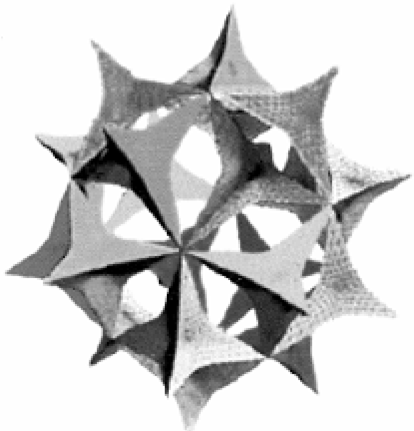
蛙　　鸣

第49期



中国科学技术大学

《蛙鸣》编委会
主办
数学系学生会学习部

一九九四年九月

目 次

一、[研究与讨论]

二、[问题与解答]

三、[新生园地]

四、[试题选登]

五、[数学文摘]

《哇鸣》第 49 期

* 研究与讨论 *

一、再谈一个点集的构造

喻甫祥（9201）

[1] 中解决了下面的问题:

《数学分析》第二册 153 页 6 题: 作一点集 $B \subset [0,1]^2$, 它与坐标轴的每条平行线相交最多一点, 且 $B^- = [0,1]^2$.

笔者在此给出另外一个满足条件的点集。

Q 是全体有理数之集。

$B = \{(p + q\sqrt{3}, p\sqrt{3} - q) \in [0,1]^2, p \in Q, q \in Q.\}$ 是满足条件的点集。

(1) B 与坐标轴的每条平行线相交最多一点。设 $A_1 = (p_1 + q_1\sqrt{3},\ p_1\sqrt{3} - q_1)$, $A_2 = (p_2 + q_2\sqrt{3},\ p_2\sqrt{3} - q_2)$ 是 B 中两个点, p_i, $q_i \in B$, $i = 1,\ 2$。若 A_1 与 A_2 横坐标相同, 即 $p_1 + q_1\sqrt{3} = p_2 + q_2\sqrt{3}$, 则易得 $p_1 = p_2, q_1 = q_2$ 所以 $A_1 = A_2$。同理 A_1 和 A_2 纵坐标相同时, $A_1 = A_2$ 这就证明了命题。

(2) $B^- = [0,\ 1]^2$. 设 $(a,\ b) \in (0,\ 1)^2$。因 $\begin{vmatrix} n1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} \neq 0$, 有 $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, 使 $(x + y\sqrt{3},\ x\sqrt{3} - y) = (a,\ b)$. 取两个有理数列 (x_n) 和 (y_n), 它们分别收敛于 x 和 y. 因而点列 $(x_n + y_n\sqrt{3},\ x_n\sqrt{3} - y_n)$ 收敛于 $(a,\ b)$。而且由于 $(0,\ 1)^2$ 是开集, 自某个 N 后 $(x_n + y_n\sqrt{3},\ x_n\sqrt{3} - y_n) \in (0,\ 1)^2$, 因而 $(x_n + y_n\sqrt{3},\ x_n\sqrt{3} - y_n) \in B$。这说明 $(a,\ b) \in B^-$, 则可知 $(0,\ 1)^2 \subset B^-$, 因而 $[0,\ 1]^2 \subset B^-$. 而由 B 的构造易得 $B^- \subset [0,\ 1]^2$. 因此 $B^- = [0,\ 1]^2$.

这个方法源于对有理点集 Q^2 的考察。有理点指的是平面上横纵坐标都是有理数的点。我们发现, 通过 Q^2 中任两点的直线斜率为有理数 (或不存在) 。从另一面讲, 斜率为无理数的直线上至多含有 Q^2 中的一个点。于是, 我们对原坐标系进行旋转变换, 让原坐标系中斜率为无理数的两条正交直线作新坐标系的坐标轴。Q^2 中的点在新坐标系下的形式是 $(p\cos\theta + q\sin\theta,\ -p\sin\theta + q\cos\theta)$,

θ 是旋转角, p 和 q 都是有理数。因为 Q^2 是在全平面上稠密 (旋转变换后仍如此), 其子集 $Q^2 \cap [0, 1]^2$ 一定在 $[0, 1]^2$ 中稠密。这样, 我们就顺利的得到了需要的点集。

参考文献:

[1]. 张林. 《关于无理数小数部分一定理及应用》, 《蛙鸣》47 期

二、一个有关矩阵极小秩的问题

沈维孝 (9101)

问题: F 是一数域 $A \in F^{m_1 \times n_1}$, $B \in F^{m_1 \times n_2}$, $C \in F^{m_2 \times n_1}$。求 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}$ 的最小秩。其中 X 可取 $F^{m_2 \times n_2}$ 中任一矩阵。

引理: 设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是一秩为 r 的向量组。则它的任意线性无关组 $\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}\}$ 可以扩充为一个极大线性无关组。即 $\exists$ 一个极大线性无关组。它包含 $\{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_k}\}$ 中每个向量。

证明: (略)

结论:

$$\min_{X \in F^{m_2 \times n_2}} rank \begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank[A, B] + rank \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - rank A$$

我们将在以下的证明中指出取到最小秩的 X 所应满足的条件。

结论的证明: 设 $rank A = r$ 设 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}\}$ 是 A 的全部列向量, $\{\beta_1, \cdots, \beta_{n_2}\}$ 是 B 的全部列向量 $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1}\}$ 是 C 的全部列向量, $\{x_1, \cdots, x_{n_2}\}$ 是 X 的全部列向量。无妨设 $\{\alpha_i\}_1^r$ 是 $\{\alpha_i\}_1^{n_1}$ 的极大线性无关组。而 $\{\alpha_i\}_1^r \cup \{\beta_j\}_1^k$ 是 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \cdots, \beta_{n_2}\}$ 的极大线性无关组 (由引理 $\{\alpha_i\}_1^r$ 可扩充为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \cdots, \beta_{n_2}\}$ 的极大线性无关组, 这组中的向量显然不能包含 α_i,

$r+1 \le l \le n_1'$)。对 $\forall k+1 \le i \le n_2$, β_i 可表为 $\{\alpha_i\}_1^r \bigcup \{\beta_j\}_1^k$ 的线性组合，设 $\beta_i = \lambda_{i_1}\alpha_1 + \cdots + \lambda_{i_r}\alpha_r + \mu_{i_1}\beta_1 + \cdots + \mu_{i_k}\beta_k, (k+1 \le i \le n_2)$. 则

$$\begin{aligned} & rank\begin{bmatrix} \alpha_1, & \cdots, & \alpha_{n_1}, & \beta_1, & \cdots, & \beta_{n_2} \\ \gamma_1, & \cdots, & \gamma_{n_1}, & x_1, & \cdots, & x_{n_2} \end{bmatrix} \\ =& rank\begin{bmatrix} \alpha_1, & \cdots, & \alpha_{n_1}, & \beta_1, & \cdots, & \beta_k, & 0, & \cdots, & 0 \\ \gamma_1, & \cdots, & \gamma_{n_1}, & x_1, & \cdots, & x_k, & y_{k+1}, & \cdots, & y_{n_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $y_i = x_i - \lambda_{i_1}\gamma_1 - \cdots - \lambda_{i_r}\gamma_r - \mu_{i_1}x_1 - \cdots - \mu_{i_k}x_k, k+1 \le i \le n_2$ 将 $\left\{\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \gamma_i\end{pmatrix}_1^r\right\}$ 扩充为 $\left\{\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \gamma_i\end{pmatrix}_1^{n_1}\right\}$ 的一极大无关组,无妨设这个极大组是 $\left\{\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \gamma_i\end{pmatrix}_1^l\right\}$, $l = rank\begin{bmatrix}A\\ C\end{bmatrix} \ge r$.

则 $\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \gamma_i\end{pmatrix}_1^l, \begin{pmatrix}\beta_j\\ \gamma_j\end{pmatrix}_1^k$ 线性无关，事实上，设有数量 $\{a_i\}_1^l, \{b_j\}_1^k$ 满足

$$a_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \gamma_1\end{pmatrix} + \cdots + a_l\begin{pmatrix}\alpha_l\\ \gamma_l\end{pmatrix} + b_1\begin{pmatrix}\beta_1\\ x_1\end{pmatrix} + \cdots + b_k\begin{pmatrix}\beta_k\\ x_k\end{pmatrix} = 0$$

则 $a_1\alpha_1 + \cdots + a_l\alpha_l + b_1\beta_1 + \cdots + b_k\beta_k = 0$, 这样 $\sum\limits_{j=1}^k b_j\beta_j$ 可表成 $\{\alpha_i\}_1^l$ 从而可表成 $\{\alpha_i\}_1^r$ 的线性组合。因此 $\sum\limits_{j=1}^k b_j\beta_j = 0$

$\therefore \quad b_j = 0\ (j = 1, 2, \cdots, k)$

进而有 $\sum\limits_{i=1}^l a_i\begin{pmatrix}\alpha_i\\ \gamma_i\end{pmatrix} = 0$

$\therefore \quad a_i = 0\ (i = 1, 2, \cdots, l)$

于是

$$rank\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \cdots, \beta_k\\ \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1}, x_1, \cdots, x_k\end{bmatrix} \ge l + k$$

又显然

$$\begin{aligned} & rank\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \cdots, \beta_k\\ \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1}, x_1, \cdots, x_k\end{bmatrix} \\ \le & rank\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}\\ \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1}\end{bmatrix} + rank\begin{bmatrix}\beta_1, \cdots, \beta_k\\ x_1, \cdots, x_k\end{bmatrix} = l + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad rank\begin{bmatrix}\alpha_1, \cdots, \alpha_{n_1}, \beta_1, \cdots, \beta_k\\ \gamma_1, \cdots, \gamma_{n_1}, x_1, \cdots, x_k\end{bmatrix} &= l + (k + r) - r \\ &= rank\begin{bmatrix}A\\ C\end{bmatrix} + rank[A\ B] - rankA. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \alpha_1, & \cdots, & \alpha_{n_1}, & \beta_1, & \cdots, & \beta_{n_2} \\ \gamma_1, & \cdots, & \gamma_{n_1}, & x_1, & \cdots, & x_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} \alpha_1, & \cdots, & \alpha_{n_1}, & \beta_1, & \cdots, & \beta_k, & 0, & \cdots, & 0 \\ \gamma_1, & \cdots, & \gamma_{n_1}, & x_1, & \cdots, & x_k, & y_{k+1}, & \cdots, & y_{n_2} \end{bmatrix}$$

$$\geq rank\begin{bmatrix} \alpha_1, & \cdots, & \alpha_{n_1}, & \beta_1, & \cdots, & \beta_k \\ \gamma_1, & \cdots, & \gamma_{n_1}, & x_1, & \cdots, & x_k \end{bmatrix}$$

$$= rank\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + rank[A\ B] - rank A$$

等号当且仅当 $y_{k+1} = \cdots = y_{n_2} = 0$ 即 $x_i = \lambda_{i_1}\gamma_1 + \cdots + \lambda_{i_r}\gamma_r + \mu_{i_1}x_1 + \cdots + \mu_{i_k}x_k (r+1 \leq i \leq n_2)$ 时成立。其中 λ_{i_t}, μ_{i_s} 的含义如前所述。因此

$$\min rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + rank[A\ B] - rank A$$

注 1: 当 A 可逆时, $rank[A\ B] = rank\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = rank A, \quad \min rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank A$

