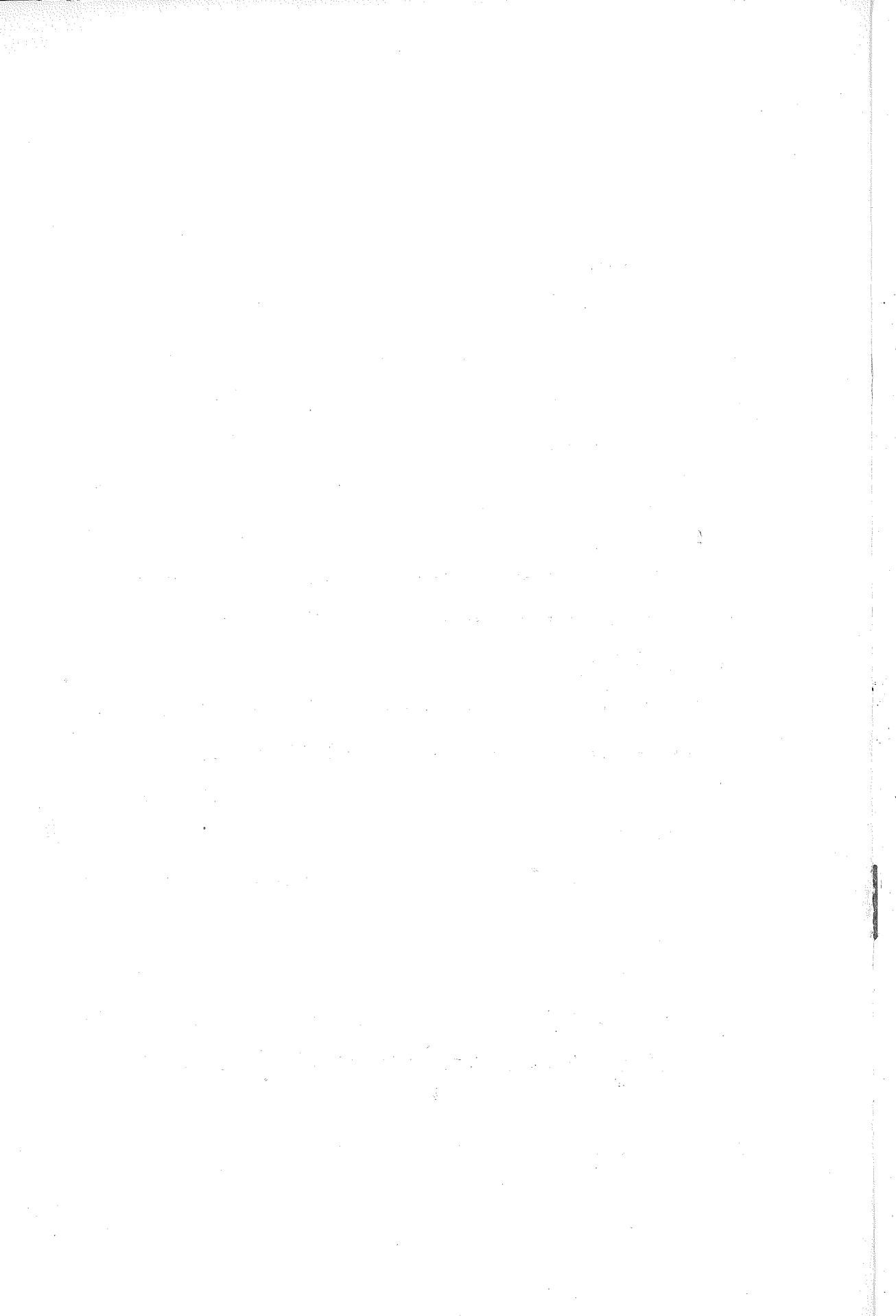


蛙

鸣

中国科技大学数学系学生会



## 目 录

第22期

1985. 11.

### 〔研究与讨论〕

	作者	页数
斯特林系数的进一步研究.....	刘弘泉	(2)
关于一类行列式的讨论.....	李广兴	(4)
关于不可测集的一些讨论.....	葛南祥 马 援	(7)

### 〔新生园地〕

一个命题的获得与证明.....	黄小平	(8)
代数基本定理.....	陈 计	(11)

### 〔未解决的问题〕

问题二则.....	陈计(等)	(14)
拓扑中的一个反例.....	刘竞欧 张玉才	(12)

### 〔数学争鸣〕

M. Atiyah 访问记(续).....	R. Minio	(1.5)
-----------------------	----------	-------

编委：马 援，刘竞欧，李广兴，张玉才，葛南祥，钱 车，陈计，李 彤，  
刘念东，祝光建，张新发，窦昌柱，严峰生，刘后铭，  
周 坚，王 岚

本期责任编辑：刘竞欧，李广兴，刘念东

## 斯特林系数的进一步研究

821 刘弘泉

在《蛙鸣》十七期上，本人曾给出如下推广的斯特林：

$$\prod_{k=0}^{n-1} (n_k + kd) = f(n, d) \cdot \sqrt{n_k + (n-1)d}$$
$$\left( \frac{n_k + (n-1)d}{e} \right)^{n-1+\frac{1}{d}} \times e^{\frac{\theta_n}{12(n-1+\frac{1}{d})}}$$

(其中  $0 < \theta_n < 1$ )，这儿  $f(n, d)$  是一个仅与  $n$  和  $d$  有关的正常数。我们称之为“斯特林系数”。在〔1〕的定理2中，我们曾给出  $f(n, d)$  的三条性质，现在再给出一条性质。性质。

设  $K$  是正整数，则有

$$\prod_{n_k=1}^{K-1} f(n_k, K) = K^{\frac{1}{2}}$$

进一步讨论  $f(n, d)$ ，我们又证明了  
定理。任给正有理数  $n$  和  $d$ ，一定存在一个只依于  $n$  和  $d$  之正整数  $N(n, d)$ ，使得我们能够只经不多于  $N(n, d)$  步，而把  $f(n, d)$  函数在有理数处的一些取值（特别这些值可是整数）经乘、除和开方的运算表示出来。

