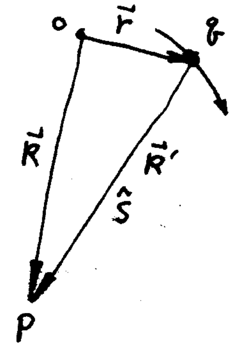
第三章 电磁波散射

§3.1 电磁波从自由电子的散射

一、加速运动电荷的辐射（电偶极辐射）



当运动电荷的辐射光子能量远小于带电粒子的动能W，即

$$h\nu \ll W$$

时，加速运动电荷的辐射过程可用经典辐射理论处理。根据经典辐射理论，加速运动电荷产生的辐射电磁场为：

$$\begin{cases} \vec E(\vec R, t) = \dfrac{q}{4\pi c^2 \varepsilon_0}\left\{\dfrac{\hat s \times [(\hat s - \vec\beta)\times \dot{\vec v}]}{(1-\vec\beta\cdot\hat s)^3 R'}\right\}_{t'} \\[2ex] \vec B(\vec R, t) = \dfrac{1}{c}\hat s \times \vec E(\vec R, t) \end{cases}$$

其中 $\hat s \equiv \vec R'/R'$，当 $R \gg r$ 时，$R \simeq R'$，$\hat s \parallel \hat R$；t' 为推迟时间

$$t' = t - \frac{R'}{c}$$

这里观察点P处单位立体角内的辐射功率为：

$$\frac{dP(\vec R, t)}{d\Omega} = R'^2 (\vec E \times \vec H)\cdot \hat s = R'^2 c\varepsilon_0 |\vec E(\vec R, t)|^2$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3}\left\{\frac{\hat s \times [(\hat s - \vec\beta)\times \dot{\vec v}]}{(1-\vec\beta\cdot\hat s)^3}\right\}^2_{t'}$$

由此可见：(1) 只有做加速运动的带电粒子才会产生辐射。根据加速度产生机制辐射可分为两类：一种是外力作用下产生的辐射，如回旋辐射及电磁波散射；另一类是碰撞过程产生的辐射，如韧致辐射等。

(2) 质量小的带电粒子易产生明显的辐射。在等离子体中，一般离子的辐射远小于电子的辐射，这是可忽略的。

二、单个自由电子对电磁波的散射

假定：(1) 入射光子能量比电子静止能量小很多，即 $h\nu_i \ll m_{e0}c^2$

(2) ~~电子在入射波作用下振荡的幅度比入射波长小很多，即~~ $\frac{eE_{i0}}{m_{e0}\omega_i c} \ll 1$ 入射电磁波对电子运动轨道的扰动可忽略，即 $\frac{eE_{i0}}{m_{e0}\omega_i} \ll v_{te}$

设入射电磁波是单色、平面偏振波

$$E_i(\vec r,t) = \hat e\, E_{i0} \exp\left[i(\omega_i t - \vec k_i\cdot\vec r)\right] \qquad \hat e \equiv \vec E_{i0}/E_{i0}$$

$$\vec B_i(\vec r,t) = \frac{\hat i\times\vec E_i(\vec r,t)}{c} \qquad \hat i = \vec k_i/k_i$$

电子在该辐射场中的运动方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_{e0}\vec v}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = -e\left[\vec E_i + \vec v\times\vec B_i\right]$$

$\gamma m_{e0}\dot{\vec v} + \gamma^3 m_{e0}\vec v(\vec\beta\cdot\dot{\vec\beta}) = -e(\vec E_i + \vec v\times\vec B_i)$

上式点乘 $\vec v$，得：

$m_{e0}\gamma^3(\vec v\cdot\dot{\vec v}) = -e\vec E_i\cdot\vec v$

由此解得：

由此可解得电子的加速度为：

$$\dot{\vec v} = -\frac{e}{m_{e0}\gamma}\left[\vec E_{i0} + \vec\beta\times(\hat i\times\vec E_{i0}) - \vec\beta(\vec\beta\cdot\vec E_{i0})\right]\exp\left[i(\omega_i t - \vec k_i\cdot\vec r)\right]$$

其中 $\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

代入电偶极辐射公式，得电子在入射电磁波作用下产生的再辐射电场（即散射电场）为：

$$\vec E_s(\vec R,t) = \frac{r_e}{R'}(1-\beta^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\hat s\times\{(\hat s-\vec\beta)\times[\hat e+\vec\beta\times(\hat i\times\hat e)-\vec\beta(\vec\beta\cdot\hat e)]\}}{(1-\hat s\cdot\vec\beta)^3}$$

$$E_{i0}\exp\left[i(\omega_i t' - \vec k_i\cdot\vec r(t'))\right]$$

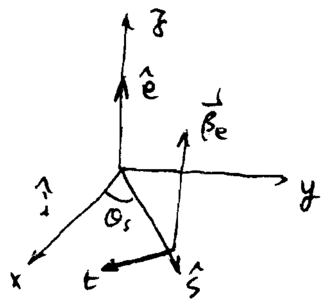
其中 $r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_{e0}c^2}$ 为电子经典半径

$\hat s = \vec R'/R' \simeq \vec R/R$ （当 $|R| \gg \vec r$ 时）

若取 $\hat s\perp\hat e$（即 $\hat s\cdot\hat e = 0$）和 $\hat t = \hat s\times\hat e$

上式就变为：

即取散射方向垂直于入射电场方向



$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta_s)^3}\Big\{\hat{e}\left[(1-\beta_i)(1-\beta_s)-\beta_e^2(1-\cos\theta_s)\right] + \hat{s}\left[\beta_e\beta_s(1-\cos\theta_s)\right]$$
$$-\hat{t}\left[\beta_t\beta_e(1-\cos\theta_s)-\beta_e(1-\beta_s)\sin\theta_s\right]\Big\} E_{i0}\exp\left[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))\right]\Big\}$$

其中 $\beta_s = \vec{\beta}\cdot\hat{s}$， $\beta_e = \vec{\beta}\cdot\hat{e}$， $\beta_i = \vec{\beta}\cdot\hat{i}$， $\beta_t = \vec{\beta}\cdot\hat{t}$， $\hat{s}\cdot\hat{i} = \cos\theta_s$

由此可见散射电场在一般情况下不再平行于入射电场。在散射实验中，通常是测量线偏振的散射光，即只选取散射电场平行于 $\hat{e}$ 的分量。由此可得：

$$\hat{e}\cdot\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}E_{i0}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}\left[(1-\beta_i)(1-\beta_s)-\beta_e^2(1-\cos\theta_s)\right]}{(1-\beta_s)^3}\exp\left[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))\right]$$

以后没有特别说明，$E_s(\vec{R},t)$ 都是表示 $\vec{E}_s(\vec{R},t)$ 在 $\hat{e}$ 方向上的分量。由此可计算散射在 $\vec{R}$ 处的单位立体角内的平均功率为：

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = \varepsilon_0 c R'^2 |E_{s0}|^2 = p_i r_e^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{[1-\beta_s]^4}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2$$

其中 $p_i \equiv P_i/A_i$ 为入射电磁波的平均功率密度。
$= c\varepsilon_0 E_{i0}^2$

现在我们只考虑散射波电场的相角。推迟时间 t' 为：

$$t' = t - \frac{|\vec{R}-\vec{r}|}{c} \simeq t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c} \quad 当\ |\vec{R}| \gg |\vec{r}|\ 时$$

此时，若不考虑入射电~~磁场~~磁波对电子运动轨道的影响，则

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(0) + \vec{v}t'$$

$$\frac{eE_{i0}}{m_e\omega_i} \ll \left(\frac{T_e}{m_e}\right)^{1/2}$$

$$\frac{eE_{i0}}{m_e\omega_i c} \ll 1$$

代入上式，得：

$$t' = \frac{t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(0)}{c}}{1-\beta_s}$$

则散射电场的相角为：

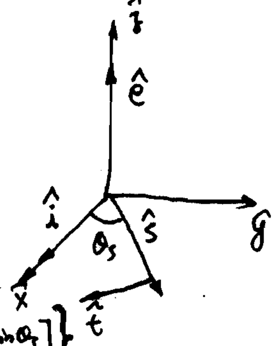
$$\Phi(t) = \omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t') = \omega_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}\left(t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(0)}{c}\right) - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(0)$$

$$= \omega_s\left(t - \frac{R}{c}\right) + \vec{k}\cdot\vec{r}(0)$$

$$\vec{E}_s(\vec{R},t)=\frac{r_e}{R'}(1-\beta^2)^{1/2}\frac{\hat{s}\times\{(\hat{s}-\vec{\beta})\times[\hat{e}+\vec{\beta}\times(\hat{i}\times\hat{e})-\vec{\beta}(\vec{\beta}\cdot\hat{e})]\}}{(1-\beta_s)^3}E_{i0}\exp\{i[\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r}(t')]\}$$

三.3 附

▲ 单个自由电子对电磁波的散射



$R \gg r$, $\boxed{\hat{s}\perp\hat{e}}$, $\hat{t}\equiv\hat{s}\times\hat{e}$

$$\vec{E}_s(\vec{R},t)=-\frac{r_e}{R'}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{(1-\beta_s)^3}\Big\{\hat{e}\left[(1-\beta_i)(1-\beta_s)-\beta_e^2(1-\cos\theta_s)\right]$$

$$+\hat{s}\left[\beta_e\beta_s(1-\cos\theta_s)\right]-\hat{t}\left[\beta_e\beta_t(1-\cos\theta_s)-\beta_e(1-\beta_s)\sin\theta_s\right]\Big\}$$

$$\times E_{i0}\exp\{i[\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r}(t')]\}$$

其中 $\beta_s\equiv\vec{\beta}\cdot\hat{s}$, $\beta_i\equiv\vec{\beta}\cdot\hat{i}$, $\beta_e\equiv\vec{\beta}\cdot\hat{e}$, $\beta_t\equiv\vec{\beta}\cdot\hat{t}$, $\cos\theta_s\equiv\hat{i}\cdot\hat{s}$

取 $\boxed{\vec{E}_s\parallel\hat{e}\text{ 分量}}$

$$\hat{e}\cdot\vec{E}_s(\vec{R},t)=-\frac{r_e}{R'}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}(1-\beta_i)}{(1-\beta_s)^2}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]E_{i0}\exp\{i[\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r}(t')]\}$$

$$E_{s0}=\frac{r_e}{R'}\frac{(1-\beta^2)^{1/2}(1-\beta_i)}{(1-\beta_s)^2}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]E_{i0}$$

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega}=R'^2c\varepsilon_0|E_{s0}|^2=p_i r_e^2\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^4}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2$$

其中 $p_i\equiv\dfrac{P_i}{A_i}=c\varepsilon_0E_{i0}^2$

$$\begin{cases} t'=t-\dfrac{|\vec{R}-\vec{r}|}{c}\simeq t-\dfrac{R}{c}+\dfrac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c}\\ \vec{r}(t')=\vec{r}(0)+\vec{v}\,t'\end{cases}$$

$$t'=\frac{t-\frac{R}{c}+\frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(0)}{c}}{1-\beta_s}$$

当 $\beta \ll 1$ 时，有

其中
$$\begin{cases} \omega_s \equiv \omega_i \dfrac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \\ \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i \quad \text{散射矢量} \\ k_s = k_i \dfrac{1-\beta_i}{1-\beta_s} \\ k = \left(k_s^2 + k_i^2 - 2k_i k_s \cos\theta_s\right)^{1/2} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \omega_s = \omega_i + \vec{k}\cdot\vec{v} \\ \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i \\ k_s \simeq k_i \\ k = 2k_i \sin\dfrac{\theta_s}{2} \quad \text{布拉格条件} \end{cases}$$

由此可见：

(1) 散射波是多普勒频移了的电磁波，当 $\beta \ll 1$ 时，~~频移~~频移为

$\omega = \vec{k}\cdot\vec{v} = k v_k$，它是由电子运动速度在 $\vec{k}$ 方向上的投影分量决定

(2) ~~当 v_k 相同时~~，散射波的相角是由电子的初始位置决定

以量子力学角度看，散射可视为光子和电子的弹性散射，因而它应满足能量和动量守恒（散射前 ω_i，$\vec{k}_i$，$\vec{v}$，散射后 ω_s，$\vec{k}_s$，$\vec{v}'$）：

$$\begin{cases} \hbar\omega_i + m_e c^2 = \hbar\omega_s + m_e' c^2 \\ \hbar\vec{k}_i + m_e\vec{v} = \hbar\vec{k}_s + m_e'\vec{v}' \end{cases}$$

其中 $\quad m_e \equiv m_{e0}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$， $\quad m_e' \equiv m_{e0}(1-\beta'^2)^{-\frac{1}{2}}$

$\quad \beta \equiv v/c$， $\quad \beta' \equiv v'/c$

由此可解得

$$\omega_s = \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s + \frac{\hbar\omega_i}{m_e c^2}(1-\cos\theta_s)}$$ 此为康普顿散射频率

由此可见，当 $m_e c^2 \gg \hbar\omega_i$ 时，就有

$$\omega_s \simeq \omega_i \frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}$$ 其中 $\beta_i = \vec{\beta}\cdot\hat{i}$，$\beta_s = \vec{\beta}\cdot\hat{s}$

因此汤姆逊散射是~~康普顿散射~~低能光子极限下的康普顿散射。

三. 非相对论近似：$\beta \ll 1$

这时有

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = \frac{r_e}{R}\left[\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})\right]E_{i0}\exp\left[i\left(\omega_s t + \vec{k}\cdot\vec{r}(0)\right) - k_s R\right]$$

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = \varepsilon_0 c R'^2 |\vec{E}_{s0}|^2 = p_i r_e^2 |\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})|^2$$

微分散射截面

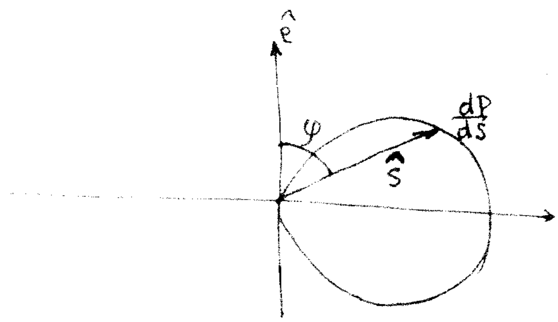
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dP_s}{d\Omega}\Big/ p_i = r_e^2 |\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})|^2$$

当散射方向与入射波电矢量的夹角为 φ 时，则有 $|\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})| = \sin\varphi$

故 $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2\varphi$$

由此可见，只有当 $\hat{s}\perp\hat{e}$ 时，$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 才达最大值。因此，散射空间中，若要那散射平面（由 $\hat{i}$ 和 $\hat{s}$ 决定的平面）垂直于 $\hat{e}$。散射总截面为:

$$\sigma_T = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665\times10^{-28}\ m^2 = 0.665\ 靶$$



§3.2 从低温、无磁场等离子体的散射

基本假设：(1) 电子的运动速度远小于光速，即 $\beta \ll 1$，相对论效应可忽略

(2) $\hbar\omega_i \ll m_{e0}c^2$，量子效应可忽略

(3) 完全电离等离子体，即略去和中性粒子散射可忽略

(4) 离子对散射的贡献可忽略，但离子和集体运动对电子的运动有影响，从而影响电子的散射谱

(5) $\omega_i \gg \omega_{pe}$，即等离子体的折射、衍射和吸收效应可忽略

(6) 入射电磁波对电子运动轨道的扰动可忽略，即 $\frac{eE_{i0}}{m_e\omega_i} \ll \left(\frac{2kT_e}{m_e}\right)^{1/2}$

(7) $B_0 = 0$

一、等离子体对电磁波的散射

由上节知，当 $\beta \ll 1$ 时，单个自由电子在单色平面波的作用下，其诱发产生散射的电磁波，其电场量为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = \frac{r_e}{R'}\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})E_{i0}\exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))]$$

其中 $$t' = t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c}$$

若散射体积 V_s 内有 N 个电子，其平均密度为 $n_{e0} = N/V_s$，而电子密度分布为：

$$n_e(\vec{r},t) = \sum_j^N \delta(r - r_j(t))$$

则总的散射电场为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = \frac{r_e}{R'}\cancel{\Sigma}\,\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})E_{i0}\int_{V_s}d\vec{r}\,n_e(r,t')\exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))]$$

$$= \frac{r_e}{R'}\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})E_{i0}\sum_{j=1}^N \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}_j(t'))]$$

$$= \sum_{j=1}^N \vec{E}_{sj}(\vec{R},t')$$

其中 $$\vec{E}_{sj}(\vec{R},t') = \frac{r_e}{R'}\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})E_{i0}\exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}_j(t'))]$$

在R处单位立体角内的平均散射功率为

由此可见：E_s 是各个电子的散射电场的矢量叠加，当 E_{sj} 相位相同时，总散射电场强度

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = c\varepsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \left|\vec{E}_s(\vec{R},t)\right|^2$$

$$= c\varepsilon_0 R'^2\ \overline{\sum_{j=1}^{N}\vec{E}_{sj}(\vec{R},t')\cdot\sum_{l=1}^{N}\vec{E}^{*}_{sl}(\vec{R},t')}$$

二. 散射功率谱:

单位立体角内的散射功率为:

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = c\varepsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt \left|E_s(\vec{R},t)\right|^2$$

我们取散射电场的付里叶变换为:

$$E_s(\vec{R},\omega_s) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ E_s(\vec{R},t)\ e^{-i\omega_s t}$$

则根据付里叶变换的帕塞伐尔(Parseval)定理:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\vec{E}_s(\vec{R},t)\right|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\vec{E}_s(\vec{R},\omega_s)\right|^2 d\omega_s \quad (\text{结果分析})$$

有

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = c\varepsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}\left|\vec{E}_s(\vec{R},\omega_s)\right|^2 d\omega_s$$

将上式对 ω_s 求导数，可得散射功率谱为:

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega d\omega_s} = c\varepsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}\left|E_s(\vec{R},\omega_s)\right|^2$$

$$= c\varepsilon_0 R'^2 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}\left|\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt\ E_s(\vec{R},t)\ e^{-i\omega_s t}\right|^2$$

∵

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = \frac{r_e}{R'}\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})E_{i0}\int d\vec{r}\ n_e(\vec{r},t')\ e^{i[(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t')]}$$

~~代入上式得~~: $t = t' + \frac{R}{c} - \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c}$

代入上式得:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\ E_s(\vec{R},t)\ e^{-i\omega_s t} = \frac{r_e E_{i0}}{R'}\int dt\ e^{-i\omega_s t}\int d\vec{r}\ n_e(\vec{r},t')\ e^{i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t'))}$$

$$\because\ t' = \frac{t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c}}{\cancel{(1-\beta_s)}} \equiv ⑧$$

$$r(t') = r(0) + \vec{v}t'$$

$$\therefore\ dt = \cancel{(1-\beta_s)}\, dt' \qquad dt = (1-\beta_s)\,dt' \simeq dt'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, E_s(\vec{R},t)\, e^{-i\omega_s t}$$

（设 $\hat{s}\perp\hat{e}$）

变量替换 $t\to t'$

$$= \frac{r_e E_{i0}}{R'} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{r}\, n_e(\vec{r},t') \exp\left[-i(\omega t' - \vec{k}\cdot\vec{r} + k_s R)\right]$$

$$= \frac{r_e E_{i0}}{R'}\, n_e(\vec{k},\omega)$$

其中

$$\omega \equiv \omega_s - \omega_i$$

$$\vec{k} \equiv \vec{k}_s - \vec{k}_i$$

$$n_e(\vec{k},\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}\, n_e(\vec{r},t)\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

则有

$$\frac{dP_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega\, d\omega_s} = r_e^2 c\,\varepsilon_0 E_{i0}^2 V_s \lim_{\substack{T\to\infty \\ V_s}} \frac{1}{2\pi T V_s} |n_e(\vec{k},\omega)|^2$$

$$= r_e^2 c\,\varepsilon_0 E_{i0}^2 V_s n_{e0} \lim_{T,V_s\to\infty} \frac{1}{2\pi V_s T} \frac{|n_e(\vec{k},\omega)|^2}{n_{e0}}$$

$$= p_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi}$$

其中

$$S(\vec{k},\omega) = \lim_{V,T\to\infty} \frac{1}{T V_s} \frac{|n_e(\vec{k},\omega)|^2}{n_{e0}} \qquad [+]$$

为散射动力学形状因子，亦称为谱密度函数

$$p_i = P_i/A_i = c\,\varepsilon_0 E_{i0}^2$$

将上式对频率积分，就可求得 单位立体角内的总散射功率为:

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = p_i r_e^2 n_{e0} V_s S(\vec{k}) = p_i r_e^2 N S(\vec{k})$$

$$S(\vec{k}) \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\vec{k},\omega)$$

故总微分散射截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 N S(\vec{k})$$

下面我们考虑，有一种散射情况（非相干散射）

标准状态下气体密度
$2.69\times10^{25}\ m^{-3}$
$r_e = 2.82\times10^{-15}\ m$

$$S(k) = 1$$

则
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 N$$

因为对于自由电子的微分散射截面 r_e^2 是很小的，因此即使 $n_{e0} = 10^{24}\ m^{-3}$ 时，其散射平均自由程 $l_s = (r_e^2 n_{e0})^{-1}$ 仍可高达 10 km。因此，光在稀薄等离子体中，入射电磁波发生多次散射的几率是很小的。

三、Thomson 散射的功率

在远处单位立体角内的平均散射功率

$$\frac{dP_s(\vec R)}{d\Omega} = \varepsilon_0 c R'^2 \overline{|\vec E_s(\vec R,t)|^2} = \varepsilon_0 c R'^2 \overline{\sum_{j=1}^{N} \vec E_{sj} \cdot \sum_{l=1}^{N} \vec E_{sl}^*}$$
$$= \varepsilon_0 c R'^2 \sum_{j=1}^{N} \overline{|E_{sj}|^2} + \varepsilon_0 c R'^2 \sum_{j\neq l}\sum \overline{E_{sj}\cdot E_{sl}^*}$$
$$= \varepsilon_0 c R'^2 N \overline{|E_{sj}|^2} + \varepsilon_0 c R'^2 N(N-1) \left(\overline{E_{sj}\cdot E_{sl}^*}\right)_{j\neq l}$$

这里已假定在散射体积V内各电子的平均散射电场是近似相等的（$\because R \gg V^{1/3}$）。第一项为各电子单独散射产生的散射功率之代数和；第二项为各电子散射电场交叉乘积之和，即干涉项或相干项，它与各散射电场间的相位差有关。因对于相同的 ω_s，散射电场的相位是由电子的初始位置决定的，即

$$\Phi(0) = \omega_s\left(t - \frac{R}{c}\right) + \vec k_i\cdot\vec r_j(0)$$

则
$$\overline{E_{sj}\cdot E_{sl}^*} = \left(\frac{r_e}{R'} E_{i0}\right)^2 \exp\left[i\left(\vec r_l(0) - \vec r_j(0)\right)\cdot\vec k\right]$$

由此可见，上式第二项反映了不同位置电子间散射电场的相关性对散射功率的贡献。如果电子位置是随机分布的，则第二项的贡献为0。因为等离子体中最短的相关长度为 λ_D，如果 $k\lambda_D \gg 1$（即 $\lambda \ll \lambda_D$），则各电子之间的相位差很大，而且随时间的位置变化而不同而变化很大，从而使得第二项的贡献近为零。在这种情况下，散射功率主要是第一项贡献的，即各电子的散射功率的代数和，此时散射称为非相干散射。相反地，当 $k\lambda_D \ll 1$ 时，这时相位差很小，且随位置变

很也很小，即电子的散射电场是部分相干的，使得第二项的贡献不可忽略。这时的散射称为相干散射。因此，将散射可按下述分类：

定义散射参数 $\alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D}$

(1) $k\lambda_D \gg 1$，或 $\alpha \ll 1$ 时 为非相干散射

上式第二项（即相干项）可忽略，总散射功率为各电子散射功率的简单叠加。这时探测的是电子的随机热运动。

这可用来诊断 T_e, n_e 和 $f_e(v)$

(2) $k\lambda_D \lesssim 1$ 或 $\alpha \gtrsim 1$ 时 为相干散射

上式中第二项的贡献不可忽略，这探测的是等离子体集体运动。

这又可分为两类：

(a) 当第一、二项的贡献相当时，即

$N|E_{sj}|^2 \sim N(N-1)\overline{|E_{sj}\cdot E_{sl}^*|}$ 时，为部分相干散射

可用于诊断 T_i 和杂质成分等

(b) 第二项的贡献远大于第一项的贡献，即

$N|E_{sj}|^2 \ll N(N-1)\overline{|E_{sj}\cdot E_{sl}^*|}$ 时 为完全相干散射

可用于诊断等离子体波、不稳定性和湍流

§3.3 非相干散射理论

从上节我们知道，当

$$\alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D} = 1.07\times10^{-11}\,\frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]}\right)^{1/2} \ll 1$$