这时由 $\begin{bmatrix} I_{m_1} & \\ -CA^{-1} & I_{m_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n_1} & -A^{-1}B \\ & I_{n_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & X - CA^{-1}B \end{bmatrix}$ 知取到最小值的 X 只有一个 $CA^{-1}B$。

注 2:

$$\min rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} + rank[A\ B] - rank A$$

$$\geq \max\left\{rank\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}, rank[A\ B]\right\} \geq rank A$$

$$\min rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank[A\ B] \Longleftrightarrow rank\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = rank A$$

$$\Longleftrightarrow \text{矩阵方程} XA = C \text{有解}$$

$$\min rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} \Longleftrightarrow rank[A\ B] = rank A$$

$$\Longleftrightarrow \text{矩阵方程} AY = B \text{有解}.$$

注 3: X 在分块中的位置不影响我们的结果。即

$$\min rank\begin{bmatrix} B & A \\ X & C \end{bmatrix} = \min rank\begin{bmatrix} C & X \\ A & B \end{bmatrix}$$

$$= \min rank\begin{bmatrix} X & C \\ B & A \end{bmatrix} = \min rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}$$

而且四种情况下达到最小秩的 X 所需满足的条件相同。

三、$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^m}{\prod_{j \neq k} (\lambda_j - \lambda_k)}$ 的值

沈维孝 (9101)

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个两两不等的复数，令

$$\delta_m^n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^m}{\prod\limits_{j \neq k} (\lambda_j - \lambda_k)}$$

本文将给出关于 δ 的值的若干等式和不等式。我们有:

当 m 为小于 $n-1$ 的非负整数时，$\delta_m^n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \equiv 0$ (1)

证: 考虑线性方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_n\lambda_n = 0 \\ \cdots \\ c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1} + \cdots + c_n\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases} \qquad (I)$$

的解. (c_1, c_2, $\cdots$, c_n 是未知量)

由克莱姆法则,

$$\because \quad D = det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

$$\begin{aligned} D_k &= det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{k-1} & 0 & \lambda_{k+1} & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{n-1} & 0 & \lambda_{k+1}^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{k+1} det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_{k+1} & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{n-1} & \lambda_{k+1}^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{k+1} \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} \cdots \lambda_n \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i,j \neq k}} (\lambda_j - \lambda_i) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad c_k = \frac{D_k}{D}$$
$$= (-1)^{k+1}\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}\lambda_{k+1}\cdots\lambda_n \prod_{\substack{1\le i<j\le n\\ i,j\ne k}}(\lambda_j-\lambda_i)\Big/\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)$$
$$= \frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{\lambda_k\prod_{j\ne k}(\lambda_j-\lambda_k)}$$

此即为方程组 (I) 的解。将其代入方程组的第 $2\sim n$ 个方程，即得到命题 (1). □

当 $m=n-1$ 时， $\delta_m^n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=(-1)^{n+1}$ (2)

证: 设 c_1，c_2，$\cdots$，c_n 是方程组 (I) 的解。设

$$\delta = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_n\lambda_n^n$$

视 c_1，c_2，$\cdots$，c_n 为未知量。解方程组

$$\begin{cases} c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \cdots + c_n\lambda_n = 0 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1} + \cdots + c_n\lambda_n^{n-1} = 0 \\ c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_n\lambda_n^n = 0 \end{cases} \qquad (II)$$

方程组 (I)、(II) 显然同解。又按 Cramer 法则解方程组 (II)

$$D = det\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^n \lambda_k \prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)$$

$$D_1 = det\begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \\ \delta & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$
$$= (-1)^{n+1}\delta\prod_{2\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i)\prod_{k=2}^n\lambda_k$$

$$c_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{(-1)^{n+1}\delta}{\lambda_1\prod_{j=2}^n(\lambda_j-\lambda_1)}, \text{而 } c_1 = \frac{\lambda_1\cdots\lambda_n}{\lambda_1\prod_{j=2}^n(\lambda_j-\lambda_1)}$$

$$\therefore \quad \delta = (-1)^{n+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

即 $\lambda_1\cdots\lambda_n\delta_{n-1}^n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = (-1)^{n+1}\lambda_1\cdots\lambda_n$

$$\therefore \quad \delta_{n-1}^n(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = (-1)^{n+1}. \quad \square$$

对于较大的 m 我们很难得到关于 δ_m^n 值的精确描述。但可以确定它的界.

令 $\lambda = \sup\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|, \delta_{m,\lambda}^n = \sup\limits_{\max\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k| \le \lambda} |\delta_m^n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)|$

当 $n > 2$ 时,

$$\begin{aligned}
\delta_m^n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) &= \frac{\lambda_1^m}{\prod\limits_{j\ne 1}(\lambda_j - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2^m}{\prod\limits_{j\ne 2}(\lambda_j - \lambda_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n^m}{\prod\limits_{j\ne n}(\lambda_j - \lambda_n)} \\
&= \lambda_1 \left[\frac{\lambda_1^{m-1}}{\prod\limits_{j\ne 1}(\lambda_j - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2^{m-1}}{\prod\limits_{j\ne 2}(\lambda_j - \lambda_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n^{m-1}}{\prod\limits_{j\ne n}(\lambda_j - \lambda_n)} \right] \\
&\quad - \left[\frac{\lambda_2^{m-1}}{\prod_{\substack{j\ne 2 \\ j\ge 2}}(\lambda_j - \lambda_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n^{m-1}}{\prod_{\substack{j\ne n \\ j\ge 2}}(\lambda_j - \lambda_n)} \right] \\
&= \lambda_1 \delta_{m-1}^n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) - \delta_{m-1}^{n-1}(\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \delta_{m,\lambda}^n \le \lambda \delta_{m-1,\lambda}^n + \delta_{m-1,\lambda}^{n-1}$$

$$\delta_{n,\lambda}^n \le \lambda \delta_{n-1,\lambda}^n + \delta_{n-1,\lambda}^{n-1} = \lambda + \delta_{n-1,\lambda}^{n-1}$$

$$\therefore \quad \delta_{n,\lambda}^n \le (n-2)\lambda + \delta_{2,\lambda}^2 \le (n-2)\lambda + 2\lambda = n\lambda$$

$$\begin{aligned}
\delta_{n+1,\lambda}^n &\le \lambda \delta_{n,\lambda}^n + \delta_{n,\lambda}^{n-1} \le \lambda(\delta_{n,\lambda}^n + \delta_{n-1,\lambda}^{n-1}) + \delta_{n-1,\lambda}^{n-2} \\
&\le \cdots \\
&\le \lambda(\delta_{n,\lambda}^n + \cdots + \delta_{3,\lambda}^3) + \delta_{3,\lambda}^2 \\
&\le \lambda^2 [n + (n-1) + \cdots + 3] + 3\lambda^2 = \binom{n+1}{2} \lambda^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{n+2,\lambda}^n &\le \lambda \delta_{n+1,\lambda}^n + \delta_{n+1,\lambda}^{n-1} \\
&\le \cdots \\
&\le \lambda(\delta_{n+1,\lambda}^n + \delta_{n,\lambda}^{n-1} + \cdots + \delta_{4,\lambda}^3) + \delta_{4,\lambda}^2 \\
&\le \lambda^3 \left[\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{4}{2} \right] + 4\lambda^3 \\
&= \lambda^3 \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} = \lambda^3 \binom{n+2}{3}
\end{aligned}$$

由归纳法可以证明

$$\delta_{n+k,\lambda}^n \le \lambda^{k+1} \binom{n+k}{k+1} \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \qquad (3)$$

最后用以上的估计来证明下面的结论:

设 $(\lambda_n)_1^\infty$ 是一列复数.它们两两不等, 且 $\lambda = \sup_n |\lambda_n| < \frac{1}{2}$, X 是 Banach 空间, $x_n \in X$, $n = 0, 1, 2, \cdots$. 令 $y_k = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_k^n x_n$, M 是由 $y_1, y_2, \cdots, y_k, \cdots$ 张成的闭子空间。

求证: $x_k \in M (k = 0, 1 \cdots)$

证: 令 $z_n = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$, 其中 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 满足方程组 (I).

$$\begin{aligned}
&c_1\lambda_1^m + c_2\lambda_2^m + \cdots + c_n\lambda_n^m \\
&= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \left[\frac{\lambda_1^{m-1}}{\prod\limits_{j\neq 1}(\lambda_j - \lambda_1)} + \frac{\lambda_2^{m-1}}{\prod\limits_{j\neq 2}(\lambda_j - \lambda_2)} + \cdots + \frac{\lambda_n^{m-1}}{\prod\limits_{j\neq n}(\lambda_j - \lambda_n)} \right] \\
&= \prod_{j\neq 1} \lambda_j \delta^n_{m-1,\lambda}(\lambda^1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \\
&\le \begin{cases} \prod\limits_{j\neq 1} |\lambda_j| \le \lambda^n & m = n \\ \prod\limits_{j\neq 1} |\lambda_j| \lambda^{m-n} \binom{m-1}{m-n} \le \lambda^m \binom{m-1}{m-n} & m > n \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |z_n - x_0| \le \sum_{m=n}^{\infty} \lambda^m \binom{m-1}{m-n} = \lambda^n \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \binom{k+n-1}{k}$$

令 $s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \binom{k+n-1}{k}$ 则 $s_1 = \frac{1}{1-\lambda}$

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)s_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \binom{k+n-1}{k} - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \binom{k+n-2}{k-1} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \binom{k+n-2}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \binom{k+n-2}{k} \\
&= s_{n-1}, \qquad n \ge 2
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad s_n = \frac{s_{n-1}}{1-\lambda} = \cdots = \frac{1}{(1-\lambda)^n}$$

$$\therefore \quad |z_n - x_0| \le \frac{\lambda^n}{(1-\lambda)^n} \to 0$$

$z_n \to x_0$ 由于 M 是闭的,

$\therefore \quad x_0 \in M$.

令 $y'_k = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_k^n x_{n+1}$ 则 $y'_k \in M$。同理可证 $x_1 \in M$.
同理可证 $x_k \in M$ 对 $\forall k \in N$ 成立。

如果仅有 $\lambda < 1$, 命题是否仍成立呢? 这是个作者未解决的问题。

****
* 问题与解答 *
****

一、问题 9 1 解答

何斯迈 （9201）

证明: 若 $\exists$ 非负数列 $x_1, x_2, \cdots, x_{15}$ 使其和小于 $\frac{15}{2}$, 而且

$$det\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_1 & & & \\ & & 1 & -x_2 & -x_2 & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ -x_{14} & & & & 1 & -x_{14} \\ -x_{15} & -x_{15} & & & & 1 \end{pmatrix} = 0$$

那么 $\exists$ 非零实数列 $a_1, \cdots, a_{15}$ 使得:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_1 & & & \\ & & 1 & -x_2 & -x_2 & \\ & & \cdots & \cdots & & \\ -x_{14} & & & & 1 & -x_{14} \\ -x_{15} & -x_{15} & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{15} \end{pmatrix}$$

即 $x_i(a_{i+1} + a_{i+2}) = a_i, \forall 1 \le i \le 15$

其中 $a_{16} = a_1$, $a_{17} = a_2$ (以下有 $a_n = a_m$, $m \equiv n(\mod 15)$) 由此可见 a_i 是循环对称的, 不妨设 $a_1 > 0$ (否则全为 0 矛盾) 若 $a_i > 0$, $a_{i+1} < 0$, 则可由归纳法证知 $a_{2i} > 0$, $a_{2i+1} < 0$ 显然矛盾 (15 为奇数) 取 i_0 为最小的使 $a_i < 0$ 的 $i \in N$, 若 i_0 存在, 则 $a_{i_0-1} = 0$

$\therefore$ $a_{i_0-2} < 0$ 依次推出 $a_1 \le 0$ 矛盾。

$\therefore$ i_0 不存在, 即 $\forall 1 \le i \le 15$, $a_i \ge 0$ 且显然不可能有二相邻的 a_i 为 0.

