

切变模量实验报告

姓名：熊逸飞
学号：PB24000048
学院：少年班学院

2025年5月4日

指导老师：曹艺蓝
学校：中国科学技术大学

摘要

本实验通过扭摆法测定了钢丝的切变模量，并对其进行了不确定度分析。实验利用双周期作差的方案将切变模量转化为了可测量量，并通过多次测量、累计统计的方法提高了测量的精度，最终测得的切变模量为 $G = 8.16(8) \times 10^{10} \text{ Pa}$ 。

关键词：扭摆；扭转模量；切变模量；不确定度分析

1 引言

切变模量是材料力学中的一个重要参数，描述了材料在剪切变形下的刚度。通过实验测定切变模量，可以为材料的力学性能分析提供重要依据。本文将介绍通过扭摆法测定切变模量的实验过程、数据处理和结果分析。

2 实验原理

对于一根上下均匀而细长的钢丝，当其一端固定，另一端施加扭矩时，钢丝会发生扭转变形。在弹性限度内，钢丝切应力 τ 正比于切应变 γ ，即：

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (2.1)$$

比例系数 G 即为切变模量。

考虑当钢丝扭转角度为 φ 时的情况，此时钢丝截面中距轴线距离为 ρ 的微元切应变为：

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dl} \quad (2.2)$$

则对于钢丝的一个截面，其恢复力矩为：

$$M = \iint_S \tau(\rho) \cdot \rho dS = \int_0^R \left(G\rho \frac{d\varphi}{dl} \right) \rho \cdot 2\pi\rho d\rho = \frac{1}{2}\pi GR^4 \frac{d\varphi}{dl} \quad (2.3)$$

由钢丝总长 L 和扭转角度 φ , 可以得到 $\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\varphi}{L}$, 代入式(2.3)可得:

$$M = \frac{1}{2}\pi GR^4 \frac{\varphi}{L} \quad (2.4)$$

再考虑钢丝与其下方的圆盘构成的扭摆, 其满足 $M = D \cdot \varphi$, 代入式(2.4)可得:

$$G = \frac{2DL}{\pi R^4} \quad (2.5)$$

又由扭摆的转动方程 $M = I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ 可得:

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}} \quad (2.6)$$

由于扭摆形状不规则, I_0 难以求得, 因此将一质量为 m 、内外半径分别为 $r_{内}, r_{外}$ 的圆环对称放在扭摆圆盘上, 构成新的系统。此时其周期为:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + \frac{1}{2}m(r_{内}^2 + r_{外}^2)}{D}} \quad (2.7)$$

联立式(2.6)与式(2.7)即可消去 I_0 , 解得:

$$D = 2\pi^2 m \frac{r_{内}^2 + r_{外}^2}{T_1^2 - T_0^2} = \frac{1}{2}\pi^2 m \frac{d_{内}^2 + d_{外}^2}{T_1^2 - T_0^2} \quad (2.8)$$

将式(2.8)代入式(2.5)可得:

$$G = \frac{\pi L m (d_{内}^2 + d_{外}^2)}{R^4 (T_1^2 - T_0^2)} = \frac{16\pi L m (d_{内}^2 + d_{外}^2)}{D_w^4 (T_1^2 - T_0^2)} \quad (2.9)$$

因此, 通过测量扭摆的周期 T_0, T_1 、圆环的质量 m 、内外直径 $d_{内}, d_{外}$ 、钢丝长度 L 和直径 D_w , 即可计算出扭转模量 D 与切变模量 G 。

3 实验装置

- 扭摆: 由圆盘、金属环、钢丝和支架组成(如右图), 其中金属环用于调整扭摆的转动惯量。
- 长度测量工具
 - ▶ 螺旋测微器: 用于测量钢丝直径;
 - ▶ 游标卡尺: 用于测量金属环内外半径;
 - ▶ 钢卷尺: 用于测量钢丝长度。
- 秒表: 用于测量扭摆的周期。

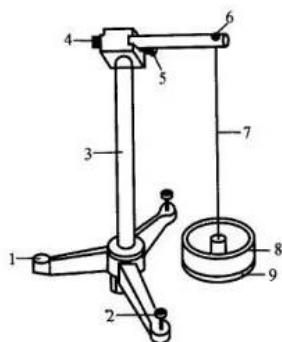


图 1 扭摆结构示意图

4 实验设计

在式(2.9)中计算 D, G 对各测量值的偏导数,代入不确定度公式 $u_c(x_c) = \sqrt{\sum_{x_i} \left(\frac{\partial x_c}{\partial x_i}\right)^2 u_{x_i}^2}$ 可得:

$$\frac{u_D}{D} = \sqrt{\left(\frac{u_m}{m}\right)^2 + \frac{(2d_{内}u_{d_{内}})^2 + (2d_{外}u_{d_{外}})^2}{(d_{内}^2 + d_{外}^2)^2} + \frac{(2T_1u_{T_1})^2 + (2T_0u_{T_0})^2}{(T_1^2 - T_0^2)^2}} \quad (4.10)$$

$$\frac{u_G}{G} = \sqrt{\left(\frac{u_L}{L}\right)^2 + \left(\frac{u_D}{D}\right)^2 + \left(\frac{4u_{D_w}}{D_w}\right)^2} \quad (4.11)$$

