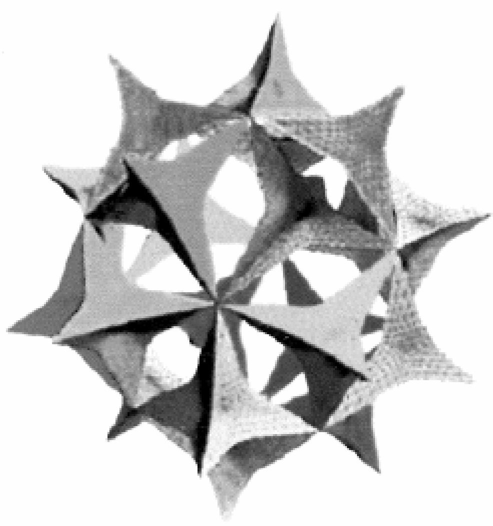
蛙　　鸣

第 45 期



中国科学技术大学数学系

《蛙鸣》编委会学生会学习部合办

一九九一年十二月

目　　录

〔试题选载〕

加州大学贝克利分校数学系预试集锦

* * * * * * *

研究与讨论

* * * * * * *

对于一类线性微分方程组的讨论

881　汪德嘉

摘要：本文着重考察了齐次线性微分方程组$\frac{dx}{dt}=A(t)X$的系数矩阵A（t）的变化对解的性状的影响，并列举了周期系数相方程组的解。简短的反例和证明是在常数变易法，Bellman不等式上展开的。

考虑非齐次线性微分方程组：

$$\frac{dx}{dt}=A(t)X+V(t) \qquad (1)$$

相应于它的齐次微分方程组是

$$\frac{dx}{dt}=A(t)X \qquad (2)$$

只要找到齐次线性方程组(2)的基本解组$\varphi^1(t)$，$\varphi^2(t)$，…，$\varphi^n(t)$或者基本解矩阵X（t），那末就能借助于求积分得出非齐次线性微分方程组(1)的全部的解。定理1保证了这一点。

定理1、假设X（t）是齐次微分方程组(2)的基本解方阵，那末方程(1)的任一解$X=\varphi(t)$可以表示为：

$$X=\varphi(t)\equiv X(t)\{X^{-1}(t_0)\varphi(t_0)-\int_{t_0}^{t}X^{-1}(\tau)V(\tau)d\tau\}$$

其中t_0是开区间$\alpha<t<\beta$中的某一点。

证明略。

于是我们来讨论微分方程组(2)。微分方程组(2)没有一般的解的

表达式。某些情况，如系数矩阵A（t）的每个元素为周期函数时，有结果定理2（以二维为例）。

考虑周期系数的相方程组：

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=a(t)X+b(t)y\\ \frac{dy}{dt}&=c(t)X+d(t)y\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

其中系数a，b，c，d都是以L为同期的实解析函数。

定理2、方程组(3)的解，可以表示为：

$$\left.\begin{aligned}X&=Ae^{h_1t}\varphi_1(t)+Be^{h_2t}\varphi_2(t)\\ y&=Ae^{h_1t}\psi_1(t)+Be^{h_2t}\psi_2(t)\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

或者表示为：

$$\left.\begin{aligned}X&=\left\{A+B\left[\frac{\partial t}{Le^{h_1t}}+\varphi_2(t)\right]\right\}e^{h_1t}\varphi_1(t)\\ y&=\left\{A+B\left[\frac{\partial t}{Le^{h_1t}}+\psi_2(t)\right]\right\}e^{h_1t}\psi_1(t)\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

式中，A和B都是任意的常数：φ_1，φ_2，ψ_1 和 ψ_2 是复变量的周期函数，其周期为L；e是自然对数的底；n_1 和 n_2 是共轭复数；∂ 也是复数，而 h_1+n_2 则是实数。

定理2的证明太长略去。

在没有一般解的表达式的情况下，我们考察方程组(2)系数矩阵A（t）的变化对解的稳定性的影响。一般情况下解是不稳定的，但

能保证$\dot{A}(t)$在特定的意义变化有限时，方程(2)全体解的有界性可可以遗传下来。

定理3、齐次线性微分方程组：

$$\frac{dx}{dt}=A(t)X \tag{6}$$

和
$$\frac{dx}{dt}=B(t)X \tag{7}$$

满足条件：（i）方程组(6)的全体解有界；

（ii）$\int_{-\infty}^{+\infty}||A(t)-B(t)||dt<\infty$

则方程组(7)的全部解有界。

证明：容易验证方程组(7)的解$X(t)$可表示为：

$$X(t)=X(t)X^{-1}(t_0)X_0+\int_{t_0}^{t}X(t)X^{-1}(\tau)(B(\tau)-A(\tau))\cdot X(\tau)d\tau$$

（其中$X(t)$为方程组(6)的解）

然后利用Bellman不等式知$X(t)$有界。 #

定理3中条件（i）改为"方程组(6)的某解有界"，结论是否仍成立？回答是否定的。

将问题简化如下：

$\frac{d^2y}{dt^2}+(A(t)+B(t))y=0$，$A(t)$，$B(t)$满足条件：

① $\frac{d^2y^*}{dt^2}+A(t)y^*=0$的某解有界；

② $\int_{t_0}^{+\infty} |B(t)|dt < \infty$

则原方程的解有界。

反例如下：

令$A(t)=(1-2t^2)/(1+t^2)^2$，则$\frac{d^2y}{dt^2}+A(t)y=0$有解

$y=1/\sqrt{1+t^2}$，解有界；

令$B(t)=2(t^2-1)/(1+t^2)^2$，容易验证$\int_{t_0}^{+\infty}|B(t)|<\infty$；

但，方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+(A(t)+B(t))y=0$ →

$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{(1+t^2)^2}y=0$，它的解为$y = \quad 1+t^2$无界。 #

遗留下的问题：能否将定理３的条件（ｉｉ）减弱；至于定理的推广工作留给读者。

参考书目：

① 《常微分方程讲义》，王树禾 编。
② 《常微分方程》，复旦大学数学系主编。
③ 《非线性振动力学》。

鸣谢：在写本文的过程中，承蒙张志强帮助验证，刘聪文帮助修改。
在这以前，有几位同学试做过定理３，在这里一并致谢。

卵形线的支持函数及其应用

891　彭　华

对卵形线，由于高斯映射是一对一的，所以，我们可用切线的转角θ作参数，称为角参数，本文如无特殊说明，一律取角参数。

一、支持函数及其性质。

定理1：对卵形线之支持函数p，有$p''+p=\dfrac{1}{k}$。

证明：略

定理2：卵形线方程为$\gamma=p'T-pN$。

证明：取定一个直角标架，$T=(\cos\theta,\ \sin\theta)$　$N=(-\sin\theta,\ \cos\theta)$

$$\because\ \gamma=(\gamma\cdot T)T+(\gamma\cdot N)N$$

$$\text{又}\therefore\ dp/d\theta=-dr/d\theta\cdot N-\gamma\cdot dN/d\theta$$

$$=-\frac{1}{k}T\cdot N+\gamma\cdot T=\gamma\cdot T$$

$$\therefore\ \gamma=p'T-pN$$

证毕。

定理3：
$$p(\theta)=C_1\sin\theta+C_2\cos\theta-\cos\theta\int_0^\theta\frac{\sin\psi}{k}d\psi+$$
$$+\sin\theta\int_0^\theta\frac{\cos\psi}{k}d\psi$$

证明略。

二、利用支持函数研究卵形线。

由定理1可看出，曲线方程γ，支持函数p，以及曲率k三者

不是独立的，任意确定其中之一便可得到另两个函数。对卵形线，k 为周期为 2π 的函数，且 $k>0$，那么是否任一周期为 2π 的恒正函数均为某一卵形线的曲率函数呢？一般说来，这个命题是不成立的，但如附加一些条件，命题即成立。

定理 4：一个周期为 2π 的恒正函数为某一卵形线的曲率函数的充要条件为 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\psi}{k(\psi)}d\psi=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\psi}{k(\psi)}d\psi=0$

证明：要成为封闭曲线，当且仅当

$p(0)=p(2\pi)$， $p'(0)=p'(2\pi)$ 代入定理 3

有 $\int_0^{2\pi}\frac{\cos\psi}{k}d\psi=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\psi}{k}d\psi=0$

证毕。

所以，我们对任一周期为 2π 的有界函数 f，$\int_0^{2\pi}f\cos\psi d\psi=C_1$，$\int_0^{2\pi}f\sin\psi d\psi=C_2$，我们做函数 $g=f-\frac{C_1}{\pi}\cos\psi-\frac{C_2}{\pi}\sin\psi$

则 g 为一周期为 2π 之有界函数，且 $\int_0^{2\pi}g\cos\psi d\psi=\int_0^{2\pi}g\sin\psi d\psi=0$，再做函数 $f=g+A$，取 A 充分大，使得 $f>0$，则 $\frac{1}{f}$ 必为某一卵形线的曲率函数。

三、利用支持函数研究等宽曲线。

对等宽曲线，仿照上节，我们可得如下定理。

定理 5：一个周期为 2π 的恒正函数为某一~~卵形~~线的曲率函数的充
等宽

要条件为 $\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{k(t+\theta)}dt=0$（对 $\forall\theta$ 成立）。这里我们假定曲

