第二章 等离子体折射系数

§2.1 电磁波在等离子体中的传播

电磁波在等离子体中的传播已有很详尽的研究，有专著：金兹堡院士《电磁波在等离子体中的传播》（中译本），科学出版社，1978年。本节仅介绍其中的一些基本概念，以作为以后各章讨论的基础。

一、电磁波作为探针必须满足的条件：

1. 对等离子体不造成干扰： $\frac{eE}{m_e\omega} \ll v_t$
2. 能在等离子体中传播： 传播波，一般是交变波

二、冷等离子体波的色散关系　　波的相速度远大于粒子的热运动速度

冷等离子体近似，是忽略了带电粒子的热运动对电磁波传播特性的影响，只要电磁波速远高于热[redacted]度，这是相当好的近似。

一般色散关系可由麦克斯韦方程组和粒子运动方程联立求解而得到。

假设：① 电磁波频率远大于离子的回旋频率
② 等离子体是空间均匀的
③ 冷等离子体

$$\begin{cases} \nabla\times\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \\ \nabla\times\vec B = \mu_0\vec j + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec E}{\partial t} \end{cases}$$

$$\vec j = \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec E = e n_e\vec v$$

电导率张量，由运动方程求出

$$m_e\frac{\partial\vec v}{\partial t} = -e\vec E - e\vec v\times\vec B_0$$

联立后可得波动方程（$E \propto \exp[i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)]$）

$$\nabla\times(\nabla\times\vec E) + \mu_0\overleftrightarrow{\sigma}\frac{\partial\vec E}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec E}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec k\times(\vec k\times\vec E) + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\cdot\vec E = 0$$

其中 $\overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{I} + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\overleftrightarrow{\sigma}$　　等离子体介电张量

上述波动方程可改写为：

$$[\vec k\vec k - \underbrace{\vec k\cdot\vec k}_{k^2\overleftrightarrow{I}} + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}]\cdot\vec E = 0 \qquad \mu_0\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

这是 $\vec E$ 的三个分量的线性方程组，它有非零解的条件是其系数行列式的值等于零，即：

$$\det\left(\vec k\vec k - k^2\overleftrightarrow{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon}\right) = 0 \qquad n \equiv \frac{kc}{\omega}$$

上式的解决定波的色散关系，$k=f(\omega)$，称为矩阵方程的本征值。而与本征值相对应的矩阵方程 $\vec E$ 的解为本征向量，它决定波的偏振特性。

最简单的情况是当等离子体中无磁场时，它是各向同性和均匀的，这时 $m\frac{d\vec v}{dt} = -e\vec E \Rightarrow \vec v = \frac{ie\vec E}{m\omega}$ $\quad \sigma = i\frac{e^2 n_e}{m\omega}$

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \sigma\overleftrightarrow{I}, \qquad \overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{I}\left(1+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\sigma\right) = \varepsilon\overleftrightarrow{I} \qquad \varepsilon = 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

若 $\vec k = k\hat z$，则其系数行列式为：$\vec k \parallel \hat z$

$$\vec k\vec k - k^2\overleftrightarrow{I} + \frac{\omega^2}{c^2}\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{vmatrix} -k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

其解为：

$$-k^2+\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon = 0, \qquad E_x, E_y \neq 0 \qquad \text{为横波}$$

及

$$\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon = 0, \qquad E_z \neq 0 \qquad \text{纵波}$$

对于横波，有 $\varepsilon^{1/2} = \frac{kc}{\omega} = \mu$, $\mu \equiv \frac{k}{k_0} = \frac{kc}{\omega}$

纵波，有 $\varepsilon = 0$

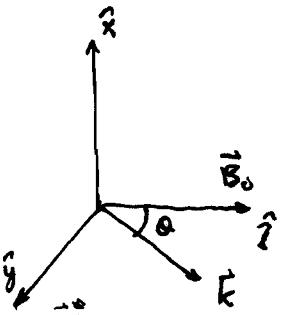
在本章我们不考虑 $\varepsilon = 0$ 的解。

当 $B_0 \neq 0$ 时，$\overleftrightarrow{\sigma}$ 及 $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ 不再是各向同性的，这时只要知道 $\overleftrightarrow{\sigma}$，我们就可以从上述波动方程的解得到电磁波在等离子体中的色散关系及偏振特性。

在冷等离子体近似条件下，我们可以从粒子运动方程求得粒子的运动速度 $\vec v$，再利用欧姆定律求得 $\overleftrightarrow{\sigma}$（$\vec j = -en_e\vec v = \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec E$）。

设入射电磁波为 $E_0\exp[i(\vec k\cdot\vec r-\omega t)]$，取 $\vec B_0 = B_0\hat z$，

$\boxed{\vec k = k\cdot(0,\sin\theta,\cos\theta)}$，$\theta$ 为 $\vec k$ 与 $\vec B_0$ 的夹角，



则运动方程

$$m_e\frac{\partial \vec v}{\partial t} = -e(\vec E+\vec v\times\vec B) \rightarrow \vec v_e = f(\vec E)$$

$$\rightarrow j = \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec E = en_e\vec v_e\hat y$$

$$\rightarrow \sigma \rightarrow \overleftrightarrow{\varepsilon} = \overleftrightarrow{I} + \frac{i}{\varepsilon_0\omega}\overleftrightarrow{\sigma}$$

的解为：

$$\vec v = \frac{-ie}{\omega m_e}\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\omega_{ce}^2/\omega^2} & -\frac{i\omega_{ce}/\omega}{1-\omega_{ce}^2/\omega^2} & 0 \\ \frac{i\omega_{ce}/\omega}{1-\omega_{ce}^2/\omega^2} & \frac{1}{1-\omega_{ce}^2/\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

由此及电流的定律 $\vec j = -en_e\vec v = \overleftrightarrow{\sigma}\cdot\vec E$ 可求得：

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{in_ee^2}{m_e\omega}\frac{1}{1-\omega_{ce}^2/\omega^2}\begin{pmatrix} 1 & -i\omega_{ce}/\omega & 0 \\ i\omega_{ce}/\omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\omega_{ce}^2/\omega^2 \end{pmatrix}$$

及

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1-\omega_{pe}^2/(\omega^2-\omega_{ce}^2) & \frac{i\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{\omega(\omega^2-\omega_{ce}^2)} & 0 \\ \frac{-i\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{\omega(\omega^2-\omega_{ce}^2)} & 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2-\omega_{ce}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{pmatrix}$$

令 $X \equiv \omega_{pe}^2/\omega^2$，$Y \equiv \omega_{ce}/\omega$，$\mu \equiv \frac{kc}{\omega}$

将它代入波动方程，可得电子数的列式方程为，

$$\begin{vmatrix} -\mu^2+1-\frac{X}{1-Y^2} & \frac{iXY}{1-Y^2} & 0 \\ -\frac{iXY}{1-Y^2} & -\mu^2\cos^2\theta+1-\frac{X}{1-Y^2} & \mu^2\sin\theta\cos\theta \\ 0 & \mu^2\sin\theta\cos\theta & -\mu^2\sin^2\theta+1-X \end{vmatrix} = 0$$

因在冷等离子体近似的条件下，它与 $\vec k$ 无关，因此上述色散方程是 μ^2 的二次方程式，其解可写成为：

$$\mu^2 = 1-\frac{X(1-X)}{1-X-\frac{1}{2}Y^2\sin^2\theta \pm\left[\left(\frac{1}{2}Y^2\sin^2\theta\right)^2+(1-X)^2Y^2\cos^2\theta\right]^{1/2}}$$

这被称为折射指数的 Appleton-Hartree 公式。

阿普尔顿-哈特里公式

平行传播：$\theta=0$，即 $\vec{k}\parallel\vec{B}_0$，则色散方程的解为

$$\mu^2 = 1-\frac{X}{1-Y^2} \pm \frac{XY}{1-Y^2} = 1-\frac{X}{1\pm Y}$$

其波的特征偏振为：

$$\frac{E_x}{E_y} = \pm i, \quad E_z = 0 \qquad \text{为左右旋波}$$

垂直传播：$\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\vec{k}\perp\vec{B}$，则色散方程的解为

$$\mu^2 = 1-X \qquad \text{或} \qquad \mu^2 = 1-\frac{X(1-X)}{1-X-Y^2}$$

其对应的波偏振为：

$E_x = E_y = 0$，$E_z \neq 0$，为线偏振波，寻常波

或 $\frac{E_x}{E_y} = -i\,\frac{1-X-Y^2}{XY}$，$E_z=0$，为椭圆偏振波，异常波

1. $B_0=0$：电磁波的本征传为：

$$\varepsilon = \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = \mu^2 = 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \simeq 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1-\frac{n_e}{n_c} \qquad \frac{E_x}{E_y}=\pm i,\ E_z=0$$

$$n_c \equiv \frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2}\omega^2 = 1.24\times10^{-2} f^2[\mathrm{Hz}] = 1.11\times10^{27}\left(\lambda[\mu m]\right)^{-2} \quad [m^{-3}]$$

为电磁波频率 $\omega=\omega_{pe}$ 时相对应的密度，称为截止密度

相速度：$v_p \equiv \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\mu} = \frac{c}{\sqrt{1-\omega_{pe}^2/\omega^2}} > c$

群速度：$v_g \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k} = c\mu = c\sqrt{1-\omega_{pe}^2/\omega^2} < c$

传播区：$\cancel{\omega/\omega_{pe}<1}$ $\quad \omega_{pe}/\omega < 1$

截止：$\omega = \omega_{pe} \qquad \omega \le \omega_{pe}$

$\mu = 0$，$v_p\to\infty$，$v_g \to 0$，$\lambda\to\infty$

2. $B_0 \neq 0$, $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ $\quad \vec{E} \perp \vec{B}_0 \quad \frac{E_x}{E_y} = \pm i,\ E_z = 0$

(Left) L: $$\mu_L^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 + \omega_{ce}/\omega} - \cancel{\frac{\omega_{pi}^2/\omega^2}{1 - \omega_{ci}/\omega}} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}$$

(Right) R: $$\mu_R^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \omega_{ce}/\omega} - \cancel{\frac{\omega_{pi}^2/\omega^2}{1 + \omega_{ci}/\omega}} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}$$

截止區， $\mu_L^2, \mu_R^2 \le 0$

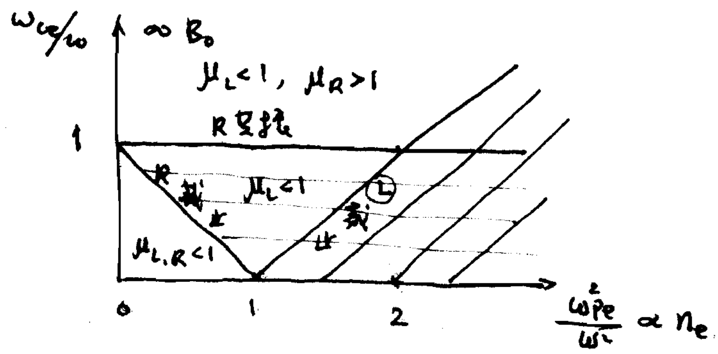
Ⓛ $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}$ $\qquad$ Ⓡ $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}$

共振： $\mu_{L,R} \to \infty$ $\quad$ ($\lambda, v_p \to 0$, $v_g \to 0$ 吸收)

Ⓛ $\omega = \omega_{ci}$, $\qquad$ Ⓡ $\omega = \omega_{ce}$

傳播區：

L: $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}$ $\qquad$ R: $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega}$ 及 $\frac{\omega_{ce}}{\omega} > 1$



3. $B_0 \neq 0$, $\vec{k} \perp \vec{B}_0$

Ordinary O: $(\vec{E} \parallel \vec{B}_0)$ $$\mu_O^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \simeq 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c}$$ $\cancel{\vec{E} \parallel \vec{B}_0}$

Extraordinary X: $(\vec{E} \perp \vec{B}_0)$ $$\mu_X^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\,\frac{1 - \omega_{pe}^2/\omega^2}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}} = \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_H^2)} = \frac{\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^2 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}}{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}}$$

其中 $$\omega_L \equiv -\frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2\right)^{1/2}$$ 左旋波

O: $E_x = E_y = 0$ $\quad E_z \neq 0$ $\quad$ ($E_z \parallel B_0$)

X: $\frac{E_x}{E_y} = -i\,\frac{1 - X - Y^2}{XY}$ $\quad E_z = 0$

$$\omega_R \equiv \frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2\right)^{1/2} \qquad \text{右旋波}$$

$$\omega_H^2 \equiv \omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 \qquad \text{高混杂共振频率}$$

传播区：

O波： $\omega < \omega_{pe}$

X波： $\dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 - \dfrac{\omega_{ce}}{\omega}$

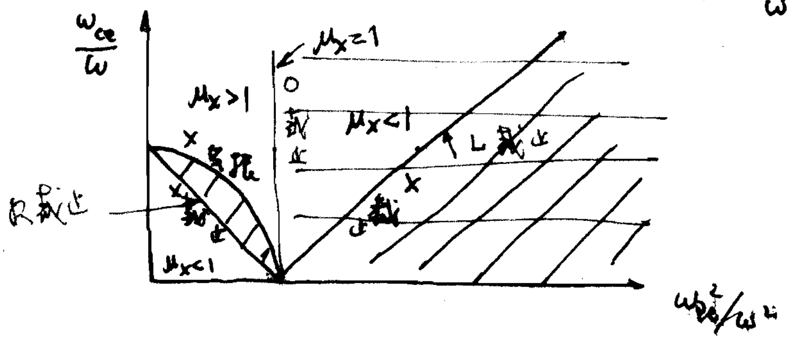
$$1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} < \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < 1 + \frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

截止：

① $\dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \geq 1 + \dfrac{\omega_{ce}}{\omega}$

②

$$1 - \frac{\omega_{ce}}{\omega} \leq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \leq 1 - \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}$$



$\lambda \ll L_n, L_B$ 均匀分布，色散关系由局域值决定

三、诊断应用： $\dfrac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1$，即 $\dfrac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$ WKB近似，几何光学近似

1. 干涉法：

选取寻常波 $\mu \simeq \left(1 - \dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \simeq 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$ （当 $\dfrac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \ll 1$ 时）

$= 1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{n_e}{n_c}$ $\quad \omega^2 \equiv \omega_{pe}^2 = \dfrac{e^2 n_c}{\varepsilon_0 m_e}$

等离子体引起的相位的变化：

$$\Phi_p = \underbrace{\int \Delta k \, dl}_{\int (k_0 - k)\,dl} = \int \frac{\omega}{c}(1-\mu)\, dx \simeq r_e \lambda \int n_e \, dl$$

其中 $r_e \equiv \dfrac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e c^2} = 2.82\times10^{-15}\,\text{m}$ 电子经典半径

λ 为真空中波长

$$n_c = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = 1.24\times10^{-2} f^2[\text{Hz}] = 1.11\times10^{15} \lambda^{-2}[\text{m}] \quad [\text{m}^{-3}]$$

2. 法拉第旋转： $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$

$$\mu_L \simeq \left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

$$\mu_R \simeq \left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

这表明左、右旋波在等离子体中传播的相速度不同，这将引起入射线偏振波在等离子体传播时偏振方向发生旋转（亦称法拉第旋转），其转角为：

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\int \frac{\mu_L-\mu_R}{2}\,dl = \int \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{2\omega^2 c}\,dl \propto \int B_0 n_e\,dl$$

3. 反射计： $\vec{k} \perp \vec{B}_0$

O波： $\mu_0 = 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 0$

X波： $\mu_X = \frac{(\omega^2-\omega_R^2)(\omega^2-\omega_L^2)}{\omega^2(\omega^2-\omega_H^2)} = 0$ 通常选右旋波截止

$$\omega_R = \frac{\omega_{ce}}{2} + \left(\frac{\omega_{ce}^2}{4}+\omega_{pe}^2\right)^{1/2}$$ 与B有关

WKB近似，程函近似 eikonal approximation 几何光学近似

$$\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1 \quad 或 \quad \frac{\lambda}{2\pi}\frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$$

▲ 双折射效应

$$\mu_O \simeq \left[1-\omega_{pe}^2/\omega^2\right]^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$$

$$\mu_X = \left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)\left(1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)^{-1}\right]^{1/2}$$

$$\simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)$$

$$\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1, \quad \frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1 \qquad 二④$$

§2.2 电子密度的测量 寻常波的色散关系简单，其折射指数仅与电子密度有关

在光学中，介质的折射系数最常用干涉仪测量，它是测量一定厚度的介质插入干涉仪中所引入的附加光程差或附加的相位变化。等离子体也是一种介质，类似地，在等离子体诊断中，也可用干涉法测量等离子体的折射系数。由于寻常波的折射系数简单地与等离子体电子密度有关，即：

$$\mu = \epsilon_r^{1/2} = \left(1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = \left(1-\frac{n_e}{n_c}\right)^{1/2} \xrightarrow[\omega_{pe}^2 \ll \omega^2]{n_e \ll n_c} \mu \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{n_e}{n_c}$$

其中 $n_c = \dfrac{\epsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = 1.24\times10^{-2} f^2[Hz] = 1.11\times10^{15}\lambda^{-2}[m]$ $[m^{-3}]$ 是临界电子密度

从其折射系数的测量可以直接导出电子密度，因而常用寻常波做为干涉仪的探测束。

一、干涉仪

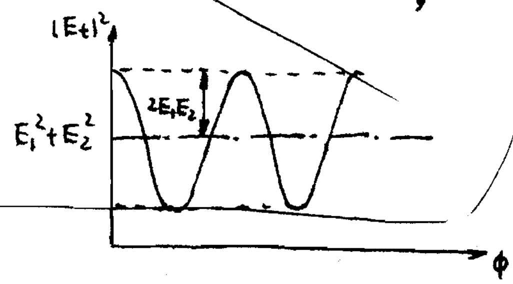
我们熟知，干涉仪是用电场相干叠加的方法使两束或两束以上的光形成干涉，其输出光强因相长干涉或相消干涉（即同相位或反相位）而被调制。例如，一个简单的双束干涉仪中，两束相位差为 ϕ 的单色光的电场，即 $E_1 \exp(i\omega t)$ 和 $E_2 \exp(i\omega t + i\phi)$ 相加，他们的总电场为：

$$E_t = [E_1 + E_2 \exp(i\phi)]\exp(i\omega t)$$

平方律探测器所探测的功率是与 $|E_t|^2$ 成正比的，即

$$|E_t|^2 = [E_1^2+E_2^2]\left[1+\frac{2E_1E_2}{E_1^2+E_2^2}\cos\phi\right]$$

由此可见，输出光强除了有一个直流分量外，还有一个随余弦函数变化的调制分量，如下图所示。

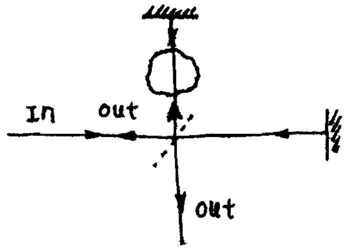


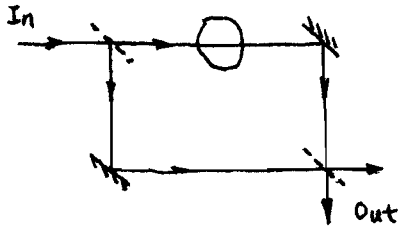
各种不同用途的干涉仪有许多种，但在等离子体诊断中最常用的有以下两种：

在等离子体诊断中常用的干涉仪有以下两种

1. 迈克尔逊干涉仪

它是双束干涉仪，它有两臂和两个输出，但光在两臂中均沿两个方向传播，且其一个输出沿入射光路回到光源。在折射率被测量的情况下，干涉仪中任一臂上折射率的变化，都会在任一输出端中的两个分量间产生相位差。





2. 马赫-珍德干涉仪

它也是双束干涉仪，但它与迈克尔逊干涉仪不同的是，光束在两臂中都只沿一个方向传播，而且两个输出都与输入分开。同样地，它也是通过改变一臂中的折射率来改变相位的。

上述两个干涉仪中的部件，如干涉臂可以是自由空间传播的直线光径，也可以是微波波导；而分束片可以是某种光学部分反射镜，或是某种微波耦合口，但它们的功能都是相同的。

当用干涉仪测量等离子体电子密度时，是把等离子体放在干涉仪中的一臂，并测量等离子体所引入的相位变化（即比较有和没有等离子体时两臂的相位差），即：

$$\phi_p = \int (k_{plasma} - k_0)\, dl$$

$$\cancel{\phi_p = \int (k_0 - k_{plasma})\, dl}$$

$$= -\int (1-\mu)\frac{\omega}{c}\, dl = -\frac{\omega}{c}\int \left[1-\left(1-\frac{n_e}{n_c}\right)^{1/2}\right] dl$$

