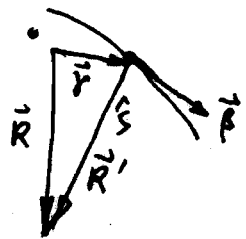


第四章 第2节 辐射

§4.1 电子回旋辐射

一. 单电子回旋辐射

当辐射的电子是运动于带电粒子的附近时，
即 $\hbar\omega \ll W$ ，由加速运动的电荷所辐射
进行了用经典辐射理论处理，且辐射电场
可表示为：



★

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R'} \left\{ \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^2} \right\}_{t'}$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{s} \times \vec{E}(\vec{r}, t)$$

其中

$$t' = t - \frac{R'}{c} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}(t')|}{c} \approx t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}(t')}{c} \quad (\text{for } R \gg r_{\text{max}})$$

若电场 $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 用傅里叶变换表示，即

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

则辐射电场的表达式为：

★

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R'} \int dt e^{-i\omega t} \left\{ \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^2} \right\}_{t'}$$

变换关系是 t 为推迟时间 t' ，且利用下式

$$dt = (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{s}) dt'$$

$$\text{得: } \vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c R'} \int dt' e^{-i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{s} \cdot \vec{r}}{c})} \frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^2}$$

利用恒等式：

$$\frac{\hat{s} \times [(\hat{s} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})^2} = \frac{d}{dt'} \left\{ \frac{\hat{s} \times (\hat{s} \times \vec{\beta})}{(1 - \hat{s} \cdot \vec{\beta})} \right\}$$

对上式定积分求和, 得: P. 133 ~ 134

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{i\omega\epsilon_0}{4\pi\epsilon_0 c R'} \int dt' \hat{S} \times (\hat{S} \times \vec{\beta}) e^{-i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{S} \cdot \vec{r}}{c})}$$

由傅里叶变换 Parseval 定理, 可得单位立体角内辐射功率为:

$$\frac{dW(\omega)}{d\Omega} = \int R'^2 (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \hat{S} dt = \epsilon_0 c R'^2 \int |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 dt$$

$$= \frac{\epsilon_0 c R'^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega$$

将 $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ 的表达式代入得: $\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \frac{\epsilon_0 c R'^2}{2\pi} |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2$

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = \frac{\epsilon_0^2 \omega^2}{32\pi^3 \epsilon_0 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt' \hat{S} \times (\hat{S} \times \vec{\beta}) e^{-i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{S} \cdot \vec{r}}{c})} \right|^2$$

这里 \vec{r} 是运动电荷在辐射场中的位置, 这里已忽略往返中略去了 $\frac{R}{c}$ 因子, 因为它与 t' 无关。

现在考虑由电荷在圆轨道上运动产生的辐射场 \vec{E}_0 中的运动方程:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = -e [\vec{v} \times \vec{B}_0]$$

该运动方程的解为:

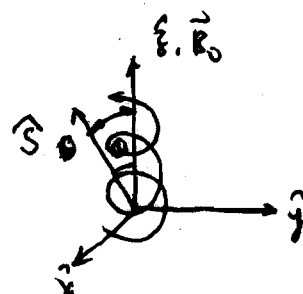
$$\vec{\beta} = \beta_{\perp} (\hat{x} \cos \omega_{ce} t + \hat{y} \sin \omega_{ce} t) + \beta_{\parallel} \hat{z}$$

$$\frac{\vec{v}}{c} = \frac{\beta_{\perp}}{\omega_{ce}} (\hat{x} \sin \omega_{ce} t - \hat{y} \cos \omega_{ce} t) + \beta_{\parallel} t \hat{z}$$

$$\text{其中 } \omega_{ce} \equiv \frac{eB_0}{m_{e0}} \sqrt{1-\beta^2} = \omega_{ce} \sqrt{1-\beta^2} \quad \omega_{ce} \equiv \frac{eB_0}{m_{e0}}$$

不失一般性, 设辐射的传播方向为:

$$\hat{S} = \hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta$$



2) 相位因子为:

$$e^{-i\omega(t' - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c})} = \exp\left\{-i\omega\left[t' - \frac{\beta_{\perp} \sin\theta \sin\omega_{ce} t' - \beta_{\parallel} t' \cos\theta}{\omega_{ce}}\right]\right\}$$

辐射场矢量为:

$$\begin{aligned} \vec{S} \times (\vec{S} \times \vec{\beta}) &= \hat{x}(\beta_{\parallel} \sin\theta \cos\theta - \beta_{\perp} \cos^2\theta \omega \omega_{ce} t') - \hat{y} \beta_{\perp} \sin\omega_{ce} t' \\ &\quad + \hat{z}(-\beta_{\parallel} \sin^2\theta + \beta_{\perp} \sin\theta \cos\theta \omega \omega_{ce} t') \end{aligned}$$

利用傅氏变换:

$$e^{i\xi \sin\phi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im\phi} J_m(\xi)$$

$$i \sin\phi e^{i\xi \sin\phi} = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{im\phi} J'_m(\xi)$$

$$i \xi \cos\phi e^{i\xi \sin\phi} = \sum_{-\infty}^{\infty} im e^{im\phi} J_m(\xi)$$

把被积函数表示为:

$$\begin{aligned} \vec{S} \times (\vec{S} \times \vec{\beta}) e^{-i\omega(t' - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{c})} &= \sum_{-\infty}^{\infty} \left\{ \hat{x}(\beta_{\parallel} \sin\theta \cos\theta - \beta_{\perp} \cos^2\theta \frac{m}{\xi}) J_m(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \hat{y}(-i\beta_{\perp}) J'_m(\xi) + \hat{z}(-\beta_{\parallel} \sin^2\theta + \beta_{\perp} \sin\theta \cos\theta \frac{m}{\xi}) J_m(\xi) \right\} \\ &\quad \times \exp\left\{-i\omega(1 - \beta_{\parallel} \cos\theta) t' + im \omega_{ce} t'\right\} \end{aligned}$$

其中

$$\boxed{\xi \equiv \frac{\omega}{\omega_{ce}} \beta_{\perp} \sin\theta}$$

由此可得: 电子在均匀磁场中做回旋运动时辐射电磁波的频率为:

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_{ce}} \beta_{\perp} \sin \theta \quad \text{44}$$

$$\star \quad \vec{E}(\vec{R}, \omega) = \frac{i e \omega}{2 \epsilon_0 c k'} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}] \\ \times \left\{ \hat{x} \left[-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) + \hat{y} (-i \beta_{\perp}) J'_m(\xi) + \hat{z} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) \right] \right\}$$

由此可知, 回旋辐射是由一系列分立的谐波所组成的, 且频率为:

$$\omega_m = \frac{m \omega_{ce}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta}$$

由此可得, 电子在单位立体角内的辐射功率为:

$$\frac{d^2 W}{d\omega d\Omega} = c \epsilon_0 R'^2 |\vec{E}(\vec{R}, \omega)|^2$$

对频率积分, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}] t\} dt = 2\pi \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}]$$

可得在任一方向上单位立体角, 单位频率间隔内的回旋辐射功率为:

$$\star \quad \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_m \left[\left(\frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J'_m{}^2(\xi) \right] \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}]$$

回旋辐射的频谱, 由 $\vec{E}(\vec{R}, \omega)$ 的表达式可分析得到:

当 $\xi \ll 1$ 时, 有渐近展开式:

$$J_m(\xi) \approx \frac{1}{m!} \left(\frac{\xi}{2} \right)^m$$

$$J'_m(\xi) \approx \frac{m}{2 \times m!} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{m-1}$$

因而回旋辐射电场的各分量分别为:

$$\hat{x}: -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(\cos\theta - \beta_{11}) \frac{\beta_{\perp} \sin\theta}{2(1 - \beta_{11}\cos\theta)}$$

$$\hat{y}: -i \frac{1}{2} \beta_{\perp}$$

$$\hat{z}: (\cos\theta - \beta_{11}) \frac{\beta_{\perp} \sin\theta}{2(1 - \beta_{11}\cos\theta)}$$

当 $\theta = 0$ 时 (平行于 B_0 或 z 轴)

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}: & -\frac{1}{2} \beta_{\perp} \\ \hat{y}: & -i \frac{1}{2} \beta_{\perp} \\ \hat{z}: & 0 \end{aligned} \right\} \text{圆偏振波, 右旋偏振 (与电} \\ \text{子和回旋方向相同)}$$

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时 (垂直于 B_0 或 z 轴)

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}: & 0 \\ \hat{y}: & -i \frac{1}{2} \beta_{\perp} \\ \hat{z}: & -\frac{1}{2} \beta_{\perp} \beta_{11} \end{aligned} \right\} \text{椭圆偏振波, 因 } E_y \gg E_z$$

寻常波分量远大于异常波分量

二、等离子体辐射率

假定：1. 等离子体是弱耦合，可以用自由电子近似处理
 2. 各个电子的辐射是不相干的（即电子是独立运动的）
 这样，由各个电子辐射功率谱的代数和就可以求得等离子体辐射率。

定义：体辐射率 $j(\omega, \theta)$ 为每单位体积内等离子体电子沿 θ 方向以单位立体角内，发出以每单位频率间隔的辐射功率。

设电子的速度分布函数为 $f(\vec{v}) = f(\beta_\perp, \beta_\parallel)$ (归一化的)

则体辐射率为

$$j(\omega, \theta) = n_e c^3 \int \frac{d^2 P}{d\omega d\Omega} f(\beta_\perp, \beta_\parallel) 2\pi \beta_\perp d\beta_\perp d\beta_\parallel$$

这个积分的物理意义是：回旋辐射谱是由一系列有限宽度的辐射线组成的，这是因为其共振频率

$$\omega_m = m\omega_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta_\parallel \cos\theta}$$

是与电子速度有关的。

辐射展宽机制：

1. 相对论展宽：电子速度在相对论区域 $\sqrt{1-\beta^2}$ 展宽的量级为：

$$\Delta\omega_m \approx m\omega_0 \beta^2 = m\omega_0 \left(\frac{v_e}{c}\right)^2$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2T_e}{m_e}} \quad \text{电子热运动速度}$$

2. 多普勒展宽: $(1 - \beta_{||} \cos \theta)^{-1}$

在弱相对论近似下 ($\beta \ll 1$), 展宽的数量级为

$$\Delta \omega_m = m \omega_{ce} \beta_{||} |\cos \theta| = m \omega_{ce} \left(\frac{v_e}{c} \right) |\cos \theta|$$

3. 自然加宽: 由于辐射阻尼加宽, 由于电子在辐射过程中损失能量而自然辐射已持续一段有限的时间

4. 碰撞加宽: 由于碰撞造成辐射的暂时中断
一般 3.4 的展宽效应都较小, 可忽略。

相对论展宽和多普勒展宽的相对重要性:

当 $|\cos \theta| < \left(\frac{v_e}{c} \right)$ 时, 相对论展宽是主要的。

由此可求出相对论展宽起到的临界角 (临界角)

$$\theta_c = \cos^{-1} \left(\frac{2T_e}{c^2 m_e} \right)^{1/2} \quad \cos^{-1} \left(\frac{2T_e}{m_e c^2} \right)^{1/2}$$

当

$$\theta_c < \theta < 180^\circ - \theta_c$$

时相对论加宽是主要的。当 $T_e = 1 \text{ keV}$ 时, $\theta_c = 87^\circ$, 即: 在弱相对论近似的条件下, 又存在垂直传播的情况下, 相对论展宽才是主要的, 反之情况下则是多普勒展宽。

弱相对论近似: $\beta \ll 1$

(1) 展宽效应很小, 每个谐波辐射功率为定值, 不随 ω 和

(2) 展宽效应可忽略不计

$$J_m(\xi) = \frac{1}{m!} \left(\frac{\xi}{2} \right)^m, \quad J'_m(\xi) = \frac{1}{2 \times (m-1)!} \left(\frac{\xi}{2} \right)^{m-1}$$

由谐波小量级条件, 可得: $\Delta \omega_n \ll \omega_{ce}$, 即

$$n \left(\frac{v_e}{c} \right) < 1 \quad (\text{有谐波辐射}) \quad \text{或} \quad n \left(\frac{v_e}{c} \right) \gg 1 \quad (\text{无谐波辐射})$$

~~对重互传播性况, 由 $T_e \leq 10^{-10}$ s~~

4-8

取 β 为最低阶项, 则有:

$$\left(\frac{\cos\theta - \beta_{||}}{\sin\theta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(\xi) \\ \approx \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \left(\frac{\beta_{\perp}}{2} \right)^{2m}$$

辐射功率谱 (各谐波) 可表示为

$$j_m(\theta, \omega) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \\ \times n_e c^3 \iint \delta[(1 + \beta_{||} \cos\theta) \omega - m \omega_{ce}] \left(\frac{\beta_{\perp}}{2} \right)^{2m} f(\beta_{\perp}, \beta_{||}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{||}$$

辐射功率谱又可表示为

$$j_m(\theta, \omega) = j_m(\theta) \phi_m(\theta, \omega)$$

即

$$j_m(\theta) = \int j_m(\theta, \omega) d\omega \quad \text{辐射功率谱}$$

$$\int \phi_m(\theta, \omega) d\omega = 1 \quad \text{归一化谐波谱分布}$$

若粒子速度分布是麦克斯韦分布:

$$f(\beta_{\perp}, \beta_{||}) = \left(\frac{m_e}{2\pi T_e} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m_e c^2 (\beta_{\perp}^2 + \beta_{||}^2)}{2 T_e} \right\}$$

我们可以分别对辐射谱 (麦克斯韦分布) 和归一化谐波谱 (相对速度分布) 计算谐波谱分布 $\phi_m(\theta, \omega)$ 。

$$j_m(\theta) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \\ \times n_e c^3 \iint \left(\frac{\beta_{\perp}}{2} \right)^{2m} f(\beta_{\perp}, \beta_{||}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{||}$$

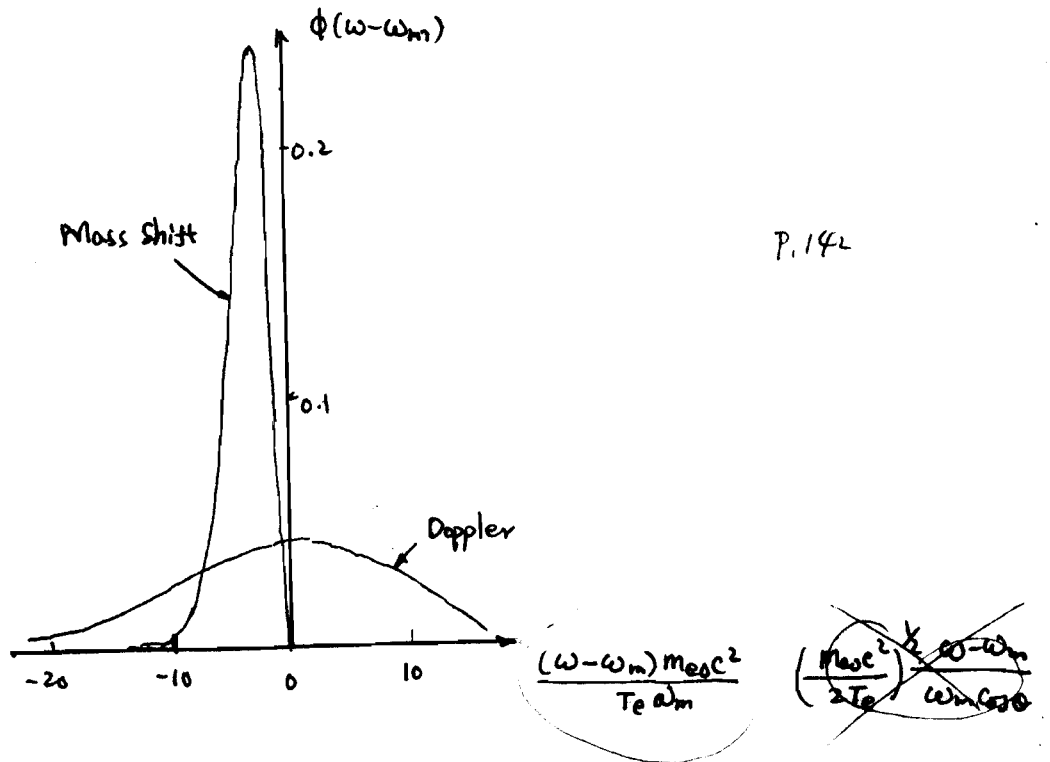
由此可知：多普勒加宽是对谐波共振频率对称的，且其宽度近似为

解得：
$$\Delta\omega_m = \left(\frac{\frac{1}{2} k_B T_e}{m_{e0} c^2} \right)^{1/2} \cos\theta \omega_m$$
 多普勒加宽

而相对论加宽是非对称的，它完全左移的（相对于谐波共振中），且其宽度近似为：

解得：
$$\Delta\omega_m \approx \frac{T_e k_B}{m_{e0} c^2} \omega_m$$
 相对论加宽

因此在弱相对论近似中， $\frac{k_B T_e}{m_{e0} c^2} \ll 1$ ，因此相对论加宽的宽度远小于多普勒加宽。



1/2

$$\cos\theta < \left(\frac{2 k_B T_e}{m_{e0} c^2} \right)^{1/2} = \frac{v_e}{c}$$

相对论效应为2

▲ 斜传播波的谱分辨率

$$j_m(\theta) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \\ \times n_e c^3 \iint \left(\frac{\beta_\perp}{2}\right)^{2m} f(\beta_\perp, \beta_{||}) 2\pi \beta_\perp d\beta_\perp d\beta_{||}$$

将麦克斯韦分布代入，并积分或将对 $\beta_\perp, \beta_{||}$ 的积分，即得：

$$j_m(\theta) = \frac{e^2 \omega_m^2 n_e}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin\theta)^{2(m-1)} (\cos^2\theta + 1) \left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^m$$

▲ 斜传播，多普勒展宽的谱分布 ($\cos\theta \gg \beta$)

这时，可直接从 $j_m(\theta, \omega)$ 的表达式中积分求得 $\phi_m(\theta, \omega)$ 。
因 $\delta[(1 - \beta_{||} \cos\theta)\omega - \omega_m]$ 不含 β_\perp ，可先完成对 β_\perp 的积分。
而对 $\beta_{||}$ 的积分因是 δ 函数的积分，可直接了当的，故得：

$$\phi_m(\theta, \omega) = \left(\frac{m_e c^2}{2\pi T_e}\right)^{1/2} (\omega_m \cos\theta)^{-1} \exp\left\{-\frac{m_e c^2}{2T_e} \left[\frac{\omega - \omega_m}{\omega_m \cos\theta}\right]^2\right\}$$

▲ 准垂直传播，相对论展宽的谱分布 ($\cos\theta \ll \beta$)

积分比较复杂，(参看 5.1, P. 189)

$$\phi_m(\theta, \omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi} (\omega_{ce} m)^2} \left[\frac{2m_e c^2}{T_e}\right]^{m+1/2} \frac{m!}{(2m+1)!} \left[1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{ce}^2}\right]^{m+1/2} \\ \times \exp\left\{-\frac{m_e c^2}{2T_e} \left[1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{ce}^2}\right]\right\}$$

$$E(R, \omega) = \frac{e\hbar}{2cc_0 R'} \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}]$$

9/28

▲ 单电子回旋共振

$$\times \left\{ \hat{x} \left[-\frac{\cos \theta}{\sin \theta} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) + \hat{y} (-\beta_{\perp}) J'_m(\xi) + \hat{z} (\cos \theta - \beta_{\parallel}) J_m(\xi) \right] \right\}$$

$$\frac{dP}{d\omega d\omega} = \frac{e^2 \omega^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \sum_1^{\infty} \left[\left(\frac{\cos \theta - \beta_{\parallel}}{\sin \theta} \right)^2 J_m^2(\xi) + \beta_{\perp}^2 J_m'^2(\xi) \right] \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}]$$

$$\xi \equiv \frac{\omega}{\omega_{ce}} \beta_{\perp} \sin \theta$$

▲ 等离子体辐射 (稀薄等离子体, $\beta \ll 1$)

$$j(\omega, \theta) = n_e c^3 \int \frac{d^2 P}{d\omega d\omega} f(\beta_{\perp}, \beta_{\parallel}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{\parallel}$$

$$j_m(\omega, \theta) = \frac{e^2 \omega_m^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{m^{2(m-1)}}{(m-1)!^2} (\sin \theta)^{2(m-1)} (\cos^2 \theta + 1) \omega_m = \frac{m \omega_{ce}}{1 - \beta_{\parallel} \cos \theta} \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$\times n_e c^3 \iint \delta[(1 - \beta_{\parallel} \cos \theta) \omega - m \omega_{ce}] \left(\frac{\beta_{\perp}}{2} \right)^{2m} f(\beta_{\perp}, \beta_{\parallel}) 2\pi \beta_{\perp} d\beta_{\perp} d\beta_{\parallel}$$

$$\tilde{j}_m(\omega, \theta) \tilde{j}_m(\theta) \equiv \tilde{j}_m(\theta) \phi_m(\theta, \omega)$$

其中

$$\tilde{j}_m(\theta) \equiv \int \tilde{j}_m(\theta, \omega) d\omega, \quad \int \phi_m(\theta, \omega) d\omega = 1$$

$$\tilde{j}_m(\theta) = \frac{e^2 \omega_m^2 n_e}{8\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin \theta)^{2(m-1)} (\cos^2 \theta + 1) \left(\frac{T_e}{2 m_e c^2} \right)^m$$

$$\phi_m(\theta, \omega) = \left(\frac{m_e c^2}{2\pi T_e} \right)^{\frac{1}{2}} (\omega_m \cos \theta)^{-1} \exp \left\{ -\frac{m_e c^2}{2T_e} \left(\frac{\omega - \omega_m}{\omega_m \cos \theta} \right)^2 \right\} \quad \text{钟形谱}$$

$$\phi_m(\theta, \omega) = \frac{\omega}{2\sqrt{\pi} (m \omega_{ce})^2} \left[\frac{2m_e c^2}{T_e} \right]^{m+\frac{1}{2}} \frac{m!}{(2m+1)!} \left[1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{ce}^2} \right]^{m+\frac{1}{2}}$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{m_e c^2}{2T_e} \left(1 - \frac{\omega^2}{m^2 \omega_{ce}^2} \right) \right\} \quad \text{准垂直传播}$$

三 辐射输运:

对辐射问题的完整讨论应包括两部分,即辐射的产生机制和辐射在介质中的输运性质。作为一般原理,介质若发射某一频率的辐射,它也将吸收同一频率的辐射。因而,介质对辐射传播过程有显著的影响,例如,介质在穿过介质的辐射强度发生变化。这里,我们从能量守恒规律出发,研究辐射在介质中的输运规律。

为此,我们首先定义一些描述辐射场的物理量。

- (1) 辐射强度 I : 单位时间内,沿某方向传播方向上单位立体角穿过垂直于辐射传播方向的单位面积的辐射能量。 $\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
- (2) 辐射通量 Φ : 单位时间内通过单位截面积的净辐射能量流量,它与强度 I 关系为:

$$\Phi = \int_{4\pi} I \cos \theta d\Omega$$



- (3) 辐射场的能量密度 u : 单位体积中的总辐射能量,它与辐射强度 I 的关系为:

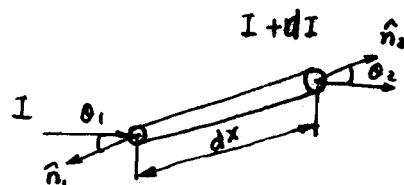
$$u = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I d\Omega \xrightarrow{\text{各向同性}} \frac{4\pi}{c} I$$

- (4) 吸收系数 α : 单位长度上的辐射束穿过单位长度上的吸收介质后,强度减弱的量,即

$$\alpha \equiv \frac{-dI}{I dx}$$

根据辐射能量守恒,在稳态情况下,辐射穿过无辐射、无吸收介质时,总辐射通量守恒:

$$\nabla \cdot \vec{\Phi} = 0$$



即:

$$(I + dI) \cos \theta_2 d\Omega_2 dA - I \cos \theta_1 d\Omega_1 dA = 0$$

$$\frac{d\Omega_2}{\Omega_2} = \frac{I \cos \theta_1}{I + dI} \approx \left(1 - \frac{dI}{I}\right) \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2}$$

因为:

$$\frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} = \frac{\sin\theta_2 d\theta_2}{\sin\theta_1 d\theta_1}$$

$$\begin{cases} (\mu+d\mu) \cos\theta_2 d\theta_2 = \mu \cos\theta_1 d\theta_1 \\ (\mu+d\mu) \sin\theta_2 = \mu \sin\theta_1 \quad (\text{折射定律}) \end{cases}$$

所以

$$\frac{d\Omega_2}{d\Omega_1} = \left(\frac{\mu}{\mu+d\mu} \right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} \approx \left(1 - 2 \frac{d\mu}{\mu} \right) \frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2}$$

故可得

$$\frac{dI}{I} = 2 \frac{d\mu}{\mu}$$

即

$$\frac{I}{\mu^2} = \text{const}$$

这表明在折射率缓慢变化的非均匀介质中，即使介质自身没有辐射和吸收，辐射在传播过程中，其强度也会沿射线路径而改变，折射率 μ 大的地方，其强度也大。

对于有辐射和吸收的介质，根据辐射守恒原理，辐射在穿过介质 dx 后，其通量将是它满足下述关系：

$$AdI = \left(2 \frac{I}{\mu} \frac{d\mu}{dx} dx + j dx - \alpha I dx \right) A$$

其中 j 是体辐射率，它表示单位体积介质沿入射辐射方向单位立体角的辐射功率。由此可得：

$$\tau \equiv \int_0^x \alpha dx$$

$$\mu^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{I}{\mu^2} \right) = j - \alpha I \quad \text{故有} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{I}{\mu^2} \right) = \frac{j}{\mu^2 \alpha} - \frac{I}{\mu^2}$$

此即为辐射传输方程。此方程的解为：

$$\left(\frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \frac{I_0}{\mu_0^2} e^{-\tau(x)} + \int_0^{\tau(x)} \frac{j}{\mu^2 \alpha} e^{-\tau(x')} d\tau' \right)$$

即

$$\tau \equiv \int_0^x \alpha(x') dx' \quad \text{为光程厚度} \quad \tau(x) = \int_{x_0}^x \alpha(x') dx'$$

此关系式的物理意义很明显：

(1) 若介质中没有辐射源，即 $j=0$

$$2) \quad \frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \frac{I_0}{\mu_0^2} e^{-\tau(x)}$$

这就是辐射通过吸收介质时的指数衰减规律

(2) 当边界没有入射辐射时, 即 $I_0 = 0$

$$2) \quad \frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int_0^{\tau(x)} \frac{j}{\mu^2 \alpha} e^{-\tau'} d\tau' = \int_0^x \frac{j(x')}{\mu^2(x')} e^{-\int_{x'}^x \alpha(y) dy} dx'$$

对于均匀介质

$$\frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int_0^x \frac{j(x')}{\mu^2(x')} e^{-\alpha(x-x')} dx' = \frac{j}{\alpha \mu^2} [1 - e^{-\alpha x}]$$

(3) 在局部热平衡条件下:

根据基尔霍夫定理, 有

$$\boxed{\frac{j}{\alpha \mu^2} = I_B(T)}, \quad I_B \text{ 是黑体辐射亮度, } T \text{ 为辐射温度}$$

$$2) \quad \frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int_0^{\tau(x)} I_B(T) e^{-\tau'} d\tau' \xrightarrow{\text{均匀介质}} I_B(T) [1 - e^{-\tau(x)}]$$

对于光学厚介质, $\tau \equiv \int \alpha dx \gg 1$, 有

$$\frac{I(x)}{\mu^2(x)} = I_B(T)$$

这说明只有光学厚介质在局部热平衡条件下的辐射是黑体辐射。

对于光学薄介质, $\tau \ll 1$, 有:

$$\frac{I(x)}{\mu^2(x)} = \int I_B(T) e^{-\tau'} d\tau' = \int_0^L \frac{j}{\mu^2} dx$$

其辐射强度是体辐射率的积分。

在真空中, 黑体辐射亮度可用普朗克黑体辐射公式表示 (普朗克公式):

$$I_B(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{8\pi^3 c^2} [e^{\frac{\hbar \omega}{T}} - 1]^{-1}$$

当 $\frac{\hbar \omega}{T} \ll 1$ 时, 有

$$\dots \dots \frac{\omega^2 T}{c^2} = \frac{j}{I_B}$$

$$1\text{eV} \approx 1.24 \mu\text{m}$$

4-13 (5)

其低频辐射近似，就是瑞利-金斯定律：(当 $h\omega \ll T$ 时)

$$I_B(\omega, T) \approx \frac{\omega^2 T}{8\pi^3 c^2}$$

这样，根据量子普朗克辐射定律，从稀薄、弱相对论性、热力学体的辐射公式可导出吸收系数的表达式：

$$\begin{aligned} \alpha_m(\omega, \theta) &= \alpha_m(\theta) \phi_m(\omega) = \frac{j_m(\theta)}{I_B(\omega_m, T_e)} \phi_m(\omega) \\ &= \frac{\pi}{2c} \frac{e^2 n_0}{m_0 \epsilon_0} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin \theta)^{2(m-1)} (\omega^2 + 1) \left(\frac{kT_e}{2m_0 c^2} \right)^{m-1} \phi_m(\omega) \end{aligned}$$

在许多情况下，电子回旋谐波频率下的吸收是很大的，以致 $\tau \gg 1$ ，即稀薄等离子体是光学厚的。在这种情况下，其辐射密度就是黑体的表面亮度，它与电子温度成正比，而与等离子体的密度无关，因此可直接利用它测量电子温度，这就是利用光学厚的电子回旋辐射谐波测量电子温度的基础。

当我们的观测回旋辐射是等离子体中传播时，由于其特征波是不简并的，因而必须分别求出两种特征波的吸收系数。

$$\alpha_m^{(\pm)}(\omega, \theta) = \frac{\pi}{2m} \frac{\omega_p^2}{c} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} \left(\frac{kT_e}{m_0 c^2} \right)^{m-1} (\sin \theta)^{2m-2} (1 + \cos^2 \theta) \phi_m(\omega, \theta) \eta_m^{\pm}(\theta)$$

其中 $\eta_m^{\pm}(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left\{ 1 \mp \frac{\omega^2 + \frac{\sin^2 \theta}{4m}}{(1 + \cos^2 \theta) \left(\omega^2 + \frac{\sin^2 \theta}{4m^2} \right)^{1/2}} \right\}$ $m \geq 2$

其中 “-” 表示 O 波 (当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时) 或左旋波 (当 $\theta = 0$ 时)
“+” 表示 X 波 (当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时) 或右旋波 (当 $\theta = 0$ 时)

$$\eta_m^+ + \eta_m^- = 1$$

上式精确到 $\frac{T_e}{m_0 c^2}$ 。因为当 $\theta = 0$ 或 $\frac{\pi}{2}$ 时， $\alpha_m^{(\pm)}$ 应满足：上式对基波 ($m=1$) 是不适用的

~~$$\alpha_m^{(\pm)}(\omega, \theta) = \left(\frac{T_e}{m_0 c^2} \right) \alpha_m^{(\pm)}(\omega, \theta)$$~~

~~$$\eta_m^{\pm} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \mp \frac{\omega^2 + \frac{\sin^2 \theta}{4m}}{(1 + \cos^2 \theta) \left(\omega^2 + \frac{\sin^2 \theta}{4m^2} \right)^{1/2}} \right\}$$~~

~~基波~~

▲ 局部热平衡, 稀薄等离子体, 弱相对论近似 ($\beta \ll 1$) T

体辐射之和吸收系数 $\left(\frac{u_{pe}}{\omega_{ce}}\right)^2 \ll 1$ (对 $m \geq 2$), $\left(\frac{u_{pe}}{\omega_{ce}}\right)^2 \frac{c}{v_e} \ll 1$

$$j_m(\theta, \omega) = j_m(\omega) \phi_m(\theta, \omega) \quad (\text{对 } m \geq 1)$$

$$j_m(\omega) = \frac{e^2 \omega_m^2 n_e}{8\pi^2 c \epsilon_0} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin \theta)^{2(m-1)} (\cos^2 \theta + 1) \left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^m$$

把辐射功率与吸收系数

$$\frac{j_m(\omega)}{\alpha_m(\omega)} = I_B(\omega_m, T_e) = \frac{\omega_m^2 T_e}{8\pi^3 c^2} \quad (\text{辐射功率与吸收系数相等})$$

可得吸收系数为

$$\alpha_m(\omega) = \frac{\pi}{2c} \frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e} \frac{m^{2m-1}}{(m-1)!} (\sin \theta)^{2(m-1)} (\cos^2 \theta + 1) \left(\frac{T_e}{2m_e c^2}\right)^{m-1}$$

由于回旋辐射是弱磁等离子体中传播时其特征波不是简并的, 所以必须分别计算其特征波的体辐射率和吸收系数。两种特征波的方向应按其偏振特性计算, 正如1.13用 P. 146 中所述的方法计算, 且结果为 (5.2.43) 式:

$$\eta_m^{\pm}(\theta) = \frac{1}{2} \mp \frac{\cos \theta + \frac{\sin^4 \theta}{4m^2}}{(1 + \cos \theta)(\cos \theta + \frac{\sin^4 \theta}{4m^2})^{1/2}} \quad \begin{matrix} \text{P. 146} \\ (5.2.43) \text{式} \end{matrix}$$

其中 “+” 表 λ 波 (当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时) 或左旋波 (当 $\theta = 0$ 时)
“-” 表 χ 波 (当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时) 或右旋波 (当 $\theta = 0$ 时)

由于 $\eta_m^{\pm}(\theta)$ 的表达式只取 $\frac{T_e}{2m_e c^2}$ 的一次近似, 因此上述表达式对 $m=1$ 的谐波不适用, 特别对 η_1^+

不适用, η_1^+ 需取 $\frac{T_e}{2m_e c^2}$ 的更高阶近似。

四. 有限长度效应

四. 有限长度效应

当 $m \neq 1$ 时, 近似条件与辐射特性近似, 电场传播角 θ 由自由空间方程决定。这时, 对计算 (用 ω 为近似) 比加复杂, 从而计算更复杂

4-15

上述的计算中, 我们已忽略: 等离子体的介电特性, 它只有在等离子体是稀薄时才适用。当等离子体密度有限时, 以至等离子体的介电常数不可忽略时, 必须对上述结果加以修正。

等离子体有限长度效应有两种: (1) 它影响辐射在等离子体中的传播, 即当出现共振或截止时, 在等离子体中将出现非传播区; (2) 在高密度时, 它将通过等离子体的介电常数影响其辐射特性。

对辐射传播的影响是比较简单的。当垂直传播时, 对于寻常波, $\omega < \omega_{pe}$ 时波截止; 对于异常波, 当 $\omega_H \leq \omega \leq \omega_R$ 或 $\omega \leq \omega_L$ 时波截止, 其中

$$\omega_R = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[1 + \left(\frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} + 1 \right)^{1/2} \right]$$

又称为施截止频率

$$\omega_L = \frac{\omega_{ce}}{2} \left[-1 + \left(\frac{4\omega_p^2}{\omega_{ce}^2} + 1 \right)^{1/2} \right]$$

又称为施截止频率

$$\omega_H^2 = \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2$$

因此, 只有当辐射频率 $\omega > \omega_{pe}$ 时才用于

对辐射传播特性的影响比较复杂, 一般它与传播角度、谐波和波模有关。这里就不详述其结果了。但下述不等式满足时: (书中 P. 147~150)

$$\left(\frac{\omega_{pe}}{m\omega_{ce}} \right)^2 \ll 1$$

$$\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \right)^2 \ll 1$$

(对 $m \geq 2$ 谐波)

$$\left(\frac{\omega_{pe}}{m\omega_{ce}} \right)^2 \ll 1$$

$$\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \right)^2 \frac{c}{v_{te}} \ll 1$$

$$\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \right)^2 \frac{c}{v_{te}} \ll 1$$

(对 $m=1$)

$$\left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} \right)^2 \frac{c}{v_{te}} \ll 1$$

上述的稀薄等离子体近似公式仍适用, 否则就应用稠密等离子体近似的结果。

五. 空间变化的磁场

在大多数应用中, 磁场不是与位置无关的。因此, 回旋辐射就不再是一列均匀的谐波或辐射, 这些谐波而是被沿视线变化的磁场所展宽。通常磁

无电磁波时 $f(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_0 f_0(\vec{r}, \vec{v})$

$$E_0 = 0, \quad B_0 \neq 0$$

有电磁波时

$$j_0 = 0$$

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = n_0 f_0(\vec{r}, \vec{v}) + \delta f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}_0 + \vec{j}_1(\vec{r}, t) \quad \vec{j}_1(\vec{r}, t) = -en_0 \int d\vec{v} \vec{v} f_1(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{r}} - e(\vec{v} \times \vec{B}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \vec{v}} = en_0 [\vec{E}_1 + \vec{v} \times \vec{B}_1] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{v}}$$

由此得 $f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) \Rightarrow n_1(\vec{r}, t) = \int f_1(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j} \\ \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{j}_1(\vec{r}, t) \Rightarrow [\vec{k} \cdot \vec{k} - k^2 \vec{I} + (\frac{\omega}{c})^2 \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega)] \cdot \vec{E} = 0$$

$$\left\{ \mu^2(\vec{k}, \omega) \left[\frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{k^2} - \vec{I} \right] + \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega) \right\} \cdot \vec{E} = 0 \quad \mu \equiv \frac{kc}{\omega} = \frac{k}{k_0}$$

$$\mu^2(\vec{k}, \omega) \left[\frac{\vec{k} \cdot \vec{k}}{k^2} - \vec{I} \right] + \vec{\epsilon}(\vec{k}, \omega) = 0$$

求在 ω_0 附近电磁波频率附近的折射率系数的虚部 μ_i

$$\alpha \equiv \frac{\omega}{c} \mu_i$$

1. Nucl. Fusion 23 (1983), pp. 1153~1257

2. Plasma Physics 24 (1982), pp. 629~638

2. 空间变化的磁场

在上述讨论辐射层流机制时, 假设是均匀磁场, 当磁场不均匀时, 则回旋辐射 ~~辐射~~ 由于磁场不均匀性引起层流变化, 即:

$$\delta\omega_m \equiv m\omega_c \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} l = m\omega_c \frac{l}{L_B}$$

其中 $L_B \equiv \left(\frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} \right)^{-1}$ 是沿辐射传播方向上磁场梯度变化与等效回旋频率之比, 即:

$$\delta\omega_m \gg \Delta\omega_m \quad (\text{相对层流变化多寡辐射层流})$$

下面讨论:

1) B_0 的空间变化是缓慢的, 即 $\lambda \ll L_B$, 则回旋等(WKB)近似适用;

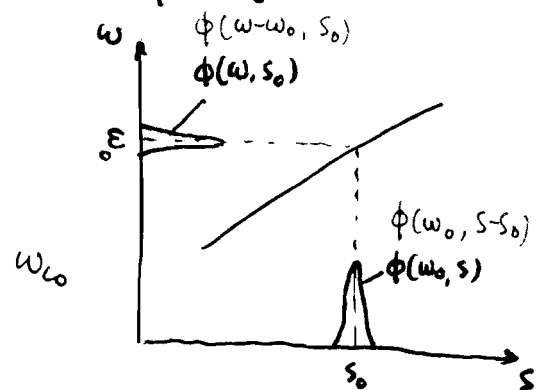
2) 回旋辐射和吸收的共振层很窄, 即

$$|m\omega_c(s) - \omega_0| \ll \omega_0$$

则在共振层内, $m\omega_c$ 的梯度可近似为常数。

对于单调缓慢变化的磁场, 辐射频率 ω_0 与空间坐标是一一对应的。因此, 对于某一空间点 s_0 , 其辐射频率中心为 $\omega_0 = m\omega_c$ 的辐射频率为 $\phi_m(\omega - \omega_0, s_0)$ 。

若是在空间中, 相当于辐射频率为 $\omega_0 = m\omega_c$ 的空间分布为 $\phi_m(\omega_0, s - s_0)$ 。因此, 对于辐射频率为 $\omega_0 = m\omega_c$ 的辐射



射的总厚度为:

$$\begin{aligned}
 \tau_m(\omega_0) &= \int \alpha_m(\omega_0, s) ds = \int \alpha_m(\omega_0) \phi_m(\omega_0, s) ds \quad (\text{窄线宽}) \\
 &= \alpha_m(\omega_0) \int \phi_m(m\omega_{ce} - \omega_0, s_0) \left| \frac{d(m\omega_{ce})}{ds} \right|^{-1} d(m\omega_{ce}) \\
 &= \alpha_m(s_0) \left| \frac{d(m\omega_{ce})}{ds} \right|_{s=s_0}^{-1} \int \phi_m(m\omega_{ce} - \omega_0, s_0) d(m\omega_{ce}) \\
 &= \frac{\alpha_m(s_0)}{m \left| \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|_{s_0}} = \frac{L_B \alpha_m(s_0)}{m \omega_{ce}(s_0)}
 \end{aligned}$$

由此可见, 谐波谱函数 ϕ_m 的精确表达式在计算总厚度时是不需要的, 只要共振层的厚度是窄线宽就可以了。

这样, 由辐射经过的情况, 在任意位置观测回旋辐射时, 总辐射厚度为:

$$I_m(\omega_m) = \frac{\omega_m^2 T_e(s)}{8\pi^3 c^2} [1 - e^{-\tau_m(s)}]$$

由此可见, 回旋辐射强度是 ~~等离子体~~ 共振层透射系数 $T_e(s)$, $\tau_m(s)$ 的函数。因此, 只要 $m\omega_{ce}$ 的空间分布 (即磁场的空间分布) 是已知的, 利用辐射强度 $I_m(\omega_m)$ 的测量就可以诊断等离子体参数分布, 特别是电子温度 $T_e(s)$ 的分布 (对于等离子体谐波辐射)。

共振条件

$$\omega_0 \leftrightarrow S_0$$

$$|n\omega_{ce}(s) - \omega_0| \ll \omega_0$$

$$I_n(\omega_0) = \int \frac{d\tau_n}{\tau_n} I_B(\omega_0, \tau_n) e^{-\tau_n(\omega_0)}$$

当 $\hbar\omega \ll T_e$ 时

$$I_B(\omega, T_e) = \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2} = \frac{\omega^2}{T_e} \text{ 常数} \quad e^{-\tau_n(\omega_0)}$$

$$\therefore I_n(\omega_0) = \frac{\omega_0^2 T_e(s_0)}{8\pi^3 c^2} [1 - \tau_n(\omega_0)]$$

共振条件:

$$\Delta\omega_n \ll \delta\omega_n = n\omega_{ce} \frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} \quad (\text{电子回旋频率与磁场的变化})$$

即

$$\Delta\omega_n \ll n\omega_{ce} \frac{1}{L_B} \quad L_B \equiv \left(\frac{1}{B_0} \frac{\partial B_0}{\partial s} \right)^{-1}$$

因为

$$\lambda \ll L_B$$

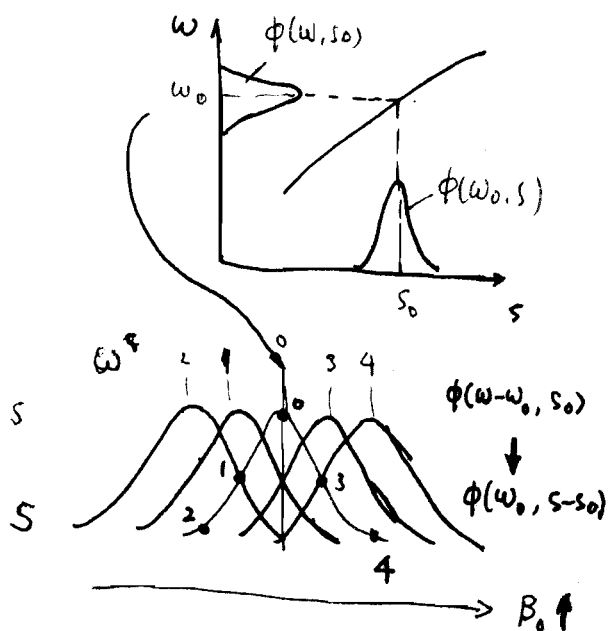
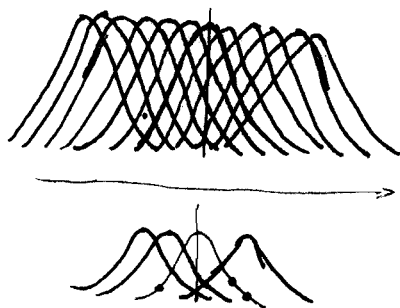
WKB 适用

$$\tau_n(\omega_0) = \int \alpha_n(\omega_0) ds = \int \alpha_n(s_0) \phi_n(\omega_0 - n\omega_{ce}) \left| \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|^{-1} d\omega_{ce}$$

$$= \alpha_n(s_0) \left| \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|^{-1} \int \phi_n(\omega_0 - n\omega_{ce}) d\omega_{ce}$$

$$= \frac{\alpha_n(s_0)}{n\omega_{ce}} \left| \frac{1}{\omega_{ce}} \frac{d\omega_{ce}}{ds} \right|^{-1} \int \phi_n(\omega_0 - n\omega_{ce}) d(n\omega_{ce})$$

$$= \frac{\alpha_n(s_0)}{n\omega_{ce}} L_B$$



六. 等离子体诊断应用

电子回旋辐射应用于等离子体诊断最成功的是托卡马克诊断。因为在托卡马克中，磁场主要由纵场决定，且它是精确已知的，即：

$$B_r(r) = \frac{B_{r0} R_0}{R}$$

在这种情况下，若沿大半径方向观测电子回旋辐射，则辐射梯度板长为 $L_B \equiv R$ 。这时回旋辐射的传播角基本上为 $\theta = \pi/2$ ，即垂直传播，故特征波为寻常波(O)和异常波(X)。根据 Bornatici 的计算结果 [Plasma Phys. 24(1982), p. 629]，寻常波和异常波各次谐波的光学厚度表达式为：

$$\tau_m^{(O)} = \frac{\pi^2 m^{2(m-1)}}{2^{m-1} (m-1)!} \frac{R}{\lambda_0} g \left(1 - \frac{g}{m^2}\right)^{m-\frac{1}{2}} \left(\frac{T_e}{m_{e0} c^2}\right)^m$$

$$\tau_1^{(X)} = 5\sqrt{2} \pi^2 \frac{R}{\lambda_0} g^{-1} \left(\frac{T_e}{m_{e0} c^2}\right)^2 \left(1 - \frac{g}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \quad \frac{1}{2} \leq \frac{T_e}{m_{e0} c^2} < g < 1$$

$$\tau_1^{(X)} = \pi^2 \frac{R}{\lambda_0} g \quad \frac{1}{2} \leq \frac{T_e}{m_{e0} c^2} < g < 2 \frac{T_e}{m_{e0} c^2}$$

$$\tau_m^{(X)} = \frac{\pi^2 m^{2(m-1)}}{2^{m-1} (m-1)!} \frac{R}{\lambda_0} g \left(1 - \frac{g}{m^2} \frac{m^2 - g}{m^2 - 1 - g}\right)^{m-\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{g}{m(m^2 - 1 - g)}\right]^2 \times \left(\frac{T_e}{m_{e0} c^2}\right)^{m-1} \quad (m \geq 2)$$

~~而科学等类似近似下的光学厚度表达式为~~

其中

$$g \equiv \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2}$$

$$\lambda_0 \equiv \frac{c}{f_{ce}}$$

由此可知：

$$\tau_m^{(O)} \propto n_e B_0^{-1} T_e^m \quad \frac{1}{2} \leq m \leq 1$$

$$\tau_1^{(X)} \propto n_e^{-1} B_0^3 T_e^2 \quad \text{或} \quad \tau_1^{(X)} \propto n_e B_0^{-1}$$

$$\tau_m^{(X)} \propto n_e B_0^{-1} T_e^{m-1} \quad \frac{1}{2} \leq m \leq 2$$

在一般托卡马克参数条件下，一般有：

$$\tau_1^{(x)} \approx \tau_3^{(x)} \approx \tau_2^{(0)} \ll 1$$

$$\tau_1^{(0)} \approx \tau_2^{(x)} \geq 1$$

即只有 0 模的一次谐波和 X 模的二次谐波是光薄的辐射。~~因此在托卡马克中通常都是利用 X 模的二次谐波诊断 T_e 分布。~~ 因为 $\tau_2^{(x)} \gg 1$ 时有：

$$I_2^{(x)}(\omega) = \frac{\omega^2 T_e(R)}{8\pi^3 c^2}, \quad \omega \equiv 2\omega_{ce}(R) = \frac{zeB_0 R_0}{m_e R}$$

这样，只要测量了 X 模的二次谐波^谱的谱分布，就可以求得 T_e 的径向分布的测量，因为 $I_2^{(x)} \leftrightarrow T_e$ 和 $\omega \leftrightarrow R$ 均有一一对应关系。

此外，反过来讲，还可以利用回旋辐射测定 $n_e(R)$ 分布和磁场方向：

- (1) 利用光薄的 X 或 0 模测量 $n_e(R)$ 分布，例如利用 m=2 0 模，则有：

$$I_2^{(0)} = I_B \tau_2^{(0)}(\omega) \propto n_e(R) T_e^2(R)$$

只要 $T_e(R)$ 已知，由此就可测 $n_e(R)$

- (2) 利用回旋辐射的偏振特性，测定磁场方向

电磁波是辐射在等离子体中传播时其偏振方向会保持
不变，这只有在 $n_e < 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ 时才有意义。

应用电磁回旋辐射诊断时，为保证 $\omega - s$ 一一对应条件，必须满足：

- (1) $\Delta\omega_m \ll \delta\omega_m$ ，即 $(\frac{v_e}{c})^2 \ll \frac{a}{R}$ (相对温度差) 可忽略
- (2) 不重叠， $\delta\omega_m < \omega_{ce}$ ，即 $m \frac{a}{R} < 1$
- (3) 墙壁无反射，有反射时 $1 - e^{-\tau_m}$

用微波辐射计测量地表温度

$$\begin{array}{lll} B_0 = 1\text{T} & f_{ce} \approx 28\text{ GHz} & 2f_{ce} = 56\text{ GHz} \\ & 2\text{T} & f_{ce} = 56\text{ GHz} & 2f_{ce} = 112\text{ GHz} \end{array}$$

$$I(\omega) = \frac{\omega^2 T_e}{8\pi^3 c^2}$$

$$I(f) = I(\omega) \frac{d\omega}{df} = \frac{f^2 T_e}{c^2} = \frac{1}{\lambda^2} T_e \lambda^2$$

例题. 微波辐射计分析设计

1. 微波辐射计接收机

微波辐射计用增益天线接收, 无损耗至宽带滤波器中, 与本振信号相混频, 得到中频信号被放大并滤波。本振信号与中频信号, 也可相乘。在接收微波辐射计中, 有:

$$I(f) = I(\omega) \frac{d\omega}{df} = \frac{f^2 k T_e}{c^2} [1 - \exp(-\tau)]$$

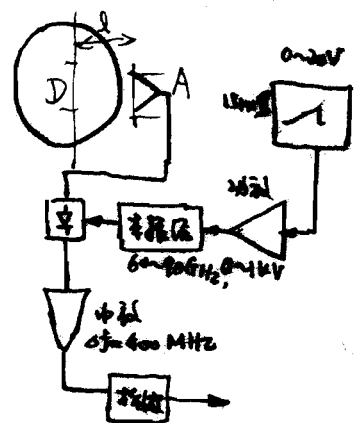
对于温度均匀的辐射计, 根据天线理论, 有 这题中

$$\int d\Omega dA = d\lambda^2 = \alpha \frac{c^2}{f^2}$$

$$\frac{A^2}{4\lambda} < 1 < \frac{AD}{2\lambda}$$

极天线接收的辐射功率为

$$P = I(f) \Delta f \int d\Omega dA = dk T_e [1 - e^{-\tau}] \Delta f$$



对于宽度为 $d=2 \times$ 横, $\tau_2^{(x)} \gg 1$, 故有

$$P^{(w)} = \alpha K T_e^{(R)} \Delta f$$

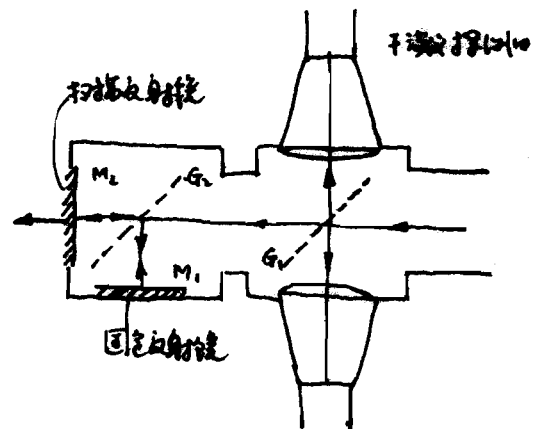
即通过计算接收机所接收的功率直接与电子温度成正比。在热平衡条件下, 发射功率与发射位置有关。因此可以通过改变本振信号的频率 (用扫频, 或时序开关不同频率的本振信号) 而获得不同空间位置上的电子温度。接收机可以用微波噪声温度计, 也可用微波辐射计来测量电子温度相比较而进行标定。

优点: 灵敏度低, 分辨率低 (频率分辨率 ~ 0.001), 时间响应快 (固态频率 $\sim 1 \mu s$, 扫频 $\sim 10 \mu s$).

缺点: 可用频率范围窄, $< 200 \text{ GHz}$, 而且受本振频率电调范围的限制, 约 $10\sim 20\%$.