时，等离子体对入射电磁波的散射功率就等于散射体积内各个电子的散射功率的代数和，这类散射称为非相干散射。这类散射的主要特征是：散射功率谱分布在入射波频率附近的一个频带内，其谱分布是电子运动的多普勒频移的结果。从单电子散射电场的相位：

$$\phi(t) = \omega_s\left(t-\frac{R}{c}\right) + \vec{k}\cdot\vec{r}(0) \overset{\beta\ll1}{\simeq} (\omega_i+\vec{k}\cdot\vec{v})\left(t-\frac{R}{c}\right) + \vec{k}\cdot\vec{r}(0)$$

可知，散射电场相对于入射波的频移与电子速度 $\vec{v}$ 在散射差矢方向上的投影分量 v_k 成正比。作为一级近似，我们可取 $\vec{k}$ 为常数，则散射波频率为 $\omega_s=\omega_i+\omega$ 的散射功率直接与电子速度分量为 v_k 的电子数成正比，因此散射频谱的计算比较简单，无需求解动力学方程。

一、$\beta\ll1$，$B_0=0$ 时的非相干散射

单电子的散射电场：

$$\vec{E}_{sj}(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R}\,\hat{e}\,E_{i0}\exp\{i[\omega_s t - k_s R + \vec{k}\cdot\vec{r}_j(0)]\}$$

其中 $\omega_s \equiv \omega_i + \omega = \omega_i + \vec{k}\cdot\vec{v}$　　$\vec{k} \equiv \vec{k}_s - \vec{k}_i$

这在 $\vec{R}$ 处单位立体角内，散射频率为 ω_s 的单位频率间隔内的散射功率为：

$$\frac{d^2P_s}{d\Omega\, d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i}\, r_e^2\, \delta(\omega_s-\omega_i-\vec{k}\cdot\vec{v})$$

若散射体积 V_s 内有 N 个电子，其平均密度为 $n_{e0}=N/V_s$，且速度分布函数为：

$F(\vec{v}) = n_{e0} f(\vec{v})$ ， $f(\vec{v})$ 为归一化的速度分布函数

则在 R 处单位立体角内的平均散射功率为

$$\frac{d^2P_s(R,\omega_s)}{d\Omega\, d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 \int_{V_s} d\vec{r} \int d\vec{v}\; F(\vec{v})\, \delta(\omega_s - \omega_i - k v_k)$$

$$= \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \int dv_k\, f(v_k)\, \delta(\omega - k v_k) = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

其中 $\quad f(v_k) = \int f(\vec{v})\, d\vec{v}_\perp$ ， $v_k = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{k}$ 为电子在 $\vec{k}$ 方向上的速度分量

上述表达式也可用另一种方法推导：因为散射频率在 $\omega_s \to \omega_s + d\omega_s$ 范围内的散射功率，是与散射体积内速度在 $v_k \to v_k + dv_k$ 范围内的电子数成正比的，而该电子数为： $N(v_k)\,dv_k = n_{e0} V_s f(v_k)\, dv_k$

故其平均散射功率谱为：

$$\frac{d^2P_s(R,\omega_s)}{d\Omega\, d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 N(v_k) \frac{dv_k}{d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

由此可见，散射形状因子为：

$$\frac{S(k,\omega)}{2\pi} = \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

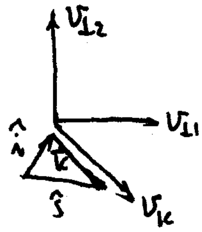
因为 $\quad \int f\left(\frac{\omega}{k}\right) \frac{d\omega}{k} = 1$ ，故其散射总功率为：

$$\frac{dP_s(R)}{d\Omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s$$

由上述的讨论可知，散射功率谱反映了电子在 $\vec{k}$ 方向上的速度分布函数，若电子速度分布函数是各向同性的，由散射功率谱可测得电子速度分布函数。若电子速度分布是各向异性的，则原则上讲，只要测出了三个正交的 $\vec{k}$ 方向上的散射功率谱，就可测得三维的电子速度分布函数。但实际上散射功率很小，很难详细地测量散射功率谱。通常的做法是，假定速度分布函数是麦克斯韦分布，并把测量结果与一定的麦氏分布做最佳拟合，就可求出电子温度。

相对应的。只要实验上测得了散射谱，将其画成 $\ln\left(\frac{d^2P}{d\Omega d\lambda}\right) \sim \lambda^2$ 曲线，其直线斜率

$$S = -\frac{c^2}{4a^2 \lambda_i^2 \sin^2\frac{\theta_s}{2}} = -\frac{6.2\times 10^3}{\lambda_i^2[\text{Å}] \sin^2\frac{\theta_s}{2}} \frac{1}{T_e[\text{eV}]}$$



当电子速度分布函数为麦克斯韦分布时，

$$f(\vec{v}) = \frac{1}{(\pi a^2)^{3/2}} \exp\left\{-\left(\frac{v_k^2 + v_{\perp 1}^2 + v_{\perp 2}^2}{a^2}\right)\right\}$$

其中
$$a = \left(\frac{2T_e}{m_e}\right)^{1/2}$$

则其相应的散射功率谱为

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{\sqrt{\pi}ka} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right\}, \quad \omega \equiv \omega_s - \omega_i$$

此时，散射功率谱也可用散射波的波长移动 λ 表示：

$$\lambda \equiv \lambda_s - \lambda_i, \quad \omega \equiv -\frac{2\pi c}{\lambda_i^2}\lambda$$ （不是电磁波与纪本.波长）

有：
$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\lambda)}{d\Omega d\lambda} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\,\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{c\lambda}{2a\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}}\right)^2\right\}$$

或
$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2\sin\frac{\theta_s}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu\varepsilon^2}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

其中
$$\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{\lambda_i}, \quad \mu \equiv \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

由此可见，麦克斯韦速度分布函数和用波长移动 λ 表示的高斯型散射谱相对应的。只要实验上测得了散射谱，将其画成 $\ln\left(\frac{d^2P}{d\Omega d\lambda}\right) \sim \lambda^2$ 曲线，其直线斜率

$$S = -\frac{c^2}{4a^2\lambda_i^2 \sin^2\frac{\theta_s}{2}} = -\frac{6.2\times 10^3}{\lambda_i^2[\text{Å}]\sin^2\frac{\theta_s}{2}} \frac{1}{T_e[\text{eV}]}$$

就可求得电子温度 T_e。

这里要注意，上述结果包含了两个假设：

1. 在测量时间T内，分布函数没有显著变化，即是平稳的、局域平衡的等离子体
2. 在测量时间T内，始终有N个电子保留在散射体积内，即意味着 $\beta \to 0$ 或 $V_s \to \infty$。

二. β 有限，$B_0=0$ $(\hat{s}\perp\hat{e})$

单电子散射电场：

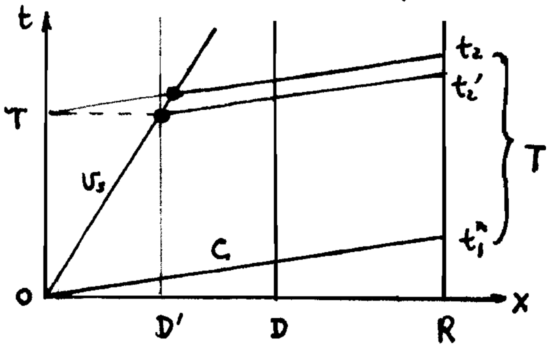
$$\vec{E}_s(\vec{R},t)\cdot\hat{e}=-\frac{r_e}{R'}E_{i0}\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)}{(1-\beta_s)^2}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]\exp\{i\phi(t)\}$$

$$\phi(t)\equiv\omega_s\left(t-\frac{R}{c}\right)+\vec{k}\cdot\vec{r}(0),\qquad \omega_s\equiv\omega_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}$$

在 $\vec{R}$ 处单位立体角内的散射功率为

$$\frac{d^2P_s(\vec{R})}{d\Omega}=\frac{P_i}{A_i}r_e^2\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^4}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_i)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2$$

这里已假定在测量时间 T 内，电子始终保持在散射体积内。由于 β 有限，电子在散射方向上飞越散射体积长度 D 的时间 $\tau\equiv D/v_s$，有可能小于测量时间 T，这时需要考虑其渡越时间对散射功率的修正。



这里用右图说明如何获得有限散射体积对散射功率的修正。假定电子是均匀分布，即当有一个电子在近边界(距观测点)离开散射体时，即有一个电子同时从远边界进入散射体积，以保持散射体积内电子数保持不变。

当电子渡越时间 $\tau\equiv D/v_s\gg T$ 时，在测量时间内，该电子始终在散射体积内，因此在测量时间内散射辐射没有中断，无需修正。而当 $\tau'\equiv D'/v_s<T$ 时，由于散射辐射传播的时间差（即 $x=0$ 处发出的辐射与 $x=D'$ 处辐射到达探测器处的时间差）为：

$$\Delta t=t_2-t_2'$$

它即为散射辐射（测量到）的中断时间，则探测器测到散射辐射的有效时间份额为：

$$\frac{t_2'-t_1}{t_2-t_1}=1-\frac{\Delta t}{T}=1-\frac{D'/c}{D'/v_s}=1-\frac{v_s}{c}=1-\beta_s$$

则考虑有限散射体积修正后，单电子的散射功率为：

$$\frac{d^2P_s(\vec{R})}{d\Omega}=\frac{P_i}{A_i}r_e^2\,\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^3}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2$$

同样地，考虑到散射体积内有 $N=n_{e0}V_s$ 个电子，其速度分布为

$$F(\vec{v})=n_{e0}f(\vec{v})$$

则 R 处单位立体角内的频谱散射功率谱为

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega\,d\omega_s}=\frac{P_i}{A_i}r_e^2n_{e0}V_s\int d\vec{v}\,f(\vec{v})\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^3}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2\delta\left(\omega_s-\omega_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}\right)$$

$$=\frac{P_i}{A_i}r_e^2n_{e0}V_s\int d\vec{v}\,f(\vec{v})\frac{(1-\beta^2)(1-\beta_i)^2}{(1-\beta_s)^2}\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2\delta(\omega-kv_k)$$

这里已利用如下关系式：

$$\delta\left(\omega_s-\omega_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}\right)=\delta\left(\frac{\omega-kv_k}{1-\beta_s}\right)=(1-\beta_s)\,\delta(\omega-kv_k)$$

$\because\ \dfrac{\omega_s}{\omega_i}=\dfrac{1-\beta_i}{1-\beta_s}\qquad\therefore\ \left(\dfrac{1-\beta_i}{1-\beta_s}\right)^2=\left(\dfrac{\omega_s}{\omega_i}\right)^2$，它与 β 无关，可提出积分号外。

若电子速度分布函数是相对论性麦克斯韦分布函数：

$$f(\vec{\beta})=\frac{\mu\exp\left[-2\mu(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}{2\pi K_2(2\mu)(1-\beta^2)^{5/2}}$$

其中 $\mu\equiv\left(\dfrac{c}{a}\right)^2$，$a\equiv\left(\dfrac{2T_e}{m_{e0}}\right)^{1/2}$，$K_2$ 为贝塞尔函数

代入上式后，得：

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega\,d\omega_s}=\frac{P_i}{A_i}r_e^2n_{e0}V_s\left(\frac{\omega_s}{\omega_i}\right)^2\int d\beta_\perp d\beta_k\,f(\vec{\beta})\,\delta(\omega-k\beta_kc)(1-\beta^2)\left[1-\frac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2$$

上式积分号内的因子 $\left[1-\dfrac{\beta_e^2(1-\cos\theta_s)}{(1-\beta_i)(1-\beta_s)}\right]^2$ 是由于相对论效应引起的散射波的退偏振的程度，它总是小于1。上式的积分一般是很复杂的，要用数值计算才能得到完全相对论性的散射功率谱。

在最简单的情况下，取 β 的一级近似，可得如下的表达式：

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\omega_s)}{d\Omega d\omega_s} = P_i r_e^2 N \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) \qquad \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} \equiv \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$S(\vec{k}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} S(\vec{k},\omega) = \int \frac{d\omega}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) = 1$$

▲ $\beta \ll 1$, $B_0 = 0$

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{d^2P_s(\vec{k},\omega_s)}{d\Omega d\omega_s} = P_i r_e^2 N \frac{1}{\sqrt{\pi} ka} \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right\} \qquad \omega \equiv \omega_s - \omega_i$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\lambda_{si})}{d\Omega d\lambda_{si}} = P_i r_e^2 N \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}} \exp\left\{-\left(\frac{c\lambda_{si}}{2a\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}}\right)^2\right\} \qquad \lambda_{si} \equiv \lambda_s - \lambda_i$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = P_i r_e^2 N \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2\sin\frac{\theta_s}{2}} \exp\left\{-\frac{\mu\varepsilon^2}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\} \qquad \varepsilon \equiv \frac{\lambda_{si}}{\lambda_i}, \quad \mu \equiv (c/a)^2$$

$$\omega \equiv -\frac{2\pi c}{\lambda_i^2}\lambda_{si}$$

▲ β 有限, $B_0 = 0$

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\omega)}{d\Omega d\omega} = P_i r_e^2 N \frac{1}{\sqrt{\pi} ka}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega_i}\right) \exp\left\{-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right\}$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\lambda_{si})}{d\Omega d\lambda_{si}} = P_i r_e^2 N \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}}\left[1 - \frac{7}{2}\frac{\lambda_{si}}{\lambda_i} + \frac{c^2\lambda_{si}^3}{4a^2\lambda_i^3 \sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right] \exp\left\{-\frac{c^2\lambda_{si}^2}{4a^2\lambda_i^2 \sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = P_i r_e^2 N \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{2\sin\frac{\theta_s}{2}}\left[1 - \frac{7}{2}\varepsilon + \frac{\mu\varepsilon^3}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right] \exp\left\{-\frac{\mu\varepsilon^2}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega)}{d\Omega d\omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{1}{\sqrt{\pi}ka}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega_i}\right)\exp\left\{-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right\}$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\lambda)}{d\Omega d\lambda} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}}\left[1-\frac{7}{2}\frac{\lambda}{\lambda_i}+\frac{c^2\lambda^3}{4a^2\lambda_i^3\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right]\exp\left\{-\frac{c^2\lambda^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

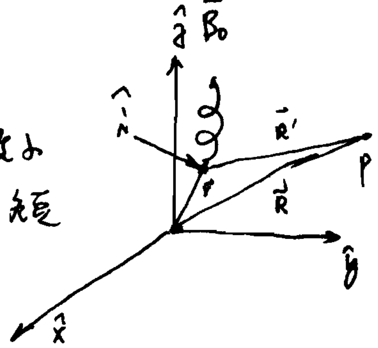
$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\varepsilon)}{d\Omega d\varepsilon} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \left(\frac{\mu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\sin\frac{\theta_s}{2}}\left[1-\frac{7}{2}\varepsilon+\frac{\mu\varepsilon^3}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right]\exp\left\{-\frac{\mu\varepsilon^2}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

其中 $\omega \equiv \omega_s - \omega_i$ ， $\lambda \equiv \lambda_s - \lambda_i$ ， $\varepsilon \equiv \frac{\lambda}{\lambda_i} = \frac{\lambda_s - \lambda_i}{\lambda_i}$

上述公式只适用于 $T_e < 5$ Kev 的情况，当 $T_e > 5$ Kev 时要用高阶 β 近似公式。

由上可知，当 β 有限时，散射谱已不再是相对于入射波长 λ_i 对称了，其散射谱的峰值已位于入射波长的短波侧（即兰移）。因此，在这种情况下，若仍用 $\beta \ll 1$ 的散射谱公式~~描述~~拟合散射谱（测量的），将会产生较大的误差。

三. $\beta \ll 1$, $B_0 \neq 0$：



这时，假定：1. 电子回旋半径比散射体积尺度小

2. 电子回旋周期比测量时间 T 短

3. 其它假设与前同

取 $\vec{B}_0 \parallel \hat{z}$，则电子的运动轨迹为：

$$\vec{r}(t') = \vec{r}(0) + \vec{v}_{\parallel} t' + \rho_e \cos[\omega_{ce}t' + \varphi_0]\hat{x} + \rho_e \sin[\omega_{ce}t' + \varphi_0]\hat{y}$$

其中 $v_{\parallel}$、$v_{\perp}$ 为电子平行、垂直于 B_0 的速度分量

$\rho_e = v_{\perp}/\omega_{ce}$

而推迟时间：

$$t' = t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t')}{c} = \frac{t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(0)}{c} + \frac{\rho_e}{c}\left[\hat{s}\cdot\hat{x}\cos(\omega_{ce}t+\varphi_0) + \hat{s}\cdot\hat{y}\sin(\omega_{ce}t+\varphi_0)\right]}{1-\vec{\beta}_{\parallel}\cdot\hat{s}}$$

借助恒等式

$$e^{ia\sin\varphi} \equiv \sum_{-\infty}^{\infty} J_\ell(a)\, e^{i\ell\varphi}$$

可得（散射电场相角）

$$\exp\left\{i\left(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r}(t')\right)\right\} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_\ell(k_\perp\rho_e)\exp\left\{i\left[\omega_s t - k_s R + \vec{k}\cdot\vec{r}(0) + \ell(\varphi_0+\delta)\right]\right\}$$

其中 $$\omega_s = \omega_i\frac{1-\hat{i}\cdot\vec{\beta}_\parallel}{1-\hat{s}\cdot\vec{\beta}_\parallel} + \ell\omega_{ce} \simeq \omega_i + \vec{k}\cdot\vec{v}_\parallel + \ell\omega_{ce}$$

$$\vec{k}_s = \frac{\omega_s}{c}\hat{s}\ , \qquad \vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$$

$$\tan\delta = \frac{\vec{k}\cdot\hat{x}}{\vec{k}\cdot\hat{y}}\ , \qquad k_\perp = \left[(\vec{k}\cdot\hat{x})^2 + (\vec{k}\cdot\hat{y})^2\right]^{1/2}$$

单电子的散射电场和散射功率分别为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'}\vec{E}_{i0}\sum_{-\infty}^{\infty} J_\ell(k_\perp\rho_e)\exp\left\{i\left[\omega_s t - k_s R + \vec{k}\cdot\vec{r}(0) + \ell(\varphi_0+\delta)\right]\right\}$$

$$\frac{dP_s(\vec{R})}{d\Omega} = \frac{P_i}{A_i}r_e^2\sum_{-\infty}^{\infty} J_\ell^2(k_\perp\rho_e)$$

则互不相干单位立体角内的散射功率谱为：

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega\, d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i}r_e^2 n_{e0}V_s\int_0^{2\pi}d\varphi\int_{-\infty}^{\infty}dv_\parallel\int_0^{\infty}dv_\perp\, v_\perp\, \frac{1}{(\pi a^2)^{3/2}}\exp\left\{-\frac{v_\parallel^2+v_\perp^2}{a^2}\right\}$$
$$\times\sum_{-\infty}^{\infty}J_\ell^2(k_\perp\rho_e)\,\delta\left[\omega_s-\omega_i-\ell\omega_{ce}-\vec{k}\cdot\vec{v}_\parallel\right]$$

利用恒等式

$$\int_0^{\infty}J_\ell^2(bt)\exp(-p^2t^2)\,t\,dt = \frac{1}{2p^2}\exp\left(-\frac{b^2}{2p^2}\right)I_\ell\left(\frac{b^2}{2p^2}\right)$$

$$J_{-\ell}(x) = (-1)^\ell J_\ell(x)\ , \qquad I_{-\ell}(x) = I_\ell(x)$$

对上式积分得：

$$\frac{d^2P_s(\Omega,\omega_s)}{d\Omega d\omega_s}=\frac{P_i}{A_i}r_e^2 n_{e0}V_s \exp\left(-\frac{k_\perp^2a^2}{2\omega_{ce}^2}\right)\sum_{-\infty}^{\infty}I_l\left(\frac{k_\perp^2a^2}{2\omega_{ce}^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}k_\parallel a}\exp\left\{-\left(\frac{\omega_s-\omega_i-l\omega_{ce}}{k_\parallel a}\right)^2\right\}$$

由此可见：

1. 散射谱是由一系列线谱组成的调制谱，每条线谱都是高斯型，其中心频率为：

$$\omega_s=\omega_i+l\omega_{ce}\qquad l=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

其 e^{-1} 谱宽为：

$$\Delta\omega_{e^{-1}}=2k_\parallel a=2ka\cos\theta_B$$

θ_B 为 $\vec{k}$ 与 $\vec{B}_0$ 的夹角

幅度与

$$\exp\left(-\frac{k_\perp^2a^2}{2\omega_{ce}^2}\right)I_l\left(\frac{k_\perp^2a^2}{2\omega_{ce}^2}\right)\quad 成正比$$

只有当

$$u\equiv\left(\frac{k_\parallel a}{\omega_{ce}}\right)^2\ll1\quad 时，线谱才不重叠$$

2. 当 $p\equiv\frac{k_\perp^2a^2}{2\omega_{ce}^2}\ll1$ 时 （相当于 $k_\perp\to0$）

有近似式

$$I_l(p)\simeq\frac{\left(\frac{p}{2}\right)^l}{l!}$$

$$\lim_{p\to0}e^{-p}I_l(p)=\begin{cases}1 & 当\ l=0\ 时\\ 0 & 当\ l\neq0\ 时\end{cases}$$

则当 $k_\perp\to0$ 时，散射谱退化为：

$$\frac{d^2P_s(\Omega,\omega_s)}{d\Omega d\omega_s}=\frac{P_i}{A_i}r_e^2n_{e0}V_s\frac{1}{\sqrt{\pi}k_\parallel a}\exp\left\{-\left(\frac{\omega}{k_\parallel a}\right)^2\right\}$$

这就是 $B_0=0$ 的非相干散射谱，这是因为当 $\vec{k}\parallel\vec{B}_0$ 时，散射观测的是电子在平行于 $\vec{B}_0$ 方向上的随机热运动状态，这时 B_0 对谱的观测没有影响。

3. 当 $p\gg1$ 时 （一般都是这种情况，除非 $\theta_B\to0$）

有：

$$e^{-p}I_l(p)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi p}}\exp\left(-\frac{l^2}{2p}\right)$$

则

$$\frac{d^2P_s(\Omega,\omega_s)}{d\Omega d\omega_s}=\frac{P_i}{A_i}r_e^2n_{e0}V_s\frac{\omega_{ce}}{\pi k_\perp k_\parallel a^2}\sum_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\left(\frac{\omega-l\omega_{ce}}{k_\parallel a}\right)^2\right\}\exp\left\{-\left(\frac{l\omega_{ce}}{k_\perp a}\right)^2\right\}$$

由此可见，当 $\omega = l\omega_{ce}$ 时，谱出现分立的峰值，其峰值幅度的包络线与 $\exp\left\{-\left(\frac{\omega}{k_\parallel a}\right)^2\right\}$ 成正比，该包络线下的线积是有 $\alpha\sqrt{2\pi}$ 率，即是高斯型谱。

该调制谱的调制度由参数

$$u = \left(\frac{k_\parallel a}{\omega_{ce}}\right)^2$$

决定，u越小，其调制峰越尖锐，当 $u \to 1$ 时，由于相邻调制峰重叠，使调制谱变得平滑而不可分辨。一般要求 $u \le 0.4$，才能观测到调制谱。

$$\because \quad \alpha = \frac{1}{k\lambda_D} = \frac{\sqrt{2}\,\omega_{pe}}{ka} \qquad \therefore \quad ka = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\omega_{pe}$$

则

$$u = \left(\frac{ka\cos\theta_B}{\omega_{ce}}\right)^2 = 2\left(\frac{\omega_{pe}\cos\theta_B}{\alpha\,\omega_{ce}}\right)^2 \le 0.4$$

由此得：

$$\cos\theta_B \le 0.45\,\alpha\frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}} = 140\,\alpha\frac{B_0[G]}{\sqrt{n_e[cm^{-3}]}}$$