此定理的证明有赖次之五条引理（因篇幅有限，此处不拟详书证明）。

引理1。若对所有正整数对  $(n_1, d)$ ， $f(n_1, d) \sim 1$ ，都对，那末所有有理数对  $(\frac{p}{q}, \frac{m}{n})$ ，都有

$$f\left(\frac{p}{q}, \frac{m}{n}\right) \sim 1.$$

引理2。若对所有正整数对 $(n_1, d)$ , 而 $2 \nmid d$ , 都有 $f(n_1, d) \sim 1$ , 那么对所有正整数对 $(n_1, d)$ , 都有 $f(n_1, d) \sim 1$ 。

引理3. 若对所有正整数对 $(n_1, d)$ 而 $2 \nmid n_1$ , 有 $f(n_1, d) \sim 1$ , 那末对一切正整数对 $(n_1, d)$ , 有 $f(n_1, d) \sim 1$ 。

引理4. 如果对一切整数对 $(n_1, d)$ 而 $d \geq z$ ,  $1 \leq n_1 \leq d-1$ , 都有 $f(n_1, d) \sim 1$ , 那末, 对所有正整数对 $(n_1, d)$ , 也都有 $f(n_1, d) \sim 1$ 。

引理5. 任给正奇数 $d$ . 设 $i$ 为奇数,  $1 \leq i \leq d-2$ , (设 $d \geq 3$ ), 而 $i+d = 2^{1+k_i} \cdot a_i$ , 其中 $k_i \geq 0$ ,  $2 \nmid a_i$ .

$1 \leq a_i \leq d-2$ , 则从 $i$ 到 $a_i$ 构成了 $[1, d-2]$ 中奇数集合到其自身的一种对应, 且此为一一对应。

(说明: 两个实数 $a$ 和 $b$ , 若比值 $a/b$ 可以用 $\Gamma$ 函数在有理数点处某些值, 经乘、除和开方还算表示出来, 我们就记成

$$a \sim b$$

特别,  $a \sim 1$ 就表明 $a$ 有上述性质。)

由于人们比较了解 $\Gamma$ 函数之性质, 故上述定理不无用处。例如我们有渐近公式:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots \cdots (3n-2) &= f(1, 3) \cdot \sqrt[3]{3n-2} \\ &\times \frac{2}{e^{\frac{n}{12}(n-\frac{2}{3})}} \\ &\times \frac{1}{3^{\frac{1}{18}}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{6})} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

其中  $f(1, 3) = 2^{-\frac{1}{18}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{6})} \right)^{\frac{1}{3}}$

## 参 考 资 料

(1) 《斯特林公式的推广》, 刘弘泉, 《蛙鸣》第十七期。

### 关于一类行列式的讨论

8.3.1 李广兴

有一类方阵在实际中经常会碰到, 它与 Vandermonde 行列式有些类似, 但比它广得多。对于这类方阵求值几乎不可能。我们目的在于给出这种方阵之一个特点。结果如下。

**定理** ] 若  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ,  $k_1 < k_2 < \dots < k_n$ , 那么下面行列式为一个正数。

$$\begin{vmatrix} k_1 & k_1 & k_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ k_2 & k_2 & k_2 \\ a_1 & a_2 & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_n & k_n & k_n \\ a_1 & a_2 & a_n \end{vmatrix}$$

**证明:** 运用归纳法  $n = 1$  时命题显然成立。若  $n \leq m - 1$  时命题成立, 我们来证明  $n = m$  时命题亦成立。

$$\begin{array}{c|ccc|c|ccccc} k_1 & k_1 & k_1 & & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_1 & & a_m \\ & & & & k_2 - k_1 & \dots & k_m - k_1 \\ & & & & a_1 & \dots & a_m \\ \hline & k_m & k_m & k_m & 1 & \dots & 1 \\ & a_1 & a_2 & \dots & a_m & a_1 & \dots & a_m \end{array}$$

$$= \frac{k_1}{a_1} \cdots \frac{k_m}{a_m} \left( \frac{a_1}{a_2} \cdots \frac{a_{m-1}}{a_m} \right) \lambda \left( \frac{\partial z}{a_1} \right)^{k_2-k_1} \cdots \left( \frac{a_m}{a_1} \right)^{k_m-k_1}$$

$$\lambda \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^{k_m-k_1} \cdots \left( \frac{a_m}{a_1} \right)^{k_m-k_1}$$

..... (1)

故我们须证 (1) 式的行列式大于零。令

$$f(k_1, \dots, k_{m-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \end{vmatrix} \quad \text{其中}$$

$$1 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{m-1}, 0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_{m-1}$$

视为  $m-1$  个变元的函数，那么：

$$\frac{\partial f}{\partial k_{m-1}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & b_1 & \cdots & b_{m-1} \end{vmatrix} \quad \text{继续求导有下面}$$

$$0 \quad \begin{matrix} k_{m-2} & k_{m-2} \\ b_1 & b_{m-1} \\ k_{m-1} & k_{m-1} \\ b_1 m b_1 & b_{m-1} m b_{m-1} \end{matrix}$$

式子成立：

$$\frac{\partial^{m-1} f}{\partial k_{m-1} \cdots \partial k_1} = \left( \prod_{j=1}^{m-1} l_n b_j \right) \begin{vmatrix} k_1 & \cdots & k_{m-1} \\ b_1 & \cdots & b_{m-1} \\ k_2 & \cdots & b_{m-1} \\ b_1 & \cdots & b_{m-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_{m-1} \end{vmatrix} > 0$$

(按照归纳假设) 从  $\frac{\partial^{m-2} f}{\partial k_{m-1} \cdots \partial k_2} (k_1, \dots, k_{m-1}) >$

$$\frac{\partial^{m-2} f}{\partial k_{m-1} \cdots \partial k_2} (0, k_2, \dots, k_{m-1})$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & b_1 k_2^{-1} \ln b_1 & \cdots & b_{m-1} k_{m-1}^{-1} \ln b_{m-1} \\ 0 & b_1 \ln b_1 & \cdots & b_{m-1} \ln b_{m-1} \end{vmatrix} = 0 \text{ 从而有 } \frac{\partial^{m-2} f}{\partial k_{m-1} \cdots \partial k_2}$$

$$(k_1, \dots, k_{m-1}) > \frac{\partial^{m-2} f}{\partial k_{m-1} \cdots \partial k_2} (k_1, \dots, k_{m-1}) =$$

0。如此继续下去有  $f(k_1, \dots, k_{m-2}, k_{m-1}) > f(k_1, \dots, k_{m-2}, k_{m-2}) = 0$ , 从而我们证明了 (1) 式左边后边的行列成为大于零之行列，因此原行列为实数，由归纳法原理，原命题成立。

