{1/p}\\
\le\ & \Big\{\int_A\omega_\theta\mathrm{d}\theta\Big(\int_0^h|\nabla u(t,\theta)|^pt^{n-1}\mathrm{d}t\Big)\Big\}^{1/p}\\
&\cdot\Big\{\int_A\omega_\theta\mathrm{d}\theta\Big(\int_0^h t^{\frac{1-n}{p}\cdot p'}\mathrm{d}t\Big)\Big\}^{1/p'}\\
=\ & \Big(\int_{C_x}|\nabla u(y)|^p\mathrm{d}y\Big)^{1/p}\Big(A\int_0^h t^{\frac{1-n}{p}\cdot p'}\mathrm{d}t\Big)^{1/p'}.
\end{aligned}
$$

当 $\dfrac{1-n}{p}\cdot p'>-1$, 即 $p>n$ 时, 上述右端第二个积分因子有限. 从而当 $p>n$ 时, 当区域 Ω 具有锥性质时,

$$
\sup_{x\in\Omega}|u(x)|\le C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},
$$

即

$$
W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^\infty(\Omega),\quad p>n.
$$

2.5 迹 定 理

现在要考虑 Sobolev 空间中函数在区域边界上的迹. 比如对于函数 $u\in L^p(\Omega)$, 它可以在零测集 $\partial\Omega$(作为 n 维测度) 上无定义. 因

此首先要对 Sobolev 空间中的函数在边界上的值给出定义, 为此需要下述定理.

定理 2.5.1[1] 如果区域 Ω 具有线段性质, 则对 $1 \le p < \infty$, $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密.

注 2.5.1[1] 称区域 Ω 具有线段性质, 如果对每个 $x \in \partial\Omega$, 存在一个开集 $\cup_x$ 和一个向量 $y_x \neq 0$, 使得 $x \in \cup_x$, 且若 $z \in \bar{\Omega} \cap \cup_x$, 则 $z + ty_x \in \Omega, 0 < t < 1$. 具有这种性质的区域不能同时位于其边界任何一部分的两边, 即排除了下面区域

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < |x| < 1,\ 0 < y < 1\}.$$

这个区域位于其部分边界 $\{(x,y) : x = 0, 0 < y < 1\}$ 的两边, 它不具有线段性质 (见图 2.5.1): $z_1 + ty_x \in \Omega$, 但 $z_2 + ty_x \notin \Omega$; 同时在文献 [1] 中举出了上面定理结论的反例 (对图 2.5.1 的区域).

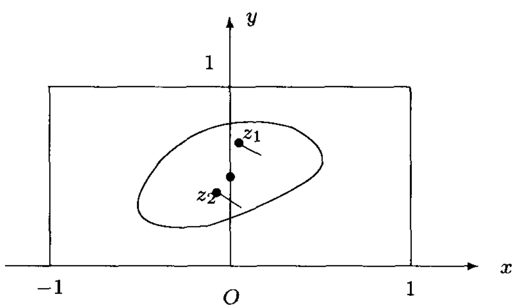

图 2.5.1

以后我们均假定区域 Ω 具有线段性质.

由上述定理知, 对任给定的 $v \in H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$, 则存在 $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$, 使得 $\varphi_k \to v$ 在 $H^m(\Omega)$ 中. 而 φ_k 在 $\partial\Omega$ 上是有定义的, 记 $\gamma_0\varphi_k$ 为 φ_k 在 $\partial\Omega$ 上的函数值. 那么如果在某种意义下 $\gamma_0\varphi_k \to \mu$, 则自然地可定义 v 在 $\partial\Omega$ 上的边界值 $\gamma_0 v = \mu$. 我们有下述结果.

定理 2.5.2[1] 存在 $C=\text{const}>0$, 使得

$$\|\gamma_0\varphi\|_{0,\partial\Omega}\le C\|\varphi\|_{1,\Omega},\quad \forall\varphi\in C^1(\bar{\Omega}). \tag{2.5.1}$$

当区域 Ω 为矩形时, 请读者自行证明 (2.5.1).

由定理 2.5.2, 即可定义 $H^1(\Omega)$ 中函数的边值. 事实上, 若 $v\in H^1(\Omega)$, 则存在 $\varphi_n\in C^1(\bar{\Omega})$, 使得

$$\|\varphi_n-v\|_{1,\Omega}\to 0,\quad 当\ n\to\infty\ 时.$$

从而 $\{\varphi_n\}$ 是 $H^1(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列:

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|_{1,\Omega}\to 0,\quad 当\ n,m\to\infty\ 时.$$

由定理 2.5.2 知,

$$\|\gamma_0\varphi_n-\gamma_0\varphi_m\|_{0,\partial\Omega}\le C\|\varphi_n-\varphi_m\|_{1,\Omega}\to 0,\quad n,m\to\infty,$$

即 $\{\gamma_0\varphi_n\}$ 是 $L^2(\partial\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 由 $L^2(\partial\Omega)$ 的完备性, 则存在 $\mu\in L^2(\partial\Omega)$, 使得

$$\|\gamma_0,\varphi_n-\mu\|_{0,\partial\Omega}\to 0,\quad n\to\infty.$$

这样, 即可定义 $\mu=\gamma_0 v$, 则

$$\|\gamma_0 v\|_{0,\partial\Omega}\le C\|v\|_{1,\Omega},\quad \forall v\in H^1(\Omega). \tag{2.5.2}$$

因此 $\gamma_0:H^1(\Omega)\to L^2(\partial,\Omega)$ 的连续线性算子, 即

$$\gamma_0\in\mathcal{L}(H^1(\Omega);L^2(\partial\Omega)),$$

γ_0 称为边界值算子或称迹算子. 另一方面, 并非对每个 $\mu\in L^2(\partial\Omega)$, 一定存在 $v\in H^1(\Omega)$ 使得 $\gamma_0 v=\mu$. 也就是说, 算子 $\gamma_0:H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$ 是内射的, 但不是满射的. 即 γ_0 的值域是 $L^2(\partial\Omega)$ 的一个真子集, 记作 $H^{1/2}(\partial\Omega)$. 下面给出比 (2.5.2) 更精细的估计.

定理 2.5.3[1] 存在 $C = \text{const} > 0$, 使得

$$\|\gamma_0 v\|_{0,\partial\Omega} \le C\|v\|_{0,\Omega}^{1/2} \cdot \|v\|_{1,\Omega}^{1/2}, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.5.3}$$

我们给出在矩形区域 Ω 时, (2.5.3) 的证明. 这只要对光滑函数证明即可, 故设 $v \in C^1(\bar{\Omega})$, 则 (见图 2.5.2)

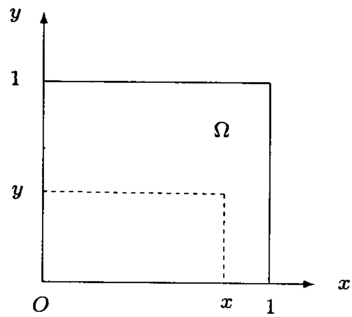

图 2.5.2

$$\begin{aligned}|v(x,y)|^2 &= |v(x,0)|^2 + \int_0^y \frac{\partial(v(x,y)^2)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta \\ &= |v(x,0)|^2 + 2\int_0^y v(x,\eta)\frac{\partial v(x,\eta)}{\partial\eta}\mathrm{d}\eta,\end{aligned}$$

即

$$|v(x,0)|^2 \le |v(x,y)|^2 + 2\int_0^y |v(x,\eta)|\left|\frac{\partial v(x,\eta)}{\partial\eta}\right|\mathrm{d}\eta.$$

将上式对 (x,y) 在 $\Omega = (0,1)^2$ 上积分即可见

$$\int_0^1 |v(x,0)|^2\mathrm{d}x \le \|v\|_{0,\Omega}^2 + 2\|v\|_{0,\Omega} \cdot |v|_{1,\Omega}.$$

同样可得

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} v^2\mathrm{d}s &\le C'\{\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{0,\Omega} \cdot |v|_{1,\Omega}\} \\ &\le C\|v\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

由此即得证 (2.5.3).

一般地, 还有下述定理.

定理 2.5.4[1] 对于 $1 \leq p \leq \infty$, 存在 $C = \text{const} > 0$, 使得

$$\|\gamma_0 v\|_{0,p,\partial\Omega} \leq C\|v\|_{0,p,\Omega}^{1-1/p} \cdot \|v\|_{1,p,\Omega}^{1/p}, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{2.5.4}$$

关于迹算子 γ_0, 有下述定理.

定理 2.5.5[1] 设区域 Ω 具有线段性质, 则

(i) $\mathrm{Ker}(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$,

(ii) γ_0 的值域 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是 $L^2(\partial\Omega)$ 的一个稠密子空间.

对于 $\mu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, 定义

$$\|\mu\|_{1/2,\partial\Omega} = \inf_{\left\{\substack{v\in H^1(\Omega)\\ \gamma_0 v=\mu}\right.} \|v\|_{1,\Omega}, \tag{2.5.5}$$

则 $\|\mu\|_{1/2,\partial\Omega}$ 是 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 上的一个范数, 且在此范数下 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 是一个 Banach 空间. 而 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 的对偶空间记为

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) = (H^{1/2}(\partial\Omega))',$$

其范数如下: $\forall\mu^* \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$,

$$\|u^*\|_{-1/2,\partial\Omega} = \sup_{\mu\in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{\langle \mu^*, \mu\rangle}{\|\mu\|_{1/2,\partial\Omega}}. \tag{2.5.6}$$

由不等式 (2.5.2), 可以看出, 前面定义的空间 $H_0^1(\Omega) = \overline{(\mathcal{D}(\Omega))}^{H^1(\Omega)}$ 与下述定义等价

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \gamma_0 v = 0\}. \tag{2.5.7}$$

下面给出高次迹. 令 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是 $\partial\Omega$ 上单位外法向量, 若 $v \in H^2(\Omega)$, 记在 $\partial\Omega$ 上,

$$\gamma_1 v = \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \sum_{i=1}^n \nu_i \gamma_0\Big(\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big). \tag{2.5.8}$$

同样可有

$$\gamma_1 \in \mathcal{L}(H^2(\Omega); H^{1/2}(\partial\Omega)), \tag{2.5.9}$$

以及

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) : \gamma_0 v = 0,\ \gamma_1 v = 0\}. \tag{2.5.10}$$

一般地, 若 $v \in H^m(\Omega)$, 则 $\gamma_0 v \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\gamma_1 v \in H^{m-3/2}(\partial\Omega)$. 对于 $\mu \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, 其范数定义为

$$\|\mu\|_{m-1/2,\partial\Omega} = \inf_{\left\{\substack{v \in H^m(\Omega) \\ \gamma_0 v = \mu}\right.} \|v\|_{m,\Omega}. \tag{2.5.11}$$

综合之, 有下述定理.

定理 2.5.6 (迹定理)[1] 映射

$$v \to \{\gamma_0 v, \gamma_1 v\} : H^m(\Omega) \to H^{m-1/2}(\partial\Omega) \times H^{m-3/2}(\partial\Omega) \tag{2.5.12}$$

是满射的线性连续映射.

2.6 Sobolev 空间中的 Green 公式

下述基本 Green 积分公式成立: $\forall u, v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega u \cdot \partial_i v \mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_i u \cdot v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv \cdot \nu_i \mathrm{d}\sigma,\ \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{2.6.1}$$

上述 Green 公式对光滑函数 $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ 显然成立, 从而考虑到 $C^1(\bar{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密及迹定理 2.5.2, 即可证明 (2.6.1).

由上面基本 Green 积分公式, 容易导出下述一系列 Green 积分公式:

$$\int_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v \mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u \cdot v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \mathrm{d}\sigma, \tag{2.6.2}$$

$$\forall u \in H^2(\Omega),\quad v \in H^1(\Omega).$$

$$\int_\Omega (u\Delta v - \Delta u\cdot v)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}(u\cdot\partial_\nu v - v\cdot\partial_\nu u)\mathrm{d}\sigma, \tag{2.6.3}$$

$$\forall u, v\in H^2(\Omega).$$

$$\int_\Omega \Delta u\cdot\Delta v\mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta^2 u\cdot v\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\partial_\nu\Delta u\cdot v\mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega}\Delta u\cdot\partial_\nu v\mathrm{d}\sigma, \tag{2.6.4}$$

$$\forall u\in H^4(\Omega),\quad v\in H^2(\Omega).$$

由上述 Green 积分公式容易证明:

$$|\Delta v|_{0,\Omega} = |v|_{2,\Omega},\quad \forall v\in H_0^2(\Omega). \tag{2.6.5}$$

设 $n=2$, 令 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2)$ 表示沿 $\partial\Omega$ 的单位切向量, 且使其与单位外法向量 $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2)$ 组成右手系, 令 $\partial_{\boldsymbol{\nu}}$ 表示法向导算子, 又

$$\begin{cases}\partial_{\boldsymbol{\tau}} v(a) = Dv(a)\cdot\boldsymbol{\tau} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\tau_i\partial_i v(a),\\[2ex] \partial_{\boldsymbol{\nu\tau}} v(a) = D^2v(a)\cdot(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\tau}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\nu_i\tau_j\partial_{ij}v(a),\\[2ex] \partial_{\boldsymbol{\tau\tau}} v(a) = D^2v(a)\cdot(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\tau}) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\tau_i\tau_j\partial_{ij}v(a).\end{cases} \tag{2.6.6}$$

注意, 一般来说, $\partial_{\boldsymbol{\nu\tau}}v$ 并非是 v 的法向导数 $\partial_{\boldsymbol{\nu}}v$ 沿 $\partial\Omega$ 的切向导数, 即 $\partial_{\boldsymbol{\nu\tau}}v(a)\neq\partial_{\boldsymbol{\tau}}(\partial_{\boldsymbol{\nu}}v)(a)$; 同样, 一般来说, $\partial_{\boldsymbol{\tau\tau}}v(a)\neq\partial_{\boldsymbol{\tau}}(\partial_{\boldsymbol{\tau}}v)(a)$. 下述 Green 积分公式成立: 若 $u\in H^3(\Omega)$, $v\in H^2(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned}&\int_\Omega(2\partial_{12}u\cdot\partial_{12}v - \partial_{11}u\cdot\partial_{22}v - \partial_{22}u\cdot\partial_{11}v)\mathrm{d}x\\ =&\int_{\partial\Omega}(-\partial_{\boldsymbol{\tau\tau}}u\cdot\partial_{\boldsymbol{\nu}}v + \partial_{\boldsymbol{\nu\tau}}u\cdot\partial_{\boldsymbol{\tau}}v)\mathrm{d}\sigma.\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

2.7 等价模定理

本章最后给出所谓 "等价模定理", 它在有限元方法的误差分析中, 起着关键的作用.

定理 2.7.1 设 $P_k(\Omega)(k\geq 0)$ 为 Ω 上次数 $\leq k$ 的多项式全体, $N=\dim P_k(\Omega)$, 又设 $f_i\in (W^{k+1,p}(\Omega))'$, $i=1,2,\cdots,N$, $p\in[1,\infty]$, 使得当 $f_i(q)=0$, $\forall 1\leq i\leq N$, $q\in P_k(\Omega)$ 时, 就有 $q=0$, 则存在 $C_\Omega=\text{const}>0$, 使得

$$\|v\|_{k+1,p,\Omega}\leq C_\Omega\Big\{|v|_{k+1,p,\Omega}+\sum_{i=1}^N|f_i(v)|\Big\},\ \forall v\in W^{k+1,p}(\Omega).\quad (2.7.1)$$

证明 反证法. 若定理不成立, 则对每个 n 存在 v_n, 使得

$$\|v_n\|_{k+1,p,\Omega}=1,\quad (2.7.2)$$

$$|v_n|_{k+1,p,\Omega}+\sum_{i=1}^N|f_i(v_n)|<\frac{1}{n}.\quad (2.7.3)$$

由于 $\{v_n\}$ 是 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中的有界序列, 根据紧嵌入定理, $W^{k+1,p}(\Omega)\Subset W^{k,p}(\Omega)$, 知存在子序列, 仍记为 $\{v_n\}$, 使得 v_n 在 $W^{k,p}(\Omega)$ 中收敛, 即得

$$\|v_n-v_m\|_{k,p,\Omega}\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

而由 (2.7.3) 知

$$|v_n-v_m|_{k+1,p,\Omega}\leq|v_n|_{k+1,p,\Omega}+|v_m|_{k_1,p,\Omega}\to 0,\quad n,m\to\infty.$$

由此即得 $\{v_n\}$ 是 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中的 Cauchy 序列, 由 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 的完备性, 则存在 $v\in W^{k+1,p}(\Omega)$, 使得在 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 中

$$v_n\to v,$$

由此, 从 (2.7.3) 可得

$$|v|_{k+1,p,\Omega}+\sum_{i=1}^N|f_i(v)|=0.$$

因此

$$|v|_{k+1,p,\Omega}=0,$$

即 $v \in P_k(\Omega)$, 且 $|f_i(v)| = 0, \forall 1 \le i \le N$, 由定理假设 $v = 0$, 而这与 (2.7.2) 矛盾. 证毕.

推论 2.7.1 下述 Friedrichs 不等式成立

$$\|v\|_{1,\Omega} \le C\Big\{|v|_{1,\Omega} + \Big|\int_{\partial\Omega} v\mathrm{d}\sigma\Big|\Big\}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{2.7.4}$$

其中 $C = \text{const} > 0$ 为只与 Ω 有关, 而与 v 无关的常数.

证明 在定理 2.7.1 中, 令 $k = 0, p_2 = 2$,

$$f_1(v) = \int_{\partial\Omega} v\mathrm{d}\sigma,$$

则可有

$$|f_1(v)| \le |\partial\Omega|^{1/2} \cdot \|v\|_{0,\partial\Omega} \le C_\Omega \cdot \|v\|_{1,\Omega},$$

即 $f_1 \in (H^1(\Omega))'$. 又若 $\forall q_0 \in P_0(\Omega)$, $q_0 \ne 0$, 则

$$f_1(q_0) = q_0|\partial\Omega| \ne 0.$$

从而由定理 2.7.1, 即得证明.

同样可证, 若 $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ 且 $\text{meas}\Gamma_0 > 0$, 则

$$\|v\|_{1,\Omega} \le C\Big\{|v|_{1,\Omega} + \Big|\int_{\Gamma_0} v\mathrm{d}\sigma\Big|\Big\}, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{2.7.5}$$

由此, 特别对 $v \in H_0^1(\Omega)$, Poincaré 不等式 (2.3.9) 成立 (当 $m = 1$ 时).

推论 2.7.2 下述 Poincaré-Friedrichs 不等式成立:

$$\|v\|_{1,\Omega} \le C\Big\{|v|_{1,\Omega} + \Big|\int_{\Omega} v\mathrm{d}x\Big|\Big\}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{2.7.6}$$

其中 $C = \text{const} > 0$ 为只与 Ω 有关而与 v 无关的常数.

证明 为此, 只要在定理 2.7.1 中, 取 $k = 0, p = 2$,

$$f_1(v) = \int_{\Omega} v\mathrm{d}x,$$

即可得证.

下面给出定理 2.7.1 的一个重要应用, 即商空间中的等价模定理.

考虑商空间 $W^{k+1,p}(\Omega)/p_k(\Omega)$, 其元素 $\dot{v}$ 是下述一类函数, 称为 v(代表元) 的等价类: 称 $\dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/p_k(\Omega)$, 若

$$\dot{v} = \{w \in W^{k+1,p}(\Omega) : (w - v) \in P_k(\Omega)\}. \tag{2.7.7}$$

在商空间中, 定义范数如下

$$\|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega} = \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v + q\|_{k+1,p,\Omega}. \tag{2.7.8}$$

容易证明, 在上述范数定义下, 商空间 $W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$ 是一个 Banach 空间. 再定义半范数如下

$$|\dot{v}|_{k+1,p,\Omega} = |v|_{k+1,p,\Omega}. \tag{2.7.9}$$

显然有

$$|\dot{v}|_{k+1,p,\Omega} \leq \|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega}, \quad \forall \dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega). \tag{2.7.10}$$

下面的结果证明, 商空间中的半范数是与其范数等价的 (此结果首先由 Deny 和 Lions 于 1953~1954 所证明).

定理 2.7.2 令 $k \geq 0, p \in [1, \infty]$, 存在 $C_\Omega = \text{const} > 0$, 使得

$$\inf_{q \in p_k(\Omega)} \|v + q\|_{k+1,p,\Omega} \leq C_\Omega |v|_{k+1,p,\Omega}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega). \tag{2.7.11}$$

从而

$$\|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega} \leq C_\Omega |\dot{v}|_{k+1,p,\Omega}, \quad \forall \dot{v} \in W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega). \tag{2.7.12}$$

证明 (i) 首先寻求满足定理 2.7.1 假定中的 $f_i \in (W^{k+1,p}(\Omega))'$. 令 $N = \dim P_k(\Omega)$, 设 $\{p_i(x)\}_{i=1}^N$ 是 $P_k(\Omega)$ 中的一组基, 令 $f_i \in$

$(P_k(\Omega))'$, 使得 $f_i(p_j)=\delta_{ij}$, 则 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 是 $(P_k(\Omega))'$ 中的一组基. 事实上, 任给 $f\in(P_k(\Omega))'$, 则对每个 $q\in P_k(\Omega)$, 有

$$q(x)=\sum_{i=1}^N\alpha_i p_i(x),$$

从而

$$f(q)=\sum_{i=1}^N\alpha_i f(p_i),$$

而且

$$f_i(q)=f_i\Big(\sum_{j=1}^N\alpha_j p_j\Big)=\alpha_i.$$

这样

$$f(q)=\sum_{i=1}^N f(p_i)f_i(q),$$

因此, 任给 $f\in(P_k(\Omega))'$, 可表示成

$$f=\sum_{i=1}^N f(p_i)f_i.$$

而 $\{f_i\}_{i=1}^N$ 的线性无关是显然的. 又若 $q\in P_k(\Omega)$, 且 $f_i(q)=0$, $i=1,2,\cdots,N$, 我们断定 $q=0$. 事实上, 设 $q=\sum\limits_{j=1}^N\beta_j p_j$, 则由于

$$f_i(q)=\sum_{j=1}^N\beta_j f_i(p_j)=\beta_i=0,\quad i=1,2,\cdots,N,$$

从而 $q=0$. 现在为满足定理 2.7.1 的假定, 只需将 $f_i\in(P_k(\Omega))'$ 延拓到 $(W^{k+1,p}(\Omega))'$. 由 Hahn-Banach 定理, 令 $\tilde f_i\in(W^{k+1,p}(\Omega))'$, 使得

$$\tilde f_i(q)=f_i(q),\quad \forall q\in P_k(\Omega),\quad \|\tilde f_i\|=\|f_i\|.$$

这样 $\tilde{f}_i$ 即可满足定理 2.7.1 假定中的 $(W^{k+1,p}(\Omega))'$ 中的泛函, 仍记为 f_i. 从而由定理 2.7.1, 可有

$$\|v\|_{k+1,p,\Omega} \leq C_\Omega \Big\{ |v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v)| \Big\}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega). \tag{2.7.13}$$

(ii) 对任给定 $v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, 取 $\tilde{q} \in P_k(\Omega)$, 使得

$$\tilde{q}(x) = \sum_{i=1}^{N} \tilde{q}_i p_i(x), \quad \tilde{q}_i = -f_i(v), \qquad 1 \leq i \leq N,$$

则

$$f_i(v+\tilde{q}) = f_i(v) + f_i(\tilde{q}) = 0, \qquad 1 \leq i \leq N.$$

从而由 (2.7.13),

$$\begin{aligned}
\|\dot{v}\|_{k+1,p,\Omega} &= \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v+q\|_{k+1,p,\Omega} \leq \|v+\tilde{q}\|_{k+1,p,\Omega} \\
&\leq C_\Omega \Big\{ |v|_{k+1,p,\Omega} + \sum_{i=1}^{N} |f_i(v+\tilde{q})| \Big\} \\
&= C_\Omega |v|_{k+1,p,\Omega} = C_\Omega |\dot{v}|_{k+1,p,\Omega}.
\end{aligned}$$

注 2.7.1 应该注意到, 本节中等价模定理 2.7.1 的证明中, 应用了紧嵌入定理 2.4.1, 因此这里我们均假定区域 Ω 是有界开的连通集合, 且具有 Lipschitz 连续边界. 事实上, 这里的推论 2.7.1 及 2.7.2, 在关于 Ω 的更弱的假定之下亦成立 (比如见定理 2.3.2 关于 Poincaré 不等式).

第 3 章　椭圆边值问题

本章在变分形式框架下, 考虑几个典型的椭圆边值问题.

3.1　二阶椭圆型方程边值问题

例 3.1.1　齐次 Dirichlet 问题.

考虑如下问题

$$\begin{cases} -\Delta u + bu = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

其中 $b \in L^\infty(\Omega), b \geq 0, f \in L^2(\Omega)$. 下面导出与其对应的变分问题. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$, 由 Green 积分公式,

$$\int_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}x + \int_\Omega buv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x. \tag{3.1.2}$$

令

$$a(u,v) = \int_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}x + \int_\Omega buv\mathrm{d}x, \tag{3.1.3}$$

则若 u 是原微分方程边值问题之解, u 必满足下述变分问题: $u \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(u,v) = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1.4}$$

反之, 若 u 是 (3.1.4) 之解, 则仍利用 Green 公式,

$$\int_\Omega (-\Delta u + bu - f)v\mathrm{d}x = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

由于 $\mathcal{D}(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密, 从而

$$-\Delta u + bu = f, \quad 在 \ \mathcal{D}'(\Omega) \ 中,$$

即方程 (3.1.1) 在分布意义下成立, 因此, 从广义解的意义上, (3.1.1) 等价于 (3.1.4). 现在来考虑问题 (3.1.4) 的解的存在唯一性. 由 Poincaré 不等式, 可见

$$a(v,v) \geq \int_\Omega |\mathrm{grad} v|^2 \mathrm{d}x = |v|_{1,\Omega}^2 \geq c\|v\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

即 $a(\cdot,\cdot)$ (3.1.3) 是 $H_0^1(\Omega)$ 椭圆的, 又

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \int_\Omega |\mathrm{grad} u| \cdot |\mathrm{grad} v| \mathrm{d}x + \int_\Omega |buv| \mathrm{d}x \\ &\leq |u|_{1,\Omega} \cdot |v|_{1,\Omega} + \|b\|_{0,\infty,\Omega} \|u\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \max(1, \|b\|_{0,\infty,\Omega}) \cdot \|u\|_{1,\Omega} \cdot \|v\|_{1,\Omega}, \end{aligned}$$

因此 $a(\cdot,\cdot)$ ((3.1.3)) 是连续对称的双线性型. 则由定理 1.1.1, 知 (3.1.4) 存在唯一解.

例 3.1.2 非齐次 Dirichlet 问题.

考虑如下问题

$$\begin{cases} -\Delta u + bu = f, & 在 \ \Omega \ 中, \\ u = g, & 在 \ \partial\Omega \ 上, \end{cases} \tag{3.1.5}$$

设 $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, 由迹定理 2.5.6, 存在 $u_g \in H^1(\Omega)$, 使得 $\gamma_0 u_g = g$ 在 $\partial\Omega$ 上. 考虑 $w = u - u_g$, 则 w 是下述问题之解:

$$\begin{cases} -\Delta w + bw = f - (-\Delta u_g + bu_g), & 在 \ \Omega 中, \\ w = 0, & 在 \ \partial\Omega 上, \end{cases} \tag{3.1.6}$$

此问题等价于变分问题: $w \in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$a(w,v) = \langle f, v \rangle - a(u_g, v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.1.7}$$

由定理 1.1.1 知, 问题 (3.1.7) 存在唯一解, 从而原问题 (3.1.5) 也存在解 $u \in H^1(\Omega)$. 至于唯一性, 可由下述估计获得. 令 $l \in H^{-1}(\Omega)$:

$$\langle l, v\rangle = \langle f, v\rangle - a\langle u_g, v\rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

则由 (3.1.7), 注意到 $w = u - u_g$,

$$\|u - u_g\|_{1,\Omega} \le c\|l\|_{-1,\Omega}.$$

而

$$\|l\|_{-1,\Omega} \le \|f\|_{-1,\Omega} + \|u_g\|_{1,\Omega},$$

因此

$$\|u\|_{1,\Omega} \le c\{\|f\|_{-1,\Omega} + \|u_g\|_{1,\Omega}\}, \quad \forall u_g \in H^1(\Omega),\ \gamma_0 u_g = g,$$

从而

$$\|u\|_{1,\Omega} \le c\{\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{1/2,\partial\Omega}\}. \tag{3.1.8}$$

因此问题 (3.1.5) 之解连续地依赖于 f 和 g.

注 3.1.1 根据微分方程边值问题的正则性理论 (见文献 [39]), 有下述结果: 令 $m \in N$, $m \ge 1$, $\partial\Omega$ 充分光滑, 且 $f \in H^{m-2}(\Omega)$, $g \in H^{m-1/2}(\partial\Omega)$, 则 $u \in H^m(\Omega)$, 且

$$\|u\|_{m,\Omega} \le c\{\|f\|_{m-2,\Omega} + \|g\|_{m-1/2,\partial\Omega}\}; \tag{3.1.9}$$

当 $m = 2$ 时, 上述结论成立, 只要求 Ω 是凸区域, 且 $\partial\Omega$ 是 Lipschitz 连续.

例 3.1.3 Neumann 问题.

考虑下述非齐次的 Neumann 问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ \partial_\nu u = g, & \text{在 } \partial\Omega \text{上}, \end{cases} \tag{3.1.10}$$

其中 $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$. 这个问题的等价变分形式为, 求 $u \in H^1(\Omega)$, 使得

$$a(u,v) = \int_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g \cdot v\mathrm{d}\sigma, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \tag{3.1.11}$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}x. \tag{3.1.12}$$

首先, 注意若在 (3.1.11) 中令 $v=1$, 则

$$\int_\Omega f\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{3.1.13}$$

此为问题(3.1.11)或(3.1.10)的相容性条件, 即存在解的必要条件. 再注意到问题(3.1.10)或(3.1.11), 由于其只含有 u 的导数, 显然解不唯一, 而精确到一个可加常数. 因此, 我们可在商空间 $H^1(\Omega)/P_0(\Omega)$ 中寻求问题之解. 令 $V = H^1(\Omega)/P_0(\Omega)$, 则 (3.1.10) 的变分形式可写成: 求 $\dot{u} \in V$, 使得

$$a(\dot{u},\dot{v}) = \langle l, \dot{v} \rangle, \quad \forall \dot{v} \in V, \tag{3.1.14}$$

其中

$$a(\dot{u},\dot{v}) = a(u,v), \quad \forall u \in \dot{u},\ v \in \dot{v}, \tag{3.1.15}$$

而

$$\langle l, \dot{v} \rangle = \int_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g \cdot v\mathrm{d}\sigma, \quad \forall v \in \dot{v}, \tag{3.1.16}$$

注意到相容性条件 (3.1.13), 上述 $\langle l, \dot{v} \rangle$ 的定义 (3.1.16) 是惟一的, 即与 $\dot{v}$ 中的特殊的 v 无关. 现在考虑问题 (3.1.14) 的解的存在惟一性, 按照 Lax-Milgram 定理 1.1.1, 考察 $a(\cdot,\cdot)$(3.1.15) 的 V 椭圆性, 为此只要注意到等价模定理 2.7.2: $\forall \dot{v} \in V$,

$$a(\dot{v},\dot{v}) = a(v,v) = |v|_{1,\Omega}^2 \geq C_\Omega \|\dot{v}\|_{1,\Omega}^2,$$

以及连续性: $\forall \dot{u}, \dot{v} \in V$,

$$|a(\dot{u}, \dot{v})| \leq |u|_{1,\Omega} \cdot |v|_{1,\Omega} \leq \|\dot{u}\|_{1,\Omega} \|\dot{v}\|_{1,\Omega}.$$

再考察 $\langle l, \dot{v} \rangle$ 的连续性. 注意到迹定理 2.5.6,

$$\begin{aligned} |\langle l, \dot{v} \rangle| &= \left| \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g \cdot v \mathrm{d}\sigma \right| \\ &\leq \|f\|_{0,\Omega} \cdot \|v\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega} \cdot \|v\|_{1/2,\partial\Omega} \\ &\leq \{\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega}\} \cdot \|v\|_{1,\Omega}, \quad \forall v \in \dot{v}. \end{aligned}$$

因此

$$\|l\|_{V'} \leq \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega},$$

由此还可看到, (3.1.14) 之解满足下述估计

$$|u|_{1,\Omega} \leq \|\dot{u}\|_V \leq \|l\|_{V'} \leq \|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\partial\Omega}. \tag{3.1.17}$$

注 3.1.2 由微分方程正则性理论 (见文献 [39]), 当 $\partial\Omega$ 充分光滑时, $f \in H^{m-2}(\Omega), g \in H^{m-3/2}(\partial\Omega), m \geq 2$, 则

$$\dot{u} \in H^m(\Omega)/P_0(\Omega),$$

且

$$|u|_{m,\Omega} \leq c\{\|f\|_{m-2,\Omega} + \|g\|_{m-3/2,\partial\Omega}\}, \quad \forall u \in \dot{u}. \tag{3.1.18}$$

例 3.1.4 非对称边值问题.

考虑下述问题

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + au = f, & 在\ \Omega\ 中, \\ u = 0, & 在\ \Gamma_0\ 上, \\ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_i u \cdot \nu_j = g, & 在\ \Gamma_1\ 上, \end{cases} \tag{3.1.19}$$

其中 $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$, meas $\Gamma_0 > 0$, 且 $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geq 0, f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Gamma_1)$. 又设, 存在 $\beta =$ const > 0, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \tag{3.1.20}$$
$$\forall \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \cdots, \xi_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n,\ x \in \Omega.$$

对应的变分问题为: 求 $u \in V$, 使得

$$a(u,v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V, \tag{3.1.21}$$

其中

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j v \mathrm{d}x + \int_\Omega a(x)uv\mathrm{d}x, \tag{3.1.22}$$

$$\langle l, v \rangle = \int_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g \cdot v\mathrm{d}\sigma, \tag{3.1.23}$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0,\ \ \text{几乎处处在 } \Gamma_0 \text{ 上}\}. \tag{3.1.24}$$

由 (3.1.20) 及等价模定理的推论 2.7.1 的 (2.7.5), 即可知 $a(\cdot,\cdot)$ (3.1.22) 是 V 椭圆的, 而 $l \in V'$. 从而由 Lax-Milgram 定理 1.1.3, 即知问题 (3.1.21) 存在唯一解.

注 3.1.3 满足条件 (3.1.20) 的算子

$$u \to -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i u) + au \quad (a \geq 0), \tag{3.1.25}$$

称为椭圆算子, 而条件 (3.1.20) 称为椭圆性条件. 边界值算子, 在 $\partial\Omega$ 上

$$u \to \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\partial_i u \cdot \nu_j, \tag{3.1.26}$$

称为对应于算子 (3.1.25) 的余法向导数. 由变分问题 (3.1.21) 可自然地导出 (3.1.19) 中的边值条件.

3.2 线弹性边值问题

作为椭圆型偏微分方程最具有代表性的例子是线弹性理论中的边值问题. 设一个弹性体在未受外力作用时所占据的区域为 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. 当该弹性体在受体力 $\boldsymbol{f}$(在 Ω 中), 在 Ω 的一部分边界 Γ_1 上受表面力 $\boldsymbol{g}$, 而在另一部分边界 Γ_0 上固定位移 $\boldsymbol{u} = 0$ 时, 弹性体就产生位移 $\boldsymbol{u}$. 在平衡状态下, 位移 $\boldsymbol{u}$ 所满足的方程及边界条件如下:

$$\begin{cases} -\partial_j \sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = f_i, \quad i = 1,2,3, & \text{在 } \Omega \text{ 中 (平衡方程)}, \\ \boldsymbol{u} = 0, & \text{在 } \Gamma_0 \text{ 上 (位移边件)}, \\ \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\nu_j = g_i, \quad i = 1,2,3, & \text{在 } \Gamma_1 \text{ 上 (力学边件)}, \end{cases} \tag{3.2.1}$$

其中, $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^3$,

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) = \varepsilon_{ji}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}(\partial_j v_i + \partial_i v_j) \qquad \text{(应变张量)}, \tag{3.2.2}$$

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) = \sigma_{ji}(\boldsymbol{v}) = \lambda \varepsilon_{kk}(\boldsymbol{v})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) \quad \text{(应力张量)}, \tag{3.2.3}$$

上述应力与应变的关系称为本构关系, 亦即 Hooke 定律, 只是此地考虑的是均匀的各向同性的弹性体, 其中 $\lambda \in (0, \infty), \mu \in [\mu_1, \mu_2], 0 < \mu_1 < \mu_2$ 为弹性材料常数. 对一般的线弹性情形, 其本构关系为

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{v}) = E_{ijkh}\varepsilon_{kh}(\boldsymbol{v}), \tag{3.2.4}$$

其中弹性系数 E_{ijkh} 满足:

$$\begin{cases} E_{ijkh} = E_{jikh} = E_{khij}, \\ \|E_{ijkh}\|_{0,\infty,\Omega} \le M, \quad \forall i,j,k,h, \end{cases} \tag{3.2.5}$$

且存在 $\alpha = \text{const} > 0$, 使得

$$\begin{cases} E_{ijkh}\xi_{ij}\xi_{kh} \ge \alpha\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \forall \underset{\approx}{\xi} = (\xi_{ij}) \in S^3, \\ S^3 \text{为三阶对称矩阵的集合}. \end{cases} \tag{3.2.6}$$

上面及往后均约定,凡在每一项中指标重复出现意味着从 1 到 3(对 3 维情形) 或 2 (对 2 维情形) 求和.

将表示式 (3.2.2) 和 (3.2.3) 代入 (3.2.1) 的平衡方程可得

$$-\mu\Delta\boldsymbol{u}-(\lambda+\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f},\ \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{3.2.7}$$

下面建立与边值问题 (3.2.1) 对应的变分问题. 其导出过程是标准的, 即在平衡方程 (3.2.1) 两边通乘以 $\boldsymbol{v}\in V=\{\boldsymbol{v}\in(H^1(\Omega))^3:\boldsymbol{v}=0$ 在 Γ_0 上 $\}$, 然后积分且利用 Green 公式, 即可得

$$\begin{cases}\text{求 } \boldsymbol{u}\in V,\ \text{使得}\\ a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\langle l,\boldsymbol{v}\rangle,\quad \forall\boldsymbol{v}\in V,\end{cases} \tag{3.2.8}$$

其中

$$\begin{cases}a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})=\displaystyle\int_\Omega \sigma_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\mathrm{d}x,\\ \langle l,\boldsymbol{v}\rangle=\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x+\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\sigma.\end{cases} \tag{3.2.9}$$

关于 $a(\cdot,\cdot)$ (3.2.9) 的对称性, 容易由本构关系 (3.2.3) 或一般地 (3.2.4) 和 (3.2.5) 得到. 为了考察变分问题 (3.2.8) 的解的存在唯一性, 关键是要证明 $a(\cdot,\cdot)$ (3.2.9) 的 V 椭圆性.

首先介绍无应变状态和无穷小刚性位移. 在无穷小变形前提下 (即线弹性理论), 刚性位移有两种: 平移 $\boldsymbol{a}$ 和无穷小旋转 $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$ 为常向量, $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{x}$ 表示矢量积. 这样无穷小刚性位移可写成

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{x}, \tag{3.2.10}$$

或写成分量形式

$$\begin{cases}u_1=a_1+b_2x_3-b_3x_2,\\ u_2=a_2+b_3x_1-b_1x_3,\\ u_3=a_3+b_1x_2-b_2x_1.\end{cases} \tag{3.2.11}$$

由此可容易地验证

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}) &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \\
\varepsilon_{12}(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\Big) = \frac{1}{2}(b_3 - b_3) = 0, \\
\varepsilon_{13}(\boldsymbol{u}) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\Big) = \frac{1}{2}(b_2 - b_2) = 0,
\end{aligned}
$$

以及 $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0, \forall i,j$. 这表示无穷小刚性位移一定使得应变均为 0, 即所谓无应变状态. 反之, 我们可以证明, 无应变的位移场也一定是无穷小刚性位移. 事实上, 由 $\varepsilon_{ii}(\boldsymbol{u}) = 0$, 即可得

$$
u_1 = u_1(x_2, x_3), \quad u_2 = u_2(x_1, x_3), \quad u_3 = u_3(x_1, x_2), \tag{3.2.12}
$$

再由 $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0, i \neq j$, 即可得

$$
\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1}. \tag{3.2.13}
$$

引入旋度场

$$
\begin{cases}
\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = \nabla \wedge \boldsymbol{u} = \Big(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3}, \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big)^{\mathrm{T}}, \\
\omega_{ij} = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big),
\end{cases} \tag{3.2.14}
$$

因此

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{u} = 2(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12})^{\mathrm{T}}. \tag{3.2.15}
$$

直接计算容易验证

$$
\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \partial_i \varepsilon_{jk} - \partial_j \varepsilon_{ik}. \tag{3.2.16}
$$

由于 $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = 0, 1 \leq i,j \leq 3$, 故

$$
\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1,2,3,
$$

从而

$$\omega_{ij} = \text{const}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

记

$$b_1 = \omega_{23}, \quad b_2 = \omega_{31}, \quad b_3 = \omega_{12},$$

则由 $\varepsilon_{23}(\boldsymbol{u}) = \varepsilon_{13}(\boldsymbol{u}) = \varepsilon_{12}(\boldsymbol{u}) = 0$, 知

$$\begin{cases} b_1 = \omega_{23} = \dfrac{1}{2}(\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2) = \partial_2 u_3 = -\partial_3 u_2, \\ b_2 = \omega_{31} = \dfrac{1}{2}(\partial_3 u_1 - \partial_1 u_3) = \partial_3 u_1 = -\partial_1 u_3, \\ b_3 = \omega_{12} = \dfrac{1}{2}(\partial_1 u_2 - \partial_2 u_1) = \partial_1 u_2 = -\partial_2 u_1, \end{cases}$$

再注意到 $\varepsilon_{11}(\boldsymbol{u}) = \varepsilon_{22}(\boldsymbol{u}) = \varepsilon_{33}(\boldsymbol{u}) = 0$, 则得

$$\partial_1 u_1 = 0, \quad \partial_2 u_2 = 0, \quad \partial_3 u_3 = 0.$$

整理后可得

$$\begin{cases} \partial_1 u_1 = 0, & \partial_2 u_1 = -b_3, & \partial_3 u_1 = b_2, \\ \partial_1 u_2 = b_3, & \partial_2 u_2 = 0, & \partial_3 u_2 = -b_1, \\ \partial_1 u_3 = -b_2, & \partial_2 u_3 = b_1, & \partial_3 u_3 = 0, \end{cases}$$

从而

$$\begin{cases} u_1 = a_1 - b_3 x_2 + b_2 x_3, \\ u_2 = a_2 + b_3 x_1 - b_1 x_3, \\ u_3 = a_3 - b_2 x_1 + b_1 x_2, \end{cases}$$

此即 (3.2.11), 即 (3.2.10),

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x}.$$

综上所述, 我们就有下述定理.

定理 3.2.1

$$\begin{aligned} RM &= \{\boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^3 : \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall i, j\} \\ &= \{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^3\}. \end{aligned} \tag{3.2.17}$$

为了证明双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ (3.2.9) 的 V 椭圆性, 我们需要著名的 Korn 不等式.

定理 3.2.2 (Korn 不等式)　存在 $C_\Omega = \text{const} > 0$, 使得

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega} \le C_\Omega \Big\{ \sum_{i,j=1}^{3} \|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}^2 \Big\}^{1/2}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^3. \tag{3.2.18}$$

这个不等式的较早的证明应归于 Friedrichs[32], 也可见 Duvaut 和 Lions[27] 以及 Fichera[31]; 我们将在下面给出 2 维情形的一个简短证明. 这个不等式的证明并非是一件平凡的事情, 这只要注意到, 该不等式 (3.2.18) 的左边包含了向量 $\boldsymbol{v}$ 的所有 9 个一阶导数 (在 3 维情形) 的 L^2 范数; 而其右端只包含 $\boldsymbol{v}$ 的一阶导数的某些线性组合 $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})$ $(= \varepsilon_{ji}(\boldsymbol{v}))$, 而且并非 $\boldsymbol{v}$ 的全部一阶导数均可由 $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})$ 的线性组合所表示.

在 Korn 不等式的基础上, 我们可证明双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ (3.2.9) 的 V 椭圆性.

定理 3.2.3　设 Ω 是 $\mathbf{R}^3$ 中的区域, Γ_0 是边界 $\partial\Omega$ 的一部分, 且 $\text{meas}\Gamma_0 > 0$, 则

$$\Big\{ \sum_{i,j=1}^{3} \|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}^2 \Big\}^{1/2}$$

是 V 上的范数, 且与 $\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}$ 等价.

证明　需要证明的是存在 $C_\Omega = \text{const} > 0$, 使得

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}^2 \le C_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}^2, \quad \forall \boldsymbol{v} \in V. \tag{3.2.19}$$

反证法. 若 (3.2.19) 不成立, 则存在 $\boldsymbol{v}_n \in V$, 使得

$$\|\boldsymbol{v}_n\|_{1,\Omega} = 1, \quad \forall\, n, \tag{3.2.20}$$

$$\sum_{i,j=1}^{3}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}_n)\|_{0,\Omega}^2<\frac{1}{n},\quad \forall\, n. \tag{3.2.21}$$

因此存在 $\{\boldsymbol{v}_n\}$ 的子列, 仍记为 $\{\boldsymbol{v}_n\}$, 使得

$$\boldsymbol{v}_n \rightharpoonup \boldsymbol{v} \ \text{在}\ (H^1(\Omega))^3\ \text{中弱收敛},\quad \text{当}\ n\to\infty\ \text{时},$$

由 Rellich 紧嵌入定理,

$$\boldsymbol{v}_n \to \boldsymbol{v} \ \text{在}\ (L^2(\Omega))^3\ \text{中强收敛},\quad \text{当}\ n\to\infty\ \text{时},$$

由 Korn 不等式 (3.2.18),

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_m\|_{1,\Omega}\\
\le\ & C_\Omega\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_m)\|_{0,\Omega}^2+\|\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_m\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}\\
\le\ & C_\Omega\Big(2\sum_{i,j=1}^{3}[\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}_n)\|_{0,\Omega}^2+\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}_m)\|_{0,\Omega}^2]\\
&+\|\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_m\|_{0,\Omega}^2\Big)^{1/2}\to 0,\quad \text{当}\ n,m\to\infty\ \text{时},
\end{aligned}$$

这是因为 (3.2.21) 及 $\|\boldsymbol{v}_n-\boldsymbol{v}_m\|_{0,\Omega}\to 0$. 因此

$$\boldsymbol{v}_n \to \boldsymbol{v} \ \text{在}\ (H^1(\Omega))^3\ \text{中强收敛},\quad \text{当}\ n\to\infty\ \text{时}.$$

再由 (3.2.21), 可见

$$\sum_{i,j=1}^{3}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}^2=0,$$

即 $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})=0$, $\forall i,j$, 即 $\boldsymbol{v}$ 是无应变状态的位移, 从而 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{x}$, 由于 $\text{meas}\Gamma_0>0$, $\boldsymbol{v}|_{\Gamma_0}=0$, 从而 $\boldsymbol{v}\equiv 0$, 而这与 (3.2.20) 矛盾. 证毕.

最后我们给出 Korn 不等式 (3.2.18) 的证明, 当 $n=2$ 时 (见文献 [58]). 为此首先需要如下引理.

引理 3.2.1 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 的凸区域, 则存在 $C=\text{const}>0$, 使得对一切 $p\in L^2(\Omega):\int_\Omega p\mathrm{d}x=0$, 存在 $\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2$, 满足

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=p, \tag{3.2.22}$$

且

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}\le C\|p\|_{0,\Omega}. \tag{3.2.23}$$

证明 (i) 考虑下述 Neumann 问题:

$$\begin{cases}-\Delta w=p, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \partial_\nu w=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases} \tag{3.2.24}$$

则在条件 $\int_\Omega w\mathrm{d}x=0$ 下, (3.2.24) 存在唯一解 (见例 3.1.3), 而且有下述正则性结果 (见文献 [17]):

$$\|w\|_{2,\Omega}\le C\|p\|_{0,\Omega}. \tag{3.2.25}$$

(ii) 令 $\boldsymbol{v}_1=-\mathrm{grad}w$, 则 $\boldsymbol{v}_1\in(H^1(\Omega))^2$, 且

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1=p, \tag{3.2.26}$$

$$\|\boldsymbol{v}_1\|_{1,\Omega}\le\|w\|_{2\Omega}\le C\|p\|_{0,\Omega}. \tag{3.2.27}$$

而且

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=-\mathrm{grad}w\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=-\partial_\nu w=0\ \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{3.2.28}$$

但是, 一般来说

$$\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}=-\mathrm{grad}w\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}=\mathrm{curl}w\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}\neq 0, \tag{3.2.29}$$

其中

$$\mathrm{curl}w=(\partial w/\partial x_2,-\partial w/\partial x_1)^{\mathrm{T}}, \tag{3.2.30}$$

$$\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2)=(-\nu_2,\nu_1). \tag{3.2.31}$$

因此, 直接令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1$ 不符合要求.

(iii) 现构造另一个函数. 由迹定理 2.5.6 知, 存在 $\psi\in H^2(\Omega)$, 使得 $\psi|_{\partial\Omega}=0$ 及 $\left.\dfrac{\partial\psi}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}$, 且

$$\|\psi\|_{2,\Omega}\le C\|\partial_\nu\psi\|_{1/2,\partial\Omega}\le C\|\boldsymbol{v}_1\|_{1,\Omega}. \tag{3.2.32}$$

令 $\boldsymbol{v}_2=\mathrm{curl}\psi$, 则

$$\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=\mathrm{curl}\psi\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=\mathrm{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}=\partial_\tau\psi|_{\partial\Omega}=0,$$

且

$$\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}=\mathrm{curl}\psi\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}=\mathrm{grad}\psi\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=-\partial_\nu\psi=-\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\text{在 }\partial\Omega\text{ 上}}.$$

由此可见, 令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$, 则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\mathrm{div}\boldsymbol{v}_1+\mathrm{div}\boldsymbol{v}_2=p+\mathrm{div}\cdot\mathrm{curl}\psi=p,$$

且

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}+\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega}=0,$$

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}+\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}=0,$$

从而

$$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0.$$

又有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}&\le\|\boldsymbol{v}_1\|_{1,\Omega}+\|\boldsymbol{v}_2\|_{1,\Omega}\le\|\boldsymbol{v}_1\|_{1,\Omega}+\|\mathrm{curl}\psi\|_{1,\Omega}\\&\le\|\boldsymbol{v}_1\|_{1,\Omega}+\|\psi\|_{2,\Omega}\le C\|\boldsymbol{v}_1\|_{1,\Omega}\le C\|p\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

从而引理得证.

定理 3.2.2 的证明 ($n=2,\Omega$ 为有界凸区域.)

(i) 存在 $C=\text{const}>0$ 如 (3.2.23), $\forall\varphi\in L^2(\Omega)$, 有

$$\|\varphi\|_{0,\Omega}\le 2C\|\text{grad}\varphi\|_{-1,\Omega}+\frac{1}{|\Omega|^{1/2}}\left|\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x\right|. \tag{3.2.33}$$

事实上, 对任意 $\varphi\in L^2(\Omega)$, 令

$$\hat{\varphi}=\varphi-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x,$$

则 $\int_\Omega\hat{\varphi}\mathrm{d}x=0$, 且

$$\|\varphi\|_{0,\Omega}\le\|\hat{\varphi}\|_{0,\Omega}+\frac{1}{|\Omega|^{1/2}}\left|\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x\right|. \tag{3.2.34}$$

而

$$\begin{aligned}\|\hat{\varphi}\|_{0,\Omega}&=\sup_{w\in L^2(\Omega)}\frac{\int_\Omega\hat{\varphi}\cdot w\mathrm{d}x}{\|w\|_{0,\Omega}}=\sup_{w\in L^2(\Omega)}\frac{\int_\Omega\hat{\varphi}\left(\hat{w}+\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x}{\|w\|_{0,\Omega}}\\&\le 2\sup_{\hat{w}\in L_0^2(\Omega)}\frac{\int_\Omega\hat{\varphi}\cdot\hat{w}\mathrm{d}x}{\|\hat{w}\|_{0,\Omega}},\end{aligned}$$

其中 $L_0^2(\Omega)=\{\hat{q}\in L^2(\Omega):\int_\Omega\hat{q}\mathrm{d}x=0\},\hat{w}=w-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega w\mathrm{d}x$, 则 $\|\hat{w}\|_{0,\Omega}\le 2\|w\|_{0,\Omega}$. 由于 $\hat{w}\in L_0^2(\Omega)$, 由引理 3.2.1, 则有

$$\begin{aligned}\|\hat{\varphi}\|_{0,\Omega}&\le 2C\sup_{\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{\int_\Omega\hat{\varphi}\cdot\text{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}}\\&=2C\sup_{\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{\int_\Omega\text{grad}\hat{\varphi}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}}\\&=2C\sup_{\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{\int_\Omega\text{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}}=2C\|\text{grad}\varphi\|_{-1,\Omega}.\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

由 (3.2.34) 和 (3.2.35) 即得证 (3.2.33).

(ii) $\forall\varphi\in L^2(\Omega)$, 有

$$\|\mathrm{grad}\varphi\|_{-1,\Omega}\le\|\varphi\|_{0,\Omega}. \tag{3.2.36}$$

事实上,

$$\begin{aligned}\|\mathrm{grad}\varphi\|_{-1,\Omega}&=\sup_{\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{\displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad}\varphi\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}}\\&=\sup_{\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2}\frac{\displaystyle\int_\Omega \varphi\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}x}{\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}}\le\|\varphi\|_{0,\Omega}.\end{aligned}$$

(iii) 存在常数 C_1,C_2, 使得

$$\|\varphi\|_{0,\Omega}\le C_1\|\mathrm{grad}\varphi\|_{-1,\Omega}+C_2\|\varphi\|_{-1,\Omega},\quad\forall\varphi\in L^2(\Omega). \tag{3.2.37}$$

事实上, 存在函数 $\rho\in H_0^1(\Omega)$, 使得

$$\|1-\rho\|_{0,\Omega}<|\Omega|^{1/2}, \tag{3.2.38}$$

这是因为 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^2(\Omega)$ 中稠密. 则

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega\varphi\mathrm{d}x\right|&\le\left|\int_\Omega\varphi\cdot\rho\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\Omega(1-\rho)\varphi\mathrm{d}x\right|\\&\le\|\varphi\|_{-1,\Omega}\cdot\|\rho\|_{1,\Omega}+\|1-\rho\|_{0,\Omega}\cdot\|\varphi\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

由此, 及 (3.2.33) 可见

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{0,\Omega}\le\ &2C\|\mathrm{grad}\varphi\|_{-1,\Omega}+\frac{1}{|\Omega|^{1/2}}\|\rho\|_{1,\Omega}\cdot\|\varphi\|_{-1,\Omega}\\&+\frac{1}{|\Omega|^{1/2}}\|1-\rho\|_{1,\Omega}\cdot\|\varphi\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

注意到 ρ 的选取使得 (3.2.38) 成立, 故得证 (3.2.37).

(iv) 在 (3.2.37) 中, 令 $\varphi=\partial v_i/\partial x_j$, 则

$$\begin{aligned}\|\partial v_i/\partial x_j\|_{0,\Omega}&\le C_1\|\mathrm{grad}(\partial v_i/\partial x_j)\|_{-1,\Omega}+C_2\|\partial v_i/\partial x_j\|_{-1,\Omega}\\&\le C_1\|\mathrm{grad}(\partial v_i/\partial x_j)\|_{-1,\Omega}+C_2\|\mathrm{grad}v_i\|_{-1,\Omega},\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial k}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big)=\frac{\partial}{\partial x_j}\varepsilon_{ik}(\boldsymbol{v})+\frac{\partial}{\partial x_k}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})-\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{jk}(\boldsymbol{v}), \quad (3.2.39)$$

从而

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}|_{1,\Omega}&\leq C_1'\sum_{i,j}\|\mathrm{grad}\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\|_{-1,\Omega}+C_2\|\mathrm{grad}\boldsymbol{v}\|_{-1,\Omega}\\&\leq C_1'\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\|_{0,\Omega}+C_2\|\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

证毕.

3.3 变分不等式

前面考虑的都是椭圆型偏微分方程的边值问题, 在变分形式中, 都是在某个空间中求某个泛函的极小解. 从解可叠加的意义上而言, 都是线性问题. 下面考虑的问题是在某个空间的一个闭凸子集上 (当然是非空的), 求某个泛函的极小解, 由于凸集的非线性, 因此本节考虑的问题当属非线性问题.

例 3.3.1 障碍问题

$$\begin{cases}\text{求 } u\in K, & \text{使得}\\ J(u)\leq J(v), & \forall v\in K,\end{cases} \quad (3.3.1)$$

其中

$$K=\{v\in H_0^1(\Omega):v\geq\psi \text{ 几乎处处在 } \Omega \text{ 中}\}, \quad (3.3.2)$$

$$J(v)=\frac{1}{2}\int_\Omega|\mathrm{grad}v|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega f\cdot v\mathrm{d}x, \quad (3.3.3)$$

$$\psi\in H^2(\Omega), \quad \psi\leq 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}, \quad f\in L^2(\Omega). \quad (3.3.4)$$

与问题 (3.3.1) 等价的变分不等式为

$$\begin{cases}\text{求 } u\in K, \quad \text{使得}\\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}(v-u)\mathrm{d}x\geq\int_\Omega f\cdot(v-u)\mathrm{d}x, \quad \forall v\in K.\end{cases} \quad (3.3.5)$$

其力学意义是覆盖于障碍 ψ 上的弹性薄膜的平衡问题.

上述问题的解的存在唯一性, 可由定理 1.1.1 得到 (请读者自行证明, 主要是证明 K 是 $H_0^1(\Omega)$ 中的非空闭凸子集).

注 3.3.1 关于障碍问题 (3.3.5) 的解的光滑性.

(i) 若 $f=0$, Ω 是凸多边形, 则 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ (见文献 [21]); 若 Ω 为凸区域且边界 $\partial\Omega\in C^2$, 则 $u\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$(见文献 [37]), 且均有估计

$$\|u\|_{2,\Omega}\leq C(\|\psi\|_{2,\Omega}+\|f\|_{0,\Omega}). \tag{3.3.6}$$

(ii) 与无障碍的问题不同, 即使 $f=0$, ψ 充分光滑, 区域边界也充分光滑, 但解 u 的光滑性也不能再有所提高. 以一维情形为例 (见图 3.3.1).

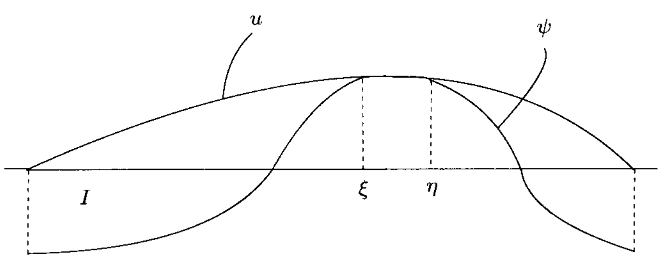

图 3.3.1

在非接触区域 u 为一次函数 (即直线段), 而在接触区域 (ξ,η) 中 $u=\psi$, 因此在点 ξ 和 η 处, u 的二阶导数就发生间断, 这就意味着 $u\notin H^3(\Omega)$.

现在来考察问题 (3.3.5) 对应的微分边值问题. 由 (3.3.5), 利用 Green 积分公式, 可得

$$\int_\Omega(\Delta u+f)(v-u)\mathrm{d}x\leq 0,\quad \forall v\in K. \tag{3.3.7}$$

令 $v=u+\varphi\in K, \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega):\varphi\geq 0$, 代入上式, 即得

$$\int_{\Omega}(\Delta u+f)\cdot\varphi\mathrm{d}x\leq 0,\quad \forall\varphi\in\mathcal{D}(\Omega):\varphi\geq 0,$$

因此

$$\Delta u+f\leq 0,\quad \text{在 } \Omega \text{ 中},$$

即

$$-\Delta u\geq f,\qquad \text{在 } \Omega \text{ 中}. \tag{3.3.8}$$

现将 Ω 分为非接触区域和接触区域:

$$\begin{aligned}
&\Omega^{+}=\{x\in\Omega:u(x)>\psi(x)\},\\
&\Omega^{0}=\{x\in\Omega:u(x)=\psi(x)\}.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

则 $\forall\theta(x)\in\mathcal{D}(\Omega), 0\leq\theta(x)\leq 1$, 有 $v=\theta(x)\psi+(1-\theta(x))u\in K$, 将此代入 (3.3.7), 则得

$$\int_{\Omega}(\Delta u+f)\theta(x)(\psi-u)\mathrm{d}x\leq 0,\quad \forall\theta\in\mathcal{D}(\Omega):0\leq\theta(x)\leq 1.$$

即

$$\int_{\Omega^{+}}(\Delta u+f)\theta(x)(\psi-u)\mathrm{d}x\leq 0,\quad \forall\theta\in\mathcal{D}(\Omega):0\leq\theta(x)\leq 1,$$

从而

$$\Delta u+f\geq 0,\quad \text{在 } \Omega^{+} \text{ 中},$$

由此及 (3.3.8), 知

$$\Delta u+f=0,\quad \text{在 } \Omega^{+}. \tag{3.3.10}$$

综合之, 变分不等式问题 (3.3.5) 对应的微分边值问题为

$$\begin{cases}
-\Delta u=f, & \text{在 } \Omega^{+},\\
-\Delta u\geq f, & \text{在 } \Omega^{0},\\
u\geq\psi, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\quad u=0 \text{ 在 } \partial\Omega.
\end{cases} \tag{3.3.11}$$

例 3.3.2 单边问题 (Signorini 问题)

$$\begin{cases} 求\ u \in K, \quad 使得 \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}(v-u)\mathrm{d}x + \int_\Omega bu(v-u)\mathrm{d}x \\ \quad \geq \displaystyle\int_\Omega f(v-u)\mathrm{d}x,\ \forall v \in K, \end{cases} \tag{3.3.12}$$

其中 $b \in L^\infty(\Omega), b \geq b_0 > 0, f \in L^2(\Omega)$,

$$K = \{v \in H^1(\Omega) : v \geq 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}\}. \tag{3.3.13}$$

上述问题对应的微分形式边值问题可由下述论述得到. 由 (3.3.12), 利用 Green 积分公式

$$\int_\Omega (-\Delta u + bu - f)(v-u)\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \cdot (v-u)\mathrm{d}\sigma \geq 0,\ \forall v \in K. \tag{3.3.14}$$

由于 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), v = u + \varphi \in K$, 则由上式

$$\int_\Omega (-\Delta u + bu - f) \cdot \varphi \mathrm{d}x \geq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

从而

$$-\Delta u + bu = f, \quad \text{在 } \Omega \text{ 中}, \tag{3.3.15}$$

由此, (3.3.14) 可写成

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \cdot (v-u)\mathrm{d}\sigma \geq 0, \quad \forall v \in K. \tag{3.3.16}$$

由于 $\forall \rho \in C^\infty(\bar{\Omega}), \gamma_0\rho \geq 0$ 在 $\partial\Omega$ 上, 则 $v = u + \rho \in K$, 从而由 (3.3.16),

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \cdot \gamma_0\rho \mathrm{d}\sigma \geq 0,$$

因此

$$\partial_\nu u \geq 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{3.3.17}$$

又 $\forall v \in H_0^1(\Omega) \subset K$, 则由 (3.3.16), 可有

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \cdot u \mathrm{d}\sigma \le 0,$$

由此, 且注意到 (3.3.17) 及 $u \ge 0$ 在 $\partial\Omega$(因为 $u \in K$) 上, 故

$$\partial_\nu u \cdot u = 0, \quad \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \tag{3.3.18}$$

总之有边值问题如下:

$$\begin{cases} -\Delta u + bu = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u \ge 0, \quad \partial_\nu u \ge 0, \quad u \cdot \partial_\nu u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{3.3.19}$$

3.4 四阶椭圆边值问题

例 3.4.1 重调和方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = g_1, \quad \partial_\nu u = g_2, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{3.4.1}$$

其中 $f \in H^{-2}(\Omega) = (H_0^2(\Omega))', g_1 \in H^{3/2}(\partial\Omega), g_2 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, 则由定理 2.5.6(迹定理) 可见, 存在 $u_g \in H^2(\Omega)$, 使得

$$\gamma_0 u_g = g_1, \quad \gamma_1 u_g = \partial_\nu u_g = g_2 \ \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}.$$

令 $w = u - u_g$, 代入 (3.4.1), 得

$$\begin{cases} \Delta^2 w = f - \Delta^2 u_g, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ w = 0, \quad \partial_\nu w = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

这是齐次边值问题, 其对应的变分问题为

$$\begin{cases} \text{求 } w \in H_0^2(\Omega), \quad \text{使得} \\ a(w,v) = \langle f, v\rangle - a(u_g, v), \quad \forall v \in H_0^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.4.3}$$

其中

$$a(w,v) = \int_\Omega \Delta w \cdot \Delta v \mathrm{d}x. \tag{3.4.4}$$

为证明问题 (3.4.3) 之解的存在唯一性, 利用定理 1.1.1, 只要考察 $a(\cdot,\cdot)$ ((3.4.4)) 的 $H_0^2(\Omega)$ 椭圆性. 由 Green 积分公式可证

$$\|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 = |v|_{2,\Omega}^2, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega),$$

再由二次利用 Poincaré 不等式,

$$a(v,v) = \|\Delta v\|_{0,\Omega}^2 = |v|_{2,\Omega}^2 \geq C_\Omega \|v\|_{2,\Omega}^2, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

下面考察 (3.4.1) 之解 u 对于 f, g_1, g_2 的依赖关系,

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq \|w\|_{2,\Omega} + \|u_g\|_{2,\Omega}, \ \forall u_g \in H^2(\Omega) : \gamma_0 u_g = g_1, \ \gamma_1 u_g = g_2, \tag{3.4.5}$$

而由 (3.4.3) 可有

$$\|\Delta w\|_{0,\Omega}^2 \leq \|f\|_{-2,\Omega} \cdot \|w\|_{2,\Omega} + \|u_g\|_{2,\Omega} \cdot \|w\|_{2,\Omega},$$

从而

$$\|w\|_{2,\Omega} \leq C_\Omega (\|f\|_{-2,\Omega} + \|u_g\|_{2,\Omega}),$$

因此

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_\Omega (\|f\|_{-2,\Omega} + \|u_g\|_{2,\Omega}),$$
$$\forall u_g \in H^2(\Omega) : \gamma_0 u_g = g_1, \ \gamma_1 u_g = g_2,$$

将上式两边对 u_g 取 inf, 由迹范数的定义 (2.5.11),

$$\|u\|_{2,\Omega} \leq C_\Omega (\|f\|_{-2,\Omega} + \|g_1\|_{3/2,\partial\Omega} + \|g_2\|_{1/2,\partial\Omega}). \tag{3.4.6}$$

例 3.4.2 弹性薄板弯曲问题.

从变分形式出发, 令

$$\begin{aligned} & a(u,v) \\ = & \int_\Omega \{\Delta u \Delta v + (1-\sigma)(2\partial_{12} u \partial_{12} v - \partial_{11} u \partial_{22} v - \partial_{22} u \partial_{11} v)\} \mathrm{d}x \\ = & \int_\Omega \{\sigma \Delta u \Delta v + (1-\sigma)(\partial_{11} u \partial_{11} v + \partial_{22} u \partial_{22} v + 2\partial_{12} u \partial_{12} v)\} \mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

$$\langle f,v\rangle=\int_\Omega fv\mathrm{d}x, \tag{3.4.8}$$

$f\in L^2(\Omega),0<\sigma\le 1/2$. 令

$$V=H_0^2(\Omega)\quad 或\quad H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\quad 或\quad H^2(\Omega). \tag{3.4.9}$$

考虑泛函极小问题:

$$\begin{cases}求\ u\in V,\quad 使得\\ J(u)\le J(v),\quad \forall v\in V,\end{cases} \tag{3.4.10}$$

其中

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-\langle f,v\rangle. \tag{3.4.11}$$

与 (3.4.10) 等价的变分问题是

$$\begin{cases}求\ u\in V,\quad 使得\\ a(u,v)=\langle f,v\rangle,\quad \forall v\in V.\end{cases} \tag{3.4.12}$$

为考察上述问题解的存在唯一性, 由定理 1.1.1, 只需观察 $a(\cdot,\cdot)$ (3.4.7) 的 V 椭圆性. 注意到

$$a(v,v)=\sigma\|\Delta v\|_{0,\Omega}^2+(1-\sigma)|v|_{2,\Omega}^2. \tag{3.4.13}$$

当 $V=H_0^2(\Omega)$ 时, 由前述 $\|\Delta v\|_{0,\Omega}^2$ 等价于 $\|v\|_{2,\Omega}^2$; 而当 $V=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 时, 也可证明 $\|\Delta v\|_{0,\Omega}^2$ 等价于 $\|v\|_{2,\Omega}^2$ (见文献 [36]). 这样 $a(\cdot,\cdot)$ 是 $H_0^2(\Omega)$ 及 $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 椭圆的, 因此在这二个空间中, 问题 (3.4.12) 的解的存在唯一性成立. 至于当 $V=H^2(\Omega)$ 时, 如何考察问题 (3.4.12) 的解的状态将在下面给出.

现在导出问题 (3.4.12) 对应的微分方程边值问题.

(i) 当 $V=H_0^2(\Omega)$ 时. 利用 Green 公式 (见 (2.6.7))

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\{2\partial_{12}u\partial_{12}v-\partial_{11}u\partial_{22}v-\partial_{22}u\partial_{11}v\}\mathrm{d}x\\ =&\int_{\partial\Omega}\{-\partial_{\tau\tau}u\partial_\nu v+\partial_{\nu\tau}u\partial_\tau v\}\mathrm{d}\sigma,\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

当 $v \in H_0^2(\Omega)$ 时, 上式为 0. 另外, 同样由 Green 公式

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Delta u \Delta v \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \Delta^2 u \cdot v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Delta u \cdot v \mathrm{d}\sigma + \int_{\partial\Omega} \Delta u \cdot \partial_\nu v \mathrm{d}\sigma,
\end{aligned} \tag{3.4.15}$$

因此, 当 $v \in H_0^2(\Omega)$ 时

$$\int_\Omega \Delta u \cdot \Delta v \mathrm{d}x = \int_\Omega \Delta^2 u \cdot v \mathrm{d}x.$$

从而可得微分方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = \partial_\nu u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{上}, \end{cases} \tag{3.4.16}$$

这是固支板的数学模型.

(ii) 当 $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 时. 由 Green 公式 (3.4.14) 和 (3.4.15), 由变分问题 (3.4.12) 可见

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Delta^2 u \cdot v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \Delta u \cdot \partial_\nu v \mathrm{d}\sigma - (1-\sigma) \int_{\partial\Omega} \partial_{\tau\tau} u \cdot \partial_\nu v \mathrm{d}\sigma \\
= &\int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in V,
\end{aligned}$$

由此即得

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = 0, \quad \Delta u - (1-\sigma)\partial_{\tau\tau} u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上}, \end{cases} \tag{3.4.17}$$

这是简支板的数学模型.

(iii) 当 $V = H^2(\Omega)$ 时. 由 (3.4.14), (3.4.15) 及变分问题 (3.4.12) 可见 $\forall u, v \in H^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \Delta^2 u \cdot v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \{\Delta u - (1-\sigma)\partial_{\tau\tau} u\} \cdot \partial_\nu v \mathrm{d}\sigma \\
&- \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \Delta u \cdot v \mathrm{d}\sigma + (1-\sigma) \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu\tau} u \cdot \partial_\tau v \mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{\partial\Omega}\partial_{\nu\tau}u\cdot\partial_\tau v\mathrm{d}\sigma=\int_{\partial\Omega}\partial_\tau(\partial_{\nu\tau}u\cdot v)\mathrm{d}\sigma-\int_{\partial\Omega}\partial_\nu(\partial_{\tau\tau}u)\cdot v\mathrm{d}\sigma,$$

由于 $\partial\Omega$ 是封闭曲线, 故上式右端第一项积分为 0, 从而得微分方程边值问题为

$$\begin{cases}\Delta^2u=f, & \text{在 } \Omega \text{ 中},\\ \Delta u-(1-\sigma)\partial_{\tau\tau}u=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\\ \partial_\nu\Delta u+(1-\sigma)\partial_\tau(\partial_{\nu\tau}u)=0, & \text{在 } \partial\Omega \text{ 上},\end{cases}\tag{3.4.18}$$

这是自由板的数学模型, 此问题的定解可精确到相差一个一次多项式. 其定解条件由变分问题 (3.4.12) 中令 $v=p_1(x)\in P_1(\Omega)$, 则得

$$\langle f,p_1\rangle=0,\quad\forall p_1\in P_1(\Omega).$$

即

$$\int_\Omega f\mathrm{d}x=0,\quad\int_\Omega f\cdot x_1\mathrm{d}x=0,\quad\int_\Omega f\cdot x_2\mathrm{d}x=0.\tag{3.4.19}$$

在商空间 $H^2(\Omega)/P_1(\Omega)$ 中考虑问题 (3.4.12), 即可得存在唯一性.

第 4 章　有限元离散

本章讨论有限元离散空间，即分片多项式空间的构造. 仅限于二维平面的三角形和矩形单元.

4.1　有限元离散的基本特性

考虑抽象变分问题

$$\begin{cases} 求\ u \in V, \quad 使得 \\ a(u,v) = \langle l, v \rangle, \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

其中 V 是无限维的 Banach 空间, $a(\cdot,\cdot)$ 是双线性型, l 为连续线性泛函, 满足 Lax-Milgram 定理 (定理 1.1.3) 的条件.

问题 (4.1.1) 的有限维逼近是, 构造 V 的有限维子空间 $V_h \subset V$, 考虑下述有限维问题 (或称离散问题):

$$\begin{cases} 求\ u_h \in V_h, \quad 使得 \\ a(u_h,v_h) = \langle l, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{4.1.2}$$

根据同样的 Lax-Milgram 定理, 有限维问题 (4.1.2) 存在唯一解. 如果 $a(\cdot,\cdot)$ 对称, 则 (4.1.1) 和 (4.1.2) 分别等价于

$$\begin{cases} 求\ u \in V, \quad 使得 \\ J(u) = \min\limits_{v \in V} J(v) \end{cases} \tag{4.1.3}$$

和

$$\begin{cases} 求\ u_h \in V_h, \quad 使得 \\ J(u_h) = \min\limits_{v_h \in V_h} J(v_h), \end{cases} \tag{4.1.4}$$

其中

$$J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-\langle l,v\rangle. \tag{4.1.5}$$

上述有限维逼近问题 (4.1.2) 称为 Galerkin 方法, 而 (4.1.4) 称为 Ritz 方法.

注意到, 对于二阶问题 $V: H_0^1(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega)$, 而对于四阶问题 $V: H_0^2(\Omega)\subset V\subset H^2(\Omega)$.

有限元逼近的本质在于构造 V_h, 其构造特征有下述三个方面.

(FEM1) 三角形剖分. 将区域 $\bar{\Omega}$ 剖分成有限个子区域, 以 T 记任一子区域, 称为单元, 其全体记为 $\mathcal{J}_h$, 它应该满足如下约定.

($\mathcal{J}_h1$) 对每个 $T\in\mathcal{J}_h$, T 是闭集, 其内部 $\mathring{T}$ 非空且连通.

($\mathcal{J}_h2$) ∂T—— 单元 T 的边界是 Lipschitz 连续的.

($\mathcal{J}_h3$) $\bar{\Omega}=\cup_{T\in\mathcal{J}_h}T$.

($\mathcal{J}_h4$) 对任何二个不同的 $T_1,T_2\in\mathcal{J}_h$, $\mathring{T}_1\cap\mathring{T}_2=\emptyset$.

($\mathcal{J}_h5$) 对每个 $T\in\mathcal{J}_h$, ∂T 或者是 $\partial\Omega$ 的一部分, 或者是相邻单元的 T' 的边.

(FEM2) 分片多项式. 对于 $T\in\mathcal{J}_h$, 令

$$P_T=\{\text{定义在 } T \text{ 上的某种多项式全体}\},$$

P_T 应满足:

(i) 当 $h\to 0$ 时, 保证有限元解在某种意义下收敛到原问题的解;

(ii) 使计算简单.

(FEM3) 有限元空间 V_h. 令

$$X_h=\{v_h: v_h|_T\in P_T,\quad \forall T\in\mathcal{J}_h\},$$

$$V_h=\{v_h\in X_h: \text{ 满足某种边界条件}\},$$

则 V_h 是有限维空间, 从而具有有限 "基函数". 对基函数的要求: 其支集尽可能地小, 同时要容易表示.

现在回来考察离散问题 (4.1.2). 设 V_h 的基函数为 $\{w_k\}_{k=1}^M$, 则 (4.1.2) 等价于

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in V_h, \quad \text{使得} \\ a(u_h, w_s) = \langle l, w_s \rangle, \quad 1 \leq s \leq M. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

令

$$u_h(x) = \sum_{t=1}^M u_t w_t(x),$$

则问题 (4.1.6) 等价于解下述线性代数方程组

$$\sum_{t=1}^M a(w_t, w_s) \cdot u_t = \langle l, w_s \rangle, \quad s = 1, 2, \cdots, M, \tag{4.1.7}$$

其系数矩阵称为刚度矩阵

$$A = [a(w_t, w_s)]_{1 \leq s, t \leq M}. \tag{4.1.8}$$

从数值计算观点来看, 刚度矩阵越稀疏越好. 考察一下具体例子 (见例 3.1.1): 令

$$a(w_t, w_s) = \int_\Omega (\mathrm{grad} w_t \cdot \mathrm{grad} w_s + b w_t w_s) \mathrm{d}x,$$

那么当 $\mathrm{supp} w_t \cap \mathrm{supp} w_s = \emptyset$ 时, $a(w_t, w_s) = 0$, 因此对基函数 $\{w_t\}_{t=1}^M$ 要求其支集尽可能地小.

下面要考虑的问题是, 为保证离散问题 (4.1.2) 的解的存在唯一性, 我们已如前要求 $V_h \subset V$, 这种有限元方法称为协调元方法. 现在给出有限元空间 $V_h \subset V$ 的条件.

首先考虑二阶问题, 此时 $V \subset H^1(\Omega)$, 而 V_h 是逐片多项式空间. 因此问题是, 逐片多项式函数在剖分的每条边上满足何种条件, 才能保证其属于 $H^1(\Omega)$.

定理 4.1.1 设 $v \in H^1(T), \forall T \in \mathcal{J}_h$, 且 $v \in C^0(\bar{\Omega})$. 则

$$v \in H^1(\Omega).$$

证明 为此只要证明 v 的广义导数 $D_i v \in L^2(\Omega)$. 根据广义导数的定义, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$-\int_\Omega D_i v \cdot \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega v \cdot \partial_i \varphi \mathrm{d}x.$$

由于 $v \in C^0(\bar{\Omega}), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 因此

$$\int_\Omega v \cdot \partial_i \varphi \mathrm{d}x = \sum_T \int_T v \cdot \partial_i \varphi \mathrm{d}x,$$

而由于 $v \in H^1(T)$, 则由 Green 积分公式

$$\int_\Omega v \cdot \partial_i \varphi \mathrm{d}x = -\sum_T \int_T D_i v \cdot \varphi \mathrm{d}x + \sum_T \int_{\partial T} v\varphi \cdot \nu_i \mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \cdots, \nu_n)^{\mathrm{T}}$ 是 ∂T 上单位外法向量. 现证明

$$\sum_T \int_{\partial T} v\varphi \cdot \nu_i \mathrm{d}\sigma = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

若 ∂T 的一部分 $\gamma \subset \partial\Omega$, 则由于 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, 因此

$$\int_{\gamma \subset \partial\Omega} v\varphi \cdot \nu_i \mathrm{d}\sigma = 0,$$

若 ∂T 的一部分 γ 是与 T 相邻的单元 T' 的公共边界, 由于 $v \in C^0(\bar{\Omega})$, 则在公共边界 γ 上 : $v\varphi|_T = v\varphi|_{T'}$, $\nu_i^T = -\nu_i^{T'}$, 因此

$$\int_\gamma v\varphi\nu_i|_T \mathrm{d}\sigma + \int_\gamma v\varphi\nu_i|_{T'} \mathrm{d}\sigma = 0.$$

因此 $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$-\int_\Omega D_i v \cdot \varphi \mathrm{d}x = -\sum_T \int_T D_i v \cdot \varphi \mathrm{d}x,$$

由于 $D_i v|_T \in L^2(T)$, 因此 $D_i v \in L^2(\Omega)$.

下面是上述定理的逆定理.

定理 4.1.2 若 $v|_T \in C^0(\bar{T})$, $\forall T \in \mathcal{J}_h$, $v \in H^1(\Omega)$, 则

$$v \in C^0(\bar{\Omega}).$$

证明 反证法. 若 v 在某两个相邻单元 T 和 T' 上不连续, 则在其公共边 γ 上

$$v|_T - v|_{T'} \not\equiv 0, \quad \text{在 } \gamma \text{ 上},$$

不妨设在 γ 的某一段上为正. 作开集 U, 使得 $U \subset T \cup T'$, 且

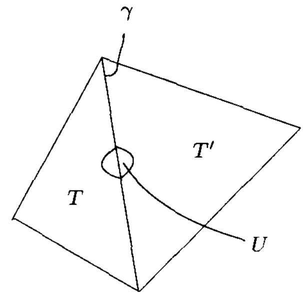

图 4.1.1

$$v|_T - v|_{T'} > 0, \quad \text{在 } U \cap \gamma \text{ 上},$$

见图 4.1.1. 作函数 $\varphi \in \mathcal{D}(U)$, 使得 $\varphi > 0$ 在 $\mathrm{supp}\varphi$ 上, 且 $\mathrm{supp}\varphi \cap \gamma$ 为 $(n-1)$ 维的非零测集, 则对 $i = 1, \cdots, n$, 有

$$\begin{aligned}
\int_\Omega D_i v \cdot \varphi \mathrm{d}x &= \int_T D_i v \cdot \varphi \mathrm{d}x + \int_{T'} D_i v \cdot \varphi \mathrm{d}x \\
&= -\int_T v \cdot \partial_i \varphi \mathrm{d}x - \int_{T'} v \cdot \partial_i \varphi \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{U\cap\gamma} v \cdot \varphi \cdot \nu_i|_T \mathrm{d}\sigma + \int_{U\cap\gamma} v \cdot \varphi \nu_i|_{T'} \mathrm{d}\sigma \\
&= -\int_\Omega v \cdot \partial_i \varphi \mathrm{d}x + \int_{U\cap\gamma} (v|_T - v|_{T'}) \cdot \varphi \nu_i^T \mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

由于 $v \in H^1(\Omega)$, 从而

$$\int_{U\cap\gamma} (v|_T - v|_{T'}) \cdot \varphi \nu_i^T \mathrm{d}\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

而这与原设 $v|_T - v|_{T'} > 0, \varphi > 0$ 在 $U \cap \gamma \subset \mathrm{supp}\varphi \cap \gamma$ 上矛盾.

推论 4.1.1 设 Ω 是一多边形区域, 则定义在 $\bar{\Omega}$ 上的分片多项式函数 $v \in H^1(\Omega)$, 当且仅当 $v \in C^0(\bar{\Omega})$.

对于四阶问题, $v \subset H^2(\Omega)$, 同样有结论.

推论 4.1.2 设 Ω 是一多边形区域, 则定义在 $\bar{\Omega}$ 上的分片多项式函数 $v \in H^2(\Omega)$, 当且仅当 $v \in C^1(\bar{\Omega})$.

4.2 三角形单元

本节考虑平面区域三角形剖分情形, 即单元为三角形, 分片多项式的构造.