根据实验数据估测有:

- 钢丝长度 $L = 50\text{ cm}$, 测量误差 $\Delta L = 0.1\text{ cm}$;
- 圆环质量 $m = 0.55\text{ kg}$, 测量误差 $\Delta m = 0.1\text{ g}$;
- 圆环内外直径 $d_{内} = 80\text{ mm}, d_{外} = 100\text{ mm}$, 测量误差 $\Delta d = 0.02\text{ mm}$;
- 钢丝半径 $D_w = 0.8\text{ mm}$, 测量误差 $\Delta D_w = 0.004\text{ mm}$;
- 扭摆周期 $T_0 = 2.5\text{ s}, T_1 = 3.5\text{ s}$, 测量误差 $\Delta t = 0.2\text{ s}$.

经过估算可以得到 $\frac{4u_{D_w}}{D_w}$ 为主要误差项,因此使周期测量误差 $\frac{2\sqrt{T_1^2 + T_0^2}}{T_1^2 - T_0^2} \cdot \frac{u_t}{n} < \frac{1}{3} \cdot \frac{4u_{D_w}}{D_w}$ 即可。代入具体数据解得 $n > 43$,因此实际测量45个周期的累积时间以保证实验精度。

5 实验步骤

1. 组装并调整扭摆,使钢丝夹具在圆盘正中心,调整底座上的调节螺栓使得扭摆与水平面平行;
2. 使用螺旋测微器(先测量零误差)在钢丝上、中、下部分别测量直径 D_w ,并记录共约10组数据;
3. 使用游标卡尺(先测量零误差)测量金属环内外直径 $d_{内}, d_{外}$ 各3次,并记录数据;
4. 使用钢卷尺测量钢丝长度 L (上夹具下端至下夹具上端)3次,并记录数据;
5. 将扭摆旋转约1 rad后释放,使用秒表分别测量不带金属环、带金属环的扭摆45周期所需时间各3次,并记录数据;
6. 进行数据处理与误差分析。

6 数据处理

6.1 钢丝直径

表 1 钢丝直径数据

组别	下段			中段				上段		
	1	2	3	1	2	3	4	1	2	3
测量值 / mm	0.770	0.768	0.769	0.771	0.771	0.769	0.772	0.778	0.778	0.775

钢丝直径测量数据如上表所示,同时测得零误差为 -0.004 mm 。

经计算可得钢丝平均直径 $\bar{D}_w = \frac{1}{10} \sum D_i - D_0 = 0.776\text{ mm}$, 标准不确定度 $u_{D_w} = \sqrt{\frac{\sum [(D_i - D_0) - \bar{D}_w]^2}{10 \cdot (10 - 1)}} = 1.2 \times 10^{-3}\text{ mm}$ 。

6.2 钢丝长度

表 2 钢丝长度数据

序号	1	2	3
测量值 / cm	48.75	48.83	48.80

钢丝长度测量数据如上表所示。经计算可得钢丝平均长度 $\bar{L} = \frac{1}{3} \sum L_i = 48.79 \text{ cm}$, 标准不确定度 $u_L = \sqrt{\frac{\sum [(L_i - L_0) - \bar{L}]^2}{3 \cdot (3-1)}} = 0.024 \text{ cm}$ 。

6.3 圆环内外直径

表 3 圆环直径数据

组别	内直径			外直径		
	1	2	3	1	2	3
序号	79.88	79.90	79.86	100.18	100.24	100.18
测量值 / mm						

圆环直径测量数据如上表所示，同时测得零误差为 0.04 mm。

经计算可得圆环平均内直径 $\bar{d}_{\text{内}} = \frac{1}{3} \sum d_{\text{内}_i} - d_0 = 79.84 \text{ mm}$, 标准不确定度 $u_{d_{\text{内}}} = \sqrt{\frac{\sum [(d_{\text{内}_i} - d_0) - \bar{d}_{\text{内}}]^2}{3 \cdot (3-1)}} = 0.012 \text{ mm}$; 圆盘平均外直径 $\bar{d}_{\text{外}} = \frac{1}{3} \sum d_{\text{外}_i} - d_0 = 100.16 \text{ mm}$, 标准不确定度 $u_{d_{\text{外}}} = \sqrt{\frac{\sum [(d_{\text{外}_i} - d_0) - \bar{d}_{\text{外}}]^2}{3 \cdot (3-1)}} = 0.020 \text{ mm}$ 。

6.4 金属环质量

金属环质量为预测量量，查表可得 $m = 577.7 \text{ g}$ 。

6.5 扭摆周期

表 4 扭摆 45 周期时间数据

组别	不带金属环			带金属环		
	1	2	3	1	2	3
序号	114.13	114.45	114.38	170.25	170.17	170.21
测量值 / s						