这条件很严格，举个例子：

托卡马克等离子体非相干散射：$n_e = 10^{13}\ cm^{-3}$，$T_e = 1keV$

$\lambda_i = 6943$ Å (红宝石激光)，$B_T = 10^4 G$，$\theta_s = 90^\circ$

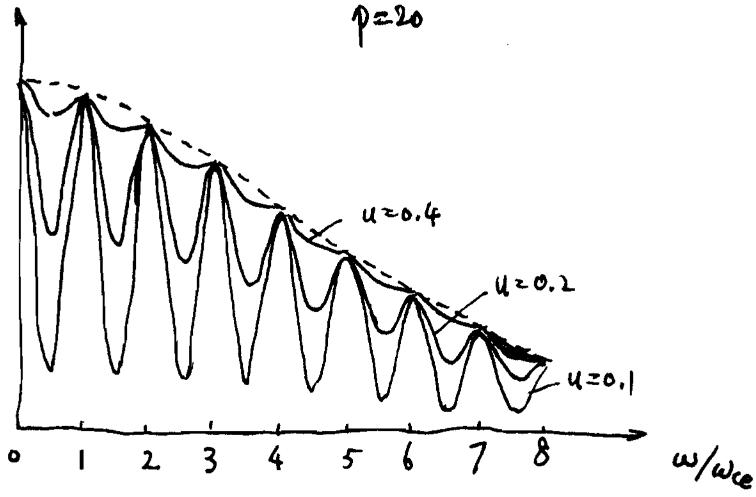
由此得 $\alpha = 0.001$，则要观测到调制谱要求：

$$\cos\theta_B \le 4.7\times10^{-4}，即 \quad 89.97^\circ \le \theta_B \le 90^\circ$$

利用这一特性可以用于测量等离子体中磁场：

1. 当观测到尖锐的调制谱时，有 $\vec{k}\perp\vec{B}_0$，确定 $\vec{B}_0$ 方向
2. 从调制峰的间距 ω_{ce}，可测定 B_0 的幅值。

此外，在一般散射实验中，$\vec{k}\perp\vec{B}_0$ 的条件一般不易满足，因此在一般情况下磁场对散射谱（非相干）没有影响，可以比较好地忽略 B_0 对散射谱的影响。


p=20
u=0.4
u=0.2
u=0.1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
ω/ωce

Plasma Scattering of Electromagnetic Radiation, Academic Press, 1975

第6章，P.113

§3.4 相干散射 ($B_0=0$, $\beta\ll1$)

当 $\alpha \gtrsim 1$ 时，散射电子间的相互关联不可忽略，这时理论上处理比较复杂，必须用动力论方法处理。

从 §3.2 节，我们知道单位等离子体散射功率谱可表示为：

$$\frac{d^2P_s(\vec{R},\omega_s)}{d\Omega\, d\omega_s} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s \left[\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e})\right]^2 \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi}$$

其中

$$S(\vec{k},\omega) = \lim_{T,V_s\to\infty} \frac{1}{TV}\left\langle \frac{n_e(\vec{k},\omega)\, n_e^*(\vec{k},\omega)}{n_{e0}} \right\rangle$$

$$\vec{k} \equiv \vec{k}_s - \vec{k}_i \quad , \quad \omega \equiv \omega_s - \omega_i$$

$$n_e(\vec{k},\omega) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} d\vec{r}\, dt\; n_e(\vec{r},t)\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}$$

上述表达式是普遍的表达式，它在 $\beta\ll1$, $B_0=0$ 时是普遍成立的，无论是热涨落，还是由等离子体波和不稳定性引起的非热涨落，它都成立。这个关系式把求散射功率谱的问题归结为求等离子体密度涨落的自功率谱密度的问题。这里，⟨ ⟩是表示对系综取平均。一般我们都假定：被测的等离子体系统在测量时间间隔 T 内是平稳、各态历经的，则系综平均就可以用时间平均近似之。

求 $S(k,\omega)$ 的基本出发点是动力学方程，在碰撞可忽略的情况下，其基本方程是弗拉索夫方程：

$$F_q(\vec{r},\vec{v},t) \qquad \frac{\partial F_q}{\partial t} + \vec{v}\cdot\frac{\partial F_q}{\partial \vec{r}} + \frac{q}{m_q}\vec{E}\cdot\frac{\partial F_q}{\partial \vec{v}} = 0 \qquad q=e,i$$

其中

$$F_q(\vec{r},\vec{v},t) = \sum_{j=1}^{N_q} \delta[\vec{r}-\vec{r}_j(t)]\,\delta[\vec{v}-\vec{v}_j(t)]$$

假定系统变化的特征时间比微观涨落时间慢很多，则其分布函数可近似表示为：

$$F_q = F_{q0} + F_{q1}$$

其中 F_{q0} 是表示系统平均的分布函数，即系统的平均态

F_{q1} 是表示系统在平均态附近的局部微观涨落

对于电子：$q=-e$，$m_q=m_e$，$N_q=N$，$F_{e0}=n_{e0}f_{e0}(\vec{v})$

离子：$q=Ze$，$m_q=m_i$，$N_q=N/Z$，$F_{i0}=n_{i0}f_{i0}(\vec{v})$，$n_{i0}=n_{e0}/Z$

$$n_q(\vec{r},t) = \int d\vec{v}\, F_q(\vec{r},\vec{v},t) = \sum_{j=1}^{N}\delta(\vec{r}-\vec{r}_j(t))$$

$$n_q(\vec{r},t) = n_{q0} + n_{q1}(\vec{r},t)$$

对于稳定的、均匀等离子体，线性化的方程组为：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{q1}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\dfrac{\partial F_{q1}}{\partial \vec{r}} + \dfrac{q}{m_q}\vec{E}_1\cdot\dfrac{\partial F_{q0}}{\partial \vec{v}} = 0 \\ \nabla\cdot\vec{E}_1 = \sum\limits_q \dfrac{q}{\varepsilon_0}\int d\vec{v}\, F_{q1}(\vec{r},\vec{v},t) \end{cases}$$

这里已假定等离子体存在电场 $\vec{E}_0=0$，且电场波的电磁场对带电粒子的运动不造成影响。与等离子体波的动力论方法类似，对 $F_{q1}(\vec{r},\vec{v},t)$ 取空间的付里叶变换、时间的拉普拉斯变换，代入线性化的方程组中，求解 $F_{q1}(\vec{k},\vec{v},\omega-i\gamma)$，由下式

$$n_{1q}(\vec{k},\omega-i\gamma) = \int d\vec{v}\, F_{1q}(\vec{k},\vec{v},\omega-i\gamma)$$

求得 $n_{1q}(\vec{k},\omega-i\gamma)$，代入动力学形状因子的表达式并求系综平均：

$$S(\vec{k},\omega) = \lim_{\substack{\gamma\to 0\\ V_s\to\infty}} \frac{2\gamma}{V_s}\left\langle \frac{|n_{e1}(\vec{k},\omega-i\gamma)|^2}{n_{e0}} \right\rangle$$

由此就可得到动力学形状因子的表达式。

$\frac{G_e}{G}$ 24 22

p.264 公式 (7.3.22) $f_{ek}(v_k)$ 是非归一化的

即 $\int f_{ek}(v_k)\, dv_k = n_e$

$$S(\vec{k},\omega) = \frac{2\pi}{k}\left|\frac{1+G_i(\vec{k},\omega)}{G}\right|^2 f_{e0}\left(\frac{\omega}{k}\right) + \frac{2\pi Z}{k}\left|\frac{G_e(\vec{k},\omega)}{G(\vec{k},\omega)}\right|^2 f_{i0}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

这里 f_{e0} 是归一化的

其中

$$G(\vec{k},\omega) = 1 + G_e(\vec{k},\omega) + G_i(\vec{k},\omega)$$ 纵向等离子体介电函数

$$G_q(\vec{k},\omega) = \frac{\omega_{pq}^2}{k^2}\int d\vec{v}\, \frac{\vec{k}\cdot \partial f_{q0}/\partial \vec{v}}{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v} - i\gamma} \qquad q = e, i$$

当 $f_{e0}(\vec{v})$ 和 $f_{i0}(\vec{v})$ 是麦克斯韦分布时，即

一维

$$f_{e0}(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-v_k^2/a^2} \qquad a \equiv \left(\frac{2T_e}{m_e}\right)^{1/2}$$

$$f_{i0}(v_k) = \frac{1}{\sqrt{\pi}b} e^{-v_k^2/b^2} \qquad b \equiv \left(\frac{2T_i}{m_i}\right)^{1/2}$$

则动力学形状因子可表示为：

$$f_{j0}(v_k) = \int f_{j0}(\vec{v})\, d\vec{v}_\perp \qquad \vec{v}_\perp \perp \vec{v}_k$$

$$\alpha = 1.07\times10^{-11}\,\frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\frac{\theta_s}{2}}\left(\frac{n_e\,[m^{-3}]}{T_e\,[eV]}\right)^{1/2}$$

$$\lambda_c = 1.11\times10^{27}\ \lambda^{-2}[\mu m] \qquad [m^{-3}]$$

① $\lambda_i = 0.263$, $n_e = 5\times10^{26}$, $T_e = 1\,keV$

$\alpha = 2.8$

$$S(k,\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka}\left\{\frac{A_e}{|G|^2} + \frac{A_i}{|G|^2}\right\} = S_e(k,\omega) + S_i(k,\omega)$$

$$A_e = e^{-x_e^2}\left\{\left[1+\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}RW(x_i)\right]^2 + \left[\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}IW(x_i)\right]^2\right\}$$

$$A_i = Z\left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{1/2} e^{-x_i^2}\left\{\left[\alpha^2 RW(x_e)\right]^2 + \left[\alpha^2 IW(x_e)\right]^2\right\}$$

$$|G|^2 = \left[1+\alpha^2 RW(x_e) + \alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}RW(x_i)\right]^2 + \left[\alpha^2 IW(x_e) + \alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}IW(x_i)\right]^2$$

$$x_e \equiv \frac{\omega}{ka} \qquad a \equiv \left(\frac{2kT_e}{m_e}\right)^{1/2} \qquad \alpha \equiv \frac{1}{k\lambda_D} = \frac{\sqrt{2}\,\omega_{pe}}{ka}$$

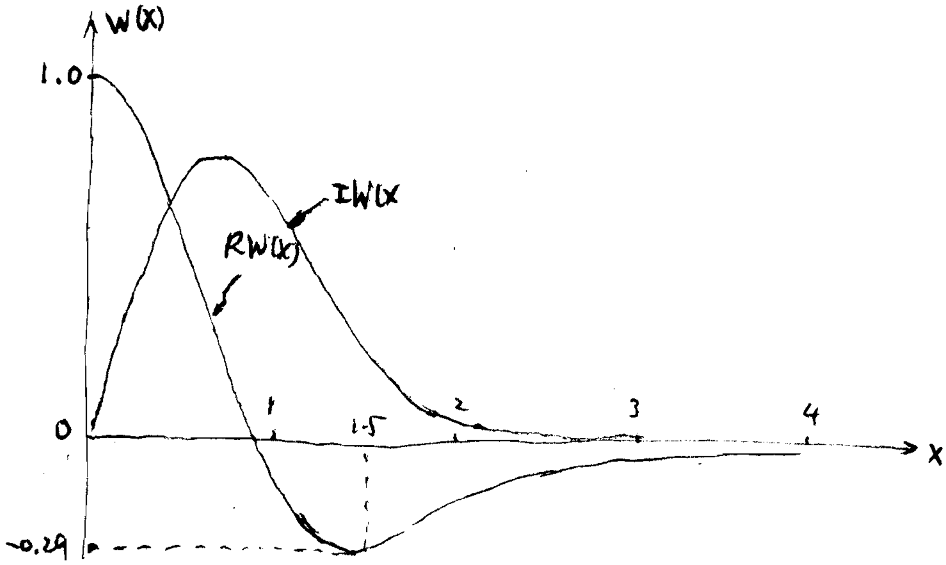
$$x_i \equiv \frac{\omega}{kb} \qquad b \equiv \left(\frac{2kT_i}{m_i}\right)^{1/2} \qquad \boxed{\frac{x_i}{x_e} = \frac{a}{b} = \left(\frac{T_e m_i}{T_i m_e}\right)^{1/2} \gg 1}$$

$$RW(x) = 1 - 2x\,e^{-x^2}\int_0^x dp\, e^{p^2}$$

$$IW(x) = \sqrt{\pi}\,x\,e^{-x^2} \qquad W(x) = RW(x) - i\,IW(x)$$

$$RW(x) \simeq -\frac{1}{2x^2}\left[1 + \frac{3}{2x^2} + \frac{15}{4x^4} + \cdots\right] \qquad x \gg 1 \text{ 時}$$

$$RW(x) \simeq 1 - 2x^2\left[1 - \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^4}{15} - \cdots\right] \qquad x < 1 \text{ 時}$$



1. 当 $\alpha<<1$ 时有

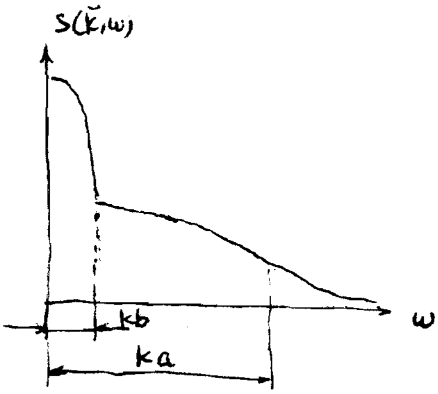
$$\lim_{\alpha\to 0} A_e = e^{-x_e^2} \qquad \lim_{\alpha\to 0} A_i = 0 \qquad \lim_{\alpha\to 0} |G|^2 = 1$$

$$\therefore \quad S(\vec{k},\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka} e^{-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2} \qquad \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}ka} \exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right]$$

$$\frac{d^2P_s(\vec{k},\omega)}{d\Omega d\omega} = P_i r_e^2 N \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} = P_i r_e^2 N \frac{1}{\sqrt{\pi}ka} \exp\left[-\left(\frac{\omega}{ka}\right)^2\right]$$

这就是 $\beta<<1$，$B_0=0$ 时的非相干散射谱。所以，非相干散射谱是相干散射谱在 $\alpha<<1$ 时的极限。

2. 一般的散射谱形状



中间又高又窄的部分是 $S_i(\vec{k},\omega)$ 的贡献，其特征谱宽为 kb，它是屏蔽离子的电子云对散射的贡献，它反映了电子随离子做集体运动的特征。

而旁边低而宽的部分是 $S_e(\vec{k},\omega)$ 的贡献，它是电子及其德拜屏蔽对散射贡献。自由电子的德拜屏蔽实际上是通过排斥电子和吸引离子而实现的，因而包含了因子 $\frac{ZT_e}{T_i}\alpha^2 RW(x_i)$ 和 $\frac{ZT_e}{T_i}\alpha^2 IW(x_i)$。但是在高频时 $x_e\simeq 1$，$x_i>>1$，这时 $RW(x_i)$ 和 $IW(x_i)\to 0$，这是因为离子不能响应电子的快运动，因而其屏蔽效应可忽略，这时电子的德拜屏蔽就是通过排斥电子而实现的。

3. 电子共振情况：$x_e\simeq 1$，$x_i>>1$

这时

$$\lim_{x_i\to\infty} A_e = \exp[-x_e^2] \qquad \lim_{x_i\to\infty} A_i = 0 \qquad \lim_{x_i\to\infty} |G|^2 = |1+\alpha^2 W(x_e)|^2$$

故

$$S(\vec{k},\omega) = \frac{2\sqrt{\pi}}{ka} \left|\frac{1}{1+\alpha^2 W(x_e)}\right|^2 \exp\left(-x_e^2\right)$$

$S(k,\omega)$ 达共振（即极大）的条件是：$|1+\alpha^2 W(x_e)|^2$ 达极小

因为 $IW(x_e)>0$，$RW(x_e)$ 可正可负，故共振条件变为：

$$1+\alpha^2 RW(x_e)=0$$

即 $$RW(x_e)=-\alpha^{-2}$$ 共振条件与 α 值有关

因 $RW(x)$ 在 $x=1.5$ 处有一极小值 $RW(x)|_{min}=-0.29$，因而有：

(1) 当 $\alpha<\frac{1}{\sqrt{|RW(x)|_m}}=1.86$ 时，$RW(x)$ 无根，不发生共振

(2) 当 $\alpha=1.86$ 时，$RW(x)$ 有一重根，$x\simeq1.5$，这时 $IW(x_e)$ 较大，共振很弱

(3) 当 $\alpha>1.86$ 时，$RW(x)$ 有两个实根，大根 $x>1.5$，随 α 增大而增大。当 ~~x_{e0}~~ 大根 $x_{e0}\gg1$（相当于 $\alpha\gg1$），则 $IW(x_{e0})\to0$，这相当于波的相速度远大于电子的平均热运动速度，电子的朗道阻尼就变得很小，因而有明显的共振。

当 $x_e\gg1$ 时，$RW(x_e)$ 有渐近表达式

$$RW(x_e)=-\frac{1}{2x_e^2}\left[1+\frac{3}{2x_e^2}+\frac{15}{4x_e^4}+\cdots\right]$$

由 $$RW(x_e)=-\alpha^{-2}$$

$$\alpha^2=\frac{1}{k^2\lambda_D^2}=\frac{2\omega_{pe}^2}{k^2a^2},\quad \frac{\alpha^2}{x_e^2}=\frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^2}\simeq2$$

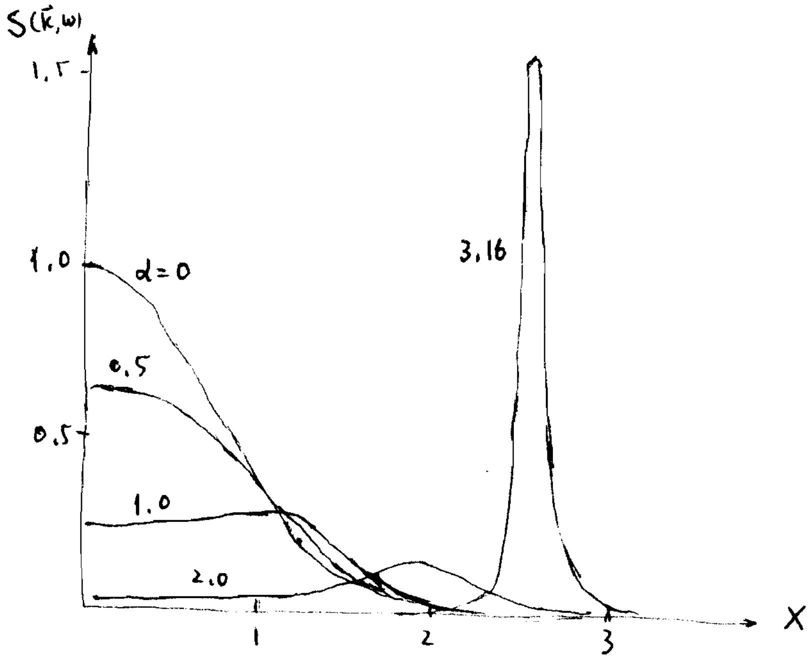
可求得大共振根的位置为

$$x_{e0}^2\simeq\frac{1}{2}(\alpha^2+3)\Longrightarrow\omega_0^2=\omega_{pe}^2+\frac{3kT_e}{m_e}k^2$$

这就是 λ 比 λ_D 大很多的极限情况下，从而电子等离子体波的 Bohm-Gross 色散关系。即当 $\alpha\gg1$ 时，在 $\omega\equiv\omega_s-\omega_i=\pm\omega_0$ 处有尖锐的共振峰，这是电子等离子体波散射的主要贡献。

$\because$ $$\lambda_D=\frac{a}{\sqrt{2}\,\omega_{pe}}\qquad \alpha^{-1}\equiv k\lambda_D=\frac{ka}{\sqrt{2}\,\omega_{pe}}\ll1$$

即 $\frac{a}{\sqrt{2}}\ll\frac{\omega_{pe}}{k}$　电子热运动速度远小于电子等离子体波的相速度



4. 低频共振情况　　$x_i \simeq 1$，　$x_e \ll 1$

$$\lim_{x_e\to 0} A_e = \left[1+\alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} RW(x_i)\right]^2 + \cancel{\alpha^2 IW} \left[\alpha^2 IW(x_i)\frac{ZT_e}{T_i}\right]^2$$

$$\lim_{x_e\to 0} A_i = Z\left(\frac{m_i T_e}{m_e T_i}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x_i^2}\alpha^2$$

$$\lim_{x_e\to 0} |G|^2 = \left[1+\alpha^2 \cancel{RW(x_e)} + \alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}RW(x_i)\right]^2 + \left[\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}IW(x_i)\right]^2$$

类似地，$S(k,\omega)$ 发生共振的条件是

$$1+\alpha^2+\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}RW(x_i)=0$$

或

$$1+\beta^2 RW(x_i) = 0 \qquad \beta^2 \equiv \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\frac{ZT_e}{T_i}$$

$\left(\alpha \gg 1,\ \frac{ZT_e}{T_i} \gg 1\right)$

当 $\beta^2 \gg 1$ 时，有强共振解（此时 $x_{i0} \gg 1$），其共振主峰位置为

$$x_{i0}^2 = \frac{1}{2}(\beta^2+3)$$

一般情况下，$\gamma = 1+2/N$
N为自由度数目

即

$$\omega^2 = k^2\left[\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}\frac{ZT_e}{m_i}+\frac{3T_i}{m_i}\right] \simeq k^2\left[\frac{ZkT_e+3T_i}{m_i}\right]$$

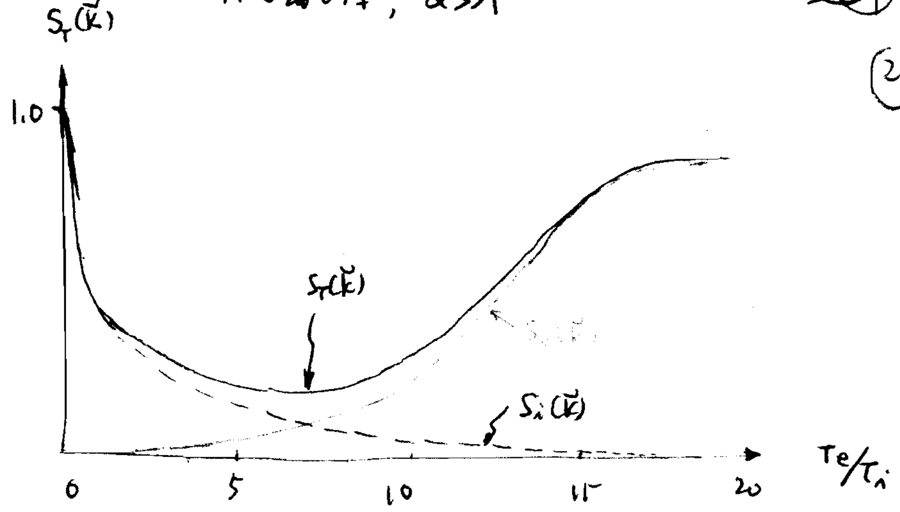
这就是 $\lambda \gg \lambda_D$ 时的离子声波的色散关系。

电子项和离子项的相对贡献由 $A_e > A_i$ 或 $A_e < A_i$ 定。

当 $\frac{ZT_e}{T_i} \lesssim 1$ 时，主要贡献是离子项

当 $\frac{ZT_e}{T_i} \gg 1$ 时，主要贡献是电子项

H 等离子体，$\alpha \gg 1$



5. 总散射：$ZT_e \neq T_i$ 时，总散射是如何变化的

当 $ZT_e \simeq T_i$ 时，总散射近似地有

$$S_T(\vec{k}) = \frac{1}{1+\alpha^2} + \frac{Z\alpha^4}{(1+\alpha^2)\left[1+\alpha^2+\alpha^2\frac{ZT_e}{T_i}\right]}$$

(1) 当 $\alpha \to 0$ 时 $S_T(\vec{k}) \to 1$

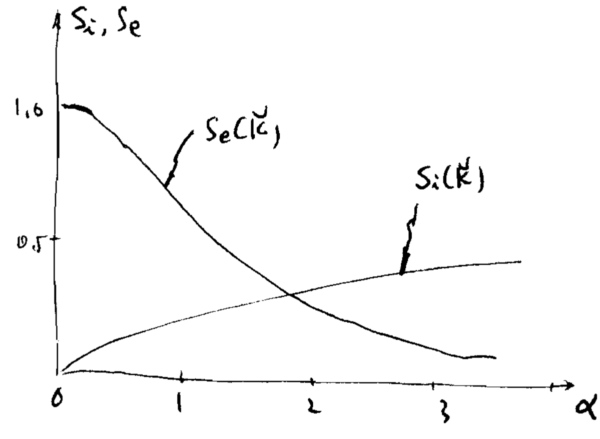
(2) 当 $\alpha \to \infty$ 时 $S_T(\vec{k}) \doteq \frac{Z}{1+ZT_e/T_i}$