4.2.1 三角形上一次元

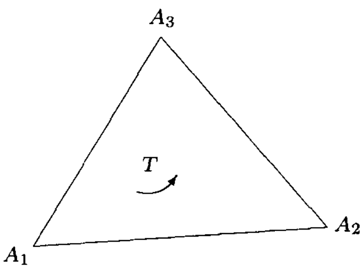

图 4.2.1

设给定三角形 T, 其三个顶点按逆时针方向排列为 $A_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, 3$(见图 4.2.1). 在 T 上构造一次插值函数 $U(x,y) = ax + by + c$, 使得 $U(A_i) = u_i, i = 1, 2, 3$, 则有方程

$$\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = u_1, \\ ax_2 + by_2 + c = u_2, \\ ax_3 + by_3 + c = u_3. \end{cases}$$

这个方程组的系数矩阵

$$D = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

是非奇异的, 因为 A_1, A_2, A_3 不在一条直线上, 所以方程组是唯一可解的. 在上述方程组右端取特殊值:$u_1 = 1, u_2 = u_3 = 0$, 解出 a, b, c, 从而构成 $U(x,y)$, 记为 $\lambda_1(x,y)$:

$$\lambda_1(A_1) = 1, \quad \lambda_1(A_2) = 0, \quad \lambda_1(A_3) = 0.$$

同样可以构造一次函数 $\lambda_i(x,y), i = 1, 2, 3,$

$$\lambda_i(A_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \text{ 时}, \\ 0, & i \neq j \text{ 时}, \end{cases} \quad 1 \leq i,\ j \leq 3.$$

$\lambda_i(x,y)$ 的具体表达式如下.

令 (见图 4.2.2)

$$\xi_i = x_j - x_k, \quad \eta_i = y_j - y_k, \quad \omega_i = x_j y_k - x_k y_j,$$

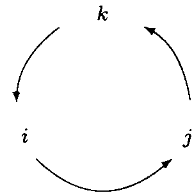

图 4.2.2

则

$$|T| = \frac{1}{2}\det(D) = \omega_1\omega_2\omega_3,$$

$$\lambda_i(x,y) = \frac{1}{2|T|}(\eta_i x - \xi_i y + \omega_i), \quad i=1,2,3. \quad (4.2.1)$$

原来的一次插值函数 $U(x,y)$ 可表示成

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{3} u_i \lambda_i(x,y).$$

上式中 $U(x,y)$ 取特殊的一次函数:$1, x$ 及 y, 则得

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \lambda_i(x,y) = 1, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} x_i \lambda_i(x,y) = x, \quad \text{在 } T \text{ 上}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} y_i \lambda_i(x,y) = y, \end{cases} \tag{4.2.2}$$

$\lambda_i(x,y), i = 1,2,3$, 称为三角形 T 上三顶点的一次插值基函数.

$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 亦称为重心坐标. 任给定一点 $A = (x,y) \in T$, 则按 (4.2.1) 即可确定 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$; 反之任给定 $\lambda_i \geq 0$, $i = 1,2,3$ 且满足 (4.2.2) 的第一式 $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, 则可按 (4.2.2) 的第二, 三式确定相应的 x 和 y. 因此建立了 1-1 对应关系:

$$T \ni (x,y) \longleftrightarrow \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}, \ (\lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1),$$

从而 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}(\lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1)$ 可作为平面三角形 T 上点的坐标. 之所以称为重心坐标, 是因为若在 T 的三个顶点 A_i 上,

分别放置质量为 λ_i 的质点 $(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1)$, 则这个质点系的重心 $A=(x,y)$ 是

$$\begin{cases} x=(x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+x_3\lambda_3)/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+x_3\lambda_3, \\ y=(y_1\lambda_1+y_2\lambda_2+y_3\lambda_3)/(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=y_1\lambda_1+y_2\lambda_2+y_3\lambda_3. \end{cases}$$

$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 亦称为面积坐标. 其意义如下: 设 $A=(x,y)\in T$, 则 (见图 4.2.3)

$$|T_1|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(\eta_1 x-\xi_1 y+\omega_1)=\lambda_1|T|,$$

同样有

$$|T_2|=\lambda_2|T|, \quad |T_3|=\lambda_3|T|.$$

三个顶点的面积坐标分别为

$$A_1=(1,0,0), \quad A_2=(0,1,0), \quad A_3=(0,0,1).$$

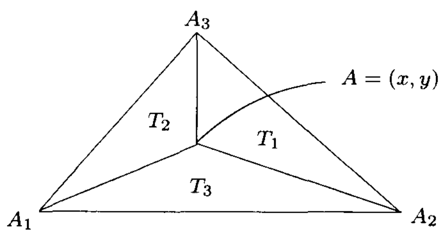

图 4.2.3

下面给出 (λ_1,λ_2) 平面中的参考三角形. 变换

$$\lambda_i=\frac{1}{2|T|}(\eta_i x-\xi_i y+\omega_i), \quad i=1,2, \tag{4.2.3}$$

将 (x,y) 平面中的三角形 T 变成了 (λ_1,λ_2) 平面中的等腰直角三角形 $\hat{T}$(见图 4.2.4).

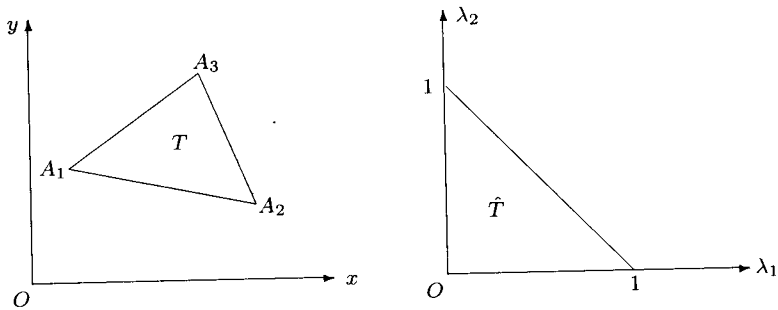

图 4.2.4

变换 (4.2.3) 的 Jacobi 为

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial(x,y)}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\lambda_1}{\partial x} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial x} & \dfrac{\partial\lambda_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{2|T|}, \\ \det\left(\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right) = \det\left(\dfrac{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}{\partial(x,y)}\right)^{-1} = 2|T|. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

在计算有限元刚度矩阵时, 常常需要积分公式

$$\iint_T \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\lambda_3^{p_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2|T|\frac{p_1!p_2!p_3!}{(p_1+p_2+p_3)!}. \tag{4.2.5}$$

事实上, 由积分变量替换,

$$\begin{aligned} &\iint_T \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}\lambda_3^{p_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =& \iint_{\hat{T}} \lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}(1-\lambda_1-\lambda_2)^{p_3}\cdot\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(\lambda_1,\lambda_2)}\right)\mathrm{d}\lambda_1\mathrm{d}\lambda_2 \\ =& \ 2|T|\int_0^1\mathrm{d}\lambda_2\int_0^{1-\lambda_2}\lambda_1^{p_1}\lambda_2^{p_2}(1-\lambda_1-\lambda_2)^{p_3}\mathrm{d}\lambda_1 \\ =& \ 2|T|\int_0^1\lambda_2^{p_2}(1-\lambda_2)^{p_1+p_3+1}\mathrm{d}\lambda_2\int_0^1 t^{p_1}(1-t)^{p_3}\mathrm{d}t \\ & \qquad (t=\lambda_1/(1-\lambda_2)), \end{aligned}$$

利用 Euler 积分公式

$$\int_0^1 s^\alpha(1-s)^\beta\mathrm{d}s = \alpha!\beta!/(\alpha+\beta+1)!,$$

即得证明 (4.2.5).

这种以三角形顶点为插值节点的三角形称为 Courant 三角形 (1943 年). 每个单元三角形顶点处参数决定的分片一次函数是 C^0 元, 因此对二阶问题而言是协调的, 亦称为协调膜元.

现在将上述协调膜元应用到简单的问题上. 考虑问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{ 中}, \\ u = \varphi, & \text{在 } \Omega \text{ 上}. \end{cases} \tag{4.2.6}$$

其对应的变分问题是

$$\begin{cases} \text{求 } u \in H^1(\Omega), \quad \text{使得 } u = \varphi \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上, 且} \\ \displaystyle\iint_\Omega \mathrm{grad}u \cdot \mathrm{grad}v\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f \cdot v\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{4.2.7}$$

其中 Ω 是一个平面多边形区域. 令 $\mathcal{J}_h$ 是 Ω 的一个三角形剖分, 单元 $T \in \mathcal{J}_h$ 为三角形,

$$X_h = \{v_h : v_h|_T \in p_1(T),\ \forall T \in \mathcal{J}_h \text{ 且 } v_h \in C^0(\bar{\Omega})\},$$
$$X_{0h} = \{v_h \in X_h : v_h(Q) = 0,\ \forall \text{ 顶点 } Q \in \partial\Omega\},$$

则上述问题的一次协调膜元的逼近为

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in X_h, \ \text{使得 } u_h(Q) = \varphi(Q) \text{ 顶点 } Q \in \partial\Omega, \\ \displaystyle\iint_\Omega \mathrm{grad}u_h \cdot \mathrm{grad}v_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_\Omega f \cdot v_h\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \ \forall v_h \in X_{0h}. \end{cases}$$

设剖分 $\mathcal{J}_h$ 的内部顶点为 $A_1, \cdots, A_N$, 而边界上顶点为 $A_{N+1}, \cdots, A_{N+M}$. 则 X_{0h} 的基函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N$, 而 X_h 的基函数 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N, \psi_{N+1}, \cdots, \psi_{N+M}$. 其中 ψ_i 是分片一次函数且在 $\bar{\Omega}$ 上连续, 使得

$$\psi_i(A_i) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i,\ j \le N + M.$$

注意到 $u_{k+N} = u(A_{k+N}) = \varphi(A_{k+N})$, 令

$$u_h = \sum_{j=1}^{N} u_j\psi_j + \sum_{k=1}^{M} \varphi(A_{N+k})\psi_{N+k},$$

则逼近问题可写成

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} u_j \iint_{\Omega} \operatorname{grad}\psi_j \cdot \operatorname{grad}\psi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\quad + \sum_{k=1}^{M} \varphi(A_{N+k}) \iint_{\Omega} \operatorname{grad}\psi_{N+k} \cdot \operatorname{grad}\psi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\Omega} f \cdot \psi_i \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad i = 1, \cdots, N.
\end{aligned} \tag{4.2.8}
$$

令

$$K_{ij} = \iint_{\Omega} \operatorname{grad}\psi_i \cdot \operatorname{grad}\psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad 1 \le i,\ j \le N + M.$$

则显然有

$$K_{ij} = 0, \quad \text{当 } A_i \text{ 与 } A_j \text{ 不是相邻顶点时}, \tag{4.2.9}$$

同时当 A_i, A_j 为相邻顶点时, 经计算可得 (见图 4.2.5)

$$K_{ij} = \iint_{T \cup T'} \operatorname{grad}\psi_i \cdot \operatorname{grad}\psi_j \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}, \tag{4.2.10}$$

若在 (4.2.6) 中取 $f = 0, \varphi = 1$, 则显然解 $u = 1$, 此时一次协调膜元逼近 (4.2.8) 成为

$$\sum_{j=1}^{N} K_{ij} + \sum_{k=1}^{M} K_{i,N+k} = 0,$$

$$i = 1, 2, \cdots, N.$$

即

$$K_{ii} = -\sum_{j=1, j\ne i}^{N+M} K_{ij}. \tag{4.2.11}$$

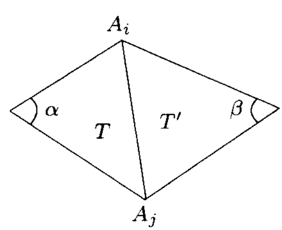

图 4.2.5

Strang[52] 指出, 如果剖分 $\mathcal{J}_h$ 具有下述性质:

相对于剖分 $\mathcal{J}_h$ 的每条边的三角形内角之和 $\alpha+\beta\leq\pi$. (4.2.12)

则离散问题 (4.2.8) 之解具有极值性质.

4.2.2 三角形上高次元

(i) 二次三角形元

三角形上多项式可由面积坐标 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1)$ 来表示. 因此三角形 T 上二次多项式可写成

$$U(x,y)=\alpha_1\lambda_1^2+\alpha_2\lambda_2^2+\alpha_3\lambda_3^2+\alpha_4\lambda_1\lambda_2+\alpha_5\lambda_2\lambda_3+\alpha_6\lambda_3\lambda_1.$$

若给定插值条件 (见图 4.2.6)

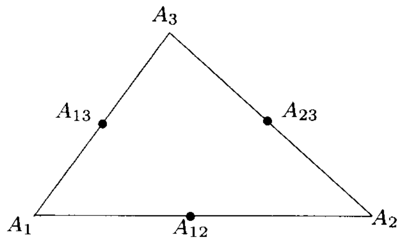

图 4.2.6

$$\begin{cases} U(A_i)=u_i, & i=1,2,3,\\ U(A_{ij})=u_{ij}, & 1\leq i<j\leq 3,\end{cases}$$

则可确定 $\alpha_i,1\leq i\leq 6$, 如下:

$$\begin{cases} \alpha_i=u_i, \quad 1\leq i\leq 3,\\ u_{12}=\dfrac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{1}{4}\alpha_4,\\ u_{23}=\dfrac{1}{4}(\alpha_2+\alpha_3)+\dfrac{1}{4}\alpha_5,\\ u_{13}=\dfrac{1}{4}(\alpha_3+\alpha_1)+\dfrac{1}{4}\alpha_6,\end{cases}$$

从而

$$\alpha_4 = 4u_{12} - (u_1 + u_2), \quad \alpha_5 = 4u_{23} - (u_2 + u_3),$$
$$\alpha_6 = 4u_{13} - (u_1 + u_3).$$

因此三角形 T 上 Lagrange 二次插值多项式可写成

$$\begin{aligned} U(x,y) = \ & u_1\lambda_1(2\lambda_1 - 1) + u_2\lambda_2(2\lambda_2 - 1) + u_3\lambda_3(2\lambda_3 - 1) \\ & +4u_{12}\lambda_1\lambda_2 + 4u_{23}\lambda_2\lambda_3 + 4u_{13}\lambda_3\lambda_1, \end{aligned}$$

由此亦可见

$$\mu_i = \lambda_i(2\lambda_i - 1), \quad i = 1, 2, 3 \tag{4.2.13}$$

是对应于顶点 $A_i, i = 1, 2, 3$ 的二次插值基函数; 而

$$\mu_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad 1 \le i < j \le 3 \tag{4.2.14}$$

是对应于中点 A_{ij} 的二次插值基函数.

(ii) 三次 Lagrange 三角形元

三角形 T 上的三次多项式可表示成 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ 的三次齐式:

$$\begin{aligned} U(x,y) = \ & \alpha_1 x_1^3 + \alpha_2\lambda_2^3 + \alpha_3\lambda_3^3 + \alpha_4\lambda_1^2\lambda_2 + \alpha_5\lambda_1\lambda_2^2 \\ & +\alpha_6\lambda_2^2\lambda_3 + \alpha_7\lambda_2\lambda_3^2 + \alpha_8\lambda_3^2\lambda_1 + \alpha_9\lambda_3\lambda_1^2 + \alpha_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3. \end{aligned}$$

给定插值条件为 (见图 4.2.7)

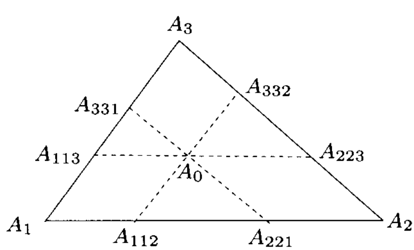

图 4.2.7

$$\begin{cases} U(A_i) = u_i, & 1 \le i \le 3, \\ U(A_{iij}) = u_{iij}, & 1 \le i,\ j \le 3, \\ U(A_0) = u_0, \end{cases}$$

其中 A_{iij} 是边 $\overline{A_iA_j}$ 上的三分点, A_0 为 T 的重心. 则可确定 α_1, $\alpha_2, \cdots, \alpha_{10}$ 如下:

$$\alpha_i = u_i, \quad 1 \le i \le 3,$$

$$\begin{cases} u_{112} = \alpha_1\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \alpha_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \alpha_4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right) + \alpha_5\left(\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^2, \\ u_{221} = \alpha_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 + \alpha_2\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 + \alpha_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right) + \alpha_5\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^2, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \alpha_4 = 9u_{112} - \dfrac{9}{2}u_{221} - \dfrac{5}{2}u_1 + u_2, \\ \alpha_5 = 9u_{221} - \dfrac{9}{2}u_{112} - \dfrac{5}{2}u_2 + u_1, \end{cases}$$

同样可得

$$\begin{cases} \alpha_6 = 9u_{223} - \dfrac{9}{2}u_{332} - \dfrac{5}{2}u_2 + u_3, \\ \alpha_7 = 9u_{332} - \dfrac{9}{2}u_{223} - \dfrac{5}{2}u_3 + u_2, \end{cases}$$

以及

$$\begin{cases} \alpha_8 = 9u_{331} - \dfrac{9}{2}u_{113} - \dfrac{5}{2}u_3 + u_1, \\ \alpha_9 = 9u_{113} - \dfrac{9}{2}u_{331} - \dfrac{5}{2}u_1 + u_3. \end{cases}$$

最后一个插值条件可得

$$u_0 = \frac{1}{27}(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_9 + \alpha_{10}),$$

从而

$$\begin{aligned} \alpha_{10} = \ & 27u_0 - \frac{9}{2}(u_{112} + u_{221} + u_{223} + u_{332} + u_{331} + u_{113}) \\ & +2(u_1 + u_2 + u_3). \end{aligned}$$

将此代入 $U(x,y)$ 的表达式, 可得

$$
\begin{aligned}
U(x,y) = &\sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i(3\lambda_i-1)(3\lambda_i-2)}{2} u_i \\
&+ \sum_{i\neq j} \frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i-1)u_{iij} + 27\lambda_1\lambda_2\lambda_3 u_0.
\end{aligned} \tag{4.2.15}
$$

由上式不难找出在 T 上对应节点处的 Lagrange 三次插值多项式的基函数.

注意, 上述二次及三次 Lagrange 有限元均是 C^0 元, 因此也是协调膜元.

(iii) 不完全三次 Lagrange 三角形元

如果在上面构造完全三次 Lagrange 插值多项式中, 去掉重心 A_0 处的插值条件, 那么 9 个插值节点上的 9 个插值数据, 不能唯一地确定一个三次多项式. 为唯一确定计, 需附加另外的条件: 插值精确到二次多项式. 为精确地表述这个条件, 首先给出三角形上多项式关于 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 的另一种表示式: 升幂表达式. 首先考察 2 次多项式空间的基函数:

$$\{\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2,\lambda_1\lambda_2,\lambda_2\lambda_3,\lambda_3\lambda_1\},$$

注意到

$$
\begin{cases}
\lambda_1^2 = \lambda_1(1-\lambda_2-\lambda_3) = \lambda_1 - \lambda_1\lambda_2 - \lambda_3\lambda_1,\\
\lambda_2^2 = \lambda_2 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2,\\
\lambda_3^2 = \lambda_3 - \lambda_3\lambda_1 - \lambda_2\lambda_3.
\end{cases}
$$

由此可见,2 次多项式空间的基函数亦可取为

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_1\lambda_2,\lambda_2\lambda_3,\lambda_3\lambda_1\},$$

这样, 一个完全 2 次多项式可写成如下的升幂形式:

$$p_2(x,y) = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_1\lambda_2 + a_5\lambda_2\lambda_3 + a_6\lambda_3\lambda_1.$$

同样地, T 上一个完全 3 次多项式亦可写成下述升幂形式:

$$\begin{aligned}p_3(x,y) = \ & a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_1\lambda_2 + a_5\lambda_2\lambda_3 + a_6\lambda_3\lambda_1 \\ & +a_7\lambda_1^2\lambda_2 + a_8\lambda_2^2\lambda_3 + a_9\lambda_3^2\lambda_1 + a_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

比较前面关于 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 的三次齐式表达式, 系数之间有关系

$$\begin{cases} a_i = \alpha_i, \quad i=1,2,3, \\ a_4 = \alpha_5 - \alpha_1 - 2\alpha_2,\ a_5 = \alpha_7 - \alpha_2 - 2\alpha_3,\ a_6 = \alpha_9 - \alpha_3 - 2\alpha_1, \\ a_7 = \alpha_4 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_5,\ a_8 = \alpha_6 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_7, \\ a_9 = \alpha_8 - \alpha_3 + \alpha_1 - \alpha_9,\ a_{10} = \alpha_{10} - \alpha_5 - \alpha_7 - \alpha_9 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3. \end{cases}$$

这样, 由插值条件

$$\begin{cases} p_3(A_i) = u_i, & i=1,2,3, \\ p_3(A_{iij}) = u_{iij}, & 1 \le i,\ j \le 3, \end{cases}$$

可确定

$$a_i = u_i, \quad i=1,2,3,$$

$$\begin{cases} a_4 = \dfrac{9}{2}(2u_{221} - u_{112} - u_2), \\ a_7 = \dfrac{27}{2}(u_{112} - u_{221}) + \dfrac{9}{2}(u_2 - u_1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = \dfrac{9}{2}(2u_{332} - u_{223} - u_3), \\ a_8 = \dfrac{27}{2}(u_{223} - u_{332}) + \dfrac{9}{2}(u_3 - u_2), \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_6 = \dfrac{9}{2}(2u_{113} - u_{331} - u_1), \\ a_9 = \dfrac{27}{2}(u_{331} - u_{113}) + \dfrac{9}{2}(u_1 - u_3). \end{cases}$$

而 a_{10} 不出现在任何一个插值条件中, 但为使插值精确到 2 次多项式, 即当 a_7, a_8 和 a_9 为 0 时, 必有 $a_{10}=0$, 即

$$a_{10} = c_1a_7 + c_2a_8 + c_3a_9,$$

其中 c_1, c_2 及 c_3 可为任意常数, 从而

$$\begin{aligned}a_{10} = &\frac{27}{2}\{c_1(u_{112}-u_{221})+c_2(u_{223}uu_{332})+c_3(u_{331}-u_{113})\}\\&+\frac{9}{2}\{(c_3-c_1)u_1+(c_1-c_2)u_2+(c_2-c_3)u_3\}.\end{aligned}$$

将上述 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 代入 $p_3(x,y)$ 的升幂表达式:

$$p_3(x,y)=\sum_{i=1}^{3}u_i\varphi_i(x,y)+\sum_{i,j=1}^{3}u_{iij}\varphi_{iij}(x,y), \tag{4.2.16}$$

其中

$$\begin{cases}\varphi_i=\lambda_i\left\{1-\dfrac{9}{2}(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\right\}+\dfrac{9}{2}(c_{i+2}-c_i)\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\\ \qquad 1\le i\le 3,\\ c_{i+j}=c_k\quad (i+j=k,\mathrm{mod}3),\\ \varphi_{iij}=\dfrac{9}{2}\lambda_i\lambda_j\{3(1-c_i)\lambda_i-3c_i\lambda_j+(3c_i-1)\},\\ \qquad \text{当 } i\to j \text{ 逆时针方向},\\ \varphi_{iij}=\dfrac{9}{2}\lambda_i\lambda_j\{3c_i\lambda_i-3(1-c_i)\lambda_j+(2-3c_j)\},\\ \qquad \text{当 } i\to j \text{ 顺时针方向}.\end{cases} \tag{4.2.17}$$

若在上式中特别地取 $c_1=c_2=c_3=\dfrac{1}{2}$, 则

$$\begin{cases}\varphi_i=\lambda_i\left\{1-\dfrac{9}{2}(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)\right\}, & i=1,2,3,\\ \varphi_{iij}=\dfrac{9}{4}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i-3\lambda_j+1), & 1\le i,\ j\le 3,\end{cases} \tag{4.2.18}$$

此即通常标准的不完全 3 次 Lagrange 插值基函数. 此时

$$a_{10}=\frac{1}{2}(a_7+a_8+a_9),$$

即

$$\alpha_{10}=\frac{1}{2}(\alpha_4+\cdots+\alpha_9)-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3),$$

容易验证 (见文献 [22]), 此即

$$\varphi_{123}(p) = 12p(A_0) + 2\sum_{i=1}^{3} p(A_i) - 3\sum_{l\neq m} p(A_{llm}) = 0. \quad (4.2.19)$$

注意, 上述不完全 3 次 Lagrange 有限元也是 C^0 元.

(iv) 完全 3 次 Hermite 元

给定多边形区域 Ω 上一个三角剖分 $\mathcal{J}_h$, 设其顶点个数 N_0, 边数 N_1 及三角形单元个数 N_2, 则有如下渐近公式 (Euler 公式):

$$N_0 : N_2 : N_1 \approx 1 : 2 : 3. \quad (4.2.20)$$

因此为使有限元离散方程的规模尽可能地小, 就要尽可能地利用顶点上的数据. 在上面构造 Lagrange 型完全 3 次元时, 有限元方程的规模应是

$$N_0 + 2N_1 + N_2 \approx 9N_0.$$

而对于下面构造的 Hermite 型完全 3 次元, 其规模只是

$$3N_0 + N_2 \approx 5N_0,$$

它几乎是 Lagrange 型 3 次元的一半.

下面构造三角形 T 上的 Hermite 3 次插值多项式. 求 $p(x,y) \in p_3(T)$, 使得, $1 \le i \le 3$(见图 4.2.8),

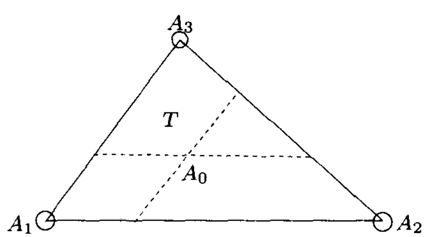

图 4.2.8

$$\begin{cases} p(A_i) = u_i, \\ \partial_x p(A_i) = u_{x,i}, \quad \partial_y p(A_i) = u_{y,i}, \\ p(A_0) = u_0. \end{cases} \quad (4.2.21)$$

按照前面同样的思路, 将 $p(x,y)$ 表示成重心坐标 $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ 的三次齐式

$$\begin{aligned}p(x,y)=\ &\alpha_1\lambda_1^3+\alpha_2\lambda_2^3+\alpha_3\lambda_3^3+\alpha_4\lambda_1^2\lambda_2+\alpha_5\lambda_1\lambda_2^2+\alpha_6\lambda_2^2\lambda_3\\&+\alpha_7\lambda_2\lambda_3^2+\alpha_8\lambda_3^2\lambda_1+\alpha_9\lambda_3\lambda_1^2+\alpha_{10}\lambda_1\lambda_2\lambda_3.\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{cases}\partial_{\lambda_1}p=\partial_x p\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_1}+\partial_y p\dfrac{\partial y}{\partial\lambda_1},\\ \partial_{\lambda_2}p=\partial_x p\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_2}+\partial_y p\dfrac{\partial y}{\partial\lambda_2},\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial\lambda_1}=-\xi_2, & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda_1}=-\eta_2,\\ \dfrac{\partial x}{\partial\lambda_2}=\xi_1, & \dfrac{\partial y}{\partial\lambda_2}=\eta_1,\end{cases}$$

这样原来的导数插值条件可改写为

$$\begin{cases}\partial_{\lambda_1}p(A_i)=u_{\lambda_1,i}=-\xi_2u_{x,i}-\eta_2u_{y,i},\\ \partial_{\lambda_2}p(A_i)=u_{\lambda_2,i}=\xi_1u_{x,i}+\eta_1u_{y,i},\end{cases}\qquad i=1,2,3,$$

最后由上述插值条件可确定出 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{10}$, 从而

$$p(x,y)=\sum_{i=1}^{3}(u_i\tilde{\varphi}_i+u_{\lambda_1,i}\tilde{\varphi}_i+u_{\lambda_2,i}\tilde{\rho}_i)+27\lambda_1\lambda_2\lambda_3u_0,$$

其中

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}=-2\lambda_i^3+3\lambda_i^2-7\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\\ \tilde{\psi}_1=\lambda_1(\lambda_1^2-\lambda_1+2\lambda_2\lambda_3),\quad \tilde{\psi}_2=\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_3),\\ \tilde{\psi}_3=\lambda_3\lambda_1(\lambda_3-\lambda_2),\\ \tilde{\rho}_1=\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-\lambda_3),\quad \tilde{\rho}_2=\lambda_2(\lambda_2^2-\lambda_2+2\lambda_3\lambda_1),\\ \tilde{\rho}_3=\lambda_2\lambda_3(\lambda_3-\lambda_1).\end{cases}$$

若采用原先的插值数据 (4.2.21), 则

$$p(x,y)=\sum_{i=1}^{3}(u_i\varphi_i+u_{x,i}\psi_i+u_{y,i}\rho_i)+27u_0\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\qquad(4.2.22)$$

其中

$$\begin{cases}\varphi_i=\tilde{\varphi}_i=-2\lambda_i^3+3\lambda_i^2-7\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\\ \psi_i=\lambda_i\{\xi_{i+1}\lambda_{i+2}(\lambda_i-\lambda_{i+1})+\xi_{i+2}\lambda_{i+1}(\lambda_{i+2}-\lambda_i)\},\\ \rho_i=\lambda_i\{\eta_{i+1}\lambda_{i+2}(\lambda_i-\lambda_{i+1})+\eta_{i+2}\lambda_{i+1}(\lambda_{i+2}-\lambda_i)\},\\ \lambda_{i+j}=\lambda_k,\ \xi_{i+j}=\xi_k,\ \eta_{i+j}=\eta_k,\ i+j=k(\mathrm{mod}3),\ i=1,2,3.\end{cases}\tag{4.2.23}$$

容易验证,(4.2.23) 中的 φ_i,ψ_i 及 $\rho_i, i=1,2,3$, 正是 3 次 Hermite 插值对应的基函数. 同时也容易验证,3 次 Hermite 元是 C^0 元.

(v) 不完全 3 次 Hermite 元, Zienkiewicz 元

在上述完全 3 次 Hermite 插值中, 去掉在重心 A_0 处的插值数据, 那么三角形 T 的三个顶点处的函数值及二个一阶导数值, 共 9 个插值数据, 不足以唯一地确定 3 次多项式. 因此为了唯一地确定一个 3 次多项式, 必须再增加一个条件: 插值精确到 2 次多项式. 具体的构造, 完全类似于不完全 3 次 Lagrange 插值多项式, 最后可得

$$p(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\{u_i\varphi_i+u_{x,i}\psi_i+u_{y,i}\rho_i\},\tag{4.2.24}$$

其中, $1\le i\le 3$,

$$\begin{cases}\varphi_i=\lambda_i^2(3-2\lambda_i)+2(1+c_{i+2}+c_i)\lambda_1\lambda_2\lambda_3,\\ \psi_i=\xi_{i+1}\{\lambda_i^2\lambda_{i+2}+(1-c_{i+2})\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}-\xi_{i+2}(\lambda_i^2\lambda_{i+1}+c_i\lambda_1\lambda_2\lambda_3),\\ \rho_i=\eta_{i+1}\{x_i^2\lambda_{i+2}+(1-c_{i+2})\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}-\eta_{i+2}(\lambda_i^2\lambda_{i+1}+c_i\lambda_1\lambda_2\lambda_3),\end{cases}\tag{4.2.25}$$

而 $i+j=k(\mathrm{mod}3)$. 特别地取 $c_1=c_2=c_3=\dfrac{1}{2}$, 正是 Zienkiewicz 三角形元 (见文献 [22]).

这同样是一个 C^0 元, 因此是协调膜元; 但却是非协调的板元, 即不是 C^1 元.

4.3 矩形单元

本节考虑平面区域的矩形剖分情形,此时单元为矩形的分片多项式的构造.

4.3.1 双线性矩形单元

设在平面上给定一个矩形 $T = A_1A_2A_3A_4, A_i = (x_i, y_i)$, $1 \le i \le 4, A_0 = (x_0, y_0)$ 是 T 的中心. 则存在一个仿射变换 $F_T : \hat{T} \to T$, 定义如下 (见图 4.3.1),

$$x = l_1\xi + x_0, \quad y = l_2\eta + y_0, \tag{4.3.1}$$

其逆变换为

$$\xi = \frac{x - x_0}{l_1}, \quad \eta = \frac{y - y_0}{l_2}. \tag{4.3.2}$$

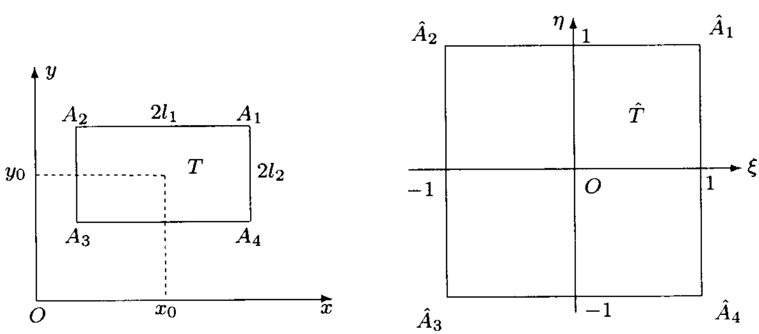

图 4.3.1

因此为了在矩形 T 上构造插值多项式, 只要在标准单元 $\hat{T} = \hat{A}_1\hat{A}_2\hat{A}_3\hat{A}_4$ 上构造同类插值多项式, 然后通过变换 F_T, 即可得到 T 上的插值多项式. 首先构造双线性插值多项式 $\hat{p} \in Q_1(\hat{T})$—— 定义在 $\hat{T}$ 上双线性多项式的集合:

$$\hat{p}(\xi, \eta) = a\xi\eta + b\xi + c\eta + d,$$

使得

$$\hat{p}(\hat{A}_i) = u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

先构造基函数 $\hat{p}_i(\xi, \eta)$, 使得

$$\hat{p}_i(A_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \le i,\ j \le 4.$$

容易得出

$$\begin{cases} \hat{p}_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), & \hat{p}_2(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \\ \hat{p}_3(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), & \hat{p}_4(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta). \end{cases}$$

因此

$$\hat{p}(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} u_i \hat{p}_i(\xi,\eta).$$

从而利用 F_T 的逆变换 (4.3.2), 即可得到

$$p(x,y) = \sum_{i=1}^{4} u_i p_i(x,y), \tag{4.3.3}$$

其中

$$\begin{cases} p_1(x,y) = \dfrac{(x-x_2)(y-y_4)}{(x_1-x_2)(y_1-y_4)}, \\ p_2(x,y) = \dfrac{(x-x_1)(y-y_4)}{(x_2-x_1)(y_2-y_4)}, \\ p_3(x,y) = \dfrac{(x-x_4)(y-y_1)}{(x_3-x_4)(y_3-y_1)}, \\ p_4(x,y) = \dfrac{(x-x_2)(y-y_1)}{(x_4-x_2)(y_4-y_1)}. \end{cases} \tag{4.3.4}$$

而 $p_i(x,y) \in Q_1(T)$, 是双线性插值在顶点 A_i 处的基函数; $p(x,y) \in Q_1(T)$ 是满足条件

$$p(A_i) = u_i, \quad 1 \le i \le 4,$$

的双线性插值.

4.3.2 双二次矩形单元

在标准矩形单元 $\hat{T}$ 上的双二次插值基函数如下 (见图 4.3.2):

$$
\begin{cases}
\hat{\psi}_1(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\xi\eta, & \hat{\psi}_2(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\xi\eta, \\
\hat{\psi}_3(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta, & \hat{\psi}_4(\xi,\eta) = \dfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta, \\
\hat{\psi}_5(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(1+\eta)(1-\xi^2)\eta, & \hat{\psi}_6(\xi,\eta) = -\dfrac{1}{2}(1-\xi)\xi(1-\eta^2), \\
\hat{\psi}_7(\xi,\eta) = -\dfrac{1}{2}(1-\eta)\eta(1-\xi^2), & \hat{\psi}_8(\xi,\eta) = \dfrac{1}{2}(1+\xi)\xi(1-\eta^2), \\
\hat{\psi}_9(\xi,\eta) = (1-\xi^2)(1-\eta^2).
\end{cases}
$$

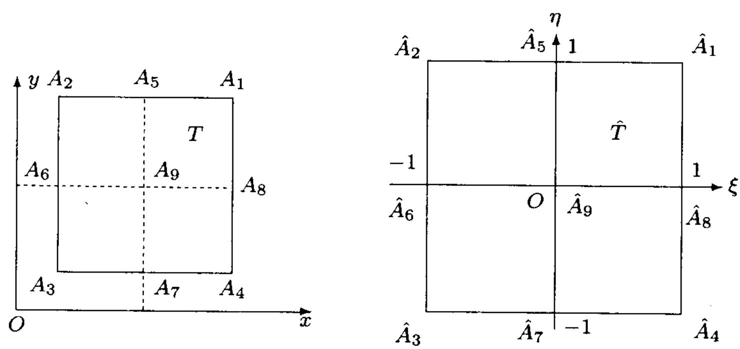

图 4.3.2

由仿射变换 F_T 的逆变换, 即可得到矩形单元 T 上的双 2 次插值基函数:

$$
\begin{cases}
\psi_1(x,y) = \dfrac{1}{4l_1^2l_2^2}(x-x_0)(y-y_0)(x-x_2)(y-y_4), \\
\psi_2,\psi_3,\psi_4 \text{ 与 } \psi_1 \text{ 类似}, \\
\psi_5(x,y) = -\dfrac{1}{2l_1^2l_2^2}(x-x_1)(x-x_2)(y-y_4)(y-y_0), \\
\psi_6,\psi_7,\psi_8 \text{ 与 } \psi_5 \text{ 类似}, \\
\psi_9(x,y) = \dfrac{1}{l_1^2l_2^2}(x-x_1)(x-x_2)(y-y_1)(y-y_4).
\end{cases} \tag{4.3.5}
$$

容易看出, 上述的矩形元均是 C^0 元.

4.4 四阶问题的协调有限单元

由 4.1 节可知, 对四阶问题协调元而言, 分片多项式应该是 $C^1(\bar{\Omega})$ 类的, 即不仅要求分片多形式在单元边上保持连续, 而且要求在单元边上的法向导数也保持连续.

4.4.1 Argyris 三角形元

设 T 是一个三角形, 其顶点 $A_i, 1 \le i \le 3$; $A_{ij}, 1 \le i < j \le 3$ 为三边中点 (见图 4.4.1). 求 $p(x,y) \in P_5(T)$, 使得

$$\begin{cases} \partial^\alpha p(A_i) = u_{\alpha,i}, & |\alpha| \le 2,\ 1 \le i \le 3, \\ \partial_\nu p(A_{ij}) = u_{\nu,ij}, & 1 \le i < j \le 3, \end{cases} \tag{4.4.1}$$

其中 ∂_ν 是 ∂T 上的外法向导数.

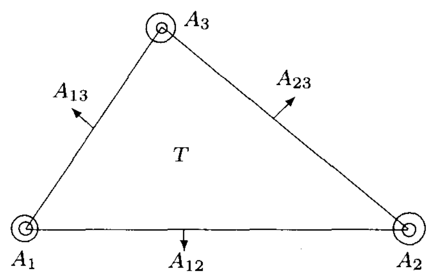

图 4.4.1

利用 T 上的重心坐标 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, 如前可以具体地写出 p 的表达式, 然而这是相当麻烦的事情, 此地我们只作一些定性的讨论.

定理 4.4.1 插值数据 (4.4.1) 可唯一地确定 T 上的一个 5 次多项式 $p(x,y) \in P_5(T)$.

证明 首先注意到平面上完全 5 次多项式具有 21 个自由度, 而插值数据 (4.4.1) 也正好是 21 个. 因此只要证明, 当 (4.4.1) 的插值数据均为 0 时,5 次插值多项式 $p(x,y) = 0$ 在 T 中.

如图 4.4.2, 取新的直角坐标系, 则

$$q(t) = p(x,y)|_F \in P_5(F).$$

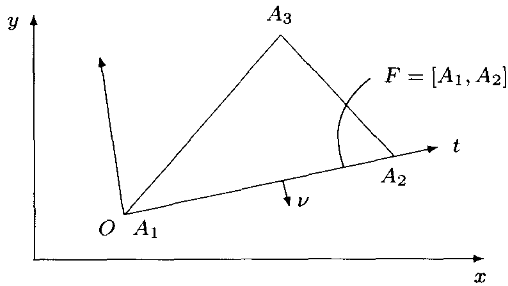

图 4.4.2

由 (4.4.1) 的数据为 0 时,

$$\begin{cases} q(A_1) = p(A_1) = 0, \\ q(A_2) = p(A_2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q'_t(A_1) = \partial_\tau p(A_1) = 0, \\ q'_t(A_2) = \partial_\tau p(A_2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q''_{tt}(A_1) = \partial_{\tau\tau} p(A_1) = 0, \\ q''_{tt}(A_2) = \partial_{\tau\tau} p(A_2) = 0, \end{cases}$$

由此即得 $q(t) = 0$, $\forall t \in F$, 此即

$$p(x,y)|_F = 0. \tag{4.4.2}$$

令

$$r(t) = \partial_\nu p(x,y)|_F \in P_4(F),$$

由 (4.4.1) 的数据为 0 时,

$$\begin{cases} r(A_1) = \partial_\nu p(A_1) = 0, \quad r(A_2) = \partial_\nu p(A_2) = 0, \\ r(A_{12}) = \partial_\nu p(A_{12}) = 0, \\ r'_t(A_1) = \partial_{\tau\nu} p(A_1) = 0, \quad r'_t(A_2) = \partial_{\tau\nu} p(A_2) = 0, \end{cases}$$

由此即得 $r(t)=0, \forall t \in F$, 此即

$$\partial_\nu p(x,y)|_F = 0. \tag{4.4.3}$$

由 (4.4.2) 可见 $p(x,y)$ 含有因子 λ_3; 又由 (4.4.2) 及 (4.4.3) 可见 $\mathrm{grad}p(x,\,y)|_F = 0$, 从而 $\partial_{\lambda_3}p(x,y)|_F = 0$. 因此 $p(x,y)$ 含有因子 λ_3^2. 类似地可证得

$$p(x,y) = c\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2.$$

但 $p \in P_5(T)$, 从而 $c=0$, 即得证明.

4.4.2 Bell 三角形元

在 Argyris 三角形中去掉三边中点法向导数的插值数据. 这样为唯一地确定 T 上的一个 5 次多项式, 增加如下的约束条件:

$$\partial_\nu p(x,y)|_F \in P_3(F), \quad \forall F \subset \partial T. \tag{4.4.4}$$

定理 4.4.2 在插值条件 (4.4.1) 中去掉 $\partial_\nu p(A_{ij})$ 的插值数据, 而增加约束 (4.4.4), 可唯一地确定 T 上的 5 次多项式, 且此种插值精确到 4 次多项式.

证明 首先, 由于任一个 4 次多项式 $\tilde{p} \in P_4(T)$, 自然地有 $\partial_\nu \tilde{p}|_F \in P_3(F), \forall F \subset \partial T$. 因此插值对 4 次多项式精确. 下面证明定理的第一个结论. 首先给出一个初等结果: 任一函数 v, 若 $v|_F \in P_4(F)$, 则

$$v|_F \in P_3(F) \iff \chi_{ij}(v) = 0,$$

其中 $F=[A_i, A_j], A_{ij} = \dfrac{1}{2}(A_i + A_j)$,

$$\begin{aligned}\chi_{ij}(v) = {} & 4\{v(A_i)+v(A_j)\} - 8v(A_{ij}) \\ & + Dv(A_i)\cdot(A_j - A_i) + Dv(A_j)\cdot(A_i - A_j)\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

(读者可自行证明). 现令 $v|_F = \partial_\nu p(x,y)|_F$ 是 4 次多项式, 则由条

件 (4.4.4): $\partial_\nu p(x,y)|_F \in P_3(F)$, 因而 $\chi_{ij}(\partial_\nu p) = 0$, 此即

$$
\begin{aligned}
8\partial_\nu p(A_{ij}) = \; & 4\{\partial_\nu p(A_i) + \partial_\nu p(A_i)\} \\
& + D\partial_\nu p(A_i)\cdot(A_j - A_i) + D\partial_\nu p(A_j)\cdot(A_i - A_j),
\end{aligned}
$$

即 $\partial_\nu p(A_{ij})$ 可由 $\partial^\alpha p(A_i)$ 及 $\partial^\alpha p(A_j)$ ($|\alpha| = 1, 2$) 的线性组合表示. 因此由定理 4.4.1 可见, 由约束条件 (4.4.4) 替代 (4.4.1) 中 $\partial_\nu p(A_{ij})$ 的插值数据, 仍可唯一地确定一个 5 次多项式, 从而证毕.

下面的结果, 表明 Argyris 元和 Bell 元均是 C^1 元, 即对四阶问题它们是协调元.

定理 4.4.3 Argyris 三角形元组成的有限元空间是 C^1 的.

证明 只要证明在两个相邻三角形 T, T' 的公共边 $F = [B_i, B_j]$ 上, Argyris 元 v_h 满足: 令 $v_h^T = v_h|_T, v_h^{T'} = v_h|_{T'}, \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^T$ 在 F 上 (见图 4.4.3),

$$
\begin{cases}
v_h^T|_F = v_h^{T'}|_F, \\
\partial_\nu v_h^T|_F = \partial_\nu v_h^{T'}|_F.
\end{cases}
$$

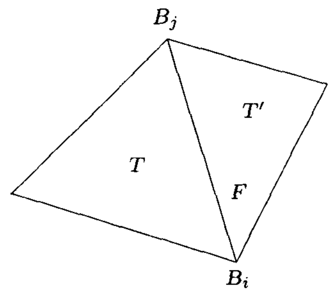

图 4.4.3

令

$$
q_1(t) = v_h^T|_F, \quad q_2(t) = v_h^{T'}|_F,
$$

它们均为 F 上 t 的 5 次多项式. 令

$$
q(t) = q_1(t) - q_2(t) \in P_5(F),
$$

则

$$
\begin{cases}
q(B_i) = q(B_j) = 0, \\
q_t'(B_i) = q_t'(B_j) = 0, \\
q_{tt}''(B_i) = q_{tt}''(B_j) = 0.
\end{cases}
$$

因此 $v_h^T|_F = v_h^{T'}|_F$, 从而 $\partial_\tau v_h^T|_F = \partial_\tau v_h^{T'}|_F$. 现令

$$
r_1(t) = \partial_\nu v_h^T|_F, \quad r_2(t) = \partial_\nu v_h^{T'}|_F.
$$

从而 $r(t)=r_1(t)-r_2(t)\in P_4(F)$, 则

$$\begin{cases} r(B_i)=r(B_j)=0, \quad r(B_{ij})=0, \\ r_t'(B_i)=\partial_{\nu t}v_h^T|_F(B_i)-\partial_{\nu t}v_h^{T'}|_F(B_i)=0, \\ r_t'(B_j)=0, \end{cases} \tag{4.4.6}$$

由此

$$\partial_\nu v_h^T|_F=\partial_\nu v_h^{T'}|_F.$$

因此 Argyris 元是 C^1 元.

注 4.4.1 对于 Bell 元, 由于 $\partial_\nu v_h|_F(B_{ij})$ 可由 $\partial^\alpha v_h|_F(B_i)$ 和 $\partial^\alpha v_h|_F(B_j)(|\alpha|=1,2)$ 来表示, 从而 (4.4.6) 对 Bell 元亦成立, 因此 Bell 元也是 C^1 元.

4.4.3 Hsich-Clough-Tocher(HCT) 三角形元

上述二个例子 (Argyris 元和 Bell 元) 给出了 C^1 元, 同时可以证明, 关于任一剖分 $\mathcal{J}_h$ 的分片多项式函数 v_h, 若 $v_h\in C^1(\bar{\Omega})$, 则 v_h 在每个单元上 $v_h|_T$ 至少是一个 5 次多项式 (见文献 [67]). 即对于四阶问题的协调元, 在每个单元上 (作为一个多项式) 至少有 21 个节点参数 (对 Argyris 元) 或 18 个节点参数 (对 Bell 元). 现在给出另一种 C^1 元 v_h, 使得在每个单元 T 上的节点参数尽可能地少, 但此时 $v_h|_T$ 在 T 上不是一个多项式, 而是一个分片多项式. 此种有限元称为复合有限元, 亦称宏元 (macro-element).

HCT 三角形元即为一种宏元, 其定义如下: 设 T 是单元三角形, A 是 T 中任一点, 将 T 分成三个三角形 $T_i(1\le i\le 3)$(见图 4.4.4), 在 T 上构造一个分片 3 次多项式 $p: p|_{T_i}\in P_3(T_i), 1\le i\le 3$, 同时 $p\in C^1(T)$, 插值数据如下:

$$\begin{cases} p(A_i)=u_i, \quad 1\le i\le 3, \\ \partial_1 p(A_i)=u_{1,i},\ \partial_2 p(A_i)=u_{2,i},\ \partial_\nu p(B_i)=u_{\nu,i},\ 1\le i\le 3, \end{cases} \tag{4.4.7}$$

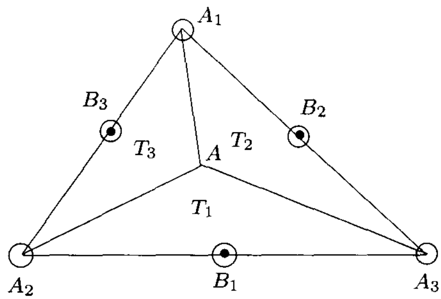

图 4.4.4

其中 B_i 是顶点 A_i 对边的中点, $\boldsymbol{\nu}$ 是其外法向. 我们证明上述在 T 上的分片 3 次插值多项式存在唯一. 首先检查一下 p 的自由度个数与插值条件数是否一致. 显然 p 的自由度个数为 30 个 (因为 $\dim P_3(T_i)=10$), 而插值数据 (4.4.7) 共有 21 个条件 (在点 A_1 处的插值数据 $u_1, u_{1,1}$ 及 $u_{2,1}$ 提供了 $p|_{T_2}$ 及 $p|_{T_3}$ 在 A_1 处共 6 个条件, 因此三个顶点 $A_i, i=1,2,3$ 的插值数据, 提供了 18 个条件, 再加上 B_i 处的插值数据提供 3 个条件, 因此总共为 21 个条件); 而条件 $p\in C^1(T)$ 提供了另外 9 个条件: 在点 A 处 p 及 $\partial_1 p$, $\partial_2 p$ 连续 (注意这只要 $p|_{T_1}(A)=p|_{T_2}(A)=p|_{T_3}(A)$, $\partial_1 p|_{T_1}(A)=\partial_1 p|_{T_2}(A)=\partial_1 p|_{T_3}(A)$ 及 $\partial_2 p|_{T_1}(A)=\partial_2 p|_{T_2}(A)=\partial_2 p|_{T_3}(A)$) 共有 6 个条件, 以及在 $\overline{AA_i}$ 中点处的法向导数连续有 3 个条件. 这样插值条件 (4.4.7) 及 $p\in C^1(T)$ 的条件个数亦为 30 个. 因此只要证明当

$$p(A_i)=\partial_1 p(A_i)=\partial_2 p(A_i)=\partial_\nu p(B_i)=0,\quad 1\le i\le 3$$

时, $p=0$ 即可.

令 $\mu_1\in P_1(T_1): \mu_1(A)=1, \mu_1(A_2)=\mu_1(A_3)=0$. 注意到 $p|_{T_1}\in P_3(T_1)$, 它在 $\overline{A_2A_3}$ 上为 0(因为它在 A_2, A_3 处为 0, 且导数在 A_2, A_3 处亦为 0, 则一元 3 次多项式为 0), 而 $\mathrm{grad}p|_{T_1}\in(P_2(T_1))^2$, 它在 $\overline{A_2A_3}$ 上亦为 0(因为在 A_2, A_3 处为 0 且在 B_1 处亦为 0). 因此

$$p|_{T_1}=\gamma_1\mu_1^2,\quad \gamma_1\in P_1(T_1).$$

同样地

$$p|_{T_2}=\gamma_2\mu_2^2,\quad p|_{T_3}=\gamma_3\mu_3^2,\quad \gamma_2\in P_1(T_2),\quad \gamma_3\in P_1(T_3).$$

令 μ 是 T 上分片一次函数: $\mu|_{T_i}=\mu_i$, 则 $\mu\in C^0(T)$; 令 γ 是 T 上分片一次函数: $\gamma|_{T_i}=\gamma_i$. 由于 $\mu\in C^0(T)$, $p\in C^0(T)$, 故 $\gamma\in C^0(T)$(且注意 $\mu\neq 0$ 在 $\overset{\circ}{T}$-T 的内部). 现考察

$$\mathrm{grad}(p|_{T_1})=2\gamma_1\mu_1\mathrm{grad}\mu_1+\mu_1^2\mathrm{grad}\gamma_1,$$

$$\mathrm{grad}(p|_{T_2})=2\gamma_2\mu_2\mathrm{grad}\mu_2+\mu_2^2\mathrm{grad}\gamma_2,$$

由于 $p\in C^1(T)$, 因而

$$\mathrm{grad}(p|_{T_1})|_{\overline{AA_3}}=\mathrm{grad}(p|_{T_2})|_{\overline{AA_3}},$$

而在 AA_3 上, $\gamma_1=\gamma_2=\gamma;\mu_1=\mu_2=\mu$, 且 $\mu\neq 0$, 故

$$2\gamma\mathrm{grad}(\mu_2-\mu_1)+\mu\mathrm{grad}(\gamma_2-\gamma_1)=0\ \text{ 在 } \overline{AA_3}\text{ 上}.$$

在点 A_3 处, $\mu(A_3)=0$, 而 $\mathrm{grad}(\mu_2-\mu_1)(A_3)\neq 0$, 则由上式可知 $\gamma(A_3)=\gamma_1(A_3)=0$. 类似地有 $\gamma_1(A_2)=0$, 由此 $\gamma_1\in P_1(T_1)$ 为

$$\gamma_1=c_1\mu_1,\quad c_1=\text{const}.$$

而由于 $\gamma\in C^0(T)$, 故

$$\gamma(A)=\gamma_i(A)=c_i,\quad 1\leq i\leq 3,$$

因此 $c_i=c, i=1,2,3$, 则

$$p|_{T_1}=c\mu_1^3,$$

同样有

$$p|_{T_i}=c\mu_i^3,\quad 1\leq i\leq 3.$$

因此

$$\mathrm{grad}p|_{T_i}=3c\mu_i^2\mathrm{grad}\mu_i,\quad 1\leq i\leq 3.$$

这样在 $\overline{AA_3}$ 上, 有

$$3c\mu_1^2\text{grad}\mu_1 = 3c\mu_2^2\text{grad}\mu_2.$$

由于在 $\overline{AA_3}$ 上, $\mu_1 = \mu_2 = \mu \neq 0$, 而 $\text{grad}(\mu_1 - \mu_2) \neq 0$, 故 $c = 0$. 证毕.

至于 HCT 元是 C^1 元的证明, 完全相同于对 Argyris 元的情形.

4.5 记号及一般概念

本节对上述有限元空间给出一般性的描述.

1° 有限元空间 X_h 由一个三元组 (T, P, Σ) 确定.

设 $\mathcal{J}_h$ 是多边形区域的一个剖分, $h > 0$ 为参数定义如下:

$$h = \max_{T \in \mathcal{J}_h} h_T, \quad h_T = \text{diam}T,$$

$T \in \mathcal{J}_h$ 是单元; P 是定义在 T 上的给定类型, 给定次数的多项式空间; Σ 是唯一地确定 T 上插值多项式 $p \in P$ 的插值数据.

例如对 Lagrange 三角形元而言,

线性元: $\Sigma = \{p(A_i), 1 \le i \le 3\}$, A_i 是 T 的三顶点;

2 次元: $\Sigma = \{p(A_i), 1 \le i \le 3; p(A_{ij}), 1 \le i < j \le 3\}$, A_{ij} 是边 $\overline{A_iA_j}$ 的中点;

3 次元: $\Sigma = \{p(A_i), 1 \le i \le 3; p(A_{llm}), 1 \le l, m \le 3; p(A_0)\}$, A_{llm} 是边 $\overline{A_lA_m}$ 上三分点, A_0 是 T 的重心.

对于 Hermite 三角形 3 次元而言,

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{\partial^\alpha p(A_i),\ |\alpha| \le 1,\ 1 \le i \le 3,\ p(A_0)\} \\ &= \{p(A_i),\ 1 \le i \le 3;\ p(A_0); Dp(A_i)\cdot(A_j - A_i),\ 1 \le i \ne j \le 3\},\end{aligned}$$

一般地

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&p(A_i^{(0)}), Dp(A_i^{(1)})\xi_{ik}^{(1)}, D^2p(A_i^{(2)})(\xi_{ik}^{(2)}, \xi_{il}^{(2)}), \\ &1 \le i \le 3, 1 \le k, l \ne i \le 3\}.\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

定义 4.5.1 称 $\sqcap$ 是 P 插值算子, 如果对于 T 上足够光滑的函数 v, 则 $\sqcap v \in P$ 由 Σ 唯一地确定. 特别地, 若 $p \in P$, 则 $\sqcap p = p$.

2° 有限单元的仿射等价.

设有两个平面三角形 T 及 $\hat{T}$, 则存在唯一的可逆仿射变换 $F_T : \hat{T} \to T$, 使得 $F_T(\hat{A}_i) = A_i$(见图 4.5.1), 此即以 $\hat{A}_i$ 为节点, A_i 为数据的向量值一次插值, 当 $\hat{A}_i$ 和 $A_i(1 \le i \le 3)$ 不在同一直线上 (即 $\hat{T}$ 及 T 均为真正三角形) 时, F_T 为可逆的. 因此它可表示成, $\forall \hat{x} \in \hat{T}$,

$$F_T(\hat{x}) = B_T \hat{x} + b_T = x \in T,$$

其中 $B_T \in \mathbf{R}^{2\times 2}$ 为可逆矩阵, $b_T \in \mathbf{R}^2$; 逆变换 $F_T^{-1} : T \to \hat{T}$. F_T 具有比例性质:

$$F_T(\hat{A}_{ij}) = A_{ij}, \quad F_T(\hat{A}_{llm}) = A_{llm}.$$

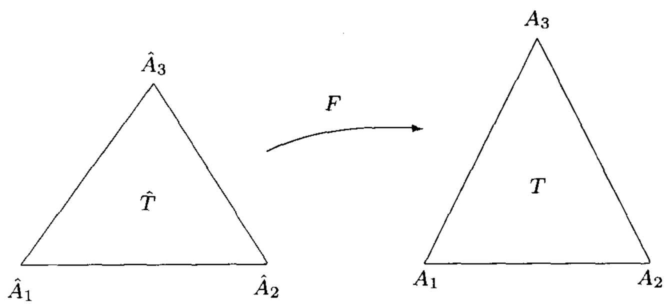

图 4.5.1

定义 4.5.2 称两个有限元 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ 和 (T, P, Σ) 仿射等价, 如果存在一个可逆仿射变换

$$F : \hat{T} \to T,$$

$$F(\hat{x}) = B\hat{x} + b = x \in T, \quad \forall \hat{x} \in \hat{T},$$

满足下述条件

$$\begin{cases} T = F(\hat{T}), \\ P = \{p : T \to \mathbf{R} | p = \hat{p} \circ F^{-1},\ \hat{p} \in \hat{P}\} \\ A_i^{(r)} = F(\hat{A}_i^{(r)}), \quad r = 0, 1, 2, \\ \xi_{ik}^{(1)} = B\hat{\xi}_{ik}^{(1)}, \quad \xi_{ik}^{(2)} = B\hat{\xi}_{ik}^{(2)}. \end{cases}$$

容易证明, 任二个同类 Lagrange 元是仿射等价的. 下面考察两个三角形上同类 Hermite 元的仿射等价性. 设此二个有限元为 (T, P, Σ) 和 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, 其中

$$\begin{aligned} \Sigma = \ & \{p(A_i), 1 \le i \le 3; D_x p(A_i) \cdot (A_j - A_i), j \ne i; \\ & D_x^2 p(A_i) \cdot ((A_j - A_i), (A_k - A_i)), j, k \ne i\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma} = \ & \{\hat{p}(\hat{A}_i), 1 \le i \le 3; D_{\hat{x}} \hat{p}(\hat{A}_i) \cdot (\hat{A}_j - \hat{A}_i), j \ne i; \\ & D_{\hat{x}}^2 \hat{p}(\hat{A}_i) \cdot ((\hat{A}_j - \hat{A}_i), (\hat{A}_k - \hat{A}_i)), j, k \ne i\}. \end{aligned}$$

令 $F : \hat{T} \to T$ 如下: $\forall \hat{x} \in \hat{T}$,

$$x = F(\hat{x}) = B\hat{x} + b \in T,$$

则

(i) $p(A_i) = p(F(\hat{A}_i)) = p \circ F(\hat{A}_i) \doteq \hat{p}(\hat{A}_i)$,

(ii) $A_j - A_i = F(\hat{A}_j) - F(\hat{A}_i) = B(\hat{A}_j - \hat{A}_i)$,

(iii) $D_x = \left(\dfrac{\partial}{\partial_{x_1}}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}\right) = \left(\dfrac{\partial}{\partial \hat{x}_1}, \dfrac{\partial}{\partial \hat{x}_2}\right) \cdot B^{-1} = D_{\hat{x}} \cdot B^{-1}$,

从而

$$\begin{aligned} D_x p(A_i) \cdot (A_j - A_i) &= D_{\hat{x}} B^{-1} p(F(\hat{A}_i)) \cdot B(\hat{A}_j - \hat{A}_i) \\ &= D_{\hat{x}} \hat{p}(\hat{A}_i) \cdot (\hat{A}_j - \hat{A}_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & D_x^2 p(A_i) \cdot ((A_j - A_i), (A_k - A_i)) \\ = \ & D_{\hat{x}}^2 B^{-2} \hat{p}(\hat{A}_i)(B(\hat{A}_j - \hat{A}_i), B(\hat{A}_k - \hat{A}_i)) \\ = \ & D_{\hat{x}}^2 \hat{p}(\hat{A}_i)((\hat{A}_j - \hat{A}_i), (\hat{A}_k - \hat{A}_i)). \end{aligned}$$

因此它们仿射等价.

但对于 Σ 中含有法向导数的有限元 (比如 Argyris 元), 一般地是不等价的, 因为仿射变换不保持方向. 考察下述情形 (见图 4.5.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu}p(A_{ij}) &= D_x p(A_{ij})\cdot\boldsymbol{\nu} = D_{\hat{x}}\hat{p}(\hat{A}_{ij})\cdot B^{-1}\boldsymbol{\nu}\\ &\neq D_{\hat{x}}\hat{p}(\hat{A}_{ij})\cdot\hat{\boldsymbol{\nu}}\ (\text{因为 } F^{-1}(\boldsymbol{\nu})\neq\boldsymbol{\nu}).\end{aligned}$$

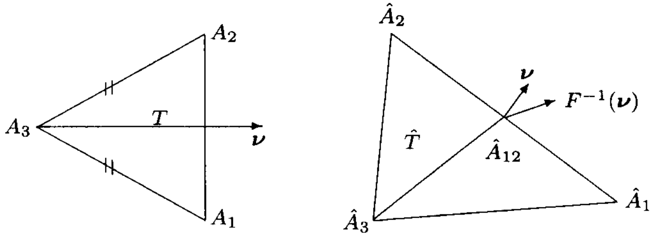

图 4.5.2

3° 仿射等价有限元族, P 插值算子的保持性.

定理 4.5.1 设 (T,P,Σ) 与 $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$ 仿射等价, $F(\hat{T})=T$, 则

(i) 如果 $\{\hat{p}_i\}$ 是 $\hat{p}$ 的基函数, 则 $\{p_i\}=\{\hat{p}_i\circ F^{-1}\}$ 是 P 的基函数,

(ii) 插值算子 $\sqcap$ 与 $\hat{\sqcap}$ 有关系

$$(\sqcap v)^{\wedge}=\hat{\sqcap}\hat{v},$$

即

$$(\sqcap v)^{\wedge}\doteq\sqcap v\circ F^{-1}=\hat{\sqcap}\hat{v}.$$

证明 以

$$\Sigma=\{p(A_i^{(0)});Dp(A_i^{(1)})\xi_{ik}^{(1)};D^2p(A_i^{(2)})(\xi_{ik}^{(2)},\xi_{il}^{(2)})\}$$

为例, 则 P 的插值为

$$\begin{aligned}\sqcap v = &\sum_i v(A_i^{(0)})p_i^{(0)}(x)+\sum_{k\neq i}\{Dp(A_i^{(1)})\xi_{ik}^{(1)}\}p_{ik}^{(1)}(x)\\ &+\sum_{\substack{i,k,l\\k,l\neq i}}\{D^2p(A_i^{(2)})(\xi_{ik}^{(2)},\xi_{il}^{(2)})\}p_{i,k,l}^{(2)}(x).\end{aligned}$$

由仿射等价性:

$$\begin{aligned}
&v(A_i^{(0)}) = \hat{v}(A_i^{(0)}),\\
&D_x v(A_i^{(1)})\xi_{ik}^{(1)} = D_{\hat{x}}\hat{v}(\hat{A}_i^{(1)})\hat{\xi}_{ik}^{(1)},\\
&D_x^2 v(A_i^{(2)})(\xi_{ik}^{(2)}, \xi_{il}^{(2)}) = D_{\hat{x}}^2\hat{v}(\hat{A}_i^{(2)})(\hat{\xi}_{ik}^{(2)}, \hat{\xi}_{il}^{(2)}),
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\sqcap v(x)\\
= &\sum_i \hat{v}(\hat{A}_i^{(0)}) \cdot \hat{p}_i^{(0)} \circ F^{-1}(x) + \sum_{i\neq k}\{D_{\hat{x}}\hat{v}(\hat{A}_i^{(1)})\hat{\xi}_{ik}^{(1)}\}\hat{p}_{ik}^{(1)} \circ F^{-1}(x)\\
&+ \sum_{\substack{i,k,l\\k,l\neq i}} \{D_{\hat{x}}^2\hat{v}(\hat{A}_i^{(2)})(\hat{\xi}_{ik}^{(2)}, \hat{\xi}_{il}^{(2)})\}\hat{p}_{ikl}^{(2)} \circ F^{-1}(x).
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&(\sqcap v)^\wedge(\hat{x})\\
= &\sqcap v \circ (\hat{x})\\
= &\sum_i \hat{v}(\hat{A}_i^{(0)}) \cdot \hat{p}_i^{(0)}(\hat{x}) + \sum_{i\neq k}\{D_{\hat{x}}\hat{v}(\hat{A}_i^{(1)})\hat{\xi}_{ik}^{(1)}\}\hat{p}_{ik}^{(1)}(\hat{x})\\
&+ \sum_{\substack{i,k,l\\k,l\neq i}} \{D_{\hat{x}}^2\hat{v}(\hat{A}_i^{(2)})(\hat{\xi}_{ik}^{(2)}, \hat{\xi}_{il}^{(2)})\}\hat{p}_{ikl}^{(2)}(\hat{x}) = \hat{\sqcap}\hat{v}(\hat{x}).
\end{aligned}$$

称 $\{(T,P,\Sigma)\}_{T\in\mathcal{J}_h}$ 为仿射等价有限元族, 如果其中每个有限元 (T,P,Σ) 均与某一标准有限元 $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$ 仿射等价.

第 5 章　协调有限元方法的误差分析

本章考虑，当有限元空间 V_h 是原问题解空间 V 的子空间时，有限元方法的收敛性问题及误差估计.

5.1　收敛性的一般考虑

设原问题

$$\begin{cases} 求 u \in V, \quad 使得 \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in V, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

其中 V 是定义在区域 Ω 上的函数的 Banach 空间，双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 及泛函 $f \in V'$ 满足 Lax-Milgram 定理 1.1.3 的条件. 设 $\mathcal{T}_{h>0}$ 是区域 Ω 的一个剖分族，$h = \max_{T\in\mathcal{T}_h}(\mathrm{diam}T), V_h \subset V$ 是相应的有限元空间. 则离散的有限元逼近为

$$\begin{cases} 求 u_h \in V_h, \quad 使得 \\ a(u_h,v_h) = \langle f, v_h\rangle, \ \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{5.1.2}$$

下面考虑误差 $\|u-u_h\|_V$.

定理 5.1.1(Céa 引理)　设双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续且 V 椭圆的，则存在 $C = \mathrm{const} > 0$，使得

$$\|u-u_h\|_V \le C \inf_{v_h\in V_h} \|u-u_h\|_V, \tag{5.1.3}$$

其中 u, u_h 分别为原问题 (5.1.1) 和有限元离散问题 (5.1.2) 之解，$\|\cdot\|_V$ 表示 V 中的范数.

证明　首先给出协调有限元逼近 $(V_h \subset V)$ 的一个十分重要的性质:

$$a(u-u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5.1.4}$$

由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是连续且 V 椭圆的, 则存在 $M,\alpha = \text{const} > 0$, 使得 $\forall v_h \in V_h$,

$$\begin{aligned}\alpha\|u-u_h\|_V^2 &\le a(u-u_h,u-u_h)\\ &= a(u-u_h,u-v_h)+a(u-u_h,v_h-u_h)\\ &= a(u-u_h,u-v_h)\\ &\le M\|u-u_h\|_V\cdot\|u-v_h\|_V,\end{aligned}$$

由此即得

$$\|u-u_h\|_V \le \frac{M}{\alpha}\|u-v_h\|, \quad \forall v_h \in V_h, \tag{5.1.5}$$

定理得证.

注 5.1.1 当 $a(\cdot,\cdot)$ 对称时, 在空间 V 中引入内积 $[\cdot,\cdot]=a(\cdot,\cdot)$, 称为 a–内积. 此时 (5.1.4) 意味着 u_h 是 u 在 V_h 上的正交投影 (在 a–内积下). 从而

$$a(u-u_h,u-u_h) \le a(u-v_h,u-v_h), \quad \forall v_h \in V_h,$$

由此即有

$$\alpha\|u-u_h\|_V^2 \le M\|u-v_h\|_V^2, \quad \forall v_h \in V_h.$$

因此

$$\|u-u_h\|_V \le \left(\frac{M}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\|u-v_h\|_V, \quad \forall v_h \in V_h,$$

由于 $\alpha \le M$, 因此上述估计比 (5.1.5) 要更精确些.

由定理 5.1.1, 可见有限元的误差估计归结为插值误差估计, 这是因为

$$\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_V \le \|u-\sqcap_h u\|_V,$$

其中 $\sqcap_h : V \to V_h$ 的分片多项式插值算子.

以二阶问题为例, $V\subset H^1(\Omega)$, 则要估计

$$\|u-\sqcap_h u\|_{1,\Omega}^2 = \sum_T \|u-\sqcap_T u\|_{1,T}^2,$$

其中 $\sqcap_T u = \sqcap_h u|_T$. 考虑简单情形, 即 Ω 是多边形区域, 则 $\Omega = \cup_{T\in\mathcal{T}_h} T$. 此时 $\sqcap_T u$ 即是 u 在单元 T 上的插值. 因此问题归结为估计 $\|u - \sqcap_T u\|_{1,T}$. 下面给出估计 $\|u - \sqcap_T u\|_{1,T}$ 的步骤. 设 $\hat{T}$ 是标准单元 (亦称参考元), $F_T : \hat{T} \to T$ 的可逆仿射变换,

$$F_T(\hat{x}) = x \in T, \quad \forall \hat{x} \in \hat{T},$$

而 $\forall x \in T$,

$$v(x) = v(F_T(\hat{x})) = v \circ F(\hat{x}) \doteq \hat{v}(\hat{x}), \quad \hat{x} \in \hat{T},$$

以及

$$\sqcap_T u(x) = \sqcap_T u \circ F(\hat{x}) \doteq (\sqcap_T u)\hat{}(\hat{x}) = \hat{\sqcap}\hat{u}(\hat{x}).$$

然后分成三步:

(i) 将一般单元 T 上的插值误差 $\|u - \sqcap_T u\|_{1,T}$ 转化成标准单元 $\hat{T}$ 上的插值误差 $\|\hat{u} - \hat{\sqcap}\hat{u}\|_{1,\hat{T}}$;

(ii) 利用等价模定理 2.7.2, 建立标准单元 $\hat{T}$ 上的估计

$$\|\hat{u} - \hat{\sqcap}\hat{u}\|_{1,\hat{T}} \le C\|\hat{u}\|_{k+1,\hat{T}};$$

(iii) 将标准单元 $\hat{T}$ 上的范数 $\|\hat{u}\|_{k+1,\hat{T}}$ 转化成一般单元 T 上的范数 $\|u\|_{k+1,T}$.

上述 (i) 和 (iii) 步均依赖于仿射等价单元上 Sobolev 范数之间的关系.

5.2 Sobolev 空间中的分片多项式插值

5.2.1 仿射等价有限元之间的 Sobolev 半范数的关系

定理 5.2.1 设 Ω 和 $\hat{\Omega}$ 是仿射等价的, 即存在可逆仿射变换 $F: \hat{\Omega} \to \Omega$, 使得

$$F(\hat{x}) = B\hat{x} + b = x \in \Omega, \quad \forall \hat{x} \in \hat{\Omega}. \tag{5.2.1}$$

若 $v\in W^{m,p}(\Omega)$, 令

$$v(x)=v\circ F(\hat{x})\doteq\hat{v}(\hat{x}),\tag{5.2.2}$$

则

$$\hat{v}\in W^{m,p}(\hat{\Omega}).$$

且

$$|\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}}\le C\|B\|^m|\det B|^{-\frac{1}{p}}|v|_{m,p,\Omega}.\tag{5.2.3}$$

其中 $C=C(m,n)$ 为正常数, $\|B\|$ 是矩阵 B 的 Euclid 范数. 类似地

$$|v|_{m,p,\Omega}\le C\|B^{-1}\|^m|\det B|^{\frac{1}{p}}|\hat{v}|_{m,p,\hat{\Omega}}.\tag{5.2.4}$$

证明 由于 $C^m(\bar{\Omega})$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中稠密, 故只要对 $v\in C^m(\bar{\Omega})$ 证明即可. 当 $1\le p<\infty$ 时, 注意 1.3 节中多元函数微分学, 则有

$$\begin{aligned}
|\hat{v}|^p_{m,p,\hat{\Omega}}&=\int_{\hat{\Omega}}\sum_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha\hat{v}(\hat{x})|^p\mathrm{d}\hat{x}\\
&=\int_{\hat{\Omega}}\sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha\hat{v}(\hat{x})\cdot(e_{\alpha_1},\cdots,e_{\alpha_m})|^p\mathrm{d}\hat{x}\\
&\le\int_{\hat{\Omega}}\sum_{|\alpha|=m}\|D^m\hat{v}(\hat{x})\|^p\mathrm{d}\hat{x}\\
&=C_1(m,n)\int_{\hat{\Omega}}\|D^m\hat{v}(\hat{x})\|^p\mathrm{d}\hat{x}\\
&\le C_1(m,n)\|B\|^{mp}\int_\Omega\|D^mv(x)\|^p(\det B^{-1})\mathrm{d}x\\
&\le C_1(m,n)\|B\|^{mp}(\det B^{-1})\cdot C_2(m,n)\int_\Omega\max_{|\alpha|=m}|\partial^\alpha v(x)|^p\mathrm{d}x\\
&\le C(m,n)\|B\|^{mp}(\det B^{-1})|v|^p_{m,p,\Omega}.
\end{aligned}$$

当 $p=\infty$ 时,

$$\begin{aligned}
|\hat{v}|_{m,\infty,\hat{\Omega}} &= \sup_{\hat{x}\in\hat{\Omega}} \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha \hat{v}(\hat{x})| \\
&= \sup_{\hat{x}\in\hat{\Omega}} \max_{|\alpha|=m} |D^m \hat{v}(\hat{x}) \cdot (e_{\alpha_1}, \cdots, e_{\alpha_m})| \\
&\le \sup_{\hat{x}\in\hat{\Omega}} \|D^m \hat{v}(\hat{x})\| \\
&\le \|B\|^m \sup_{x\in\Omega} \|D^m v(x)\| \\
&\le C'(m,n)\|B\|^m \sup_{x\in\Omega} \max_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha v(x)\| \\
&\le C(m,n)\|B\|^m \cdot |v|_{m,\infty,\Omega}.
\end{aligned}$$

下面利用 Ω 及 $\hat{\Omega}$ 的几何数据来估计 $\|B\|$ 及 $\|B^{-1}\|$, 而

$$\det B = \frac{|\Omega|}{|\hat{\Omega}|}, \tag{5.2.5}$$

此即 F 的 Jacobi 矩阵的行列式.

定理 5.2.2

$$\|B\| \le \frac{h}{\hat{\varrho}}, \ \|B^{-1}\| \le \frac{\hat{h}}{\varrho}, \tag{5.2.6}$$

其中

$$\begin{cases} h = \operatorname{diam}\Omega, & \hat{h} = \operatorname{diam}\hat{\Omega}, \\ \rho = \sup\{\operatorname{diam} S : \text{球} S \subset \Omega\}, & \hat{\rho} = \sup\{\operatorname{diam}\hat{S} : \text{球}\hat{S} \subset \hat{\Omega}\}. \end{cases} \tag{5.2.7}$$

证明 $\|B\| = \sup\limits_{\|\xi'\|=1} \|B\xi'\| = \sup\limits_{\|\xi\|=\hat{\varrho}} \dfrac{\|B\xi\|}{\hat{\varrho}}$ $(\xi = \hat{\varrho}\xi')$.

对任给定 $\xi : \|\xi\| = \hat{\varrho}$, 存在 $\hat{y}, \hat{z} \in \hat{\Omega}$, 使得

$$\xi = \hat{y} - \hat{z},$$

从而

$$B\xi = F(\hat{y}) - F(\hat{z}),$$

其中 $F(\hat{y}), F(\hat{z}) \in \Omega$, 则

$$\|B\xi\| = \|F(\hat{y}) - F(\hat{z})\| \leq h.$$

从而

$$\|B\| \leq \frac{h}{\hat{\varrho}}.$$

同样地

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\hat{h}}{\varrho}.$$

5.2.2 单元上插值误差估计

设算子 $\hat{\sqcap}$:

$$\hat{\sqcap} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}); W^{m,q}(\hat{\Omega})),$$

使得

$$\hat{\sqcap}\hat{p} = \hat{p}, \quad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{\Omega}), \tag{5.2.8}$$

则称 $\hat{\sqcap}$ 为保持多项式不变的算子. 显然, 若 $\hat{\sqcap}$ 是 Ω 上 k 次多项式插值算子, 即具有此性质.

定理 5.2.3 设

$$W^{k+1,p}(\hat{\Omega}) \hookrightarrow W^{m,q}(\hat{\Omega}),$$

且 $\hat{\sqcap}$ 是保持 k 次多项式不变的算子:

$$\begin{cases} \hat{\sqcap} \in \mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega}); W^{m,q}(\hat{\Omega})), \\ \hat{\sqcap}\hat{p} = \hat{p}, \qquad\qquad \forall \hat{p} \in P_k(\hat{\Omega}). \end{cases} \tag{5.2.9}$$

又设 Ω 与 $\hat{\Omega}$ 仿射等价, 且

$$(\sqcap_\Omega v)\hat{} = \hat{\sqcap}\hat{v}.$$

则

$$|v-\hat{\sqcap}_\Omega v|_{m,q,\Omega}\le C(\hat{\sqcap},\hat{\Omega})|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\frac{h^{k+1}}{\rho^m}|v|_{k+1,p,\Omega},\quad \forall v\in W^{k+1,p}(\Omega),\tag{5.2.10}$$

其中 $C(\hat{\sqcap},\hat{\Omega})$ 是只与 $\hat{\sqcap}$ 及 $\hat{\Omega}$ 有关的常数.

证明 由定理 5.2.1 知

$$|v-\sqcap_\Omega v|_{m,q,\Omega}\le C(m,n)\|B^{-1}\|^m|\det B|^{\frac{1}{q}}|\hat{v}-(\sqcap_\Omega v)^\wedge|_{m,q,\hat{\Omega}},$$

而由定理假设 $\forall\hat{p}\in P_k(\hat{\Omega})$,

$$\hat{v}-(\sqcap_\Omega v)^\wedge=\hat{v}-\hat{\sqcap}\hat{v}=(I-\hat{\sqcap})\hat{v}=(I-\hat{\sqcap})(\hat{v}+\hat{p}),$$

从而

$$\begin{aligned}|\hat{v}-(\sqcap_\Omega v)^\wedge|_{m,q,\hat{\Omega}}&\le\|I-\hat{\sqcap}\|_{\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{\Omega});W^{m,q}(\hat{\Omega}))}\\&\quad\cdot\inf_{\hat{p}\in P_k(\hat{\Omega})}\|\hat{v}+\hat{p}\|_{k+1,p,\hat{\Omega}}\\&\le C(\hat{\sqcap},\hat{\Omega})|\hat{v}|_{k+1,p,\hat{\Omega}},\end{aligned}$$

最后的不等式利用了商空间等价模定理 2.7.2. 再利用定理 5.2.1 和定理 5.2.2 得

$$\begin{aligned}&|v-\sqcap_\Omega v|_{m,q,\Omega}\\\le{}& C(\hat{\sqcap},\hat{\Omega};m,n)\|B^{-1}\|^m|\det B|^{\frac{1}{q}}\|B\|^{k+1}|\det B|^{-\frac{1}{p}}\cdot|v|_{k+1,p,\Omega}\\\le{}& C(\hat{\sqcap},\hat{\Omega};m,n)|\Omega|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\frac{h^{k+1}}{\rho^m}|v|_{k+1,p,\Omega}.\end{aligned}$$

由上述定理可得一般单元 $T\in\mathcal{T}_h$ 上的插值误差估计.

定理 5.2.4 设 $(\hat{T},\hat{p},\hat{\Sigma})$ 是参考有限元, 且

$$\begin{cases}W^{k+1,p}(\hat{T})\hookrightarrow C^s(\hat{T}), & s:\hat{\Sigma}\text{中出现的导数最高阶},\\W^{k+1,p}(\hat{T})\hookrightarrow W^{m,q}(\hat{T}),\\P_k(\hat{T})\subset\hat{P}\subset W^{m,q}(\hat{T}).\end{cases}$$

又设 $\{(T,P,\Sigma)\}_{T\in\mathcal{T}_h}$ 是仿射等价有限元族, 则

$$|v-\sqcap_T v|_{m,q,T}\le C|T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\frac{h_T^{k+1}}{\rho_T^m}|v|_{k+1,p,T},\quad \forall v\in W^{k+1,p}(T),\tag{5.2.11}$$

其中 $\sqcap_T v$ 是 v 在 T 上的 P 插值,

$$C=C(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma}),\quad h_T=\mathrm{diam}T,\quad \rho_T=\sup\{\mathrm{diam}S:\text{球}S\subset T\}.$$

证明 直接应用定理 5.2.3, 只要证明

$$\hat{\sqcap}\in\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{T});W^{m,q}(\hat{T}))$$

以及

$$\hat{\sqcap}\hat{p}=\hat{p},\qquad \forall\hat{p}\in P_k(\hat{T}).$$

首先由于 $P_k(\hat{T})\subset\hat{P}$, 而 $\hat{\sqcap}\hat{p}=\hat{p},\quad\forall\hat{p}\in\hat{P}$, 因此显然有

$$\hat{\sqcap}\hat{p}=\hat{p},\qquad \forall\hat{p}\in P_k(\hat{T}).$$

现证 $\hat{\sqcap}\in\mathcal{L}(W^{k+1,p}(\hat{T});W^{m,q}(\hat{T}))$, 为确定计, 令 $s=1$,

$$\hat{\Sigma}=\{\hat{p}(\hat{A}_i^{(0)},D\hat{p}(\hat{A}_i^{(1)})\hat{\xi}_{ik}^{(1)},1\le i\le 3\}$$

(比如完全或不完全 3 次 Hermit 元). 设 $\hat{P}$– 插值基函数:

$$\hat{p}_i^{(0)}(\hat{x}),\hat{p}_{ik}^{(1)}(\hat{x}),\qquad 1\le i\ne k\le 3.$$

则 $\forall\hat{v}\in W^{k+1,p}(\hat{T})$,

$$\hat{\sqcap}\hat{v}=\sum_i\hat{v}(\hat{A}_i^{(0)})\hat{p}_i^{(0)}(\hat{x})+\sum_{i,k}\{D\hat{v}(\hat{A}_i^{(1)})\hat{\xi}_{ik}^{(1)}\}\hat{p}_{ik}^{(1)}(\hat{x}).$$

从而

$$\begin{aligned}\|\hat{\sqcap}\hat{v}\|_{m,q,\hat{T}}&\le\sum_i|\hat{v}(\hat{A}_i^{(0)})|\cdot\|\hat{p}_i^{(0)}\|_{m,q,\hat{T}}\\&\quad+\sum_{i,k}|D\hat{v}(\hat{A}_i^{(1)})\hat{\xi}_{ik}^{(1)}|\cdot\|\hat{p}_{ik}^{(1)}\|_{m,q,\hat{T}}\\&\le C(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})\cdot\|\hat{v}\|_{1,\infty,\hat{T}}\\&\le\hat{C}\|\hat{v}\|_{k+1,P,\hat{T}},\end{aligned}$$

这是因为 $W^{k+1,p}(\hat{T}) \hookrightarrow C^1(\hat{T})$. 而对于仿射等价有限元有

$$(\Pi_T v)^\wedge = \hat{\Pi}\hat{v}.$$

这样, 由定理 5.2.3 即得本定理的证明.

