蛙　　　　　　鸣

第 27 期

中国科技大学数学系学生会

一 九 八 七 年 四 月

目 录

第27期 1987年4月

主编：杨国武
编委：王岚，王俊，周坚，杨国武，王兴於，袁进勇，钟晓，舒海斌，罗承辉，喻敬东，钱黎文，马援，陈计，李广兴，何明秋
执行编辑：陈计，何明秋，王兴於，钟晓，罗承辉，钱黎文

我们是小孩，但我们精力充沛，勇往直前。

——————伽罗瓦

一个趣味问题

851 罗承辉

数论是有趣的，下面就是一个有趣的数论问题。我们有恒等式：

$$105437^2+347671^2+559887^2$$

$$=327659^2+569893^2+115443^2$$

我们记等式两端各数取第 i_1，i_2，$\cdots i_j$ 值数字组成的数和为 $S_1(i_1\ i_2\cdots i_j)$、$S_1'(i_1\ i_2\cdots i_j)$，新组成的数的平方和为 $S_2(i_1\ i_2\cdots i_j)$、$S_2'(i_1\ i_2\cdots i_j)$，则上式有性质：

$S_1(i_1\ i_2\cdots i_j)=S_1'(i_1\ i_2\cdots i_j)$，

$S_2(i_1\ i_2\cdots i_j)=S_2'(i_1\ i_2\cdots i_j)$。

例如：$1037+3471+5587=3259+5693+1143$；

$$17543^2+31767^2+57938^2$$

$$=39765^2+53989^2+13544^2$$。

正固如此，我们称之为“金蝉脱壳”是不过份的。下面将看到其奥妙只是一个简单事实。

命题1：一组自然数 x_i 和 x_i' $(i=1,2,3)$ 间对应关系为：

$x_1'=x_1+a_1$，$x_2'=x_2+a_2$，$x_3'=x_3-a_3$，

则 $\sum\limits_{i=1}^{3} x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{3} x_i'^2$ 当且仅当

$$a_1x_1+a_2x_2=a_3x_3'-\frac{a_1^2+a_2^2-a_3^2}{2}$$

这是不证自明的（本文中各字母表示自然数）。

命题2：若两组自然数 x_i 和 x_i'，y_i 和 y_i' 满足命题1，即对给

定的ai有$\sum\limits_{i=1}^{3} xi^2=\sum\limits_{i=1}^{3} xi^2$，$\sum\limits_{i=1}^{3} yi^2=\sum\limits_{i=1}^{3} yi^2$，

则有：$\sum\limits_{i=1}^{3} xiyi^2=\sum\limits_{i=1}^{3} xi'yi'^2$。

（其中，$xiyi=10xi+yi$，为保留数字特点，可令 $0\leq xi, xi', yi, yi'\leq 9$）

证明：$\sum\limits_{i=1}^{3} xiyi^2=\sum\limits_{i=1}^{3} xi'yi'^2=20\sum\limits_{i=1}^{3}(xiyi-xi'yi')$

$=-20((x_1+a_1)(y_1+a_1)-x_1 y_1+(x_2+a_2)(y_2+a_2)$
$-x_2 y_2-(x_3'+a_3)(y_3'+a_3)+x_3'y_3')$

$=-20(a_1(x_1 y_1)+a_2(x_2+y_2)-a_3(x_3'+y_3')+$
$+(a_1^2+a_2^2-a_3^2))=0$

若k组数x_{ji}和$x_{ji}'(j=1,2,\cdots,k)$满足命题1，因为

$\sum\limits_{i=1}^{3} x_1 i x_2 i\cdots x_{ki}^2=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j,l=1}^{k} 10^{j+i-2} x_{ji}x_{li}$，由命题2得：

$\sum\limits_{i=1}^{3} x_{ji}x_{li}=\sum\limits_{i=1}^{3} x'_{ji}x'_{li}$，故有$\sum\limits_{i=1}^{3} x_{1i}x_{2i}\cdots x_{ki}^2$

$=\sum\limits_{i=1}^{3} x'_{1i}x'_{2i}\cdots x'^2_{ki}$。

于是我们看见了命题1是如何制约命题2，从而制约$S_2(i_1 i_2\cdots i_j)=S_2'(i_1 i_2\cdots i_j)$的。显然，为使$S_1(i_1 i_2\cdots i_j)=S_1'(i_1 i_2\cdots i_j)$，只须$a_1+a_2=a_3$。

现在来看上述恒等式就一点也不神秘了吧！

还可作点简单的推广，如把各数的位数加大，把等式两端数的

个数增加，都是办得到的。但若要把S_1，S_2提高到S_3，S_4，这是不可能的。

其实，这个问题根本不具有数论味，只是些简单的代数恒等式的变换，它的趣味仅仅在于它是简单而自然的。

参　考　资　料

《天下之奇》（一），上海科学技术出版社．1982年。

费马数的因子分解

素数是数学中的基本粒子，计算机已经可以很容易地算出任何数的结构。但数学家尚有很多工作要做。

确定正整数N是否素数的最明显的方法是，系统地寻找其$\leq\sqrt{N}$的素因子。用计算机对10位左右的数试除很理想，但对超过20位的数就不切实际了。对于大于80位的数，只有它具有某种特殊结构人们才能分解。费马数就具有这种结构：$F_n=2^{2^n}+1$。

F_0 ～F_4 都是素数，F_5 ～F_{16} 都是合数，因而流引的猜想是F_n（$n\geq5$）都是合数。1880年，朗道发理F_6是合数；1905和1909年，两位数学家用普鲁斯检验法（即F_n是素数的必要条件是$3^{\frac{F_n-1}{2}}\equiv-1(\mathrm{mod}F_n)$）证明$F_7$和$F_8$是合数；业已证明$F_7$和$F_8$在前几个费马数中最难分解，1971年和1981年，数学家发展了两种崭新的方法分解了F_7和F_8，它们都是两个位数级大的素数之积。F_9 ～F_{13} 都有一个级小的素因子，但

因这些数太大，现在还无法将其它全分解。

费马发现了一种分解奇合数N的特别简单的方法。他说只需寻找我满足$N=x^2-y^2$ 即 $x^2=y^2+N$的x，y即可。分解F_7的起点就是此法的一种变形：寻找满足$x^2\equiv y^2 \pmod{N}$($x\neq y$，x，y$<N$)的x，y。有多种方法可用来系统寻找方程的解。分解F_7是研究N的连分数展开；分解F_8是用“蒙特卡罗法”。即对简单的多项式如x^2+ 迭代$x_{n+1}=x_n^2+1 \pmod{N}$，以求得x_k，x_n，使(x_k-x_n，N)>1，人们认为有很大概率来快速求得x_k与x_n。例如，分解F_8用的是$x^{210}+1$。但多项式的“不良”选择会导致在限连续循环，而做不出因子分解。

摘自《科学新闻》1987年第1期

Weierstrass定理的推广

341 王兴於

一维的weierstrass定理是熟知的，下面证明定理：R^m中有界闭集上的连续函数存在一列不要多项式函数一致逼近它。

为了减少证明中出现的细节毛病，我们设此有界闭集A $(0,1)^m$。显然如果在这种特殊情况下命题得证，那么在别的一般情况，经过坐标变换，即知一般情形成立。下面的证法是Bernstein的方法的推广。

引理1：$$\sum_{i_1\, i_2 \cdots i_{m+1}} \begin{pmatrix} n \\ i_1 \\ i_2 \\ i_{m+1} \end{pmatrix} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_m^{i_{m+1}} = 1$$

其中 $$\begin{pmatrix} n \\ i_1 \\ i_2 \\ i_{m+1} \end{pmatrix} = \frac{n!}{i_1!\, i_2! \cdots i_{m+1}!}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{m+1} i_j = n \\ \sum_{j=1}^{m+1} x_j = 1 \\ (x_1, x_2, x_3 \cdots x_m) \in A \end{cases}$$

这是多项式的展开公式，故显然。

引理2：记$$\tau(i_j) = \sum_{i_1 \cdots i_{m+1}} \begin{pmatrix} n \\ i_1 \\ \vdots \\ i_{m+1} \end{pmatrix} i_j x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_{m+1}^{i_{m+1}}$$

$$\tau(i_j, i_k)=\sum_{i_1\cdots i_{m+1}}\binom{n}{i_1\ \vdots\ i_{m+1}} i_j i_k x_1^{i_1}\cdots x_{m+1}^{i_{m+1}}$$

$$\tau(i_j^2)=\sum_{i_1\cdots i_{m+1}}\binom{n}{i_1\ \vdots\ i_{m+1}} i_j^2 x_1^{i_1} x_2^{i_2}\cdots x_{m+1}^{i_{m+1}}$$

则 $\tau(i_j)=nx_j$

$\tau(i_j^2)=nx_j(nx_j+1-x_j)$

（证）对引理1中的恒等式对 x_j 求导，注意 $x_{m+1}=1-\sum_{i=1}^{m}x_i$ 。

$$\sum_{i_1\cdots i_{m+1}}\binom{n}{i_1\ \vdots\ i_{m+1}} i_j x_1^{i_1}\cdots x_j^{i_j-1}x_{j+1}^{i_{j+1}}\cdots x_{m+1}^{i_{m+1}}$$

$$-\sum_{i_1\cdots i_{m+1}}\binom{n}{i_1\ \vdots\ i_{m+1}} i_{m+1} x_1^{i_1} x_2^{i_2}\cdots x_{m+1}^{i_{m+1}-1}=0$$

由假设 $x_k\neq 0$，$1\leq k\leq m+1$

$$\therefore \frac{\tau(i_j)}{x_j}=\frac{\tau(i_{m+1})}{x_{m+1}}$$

又 $\sum_{j=1}^{n}\tau(i_j)=n$ （从恒等式看）

$$\Longrightarrow \tau(i_j)=nx_j$$

对上式求导（对 x_j） $\dfrac{\tau(i_j^2)}{x_j}-\dfrac{\tau(i_j i_{m+1})}{x_{m+1}}=n$ (**)

由对称性 $\dfrac{\tau(i_j^2)}{x_j}-\dfrac{\tau(i_j i_k)}{x_k}=n$

$$\therefore \frac{\tau(i_j i_k)}{x_k}=\frac{\tau(i_j i_{m+1})}{x_{m+1}}$$

又 $\sum_{k=1}^{m+1}\tau(i_j\cdot i_k)=n\,\tau(i_j)$

$$\therefore \sum_{k\neq j}\tau(i_j,i_k)+\tau(i_j^2)=n\,\tau(i_j)$$

$$\therefore \frac{\sum_{k\neq 1} x_j}{x_{m+1}}\tau(i_j,i_{m+1})+\frac{x_j}{x_{m+1}}\tau(i_j\cdot i_{m+1})+nx_j$$

$$=n^2x_j$$

$\therefore \dfrac{\tau(i_j,i_{m+1})}{x_{m+1}}=n^2x_j-nx_j$ 代入（* *）

$$\tau(i_j^2)=n^2x_j^2-nx_j^2+nx_j$$

$$=nx_j(nx_j+1-x_j)$$

至此，引理证毕。

引理3：设 $f_n(x_1,x_2,\dots x_m)$

$$=\sum_{i_1\cdots i_{m+1}}\begin{pmatrix} n \\ i_1 \\ \vdots \\ i_{m+1}\end{pmatrix}\left(\sum_{j=1}^{m}(i_j-mx_j)^2 x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}\right.$$

$$(1-x_1\cdots x_m)^{n-i_1-i_m}$$

则 $f_n(x_1, x_2, \cdots x_m)\leq\frac{mn}{4}$

〔证〕$f_n(x_1, x_2, \cdots x_m)$

$$=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i_1\cdots i_{m+1}}^{n}\begin{pmatrix} n \\ i_1 \\ \vdots \\ i_{m+1}\end{pmatrix}(i_j-nx)^2\, x_1^{i_1}\cdots x_m^{i_m}x_{m+1}^{i_{m+1}}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\left(\gamma(i_j^2)-2nx_ji_j+n^2x_j^2\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}nxj(1-x_j)\leq\sum_{j=1}^{m}\frac{n}{4}=\frac{mn}{4}$$

下面证明定理：

〔证明〕对 $\forall(x_{10}, x_{20}, \cdots x_{m0})=x_0$ A，f 在 A 上连续，由于 $\mathbb{R}^m$ 为正规空间，用 Tietze 扩张，把 f 从 A 扩张到 $(0\cdot 1)^m$ 上，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$。

