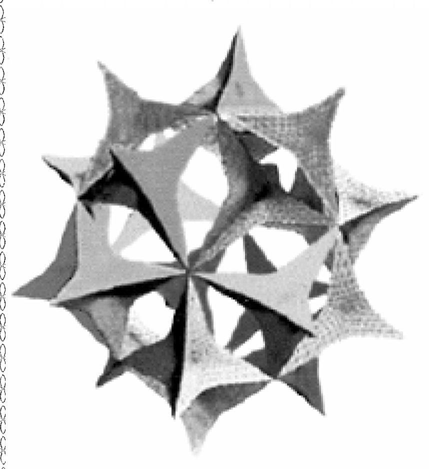
蛙鸣

第 53 期



中国科学技术大学

《蛙鸣》编委会

主办

数学系学生会学习部

一九九八年十月

目　　录

主编　　黄文

责任编辑　万振东　李锦嘉　黄文

数 学 课 程

A.Weil　著 陈天权 译

译 者 的 话

A.Weil 是著名法国数学家,在数论,多元复变,代数几何,抽象调和分析等方面都有过出色工作。战后，他移居美国，长期在芝加哥大学执教。本文是他给芝加哥大学数学系学生写的关于数学课程的简短指导。文章写在二十八年前。这二十八年来，数学又有了新的发展。数学与其他科学分枝的关系，数学与社会发展的关系都呈现了许多新的特色，这些在 A.Weil 的文章中当然不会有所反映，但是 A.Weil 的文章仍然不失为对学习纯粹数学的大学生的一偏很有价值的指导文章，文中有些观点对于学数学以外学科的同志也有参考价值，为此，将它译出，以供大家工作和学习时参考。

译　　文

和欧洲大学生相比，美国大学生为一些自身的严重的缺点所困扰。严肃地指出这些缺点，让大家及时地认识它们并努力去克服它们，是非常必要的。除了早期的数学（或者选择攻读的其它领域）训练外，美国学生还缺乏基本技巧——阅读、写作和口述——的训练，也就是说，他们由于不善运用书面和口头语言而苦恼，例如：

A.　中等程度的学生不善于从书本中进行学习，除非该书已把内容分割成许多小块 （如用调羹给婴儿喂食）。为了在数学（或其它科学）上能有所成绩，他必须认识到，多数课题只包含很少几个基本思想，一旦掌握了这几个基本思想，通向围绕着它们的课题内容的细节的大道便畅通无阻了，阅读一本书或者一篇或长或短的文章决不是绕着它的外部边缘爬行，而是要以最适合于自己的方法直插课题的核心，从这儿出发，我们可以最清晰地看到课题的全貌，这是任何指望成功的科学家必须学会的最重要的技巧。

B.　中等程度的学生不善于机智地记笔记。这是因为：在听讲时，不能敏捷地区分什么是重要的，是必须记下来的和什么可以省略的 （或因这只是个评注

或例题解释，或因它在以后很容易被补出），几乎无需说明，当大学学习向前进时，学生在课堂的收益大小将越来越依赖于他记笔记的能力。

C. 中等程度的学生不善于用确切而有说服力的语言作口头或书面的表达。考虑到现存考试制度的要求和毕业后可能承担教职这样的前景，他是必须学会不仅能用流畅的口语来表述（假若他在这方面尚有欠缺的话），而且，更主要的，在要他作简短报告时，善于组织材料，清晰地说出关于他的题目的全部材料，为了在书面表述中达到同样的目的，除了在英语作文的基本原理上下功夫外，别无他途，因为应用于科学题材的作文原理与一般的作文原理并无区别，遗憾的是，我们不得不提醒许许多多学生，即使在科学领域中，通常的英语拼写和语法规则仍然是需要遵循的，是不能忽略的。

无疑，学习和训练上述技巧是中学教育的任务，进入大学而尚未掌握这些技巧的学生（这是现在大学生中的多数）必须学会它们，不然他就不能达到硕士学位或哲学博士学位所要求的科学上成熟的程度。他应该明白，从他的大学老师那儿是不能指望得到很大帮助的。大学老师们首先是科学家，他们的主要兴趣是在他们的专题上，他们把大部分时间和精力贡献在专题的教学和研究上，很少有人对教学过程中的问题有强烈兴趣，很少有人愿意直接去教这方面的问题。这是美国高等教育的最严重的几个问题之一，使它更为严重的是：假若学生不能认识自己在智力装备上的不足（这是常见的），便不自觉地将自己沉浸在日常作业和有时写得不怎样鼓舞人的教科书学习中去。这并不是说，要想在数学方面成为一个行家无须象在其他领域中那样掌握数学的细节，这只是说，在数学中也像其他领域中那样，这样一种掌握只能通过对实质的深刻理解而获得。通过大量细节而达到实质的理解是需要一种技巧的，后者是必须和能够学会的。

上面说到的几点适用于任何学科，我们现在要专门对数学学习说几句，任何（初级阶段的）数学课学习都包含下列几方面：（a）掌握主要概念和定理。这些概念和定理在数量上是很少的，但它们构成了课题的核心，（b）日常的习题训练。通过训练，在与那些基本概念打交道的过程中获得必要的复习；（c）包含一些数学难点的问题。通过这些问题可以发展学生联系那些概念的创造和想象的能力。在初级阶段，这三方面是同样重要的。进入高级阶段后，（b）的重要性减弱，或者与（c）难以区别了，所以高级阶段的书或教科书将把很多东西留给学生自己去作,自己去思考,这时候,专门分设的问题已经变得不那样需要,但是学生在很大程度上变成了教师的积极的合作者,除非学生在初级阶段在解决（c）型问题方面已有足够训练，不然，他是不能指望成功的。

不言自明，假如没有机智地使用数学概念以解决具体问题的能力，真正理解这些基本概念是不可能的。反之，未能理解这些概念而想应用它们去解决具体问题更是不可想象的。因此，数学学习过程中的三方面（a），（b），（c）。是不可分开的。也许是受了工程学院的影响，或者是由于所谓的数学的“实际“应用的错误概念作祟，美国学院传统上包含或多或少的机械训练。这种训练对于“九九表”的教学是完全适合的，但对其它内容则很少有用了。在我系数学教程的新安排中，我们又把重点放回到原来的地方：主要概念的理解上。这也许会导致对学习过程中（b）和（c）这两部分的忽视，由于必修教材必须压缩在非常短的时间内教完，这种忽视便更易发生了。首先，美国学生进入大学时几乎没有什么值得说的数学知识；其次，美国还没有实行别的许多国家已经实行的方法：每一门数学课应配以由合格助手担任的经常性的习题课，这样，当教授集中精力于他感兴趣的理论方面时，教学中的练习方面也得到应有的重视。由于（c）的重要性还只是刚刚受到应有的考虑和我们大部分课程都是每周三小时的，重点放在（a）上的决策几乎不可避免地将以削弱（b）和（c）为代价，然而本系教师们正对所有这些问题给予应有的注意，正在许可的条件下，努力改进教学的各方面。当然改进将是逐步的。同学们，特别是决定以数学为职业的同学，必须力图保持（a）、（b）、（c）三方面的平衡。在即将到来的日子里，（c）是最容易被忽略的，他们不妨试用一些和他们所学的课题有关并有着不是常规方法能解的问题的习题集，美国或外国出版的均可，以补这方面之不足。

下面我们要讨论，构成目前教学计划中的各门课的内容及其相互关系。过去，传统课程的安排是简单的。在初级阶段，它包括：二维和三维（平面和立体）的解析几何和所谓的“大学代数”，即初等方程式论，目的在于求实系数一元方程的数值解。解析几何表述的形式是 18 世纪*Clairaut*,*Euler* 和 *Lagrange* 所达到的水平（虽然它的边缘由于此后的磨损已经十分模糊了）。“代数”基本上是经牛顿改进后的笛卡儿的代数。紧接着便是微积分和它在曲面与曲线上的应用，这基本上仍然是欧拉所定下的图式。后面便是所谓的应用数学，即沿着牛顿的线索被上一世纪的作者所发展了的初等理论力学。微积分又发展到单元复变函数，它是 *Cauchy*,*Riemann* 和 *Weistrass* 工作的大大删节之后的综述。最后，当学生已经学过椭圆函数的定义及它的一些公式后，他便被认为是一个训练有素的数学家，适于从事他的课题的高级研究工作了。