剖分 $\mathcal{T}_h$ 称为拟正则的, 如果存在 $\sigma = \mathrm{const} > 0$, 使得

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \qquad \forall T \in \mathcal{T}_h, h > 0, h \to 0. \tag{5.2.12}$$

定理 5.2.5 在定理 5.2.4 的假设之下, 且剖分是拟正则的, 则有下述插值误差估计

$$|v - \Pi_T v|_{m,q,T} \leq \hat{C} h_T^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})} \cdot h_T^{k+1-m} |v|_{k+1,p,T}. \tag{5.2.13}$$

5.3 多边形区域上二阶问题的有限元误差

5.3.1 误差估计

本节建立二阶问题协调有限元方法的误差的 H^1 模 (等价于能量模) 估计.

二阶问题的解空间 V:

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega).$$

下面列出上一节插值误差估计及 Céa 引理所应满足的条件:

(H1) 剖分 $(\mathcal{T}_h)_h$ 是拟正则的, 即

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma = \mathrm{const} > 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, h > 0, h \to 0;$$

(H2) 有限元族 $\{(T, P_T, \Sigma_T)\}_{T\in\mathcal{T}_h, h>0}$ 仿射等价于一个参考元 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$;

(H3) $\{(T, P_T, \Sigma_T)\}_{T\in\mathcal{T}_h, h>0}$ 是 C^0 类, 即协调元.

现在给出 L^2 下 Sobolev 范数的误差估计.

定理 5.3.1 设条件 (H1)~(H3) 满足, 且

$$P_k(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^l(\hat{T}), \quad H^{k+1}(\hat{T}) \hookrightarrow C^s(\hat{T}),$$

其中 $0 \le l \le k, s$ 是 $\hat{\Sigma}$ 中出现的导数最高阶, 则 $\forall v \in H^{k+1}(\Omega) \cap V$,

$$\begin{cases} \|v - \sqcap_h v\|_{m,\Omega} \le Ch^{k+1-m}|v|_{k+1,\Omega}, & 0 \le m \le \min(1,l), \\ (\sum_T \|v - \sqcap_T v\|_{m,T}^2)^{\frac{1}{2}} \le Ch^{k+1-m}|v|_{k+1,\Omega}, & 2 \le m \le \min(k+1,l), \end{cases} \tag{5.3.1}$$

其中 $\sqcap_h v$ 是 v 在 V_h 中的分片插值.

证明 由定理 5.2.5 中, 令 $p = q = 2$,

$$\|v - \sqcap_T v\|_{m,T} \le Ch_T^{k+1-m}|v|_{k+1,T}, \quad 0 \le m \le \min(k+1,l),$$

这是由于 $\hat{P} \subset H^l(\hat{T}), \sqcap_T v = \sqcap_h v \mid_T \in H^l(T)$, 且 $v \in H^{k+1}(\Omega)$. 因此

$$\begin{aligned} \left(\sum_T \|v - \sqcap_T v\|_{m,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} &\le Ch^{k+1-m}\left(\sum_T |v|_{k+1,T}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= Ch^{k+1-m}|v|_{k+1,\Omega}. \end{aligned}$$

而当 $0 \le m \le \min(1,l)$ 时, 上式左边即可写成

$$\|v - \sqcap_h v\|_{m,\Omega}.$$

由此定理 $(l=1)$ 及 Céa 引理, 即可得到二阶问题协调元方法的误差估计.

定理 5.3.2 当 $u \in H^{k+1}(\Omega) \cap v$, 且定理 5.3.1 的条件成立, 则

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \le Ch^k|u|_{k+1,\Omega}. \tag{5.3.2}$$

5.3.2 低模估计

考虑二阶问题, 设 $f \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} \text{使} \quad u \in V, \quad \text{使得} \\ a(u,v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{5.3.3}$$

其中 $H_0^1(\Omega)\subset V\subset H^1(\Omega)$, 双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 满足 Lax-Milgram 定理的条件. 其协调有限元逼近为 $V_h\subset V$,

$$\begin{cases}\text{求}u_h\in V_h, \quad \text{使得}\\ a(u_h,v_h)=\langle f,v_h\rangle, \forall v_h\in V_h.\end{cases}\tag{5.3.4}$$

在上述定理 5.3.2 的条件下, 已得到误差能量模的 $O(h^k)$ 阶估计, 现在的问题是如何改进误差的低模的估计阶.

(i) L^2 模估计

定理 5.3.3 (Aubin-Nitsche 引理) 设 u 及 u_h 分别为问题 (5.3.3) 及 (5.3.4) 之解, 则存在 $C=\text{const}>0$, 使得

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}\le C\|u-u_h\|_{1,\Omega}\sup_{g\in L^2(\Omega)}\left\{\frac{1}{\|g\|_{0,\Omega}}\inf_{\varphi_h\in V_h}\|\varphi_g-\varphi_h\|_{1,\Omega}\right\},\tag{5.3.5}$$

其中, 对任给定 $g\in L^2(\Omega),\varphi_g\in V$, 使得

$$a(v,\varphi_g)=\langle g,v\rangle,\quad \forall v\in V.\tag{5.3.6}$$

即 φ_g 是以 g 为右端项, 问题 (5.3.3) 的共轭问题的解.

证明 注意到

$$\|u-u_h\|_{0,\Omega}=\sup_{g\in L^2(\Omega)}\frac{|(u-u_h,g)|}{\|g\|_{0,\Omega}}.\tag{5.3.7}$$

现考虑问题 (5.3.6) 的有限元逼近: $(\varphi_g)_h\in V_h$, 使得

$$a(v_h,(\varphi_g)_h)=\langle g,v_h\rangle,\quad \forall v_h\in V_h.\tag{5.3.8}$$

则由 (5.3.6) 和 (5.3.8) 可见,

$$\begin{aligned}(g,u-u_h)&=a(u,\varphi_g)-a(u_h,(\varphi_g)_h)\\&=a(u-u_h,\varphi_g-(\varphi_g)_h)\\&\quad+\{a(u_h,\varphi_g)+a(u,(\varphi_g)_h)-2a(u_h,(\varphi_g)_h)\},\end{aligned}$$

而上式右端的 $\{\cdots\}$ 可写成

$$a(u_h, \varphi_g - (\varphi_g)_h) + a(u - u_h, (\varphi_g)_h) = 0,$$

这是因为 $(\varphi_g)_h$ 是问题 (5.3.6) 的协调有限元逼近, 而 u_h 是问题 (5.3.3) 的协调有限元逼近. 从而

$$\begin{aligned}|(g, u - u_h)| &\le M\|u - u_h\|_{1,\Omega} \cdot \|\varphi_g - (\varphi_g)_h\|_{1,\Omega} \\ &\le C\|u - u_h\|_{1,\Omega} \cdot \inf_{\varphi_h \in V_h} \|\varphi_g - \varphi_h\|_{1,\Omega},\end{aligned}$$

代入 (5.3.7) 即得证明.

为了给出问题 (5.3.3) 和 (5.3.4) 的误差的 L^2 模估计, 还需要二阶问题解的正则性估计 (见文献 [39]). 若 $f \in L^2(\Omega), g \in L^2(\Omega)$, 则问题 (5.3.3) 和 (5.3.6) 的解 $u, \varphi_g \in V \cap H^2(\Omega)$, 且

$$\|u\|_{2,\Omega} \le C\|f\|_{0,\Omega}, \quad \|\varphi\|_{2,\Omega} \le C\|g\|_{0,\Omega}. \tag{5.3.9}$$

定理 5.3.4 在定理 5.3.1 的条件下, 成立下述误差估计

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le Ch\|u - u_h\|_{1,\Omega}. \tag{5.3.10}$$

证明 由定理 5.3.1 及正则性 (5.3.9) 可见

$$\|\varphi_g - (\varphi_g)_h\|_{1,\Omega} \le Ch\|\varphi_g\|_{2,\Omega} \le Ch\|g\|_{0,\Omega}.$$

再由定理 5.3.3 即得证明.

特别地, 若 $u \in V \cap H^{k+1}(\Omega)$, 则

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \le Ch^{k+1}|u|_{k+1,\Omega}. \tag{5.3.11}$$

(ii) $H^{-l}(l > 0$ 整数) 模估计

首先类似于 (5.3.5) 有下述不等式

$$\|u - u_h\|_{-l,\Omega} \le C\|u - u_h\|_{1,\Omega} \sup_{w \in H_0^l(\Omega)} \left\{\frac{1}{\|w\|_{l,\Omega}} \inf_{w_h \in V_h} \|W - w_h\|_{1,\Omega}\right\}, \tag{5.3.12}$$

其中 W 是以 w 为右端项,(5.3.3) 的共轭问题的解: $W \in V$, 使得

$$a(v, W) = \langle v, w \rangle, \quad \forall v \in V. \tag{5.3.13}$$

事实上

$$\|u - u_h\|_{-l,\Omega} = \sup_{w \in H_0^l(\Omega)} \frac{|\langle u - u_h, w \rangle|}{\|w\|_{l,\Omega}}, \tag{5.3.14}$$

而令 W_h 是 (5.3.13) 的有限元解, 则

$$\begin{aligned}
\langle u - u_h, w \rangle &= a(u, W) - a(u_h, W_h) \\
&= a(u - u_h, W - W_h) \\
&\le M\|u - u_h\|_{1,\Omega} \cdot \|W - W_h\|_{1,\Omega} \\
&\le C\|u - u_h\|_{1,\Omega} \cdot \inf_{w_h \in V_h} \|W - w_h\|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

将此代入 (5.3.14) 即得证 (5.3.12).

由 (5.3.12) 及问题 (5.3.13) 的正则性估计:

$$\|W\|_{l+2,\Omega} \le C\|w\|_{l,\Omega},$$

即可得

$$\begin{aligned}
\inf_{w_h \in V_h} \|W - w_h\|_{1,\Omega} &\le \|W - \sqcap_h W\|_{1,\Omega} \\
&\le Ch^{l+1}|W|_{s+2,\Omega} \\
&\le Ch^{l+1}\|w\|_{s,\Omega},
\end{aligned}$$

将此代入 (5.3.12) 即可得

$$\|u - u_h\|_{-l,\Omega} \le Ch^{l+1}\|u - u_h\|_{1,\Omega}. \tag{5.3.15}$$

5.3.3 非光滑解的收敛性

上述误差估计中, 要求原问题之解 $u \in H^{k+1}(\Omega)(k \le 1)$, 且 $H^{k+1}(\hat{T}) \hookrightarrow C^s(\hat{T})\left(\text{按嵌入定理: } k > \frac{n}{2} - 1 + s\right)$. 现在的问题是,

当二阶问题之解 u 不具有这样的光滑性, 而只有 $u \in V \subset H^1(\Omega)$ 时, 这样按上述就得不到任何阶的误差估计. 那么是否仍保持有限元方法的收敛性? 回答是肯定的, 我们有如下定理.

定理 5.3.5 设 (H1)~(H3) 成立, $u \in V \subset H^1(\Omega)$(即原问题的广义解存在), 且

$$P_1(\hat{T}) \subset \hat{P} \subset H^1(\hat{T}),$$

则

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \to 0 \quad (h \to 0).$$

证明 由 $C^\infty(\bar{\Omega})$ 在 $H^1(\Omega)$ 中稠密以及 Céa 引理即可得证. 事实上, 对任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\widetilde{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$, 使得

$$\|u - \widetilde{u}\|_{1,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2C},$$

其中 $C = \text{const} > 0$, 为 Céa 引理中的常数, 由 Céa 引理

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{1,\Omega} &\le C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \\ &\le C\|u - \sqcap_h \widetilde{u}\|_{1,\Omega} \le C\{\|u - \widetilde{u}\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{u} - \sqcap_h \widetilde{u}\|_{1,\Omega}\} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + Ch|\widetilde{u}|_{2,\Omega} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \text{当} \quad 0 < h \le h_0,\end{aligned}$$

其中 h_0 足够小, 使得 $Ch_0|\widetilde{u}|_{2,\Omega} < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

5.4 有限元空间中的反不等式

对通常的函数, 低阶模可用高阶模来估计, 比如 Poincaré-Friedrichs 不等式:

$$\|v\|_{0,\Omega} \le C|v|_{1,\Omega}, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 \le C\left\{|v|_{1,\Omega}^2 + \left(\int_\Omega v\mathrm{d}x\right)^2\right\}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

但反之却不行, 即一般说来不能用低阶模去估计高阶模. 例如函数值本身一致有界的函数列, 其导数却可以无界. 然而对于有限元空

间中的函数, 即分片多项式函数, 却可以用低阶模去估计高阶模, 这是有限元空间中函数的特有性质, 很有用处, 即所谓反不等式.

5.4.1 单元上的反不等式

定理 5.4.1 设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的一个拟一致剖分, $P(T)$ 是定义在单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上的多项式空间, 则下述反不等式成立:

$$|p|_{1,T} \leq \frac{C}{h_T}\|p\|_{0,T}, \quad \forall p \in P(T), T \in \mathcal{T}_h, \tag{5.4.1}$$

$$\|p\|_{0,\infty,T} \leq Ch_T^{\frac{-n}{2}}\|p\|_{0,T}, \quad \forall p \in P(T), T \in \mathcal{T}_h, \tag{5.4.2}$$

其中 $C = \text{const} > 0$ 与 p 及 T 无关.

证明 令 $\hat{T}$ 是标准单元, 存在可逆仿射变换 $F : \hat{T} \to T, F(\hat{x}) = B\hat{x} + b = x \in T, \quad \forall \hat{x} \in \hat{T}$. 则由 5.2.1 节中半范数之间的关系:

$$\begin{aligned}|p|_{1,T} &\leq C\|B^{-1}\| \cdot (\det B)^{\frac{1}{2}} \cdot |\hat{p}|_{1,\hat{T}} \\ &\leq C\|B^{-1}\|(\det B)^{\frac{1}{2}}\|\hat{p}\|_{1,\hat{T}}.\end{aligned}$$

而由于 $\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}$ 和 $\|\hat{p}\|_{1,\hat{T}}$ 均是 $P(\hat{T})$ 上的范数, 而 $P(\hat{T})$ 是有限维空间, 因此上述二个范数等价, 即

$$\|\hat{p}\|_{1,\hat{T}} \leq \hat{C}\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}.$$

由此再利用 5.2.1 节中另一方向不等式

$$\begin{aligned}|p|_{1,T} &\leq C\|B^{-1}\|(\det B)^{\frac{1}{2}}\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \\ &\leq C\|B^{-1}\|(\det B)^{\frac{1}{2}}(\det B)^{\frac{-1}{2}}\|p\|_{0,T} \\ &\leq C\rho_T^{-1}\|p\|_{0,T} \leq Ch_T^{-1}\|p\|_{0,T},\end{aligned}$$

从而 (5.4.1) 证毕.

现在给出 (5.4.2) 的证明. 由 5.2.1 节中半范数之间的关系,

$$\|p\|_{0,\infty,T} \leq C\|\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}},$$

而在 $P(\hat{T})$ 上 $\|\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}}$ 与 $\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}$ 是等价范数, 从而

$$\|\hat{p}\|_{0,\infty,\hat{T}} \leq \hat{C}\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}.$$

因此, 再利用 5.2.1 节中半范数之间关系,

$$\begin{aligned}\|p\|_{0,\infty,T} &\leq C\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \leq C|\det B|^{\frac{-1}{2}}\|p\|_{0,T} \\ &\leq Ch_T^{\frac{-n}{2}}\|p\|_{0,T}.\end{aligned}$$

证毕.

5.4.2 反不等式

现在建立整个区域 Ω 上的反不等式, 为此需要下述 "反假设": 存在 $\nu = \text{const} > 0$, 使得

$$\frac{h}{h_T} \leq \nu, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, h \to 0, \tag{5.4.3}$$

其中

$$h_T = \text{diam}T, \quad h = \max_{T\in\mathcal{T}_h} h_T.$$

条件 (5.4.3) 亦称均匀剖分条件.

定理 5.4.2 若剖分族 $\{\mathcal{T}\}_{h>0}$ 满足拟一致条件 (H1)

$$h_T \leq \sigma\rho_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad h > 0,$$

仿射等价条件 (H2) 以及反假设 (5.4.3), 且 $l \leq m$,

$$\hat{P} \subset W^{l,r}(\hat{T}) \cap W^{m,q}(\hat{T}), \quad 1 \leq r, q \leq \infty,$$

则存在常数 $C = C(\sigma, \nu; l, r; m, q)$, 使得 $\forall v_h \in V_h$,

$$\left(\sum_T |v_h|_{m,q,T}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{C}{(h^n)^{\max(0,\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} h^{m-l}} \left(\sum_T |v_h|_{l,r,T}^r\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{5.4.4}$$

其中分片多项式空间 X_h 如下:

$$X_h = \{v_h : v_h\,|_T \in P_T \longleftrightarrow \hat{P} \subset W^{l,r}(\hat{T}) \cap W^{m,q}(\hat{T})\}. \tag{5.4.5}$$

几点说明.

(i) X_h 中 $P_T \longleftrightarrow \hat{P}$ 意义如下: 首先存在可逆仿射变换 $F_T: \hat{T} \to T$, 即

$$F_T(\hat{x}) = B_T\hat{x} + b_T = x \in T, \quad \forall \hat{x} \in \hat{T},$$

而且对任给定 $p \in P_T$,

$$p(x) = p \circ F_T(\hat{x}) \doteq \hat{p}(\hat{x}), \quad \hat{p} = p \circ F_T,$$

则 $\hat{p} \in \hat{P}$.

(ii) 定理中并不要求 $v_h \in W^{m,q}(\Omega) \cap W^{l,r}(\Omega)$, 因为 (5.4.4) 中半范数均是在单元 $T \in \mathcal{T}_h$ 上的. 因此反不等式并不要求有限元空间 X_h 是协调元空间.

(iii) 当 $q = \infty$ 时, 以 $\max\limits_T |v_h|_{m,\infty,T}$ 代替

$$\Big(\sum_T |v_h|^q_{m,q,T}\Big)^{\frac{1}{q}};$$

当 $r = \infty$ 时也类似.

(iv) 当 $r = q$ 时, 不等式 (5.4.4) 两边半模的降阶数等于其右端分母中 h 的阶数 $(m - l)$.

证明 (i) 首先建立单元上的反不等式. 设给定 $v_h \in X_h, T \in \mathcal{T}_h$, 由 5.2.1 节中半范数之间关系, 有

$$|\hat{v}|_{l,r,\hat{T}} \leq C\|B\|^l|\mathrm{det}B|^{\frac{-1}{r}}|v_h|_{l,r,T}, \tag{5.4.6}$$

及

$$|v_h|_{m,q,T} \leq C\|B^{-1}\|^m|\mathrm{det}B|^{\frac{1}{q}}|\hat{v}_h|_{m,q,\hat{T}}. \tag{5.4.7}$$

为建立半模 $|v_h|_{l,r,T}$ 与 $|v_h|_{m,q,T}$ 之间的关系, 只要建立 $|\hat{v}_h|_{l,r,\hat{T}}$ 与 $|\hat{v}_h|_{m,q,\hat{T}}$ 之间的关系. 为此, 定义

$$\hat{N} = \{\hat{p} \in \hat{P} : |\hat{p}|_{l,r,\hat{T}} = 0\}, \tag{5.4.8}$$

此即 $(l-1)$ 次多项式空间, 考虑商空间

$$\hat{P}/\hat{N}.$$

下面定义 $\hat{P}/\hat{N}$ 中的两种范数: $\forall\dot{\hat{p}}\in\hat{P}/\hat{N}$,

$$\|\dot{\hat{p}}\|_{l,r,\hat{T}} \doteq |\hat{p}|_{l,r,\hat{T}}, \tag{5.4.9}$$

显然, 是 $\hat{P}/\hat{N}$ 上的范数; 令

$$\|\dot{\hat{p}}\|_{m,q,\hat{T}} \doteq \inf_{\hat{s}\in\hat{N}} \|\hat{p}-\hat{s}\|_{m,q,\hat{T}}, \tag{5.4.10}$$

为验证 (5.4.10) 也是 $\dfrac{\hat{P}}{\hat{N}}$ 上的范数, 只需验证 $\forall\dot{\hat{p}}\in\frac{\hat{P}}{\hat{N}},\hat{p}\in\dot{\hat{p}}$, 若

$$\inf_{\hat{s}\in\hat{N}} \|\hat{p}-\hat{s}\|_{m,q,\hat{T}} = 0, \tag{5.4.11}$$

必有 $\hat{p}\in\hat{N}$. 事实上由 (5.4.11), 有

$$\begin{aligned}\inf_{\hat{s}\in\hat{N}}\{ & \|\hat{p}-\hat{s}\|_{0,q,\hat{T}}^q + |\hat{p}-\hat{s}|_{1,q,\hat{T}}^q + \cdots + |\hat{p}-\hat{s}|_{l-1,q,\hat{T}}^q + |\hat{p}|_{l,q,\hat{T}}^q \\ & + \cdots + |\hat{p}|_{m,q,\hat{T}}^q\} = 0,\end{aligned}$$

从而 $|\hat{p}|_{l,q,\hat{T}}^q = 0$, 即 $\hat{p}\in\hat{N}$. 由于 $\hat{P}/\hat{N}$ 是有限维的, 故上述两种范数 (5.4.9) 和 (5.4.10) 等价. 因此有

$$|\hat{p}|_{m,q,\hat{T}} \le \|\dot{\hat{p}}\|_{m,q,\hat{T}} \le \hat{C}|\hat{p}|_{0,r,\hat{T}}, \quad \forall\hat{p}\in\hat{P}, \tag{5.4.12}$$

令 $\hat{p}=\hat{v}_h=(v_h|_T)^\wedge$, 则

$$|\hat{v}_h|_{m,q,\hat{T}} \le \hat{C}|\hat{v}_h|_{l,r,\hat{T}}. \tag{5.4.13}$$

由此及上述半范数之间关系 (5.4.6) 及 (5.4.7), 可得

$$\begin{aligned}|v_h|_{m,q,T} &\le C(m,n)\|B_T^{-1}\|^m\cdot|\mathrm{det}B_T|^{\frac{1}{q}}|\hat{v}_h|_{m,q,\hat{T}}\\ &\le \hat{C}\cdot C(m,n)\|B_T^{-1}\|^m\cdot|\mathrm{det}B_T|^{\frac{1}{q}}|\hat{v}_h|_{l,r,\hat{T}}\\ &\le \hat{C}\cdot C(m,n)\|B_T^{-1}\|^m\cdot\|B_T\|^l\\ &\quad\cdot|\mathrm{det}B_T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}|v_h|_{l,r,T}\\ &\le \hat{C}(m,n)\frac{h_T^l}{\rho_T^m}|T|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\cdot|v_h|_{l,r,T}\\ &\le \frac{C(\sigma,\hat{T};m,n)}{h_T^{m-l}(h_T^n)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}}|v_h|_{l,r,T}.\end{aligned}\tag{5.4.14}$$

注意在单元上的反不等式 (5.4.14) 成立, 并不需要反假设 (5.4.3).

(ii) 区域 Ω 上反不等式的证明. 在反假设之下, 由 (5.4.14) 可见

$$|v_h|_{m,q,T}\le\frac{C(\sigma,\gamma;m,n)}{h^{m-l}(h^n)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}}|v_h|_{l,r,T},\quad\forall v_h\in X_h.\tag{5.4.15}$$

下面分 3 种情况.

(a) 若 $q=\infty$, 由 (i)

$$\begin{aligned}\max_T|v_h|_{m,\infty,T}=|v_h|_{m,\infty,T_0}&\le C(h^n)^{\frac{-1}{r}}\frac{1}{h^{m-l}}|v_h|_{l,r,T_0}\\ &\le C(h^n)^{\frac{-1}{r}}\frac{1}{h^{m-l}}\Big\{\sum_T|v_h|_{l,r,T}^r\Big\}^{\frac{1}{r}},\end{aligned}$$

此即 (5.4.4).

(b) 若 $q<\infty$, 由 (i) 得

$$\Big\{\sum_T|v_h|_{m,q,T}^q\Big\}^{\frac{1}{q}}\le\frac{C}{(h^n)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}\cdot h^{m-l}}\Big\{\sum_T|v_h|_{l,r,T}^q\Big\}^{\frac{1}{r}}.\tag{5.4.16}$$

对上式分别考虑下述情形:

(b1) 若 $r\le q<\infty$, 由 Jensen 不等式 (见注 5.4.1) 可知

$$\Big\{\sum_T|v_h|_{l,r,T}^q\Big\}^{\frac{1}{q}}\le\Big\{\sum_T|v_h|_{l,r,T}^r\Big\}^{\frac{1}{r}},$$

由此及 (5.4.16) 即得 (5.4.4).

(b2) 若 $q < r < \infty$, 由 Hölder 不等式, 取 $t = \dfrac{r}{q}, t' = \dfrac{r}{r-q}$,

$$\begin{aligned}
\Big\{\sum_T |v_h|^q_{l,r,T}\Big\}^{\frac{1}{q}} &\le \Big\{\Big[\sum_T (|v_h|^q_{l,r,T})^{\frac{r}{q}}\Big]^{\frac{q}{r}} \cdot \Big[\sum_T 1\Big]^{\frac{r-q}{r}}\Big\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \{\mathrm{card}(T : T \in \mathcal{T}_h)\}^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \cdot \Big\{\sum_T |v_h|^r_{l,r,T}\Big\}^{\frac{1}{r}} \\
&\le Ch^{-n(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})} \cdot \Big\{\sum_T |v_h|^r_{l,r,T}\Big\}^{\frac{1}{r}},
\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{card}(T : T \in \mathcal{T}_h)$ 表示 $\mathcal{T}_h$ 中单元 T 的个数 $\approx h^{-n}$, 由此及 (5.4.16) 即得 (5.4.4).

(b3) 若 $q < r = \infty$, 则由 (5.4.16),

$$\begin{aligned}
\Big\{\sum_T |v_h|^q_{m,q,T}\Big\}^{\frac{1}{q}} &\le C(h^n)^{\frac{1}{q}} \cdot \frac{1}{h^{m-l}}\Big\{\sum_T |v_h|^q_{l,\infty,T}\Big\}^{\frac{1}{q}} \\
&\le C(h^n)^{\frac{1}{q}} \cdot \frac{1}{h^{m-l}}\{\mathrm{card}\mathcal{T}_h\}^{\frac{1}{q}} \cdot \max_T |v_h|_{l,\infty,T} \\
&\le C\frac{1}{h^{m-l}} \max_T |v_h|_{l,\infty,T},
\end{aligned}$$

此即 (5.4.4).

注 5.4.1 Jensen 不等式: 当 $r \le q < \infty$ 时

$$\Big(\sum_i |a_i|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \le \Big(\sum_i |a_i|^r\Big)^{\frac{1}{r}}. \tag{5.4.17}$$

证明

$$\begin{aligned}
\Big\{\sum_i |a_i|^r\Big\}^{\frac{q}{r}} &= \Big\{\sum_i (|a_i|^q)^{\frac{r}{q}}\Big\}^{\frac{q}{r}} = \Big\{\sum_i (|a_i|^q)^{\frac{r}{q}}\Big\} \cdot \Big\{\sum_i (|a_i|^q)^{\frac{r}{q}}\Big\}^{\frac{q}{r}-1} \\
&= \sum_i \Big\{(|a_i|^q)^{\frac{r}{q}} \cdot \Big[\sum_j (|a_j|^q)^{\frac{r}{q}}\Big]^{\frac{q}{r}-1}\Big\} (\text{注意}\frac{q}{r} - 1 \ge 0) \\
&\ge \sum_i \{(|a_i|^q)^{\frac{r}{q}} \cdot [(|a_i|^q)^{\frac{r}{q}}]^{\frac{q}{r}-1}\} \\
&= \sum_i |a_i|^q,
\end{aligned}$$

由此即证 (5.4.17).

5.5 有限元方法的非整数阶误差估计

本节考虑当原问题的解 u 仅具有非整数阶 Sobolev 空间的正则性时, 有限元方法的误差估计. 比如对二阶问题, 用协调一次元方法, 可有误差估计

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}\le ch|u|_{2,\Omega}.$$

此地要求原问题之解 $u\in H^2(\Omega)$; 然而若由于问题的数据不够光滑时, 导致其解 $u\in H^{1+s}(\Omega)$, $0<s<1$, 且 $u\notin H^2(\Omega)$, 问题是此时能否得到误差阶的估计. 为了解决这个问题, 我们需要 Sobolev 空间的内插理论的一些基本知识. 本节取材于 Brenner 和 Scott[17].

5.5.1 Banach 空间的内插理论

设给定两个 Banach 空间 B_0 和 $B_1: B_1\hookrightarrow B_0$($B_1$ 连续地嵌入到 B_0 中). 我们来定义它们之间的内插空间.

定义 5.5.1 对任一 $u\in B_0$ 及 $t>0$, 令

$$K(t,u)\doteq \inf\nolimits_{v\in B_1}(\|u-v\|_{B_0}+t\|v\|_{B_1}). \tag{5.5.1}$$

K 可以解释为 u 可以用 B_1 中元素近似地度量 (具有罚因子 $t>0$).

引理 5.5.1 $K(t,u)$ 具有下述性质 (请读者自证)

(i) 若 $u\in B_1$, 则取 $v=u$, 有

$$K(t,u)\le t\|u\|_{B_1},$$

(ii) 取 $v=0$, 则

$$K(t,u)\le \|u\|_{B_0},$$

(iii) 对任何 $u_1,u_2\in B_0$, 则

$$K(t,u_1+u_2)\le K(t,u_1)+K(t,u_2),$$

(iv) $K(t,u) \geq 0$, 且 $K(t,u)=0$ 当且仅当 $u=0$,

(v) 对任何 $c \in \mathbf{R}$, 则

$$K(t,cu)=|c|K(t,u).$$

因此, $K(t,u)$ 是 B_0 上的范数.

定义 5.5.2 对于 $0<\theta<1$, $1 \leq p<\infty$, 令

$$\|u\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}} \doteq \left\{\int_0^{\infty} t^{-\theta p} K(t,u)^p \frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}^{1/p}; \tag{5.5.2}$$

对于 $p=\infty$, 令

$$\|u\|_{[B_0,B_1]_{\theta,\infty}} \doteq \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} K(t,u). \tag{5.5.2$'$}$$

引理 5.5.2 $\|\cdot\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}}$ 对于 $0<\theta<1$, $1 \leq p \leq \infty$, 均是 B_0 上的范数 (读者自证).

现在我们可以定义 B_0, B_1 的内插空间

$$[B_0,B_1]_{\theta,p}=B_{\theta,p} \doteq \{u \in B_0 : \|u\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}}<\infty\}. \tag{5.5.3}$$

可以证明, 在范数 (5.5.2) 下, $[B_0,B_1]_{\theta,p}$ 是一个 Banach 空间.

引理 5.5.3 若 $A_i, B_i (i=0,1)$ 是两对 Banach 空间: $A_1 \hookrightarrow A_0, B_1 \hookrightarrow B_0$, 且若 $B_i \hookrightarrow A_i (i=0,1)$, 则

$$B_{\theta,p} \hookrightarrow A_{\theta,p}. \tag{5.5.4}$$

证明 由于 $B_i \hookrightarrow A_i (i=0,1)$, 则若 $v_i \in B_i$, 就有

$$v_i \in A_i \text{ 且 } \|v_i\|_{A_i} \leq c\|v_i\|_{B_i} \ (i=0,1).$$

现设 $u \in B_{\theta,p}$, 则 $u \in B_0$ 且 $\|u\|_{[B_0,B_1]_{\theta,p}}<\infty$, 即

$$\int_0^{\infty} t^{-\theta p} K_B(t,u)^p \frac{\mathrm{d}t}{t}<\infty,$$

其中

$$K_B(t,u)=\inf_{v\in B_1}[\|u-v\|_{B_0}+t\|v\|_{B_1}].$$

从而 $u\in A_0$(因为 $B_0\hookrightarrow A_0$),

$$\begin{aligned}K_A(t,u)&=\inf_{v\in A_1}[\|u-v\|_{A_0}+t\|v\|_{A_1}]\\&\le c\inf_{v\in B_1}\{\|u-v\|_{B_0}+t\|v\|_{B_1}\}\ (B_i\hookrightarrow A_i)\\&=cK_B(t,u),\end{aligned}$$

因此即得

$$\int_0^\infty t^{-\theta p}K_A(t,u)^p\frac{\mathrm{d}t}{t}\le c\int_0^\infty t^{-\theta p}K_B(t,u)^p\frac{\mathrm{d}t}{t},$$

此即

$$\|u\|_{A_{\theta,p}}\le c\|u\|_{B_{\theta,p}}.$$

定理 5.5.1 设 $B_1\hookrightarrow B_0$, 则

$$B_1\hookrightarrow B_{\theta,p}\hookrightarrow B_0.\tag{5.5.5}$$

证明 (i) 首先证明第一个嵌入关系. 设 $u\in B_1$, 则

$$K(t,u)\le t\|u\|_{B_1},\quad K(t,u)\le\|u\|_{B_0}\le c\|u\|_{B_1}\ (见引理\ 5.5.1),$$

从而

$$K(t,u)\le\min(c,t)\|u\|_{B_1}.$$

由定义 5.5.2,

$$\begin{aligned}\|u\|_{B_{\theta,p}}^p&=\int_0^\infty t^{-\theta p}K(t,u)^p\frac{\mathrm{d}t}{t}\\&\le\int_0^\infty\min(c,t)^pt^{-\theta p}\frac{\mathrm{d}t}{t}\cdot\|u\|_{B_1}^p\\&=\left\{\int_0^c t^pt^{-\theta p}\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_c^\infty c^p\cdot t^{-\theta p}\frac{\mathrm{d}t}{t}\right\}\|u\|_{B_1}^p\\&=\frac{c^{p(1-\theta)}}{p\theta(1-\theta)}\|u\|_{B_1}^p.\end{aligned}$$

从而

$$\|u\|_{B_{\theta,p}} \le c'_{\theta,p}\|u\|_{B_1}, \quad \forall u \in B_1, \tag{5.5.6}$$

其中

$$c'_{\theta,p} = c^{1-\theta}/(p\theta(1-\theta))^{1/p}.$$

(ii) 现在证明第二个嵌入关系. 首先可以证明 (请读者自证), 对 $s, t > 0$, 有

$$\min(1, s/t)K(t,u) \le K(s,u).$$

又设 $B_1 \hookrightarrow B_0$ 的嵌入常数为 c : $\|v\|_{B_0} \le c\|v\|_{B_1}$, $\forall v \in B_1$, 则

$$\begin{aligned} K(c,u) &= \inf_{v\in B_1}\{\|u-v\|_{B_0} + c\|v\|_{B_1}\} \\ &\ge \inf_{v\in B_1}\{\|u-v\|_{B_0} + \|v\|_{B_0}\} \ge \|u\|_{B_0}, \quad \forall u \in B_0. \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{B_{\theta,p}} &= \int_0^\infty s^{-\theta p}K(s,u)\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\ge \int_0^\infty s^{-\theta p}(\min(1,s/t))^p K(t,u)^p\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &= \left\{\int_0^t \left(\frac{s}{t}\right)^p s^{-\theta p}\frac{\mathrm{d}s}{s} + \int_t^\infty s^{-\theta p}\frac{\mathrm{d}s}{s}\right\}K(t,u)^p \\ &= [t^{\theta p}\cdot p\theta(1-\theta)]^{-1}K(t,u)^p, \end{aligned}$$

由此即得

$$K(t,u) \le [p\theta(1-\theta)]^{1/p}\cdot t^\theta\|u\|_{B_{\theta,p}} \quad (c_{\theta,p} = (p\theta(1-\theta))^{1/p}). \tag{5.5.7}$$

现设 $u \in B_{\theta,p}$, 则

$$\|u\|_{B_0} \le K(c,u) \le c_{\theta,p}\cdot c^\theta\|u\|_{B_{\theta,p}}. \qquad (\text{由}(5.5.7))$$

证毕.

上述定理说明 $B_{\theta,p}$ 是 B_0, B_1 的内插空间.

下面介绍 Banach 空间上算子的内插理论.

定理 5.5.2 设 A_i 和 $B_i(i=0,1)$ 为如上两对 Banach 空间, 且设 $T: A_i \to B_i$ 的线性算子, 则

$$T: A_{\theta,p} \to B_{\theta,p},$$

且

$$\|T\|_{A_{\theta,p}\to B_{\theta,p}} \le \|T\|_{A_0\to B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1\to B_1}^{\theta}. \tag{5.5.8}$$

证明 令 $M_i = \|T\|_{A_i\to B_i}$. 则 $\forall v \in A_1$,

$$\begin{aligned} K_B(t,Tu) &\le \|Tu - Tv\|_{B_0} + t\|Tv\|_{B_1} \\ &\le M_0\|u-v\|_{A_0} + M_1 t\|v\|_{A_1}, \end{aligned}$$

将上式对 $v \in A_1$ 取 inf, 得

$$K_B(t,Tu) \le M_0 K_A\Big(t\frac{M_1}{M_0}, u\Big).$$

从而

$$\begin{aligned} \|Tu\|_{B_{\theta,p}}^p &= \int_0^\infty t^{-p\theta} K_B(t,Tu)^p \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &\le M_0^p \int_0^\infty t^{-p\theta} K_A\Big(t\frac{M_1}{M_0}, u\Big)^p \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= M_0^p \Big(\frac{M_0}{M_1}\Big)^{-p\theta} \int_0^\infty s^{-p\theta} K_A(s,u)^p \frac{\mathrm{d}s}{s} \qquad \Big(s = t\frac{M_1}{M_0}\Big) \\ &= M_0^{p(1-\theta)} M_1^{p\theta} \|u\|_{A_{\theta,p}}^p, \quad \forall u \in A_0. \end{aligned}$$

因此

$$\|T\|_{A_{\theta,p}\to B_{\theta,p}} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} = \|T\|_{A_0\to B_0}^{1-\theta} \cdot \|T\|_{A_1\to B_1}^{\theta}.$$

5.5.2 Sobolev 空间中的内插

本小节介绍 Sobolev 空间的内插空间, 其证明一概略去, 有兴趣的读者可参考文献 [1, 8, 39].

(i) 下述关系成立:

$$L^p(\Omega) = [L^1(\Omega), L^\infty(\Omega)]_{1-\frac{1}{p},p}, \quad \forall 1 < p < \infty. \tag{5.5.9}$$

以及一般地

$$W^{k,p}(\Omega) = [W^{k,1}(\Omega), W^{k,\infty}(\Omega)]_{1-\frac{1}{p},p}, \quad \forall 1 < p < \infty. \tag{5.5.10}$$

(ii) 令 $0 < s < 1$, 若 Ω 有 Lipschitz 边界, 则

$$W^{k+s,p}(\Omega) = [W^{k,p}(\Omega), W^{k+1,p}(\Omega)]_{s,p}, \tag{5.5.11}$$

其范数等价于下述范数

$$\|u\|^p_{W^{k+s,p}(\Omega)} \doteq \|u\|^p_{W^{k,p}(\Omega)} + \sum\nolimits_{|\alpha|=k} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u^{(\alpha)}(x) - u^{(\alpha)}(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5.5.12}$$

(iii) 更一般地, 设 $m \le k$ 为整数, 当 $(1-\theta)m + \theta k$ 为非整数时, 则对 $1 \le p \le \infty$, 有

$$W^{(1-\theta)m+\theta k,p}(\Omega) = [W^{m,p}(\Omega), W^{k,p}(\Omega)]_{\theta,p}. \tag{5.5.13}$$

(iv) 当 $(1-\theta)m + \theta k$ 为整数时, 有

$$H^{(1-\theta)m+\theta k}(\Omega) = [H^m(\Omega), H^k(\Omega)]_{\theta,2}. \tag{5.5.14}$$

但对 $p \ne 2$, 空间 $W^{k+1,p}(\Omega)$ 与 $[W^{k,p}(\Omega), W^{k+2,p}(\Omega)]_{\frac{1}{2},p}$ 是不同的.

5.5.3 有限元方法分数阶误差估计

考虑协调有限元方法, 由 Céa 引理知

$$\|u - u_h\|_{m,\Omega} \le c_0 \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{m,\Omega}, \tag{5.5.15}$$

又若存在插值 $\Pi_h u \in V_h$, 使得

$$\|u - \Pi_h u\|_m \leq ch^{k-m}\|u\|_{k,\Omega},$$

则有误差估计

$$\|u - u_h\|_{m,\Omega} \leq c_1 h^{k-m}\|u\|_{k,\Omega}, \tag{5.5.16}$$

注意到此时要求 $u \in H^k(\Omega), 0 < m < k$. 关于非整数阶误差估计有下述定理.

定理 5.5.3 假定 (5.5.15) 和 (5.5.16) 成立, 令 $m < s < k$, 则

$$\|u - u_h\|_{m,\Omega} \leq ch^{s-m}\|u\|_{s,\Omega}. \tag{5.5.17}$$

证明 定义算子 T:

$$Tu = u - u_h.$$

则由 (5.5.16) 可见 $T : H^k(\Omega) \to H^m(\Omega)$. 使得

$$\|T\|_{H^k \to H^m} \leq c_1 h^{k-m},$$

又由 (5.5.15)(取 $u = 0$) 得

$$\|T\|_{H^m \to H^m} \leq c_0.$$

这样在定理 5.5.2 中, 令 $A_0 = H^m(\Omega), A_1 = H^k(\Omega)$, 及 $B_0 = B_1 = H^m(\Omega)$, 则可见

$$\begin{aligned} T : A_{\theta,2} &= [H^m(\Omega), H^k(\Omega)]_{\theta,2} = H^{(1-\theta)m+\theta k}(\Omega) \\ \to B_{\theta,2} &= [H^m(\Omega), H^m(\Omega)]_{\theta,2} = H^m(\Omega) \end{aligned}$$

的连续线性映射, 且 (令 $s = (1-\theta)m + \theta k$)

$$\begin{aligned} \|T\|_{H^s \to H^m} &\leq \|T\|^{1-\theta}_{H^m \to H^m} \cdot \|T\|^{\theta}_{H^k \to H^m} \\ &\leq ch^{\theta(k-m)} = ch^{s-m}. \end{aligned}$$

从而

$$\|u-u_h\|_{m,\Omega}=\|Tu\|_{m,\Omega}\le\|T\|_{H^s\to H^m}\|u\|_{s,\Omega}\le ch^{s-m}\|u\|_{s,\Omega}.$$

实际上, 有比上述定理更好的结果. 让我们回忆 5.3 节中的结果: 当 $u\in H^1(\Omega)$ 时有

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega}=o(1).$$

一般地有下述结果.

定理 5.5.4 设 (5.5.15) 和 (5.5.16) 成立, 令 $m<s<k$, 则对任何 $u\in H^s(\Omega)$, 有

$$\|u-u_h\|_{m,\Omega}=o(h^{s-m}). \tag{5.5.18}$$

证明 设 T 为上面定理证明中所引入的算子, 则对任何 $v\in H^k(\Omega)$, 有

$$\begin{aligned}&\|u-u_h\|_{m,\Omega}=\|Tu\|_{m,\Omega}\le\|Tu-Tv\|_{m,\Omega}+\|Tv\|_{m,\Omega}\\ \le\ &c_0\|u-v\|_{m,\Omega}+\|Tv\|_{m,\Omega}\\ \le\ &c_0\|u-v\|_{m,\Omega}+c_1h^{k-m}\|v\|_{k,\Omega}\\ =\ &c_0\Big\{\|u-v\|_{m,\Omega}+\frac{c_1}{c_0}h^{k-m}\|v\|_{k,\Omega}\Big\}.\end{aligned}$$

从而由 (5.5.7)

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{m,\Omega}&\le c_0K\Big(\frac{c_1}{c_0}h^{k-m},u\Big)\\ &\le c_0c_{\theta,2}\Big(\frac{c_1}{c_0}h^{k-m}\Big)\|u\|_{B_{\theta,2}}\\ &\le h^{\theta(k-m)}\|u\|_{s,\Omega}=ch^{s-m}\|u\|_{s,\Omega},\end{aligned} \tag{5.5.19}$$

因为

$$B_{\theta,2}=[H^m(\Omega),H^k(\Omega)]_{\theta,\tau}=H^{(1-\theta)m+\theta k}=H^s(\Omega).$$

现在我们利用比 (5.5.7) 更强的一个性质. 当 $u \in H^s(\Omega)$ 时, 则

$$\|u\|_{s,\Omega}^2 = \int_0^\infty (t^{-\theta}K(t,u))^2 \frac{\mathrm{d}t}{t} < \infty,$$

从而

$$t^{-\theta}K(t,u) \to 0, \quad \text{当 } t \to 0 \text{ 时},$$

即

$$K(t,u) = o(t^\theta). \tag{5.5.20}$$

由此, 从 (5.5.19) 的第一个不等式, 可见

$$\begin{aligned}\|u-u_h\|_{m,\Omega} &\le c_0 K\left(\frac{c_1}{c_0}h^{k-m}, u\right) \\ &= o(h^{\theta(k-m)}) = o(h^{s-m}).\end{aligned}$$

5.6 非光滑函数的插值 (Clément 插值)

经典的插值, 要求被插值函数光滑. 比如在三角形 T, 其顶点为 a_1, a_2, a_3, 上的函数 v 的一次插值 v^I 可写成

$$v^I = \sum_{i=1}^3 v(a_i)\lambda_i.$$

因此要求 $v \in C^0(\bar{T})$. 同时具有误差估计

$$|v - v^I|_{m,T} \le c h_T^{2-m} |v|_{2,T}, \quad 0 \le m \le 2,$$

其中 $c = \text{const} > 0$ 与 T 及 v 无关.

现在考虑, 若 $v \in L^1(\Omega)$, 如何构造 v 的分片多项式且连续的插值, 并具有与经典插值相同的误差阶. 这种所谓局部正则化插值, 首先由 Clément[25] 提出, 然后 Bernardi[9] 推广到更一般情形.

5.6.1 有限元空间

为了叙述简单, 同时又讲清楚基本思想及方法, 此地只考虑在二维区域中的协调一次元插值.

令 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是一个多边形区域, $\mathcal{J}_h$ 是 Ω 的一个正则三角形剖分, $T \in \mathcal{J}_h$ 为三角形单元. 令

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_h|_T \in P_1(T),\ \forall T \in \mathcal{J}_h\} \tag{5.6.1}$$

为协调一次元空间, 令

$$\sum\nolimits_h = \{a_i, \mathcal{J}_h \text{ 的顶点},\ 1 \le i \le N_h\} \tag{5.6.2}$$

为插值节点集合, 令

$$\theta_i \in V_h : \theta_i(a_j) = \delta_{ij},\ 1 \le j \le N_h, \tag{5.6.3}$$

则 $\{\theta_i\}_{i=1}^{N_h}$ 是 V_h 的一组基.

对每个 $i, 1 \le i \le N_h$, 令

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \cup\{T \in \mathcal{J}_h : \mathrm{supp}\theta_i \cap T \ne \phi\} \\ &= \cup\{T \in \mathcal{J}_h : a_i \in T\}. \end{aligned} \tag{5.6.4}$$

则当剖分 $\mathcal{J}_h$ 为正则时, 有

(i) 包含在 Δ_i 中单元三角形 T 的个数有上界:

$$\mathrm{card}\{T : T \in \Delta_i\} \le M, \quad \forall 1 \le i \le N_h, \ \ \forall \mathcal{J}_h;$$

(ii) 含有任一给定单元 T 的宏元 Δ_i 的个数有上界:

$$\mathrm{card}\{\Delta_i : T \in \Delta_i\} \le M', \quad \forall \mathcal{J}_h.$$

(对三角形剖分, $M' = 3$).

协调一次元空间也可表达为

$$V_h = \left\{v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v_i\theta_i : v_i \in \mathbf{R}, 1 \le i \le N_h\right\}. \tag{5.6.5}$$

5.6.2 Clément 插值

当剖分 $\mathcal{J}_h$ 正则时, 其单元的最小内角具有正下界. 从而宏元 Δ_i 的构型只有有限个 (对一切 h), 当由相同单元个数组成的宏元 Δ_i 视为同一构型时. 我们可以只考虑下面图示的特殊的 $\Delta_i = \cup_{j=1}^{6} T_j$.

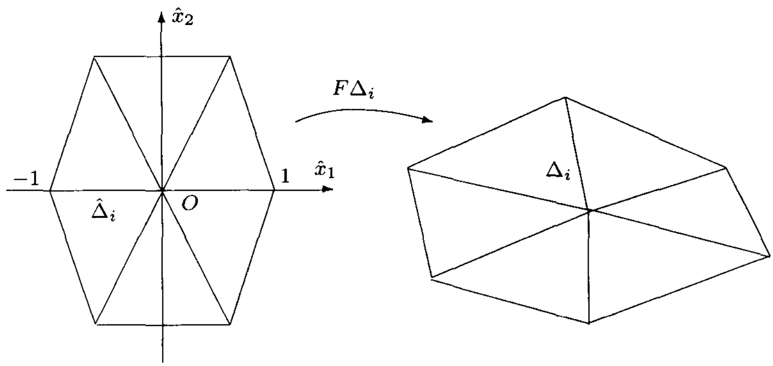

图 5.6.1

令 $\hat{\Delta}_i \subset \{\hat{x} : \|\hat{x}\| \leq 1\} = \cup_{j=1}^{6} \hat{T}_j, \hat{T}_j (j = 1, \cdots, 6)$ 为相等的三角形 (见图 5.6.1). 则存在一个连续且可逆的映射 $F_{\Delta_i} : \hat{\Delta}_i \to \Delta_i$, 使得

$$F_{\Delta_i}(\hat{x})|_{\hat{T}_j} = B_j \hat{x} + b_j = x : \hat{T}_j \to T_j \text{ 可逆仿射变换}. \quad (5.6.6)$$

令 $v(x) = v \circ F_{\Delta_j}(\hat{x}) \doteq \hat{v}(\hat{x})$, 即 $\hat{v} = v \circ F_{\Delta_j}, v = \hat{v} \circ F_{\Delta_j}^{-1}$.

现在定义插值算子 $\sqcap_h : L^1(\Omega) \to V_h$ 如下. 令 Δ_i 是任一个宏元, $\hat{\Delta}_i$ 为其参考元, 且 $\hat{v} \in L^1(\hat{\Delta}_i)$; 令 $\hat{R}_i \hat{v}$ 是 $\hat{v}$ 在 $P_1(\hat{\Delta}_i)$ 中的 L^2-投影, 即 $\hat{R}_i \hat{v} \in P_1(\hat{\Delta}_i)$, 使得

$$\int_{\hat{\Delta}_i} (\hat{v} - \hat{R}_i \hat{v}) \cdot \hat{p} \mathrm{d}\hat{x} = 0, \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{\Delta}_i). \quad (5.6.7)$$

然后, 对于 $v \in L^1(\Omega)$, 定义 $\sqcap_h v \in V_h$ 如下

$$
\begin{aligned}
\sqcap_h v &= \sum_{i=1}^{N_h} \hat{R}_i \hat{v}(\hat{a}_i) \cdot \theta_i \\
&= \sum_{i=1}^{N_h} \hat{R}_i (v \circ F_{\Delta_i})(\hat{a}_i) \theta_i, \quad \hat{a}_i = F_{\Delta_i}^{-1}(a_i).
\end{aligned}
\tag{5.6.8}
$$

我们有下述误差估计.

定理 5.6.1 设

$$
\Delta = \{\Delta_i : T \in \Delta_i\}, \tag{5.6.9}
$$

则

$$
\|v - \sqcap_h v\|_{m,T} \le c h_T^{l-m} \|v\|_{l,\Delta}, \quad 0 \le m \le l \le 2, \tag{5.6.10}
$$

其中 c 是与 T, h 及 v 无关的正的常数.

5.6.3 定理的证明

令

$$
R_i v \doteq \hat{R}_i \hat{v} \circ F_{\Delta_i}^{-1}, \tag{5.6.11}
$$

即

$$
\hat{R}_i \hat{v} \doteq R_i v \circ F_{\Delta_i}, \tag{5.6.12}
$$

则 $R_i v$ 是定义在 Δ_i 上的连续的分片一次多项式: $R_i v \in C^0(\bar{\Delta}_i)$, $R_i v|_{T_j} \in P_1(T_j)$, $\forall T_j \subset \Delta_i$. 首先建立下述引理.

引理 5.6.1 若 $v \in H^l(\Delta_i)$, 则对于 $0 \le m \le l \le 2$,

$$
|v - R_i v|_{m,T_j} \le c(d(\Delta_i))^{l-m} |v|_{l,\Delta_i}, \quad \forall T_j \subset \Delta_i, \tag{5.6.13}
$$

其中 c 是与 Δ_i 及 v 无关的正数.

证明 证明利用常规的 scale argument (见 5.2 节).

$$\begin{aligned}|v-R_iv|_{m,T_j}&\le c|\det B_j|^{1/2}\|B_j^{-1}\|^m\cdot|\hat{v}-R_iv\circ F_j|_{m,\hat{T}_j}\\&=c|\det B_j|^{1/2}\|B_j^{-1}\|^m\cdot|\hat{v}-\hat{R}_i\hat{v}|_{m,\hat{T}_j}\\&\le c|\det B_j|^{1/2}\|B_j^{-1}\|^m\cdot|\hat{v}-\hat{R}_i\hat{v}|_{m,\hat{\Delta}_i}\\&\le c|\det B_j|^{1/2}\|B_j^{-1}\|^m\cdot\|\hat{v}-\hat{R}_i\hat{v}\|_{l,\hat{\Delta}_i}.\end{aligned}$$

对 $l=0$, 由 $\hat{R}_i\hat{v}$ 的定义 (5.6.7) 可知

$$\|\hat{R}_i\hat{v}\|_{0,\hat{\Delta}_i}\le\|\hat{v}\|_{0,\hat{\Delta}_i},$$

从而

$$\|\hat{v}-\hat{R}_i\hat{v}\|_{0,\hat{\Delta}_i}\le 2\|\hat{v}\|_{0,\hat{\Delta}_i}.$$

对 $1\le l\le 2$, 由商空间 $H^l(\hat{\Delta}_i)/P_{l-1}(\hat{\Delta}_i)$ 中的等价模定理得

$$\|\hat{v}-\hat{R}_i\hat{v}\|_{l,\Delta_i}\le c|\hat{v}|_{l,\hat{\Delta}_i}.$$

从而

$$\begin{aligned}&|v-R_iv|_{m,T_j}\\&\le c|\det B_j|^{1/2}\|B_j^{-1}\|^m|\hat{v}|_{l,\hat{\Delta}_i}\\&=c|\det B_j|^{1/2}\|B_j^{-1}\|^m\Big\{\sum_{\hat{T}_s\subset\hat{\Delta}_i}|\hat{v}|^2_{l,\hat{T}_s}\Big\}^{1/2}\\&\le c|\det B_j|^{1/2}\|B_j^{-1}\|^m\Big\{\sum_{\hat{T}_s}|\det B_s|^{-1}\|B_s\|^{2l}|v|^2_{l,T_s}\Big\}^{1/2}\\&\le c(d(\Delta_i))^{l-m}|v|_{l,\Delta_i}.\end{aligned}$$

引理证毕.

现在给出定理 5.6.1 的证明.

定理 5.6.1 的证明 首先 $\sqcap_h v$ 可改写如下

$$\sqcap_h v=\sum_{i=1}^{N_h}R_iv(a_i)\theta_i.$$

注意到 (见图 5.6.2)

$$\begin{aligned}\sqcap_h v|_T &= \sum_{i=1}^{N_h} R_i v(a_i)\theta_i|_T \\ &= [R_1 v(a_1)\theta_1 + R_2 v(a_2)\theta_2 + R_3 v(a_3)\theta_3]|_T.\end{aligned}$$

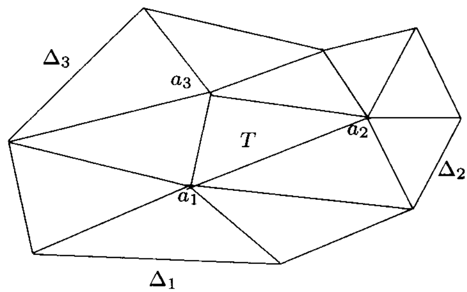

图 5.6.2

而

$$R_1 v|_T = [R_1 v(a_1)\theta_1 + R_1 v(a_2)\theta_2 + R_1 v(a_3)\theta_3]|_T,$$

因此

$$\|v - \sqcap_h v\|_{m,T} \le \|v - R_1 v\|_{m,T} + \|R_1 v - \sqcap_h v\|_{m,T}.$$

而

$$\|v - R_1 v\|_{m,T} \le \|v - R_1 v\|_{m,\Delta_1} \le cd(\Delta_1)^{l-m}|v|_{l,\Delta_1}.$$

又

$$\begin{aligned}\|R_1 v - \sqcap_h v\|_{m,T} \le\ & \|(R_1 v(a_2) - R_2 v(a_2))\theta_2\|_{m,T} \\ & + \|(R_1 v(a_3) - R_3 v(a_3))\theta_3\|_{m,T}.\end{aligned}$$

而由反不等式

$$\begin{aligned}
&\|(R_1v(a_2)-R_2v(a_2))\theta_2\|_{m,T}=|R_1v(a_2)-R_2v(a_2)|\cdot\|\theta_2\|_{m,T}\\
\le\ &\|R_1v-R_2v\|_{0,\infty,T}\cdot\|\theta\|_{m,T}\\
\le\ &c|T|^{-1/2}\|R_1v-R_2v\|_{0,T}\cdot h_T^{-m}|T|^{1/2}\\
\le\ &ch_T^{-m}(\|R_1v-v\|_{0,T}+\|R_2v-v\|_{0,T})\\
\le\ &ch_T^{-m}(d(\Delta_1)^l|v|_{l,\Delta_1}+d(\Delta_2)^l|v|_{l,\Delta_2})\\
\le\ &cd(\Delta)^{l-m}|v|_{l,\Delta},
\end{aligned}$$

同样可证

$$\|(R_1v(a_3)-R_3v(a_3))\theta_3\|_{m,T}\le \mathrm{c}\mathrm{d}(\Delta)^{l-m}|v|_{l,\Delta}.$$

定理得证.

第 6 章 数值积分影响, 等参数有限元

上一章中的有限元分析, 仅限于

(i) 协调元, 即 $V_h \subset V$;

(ii) 多边形区域, 即 $\Omega = \Omega_h = \cup_{T\in\mathcal{J}_h} T$;

(iii) 离散问题中的双线性型 $a(u_h, v_h)$ 及 $\langle f, v_h\rangle$ 可以精确计算, 即不考虑数值积分;

(iv) 只从最基本的变分原理, 即位能极小原理出发.

然而, 在有限元方法的实际应用中, 经常出现违背上述 4 种情形. 相对于 (i) 是非协调元; 相对于 (ii) 是等参数元及其在曲边区域上的应用; 相对于 (iii) 是数值积分的影响; 相对于 (iv) 是混合元、杂交元等. 以下各章将分别地处理这些违规的情形, 当然本书只能提供它们的一些数学基础. 本章考虑相应于 (ii) 及 (iii) 的情形 (见文献 [22]).

6.1 有限元方法中的数值积分

为简单计, 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 为一多边形区域, $\mathcal{J}_h$ 为 Ω 的一个剖分, $\Omega = \Omega_h = \cup_{T\in\mathcal{J}_h} T$. 考虑原问题为

$$\begin{cases} 求\ u \in V = H_0^1(\Omega), & 使得 \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle, & \forall v \in V, \end{cases} \tag{6.1.1}$$

其中

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j v \mathrm{d}x, \tag{6.1.2}$$

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f v \mathrm{d}x. \tag{6.1.3}$$

并设 $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ 且在 Ω 上处处有定义, 而且存在 $\beta = \text{const} > 0$, 使得

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \beta \sum_i \xi_i^2, \quad \forall x \in \Omega, \xi = (\xi_1, \xi_i)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2. \tag{6.1.4}$$

对于剖分 $\mathcal{J}_h$ 满足拟正则条件 (H1), 而有限元 $(T, P_T, \Sigma_T)_{T \in \mathcal{J}_h}$ 满足条件 (H2) 及 (H3)(见 5.3.1 节). 令

$$X_h = \{w_h : w_h|_T \in P_T\}, \tag{6.1.5}$$

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h|_{\partial\Omega} = 0\}. \tag{6.1.6}$$

在上一章中,(6.1.1) 的有限元离散为

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in V_h, \quad \text{使得} \\ a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \tag{6.1.7}$$

然而在实际计算中, 双线性型和线性型

$$a(u_h, v_h) = \int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_i u_h \cdot \partial_j v_h \mathrm{d}x, \quad \langle f, v_h \rangle = \int_\Omega f(x) v_h \mathrm{d}x,$$

极少能够精确求积分, 而往往代之以数值积分.

首先考察一般单元 T 上的积分

$$\int_T \varphi(x)\mathrm{d}x \tag{6.1.8}$$

的求积公式. 令 $F_T : \hat{T} \to T$ 的可逆仿射变换:

$$F_T(\hat{x}) = B_T\hat{x} + b_T = x, \tag{6.1.9}$$

$$\varphi(x) = \varphi \circ F_T(\hat{x}) \doteq \hat{\varphi}(\hat{x}), \tag{6.1.10}$$

则

$$\int_T \varphi(x)\mathrm{d}x = \det(B_T) \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}, \tag{6.1.11}$$

其中设 $\det(B_T) > 0$. 因此可通过计算 $\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}$ 的数值积分来计算 $\int_T \varphi(x)\mathrm{d}x$ 的数值积分. 设

$$\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} \approx \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\varphi}(\hat{b}_l), \tag{6.1.12}$$

其中 $\hat{\omega}_l > 0$ 为权, $\hat{b}_l \in \hat{T}$ 是求积节点. 这样由 (6.1.11) 可得

$$\begin{aligned}\int_T \varphi(x)\mathrm{d}x &\approx \det(B_T) \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\varphi}(\hat{b}_l) \\ &= \sum_{l=1}^{L} (\det(B_T) \cdot \hat{\omega}_l) \cdot \varphi \circ F_T(\hat{b}_l) \\ &= \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} \cdot \varphi(b_{l,T}),\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

其中

$$\omega_{l,T} = \det(B_T) \cdot \hat{\omega}_l > 0, \quad b_{l,T} = F_T(\hat{b}_l). \tag{6.1.14}$$

分别为求积公式 (6.1.13) 的权及求积节点.

现考察 T 与 $\hat{T}$ 上求积误差之间的关系. 令

$$E_T(\varphi) = \int_T \varphi(x)\mathrm{d}x - \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} \varphi(b_{l,T}), \tag{6.1.15}$$

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = \int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} - \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\varphi}(b_l), \tag{6.1.16}$$

则

$$E_T(\varphi) = \det(B_T) \hat{E}(\hat{\varphi}). \tag{6.1.17}$$

用数值积分代替精确积分后的有限元离散为

$$\begin{cases} 求\ \tilde{u}_h \in V_h, \quad 使得 \\ a_h(\tilde{u}_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle_h, \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{6.1.18}$$

其中

$$
\begin{cases}
a_h(\tilde{u}_h, v_h) = \sum_T \left\{ \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} \Big(\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i \tilde{u}_h \partial_j v_h \Big)(b_{l,T}) \right\}, \\
\langle f, v_h \rangle_h = \sum_T \left\{ \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} (f v_h)(b_{l,T}) \right\}.
\end{cases}
\tag{6.1.19}
$$

现在给出几个常用的数值求积公式. 首先定义求积公式的精度, 若

$$
E_T(p) = \int_T p \mathrm{d}x - \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} p(b_{l,T}) = 0, \quad \forall p \in P_k(T), \tag{6.1.20}
$$

则称求积公式 (6.1.13) 具有 k 次精度. 由于 (6.1.17), 因此只要给出在 $\hat{T}$ 上的求积公式 (6.1.12) 的精度即可.

6.1.1 三角形上一次精度求积公式

设 $\hat{T}$ 是一个三角形, $\hat{a}_i, i = 1, 2, 3$ 是按逆时针方向排列的 $\hat{T}$ 的三个顶点, $\hat{a} = \dfrac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} \hat{a}_i$ 为 $\hat{T}$ 的重心, 则求积公式

$$
\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x}) \mathrm{d}\hat{x} \approx |\hat{T}| \cdot \hat{\varphi}(\hat{a}), \tag{6.1.21}
$$

具有一次精度, 其中 $|\hat{T}| = \displaystyle\int_{\hat{T}} 1 \mathrm{d}\hat{x}$.

证明 设 $\hat{\lambda}_i(\hat{x}), 1 \le i \le 3$, 是 $\hat{T}$ 上的对应顶点 $\hat{a}_i$ 处的一次插值基函数, 则对任何 $\hat{p}_1 \in P_1(\hat{T})$,

$$
\hat{p}_1(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_1(\hat{a}_i) \hat{\lambda}_i(\hat{x}).
$$

由积分公式 (4.2.5),

$$
\int_{\hat{T}} \hat{p}_1(\hat{x}) \mathrm{d}\hat{x} = \frac{|\hat{T}|}{3} \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_1(\hat{a}_i) = |\hat{T}| \hat{p}_1(\hat{a}).
$$

6.1.2 2 次精度求积公式

设 $\hat{a}_{ij}$ 是三角形 $\hat{T}$ 的边 $\overline{\hat{a}_i\hat{a}_j}$ 上的中点, 则

$$\int_{\hat{T}}\hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}x \approx \frac{|\hat{T}|}{3}\sum_{1\le i<j\le 3}\hat{\varphi}(\hat{a}_{ij}), \tag{6.1.22}$$

具有 2 次精度.

证明 1 由 4.2.2 节的 (i) 知, 对任一 $\hat{p}_2 \in p_2(\hat{T})$ 有表达式

$$\hat{p}_2(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{3}\hat{p}_2(\hat{a}_i)\hat{\mu}_i(\hat{x}) + \sum_{1\le i<j\le 3}\hat{p}_2(\hat{a}_{ij})\hat{\mu}_{ij}(\hat{x}),$$

其中

$$\hat{\mu}_i(\hat{x}) = \hat{\lambda}_i(\hat{x})(2\hat{\lambda}_i(\hat{x})-1), \quad \hat{\mu}_{ij}(\hat{x}) = 4\hat{\lambda}_i(\hat{x})\hat{\lambda}_j(\hat{x}).$$

由积分公式 (4.2.5),

$$\int_{\hat{T}}\hat{p}_2(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} = \frac{1}{3}|\hat{T}|\sum_{1\le i<j\le 3}\hat{p}_2(\hat{a}_{ij}).$$

证明 2 这里给出另一种证明方法, 不需要给出多项式的具体表达式, 而且证明是构造性的. 由重心坐标表示 $\hat{T}$ 上完全 2 次多项式如下:

$$\begin{aligned}\hat{p}_2(\hat{x}) = {} & \alpha_1\hat{\lambda}_1^2(\hat{x}) + \alpha_2\hat{\lambda}_2^2(\hat{x}) + \alpha_3\hat{\lambda}_3^2(\hat{x}) + \alpha_4\hat{\lambda}_1(\hat{x})\hat{\lambda}_2(\hat{x}) \\ & + \alpha_5\hat{\lambda}_2(\hat{x})\hat{\lambda}_2(\hat{x}) + \alpha_6\hat{\lambda}_3(\hat{x})\hat{\lambda}_1(\hat{x}).\end{aligned}$$

从而由积分公式 (4.2.5) 可知

$$\int_{\hat{T}}\hat{p}_2(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} = \frac{|\hat{T}|}{6}\left\{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \frac{1}{2}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)\right\}, \tag{6.1.23}$$

又

$$\begin{cases}\hat{p}_2(\hat{a}_{12}) = \dfrac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4), \\ \hat{p}_2(\hat{a}_{23}) = \dfrac{1}{4}(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_5), \\ \hat{p}_2(\hat{a}_{13}) = \dfrac{1}{4}(\alpha_3+\alpha_1+\alpha_6),\end{cases}$$

从而

$$(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\frac{1}{2}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)=2\sum_{1\le i<j\le 3}\hat{p}_2(\hat{a}_{ij}).$$

因此数值积分公式

$$\frac{|\hat{T}|}{3}\sum_{1\le i<j\le 3}\hat{\varphi}(\hat{a}_{ij})$$

具有 2 次精度.

注 6.1.1 由 (6.1.23) 还可以导出另外的 2 次精度求积公式. 事实上, 由

$$\hat{p}_2(\hat{a}_i)=\alpha_i,\quad 1\le i\le 3,$$

及

$$\hat{p}_2(\hat{a})=\frac{1}{9}\{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)\},$$

可知

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\sum_{i=1}^{3}\hat{p}_2(\hat{a}_i),$$

$$\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6=9\hat{p}_2(\hat{a})-\sum_{i=1}^{3}\hat{p}_2(\hat{a}_i).$$

将上面二式代入 (6.1.23), 可得下述具有 2 次精度的求积公式:

$$\frac{|\hat{T}|}{12}\Big\{\sum_{i=1}^{3}\hat{\varphi}(\hat{a}_i)+9\hat{\varphi}(\hat{a})\Big\}. \qquad (6.1.24)$$

6.1.3 3 次精度的求积公式

设 $\hat{p}_3\in P_3(\hat{T})$, 则

$$\begin{aligned}\hat{p}_3(\hat{x})=\ &\alpha_1\hat{\lambda}_1^3+\alpha_2\hat{\lambda}_2^3+\alpha_3\hat{\lambda}_3^3+\alpha_4\hat{\lambda}_1^2\hat{\lambda}_2+\alpha_5\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2^2+\alpha_6\hat{\lambda}_2^2\hat{\lambda}_3\\&+\alpha_7\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3^2+\alpha_8\hat{\lambda}_3^2\hat{\lambda}_1+\alpha_9\hat{\lambda}_3\hat{\lambda}_1^2+\alpha_{10}\hat{\lambda}_1\hat{\lambda}_2\hat{\lambda}_3,\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\hat{T}} \hat{p}_3(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} = \frac{|\hat{T}|}{10}\Big\{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \frac{1}{3}(\alpha_4+\cdots+\alpha_9) \\ +\frac{1}{6}\alpha_{10}\Big\}, \tag{6.1.25}$$

又

$$\begin{cases} \hat{p}_3(\hat{a}_i) = \alpha_i, \quad 1 \le i \le 3, \quad \hat{p}_3(\hat{a}) = \dfrac{1}{27}(\alpha_1 + \cdots + \alpha_{10}), \\ \hat{p}_3(\hat{a}_{12}) = \dfrac{1}{8}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5), \\ \hat{p}_3(\hat{a}_{23}) = \dfrac{1}{8}(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_6 + \alpha_7), \\ \hat{p}_3(\hat{a}_{13}) = \dfrac{1}{8}(\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_8 + \alpha_9). \end{cases}$$

因此

$$\begin{cases} \alpha_4 + \cdots + \alpha_9 = 8 \displaystyle\sum_{1\le i<j\le 3} \hat{p}_3(\hat{a}_{ij}) - 2\sum_{i=1}^{3} \hat{p}_3(\hat{a}_i), \\ \alpha_{10} = 27\hat{p}_3(\hat{a}) + \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \hat{p}_3(\hat{a}_i) - 8 \sum_{1\le i<j\le 3} \hat{p}_3(\hat{a}_{ij}). \end{cases}$$

将此代入 (6.1.25), 即得具有 3 次精度的求积公式:

$$\frac{|\hat{T}|}{60}\Big\{3\sum_{i=1}^{3} \hat{\varphi}(\hat{a}_i) + 8 \sum_{1\le i<j\le 3} \hat{\varphi}(\hat{a}_{ij}) + 27\hat{\varphi}(\hat{a})\Big\}. \tag{6.1.26}$$

6.1.4 带导数的 3 次求积公式

由 6.1.3 节中 $\hat{p}_3(\hat{x})$ 的关于 $\hat{\lambda}_i$ 的三次齐式表达式可见,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{\lambda}_1}(\hat{a}_1) = 3\alpha_1 - \alpha_9, \\ \dfrac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{\lambda}_1}(\hat{a}_2) = \alpha_5 - \alpha_6, \\ \dfrac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{\lambda}_1}(\hat{a}_3) = -3\alpha_3 + \alpha_8, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{\lambda}_2}(\hat{a}_1) = \alpha_4 - \alpha_9, \\ \dfrac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{\lambda}_2}(\hat{a}_2) = 3\alpha_2 - \alpha_6, \\ \dfrac{\partial \hat{p}_3}{\partial \hat{\lambda}_2}(\hat{a}_3) = -3\alpha_3 + \alpha_7. \end{cases}$$

由此可见

$$\begin{aligned}
&\alpha_1+\cdots+\alpha_9\\
&=6\sum_{i=1}^{3}\hat{p}_3(\hat{a}_i)+\Big\{-2\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_1)+\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_2)+\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_3)\Big\}\\
&\quad+\Big\{\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_1)-2\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_2)+\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_3)\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{10}\\
&=27\hat{p}_3(\hat{a})-7\sum_{i=1}^{3}\hat{p}_3(\hat{a}_i)-\Big\{-2\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_1)+\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_2)+\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_3)\Big\}\\
&-\Big\{\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_1)-2\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_2)+\frac{\partial\hat{p}_3}{\partial\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_3)\Big\}.
\end{aligned}$$

将此代入 (6.1.25), 可得带导数的 3 次精度求积公式:

$$\begin{aligned}
&\frac{|\hat{T}|}{60}\Big\{11\sum_{i=1}^{3}\hat{\varphi}(\hat{a}_i)-(-2\hat{\varphi}_{\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_1)+\hat{\varphi}_{\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_2)+\hat{\varphi}_{\hat{\lambda}_1}(\hat{a}_3))\\
&-(\hat{\varphi}_{\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_1)-2\hat{\varphi}_{\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_2)+\hat{\varphi}_{\hat{\lambda}_2}(\hat{a}_3))+27\hat{\varphi}(\hat{a})\Big\}\\
=&\frac{|\hat{T}|}{60}\Big\{11\sum_{i=1}^{3}\hat{\varphi}(\hat{a}_i)+\hat{\varphi}_{\hat{x}}(\hat{a}_1)(\hat{\xi}_2-\hat{\xi}_3)+\hat{\varphi}_{\hat{x}}(\hat{a}_2)(\hat{\xi}_3-\hat{\xi}_1)\\
&+\hat{\varphi}_{\hat{x}}(\hat{a}_3)(\hat{\xi}_1-\hat{\xi}_2)+\hat{\varphi}_{\hat{y}}(\hat{a}_1)(\hat{\eta}_2-\hat{\eta}_3)+\hat{\varphi}_{\hat{y}}(\hat{a}_2)(\hat{\eta}_3-\hat{\eta}_1)\\
&+\hat{\varphi}_{\hat{y}}(\hat{a}_3)(\hat{\eta}_1-\hat{\eta}_2)+27\hat{\varphi}(\hat{a})\Big\}.
\end{aligned}$$

6.1.5 矩形单元上的数值积分

设标准参考单元 $\hat{T}=[0,1]^2$, 由 Gauss-Legendre 求积公式可知, 对每个整数 $k\geq 0$, 有 $k+1$ 个节点 $b_i\in[0,1]$ 及 $k+1$ 个权 $\omega_i>0, 1\leq i\leq k+1$, 使得求积公式

$$\int_0^1\hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}\approx\sum_{i=1}^{k+1}\hat{\omega}_i\varphi(\hat{b}_i),$$

精确到 $P_{2k+1}([0,1])$. 那么在 $\hat{T}$ 上的求积公式可写成

$$\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} \approx \sum_{i_1,i_2=1}^{k+1} \hat{\omega}_{i_1}\hat{\omega}_{i_2}\hat{\varphi}(\hat{b}_{i_1}, \hat{b}_{i_2}),$$

它精确到 $Q_{2k+1}([0,1]^2)$—— 双 $(2k+1)$ 次多项式空间.

6.2 数值积分下的抽象误差估计

设原问题是

$$\begin{cases} \text{求 } u \in V, \quad \text{使得} \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle, \quad \forall v \in V, \end{cases} \tag{6.2.1}$$

且设它满足 Lax-Milgram 定理的条件. 具有数值积分的有限元逼近问题是

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in V_h, \quad \text{使得} \\ a_h(u_h,v_h) = \langle f, v_h\rangle, \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{6.2.2}$$

其中 $a_h(\cdot,\cdot)$ 及 $\langle f,\cdot\rangle_h$ 如 (6.1.19) 所示. 假定 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是一致 V_h 椭圆的, 即存在 $\bar{\alpha} = \text{const} > 0$, 使得

$$a_h(v_h, v_h) \geq \bar{\alpha}\|v_h\|_V^2, \quad \forall v_h \in V_h,\ h > 0, \tag{6.2.3}$$

则下述抽象误差估计成立.

定理 6.2.1 (Strang 引理) 若 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是一致 V_h 椭圆的, 则

$$\|u-u_h\|_V \leq c\left\{ \inf_{v_h\in V_h} \left[\|u-v_h\|_V + \sup_{w_h\in V_h} \frac{|a(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)|}{\|w_h\|_V}\right] \right.$$

$$\left. + \sup_{w_h\in V_h} \frac{|\langle f, w_h\rangle - \langle f, w_h\rangle_h|}{\|w_h\|_V} \right\}. \tag{6.2.4}$$

注 6.2.1 估计式 (6.2.4) 是 Céa 引理在数值积分下的推广.

证明 首先由三角不等式

$$\|u-u_h\|_V \le \|u-v_h\|_V + \|u_h-v_h\|_V, \quad \forall v_h \in V_h.$$

现在估计 $\|u_h-v_h\|_V$, 由 $a_h(\cdot,\cdot)$ 的一致 V_h 椭圆性,

$$\begin{aligned}
&\bar{\alpha}\|u_h-v_h\|_V^2 \le a_h(u_h-v_h,u_h-v_h)\\
= \ & a(u-v_h,u_h-v_h)+\{a_h(u_h-v_h,u_h-v_h)-a(u-v_h,u_h-v_h)\}\\
= \ & a(u-v_h,u_h-v_h)+\{a_h(u_h,u_h-v_h)-a_h(v_h,u_h-v_h)\}\\
&+\{a(v_h,u_h-v_h)-a(u,u_h-v_h)\}\\
= \ & a(u-v_h,u_h-v_h)+\{a(v_h,u_h-v_h)-a_h(v_h,u_h-v_h)\}\\
&+\left\{\left\langle f,u_h-v_h\right\rangle_h-\left\langle f,u_h-v_h\right\rangle\right\}.
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}\|u_h-v_h\|_V \le \ & M\|u-v_h\|_V+\frac{|a(v_h,u_h-v_h)-a_h(v_h,u_h-v_h)|}{\|u_h-v_h\|_V}\\
&+\frac{|\left\langle f,u_h-v_h\right\rangle-\left\langle f,u_h-v_h\right\rangle_h|}{\|u_h-v_h\|_V}\\
\le \ & M\|u-v_h\|_V+\sup_{w_h\in V_h}\frac{|a(v_h,w_h)-a_h(v_h,w_h)|}{\|w_h\|_V}\\
&+\sup_{w_n\in V_h}+\frac{|\left\langle f,w_h\right\rangle-\left\langle f,w_h\right\rangle_h|}{\|w_h\|_h}.
\end{aligned}$$

将它代入三角不等式, 用 $v_h\in V_h$ 的任意性, 即得证明.

在上述抽象误差估计中, 用到了 $a_h(\cdot,\cdot)$ 一致 V_h 椭圆的假定, 而此性质并非 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 椭圆性条件的直接推论. 现在给出保证 $a_h(\cdot,\cdot)$ 为一致 V_h 椭圆的充分条件.

定理 6.2.2 设存在 $\beta=\text{const}>0$, 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \beta\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2, \quad \forall\xi\in\mathbf{R}^2,\ x\in\Omega, \tag{6.2.5}$$

双线性型 $a(u,v)$ 及 $a_h(u_h,v_h)$ 分别如 (6.1.2) 及 (6.1.19) 所示. 又设在参考元 $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$ 上, 给出一个求积公式

$$\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} \approx \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \hat{\varphi}(\hat{b}_l), \quad \hat{\omega}_l > 0,\ 1 \le l \le L, \tag{6.2.6}$$

若存在整数 $k' \ge 1$, 使得

(a) $\hat{P} \subset P_{k'}(\hat{T})$,

(b) $\{\hat{b}_l\}_{l=1}^{L}$ 包含 $P_{k'-1}(\hat{T})$ 的唯一确定集, 即对任何给定的 $\hat{p} \in P_{k'-1}(\hat{T})$, 可由 $\hat{p}(\hat{b}_l)$, $1 \le l \le L$ 的值唯一地确定; 或者求积公式 (6.2.6) 精确到 $P_{2k'-2}(\hat{T})$. 则存在 $\bar{\alpha} = \text{const} > 0$, 使得

$$\bar{\alpha}|v_h|_{1,\Omega}^2 \le a_h(v_h,v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{6.2.7}$$

证明 证明分三步.

(i) 设 $\{\hat{b}_l\}$ 包含 $P_{k'-1}(\hat{T})$ 的唯一确定集, $\hat{\omega}_l > 0$, 则当 $\hat{p} \in \hat{P}$ 且

$$\sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \sum_{i,j=1}^{n} (\partial_i \hat{p}(\hat{b}_l))^2 = 0,$$

就有

$$\partial_i \hat{p}(\hat{b}_l) = 0, \quad 1 \le i \le n,\ 1 \le l \le L.$$

注意到 $\hat{p} \in \hat{P} \subset P_{k'}(\hat{T})$, 因此 $\partial_i \hat{p} \in P_{k'-1}(\hat{T})$, 由此即得

$$\partial_i \hat{p}(\hat{x}) = 0, \quad \forall \hat{x} \in \hat{T},\ 1 \le i \le n,$$

即知 $\hat{p}(\hat{x})$ 是常数. 因此

$$\hat{p} \to \left\{ \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \hat{p}(\hat{b}_l))^2 \right\}^{1/2}$$

是定义在商空间 $\hat{P}/P_0(\hat{T})$ 上的范数. 而显然

$$\hat{p} \to |\hat{p}|_{1,\hat{T}}$$

也是定义在商空间 $\hat{P}/P_0(\hat{T})$ 上的范数. 由于商空间 $\hat{P}/P_0(\hat{T})$ 是有限维的, 因此上述二种范数等价, 即存在 $\hat{c} = \text{const} > 0$, 使得

$$\hat{c}|\hat{p}|_{1,\hat{T}}^2 \leq \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \hat{p}(\hat{b}_l))^2, \quad \forall \hat{p} \in \hat{p}. \tag{6.2.8}$$

如果求积公式 (6.2.6) 精确到 $P_{2k'-2}(\hat{T})$, 则显然 (6.2.8) 成立等式且 $\hat{c} = 1$. 因此在假定 (b) 中, 只要其中一个条件成立, 不等式 (6.2.8) 均成立.