考虑 $B_n(x_1, x_2, \cdots x_m)$，$x_{m+1}=1-\sum_{j=1}^{m}x_j$

$$=\sum_{i_1,\cdots i_{m+1}}\binom{n}{i_1\ \cdots\ i_{m+1}}\left(f\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n}\cdots,\frac{i_m}{n}\right)\right)x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_m^{i_m}x_{m+1}^{i_{m+1}}$$

则 $|B_n(x_1,\cdots x_m)-f(x)|\quad ,\cdots x\in A$

$$=\left|\sum_{i_1,\cdots i_{m+1}}\binom{n}{i_1\ \cdots\ i_{m+1}}\left(f\left(\frac{i_1}{n},\cdots\frac{i_m}{n}\right)-f(x)\right)x_1^{i_1}\cdots x_{m+1}^{i_{m+1}}\right|$$

当 $\left\|\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n},\cdots\frac{i_m}{n}\right)-x_0\right\|<\delta$ 时，$\left|f\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_m}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$

当 $\left\|\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n},\cdots\frac{i_m}{n}\right)-x_0\right\|\geq\delta$ 时，记 $\|x-x_0\|\geq\delta$，

$x\in[0,1]^n$ 的全部 x 为 B，则 B 为闭集，故存在 $M>0$，使得

$|f(x)-f(x_0)|<M\|(x)-x_0\|$，其中 $x\in B$

$$\therefore\left|f\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n},\cdots\frac{i_m}{n}\right)-f(x)\right|<M\left\|\left(\frac{i_1}{n},\frac{i_2}{n},\cdots\frac{i_m}{n}\right)-x_0\right\|$$

$\therefore|B_n(x_1,\cdots x_m)-f(x)|$

$\leq\varepsilon+M\cdot\frac{mn}{n^2\,4}=\varepsilon+\frac{M}{4n}$ $\quad\therefore n$ 充分大，$|B_n(x_1,\cdots x_m)-$

$-f(x)|<2\varepsilon$

令 $n\to+\infty$，则 $|B_n(x_1,\cdots x_m)-f(x)|\to 0$（在 A 上）

$\therefore B_n(x_1,x_2,\cdots x_m)$ 一致逼近 $f(x)$。

问题：引理中的关系为什么那么奇妙？能否与某一概型联系起来？

注：证明中有一些毛病，比如 $x_i=0$ 怎么办？但这用微小摄动

法易于克服。

·新发现·

数学天才与激素的关系

对100,000多名非常聪明的美国儿童进行的研究表明，卓越的数学家很可能是男性、左利于者和近视过敏疾患者。据信，其关联因素大概是 儿时接触了大量的 丸激素。

在数学推理能力最强的3%的美国儿童中，男女孩的比例为2:1，在0.5%中为4:1；在0.2%中为 :1。

在联邦德国的汉堡和中国的上海进行的同样的测验也获得了类似的结果。

身体特征与此的关系较密切。在数学方面早慧的口岁儿童中，16%是在左利于者，为普通人群中的这一比例的2倍多；过敏症患者的比例是普通人群的2倍。

一些生物学家最近提出，左利于和免疫疾病与 儿接触大量丸激素有关。因此，这可能是数学推理能力方面的身体特征差异的一个可能解释。

陈计 摘自《科学新闻》1986年第23期

有关 S^n 基本群的一个定理（$n\geq 2$）

341 王俊

定理：S^n 的基本群平凡（$n\geq 2$）

证：∵ S^n 连通，则取 $e\in S^n$，只需证任以 e 为起终点的道路 f，目伦于（≃）i_e。首先考虑两种情形：

(i) $f([0,1])\neq S^n$；∴ $x_0\in S^n-f([0,1])$，令 g_x 为 $S^n-\{x\}$ 到 R^n 的球极投影同胚，∵ $g_x\circ f\simeq i_{g_x(e)}$，

$$\therefore f=g_x^{-1}\circ(g_x\circ f)\simeq g_x^{-1}\circ i_{g_x(e)}=i_e$$

(ii) $e\in f((0,1))$，若 $f([0,1])\neq S^n$，则同（i）

若 $f([0,1])=S^n$，则 $g_e\circ f((0,1))=R^n$，

$$\lim_{t\to 0^+} g_e\circ f(t)=\lim_{t\to 1^-} g_e\circ f(t)=\infty$$

令 $\alpha=\inf\limits_{t\in(0,1)}\{t\mid |g_e\circ f(t)|=1\}$，

$\beta=\sup\limits_{t\in(0,1)}\{t\mid |g_e\circ f(t)|=1\}$，则 $0<\alpha\leq\beta<1$

$$|g_e\circ f(\alpha)|=|g_e\circ f(\beta)|=1$$

取连续映射 $g:[\alpha,\beta]\to S^{n-1}$ 满足 $g(\alpha)=g_e\circ f(\alpha)$，$g(\beta)=g_e\circ f(\beta)$

$$\text{令 } h(t)=\begin{cases} f(t) & t\in[0,\alpha]\cup[\beta,1] \\ g_e^{-1}\circ g(t) & t\in[\alpha,\beta]\end{cases},\quad \therefore f\simeq h$$

又∵ $g_e(-e)=0$，∴ $-e\bar{\in} h([0,1])$，∴由 (i) $h\simeq i_e$

∴ $f\simeq i_e$。

对一般的 f。令 $U=\{t\in(0,1)\mid f(t)\neq e\}$

则U是开集，$=\bigcup(\alpha_\nu,\beta_\nu)$ （α_ν,β_ν 为U的构成区间。若 $\exists\nu_1$，

$\ldots,\nu_k,\ldots$ 满足 $(\alpha_{\nu_k},\beta_{\nu_k})\cap f^{-1}(-e)\neq\varnothing$

$\therefore \exists x_k\in(\alpha_{\nu_k},\beta_{\nu_k})$，$f(x_k)=-e$

$\because f^{-1}(-e)$ 为闭集，$\therefore\{x_k,k=1,2,\ldots\}$ 的极限点 x 有

$f^{-1}=-e$ 但 $x\in U$ $\therefore f(x)=e$ 矛盾。

$\therefore$ 至多有有限个 ν，满足 $(\alpha_\nu,\beta_\nu)\cap f^{-1}(-e)=\varnothing$

记为 $\nu_1,\ldots,\nu_N$。

$$\text{令}\ f_n(t)=\begin{cases} e & t\in\bigcup_{k=1}^{n}(\alpha_{\nu_k},\beta_{\nu_k}) \\ f(t) & \text{其他} \end{cases}\qquad(n\leq N)$$

（若 $N=\varnothing$，则令 $f_N=f$）

仿(ii)可知 $f\simeq f_1$，$\ldots$，$f_{N-1}\simeq f_N$ $\therefore f\simeq f_N$

又 $\because -e\bar{\in} f_N([0,1])$ 由(i)，$f_N\simeq 1_e$，$\therefore f\simeq 1_e$。

在某种意义下，年轻人应当重复历史，既使不是实际发生过的历史，也要重复假定我们祖先知道了我们有幸知道的东西之后发生的那种历史。

——Haus Freudenthal

关于单位分数的一个定理的初等证明

数学系83级　陈　计

在文献〔1〕中冯克勤教授等应用Hardy—Karamata不等式（参见书〔2〕，第220～226页）证明了下列定理：

定理（F_n）设$r\in N$，

$$m_1=r+1,\ m_t=rm_1\cdots m_{t-1}+1\ (t\geq 2) \tag{1}$$

则（$m_1,\cdots,m_n$）是如下的非线性整规划问题

$$P_n\left(\frac{1}{r}\right):\begin{cases}\min\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}\right\}\\ \frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n}<\frac{1}{r},\\ m_i\in N\ (1\leq i\leq n)。\end{cases}$$

的唯一解，并且最小值

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}=\frac{1}{m_{n+1}-1}=\frac{1}{rm_1\cdots m_n} \tag{2}$$

本文将用完全初等的方法给出定理的一个简单证法：

定理（F_n）的证明　（F_1）显然成立，现在设（F_1），…，（F_{n-1}）均成立，即（$m_1,\cdots,m_t$）是$P_t\left(\frac{1}{r}\right)$的唯一解。从而$\mu_t\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{m_{t+1}-1}=\frac{1}{rm_1\cdots m_t}$（$1\leq t\leq n$），其中$m_i$由(1)定义。假定（$e_1,\cdots,e_n$）是$P_n\left(\frac{1}{r}\right)$的解。$e_1\leq\cdots\leq e_n$，由于$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}>0$，而$r$，$e_1,\cdots e_n$均

为自然数，从而

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}\geq\frac{1}{re_1\cdots e_n} \tag{3}$$

如果

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)<\frac{1}{m_{n+1}-1}\left(=\frac{1}{rm_1\cdots m_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}\right), \tag{4}$$

从(3)和(4)可知 $\frac{1}{re_1\cdots e_n}<\frac{1}{rm_1\cdots m_n}$，因此

$$m_1\cdots m_n<e_1\cdots e_n \tag{5}$$

另一方面，由归纳假设可知

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_t}\geq\mu_t\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_t}\ (1\leq t<n)$$

因此

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{m_1}\geq\frac{1}{e_1},\\&\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\geq\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2},\\&\vdots\\&\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_{n-1}}\geq\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_{n-1}}\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

由假设条件(4)又有

$$\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n}<\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_n} \tag{7}$$

又由假设 $e_1\leq e_2\leq\cdots\leq e_n$ 可得

$$(e_1-e_2)\frac{1}{m_1}\leq(e_1-e_2)\frac{1}{e_1}$$

$$(e_2-e_3)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\leq(e_2-e_3)\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)$$

$$\vdots$$

$$(e_{n-1}-e_n)\left(\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_{n-1}}\right)\leq(e_{n-1}-e_n)\left(\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_{n-1}}\right)$$

$$e_n\left(\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n}\right)<e_n\left(\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_n}\right)$$

将上述 n 个不等式两边分别相加得

$$\frac{e_1}{m_1}+\frac{e_2}{m_2}+\cdots+\frac{e_n}{m_n}<n \tag{8}$$

对(8)左边用一下几何平均—算术平均不等式可得

$$e_1\cdots e_n<m_1\cdots m_n \tag{9}$$

而这与(5)矛盾，从而必然有

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)\geq\frac{1}{m_{n+1}-1}$$

而由

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)\leq\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}=\frac{1}{m_{n+1}-1}$$

便知 $\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{m_{n+1}-1}$，并且 $(m_1, \cdots, m_n)$ 是 $P_n\left(\frac{1}{r}\right)$ 的一组解。

现在证明解的唯一性。设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $P_n\left(\frac{1}{r}\right)$ 的另一

组解，即

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}=\mu_n\left(\frac{1}{r}\right),\ e_1\leq\cdots\leq e_n,$$

我们要证明$(e_1,\cdots,e_n)=(m_1,\cdots,m_n)$。首先我们有

$$\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_n}=\frac{1}{r}-\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}\cdots-\frac{1}{m_n}\right)$$

$$=\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n} \tag{10}$$

$$\frac{1}{re_1\cdots e_n}\leq\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}$$

$$=\frac{1}{rm_1\cdots m_n}$$

从而

$$m_1\cdots m_n\leq e_1\cdots e_n \tag{11}$$

另一方面，由归纳假设可知

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{m_i}=\frac{1}{r}-\mu_t\left(\frac{1}{r}\right)\geq\frac{1}{r}-\left(\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{e_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{e_i}\ (1\leq t<n) \tag{12}$$

根据(10)和(12)，象前面导出(9)一样得到$m_1\cdots m_n\geq e_1\cdots e_n$。再由(11)即知

$$m_1\cdots m_n=e_1\cdots e_n \tag{13}$$

进而，如果对某个t_0（$1\leq t_0<n$）使得

$$\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{m_i}=\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{e_i},$$

则

$$\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{e_i}=\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{m_i}=\mu_{t_0}\left(\frac{1}{r}\right)。$$

由归纳假设（F_{t_0}）成立，知（e_1，…，e_{t_0}）=（m_1，…，m_{t_0}），特别地，$e_1=m_1=r+1$，于是

$$\frac{1}{r(r+1)}-\frac{1}{e_2}-\cdots-\frac{1}{e_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}-\cdots-\frac{1}{e_n}$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots\frac{1}{m_n}=\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r(r+1)m_2\cdots m_n}=\mu_{n-1}\left(\frac{1}{r(r+1)}\right)$$