不幸，今日数学系的教师和学生不再能过这样轻松的生活了：上述课题仍

然不失为基本的，但已是远远不够了的。因此，必须以一切方法使学生在短期内学得更多的东西。还有，过去的将近半个世纪的抽象“数学”和“公理化”方法的发展已经使我们越来越清楚地认识到下列事实：从某些方面看，数学是一种语言，而且这个语言必须跟上它必须满足的需要，这个语言又有它自己的语法和词汇。我们还必须学会这个语法，掌握这些词汇。近代数学的语法与词汇首先是由抽象集合论，其次是由一般拓扑与抽象代数供给的：这些都是数学的辅助分枝，它们之间又有着如此显著的差别：抽象集合论建立不到 100 年以前，而一般拓扑则不到点 50 年，两者都可被看作是已经成熟了的（至少从今日数学所关心的需要看是如此）；虽然代数起源于巴比仑人，但至今仍在茁壮地发展中，无论如何，这些分枝已经渗透到传统的课题（如微积分与几何）中去了。远在人们认识到在许多不同的课题中支离破碎地研究它们是一种浪费之前便如此了，例如，把二次型化为平方和的方法只不过是巴比仑人早知道的解二次方程的“配方”法，它对平面和立体解析几何中的二次曲线与曲面的研究和射影几何来说都是基本方法，它在高维情形的推广对于微积分中的极大极小的研究，Hilbert 空间中的“正交化方法”和 Hilbert 空间被引入数学以前的许多具体情形来说也是有着根本的价值的。把所有这些课题中的概念，以它在各种应用中最合适的方式统一起来，毕其功以一役地加以处理是会带来明显的好处的。同时，不能忘记，学习一种语言的语法是不能在实际使用这种语言之前进行的（也许对于语言学家是例外），它们是必须手拉手地一起前进的。同样，在数学中，抽象概念必须逐步地谨慎地引进，这对于初学者来说尤应如此。很幸运的是，由于下列事实这变得比较容易了：一般拓扑中的大多数概念和代数（线性代数与矩阵论中的较大部分）中的许多概念在很大程度有着强烈的几何背景而可以用几何语言来表达，这就容易被直观所接受。

以上所述，解释了当今的数学教程的安排，预科水平的课程是提供学生以弥补初等数学知识上的不足（如解析几何、三角学、复数等课题，这些都是今后的工作中常常用到的）。预科课程之后是微积分，它的主要目的是对满足适当的光滑性条件的一元和多元实变函数的局部性质的研究（“局部”是理解为“在变量的值的一个邻域内的”）在今日数学中（纯粹和应用）这种函数已不占有像一百年甚里五十年以前那样的重要地位了，但是对于培养有前途的数学家和专门应用数学于某个专业的科学家来说，研究这类函数的方法仍然是一般教育中的不可缺少的一部分，而且在初级阶段的学习中，学生的数学知识的实质部分（相对于形式部分而言）主要还是来自这方面的学习，微积分的学习被组织成

连贯的四个部分，初学者可望逐个学习。这些课程中包括一些例解说明，但是，从长远观点看，更多的例解材料应放在初等微分几何与初等力学这样一些课程中，后者又为进一步学习这些题材铺平了道路。

学生开始学习微积分的同时或稍晚，便应该开始熟悉一些今后对他不可缺少的抽象概念，这就是一系列代数课的目的之一，以通常的整数和解析几何中的二维、三维向量空间为背景，一系列代数课将向学生介绍群、环、域，向量空间，线性变量等概念和关于这些概念的基本定理，这些概念已经渗入近代数学的大部分领域，包括微积分课程中的一些课题（如曲线和曲面积分，各种形式的 Stokes 定理需要 Grassmann 代数的知识，它是重线性代数的一个基本部分，又和行列式理论不可分割），因此细心地弥合代数课与微积分课之间的隙缝是必要的，同时，代数课中的很多知识又和有紧密联系的仿射几何、射影几何，任意维空间的欧氏几何不可区分的，假若代数的学习不是形式地进行的，而是在每个可能的场合尽力发展和提高学生的几何直观，就使得专门开设这些几何课失去了必要。

学习代数与微积分时，学生便逐渐认识到集合的一般概念和记号（不论它是实数集合，函数集合、群的元素的集合等）及集合运算（并、交、积等）的必要性，在代数里他又熟悉了一些数学对象并非作为先天存在而接受的,却是由一些性质来描述的,这些性质又不是完全确定它们，换言之，学生已经接触了抽象集合的处理以及公理化方法，不到五十年以前，这些训练还被认为对逻辑学家比对数学家更适合，数学的发展已经产生了这样的影响，不仅这些训练对数学系学生是必要的，而且只要学生在才智上已有接受它的准备，它应该提前得越早越好，具体地说，经验似乎告诉我们。不要比两年微积分学完后还要晚，以上说明是针对集合论与一般拓扑学课程的。虽然这两门课的实质内容都很平凡，但是它们提供了一种语言，这种语言将使以后要学的大部分课题能方便地表述出来。

在关于课程的描述中，现在已经到达了这样的地步，越过这步专门化（或分科化）便可开始了。是的，不知道伽罗华理论可以成为一个好的分析学家，不知道勒贝格积分可以成为一个好的代数学家，不知道代数数论可以成为一个好的拓扑学家。虽然，这一切都是可能的，但并是非值得称道的。现在，全能的数学家比以前稀罕了，我们不准备在这儿讨论这种过早的专门化可能带来的灾难性后果,但是愿意指出,本系不愿意鼓励这种过早的专门化,我们期望所有的学

生获得纯数学主要分枝的基本知识,这使他们能够考虑自己的能力,并能在确定今后的工作领域时,作出理智的选择。这些基本知识至少应包括:(a)分析中的近代积分理论的某些知识,(最好不要限于一元或多元实变的勒贝格积分,而应扩展到紧或局部紧空间上的积分理论),希尔伯特空间上的知识,常微与偏微分方程的知识,一元复变函数的知识;(b)代数中的域与域扩张(包括 Galois 理论)的知识。(c)某些数论知识,至少应包含二次互反定律和二次域中的理想理论。(d)几何中的几何与群论的关系,(在欧氏,射影,非欧几何中这就是 Erlanger 纲领)和黎曼几何中的活动标架方法。(e)拓扑中的基本群和纳覆空间的知识,一维同调群的知识,闭曲面分类的知识。在很大程度上,这些知识可以互相独立地学习,祇有在高级阶段,数学各分枝之间的相互作用才会变得重要起来,学习它们的顺序可以根据学生的爱好和方便去决定,这只是个选择和机会的事。

最后,学生必须认识到,数学是一门有着悠久历史的科学,假若对它的历史背景没有一些了解,要真正理解它是不可能的。 首先,时间绘出了人们心目中的数学和数学分枝的图象的一个维数。另外,数学中主要概念是不多的,清晰地理解它们的最好途径是追寻它们相互渗透时逐步发展的线索,这对于各级的有远见的数学教师来说尤其重要。对于他们来说,课堂上必须教的课题的干巴巴的知识远不如明了隐藏在这些课题背后的主要思想来得重要。最后,数学研究是一种知识的探索,学生将会失去对它的兴趣,除非它给予学生接触到智慧的伟大的机会,这种机会在教科书的学习中是不会碰到的,也不太可能从学生为了成为哲学博士而必须攻读的那类文献中遇上。在眼前的情况下,不能指望学生能对数学史有一个全面的了解,除非他专攻数学史。而且即使专攻数学史也可能不会有此了解。然而,可以指望他对他特别感兴趣的几个方面的过去的数学家的原著有所熟悉。

一个不等式的证明

9319 吕林军 9401 黄文

问题：已知 $a_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n$, 求证：

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)^2 dx \geq \frac{1}{n+1}.$$

我们最初想法是设

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n)^2 dx.$$

将 f 看成 R^n 的函数，假如 f 有最小值 (我们并未证明最小值的存在，只是作形式上的推导), 设在 $P_0 = (a_{10}, \cdots, a_{n0})$ 点取得，那么 $\frac{\partial f}{\partial a_i}\Big|_{P_0} = 0$, 由此

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^i(1 + a_{10}x + \cdots + a_{n0}x^n)dx = 0, i = 1, \cdots, n \tag{1}$$

进而可得方程组：

$$\begin{pmatrix} 2! & 3! & \cdots & (n+1)! \\ 3! & 4! & \cdots & (n+2)! \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (n+1)! & (n+2)! & \cdots & (2n)! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1! \\ 2! \\ \vdots \\ n! \end{pmatrix}$$

由上式虽可以求出 $a_{10}, a_{20}, \cdots, a_{n0}$, 但计算量较大，且 f 是否有最小值似也不易说明白。

我们解答本题的要点在于下面 (换一个角度的) 观察：等式 (1) 意味着多项式 $1 + a_{10}x + \cdots + a_{n0}x^n$ 乘上 e^{-x} 后，与任何次数不超过 n 且非常数的多项式在 $[0, +\infty)$ 上正交. 由此我们想到应先寻找一种正交多项式：

如果 $P_n(x)$ 为 n 次多项式， $P_n(0) = 1$, 并且满足

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}P_iP_jdx = \delta_{ij}.$$

那么 (容易看出) 我们可设

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} C_iP_i,$$

其中 $C_0+C_1+\cdots+C_n=1$. 这样

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+\cdots+a_nx^n)^2=\sum_{i=0}^{n} C_i^2.$$

由柯西不等式推出

$$\left(\sum_{i=0}^{n} C_i^2\right)\left(\sum_{i=0}^{n} 1\right)\geq\left(\sum_{i=0}^{n} C_i\right)^2=1,$$

从而 $\sum\limits_{i=0}^{n} C_i^2\geq\frac{1}{n+1}$, 当且仅当 $C_i=\frac{1}{n+1}$ 时等号成立。于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}(1+a_1x+\cdots+a_nx^n)^2dx\geq\frac{1}{n+1}$$

(且等号可以取得).