(ii) 考虑积分

$$\int_T \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \partial_i v_h \partial_j v_h \mathrm{d}x$$

的求积公式

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij} \partial_i v_h \partial_j v_h)(b_{l,T}) \\
\geq\ & \beta \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i v_h (b_{l,T})^2 \\
=\ & \beta \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} \sum_{i=1}^{n} (\partial_i p_T (b_{l,T})^2,
\end{aligned}$$

其中

$$v_h|_T = p_T \in P(T).$$

注意到

$$\sum_{i=1}^{n} (\partial_i p_T(b_{l,T}))^2 = \|\mathrm{grad} p_T(b_{l,T})\|^2.$$

由于

$$b_{l,T} = B_T \hat{b}_l + b_T, \quad \hat{p}(\hat{b}_l) = p_T(b_{l,T}).$$

从而

$$\|\mathrm{grad}\hat{p}(\hat{b}_l)\| = \|B_T \cdot \mathrm{grad} p_T(b_{l,T})\| \leq \|B_T\| \cdot \|\mathrm{grad} p_T(b_{l,T})\|.$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}(\partial_i p_T(b_{l,T}))^2 \geq \|B_T\|^{-2}\|\mathrm{grad}\hat{p}(\hat{b}_l)\|^2 = \|B_T\|^{-2}\sum_{i=1}^{n}(\partial_i\hat{p}(\hat{b}_l))^2.$$

从而, 由 $\omega_{l,T} = \det(B_T)\cdot\hat{\omega}_l > 0$, 以及 (i), 可见

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,T}\sum_{i=1}^{n}(\partial_i p_T(b_{l,T}))^2 \geq \|B_T\|^{-2}\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,T}\sum_{i=1}^{n}(\partial_i\hat{p}(\hat{b}_l))^2\\
&= \det(B_T)\|B_T\|^{-2}\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l\sum_{i=1}^{n}(\partial_i\hat{p}(\hat{b}_l))^2\\
&\geq \hat{c}\det(B_T)\|B_T\|^{-2}|\hat{p}|_{1,\hat{T}}^2\\
&\geq \hat{c}\|B_T\|^{-2}\cdot\|B_T\|^2\cdot|p_T|_{1,T}^2 \geq \bar{\alpha}|p_T|_{1,T}^2 = \bar{\alpha}|v_h|_{1,T}^2,
\end{aligned}\tag{6.2.9}$$

最后二个不等式是由于定理 5.2.1 及拟正则剖分的假定:

$$\|B_T\|\cdot\|B_T^{-1}\| \leq c\frac{\hat{h}_T}{\rho_T}\cdot\frac{h_T}{\rho_T} \leq c.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
a_h(v_h,v_h) &= \sum_T\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,T}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\partial_i v_h\partial_j v_h)(b_{l,T})\Big)\\
&\geq \beta\sum_T\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,T}\sum_{i=1}^{n}(\partial_i v_h(b_{l,T}))^2 \geq \bar{\alpha}\sum_T|v_h|_{1,T}^2\\
&= \bar{\alpha}|v_h|_{1,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

即得证明.

下面给出几个例子.

(i) $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$ 为一次元.

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{p}(\hat{a}_i), i=1,2,3\},\quad \hat{P} = P_1(\hat{T}).$$

$\hat{a}_i, 1\leq i\leq 3$, 为三角形 $\hat{T}$ 的按逆时针排列的顶点. 此时 $k'=1$, 重心 $\hat{a}$ 是 $P_0(\hat{T})(k'-1=0)$ 的唯一确定集. 采用数值积分 (一次精

度):

$$\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} \approx |\hat{T}|\hat{\varphi}(\hat{a}),$$

则一致 V_h 椭圆的两个充分条件同时满足 (事实上, 此时 $2k'-2=0$, 按定理要求, 只要数值积分精确到零次多项式).

(ii) 二次元.

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{p}(\hat{a}_i), \hat{p}(\hat{a}_{ij})\}, \quad \hat{P} = P_2(\hat{T}).$$

此时 $k'=2$, 而 $\{\hat{a}_{ij}\}_{1\le i<j\le 3}$ 是 $P_1(\hat{T})$ 的唯一确定集. 故可采用下述求积公式

$$\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} \approx \frac{|\hat{T}|}{3} \sum_{1\le i<j\le 3} \hat{\varphi}(\hat{a}_{ij}).$$

此时 $2k'-2=2$, 而上述求积公式是 2 次精度, 因此定理中保证 $a_h(\cdot,\cdot)$ 为一致 V_h 椭圆的两个条件同时满足.

(iii) 考虑 Lagrange 3 次元.

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{p}(\hat{a}_i), \hat{p}(\hat{a}_{iij}), \hat{p}(\hat{a})\}, \quad \hat{P} = P_3(\hat{T})$$

为完全 3 次元; 以及

$$\hat{\Sigma} = \{\hat{p}(\hat{a}_i), \hat{p}(\hat{a}_{iij})\}, \quad \hat{P} \subset P_3(\hat{T})$$

为不完全 3 次元. 此时 $k'=3$, 而求积公式

$$\int_{\hat{T}} \hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} \approx \frac{|\hat{T}|}{60}\left\{3\sum_{i=1}^{3}\hat{\varphi}(\hat{a}_i) + 8\sum_{1\le i<j\le 3}\hat{\varphi}(\hat{a}_{ij}) + 27\hat{\varphi}(\hat{a})\right\}$$

具有 3 次精度, 其求积节点为

$$\{\hat{a}_i\} \cup \{\hat{a}_{ij}\} \cup \{\hat{a}\} \supset \{\hat{a}_i\} \cup \{\hat{a}_{ij}\} - P_2(\hat{T}) \text{ 的唯一确定集}.$$

所以上述求积公式满足一致 V_h 椭圆条件. 需要指出的是, 此时 $2k'-2=4$, 因此该求积公式并不同时满足定理中的两个充分条件.

6.3 相容误差估计

往后均假定 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是一致 V_h 椭圆的. 按照抽象误差估计定理 6.2.1, 其右端第一项由插值误差估计即可获得: 设

$$\hat{P}=P_k(\hat{T})\ (k\geq 1),\quad u\in H^{k+1}(\Omega),$$

则

$$\inf_{v_h\in V_h}\|u-v_h\|_{1,\Omega}\leq\|u-\sqcap_h u\|_{1,\Omega}\leq ch^k|u|_{k+1,\Omega}.$$

因此也期望另外两项误差能保持同样的阶 $O(h^k)$.

按照数值分析的语言, 一致椭圆性条件称为稳定条件, 而数值积分的误差:

$$\begin{cases}\sup\limits_{w_h\in V_h}\dfrac{|a(\sqcap_h u,w_h)-a_h(\sqcap_h u,w_h)|}{\|w_h\|_V},\\[2ex] \sup\limits_{w_h\in V_h}\dfrac{|\langle f,w_h\rangle-\langle f,w_h\rangle_h|}{\|w_h\|_V},\end{cases}\tag{6.3.1}$$

称为相容误差 (对应于差分方法中, 用差商代替微商时的截断误差).

建立相容误差估计的过程如下.

(i) 求积误差

由

$$E_T(\varphi)=\int_T\varphi(x)\mathrm{d}x-\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,T}\varphi(B_{l,T}),$$

可知

$$a(\sqcap_h u,w_h)-a_h(\sqcap_h u,w_h)=\sum_T E_T\Big(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\partial_i\sqcap_h u\partial_j w_h\Big),$$

$$\langle f,w_h\rangle-\langle f,w_h\rangle_h=\sum_T E_T(fw_h).$$

(ii) 建立局部误差估计. $\forall p',p\in P_T$,

$$\begin{aligned}&|E_T(a_{ij}\partial_i p'\partial_j p)|\leq c(a_{ij}|_T;\partial_i p')h_T^k|\partial_j p|_{0,T},\\ &|E_T(f\cdot p)|\leq c(f|_T)h_T^k\|p\|_{1,T}.\end{aligned}\tag{6.3.2}$$

(iii) 最后给出总体误差估计.

定理 6.3.1(Bramble-Hilbert 引理)　设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 具有 Lipschitz 连续边界, $f \in (W^{k+1,p}(\Omega))'$ 且

$$f(p) = 0, \quad \forall p \in P_k(\Omega). \tag{6.3.3}$$

则

$$|f(v)| \leq c_\Omega \|f\|^* \cdot |v|_{k+1,p,\Omega}, \quad \forall v \in W^{k+1,p}(\Omega), \tag{6.3.4}$$

其中

$$\|f\|^* = \|f\|_{(W^{k+1,p}(\Omega))'}. \tag{6.3.5}$$

证明　事实上, 定理是商空间 $W^{k+1,p}(\Omega)/P_k(\Omega)$ 中等价模定理 2.7.2 的直接推论.$\forall v \in W^{k+1,p}(\Omega)$, $q \in P_k(\Omega)$, 则由 f 的性质:

$$f(v) = f(v+q),$$

从而

$$|f(v)| = |f(v+q)| \leq \|f\|^* \cdot \|v+q\|_{k+1,p,\Omega}, \quad \forall q \in P_k(\Omega).$$

因此

$$|f(v)| \leq \|f\|^* \inf_{q \in P_k(\Omega)} \|v+q\|_{k+1,p,\Omega} \leq c\|f\|^* \cdot |v|_{k+1,p,\Omega}.$$

证毕.

命题 6.3.1　设 $\varphi \in W^{m,q}(\Omega), w \in W^{m,\infty}(\Omega)$, 则

$$\varphi w \in W^{m,q}(\Omega), \tag{6.3.6}$$

且

$$|\varphi w|_{m,q,\Omega} \leq c \sum_{j=0}^{m} |\varphi|_{m-j,q,\Omega} \cdot |w|_{j,\infty,\Omega}, \tag{6.3.7}$$

其中 $c = c(m,n)$ 与 φ 及 w 无关.

证明从略.

现在给出 (6.3.2) 的第一式的估计.

定理 6.3.2 设 $\hat{P} = P_k(\hat{T})(k \geq 1)$,

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = 0, \quad \forall \hat{\varphi} \in P_{2k-2}(\hat{T}); \tag{6.3.8}$$

且 $a \in W^{k,\infty}(T)$. 则

$$\begin{aligned}|E_T(a\partial_i p' \cdot \partial_j p)| &\leq ch_T^k \|a\|_{k,\infty,T} \|\partial_i p'\|_{k-1,T} \cdot |\partial_j p|_{0,T} \\ &\leq ch_T^k \|a\|_{k,\infty,T} \|p'\|_{k,T} \cdot |p|_{1,T}, \ \forall p', p \in P_k(T).\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

证明 设 $a \in W^{k,\infty}(T)$, $v \in P_{k-1}(T), w \in P_{k-1}(T)$, 现给出 $E_T(avw)$ 的估计. 由

$$E_T(\varphi) = \det(B_T)\hat{E}(\hat{\varphi}),$$

可见

$$E_T(avw) = \det(B_T)\hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w}),$$

其中 $\hat{v}, \hat{w} \in P_{k-1}(\hat{T}), \hat{a} \in W^{k,\infty}(\hat{T})$. 令 $\hat{\varphi} = \hat{a}\hat{v} \in W^{k,\infty}(\hat{T})$, 则

$$\begin{aligned}|\hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w})| &= |\hat{E}(\hat{\varphi}\hat{w})| = \left| \int_{\hat{T}} (\hat{\varphi}\hat{w})(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} - \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l (\hat{\varphi}\hat{w})(\hat{b}_l) \right| \\ &\leq \left| \int_{\hat{T}} (\hat{\varphi}\hat{w})(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x} \right| + \left| \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l (\hat{\varphi}\hat{w})(\hat{b}_l) \right| \\ &\leq |\hat{\varphi}\hat{w}|_{0,\infty,\hat{T}} \cdot |\hat{T}| + |\hat{\varphi}\hat{w}|_{0,\infty,\hat{T}} \left| \sum_{l=1}^{L} \hat{\omega}_l \right| \\ &\leq \hat{c} |\hat{\varphi}\hat{w}|_{0,\infty,\hat{T}} \leq \hat{c} \|\hat{\varphi}\|_{0,\infty,\hat{T}} \cdot \|\hat{w}\|_{0,\infty,\hat{T}} \\ &\leq \hat{c} \|\hat{\varphi}\|_{k,\infty,\hat{T}} \cdot \|\hat{w}\|_{0,\hat{T}},\end{aligned}$$

其中最后一个不等式, 是因为在有限维空间 $P_{k-1}(\hat{T})$ 中范数 $\|\cdot\|_{0,\infty,\hat{T}}$ 与 $\|\cdot\|_{0,\hat{T}}$ 等价. 从而对任给定 $\hat{w} \in P_{k-1}(\hat{T})$, $\hat{E}(\hat{\varphi}\hat{w})$

是定义在 $W^{k,\infty}(\hat{T})$ 上的连续线性泛函, 且若令 $\hat{E}(\hat{\varphi}\hat{w})=f(\hat{\varphi})$, 则

$$\|f\|^*\leq \hat{c}\|\hat{w}\|_{0,\hat{T}}.$$

由定理之假定 $\forall \hat{p}\in P_{k-1}(\hat{T})$, 由于 $\hat{p}\hat{w}\in P_{2k-2}(\hat{T})$,

$$f(\hat{p})=\hat{E}(\hat{p}\cdot\hat{w})=0.$$

则由 Bramble-Hilbert 引理,

$$\begin{aligned}|\hat{E}(\hat{\varphi}\cdot\hat{w})|&=|f(\hat{\varphi})|\leq \hat{c}\|f\|^*\cdot|\hat{\varphi}|_{k,\infty,\hat{T}}\\&\leq \hat{c}|\hat{\varphi}|_{k,\infty,\hat{T}}\cdot\|\hat{w}\|_{0,\hat{T}}.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}|\hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w})|&\leq \hat{c}|\hat{a}\hat{v}|_{k,\infty,\hat{T}}\cdot\|\hat{w}\|_{0,\hat{T}}\\&\leq \hat{c}\left\{\sum_{j=0}^{k}|\hat{a}|_{k-j,\infty,\hat{T}}\cdot|\hat{v}|_{j,\infty,\hat{T}}\right\}\cdot\|\hat{w}\|_{0,\hat{T}}\\&\leq \hat{c}\left\{\sum_{j=0}^{k-1}|\hat{a}|_{k-j,\infty,\hat{T}}\cdot|\hat{v}|_{j,\hat{T}}\right\}\cdot\|\hat{w}\|_{0,\hat{T}},\end{aligned}$$

其中最后不等式是由于 $\hat{v}\in P_{k-1}(\hat{T})$, 因此 $|\hat{v}|_{k,\infty,\hat{T}}=0$, 以及由于 $P_j(\hat{T})/P_{j-1}(\hat{T})$ $(1\leq j\leq k-1)$ 为有限维空间, 因此在其上的范数 $|\cdot|_{j,\infty,\hat{T}}$ 与 $|\cdot|_{j,\hat{T}}$ 等价. 再注意到

$$\begin{cases}|\hat{a}|_{k-j,\infty,\hat{T}}\leq ch_T^{k-j}|a|_{k-j,\infty,T},\\|\hat{v}|_{j,\hat{T}}\leq ch_T^{j}(\det(B_T))^{-1/2}|v|_{j,T},\\\|\hat{w}\|_{0,\hat{T}}\leq c(\det(B_T))^{-1/2}\|w\|_{0,T},\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}|E_T(avw)|&=\det(B_T)|\hat{E}(\hat{a}\hat{v}\hat{w})|\\&\leq ch_T^k\left\{\sum_{j=0}^{k-1}|a|_{k-j,\infty,T}\cdot|v|_{j,T}\right\}\cdot\|w\|_{0,T}\\&\leq ch_T^k\|a\|_{k,\infty,T}\cdot\|v\|_{k-1,T}\cdot\|w\|_{0,T},\end{aligned}$$

在上式中, 令 $v=\partial_i p'$, $w=\partial_j p$ 即得定理证明.

下面建立对 (6.3.2) 的第二式的估计.

首先注意到在对 (6.3.2) 的第一式的估计中 (见定理 6.3.2), 我们假定 $a\in W^{k,\infty}(T)$. 这个假定是合理的, 因为在原问题 (6.1.1) 中, 它对应于 $a_{ij}\in W^{k,\infty}(T)$. 但为建立 (6.3.2) 的第二式的估计, 此地的 f 是原问题的右端项. 我们不能假定 $f\in W^{k,\infty}(T)$, 然而为了数值积分可行, 可要求 $f\in C^0(\bar{T})$, 为此根据 Sobolev 嵌入定理, 可假定 (稍许更强些)$f\in W^{k,q}(T)$, $k-\dfrac{n}{q}>0$. 正是由于这个原因, 使得建立 (6.3.2) 第二式的估计变得更加困难.

定理 6.3.3 设 $\hat{P}=P_k(\hat{T})(k\geq 1)$,

$$\hat{E}(\hat{\varphi})=0,\quad \forall\hat{\varphi}\in P_{2k-2}(\hat{T}), \tag{6.3.10}$$

且 $q\in[1,\infty)$, 使得 $k-\dfrac{n}{q}>0$. 则

$$\begin{aligned}&|E_T(fp)|\leq ch_T^k|T|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{k,q,T}\cdot\|p\|_{1,T},\\&\forall f\in W^{k,q}(T),p\in P_k(T).\end{aligned} \tag{6.3.11}$$

证明 首先有

$$E_T(fp)=\det(B_T)\hat{E}(\hat{f}\hat{p}),$$

其中 $\hat{f}\in W^{k,q}(\hat{T})$, $\hat{p}\in P_k(\hat{T})$. 注意到 $\hat{E}(\cdot)$ 是线性的,

$$\begin{aligned}\hat{E}(\hat{f}\hat{p})&=\hat{E}(\hat{f}(\hat{\Pi}\hat{p}+\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p}))\\&=\hat{E}(\hat{f}(\hat{\Pi}\hat{p}))+\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\hat{\Pi}\hat{p})),\end{aligned} \tag{6.3.12}$$

其中 $\hat{\Pi}:L^2(\hat{T})\to P_1(\hat{T})$ 正交投影算子 (在 $(\cdot,\cdot)$ 内积下), 即对任给定 $\hat{v}\in L^2(\hat{T})$, $\hat{\Pi}\hat{v}\in P_1(\hat{T})$ 使得

$$\|\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v}\|_{0,\hat{T}}\leq\|\hat{v}-\hat{q}\|_{0,T},\quad\forall\hat{q}\in P_1(\hat{T}),$$

或等价地

$$(\hat{v}-\hat{\Pi}\hat{v},\hat{q})=0,\quad\forall\hat{q}\in P_1(\hat{T}). \tag{6.3.13}$$

(i) 首先估计 $\hat{E}(\hat{f}\cdot\sqcap\hat{p})$.

令 $\hat{\psi}=\hat{f}\cdot\sqcap\hat{p}\in W^{k,q}(\hat{T})$, 则

$$
\begin{aligned}
|\hat{E}(\hat{\psi})| &= \left|\int_{\hat{T}}\hat{\psi}\mathrm{d}\hat{x}-\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l\hat{\psi}(\hat{b}_l)\right| \\
&\le \left|\int_{\hat{T}}\hat{\psi}\mathrm{d}\hat{x}\right|+\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l|\hat{\psi}(\hat{b}_l)| \quad (\hat{\omega}_l>0) \\
&\le |\hat{T}||\hat{\psi}|_{0,\infty,\hat{T}}+\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l\cdot|\hat{\psi}|_{0,\infty,\hat{T}} \\
&\le \hat{c}|\hat{\psi}|_{0,\infty,\hat{T}} \quad \left(\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l=\int_{\hat{T}}1\mathrm{d}\hat{x}=|\hat{T}|\right) \\
&\le \hat{c}\|\hat{\psi}\|_{k,q,\hat{T}},
\end{aligned}
$$

最后不等式是因为 $k-n/q>0$, $W^{k,q}(\hat{T})\hookrightarrow C^0(\hat{T})$. 因此 $\hat{E}\in(W^{k,q}(\hat{T}))'$, 又由定理的假定

$$
\hat{E}(\hat{\psi})=0,\quad \forall\hat{\psi}\in P_{k-1}(\hat{T}) \quad (k\ge 1\Rightarrow 2k-2\ge k-1),
$$

则由 Bramble-Hilbert 引理,

$$
|\hat{E}(\hat{\psi})|\le\hat{c}|\hat{\psi}|_{k,q,\hat{T}},
$$

并注意到 (6.3.7), 可得

$$
\begin{aligned}
&|\hat{E}(\hat{f}\cdot\sqcap\hat{p})|\le\hat{c}|\hat{f}\cdot\sqcap\hat{p}|_{k,q,\hat{T}} \\
\le{}& \hat{c}\sum_{j=0}^{k}|\hat{f}|_{k-j,q,\hat{T}}|\sqcap\hat{p}|_{j,\infty,\hat{T}} \\
={}& \hat{c}\{|\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}|\sqcap\hat{p}|_{0,\infty,\hat{T}}+|\hat{f}|_{k-1,q,\hat{T}}\cdot|\sqcap\hat{p}|_{1,\infty,\hat{T}}\}(\sqcap\hat{p}\in P_1(\hat{T})) \\
={}& \hat{c}\{|\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}\|\sqcap\hat{p}\|_{0,\hat{T}}+|\hat{f}|_{k-1,q,\hat{T}}\cdot|\sqcap\hat{p}|_{1,\hat{T}}\},
\end{aligned}
\tag{6.3.14}
$$

上述最后不等式是由于 $P_1(\hat{T})$ 是有限维空间.

下面分别估计 $\|\hat{\sqcap}\hat{p}\|_{0,\hat{T}}$ 及 $|\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}}$, 由 $\hat{\sqcap}$ 的定义知 $\hat{\sqcap}$ 是非扩张的:

$$\|\hat{\sqcap}\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \leq \|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}. \tag{6.3.15}$$

又可以证明

$$|\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}} \leq \hat{c}|\hat{p}|_{1,\hat{T}}. \tag{6.3.16}$$

事实上, 我们可以给出两种证明.

(a) 若 $k=1$, 则 $\hat{\sqcap}\hat{p}=\hat{p}$, $\forall \hat{p} \in P_1(\hat{T})$, 从而

$$|\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}} = |\hat{p}|_{1,\hat{T}}, \quad \forall \hat{p} \in P_1(\hat{T}).$$

因此不妨设 $k \geq 2$, 则由反不等式, 对 $\hat{p} \in P_k(\hat{T})$,

$$\begin{aligned}
|\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}} &\leq \hat{c}\hat{h}^{-1}\|\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \\
&\leq \hat{c}\hat{h}^{-1}\|\hat{p}-\hat{\sqcap}_{1,\hat{T}}\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \quad (\sqcap_{1,\hat{T}} \text{ 是 } P_1(\hat{T}) \text{ 插值}) \\
&\leq \hat{c}\hat{h}^{-1}\hat{h}^2|\hat{p}|_{2,\hat{T}} \leq c\hat{h}\cdot\hat{h}^{-1}|\hat{p}|_{1,\hat{T}} \quad (\text{反不等式}) \\
&= \hat{c}|\hat{p}|_{1,\hat{T}}.
\end{aligned}$$

则

$$|\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}} \leq |\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}} + |\hat{p}|_{1,\hat{T}} \leq \hat{c}|\hat{p}|_{1,\hat{T}}.$$

(b) 首先证明

$$\hat{\sqcap} \in \mathcal{L}(H^1(\hat{T}); H^1(\hat{T})).$$

按 $\hat{\sqcap}$ 的定义, 对任给定 $\hat{v} \in L^2(\hat{T})$.

$$\hat{\sqcap}\hat{v} = \sum_{i=1}^{3} \hat{\alpha}_i \hat{\lambda}_i;$$

又由

$$(\hat{v}-\hat{\sqcap}\hat{v}, \hat{q}) = 0, \quad \forall \hat{q} \in P_1(\hat{T}),$$

可见

$$\sum_{i=1}^{3}\hat{\alpha}_i(\hat{\lambda}_i,\hat{\lambda}_j)=(\hat{\sqcap}\hat{v},\hat{\lambda}_j)=(\hat{v},\hat{\lambda}_j),\quad j=1,2,3.$$

由此可算出

$$\begin{cases}\hat{\alpha}_1=\dfrac{12}{|\hat{T}|}\Big(\hat{v},\dfrac{3}{4}\hat{\lambda}_1-\dfrac{1}{4}\hat{\lambda}_2-\dfrac{1}{4}\hat{\lambda}_3\Big),\\ \hat{\alpha}_2=\dfrac{12}{|\hat{T}|}\Big(\hat{v},-\dfrac{1}{4}\hat{\lambda}_1+\dfrac{3}{4}\hat{\lambda}_2-\dfrac{1}{4}\hat{\lambda}_3\Big),\\ \hat{\alpha}_3=\dfrac{12}{|\hat{T}|}\Big(\hat{v},-\dfrac{1}{4}\hat{\lambda}_1-\dfrac{1}{4}\hat{\lambda}_2+\dfrac{3}{4}\hat{\lambda}_3\Big).\end{cases}$$

则

$$|\hat{\alpha}_i|\le\hat{c}\|\hat{v}\|_{0,\hat{T}},$$

从而

$$\|\hat{\sqcap}\hat{v}\|_{1,\hat{T}}\le\sum_{i=1}^{3}|\hat{\alpha}_i|\cdot\|\hat{\lambda}_i\|_{1,\hat{T}}\le\hat{c}\|\hat{v}\|_{0,\hat{T}}\le\hat{c}\|\hat{v}\|_{1,\hat{T}}.$$

又 $\forall\hat{p}_0\in P_0(\hat{T})$,

$$\begin{aligned}|\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}}&\le\|\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}\|_{1,\hat{T}}=\|(I-\hat{\sqcap})(\hat{p}-\hat{p}_0)\|_{1,\hat{T}}\\&\le\|I-\hat{\sqcap}\|_{\mathcal{L}(H^1(\hat{T});H^1(\hat{T}))}\cdot\|\hat{p}-\hat{p}_0\|_{1,\hat{T}},\end{aligned}$$

利用商空间等价模定理,

$$|\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}}\le\hat{c}\inf_{\hat{p}_0\in P_0(\hat{T})}\|\hat{p}-\hat{p}_0\|_{1,\hat{T}}\le\hat{c}|\hat{p}|_{1,\hat{T}}.$$

则

$$|\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}}\le|\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}|_{1,\hat{T}}+|\hat{p}|_{1,\hat{T}}\le\hat{c}|\hat{p}|_{1,\hat{T}}.$$

综合 (6.3.14)~(6.3.16),

$$|\hat{E}(\hat{f}\cdot\hat{\sqcap}\hat{p})|\le\hat{c}\{|\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}\cdot\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}}+|\hat{f}|_{k-1,q,\hat{T}}\cdot\|\hat{p}\|_{1,\hat{T}}\}.\quad(6.3.17)$$

(ii) 其次估计 $\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}))$.

当 $k=1$ 时, 有 $\sqcap\hat{p}=\hat{p}, \forall\hat{p}\in P_1(\hat{T})$, 故不妨设 $k\geq 2$. 由嵌入定理, 存在 $\rho\in[1,+\infty)$, 使得

$$W^{k,q}(\hat{T})\hookrightarrow W^{k-1,\rho}(\hat{T})\hookrightarrow C^0(\hat{T}). \tag{6.3.18}$$

事实上, 若 $1<n/q$, 则取 $\rho:\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{n}$, 由嵌入定理知 (6.3.18) 左端嵌入成立; 又此时

$$k-1>\frac{n}{q}-1=n\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{n}\Big)=\frac{n}{\rho},$$

从而 (6.3.18) 右边嵌入也成立. 若 $1\geq n/q$, 则由嵌入定理知, $\forall\rho\in[1,\infty)$,(6.3.18) 左边嵌入成立; 然后取 ρ 足够大, 使得 $(k-1)\rho>n$, 而使 (6.3.18) 右边嵌入亦成立. 我们有下述估计

$$\begin{aligned}|\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\sqcap\hat{p}))|&\leq\Big|\int_{\hat{T}}\hat{f}(\hat{p}-\sqcap\hat{p})\mathrm{d}\hat{x}\Big|+\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l|(\hat{f}(\hat{p}-\sqcap\hat{p}))(\hat{b}_l)|\\&\leq\hat{c}|\hat{f}(\hat{p}-\sqcap\hat{p})|_{0,\infty,\hat{T}}\leq\hat{c}|\hat{f}|_{0,\infty,\hat{T}}\cdot|\hat{p}-\sqcap\hat{p}|_{0,\infty,\hat{T}}\\&\leq\hat{c}\|\hat{f}\|_{k-1,\rho,\hat{T}}\cdot|\hat{p}-\sqcap\hat{p}|_{0,\infty,\hat{T}},\end{aligned}$$

由此可见, 对任给定 $\hat{p}\in P_k(\hat{T})$, 线性泛函

$$\hat{E}(\cdot(\hat{p}-\sqcap\hat{p})):W^{k-1,\rho}(\hat{T})\to\mathbf{R}$$

有界, 且

$$\|\hat{E}(\cdot(\hat{p}-\sqcap\hat{p}))\|^*\leq\hat{c}|\hat{p}-\sqcap\hat{p}|_{0,\infty,\hat{T}}\leq\hat{c}\|\hat{p}-\sqcap\hat{p}\|_{0,\hat{T}}.$$

又由于 $\hat{p}-\sqcap\hat{p}\in P_k(\hat{T})$, 由定理假定

$$\hat{E}(\hat{f}\cdot(\hat{p}-\sqcap\hat{p}))=0,\quad\forall\hat{f}\in P_{k-2}(\hat{T}).$$

则由 Bramble-Hilbert 引理,

$$\begin{aligned}&|\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\sqcap\hat{p}))|\leq\|\hat{E}(\cdot(\hat{p}-\sqcap\hat{p}))\|^*|\hat{f}|_{k-1,\rho,\hat{T}}\\\leq\ &\hat{c}\|\hat{p}-\sqcap\hat{p}\|_{0,\hat{T}}\cdot|\hat{f}|_{k-1,\rho,\hat{T}},\quad\forall\hat{f}\in W^{k-1,\rho}(\hat{T}),\ \hat{p}\in P_k(\hat{T}).\end{aligned}$$

由于 $\hat{\sqcap}$ 对空间 $P_0(\hat{T})$ 不变, 故

$$\|\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}\|_{0,\hat{T}} \le \hat{c}|\hat{p}|_{1,\hat{T}},$$

又 $W^{k,q}(\hat{T}) \hookrightarrow W^{k-1,\rho}(\hat{T})$, 故

$$|\hat{f}|_{k-1,\rho,\hat{T}} \le \hat{c}(|\hat{f}|_{k-1,q,\hat{T}} + |\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}).$$

从而

$$|\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}))| \le \hat{c}(|\hat{f}|_{k-1,q,\hat{T}} + |\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}) \cdot |\hat{p}|_{1,\hat{T}}. \tag{6.3.19}$$

(iii) 由 (6.3.17) 和 (6.3.19),

$$\begin{aligned}
&|E_T(fp)| = \det(B_T)|\hat{E}(\hat{f}\hat{p})| \\
\le\ & \det(B_T)\{|\hat{E}(\hat{f}\cdot\hat{\sqcap}\hat{p})| + |\hat{E}(\hat{f}(\hat{p}-\hat{\sqcap}\hat{p}))|\} \\
\le\ & \hat{c}\det(B_T)\{|\hat{f}|_{k,q,\hat{T}}\cdot\|\hat{p}\|_{0,\hat{T}} + (|\hat{f}|_{k-1,q,\hat{T}} + |\hat{f}|_{k,q,\hat{T}})|\hat{p}|_{1,\hat{T}}\} \\
\le\ & \hat{c}(\det(B_T))^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\{h_T^k|f|_{k,q,T}\cdot\|p\|_{0,T} \\
& +h_T^k(|f|_{k-1,q,T} + h_T|f|_{k,q,T})|p|_{1,T}\} \\
\le\ & \hat{c}h_T^k|T|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{k,q,T}\cdot\|p\|_{1,T},
\end{aligned}$$

证毕.

最后有下述数值积分下的有限元误差估计.

定理 6.3.4 设有限元离散满足条件 (H1)~(H3)(即剖分是拟一致, 仿射等价且 C^0 类),

$$\hat{P} = P_k(\hat{T}), \quad H^{k+1}(\hat{T}) \hookrightarrow c^s(\hat{T}).$$

原问题的解 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$, $a_{ij} \in W^{k,\infty}(\Omega)$,

$$f \in W^{k,q}(\Omega), \quad q \ge 2 \text{ 且 } k - n/q > 0.$$

数值积分公式具有 $2k-2$ 次精度, 即

$$\hat{E}(\hat{\varphi}) = 0, \quad \forall\hat{\varphi} \in P_{2k-2}(\hat{T}).$$

则

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega} \le ch^k\Big\{|u|_{k+1,\Omega}+\sum_{i,j}\|a_{ij}\|_{k,\infty}$$
$$\cdot\|u\|_{k+1,\Omega}+\|f\|_{k,q,\Omega}\Big\}. \tag{6.3.20}$$

证明 由于求积公式具有 $2k-2$ 次精度, 故 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是一致 V_h 椭圆的. 由抽象误差估计 (6.2.4), 第一项为插值误差

$$\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega} \le ch^k|u|_{k+1,\Omega}. \tag{6.3.21}$$

(6.2.4) 右端第二项估计, 由定理 6.3.2. 令 $p'=\Pi_T u, p=w_h|_T$, 可见

$$\begin{aligned}
&|a(\Pi_h u,w_h)-a_h(\Pi_h u,w_h)|\\
\le\ &\sum_T\Big|E_T\Big(\sum_{i,j}a_{ij}\partial_i(\Pi_h u)\partial_j w_h\Big)\Big|\\
\le\ &\sum_T\sum_{i,j}|E_T(a_{ij}\partial_i(\Pi_T u)\cdot\partial_j(w_h|_T)|\\
\le\ &c\sum_T h_T^k\sum_{i,j}\|a_{ij}\|_{k,\infty,T}\|\Pi_h u\|_{k,T}\cdot|w_h|_{1,T}\\
\le\ &ch^k\Big(\sum_{i,j}\|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega}\Big)\sum_T\|\Pi_h u\|_{k,T}\cdot|w_h|_{1,T}\\
\le\ &ch^k\Big(\sum_{i,j}\|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega}\Big)\|u\|_{k+1,\Omega}|w_h|_{1,\Omega},
\end{aligned}$$

最后的不等式, 由于

$$\|\Pi_h u\|_{k,\Omega}\le\|\Pi_h u-u\|_{k,\Omega}+\|u\|_{k,\Omega}\le ch|u|_{k+1,\Omega}+\|u\|_{k,\Omega}\le c\|u\|_{k+1,\Omega}.$$

因此 (6.2.4) 右端第二项的界为

$$ch^k\Big(\sum_{i,j}\|a_{ij}\|_{k,\infty,\Omega}\Big)\|u\|_{k+1,\Omega}.$$

现在观察 (6.2.4) 右端第三项, 由定理 6.3.3.

$$\begin{aligned}|\langle f,w_h\rangle-\langle f,w_h\rangle_h| &\le \sum_T |E_T(fw_h)|\\ \le\ & c\sum_T h_T^k|T|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{k,q,T}\|w_h\|_{1,T},\\ \le\ & ch^k|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{k,q,\Omega}\|w_h\|_{1,\Omega}\end{aligned}$$

上述利用了三元 Hölder 不等式:$\beta=q,\gamma=2,\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{q}$(此地要求 $q\ge 2$):

$$\sum_i |a_ib_ic_i|\le\Big(\sum_i|a_i|^\alpha\Big)^{1/\alpha}\Big(\sum_i|b_i|^\beta\Big)^{1/\beta}\Big(\sum_i|c_i|^\gamma\Big)^{1/\gamma}.$$

从而 (6.3.4) 右端第三项的界为

$$ch^k|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}\|f\|_{k,q,\Omega}.$$

证毕.

注 6.3.1 对常系数方程 $a_{ij}=\text{const}$, $\hat P=P_k(\hat T)$, 此时求积公式具有 $2k-2$ 次精度, 即意味着

$$\int_T a_{ij}\partial_i u_h\partial_j v_h\mathrm{d}x$$

是精确求积, 从而第一项相容误差消失.

注 6.3.2 对 1 次元, 为保持 $\|u-u_h\|_{1,\Omega}=O(h)$, 要求求积精度 $2k-2=0$ $(k=1)$, 从而 1 次精度求积分式即满足条件; 对 2 次元, 为保持 $\|u-u_h\|_{1,\Omega}=O(h^2)$, 要求求积精度为 $2k-2=2(k=2)$, 从而 2 次精度求积公式即满足条件. 然而对 3 次 Lagrange 元, 为保持 $\|u-u_h\|_{1,\Omega}=O(h^3)$, 此时是要求求积精度为 $2k-2=4(k=3)$, 因此原来的 3 次精度求积公式 (6.1.26) 不适宜.

6.4 曲边区域的有限元逼近

本章的后几节考虑等参有限元方法. 而本节是一个导引, 说明

当考虑曲边区域的有限元逼近时, 有必要采用等参有限元方法, 以保证同多边形区域时一样的误差阶.

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ 是曲边区域, 考虑二阶问题

$$\begin{cases} 求\ u \in H_0^1(\Omega), \quad 使得 \\ a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{6.4.1}$$

其中

$$\begin{cases} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij}(x)\partial_i u \cdot \partial_j v \mathrm{d}x, \\ (f,v) = \displaystyle\int_\Omega f \cdot v \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{6.4.2}$$

并设 $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $f \in H^1(\Omega)$. (这是因为我们将考察问题 (6.4.1) 的 2 次元逼近, 而要求其解 $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^3(\Omega)$), 且满足椭圆性条件

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \beta \sum_i \xi_i^2, \quad \forall x \in \Omega,\ \xi = (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^2. \tag{6.4.3}$$

6.4.1 仿射等价有限元逼近

考虑问题 (6.4.1) 的仿射等价 2 次元逼近. 设 $\mathcal{J}_h$ 是 Ω 的直边三角形剖分, $\Omega_h = \cup_{\mathcal{J}_h} T$. 则当 Ω 为凸时, 可有 $\Omega_h \subset \Omega$. 考虑下述 Lagrange 2 次元空间

$$\begin{aligned} X_h &= \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}_h) : v_h|_T \in P_2(T), \quad \forall T \in \mathcal{J}_h\}, \\ V_h &= \{v_h \in X_h : v_h = 0\ 在\ \partial\Omega_h\ 上\}. \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

逼近问题为

$$\begin{cases} 求\ u_h \in V_h, \quad 使得 \\ a_{\Omega_h}(u_h, v_h) = (f, v_h)_{\Omega_h}, \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{6.4.5}$$

其中 $a_{\Omega_h}(\cdot,\cdot)$ 和 $(f, v_h)_{\Omega_h}$ 表示积分区域为 Ω_h 上. 显然 (6.4.1) 的解 u 亦满足:

$$a_{\Omega_h}(u, v_h) = (f, v_h)_{\Omega_h}, \quad \forall v_h \in V_h.$$

因此 Céa 引理仍成立:

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_h} \le c \inf_{v_h\in V_h} \|u-v_h\|_{1,\Omega_h}. \tag{6.4.6}$$

现在我们来给出上述仿射等价 2 次元逼近的误差估计. 为此, 要在 (6.4.6) 中取特定的 $v_h \in V_h$. 但现在的情形 (曲边区域), 不能直接取 $v_h = \sqcap_h u$—u 的分片 2 次插值, 因为在边界线元的中点 M(见图 6.4.1) 处, $u(M) \neq 0$, 从而 $\sqcap_h u|_{\partial\Omega_h} \neq 0$, 故 $\sqcap_h u \notin V_h$. 因此必须修改 $\sqcap_h u$ 如下. 将单元分为两部分, 全体单元仍记为 $\mathcal{J}_h$, 内部单元 (即单元的任何一条边均不在 $\partial\Omega_h$ 上) 全体记为 $\mathring{\mathcal{J}}_h$, 边界单元 (即至少有一条边在 $\partial\Omega_h$ 上) 全体记为 $\partial\mathcal{J}_h$, 则

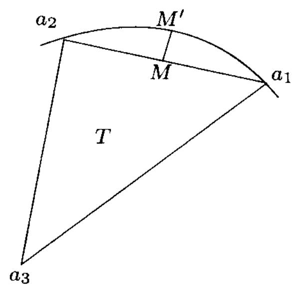

图 6.4.1

$$\mathcal{J}_h = \mathring{\mathcal{J}}_h \cup \partial\mathcal{J}_h. \tag{6.4.7}$$

令 $\tilde{\sqcap}_h : H^2(\Omega) \to V_h$ 定义如下: 对任给定 $v \in H^2(\Omega)$,

$$\tilde{\sqcap}_T v = \sqcap_T v, \quad \forall T \in \mathring{\mathcal{J}}_h, \tag{6.4.8}$$

而 $\forall T \in \partial\mathcal{J}_h, \tilde{\sqcap}_T v$ 与 $\sqcap_T v$ 的插值数据只差别于边界线元的中点处:

$$\tilde{\sqcap}_T v(M) = 0, \quad \sqcap_T v(M) = v(M), \tag{6.4.9}$$

其中 $\tilde{\sqcap}_T v = \tilde{\sqcap}_T v|_T, \sqcap_T v = \sqcap_h v|_T$. 则对边界单元 $T \in \partial\mathcal{J}_h$, 有

$$\begin{cases} (\sqcap_T u - \tilde{\sqcap}_T u)(x) = u(M)\mu_M(x), \quad \forall x \in T \in \partial\mathcal{J}_h, \\ \mu_M(x) = 4\lambda_1(x)\lambda_2(x). \end{cases} \tag{6.4.10}$$

从而 $\tilde{\sqcap}_h u \in V_h$, 因此在 (6.4.6) 中可取 $v_h = \tilde{\sqcap}_h u$. 而

$$\|u-\tilde{\sqcap}_h u\|_{1,\Omega_h} \le \|u-\sqcap_h u\|_{1,\Omega_h} + \|\sqcap_h u - \tilde{\sqcap}_h u\|_{1,\Omega_h}. \tag{6.4.11}$$

由插值误差估计, 有

$$\|u-\Pi_h u\|_{1,\Omega_h} \le ch^2|u|_{3,\Omega_h} \le ch^2|u|_{3,\Omega}. \tag{6.4.12}$$

现在估计 $\|\Pi_h u-\tilde{\Pi}_h u\|_{1,\Omega_h}$. 由 $\tilde{\Pi}_h u$ 的构造,

$$\|\Pi_h u-\tilde{\Pi}_h u\|_{1,\Omega_h}^2 = \sum_{\partial\mathcal{J}_h}\|\Pi_T u-\tilde{\Pi}_T u\|_{1,T}^2, \tag{6.4.13}$$

由 (6.4.9), $\forall T\in\partial\mathcal{J}_h$,

$$\|\Pi_T u-\tilde{\Pi}_T u\|_{1,T}^2 = |u(M)|^2\|\mu_M\|_{1,T}^2. \tag{6.4.14}$$

直接计算可得

$$\|\mu_M\|_{0,T}^2 \le ch_T^2, \qquad |\mu_M|_{1,T}^2 \le c,$$

从而

$$\|\mu_M\|_{1,T}^2 \le c. \tag{6.4.15}$$

而

$$|u(M)| = |u(M)-u(M')| \le |\nabla u(Q)|\cdot|MM'|, \quad Q\in\overline{MM'}.$$

因此当 $\partial\Omega$ 光滑时, $|MM'|\le ch_T^2$, 故

$$|u(M)| \le |u|_{1,\infty,\Omega}\cdot|MM'| \le ch_T^2\cdot|u|_{3,\Omega}. \tag{6.4.16}$$

由 (6.4.14)~(6.4.16),

$$\|\Pi_T u-\tilde{\Pi}_T u\|_{1,T}^2 \le ch_T^4|u|_{3,\Omega}^2, \tag{6.4.17}$$

由此可见

$$\|\Pi_h u-\tilde{\Pi}_h u\|_{1,\Omega_h}^2 \le ch^4\sum_{\partial\mathcal{J}_h}|u|_{3,\Omega}^2 \le ch^3|u|_{3,\Omega}^2, \tag{6.4.18}$$

因为 card $\partial\mathcal{J}_h \le ch^{-1}$. 由 (6.4.11), (6.4.12) 和 (6.4.18) 可见

$$\|u-u_h\|_{1,\Omega_h} \le ch^{3/2}|u|_{3,\Omega}. \tag{6.4.19}$$

而在多边形区域情形,2 次 Lagrange 元逼近阶为 $O(h^2)$. 附带指出, 对一次元而言, 曲边区域和多边形区域的逼近阶均为 $O(h)$.

上面的考察, 可明显地看出, 逼近误差阶的下降, 其原因在于用直边三角形剖分去逼近曲边区域, 从而导致插值 (这里是修改后的 $\tilde{\Pi}_h$) 误差阶的损失. 因此考虑用曲边单元剖分去逼近曲边区域, 同时建立曲边区域上的插值.

6.4.2 等参有限元方法

将曲边区域 Ω 施行如下的三角形剖分:

内部单元 $T \in \overset{\circ}{\mathcal{J}}_h$ 仍为直边三角形;

边界单元 $T \in \partial\mathcal{J}_h$, 与边界 $\partial\Omega$ 相邻的边采用曲边: 令 (见图 6.4.2)

$$\tilde{a}_{12,T} = \frac{1}{2}(a_{1,T}+a_{2,T}),$$

而 $a_{12,T}$ 为通过 $\tilde{a}_{12,T}$ 的垂直于 $\overline{a_{1,T}a_{2,T}}$ 的直线与 $\partial\Omega$ 的交点. 这样, 过三点 $a_{1,T}, a_{12,T}$ 及 $a_{2,T}$ 的二次曲线 $a_{1,T}\widehat{a_{12,T}}a_{2,T}$ 要比直线段 $\overline{a_{1,T}, a_{2,T}}$ 更接近区域的曲边边界 $\widehat{a_{1,T}a_{2,T}}$.

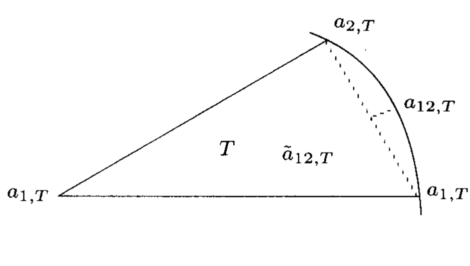

图 6.4.2

我们现在构造含有曲边单元的有限元空间 V_h. 为定义每个单元 (包括 $\overset{\circ}{\mathcal{J}}_h$ 和 $\partial\mathcal{J}_h$ 的单元) 上的函数, 像仿射等价 (直边单元) 有

限元一样, 设 $\hat{T}$ 是一个参考元 (直边的), 则存在 2 次变换 $F_T \in (P_2(\hat{T}))^2$, 使得 (见图 6.4.3)

$$\begin{cases} F_T : \hat{T} \to T, \\ F_T(\hat{a}_i) = a_{i,T}, \quad F_T(\hat{a}_{ij}) = a_{ij,T}. \end{cases} \tag{6.4.20}$$

注意, 当 $a_{ij,T} = \dfrac{1}{2}(a_{i,T} + a_{j,T})$, 即 $\overline{a_{i,T}, a_{j,T}}$ 的中点时, 对应的曲边 $a_{i,T}\widehat{a_{ij,T}}a_{j,T}$ 即为直边 $\overline{a_{i,T}, a_{j,T}}$.

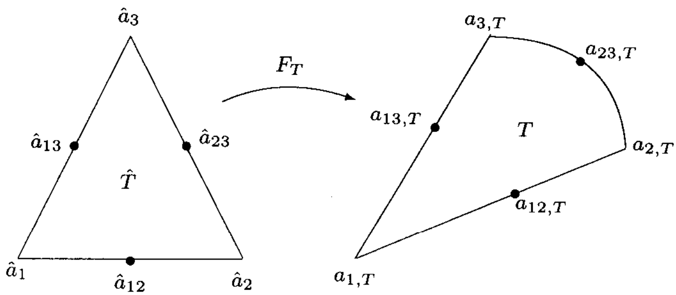

图 6.4.3

接下来定义 T 上的函数. 设 $\hat{P} = P_2(\hat{T})$, 令

$$P_T = \{p : p = \hat{p} \circ F_T^{-1}, \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}\}, \tag{6.4.21}$$

即单元 T 上的函数均由参考元 $\hat{T}$ 上的 2 次多项式与 F_T^{-1} 复合而生成. 注意到, 此地由于 F_T 是 2 次变换, 则 F_T^{-1}(如果存在) 不再是多项式, 从而 $p = \hat{p} \circ F_T^{-1}$ 也不再是多项式. 因此这样生成的有限元空间

$$V_h = \{v_h : v_h|_T \in P_T, \quad \forall T \in \mathcal{J}_h\} \tag{6.4.22}$$

也不再是分片多项式空间. 这就是等参 (2 次 Lagrange 型) 的有限元空间.

6.5 等参数有限元

设 $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$ 是 2 次 Lagrange 型的参考元 (见图 6.5.1)

$$\begin{cases}\hat{T}\ \text{为参考三角形}, \\ \hat{P}=P_2(\hat{T}), \\ \hat{\Sigma}=\{\hat{p}(\hat{a}_i),1\le i\le 3;\hat{p}(\hat{a}_{ij}),1\le i<j\le 3\}.\end{cases} \tag{6.5.1}$$

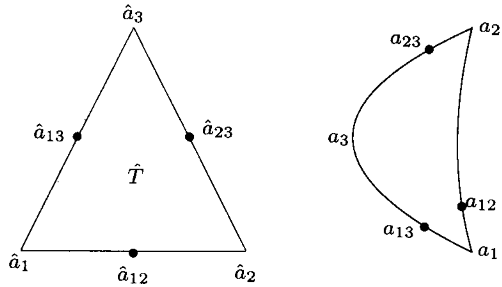

图 6.5.1

在平面上给定 6 个点 $a_i,1\le i\le 3$ 及 $a_{ij},1\le i<j\le 3$(见图 6.5.1), 则存在一个 2 次映射 $F_T:\hat{T}\to\mathbf{R}^2$, 使得

$$F_T(\hat{a}_i)=a_i,\quad F_T(\hat{a}_{ij})=a_{ij}. \tag{6.5.2}$$

此即

$$\begin{cases}F_T\in(P_2(\hat{T}))^2, \\ x=F_T(\hat{x})=\sum_{i=1}^{3}a_i\hat{\mu}_i(\hat{x})+\sum_{1\le i<j\le 3}a_{ij}\hat{\mu}_{ij}(\hat{x}),\end{cases} \tag{6.5.3}$$

其中

$$\hat{\mu}_i(\hat{x})=\hat{\lambda}_i(\hat{x})(2\hat{\lambda}_i(\hat{x})-1),\quad \hat{\mu}_{ij}(\hat{x})=4\hat{\lambda}_i(\hat{x})\hat{\lambda}_j(\hat{x}), \tag{6.5.4}$$

$\hat{\lambda}_i(\hat{x}),1\le i\le 3$, 为对应于顶点 $\hat{a}_i$ 的 $\hat{T}$ 的重心坐标. 则

$$T=F_T(\hat{T}) \tag{6.5.5}$$

为曲边三角形. 下面定义 T 上的函数空间:

$$\begin{cases} P_T = \{p : T \to \mathbf{R} | p = \hat{p} \circ F_T^{-1},\ \forall \hat{p} \in \hat{p}\}, \\ \Sigma_T = \{p(a_i), 1 \le i \le 3;\ p(a_{ij}), 1 \le i < j \le 3\}, \end{cases} \tag{6.5.6}$$

此地假定 F_T^{-1} 存在, $p(a_i) = p \circ F_T(\hat{a}_i)$, $p(a_{ij}) = p \circ F_T(\hat{a}_{ij})$. 我们称由此构成的 (T, P_T, Σ_T) 为与 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ 等参地等价的 2 次 Lagrange 等参有限元.

注 6.5.1 若 $a_{ij} = \dfrac{1}{2}(a_i + a_j), 1 \le i < j \le 3$, 则

$$F_T(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{\lambda}_i(\hat{x}) \doteq \tilde{F}_T(\hat{x}) \tag{6.5.7}$$

为仿射变换.

注 6.5.2 关于 F_T^{-1} 的存在性, 即 F_T 可逆, 作一粗略的说明 (其精确表述在 6.6 节中). 首先当 $a_i, 1 \le i \le 3$, 不在一直线上, 仿射变换 $\tilde{F}_T$ 是可逆的. 考察仿射变换 $\tilde{F}_T$ 和等参变换 F_T:

$$\begin{cases} F_T(\hat{a}_i) = a_i, \quad F_T(\hat{a}_{ij}) = a_{ij}, \\ \tilde{F}_T(\hat{a}_i) = a_i, \quad \tilde{F}_T(\hat{a}_{ij}) = \tilde{a}_{ij} = \dfrac{1}{2}(a_i + a_j). \end{cases} \tag{6.5.8}$$

可见当 F_T 与 $\tilde{F}_T$ 相差不远, 即 a_{ij} 与 $\tilde{a}_{ij}$ 相差不远时, F_T^{-1} 可期望存在.

注 6.5.3 等参元 T 的曲边 $\widehat{a_1 a_2}$ 是由 $\hat{T}$ 的直边 $\overline{\hat{a}_1 \hat{a}_2}$ 通过 2 次映射 F_T 得到的. 注意到 $\hat{\lambda}_3(\hat{x}) = 0, \forall \hat{x} \in \overline{\hat{a}_1 \hat{a}_2}$, 从而当 $\hat{x} \in \overline{\hat{a}_1 \hat{a}_2}$ 时, $x \in \widehat{a_1 a_2}$:

$$\begin{aligned} x = F_T(\hat{x}) = {} & a_1 \hat{\lambda}_1(\hat{x})(2\hat{\lambda}_1(\hat{x}) - 1) + a_2 \hat{\lambda}_2(\hat{x})(2\hat{\lambda}_2(\hat{x}) - 1) \\ & + a_{12} \cdot 4\hat{\lambda}_1(\hat{x})\hat{\lambda}_2(\hat{x}), \quad \forall \hat{x} \in \overline{\hat{a}_1 \hat{a}_2}, \end{aligned} \tag{6.5.9}$$

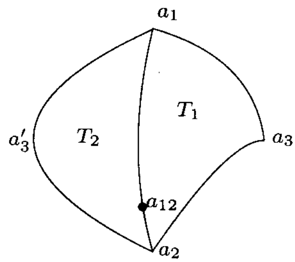

图 6.5.2

即 $\widehat{a_1a_2}$ 由节点 a_1,a_2 及 a_{12} 唯一地确定. 现考察二个等参元 T_1,T_2 : $a_1,a_2,a_{12}\in T_1\cap T_2$, 分别为

$$T_1=F_{T_1}(\hat{T}),\quad T_2=F_{T_2}(\hat{T}).$$

则作为 T_1 的边界 $\widehat{a_1a_2}|_{T_1}$ 与作为 T_2 的边界 $\widehat{a_1a_2}|_{T_2}$ 具有同一的表达式 (6.5.9), 因此 $T_1\cap T_2=\widehat{a_1a_2}$, 不会产生空隙, 也不会重叠 (见图 6.5.2).

注 6.5.4 关于 P_T 中的基函数. 由于 $\hat{P}$ 中的基函数为 $\hat{\mu}_i(\hat{x}),1\le i\le 3$; $\hat{\mu}_{ij}(\hat{x}),1\le i<j\le 3$, 则 P_T 中的基函数为

$$\begin{cases}\mu_i(x)=\hat{\mu}_i\circ F_T^{-1}(x), & 1\le i\le 3,\\ \mu_{ij}(x)=\hat{\mu}_{ij}\circ F_T^{-1}(x), & 1\le i<j\le 3,\end{cases}\tag{6.5.10}$$

一般说来它们不再是 x 的多项式. 设 $\sqcap: H^2(T)\to P_T$ 的插值算子, 则

$$\sqcap v(x)=\sum_{i=1}^{3}v(a_i)\mu_i(x)+\sum_{1\le i<j\le 3}v(a_{ij})\mu_{ij}(x).$$

从而

$$\begin{aligned}&(\sqcap v)^\wedge(\hat{x})\\ &=\sum_{i=1}^{3}v\circ F_T(\hat{a}_i)\cdot\mu_i\circ F_T(\hat{x})+\sum_{1\le i<j\le 3}v\circ F_T(\hat{a}_{ij})\cdot\mu_{ij}\circ F_T(\hat{x})\\ &=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}(\hat{a}_i)\cdot\hat{\mu}_i\circ F_T^{-1}\circ F_T(\hat{x})+\sum_{1\le i<j\le 3}\hat{v}(\hat{a}_{ij})\cdot\hat{\mu}_{ij}\circ F_T^{-1}\circ F_T(\hat{x})\\ &=\sum_{i=1}^{3}\hat{v}(\hat{a}_i)\hat{\mu}_i(\hat{x})+\sum_{1\le i<j\le 3}\hat{v}(\hat{a}_{ij})\hat{\mu}_{ij}(\hat{x})=\hat{\sqcap}\hat{v}(\hat{x}).\end{aligned}\tag{6.5.11}$$

6.6 等参元的插值误差

本节考察插值误差 $|v-\sqcap_T v|_{m,q,T}(m=0,1,2)$. 设 (T,P,Σ) 等参地等价于 $(\hat{T},\hat{P},\hat{\Sigma})$, 误差估计完全平行于仿射等价有限元. 有下述 3 步骤.

(i) 设 $\hat{P}$ 插值算子 $\hat{\sqcap}$ 对 $P_k(\hat{T})$ 不变, 即

$$\hat{\sqcap}\hat{p}=\hat{p},\quad \forall\hat{p}\in P_k(\hat{T}).$$

则由商空间等价模定理:

$$|\hat{v}-\hat{\sqcap}\hat{v}|_{m,q,\hat{T}}\le\hat{c}|\hat{v}|_{k+1,p,\hat{T}}\quad(0\le m\le k+1=3).$$

(ii)T 与 $\hat{T}$ 上半模之间的关系.

(iii) 由 T 的几何量, 估计 (ii) 中出现的对应量.

首先引入记号

$$\begin{cases}J_T(\hat{x})=\det(\partial_j F_i(\hat{x})),\\ J_{F^{-1}}(x)=(J_F(\hat{x}))^{-1}\ \ (\text{假定 } F^{-1}\text{ 存在});\end{cases}\tag{6.6.1}$$

$$\begin{cases}|F|_{l,\infty,\hat{T}}=\sup\limits_{\hat{x}\in\hat{T}}\|D^lF(\hat{x})\|_{\mathcal{L}_l(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)},\\ |F^{-1}|_{l,\infty,T}=\sup\limits_{x\in T}\|D^lF^{-1}(x)\|_{\mathcal{L}_l(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)}.\end{cases}\tag{6.6.2}$$

定理 6.6.1 令 Ω 和 $\hat{\Omega}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中两个有界开集, 存在充分光滑的 1-1 映射 F, 使得

$$\Omega=F(\hat{\Omega}),\quad \hat{\Omega}=F^{-1}(\Omega).$$

若 $\hat{v}\in W^{l,p}(\hat{\Omega}),l\ge 0,p\in[1,\infty]$, 则

$$v=\hat{v}\circ F^{-1}\in W^{l,p}(\Omega),$$

且

$$
\begin{cases}
\|v\|_{0,p,\Omega} \le |J_F|_{0,\infty,\hat{\Omega}}^{1/p} \cdot \|\hat{v}\|_{0,p,\hat{\Omega}}, \quad \forall \hat{v} \in L^p(\hat{\Omega}), \\
|v|_{1,p,\Omega} \le c|J_F|_{0,\infty,\hat{\Omega}}^{1/p} \cdot |F^{-1}|_{1,\infty,\Omega} \cdot |\hat{v}|_{1,p,\hat{\Omega}}, \quad \forall \hat{v} \in W^{1,p}(\hat{\Omega}), \\
|v|_{2,p,\Omega} \le c|J_F|_{0,\infty,\hat{\Omega}}^{1/p} \{|F^{-1}|_{1,\infty,\Omega}^2 \cdot |\hat{v}|_{2,p,\hat{\Omega}} + |F^{-1}|_{2,\infty,\Omega} \cdot |\hat{v}|_{1,p,\hat{\Omega}}\}, \\
\qquad \forall \hat{v} \in W^{2,p}(\hat{\Omega}), \\
|v|_{3,p,\Omega} \le c|J_F|_{0,\infty,\hat{\Omega}}^{1/p} \{|F^{-1}|_{1,\infty,\Omega}^3 \cdot |\hat{v}|_{3,p,\hat{\Omega}} + |F^{-1}|_{1,\infty,\Omega} \cdot |F^{-1}|_{2,\infty,\Omega} \\
\qquad \cdot |\hat{v}|_{2,p,\hat{\Omega}} + |F^{-1}|_{3,\infty,\Omega} \cdot |\hat{v}|_{1,p,\hat{\Omega}}\}, \quad \forall \hat{v} \in W^{3,p}(\hat{\Omega}).
\end{cases}
\tag{6.6.3}
$$

证明 只对 $1 \le p < \infty$ 给出证明,

$$
\begin{aligned}
\|v\|_{0,p,\Omega}^p &= \int_\Omega |v(x)|^p \mathrm{d}x = \int_\Omega |\hat{v} \circ F^{-1}(x)|^p \mathrm{d}x \\
&= \int_{\hat{\Omega}} |J_F(\hat{x})| \cdot |\hat{v}(\hat{x})|^p \mathrm{d}\hat{x} \le |J_F|_{0,\infty,\hat{\Omega}} \cdot \|\hat{v}\|_{0,p,\hat{\Omega}}^p,
\end{aligned}
$$

此即 (6.6.3) 的第一个关系.

由 $v = \hat{v} \circ F^{-1}, x = F(\hat{x}), \hat{x} = F^{-1}(x)$, 利用复合函数微分法则,

$$
D_x v(x) = D_{\hat{x}} \hat{v}(\hat{x}) \cdot D_x F^{-1}(x),
$$

由此即得

$$
\|D_x v(x)\| \le |F^{-1}|_{1,\infty,\Omega} \cdot \|D_{\hat{x}} \hat{v}(\hat{x})\|.
$$

从而

$$
\begin{aligned}
|v|_{1,p,\Omega}^p &= \int_\Omega \|Dv(x)\|^p \mathrm{d}x \le |F^{-1}|_{1,\infty,\Omega}^p \cdot \int_\Omega \|D_{\hat{x}} \hat{v}(\hat{x})\|^p \mathrm{d}x \\
&\le |F^{-1}|_{1,\infty,\Omega}^p \cdot |J_F|_{0,\infty,\hat{\Omega}} \cdot |\hat{v}|_{1,p,\hat{\Omega}}^p,
\end{aligned}
$$

此即 (6.6.3) 的第二个不等式. 其余证明类似.

同样可证 (6.6.3) 的反向不等式:

$$\begin{cases} \|\hat{v}\|_{0,p,\hat{\Omega}} \le |J_{F^{-1}}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p} \cdot \|v\|_{0,p,\Omega}, \quad \forall v \in L^p(\Omega), \\ |\hat{v}|_{1,p,\hat{\Omega}} \le c|J_{F^{-1}}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p}|F^{-1}|_{1,\infty,\hat{\Omega}} \cdot |v|_{1,p,\Omega}, \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega), \\ |\hat{v}|_{2,p,\hat{\Omega}} \le c|J_{F^{-1}}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p}\{|F|_{1,\infty,\hat{\Omega}}^2 \cdot |v|_{2,p,\Omega} + |F|_{2,\infty,\Omega} \cdot |v|_{1,p,\Omega}\}, \\ \qquad\qquad \forall v \in W^{2,p}(\Omega), \\ |\hat{v}|_{3,p,\hat{\Omega}} \le c|J_{F^{-1}}|_{0,\infty,\Omega}^{1/p}\Big\{|F|_{1,\infty,\hat{\Omega}}^3 \cdot |v|_{3,p,\Omega} + |F|_{1,\infty,\hat{\Omega}} \cdot |F|_{2,\infty,\hat{\Omega}} \\ \qquad \cdot |v|_{2,p,\Omega} + |F|_{3,\infty,\hat{\Omega}} \cdot |v|_{1,p,\Omega}\Big\}, \quad \forall v \in W^{3,p}(\Omega). \end{cases} \tag{6.6.4}$$

注 6.6.1 若将仿射等价与等参等价有限元相比较, 只要注意到将 $\det(B)$ 代之以 $|J_F|_{0,\infty,\Omega}$, 及将 $\|B\|$ 代之以 $|F|_{l,\infty,\hat{\Omega}}$, $l = 1,2,3$.

下面来完成步骤 (iii), 即用 T 的几何量来估计

$$\begin{cases} |J_F|_{0,\infty,\hat{T}}, \quad |J_{F^{-1}}|_{0,\infty,T}, \\ |F|_{l,\infty,\hat{T}}, \quad l = 1,2,3, \quad |F^{-1}|_{l,\infty,T}, \quad l = 1,2. \end{cases} \tag{6.6.5}$$

为此, 首先考察 F^{-1} 的存在性. 因此需对等参变换 $F : \hat{T} \to T$ 与仿射变换 $\tilde{F} : \hat{T} \to \tilde{T}$, 其中 T 为曲变三角形, 而 $\tilde{T}$ 为直边三角形, 相差不远作出精确的描述. 令 (见图 6.6.1)

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{1}{2}(a_i + a_j), \quad 1 \le i < j \le 3. \tag{6.6.6}$$

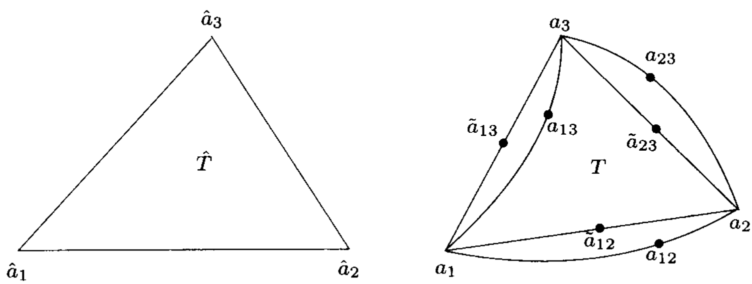

图 6.6.1

则等参变换

$$F(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{\mu}_i(\hat{x}) + \sum_{1 \le i < j \le 3} a_{ij} \hat{\mu}_{ij}(\hat{x}), \tag{6.6.7}$$

而仿射变换

$$\tilde{F}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{\mu}_i(\hat{x}) + \sum_{1 \le i < j \le 3} \tilde{a}_{ij} \hat{\mu}_{ij}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{3} a_i \hat{\lambda}_i(\hat{x}). \tag{6.6.8}$$

因此

$$F(\hat{x}) = \tilde{F}(\hat{x}) + \sum_{1 \le i < j \le 3} (a_{ij} - \tilde{a}_{ij}) \hat{\mu}_{ij}(\hat{x}). \tag{6.6.9}$$

由此可见, $F(\hat{x})$ 与 $\tilde{F}(\hat{x})$ 相差不远, 即要求 (6.6.9) 右端第二项应是高阶小量, 这导致下述定义.

定义 6.6.1 称等参元是拟正则的,

a) 存在 $\sigma = \text{const} > 0$, 使得 $h_T/\rho_T \le \sigma \ \forall T, h \to 0$, 其中 $\tilde{T} = \tilde{F}(\hat{T})$ 为直边三角形, $h_T = \text{diam}\tilde{T}, \rho_T = \tilde{T}$ 的内切圆的直径.

b) $h_T \to 0$.

c) $\|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\| = O(h_T^2)$.

定理 6.6.2 设 $\{(T, P_T, \Sigma_T)\}_{\mathcal{J}_h}$ 等参地等价于 $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$, 且是拟正则的. 则当 h 足够小时, $F_T : \hat{T} \to T$ 是 1-1 映射,

$$J_{F_T} = \det(\partial_j F_{T,i}(\hat{x})) \neq 0, \quad \forall \hat{x} \in \hat{T},$$

从而 F_T^{-1} 存在, 且

$$\begin{cases} |F_T|_{1,\infty,\hat{T}} \le ch_T, \quad |F_T|_{2,\infty,\hat{T}} \le ch_T^2, \quad |F_T|_{3,\infty,\hat{T}} = 0; \\ |F_T^{-1}|_{1,\infty,T} \le ch_T^{-1}, \quad |F_T^{-1}|_{2,\infty,T} \le ch_T^{-1},; \\ |J_{F_T}|_{0,\infty,\hat{T}} \le c|\tilde{T}|, \quad |J_{F_T^{-1}}|_{0,\infty,T} \le c|\tilde{T}|^{-1}. \end{cases} \tag{6.6.10}$$

证明 (1) 考察与 F 有关的量 (为方便计, 略去下标 T). 由 (6.6.9)

及 $\tilde{F}(\hat{x}) = B\hat{x} + b$,

$$\begin{aligned} DF(\hat{x}) &= D\tilde{F}(\hat{x}) + \sum_{1\le i<j\le 3} D\hat{\mu}_{ij}(\hat{x})\cdot(a_{ij} - \tilde{a}_{ij}) \\ &= B + E(\hat{x}), \end{aligned}$$

因此

$$\sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|E(\hat{x})\| \le \sum_{1\le i<j\le 3} \|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\| \cdot \sum_{1\le i<j\le 3} \sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|D\hat{\mu}_{ij}(\hat{x})\| \le ch^2.$$

从而

$$|F|_{1,\infty,\hat{T}} = \sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|DF(\hat{x})\| \le \|B\| + \sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|E(\hat{x})\| \le ch,$$

此即 (6.6.10) 的第一个关系. 由

$$D^2F(\hat{x}) = DE(\hat{x}) = \sum_{1\le i<j\le 3} D^2\hat{\mu}_{ij}(\hat{x})\cdot(a_{ij} - \tilde{a}_{ij}),$$

因此

$$\|D^2F(\hat{x})\| \le ch^2, \quad \forall \hat{x} \in \hat{T},$$

从而

$$|F|_{2,\infty,\hat{T}} = \sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|D^2F(\hat{x})\| \le ch^2,$$

此即 (6.6.10) 第二个关系. 而由于 $F \in (P_2(\hat{T}))^n$, 则 (6.6.10) 的第三个关系显然成立. 现考察

$$J_F(\hat{x}) = \det(\partial_j F_i(\hat{x})).$$

令

$$\partial_j F(\hat{x}) = (\partial_j F_i(\hat{x}))_{i=1}^n,$$

由 Hadmann 不等式

$$|J_F(\hat{x})| \le c \prod_{j=1}^n \|\partial_j F(\hat{x})\|.$$

而由于 $|F|_{1,\infty,\hat{T}} \leq ch$, 因此

$$\sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|\partial_j F(\hat{x})\| \leq ch, \quad \forall j = 1, \cdots, n,$$

从而

$$|J_F|_{0,\infty,\hat{T}} = \sup_{\hat{x}\in\hat{T}} |J_F(\hat{x})| \leq ch^n \leq c|\tilde{T}|,$$

此即 (6.6.10) 的最后第二个关系成立.

(2) 关于 F^{-1} 的存在性. 当 $a_i, 1 \leq i \leq 3$ 不在一条直线上时, 仿射变换 $\tilde{F}$ 的矩阵 B 可逆, 由拟正则性, 则 $\|B^{-1}\| \leq ch^{-1}$. 由

$$DF(\hat{x}) = B + E(\hat{x}) = B(I + B^{-1}E(\hat{x})),$$

及 (1) 中已证关系可知

$$\sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|B^{-1}E(\hat{x})\| \leq \|B^{-1}\| \cdot \sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|E(\hat{x})\| \leq ch.$$

从而当 h 足够小时, $h \leq h_0$, 存在 $\gamma \in (0,1)$, 使得

$$\sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|B^{-1}E(\hat{x})\| \leq \gamma < 1.$$

因此 $\forall h \leq h_0$, 算子

$$I + B^{-1}E(\hat{x})$$

可逆, 且

$$\sup_{\hat{x}\in\hat{T}} \|(I + B^{-1}E(\hat{x}))^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\gamma}.$$

这说明算子 $DF(\hat{x}), \forall \hat{x} \in \hat{T}$ 是可逆的, 且

$$(DF(\hat{x}))^{-1} = (I + B^{-1}E(\hat{x}))^{-1}B^{-1}.$$

此即 $\det(DF(\hat{x})) \neq 0$, $\forall \hat{x} \in \hat{T}$. 从而 F 的反函数存在, 即 F 可逆. 然而上述结论只说明 F 是局部可逆, 即 F 的反函数局部地

存在; 而我们需要的是 F 总体可逆, 即要证明 F 是 1-1 的映射. 设 $\hat{x},\hat{y}\in\hat{T}:F(\hat{x})=F(\hat{y})$, 由于 $\hat{T}$ 是凸的, 则由 Taylor 展开

$$F(\hat{y})=F(\hat{x})+DF(\hat{x})\cdot(\hat{y}-\hat{x})+\frac{1}{2}A(\hat{x}-\hat{y}),$$

其中 $A=(\partial_{ij}F(\hat{x}))$ 是常数矩阵, 因为 $F\in(P_2(\hat{T}))^2$. 从而

$$DF(\hat{x})\cdot(\hat{y}-\hat{x})=-\frac{1}{2}A(\hat{y}-\hat{x})^2=DF(\hat{y})\cdot(\hat{x}-\hat{y}),$$

因此

$$(DF(\hat{x})+DF(\hat{y}))\cdot(\hat{y}-\hat{x})=0.$$

再注意到 $F\in(P_2(\hat{T}))^2$, 则 $DF(\hat{x})$ 是线性的, 因此

$$DF(\hat{x})+DF(\hat{y})=2DF\Big(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\Big),$$

从而

$$DF\Big(\frac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\Big)\cdot(\hat{y}-\hat{x})=0.$$

上面已证 $DF\Big(\dfrac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\Big)$ 可逆 $\Big($因为 $\dfrac{\hat{x}+\hat{y}}{2}\in\hat{T}\Big)$, 因此, $\hat{y}=\hat{x}$. 这就证明 $F:\hat{T}\to T$ 是 $1-1$ 映射, 即 F^{-1}, F 的反函数, 在整个 T 上存在, 且

$$DF^{-1}(x)=(DF(\hat{x}))^{-1}.$$

(3) 现在给出与 F^{-1} 有关量的估计.

$$\begin{aligned}|F^{-1}|_{1,\infty,T}&=\sup_{x\in T}\|DF^{-1}(x)\|=\sup_{\hat{x}\in\hat{T}}\|(DF(\hat{x}))^{-1}\|\\&\le\sup_{\hat{x}\in\hat{T}}\|(I+B^{-1}E(\hat{x}))^{-1}B^{-1}\|\le\frac{1}{1-\gamma}\|B^{-1}\|\le ch^{-1}.\end{aligned}$$

下面估计 $|F^{-1}|_{2,\infty,T}$. 有

$$x=F(\hat{x}),\quad \hat{x}=F^{-1}(x).$$

因此

$$\hat{x} = F^{-1} \circ F(\hat{x}),$$

由此利用复合函数求导数规则

$$\begin{aligned}
\xi_1 = {} & D_{\hat{x}}\hat{x} \cdot \xi_1 = D_{\hat{x}}F^{-1}(F(\hat{x})) \cdot \xi_1 = D_x F^{-1}(x)(D_{\hat{x}}F(\hat{x}) \cdot \xi_1), \\
0 = {} & D_{\hat{x}}^2\hat{x} \cdot (\xi_1, \xi_2) = D_{\hat{x}}^2(F^{-1}(F(\hat{x})) \cdot (\xi_1, \xi_2) \\
= {} & D_{\hat{x}}[D_{\hat{x}}F^{-1}(F(\hat{x}))\xi_1] \cdot \xi_2 = D_{\hat{x}}[D_x F^{-1}(x)(D_{\hat{x}}F(\hat{x}) \cdot \xi_1)] \cdot \xi_2 \\
= {} & D_x F^{-1}(x)(D_{\hat{x}}^2 F(\hat{x})(\xi_1, \xi_2)) \\
& + D_x^2 F^{-1}(x)(D_{\hat{x}}F(\hat{x})\xi_1, D_{\hat{x}}F(\hat{x})\xi_2),
\end{aligned}$$

从而

$$D_x^2 F^{-1}(x)(D_{\hat{x}}F(\hat{x})\xi_1, D_{\hat{x}}F(\hat{x})\xi_2) = -D_x F^{-1}(x)(D_{\hat{x}}^2 F(\hat{x})(\xi_1, \xi_2)).$$

令

$$\eta_1 = D_{\hat{x}}F(\hat{x})\xi_1, \quad \eta_2 = D_{\hat{x}}F(\hat{x})\xi_2,$$

则

$$\begin{aligned}
D_x^2 F^{-1}(x)(\eta_1, \eta_2) = {} & -D_x F^{-1}(x)[D_{\hat{x}}^2 F(\hat{x}) \\
& \cdot (D_x F^{-1}(x)\eta_1, D_x F^{-1}(x)\eta_2)],
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
\|D_x^2 F^{-1}(x)\| = {} & \sup_{\left\{\substack{\|\eta_i\| \le 1 \\ i=1,2}\right.} \|D_x^2 F^{-1}(x)(\eta_1, \eta_2)\| \\
& \le \|D_{\hat{x}}^2 F(\hat{x})\| \cdot \|D_x F^{-1}(x)\|^3.
\end{aligned}$$

因此

$$|F^{-1}|_{2,\infty,T} = \sup_{x \in T} \|D^2 F^{-1}(x)\| \le |F|_{2,\infty,\hat{T}} \cdot |F^{-1}|_{1,\infty,T}^3 \le ch^{-1}.$$

(4) 最后估计 $|J_{F^{-1}}|_{0,\infty,T}$. 由

$$J_{F^{-1}}(x) = \frac{1}{J_F(\hat{x})},$$

知

$$|J_{F^{-1}}|_{0,\infty,T} = \sup_{x\in T}|J_{F^{-1}}(x)| = 1/\inf_{\hat{x}\in\hat{T}}|J_F(\hat{x})|.$$

因此, 只要估计 $|J_F(\hat{x})|, \forall\hat{x}\in\hat{T}$ 的下界. 由

$$|J_F(\hat{x})| = |\det(DF(\hat{x}))|$$

及

$$DF(\hat{x}) = B(I + B^{-1}E(\hat{x})),$$

可见

$$DF(\hat{x})(I + B^{-1}E(\hat{x}))^{-1} = B.$$

从而

$$\det(B) = |J_F(\hat{x})|\cdot|\det(I + B^{-1}E(\hat{x}))^{-1}|. \tag{6.6.11}$$

设 $A = (a_{ij})$, 则

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\| \ge \|A\boldsymbol{e}_j\| = \|\boldsymbol{a}_j\|, \quad \forall j = 1,2,\cdots,n,$$

其中 $\boldsymbol{e}_j = (1,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$ 第 j 个单位向量, $\boldsymbol{a}_j = (a_{1j},\cdots,a_{nj})^{\mathrm{T}}$. 因此, 由 Hadmann 不等式

$$\|A\|^n \ge \prod_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{a}_j\| \ge |\det(A)\|.$$

令 $A = (I + B^{-1}E(\hat{x}))^{-1}$, 则

$$|\det(I + B^{-1}E(\hat{x}))^{-1}| \le \|(I + B^{-1}E(\hat{x}))^{-1}\|^n \le 1/(1-\gamma)^n,$$

由 (6.6.11) 可见

$$\det(B) \le \frac{1}{(1-\gamma)^n}|J_F(\hat{x})|,$$

由此即得

$$|J_F(\hat{x})| \ge (1-\gamma)^n|\det(B)|.$$

因此

$$\inf_{\hat{x}\in\hat{T}} |J_F(\hat{x})| \geq (1-\gamma)^n |\det(B)| \geq C|\tilde{T}|,$$

从而

$$|J_{F^{-1}}|_{0,\infty,T} = \frac{1}{\inf\limits_{\hat{x}\in\hat{T}} |J_F(\hat{x})|} \leq C|\tilde{T}|^{-1},$$

这样 (6.6.10) 的最后一个不等式证毕.

最后给出等参元的插值误差估计.

定理 6.6.3 设 h_T 足够小, 则

$$\begin{aligned}\|v - \sqcap_T v\|_{m,q,T} \leq\ & C|\tilde{T}|^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} h_T^{3-m}(|v|_{2,p,T} + |v|_{3,p,T}),\\ & \forall v \in W^{3,p}(T) \quad (m=0,1,2).\end{aligned}$$

证明 由前面两个定理,

$$\begin{aligned}|v - \sqcap_T v|_{0,q,T} &\leq |J_{F_T}|_{0,\infty,\hat{T}}^{1/q} \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{0,q,\hat{T}}\\ &\leq C|\tilde{T}|^{1/q} \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{0,q,\hat{T}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|v - \sqcap_T v|_{1,q,T} &\leq C|J_{F_T}|_{0,\infty,\hat{T}}^{1/q} \cdot |F_T^{-1}|_{1,\infty,T} \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{1,q,\hat{T}}\\ &\leq C|\tilde{T}|^{1/q} \cdot h_T^{-1} \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{1,q,\hat{T}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|v - \sqcap_T v|_{2,q,T} \leq\ & C|J_{F_T}|_{0,\infty,\hat{T}}^{1/q} \cdot \{|F_T^{-1}|_{1,\infty,T}^2 \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{2,q,\hat{T}}\\ & + |F_T^{-1}|_{2,\infty,T} \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{1,q,\hat{T}}\}\\ \leq\ & C|\tilde{T}|^{1/q} \cdot \{h_T^{-2} \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{2,q,\hat{T}} + h_T^{-1} \cdot |\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{1,q,\hat{T}}\}.\end{aligned}$$

由等价模定理及 $\hat{\sqcap}\hat{p} = \hat{p}$, $\forall \hat{p} \in P_2(\hat{T})$,

$$|\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{l,q,\hat{T}} \leq C|\hat{v}|_{3,p,\hat{T}} \quad (l \leq 3), \quad \forall \hat{v} \in W^{3,p}(\hat{T}),$$

则有

$$|\hat{v} - \hat{\sqcap}\hat{v}|_{m,q,\hat{T}} \leq C|\tilde{T}|^{1/q} \cdot h_T^{-m} \cdot |\hat{v}|_{3,p,\hat{T}} \quad (m=0,1,2).$$

再由定理 6.6.1~6.6.2,

$$\begin{aligned}|\hat{v}|_{3,p,\hat{T}} &\le C|J_{F_T^{-1}}|_{0,\infty,T}^{1/p} \cdot \{|F_T|_{1,\infty,\hat{T}}^3 \cdot |v|_{3,p,T} \\ &\quad + |F_T|_{1,\infty,\hat{T}} \cdot |F_T|_{2,\infty,\hat{T}} \cdot |v|_{2,p,T} + |F_T|_{3,\infty,\hat{T}} \cdot |v|_{1,p,T}\} \\ &\le C|\tilde{T}|^{-1/p} \cdot h_T^3(|v|_{2,p,T} + |v|_{3,p,T}),\end{aligned}$$

上面注意到 $F_T \in (P_2(\hat{T}))^2$, 因而 $|F_T|_{3,\infty,\hat{T}} = 0$. 从而证毕.

6.7 等参元的误差估计

我们仍回到曲边区域的二阶问题 (6.4.1)~(6.4.2), 在 6.4 节中的分析说明, 即使对凸区域 Ω(曲边的), 用 2 次 Lagrange 仿射等价协调元逼近, 也得不到最优的误差阶, 而只有 $O(h^{3/2})$ 阶的误差界. 现在我们用 2 次 Lagrange 等参元逼近问题 (6.4.1)~(6.4.2).