2. 傅里叶变换谱仪

傅里叶变换谱仪的核心部分是双光束的迈克尔逊干涉仪, 它由具有垂直偏振性的线栅 G_1, G_2 和固定反射镜 M_1 , 动镜反射镜 M_2 组成。动镜做快速扫描。



线栅 G_1 的线垂直于纸面, 这样

线偏振光平行于纸面的入射辐射全透射, 垂直于纸面的入射辐射被全反射。线栅 G_2 的线与纸面成 45° 角, 故通过 G_2 的辐射一半被反射, 一半透射。透射部分, 射入 M_1 , 反射 M_1, G_2 反射后又射到 G_1 ; 而透射部分经动镜反射后, 通过 G_2 而到达 G_1 与另一半会合。它们在 G_1 上相干涉后被 G_1 反射到探测器上。则探测器所接收的干涉信号为:

$$dI(x) = 2 B(f) df \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) = B(f) (1 + \cos \frac{2\pi x}{\lambda}) df$$

则总信号强度为:

$$\cos^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = A^2 [1 + \cos \Delta \phi]$$

$$dI(x) = [A_1 \cos \omega t + A_2 \cos(\omega t + \Delta \phi)]^2 = 2 A_1^2 A_2^2 + A_1 A_2 \cos \Delta \phi$$

$$I(x) = \int_0^{\infty} B(\phi) d\phi + \int_0^{\infty} B(\phi) \cos \frac{2\pi\phi x}{c} d\phi$$

当 $x=0$ 时, 有

$$I(0) = 2 \int_0^{\infty} B(\phi) d\phi$$

故有

$$S(x) = I(x) - \frac{1}{2}I(0) = \int_0^{\infty} B(\phi) \cos \frac{2\pi\phi x}{c} d\phi$$

称为干涉谱

其傅里叶变换为

$$B(\phi) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S(x) \cos \frac{2\pi\phi x}{c} dx$$

由此可见, 干涉谱的傅里叶变换就是光谱仪所接收的辐射亮度谱。

实际上, 光程差 x 只能在有限的范围内变化, 即:

$$P(x) = \begin{cases} 1 & -L \leq x \leq L \\ 0 & x < -L, x > L \end{cases}$$

其傅里叶变换为:

$$P(\phi) = 2L \frac{\sin \frac{2\pi\phi L}{c}}{\frac{2\pi\phi L}{c}}$$

将傅里叶变换的干涉谱实际上记为 $S(x)P(x)$, 故其傅里叶变换为:

$$B(\phi) = 2L \int_{-\infty}^{\infty} B(\phi') \frac{\sin \frac{2\pi(\phi - \phi')L}{c}}{\frac{2\pi(\phi - \phi')L}{c}} d\phi'$$

由此可见, 谱分辨率由 L 决定。谱分辨率的最小频率由 $\frac{c}{L}$ 决定。一般干涉光的光程差为 $1 < L < 3 \text{ cm}$, 扫描时间为 $\sim 10 \text{ ms}$, 因而典型的谱分辨率 为 10 GHz 。

注意: ① 可进行一次扫描时测得光谱随时间的变化, 因此可用去噪方法
 对信号进行滤波或平滑

② 谱分辨率与光程差有关，而与入射狭缝无关，因此允许有较大的谱分辨率。

从而大的谱分辨率

缺点：① 必须通过大的光程差才能设计精密干涉

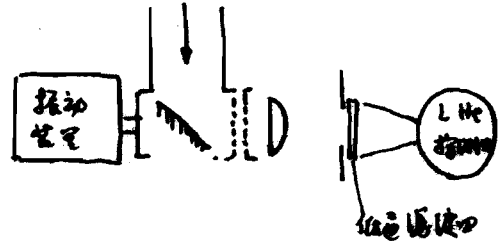
② 谱分辨率 ($\sim 10^4 \text{ Hz}$)，时间分辨率 ($\sim 10 \text{ ms}$) 均较小

3. 法布里-珀罗干涉仪

干涉仪由两个相同的平行反射镜组成。

只透射子数为 T ，反射子数为 R ，则 $T + R = 1$

射入平行光入射到干涉仪上时，透射



率为：

$$T(x) = \left(1 - \frac{A}{T}\right)^2 \left[1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2\left(\phi + \frac{2\pi f x}{c}\right)\right]^{-1}$$

其中 $A = 1 - R - T$ ， ϕ 是定光射子数时的相角

$$\phi + \frac{2\pi f x}{c} = n\pi \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

透射率最大，数由此求得：

$$f_n = (n\pi - \phi) \frac{c}{2\pi x}$$

其分辨率：

$$\Delta f = \frac{f_0}{F_R}$$

f_0 是干涉仪透射极大值频率

F_R 是干涉仪的 finesse

$$F_R = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R}$$

这种干涉仪可以工作在扫描模式。静止时，时间分辨率 $\sim 1 \mu\text{s}$ ，扫描时，时间分辨率为 $\sim 2 \text{ ms}$ ，扫描范围是 $120 \sim 180 \text{ GHz}$ ， $\Delta \nu \approx 5 \text{ GHz}$

缺点是频率分辨率比较低，扫描范围有限（但比 $T_0(x)$ 是好的）

~~缺点~~

4. 傅里叶变换谱仪

$f \sim 5 \text{ GHz}$ ，时间分辨率 $1 \mu\text{s}$ ，扫描频率范围 $100 \sim 300 \text{ GHz}$

优点：时间分辨率与不同频率，时间分辨率快，结构简单，扫描时间短

缺点：分辨率低，扫描范围有限

5. 四种谱仪比较

1) 最佳应用范围

微波计是辐射计

傅里叶变换谱仪

F-P 干涉仪

光栅谱仪

1) 频率 ($\leq 150 \text{ GHz}$) 的能谱随时间的变化

2) 中心频率的能谱分辨率 1) 频率随时间的变化

($60 \sim 600 \text{ GHz}$) 随时间的变化

3) 能谱的分辨率 1) 频率随时间的变化

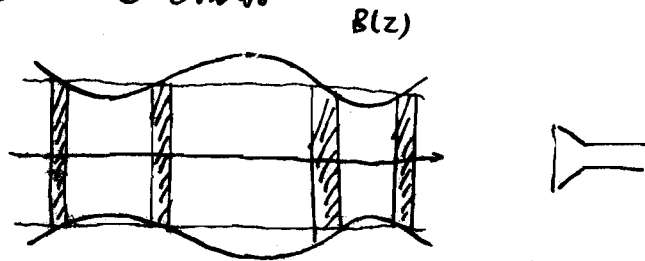
($150 \sim 180 \text{ GHz}$) 随时间的变化

同时能谱分辨率随时间的变化

2) 需测参数和最佳应用范围

参数	要求	特点
指数的谱线成分的分布	1) 频率谱	扫描傅里叶变换谱仪
$T_{\text{eq}}(t)$	2-3 种频率的辐射随时间的变化	① 微波计是辐射计 ② 可调 F-P
$T_{\text{e}}(R, t)$	1. 连续谱辐射随时间的变化	① 傅里叶变换谱仪 ② 扫描 F-P
$\tilde{T}_{\text{e}}(R, t)$	2. 同频率辐射随时间的变化	衍射光栅谱仪

三. 磁控管电子回旋辐射



当在接近天线的支路反走性厚加。此天线此有辐射功率 T_{e} 。

§4.2 等离子体连续辐射

这里，将电子与带电粒子（主要是离子）的库仑场中^作加速运动发出的辐射，称为广义的轫致辐射。更确切讲，电子-离子碰撞产生的辐射可理解为电子给态能量（或状态）的不同而发出：

- (1) 自由-自由跃迁：末态电子是自由电子，且已动量不为零，称为轫致辐射（狭义的）；
- (2) 自由-束缚跃迁：末态电子是束缚电子，且已动量不为零，该跃迁所发出的辐射称为复合辐射。

这里，忽略了电子-电子碰撞的贡献，这是因为同量粒子的双体碰撞过程中，质心或电荷中心的净加速度为零（除非是相对论电子-电子碰撞，且 $\beta \neq 0$ ）。

~~更~~更确切讲，电子的轫致辐射是二过程。在这里，我们着重讨论自由-自由跃迁，因为自由辐射主要对应于电子的加速运动，而束缚辐射主要对应于电子的减速运动，且其辐射功率可忽略，且其辐射功率可忽略。

一. 轫致辐射

其主要特征：

- (1) 电子具有各向同性的速度分布，且其仍随机地以所有方向运动，因此其速度碰撞离子，因此其加速运动发出的轫致辐射是各向同性的，且其偏振是随机的。
- (2) 电子速度是非相对论性的，可用非相对论辐射近似处理辐射过程。
- (3) 电子的辐射功率可忽略，故可用有 γ 光子中的运动方程描述电子在离子库仑场中的运动。

由上述可知，单电子辐射功率可近似为：

$$\vec{E}(\vec{R}, \omega) = \frac{e}{4\pi c \epsilon_0 R'} \int dt e^{-i\omega t} [\hat{S} \times (\hat{S} \times \dot{\vec{\beta}})]_{t'}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}, \omega) &= \frac{e}{4\pi c \epsilon_0 R'} \int e^{-i\omega t} \left\{ \frac{\hat{S} \times [(\hat{S} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{S})^3} \right\}_{t'} dt \\ &= \frac{e}{4\pi c \epsilon_0 R'} \int e^{-i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{c})} \frac{\hat{S} \times [(\hat{S} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{S})^3} dt' \end{aligned}$$

当 $\beta \ll 1$ 时, 其辐射场为:

$$\frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} = \frac{e^2}{16\pi^3 c \epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t' + \frac{R}{c} - \frac{\vec{S} \cdot \vec{r}}{c})} \hat{S} \times (\hat{S} \times \dot{\vec{\beta}}) dt' \right|^2$$

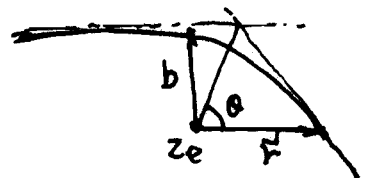
因为 $\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\vec{E}(\vec{r}, \omega)|^2 d\omega = \int_0^{\infty} \frac{d^2 W}{d\Omega d\omega} d\omega$

则对立体角积分, 其辐射场为:

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{e^2}{6\pi^2 c^3 \epsilon_0} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{v} \dot{\vec{\beta}} e^{-i\omega t} dt \right|^2$$

电子在库仑力场中运动轨迹是双曲线轨迹

$$r = \frac{b^2}{b_0(1 + \epsilon \cos \theta)} \quad b \text{ 为碰撞参数}$$



其中 $b_0 \equiv \frac{ze^2}{4\pi \epsilon_0 m v^2}$ 为发生 90° 偏转时的瞄准距离

$$\epsilon \equiv \left[1 + \left(\frac{b}{b_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad \text{为偏转率}$$

能量方程为:

$$\frac{1}{2} m_e [\dot{r}^2 + (\dot{\theta} r)^2] - \frac{ze^2}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{1}{2} m_e v^2 \quad m_e r^2 \ddot{\theta} = M \text{ (角动量)}$$

将电子在库仑力场中的运动方程代入上式, 可求得:

$$\frac{dW}{d\omega} = \frac{2e^2\omega^2}{3\pi^2c^3\epsilon_0} \left(\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2} \right)^2 \left\{ [K'_1(i\eta\epsilon)]^2 + \frac{\epsilon^2-1}{\epsilon^2} [K_1(i\eta\epsilon)]^2 \right\}$$

且

$$\Omega \equiv \frac{\omega b_0}{v}$$

K_1 是虚数阶的何正汉亥尔函数, K'_1 是对其实量的微商。

按式计算的辐射功率随 $\frac{\omega b}{v}$ 的变

化曲线如图所示。由此可知, 电子的

辐射功率随 $\frac{\omega b}{v}$ 的变化在 $\frac{\omega b}{v} \leq 1$

的范围内, 呈下降趋势。即

$\frac{\omega b}{v} \gg 1$, 辐射功率很小。由式

或 $\frac{\omega b}{v} \sim 1$ 或 $\omega \approx \frac{v}{b}$ 表明, 速

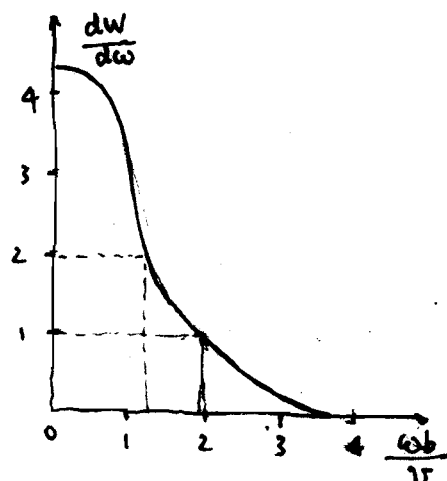
度大的电子产生的辐射功率也大

是, 这是很自然的, 因为辐射功率是

功率是功率是以消耗电子动能而代偿的, 功率越大, 电子的动能(即 ω)越大。

此外, 随着距离 b 的辐射功率也, 当 $b \rightarrow \infty$ 时, $\omega \rightarrow 0$, 这也

是很自然的, 因为 b 小, 电子的加速度大, 其辐射功率也大。



由上述可知, 辐射功率是电子的速度 v 及目标距离 b 的函数。

即

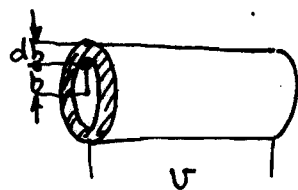
$$\frac{dW}{d\omega} \equiv W(\omega, v, b)$$

若一个电子以速度 v 通过离子云或为 n_i 的离子云, 则其单位时间内与离子的碰撞次数为:

$$n_i v 2\pi b db$$

则它与离子碰撞产生的辐射功率为:

$$\eta(\omega, v) = 2\pi v n_i \int_0^\infty W(\omega, v, b) b db$$



一个电子在单位时间内与离子碰撞产生的辐射功率是

写成式(4)得:

$$\eta(\omega, v) = n_e v \frac{8\pi\alpha}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} (Zr_e)^2 g(\omega, v)$$

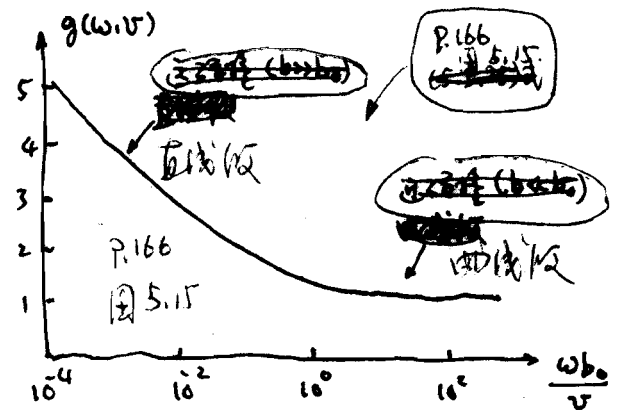
其中

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{2\hbar\epsilon_0 c} \quad \text{为精细结构常数}$$

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \quad \text{为电子(经典)半径}$$

$$b_0 = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

$g(\omega, v)$ 为商特因子, 之表之辐射功率分布因子。由图可见, 对于给定的参数 (b_0, v) 的电子, 其辐射功率主要集中在 $\frac{\omega b_0}{v} \leq 1$ 的范围内; 在高频范围内, 即 $\frac{\omega b_0}{v} \geq 1$, 其辐射功率为很小的。



是子力计算量: 涉及两个方面是2个独立:

(1) 电子的波动性

(2) 电磁辐射的量子性

由电子的波动性可知, 电子的最小瞄准距离 b 。由于受到不确定原理的限制, 即由动量不确定关系决定:

$$\Delta x = \hbar / \Delta p$$

而位置的不确定性不得超过其本身, 即:

$$\Delta p \leq m v$$

故有

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{m v}$$

即

$$\frac{\hbar}{m v} \leq b_0 = \frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

即

$$v \leq Z\alpha c \quad \alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$$

或

$$\frac{1}{2}m_0 v^2 \leq Z^2 R_y \quad (\text{经典近似成立的条件})$$

$$R_y \equiv \frac{m_e}{2} \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar} \right)^2 \quad \text{为里德堡常数, 电子及原子核质量}$$

上述条件是经典辐射理论成立的条件, ~~当上述条件不满足时, 必须用量子理论处理。~~ 而由辐射功率 $\frac{dW}{dt}$ 曲线可知, $\frac{\omega_0}{v} \leq 1$ 为经典辐射范围, v 为电子速度, ω_0 为辐射频率。由此可知, 对于低能辐射, 两种理论所得的结果相差不大, 量子理论适用于高能辐射, 而经典理论适用于低能辐射。量子理论辐射功率 $\frac{dW}{dt}$ 有较大的差别。量子理论辐射功率 $\frac{dW}{dt}$ 有:

$$\hbar\omega = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2$$

故有

$$\hbar\omega \leq \frac{1}{2}mv^2$$

$$(\text{经典近似成立的条件 } \hbar\omega \ll \frac{1}{2}mv^2)$$

这样, 量子理论对低能辐射公式的修正可归结为对辐射功率的修正。
P. 167~169 给出了各种条件下辐射功率的修正公式。

辐射功率 $\frac{dW}{dt}$ 量子化: 单位时间内辐射功率与频率成正比

$$\sigma(\omega, v) \equiv \frac{\eta(\omega, v)/\hbar\omega}{n_0 v} = \frac{\text{单位时间内辐射功率 } \hbar\omega \cdot \text{单位时间内辐射功率}}{\text{电子单位时间内通过单位面积的电子数}}$$

$$\text{由此可得: } \frac{16\alpha}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \pi (Zr_e)^2 \frac{1}{\omega} g(\omega, v)$$

$$\sigma(\omega, v) = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \alpha (Zr_e)^2 \frac{1}{\omega} g(\omega, v)$$

由此可知:

σ 随 Z 增大而增大

随 v, ω 增大而减小

$$j(\omega) = n_e n_i z^2 \frac{8\pi\alpha c^2 r_e^2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \bar{g}(\omega, T_e) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \quad (4-27)$$

将电子的辐射功率谱对电子的速度分布函数积分，即可得到
等离子体辐射的总功率谱：

$$j(\omega) = \int \eta(\omega, v) n_e f(v) dv$$

对于方向同性的麦克斯韦分布的电子，上式可化为：

$$j(\omega) = n_e n_i z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{16\pi}{3\sqrt{3} n_e^2 c^3} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \bar{g}(\omega, T_e) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right)$$

其中 $\bar{g}(\omega, T_e) = \int_0^\infty g(\omega, E' + \hbar\omega) \exp\left(-\frac{E'}{T_e}\right) \frac{dE'}{T_e}$

这是对麦克斯韦分布求平均的函数因子，它依赖于电子的速度分布。

其中 $E = \frac{1}{2} m v^2 = E' + \hbar\omega$

书中 P.171 图 5.18 给出了 $\bar{g}(\omega, T_e)$ 的曲线。若注意到，在很宽的范围中，即：

$$0.1 \leq \frac{\hbar\omega}{T_e} < 10$$

P.167~171 给出了在量子的两种情形
近似的函数因子 (Gaunt factor)
的公式

\bar{g} 的取值范围为 $\bar{g} \approx 0.2 \sim 2$ 。它与 $j(\omega)$ 公式中 $T_e^{-1/2} \exp(-\frac{\hbar\omega}{T_e})$
因子相比，可近似地取为常数 $\bar{g}(\omega, T_e) \approx 1$ (当 $0.1 \leq \frac{\hbar\omega}{T_e} \leq 10$ 时)。

二、逆轫辐射：

当速度为 v 的电子与离子碰撞时，被离子(电荷数为 Z)捕获而处在
主量子数为 n 的能级上，这个过程将产生光子辐射为：

$$\hbar\omega = \frac{1}{2} m_e v^2 + \chi_{21, n}$$

的逆轫辐射，其中 $\chi_{21, n}$ 为电子态为 $(2+)$ 的离子，主量子数为 n 的束缚

的电磁场。这个过程的万有辐射，它与轫致辐射的物理过程相类似，即不同的过程是电子为束缚电子，而不是自由电子。

根据这两个辐射过程类似的性质，我们可以从轫致辐射截截面导出复合辐射截面：

轫致辐射 $\hbar\omega = E - E'$ $E = \frac{1}{2}mv^2$ 初态电子能量， E' 为终态电子能量

复合辐射 $\hbar\omega = E + \chi_{Z1,n}$

由此可知，当 $E' \rightarrow 0$ 和 $\chi_{Z1,n} \rightarrow 0$ 时，这两个辐射过程是等价的，它们的辐射截截面是相等的，即 $\sigma_{ff}(\omega, v) d\omega = \sigma_{fb}(\omega, n) dn$ 。

由此可知，轫致辐射当 $E' \approx 0$ 时，相当于“高频”轫致辐射，且截面为：

$$\sigma_{ff}(\omega, v) d\omega = \frac{16}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \alpha \pi (Zr_e)^2 \frac{1}{\omega} d\omega g(\omega, v)$$

其中 $r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}$, $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$

对于类氢原子，其 n 壳层吸收的电势（截面）表示为：

$$\chi_{Z1,n} \equiv \frac{Z^2 R_y}{n^2} \quad R_y = \chi_{H,1} \text{ 是氢原子基态电离势}$$

则复合辐射截面为：

$$\hbar\omega = E + \frac{Z^2 R_y}{n^2}$$

$$\hbar d\omega = -\frac{2Z^2 R_y}{n^3} dn$$

由此可得：

$$\left| \frac{d\omega}{dn} \right| = \frac{2Z^2 R_y}{n^3 \hbar}$$

则复合辐射截面为：

$$j_{fb}(\omega) = n_e n_i Z^2 \frac{8 h \alpha c^2 r_e^2}{3 \sqrt{3}} \left(\frac{2 m_e}{\pi T_e} \right)^{1/2} \exp \left[- \frac{\hbar \omega}{T_e} \right]$$

4-29

$$\times \left[\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} g_n \exp \left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \right) \right]$$

$$\sigma_{fb}(\omega, n) = \sigma_{ff}(\omega, v) \left| \frac{d\omega}{dn} \right| = \frac{16\pi}{3\sqrt{3}} \frac{c^2}{v^2} \alpha (Z r_e)^2 \frac{1}{\hbar \omega} \frac{2 Z^2 R_y}{n^3} g_n$$

其中 g_n 为复合时 n 能级上的辐射角动量子。由 (2) 及 (3) 得：

(1) v 越大 (初动能越大), σ_{fb} 越大

(2) Z 越大, σ_{fb} 越大

(3) n 越大, σ_{fb} 越大

实际上, 我们电子的计量复合辐射与体辐射。由于复合辐射时, 速度与辐射频率是一一对应的, 即 $\hbar \omega = \frac{1}{2} m_e v^2 + \chi_{Z, n}$, 因此求体辐射时不需对 $f(\omega)$ 求积分, 只需直接计算。即:

$$\Rightarrow j_{fb}(\omega) = n_e v \hbar \omega \sigma_{fb}(\omega, n) \times 4\pi v^2 f(\omega) n_e \left| \frac{dv}{d\omega} \right|$$

对复合辐射

$$= n_e n_i Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \right)^3 \frac{16\pi}{3\sqrt{3} m_e^2 c^2} \left(\frac{2 m_e}{\pi T_e} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{\hbar \omega}{T_e} \right)$$

代入上式

$$v = \left[\frac{2(\hbar \omega - Z^2 R_y/n^2)}{m_e} \right]^{1/2} \times \left[\frac{Z^2 R_y}{T_e n^2} \frac{2}{n} g_n \exp \left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \right) \right] \quad \text{当 } \hbar \omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2} \text{ 时}$$

这个公式与体辐射公式是相类似的, 只是 $j_{ff}(\omega, v)$ 中的 $\bar{\sigma}_{ff}(\omega, T_e)$ 被上式中的因子 $\left[\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} g_n \exp \left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \right) \right]$ 所代替。但应注意,

因为 $\hbar \omega = E + \frac{Z^2 R_y}{n^2}$, $j_{fb}(\omega)$ 只有当 $\hbar \omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2}$ 时才成立。对于

(2) $j_{fb}(\omega) = 0$ 。这个特性由归并因子 g_n 中。即

$$\hbar \omega < \frac{Z^2 R_y}{n^2}, \quad g_n \neq 0 \quad \text{当} \quad \hbar \omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2} \text{ 时}$$

$$g_n = 0 \quad \text{当} \quad \hbar \omega < \frac{R_y Z^2}{n^2} \text{ 时}$$

g_n 可由量子力学计算 (给出), 计算表明: 当 $\hbar \omega < 10 Z^2 R_y$ 时, $g_n \approx 1$ (误差在 20%)。

对于非定态束缚态的离子复合，其电离势的计算就比较复杂。但是电子的动能不比电离势大很多的情况下，可做定态(基态)屏蔽定态屏蔽的。这时就可把离子电荷 Z 视为核电荷，视该离子为原子态。则对于重壳层，其电离势可近似为：

$$X_{21,n} = \frac{Z^2 R_y}{n^2} \quad \left| \frac{d\omega}{dn} \right| = \frac{2 R_y Z^2}{\hbar n^3}$$

对于主量子数为 ξ 的束缚层 n_0 ，其有效电离势为：

$$(X_{21,n_0})_{\text{eff}} = \frac{\xi}{2n_0^2} X_{21,n_0}, \quad \left| \frac{d\omega}{dn} \right| = \frac{\xi X_{21,n_0}}{\hbar n_0^3}$$

假设层间有壳层上的复合辐射，则具体辐射率为：

$$j_{3b}(\omega) = n_e n_i Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right) \frac{16\pi}{3\sqrt{3} m_e c^3} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right)$$

$$\times \left\{ g_{n_0} \frac{\xi}{n_0^3} \frac{X_{21,n_0}}{T_e} \exp\left(\frac{X_{21,n_0}}{T_e}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{Z^2 R_y}{n^3 T_e} \frac{2}{\hbar} \exp\left(\frac{Z R_y}{n^3 T_e}\right) \right\}$$

这里， n_0 是满足 $\hbar\omega$ 是 $\hbar\omega$ 相对之 n ，这是复合辐射辐射发生的最小主量子数，它必须满足：

$$n_0 \geq \left(\frac{Z^2 R_y}{\hbar\omega} \right)^{1/2}$$

$$\xi = 2n_0^2 - \mu_0, \quad \mu_0 \text{ 为 } n_0 \text{ 壳层上已有的电子数}$$

三. 连续辐射体辐射率和吸收系数

连续辐射总辐射率是轫致辐射和复合辐射的体辐射率之和，单位体积在单位角度的体辐射率为：

$$j(\omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [j_{3f}(\omega) + j_{3b}(\omega)]$$

$$n_e n_i Z^2 \frac{2\hbar c^2 r_e^2}{3\sqrt{3}\pi} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right\} \quad 4-31$$

$$j(\omega, \Omega) = n_e n_i Z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{4}{3\sqrt{3} m_e^2 c^3} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right)$$

$$\times \left\{ \bar{g}_{ff} + g_{n_0} \frac{\xi}{n_0^3} \frac{\chi_{21, n_0}}{T_e} \exp\left(\frac{\chi_{21, n_0}}{T_e}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right\}$$

将物理量代入上式, 则有:

$$j(\omega, \Omega) = 8.0 \times 10^{-55} n_e n_i Z^2 (T_e [\text{eV}])^{-1/2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right)$$

$$\times \left\{ \bar{g}_{ff} + g_{n_0} \frac{\xi}{n_0^3} \frac{\chi_{21, n_0}}{T_e} \exp\left(\frac{\chi_{21, n_0}}{T_e}\right) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right\}$$