上述的多项式 P_n 事实上是存在的 (谢天谢地 !):

引理 设 $P_n(x)=\frac{e^x}{n!}\frac{d^n(e^{-x}x^n)}{dx^n}$, 则 $P_n(x)$ 是 n 次多项式，并且满足

(1) $P_n(0)=1$,

(2) $\int_0^{+\infty} e^{-x}P_iP_jdx=\delta_{ij}$.

注 1. 我们是采用“硬算”的办法，逐步找出规律，并最终导出上述多项式的. 后来听人介绍, 这样的多项式在正交多项式理论中是很基本的, 称为 Laguerre 多项式. 见 (例如) 托德“函数构造论导引” (上海科技出版社， 1980), PP46-47.

2. 有兴趣的同学可以试试求

$$\min_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n}\int_0^1(1+a_1x+\cdots+a_nx^n)^2dx.$$

一个问题的讨论

9401 李锦嘉 黄文

问题:

复平面单位圆上 n 个不同的点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 必存在单位圆上一点 z_0 使

$$\left|\prod_{i=1}^{n}(z_0 - z_i)\right| \geq 1. \tag{*}$$

如果我们记 $P(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$, 由 $|P(0)| = 1$, 利用最大模原理, 即知 (*) 成立. 我们做完此题, 自然应问下界 1 是否可以用更大的数代替?

我们先考虑 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为正 n 边形 n 个顶点, 设 $z_j = w^j, j = 1, \cdots, n$, 其中 $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}, P(z) = z^n - 1 \Longrightarrow |P(z)| \leq 2$, 取 $z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}, ATr|P(z_0)| = 2$. 由此可见在 $(*)$ 中下界 1 至多可用 2 代替.

于是我们想证以下结论:

复平面单位圆上 n 个不同的点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$, 令 $P(z) = \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$, 那么 $\max_{|z|=1}|P(z)| \geq 2$, 且等号成立当且仅当 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为正 n 边形 n 个顶点.

证 设 $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, 注意以下恒等式

$$\sum_{j=0}^{n-1} P(w^j z) = nz^n + n(-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n \tag{1}$$

取 z_0 满足 $z_0^n = (-1)^n z_1 z_2 \cdots z_n$, 有 $|z_0| = 1$ 且

$$\left|\sum_{j=0}^{n-1} P(w^j z_0)\right| = 2n \tag{2}$$

从而存在 $j_0 \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, 使 $|P(w^{j_0} z_0)| \geq 2$, 进而

$$\Longrightarrow \max_{|z|=1}|P(z)| \geq 2 \tag{3}$$

以下讨论等号成立条件: (i) 若 $\max_{|z|=1}|P(z)| = 2$.

由 (2) 我们有

$$2n = |\sum_{j=0}^{n-1} P(w^j z_0)| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |P(w^j z_0)| \leq n \max_{|z|=1}|P(z)| = 2n$$

故

$$|P(w^j z_0)| = 2 \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{4}$$

由于

$$\prod_{j=0}^{n-1} P(w^j z_0) = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=0}^{n-1}(w^j z_0 - z_i)\right) = \prod_{i=0}^{n-1}(z_0^n + (-1)^n z_i^n)$$

由 (4) 推得

$$\left|\prod_{j=0}^{n-1} P(w^j z_0)\right| = 2^n \quad \Longrightarrow \quad \prod_{i=1}^{n}|z_0^n + (-1)^n z_i^n| = 2^n.$$

由此得到

$$|z_0^n + (-1)^n z_i^n| = 2 \ \ (i = 1, \cdots, n) \ \ \{因 \ \ |z_0^n + (-1)^n z_i^n| \le 2\}$$

再由 $|z_0^n| = 1, |(-1)^n z_i^n| = 1$ 可知,

$$z_0^n = (-1)^n z_i^n \ \ 即 \ \ z_i^n = (-1)^n z_0^n \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由于 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 互不相同从而 $z_1, \cdots, z_n$ 为方程 $z^n = (-1)^n z_0^n$ n 个不同的根，既 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为正 n 边形 n 个顶点。

(ii) 若 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 为正 n 边形 n 个顶点，由上面的分析知

$$\max_{|z|=1}|P(z)| = 2.$$

小议幺幂方阵

9301 吴畏

设 K 是域，K 上 $n\times n$ 可逆矩阵 A, 如果满足 $(A-I)^n=0$, 则称 A 是幺幂方阵.

试证：i) 当 $charK=p$ 时，A 幺幂 $\Longleftrightarrow A^i=I$ 对某个 $j>0$。

ii) 当 $charK=0$ 时，A 幺幂，且 $a\neq I$。

$\Longleftrightarrow$ 对 $\forall m\in IN$, $A^m\neq I$, 且与 A 在 K 上相似：

证明：首先我们有如下等价关系：

$(A-I)^n=0 \Longleftrightarrow A$ 有零化多项式 $(\lambda-1)^n \Longleftrightarrow A$ 的最小多项式 $d(A)=(\lambda-1)^m$,$m\leq n$, $\Longleftrightarrow A$ 的特征多项式 $\varphi(A)=(\lambda-1)^n \Longleftrightarrow A$ 的特征值都为 1。

i)$(\Longrightarrow)A$ 幺幂，$(A-I)^n=0$, $A^{p^i}=(A-I+I)^{p^i}=(A-I)^{p^i}+I$, 取 j 使 $p^j>n$ 则 $(A-I)^{p^i}=0$

所以 $A^{p^j}=I$

$(\Longleftarrow)A^{p^j}=I \Longleftrightarrow (A-I)^{p^j}=A^{p^j}-I=0$ 所以 A 有零化多项式 $(\lambda-1)^{p^j}$ 于是 A 有特征多项式 $\varphi(A)=(\lambda-1)^n$

所以 A 幺幂.

ii)$(\Longrightarrow)A$ 幺幂，故 A 的特征值都为 $1\in K$, 从而存在 K 上 n 阶可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP=diag(J_1,J_2,\cdots,J_r)$ 其中 J_1, J_2, $\cdots,J_r$ 为主对角线元素皆为 1 的 Jordan 块，而且 $J_1,\cdots,J_r$ 中有非 1 阶 Jordan 块（因 $A\neq I$ ），对每个非 1 阶的 Jordan 块 J_i, 由于 $charK=0$

所以 $J_i^m\neq I_{r_i}$, 容易验证 $(\lambda-1)^{r_i}$ 是 J_i 和 J_i^m 的最小多项式，而 J_i 和 J_i^m 都是 r_i 阶方阵，故两者有相同的不变因子，于是 J_i^m 在 K 上与 J_i 相似，

那么 $P^{-1}A^mP=diag(J_1^m,J_2^m,\cdots,J_r^m)\neq I$

且与 $P^{-1}AP=diag(J_1,J_2,\cdots,J_r)$ 相似

从而 $A^m\neq I$ 且与 A 在 K 上相似

$(\Leftarrow)$ 取 K 的一个代数闭包 F', 则在 F' 上的 n 阶可逆阵 P, 使 $P^{-1}AP=diag(J_1,J_2,\cdots,J_r)$ $J_i(i=1,\cdots,r)$ 为 F 上的 Jordan 块，设 J_i 的主对角元素为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,r)$, 而 A^m 相似于 A

故 $diag(J_1^m,J_2^m,\cdots,J_r^m)=P^{-1}A^mP$ 与 $diag(J_1,J_2,\cdots,J_r)=P^{-1}AP$ 相似由 Jordan 标准形的唯一性（不计 Jordan 块次序）$J_i^m\sim J_{\delta m}(i)$ $i=1,2,\cdots,r$。

其中 δ_m 为 $\{1,2,\cdots,r\}$ 的一个置换，由 m 任意性，存在 $m_1<m_2$ 使 $\delta_{m_1}=\delta_{m_2}$ 则 $J_i^{m_1}\sim J_{\delta_{m_1}}(i)=J_{\delta_{m_2}(i)}\sim J_i^{m_2}$, 从而 $\lambda_i^{m_1}=\lambda_i^{m_2}$ 由 A 可逆 $\lambda_i\neq 0\Longrightarrow \lambda_i^{m_2-m_1}=1_F$,

$\lambda_{\delta_{m_1-m_2}}(i)=1_F$ 即 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=1$

又 $I_F\cdot I_K=I_K=I_K\cdot I_K$ 故 $I_F=I_K$, 从而 A 的特征值都是 I_K,A 幺幂，♯

一道习题的简明解法

9601 魏 斌

现行《线性代数》课本上 P503 习题 8 。

设 $S \geq 0$, 证明 $detS \leq S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} (k+1) & \cdots & n \\ (k+1) & \cdots & n \end{pmatrix}$, 其中 $k = 1,2,\cdots,n$ 。此题的一般证法较为繁琐且运用较多工具，其证明如下：