首先对边界单元用曲边三角形元, 则当 $\partial\Omega$ 光滑时

$$\|a_{ij} - \tilde{a}_{ij}\| = O(h^2); \tag{6.7.1}$$

对内部单元用直边三角形元, 即取

$$a_{ij} = \tilde{a}_{ij}. \tag{6.7.2}$$

因此可统一为拟正则等参地等价的有限元. 离散空间为

$$X_h = \{v_h : v_h|_T \in P_T\} \subset C^0(\Omega_h), \tag{6.7.3}$$

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h = 0 \text{ 在 } \partial\Omega_h \text{ 的边界节点处}\} \subset H_0^1(\Omega_h), \tag{6.7.4}$$

其中 $\Omega_h = \cup_{\mathcal{J}_h} T$. 则 (6.4.1)~(6.4.2) 的等参有限元逼近为

$$\begin{cases} \text{求 } \tilde{u}_h \in V_h, \quad \text{使得} \\ \displaystyle\int_{\Omega_h} \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}(x)\partial_i\tilde{u}_h \cdot \partial_j v_h \mathrm{d}x = \int_{\Omega_h} \tilde{f} \cdot v_h \mathrm{d}x, \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \tag{6.7.5}$$

上式中,需要说明,一般地 $\Omega_h\not\subset\Omega$, 因此在上式的积分中 $\tilde{a}_{ij}(x),\tilde{f}(x)$ 表示 $a_{ij}(x),f(x)$ 在 $\tilde{\Omega}\supset\Omega\cup\Omega_h$ 上的延拓. 自然地产生下述问题. 第一, $a_{ij}(x),f(x)$ 按何种方式延拓? 第二, $\tilde{u}_h$ 是否依赖于延拓方式? 为了克服这个困难, 我们将利用数值积分.

设在 $\hat{T}$ 上有一个求积公式:

$$\int_{\hat{T}}\hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}\approx\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l\hat{\varphi}(\hat{b}_l),\quad \hat{\omega}_l>0,\ \hat{b}_l\in\hat{T},\ 1\le l\le L,\tag{6.7.6}$$

注意到 $\varphi(x)=\hat{\varphi}\circ F_T^{-1}(x)$, 则可导出 T 上的求积公式:

$$\begin{aligned}&\int_T\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_T\hat{\varphi}(\hat{x})J_{F_T}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}\\ \approx&\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l\hat{\varphi}(\hat{b}_l)\cdot J_{F_T}(\hat{b}_l)=\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,T}\varphi(b_{l,T}),\end{aligned}\tag{6.7.7}$$

其中

$$\omega_{l,T}=\hat{\omega}_lJ_{F_T}(\hat{b}_l),\quad b_{l,T}=F(\hat{b}_l).\tag{6.7.8}$$

而求积误差有下述关系:

$$\begin{cases}E_T(\varphi)=\displaystyle\int_T\varphi(x)\mathrm{d}x-\sum_{l=1}^{L}\omega_{l,T}\varphi(b_{l,T}),\\ \hat{E}_T(\hat{\varphi})=\displaystyle\int_{\hat{T}}\hat{\varphi}(\hat{x})\mathrm{d}\hat{x}-\sum_{l=1}^{L}\hat{\omega}_l\hat{\varphi}(\hat{b}_l),\end{cases}\tag{6.7.9}$$

则

$$E_T(\varphi)=\hat{E}(\hat{\varphi}\cdot J_{F_T}).\tag{6.7.10}$$

现在在等参元逼近问题 (6.7.5) 中, 以数值积分代替精确积分:

$$\begin{cases}\text{求 } u_h\in V_h,\quad \text{使得}\\ a_h(u_h,v_h)=(f,v_h)_h,\quad \forall v_h\in V_h,\end{cases}\tag{6.7.11}$$

其中

$$\begin{cases} a_h(u_h, v_h) = \sum_T \Big\{ \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} \Big(\sum_{i,j} a_{ij} \partial_i u_h \cdot \partial_j v_h \Big)(b_{l,T}) \Big\}, \\ (f, v_h)_h = \sum_T \Big\{ \sum_{l=1}^{L} \omega_{l,T} (f v_h)(b_{l,T}) \Big\}. \end{cases} \tag{6.7.12}$$

考察上述问题的确定性,只要考察数值积分节点 $b_{l,T}$ 是否包含在 $\bar{T} \cap \bar{\Omega}$ 上. 而对于 2 次 Lagrange 等参元, 采用 2 次精度的数值积分公式 (在 $\hat{T}$ 上), 则显然有 $b_{l,T} \in \bar{T} \cap \bar{\Omega}$(见图 6.7.1).

这就是说, 采用数值积分的等参元逼近问题 (6.7.11)~(6.7.12) 是完全确定的, 因此实际计算不需要对 $a_{ij}(x)$ 及 $f(x)$ 进行延拓. 至于进行误差分析, 由于 $\Omega_h \not\subset \Omega$, 而误差 $u - u_h$ 是在 Ω_h 上的范数来估计的, 因此对此需要将 $u, a_{ij}(x)$, 及 $f(x)$ 从 Ω 延拓到 $\tilde{\Omega}$, 而记为 $\tilde{u}, \tilde{a}_{ij}(x)$ 及 $\tilde{f}(x)$. 但这是理论分析的需要, 与实际计算无关, 而且下面将看到误差估计与延拓方式无关.

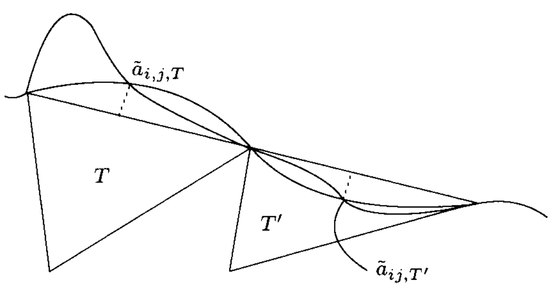

图 6.7.1

现在我们简略地讨论 2 次 Lagrange 等参元逼近 (6.7.11)~(6.7.12) 的误差分析. 称 $a_h(\cdot,\cdot)$ 是一致 V_h 椭圆, 若存在 $\tilde{\alpha} = \text{const} > 0$, 使得

$$\tilde{\alpha} \|v_h\|_{1,\Omega_h}^2 \le a_h(v_h, v_h), \quad \forall v_h \in V_h.$$

则下述与定理 6.2.1 类似的结果成立.

定理 6.7.1 给定 $\tilde{\Omega} \supset \Omega_h, \forall h > 0, \tilde{a}_{ij}(x) \in L^\infty(\tilde{\Omega})$, 令

$$a_{\Omega_h}(v, w) = \int_{\Omega_h} \sum_{i,j} \tilde{a}_{ij}(x) \partial_i v \cdot \partial_j w \mathrm{d}x.$$

假定 $a_h(\cdot, \cdot)$ 是一致 V_h 椭圆, 原问题 (6.4.1)~(6.4.2) 之解 u, 其延拓 $\tilde{u} \in H^1(\tilde{\Omega})$, 且 u_h 是问题 (6.7.11)~(6.7.12) 之解, 则

$$\begin{aligned}
&\|\tilde{u} - u_h\|_{1,\Omega_h} \\
\leq & C\Big\{ \inf_{v_h \in V_h} \Big(\|\tilde{u} - v_h\|_{1,\Omega_h} + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_{\Omega_h}(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}} \Big) \\
& + \sup_{w_h \in V_h} \frac{|a_{\Omega_h}(\tilde{u}, w_h) - (f, w_h)_h|}{\|w_h\|_{1,\Omega_h}} \Big\}. \qquad (6.7.13)
\end{aligned}$$

完全类似于 6.2~6.3 节, 可以证明, 对正则的等参有限元, 采用 2 次精度求积公式 (在 $\hat{T}$ 上), 则 $a_h(\cdot, \cdot)$ 是一致 V_h 椭圆, 且插值误差和相容误差 (即 (6.7.13) 右端的后面两项) 均为 $O(h^2)$. 从而对问题 (6.4.1)~(6.4.2) 的等参有限元逼近 (6.7.11)~(6.7.12) 有误差阶 $O(h^2)$(详细可见文献 [22]).

第 7 章　非协调有限元

本章考虑非协调有限元方法，即当有限元离散空间不在原问题的求解空间内. 非协调元方法在实际问题中有大量的应用，特别是在四阶椭圆边值问题中，比如薄板弯曲问题. 由于对四阶问题的协调有限元逼近，由 4.1 节可知，有限元空间必须被包含于 $C^1(\bar{\Omega})$，而构造 $C^1(\bar{\Omega})$ 的分片多项式至少是 5 次的，因而需有 21 个节点参数 (即使 Bell 元也需 18 个节点参数)，这在总体上来说是相当大的计算规模. 因此人们放弃协调元逼近，即不要求有限元空间是 $C^1(\bar{\Omega})$ 的子空间，即非协调元逼近，从而达到降低解题规模. 此地的关键问题仍在于保证收敛性，并给出误差估计.

7.1　抽象误差估计

设原问题为

$$\begin{cases} \text{求 } u \in V, \text{ 使得} \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle, \forall v \in V, \end{cases} \tag{7.1.1}$$

其中 V 是 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$ 及 f 如以前所述. 考虑有限元空间 V_h 为非协调元空间，即 $V_h \not\subset V$，有逼近问题：

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in V_h, \quad \text{使得} \\ a_h(u_h,v_h) = \langle f, v_h\rangle, \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{7.1.2}$$

其中

$$a_h(u_h,v_h) = \sum_T a(u_h|_T, v_h|_T), \tag{7.1.3}$$

$T \in \mathcal{T}_h$ 为单元.V_h 中的范数定义如下:$v_h \in V_h$,

$$\|v_h\|_h^2 = \sum_T \|v_h\|_{l,T}^2, \tag{7.1.4}$$

比如对二阶问题 $V \subset H^1(\Omega), \|v_h\|_h^2 = \sum_T \|v_h\|_{1,T}^2$, 对四阶问题 $V \subset H^2(\Omega), \|v_h\|_h^2 = \sum_T \|v_h\|_{2,T}^2$.

对协调元空间 $V_h \subset V$, 由 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 椭圆性, 可直接推出其 V_h 椭圆性, 但对非协调元空间 $V_h \not\subset V$, 由 $a(\cdot,\cdot)$ 的 V 椭圆性, 并不能导致 $a_h(\cdot,\cdot)$ 的 V_h 椭圆性. 因此要特别地注意到 $a_h(\cdot,\cdot)$ 应满足

$$|a_h(u_h, v_h)| \le M\|u_h\|_h \cdot \|v_h\|_h, \quad \forall u_h, v_h \in V_h, \tag{7.1.5}$$

$$a_h(u_h, v_h) \ge \alpha\|v_h\|_h^2, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{7.1.6}$$

现在给出非协调元逼近的抽象误差估计.

定理 7.1.1 (Strang 第二引理) 设 $a_h(\cdot,\cdot)$ 在 V_h 中连续的双线性型, 且 V_h 椭圆, 即 (7.1.5) 和 (7.1.6) 成立, 又设 (7.1.4) 定义的 $\|\cdot\|_h$ 是 V_h 中的范数, u 和 u_h 分别为原问题 (7.1.1) 和逼近问题 (7.1.2) 之解, 则成立下述误差估计:

$$\begin{aligned} &C_1\left\{\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{E_h(u, w_h)}{\|w_h\|_h}\right\} \\ &\le \|u - u_h\|_h \le C_2\left\{\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{E_h(u, w_h)}{\|w_h\|_h}\right\}, \end{aligned} \tag{7.1.7}$$

其中

$$E_h(u, w_h) = a_h(u, w_h) - \langle f, w_h\rangle, \tag{7.1.8}$$

而 $C_1, C_2 = \text{const} > 0$ 与 u 及 h 无关.

证明 首先由三角不等式 $\forall v_h \in V_h$,

$$\|u - u_h\|_h \le \|u - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h.$$

而

$$
\begin{aligned}
&\alpha\|u_h - v_h\|_h^2\\
&\le a_h(u_h - v_h, u_h - v_h)\\
&= a_h(u - u_h, v_h - u_h) + a_h(v_h - u, v_h - u_h)\\
&\le a_h(u, v_h - u_h) - \langle f, v_h - u_h\rangle + M\|u - v_h\|_h \cdot \|v_h - u_h\|_h,
\end{aligned}
$$

从而, 若 $v_h - u_h \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
&\|u_h - v_h\|_h\\
&\le C\left\{\|u - v_h\|_h + \frac{a_h(u, v_h - u_h) - \langle f, v_h - u_h\rangle}{\|v_h - u_h\|_h}\right\},\\
&\le C\left\{\|u - v_h\|_h + \sup_{w_h \in V_h} \frac{a_h(u, w_h) - \langle f, w_h\rangle}{\|w_h\|_h}\right\},
\end{aligned}
$$

由此, 结合三角不等式, 并注意到 v_h 是 V_h 中任一函数, 即可得到证明 (7.1.7) 的右端不等式. 下面导出 (7.1.7) 左端不等式, 由

$$
a_h(u - u_h, w_h) \le M\|u - u_h\|_h \cdot \|w_h\|_h, \quad \forall w_h \in V_h,
$$

可见

$$
\begin{aligned}
\|u - u_h\|_h &\ge \frac{1}{M} \sup_{w_h \in V_h} \frac{a_h(u, w_h) - a_h(u_h, w_h)}{\|w_h\|_h}\\
&= \frac{1}{M} \sup_{w_h \in V_h} \frac{a_h(u, w_h) - \langle f, w_h\rangle}{\|w_h\|_h};
\end{aligned}
$$

又显然有

$$
\|u - u_h\|_h \ge \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h,
$$

由上二式即得证明 (7.1.7) 的左端不等式.

注 7.1.1 称

$$
\sup_{w_h \in V_h} \frac{E_h(u, w_h)}{\|w_h\|_h} \tag{7.1.9}
$$

为非协调误差. 显然对于协调元, $V_h \subset V$ 的情形 (7.1.9) 为 0. 因此定理 7.1.1 可看作协调元方法的抽象误差估计的 Céa 引理的推广.

令

$$d(V, V_h) = \sup_{v \in V} \inf_{v_h \in V} \|v - v_h\|_h, \tag{7.1.10}$$

由定理 7.1.1 有下述推论.

推论 7.1.1 在定理 7.1.1 的假设之下, 若下述逼近性成立:

$$d(V, V_h) \to 0, \quad \text{当 } h \to 0\text{时}, \tag{7.1.11}$$

则非协调元方法收敛的充分且必要条件为

$$E_h(u, w_h) = o(1) \cdot \|w_h\|_h. \tag{7.1.12}$$

为了以后的需要, 给出一个不等式.

引理 7.1.1 设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的一个拟正则剖分, 则下述不等式成立:

$$\begin{aligned}\int_{\partial T} |w|^2 \mathrm{d}s &\le C\{h_T^{-1}\|w\|_{0,T}^2 + h_T|w|_{1,T}^2\} \\ &\le C h_T^{-1}\|w\|_{1,T}, \quad \forall w \in H^1(T), \quad T \in \mathcal{T}_h,\end{aligned} \tag{7.1.13}$$

其中 $C = \text{const} > 0$ 与 w 及 h_T 无关的常数.

证明 $\forall w \in H^1(T)$, 利用参考元 $\hat{T}$ 上的迹定理,

$$\begin{aligned}\int_{\partial T} |w|^2 \mathrm{d}s &= \int_{\partial \hat{T}} |\hat{w}|^2 \frac{|\partial T|}{|\partial \hat{T}|} \mathrm{d}\hat{s} \le C h_T^{n-1}\|\hat{w}\|_{0,\partial\hat{T}}^2 \le C h_T^{n-1}\|\hat{w}\|_{1,\hat{T}}^2 \\ &= C h_T^{n-1}\{\|\hat{w}\|_{0,\hat{T}}^2 + |\hat{w}|_{1,\hat{T}}^2\} \le C\{h_T^{-1}\|\hat{w}\|_{0,T}^2 + h_T|\hat{w}|_{1,T}^2\}.\end{aligned}$$

7.2 二阶问题的非协调元

考虑下述二阶问题

$$\begin{cases} \text{求 } u \in H_0^1(\Omega), \quad \text{使得} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{7.2.1}$$

其中

$$a(u,v)=\int_{\Omega}\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}v\mathrm{d}x. \tag{7.2.2}$$

7.2.1 Crouzeix-Raviart 三角形元

此元如下:

$$\begin{aligned}&T\ 为三角形单元,\\&P_T=P_1(T),\\&\Sigma_T=\{p(a_{ij}^T),1\le i<j\le 3\},\end{aligned}$$

其中 a_{ij}^T 是 T 的边 $[a_i^T,a_j^T]$ 的中点 (见图 7.2.1). 这样 Crouzeix-Raviart 元是分片一次多项式, 在 $\partial\Omega$ 的节点上取值为 0 的 C-R 元组成的空间设为 V_h, 显然 $V_h\not\subset C^0(\bar{\Omega})$. 则问题 (7.2.1) 的非协调 C-R 元逼近为

$$\begin{cases}求\ u_h\in V_h, \quad 使得\\ a_h(u_h,v_h)=\langle f,v_h\rangle,\ \forall v_h\in V_h,\end{cases} \tag{7.2.3}$$

其中

$$a_h(u_h,v_h)=\sum_T\int_T\mathrm{grad}u_h\cdot\mathrm{grad}v_h\mathrm{d}x. \tag{7.2.4}$$

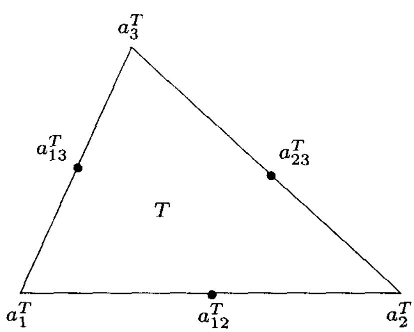

图 7.2.1

令

$$\|w_h\|_h = \left\{ \sum_T \int_T |\mathrm{grad} w_h|^2 \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{7.2.5}$$

首先要证明 (7.2.5) 定义的 $\|\cdot\|_h$ 是 V_h 上的范数. 为此只要证明, 若 $\|w_h\|_h = 0$, 则导致 $w_h = 0$. 事实上, 由 $\|w_h\|_h = 0$, 可见 $\mathrm{grad} w_h = 0$ 在 T 中, $\forall T \in \mathcal{T}_h$, 因此 $w_h|_T = C_T =$ 常数, 又 w_h 中相邻单元的公共边中点处取相同的值, 因此 w_h 在整个 Ω 上为常数: $C_T = C = \mathrm{const}$, $\forall T \in \mathcal{T}_h$. 又 w_h 在边界三角形的边的中点取零值, 因此 $C = w_h = 0$ 在 Ω 上. 现在给出 C-R 元逼近 (7.2.3) 的误差估计, 由抽象误差估计定理 7.1.1. 首先逼近误差由插值误差估计 (见 5.2 节) 可得. 令 $\sqcap_T : H^2(T) \to P_1(T)$ 使得对任一 $v \in H^2(T), \sqcap_T v \in P_1(T)$:

$$\sqcap_T v(a_{ij}^T) = v(a_{ij}^T). \tag{7.2.6}$$

而 $\sqcap_h : H^2(\Omega) \to V_h$,

$$\sqcap_h v|_T = \sqcap_T v. \tag{7.2.7}$$

则

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \le \|u - \sqcap_h u\|_h \le Ch|u|_{2,\Omega}. \tag{7.2.8}$$

下面估计非协调误差, 注意到 $w_h \in L^2(\Omega)$,

$$\begin{aligned} E_h(u, w_h) &= a_h(u, w_h) - \langle f, w_h \rangle \\ &= \sum_T \int_T \mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} w_h \mathrm{d}x - \int_\Omega f \cdot w_h \mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (-\Delta u - f) w_h \mathrm{d}x + \sum_T \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot w_h \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

由于 $\int_\Omega(-\Delta u - f)w_h\mathrm{d}x = 0$, 因为 u 是问题 (7.2.1) 之解, 则由上式

$$\begin{aligned}
E_h(u,w_h) &= \sum_T \int_{\partial T} \frac{\partial u}{\partial \nu} w_h \mathrm{d}s = \sum_T \int_{\partial T} \sum_i \partial_i u \cdot w_h \cdot \nu_i \mathrm{d}s \\
&= \sum_i \sum_T \sum_{\substack{F\subset\partial T \\ F\not\subset\partial\Omega}} \int_F (\partial_i u w_h\mid_{T^+} - \partial_i u w_h \mid_{T^-})\nu_i^+ \mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_i \sum_{F\subset\partial\Omega} \int_F \partial_i u \cdot w_h \nu_i \mathrm{d}s \\
&= \sum_i \sum_T \sum_{\substack{F\subset\partial T \\ F\not\subset\partial\Omega}} \int_F \partial_i u [w_h]_F \cdot \nu_i^+ \mathrm{d}s \\
&\quad + \sum_i \sum_{F\subset\partial\Omega} \int_F \partial_i u \cdot w_h \nu_i \mathrm{d}a, \qquad (7.2.9)
\end{aligned}$$

其中 $[w_h]_F = (w_h^+ - w_h)\mid_F$ 为 w_h 在 F 上的跳跃 (见图 7.2.2).

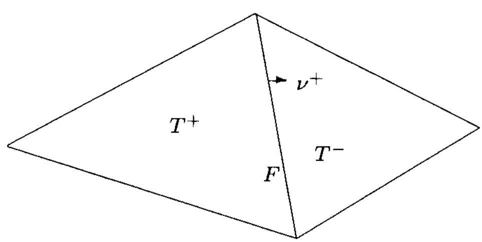

图 7.2.2

现在估计 $\int_F \partial_i u \cdot [w_h] \cdot \nu_i^+ \mathrm{d}s$, $F \not\subset \partial\Omega$. 令

$$P_0^F f = \frac{1}{|F|}\int_F f\mathrm{d}s, \quad R_0^F f = f - P_0^F f; \qquad (7.2.10)$$

$$P_0^T f = \frac{1}{|T|}\int_T f\mathrm{d}s, \quad R_0^T f = f - P_0^T f. \qquad (7.2.11)$$

则

$$\int_F \partial_i u \cdot [w_h]\nu_i^+ \mathrm{d}s = \nu_i^+ \int_F \partial_i u \cdot [w_h]\mathrm{d}s$$
$$= \nu_i^+ \int_F (\partial_i u - P_0^T(\partial_i u))[w_h]\mathrm{d}s + \nu_i^+ \int_F P_0^T(\partial_i u)[w_h]\mathrm{d}s. \quad (7.2.12)$$

由于 $\forall p(s) \in P_1(F)$, 令 $F=[a,b]$,

$$\int_a^b p(s)\mathrm{d}s = (b-a)p\Big(\frac{a+b}{2}\Big),$$

及 $[w_h]\mid_F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$, 则

$$\int_F P_0^T(\partial_i u)[w_h]\mathrm{d}s = P_0^T(\partial_i u)\int_F [w_h]\mathrm{d}s = 0,$$

从而由 (2.2.12) 可见

$$\int_F \partial_i u \cdot [w_h]\nu_i^+ \mathrm{d}s = \nu_i^+ \int_F R_0^T(\partial_i u)\cdot [w_h]\mathrm{d}s$$
$$= \nu_i^+ \int_F R_0^T(\partial_i u)\cdot R_0^F([w_h])\mathrm{d}s + \nu_i^+ \int_F R_0^T(\partial_i u)\cdot P_0^T([w_h])\mathrm{d}s. \quad (7.2.13)$$

由于

$$P_0^T([w_h]) = \frac{1}{|F|}\int_F [w_h]\mathrm{d}s = 0,$$

由 (7.2.13) 知

$$\int_F \partial_i u[w_h]\nu_i^+ \mathrm{d}s = \nu_i^+ \int_F R_0^T(\partial_i u)\cdot R_0^F([w_h])\mathrm{d}s$$
$$\leq \Big\{\int_F (R_0^T(\partial_i u))^2 \mathrm{d}s\Big\}^{\frac{1}{2}} \cdot \Big\{\int_F (R_0^T([w_h]))^2\mathrm{d}s\Big\}^{\frac{1}{2}} \quad (7.2.14)$$

由引理 7.1.1 的不等式 (7.1.13), 及插值误差估计,

$$\int_F (R_0^T(\partial_i u))^2\mathrm{d}s \leq C\{h_T^{-1}\|R_0^T(\partial_i u)\|_{0,T}^2 + h_T|R_0^T(\partial_i u)|_{1,T}\}$$
$$\leq Ch_T|u|_{2,T}^2. \quad (7.2.15)$$

下面估计 (7.2.14) 右端第二个因子. 首先由 (7.2.10) 定义的 $P_0^F : L^2(F) \to P_0(F)$ 的正交投影, 即对任给定 $f \in L^2(F)$,

$$\|f - P_0^F(f)\|_{0,F} \leq \|f - p_0\|_{0,F}, \quad \forall p_0 \in P_0(F). \tag{7.2.16}$$

因此, 并运用引理 7.1.1,

$$\begin{aligned}
&\int_F R_0^F([w_h])^2 \mathrm{d}s \\
&= \int_F \{[w_h] - P_0^F([w_h])\}^2 \mathrm{d}s \\
&= \int_F \{(w_h^+ - P_0^F(w_h^+)) - (w_h^- - P_0^F(w_h^-))\}^2 \mathrm{d}s \\
&\leq 2\Big\{ \int_F (w_h^+ - P_0^F(w_h^+))^2 \mathrm{d}s + \int_F (w_h^- - P_0^F(w_h^-))^2 \mathrm{d}s \Big\} \\
&\leq 2\Big\{ \int_F (w_h^+ - P_0^{T^+}(w_h^+))^2 \mathrm{d}s + \int_F (w_h^- - P_0^{T^-}(w_h^-))^2 \mathrm{d}s \Big\} \\
&\leq C\{(h_{T^+}^{-1} \|R_0^{T^+}(w_h^+)\|_{0,T^+}^2 + h_{T^+} |R_0^{T^+}(w_h^+)|_{1,T^+}^2) \\
&\quad + (h_{T^-}^{-1} \|R_0^{T^-}(w_h^-)\|_{0,T^-}^2 + h_{T^-} |R_0^{T^-}(w_h^-)|_{1,T^-}^2)\} \\
&\leq C\{h_{T^+} |w_h^+|_{1,T^+}^2 + h_{T^-} |w_h^-|_{1,T^-}^2\}.
\end{aligned} \tag{7.2.17}$$

由 (7.2.14), (7.2.15) 及 (7.2.17) 可见

$$\int_F \partial_i u [w_h] \nu_i^+ \mathrm{d}s \leq C h_T |u|_{2,T} \cdot |w_h|_{1,T^+ \cup T^-},$$

同样可证明, 对于 $F \subset \partial\Omega$, 注意到 $w_h(M) = 0$, 线元 F 的中点 $M \in \partial\Omega$,

$$\int_F \partial_i u \cdot w_h \cdot \nu_i \mathrm{d}s \leq C h_T |u|_{2,T} \cdot |w_h|_{1,T}.$$

从而

$$E_h(u, w_h) \leq C h \sum_T |u|_{2,T} \cdot |w_h|_{1,T} \leq C h |u|_{2,\Omega} \cdot \|w_h\|_h.$$

因此有非协调误差估计如下:

$$\sup_{w_h\in V_h}\frac{E_h(u,w_h)}{\|w_h\|_h}\le Ch|u|_{2,\Omega}. \tag{7.2.18}$$

故问题 (7.1.1) 的 C-R 非协调元逼近 (7.2.3) 有误差估计

$$\|u-u_h\|_h\le Ch|u|_{2,\Omega}. \tag{7.2.19}$$

7.2.2 Wilson 矩形元

此元如下 (见图 7.2.3)

T 为矩形单元,

$P_T=P_2(T)$,

$\Sigma_T=\left\{p(a_i),1\le i\le 4;\dfrac{h_j^2}{h_1h_2}\displaystyle\int_T\partial_{jj}p\mathrm{d}x,j=1,2\right\}.$

则 $p\in P_T$ 有表达式

$$p(x)=\sum_{i=1}^{4}p(a_i)p_i(x)+\sum_{j=1}^{2}\varphi_j(p)q_j(x), \tag{7.2.20}$$

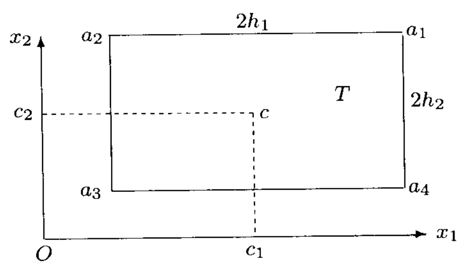

图 7.2.3

其中

$$
\begin{cases}
p_1(x) = \dfrac{1}{4}\Big(1 + \dfrac{x_1 - c_1}{h_1}\Big)\Big(1 + \dfrac{x_2 - c_2}{h_2}\Big), \\
p_2(x) = \dfrac{1}{4}\Big(1 - \dfrac{x_1 - c_1}{h_1}\Big)\Big(1 + \dfrac{x_2 - c_2}{h_2}\Big), \\
p_3(x) = \dfrac{1}{4}\Big(1 - \dfrac{x_1 - c_1}{h_1}\Big)\Big(1 - \dfrac{x_2 - c_2}{h_2}\Big), \\
p_4(x) = \dfrac{1}{4}\Big(1 + \dfrac{x_1 - c_1}{h_1}\Big)\Big(1 - \dfrac{x_2 - c_2}{h_2}\Big),
\end{cases}
\tag{7.2.21}
$$

$$
\begin{cases}
q_j(x) = \dfrac{1}{8}\Big[\Big(\dfrac{x_j - c_j}{h_j}\Big)^2 - 1\Big], j = 1, 2, \\
\varphi_j(p) = \dfrac{h_j^2}{h_1 h_2}\displaystyle\int_T \partial_{jj} p \mathrm{d}x \qquad j = 1, 2;
\end{cases}
\tag{7.2.22}
$$

$$
c = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} a_i. \tag{7.2.23}
$$

这样 Wilson 元是分片 2 次多项式, 在 $\partial\Omega$ 的节点上取值 0 的 Wilson 元组成的空间设为 V_h. 考察 $V_h \not\subset C^0(\bar{\Omega})$, 这是因为, 若 $v_h \in V_h$, 则可分裂成二部分:

$$
v_h = Q_1(v_h) + R_1(v_h), \tag{7.2.24}
$$

其中

$$
Q_1(v_h) = \sum_{i=1}^{4} v_h(a_i) p_i(x) \text{—— 四顶点上的双线性元,} \tag{7.2.25}
$$

$$
R_1(v_h) = \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(v_h) q_j(x) \text{—— 非协调部分.} \tag{7.2.26}
$$

则在单元 T^+ 和 T^- 的公共边 F 上 (见图 7.2.4),

$$
\begin{cases}
v_h^+ = Q_1(v_h^+) + \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \varphi_j(v_h^+) q_j^+(x), \\
v_h^- = Q_1(v_h^-) + \displaystyle\sum_{j=1}^{2} \varphi_j(v_h^-) q_j^-(x),
\end{cases}
$$

有 $Q_1(v_h^+)|_F = Q_1(v_h^-)|_F, q_j^+(x)|_F = Q_j^-(x)|_F$, 但

$$\varphi_j(v_h^+) \neq \varphi_j(v_h^-).$$

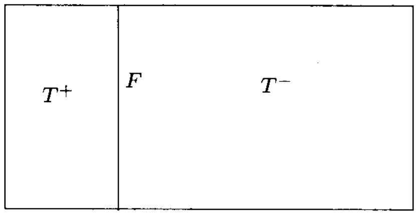

图 7.2.4

因而 $v_h \notin C^0(\bar{\Omega})$. 问题 (7.2.1) 的 Wilson 非协调元逼近为

$$\begin{cases} \text{求 } u_h \in V_h, \text{使得} \\ a_h(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{7.2.27}$$

其中

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_T \int_T \mathrm{grad} u_h \cdot \mathrm{grad} v_h \mathrm{d}x, \tag{7.2.28}$$

$$\|w_h\|_h^2 = \sum_T |w_h|_{1,T}^2. \tag{7.2.29}$$

首先验证 $\|w_h\|_h$ 是 V_h 上的范数. 事实上, 若 $\|w_h\|_h = 0$, 则 $|w_h|_{1,T} = 0, \forall T \in \mathcal{T}_h$, 从而 w_h 在 $T \in \mathcal{T}_h$ 上是常数, 这样 w_h 的非协调部分 $R_1(w_h)$ 不起作用, 从而 w_h 在 Ω 上连续; 又因为在边界节点处为 0, 因此 $w_h = 0$ 在 Ω 上. 应用抽象误差估计定理 7.1.1. 首先考察逼近误差. 设 $\sqcap_T : H^2(T) \to P_2(T)$ 的如下插值算子, 对给定 $v \in H^2(T), \sqcap_T v \in P_2(T)$, 使得

$$\sqcap_T v = Q_1(v) + R_1(v),$$

$$Q_1(v) = \sum_{i=1}^{4} v(a_i) p_i(x), \ R_1(v) = \sum_{j=i}^{2} \varphi_j(v) q_j(x),$$

$\sqcap_h : H^2(\Omega) \to V_h$, 使得

$$\sqcap_h v|_T = \sqcap_T v.$$

则由插值误差估计,

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - u_h\|_h \le \|u - \sqcap_h u\|_h \le Ch^2 |u|_{3,\Omega}. \tag{7.2.30}$$

下面考察非协调误差

$$\begin{aligned}E_h(u, w_h) &= a_h(u, w_h) - \langle f, w_h \rangle \\ &= \{a_h(u, Q_1(w_h)) - \langle f, Q_1(w_h) \rangle\} \\ &\quad + \{a_h(u, R_1(w_h)) - \langle f, R_1(w_h) \rangle\},\end{aligned}$$

由于 $Q_1(w_h) \in V$, 即协调元部分, 从而上式右端第一个 $\{\cdots\} = 0$, 因此

$$\begin{aligned}E_h(u, w_h) &= a_h(u, R_1(w_h)) - \langle f, R_1(w_h) \rangle \\ &= \sum_i \sum_T \int_{\partial T} \partial_i u \cdot R_1(w_h) \cdot \nu_i \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{7.2.31}$$

现在估计 (7.2.31) 右端的积分项

$$\begin{aligned}&\int_{\partial T} \nu_i \partial_i u \cdot R_1(w_h) \mathrm{d}s \\ = &\int_{\partial T} \nu_i R_0^T(\partial_i u) \cdot R_1(w_h) \mathrm{d}s + \int_{\partial T} P_0^T(\partial_i u) \cdot R_1(w_h) \cdot \nu_i \mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{7.2.32}$$

我们断定

$$\int_{\partial T} \nu_i P_0^T(\partial_i u) \cdot R_1(w_h) \mathrm{d}s = 0, \quad i = 1, 2. \tag{7.2.33}$$

事实上, 设 $i = 1$, 则在 $[a_1, a_2]$ 及 $[a_3, a_4]$ 上 $\nu_1 = 0, \nu_1|_{[a_1,a_4]} = 1, \nu_1|_{[a_2,a_3]} = -1$(见图 7.2.3), 则

$$\int_{\partial T} (R_1(w_h)) \nu_1 \mathrm{d}s = \int_{c_2 - h_2}^{c_2 + h_2} (R_1(w_h)|_{[a_1,a_4]} - R_1(w_h)|_{[a_2,a_3]}) \mathrm{d}y,$$

而 $[a_1a_4]$ 及 $[a_2a_3]$ 上, $q_1(x)=0$, 且

$$R_1(w_h)|_{[a_1a_4]}=R_1(w_h)|_{[a_2a_3]}=\varphi_2(w_h)q_2(x).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial T}\nu_1P_0^T(\partial_1u)\cdot R_1(w_h)\mathrm{d}s\\
=&\int_{[a_1a_4]}P_0^T(\partial_1u)\cdot R_1(w_h)\mathrm{d}s-\int_{[a_2a_3]}P_0^T(\partial_1u)\cdot R_1(w_h)\mathrm{d}s\\
=&P_0^T(\partial_1u)\Big(\int_{[a_1a_4]}R_1(w_h)\mathrm{d}s-\int_{[a_2a_3]}R_1(w_h)\mathrm{d}s\Big)=0,
\end{aligned}$$

同样地有

$$\int_{\partial T}\nu_2P_0^T(\partial_2u)\cdot R_1(w_h)\mathrm{d}s=0.$$

因此, 由 (7.2.23) 和 (7.2.33), 利用引理 7.1.1, 可见

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial T}\nu_i\partial_iu\cdot R_1(w_h)\mathrm{d}s\\
=&\int_{\partial T}R_0^T(\partial_iu)\cdot R_1(w_h)\nu_i\mathrm{d}s \qquad (7.2.34)\\
\le&\Big\{\int_{\partial T}(R_0^T(\partial_iu))^2\mathrm{d}s\Big\}^{\frac12}\Big\{\int_{\partial T}(R_1(w_h))^2\mathrm{d}s\Big\}^{\frac12}\\
\le&Ch_T|u|_{2,T}\cdot|w_h|_{1,T}.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
E_h(u,w_h)&=\sum_i\sum_T\int_{\partial T}\partial_iu\cdot R_1(w_h)\cdot\nu_i\mathrm{d}s \qquad (7.2.35)\\
&\le Ch|u|_{2,\Omega}\cdot\|w_h\|_h,
\end{aligned}$$

可见, 非协调误差

$$\sup_{w_h\in V_h}\frac{E_h(u,w_h)}{\|w_h\|_h}\le Ch|u|_{2,\Omega}. \qquad (7.2.36)$$

比较 (7.2.30) 和 (7.2.36) 可见,Wilson 元的插值误差为 $O(h^2)$ 阶, 而非协调误差为 $O(h)$ 阶, 因此 Wilson 有限元逼近的误差, 总体只有 $O(h)$ 阶.

7.3 四阶问题的非协调元

考虑固支薄板弯曲问题

$$\begin{cases} 求\ u \in H_0^2(\Omega), 使得 \\ a(u,v) = \langle f, v\rangle, \qquad \forall v \in H_0^2(\Omega), \end{cases} \tag{7.3.1}$$

其中

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \{\Delta u \cdot \Delta v + (1-\sigma)(2\partial_{12}u \cdot \partial_{12}v - \partial_{11}u \cdot \partial_{22}v \\ &\qquad -\partial_{22}u \cdot \partial_{11}v)\}\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega \{\sigma\Delta u \cdot \Delta v + (1-\sigma)(2\partial_{12}u \cdot \partial_{12}v + \partial_{11}u \cdot \partial_{11}v \\ &\qquad +\partial_{22}u \cdot \partial_{22}v)\}\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega fv\mathrm{d}x. \tag{7.3.3}$$

$\Omega \subset \mathcal{R}^2$ 是多边形区域. 设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的一个拟正则剖分, 对应的分片多项式空间为 X_h.

$$V_h = \{v_h \in X_h : v_h = \partial_\nu v_h = 0, \quad 在\ \partial\Omega 上\}. \tag{7.3.4}$$

设 X_h 是非协调元空间, 即 $X_h \not\subset H^2(\Omega)$, 即 $X_h \not\subset C^1(\bar{\Omega})$. 问题 (7.3.1) 的非协调元逼近为

$$\begin{cases} 求\ u_h \in V_h, 使得 \\ a_h(u_h, v_h) = \langle f, v_h\rangle, \forall v_h \in V_h, \end{cases} \tag{7.3.5}$$

其中

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_T a(u_h|_T, v_h|_T). \tag{7.3.6}$$

令

$$\|v_h\|_h = \Big(\sum_T |v_h|_{2,T}^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.3.7}$$

则

$$a_h(u,v) \le M\|u\|_h \cdot \|v\|_h, \quad \forall u,v \in V_h \cup V. \tag{7.3.8}$$

下面给出一个非协调元的例子,Adini 元, 如下 (见图 7.3.1),

$$\begin{aligned}
&T \text{ 为矩形单元},\\
&P_T = P_3(T) \oplus [x_1^3 x_2, x_1 x_2^3],\\
&\Sigma_T = \{p(a_i), \partial_j p(a_i),\ 1 \le i \le 4, j = 1,2\}.
\end{aligned}$$

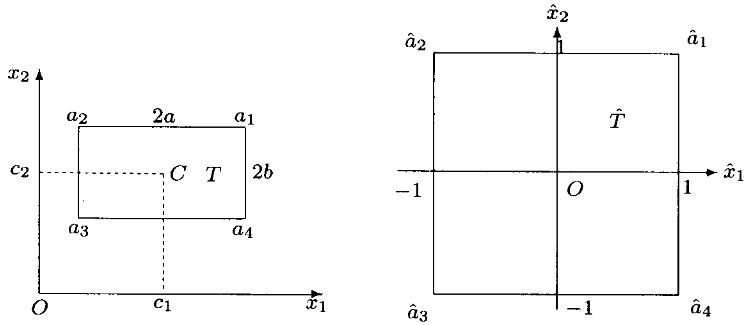

图 7.3.1

在参考正方形 $\hat{T} = [-1,1]^2$ 上写出形状函数表达式:

$$\hat{p}(\hat{x}) = \sum_{i=1}^{4} \hat{p}(\hat{a}_i)\hat{p}_i(\hat{x}) + \sum_{\substack{|j-i|=1\\ (\mathrm{mod}\ 4)}} D\hat{p}(\hat{a}_i)\cdot(\hat{a}_j - \hat{a}_i)\cdot \hat{p_{ij}}(\hat{x}), \tag{7.3.9}$$

其中

$$\begin{cases}
\hat{p_1}(\hat{x}) = \dfrac{(1+\hat{x}_1)+(1+\hat{x}_2)}{2}\left(1 + \dfrac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2} - \dfrac{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}{2}\right),\\
\hat{p_2}(\hat{x}) = \dfrac{(1-\hat{x}_1)+(1+\hat{x}_2)}{2}\left(1 + \dfrac{-\hat{x}_1 + \hat{x}_2}{2} - \dfrac{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}{2}\right),\\
\hat{p_3}(\hat{x}) = \dfrac{(1-\hat{x}_1)+(1-\hat{x}_2)}{2}\left(1 + \dfrac{-\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{2} - \dfrac{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}{2}\right),\\
\hat{p_4}(\hat{x}) = \dfrac{(1+\hat{x}_1)+(1-\hat{x}_2)}{2}\left(1 + \dfrac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{2} - \dfrac{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2}{2}\right);
\end{cases} \tag{7.3.10}$$

$$
\begin{cases}
\hat{p}_{12}(\hat{x}) = \dfrac{(1+\hat{x}_1)(1+\hat{x}_2)^2(1-\hat{x}_2)}{8}, \\
\hat{p}_{23}(\hat{x}) = \dfrac{(1+\hat{x}_2)(1-\hat{x}_1)^2(1+\hat{x}_1)}{8}, \\
\hat{p}_{34}(\hat{x}) = \dfrac{(1-\hat{x}_1)(1-\hat{x}_2)^2(1+\hat{x}_2)}{8}, \\
\hat{p}_{41}(\hat{x}) = \dfrac{(1-\hat{x}_2)(1+\hat{x}_1)^2(1-\hat{x}_1)}{8}.
\end{cases}
\tag{7.3.11}
$$

Adini 矩形元 v_h 是 C^0 元, 因为在 T 的边 F 上, $v_h|_F$ 是一元 3 次多项式, 由 F 两端的 4 个节点参数 (每个端点上函数值及其一阶导数) 唯一地确定; 但 Adini 元 $v_h \notin C^1(\bar{\Omega})$, 因为它在 F 上 $\partial_\nu v_h|_F$ 不连续.

现在给出 Adini 非协调元的误差估计. 首先考察 $\|v_h\|_h$ 确是 V_h 上的范数. 事实上, 若 $\|v_h\|_h = 0$, 则 $|v_h|_{2,T} = 0, \forall T \in \mathcal{T}_h$, 即 $\partial_i v_h|_T = C_{i,T}$ 为常数, $i = 1, 2, T \in \mathcal{T}_h$. 由于 $\partial_i v_h$ 在单元顶点处连续, 从而 $\partial_i v_h = C_i$ 为常数 (在 $\bar{\Omega}$ 上). 但由于 $\partial_i v_h = 0$ 在边界 $\partial\Omega$ 的节点处, 从而 $\partial_i v_h = 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上, 因此 v_h 在 $\bar{\Omega}$ 上为常数, 又由于 v_h 在边界 $\partial\Omega$ 的节点处为 0, 从而 $v_h = 0$ 在 $\bar{\Omega}$ 上.

由抽象误差估计, 首先

$$
\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \le \|u - \sqcap_h u\|_h,
$$

其中 $\sqcap_h : H^3(\Omega) \to V_h$ 的 Adini 元的分片插值算子, 任给定 $v \in H^3(\Omega), \sqcap_h v \in V_h$, 使得 $\sqcap_h v|_T = \sqcap_T v$:

$$
\sqcap_T v = \sum_{i=1}^{4} v(a_i) p_i(x) + \sum_{\substack{|i-j|=1 \\ (\mathrm{mod} 4)}} Dv(a_i) \cdot (a_j - a_i) p_{ij}(x), \tag{7.3.12}
$$

其中 $F_T(\hat{x}) = x, F_T^{-1}(x) = \hat{x}$ 如下:

$$
\begin{cases}
\hat{x}_1 = \dfrac{(x_1 - c_1)}{a}, \\
\hat{x}_2 = \dfrac{(x_2 - c_2)}{b},
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
x_1 = c_1 + a\hat{x}_1, \\
x_2 = c_2 + b\hat{x}_2,
\end{cases}
\tag{7.3.13}
$$

而

$$p_i(x) = \hat{p}_i \circ F_T^{-1}(x), \quad p_{ij}(x) = \hat{p}_{ij} \circ F_T^{-1}(x). \tag{7.3.14}$$

则由插值误差估计:

$$\inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_h \leq \|u - \Pi_h u\|_h = \Big(\sum_T |u - \Pi_T u|_{2,T}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq Ch|u|_{3,\Omega}. \tag{7.3.15}$$

因此主要是估计非协调误差.$\forall w_h \in V_h$,

$$\begin{aligned} E_h(u, w_h) &= a_h(u, w_h) - \langle f, w_h \rangle \\ &= \sum_T \int_T \{\Delta u \cdot \Delta w_h + (1-\sigma)(2\partial_{12} u \cdot \partial_{12} w_h \\ &\quad -\partial_{11} u \cdot \partial_{22} w_h - \partial_{22} u \cdot \partial_{11} w_h)\} \mathrm{d}x - \int_\Omega f \cdot w_h \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

注意到 $w_h \in H^1(\Omega)$, 而 $f = \Delta^2 u$, 并设 $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, 则

$$\begin{aligned} \int_\Omega f \cdot w_h \mathrm{d}x &= \int_\Omega \Delta^2 u \cdot w_h \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla(\Delta u) \cdot \nabla w_h \mathrm{d}x \\ &= -\sum_T \int_T \nabla(\Delta u) \cdot \nabla w_h \mathrm{d}x \\ &= \sum_T \int_T \Delta u \cdot \Delta w_h \mathrm{d}x - \sum_T \int_{\partial T} \Delta u \cdot \frac{\partial w_h}{\partial u} \mathrm{d}s, \end{aligned}$$

将它代入上式, 并利用 Green 公式 (2.6.7), 即得

$$\begin{aligned} E_h(u, w_h) &= \sum_T \int_{\partial T} (\Delta u - (1-\sigma)\partial_{\tau\tau} u) \frac{\partial w_h}{\partial \nu} \mathrm{d}s \\ &\quad + (1-\sigma) \sum_T \int_{\partial T} \partial_{\nu\tau} u \cdot \partial_\tau w_h \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{7.3.16}$$

首先考察 (7.3.16) 右端第二项, 由于 $w_h \in V_h$, 则 $w_h|_{\partial\nu} = 0$, 故 $\partial_\tau w_h|_F$

$= 0, \forall F \subset \partial\Omega$. 因此

$$\begin{aligned}
&\sum_T \int_{\partial T} \partial_{\nu\tau} u \cdot \partial_\tau w_h \mathrm{d}s \\
&= \sum_T \sum_{\substack{F \subset \partial T \\ F \not\subset \partial\Omega}} \int_F \{(\partial_{\nu\tau} u \cdot \partial_\tau w_h)^+ - (\partial_{\nu\tau} u \cdot \partial_\tau w_h)^-\} \mathrm{d}s \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{7.3.17}$$

这是因为 $u \in H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega)$, 取 $\partial_{\nu\tau} u^+ = \partial_{\nu\tau} u^-$ 在 F 上, 而 $w_h^+ = w_h^-$ 在 F 上, 从而 $\partial_\tau w_h^+ = \partial_\tau w_h^-$ 在 F 上 (见图 7.3.2).

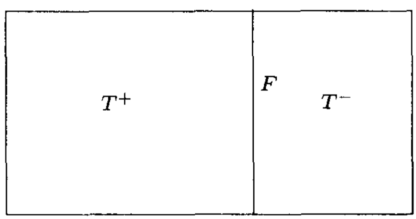

图 7.3.2

下面估计 (7.3.16) 右端第一项, 令 $\psi = \Delta u - (1-\sigma)\partial_{\tau\tau} u$, 由于 $u \in H^3(\Omega)$, 则 $\psi^+ = \psi^-$ 在 F 上; 令 $Q_1(\partial_i w_h)$ 是 $\partial_i w_h$ 的分片双线性插值, 则 $Q_1(\partial_i w_h) \in C^0(\bar{\Omega}), i = 1, 2$, 令 $R_1(\partial_i w_h) = \partial_i w_h - Q_1(\partial_i w_h)$, 则 (见图 7.3.3)

$$\begin{aligned}
&\sum_T \int_{\partial T} (\Delta u - (1-\sigma)\partial_{\tau\tau} u) \frac{\partial w_h}{\partial \nu} \mathrm{d}s \\
&= \sum_T \int_{\partial T} \psi \sum_{i=1}^2 R_1(\partial_i w_h) \cdot \nu_i \mathrm{d}s \\
&= \sum_T (\int_{F_1} - \int_{F_3}) \psi_1 (\partial_1 w_h^T) \mathrm{d}x_2 + \sum_T \left(\int_{F_2} - \int_{F_4} \right) \psi_1 (\partial_2 w_h^T) \mathrm{d}x_1 \\
&= d_1(w_h) + d_2(w_h).
\end{aligned} \tag{7.3.18}$$

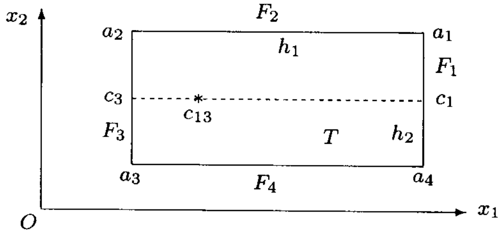

图 7.3.3

考察

$$d_1(w_h) = \sum_T \Big(\int_{F_1} - \int_{F_3} \Big) \psi_{R_1}(\partial_1 w_h^T) \mathrm{d}x_2$$
$$= \sum_T \Big(\int_{F_1} - \int_{F_3} \Big) \{ R_0^T(\psi) \cdot R_1(\partial_1 w_h^T)$$
$$+ P_0^T(\psi) \cdot R_1(\partial_1 w_h^T) \} \mathrm{d}x_2. \tag{7.3.19}$$

而由于 $\partial_1 w_h^T \in P_3(T)$, 因此 $R_1(\partial_1 w_h^T)|_F \in P_3(F)$ 且在 F 的两端处为 0(注意 $Q_1(\partial_i w_h^T)$ 是 $\partial_i w_h^T$ 在 T 的四顶点的双线性插值). 由于 Simpson 积分式精确到 3 次多项式, 故

$$\int_{F_1} R_1(\partial_1 w_h^T) \mathrm{d}x_2 = \frac{2}{3} h_2 \cdot (\partial_1 w_h^T)(c_1), \quad c_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_4).$$

又 $\forall p \in P_3([a,b]), c = \dfrac{1}{2}(a+b)$,

$$p(c) = \frac{1}{2}(p(a) + p(b)) - \frac{1}{8}(b-a)^2 p''(c);$$

令 $p = R_1(\partial_1 w_h^T)|_{F_1}$, 则

$$R_1(\partial_1 w_h^T)(c_1) = -\frac{1}{8} h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} R_1(\partial_1 w_h^T)|_{F_1}(c_1)$$
$$= -\frac{1}{8} h_2^2 \frac{\partial^3 w_h^T}{\partial x_1 \partial x_2^2}(c_1).$$

因此

$$\int_{F_1} R_1(\partial_1 w_h^T) \mathrm{d}x_2 = -\frac{1}{12} h_2^3 \frac{\partial^3 w_h^T}{\partial x_1 \partial x_2^2}(c_1); \tag{7.3.20}$$

同样

$$\int_{F_3} R_1(\partial_1 w_h^T)\mathrm{d}x_2 = -\frac{1}{12}h_2^3\frac{\partial^3 w_h^T}{\partial x_1\partial x_2^2}(c_3); \tag{7.3.21}$$

因此

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{F_1} - \int_{F_3}\Big)R_1(\partial_1 w_h^T)\mathrm{d}x_2\\ &= \frac{1}{12}h_2^3\Big\{\frac{\partial^3 w_h^T}{\partial x_1\partial x_2^2}(c_3) - \frac{\partial^3 w_h^T}{\partial x_1\partial x_2^2}(c_1)\Big\}\\ &= \frac{1}{12}h_2^3\cdot h_1\frac{\partial^4 w_h^T}{\partial x_1\partial x_2^2}(c_{13}) = 0.\end{aligned} \tag{7.3.22}$$

最后等式是由于 $w_h^T \in P_3(T)\oplus[x_1^3x_2, x_1x_2^3]$. 由 (7.3.19) 和 (7.3.22) 可见

$$\begin{aligned}d_1(w_h) &= \sum_T\Big(\int_{F_1} - \int_{F_3}\Big)R_0^T(\psi)\cdot R_1(\partial_1 w_h^T)\mathrm{d}x_2\\ &\le \sum_T\Big\{\Big(\int_{F_1} - \int_{F_3}\Big)(R_0^T(\psi))^2\mathrm{d}x_2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\cdot\Big\{\Big(\int_{F_1} - \int_{F_2}\Big)(R_1(\partial_1 w_h^T))^2\mathrm{d}x_2\Big\}^{\frac{1}{2}}\\ &\le C\sum_T\{h_T^{-1}\|R_0^T(\psi)\|_{0,T}^2 + h_T|R_0^T(\psi)|_{1,T}^2\}^{\frac{1}{2}}\\ &\quad\cdot\{h_T^{-1}\|R_1^T(\partial_1 w_h^T)\|_{0,T}^2 + h_T|R_1^T(\partial_1 w_h^T)|_{1,T}^2\}^{\frac{1}{2}}\\ &\le Ch\sum_T|\psi|_{1,T}\cdot|w_h^T|_{2,T} \le Ch|u|_{3,\Omega}\cdot\|w_h\|_h.\end{aligned} \tag{7.3.23}$$

同样可得对 $d_2(w_h)$ 的估计, 总之有

$$E_h(u, w_h) \le Ch|u|_{3,\Omega}\cdot\|w_h\|_h. \tag{7.3.24}$$

因此我们有下述定理.

定理 7.3.1 设 $\mathcal{T}_h$ 是矩形区域 Ω 的拟正则矩形剖分, 固支薄板弯曲问题 (7.3.1) 之解 $u \in H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega)$. 则 Adini 非协调元的

逼近 (7.3.5), 有误差估计

$$\|u-u_h\| \le Ch|u|_{3,\Omega}. \tag{7.3.25}$$

关于其他非协调元的详细分析, 请参阅文献 [48].

7.4 平面弹性问题的有限元方法及闭锁问题

本节讨论用非协调元克服平面弹性问题有限元逼近中的闭锁现象 (见文献 [17]).

首先回顾一下, 各向同性均匀介质的平面弹性问题 (见 3.2 节). 考察纯位移边值问题:

$$\begin{cases} \text{求 } \boldsymbol{u} \in V, \text{使得} \\ a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \forall \boldsymbol{v} \in V, \end{cases} \tag{7.4.1}$$

其中 $V=(H_0^1(\Omega))^2$,

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega (2\mu\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}) + \lambda \mathrm{div}\boldsymbol{u}\cdot \mathrm{div}\boldsymbol{v})\mathrm{d}x, \tag{7.4.2}$$

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot \boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \tag{7.4.3}$$

而 $\lambda \in (0,\infty), \mu \in [u_1,u_2], 0<\mu_1<\mu_2$ 是 Lamé 常数. 由 Korn 不等式可知, 双线性型 $a(\cdot,\cdot)$ 是 V 椭圆的:

$$a(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) \ge \alpha\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}^2, \quad \forall \boldsymbol{v}\in V. \tag{7.4.4}$$

为简单计, 设 $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ 为凸多边形. 设 $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的拟正则三角形剖分, V_h 为对应的协调一次元空间:

$$V_h = \{\boldsymbol{v}_h \in (H_0^1(\Omega))^2 : \boldsymbol{v}_h|_T \in (P_1(T))^2, \quad \forall T\in\mathcal{T}_h\}. \tag{7.4.5}$$

则问题 (7.4.1) 的协调一次元逼近为

$$\begin{cases} \text{求 } \boldsymbol{u}_h \in V, \text{使得} \\ a(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h\rangle, \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h, \end{cases} \tag{7.4.6}$$

容易建立下述误差估计.

定理 7.4.1 设 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{u}_h$ 分别为问题 (7.4.1) 和 (7.4.6) 之解, 则

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{1,\Omega} \le C(2\mu+\lambda)\cdot h|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}. \tag{7.4.7}$$

其中 $C = \text{const} > 0$ 与 h 及 $\boldsymbol{u}$ 无关.

证明 由于 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称双线性型, 因此

$$\begin{aligned}
&a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h) \le \inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h} a(u-\boldsymbol{v}_h,u-\boldsymbol{v}_h)\\
&= \inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h}\left\{2\mu\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h)\|_{0,\Omega}^2+\lambda\|\text{div}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\|_{0,\omega}^2\right\}.
\end{aligned}$$

令 $\sqcap_h : (H_0^2(\Omega))^2 \to V_h$ 的分片一次插值, 由 (7.4.4) 可见

$$\begin{aligned}
&\alpha\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{1,\Omega}^2\\
&\le a(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\\
&\le 2\mu\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}-\sqcap_h\boldsymbol{u})\|_{0,\Omega}^2+\lambda\|\text{div}(\boldsymbol{u}-\sqcap_h\boldsymbol{u})\|_{0,\Omega}^2\\
&\le C(2\mu+\lambda)\|\boldsymbol{u}-\sqcap_h\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}^2 \le C(2\mu+\lambda)h^2|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2.
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

注 7.4.1 对固定的 λ, 上述定理给出了平面弹性问题的协调一次有限元逼近的收敛性. 但当 $\lambda\to\infty$ 时, 上述定理就不能给出任何收敛性的结果. 事实上, 对协调一次元逼近 $\boldsymbol{u}$, 当 $\lambda\to\infty$ 时, 确实不再收敛到真解 $\boldsymbol{u}$, 这就是所谓闭锁 (locking) 现象, 下面将详细进行讨论.

注 7.4.2 仔细考察上述定理证明中的 (7.4.8) 式第二个不等式, 与 λ 有关的是第二项

$$\lambda\|\text{div}(\boldsymbol{u}-\sqcap_h\boldsymbol{u})\|_{0,\Omega}^2. \tag{7.4.9}$$

因此估计它是克服闭锁现象的关键. 如果我们能够构造算子 $\sqcap_h$(当然同时要牵涉到 V_h 的构造), 使得

$$\|\text{div}\boldsymbol{u}-\text{div}\,\sqcap_h\,\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega} \le Ch\|\text{div}\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}; \tag{7.4.10}$$

又如果由问题 (7.4.1) 本身, 能够导出 (见下面)

$$\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.11}$$

这样由 (7.4.9)~(7.4.11),

$$\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u} - \sqcap_h \boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}^2 \leq Ch^2\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}^2, \tag{7.4.12}$$

这样就克服了闭锁现象. 下面我们将详细地进行讨论.

7.4.1 闭锁现象

现在详细地讨论注 7.4.1 中所指出的闭锁现象. 令 $\Omega = (0,1)^2$, 考虑纯位移边值问题, $\mu = 1$, 由 (3.2.7),

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{u}^\lambda - (\lambda+1)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda) = \boldsymbol{f}, & \text{在 } \Omega\text{中}, \\ \boldsymbol{u}^\lambda = 0, & \text{在 } \partial\Omega\text{上}, \end{cases} \tag{7.4.13}$$

由其对应的变分形式 (7.4.1)~(7.4.3)($\mu = 1$), 可见

$$2\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda)\|_{0,\Omega}^2 + \lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}^2 \leq \|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\cdot\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.14}$$

由 Poincaré 不等式和 Korn 不等式, 注意到 $\boldsymbol{u}^\lambda|_{\partial\Omega} = 0$, 有

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega} \leq \|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{1,\Omega} \leq C\Big(\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda)\|_{0,\Omega}^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{7.4.15}$$

因此由 (7.4.14) 和 (7.4.15),

$$\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.16}$$

上式意味着, 对给定的 $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^2$, 当 $\lambda \to \infty$ 时,

$$\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega} \to 0. \tag{7.4.17}$$

更进一步, 我们有下述定理.

定理 7.4.2 平面弹性纯位移边值问题 (7.4.1)~(7.4.3) 之解 $\boldsymbol{u}^\lambda$, 当 $\mu=1$, 满足下述估计

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{2,\Omega}+\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{1,\Omega}\le C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}, \tag{7.4.18}$$

其中 $C=\text{const}>0$ 与 λ 无关.

为了证明上述定理, 我们需要引理 3.2.1 的二个推论. 首先将引理 3.2.1 重新叙述如下:

引理 7.4.1 设 $\Omega\subset\mathcal{R}^2$ 是凸区域, 则存在 $C=\text{const}>0$, 使得对一切 $p\in L^2(\Omega):\displaystyle\int_\Omega p\mathrm{d}x=0$, 存在 $\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2$, 满足

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=p. \tag{7.4.19}$$

且

$$\|\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}\le C\|p\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.20}$$

推论 7.4.1 对任给定 $\boldsymbol{v}\in(H_0^1(\Omega))^2$, 存在 $\boldsymbol{w}\in(H_0^1(\Omega))^2$, 使得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w}=\mathrm{div}\boldsymbol{v}. \tag{7.4.21}$$

且

$$\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}\le C\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.22}$$

证明 在引理 7.4.1 中, 令 $p=\mathrm{div}\boldsymbol{v}$, 则知存在 $\boldsymbol{w}\in(H_0^1(\Omega))^2$, 使得 $\mathrm{div}\boldsymbol{w}=p=\mathrm{div}\boldsymbol{v}$, 且 $\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}\le C\|p\|_{0,\Omega}=C\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}\|_{0,\Omega}$.

推论 7.4.2 对任给定 $\boldsymbol{v}\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2$, 存在 $\boldsymbol{w}\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2$, 使得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w}=\mathrm{div}\boldsymbol{v}, \tag{7.4.23}$$

且

$$\|\boldsymbol{w}\|_{2,\Omega}\le C\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}. \tag{7.4.24}$$

证明 同引理 7.4.1(即引理 3.2.1) 的证明一样, 令 $p=\mathrm{div}\boldsymbol{v}\in H^1(\Omega)$, 则存在唯一 ζ, 使得

$$-\Delta\zeta=p\text{ 在 }\Omega\text{ 中},\quad \zeta=0\text{ 在 }\partial\Omega\text{ 上}.$$

由正则性结果有

$$\|\zeta\|_{3,\Omega} \leq C\|p\|_{1,\Omega} = C\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}.$$

令

$$\boldsymbol{w} = -\mathrm{grad}\zeta,$$

则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w} = -\Delta\zeta = p = \mathrm{div}\boldsymbol{v},$$

且

$$\|\boldsymbol{w}\|_{2,\Omega} \leq \|\zeta\|_{3,\Omega} \leq C\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}\|_{1,\Omega}.$$

下面唯一要证明的是 $\boldsymbol{w} \in (H_0^1(\Omega))^2$, 即

$$\boldsymbol{w} = -\mathrm{grad}\zeta = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}.$$

注意到 $\boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$, 以及

$$-\Delta\zeta = \mathrm{div}\boldsymbol{v} \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \quad \zeta = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

则 $\forall\varphi \in H^1(\Omega)$, 由分部积分, 及

$$-\int_\Omega \Delta\zeta \cdot \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v} \cdot \varphi \mathrm{d}x$$

可见

$$\int_\Omega \mathrm{grad}\zeta \cdot \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \partial_\nu\zeta \cdot \varphi \mathrm{d}s = -\int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad}\varphi \mathrm{d}x, \quad \forall\varphi \in H^1(\Omega).$$

因此

$$\boldsymbol{v} = -\mathrm{grad}\zeta \text{ 在 } \Omega \text{ 中}, \quad \partial_\nu\zeta = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上}.$$

又 $\zeta = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上, 从而 $\partial_\tau\zeta = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上. 因此

$$\mathrm{grad}\zeta = 0 \text{ 在 } \partial\Omega \text{ 上},$$

即 $\boldsymbol{w} = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上.

定理 7.4.2 的证明

(i) 首先证明

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{1,\Omega}+\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}\le C\|f\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.25}$$

在 (7.4.1)~(7.4.3) 中, $\mu=1$, 取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^\lambda$, 则

$$2\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda)\|_{0,\Omega}^2+\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}^2\le\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\cdot\|\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega}, \tag{7.4.26}$$

由此, 并利用 Korn 不等式 (定理 3.2.3)(注意 $\boldsymbol{u}^\lambda=0$ 在 $\partial\Omega$ 上), 即得

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{1,\Omega}\le C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.27}$$

现证

$$\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}\le C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.28}$$

在推论 7.4.1 中取 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^\lambda$, 则存在 $\boldsymbol{w}\in(H_0^1(\Omega))^2$:

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w}=\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda \text{ 且 } \|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}\le C\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.29}$$

在 (7.4.1)~(7.4.3) 中, 令 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}$, 则有

$$2\mu\int_\Omega\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{w})\mathrm{d}x+\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}^2\le\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\cdot\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega},$$

从而利用 (7.4.27) 和 (7.4.29), 有

$$\begin{aligned}\lambda\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}^2&\le\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\cdot\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}+2\mu\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}^\lambda)\|_{0,\Omega}\cdot\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{w})\|_{0,\Omega}\\&\le\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}+2\mu\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{1,\Omega}\}\cdot\|\boldsymbol{w}\|_{1,\Omega}\\&\le C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\cdot\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega},\end{aligned}$$

由此得证 (7.4.28), 从而证明了 (7.4.25).

(ii) 下面证明

$$|\boldsymbol{u}^\lambda|_{2,\Omega}+\lambda|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega}\le C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}. \tag{7.4.30}$$

上式只要对充分大 $\lambda_0 > 0$, 使得 $\lambda > \lambda_0$ 证明即可. 事实上, 对 $\lambda \leq \lambda_0$, 由椭圆问题正则性理论,

$$|\boldsymbol{u}^\lambda|_{2,\Omega} + \lambda|\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega} \leq |\boldsymbol{u}^\lambda|_{2,\Omega} + \lambda_0|\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega} \\ \leq C\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{2,\Omega} \leq C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}.$$

现在对 $\lambda > \lambda_0$(λ_0 充分大, 下面确定) 来证明 (7.4.30). 由推论 7.4.2, 存在 $\boldsymbol{\varphi} \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$, 使得

$$\text{div}\boldsymbol{\varphi} = \text{div}\boldsymbol{u}^\lambda, \tag{7.4.31}$$

且

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{2,\Omega} \leq C\|\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{1,\Omega}. \tag{7.4.32}$$

在平面弹性方程 (7.4.13) 中, 令

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}^\lambda - \boldsymbol{\varphi}, \quad p = -(1+\lambda)\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda. \tag{7.4.33}$$

则 $(\boldsymbol{u}', p) \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$, 在 Ω 中满足下述 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{u}' + \text{grad}p = \boldsymbol{f} + \Delta\boldsymbol{\varphi}, \\ \text{div}\boldsymbol{u}' = 0. \end{cases} \tag{7.4.34}$$

由正则性可见

$$\|\boldsymbol{u}'\|_{2,\Omega} + |p|_{1,\Omega} \leq \{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \|\Delta\boldsymbol{\varphi}\|_{0,\Omega}\}, \tag{7.4.35}$$

由此即得

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{2,\Omega} + (1+\lambda)|\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega} \leq C\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\varphi}\|_{2,\Omega}\}. \tag{7.4.36}$$

由 (i) 中已证明的 (7.4.25) 及 (7.4.32), 知

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{2,\Omega} \leq C\{|\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega} + \|\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda\|_{0,\Omega}\} \\ \leq C\left\{|\text{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega} + \frac{1}{\lambda}\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\right\},$$

由此, 结合 (7.4.36) 得

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{2,\Omega}+(1+\lambda)|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega}\le C\{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}+|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega}\}. \quad (7.4.37)$$

则取 $\lambda\ge 2C$, 当 $\lambda>\lambda_0$ 时, 由上式可有

$$\|\boldsymbol{u}^\lambda\|_{2,\Omega}+\lambda|\mathrm{div}\boldsymbol{u}^\lambda|_{1,\Omega}\le 2C\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega},$$

此即证明了 (7.4.30), 从而结合 (7.4.25), 定理得证.

现在回到平面弹性的纯位移边值问题 (7.4.13). 为强调对 λ 的依赖关系 ($\mu=1$), 将应力写成

$$\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{v})=\lambda\varepsilon_{kk}(\boldsymbol{v})\delta_{ij}+2\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v}), \quad (7.4.38)$$

而将双线性型写成

$$a_\lambda(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})=\int_\Omega\{2\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{v})\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{w})+\lambda\mathrm{div}\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{w}\}\mathrm{d}x. \quad (7.4.39)$$

设 $\mathcal{T}_h$ 是 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$ 的一个拟正则三角形剖分 (见图 7.4.1), V_h 为 (7.4.5). 对每个 $\boldsymbol{u}\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2$, 定义 $\boldsymbol{u}_h^\lambda\in V_h$ 是下述有限元方程的唯一解:

$$a_\lambda(\boldsymbol{u}_h^\lambda,\boldsymbol{v}_h)=\int_\Omega(-\partial_j\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}_h)\cdot v_{ih})\mathrm{d}x,\quad \boldsymbol{v}_h\in V_h. \quad (7.4.40)$$

也就是说, $\boldsymbol{u}_h^\lambda$ 是下述问题的有限元逼近:

$$\begin{cases}-\partial_j\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u})=f_i, & 在\ \Omega\ 中\\ \boldsymbol{u}=0, & 在\ \partial\Omega 上.\end{cases} \quad (7.4.41)$$

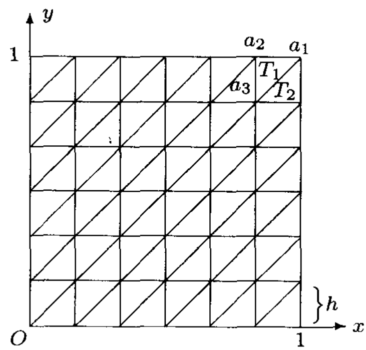

图 7.4.1

令

$$L_{\lambda,h} = \sup\left\{\frac{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda|_{1,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}} : 0 \neq \boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2\right\}. \quad (7.4.42)$$

我们要证明: 存在与 h 无关的正常数 C, 使得

$$\liminf_{\lambda\to\infty} L_{\lambda,h} \geq C. \quad (7.4.43)$$

上式意味着, 无论 h 怎样地小, 如果 λ 足够大, 则可存在 $\boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2$, 作为问题 (7.4.41) 之解, 使得其协调一次元逼近 $\boldsymbol{u}_h^\lambda$ 的相对误差下有界 (一个与 h 无关的正常数); 即对于大的 λ, 有限元方法的性能变坏. 下面来证明 (7.5.43).

首先证明

$$\{\boldsymbol{v}_h \in V_h : \mathrm{div}\boldsymbol{v}_h = 0\} = \{0\}. \quad (7.4.44)$$

考察边界单元 $T_1 = \Delta a_1a_2a_3$, 由于 $\boldsymbol{v}_h(a_1) = \boldsymbol{v}_h(a_2) = 0$, 及 $\boldsymbol{v}_h \in V_h$, 故

$$\boldsymbol{v}_h|_{T_1} = \boldsymbol{\alpha}\lambda_3^{T_1}, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)^{\mathrm{T}}.$$

其中 $\lambda_3^{T_1}$ 为在 T_1 上对应于 a_3 的重心坐标. 由此

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h|_{T_1} = \alpha_1\frac{\partial\lambda_3}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial\lambda_3}{\partial y} = -\alpha_2 h = 0,$$

即得 $\alpha_2=0$. 同样地

$$\boldsymbol{v}_h|_{T_2}=\boldsymbol{\alpha}\lambda_3^{T_2},$$

其中 $\lambda_3^{T_2}$ 为在 T_2 上对应于 a_3 的重心坐标, 经计算

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h|_{T_2}=-\alpha_1 h=0,$$

即得 $\alpha_1=0$. 由此可证在边界单元上 $\boldsymbol{v}_h=0$; 同样可证在任一单元 T 上 $\boldsymbol{v}_h|_T=0$, 从而 $\boldsymbol{v}_h=0$ 在 Ω 上. 这样 $\|\boldsymbol{v}_h\|_{1,\Omega}$ 与 $\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h\|_{0,\Omega}$ 均是 V_h 上的范数, 而 V_h 是有限维空间, 故存在 $C_1(h)>0$, 使得

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_{1,\Omega}\le C_1(h)\|\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h\|_{0,\Omega},\quad \boldsymbol{v}_h\in V_h. \tag{7.4.45}$$

现在构造 $\boldsymbol{u}\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2$, 使得

$$\frac{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda|_{1,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}}\ge C>0, \tag{7.4.46}$$

其中 C 是与 h 无关的常数, $\boldsymbol{f}$ 由 (7.4.41) 所示. 令 $\psi\in C^\infty(\bar{\Omega})$: $\mathbf{curl}\psi=0$ 在 $\partial\Omega$ 上, 且

$$\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\mathbf{curl}\psi)\|_{0,\Omega}^2=1. \tag{7.4.47}$$

事实上, 这样的 ψ 可如下构造. 首先

$$\mathbf{curl}\psi=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2},-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)=0\quad 在\partial\Omega上,$$

即 $\mathrm{grad}\psi=0$ 在 $\partial\Omega$ 上. 为此, 只要 ψ 是下述问题之解

$$\begin{cases}\Delta^2\psi=\rho, & 在\Omega中,\\ \psi=\partial_\nu\psi=0, 在\partial\Omega上,\end{cases} \tag{7.4.48}$$

其中 $\rho\in C^\infty(\bar{\Omega})$. 为使 (7.4.47) 成立, 注意到

$$\varepsilon_{11}(\mathbf{curl}\psi)=\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2},$$

$$\varepsilon_{12}(\mathbf{curl}\psi)=\varepsilon_{21}(\mathbf{curl}\psi)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\Big),$$

$$\varepsilon_{22}(\mathbf{curl}\psi)=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2},$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}\quad\|\varepsilon_{ij}(\mathbf{curl}\psi)\|_{0,\Omega}^2=&\,2\int_\Omega\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\Big)^2\mathrm{d}x\\&+\frac{1}{2}\int_\Omega\Big\{\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\Big)^2\Big\}\mathrm{d}x\quad-\int_\Omega\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{curl}\psi=0$ 在 $\partial\Omega$ 上, 由分部积分得

$$\int_\Omega\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\mathrm{d}x=\int_\Omega\Big(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\Big)^2\mathrm{d}x,$$

因此

$$\sum_{ij}\|\varepsilon_{ij}(\mathbf{curl}\psi)\|_{0,\Omega}^2=\frac{1}{2}\|\psi\|_{2,\Omega}^2.$$

从而 (7.4.47) 等价为

$$\|\psi\|_{2,\Omega}=\sqrt{2}.\tag{7.4.49}$$

因此以 $\dfrac{\sqrt{2}\psi}{\|\psi\|_{2,\Omega}}$ 代替 ψ 即可. 令 $\boldsymbol{u}=\mathbf{curl}\psi$, 则 $\boldsymbol{u}\in(H^2(\Omega)\cap H_1^0(\Omega))^2$, 且

$$\begin{cases}\mathrm{div}\boldsymbol{u}=0,\\\displaystyle\sum_{ij}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\|_{0,\Omega}^2=1,\\\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u})=2\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}).\end{cases}\tag{7.4.50}$$

由分部积分可知

$$-\int_\Omega\partial_j\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\cdot u_i\mathrm{d}x=\sum_{i,j}\|\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\|_{0,\Omega}^2=1.$$

因此, 由 (7.4.50) 第三式,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \partial_j \sigma_{ij}^{\lambda}(\boldsymbol{u}) = 2\partial_j \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) \neq 0. \tag{7.4.51}$$

由 Céa 引理

$$a_\lambda(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda)^{\frac{1}{2}} = \min_{\boldsymbol{v}_h\in V_h} a_\lambda(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h)^{\frac{1}{2}} \leq a_\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}).$$

而由 (7.4.50) 的第一式,

$$a_\lambda(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}) = 2\int_\Omega \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\cdot\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}x = 2.$$

因此, 再注意到 (7.4.50) 的第一式,

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda}\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}_h^\lambda\|_{0,\Omega} &= \sqrt{\lambda}\|\mathrm{div}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda)\|_{0,\Omega} \\ &\leq a_\lambda(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda, \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}.\end{aligned}$$

从而

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}_n^\lambda\|_{0,\Omega} = 0,$$

因此, 由 (7.4.45) 知

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|\boldsymbol{u}_h^\lambda\|_{1,\Omega} = 0. \tag{7.4.52}$$

注意 (7.4.51) 及 (7.4.52), 最后得到,

$$\begin{aligned}\liminf_{\lambda\to\infty} L_{\lambda,h} &\geq \liminf_{\lambda\to\infty} \frac{|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h^\lambda|_{1,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}} \\ &= \frac{|\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}}{\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}} > 0,\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}}$,

$$-\partial_j\sigma_{ij}^\lambda(\boldsymbol{u}) = 2\partial_j\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = f_i, \quad i = 1, 2.$$

7.4.2 无闭锁有限元方法

现在我们构造有限元空间 V_h^*, 使得

$$\|\mathrm{div}\boldsymbol{u} - \mathrm{div}\,\sqcap_h\,\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega} \leq Ch\|\mathrm{div}\boldsymbol{u}\|_{1,\Omega}, \quad \boldsymbol{u} \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2, \tag{7.4.53}$$

其中 $\sqcap_h : (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2 \to V_h^\star$ 的插值算子.

仍考察 $V_h^\star$ 为一次元空间 (即分片一次多项式空间). 令

$$\sqcap_T \boldsymbol{u} = \sqcap_h \boldsymbol{u}|_T, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h. \tag{7.4.54}$$

注意到

$$\|\mathrm{div}\boldsymbol{u} - \mathrm{div}\,\sqcap_h\,\boldsymbol{u}\|_{0,\Omega} = \sum_T \|\mathrm{div}\boldsymbol{u} - \mathrm{div}\,\sqcap_T\,\boldsymbol{u}\|_{0,T}^2, \tag{7.4.55}$$

由于 $\sqcap_T \boldsymbol{u} \in (P_1(T))^2$, 从而 $\mathrm{div}\,\sqcap_T\,\boldsymbol{u} \in P_0(T)$, 因此若有

$$\mathrm{div}\,\sqcap_T\,\boldsymbol{u} = \frac{1}{|T|}\int_T \mathrm{div}\boldsymbol{u}\mathrm{d}x, \tag{7.4.56}$$

即 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}$ 在 $P_0(T)$ 上的 L^2 投影, 则

$$\|\mathrm{div}\boldsymbol{u} - \mathrm{div}\,\sqcap_h\,\boldsymbol{u}\|_{0,T} \leq Ch_T|\mathrm{div}\boldsymbol{u}|_{1,T},$$

由此即得 (7.4.53) 成立. 因此关键在于 $V_h^\star$ 中的插值算子 $\sqcap_h$ (或 $\sqcap_T$) 能否使得 (7.4.56) 成立. 容易验证 C^0 一次空间 V_h 不能满足 (7.4.56). 而非协调一次元空间 (即 Crouzeix-Raviart 元)$V_h^\star$ 具有性质 (7.4.56). 事实上, 令

$$\sqcap_T \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\beta}_i \cdot \mu_i(x), \tag{7.4.57}$$

其中

$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1 = 1 - 2\lambda_1, \\ \mu_2 = 1 - 2\lambda_2, \\ \mu_3 = 1 - 2\lambda_3, \end{cases} \tag{7.4.58}$$

$\lambda_i, i=1,2,3$, 为在三角形单元 T 上, 对应于顶点 $a_i, i=1,2,3$, 的重心坐标 (见图 7.4.2); 则 $\mu_i, i=1,2,3$, 为对应边 l_i 的中点 $B_i, i=1,2,3$, 的 T 上一次插值基函数. 因此

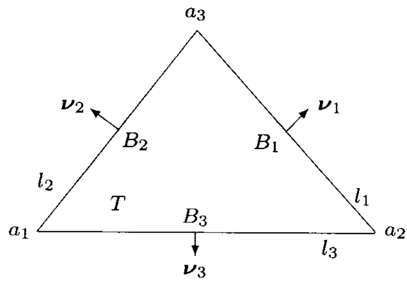

图 7.4.2

$$\operatorname{div} \sqcap_T \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{\beta}_i \cdot \operatorname{grad}\mu_i,$$

而

$$\operatorname{grad}\lambda_i = -\frac{l_i}{2|T|}\boldsymbol{\nu}_i,$$

从而

$$\operatorname{grad}\mu_i = \frac{l_i}{|T|}\boldsymbol{\nu}_i,$$

则

$$\operatorname{div} \sqcap_T \boldsymbol{u} = \frac{1}{|T|}\sum_{i=1}^{3} l_i \boldsymbol{\beta}_i \cdot \boldsymbol{\nu}_i. \tag{7.4.59}$$

注意到

$$\int_T \operatorname{div}\boldsymbol{u} \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{3} \int_{l_i} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{\nu}_i \mathrm{d}s, \tag{7.4.60}$$

因此为使 (7.5.56) 成立, 只需

$$\boldsymbol{\beta}_i = \frac{1}{l_i}\int_{l_i} \boldsymbol{u} \mathrm{d}s, \quad i=1,2,3. \tag{7.4.61}$$

当 $\boldsymbol{u} \in (P_1(T))^2$ 时, 上式可见 $\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{u}(B_i), i = 1,2,3$. 因此上述定义的 $\sqcap_h \boldsymbol{u} \in V_h^*$.

现在给出平面弹性纯位移齐次边值问题的 Crouziex-Raviart 元逼近的一致 (关于 λ) 误差估计. 首先问题 (7.4.1) 可写成

$$\begin{cases} \text{求}\boldsymbol{u} \in (H_0^1(\Omega))^2, \quad \text{使得} \\ a^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{f},\boldsymbol{v}\rangle, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \end{cases} \tag{7.4.62}$$

其中

$$a^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \mathrm{grad}\boldsymbol{u} : \mathrm{grad}\boldsymbol{v}\mathrm{d}x + (1+\lambda)\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathrm{d}x, \tag{7.4.63}$$

$$\mathrm{grad}\boldsymbol{u} : \mathrm{grad}\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{2}(\mathrm{grad}\mathrm{u}_i, \mathrm{grad}v_i), \tag{7.4.64}$$

上述问题的 C-R 元逼近为

$$\begin{cases} \text{求}\boldsymbol{u} \in \overset{\circ}{V}{}_h^{\star}, \quad \text{使得} \\ a_h^s(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) = \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x, \qquad \forall \boldsymbol{v} \in \overset{\circ}{V}{}_h^{\star}, \end{cases} \tag{7.4.65}$$

其中

$$a_h^s(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h) = \sum_T\int_T \mathrm{grad}\boldsymbol{u}_h : \boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x + (1+\lambda)\sum_T\int_T \mathrm{div}\boldsymbol{u}_h\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x, \tag{7.4.66}$$

$$\overset{\circ}{V}{}_h^{\star} = \{\boldsymbol{v}_h \in V_h : \boldsymbol{v}_h(B_i) = 0, \quad \forall B_i \in \partial\Omega_h\text{的边界节点}\}, \tag{7.4.67}$$

令

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_h = a_h^s(\boldsymbol{v}_h,\boldsymbol{v}_h)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.4.68}$$

容易证明 $a_h^s(\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$ 是 $V_h^\star$ 椭圆, 在范数 (7.4.68) 下.