如果等离子体密度足够低（即入射波频率足够高），使得 $n_e \ll n_c$，则 μ 可近似表示为：

$$\mu \simeq 1 - \frac{1}{2}\frac{n_e}{n_c} - \frac{1}{8}\left(\frac{n_e}{n_c}\right)^2 - \frac{3}{48}\left(\frac{n_e}{n_c}\right)^3$$

$$\omega^2 \equiv \omega_{pe}^2 \equiv \frac{e^2 n_c}{\varepsilon_0 m_e}$$

$n_c = 1.11\times10^{15}\,\lambda^{-2}[m]\ \ [m^{-3}]$

$\quad = 1.11\times10^{27}\,\lambda^{-2}[\mu m]\ \ [m^{-3}]$

则相位移就可以简化为

$$\phi_p \doteq -\frac{\omega}{c}\int \frac{n_e}{2n_c}\,dl = -r_e\lambda\int n_e\,dl$$

其中

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = 2.82\times10^{-15}\ \text{m}$$ 为电子经典半径

即干涉仪输出的相位移与线积分密度成正比。

二、相位移的测定：　　　也 $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$

由前述可知，干涉仪的输出光强是两束相干光的电场相干叠加所形成的，由于干涉效应，其输出光强将因相长干涉或相消干涉（即同相位或反相位）而被调制。测量光强随~~相位~~两束相干光相位差变化的规律就可以测定相位移 ϕ_p。例如，干涉仪中两臂的光电场分别为：

$$E_1(t) = E_{10}\exp(i\omega t)$$

$$E_2(t)\exp(i\phi) = E_{20}\exp(i\omega t + i\phi)$$

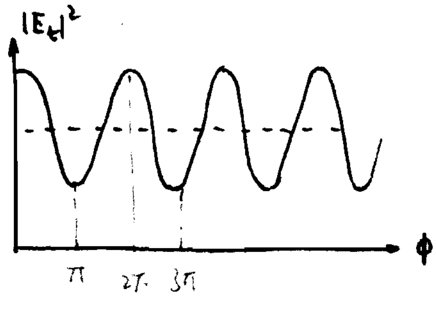
则它们的总电场为：

$$E_t(t) = E_1(t) + E_2(t)\exp(i\phi) = [E_{10} + E_{20}\exp(i\phi)]\exp[i\omega t]$$

平方律探测器的探测的功率是与 $|E_t|^2$ 成正比的，即

$$I \propto |E_t|^2 = [E_{10}^2 + E_{20}^2]\left[1 + \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}\cos\phi\right]$$

由此可见，输出光强除了有一个直流分量外，还有一个随余弦函数变化的调制分量，如右图所示。测量调制分量随相位的变化，就可以测定相位差。我们定义干涉条纹的反差（或对比度）为



$$p \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}$$

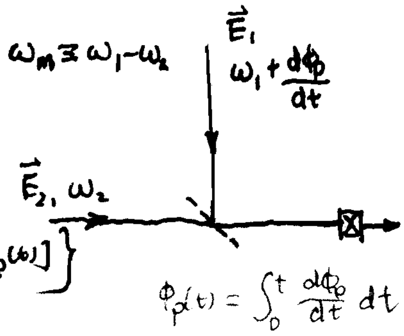
则

$$I \propto |E_t|^2 = [E_{10}^2 + E_{20}^2](1 + p\cos\phi)$$

在理想的情况下，它决定了相位测量的最大信噪比。

$\phi_p = r_e \lambda \int n_e \, dl \qquad \phi_p(t) = r_e \lambda \int n_e(t) \, dl$

入射至探测器上的光强



$$I \propto |\vec{E}_t|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$$

$$|\vec{E}_t|^2 = [E_{10}^2 + E_{20}^2]\left\{1 + \frac{2\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}\cos[\omega_m t + \phi_p(t)]\right\}$$

其中第二项为干涉项，干涉条纹的对比度为：

$$p \equiv \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}$$

由此可见：1. 当 $E_{10} = E_{20}$ 及 $\vec{E}_{10} \parallel \vec{E}_{20}$ 时，对比度 $p = 1$ 达极大值。

2. 当 $\omega_m = 0$ 时，为简单干涉仪（零差干涉仪）
   ϕ_p 的测量依赖于条纹的幅度，
   难以判断密度变化的方向
3. 当 $\omega_m \neq 0$ 时，为外差干涉仪
   ϕ_p 的测量不依赖于条纹的幅度
   可以很方便地判断密度的变化方向
4. 当 $\vec{E}_{10}$ 的偏振方向发生变化时，它对外差干涉仪的相位移的测量没有影响
5. 当等离子体密度随时间变化时，它等效于对入射电磁波的相位（频率）调制，使入射波的频率产生瞬间变化 $\omega_1 + \frac{d\phi_p}{dt}(t)$

一、干涉仪

二、相位测量

三、相位调制方法（ω_m 的选择）

(11)

1C 附

$$E_t^2 = \overline{\left[\ E_{10}\cos\omega_1 t + E_{20}\cos(\omega_2 t + \phi_p)\right]^2}$$

$$= E_{10}^2 \cos^2\omega_1 t + E_{20}^2 \cos^2(\omega_2 t + \phi_p) + 2E_{10}E_{20}\cos\omega_1 t\cos(\omega_2 t + \phi_p)$$

$$= \frac{1}{2}E_{10}^2\left(1 + \overline{\cos 2\omega_1 t}\right) + \frac{1}{2}E_{20}^2\left[1 + \overline{\cos 2(\omega_2 t + \phi_p)}\right]$$

$$+ E_{10}E_{20}\overline{\left\{\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_p] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + \phi_p]\right\}}$$

$$= \frac{1}{2}(E_{10}^2 + E_{20}^2)\left\{1 + \frac{2E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_p]\right\}$$

$$E_t^2 = \overline{\left[E_{10}e^{i\omega_1 t} + E_{20}e^{i\omega_2 t + i\phi_p}\right]\left[E_{10}e^{-i\omega_1 t} + E_{20}e^{-i\omega_2 t - \phi_p}\right]}$$

$$= E_{10}^2 + E_{20}^2 + E_{10}E_{20}\left[e^{i(\omega_2 - \omega_1)t + i\phi_p} + e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t - i\phi_p}\right]$$

$$= (E_{10}^2 + E_{20}^2)\left\{1 + 2\frac{E_{10}E_{20}}{E_{10}^2 + E_{20}^2}\cos[(\omega_2 - \omega_1)t + \phi_p]\right\}$$

$$\vec{E}_{10}\cdot\vec{E}_{20}$$

$$\mu = \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right]^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{1}{8}\frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} - \cdots$$

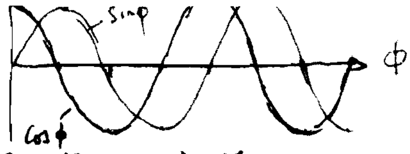
$$= 1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{n_e}{n_c}$$

$$n_c = \frac{\varepsilon_0 m_e \omega^2}{e^2} = 1.24\times10^{-2} f^2\,[\mathrm{Hz}] = 1.11\times10^{15}\lambda^{-2}\,[\mathrm{m}]$$

$$= 1.11\times10^{27}\lambda^{-2}\,[\mu\mathrm{m}] \qquad [\mathrm{m}^{-3}]$$

零拍 外差

Homodyne Heterodyne

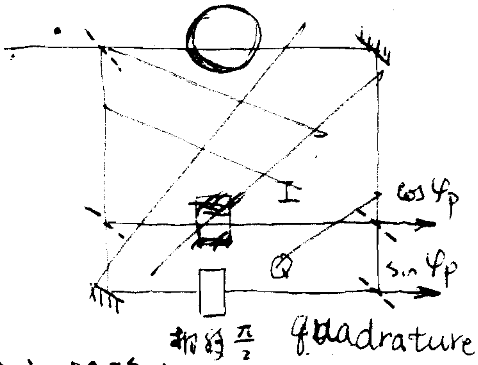


上是由两个简单干涉仪组成，两干涉仪的路径相同，但它们的相位差为$\frac{\pi}{2}$，仅有等离子体时，它们输出的调制分量分别为$\cos\phi$和$\sin\phi$。其原理很简单，因余弦函数$\cos\phi$相位灵敏度的零点是$0, \pi, 2\pi, \cdots$等等，而正弦函数的相位灵敏度的零点是$\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \cdots$等等，它们的零点相差$\frac{\pi}{2}$，它们可以互补，即在余弦函数相位灵敏度零点处，可利用正弦函数判断相位变化方向；反之，在正弦函数相位灵敏度零点处，可利用余弦函数判断相位变化方向。利用这类干涉仪的这种特点，我们可以正确地判断相位的变化方向。此时，我们也可以按如下的方式理解：假定两个干涉仪的输出信号的调制分量分别为：

$$V_1 = A\cos\phi \quad , \qquad V_2 = A\sin\phi$$

经简单运算后有：

$$V_1\frac{dV_2}{dt} = A^2\cos^2\phi\,\frac{d\phi}{dt}$$



~~或者有 $V_1 = A\cos\phi$ 或 $V_2 = A\sin\phi$~~

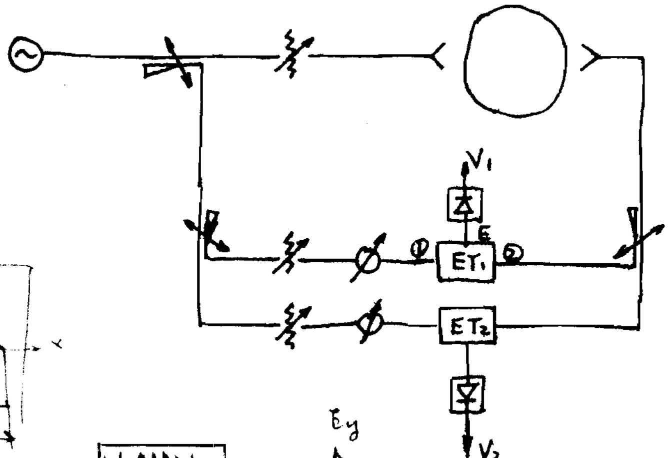
$$\cancel{V_2\frac{dV_1}{dt} = A^2\cos^2\phi\,\frac{d\phi}{dt}}$$

由此可见：

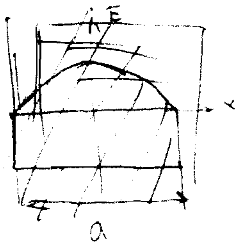
① 从V_1或V_2的干涉信号可以求出等离子体产生的相移ϕ

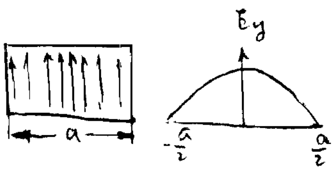
② 从$V_1\frac{dV_2}{dt}$的符号可以判断ϕ的变化方向。这是因为$A^2\cos^2\phi > 0$，$V_1\frac{dV_2}{dt}$和$\frac{d\phi}{dt}$是同号的。

在微波波段，这种正交相位干涉仪可按下面安排：　　$H_{10} = TM_{10}$



E-T接头的功能：当两个同频、等功率的H_{10}波从1、2端输入时，E端的输出功率为零；当两个H_{10}波的输入相位差为$\frac{\pi}{2}$时，而功率相同时，E端的输出为两波功率之和。



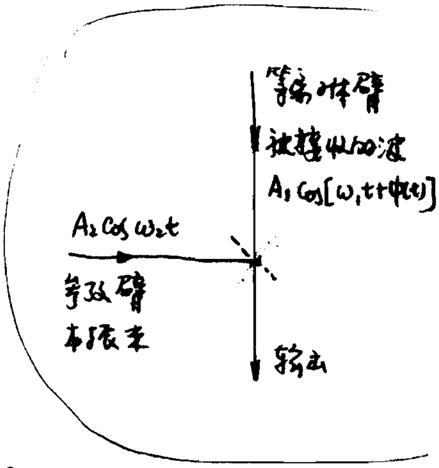


这种干涉仪虽然克服了相位变化方向不确定性的问题，但是其相位测量精度仍受干涉仪中两臂光路变化的影响，而且光路复杂，现在已很少采用了。

解决上述两个问题最彻底的方法是调制干涉仪的相位，这是一种使干涉仪交替地读出相位移的余弦和正弦函数的方法。如果其读出速度远快于φ的变化的话，则相位移φ就可以确切地确定。

因为波的频率就是波的相位的时间变化率。因此，相位的变化可以等效于频率的变化。这样，用频率来考虑相位探测问题及其解决办法——相位调制，就十分容易理解。下面我们将会看到，这实际上就是调频波（FM）探测问题，这在无线电接收和其它类似领域中是普遍的问题。

现在考虑如图所示的干涉仪输出部分。两束分别来自等离子体臂和参考臂的波在分束片上相叠加，并在输出端用平方律探测器探测其功率。来自等离子体的波束，因折射率变化而被相位调制，即频率调制，这是被接收的波；而来自参考臂的波可用做本振束，探测器可视为混频器，它的输出信号中包含了两束波的和频及差频信号：



$$
\begin{aligned}
V &\propto \overline{[A_1\cos(\omega_1 t+\phi)+A_2\cos\omega_2 t]^2} \\
&= \frac{A_1^2}{2}+\frac{A_2^2}{2}+2A_1A_2\overline{\cos(\omega_1 t+\phi)\cos\omega_2 t} \\
&= \frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2)+\overline{A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\phi]}+\overline{A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi]} \\
&= \frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2)+A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi] \qquad \int\left[\Delta\omega_0+\frac{d\phi}{dt}\right]dt
\end{aligned}
$$

对于简单干涉仪，因为 $\omega_1=\omega_2$，所以它们的初始（没有等离子体时）频差为零，即 $\Delta\omega_0=0$；当有等离子体且密度变化时，它引起相位变化，因而 $\frac{d\phi}{dt}\neq 0$，故其输出频差 $\Delta\omega\neq 0$。但由于在这种情况下，与无线电接收中的零拍（Homodyne）探测方法相类似，干涉仪的输出只能给出频差的绝对值，我们不能从输出信号辨别出 $\Delta\phi$ 是正还是负值，从而无法辨认相位的变化方向。

Homodyne　　Heterodyne

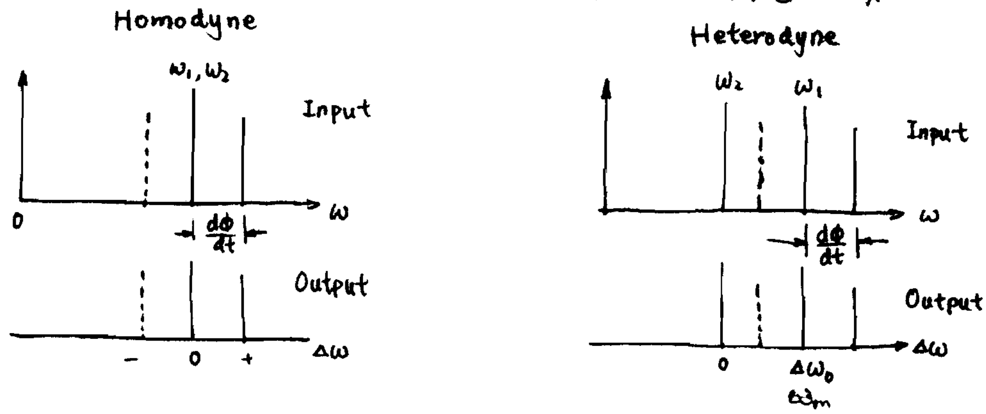
$\Delta\omega_0=|\omega_1-\omega_2|=\omega_m\neq0$

现在，若在简单的干涉仪中（任一臂），引入了一个额外的（除了等离子体效应之外）相位调制，使在没有等离子体时，干涉仪输出的初始频差不等于零，即 $\Delta\omega_0=|\omega_1-\omega_2|\neq0$。为简单计，我们令 $\Delta\omega_0$ 为常数。当有等离子体时，相位变化将产生附加的频率调制，则输出信号频差变为：

$$\Delta\omega = \overset{\omega_m}{\Delta\omega_0} + \frac{d\phi}{dt}$$

由此可见，干涉仪输出的差频信号频率，会随等离子体相位变化方向的不同而增大或减小，这样相位探测中的不确定性就不复存在了。与无线电接收机相类似，我们称这类干涉仪为外差干涉仪。

零拍和外差（Heterodyne）接收中的频率关系可用下图说明：

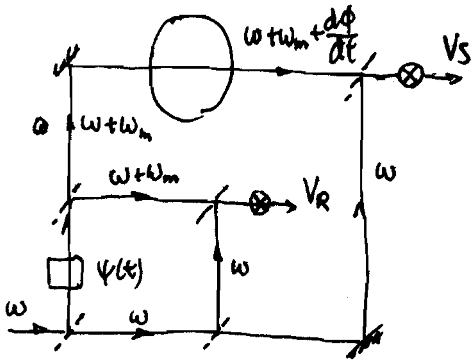


从上图可以看出，在外差干涉仪中，从输出频率相对于初始差频（即 $\Delta\omega_0$，亦称中频 IF）的位置，可以判别 $\frac{d\phi}{dt}$ 的正负值，即相位的变化方向。

总之，这类外差干涉仪有以下的优点：① 可以判别相位的变化方向；② 不需要探测直流信号幅度，所有探测电路都可以是AC耦合的；③ 相位测量不再受信号幅度变化的影响了。这样，就从根本上解决了上述的相位探测的两个问题了，因而这类外差干涉仪在等离子体诊断中应用得十分广泛。下面我们将讲述产生相位调制的各种方法及其探测方法。

外差干涉仪中相移的检测通常是用相位比较器自动完成的。因为外差干涉仪提供两个输出信号，一个是参考信号

$$V_R = A_R \cos \omega_m t$$



另一个是探测信号

$$V_s = A_s \cos(\omega_m t + \phi_p)$$

它们都输入到相位比较器中，相位比较器在每个中频信号周期 $T_m = f_m^{-1}$ 内测量它们正向通过零点的时间差，由这个时间差的测量就可以导出等离子体产生的相移。设两信号的正向过零时间分别为

$$\omega_m t_R = 2\pi m_R + \frac{3\pi}{2}$$

$$\omega_m t_s + \phi_p = 2\pi m_s + \frac{3\pi}{2}$$

其中 m_R、m_s 均为正整数，则由此可求得：

$$\phi_p = \omega_m (t_R - t_s) + 2\pi (m_s - m_R)$$

当相位差 $\phi_p < 2\pi$ 时，$m_s = m_R$，则有

$$\phi_p = \omega_m (t_R - t_s) = 2\pi \frac{t_R - t_s}{T_m}$$

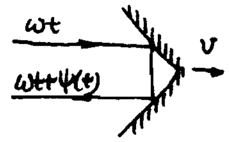
由此可见，ϕ_p 的测量与信号的幅度无关，它可以从简单的时间测量中获得，而且时间测量有较高的精度。由于相位移是在每个中频周期内测量一次，因而 T_m 决定了相移测量的时间分辨率。此外，还可以从时间差的符号确定测量时刻相位的变化方向。

三、相位调制方法

可以产生相位调制或频移的方法很多，它们与干涉仪所使用的辐射源的频率有关。最常用的方法有以下几种：

三、1. 运动反射镜——多普勒效应

它是最简单的相位调制方法之一，它是让干涉仪中任一臂的光束射向运动方向与束方向平行的运动反射镜，再从它反射回来（如图所示）。在这种情况下，如果反射镜在平行于束方向上的速度分量为 v，则反射束与入射束之间的光程差为 $2vt$，则它所产生的相位移为：



$$\psi(t) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2vt = 2\pi\frac{t}{T_m} = \omega_m t$$

其中 $T_m \equiv \dfrac{\lambda}{2v}$ ， $f_m \equiv \dfrac{1}{T_m} = \dfrac{2v}{\lambda}$