感谢 84 级周坚同学仔细审阅了稿件并提出了宝贵的意见。

## 关于不可测集的一些讨论

8.2.1 葛南祥 马援

几乎所有教科书关于不可测集的例子都采用了 Vitali 所给的“经典”例子。另一方面，利用一个不可测集与另一与不交的可测集之并总是不可测的这一事实，翁工一不可测集的势 =  $\Gamma = 2^{\aleph_0}$ 。本文将指出若干非“经典”的不可测集。

“经典”不可测集（本文用  $Z_1, Z_2$  笔记）是利用等价关系造的。又利用等价关系  $x \sim y \Leftrightarrow \exists$  有理数  $r \in \mathbb{Q}$  对  $[1, 2]$  中点分类可造出与  $Z_1$  类似的不可测集。利用等价关系  $x \sim y \Leftrightarrow g(x) - g(y) \in \mathbb{Q}$  知有下述：

定理 1：对  $(-\infty, +\infty)$  上严格单调右方连续的实值函数  $g$ ，总存在  $g$  的不可测集。

〔注〕、并非对单调右方连续的  $g$  总存在  $g$  不可测集，例如  $g$  为常值函数。

定理 2： $Z_1, Z_2$  不可测。（其中  $Z_1$  表“经典”不可测集。下略）

证：若  $Z_1 \cup Z_2$  可测，令  $r_i$  为  $[-1, 1]$  上任意非零有理数，则  $E_i = (Z_1 \cup Z_2) \cap ((Z_1 + r_i) \cup (Z_2 + r_i))$   
 $= [Z_1 \cap (Z_2 + r_i)] \cup [Z_2 \cap (Z_1 + r_i)]$  (1)

可测。若存在  $i$ （不妨设为 0）使  $m(E_0) > 0$ ，

注意当  $r, s \in (-1, 1) \cap \mathbb{Q}$  且  $r \neq s$  时，由 (1) 易验证：

$$(E_0 + r) \cap (E_0 + s) = \emptyset \quad (2)$$

记  $(-1, 1)$  间所有有理数为  $r_j$  ( $j=1, 2, \dots$ ) 并设

$E_{0,j} = E_0 + r_j$  注意  $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_{0,j} \subset (-1, 2) \cap Q$  及平移不变性  $\sum_{i=1}^{\infty} r_i = 1$

$M(E_{0,j}) \leq \varepsilon$ , 这与  $M(E_{0,j}) > 0$  矛盾。

若  $r_i > 0, m(Z_i) = 0$  则由 (1) 知  $m(Z_i \cap (Z_i + r_i)) = 0$  又  $Z_i - Z_i \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} (Z_i \cap (Z_i + r_i))$  且  $m(Z_i - Z_i) = 0$ , 但  $Z_i \cup Z_i = (Z_i - Z_i) \cup Z_i, (Z_i - Z_i) \cap Z_i = \emptyset$ ,  $Z_i$  不可测故  $Z_i \cup Z_i$  不可测, 矛盾。

在 Cantor 集中造等价关系  $x - y \leq x - y \in Q$  取其代表元集  $Z'$ , 知  $m(Z') = 0$ , 由  $Z'$  可扩张成一个  $Z$ 。另一方面, 由连续流假设  $Z' = s$  (利用夏道行等《实变函数论与泛函分析》上册 5.38 习题 8 的结论能给出该式的一个不依赖于连续统假设的证明, 从略) 这表明有非平凡的反例表明定理 2 的类似结论对交集不成立, 即:

定理 3: 存在  $Z_1, Z_2$  使得  $Z_1 \cap Z_2$  含  $s \setminus s$  个点但它是可测的:

## 一 命题的获得与证明

### 8.4.1 黄小平

[编者按]事实上, 我们有如下命题 C: 若  $a$  为无理数, 则  $m-na (m, n \in \mathbb{Z})$  在实轴上稠密。(该命题证明较易, 可参见 P. R. Halmos《测度论》或... 张《实变函数论的定理与习题集》) 因此得文中命题 B。从而可得命题 A 的一个较简洁的证法。这个方法是 8.1.1 王昌柱同学指出的。

本文曾获 3·4·1 数学论文竞赛一等奖

在学习中所得到了这样一个命题：

连续的周期函数  $f(x)$ ，周期  $T$  为无理数，设其值域为  $Y$ ，  
对  $\forall r \in Y$ ，总有数列  $f(p_n) \rightarrow r$ ， $p_n$  为单调增的自然数序列。

这个命题很有意思，可以加深对周期函数的了解，也很有用处  
下面就给出一个证明：

对  $r \in Y$ ，总有  $a > 0$ ， $f(a) = r$  （若  $a \leq 0$ ，加上  $kT$   
即可），根据连分数理论注 (\*1) 对无理数  $T$ ， $\exists s_n, t_n$ （自然  
数序列）。适合  $|\frac{s_n}{t_n} - T| < \frac{1}{t_n^2}$ ，这里  $t_n \rightarrow +\infty$  ( $s_n, t_n = 1$ )。  
对  $t_n$  取  $s'_n = \lfloor t_n a \rfloor$ ，则  $t_n a - 1 \leq s'_n \leq t_n a \therefore |\frac{s'_n}{t_n} - a| \leq \frac{1}{t_n}$   
 $\rightarrow 0$ ，即  $\frac{s'_n}{t_n} \rightarrow a$ 。现构造自然数序列  $p_n$ ，并给相应的整数列  
 $q_n$ ，满足。

$$\frac{s'_n}{t_n} = p_n + q_n \cdot \frac{s_n}{t_n} \dots \quad B$$

即  $s'_n = p_n t_n + q_n s_n \quad (t_n, s_n) = 1$

注 (\*2)

根据二元线性整系数方程解的定理，B 式中的  $(p_n, q_n)$  有解

设  $(p_{n_0}, q_{n_0})$  为某一特解，则

$$P_n = P_{n_0} + s_n \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$q_n = q_{n_0} - t_n \cdot k$$

总有  $m \in \mathbb{Z}$  满足  $m t_n < q_{n_0} \leq (m+1) t_n$ ，取  $q_n = q_{n_0} - (m+1) t_n$ ，  
则  $-t_n < q_n \leq 0$ ，即  $|q_n| < t_n$ ，同时由 B 式将  $P_n > 0$ 。  
注 (\*3)  
B 式的解集  $\{p_n\}$  与  $\{q_n\}$  至少有一个集中有无穷个互不等