所以有 $\forall 1 \le i \le 15$, $a_{i+1} + a_{i+2} > 0$

$\therefore$ $x_i = \frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}$

1989 年美国人 B.A.Troesch 发表的文 [1] 中判定了当 $n=15$ 时,若 a_i 为非负实数列,$a_{i+1}+a_{i+2}>0, \forall 1\le i\le n, a_{n+1}=a_1, a_{n+2}=a_2$ 则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}\ge\frac{n}{2}$

所以有 $\sum\limits_{i=1}^{15}=\sum\limits_{i=1}^{15}\frac{a_i}{a_{i+1}+a_{i+2}}\ge\frac{15}{2}$ 矛盾

即不存在题中所述的数列.

参考文献:

[1]. B.A.Troesch. The Validity of Shapiro's Cyclic Inequality. Math. Comp. V. 53. (1989) P 657-664.

[2]. 盛立人《也谈循环不等式》《中学数学教学》1992. 3 P22-P25.

二、 问题 1 1 1 解答(一)

何斯迈 (9201)

问题 1 1 1 (第 48 期,陈计):

已知 n 边形的边长为 a_1

求证:

$$\frac{n+1}{2n}(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}a_i^{n-1})\ge\sum_{i=1}^{n}{a_i}^n+\frac{n(n-1)}{2}\prod_{i=1}^{n}a_i.$$

证明:

(i) $n\ge 4$ 时, 记

$$\overline{D}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)|x_i\ge 0, 2x_i\le\sum_{j=1}^{n}x_j, i=1,2,\cdots,n,\sum_{j=1}^{n}x_j\le 1\}.$$

设 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\frac{n+1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)(\sum\limits_{i=1}^{n}{a_i}^{n-1})-\sum\limits_{i=1}^{n}{a_i}^n-\frac{n(n-1)}{2}\prod\limits_{i=1}^{n}a_i$

下面证明 f 在 $\overline{D}$ 上取非负值。

$\because \quad f$ 在 $\overline{D}$ 上连续,$\overline{D}$ 为紧致集,

$\therefore \quad f$ 在 $\overline{D}$ 上可取到最小值。

设 f 在 $a=(a_1,\ a_2,\ \cdots,a_n)$ 取到最小值。

若 $\exists a_i=0$, 不妨设 $a_n=0$, 则

$$\because \quad 0 \le 2a_i \le \sum_{j=1}^{n-1} a_i (\forall_i = 1,\cdots n)$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad f(a) &= \sum_{i=1}^{n-1}\left[{a_i}^{n-1}\cdot\frac{n+1}{2n}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)\right]-\sum_{i=1}^{n-1} a_i^n \\ &\ge \frac{n+1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^n-\sum_{i=1}^{n-1} a_i^n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} a_i^n \ge 0\end{aligned}$$

若 $\exists 2a_i=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, 不妨设 $2a_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.

则

$$\begin{aligned}f(a) &= \left[\frac{n+1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n-1})(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)-\sum_{i=1}^{n-1} a_i^n\right] \\ &\quad+\left[\frac{n+1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^n-(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^n-\frac{n(n-1)}{z}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)\prod_{i=1}^{n-1} a_i\right] \\ &\ge \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n-1})+\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)^n-\frac{n(n-1)}{z}(\sum_{i=1}^{n-1} a_i)\prod_{i=1}^{n-1} a_i \\ &\ge (\sum_{i=1}^{n-1} a_i)(\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n-1})\left[\frac{n-1}{n}+\frac{(n-1)^{n-1}}{n}-\frac{n(n-1)}{2}\right] \ge 0.\end{aligned}$$

若以上二种情况均不存在, 则 $\forall 1 \le i \le n$, 有 $\exists \varepsilon_i > 0$ 使 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{i-1},$ $a_i-\varepsilon_i,\ a_{i+1},\cdots a_n) \in \overline{D}, \forall 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_i$, 那么

$$\because \quad f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_i-\varepsilon_i,\ \cdots,\ a_n) \ge f(a)$$

$$\therefore \quad \lim_{\varepsilon_i \to o^+}\frac{f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_i-\varepsilon_i,\ \cdots,\ a_n)-f(a)}{-\varepsilon_i}=\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \le 0$$

即

$$\frac{n+1}{2n}\sum_{j\ne i} a_i^{n-1}+\frac{n-1}{2}a_i^{n-2}(\frac{n+1}{n}\sum_{j\ne i} a_j-a_i)-\frac{n(n-1)}{2}\prod_{j\ne i} a_j \le 0$$

对 $i=1,\ \cdots,\ n$ 成立。

为求对称,将上式对所有的 $1 \le i \le n$ 求和得:

$$\frac{n-1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} + \frac{n^2-1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(a_i^{n-2}\sum_{j\neq i} a_j) - \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i} a_j \le 0 \qquad (1)$$

又因为 $\forall 1 \le i \le n$ 有:

$$\frac{1}{2n}\sum_{j\neq i} a_j^{n-1} + \frac{n^2-1}{2n(n-2)}\sum_{\substack{j_1,j_2\neq i\\ j_1\neq j_2}} a_{j_1}^{n-2}a_{j_2} - \frac{n(n-1)}{2}\prod_{j\neq i} a_j$$

$$\ge \left[\frac{n-1}{2n} + \frac{n^2-1}{2n(n-2)}(n-1)(n-2) - \frac{n(n-1)}{2}\right]\prod_{j\neq i} a_j = 0 \qquad (*)$$

再对所有的 i 求和得:

$$\frac{n-1}{2n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} + \frac{n^2-1}{2n}\sum_{i=1}^{n}[a_i^{n-2}(\sum_{j\neq i} a_j)] - \frac{n(n-1)}{2}\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j\neq i} a_j) \ge 0 \qquad (2)$$

比较 (1) 与 (2), 所以 (2) 中等号成立,所以 (*) 中等号成立, 即

$\forall 1 \le i \le n,\quad \forall j_1,\ j_2 \neq i$ 有 $a_{j_1} = a_{j_2}$

所以 $\qquad a_1 = a_2 \cdots = a_n \quad$ 且 $\quad f(a) = 0$

综上所述, 总有 $f(a) \ge 0$,所以 f 在 $\overline{D}$ 内恒取非负值。

对于 n 边形,设其周长为 1, $a_{i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)}$ 为边长,则 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \in \overline{D}$ 所以 $f(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n) \ge 0$ 所以题中不等式成立。

(ii) $\quad n = 3$ 时,注意到在上面的证明中只需再证

若 $\exists 1 \le i \le 3$, $2a_i = a_1+a_2+a_3$ 时也有 $f(a_1,\ a_2,\ a_3) \ge 0$ 即可,设 $a_3 = a_1+a_2 \neq 0$

因为 $\quad f(a_1,\ a_2,\ a_3) = a_3^3 f\left(\frac{a_1}{a_3},\ 1-\frac{a_1}{a_3},\ 1\right)$

所以只须证 $\forall x \in [0,\ 1]$ 有 $f(x,\ 1-x,\ 1) \ge 0$ 即可。此时, $f(x,\ 1-x,\ 1) = \frac{8}{3}(x-\frac{1}{2})^2 \ge 0$

$\therefore \quad n = 3$ 时,$f(a_1,\ a_2,\ a_3) \ge 0$ 也正确。

$\therefore \quad$ 对 $n \ge 3$,原不等式成立。

三、问题 111 解答（二）

王新茂　（9001）

设　$a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$ 且 $a_n \le a_1 + \cdots + a_n$;

$$\mu = \frac{n}{2}\frac{1-(n-1)^{2-n}}{1-(n-1)^{1-n}(n^2-2n+2)/2};$$

$$(a_1, \cdots, a_n) = \frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n - (\mu-1)n\prod_{i=1}^{n} a_i, \qquad n \ge 3;$$

$f_k(x) = S(a_1, \cdots, a_{n-k}, x, \cdots, x), k = 1, \cdots, n-1;$

下证 $S \ge 0$

证:

$$f_k(x) = (\frac{\mu}{n}k^2 - k)x^n + \frac{\mu k}{n}\sum_{i=1}^{n-k} a_i x^{n-1} + \frac{\mu}{n}\sum_{i+1}^{n-k} a_i^{n-1} x + \frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n-k} a_i \sum_{i=1}^{n-k} a_i^{n-1} - \sum_{i=1}^{n-k} a_i^n - (\mu-1)n\prod_{i=1}^{n-k} a_i x^k$$

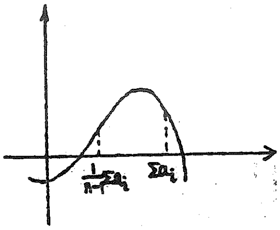
$$f_k'(x) = (\mu k^2 - nk)x^{n-1} + \frac{n-1}{n}\mu k\sum_{i=1}^{n-k} a_i x^{n-2} + \frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n-k} a_i^{n-1} - (\mu-1)nk\prod_{i=1}^{n-k} a_i x^{k-1}$$

$$f_k'(\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} a_i) \ge \left[(\mu k^2 - nk + \frac{n-1}{n}\mu k(n-k) + \frac{n-k}{n}\mu - (\mu-1)nk\right] \cdot (\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} a_i)^{n-1} = 0$$

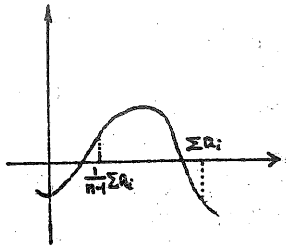
（一）　$k = 1,\ x \in \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i,\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i\right]$

$\because \quad f_1''(x) = (n-1)(n-\mu)x^{n-3}\left(\frac{(n-2)\mu}{n(n-\mu)}\sum_{i=1}^{n-1} a_i - x\right)$

$\therefore \quad f_1'(x)$ 的图象为下图所示



或



因为

$$
\begin{aligned}
f_1\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) - f_1\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) &= \left((\frac{2\mu}{n}-1)(n-1)^n + \mu - 1\right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^n + \frac{n-2}{n}\mu\sum_{i=1}^{n-1} a_i^{n-1}\left(\frac{1}{n-1}\sum a_i\right) \\
&\quad - (\mu-1)n(n-2)\prod_{i=1}^{n-1} a_i\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right) \\
&\geq \left((\frac{2\mu}{n}-1)(n-1)^n + \mu - 1 + \frac{(n-2)(n-1)}{n}\mu - n(n-2)\mu\right) \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)^n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以 $\quad f_1(x) \geq f_1\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)$

(二) $\quad k \geq 2,\ x \in \left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} a_i,\ \infty\right)$