线至少三阶连续可微。

引理：卵形线为等宽曲线等价于 $\frac{1}{k(\theta)}+\frac{1}{k(\theta+\pi)}=d$

（d 为常数），对 θ 成立。

证明：“→” ∵曲线为等宽曲线。

$$\therefore\ p(\theta)+p(\theta+\pi)=d$$

$$\therefore\ p''(\theta)+p''(\theta+\pi)=0$$

$$\text{又}\because\ p''(\theta)+p(\theta)=\frac{1}{k(\theta)}$$

$$\therefore\ \frac{1}{k(\theta)}+\frac{1}{k(\theta+\pi)}=d$$

“←”令 $f(\theta)=p(\theta)+p(\theta+\pi)$ 则 $f''(\theta)+f(\theta)=d$

$$\therefore\ f(\theta)=d+C_1\cos\theta+C_2\sin\theta$$

$$\text{又}\because\ f(\theta)=f(\theta+\pi)$$

$$\therefore\ d+C_1\cos\theta+C_2\sin\theta=d-C_1\cos\theta-C_2\sin\theta$$

$$\therefore\ C_1\cos\theta+C_2\sin\theta=0$$

$\therefore\ f(\theta)=d$ ∴ 此卵形线为等宽曲线。

证毕。

下面我们证明定理 5。

证明：“→” ∵为卵形线 等宽

$\therefore\ p(\theta)+p(\theta+\pi)=d$ ； $\therefore\ p'(\theta)+p'(\theta+\pi)=0$

将定理 3 中之公式代入

$$\therefore\Big\{\sin\theta\int_0^\theta\frac{\sin\psi}{k}d\psi-\cos\theta\frac{\sin\theta}{k(\theta)}+\cos\theta\int_0^\theta\frac{\cos\psi}{k}d\psi+$$

$$\sin\theta\frac{\cos\theta}{k(\theta)}\Big\}+\Big\{-\sin\theta\int_0^{\theta+\pi}\frac{\sin\psi}{k}d\psi-\cos\theta\frac{\sin\theta}{k(\theta+\pi)}$$

$$-\cos\theta\Big[\int_0^{\theta+\pi}\frac{\cos\psi}{k}d\psi+\sin\theta\frac{\cos\theta}{k(\theta+\pi)}\Big]=0$$

$$\therefore\ \sin\theta\int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\sin\psi}{k}d\psi+\cos\theta\int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\cos\psi}{k}d\psi=0$$

$$\therefore\ \int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\cos(\psi-\theta)}{k}d\psi=0$$

令 $\psi-\theta=t$ $\quad\therefore\ \int_0^{\pi}\frac{\cos t}{k(t+\theta)}dt=0$ 对 θ 成立。

“$\Leftarrow$” $\therefore\ \int_0^{\pi}\frac{\cos t}{k(t+\theta)}dt=0$ 对 θ 成立

$$\therefore\ \int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\cos t\cos\theta+\sin t\sin\theta}{k(t)}dt$$

$$=\cos\theta\int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\cos t}{k(t)}dt+\sin\theta\int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\sin t}{k(t)}dt=0$$

两边微分 $-\Big[\frac{1}{k(\theta+\pi)}+\frac{1}{k(\theta)}\Big]+\cos\theta\int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\sin t}{k(t)}dt$

$$-\sin\theta\int_\theta^{\theta+\pi}\frac{\cos t}{k(t)}dt=0$$

再次微分 $-\Big[\frac{1}{k(\theta+\pi)}+\frac{1}{k(\theta)}\Big]'=0$

$$\therefore\ \frac{1}{k(\theta+\pi)}+\frac{1}{k(\theta)}=d$$

∴曲线为等宽曲线。

证毕。

我们取$k=\dfrac{1}{2+\sin nnt}$（n为奇数），则$\int_\theta^\pi\{2+\sin n(t+\theta)\}\cos t\,dt=0$，（对$\forall\theta$成立），所以由此定义的曲线为等宽曲线。且此曲线为无穷阶连续可微的。

下面一个定理展示了等宽曲线与圆的相似性。

定理6：等宽曲线对径点（角参数相差π的两点）连线与此二对径点的法线共线。

证：$\because \gamma=p'T-pN$ $\quad\therefore \gamma(\theta+\pi)-\gamma(\theta)=p'(\theta+\pi)T(\theta+\pi)$

$$-p(\theta+\pi)N(\theta+\pi)-p'(\theta)T(\theta)$$

$$+p(\theta)N(\theta)$$

又$\because T(\theta+\pi)=-T(\theta)\qquad N(\theta+\pi)=-N(\theta)$

$$\therefore \gamma(\theta+\pi)-\gamma(\theta)=[p'(\theta+\pi)+p'(\theta)]T(\theta+\pi)$$

$$+[p(\theta)+p(\theta+\pi)]N(\theta)=dN(\theta)$$

$\therefore \gamma(\theta+\pi)-\gamma(\theta)$ 与 $N(\theta)$ 平行，且$|\gamma(\theta+\pi)-\gamma(\theta)|=d$

证毕。

四、四顶点定理。

利用卵形线的等价条件，即$\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos\psi}{k(\psi)}d\psi=\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin\psi}{k(\psi)}d\psi=0$

$k>0$，$k(\psi+2\pi)=k(\psi)$，可方便地得到四顶点定理，即定理7：（四顶点定理）Γ为卵形线，则k或者为常数，或者至少有两个二个相对极大和二个相对极小。且存在仅有四个顶点之卵形线。

证明：略。

下面我们考虑对于等宽曲线四顶点定理是否有变化，得到如下定理。

定理 8：T 为等宽曲线，则 k 或者为常数，或者至少有 3 个相对极大和 3 个相对极小，且存在仅有 6 个顶点之等宽曲线。

证明：含 $R(\psi)=\dfrac{1}{k(\psi)}$，若 T 仅含四个顶点 α_1，α_2，α_3，α_4，不妨令 α_1，α_3 为相对极大，α_2，α_4 为相对极小，则在弧 $\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$，$\overset{\frown}{\alpha_3\alpha_4}$ 上，$R'<0$，不妨令 $\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 最长，令 $\pi+\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 表示将 $\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 顺时针旋转 π。若 $\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 的弧度 $\geqq\pi$，则 $\pi+\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}\supset\overset{\frown}{\alpha_2\alpha_3}+\overset{\frown}{\alpha_3\alpha_4}+\overset{\frown}{\alpha_4\alpha_1}$ $\therefore\pi+\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 与 $\overset{\frown}{\alpha_3\alpha_4}$ 有公共点，若 $\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 的弧度 $<\pi$，则 $\pi+\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}\subset\overset{\frown}{\alpha_2\alpha_3}+\overset{\frown}{\alpha_3\alpha_4}+\overset{\frown}{\alpha_4\alpha_1}$，又 $\because\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 最长，

$\therefore\pi+\overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2}$ 与 $\overset{\frown}{\alpha_3\alpha_4}$ 有公共点。含公共点角参数为 θ_0，则

$R'(\theta_0-\pi)<0$，$R'(\theta_0)<0$ $\quad\therefore R'(\theta_0-\pi)+R'(\theta_0)<0$

又 $\because$ 等宽曲线 $\quad\therefore R(\theta_0-\pi)+R(\theta_0)=d$

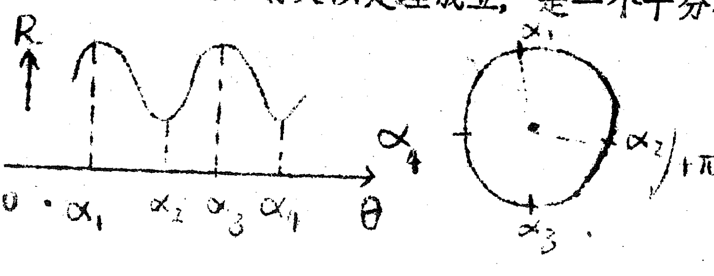
$\therefore R'(\theta_0-\pi)+R'(\theta_0)=0$ $\quad$ 矛盾。[编者注：此处附球面表示见下图。]

下面我们再提一个定理，作为本文的结束。

定理 9：如果 S' 的函数 $k(t)$ 满足：$k:S'\to R$ 为正值连续函数，k 或者为常数，或者至少有二个相对极大和二个相对极小，且相对极大值严格大于相对极小值，则 卵形线 $P:S'\to R'$，使得在相应点曲率 $k=k(t)$，且 $S'\to S'$ 的微分同胚 $t=t(\psi)$，使得：

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\psi}{k(t(\psi))}\,d\psi=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\psi}{k(t(\psi))}\,d\psi=0$$

考虑对于等宽曲线，是否有类似定理成立，是一个十分有趣的问题。



一个函数的构造

891 沈建红

在37期上，杨庆构造了一个连续点集G与不连续点集F均为不可数稠密集的函数。本文指出：$\forall d$：$0\leqslant d\leqslant 1$，存在（0，1）上的函数f，它除满足上面条件外，且满足$m(F)=d$。

构造前先指出：

I 1：$\forall(\alpha,\ \beta)$，　c：$0\leqslant c<1$，∃非空完备疏朗集ω：$\omega\subset(\alpha,\ \beta)$　$m(\omega)=c(\beta-\alpha)$，且开集$(\alpha,\ \beta)-\omega$每个构成区间长度不超过$\dfrac{1-c}{2}(\beta-\alpha)$。

I 2：（0 1）上处处稠密的可数个开集之交是个处处稠密的不可数集。I 1，I 2的证明可参照书*的P31，题199与P42题269，270。

利用I 1，很易得到I 3：

I 3：　c：$0\leqslant c<1$，$\forall$有界开集G设$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\ \beta_n)$为构成区间分解，在$(\alpha_n,\ \beta_n)$上依I1作$\omega_n$，令$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\omega_n$

则：(1) $G-E$为开集；

(2) $m(E)=c\,m(G)$，

(3) $G-E$任一构成区间长度不超过$\dfrac{1-c}{2}\sup\limits_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)$。

以下构造思想是：构作F，G，都为不可数稠密集，$F\cap G=\varnothing$　$F\cup G=(0\ \ 1)$，$m(F)=d$；在（0 1）上定义f，使f