注意$m_2=r(r+1)+1$，$m_t=r(r+1)m_2\cdots m_{t-1}+1$（$3\leq t\leq n$）从而由归纳假设（$F_{n-1}$）成立可知（$e_2$，…，$e_n$）=（$m_2$，…，$m_n$）又有$e_1=m_1$，便知（$e_1$，…，$e_n$）=（$m_1$，…，$m_n$）。于是由（12）我们今后假定

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{m_i}>\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{e_i}，\quad(1\leq t<n)\qquad(14)$$

根据(10)和（14），注意到（e_1，…，e_n）与（m_1，…，m_n）不成比例，象前面导出(9)一样得到$e_1\cdots e_n<m_1\cdots m_n$，而这与（13）相矛盾。这就完成了定理（$F_n$）的证明

推论　设$r\in N$，

$$M_1=r+1，M_t=rM_1M_2\cdots M_{t-1}+1（t\geq2），\qquad(16)$$

如果$\frac{1}{r}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$，$x_i\in N$，$x_1\leq x_2\leq\cdots\leq x_n$，则$x_n$的最大值是

$$M_n-1=rM_1M_2\cdots M_{n-1}。$$

证明　由假设

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{x_1}-\cdots-\frac{1}{x_{n-1}}\geq \mu_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{rM_1\cdots M_{n-1}},$$

于是$x_n\leq M_1\cdots M_{n-1}$。但是

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\cdots+\frac{1}{M_{n-1}}+\frac{1}{rM_1\cdots M_{n-1}},$$

因此$rM_1M_2\cdots M_{n-1}$是x_n的最大取值。

问题　设$r\in N$，如果

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{r},\tag{13}$$

其中$x_i\in N$，$x_1<x_2<\cdots<x_n$。问x_n的极小值是多少？（参见书〔3〕，第32页）

参考文献

〔1〕马克明，魏权龄，[illegible]，关于Kulkarni问题和Erdős一个猜想，科学通报，32(1987)，3：164–168

〔2〕D.S.Mitrinović，P.M.Vasić著，赵汉宾译，分析不等式，广西人民出版社，1986年版

〔3〕柯召，孙琦，单位分数，人民教育出版社，1981年版

〔4〕Curtiss, On Kellog's Diophantine equation, Amer. Math. Monthly, 29(1922), pp.380–387

关于矩阵及其迹的不等式

数学系83级韩文廷

矩阵序列{$A_n=(a_{ij}^{n})$} $\sum_1^\infty A_n$ 称为绝对收敛 $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^\infty |a_{ij}^{n}|<\infty\ \forall i,j$

设X为一离散型随机矩阵，取值为 $x_0,\cdots,x_n,\cdots$，对应的概率为 $p_0,\cdots p_n,\cdots$，若级数 $\sum_{i=1}^\infty x_i p_i$ 绝对收敛，则称之为X的均值EX。

显然 $(X-EX)(X'-EX')\geq 0$，即 $EXX'\geq EX\cdot EX'$，下面考虑对称矩阵则不难证明，当 $m=2^r$ $(r=0,1,\cdots)$ 时，
$-1,0$
$EX^m\geq(EX)^m$

然而 $EX^m\geq(EX)^m$ 并不成立，即使 $X\geq 0$。例如

$\frac{A^3+B^3}{2}\geq\left(\frac{A+B}{2}\right)^3$ 是不正确的。这只要取 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 100\end{pmatrix}$，

$B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 即可。以下我们写出 $EX^m\geq(EX)^m$ 的一些充分条件。

若 $X\geq 0$，则 $E(X-EX)X^m(X-EX)\geq 0\Longrightarrow EX^{m+2}-EX\cdot EX^{m+1}-EX^{m+1}\cdot EX+EX\cdot EX^m\cdot EX\geq 0$ (1)

命题1，若EX与 EX^r $(2\leq r\leq m-1, r\in N)$ 可交换，则 $EX^m\geq(EX)^m$，($X\geq 0$ 时)

Proof，$EX^m-2EX\cdot EX^{m-1}+(EX)^2\cdot EX^{m-2}\geq 0$

$$2EX\cdot EX^{m-1}-4(EX)^2\cdot EX^{m-2}+2(EX)^3\cdot EX^{m-3}\geq 0$$

从而 $EX^m-3(EX)^2\cdot EX^{m-2}+2(EX)^3\cdot EX^{m-3}\geq 0\cdots$

$$EX^m - r(EX)^r(EX)^{r-1}EX^{m-r+1} + (r-1)(EX)^r EX^{m-1} \geq 0$$

令 $r=m$，则可。

事实上所加的条件是很多的。$EX^{n} \geq (EX)^{n}$，只需要 EX^{2} 和 EX^{n} 可交换，且 EX^2 与 EX^2，EX 与 EX^2 可交换即可。

命题2，若 $P=F_{n+1}$（斐波纳契数列第 $n+1$ 项），则当 EX^{F_n} 与 $EX^{F_{n-1}}$ 可交换，EX^{F_i} $(1 \leq i \leq n-1)$ 两两可交换时，则

$(EX^P) \geq (EX)^P$（$X \geq 0$ 时）

Proof：$E(X^{F_{m-1}} - EX^{F_{m-1}})X^{F_{m-2}}(X^{F_{m-1}} - LX^{F_{m-1}}) \geq 0$

即 $EX^{F_{m+1}} - 2EX^{F_{m-1}}EX^{F_m} + (EX^{F-1})^2 EX^{F_{m-2}} \geq 0$

类似于命题1，可得 $EX^{F_{n+1}} \geq (EX)^{F_{n+1}}$，即

$EX^P \geq (EX)^P$

这一命题给出的需交换的条件为 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ 比命题1中的要少。若 $X>0$，$\Rightarrow E(X-EX)X^{2}(X-EX) \geq 0$　$EX^{4} \geq (EX)^{4}$

若 $A \geq 0$，$S \geq 0$，则 $trSA \geq 0$，因此若 $S \geq 0$，$X \geq 0$，S 与 EX 可交换，则

$$trS(EX^{m+2} - EX \cdot EX^{m+1} - EX^{m+1} \cdot EX + EX \cdot EX^m \cdot EX) \geq 0$$

即，$trS \cdot EX^{m+2} - 2trS \cdot EX \cdot EX^{m+1} + trS \cdot (EX)^2 EX^m \geq 0$

取 $S=(EX)^r$ $(r \in z)$，类似于命题1。

$$\mathrm{tr}EX^{m}-2\mathrm{tr}\,EX\cdot EX^{m-1}+\mathrm{tr}(EX)^{2}\cdot EX^{m-2}\geqq 0$$

$$2\mathrm{tr}\,EX\cdot EX^{m-1}-4\mathrm{tr}(EX)^{2}\cdot EX^{m-2}+2\mathrm{tr}(EX)^{3}\cdot EX^{m-3}\geqq 0$$

$$3\mathrm{tr}(EX)^{2}\cdot EX^{m-2}-6\mathrm{tr}(EX)^{3}\cdot EX^{m-3}+3\mathrm{tr}(EX)^{4}\cdot EX^{m-4}\geqq 0$$

得 $\mathrm{tr}\,EX^{m}-r\,\mathrm{tr}(EX)^{r-1}EX^{m-r+1}+(r-1)\mathrm{tr}(EX)^{r}EX^{m-r}\geqq 0$

令 $r=m$，则 $\mathrm{tr}\,EX^{m}\geqq \mathrm{tr}(EX)^{m}$，因此有

定理：若 $m\in N$，$X\geqq 0$，则 $\mathrm{tr}\,EX\geqq \mathrm{tr}(EX^{\frac{1}{m}})^{m}$

系：$\sum_{i=1}^{n}(\frac{\mathrm{tr}\,x_i}{n})\geqq \mathrm{tr}(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\frac{1}{m}}}{n})^{m}$ 不难看出

命题：对于单变量 * 在原点邻域 Ω 内实解析的函数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}\quad x\in\Omega$$

若 $f^{(n)}(0)>0$，($n=0,1,2\cdots$) 则 $\mathrm{tr}Ef(x)\geqq \mathrm{tr}f(EX)\geqq 0$，此处 $X\geqq 0$

因此 i) 由 $(x+1)^{m}-(x+1)^{n}=\sum_{i=0}^{m}(C_m^i-C_n^i)x_i$ $(m>n)$ $m\cdot n\in Z_m^+$，得 $\mathrm{tr}\,E(x+1)^{m}-\mathrm{tr}E(x+1)^{n}\geqq \mathrm{tr}(EX+1)^{m}-\mathrm{tr}(EX+1)^{n}$，$x\geqq 0$

从而得 $\mathrm{tr}EX^{m}-\mathrm{tr}\,EX^{n}\geqq \mathrm{tr}(EX)^{m}-\mathrm{tr}(EX)^{n}\geqq 0$

$(m,n\in z^{+},m\geq n)$，当 $X\geq I$ 时

ii）由于 $(1-x)^{-m}-(1-x)^{-n}$ 展开式系数为正，当 $|x|<1$ 时收敛，$(m, n\geq 0)$。

因此 $trE(I-X)^{-m}-trE(I-X)^{-n}\geq tr(I-EX)^{-m}-tr(I-EX)^{-n}$

$0\leq Y\leq I$。

即 $trEY^{-m}-trEY^{-n}\geq tr(EY)^{-m}-tr(EY)^{-n}\geq 0$，

$0\leq Y\leq I$。

令 $n=0$，则 $tr\ EY^{-m}\geq tr(EY)^{-m}$　令 $Y=z/r$

则知，对于 $I\geq Y\geq 0$，$m\geq 0$ 有 $tr\ EY^{-m}\geq tr(EY)^{-m}$。

iii）$-\ln(1-x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{K}, |x|<1 \Rightarrow -trE\ln(I-x)\geq$

$-tr\ln(I-Ex)\quad 0\leq x\leq I$

$\therefore tr\ E\ln Y\leq tr\ln EY_{\ 0\leq Y\leq I}$ 同样，令 $Y=z/n$ 则知：若 Y 为有界正定矩阵，

则 $tr\ E\ln Y\leq tr\ln EY$，即 $E\ln\det Y\leq\ln\det\ EY$

$\pi(\det y_i)^{p_i}\leq\det\sum_i y_i p_i, \sum p_i=1,\ p_i\geq 0$

iv）$tr\ E\exp X\geq tr\exp\ EX$，记 $\exp x$ 为 X 则

$trEX\geq tr\exp\ E\ln x$。

当 x_i 彼此可交换时，即得 $tr\ EX\geq tr(\pi_{i=1} x_i^{p_i})$。

一个不等式及其应用

831 李广兴　陈计

本短文中，我们用两个正数之和来估计它们的 Lucas 表示式，即

定理：设 $a > b \geq 0$，当 $r \geq 2$ 或 $0 \leq r \leq 1$ 时，

$$\frac{r}{2^{r-1}}(a+b)^{r-1} \leq \frac{a^r - b^r}{a-b} \leq (a+b)^{r-1} \tag{1}$$

当 $1 < r < 2$ 时，不等号反向。

证明：我们仅讨论 $r \geq 2$ 时的情形，其余同理。

显然，当 $r = 2$ 时，(1)为恒等式；下设 $r > 2$，$\varphi(t) = t^{r-1}$ 是 $(0, +\infty)$ 上连续的严格下凸函数，由 Hadamard 不等式（参看〔1〕，P.18）得

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{r-1} < \frac{1}{a-b}\int_b^a t^{r-1}\,dt = \frac{1}{r}\cdot\frac{a^r - b^r}{a-b} \tag{2}$$

两边同时乘以 r 便得到(1)的第一个不等式。

将(1)的第二个不等式去分母得

$$a^r - b^r \leq (a-b)(a+b)^{r-1} \tag{3}$$

由于(3)是关于 a 和 b 的齐次式，所以无妨设 $a + b = 1$。令

$$g(t) = t^r - (1-t)^r + 1 - 2t \tag{4}$$

其中 $\frac{1}{2} < t < 1$。则

$$g''(t) = r(r-1)\left[t^{r-2} - (1-t)^{r-2}\right] > 0 \tag{5}$$

又因为 $g(\frac{1}{2}) = g(1) = 0$，所以 $g(t) < 0$，即有(3)式成立，从而(1)