因为

$$
\begin{aligned}
f_k''(x) &= (\mu k^2 - k)(n-1)x^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{n}\mu k\sum_{i=1}^{n-k} a_i x^{n-3} \\
&\quad - (\mu-1)(k-1)kn\prod_{i=1}^{n-k} a_i x^{k-2} \\
&\geq \left[(\mu k^2 - k)(n-1) + \frac{(n-1)^2(n-2)}{n}\mu k - (\mu-1)(k-1)kn\right] \\
&\quad \cdot \prod_{i=1}^{n-k} a_i x^{k-2} \\
&\geq 0
\end{aligned}
$$

所以 $f_k'(x) \geq 0$ 或 $f_k(x) \geq f_k\left(\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k} a_i\right)$

由 (一)、(二) 得: $f_1(a_n) \geq f_1(a_{n-1}) = f_2(a_{n-1}) \geq \cdots \geq f_{n-1}(a_1) = 0$

即 $S(a_1, \cdots, a_n) \geq 0$

结论: $\forall n \geq 3$, $a_1, \cdots, a_n$ 为 n 边形之边长时,

$$\frac{\mu}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} - \sum_{i=1}^{n} a_i^n \geq (\mu-1)n\prod_{i=1}^{n} a_i$$

此式亦也化为

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^n - \prod\limits_{i=1}^{n} a_i}{\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1} - \prod\limits_{i=1}^{n} a_i} \leq \mu \qquad (*)$$

特别取 $a_1 = \cdots = a_{n-1} = \frac{1}{n-1}a_n$ 时, 等号成立。问题 1 1 1 为 (*) 式之推论。

****
* 新生园地 *
****

关于一类数列性质的讨论

何斯迈 (9201)

定义 1: 自然数列 $\{M_k\}$ 满足如下条件则称为恰当的:

(1) $M_1 = 1,\ M_2 = 3$

(2) $\forall n \in N,\ M_{n+2} = 2M_{n+1} - M_n + 1$ (a) 或 $M_{n+2} = \left[\frac{M_{n+1}^2 - 1}{M_n}\right]$ (b)

定理 1 : 若 $\{M_k\}$ 为恰当的, 则 $\forall n \in N$, 有不等式

$$2M_{n+1} - M_n \le \left[\frac{M_{n+1}^2 - 1}{M_n}\right] - 1$$

证明: $n = 1$, 命题显然成立

若 $n = k$ 时命题成立, 则 $n = k+1$ 时有:

$$\begin{aligned}&\frac{M_{k+2}^2 - 1}{M_{k+1}} - 2M_{k+2} + M_{k+1}\\ \ge&\frac{(M_{k+2} - M_{k+1})^2 - 1}{M_{k+1}}\\ \ge&\frac{(M_{k+2} - M_{k+1})(k+2)}{M_{k+1}}\\ \ge&1\end{aligned}$$

$\therefore$ $\left[\frac{M_{k+2}^2 - 1}{M_{k+1}}\right] \ge 2M_{k+2} - M_{k+1} + 1$

$\therefore$ $\forall n \in N$, 定理 1 成立

定理 2: 若 $\{M_k,\ 1 \le k \le k_0\}$ 是恰当的, 且有

$$\frac{(M_{k_0} - M_{k_0-1})^2}{M_{k_0-1} + M_{k_0}} > 1, \forall m_0 \in N$$

则 $\exists k_1 \in N$ 和数列 $\{M_k, k_0+1 \le k \le k_1\}$

使得 $\forall k_0 \le n \le k_1 - 1$ 有 $M_{n+1} = \left[\frac{M_n^2-1}{M_{n-1}}\right]$

且有 $\frac{(M_{k_1}-M_{k_1-1})^2}{M_{k_1}} > m_0$

证明: 设 $\frac{(M_{k_0}-M_{k_0-1})^2}{M_{k_0-1}+M_{k_0}} \ge 1+\varepsilon_0,\ \varepsilon_0 > 0$

再取自然数列 $\{M_k'\}$ 为恰当的, 且有

$$\forall 1 \le k \le k_0, M_k' = M_k$$

$$\forall k \ge k_0,\ M_{k+1}' = \left[\frac{{M_k'}^2 - 1}{M_{k-1}'}\right]$$

则

$$\begin{aligned}
&\frac{(M_{k_0+1} - M_{k_0})^2}{M_{k_0+1}} - \frac{(M_{k_0} - M_{k_0-1})^2}{M_{k_0}} \\
\ge&\frac{M_{k_0}^2}{M_{k_0}+1} + M_{k_0+1} - 2M_{k_0} - \frac{(M_{k_0} - M_{k_0-1})^2}{M_{k_0}} \\
\ge&\frac{M_{k_0}^2}{\frac{M_{k_0}^2}{M_{k_0-1}} - 1} + \frac{M_{k_0}^2}{M_{k_0-1}} - 1 - 2M_{k_0} - \frac{(M_{k_0} - M_{k_0-1})^2}{M_{k_0}} \\
\ge&\frac{(M_{k_0} - M_{k_0-1})[(M_{k_0} - M_{k_0-1})^2(M_{k_0}^2 - M_{k_0-1}) - M_{k_0}M_{k_0-1}(M_{k_0} + M_{k_0-1})]}{M_{k_0}M_{k_0-1}(M_{k_0}^2 - M_{k_0-1})} \\
\ge&\frac{M_{k_0} - M_{k_0-1}}{M_{k_0}M_{k_0-1}}[(M_{k_0} - M_{k_0-1})^2 - M_{k_0-1} - M_{k_0}](\text{有}M_{k_0}^2 - M_{k_0-1} > M_{k_0}M_{k_0-1}) \\
\ge&\varepsilon_0/k_0
\end{aligned}$$

则 $\forall n > k_0$ 有 $\frac{(M_{n+1}-M_n)^2}{M_{n+1}} - \frac{(M_{k_0}-M_{k_0-1})^2}{M_{k_0}} \ge \varepsilon_0 \sum_{k=k_0}^{n} \frac{1}{k}$

$\therefore\quad \exists k_1 > k_0$ 使 $\frac{(M_{k_1}-M_{k_1-1})^2}{M_{k_1}} > m_0$

则 $\forall k_0 + 1 \le k \le k_1$ 取 $M_k = M_k'$ 即可

注: $\frac{(M_{k+1}-M_k)^2}{M_k+M_{k+1}} - \frac{(M_k-M_{k-1})^2}{M_k+M_{k-1}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4M_k^2}{M_k + M_{k+1}} + M_k + M_{k+1} - 4M_k - \frac{(M_k - M_{k-1})^2}{M_k + M_{k-1}} \\
&\ge \frac{4M_k^2}{\frac{M_k^2}{M_{k-1}} + M_{k-1}} + \frac{M_k^2}{M_{k-1}} + M_k - 1 - 4M_k - \frac{(M_k - M_{k-1})^2}{M_k + M_{k-1}} \\
&\ge 0
\end{aligned}$$

$(\because \quad 2(M_k - \frac{M_{k-1}}{M_k - M_{k-1}}) \geq M_{k-1} + M_k - \frac{M_{k-1}}{M_k + M_{k-1}}$

$\therefore \quad (M_k - \frac{M_{k-1}}{M_k - M_{k-1}})^2 \geq M_{k-1}(M_k - \frac{M_{k-1}}{M_k + M_{k-1}}))$

定理 3：若 $\{M_n, 1 \leq n \leq k_0\}$ 为恰当的,

且 $\frac{(M_{k_0} - M_{k_0-1})^2}{M_{k_0}} > 2$

那么若取数列 $\{M_n', 1 \leq n \leq k_0 + (M_{k_0} - M_{k_0-1})^2\}$

$\forall\ 1 \leq n \leq k_0$, $M_n' = M_n$

$\forall\ n > k_0$, $M_n' = M_n + (n - k_0)(M_{k_0} - M_{k_0-1}) + C_{n-k_0+1}^2$

则 $\{M_n', 1 \leq n \leq k_0 + n_{k_0}^2\}$ 为恰当的 (记 $n_{k_0} = M_{k_0} - M_{k_0-1}$)

且有:

$$\frac{M_{k_0} + n_{k_0}^2 - M_{k_0} + n_{k_0}^2 - 1}{M_{k_0} + n_{k_0}^2} < \frac{1}{2}\frac{M_{k_0} - M_{k_0-1}}{M_{k_0}}$$

和: $$\frac{(M_{k_0} + n_{k_0}^2 - M_{k_0} + n_{k_0}^2 - 1)^2}{M_{k_0} + n_{k_0}^2 - 1 + M_{k_0} + n_{k_0}^2} > 1$$

(证明略)

下面根据以上三个定理解决《蛙鸣》问题征解题 85, 原题是:

问题 85 设 n_k, $k = 1, 2, 3, \cdots$ 为自然数列 $\{n,\ n > 1\}$ 的一个子列, 严格单调增。记 $M(k) = \sum_{i=1}^{k} n_i$, 如果 $M(k)/n_k \uparrow \infty$, (1) 证明: 存在常数 $c > 0$, 使得 $\sum_{j=1}^{k} n_j^2/M(j) \leq cn_k$, 如不成立, 请举出反例。(2) 在上述条件下, 证明或举反例:

$$n_k \sum_{j=k}^{\infty} 1/M(k) \leq c < \infty.$$

下面我们来构造反例数列 $\{M_n\}$

取 $M_1 = 1$, $M_2 = 2$

再取一列 M_k, $(3 \leq k \leq k_1)$ 满足递推式 (b), 直至

$$\frac{(M_{k_1} - M_{k_1-1})^2}{M_{k_1}} > 3$$

再取一列 M_k, $(k_1 + 1 \leq k \leq k_2)$ 满足递推式 (a),

且 $k_2 = k_1 + (M_{k_1} - M_{k_1-1})^2$

再取一列 $M_k,(k_2+1\le k\le k_3)$满足递推式(b), 直至

$$\frac{(M_{k_1}-M_{k_1-1})^2}{M_{k_1}}>4$$

再取一列 $M_k,(k_3\le k\le k_4)$满足递推式(a), 且

$$k_4=k_3+(M_{k_3}-M_{k_3-1})^2$$

依次循环取遍全体自然数 n (k 的下标) 再取 $n_k=M_k-M_{k-1},\forall k\ge 2,n_1=M_1$

由定理1知 n_k为严格增自然数列

$$\text{因为}\quad \frac{M_{k+1}}{M_k}<\frac{M_k}{M_{k-1}}\quad\text{所以}\quad \frac{M_{k+1}}{n_{k+1}}>\frac{M_k}{n_k}$$

又因为有无穷多个自然数对 $(k_1,\ k_2)$ $k_1<k_2$ 每两个数对 $(k_1,k_2),(k'_1k'_2)$

或 $k_2<k'_1$ 或 $k_1>k'_2$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{M_k}{n_k}=+\infty$$

又:$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists k_1<k_2,k_2=k_1+n_{k_1}^2$

$\forall\ k_1<k\le k_2$满足递推式(a), 且 $\frac{n_{k_1}^2}{M_{k_1}}>\varepsilon$

那么:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k_2}\frac{n_j^2}{M_j}&\ge\sum_{j=k_1}^{n_{k_1}+k_1}\frac{n_j^2}{M_j}\\&\ge\frac{n_{k_1}}{2}\sum_{j=1}^{n_{k_1}}\frac{1}{\frac{1}{2\varepsilon}+t}\\&\ge\frac{1}{2}\ln(2\varepsilon n_{k_1}+1)n_{k_1}\\&\ge\frac{1}{4}\ln(2\varepsilon n_{k_1}+1)n_{k_2}\end{aligned}$$