以F，G作为其不连续点集与连续点集。

（一） 构作F，G：

步一 ~~如~~取 $C_1=\frac{d}{2}(\leqslant\frac{1}{2})$，$G_1=(0,1)$，依I 3作出集$E_1$，则$m(E_1)=C_1$，$G_2=G_1-E_1$为开集，$G_2$每个构成区间长度不超过$\frac{1-C_1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，$m(G_2)=1-C_1$，

步二 ~~如~~取 $C_2=\frac{C_1}{2(1-C_1)}$ $(\leqslant\frac{1}{2})$，对C_2，G_2依I 3作出集E_2，则$m(E_2)=\frac{C_1}{2}$ $G_3=G_2-E_2$为开集，G_3每个构成区间长度不超过$\frac{1-C_2}{2}\leqslant\frac{1-C_1}{2}\leqslant\frac{1}{2^2}$，$m(G_3)=1-C_1-\frac{C_1}{2}$

…

设步$K-1$作出了开集G_{K-1}，满足$m(G_{K-1})=1-C_1-\frac{C_1}{2}-\cdots-\frac{C_1}{2^{K-2}}$，且其每个构成区间长度不超过$1/2^{K-1}$，

步K：如$C_K=\frac{C_1}{2^{K-1}(1-C_1-\cdots-\frac{C_1}{2^{K-2}})}$ $(\leqslant\frac{1}{2})$，对C_K，G_K依I 3作出E_K，则$m(E_K)=\frac{C_1}{2^{K-1}}$ $G_{K+1}=G_K-E_K$为开集，G_{K+1}每个构成区间长度不超过$\frac{1}{2^K}$，$m(G_{K+1})=1-C_1-\cdots-\frac{C_1}{2^{K-1}}$

…

无限进行此过程，最终得到一列互不相交的集$\{E_K\}_{K=1}^{\infty}$与一列单调下降的开集$\{G_K\}_{K=1}^{\infty}$。

令$F=\bigcup_{K=1}^{\infty}E_K$，$G=(0\quad1)-F=\bigcap_{K=1}^{\infty}G_K$

$$m(F)=\sum_{K=1}^{\infty}m(E_K)=\sum_{K=1}^{\infty}\frac{C_q}{2^{K-1}}=d。$$

（二） 论证F、G的不可数和稠密性：

1、非空完备集不可数，故F不可数；如果F不稠密，则$\exists(\alpha,\beta)\subset G$，即$(\alpha,\beta)\subset G_K$ $\forall k$。(α,β)却在G_K某构成区间内，故$\beta-\alpha\leqslant\frac{1}{2^{K-1}}$，$K\to\infty$，得$\beta-\alpha\leqslant0$，矛盾。

2、G是稠密的且不可数：

很易验证$\{G_K\}_{K=1}^{\infty}$序列满足I 2，则G稠密，不可数（（在（0 1）上）。

（三） 定义f，并验证f为目标函数：

在（0 1）上定义f如下：

$$f(x)=\begin{cases}1/n & \exists n,\ x\in E_n\\ 0 & x\in G\end{cases}$$

定义的合理性显然。

f在F上间断由G的稠密性保证。

f在G上连续，因为：

$\forall \alpha \in G$，有~~如~~ $\alpha \in \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ 与 $f(\alpha)=0$；记α 邻域

$B_n = \bigcap_{k=1} G_k$ 则 $B_n \cap (\bigcup_{k}^{n-1} E_k) = \varnothing$，则 $\forall x \in B_n$ 有 $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{n}$

故 $f(x)$ 在 α 连续。则 f 在 G 上连续。

* 实变函数论的定理与习题集　　〔苏〕 邬强

一种特别的美统治着数学王国，这种美与艺术美的相似性不象与自然美的相似性那样大，它反映了具有反射能力的思想，它得到了欣赏，很象自然中的美。

E.E.Kummer

共形映照与解析函数的关系问题　　891 彭　华

在复变函数教材中证明了这样的一个定理：

定理1：若函数f（z）在域D内解析，则在$f'(z)\neq 0$的点处f（z）是保角的。

证明：见教材85页。

我们自然会想到，若一个变换是保角的，那么它是否一定是解析的，或者需要加上什么条件才是解析的呢？本文试图给出一组条件，在其下保角变换必为解析的。

定理2：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$为复平面上的一个保角变变换，在区域D内，u，v对x，y可微：则在$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]^2+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right]^2+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]^2\neq 0$的点f（z）必为解析的。

证明：∵u，v在D内可微　∴

$$\left.\begin{aligned} du&=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \\ dv&=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{I}$$

另取一组微分矢量(d_1u, d_1v)对应于(d_1x, d_1y)，有

$$\left.\begin{aligned} d_1u&=\frac{\partial u}{\partial x}d_1x+\frac{\partial u}{\partial y}d_1y \\ d_1V&=\frac{\partial v}{\partial x}d_1x+\frac{\partial v}{\partial y}d_1y\end{aligned}\right\}\quad \mathrm{II}$$

则 $\langle (du, dv), (d_1u, d_1v)\rangle = \dfrac{du\,d_1u+dv\,d_1v}{\sqrt{(du^2+dv^2)(d_1u^2+d_1v^2)}}$

$$=\frac{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx\,d_1x+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right](dx\,d_1y+d_1x\,dy)+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dy\,d_1y}{\sqrt{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]dx^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]dy^2\cdot\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]d_1x^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)d_1x\,d_1y+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]d_1y^2}} \quad ①$$

又∵ $f(z)$ 为一保角变换 ∴ $\langle (du, dv), (d_1u, d_1v)\rangle$

$$=\langle (dx, dy), (d_1x, d_1y)\rangle$$

取 $dx=d_1y=0$ 则得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y}$ ②

取 $dx=d_1x=dy=-d_1y$ 则得 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2$ ③

由②可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varphi\dfrac{\partial v}{\partial y}$ 则 $\varphi\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 代入③

则有 $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2=\varphi^2\left[\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]=\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2$

$$\because \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\therefore \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]^2+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]^2\neq 0$$

$\therefore \psi^2=1$　　$\therefore \psi=\pm 1$　若考虑定向角，要求定向不变，

则 $\psi=1$

$$\because \begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

$\therefore$ f(z)满足Cauchy—Riemann方程。

∴命题成立

证毕。

891　彭华

* * * * * *

新生园地

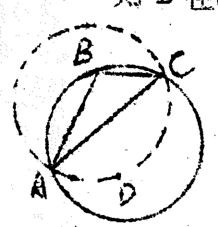
* * * * * *

平面几何的几个问题（1）

901 吴耀琨

定理一：平面上n点，$n\geq 3$，无三点共线，则其中存在三点A、B、C，对n点中任一其它点D，有$\cos\angle ABC\geq\cos\angle ADC$，$\cos\angle BCA\geq\cos\angle BDA$，$\cos\angle CAB\geq\cos\angle CDB$。

证明：首先有事实：n点中存在某三点，使所有n点在其外接圆内部或边上。设所有这种外接圆中半径最小的为$\odot O_1$，$\odot O_2$，…，$\odot O_k$相应三点组所成三角形为$\triangle A_1B_1C_1$，…，$\triangle A_kB_kC_k$，各三角形最大角为$\angle\varphi_1$，…，$\angle\varphi_k$，不妨设$\angle\varphi_1=\min\{\angle\varphi_1,\cdots,\angle\varphi_k\}$，取$A=A_1$，$B=B_1$，$C=C_1$。若$\angle BAC$为锐角，则由于$\triangle ABC$的外接圆为n点的覆盖圆，立知n点中非A、B、C的任一其它点D，有$\angle BAC\leq\angle BDC$，$\therefore\cos\angle BAC\geq\cos\angle BDC$。若$\triangle ABC$为锐角三角形，则已得证。否则，不妨设$\angle ABC$非锐角，且设n点中非A、C的任一点Q，使$\angle AQC$最小的点为D。若$\angle ADC<\angle ABC$，则D在$\odot O_1$内部或边上，且与B在AC异侧。



但D不能在优弧$\overset{\frown}{AC}$上，否则与$\angle\varphi_1=\min\{\angle\varphi_1,\cdots,\angle\varphi_k\}$矛盾。$\therefore\angle ADC+\angle ABC>\pi$ $\therefore\sin\angle ADC>\sin\angle ABC>0$

$\therefore\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}>\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$即$\triangle ADC$的外接圆半径小于$\triangle ABC$外接圆半径。$\therefore$ D为使$\angle AQC$最小的点，$\therefore$ n个点夹在$\overset{\frown}{ADC}$与$\overset{\frown}{ABC}$之间，但由$\angle ADC+\angle ABC>\pi$，及圆内接四边形对角和为$\pi$知，$\overset{\frown}{ABC}$与AC所夹部分完全为$\triangle ADC$的外接圆所覆盖，

即找到了一半径更小的覆盖圆，矛盾。　　证毕。

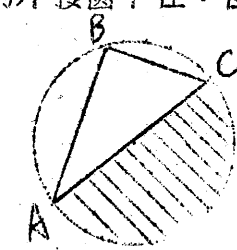
定理二：平面上n点，$n \geqq 3$，无三点共线，则其中存在三点A、B、C，对n点中任一其它点D，有$\cos\angle ABC \leq \cos\angle ADC$，$\cos\angle BCA \leq \cos\angle BDA$，$\cos\angle CAB \leq \cos\angle CDB$。

设$r_1=\min\{r: r$为n点中某三点外接圆半径长$\}$，且设与r_1相应的$\triangle$为$\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，…，$\triangle A_kB_kC_k$，不妨设