典型的氢射光谱 ($T_e = Z^2 R_y$) 如下图所示。

由此可知:

1. 氢射谱在 $\hbar\omega = Z^2 R_y / n^2$ 处出现谱线,

位于复合边

2. 氢射谱在复合边处出现不连续谱

外, 在复合边的一侧, 氢射谱随

$\exp(-\hbar\omega/T_e)$ 变化, 因此可利用该谱

线的谱线系对数曲线的斜率求出电子温度 T_e 。

3. 复合辐射与氢射辐射功率之比

$$\frac{j_{fb}(\omega, \Omega)}{j_{ff}(\omega, \Omega)} = \frac{2}{n^3} \frac{Z^2 R_y}{T_e} \frac{g_n}{\bar{g}_{ff}} \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e}\right)$$

这里 n 由下述不等式决定, 即:

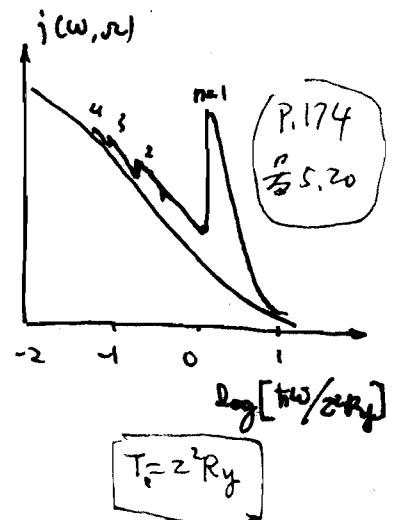
$$n \geq \left(\frac{Z^2 R_y}{\hbar\omega}\right)^{1/2} \quad (\because \text{只有 } \hbar\omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2} \text{ 时, 才有 } g_n \neq 0)$$

当 $\hbar\omega \ll Z^2 R_y$ 时, 只有很大的 n 对辐射有贡献, 这时 $j_{fb}/j_{ff} \ll 1$

当 $\hbar\omega \geq Z^2 R_y$ 时, 所有 n 都有贡献, 则 $j_{fb} \approx j_{ff}$ 。

而当 $Z^2 R_y \gg T_e$ 时 $j_{fb} \gg j_{ff}$

当 $Z^2 R_y \ll T_e$ 时, 所有 ω 的 j_{fb} 都趋近于 0



x 4. 当 T_e 固定时, α 值 j_{fb}/j_{ff} 随 ω 增大而增大,

这是因为 j_{fb} 随 ω 增大而减小, j_{ff} 随 ω 增大而增大。特别有:

$$\text{当 } \lambda < 3000 \text{ \AA} / T_e [\text{eV}] \text{ 时, } j_{fb} > j_{ff}$$

$$\text{当 } \lambda > 3000 \text{ \AA} / T_e [\text{eV}] \text{ 时, } j_{fb} < j_{ff}$$

x 5. 对于给定的 ω , α 值 j_{fb}/j_{ff} 随 T_e 增大而减小。特别有:

$$\text{当 } T_e > 3 Z^2 R_y \text{ 时, } j_{fb} < j_{ff}$$

$$\text{当 } T_e < Z^2 R_y \text{ 时, } j_{fb} > j_{ff}$$

$$6. j_{ff} \propto Z^2, j_{fb} \propto Z^4$$

因此辐射特性随离子电荷数 Z 增大而急剧增大。

连续辐射的吸收系数

$$\alpha(\omega) = \frac{j(\omega, n)}{I_B(\omega, T_e)}$$

$$\text{其中 } I_B(\omega, T_e) = \frac{2\pi\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} \left[e^{\frac{\hbar\omega}{T_e}} - 1 \right]^{-1} \quad (\text{单位})$$

(1) 当 $\hbar\omega \ll T_e$ 时

$$I_B(\omega, T_e) \approx \frac{\omega^2 T_e}{4\pi^3 c^2}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^3 c^2}{T_e \omega^2} j(\omega, n) \propto \omega^{-2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \propto \omega^{-2}$$

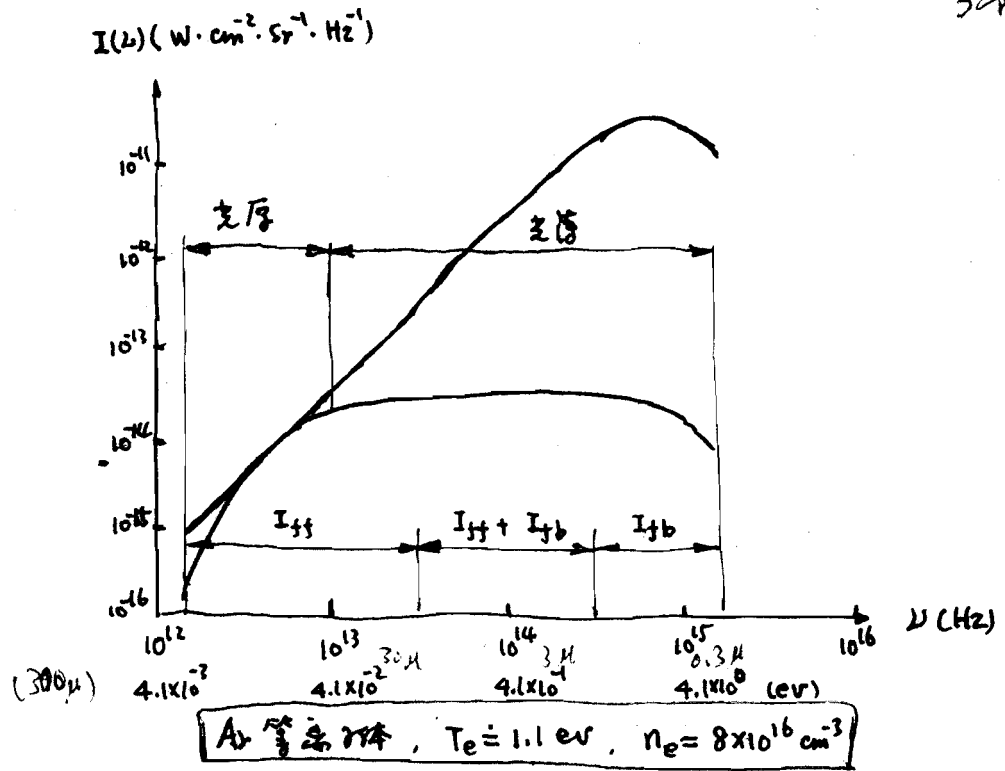
由此可见, 当 ω 减小时, α 增大, 有吸收谱的连续辐射

(2) 当 $\hbar\omega \gg T_e$ 时

$$I_B(\omega, T_e) \approx \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^3 c^2} \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{4\pi^3 c^2}{\hbar\omega^3} \exp\left(\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) j(\omega, n) \propto \omega^{-3}$$

由此可见, 当 ω 增大, $\alpha(\omega)$ 随之减小, 在 X 射线波段连续辐射的吸收系数是下降的。



P. 175 式 (5.3.54)

$$j(\omega, \mu) = 8.0 \times 10^{-55} n_e n_i Z^2 (T_e [\text{eV}])^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right] \\ \times \left\{ \bar{g}_{ff}(\omega, T_e) + g_{n_0} \frac{\sum \chi_{2l, n_0}}{n_0^2 T_e} \exp\left(\frac{\chi_{2l, n_0}}{T_e}\right) \right. \\ \left. + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} g_n \frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{Z^2 R_y}{n^2 T_e}\right) \right\} [\text{W} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}]$$

~~其中 \bar{g}_{ff} 为~~

其中 $\bar{g}_{ff} \approx 1.0$ 当 $0.1 \leq \frac{\hbar\omega}{T_e} \leq 10$ 时

$g_n \approx 1.0$ 当 $\hbar\omega < 10 Z^2 R_y$ 时

($g_n \neq 0$ 当 $\hbar\omega \geq \frac{Z^2 R_y}{n^2}$ 时

$g_n = 0$ 当 $\hbar\omega < \frac{Z^2 R_y}{n^2}$ 时)

四 等离子体诊断中的应用

1. 电子温度测量

等离子体连续辐射可覆盖很宽的频率范围，通常从 ω_{pe} (之通常无线电波段) 到 $\omega \geq T_e$ (对于高温等离子体，之通常至X射线波段)。利用不同的谱区，有3种用于各种等离子体参数诊断。当 $\omega \geq T_e$ 时，连续辐射的谱与电子温度有密切的联系，减小，则电子温度，可利用谱的 $\exp(-\frac{\hbar\omega}{T_e})$ 来校准谱线 T_e 。

对于高温等离子体，特别是磁约束等离子体， $\hbar\omega \geq T_e$ 的辐射是X射线波段，通常是利用固体探测器测量X射线能谱，这种X射线能谱仪称为X射线脉冲幅度分析器。其测量原理大致如下：当射线探测器(半导体探测器)上的X射线能量较小时，探测器输出的电荷信号是一个脉冲，这时是利用脉冲计数的方式来测量探测器接收到的辐射功率。X射线光子在探测器中的吸收(耗尽层，它没有耗尽层以下不存在自由载流子)由这些光子产生电子-空穴对。若在探测器中每产生一个电子-空穴对消耗的能量为 ϵ ，则能量为 $\hbar\omega$ 的光子 ($\epsilon = \hbar\omega$)，平均产生 $\frac{\hbar\omega}{\epsilon}$ 个电子-空穴对。

$$\bar{N} = \frac{E}{\epsilon}$$

则这些产生的电荷脉冲信号幅度为：

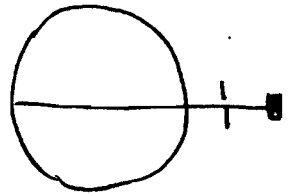
$$V \propto \bar{N}e = Q \propto E = \hbar\omega \quad (\text{电荷数与能量成正比})$$

而单位时间内测得的脉冲计数率是正比于探测器在单位时间内接收到的光子数。这样，测量分析器输出的不同幅度脉冲的计数率就可得到X射线能谱的测量。

对于低密度的等离子体，X射线辐射是连续的，则单位时

向探测器接收的粒子数为:

$$\int d\Omega \frac{j(r, E, \Omega)}{E} A \Omega$$



其中 Ω 为探测器接收立体角, 探测器位置 r 为常数, A 为探测器接收面积 (一般也是 r 的函数)。设探测器接收通量为 $T(E)$ (它包括探测器死层和探测器可滤波的吸收效应), 探测器的量子效率为 $Q(E)$ (它是 x 射线进入死层及死层中的吸收), 之比为:

$$T(E) = \exp\left[-\sum_i \alpha_i(E) x_i\right]$$

$$Q(E) = 1 - \exp(-\alpha x)$$

则探测器输出的脉冲计数率 $S(E)$ 的分布为:

$$S(E) = \frac{dN(E)}{dt} = T(E) Q(E) \int d\Omega \frac{j(r, E, \Omega)}{E} A \Omega$$

因为

$$j(r, E, \Omega) \propto \exp\left[-\frac{E}{T_e(r)}\right] \times \frac{n_e^2(r)}{\sqrt{T_e(r)}}$$

设积分 $S(E)$ 随 E 变化的形式, 主要由指数因子 $\exp\left[-\frac{E}{T_e(r)}\right]$ 决定。设电子温度分布为

$$T_e(r) = T_{e0} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^\alpha$$

$r \ll a$ 区域内
在 $r \ll a$ 范围内, 指数因子可近似地表示为:

$$\begin{aligned} \exp\left[-\frac{E}{T_{e0} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^\alpha}\right] &\approx \exp\left[-\frac{E}{T_{e0}} \left(1 + \alpha \frac{r^2}{a^2}\right)\right] \\ &= \exp\left(-\frac{E}{T_{e0}}\right) \exp\left\{-\frac{\left(\frac{r}{a}\right)^2}{\frac{T_{e0}}{\alpha E}}\right\} \end{aligned}$$

第一个指数因子 $\exp(-E/T_{e0})$ 与 r 无关, 只决定积分因子,

利用如下恒等式：

$$\delta(x-x_0) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{\Delta}\right\}$$

将第(5)指数因子化为 $\delta(x)$ 函数：(当 $E \gg T_{e0}$ 时)

$$\sqrt{\frac{T_{e0}}{\alpha E}} \frac{1}{\sqrt{\frac{T_{e0}}{\alpha E}}} \exp\left\{-\frac{(\frac{x}{\alpha})^2}{(\frac{T_{e0}}{\alpha E})}\right\} \xrightarrow{\alpha E \gg T_{e0}} \sqrt{\frac{\pi T_{e0}}{\alpha E}} \delta(x)$$

这样，当 $\alpha E \gg T_{e0}$ 时，上述积分方程可近似地表示为：

$$S(E) = (A\Omega) \Big|_{r_0} T(E) Q(E) E^{-1} \left(\frac{\pi T_{e0}}{\alpha E}\right)^{1/2} j(0, E, \Omega)$$

由此可得：

$$S(E) E^{3/2} [T(E) Q(E)]^{-1} = (A\Omega) \Big|_{r_0} j(0, E, \Omega) \propto \exp(-E/T_{e0})$$

由此可见，脉冲辐射方程所给出的支分方程，在 $E \gg T_{e0}$ 的范围内，经推导即是指数因子化为 $\delta(x)$ 的近似，可由此求出电离层中 ω 的分布函数。由此可得到电离层中 ω 的分布函数。

二. Z_{eff} 的测量

Z_{eff} 的定义为：

$$Z_{eff} \equiv \frac{\sum n_i Z_i^2}{\sum n_i Z_i}$$

$$\sum n_i Z_i = n_e$$

它是等离子体中的平均的离子电荷。对于单一离子的等离子体， $Z_{eff} = Z$ (Z 为离子电荷数)。对于含有多种离子的等离子体， Z_{eff} 表示该等离子体中所有离子的平均电荷数。

从上述讨论可知，离子辐射的包络面与离子分布是 $h\nu \ll ZkT_e$ ，对于氢离子的离子，它相当于要求 $h\nu \ll 13.6 \text{ eV}$ ，对于可见光或

$$1 \text{ eV} = 1.2398 \mu\text{m} = 12398 \text{ \AA} = 1239.8 \text{ nm}$$

波长更长的辐射, 这个条件通常是容易满足的。在这个条件下, 两种离子的散射因子都取为相同, 则总散射截面可表示为:

$$j(\omega, n) = 8.0 \times 10^{-57} n_e (T_e [\text{eV}])^{\frac{1}{2}} \bar{g}_{\text{eff}}(\omega, T_e) \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \times \sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z^2$$

此外, 对于金属等离子体, 对于满足 $\hbar\omega \ll T_e$ 或波长更长的离子, 有 $\hbar\omega \ll T_e$, 则上式可简化为:

$$j(\omega, n) = 8.0 \times 10^{-57} \frac{n_e^2}{\sqrt{T_e [\text{eV}]}} \bar{g}(\omega, T_e) Z_{\text{eff}} \quad [\text{W} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}]$$

$$\text{即} \quad Z_{\text{eff}} = \frac{\sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z^2}{\sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z} = \frac{\sum_A \sum_Z n_i(A, Z) Z^2}{n_e}$$

由此可知: 只要是对等离子体某一波长下 (满足条件 $\hbar\omega \ll Z^2 R_y$) 的辐射散射功率, 且 n_e 和 T_e 是已知的, 则由该测量就可求出有效电荷数 Z_{eff} 的值。

该测量要求:

- (1) 对等离子体和辐射子做绝热处理
- (2) $\hbar\omega \ll Z^2 R_y$, 是阿耳夫文区
- (3) 等离子体是均匀的, 没有吸收和散射 (如 5240 Å 或 5360 Å 附近)。
- (4) $T_e \gg Z^2 R_y$ 以保证绝热处理。

3. X射线荧光分析

利用 X 射线荧光分析法和射线照相的方法, 可获得定量的关于 X 射线吸收方面的荧光分析。若有多组样品 (样品) 的阵列进行多方位角度的测量, 则通过层析方法可

获得局域的 X 射线体辐射率能层从则是，这个能层辐射是体辐射的体辐射，即

$$I \propto \int j(\nu, E, R) Q(E) T(E) dE \propto Z_{\text{eff}}(\nu) n_e^2(\nu) T_e^{\gamma}(\nu)$$

即

$$T(E) Q(E) = [1 - e^{-A(E)X}] e^{-\sum_i \alpha_i X_i}$$

γ 为 ~~常数~~ 常数，其大小为 2~5。普通吸收能层材料的不均匀，以及 X 射线体辐射量而定。由此可知，等分吸收 + 体层吸收，电子吸收和电子温度能层分布 X 射线体辐射出能层。特别在 MHD 不稳定（不稳定性强），使 X 射线体辐射出能层和能层。因此之是强着 MHD 不稳定性的主要之一。

层辐射体辐射等分吸收能层而辐射出的量有：(1) 能层是整体辐射的，因而用分体层辐射出能层 (2) 等分吸收是辐射的体辐射。

§4.3 单电子的波函数

波函数与能量导致了原子的量子理论的发展。由于单电子光谱是原子光谱。这已不再能解释如光谱项和光谱线。所以必须建立波函数的一种理论(或量子)的波函数。因此各种量子数已知。在此基础上,波函数与能量等物理量直接相关的量子力学问题。

中心力场近似:

① 单电子在原子中心力场和电子之间的平均力场中运动

一. 原子光谱与原子光谱的基本知识 ② 电子在原子中的平均力场也是中心力场

1. 中心力场近似的电子组态 (单电子光谱)

决定单电子光谱的有四个量子数: ~~量子数~~

主量子数 n : 决定电子所处的壳层, 表征壳层的符号如下:

n	1	2	3	4	5	6	7
符号	K	L	M	N	O	P	Q

轨道角动量子数 l : 决定电子所处的子壳层, 对每一个 n 值, l 可取值为 $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
符号	s	p	d	f	g	h	i	k	l	m	n

磁量子数 m : 决定轨道角动量在空间的分量, 对于每一个 l 值, m 可取值为:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

自旋角动量子数 m_s : 可取值为 $m_s = \pm \frac{1}{2}$

由此可知: 对于每一个 n 值, 主层壳层内最多电子数为 $2n^2$

对于每一个子壳层 l , 子壳层内最多电子数为 $2(2l+1)$

电子组态: 是指一个原子(或离子)中各电子所处的 n, l 壳层情况(组合)。

2. 中心力场近似下的LS耦合光谱项与J取

中心力场近似的原子光谱是双电子间的相互作用力所引入的。由于满壳层电子的分布是球对称的，它们对价电子不产生非中心力场，因此非中心力是价电子（非满壳层内）之间的相互作用引起的。对满壳层 1S （即 $L=S=J=0$ ）