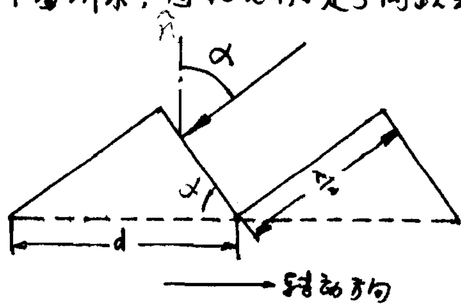
由此可见：为了达到相同的分辨时间（它是由频移 f_m 决定的），对于波长较短的辐射源，反射镜的运动速度可较低。因此，这种相位调制方法多用于可见光或中、近红外激光干涉仪中。对于远红外激光干涉仪，由于其波长较长，为了达到相同的时间分辨能力，要求反射镜的运动速度较高，这样当等离子体存在时间较长时（如 1 秒），就要求反射镜的运动距离较长。例如，对于 HCN 激光干涉仪，$\lambda = 337\mu m$，若要求时间分辨为 $10^{-4}s$，则

$$v = \frac{\lambda}{2\tau} = 1.7m/s$$

若等离子体存在时间为 1s，这就要求反射镜的运动距离为 1.7m，这太长了，在实践中很难实现。为了克服这种困难，可以利用振动反射镜，但所得结果较为复杂，一般较少应用。

2. 转动圆柱光栅——多普勒效应

它也是利用多普勒效应产生频移的。如下图所示，圆柱光栅是闪耀光栅，它的刻槽平行于转轴，其闪耀角为 α，槽面间的垂直距离为 $\frac{\lambda}{2}$（以保证在不同槽面上反射的光束都具有相同的相位）。其光栅常数为 $d = \lambda/(2\sin\alpha)$。$\lambda$



射光束经聚焦后射在光栅表面上。如果圆柱半径足够大，使得光栅曲率可忽略，则可以近似地认为整个光束是以闪烁角 α 入射在光栅表面上（即垂直于刻槽表面入射）。则当光栅旋转时，衍射光束将受到一多普勒频移：

$$f_m = \frac{2v}{\lambda} = 2\ \frac{2\pi R n \sin\alpha}{\lambda} = \frac{2\pi R n}{d} = Nn$$

其中　$v = 2\pi R n \sin\alpha$　为光栅运动的线速度在入射光束方向上的分量

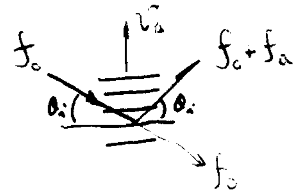
$N = 2\pi R/d = \frac{4\pi R \sin\alpha}{\lambda}$　为光栅总刻槽数

n　为光栅转速

例如，对于 HCN 激光器，$\lambda = 3.37\times10^{-4}\,m$，$R = 6\times10^{-2}\,m$，$\alpha = 54°$，$N = 1800$，若分辨时间 $\tau = f_m^{-1} = 10^{-4}\,s$，则 $n = 5.56$ 转/s，这样的转速是很容易实现的。当然，光栅转速还可以很容易地提高一个量级，则其分辨时间就可以达 $10\,\mu s$。这就是说，对于给定的光栅，只要改变光栅的转速，就可以很方便地改变频移 f_m 值。这种方法最常用于远红外和亚毫米波波段。

3. 声光调制—多普勒效应

声波是一种纵向机械应力波，它在介质中传播时，会引起介质密度呈疏密交替的变化。介质密度的变化，在一级近似下，可引起与之成正比的折射率的改变，因而声波也可表示为：



μ 大，反射大

$$\tilde{\mu}(x,t) = \tilde{\mu}_0 \cos(\omega_a t - k_a x)\ ,\quad v_a = \frac{\omega_a}{k_a}$$

若有一束光以角度 θ_i 入射在声波波阵面上，对该光束而言，声波可看成是一系列部分反射镜，其间距为声波波长 λ_a，且其速度运动为 v_a。这是因为在声波压缩处的折射率较高，在稀疏处折射率较低，因折射率的改变会引起反射，因而可将其视为反射镜面。由于声波的周期性质，其作用类似于间距为 λ_a 的晶面的规则排列，则当光束的入射角满足如下的布喇格条件时，

$$2\lambda_a \sin\theta_i = \frac{\lambda_0}{\mu}$$　（动量守恒）　$\vec{k}_d = \vec{k}_0 + \vec{k}_a$

$f_d = f \pm f_a$ 计算方程

则在镜反射的方向上将产生一级衍射光。因声"晶格"以速度 V_a 运动，因而该一级衍射光的频率相对于入射频率 f 有了频移 $\pm f_a = \pm V_a/\lambda_a$。这样，一光束通过声光介质后，由于声光衍射会产生空间上分离的、具有一定频差的两束光，利用这两束光分别作信号光束和参考光束，就可组成外差干涉仪。

此外，理论计算表明，在严格的布喇格角入射条件下，声光衍射效率为：

$$\eta = \frac{I_d}{I_0} = \sin^2\left[\frac{\pi}{\lambda_0}\sqrt{\frac{MLP_a}{2H}}\right]$$

其中　M 为介质的声光优值，它与介质的折射率、光电弹性系数、密度及介质中的声速有关

P_a 为超声功率

L、H 为超声换能器的长度和宽度

当 $\eta < 50\%$ 时，上式可近似地表示为

$$\eta \simeq \frac{\pi^2 MLP_a}{2H\lambda_0^2}$$

由此可见，声光衍射效率与光波的波长 λ_0 的平方成反比，因而它只适用于可见光和近、中红外激光。这种方法产生频移的优点是：容易获得较高的频移（约几十 MHz 量级），使干涉仪的时间分辨率高。

4. 双相干辐射源法：

这就是简单地利用略有频差 f_m 的两个相干辐射源，这种方法对源的频率稳定性提出了十分严格的要求，这因为 f_m/f 通常是十分小的。然而，实际上这是可以解决的。　激光腔共振条件：$\nu = q\frac{c}{2\mu L\cos\theta}$

当用激光器做辐射源时可利用激光谐振腔的纵模频率与腔长有关的特点，即在谐振腔的增益带宽范围内，腔长的微小变化可引起谐振频率产生相应的变化：

$$f_m = f_0\frac{\Delta l}{L}$$

其中 f_0 为腔长为 L 时的谐振频率。若有两个激光器，除了它们的腔长有微小偏差 Δl 外，其它参数完全相同，则它们的输出频率之差为 $f_m = f_0\frac{\Delta l}{L}$。对于远红外激光器，

为获得 $f_m = 1\,\mathrm{MHz}$ 的频移所需的腔长偏调量 Δl 是可以实现的。如最早应用双激光器的外差干涉仪是用 CO_2 激光泵浦的甲醇(CH_3OH)远红外激光器(远红外激光器：是极性分子气体通过吸收 CO_2 辐射光子，从它的基态转动能级跃迁到上转动能级的某一个振动能级，然后通过邻近的振动能级间的跃迁发生激光作用，而发出相干的远红外辐射，最后通过弛豫过程而回到基态)，它的波长为 $\lambda = 118.8\,\mu m$，$f_0 = 2.5\times10^{12}\,\mathrm{Hz}$，其腔长在 1m 量级，则

$$|f_m/\Delta l| \simeq 2.5\,\mathrm{MHz}/\mu m$$

若用精密的螺旋测微计调激光腔长，其可调的最小位移是 $0.025\,\mu m$，因而要达到 1MHz 量级的频移是可以实现的。由于用这种方法获得的频移稳定性，主要取决于激光器频率的相对稳定性，在没有稳频措施时，频移的短期稳定性可达 2%，长期稳定性可达 10%，因此在频移稳定性要求较高的场合中，需要采取稳频措施。用这种双激光器的干涉仪的最大优点是：频移可很容易地达到 1MHz，使干涉仪具有较高的时间分辨率，能测量电子密度的快速变化。

在微波和毫米波波段，也可以利用两个具有一定频差的微波源做辐射源。因为微波源大多都可用机械和电调谐的方法，使源频率可在较大的范围内调谐，因而可以很容易地把两个微波源的频差调至所需要的频率。一般讲，当频移高达几十MHz时，无需采取稳频措施，仍可保证具有一定的差频稳定性，而且相位噪声也可较小。当差频在1~10MHz量级时，为保证相位噪声较小，一般需用自动频率控制(AFC)电路来稳定两源的频差。

5. 扫频干涉仪

这是利用微波源可方便地电调谐的特点。其具体做法是：用一锯齿波信号调制微波源的频率，使其输出频率产生周期性的线性变化，然后利用长波导的色散特性，把频率调制转变为相位调制，从而产生一固定的频移 f_m。

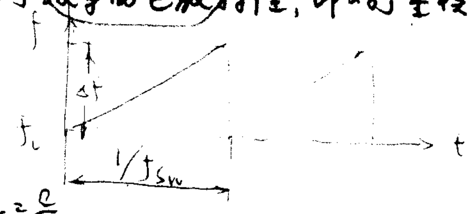
设微波源被一锯齿波信号调制，使其输出近似为线性变化的调频信号

$$f(t) = f_0 + \Delta f\, f_{sw}\, t \qquad 0 \le t \le \frac{1}{f_{sw}}$$

$$f(t+\tau) = f_0 + \Delta f\, f_{sw}\,(t+\tau)$$

$$f(t+\tau) - f(t) = \tau\Delta f\, f_{sw} = n f_{sw} \qquad n \equiv \Delta f\,\tau$$

其中 Δf 为调频宽度，f_{sw} 为扫描频率。由于波导的色散特性，即对于基模波导，在其中传播的电磁波波长为



$$\lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{\lambda}{\lambda_c})^2}} = \frac{c}{\sqrt{f^2-f_c^2}} \qquad f_c = \frac{c}{\lambda_c}$$

其中 $\lambda_c = 2a$（a为波导宽边边长）为截止波长，f_c为相应的截止频率；因而波导波长是与频率有关的。这样，上述的流频率调制，在波导中就变为相应的相位调制，即

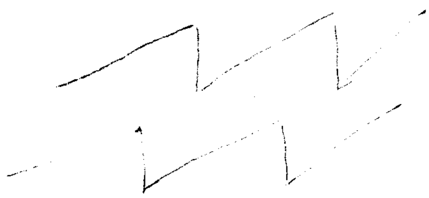
$$\phi(t) = \frac{2\pi}{\lambda_g} L = \frac{2\pi L}{c}\sqrt{f^2(t)-f_c^2} \qquad f(t) = f_0 + \Delta f f_{sw} t$$

L为波导长度。由于 $\Delta f \ll f_0$（一般 Δf 为几百 kHz～几十MHz），上式可近似地表示为

$$\phi(t) \simeq \frac{2\pi L}{c}\left[f_0^2-f_c^2+2f_0\Delta f f_{sw} t\right]^{1/2}$$

$$\simeq \frac{2\pi L}{c}\sqrt{f_0^2-f_c^2}\left(1+\frac{f_0 f_{sw}\Delta f}{f_0^2-f_c^2}t\right)$$

$$= \frac{2\pi L}{\lambda_{g0}} + \frac{L}{\lambda_0}\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0}\frac{\Delta f}{f_0}\Omega t$$

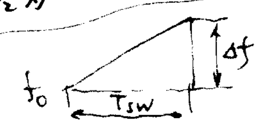


其中

$$\lambda_{g0} = \frac{c}{\sqrt{f_0^2-f_c^2}}, \quad \lambda_0 = \frac{c}{f_0}, \quad \Omega = 2\pi f_{sw}$$

如果两臂波导的长度差为 $\mathcal{L}$，则两臂固有的相位差为

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi\mathcal{L}}{\lambda_{g0}} + \frac{\mathcal{L}}{\lambda_0}\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0}\frac{\Delta f}{f_0}\Omega t$$



$$f_m = \frac{df}{dt}\frac{L}{v_p} = \frac{\Delta f}{T_{sw}}\frac{L}{c} = \frac{\Delta f\, L}{T_{sw} f_0 \lambda_0} = \frac{\Delta f}{f_0}\cdot\frac{L}{\lambda_0}\cdot f_{sw}$$

如果选择波导程差满足下述关系：

$$\frac{\mathcal{L}}{\lambda_0}\frac{\lambda_{g0}}{\lambda_0}\frac{\Delta f}{f_0} \equiv m$$

则

$$\Delta\phi(t) = \frac{2\pi\mathcal{L}}{\lambda_{g0}} + m\Omega t \qquad f_m = m\Omega$$

这样，在干涉仪的两臂就可以获得固定的频移 f_m。这种产生频移方法的优点是：便于多道应用，在不同干涉道中使用不同的波导长度，就可以方便地在各道获得不同

的频移，可以避免不同道间的串扰；但其缺点是为获得一定的频移，要使用较长的的波导，使损失较严重。

①两束光的偏振方向 ②两束光波阵面的平行

四. 相干、衍射、折射和频率的选择

1. 相干性 — 时间相干性 — 宽带
— 空间相干性 — 整个宽度上要求上两束光的波前差不大于 $\frac{\lambda}{2}$

干涉仪所用的辐射源，一般都要求其频带宽度很窄。这是因为在干涉测量中，为了提高相位测量精度，要求干涉仪的相位对比度，即干涉仪输出功率的调制度 $\frac{I_{max}-I_m}{I_M+I_m}$ 越高越好，也就是要求在源带宽内的所有频率分量对输出功率的贡献，都经历相同的相移。否则的话，干涉仪的相位对比度要变差。源的频带宽度限制与干涉仪的精确安排有关，但用相干辐射源（诸如速调管、耿氏管、返波振荡器和激光器）几乎都能满足相干性的要求。因此等离子体诊断中都采用相干辐射源以保证其~~瞬~~时态（temporal）相干条件 — 宽带。

2. 衍射极限 — 高斯光束的传播。

相干辐射光束在自由空间中的传播是由所谓的高斯光束方程决定的，这是因为束传播的空间本征模是拉盖尔（Laguerre）多项式与高斯函数的乘积，其最低阶的本征模 — 基模就是高斯束轮廓：

$$E(x,y,z) = E_0 \frac{W_0}{W(z)} e^{-\frac{r^2}{W^2(z)}} \exp\left\{-i\left[kz + \frac{kr^2}{2R(z)} - \eta(z)\right]\right\}$$

其中

$$W^2(z) = W_0^2\left[1+\left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2}\right)^2\right] = W_0^2\left[1+\frac{z^2}{z_r^2}\right]$$ 束半径

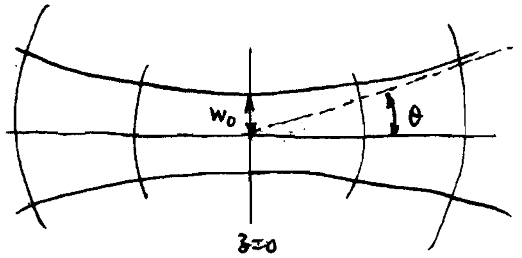
$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{\pi W_0^2}{\lambda z}\right)^2\right] = z\left(1+\frac{z_r^2}{z^2}\right)$$ 束曲率半径

$$\eta(z) = tg^{-1}\left(\frac{z\lambda}{\pi W_0^2}\right) = tg^{-1}\left(\frac{z}{z_r}\right)$$ 高斯束与理想平面波的相移差

$$z_r = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$$ 瑞利距离

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

由上式可知，相干辐射束在自由空间中传播时，其场振幅在某一横截面上的分布是按高斯函数分布的，因而称之为高斯光束。其中各参数的物理意义如下：$\boxed{W(z)}$定义了场的幅度下降至轴上值的 $\frac{1}{e}$ 的径向位置，定称为束半径。W_0是束半径的极小值，称为束腰半径。而$\boxed{R(z)}$是离束腰距离z处波阵面的曲率半径（近似于球面）。$\boxed{z_r}$是束半径为束腰半径的$\sqrt{2}$倍时的轴向距离，称为瑞利距离。在 $z<z_r$ 时，这是高斯光束的近场传播区；当 $z\gg z_r$ 时，为高斯光束的



$$\theta_{光束}=\frac{\lambda}{\pi W_0}$$

远场传播区，在这区 W(z) 可近似地表示为：

$$W(z)=\frac{\lambda}{\pi W_0}z$$

由此可知，随着传播距离z的增大，束半径也随之线性地增大，即光束也扩散了。其极限发散角为：（半发散角）

$$\boxed{\theta_{光束}=\frac{dW(z)}{dz}=\frac{\lambda}{\pi W_0}=\frac{W_0}{z_r}}$$

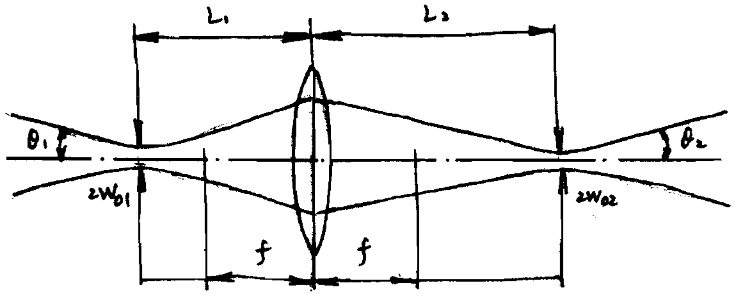
这表明光束束腰[illegible]波阵面上光程[illegible]

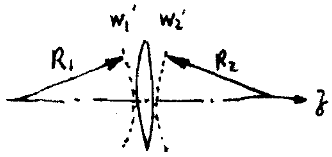
这是波的衍射现象的直接表现。由此可见，高斯光束区别于非相干光束的重要特征是：它是衍射限制的光束，即束的发散角和束尺寸的关系是唯一地由衍射原理决定的。

此外，由上述也可知，对于给定波长的高斯束，其最主要的特征参数是束腰半径W_0及其位置，这两者确定之后，高斯光束的整个传播特性也就确定了。

由于高斯光束随着传播距离的增大，其束半径也随之增大。而在实际应用中，常要求束半径适当地小，因而通常要借助于透镜组来传输高斯光束，以使其具有一定的束半径。

用于传输高斯光束的薄透镜公式如下：





$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi W^2(z)}$$

$$W_1' = W_2'$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$

$$q(z) = z + q_0 = z + i\frac{\lambda}{\pi W_0^2}$$

$$\begin{cases} q_1 = L_1 + i\dfrac{\lambda}{\pi W_{01}^2} \\ q_2 = L_2 + i\dfrac{\lambda}{\pi W_{02}^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{L_2-f}{L_1-f} = \dfrac{W_{02}^2}{W_{01}^2} \\ (L_1-f)(L_2-f) = f^2 - \left(\dfrac{\pi W_{01}W_{02}}{\lambda}\right)^2 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} W_{02}^2 = \dfrac{f^2 W_{01}^2}{(L_1-f)^2 + z_{r1}^2} = (\alpha W_{01})^2 \\ L_2 = f + \dfrac{f^2(L_1-f)}{(L_1-f)^2 + z_{r1}^2} = f + \alpha^2(L_1-f) \end{cases}$$

其中

$$\alpha \equiv \frac{|f|}{\sqrt{(L_1-f)^2 + z_{r1}^2}}$$

若用参数α表示，经薄透镜传输后，输出束的参数为：

$$\begin{cases} W_{02} = \alpha W_{01} \qquad L_2 = f + \alpha^2(L_1-f) \\ \theta_2 = \dfrac{\lambda}{\pi W_{02}} = \dfrac{\theta_1}{\alpha} \\ z_{r2} = \dfrac{W_{02}}{\theta_2} = \dfrac{\alpha W_{01}}{\theta_1/\alpha} = \alpha^2 z_{r1} \end{cases}$$

由于高斯光束的光强是按高斯函数分布的，因而原则上讲，其光强虽是集中在其光轴附近，但在整个横截面上都有光强分布。当用于传输激光束的光学元件直径有限时（直径为D），由高斯分布函数可计算出：射在直径为D的光学元件上的光功率：

$$\boxed{P_D = P_总\left[1-\exp\left(-\frac{2D^2}{d_0^2}\right)\right]}$$

d_0 为束腰直径（强度为 e^{-1} 直径）

$$\omega = \omega_{pe} \equiv \frac{e^2 n_c}{\varepsilon_0 m_e} \Rightarrow n_c = 1.11\times10^{15}(\lambda[m])^{-2}\ [m^{-3}] = 24$$
$$= 1.11\times10^{27}(\lambda[\mu m])^{-2}\ [m^{-3}]$$