令 $S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$, 其中 S_{11}, S_{22} 分别为 $k \times k, (n-k) \times (n-k)$ 方阵

i) 若 $detS = 0$, 显然成立

ii) 若 $detS \neq 0$, 则 $S > 0$, 有 s_{11} 可逆，又令 $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -S_{12}S_{11}^{-1} & I \end{pmatrix}$, 则 $PSP' = \begin{pmatrix} S_{11} & \\ & S_{22} - S_{12}S_{11}^{-1}S_{12} \end{pmatrix} > 0$, 故 $S_{22} - S_{12}^{1}S_{11}^{-1}S_{12} > 0$

又 $0 < S_{22} - S_{12}^{1}S_{11}^{-1}S_{12} < S_{22}$ 知

$$det(S_{22} - S_{12}S_{11}^{-1}S_{12}) < detS_{22}$$

有 $det(PSP') = detS = detS_{11}det(S_{22}S_{12}^{1}S_{11}^{-1}S_{12}) < detS_{11}detS_{22}$

故 $detS \leq S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} (k+1) & \cdots & n \\ (k+1) & \cdots & n \end{pmatrix}$。

下面介绍我的一个较简单的证法：

由于 $S \geq 0$, 可设 $S = P'P$, 有

$$S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} P^2\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix},$$

$$S\begin{pmatrix} (k+1) & \cdots & n \\ (k+1) & \cdots & n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leq j_{k+1} < \cdots < j_n \leq n} P^2\begin{pmatrix} j_{k+1} & \cdots & j_n \\ (k+1) & \cdots & n \end{pmatrix}$$

则由柯西定理：(将 $\{j_1, \cdots, j_k\}$ 与 $\{j_{k+1}, \cdots, j_k\}$ 配对：若 $\{j_1, \cdots, j_k, j_{k+1}, \cdots, j_n\} = \{1.2.\cdots, n\}$), 得

$$
\begin{aligned}
&S\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k \\ 1 & 2 & \cdots & k \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} (k+1) & \cdots & n \\ (k+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \\
&\geq \Bigg[\sum_{1\leq j_1<\cdots<j_n\leq n} (-1)^{1+2+\cdots+k+j_1+\cdots+j_k} \\
&P\begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} j_{k+1} & \cdots & j_n \\ (k+1) & \cdots & n \end{pmatrix} \Bigg]^2 \\
&= (detP)^2 = detS
\end{aligned}
$$

此种证明法不仅简在步骤少，还简在运用的工具也少，给人一种简朴的感受.

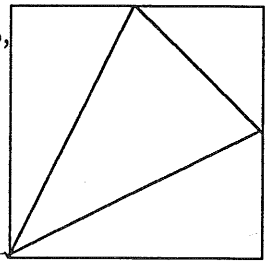
趣 题 探 讨

9401 万振东

命题：位于单位正方形内的三角形的内切圆半径的最大值为 $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 。

（注：本题来自数学月刊的问题征解）

证明：设 A, B, C 三点位于单位正方形 T 内，如果 AB, BC 不共线，则 A, B, C 组成一个三角形，令 R 为它的内切圆半径。如果 AB, BC 共线令 R 为 0。可以推知 R 关于 A, B, C 的为连续。(A, B, C) 位于紧致集 (T, T, T) 内。故 R 有最大值。不失一般性设 A, B, C 的位置如图所示



由 $\frac{1}{2}R\bullet\left(|AB|+|BC|+|AC|\right)=S_{\Delta ABC}$ 得：

$$R=f(x,y)={(1-xy)}\Big/\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\right)$$

记 $\alpha=\sqrt{5}+1$，命题转化为证 $f(x,y)\le\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$(x,y)\in[0,1]^2$

进一步化为：

$$\alpha\, xy+\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{(1-x)^2+(1-y)^2}\ge\alpha \text{。}$$

记左式为 $g(x,y)$。

分为几种情况讨论：

1. x，y 有一个大于或等于 $\frac{1}{2}$ 时，不失一般性设 $x\ge\frac{1}{2}$

可以证明 $g(x,y)\ge g(\frac{1}{2},y)\ge\alpha$

2. $(x,y)\in\left[0,\frac{1}{2}\right]^2$

$g(x,y)$在$\left[0,\frac{1}{2}\right]^2$ 上最小值设在(x_0,y_0)达到。

(1). 如果$(x_0,y_0)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)^2$。

有 $\frac{\partial g}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}=0$ ，$\frac{\partial g}{\partial y}|_{(x_0,y_0)}=0$。

由此不难推出 $x_0=y_0$，所以可能为 $g(x_0,x_0)$

记$h(x)=g(x,x)$。$x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，易证 $h(x)\geq\alpha$

(2). $(x_0,y_0)\in\partial\left[0,\frac{1}{2}\right]^2$。

(a). 若x_0，y_0中有一个为 0，不失一般性令$x_0=0$，可以证明 $g(0,y)\geq\alpha$

(b). 若x_0，y_0中有一个为$\frac{1}{2}$，不失一般性令$x_0=\frac{1}{2}$，可以证明

$g\left(\frac{1}{2},y\right)\geq\alpha$

由此命题得证。

问题 43 解答

9319 邹晖

本文将对余红兵老师提出的一问题作出证明，并给出几个有趣的组合恒等式。

原题：试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\cdots\int\limits_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1,\cdots,dx_n = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad f\in C^0[0,1]$

在给出该题证明之前先给出三个引理。

约定 F 为多项式全体的集合：定义算子 $\tau: F\to F, \tau(f)=xf^{(1)}, \tau^n(f)=\tau(\tau^{n-1}f), n\geq 2,$

则 $\tau(f)=xf^{(1)}, \quad \tau^2(f)=x^2f^{(2)}+xf^{(1)} \quad \tau^3(f)=x^3f^{(3)}+3x^2f^{(2)}+xf^{(1)}$

不难用归纳法得到 $\tau^n(f)=a_n^nx^nf^{(n)}+a_{n-1}^nx^{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_1^nxf^{(1)}$，$a_n^n=a_1^n=1$

$$\tau^{n+1}(f)=\tau(a_n^nx^nf^{(n)}+a_{n-1}^nx^{n-1}f^{(n-1)}+\cdots+a_1^nf^{(1)}x)=\sum_{k=1}^{n+1}a_k^{n+1}x^kf^{(k)}$$

比较系数可得： $*\quad a_k^{n+1}=a_k^nk+a_{k-1}^n$

所以仿照杨辉三角形，可给出 τ 三角形

1
1 1
1 3 1
1 7 6 1
1 15 25 10 1
....

注：多项式显然可改为 C^∞ 。

引理 1 设 $g_k^n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^ii^{n+k}x^i$ 则 $g_k^n(1)=(-1)^nn!a_n^{n+k}$.

证明 显然 $g_k^n(x)=\tau^{n+k}(\sum\limits_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^ix^i)=\tau^{n+k}((1-x)^n)$

所以 $g_k^n(1)=\left.\sum\limits_{i=1}^{n+k}a_i^{n+k}x^if^{(i)}\right|_{x=1}$， $f^{(i)}=[(1-x)^n]^{(i)}$

因为 $f^{(i)}(x)|_{x=1}=0\ i\neq n$， $f^{(n)}(x)|_{x=1}=(-1)^nn!$

所以 $g_k^n(1)=(-1)^nn!a_n^{n+k} \quad \sharp$

引理 2 （维尔斯特拉斯）$f(x)\in C^0[a,b]$, 则 $\exists[a,b]$ 上一列多项式 $P_n(x), P_n(x)$ 一致逼近 $f(x)$

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n = n\int\cdots\int_{[0,1]^{n-1}}\left[F_1\left(\frac{1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\right.$$
$$\left.-F\left(\frac{x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\right]dx_2\cdots dx_n \quad F_1=\int f dx$$

又对 x_2 积分，再对 x_3 积分，……一直下去可得到等式

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots+dx_n = n^n\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^{n-i}F_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{其中}\quad F_n=\int\cdots\int f(dx)^n \tag{1}$$

显然在计算过程中，$\frac{1}{n}$ 并不特殊，因此考虑 $f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n), 0<\alpha_i<1, \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=1$。令 $\alpha_0=0$

有

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n} f(\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n)dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}\sum_{i=1}^{n}C_n^i(-1)^{n-i}F_n\left(\sum_{k=0}^{i}\alpha_k\right) \tag{2}$$

在 (1) 式中，令 $f(x)=x^k$ $(k\geq 0)$, 取 $F_n=\frac{1}{(k+1)\cdots(k+n)}x^{n+k}$

则

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n = \frac{1}{n^k}(-1)^n\sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i\frac{i^{n+k}}{(1+k)\cdots(n+k)}$$
$$=\frac{(-1)^n}{n^k(1+k)\cdots(n+k)}g_k^n(x)$$

由引理 1, 所以

$$\int\cdots\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n = \frac{n!}{n^k(1+k)\cdots(n+k)}a_n^{n+k} \tag{3}$$

改写为 $\int\cdots\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n = \frac{a_n^{n+k}}{n^kC_{n+k}^n}$

因为 $k=0$，$\int\cdots\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n = 1 = f(\frac{1}{2})$