$\angle A_1B_1C_1=\max\{\varphi: \varphi$为上述$k$个$\triangle$中某个的相应内角$\}$

取$A=A_1$，$B=B_1$，$C=C_1$

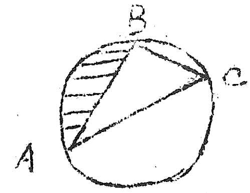
1）$\triangle ABC$内必无给定点。否则设点D位于其中，则$\angle ABC<\angle ADC$，$\angle BCA<\angle BDA$，$\angle CAB<\angle CDA$（$*$）；又由$\triangle ABC$外接圆半径之最小性，得$\sin\angle ABC \geq \sin\angle ADC$，$\sin\angle BCA \geq \sin\angle BDA$，$\sin\angle CAB \geq \sin\angle CDB$，由此，从正弦图象看出，$\angle ADC+\angle ABC \geq \pi$，$\angle BDC+\angle BAC \geq \pi$，$\angle BDA+\angle BCA \geq \pi$。但上述三式左边和为$\pi+2\pi=3\pi$，∴各式中均成立等号，即$\triangle ABC$、$\triangle ADC$、$\triangle BDA$、$\triangle CDB$具有相同的外接圆半径，但由（$*$）中三式，知$\angle ABC$必非前述$3k$个内角中最大者，矛盾。



2）显然$\angle BCA$与$\angle CAB$者为锐角，再证如图阴影部分无给定点。（不含圆弧）否则，设其内含点D，则$\angle ADB>\angle ACB$，$\sin\angle ADB \leq \sin\angle ACB$

∴$\angle ADB+\angle ACB \geq \pi$，同理，$\angle BDC-\angle BAC \geq \pi$，但$\angle ADB+\angle BDC<\pi$，$\angle ACB+\angle BAC<\pi$，即该四角和既要不小于$2\pi$，又要小于$2\pi$，矛盾。

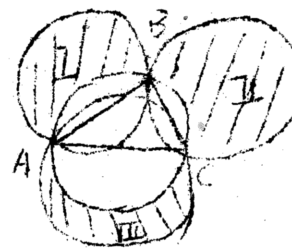
3）再证右图阴影部分无给定点。（不含圆弧）



显然只须讨论∠ABC非锐角的情形。此时，若其中有点D，则∠ADC>∠ABC，为钝角，∴∠BDC为锐角，且∠BDC>∠BAC，∴sin∠BDC>sin∠BAC，△BDC的外接圆半径小于△BAC的外接圆半径，矛盾。

由上，知△ABC之外接圆内无给定点。

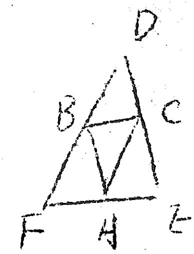
将△ABC的外接圆分别以AB、BC、CA为对称轴，复制出三个同样的圆。若结论不成立，则捣乱的点D应在右图所示阴影区域或△ABC的外接圆圆周上。考虑边BC，若有点D，使∠BDC>∠BAC，则D应位于区域Ⅱ，又由sin∠BDC≯sin∠BAC，知∠BDC+∠BAC≥π，故点D只能在劣弧$\overset{\frown}{BC}$上，但此时有△BDC外接圆半径同于△ABC外接圆半径，且∠BDC>∠ABC，与∠ABC之最大性矛盾。对AB边可作类似讨论。当∠ABC为锐角时，亦可仿上讨论，而它为非锐角时，显然不存在点D，使∠ADC>∠ABC。终上，知证毕。



以上命题较简单，但可以问，一般n维空间是否有类似结论？平面上一般n边形是否有类似结论。当然，这些也许只是无聊的游戏了。

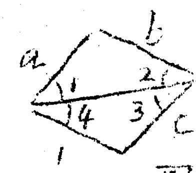
9001020　吴耀琨

(Ⅱ)



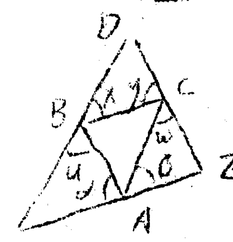
定理：以 $Z_\triangle$ 记△周长。如图，A、B、C为△DEF各边内点，则仅当A、B、C为各边中点时，$Z_{\triangle ABC}\leqq\min(Z_{\triangle ABF}, Z_{\triangle DBC}, Z_{\triangle AEC})$。

证明：引进如下事实：如图1，$a+b\gtreqless c+d$



（图1）

$$\mathrm{tg}\frac{\angle 1}{2}\mathrm{tg}\frac{\angle 2}{2}\gtreqless\mathrm{tg}\frac{\angle 3}{2}\mathrm{tg}\frac{\angle 4}{2}\ (\angle 1,\angle 2,\angle 3,\angle 4\neq 0)$$



至此，再看图2，其中 $AF+FB=AC+CB$，$AE+EC=CB+BA$，$\angle A\triangleq\angle BAC$，$\angle B\triangleq\angle ABC$，$\angle C\triangleq\angle BCA$，故 $\mathrm{tg}\frac{u}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{B}{2}$，

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\mathrm{tg}\frac{w}{2}=\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}\frac{C}{2},\quad \mathrm{tg}\frac{x}{2}=\mathrm{ctg}\left(\frac{u}{2}+\frac{B}{2}\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}{\mathrm{tg}\frac{B}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}\right)}$$

$$\mathrm{tg}\frac{y}{2}=\mathrm{ctg}\left(\frac{w}{2}+\frac{c}{2}\right)=\frac{1-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\sec^2\frac{c}{2}\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}\mathrm{tg}^2\frac{c}{2}}{\mathrm{tg}\frac{c}{2}\sec^2\frac{A}{2}}$$

$\mathrm{tg}\frac{x}{2}$

显然，△ABC确定时，图中各元素均为α的函数。令 $\mathrm{tg}\frac{y}{2}=f\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$

因为 $\mathrm{tg}\frac{x}{2}\mathrm{tg}\frac{y}{2}\neq 0$，故 $f\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}-\mathrm{tg}\frac{A}{2}\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{A}{2}}$

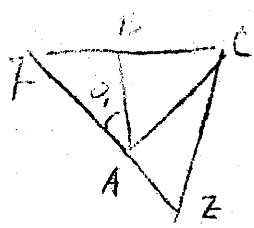
$$+\frac{tg\frac{A}{2}sec^2\frac{C}{2}}{tg\frac{A}{2}sec^2\frac{C}{2}tg\frac{\alpha}{2}+tg^2\frac{A}{2}tg^2\frac{C}{2}-1}=0\Longleftrightarrow sec^2\frac{C}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{A}{2}\right)^2$$

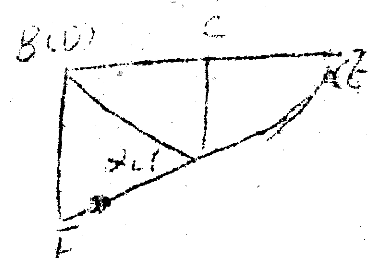
$$=sec^2\frac{A}{2}sec^2\frac{B}{2}\Longleftrightarrow sec\frac{C}{2}\left(tg\frac{\alpha}{2}+tg\frac{A}{2}\right)=sec\frac{A}{2}sec\frac{B}{2}$$

$$\Longleftrightarrow tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\frac{A+B}{2}-sin\frac{A}{2}cos\frac{B}{2}}{cos\frac{A}{2}\ cos\frac{B}{2}}\Longleftrightarrow\quad \alpha=B$$

$\alpha=B$，$tg\frac{u}{2}tg\frac{\alpha}{2}=tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}\Rightarrow u=A$，　$\alpha=B\Rightarrow\beta=C$

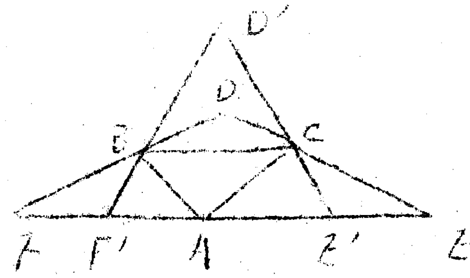
$\beta=C$，$tg\frac{\beta}{2}tg\frac{W}{2}=tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2}\Rightarrow A=W$，故知此时$\triangle ABC$为$\triangle DEF$之中位线三角线。如右图，





显然存在 $\alpha_1<\angle B$，使 $AF_{\alpha_1}+BF_{\alpha_1}=BC+CA$，$AE_{\alpha_1}+BE_{\alpha_1}=AB+BC$，且$F_{\alpha_1}BC$共线，此时 $Z_{\triangle DBC}=2BC<Z_{\triangle ABC}$，故当 $\alpha\to\alpha_1$ 时，$Z_{\triangle D_\alpha B_\alpha C_\alpha}<Z_{\triangle ABC}$，即 $f(tg\frac{\alpha}{2})<f(tg\frac{B}{2})$，同理，$\alpha\to\alpha_2>\angle B$ 时，$f(tg\frac{\alpha}{2})<f(tg\frac{B}{2})$。又 $\alpha\in(\alpha_1,\alpha_2)$，$f'(tg\frac{\alpha}{2})=0\Rightarrow\alpha=B$，令 $g(\alpha)=f(tg\frac{\alpha}{2})$，则 $g'(\alpha)=f'(tg\frac{\alpha}{2})\cdot\frac{1}{2cos^2\frac{\alpha}{2}}$，与 $f'(tg\frac{\alpha}{2})$ 共零点。由导函数介值性易知 $tg\frac{x_B}{2}tg\frac{y_B}{2}$