的第二个不等式也成立。

证毕。

作为定理的应用，我们推广了两数和的平方公式：

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab \tag{6}$$

应用　设 $a\ge0$，$b\ge0$；当 $r\ge2$ 或 $0\le r\le1$ 时，

$$(a+b)^r\ge a^r+b^r+(2^r-2)(ab)^{r/2} \tag{7}$$

当 $1<r<2$ 时，不等号反向。

证明：下面只讨论 $r\ge2$ 时的情形，其余同理。

显然，当 $r=2$ 或 $a=b$ 或 $ab=0$ 时，(7)式取等号。下设 $r>2$，$a>b$，令

$$f(a)=\frac{(a+b)^r-a^r-b^r}{(ab)^{r/2}} \tag{8}$$

则

$$f'(a)=\frac{r}{2}a^{-\frac{r}{2}-1}b^{-\frac{r}{2}}\left((a-b)(a+b)^{r-1}-a^r+b^r\right) \tag{9}$$

由定理知 $f'(a)>0$，又因为 $f(b)=2^r-2$，所以

$f(a)>2^r-2$，于是有(7)成立，并且等号仅在 $k=2$ 或 $a=b$ 或 $ab=0$ 时取。

证毕。

问题　设 $a_i\ge0$，$1\le i\le n$，当 $r>n/(n-1)$ 时，是否有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\ge\sum_{i=1}^{n}a_i^r+(n^r-n)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{r/n} \tag{10}$$

注记：当 $n=2$ 时，由(7)知问题的回答是肯定的。在《蛙鸣》

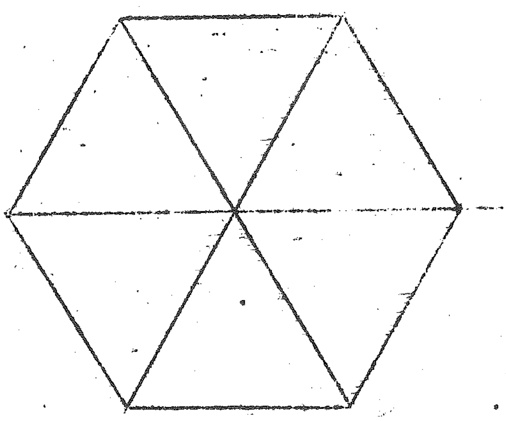
第26期的"问题与猜想"栏中，我们曾推测：当$n\geq 3$，$r>1$时(10)成立。对此，我班的马援同学举了反例。成都大学数理系王挽澜付教授在$r>1$的条件下证明了：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^r-(n^r-n)\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{r/n}\leq\left(\sum_{i=1}^{r} a_i\right)^r(2-n^{1-r}) \quad (11)$$

武汉铁路局工务职工大学简超老师坚信：当$r\geq 2$时，(10)成立；并证明了$n=2^m$的情形。

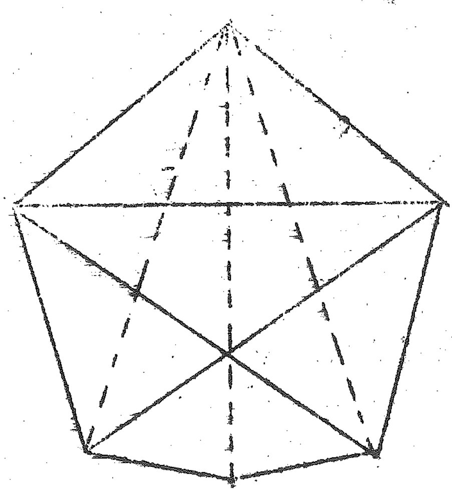
参　考　文　献

〔1〕D·S·Mitrinovic，P·M·Vasic著，赵汉宾译，分析不等式，广西人民出版社1986年版。



直径1的正六角形

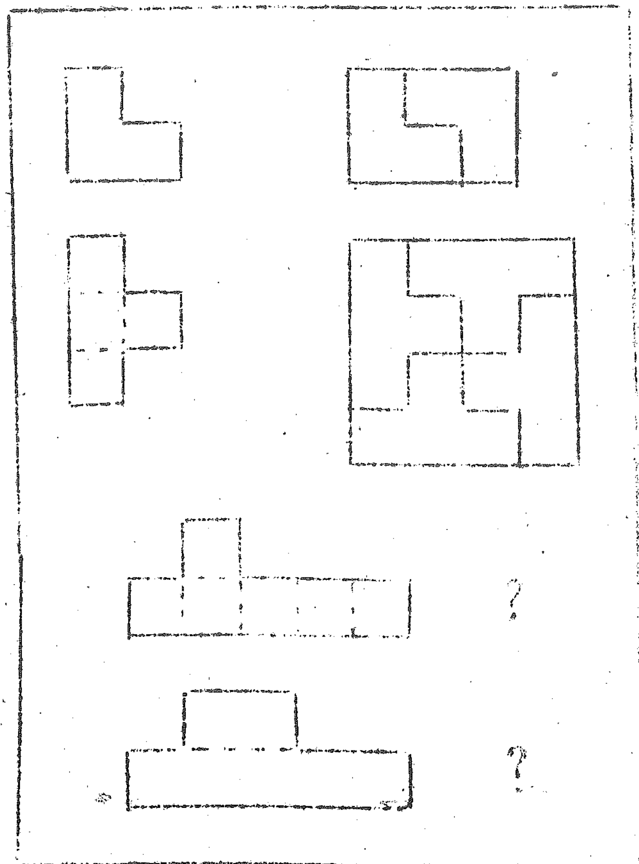
面积= 0·64952



直径1的面积最大的

六角形面形

0·674981…



这一组铺砖问题是，证明特定数量的一种形状的砖能否组成一个长方形。已发现多种形状的砖可组成长方形，但有两种则不能。然而也没有人能证明后两种砖不能构成长方形。

摘自《科学新闻》1987年第3期。

（科学新闻）

最近约100名专业和业余数学家在加拿大卡尔加里大学举行了一次娱乐性与直观数学讨论会。在这次异常快乐的会议，工作与玩耍合为一，混为一体。讲演中笑话不绝。与会者为一些数字、马赛克砖、木块、筹码、火柴杆、硬币、纸牌和金属联环绞尽脑汁。

未解决的问题

关于$M_t(x+\frac{1}{x})\geq A(x)+\frac{1}{A(x)}$成立的条件

831　陈　计

若$x_1>0$，$x_2>0$，且$x_1+x_2=1$，则

$$(i)\ (x_1+\frac{1}{x_1})^2+(x_2+\frac{1}{x_2})^2\geq\frac{25}{2} \tag{1}$$

$$(ii)\ (x_1+\frac{1}{x_1})(x_2+\frac{1}{x_2})\geq\frac{25}{4} \tag{2}$$

(1)见于G·H·Hardy:A Course of Pure Mathematics，Combridge 1984，P·34；(2)曾作为我校少年班的一道试题（参见梁树生，杨贤其，福建中学数学，1982年第3期，PP·22—23)。

由于上述不等式的非齐次性，下面的问题是有意义的：

若$x_1>0$，$x_2>0$，且$x_1+x_2=S$，则是否成立

$$(i)(x_1+\frac{1}{x_1})^2+(x_2+\frac{1}{x_2})^2\geq 2(\frac{s}{2}+\frac{2}{s})^2, \tag{3}$$

$$(ii)(x_1+\frac{1}{x})(x_2+\frac{1}{x_2})^2\geq(\frac{s}{2}+\frac{2}{s})^2\ ? \tag{4}$$

用平方平均—算术平均—调和平均不等式：

$$\left(\frac{(x_1+\frac{1}{x_1})^2+(x_2+\frac{1}{x_2})^2}{2}\right)^{1/2}\geq\frac{(x_1+\frac{1}{x_1})+(x_2+\frac{1}{x_2})}{2}$$

$$=\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}\geq\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2} \qquad (5)$$

从而不等式(3)成立。易见可用同样的方法把(3)推广为n个量的情形。

对于(4)，试取 $s=5$，$x_1=2$，$x_2=3$，则

左边$=(2+\frac{1}{2})(3+\frac{1}{3})=8\frac{1}{3}$，右边$=8.41$ 所以(4)一般不成立。不过，如果正数 $s\leq 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$，那末(4)还是成立的。

定理1　若 $x_1>0$，$x_2>0$，且 $x_1+x_2\leq 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$，则

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)\geq\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}\right)^2 \qquad (6)$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2$，并且 $2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 是使上式成立的最大数。

证明：注意到恒等式：

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)-\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}\right)^2$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2}{16x_1x_2(x_1+x_2)^2}\{(x_1^2-x_2^2)^2+16+16(x_1+x_2)^2-(x_1+x_2)^4\}$$

$$=\frac{(x_1-x_2)^2}{16x_1x_2(x_1+x_2)^2}\{(x_1^2-x_2^2)+(8+4\sqrt{5}-(x_1+x_2)^2)(-8+4\sqrt{5}+(x_1+x_2)^2)\} \qquad (7)$$

在 $(x_1+x_2)^2\leq 8+4\sqrt{5}$ 或 $x_1+x_2\leq 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$ 时，(7)式≥ 0，等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时取。现对 $\delta>0$ 来考虑

$(x_1+x_2)^2=8+4\sqrt{5}+\delta$，代入上式$\{\cdot\}$内得

$$(x_1^2-x_2^2)^2-\delta(8\sqrt{5}+\delta) \tag{8}$$

显然，当$x_1 \neq x_2$但两者足够接近时，(8)式为负，从而(7)式为负。即$2\sqrt{2+\sqrt{5}}$具有最佳性。

定理2　若$x_i>0$，$1\leq i\leq n$，$x_1+\cdots+x_n=s\leq 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$，则有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geq\left(\frac{s}{n}+\frac{n}{s}\right)^n \tag{9}$$

等号成立当且只当$x_1=\cdots=x_n=\frac{s}{n}$。

证明：若$x_1,x_2,\cdots,x_n$中有两个x_i，x_j，$x_i\neq x_j$，则$x_i+x_j\leq 2\sqrt{2+\sqrt{5}}$，则用$\frac{1}{2}(x_i+x_j)$取代$x_i$与$x_j$，其和式不变，但由定理1知(9)左边的值变小，所以$x_i\neq x_j$时，(9)式左边不能取到最小值，等价地说，(9)式左边取最小值时$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{s}{n}$，所以(9)式成立。

定理3　若$x_i>0$，$1\leq i\leq n$，$x_1+\cdots+x_n=s\leq n$则有

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geq\left(\frac{s}{n}+\frac{n}{s}\right)^n \tag{11}$$

等号成立当且只当$x_1=\cdots=x_n=\frac{s}{n}$。

证明　为简明计，引入记号

$(x)\equiv(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

$\left(x+\frac{1}{x}\right)\equiv\left(x_1+\frac{1}{x_1},\cdots,x_n+\frac{1}{x_n}\right)$，

$G(x)=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$，$A(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ 等等。

用Minkowski不等式（参见D·E·Daykin，C·I·Eliezer Generalizzaliztion tion of Holder's and Minkowski's inequalites，Proc，Cambridge Phil，Soc，64，1023—1027(1968)得

$$G\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqq G(x)+G\left(\frac{1}{x}\right)=G(x)+\frac{1}{G(x)} \tag{12}$$

由题设易知$A(x)\leqq 1$，从而

$$A(x)-G(x)\leqq\frac{A(x)-G(x)}{G(x)A(x)}$$

即有

$$G(x)+\frac{1}{G(x)}\geqq A(x)+\frac{1}{A(x)} \tag{13}$$

所以(11)成立，易知取等号当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$。

用定理2、定理3和算术平均—几何平均不等式即得

定理4　若$x_i>0$，$1\leqq i\leqq n$，$x_1+\cdots+x_n=s\leqq\max\{n,2\sqrt{2+\sqrt{5}}\}$，且$t>0$，则有

$$M_t\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqq A(x)+\frac{1}{A(x)} \tag{14}$$

等号成立当且$x_1=x_2=\cdots=x_n$。式中记

$$M_t(x)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^t\right)^{1/t}$$

推论1　若$x_k>0$（$k=1,\cdots,n$），$x_1+\cdots+x_n=1$且$a>0$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^a \geq \frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}} \tag{15}$$

这个结果属于南斯拉夫的D·S·Mitrinović教授和加拿大的D·S·Djokovic教授。(参见D·S·Mitrinovic，P·M·Vasić著，赵汉宾译，分析不等式，广西人民出版社1986年版，PP·78—379)。

当$t\geq 1$时，(14)对S上界的限制可以去掉。

定理5　对n维正向量x，

$$M_t\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq A(x)+\frac{1}{A(x)}，(t\geq 1) \tag{16}$$

等号成立当且只当向量x的诸分量相等时。

证明　用Simon幂平均不等式

$$M_t\left(x+\frac{1}{x}\right)\geq M_1\left(x+\frac{1}{x}\right)=M_1(x)+M_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\geq M_1(x)+M_{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=M_1(x)+\frac{1}{M_1(x)}$$

$$=A(x)+\frac{1}{A(x)}$$

易见取等号当且只当$x_1=\cdots=x_n$

推论2　若$x_i>0$，$1\leq i\leq n$，$x_1+\cdots+x_n=S$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^2\geq n\left(\frac{S}{n}+\frac{n}{S}\right)^2 \tag{17}$$

等号成立当且只当$x_1=\cdots=x_n$。

问题　对n维正向量x，设$t\leq 1$，使

$$M_t(x+\frac{1}{x}) \geqq A(x)+\frac{1}{A(x)} \qquad (18)$$

成立的A(x)的最佳上(确)界r(t;n)是多少?