LS耦合：价电子的轨道角动量和自旋角动量分别耦合为总角动量 L 和总自旋角动量 S ，即：

$$\vec{L} = \sum \vec{l}_i, \quad \vec{S} = \sum \vec{s}_i$$

然后 L 和 S 耦合为总角动量 J ，即

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

L 取值： $L \leq n_a l$ （ n_a 为价电子的数目）

S 取值： $S \leq \frac{1}{2} n_a$

J 取值： $J = L+S, L+S-1, \dots, |L-S|$

共有 $2S+1$ （当 $L \geq S$ ）或 $2L+1$ （当 $L < S$ ）个

J 值

量子数 $M_J = \pm J, \pm(J-1), \dots, 0$ 光谱项：用价电子

在 LS 耦合下，及 J 取值的符号为：

如总轨道角动量 L 和总

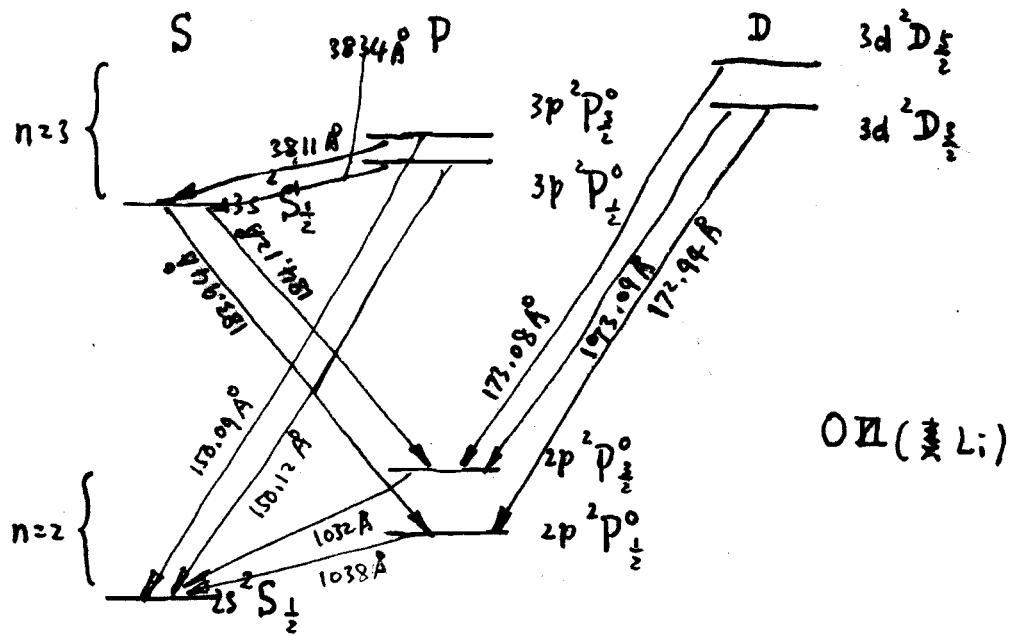
自旋角动量 S 表征的

光谱项 ^{2S+1}L 。

$^{2S+1}L_J$

反壳层

电子填充顺序为 $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, 7s, 5f, 6d, 7p, 8s, 5g, 6f, 7d, 8p, 9s, 6g, 7f, 8d, 9p, 10s, 6h, 7g, 8f, 9d, 10p, 11s, 7h, 8g, 9f, 10d, 11p, 12s, 7i, 8h, 9g, 10f, 11d, 12p, 13s, 8i, 9h, 10g, 11f, 12d, 13p, 14s, 9i, 10h, 11g, 12f, 13d, 14p, 15s, 10i, 11h, 12g, 13f, 14d, 15p, 16s, 11i, 12h, 13g, 14f, 15d, 16p, 17s, 12i, 13h, 14g, 15f, 16d, 17p, 18s, 13i, 14h, 15g, 16f, 17d, 18p, 19s, 14i, 15h, 16g, 17f, 18d, 19p, 20s, 15i, 16h, 17g, 18f, 19d, 20p, 21s, 16i, 17h, 18g, 19f, 20d, 21p, 22s, 17i, 18h, 19g, 20f, 21d, 22p, 23s, 18i, 19h, 20g, 21f, 22d, 23p, 24s, 19i, 20h, 21g, 22f, 23d, 24p, 25s, 20i, 21h, 22g, 23f, 24d, 25p, 26s, 21i, 22h, 23g, 24f, 25d, 26p, 27s, 22i, 23h, 24g, 25f, 26d, 27p, 28s, 23i, 24h, 25g, 26f, 27d, 28p, 29s, 24i, 25h, 26g, 27f, 28d, 29p, 30s, 25i, 26h, 27g, 28f, 29d, 30p, 31s, 26i, 27h, 28g, 29f, 30d, 31p, 32s, 27i, 28h, 29g, 30f, 31d, 32p, 33s, 28i, 29h, 30g, 31f, 32d, 33p, 34s, 29i, 30h, 31g, 32f, 33d, 34p, 35s, 30i, 31h, 32g, 33f, 34d, 35p, 36s, 31i, 32h, 33g, 34f, 35d, 36p, 37s, 32i, 33h, 34g, 35f, 36d, 37p, 38s, 33i, 34h, 35g, 36f, 37d, 38p, 39s, 34i, 35h, 36g, 37f, 38d, 39p, 40s, 35i, 36h, 37g, 38f, 39d, 40p, 41s, 36i, 37h, 38g, 39f, 40d, 41p, 42s, 37i, 38h, 39g, 40f, 41d, 42p, 43s, 38i, 39h, 40g, 41f, 42d, 43p, 44s, 39i, 40h, 41g, 42f, 43d, 44p, 45s, 40i, 41h, 42g, 43f, 44d, 45p, 46s, 41i, 42h, 43g, 44f, 45d, 46p, 47s, 42i, 43h, 44g, 45f, 46d, 47p, 48s, 43i, 44h, 45g, 46f, 47d, 48p, 49s, 44i, 45h, 46g, 47f, 48d, 49p, 50s, 45i, 46h, 47g, 48f, 49d, 50p, 51s, 46i, 47h, 48g, 49f, 50d, 51p, 52s, 47i, 48h, 49g, 50f, 51d, 52p, 53s, 48i, 49h, 50g, 51f, 52d, 53p, 54s, 49i, 50h, 51g, 52f, 53d, 54p, 55s, 50i, 51h, 52g, 53f, 54d, 55p, 56s, 51i, 52h, 53g, 54f, 55d, 56p, 57s, 52i, 53h, 54g, 55f, 56d, 57p, 58s, 53i, 54h, 55g, 56f, 57d, 58p, 59s, 54i, 55h, 56g, 57f, 58d, 59p, 60s, 55i, 56h, 57g, 58f, 59d, 60p, 61s, 56i, 57h, 58g, 59f, 60d, 61p, 62s, 57i, 58h, 59g, 60f, 61d, 62p, 63s, 58i, 59h, 60g, 61f, 62d, 63p, 64s, 59i, 60h, 61g, 62f, 63d, 64p, 65s, 60i, 61h, 62g, 63f, 64d, 65p, 66s, 61i, 62h, 63g, 64f, 65d, 66p, 67s, 62i, 63h, 64g, 65f, 66d, 67p, 68s, 63i, 64h, 65g, 66f, 67d, 68p, 69s, 64i, 65h, 66g, 67f, 68d, 69p, 70s, 65i, 66h, 67g, 68f, 69d, 70p, 71s, 66i, 67h, 68g, 69f, 70d, 71p, 72s, 67i, 68h, 69g, 70f, 71d, 72p, 73s, 68i, 69h, 70g, 71f, 72d, 73p, 74s, 69i, 70h, 71g, 72f, 73d, 74p, 75s, 70i, 71h, 72g, 73f, 74d, 75p, 76s, 71i, 72h, 73g, 74f, 75d, 76p, 77s, 72i, 73h, 74g, 75f, 76d, 77p, 78s, 73i, 74h, 75g, 76f, 77d, 78p, 79s, 74i, 75h, 76g, 77f, 78d, 79p, 80s, 75i, 76h, 77g, 78f, 79d, 80p, 81s, 76i, 77h, 78g, 79f, 80d, 81p, 82s, 77i, 78h, 79g, 80f, 81d, 82p, 83s, 78i, 79h, 80g, 81f, 82d, 83p, 84s, 79i, 80h, 81g, 82f, 83d, 84p, 85s, 80i, 81h, 82g, 83f, 84d, 85p, 86s, 81i, 82h, 83g, 84f, 85d, 86p, 87s, 82i, 83h, 84g, 85f, 86d, 87p, 88s, 83i, 84h, 85g, 86f, 87d, 88p, 89s, 84i, 85h, 86g, 87f, 88d, 89p, 90s, 85i, 86h, 87g, 88f, 89d, 90p, 91s, 86i, 87h, 88g, 89f, 90d, 91p, 92s, 87i, 88h, 89g, 90f, 91d, 92p, 93s, 88i, 89h, 90g, 91f, 92d, 93p, 94s, 89i, 90h, 91g, 92f, 93d, 94p, 95s, 90i, 91h, 92g, 93f, 94d, 95p, 96s, 91i, 92h, 93g, 94f, 95d, 96p, 97s, 92i, 93h, 94g, 95f, 96d, 97p, 98s, 93i, 94h, 95g, 96f, 97d, 98p, 99s, 94i, 95h, 96g, 97f, 98d, 99p, 100s, 95i, 96h, 97g, 98f, 99d, 100p, 101s, 96i, 97h, 98g, 99f, 100d, 101p, 102s, 97i, 98h, 99g, 100f, 101d, 102p, 103s, 98i, 99h, 100g, 101f, 102d, 103p, 104s, 99i, 100h, 101g, 102f, 103d, 104p, 105s, 100i, 101h, 102g, 103f, 104d, 105p, 106s, 101i, 102h, 103g, 104f, 105d, 106p, 107s, 102i, 103h, 104g, 105f, 106d, 107p, 108s, 103i, 104h, 105g, 106f, 107d, 108p, 109s, 104i, 105h, 106g, 107f, 108d, 109p, 110s, 105i, 106h, 107g, 108f, 109d, 110p, 111s, 106i, 107h, 108g, 109f, 110d, 111p, 112s, 107i, 108h, 109g, 110f, 111d, 112p, 113s, 108i, 109h, 110g, 111f, 112d, 113p, 114s, 109i, 110h, 111g, 112f, 113d, 114p, 115s, 110i, 111h, 112g, 113f, 114d, 115p, 116s, 111i, 112h, 113g, 114f, 115d, 116p, 117s, 112i, 113h, 114g, 115f, 116d, 117p, 118s, 113i, 114h, 115g, 116f, 117d, 118p, 119s, 114i, 115h, 116g, 117f, 118d, 119p, 120s, 115i, 116h, 117g, 118f, 119d, 120p, 121s, 116i, 117h, 118g, 119f, 120d, 121p, 122s, 117i, 118h, 119g, 120f, 121d, 122p, 123s, 118i, 119h, 120g, 121f, 122d, 123p, 124s, 119i, 120h, 121g, 122f, 123d, 124p, 125s, 120i, 121h, 122g, 123f, 124d, 125p, 126s, 121i, 122h, 123g, 124f, 125d, 126p, 127s, 122i, 123h, 124g, 125f, 126d, 127p, 128s, 123i, 124h, 125g, 126f, 127d, 128p, 129s, 124i, 125h, 126g, 127f, 128d, 129p, 130s, 125i, 126h, 127g, 128f, 129d, 130p, 131s, 126i, 127h, 128g, 129f, 130d, 131p, 132s, 127i, 128h, 129g, 130f, 131d, 132p, 133s, 128i, 129h, 130g, 131f, 132d, 133p, 134s, 129i, 130h, 131g, 132f, 133d, 134p, 135s, 130i, 131h, 132g, 133f, 134d, 135p, 136s, 131i, 132h, 133g, 134f, 135d, 136p, 137s, 132i, 133h, 134g, 135f, 136d, 137p, 138s, 133i, 134h, 135g, 136f, 137d, 138p, 139s, 134i, 135h, 136g, 137f, 138d, 139p, 140s, 135i, 136h, 137g, 138f, 139d, 140p, 141s, 136i, 137h, 138g, 139f, 140d, 141p, 142s, 137i, 138h, 139g, 140f, 141d, 142p, 143s, 138i, 139h, 140g, 141f, 142d, 143p, 144s, 139i, 140h, 141g, 142f, 143d, 144p, 145s, 140i, 141h, 142g, 143f, 144d, 145p, 146s, 141i, 142h, 143g, 144f, 145d, 146p, 147s, 142i, 143h, 144g, 145f, 146d, 147p, 148s, 143i, 144h, 145g, 146f, 147d, 148p, 149s, 144i, 145h, 146g, 147f, 148d, 149p, 150s, 145i, 146h, 147g, 148f, 149d, 150p, 151s, 146i, 147h, 148g, 149f, 150d, 151p, 152s, 147i, 148h, 149g, 150f, 151d, 152p, 153s, 148i, 149h, 150g, 151f, 152d, 153p, 154s, 149i, 150h, 151g, 152f, 153d, 154p, 155s, 150i, 151h, 152g, 153f, 154d, 155p, 156s, 151i, 152h, 153g, 154f, 155d, 156p, 157s, 152i, 153h, 154g, 155f, 156d, 157p, 158s, 153i, 154h, 155g, 156f, 157d, 158p, 159s, 154i, 155h, 156g, 157f, 158d, 159p, 160s, 155i, 156h, 157g, 158f, 159d, 160p, 161s, 156i, 157h, 158g, 159f, 160d, 161p, 162s, 157i, 158h, 159g, 160f, 161d, 162p, 163s, 158i, 159h, 160g, 161f, 162d, 163p, 164s, 159i, 160h, 161g, 162f, 163d, 164p, 165s, 160i, 161h, 162g, 163f, 164d, 165p, 166s, 161i, 162h, 163g, 164f, 165d, 166p, 167s, 162i, 163h, 164g, 165f, 166d, 167p, 168s, 163i, 164h, 165g, 166f, 167d, 168p, 169s, 164i, 165h, 166g, 167f, 168d, 169p, 170s, 165i, 166h, 167g, 168f, 169d, 170p, 171s, 166i, 167h, 168g, 169f, 170d, 171p, 172s, 167i, 168h, 169g, 170f, 171d, 172p, 173s, 168i, 169h, 170g, 171f, 172d, 173p, 174s, 169i, 170h, 171g, 172f, 173d, 174p, 175s, 170i, 171h, 172g, 173f, 174d, 175p, 176s, 171i, 172h, 173g, 174f, 175d, 176p, 177s, 172i, 173h, 174g, 175f, 176d, 177p, 178s, 173i, 174h, 175g, 176f, 177d, 178p, 179s, 174i, 175h, 176g, 177f, 178d, 179p, 180s, 175i, 176h, 177g, 178f, 179d, 180p, 181s, 176i, 177h, 178g, 179f, 180d, 181p, 182s, 177i, 178h, 179g, 180f, 181d, 182p, 183s, 178i, 179h, 180g, 181f, 182d, 183p, 184s, 179i, 180h, 181g, 182f, 183d, 184p, 185s, 180i, 181h, 182g, 183f, 184d, 185p, 186s, 181i, 182h, 183g, 184f, 185d, 186p, 187s, 182i, 183h, 184g, 185f, 186d, 187p, 188s, 183i, 184h, 185g, 186f, 187d, 188p, 189s, 184i, 185h, 186g, 187f, 188d, 189p, 190s, 185i, 186h, 187g, 188f, 189d, 190p, 191s, 186i, 187h, 188g, 189f, 190d, 191p, 192s, 187i, 188h, 189g, 190f, 191d, 192p, 193s, 188i, 189h, 190g, 191f, 192d, 193p, 194s, 189i, 190h, 191g, 192f, 193d, 194p, 195s, 190i, 191h, 192g, 193f, 194d, 195p, 196s, 191i, 192h, 193g, 194f, 195d, 196p, 197s, 192i, 193h, 194g, 195f, 196d, 197p, 198s, 193i, 194h, 195g, 196f, 197d, 198p, 199s, 194i, 195h, 196g, 197f, 198d, 199p, 200s, 195i, 196h, 197g, 198f, 199d, 200p, 201s, 196i, 197h, 198g, 199f, 200d, 201p, 202s, 197i, 198h, 199g, 200f, 201d, 202p, 203s, 198i, 199h, 200g, 201f, 202d, 203p, 204s, 199i, 200h, 201g, 202f, 203d, 204p, 205s, 200i, 201h, 202g, 203f, 204d, 205p, 206s, 201i, 202h, 203g, 204f, 205d, 206p, 207s, 202i, 203h, 204g, 205f, 206d, 207p, 208s, 203i, 204h, 205g, 206f, 207d, 208p, 209s, 204i, 205h, 206g, 207f, 208d, 209p, 210s, 205i, 206h, 207g, 208f, 209d, 210p, 211s, 206i, 207h, 208g, 209f, 210d, 211p, 212s, 207i, 208h, 209g, 210f, 211d, 212p, 213s, 208i, 209h, 210g, 211f, 212d, 213p, 214s, 209i, 210h, 211g, 212f, 213d, 214p, 215s, 210i, 211h, 212g, 213f, 214d, 215p, 216s, 211i, 212h, 213g, 214f, 215d, 216p, 217s, 212i, 213h, 214g, 215f, 216d, 217p, 218s, 213i, 214h, 215g, 216f, 217d, 218p, 219s, 214i, 215h, 216g, 217f, 218d, 219p, 220s, 215i, 216h, 217g, 218f, 219d, 220p, 221s, 216i, 217h, 218g, 219f, 220d, 221p, 222s, 217i, 218h, 219g, 220f, 221d, 222p, 223s, 218i, 219h, 220g, 221f, 222d, 223p, 224s, 219i, 220h, 221g, 222f, 223d, 224p, 225s, 220i, 221h, 222g, 223f, 224d, 225p, 226s, 221i, 222h, 223g, 224f, 225d, 226p, 227s, 222i, 223h, 224g, 225f, 226d, 227p, 228s, 223i, 224h, 225g, 226f, 227d, 228p, 229s, 224i, 225h, 226g, 227f, 228d, 229p, 230s, 225i, 226h, 227g, 228f, 229d, 230p, 231s, 226i, 227h, 228g, 229f, 230d, 231p, 232s, 227i, 228h, 229g, 230f, 231d, 232p, 233s, 228i, 229h, 230g, 231f, 232d, 233p, 234s, 229i, 230h, 231g, 232f, 233d, 234p, 235s, 230i, 231h, 232g, 233f, 234d, 235p, 236s, 231i, 232h, 233g, 234f, 235d, 236p, 237s, 232i, 233h, 234g, 235f, 236d, 237p, 238s, 233i, 234h, 235g, 236f, 237d, 238p, 239s, 234i, 235h, 236g, 237f, 238d, 239p, 240s, 235i, 236h, 237g, 238f, 239d, 240p, 241s, 236i, 237h, 238g, 239f, 240d, 241p, 242s, 237i, 238h, 239g, 240f, 241d, 242p, 243s, 238i, 239h, 240g, 241f, 242d, 243p, 244s, 239i, 240h, 241g, 242f, 243d, 244p, 245s, 240i, 241h, 242g, 243f, 244d, 245p, 246s, 241i, 242h, 243g, 244f, 245d, 246p, 247s, 242i, 243h, 244g, 245f, 246d, 247p, 248s, 243i, 244h, 245g, 246f, 247d, 248p, 249s, 244i, 245h, 246g, 247f, 248d, 249p, 250s, 245i, 246h, 247g, 248f, 249d, 250p, 251s, 246i, 247h, 248g, 249f, 250d, 251p, 252s, 247i, 248h, 249g, 250f, 251d, 252p, 253s, 248i, 249h, 250g, 251f, 252d, 253p, 254s, 249i, 250h, 251g, 252f, 253d, 254p, 255s, 250i, 251h, 252g, 253f, 254d, 255p, 256s, 251i, 252h, 253g, 254f, 255d, 256p, 257s, 252i, 253h, 254g, 255f, 256d, 257p, 258s, 253i, 254h, 255g, 256f, 257d, 258p, 259s, 254i, 255h, 256g, 257f, 258d, 259p, 260s, 255i, 256h, 257g, 258f, 259d, 260p, 261s, 256i, 257h, 258g, 259f, 260d, 261p, 262s, 257i, 258h, 259g, 260f, 261d, 262p, 263s, 258i, 259h, 260g, 261f, 262d, 263p, 264s, 259i, 260h, 261g, 262f, 263d, 264p, 265s, 260i, 261h, 262g, 263f, 264d, 265p, 266s, 261i, 262h, 263g, 264f, 265d, 266p, 267s, 262i, 263h, 264g, 265f, 266d, 267p, 268s, 263i, 264h, 265g, 266f, 267d, 268p, 269s, 264i, 265h, 266g, 267f, 268d, 269p, 270s, 265i, 266h, 267g, 268f, 269d, 270p, 271s, 266i, 267h, 268g, 269f, 270d, 271p, 272s, 267i, 268h, 269g, 270f, 271d, 272p, 273s, 268i, 269h, 270g, 271f, 272d, 273p, 274s, 269i, 270h, 271g, 272f, 273d, 274p, 275s, 270i, 271h, 272g, 273f, 274d, 275p, 276s, 271i, 272h, 273g, 274f, 275d, 276p, 277s, 272i, 273h, 274g, 275f, 276d, 277p, 278s, 273i, 274h, 275g, 276f, 277d, 278p, 279s, 274i, 275h, 276g, 277f, 278d, 279p, 280s, 275i, 276h, 277g, 278f, 279d, 280p, 281s, 276i, 277h, 278g, 279f, 280d, 281p, 282s, 277i, 278h, 279g, 280f, 281d, 282p, 283s, 278i, 279h, 280g, 281f, 282d, 283p, 284s, 279i, 280h, 281g, 282f, 283d, 284p, 285s, 280i, 281h, 282g, 283f, 284d, 285p, 286s, 281i, 282h, 283g, 284f, 285d, 286p, 287s, 282i, 283h, 284g, 285f, 286d, 287p, 288s, 283i, 284h, 285g, 286f, 287d, 288p, 289s, 284i$



O II (Z=8) 离子:

电子组态: $1s^2 2s$, $1s^2 2p$, $1s^2 3s$, $1s^2 3p$, $1s^2 3d$...

量子数: $n=2$, $l=0, 1$

$n=3$, $l=0, 1, 2$

$n=4$, $l=0, 1, 2, 3$

LS 耦合	$2s$:	$L=0$,	$S=\frac{1}{2}$,	$J=\frac{1}{2}$
	$2p$:	$L=1$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
	$3s$:	$L=0$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{1}{2}$
	$3p$:	$L=1$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
	$3d$:	$L=2$	$S=\frac{1}{2}$	$J=\frac{5}{2}, \frac{3}{2}$

(1) 图中的跃迁谱线是电偶极跃迁的选择定则允许跃迁的谱线

(2) 共振线: 终止于基态的辐射跃迁为共振线, 其强度通常是最强的, 且其强度随主量子数 n 的增加而减弱

二. 辐射跃迁与爱因斯坦跃迁系数

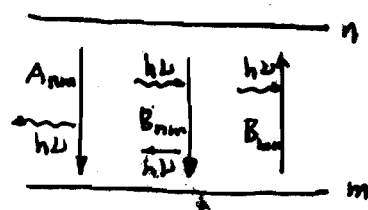
1. 爱因斯坦跃迁系数

(1) 自发辐射跃迁 A_{nm}

处于上能级 n 的电子自发地跃迁到下能级 m 上, 并发出一个能量为

$$h\nu = E_n - E_m = \chi_m - \chi_n \equiv \chi_{mn}$$

的光子。单位时间内自发产生自发辐射跃迁的几率为 A_{nm} 。 [$s^{-1} \cdot m^{-3}$]



(2) 辐射吸收系数 B_{mn}

处于下能级 m 的一个电子从辐射场中吸收一个能量为 $h\nu$ 的光子而跃迁到上能级 n 上, 该过程称为辐射吸收过程。单位时间内发生辐射吸收跃迁的几率为 $u(\nu) B_{mn}$, 其中 $u(\nu)$ 为辐射场能量密度。

(3) 诱发辐射跃迁系数 B_{nm}

处于上能级 n 的一个电子由于辐射场的作用而诱发产生向下能级 m 的跃迁, 该过程称为诱发辐射跃迁, 它发出一个能量为 $h\nu = \chi_{mn}$ 的光子。单位时间内发生诱发辐射跃迁的几率为 $u(\nu) B_{nm}$ 。

(A) 细致平衡原理

当系统处于热平衡时, 每个微观过程的速率等于该微观过程的逆过程的速率。当系统达到热平衡的条件和必要条件, 即每个微观过程都被其相反的过程所完全平衡。对于辐射过程, 有:

$$n(n) \rightleftharpoons n(m) + h\nu$$

$$[A_{nm} + B_{nm} u(\nu)] n(n) = B_{mn} u(\nu) n(m)$$

$$\frac{r_n}{n_m} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left\{-\frac{E_n - E_m}{T}\right\} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left\{-\frac{E_n - E_m}{T}\right\} \quad 4-43$$

对于处于热平衡的子系统，辐射场能量密度 $U(\omega)$ 和射线分布密度分别满足普朗克分布和玻尔兹曼分布定律，即：

$$U(\omega) = \frac{8\pi h \omega^3}{c^3} \left[\frac{e^{\frac{h\omega}{T}}}{e^{\frac{h\omega}{T}} - 1} \right]^{-1} \quad \left(\text{自然光, } U = \frac{4\pi}{c} I_B \right)$$

$$\frac{n(n)}{n(m)} = \frac{g_n}{g_m} \exp\left[-\frac{E_n - E_m}{T}\right] = \frac{g_n}{g_m} \exp\left(-\frac{h\omega}{T}\right) < 1$$

其中 g_n, g_m 为上下能级的统计权重。将上两式代入平衡方程，可得：

$$\frac{8\pi h \omega^3}{c^3} \left[\exp\left(\frac{h\omega}{T}\right) - 1 \right]^{-1} = \frac{A_{nm}}{B_{nm}} \left[\frac{g_m B_{mn}}{g_n B_{nm}} e^{\frac{h\omega}{T}} - 1 \right]^{-1}$$

上式对任意的温度 T 都成立，因而必定有：

$$\begin{cases} A_{nm} = \frac{8\pi h \omega^3}{c^3} B_{nm} \\ g_n B_{nm} = g_m B_{mn} \end{cases}$$

由于这些系数仅与原子特性有关，与原子是否处于热平衡无关，它们是普遍成立的。由上述关系式可知，只要爱因斯坦跃迁系数中的任意一个已知，其余两个系数均可由上述关系式求出。

对于电偶极辐射过程， B_{mn} 可用吸收振子强度 f_{mn} 表示，即：

$$B_{mn} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h \omega} f_{mn}$$

吸收振子强度 f_{mn} 定义为：经典的振子数与所得到的相同频率的辐射吸收所需要的下能级原子数之比。它是无量纲量，表示相对跃迁强度，对于最强的跃迁，它的数值接近于1。

2. 线辐射的吸收系数及发射线强度

按定义辐射线的吸收系数为

$$\alpha_\nu = - \frac{dI_\nu}{I_\nu ds}$$

在线辐射情况下, 辐射吸收系数即为辐射吸收系数与谱发射系数之比值, 即

$$\begin{aligned} -dI_\nu &= \frac{h\nu}{4\pi} \underbrace{(B_{mn} n_m - B_{nm} n_n)}_{\text{单位时间 单位体积吸收的总光子数}} u_\nu ds \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} B_{mn} n_m \left(1 - \frac{B_{nm}}{B_{mn}} \frac{n_n}{n_m} \right) u_\nu ds \end{aligned}$$

$$\alpha_\nu = - \frac{dI_\nu}{I_\nu ds} = \frac{h\nu}{4\pi} B_{mn} n_m \left(1 - \frac{B_{nm}}{B_{mn}} \frac{n_n}{n_m} \right) \frac{u_\nu}{I_\nu}$$

$$\text{因为 } B_{mn} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h\nu} f_{mn}$$

$$\frac{B_{nm}}{B_{mn}} = \frac{g_m}{g_n}, \quad \frac{u_\nu}{I_\nu} = \frac{4\pi}{c}$$

$$\text{所以 } \alpha_\nu = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{mn} n_m \left(1 - \frac{g_m n_n}{g_n n_m} \right)$$

$$= \pi r_e c f_{mn} n_m \left(1 - \frac{g_m n_n}{g_n n_m} \right)$$

线辐射的谱辐射率为:

$$j_\nu(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} A_{nm} n_n$$

线谱范围由谱发射系数和吸收系数

辐射强度

$$I_\nu(\nu) = \int_0^\tau \frac{j_\nu(\nu)}{\alpha_\nu} e^{-\tau'} d\tau'$$

对光谱辐射

$$I_\nu(\nu) = \int_0^x j_\nu(\nu) ds$$

三. 反过程和速率系数 P. 203~214

1. 复合辐射和激发电离

 ~~$n_{e-1} n_{e-2}$~~ 

复合辐射速率系数

$$\alpha_r n_i(z) n_e$$

单位时间单位体积的复合数

$$\alpha_r(z, n) = \langle \sigma_r v \rangle = \frac{\int d\vec{v} \sigma_r(z, n) v f(\vec{v})}{\int d\vec{v} f(\vec{v})}$$

更进一步的公式

(书中 6.3.5 式) P. 205

$$\alpha_r(z, n) = 5.2 \times 10^{-20} \bar{g}_n z \left(\frac{x_n}{T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{x_n}{T}\right) E_1\left(\frac{x_n}{T}\right) [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

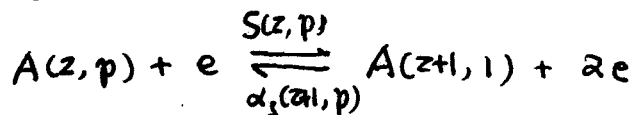
E1

$$E_1(y) = \int_y^\infty \frac{\exp(-s)}{s} ds \quad \text{为第一指数积分函数}$$

$$\exp(x) E_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \frac{1}{2} \quad x \rightarrow \infty \text{ 时 } (T \rightarrow 0) \quad \frac{x_n}{T} \gg 1 \\ -\ln x & \frac{1}{2} \quad x \rightarrow 0 \text{ 时 } (T \rightarrow \infty) \quad \frac{x_n}{T} \ll 1 \end{cases}$$

由此可见: $\alpha_n(z, n)$ 随 n 增大而减小" T 增大而减小" z 增大而增大

2. 碰撞电离和三体复合:



电离速率

$$S(z, p) n(z, p) n_e$$

三体复合速率

$$\alpha_3(z+1, p) n(z+1, 1) n_e^2$$

(1 量级为 E)

电离速率系数和复合速率系数 (书中 6.3.17) P. 208

$$S(z, p) = 4\pi a_0^2 \left(\frac{8R_H}{\pi m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{R_H}{x_p} \right) \left(\frac{R_H}{T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{x_p}{T}\right) \times \left[1 - \left(\frac{x_p + E_1}{T} \right) \exp\left(\frac{x_p + E_1}{T}\right) E_1\left(\frac{x_p + E_1}{T}\right) \right]$$

1. 复合辐射

$$A(z, 1) + e \xrightleftharpoons{\alpha_r} A(z+1, n) + h\nu$$

$$\alpha_r(z, n) = 5.2 \times 10^{-20} \bar{g}_n z \left(\frac{\chi_n}{T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_n}{T_e}\right) E_1\left(\frac{\chi_n}{T_e}\right) \quad [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$E_1(y) = \int_y^\infty s^{-1} \exp(-s) ds$$

$$\alpha_r(z, n) \downarrow \quad \text{随 } n \uparrow, T_e \uparrow$$

2. 碰撞电离和三体复合

$$A(z, p) + e \xrightleftharpoons[\alpha(z+1, p)]{S(z, p)} A(z+1, 1) + 2e$$

$$S(z, p) = 1.7 \times 10^{-14} \bar{g} \left(\frac{R_y}{\chi_p} \right) \left(\frac{T_e}{R_y} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_p}{T_e}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{5\chi_p}{T_e}\right) \right] \quad [\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$S(z, p) \uparrow \quad \text{随 } n \uparrow, T_e \uparrow$$

$$\frac{\alpha_3(z+1, p)}{S(z, p)} = \frac{n(z, p)}{n_e n(z+1, 1)} = \frac{g(z, p)}{2g(z+1, 1)} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e T_e} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi(z, p)}{T_e}\right)$$

3. 碰撞激发和退激发

4-46

$$E_t + \chi_p \sim 5\chi_p$$

$$\times \left[1 - \exp\left(-\frac{5X_p}{T}\right) \right] \bar{g} \quad [\text{m}^3 \text{s}^{-1}]$$

[illegible]

$$\| -x \exp(x) E_1(x) \| = \left\{ \begin{array}{l} x \\ 1 \end{array} \right.$$

由2.3.2: $S(z, p)$ 随 n 的增大而增大
 T 的增大而增大

$$S(z, p) n(z, p) n_e = \alpha_3(z+1, p) n(z+1, p) n_e^2$$

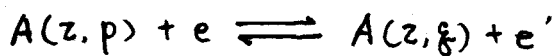
$$\text{Ex } \frac{\alpha_3(z+1, p)}{S(z, p)} = \frac{n(z, p)}{n_e n(z+1, p)} \quad \& \quad \frac{S(z, p)}{\alpha_3(z+1, p)} = \frac{n_e n(z+1, p)}{n(z, p)}$$

而古礼院迁于局前想平衡时，相印由局后问以本局~~是否~~通过沙
哈一玻子哥是方印：
密底

$$\frac{n_p n(zH, 1)}{n(z, p)} = \frac{2 g(zH, 1)}{g(z, p)} \left(\frac{2\pi m_e T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi(z, p)}{T}\right)$$

$$\text{又有} \quad \frac{S(z, p)}{\alpha_3(zH, p)} = \frac{2g(zH, 1)}{g(z, p)} \left(\frac{2\pi m_e T}{h^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{\chi(z, p)}{T} \right]$$

3. 確證海峽和呂宋峽



状态转移 $Q(z, p \rightarrow q) = n_e n(z, p) \quad Q_{pq}$

近海流速 $Q(z, \theta \rightarrow p) \quad n_c \quad n(z, \theta) \quad Q_{qp}$

激发电场的近似表达式 (参 6.3.27式) p. 240

$$Q(z, p \rightarrow q) = 3.15 \times 10^{-13} f_{p8} \frac{R_y}{\cancel{2X_{p8}}} \left(\frac{R_y}{T} \right)^2 \exp\left(-\frac{2X_{p8}}{T}\right) \bar{g} \text{ [m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$$

$$\Delta X_{p,q} \equiv X(z,p) - X(z,q)$$

$$Q(z, p \rightarrow g) = 2.15 \times 10^{-10} \frac{n}{T} \frac{g}{p}$$

4-27

T 的增大而增大

由此可知: $Q(z, p \rightarrow g)$ 随 z 的增大而增大

由细致平衡原理, 可得:

$$\frac{Q(z, g \rightarrow p)}{Q(z, p \rightarrow g)} = \frac{n(z, g)}{n(z, p)}$$

$$\frac{Q(z, p \rightarrow g)}{Q(z, g \rightarrow p)} = \frac{n(z, g)}{n(z, p)}$$

当系统处于平衡时, 不同谱线的布居数之比由玻尔兹曼分布所决定。

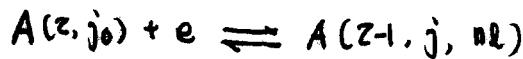
$$\frac{n(z, g)}{n(z, p)} = \frac{g(z, g)}{g(z, p)} \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{pg}}{T}\right] \quad Q_{gp} > Q_{pg}$$