定理 7.4.3 设 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}_h$ 分别为 (7.4.62) 及 (7.4.65) 之解, 则

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h \le Ch\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}, \tag{7.4.69}$$

$C = \mathrm{const} > 0$ 与 h 及 λ 无关.

证明 由非协调元的抽象误差估计

$$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h \le c_1 \inf_{\boldsymbol{v}_h\in \overset{\circ}{V}{}_h^*} \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}_h\|_h + c_2 \sup_{\boldsymbol{w}_h\in \overset{\circ}{V}{}_h^*} \frac{\left|a_h^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)-\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{w}_h \mathrm{d}x\right|}{\|\boldsymbol{w}_h\|_h}.$$

分两步估计.

(i) 由 (7.4.56), 及定理 7.4.2.

$$\begin{aligned}
\inf_{\boldsymbol{v}_h\in V_h^*} \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h &\le \|\boldsymbol{u}-\sqcap_h \boldsymbol{u}\|_h \\
&= \Big\{\sum_T \|\mathrm{grad}(\boldsymbol{u}-\sqcap_T\boldsymbol{u})\|_{0,T}^2 \\
&\quad +(1+\lambda)\sum_T \|\mathrm{div}\boldsymbol{u}-\mathrm{div}\sqcap_T\|_{0,T}^2\Big\}\frac{1}{2} \\
&\le Ch\{|\boldsymbol{u}|_{2,\Omega}^2+(1+\lambda)|\mathrm{div}\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}^2\}^{\frac{1}{2}} \\
&\le Ch\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}.
\end{aligned} \tag{7.4.70}$$

(ii) 关于非协调误差估计.

$$\begin{aligned}
E_h^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h) &= a_h^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h)-\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{w}_h\mathrm{d}x \\
&= \sum_T\int_T \mathrm{grad}\boldsymbol{u}:\mathrm{grad}\boldsymbol{w}_h\mathrm{d}x \\
&\quad +(1+\lambda)\sum_T\int_T \mathrm{div}\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{div}\boldsymbol{w}_h\mathrm{d}x-\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{w}_h\mathrm{d}x \\
&= -\sum_T\int_T \Delta u_i\cdot w_{h,i}\mathrm{d}x \\
&\quad -(1+\lambda)\sum_T\int_T \mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{w}_h\mathrm{d}x-\int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{w}_h\mathrm{d}x \\
&\quad +\sum_T\int_{\partial T}\partial_\nu u_i\cdot w_{h,i}\mathrm{d}s \\
&\quad +(1+\lambda)\sum_T\int_{\partial T}(\mathrm{div}\boldsymbol{u})(\boldsymbol{w}_h\cdot\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega}(\Delta \boldsymbol{u} + (1+\lambda)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{f})\cdot \boldsymbol{w}_h \mathrm{d}x \\
&\quad + \sum_T \int_{\partial T} \partial_\nu \boldsymbol{u}\cdot \boldsymbol{w}_h \mathrm{d}s \\
&\quad + (1+\lambda)\sum_T \int_{\partial T} (\mathrm{div}\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{w}_h\cdot\boldsymbol{\nu})\mathrm{d}s. \qquad (7.4.71)
\end{aligned}
$$

上式右端第一项为 0, 这是因为 (7.4.13). 由 7.2.1 节 C-R 元的误差估计可知,(7.4.71) 式右端第二项有下述上界估计, 并注意到定理 7.4.2,

$$
Ch\{|\boldsymbol{u}_{2,\Omega} + (1+\lambda)|\mathrm{div}\boldsymbol{u}|_{1,\Omega}\}\|\boldsymbol{w}_h\|_h \le Ch\|\boldsymbol{f}\|_{0,\Omega}\cdot\|\boldsymbol{w}_h\|_h.
$$

因此

$$
E_h^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}_h) \le Ch\|\boldsymbol{f}\|_0\cdot\|\boldsymbol{w}_h\|_h, \quad \forall \boldsymbol{w}_h \in V_h^\star. \qquad (7.4.72)
$$

这样就证明了本定理.

第 8 章　混合有限元法

有限元方法的基本思想就是将微分方程边值问题转化为相应的变分问题, 然后再利用分片多项式离散. 但是对同一微分方程边值问题, 存在着不同的变分形式. 本章的二阶椭圆问题的混合有限元方法就是基于所谓的 Hellinger-Reissner 变分原理的有限元方法. 利用混合有限元方法有很多优点, 例如在计算多孔介质流时, 通常要计算速度, 如用通常的有限元法, 只能先求出压力, 然后求导得到速度, 这样做精度将降低, 而利用混合有限元法求解, 可同时求出压力和速度, 提高了离散解的精度. 此外, 许多问题本身自然的 Galerkin 逼近就只能采用混合有限元法, 例如 Stokes 问题的有限元逼近. 混合有限元法通常涉及两个有限元逼近空间, 但是这两个空间并不可以任意选取, 通常需要满足所谓的 inf-sup 条件或 LBB 条件, 这也是混合有限元法能否成功的关键.

8.1　混合变分形式

首先考虑下列 Poisson 方程

$$
\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{上}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{上}, \end{cases} \tag{8.1.1}
$$

$\Omega \subset R^2$ 是有界多角形区域. 令

$$
\boldsymbol{p} = \nabla u.
$$

又令

$$
a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \int_\Omega \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} \mathrm{d}x,
$$

$$b(v, \boldsymbol{q}) = \int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{q} v \mathrm{d}x,$$

则由 Green 公式可知, (8.1.1) 的混合变分形式可定义为: 求 $(\boldsymbol{p}, u) \in H(\mathrm{div}) \times L^2(\Omega)$, 使

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) + b(u, \boldsymbol{q}) = 0, \forall \boldsymbol{q} \in H(\mathrm{div}), \\ b(v, \boldsymbol{p}) = -(f, v), \qquad \forall v \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{8.1.2}$$

此处空间 $H(\mathrm{div})$ 定义为

$$H(\mathrm{div}) \hat{=} \{\boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^2 | \mathrm{div}\boldsymbol{v} \in L^2(\Omega)\}.$$

对此空间若赋以范数

$$||\boldsymbol{v}||^2_{H(\mathrm{div})} = ||\boldsymbol{v}||^2_0 + ||\mathrm{div}\boldsymbol{v}||^2_0,$$

可以证明 $H(\mathrm{div})$ 构成 Hilbert 空间.

下面给出 Stokes 问题的混合变分形式. Stokes 问题可表示为:

$$\begin{cases} -\Delta \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{f}, & 在\ \Omega \subset R^2\ 上, \\ \mathrm{div}\boldsymbol{u} = 0, & 在\ \Omega 上, \\ \boldsymbol{u} = 0, & 在\ \partial\Omega 上. \end{cases} \tag{8.1.3}$$

令

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \nabla \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{v} \mathrm{d}x,$$

$$b(\boldsymbol{v}, q) = -\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{v} q \mathrm{d}x.$$

为方便起见, 本章仅考虑两维情形. 对 (8.1.3) 式利用 Green 公式可得如下混合变分形式: 求 $\boldsymbol{u} \in (H^1_0(\Omega))^2, p \in L^2_0(\Omega)$, 使得

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (f, \boldsymbol{v}), & \forall \boldsymbol{v} \in (H^1_0(\Omega))^2, \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0, & q \in L^2_0(\Omega). \end{cases} \tag{8.1.4}$$

此处 $L_0^2(\Omega)=\{v\in L^2(\Omega)|\int_\Omega v\mathrm{d}x=0\}$.

最后我们给出四阶椭圆问题的混合变分形式. 考虑如下四阶问题:

$$\begin{cases}\Delta^2 u=f, & \text{在 }\Omega\text{上},\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=0, & \text{在 }\partial\Omega\text{上},\end{cases}\tag{8.1.5}$$

此处 $\boldsymbol{n}$ 表示区域 $\Omega\subset R^2$ 的单位外法向向量, 有很多种方法把上述方程转化为低阶方程. 下面介绍最简单的 Ciarlet-Raviart 方法. 令

$$\varphi=-\Delta u,$$

上述方程转化为

$$\begin{cases}-\Delta\varphi=f,\\ \varphi+\Delta u=0,\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=0,\end{cases}$$

利用 Green 公式可知, 混合变分形式为: 求 $\{\varphi,u\}\in H^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$, 使

$$\begin{cases}(\varphi,v)-(\nabla u,\nabla v)=0, & \forall v\in H^1(\Omega),\\ (\nabla\varphi,\nabla\psi)=(f,\psi), & \forall\psi\in H_0^1(\Omega).\end{cases}\tag{8.1.6}$$

8.2 Babuska-Brezzi 理论

本节介绍由 Babuska 和 Brezzi 提出的理论, 它是 Lax-Milgram 定理及 Céa 引理的推广, 也是混合有限元方法的理论基础.

8.2.1 Babuska 理论

首先介绍由 Babuska 在 1972 年给出的一个引理, 它可以看成是 Lax-Milgram 定理的推广.

定理 8.2.1 设 U,V 是实 Hilbert 空间, $b(u,v)$ 是定义在 $U\times V$ 上的连续双线性泛函. 又设

(1)

$$|b(u,v)| \le M||u||_U||v||_V, \quad \forall u \in U, v \in V,$$

(2)

$$\sup_{v\in V}\frac{b(u,v)}{||v||_V} \ge \beta||u||_U, \quad \forall u \in U, \tag{8.2.1}$$

(3)

$$\sup_{u\in U}|b(u,v)| > 0, \quad \forall v \neq 0, \tag{8.2.2}$$

其中 M,β 为有限常数, 又设 $f \in V'$(即 V 的对偶空间), 则存在唯一的 $u^* \in U$, 使

$$b(u^*,v) = f(v), \quad \forall v \in V, \tag{8.2.3}$$

且

$$||u^*||_U \le \frac{1}{\beta}||f||_{V'}. \tag{8.2.4}$$

证明 由 (1) 可知, 对某一固定的 $u \in U, b(u,v)$ 确定了 V' 中的一个元素 l_u, 使

$$l_u(v) = b(u,v), \quad \forall v \in V,$$

且

$$||l_u||_{V'} = \sup_{v\in V}\frac{b(u,v)}{||v||_V} \le M||u||_U. \tag{8.2.5}$$

由 Riesz 表示定理可知, 存在唯一的 $X \in V$, 使

$$l_u(v) = (X,v), \quad \forall v \in V,$$

这里 X 线性依赖于 u 的选取. 记 $X = \wedge u$, $\wedge$ 是 $U \to V$ 的线性映射, 且有

$$(\wedge u, v) = l_u(v) = b(u,v), \tag{8.2.6}$$

容易验证 $\wedge : U \to V$ 是线性连续的, 事实上

$$||\wedge u||_V^2 = (\wedge u, \wedge u) = b(u, \wedge u) \le M||u||_U||\wedge v||_V,$$

故

$$\| \wedge u\|_V \leq M\|u\|_U. \tag{8.2.7}$$

以下证明 $\wedge$ 在 V 上连续可逆. 首先证明 $\wedge$ 是有下界的. 由 (8.2.6) 和 (8.2.1) 可知

$$\| \wedge u\|_V = \|l_u\|_{V'} = \sup_{v\in V} \frac{b(u,v)}{\|v\|_V} \geq \beta\|u\|_U. \tag{8.2.8}$$

其次证明 $\mathcal{R}(\wedge) = V$.

第一步: 证 $\mathcal{R}(\wedge)$ 是 V 中的闭集. 设 $\{\wedge u_n\}$ 是 $\mathcal{R}(\wedge)$ 中的 Cauchy 序列, 则由 (8.2.8) 及 $\wedge$ 的线性可得

$$\begin{aligned} 0 = &\lim_{m,n\to\infty} \| \wedge u_m - \wedge u_n\|_V = \lim_{m,n\to\infty} \| \wedge (u_m - u_n)\|_V \\ &\geq \beta \lim_{m,n\to\infty} \|u_m - u_n\|_U, \end{aligned}$$

所以 $\{u_n\}$ 是 U 中的 Cauchy 序列, 由 $\wedge$ 的连续性, 可知 $\mathcal{R}(\wedge)$ 为闭集.

第二步: 证 $\mathcal{R}(\wedge) = V$.

反证　若 $\mathcal{R}(\wedge) \neq V$, 因 $\mathcal{R}(\wedge)$ 是 V 中的闭子集, 所以总存在非零元素 $v^* \in V, v^* \in \mathcal{R}(\wedge)^\perp$ 使

$$(v, v^*)_V = 0, \quad \forall v \in \mathcal{R}(\wedge).$$

即

$$(\wedge u, v^*)_V = b(u, v^*) = 0, \quad \forall u \in U.$$

这与 (8.2.2) 矛盾, 从而

$$\mathcal{R}(\wedge) = V. \tag{8.2.9}$$

由 (8.2.8) 和 (8.2.9) 可知, $\wedge^{-1}: V \to U$ 存在且线性连续, 即

$$\| \wedge^{-1} v\|_U \leq \frac{1}{\beta}\|v\|_V \quad 或 \quad \| \wedge^{-1} v\|_{\mathcal{L}(V,U)} \leq \frac{1}{\beta}. \tag{8.2.10}$$

有了以上准备, 现在开始证明存在唯一的 u^* 使 (8.2.3) 成立. 首先证明解的存在性: 对于给定的泛函 $f \in V'$, 由 Riesz 表示定理知存在唯一的 $v^* \in V$, 使

$$f(v) = (v^*, v)_V, \quad \text{且} \quad \|f\|_{V'} = \|v^*\|_V, \tag{8.2.11}$$

从而必存在 u^* 使

$$(\wedge u^*, v)_V = (v^*, v)_V,$$

即 $u^* = \wedge^{-1} v^*$ 为 (8.2.3) 的解.

下面说明解是唯一的. 反证, 若 u^* 不唯一, 即存在 $u^0 \neq u^*$ 也是 (8.2.3) 的解, 则

$$b(u^* - u^0, v) = (\wedge(u^* - u^0), v)_V = 0, \quad \forall v \in V,$$

取 $v = \wedge(u^* - u^0)$, 故

$$\| \wedge (u^* - u^0)\|_V^2 = 0.$$

则 $\wedge u^* = \wedge u^0$, 从而 $u^* = \wedge^{-1} \wedge u^0 = u^0$, 故唯一性得证.

最后说明 u^* 关于 f 的依赖性.

$$\begin{aligned}\|u^*\|_U = \| \wedge^{-1} v^*\|_U &\le \| \wedge^{-1} \|_{\mathcal{L}(V,U)} \|v^*\|_V \\ &\le \frac{1}{\beta}\|v^*\|_V = \frac{1}{\beta}\|f\|_{V'},\end{aligned}$$

证毕.

注 8.2.1 若 $U = V$, 定理 8.2.1 即为 Lax-Milgram 定理.

下面考虑 (8.2.3) 的 Galerkin 逼近. 设 $U_h \subset U$ 和 $V_h \subset V$ 是有限维空间, 考虑下列问题: 对给定的 $f \in V'$, 求 $u_h \in U_h$, 使得

$$b(u_h, v) = f(v), \quad \forall v \in V_h. \tag{8.2.12}$$

(8.2.12) 即为 (8.2.3) 的 Galerkin 的逼近.

定理 8.2.2 假设双线性型 $b: U \times V \to \mathbf{R}$ 满足定理 8.2.1 的假设, 又选取有限维空间 U_h, V_h, 使得 (8.2.1), (8.2.2) 成立, 则

$$||u^* - u_h||_U \leq \left(1 + \frac{M}{\beta}\right) \inf_{w_h \in U_h} ||u^* - w_h||_U. \tag{8.2.13}$$

注 8.2.2 假设子空间 U_h, V_h 满足 (8.2.1) 通常也称 U_h, V_h 满足 inf-sup 条件或 LBB 条件.

注 8.2.3 若 $U = V$, 定理 8.2.2 即为 Céa 引理, 故定理 8.2.2 是 Céa 引理的推广.

定理 8.2.2 的证明 由 (8.2.3) 和 (8.2.12) 可得

$$b(u^* - u_h, v) = 0, \quad \forall v \in V_h. \tag{8.2.14}$$

设 w_h 是 U_h 中的任意元素, 则

$$b(u_h - w_h, v) = b(u^* - w_h, v), \quad \forall v \in V_h.$$

定义

$$\langle l, v \rangle \triangleq b(u^* - w_h, v),$$

则

$$||l||_{V'} \leq M||u^* - w_h||_U. \tag{8.2.15}$$

由定理 8.2.1 和 (8.2.15) 可知

$$||u_h - w_h||_U \leq \frac{1}{\beta}||l||_{V'} \leq \frac{M}{\beta}||u^* - w_h||_U, \tag{8.2.16}$$

从而由三角不等式可知 (8.2.13) 成立, 证毕.

8.2.2 inf-sup 条件

在定理 8.2.1 的假设中, 双线性形式 $b(u,v)$ 要求满足 (3), 即

$$\sup_u |b(u,v)| > 0, \quad \forall v \neq 0.$$

但在讨论混合法时, 通常 $b(u,v)$ 不满足该条件, 故定理 8.2.1 中的 $\wedge: U \to V$ 不能确定 U 与 V 之间的一个同构, 所以我们必须详细讨论 (3) 不成立时, inf-sup 条件的一些性质.

仍然设 U,V 为实 Hilbert 空间, $b(u,v)$ 为 $U\times V$ 上的有界线性泛函, 令

$$U_0=\{u\in U|b(u,v)=0,\quad \forall v\in V\}.$$

记 U_0 的正交余子空间为 $U^\perp$, 又设 U',V' 分别为 U,V 的对偶空间, 且定义 U_0 的极集

$$U^0=\{g\in U'|g(u)=0,\quad \forall u\in U_0\}.$$

仿前一节, 对于给定的 $u\in U, b(u,v)$ 确定了 V' 中的元素 l_u, 使

$$l_u(v)=b(u,v),\quad \forall v\in V.$$

令 $l_u=Bu$, 即

$$\langle Bu,v\rangle_V=b(u,v),$$

从而易知 $B:U\to V'$ 是一个有界线性算子.

同样, 对于给定的 $v\in V, b(u,v)$, 确定了 U' 中的元素 g_v, 使

$$g_v(u)=b(u,v),\quad \forall u\in U.$$

令 $g_v=B'v$, 则 $B':V\to U'$ 是 B 的对偶算子, 即

$$\langle Bu,v\rangle_V=b(u,v)=\langle u,B'v\rangle_U. \tag{8.2.17}$$

定理 8.2.3 以下三个性质是等价的.

(a) 存在常数 $\beta>0$ 使

$$\sup_{u\in U}\frac{b(u,v)}{||u||_U}\geq\beta||v||_V. \tag{8.2.18}$$

(b) 算子 B' 是从 V 到 U^0 的一个同构, 且

$$||B'v||_{U'}\geq\beta||v||_V,\quad \forall v\in V. \tag{8.2.19}$$

(c) 算子 B 是从 $U^{\perp}$ 到 V' 的一个同构

$$||Bu||_{V'} \geq \beta ||u||_U, \quad \forall u \in U. \tag{8.2.20}$$

证明 按如下关系证明

$$\begin{tikzcd}
(a) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (b) \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (c) \arrow[ul, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

图 8.2.1

(1) 首先证明 (a), (b) 等价.

对于 $\forall v \in V$,

$$||B'v||_{U'} = \sup_{u \in U} \frac{B'v(u)}{||u||_U} = \sup_{u \in U} \frac{b(u,v)}{||u||_U}, \tag{8.2.21}$$

故 (8.2.18) 和 (8.2.19) 等价. 以下证明 (8.2.18) 和 (8.2.19) 成立时, B' 是从 V 到 U^0 的一个同构.

设 B' 的值域为 $\mathcal{R}(B')$, 由 (8.2.19) 可知 B' 是从 V 到 $\mathcal{R}(B')$ 的一个一一对应, 且 B' 的逆算子连续, 所以 B' 是 V 到 $\mathcal{R}(B')$ 的一个同构, 现只需证

$$\mathcal{R}(B') = U^0. \tag{8.2.22}$$

事实上, 因 B' 是 V 到 $\mathcal{R}(B')$ 的一个同构, 故 $\mathcal{R}(B')$ 是 U' 的闭子空间, 由闭值域定理 (见文献 [66]) 知

$$\mathcal{R}(B') = (\mathrm{Ker}B)^0 = U^0,$$

从而 (8.2.22) 成立.

(2) 其次证明由 (b) 可推得 (c).

假设 (b) 成立, 则对给定的 $u \in U^{\perp}$, 定义函数 $g \in U'$ 如下

$$g(w) = (u, w), \quad \forall w \in U. \tag{8.2.23}$$

容易验证 $g \in U^0$, 又因为 B' 是 V 到 U^0 的同构, 故存在 $\lambda \in V$, 使

$$b(w, \lambda) = (w, B'\lambda) = g(w), \tag{8.2.24}$$

又由 (8.2.23) 易证 $||g||_{U'} = ||u||_U$, 从而由 (8.2.19) 可得

$$||u||_U = ||g||_{U'} = ||B'\lambda||_{U'} \geq \beta||\lambda||_V. \tag{8.2.25}$$

在 (8.2.24) 中令 $w = u$, 则有

$$\sup_{v \in V} \frac{b(u,v)}{||v||_V} \geq \frac{b(u,\lambda)}{||\lambda||_V} = \frac{(u,u)}{||\lambda||_V} \geq \beta||u||_U,$$

从而 $B : U^{\perp} \to V'$ 满足定理 8.2.1 的三个条件, 故 B 是一个同构映射.

(3) 最后证明若 (c) 成立, 则可得 (a).

因 (c) 成立, 故 $B : U^{\perp} \to V'$ 是一个同构, 对给定的 $v \in V$,

$$\begin{aligned} ||v||_V &= \sup_{g \in V'} \frac{\langle g, v\rangle}{||g||_{V'}} = \sup_{u \in U^{\perp}} \frac{\langle Bu, v\rangle}{||Bu||_{V'}} \\ &= \sup_{u \in U^{\perp}} \frac{b(u,v)}{||Bu||_{V'}} \leq \sup_{u \in U^{\perp}} \frac{b(u,v)}{\beta||u||_U} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{u \in U} \frac{b(u,v)}{||u||_U}, \end{aligned}$$

从而 (a) 成立, 证毕.

8.2.3 Brezzi 理论

设 $a(u_1, u_2)$ 是 $U \times U$ 上的双线性泛函, 且

$$|a(u_1, u_2)| \leq M_1||u_1||_U||u_2||_U.$$

$b(u, v)$ 是 $U \times V$ 上的双线性泛函, 且

$$|b(u,v)| \leq M_2||u||_U||v||_V.$$

设 $f \in U', g \in V'$, 考虑下列问题: 求 $u \in U, v \in V$ 使

$$\begin{cases} a(u,w)+b(w,v)=f(w), & \forall w \in U, \\ b(u,z)=g(z), & \forall z \in V. \end{cases} \tag{8.2.26}$$

又设 U_h, V_h 分别是 U 和 V 有限维子空间, 考察 (8.2.26) 的近似解, 即求 $u_h \in U_h, v_h \in V_h$, 使

$$\begin{cases} a(u_h,w)+b(w,v_h)=f(w), & \forall w \in U_h, \\ b(u_h,z)=g(z), & \forall z \in V_h. \end{cases} \tag{8.2.27}$$

定理 8.2.4(Brezzi) 设

(1) 存在 $\alpha>0$, 使得

$$a(u,u) \geq \alpha||u||_U^2, \quad \forall u \in U_0. \tag{8.2.28}$$

(2) 存在常数 $\beta>0$, 使

$$\sup_{u\in U}\frac{b(u,v)}{||u||_U} \geq \beta||v||_V, \quad \forall v \in V,$$

则问题 (8.2.26) 存在唯一解 u, v, 且满足

$$||u||_U+||v||_V \leq C\{||f||_{U'}+||g||_{V'}\}, \tag{8.2.29}$$

其中 C 只依赖于 α, β 和 M_1.

此外, 又设

(3) 存在常数 $\tilde{\alpha}>0$, 使

$$a(u,u) \geq \tilde{\alpha}||u||_U^2, \quad \forall u \in U_{h0}, \tag{8.2.30}$$

(4) 存在常数 $\tilde{\beta}>0$, 使

$$\sup_{u_h\in U_h}\frac{b(u_h,v_h)}{||u_h||_U} \geq \tilde{\beta}||v_h||_V, \quad \forall v_h \in V_h, \tag{8.2.31}$$

则问题 (8.2.27) 的解满足如下估计

$$\|u-u_h\|_U+\|v-v_h\|_V \leq C\{\inf_{w\in U_h}\|u-w\|_U+\inf_{z\in V_h}\|v-z\|_V\}, \tag{8.2.32}$$

其中 $U_{h0}=\{u_h\in U_h|b(u_h,v_h)=0,\forall v_h\in V_h\}$, 且 C 只依赖于 $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ 与 M_1,M_2 的常数.

证明 记

$$U(g)=\{u\in U|b(u,z)=g(z),\quad \forall z\in V\},$$

$$U_h(g)=\{u_h\in U_h|b(u,z)=g(z),\quad \forall z\in V_h\},$$

则 $U_0=U(0),U_{h0}=U_h(0)$.

第一步: 证明 (8.2.26) 解的存在唯一性及估计式 (8.2.29).

若 $\{u,v\}$ 满足 (8.2.26), 则 (8.2.26) 可表示成: 求 $u\in U(g)$, 满足

$$a(u,w)=f(w),\quad \forall w\in U_0. \tag{8.2.33}$$

由定理 8.2.3(c) 可知, 存在唯一的 $u_0\in U^{\perp}$, 使

$$Bu_0=g, 且 \quad \|u_0\|_U\leq\frac{1}{\beta}\|g\|_{V'}.$$

于是问题 (8.2.33) 等价于: 求 $w=u-u_0\in U_0$, 使

$$a(w,v)=f(v)-a(u_0,v),\quad \forall v\in U_0.$$

故由 Lax-Milgram 定理可知, 存在唯一的 $u\in U(g)$, 且有

$$\|u\|_U\leq C(\|f\|_{U'}+\|g\|_{V'}), \tag{8.2.34}$$

其中 C 只依赖于 β,α 及 M_1. 又令 $\bar{g}(w)=f(w)-a(u,w)$, 易知 $\bar{g}\in U^0$, 由定理 8.2.3(b) 可知, 必存在唯一的 $v\in V$, 使

$$B'v=\bar{g},$$

即存在 $v \in V$, 使

$$b(w,v) = f(w) - a(u,w), \quad \forall w \in U, \tag{8.2.35}$$

且

$$\|v\|_V \le \frac{1}{\beta}\|\bar{g}\|_{U'} \le \frac{1}{\beta}(\|f\|_{U'} + M_1\|u\|_U),$$

将 (8.2.34) 代入上式可得

$$\|u\|_U + \|v\|_V \le C\{\|f\|_{U'} + \|g\|_{V'}\}.$$

第二步: 证明 (8.2.32) 式.

令 $B((u,v),(w,z)) = a(u,w) + b(w,v) + b(u,z)$, 容易验证它是定义在空间 $(U \times V) \times (U \times V)$ 上的有界线性泛函, 则问题 (8.2.26) 和 (8.2.27) 等价于: 求 $(u,v) \in U \times V$, 使

$$B((u,v),(w,z)) = f(w) + g(z), \quad \forall (w,z) \in U \times V,$$

和求 $(u_h, v_h) \in U_h \times V_h$, 使

$$B((u_h,v_h),(w,z)) = f(w) + g(z), \quad \forall (w,z) \in U_h \times V_h.$$

类似于第一步可知它们的解是存在唯一的, 利用定理 8.2.2 的证明思想类似可证

$$\|u - u_h\|_U + \|v - v_h\|_V \le C(\inf_{w \in U_h} \|u - w\|_U + \inf_{z \in w_h} \|u - z\|_V).$$

8.2.4 Fortin 准则

对混合有限元方法而言, 构造有限元空间的关键就是使之满足 LBB 条件, 但验证起来很困难.Fortin 在 1977 年提出另外一个相对简单而又实用的判别准则, 称之为 Fortin 准则.

定理 8.2.5(Fortin 准则) 假设双线性形式 $b: U \times V \to \mathbf{R}$ 满足 inf-sup 条件, 对混合有限元空间 U_h, V_h 存在一个有界线性算子 $\pi_h: U \to U_h$ 使得

(1) $$b(u-\pi_h u, v)=0, \quad \forall v\in V_h,$$
(2) $$||\pi_h v||_U \le C||v||_U, \quad \forall v\in U,$$
此处常数 C 与 h 无关, 则有限元空间 U_h, V_h 满足离散 LBB 条件.

证明 由定理的假设可知

$$\begin{aligned}\beta||v_h||_V &\le \sup_{u\in U}\frac{b(u,v_h)}{||u||_U}=\sup_{u\in U}\frac{b(\pi_h u,v_h)}{||u||_U}\\ &\le C\sup_{u\in U}\frac{b(\pi_h u,v_h)}{||\pi_h u||_U}\le C\sup_{u\in U_h}\frac{b(u_h,v_h)}{||u_h||_U},\end{aligned}$$

证毕.

8.3 二阶椭圆问题的混合有限元方法

8.3.1 混合变分形式解的存在唯一性

考察 8.1 节中混合变分模型 (8.1.2). 令

$$\begin{aligned}U_0&=\left\{\boldsymbol{q}\in H(\mathrm{div})|\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{q}v\mathrm{d}x=0,\quad \forall v\in L^2(\Omega)\right\}\\ &=\{\boldsymbol{q}\in H(\mathrm{div})|\mathrm{div}\boldsymbol{q}=0\},\end{aligned}$$

从而对 $\forall \boldsymbol{q}\in U_0$,

$$a(\boldsymbol{q},\boldsymbol{q})=||\boldsymbol{q}||_0^2=||\boldsymbol{q}||_0^2+||\mathrm{div}\boldsymbol{q}||_0^2=||\boldsymbol{q}||_{H(\mathrm{div})}^2, \tag{8.3.1}$$

故 Brezzi 定理中条件 (1) 成立. 下面验证 Brezzi 定理的条件 (2) 即 inf-sup 条件. 事实上, 对 $\forall v\in L^2(\Omega)$, 必存在 $w\in C_0^\infty(\Omega)$, 使

$$||v-w||_0\le\frac{1}{2}||v||_0. \tag{8.3.2}$$

置 $\xi=\inf\{x_1|x\in\Omega\}$, 且 $\tau_1(x)=\displaystyle\int_\xi^{x_1} w(t,x_2)\mathrm{d}t,\quad \tau_2(x)=0$. 显然此时有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\tau}=\frac{\partial\tau_1}{\partial x_1}=w, \tag{8.3.3}$$

此处 $\boldsymbol{\tau}=(\tau_1,\tau_2)^{\mathrm{T}}$. 此外容易验证 (习题)

$$||\boldsymbol{\tau}||_0 \le C||w||_0, \tag{8.3.4}$$

从而由 (8.3.2)~(8.3.4) 可知

$$\frac{b(\boldsymbol{\tau},v)}{||\boldsymbol{\tau}||_{H(\mathrm{div})}} \ge \frac{(w,v)}{(1+C)||w||_0} \ge \frac{1}{2(1+C)}||v||_0, \tag{8.3.5}$$

故定理 8.2.4 中的条件 (2) 成立, 从而混合变分问题 (8.1.2) 的解存在唯一.

8.3.2 混合有限元离散

令 $Q_h \subset H(\mathrm{div}), V_h \subset L^2(\Omega)$ 是相应的混合有限元空间, 则 (8.1.2) 的混合有限元离散为: 求 $(\boldsymbol{p}_h,u_h)\in Q_h\times V_h$, 使

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{p}_h\cdot\boldsymbol{q}_h\mathrm{d}x+\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{q}_h u_h\mathrm{d}x=0,\ \forall \boldsymbol{q}_h\in Q_h, \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{p}_h v_h\mathrm{d}x=-\int_\Omega f v_h\mathrm{d}x, \qquad \forall v_h\in V_h. \end{cases} \tag{8.3.6}$$

定理 8.3.1 设

$$\begin{cases} \text{若}\boldsymbol{q}_h\in Q_h, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{q}_h\subset V_h, \qquad \text{且} \\ \displaystyle\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{q}_h v_h\mathrm{d}x=0, \quad \forall v_h\in V_h, \end{cases}$$

则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{q}_h=0. \tag{8.3.7}$$

又存在 $\alpha>0$(与 h 无关), 使

$$\sup_{\boldsymbol{q}_h\in Q_h}\frac{\int_\Omega \mathrm{div}\boldsymbol{q}_h v_h\mathrm{d}x}{||\boldsymbol{q}_h||_{H(\mathrm{div})}} \ge \alpha||v_h||_0, \tag{8.3.8}$$

则问题 (8.3.6) 存在唯一解 $(\boldsymbol{p}_h, u_h) \in Q_h \times V_h$, 且存在 C (与 h 无关), 使

$$\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}_h\|_{H(\mathrm{div})}+\|u-u_h\|_0 \leq C(\inf_{\boldsymbol{q}_h \in Q_h}\|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}_h\|_{H(\mathrm{div})}+\inf_{v_h \in V_h}\|u-u_h\|_0)$$

证明 只需验证 Brezzi 定理中的条件 (3), 即存在 $\tilde{\alpha}$, 使

$$a(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{q}_h) \geq \tilde{\alpha}\|q_h\|^2_{H(\mathrm{div})}, \quad \forall \boldsymbol{q}_h \in U_{h0},$$

此处

$$U_{h0} = \{\boldsymbol{q}_h \in Q_h | b(\boldsymbol{q}_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h\},$$

由条件 (8.3.7), $\boldsymbol{q}_h \in U_{h0}$, 即有 $\mathrm{div}\boldsymbol{q}_h = 0$, 所以

$$a(\boldsymbol{q}_h, \boldsymbol{q}_h) = \|\boldsymbol{q}_h\|_0^2 + \|\mathrm{div}\boldsymbol{q}_h\|_0^2 = \|\boldsymbol{q}_h\|^2_{H(\mathrm{div})},$$

故 Brezzi 定理的 (3) 成立, 由此定理得证.

下面介绍有限维空间 Q_h 和 V_h 的构造, Q_h 和 V_h 的构造要求满足

i) 上述定理中的条件 (8.3.7) 和 (8.3.8).

ii) 具有较好的逼近性质.

由 Raviart 和 Thomas 在 1977 年构造的元 (简称 RT 元) 就满足上述两个条件. 下面简单介绍该元.

仍设 $\Omega \subset R^2$ 是有界多角形域, $\mathcal{T}_h$ 是 Ω 的正则三角形剖分, 令

$$Q_h \triangleq \left\{\boldsymbol{q}_h \in L_2(\Omega)^2 \big| \boldsymbol{q}_h\big|_K = \begin{pmatrix} a_K \\ b_K \end{pmatrix} + c_K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\right.$$

$$\left. K \in \mathcal{T}_h, a_K, b_K, c_K \in R, \boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}\text{在单元的相邻边界处连续}\right\},$$

$$V_h \triangleq \{v \in L_2(\Omega) | v|_K\text{为一常数}, K \in \mathcal{T}_h\},$$

此处 $\boldsymbol{n}$ 表示单元 K 边界上的单位外法向向量.

由于 $\boldsymbol{q}_h \cdot \boldsymbol{n}$ 在单元的相邻边界处连续, 故不难验证 $\boldsymbol{q}_h \in H(\mathrm{div})$ 显然上述混合有限元空间 $\{Q_h, V_h\}$ 满足定理 8.3.1 中的 (8.3.7). 可以证明此混合有限元空间也满足 (8.3.8), 即离散的 LBB 条件, 但证明相对比较复杂, 可见文献 [20], 本书从略.

注 8.3.1 除了 RT 元, 由 Brezzi, Douglas, Marini 在 1985 年提出的 BDM 元也经常用来离散 $H(\mathrm{div})$ 空间, 详见文献 [20].

8.4 Stokes 问题的混合有限元方法

8.4.1 混合变分形式的存在唯一性

仍设 Ω 是 R^2 中的凸多角形区域, 令

$$U = H_0^1(\Omega)^2,$$

$$V = L_0^2(\Omega) \triangleq \left\{ q \in L_2(\Omega) | \int_\Omega q \mathrm{d}x = 0 \right\}.$$

考察混合变分形式 (8.1.4), 即: 求 $(\boldsymbol{u}, p) \in U \times V$, 使

$$\begin{cases} a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(\boldsymbol{v}, p) = (f, \boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{v} \in U, \\ b(\boldsymbol{u}, q) = 0, \qquad\qquad\qquad \forall q \in V. \end{cases} \tag{8.4.1}$$

为了应用 Brezzi 定理, 令

$$U_0 = \{\boldsymbol{v} \in V | (\mathrm{div}\boldsymbol{v}, q) = 0, \forall q \in L^2(\Omega)\}. \tag{8.4.2}$$

由 Poincaré 不等式可知, $|\boldsymbol{v}|_1 = ||\nabla \boldsymbol{v}||_0 = a(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ 是 U 上的模, 所以双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 不仅在空间 U_0 上满足 Brezzi 定理中的条件中的条件 (1), 而且在整个空间 U 上也满足 (1), 为了说明 (8.4.1) 的存在唯一性, 由 Brezzi 定理可知, 还必须证明 inf-sup 条件. 首先我们介绍下列引理, 它的证明可参见 Girault, Raviart 的书 [33].

引理 8.4.1 令

$$U^\perp = \{u \in U | (\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{v} \in U_0\}, \tag{8.4.3}$$

则算子 div 是 $U^\perp$ 到 $L_0^2(\Omega)$ 的同构, 且有对 $\forall q\in L_0^2(\Omega)$, 存在 $\boldsymbol{v}\in U^\perp$ 使

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=q,\quad 且\quad |\boldsymbol{v}|_1\le C_0||q||_0. \tag{8.4.4}$$

基于上述引理, 可得如下定理.

定理 8.4.1 混合变分问题 (8.4.1) 存在唯一解.

证明 由 Brezzi 定理可知, 仅需证明条件 (2), 对 $\forall q\in L_0^2(\Omega)$, 由引理 8.4.1 可知存在 $\boldsymbol{v}\in U^\perp$ 使

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=q\quad 且\quad |\boldsymbol{v}|_1\le C_0||q||_0,$$

由此即得

$$\sup_{\boldsymbol{u}\in U}\frac{b(\boldsymbol{u},q)}{|\boldsymbol{u}|_U}\ge\frac{(\mathrm{div}\boldsymbol{v},q)}{|\boldsymbol{v}|_1}=\frac{||q||_0^2}{|\boldsymbol{v}|_1}\ge\frac{1}{C_0}||q||_0, \tag{8.4.5}$$

从而证式成立.

定理 8.4.2(正则性)[33] 设 $\Omega\subset R^2$ 是有界、单连通区域, $\partial\Omega\in C^2, \boldsymbol{f}\in(L_2(\Omega))^2$, 则存在唯一的 $\{\boldsymbol{u},p\}\in(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))^2\times L_0^2(\Omega)$ 使

$$||\boldsymbol{u}||_2+||p||_1\le C||\boldsymbol{f}||_0. \tag{8.4.6}$$

注 8.4.1 若 Ω 是凸多角形区域, 定理 8.4.2 仍然成立 [55].

8.4.2 混合有限元离散

在研究混合有限元离散 Stokes 问题时, 由 Brezzi 定理可知, 关键是构造的有限元空间 U_h 和 V_h 必须满足离散 LBB 条件. 下面我们将给出几类混合有限元空间, 并证明它们满足 LBB 条件.

(i) Mini 元

下面介绍由 Arnold, Brezzi 和 Fortin 在 1994 年提出的所谓 Mini 元. 设

$$S_h=\{v_h\in C(\bar\Omega)|v_h|_K\in P_1, K\in\mathcal{T}_h\},\quad S_h^0=S_h\cap H_0^1(\Omega).$$

又令 λ_1, λ_2 和 λ_3 是单元 K 的面积坐标, 设

$$b(x) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3,$$

易知 $b(x)$ 在三角形 K 的每条边上的值为 0, 置

$$U_h = (S_h^0 \oplus B_3)^2, \quad V_h = S_h \cap L_0^2(\Omega), \tag{8.4.7}$$

此处

$$B_3 = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) | v|_K \in \mathrm{Span}\{b(x)\}, K \in \mathcal{T}_h\}.$$

定理 8.4.3 Mini 元满足 LBB 条件.

证明 我们将应用定理 8.2.5, 即 Fortin 准则来证明 Mini 元满足 LBB 条件, 设 $\pi_h^0 : H_0^1(\Omega) \to S_h^0$ 是通常的 Clemént 插值, 则有

$$||v - \pi_h^0 v||_0 \le Ch|v|_1, \tag{8.4.8}$$

$$|\pi_h^0 v|_1 \le C|v|_1. \tag{8.4.9}$$

此外, 如下定义线性映射 $\pi_h^1 : L^2(\Omega) \to B_3$:

$$\int_K (\pi_h^1 v - v) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{8.4.10}$$

容易验证

$$||\pi_h^1 v||_0 \le C||v||_0, \quad \forall v \in L^2(\Omega). \tag{8.4.11}$$

置

$$\pi_h v = \pi_h^0 v + \pi_h^1 (v - \pi_h^0 v), \tag{8.4.12}$$

首先由 (8.4.10) 可得

$$\int_K (\pi_h v - v) \mathrm{d}x = \int_K (\pi_h^1 - I)(v - \pi_h^0 v) \mathrm{d}x = 0, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \tag{8.4.13}$$

上述 π_h 当然可以类似地定义在 $(H_0^1(\Omega))^2$ 空间上, 此时每个分量只须按 (8.4.12) 定义. 又因为 $q_h \in S_h$, 利用 Green 公式, 则由 (8.4.13)

可得

$$
\begin{aligned}
b(\boldsymbol{v}-\pi_h\boldsymbol{v},q_h) &= -\int_\Omega \operatorname{div}(\boldsymbol{v}-\pi_h\boldsymbol{v})q_h\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\partial\Omega}(\boldsymbol{v}-\pi_h\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}q_h\mathrm{d}s+\int_\Omega(\boldsymbol{v}-\pi_h\boldsymbol{v})\cdot\nabla q_h\mathrm{d}x \\
&= 0. \qquad (8.4.14)
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
|\pi_h\boldsymbol{v}|_1 &\le |\pi_h^0\boldsymbol{v}|_1+|\pi_h^1(\boldsymbol{v}-\pi_h^0\boldsymbol{v})|_1 \\
&\le |\pi_h^0\boldsymbol{v}|_1+Ch^{-1}\|\pi_h^1(\boldsymbol{v}-\pi_h^0\boldsymbol{v})\|_0 \\
&\le C|\boldsymbol{v}|_1+Ch^{-1}\|\boldsymbol{v}-\pi_h^0\boldsymbol{v}\|_0 \\
&\le C|\boldsymbol{v}|_1, \qquad (8.4.15)
\end{aligned}
$$

从而 Fortin 准则成立, 故 Mini 元满足离散 LBB 条件.

基于上述定理, 由 Brezzi 定理可知

$$
||\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h||_1+||p-p_h||_0\le Ch(||u||_2+||p||_1).
$$

此处 $\{\boldsymbol{u},p\}$ 是 (8.4.1) 的解, 而 $\{\boldsymbol{u}_h,p_h\}$ 是混合有限元的解.

(ii) P_2-P_0 元

定义

$$
S_h=\{v_h\in C(\bar\Omega)|v_h|_K\in P_2,\quad K\in\mathcal{T}_h\},
$$

$$
Q_h=\{v_h\in L^2(\Omega)|v_h|_K\in P_0,\quad K\in\mathcal{T}_h\}.
$$

置

$$
U_h=(S_h\cap H_0^1(\Omega))^2,\quad V_h=Q_h\cap L_0^2(\Omega). \qquad (8.4.16)
$$

则有下述定理.

定理 8.4.4 如上定义的混合有限元空间 $\{U_h,V_h\}$ 满足离散 LBB 条件.

证明 类似于定理 8.4.3, 定义 $\pi_h^0 : H_0^1(\Omega) \to S_h \cap H_0^1(\Omega)$ 为二次 Clemént 插值 (或 L^2 投影), 则同样有

$$||v - \pi_h^0 v||_0 \leq Ch|v|_1, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{8.4.17}$$

$$|\pi_h^0 v|_1 \leq C|v|_1, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{8.4.18}$$

此外又定义算子 $\pi_h^2 : H_0^1(\Omega) \to S_h \cap H_0^1(\Omega)$ 如下:

$$\begin{cases} \pi_h^2 v(p_i) = 0, & p_i\text{是}K\text{的顶点}(i = 1, 2, 3), \\ \displaystyle\int_{e_i} \pi_h^2 v \mathrm{d}s = \int_{e_i} v \mathrm{d}s, & e_i\text{是}K\text{的边}(i = 1, 2, 3). \end{cases} \tag{8.4.19}$$

可以验证 (习题)

$$||\pi_h^2 v||_{0,K} \leq C(||v||_{0,K} + h_k|v|_{1,K}). \tag{8.4.20}$$

有了以上准备, 下面来证明 $P_2 - P_1$ 元满足 Fortin 准则, 类似于定理 8.4.3, π_h^0, π_h^2 也可以定义在空间 $(H_0^1(\Omega))^2$ 上, 置

$$\pi_h \boldsymbol{v} = \pi_h^0 \boldsymbol{v} + \pi_h^2(\boldsymbol{v} - \pi_h^0 \boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in (H_0^1(\Omega))^2.$$

因 q_h 在 K 上是常数, 故

$$\int_K \mathrm{div}(\boldsymbol{v} - \pi_h^2 \boldsymbol{v}) q_h \mathrm{d}x = \int_{\partial K} (\boldsymbol{v} - \pi_h^2 \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} q_h \mathrm{d}s = 0. \tag{8.4.21}$$

又

$$\boldsymbol{v} - \pi_h \boldsymbol{v} = (\pi_h^2 - I)(\boldsymbol{v} - \pi_h^0 \boldsymbol{v}),$$

故利用 (8.4.21) 可知

$$b(\boldsymbol{v} - \pi_h \boldsymbol{v}, q_h) = -\sum_K \int_K \mathrm{div}(\boldsymbol{v} - \pi_h \boldsymbol{v}) q_h \mathrm{d}x = 0.$$

另一方面

$$\begin{aligned} |\pi_h \boldsymbol{v}|_1^2 &\leq 2|\pi_h^0 \boldsymbol{v}|_1^2 + 2|\pi_h^2(\boldsymbol{v} - \pi_h^0 \boldsymbol{v})|_1^2 \\ &\leq C|\boldsymbol{v}|_1^2 + Ch^{-2}\|\pi_h^2(\boldsymbol{v} - \pi_h^0 \boldsymbol{v})\|_0^2 \\ &\leq C|\boldsymbol{v}|_1^2 + Ch^{-2}(\|\boldsymbol{v} - \pi_h^0 \boldsymbol{v}\|_0^2 + h^2|\boldsymbol{v} - \pi_h^0 \boldsymbol{v}|_1^2) \\ &\leq C|\boldsymbol{v}|_1^2, \end{aligned}$$

从而 Fortin 准则成立, 即 P_2-P_0 元满足离散 LBB 条件.

8.4.3 非协调混合有限元离散

以上讨论的空间均要求 $U_h\subset U, V_h\subset V$, 然后应用 Brezzi 定理中的 (8.2.32) 可得相应的误差估计. 但由上节可以看出, 若速度空间 U_h 采用协调有限元, 多项式空间的阶数均超过 1, 才能保证 LBB 条件成立. 本节将提出基于非协调元离散的混合有限元方法, 此时, 空间 U_h 为分片线性多项式. 此外, 从下面的证明可看出, 采用非协调元,LBB 条件非常容易满足. 令

$$\begin{aligned}S_h=\{v_h\in L^2(\Omega)|v_h|_K\in P_1,v_h\text{在每个单元}K\\ \text{边的中点处连续, 且}v_h(m)=0,\text{若}m\in\partial\Omega\},\\ Q_h=\{q_h\in L^2(\Omega)|\quad q_h|_K\in P_0,K\in\mathcal{T}_h\},\end{aligned}$$

置

$$U_h=(S_h)^2,\quad V_h=Q_h\cap L_0^2(\Omega).\tag{8.4.22}$$

定义

$$\begin{aligned}a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)&=\sum_K\int_K\nabla\boldsymbol{u}_h\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x,\quad\forall\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h\in U_h,\\ b_h(\boldsymbol{v}_h,q)&=-\sum_K\int_K\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h q_h\mathrm{d}x,\quad\forall\boldsymbol{v}_h\in U_h,q_h\in V_h.\end{aligned}$$

则 (8.4.1) 式的非协调混合有限元离散格式为: 求 $\{\boldsymbol{u}_h,p_h\}\in U_h\times V_h$, 使

$$\begin{cases}a_h(\boldsymbol{u}_h,\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{v}_h,p_h)=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h),\forall\boldsymbol{v}_h\in U_h,\\ b_h(\boldsymbol{u}_h,q_h)=0,\qquad\qquad\forall q_h\in V_h.\end{cases}\tag{8.4.23}$$

令

$$\|\boldsymbol{v}_h\|_h^2=\sum_K\int_K\nabla\boldsymbol{v}_h\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}x,\quad\forall\boldsymbol{v}_h\in U_h,$$

易知 $||\cdot||_h$ 是空间 U_h 上的模.

定理 8.4.5 按 (8.4.22) 定义的混合有限元空间满足 LBB 条件.

证明 定义算子 $\pi_h : H_0^1(\Omega) \to S_h$ 如下:

$$(\pi_h v)(m_i) = \frac{1}{|e_i|}\int_{e_i} v\mathrm{d}s, \tag{8.4.24}$$

此处 $e_i(i=1,2,3)$ 是单元 K 的边, m_i 是 e_i 的中点.

容易验证 (习题)

$$||\pi_h v||_h \leq C|v|_1, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{8.4.25}$$

类似地在空间 $(H_0^1(\Omega))^2$ 上也可相应地构造 π_h, 此时 (8.4.25) 仍然成立.

又对 $\forall \boldsymbol{v} \in U_h, q_h \in V_h$, 有

$$\begin{aligned} b_h(\boldsymbol{v} - \pi_h \boldsymbol{v}, q_h) &= -\sum_K \int_K \operatorname{div}(\boldsymbol{v} - \pi_h \boldsymbol{v}) q_h \mathrm{d}x \\ &= -\sum_K \int_{\partial K} (\boldsymbol{v} - \pi_h \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} q_h \mathrm{d}s \\ &= 0, \end{aligned}$$

故由 Fortin 准则可知 LBB 条件成立.

定理 8.4.6 设 $\{\boldsymbol{u}, p\}$ 和 $\{\boldsymbol{u}_h, p_h\}$ 分别是方程 (8.4.1) 和 (8.4.23) 的解, 则

$$||\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h||_h + ||p - p_h||_0 \leq Ch(||\boldsymbol{u}||_2 + ||p||_1).$$

证明 由于此时 $U_h \not\subset U$, 故不能直接应用 Brezzi 定理 (8.2.32) 式估计. 经过一些简单计算可知

$$\begin{cases} a_h(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) + b_h(\boldsymbol{v}_h, p - p_h) = E_h(\boldsymbol{u}, p, \boldsymbol{v}_h), \\ b(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h, q_h) = 0. \end{cases} \tag{8.4.26}$$

此处

$$\begin{aligned}E_h(\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_h) &= a_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{v}_h,p)-(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}_h)\\ &=\sum_K\int_K(\nabla\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{v}_h-\mathrm{div}\boldsymbol{v}_h p-\boldsymbol{f}\boldsymbol{v}_h)\mathrm{d}x\\ &=\sum_K\int_{\partial K}\left(\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial n}-p\boldsymbol{n}\right)\cdot\boldsymbol{v}_h\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

由第 5 章的结论可知

$$|E_h(\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_l)|\le Ch(\|\boldsymbol{u}\|_2+\|p\|_1)\|\boldsymbol{v}_h\|_h,\quad\forall\boldsymbol{v}_h\in U_h.\qquad(8.4.27)$$

对 $\forall\tilde{\boldsymbol{v}}_h\in U_h,\tilde{p}_h\in V_h$ 由 (8.4.26) 可得

$$\begin{cases}\quad a_h(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{v}_h,p_h-\tilde{p}_h)\\ =a_h(\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{v}}_h,\boldsymbol{v}_h)+b_h(\boldsymbol{v}_h,p-\tilde{p}_h)-E_h(\boldsymbol{u},p,\boldsymbol{v}_h),\ \forall\boldsymbol{v}_h\in U_h,\\ b(\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{v}}_h,q_h)=b(\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{v}}_h,q_h),\qquad\qquad\qquad\qquad\forall q_h\in V_h.\end{cases}$$

则利用 Brezzi 定理类似的证明思想可得

$$\|\boldsymbol{u}_h-\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_h+\|p_h-\tilde{p}_h\|_0\le C(\|\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_h+\|p-\tilde{p}_h\|_0)+Ch(\|\boldsymbol{u}\|_2+\|p\|_1),$$

上式证明中我们利用了 (8.4.27).

最后由三角不等式, 逼近性及上式可得

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h+\|p-p_h\|_0\\ \le&\|\boldsymbol{u}-\tilde{\boldsymbol{v}}_h\|_h+\|\tilde{\boldsymbol{v}}_h-\boldsymbol{u}_h\|_h+\|p-\tilde{p}_h\|_0+\|\tilde{p}_h-p_h\|_0\\ \le& Ch(\|\boldsymbol{u}\|_2+\|p\|_1).\end{aligned}$$

注 8.4.2 其他非协调混合有限元方法见文献 [62].

第 9 章 多重网格法

近年来，多重网格法已成为求解大规模科学工程计算问题最有效的方法之一. 该法是由前苏联计算数学家 Fedorenko 在 1961 年基于差分法提出的，当时并没有引起很大的注意，直到 20 世纪 70 年代中期，多重网格法才受到普遍的重视，被认为是一种行之有效的数值分析方法. 这很大程度上要归功于欧美计算数学家的努力，他们在实际计算中首先发现了多重网格法完全优于其他的迭代法.20 世纪 80 年代以后，世界各国的计算数学家在这方面投入大量的人力、物力，使得这一方法在理论研究中取得了很多重要成果，并在实际应用中也显示了强大的生命力.

9.1 多重网格法的思想

9.1.1 刚度矩阵的条件数

考虑如下的 Poisson 方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{上}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{上}, \end{cases} \tag{9.1.1}$$

此处 Ω 是 R^2 中的有界凸多角形区域，$\partial\Omega$ 表示区域 Ω 的边界.

上述方程的变分形式为：求 $u \in H_0^1(\Omega)$ 使得

$$a(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{9.1.2}$$

此处

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x,$$

$$(f, v) = \int_\Omega f v \mathrm{d}x.$$

已知上述方程的解满足下列正则性假设:

$$\|u\|_2 \le C\|f\|_0. \tag{9.1.3}$$

设 V_h 即为通常的连续分片线性有限元空间 (详见第 2 章), 且 $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. 则方程 (9.1.2) 的有限元逼近为: 求 $u_h \in V_h$, 使得

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \tag{9.1.4}$$

设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_J}$ 是有限元空间 V_h 的节点基, 有限元解 u_h 可表示为

$$u_h = \sum_{i=1}^{N_J} x_i \varphi_i,$$

则对 $j = 1, \cdots, N_J$, 有

$$\sum_{i=1}^{N_J} x_i a(\varphi_i, \varphi_j) = (f, \varphi_j).$$

令矩阵 $A \triangleq (a(\varphi_i, \varphi_j))_{N_J \times N_J}$, 向量 $\boldsymbol{X} = (x_1, \cdots, x_{N_J})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{F} = ((f, \varphi_1), \cdots, (f, \varphi_{N_J}))^{\mathrm{T}}$, 则上述方程组可表示为

$$A\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}. \tag{9.1.5}$$

下面我们将证明刚度矩阵 A 的条件数是 $O(h^{-2})$, 即

$$\mathrm{cond}(A) = O(h^{-2}).$$

首先介绍一个有用的引理. 对任意的 $v_h \in V_h$, 令

$$v_h = \sum_{i=1}^{N_J} v_h(a_i) \varphi_i.$$

此处 $\{a_i\}_{i=1}^{N_J}$ 是剖分 $\mathcal{T}_h$ 的所有内部节点集合. 令

$$\|v_h\|_{0,h}^2 \triangleq h^2 \sum_{i=1}^{N_J} v_h^2(a_i), \tag{9.1.6}$$

则有如下引理.

引理 9.1.1 存在常数 c, C (与 h 无关), 使得

$$c\|v_h\|_0 \le \|v_h\|_{0,h} \le C\|v_h\|_0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

证明 由数值积分公式可知

$$\|v_h\|_0^2 = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \int_K v_h^2 \mathrm{d}x = \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \frac{|K|}{3}\Big(\sum_{i=1}^{3} v_h^2(m_i)\Big), \tag{9.1.7}$$

此处 $|K|$ 表示单元 K 的面积, $\{m_i\}_{i=1}^3$ 表示 K 各边的中点, 又因为 v_h 在 K 上是线性函数, 故

$$\begin{pmatrix} v_h(m_1) \\ v_h(m_2) \\ v_h(m_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_h(a_1) \\ v_h(a_2) \\ v_h(a_3) \end{pmatrix},$$

此处 $a_i (i = 1, 2, 3)$ 是单元 K 的三个顶点 (见图 9.1.1).

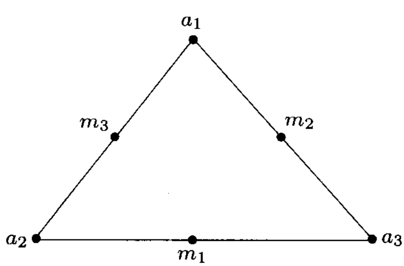

图 9.1.1

从而

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} v_h^2(m_i) &= \frac{1}{2}(v_h^2(a_1)+v_h^2(a_2)+v_h^2(a_3) \\
&\quad +v_h(a_1)v_h(a_2)+v_h(a_2)v_h(a_3)+v_h(a_1)v_h(a_3)) \\
&= \frac{1}{4}[(v_h^2(a_1)+v_h^2(a_2)+v_h^2(a_3)) \\
&\quad +(v_h(a_1)+v_h(a_2)+v_h(a_3))^2].
\end{aligned}
$$

容易验证

$$
\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} v_h^2(a_i) \le \sum_{i=1}^{3} v_h^2(m_i) \le \sum_{i=1}^{3} v_h^2(a_i), \tag{9.1.8}
$$

由于 $\mathcal{T}_h$ 是拟一致的三角剖分, 故 $|K| = O(h^2)$, 组合 (9.1.6)~(9.1.8), 易知引理 9.1.1 成立.

再次强调, 常数 c, C 或带有上下标的常数 c, C 均是指与网格参数 h 无关的正常数, 且在不同的场合值可以不一样.

引理 9.1.2 设 $\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)$ 分别表示刚度矩阵 A 的最小、最大特征值, 则

$$
\lambda_{\min}(A) \ge ch^2, \quad \lambda_{\max}(A) \le C.
$$

证明 对任意的向量 $\boldsymbol{C} = (c_1, \cdots, c_{N_J})^{\mathrm{T}} \in R^{N_J}$, 必存在唯一的函数 $v_h \in V_h$, 使得

$$
v_h = \sum_{i=1}^{N_J} c_i \varphi_i,
$$

利用引理 9.1.1 和 Poincaré 不等式可得

$$
\lambda_{\min}(A) = \min_{\boldsymbol{C}\in R^{N_J}} \frac{\langle A\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}\rangle}{\langle \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}\rangle} \ge \min_{v_h \in V_h} \frac{a(v_h, v_h)}{Ch^{-2}\|v_h\|_0^2} \ge ch^2,
$$

此处 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 R^{N_J} 中的欧氏内积.

又由于剖分 $\mathcal{T}_h$ 是拟一致的, 故由逆估计及引理 9.1.1 可得

$$\begin{aligned}\lambda_{\max}(A) &= \max_{C\in R^{N_J}} \frac{\langle AC, C\rangle}{\langle C, C\rangle} \leq \max_{v_h\in V_h} \frac{a(v_h, v_h)}{ch^{-2}\|v_h\|_0^2}\\ &\leq \max_{v_h\in V_h} \frac{Ch^{-2}\|v_h\|_0}{ch^{-2}\|v_h\|_0} = C,\end{aligned}$$

从而引理 9.1.2 成立.

引理 9.1.3 如 h 充分小, 则 $\lambda_{\min}(A) \leq Ch^2, \lambda_{\max}(A) \geq c$.

证明 首先证明 $\lambda_{\max}(A) \geq c$, 由引理 9.1.1 可知

$$\lambda_{\max}(A) = \max_{C\in R^{N_J}} \frac{\langle AC, C\rangle}{\langle C, C\rangle} \geq \max_{v_h\in V_h} \frac{a(v_h, v_h)}{Ch^{-2}\|v_h\|_0^2}.$$

不妨取 $v_h = \varphi_i(1 \leq i \leq N_J)$, 由基函数的性质, 容易验证

$$a(\varphi_i, \varphi_i) = O(1), \quad (\varphi_i, \varphi_i) = O(h^2),$$

故组合以上不等式, 可知

$$\lambda_{\max}(A) \geq \frac{a(\varphi_i, \varphi_i)}{Ch^{-2}\|\varphi_i\|_0^2} \geq c > 0.$$

下面证明 $\lambda_{\min}(A) \leq Ch^2$. 引入如下辅助特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta\xi = \lambda\xi, & \text{在}\Omega\text{上}, \\ \xi|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{9.1.9}$$

设 λ_1, u_1 是算子 $-\Delta$ 的最小特征值及相应的特征函数. 取 $\mathcal{X}_h = \tilde{\Pi}_h u_1$, 此处 $\tilde{\Pi}_h$ 是 Clemént 插值算子 (或取 $\mathcal{X}_h = Q_h u_1, Q_h$ 是 L^2 投影算子), 易知

$$\|u_1 - \mathcal{X}_h\|_0^2 + h^2 a(u_1 - \mathcal{X}_h, u_1 - \mathcal{X}_h) \leq C_0 h^2 a(u_1, u_1), \tag{9.1.10}$$

故

$$\begin{aligned}a^{\frac{1}{2}}(\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h) &\leq a^{\frac{1}{2}}(u_1, u_1) + a^{\frac{1}{2}}(u_1 - \mathcal{X}_h, u_1 - \mathcal{X}_h)\\ &\leq (1 + C_0^{\frac{1}{2}}) a^{\frac{1}{2}}(u_1, u_1).\end{aligned} \tag{9.1.11}$$

此外, 由 (9.1.9) 的变分形式及 (9.1.10), 可推得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}_h\|_0 &\geq (\|u_1\|_0 - \|u_1 - \mathcal{X}_h\|_0) \\ &\geq \Big(\frac{1}{\lambda_1^{\frac{1}{2}}} - C_0^{\frac{1}{2}} h\Big) a^{\frac{1}{2}}(u_1, u_1),\end{aligned}$$

不妨取 h 使得 $\lambda_1^{\frac{1}{2}} C_0^{\frac{1}{2}} h < \frac{1}{2}$, 故

$$\|\mathcal{X}_h\|_0 \geq \frac{1}{2\lambda_1^{\frac{1}{2}}} a^{\frac{1}{2}}(u_1, u_1). \tag{9.1.12}$$

最后由 (9.1.10)~(9.1.12) 可得

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(A) = \min_{C \in R^{N_J}} \frac{\langle A\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}\rangle}{\langle \boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}\rangle} &\leq \min_{v_h \in V_h} \frac{a(v_h, v_h)}{ch^{-2}\|v_h\|_0^2} \\ &\leq Ch^2 \frac{a(\mathcal{X}_h, \mathcal{X}_h)}{\|\mathcal{X}_h\|_0} \leq Ch^2,\end{aligned}$$

此处 C 与 λ_1 有关.

最后, 得如下定理.

定理 9.1.1 $\mathrm{cond}(A) = O(h^{-2})$.

证明 由引理 9.1.2, 9.1.3 及

$$\mathrm{cond}(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)},$$

可知定理 9.1.1 成立.

9.1.2 经典迭代法的缺陷

由上一节可知, 矩阵 A 的条件数随 h 的变小而趋于无穷. 这时若采用经典的迭代法, 如Richardson迭代法、Jacobi迭代法或 Gauss-Seidel 迭代法求解代数方程, 由于这些方法的收敛速度随 h 的缩小而变得缓慢, 计算效率很低. 我们不妨以 Richardson 迭代法为例, 看一下该法的收敛速度是如何依赖于网格参数 h 的.

设 $\boldsymbol{X}^0$ 为任意的初始向量, 则求解方程组 (9.1.5) 的 Richardson 迭代格式为

$$\boldsymbol{X}^{n+1} = \boldsymbol{X}^n - \frac{\omega}{\lambda_{\max}(A)}(A\boldsymbol{X}^n - \boldsymbol{F}),$$

此处 $\omega \in (0,2)$. 将 A 的特征值记为

$$\lambda_{\min}(A) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{N_J} = \lambda_{\max}(A),$$

并记 $\boldsymbol{\phi_i}(1 \leq i \leq N_J)$ 为相应于特征值 λ_i 的单位特征向量, 且 $\{\boldsymbol{\phi_i}\}_{i=1}^{N_J}$ 形成空间 R^{N_J} 中的一组标准正交基, 即 $\{\boldsymbol{\phi_i}\}_{i=1}^{N_J}$ 满足

$$\langle \boldsymbol{\phi_i}, \boldsymbol{\phi_j} \rangle = \delta_{ij},$$

此处 δ_{ij} 是通常的 Kronecker 符号.

则向量 $\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0$ 可按这组正交基展开, 即存在 $\{\boldsymbol{\alpha}_i\}_{i=1}^{N_J}$, 使得

$$\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0 = \sum_{i=1}^{N_J} \alpha_i \boldsymbol{\phi_i},$$

于是

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}^1 = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^1 &= \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0 + \frac{\omega}{\lambda_{\max}(A)}(A\boldsymbol{X}^0 - \boldsymbol{F}) \\
&= \Big(I - \frac{\omega}{\lambda_{\max}(A)}A\Big)(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^0) = \Big(I - \frac{\omega}{\lambda_{\max}(A)}A\Big)\boldsymbol{r}^0 \\
&= \sum_{i=1}^{N_J} \alpha_i \Big(I - \frac{\omega}{\lambda_{\max}(A)}A\Big)\boldsymbol{\phi}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N_J} \alpha_i \Big(1 - \omega\frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}(A)}\Big)\boldsymbol{\phi}_i,
\end{aligned}$$

递推可得

$$\boldsymbol{r}^n = \boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}^n = \sum_{i=1}^{N_J} \alpha_i \Big(1 - \omega\frac{\lambda_i}{\lambda_{\max}(A)}\Big)^n \boldsymbol{\phi}_i.$$

当 $n\to\infty$ 时, $\left(1-\omega\dfrac{\lambda_i}{\lambda_{\max}(A)}\right)^n\to 0$, 这从理论上保证了 Richardson 迭代的收敛性. 但显然对不同的 i, $\left(1-\omega\dfrac{\lambda_i}{\lambda_{\max}(A)}\right)^n$ 趋于 0 的速度是不一样的, 对于 $\lambda_{\max}(A)$ 附近的那些特征值 λ_i 随 n 的增加快速趋于 0, 因而残量 $\boldsymbol{r}_n$ 中对应这些 λ_i 的特征向量的分量 (在多重网格理论中通常称为 $\boldsymbol{r}^n$ 的高频分量) 迅速的消退. 然而 $\boldsymbol{r}^n$ 中的低频分量 (即接近于 $\lambda_{\min}(A)$ 处的特征值 λ_i 所对应的特征向量的分量) 的衰退是非常缓慢的, 其中最慢的一部分, 由定理 9.1.1 可知, 收敛速度是

$$1-\omega\frac{\lambda_{\min}(A)}{\lambda_{\max}(A)}=1-O(h^2),$$

即当 h 充分小时, 速度接近于 1.

由上面的简单例子可以看出, Richardson 迭代残量低频分量的收敛速度远远差于高频分量的收敛速度, 这种现象在其他的一些经典的迭代方法, 例如 Jacobi 迭代法、Guass-Seidel 迭代法中也同样存在.

9.1.3 多重网格格式

从 9.1.2 节中的简单例子可以看出, 经典的迭代法本质上仅起到 "光滑" 作用, 即它能很快地消去残量中的高频部分; 但对低频部分, 效果却不是很好. 多重网格法的基本思想是: 首先对定解区域建立一套粗、细的网格 (见图 9.1.2), 并形成相应的差分或有限元离散方程. 对此离散方程, 首先在细网格上利用通常的迭代法, 例 Richardson 迭代、Gauss-Seidel 迭代法进行迭代, 消去残量的高频部分, 然后把残量的低频部分转移到粗网格上进行校正, 经过若干次循环以后, 获得满足精度的解. 由于残量校正是在粗网格上进行的, 所以相应的工作量就比较小.

下面介绍多重网格法的一般格式.

设 $\mathcal{T}_1$ 是 Ω 上的一个三角剖分, 网格参数为 h_1, 把剖分 $\mathcal{T}_1$ 中

的每一个三角形取各边中点再将它们两两连接起来, 这样就得到了另一个加细的网格剖分 $\mathcal{T}_2$, 它的网格参数为 $h_2 = \dfrac{h_1}{2}$. 再对 $\mathcal{T}_2$ 实施同样的过程得到 $\mathcal{T}_3, \cdots$, 这样一直做下去, 我们得到一族剖分 $\mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_L$ (图 9.1.2 是 $\mathcal{T}_l$ 中三角形细分为 $\mathcal{T}_{l+1}$ 中的三角形的示意图).

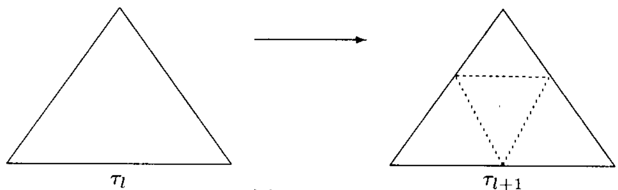

图 9.1.2

显然剖分 $\mathcal{T}_l (1 \le l \le L)$ 满足

$$h_l = \frac{1}{2^{l-1}} h_1.$$

对每一个三角剖分 $\mathcal{T}_l (1 \le l \le L)$, 可以定义相应的连续分片线性有限元空间:

$$V_l = \{v_l | v_l \in C^0(\bar{\Omega}), \text{在每个单元} K \in \mathcal{T}_l \text{上线性, 且} v_l|_{\partial\Omega=0}\}.$$

显然

$$V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_L \triangleq V_h.$$

在每层 l 上, 离散问题为: 求 $u_l \in V_l$, 使得

$$a(u_l, v_l) = (f, v_l), \qquad \forall v_l \in V_l. \tag{9.1.13}$$

在空间 $V_l (1 \le l \le L)$ 上定义线性算子 $A_l : V_l \to V_l$ 满足

$$(A_l v_l, w_l) = a(v_l, w_l), \qquad \forall v_l, w_l \in V_l.$$

根据算子 A_l 的定义, 离散问题 (9.1.4) 可以重新写为

$$A_L u_L = f_L, \tag{9.1.14}$$

此处 $f_L \in V_L$ 定义为

$$(f_L, v_L) = (f, v_L), \qquad \forall v_L \in V_L$$

即 f_L 是 f 在空间 V_L 上的 L^2 投影, $u_L \triangleq u_h$.

注 9.1.1 注意上式中的 A_L 是算子而非矩阵, 但不难看出算子 A_L 与刚度矩阵 A 的性态是完全一样的, 例如 $\mathrm{cond}(A_L) = O(h^{-2})$, 在进行多重网格理论分析时, 用算子 A_L 更直观、简明, 所以我们下列分析均用算子 A_L, 而不使用矩阵形式.

此外引入如下 L^2 投影算子 $Q_{l-1}: V_l \to V_{l-1}$,

$$(Q_{l-1}v_l, w_{l-1}) = (v_l, w_{l-1}), \quad \forall v_l \in V_l, \quad w_{l-1} \in V_{l-1}.$$

则在 l 层上可定义如下多重网格法.

设 $MG(l, z_0, g)$ 是下列方程

$$A_l z = g$$

l 层上的多重网格迭代解, 此处 $g \in V_h$, 初值为 z_0, 则

(1) 当 $l = 1$ 时, $MG(1, z_0, g)$ 由直接求解而得, 即

$$MG(1, z_0, g) = A_1^{-1} g.$$

(2) 当 $l > 1$ 时, $MG(l, z_0, g)$ 递推定义如下:

(i) 前光滑 (presmoothing): 置

$$z_k = z_{k-1} + \frac{1}{\lambda_{l,\max}}(g - A_l z_{k-1}), \qquad 1 \le k \le m_1,$$

此处 $\lambda_{l,\max}$ 是 A_l 的最大特征值.

(ii) 校正 (correction): 置

$$\bar{g} = Q_{l-1}(g - A_l z_m), \qquad q_0 = 0,$$

且

$$q_i = MG(l-1, q_{i-1}, \bar{g}), \quad 1 \le i \le p,$$

从而

$$z_{m_1+1} = z_{m_1} + q_p.$$

(iii) 后光滑 (postsmoothing): 置

$$z_k = z_{k-1} + \frac{1}{\lambda_{l,\max}}(g - A_l z_{k-1}), \qquad m_1+2 \le k \le m_1+m_2+1.$$

最后多重网格法迭代解定义为

(3) $MG(l, z_0, g) \triangleq z_{m_1+m_2+1}$.

注 9.1.2 在上述多重网格算法的定义中, 前光滑、后光滑采用 Richardson 迭代, 当然也可以采用其他的迭代方法, 例 Jacobi、Gauss-Seidel、SOR 迭代方法, 为分析方便起见, 本书仅考虑 Richardson 迭代格式. 一般的光滑方法 (即迭代方法) 的构造可参见文献 [11, 12].

注 9.1.3 实际执行中也可以没有前光滑或没有后光滑, 这类多重网格法通常被称为非对称多重网格法.

注 9.1.4 若 $p = 1$, 通常称为 V 循环多重网格法, $p = 2$ 即为 W 循环多重网格法, 显然 V 循环多重网格法的工作量比 W 循环多重网格法的工作量要少, 但理论分析复杂.

注 9.1.5 若采用下列记号:

$\circ$—— 表示该层网格上进行光滑,

\—— 表示由细网格到粗网格的转换,

/—— 表示由粗网格到细网格的转换,

$\diamond$—— 表示精确求解,

则三层的 V 循环和 W 循环可表示如下 (见图 9.1.3):

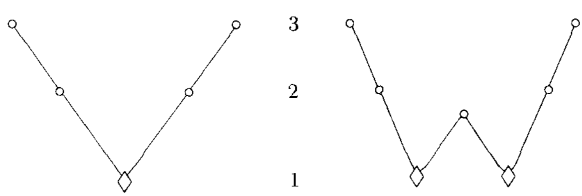

图 9.1.3

而四层的 V 循环和 W 循环可表示如下 (见图 9.1.4):

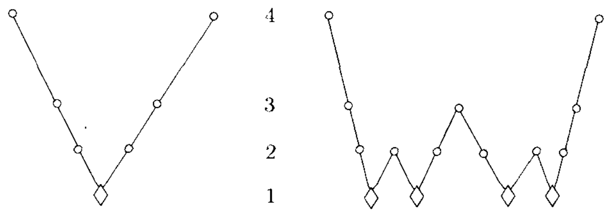

图 9.1.4

9.2 W 循环多重网格法的收敛性

本节讨论 W 循环多重网格法的收敛性.

9.2.1 网格相关范

由于算子 A_l 是对称正定的, 故存在一组正交的单位特征函数 $\{\psi_i\}_{i=1}^{N_l}$, 即

$$A_l\psi_i = \lambda_i\psi_i, \qquad i = 1, \cdots, N_l,$$

$$(\psi_i, \psi_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \cdots, N_l.$$

对任意的 $v \in V_l$, 可表示为

$$v = \sum_{i=1}^{N_l} \alpha_i\psi_i.$$

令

$$A_l^s v = \sum_{i=1}^{N_l} \alpha_i\lambda_i^s\psi_i,$$

从而

$$(v, A_l^s v) = \left(\sum_i \alpha_i\psi_i, \sum_i \alpha_i\lambda_i^s\psi_i\right) = \sum_i \lambda_i^s\alpha_i^2.$$

故定义网格相关范 $|||\cdot|||_{s,l}$ 如下:

$$|||v|||_{s,l} \triangleq \Big(\sum_{i=1}^{N_l} \lambda_i^s \alpha_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} = (v, A_l^s v)^{\frac{1}{2}} = \|A_l^{\frac{s}{2}} v\|_0^{\frac{1}{2}}. \tag{9.2.1}$$

下面讨论网格相关范 $|||\cdot|||_{s,l}$ 的一些性质.

由网格相关范的定义 (9.2.1) 易知如下结论.

引理 9.2.1 对任意的 $v \in V_l$, 成立

$$|||v|||_{0,l} = \|v\|_0, \qquad |||v|||_{1,l} = a(v,v)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 9.2.2 广义 Cauchy-Schwarz 不等式成立, 即

$$|a(v,w)| \le |||v|||_{1-t,l}|||w|||_{1+t,l}, \qquad \forall v, w \in V_l, \quad t \in R.$$

证明 对任意的 $v, w \in V_l$, 存在 $\{\alpha_i\}_{i=1}^{N_l}, \{\beta_i\}_{i=1}^{N_l}$ 使得

$$v = \sum_{i=1}^{N_l} \alpha_i \psi_i, \qquad w = \sum_{i=1}^{N_l} \beta_i \psi_i,$$

从而

$$\begin{aligned}
a(v,w) = (A_l v, w) &= \Big(\sum_{i=1}^{N_l} \alpha_i \lambda_i \psi_i, \sum_{i=1}^{N_l} \beta_i \psi_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{N_l} \alpha_i \beta_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{N_l} (\alpha_i \lambda_i^{\frac{1-t}{2}})(\beta_i \lambda_i^{\frac{1+t}{2}}) \\
&\le \Big(\sum_{i=1}^{N_l} \alpha_i^2 \lambda_i^{1-t}\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i=1}^{N_l} \beta_i^2 \lambda_i^{1+t}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= |||v|||_{1-t,l}|||w|||_{1+t,l}.
\end{aligned}$$

同样利用网格相关范数的性质, 及事实 $\lambda_{l,\max}(A_l) = o(h_l^{-2})$, 可以证明如下结论.

引理 9.2.3 $|||v|||_{s,l} \le C h_l^{t-s} |||v|||_{t,l}, \quad s > t.$

多重网格法的收敛性证明通常可以分成两步, 即所谓的光滑性和逼近性, 下面我们将分别予以讨论.

9.2.2 逼近性

首先定义从网格空间 V_l 到 V_{l-1} 的 Ritz 投影为 $P_{l-1}: V_l \to V_{l-1}$, 即

$$a(P_{l-1}v_l, w_{l-1}) = a(v_l, w_{l-1}), \quad \forall v_l \in V_l, w_{l-1} \in V_{l-1}.$$

投影算子 P_{l-1} 本质上体现了误差残量从细网格转到粗网格上校正以后的性态, 所以研究它的一些逼近性质是非常重要的.

引理 9.2.4 存在常数 C, 使得

$$|||(I - P_{l-1})v|||_{0,l} \le Ch_l|||(I - P_{l-1})v|||_{1,l}, \qquad \forall v \in V_l.$$

证明 利用 Aubin-Nitsche 技巧, 可得

$$\|(I - P_{l-1})v\|_0 \le Ch_l\|(I - P_{l-1})v\|_1,$$

组合引理 9.2.1, 即得引理 9.2.4.

定理 9.2.1(逼近性)

$$|||(I - P_{l-1})v|||_{1,l} \le Ch_l|||v|||_{2,l}, \quad \forall v \in V_l.$$

证明

$$\begin{aligned}
|||(I - P_{l-1})v|||_{1,l} &= \max_{w \in V_l} \frac{a(v - P_{l-1}v, w)}{a(w,w)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \max_{w \in V_l} \frac{a(v, w - P_{l-1}w)}{a(w,w)^{\frac{1}{2}}} \\
&\le \max_{w \in V_l} \frac{|||v|||_{2,l}|||w - P_{l-1}w|||_{0,l}}{a(w,w)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{引理 } 9.2.2) \\
&\le Ch_l|||v|||_{2,l}. \quad (\text{引理 } 9.2.4)
\end{aligned}$$

9.2.3 光滑性

由多重网格格式可知, 除了校正步, 还有光滑步, 所以研究光滑性也非常重要, 为简单起见, 我们仅考虑非对称 W 循环多重网格法, 即 $p=2, m_1=m, m_2=0$. 不妨设

$$e_l = z - z_l, \quad 0 \le l \le m,$$

则

$$\begin{aligned}
e_l &= z - z_l \\
&= z - z_{l-1} - \frac{1}{\lambda_{l,\max}} A_l (z - z_{l-1}) \\
&= e_{l-1} - \frac{1}{\lambda_{l,\max}} A_l e_{l-1} \\
&= \left(I - \frac{1}{\lambda_{l,\max}} A_l\right) e_{l-1}, \quad l \ge 1.
\end{aligned}$$

令算子 $K_l \triangleq \left(I - \dfrac{1}{\lambda_{l,\max}} A_l\right)$, 算子 K_l 在多重网格理论中通常称为光滑子 (smoothing operator), 容易验证算子 K_l 满足 (习题):

$$(1) \qquad |||K_l v|||_{s,l} \le |||v|||_{s,l}, \qquad \forall v \in V_l, s \in R \tag{9.2.2}$$

和

$$(2) \qquad (K_l^s v, v) \le (K_l^t v, v), \qquad s \ge t, \quad \forall v \in V_l, \tag{9.2.3}$$

此处 $K_l^0 = I, s, t \in R$.

定理 9.2.2 (光滑性)

$$|||K_l^m v|||_{2,l} \le C h_l^{-1} m^{-\frac{1}{2}} |||v|||_{1,l}, \qquad \forall v \in V_l.$$

证明 因为 A_l 对称正定, 由 9.2.1 节可知, 对 $\forall v \in V_l$ 可表示为

$$v = \sum_{i=1}^{N_l} \alpha_i \psi_i,$$

此处 ψ_i 是 A_l 的特征值 λ_i 对应的单位正交特征函数, 同时特征值 λ_i 满足

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_{l,\max},$$

从而

$$\begin{aligned} K_l^m v &= \Big(I - \frac{1}{\lambda_{l,\max}} A_l\Big)^m v \\ &= \sum_{i=1}^{N_l} \Big(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{l,\max}}\Big)^m \alpha_i \psi_i. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} |||K_l^m v|||_{2,l}^2 &= \sum_{i=1}^{N_l} \Big(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{l,\max}}\Big)^{2m} \alpha_i^2 \lambda_i^2 \\ &= \lambda_{l,\max} \Big[\sum_{i=1}^{N_l} \Big(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_{l,\max}}\Big)^{2m} \frac{\lambda_i}{\lambda_{l,\max}} \lambda_i \alpha_i^2 \Big] \\ &\leq \lambda_{l,\max} \{ \sup_{0 \leq x \leq 1} (1-x)^{2m} x \} \sum_{i=1}^{N_l} \lambda_i \alpha_i^2, \end{aligned}$$

容易证明

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} (1-x)^{2m} x \leq \frac{1}{2m+1}.$$

同时由引理 9.1.1 可知

$$\lambda_{l,\max} \leq C h_l^{-2},$$

组合以上不等式可得

$$|||K_l^m v|||_{2,l}^2 \leq C h_l^{-2} m^{-1} |||v|||_{1,l}^2,$$

两边开根号即得光滑性.