即同时有  $p_{nk} \rightarrow \infty$ ,  $q_{nk} \rightarrow \infty$  ( $p_{nk}$ ,  $q_{nk}$  分别为  $p_n$ ,  $q_n$  的子列)。  
为简便, 仍为  $p_n$  与  $q_n$ 。下面证  $p_n$  满足  $f(p_n) \rightarrow r$ 。

记  $a_n = \frac{s_n}{t_n} - q_n(\frac{s_n}{t_n} - T) = p_n + Tq_n$  这里, 有  $|q_n(\frac{s_n}{t_n} - T)| < |\frac{q_n}{t_n}| \xrightarrow{\frac{1}{t_n}} 0$ 。∴ 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N: n > N$  时  $|a - \varepsilon| < |a_n - T| < |\frac{q_n}{t_n}| < \frac{1}{t_n} \xrightarrow{\frac{1}{t_n}} 0$ 。∴ 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists N: n > N$  时  $a - \varepsilon < a_n < p_n + Tq_n < a + \varepsilon$ 。由于  $f(x)$  在  $a$  点连续, ∴  $\exists \delta > 0$  使  $f(x)$  在  $(a - \delta, a + \delta)$  上有定义, 则  $f(x)$  在  $(-Tp_n + a - \varepsilon, Tp_n + a + \varepsilon)$  上也有定义, 即  $n > N$  时,  $f(x)$  在  $P_n$  点有定义。故  $f(P_n) = f(a_n - Tq_n) = f(a_n) \rightarrow f(a) = r$

这样所述命题就得到了证明

记以上命题为 A, 则由 A 可推得命题 B:

对  $\forall a \in \{\text{无理数}\}$ , 数列  $na$  的小数部分在  $(0, 1)$  上稠密。

[证]: 作函数  $f(x) = xa - [xa]$ , 则  $f(x + \frac{1}{a}) = f(x)$ 。值域为  $[0, 1]$ , 且  $f(x)$  连续, ( $\text{除} x = \frac{k}{a}, k \in \mathbb{Z}$ )。依命题 A, 得  $xa - [xa]$  在  $(0, 1)$  上稠密。

事实上 A, B 是等价的。即由 B 可推得 A

[证]:  $\forall T \in \{\text{无理数}\}$ , 则  $\frac{1}{T} \in \{\text{无理数}\}$ , 对  $\forall a \in (0, 1)$  有单调增的数列  $q_n$ , 使  $\frac{q_n}{T} - \frac{[q_n]}{T} \rightarrow a$ 。若  $T$  为函数  $f$  的周期, 不妨设  $T > 1$ 。对于  $a$ , 令  $a = \frac{q_n}{T} \in (0, 1)$

则  $\frac{q_n}{T} - \frac{[q_n]}{T} \rightarrow \frac{a - [a]}{T}$  于是  $q_n - \frac{[q_n]}{T} T + [a] \rightarrow a$ , 令  $q_n + [a] = p_n$  则  $f(p_n) = f(p_n - \frac{[q_n]}{T} T) \rightarrow f(a)$ , 即成立。

命题 B 以向量的形式, 已被推广到  $n$  维向量空间。成为一个重要的定理。命题 A 也有一些应用。例: 造一数列以  $\forall r \in R$  为聚点

〔解〕：依 A， $tgn_n$  ( $n \in N$ ) 即为所求。事实上依命题 A，你可以随意构造这样的函数序列。

注 (\*1)： $s_n, t_n$  即 T 的无穷简单速分数的渐近分数列

$$\frac{s_n}{t_n}$$

见《数论初阶》P. 211

注 (\*2)：二元线性数系方程  $ax+by=0$  仅当  $(a, b) \neq 0$  时有整数解。特别地当  $(a, b) = 1$  时：令  $x_0, y_0$  为某一特解。

则解的通式为  $\begin{cases} x = x_0 + bk \\ y = y_0 - ak \end{cases}$  ( $k \in Z$ )。见《数论初阶》P.

注 (\*3)：若  $\{p_n\}$  与  $\{q_n\}$  均只有有限个互不等的，互等的设为  $p$  与  $q$ 。

∴  $N$ ，当  $n > N$  时  $\frac{s'_n}{t_n} = p + \frac{s_n}{t_n}$ 。令  $p_n = s_n + p, q_n = -t_n + q$

则  $p_n, q_n$  符合 B<sub>1</sub> 式。且有无穷个互不等，这就产生了矛盾。

### 代数基本定理

弗鲁德·坦凯森

### 8.3.1 陈计(译)

本短文旨在给出代数基本定理的一个相当简短的初等证明：

定理，在复数域上，每个次数大于 0 的多项式都有根。

证明 设 P 是一个次数大于 0 的复系数多项式由于 P 为连续，且当  $|z| \rightarrow \infty$  时， $|p(z)| \rightarrow \infty$  存在  $z_0 \in C$ ，使得对所有  $z \in C$ ：

$|p(z_0)| \leq |p(z)|$ 。考虑多项式  $f(z+z_0)$  而不考虑  $f(z)$ ，因为它可以认为是  $z_0 = 0$  时的情形。我们要证  $p(0) = 0$ 。

存在整数  $n \geq 1$  和  $a, b \in C$ ,  $b \neq 0$ ，使

$$p(z) = a + bz^n + z^{n+1}Q(z)$$

其中  $Q$  是多项式。假设  $P(0) = a \neq 0$ , 取数  $-a/b$  的  $n$  次方根  $\omega$ 。存在  $t$ ,  $0 < t < 1$ , 使  $|t\omega^n + Q(t\omega)| < |a|$ 。现在

$$\begin{aligned} P(t\omega) &= a + b(t\omega)^n + (t\omega)^n + Q(t\omega) \\ &= (1 - t^n)a + (t\omega)^n + Q(t\omega) \end{aligned}$$

因为  $b\omega^n = -a$ , 所以

$$\begin{aligned} |P(t\omega)| &\leq (1 - t^n) \cdot |a| + t^n |\omega^n + Q(t\omega)| \\ &< (1 - t^n) |a| + t^n |a| = |a| = |P(0)| \end{aligned}$$