即吸收 > 发射

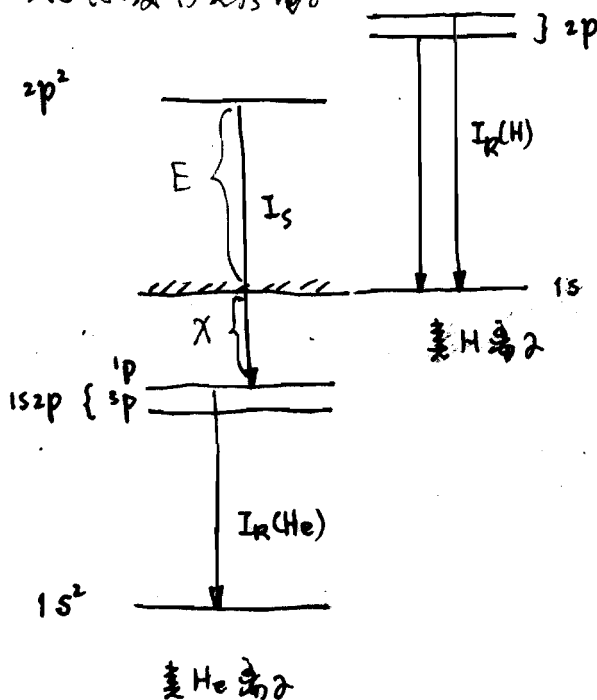
故有:
$$\frac{Q(z, p \rightarrow g)}{Q(z, g \rightarrow p)} = \frac{g(z, g)}{g(z, p)} \exp\left(-\frac{\Delta\chi_{pg}}{T}\right) < 1$$

由此可知, 对于相同的一个谱线, 碰撞吸收速率比自碰撞吸收速率小。

4. 双电子离子复合和电离

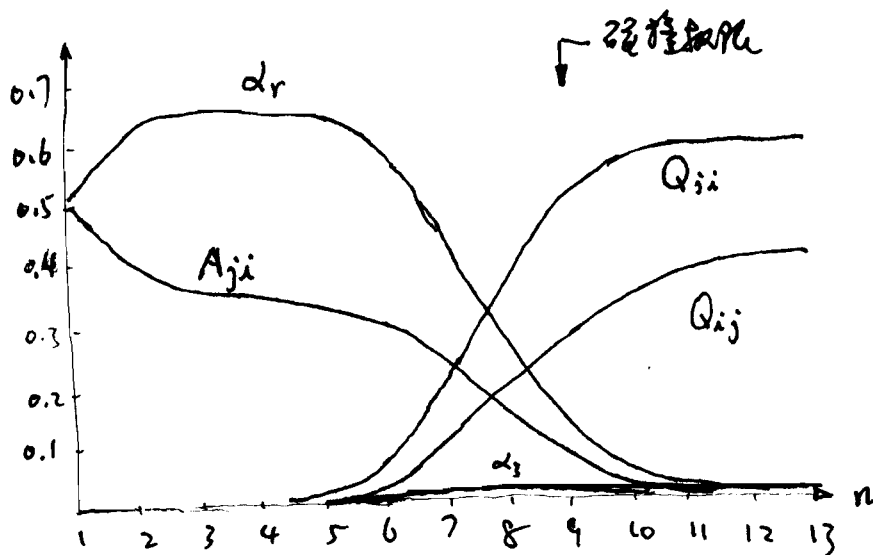


复合释放的能量 $(E_e + \chi_{nl} = \Delta\chi_{j_0, j})$ $\rightarrow A(z-1, j_0, nl) + h\nu(j \rightarrow j_0, nl)$
 用于吸收由氢原子 $\rightarrow A(z-1, j_0, n_0 l_0) + \frac{3}{2} h\nu$

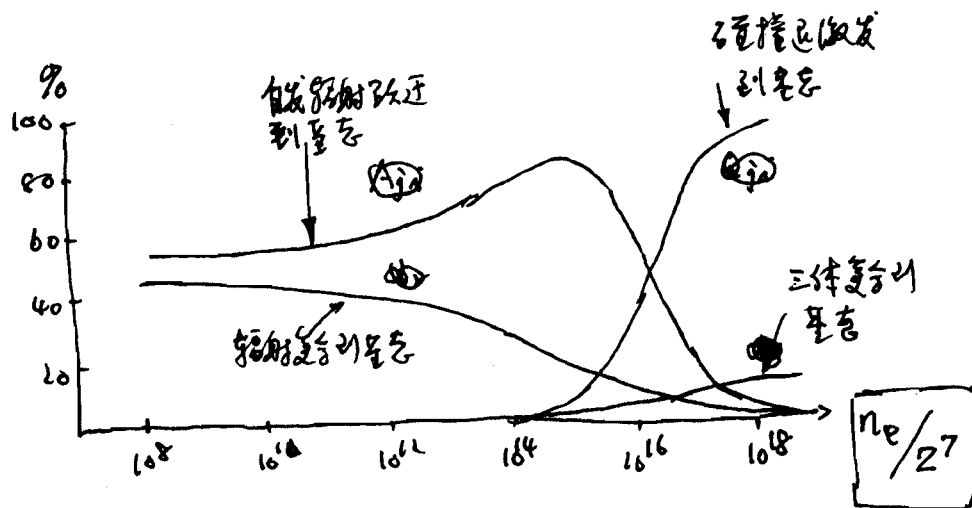


P. 243, (6.3.37) 式

$$\alpha_d = 8.8 \times 10^{-18} f_{ij} Z^{2/3} \frac{\chi_{ij}}{R_y} \left(\frac{R_y}{T}\right)^{3/2} \times \exp\left(-\frac{\chi_{ij}}{T}\right) \quad [\text{m}^3 \text{s}^{-1}]$$



氦气 $n_e/z^2 = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ $T_e/z^2 = 6.4 \times 10^4 \text{ K}$



$T_e/z^2 = 3.2 \times 10^4 \text{ K}$

氢气

《 Applied Atomic Collision Physics 》

Vol. 2 Controlled Fusion

P. 77

① 温度升高

$n \uparrow$ $Q_{ji}, Q_{ij}, S \uparrow$

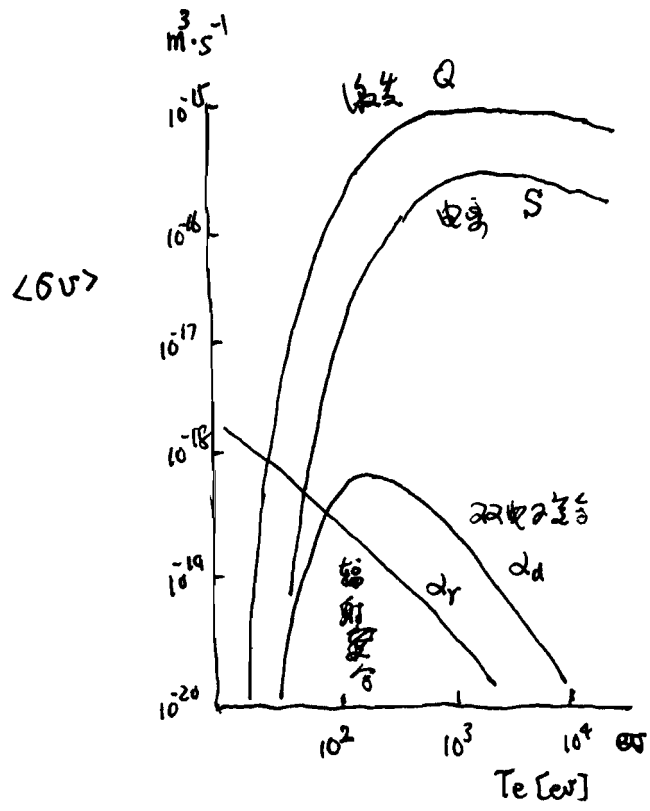
$A_{ji}, \alpha_r \downarrow$

② 降低 T_e

$T_e \uparrow$ $\alpha, S \uparrow$

$\alpha_r \downarrow$

$CV (C^{+4})$



三. 原子状态分布模型 (书: P. 194~203)

为了研究等离子体中任一种原子的辐射功率, 必须知道它是各种辐射的状态分布 (或布居, population)。有两种状态分布情况: 一种等离子体中原子或离子的寿命没有达到平衡分布的情况, 其布居密度是随时间变化的。另一种情况是布居密度达到某种平衡分布, 这时布居密度不随时间变化。平衡分布模型是描述等离子体辐射功率的常用模型。我们在这里讨论几种原子的平衡模型。

1. 完全热平衡模型 (Complete Thermal Equilibrium)

当系统处于统计力学平衡时, 从统计力学可知, 所有的粒子 (包括电子, 及等离子体中所有的原子和离子) 都达到具有相同的平均能量, 即麦克斯韦分布:

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m\vec{v}^2}{2T}\right\}$$

此外, 粒子间的碰撞过程, 使各种原子 (离子) 的不同内部状态之间达到玻尔兹曼分布:

$$\frac{n(z, u)}{n(z, l)} = \frac{g(z, u)}{g(z, l)} \exp\left\{-\frac{\chi_{lu}}{T}\right\} \quad \chi_{lu} = \chi_l(z) - \chi_u(z)$$

$$\frac{n(z, l)}{n(z, k)} = \frac{g(z, l)}{g(z, k)} \exp\left\{-\frac{\Delta\chi_{kl}}{T}\right\} = \frac{g(z, l)}{g(z, k)} \frac{\exp(-\frac{E_l}{T})}{\exp(-\frac{E_k}{T})}$$

$$\text{其中} \quad \Delta\chi_{kl} \equiv \chi(z, k) - \chi(z, l)$$

同时, 玻尔兹曼分布也使原子的不同电离态达到沙哈-玻尔兹曼分布:

$$\frac{n_e n(zH, i)}{n(z, k)} = 2 \frac{g(zH, i)}{g(z, k)} \left(\frac{2\pi m_e T}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\chi(z, k)}{T}\right\}$$

其中 "i" 是离子态。

而且, 在完全热平衡等离子体中, 辐射功率也被完全由原子光谱中,

且与粒子间有强的相互作用,使辐射场与介质的平衡温度有限,即其辐射强度与普朗克分布:

$$I_B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left\{ \exp\left(\frac{h\nu}{T}\right) - 1 \right\}^{-1} \quad (\text{赫兹})$$

或

$$U_B(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left\{ \exp\left(\frac{h\nu}{T}\right) - 1 \right\}^{-1}$$

从玻尔分布分布可导出离子能量-势能 n 的分布函数与总电离态分布函数的关系, 因为:

$$\frac{n(z)}{n(z,1)} = \frac{\sum_l n(z,l)}{n(z,1)} = \frac{\sum_l g(z,l) \exp\left[-\frac{E(z,l)}{T}\right]}{g(z,1) \exp\left[-\frac{E(z,1)}{T}\right]}$$

令

$$U(z,T) \equiv \sum_l^{\infty} g(z,l) \exp\left[-\frac{E(z,l)}{T}\right]$$

为离子 A^{+Z} 的配分函数, 对于孤立离子 $l_{\max} \rightarrow \infty$, 它是发散的。对于等离子体中的离子, 由于与相邻离子的相互作用, 使它的电离极限下降。从而使 l_{\max} 为有限值, 因此 $U(z,T)$ 也是有限的。H.R. Griem 著的《Plasma Spectroscopy》讨论了 $U(z,T)$ 的计算方法, 并给出了 $U(z,T)$ 的部分数据。

此外, 由此也可得到玻尔分布分布的另一种形式:

$$\frac{n(z,n)}{n(z)} = \frac{g(z,n)}{U(z,T)} \exp\left\{-\frac{E(z,n)}{T}\right\}$$

类似地, 也可导出沙哈-玻尔分布分布的另一种形式:

$$\frac{n_e n(z+1)}{n(z)} = \alpha \frac{U(z+1,T)}{U(z,T)} \left(\frac{2\pi m_e T}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\chi(z,1)}{T}\right\}$$

实际上, 完全热平衡等离子体只有在极特殊的情况下才存在, 如星体内部, 核爆炸瞬间形成的核心等离子体等。实际的实验室和天体

作第0阶, 几乎不处于 CTE 态, 这是因为: (1) 不存在唯一的热力学温度 T , 且温度是不必要的; (2) 不存在唯一的热辐射温度和唯一的热力学温度; (3) 第0阶对大数目的热辐射是透明的, 而非透明的。但 CTE 是个稳态模型, 故以平衡模型与之相比较。

2. 局部热平衡模型 (Local Thermal Equilibrium)

它与 CTE 模型可用相同的统计力学处理。它列于下:

分布定律	CTE	LTE
温度	$\nabla T = 0$	$\nabla T \neq 0$
光子	普朗克分布, $0 < \nu < \infty$ $T = T_{\text{rad}}$	普朗克分布不连续 $T \neq T_{\text{rad}}$
电子	Saha 分布 $T = T_{\text{ion}}$	Saha 分布 $T = T_{\text{ion}}$
原子	Boltzmann 分布 $T = T_{\text{excit}}$	Boltzmann 分布 $T = T_{\text{excit}}$
离子	Maxwell 分布 $T = T_{\text{kin}}$	Maxwell 分布 $T = T_e$
	$T = T_{\text{rad}} = T_{\text{ion}} = T_{\text{excit}} = T_{\text{kin}}$	$T = T_{\text{ion}} = T_{\text{excit}} = T_e \neq T_{\text{rad}}$

对 LTE 分布, 通常认为电子密度足够高, 以便得能碰撞过程能迅速达到热平衡间的辐射跃迁过程。由上述一讨论知, 下4级—辐射跃迁速率大于由上4级—辐射跃迁速率。因此, 对下4级的辐射跃迁进行碰撞跃迁, 就可近似认为系统达到 LTE 态。为此, 我们假设电子与第一激发态间的跃迁, 平衡时有:

$$n_1 u(\nu_{12}) B_{12} + n_1 n_e Q_{12} = n_2 u(\nu_{21}) B_{21} + n_2 A_{21} + n_2 n_e Q_{21}$$

若辐射场为黑体 $u(\omega)$ 足够大, 使激发辐射和辐射吸收过程平衡, 则有:

$$n_1 n_e Q_{12} = n_2 n_e Q_{21} + n_2 A_{21}$$

当 $n_e \gg A_{21}/Q_{21}$ 时, LTE 成立

则有

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{Q_{12}}{Q_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta\chi_{12}}{T_e}\right)$$

因而

$$Q_{21} \propto \left(\frac{1}{T_e}\right)^{1/2}, \quad A_{21} \propto \nu^3 \propto \Delta\chi_{12}^3$$

故得 LTE 模型成立的判据为:

LTE 成立条件

$$n_e n_n \sum_{n \neq l} Q_{nl} \geq 10 n_n \sum_{l < n} A_{nl}$$

$$n_e \gg 10^{19} (T_e [\text{eV}])^{1/2} (\Delta\chi_{ij} [\text{eV}])^3 [\text{cm}^{-3}]$$

$$n_e > 1.8 \times 10^{20} (T_e [\text{eV}])^{1/2} (\Delta\chi_{ij} [\text{eV}])^3 [\text{cm}^{-3}]$$

之判据对最大吸收系数 α_{ij} 是成立的。例如, 对于氢原子, 主能级 1S-2P 跃迁, $\Delta\chi_{12}(\text{H}) = Z_H^2 R_H$ 。

3. 非热平衡等离子体的状态分布模型

当有不满足 LTE 模型的等离子体, 常称为非局部热平衡等离子体 (或简称为非热平衡等离子体)。这时, 它的特征只能用讨论碰撞和辐射过程速率方程来描述

$$\frac{\partial n(z, k)}{\partial t} + \nabla_r \cdot [n(z, k) \langle \vec{v}(z, k) \rangle] = \left(\frac{\partial n(z, k)}{\partial t} \right)_{\text{碰撞, 辐射}}$$

上式右边是由于碰撞和辐射过程引起的粒子数变化, 而左边第二项是由于粒子通量梯度引起的粒子数变化。

这个方程是正定方程, 因为它的右边项有电势项。当有外加电场时, 这个方程是定性的, 一般要作进一步简化, 以便得到解析解。

1) 日冕平衡 (Coronal Equilibrium)

该模型最早用于描述太阳冕区等离子体中离子的状态分布。冕区等离子体是低密度等离子体，因此日冕平衡模型适用于低密度等离子体。对于低密度等离子体，辐射-吸收过程已足够弱，等离子体是准中性的。离子的激发态分布主要是由基态碰撞激发和上能级的自发辐射跃迁向基态平衡决定的。而电子态分布则是由碰撞电离和复合过程决定的。故日冕模型的假设如下： $\sum_{m \neq 1} \frac{n_m}{n_1} \ll 1$

1. 电子速度分布是麦克斯韦分布

2. 射线分布：

$$n_e n(z, 1) Q_{1u}(z) = n(z, u) \sum_{k < u} A_{uk}$$

$$\therefore \frac{n(z, u)}{n(z, 1)} = \frac{n_e Q_{1u}(z)}{\sum_{k < u} A_{uk}(z)}$$

3. 电离态分布：

$$\frac{n(z)}{n(z+1)} = \frac{\alpha(z+1)}{S(z)}$$

即

$$\alpha(z+1) = \alpha_r(z+1) + \alpha_d(z+1) + n_e \alpha_3(z+1) + \frac{n(H)}{n_e} \alpha_{\alpha}(z+1)$$

上述两个分布，实际上可从速率方程导出。以氢为例，冕区氢原子基态粒子通量密度记为 n_1 ，则射线 z 和电子 n_e 的速率方程分别为：

$$\begin{aligned} \frac{dn_2}{dt} = & n_e n_1 Q_{12} - n_2 (n_e Q_{21} + A_{21} \beta_{21} + n_e S_2) \\ & + n_e n_i (n_e \alpha_{3,2} + \alpha_{r,2} \beta_{\lambda 2}) \end{aligned}$$

$$\frac{dn_e}{dt} = n_e (n_1 S_1 + n_2 S_2) - n_i n_e (n_e \alpha_{3,1} + n_e \alpha_{3,2} + \alpha_{r,1} \beta_{\lambda 1} + \alpha_{r,2} \beta_{\lambda 2})$$

即 β_{21} , β_{λ} 分别为透射和反射的逸透因子

$$\begin{aligned} \text{即 } n_2 A_{21} \beta_{21} &= n_2 A_{21} + n_2 B_{21} u_{21} - n_1 B_{12} u_{21} \\ &= n_2 A_{21} \left[1 - \frac{B_{21}}{A_{21}} u_{21} \left(\frac{n_1 g_2}{n_2 g_1} - 1 \right) \right] \\ &= \cancel{n_2 A_{21} - B_{12} u_{21} \left(n_1 - n_2 \frac{g_1}{g_2} \right)} = n_2 A_{21} \left[1 - \frac{B_{12}}{A_{21}} u_{21} \left(\frac{n_1}{n_2} \frac{g_1}{g_2} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

这里 β_{21} 为透射因子， β_{λ} 为反射因子。透射因子和反射因子之和等于 1。
（对）

它满足的是玻尔兹曼分布方程。如上述，透射因子和反射因子之和等于 1，可写成如下形式：

$$\begin{cases} S_2 \ll Q_{21} \\ n_i n_e \alpha_{3,2} + n_i \alpha_{r,2} \beta_{\lambda 2} \ll n_1 Q_{12} \end{cases}$$

在这种情况下，透射因子和反射因子可近似为：

$$\dot{n}_2 = n_e n_1 Q_{12} - n_2 (n_e Q_{21} + A_{21} \beta_{21})$$

且稳态 ($\dot{n}_2 = 0$) 解为：

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{n_e Q_{12}}{n_e Q_{21} + A_{21} \beta_{21}} = \frac{Q_{12}}{Q_{21}} \frac{1}{1 + \frac{\beta_{21} A_{21}}{n_e Q_{21}}}$$

令

$$R_2 \equiv \frac{A_{21} \beta_{21}}{n_e Q_{21}}$$

$$\left(\frac{n_2}{n_1} \right)^* \equiv \frac{Q_{12}}{Q_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \exp \left(-\frac{\Delta \epsilon_{12}}{T_e} \right) \quad \text{为平衡时的比值}$$

则

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^* \frac{1}{1 + R_2}$$

故可以讨论如下两种极限情况：(1) 高激发极限，即 n_e 很大，使得 β_{21} 变得很小（忽略），以致 $R_2 \ll 1$ 。在这种情况下有：

$$\beta_{21} \ll 1$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^* \quad \text{即 LTE 模型下的分布}$$

(2) 低密度极限, 即 n_e 很小, $\beta_2 \approx 1$ (无电离). 可近似 $R_2 \gg 1$, 此时有:

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^* \frac{1}{R_2} = \frac{Q_{12}}{Q_{21}} \frac{n_e Q_{21}}{A_{21}} = \frac{n_e Q_{12}}{A_{21}}$$

这就是说是平衡模型下的分布。

其次, 从速率方程出发, 直接求解为:

$$\frac{n_e n_i}{n_1} = \frac{S_1 + S_2 \frac{n_2}{n_1}}{d_{3,1} + d_{3,2}} \frac{1}{1 + R_\lambda}$$

$$\text{则} \quad R_\lambda \equiv \frac{\alpha_{r,1} \beta_{\lambda,1} + \alpha_{r,2} \beta_{\lambda,2}}{n_e (d_{3,1} + d_{3,2})}$$

利用局部热平衡的公式:

$$\frac{S_k}{\alpha_{3,k}} = \left(\frac{n_i n_e}{n_k}\right)^* \quad \text{②}$$

上式代入可得:

$$\frac{n_e n_i}{n_1} = \left(\frac{n_e n_i}{n_1}\right)^* \frac{1}{1 + R_\lambda} \frac{1 + \frac{d_{3,2}}{\alpha_{3,1}} \frac{n_2}{n_1} / \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^*}{1 + d_{3,2} / \alpha_{3,1}}$$

(1) 无电离极限: n_e 很小, $\beta_{2,1}, \beta_{\lambda,1}, \beta_{\lambda,2} \ll 1$, 使得 $R_2, R_\lambda \ll 1$

则有 $\frac{n_i n_e}{n_1} = \left(\frac{n_i n_e}{n_1}\right)^* \quad \text{LTE 模型下的分布}$

(2) 低密度极限: n_e 很小, 使得 $R_\lambda, R_2 \gg 1$, $\beta_{2,1}, \beta_{\lambda,1}, \beta_{\lambda,2} \approx 1$, 则

$$\text{有} \quad \frac{n_i n_e}{n_1} \approx \frac{1}{R_\lambda} \frac{S_1 + S_2 \frac{n_2}{n_1}}{d_{3,1} + d_{3,2}} = \frac{n_e (d_{3,1} + d_{3,2})}{\alpha_{r,1} \beta_{\lambda,1} + \alpha_{r,2} \beta_{\lambda,2}} \frac{S_1 + S_2 \frac{n_2}{n_1}}{d_{3,1} + d_{3,2}}$$

$$\approx \frac{n_e S_1}{\alpha_{r,1} + \alpha_{r,2}} = \frac{n_e S_1}{\alpha_r} \quad \text{这是 CE 模型下的分布}$$

上述 CE 模型中电荷分布方程上足下列电荷-复合方程组^稳的解:

$$\dot{n}(z) = n_e \left\{ -n(z)S(z) - n(z)\alpha(z) + n(z-1)S(z-1) + n(z+1)\alpha(z+1) \right\} \quad 1 \leq z \leq z_N-1$$

$$\dot{n}(0) = n_e \left\{ -n(0)S(0) + n(1)\alpha(1) \right\}$$

$$\dot{n}(z_N) = n_e \left\{ -n(z_N)\alpha(z_N) + n(z_N-1)S(z_N-1) \right\}$$

由于 α , S 与 T_e 有关, 因而需知电荷分布以确定 T_e , 而 S 与 n_e 又有关。

发射的谱功率:

$$j(\omega) = \frac{h\nu}{4\pi} n(z, \omega) A_{ul} = \frac{h\nu}{4\pi} n(z, 1) \underbrace{Q_{lu}(z)}^{n_e} \frac{A_{ul}}{\sum_{k \in u} A_{uk}}$$

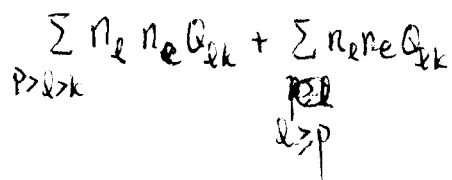
取 $A_{ul} / \sum_{k \in u} A_{uk}$ 为常数, 它是原子参数, 已知数。由此可知, 由 $j(\omega)$ 知是 (谱功率), 可求得 $n(z, 1) \approx n(z)$ 。这样, 再根据 CE 模型中电荷分布就可求得电荷分布函数。

这个模型要求 n_e 足够低, 使得碰撞退激发过程不干扰辐射跃迁过程。然而, 当 n_e 增加时, 碰撞退激发 $Q(k) = \sum_{i \neq k} Q_{ki}$ 不退激发过程将导致自发辐射跃迁过程, 这有一个临界电荷密度 $n_{e,c}$ 使得 $\sum_{i \neq k} A_{ki} = n_{e,c} Q(k)$, 从而使得 k 能级向上转移级 CE 模型不成立。因为 A_{ki} 随 n 增加而增加, 而 $Q(k)$ 随 n 增加而增加。因此, 这个模型在某种程度上看有一个极限的电荷密度 n_{cr} , 当 $n > n_{cr}$ 时, 碰撞过程占主导, CE 模型不成立。对于氢 H 原子, 通常取 $n_{cr} = 6$, 取有:

$$n_e \leq 6.0 \times 10^{16} Z^6 (T_e [\text{eV}])^{1/2} \exp\left(\frac{Z}{10 T_e [\text{eV}]}\right) \quad [\text{cm}^{-3}]$$

56 K5

$$d_{r,k}' = d_{r,k} + \sum_{l \neq k} \left(\frac{n_l}{n_{\text{env}}} \right)^* A_{lk}$$



$$n_e^2 n_i d_{3,k}$$

$$n_e^2 n_i \alpha_{3,k} + \sum_{\substack{q,p \\ q \neq p}} n_e n_q Q_{2,k}$$

$$\sum_{p>l>k} n_l A_{lk}$$

$$n_e n_i \alpha_{r, k} + \sum_{\ell \neq r} n_\ell A_{\ell k}$$

CE (Corona Equilibrium)

LTE (Local Thermal Equilibrium)

CTE (Complete Thermal Equilibrium)

457

(2) 碰撞辐射模型 (Collisional-Radiative Model)

当 n_e 介于 CE 和 LTE 模型的密度范围之间时, CE 和 LTE 模型均不适用, 这时必须考虑电子碰撞过程对能级布居密度的影响, 当激发态 j 空时, 这时 α 高至 Z 的任一能级 k 的激发和电离速率方程可表示为: 碰撞激发 碰撞退激发

$$\begin{cases} \dot{n}_k = -n_k \left\{ \sum_{j < k} (n_e Q_{kj} + A_{kj} \beta_{kj}) + n_e \left(\sum_{l > k} Q_{kl} + S_k \right) \right\} \\ \quad + n_e \sum_{j < k} n_j Q_{jk} + \sum_{l > k} n_l (n_e Q_{lk} + A_{lk} \beta_{lk}) \\ \quad + n_e n_i (n_e \alpha_{i,k} + \alpha_{r,k} \beta_{i,k}) \\ \dot{n}_e = \sum_k [n_e n_k S_k - n_e n_i (n_e \alpha_{i,k} + \alpha_{r,k} \beta_{i,k})] \end{cases}$$