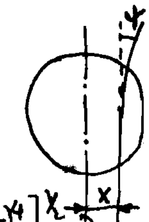
由此可知，当光学元件通光孔径有限时，高斯束通过它时将有部分损失。由当 $D\geq1.5d_0$ 时，光束的传播损失可小于1%。因此，做为一般规律，光学元件的选择原则是：

$$\boxed{D\geq1.5d\ ，以保证光功率的损失小于1\%}$$

3. 折射（附录 4.2）　$\boxed{\text{J. Appl. phys. 32 (1961), 689}}$

当激光束的传播路径上，等离子体有横向密度梯度时，探测束将会产生折射（由于 μ 变化），使其偏离直线传播轨迹。这对干涉测量有重要影响，特别是在多道干涉仪中，严重的折射就会使不同的干涉道之间产生串扰。因此，我们估算时折射就应了解产生的探测束的最大偏转角，做一定量估计。对于圆柱对称的等离子体，若其电子密度分布是抛物线分布，即

$$n_e(r) = \begin{cases} n_{e0}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right) & r\leq a \\ 0 & r>a \end{cases}$$



则利用 Snell 折射定理可以计算，弦心距为 x 的探测束其偏转角为

$$\psi(x) = \sin^{-1}\left\{\frac{\frac{n_{e0}}{n_c}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{x}{a}\right)^4\right]^{1/2}}{\left[\frac{n_{e0}}{n_c}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{n_{e0}}{n_c}\right)^2\right]^{1/2}}\right\}$$

由此可求得当

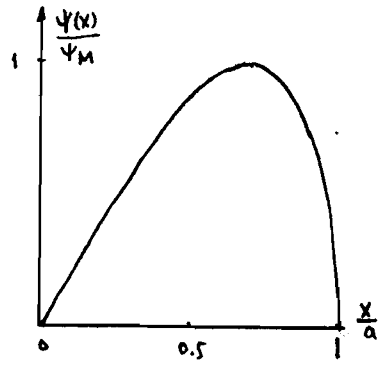
$$x_0 = a\left(\frac{1-n_{e0}/n_c}{2}\right)^{1/2} \simeq 0.7a \quad \left(当\ \frac{n_{e0}}{n_c}\ll1\ 时\right)$$

时，有最大偏转角　　$\psi_M \equiv \frac{n_{e0}}{n_c} = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} < \psi_c$

$$\psi_M = \sin^{-1}\left(\frac{n_{e0}}{n_c}\right) \simeq \frac{n_{e0}}{n_c} = 8.97\times10^{-16}\, n_{e0}[m^{-3}]\, \lambda^2[m]$$

下面是由上式计算的偏转角 $\frac{\psi(x)}{\psi_M}$ 随 $\frac{x}{a}$ 变化的计算曲线。若探测口到等离子体截面中心的距离为 S，则由此最大偏转角引起的出射束的最大位置偏移为：

$$\Delta_M = S\psi_M = 8.97\times10^{-16}\, S\, n_{e0}\, \lambda^2$$



实际上可接受的最大偏转角 ψ_M 是由具体问题决定的，它一旦定下来，则探测频率必须满足：

$$\omega \gtrsim \omega_{pe}/\sqrt{\psi_c}$$

= 25

$\lambda_1 > \lambda_2$ $\quad \varphi_1 = r_e\lambda_1\int n_e dl + \frac{2\pi}{\lambda_1}\delta l$

$\varphi_2 = r_e\lambda_2\int n_e dl + \frac{2\pi}{\lambda_2}\delta l$ $\rightarrow \int n_e dl = \frac{\varphi_1\lambda_1 - \varphi_2\lambda_2}{r_e(\lambda_1^2-\lambda_2^2)}$

4. 源频率的选择

由上述可知，对用于等离子体密度测量的辐射源的要求是，其频率要足够高于预计的最高的电子等离子体频率，以避免探测束在等离子体中折射偏转或截止。然而，源频率也不能选得太高，因为频率越高，对干涉仪的机械稳定性的要求也越高。特别是在噪声环境比较恶劣的等离子体实验中使用的干涉仪，实验中光学部件的机械振动将产生假的光程(即相位变化)。若机械振动所产生的总的光程扰动为 δl，则它所产生的假的相位变化为

$$\boxed{\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta l} \qquad \phi_p = r_e\lambda\int n_e dl$$

$$\Phi_{总} = \phi_p + \delta\varphi = r_e\lambda\int n_e dl + \frac{2\pi}{\lambda}\delta l$$

由此可见，对于给定的光程扰动，探测束波长越短，所产生的相位测量误差越大。因等离子体所产生的相移量 $\phi_p \propto \lambda$，因此振动产生的相位误差与等离子体相位变化之比是与 λ^{-2} 成正比。故对短波长来说，机械振动变成是个十分严重的问题。

当机械振动是不可避免时，可以用两个不同波长同时测量相移的办法，来补偿振动引起的相位测量误差。用比较短的波长(通常是可见光)主要用来测量机械振动，而比较长的波长的相移与等离子体折射率有较强的依赖关系，把长波长的相移(包括等离子体和机械振动的相移)，减去适当比例的短波长的相移，就可以去除振动的影响。另一个办法是用短波长探测的输出去反馈稳定干涉仪的臂长，例如，利用一个压电传感器去反馈控制一个反射镜，以保持短波下的相位差是常数。这样做就不需要在短波下进行条纹计数，但要求传感器有足够快大的位移，以便跟随机械振动的变化

此外，探测器的噪声电平、相移的测量方法等决定了干涉仪的可测的最小相移 ϕ_{min}。当 ϕ_{min} 给定时，相应的可测最小线密度也被限定了，因为

$$\left(\int n_e dl\right)_{min} = \frac{\phi_{min}}{r_e\lambda}$$

由此可见，当 ϕ_{min} 给定时，可测的最小线密度与 λ 成反比，这也要求源频率也不能太高。

总之，上述诸因素对波长(或频率)的选择是相互制约的，需根据具体情况加以具体分析。作为一般原则，可用下述关系粗略地选择探测束波长：

$$(5\sim10)\, n_{e0} = n_c$$

总之，激光波长选择需综合考虑如下几个因素：

1. 截止（等体穿透条件）

$$n_e < n_c = 1.11\times10^{15}\,\lambda^{-2}[m] \qquad [m^{-3}]$$

2. 折射（避免了通道间的串扰）

$$\frac{n_{e0}}{n_c} < \psi_M$$

若探测直径为 d 的截面内安排 M 个干涉道，则其道间距为 $\Delta x = d/M$，其最大偏转角为 $\psi_M = \Delta x/d = 1/M$

故有 $$\frac{n_{e0}}{n_c} < \frac{1}{M}$$，这比截止条件更严格

3. 衍射：

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi W_0}$$

4. 机械振动

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta l$$

其对 λ 的相对误差为：$$\frac{\delta\varphi}{\varphi_p} = 2\pi\delta l\Big/\left(r_e\lambda^2\int n_e dl\right)$$

5. 可测的最小密度：由可测的最小相位 φ_{min} 决定

$$\phi_{min} = r_e\lambda\int n_e dl$$

$$\left(\int n_e dl\right)_{min} = \phi_{min}\Big/(r_e\lambda)$$

几何光学近似 $\frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1$ $\quad \frac{\lambda}{2\pi}\frac{|\nabla \mu|}{\mu^2} \ll 1$

五、干涉成象

适用于小尺度快变化等离子体，如激光等离子体

这时有意识地在干涉中引入小的波阵面夹角，从而在探测面上形成背景干涉条纹（即空间调制），这种引入的空间调制是整个干涉图上形成连续的初始相位差，直接在探测面上得到干涉信息，可直接判断相位的变化方向，而不需要采用外差技术。

$$\mu = \left(1-\frac{n_e}{n_c}\right)^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{n_e}{n_c}-\frac{1}{8}\left(\frac{n_e}{n_c}\right)^2$$

若 $\frac{n_e}{n_c}=\frac{1}{5}$ 则 $\frac{1}{8}\left(\frac{n_e}{n_c}\right)^2=\frac{1}{200}$

六、非理想等离子体波对干涉测量的影响

(1) 非常波

$$\mu_x^2 = 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\,\frac{1-\omega_{pe}^2/\omega^2}{1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}-\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}}$$

当 $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \ll 1$ 时，

$$\mu_x^2 \simeq 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)\left(1+\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}+\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)$$

$$= 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\cancel{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}+\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}-\cancel{\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}-\frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4}-\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)$$

$$\simeq 1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)$$

$$\mu_x \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)$$

$$\phi_p = -r_e\lambda\int n_e\left(1+\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right)dl$$

$\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}$

由此可见：当入射探测束为异常波时，若仍用寻常波的色散关系由由等离子体引入的相移推导线积分密度时，其相对误差为：

$$\frac{\Delta\phi_p}{\phi_p} \simeq \frac{\int n_e \frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} dl}{\int n_e \left(1+\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2}\right) dl} \quad (当\ \omega_{pe}^2 \ll \omega^2,\ \omega_{ce}^2 \ll \omega^2 时)$$

2. 法拉第旋转：

设 $\vec{k} \parallel \vec{B}_0 \parallel \hat{z}$，　入射波 $\vec{E}_1 = \hat{x} E_{10} \cos\omega t$

线偏振波可表示为：

$$\vec{E}_1(0) = \vec{E}_L(0) + \vec{E}_R(0)$$

其中

$$\vec{E}_L(0) = \hat{x}\frac{E_{10}}{2}\cos\omega t - \hat{y}\frac{E_{10}}{2}\sin\omega t$$

$$\vec{E}_R(0) = \hat{x}\frac{E_{10}}{2}\cos\omega t + \hat{y}\frac{E_{10}}{2}\sin\omega t$$

当通过等离子体的距离为 l 时，则出射波为：

$$\vec{E}_l(l) = \hat{x}\frac{E_{10}}{2}\cos(\omega t - \phi_l) - \hat{y}\frac{E_{10}}{2}\sin(\omega t - \phi_l)$$

$$\vec{E}_r(l) = \hat{x}\frac{E_{10}}{2}\cos(\omega t - \phi_r) + \hat{y}\frac{E_{10}}{2}\sin(\omega t - \phi_r)$$

其合成波为

$$\begin{aligned}\vec{E}(l) &= \vec{E}_l(l) + \vec{E}_r(l) \\ &= \hat{x} E_{10} \cos\left(\frac{\phi_l - \phi_r}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\phi_l + \phi_r}{2}\right) \\ &\quad + \hat{y} E_{10} \sin\left(\frac{\phi_l - \phi_r}{2}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\phi_l + \phi_r}{2}\right)\end{aligned}$$

由此可见，由于法拉第旋转使出射波的偏振方向转过一角度 $\alpha \equiv \frac{\phi_l - \phi_r}{2}$，从而使出射波的 y 分量不等于零，但 x、y 分量的相移均为：

$$\frac{\phi_l + \phi_r}{2} = \frac{\omega}{c}\int \frac{\mu_l + \mu_r}{2} dl \simeq \frac{\omega}{c}\int \mu_o dl$$

$$\left(当\ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \ll 1,\ \frac{\omega_{ce}}{\omega} \ll 1\ 时\right)$$

由此可见，法拉第旋转对于相差干涉仪的测量结果没有影响。

(2) 法拉第旋转

设 $\vec{k} \parallel \vec{B}_0 \parallel \hat{z}$

在入射处 $(z=0)$ $\qquad \vec{E}(0) = E_0 \hat{x} \cos\omega t = \vec{E}_R + \vec{E}_L$ $\quad$ 线偏振波

其中 $\qquad \vec{E}_R(0) = \hat{x}\frac{E_0}{2}\cos\omega t + \hat{y}\frac{E_0}{2}\sin\omega t$ $\quad$ 右旋波

$\qquad \vec{E}_L(0) = \hat{x}\frac{E_0}{2}\cos\omega t - \hat{y}\frac{E_0}{2}\sin\omega t$ $\quad$ 左旋波

通过等离子体后，在 $z=l$ 处，左、右旋波分别为：

$$\vec{E}_R(l) = \hat{x}\frac{E_0}{2}\cos(\omega t-\phi_R) + \hat{y}\frac{E_0}{2}\sin(\omega t-\phi_R)$$

$$\vec{E}_L(l) = \hat{x}\frac{E_0}{2}\cos(\omega t-\phi_L) - \hat{y}\frac{E_0}{2}\sin(\omega t-\phi_L)$$

这时的合成波电场为：

$$\begin{aligned}\vec{E}(l) &= \vec{E}_R(l) + \vec{E}_L(l) \\ &= \hat{x}\, E_0 \cos\left(\frac{\phi_L-\phi_R}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\phi_R+\phi_L}{2}\right) \\ &\quad - \hat{y}\, E_0 \sin\left(\frac{\phi_L-\phi_R}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\phi_R+\phi_L}{2}\right)\end{aligned}$$

由此可见，由于在等离子体中左、右旋波的相速度不同，使出射波电场的偏振面发生了旋转，其旋转角为 $\alpha = \frac{\phi_L-\phi_R}{2}$，从而使其出现了 $\hat{y}$ 方向的偏振分量。但无论是 $\hat{x}$ 还是 $\hat{y}$ 分量，这时通过等离子体后所产生的相位移均为：

$$\phi_P = \frac{\omega}{c}\int_0^l \left[1-\frac{\phi_R+\phi_L}{2}\right] dl$$

由左、右旋波色散关系知，当 $\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \ll 1$ 及 $\frac{\omega_{ce}}{\omega} \ll 1$ 时，有近似式为：

$$\mu_L = \left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

$$\mu_R = \left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

$$\frac{\mu_R+\mu_L}{2} \doteq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = \mu_0 \qquad \frac{\mu_L-\mu_R}{2} \simeq \frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\frac{\omega_{ce}}{\omega}$$

由此可见，对于外差干涉仪，法拉第旋转对等离子体产生的相位移的测量是没有影响的（因为其测量与干涉信号幅度无关）。

▲ 高气压等离子体干涉仪

这时，碰撞频率与 ω 可相比较，它对电磁波传播的影响不可忽略。当 $B_0 = 0$ 时，电子运动方程为：

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - \nu m_e \vec{v}$$

由此运动方程的解可得介电常数为：

$$\mu^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \nu^2}\left(1 + i\frac{\nu}{\omega}\right)$$

由此可得：

$$\mu_r = \mathrm{Re}(\mu) = \left\{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2+\nu^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2+\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2+\nu^2}\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

$$\mu_i = \mathrm{Im}(\mu) = \left\{-\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2+\nu^2}\right) + \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2+\nu^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2+\nu^2}\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

其实部 μ_r 引起相移

$$\phi_p = \frac{\omega}{c}\int_0^L (1-\mu_r)\, dl$$

而其虚部 μ_i 引起通过等离子体的电磁幅度衰减

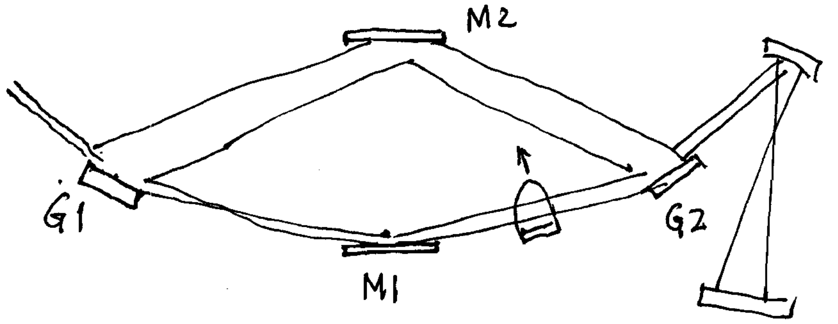
$$E_1 = E_{10}\, e^{-\frac{\omega}{c}\int \mu_i\, dl} = E_{10}\,\alpha$$

其中 $\alpha = e^{-\frac{\omega}{c}\int \mu_i\, dl}$ 为衰减因子

正交干涉仪

$$\left.\begin{aligned} V_{\cos} &= 2E_{10}E_{20}\,\alpha\cos\phi_p \\ V_{\sin} &= 2E_{10}E_{20}\,\alpha\sin\phi_p \end{aligned}\right\} \text{输出李萨如图}$$

▲软X射线激光干涉仪诊断高密度的激光等离子体



改进型马赫-曾德干涉仪

1. 第一个衍射光栅G1将入射束分割成两束（零级束和一级衍射束）—— 成干涉仪两臂 （掠入射）
2. 掠入射反射镜把两束光重新射入第二个衍射光栅，它们合并成一束光形成干涉图案
3. 调节掠入射反射镜的倾角，可以调节条纹间距和条纹的方向
4. ps时间分辨，避免等离子体运动引起的干涉条纹的模糊

Optics Letters 25 (2000), 356
Applied Optics 43 (2004), 3938
Physics of Plasmas 10 (2003), 2037

§2.3 磁场的测量

一、原理—法拉第旋转

1. 非剪切磁场

当电磁波平行于磁场传播时，有两个本征模，假定：$\omega_{pe}^2 \ll \omega^2$，$\omega_{ce} \ll \omega$，它们的折射系数分别近似为：

$$\mu_L = \left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

$$\mu_R = \left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1-\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)^{-1}\right]^{1/2} \simeq 1-\frac{1}{2}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{\omega_{ce}}{\omega}\right)$$

令 $\vec{B}_0 \parallel \hat{z} \parallel \vec{k}$，初始入射波为线偏振波 $\vec{E}(0) = E\hat{x}$，它可以分解为同振幅旋转的左、右旋波，即

$$\vec{E}(0) = \frac{E}{2}\left[(1,-i)+(1,+i)\right]$$

当它在等离子体中传播到 $z \neq 0$ 处时，该波就变为：

$$\vec{E}(z) = \frac{E}{2}\left[(1,-i)\exp\left[i\mu_L\frac{\omega}{c}z\right]+(1,+i)\exp\left[i\mu_R\frac{\omega}{c}z\right]\right]$$

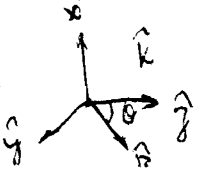
$$= E\left[\cos\alpha,\ \sin\alpha\right]\exp\left[i\phi_p\right]$$

其中

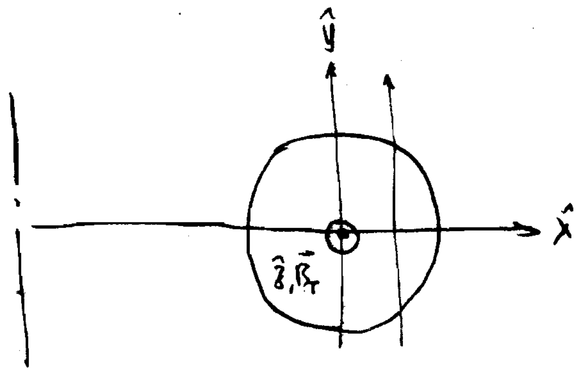
$$\alpha \equiv \frac{\mu_L-\mu_R}{2}\frac{\omega}{c}z = \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{2\omega^2 c}z = \frac{e r_e}{2\pi m_e c}\lambda^2 n_e B_0 z$$

$$\phi_p \equiv \left(1-\frac{\mu_L+\mu_R}{2}\right)\frac{\omega}{c}z = \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega c}z = \lambda r_e n_e z$$

α 是电磁波通过等离子体后偏振面转过的角度，称为法拉第旋转角。当测量了法拉第旋转角后，由上述 α 的表达式即可求出 $(n_e B_0)$ 的线积分（对非均匀等离子体）。



在一般情况下，在弱磁场情况下（$Y \equiv \frac{\omega_{ce}}{\omega} \ll 1$），只要 $Y\sec\theta \ll 1$（不太接近于垂直传播），$\alpha \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{XY\cos\theta}{(1-X)^{1/2}}\right]\frac{\omega}{c}z$



$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0) \qquad \vec{B}_0 = (B_{p\perp}, B_{p\parallel}, B_T)$$

$$\vec{B}_{p\parallel} \parallel \hat{y}, \qquad \vec{B}_{p\perp} \parallel \hat{x}$$

由此可解得 $\vec{v} = f(\vec{E})$

$$\vec{j} = e n_e \vec{v} = e n_e f(\vec{E}) = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \vec{E}$$