所以结论成立。

以下用归纳法：因为

$$\frac{a_n^{n+k}-a_{n-1}^{n+k-1}}{n^kC_{n+k}^n-(n-1)^kC_{n-1+k}^{n-1}} = \frac{na_n^{n+k-1}}{n^kC_{n+k}^n-(n-1)^kC_{n-1+k}^{n-1}}$$
$$=\frac{a_n^{n+k-1}}{n^{k-1}C_{n+k-1}^n}\,\frac{n^KC_{n+k-1}^n}{n^kC_{n+k}^n-(n-1)^kC_{n-1+k}^{n-1}}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^kC_{n+k-1}^n}{n^kC_{n+k}^n-(n-1)^kC_{n-1+k}^{n-1}}=\frac{1}{2}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{n+k}-a_{n-1}^{n+k-1}}{n^kC_{n+k}^n-(n-1)^kC_{n-1+k}^{n-1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{n+k+1}}{n^{k-1}C_{n+k-1}^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

由 Stolz 定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{n+k}}{n^kC_{n+k}^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{n+k}-a_{n-1}^{n+k-1}}{n^kC_{n+k}^n-(n-1)^kC_{n-1+k}^{n-1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

所以由归纳法可知，当 $f(x)=x^k$ 时，结论正确。

所以 $\forall P(x)$ 为 $[0,1]$ 上多项式 $P(x)=\sum\limits_{i=0}^m a_ix^i$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int\cdots\int_{[0,1]^n}P\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n=\sum\limits_{i=0}^m a_i\left(\frac{1}{2}\right)^i=P\left(\frac{1}{2}\right)$

所以根据引理 2, 容易推出

$\forall f\in C^0[0,1]$, $\lim\limits_{n\to\infty}\int\cdots\int_{[0,1]^n}f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n=f\left(\frac{1}{2}\right)$。

有趣的是，在式 (1)、(2) 中，令 $f(x)\equiv 0$, 则 $F_n(x)$ 可取 x^k $0\le k\le n-1$

所以

$$0=\int\cdots\int_{[0,1]^n}f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)dx_1\cdots dx_n=n^n\sum_{i=0}^n C_n^i(-1)^{n-i}\left(\frac{-i}{n}\right)^k$$

所以

$$\sum_{i=0}^n C_n^i(-1)^i i^k=0 \tag{4}$$

若令 $f(x)\equiv 1$, 则 $F_n(x)=\frac{1}{n!}x^n$ 代入 (1) 中，有

$$\sum_{i=0}^n C_n^i(-1)^i i^n=(-1)^n n! \tag{5}$$

同样可得到： $0<\alpha_i<1,\ \sum\limits_{i=1}^n\alpha_i=1$ 有等式

$$\sum_{i=0}^n C_n^i(-1)^i\left(\sum_{k=0}^i\alpha_k\right)^m=0\quad 0\le m\le n-1 \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^n C_n^i(-1)^i\left(\sum_{k=0}^i\alpha_k\right)^m=(-1)^n n!\alpha_1\cdots\alpha_n \tag{7}$$

恒等式 (4)、(5)、(6)、(7) 的出现纯粹是意外之喜。如果直接从组合数学证明，要得到这 4 个等式很困难，有兴趣者不妨一试，而在本文中得到它们却只须寥寥数笔，数学中各分支的融汇贯通是多么神奇！

本文中 τ 三角形生成方式十分简单，但求通项却并不容易。下面提出两个问题：

① τ 三角形通项公式存在否，有显式表达吗？

② τ 三角形是否有其它好的性质？

编者注：1. 学习过概率的同学可以用切比雪夫不等式来解答本题。

2. 文章中的组合恒等式 (4),(5)(分别为 (6),(7) 的特例) 称为欧拉等式，事实上，(6),(7) 在组合恒等式理论中是较为基本的一类，它们是一个一般的恒等式的特例．有兴趣者可参考 (例如) I. Tomescu: " Problems in Combinatorics and Graph Theory " (1985), 问题 1.36, 问题 1.37 。

问题 118 解答

9401 黄文

蛙鸣 51 期有如下问题：沙漠中有两地 A,B 相距 100 公里，一汽车最大载油量为 50 公升，耗油量 1 公升 / 公里，在途中可设贮油站，问：由 A 到 B, 汽车最小耗油量？

本文试给出解答：

首先注意以下事实：(I) 增添贮油站，耗油量非增，为了方便讨论，不失一般性我们设 (II) 每一个贮油站都是直接从它相邻前一个贮油站运油来贮存，由于汽车耗油量为 1 公升 / 公里，要求最小耗油量，只须求汽车所走的最短路程。

在 (II) 条件下，用 $M(C)$ 表示 C 贮油站贮油最多时的油量。

(I) 如左图 AB 相距 100 公里，设方法 τ 是任一汽车由 A 到 B 的方法，方法 τ 在 AB 间设立了一系列贮油站。

①现在我们在 AB 中点 A_1 增添一贮油站：由于 $|A_1B|=50$ 公里 $M(A_1)\geq 50$ 公升，且 A_1B 这段道路汽车至少走过一遍，再在距 $A_1\frac{50}{3}$ 公里的 A_2 点增设一贮油站。

设方法 τ 在 A_2,A_1 之间原已设有的贮油站从 $A_1\rightarrow A_2$ 依次为 A_{11}, $A_{12},\cdots,A_{1n},\cdots$, 由于 $M(A_1)\geq 50$ 公升，由 (II) 知 A_1 的油直接由 A_{11} 运来，所以从 A_{11} 至少要运两次油到 A_1 才能使 $M(A_1)\geq 50$ 公升，从而 $A_{11}A_1$ 这段道路汽车至少走三遍，且 $M(A_{12})\geq M(A_1)+3|A_{11}A_1|$

同理知，$A_{12}A_{11},A_{13}A_{12},\cdots,A_{1i+1}A_{1i},\cdots$ 都至少走三遍，且 $M(A_{1i+1})\geq M(A_{1i})$ $+3(A_{1i+1}+A_{1i})$

所以 A_2A_1 这段道路汽车至少走三遍，且 $M(A_2)\geq M(A_1)+3|A_1A_2|\geq 100$(公升)

(2) 我们再在距 $A_2,\frac{50}{5}$ 公里处 A_3 增添一个贮油站 A_3, 同理 (1) 中讨论，可知 A_3A_2 这一段道路至少走 5 遍，且 $M(A_3)\geq 150$(公升)

(3) 现在依次在距 $A_3,\frac{50}{7}$ 公里处增设贮油站 A_4, 在距 $A_4\frac{50}{9}$ 公里处增设贮油站 A_5, 在距 $A_5\frac{50}{11}$ 公里增设贮油站 A_6, 在距 $A_6\frac{50}{13}$ 公里处增设贮油站 A_7。

同理 (1) (2) 讨论知

$M(A_4)\geq 200$（公升）且 A_4A_3 这一段至少走 7 遍，

$M(A_5)\geq 250$（公升）且 A_5A_4 这一段至少走 9 遍，

$M(A_6)\geq 300$（公升）且 A_6A_5 这一段至少走 11 遍，

$M(A_7)\geq 350$（公升）且 A_7A_6 这一段至少走 13 遍，

由于 $|AA_7|=100-50\left(\sum_{i=0}^{6}\frac{1}{2i+1}\right)<\frac{50}{15}$(公里)

又 $M(A_7)\geq 350$, 设方法 τ 在 AA_7 之间从 $A_7\rightarrow A$ 已设有贮油站 $A_{71},A_{72},\cdots$, $A_{7n},\cdots\Longrightarrow A_{71}A,A_{72}A_{71},\cdots$, 每段汽车至少走 15 遍，且

$$M(A_{7i+1})\geq M(A_{7i})+15|A^4_{7i+1}A_{7i}|$$

所以 AA_7 这段汽车至少走 15 遍.

这样方法 τ 所走路程

$$\geq 15|AA_7| + B|A_7A_6| + 11|A_6A_5| + 9|A_5A_4| + 7|A_4A_3| + 5|A_3A_2| + 3|A_2A_1| + |A_1B|$$

$$= 15(100 - 50\sum_{i=0}^{6}\frac{1}{2i+1}) + 350 \quad (\text{公里})$$

所以 τ 方法汽车耗油量至少为 $\delta = 15(100 - 50\sum_{i=0}^{6}\frac{1}{2i+1}) + 350$(公升)

(II) 现在说明：存在一种方法使耗油量可达到 δ .

如同 (I) 在 $A, A_7, A_6, A_5, A_4, \cdots, A_1, B$ 处设立贮油站。

设 C_1, C_2 为两加油站 $2|C_1C_2| \leq 50$(公里)

由 C_1 满载 50 公升油，到达 C_2, 在 C_2 放下 $50 - 2|C_1C_2|$ 再返回 C_1, 称为 C_1 到 C_2 的一次要返回的运油，如果由 C_1 满载 50 公升，到达 C_2 不返回，称为 C_1 到 C_2 的一次不返回的运油。

首先，由 A 到 A_7 进行 7 次要返回的运油，最进行一次不返回的运油

$$M(A_7) = 8 \times 50 - 15|AA_7| \geq 350 \quad (\text{公升})$$

其次，由 A_7 到 A_6 进行 6 次要返回的运油，和一次不返回的运油

$$M(A_6) = 750 \times 50 - 13|A_7A_6| = 300 \quad (\text{公升})$$

由 A_{i+1} 到 A_i 进行 i 次要返回的运油，和一次不返回的运油，

$$M(A_i) = i50 \quad (\text{公升}) \qquad (i \geq 1)$$

……

最后由 A_1 直接到达 B 。易见这种方法汽车耗油量即为 δ, 由 (i) (ii) 知最小耗油量为 δ .