其中第一项为电子项，第二项为离子项。

由此可见：

(1) $S_T(\vec{k}) \simeq S_e(\vec{k}) = 1$ 当 $\alpha \ll 1$ 时

(2) $S_T(\vec{k}) \simeq S_i(\vec{k}) = \frac{Z}{1+ZT_e/T_i}$ 当 $\alpha \gg 1$ 时

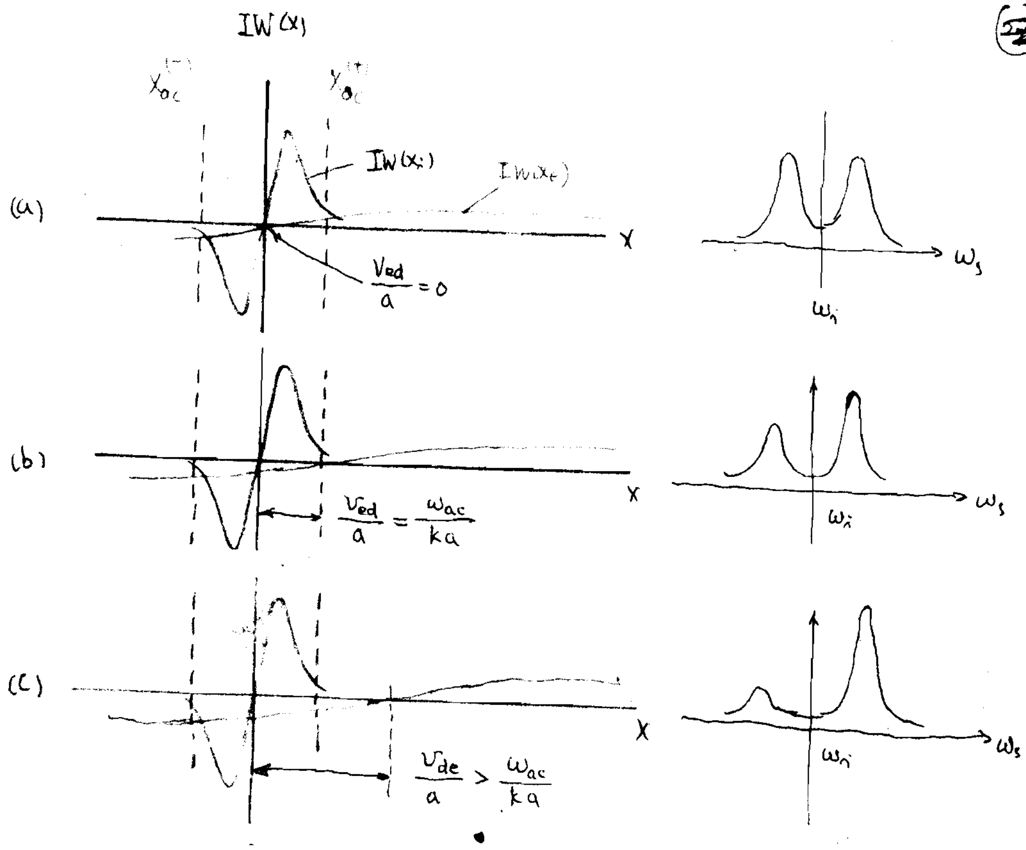


6. 当离子和电子相对于实验室坐标系有漂移运动时

$$x_i \equiv \frac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{di}}{kb} \qquad x_e \equiv \frac{\omega - \vec{k}\cdot\vec{v}_{de}}{ka}$$

阻尼项： $\alpha^2 IW(x_e) + \alpha^2 \frac{ZT_e}{T_i} IW(x_i)$ $x_e = \frac{\omega}{ka}$

$x_i = \frac{\omega}{kb}$



(a) $\frac{v_{ed}}{a} = 0$， 两个传播方向的离子声波的电子阻尼项相同，两支振幅相等

(b) $\frac{v_{ed}}{a} = \frac{\omega_{ac}}{ka}$， 与电子运动方向同方向传播的离子声波的电子阻尼项为零，与电子运动方向反方向传播的离子声波电子阻尼项变大。因此两支振幅不相等，同方向传播的 IAW 支振幅将会大于反方向传播的 IAW 的 [illegible]

7、高温、无碰撞的情况：是仿比较（对于离子集合分量）

$$S(\vec{k},\omega)=\frac{2\pi}{k}\left|\frac{1+G_i}{G}\right|^2\left(1+\frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega_i}\right)f_{e0}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$+\frac{2\pi Z}{k}\left|\frac{G_e}{G}\right|^2\left(1+\frac{3}{2}\frac{\omega}{\omega_i}\right)f_{i0}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

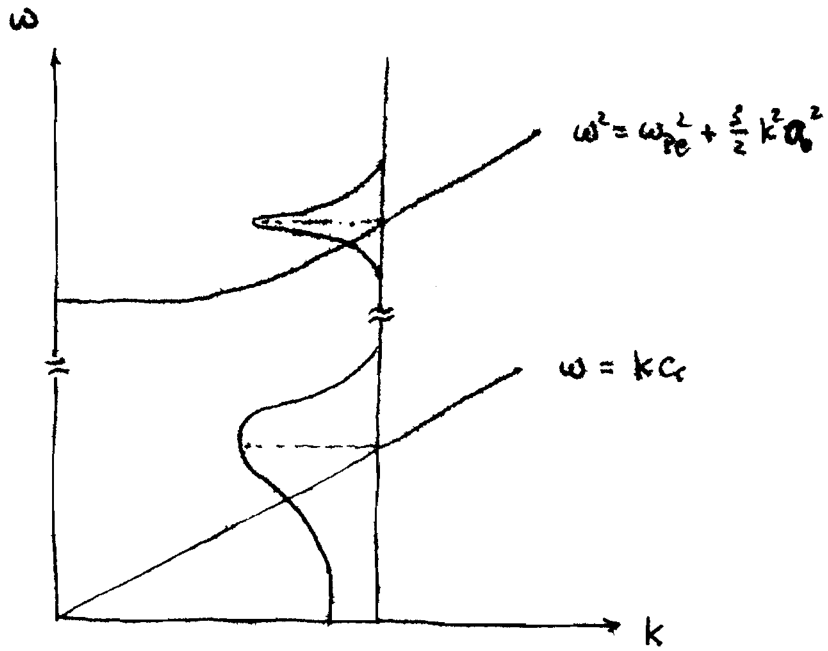
8、杂质的影响

$$S(\vec{k},\omega)=\frac{2\pi}{k}\left|\frac{1+\sum G_i}{G}\right|^2 f_{e0}\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$+\frac{2\pi}{k}\left|\frac{G_e}{G}\right|^2\sum\frac{Z^2 n_{i0}}{n_{e0}}f_{i0}\left(\frac{\omega}{k}\right),\quad Z_{eff}\equiv\frac{\sum Z^2 n_{i0}}{n_{e0}}$$

$$G=1+G_e+\sum G_i$$

这时，少量的杂质引起显著地改变散射谱的形状，因此这方法可用于测量杂质的含量或 Z_{eff}。



$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin \theta_s/2} \left(\frac{n_e\,[m^{-3}]}{T_e\,[eV]} \right)^{1/2}$$

假定等离子体 $n_e = 2 \times 10^{20}\ cm^{-3}$

$T_e = 2\ keV$

$Z = 45$

$\lambda_i = 0.5266\ \mu m$

$\theta_s = 90^\circ$

$k = 2k_i \sin \frac{\theta_s}{2} = 1.7 \times 10^5\ cm^{-1}$ ⇒决定散射电波的波长

$\alpha = 2.5$

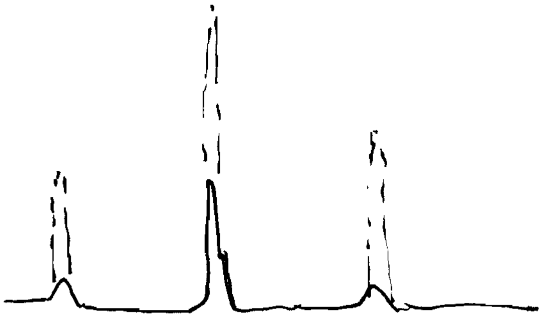
$$C_s \simeq \sqrt{\frac{ZT_e}{m_i}} = 2.1 \times 10^7\ cm/s$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{IAW} = kC_s = 3.6 \times 10^{12}\ s^{-1} \\ \lambda_{si,IAW} \simeq 5.3 \times 10^{-4}\ \mu m \approx 5.3\ \mathring{A} \end{array} \right.$$

$$\omega_{EPW} \simeq \omega_{pe} = 8.0 \times 10^{14}$$

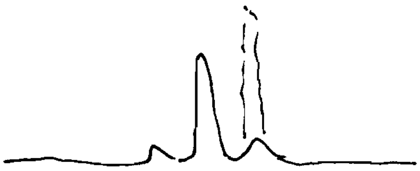
$\cancel{\lambda_{si,IAW}}$

$$\lambda_{si,EPW} \doteq 1.2 \times 10^{-1}\ \mu m \simeq 1200\ \mathring{A}$$

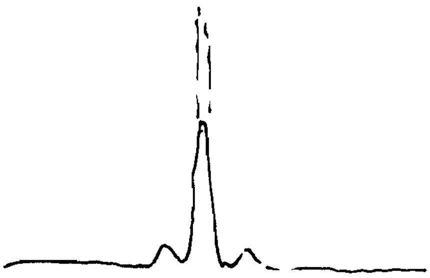


n_c

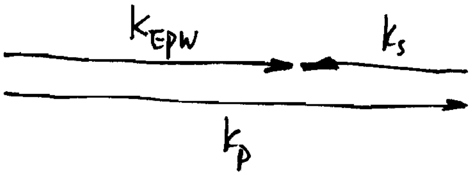
$\frac{1}{4}n_c$



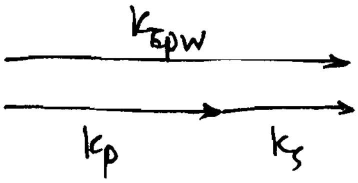
$n_e < \frac{1}{4}n_c$



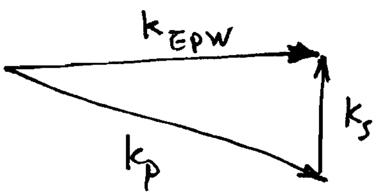
$n_e < \frac{1}{4}n_c$



背向 SRS (Stimulated Raman Scattering)



前向 SRS



侧向 SRS

§3.5 相干探测和相干散射理论

$$\alpha\equiv 1.07\times10^{-11}\frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\frac{\theta_s}{2}}\left(\frac{n_e[m^{-3}]}{kT_e[eV]}\right)^{1/2}$$

30

3.5 ~~§3.5 超热相干散射理论~~ 相干散射辐射和相干探测

由前述知，所谓超热涨落，是由于等离子体的集体运动（即等离子体静电波和静电不稳定性）所引起的密度涨落，其涨落幅度可远远超过热涨落水平（$\sqrt{N_s}$）。而通过相干散射测量，我们可获得散射谱密度函数 $S(\vec{k},\omega)=\lim_{V,T\to\infty}\frac{1}{VT}\frac{\langle|n_e(\vec{k},\omega)|^2\rangle}{n_{e0}}$，由此进而可以获得电子密度涨落谱 $n_e(\vec{k},\omega)$。由于被测的波数是由散射几何决定的，即 $k=[k_s^2+k_i^2-2k_sk_i\cos\theta_s]^{1/2}$，当 $k_i\simeq k_s$ 时，$k=2k_i\sin\frac{\theta_s}{2}$，由散射角的扫描，可获得不同波数下的涨落谱 $n_e(\vec{k},\omega)$。这样，通过相干散射测量，可以获得有关波和不稳定性的大部或全部信息。因而超热相干散射是研究等离子体静电波和静电不稳定性的重要工具。

由于超热相干散射所研究的对象是等离子体波和不稳定性，而非相干散射所研究的是小尺度范围内的热密度涨落，这就使得超热相干散射理论和实验处理上与非相干散射有一定的差别。因而我们要进一步讨论超热相干散射理论和实验中需要讨论的若干问题。

附注 $\Delta\lambda=38.8\sqrt{T_e[eV]}$ [$\lambda_i=6943Å$, $\theta_s=90°$]

(1) 散射体积有限，这需要讨论入射波电场空间截面上的分布

我们知道，由于非相干散射所研究的涨落波长很短，$\lambda\ll\lambda_D$，它与散射体积的线度相比是十分小的。例如，红宝石激光90°散射，其所测的涨落波长为 $\lambda=\frac{\lambda_i}{2\sin\theta_s/2}=0.49\mu m$，很显然，它与入射波的光斑半径（1mm量级）相比是很小的，这可以认为散射体积的线度是无限大的。因而，在非相干散射理论中，可以把散射体积认为是无限大的，因而可以无须讨论入射波电场空间截面上的分布。然而，在超热相干散射中，所研究对象是等离子体中各波的集体运动现象，即 $\lambda\gtrsim\lambda_D$，这时其波长可与入射电磁波的横向尺寸相比较。因而，在超热相干散射理论中，必须讨论有限散射体积

（接下页）

$\Delta f=10^{9}$ Hz

$\Delta\lambda=1.6\times10^{-4}Å$

$k=2k_i\sin\frac{\theta}{2}=1.28\times10^{5}\ cm^{-1}$

$\Delta k=\frac{\pi}{0.1}=31.4\ cm^{-1}$

$\frac{\Delta k}{k}\simeq2.5\times10^{-4}$

$\lambda=0.6943\ \mu m$

$f=4.32\times10^{14}$ Hz

$\frac{\Delta f}{f}=2.3\times10^{-6}$

T=1ns

王③

现在，和入射波电场在空间横截面上的非均匀分布情况。这时，我们可把入射波电场表示为

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \hat{e}\, E_{i0}\, U_i(\vec{r}) \exp\left[i(\omega_i t - \vec{k}_i\cdot\vec{r})\right]$$

其中 $U(\vec{r})$ 为入射波电场的空间分布函数。一般我们假设它为高斯分布函数，即

$$U_i(\vec{r}) = \frac{W_{i0}}{W_i(r_\parallel)} \exp\left\{-\frac{r_\perp^2}{W_i^2(r_\parallel)}\right\}$$

其中 W_{i0} 为入射波的束腰半径（我们假定束腰位于散射体积中心），

$$r_\perp = |\vec{r}\times\vec{k}_i|/k_i \qquad r_\parallel = \vec{r}\cdot\vec{k}_i/k_i$$

此外，为计算简单起见，我们还假定束的发散足够弱的，即

$$\frac{\lambda_i l_s}{\pi W_{i0}^2} \ll 1 \qquad W_i = W_{i0}\left[1+\left(\frac{z}{\pi W_{i0}^2/\lambda_i}\right)^2\right]^{1/2}$$

其中 l_s 是散射体积沿入射波方向上的特征长度。因而，可以近似地认为在散射体积内，入射波的波阵面近似为平面，且 $W_i(r_\parallel) \simeq W_{i0}$，故其空间分布函数可近似地表示为：

$$U_i(\vec{r}) \simeq \exp\left\{-\frac{r_\perp^2}{W_{i0}^2}\right\}.$$

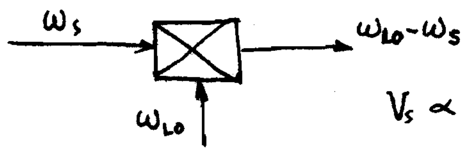
之所以用高斯分布来表示 $U_i(\vec{r})$，这是因为对于大多数的散射系统来讲，都是用激光束或微波束做探测束。对于激光束来讲，当激光器工作于单纵模、单横模（最低阶横模，即 TEM_{00} 模），它的输出光束是高斯分布的。此外，对于用天线发射和接收的微波束来讲，通过适当的变换，也可使波束的横向分布是高斯分布。此外，由于高斯分布的傅里叶变换也是高斯分布，而且在所有的分布函数中，高斯分布的半宽度和它的傅氏变换函数的半宽度的乘积是最小的。因此，用高斯光束做入射波束，可保证我们的散射系统在空间和波数空间的分辨率的乘积 $\Delta r\cdot\Delta k$ 是最佳的。

(2) 需要考虑散射测量的波数分辨

因为超热相干散射所研究的是等离子体波和不稳定性，为了较精确地测出 $n_e(\vec{k},\omega)$ 或单色波的色散关系 $k=k(\omega)$，要求散射测量具有较好的波数分辨能力。因为在相干超热散射实验中，不论把散射体积取为无限大，即 V_s 是有限的，根据测不准原理，其波数分辨也必定是有限的（$\because\ \Delta\vec{r}\cdot\Delta\vec{k}\simeq 1$）。因而在相干散射实验中要想改善波数分辨，必须与散射体积的关系，和（近）对波数谱的影响。

(3) 采用光混频的探测方法

因为等离子体波和不稳定性的频率范围比非相干的热涨落谱的频率范围窄得多，因而散射谱相对于入射频率的频移是很小的，用常规的色散分析方法难以分辨这么小的频移，如等离子体中波的最高频率大约是 1GHz 量级，若用相干散射测定波谱时，则散射谱相对于入射波的频移为 $\Delta f = 1\times10^{9}\ \mathrm{Hz}$，若入射波的波长为 $\lambda_i = 1\ \mu m$，则相应的波长移动为 $\Delta\lambda = \lambda = \left|\lambda_i^2 \frac{\Delta f}{c}\right| \simeq 3\times10^{-6}\ \mu m$，一般光谱仪都难以分辨这么微小的波长移动。因而，大多数的相干散射实验都用所谓的光混频的方法探测散射谱。因为光混频探测方法可把光频范围内的散射谱，频移到射频范围内，这样就可以用电子学的滤波方法获得好的频率分辨能力。此外，光混频探测方法比视频探测方法有更大的优越性：即对普通光谱的测量没有太大影响，因而允许做小角散射实验；而且混频灵敏度比视频探测灵敏度高，因为它有混频增益。



$$V_s \propto E_s E_{LO}\cos[(\omega_{LO}-\omega_s)t+(\varphi_{LO}-\varphi_s)]$$

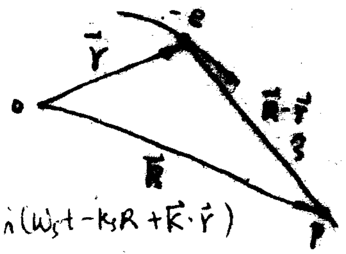
现在让我们重新改写散射理论，以便把超热相干散射实验中需要改善的上述问题包含到散射理论中。

一. 从单自由电子的散射

$\hat s\perp\hat e$

设入射电场为: $\vec E_i(\vec r,t)=\hat e\, E_{i0}U_i(\vec r)\,e^{i\omega_i t-i\vec k_i\cdot\vec r}$

$\vec E_i(\vec r,t)=$ [illegible]$(\vec r)\,e^{i\omega_i t}$ $\quad =\hat e\,\vec E_i(\vec r)\,e^{i\omega_i t}$



其中 $E_i(\vec r)=E_{i0}U_i(\vec r)\,e^{-i\vec k_i\cdot\vec r}$ $\qquad \frac{r_e}{R'}E_{i0}U_i(\vec r)\,e^{i(\omega_s t-k_sR+\vec k\cdot\vec r)}$

~~$k_s(\vec R-\vec r)$~~

则 t' 时刻在 r 处的电子在 $\vec R$ 所产生的散射波电场为

$$\vec E_s(\vec R,t)=-\hat e\,r_e E_{i0}U_i(\vec r)\frac{\exp[i(\omega_i t'-\vec k_i\cdot\vec r)]}{|\vec R-\vec r|}=-\hat e\,r_eE_{i0}\frac{U_i(\vec r)\,e^{-ik_s|\vec R-\vec r|}}{|\vec R-\vec r|}e^{i\ldots}$$

$$\omega_s(t-\frac{R}{c})+\vec k\cdot\vec r=\omega_s t-\vec k_i\cdot\vec r-\vec k_s\cdot\vec R+\vec k_s\cdot\vec r$$

这里，我们已假定 $|\hat s\times(\hat s\times\hat e)|=1$，且 $U_i(\vec r)$ 是入射波在横截面上的分布。

当用光混频的方法检测散射谱时，散射波电场与本振电场 $\vec E_{lo}(\vec R,t)$ 在探测器表面上相叠加，其输出电流为

$$i(t)=\frac{e}{\hbar\omega_s}\iint_A c\varepsilon_0\,|\vec E_s(\vec R,t)+\vec E_{lo}(\vec R,t)|^2\,\eta(\vec R)\,d\vec R$$

这里是对探测器截面的积分，其中 $\eta(\vec R)$ 为探测器截面上探测效率的分布。为简单计，我们令 $\eta(\vec R)$ 在整个探测器截面上的分布为常数，则

$$i(t)=\frac{e\eta\varepsilon_0c}{\hbar\omega_s}\iint_A|\vec E_s(\vec R,t)+\vec E_{lo}(\vec R,t)|^2\,d\vec R$$

由此可见，它是由本振强度 $I_{lo}=\varepsilon_0c|E_{lo}|^2$，散射波强度 $I_s(\ll I_{lo})$ 和它们的干涉项组成。因前两项只贡献直流项，故我们只对感兴趣干涉项:

$$i_{sg}(t)=\frac{e\eta\varepsilon_0c}{\hbar\omega_s}\iint_A E_s(\vec R,t)\,E^*_{lo}(\vec R,t)\,d\vec R\ +\ E_s^*E_l$$

这里，我们已假定 $\vec E_{lo}\parallel\vec E_s\parallel\vec E_{i0}$。它可进一步表示为:

$$i_{sg}(t)=\frac{e\eta\varepsilon_0c}{\hbar\omega_s}r_eE_{i0}U_i(\vec r)\,e^{i[\omega_s t-\vec k_i\cdot\vec r]}\iint_A E^*_{lo}(\vec R,t)\frac{e^{-ik_s|\vec R-\vec r|}}{|\vec R-\vec r|}\,d\vec R$$

上式中的积分与[illegible]很类似。利用该积分，我们可定义一个虚的电场分布:

$$E_{lo}(\vec{r},t) = -\frac{i}{\lambda_s}\iint_A E_{lo}(\vec{R},t)\frac{e^{ik_s|\vec{R}-\vec{r}|}}{|\vec{R}-\vec{r}|}d\vec{R}_s = \frac{1}{\lambda_s}\iint E_{lo}(\vec{R},t)\frac{e^{ik_s|\vec{R}-\vec{r}|-i\frac{\pi}{2}}}{|\vec{R}-\vec{r}|}d\vec{R}_s$$

即
$$i\lambda_s E_{lo}(\vec{r},t) \equiv \iint_A E_{lo}(\vec{R},t)\frac{e^{ik_s|\vec{R}-\vec{r}|}}{|\vec{R}-\vec{r}|}d\vec{R}_s$$

该衍射积分定义了一个虚的本振束，它是将测四表面的场分布沿着散射束的反光路向散射体积传播的电磁辐射，它是光混频接收机的天线来"看"到的场分布。这样，混频器输出的中频电流 $i_{if}(t)$ 就可以用散射体积内的电场分布来表示，即

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta\varepsilon_0 c\, r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s}\left[E_i'(\vec{r},t)\, E_{lo}^{*}(\vec{r},t) + E_i'^{*}(\vec{r},t)\, E_l(\vec{r},t)\right]$$

其中
$$E_i'(\vec{r},t) = E_{i0}\, U_i(\vec{r})\, e^{i[\omega_i t-\vec{k}_i\cdot\vec{r}]}$$

可以证明：若本振束的电场分布是高斯分布，则上述衍射积分所定义的天线束在散射体积内的场分布也是高斯分布，故有：

$$E_{lo}(\vec{r},t) = E_{lo}\, U_{lo}(\vec{r})\, e^{i[\omega_{lo}t-\vec{K}_{lo}\cdot\vec{r}+\varphi_{lo}]}$$

这样，混频器输出的中频电流为

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta\varepsilon_0 c\, r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s}E_{i0}\, E_{lo}\, U(\vec{r})\, e^{i(\omega_\Delta t+\vec{k}_\Delta\cdot\vec{r}+\Delta\varphi)}$$

$$\omega_\Delta = \omega_s-\omega_l \qquad \vec{k}_\Delta = \vec{k}_l-\vec{k}_i \simeq \vec{k}_s-\vec{k}_i$$

其中 ~~$\omega_\Delta = \omega_{lo}-\omega_s$, $\vec{k}_\Delta = \vec{k}_{lo}-\vec{k}_i \simeq \vec{k}_s-\vec{k}_i$~~ , $\Delta\varphi = \varphi_{lo}-\varphi_i$

这里我们已将场分布中的虚数 i 因子归併到相位因子 $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ 中，同样也不失一般性，相位因子 $e^{i\Delta\varphi}$ 也可略去，故有：

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta\varepsilon_0 c\, r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s}E_{i0}E_{lo}U(\vec{r})\left[e^{i(\omega_\Delta t+\vec{k}_\Delta\cdot\vec{r})}+e^{-i(\omega_\Delta t+\vec{k}_\Delta\cdot\vec{r})}\right]$$