同样可以证明 (习题)

$$|||K_l^m v|||_{1,l} \leq C h_l^{-1} m^{-\frac{1}{2}} |||v|||_{0,l}, \qquad \forall v \in V_l. \tag{9.2.4}$$

9.2.4 收敛性

在本节, 我们将证明, 若光滑步 m 充分大, 则 W 循环多重网格法是收敛的.

令粗网格上的残量为

$$\bar{g} = Q_{l-1}(g - A_l z_m),$$

引入下列辅助 $l-1$ 层上有限元方程:

$$A_{l-1}q = \bar{g}.$$

引理 9.2.5 $q = P_{l-1}e_m$.

证明 事实上, 对任意 $w_{l-1} \in V_{l-1}$,

$$\begin{aligned} a(q, w_{l-1}) &= (\bar{g}, w_{l-1}) = (Q_{l-1}(g - A_l z_m), w_{l-1}) \\ &= (Q_{l-1}A_l e_m, w_{l-1}) \\ &= (A_l e_m, w_{l-1}) = a(e_m, w_{l-1}), \end{aligned}$$

故

$$q = P_{l-1}e_m.$$

定理 9.2.3(收敛性) 对任意的 $\gamma \in (0,1)$, 若 m 充分大, 则有

$$|||z - MG(l, z_0, g)|||_{1,l} \le \gamma |||z - z_0|||_{1,l}, \qquad \forall l = 1, 2, \cdots.$$

证明 由多重网格法的定义易知

$$\begin{aligned} z - MG(l, z_0, g) &= z - z_{m+1} \\ &= z - z_m - q_2 = e_m - q_2 \\ &= (e_m - q) + (q - q_2). \end{aligned}$$

下面我们用归纳法证明定理 9.2.2 成立. 假设在 $l-1$ 层上定

理成立 ($l=1$ 时定理显然成立), 从而有

$$
\begin{aligned}
|||q-q_2|||_{1,l} &= |||q-q_2|||_{1,l-1} \le \gamma^2 |||q|||_{1,l-1} && \text{(归纳假设)} \\
&= \gamma^2 |||P_{l-1}e_m|||_{1,l-1} && \text{(引理 9.2.5)} \\
&\le \gamma^2 |||e_m|||_{1,l} && \text{(投影性质)} \\
&\le \gamma^2 |||e_0|||_{1,l}. && \text{(由 (9.2.2))}
\end{aligned}
$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
|||e_m-q|||_{1,l} &= |||(I-P_{l-1})e_m|||_{1,l} \\
&\le Ch_l |||e_m|||_{2,l} && \text{(逼近性)} \\
&\le Ch_l \cdot h_l^{-1} m_l^{-\frac{1}{2}} |||e_0|||_{1,l} && \text{(光滑性)} \\
&= Cm_l^{-\frac{1}{2}} |||e_0|||_{1,l},
\end{aligned}
$$

组合以上不等式可知

$$
|||z-MG(l,z_0,g)|||_{1,l} \le (Cm^{-\frac{1}{2}}+\gamma^2)|||e_0|||_{1,l},
$$

取 $m \ge \left(\dfrac{C}{\gamma(1-\gamma)}\right)^2$, 可知证式成立.

注 9.2.1 本书仅考虑非对称多重网格法的收敛性, 对对称多重网格法的证明类似可得 (习题).

注 9.2.2 我们仅考虑能量模意义下的收敛性, 在 L^2 模意义下 (甚至分数次 $(0<\alpha<1)$ 范数意义下) 收敛性定理也成立 [7].

9.3 V 循环多重网格法的收敛性

为简单起见, 仍考虑非对称多重网格法, 即 $p=1, m_1=m, m_2=0$.

9.3.1 残量的算子表示

首先递归定义误差算子 $E_l : v_l \to v_l$ 如下:

$$
\begin{aligned}
&E_1 = 0, \\
&E_l = [(I - P_{l-1}) + E_{l-1}P_{l-1}]K_l^m, \quad l > 1.
\end{aligned}
$$

引理 9.3.1 若 $z, g \in V_l$, 且满足 $A_l z = g$, 则

$$
z - MG(l, z_0, g) = E_l(z - z_0), \quad l \geq 1. \tag{9.3.1}
$$

证明 我们用归纳法证明. 事实上, 当 $l = 1$ 时, $MG(1, z_0, g) = A_1^{-1}g = z$, 故显然成立. 假设 $l-1$ 时 (9.3.1) 成立, 仍假设 $q \in V_{l-1}$ 是粗网格上残量方程

$$
A_{l-1}q = \bar{g}
$$

($\bar{g}$ 的定义见 9.2 节) 的精确解, 则由归纳假设可知

$$
q - MG(l-1, 0, \bar{g}) = E_{l-1}(q - 0),
$$

故

$$
\begin{aligned}
MG(l-1, 0, \bar{g}) &= (I - E_{l-1})q \\
&= (I - E_{l-1})P_{l-1}e_m, \quad (\text{引理 } 9.2.5)
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
z - MG(l, z_0, g) &= z - z_m - MG(l-1, 0, \bar{g}) \\
&= e_m - (I - E_{l-1})P_{l-1}e_m \\
&= (I - (I - E_{l-1})P_{l-1})e_m \\
&= [(I - P_{l-1}) + E_{l-1}P_{l-1}]K_l^m e_0 \\
&= E_l(z - z_0),
\end{aligned}
$$

故证式成立.

9.3.2 光滑性

在 W 循环收敛性证明中, 我们已获得了 W 循环的光滑性, 参见定理 9.2.2, 但若要得到 V 循环多重网格法的收敛性, 对光滑子 K_l 还要作一些更精细的估计.

定理 9.3.1 对任意的 $v \in V_l$,

$$a((I-K_l)K_l^{2m}v, v) \le \frac{1}{2m} a((I-K_l^{2m})v, v).$$

证明 对任意的 $0 \le i \le k$

$$\begin{aligned}
a((I-K_l)K_l^k v, v) &= (A_l(I-K_l)K_l^k v, v) \\
&= \left(A_l \frac{1}{\lambda_{l,\max}} A_l K_l^k v, v\right) \\
&= \frac{1}{\lambda_{l,\max}} (A_l K_l^k v, A_l v) \\
&= \frac{1}{\lambda_{l,\max}} (K_l^k A_l v, A_l v) \\
&\le \frac{1}{\lambda_{l,\max}} (K_l^i A_l v, A_l v) \\
&= a((I-K_l)K_l^i v, v),
\end{aligned} \tag{9.3.2}$$

从而由 (9.3.2) 可得

$$\begin{aligned}
2ma((I-K_l)K_l^{2m}v, v) &\le a((I-K_l)v, v) + a((I-K_l)K_l v, v) \\
&\quad + \cdots + a((I-K_l)K_l^{2m-1}v, v) \\
&= a((I-K_l^{2m})v, v),
\end{aligned}$$

故证式成立.

9.3.3 收敛性

组合 9.2 节中关于 W 循环多重网格法的逼近性及 9.3.2 节中的光滑性, 可得下列重要引理.

引理 9.3.2 对任意 $v \in V_l$, 成立

$$\|(I - P_{l-1})K_l^m v\|_a^2 \leq \frac{C^*}{2m}(\|v\|_a^2 - \|K_l^m v\|_a^2),$$

此处 $\|v\|_a = a(v,v)^{\frac{1}{2}}$.

证明 事实上

$$\begin{aligned}
\|(I - P_{l-1})K_l^m v\|_a^2 &\leq Ch_l^2 |||K_l^m v|||_{2,l} ^2 \qquad (\text{定理 } 9.2.1)\\
&= Ch_l^2 \|A_l K_l^m v\|_0^2 \\
&\leq C^* \lambda_{l,\max}^{-1} (A_l K_l^m v, A_l K_l^m v) \\
&= C^*((I - K_l)K_l^m v, A_l K_l^m v) \\
&= C^* a((I - K_l)K_l^m v, K_l^m v) \\
&= C^* a((I - K_l)K_l^{2m} v, v) \\
&\leq \frac{C^*}{2m} a((I - K_l^{2m})v, v) \qquad (\text{定理 } 9.3.1)\\
&= \frac{C^*}{2m}(\|v\|_a^2 - \|K_l^m v\|_a^2),
\end{aligned}$$

从而证式成立.

基于上述引理, 最后可得下列 V 循环多重网格法的收敛性定理.

定理 9.3.2 对任意的 $v \in V_l$, 成立

$$\|z - MG(l, z_0, g)\|_a^2 \leq \frac{C^*}{2m + C^*}\|z - z_0\|_a^2. \tag{9.3.3}$$

证明 由引理 9.3.1 可知

$$z - MG(l, z_0, g) = E_l(z - z_0) = ((I - P_{l-1}) + E_{l-1}P_{l-1})K_l^m e_0,$$

从而由 P_{l-1} 的正交性可得

$$\|z - MG(l, z_0, g)\|_a^2 = \|(I - P_{l-1})K_l^m e_0\|_a^2 + \|E_{l-1}P_{l-1}K_l^m e_0\|_a^2,$$

现在我们用归纳法证明 (9.3.3) 式成立. 令 $\gamma = \dfrac{C^*}{2m + C^*}$, 若 $l = 1$, (9.3.3) 式显然成立, 假设 $l - 1$ 时 (9.3.3) 式成立, 则

$$
\begin{aligned}
&\|z - MG(l, z_0, g)\|_a^2 \\
\le\ &\|(I - P_{l-1})K_l^m e_0\|_a^2 + \gamma\|P_{l-1}K_l^m e_0\|_a^2 && \text{(归纳假设)} \\
=\ &(1-\gamma)\|(I - P_{l-1})K_l^m e_0\|_a^2 + \gamma\|K_l^m e_0\|_a^2 && (P_{l-1}\text{的正交性}) \\
\le\ &(1-\gamma)\frac{C^*}{2m}(\|e_0\|_a^2 - \|K_l^m e_0\|_a^2) + \gamma\|K_l^m e_0\|_a^2 && \text{(引理 9.3.2)} \\
=\ &\gamma(\|e_0\|_a^2 - \|K_l^m e_0\|_a^2) + \gamma\|K_l^m e_0\|_a^2 \\
=\ &\gamma\|e_0\|_a^2,
\end{aligned}
$$

从而证式成立.

注 9.3.1 在没有完全正则性假设下, V 循环的收敛性见文献 [11, 14, 60].

注 9.3.2 非协调元的多重网格法以及板问题的多重网格法可见文献 [15, 16, 63, 64].

注 9.3.3 对其他光滑算子, 例如 Jacobi 迭代、Gauss-Seidel 迭代, 9.2,9.3 节的结论仍然成立.

9.4 套迭代及其工作量的估计

套迭代的基本思想是利用每层的多重网格迭代解, 作为下一层多重网格迭代好的初值, 从而得到最优的近似解. 例如: 设 $\hat{u}_{l-1}$ 是 $l-1$ 层上方程 $A_{l-1}u_{l-1} = f_{l-1}$ 的多重网格迭代解, 从而可以在 l 层上利用 $\hat{u}_{l-1}$ 为初值进行 r 次 l 层上的多重网格迭代, 以此得到 l 层上的多重网格迭代解 $\hat{u}_l$, 以此类推, 最后得到所要求精度的迭代解, 具体格式如下.

套迭代多重网格法:

(1) 若 $l = 1$, 置 $\hat{u}_l = A_1^{-1}f_1$,

(2) 若 $l \ge 2$, 则 $\hat{u}_l$ 递归定义如下:

(i) $u_l^0 = \hat{u}_{l-1}$,

(ii) $u_l^k = MG(l, u_l^{k-1}, f_l), \qquad 1 \le k \le r$

(iii) $\hat{u}_l = u_l^r$.

套迭代多重网格法有如下的收敛性定理.

定理 9.4.1 若 r 充分大, 则

$$||u_l - \hat{u}_l||_a \le Ch_l|u|_2.$$

证明 事实上

$$\begin{aligned}
||u_l - \hat{u}_l||_a &\le \gamma^r||u_l - \hat{u}_{l-1}||_a \\
&\le \gamma^r(||u_l - u_{l-1}||_a + ||u_{l-1} - \hat{u}_{l-1}||_a) \\
&\le C\gamma^r(h_l|u|_2 + ||u_{l-1} - \hat{u}_{l-1}||_a).
\end{aligned}$$

递推可得

$$\begin{aligned}
||u_l - \hat{u}_l||_a &\le C\gamma^r h_l|u|_2 + C^2 h_{l-1}\gamma^{2r}|u|_2 + \cdots + C^l h_1 \gamma^{l\gamma}|u|_2 \\
&\le Ch_l|u|_2(\gamma^r + 2C\gamma^{2r} + \cdots + (2C)^{l-1}\gamma^{lr}) \\
&\le Ch_l\frac{\gamma^r}{1-2C\gamma^r}|u|_2,
\end{aligned}$$

若 r 充分大, 使得 $2C\gamma^r < 1$, 则

$$||u_l - \hat{u}_l||_a \le Ch_l|u|_2,$$

从而定理得证.

上述定理告诉我们, 套迭代多重网格法的迭代解 $\hat{u}_l$ 和有限元解的精度是一致的. 下面将说明获得这样的解, 工作量仅需 $O(n_l)$, 此处 $n_l(1 \le l \le L)$ 是 l 层上有限元的节点数. 由于 $n_l = O(h_l^{-2})$ 而 $h_l = \dfrac{h_1}{2^{l-1}}$, 故 $n_l = O(4^l)$.

引理 9.4.1 多重网格法的工作量是 $O(n_l)$.

证明 令 w_l 表示 l 层上多重网格法的工作量, 由光滑和校正步产生的工作量 w_l 可递推表示如下:

$$w_l \le C\tilde{m}n_l + pw_{l-1}.$$

此处 $\tilde{m} = m_1 + m_2$, 从而有

$$\begin{aligned} w_l &\le C\tilde{m}n_l + p(C\tilde{m}n_{l-1}) + \cdots + p^{l-1}(C\tilde{m}n_1) \\ &\le C\tilde{m}4^l + pC\tilde{m}4^{l-1} + \cdots + p^{l-1}(C\tilde{m}4) \\ &\le \frac{C\tilde{m}4^l}{1-\dfrac{p}{4}} \le C4^l \qquad (p<4), \end{aligned}$$

从而

$$w_l \le Cn_l,$$

故证式成立.

定理 9.4.2 套迭代多重网格法的工作量是 $O(n_l)$.

证明 设 $\hat{w}_l$ 是套迭代多重网格法的工作量, 则

$$\hat{w}_l \le \hat{w}_{l-1} + rw_l,$$

从而, 则由引理 9.4.1 可知

$$\begin{aligned} \hat{w}_l &\le rCn_l + rCn_{l-1} + \cdots + rCn_1 \\ &\le rC(4^l + 4^{l-1} + \cdots + 4) \\ &\le \frac{rC4^l}{1-\dfrac{1}{4}} \le Cn_l, \end{aligned}$$

故证式成立.

9.5 瀑布型多重网格法

瀑布型多重网格法也称为单步多重网格法, 它不需要校正步, 故计算机实现更方便, 它实际上是套迭代多重网格法的一种变形, 在套迭代多重网格法中每层上的初值是由多重网格法在粗网格上经过若干次迭代而得, 而瀑布型多重网格法更简单, 每层上的初值是直接由标准的迭代法, 例 Richardson, Jacobi, Gauss-Seidel, CG

方法, 在粗网格上经过若干次迭代而得, 因为缺少校正步, 为了保证算法的收敛性和工作量的最优, 每层上迭代的次数将相应要增多, 特别是粗网格上的迭代次数.

下面我们仍以 Richardson 迭代为例, 介绍瀑布型多重网格法.

(1) 若 $l=1, u_1^*=u_1=A_1^{-1}f_1$,

(2) 若 $l\geq 2$, 则 u_l^* 递归定义如下,

(i) 置 $u_l^0=u_{l-1}^*$,

(ii) 在 l 层上进行 m_l 次 Richardson 迭代, 即

$$u_l^k=u_l^{k-1}+\frac{1}{\lambda_{l,\max}}(f_l-A_lu_l^{k-1}),\quad 1\leq k\leq m_l,$$

(iii) 置 $u_l^*=u_l^{m_l}$.

若瀑布型多重网格法的解 u_l^* 满足

$$||u_l-u_l^*||_a\approx||u-u_l||_a,$$

且工作量为 $O(n_l)$, 则称该瀑布型多重网格法在能量模意义下是最优的.

下面我们证明以 Richardson 迭代作为光滑算子的瀑布型多重网格法在三维是最优的, 在二维情形是拟最优的.

引理 9.5.1

$$||u_l-u_l^*||_a\leq C\sum_{k=2}^{l}\frac{h_k}{m_k^{\frac{1}{2}}}||f||_0.$$

证明 容易验证 $(2\leq k\leq l)$

$$\begin{aligned}u_k-u_k^*&=u_k-u_k^{m_k}\\&=\left(I-\frac{1}{\lambda_{k,\max}}A_k\right)^{m_k}(u_k-u_k^0)\\&=K_k^{m_k}(u_k-u_{k-1}^*)\\&=K_k^{m_k}(u_k-u_{k-1})+K_k^{m_k}(u_{k-1}-u_{k-1}^*),\end{aligned}$$

从而

$$\|u_k - u_k^*\|_a \le \|K_k^{m_k}(u_k - u_{k-1})\|_a + \|K_k^{m_k}(u_{k-1} - u_{k-1}^*)\|_a.$$

利用逼近性 (9.2.4) 及有限元的 L^2 模估计, 可得

$$\begin{aligned}\|K_k^{m_k}(u_k - u_{k-1})\|_a &\le C\frac{h_k^{-1}}{m_k^{\frac{1}{2}}}\|u_k - u_{k-1}\|_0 \\ &\le C\frac{1}{m_k^{\frac{1}{2}}}\|u_k - u_{k-1}\|_a.\end{aligned}$$

另一方面

$$\|K_k^{m_k}(u_{k-1} - u_{k-1}^*)\|_a \le \|u_{k-1} - u_{k-1}^*\|_a.$$

组合以上不等式可知

$$\|u_k - u_k^*\|_a \le \frac{C}{m_k^{\frac{1}{2}}}\|u_k - u_{k-1}\|_a + \|u_{k-1} - u_{k-1}^*\|_a,$$

由于 $u_1^* = u_1$, 故递推可得

$$\|u_l - u_l^*\|_a \le \sum_{k=2}^{l}\frac{C}{m_k^{\frac{1}{2}}}\|u_k - u_{k-1}\|_a \le C\sum_{k=2}^{l}\frac{h_k}{m_k^{\frac{1}{2}}}\|f\|_0,$$

从而证式成立.

引理 9.5.2 设 $m_k(2 \le k \le l)$ 满足

$$m_k \ge \beta^{l-k} m_l \tag{9.5.1}$$

的最小正整数, 此处 β 是大于 1 的固定正数, 则瀑布型多重网格法的精度是

$$\|u_l - u_l^*\|_a \le \begin{cases} C\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{\beta^{\frac{1}{2}}}}\cdot\dfrac{h_l}{m_l^{\frac{1}{2}}}\|f\|_0, & \beta > 4, \\ Cl\dfrac{h_l}{m_l^{\frac{1}{2}}}, & \beta = 4.\end{cases} \tag{9.5.2}$$

证明 由引理 9.5.1,(9.5.1) 可知

$$\begin{aligned}\|u_l-u_l^*\|_a &\le \sum_{k=2}^{l}\frac{h_k}{m_k^{\frac{1}{2}}}\|f\|_0\\ &\le C\frac{h_l}{m_l^{\frac{1}{2}}}\Big[\sum_{k=0}^{l-2}\Big(\frac{2}{\beta^{\frac{1}{2}}}\Big)^k\Big]\|f\|_0,\end{aligned}$$

若 $\beta>4$, 则

$$\sum_{k=0}^{l-2}\Big(\frac{2}{\beta^{\frac{1}{2}}}\Big)^k\le\frac{1}{1-\dfrac{2}{\beta^{\frac{1}{2}}}},$$

若 $\beta=4$, 则

$$\sum_{k=0}^{l-2}\Big(\frac{2}{\beta^{\frac{1}{2}}}\Big)^k=l-1,$$

组合以上几个不等式和等式可知证式成立.

引理 9.5.3 瀑布型多重网格法的工作量为

$$\sum_{k=2}^{l}m_kn_k\le\begin{cases}C\dfrac{1}{1-\dfrac{\beta}{2^d}}m_ln_l, & \beta<2^d,\\ Clm_ln_l, & \beta=2^d.\end{cases}\tag{9.5.3}$$

证明 容易验证 $n_l=O(2^{dl})$, 且 $m_k(2\le k\le l)$ 是满足 (9.5.1) 的最小正整数, 故

$$\sum_{k=2}^{l}m_kn_k\le Cm_ln_l\sum_{k=0}^{l-2}\Big(\frac{\beta}{2^d}\Big)^k,$$

若 $\beta<2^d$, 则

$$\sum_{k=0}^{l-2}\Big(\frac{\beta}{2^d}\Big)^k\le\frac{1}{1-\dfrac{\beta}{2^d}},$$

若 $\beta=2^d$, 则

$$\sum_{k=0}^{l-2}\Big(\frac{\beta}{2^d}\Big)^k=l-1.$$

组合以上几个不等式和等式可知证式成立.

由瀑布型多重网格法最优的定义及引理 9.5.2, 9.5.3 可知, 若 β 满足

$$4 < \beta < 2^d,$$

则瀑布型多重网格法是最优的. 但若 $d = 2$, 这样的 β 是不存在的, 而 $d = 3$ 时, 只要取 $4 < \beta < 8$, 则瀑布型多重网格法是最优的.

定理 9.5.1 若 $d = 3$,(9.5.1) 式中的 $\beta \in (4, 8)$, 则该瀑布型多重网格法是最优的.

当 $d = 2$ 时, 组合引理 9.5.2, 9.5.3, 仍有下列定理成立.

定理 9.5.2 若 $d = 2$, 且 m_l 是满足下式的最小正整数

$$m_l \geq m_* l^2 \qquad (m_* \text{是给定大于等于 1 的正数}),$$

则能量模误差为

$$\|u_l - u_l^*\|_a \leq C \frac{h_l}{m_*^{\frac{1}{2}}} \|f\|_0,$$

工作量为

$$\sum_{k=1}^{l} m_k n_k \leq C m_l n_l (1 + \log n_l)^3,$$

即此瀑布型多重网格法是拟最优的.

注 9.5.1 若采用 CG 方法作为光滑算子, 则对二维、三维问题, 瀑布型多重网格法均是最优的, 见文献 [10].

注 9.5.2 其他有限元的瀑布型多重网格法可见文献 [49]. 抛物型和板问题的瀑布型多重网格法可见文献 [49, 50].

第 10 章　多水平方法

多重网格法在有的文献中也被称为多水平方法. 本章为了区别起见, 把基于有限元空间多水平分裂的预处理方法, 称为多水平方法. 即我们将对方程 (9.1.5), 基于有限元空间的多水平分裂, 构造一些好的预条件子, 然后用 CG 方法求解. 所谓好的预条件子 B, 它必须满足下列两个条件.

(1) B 易于求解.

(2) BA 的条件数远小于 A 的条件数.

本章首先阐述由德国学者 Yserentant 首先提出的分层基方法, 它是多水平方法的奠基性工作, 然后介绍由 Bramble, Pasicak 和 Xu 提出的 BPX 多水平方法.

10.1　分层基方法

10.1.1　有限元空间的多水平分裂

由第 9 章定理 9.1.1 可知, 由通常的节点基构成的刚度矩阵的条件数为 $O(h^{-2})$, 当求解方程的规模很大时, 一般的迭代法将失效.1986 年, 由德国学者 Yserentant 首先基于多水平分裂提出了所谓的分层基的概念, 他首先证明了由分层基构造的刚度矩阵的条件数在二维情形仅为 $O((\log h)^2)$. 借助于共轭斜量法, 仅仅只需要用 $O\left(n\log n\log\dfrac{1}{\epsilon}\right)$ 次运算就可以使能量误差小于 ϵ, 此处 n 是有限元空间的维数.

设 $\Omega\subset R^2$ 的初始剖分为 $\mathcal{T}_0$(上一章初始剖分定义为 $\mathcal{T}_1$, 这一章为下面分析方便起见, 初始剖分定义为 $\mathcal{T}_0$), 由 $\mathcal{T}_0$ 出发可逐步加

密生成一族嵌套的剖分

$$\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_L.$$

类似于上一章, $\mathcal{T}_{l+1}$ 由连接 $\mathcal{T}_l$ 中每个三角形单元的三边中点而生成 (见图 9.1.2). 令 N_l 表示 $\mathcal{T}_l$ 的全体节点集合, 仍然用 V_l 表示 $\bar{\Omega}$ 上连续且分片线性的函数空间, 且 $V_l \subset H_0^1(\Omega)$. 显然此时有

$$N_l \subset N_{l+1}, \quad V_l \subset V_{l+1}.$$

对给定的连续函数 v, 设 $I_l v$ 表示剖分 $\mathcal{T}_l$ 上的连续分片线性插值函数, 此时有

$$(I_l v)(a) = v(a), \qquad \forall a \in N_l.$$

容易验证

$$v = I_0 v + \sum_{l=1}^{L}(I_l v - I_{l-1} v), \qquad \forall v \in V_L, \tag{10.1.1}$$

注意 $I_L v = v, \quad \forall v \in V_L$.

由插值函数 I_l 的性质可知, $I_l v - I_{l-1} v$ 在所有 $l-1$ 层上节点 N_{l-1} 的值为 0, 且 $I_l v - I_{l-1} v \in V_l$, 不妨定义 V_l 的子空间 S_l 如下:

$$S_l = \{v_l \in V_l | \quad v_l(a) = 0, \quad \forall a \in N_{l-1}\} \qquad (l = 1, \cdots, L),$$

及 $S_0 = V_0$. 由 (10.1.1) 易知, 下列直和分解成立

$$V_L = S_0 \oplus \cdots \oplus S_L. \tag{10.1.2}$$

现在我们利用空间 S_l, 采用递归定义的方法来定义剖分 $\mathcal{T}_L$ 上的分层基:

(i) 剖分 $\mathcal{T}_0$ 的分层基即为剖分 $\mathcal{T}_0$ 的结点基;

(ii) 剖分 T_l 上的分层基由 T_{l-1} 上的分层基和构成空间 S_l 的结点基构成.

下面不妨以一维的情形来说明:

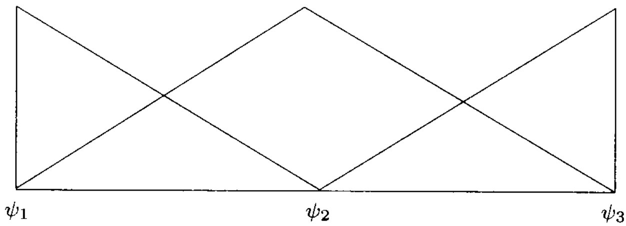

图 10.1.1　$S_0 = V_0$

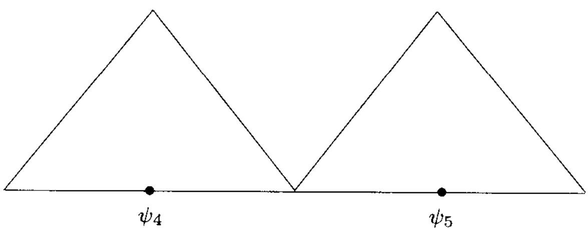

图 10.1.2　S_1

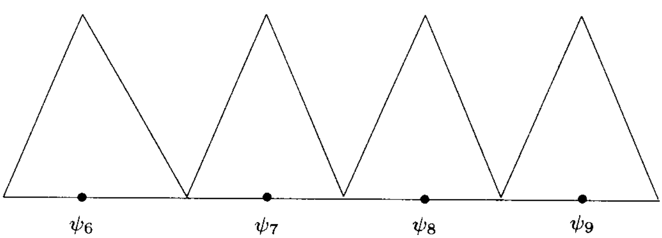

图 10.1.3　S_2

由分层基的定义可知, 第零层上的分层基即为 ψ_1, ψ_2, ψ_3, 第一层上的分层基即为 $\psi_1, \cdots, \psi_5$, 第二层上的分层基即为 $\psi_1, \cdots, \psi_9$.

10.1.2 一些基本结果

对任意的 $v \in V_L$, 定义

$$|v|_*^2 = \sum_{l=1}^{L} \sum_{a \in N_l \setminus N_{l-1}} |(I_l v - I_{l-1} v)(a)|^2. \tag{10.1.3}$$

如果 v 由分层基表示, 则不难看出计算 (10.1.3) 即是计算分层基 (除初水平) 展开式系数的平方和. 首先给出一些有用的引理.

引理 10.1.1 令 K 是直径为 H 的三角形, 它通过图 9.1.1 方式加密成直径为 h 的若干小三角形, 又令 v 是 K 上的连续函数, 并且在小三角形上分片线性, 则有

$$\|v\|_{0,\infty,K} \le C\Big(\log\frac{H}{h}+1\Big)^{\frac{1}{2}}(|v|_{1,K}^2 + H^{-2}\|v\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}}. \tag{10.1.4}$$

证明 假设 $H = O(1)$, 由 Sobolev 嵌入定理可知 [65]

$$\|v\|_{L^p(K)} \le C\sqrt{p}\|v\|_{1,K}.$$

又由逆估计可得

$$\begin{aligned}\|v\|_{0,\infty,K} &\le Ch^{-\frac{2}{p}}\|v\|_{L^p(K)}\\ &\le Ch^{-\frac{2}{p}}\sqrt{p}\|v\|_{1,K}.\end{aligned}$$

令 $p = \log\dfrac{1}{h}$, 则

$$\|v\|_{0,\infty,K} \le C\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{1,K}.$$

定义 $C_0 = \dfrac{1}{|K|}\displaystyle\int_K v\mathrm{d}x$, 则由 Poincaré 不等式可知

$$\begin{aligned}\|v - C_0\|_{0,\infty,K} &\le C\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\frac{1}{2}}\|v - C_0\|_{1,K}\\ &\le C\Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\frac{1}{2}}|v|_{1,K},\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\|v\|_{0,\infty,K} &\le C_0 + \|v - C_0\|_{0,\infty,K} \\ &\le C\Big(\|v\|_{0,K} + \Big(\log\frac{1}{h}\Big)^{\frac{1}{2}}|v|_{1,K}\Big).\end{aligned}$$

由 scaling argument 可知

$$\begin{aligned}\|v\|_{0,\infty,K} &\le C\Big(H^{-1}\|v\|_{0,K} + \Big(\log\frac{H}{h}\Big)^{\frac{1}{2}}|v|_{1,K}\Big) \\ &\le C\Big(\log\frac{H}{h}+1\Big)^{\frac{1}{2}}(|v|_{1,K}^2 + H^{-2}\|v\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

证毕.

引理 10.1.2 在引理 10.1.1 的假设下, 又设 Iv 是分片线性函数 v 在 K 上的线性插值, 则

$$|Iv|_{1,K} \le C\Big(\log\frac{H}{h}+1\Big)^{\frac{1}{2}}|v|_{1,K}.$$

证明 设 $a_i(i=1,2,3)$ 是单元 K 的三个顶点, 容易验证 (习题)

$$\begin{aligned}|Iv|_{1,K}^2 &\le C[(v(a_1)-v(a_2))^2 + (v(a_2)-v(a_3))^2] \\ &\le C\|v\|_{0,\infty,K}^2.\end{aligned}$$

故由引理 10.1.1 可知

$$|Iv|_{1,K} \le C\Big(\log\frac{H}{h}+1\Big)^{\frac{1}{2}}(|v|_{1,K} + H^{-2}\|v\|_{0,K})^{\frac{1}{2}},$$

又注意到 v 改变一个常数, $|Iv|_{1,K}$ 不改变, 故由 Poincaré 不等式可知证式成立.

引理 10.1.3 存在与 L 无关的常数 c, C, 使

$$c|v|_*^2 \le \sum_{l=1}^{L}|I_l v - I_{l-1}v|_1^2 \le C|v|_*^2, \qquad \forall v \in V_L.$$

证明 设 K 是 $\mathcal{T}_{l-1}$ 中的三角形单元, 按图 9.1.1 方式加密, 令 $v \in S_l$, 即 v 在四个小单元内分片线性, 且 v 在 K 的顶点上的值为 0, 容易验证 (习题)

$$c|v|_{1,K}^2 \le \sum_{a \in \bar{K} \cap N_l \backslash N_{l-1}} |v(a)|^2 \le C|v|_{1,K}^2,$$

对所有的 $K \in \mathcal{T}_{l-1}$ 求和得

$$C|v|_1^2 \le \sum_{a \in N_l / N_{l-1}} |v(a)|^2 \le C|v|_1^2,$$

由 $|\cdot|_*$ 的定义即得定理的证明.

由此可得下列重要的定理.

定理 10.1.1 存在与 L 无关的常数 C, 使得对 $\forall v \in V_L$, 有

$$|I_0 v|_1^2 + |v|_*^2 \le C(L+1)^2 |v|_1^2.$$

证明 由引理 10.1.2 可知, 对 $\forall K \in \mathcal{T}_l, v \in V_L$ 有

$$\begin{aligned}|I_l v|_{1,K}^2 &\le C(\log 2^{L-l} + 1)|v|_{1,K}^2 \\ &\le C(L-l+1)|v|_{1,K}^2, \ l \le L.\end{aligned}$$

对所有的 K 求和, 即得

$$|I_l v|_1 \le C(L-l+1)^{\frac{1}{2}} |v|_1,$$

于是由引理 10.1.3 及上式可得

$$
\begin{aligned}
|I_0 v|_1^2 + |v|_*^2 &\le C\Big(|I_0 v|_1^2 + \sum_{l=1}^{L} |I_l v - I_{l-1} v|_1^2\Big) \\
&\le C\Big(|I_0 v|_1^2 + \sum_{l=1}^{L}(|I_l v|_1^2 + |I_{l-1} v|_1^2)\Big) \\
&\le C\sum_{l=0}^{L} |I_l v|_1^2 \\
&\le C\sum_{l=0}^{L}(L-l+1)|v|_1^2 \\
&\le C(L+1)^2|v|_1^2,
\end{aligned}
$$

从而证式成立.

10.1.3 强 Cauchy-Schwarz 不等式

引理 10.1.4 设 $l \le m$, 则

$$
a(v,w) \le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l} h_m^{-1} |v|_1 \|w\|_0, \quad \forall v \in V_l, w \in V_m,
$$

此处 $a(v,w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \mathrm{d}x$.

证明 只须证明, 对 $\forall K \in \mathcal{T}_l$, 下式成立

$$
\int_K \nabla v \cdot \nabla w \mathrm{d}x \le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l} h_m^{-1} |v|_{1,K} \|w\|_{0,K}. \tag{10.1.5}
$$

事实上, 若 (10.1.5) 成立, 则由 Cauchy-Schwarz 不等式可知

$$
\begin{aligned}
a(v,w) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_l} \int_K \nabla v \cdot \nabla w \mathrm{d}x \\
&\le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l} h_m^{-1} \sum_{K \in \mathcal{T}_l} |v|_{1,K} \|w\|_{0,K} \\
&\le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l} h_m^{-1} \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_l} |v|_{1,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_l} \|w\|_{0,K}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l} h_m^{-1} |v|_1 \|w\|_0,
\end{aligned}
$$

从而证式成立. 下面我们来证明 (10.1.5) 式.

对给定的 $w \in V_m$, 设 $w_1 \in V_m$ 表示在 K 的边界节点值为 0, 而在 K 的内部, w_1 的节点值与 w 的节点值相等的函数. 置 $w_0 = w - w_1$, 则

$$(\nabla v, \nabla w)_K = (\nabla v, \nabla w_1)_K + (\nabla v, \nabla w_0)_K.$$

因 v 在 K 上线性, 由 Green 公式可知

$$(\nabla v, \nabla w_1) = 0.$$

又设 $T = \{\tau \in \mathcal{T}_m | \bar{\tau} \cap \partial K \neq \phi\}$, 则 $\operatorname{supp}\{w_0\} \in \bar{T}$, 且有

$$|T| \le C\Big(\frac{h_l}{h_m}\Big)h_m^2 = Ch_m h_l,$$

此处 $|T|$ 表示 T 的面积.

因 ∇v 在 K 上为常数, 故

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|_{0,T} &= \frac{|T|^{\frac{1}{2}}}{|K|^{\frac{1}{2}}}\|\nabla v\|_{0,K} \\
&\le C\Big(\frac{h_m h_l}{h_l^2}\Big)^{\frac{1}{2}}\|\nabla v\|_{0,K} \\
&\le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l}\|\nabla v\|_{0,K}.
\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
\|\nabla w_0\|_{0,T}^2 &\le C\sum_{a\in N_m\cap\partial K} w_0^2(a) = C\sum_{a\in N_m\cap\partial K} w^2(a) \\
&\le Ch_m^{-2}\|w\|_{0,K}^2.
\end{aligned}$$

最后, 组合以上两个不等式可知:

$$\begin{aligned}
(\nabla v, \nabla w)_K &= (\nabla v, \nabla w_0)_T \\
&\le \|\nabla v\|_{0,T}\|\nabla w_0\|_{0,T} \\
&\le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l} h_m^{-1}|v|_{1,K}\|w\|_{0,K},
\end{aligned}$$

从而 (10.1.5) 成立.

基于上述引理, 可证下列强 Cauchy-Schwarz 不等式成立.

引理 10.1.5 对 $\forall v \in S_l, w \in S_m, l \le m$, 下列不等式成立

$$a(v,w) \le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l}|v|_1|w|_1.$$

证明 由插值估计可得

$$\begin{aligned}||w||_0 &= ||(I - I_{m-1})w||_0 \\ &\le Ch_m|w|_1, \qquad \forall w \in S_m.\end{aligned}$$

由引理 10.1.4 及上式可知引理 10.1.5 成立.

定理 10.1.2

$$|v|_1^2 \le C(|I_0v|_1^2 + |v|_*^2), \quad \forall v \in V_L.$$

证明 令 $v_0 = I_0v, v_l = I_lv - I_{l-1}v \quad (l = 1, \cdots, L)$, 则 $v_l \in S_l$. 由引理 10.1.5 可得

$$\begin{aligned}|v|_1^2 &= |\sum_{l=0}^{L} v_l|_1^2 = \sum_{l,m=0}^{L} a(v_l, v_m) \\ &\le C\sum_{l,m=0}^{L}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{|l-m|}|v_l|_1|v_m|_1.\end{aligned} \tag{10.1.6}$$

考察 $L+1$ 阶实对称矩阵 B, 其元素为

$$a_{lm} = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{|l-m|},$$

又令 $\boldsymbol{\eta}$ 是 $L+1$ 维向量, 其分量为

$$\eta_l = |v_l|_1, \quad l = 0, \cdots, L.$$

由 (10.1.6) 可知

$$|v|_1^2 \le C\langle B\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta}\rangle,$$

此处 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示向量的欧氏内积, 若 $\lambda_{\max}$ 是 B 的最大特征值, 于是有

$$|v|_1^2 \le C\lambda_{\max}\langle\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\eta}\rangle = C\lambda_{\max}\sum_{l=0}^{L}|v_l|_1^2. \tag{10.1.7}$$

又由矩阵理论可知, B 的最大特征值被 B 的最大行和界定, 即 $\lambda_{\max}$ 小于数

$$1+2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^l = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},$$

代入 (10.1.7) 并运用引理 10.1.3 即得证式.

10.1.4 分层基刚度矩阵的条件数

设 $\Omega \subset R^2$ 是有界多角形区域, 为方便起见, 仍考虑上一章的模型问题, 即 Poisson 方程 (第一类边值), l 层上有限元解 u_l 应满足

$$a(u_l, v_l) = (f, v_l), \qquad \forall v_l \in V_l. \tag{10.1.8}$$

令 $\{\hat{\varphi}_i\}_{i=1}^{N_l}$ 和 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N_l}$ 分别表示 V_l 的节点基和分层基, N_l 是空间 V_l 的维数, 用 $\hat{A}_l$ 和 A_l 分别表示 (10.1.8) 在节点基和分层基表示下的刚度矩阵.

定义离散范数

$$|||v||| = (|I_0 v|_1^2 + |v|_*^2)^{\frac{1}{2}},$$

由定理 10.1.1 和定理 10.1.2 可知, 该离散范数等价于通常的能量范, 且有如下关系

$$\frac{c}{(L+1)^2}|||v|||^2 \le |v|_1^2 \le C|||v|||_1^2, \quad \forall v \in V_L, \tag{10.1.9}$$

若设初始剖分 $h_0 = O(1)$, 故可不妨设

$$c|I_0 v|_1^2 \le \sum_{i\in N_0}(I_0 v)^2(a_i) \le C|I_0 v|_1^2,$$

所以若令

$$|||v|||_*^2 = \sum_{i \in N_0} (I_0 v)^2(a_i) + |v|_*^2,$$

则

$$\frac{C}{(L+1)^2} |||v|||_*^2 \le |v|_1^2 \le C|||v|||_*^2. \tag{10.1.10}$$

用矩阵形式描述 (10.1.10) 即有如下定理.

定理 10.1.3 分层基刚度矩阵 A_L 满足

$$\frac{C}{(L+1)^2} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \le \langle A_L \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \le C \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle,$$

即

$$K(A_L) \le CL^2.$$

尽管分层基刚度矩阵的条件数远远小于节点基刚度矩阵的条件数, 但和节点基刚度矩阵相比, 分层基刚度矩阵不是稀疏矩阵, 这意味着直接求解该代数方程仍然很困难, 更好的办法是借助于分层基与节点基之间的转换矩阵进行计算.

令 $T_l \in R^{N_L \times (N_l - N_{l-1})}$ 是有限元空间 S_l 中的节点基按有限元空间 V_L 中的节点基展开后的矩阵表示, 即

$$(\hat{\varphi}_1^l, \cdots, \hat{\varphi}_{N_l - N_{l-1}}^l) = (\hat{\varphi}_1^L, \cdots, \hat{\varphi}_{N_L}^L) T_l,$$

此处 $\hat{\varphi}_i^l \in S_l, \quad 1 \le i \le N_l - N_{l-1}$, 从而分层基和节点基之间的转换矩阵即为

$$T = (T_1, T_2, \cdots, T_L),$$

它是一个 $N_L \times N_L$ 阶的可逆矩阵, 故

$$A_L = T^{\mathrm{T}} \hat{A}_L T,$$

容易验证 (习题)

$$\mathrm{cond}(T^{\mathrm{T}} \hat{A}_L T) = \mathrm{cond}(T T^{\mathrm{T}} \hat{A}_L),$$

故也可把分层基方法看成是一种预处理方法, 此时的预条件子即为

$$TT^{\mathrm{T}}.$$

10.2 BPX 多水平方法

由于分层基方法推广到高维问题时就不够理想, 例如三维分层基刚度矩阵的条件数是 $O(h^{-1})$, 为了克服这一困难, Bramble, Pasciak 和 Xu 提出了另外一种多水平方法, 现在很多文献都称其为 BPX 多水平方法. 该法的基本思想是用 L^2 投影代替插值算子, 用多水平节点基代替分层基. 本节我们将证明 BPX 多水平方法预处理矩阵的条件数不仅与层数 L 无关而且不受维数的影响, 由于 BPX 多水平方法涉及每层上的节点基, 它的工作量比分层基要大一些.

10.2.1 L^2 投影的一些性质

在构造 BPX 多水平预条件子的时候, 关键是 L^2 投影的估计, 下面将详细讨论 L^2 投影的一些性质.

设 Q_l 是 $H_0^1(\Omega)$ 到有限元空间 V_l 上的 L^2 投影, 即

$$(Q_l v, w_l) = (v, w_l), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), w \in V_l,$$

此处 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(\Omega)$ 空间中的 L^2 内积. 则下列估计成立.

引理 10.2.1 对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$ 成立

(i) $||v - Q_l v||_0 \le Ch_l|v|_1$,

(ii) $|Q_l v|_1 \le C|v|_1$.

证明 对任意的 $v \in H_0^1(\Omega)$, 设算子 $\tilde{\pi}_l : H_0^1(\Omega) \to V_l$ 是 Clément 插值算子 (或 Scott-Zhang 插值算子 [45]), 则

$$||v - \tilde{\pi}_l v||_0 + h_l|\tilde{\pi}_l v|_1 \le Ch_l|v|_1. \qquad (10.2.1)$$

利用 L^2 投影的性质及 (10.2.1) 可得

$$||v - Q_l v||_0 \le ||v - \tilde{\pi}_l v||_0 \le Ch_l|v|_1.$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
|Q_l v|_1 &\le |Q_l v - \tilde{\pi}_l v|_1 + |\tilde{\pi}_l v|_1 \\
&\le C h_l^{-1} \|Q_l v - \tilde{\pi}_l v\|_0 + C|v|_1 \\
&\le C h_l^{-1} (\|v - Q_l v\|_0 + \|v - \tilde{\pi}_l v\|_0) + C|v|_1 \\
&\le C|v|_1,
\end{aligned}
$$

从而证式成立.

设 $P_l : H_0^1(\Omega) \to V_l$ 是 Ritz 投影算子, 即

$$
a(P_l v, w_l) = a(v, w_l), \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad w_l \in V_l.
$$

利用投影性质, 易证下列两个引理成立 (习题).

引理 10.2.2 设 R_l 是 Q_l 或 P_l, 则

(1) $R_l R_m = R_{\min(l,m)}$,

(2) $(R_l - R_{l-1})(R_m - R_{m-1}) = 0, \quad l \neq m$,

(3) $(R_l - R_{l-1}) = (I - R_{l-1}) R_l$,

此处 $0 \le l, m \le L, R_{-1} = 0$.

引理 10.2.3 对任意的 $v \in V_L$, 成立

(1) $|v|_1^2 = \sum_{l=0}^{L} |P_l v - P_{l-1} v|_1^2$,

(2) $\|v\|_0^2 = \sum_{l=0}^{L} \|Q_l v - Q_{l-1} v\|_0^2$,

此处 $P_{-1} v = Q_{-1} v = 0$.

引理 10.2.4 任意的 $v \in V_L$, 设 $v_k = (P_k - P_{k-1}) v$, 则

(1) $Q_l v_k = v_k, \quad l \ge k$,

(2) $|Q_l v_k|_1 \le C\left(\frac{h_k}{h_l}\right) |v_k|_1 \le C\left(\frac{1}{2}\right)^{k-l} |v_k|, \quad$ 若 $l < k$.

证明 (1) 显然, 所以仅证 (2).

由逆估计及 P_{k-1} 的性质

$$\begin{aligned}|Q_l v_k|_1 &\le Ch_l^{-1}\|Q_l v_k\|_0 \le Ch_l^{-1}\|v_k\|_0\\ &= Ch_l^{-1}\|(I-P_{k-1})v_k\|_0\\ &\le C\frac{h_k}{h_l}|v_k|_1 = C\left(\frac{1}{2}\right)^{k-l}|v_k|_1,\end{aligned}$$

从而证式成立, 此处我们利用了完全正则性假设 9.1.3.

基于以上引理可得如下结论.

定理 10.2.1

$$\sum_{l=0}^{L}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1^2 \le C|v|_1^2, \qquad \forall v\in V_L.$$

证明 设 $v_k=(P_k-P_{k-1})v \quad (0\le k\le L)$, 则

$$v=\sum_{k=0}^{L}v_k,$$

此处 $P_{-1}v=0$. 由引理 10.2.4 可知 $k<l$,

$$(Q_l-Q_{l-1})v_k=0, \tag{10.2.2}$$

故

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{L}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1^2\\ =&\sum_{l=0}^{L}|(Q_l-Q_{l-1})\sum_{k=0}^{L}v_k|_1^2\\ =&\sum_{l=0}^{L}\left|\sum_{k=0}^{L}(Q_l-Q_{l-1})v_k\right|_1^2\\ =&\sum_{l=0}^{L}\left|\sum_{k=l}^{L}(Q_l-Q_{l-1})v_k\right|_1^2 \quad (\text{由}(10.2.2))\\ =&\sum_{l=0}^{L}\sum_{i,j=l}^{L}(\nabla(Q_l-Q_{l-1})v_i,\nabla(Q_l-Q_{l-1})v_j)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{i,j=0}^{L}\sum_{l=0}^{\min(i,j)}(\nabla(Q_l-Q_{l-1})v_i,\nabla(Q_l-Q_{l-1})v_j)\quad(\text{求和号交换次序})\\
&\le C\sum_{i,j=0}^{L}\sum_{l=0}^{\min(i,j)}\frac{h_i}{h_l}\cdot\frac{h_j}{h_l}|v_i|_1|v_j|_1\\
&=C\sum_{i,j=0}^{L}\frac{h_i\cdot h_j}{h_{\min(i,j)}^2}\Big(\sum_{l=0}^{\min(i,j)}\frac{h_{\min(i,j)}^2}{h_l^2}\Big)|v_i|_1|v_j|_1\\
&\le C\sum_{i,j=0}^{L}\frac{h_i\cdot h_j}{h_{\min(i,j)}^2}|v_i|_1|v_j|_1\\
&\le C\sum_{i,j=0}^{L}\left(\frac{1}{2}\right)^{|i-j|}|v_i|_1|v_j|_1,
\end{aligned}
$$

类似于定理 10.1.2 可证

$$
\sum_{i,j=0}^{L}\left(\frac{1}{2}\right)^{|i-j|}|v_i|_1|v_j|_1\le C\sum_{l=0}^{L}|v_l|_1^2=C|v|_1^2,
$$

综合以上两不等式可知定理 10.2.1 成立.

引理 10.2.5 对任意 $v,w\in V_L$, 若 $l\le m$, 则

$$
\begin{aligned}
&(\nabla(Q_l-Q_{l-1})v,\nabla(Q_m-Q_{m-1})w)\\
&\le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1|(Q_m-Q_{m-1})w|_1.
\end{aligned}
$$

证明 由引理 10.1.4 可知

$$
\begin{aligned}
&(\nabla(Q_l-Q_{l-1})v,\nabla(Q_m-Q_{m-1})w)\\
&\le C\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^{m-l}h_m^{-1}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1\|(Q_m-Q_{m-1})w\|_0.
\end{aligned}
$$

又利用引理 10.2.1, 10.2.2 可知

$$
\begin{aligned}
&\|(Q_m-Q_{m-1})w\|_0\\
&=\|(I-Q_{m-1})(Q_m-Q_{m-1})w\|_0\\
&\le Ch_m|(Q_m-Q_{m-1})w|_1\qquad(m\ge 1),\qquad(10.2.3)
\end{aligned}
$$

若 $m=0$, 则由 Poincaré 不等式及 $h_0=O(1)$ 可知 (10.2.3) 仍然成立. 组合以上不等式, 可知引理 10.2.5 成立.

定理 10.2.2 对 $\forall v\in V_L$, 成立

$$|v|_1^2\le C\sum_{l=0}^{L}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1^2.$$

证明 事实上

$$\begin{aligned}|v|_1^2&=|\sum_{l=0}^{L}(Q_l-Q_{l-1})v|_1^2\\&=\sum_{l,m=0}^{L}(\nabla(Q_l-Q_{l-1})v,\nabla(Q_m-Q_{m-1})v).\end{aligned}$$

由引理 10.2.5 和定理 10.1.2 类似证明思想可得

$$\begin{aligned}|v|_1^2&\le C\sum_{l,m=0}^{L}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{|l-m|}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1|(Q_m-Q_{m-1})v|_1\\&\le C\sum_{l=0}^{L}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1^2.\end{aligned}$$

最后, 我们有如下结论.

定理 10.2.3 对 $\forall v\in V_L$, 成立

$$c|v|_1^2\le\sum_{l=0}^{L}h_l^{-2}\|(Q_l-Q_{l-1})v\|_0^2\le C|v|_1^2.$$

证明 利用定理 10.2.2 及逆估计, 可知

$$\begin{aligned}|v|_1^2&\le C\sum_{l=0}^{L}|(Q_l-Q_{l-1})v|_1^2\\&\le C\sum_{l=0}^{L}h_l^{-2}\|(Q_l-Q_{l-1})v\|_0^2.\end{aligned}$$

另一方面, 由定理 10.2.1, 引理 10.2.3 以及事实 $h_0 = O(1)$, 可知

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{L} h_l^{-2}\|(Q_l - Q_{l-1})v\|_0^2 &= \sum_{l=0}^{L} h_l^{-2}\|(I - Q_{l-1})(Q_l - Q_{l-1})v\|_0^2 \\ &\le C\sum_{l=0}^{L} h_l^{-2}\cdot h_{l-1}^2|(Q_l - Q_{l-1})v|_1^2 \\ &\le C\sum_{l=0}^{L} |(Q_l - Q_{l-1})v|_1^2,\end{aligned}$$

从而证式成立.

10.2.2 BPX 多水平预条件子

本节我们将导出所谓的 BPX 多水平预条件子, 并证明该预条件子无论是二维还是三维情形, 预处理矩阵的条件数是最优的, 即与网格参数 h, L 无关.

定义算子 $A_L : V_L \to V_L$ 如下:

$$(A_L v, w) = a(v, w), \qquad \forall v, w \in V_L,$$

A_L 是刚度矩阵的算子形式, 已知 $\mathrm{cond}(A_L) = O(h_L^{-2})$(参见第 9 章). 为了分析方便, 本节仍用算子形式构造 BPX 预条件子, 令

$$\tilde{A}_L = \sum_{l=0}^{L} h_l^{-2}(Q_l - Q_{l-1}),$$

则

$$\begin{aligned}(\tilde{A}_L v, v) &= \Big(\sum_{l=0}^{L} h_l^{-2}(Q_l - Q_{l-1})v, v\Big) \\ &= \sum_{l=0}^{L} h_l^{-2}\|(Q_l - Q_{l-1})v\|_0^2,\end{aligned}$$

故由定理 10.2.3 可知

$$c(A_L v, v) \le (\tilde{A}_L v, v) \le C(A_L v, v), \qquad \forall v \in V_L. \tag{10.2.4}$$

由 (10.2.4) 可得 (习题, 见文献 [59])

$$c(\tilde{A}_L^{-1} v, v) \le (A_L^{-1} v, v) \le C(\tilde{A}_L^{-1} v, v), \quad \forall v \in V_L, \tag{10.2.5}$$

且 $\tilde{A}_L^{-1}$ 可具体表示为 (习题)

$$\tilde{A}_L^{-1} = \sum_{l=0}^{L} h_l^2 (Q_l - Q_{l-1}). \tag{10.2.6}$$

又令

$$\hat{B} = \sum_{l=0}^{L} h_l^2 Q_l. \tag{10.2.7}$$

引理 10.2.6 对 $\forall v \in V_L$, 下式成立

$$(\tilde{A}_L^{-1} v, v) \le (\hat{B} v, v) \le \frac{4}{3}(\tilde{A}^{-1} v, v).$$

证明

$$\begin{aligned}
(\tilde{A}_L^{-1} v, v) &= \sum_{l=0}^{L} h_l^2 ((Q_l - Q_{l-1}) v, v) \\
&= \sum_{l=0}^{L} h_l^2 (Q_l v, v) - \sum_{l=0}^{L-1} h_{l+1}^2 (Q_l v, v) \\
&= \sum_{l=0}^{L} h_l^2 (Q_l v, v) - \sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 (Q_l v, v) + \frac{3}{4} \sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 (Q_l v, v) \\
&\qquad (\text{因} h_{l+1} = \frac{h_l}{2}),
\end{aligned}$$

故

$$(\tilde{A}^{-1} v, v) \le \sum_{l=0}^{L} h_l^2 (Q_l v, v) = (\hat{B} v, v),$$

且

$$(\tilde{A}^{-1}v,v)\geq\frac{3}{4}\Big[h_L^2(v,v)+\sum_{l=0}^{L-1}h_l^2(Q_lv,v)\Big]=\frac{3}{4}(\hat{B}v,v),$$

组合以上两不等式可知证式成立.

定理 10.2.4 $\mathrm{cond}(\hat{B}A_L)=O(1)$.

证明 仅需证明

$$ca(v,v)\leq a(\hat{B}A_Lv,v)\leq Ca(v,v),\qquad \forall v\in V_L,$$

即

$$c(A_Lv,v)\leq(\hat{B}A_Lv,A_Lv)\leq C(A_Lv,v),\qquad \forall v\in V_L.$$

因 A_L 对称正定, 故仅需证明

$$c(A_L^{-1}v,v)\leq(\hat{B}v,v)\leq C(A_L^{-1}v,v),\qquad \forall v\in V_L.$$

由 (10.2.5) 式可知, 仅需证

$$c(\tilde{A}_L^{-1}v,v)\leq(\hat{B}v,v)\leq C(\tilde{A}_L^{-1}v,v),\qquad \forall v\in V_L.$$

由引理 10.2.6, 知证式成立.

定理 10.2.4 告诉我们, 若用 $\hat{B}$ 作为预条件子, 预处理矩阵的条件数是最优的, 但 $\hat{B}$ 要计算每层的 L^2 投影, 即涉及到要计算 Gram 矩阵的逆, 故实际计算难以实现. 下面将构造 $\hat{B}$ 的一个等价形式 B, 而且我们可以看到若用 B 作为预条件子, 实际计算将很方便.

对每层 l, 设 $\{\phi_i^l\}_{i=1}^{N_l}$ 是空间 V_l 的节点基, 定义

$$Bv=\sum_{l=0}^{L}\sum_{i=1}^{N_l}(v,\phi_i^l)\phi_i^l,\qquad \forall v\in V_L. \tag{10.2.8}$$

引理 10.2.7

$$c(\hat{B}v,v) \le (Bv,v) \le C(Bv,v).$$

证明 对 $\forall v \in V_L$,

$$(Bv,v) = \sum_{l=0}^{L}\sum_{i=1}^{N_l}(v,\phi_i^l)^2 = \sum_{l=0}^{L}\sum_{i=1}^{N_l}(Q_l v,\phi_i^l)^2.$$

另一方面

$$(\hat{B}v,v) = \left(\sum_{l=0}^{L} h_l^2 Q_l v, v\right) = \sum_{l=0}^{L} h_l^2 \|Q_l v\|_0^2.$$

所以我们仅需证明: 对 $\forall v_l \in V_l$, 下式成立

$$ch_l^{-2}\sum_{i=1}^{N_l}(v_l,\phi_i^l)^2 \le \|v_l\|_0^2 \le Ch_l^{-2}\sum_{i=1}^{N_l}(v_l,\phi_i^l)^2. \tag{10.2.9}$$

记 $v_l = \sum\limits_{i=1}^{N_l}\alpha_i\phi_i^l$, 容易验证

$$\|v_l\|_0^2 = \sum_{i,j=1}^{N_l}(\phi_i^l,\phi_j^l)\alpha_i\alpha_j = \langle M_l\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle,$$

此处 M_l 是质量矩阵, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\cdots,\alpha_{N_l})^{\mathrm{T}}$, 而

$$\sum_{i=1}^{N_l}(v_l,\phi_i^l)^2 = \sum_{i,j=1}^{N_l}\sum_{z=1}^{N_l}(\phi_i^l,\phi_z^l)(\phi_z^l,\phi_k^l)\alpha_i\alpha_k = \langle M_l^2\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}\rangle,$$

另根据引理 9.1.1 易知

$$ch_l^2\sum_{i=1}^{N_l}\alpha_i^2 \le \langle M_l\alpha,\alpha\rangle \le Ch_l^2\sum_{i=1}^{N_l}\alpha_i^2$$

和

$$ch_l^4\sum_{i=1}^{N_l}\alpha_i^2\le\langle M_l^2\alpha,\alpha\rangle\le Ch_l^4\sum_{i=1}^{N_l}\alpha_i^2,$$

组合以上四式可知 (10.2.9) 成立, 从而证式成立.

基于引理 10.2.7 和定理 10.2.4 可知如下定理.

定理 10.2.5 $\operatorname{cond}(BA_L)=O(1)$.

10.2.3 BPX 预条件子 B 的矩阵形式

首先令 $(\phi_1^l,\cdots,\phi_{N_l}^l)$ 是空间 V_l 的节点基, 定义算子 A_l 的矩阵表示 $\tilde{A}_l$ 为

$$(A_l\phi_1^l,\cdots,A_l\phi_{N_l}^l)=(\phi_1^l,\cdots,\phi_{N_l}^l)\tilde{A}_l.$$

对任意的 $v\in V_l$, 存在唯一的 $\boldsymbol{\alpha}\in R^{N_l}$, 使

$$v=\sum_{i=1}^{N_l}\alpha_i\phi_{N_l}^l=(\phi_1^l,\cdots,\phi_{N_l}^l)\boldsymbol{\alpha},$$

故可把 $\boldsymbol{\alpha}$ 看成是函数 v 的矩阵表示, 即 $\tilde{v}\triangleq\boldsymbol{\alpha}$. 则由上面的定义容易验证

$$\widetilde{A_lB_l}=\tilde{A}_l\tilde{B}_l,\quad \widetilde{A_lv}=\tilde{A}_l\tilde{v}.$$

又定义

$$\mathcal{M}_l=((\phi_i^l,\phi_j^l))_{N_l\times N_l},\mathcal{A}_l=(a(\phi_i^l,\phi_j^l))_{N_l\times N_l}=((A_l\phi_i^l,\phi_j^l))_{N_l\times N_l},$$

即 $\mathcal{M}_l,\mathcal{A}_l$ 是 l 层上的质量矩阵和刚度矩阵, 容易验证

$$\mathcal{A}_l=\mathcal{M}_l\tilde{A}_l,\tag{10.2.10}$$

上式说明了算子 A_l 的矩阵表示 $\tilde{A}_l$ 与刚度矩阵 $\mathcal{A}_l$ 的关系. 对 $\forall v\in V_l$, 定义

$$R_l v = \sum_{i=1}^{N_l} (v, \phi_i^l) \phi_i^l, \tag{10.2.11}$$

容易验证算子 R_l 的矩阵表示为

$$\tilde{R}_l = \mathcal{M}_l.$$

下面我们将详细的讨论预条件子 B 的矩阵形式. 对 $\forall v \in V_L$,

$$\begin{aligned} Bv &= \sum_{l=0}^{L} \sum_{i=1}^{N_l} (v, \phi_i^l) \phi_i^l \\ &= \sum_{l=0}^{L} \sum_{i=1}^{N_l} (Q_l v, \phi_i^l) \phi_i^l = \sum_{l=0}^{L} R_l Q_l v. \end{aligned}$$

故 B 可表示为

$$B = \sum_{l=0}^{L} R_l Q_l.$$

设 $I_l : V_l \to V_L$ 即为通常的恒同算子. 由于

$$(\phi_1^l, \cdots, \phi_{N_l}^l) = (\phi_1^L, \cdots, \phi_{N_L}^L) \mathcal{I}_l,$$

故 $\tilde{I}_l = \mathcal{I}_l$.

引理 10.2.8 设 Q_l 是 V_L 到 V_l 的 L^2 投影, 则它的矩阵表示为

$$\tilde{Q}_l = \mathcal{M}_l^{-1} \mathcal{I}_l^{\mathrm{T}} \mathcal{M}_L.$$

证明 对 $\forall v \in V_L, w \in V_L$,

$$\begin{aligned} (Q_l v, w) &= \langle \mathcal{M}_l \widetilde{Q_l v}, \tilde{w} \rangle \\ &= \langle \mathcal{M}_l \tilde{Q}_l \tilde{v}, \tilde{w} \rangle. \end{aligned}$$

另一方面

$$
\begin{aligned}
(v,w) = (v, I_l w) &= \langle \mathcal{M}_L \tilde{v}, \widetilde{I_l w} \rangle \\
&= \langle \mathcal{M}_L \tilde{v}, \mathcal{I}_l \tilde{w} \rangle \\
&= \langle \mathcal{I}_l^{\mathrm{T}} \mathcal{M}_L \tilde{v}, \tilde{w} \rangle .
\end{aligned}
$$

由 Q_l 的定义可知

$$\mathcal{M}_l \tilde{Q}_l = \mathcal{I}_l^{\mathrm{T}} \mathcal{M}_L,$$

从而证式成立. 易知预条件子

$$B = \sum_{l=0}^{L} R_l Q_l = \sum_{l=0}^{L} I_l R_l Q_l.$$

故 B 的矩阵表示为

$$\tilde{B} = \sum_{l=0}^{L} \tilde{I}_l \tilde{R}_l \tilde{Q}_l \doteq \sum_{l=0}^{L} \mathcal{I}_l \mathcal{M}_l (\mathcal{M}_l^{-1} \mathcal{I}_l^{\mathrm{T}}) \mathcal{M}_L = \sum_{l=0}^{L} \mathcal{I}_l \mathcal{I}_l^{\mathrm{T}} \mathcal{M}_L. \tag{10.2.12}$$

对刚度矩阵 A_L, BPX 预条件子 B 的矩阵形式即为

$$\mathcal{B} \triangleq \sum_{l=0}^{L} \mathcal{I}_l \mathcal{I}_l^{\mathrm{T}}.$$

定理 10.2.6 $\mathrm{cond}(\mathcal{B}\mathcal{A}_L) = O(1)$.

证明 容易验证 (习题)

$$\mathrm{cond}(BA_L) = \mathrm{cond}(\tilde{B}\tilde{A}_L),$$

又由 (10.2.12) 可知

$$\tilde{B}\tilde{A}_L = \mathcal{B}\mathcal{M}_L \tilde{A}_L = \mathcal{B}\mathcal{A}_L,$$

故 $\mathrm{cond}(\mathcal{B}\mathcal{A}_L) = \mathrm{cond}(BA_L) = O(1)$.

注 10.2.1 容易验证预条件子 $\hat{B}$ 的矩阵形式为

$$\sum_{l=0}^{L} h_l^2 \mathcal{I}_l \mathcal{M}_l^{-1} \mathcal{I}_l^{\mathrm{T}},$$

此时涉及质量矩阵 $\mathcal{M}_l$ 的求逆, 故不实用.

下面我们进一步讨论预条件子 $\mathcal{B}$ 的贯彻, 令

$$(\phi_1^l, \cdots, \phi_{N_l}^l) = (\phi_1^{l+1}, \cdots, \phi_{N_{l+1}}^{l+1})\mathcal{I}_l^{l+1},$$

则

$$\mathcal{I}_l = \mathcal{I}_{L-1}^L \cdots \mathcal{I}_l^{l+1}. \tag{10.2.13}$$

对 $0 \leq l \leq L$, 定义

$$\mathcal{B}_l = \sum_{k=0}^{l} \mathcal{I}_k^l (\mathcal{I}_k^l)^{\mathrm{T}}. \tag{10.2.14}$$

由此定义易知 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_L$, 且

$$\mathcal{B}_l = \mathcal{R}_l + \mathcal{I}_{l-1}^l \mathcal{B}_{l-1} (\mathcal{I}_{l-1}^l)^{\mathrm{T}}.$$

此处 $\mathcal{R}_l$ 是 N_l 阶单位矩阵, 从而在实际计算过程中 $\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}, \forall \boldsymbol{\alpha} \in R^{N_L}$, 可由下式递推而得

格式 ($\mathcal{B}\boldsymbol{\alpha}$ 的计算)

$$\begin{aligned}
&\quad \boldsymbol{\alpha}_J = \boldsymbol{\alpha};\\
&\text{for } l = L : 1\\
&\quad \alpha_{l-1} = (\mathcal{I}_{l-1}^l)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha}_l\\
&\text{end}\\
&\quad \boldsymbol{\beta}_0 = \boldsymbol{\alpha}_0\\
&\text{for } l = 1 : L\\
&\quad \boldsymbol{\beta}_l = \mathcal{R}_l \boldsymbol{\alpha}_l + \mathcal{I}_{l-1}^l \beta_{l-1}\\
&\text{end}\\
&\quad \mathcal{B}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}_L.
\end{aligned}$$

注 10.2.2 一般地可构造 BPX 预条件子为

$$B = \sum_{l=0}^{L} R_l^* Q_l.$$

算子 R_l^* 满足

$$ch_l^2(v,v) \le (R_l^* v, v) \le C h_l^2 (v,v), \tag{10.2.15}$$

一般的 Jacobi 迭代、对称 Gauss-Seidel 迭代均满足 (10.2.15) 式 [60].

第 11 章　区域分解法

随着并行计算机的发展, 区域分解法已成为偏微分方程数值解最有效的方法之一. 基于子区域有无重叠, 区域分解法又分为重叠型区域分解法和非重叠区域分解法. 重叠型区域分解法的原始思想来源于经典的 Schwarz 交替法, 它是由数学家 H.A. Schwarz 提出的, 但 Schwarz 的本意是借用交替法论证某些非规则区域椭圆型方程解的存在唯一性, 当时并没有引起计算数学家的注意, 该法的真正崛起是在 20 世纪 70 年代, 特别是法国数学家 P.L. Lions 巧妙地把 Schwarz 方法与投影方法联系起来, 从而大大简化了该法的收敛性分析. 本章首先介绍两子域情形 Schwarz 方法的投影解释, 进一步介绍多子域情形两水平加性 Schwarz 方法预条件子的构造. 非重叠型区域分解法较重叠型区域分解法的工作量要小, 更易于处理复杂的实际问题, 例间断系数问题, 复合材料问题等, 但非重叠型区域分解法的理论分析更复杂. 本章首先介绍一种非重叠型的 Schwarz 交替法, 然后介绍著名的 D-N 交替法, 最后介绍多子域情形 Bramble, Pasciak 和 Schatz 的子结构方法.

11.1　经典 Schwarz 交替法

本节主要介绍 P.L. Lions 对 Schwarz 交替法的投影解释. 为简单起见, 设 Ω 是 R^2 中的一个长方形区域, 分解 Ω 为两个小长方形区域 Ω_1, Ω_2 的和集, 即 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, 令 $\gamma_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2, \gamma_2 = \partial\Omega_2 \cap \Omega_1$(见图 11.1.1), 仍然考虑下列模型问题:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{在 } \Omega \text{上}, \\ u = 0, & \text{在 } \partial\Omega \text{上}, \end{cases} \tag{11.1.1}$$

此处 $f \in L^2(\Omega)$.

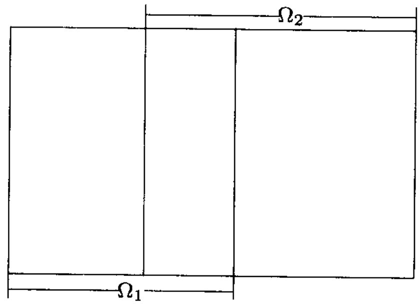

图 11.1.1

Schwarz 交替法可定义如下: 设 $u^0 \in H_0^1(\Omega), u^{2n+1}, u^{2n+2}, n = 0, 1, \cdots$, 分别满足

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n+1} = f, & \text{在 } \Omega_1 \text{上}, \\ u^{2n+1} = u^{2n}, & \text{在 } \partial\Omega_1 \text{上}, \end{cases} \tag{11.1.2}$$

及

$$\begin{cases} -\Delta u^{2n+2} = f, & \text{在 } \Omega_2 \text{上}, \\ u^{2n+2} = u^{2n+1}, & \text{在 } \partial\Omega_2 \text{上}. \end{cases} \tag{11.1.3}$$

易知 $u^{2n} \in H^1(\Omega_2), u^{2n+1} \in H^1(\Omega_1)$, 延拓 u^{2n}, u^{2n+1} 如下

$$u^{2n+1}|_{\bar{\Omega}_{22}} = u^{2n}$$

及

$$u^{2n}|_{\bar{\Omega}_{11}} = u^{2n-1},$$

此处 $\Omega_{22} = \Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1^c, \Omega_{11} = \Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2^c$.

如此延拓后的函数记为 $u^k (k = 0, 1, \cdots)$, 显然 $u^k \in H_0^1(\Omega)$, 且

$$u^{2n+1} - u^{2n} \in H_0^1(\Omega_1), \quad u^{2n+2} - u^{2n+1} \in H_0^1(\Omega_2).$$

仍然令
$$a(v,w)\triangleq\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla w\mathrm{d}x,\quad \forall v,w\in H_0^1(\Omega).$$
则 (11.1.2) 和 (11.1.3) 可表示为如下的弱解形式:
$$\begin{cases} a(u^{2n+1}-u,v_1)=0, \quad \forall v_1\in H_0^1(\Omega_1),\\ u^{2n+1}-u^{2n}\in H_0^1(\Omega_1), \end{cases}\tag{11.1.4}$$
和
$$\begin{cases} a(u^{2n+2}-u,v_2)=0, \qquad \forall v_2\in H_0^1(\Omega_2),\\ u^{2n+2}-u^{2n+1}\in H_0^1(\Omega_2). \end{cases}\tag{11.1.5}$$
置 $V=H_0^1(\Omega), V_i=H_0^1(\Omega_i), i=1,2$, 定义投影算子 $P_{V_i}:V\to V_i$ 如下:
$$a(P_{V_i}v,w_i)=a(v,w_i),\quad \forall w_i\in V_i, v\in V.$$
又由 (11.1.4) 和 (11.1.5) 可知
$$a(u^{2n+1}-u^{2n},v_1)=a(u-u^{2n},v_1),\qquad \forall v_1\in V_1,$$
$$a(u^{2n}-u^{2n-1},v_2)=a(u-u^{2n-1},v_2),\quad \forall v_2\in V_2.$$
由投影算子 P_{V_i} 的定义可知
$$u^{2n+1}-u^{2n}=P_{V_1}(u-u^{2n}),\qquad n\geq 0,\tag{11.1.6}$$
$$u^{2n}-u^{2n-1}=P_{V_2}(u-u^{2n-1}),\quad n\geq 1,\tag{11.1.7}$$
(11.1.6) 和 (11.1.7) 可以改写成
$$u-u^{2n+1}=(I-P_{V_1})(u-u^{2n}),\quad n\geq 0,$$
$$u-u^{2n}=(I-P_{V_2})(u-u^{2n-1}),\quad n\geq 1,$$
于是
$$u-u^{2n}=(I-P_{V_2})(I-P_{V_1})(u-u^{2n-2}).\tag{11.1.8}$$

所以为了估计 Schwarz 交替法的收敛率, 仅需估计算子范数 $\|(I-P_{V_2})(I-P_{V_1})\|$ 的上界. 为此, 首先介绍下面著名的 Lions 引理.

引理 11.1.1(Lions) 存在常数 $C_0>0$, 使得

$$|v|_1 \le C_0(|P_{V_1}v|_1^2+|P_{V_2}v|_1^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{11.1.9}$$

证明 首先说明 $V=V_1+V_2$. 事实上, 由单位分解定理, 对图 11.1.1 所示的区域必存在函数 $\varphi_1,\varphi_2\in W_\infty^1(\Omega)$, $\varphi_1|_{\gamma_1}=0,\varphi_2|_{\gamma_2}=0$, 且 $\varphi_1+\varphi_2\equiv 1$ 在 Ω 上, 则对 $\forall v\in V$, 必存在

$$v_1=\varphi_1 v\in V_1, \quad v_2=\varphi_2 v\in V_2,$$

且

$$v=\varphi_1 v+\varphi_2 v=v_1+v_2,$$

故

$$V=V_1+V_2.$$

鉴于此 $\{v_1,v_2\}\to v_1+v_2$ 定义了由积空间 $V_1\times V_2\to V$ 的线性满映射, 故由开映射定理可知, 存在常数 $C_0>0$, 对 $\forall v\in V$, 存在 $\{v_1,v_2\}\in V_1\times V_2$, 使

$$v=v_1+v_2,$$

且

$$(|v_1|_1^2+|v_2|_1^2)^{\frac{1}{2}}\le C_0|v|_1.$$

又

$$\begin{aligned}
|v|_1^2 &= a(v,v)=a(v,v_1)+a(v,v_2)\\
&= a(P_{V_1}v,v_1)+a(P_{V_2}v,v_2)\\
&\le (|P_{V_1}v|_1^2+|P_{V_2}v|_1^2)^{\frac{1}{2}}(|v_1|_1^2+|v_2|_1^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\le C_0|v|_1(|P_{V_1}v|_1^2+|P_{V_2}v|_1^2)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

故引理 11.1.1 成立.

定理 11.1.1 存在常数 $\alpha \in [0,1)$, 使

$$|e^{2n}|_1 \le \alpha |e^{2n-2}|_1, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

此处 $e^i = u - u^i, \quad i = 1, 2, \cdots$.

证明 由 (11.1.8) 可知, 仅需证明对 $\forall v \in V$, 存在 $\alpha \in [0,1)$, 使

$$|(I - P_{V_2})(I - P_{V_1})v|_1 \le \alpha |v|_1. \tag{11.1.10}$$

下证 (11.1.10) 成立. 用 $(I - P_{V_1})v$ 代替 (11.1.9) 中的 v, 则有

$$|(I - P_{V_1})v|_1 \le C_0 |P_{V_2}(I - P_{V_1})v|_1, \quad \forall v \in V,$$

从而

$$\begin{aligned}|(I - P_{V_1})v|_1^2 &= |(I - P_{V_2})(I - P_{V_1})v|_1^2 + |P_{V_2}(I - P_{V_1})v|_1^2 \\ &\ge |(I - P_{V_2})(I - P_{V_1})v|_1^2 + \frac{1}{C_0^2}|(I - P_{V_1})v|_1^2,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}|(I - P_{V_2})(I - P_{V_1})v|_1 &\le \left(1 - \frac{1}{C_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} |(I - P_{V_1})v|_1 \\ &\le \left(1 - \frac{1}{C_0^2}\right)^{\frac{1}{2}} |v|_1 \triangleq \alpha |v|_1,\end{aligned}$$

此处 α 即为 $\left(1 - \dfrac{1}{C_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, 从而证式成立.

注 11.1.1 对更一般的区域, 如 L 型区域, 定理 11.1.1 仍然成立. 有兴趣的读者可参见文献 [41].

11.2 两水平加性 Schwarz 方法

上一节主要介绍了两子域 Schwarz 交替法的基本思想, 这一节我们将利用该基本思想对有限元离散代数方程构造多子域的、高

度平行的预条件子, 并证明该预条件子是一个好的预条件子. 首先对区域剖分给出一个基本的引理, 它在下面的理论分析中有用.

引理 11.2.1 设 R^2 中的区域 $\Omega_1,\Omega_2,\cdots,\Omega_m$ 满足 $\bar{\Omega}\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Omega_i$, $\{\Omega_i\}_{i=1}^m$ 在区域 Ω 的每一点的重叠子区域的个数一致有界, 且存在 $\Omega_i{}'\subset\subset\Omega_i(i=1,2,\cdots,m)$, 使得 $\bar{\Omega}=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bar{\Omega}_i'$, $\delta=\min\limits_{1\le i\le m}\operatorname{dist}(\partial\Omega_i',\partial\Omega_i)>0$, 则存在单位分解 $\{\varphi_i\}_{i=1}^m, 0\le\varphi_i\le 1, \varphi_i\in C_0^\infty(\Omega_i)$, 且

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_i(x)\equiv 1,\quad x\in\Omega, \tag{11.2.1}$$

且

$$\max_{1\le i\le m}\max_{x\in R^2}|\nabla\varphi_i(x)|\le\frac{C}{\delta}.$$

证明 不难构造 Ω_i 上的函数 $\psi_i(x)\in C_0^\infty(\Omega_i)$(见文献 [38]) 使

(i) $0\le\psi_i\le 1$,

(ii) $\psi_i(x)\equiv 1$, 若$x\in\bar{\Omega}_i'$,

(iii) $|\nabla\psi_i|\le\dfrac{C}{\delta}$.

定义

$$\begin{aligned}
&\varphi_m=\psi_m,\\
&\varphi_{m-1}=\psi_{m-1}(1-\psi_m),\\
&\cdots\cdots\\
&\varphi_1=\psi_1(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_m).
\end{aligned}$$

不难看出, $0\le\varphi_i\le 1(1\le i\le m)$, 且

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_i=1-\prod_{i=1}^{m}(1-\psi_i).$$

由于对 $\forall x\in\Omega$, 总能找到 $i\in\{1,\cdots,m\}$, 使 $\psi_i(x)=1$, 故

$$\sum_{i=1}^{m}\varphi_i=1.$$

下面我们以 φ_1 为例说明这些分解函数梯度的界限.

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=\frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_m)+\psi_1\sum_{i=2}^{m}\Big[\frac{\partial(1-\psi_i)}{\partial x_1}$$
$$\times(1-\psi_2)\cdots(1-\psi_{i-1})(1-\psi_{i+1})\cdots(1-\psi_m)\Big],$$

因为在给定点上, 只有少数几个子区域重叠, 所以上述合成只有少数几个非零, 因此 $|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}|\le\frac{C}{\delta}$, 同样可证 $|\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}|\le\frac{C}{\delta}$, 从而证式成立.

仍考虑模型问题 (11.1.1), 首先对区域 Ω 作初始正规三角剖分 $\mathcal{T}_H$, 三角形 $\Omega_i(i=1,\cdots,m)$ 是初始大单元, 相互不重叠, H 是相应于初剖分的网参数. 其次对每个 Ω_i 精细加密得到网参数 h 的拟一致剖分 $\mathcal{T}_h$. 对应于剖分 $\mathcal{T}_H$ 和 $\mathcal{T}_h$, 定义连续分片线性且在 $\partial\Omega$ 上的值为 0 的函数构成的有限元空间 V_H 和 V_h, 则问题 (11.1.1) 的有限元离散方程的变分形式为

$$\begin{cases}\text{求}u_h\in V_h,\text{使得}\\ a(u_h,v_h)=(f,v_h),\quad\forall v_h\in V_h,\end{cases}\tag{11.2.2}$$

这里双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 和 $(f,\cdot)$ 的含义同上.

定义线性算子 $A_h:V_h\to V_h$ 如下:

$$(A_hv,w)=a(v,w),\quad\forall v,w\in V_h.\tag{11.2.3}$$

已知 A_h 对称正定, 且条件数为 $O(h^{-2})$.

于是变分问题 (11.2.2) 满足如下算子方程:

$$A_hu_h=f_h,\tag{11.2.4}$$

此处 f_h 满足 $(f_h,v)=(f,v),\quad\forall v\in V_h$, 即 f_h 是 f 在有限元空间 V_h 上的 L^2 投影.

下面我们将构造算子 A_h 的两水平加性 Schwarz 预条件子 B_h. 首先将 Ω_i 适当扩大为区域 ${\Omega_i}'$, 即

$$\Omega_i\subset{\Omega_i}'\subset\Omega,$$

同样要求 $\partial\Omega_i{}'$ 与有限元剖分线一致, 且存在某个正常数 δ, 使两者边界距离满足

$$\mathrm{dist}(\partial\Omega_i \cap \Omega, \partial\Omega_i{}' \cap \Omega) \geq \delta > 0,$$

δ 为正常数, 通常也称为重叠度. 又若记 $N(x)$ 为包含点 x 的子域 $\Omega_i{}'$ 的个数 $(x \in \Omega)$, 要求构造 $\Omega_i{}'$ 的过程中满足 (实际计算中很容易满足): 存在常数 N_0, 使得

$$\max_{x\in\Omega} N(x) \leq N_0.$$

定义子空间

$$V_i = \{v_h | v_h \in V_h, \text{且在}\Omega \setminus \Omega_i'\text{上}v_h = 0\}, \quad i = 1, \cdots, m.$$

将粗网格 $\mathcal{T}_H$ 上的有限元空间 V_H 记为 V_0, 显然 $V_0 \subset V_h$, 对 $i = 0, 1, 2, \cdots, m$, 定义如下算子:

(i) 线性算子 $A_i : V_i \to V_i$ 满足

$$(A_i v, w) = a(v, w), \quad \forall v, w \in V_i;$$

(ii) Ritz 投影算子 $P_i : V_h \to V_i$ 满足

$$a(P_i v, w) = a(v, w), \quad \forall v \in V_h, \quad w \in V_i;$$

(iii) L^2 投影算子 $Q_i : V_h \to V_i$ 满足

$$(Q_i v, w) = (v, w), \quad \forall v \in v_h, \quad w \in V_i.$$

由上定义容易验证

$$A_i P_i = Q_i A_h, \quad i = 0, 1, \cdots, m. \tag{11.2.5}$$

有了以上准备, 我们可以构造如下两水平加性 Schwarz 预条件子

$$B_h = \sum_{i=0}^{m} A_i^{-1} Q_i, \tag{11.2.6}$$

从而算子方程 (11.2.4) 的预处理方程为

$$B_h A_h u_h = B_h f_h. \tag{11.2.7}$$

记

$$f_i = A_i^{-1} Q_i f_h \in V_i, \tag{11.2.8}$$

则由 (11.2.5) 和 (11.2.8) 可知,(11.2.7) 可改写为

$$P u_h = g, \tag{11.2.9}$$

此处

$$P = \sum_{i=0}^{m} P_i, \quad g = \sum_{i=0}^{m} f_i. \tag{11.2.10}$$

定理 11.2.1 算子 P 关于内积 $a(\cdot,\cdot)$ 是对称正定的.