则原题 (1) 中的 c 不存在, 又:

$$\sum_{j=k_1}^{n_1+k_1}\frac{1}{M_j}\ge\frac{1}{n_{k_1}}\cdot\frac{1}{2}\ln(2\varepsilon n_{k_1}+1)$$

所以 (2) 中的 c 也不存在

****
* **试题选登** *
****

一、 第七届全国大学生数学夏令营竞赛试题 (附解答)

第一试

1. 设 m, n 为奇自然数, $(m, n) = 1$ 试证

$$\sum_{0<i<\frac{m}{2}} \left[\frac{ni}{m}\right] + \sum_{0<j<\frac{n}{2}} \left[\frac{mj}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{4}$$

2. 设 A 和 B 为 n 阶实正交方阵。试证 $\det A \det B = 1$ 当且仅当 $n - rank(A+B)$ 为偶数。

3. 给定直线上的实值连续函数 f, g。设对直线上具有紧支柱的所有一阶连续可微函数 h, 都有 $\int_{-\infty}^{\infty} fhdx = -\int_{-\infty}^{\infty} gh'dx$
试证: g 为一阶可微函数且 $g' = f$

4. 试利用 Cauchy 积分公式及积分公式 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 来计算 $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$

5. 在区间 $[0, 1]$ 上定义函数 $f(x)$ 如下: 任取 $x \in [0, 1)$ 有小数表示 $0, n_1, n_2, n_3 \cdots$ 定义 $f(0, n_1, n_2, n_3, \cdots) = \max\limits_{1 \le i \le \infty} n_i$, 又 $f(1) = 1$ 试证 $f(x)$ 为可测函数。

第二试

1. 给定实数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 它适合条件

(1) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$

(2) $0 \le a_n \le \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \qquad \forall n = 1, 2, \cdots.$

试证: 对任意实数 $x \in (0, 1)$, 都有 (a_n) 之子序列 $\{a_{n_k}\}$ 存在, 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = x$

2. 给定域 F 及其上 n 个两两不同之自同构 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$.

试证: $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ 线性无关

3. 设 $f(x)$ 为单位圆 $D = \{z \in C \mid |z| < 1\}$ 上全纯函数, 且 $|f(z)| \le 1$. 设 D 中点 z_0 适合条件 $|z_0| \le \frac{m-1}{m}$, 其中 m 为固定自然数。设 z_0 及 $-z_0$ 都是 $f(z)$ 的 m 重零点。

试证: $|f(0)| < e^{-2}$

(提示: 考虑将 z_0 点映为原点的保角变换)

4. 设 (X, d) 为紧距离空间, $\{f_n\}$ 为 X 上连续函数序列, f 为 X 上连续函数满足

(i) $f_1(x) \ge f_2(x) \ge \cdots, \ \forall\, x \in X$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \ \forall\, x \in X$

试证: 函数序列 $\{f_n\}$ 在 X 上是一致地收敛于 f

5. 给定正常数 a, b 及空间曲线 $c : \Upsilon(t) = (4a\cos^3 t,\ 4a\sin^3 t,\ 3b\cos 2t)\ 0 < t < \frac{\pi}{2}$

试利用 Frenet 公式

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\tau\\ \nu\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \kappa\\ 0 & \kappa & o\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau\\ \nu\\ \beta\end{pmatrix}$$

求曲线 c 的曲率 k 及挠率 κ 及 Frenet 标架

注: 1. 每一试的考试时间为三小时。

2. 题目是按学科排序的。

解　答

第一试

1. 证: 对平面上任一点集 M, 用 $n(M)$ 表示其中整点数目。

令

$$D=(0,\ \tfrac{m}{2})\times(0,\ \tfrac{n}{2}).\qquad D_1=\{(x,\ y)\in D|\ y\geq\tfrac{n}{m}x\}$$

$$D_2=\{(x,\ y)\in D|\ y\leq\tfrac{n}{m}x\}.\qquad E=\{(x,\ y)\in D|\ y=\tfrac{n}{m}x\}$$

一方面

$$n(D)=\sum_{0<i<\frac{m}{2}}\sum_{0<j<\frac{n}{2}}1=\frac{(m-1)(n-1)}{4}$$

另一方面

$$n(D)=n(D_1)+n(D_2)-n(D_1\bigcap D_2)=n(D_1)+n(D_2)-n(E)$$

$$n(D_1)=\sum_{0<i<\frac{m}{2}}\sum_{\frac{n}{2}>j\geq\frac{n}{m}i}1=\sum_{0<j<\frac{n}{2}}\sum_{0<i\leq\frac{m}{n}j}=\sum_{0<j<\frac{n}{2}}\left[\frac{m}{n}j\right]$$

同理

$$n(D_2)=\sum_{0<i<\frac{m}{2}}[\frac{ni}{m}]$$

而 $n(E)=0$ 因为若整点 $(x_0,\ y_0)\in E$ 则 $0<x_0<\frac{m}{2}$. $y_0=\frac{n}{m}x_0$, $nx_0=my_0$

$\therefore\qquad m|nx_0$ 而 $(m,\ n)=1$

$\therefore\qquad m|x_0$ 矛盾。

$$\therefore\qquad n(D)=\sum_{0<i<\frac{m}{2}}[\frac{ni}{m}]+\sum_{0<j<\frac{n}{2}}[\frac{mj}{n}]$$

因此待证等式成立。

2. 证: 不难验证 $A'B$ 是 n 阶实方阵。从而 $\exists n$ 阶实正交阵 O. 使

$$OA'BO'=diag\left(I_(r),\ -I_(s),\ \begin{pmatrix}\cos\theta_1 & -\sin\theta_1\\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}\cos\theta_t & -\sin\theta_t\\ \sin\theta_t & \cos\theta_t\end{pmatrix}\right)$$

其中 $r,\ s,\ t$ 都是非负整数, 而 $\theta_i\in R$. $i=1,\ 2,\ \cdots,\ t$

于是 $det A det B = det A' det B = det A'B = (-1)^s$.

$$\begin{aligned} rank(A+B) &= rank A(I+A'B) = rank(I+A'B) = rank(I+OA'BO') \\ &= rank\ diag(2I_{(r)},\ O_{sxs},\ \begin{pmatrix} 1+\cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & 1+\cos\theta_1 \end{pmatrix} \cdots, \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} 1+\cos\theta_t & -\sin\theta_t \\ \sin\theta_t & 1+\cos\theta_t \end{pmatrix}) \\ &= r+2t = n-s \end{aligned}$$

$\therefore$ $det A det B = 1 \Longleftrightarrow (-1)^s = 1 \Longleftrightarrow s$ 为偶数 $\Longleftrightarrow n - rank(A+B)$ 为偶数。

3. 证: 令 $F(x) = g(0) + \int_0^x f(t)dt$, 则对一切具紧支柱的一阶连续可微函数 h

$$\int_{-\infty}^{\infty} fhdx = Fh|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} Fh'dx = -\int_{-\infty}^{\infty} Fh'dx$$

据题设又有 $$\int_{-\infty}^{\infty} fhdx = -\int_{-\infty}^{\infty} gh'dx$$

$$\therefore \quad -\int_{-\infty}^{\infty} Fh'dx = -\int_{-\infty}^{\infty} gh'dx$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} (F-g)h'dx = 0\ (*)$$

以下证 $f - g \equiv 0$ 反设 $\exists x_0 \in R$, $F(x_0) - g(x_0) \neq 0$。显然 $x_0 \neq 0$ 不失一般性, 设 $x_0 > 0$, $\varepsilon_0 = F(x_0) - g(x_0) > 0$ 由 $F - g$ 的连续性知

$\exists \delta_1 \in (0,\ \frac{x_0}{2})$ 使当 $|x - x_0| < \delta_1$ 时, $F(x) - g(x) > \frac{2\varepsilon_0}{3}$,

$\exists \delta_2 \in (0,\ \frac{x_0}{2})$ 使当 $|x| < \delta_1$ 时, $|F(x) - g(x)| < \frac{2\varepsilon_0}{3}$,

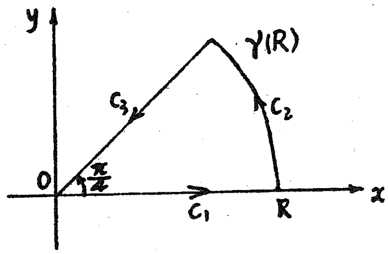
作函数 $s(x)$ 满足 $s(0) = -\delta_1$, $s(x_0) = \delta_2$, $s(-\delta_2) = s(\delta_2) = s(x_0 - \delta_1) = s(x_0 + \delta_1) = 0$, $s(x)$ 在 $[-\delta_2,\ 0]$, $[0,\ \delta_2]$, $[x_0 - \delta_1,\ x_0]$, $[x_0,\ x_0 + \delta_1]$ 上分别为线性。在这四个区间外, $s(x) \equiv 0$. 令 $h_0(x) = \int_{-\infty}^{x} s(t)dt$ 则 $h_0(t) \in C^{(1)}$ 且 h_0 具有紧支柱从而 h_0 应满足 (*)。即

$$\int_{-\infty}^{\infty} (F-g){h'}_0 dx = 0,\ 亦即\ \int_{-\infty}^{\infty} (F-g)sdx = 0$$

$$
\begin{aligned}
\text{但}\quad \left|\int_{-\infty}^{\infty}(F-g)sdx\right| &= \left|\int_{-\delta_2}^{\delta_2}(F-g)sdx + \int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_1}(F-g)sdx\right| \\
&\geq \left|\int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_1}(F-g)sdx\right| - \left|\int_{-\delta_2}^{\delta_2}(F-g)sdx\right| \\
&\geq \frac{2\varepsilon_0}{3}\int_{x_0-\delta_1}^{x_0+\delta_1} sds - \frac{\varepsilon_0}{3}\int_{-\delta_2}^{\delta_2} sdx \\
&= \frac{\varepsilon_0}{3}\int_{-\delta_2}^{\delta_2} sdx > 0. \quad \text{矛盾!}
\end{aligned}
$$

因此 $F \equiv g$ 于是 $g = F$ 是一阶可微函数且 $g' = F' = f$

4. 解: 令 $F(z) = e^{-z^2}$ 则 $F(z)$ 在 C 上解析。围道 $\gamma(R)$ 由曲线 $y = 0, 0 \leq x \leq R$; $\{z \in C||Z| = r, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$ 及 $\{z \in C||Z| = R, 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}\}$ 构成。如图下所示由 Cauchy 积分公式得



$$
\int_{c_1} Fdz + \int_{c_2} Fdz + \int_{c_3} Fdz = 0 \qquad (*)
$$

而 $\int_{c_1} Fdz = \int_0^R e^{-x^2}dx$,

$$
\begin{aligned}
\int_{c3} Fdz &= e^{i\frac{\pi}{4}}\int_r^0 e^{-ix^2}dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\int_0^R(\cos(x^2)+\sin(x^2))dx + i\int_0^R(\cos(x^2)-\sin(x^2))dx\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{c_2} Fdz\right| &= \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2e^{i2\theta}} iRe^{i\theta}d\theta\right| \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\cos 2\theta}d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2\sin 2t}dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} Re^{-R^2t}dt \ (\sin 2t \geq t) \\
&= -\frac{1}{R}e^{-R^2t}dt|_0^{\frac{\pi}{4}} \leq \frac{1}{R}
\end{aligned}
$$