矛盾。所以  $P(0) = 0$ 。

(译自《Amer Math Monthly, 83(1976), 647》)

### 拓扑中的一个反例

8.3.1 刘竞欧 张玉才

《蛙鸣》16期，陈贵忠曾提出下列问题：

设  $(X, \mathcal{T})$  为一个紧致的拓扑空间，且  $X$  的紧致的子集为  $A$  集，问： $(X, \mathcal{T})$  是否一定为 Hausdorff 空间？

此命题是不能成立，下面给出一个拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$ ，它满足命题的条件，但不是 Hausdorff 空间。

$X$  具有这样的元素：所有的  $[0, 1] \times [0, 1]$  上的有理数对  $(r_i, r_j)$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , 再加上不属于  $[0, 1] \times [0, 1]$  的任意两点  $\infty_1$  和  $\infty_2$ 。令  $\mathcal{T} = \{(r_i, r_j), i, j \in \mathbb{N}\} \cup \{X - A\}$

$\{X - A\}$  其中  $X - A$  满足  $\infty_1 \in X - A, \infty_2 \in X - A \quad \forall (r_i, r_j) \in A$ 。每一个  $r_j$ ,  $r_i$  只有有限多个。 $X - B$  满足  $\infty_1 \in X - B, \infty_2 \in X - B$ 。每一个  $r_j$ ,  $r_i$  只有很多个。令  $(X, \mathcal{T})$  为以  $\mathcal{T}$  为基的拓扑结构。

$(X, \tau)$  为紧致空间。

[证]：设  $\mathcal{A}$  为  $X$  的一个开复盖，则  $\exists W, V \in \mathcal{A}$  使得  $\infty \in W, \infty \in V$ 。

$\infty \in V$  根据定义  $\exists A, B$  使得  $W \supset X - A, V \supset X - B$ 。则  $X - (W \cup V) \subset X -$

$[(X - A) \cup (X - B)] = A \cap B$ ， $A \cap B$  为有限集。故  $\exists A$  中的有限个集  $A_1, \dots, A_n$

$\dots A_n$  复盖  $X - W \cup V \therefore X$  有有限复盖。故  $X$  为紧致空间。

结论 2： $(X, \tau)$  的每个紧致子集是闭集。

引理 1： $(X, \tau)$  为  $T_1$  空间

证： $X$  中的每一点为其自身的所有邻域的交，从而  $X$  为  $T_1$  空间。（拓扑教材 P129, ex5）

证结论 2：

令  $E \subset X$ ,  $E$  为  $X$  的紧致子集，下面分别讨论  $E$ 。

(1).  $\infty, \infty_1, \infty_2 \in E$ ，则  $X - E$  为一些  $(r_i, r_j)$  的解，从而  $X - E$  为开集，故  $E$  为闭集。

(2).  $\infty, \infty_1, \infty_2 \notin E$ ，由于每个  $(r_i, r_j)$  为开，故  $E$  必有限，由于  $X$  为下空间，从而  $E$  为闭集。

(3)  $\infty \in E, \infty_2 \notin E$

(i)  $\exists n$  使得  $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} (r_{ij}, r_{j1}) \setminus \{\infty_2\}$ ，则  $X - E$  为开集， $E$  为闭集。

(ii) 不存在  $n$ ，使得  $E \subset \bigcup_{t=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^n (r_{il}, r_{j1}) \setminus \{\infty_2\}$  则有

$A = \bigcup_{l=1}^{\infty} (r_{il}, r_{j1}) \setminus \{\infty_2\}$  使  $X - A, \{(r_{il}, r_{j1}) | l = 1, 2, \dots\}$  为  $E$  的一个开复盖，但  $E$  紧致，故  $(r_{il}, r_{j1})$  只有有限个，矛盾。

所以必  $\exists n$ ，使得  $E \subset \bigcup_{i=1}^n (r_{ij}, r_{j1}) \setminus \{\infty_2\}$  此同情形 (i)。

(4)  $\infty \in E$ ,  $\infty \notin E$ , 则  $\forall i, (r_{i1}, r_j) \in E$  必有有限个, 否则令  $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} (r_{i1}, r_j) \subset E$ , 则  $(X-B) \setminus \{ \infty \}, (r_{i1}, r_j)$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 为  $E$  的一个开覆盖, 但无有限子覆盖, 矛盾. 故  $\forall j, (r_{i1}, r_j) \in E$  为有限, 从而  $X - E$  为开集. 故  $E$  为闭集.

结论 3.  $(X, \gamma)$  为非 Hausdorff 空间

证:  $\infty_1, \infty_2$  的任何两个邻域为  $W, V$ , 则  $\exists A, B$ , 使得  $W \supset X - A, V \supset X - B$ .

$W \cap V \supset (X - A) \cap (X - B) = X - (A \cup B)$  为无限集即  $W \cap V$  为非空, 所以  $(X, \gamma)$  为非 Hausdorff.

## 〔未解决的问题〕

### 问题二则

〔编者按〕: 从这期开始, 我们开辟了这个专栏, 为大家提供一个讨论问题的园地, 欢迎大家提供自己提出的, 未解决的问题和猜想, 更希望每期所提的问题能在不久的将来, 获得解决, 本刊将优先发展解决本栏猜想的文章. 在这一期里, 我们除了提出两个问题之外, 还发表了刘竞欧等的一篇文章, 他们解决了本刊十六期上的一个问题. 希望大家大力支持, 把这个交流性的专栏办好.

〔问题 I〕设  $0 < x_i < \frac{1}{2}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . 记  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), 1 - X = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n)$ .  $M_t(x) = \left( \frac{1}{n} (x_1 t + x_2 t + \dots + x_n t) \right)^{\frac{1}{t}}$ . 问: 当

$\alpha < \beta$  时是否一定有:

$$\frac{M_\alpha(x)}{M_\alpha(1-x)} \leq \frac{M_\beta(x)}{M_\beta(1-x)}$$

[问题2] 若  $E \subset [0, 1]$   $m^*(E) > 0$ , 则  $x \in E$  只有有限个  
(与  $x$  有关的) 有理数  $r_{1x}, r_{2x}, \dots, r_{nx}$  使得  $x + r_{ix} \in E$ , 问  
 $E$  是否定为不可测集。

8.3.1 禹南祥 马援提供

M. Atiyah 访问记(续)

R. Minio

A : 我觉得还有另一方面, 即它不但改变你的观点和你的工作, 而且它使你接触到其他的活跃的人物并且在以后保持这种个人联系。这对以后维持你在数学上的发展是很重要的, 与不同国家的人会面是重要的——数学是非常国际性的, 而这些中心提供了这种在其他国家很不容易得到的机会。

M : 国际会议也提供了大家见面的机会, 但或许不太能达到提供人们一起工作并且真正学到些东西的目的?