有兴趣的同学可以考虑以下一个问题：汽车最大载油量 50 公升，耗油量 1 公升 / 公里， AB 相距 100 公里，求一方案使 $A \to B \to A$ 汽车耗油量最小（途中可设立贮油站）?

1 9 9 7 年中国科技大学新生入学复试 数学试题及解答

1.确定所有 (由实数组成的) 等比数列 $\{a_n\}(n \geq 1)$, 使得数列 $\{S_n\}(n \geq 1)$ 中至少有一项是 0. 这里 $S_n = a_1 + \cdots + a_n (n \geq 1)$.

这题相当容易， 大多数同学都答对了. 解答应包括两个方面: 首先, 若数列具有所说的性质, 则其公比 q 显然不为 1, 于是 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$. 这样, 便有 $n \geq 1$ 使 $1 - q^n = 0$. 因 q 为实数及 $q \neq 1$, 故必须 $q = -1$. 反过来, 若 $q = -1$, 则因 $S_{2n} = 0$ $(n \geq 1)$, 从而相应的（等比）数列具有所说的性质.

2.确定实数 x, y, z 应满足的充分必要条件, 使不等式 $x^3 + y^3 + z^3 > 3xyz$ 成立.

本题与下面熟知的不等式有些关联:

若 x, y, z 均正, 则 $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$（当且仅当 $x = y = z$ 时取等号）. 所求的充分必要条件隐含在这一不等式的（通常的）证明中（见高二代数课本, 第三章）. 我们有

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2].$$

上式右边第二个因式非负（当且仅当 $x = y = z$ 时为零）. 于是所求的条件为: $x + y + z > 0$ 且 x, y, z 不全相等.

3.已知实数 a, b, x, y 满足方程组 $ax + by = A$, $ax^2 + by^2 = B$, $ax^3 + by^3 = C$, $ax^4 + by^4 = D$, 其中 $B^2 - AC \neq 0$. 求 $ax^5 + by^5$ (用 A, B, C, D 表示).

有许多同学陷在方程的讨论中不能自拔. 本题应该将已知的 A, B, C, D 看作通项为 $u_n = ax^n + by^n$ 的数列的前四项. 我们的任务便是由这些来计算 u_5. (“如果你不能解决所提出的问题, 试试能否换一个角度来看这个问题”.)

u_n $(n \geq 1)$ 联系密切, 这就是它们的递推公式. 我们很容易导出来:

$$u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n \ (n \geq 1),$$

其中 $\alpha=x+y$, $\beta=-xy$. 于是

$$C=B\alpha+A\beta,\ D=C\alpha+B\beta,\ u_5=D\alpha+C\beta. \tag{1}$$

由前两式解出 $\alpha=\frac{BC-AD}{B^2-AC}$, $\beta=\frac{BD-C^2}{B^2-AC}$, 故 $u_5=\frac{2BCD-AD^2-C^3}{B^2-AC}$.

注 1. 解 u_5 的更好的方法是将 $(1,\alpha,\beta)$ 看作线性方程组 (1) 的一组非零解（换一个角度看问题！), 从而其系数行列式必为零, 即

$$\begin{vmatrix} -C & B & A \\ -D & C & B \\ -u_5 & D & C \end{vmatrix}=0,$$

展开后便得出 u_5. 这一方法免去了解 α,β 的麻烦（正是行列式的功效）, 但就本题而言, 并未省事.

4.实数 x, y, z 满足 $\sin x+\sin y+\sin z=0$, $\cos x+\cos y+\cos z=0$. 求 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z$ 的值.

就题论题的求解, 可以采用下面的办法: 将已知条件变形为

$$\sin z=-\sin x-\sin y,\quad \cos z=-\cos x-\cos y,$$

再平方相加（消去 z !), 产生

$$\cos(x-y)=-\frac{1}{2}.$$

由对称性(或者说"同理"), $\cos(y-z)=-\frac{1}{2}$. 这样, 便易求出 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=\frac{3}{2}$.

注 2. 解答中利用了 x,y,z 的对称性, 事半功倍.

在复平面上考虑本题更为适宜（换一个角度看问题！）设 $z_1=e^{ix}$, $z_2=e^{iy}$, $z_3=e^{iz}$ (e^{ix} 是 $\cos x+i\sin x$ 的指数形式, 其余类同). 则 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, $z_1+z_2+z_3=0$, 所以 z_1,z_2,z_3 在复平面上对应的点在单位圆上且是正三角形的顶点（因其外心与重心重合）. 于是我们可以设 $x=y+\frac{2}{3}\pi$, $z=y-\frac{2}{3}\pi$（画一个图便一目了然）, 进而求出 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=\frac{3}{2}$.

5.三角形 ABC 中, 角 A, B, C 对应的边长依次记为 a, b, c, 角 A 的内角平分线长记为 d.

(1) 若 $a=12$, $b=5$, $c=13$, 求 d.

(2) 若 $a=3.6$, $b=3.87$, $c=2.13$, 求 d.

问题 (1) 相当容易. 所说的三角形显然是直角三角形, 由此易知 $d=\frac{5}{3}\sqrt{13}$. 其实, (1) 应当与 (2) 一并解决.

(2) 中的三角形并无（适用的）特殊性. 许多同学直接用所给数据来计算, 导出了一堆繁复的数值, 不易给出简明的结果.

我们应该考虑更一般的问题: 将 d 用三边 a,b,c 表示出来！

幸运的是, 这一问题不难解决. 过 C 作 AD 的平行线, 与 BA 延长线交于 E, 则 $AE=AC=b$. 从而

$$\frac{d}{EC}=\frac{AB}{AE}=\frac{c}{b+c}. \tag{1}$$

在三角形 AEC 中, 由余弦定理得出

$$EC^2=2b^2(1+\cos A)=\frac{b}{c}[(b+c)^2-a^2].$$

结合公式 (1), 便产生

$$d=\sqrt{bc(1-(\frac{a}{b+c})^2)}. \tag{2}$$

注 3. 如果要求出角 B 的内角平分线之长, 不必另起炉灶. 利用对称性, 将公式 (2) 中 a,b 互换即给出结果.

6.已知一抛物线, 其顶点为 O, 焦点为 F, 准线为 l, 过 F 作一条直线 (与抛物线的对称轴夹角为 θ) 交抛物线于 A, B 两点. 连结 A, O 的直线交 l 于 C, 连结 B, O 的直线交 l 于 D. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

建立直角坐标系, 以 O 为原点, 抛物线的对称轴为 x 轴. 设抛物线方程为 $y^2=2px$ $(p>0)$. 解答的关键一步是先证明 AD,BC 均与 x 轴平行. 这一结论可看解析几何课本（甲种本）, 习题八中问题 13. 其实, 稍认真的画个图便能猜出来.

首先, 若 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 则上述结论显然成立, 并易知所求的面积为 $2p^2$.

以下设 $\theta\neq\frac{\pi}{2}$. 设 A, B 的坐标分别是 (x_1,y_1), (x_2,y_2), 则 AB 的方程是 $y=tg\theta\cdot(x-\frac{p}{2})$, 与抛物线方程联立（消去 x）, 产生

$$y^2-2pyctg\theta-p^2=0.$$

由韦达定理得出

$$y_1y_2 = -p^2,\ y_1 + y_2 = 2pctg\theta. \tag{1}$$

此外， AC 方程是 $y = \frac{y_1}{x_1}x$, 故 C 的纵坐标为 $-\frac{py_1}{2x_1} = -\frac{p^2}{y_1}$. 结合 (1) 可见 B, C 的纵坐标相同， 从而 BC 与 x 轴平行． 由对称性（ A, B 两点“地位”平等）, AD 也与 x 轴平行.

这样， $ABCD$ 是直角梯形， 其面积 S（注意 $|AD| = |AF|$, $|BC| = |BF|$ ）为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}(|AD| + |BC|) \cdot |CD| \\
&= \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \cdot |y_1 - y_2| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(y_1 - y_2)^4(1 + ctg^2\theta)} \quad (C@{-}SC\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\theta) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]^2(1 + ctg^2\theta)}.
\end{aligned}$$

结合 (1) 即知 $S = \frac{2p^2}{\sin^3\theta}$. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时， 这与前面求得的结果一致． 因此， 我们的结果可统一地表述为 $S = \frac{2p^2}{\sin^3\theta}$.

7.设 x, y, z 为实数， 记 $S = |\cos x \sin^2 y + \cos y \sin^2 z + \cos z \sin^2 x|$.

(1) 证明 $S < 3$.

(2) 试给出 (1) 中 S 的上界的一个改进 (不要求确定 S 的最佳上界).