在 (*) 中令 $R \to \infty$ 得

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\infty} (\cos(x^2) + \sin(x^2))dx + i \int_0^{\infty} (\cos(x^2) - \sin(x^2))dx \right]$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\infty} (\cos(x^2) - \sin(x^2))dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} (\cos(x^2) + \sin(x^2))dx = \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

$$\therefore \qquad \int_0^{\infty} \cos(x^2)dx = \int_0^{\infty} \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

5. 证: 先证 $m(E(f \le 8)) = 0$ 对任意自然数 k. $\quad x = 0.\quad n_1 n_2 \cdots n_k n_{k+1} \cdots \in$ $E(f \le 8) \Rightarrow n_i \le 8. \quad i = 1, 2, \cdots, k.$

于是

$$E(f \le 8) \subset \bigcup_{n_1=0}^{8} \bigcup_{n_k=0}^{8} [0, n_1, n_2 \cdots, n_k. \quad 0, n_1, n_2, \cdots, n_k 9) \bigcup \{1\}$$

而后者的测度 $\le \sum\limits_{n_1=0}^{8} \cdots \sum\limits_{n_k=0}^{8} \bigcup\limits_{n_k=0}^{8} \frac{9}{10^{k+1}} = (\frac{9}{10})^{k+1} \to 0 (k \to \infty)$

$\therefore \qquad mE(f \le 8) = 0.$

由此知 $mE(f = i) = 0$ $0 \le i \le 8$. $E(f = 9) = [0, 1] - E(f \le 8)$ 亦为可测集 (测度为 1) 这就证明了 f 是可测函数。

第二试

item 1. 证: 设 a_{n_1} 是序列 (a_n) 中第一个小于 x 的项。($\because \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0 \quad \therefore$ 这样的项是存在的) 则

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} a_k \ge x \left(n_1 = 1 \quad \text{时} \quad \sum_{k=n_1}^{\infty} a_k = 1 > x; \text{显然}, n_1 \ge 2\text{时}, \sum_{k=n_1}^{\infty} a_k \ge a_{n_1 - 1} \ge x \right)$$

若

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} a_k = x$$

则结论已成立。否则

$$\exists m_1 \geq n_1,\ \sum_{k=n_1}^{m_1} a_k < x,\ \sum_{k=n_1}^{m_1+1} a_k \geq x$$

记 $B_1 = \sum\limits_{k=n_1}^{m_1} a_k$, 取 a_{n_2} 是序列 $(a_n)_{m_1+1}^{\infty}$ 中第一个小于 $x - B_1$ 的项, 则 $n_2 > m_1 + 1, \cdots\cdots$ 小于 $x - B_2$ 的项, 重复以上的论述。

反设题目的结论不真, 则对某个 $x \in (0,1)$, 我们将得到一列自然数: $n_1 \leq m_1 < n_2 \leq m_2 < \cdots < n_k \leq m_k < \cdots$ 以及实数列

$$\{B_k\}(B_1 = \sum_{k=n_1}^{m_1} a_k, B_{i+1} = B_i + \sum_{k=n_{i+1}}^{m_{i+1}} a_k)$$

满足条件 $B_i < x$ 且 $x - B_{i-1} \leq \sum\limits_{k=n_i}^{m_{i+1}} a_k$

$$\therefore \qquad x \leq B_{i-1} + \sum_{k=n_i}^{m_{i+1}} a_k) = B_i + a_{m_i+1}$$

因此 $-a_{m_{i+1}} < B_i - x < 0$ 而 $\lim\limits_{i\to\infty} a_{m_{i+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ $\therefore$ $\lim\limits_{i\to\infty} B_i = x$

于是我们又得到一个 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_1}, \cdots, a_{m_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{m_2}, \cdots\}$ 满足 $(\sum\limits_{k=n_i}^{m_1} + \cdots + \sum\limits_{k=n_i}^{m_i} + \cdots)a_k = x$ 与反设矛盾。

2. 用数学归纳法 $n = 1$ 时结论显然

假设结论对自然数 n 成立。则对于域 F 上的任 $n+1$ 个两两不同之自同构 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n+1}$ 若它们的线性相关, 则 $\exists F$ 上不全为零的元素 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}$. $c_1\sigma_1 + \cdots + c_n\sigma_n + c_{n+1}\sigma_{n+1} = 0$

显然所有的 $c_i \neq 0$ 否则 $\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \cdots, \sigma_{n+1}$ 这 n 个两两不同之自同构便线性相关了, 与归纳假设矛盾。令 $d_i = -c_{n+1}^{-1}c_i$ $i = 1, 2, \cdots, n$ 则

$d_i \neq 0$. $\sigma_{n+1} = d_1\sigma_1 + \cdots + d_n\sigma_n$. $\forall\ x_0, x \in F$. $\sigma_{n+1}(x_0)\sigma_{n+1}(x) = \sigma_{n+1}(x_0x) = d_1\sigma_1(x_0x) + \cdots + d_n\sigma_n(x_0x) = d_1\sigma_1(x_0)\sigma_1(x) + \cdots + d_n\sigma_n(x_0)\sigma_n(x)$ (1)

另一方面 $\sigma_{n+1}(x_0)\sigma_{n+1}(x) = d_1\sigma_{n+1}(x_0)\sigma_1(x) + \cdots + d_n\sigma_{n+1}(x_0)\sigma_n(x)$ (2)

比较 (1) (2) 两式右端即知 $d_i\sigma_1(x_0) = d_i\sigma_{n+1}(x_0)$ 而 $d_i \neq 0$

$\therefore \quad \sigma_i(x_0) = \sigma_{n+1}(x_0) \qquad (3)$

因 (3) 对 $\forall x_0 \in F$ 成立

$\therefore \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = \sigma_{n+1}$ 与这些自同构两两不同矛盾 $(n+1 \geq 2)$

因此 $\sigma_1 \cdots \sigma_{n+1}$ 线性无关。这说明结论对自然数 $n+1$ 也成立。

由数学归纳法原理知题目结论总成立。

3. 证: 函数

$$f(z)/\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)^m\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)^m$$

在圆盘 $|z|<1$ 只有两个可去奇点: z_0 及 $-z_0$ 令

$$F(z)f = (z)/\left(\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right)^m\left(\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right)^m \quad (z \neq \perp z_0)$$

并补充其在两奇点定义, 使 $F(z)$ 成为圆盘上的解析函数。

$$\forall \sigma \in (0,\ 1)\text{记}M_{1\sigma} = \min_{|z|=1-\sigma}\left|\frac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|,\ M_{2\sigma} = \min_{|z|=1-\sigma}\left|\frac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right|.$$

则 $M_{1\sigma} \to 1, M_{2\sigma} \to 1(\sigma \to +0)$ 在 $|z| = 1-\sigma$ 上 $|F(z)| \leq \frac{1}{(M_{1\sigma}M_{2\sigma})^m}$

由最大模原理 $|F(0)| \leq \frac{1}{(M_{1\sigma}M_{2\sigma})^m}$ 令 $\sigma \to +0$ 得 $|F(0)| \leq 1$ 即

$$\left|\frac{f(0)}{(-z_0)^m(z_0)^m}\right| \leq 1$$

$\therefore \quad |f(0)| \leq |z_0|^{2m} \leq (1-\frac{1}{m})^{2m} < e^{-2}$

4. 证: 令 $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ 则 $g_n(x)$ 都是 X 上连续函数, 而且满足

(iii) $\quad g_1(x) \geq g_2(x) \geq \cdots. \quad \forall x \to X$

(iv) $\quad \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = 0. \quad \forall x \to X$

令 $M_n = \max\limits_{x \in X} g_n(x)$ 显然 $g_n(x) \geq 0 \forall x \in X$

$\therefore \quad M_n \geq 0$

为证 f_n一致收敛于 f 只须证 $g_n(x)$ 一致收敛于零。也即只须证 $M_n \to 0$

对 $\forall\ n \in N.\exists x_n \in X.\quad g_n(x_n) = M_n \quad M_n = g_n(x_n) \geq g_n(x_{n+1}) \geq g_{n+1}(x_{n+1}) = M_{n+1},\ \forall\ n \in N$

$\therefore \quad \{M_n\}$ 是单调减少序列

$\because \quad M_n \geq 0$

$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} M_n$ 存在。

设 $\lim_{n\to\infty} M_n = M$

反设 $M > 0$. 显然 $M_n \geq M$

$\because \quad X$ 是紧距离空间

$\therefore \quad (x_n)$ 有收敛子列 (x_{n_k}) 设 $x_{n_k} \to x_o \in X$

$\because \quad g_1$ 连续

$\therefore \quad \lim_{k\to\infty} g_1(x_{n_k}) = g_1(x_0)$

$\therefore \quad \exists$ 自然数 K_1, 当 $k > K_1$ 时

$$g_1(x_0) \geq g_1(x_{n_k}) - \frac{M}{2} \geq g_{n_k}(x_{n_k}) - \frac{M}{2} \geq M - \frac{M}{2} = \frac{M}{2}$$

同理 $g_2(x_0) \geq \frac{M}{2} \cdots, g_n(x_0) \geq \frac{M}{2}, \cdots$

于是 $\underline{\lim}_{n\to\infty} g_n(x_0) \geq \frac{M}{2}$ 与 $g_n(x_0) \to 0$ 矛盾!

$\therefore \quad M = 0$ 证毕。

5. 解:

$$\frac{d\Upsilon}{dt} = (-12a\cos^2 t\sin t,\ 12a\cos t\sin^2 t,\ -6b\sin 2t) = 6\sin 2t(-a\cos t,\ a\sin t,\ -b)$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dt} = |\frac{d\Upsilon}{dt}| = 6\sqrt{a^2+b^2}\sin 2t, \qquad \mathrm{T} = \frac{d\Upsilon}{dt}/\frac{ds}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t,\ a\sin t,\ -b)$$

$$\dot{\mathrm{T}} = \frac{d\mathrm{T}}{dt}/\frac{ds}{dt} = \frac{1}{6\sqrt{a^2+b^2}\sin 2t}\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\sin t,\ a\cos t,\ 0) = \frac{a}{6(a^2+b^2)\sin 2t}(\sin t,\ \cos t,\ 0)$$

$$\therefore \quad k = \frac{a}{6(a^2+b^2)\sin 2t} \qquad N = (\sin t,\ \cos t,\ 0)$$

$$B = T\times N = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\cos t, -b\sin t, -a)$$

$$\dot{B} = \frac{dB}{dt}/\frac{ds}{dt} = \frac{1}{6(a^2+b^2)\sin 2t}(-b\sin t, -b\cos t, 0) = -\frac{b}{6(a^2+b^2)\sin 2t}N$$

$$\therefore \quad \kappa = -\frac{b}{6(a^2+b^2)\sin 2t}$$

二、1991年武汉大学中法试验班竞赛试题

1. 设 $f: N \to N$ 是满足 $f(n+1) > f(f(n))$ 的一个函数，证明：$f(n) = n$，$n \in N$.

2. 在一次乒乓球竞赛中有 n 个选手参加，每个人需与所有其他 $n-1$ 个人较量，没有弃权现象。证明可以按如下方式将选手编号：第 1 号赢第 2 号，第 2 号赢第 3 号，…，第 $(n-1)$ 号赢第 n 号。

3. 证明：不存在这样的函数 $f: R \to R$ 满足 $\forall a,\ x \in R.\ f(x+a^2) - f(x) \geq a$.