注记1　当n=2时，定理1指出$r(0,2)=\sqrt{2+\sqrt{5}}$。在《蛙鸣》第26期的“问题与猜想”栏中，我曾推测：

$r(0,n)=\sqrt{2+\sqrt{5}}$。对此，武汉铁路局工务职工大学的简超老师指出：r(0,n)不可能是大于1的常数α：取

$x_i=\underbrace{1,1,\cdots 1}_{n-1个},(\alpha-1)n+1$，则当n充分大时有

$$\alpha^{n-1}\left((\alpha-1)n+1+\frac{1}{(\alpha-1)n+1}\right)<\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^n \qquad (19)$$

并对 r(0,n)是否具有简明的公式，表示怀疑。

定理7　设$-1\leqq t<1$，对n维正向量x，

$x_1+\cdots+x_n=S\leqq\sqrt{\frac{2-t+\sqrt{5-4t}}{1-t}}$，则

$$M_t(x+\frac{1}{x})\geqq A(x)+\frac{1}{A(x)} \qquad (20)$$

注记2　当t充分靠近1时，这里对S的约束较定理4要松一些。例如：取$t=(n^2-1)/n^2$得

推论3　若$x_i>0$，$1\leqq i\leqq n$，$x_1+\cdots+x_n=S$

$\leqq\sqrt{n^2+1+\sqrt{n^4+4n^2}}$，则

$$M_{\frac{n^2-1}{n^2}}(x+\frac{1}{x})\geqq A(x)+\frac{1}{A(x)} \qquad (21)$$

在定理7中，令t=-1得

推论4　若$x_i>0$，$1\leqq i\leqq n$，$x_1+\cdots+x_n=S\leqq\sqrt{3}$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)^{-1}\leqq n\left(\frac{S}{n}+\frac{n}{S}\right)^{-1} \tag{22}$$

特别地，取$n=2$，$S=1$得

$$\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^{-1}+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^{-1}\leqq\frac{4}{5} \tag{23}$$

这同不等式(1)，(2)相类似。

定理8　设$t<-1$，若$x_i>\sqrt{\frac{2-t-\sqrt{5-4t}}{1-t}}$，$1\leqq i\leqq n$，$x_1+\cdots+x_n\leqq\sqrt{\frac{2-t+\sqrt{5-4t}}{1-t}}+(n-1)\sqrt{\frac{2-t-\sqrt{5-4t}}{1-t}}$，则有

$$M_t\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqq A(x)+\frac{1}{A(x)} \tag{24}$$

上述定理7和8是下列定理的直接推论：

定理9　设1° $-1\leqq t<1$，$0<x_i\leqq\sqrt{\frac{2-t+\sqrt{5-4t}}{1-t}}$，$1\leqq i\leqq n$，或2° $t<-1$，$\sqrt{\frac{2-t-\sqrt{5-4t}}{1-t}}\leqq x_i\leqq\sqrt{\frac{2-t+\sqrt{5-4t}}{1-t}}$，$1\leqq i\leqq n$，则

$$M_t\left(x+\frac{1}{x}\right)\geqq A(x)+\frac{1}{A(x)} \tag{25}$$

证明：这可由函数$\left(x+\frac{1}{x}\right)^t$的凹凸性及Jensen不等式得知

·数学奖台·

第11届菲尔德斯奖

1986年在加利福尼亚州伯克利举行的数学家国际代表大会上颁发了菲尔德斯数学奖，3位40岁以下的数学家因分别发现了极大相同的数学领域之间的深刻而又神秘的联系而获奖。

圣迭戈加利福尼亚大学的35岁的迈克尔H·弗里曼因研究了四维形状的分类而获奖。他建立惊人数目的四维形状的方法，是解决这一问题的关键因素。他的研究把几何学和代数学的一些强有力的思想结合了起来。

英国牛津大学的29岁的西蒙K·唐纳德森研究的虽然也是四维流形，但其方法却大不相同。为提供一种新型几何学手段，他借用了理论物理的方法，即广泛用于描绘电磁效应和别的现象的一组非线性微分方程。结合弗里曼的研究，他的研究结果显示，四维空间有不止一个的可能结构。

目前在新泽西州普林斯顿大学任职的32岁联邦德国数学家杰德·福尔廷斯解决了关于多项式方程的一个久悬未解的问题，莫尔德尔猜想。他的成功有赖于找到了数论和代数曲线之间的联系。

所有三位获奖者说，他们的发现有赖于艰苦和持久以恒的工作，但运气也起了重要作用。但是，唐纳德说："研究的主要原因是好玩"。

摘自《科学新闻》1987年第24期

〔蛙鸣问题和解答〕

编者按：本栏自第26期起对问题统一编号，对未解决的问题以(＊)表示。欢迎广大师生（尤其是各任课老师）向专栏提供一些问题，供同学们研究、讨论。

问题5　设$a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant 2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

且常数2是最好的。

（861研　余红兵　提供）

问题6＊三角形ABC的周界的三等分点P、Q、R构成一个三角形。证明或否定$S_{\triangle PQR}>\frac{2}{9}S_{\triangle ABC}$。

（上海敬业中学　沈刚　提供）

问题7＊ a）设N为一自然数，非10的方幂，令S_n为N^n在十进制中的数字和，证明或反驳$S_n\to\infty(n\to\infty)$；

b）对任意P进制，讨论上述问题。（单墫老师　提供）

问题8＊设平面上的2n（$n\geqq 2$）个圆中的任意三个不两两相交（切），则是否可从中选出n个圆，使它们是彼此相离的？

（叶怀安　老师　提供）

问题9　设$A_1,\cdots,A_m$为同阶的正定对称的实方阵，则

$$tr(A_1A_2\cdots A_m)\leqq\frac{tr(A_1^m)+\cdots+tr(A_m^m)}{m}$$

（831　韩文廷　提供）

问题10＊　正多边形的模糊集合E_n的隶属函数如何定义？

（831　陈计　提供）

问题11*单位面积凸四边形内一点及四顶点组成诸三角形中必有一个面积$\leq\frac{1}{5}$。（831　何明秋　提供）

问题1*（第26期，陈琦、陈计提供）在面积为1的三角形内，任给9点，则一定存在三点，它们组成三角形的面积$\leq\frac{1}{8}$。

证明（陈计）：为了证明上述事实，需要下面一个引理[1]

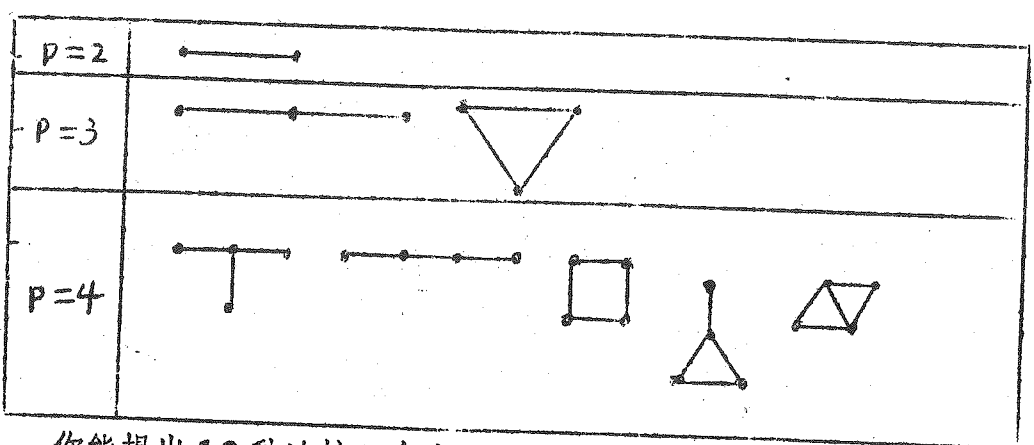
引理　若凸4角形$P_1P_2P_3P_4$在$\triangle ABC$内部，则该凸4角形诸顶点组成的4个三角形中，至少有一个三角形的面积不超过$\triangle ABC$的$\frac{1}{4}$（即$\min\triangle P_iP_jP_k\leq\frac{1}{4}\triangle ABC$）

原问题中三角形的任一条中线将9点分成两组，则必有一组有5点以上；注意到平面五点中必有4点可构成凸4角形（包含退化情形），所以根据引理得证。

参　考　文　献

（1）杨路，张景中，正方形内六点问题，四川省中学生数理化竞赛数学讲座，四川人民出版社，1980年版，PP159—175。

（831的马援和何明秋进一步证明了问题1中的9个点能减少为8个点，而保持结论不变）。



你能提出13种连接5个点的火柴杆图形吗？

治学法与辩证法七题

张 贤 科 博士

（中国科学技术大学数学系）

摘　　要

I、治学者的心理素质：1．大志是成功的先声；2．自信是成功的钥匙；3．勤奋是成功的度量，II、治学者的方法：4．动脚，掌握资料获取信息；5．动手，直攻法与高难法；6．动脑，创造性思维的特点；7．动眼，一本书主义与渗透学习法。

我们的国家正在振兴，我们的时代正是千载一时的科学的春天。大批青年学生和研究生正向科学高峰攀登，我愿以所知、所历、所见、所悟，与他们一起探讨治学方法问题。当然我的所知所悟仍极其有限的，而这里讨论的“治学”主要是指理论科学研究，针对性是辩证唯物主义的方法的生命，所以我们着重强调矛盾二方的一方，比如我们强调自信，而对谦虚则较少提及，这并不是说可以不要谦虚等等。

第一部分

治学者的心理素质：大志，自信，勤奋。

治学者的心理素质对学业的影响，远较治学方法为大。离开了前者，后者就失去了依托，成为毫无意义之物。相反，有志于攀登科学高峰的学者，或迟或早总会在实践中摸索出他的方法的。华罗庚说：“熟能生出百巧来”，所以对心理素质的训练实为重要。

§1．大志是成功的先声

首先，治学者要有大志，即攀登到科学顶峰之志。人生贵在有志，志不立，则事无可成。所谓“有志者事竟成”，“精诚所至，金石为开”，是有其道理的。我未读过“圣经”，但知圣经中有这样的话：“敲门即开门”。圣经大多是古代民间传说记录，“敲门即开门”这句话，应视为古代人民的经验之谈：只有去敲门，门才得以开；只要去敲门，门就可以开！”，让我们勇敢地不断地去叩击科学宫殿的大门吧！

强调“立志”，是否是哲学上的“唯心论”或“唯意志”论呢？唯物主义应当只强调客观物质世界的呀？！——让我们读一读马克思吧，马克思在“关于费尔巴哈的提纲”中对费尔巴哈这位“古典”唯物主义大师有十一条批评，其中赫然写在第一条的是：

“从前的一切唯物主义，包括费尔巴哈的在内，其主要缺点是：把事物、现实、感性，只从客体的形式或是从直观的形式去理解，而不是当作人的感性活动，当作实践去理解的，不是主观地去理解的。所以，结果竟是这样：那能动的方面是和唯物主义相反地由唯心主义加以发展了，——但只是由它抽象地加以发展了，因为唯心主义当然不知道现实的感性活动之为现实的感性活动的”。

马克思的话多好啊，再也不能把主观能动的方面让给唯心主义去发展了！比上述论断早一年，马克思还有过更为明确的，格言般的论断：

“光是思想力求体现为现实是不够的，
现实本身也应该力求趋向思想”