问题 (1) 甚易． 由绝对值不等式， 得出

$$S \le |\cos x \sin^2 y| + |\cos y \sin^2 z| + |\cos z \sin^2 x|. \tag{1}$$

将 $|\sin x|$, $|\cos x|$ 等等均放大到 1, 即知 $S \le 3$（这里的等号显然不能成立）.

为了改进上面的平凡估计， 我们在 (1) 式中保留变量 x, 而（用不等式）消去 y, z, 得出

$$S \le |\cos x| + 1 + \sin^2 x = -(|\cos x| - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4} \le \frac{9}{4}.$$

注 4. 改进 $S < 3$ 还有其它的方法， 我们在此提及几个.

(i) 由于 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, 从而 $|\sin x|$, $|\cos x|$ 不能都“很大”． 基于这一点， 便产生下面的改进:

取 $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 为 $a^2+a-1=0$ 的正根. 如 $|\cos x|\le a$, 则由 (1) 式得出 $S\le a+1+1=a+2$; 如 $|\cos x|\ge a$, 则 $\sin^2 x\le 1-a^2=a$, 从而也有 $S\le a+2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

现在当能看到, 我们选取的 a 值, 是为了（在上面的估计中）保持 (1) 式中 $|\cos x|$ 与 $\sin^2 x$ 的"地位"平等.

依前面的想法稍作讨论, 便能给出 S 的更好的上界. 注意 (1) 式右端关于 x,y,z 轮换对称, 以及 $|\cos t|$ 与 $\sin^2 t$ $(t=x,y,z)$ 的"对称性". 我们只需看两种情况: $|\cos x|$, $|\cos y|$, $|\cos z|$ 都 $\ge a$, 及其中两个 $\ge a$ 另一个 $\le a$. 相应地, 得出 S 的上界为 $3a$ (<2) 及 a^2+a+1 $(=2)$. 于是 $S\le 2$.

(ii) 下面的方法, 可以比较问题 4 中的消元法. 首先, 由 (1) 式我们有

$$S\le|\cos x\sin y|+|\cos y\sin z|+|\cos z\sin x|. \tag{2}$$

从而（由柯西不等式）

$$\begin{aligned}S^2&\le(\cos^2 x+\cos^2 y+\sin^2 x)(\sin^2 y+\sin^2 z+\cos^2 z)\\&=(1+\cos^2 y)(1+\sin^2 y)=2+\sin^2 y\cos^2 y\\&=2+\frac{1}{4}\sin^2 2y\le\frac{9}{4}.\end{aligned}$$

故 $S\le\frac{3}{2}$.

(iii) 证明 $S\le\frac{3}{2}$, 也可采用下面的办法: 由 (2) 式,

$$S\le\frac{1}{2}(\cos^2 x+\sin^2 y)+\frac{1}{2}(\cos^2 y+\sin^2 z)+\frac{1}{2}(\cos^2 z+\sin^2 x)=\frac{3}{2}.$$

8.试确定实数 a_0, 使得由递推公式 $a_{n+1}=-3a_n+2^n(n=0,\ 1,\ \cdots)$ 决定的数列 $\{a_n\}$ 为严格递增, 即 $a_n<a_{n+1}(n\ge 0)$.

我们应该先由递推公式导出 a_n 的通项公式. （与问题 3 中的手法正"相反". ）为此, 可以算出 a_n 的前若干项, 期望找出某种规律.

$a_1=-3a_0+1$, $a_2=3^2a_0-3+2$, $a_3=-3^3a_0+3^2-3\times 2+2^2$,

$a_4=3^4a_0-3^3+3^2\times 2-3\times 2^2+2^3$,

$a_5=-3^5a_0+3^4-3^3\times 2+3^2\times 2^2-3\times 2^3+2^4$.

现在, 我们相信, 并且易用归纳法证明:

$$a_n=(-3)^n a_0+(-1)^{n-1}(3^{n-1}-3^{n-2}\times 2+\cdots-3\times 2^{n-2})+2^{n-1}.$$

此即

$$a_n=(a_0-\frac{1}{5})(-3)^n+\frac{2^n}{5},\ (n=0,1,\cdots). \tag{1}$$

为了解答本题，将 (1) 变形为

$$a_n=(-3)^n[(a_0-\frac{1}{5})+(-\frac{2}{3})^n\times\frac{1}{5}].$$

注意 n 充分大时，$(\frac{2}{3})^n$ 趋向于 0, 因此，若 $a_0-\frac{1}{5}\neq 0$, 则上式括号内的数与 $a_0-\frac{1}{5}$ 同号（如 n 充分大），但 $(-3)^n$ $(n=0,1,2,\cdots)$ 轮流为正、负数，从而 $\{a_n\}$ 不可能严格递增. 换句话说，如 $\{a_n\}$ 严格增，必须 $a_0=\frac{1}{5}$. 反过来，若 $a_0=\frac{1}{5}$, 则 $a_n=\frac{2^n}{5}$, 当然满足要求.

注 5. 在求 a_2,a_3,a_4,a_5 时，我们保留了计算结果的一般形式，而没有将其化简. 这样做，是为了保持结果的对称性，易于看出规律.

利用及保持问题中的各种对称性，往往给我们的处理带来好处，参见注 2, 注 3, 问题 6 的解以及注 4 中的 (i) 和 (iii).

注 6. 公式 (1) 也可采用下面的方法导出来：将递推公式

$$a_{n+1}=-3a_n+2^n \tag{2}$$

改写为

$$(a_{n+1}-\frac{2^{n+1}}{5})=-3(a_n-\frac{2^n}{5}).$$

记 $b_n=a_n-\frac{2^n}{5}$ $(n\geq 0)$, 上式变成

$$b_{n+1}=-3b_n. \tag{3}$$

于是 $b_n=(-3)^n b_0$, 从而得出 (1).

这一解法，将非齐次的二阶线性递推关系 (2), 化归为（易求解的）齐次的线性递推关系 (3), 值得仔细玩味. 将困难（或未知）的问题化归为容易（或已被解决）的问题，是数学（及其它很多学科）中非常基本、有用的想法，大家可回想出以及将看到许多这样的例子.

中国科学技术大学 98 级新生入学复试

数 学 试 题 (60 分钟)

1. 确定所有的实数 θ, 使数列 $\{\cos n\theta + i\sin n\theta\}(n\geq 1)$ 是

(1) 等比数列; (2) 等差数列.

(这里 i 是虚数单位.)

解 记 $a_n = \cos n\theta + i\sin n\theta$, 则由 De Moivre 公式知 $a_n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$. 我们也有 $a_n = e^{in\theta}$(欧拉公式).

(1) 显然 $\cos\theta + i\sin\theta \neq 0$, 故 $a_n \neq 0(n\geq 1)$. 又

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

故对所有的实数 $\theta, \{a_n\}$ 为等比数列.

(2) 如果以 (1) 的结果为基础, 则问题甚为平凡. 如果 $\{a_n\}$ 成等差数列, 则它现在必为常数列, 特别由 $a_2 = a_1$ 极易求出 $\sin\theta = 0, \cos\theta$, 即 $\theta = 2k\pi, k\in$ Z. 此时 $\{a_n\}$ 当然成等差.

不用 (1) 也不难解答本题 (与上述原则的实质相同). 因 $\{a_n\}$ 成等差数列, 等价于 $a_{n+1} - a_n$ 是常数 (与 n 无关), 即 $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$. 以 $a_n = e^{in\theta}$ 代入, 得出

$$(e^{i\theta})^2 - 2e^{i\theta} + 1 = 0.$$

于是 $e^{i\theta} = 1$, 故 $\theta = 2k\pi, k\in$ Z.

2. 直角坐标系中已知三点 $A(3,2), B(4,-3), C(2,5)$. 试求点 D, 使 A, B, C, D 成为平行四边形的顶点.

解 本题解法很多. 利用刻划平行四边形的不同方式可产生不尽相同的解法. 但最为简单的方法是利用平行四边形的对然线互相平分.

设 $ABCD$ 为平行四边形, 则 AC 、 BD 的交点 E 既是 (线段)AC 中点, 也是 BD 中点, 所以

$$x_E = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(x_B + x_D)$$

及

$$y_E=\frac{1}{2}(y_A+y_C)=\frac{1}{2}(y_B+y_D).$$

由此易知 D 的坐标是 $(1,10)$. 同样，如 $ABCD$ 成 $ADBC$ 成为平行四边形，则 D 的坐标分别是 $(3,0)$ 及 $(5,-6)$.

3. 已知数列 $\{a_n\}(n\geq 1),\{b_n\}(n\geq 1)$ 都是等差数列. 设 $A_n=a_1+\cdots+a_n, B_n=b_1+\cdots+b_n(n\geq 1)$. 若对所有 $n\geq 1$ 有

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{4n+1}{8n+3}. \tag{1}$$

求 (i) $\frac{a_{10}}{b_{10}}$； (ii) $\frac{a_{10}}{a_7}$.

解 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d, 则

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

及

$$A_n=(2a_1+(n-1)d)\cdot\frac{n}{2}. \tag{2}$$

由此易知 $A_{19}=19a_{10}$. 同样 $B_{19}=19b_{10}$. 于是 $\frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{77}{155}$.

其实， (i) 与 (ii) 应当一并解决.