4. 设 $(A,\ +,\ \cdot)$ 是一有单位元的环。假定 $\forall x \in A$，$x^3 = x$ 证明 $(A,\ +,\ \cdot)$ 是可交换的。

5. 设 X 是 $P(N)$（即 N 的所有子集全体所成的集合）的子集，它关于"$\subset$"是全序集（即 $\forall A,\ B \in X$，$A \subset B$ 或 $B \subset A$），X 是否至多是可数的?

6. 设整数 $n > 2$ 时，$D(Z,\xi) = \{\ Z \in C |\ |Z - Z_0| \leq \xi\}$ 令 E 是由 n 个两两距离 ≥ 2 的复数所组成的集合 A 的集类，即

$$E = \{A | A\text{是}n\text{个复数组成的，且满足}\forall x,\ y \in A,\ x \neq y,\ |x-y| \geq 2\}$$

令 ξ_n 是那些至少包含 E 中一个集合 A 的圆盘的半径的下确界，即

$$\xi_n = inf\{\xi > 0 | A \in E_0,\ Z_0 \in C,\ \text{使得}\ A \subset D(Z_0,\ R)\}$$

给出 $\log \xi_n$ 的一个简单的等价无穷量。

****
* 数学文摘 *
****

回顾与…… *

小平邦彦

“回顾与……”的后半部分是“……”。按惯例, 想讲的标题是“回顾与展望”, 但“回顾”就已经够奇怪了 (笑)。我的记性也是差, 说忘就忘。光是忘记倒也好了, 还要记错 (笑)。这次岩波书店要出我的论文集, 请 W.L.Baily (Chicago 大学教授) 作序。Baily 说序言的原稿已完成, 希望过过目, 看完后觉得有两三处错误。想要订正, 为慎重起见看了单行本, 原来是我搞错了。因此这“回顾”已经很奇怪了, 所以加上“回顾? ”与“? ”。展望当然是“……”。未来之为未来, 原来就是因为不能预料, 能够预料当然就是现在了。

想想我自已, 常常是发生预料不到的事情。第一个预想不到的就是成了数学家。初中时想当个工程师。当时不知道还有以写论文度日的数学家这种职业。高中时期因为是从前的一个高中, 现在的驹场, 看到高中老师似乎既有地位可安闲舒适, 所以就想当个高中教师。上大学时, 拿不定主意是选物理还是选数学, 但因为选物理得考化学, 所以才选了数学。对于我来讲数学怎么也能对付, 而数学以外的其它各科都不行, 尤其是化学对付不了, 结果就进了数学系, 当了数学家。

再一个是连梦也想不到会在美国生活 18 年。我想如果没有战争, 会一直很愉快地在日本过的。学生时期听说先生去过德国, 因语言不通, 在国外过活很困难, 因此我是下决心绝对不去的。由于战争时期, 日本没有食品, 一片悲惨景象, 正当其时 Weyl 来了邀请信, 就一下子改变了主意, 到了美国。

还有一点完全没有想到的是被选为理学部长 (笑)。的确没有那样的约定。记得回日本时, 曾经约定可以不干行政事务 (笑), 契约观念在日本好象不太强, 违反契约而被选为 (理) 学部长……。因此“展望”这一方面, 连自己的将来都全然不知, 哪里还知道数学的将来……。

我当学生时与今天很不一样, 数学系的学生一年级才 15 名, 并以学部为主, 大学院只有一个房间, 讲课、讨论班 (seminar) 什么也没有。到学部三年级有了讨论班, 我还记得是跟着弥永先生参加讨论班, 学了些什么却全然想不起来了……, 讨论班的情景脑子里也没有印象了 (笑)。总之那时候有泛函分析全盛之感, 大家都学泛函分析。Banach 空间啦, Hilbert 空间啦, 等等。von Neumann 最为有名, 他撰写了时髦的 Hilbert 空间的论文。因此我也做着那方面的工作。代数几何等方面的知识几乎什么也不知道。当时的岩波数学讲座全部三十卷中, 代数几何只有一分册, 大约 100 页, 我还记得看了这本书后想到的是还有怪数学呢。其时, Weyl 的《群论与量子力学》、von Neumann 的《量变力学的数学基础》等书已出版, 可以看出数学与物理的密切关系, 所以我也想懂一点物理, 从数学专业毕业后又进了物理专业。与现在不同, 那时好象很清闲, 说是物理专业的学生, 却写着数学论文。从物理系毕业后, 1942 年任文理大学数学系副教授, 1944 年任东京大学物理系副教授。也不知道究竟为了什么, 物理论文一篇也没有, 却当了物理副教授, 现在是难以想象的。要是现在, 说起有没有论文, 或者有几篇论文, 教授会上就会一片骚动 (笑)。我虽然当了物理教师, 讲的却还是物理数学等。讨论班如果不搞物理, 就读 Heisenberg 的场论的论文。然而讨论班真的是讨论物理呢还是讨论数学呢? 这是一个难以回答的怪问题。我的讨论班上就有好几个从物理转到了数学 (笑)。我也没有确定的专业, Hilbert 空间、微分方程、Haar 测度等等都顺便学习过。连多此一举的连续几何都学过, 折腾了一夏天写完了论文 (与古屋合作)。所谓连续几何简而言之是无限维的射影几何, 射影几何的整体维数是 1, 对于 0 和 1 之间的任意实数 μ, 存在 μ 维的线性子空间。然而却不存在点。这种不可思议的几何是由 von Neumann 发明的, 还宣扬要将它用于量子论研究, 不由地受骗信以为真…… (笑)。现在想来, 实在不合算, 但是物理将来会怎样也不知道, 或许连续几何会出乎意料的得到应用。

我就象现在这样对什么都有兴趣,但从 1942 年左右起却被 Weyl的黎曼面理论吸引住了。我详细地阅读了他的名著《黎曼面的概念(Die Idee der Riemannschen Flache)》,并含糊地考虑要将一维复流形的理论设法推广到二维以上。也许现在的年轻人觉得复流形是早就有的,但那时候一般的复流形概念还没有清楚地意识到。《黎曼面的概念》是 1913 年出的,要是现在有人会立刻推广到高维,而过去,好象谁也没有考虑推广。

如熟知,黎曼面上的实值函数 μ 是 (多值) 复解析函数的实部的必要且充分条件是 μ 为调和函数,《黎曼面的概念》的组成是: (i) 首先,在黎曼面上构造具有给定奇异性的实调和函数; (ii) 其次,证明以该函数为实部的复解析函数的存在。在二维以上的复流形上,实调和函数一般不为复解析函数的实部。虽说是这样,但却不知如何着手研究,所以为了把《黎曼面的概念》的 (i) 部分推广到 n 维实黎曼空间,首先读了 Hodge 的论文等。Hodge 的论文很难读,最终也没弄明白,但利用 de Rham 定理、Hadamard 的偏微分方程基本解及 WWeyl 的正交射影方法,知道可以简单巧妙地将 (i) 的部分原封不动推广到 n 维,仅将这个结果发表在 1944 年日本学士院纪要上。内容详细的论文因为战争而束之高阁。战后角谷说可托美国驻军中的熟人送到 Annals of Math.,此外也别无他法。到校样来时已经忘记一半了。论文最后刊登在 1949 年的 Annals。

忘了是 1946 年还是 1947 年,那时不知由于什么契机 —— 大概不是物理讨论班吧! —— 开始对二阶常微分方程的特征值问题有了兴趣,证明了在特征函数展开中出现的表示密度分布的公式。怎么会想到干这个呢? 如果揭开秘密,是在 Stone 关于 Hilbert 空间的著作的最后一章中出现 Jacobi 矩阵特征值的说法。Jacobi 矩阵特征值问题就是二阶差分方程的特征值问题。把这个差分方程看成直线上用 ε 间隔来分布的关于离散点集上的函数的方程。若取 $\varepsilon \to 0$ 的极限,就得到二阶常微分方程。这样就把 Jacobi 矩阵的理论改为常微分方程的理论,这就是上述的公式,也是举手之劳。

那时,大概是 1948 年春天,菅原先生告诉说“已请高木先生向 Weyl 写推荐信”。过了半年左右,Weyl 来了邀请信问我去不去高级研究所工作。于是我马上与菅原先生一起到高木先生家表示感谢,高木先生悠然而言: “哎……实际

上还懒得什么都没写呢……”(笑)。到底是名师, 总是这样从容不迫 (笑), 深感佩服。我真希望也早些成为那个样子, 但是刚才还应青年人的请求, 匆匆忙忙写了推荐信 (笑)。

1949 年秋我去了普林斯顿, 当时英语一点不懂也真够苦恼的。Weyl 先生对我英语如此之差感到很惊讶, 使劲盯着我看。到第二学期, 英语稍微懂了一些, 就叫我参加讨论班。战后英语教育进步了, 现在年轻人似乎都可以自由听说英语, 我是一点也不懂……。尽管如此, 研究所有一位优秀的秘书 Miss Eiglhart, 多亏她帮忙, 虽然我不会说英语, 但并没有耽误事。有事的时候, 就走到她那儿站着不说话, 她就能准确无误地知道我的意思…… (笑)。

到普林斯顿不久, 大学的 Spencer 教授就通知我去, 见面时他说希望我在讨论班讲讲调和形式。我因为不会讲英语就拒绝了, 他却说, “不会讲英语”不就是用英语说的吗 (笑)。结果每周一次在大学讲调和形式。这个讨论班上有谁, 却怎么也记不清了。

第二学期, 也就到了 1950 年 1 月, 在研究所 Weyl 和 Siegel的指导下开始了调和形式的讨论班。Weyl 首先讲了二三次历史, 接着 de Rham 介绍了根据 current 方法的调和形式, 然后我讲调和形式对复流形的应用。我说的是, 在紧 Cayley 流形上是否存在具有给定因子的有理型函数, 对于这一问题, 给出了有关紧黎曼面上的 Abel 定理的高维扩张。

即使走到了这一步, 也还是不太清楚应该怎么做才能把黎曼面的理论推广到二维以上。翻开《黎曼面的概念》, 就觉得 Riemann-Roch 定理是这一理论的中心, 所以首先尝试把 Riemann-Roch 定理推广到二维紧复流形上, 在假定 Cayley 度量的条件下便一举证明了二维时的 Riemann-Roch 定理。当时遇到了意大利代数几何学家 Conforto, 我们谈起了Riemann-Roch定理, 他说, 那就做做实验, 于是我们在研究所的院子里一边散步, 一边将定理用于各种例子, 心算验证。对他的丰富知识我由衷钦佩, 但按他的考虑, 定理这玩艺儿即使证明了, 若不做实验看看, 仍然不能确认……(笑)。后来与 Andreotti 见面交谈, 他说“祝贺你完成了这一问题的证明”。积多年之修业, 今天我终于明白了很难的是…… (笑) 。的确, 数学中也是什么都有的 (笑)。

记不太清楚是 1951 年还是 1952 年, Spencer 说要学习层 (sheaf), 这就开始了层的讨论班。我也参加了这一讨论班, 层这种东西我的第一印象是, 总觉得它是没有实体的抽象的怪物。连做梦都没有想到层会在代数几何中起中心的作用。我真正感到层的有用之处则是在与 Spencer 合作的论文中, 成功地证明了 Severi 的猜想 $p_a = P_a$ 的时候。Severi 猜想就是代数簇的两种算术亏格 p_a 与 P_a 一致。1949 年 Severi 关于意大利学派的代数几何所作的讲演中, 以远方的星为例, 强调了其解决的难度。而利用层的理论却很容易解决了这一"难题", 所以自然就想到了层。