扭摆周期测量数据如上表所示。经计算可得不带金属环的扭摆平均周期 $\bar{T}_0 = \frac{1}{3 \cdot 45} \sum t_{0_i} = 2.5404 \text{ s}$, 标准不确定度 $u_{T_0} = \sqrt{\frac{\sum [(t_{0_i}/45) - \bar{T}_0]^2}{3 \cdot (3-1)}} = 2.2 \times 10^{-3} \text{ s}$; 带金属环的扭摆平均周期 $\bar{T}_1 = \frac{1}{3 \cdot 45} \sum t_{1_i} = 3.7824 \text{ s}$, 标准不确定度 $u_{T_1} = \sqrt{\frac{\sum [(t_{1_i}/45) - \bar{T}_1]^2}{3 \cdot (3-1)}} = 5.2 \times 10^{-4} \text{ s}$ 。

7 实验结果

7.1 扭转模量与切变模量计算

根据式 (2.8) 可得:

$$\overline{D} = \frac{1}{2}\pi^2 m \frac{\overline{d}_{\text{内}}^2 + \overline{d}_{\text{外}}^2}{\overline{T}_1^2 - \overline{T}_0^2} = 5.956 \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.12)$$

根据式 (2.9) 可得:

$$\overline{G} = 16\pi \overline{L} m \frac{\overline{d}_{\text{内}}^2 + \overline{d}_{\text{外}}^2}{\overline{D}_w^4 (\overline{T}_1^2 - \overline{T}_0^2)} = 8.16 \times 10^{10} \text{ Pa} \quad (7.13)$$

7.2 B 类不确定度分析

经估测和查询仪器允差^[1] 可得 B 类不确定度:

- 钢卷尺允差 $\Delta L = 0.12 \text{ cm} \Rightarrow u_{LB} = \Delta L / 3 = 0.040 \text{ cm}$;
- 游标卡尺允差 $\Delta d = 0.02 \text{ mm} \Rightarrow u_{dB} = \Delta d / 3 = 6.7 \times 10^{-3} \text{ mm}$;
- 螺旋测微器允差 $\Delta D_w = 0.004 \text{ mm} \Rightarrow u_{DsB} = \Delta D_w / 3 = 1.4 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 。

此外, 秒表读取误差 $\Delta t = 0.2 \text{ s}$, 即 $u_{TB} = \Delta t / 3 / 45 = 1.5 \times 10^{-3} \text{ s}$; 金属环质量不考虑 A 类不确定度, 因此 $u_m = u_{mB} = (\Delta m) / 3 = 3.4 \times 10^{-5} \text{ kg}$ 。

7.3 不确定度合成

向式 (4.10) 与式 (4.11) 中代入具体数据可得相对不确定度与绝对不确定度:

$$\frac{u_D}{D} = 0.24\%, u_D = \frac{u_D}{D} \cdot D = 1.4 \times 10^{-5} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.14)$$

$$\frac{u_G}{G} = 0.95\%, u_G = \frac{u_G}{G} \cdot G = 8 \times 10^8 \text{ Pa} \quad (7.15)$$

由上述分析可得最终测量结果:

$$D = 5.956(14) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (7.16)$$

$$G = 8.16(8) \times 10^{10} \text{ Pa} \quad (7.17)$$

8 思考与讨论

在本实验中, 扭摆旋转角度 $\varphi \approx 1 \text{ rad}$, 代入式 (2.2) 可得:

$$\gamma = \frac{D_w}{2} \cdot \frac{\varphi}{L} = 7.953 \times 10^{-4} \ll 1 \quad (8.18)$$

因此本实验中的切应变 γ 远小于 1, 满足线性弹性范围。

另外, 本实验还通过多次测量 (如钢丝直径、长度等) 来提高测量精度, 并测量 45 个周期来减小周期测量误差。

9 结论

本实验基于扭摆装置，测量了钢丝的扭转模量与切变模量，分别得到了 $D = 5.956(14) \times 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}$ 与 $G = 8.16(8) \times 10^{10} \text{ Pa}$ 。通过不确定度分析，得到了相应的测量不确定度。实验结果表明，扭摆法是一种有效的测量材料切变模量的方法。

参考文献

- [1] 张增明, 大学物理实验, 第 1 版 本. 北京: 高等教育出版社, 2024.
- [2] 《切变模量的测量》. 2025 年.

附录

	下	中	上
零误差	0.0049mm	0.770mm	0.778mm
	0.768mm	0.771mm	0.778mm
	0.769mm	0.769mm	0.775mm
	0.771mm		
L	48.75cm	48.83cm	48.80cm
	内	外	
零误差	0.04mm	79.88mm	100.18mm
	79.90mm	100.24mm	
	79.86mm	100.18mm	
T ₀	1'54"13	T ₁ 2'50"25	L = 48.79cm
	1'54"45	2'50"17	m = 577.78
	1'54"38	2'50"21	d _i = 79.84mm
	114.32	170.21	d _o = 100.16mm
			D = 0.776mm
	PB 24000048	T ₁ = 3.7845	
背景蓝		T ₀ = 2.54045	
4.7			$\Rightarrow G = 8.16 \times 10^9 Pa$
			D = 5.96 $\times 10^{-3} N \cdot m$

实验原始数据