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\varepsilon_0 \omega_{pe}^2}{\omega(1 - \omega_{cz}^2/\omega^2)} \begin{pmatrix} i & \frac{\omega_{cz}}{\omega} & -\frac{\omega_{cy}}{\omega} \\ -\frac{\omega_{cz}}{\omega} & i & \frac{\omega_{cx}}{\omega} \\ \frac{\omega_{cy}}{\omega} & -\frac{\omega_{cx}}{\omega} & i \end{pmatrix}$$

$\because \; B_T \gg B_p$

上式中已采用如下近似

$$\omega_c^2 = \omega_{cx}^2 + \omega_{cy}^2 + \omega_{cz}^2 \simeq \omega_{cz}^2$$

$$\omega^2 \gg \omega_c^2$$

2. 剪切磁场： J. Appl. Phys. 52 (1981), 6572

在磁剪切磁化等离子体中，即使初始是寻常波，在其等离子体中传播时，其偏振态要发生复杂的变化。剪切磁场会使之产生 X、L、R 波分量，从而使其合成波通常是椭圆偏振波，且偏振波的主轴将在传播过程中将发生旋转，即旋光效应。下面我们以托卡马克位形为例，详细计算初始线偏振波在其传播过程中，其偏振子是如何变化的。

为简单起见，我们假定：

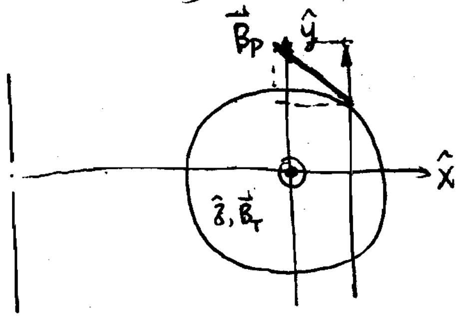
(1) $\omega^2 \gg \omega_{pe}^2,\ \omega_{ce}^2$

(2) 冷等离子体近似

(3) 等离子体是柱对称的

(4) WKB 近似成立

(5) 对折射效应较小，但不可忽略



取如右图所示的坐标系，等离子体中电磁波的波动方程为：

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{E}) + \mu_0\overleftrightarrow{\sigma}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

其中 $\overleftrightarrow{\sigma}$ 为等离子体电导率张量，它可由电子运动方程解得出：

$$m_e\frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}_0) \qquad \vec{B}_0 = (B_{p\perp},\ B_{p\parallel},\ B_T)$$

其表达式为：

$$\overleftrightarrow{\sigma} = \frac{\varepsilon_0\omega_{pe}^2}{\omega(1-\omega_{cz}^2/\omega^2)}\begin{pmatrix} i & \omega_{cz}/\omega & -\omega_{cy}/\omega \\ -\omega_{cz}/\omega & i & \omega_{cx}/\omega \\ \omega_{cy}/\omega & -\omega_{cx}/\omega & i \end{pmatrix}$$

上式中已利用了如下的近似

$$\omega_c^2 = \omega_{cx}^2 + \omega_{cy}^2 + \omega_{cz}^2 \simeq \omega_{cz}^2 \qquad (\because\ B_T \gg B_p)$$

及 $\qquad \omega^2 \gg \omega_c^2$

假定上述波动方程中 $\vec{E}$ 的各个分量都有如下的形式解

$$E_j(y) = A_j(y)\exp\left[i\left(\phi_j(y) - \omega t\right)\right] \qquad j = x, y, z$$

其中 $A_j(y)$ 是空间的包络函数，$\phi_j(y)$ 是空间相位函数，在特定的垂直弦线上（已知弦位距 x），它只与 y 的坐标有关。将它代入波动方程中，可由此导出 $A_j(y)$ 和 $\phi_j(y)$ 所满足的常微分方程，它们的解近似为：

$$A_x(y) = A_{x0} + A_{z0}\int_y dy\left(1+\frac{\omega_{cz}^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega_{pe}^2\,\omega_{cy}}{2c\omega^2}$$

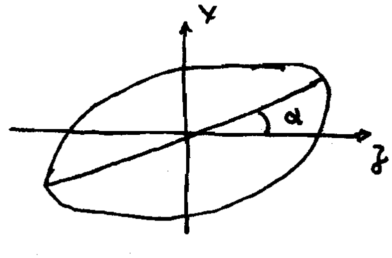
$$A_z(y) = A_{z0} - A_{x0}\int_y dy\,\cancel{\left(1+\frac{\omega_{cz}^2}{\omega^2}\right)}\,\frac{\omega_{pe}^2\,\omega_{cy}}{2c\omega^2}$$

$$\phi_x(y) = \frac{\omega}{c}\int_y dy\left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2}-\frac{\omega_{pe}^2\,\omega_{cz}^2}{2\omega^4}\right] \qquad \frac{\omega}{c}\int \mu_x\,dy$$

$$\phi_z(y) = \frac{\omega}{c}\int_y dy\left[1-\frac{\omega_{pe}^2}{2\omega^2}\right] \qquad \frac{\omega}{c}\int \mu_0\,dy$$

由此可见，初始线偏振波（O波或X波），通过具有磁剪切的等离子体后，其振幅和相位均发生变化，它们的合成波一般为椭圆偏振波，且其主轴将相对于初始偏振方向发生旋转，其旋转角可由熟知的椭圆偏振光的公式求得（M. 玻恩，E. 沃耳夫著，光学原理，上册 p.43~46）：

$$tg(2\alpha) = tg(2\psi)\cos\Delta\phi$$



其中 $$\psi \equiv \tan^{-1}\left[\frac{A_x(y)}{A_z(y)}\right]$$

$$\Delta\phi = \phi_z(y) - \phi_x(y)$$

二(34)附

$$E_x = a_1 \cos(\tau + \delta_1)$$

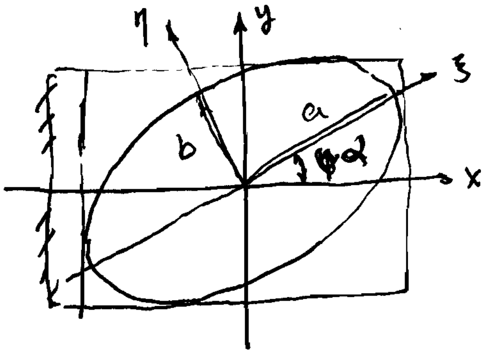
$$E_y = a_2 \cos(\tau + \delta_2)$$

$\tau = \omega t$

由此可得：

$$\left(\frac{E_x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2}\right)^2 - 2\frac{E_x}{a_1}\frac{E_y}{a_2}\cos\delta = \sin\delta$$

$$\delta \equiv \delta_2 - \delta_1$$



$\delta = 0, \pi$ 线偏振

$\delta = \frac{\pi}{2}$，$a_1 = a_2$ 圆偏振

这是椭圆方程式，这是个椭圆。

这也可用 ξ-η 坐标系描述

$$\begin{cases} E_\xi = a\cos(\tau + \delta_0) \\ E_\eta = \pm b \sin(\tau + \delta_0) \\ \pm ab = a_1 a_2 \sin\delta_0 \end{cases}$$

(± 表示旋转方向)

由此可得：

$$\tan\psi \equiv \frac{a_2}{a_1} \qquad 0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$$

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + a_2^2$$

$$\tan(2\alpha) = \tan 2\psi \cos\delta$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\psi \sin\delta$$

其中

$$\tan\chi \equiv \pm\frac{b}{a} \qquad -\frac{\pi}{4} \le \chi \le \frac{\pi}{4}$$

椭圆率

当 $\psi \ll 1$ 及 $\alpha \ll 1$ 时（通过选择适当的 ω，通常都满足），上式可近似为：

$$\alpha \simeq \psi \cos\Delta\phi = \psi\left[1-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}\right]$$

当初始偏振波为寻常波，即 $A_{y0}\neq 0$，$A_{x0}=0$，则椭圆偏振主轴转过的角度为：

$$\alpha \simeq \left[1-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}\right]\int_y dy\left(1+\frac{\omega_{cy}^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega_{pe}^2\omega_{cy}}{2\omega^2 c}$$

$$\Delta\phi = \frac{\omega}{c}\int dy\,\frac{\omega_{pe}^2\omega_{cT}^2}{2\omega^4} \qquad \frac{\omega_{pe}^2\omega_{cy}^2}{2\omega^4}$$

将各物理常数代入上式，可得：

$$\alpha = 2.63\times10^{-25}\lambda^2[\mu m]\left(1-\frac{(\Delta\phi)^2}{2}\right)\int_y\left(1+0.87\times10^{-8}\lambda^2[\mu m]B_T^2\right)n_e B_{\parallel}\,dy$$

$$\Delta\phi = 2.46\times10^{-29}\lambda^3[\mu m]\int_y n_e B_T^2\,dy$$

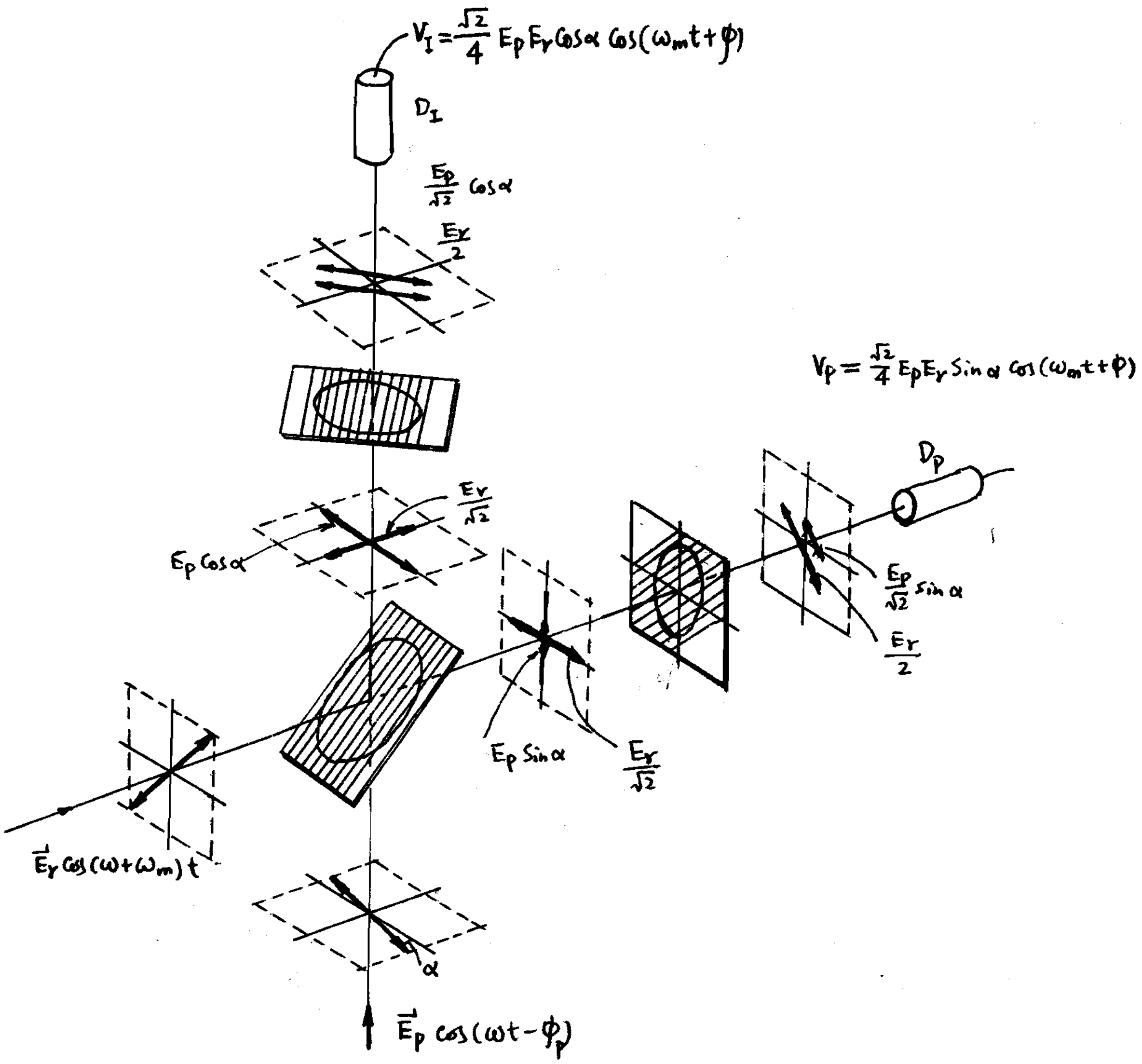
实际上，$\Delta\phi$ 是双折射效应引起的相移差，它正与探针束的波长 λ^3 成正比，只有当入射波足够短时，才能保证 $\Delta\phi \ll 1$，双折射效应对法拉第转角的影响才可忽略。

二、法拉第转角的测量

因为 α 与 $B_{\parallel} n_e$ 的线积分成正比，因此通常总是利用同一光路同时进行干涉和偏振测量，以便分别获得 B 和 n_e 的数据。

1. 检偏法

这是偏振测量的最简单的方法，它用检偏器测量偏振旋转引起的强度变化，因该强度与转角的余弦成正比，但这里所测量的灵敏度最低。为提高 α 的测量精度，应采用正交检偏法，它与转角 $\sin\alpha$ 成正比，这时在小转角情况下的测量灵敏度最高。



它与干涉仪的主要区别是：将一个对偏振方向灵敏的分束器，代替干涉仪中最后的分束器（它与偏振方向不灵敏），通过它使经法拉第旋转以后的探测束分解成两个偏振分量，它们的偏振方向分别平行、垂直于初始的偏振方向，然后对这两偏振分量分别进行检测。

在这个例子中，对偏振方向灵敏的分束器是用线栅做成的。在微波和远红外波段，线栅可用做检偏器。这是利用线栅对入射电磁波响应的特点：即当线栅足够密时，电矢量平行于线方向的电磁波入射到线栅上，它将被完全反射；而入射电磁波偏振方向与线方向垂直时，它将完全透过栅线。这样，利用它就可以把偏振方向相互垂直的两个分量分离开来。

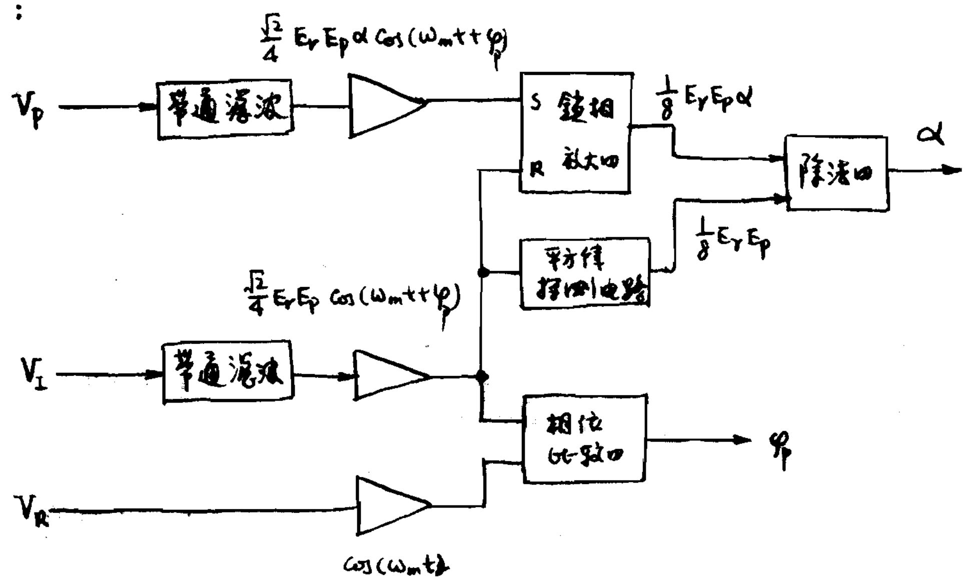
由上面的光路安排和渥斯析偏器的特点，就可以计算出两探测器输出的交流信号分别为：

$$V_I = \frac{\sqrt{2}}{4} E_p E_r \cos\alpha \cos(\omega_m t+\phi)$$

$$V_p = \frac{\sqrt{2}}{4} E_p E_r \sin\alpha \cos(\omega_m t+\phi).$$

这里 α、ϕ 分别为法拉第转角和等离子体相移。

由上式可见，当 $\alpha \ll 1$ 时，V_p 是与 α 成正比的。只要能够精确地测量信号的幅度，就可以测量法拉第转角 α。此外，由于 V_p 和 V_I 有相同的相位关系，因而可利用 V_I 做参考信号，而用锁相放大器精确地测量 V_p 的幅度 $\frac{\sqrt{2}}{4} E_r E_p \alpha$，这是因为锁相放大器的输出信号是与 $V_{p0} V_{I0} = \frac{1}{8}(E_p E_r)^2 \alpha$ 成正比的。锁相放大器的输出幅度与 α 的关系，可用位于探测束光程上的 $\frac{1}{2}$ 波片来标定。当没有等离子体时，使 $\frac{1}{2}$ 波片转过已知的角度，测量这时锁相放大器的输出电压，这个与转角 α 相等价。但这样测得的 α 角的精度要受激光强度变化的影响。为了消除激光强度变化对 α 测量的影响，可用 V_I 的输出信号幅度归一。其整个信号处理的框图如下：

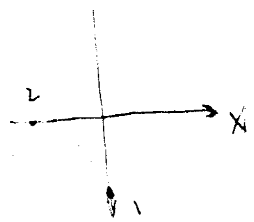


由上框图可知，等离子体相移可用常规的方法同时地被测量。

$\frac{\lambda}{4}$波片

入射光	$\frac{\lambda}{4}$片主轴方位	出射光
线偏振	$\hat{e}, \hat{o} \parallel \vec{E}$	线偏振
	$\angle \hat{o}, \vec{E} = 45^\circ$	圆偏振
圆偏振	任意	线偏振
椭圆偏振	$\hat{e}, \hat{o}$ 与椭圆主轴平行	线偏振
	其它位置	椭圆偏振

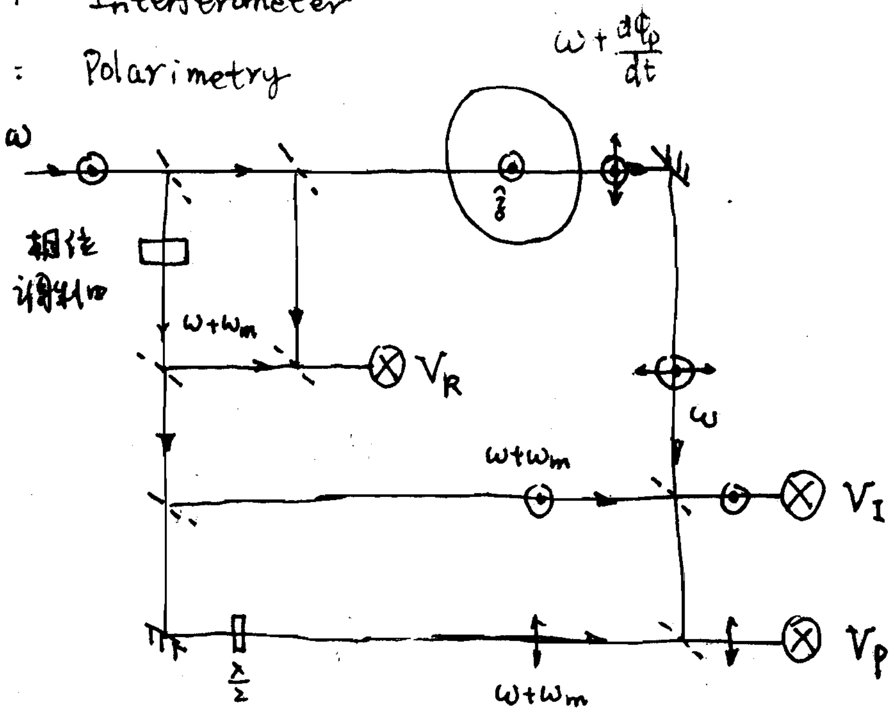
$\frac{\lambda}{2}$波片

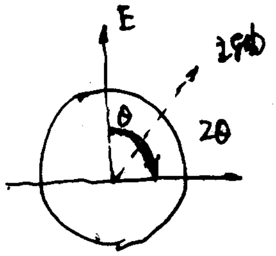


入射光	$\vec{E}$与主轴夹角	出射光
线偏振	θ	线偏振 偏振面旋转 2θ角

I : Interferometer

P : Polarimetry



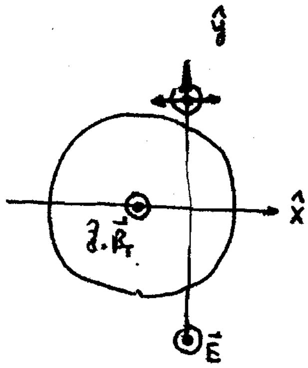


$\frac{\lambda}{2}$波片

$$V_R = A_R \cos(\omega+\omega_m)t$$

$$V_I = A_I ab \cos\alpha \cos(\omega_m t \mp \phi_p)$$

$$V_P = A_P ab \sin\alpha \cos(\omega_m t \mp \phi_p)$$



设入射波是线偏振波，O波：

$$\begin{cases} E_z(0) = a\cos\omega t \\ E_x(0) = 0 \end{cases}$$

它可以分解为左、右旋波，即：

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_r(0) + \vec{E}_l(0)$$

其中

$$\begin{cases} E_{rz}(0) = \frac{a}{2}\cos\omega t \\ E_{rx}(0) = \frac{a}{2}\sin\omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{lz}(0) = \frac{a}{2}\cos\omega t \\ E_{lx}(0) = -\frac{a}{2}\sin\omega t \end{cases}$$