此外, 由于粒子数守恒, 有:

$$\dot{n}_e + \sum_k \dot{n}_k = 0$$

因此, \dot{n}_k 和 \dot{n}_e 组成的方程组中有一个方程是多余的。

上述方程组的求解是困难的, 因方程的数目很多, 往往难以求解, 以减小方程的数目。

事实上, 在恒星内部条件下, 激发态离子是与自由电子处于沙哈平衡的。这是因为随着 Z 的增大, 能级间距缩小, 碰撞几率 (Q, S) 增大, 而辐射过程的几率 (α, A) 减小。如果某一能级 p 的碰撞速率远大于该能级的辐射退布居速率, 即:

$$\frac{n_e \sum_{u > p} n_u Q_{up}}{n_p \sum_{j < p} A_{pj}} \gg 1$$

$$n_k A_{ki} \beta_{ki} = n_k A_{ki} + n_k B_{ki} u_{ij} - n_j B_{jk} u_{kj} = n_k A_{ki} \left[1 - \frac{B_{kj}}{A_{ki}} u_{kj} \left(\frac{n_j g_k}{n_i g_i} \right) \right]$$

2) 流型反馈与拥塞反馈处于稳态平衡。此外, 对于任何 $r \geq p$ 的流型, 其反馈速率是偶更小, 而稳态速率是偶更大, 故对所有 $r \geq p$ 的流型, 之流型将处于稳态平衡。这样, 我们就可认为无限个 (是叫上讲) 的 n_k 速率方程经整理后, 流量方程组可写成:

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = -n_k \Big\{ & \sum_{j < k} (n_e Q_{kj} + A_{kj} \beta_{kj}) + n_e \sum_{p > k} Q_{kp} + n_e (S_k + \sum_{l \geq p} Q_{kl}) \Big\} \\ & + n_e \sum_{j < k} n_j Q_{jk} + \sum_{p > k} n_p (n_e Q_{pk} + A_{pk} \beta_{pk}) \\ & + n_e (n_i n_e \alpha_{3,k} + \sum_{l \geq p} n_l Q_{lk}) + n_e n_i (\alpha_{r,k} \beta_{rk} + \sum_{l \geq p} n_l A_{lk} \beta_{lk}) \end{aligned}$$

对所有 $k \geq p$ 的流型, 令:

$$S'_k \equiv S_k + \sum_{l \geq p} Q_{kl}$$

$$\alpha'_{3,k} \equiv \alpha_{3,k} + \sum_{l \geq p} \left(\frac{n_l}{n_e n_i} \right)^* Q_{lk}$$

$$(\alpha_{r,k} \beta_{rk})' \equiv \alpha_{r,k} \beta_{rk} + \sum_{l \geq p} \left(\frac{n_l}{n_e n_e} \right)^* A_{lk} \beta_{lk}$$

则有:

$$\begin{aligned} \dot{n}_k = -n_k \Big\{ & \sum_{j < k} (n_e Q_{kj} + A_{kj} \beta_{kj}) + n_e \left(\sum_{p \geq k} Q_{kp} + S'_k \right) \Big\} \\ & + n_e \sum_{j < k} n_j Q_{jk} + \sum_{p > k} n_p (n_e Q_{pk} + A_{pk} \beta_{pk}) \\ & + n_e n_i (n_e \alpha'_{3,k} + \alpha'_{r,k} \beta'_{rk}) \quad \text{若 } k < p \end{aligned}$$

而对所有 $k \geq p$ 的流型 r, s , 之流型方程可用 LTE 模型描述

进。即

$$\frac{n_s}{n_r} = \frac{g_s}{g_r} \exp\left(-\frac{\Delta\chi_{rs}}{T_e}\right) \quad r, s \geq p$$

$$\frac{n_i n_e}{n_r} = \frac{2 g_i}{g_r} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_r}{T_e}\right) \quad r \geq p$$

这样，方程组中方程的数目就减少了 p 个方程，从而减少了方程组求解的困难。

四 谱线展宽机制

1. 自然展宽

由于自发辐射跃迁的上能级的寿命是有限的, 即

$$\tau = \frac{1}{\sum_{j \neq i} A_{ji}}$$

而根据海森堡测不准原理, 其激发态的能量具有有限宽度

$$\Delta E = \frac{h}{2\pi\tau}$$

因此所得自发辐射跃迁谱线的谱线也相应地具有宽度

$$\Delta\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{\sum_{j \neq i} A_{ji}}{\pi}$$

展宽的谱线形状由能级寿命展宽决定的。由于激发态的寿命的指数衰减几率的平方根的付里叶变换, 可得自然展宽的谱线轮廓为:

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos \omega_0 t \rightarrow X(\omega) \rightarrow I(\omega) \propto X^2(\omega)$$

$$I(\omega) = I(\omega_0) \frac{1}{1 + [(\omega - \omega_0) 2\pi\tau]^2} \quad \text{— 洛伦兹型轮廓}$$

(能级寿命平方几率的付里叶变换)

即 $I(\omega)$ 为谱线中心强度。谱线轮廓也可表示为归一化的分布, 即

$$I(\omega) = I_0 \phi(\omega) \quad \text{其中 } I_0 \text{ 为}$$

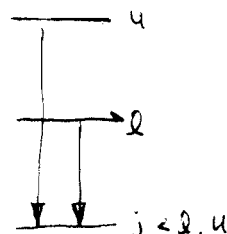
$$\phi(\omega) = \frac{2\tau}{1 + [(\omega - \omega_0) 2\pi\tau]^2} \quad \text{为归一化谱线轮廓}$$

I_0 为对谱线积分后的强度。

通常用谱线轮廓的半高全宽度 (FWHM) 作为展宽的量度。

对于自然展宽的展宽为:

$$\Delta\nu_{1/2} = \frac{1}{\pi\tau} = \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j \neq u} A_{uj} + \sum_{j \neq l} A_{lj} \right]$$



这里同时考虑了跃迁上下能级的寿命。对于共振线, 由于下能级是基态, 对于基态和激发态, 寿命 $\tau \rightarrow \infty$, 就不考虑下能级的寿命。对于非共振线跃迁, 必须考虑下能级的寿命。对于电磁波允许跃迁的上能级 $\tau = 10^6 \sim 10^9$ s, $\Delta\nu \approx 0.1 \sim 100$ MHz。

因为 $A_{ji} \propto \nu_{ji}^3$, 对于可见光波段自然展宽是明显的。但对于高频电磁波在原子核磁共振谱线, 自然展宽是完全可以忽略。

2. 多普勒展宽:

这里我们只考虑由于辐射场引起的多普勒展宽:

$$\Delta\nu = \nu - \nu_0 = \frac{\nu_0 v}{c} \quad v = \left(\frac{v}{v_0} - 1\right) c \quad I(\omega) \propto f(\omega)$$

v 为原子运动方向上的运动速度。当原子运动方向与辐射场方向分布时, 则由多普勒效应引起的谱线展宽是二阶分布:

$$I(\omega) = I(\nu_0) \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\nu_0^2} \frac{c^2}{v_t^2}\right] \quad v_t = \sqrt{\frac{2T}{M}}$$

(单位频率间隔)

$I(\nu_0)$ 为谱线中心强度。同样地, $I(\omega)$ 也用谱线强度 I_0 和归一化轮廓函数分布表示:

$$I(\nu) = I_0 \phi(\nu) \quad I_0 = I(\nu_0) \frac{\sqrt{\pi} \nu_0 v_t}{c}$$

即

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{c}{v_t} \frac{1}{\nu_0} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\nu_0^2} \frac{c^2}{v_t^2}\right]$$

多普勒展宽 (FWHM) 为:

$$\Delta\nu_x = 2\nu_0 \frac{v_t}{c} (\ln 2)^{1/2}$$

即

$$v_t \equiv \sqrt{\frac{2T}{M}}$$

▲ 碰撞 (碰撞, 斯悟克) 展宽

碰撞展宽: 辐射体 (原子, 离子) 在碰撞之间的多数时间由不受任何扰动, 只有碰撞瞬间受到扰动, 而使辐射波列瞬间中断, 从而在一系列碰撞中形成了一系列独立的短波列。对短波列进行傅里叶分析 → 求谱展宽, 然后对具有多种的碰撞之间的时间求统计平均, 就可得到谱线展宽分布。
—— 适用于电子碰撞

准静态 (统计) 展宽:

辐射体在发出辐射期间都不断地受到附近粒子的静电场的扰动, 且粒子的运动是很缓慢的, 因此它们产生的扰动电场是准静态电场。由此可计算每个粒子的扰动电场而斯悟克效应可起干涉作用。然后求出所有粒子的扰动电场的概率分布, 再将斯悟克效应相对流概率分布求平均, 就可得到谱线展宽分布。
—— 适用于离子碰撞

量子力学碰撞理论

3. 碰撞展宽——斯塔克展宽或斯塔克展宽

这是由带电粒子间(辐射离子与电子或带电离子间)的碰撞所产生的展宽效应。它实际上是属于斯塔克效应,即邻近的带电粒子对辐射离子(或原子)的影响。斯塔克效应的详细计算是十分复杂的,它已由本书译程中给出。它的谱线展宽与离子密度有关。例如, Griem 计算了氢的巴耳末线($n \rightarrow 2$ 跃迁)的斯塔克展宽(FWHM):

$$\Delta\lambda_{\frac{1}{2}} = 0.54 \alpha_{\frac{1}{2}} (n_{20})^{\frac{2}{3}} \quad [\text{nm}]$$

其中 n_{20} 是离子密度,以 10^{20} m^{-3} 为单位,即 $n_{20} = n_i / 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 。 $\alpha_{\frac{1}{2}}$ 与谱线有关:

谱线	主量子数 n	$\alpha_{\frac{1}{2}}$	
H α	3	0.015	0.015
H β	4	0.087	0.087
H γ	5		0.10
H δ	6	0.18	
H ϵ	8	0.28	
H ζ	10	0.46	

由此可见,对于低主量子数跃迁,斯塔克效应是主要的。因此,在等离子体研究中斯塔克效应是极感兴趣的。

4. 各种展宽效应的叠加

当几种展宽效应不可忽略时,线形中展宽是叠加的。一般讲,若两个独立展宽效应的谱线函数分别为 $f_1(\nu)$ 、 $f_2(\nu)$,则总的展宽是这两个函数乘积的卷积,即

$$f(\nu) = \int f_1(\nu - \nu') f_2(\nu') d\nu'$$

类似地,如果还有吸收展宽函数 $f_3(\nu)$, ..., 则继续叠加是

叙述是3。

但对于纯高斯线形的叠加，或纯罗伦兹线形的叠加，情况就简单得多。它们分别为：

$$\Delta^2 = \sum_i \Delta_i^2 \quad \text{高斯线形}$$

$$\Delta = \sum_i \Delta_i \quad \text{罗伦兹线形}$$

对于高斯线形和罗伦兹线形的叠加，已知线形函数为佛克脱 (Voigt) 函数，它已制成表。可利用此表求得对之谱线的宽度。

仪器线形：

对于光栅光谱仪，当入射狭缝很窄时

$$I(\omega - \omega_0) = I_0 \left[\frac{\sin \left[\frac{\omega - \omega_0}{\Delta\omega} \right]}{N \sin \left[\frac{\omega - \omega_0}{N\Delta\omega} \right]} \right]^2$$

N 为光栅刻线数

$\Delta\omega$ 反比于光栅的宽度

或近似 (假定仪器线形为理想情况) 为

五. 在等离子体诊断中的应用

对光谱线辐射, 辐射吸收和自发辐射可忽略. 则

$$I(\nu) = \int j(\nu, r, r) dl \rightarrow j(r, \nu, r)$$

$$I_{nm} = \int j_{nm}(r) dr \approx j_{nm} l = \frac{h\nu_{nm}}{4\pi} A_{nm} n_n l$$

$$j(r, \nu, r) = \frac{h\nu}{4\pi} A_{nm} n_n(r)$$

1. 从同一元素, 同一电离态的谱线之比求 T_e :

$$R \equiv \frac{j_{nm}}{j_{n'm'}} = \frac{\nu_{nm}}{\nu_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{n_n}{n_{n'}}$$

对 LTE 模型:

$$\frac{n_n}{n_{n'}} = \frac{g_n}{g_{n'}} \exp\left(\frac{\chi_n - \chi_{n'}}{T_e}\right)$$

$$R = \frac{\nu_{nm}}{\nu_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{g_n}{g_{n'}} \exp\left(\frac{\chi_n - \chi_{n'}}{T_e}\right)$$

$$T_e = \frac{\chi_n - \chi_{n'}}{\ln(R \nu_{n'm'} A_{n'm'} g_{n'} / \nu_{nm} A_{nm} g_n)}$$

由此求 T_e 的相对误差为

$$\frac{\Delta T_e}{T_e} = \frac{T_e}{|\chi_n - \chi_{n'}|} \left| \frac{\Delta X}{X} \right| \geq 10\%$$

其中 X 为对数函数中的变量, 它的相对误差不少于 10%, $\frac{T_e}{\chi_n - \chi_{n'}} \sim 1$. 故 T_e 的相对误差不少于 10%

对平衡模型:

$$n_n = \frac{n_e n_i Q_{in}}{\sum_{j \neq n} A_{nj}}$$

$$\therefore R = \frac{\nu_{nm}}{\nu_{n'm'}} \frac{A_{nm} / \sum_{j \neq n} A_{nj}}{A_{n'm'} / \sum_{j \neq n'} A_{n'j}} \cdot \frac{Q_{in}}{Q_{in'}}$$

对于共振线 (如氢原子巴尔末线系)

$$A_{nm} / \sum_{l < n} A_{nl} \approx 1 \quad (\text{忽略 } \chi_n - \chi_{n'})$$

$$\text{故 } R \equiv \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{Q_{in}}{Q_{in'}} = \frac{(\bar{g}f)_{in}}{(\bar{g}f)_{in'}} \exp\left(-\frac{\chi_n - \chi_{n'}}{T_e}\right)$$

$$T_e = \frac{\chi_{n'} - \chi_n}{\ln(R \bar{g}_{in'} f_{in'} / \bar{g}_{in} f_{in})}$$

此方法对于共振线适用 (不太适用), 这时复合和吸收对谱线分布影响之差不可忽略。此外, 这时电离态的分布也不适用。

2. 同一元素相邻电离态离子线强度比 $|T_e|$:

$$R = \frac{U_{nm}(z+1)}{U_{n'm'}(z)} \cdot \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{n(z+1, n)}{n(z, n')}$$

对于LTE模型

$$\frac{n_e n(z+1, l)}{n(z, n')} = \frac{2 g(z+1, l)}{g(z, n')} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\chi(z, n')}{T_e}\right]$$

$$\frac{n(z+1, n)}{n(z+1, l)} = \frac{g(z+1, n)}{g(z+1, l)} \exp\left[-\frac{\chi(z+1, l) - \chi(z+1, n)}{T_e}\right]$$

$$\text{故 } R = \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{2 g(z+1, n)}{g(z, n')} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2} \right)^{3/2} n_e^{-1} \times \exp\left[-\frac{\chi(z, n') - \chi(z+1, n) + \chi(z+1, l)}{T_e}\right]$$

$$\begin{aligned} &= \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{2 g(z+1, n)}{g(z, n')} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2} \right)^{3/2} n_e^{-1} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{in}(z+1) - \Delta\chi_{in}(z) + \chi(z, n')}{T_e}\right] \\ &= \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{g(z+1, n)}{g(z, n')} \frac{1}{\sqrt{\pi}} (4\pi a_0^3 n_e)^{-1} \left(\frac{T_e}{R_y} \right)^{3/2} \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{in}(z+1) - \Delta\chi_{in}(z) + \chi(z, n')}{T_e}\right] \end{aligned}$$

$$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2}$$

玻尔半径

$$\frac{\Delta T_e}{T_e} = \frac{T_e}{|X_{in}(z+1) - X_{in}(z) + X(z,1)|} \left| \frac{\Delta X}{X} \right|,$$

466

对日冕模型:

$$\frac{T_e}{|X_{in} - X_{in'} + X(z,1)|} < 1$$

$$R = \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \frac{A_{nm}}{A_{n'm'}} \frac{n(z+1, n)}{n(z, n')}$$

$$\therefore n(z+1, n) = \frac{Q_{in}(z+1) n(z+1, 1) n_e}{\sum_{l < n} A_{nl}}, \quad n(z, n') = \frac{Q_{in'}(z) n(z, 1) n_e}{\sum_{l' < n'} A_{n'l'}}$$

$$\frac{n(z+1, 1)}{n(z, 1)} = \frac{S(z, 1)}{\alpha_r(z+1, 1)} \approx \exp\left[-\frac{X(z, 1)}{T_e}\right]$$

$$\therefore R = \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \cdot \frac{A_{nm}/\sum_{l < n} A_{nl}}{A_{n'm'}/\sum_{l' < n'} A_{n'l'}} \cdot \left[\frac{Q_{in}(z+1)}{Q_{in'}(z)} \cdot \frac{S(z, 1)}{\alpha(z, 1)} \right] = f(T_e)$$

$$\begin{aligned} & \frac{U_{nm}}{U_{n'm'}} \cdot \frac{A_{nm}/\sum_{l < n} A_{nl}}{A_{n'm'}/\sum_{l' < n'} A_{n'l'}} \cdot \frac{(\bar{g}f)_{in}}{(\bar{g}f)_{in'}} \frac{\Delta X_{in'}(z)}{\Delta X_{in}(z+1)} \exp\left[-\frac{\Delta X_{in}(z+1) - \Delta X_{in'}(z)}{T_e}\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{X(z, 1) + \Delta X_{in}(z+1) - \Delta X_{in'}(z)}{T_e}\right] \end{aligned}$$

3. 从辐射度及其相邻的连续辐射源之比到 T_e 这时依(2)等式

条件: (1). 平衡态电离等条件

(2). 部分局部平衡 (2.1 及 2.2)

$$j_\omega = \frac{h\omega}{4\pi} A_{nm} n_n \quad (\text{辐射度}) \quad (\text{辐射度})$$

$$= \frac{h\omega A_{nm}}{4\pi} n_e n_i \frac{g_n}{2g_i} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{X_n}{T_e}\right)$$

$$\begin{aligned} j_{c\omega} &= n_e n_i \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^3 \frac{4}{3\sqrt{3} m_e^2 c^3} \left(\frac{2m_e}{\pi T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{h\omega}{T_e}\right) \left[\frac{g_n}{g_i} + \frac{2g_n}{g_i} \frac{2^2 R_y}{n^2} \exp\left(\frac{2^2 R_y}{n^2 T_e}\right)\right] \Delta\omega \\ &\times \left[\bar{g}_{ff} + \sum g_n \frac{2^2 R_y}{T_e n^2} \frac{2}{n} \exp\left(\frac{2^2 R_y}{n^2 T_e}\right)\right] \Delta\omega \end{aligned}$$

$$A_{nm} = \frac{8\pi h \omega^3}{c^3} \cdot \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h \omega} \frac{g_m}{g_n} f_{mn} = \frac{2\pi \omega^2}{c} \frac{g_m}{g_n} f_{mn}$$

$$\Delta\omega = \frac{2\pi c \Delta\lambda}{\lambda^2}$$

$$a_0 \equiv \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{m_e e^2} = \frac{r_e}{\alpha^2}$$

玻尔半径

由此可得:

$$\frac{j_0}{j_0 \omega} = \frac{\pi^3 3^{3/2} (a_0/\alpha)^2 g_m f_{mn}}{\lambda \Delta\lambda g_i \beta} \exp\left[\frac{\chi_n + \hbar\omega}{T_e}\right]$$

$$\text{其中 } \beta = \frac{T_e}{R_y} \bar{g}_{H^+} + \sum_n \frac{2g_n}{n^3} \exp\left(\frac{z^2 R_y}{n^2 T_e}\right)$$

这里 $z=1$ (中性氢)

4. 碰撞截面与绝对电离度关系推导:

$$j = \frac{1}{4\pi} h\nu A_{nm} n(z, n) \Rightarrow n(z, n)$$

对于细致平衡:

$$n(z, n) \sum_{l < n} A_{nl} = n_e n(z, 1) Q_{1n} \Rightarrow$$

$$n(z, 1) = \frac{n(z, n) \sum_{l < n} A_{nl}}{n_e Q_{1n}} \approx n(z)$$

$$n(z) S(z) = n(z+1) \alpha(z+1) \Rightarrow n(z+1)$$

$$n(z) \alpha(z) = n(z-1) S(z-1) \Rightarrow n(z-1)$$

将局部平衡模型

$$\frac{n(z, n)}{n(z, 1)} = \frac{g(z, n)}{g(z, 1)} \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{1n}(z)}{T_e}\right]$$

$$\begin{aligned} \frac{n(z)}{n(z, 1)} &= \frac{1}{n(z, 1)} \sum_{n=1}^{n_{\max}} n(z, n) = \frac{1}{g(z, 1)} \sum_{n=1}^{n_{\max}} g(z, n) \exp\left[-\frac{\Delta\chi_{1n}(z)}{T_e}\right] \\ &= \frac{U(z, T_e)}{g(z, 1)} \end{aligned}$$

对于LTE模型：从谱线度从绝对测量获得上能级布居 $n(z, n)$ 之后，可利用如下的关系式

$$\frac{n(z, n)}{n(z)} = \frac{g(z, n)}{U(z, T_e)} \exp\left[-\frac{\Delta\epsilon_{ln}(z)}{T_e}\right] \exp\left[-\frac{E(z, n)}{T_e}\right]$$

$$\frac{n(z+1)n_e}{n(z)} = 2 \frac{U(z+1, T)}{U(z, T)} \left(\frac{2\pi m_e T_e}{h^2}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\epsilon(z, 1)}{T_e}\right\}$$

求得所有电离态的布居布居。

5. 利用线谱的多普勒展宽测 T_e :

对于高温、低密度等离子体，即当无碰撞展宽和谱线的自吸收效应可忽略时，而多普勒展宽是展宽的主要机制时，这时谱线的线廓是高斯型，谱线的半高全宽与辐射场温度有关：

$$\Delta\lambda_d(\text{FWHM}) = \lambda \sqrt{\frac{8T_e}{m_i c^2} \ln 2} = 2.43 \times 10^{-3} \lambda [\text{\AA}] \sqrt{\frac{T_e [\text{K}]}{A}} [\text{\AA}]$$

这里，由线展宽谱线分辨率的修正。

这里由线展宽：

- (1). 对于不同离子的不同电离态的多普勒展宽测 T_e 是完全相同的，否则的话，不同离子的温度没有这样的关系。
- (2). 中心展宽谱线谱线展宽展宽（这也可以达到一定的精度）对 T_e 的影响。这时，可测出不同离子的谱线展宽与谱线展宽，若它们与离子的温度无关，则这时谱线展宽是由谱线展宽展宽引起的。
- (3). 离子温度与这由于多普勒展宽

6. 利用谱线的斯劳特曼展宽 $\Delta\lambda_e$

对于高吸收等离体，当多普勒展宽与自展宽效应可忽略时，可利用谱线的斯劳特曼展宽效应 $\Delta\lambda_e$ 。可以证明从谱线展宽效应可导出 n_e ，最好利用整个谱线展宽拟合的方法，不用假设谱线展宽的方法。因为谱线上低吸收等离体在谱线中心附近 $\pm 2\Delta\lambda_e$ 附近，至今低谱线展宽比高吸收的约等于谱线展宽 $\Delta\lambda_e$ 的 2~3 倍。

7. 利用谱线的多普勒展宽测流体速度

巨流体的流体速度下限受多普勒展宽效应的限制。由于流体速度与离子速度无关，多普勒展宽与离子速度的平方根成正比，因此选择重离子多普勒展宽测流体速度比较有利，因为它的展宽与展宽比较大。

此外，可以较精确地测得多普勒展宽，可同时测得同方向和反方向（与流速方向）的谱线展宽，巨等离子体的平均速度等于中心速度，而平均速度是中心速度的 2~3 倍。

8. 研究李超超：

$$\frac{\partial n(A, z)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla n(A, z) + \nabla \cdot [D(A, z) \nabla n(A, z)] = \left(\frac{\partial n(A, z)}{\partial t} \right)_{\text{碰撞, 辐射}}$$

9. 双电子复合体与由核反应产生电子比 1/2 T_e

A. H. Gabriel Mon. Not. R. Astron. Soc. 160 (1972), 99

▲清华大学蒲以康教授小组的实验

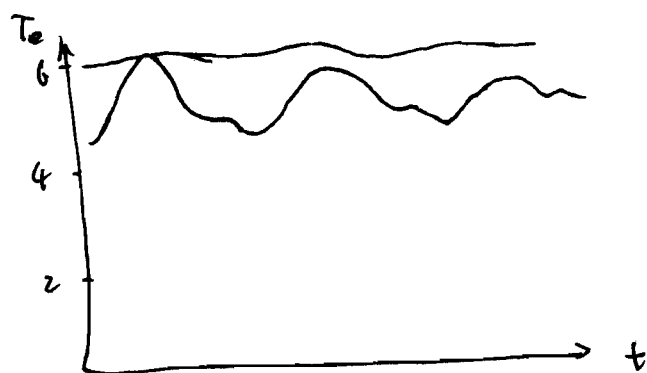
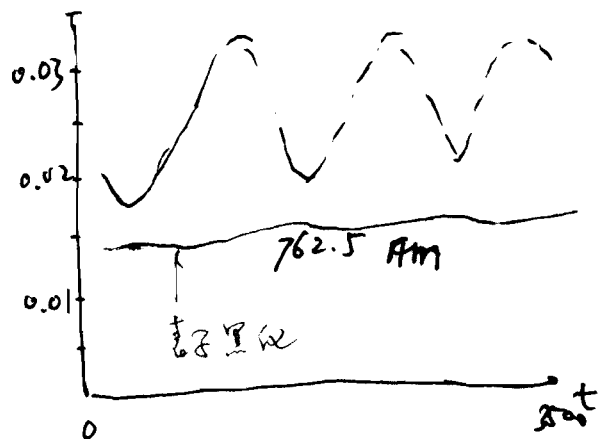
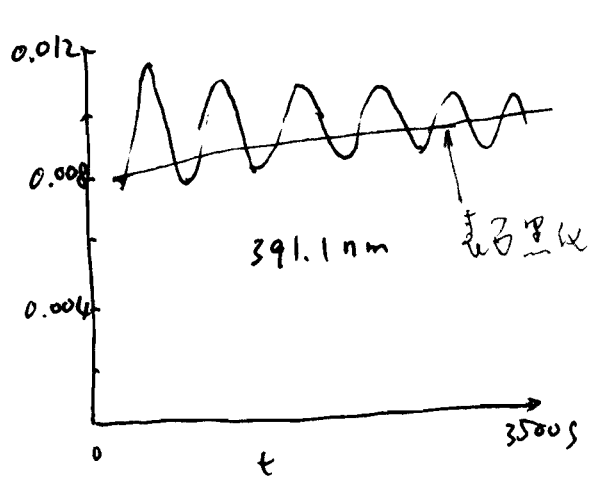
电子耦合等离子体, CH_4/N_2 等离子体