必为g（α_0）在（α_1，α_2）内的唯一最大值，即图2中$Z_{\triangle DBC}$仅当$\alpha = B$时取最大值$Z_{\triangle ABC}$。对于一般情形，如右图不妨设$Z_{\triangle ABF}$，$Z_{\triangle ACE} \geq Z_{\triangle ABC}$ 将F，E均向A靠拢至$BF' + F'A = BC + CA$，$CE' + E'A = AB + BC$，$F'B$、$E'C$ 相交于点D'，显然$Z_{\triangle D'BC} \geq Z_{\triangle BDC}$，但$Z_{\triangle D'BC} \leq Z_{\triangle ABC}$，故$Z_{\triangle ABC} \geq Z_{\triangle BDC}$，且等号仅当F、$F'$，E、$E'$，分别重合，且B、C、A为相应各边中点时方成立。 证毕。



吴耀琨 王新茂

* * * * * *
* 新生园地 *
* * * * * *

从一道竞赛题想到的

831 褚晓明

三十一届IMO上有这样一道题：求所有的正整数n，使得$n^2 \mid 2^n+1$。本文讨论对自然数m，使得$\frac{m^n+1}{n^2}$为整数的n的个数。

引理1，正整数m，n，若$n^2 \mid m^n+1$，则n为奇数，且$(m, n)=1$。

〔证〕（反证）若$(m, n)=t>1$，则$t \mid n^2$而$t \mid m^n+1$，得出矛盾；若n为偶数，则$4 \mid n^2$，而$m^n+1 \equiv 1 \text{ or } 2 \pmod 4$ 得出矛盾。

引理2：q为n的质因子，$q \mid m+1$，如果$k=\max\{k; q^{2k} \mid m^{q^{2k}t}+1\}$，$(t \in N, q \nmid t)$ 则$q^k \nmid m+1$，且$q^{2k} \nmid m^{q^k t}+1$。

〔证〕（反证）若$q^k \nmid m+1$，则设$m+1=q^a b$，$(a、b \in N$，$a<k$，$q \nmid b)$

$$\because (q^a b-1)^{q^k t} \equiv (q^{a+1} b-1)^{q^{k-1} t} \pmod{q^{a+k+1}}$$
$$\equiv \cdots\cdots$$
$$\equiv (q^{a+k} b-1)^t \pmod{q^{a+k+1}}$$
$$\equiv tbq^{a+k}-1 \pmod{q^{a+k+1}}$$

$$\therefore q^{a+k+1} \nmid m^{q^k t}+1$$

$\therefore \quad q^{2K} \nmid m^{q^K t}+1$ 得出矛盾，

$\therefore \quad q^K \mid m+1$

若$q^{K+1} \mid m+1$，则取a为适当整数

$$m^{q^{K+1}t}+1 \equiv (q^{K+1}a-1)^{q^{K+1}t}+1 \pmod{q^{2K+2}}$$

$$\equiv \cdots\cdots$$

$$\equiv (q^{2K+2}a-1)^t+1 \pmod{q^{2K+2}}$$

$$\equiv at\ q^{2K+2} \pmod{q^{2K+2}}$$

$\therefore$ 与$K=\max\{K,\ q^{2K} \mid m^{q^K t}+1\}$矛盾！

$\therefore \quad q^K \nmid m+1$；

$K=1$时，$\because q \nmid m+1$ 可以简单地验证 $q^2 \nmid m^q t+1$，

$K>1$时，$\because (q^K a-1)^{q^K} \equiv (q^{K+1}a-1)^{q^{K-1}} \equiv \cdots\cdots$

$$\equiv (q^{2K}a-1) \pmod{q^{2K+1}}$$

$\therefore \quad q^{2K} \nmid m^{q^K t}+1$。

引理3：若$n^2 \mid m^n+1$，q为n的最小素因子，则$q \mid m+1$。

〔证〕 $\because m^n \equiv -1 \pmod q$ 且 $m^{q-1} \equiv 1 \pmod q$

又$\because$ q为n的最小素因子，$\therefore (n, q-1)=1$，

$\therefore$ 正整数a，b， $an-b(q-1)=1$，显然a为奇数

$\therefore m^{an-b(q-1)} \equiv -1 \pmod q$ 即 $m+1 \equiv 0 \pmod q$

$\therefore \quad q \mid m+1$。

定理1：当$m+1=2^K$时，$k\in N$，不存在非1的n，使得

$n^2|m^n+1$。（由引理1，2，3很容易得出。）

定理2：当$m=2$时，只有$n=3$为唯一的非1解，使得$n^2|m^n+1$。

〔证〕首先由引理3，$3|2+1$，∴3为n的最小素因子，

且由引理2知$3\,\|\,2+1 \Longrightarrow 3^2\,\|\,2^n+1 \Longrightarrow 3\,\|\,n$

设P为n的除去3的最小素因子，

显然 $3=(n,\ p-1)$

∵ $2^n\equiv -1 \pmod p$ 且 $2^{p-1}\equiv 1 \pmod p$

∴ $2^3\equiv -1 \pmod p$ ∴ $p|q$

∴ $p\equiv 3$ 这说明n只有素因子3，

∴ $n=3$是唯一的。

定理3：$m\geqq 3$且$m+1$不为2的幂时，必有无穷个n，满足

$n^2|m^n+1$。

〔证〕对m，∵$m\geqq 3$且$m+1$不为2的幂，∃非2的质数

p_1，$p_1|m+1$，

设$p_1^{k_1}\,\|\,m+1$，记$n_1=p_1^{k_1}$，则$n_1^2\,\|\,m^{n_1}+1$，

又$\dfrac{m^{n_1}+1}{n_1^2}$必有不同于p_1的质因子p_2，

不妨设$p_2^{k_2}\,\|\,m^{n_1}+1$，则由引理2，记$n_2=n_1p_2^{k_2}$

$n_2^2\,\|\,m^{n_2}+1$，且易验证$p_1^{2k_1}\,\|\,m^{n_2}+1$，$p_2^{2k_2}\,\|\,m^{n_2}+1$；依次进行下去，得到一递增数列$n_1<n_2<\cdots$，

且$n_i^2\,\|\,m^{n_i}+1$，$i=1,2,3,\cdots\cdots$

∴有无穷多个n，使得$n^2|m^n+1$。

* * * * * *

一题一议

* * * * * *

Stirling 公式的一个证明

891 彭华

本文试图在已知离散情况下的Stirling公式的基础上，给出 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{T(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}=1$ 的一个证明。为书写方便，记

$$G(x)=\frac{T(x+1)}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}。$$

[编者注：$T(x)$ 就是 $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$]

定理1（Euler） $T(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{x(x+1)\cdots\cdots(x+n)}n^x$

$(x>0)$

证明可见教材，这里列出另一种证明。

$\because e^{-t}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\dfrac{t}{n})^n$ 记 $p_n(x)=\int_0^n(1-\dfrac{t}{n})^n t^{x-1}dt$

$$T(x)-p_n(x)=\int_0^n\{e^{-t}-(1-\frac{t}{n})^n\}t^{x-1}dt+\int_n^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

又$\because$ $(1-\dfrac{t}{n})^n\leqslant e^{-t}\leqslant(1+\dfrac{t}{n})^{-n}$

$\therefore$ $0\leqslant e^{-t}-(1-\dfrac{t}{n})^n\leqslant e^{-t}[1-(1-\dfrac{t^2}{n^2})^n]\leqslant\dfrac{t^2}{n}e^{-t}$

$\therefore$ $\left|\int_0^n\{e^{-t}-(1-\dfrac{t}{n})^n\}t^{x-1}dt\right|<\dfrac{1}{n}\int_0^\infty e^{-t}t^{x+1}dt\to0$

$(n\to\infty)$

又∵ $n\to\infty$时， $\int_n^{\infty}(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt\to 0$

$$\therefore\quad T(x)=\lim_{n\to\infty}P_n(x)$$

$$又\because P_n(x)=\int_0^n(1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}dt=n^x\int_0^1(1-S)^n S^{x-1}dS$$

$$=n^x\left(\frac{S^x}{x}(1-S)^n\right)\Big|_0^1+\frac{n^x n}{x}\int_0^1(1-S)^{n-1}S^x$$

$$=\frac{n^x n}{x}\int_0^1(1-S)^{n-1}S^x dS=\cdots=\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

$$\therefore\quad T(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

定理 2 $\lim_{n\to\infty} G(x)=1$

证：首先考察 $n_0<x<n_0+1$ 可令 $x=n_0+\delta$ $0<\delta<1$

$$则\quad \frac{G(x)}{G(n)}=\frac{(n_0+\delta)\cdots\delta T(\delta)}{xe^{-x}\ 2\pi x\ G(n)}$$

$$又\because\quad \frac{n^{\delta}n!}{\delta(\delta+1)\cdots(n+\delta)}\leqslant T(\delta)\leqslant\frac{n^{\delta}n!}{\delta(\delta+1)\cdots(n+\delta)}\ \frac{n+\delta}{n}$$

$$\therefore\quad \frac{n^{\delta}n!}{x^x e^{-x}\ 2\pi x\ G(n)}\leqslant\frac{G(x)}{G(n)}\leqslant\frac{n^{\delta-1}(n+\delta)n!}{x^x e^{-x}\ 2\pi x\ G(n)}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{(1+\frac{\delta}{n})^{n+\delta+\frac{1}{2}}e^{-\delta}}\leqslant\frac{G(x)}{G(n)}\leqslant\frac{1}{(1+\frac{\delta}{n})^{n+\delta-\frac{1}{2}}e^{-\delta}}$$

$$又\because\ (n+\delta+\tfrac{1}{2})\ln(1+\frac{\delta}{n})-\delta\leqslant(n+\delta+\tfrac{1}{2})\frac{\delta}{n}-\delta\leqslant\frac{3}{2n}$$