因为一举完成了二维时的 Riemann-Roch 定理, 接着就尝试三维的。但不知什么原因, 出来的结果乱七八糟, 对一般场合该怎么做还无从下手。在此使用层理论来研究看得最透彻的是 Serre。Serre 有一天来信说, Riemann - Roch 定理的一般形式大概为

$$\sum_q (-1)^q \dim H^q(M, \vartheta(F)) = \chi(M, F)$$

诚然, 说来还真是那样, 证明 Serre 猜想的这个公式成了当时复流形论的中心问题。我也试过考虑这一中心问题, 但怎么也理不出头绪该怎么去思考。我好象很缺乏解决难题的能力, 一遇困难状况便一筹莫展。

忘了当时是什么样的机会, 模仿矢野 -Bochner 的书《 Curvature and Betti numbers》, 想起了求上同调群 $H^q(M, \Omega^p(F))$ 消失的条件, 证明了所谓的消灭定理, 然后应用下面的定理, Hodge 流形都是代数的。常有年轻人问起, 是怎么想到这定理的, 但我却怎么也想不起来了 (笑)。那时的中心问题是 Riemann - Roch 定理, 觉得别的怎么都行, 所以更没有留在记忆中了。

1953 年秋 Hirzebruch 解决了这个中心问题。当时我并没有问他是怎样解决的; 如果打听的话, 他恐怕也会说记不太清楚了。那时他一直在做陈 (Chern) 类的多项式的计算, 并假定 Riemann - Roch 定理正确, 导出各种各样的结果。假如定理不正确该怎么办呢? 想起这些, 就很快地证明了定理是正确的 (笑)。我的想象是, 要证明定理并不是进行计算, 大概是在做各种计算时突然想出定理的证明。

中心问题解决了, 复流形的一般理论有告一段落之感, 不知道还可以做些

什么。这才想到要研究复流形的结构等问题。开始了曲面、即二维紧复流形结构的研究。1952 年在与 Chow 合作的论文中已经证明了, 具有代数独立的两个有理型函数的曲面是代数曲面, 所以这回问题当然就是只具有一个代数独立的有理型函数的曲面的结构。当时有井草的猜想, 是说紧复流形都由代数簇与复环面组成。现在想来这是毫无道理的猜想, 但当时却觉得, 既然那么说, 也许是那么回事了。这一猜想如果正确, 那么只具有一个代数独立有理型函数的曲面, 就应该是以椭圆曲面, 亦即以代数曲线上的椭圆曲线为一般纤维的纤维曲面, 通过调查可知确实如此。以此为契机开始了椭圆曲面的研究, 开始一看, 古典椭圆函数论很有意思并且很起作用, 椭圆曲面论自然就完成了。

考虑由于紧复流形是将有限个坐标邻域贴在一起, 所以其复结构的变形无非是改变贴法, 这是与 Spencer 共同研究复结构变形理论的基本思想。我想是 1956 年秋, 当时正在研究所的 Frölicher 与 Nijenhuis 从微分几何的立场出发, 成功地证明了复射影空间的复结构不能变形。在谈话会上听了他们的证明, 模模糊糊地想到, 变形不就是改变贴法吗? 当然改变贴法也未必改变复结构, 所以是毫无道理的幼稚想法。暂且不论这种想法, 调查一下紧复流形M的复结构随时间 t 变化的形式, 复结构关于 t 的微分, 亦即变形的速度可以用上同调群 $H^1(M,\Theta)$ 的元表示, 其中 Θ 是 M 上正则向量场的层。由此, M 的模数 m 与 $\dim H^1(M,\Theta)$ 之间就应有密切关系。通过二三个简单例子的计算, 等式

$$m = \dim H^1(M,\Theta)$$

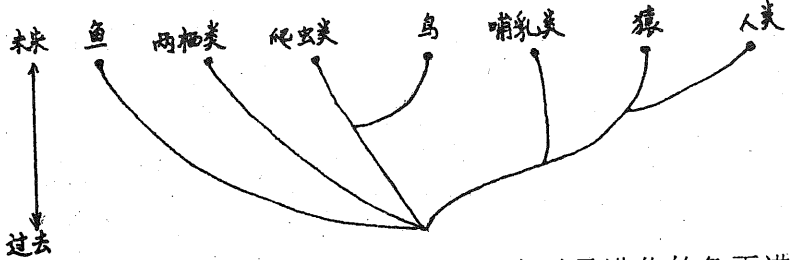
都成立。这是很奇妙的。根据变形就是改变贴法的幼稚想法, 很快发现了反例变形理论不成立, 想要就此止步, 但调查各种例子一看, 等式 $m = \dim H^1(M,\Theta)$ 总成立。于是就想到这等式也许是正确的, 尝试了各种证明, 却总不能得到预想的结果, 变形理论就是在不断尝试的过程中逐渐形成的, 所以最初的工作完全是实验科学。

回首往事, 我能勉力完成自己份内的工作, 是侥幸在普林斯顿开始研究复流形论的新领域时, 偶然与 Spencer 这样优秀的共同研究者邂逅。到 Hirzebruch 证明了 Riemann - Roch 定理, 复流形论的研究才告一段落。至此, 从 Weyl 与 Siegel 指导的讨论班算起屈指已 4 年, 从 Spencer 说要学习层起还不足两年。假如迟

几年去普林斯顿, 不就没有自己的那些工作了吗? 数学研究固然只是在头脑中思考, 研究中感受是主观的行动. 但事后想想, 最后还是受到命运支配。

1962 年左右我曾谈起过回国之事, 1967 年约定回国后不干行政事务, 于是就回来了 (笑)。刚回国时认为对于搞学术研究日本也是个很好的地方, 可时间不长就被安排干点行政事务工作。最后, 又当了理学部长, 真是不可思议, 回国时已经约定不做行政事务工作, 难道谁也不记得了吗? (笑) 学部长的工作如有兴趣, 还是很有意思的, 但若没有兴趣, 就没有比这更讨厌的了。没有兴趣的人就别让他当, 那就好了。我也不知道怎么才能不当学部长 (笑)。我以为大概总是在教授会上最好不说话, 我几乎连教授会都不参加, 尽管如此却还是当上了。

标题的“……”如开头所说, 要预料数学的进步及展望其将来, 我是无能为力。但是进步的模式是否决定了呢? 事务进步的典型是生物进化, 那么数学进步的模式与生物进化的模式是否相同呢? 据说动物进化的模式如下图,



在三四亿年前鱼进化成两栖类。但并不是当时最进化的鱼再进化成两栖类的, 而是鱼的幼稚的 (primitive) 形态进化成了两栖类。4 亿年前的事了, 实际到底是怎样当然不知道, 但我们不妨稍稍乱猜一下, 当时已经很出色的鱼, 英姿飒爽, 遨游在海表面附近清澈的水域。这种鱼的子孙现在还是鱼, 例如真鲷…… (笑)。当时鱼的非常幼稚的形态则在海底的泥土中挣扎, 来回乱爬。它们的子孙不知什么时候爬上陆地成了两栖类。然后幼稚形态的两栖类进化而成爬虫类……幼稚形态的猿进化而成人类。

我觉得数学进步的模式也与此相同。某个领域进步了, 并非由其进步的是最前沿产生新的领域, 而是从该领域的原始 (primitive) 之处产生新领域。关于数学的现状就不说什么了, 免得引起误会。看看 1940 年前我还是学生时的状况, 那时相当于真鲷的领域是平面几何。当时平面几何还很兴盛。例如发现 Feuerbach 定理的二三种证明的大数学家就有好几位。平面几何是二千年前开

始, 其形态没有变化而持续进步的透明学科, 正好相当于真鲷。解析几何是由平面几何发展起来的, 它不是从当时平面几何的最前沿, 而是从平面几何的初级之处发展的。

我们研究数学的情况也同样, 确定一个专门领域, 在其最前洞察一切的情况下进行工作, 虽然能够得出漂亮的结果, 但是不会出惊人的变化。而钻进泥沼之中, 在黑暗中摸索挣扎、来回乱爬, 不知什么时候就会得出意想不到的珍奇结果。我觉得新领域就是这样产生的。

话已经离奇了, 干脆再说一件可笑的事, 如果根据现代数学的主流形式主义的说法数学不过是排列一些其自身没有意义的符号的游戏, 我却觉得这很可笑。例如在 Hilbert 的几何基础论中, “点”、“直线”等等都是没有意义的无定义词, 就是用“鲸”、“猪”等等置换也完全无妨。然而, 我们在证明中例如在证明定理“三角形的内角和等于二个直角”时, 我们就在纸上描绘或者在头脑中想像三角形, 如果代之以去看三条鲸与三头猪的图, 证明恐怕就不可能。

又如为要写公理集合论的书, 按理只要由公理系出了根据推理规则依次写下导出的式子就行。由于原则上符号也好, 式子也好都没有意义, 所以没有任何理由选择特定式子。因此只有将公理系导出的式子, 例如按其长度的顺序一个不漏地全部写下来。那就恐怕连写几十万页也没个完。假定百万页写完了, 这种书最终也无法读。实际上不会有这种怪事, 因为只要从公理系导出的无数式子中, 选出具有重要意义的特定式子, 按特定顺序书写即可。只要站在不考虑意义的形式主义立场上, 就不可能写公理集合论的书, 形式主义难道不是骗人的吗?

Weyl 是直观主义者。一次不知因为什么事去见他, Weyl 说: “我也许是老式的了 (old - fashioned), 总觉得正交射影的方法不好, 你的论文最好也改成不用正交射影的方法来写”, 这真是个打击。如所知, 在正交射影的方法中, 首先考虑给定空间上的平方可积函数全体作成的 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$, 而在 Weyl 的直观主义立场中, $\mathcal{H}$ 这样大的集合的存在似乎还没有确认。1955 年出的《黎曼曲面的概念》的新版序言中, Weyl 说“一时想到要把 Dirichlet 原理改成本质上等价的正交射影方法, 但结果没有改成。其理由就不作说明”。我想像其理由仍然还

是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 的存在性没有确认。

Gödel 的立場是实在论, 他认为数学的对象是独立于我们的定义或构造中的实际存在, 这种实际存在与物理学假定物质的存在同样是正当的。我的立場也是实在论 —— 听起来似乎很伟大, 不过 Gödel是深思熟虑结果的实在论, 而我的则是不加思索的朴素的实在论。我觉得与使用巨大的加速器, 拍摄几万张照片, 终于发现的奇妙的基本粒子的事情相比研究 $K3$ 曲面那样的数学对象, 真是非常确切的实际存在的事物了……。

如果除去基础论的专家, 那么大多数数学家, 即使其立場是形式主义的, 但其内心恐怕还是实在论。我们数学家不说发明新定理而说发现新定理, 就是因为感到该定理是独立于发现它的数学家, 从宇宙的开始起就实际存在的。尽管如此, 现代数学的主流仍为形式主义, 我想这与人类头脑的机理有密切的关系。我的谈话越来越离奇了, 就讲这些吧…… (鼓掌)。

[摘自《数学译林》1992 年 3 期]