A : 是的, 国际会议有益, 但也只对于刚出茅庐的年青人不是那么有用。它们对于那些已经定型的人有益。如果你已经与别的人很熟, 而且也是活跃的, 那么在很短的时间里你可以通过短暂的思想交流得到好处。如果你是个年青学生或者博士后, 你确实无法与很多人交谈, 因为你不了解他们, 你会受到约束, 而且你懂的东西不够多使得你难听懂他们谈的东西。因此我认为你需要更长时间的熏陶。你需要花一年左右时间来慢慢吸收知识, 来了解人。所以我认为国际会议的功能是不同的。

M : 国际数学家大会如何?

A：我觉得国际数学家大会完全不同。自从1954年以来，每一届我都参加了，我从中得到的好处则很难讲。

我还是年轻学生时，第一次参加的那次大会是非常好的。我有机会去听 H. Weyl 的报告，那是心理上的极大的推动。我感到是当千名数学工作者的团体中的一员。大部分报告我都听不懂，我去了之后就坐了飞机。从数学上懂了多少具体的东西上看，我认为什么收获也没有，但心理上的推动是巨大的。

现在我年纪大了，国际大会的价值就小了。我是出于尽义务才去的——我有事要做——去与人们交谈，去做报告。我实在受益不多，因为那儿人太多了。一些报告我很喜欢；我认为国际数学家大会有好处，但是不很大。

除了对年轻人的好处，即给予他们国际成员感之外，另一个主要目的恐怕是帮助那些数学不那么活跃的国家的人们。如果你是欧洲美国人，那个也许它们并不很重要。但是如果你来自非洲或亚洲或东欧，因而旅行及与人见面的机会少得多，那么我认为这是你去了解别人在干什么的唯一机会。我怀疑这是它的主要目的。

M：你是否认为 Fields 奖的设立起到了有益的作用？

A：我认为略有一些，我感到幸运的是 Fields 奖没有象诺贝尔奖那样子。诺贝尔奖使科学，特别是物理科学严重畸形。诺贝尔奖所带来的荣誉及大吹大擂的宣传，以及大学花钱拉诺贝尔奖获得者等等，都是极端的。某个人能获奖与不能获奖的区别很难说——这是个十分人为的区分。但是，如果你得到了诺贝尔奖，我没有不到：那末你就得到双倍于我的工资，而且你所在的大学会给你盖一个大实验室，我觉得这是很不幸的。

但是在数学方面，Fields 奖根本没有影响，所以也没有消极

效果。那是授与年轻人的。以作为对他们以及整个数学界的一种鼓励。

我也被授予过 Fields 奖和给予鼓励。它提高了我的自信心和士气。我不知道倘若我没有得到这个奖的话，情形会有什么不同，但是在那个时期得到它的确使我受到鼓舞，激发起我的热情。因此我认为在这种意义下 Fields 奖是有用的。

我现在一些国家这个奖的名声很大，例如在日本。在日本，获得 Fields 奖如同获得诺贝尔奖。所以当去日本，人家介绍我时我感觉象个诺贝尔奖获得者。但在我国，根本没有人注意。

M：你是否发现在不同国家里，数学家的地位十分不同？

A：当然，在不同的国家里，数学的含义有些差别。在我国，主要是数学与应用数学及物理的分野有相当的不同。在大多数国家里，纯粹数学的独立性更大些。这可能对人们关于数学家的概念有广大的影响。他们不象在美国那样把数学家十分狭义地与纯粹数学联在一起，在美国数学家是指纯粹数学家。

除此之外，我认为在法国，数学家从传统上有较高的地位，这是因为法国具有较看重哲学、文学及艺术的传统，而数学属于这一类。而在我国，他们对这些从来也不怎么重视。

在德国，教授也有传统的较高的地位，虽然这一情形也在迅速地改变了。

我认为在关于人们如何看数学及大学的问题上，显然各有差别。但那也是在变化的——不同的文化的差异正在缩小。

M：我有几个关于你是如何工作的问题。例如，你使用的是什么样的思维表象 (mentalmage)？

A：我不敢说我能答出来这个问题。我觉得有时我脑子里确实

有个视觉的图象，某种模式图。但是这是否真的长某种图象或者只是纯粹的符号。我也不知道。我认为这是个很困难的问题，它与心理学的关系比数学更大。

M：我的问题的意思是想区别几何直观与代数操作  
(manipulation)。

A：是的，是有区别。我猜想这个一分为二的现象在大脑中是真实的，我搞的东西是比较几何的，但我不象 Thurston<sup>①</sup>，他可以同样自如地看见复杂的、高维的几何。我的几何是比较形式化的但我也不是代数学家——我不喜欢操作。也许从心理学的角度讲，我不是典型的极端人物，我貌是普通的中间的人。

如果你去问 Thurston，也许他会说他的确能看见他心里的复杂的图形。他要做的事只是把它画在纸上，从而给出证明。也可以去问 Thompson<sup>②</sup>。他怎样看见一个群，我不知他会如何回答。差别是有的。这是个复杂的问题，但它四分之三是心理学，只有四分之一是数学。

M：记忆对你的工作的重要性有多大？

A：我提到过当我十五岁时我对化学有强烈的兴趣。我用了整整一年去攻化学，后来就放弃了。原因很简单：在化学里，要记忆大量的事实。当时我有几本大部头的无机化学书。我要做的只是去背诵不同的手段，用不同的物质得到的这种或那种物质，能够帮助你记住这些东西的结构性联系是微乎其微的。有机化学稍好一些。与此相比，在数学里，你几乎根本不需要记忆，你不必去记忆事实；你所需要做的只是去理解整个东西是如何装配起来的。所以我认为