（n充分大）

$$(n+\delta-\tfrac{1}{2})\ln(1+\frac{\delta}{n})-\delta\geqq(n+\delta-\tfrac{1}{2})(\frac{\delta}{n}-\frac{\delta}{2n^2})-\delta\geqq$$

$$-\frac{\delta^2}{2n}-\frac{\delta^3}{2n^2}\geqq-\frac{1}{n}\qquad（n充分大）$$

$$\therefore\quad e^{-\frac{3}{2n}}\leqslant\frac{G(x)}{G(n)}\leqslant e^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore\quad e^{-\frac{3}{2n}}G(n)\leqslant G(x)\leqslant e^{\frac{1}{n}}G(n)\qquad 与\delta无关$$

$$又\because\quad \lim_{n\to\infty}e^{-\frac{3}{2n}}G(n)=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}G(n)=1$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}G(x)=1$$

证毕。

* * * * * *

* 问题征解 *

* * * * * *

103、以 $S(n)$ 表十进制下 2^n 的各位数字之和，

如：$S(2)=4$，$S(5)=3+2=5$，$S(6)=6+4=10$，

$S(10)=1+0+2+4=7$，$S(12)=4+0+9+6=19\cdots$

则：1）$\lim\limits_{n\to+\infty} S(n)=+\infty$

2）存在无穷多个 n，满足 $S(n+1)<S(n)$

3）*记 $T(n)=\max\limits_{i=1,2,\cdots,n}(S(i+1)-S(i))$，是否有

$$\lim_{n\to+\infty} T(n)=+\infty$$

901 李立雄

104 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(nx-1)}$

证明：$m(E(f\geq A))=\dfrac{\pi^2}{6A}$ 此处 m 为长度测度

$E=(-\infty,+\infty)$，$A>0$

891 沈建红

105、素数 p_1，p_2，$\cdots$，p_n 是以 d 为公差的等差数列，

$C=\prod\limits_{p\leqslant n}P=2\times3\cdots p$（$\leqslant n$）

则：1）$C\mid d$，当 $p_1>n$ 时

2）*当 $d=c$ 时，可找到 n 项等差素数数列 p_1，p_2，$\cdots$，p_n 以 d 为公差。（或否定此命题）

901 李立雄

10、一n级正三角形格网的每个结点上均置"+"或"-"，使每个摆置方向与最大正△相同的小△三结点上有偶数个"-"号，则"-"号最多有$\left[\frac{n(n+1)}{3}\right]$个，且此时最外三边中，至少有一边符号为"--+--+--+……"。

901　吴耀琨

数学家脱离其公众的表现，并不主要是因为一种智力美学的势力力观点，而更多的是因为一个业余爱好者只有达到很高的必要训练水平才有可能欣赏展示给他的那些内容，还因为如果缺少这种技术上的欣赏力，外行人似乎根本没有可以感觉任何事情的渠道，哪怕仅仅是被动的感知。

N.Weiner

* * * * * *

* 来稿选登 *

* * * * * *

Mitrinovic不等式的指数推广和应用

湖北黄石七中　　费清平

1976年，D.S.Mitrinovic[1]给出了如下不等式：

$$\frac{a_1+\cdots+a_k}{a_{k+1}+\cdots+a_n}+\frac{a_2+\cdots+a_{k+1}}{a_{k+2}+\cdots+a_n+a_1}+\cdots+\frac{a_n+a_1+\cdots+a_{k-1}}{a_k+\cdots+a_{n-1}}\geqq\frac{nk}{n-k}$$

其中a_1、a_2、…、$a_n\in R^+$，$n>k\geqq 1$。

下面我们来对它作两种形式的指数推广

推广Ⅰ：设a_1、a_2、…、$a_n\in R^+$，$n>k\geqq 1$，$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=S$且

$\alpha\geqq\beta>0$，$\alpha\geqq 1$，则

$$\frac{(a_1+\cdots+a_k)^\alpha}{(a_{k+1}+\cdots+a_n)^\beta}+\frac{(a_2+\cdots+a_{k+1})^\alpha}{(a_{k+2}+\cdots+a_n+a_1)^\beta}+\cdots+\frac{(a_n+a_1+\cdots+a_{k-1})^\alpha}{(a_k+\cdots+a_{n-1})^\beta}\geqq\frac{k^\alpha n^{\beta-\alpha+1}}{(n-k)^\beta}S^{\alpha-\beta}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

证明：记$b_1=a_1+\cdots+a_k$，$b_2=a_2+\cdots+a_{k-1}$，……，

$b_n=a_n+a_1+\cdots+a_{k-1}$，则$\sum\limits_{i=1}^{n}b_i=kS$

不等式(1)可简记为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^{\alpha}}{(S-b_i)^\beta}\geqq\frac{k^\alpha n^{\beta+1-\alpha}}{(n-k)^\beta}S^{\alpha-\beta}$$

不妨设$b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n > 0$

则 $b_1^{\alpha} \geqq b_2^{\alpha} \geqq \cdots \geqq b_n^{\alpha} > 0$

$$(S-b_1)^{-\beta} \geqq (S-b_2)^{-\beta} \geqq \cdots \geqq (S-b_n)^{-\beta} > 0$$

运用切比雪夫不等式

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{\alpha}}{(S-b_i)^{\beta}} \geqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i^{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} (S-b_i)^{-\beta}$$

再运用幂平均不等式

由 $\alpha \geqq 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \geqq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i^{\alpha} \geqq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\alpha} = \left(\frac{KS}{n}\right)^{\alpha}$$

由 $-\beta < 1 \Rightarrow \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S-b_i)^{-\beta}\right]^{-\frac{1}{\beta}} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (S-b_i)$

$$= \frac{n-K}{n} S$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (S-b_i)^{-\beta} \leqq \frac{n^{\beta+1}}{(n-K)^{\beta}} S^{-\beta}$$

故 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i^{\alpha} \cdot \sum_{i=1}^{n} (S-b_i)^{-\beta} \geqq \left(\frac{KS}{n}\right)^{\alpha} \cdot \frac{n^{\beta+1}}{(n-K)^{\beta}} S^{-\beta}$

从而 $\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^{\alpha}}{(S-b_i)^{\beta}} \geqq \frac{K^{\alpha} \cdot n^{\beta-\alpha+1}}{(n-K)^{\beta}} S^{\alpha-\beta}$。不等式(1)得证。

特别地，在不等式(1)中，取$K=1$得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{\alpha}}{(S-a_i)^{\beta}}\geq\frac{n^{\beta-\alpha+1}}{(n-1)^{\beta}}S^{\alpha-\beta}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

推广Ⅱ，设$a_1, a_2, \cdots, a_n\in R^+$，$n>K\geqq 1$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=S$，且$\alpha\geqq\beta\geqq 1$，则

$$\frac{a_1^{\alpha}+\cdots+a_K^{2}}{a_{K+1}^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta}}+\frac{a_2^{\alpha}+\cdots+a_{K+1}^{\alpha}}{a_{K+2}^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta}+a_1^{\beta}}+\cdots+$$

$$\frac{a_n^{\alpha}+a_1^{\alpha}+\cdots+a_{K-1}^{\alpha}}{a_K^{\beta}+\cdots+a_{n-1}^{\beta}}\geqq\frac{K\cdot n^{\beta-\alpha+1}}{n-K}S^{\alpha-\beta}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

证明：因$\alpha\geqq\beta$，对正数$x_1, x_2, \cdots, x_n$运用幂平均不等式：

$$\left(\frac{x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\cdots+x_K^{\alpha}}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\geqq\left(\frac{x_1^{\beta}+x_2^{\beta}+\cdots+x_K^{\beta}}{K}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

$$\Longrightarrow x_1^{\alpha}+x_2^{\alpha}+\cdots+x_K^{\alpha}\geqq K^{1-\frac{\alpha}{\beta}}(x_1^{\beta}+x_2^{\beta}+\cdots+x_K^{\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

对不等式(3)左边各分式的分子运用上述不等式，然后再利用不等式(1)得

$$\text{左边}\geqq K^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\left\{\frac{(a_1^{\beta}+\cdots+a_K^{\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(a_{K+1}^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta})^{1}}+\frac{(a_2^{\beta}+\cdots+a_{K+1}^{\beta})^{\frac{\alpha}{\beta}}}{(a_{K+2}^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta}+a_1^{\beta})^{1}}\right.$$

$$+\cdots+\frac{\left(a_n^{\beta}+a_1^{\beta}+\cdots+a_{k-1}^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\left(a_k^{\beta}+\cdots+a_{n-1}^{\beta}\right)^{1}}\Bigg]$$

$$\geqq k^{1-\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\frac{k^{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot n^{1-\frac{\alpha}{\beta}+1}}{(n-k)^{1}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}-1}$$

$$=\frac{k\cdot n^{2-\frac{\alpha}{\beta}}}{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}$$

又由幂平均不等式

$$\beta\geqq 1\ \Rightarrow\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\geqq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{S}{n}$$

$$\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\geqq n^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(\alpha-\beta)}\cdot S^{\alpha-\beta}。$$ 从而有

$$\frac{k\cdot n^{2-\frac{\alpha}{\beta}}}{n-k}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}\geqq\frac{k\cdot n^{2-\frac{\alpha}{\beta}}}{n-k}\cdot n^{\left(\frac{1}{\beta}-1\right)(\alpha-\beta)}$$

$$\cdot S^{\alpha-\beta}=\frac{k\cdot n^{\beta-\alpha+1}}{n-k}S^{\alpha-\beta}.$$

不等式(3)得证。

例1、设x_1、x_2、…、x_n都是正数（$n \geqq 2$），且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1。$$

求证：$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqq \frac{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}}{\sqrt{n-1}}$$（全国第四届冬令营试题）

证明：在不等式(2)中，取$\alpha = 1$，$\beta = \frac{1}{2}$可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geqq \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}$$

由柯西不等式：$n = n\sum_{i=1}^{n} x_i \geqq \left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2$

$$\Longrightarrow \sqrt{n} \geqq \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$$