光是思想去体现现实，那是机械唯物论。同时还要求现实趋向

思想（真理），以思想改造现实，那才是辩证唯物主义，事实上，马克思本人在他的博士论文序中就早已立下了“在自己的斗争和苦难中注定要成为普罗米修斯第二”的誓言：

“不惧神威，不畏闪电，

也不怕天空的惊雷…”

——“普罗米修斯是哲学历书上最高尚的圣者和殉道者！”

立志，也是一个过程，甚至是一个终生的过程。它不是一劳永逸的，更不是一朝一夕就能宣布完成了的，我想有以下几点可谈：

1、大志者不愧于时代，现在的形势可谓

“千载一时，胡不立志？！”

试想有志于科学者数千年来，何时有现在的好时机，以前的自不待说，即便是新中国成立后，国家这样鼓励、需要科学工作者也是从未有过的，科学史表明，处于上升阶段的国家在达到它的顶峰以前，必然涌现出大批科学家。正如恩格斯热情地讴歌“文艺复兴”时代那样：“这是一次人类从来没有经历过的最伟大的、最进步的变革，是一个需要巨人而且产生了巨人———在思维能力、热情和性格方面，在多才多艺和学识渊博方面的巨人的时代”。现在的中国，正处于比“文艺复兴”更辉煌的阶段，人民、国家、时代在需要大批科学人才。马克思说：“人生来就是这样安排的：他只有为了社会进步和同时代人的幸福而努力，才能够使自己完善起来”。因此为振兴中华造福人类而树立大志，“誓凌绝顶”，才不愧这伟大的时代。

2、大志者择书而读，从治学立志角度看，书可分为两类：一类是补志鼓气的，如历史（世界史、各类科学史、近代史），伟人传记，哲学，特别是各种学术著作。一类是夺志泄气的，如很大一

部分文艺作品（包括许多优秀古典作品），一些通俗读物均属于此类。前者多是真实的，是成功者的记录，读来能激励人们的奋发向上精神，而后者多是失败者或间瑕者的哀叹、悲观、抱怨，虽然从从作品当时的背景看，它政治上是好的，艺术水平也是高的，但它总是给人某种心灰意懒的情绪，如不警觉，易被夺志。当然，休息时翻翻自己喜爱的文艺作品作为调剂也未尝不可。

3．大志者崛起于受挫，从一定意义上讲，"挫折"甚至更有利于治学，司马迁在"报任少卿书"中讲到：

"文王拘而演周易；仲尼陥而作春秋；

屈原放逐乃赋离骚；左丘之明厥有国语；

孙子膑脚兵法修例；不韦迁蜀世传吕览；

韩非囚秦说难孤愤；诗三百篇大抵贤圣发愤之所为作也"。

现代也有很多例子，郭沫若受挫流亡日本时，识译了甲骨文，奠定了他考古学和历史学的基础。

"学问积成于不必学之时，

成功奠基在大失意之日"。

事实常常就是这样，这是治学的辩证法，究其实，做学问需要安静、专心、时间，这些都在失意寂寞之时才有，在得意热烈之时所缺的，歌德说得好："追求伟大事物的人必须全力以赴，巨匠在限制中才能表现自己，而规律只能给我们以自由"。

所以在受到挫折时，且不可失掉志向，若在受挫之日，心灰意懒，自谓"学有何用？"，便是志不坚的表现。究竟学有何用，当时谁也无法回答，只是待要用之日，有用之时，学也晚了！

4．大志者不止于所得，在取得一些胜利后，或者在条件好了的时候，也往往可以令人失去大志。纨绔子弟自不待言，"自古雄

才多磨难，纨绔子弟少伟男”早为人所知。就是有志之人，也容易失去远大目标。所谓

“芳草有情皆碍马，好云无处不遮楼”。

“谁在争取一切，谁在争取全胜，谁就不能不提防：不要让微小的成果束住手脚，不要误入歧途，不要忘记目的地还很远”。我们要记住列宁的这些话。

5．大志者善于调节，事物都有两个方面，所谓“立志”有时也需要调节，并不是一条大道跑到底，志向是一种长远的、总的抱负、目标。但在何时、何具体方向上，何种规模上实现志向，以及以何种方式为志向而奋斗，都要依客观情况而定。可以把人的志向比喻为植物的“向阳趋光性”，这是一种内心的趋向，一种主观的追求，如何实现，是要“审时度势”的，不可钻牛角尖。大志在胸，方式上有一定的灵活性。重要的是始终坚持这种“向阳趋光性”，那么终究“乘风破浪会有时，直挂云帆济沧海。”

§2　自信是成功的钥匙

自信是一种自我肯定，即高度坚信而且不断证明自己是有能力的。

1．自信是成功者的特点之一，美国加利福尼亚大学医学院查尔斯·加菲尔德教授分析了1500多名卓有成就者，总结出他们的共同点有六条：(1)过安排得当的生活，(2)热爱自己的职业，(3)做艰难事之前先在脑中思考，(4)讲求实效而不必顾虑十全十美，(5)甘愿担风险，(6)不低估自己的潜在能力。

这里我们看到，第5、6两条都是自信问题，足以见自信的重

要性。许多卓有成就者，包括马克思，都非常自信。以致于被一些人目为"自大"，在我国，由于长期封建社会的影响，人们往往容易低估自己的潜力，不愿担风险，失去一次又一次的机会。不可能想象，一个具有强大内在力的人，会是一个不自信的人。

2．自信是创造力的表现，治学是一种主观对于客观的认识运动，自信是在这一斗争中的巨大的精神力量，科学研究有时会遇到巨大的障碍，无法估量的挫折，几乎毫无希望的一片黑暗，在这样的时候没有高度的自信，定会一事无成，要攀登前人未有攀上的高峰，解决前人未能解决的问题，没有一点气概是难以想象的。

关于创造性思想的现代理论认为，一个人的创造力可用如下公式衡量：

创造力＝＝基础知识×发散思维能力

其实"自信"是对发散思维的最大解放和激励，这里发散思维是指对事物从最广泛的角度考虑各种可能，它的目的在于谋求"数量"。与之相对的是"收敛思维"，这是进行比较、选择的思维。目前国外的管理科学中有很成功的"智力激励法"，管理者邀集一组人对某一问题征求意见，会上严禁批评，发言完全自由，意在谋求意见的数量。这种会议往往能收得奇效，征求到大量的创造性意见，这实质上是一种集体的发散思维机会。由此可以得到启发："批评"———这个向来很强调的武器，在这儿却是最忌讳的，它简直是悬在"创造性思维"头上方的尚方宝剑。那么个人的发散思维呢？当然就最忌讳"自我批评"，说得准确些就是忌讳拘谨、自卑、无自信心，忌讳"还没有诞生就已被扼杀"，因此"自信"，是发散思维的父母，是创造翱翔的翅膀。

为什么创造力依赖于发散思维呢？事实上辩证唯物主义从原则

上早就回答了这个问题，它要求人们要从最广泛的相互联系中，从各个方面全面的看问题。

3．有自信才能有大志，凌云大志，因何而起？往往起于自信，爱因斯坦说过："有一种人从事科学是因为这里给他提供了施展才能的机会，他喜欢科学，正如运动员喜欢运动一样。"马克思说过："自暴自弃，这是一条永远腐蚀和啃啮着心灵的毒蛇，它吸收着心灵的新鲜的血液，并在其中注入厌世和绝望的毒液。"

4．自信与骄傲。自信与骄傲不是同一概念。但是却常有人以"骄傲"的罪名去扼杀人们仅存的一点点"自信"的情况。仿佛大家都失去了自信，于是天下太平。所以对所谓"骄傲"要分析，只要它不是在成绩面前固步自封，只要它不是看不起或伤害了其它人，就不要轻意给人家戴上骄傲的帽子。

"九州生气恃风雷，万马齐喑究可哀，

我劝天公重抖擞，不拘一格降人才"。

如果大家都唯唯诺诺，猥猥琐琐，我们的社会何以能进步？那种崇尚谦卑、自视渺小的传统美德，是否真为美德，怕要重新考虑了。实质上它是封建社会愚民政策的遗风，是"多事之秋"人们借以自我保护的"作茧自缚"。对于向科学顶峰进军的志士，则是最有害不过的。

"道德规范"是一个历史范畴，它要随时代不同，历史变迁而变。但是"时间的更替不过是空间的并存的逻辑补充"。因此"道德规范"也要随空间不同，环境变迁而变。

不容讳言，由于矛盾的特殊性，自然科学工作，与政治行政工作对人的特质要求是不同的。后者主要是与"人"打交道，处理的是人与人之间的关系，强调谦虚谨慎是重要的；前者主要与自然界

打交道，处理的是人与物之间的关系，强调自信和创造性是重要的。当然自然科学工作者也要处理人与人之间的关系，也要求他们谦虚谨慎；政治工作者也要处理人与物之间的关系，也要有自信和创造性，但绝不能说二者是没有区别的。

5．自信心的培养，少年时的环境对一个人有没有自信有很大的影响。有不少人在新环境下也容易对自己失去信心。我曾接触过一些大学生和研究生，他们自己承认比别人“笨”，对获得好的成绩缺乏信心，这样盲目自卑往往没多少根据，对自己要有正确分析。现代科学证明既使象爱因斯坦那样的科学家，大脑也只被动用了极少一部分，绝大部分未被开发，所以人的大脑的潜力是相当大的，许多自感“笨”的人不过是大脑要进一步“开发利用”罢了。另外，一些人的自卑可能源于对别人的盲目推崇。向别人学习是好的，但推崇别人到“自卑”的程度就不好了。其实，可以有一条定律叫做“远山恒青”。就是说，远处的山，看上去总是一片纯青无比。但其实，你若实地细察，也是乱石满地，荆棘从生的，与脚下的山并无二致。人们对于不了解的东西常常理想化，如天堂、月宫，但不知脚下的地球才真正是人类的伊甸园。

其次，争取经常不断取得成果，争取成果得以发表和应用，对培养自信心是很重要的，小成绩是大成功的基石与动力，这种早期的成果会在心底激起自信和胜利感。有一种说法：科学家之所以取得成就，根源于其早期的成绩得到社会鼓励。这是有道理的。这种“早期成绩”不一定是什么大成果，可以是做得很优美的习题，甚至可以是少年时期的一些“小聪明”，这也提出一个问题：对青少年的教育，要以表扬鼓励为主。那种旨在摧毁自尊心、自信心的教学法，纵然是教给了学生一些知识，实在只能算是“给了他一碗红

豆汤，而夺去了他的长子权”。

但是治学者不能要求社会上每个人都能正确地来鼓励他，甚至社会上还有所谓“马太效应”存在：越是需要扶持的学者，社会对其成绩越趋向于拒绝，国外学者是根据《马太福音》的下面一段话给这种社会现象起的名字：

“凡是有的，还要加给他，叫他有余；

对没有的，连他所有的，也要剥取。”

青年治学者若面对这种情况，怨天尤人，那是弱者的表现；灰心丧气，那等于承认失败。唯有自强不息，不断“积累优势”。真金不怕土埋，“马太效应”只能淘汰那些假金罢了。因此，自信者在任何时候的口号都是：

“我斗！——这是口令，

胜利！——这是回响。”

§3 勤奋是成功的度量

勤奋是成功的度量。就是说，你付出多少劳动，你就会有多少成果。这可以看作是政治经济学中“价值”的定义，在学术问题上的引伸。在政治经济学中，商品的价值是物化了的劳动，社会劳动量是商品价值的度量。在学术领域中，这几乎同样是对的。“勤能补拙是良训，一分辛劳一分才”，华罗庚的这句话，不是轻意说出的。由于关于勤奋的论述已经相当多，我们在此不宜多说，只重温马克思如下的话：

“我只有事先声明，请渴求真理的读者们注意。在科学上面是没有平坦的大道可走的，只有那在崎岖小路的攀登上不畏劳苦的人，

有希望到达光辉的顶点”。

“在科学的入口处，正象在地狱的入口处一样，必须提出这样的要求：

“这里必须根绝一切犹豫，

这里任何怯懦都无济于事”。

〔简讯〕

这学期，系学习部每周组织一次报告会，同学和老师一样，都可以报告。现已进行了五次活动：

（一）叶怀安副教授：遍历性理论

（二）严峰生（82级）：反称张量空间与Szász不等式

（三）程艺博士：1．漫谈孤立子，2．在英国生活、学习的情况

（四）陈计（83级）：不等式的专题研究

（五）李尚志副教授：典型群

※※※※※※※※※

※ 研究通讯 ※

※※※※※※※※※

Neuberg—Pedoe不等式的推广

831 陈计 马援

我们首先推广了三角形的面积公式：

引理 设a、b、c和△分别表示△ABC的三边长和面积，则当$0<\theta<1$时有

$$3\left(\frac{16\triangle^2}{3}\right)^{\theta}\leq 2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta} \qquad (1)$$

