极限理论2022春季期末试卷

1. （20分）X_1，X_2，$\cdots$独立，$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，对$\forall k\geq 1$，有

$$P(X_k=k)=P(X_k=-k)=k^{-4}/2,$$
$$P(X_k=1)=P(X_k=-1)=(1-k^{-4})/2。$$

   证明：$S_n/\sqrt{n}\xrightarrow{d}N(0,1)$。

2. （20分）设X_1，X_2，$\cdots$，独立同分布，且服从分布$N(0,1)$，$Y_n=\sum_{i=1}^n X_i^2$，
   1. 证明：$\frac{Y_n-n}{\sqrt{2n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$。
   2. 是否存在非退化分布G以及实数序列(a_n)，(b_n)使$(\log Y_n-a_n)/b_n\xrightarrow{d}G$。
3. （20分）设$X_1,X_2,\cdots$是一列独立同分布且服从分布$N(0,1)$的随机变量，$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，
   1. 对$a>0$，求$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P(S_n>na)$。
   2. 证明：

$$\frac{\max_{1\leq i\leq n}X_i}{\sqrt{2\log n}}\xrightarrow{p}1。$$

   3. 求$\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq i\leq n}S_i$的极限分布。
4. （20分）设X，X_1，X_2，$\cdots$是一列独立同分布的随机变量，满足$EX=0$，$EX^2=1$。定义$S_0=0$，$S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，记$Z_n=S_{n^2}-S_{(n-1)^2}$
   1. 证明：$Z_n/\sqrt{2n}\xrightarrow{d}N(0,1)$。
   2. 试给出$\alpha>0$，使$\frac{Z_n}{n^\alpha}\to 0$ a.s（α的值越小越好），试给出证明或说明理由。
5. （14分）设X，X_1，X_2，$\cdots$是一列独立同分布的随机变量，满足$E(X)=0$，$EX^2=1$，定义

$$U_n=\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n X_iX_j,$$

   构造一个与U_n相关的鞅。
6. 对任意$n\geq 1$，设X_{n1}，$\ldots$，X_{nn}为独立随机变量，定义$q_{ni}=i/n$，设

$$P(X_{ni}=k)=(1-q_{ni})q_{ni}^{k-1},\qquad k=1，2，\ldots$$

   记$V_n=\sum_{i=1}^{n-1}X_{ni}$，试研究$V_n$的极限性质。