故 $$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1-x_i} \geqq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n-1}$$ 得证。

例2、设a、b、c、d是满足$ab+bc+cd+da=1$的非负实数，求证：$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$（第31届IMO预选题）。

证明：若a、b、c、d$\in R^+$，在不等式(2)中取$n=4$，$\alpha=3$，$\beta=1$得：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{4^{-1}}{3}\cdot(a+b+c+d)^2$$

下面只需证　$4^{-1}(a+b+c+d)^2\geq 1$

即　$(a+b+c+d)^2\geq 4(ab+bc+cd+da)=4$

左边－右边$=a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$

$=(a-b+c-d)^2\geq 0$　原不等式成立

若a、b、c、d中有2个或3个是正数（不可能少于2个）时，仿上同理可证。

参　考　文　献

〔1〕　D.S.Mitrinovic，《解析不等式》1987年，科技出版社。　P182。

邮编、地址：　435002

湖北省黄石七中数学组　　贾清平

几个未被解决的新问题

张承宇

在笔者的案头放着几个长期未被解决的问题，它们有的是笔者自己发现的，有的是朋友在信中提出的。这些问题都有简洁明了富于趣味性的特点，我们期待着读者也能给出简单优美而初等的解答！

1、秦氏数

1977＝3×659，它除本身外有三个因子：1，3和659。1977的各位数字之和为

$$1+9+7+7=24,$$

有趣的是，它的三个因子的各个数字之和也恰为24：

$$1+3+6+5+9=24.$$

我的同事秦春船先生在计算机上发现了这个数，他还找出了8000以内具有这种特点的数，它们是：

6，33，87，249，303，519，573，681，843，951，1059，1329，1383，1923，1977，2463，2733，2787，2949，3057，3273，3327，3543，3651，3867，3921，4083，4353，4677，5163，5433，5703，5919，6081，6243，6297，6621，6891，7053，7323，7377，7647，7971。

为称呼方便起见，我们把具有上述特点的数叫做秦氏数，笔者对8000以内的秦氏数作了深入细致的观察，发现了如下的性质：

猜想1、若Q是秦氏数，则Q＝3P。其中P为素数，且$P\equiv 2 \pmod 9$。

2、有趣的$\dfrac{1}{7}$

请看：

$$\frac{1}{7}=0.\dot{1}4285\dot{7}$$

$$\frac{2}{7}=0.\dot{2}8571\dot{4}$$

$$\frac{3}{7}=0.\dot{4}2857\dot{1}$$

$$\frac{4}{7}=0.\dot{5}7142\dot{8}$$

$$\frac{5}{7}=0.\dot{7}1428\dot{5}$$

$$\frac{6}{7}=0.\dot{8}5714\dot{2}$$

我们发现这些以7为分母的真分数们颇有意思：首先它们都是以6为循环节的循环小数。其次，将上面小数的末几位顺序不变地移到前方，即可得到下一个小数。由于$\dfrac{1}{7}<\dfrac{2}{7}<\cdots<\dfrac{6}{7}$，由此你还可以判断究竟应当移动几位！

我们在计算机上找出了250以内具有上述性质的数，它们是：7　7，17，19，23，29，47，59，61，97，109，113，131，149，167，179，181，193，223，229，233。

据此，我们提出

猜想2。当且仅当P是以10为其原根的素数时，$\frac{1}{P}$，$\frac{2}{P}$，…，$\frac{P-1}{P}$是以P－1为循环节的循环小数，并且后一个小数总可以通过移动前一个小数的末几位来得到。

3、杨氏猜想

我们知道，任何两个连续自然数都互素；任何三个连续自然数，中间的那个必与前后两个互素。鉴于此，《湖南数学通讯》编辑杨林先生在给笔者的信中提出如下的

猜想3、$k \geqq 2$，任意k个连续自然数中，必有一个与其它$k-1$个皆互素。

$k=4$。令这四个连续自然数为n，$n+1$，$n+2$，$n+3$。已知$n+1$与n，$n+2$皆互素，如果$n+1$不与$n+3$互素，则2是它们的公因子，也即它们是偶数，这样，n和$n+2$是奇数，从而互素。当然$n+2$，$n+3$互素，所以$n+2$即满足要求。

我们还能对$k=5$，6，…依次证出，但却未能找出一条清晰的思路，对整个命题作一个精彩的归纳证明！

4、围棋子及其它

国外有这样一道竞赛题：

在一个圆周上等距离地放着2^K个围棋子。现在，如果两个相邻的棋子颜色相同，我们就在它们之间放一个黑子，否则就放一个白子。如此放好2^K个棋子之后再将原先的棋子拿掉。这样更换一次被称作一次"调整"。试证明：不论原先的棋子颜色如何，至多只需经过2^K次调整，就可将圆周上的围棋子全部换成黑色！

倘若，我们在圆周上放着的是2^K个整数，写在两个相邻的数

之间的是它们的和。我们一样能够证明，最终圆周上的数全都变成了偶数！并将这个结论加以推广，给出

猜想4，在一个圆周上等距离地写着m^K个整数，为方便起见，依次记为$n_1, n_2, \cdots, n_{m^K}$。现在，让我们依次用$n_i+n_{i+1}+ \cdots +n_{i+m-1}$去换$n_i$（这里约定$n_{m^K+j}=n_j$）。当原先的$m^K$个数全被换掉之后就称为进行了一次调整。试证明，至多只需经过m^K次调整，圆周上的数全换成了m的倍数！

建议读者先推广杨辉三角，然后再考虑证明。

5、叶氏圆

上海教育出版社数学编辑室的叶中豪先生发现了一个很漂亮的几何性质，由于没有获得它的完整的证明，因此只能作为一个猜想。其中涉及到的圆，不妨称为叶氏圆。

猜想5。有一个圆和一直线ℓ。P是圆上某点，ℓ上有两组点$X_1, X_2, \cdots, X_{n+1}$；$Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n+1}$。

PX_1交圆于A_1，PY_1交圆于B_1；A_1X_2交圆于A_2，B_1Y_2交圆于B_2；……

A_iX_{i+1}交圆于A_{i+1}，B_iY_{i+1}交圆于B_{i+1}；……

A_nX_{n+1}与B_nY_{n+1}交于Q点，并且Q点恰在圆上。那么，对于圆上任意一点P'，也类似地作出一系列A_i'，B_i'及Q'点，则Q'点也一定在圆周上。

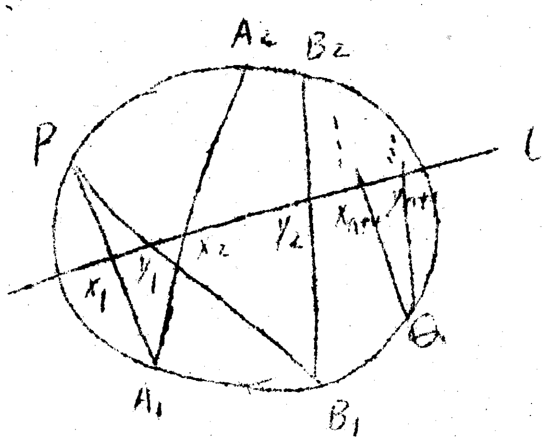
作者附言：

在下是个自学青年，曾发表过一些数学文章，得到科大有关教授的帮助，在数学系进修本科。因为基础较差，学习中遇到不少困难，希望加强与同学们的联系，以期待得到更多的帮助。

地址：

东区150－205，电话号码882

(猜想5) 附图：



* * * * * *

问题解答　　　　881　朱克先　何建勋

* * * * * *

设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数，若 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-nx^2}dx=0$，则 $f(x)$ 必为奇函数。[问题号：17]

证：首先证　若 $f(x)\in C[0, +\infty)$，且 $\forall n\in\mathbb{N}$，有

$\int_0^{\infty} f(x)e^{-nx^2}dx=0$，则 $f(x)\equiv 0$　$x\in[0, \infty)$。[1]

令 $g(x)=f(x)e^{-x^2}$　$F(x)=\int_0^x g(t)dt$　则有

$$F'(x)=g(x),\qquad \lim_{x\to\infty} F(x)=0$$

由已知，$\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$0=\int_0^{\infty} g(x)e^{-nx^2}dx$$

$$=F(x)e^{-nx^2}\Big|_0^{\infty}+\int_0^{\infty}2F(x)nxe^{-nx^2}dx$$

$$=\int_0^{\infty}2nx\,F(x)e^{-nx^2}dx$$

令 $k(x)=2xF(x)e^{-x^2}$　则 $\forall n\in\mathbb{N}$ 有

$$\int_0^{\infty}k(x)e^{-nx^2}dx=0$$

显然 $\lim_{x\to\infty} k(x)=0$　于是

$$\int_0^{\infty} k(x)e^{-nx^2}dx$$

$$\underline{\underline{S=e^{-x^2}}} \int_0^1 k(\sqrt{-\ln s})S^{n-1}\frac{1}{2\sqrt{-\ln s}}ds$$

令 $h(s)=\dfrac{k(\sqrt{-\ln s})(s-1)}{2\sqrt{-\ln s}}$ 则

$(*) \cdots \int_0^1 h(\cdot s)S^n ds=0 \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$

又 当 $s\to 0$ 时，$h(s)=\dfrac{k(\sqrt{-\ln s})(s-1)}{2\sqrt{-\ln s}}\to 0$

当 $s\to 1$ 时，因 $s-1=o(\sqrt{-\ln s})$

$\therefore$ 亦有 $h(s)\to 0$

补充定义 $h(0)=0$，$h(1)=0$ 则 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续。由Weierstrass定理及（$*$）式知 $h(s)\equiv 0$ $s\in[0, 1]$，由此 即可得到 $f(x)\equiv 0$ $x\in[0, +\infty)$