证明 首先证明对称性, 对 $\forall v, w \in V_h$,

$$\begin{aligned} a(Pv, w) &= \sum_{i=0}^{m} a(P_i v, w) \\ &= \sum_{i=0}^{m} a(P_i v, P_i w) = \sum_{i=0}^{m} a(v, P_i w) \\ &= a(v, Pw), \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

下证正定性. 显然 P 是正算子, 又由 (11.2.11) 可知, 若 $a(Pv, v) = 0$, 则 $P_i v = 0 \quad (i = 0, \cdots, m)$. 又设 $v_i \in V_i$, 使 $v = \sum\limits_{i=0}^{m} v_i$ (这样的分解存在, 见引理 11.2.2), 则

$$a(v, v) = \sum_{i=0}^{m} a(v, v_i) = \sum_{i=0}^{m} a(P_i v, v_i) = 0,$$

故 $v = 0$. 所以算子 P 正定.

由此可知, 算子方程 (11.2.9) 对应的代数方程可用 CG 方法求解. 此时, 对任意给定的 $u_h^0 \in V_h$, 计算 $P u_h^0$ 可以分解为 $m+1$ 个

子问题 $P_i u_h^0 (i=0,\cdots,m)$, 计算 $P_i u_h^0$ 的工作量很小, 且可以并行求解. 下面我们还将证明此时 $\mathrm{cond}(P)$ 将很小, 故 B_h 是一个好的预条件子.

注意在 (11.2.9) 的计算过程中, 右端 g 的计算也是高度并行的, 此时相当于在每个子域上求解下列问题

$$a(f_i, v_i) = (f, v_i), \quad \forall v_i \in V_i, \tag{11.2.12}$$

然后进行累加.

由于 CG 方法的收敛进度与 P 的条件数密切相关, 所以下面将给出它的条件数估计.

首先证明下面重要的空间分解定理, 然后利用 Lions 引理给出 P 的最小特征值的估计.

引理 11.2.2 对 $\forall v \in V_h$, 必存在分解 $v = \sum_{i=0}^{m} v_i, \quad v_i \in V_i$, 且满足

$$\sum_{i=0}^{m} a(v_i, v_i) \le C N_0 \Big(1 + \frac{H^2}{\delta^2}\Big) a(v, v). \tag{11.2.13}$$

证明 对 $\forall v \in V_h$, 令 $v_0 = Q_0 v$, 由引理 10.2.1 可知

$$||v - v_0||_0 + H|v - v_0|_1 \le CH|v|_1. \tag{11.2.14}$$

设 $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$ 是满足引理 11.2.1 的单位分解, I_h 为有限元空间 V_h 的插值算子, 令

$$v_i = I_h(\varphi_i(v - v_0)), \quad i = 1, \cdots, m.$$

容易验证

$$v = \sum_{i=0}^{m} v_i.$$

对 $\forall K \in \mathcal{T}_h$, 令 $\bar{\varphi}_{i,k} = \dfrac{1}{|K|}\displaystyle\int_K \varphi_i \mathrm{d}x$, 此处 $|K|$ 表示三角形 K 的面

积, K 的三个顶点分别记为 a_1, a_2, a_3, 又记 $w = v - v_0$, 则有

$$\begin{aligned}
|v_i|_{1,K} &= |I_h(\varphi_i w)|_{1,K} \\
&\leq |I_h(\bar{\varphi}_{i,K} w)|_{1,K} + |I_h((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)|_{1,K} \\
&= |\bar{\varphi}_{i,K} w|_{1,K} + |I_h((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)|_{1,K} \\
&\leq |w|_{1,K} + |I_h((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)|_{1,K}.
\end{aligned}$$

由逆估计及定理 9.1.1 可知

$$\begin{aligned}
|I_h((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)|_{1,K} &\leq C h_K^{-1} \|I_h((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)\|_{0,K} \\
&\leq C\Big(\sum_{j=1}^{3} [I_h((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)(a_j)]^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= C\Big(\sum_{j=1}^{3} [((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)(a_j)]^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\|\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K}\|_{0,\infty,K} \cdot \Big(\sum_{j=1}^{3} w^2(a_j)\Big)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

又易知

$$\begin{aligned}
\|\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K}\|_{0,\infty,K} &\leq C h_K |\nabla \varphi_i|_{0,\infty,K} \\
&\leq C\frac{h_K}{\delta}, \quad (\text{利用引理 } 11.2.1)
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
|I_h((\varphi_i - \bar{\varphi}_{i,K})w)|_{1,K} &\leq C\frac{h_K}{\delta}\Big(\sum_{j=1}^{3} w^2(a_j)\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C}{\delta}\|w\|_{0,K}, \quad (\text{利用引理 } 9.1.1)
\end{aligned}$$

从而

$$|v_i|_{1,K}^2 \leq C\Big(|w|_{1,K}^2 + \frac{1}{\delta^2}\|w\|_{0,K}^2\Big).$$

对所有的 $K \subset \Omega_i{}'$ 求和得

$$|v_i|_{1,\Omega_i{}'}^2 \le C\Big(|w|_{1,\Omega_i{}'}^2 + \frac{1}{\delta^2}\|w\|_{0,\Omega_i{}'}^2\Big). \qquad (11.2.15)$$

利用 $\max\limits_{x\in\Omega} N(x) \le N_0$ 及 (11.2.15) 可知

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} a(v_i, v_i) &= \sum_{i=1}^{m} |v_i|_{1,\Omega_i{}'}^2 \\
&\le C\sum_{i=1}^{m}(|w|_{1,\Omega_i{}'}^2 + \frac{1}{\delta^2}\|w\|_{0,\Omega_i{}'}^2) \quad (\text{利用}(11.2.15)) \\
&\le CN_0(|w|_1^2 + \frac{1}{\delta^2}\|w\|_0^2) \\
&\le CN_0\Big(1 + \frac{H^2}{\delta^2}\Big)a(v,v). \qquad (\text{利用}(11.2.14))
\end{aligned}$$

又因

$$a(v_0, v_0) = |Q_0 v|_1^2 \le C|v|_1^2,$$

组合以上两个不等式, 可知 (11.2.13) 成立, 从而引理 11.2.2 得证.

基于上述引理, 可得如下结论.

引理 11.2.3 对 $\forall v \in V_h$, 有

$$a(v,v) \le CN_0\Big(1 + \frac{H^2}{\delta^2}\Big)a(Pv, v).$$

证明 由引理 11.2.2 可知, 存在分解 $v = \sum\limits_{i=0}^{m} v_i, v_i \in V_i$, 且 (11.2.13) 成立, 故

$$\begin{aligned}
a(v,v) &= \sum_{i=0}^{m} a(v, v_i) = \sum_{i=0}^{m} a(P_i v, v_i) \\
&\le \Big(\sum_{i=0}^{m} a(P_i v, P_i v)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=0}^{m} a(v_i, v_i)\Big)^{\frac{1}{2}} (\text{Cauchy-Schwarz 不等式}) \\
&= \Big(\sum_{i=0}^{m} a(P_i v, v)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=0}^{m} a(v_i, v_i)\Big)^{\frac{1}{2}} \quad (P_i\text{的定义}) \\
&\le (a(Pv, v))^{\frac{1}{2}}\Big(CN_0\Big(1 + \frac{H^2}{\delta^2}\Big)a(v,v)\Big)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

上式隐含了引理 11.2.3 成立.

注 11.2.1 引理 11.2.3 是 Lions 引理在多子域情形的推广.

引理 11.2.4 对 $\forall v \in V_h$, 成立

$$a(Pv, v) \leq (1+N_0)a(v, v).$$

证明 易知

$$a(P_0 v, v) = a(P_0 v, P_0 v) \leq a(v, v). \tag{11.2.16}$$

另一方面, 若记 $a_i(v, v) = \displaystyle\int_{\Omega_i'} \nabla v \cdot \nabla v \mathrm{d}x, \forall v \in V_i$, 则由 P_i 的定义可知

$$\begin{aligned} a_i(P_i v, P_i v) &= a(P_i v, P_i v) \\ &= a(P_i v, v) = a_i(P_i v, v) \\ &\leq [a_i(P_i v, P_i v)]^{\frac{1}{2}} (a_i(v, v))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

故

$$a_i(P_i v, P_i v) \leq a_i(v, v).$$

利用事实 $\max\limits_{x \in \Omega} N(x) \leq N_0$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a(P_i v, v) &= \sum_{i=1}^m a(P_i v, P_i v) = \sum_{i=1}^m a_i(P_i v, P_i v) \\ &\leq \sum_{i=1}^m a_i(v, v) \leq N_0 a(v, v), \end{aligned} \tag{11.2.17}$$

组合 (11.2.16) 和 (11.2.17) 可知证式成立.

综合以上两个引理可得如下定理.

定理 11.2.2 $\mathrm{cond}(P) \leq C N_0^2 \Big(1 + \dfrac{H^2}{\delta^2}\Big)$.

证明 由引理 11.2.3 可知

$$\lambda_{\min}(P) = \min_{v \in V_h} \frac{a(Pv, v)}{a(v, v)} \geq \frac{C}{N_0 \Big(1 + \dfrac{H^2}{\delta^2}\Big)},$$

又由引理 11.2.4 可知

$$\lambda_{\max}(P)=\max_{v\in V_h}\frac{a(Pv,v)}{a(v,v)}\le 1+N_0,$$

故

$$\operatorname{cond}(P)=\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\le CN_0^2\Big(1+\frac{H^2}{\delta^2}\Big).$$

注 11.2.2 若重叠度 $\delta=O(H)$, 则上述预处理算子 P 的条件数是最优的.

11.3 非重叠型 Schwarz 方法

在 11.1 和 11.2 节, 我们考虑了重叠型 Schwarz 方法, 本节将给出一种非重叠 Schwarz 方法. 设 $\bar\Omega=\bar\Omega_1\cup\bar\Omega_2,\Omega_1\cap\Omega_2=\phi$. 见图 11.3.1.

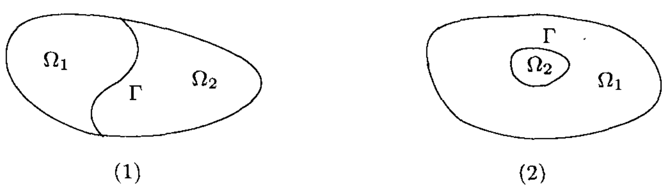

图 11.3.1

仍考察方程 (11.1.1), 设 $\Gamma=\partial\Omega_1\cap\partial\Omega_2$, 非重叠型 Schwarz 方法定义如下: 设初值 $g_i^0\in L^2(\Gamma)$, 则

$$\begin{cases}-\Delta u_i^n=f, & \text{在 }\Omega_i\text{上}\\ \dfrac{\partial u_i^n}{\partial n_i}+\lambda u_i^n=g_i^n, & \text{在 }\Gamma\text{上}\\ u_i^n=0, & \text{在 }\partial\Omega\cap\partial\Omega_i\text{上}\end{cases}\tag{11.3.1}$$

此处 n_i 表示 $\partial\Omega_i$ 的单位外法向, $\lambda>0$, 注意在 Γ 上 $n_1=-n_2$. 此外在 Γ 上定义 Robin 边界条件为

$$g_i^{n+1}=2\lambda u_{3-i}^n-g_{3-i}^n,\quad i=1,2.\tag{11.3.2}$$

对此迭代序列, 下列收敛性定理成立.

定理 11.3.1 $||u_i^n - u||_{1,\Omega_i} \to 0$, 且 $||g_i^n - (\dfrac{\partial u}{\partial n_i} + \lambda u)||_{0,\Gamma} \to 0$(当 $n \to \infty$).

证明 在 $\bar{\Omega}_i$ 上置 $e_i^n = u_i^n - u$, 且在 Ω_i 上 $e^n = e_i^n$, 又置 $G_i^n = g_i^n - \lambda u - \dfrac{\partial u}{\partial n_i} \quad (i = 1, 2)$, 仍定义

$$a(v, w) = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \mathrm{d}x, \quad \forall v, w \in H_0^1(\Omega).$$

由 Green 公式易得

$$\int_{\Omega_i} \nabla u_i^n \cdot \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Gamma (\lambda u_i^n - g_i^n) v \mathrm{d}s = \int_{\Omega_i} f v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

同样对方程 (11.1.1) 在每个子域上运用 Green 公式, 并组合上式可得

$$a(e^n, v) + \sum_{i=1}^{2} \int_\Gamma (\lambda e_i^n - G_i^n) v \mathrm{d}s = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{11.3.3}$$

由 (11.3.2) 可知

$$G_i^{n+1} = 2\lambda e_{3-i}^n - G_{3-i}^n, \quad \text{在}\Gamma\text{上}, \quad i = 1, 2.$$

置 $G^n = [G_1^n, G_2^n]$, 则

$$\begin{aligned} ||G^{n+1}||_0^2 &= \sum_{i=1}^{2} \int_\Gamma (G_i^{n+1})^2 \mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=1}^{2} \int_\Gamma |2\lambda e_i^n - G_i^n|^2 \mathrm{d}s & (11.3.4) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \Big[\int_\Gamma (G_i^n)^2 \mathrm{d}s - 4\lambda \int_\Gamma (G_i^n - \lambda e_i^n) e_i^n \mathrm{d}s \Big] \\ &= ||G^n||_0^2 - 4\lambda a(e^n, e^n), & (11.3.5) \end{aligned}$$

所以对 $\forall N > 0$,

$$4\lambda \sum_{n=0}^{N} a(e^n, e^n) = ||G^0||_0^2 - ||G^{N+1}||_0^2,$$

取 $N \to \infty$, 从而 $a(e^n, e^n) \to 0$, 所以 $||\nabla e_i^n||_{0,\Omega_i} \to 0$(当 $n \to \infty$), $i = 1, 2$.

下面分二种情形考虑.

第一, 假设 $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$ 有非零测度 ($i = 1, 2$), 见图 11.3.1(1), 则由 Poincaré 不等式可知 $||e_i^n||_{0,\Omega_i} \le C||\nabla e_i^n||_{0,\Omega_i} \to 0$, 从而 $||e_i^n||_{1,\Omega_i} \to 0$. 由迹定理易知 $||e_i^n||_{0,\Gamma} \to 0$, 从而利用 (11.3.3) 可知 $||G_i^n||_{0,\Gamma} \to 0$.

第二, 若 $\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega = \phi$(见图 11.3.1(2)), 此时 $\Gamma = \partial\Omega_2$, 由第一步类似可知 $||e_1^n||_{1,\Omega_i} \to 0$, 且 $||G_1^n||_{0,\Gamma} \to 0$, 然而, 由关系

$$G_2^{n+1} = 2\lambda e_1^n - G_1^n, \qquad \text{在 } \Gamma \text{上},$$

容易推出

$$||G_2^{n+1}||_{0,\Gamma} \to 0,$$

又由关系

$$G_1^{n+1} = 2\lambda e_2^n - G_2^n,$$

可推出

$$||e_2^n||_{0,\Gamma} \to 0,$$

又因 $||\nabla e_2^n||_{0,\Omega_2} \to 0$, 故易知

$$||e_2^n||_{1,\Omega_2} \to 0,$$

从而证式成立.

注 11.3.1 上述格式易于推广到多子域情形, 收敛性结果仍成立, 有兴趣的读者参见文献 [42].

11.4 D-N 交替法

上一节已讨论了一种非重叠型区域分解法,但该法的一个缺陷是很难获得收敛率. 本节将考察另一类非重叠型区域分解法,说明该法是几何收敛的. 在有限元离散情况,收敛率与网格参数 h 无关,即该法的收敛率是最优的.

11.4.1 Steklov-Poincaré 算子

设 $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2, \Omega_1 \cup \Omega_2 = \phi, \Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$(见图 11.3.1(1)),仍然考虑模型问题 (11.1.1),如记 $\lambda = \gamma_0 u = u|_\Gamma$,设 $u_i (i = 1, 2)$ 满足下列方程.

$$\begin{cases} -\Delta u_i = f, & \text{在 } \Omega_i \text{上}, \\ u_i = \lambda, & \text{在 } \Gamma \text{上}, \\ u_i = 0, & \text{在 } \partial\Omega \cap \partial\Omega_i \text{上}. \end{cases} \tag{11.4.1}$$

由 Green 公式可知,对 $\forall v \in H_0^1(\Omega)$,

$$-\int_\Gamma \frac{\partial u_1}{\partial n_1} v\mathrm{d}s - \int_\Gamma \frac{\partial u_2}{\partial n_2} v\mathrm{d}s + \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v\mathrm{d}x + \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v\mathrm{d}x = \int_\Omega f v\mathrm{d}x,$$

由此可知,若 λ 满足下列界面方程,

$$\frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2} = 0, \tag{11.4.2}$$

则 λ 即为子问题 (11.4.1) 的一个合适的边界条件,此时 $u = [u_1, u_2]$ 即为原问题 (11.1.1) 的解.

定义 $u_i = u_i^e + u_i^0 \quad (i = 1, 2)$,此处 u_i^e 是 λ 的调和延拓. 记 $u_i^e \triangleq E_i \lambda$,即 u_i^e 满足

$$\begin{cases} -\Delta u_i^e = 0, & \text{在 } \Omega_i \text{上}, \\ u_i^e = 0, & \text{在 } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \text{上}, \\ u_i^e = \lambda, & \text{在 } \Gamma \text{上}. \end{cases}$$

又记 $u_i^0 \triangleq -\Delta_i^{-1}f$, 此处 u_i^0 满足

$$
\begin{cases}
-\Delta u_i^0 = f, & \text{在 } \Omega_i \text{上}, \\
u_i^0 = 0, & \text{在 } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \text{上}, \\
u_i^0 = 0, & \text{在 } \Gamma \text{上}.
\end{cases}
$$

从而 (11.4.2) 等价于下列方程

$$
S\lambda = G, \quad \text{在 } \Gamma \text{上}. \tag{11.4.3}
$$

此处

$$
S\lambda \triangleq \frac{\partial E_1\lambda}{\partial n_1} + \frac{\partial E_2\lambda}{\partial n_2}, \quad G = \frac{\partial \Delta_1^{-1} f}{\partial n_1} + \frac{\partial \Delta_2^{-1} f}{\partial n_2}.
$$

特别地算子 S 可以写成

$$
S = S_1 + S_2,
$$

此处

$$
S_i\lambda \triangleq \frac{\partial E_i\lambda}{\partial n_i} \quad (i = 1, 2).
$$

算子 $S: H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 通常称为 Steklov-Poincaré 算子, 此处空间 $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \triangleq \{v|_\Gamma | v \in H_0^1(\Omega)\}$, $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是 $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的对偶空间, 算子 $S_i(i = 1, 2), S$ 是对称正定的. 事实上, 任取 $\lambda, \mu \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 由 Green 公式知

$$
\langle S_i\lambda, \mu\rangle = \int_{\Omega_i} \nabla(E_i\lambda) \cdot \nabla(E_i\mu)\mathrm{d}x,
$$

故 S_i 对称正定, 从而 S 也是对称正定的.

11.4.2 D-N 交替法

本节介绍 D-N 交替法, 它由交替求解两子域上的 Dirichlet 和 Neumann 边值问题而完成.

D-N 交替法定义如下. 给定 $g^0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,

(1) 解下列 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} -\Delta u_1^{n+1} = f, & \text{在 } \Omega_1 \text{上}, \\ u_1^{n+1} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega, \\ u_1^{n+1} = g^n, & \text{在 } \Gamma \text{上}. \end{cases} \tag{11.4.4}$$

(2) 解下列 Dirichlet-Neumann 混合边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u_2^{n+1} = f, & \text{在 } \Omega_2 \text{上}, \\ u_2^{n+1} = 0, & \text{在 } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_2^{n+1}}{\partial n_2} = \dfrac{\partial u_1^{n+1}}{\partial n_2}, & \text{在 } \Gamma \text{上}. \end{cases} \tag{11.4.5}$$

(3) 最后置

$$g^{n+1} = \theta_n \gamma_0 u_2^{n+1} + (1-\theta_n) g^n, \tag{11.4.6}$$

此处 $\gamma_0 u_2^{n+1}$ 是函数 u_2^{n+1} 在 Γ 上的限制, $0 < \theta_n < 1$ 是松弛参数.

令

$$V_i \triangleq \{v_i \in H^1(\Omega_i) | v_i|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} = 0\},\ V = H_0^1(\Omega), \quad V_i^0 \triangleq H_0^1(\Omega_i),$$
$$a_i(v_i, w_i) \triangleq \int_{\Omega_i} \nabla v_i \cdot \nabla w_i \mathrm{d}x, \quad \forall v_i, w_i \in V_i,$$
$$(v_i, w_i)_i \triangleq \int_{\Omega_i} v_i w_i \mathrm{d}x, \quad \forall v_i, w_i \in V_i,$$

此外对 $\forall v \in V_i, \gamma_0 v$ 即为 v 在 Γ 上的限制, $i = 1, 2$.

模型问题 (11.1.1) 的变分形式为: 求 $u \in V$, 使得

$$a(u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V. \tag{11.4.7}$$

下面我们就来讨论 D-N 交替格式的几何敛率, 首先引入下述引理.

引理 11.4.1 问题 (11.4.7) 等价下列分裂问题: 求 $u_1 \in V_1, u_2 \in V_2$ 使得

$$\begin{cases} a_1(u_1,v_1) = (f,v_1)_1, & \forall v_1 \in V_1^0, \\ u_1 = u_2, & \text{在 } \Gamma \text{上}, \\ a_2(u_2,v_2) = (f,v_2)_2 + (f,R_1\gamma_0 v_2)_1 - a_1(u_1,R_1\gamma_0 v_2), & \forall v_2 \in V_2, \end{cases} \tag{11.4.8}$$

此处 $R_i : H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \to V_i$ 表示任何的延拓算子. 即 u 是 (11.4.7) 的解的充分必要条件是 u_1 和 u_2 满足 (11.4.8), 此处 $u_i = u|_{\Omega_i}$.

证明 若 u 是 (11.4.7) 的解,(11.4.8) 的一、二式显然成立. 对 $\forall v_2 \in V_2$, 令

$$v = \begin{cases} R_1\gamma_0 v_2, & \text{在 } \Omega_1 \text{上}, \\ v_2, & \text{在 } \Omega_2 \text{上}. \end{cases}$$

则 $v \in H_0^1(\Omega)$, 将此 v 代入 (11.4.7) 式, 即得 (11.4.8).

另一方面, 若 u_1, u_2 满足 (11.4.8), 则置

$$u \triangleq \begin{cases} u_1, & \text{在 } \Omega_1 \text{上}, \\ u_2, & \text{在 } \Omega_2 \text{上}. \end{cases}$$

显然 $u \in H_0^1(\Omega)$, 下证 u 满足 (11.4.7), 事实上对 $\forall v \in V$, 令 $v_i = v|_{\Omega_i}$, 则

$$\begin{aligned} a(u,v) &= a_2(u_2,v_2) + a_1(u_1,v_1) \\ &= a_2(u_2,v_2) + a_1(u_1,v_1 - R_1\gamma_0 v_2) + a_1(u_1,R_1\gamma_0 v_2) \\ &= a_2(u_2,v_2) + (f,v_1 - R_1\gamma_0 v_2)_1 \\ &\quad + a_1(u_1,R_1\gamma_0 v_2) \qquad\qquad (\text{因(11.4.8)第一式}) \\ &= (f,v_2)_2 + (f,R_1\gamma_0 v_2)_1 - a_1(u_1,R_1\gamma_0 v_2) \\ &\quad + (f,v_1 - R_1\gamma_0 v_2)_1 + a_1(u_1,R_1\gamma_0 v_2) \quad (\text{因(11.4.8)第三式}) \\ &= (f,v). \end{aligned}$$

从而 u 即为 (11.4.7) 的解, 证式成立.

利用 Green 公式,(11.4.4) 和 (11.4.5) 也可写成如下等价的变分形式 (习题):

$$\begin{cases} \text{求} u_1^{n+1} \in V_1, \text{使得} \\ a_1(u_1^{n+1}, v_1) = (f, v_1)_1, \ \forall v_1 \in V_1^0, \\ u_1^{n+1} = g^n, \qquad\qquad \text{在 } \Gamma \text{上}, \end{cases} \tag{11.4.9}$$

及

$$\begin{cases} \text{求} u_2^{n+1} \in V_2, \text{使得} \\ a_2(u_2^{n+1}, v_2) = (f, v_2)_2 + (f, R_1\gamma_0 v_2)_1 \\ \qquad\qquad -a_1(u_1^{n+1}, R_1\gamma_0 v_2)_1, \quad \forall v_2 \in V_2. \end{cases} \tag{11.4.10}$$

为了理论分析的方便以及便于 D-N 格式的有限元离散, 通常把 D-N 交替方法写成如 (11.4.9)~(11.4.10) 的变分形式.

引理 11.4.2 对 $\forall g \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 存在常数 σ, τ, 使得

(1) $a_1(E_1\lambda, E_1\lambda) \le \sigma a_2(E_2\lambda, E_2\lambda)$,

(2) $a_2(E_2\lambda, E_2\lambda) \le \tau a_1(E_1\lambda, E_1\lambda)$,

此处 E_i 的定义参见 11.4.1 节.

证明 对 $\forall \lambda \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, 定义

$$\begin{aligned} |\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = & \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{(\lambda(x) - \lambda(y))^2}{|x-y|^2} \mathrm{d}s(x)\mathrm{d}s(y) \\ & + \int_\Gamma \frac{\lambda^2(x)}{|x - x(a)|} \mathrm{d}s(x) \\ & + \int_\Gamma \frac{\lambda^2(x)}{|x - x(b)|} \mathrm{d}s(x), \end{aligned} \tag{11.4.11}$$

此处 a, b 分别是 Γ 的两个端点, 对以上空间赋范

$$||\lambda||^2_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = d^{-1}||v||^2_{0,\Gamma} + |v|^2_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

此处 d 是 Γ 的弧长, 则 $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 是 Hilbert 空间 (见文献 [39]).

若要证明引理 11.4.2 成立, 只需证

$$c|\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq a_i(E_i\lambda, E_i\lambda) \leq C|\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \tag{11.4.12}$$

下面我们就来证明 (11.4.12).

设 $\tilde{v}_i$ 是 λ 在子域 Ω_i 边界 $\partial\Omega_i$ 经零延拓而得的函数, 则 $\tilde{v}_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$. 定义

$$|\tilde{v}_i|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} = \int_{\partial\Omega_i}\int_{\partial\Omega_i} \frac{(\tilde{v}_i(x) - \tilde{v}_i(y))^2}{(x-y)^2} \mathrm{d}s(x)\mathrm{d}s(y). \tag{11.4.13}$$

经一些初等计算知 (详见文献 [13])

$$c|\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq |\tilde{v}_i|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} \leq C|\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \tag{11.4.14}$$

故由迹定理及上式可知

$$|\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C|\tilde{v}_i|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} \leq Ca_i(E_i\lambda, E_i\lambda). \tag{11.4.15}$$

另一方面, 对 $\forall w_i \in V_i$, 且 $w_i|_\Gamma = \lambda (i = 1, 2)$. 根据 E_i 的定义, 有

$$a_i(E_i\lambda, w_i - E_i\lambda) = 0,$$

故

$$a_i(E_i\lambda, E_i\lambda) \leq a_i(E_i\lambda, E_i\lambda) + a(w_i - E_i\lambda, w_i - E_i\lambda) = a(w_i, w_i). \tag{11.4.16}$$

由迹定理的逆定理可知, 对 $\tilde{v}_i \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)$, 必存在 $\phi_i \in V_i$, 使得

$$a_i(\phi_i, \phi_i) \leq C|\tilde{v}_i|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} \leq C|\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \tag{11.4.17}$$

上式最后一个不等式由 (11.4.14) 而得. 组合 (11.4.16) 及 (11.4.17) 得

$$a_i(E_i\lambda, E_i\lambda) \leq C|\lambda|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \tag{11.4.18}$$

由 (11.4.15) 及 (11.4.18) 可知 (11.4.12) 成立, 从而引理 11.4.2 成立.

引理 11.4.3 设 u 是 (11.1.1) 的解, u_1^n, u_2^n 和 g^n 由 D-N 格式产生, 设 $u_i = u|_{\Omega_i}, \epsilon_i^n = u_i^n - u$, 则

$$\frac{1}{\tau} a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n) \le a_2(\epsilon_2^n, \epsilon_2^n) \le \sigma a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n).$$

证明 由引理 11.4.1 及 D-N 格式的 (11.4.9) 和 (11.4.10) 可知

$$a_1(\epsilon_1^{n+1}, v_1) = 0, \quad \forall v_1 \in V_1^0; \quad \gamma_0 \epsilon_1^{n+1} = \mu^n = g^n - \gamma_0 u, \tag{11.4.19}$$

且

$$a_2(\epsilon_2^{n+1}, v_2) = -a_1(\epsilon_1^{n+1}, R_1 \gamma_0 v_2), \quad \forall v_2 \in V_2. \tag{11.4.20}$$

由于 ϵ_1^{n+1} 是 $\gamma_0 \epsilon_1^{n+1}$ 的调和延拓, 故

$$\begin{aligned} a_2(\epsilon_2^{n+1}, v_2) &= a_1(\epsilon_1^{n+1}, E_1\gamma_0 v_2 - R_1 \gamma_0 v_2) - a_1(\epsilon_1^{n+1}, E_1 \gamma_0 v_2) \\ &= -a_1(\epsilon_1^{n+1}, E_1 \gamma_0 v_2). \end{aligned} \tag{11.4.21}$$

在 (11.4.21) 中取 $v_2 = \epsilon_2^{n+1}$, 得

$$\begin{aligned} a_2(\epsilon_2^{n+1}, \epsilon_2^{n+1}) &= -a_1(\epsilon_1^{n+1}, E_1\gamma_0 \epsilon_2^{n+1}) \\ &\le a_1(\epsilon_1^{n+1}, \epsilon_1^{n+1})^{\frac{1}{2}} a_1(E_1\gamma_0\epsilon_2^{n+1}, E_1\gamma_0\epsilon_2^{n+1})^{\frac{1}{2}} \\ &\le \sigma^{\frac{1}{2}} a_1(\epsilon_1^{n+1}, \epsilon_1^{n+1})^{\frac{1}{2}} a_2(E_2\gamma_0\epsilon_2^{n+1}, E_2\gamma_0\epsilon_2^{n+1})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

注意

$$E_2 \gamma_0 \epsilon_2^{n+1} = \epsilon_2^{n+1},$$

故

$$a_2(\epsilon_2^{n+1}, \epsilon_2^{n+1}) \le \sigma a_1(\epsilon_1^{n+1}, \epsilon_1^{n+1}). \tag{11.4.22}$$

另一方面, 又在 (11.4.21) 中取 $v_2 = E_2 \gamma_0 \epsilon_1^{n+1}$, 可得

$$\begin{aligned} a_1(\epsilon_1^{n+1}, \epsilon_1^{n+1}) &= -a_2(\epsilon_2^{n+1}, E_2\gamma_0\epsilon_1^{n+1}) \\ &\le a_2(\epsilon_2^{n+1}, \epsilon_2^{n+1})^{\frac{1}{2}} a_2(E_2\gamma_0\epsilon_1^{n+1}, E_2\gamma_0\epsilon_1^{n+1})^{\frac{1}{2}} \\ &\le \tau^{\frac{1}{2}} a_2(\epsilon_2^{n+1}, \epsilon_2^{n+1})^{\frac{1}{2}} a_1(\epsilon_1^{n+1}, \epsilon_1^{n+1})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

从而

$$a_1(\epsilon_1^{n+1},\epsilon_1^{n+1})\le\tau a_2(\epsilon_2^{n+1},\epsilon_2^{n+1}).\tag{11.4.23}$$

组合 (11.4.22) 和 (11.4.23) 可知证式成立.

最后, 可得下列收敛性定理.

定理 11.4.1 存在常数 $\theta^*\in(0,1)$, 使得

$$a_1(\epsilon_1^{n+1},\epsilon_1^{n+1})\le K(\theta_n)a_1(\epsilon_1^n,\epsilon_1^n),$$

此处 $K(\theta_n)<1,\forall\theta_n\in(0,\theta^*)$.

证明 在 (11.4.6) 两端同时减去 γ_0u, 可得

$$\mu^n=\theta_n\gamma_0\epsilon_2^n+(1-\theta_n)\mu^{n-1},$$

在上式两端同时作用调和延拓算子 E_1 得

$$\epsilon_1^{n+1}=\theta_nE_1\gamma_0\epsilon_2^n+(1-\theta_n)\epsilon_1^n.$$

所以

$$\begin{aligned}a_1(\epsilon_1^{n+1},\epsilon_1^{n+1})=&\theta_n^2a_1(E_1\gamma_0\epsilon_2^n,E_1\gamma_0\epsilon_2^n)+(1-\theta_n)^2a_1(\epsilon_1^n,\epsilon_1^n)\\&+2\theta_n(1-\theta_n)a_1(E_1\gamma_0\epsilon_2^n,\epsilon_1^n).\end{aligned}\tag{11.4.24}$$

逐项考察上式右端的每一项,

$$\begin{aligned}a_1(E_1\gamma_0\epsilon_2^n,E_1\gamma_0\epsilon_2^n)&\le\sigma a_2(E_2\gamma_0\epsilon_2^n,E_2\gamma_0\epsilon_2^n)\quad(\text{引理}11.4.2)\\&=\sigma a_2(\epsilon_2^n,\epsilon_2^n)\\&\le\sigma^2a_1(\epsilon_1^n,\epsilon_1^n).\qquad(\text{引理}11.4.3)\end{aligned}\tag{11.4.25}$$

又在 (11.4.21) 中取 $v_2=\epsilon_2^{n+1}$ 得

$$a_1(E_1\gamma_0\epsilon_2^n,\epsilon_1^n)=-a_2(\epsilon_2^n,\epsilon_2^n),$$

利用引理 10.4.3 及上式可得

$$a_1(E_1\gamma_0\epsilon_2^n, \epsilon_1^n) \le -\frac{1}{\tau}a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n). \tag{11.4.26}$$

组合 (11.4.24)~(11.4.26) 知

$$\begin{aligned}
&a_1(\epsilon_1^{n+1}, \epsilon_1^{n+1}) \\
&\le \sigma^2\theta_n^2 a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n) + (1-\theta_n)^2 a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n) - \frac{2\theta_n(1-\theta_n)}{\tau}a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n) \\
&= \frac{1}{\tau}[\theta_n^2(\sigma^2\tau + \tau + 2) - 2\theta_n(\tau+1) + \tau]a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n) \\
&\triangleq K(\theta_n)a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n).
\end{aligned}$$

简单计算可知, 若

$$0 < \theta_n < \theta^* = \min\left(1, \frac{2(\tau+1)}{\sigma^2\tau + \tau + 2}\right),$$

则

$$0 \le K(\theta_n) < 1,$$

从而证式成立.

注 11.4.1 因 $a_2(\epsilon_2^n, \epsilon_2^n) \le \sigma a_1(\epsilon_1^n, \epsilon_1^n)$, 再由上述定理可知 u_2^n 几何收敛于 u_2.

下面我们说明 D-N 交替法本质上等价于预处理 Richardson 迭代法.

定理 11.4.2 D-N 交替法等价于下列迭代法: 取 $g^0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$,

$$g^{n+1} = g^n + \theta_n S_2^{-1}(\mathcal{X} - Sg^n),$$

此处 $\mathcal{X} = \dfrac{\partial\Delta_1^{-1}f}{\partial n_1} - \dfrac{\partial\Delta_2^{-1}f}{\partial n_1}$.

证明 由 (11.4.5) 可知

$$\begin{cases}
-\Delta_2(u_2^{n+1} + \Delta_2^{-1}f) = 0, & \text{在 } \Omega_2\text{上}, \\
u_2^{n+1} + \Delta_2^{-1}f = 0, & \text{在 } \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega, \\
\dfrac{\partial(u_2^{n+1} + \Delta_2^{-1}f)}{\partial n_2} = -\dfrac{\partial u_1^{n+1}}{\partial n_1} - \dfrac{\partial\Delta_2^{-1}f}{\partial n_1}, & \text{在 } \Gamma\text{上}.
\end{cases}$$

故由 S_2 的定义可知

$$\gamma_0 u_2^{n+1} = \gamma_0(u_2^{n+1} + \Delta_2^{-1} f) = S_2^{-1}\Big(- \frac{\partial u_1^{n+1}}{\partial n_1} - \frac{\partial \Delta_2^{-1} f}{\partial n_1} \Big).$$

又因

$$u_1^{n+1} = E_1 g^n - \Delta_1^{-1} f,$$

故

$$\begin{aligned}\gamma_0 u_2^{n+1} &= S_2^{-1}\Big(- \frac{\partial E_1 g^n}{\partial n_1} + \frac{\partial(\Delta_1^{-1} f)}{\partial n_1} - \frac{\partial(\Delta_2^{-1} f)}{\partial n_1} \Big) \\ &= S_2^{-1}(-S_1 g^n + \mathcal{X}).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} g^{n+1} &= \theta_n S_2^{-1}(-S_1 g^n + \mathcal{X}) + (1 - \theta_n) g^n \\ &= g^n + \theta_n S_2^{-1}(\mathcal{X} - S g^n),\end{aligned}$$

从而证式成立.

11.4.3 有限元离散

上一节给出了连续情形的 D-N 交替法及其相应的收敛率. 本节我们将考虑它的有限元离散情形, 并将证明离散 D-N 交替法的收敛率与离散网格参数 h 无关, 即该算法是最优的.

设 V_h 是连续分片线性有限元空间, $V_h \subset H_0^1(\Omega)$, 定义

$$V_{h,i} = \{v_h|_{\Omega_i} | v_h \in V_h\},$$

$$V_{h,i}^0 = V_{h,i} \cap H_0^1(\Omega_i),$$

$$\Phi_h = \{v_h|_\Gamma | v_h \in V_h\} \subset H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

则类似于连续情形, 可以定义如下离散的 D-N 交替法.

置 $g_h^0 \in \Phi_h$,

$$
(1)\quad \begin{cases} 求 u_{h,1}^{n+1} \in V_{h,1}, 使得, \\ a_1(u_{h,1}^{n+1}, v_1) = (f, v_1)_1,\ \forall v_1 \in V_{h,1}^0, \\ u_{h,1}^{n+1} = g_h^n, \qquad\qquad\qquad 在\ \Gamma 上. \end{cases}
$$

$$
(2)\quad \begin{cases} 求 u_{h,2}^{n+1} \in V_{h,2}, 使得, \\ a_2(u_{h,2}^{n+1}, v_2) = (f, v_2)_2 + (f, \rho_1\gamma_0 v_2)_1 - a_1(u_{h,1}^{n+1}, \rho_1\gamma_0 v_2)_1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall v_2 \in V_{h,2}. \end{cases}
$$

(3) 最后置

$$
g_h^{n+1} = \theta_n \gamma_0 u_{h,2}^{n+1} + (1-\theta_n) g_h^n,
$$

此处 $\rho_i : \Phi_h \to V_{h,i}$ 是任意的平凡延拓.

对任意的 $\lambda_h \in \Phi_h$, 定义离散调和延拓算子 $E_{h,i} : \Phi_h \to V_{h,i}$ 如下

$$
\begin{cases} a_i(E_{h,i}\lambda_h, v_{h,i}) = 0, \quad \forall v_{h,i} \in V_{h,i}^0, \\ E_{h,i}\lambda_h = \lambda_h, \qquad\qquad 在\ \Gamma 上. \end{cases}
$$

则下述离散延拓定理成立, 该定理是证明 D-N 交替法最优的关键.

定理 11.4.3 (离散延拓定理) 对 $\forall \lambda_h \in \Phi_h$, 存在常数 σ_0, τ_0 与 h 无关, 使得

(1) $a_1(E_{h,1}\lambda_h, E_{h,1}\lambda_h) \le \sigma_0 a_2(E_{h,2}\lambda_h, E_{h,2}\lambda_h)$,

(2) $a_2(E_{h,2}\lambda_h, E_{h,2}\lambda_h) \le \tau_0 a_1(E_{h,1}\lambda_h, E_{h,1}\lambda_h)$.

证明 仅需证

$$
c_0 |\lambda_h|_{H_{00}^{\frac12}(\Gamma)} \le a_i(E_{h,i}\lambda_h, E_{h,i}\lambda_h) \le C_0 |\lambda_h|_{H_{00}^{\frac12}(\Gamma)}, \tag{11.4.27}
$$

此处 c_0, C_0 与 h 无关.

类似于引理 11.4.2, 易知

$$
c_0 |\lambda_h|_{H_{00}^{\frac12}(\Gamma)} \le a_i(E_{h,i}\lambda_h, E_{h,i}\lambda_h),
$$

另一方面, 对任意的 $w_{h,i} \in V_{h,i}$ 且 $w_{h,i}|_\Gamma = \lambda_h$, 有

$$
a_i(E_{h,i}\lambda_h, w_{h,i} - E_{h,i}\lambda_h) = 0,
$$

故类似于引理 11.4.2 可得

$$a_i(E_{h,i}\lambda_h, E_{h,i}\lambda_h) \le a_i(w_{h,i}, w_{h,i}). \tag{11.4.28}$$

又设 U_i 是 λ_h 在 Ω_i 上的调和延拓, 即

$$\begin{cases} a_i(U_i, v_i) = 0, & \forall v_i \in V_{h,i}^0, \\ U_i = \lambda_h, & \text{在 } \Gamma \text{上}. \end{cases}$$

设 $\pi_{h,i}: H^1(\Omega_i) \to V_{h,i}$ 是由 Scott-Zhang 引入的局部平均插值算子 (详见文献 [45]), 则 $\pi_{h,i}U_i \in V_{h,i}$, $\pi_{h,i}U_i - U_i \in V_i^0$, 且

$$a_i(\pi_{h,i}U_i, \pi_{h,i}U_i) \le Ca_i(U, U),$$

从而

$$\begin{aligned} a_i(E_{h,i}\lambda_h, E_{h,i}\lambda_h) &\le a_i(\pi_{h,i}U, \pi_{h,i}U) \quad (\text{由}(11.4.28)) \\ &\le Ca_i(U, U) \\ &\le C|\lambda_h|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}. \qquad (\text{由引理}10.4.2) \end{aligned}$$

从而证式成立.

定义 $\epsilon_{h,i} = u_{h,i}^n - u_{h,i}$, $\quad u_{h,i} = u_h|_{\Omega_i}$, 完全类似于引理 10.4.3 可得下列结论.

定理 11.4.4

$$\frac{1}{\tau_0}a_1(\epsilon_{h,1}^n, \epsilon_{h,1}^n) \le a_2(\epsilon_{h,2}^n, \epsilon_{h,2}^n) \le \sigma_0 a_1(\epsilon_{h,1}^n, \epsilon_{h,1}^n).$$

由上述定理, 且完全类似于定理 11.4.1 可得下列结论.

定理 11.4.5 存在常数 $\bar{\theta}^* \in (0,1)$ 使

$$a_1(\epsilon_{h,1}^{n+1}, \epsilon_{h,1}^{n+1}) \le \bar{K}(\theta_n) a_1(\epsilon_{h,1}^n, \epsilon_{h,1}^n),$$

此处 $\bar{K}(\theta_n) < 1$, $\quad \forall \theta_n \in (0, \theta^*)$, $\quad \theta^* = \min\left(1, \dfrac{2(\tau_0+1)}{\lambda_0^2\tau_0 + \tau_0 + 2}\right)$.

11.4.4 矩阵形式

设 $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_h}$ 是 V_h 的结点基函数, 令 $\{\phi_i^k\}(k=1,2)$ 是与 $\Omega_k(k=1,2)$ 有关的基函数, $\{\phi_i^\Gamma\}$ 是与 Γ 有关的基函数, 令

$$u_h=\sum_{i=1}^{N_1}\alpha_i^1\phi_i^1+\sum_{i=1}^{N_2}\alpha_i^2\phi_i^2+\sum_{i=1}^{N_\Gamma}\alpha_i^\Gamma\phi_i^\Gamma$$

是有限元解, 又令

$$\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}=\{\alpha_1^1,\cdots,\alpha_{N_1}^1\},\quad \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}=\{\alpha_1^2,\cdots,\alpha_{N_2}^2\},\quad \boldsymbol{U}_\Gamma^{\mathrm{T}}=\{\alpha_1^\Gamma,\cdots,\alpha_{N_\Gamma}^\Gamma\},$$

且

$$\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}=((f,\phi_1^i),\cdots,(f,\phi_{N_i}^i)),\quad \boldsymbol{F}_\Gamma^{\mathrm{T}}=((f,\phi_1^\Gamma),\cdots,(f,\phi_{N_\Gamma}^\Gamma)).$$

则 (11.2.2) 可以表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}A_{11}&0&A_{1\Gamma}\\0&A_{22}&A_{2\Gamma}\\A_{1\Gamma}^{\mathrm{T}}&A_{2\Gamma}^{\mathrm{T}}&A_{\Gamma\Gamma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1\\\boldsymbol{U}_2\\\boldsymbol{U}_\Gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1\\\boldsymbol{F}_2\\\boldsymbol{F}_\Gamma\end{pmatrix},\tag{11.4.29}$$

此处

$$(A_{ii})_{lj}\triangleq a_i(\phi_j^i,\phi_l^i),\quad j,l=1,\cdots,N_i.$$

此外

$$\begin{aligned}(A_{\Gamma\Gamma})_{sr}&=a_1(\phi_r^\Gamma,\phi_s^\Gamma)+a_2(\phi_r^\Gamma,\phi_s^\Gamma)\\&\triangleq(A_{\Gamma\Gamma}^{(1)})_{sr}+(A_{\Gamma\Gamma}^{(2)})_{sr},\quad s,r=1,\cdots,N_\Gamma,\end{aligned}$$

且

$$(A_{i\Gamma})_{lr}\triangleq a_i(\phi_r^\Gamma,\phi_l^i),\quad l=1,\cdots,N_i,\quad r=1,\cdots,N_\Gamma.$$

利用 Guass 块消去法 (11.4.29) 可转化为关于 $\boldsymbol{U}_\Gamma$ 的线性方程.

$$S_h\boldsymbol{U}_\Gamma=\boldsymbol{b}_\Gamma,\tag{11.4.30}$$

其中

$$S_h = A_{\Gamma\Gamma} - A_{1\Gamma}^{\mathrm{T}} A_{11}^{-1} A_{1\Gamma} - A_{2\Gamma}^{\mathrm{T}} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma},$$

$$\boldsymbol{b}_\Gamma = \boldsymbol{F}_\Gamma - A_{1\Gamma}^{\mathrm{T}} A_{11}^{-1} \boldsymbol{F}_1 - A_{2\Gamma}^{\mathrm{T}} A_{22}^{-1} \boldsymbol{F}_2.$$

显然 S_h 是对称矩阵, 通常称它为 (11.4.29) 的 Schur 补, 它本质上是 Steklov-Poincaré 算子的有限元模拟.

又分别置

$$S_h^{(1)} = A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} - A_{1\Gamma}^{\mathrm{T}} A_{11}^{-1} A_{1\Gamma},$$

$$S_h^{(2)} = A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} - A_{2\Gamma}^{\mathrm{T}} A_{22}^{-1} A_{2\Gamma},$$

故

$$S_h = S_h^{(1)} + S_h^{(2)}.$$

$S_h^{(1)}, S_h^{(2)}$ 分别是 S_1 和 S_2 的有限元模拟, 由离散延拓定理易知, $S_h^{(i)}$ 是 S_h 的最优预条件子, 即

$$\operatorname{cond}((S_h^{(i)})^{-1} S_h) \le C, \tag{11.4.31}$$

此处 C 与 h 无关.

另外, 对离散 D-N 交替格式, 下列定理成立.

定理 11.4.6 离散 D-N 交替格式等价于下列预处理 Richardson 迭代, 即

$$\boldsymbol{U}_\Gamma^{n+1} = \boldsymbol{U}_\Gamma^n + \theta_n (S_h^{(2)})^{-1} (\boldsymbol{b}_\Gamma - S_h \boldsymbol{U}_\Gamma^n).$$

证明 由 D-N 交替法的第一步可知

$$A_{11} \boldsymbol{U}_1^{n+1} = \boldsymbol{F}_1 - A_{1\Gamma} \boldsymbol{U}_\Gamma^n,$$

故

$$\boldsymbol{U}_1^{n+1} = A_{11}^{-1} \boldsymbol{F}_1 - A_{11}^{-1} A_{1\Gamma} \boldsymbol{U}_\Gamma^n. \tag{11.4.32}$$

又由 D-N 交替法的第二步可得

$$\begin{pmatrix} A_{22} & A_{2\Gamma} \\ A_{2\Gamma}^{\mathrm{T}} & A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{U}_2^{n+1} \\ \boldsymbol{U}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}_2 \\ \boldsymbol{F}_\Gamma - A_{1\Gamma}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{U}_1^{n+1} - A_{\Gamma\Gamma}^{(1)} \boldsymbol{U}_\Gamma^n \end{pmatrix}.$$

由 Guass 块消去法, 并应用 (11.4.32) 可得

$$
\begin{aligned}
S_h^{(2)}\boldsymbol{U}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} &= (A_{\Gamma\Gamma}^{(2)} - A_{2\Gamma}^{\mathrm{T}}A_{22}^{-1}A_{2\Gamma})\boldsymbol{U}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} \\
&= \boldsymbol{F}_\Gamma - A_{1\Gamma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_1^{n+1} - A_{2\Gamma}^{\mathrm{T}}A_{11}^{-1}\boldsymbol{F}_2 - A_{\Gamma\Gamma}^{(1)}\boldsymbol{U}_\Gamma^n \\
&= \boldsymbol{b}_\Gamma - S_h^{(1)}\boldsymbol{U}_\Gamma^n. \qquad (11.4.33)
\end{aligned}
$$

又由 D-N 交替法第三步可得

$$
\boldsymbol{U}_\Gamma^{n+1} = \theta_n\boldsymbol{U}_\Gamma^{n+\frac{1}{2}} + (1-\theta_n)\boldsymbol{U}_\Gamma^n.
$$

故

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_\Gamma^{n+1} &= \theta_n(S_h^{(2)})^{-1}(\boldsymbol{b}_\Gamma - S_h^{(1)}\boldsymbol{U}_\Gamma^n) + (1-\theta_n)\boldsymbol{U}_\Gamma^n \\
&= \boldsymbol{U}_\Gamma^n + \theta_n(S_h^{(2)})^{-1}(\boldsymbol{b}_\Gamma - S_h\boldsymbol{U}_\Gamma^n),
\end{aligned}
$$

从而证式成立.

11.5 子结构方法

本节考察多子域情形非重叠区域分解法, 主要介绍 Bramble, Pasciak 和 Schatz 的子结构方法. 为简单起见, 仅考虑二维情形. 设 Ω 是有界多角形区域, 令 $\{\Omega_i\}_{i=1}^{N_H}$ 是 Ω 的初始剖分, Ω_i 是三角形或凸四边形, 如图 11.5.1 所示. 为方便起见, 仅考虑 Ω_i 是三角形, Ω_i 是凸四边形的分析完全类似.

Ω_i 不属于边界 $\partial\Omega$ 的顶点称为内交点, 见图 11.5.1 中 a_5, a_6, 有内交点的区域分解法相对比较复杂, 子结构方法的基本思想就是把内交点、子区域边界结点以及区域内部结点分开处理, 该法提供了一个好的预条件子, 使得预处理迭代矩阵条件数被 $C\left(1+\log^2\left(\dfrac{H}{h}\right)\right)$ 控制, 其中 H 是初始剖分 $\{\Omega_i\}$ 的最大直径, h 是有限元网格参数, C 与 H, h 无关. 该法的另一特点是适合并行计算.

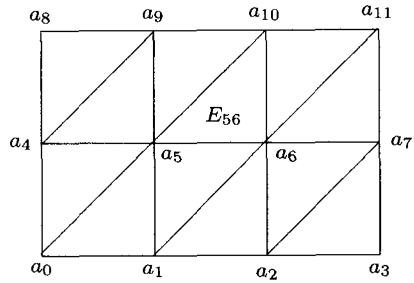

图 11.5.1　区域 Ω 及其子域 Ω_i

11.5.1　方法的描述

设初始剖分 $\{\Omega_i\}$ 是拟一致的, $\{a_i\}$ 是初始剖分的所有结点集合, 令 E_{ij} 表示子域 $\{\Omega_k\}$ 的以顶点 a_i, a_j 为端点的边. 设 V_0 是对应于初剖分的分片线性连续有限元空间, 且 $V_0 \subset H_0^1(\Omega)$. 在粗网格剖分下进一步加细网格, 且各子域在交界面上的有限元剖分是匹配的, 该三角剖分记为 $\mathcal{T}_h$, 在 $\mathcal{T}_h$ 上定义分片线性连续有限元空间 $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. 为方便起见, 本节仍考虑问题 (11.1.1), 它的有限元离散即为

$$\begin{cases} \text{求} u_h \in V_h, \text{使得}, \\ a(u_h, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_h, \end{cases} \tag{11.5.1}$$

此处 $a(\cdot,\cdot)$ 的定义同上.

本节的目的就是通过解一些相对比较小的子问题或小尺度的整体问题 (或称为粗问题), 对 (11.5.1) 构造有效的预条件子, 然后用 CG 方法求解.

首先对 V_h 中的函数作如下分解: 对 $\forall v_h \in V_h, v_h = v_h^P + v_h^H$, 此处 $v_h^P \in V_{h,1}^0 \oplus V_{h,2}^0 \oplus \cdots \oplus V_{h,N_H}^0$ 定义如下:

$$a(v_h^P, \varphi) = a(v_h, \varphi), \quad \forall \varphi \in V_{h,i}^0 \subset H_0^1(\Omega_i) \quad (i = 1, \cdots, N_H),$$

此处 $V_{h,i}^0$ 是定义在子域 Ω_i 上的连续分片线性有限元空间, 且在子域边界 $\partial\Omega_i$ 的值为 0. 注意 v_h^P 由 v_h 在 Ω_i 中内部结点值所确定,

定义

$$v_h^H \triangleq v_h - v_h^P,$$

显然 v_h^H 满足

$$a(v_h^H, \varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in V_{h,i}^0 (i = 1, \cdots, N_H).$$

通常称 v_h^H 为离散调和延拓, 它与 v_h 在子域边界 $\partial\Omega_i$ 结点上的值一致. 同时注意到上述分解在内积 $a(\cdot,\cdot)$ 意义下是正交的, 所以

$$a(v_h, v_h) = a(v_h^P, v_h^P) + a(v_h^H, v_h^H), \quad \forall v_h \in V_h.$$

设 π_H 是粗剖分上通常的结点插值算子, 令 $v_{h,0} = \pi_H v_h \in V_0, v_h^{E_{ij}} = (v_h^H - v_{h,0})|_{E_{ij}}$, 又设 $\hat{v}_{h,0}$ 是 $v_{h,0}$ 限制在子域边界上函数的离散调和延拓, $\hat{v}_h^{E_{ij}}$ 是 $v_h^{E_{ij}}$ 的离散调和延拓. 易知 $v_h^H = \hat{v}_{h,0} + \sum\limits_{E_{ij} \subset \Gamma} \hat{v}_h^{E_{ij}}$, 此处 $\Gamma = \cup_{ij} E_{ij}$.

对每条边 E_{ij}, 定义算子 $l_0 : V_h(E_{ij}) \to V_h(E_{ij})$,

$$\langle l_0 v, w \rangle_{E_{ij}} = \langle v', w' \rangle_{E_{ij}}, \quad \forall v, w \in V_h(E_{ij}),$$

此处 $V_h(E_{ij})$ 表示 E_{ij} 上的连续分片线性有限元空间, 且其函数在 E_{ij} 的端点 a_i, a_j 上的值为 0, 函数 v, w 求导是指对 E_{ij} 的孤长微分, 而

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{E_{ij}} = \int_{E_{ij}} \varphi\psi \mathrm{d}s.$$

显然如此定义的算子 l_0 是对称正定的, 故其平方根算子 $l_0^{\frac{1}{2}}$ 是有意义的.

另外对 $\forall v_0 \in V_0$, 容易验证 (习题)

$$c a(v_0, v_0) \le \sum_{E_{ij} \subset \Gamma} (v_0(a_i) - v_0(a_j))^2 \le C a(v_0, v_0). \tag{11.5.2}$$

最后, 定义如下双线性形式: 对 $\forall v_h, w_h \in V_h$,

$$b(v_h, w_h) \triangleq a(v_h^P, w_h^P) + \sum_{E_{ij}\subset\Gamma} \langle l_0^{\frac{1}{2}} v_h^{E_{ij}}, w_h^{E_{ij}} \rangle + \sum_{E_{ij}\subset\Gamma} (v_{h,0}(a_i) - v_{h,0}(a_j))(w_{h,0}(a_i) - w_{h,0}(a_j)).$$

显然 $b(\cdot,\cdot)$ 是对称的, 且有如下结论.

定理 11.5.1 存在常数 c, C(与 h, H 无关) 使得

$$cb(v_h, v_h) \le a(v_h, v_h) \le C\Big(1 + \log^2 \frac{H}{h}\Big) b(v_h, v_h).$$

下一节将证明定理 11.5.1.

基于上述定理, 对 $\forall v_h, w_h$ 若定义算子

$$(B_h v_h, w_h) = b(v_h, w_h), \quad \forall v_h, w_h \in V_h,$$

$$(A_h v_h, w_h) = a(v_h, w_h), \quad \forall v_h, w_h \in V_h,$$

则

$$\mathrm{cond}(B_h^{-1} A_h) \le C\Big(1 + \log^2 \frac{H}{h}\Big).$$

故预条件子 B_h 满足是好的预条件子的条件 (2), 下面说明 B_h^{-1} 易于贯彻且适合于平行计算, 所以 B_h 是一个好的预条件子. 也即对给定的 $g \in V_h$, 如何求解方程

$$\begin{aligned} &a(u_h^P, v_h^P) + \sum_{E_{ij}\subset\Gamma} \langle l_0^{\frac{1}{2}} u_h^{E_{ij}}, v_h^{E_{ij}} \rangle \\ &\quad + \sum_{E_{ij}\subset\Gamma} (u_{h,0}(a_i) - u_{h,0}(a_j))(v_{h,0}(a_i) - v_{h,0}(a_j)) \\ &= (g, v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

易见, 以上方程可以如下平行求解.

子结构方法求解格式

对给定的 $g \in V_h$, 若 $u_h = B_h^{-1} g$, 则 $u_h = u_h^P + u_h^H$ 可如下获得:

(1) 在每个子域 Ω_i 上: 求 $u_h^P \in V_{h,i}^0$, 使

$$a(u_h^P, v) = (g, v), \quad \forall v \in V_{h,i}^0.$$

(2) 在每条边 $E_{ij} \subset \Gamma$ 上求 $u_h^{E_{ij}} \in v_h(E_{ij})$, 使

$$\langle l_0^{\frac{1}{2}} u_h^{E_{ij}}, v\rangle_{E_{ij}} = (g, \bar{v}) - a(u_h^P, \bar{v}), \quad \forall v \in V_h(E_{ij}),$$

此处 $\bar{v} \in V_h$ 是 $v \in V_h(E_{ij})$ 的任意平凡延拓.

(3) 解下列粗网格问题: 求 $u_{h,0} \in V_0$,

$$\begin{aligned}\sum_{E_{ij}\subset\Gamma} & (u_{h,0}(a_i) - u_{h,0}(a_j))(v(a_i) - v(a_j)) \\ &= (g, \bar{v}) - a(u_h^P, \bar{v}), \quad \forall v \in V_0,\end{aligned}$$

此处 $\bar{v} \in V_h$ 是 $v|_\Gamma$ 的任意一个平凡延拓.

(4) 最后在每个子域 Ω_i 上求 $u_h^H \in V_{h,i} \hat{=} V_h|_{\Omega_i}$ 如下:

$$\begin{cases} a(u_h^H, v) = 0, & \forall v \in V_{h,i}, \\ u_h^H|_{E_{ij}} = u_{h,0}|_{E_{ij}} + u_h^{E_{ij}}. \end{cases}$$

注 11.5.1 从上述算法可看出, 子结构方法是高度平行的算法.

注 11.5.2 对规则剖分, 第二步中的方程可通过快速方法而求得, 工作量很小, 详见文献 [13]. 第三步是一个规模很小的整体问题, 由直接法可求解.

11.5.2 定理 11.5.1 的证明

引理 11.5.1 设 $v_h \in V_{h,i} \hat{=} V_h|_{\Omega_i}$ 是在子域 Ω_i 上的离散调和延拓, 则

(1) 若 v_h 在子域 Ω_i 的顶点为 0, 则

$$a_i(v_h, v_h) \le C \sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i} \langle l_0^{\frac{1}{2}} v_h, v_h\rangle_{E_{kl}},$$

此处 $a_i(v_h, v_h) = \int_{\Omega_i} \nabla v_h \cdot \nabla v_h \mathrm{d}x$.

(2) 若 v_h 在边 $E_{kl} \subset \partial\Omega_i$ 是线性函数, 则

$$a_i(v_h, v_h) \le C \sum_{E_{kl}} (v_h(a_k) - v_h(a_l))^2.$$

证明 首先证明 (1). 令 $v_h^{E_{kl}} = v_h|_{E_{kl}}$, 由迭加原理可知 $v_h = \sum_{E_{kl} \subset \partial\Omega_i} \hat{v}_h^{E_{kl}}$, 由三角不等式可知

$$a_i(v_h, v_h) \le C \sum_{E_{kl}} a_i(\hat{v}_h^{E_{kl}}, \hat{v}_h^{E_{kl}}).$$

利用延拓定理 11.4.3,

$$a_i(\hat{v}_h^{E_{kl}}, \hat{v}_h^{E_{kl}}) \le C|v_h^{E_{kl}}|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(E_{kl})}.$$

又由内插空间的理论可知

$$c|v_h^{E_{kl}}|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(E_{kl})} \le \langle l_0^{\frac{1}{2}} v_h^{E_{kl}}, v_h^{E_{kl}} \rangle_{E_{kl}} \le C|v_h^{E_{kl}}|_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(E_{kl})}, \qquad (11.5.3)$$

组合以上三个不等式可知 (1) 成立.

下证 (2) 也成立, 利用定理 11.4.3 类似可证. 若 $v_h \in V_{h,i}$ 是子域 Ω_i 上的离散调和延拓, 则

$$a_i(v_h, v_h) \le C|v_h|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)},$$

令 C 是任意常数, 则

$$a_i(v_h, v_h) = a_i(v_h - C, v_h - C) \le C|v_h - C|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)},$$

又设 v_h^* 是 Ω_i 上的线性函数, 且 $v_h^*|_{\partial\Omega_i} = (v_h - C_0)|_{\partial\Omega_i}$, 此处 $C_0 = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} v_h \mathrm{d}x$, 则由迹定理和 Poincaré 不等式可知

$$|v_h - C_0|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} = |v_h^*|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} \le Ca_i(v_h^*, v_h^*),$$

组合以上两个不等式及 (11.5.2) 可知 (2) 成立.

引理 11.5.2 设 $v_h \in V_{h,i} \hat{=} V_h|_{\Omega_i}$,

(1) 若存在 $p \in \bar{\Omega}_i$, 使 $v_h(p) = 0$, 则

$$||v_h||^2_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C\Big(1 + \log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h, v_h).$$

(2) $\displaystyle\sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i}(v_h(a_k) - v_h(a_l))^2 \leq C\Big(1 + \log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h, v_h).$

证明 由引理 10.1.1 可知

$$||v_h||^2_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C\Big(H^{-2}||v_h||^2_{0,\Omega_i} + \log\frac{H}{h}|v_h|^2_{1,\Omega_i}\Big).$$

设 $C_0 = \dfrac{1}{|\Omega_i|}\displaystyle\int_{\Omega_i} v_h \mathrm{d}x$, 则易知

$$||v_h - C_0||_{0,\Omega_i} \leq H|v_h|_{1,\Omega_i}.$$

从而

$$||v_h - C_0||^2_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C\Big(1 + \log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h, v_h),$$

又注意 $v_h(p) = 0$, 故

$$|C_0| = |C_0 - v_h(p)| \leq ||v_h - C_0||_{L^\infty(\Omega_i)},$$

由三角形不等式及以上两个不等式可知 (1) 成立.

下证 (2), 事实上

$$\begin{aligned}
&\sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i}(v_h(a_k) - v_h(a_l))^2\\
&\leq 2\sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i}[(v_h(a_k) - v(x))^2 + (v_h(a_l) - v(x))^2]\\
&\leq C||v_h - v_h(a_m)||^2_{L^\infty(\Omega_i)},
\end{aligned}$$

此处 a_m 是区域 Ω_i 的顶点, 直接应用 (1) 可知 (2) 成立.

引理 11.5.3 设 $v_h \in V_{h,i}$, 且 v_h 在 Ω_i 的顶点为 0, 又令 v_h^0 是在子域 Ω_i 上的离散调和延拓, 且 $v_h^0|_{E_{kl}}(\forall E_{kl} \subset \partial\Omega_i)$ 是线性函数, 则

$$\sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i} \langle l_0^{\frac{1}{2}} v_h, v_h\rangle_{E_{kl}} \leq C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h+v_h^0, v_h+v_h^0).$$

证明 首先证明, 若 $v_h^0=0$, 上式成立. 由 (11.5.3),(11.4.11) 可知

$$\begin{aligned}\sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i} \langle l_0^{\frac{1}{2}} v_h, v_h\rangle_{E_{kl}} &\leq C \sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i} |v_h|^2_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(E_{kl})} \\ &\leq C\Big\{||v_h||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} + \int_{E_{kl}}\Big(\frac{v_h(x)^2}{|x-a_k|}+\frac{v_h(x)^2}{|x-a_l|}\Big)\mathrm{d}s(x)\Big\}. \end{aligned} \tag{11.5.4}$$

又

$$\begin{aligned}||v_h||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} &\leq C(|C_0|^2+||v_h-C_0||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)}) \\ &\leq C||v_h-C_0||^2_{L^\infty(\Omega_i)}+||v_h-C_0||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)}.\end{aligned}$$

由引理 11.5.2 可知

$$||v_h-C_0||^2_{L^\infty(\Omega_i)} \leq C\Big(1+\log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h,v_h),$$

又由迹定理及 Poincaré 不等式易得

$$||v_h-C_0||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} \leq Ca_i(v_h,v_h),$$

组合以上三个不等式可知

$$||v_h||_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_i)} \leq C\Big(1+\log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h,v_h). \tag{11.5.5}$$

所以只需证

$$\begin{aligned}I(v_h) &\triangleq I_1(v_h)+I_2(v_h) \\ &\triangleq \int_{E_{kl}}\frac{v_h^2(x)}{|x-a_k|}\mathrm{d}s(x)+\int_{E_{kl}}\frac{v_h^2(x)}{|x-a_l|}\mathrm{d}s(x) \\ &\leq C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h,v_h).\end{aligned} \tag{11.5.6}$$

不妨假设 E_{kl} 是连接 $(0,0)$ 与 $(0,Y)$ 的线段, 并设 a_k 是初始点, 于是

$$I_1(v_h)=\int_0^Y \frac{v_h^2(0,y)}{y}\mathrm{d}y=\int_0^{y_1} \frac{v_h^2(0,y)}{y}\mathrm{d}y+\int_{y_1}^Y \frac{v_h^2(0,y)}{y}\mathrm{d}y,$$

这里 y_1 是靠近初始点的结点, 由拟一致性可知存在常数 c 和 C 使 $ch\le y_1\le Ch$, 又据 $v_h(0,0)=0$, 引理 11.5.2 及逆估计可知

$$\begin{aligned}\int_0^{y_1} \frac{v_h^2(0,y)}{y}\mathrm{d}y &\le Ch^2\|\frac{\partial v_h(0,\cdot)}{\partial y}\|^2_{L^\infty(0,y_1)}\\ &\le C\|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega_i)}\le C\Big(1+\log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h,v_h),\end{aligned}$$

另一方面

$$\int_{y_1}^Y \frac{v_h(0,y)^2}{y}\mathrm{d}y\le \|v_h\|^2_{L^\infty(\Omega_i)}\int_{y_1}^Y \frac{1}{y}\mathrm{d}y\le C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h,v_h),$$

由以上两个不等式可知

$$I_1(v_h)\le C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h,v_h). \tag{11.5.7}$$

同理可证

$$I_2(v_h)\le C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h,v_h). \tag{11.5.8}$$

由 (11.5.4)~(11.5.8) 可看出, 在情形 $v_h^0=0$ 时, 引理成立.

一般地, 首先构造函数 v_h' 满足 $v_h'(a_m)=v_h^0(a_m)$, 此处 a_m 是 Ω_i 的顶点, 同时 v_h' 满足

$$a_i(v_h',\varphi)=0,$$

对 $\forall\varphi\in v_h|_{\Omega_i}$, 且 $\varphi(a_m)=0$.

易知 $v_h+v_h^0-v_h'$ 在 Ω_i 的顶点处为 0, 故由 v_h' 的定义可知, v_h' 在内积 $a_i(\cdot,\cdot)$ 意义下与 $v_h+v_h^0-v_h'$ 正交. 由三角不等式及上面的

证明可得

$$\begin{aligned}\langle l_0^{\frac{1}{2}} v_h, v_h\rangle_{E_{kl}} &\le 2\langle l_0^{\frac{1}{2}}(v_h+v_h^0-v_h'),(v_h+v_h^0-v_h')\rangle_{E_{kl}}\\ &\quad +2\langle l_0^{\frac{1}{2}}(v_h^0-v_h'),(v_h^0-v_h')\rangle_{E_{kl}}\\ &\le C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i((v_h+v_h^0-v_h'),(v_h+v_h^0-v_h'))\\ &\quad +2\langle l_0^{\frac{1}{2}}(v_h^0-v_h'),(v_h^0-v_h')\rangle_{E_{kl}},\end{aligned}$$

又因 $v_h+v_h^0-v_h'$ 与 v_h' 正交, 故

$$a_i(v_h+v_h^0-v_h', v_h+v_h^0-v_h') \le a_i(v_h+v_h^0, v_h+v_h^0).$$

所以只需证

$$\langle l_0^{\frac{1}{2}}(v_h^0-v_h'),(v_h^0-v_h')\rangle_{E_{kl}} \le C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h+v_h^0, v_h+v_h^0). \tag{11.5.9}$$

因 $v_h^0-v_h'$ 在 Ω_i 的顶点值为 0, 故利用 (11.5.4) 及其相应的推导可得

$$\begin{aligned}&\langle l_0^{\frac{1}{2}}(v_h^0-v_h'),(v_h^0-v_h'\rangle_{E_{kl}}\\ &\le C\Big(1+\log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h^0-v_h', v_h^0-v_h')+I(v_h^0-v_h'),\end{aligned} \tag{11.5.10}$$

此处 $I(\cdot)$ 的定义同 (11.5.6).

因 $v_h^0-v_h'$ 在 $a_i(\cdot,\cdot)$ 内积意义下与 v_h' 正交, 故

$$\begin{aligned}&a_i(v_h^0-v_h', v_h^0-v_h') \le a_i(v_h^0, v_h^0)\\ &\le \sum_{E_{kl}}((v_h(a_k)+v_h^0(a_k))-(v_h(a_l)+v_h^0(a_l))) \quad (\text{引理 } 11.5.1)\\ &\le C\Big(1+\log\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h+v_h^0, v_h+v_h^0). \qquad (\text{引理 } 11.5.2)\end{aligned}$$

所以为了证明 (11.5.9), 只需证下式

$$\begin{aligned}I(v_h^0-v_h') &= I_1(v_h^0-v_h')+I_2(v_h^0-v_h')\\ &\le C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h+v_h^0, v_h+v_h^0).\end{aligned} \tag{11.5.11}$$

由三角不等式易知

$$I_1(v_h^0 - v_h') \le 2I_1(v_h^0 - v_h^0(a_k)) + 2I_1(v_h' - v_h'(a_k)).$$

利用 (11.5.7) 类似可得

$$\begin{aligned} I_1(v_h' - v_h'(a_k)) &\le C\Big(1 + \log^2 \frac{H}{h}\Big) a_i(v_h', v_h') \\ &\le C\Big(1 + \log^2 \frac{H}{h}\Big) a_i(v_h + v_h^0, v_h + v_h^0), \end{aligned} \tag{11.5.12}$$

此处利用了事实 $a_i(v_h', v_h') \le a_i(v_h + v_h^0, v_h + v_h^0)$.

又利用 v_h^0 在 E_{kl} 上的线性, 经简单计算易知

$$\begin{aligned} I_1(v_h^0 - v_h^0(a_k)) &\le C(v_h^0(a_l) - v_h^0(a_k))^2 \\ &\le C\Big(1 + \log \frac{H}{h}\Big) a_i(v_h + v_h^0, v_h + v_h^0), \end{aligned} \tag{11.5.13}$$

同样可获得 $I_2(v_h^0 - v_h')$ 的估计. 综合 (11.5.12)~(11.5.13) 可知 (11.5.11) 成立, 从而引理 11.5.3 成立.

定理 11.5.1 的证明

对 $\forall v_h \in V_h$, 可分解 $v_h = v_h^P + v_h^H$, 由 v_h^P, v_h^H 的正交性易知

$$a(v_h, v_h) = a(v_h^P, v_h^P) + a(v_h^H, v_h^H),$$

而

$$b(v_h, v_h) = a(v_h^P, v_h^P) + b(v_h^H, v_h^H).$$

故我们仅需证明下式成立

$$ca(v_h^H, v_h^H) \le b(v_h^H, v_h^H) \le C\Big(1 + \log^2 \frac{H}{h}\Big) a(v_h^H, v_h^H). \tag{11.5.14}$$

由引理 11.5.1 可知, 对每个子域 Ω_i 成立

$$a_i(v_h^H, v_h^H) \le C \sum_{E_{kl} \subset \partial\Omega_i} (\langle l_0^{\frac{1}{2}} v_h^{E_{kl}}, v_h^{E_{kl}} \rangle + (v_{h,0}(a_k) - v_{h,0}(a_l))^2).$$

对 i 求和即得 (11.5.14) 的上界估计.

另一方面, 由引理 11.5.2 和 11.5.3 可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{E_{kl}\subset\partial\Omega_i}(\langle l_0^{\frac{1}{2}}v_h^{E_{kl}}, v_h^{E_{kl}}\rangle + (v_{h,0}(v_k) - v_{h,0}(v_l))^2) \\
&\leq C\Big(1+\log^2\frac{H}{h}\Big)a_i(v_h^H, v_h^H).
\end{aligned}
$$

对 i 求和即得 (11.5.14) 的下界估计, 综上所述可知定理 11.5.1 成立.

注 11.5.3 三维问题的子结构方法相对比较复杂, 有兴趣的读者可参见文献 [51, 61].

注 11.5.4 其他情形的多子域区域分解法, 例 Neumann-Neumann 区域分解法、balancing 区域分解法等可参见文献 [43, 51, 61].

参考文献

[1] R.A. Adams. Sobolev Spaces. New York: Academic Press. 1975

[2] S. Agmon. Lectures on Elliptic Boundary Value Problems. Van Nostrand Princeton, NJ, 1965

[3] I. Babuska. Error bounds for finite element method. Numer. Math., 1971, 16: 322~333

[4] I. Babuska, and A.K. Aziz. Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. New York and London: Academic Press. 1972

[5] I. Babuska, and M. Suri. On locking and robustness in the finite element method, SIAM J.Numer. Anal., 1992, 29: 1261~1293

[6] I. Babuska, and M. Suri. Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems. Numer. Math., 1992, 62: 439~463

[7] R.E. Bank, and T. Dupont. An optimal order process for solving finite element equations. Math. Comp., 1981, 36: 35~51

[8] J. Bergh, and J. Löfstrom. Interpolation Spaces, an Introduction. Berlin: Springer-Verlag. 1916

[9] C. Bernardi. Optimal finite-element interpolation on curved domains. SIAM J. Numer. Anal., 1989, 26: 1212~1240

[10] F. Bornemann, and P. Deuflhard. The Cascadic multigrid method for elliptic problems. Numer. Math., 1996, 75: 135~152

[11] J.H. Bramble. Multigrid Methods. Pitman, 1993

[12] J.H. Bramble, and J.E. Pasciak. The analysis of smoothers for multigrid algorithms. Math. Comp., 1992, 58: 467~488

[13] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, and A.H. Schatz. The construction of preconditioners for elliptic problems by substructuring. I, Math. Comp., 1986, 46: 361~369

[14] J.H. Bramble, J.E. Pasciak, J. Wang and J. Xu. Convergence estimates for multigrid algorithm without regularity assumptions. Math. Comp., 1991, 57: 23~45

[15] S.C. Brenner. An optimal order multigrid method for P1 nonconforming finite elements. Math. Comp., 1989, 52: 1~16

[16] S.C. Brenner. An optimal order nonconforming multigrid method for the biharmonic equation. SIAM J. Numer. Anal., 1989, 26: 1124~1138

[17] S.C. Brenner, and L.R. Scott. The Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York: Spinger-Verlag. 1994

[18] S.C. Brenner, and L. Sung. Linear finite element methods for planar linear elasti- city. Math. Comp., 1992, 59: 321~338

[19] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers. RAIRO Anal. Numer., 1974, 8: 129~151

[20] F. Brezzi, and M. Fortin. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Springer-Verlag. 1991

[21] H. Brezzi, and G. Stampacchia. Sur la régularité de la solution d'inequations elliptiques. Bull. Soc. Math. France, 1968, 96: 153~180

[22] P.G. Ciarlet. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland. 1978

[23] P.G. Ciarlet. Mathematical Elasticity. vol.I: Three-dimensional Elasticity. 1988 (有中译本, 石钟慈, 王烈衡译. 北京: 科学出版社, 1991)

[24] P.G. Ciarlet, and J.L. Lions. Handbook of Numerical Analysis, vol.II: Finite Element Methods (Part 1). 1991

[25] Ph. Clément. Approxiamtion by finite element functions using local regulari zation. RAIRO Anal. Numer., 1975, 2: 77~84

[26] M. Crouzeix, and P.A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. RAIRO Anal. Numer., 1973, 3: 33~75

[27] G. Duvaut, and J.L. Lions. Inequalities in Mechanics and Physics. Berlin: Springer-Verlag. 1976

[28] R.S. Falk. Nonconforming finite element methods for the equations of linear elasticity. Math. Comp., 1991, 57: 529~550

[29] 冯康. 基于变分原理的差分格式. 应用数学与计算数学. 1965, 2 (4): 238~262

[30] 冯康, 石钟慈. 弹性结构的数学理论. 北京: 科学出版社.1981

[31] G. Fichera. Existence Theorems in Elasticity. Hnadbuch des physik. 1972: VIa/2: 347~389

[32] K.O. Friedrichs. On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality. Ann. of Math., 1947, 48

[33] V. Girault, and P. Raviart. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Berlin: Springer. 1986

[34] R. Glowinski. Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems. New York: Springer-Verlag. 1984

[35] W. Hackbusch. Multi-grid Methods and Applications. Berlin: Springer-Verlag. 1985

[36] O.A. Ladyzenskaja, and N.N. Ural'cera. Linear and Quasilinear Elliptic Equations. New York: Academic Press. 1968

[37] H. Lewy, and G. Stampacchia. on the regularity of the solution of a variational inequality. Comm. Pure Appl. Math., 1969, 22: 153~188

[38] 李立康. Sobolev 空间. 上海: 上海科技出版社.1980

[39] J.L. Lions, and E. Magenes. Non-Homogrneous Boundary Value Problems and Applications. New-York: Springer-Verlag. 1972

[40] J.L. Lions, and G. Stampacchia. Variational inequalities. Comm. Pure Appl. Math., 1967, 20: 493~519

[41] P.L. Lions. On the Schwarz alternating method I. in Proceedings of the 1st International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. R. Glowinski, G.H. Golub, G. A. Meurant, and J. Periaux, eds., SIAM, 1988, 1~42

[42] P. L. Lions. On the Schwarz alternating method III: a variant for nonoverlapping subdomains. Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. T. F. Chan, R. Glowinski, J. Periaux and O. B. Widlund eds. SIAM,

1990, 202~223

[43] J. Mandel. Balancing domain decomposition. Comm. Numer. Meth. Eng., 1993, 9: 233~241

[44] J. Nitsche. On Korn's second inequality. RAIRO Anal. Numer., 1981, 15: 237~248

[45] L. Scott, and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. Math. Comp., 1990, 54: 483~493

[46] Zhong-Ci Shi. The F-E-M-test for convergence of nonconforming finite elements. Math. Comp., 1987, 49: 391~405

[47] 石钟慈. 关于 Morley 元的误差估计, 计算数学, 1990, 12 (2): 113~118

[48] Zhong-Ci Shi, and M. Wang. Mathematical Theory of Nonstandard Finite Element Methods. Submitted

[49] Zhong-Ci Shi, and Xuejun Xu. Cascadic multigrid method for elliptic problems. East-West J. Numer. Math., 1999, 7: 199~211

[50] Zhong-Ci Shi, and Xuejun Xu. Cascadic multigrid for parabolic problem. J. Comput. Math., 2000, 18: 450~459

[51] B.F. Smith, P.E. Bjorstad, and W. D. Gropp. Domain Decomposition. Parallel Multilevel Algorithms for Elliptic Partial Differential Equations. Cambridge, UK: Cambridge University Press. 1996

[52] G. Strang, and G.J. Fix. An Analysis of the Finite Element Method. Prentice-Hall. NJ: Englewood Cliffs, 1973

[53] F. Stummel. The generalized patch test. SIAM J. Numer. Anal., 1979, 16: 449~471

[54] G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second order à coefficients discontinus. Ann. Inst. Fourier (Grebolle). 1965, 15: 189~258

[55] R. Temam. Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. 3rd revised ed. 1984

[56] 王烈衡. Stokes 问题的混合有限元分析. 计算数学, 1987, 9(1): 70~81

[57] 王烈衡, 齐禾. 关于纯位移边界条件的平面弹性问题 Locking-free 有限元格式. 计算数学, 2002, 24(2): 243~256

[58] Lie-heng Wang. On Korn's inequality. J. Comput. Math., 2003, 21: 321～324

[59] J. Xu. Theory of Multilevel Methods. Ph.D. thesis. Cornell University. 1989

[60] J. Xu. Iterative methods by space decomposition and subspace correction. SIAM Review, 1986, 34: 581～613

[61] J. Xu, and J. Zou. Some nonoverlapping domain decomposition methods. SIAM Review, 1998, 40: 857～914

[62] Xuejun Xu. On the accuracy of nonconforming quadrilateral Q1 element approximation of Navier-Stokes problem. SIAM J. Numer. Anal., 2000, 38: 17～39

[63] Xuejun Xu, and J. Chen. Multigrid for the Mortar element method for P1 nonconforming element. Numer. Math., 2001, 88: 381～398

[64] Xuejun Xu, L. Li, and W. Chen. A multigrid method for the Mortar-type Morley element approximation of a plate bending problem. SIAM J. Numer. Anal., 2002, 39: 1712～1731

[65] 应隆安. 无限元方法. 北京: 北京大学出版社. 1992

[66] K. Yosida. Functional Analysis. Springer-Verlag. 1978

[67] A. Ženišek. A general theorem on triangular finite $C^{(m)}$-element. RAIRO Anal. Numer., 1974, 2: 119～127

(O-1981.0101)

中国科学院研究生教学丛书

ISBN 7-03-013478-8

9 787030 134783 >

ISBN 7-03-013478-8
定 价: 20.00 元