① Thurston是美国几何拓扑学家，1983年获Fields奖。

② Thompson是英国代数学家，获1970年Fields奖。

在这种意义上，数学事实上不需要科学家或医学大学生的那种记忆力。

在数学中，另一种形式的记忆是重要的。比如我思考一个问题，突然我领悟到这个问题同我上星期或上个月同别人交谈时听到的某个问题有关系。我的很多工作都是这么出来的。我出去买东西，与别人交谈，得到别人的思想。这些思想我只是半懂，然后就存储在我的记忆中。这样我就有了这些数学领域的片断的庞大的索引卡片盒。所以我认为记忆在数学中是重要的，但是它是与其它领域的记忆不同的一种记忆。

M：当你工作时，在你尚未找到某个结果的证明之前，是否能判断它是对的？

A：为了回答这个问题我应该首先指出我不是为解决某个问题而工作的。如果我对某个科目有兴趣，那我去设法理解它，我只是不断地想着它，并试着一点儿往深挖。如果我把它弄懂了，那末我就知道什么是对的，什么是不对的。

当然，也可能你没有真弄懂，可你认为你懂了，但后来发现你错了。粗略地讲，一旦你真正感到弄懂了一样东西，而且你通过大量例子以及通过与其它东西的联系取得了处理那个问题的足够多的经验，对此你就会产生一种关于正在发展的过程是怎么回事以及什么结论应该是正确的直觉。然后问题是：你如何去证明它？而这可能要花很长时间。

例如，我们提出了指数定理并且知道它应该是对的，但我们花了几几年功夫才找到证明。其中的一个原因是证明涉及到一些全然不同的技巧。所以我必须学一些新东西以求得一个证明（对这个例子

我们是找到了几个证明）。我对于证明的重要性并不大注意。我认为更重要的还是理解。

M：那末证明的重要性是什么？

A：证明的重要性在于它是对于你的理解的一个检验。我可以认为我懂了，但是证明是你懂与否的检验，仅此而已。它是行动的最后一步——最后的检验——但它根本不是主要的东西。

我记得我证明过一个定理却不能理解这个定理为什么是对的。为此我想了好几年。它涉及K-理论与有限群的表示的关系。为了证明这个定理，我必须把群分解成可解的与循环的；还用到很多的归纳步骤及其他的信息。为了保证这个证明通得过，每一个环节都必须一点儿也不差——换言之，你必须有好运气。我很惊讶地发现证明成功了并且老是在想，如果这个链中的一环突然断开，如果论证中有一点瑕疵，那末整个证明就要垮下来。因为我不理解它，也许它根本不是正确的。我一直在想，直到五、六年之后我才弄懂了它为什么是对的。从而我通过有限群到紧致群的转化给出了完全不同的证明。用完全不同的技巧可以使它为什么是正确的这个问题变成显然的。

M：你是否有办法不通过证明而把你的理解传授给别人？

A：我理想地认为：当你传授数学时，你应该像法传授理解。这通过交谈比较容易办到。当我同别人合作时，我们就是在这种理解的水平上交换思想的——我们理解这个问题并且依靠直觉。

当我作报告时，我总是设法表达出问题的主要之点，但是在写论文或书时，这就困难得多了。我不怎么写书。在论文中，我尽我的所能去写一个导言或解说来给出思想，但在论文中你必须要有证

明，所以你必须写证明。

现在，大多数的书倾向于太形式化。它们用于形式化证明上的篇幅过多，而用于启发和思想的篇幅过少。当然，给出启发和思想困难的。

有一些例外。我觉得俄国人是例外：我认为俄国的数学传统比起西方的传统更少形式化和结构化。后者受到法国数学的影响。法国数学一直是占着统治地位并且产生了一个很形式化的学派。我认为大多数都在向这种过度抽象的方向发展并且不会传授理解。

但是传授理解是不容易的。因为它只有通过与一个问题一起生活一个很长的时期才能做到。你可能要研究它好几年。你才得到它的直觉并使它进入你的骨骼中，你不可能把它传授给另外的人。如果你花了五年时间研究一个问题，那末你可以做到这一点，即把它讲给别人听，使别人花较少的时间就可以到达你现在水平。但是如果别人没有钻进这个问题中去并且看到所有的难点，那他们还没有真正理解它。

M：你如何得到你所搞的东西的思想的？是否只要坐下来并且说：“好了，我现在要花两小时做数学了”就行了？

A：我认为只要你积极地进行数学的研究工作，数学题是同你在一起的，当你想问题时，它总是在那儿。当我早上起床刮脸时我想的是数学。当我吃早饭时，我仍然想着我的问题。当我驾汽车时，我也仍在想我的问题。但注意力集中的程度各不相同。

有时你会问自己，你一边做那些事时一边想这些问题是否值得是否有帮助。也许你这不过是徒劳无功地反复思索。

有的上午你坐着并且集中精力想某个问题，那种高度的精神集

中很难持续长久，而且也不总是成功的。有时认真思索就会得到解答。但真正有趣的思想是当你灵感的火花迸发时产生的。它们的本性决定了其偶然性；它们可能在随便的交谈中产生：也许你正在同某人谈话而对方提到了某个东西，你心想“老天爷，这不是我要的吗？……它能解释上星期我想的问题”，然后你把这两样东西摆在一起，你把它们融合，这样从中产生出某种东西来。把两种东西放在一起，就像拼图游戏一样。这在某种意义上是随机的。但是你若想从随机的相互作用中得到最大的机会，你就必须经常在脑子里反复思考这些东西。我想Poincaré讲过这种话。它是一种偶然性的结果：思想在你的脑海中飞舞，而有成果的相互作用产生于某些随机的、幸运的穿变。技巧就在于使这种随机度尽可能大，这样你才能增加有成果的相互作用的机会。

从我的观点看，我同不同类型的人谈得愈多，我对于各种不同的数学问题想得越多，那末我从别人那儿得到新鲜的想法并且进而与我已知的某个东西联系起来的机会就愈大。

例如，指数定理就有偶然的成分。Singer和我碰巧都在牛津研究 Hirzebruch 的工作产生的 Riemann-Roch 定理。我们俩在一起玩的时候产生了这样一个想法：对 Dirac 算子也给一个这样的公式。那时 Smale 路过牛津，我们同他谈了，他告诉我们前几天他刚刚读到 Gel'fand 一篇文章，是关于算子的指数的一般性的问题的。他还说此文可能与我们正在做的事有关系。我发现这篇文章很难懂。它一般性地提出了问题，而我们要找的是一个重要的特例。后来我们认识和我们必须把我们正在做的事情推广从而导致了整个东西的产生。但是是过路的 Smale 使我们走上正确的轨道的。