下面设 $f(x)\in C(-\infty, \infty)$，使得 $\forall n\in \mathbb{N}$，

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-nx^2}dx=0$，则有

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-nx^2}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{2}e^{-nx^2}dx+$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{2}e^{-nx^2}dx$$

$$= \int_0^{\infty} (f(x)+f(-x))e^{-nx^2}dx$$

由前述结论 可知 $f(x)+f(-x)\equiv 0 \quad x\in(0, +\infty)$

所以 $f(-x)= -f(x) \quad x\in(-\infty, +\infty)$

即 $f(x)$ 为奇函数

* * * * * *

* 试题选载 *

* * * * * *

加州大学贝克利分校

数学系预试集锦

预试的数学大纲

预试是用来检查主修数学的“优秀”应试者对数学专业课程的实质的理解和运用能力。它着重定理和基本原理的应用，不强调标准定理的证明。应试的学生应熟知下面所列举的材料。

1、微积分（数学1A－1B－50A－50B①）

前两年的基本微积分，由R^m至R^n的映射的导射，梯度，链导法则，极大和极小，拉格朗日乘数法；数量函数和向量函数的线积分和面积分；Green定理和Stokes定理。常微分方程；解的存在性、唯一性和连续性，简单方程的显式解。

2、古典分析（数学104）

R^n的点集拓扑和度量空间；连续函数的性质，紧性，连通性，极限点；实数的最小上界，序列和级数，Cauchy序列；一致收敛性和它与求导和积分的关系；幂级数，收敛半径，Weierstrass M判则，广义积分的收敛性，函数空间的紧性。反函数定理和隐函数定理及应用；做为线性映射的导射，富氏级数初步。

参考书：

Rosenlicht 著 Introduction to Analysis, Scott-Foresman；

Marsden 著 Elementary Classical Analysis, Freeman；

Bartle 著 Elements of Real Analysis, Wiley；

Rudin 著 Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill。

3、抽象代数（数学 113）

集合论初步（如R的不可数性）；整数环和多项式代数中的辗转相除法和唯一分解定理。环 Z_m。多项式的根；代数数。有关群、子群、正规子群、陪集、同态、商群、同构、自同构的定义和基础定理。交换群的基本定理。一些例：置换群，循环群，二面体群，同构与不同构的例（如四阶群、六阶群的分类）。

参考书

Burton 著 Abstract and Linear Algebra, Addison-Wesley；

Birkhoff/MacLane 著 A Survey of Modern Algebra, MacMillan

4、线性代数（数学 110）

矩阵，线性变换，基底的变换；零化子空间秩定理。特征值和特征向量；行列式，特征多项式和极小多项式。Cayley-Hamilton 定理，算子的对角化和三角形化；不变子空间和典型形式；内积空间，埃尔米特算子和U算子，相伴算子，二次型。

参考书：

Nobel 著 Applied Linear Algebra, Prentice-Hall；

Franklin 著 Matrix Theory，Prentice-Hall；

Hoffman/Kunze 著 Linear Algebra，Prentice-Hall；

Strang 著 Linear Algebra，Academic Press。

5、复分析（数学 185）

复数的基本性质，初等函数；做为共形映射的解析函数；Cauchy-Riemann 方程。Cauchy 定理和积分公式；Taylor 级数和 Laurent 级数；Liouville 定理，极大原理，Schwarz 引理；Morera 定理。奇点的分类（特别，在∞的奇性决定多项式），留数，定积分的计算，幅角原理和 Rouche 定理（解析函数的零点数目的估计）；线性分式变换（单位圆盘和上半平面的共形等价）。

参考书

Marsden 著 Basic Complex Analysis，Freeman；

Ahlfors 著 Complex Analysis，McGraw-Hill。

1987年1月试题

1、下述定理是一个标准的定理：紧集上的连续实值函数是有界的。证明它的逆命题：设 K 是 R^n 的一个子集，如果 K 上的每个连续实值函数都有界，则 K 是紧的。

2、变换 T 将 R^2 的子集 $U=\{(u,v): u>v\}$ 映入 R^2，它由下式决定：$T(u,v)=(u+v, u^2+v^2)$。

（a） 证明T在局部为一对一的。

（b） 决定T的取值范围，并证T在整体上也是一对一的。

3、设f为复平面上的开单位圆盘D上的复值函数。若f使函数$g=f^2$和$h=f^3$都是解析的。证明f在D上也解析。

4、设F是有q个元的有限域，又设X为一不定元。对F〔X〕中的一个多项式f，令$\varnothing_f$是由$\varnothing_f(a)=f(a)$所决定的，由F到F的一个对应函数。证明：若$\varnothing$为F到F的一个函数，那么存在F〔X〕中的一个f，使$\varnothing=\varnothing_f$。证明：f由$\varnothing$决定到差一个能被$(X^q-X)$整除的多项式。

5、设f为R上的一个连续实值函数，使$|f(x)|\leqslant C/(1+x^2)$，这里C是一个正的常数，定义R上的一个函数F为F(x)=

$$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)\text{。}$$

（a） 证明F连续且有周期1。

（b） 若G连续且有周期1，证明

$$\int_0^1 f(x)G(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)dx\text{。}$$

6、设F为一个域。证明：F的非零元所构成的乘法群，其有限子群必为循环群。

7、计算 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos 4\theta}{1+\cos^2\theta}d\theta$。

8、设f为复平面中的开单位圆盘上的解析函数，若$|f(z)|\leq C/(1-|z|)$，其中z为圆盘中的任意一点，C为正的常数。证明

$$|f'(z)|\leq 4C/(1-|z|)^2 .$$

9、设p，q，r为R上的连续实值函数，且$p>0$。证明微分方程

$$p(t)x''(t)+q(t)x'(t)+r(t)x(t)=0 \quad (*)$$

等价于（即有相同的解）形如

$$(a(t)x'(t))'+b(t)x(t)=0$$

的方程，其中a为连续可微，b连续。

10、证明：具复系数的非常数的多项式$p(z)$，如果它的全部根均位于半平面$\mathrm{Re}\,z>0$，那么它的导数的根也全在这同一半平面内。

11、设A是一个有理数的$m\times n$矩阵，b是一个有理数的m维列向量。证明或者否定下述命题：若方程$Ax=b$在C^n中有一解，则它在Q^n中也有一解。

12、证明：任意一个n阶有限群，均同构于$n\times n$的实正交矩阵群$O(n)$的一个子群。

13、若a为正的常数，证明方程$ae^z=1+x+\frac{x^2}{2}$恰有一个实根。

14、计算积分$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$，要求精确到两位小数，即确定数$I_*$，使$|I-I_*|<0.005$（不得使用计算器）。

15、设 f 是定义在穿孔平面 $R^2\setminus\{(0,0)\}$ 上的一个实值 C^1 函数，假定偏导数 $\partial f/\partial x$ 和 $\partial f/\partial y$ 是一致有界的，即：有正常数 M，使 $|\partial f/\partial x|\leqslant M$ 和 $|\partial f/\partial y|\leqslant M$ 对所有的 $(x,y)\neq(0,0)$ 成立。证明

$$\lim_{(x,y)=(0,0)} f(x,y)$$

存在。

16、（a）证明：不计同构，4阶的非循环群G恰有一个。

（b）证明：G的自同构群与置换群 S_3 同构。

17、证明或者否定下述命题：若函数 f 在整个复平面上为解析。又 f 将每个无界序列映为无界序列，则 f 为多项式。

18、设 F 是度量空间 (x,d) 上的一个一致有界、等度连续（*）的实值函数族。证明：函数 $g(x)=\sup\{f(x): f\in F\}$ 连续。

（*）（族 F 叫做等度连续，如果对 X 中的每点 x 和任意正数 ζ，存在正数 δ；使 $d(x,y)<\delta$ 时，不论 f 如何在 F 中取，恒有 $|f(y)-f(x)|<\zeta$）。

19、设 V 为 $C^\infty(R)$（无穷次可微的复值函数组成的空间）的一个有限维线性子空间。如果 V 在微分算子 D 下封闭（即：$f\in V\to Df\in V$）。证明：存在一个常系数的线性微分算子 $L=\sum_{K=0}^{n} a_K D^K$，使 V 由微分方程 $Lf=0$ 的全部解组成。

20、设 A 和 B 是两个适合条件 $AB=BA$ 的、可对角化的 $n\times n$ 的复矩阵。证明：存在 C^n 的一组基，它同时对角化 A 和 B。

编 后 记

时值初冬，欣然传来一声清晰的蛙鸣声——第45期《蛙鸣》终于与读者们见面了！

说它姗姗来迟，质量欠佳，却也不假。由于本学期主编组成有所变动，891的同学开始主笔，虽说有初生牛犊之勇，但经验明显不足。为求稿源，编委们四下搜求，同志者们苦思冥想。历经2个月的题海跋涉，终于凝聚出这一声蛙鸣，虽不惊人，却也悦耳，依旧充满着活力与朝气。这声蛙鸣又何尝不寓含着对来年的信心与希望呢？

然而，我遗憾地看到：大多数的读者却仍在沉默，或不为之动，或不屑于之，无从知晓。有一次，一位牌迷笑道："《蛙鸣》何时出啊——我们等着叫牌纸呢！"——虽说这仅出于开玩笑，但另者又使我再次品味到没有全体同学的积极与热情，没有更多的读者上升为作者，这蛙鸣声将变得永远的单调与刺耳，直至衰竭。

慨叹之余，不免要呼吁：一切支持《蛙鸣》成长的同志者们，拓宽你们的思源，拿起笔来吧，让我们一起奏出蛙鸣声声，驱走冬日的冰霜，而重又唤起夏天的热忱吧！

作此后记，以求《蛙鸣》的昌盛新生！

[redacted]