通过等离子体后，它们的相移分别为 ϕ_r、ϕ_l，则

$$E_{rz}(L) = \frac{a}{2}\cos(\omega t - \phi_r) \qquad E_{lz}(L) = \frac{a}{2}\cos(\omega t - \phi_l)$$

$$E_{rx}(L) = \frac{a}{2}\sin(\omega t - \phi_r') \qquad E_{lx}(L) = -\frac{a}{2}\sin(\omega t - \phi_l')$$

其中 ϕ_l'，ϕ_r' 分别为异常波的左、右旋波分量的相移，它与 ϕ_l、ϕ_r 略有差别，当 $\frac{\omega_{ce}^2}{\omega^2} \ll 1$ 时，它们的差别可忽略（即 $\Delta\mu = \mu_o - \mu_x \ll 1$）。它们的合成波为：

$$\begin{cases} E_z(L) = a\cos\left(\frac{\varphi_l - \varphi_r}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\varphi_l + \varphi_r}{2}\right) \\ E_x(L) = +a\sin\left(\frac{\varphi_l - \varphi_r}{2}\right)\cos\left(\omega t - \frac{\varphi_l + \varphi_r}{2}\right) \end{cases}$$

因为 $\quad \varphi_l - \varphi_r \doteq 2\alpha = \int \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{\omega^2 c}dl, \; \varphi_l + \varphi_r = 2\phi_p = 2r_e\lambda\int n_e dl$

$\therefore$

$$E_z(L) = a\cos\alpha\cos(\omega t - \phi_p)$$

$$E_x(L) = a\sin\alpha\cos(\omega t - \phi_p)$$

干涉仪： $\quad E_{Rz} = b\cos(\omega + \omega_m)t \;, \quad E_{Rx} = 0$

$$V_I \propto ab\cos\alpha\cos(\omega_m t + \phi_p)$$

偏振仪： $\quad E_{Rz} = 0 \;, \qquad E_{Rx} = b\cos(\omega + \omega_m)t$

$$V_p \propto ab\sin\alpha\cos(\omega_m t+\phi_p)$$

由于干涉仪信号 $V_I \propto ab\cos\alpha\cos(\omega_m t+\phi)$ 与 $V_R \propto ab\cos\omega_m t$ 的相位比较，可测得等离子体产生的相移：

$$\phi_p = r_e\lambda\int n_e dl$$

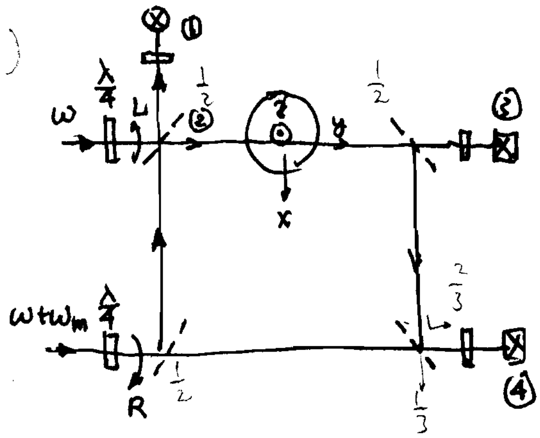
另一方面，由于干涉和偏振仪信号的幅度比

$$R = \frac{V_P}{V_I} = \tan\alpha \simeq \alpha \quad (当\ \alpha \ll 1\ 时)$$

可测得法拉第旋转角

$$\alpha = \int_0^L \frac{\omega_{pe}^2\omega_{ce}}{2\omega^2 c}dy = 2.63\times10^{-25}\lambda^2[\mu m]\int_0^L n_e B_{p\parallel}\,dy$$

2. 偏振调制法一 （P.122，图 4.23）



λ/4波片的作用：当入射线偏振波的 E 与其主轴的夹角为 ±45° 时，其转变为圆偏振光，且旋转方向相反。

设入射波为左、右旋波，且角频率分别为 ω 和 $\omega+\omega_m$，即

$Z_L = a\cos\omega t$ $\qquad Z_R = a\cos(\omega+\omega_m)t$

$X_L = -a\sin\omega t$ $\qquad X_R = a\sin(\omega+\omega_m)t$

在①、②处电场相同，即：

$Z_{1L} = \frac{\sqrt2}{2}a\cos\omega t$ $\qquad Z_{2R} = \frac{\sqrt2}{2}a\cos(\omega+\omega_m)t$

$X_{1L} = -\frac{\sqrt2}{2}a\cos\omega t$ $\qquad X_{2R} = \frac{\sqrt2}{2}a\cos(\omega+\omega_m)t$

这时的合成波为

$$Z_{1,2} = \sqrt{2}\, a \cos\left(\tfrac{1}{2}\omega_m t\right) \cos\left(\omega + \tfrac{1}{2}\omega_m\right)t$$

$$X_{1,2} = \sqrt{2}\, a \sin\left(\tfrac{1}{2}\omega_m t\right) \cos\left(\omega + \tfrac{1}{2}\omega_m\right)t$$

这时是电矢量以 $\frac{1}{2}\omega_m$ 的角速率旋转的线偏振波。在①处 Z 分量的干涉信号为：

$$V_{1Z} \propto \cos\omega_m t$$

通过等离子体后，在③处的波电场为：

$$Z_{3L} = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\frac{1}{2}\, a \cos(\omega t - \phi_L) \qquad Z_{3R} = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\frac{1}{2}\, a \cos\left[(\omega + \omega_m)t - \phi_R\right]$$

$$X_{3L} = -\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\frac{1}{2}\, a \sin(\omega t - \phi_L) \qquad X_{3R} = \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}}\,\frac{1}{2}\, a \sin\left[(\omega + \omega_m)t - \phi_R\right]$$

这时的 Z 分量的干涉信号为

$$V_{3Z} \propto \cos(\omega_m + 2\alpha) \qquad \frac{1}{4} a^2 \cos(\omega_m t + 2\alpha)$$

在④处的波电场为：

$$\begin{cases} Z_{4L} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos(\omega t - \phi_L) \\ X_{4L} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin(\omega t - \phi_L) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_{4R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos\left[(\omega + \omega_m)t - \phi_R\right] + \frac{\sqrt{2}}{2} a \cos(\omega + \omega_m)t \\ X_{4R} = \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin\left[(\omega + \omega_m)t - \phi_R\right] + \frac{\sqrt{2}}{2} a \sin(\omega + \omega_m)t \end{cases}$$

这时的 Z 分量的干涉信号为：

$$V_{4Z} \propto \cos(\omega_m t + 2\alpha) + \cos(\omega_m t + \phi_L)$$

$$\propto \cos\frac{\phi_r}{2} \cos\left(\omega_m t + \alpha + \frac{\phi_L}{2}\right)$$

由此可得：

$$\alpha + \frac{\phi_\ell}{2}$$

$$V_{1z} = A_1 \cos \omega_m t$$

$$V_{3z} = A_3 \cos(\omega_m t + 2\alpha)$$

$$V_{4z} = A_4 \cos\left(\omega_m t + \alpha + \frac{\phi_\ell}{2}\right)$$

$$2\alpha$$

V_{1z}, V_{3z} 相位比较得：

$$2\alpha \equiv \phi_\ell - \phi_r = a \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{a}{2}$$

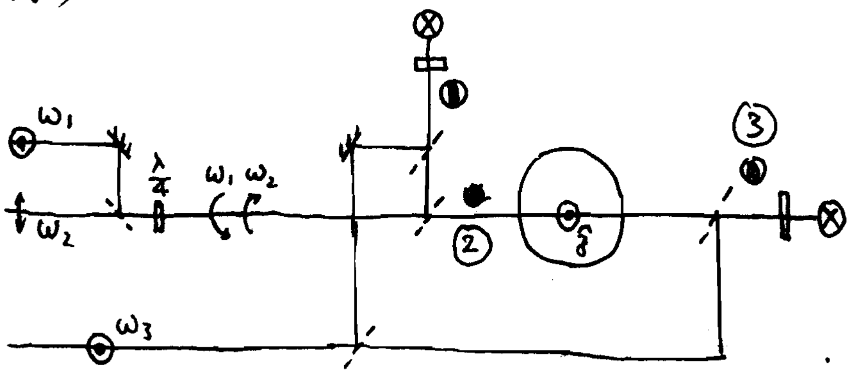
V_{1z}, V_{4z} 相位比较得：

$$\alpha + \frac{\phi_\ell}{2} = \phi_\ell - \frac{\phi_r}{2} = b$$

由此可得：

$$\phi_p \equiv \frac{\phi_\ell + \phi_r}{2} = 2b - \frac{3}{2}a$$

3. 偏振调法(2)



探测率：
1. 角频率 ω_1，右旋波
2. 〃 ω_2，左旋波
3. 〃 ω_3，线偏振波 $\vec{E} \parallel \hat{z} \parallel \vec{B}_T$

至②处波的电场为：右 $E_{xr} = a \cos \omega_1 t$　　$E_{x\ell} = a \cos \omega_2 t$

$E_{yr} = a \sin \omega_1 t$　　$E_{y\ell} = -a \sin \omega_2 t$

通过等离子体后在③处的波电场为：

$$Z_{3r} = a\cos(\omega_1 t - \phi_r) \qquad Z_{3l} = a\cos(\omega_2 t - \phi_l)$$

$$X_{3r} = a\sin(\omega_1 t - \phi_r) \qquad X_{3l} = -a\sin(\omega_2 t - \phi_l)$$

本振束电场为：

$$Z_{lo} = b\cos\omega_3 t$$

检偏后测量Z分量，探测器输出的干涉信号为：

$$V_S = a^2\cos[(\omega_1-\omega_2)+2\alpha] \qquad (V_{S1})$$

$$+ ab\cos[(\omega_1-\omega_3)t-\phi_r] \qquad (V_{S2})$$

$$+ ab\cos[(\omega_2-\omega_3)t-\phi_l] \qquad (V_{S3})$$

在④处，参考干涉仪的波电场为：

$$Z_{4r} = a\cos\omega_1 t \qquad Z_{4l} = a\cos\omega_2 t \qquad Z_{lo} = b\cos\omega_3 t$$

$$X_{4r} = a\sin\omega_1 t \qquad X_{4l} = -a\sin\omega_2 t$$

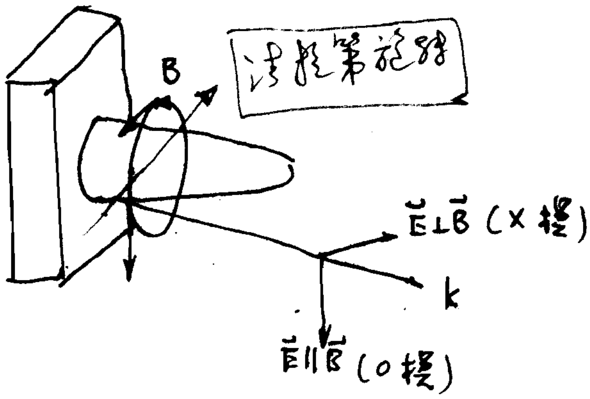
检偏后测量Z分量，参考探测器输出的干涉信号为：

$$V_R = a^2\cos(\omega_1-\omega_2)t \qquad (V_{R1})$$

$$+ ab\cos(\omega_1-\omega_3)t \qquad (V_{R2})$$

$$+ ab\cos(\omega_2-\omega_3)t \qquad (V_{R3})$$

则 V_{S1}（$\cos[(\omega_1-\omega_2)t+2\alpha]$）与 V_{R1}（$\cos[(\omega_1-\omega_2)t]$）间的相位比较，可得 2α。同理，V_{S2} 与 V_{R2} 间的相位比较可得 ϕ_r，V_{S3} 与 V_{R3} 间的相位比较，可得 ϕ_l。由 ϕ_l 和 ϕ_r 的平均值 $\phi_p=(\phi_l+\phi_r)/2$ 可求得 ϕ_p。

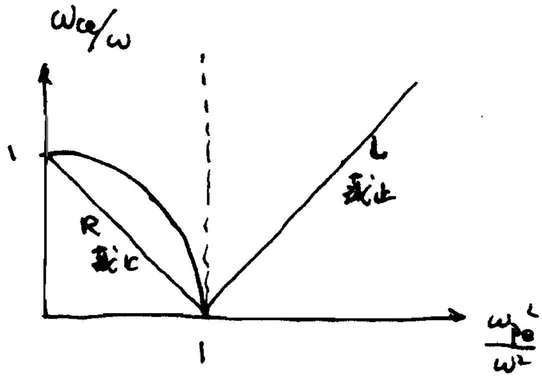


1. 双折射，椭偏因率

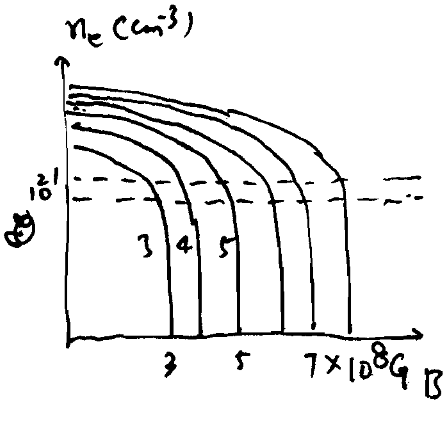
$$\frac{b}{a} = 2.49 \times 10^{-21} \lambda_{\mu m}^{3} \int n_e[\mu m]\, B^2[MG]\, dl[\mu m]$$

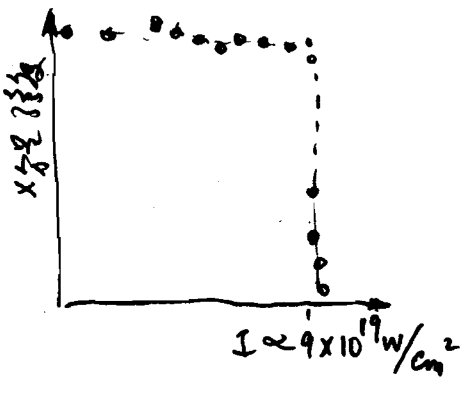
2. X模截止

$$\omega_c = \frac{\omega_{ce}}{2} + \sqrt{\frac{\omega_{ce}^2}{4} + \omega_{pe}^2}$$



3. 法拉第旋转





▲ 激光等离子体中强磁场的测量

Physics of Plasmas 9 (2002), 2244

Plasma Phys. Control. Fusion 44 (2002), B233

Physical Review E70 (2004), 026401

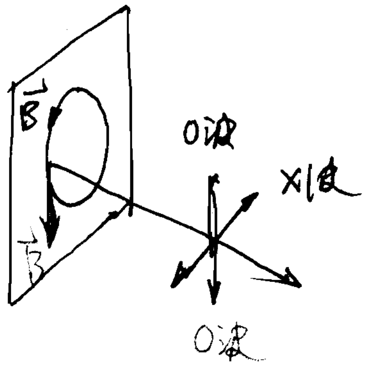
自生磁场产生机制

1. 不平行的温度和密度梯度 $\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{en_e}\nabla(kT_e)\times\nabla n_e$
2. 来自激光脉冲本身的辐射压强
3. 快电子电流

利用激光-等离子体相互作用中自生的高谐波作探针来

1. 这些谐波是临界密度处产生，方向同性保证
2. 其偏振方向与入射作用束的偏振方向相同.
3. 其产生时间与磁场产生的时间相同
4. 与测量方向 $\vec{k}\perp\vec{B}$

1. 利用X波截止测量磁场



= (44) efg 2

we found a positive relationship between male display intensity and startle rate ($\beta_{response} = -0.92$, $P < 0.001$; $\beta_{intensity} = 0.51$, $P < 0.028$; $r^2 = 0.68$, $F_{2,10} = 10.71$, $P < 0.003$).

We predicted that the most successful males would be those who produce high-intensity displays without startling females. Indeed, we found a positive correlation between male display intensity in robot courtships and male success in natural courtships (Fig. 2c), and a negative relationship between startle rate and male courtship success (Fig. 2d), with both factors contributing to male courtship success when considered together ($\beta_{intensity} = 0.55$, $P < 0.004$; $\beta_{startle} = -0.57$, $P < 0.003$; $r^2 = 0.65$, $F_{2,14} = 13.23$, $P < 0.0006$).

Our results indicate that although female satin bowerbirds prefer intensely displaying males, successful males do not always display at maximum intensity — instead, they modulate the intensity of their display in response to female signals, to remain attractive without threatening the females. In satin bowerbirds — and perhaps in other species in which variation in sexually selected traits has not yet been examined in detail — male courtship success may depend on both an attractive display and the intrinsic ability to modify these in response to female signals.

Gail L. Patricelli*, J. Albert C. Uy*†, Gregory Walsh‡, Gerald Borgia*

*Departments of *Biology and ‡Mechanical Engineering, University of Maryland, College Park, Maryland 20742, USA*

e-mail: borgia@umail.umd.edu

†Present address: Department of Ecology, Evolution and Marine Biology, University of California, Santa Barbara, California 93106, USA

1. Andersson, M. *Sexual Selection* (Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1994).
2. Borgia, G. & Presgraves, D. C. *Anim. Behav.* **56**, 1121–1128 (1998).
3. Borgia, G. *Am. Sci.* **83**, 542–548 (1995).
4. Berglund, A., Bisazza, A. & Pilastro, A. *Biol. J. Linn. Soc.* **58**, 385–389 (1996).
5. Borgia, G. in *Sexual Selection and Reproductive Competition in Insects* (eds Blum, M. S. & Blum, N. A.) 27–49 (Academic, New York, 1979).
6. Mateos, C. & Carranza, M. *Behav. Ecol. Sociobiol.* **45**, 235–244 (1999).
7. Borgia, G. *Emu* **95**, 1–12 (1995).
8. Uy, J. A. C., Patricelli, G. L. & Borgia, G. *Proc. R. Soc. Lond. B* **267**, 251–256 (2000).
9. Borgia, G. *Anim. Behav.* 33, 266–271 (1985).

Laser technology

Measuring huge magnetic fields

Huge magnetic fields are predicted[1–4] to exist in the high-density region of plasmas produced during intense laser–matter interaction, near the critical-density surface where most laser absorption occurs, but until now these fields have never been measured. By using pulses focused to extreme intensities to investigate laser–plasma interactions[5], we have been able to record the highest magnetic fields ever produced in a laboratory – over 340 megagauss – by polarimetry measurements of self-generated laser harmonics.

Because harmonics of the laser are generated at the critical-density surface and subsequently propagate isotropically out of the dense region[6], we have found that measuring the final polarization of these harmonics is a powerful way to find out the magnitude of the magnetic fields through which they travel. The use of self-generated laser harmonics is particularly convenient because these are produced at precisely the same time as the magnetic fields are generated and propagate so that their **k** vectors are perpendicular to azimuthal magnetic fields in the plasma — which greatly simplifies data interpretation. In our experiments, we use the propagation properties of lower-order harmonics (that is, the third, fourth and fifth harmonics).

These results were obtained with the Vulcan laser system (wavelength 1.054 μm, pulse energy up to 90 J, pulse duration about 1 picosecond). The beam was *p*-polarized and focused to a maximum intensity of 9×10^{19} W cm^{-2} onto a thin solid target (0.1–1.0 mm). The polarization components of the emitted laser harmonics were measured by using high-dynamic-range, charge-coupled-device arrays as detectors.