其中
$$U(\vec{r}) \equiv U_i(\vec{r})\, U_{lo}(\vec{r})$$

这样，我们自相干系统是由散射电场为：

相干探测中频电流

$$i_{if}(t) = \frac{e\eta c\varepsilon_0}{\hbar\omega_s}\iint_{A_r} E_s(\vec R,t)\, E_{lo}^*(\vec R,t)\, d\vec R_\perp + c.c.$$

$$= \frac{e\eta c\varepsilon_0}{\hbar\omega_s} r_e E_{i0} U_i(\vec r)\, e^{i[\omega_s t - \vec k_i\cdot\vec r]}\iint_{A_r} E_{lo}^*(\vec R,t)\frac{e^{-ik_s|\vec R-\vec r|}}{|\vec R-\vec r|}\, d\vec R_\perp$$

定义天线束（虚本振束）

$$E_{lo}(\vec r,t) = -\frac{i}{\lambda_s}\iint_A E_{lo}(\vec R,t)\frac{e^{ik_s|\vec R-\vec r|}}{|\vec R-\vec r|}\, d\vec R_\perp$$

得：
$$i_{if}(t) = \frac{e\eta c\varepsilon_0 r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s}\Big[\underbrace{E_i'(\vec r,t)}_{E_{i0}U_i(\vec r)\exp\{i[\omega_s t-\vec k_i\cdot\vec r]\}} E_{lo}^*(\vec r,t) + E_i'^*(\vec r,t)\, E_{lo}(\vec r,t)\Big]$$

~~其中~~
$$\cancel{E_i'(\vec r,t) \equiv E_{i0}U_i(\vec r)\exp\{i(\omega_s t-\vec k_i\cdot\vec r)\}}$$

令虚本振束为

$$E_{lo}(\vec r,t) = E_{lo} U_{lo}(\vec r)\exp\{i[\omega_{lo}t - \vec k_{lo}\cdot\vec r + \varphi_{lo}]\}$$

则
$$i_{if}(t) = \frac{e\eta c\varepsilon_0 r_e\lambda_s}{\hbar\omega_s} E_{i0}E_{lo}U(\vec r)\left\{\exp[i(\omega_\Delta t + \vec k_\Delta\cdot\vec r + \Delta\varphi)] + c.c.\right\}$$

其中
$$\omega_\Delta \equiv \omega_s - \omega_{lo} \qquad \vec k_\Delta = \vec k_{lo} - \vec k_i \simeq \vec k_s - \vec k_i \quad (因\ \vec k_{lo}\parallel\vec k_s,\ k_{lo}\simeq k_s)$$

$$U(\vec r) \simeq U_i(\vec r)\, U_{lo}(\vec r)$$

因此，可把它视为散射电场

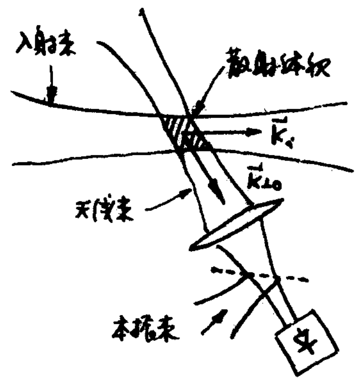
$$E_s(\vec R,t) = \frac{r_e}{R}E_{i0}U(\vec r)\exp\{i[\omega_s t + \vec k_\Delta\cdot\vec r - k_{lo}R]\}$$

与本振电场

$$E_{lo}(\vec R,t) = E_{lo}\exp\{i[\omega_{lo}t - k_{lo}R]\}$$

在混频器上产生的中频电流。

$$E_s(\vec R,t)=\frac{r_e}{R}E_{i0}U(\vec r)\,e^{i[\omega_s t+\vec K_s\cdot\vec r-K_{Lo}R]}$$



和本振电场为

$$E_{Lo}(\vec R,t)=E_{Lo}\,e^{i[\omega_{Lo}t-K_{Lo}R]}$$

在混频器上所产生的中频信号电流。由于天线束是沿散射束方向上传播的，且我们考虑的是小频移的情况，即 $\omega_\Delta=\omega_s-\omega_i\ll\omega_i$，则

$$K_{Lo}\simeq K_s\simeq K_i\quad,\qquad \vec K_{Lo}\doteq\vec K_s$$

故有

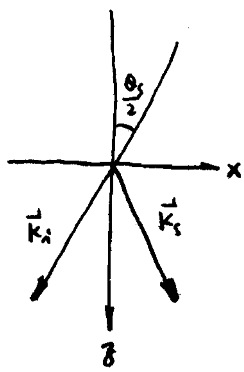
$$\boxed{E_s(\vec R,t)=\frac{r_e}{R}E_{i0}U(\vec r)\,\mathrm{Exp}\{i[\omega_s t+(\vec K_s-\vec K_i)\cdot\vec r-K_sR]\}}$$

这样，除了散射电场中多了空间分布函数 $U(\vec r)\equiv U_i(\vec r)U_{Lo}(\vec r)$ 之外，其它均与非相干散射的情况相同。因此，这样做的结果，既是在热相干散射理论中考虑了有限散射体积效应和入射波电场的横向分布，又使理论的处理大大简化。

二. 从单色等离子体波的散射

下面我们先研究最简单的情况，即电磁波从相干的单色平面波的散射。设有一单色的等离子体静电波沿 x 轴方向传播，其所产生的密度涨落为：

$$\tilde n_e(\vec r,t)=\tilde n_{e0}\exp[i(\omega_W t-K_W x)]$$



取如图所示的坐标系，入射束波矢与 z 轴的夹角为 $\theta_s/2$，则

$$U_i(\vec r)=\exp\left\{-\frac{y^2+\left(x\cos\frac{\theta_s}{2}+z\sin\frac{\theta_s}{2}\right)^2}{W_{i0}^2}\right\}$$

其散射束波矢与 z 轴的夹角也为 $\theta_s/2$，它也是高斯光束，故其空间分布函数为：

$$\vec{E}_{s,等离子体} = \int d\vec{r}\, \tilde{n}_e(\vec{r},t')\, E_{r,单电子}(\vec{R},t')$$

三(3b)

$n_e = n_{e0} + \tilde{n}_e$

$$U_s(\vec{r}) = \exp\left\{ - \frac{y^2 + \left(x\cos\frac{\theta_s}{2} - z\sin\frac{\theta_s}{2}\right)^2}{W_{s0}^2} \right\}$$

为了简单起见，我们假定 $W_{i0} = W_{s0}$，故在$\vec{R}$处的散射电场为

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{E_{i0} r_e}{R'}\hat{e}\int d\vec{r}\, \tilde{n}_e(\vec{r},t')\, U(\vec{r}) \exp\{ i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r})\}$$

$$t' = t - \frac{R}{c} + \frac{\hat{s}\cdot\vec{r}(t)}{c}$$

$$= -\frac{r_e E_{i0} \tilde{n}_{e0}}{R'}\hat{e}\int d\vec{r}\, U(\vec{r}) \exp[i(\omega_w t' - k_w x)] \exp[i(\omega_i t' - \vec{k}_i\cdot\vec{r})]$$

其中

$$U(\vec{r}) \equiv U_i(\vec{r})\, U_s(\vec{r}) = \exp\left\{ -\frac{2x^2\cos^2\frac{\theta_s}{2} + 2y^2 + 2z^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}{W_{i0}^2} \right\}$$

且这里已假定 $\hat{s}\times(\hat{s}\times\hat{e}) = -\hat{e}$。将推迟时间的关系式代入上式，可得：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'} E_{i0}\tilde{n}_{e0}\hat{e}\int d\vec{r}\, \exp\left\{ -\frac{2x^2\cos^2\frac{\theta_s}{2} + 2y^2 + 2z^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}{W_{i0}^2} \right\} \exp\left\{ i\left[\omega_s\left(t - \frac{R}{c}\right) - k_w x + \vec{k}\cdot\vec{r}\right]\right\}$$

其中 $\omega_s = \omega_i + \omega_w$ ， $\vec{k} = \vec{k}_s - \vec{k}_i$

利用定积分公式

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2x^2} \exp(ipx)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q} \exp\left(-\frac{p^2}{4q^2}\right)}$$

上式的积分可简化为：

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\frac{r_e}{R'} E_{i0}\tilde{n}_{e0} V_s\hat{e}\, \exp\left\{ -\frac{W_{i0}^2 (k_x - k_w)^2}{8\cos^2\frac{\theta_s}{2}} - \frac{W_{i0}^2 k_y^2}{8} - \frac{W_{i0}^2 k_z^2}{8\sin^2\frac{\theta_s}{2}} \right\} \exp\left[i\omega_s\left(t - \frac{R}{c}\right)\right]$$

其中

$$\boxed{V_s \equiv \int d\vec{r}\, U(\vec{r}) = \frac{(\sqrt{\pi}\, W_{i0})^3}{\sqrt{2}\sin\theta_s}}$$

则在$\vec{R}$处探测器所接收到的平均散射功率为

$$P_s(\vec{R},t) = c\varepsilon_0 \langle |\vec{E}_s(\vec{R},t)|^2 \rangle_T A_r$$

令 $V_s \equiv A_i l_s$，l_s为散射体积长度

$$= \frac{P_i}{A_i} r_e^2 \tilde{n}_{e0}^2 V_s^2 \frac{A_r}{R'^2} F(\vec{k},k_w) = P_i r_e^2 l_s^2 \tilde{n}_{e0}^2 A_i \frac{A_r}{R'^2} F(\vec{k},k_w)$$

其中 A_r 为探测器的有效探测面积

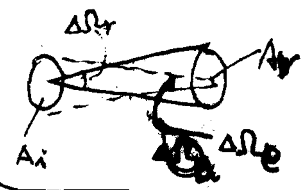
r: 接收
e: 发射
$$\boxed{A_e\cdot\Delta\Omega_r \equiv A_r\cdot\Delta\Omega_e}$$

三 ⑧ (37)

$$F(\vec K, K_w) = \exp\left\{-\frac{W_{i0}^2(K_x-K_w)^2}{4\cos^2\frac{\theta_s}{2}} - \frac{W_{i0}^2K_y^2}{4} - \frac{W_{i0}^2K_z^2}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

$A_r\cdot\Delta\Omega_r = A_i\Delta\Omega_r = \alpha\lambda_s^2$

$\alpha=\frac{1}{4}$, $\alpha\le\frac{\pi^2}{16}$



探测口的有效探测面积可按下式计算

$$A_r = \int_0^\infty 2\pi r\, e^{-\frac{2r^2}{W_s^2}}\,dr = \frac{1}{2}\pi W_s^2 \quad \frac{1}{2}\pi W_s^2$$

又根据高斯光束公式

$$W_s^2 = W_{s0}^2\left[1+\frac{\lambda_s^2R^2}{\pi^2W_{s0}^4}\right] \simeq \frac{\lambda_s^2R^2}{\pi^2W_{s0}^2} = \frac{\lambda_s^2R^2}{\pi^2W_{i0}^2} \quad (\text{远场近似})$$

因而探测口的接收立体角为

$$\Delta\Omega_r = \frac{A_r}{R^2} = \frac{\pi W_s^2}{2R^2} = \frac{\lambda_s^2}{2\pi W_{i0}^2}$$

$$A_i\cdot\Delta\Omega_r = \frac{A_rA_i}{R^2} = A_r\Delta\Omega_e$$

同理，入射束的有效截面为 $A_i=\frac{1}{2}\pi W_{i0}^2$。此时，定义

$$\boxed{V_s\cdot\Delta\Omega_r = l_s\cdot\frac{1}{2}\pi W_{i0}^2\cdot\frac{\lambda_s^2}{2\pi W_{i0}^2} = \frac{1}{4}l_s\lambda_s^2}$$

$A_i\Delta\Omega_r=\frac{\lambda_s^2}{4}$

$V_s \equiv A_i l_s$，l_s是散射体积沿入射方向上的特征长度

$$V_s = \frac{(\sqrt{\pi}W_{i0})^3}{\sqrt{2}\sin\theta_s} = A_i l_s$$

故散射~~[illegible]~~最后就可简化为：

$$\boxed{P_s(\vec K) = \frac{1}{4}P_i r_e^2\tilde n_{e0}^2 l_s^2\lambda_s^2 F(\vec K,\vec K_w)}$$

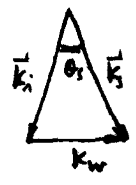
$A_i=\frac{1}{2}W_{i0}^2\pi$

式中

$$F(\vec K, K_w) = \exp\left\{-\frac{W_{i0}^2(K_x-K_w)^2}{4\cos^2\frac{\theta_s}{2}} - \frac{W_{i0}^2K_y^2}{4} - \frac{W_{i0}^2K_z^2}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

由上式我们可得到以下的几个结论：　$K_{xm}=K_w$, $K_{ym}=0$　$K_{zm}=0$

(1) 当 $K_{x0}=K_w$，$K_{y0}=0$　$K_{z0}=0$ 时，$F(\vec K,\vec K_w)=1$
散射功率达到最大值，这就是散射的匹配条件，
它相当于晶体衍射的布喇格条件。



(2) 当 $K_{y0}=K_{z0}=0$，及 $W_{i0}^2(K_x-K_w)^2/4\cos^2\frac{\theta_s}{2}=1$ 时
散射功率下降到峰值功率的 e^{-1}，我们定义这时的波数与匹配时的波数之差，即 $\Delta K_x = |K_x-K_w|$，为系统在x轴方向上的波数分辨率，即　$=|K_x-K_{xc}|=|K_x-K_w|$

$$\Delta k_x = \pm\frac{2\cos\frac{\theta_s}{2}}{W_{i0}} \xrightarrow{\text{小角散射}} \pm\frac{2}{W_{i0}}$$

类似地，当 $k_{x0}=k_W$，$k_{y0}=0$ 及 $k_y^2 W_{i0}^2/4 = 1$ 时，散射功率下降到峰值功率的 e^{-1}，这时

$$\Delta k_y = \pm\frac{2}{W_{i0}} \qquad (\Delta k_y \equiv k_y - k_{y0})$$

是散射子波在y轴方向上的波数分辨率。同理，散射子波在z轴方向上的波数分辨率为

$$\Delta k_z = \pm\frac{2\sin\frac{\theta_s}{2}}{W_{i0}} \xrightarrow{\text{小角散射}} \pm\frac{\theta_s}{W_{i0}}$$

实际上，我们可以证明：散射子波在x、y方向上的波数分辨率，就是由高斯光束的自然发散角决定的。由高斯光束的特性知，其自然发散角为：

$$\theta_d = \frac{\lambda_i}{\pi W_{i0}}$$

而

$$k = \frac{4\pi}{\lambda_i}\sin\frac{\theta_s}{2}$$

所以，

$$|\Delta k| = \frac{2\pi}{\lambda_i}\cos\frac{\theta_s}{2}\,\Delta\theta_s = \frac{2\pi}{\lambda_i}\cos\frac{\theta_s}{2}\cdot\theta_d = \frac{2\cos\frac{\theta_s}{2}}{W_{i0}} \to \frac{2}{W_{i0}}$$

它与入射光束的束腰半径有关。而z方向的波数分辨率是由散射体积在入射束方向上的特征长度 l_s 决定的，这可证明如下：

∵ $$V_s = \frac{(\sqrt{\pi}W_{i0})^3}{\sqrt{2}\sin\theta_s} = A_i l_s, \qquad A_i = \frac{1}{2}\pi W_{i0}^2$$

∴ $$l_s = \sqrt{2\pi}\,\frac{W_{i0}}{\sin\theta_s} \simeq \frac{2W_{i0}}{\theta_s} \qquad (\text{小角散射时})$$

而

$$\Delta k_z = \pm\frac{2\sin\frac{\theta_s}{2}}{W_{i0}} \simeq \pm\frac{\theta_s}{W_{i0}} = \pm\frac{2}{l_s}$$

由此可见，散射子波的波数分辨是由入射光束的束腰半径以及散射体自

积的特征长度 l_s 决定的，且与这些特征长度成反比。

(3) $P_s \propto \lambda_s^2$ （这是因为相干立体角与波长的平方成正比）

由于在许多情况下，可得到的相干辐射源的功率 P_i 和探测器的灵敏度都是有限的。由上述的比例关系可知，当入射功率和探测器的灵敏度相同时，只要许可，可以适当地选择长的入射束波长 λ_i，可使散射功率提高，从而可改善信噪比。

此外，由于系统的波数分辨是由入射束的横向尺寸决定的，即

$$\Delta k_x = \Delta k_y \simeq \frac{2}{W_{i0}}$$

它与入射波长无关；而系统的纵向空间分辨能力与散射角有关，即

$$l_s \simeq \frac{2W_{i0}}{\sin\theta_s}$$

对于给定的波数 k，入射波长越长，散射角越大（∵ $k=\frac{4\pi}{\lambda_i}\sin\frac{\theta_s}{2}$）。因而，入射波长越长，系统的纵向空间分辨能力越好。故适当地选择波长较长的入射波，可以改善系统的纵向空间分辨能力。

(4) $P_s \propto \tilde{n}_{e0}^2$

即等离子体中密度涨落幅度越大，散射功率也越大（当其它条件相同时）。由此可见，超热相干散射的一大特点是：对于给定的探测功率，它的散射功率可比热涨落的散射功率大很多，从而可用功率较小的连续波激光器或微波源做超热相干散射实验。

例如：用于测离子温度的热涨落相干散射实验，用FIR激光器做辐射源，如光泵的重水远红外激光器，$\lambda_i = 385\mu m$，当等离子体密度为 $10^{13}\ cm^{-3}$ 量级时，源功率至少为 1MW 量级。若用相同的源和相干探测方法进行超热相干散射实验（设 $\tilde{n}_{e0}=10^{-3} n_{e0}$），在信噪比与热涨落相干散射实验相同的情况下，源功率要多大？

热涨落　$P_{i1} = 1MW$，$P_s \propto P_{i1}\tilde{n}_{e1}^2 = 10^{13} P_{i1}$

超热涨落 $P_{i2}=?$ ，$P_s \propto P_{i2}\tilde{n}_{e2}^2 = 10^{20}P_{i2}$

$\therefore \quad P_{i2} = 10^{-7}P_{i1} = 100\,\mathrm{mW}$

由此可见，用于超热涨落相干散射实验的相干源，用低功率的连续波激光器或微波管就可以了，这就是超热相干散射实验能较早地用于研究托卡马克等离子体波和微湍流的主要原因之一。

(5) 可测的等离子体波波长范围

当研究等离子体波和不稳定性时，我们希望散射系统可测的波长范围尽可能地大。但在实际实验中，可测的波长范围受到各种条件的限制：首先，散射系统可测的最长波长是由最小散射角 θ_{sm} 决定的；而 θ_{sm} 受到系统的分辨率的限制，它不能小于入射波的发散角 θ_d，即

$$\theta_{sm} \geq 2\theta_d = \frac{2\lambda_i}{\pi W_{i0}} \qquad \frac{2\pi}{\lambda_M} \geq \frac{4\pi}{\lambda_i}\sin\frac{\theta_s}{2} \simeq \frac{2\pi}{\lambda_i}\theta_{sm}$$

故

$$\lambda_M \simeq \frac{\lambda_i}{\theta_{sm}} = \pi W_{i0}/2 \qquad \lambda_M \leq \frac{\lambda_i}{\theta_{sm}}$$

其次，系统的最大散射角是由光学元件或装置的最大散射通道决定，即

$$\lambda_m = \frac{\lambda_i}{2\sin\frac{\theta_{sM}}{2}}$$

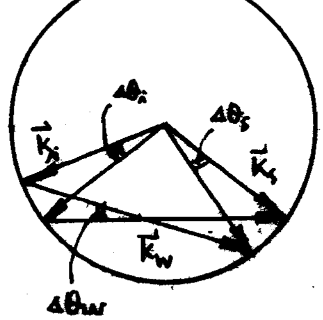
故散射系统可测的波长范围为

$$\frac{\lambda_i}{2\sin\frac{\theta_{sM}}{2}} \leq \lambda \leq \pi W_{i0}/2$$

(6) 散射矢量图

$\because \quad \omega_s = \omega_i \pm \omega_W$ ，$\vec{k}_s = \vec{k}_i \pm \vec{k}_W$ ，$k_s = k_i\frac{1-\beta_i}{1-\beta_s}$

在等离子体波频率远小于入射波频率情况下，有 $k_s \simeq k_i$，故入射、散射波矢是位于以 $|\vec{k}_i|$ 为半径的圆周上，如右图所示。由此可见，散射角宽度 $\Delta\theta_s$ 是由入射波角宽度和等离子体波角宽度 $\Delta\theta_W$ 决定的，即



$$\Delta\theta_s = \min(\Delta\theta_i, \Delta\theta_W)$$

三. 以等离子体涨落的散射：

设等离子体密度涨落为：

$$\tilde{n}_e(\vec{r},t) = \iint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, n_e(\vec{k},\omega)\exp[i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})]$$

若入射波电场为：

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \hat{e}\, E_{i0}\, U_i(\vec{r})\exp[i(\omega_i t-\vec{k}_i\cdot\vec{r})]$$

则等离子体散射电场为：　$\omega t'-\vec{k}\cdot\vec{r} \simeq \omega(t-\frac{R}{c})-\vec{k}\cdot\vec{r}$, $\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r} \simeq \omega_i(t-\frac{R}{c})+\vec{k}_s\cdot\vec{r}-\vec{k}_i\cdot\vec{r}$

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\int d\vec{r}\; U(\vec{r})\,\tilde{n}_e(\vec{r},t')\exp[i(\omega_i t'-\vec{k}_i\cdot\vec{r})]$$

$$= -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\iiint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\,d\vec{r}\; U(\vec{r})\, n_e(\vec{k},\omega)\exp\{i[\omega_s(t-\frac{R}{c})-(\vec{k}-\vec{k}_s+\vec{k}_i)\cdot\vec{r}]\}$$

$$= -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\iint \frac{d\omega}{2\pi}\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, n_e(\vec{k},\omega)\exp[i\omega_s(t-\frac{R}{c})]\int d\vec{r}\,U(\vec{r})\exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}]$$

其中　$\omega_s \equiv \omega_i+\omega$,　$\vec{k}_+ = \vec{k}_s-\vec{k}_i$,　$k_s = \omega_s/c$

令

$$I(\vec{k}-\vec{k}_+) \equiv \int d\vec{r}\; U(\vec{r})\exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}]$$

$$\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega) \equiv \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\, n_e(\vec{k},\omega)\, I(\vec{k}-\vec{k}_+)$$

则

$$\vec{E}_s(\vec{R},t) = -\hat{e}\frac{r_e}{R'}E_{i0}\int\frac{d\omega}{2\pi}\,\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega)\exp[i\omega_s(t-\frac{R}{c})]$$

散射到 R 处，面积为 A_r 上的平均散射功率为：

$$P_s(\vec{R}) = A_r c\varepsilon_0 \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |\vec{E}_s(\vec{R},t)|^2 dt$$

$$= \frac{P_i}{A_i} r_e^2\, n_{e0} V_s\, \hat{S}(\vec{k}_+)\,\Delta\Omega_r$$

其中　$\Delta\Omega_r \equiv \frac{A_r}{R'^2}$ 为接收立体角

$$\hat{S}(\vec{k}_+) \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi} \hat{S}(\vec{k}_+,\omega)$$

$$\hat{S}(\vec{k}_+,\omega) \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{|\hat{n}(\vec{k}_+,\omega)|^2}{n_{e0}V_s} = \frac{\langle|\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega)|^2\rangle_T}{n_{e0}V_s}$$

▲ $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 的物理意义 $\quad I(\vec{k}-\vec{k}_+) \equiv \int d\vec{r}\, U(\vec{r}) \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}]$

1. 若 $V_s \to \infty$ 且 $U(\vec{r})=1$（均匀分布）

$$I(\vec{k}-\vec{k}_+) = \int d\vec{r} \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}] = (2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{k}_+) = \begin{cases} \infty & \text{当 } \vec{k}=\vec{k}_+ \text{时} \\ 0 & \text{当 } \vec{k}\neq\vec{k}_+ \text{时} \end{cases}$$

∴ 故 $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 可視为 $\vec{k}$ 空间滤波器（中心波矢 $\vec{k}_+$，带宽 $\Delta\vec{k}_+ \to 0$）

2. 若 V_s 有限（长方形），且 $U(\vec{r})=1$

$$I(\vec{k}-\vec{k}_+) = \int d\vec{r} \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}] = V_s \prod_{j=1}^{3} \frac{\sin[\frac{1}{2}(\vec{k}-\vec{k}_+)_j L_j]}{\frac{1}{2}(\vec{k}-\vec{k}_+)_j L_j} \qquad j=x,y,z$$

$$\because \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\sin\omega}{\omega} = \pi$$

$$g(\omega) = \frac{\sin\omega}{\omega} \simeq g^*(\omega) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} \le \omega \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \omega > \frac{\pi}{2} \text{ 或 } \omega < -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad I(\vec{k}-\vec{k}_+) = \begin{cases} V_s & \text{当 } -\frac{\pi}{L_i} \le (\vec{k}-\vec{k}_+)_i \le \frac{\pi}{L_i} \quad i=x,y,z \\ 0 & \text{反之} \end{cases}$$