另一个例子是我关于瞬时子 (instanton) 的工作。那也是

带有偶然性的事。当时我知道 R. Penrose 和领导的一批人在搞物理的几何方面的东西其中一个人叫 R. Ward 做出了好结果。他正在讨论班上报告，我当时间自己：“我是否应该去？它是否会有些枯燥好，还是去。”于是我去。讨论班讲得很清晰，我听懂了他在做的东西，我回去时说：“海，确实棒”。我回去后用了三整天苦苦思索，突然间我发现它是怎么回事。它怎样与代数几何挂上钩。从那时起，问题开始了突飞猛进的发展。我要是不去听那个讨论班可能那个问题至今仍是老样子。过去数学家与物理学家之间的差距很大，我怀疑在过去思想会这么快地得到沟通。当然，你可能有很多次参加讨论班却得不到启发。

M：你是否有最喜欢的定理或问题？

A：那不是一个很要紧的问题，因为我是不相信定理本身。我相信的是数学是一个整体的东西；一个定理只是一个补给站，我知道很多好的题材，好的事实，好的东西，但我认为单个的它们并不具有多大的重要性。我想对于问题也是这样。

我不想给人以印象：好象我把数学只看成是一个抽象理论而没有实体，一个理论之所以有意思是因为它解决了许多特殊问题，并且把它们放在恰当的位置上，它使你全部理解它们。一个理论常常是在某人解决了一个很难的问题之后，人们为了理解这里面的过程而发展起来的——即你在它周围筑起了上层建筑。没有硬问题的软理论是无用的。

M：你对于有限群的分类有何感想？

A：我的感想是（褒贬）兼而有之。首先，证明的篇幅太大：我觉得如果这是仅有的证明方法，那末我们对于它的理解的程度是相当有限的。人们希望关于所有这一切的一个更透彻的理解会产生

出来，也许我的看法是错的，但我相信如果真 的会产生出来，它将由这样的人们来完成，即他们从外倾的 (extroverted) 的观点，而不是内倾的 (introverted) 观点来看群。

因为群在自然中产生，它们是使事物运动的东西，它们是变换或置换。从抽象的角度看，你把群看成是一个内在的结构，具有它本身的意义——这是很内倾的观点。如果你只允许自己用这种内倾的观点，你的武器库将是很有局限。但是如果你从群的表现形式来群，从外面的世界去看，则可借助外来世界里所有的东西。这样你就得到了或应该得到一个强有力得多的理解。我的想法，我的梦想是：通过群是在一些自然的背景中（做为变换群）产生的这一事实，人们应该能证明关于群的深刻的定理，从而使结构变得一目了然。

而且，我也不能肯定整个这个结果的重要性。有些人会说数学中最重要的是建立起有公理 1, 2, 3 的公理化体系。现在有群，问题就在于给它们分类。我认为这是不正确的观点。理解这些东西的本性并且使用它们才是目的；分类只是告诉该理论的范围大致有多大。

例如李群的分类是有点特殊的。你面前有个分类表，有典型群也有例外群，但是对大多数实用的目的，你只用到典型群。例外李群的存在性告诉你这个理论还要大一点儿。它们很少冒出来。倘若有多无穷多个例外李群，使李群的分类变得极其复杂，李群分类的理论也不会有多大不同。

所以我认为不同类型的（有限）单群的存在与否对于数学没有什么影响。那是智慧的一个好的终点，但我认为它没有基本的重要性。

问：但是，如果有另外办法去做，即某种外倾的观点，那么它是否会有较大的影响？

A：那将全有这种意义上的影响，即它告诉人们事情可以用另

外的方式来做。但我认为结果没有基本的重要性，它不能与，举例来说，群的表示论相比拟。

分类的这个观点可以被极度地夸大。它在一段时期里是注意的焦点，它指出好的问题和挑战。但是，如果它占去了大量的精力，人们会想是否有更好的方法去做，找到一个更好的方法这件事本身也许会是有趣的，并且会穿示出新的思想与新的技巧，你着这个结果，它看上去不错，你给出了这个冗长的复杂的证明，去寻求更好的方法是个挑战，做此探索可能是有益的，其好处主要是来自新思想而不是你找到新证明这件事。

G. Mackey有次对我说的话我认为是很正确的。在数学的某个领域中，重要的东西常常不是技术上最困难的即最难证明的东西，而常常是较为初等的部分。因为这些部分与其它领域、分支的相互作用最广泛，即影响而最大。

在群论中有许多极端重要的，并且在数学的各个角落到处都出现的东西。这些是较为初等的东西：群及其同态、表示的基本观念一般的性质，一般的方法——这些才是真正重要的。

分析也是如此，有些关于 Fourier 级数在什么条件下收敛的很细致的论证，这些东西技巧性很高，也很有趣。但对于使用 Fourier 级数的那些数学家来说它们并不重要。一个领域的专门家们往往醉心于困难的技术性问题，但从数学家集体的观点去看，他们虽也赞叹这些东西，但却并不需要它们。

M：你最佩服的数学家是谁？

A：这个问题很好答，我最钦佩的人是 Hermann Weyl。我发现我在数学中干的差不多每一件事，Hermann Weyl 都是第一个做过的，我所搞的大多数领域都是他搞过的并且他自己还有开创

性的、很深刻的工作。当然，拓扑学是例外。这是在他的时代之后才产生的，但是他的兴趣包括了群论、表示论、微分方程、微分几何理论物理，我所做的差不多每件事都与他做类似的东西时的精神相符合。并且我完全同意他对数学的看法及他关于数学中什么是有意思的东西的观点。

我在阿姆斯特丹的国际数学家大会上听过他的报告。他在那儿把Fields奖章授予了Serre和Kodaira。然后我去了Princeton研究所。但是他那时在Zurich并在那儿去世。我在Princeton没见到他，我只见到他那么一次，所以并不是由于个人的接触才使我钦佩他的。

有很多年，每当我进入一个不同的领域，当去找幕后的人时，没有错，准是Hermann Weyl。我感到我关心的重点同他一样，Hilbert比较代数，我认为他没有同样强的几何洞察力。von Neumann则比较分析并且较多搞应用的领域。我认为从数学哲学及数学的兴趣上讲，显然Herman Weyl是同我最接近的人。（全文完）

（王启明译 沈信耀校）