When an electromagnetic wave propagates in a magnetized plasma with its **k** vector perpendicular to **B**, the extraordinary wave (*x*-wave; that is, with an electric field vector perpendicular to the magnetic field) can experience cut-offs and resonances (Fig. 1a). Cut-offs occur when the plasma index of refraction is equal to zero, and resonances when the index approaches infinity. The *x*-wave is reflected when it encounters a cut-off and is absorbed in a resonance. For example, the cut-offs for the fifth, fourth and third harmonics occur at 460, 340 and 220 megagauss, respectively, for a density of $n_e = 2.4 \times 10^{21}$ cm^{-3} (the relativistically corrected critical density). Resonances occur at higher magnetic fields than cut-offs. The ordinary (*o*) wave (with **E** parallel to **B**) is unaffected by the magnetic field — implying that if a field larger than the cut-off field exists in the plasma, then only the ordinary wave is able to propagate to the detector and therefore is the only one observable.

This is what we find for the highest-intensity shots. Figure 1b shows the ratio of *p*-component (*x*-wave) to total emission (*x*-wave plus *o*-wave) for both the third and fourth harmonics for various incident laser intensities. At high intensities, the *x*-wave cut-offs are definitely observed, implying the existence of a minimum magnetic field of 340 megagauss in the plasma; no cut-offs were seen for the fifth harmonic. This indicates that the peak magnetic field is below 460 and above 340 megagauss at intensities of about 9×10^{19} W cm^{-2}. Such fields are more than an order of magnitude larger than any previously observed in the laboratory[7–9]. These cut-offs were consistently reproducible in our experiments — but only at the highest laser intensities.

The magnitude of the magnetic fields generated in this way could soon approach those needed for testing astrophysical models of neutron stars and white dwarfs[10].

M. Tatarakis*, I. Watts*, F. N. Beg*, E. L. Clark*, A. E. Dangor*, A. Gopal*, M. G. Haines*, P. A. Norreys†, U. Wagner†, M.-S. Wei*, M. Zepf*, K. Krushelnick*

**The Blackett Laboratory, Imperial College of Science, Technology and Medicine, London SW7 2BZ, UK*

e-mail: m.tatarakis@ic.ac.uk

†Rutherford Appleton Laboratory, Chilton, Didcot, Oxfordshire OX11 0QX, UK

1. Wilks, S. C. *et al. Phys. Rev. Lett.* **69**, 1383–1386 (1992).
2. Pukhov, A. & Meyer-ter-Vehn, J. *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3975–3978 (1996).
3. Mason, R. J. & Tabak, M. *Phys. Rev. Lett.* **80**, 524–527 (1998).
4. Sudan, R. *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3075–3078 (1993).
5. Perry, M. D. & Mourou, G. *Science* **264**, 917–924 (1994).
6. Norreys, P. A. *et al. Phys. Rev. Lett.* **76**, 1832–1835 (1996).
7. Borghesi, M. *et al. Phys. Rev. Lett.* **80**, 5137–5140 (1998).
8. Tatarakis, M. *et al. Phys. Rev. Lett.* **81**, 999–1002 (1998).
9. Clark, E. L. *et al. Phys. Rev. Lett.* **84**, 670–673 (2000).
10. Lai, D. & Salpeter, E. E. *Astrophys. J.* **491**, 270–285 (1997).

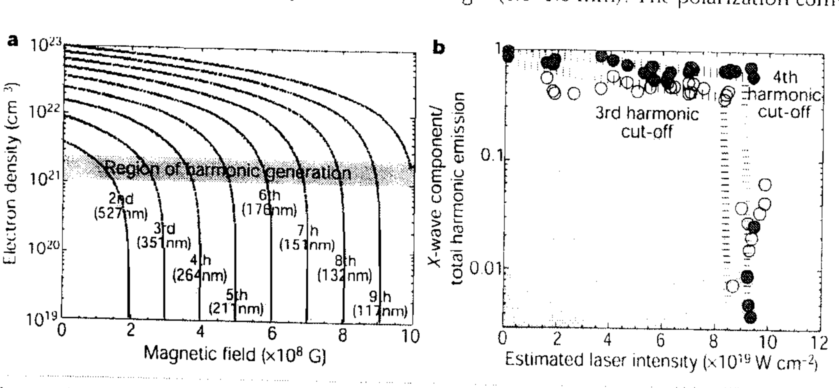


Figure 1 Laboratory measurement of magnetic fields greater than 340 megagauss. **a**, Plot of *x*-wave cut-offs for various harmonics (second, third, and so on) of 1.054-μm radiation in terms of plasma electron density and magnetic field. **b**, *X*-wave/total harmonic emission of third harmonic (hollow circles) and fourth harmonic (filled circles) for a series of laser shots.

$\alpha = \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right] \int \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) r_e \lambda n_e \frac{\omega_{ce}}{\omega} dl \ \propto \int n_e B_{\parallel} dl$

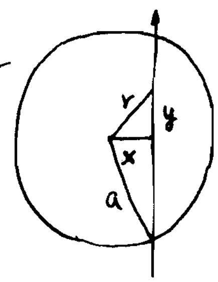
§2.4 (书4.4节)

阿贝尔(Abel)变换

从上面节可以看到，干涉法和偏振法，以及下面几章的许多其它的诊断方法，都有一个共同的特点，它们测量的都是等离子体沿通过等离子体的一条弦线的平均值。现在的问题是如何从可得到的弦测量导出所考虑的物理量的局域值。然而，许多等离子体都具有圆柱对称的特点，而且特征物理量在柱坐标系中(r, θ, z)与角度θ和轴坐标z无关。这就使得我们能够利用Abel变换的已知的数学特征，解决从弦测量导出径向分布的问题。

现在让我们考虑一个柱对称量 $f(r)$，其可得到的测量是弦积分

$$\phi(x) \quad F(x) = \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \overset{n_e}{f(r)}\, dy = 2\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(r)\, dy$$



把积分变量变为r，则

$$F(x) = 2\int_x^a f(r) \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

这就是熟知的阿贝尔积分方程，它的解就是我们所要求的量 $f(r)$：

(4.7)
$$\overset{n_e}{f(r)} = -\frac{1}{\pi}\int_r^a \frac{dF}{dx}\frac{dx}{(x^2-r^2)^{1/2}} \qquad (\text{只要当 } r \geq a \text{ 时有 } f(r)=0)$$

这样，我们就有一个简单公式，利用它可以从弦积分测量下求得径向分布函数f。这个过程常称之为Abel变换。

在实际情况下，我们只有有限个x值下的测量值F，因此要完成积分变换，就必须采用某种内插形式。此外，很显然有限的弦线的测量只能得到有限的$f(r)$的信息。因此，我们必须记住，如果我们利用内插导出有效连续的$f(r)$函数，则所导出的$f(r)$函数的许多细节都将与内插形式中所固有的假设有关。

许多作者已对具体地完成Abel变换的方法做了研究，并已有许多现成的计算机程序可用。这里就不作详细介绍了，有兴趣的读者可参阅有关文献。

$$\Phi_p = \int \frac{\omega_{pe}^2}{2\omega c} dl = r_e \lambda \int n_e dl$$

$$\alpha = \int \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}}{2\omega^2 c} dl$$

§2.5 反射法

频率为 f 的电磁波在密度单调增长(沿波传播方向)的等离子体中传播时，若遇到截止层(即 $n_e=n_c$)，波将被截止层反射，并沿着反入射方向传播回去。若测量了反射波，就有可能利用它来测量等离子体密度，这就是所谓反射法。

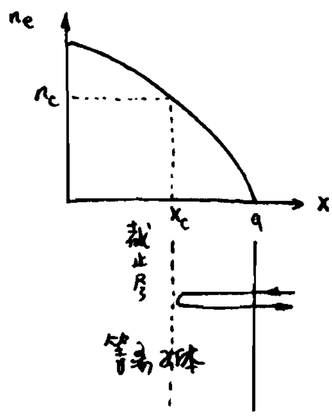
对于电离层等离子体，电子密度早就用反射雷达测量的，其原理就是反射法。雷达发射的一定频率的电磁波，在电离层中传播时，当遇到截止层，即 $f=f_{pe}$ 时，它就被反射。反射层的位置就由反射脉冲相对于发射脉冲的时间延迟决定(雷达原理)。这样，通过扫雷达频率，就可以测定电离层不同高度处的电子密度(当然要求电子密度随高度分布是单调上升的)：

$$\begin{cases} n_e(h) = 1.24\times10^{-2} f^2 \; [m^{-3}] & 1\text{GHz} \quad n_c = 1.24\times10^{16} \; [m^{-3}] \\ h = c\,\Delta t/2 \end{cases}$$

(这里已假定波在电离层中传播距离远大于电离层到地球的距离)

对于实验室等离子体，原则上讲，也可以用这类反射法测定电子密度分布。所不同的是，由于实验室等离子体尺寸小，使与反射层的距离短，反射信号的时间延迟是很小的(典型的是几 ns)，因而测量的不是反射波与入射波间的时间延迟，而是相位差。然而，相位通常也是利用相干干涉技术测量的，因而反射法实际上也是干涉法。

其实验安排如图所示。电磁波由位于等离子体边界上的天线射入等离子体，它在截止层处被反射，并在发射点附近接收该反射波。由此可见，它实际上是迈克尔逊干涉仪的结构，我们测量的是反射波相对于入射波的相位。由于这个相位携带反射点位置的信息，因而它有可能测量电子密度分布。



但它与反射雷达不同，这个相位差不仅与反射点和发射点间的距离有关，而且还与这区间中的等离子体折射系数有关，这和干涉仪中的情况一样，它会改变相位延迟。因而在推算反射层位置时，也必须考虑光程上的等离子体折射系数的变化，故从相位延迟来推算反射层的位置并不是直接了当的。

一. 相位延迟的计算：

因为反射法测量等离子体折射率截止电磁波在截止层附近的传播，这时因为 $\mu\to 0$，$\lambda\to\infty$，几何光学近似不适用，必须用全波解的方法求解波动方程。

为简单计，我们假定：(1) 入射波是平面波；(2) 波传播是一维的。则这在等离子体中传播时应满足下述的波动方程：

$$\frac{d^2E}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\mu^2(\omega,x)\,E=0 \qquad \varepsilon=\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2$$

可以证明，当

$$\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\left|\frac{d\mu}{dx}\right|}{\mu^2}\ll 1 \quad 或 \quad \frac{|\nabla k|}{k^2}\ll 1, \qquad L_n\gg\lambda$$

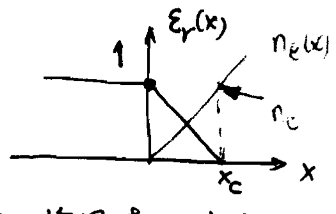
时，该波动方程有如下的形式解：

$$E(x)=E_0(x)\,e^{i\phi(x)} \qquad \phi(x)=\pm\frac{\omega}{c}\int\mu(x)\,dx$$

这就是干涉法和偏振法得以应用的基本依据。实际上，应用时都选择电磁波频率远大于等离子体截止频率，上述条件一般都满足。

当电磁波在截止层附近传播时，必须求解波动方程。一般情况下，波动方程只能数值求解。只有几种简单情况下才有精确的解析解。这里我们讨论最简单的一种情况，即假定：在截止点附近等离子体介电常数是线性变化的，即：

$$n_e(x)=n_c(\omega)\frac{x}{x_c}$$



其中 x_c 为截止点的坐标，$n_c(\omega)$ 为波频率为 ω 时的临界截止密度。而介电常数为：

$$\frac{d\varepsilon_r}{dx}=-\frac{1}{n_c}\frac{dn_e}{dx}=-\frac{1}{x_c}$$

$$\varepsilon_r(x)=\mu^2(x)=1-\frac{n_e(x)}{n_c}=1-\frac{x}{x_c}$$

$$\therefore x_c=\left(\frac{1}{n_e}\frac{dn_e}{dx}\right)^{-1}_{n_c}$$

在这种情况下波动方程可以改写为：

$$\frac{d^2E}{dx^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\left(1-\frac{x}{x_c}\right)E=0$$

= (47)

作如下的变量替换： 归一化长度

$$\xi=\left(\frac{\omega^2}{c^2x_c}\right)^{1/3}(x_c-x)=\left(\frac{\omega}{c}x_c\right)^{2/3}\varepsilon_r(x)\begin{cases}>0, & \text{当 } x<x_c \text{ 时}\\ =0, & \text{当 } x=x_c \text{ 时}\\ <0, & \text{当 } x>x_c \text{ 时}\end{cases}$$

则波动方程就变为：

$$\frac{d^2E}{d\xi^2}+\xi E=0 \qquad \text{Airy 方程}$$

这是个标准的 Airy 方程，它的一般解是 Airy 函数 $A_i(\xi)$ 和 $B_i(\xi)$ 的线性组合，其待定系数由边界条件定：(1) $\xi<0$ 时，$E(\xi)\to 0$；(2) $E(\xi)$ 在 $\xi=0$ 处连续；(3) $\frac{dE}{d\xi}$ 在 $\xi=0$ 处连续。此外，也可以利用如下的变量替换：

$$E(\xi)=\sqrt{\xi}\,G\left(\tfrac{2}{3}\xi^{3/2}\right)$$
$$\rho=\tfrac{2}{3}\xi^{3/2}$$

$$\begin{cases}E(\xi)\equiv\sqrt{\xi}\,G(\rho)\\ \rho\equiv\frac{2}{3}\xi^{3/2}\end{cases}$$

将 Airy 方程化成如下的 Bessel 方程：

$$\frac{d^2G}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dG}{d\rho}+\left(1-\frac{1}{9\rho^2}\right)G=0 \qquad \text{Bessel 方程}$$

利用边界条件后，Bessel 方程的解为：

$$E(\xi)=\begin{cases}A\,\xi^{1/2}\left[J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)+J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)\right] & \text{当 } \xi>0 \text{ 时}\\ \frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\xi)^{1/2}A\,K_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}\right] & \xi<0 \text{ 时}\end{cases}$$

$I_\nu(z)=i^{-\nu}J_\nu(iz)$ 或 $A(-\xi)^{1/2}\left\{-I_{\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}\right]+I_{-\frac{1}{3}}\left[\frac{2}{3}(-\xi)^{3/2}\right]\right\}$ $\xi<0$ 时

由此可见，由于截止层对入射电磁波的反射，使得在 $\xi>0$（即 $x<x_c$）处波动方程的解是个驻波解。当 $\xi\gg1$ 时，我们可利用贝塞尔函数的渐近表达式求得近似解为：

$$E(\xi)\simeq\frac{3A}{\sqrt{\pi}}\xi^{-\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{当 } \xi\gg1 \text{ 时}$$

因为 $x_c=\left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{-1}_{x_c}$

可得上述渐近解适用的条件为：

$$\xi = \left(\frac{\omega}{c}x_c\right)^{2/3}\varepsilon_r(x) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{-1}\right)^{2/3}\varepsilon_r(x) \gg 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\varepsilon_r^{3/2}}{\left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|} \gg 1$$

这个不等式与几何光学近似成立的条件

$$\frac{\lambda}{2\pi}\frac{\left|\frac{d\mu}{dx}\right|}{\mu^2} \ll 1 \qquad 或 \qquad \frac{|\nabla k|}{k^2} \ll 1 \qquad \lambda \ll L_n$$

是等价的，因为 $\varepsilon_r(x) = \mu^2(x)$。这样，渐近解也具有几何光学解相同的形式，这是因为相位因子为：

$$\frac{2}{3}\xi^{3/2} - \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\frac{\omega}{c}x_c\,\varepsilon_r^{3/2}(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{\omega}{c}\int_x^{x_c}\sqrt{1-\frac{x}{x_c}}\,dx - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\omega}{c}\int_x^{x_c}\mu(x)\,dx - \frac{\pi}{4}$$

由此可见，与几何光学解的相位因子相比，它只是多了常数的相位移 $(-\frac{\pi}{4})$。这样，如果入射波是在 $X=0$ 处射入等离子体，则在该处反射波与入射波间的相位移为：

$$\phi = 2\frac{\omega}{c}\int_0^{x_c}\mu(x)\,dx - \frac{\pi}{2}$$

它与几何光学解给出的相位移只差 $\frac{\pi}{2}$。因为在通常条件下，有：

$$2\frac{\omega}{c}\int_0^{x_c}\mu(x)\,dx \gg \frac{\pi}{2}$$

所以，其相位修正是很小的。

当截止层附近电子密度分布不是线性函数时（即任意函数时），我们可以在该截止点附近，将分布函数做泰勒级数展开，只要下述条件满足：

$$\frac{d^2 n_e(x)}{dx^2}\delta x \ll \frac{dn_e(x)}{dx}$$

则截止层附近的电子密度分布仍可用线性函数近似，这样，上述渐近解仍适用。因此，渐近解适用的条件是：

(1) 几何光学近似成立，即

$$\xi = \left(\frac{\omega}{c}\left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{-1}_{x_c}\right)^{2/3}\varepsilon_r(x) = \left(\frac{\omega}{c}\left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{-1}_{x_c}\right)^{2/3}\left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|_{x_c}(x_c - x) \gg 1$$

实际上，只要取 $\xi=5$，渐近解的误差就可以小于1%。这样，上述条件可等价地表示为：

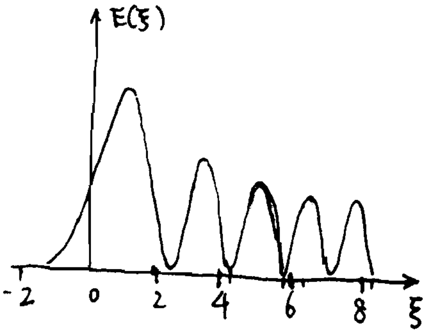
$$\delta x \equiv |x_c - x| \geq 5\left[\frac{\lambda_0}{2\pi}\left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{-1/2}_{x_c}\right]^{2/3} = 5\left[\frac{\lambda_0 L_n^{1/2}}{2\pi}\right]^{2/3}$$

(2) $\varepsilon_r(x)$ 的线性近似成立，即：

$$\left|\frac{d^2\varepsilon_r}{dx^2}\right|_{x_c}\delta x \ll \left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|_{x_c}$$

将 δx 的表达式代入上式，得：

$$\left|\frac{d^2\varepsilon_r}{dx^2}\right|_{x_c} \ll \left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{4/3}_{x_c} k_0^{2/3}/5 \simeq \left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{4/3}_{x_c} \lambda_0^{-2/3}$$



波动方程在 ε_r 线性近似条件下的精确解如图所示，在 $\xi>0$ 处是个驻波解。而在 $\xi<0$ 处（即 $x>x_c$），$E(\xi)$ 近似为指数衰减，因此波是在有限厚度范围内反射的。由贝塞尔函数的渐近表达式：

$$K_\nu(|z|) \propto e^{-|z|}, \quad 当\ |z|>1\ 时$$

可求得 $E(\xi)$ 衰减到其峰值的 e^{-1} 时的特征长度为反射层的有效厚度，这是反射计的空间取样厚度：

$$|z| = 1, \quad \frac{2}{3}|\xi|^{3/2} = 1$$

即

$$\Delta x \doteq \left(\frac{c^2}{\omega^2}x_c\right)^{1/3} = \left(\frac{\lambda_0^2 L_n}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\because \quad x_c = \left|\frac{d\varepsilon_r}{dx}\right|^{-1}_{x_c} = \left|\frac{1}{n_c}\frac{dn_c}{dx}\right|^{-1}_{x_c}$$

总之，由上述分析可知，当电磁波在等离子体传播时遇到截止层时，在等离子体边界处，反射波与入射波间的相位差可用渐近解表示：

$$\Phi(f) = \frac{4\pi f}{c}\int_0^{x_c(f)} \left[1 - \frac{f_{pe}^2(x)}{f^2}\right]^{1/2} dx - \frac{\pi}{2}$$

由此可见，单一频率反射波的相位测量，不能直接得到平均密度，因为截止层的位置是未知的，这是反射计的不足之处（与干涉法相比）。但是，如果入射波的频率是扫描的，则从不同频率下的相位延迟的测量，就可以推导出反射层路上的电子密度分布。