3. 对于单一波矢 $\vec{k}$

$$\lim_{\vec{k}\to\vec{k}_+} I(\vec{k}-\vec{k}_+) = \int d\vec{r}\, U(\vec{r}) = V_s$$

由此可见：

$I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 是 $\vec{k}$ 空间滤波器，其中心波矢为 $\vec{k}_+ \equiv \vec{k}_s - \vec{k}_i$，其带宽为 $\Delta\vec{k}$，它由散射体积决定，即：

$$\frac{|\Delta\vec{k}|}{(2\pi)^3} V_s = 1$$

这是因为： $\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_+) = 1$ 归一化函数

$$\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_+) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \int d\vec{r}\, U(\vec{r}) \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}]$$

$$= \int d\vec{r}\, U(\vec{r}) \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \exp[-i(\vec{k}-\vec{k}_+)\cdot\vec{r}] = \int d\vec{r}\, U(\vec{r})\, \delta(\vec{r}) = U(0)$$

当 $U(0)=1$ 时，则有 $\int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} I(\vec{k}-\vec{k}_+) = 1$

综上所述 $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 可视为 k 空间滤波器的单位带宽传递函数。

这样，
$$\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} n_e(\vec{k},\omega)\, I(\vec{k}-\vec{k}_+)$$

可视为电子密度涨落谱 $n_e(\vec{k},\omega)$ 经过滤波 $I(\vec{k}-\vec{k}_+)$ 选择后其波矢为 $\vec{k}_+$，且有限带宽 $\Delta\vec{k}_+$ 内的平均值。

这样，我们可将 $\hat{S}(\vec{k}_+)$ 进一步化简：

$$\hat{S}(\vec{k}_+) = \frac{\langle|\hat{n}_e(\vec{k}_+)|^2\rangle_T}{n_{e0}V_s} = \frac{V_s}{n_{e0}}\left\langle\left|\frac{\hat{n}_e(\vec{k}_+)}{V_s}\right|^2\right\rangle_T$$

$$= \frac{V_s}{n_{e0}}\left\langle\left|\hat{n}_e(\vec{k}_+)\cdot\frac{\Delta\vec{k}_+}{(2\pi)^3}\right|^2\right\rangle_T$$

其中 $|\hat{n}_e(\vec{k}_+)|^2 \equiv \int \frac{d\omega}{2\pi}|\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega)|^2$

权重平均的

权重平均的

为 $|\hat{n}_e(\vec{k}_+,\omega)|^2$ 在 $\vec{k}_+ \to \vec{k}_+ \pm \frac{1}{2}\Delta\vec{k}_+$ 带宽内的谱~~的平均值~~

单位带宽功率谱

定义：

$$\langle|\hat{n}_{\vec{k}_+}|^2\rangle_T \equiv \left\langle\left|\hat{n}_e(\vec{k}_+)\cdot\frac{\Delta\vec{k}}{(2\pi)^3}\right|^2\right\rangle_T$$

为 $\hat{n}_e$ 在 $\vec{k}_+ \to \vec{k}_+ \pm \frac{1}{2}\Delta\vec{k}_+$ 带宽内的积分值

故有 $\hat{S}(\vec{k}_+) = \frac{V_s}{n_{e0}}\langle|\hat{n}_{\vec{k}_+}|^2\rangle_T$

$$P_s(\vec{R}) = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 V_s^2 \langle |\hat{n}_{\vec{k}_+}|^2 \rangle_T \, \Delta\Omega_r \qquad (V_s = A_i l_s)$$

$$= P_i r_e^2 l_s^2 \langle |\hat{n}_{\vec{k}_+}|^2 \rangle_T \, A_i \Delta\Omega_r$$

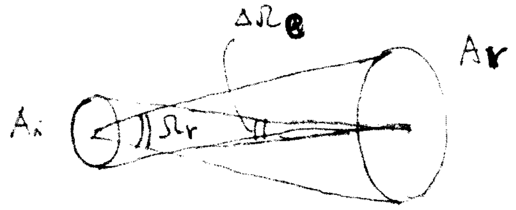
对于相干探测，天线定理：

$$A_i \Delta\Omega_r = A_r \Delta\Omega_e = \alpha \lambda_s^2$$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{高斯光束} \\ \frac{\pi^2}{16} & \text{微波天线束} \end{cases}$$

$$P_s(\vec{R}) = \frac{1}{4} P_i r_e^2 l_s^2 \lambda_s^2 \langle |\hat{n}_{\vec{k}_+}|^2 \rangle_T$$

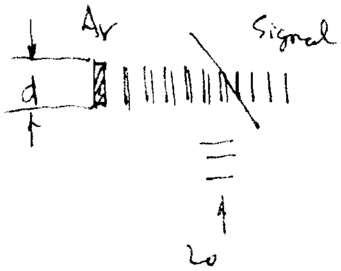
▲ 光束本征



接收立体角　　发射立体角

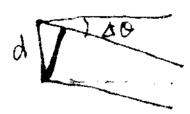
$A_i \Delta\Omega_r = A_r \Delta\Omega_e$
‖
A_e 发射面积

▲ 天线定理



相干散射要求在整个探测区面上两光束的波阵面相位差不大于 $\frac{\lambda}{2}$ 故两束间的夹角要为

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{2d}$$



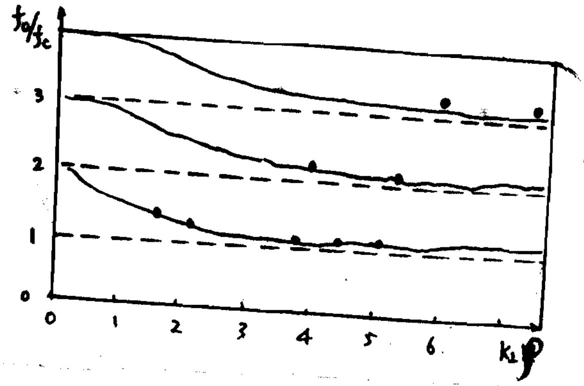
探测器视场立体角（发射立体角）

$$\Delta\Omega_e = (\Delta\theta)^2 = \frac{\lambda^2}{4d^2} = \frac{\lambda^2}{4A_r}$$

$$\therefore A_r \cdot \Delta\Omega_e = \frac{\lambda^2}{4}$$

Phys. Rev. Lett. 29 (1972), 81

CO_2激光相干散射探测静电电子回旋谐波

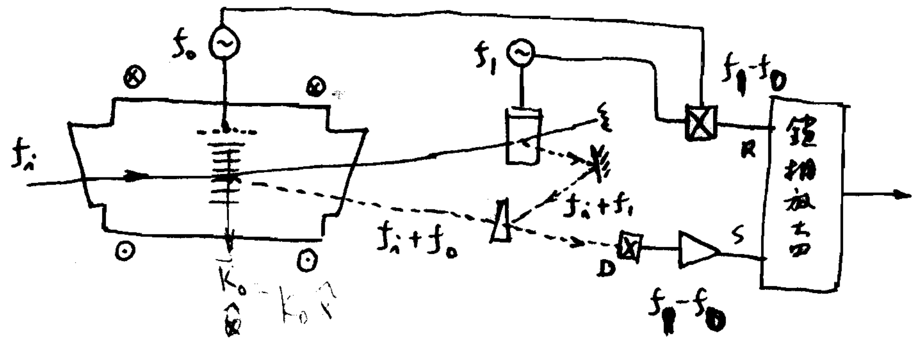


f_0 是电子回旋波频率，也是激发波频率

f_c 是电子回旋频率，$\frac{eB}{m_e}$

$k_\perp$ 是垂直于外磁场的波数

ρ 是电子回旋半径，$\left(\frac{kT_e}{m_e}\right)^{1/2}/(2\pi f_c)$



探测器(Ge:Cu)输出的中频信号为：

$$V_s = \alpha E_{Lo} E_s \cos[2\pi(f_1 - f_0)t + k_0 x + \varphi_0]$$

其中 $E_s = E_i r_e \lambda_i \tilde{n}_e l_s \exp\left[-\frac{W_{1/e}^2}{8}(k-k_0)^2\right]$， $k = 2k_i \sin\frac{\theta_s}{2}$

锁相放大器输出信号为

$$S \propto \alpha E_{Lo} E_s \cos(k_0 x + \varphi_0)$$

这里测色散关系有两种做法：

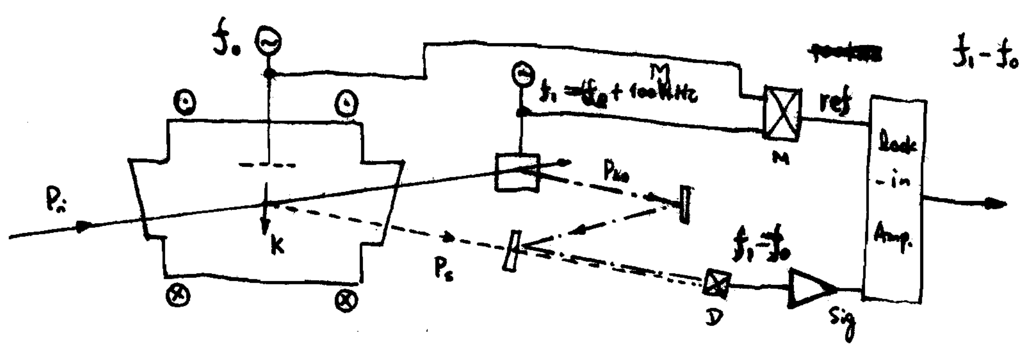
(1) 对于给定的 f_0 和 B，则 f_0/f_c 是确定的，对于均匀等离子体，其 $k_\perp\rho$ 也是确定的，这时，可逐步改变散射角，测 V_s 随 θ_s 变化的曲线，与 V_s 最大相对应的 θ_s 即为所求的 θ_s，即 $k_\perp = 2k_i \sin\frac{\theta_s}{2}$

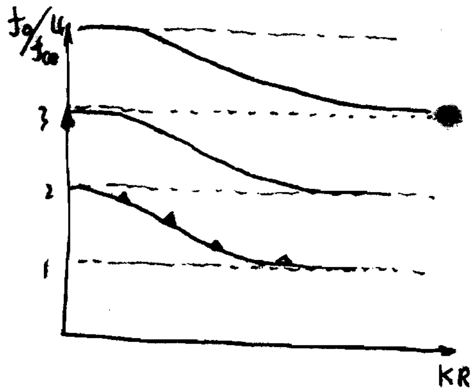
(2) 对于给定的 f_0，使磁场随时间作线性变化，这时 f_0/f_c 也随时间线性变化，对于均匀等离子体，这时 $k_\perp\rho$ 将按色散曲线随时间变化，对于给定的散射角 θ_s，这时锁相放大器的输出信号随时间变化如下所示：

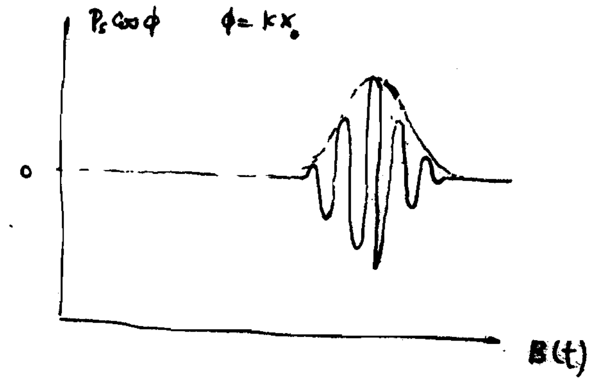
$$F(k,k^+) = \exp\left\{-\frac{(k-k^+)_x^2 w_{i0}^2}{4\cos^2\frac{\theta_s}{2}} - \frac{k_{+y}^2 w_{i0}^2}{4} - \frac{k_{+z}^2 w_{i0}^2}{4\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

[redacted]

三 (40)







$$E_s(\theta_s,k) \propto \tilde{n}\ \overset{\cos(kx_0+\varphi)}{\exp[i k x_0]}\ \exp\left\{-\frac{\left[k-2k_i\sin\frac{\theta_s}{2}\right]^2 w_{i0}^2}{8}\right\}$$ [redacted]

B 扫描. $\Longrightarrow$ $\omega_{ce} = \frac{eB(t)}{m_e}$ 扫描

由散射信号的峰值，可求出波矢匹配时的 B 值，从而求出 $f_{ce} \longrightarrow f_0/f_{ce}$

而 $k = 2k_i\sin\frac{\theta_s}{2}$ 定，故由此就可定出色散关系如下

$$\frac{d^2P_s}{d\Omega d\lambda} = P_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}} \exp\left[-\frac{c^2\lambda^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right] \equiv (48)$$

$$= P_i r_e^2 n_{e0} V_s \frac{c/a}{2\sqrt{\pi}\lambda_i \sin\frac{\theta_s}{2}}\left(1-\frac{7}{2}\frac{\lambda}{\lambda_i}+\frac{c^2\lambda^3}{4a^2\lambda_i^3\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right)\exp\left[-\frac{c^2\lambda^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right]$$

§3.6 非相干散射实验中的若干问题

非相干散射条件要求

$$\alpha = \frac{1}{k\lambda_D} = 1.07\times10^{-11}\frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\frac{\theta_s}{2}}\left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]}\right)^{1/2} \ll 1$$

一般等离子体参数范围(n_e, T_e)知道了，而散射角θ_s又多选用接近90°，以使空间分辨最佳，这样由上式就可以决定可用的探测光波长λ_i。

其次，我们可以估计一下散射功率。由前述知道积分的散射功率为：

$$\frac{dP_s}{d\Omega} = \frac{P_i}{A_i} r_e^2 n_{e0} V_s = P_i r_e^2 n_{e0} l_s \quad (l_s \text{为散射体积长度})$$

$$\frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} = \frac{1}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

或

$$P_s = P_i r_e^2 n_{e0} \Delta\Omega_r l_s$$

$$\int \frac{S(\vec{k},\omega)}{2\pi} d\omega = \int \frac{d\omega}{k} f\left(\frac{\omega}{k}\right) = 1$$

若典型的低密度等离子体参数为 $n_{e0} = 10^{20}\ m^{-3}$，$l_s = 1\ cm$，$\Delta\Omega_r = 10^{-2}\ sr$（立体弧度），由此可得：

$$\frac{P_s}{P_i} = 7.95\times10^{-14}$$

由此可见，只有入射功率的10^{-13}被散射收集光路接收，这是非常小的份额，这是非相干散射实验的最大困难：即为了获得可测的散射信号，要求探测束的功率要足够强，这就是一般都是用脉冲激光器做非相干散射实验的探针束的原因。对于脉冲激光器做探针束，其能量为J_i，脉宽为Δt_l，则平均脉冲功率为$P_i = J_i/\Delta t_l$。收集光路探测的散射光子数与J_i成正比，而与散射光同时被收集光路探测的背景（噪声）辐射量与脉宽Δt_l成正比。因此，一般要求探针束的能量大（J_i大），也就是功率很大（$P_i \equiv J_i/\Delta t_l$，$\Delta t_l$短）。

用散射光子数表示的散射功率为：

$$N_s = \frac{J_i}{\hbar\omega_i} r_e^2 n_{e0} l_s \Delta\Omega_r$$

若 $n_{e0}=1\times10^{20}m^{-3}$, $l_s=1cm$, $\Delta\Omega_r=1\times10^{-2}sr$, $\lambda_i=0.6943\mu m$, $J_i=10$焦耳,
则散射光子数为 $N_s=2.78\times10^{6}$。而散射谱的 e^{-1} 全宽度为:

$$\Delta\lambda_s=4\frac{a}{c}\lambda_i\sin\frac{\theta_s}{2}=7.9\times10^{-3}\lambda_i[Å]\sin\frac{\theta_s}{2}\left(T_e[eV]\right)^{1/2}\quad[Å]$$

对于红宝石激光 $\lambda_i=6943$ Å, $\theta_s=90^\circ$, 则

$$\Delta\lambda_s=38.8\sqrt{T_e[eV]}\quad[Å]\quad(e^{-1}\text{全宽度})\quad\Delta\lambda_s=\frac{2a\lambda_i\sin\frac{\theta_s}{2}}{c}$$

$$\Delta f_s=-\frac{c\Delta\lambda_s}{\lambda_i^2\left(1+\frac{\Delta\lambda_s}{\lambda_i}\right)}=\frac{2.41\times10^{12}\sqrt{T_e[eV]}}{1+5.59\times10^{-3}\sqrt{T_e[eV]}}\quad[Hz]$$

若 $T_e=1keV$, 则 $\Delta\lambda_s=1227$ Å, 每单位波长间隔的平均散射光子数为 2.3×10^{3}, 这值是足够大的。

一. 信噪比:

散射实验中遇到的噪声和干扰还有:

1. 量子统计噪声:

   这是光子随机到达探测器而产生的噪声, $\sqrt{N_s}$

2. 等离子体本底辐射噪声,

   等离子体本底辐射光子数 N_p

3. 探测器及电路的电子学噪声

   (1) 散粒噪声

   这是辐射与探测器相互作用时,光电子的产生和发射的随机性造成的,

$$\overline{i_N^2}=2eI_0B$$

其中 I_0 是有入射辐射时光阴极上探测器输出的平均光电流,
B 是探测器带宽

(2) 热噪声：

这是热激发的载流子所产生的噪声

$$\overline{i_N^2} = \frac{4KTB}{R}$$

这是来自负载电阻R的噪声。至于阴极表面（或光电导探测器）的热噪声，可归纳在散粒噪声中，即在光电流中叠加上一暗电流 i_d，即

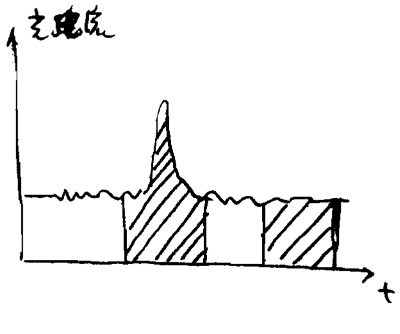
$$\overline{i_N^2} = 2e(I_0 + I_d)B$$

(3) 电子学噪声

4. 周围环境的热辐射噪声

由于在室温下环境热辐射的功率谱在 $\lambda > 1\mu m$ 的波段，对于 $\lambda_i < 1\mu m$ 的激射实验，这类噪声可忽略

在激射实验中，通常都采用低噪声的探测器和电子学系统，则探测器及其后面电子学系统的热噪声以及电子学噪声都可忽略。这样，激射实验中的主要噪声仅是：量子统计噪声（包括探测器的散粒噪声）和背景天体本底辐射。然而，在实际的激射实验中，背景天体本底辐射光子是可以通过有、无激光脉冲时的两次测量而加以扣除的。如右图所示，设 n_s、n_p 分别为激射辐射和背景天体本底辐射在探测器中所产生的光电子数，则在有激光脉冲时，探测器输出的光电子数为 $n_s + n_p$，而在无激光脉冲时，探测器输出的光电子数为 n_p，两次测量的光电子数相减，就可得到激射光子数 n_s 的测量值。然而，这两次测量的量子统计噪声是



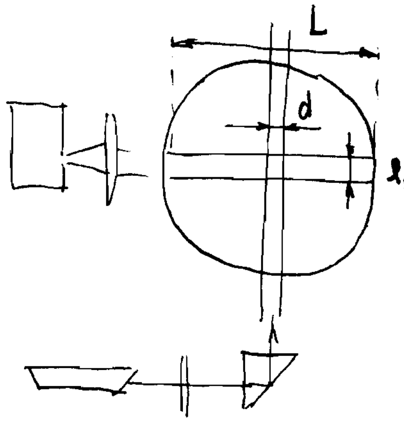
不能扣除的，其总的量子噪声是 $\sqrt{n_s+2n_p}$，其中 n_p 项的因子2是由于在扣除等离子体本底辐射的两次测量中都包含了本底辐射涨落之值而引入的。故散射测量的信噪比为：

$$\frac{S}{N}\equiv\frac{n_s}{\sqrt{n_s+2n_p}}$$

若在散射测量中是采用偏振测量，由于等离子体辐射是非偏光，这时信噪比变为：

$$\frac{S}{N}\equiv\frac{n_s}{\sqrt{n_s+n_p}}=\begin{cases}\sqrt{n_s} & 当\ n_s\gg n_p\ 时\\ n_s/\sqrt{n_p} & 当\ n_s\ll n_p\ 时\end{cases}$$

现在，我们进一步分析它与哪些因素有关。典型的非相干散射的实验安排如图所示。散射光经集光透镜组聚焦后成象在光谱仪的入射狭缝上，狭缝的宽、高分别为 w、h。然后经过光栅分光后，在出射狭缝上分成 M个通道，最后送到各光电倍增管和记录。设整个收集光路和分光系统的传输效率为 $T(\lambda)$，光电倍增管的量子效率为 $\eta(\lambda)$，收集光路的接收立体角为 $\Delta\Omega_r$，各通道测量的散射光波长为 $\lambda_{sj}\pm\frac{1}{2}\Delta\lambda_{sj}$ $(j=1,2,\cdots,M)$，则各通道收集的散射光子数为：



$\lambda_j=\lambda_{sj}-\lambda_i$

$$N_{sj}=\frac{J_i}{hf_i}r_e^2 n_{e0} l_s\frac{c}{\sqrt{\pi}\times 2a\lambda_i\sin\frac{\theta_s}{2}}\exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}\Delta\Omega_r\Delta\lambda_{sj}T_j$$

$$=C_{sj}J_i n_{e0} l_s\Delta\Omega_r T_j\Delta\lambda_j$$

其中

$$C_{sj}=\frac{r_e^2}{hf_i}\frac{c\Delta\lambda_j}{2\sqrt{\pi}a\lambda_i\sin\frac{\theta_s}{2}}\exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

β修正（取β的一级项的）

$$N_{sj}=\frac{J_i}{hf_i}r_e^2 n_{e0} l_s\frac{c}{\cdots}\left[1-\frac{7}{2}\lambda_j+\frac{c^2\lambda_j^3}{\cdots}\right]\exp\{\ \}\Delta\Omega_r T_j$$

则在探测通道中的光电子数为：

$$n_{sj} = C_{sj}\, J_i\, n_{e0}\, l_s\, \Delta\Omega_r\, T_j\, \eta_j = N_{sj}\,\eta_j$$

等离子体辐射：包括轫致辐射、复合辐射和线辐射，为简单计，这里只考虑轫致辐射，忽略复合辐射和线辐射，即这里只考虑本底辐射的下限，由此得到的信噪比是实际信噪比的上限。

轫致辐射的体辐射率

$$j(\omega) = 8.0\times10^{-55}\,\frac{n_e^2 Z_{eff}}{\sqrt{T_e[eV]}}\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{T_e}\right) \quad [W\cdot m^{-3}\cdot s_r^{-1}\cdot s]$$

(5.3.54) P.175

用波长表示，则体辐射率为：

$$j(\lambda_s) = j(\omega_s)\left|\frac{d\omega_s}{d\lambda_s}\right| = j(\omega_s)\,\frac{2\pi c}{\lambda_s^2}$$

$$= 1.5\times10^{-35}\,\frac{Z_{eff}\, n_e^2[m^{-3}]}{\lambda_s^2[\text{Å}]\sqrt{T_e[eV]}}\exp\left[-\frac{12395}{\lambda_s[\text{Å}]\,T_e[eV]}\right] \quad [W\cdot m^{-3}\cdot s_r^{-1}\cdot \text{Å}^{-1}]$$

对这个通道测量的轫致辐射光子数为沿弦积分，其表示为：

$$N_{pj} = \int_0^L dr\,\frac{j(\lambda_{sj})}{h f_{sj}}\, l_s\, d\, \Delta\Omega_r\, T_j\, \Delta\lambda_{sj}\, \Delta t_g$$

其中 $l\,d$ 为光谱仪入射狭缝在辐射体积中的图像（宽、高分别为 w, h），Δt_g 为门控时间（一般 $\Delta t_g \geq \Delta t_e$，以保证 Δt_e 在整个测量时间 Δt_g 内）。$j(\lambda_{sj})$ 表达式中的指数项，当 $T_e > 10\,eV$，$\lambda_s \simeq 7000$ Å 时是可忽略的，这里已放入忽略指数项因子。此外假定电子密度、温度分布分别为：

$$n_e(r) = n_{e0}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right], \qquad T_e(r) = T_{e0}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^2$$

完成对上式的积分后，可得中心弦上的本底辐射的光子数表达式为：

$$N_{pj} = 5.0\times10^{-21}\, Z_{eff}\, n_{e0}^2\,(T_{e0}[eV])^{\frac{1}{2}}\, L\, d\, l_s\, \Delta\Omega_r\, T_j\,\frac{\Delta\lambda_j}{\lambda_{sj}}\,\Delta t_g$$