当$\theta<0$或$\theta>1$时，不等号反向；并且等号成立，当且仅当$a=b=c$时。

由此我们把Neuberg—Pedoe不等式从指数和维数两个方向进行了推广：

定理 设Σ_A和Σ_B为两个n维单形，它们的棱长分别是a_i、b_i，$i=1,2,\dots,\frac{n}{2}(n+1)$，它们的体积分别是$v_1$和$v_2$，则当$\theta\in(0,1)$时有不等式：

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}(n+1)} a_i^{2\theta}\left(\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}(n+1)} b_j^{2\theta}-nb_i^{2\theta}\right)$$

$$\geq 2^{2\theta-2} n^2 (n^2-1)\left(\frac{(n!)^2}{n+1}\right)^{\frac{2\theta}{n}} (v_1 v_2)^{\frac{2\theta}{n}} \quad (2)$$

当 $n>2$ 或 $\theta\neq 1$ 时，式中等号当且仅当 Σ_A 和 Σ_B 均为正则单形时成立；当 $n=2$，$\theta=1$ 时，上式是 Neuberg—Pedoe 不等式，等号成立的条件是两个三角形对应相似。

一个学者要出人头地，首先得证明自己无害于人。……这就是为什么一个学者必须避免所谓“参加政治”的原因。……任何不满情绪的表现都会妨碍科学的发展！

——摘自《伽罗瓦传》

※※※※※※※※※※※※

※ 研究通讯 ※

※※※※※※※※※※※※

凸图形内n（≥6）点问题

831 何明秋

曾有过一道数学竞赛题："在单位正方形内任取9个点，求证在这9个点组成的诸三角形中，至少有一个三角形的面积不超过$\frac{1}{8}$。"

本文证明了上述命题的一个推广。

定理 单位面积的凸图形内n（≥6）个点组成的诸三角形中，至少有一个三角形的面积不超过$\frac{1}{n-1}$。

推论 单位面积的凸图形内n（≥10）个点组成的诸三角形中，至少有一个三角形的面积不超过$\frac{1}{n}$。

零 知 识 证 法

数学研究也充满着竞争，于是有数学家希望在不泄露证法的同时又让别人（验证者）知道他自己（证明者）是知道此证法的。由于此时不会透露哪怕是一点点有关证法的暗示，故称之为零知识证法。这一概念是由麻省理工学院和多伦多大学的研究人员于前年首先阐明的。以后，伯克利加州大学的布勒姆说明了如何使任何一个数学定理都有一个高效率的零知识证法。

布勒姆说，困难之一在于找到合适的问题供验证者提出。一旦做到这点，零知识证法就可以处理一切逻辑系统中的可证明的定理。为了说明此法，他在图论中选择了一个实例。

哈密顿圈是这样一条特殊路线，它从图上各点只通过一次然后返回出发点。证明者想使验证者确信此路线已知而又不让他了解关于此路线的任何具体情况。为此证明者先画好一个由位于同一圆周上的点及其连线组成的图，然后用一层可擦掉的不透明的薄膜覆盖。

验证者先要求看看图或哈密顿圈。证明者擦掉部分薄膜，露出构成哈密顿圈的线。如此反复进行。证明者每次都画一个新的圆图，然后同样覆盖。由于他不知道验证者将要看的是图还是哈密顿圈，因此他必须知道哈密顿圈，否则他就不能正确操作，验证者就知道他不是撒谎就是不了解证法。

零知识证法适用于计算机系统。例如，你揭晓一种信息使计算机相信你知道口令，而想偷看口令者根据你的信息得不到口令，那么，该系统就是安全的。

摘自《科学新闻》1987年第1期

分拆理论简介

851 钟 晓

一 Intioduetion

分析理论是数论中的一个很小分支，国内学者对此研究甚少，本文先介绍分拆的一些基本概念。然后再简单介绍二个研究分拆理论最基本的工具。

定义1. 正整数n的一个分拆是指一不增正整数序列λ_1，λ_2 ，…，λ_r，且$\sum_{i=1}^{r}\lambda_i=n$。$\lambda_i$叫分拆部分。

定义2 分拆函数P（n）是n的所有分拆的个数。φ是所有分拆的集合，称为分拆集。P（s，n）是属于分拆集φ的子集s的n的所有分拆个数。

如，设θ为分拆部分全为奇数的分拆集。&为所有分拆部分互不相同的分拆集，则：

P(θ，1)=1：1=(1)

P(θ，2)=1：1+1=(1^2)

P(θ，3)=2：3=(3)，1+1+1=(1^3)

P(θ，4)=2：3+1=(13)，1+1+1+1=(1^4)

P(θ，5)=3：5=(5)，3+1+1=(1^2 3)，1+1+1+1+1=(1^5)

P(θ，6)=4：5+1=(1，5)，3+3=(3^2)

3+1+1+1=(1^3 3)，1+1+1+1+1+1=(1^6)。

P(&，1)=1：1=(1)

P(&，2)=1：2=(2)

P(&，3)=2：3=(3)，2+1=(12)

P(&，4)=2：4=(4)，3+1=(13)

$P(\&,5)=3:5=(5),4+1=(14),3+2=(23)$,

$P(\&,6)=4:6=(6),5+1=(15),4+2=(24),3+2+1=(123)$

从上可知：非常有趣事实：$P(\theta,n)=P(\&,n)$ 当 $n\leq 6$ 时。下面读者会知道这个结论对一切n都成立。

二、一般有限积函数（Infinite Product Generating Function）

定义3　对序列 a_0，a_1，a_2，…，一般函数f（g）是幂级数 $f(g)=\sum_{n\geq 0} a_n g^n$。

定义4　令H为一正整数集，令“H”为分拆部分在H中的分拆集，显然，P（“H”，n）就是所有分拆部分在H中的n的所有分拆个数。

这样，如果 H_0 是奇正整数集，则："H_0" $=\theta$

$P(\text{“}H_0\text{”},n)=P(\theta,n)$

定义5　设H是一正整数集，令“H”（≤d）是分拆部分在H中并且没有一部分重复出现超过d次的分拆集，显然：

$P(\text{“}H\text{”}(\leq 1),n)=P(\&,n)$。

定理1　设H是一正整数集，且：

$$f(q)=\sum_{n\geq 0} P(\text{“}H\text{”},n)q^n$$

$$f_d(q)=\sum_{n\geq 0} P(\text{“}H\text{”}(\leq d),n)q^n$$

那么对 $|q|<1$：

$$f(q)=\prod_{n\in H}(1-q^n)^{-1}$$

$$f_d(q)=\prod_{n\in H}(1-q^{(d+1)n})/(1-q^n)$$

这个定理的证明不难，限于篇幅，略去证明，有兴趣的同学不妨自行证之。

推论1．(Euler) $P(\theta, n)=P(\&, n)$。

证明：由定理1：

$$\sum_{n\geq 0} P(\theta, n) q^{n}=\pi_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^{-1}$$

且：$\sum_{n\geq 0} P(\&, n) q^{n}=\pi_{n=1}^{\infty}(1+q^{n})$，

$(\because P(\&, n)=P(\text{"H"}(\leq 1), n))$

又：$\pi_{n=1}^{\infty}(1+q^{n})=\pi_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})/(1-q^{n})=\pi_{n=1}^{\infty} 1/(1-q^{2n-1})$

所以：$\sum_{n\geq 0} P(\theta, n) q^{n}=\sum_{n\geq 0} P(\&, n) q^{n}$

$\therefore P(\theta, n)=P(\&, n)$ #

推论2．(Glaishec) 令N_d表示不能被d整除的正整数集，那么：$P(\text{"N"}_{d+1}, n)=P(\text{"N"}(\leq d), n)$

证：$\sum_{n\geq 0} P(\text{"N"}(\leq d), n) q^{n}=\pi_{n=1}^{\infty}(1-q^{(d+1)n})/(1-q^{n})$

$$=\pi_{n=1}^{\infty} 1/(1-q^{n})$$

$$=\sum_{n\geq 0} P(\text{"N"}_{d+1}, n) q^{n}$$

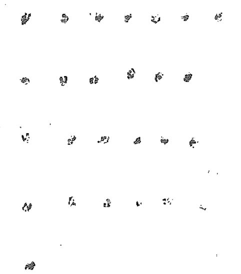
所以：$P(\text{"N"}_{d+1}, n)=P(\text{"N"}(\leq d), n)$

三、分析的图示关系：

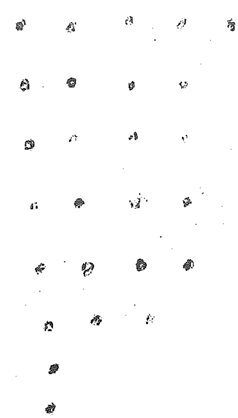
定义1．如果$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$是一分拆，定义

一新的分拆$\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_m)$其中$\lambda'_j$为分拆$\lambda$中分拆部分大于等于$i$的个数。分拆$\lambda'$叫分拆$\lambda$的共轭分拆。

例如：分拆$26=8+6+6+5+1$，用图表示为：



它的共轭分拆为：$26=5+4+4+4+4+3+1+1$，图示为：



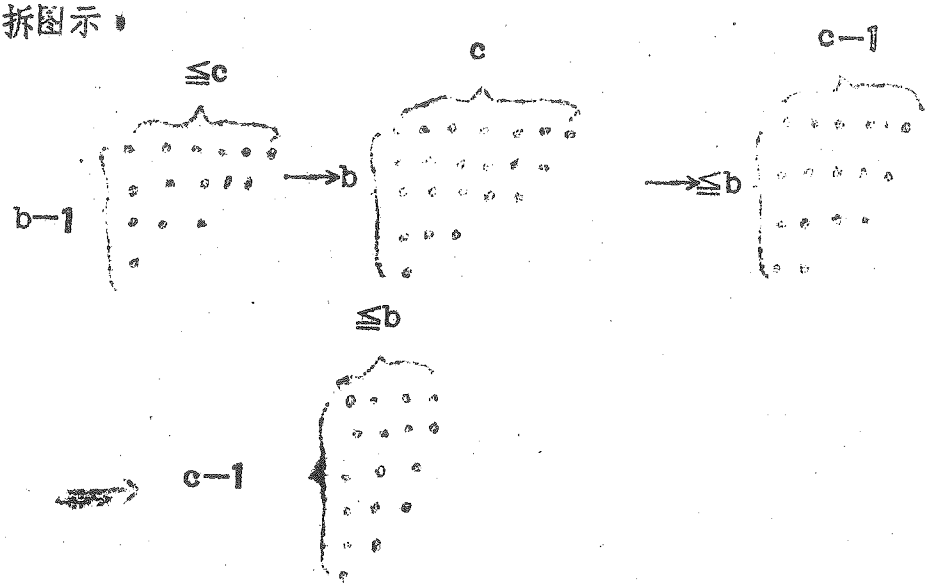
我们易知：把一个分拆图示的列看成行便变为它的共轭分拆的图示。所以，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_j=\sum_{i=1}^{m}\lambda'_i$。任一分拆和它的共轭分拆是一一对应的，这样我们易知下面这定理的证明。

定理2·不超过m个部分的n的所有分拆个数等于没有一部分超过m的n的所有分拆个数。

定理3·把$a-c$分为$b-1$个部分，且每部分不超过c的所有分拆的个数等于把$a-b$分为$C-1$个部分，且每部分不超过b的所有分拆的个数。

证明：我们考虑分拆的图子，按下列的方法改变分拆，首先我

们加一行有c个点的行然后我们减去第一列，最后求得它的共轭分拆图示，



我们可看出这个系列变换得到了一个命题中两个分拆的一一对应，所以命题成立。 #

有兴趣的同学不妨再证一证下面几个定理。

定理4．令$P_e(\&,n)$或（$P_0(\&,n)$为把n分成偶（或者）奇数个不同部分的n的所有分拆数。那么：$P_e(\&,n)-P_0(\&,n)=$

$$\begin{cases}(-1)^m & \text{如果 } n=\frac{1}{2}m(3m-1)\\[2em] 0 & \text{另外}\end{cases}$$