从相位延迟表达式，我们可以计算群延迟时间

$$\tau(f) \equiv \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(f)}{df} = \frac{2}{c}\int_0^{x_c(f)} \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{pe}^2(x)}}\,dx$$

将该式做变量替换：$f = \frac{c}{\lambda}$，$f_{pe} = \frac{c}{\lambda_p}$

可得 $\frac{1}{2\pi}\frac{d\Phi}{df} = 2\int_\lambda^\infty \left(\frac{dx_c}{c\,d\lambda_p}\right)\frac{\lambda_p\,d\lambda_p}{\sqrt{\lambda_p^2-\lambda^2}}$，这就是阿贝尔积分方程

$$F(x) = 2\int_x^a f(r)\frac{r\,dr}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$f(r) = -\frac{1}{\pi}\int_r^a \frac{dF}{dx}\frac{dx}{\sqrt{x^2-r^2}}$$

作变量替换：$u(x) \equiv f_{pe}^2(x)$，$\nu \equiv f^2$

得：

$$\nu^{-\frac{1}{2}}\tau(\sqrt{\nu}) = \frac{2}{c}\int_0^{x_c(\sqrt{\nu})}\frac{dx}{\sqrt{\nu - u(x)}}$$

上式两边同乘以 $\frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{W-\nu}}$，并对 ν 从 0 积分到 W，得：

$$\frac{1}{\pi}\int_0^W \frac{\nu^{-\frac{1}{2}}\tau(\sqrt{\nu})}{\sqrt{W-\nu}}\,d\nu = \frac{2}{\pi c}\int_0^W d\nu\int_0^{x_c(\sqrt{\nu})}\frac{dx}{\sqrt{W-\nu}\sqrt{\nu-u(x)}}$$

交换上式右边的积分顺序，得：

$$\frac{2}{\pi c}\int_0^W d\nu\int_0^{x_c(\sqrt{\nu})}\frac{dx}{\sqrt{W-\nu}\sqrt{\nu-u(x)}} = \frac{2}{\pi c}\int_0^{x_c(\sqrt{W})}dx\int_u^W\frac{d\nu}{\sqrt{W-\nu}\sqrt{\nu-u(x)}}$$

作变量替换

$$\nu = W\cos^2\theta + u\sin^2\theta$$

上式的积分得：

$$\frac{2}{\pi c}\int_0^{x_c(\sqrt{W})}dx\int_u^W\frac{d\nu}{\sqrt{W-\nu}\sqrt{\nu-u(x)}} = \frac{2}{c}x_c(\sqrt{W})$$

故有，

$$x_c(\sqrt{W}) = \frac{c}{2\pi}\int_0^{W} \frac{\nu^{-\frac{1}{2}}\,\tau(\sqrt{\nu})}{\sqrt{W-\nu}}\,d\nu = \frac{c}{\pi}\int_0^{f_{pe}} \frac{\tau(f)}{\sqrt{f_{pe}^2-f^2}}\,df$$

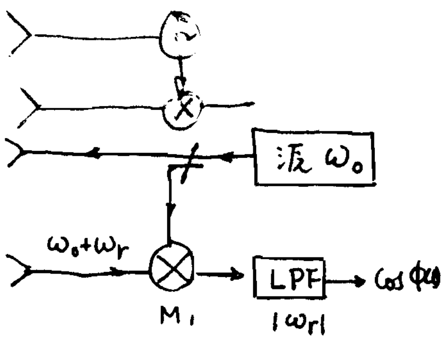
$x_c(f)$

$$x_c(f_{pe}) = \frac{c}{2\pi^2}\int_0^{f_{pe}} \frac{d\phi(f)}{df}\,\frac{df}{\sqrt{f_{pe}^2-f^2}} = \frac{c}{2\pi^2}\int_0^{f} \frac{d\phi}{df'}\,\frac{df'}{\sqrt{f^2-f'^2}}$$

这就是相位延迟表达式的阿贝尔变换。由此可知，为了求与截止频率 f_{pe} 相对应的截止点的位置，必须使入射波频率从 $0 \to f_{pe}$ 扫描，并测量每个频率下的 $d\phi/df$ 值。实际上，入射波频率不可能从 $f=0$ 开始扫描，而是从某一最低频率 f_1 开始扫描。因此，$f<f_1$ 的相位信息损失了。这可以从假定的密度分布或用其它方法测量的密度分布计算这部分也即密度分布对积分的贡献。但实际上这部分的贡献是可以忽略的，这是因为对足够低的频率，入射波实际上是在边界附近反射的，$\frac{d\phi}{df}$ 很小，这时阿贝尔积分的贡献很小，可忽略。

二. 反射计：

1. 简单反射计



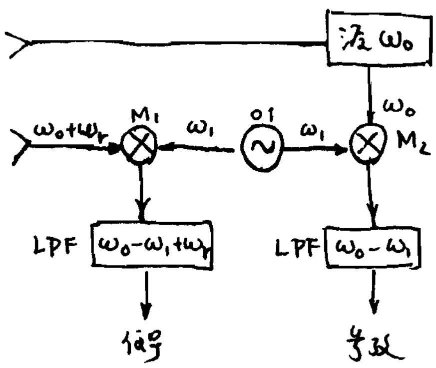
这是零拍探测的反射计。接收天线接收的信号为：

$$S(t) = a(t)\cos[\omega_0 t + \phi(t)]$$

其中 $a(t)$（幅度）和 $\phi(t)$（相角）是随时间慢变化的函数（在 f_0^{-1} 量级的时间尺度内）。频率 $\omega_r = d\phi/dt$ 可以认为是反射波的瞬时多普勒频移。在没有密度涨落的情况下，$a(t) \simeq$ 常数，则相位延迟携带反射层的信息。在有密度涨落情况下，$a(t)$ 和 $\phi(t)$ 也携带涨落的统计性质的信息。在如图所示的零拍探测的条件下，低通滤波器（LPF）的截止频率，应保证 $\omega_c > |\omega_r|$。这种探测方法的缺点是失去了相位变化的符号。其次，它的动态范围（即测量的动态范围）受源的 AM 噪声和混频器的 f^{-1} 噪声的限制。

2. 外差探测的设计

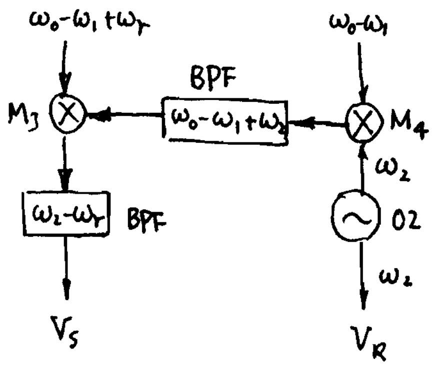
为避免这些缺点，可采用外差探测的方法。如图所示用另一个微波源做本振，其频率为 $\omega_1(\simeq\omega_0)$，其中频频率为 $|f_0-f_1|\simeq 500$ MHz。通过两个信号的相位比较，可获得 ω_r（即 $\phi(t)$）的信息。在这种方案中为补偿微波源的频率跳变和漂移，可以进一步采取稳频措施，



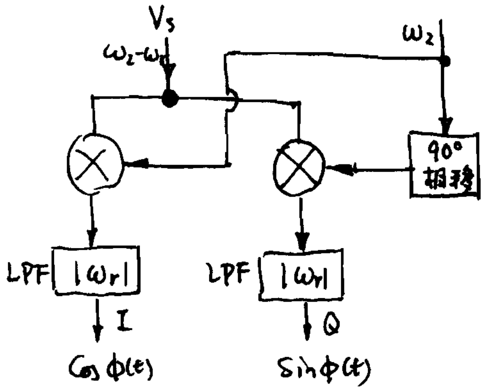
如图所示，可在上图基础上加一稳定的中频级。O2是晶体控制的稳定的振荡器，其频率为 ω_2，它满足

$$|\omega_r| \ll \omega_2 < |\omega_0-\omega_1|$$

从 M_4 输出的单边带信号 $\omega_0-\omega_1+\omega_2$ 通过带通滤波器后，在 M_3 与上面的信号混频后，获得频率为 $\omega_2-\omega_r$ 的信号。



此时，上述还可进一步采用正交相位探测方法处理

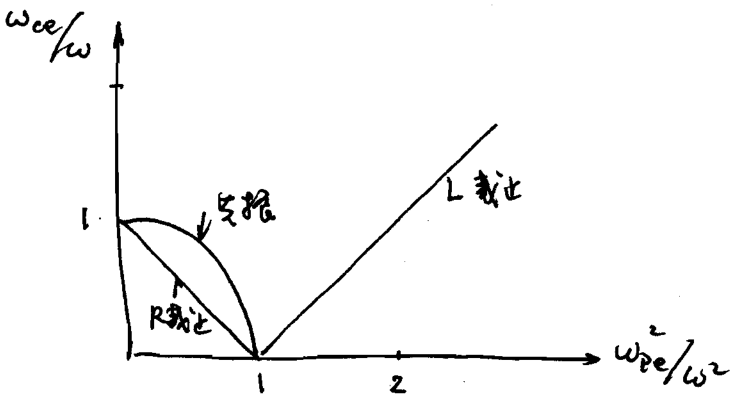


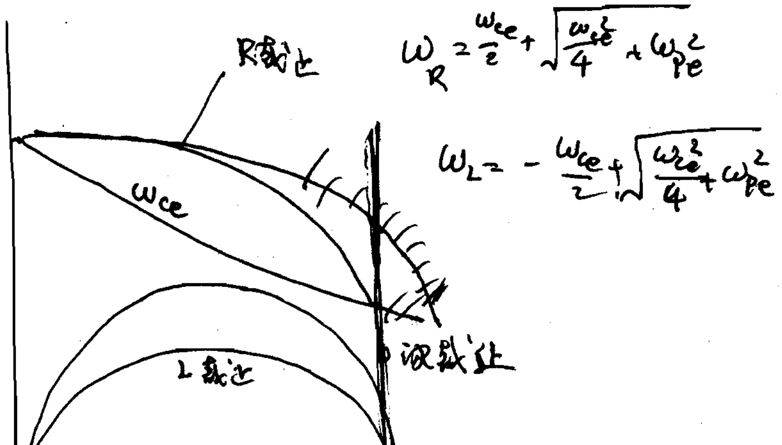
一般情况下：

$$\frac{d\phi}{d\omega} = 2\int_0^{x_c(\omega)} \frac{dx}{u} \qquad u\text{为群速度}$$

对于 O 波 $\quad u_o \equiv c\mu_o$

对于 X 波 $\quad u_X \equiv c\mu_X \dfrac{(1-X-Y^2)^2}{(1-X-Y^2)^2+XY^2}$





3. 反射计的应用. $n_c = 1.11\times10^{15}\lambda^{-2}[m]$ $[m^{3}]$

(1) 测量密度分布 $n_e(r)$ 　　宽带扫频反射计

　　　　　　　　　　　　　多道宽带扫频反射计

(2) 测量密度涨落 　　　固定频率反射计

反射计对密度的响应如下：中频输出信号

$$S_{IF}(t) = \cancel{\left[(E_0+\tilde{E})e^{i\tilde{\Phi}}\right]\left(E_{Lo}e^{i\Phi_0}\right)^*} \quad \left(E\, e^{i\Phi}\right)\left(E_{Lo}e^{i\Phi_0}\right)^*$$

其中 $E = E_0 + \tilde{E}$ ， $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}$

当 $\tilde{\Phi} < 1$ 时，可近似得：

$$S_{IF}(t) = \left[\; E_0\left(1 + \frac{\tilde{E}}{E_0} + i\tilde{\Phi}\right)\right] E_{Lo}$$

由此可见，S_{IF} 涨落 $\tilde{S}_{IF}$ 含有 $\tilde{E}$ 和 $\tilde{\Phi}$ 的信息，对零拍探测的反射计，$\tilde{E}$ 和 $\tilde{\Phi}$ 对 $\tilde{S}_{IF}$ 的贡献是不可区分的。只有外差探测和正交探测才能把 $\tilde{\Phi}$ 和 $\tilde{E}$ 区分开来。

　deal，根据反射计相位移公式：

$$\Phi = 2\frac{\omega}{c}\int_0^{x_c}\mu\, dx = 2\frac{\omega}{c}\int_0^{x_c}\sqrt{\varepsilon_r}\, dx$$

若 $\varepsilon = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}$ ， $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon_0}\right)$

$\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi}$

则有 $$\tilde{\Phi} = \frac{\omega}{c}\int_0^{x_c}\frac{\tilde{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0}}\, dx$$

若在截止点附近密度梯度是常数，则 $\varepsilon_0 = 1 - \frac{x}{x_c}$

由上式积分，可得：

$$\tilde{\Phi} = 2\frac{\omega}{c}x_c\tilde{\varepsilon} = 2\frac{\omega}{c}x_c\frac{\tilde{n}_e}{n_c}$$

(只知可以说借此处的射程) 无效

这与 $\tilde{n}_e$ 成正比。因为反射层有一定厚度 $\Delta x = \left(\frac{c^2}{\omega^2}x_c\right)^{1/3} = (k_0x_c)^{1/3}/k_0$.

因此这只对长波涨落灵敏，即 $|k| < k_G = \frac{\pi}{\Delta x}$。

理论研究表明：反射计的相位响应对临界点附近尤灵敏，而此处WKB近似不适用。

上述只是粗略的估计.

近似不适用，因此上式只是粗略的估计。

(3) 反射计的基本限制

使得 $\frac{d^2n_e}{dx^2}\delta x \ll \frac{dn_e}{dx}$ 条件不满足

中心区：在等离子体中心处，$\frac{dn_e}{dr}$ 近于零。对于O波传播，由于 E_r 呈非线性变化。同时 L_n 很大，使波的衰减长度很长，从而使得电磁波还没有完全衰减之前又达到传播区，使反射信息的分辨比较困难。对于X波反射，因为 E_r 与 ω_{ce} 有关，该限制可避免。

一般约为 $1\times10^{18}\ m^{-3}$

边缘区：在边缘区密度梯度通常比较大，而对O波反射计，相应的波长也比较长，使得几何光学近似不适用。而且，如果梯度足够陡，由此密度梯度的反射也是可能的。

电子回旋吸收区：当波频率接近于 ω_{ce} 时(或其谐波频率时)，辐射吸收是可能发生的。如果波在达到反射层之前经过吸收区，则反射测量就变得不可能了。

(4). 波模的选择

O波 — 主要测量最大密度的97%以上

X波 — 主要测量整个剖面的分布

4. 与干涉仪的比较

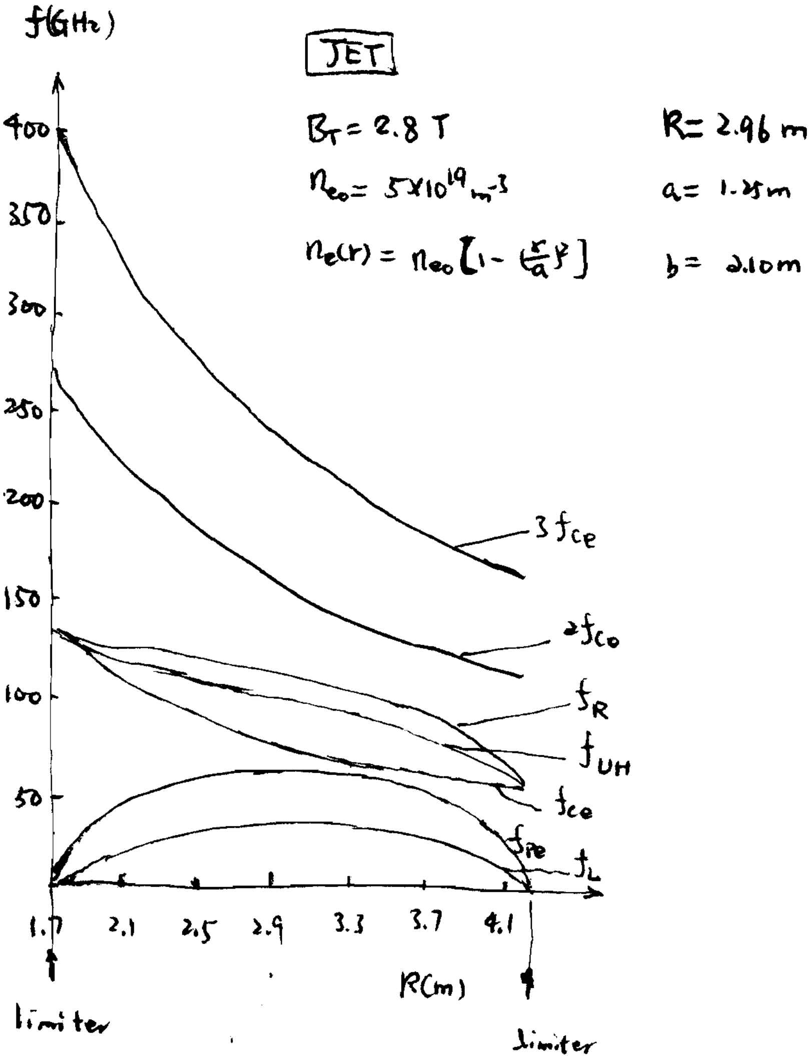
1) 反射计是局域的，因相位测量主要在 $\mu\to0$ 处。干涉仪测量 μ 的微小变化，它的测量不是局域的

(2) 反射计是测量临界密度层相对于固定点的位置，因此主要测量的是等离子体整体运动(即使密度剖面和幅度不变)。干涉仪测量的是密度分布的变化，对等离子体整体运动不灵敏。

(3) 反射计为取得局域的密度分布，不需要轴对称的假定，而干涉仪需要轴对称的假定。

参考文献：PPCF 38 (1996) 901~930

RSI 69 (1998) 2201~2217



X[illegible] : [illegible] $n_e(r)$ [illegible]

O[illegible] : [illegible] $n_e(r)$ [illegible]

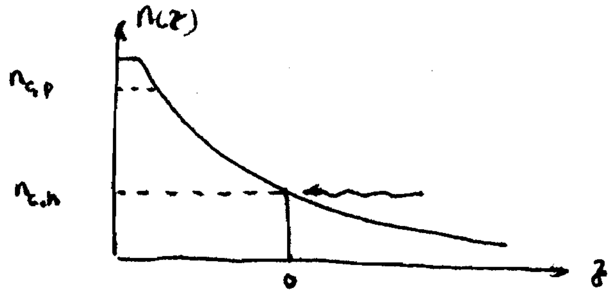
$6\times10^{12} \sim 1.5\times10^{14}\ cm^{-3}$, 22GHz ~ 110 GHz

$$f_R = \frac{f_{ce}}{2} + \sqrt{f_{ce}^2/4 + f_{pe}^2}$$

$$f_L = -\frac{f_{ce}}{2} + \sqrt{f_{ce}^2/4 + f_{pe}^2}$$

▲ 用于激光等离子体密度测量的干涉仪

等离子体特点：密度高，梯度大



$$n_e(z) = n_{c,h} \exp\left(-\frac{8r^2}{L^2}\right) \exp\left(-\frac{z}{l}\right)$$

L：为横向密度高斯分布下降到 e^{-2} 的半径，$L \sim 100\ \mu m$ 量级

l：为轴向密度高斯的特征长度，$l \sim 10\ \mu m$

1. 折射偏转角

$$\psi = \tan^{-1}\left[0.313 \frac{L}{l}\left(\frac{\lambda_p}{\lambda_h}\right)^2\right]$$

当 $\lambda_p = \frac{1}{2}\lambda_h$ 时，$\psi \simeq 40°$；$\lambda_p = \frac{1}{4}\lambda_h$ 时，$\psi \simeq 10°$

折射效应是比较严重的，应该用短 λ_p 做探针束

2. 临界密度区所在空间问题 — 分辨率

$$(\Delta Z)_{空间问题} \simeq \frac{l \lambda_h^2}{L \lambda_p}$$

若 $\lambda_h = 1.06\ \mu m$，$\lambda_p = 0.265\ \mu m$，$l \approx 10\ \mu m$，$L \approx 100\ \mu m$

$$(\Delta Z)_{空间问题} \simeq 2\ \mu m$$

3. 探针束脉宽

$$\Delta\tau \le \frac{(\Delta Z)_{空间问题}}{4 v_c}$$

v_c 临界区处等离子体膨胀速度

当 $v_c = 2.5\times10^4\ m/s$ 时　　$\Delta\tau \sim 20\ ps$