这里 $L \equiv 2a$，$\overline{\Delta\Omega_r}$ 为平均的接收立体角。上式中除了 T_{e0}[eV]、λ_{sj}[Å]、$\Delta\lambda_j$[Å] 外，其余均采用单位制。轫致辐射的光子数为:

$$n_{pj} = 5.0\times10^{-21}\frac{Z_{eff}\, n_{e0}^2}{\sqrt{T_{e0}[eV]}}\,\frac{\cancel{\Delta\lambda_j}}{\lambda_{sj}}\, L\, d\, l_s\, \overline{\Delta\Omega_r}\, \Delta t_g\, T_j\, \eta_j$$

$$= C_{pj}\, n_{e0}^2\, L\, l_s\, d\, \overline{\Delta\Omega_r}\, \Delta t_g\, T_j\, \eta_j\, \Delta\lambda_j$$

其中

$$C_{pj} \equiv 5.0\times10^{-21}\frac{Z_{eff}}{\sqrt{T_{e0}[eV]}}\,\frac{1}{\lambda_{sj}}$$

为了使 n_{pj} 尽可能地小，一般要求 d 与探针束在散射体中的直径相当。对于调整光谱仪狭缝的宽度使之与散射体积中的光子束直径，故 d 即取束在散射体积中的直径。此外，光谱仪的集光本领定义为:

$$E \equiv wh\frac{A_G}{f^2} = l_s\, d\, \Delta\Omega_r$$

其中 A_G 为光栅面积，f 为光谱仪聚焦镜的焦距。则 n_{sj} 和 n_{pj} 可表示为:

$$n_{sj} \equiv J_i\, n_{e0}\frac{E}{d}\left(C_{sj}\, T_j\, \eta_j\, \Delta\lambda_j\right)$$

$$n_{pj} \equiv L\, E\, \Delta t_g\, n_{e0}^2\left(C_{pj}\, T_j\, \eta_j\, \Delta\lambda_j\right)$$

$$\frac{S}{N} = \begin{cases} \sqrt{n_{sj}} = \left[J_i\, n_{e0}\frac{E}{d}\left(C_{sj}\, T_j\, \eta_j\, \Delta\lambda_j\right)\right]^{1/2} & n_{sj} \gg n_{pj} \\ n_{sj}/\sqrt{n_{pj}} = \dfrac{J_i\, C_{sj}\left(E\, T_j\, \eta_j\, \Delta\lambda_j\right)^{1/2}}{d\sqrt{L\, C_{pj}\, \Delta t_g}} & n_{sj} \ll n_{pj} \end{cases}$$

由上述表达式，我们可得到如下的结论:

(1) $n_{sj} \propto J_i\, n_{e0}$，当 $n_{sj} \gg n_{pj}$ 时，$\frac{S}{N} \propto (J_i\, n_{e0})^{1/2}$

$n_{sj} \ll n_{pj}$ 时，$\frac{S}{N} \propto J_i$

由此可见，对于给定的等离子体 n_{e0}，散射信号与 J_i 成正比，为了使散射信号足够大，要求激光脉冲有足够大的能量。对于托卡马克等离子体，$n_{e0}=(10^{19}\sim10^{20})\ m^{-3}$，一般要求 $J_i=4\sim10$ J。当 n_{e0} 较低时，对 J_i 的要求还要大。

(2) 当 $n_{sj}\ll n_{pj}$ 时（这是入射波长的探测区），$\frac{S}{N}\propto\frac{J_i}{\sqrt{\Delta t_g}}$

由此可见，为了使散射信号具有足够大的信噪比，要求测量的门宽度越窄越好，相应地也要求 Δt_g 越窄越好。但 Δt_g 越窄，就使得相同的 J_i 越困难，一般 $\Delta t_g=10\sim50$ ns 技术上比较成熟，则相应的探针束平均功率约为 100 MW。

(3) $\frac{S}{N}\propto d^{-\frac{1}{2}}$（当 $n_{sj}\gg n_{pj}$ 时）或 d^{-1}（当 $n_{sj}\ll n_{pj}$ 时）

由此可见，在散射体积中探针束的直径越小越好，但光束的最小焦斑受衍射的限制，即束的发散角的限制。一般要求束的发散角~~限制~~，θ_d 越小越好，一般最小的发散角在 mrad 量级。而且，d 也与激光棒的大小有关，又与 J_i 有关，当 J_i 大时，d 也相应地要大些（当 θ_d 给定时）。

(4) $\frac{S}{N}\propto(ET\eta)^{1/2}$

由此可见，为了使散射信号的信噪比足够大，要求光谱仪的集光本领 E、集光系统的传输效率 T 和探测器的量子效率 η 越大越好。

能量 $J_i=4\sim10$ J，$\Delta t_g\simeq10$ ns

$\Delta\theta_d\le1$ mrad

二. 散射子谱的相对标定和 T_e 的测定

由前述知各散射谱道的光电子数表达式为:

$$n_{sj} = J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r C_{sj} T_j \eta_j G_j \Delta\lambda_j \quad (G_j \text{ 为探测的增益})$$

其中

$$C_{sj} = \frac{r_e^2}{hf_i}\frac{c\Delta\lambda_j}{2\sqrt{\pi}\, a\, \lambda_i \sin\frac{\theta}{2}} \exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$

或

$$C_{sj} = \frac{r_e^2}{hf_i}\frac{c\Delta\lambda_j}{2\sqrt{\pi}\, a\, \lambda_i \sin\frac{\theta}{2}}\left(1-2.5\frac{\lambda_j}{\lambda_i}+\frac{c^2\lambda_j^3}{4a^2\lambda_i^3\sin^2\frac{\theta}{2}}\right)\exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\}$$

这里因子 $(T\eta G\Delta\lambda)_j$ 是与散射谱的测量仪器有关的因子，它与不同的探测道中的数值是不同的，令:

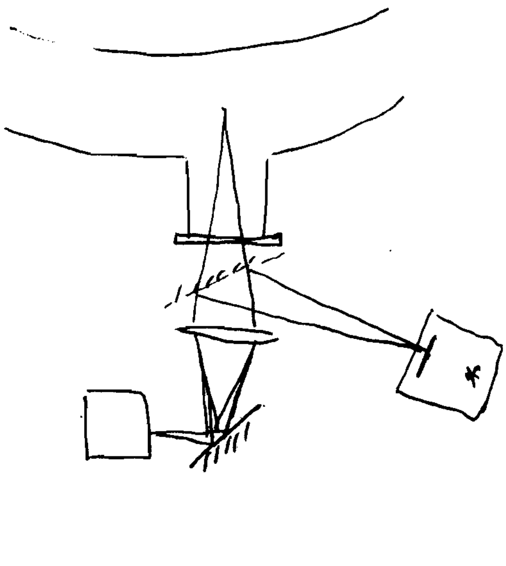
$$R_j \equiv T_j \eta_j G_j \Delta\lambda_j$$

为各探测道的相对测量灵敏度。因 n_{sj} 表达式中其它因子（如 J_i, n_{e0}, l_s, $\Delta\Omega_r$）均是常数，因此只要测量了各探测道的相对灵敏度 R_j，并用于对探测的光电子数进行修正，就可得到精确的散射谱分布:

$$\frac{n_{sj}}{R_j} = J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r C_{sj} \propto C_{sj}$$

一般是利用标准光源（如钨带灯）进行定位的相对标定:

$$n_{wj} = \frac{P_{wj}}{hf_j}\Delta t_g R_j$$



其中 $P_{wj} = P_w(\lambda_j)$ 是已知的，

则 $$R_j = n_{wj}\Big/\left(\frac{P_{wj}}{hf_j}\Delta t_g\right)$$

$$\frac{n_{sj}}{R_j}=\frac{J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r r_e^2}{2\sqrt{\pi}\, a h \sin\frac{\theta_s}{2}}\left(1-2.5\frac{\lambda_j}{\lambda_i}+\frac{c^2\lambda_j^3}{4a^2\lambda_i^3\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right)\exp\left[-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right]\Delta\lambda_j$$

进行相对论修正后得：

$$S_j\equiv\frac{J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r C_{sj}}{\left(1-2.5\frac{\lambda_j}{\lambda_i}+\frac{c^2\lambda_j^3}{4a^2\lambda_i^3\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right)\Delta\lambda_j}=\frac{J_i n_{e0} l_s \Delta\Omega_r r_e^2}{2\sqrt{\pi}\, a h \sin\frac{\theta_s}{2}}\exp\left\{-\frac{c^2\lambda_j^2}{4a^2\lambda_i^2\sin^2\frac{\theta_s}{2}}\right\}$$

以 $\ln S_j\sim\lambda_j^2$ 曲线的直线拟合的斜率，可测定 T_e。此外，将直线外推到 $\lambda_j=0$ 处（即 $\lambda_s=\lambda_i$），从而可得，

$$S_0\equiv\frac{J_i l_s \Delta\Omega_r r_e^2}{2\sqrt{\pi}\, a h \sin\frac{\theta_s}{2}}n_{e0}$$

三、散射功率的绝对标定和 n_{e0} 的测定

常用的绝对标定方法是利用气体分子的瑞利散射，该标定可在线进行，可提高标定精度。

瑞利散射的散射中心是气体分子，且散射光频率与入射光频率相同，但改变了传播方向，散射波是线偏振的，其散射截面与气体折射率有关。当入射波电矢量垂直于散射平面时，其散射截面为

$$\sigma_R=\frac{4\pi^2(\mu-1)^2}{n_{R0}^2\lambda_i^4}$$

n_{R0} 是标准状态下气体分子密度。瑞利散射光电子数为：

$$n_s^R=\frac{J_i\sigma_R n_R l_s\Delta\Omega_r}{h f_i}T_0\eta_0 \qquad n_R \text{ 是气体分子密度}$$

汤姆逊散射中心是的散射光电子数为（与偏振无关）

$$n_{s0}^T=\frac{J_i r_e^2 n_{e0} l_s\Delta\Omega_r}{h\, 2\sqrt{\pi}\, a\sin\frac{\theta_s}{2}}R_0=\frac{J_i r_e^2 n_{e0} l_s\Delta\Omega_r}{2\sqrt{\pi}\, a h\sin\frac{\theta_s}{2}}R_0$$

两信号之比为：

$$\frac{n_{s0}^T}{n_s^R}=\frac{n_{e0}}{n_R}\cdot\frac{r_e^2}{\sigma_R}\cdot\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_i}\cdot\frac{c}{2\sqrt{\pi}\, a\sin\frac{\theta_s}{2}}$$

四、应用：

1. 磁约束等离子体

$n_e = 10^{18} \sim 10^{21}\ m^{-3}$ ， $T_e \gtrsim 100\ eV$

红宝石激光器　$\lambda_i = 6943\ Å$，　$\Delta\theta_d < 1\ mrad$，

$J_i = 5 \sim 10\ J$ ，$\Delta t_e = 10 \sim 50\ ns$

光电倍增管，CCD 象增强器

钕玻璃激光器，倍频　$\lambda_i = 5300\ Å$

钕玻璃激光器，基频　$\lambda_i = 1.06\ \mu m$ ，雪崩二极管

Nd:YAG ：背散射雷达　$\Delta L = \frac{c}{2}\left(\Delta\tau_l^2 + \Delta\tau_d^2 + \Delta\tau_{dig}^2\right)^{1/2}$

2. 低温等离子体

$n_e \geq 5\times10^{15}\ m^{-3}$ ， $T_e \approx 1\ eV$

钇铝石榴石(YAG)—倍频　$\lambda_i = 5300\ Å$

$J_i = 0.5\ J$，重复频率 10 Hz，　$\Delta t_e \simeq 10\ ns$

多次重复测量积累　5000 次　（约 8 分钟）

光子计数方法探测

Spectrochimica Acta Part B 57, 201~241 (2002)

3. 空间等离子体

微波散射雷达，背散射，飞行时间确定散射位置

$$\alpha = 1.07\times10^{-11}\,\frac{\lambda_i\,[\mu m]}{\sin\frac{\theta_s}{2}}\left(\frac{n_e\,[m^{-3}]}{T_e\,[eV]}\right)^{1/2}$$

$$P_s = \frac{1}{4} P_i r_e^2 \lambda^2 l_s^2 \tilde{n}_e^2$$

4. 临界等离子体

$$n_c = 1.11 \times 10^{27} \left(\lambda[\mu m]\right)^{-2} \qquad m^{-3}$$

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\frac{\theta}{2}} \left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]}\right)^{1/2}$$

对于钕玻璃 $3\omega_0$ 临界 $n_e = 9 \times 10^{27}\ m^{-3}$

若用 $4\omega_0$ 做探针束时 $\lambda_i = 0.265\ \mu m$，$n_e = 1 \times 10^{26}$，$T_e = 1\ keV$

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{0.265}{\sin\frac{\theta}{2}} \left(\frac{10^{26}}{10^{3}}\right)^{1/2} = 1.27$$

只有当 $\lambda_i = 10\ \text{Å}$ 时 α 才达到 4.7×10^{-3}，非相干散射

§3.7 相干散射实验的若干问题

$f_{pe} = 9 \times (n_e[m^{-3}])^{1/2}$

一、超相干散射

1、谱分辨能定义和 α 选择

$$\Delta\omega_s = kb = \frac{b}{\alpha\lambda_D} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}\frac{b}{a}\omega_{pe}$$

$$\Delta f_s = 0.296\frac{\sqrt{n_{e0}[m^{-3}]}}{\alpha}\left(\frac{T_i}{AT_e}\right)^{1/2}$$

当 $\alpha >> 1$ 时

$$\Delta\omega_s = kc_s = \frac{c_s}{\alpha\lambda_D} = \frac{1}{\alpha}\frac{\sqrt{2}c_s}{a}\omega_{pe}$$

2. 外差探测 信噪比

3. 实验安排

二、近于超相干散射

1、探测波长选择

λ 长，θ_s 大，空间分辨好

只要来自位相同，

波数分辨相同

k

2. 但探测方面的则是一外差

设散射电场为 $E_s(t)$，噪声辐射电场为 $E_n(t)$

本振电场为 $E_l(t) = E_{l0}\exp[i\omega_l t]$

则它们各自在光电探测器上产生的光电流分别为：

$$\langle i_s\rangle = \frac{e\eta}{hf}A_r c\varepsilon_0\langle E_s^*(t)E_s(t)\rangle = e\sigma\langle |E_s|^2\rangle$$

$$\langle i_n\rangle = e\sigma\langle |E_n|^2\rangle$$

$$\langle i_l\rangle = e\sigma\langle |E_l|^2\rangle = e\sigma E_{l0}^2 \gg \langle i_s\rangle,\ \langle i_n\rangle$$

其中 $\sigma \equiv \frac{\eta}{hf}c\varepsilon_0 A_r$

当它们同时入射到探测器上时，其总电流为

$$\langle i\rangle = e\sigma\langle E^*(t)E(t)\rangle$$

其中 $E(t) = E_l(t) + E_s(t) + E_n(t)$

~~取 E_s、E_n 的一级近似，得~~

$$\cancel{\langle i\rangle = e\sigma\{\langle |E_l|^2\rangle + \langle E_l^*E_s\rangle + \langle E_lE_s^*\rangle + \langle E_l^*E_n\rangle + \langle E_lE_n^*\rangle\}}$$

其自相关函数为

$$C(\tau) = \langle i(t)\,i(t+\tau)\rangle = \sigma e^2\delta(\tau)\langle E^*(t)E(t)\rangle + e^2\sigma^2\langle E^*(t)E(t)E^*(t+\tau)E(t+\tau)\rangle$$

这里由两部分组成：

第一项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射同一个光电子，第二项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射不同光电子的贡献。

取 $\langle i_s\rangle$、$\langle i_n\rangle$ 的一级近似，得：

$$\begin{aligned}C(\tau) \doteq{}& e^2\sigma E_{l0}^2\delta(\tau) + 2e^2\sigma^2E_{l0}^2\left[\langle |E_s|^2\rangle + \langle |E_n|^2\rangle\right] + e^2\sigma^2E_{l0}^4\\&+ e^2\sigma^2E_{l0}^2e^{-i\omega_l\tau}\langle E_s^*(t)E_s(t+\tau)\rangle + e^2\sigma^2E_{l0}^2e^{i\omega_l\tau}\langle E_s(t)E_s^*(t+\tau)\rangle\\&+ e^2\sigma^2E_{l0}^2e^{-i\omega_l\tau}\langle E_n^*(t)E_n(t+\tau)\rangle + \sigma^2e^2E_{l0}^2e^{i\omega_l\tau}\langle E_n(t)E_n^*(t+\tau)\rangle\end{aligned}$$

设散射电场为 $E_s(t)$，噪声辐射电场为 $E_n(t)$

本振电场为 $E_l(t) = E_{l0}\exp[i\omega_l t]$

且 $|E_l| \gg |E_s|, |E_n|$

则它们分别单独照射到光阴极上产生的光电流分别为：

$$\langle i_s\rangle = \frac{e\eta}{hf}A_r c\varepsilon_0\langle E_s^*(t)E_s(t)\rangle = e\sigma\langle|E_s|^2\rangle$$

$$\langle i_n\rangle = e\sigma\langle|E_n(t)|^2\rangle$$

$$\langle i_l\rangle = \sigma e\langle|E_l(t)|^2\rangle = e\sigma E_{l0}^2 = i_{l0} \gg \langle i_s\rangle, \langle i_N\rangle$$

其中

$$\sigma \equiv \frac{\eta}{hf}c\varepsilon_0 A_r$$

当它们同时入射到阴极上时，总光电流为

$$\langle i\rangle = \frac{e\eta}{hf}A_r c\varepsilon_0\langle E^*(t)E(t)\rangle = e\,W^{(1)}(t)$$

其中

$W^{(1)}(t) \equiv \sigma\langle E^*(t)E(t)\rangle$ 为单位时间发射光电子的几率(数目)

$$E(t) = E_l(t) + E_s(t) + E_n(t)$$

其自相关函数为:

$$C(\tau) = \langle i(t)\,i(t+\tau)\rangle = e^2\delta(\tau)\langle W^{(1)}(t)\rangle + e^2\langle W^{(1)}(t)\,W^{(1)}(t+\tau)\rangle$$

它是由两部分组成的；

第一项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射的光电子是相同的，即 $\delta(\tau)W^{(1)}(t)$

第二项是在 t 和 $t+\tau$ 时刻发射的光电子是不同的，即

$$W^{(1)}(t)\,W^{(1)}(t+\tau) = W^{(2)}(t, t+\tau)$$

将 $i_{l0} = e\sigma E_{l0}^2$，$\langle i_s\rangle = e\sigma\langle |E_s|^2\rangle$ 和 $\langle i_n\rangle = e\sigma\langle |E_n|^2\rangle$ 代入，得：

$$c(\tau) = e i_{l0}\delta(\tau) + 2 i_{l0}\langle i_s\rangle + 2 i_{l0}\langle i_N\rangle + i_{l0}^2$$

$$+ i_{l0} e\sigma\langle E_s^*(t) E_s(t+\tau)\rangle e^{-i\omega_l\tau} + i_{l0} e\sigma\langle E_s(t) E_s(t+\tau)\rangle e^{i\omega_l\tau}$$

$$+ i_{l0} e\sigma\langle E_n^*(t) E_n(t+\tau)\rangle e^{-i\omega_l\tau} + i_{l0} e\sigma\langle E_n(t) E_n^*(t+\tau)\rangle e^{i\omega_l\tau}$$

取 $c(\tau)$ 的付氏变换

$$P(f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, c(\tau)\, e^{i\omega_s\tau}$$

由上式可得：

$$P(f_s) = e i_{l0} + 2\pi\delta(f_s)\, i_{l0}^2 + 2\pi\delta(f_s)\times 2 i_{l0}\left(\langle i_s\rangle + \langle i_n\rangle\right)$$

$$+ i_{l0}\sigma e\int d\tau\left\{\langle E_s^*(t) E_s(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} + \langle E_s(t) E_s^*(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s+\omega_l)\tau}\right\}$$

$$+ i_{l0} e\sigma\int d\tau\left\{\langle E_n^*(t) E_n(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} + \langle E_n(t) E_n^*(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s+\omega_l)\tau}\right\}$$

因为

$$e\sigma\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\langle E_\alpha^*(t) E_\alpha(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau}$$

$$= \frac{e\eta}{hf_s} c\varepsilon_0 A_r \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\,\langle E_\alpha^*(t) E_\alpha(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau}$$

$$= \frac{e\eta}{hf_s} P_\alpha(f_s - f_l) \qquad \alpha = s, n$$

所以有：

$$P(f_s) = e i_{l0} + 2\pi\delta(f_s)\left\{ i_{l0}^2 + 2 i_{l0}\langle i_s\rangle + 2 i_{l0}\langle i_n\rangle\right\}$$

$$+ \frac{e\eta}{hf_s} P_s(f_s - f_l) + \frac{e\eta}{hf_s} P_n(f_s - f_l)$$

其中 $P_\alpha(f_s + f_l) \simeq 0$

故有 $C(\tau) = e^2\delta(\tau)\langle W^{(1)}(t)\rangle + e^2\langle W^{(1)}(t)\, W^{(1)}(t+\tau)\rangle$

$$= e^2\sigma\,\delta(\tau)\langle E^*(t)\,E(t)\rangle + e^2\sigma^2\langle E^*(t)\,E(t)\,E^*(t+\tau)\,E(t+\tau)\rangle$$

取 $\langle i_s\rangle$、$\langle i_n\rangle$ 的一阶小量近似，得：

$$C(\tau) \simeq e\, i_{l0}\,\delta(\tau) + i_{l0}^2 + 2 i_{l0}\langle i_s\rangle + 2 i_{l0}\langle i_n\rangle$$

$$+ i_{l0}\langle i_s\rangle\left\{ e^{-i\omega_l\tau} g_s(\tau) + e^{i\omega_l\tau} g_s^*(\tau)\right\}$$

$$+ i_{l0}\langle i_n\rangle\left\{ e^{-i\omega_l\tau} g_n(\tau) + e^{i\omega_l\tau} g_n^*(\tau)\right\}$$

其中 $g_\alpha(\tau) = \dfrac{\langle E_\alpha^*(t)\, E_\alpha(t+\tau)\rangle}{\langle |E_\alpha(t)|^2\rangle}$ $\alpha = s, n$ （归一化自相关函数）

取 $C(\tau)$ 的傅里叶变换：

$$P(f_s) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, C(\tau)\, e^{+i\omega_s\tau}$$

由上式可得：

$$P(f_s) = e\, i_{l0} + i_{l0}^2\, 2\pi\delta(f_s) + 2 i_{l0}\left(\langle i_s\rangle + \langle i_n\rangle\right) 2\pi\delta(f_s)$$

$$+ i_{l0}\langle i_s\rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[g_s(\tau)\, e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} + g_s^*(\tau)\, e^{i(\omega_s+\omega_l)\tau}\right]$$

$$+ i_{l0}\langle i_n\rangle \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left[g_n(\tau)\, e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau} + g_n^*(\tau)\, e^{i(\omega_s+\omega_l)\tau}\right]$$

利用 $g_\alpha(\tau)$ 的表达式代入上式积分中，有：

$$\langle i_\alpha\rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle E_\alpha^*(t)\, E_\alpha(t+\tau)\rangle}{\langle |E_\alpha(t)|^2\rangle}\, e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau}\, d\tau$$

$$= \frac{e\eta}{hf_s} A_r c\,\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \langle E_\alpha^*(t)\, E_\alpha(t+\tau)\rangle\, e^{i(\omega_s-\omega_l)\tau}$$

$$= \frac{e\eta}{hf_s} P_\alpha(f_s - f_l)$$

其中 $$P_\alpha(f_s-f_e) \equiv A_r c\varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle E_\alpha^*(t) E_\alpha(t+\tau)\rangle e^{i(\omega_s-\omega_e)\tau}$$

故有
$$\begin{aligned} P(f_s) = {} & e i_{e0} + 2\pi\delta(f_s)\left[i_{e0}^2 + 2 i_{e0}\langle i_s\rangle + 2 i_{e0}\langle i_n\rangle\right] \\ & + i_{e0}\frac{e\eta}{hf_s}\left[P_s(f_s-f_e) + P_s(f_s+f_e)\right] \\ & + i_{e0}\frac{e\eta}{hf_s}\left[P_n(f_s-f_e) + P_n(f_s+f_e)\right] \end{aligned}$$