利用 N_2^+ (52 离子) 的谱线在 391.1 nm

N_2 分子谱线

762.5 nm

的强度比例 T_e . 发现

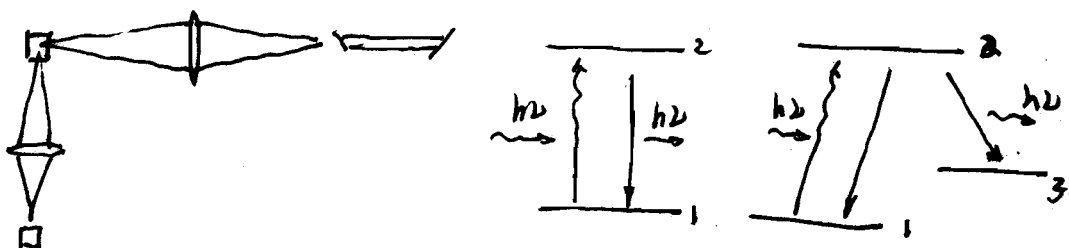


§4.4 激光诱导荧光光谱学 (Laser-Induced Fluorescence) LIF

激光诱导荧光光谱学, 又称激光共振荧光光谱, 激光选择激发光谱学, 是等离共振光谱的重要分支之一, 对时间、空间分辨率测量离子(原子)密度、速度分布和温度、以及等离子体中的电场场。

一. 工作原理:

激光诱导荧光光谱学的基本原理是: 利用适当频率的激光辐射有选择地激发特定的原子或分子, (即激光频率与入射光子的能量相匹配), 在观测基态激发时态发出的荧光辐射。该荧光辐射的特征与辐射离子(或原子)的状态(密度、速度分布)有关, 而且也与辐射点的场特征(电、磁场)有关。因此可用该光谱学分析等离子体中的粒子和场。其实验排列如下图所示: 入射激光束被聚焦到样品



体积内, 用共振激光辐射的离子, 该离子被激发时发出的荧光辐射被收集系统收集并探测。荧光波长可与入射激光波长相同(共振荧光), 也可与入射激光不同(非共振荧光)。

从实验安排上看, 它与激光散射是类似的, 但本质上它是不同的。汤姆逊散射是入射激光与自由电子间的弹性散射, 它没有特征时间。而 LIF 是激光与原子间的相互作用, 光子被原子(或离子)吸收后使原子内电子组态发生准永久变化, 其退激发时发出的荧光辐射是有特征时间, 这与激光基态的寿命有关。

LIF 的最大优点是共振吸收截面比汤姆逊散射截面大十

在爱因斯坦辐射跃迁系数中, 我们得到。频率为 ν 的线谱吸收系数为:

$$\begin{aligned}\alpha_{lu} &= \frac{g_u}{g_l} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} A_{ul} \left[1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right] n_l \\ &= \pi r_e c f_{lu} n_l \left[1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right]\end{aligned}$$

这可以表示为

$$\alpha_{lu} \equiv \bar{\alpha}_{lu} \cdot \Delta\nu \equiv \bar{\sigma}_{lu} n_l \cdot \Delta\nu$$

其中 $\bar{\alpha}_{lu}$ 和 $\bar{\sigma}_{lu}$ 为线谱频率范围内平均的吸收系数和吸收截面

由此得平均吸收截面为

$$\bar{\sigma}_{lu} = \frac{\alpha_{lu}}{n_l \cdot \Delta\nu} = \frac{g_u}{g_l} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu} \left[1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right]$$

因为 $\Delta\nu \equiv \frac{\sum_{j>u} A_{uj}}{2\pi} \quad \frac{c}{\nu} \equiv \lambda$

所以

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{lu} &= \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{A_{ul}}{\sum_{j>u} A_{uj}} \left[1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right] \\ &\approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left[1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right] \quad (\text{对于氢族}) \\ &\approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \quad (\text{对于CM模型, } n_u \ll n_l)\end{aligned}$$

当光源线宽 $\Delta\nu_L$ 大于吸收线宽 $\Delta\nu_N$ 时, 其平均吸收截面为:

$$\bar{\sigma}_{lu} \approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_L} \approx \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_L} \quad (\text{对于氢族})$$

由此可见, 对于可见光波段, 其平均吸收截面近似为 10^{-13} m^2 , 这比 Thomson 散射截面 ($\sigma_T \approx 10^{-29} \text{ m}^2$) 大约十几个数量级

$$\alpha_{lu}(\nu) = \frac{h\nu}{c} B_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \phi(\nu) = (\text{对电偶极跃迁})$$

4-71

几个量级。下面我们仍可以从吸收系数的定义出发导出吸收截面的表达式。由前述可知，线吸收系数为：

$$\alpha_{lu}(\nu) = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} n_l \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \phi(\nu)$$

其中 $\phi(\nu)$ 为归一化的吸收线形。此外，吸收截面与吸收系数之间的关系为：

$$\alpha_{lu}(\nu) = \sigma_{lu}(\nu) n_l$$

故有

$$\sigma_{lu}(\nu) = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \phi(\nu)$$

$$\int \sigma_{lu}(\nu) d\nu = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \int \phi(\nu) d\nu$$

$$= \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) \left[\frac{h\nu}{c} \frac{g_l}{g_u} \right]$$

对于电偶极跃迁

$$B_{lu} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e h \nu} f_{lu}$$

且

$$A_{ul} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{ul} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{g_l}{g_u} B_{lu}$$

故

$$\int \sigma_{lu}(\nu) d\nu = \frac{h\nu}{c} B_{lu} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right)$$

$$= \frac{g_u}{g_l} \frac{c^2}{8\pi \nu_{ul}^2} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right)$$

$$= \frac{\lambda_{ul}^2}{8\pi} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l}\right) A_{ul}$$

若用吸收线轮廓频率宽度 $\Delta\nu_{ul}$ 内的平均吸收截面 $\bar{\sigma}_{lu}$ 表示频率积分的吸收截面，则有

▲ 线吸收系数

$$\begin{aligned}
 d_{lu} &= \frac{h\nu}{c} B_{lu} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) n_l \\
 &= \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) n_l \quad \left(\because A_{ul} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{g_l}{g_u} B_{lu}\right) \\
 &= \frac{e^2}{4\epsilon_0 m_e c} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) n_l \quad (\text{对电偶极辐射跃迁}) \\
 &= \pi r_{ec} f_{lu} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) n_l
 \end{aligned}$$

这里对电偶极跃迁求平均吸收系数，按定义有：

$$d_{lu} = \int n_l \sigma_{lu}(\nu) d\nu$$

代入上式得：

$$\begin{aligned}
 \int \sigma_{lu}(\nu) d\nu &= \frac{c^2}{8\pi\nu_{ul}^2} \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) \\
 &= \frac{\lambda_{ul}^2}{8\pi} \frac{g_u}{g_l} A_{ul} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) \\
 &= \overline{\sigma}_{lu} \cdot \Delta\nu_N \quad (\text{谱线宽度})
 \end{aligned}$$

$$\Delta\nu_N = \frac{\sum_{j \neq u} A_{uj}}{2\pi} \quad (\text{忽略碰撞})$$

$$\therefore \overline{\sigma}_{lu} = \frac{\lambda_{ul}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) \frac{A_{ul}}{\sum_{j \neq u} A_{uj}}$$

$$\bar{\sigma}_{eu} \cdot \Delta\nu_N = \int \sigma_{eu}(\nu) d\nu = \frac{\lambda_{ue}^2}{8\pi} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) A_{ul}$$

对自然展宽 (共振线)

$$\Delta\nu_N = \frac{\sum_{r \neq u} A_{ur}}{2\pi}$$

故有

$$\bar{\sigma}_{eu} = \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) \frac{A_{ul}}{\sum_{r \neq u} A_{ur}}$$

对于共振线, 有

$$\frac{A_{ul}}{\sum_{r \neq u} A_{ur}} \approx 1$$

故

$$\bar{\sigma}_{eu} \approx \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \left(1 - \frac{g_l}{g_u} \frac{n_u}{n_l}\right) \approx \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \quad (\text{对 CE 模型})$$

由此可见, 对于典型的可见光波, 其平均吸收截面近为 10^{13} m^2 量级, 它比汤姆逊散射截面 ($\sigma_T \approx 10^{-29} \text{ m}^2$) 大十几个量级, 因而可以用中等功率的激光去做 LIF 实验。当激光调宽 $\Delta\nu_L$ 大于吸收线宽 $\Delta\nu_N$ 时, 其平均截面为:

$$\bar{\sigma}_{eu} \approx \pi \nu_e c f_{eu} \frac{1}{\Delta\nu_L} = \frac{g_u}{g_l} \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{A_{ul}}{\Delta\nu_L} \approx \frac{\lambda_{ue}^2}{4} \frac{g_u}{g_l} \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_L}$$

为了研究激光辐射与离子初始状态参数及激光参数间的关系，由速率方程。可简略起见，所以只考虑二能级原子系统，即假设：

1. 激光辐射吸收与自发辐射仅 1, 2 之间，1 是基态
2. 速率方程型通用 (与原子能级吸收与自发辐射速率之比无关)
3. 激光辐射与自发辐射的跃迁范围由速率方程辐射，即 $\Delta u_L > \Delta u_{sp}$
4. 激光脉冲是窄脉冲，且 $\tau_L \gg$ 离子通过观察体时的渡越时间，即观察体中的离子密度可视为常数
5. 激光束与观察体中的离子分布正切。



由此可知，在没有激光辐射时 ($t < 0$)，能级 2 的初始参数为：

$$n_{20} = \frac{n_e Q_{12}}{A_{21}} n_{10} \ll n_{10}$$

当 $t=0$ 时，加上激光脉冲，则在 $0 \leq t \leq \tau_L$ 时间内，能级 2 的速率方程为：

$$\begin{cases} \dot{n}_2 = (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_1 - (u_L B_{21} + A_{21}) n_2 \\ \dot{n}_1 = (u_L B_{21} + A_{21}) n_2 - (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_1 \end{cases}$$

粒子数守恒方程：

$$\dot{n}_1 + \dot{n}_2 = 0 \quad , \quad \text{即} \quad n_1 + n_2 = n_{10} + n_{20} = n_0$$

初始条件

$$\dot{n}_2 = (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_0 - [u_L (B_{12} + B_{21}) + A_{21} + n_e Q_{12}] n_2$$

(因为 $n_2 A_{21} = n_1 n_e Q_{12}$, $n_2 \ll n_1$)

对于速率方程通用形式，有 $A_{21} \gg n_e Q_{12}$ ，则

$$\dot{n}_2 \approx (u_L B_{12} + n_e Q_{12}) n_0 - [u_L (B_{12} + B_{21}) + A_{21}] n_2$$

通常微分方程的解为：(利用初始条件 $n_2|_{t=0} = n_{20}$)

$$n_2(t) = \frac{u_b B_{12} + n_0 Q_{12}}{A_{21} + u_b (B_{12} + B_{21})} n_0 \left[1 - \exp \left\{ - [A_{21} + u_b (B_{12} + B_{21})] t \right\} \right] \\ + n_{20} \exp \left\{ - [A_{21} + u_b (B_{12} + B_{21})] t \right\}$$

令: $S \equiv \frac{B_{12} + B_{21}}{A_{21}} u_b = \frac{u_b}{u_0} = \frac{I_b}{I_0}$ 饱和参数

$$u_0 \equiv \frac{A_{21}}{B_{12} + B_{21}} = \frac{A_{21}/B_{21}}{1 + B_{12}/B_{21}} = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}$$
 饱和辐射场强度

$$I_0 = c u_0$$
 饱和辐射强度

代入上式, 则 $n_2(t)$ 为:

$$n_2(t) = \left(\frac{g_2}{g_1 + g_2} \frac{S}{1+S} + \frac{n_0 Q_{12}/A_{21}}{1+S} \right) n_0 \left[1 - e^{-A_{21}(1+S)t} \right] \\ + n_{20} e^{-A_{21}(1+S)t} \\ \approx \frac{g_2}{g_1 + g_2} \frac{S}{1+S} n_0 \left[1 - e^{-A_{21}(1+S)t} \right] + n_{20} e^{-A_{21}(1+S)t}$$

因为激发态平衡的弛豫时间 $\ll A_{21}^{-1}$ 短, 而 A_{21}^{-1} 通常比 τ_L 短得多 (即 $A_{21}^{-1} \ll \tau_L$, $\tau_L A_{21} \gg 1$), 因此当 $\tau_L A_{21} \gg 1$ 时, 有近似:

$$n_2(t) \approx \frac{g_2}{g_1 + g_2} \frac{S}{1+S} n_0, \quad \Delta n_2 = n_2 - n_{20}$$

由此可知:

- (1) 当 $S \ll 1$ 时, Δn_2 与激发辐射强度 S 成正比, 而与吸收的辐射强度无关
 - (2) 当 $S \gg 1$ 时, Δn_2 与 n_0 成正比, 而与吸收辐射强度无关
- 因此, 2812谱线是3谱线的激发态弛豫时间远大于2812谱线的弛豫时间。

离子的激发。此外, 当 $S \gg 1$ 时, 因为

$$n_2 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} n_0 = \frac{g_2}{g_1 + g_2} (n_1 + n_2)$$

由此可得:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1}$$

其物理意义是: 在能级和激发时, 激发跃迁是平衡, 使得吸收和自发辐射过程之大小与辐射上、下能级激发态比例有类似的过程, 因此有:

$$n_1 B_{12} u_\nu = n_2 B_{21} u_\nu$$

$$\text{故} \quad \frac{n_2}{n_1} = \frac{B_{12}}{B_{21}} = \frac{g_2}{g_1} \quad (\text{扣除 玻尔兹曼分布的激发因子为无限大})$$

二. 能级和辐射跃迁速率和能级寿命

LIF 用于诊断离子激发, 最好是用能级和系谱, 即 $S \gg 1$. 这时能级和激发跃迁与自发跃迁无关, 因此比较简便。此时能级和系谱跃迁从自发跃迁分布估计, 中值求能级和辐射跃迁速率或能级寿命。如可述, 对于 π 跃迁, 能级和系谱跃迁:

$$u_0(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{21} + B_{12}} = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h \omega^3}{c^3}$$

且能级和系谱跃迁为:

$$\text{①} \quad I_0(\omega) = c u_0(\omega) = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h \omega^3}{c^2}$$

用波数表示:

$$I_0(\lambda) = I_0(\omega) \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{c}{\lambda^2} I_0(\omega) = \frac{g_1}{g_1 + g_2} \frac{8\pi h c^2}{\lambda^5}$$

由此, 能级和系数的差与波长 λ 成反比, 因此波长越短, 则要求能级和系数的差越大. 例如 (设 $g_1 = g_2$):

$$\lambda = 6000 \text{ \AA}$$

$$I_0 = 100 \text{ W/cm}^2 \cdot \text{\AA}$$

$$\lambda = 3000 \text{ \AA}$$

$$I_0 = 3000 \text{ W/cm}^2 \cdot \text{\AA}$$

$$\lambda = 1200 \text{ \AA}$$

$$I_0 = 300 \text{ kW/cm}^2 \cdot \text{\AA}$$

简言之, 要求能级和系数的差与波长成正比: 对紫外波段, 由上列波段发射跃迁速率与自发跃迁跃迁速率之比,

$$B_{21} U_0(\omega) n_2 \approx A_{21} n_2$$

即

$$U_0(\omega) = \frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h \omega^3}{c^3}$$

同理, 对紫外波段, 由自发跃迁跃迁速率与自发跃迁跃迁速率之比和相同平衡态求得, 即:

$$B_{32} U_0(\omega) n_3 = n_3 [A_{32} + A_{31} + n_e \sum_{i \neq 3} Q_{3i}]$$

即

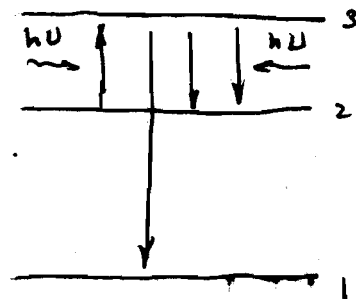
$$U_0(\omega) = \frac{A_{32}}{B_{32}} \left(\frac{A_{32}}{A_{32}} + \frac{n_e \sum_{i \neq 3} Q_{3i}}{A_{32}} \right)$$

或

$$I_0(\lambda) = \frac{8\pi h e^2}{\lambda^5} \left[\frac{A_{32}}{A_{32}} + \frac{n_e \sum_{i \neq 3} Q_{3i}}{A_{32}} \right]$$

即

$$A_{32} = \sum_{i \neq 3} A_{3i}$$



三. 原子速度分布函数比例

假设: (1) 只考虑两种跃迁, 1 为基态, 2 为激发态

(2) 入射激光是单色的, $I(\omega) = I_0 \phi(\omega)$

I_0 为总光强, $\phi(\omega)$ 为归一化分布, 且 $\int \phi(\omega) d\omega = 1$

这些速度为 \vec{v} 的原子对频率为 ω 的光的吸收为 \vec{k}_2 的入射激光的吸收截面为:

$$\sigma_{12} L_a(\omega - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}) \quad K_a[\omega - \omega_0 - \vec{k}_2 \cdot \vec{v}]$$

即

$$\sigma_{12} \equiv \pi c \epsilon_0 f_{12} = \frac{g_2}{g_1} \frac{\lambda_0^2}{8\pi} A_{21}, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$$

归一化

$$L_a(\omega) \equiv \frac{\frac{A_{21}}{2\pi}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{A_{21}}{2}\right)^2} \quad \text{为归一化吸收截面函数}$$

则同时吸收两波束 (常叫双光子过程) 为:

$$W(\vec{v}) = \sigma_{12} \frac{I_0}{h\omega} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k}_2 \cdot \vec{v})$$

双光子过程跃迁过程截面函数 f_{12} 与 A_{21} 成正比, 则同时吸收两波束的跃迁截面函数 f_{12} 与 A_{21} 成正比

$$\frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}}$$

若考虑原子速度在 $\vec{v} \rightarrow \vec{v} + d\vec{v}$ 范围内的原子数为 $n_1 f(\vec{v}) d\vec{v}$, 则同时吸收两波束的跃迁截面函数 f_{12} 与 A_{21} 成正比:

$$n_2(\vec{v}) d\vec{v} = \frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}} n_1 f(\vec{v}) d\vec{v}$$

对弱光 (低强度), $W(\vec{v}) \ll A_{21}$, 则近似有:

$$n_2(\vec{v}) d\vec{v} \approx \frac{W(\vec{v})}{A_{21}} n_1 f(\vec{v}) d\vec{v}$$

由双光子跃迁在 E 方向上每单位时间、单位体积、单位角度的跃迁数即为:

$$W(\vec{v}) = \frac{I_0}{\hbar \omega} \sigma_{12} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (4.78)$$

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} = \int d\vec{v} \frac{A_{21}}{4\pi} n_2(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{A_{21} n_1}{4\pi} \int d\vec{v} \frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}} f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

其中 $L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$ 为吸收谱线轮廓。通常由 LIF 用于高速度分布测量时，却正采用弱系谱。即 $A_{21} \gg W(\vec{v})$ ，于是，为避免饱和展宽对吸收谱线轮廓测量影响。故在弱系谱极限下，有：

$$\frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} \approx \frac{n_1}{4\pi} \int d\vec{v} W(\vec{v}) f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

以下讨论两种极限情况下的发射谱：

1. 宽线极限，即 激发线宽 $\Delta\omega_L \gg \Delta\omega_{Dop}$ (忽略吸收展宽)

$$\text{即} \quad \phi(\omega) \approx \frac{1}{\Delta\omega_L} \approx \text{常数}$$

$$W(\vec{v}) = \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_L} \int d\omega L_a(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) = \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_L}$$

$$\text{故} \quad \frac{d^2 N}{d\omega d\Omega} \approx \frac{n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_L} \int d\vec{v} f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

$$= \frac{n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \frac{1}{\Delta\omega_L} G(\omega, k)$$

其中 $G(\omega, k)$ 是发射谱分布与 $\vec{k} \cdot \vec{v}$ 速度分布卷积

$$f(v_k) = \int d\vec{v}_\perp f(\vec{v}_k, \vec{v}_\perp)$$

与发射谱轮廓 $L_e(\omega - k v_k)$ 的卷积。

当自然展宽远小于多普勒展宽时，即 $\Delta\omega_L \ll \Delta\omega_D$ ，则 $L_e(\omega - k v_k)$ 可近似为 δ 函数 $\delta(\omega - k v_k)$ ，这样卷积可变为

$$\text{即} \quad G(\omega, k) = \int d v_k f(v_k) L_e(\omega - k v_k)$$

变为:
$$\frac{d^2N}{d\omega d\Omega} = \frac{A_0 n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \frac{1}{\Delta \omega_0} f(\omega_k) \quad \omega_k = \frac{\omega}{k}$$

由此可见, 在通常情况下, 发射的荧光光谱直接与实际谱上的谱线分布函数 $F(\omega_k)$ 成正比。利用这一关系的谱线仪叫作发射的荧光光谱仪。此时叫作 $F(\omega_k)$ 。

2. 窄线宽极限: 即 $\Delta \omega_0 \ll \Delta \omega_{\text{谱线}}$
这时, 谱线函数可用 δ 函数近似, 即

$$\phi(\omega) \approx \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\begin{aligned} \text{则} \quad W(\vec{\omega}) &\approx \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \\ &= \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} L_a(\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\text{故} \quad \frac{d^2N}{d\omega d\Omega} = \frac{n_1}{4\pi} \sigma_{12} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \int d\vec{v} L_a(\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v}) f(\vec{v}) L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

将上式对 \vec{v} 积分, 得:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\Omega} &= \frac{n_1}{4\pi} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \sigma_{12} \int d\vec{v} f(\vec{v}) L_a(\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v}) \int d\omega L_e(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{n_1}{4\pi} \frac{I_0}{\hbar \omega_0} \sigma_{12} \int d\vec{v} f(\vec{v}) L_a(\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

当谱线自然宽度远小于多普勒展宽时, 即 $\Delta \omega_0 \ll \Delta \omega_D$, 吸收线函数可近似的为 δ 函数, 即:

$$L_a(\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v}) = \delta(\omega_0 - \vec{k} \cdot \vec{v})$$

将此代入上式, 经积分后, 易得:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{n_1}{4\pi} \frac{I_0}{\hbar\omega_0} \sigma_{12} f(v_{k_2})$$

即

$$v_{k_2} \equiv \frac{\omega_0 - \omega}{k_2}$$

ω_0 为原子速度为 $v_{k_2}=0$ 时共振光频率。

由此可知，在 k 方向上测得的是对激光束频率宽度为 $\hbar k v_{k_2}$ 的光射到探测器上与激光入射方向上原子的速度分布函数 $F(v_{k_2})$ 成正比。如果激光束频率为 ω_0 ，激光束在原子束内扫描时，就可测得原子在 k 方向上的速度分布。

光谱分辨率 $f(v_{k_2})$ 的特点是其分辨率低。对于原子束的扫描速度可调谐的激光束，其分辨率可达：

$$\Delta\nu \approx 1 \text{ MHz}$$

对于固定激光波长 $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ ，其分辨率在频率为：

$$\delta\lambda = 8.3 \times 10^{-6} \text{ \AA}$$

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta\nu}{\nu} \quad \delta\lambda = \frac{\lambda}{\nu} \delta\nu = \frac{\lambda^2}{c} \delta\nu$$

对应的速度分辨率为：

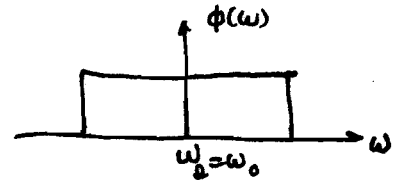
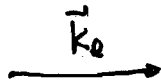
$$\delta v \approx 0.5 \text{ m/s}$$

这可用于测量室温下的原子或离子的热运动速度分布。

(室温下 Ar 原子的热运动速度为 350 m/s)

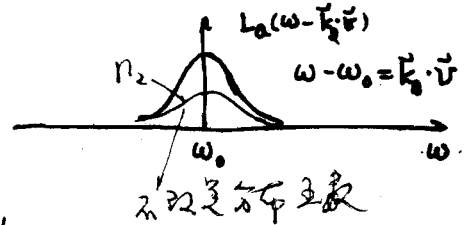
$$W(\vec{v}) = \frac{I_0}{\hbar \omega} \sigma_{12} \int d\omega \phi(\omega) L_a(\omega - \vec{k}_0 \cdot \vec{v})$$

$$n_2(\vec{v}) = \frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}} n_1 f(\vec{v})$$

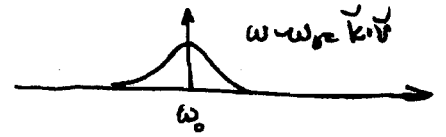
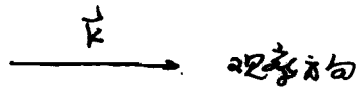


$$\Delta \omega_L \gg \Delta \omega_D$$

$$\Delta \omega_R \gg \Delta \omega_D$$



$W(\vec{v}) \approx \frac{I_0}{\hbar \omega} \frac{\sigma_{12}}{\Delta \omega_D}$ 在 \vec{k}_0 方向 有 速度 的 原子 被 激发 到 2 能级 上 的 几率 为 $\frac{W(\vec{v})}{W(\vec{v}) + A_{21}}$



与 吸收 谱 线 是 同 样 的：(1) 位于 谱 线，(2) 具有 定 向 性

相同：谱 线 宽 度 同，由 谱 线 的 半 宽 度 决 定



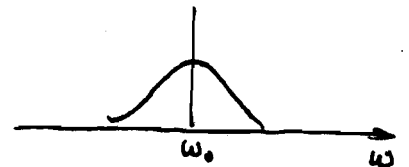
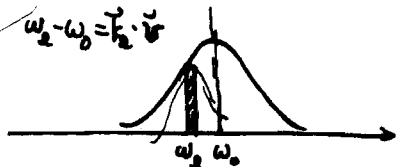
解 释 谱

$$\Delta \omega_L \ll \Delta \omega_R \sim \Delta \omega_D$$



$$\Delta \omega_L \ll \Delta \omega_D$$

在 速度 空间 中 有 在 \vec{k}_0 方向 上 的 原子 有 速度 为 $\omega_2 - \omega_0 = k_0 v_2$ 的 原子 才 能 被 激发 到 2 能级 上，但 在 \vec{v} 上 \vec{k}_0 方向 上 的 原子 有 速度 为 $\omega_2 - \omega_0$ 的 原子 才 能 被 激发 到 2 能级 上



这 时 观 察 的 谱 线 是 观 察 方 向 上 的 谱 线 的 半 宽 度

除 是 有 上 述 特 点 外，还 是 有 如 下 特 点：其 谱 线 宽 度 大 大 增 大 了，这 是 由 谱 线 的 半 宽 度 决 定