定理5．（Euler三角数定理）

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=1+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}(1+q^m)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m q^{\frac{1}{2}m(3m-1)}$$

定理6．（Euler）如果$n>0$，那么：

$$P(n)-P(n-1)-P(n-2)+P(n-5)+P(n-7)+\cdots$$
$$+(-1)^{m}P\left(n-\frac{1}{2}m(3m-1)\right)+(-1)^{m}P\left(n-\frac{1}{2}m(3m+1)\right)+\cdots$$
$=0$，其中若 n 为负数则 $P(n)=0$，$P(0)=1$。

数学成果的重要性往往是相对的，不同的人有不同的判别标准，而且随时代与环境的变化而变化。常用的情形是：一个问题的重大意义是在于它所包含的困难。确实，如果为了解决问题而需要提出新的方法，发明有价值的技巧。那么这门科学通过问题的解决而得到的收获。也许比从最终结果所得到的要丰富得多。一般说来，我们可以认为所有与重要事物本身有关的研究都是重要的；建立高度的一般性，或用统一的观点将表面不同的部门联合起来，简化它们，解释它们；寻求可以成为新贡献的源泉的结果，如此等等，所有这一切都是重要的研究。

——————Corradi Segre

〔远方的信〕

编者按：自《蛙鸣》扩大到校外后，不少学生和教师纷纷给本刊的编委、作者来信，给予我们很多鼓励和帮助。这期摘登成都大学王挽澜副教授，南京大学佟文廷教授和武汉铁路局职工大学教师简超给84级黄小平同学和83级陈计同学的三封信——

小平同行和《蛙鸣》编委同行：

尊刊《蛙鸣》（NO. 26）两本收到，其一已转鹏飞。兹代表我两深表谢意！

拜读《蛙鸣》后，充满喜悦，亦升起了许多念头："后生可畏"科大可慕！……

在科研上，就是应当起步早。既要力求有坚实的基础，亦要有"易胆大"的精神。

寻朋友易，觅知音难。前两三年读过尊校石钟慈老师及杨路（×人的石室（常稀）学友）、张景中、林秀鼎等学长的文章，颇受启迪，也读过单墫及史济怀老师的专著，收益不少。

任何一位作者在其作品产生影响或在学界为人引用时无不感到高兴。获悉：拙作曾为尊刊的陈计、李广兴引用过，谢谢！

休说英雄少用武地，科大园内有"蛙鸣"。希您们的刊物能继续办下去，且愈办愈好。Illinois大学有数学学报，尊校马可无"蛙鸣"？愿不久将来，能立世界数学之林！

我正在给我系学生会建议：希他们能正式订阅您们的"蛙鸣"，让吾校的学生们大开眼界。（"蛙鸣"至少在活跃上有望像Amer.Math.Monthly）。

暂书至此：最后，希您们勿受薤及影响，一心扑在学习钻研上，"为祖国争光"。

顺颂

春安

王挽澜

陈计同学：你好！

来信与两份《蛙鸣》刊物均已收到，阅后感到很有启发，精神也为之一振。我已看过不少大学生自办刊物，但像你们的刊物之质量者尚属少见。尤其是去年在美国见到M.F.Atiyah，并听了他的学术报告，今又在你们的刊物上看到关于他的访问记，又知道了不少信息，更感高兴，谢谢你！

我的关于谱半径工作在一次全国代数会上也曾报告过，后来又接着做了一点工作。在美时整理成文，投Linear and Multilinear Algebr杂志，并已收到他们决定发表的信。你们的《几类方阵谱半径的估计》一文我看了，写得很好。可能你们的出发点不是作为创造性的学术论文来写的，但仍可看出你们创造性的劳动。（*）式在作反证法时确是有用的，但其思路与Brauer的卵形理论相通。至于（？）式，我只见过 $r(A) \leq \max\limits_i \rho_i^{\alpha}(A)\rho_i^{1-\alpha}(A^t)$，$0 \leq \alpha \leq 1$，这个式子是否成立还不可讲。从直观上猜测似应有此结果，（因为已有 $r(A) \leq \max\cdots$）但如能容易证出，Ostrowski文中何故不见呢？因此，如查不到有人做过这个工作（我未见，但亦未细查），推翻或证明 $r(A) \geq \min\limits_i (\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij})^{\alpha}(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij})^{1-\alpha}$（？）式都是有意义的。

特征值的界域理论是由Gersgorin（苏）在30年代给出的圆盘理论奠基的，40年代由A.Brauer的卵形理论作了成功的推广。（50年代Taussky的边界点理论使上述理论更加完美）但Brauer的工作有些错误，70，80年代已为一些代数学家更正A.Brauer 1964年的一篇报告虽然仍未发觉，但仍不失为一

篇十分值得看的文章，可在1964年出版的一本英文小册子中找到——Recent Advances in Matrix Theory，edited by H.Schneider，the University of Wisconsin Press，Madison。可能你们已看过了，如未看过，是值得细读的。在我国，石钟慈先生和王伯英先生1965年在数学学报上的《某些类矩阵的行列式、特征值以及条件数界限的若干估计》更应认真学习，其中的技巧、结果至今仍是优秀的。现在回过头看看，研究特征值的估计大致是下面的路子：

正矩阵→非负矩阵→复矩阵→张量积

随机矩阵

幂正矩阵

A.Brauer在四十年代至七十年代一直未间断过这方面的工作，记得1974，1976年，他与I.C.Gentry在Linear Algebra Appl。上还有两篇论文，给出了一些新结果，你如有兴趣也可去查阅。如果想动手正式工作，我认为看了一些基本的文献后即可直接阅读近年来的论文，如今年数学研究与评论第一期即有，不必太多地看老文章，那样精力也吃不消，不知你以为然否？

我兴趣较广，欢迎今后多交流学习心得。这些年一直带研究生，平日就很想与本科生多接触。我欢迎你常来信，心情是真诚的。

祝

一切好！

佟文廷

86.5.31

陈计同志：　　　　　你好！

收到赠寄的《蛙鸣》NO,26，读后欣喜且深受启发。其中不仅获得若干有意义的成果，还提出许多有趣的猜想或待解决问题，引起我的兴趣，感谢你从远方送来清新悦耳的“蛙鸣”，愿她早日催绿数学的沃野。

祝　　进步！

简超

只要有非常好的学生，最拙劣的教师也常常能取得不平常的成就。

——Emil Artin

中国科技大学1987年

攻读硕士学位研究生入学考试试题

数学分析

一、（每小题7分，共21分）求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$，(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos a_1x\cdots\cos a_nx}{x^2}$，

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $(a_i>0, i=1,2,\cdots,n)$。

二、（10分）设 $x^2+3y^2-2y^2+xy-y=2$，求在（1，1，1）处的偏导数 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$ 和 $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{(1,1,1)}$。

三、（10分）求 $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq\pi^2}\sin\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$

四、（15分）设 f（x）在（0，+∞）上有定义，

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 存在且有限，对任何 $A>0$，$\displaystyle\int_0^A\frac{f(x)}{x}dx$ 都收敛，$a>b>0$，求证：

$$\int_0^{\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=l\log\frac{a}{b}。$$

五、（10分）证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $x\geq\delta>0$ 时一致收敛。

六、（10分）设f（x）在区间（a，b）中连续之后满足方程：

$$f(x)\int_0^x f(t)dt\equiv 0。求证：f(x)\equiv 0$$

七、（每小题7分，只14分）设 $|r|<1$，求定积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{r-\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx$，(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\log(1-2r\cos x+r^2)dx$

八、（每小题5分，共10分）设连续函数f（x）满足：

$f(x)=0$，若 $x\leq 0$，

$f(x)=x$，若 $0<x\leq 1$，

$\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=-\dfrac{f(x-1)}{x^2}$，若 $x>1$。

求证：

(1) f（x）在（0，+∞）上为严格增，

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在且为有限。

（完）

中国科技大学

1987年攻读硕士学位研究生入学考试试题

线性代数

一、（20分）设动直线L平行于平面$Ax+By+Cz+D=0$，并沿着直线$x=0$，$z=a$与直线$y=0$，$z=-a$滑动，其中数$a>0$。求滑动直线L所确定的曲面方程。

二、（20分）设V是域F上线性空间，证明不存在V的五个子空间W_1，W_2，W_3，W_4，W_5，使得下述四个条件同时成立：

(1) W_1，W_2，W_3，W_4，W_5两两不等；

(2) 任意两个W_i与W_j之和W_i+W_j与交$W_i\cap W_j$仍是这五个子空间之一。

(3) $W_1\subset W_2\subset W_3\subset W_5$，$W_1\subset W_4\subset W_5$；

(4) W_2与W_4，W_3与W_4之间都没有包含关系。

三、（20分）设2n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix} I(n) & I(n) \\ I(n) & 0 \end{pmatrix},$$

其中$I(n)$与0分别是n阶单位方阵与零方阵，求方阵A在相似下的标准形。

四、（20分）设V是所有n阶实方阵构成的实线性空间，S是n阶实对称方阵。定义V的线性变换如下：对任意$X\in V$，令$\mathscr{A}(X)=SX+XS$。证明存在V的一组基，使得$\mathscr{A}$在这组基下的方阵是对角方阵。

五、（20分）设V是n维复的行向量空间，A与B是n阶Hermite（厄米特）方阵，其中B是正定的。证明：

(1)方程$\det(A-xB)=0$的根都是实根，其中$\det(C)$表示方阵C的行列式；

(2)定义V上的二次型$\Phi_x(\alpha)=\alpha(A-xB)\bar{\alpha}'$，其中$\alpha\in V$，$\bar{\alpha}'$是$\alpha$的共轭转置，而x是某个给定的实数，则$\Phi_x(\alpha)$正定的必要且充分条件是$x<\lambda$，其中$\lambda$是方程$\det(A-xB)=0$的最小根。

我坚决认为，任何一门自然科学，只有当它数学化之后，才能称得上是真正的科学。……也许可以有不用数学的纯粹自然哲学（即只研究一般自然概念的科学），但研究确定对象的纯粹自然科学（如物理学或心理学），即不可能不用到数学……

——E.Kant

《蛙　鸣》启事

一、本刊设有以下栏目：研究与谐论、报告、未解决的问题、研究通讯、一题一议、译文选登、新生园地、治学谈、介绍与评论、从数学到应用、远方的信、研究生入学试题等。欢迎广大同学踊跃投稿。

二、凡投稿者，可到152楼207室领取50页方格稿纸，稿件一经选用，付20页复印指标为酬，并赠送该期刊物六本；作者可指定两处交流地点，由编辑部代为邮寄。

三、本刊自第20期起，同厦门大学的《数学讨论》、复旦大学的《信息园》、《成都大学学报》、《玉溪师专学报》等建立了相互交流、合作的关系。《蛙鸣》将以她的清新、活跃走向全国。我们希望广大读者讨论蛙鸣的问题、提出宝贵的建议！

四、《蛙鸣》为我系学生学术刊物，每学期出两期，每期54页左右，两份定价1.00元（包括挂号邮资），全学年4.00元，自本期起对外单位的读者办理订购手续。

联系人：合肥市，中国科技大学841，杨国武。

“陈省身数学奖”在津首次颁奖

钟家庆、张恭庆分获1985、1986年度奖

中国“陈省身数学奖”首先颁奖仪式今天在南开大学隆重举行，我国数学家钟家庆、张恭庆分获该项奖的1985年度奖和1986年度奖。世界数学大师陈省身亲自向获奖者授了奖。“陈省身数学奖”是为发展我国的数学科学，鼓励在数学研究上做出卓越贡献的中青年科技人员，在1985年由香港亿利达工业发展集团有限公司裁刘永龄资助设立的，经中国数学会组织的专门评审会，在全国范围内进行评选。这是目前我国数额最高的一项奖励，每年评选一名，每两年颁发一次。荣获1985年度奖的钟家庆是中国科学院数学研究所研究员，并任函数论室主任，今年50岁，1962年毕业于北京大学，曾就学于华罗庚等名家，在多复变函数论与微分几何研究方面做出了贡献，曾应邀先后到国外多所大学进行合作研究，因他不幸在今年4月12日突发心脏病病逝于美国哥伦比亚大学，这次由家属代为领奖，获得1986年度奖的张恭庆，上海人，今年51岁，现任北大数学研究所副所长、教授，因为发展了孤立临界点的莫尔斯理论等得到国内外的很高评价。