上式中各项的物理意义：

第一项：$e i_{e0}$，这是外差接收时产生的散粒噪声功率谱，这是白噪声，与频率无关

第二项：$2\pi\delta(f_s)\, i_{e0}^2$，为本振源在外差接收时上产生的直流电流的频谱，这只有当 $f_s=0$ 时，才不为零

第三项：$i_{e0}\frac{e\eta}{hf_s}P_s(f_s-f_e)$，是辐射信号与本振源混频后所产生的功率谱，这是相对于 f_e 频移了的谱

第四项：$i_{e0}\frac{e\eta}{hf_s}P_n(f_s-f_e)$，是混频后的噪声辐射功率谱

由此可见：外差接收时所得到的中频信号功率与待测信号功率成正比），而且当本振源是相干的单色电磁波，且没有相位涨落时，通过后的中频功率谱是待测信号功率谱的复现，所不同的只是有一固定的频移 (f_s-f_e)

外差接收时输出端的信噪比为：
$$\frac{S}{N} = \frac{i_{e0}\frac{e\eta}{hf_s}P_s(f_s-f_e)}{e i_{e0} + i_{e0}\frac{e\eta}{hf_s}P_n(f_s-f_e)} = \frac{P_s(f_s-f_e)}{\frac{hf_s}{\eta} + P_n(f_s-f_e)}$$

由此可见：当没有噪声辐射时，对应外差接收时输出端上的中频信号的信噪比为1，所需的最小~~可探~~信号功率为 $\frac{hf_s}{\eta}$，这就是外差接

Equivalent

四、等效噪声功率 NEP (Noise Equivalent Power)，它是由探测器的量子效率 η 决定的。

$$S \equiv \frac{S}{N} \equiv \frac{P_s(f_s-f_e)}{NEP+P_n(f_s-f_e)}$$

它是外差探测器的输出端的信噪比。

$$P(f_s) = \overbrace{\frac{hf_s}{\eta}}^{\text{近似为常数}} + P_s(f_s-f_e) + P_n(f_s-f_e)$$

它是随机变量，信号部分就是 $P_s(f_s-f_e)$ 的数学期望值 $E[P_s(f_s-f_e)]$，噪声就是 $P(f_s)$ 的 ~~方差~~ 标准偏差 $\sigma[P(f_s)]$，故其信噪比为：

$$\frac{S}{N} = \frac{E[P_s(f_s-f_e)]}{\sigma[P(f_s)]} = \frac{P_s(f_s-f_e)}{\frac{hf_s}{\eta}+P_s(f_s-f_e)+P_n(f_s-f_e)} < 1$$

M 次平均后，信号的 ~~方差~~ 标准误差 为

$$\sigma[P(f)] = \frac{E[P(f)]}{\sqrt{M}}$$

则

$$\frac{S}{N} = \frac{E[P_s(f_s-f_e)]}{E\left[\frac{hf_s}{\eta}+P_n(f_s-f_e)+P_s(f_s-f_e)\right]}\sqrt{M}$$

$$= \frac{P_s(f_s-f_e)}{\frac{hf_s}{\eta}+P_n(f_s-f_e)+P_s(f_s-f_e)}\sqrt{M}$$

$$= \frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{in}}{1+\left(\frac{S}{N}\right)_{in}}\sqrt{M}$$

$$\alpha = 1.07\times10^{-11}\,\frac{\lambda_i[\mu m]}{\sin\frac{\theta_s}{2}}\left(\frac{n_e[m^{-3}]}{T_e[eV]}\right)^{1/2} \gtrsim 1$$

三(62)

$n_e = 10^{?}m^{-3}$, $T_e = 2eV$, $T_i \ll T_e$
PRL 62 (1989)
1848

PRL 62 (1989),
2833 杞克强

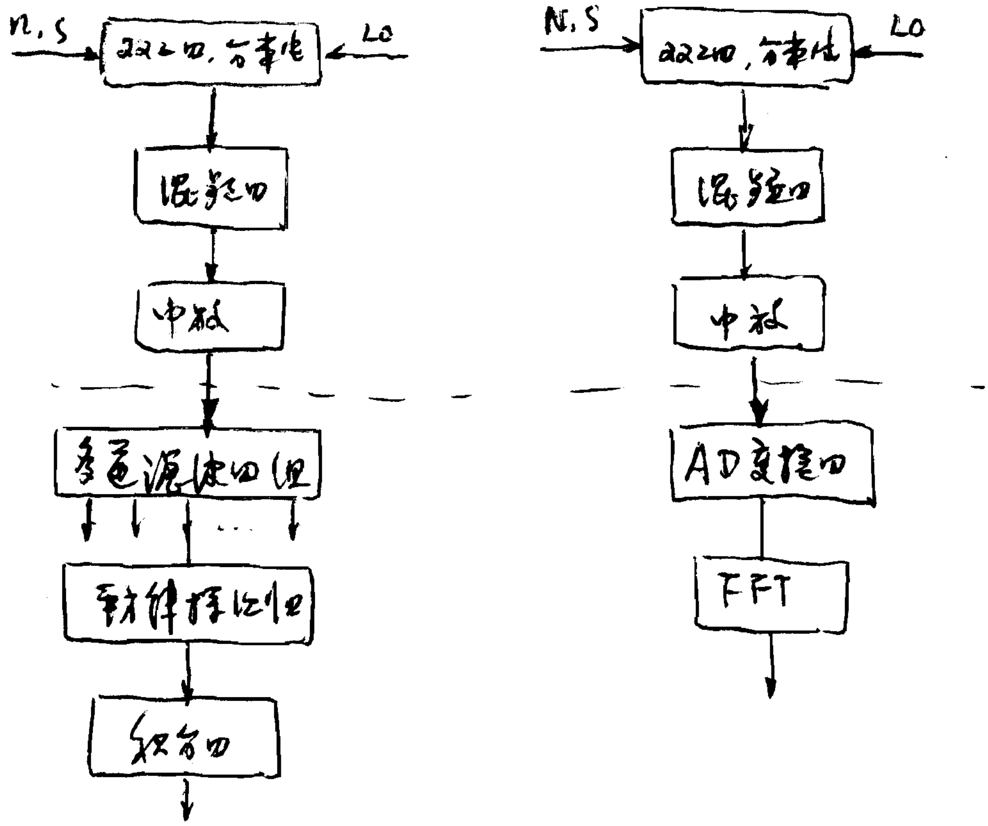
随机信号的谱估计

$$f(t) \longrightarrow F(f) \longrightarrow P(f)$$

随机信号　　　　随机信号

$$\mathrm{Var}\{P(f)\} = \frac{[E\{P(f)\}]^2}{M} \qquad \text{方差}$$

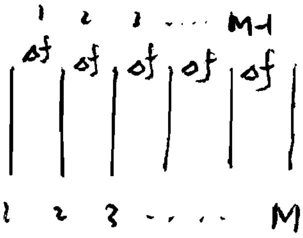
$$\sigma\{P(f)\} = \frac{E\{P(f)\}}{\sqrt{M}} \qquad \text{标准误差}$$



对FFT：采样时间 $T \longrightarrow$ 频率分辨率 $\Delta f = 1/T$

采样频率 $f_s \longrightarrow$ 信号带宽(宽) $B = \frac{1}{2} f_s$

相邻频率差为平均



$$\Delta B = B_m = (M-1)\Delta f$$

$$M = \Delta B / \Delta f + 1$$

$$= \Delta B T + 1$$

~~PDP~~ $\boxed{\text{PRL } \underline{63}\ (1989),\ 2833}$

TCA 托卡马克 (瑞士)

$n_e = \cancel{1}\,1.2 \times 10^{20}\ m^{-3}$ $T_e = 700\ eV$ $T_i = 400\ eV$ $Z_{eff} = 2.5$

D_2O $\lambda_i = 385\ \mu m$ (光泵远红外激光器) 0.55 $P_i = 0.5\ MW$ $\theta_s = 90°$

$S/N \simeq 0.6$. 道数 = 20 11.4μs $\Delta B = 80\ MHz$

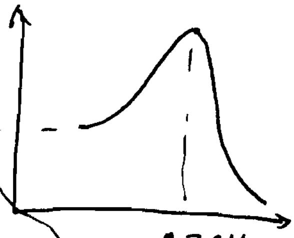
$T = 5\mu s$

$\Delta T_i / T_i = 10\%$

$$\alpha = 1.07 \times 10^{-11} \frac{385}{0.707} \left(\frac{1.2 \times 10^{20}}{700} \right)^{1/2} = 2.4$$

$$B = \frac{\sqrt{2}\,\omega_{pi}}{2\pi\alpha} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{1/2} = 1.02\ GHz \quad (e^{-1} \text{ 宽度})$$

$$n_c = 1.11 \times 10^{27}\ \lambda_i^{-2}\,[\mu m] = 7.5 \times 10^{21}\ (m^{-3})$$



$n_e = 7 \times 10^{19}\ m^{-3}$
$T_e = 670\ eV$
$Z_{eff} = 4.4$
$T_i = 250\ eV$

系统设计:

1. 求 P_i

$$P_s = \frac{P_i}{A_i} r_e^2\, n_{e0}\, l_s\, A_i \Delta\Omega_r\, S(k) = NEP \times B \Longrightarrow P_i$$

取 $S(k) \simeq 0.5$, $A_i \Delta\Omega_r = \frac{1}{4}\lambda_s^2$

对高斯束

$$A_i = \frac{1}{2}\pi w_{i0}^2 \qquad l_s = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{w_{i0}}{\sin\theta_s}$$

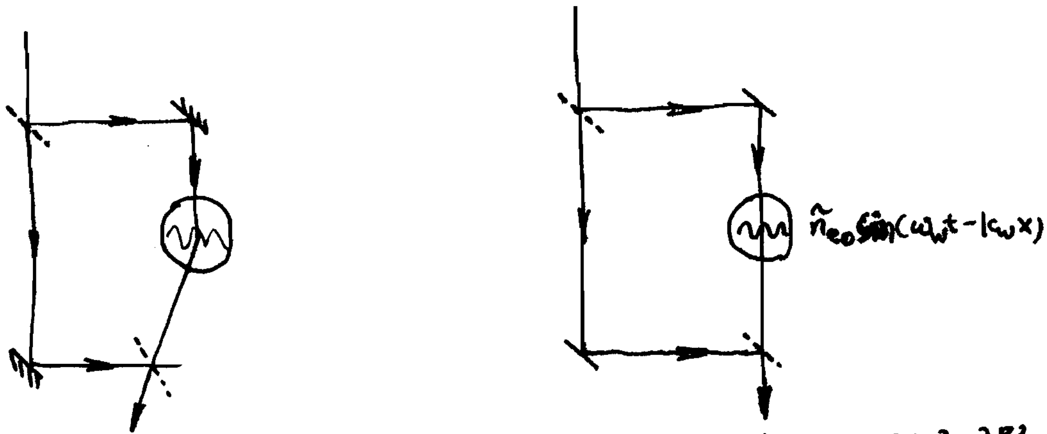
2. 最后的信噪比

$$\frac{S}{N} \simeq 0.5\sqrt{\Delta B\, T + 1}$$

当 $\frac{S}{N} = 2$ 时 T_i 精度 30%

10 时 10%

书上P.273页：当用相干探测法测量散射波时，散射和干涉的安排是很类似的，如下图所示：



在这种情况下，干涉仪在某种方式上可等效地看成为极小角散射。P.283页习题7.8，当有相干的密度涨落 $\tilde{n}_{e0}\sin(\omega_w t-k_w x)$ 垂直于入射波的方向传播时，其散射总功率为：$P_s=\frac{1}{4}P_i r_e^2 l_s^2\lambda_s^2$（当 $k_i \gg k_w$ 时）。

这习题证明如下：

这时探测束通过等离子体后的相位变化为：

$$\Delta\phi(t)=(1-\mu_p)\,l\,k_i=r_e\lambda_i l\,n_e$$

因为：
$$n_e(t)=n_{e0}+\tilde{n}_{e0}\sin(\omega_w t-k_w x)$$

则：
$$\Delta\phi(t)=r_e\lambda_i l_s n_{e0}+r_e\lambda_i l_s\tilde{n}_{e0}\sin(\omega_w t-k_w x)$$

故~~散射~~探测束通过等离子体后的电场为：

$$E(\vec{R},t)=E_{i0}\,e^{i[\omega_i t-k_i R+\Delta\phi(t)]}$$

$$=E_{i0}\,e^{i[\omega_i t-k_i R+\phi_0]}\,e^{i r_e\lambda_i l_s\tilde{n}_{e0}\sin(\omega_w t-k_w x)}$$

其中
$$\phi_0\equiv r_e\lambda_i l_s n_{e0}$$

根据恒等式
$$e^{i\xi\sin\phi}=\sum_{-\infty}^{\infty}J_l(\xi)\,e^{il\xi}$$

故有：
$$E(\vec{R},t)=E_{i0}\sum_{-\infty}^{\infty}J_l(\xi)\,e^{i[(\omega_i+l\omega_w)t-k_iR-lk_w x+\phi_0]}$$

其中
$$\xi\equiv r_e\lambda_i l_s\tilde{n}_{e0}\ll 1$$

根据贝塞尔函数小宗量展开式，有：

$$J_0(\xi) = 1 - \frac{1}{4}\xi^2 \quad , \quad J_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi \quad , \quad J_{-1}(\xi) = -\frac{1}{2}\xi$$

故：

$$\cancel{E(\vec{R},t) = (1-\frac{1}{4}r_e^2 l_i^2 \lambda_i^2 \tilde{n}_{e0}^2)E_{i0} + \frac{1}{2} r_e l_s^2 \lambda_i^2 \tilde{n}_{e0} E_{i0} e}$$

$$\begin{aligned} E(\vec{R},t) = \; & E_{i0}\, e^{i[\omega_i t - k_i R + \phi_0]} \\ & + \frac{1}{2} r_e \lambda_i l_s \tilde{n}_{e0} E_{i0}\, e^{i[(\omega_i+\omega_W)t - k_i\vec{R} - k_W\vec{x} + \phi_0]} \\ & - \frac{1}{2} r_e \lambda_i l_s \tilde{n}_{e0} E_{i0}\, e^{i[(\omega_i-\omega_W)t - \vec{k}_i\cdot\vec{R} + k_W\vec{x} + \phi_0]} \end{aligned}$$

二. 受激相干散射 — 研究参量不稳定性

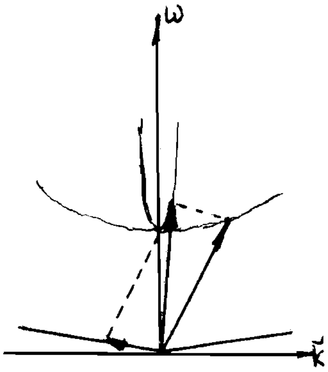
~~二、研究参量不稳定性过程~~: 三波共振相互作用

$$\omega_{0,s}^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k_{0,s}^2$$

$$\omega_{EPW}^2 = \omega_{pe}^2 + 3v_e^2 k_{EPW}^2$$

$$\omega_{IAW} = k_{IAW} C_s$$

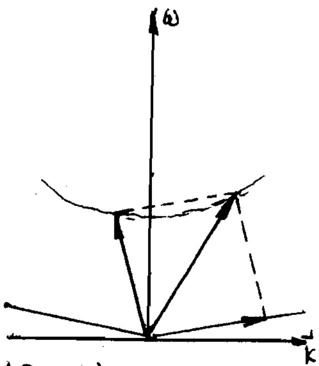
	共振吸收(RA)	$\omega_0 = \omega_{EPW}$	$n_e \simeq n_c$	
	离子声衰变(IAD)	$\omega_0 = \omega_{ia} + \omega_{EPW}$	$n_e \simeq n_c$	
$k \simeq 2k_0$	SBS Brillouin	$\omega_0 = \omega_s + \omega_{ia}$	$n_e < n_c$	Stimulated Brillouin
$k \simeq k_0 \sim 2k_0$	SRS	$\omega_0 = \omega_s + \omega_{epw}$	$n_e \leq \frac{1}{4} n_c$	Stimulated Raman
$n \approx \frac{n_c}{4}$	TPD	$\omega_0 = \omega_{EPW} + \omega_{EPW}$	$n_e \simeq \frac{1}{4} n_c$	Two-plasmon Decay
	LDI	$\omega_{EPW} = \omega_{EPW} + \omega_{IA}$		



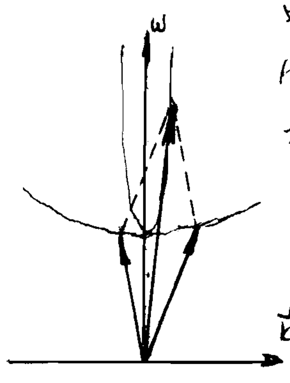
IAD(PD): $\omega_0 = \omega_{ia} + \omega_{EPW}$

电场振幅为 $\vec{E}_L$ 的光波通过等离子体，等离子体中存在噪声等某种密度起伏 δn（它可以是光波作用所激发的一种声波），因为电子在入射光场作用下振荡 $V_L = \frac{e\vec{E}_L}{m\omega_0}$，从而产生横向电流 $\delta \vec{J} = -eV_L\delta n$。当波数和频率满足匹配条件，这个横向电流将产生散射波，其电场为 $\delta\vec{E}$，这个波与入射场拍频产生有质动力 $\nabla\left(\frac{E^2}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{\nabla(\vec{E}_L\cdot\delta\vec{E})}{\varepsilon_0}$ 变化，因而产生增强了密度起伏，由于这个正反馈过程，从而产生不稳定性

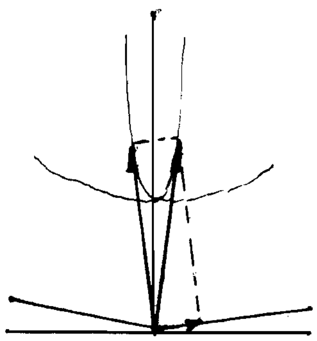
LDI



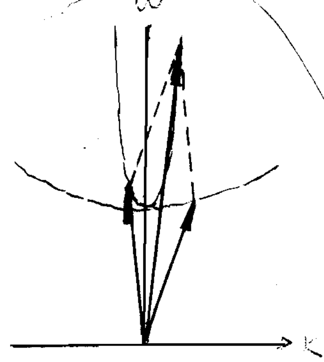
LD: $\omega_{EPW} = \omega_{EPW} + \omega_{ia}$



TPD: $\omega_L = \omega_{EPW_1} + \omega_{EPW_2}$

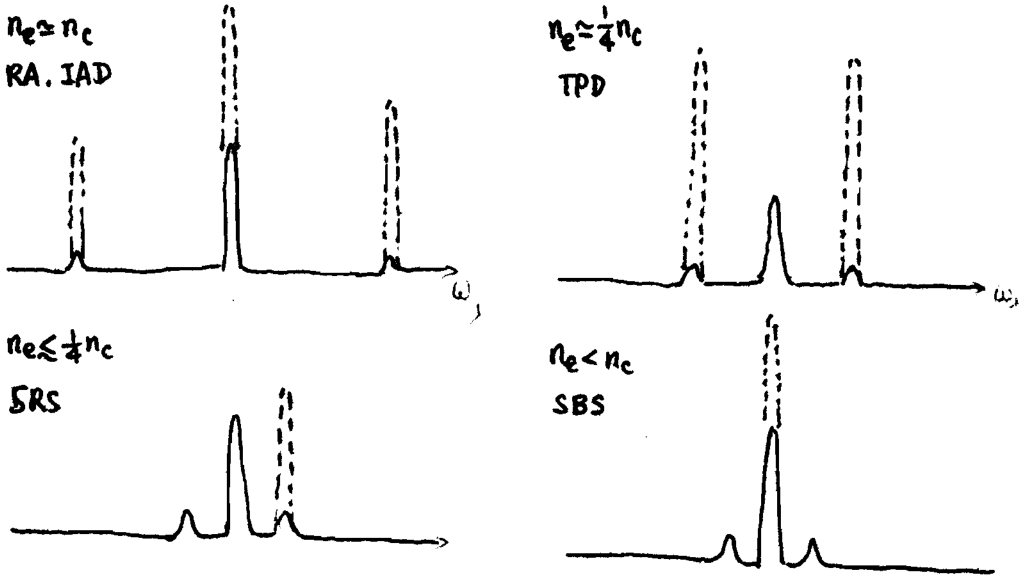


SBS: $\omega_0 = \omega_s + \omega_{ia}$

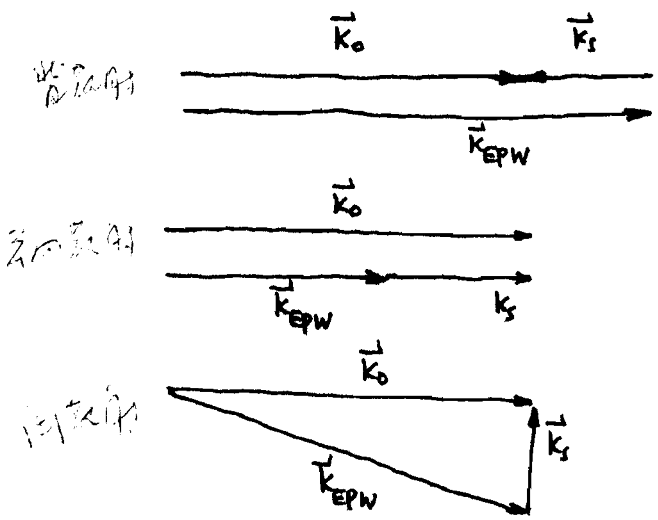


SRS: $\omega_0 = \omega_s + \omega_{EPW}$

由于这些参量不稳定过程会从等离子体噪声中增长得到离子声波和电子等离子体波，因而用于研究这些过程的汤姆逊散射是超热相干散射，如下图所示：



以SRS为例：



与Thomson散射类似，它们也满足能量和动量守恒条件：

$$\omega_0 = \omega_s + \omega_{EPW} \geqslant 2\omega_{pe}$$
$$\vec{k}_0 = \vec{k}_s + \vec{k}_{EPW}$$

此外，各种波又要各自满足等离子体中的色散关系：

$$\omega_{0,s}^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k_{0,s}^2$$

$$\omega_{EPW}^2 = \omega_{pe}^2 + 3 v_e^2 k_{EPW}^2$$

$\because \quad \omega_s, \omega_{EPW} \geqslant \omega_{pe}$

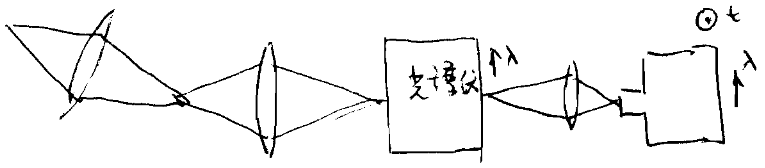
$\therefore \quad \omega_{pe} \leq \omega_0/2$

因此 SRS 只能发生在 $n_e \leq n_c/4$ 处。

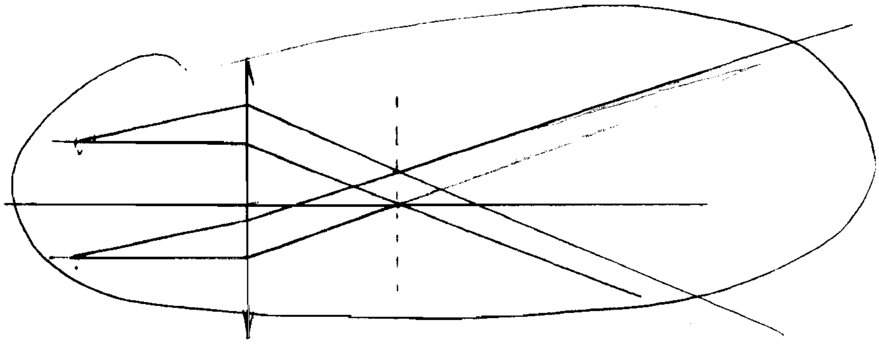
▲实验安排：

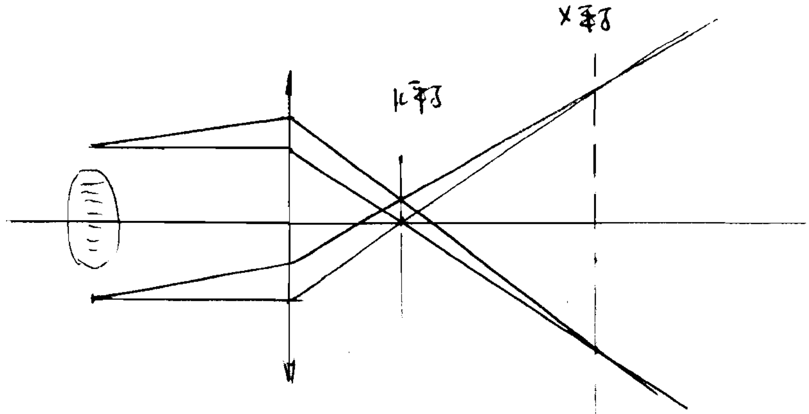
1. ω－t 分辨：

扫描相机，时间分辨率达 2 ps，实际时间分辨要差些



2、x－t 和 k－t 分辨：





3、ω－k 分辨： 分幅相机