由公式 (2) 我们看到， A_n 是关于 n 的二次函数，且常数项为零 (而二次项系数仅依赖于公差). 结合 (1) 可知，必有

$$A_n=kn(4n+1),\quad B_n=kn(8n+3),$$

其中 k 为常数 (与 n 无关). 因此

$$a_n=A_n-A_{n-1}=k(8n-3),$$

$$b_n=k(16n-5).$$

现在极易求出 $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ 以及 $\frac{a_{10}}{a_7}=\frac{77}{53}$.

4. 设 p,q 是复数 $(q\neq 0)$. 若关于 x 的二次方程 $x^2+px+q^2=0$ 的两根之模相等. 证明 $\frac{p}{q}$ 是实数.

证明 设方程两个根为 x_1,x_2, 则由韦达定理知

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q^2.$$

于是

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=\frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^n}{x_1x_2}=2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}.$$

因 $|x_1|=|x_2|$. 故可设 $\frac{x_1}{x_2}=\cos\theta+i\sin\theta$($\theta$ 为实数). 因此

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2=2\left(1+\cos\theta\right)\geq 0.$$

从而 $\frac{p}{q}$ 必是实数.

上面的解法, (基于问题的特点) 通过考虑 $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ 来推断 $\frac{p}{q}$ 为实数. (不难看到, $\frac{p}{q}$ 为实数的充分必要条件是 $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ 非负.)

本题也可采用下面的解法:

方程可变形为"齐次形式" $x^2+\frac{p}{q}xq+q^2=0$. 故

$$\left(\frac{x}{q}\right)^2+\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{x}{q}\right)+1=0.$$

从而方程 $y^2+\frac{p}{q}y+1=0$ 的两个 i 模也相等. 设两个根为 y_1,y_2. 则

$$y_1+y_2=-\frac{p}{q},\quad y_1y_2=1.$$

现在来证明 y_1,y_2 共轭, 从而 $\frac{p}{q}$ 为实数. 事实上, 由 $|y_1|=|y_2|=1$ 及 $y_1y_2=1$, 立即推出 $|y_1|=|y_2|=1$. 故

$$y_1\bar{y}_1=|y_1|^2=1=y_1y_2.$$

所以 $y_2=\bar{y}_1$. 证毕.

Gauss 的生平和数学工作

原著　G. M. Rassias　　翻译　章　璞

注：随着欧元的启动，世界上唯一的印有数学家高斯头像的货币 (面值 10 个德国马克) 将消失．特刊登此文以志纪念。

Carl(或 Karl) Friedrich Gauss (1777-1855) 是德国数学家、物理学家和天文学家。 1777 年 4 月 30 日他出生于德国 Braunshweig(旧称 Brunswick) 一所简陋的村舍，父母贫穷且未受过教育。他受洗的全名是 Johann Friedrich Carl Gauss, 以后签名简单地用 Carl Friedrich Gauss 。

Gauss 的父亲是农民，他希望自己的儿子能子承家业，成为一个砖瓦工或园林工。但是很小的时候 Gauss 便显示出非凡的才能。据说 3 岁时他便纠正了父亲帐目上的一个错误； 8 岁刚上小学时便迅速地得到 $1+2+\cdots+100$ 的和。看到小 Gauss 的早慧，老师劝说他的父亲应该鼓励 Gauss 成为一个脑力劳动者而不是去学手工艺。到了高中他又在哲学方面显示出和数学方面同样的才华。

Gauss 惊人的才能引起了 Brunswick 大公的注意。大公为他的朴实和腼腆所动，欣然资助他继续求学，先是在 Brunswick 的 Carolynum 学院 (1792-1795), 后在哥廷根大学 (1795-1798) 。

作为 Carolynum 学院的学生， 14 岁的 Gauss 发现了素数定理，接着于 1795 年发表了最小二乘法。

19 岁那年他作出了一个激动人心的数学发现：仅用尺规便可构造出正 17 边形，这代表了欧氏几何两千年来第一个发现。这项于 1796 年 3 月 30 日作出的、同年 6 月 1 日宣布的发现促使年青的 Gauss 选择了数学而不是哲学作为他的职业。 1798 年他转到海姆施达特大学并在那儿于 1799 年取得了博士学位，导师是 Johann Friedrich Pfaff(1765-1825) 。在其博士论文中他给出了现在称为代数基本定理的第一个严格的证明并有所改进。完成博士论文后他返回 Brunswick, 在那儿开始写他几篇最著名的论文。

1801 年 Gauss 发表了里程碑式著作《算术探究》，这通常被认为是现代数论的开始。在这本著作里 Gauss 总结了以前所有的工作，其中所提出的概念与问题今天仍被使用和研究。在这本书里他还给出了算术基本定理的一个证明，该书完成时他还是个学生，他将此书献给给他的恩人 Brunswick 大公。

1800 至 1810 年之间 Gauss 致力于天文学的研究。在 19 世纪的第一个晚上 (1801 年 1 月 1 日), Palermo 的 Piazzi 发现了第一颗小行星，起名为谷神星．由于这颗小行星难以重复地被观测到，要从少量现有的观测中确定其运行轨道需要大量精确的计算。 Gauss 被这个挑战所吸引，使用了自己的最小二乘法，并用精湛的数值计算的技巧解决了这个问题。他告诉天文学家在何处可以用望远镜观察到，果然根据 Gauss 的计算所断言的地方重新发现了谷神星。

1802 年 3 月 28 日，第二颗小行星 Pallas 在不来梅被 Wilhelm Olbers(1758-1840) 在他的私人天文台里被发现。研究木星对 Pallas 的摄动出现了特别的困难，这引起了 Gauss 的兴趣并导致了他的一系列的工作：著作《天体沿圆锥风线的绕日运动理论》(1809); 关于一般椭球体引力的论文 (1813); 关于机械弦的工作 (1814) 和关于行星摄动的研究 (1818)。为纪念他的贡献，第 1001 颗被发现的小行星被命名为 Gaussia。

1807 年 Gauss 成为哥廷根大学天文学教授和天文台台长，他担任此职 40 多年直到去世。Gauss 将天文学看成是他的职业而将纯数学看成是自己的娱乐。除了去柏林参加过一次科学会议外他终生都住在哥廷根。

1820 年左右汉诺威当局请他监督公国的土地测量，这项工作激发了他的论文《曲面的一般研究》中的思想。在这篇论文中他发现了曲面的内蕴几何，使用了曲线坐标来表达二次微分形式中的线性元 ds

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2;$$

他提出了 Gauss 曲率和曲率积分的概念，其中达到顶峰的是“极妙的定理”，即曲面的曲率仅仅依赖于 E, F, G 及其导数，从而是弯曲不变量，和曲率函数在测地线构成的三角形上的积分的 Gauss-Bonnet 定理，其一般形式是现代整体微分几何中最本质的事实。

Gauss 对于测地学的研究诱导了他发展共形映射的概念。Lagrange 曾处理了旋转曲面到平面内的共形映射。1822 年 Gauss 因为发现了任意两个曲面之间共形满射的解析条件而赢得了丹麦皇家科学会的大奖。

在 Gauss 以前，曲面仅被作为三维欧氏空间中的图形来研究。而 Gauss 证明了曲面的几何学可以集中在曲面本身进行研究。Gauss 在微分几何方面的工作本身就是一个里程碑，而其中所蕴含的意义又要比他自己的评价更深更远。

1831 年他的巨作《双二次同余》发表，这是借助于复数的新方法对数论中的早期发现的一个扩充，他定义了现在称为高斯整数的复整数，即复数 $a+bi$，其中 a, b 均为整数，并引进了素数的新理论，在其中例如 3 是素数而 $5=(1+2i)(1-2i)$ 则不再是素数。在这篇文章中他还用平面上的点来代表复数，从而澄清了关于复数的混乱；他发明了“复数”这个术语并用 i 来代替 $\sqrt{-1}$; 他还证明了环 $\mathrm{Z}[i]$ 是 UFD(唯一因子分解环) 且是一个欧几里德整环。

紧接着在测地学方面的工作，Gauss 又在物理学方面作出了丰富的工作。1833-1834 年他从事地磁学方面的试验，并与比他年轻 30 岁的朋友 Wilhelm Weber(1804-1891) 合作建立并运行了一个新的不用金属的磁学观察站，因为金属可能会影响磁力。他们组织了磁学学会并联盟成了世界范围的观察网，到了 1834 年仅在欧洲就有 23 个磁学观察站。

J. C. Maxwell 在他的《电磁学》一书中说：Gauss 对于磁学的研究重新改造了整个科学，改造了使用的仪器，观察的方法和结果的计算。Gauss 关于地磁学的论文是物理研究的模型，并提供了地球磁场测量的最好方法。他对天文学和磁学的研究开辟了数学和物理相结合的新的辉煌的时代。

Gauss 和 Weber 于 1833 年也发明了第一台电磁电报机，并用来在 Gauss 的天文台和 Weber 的物理所之间进行联系。1833 年第一个单词、然后是整个一句话通过电报机送出。他设计了磁现象的逻辑单位系统，诸如磁通量强度的单位“高

斯”。德国的 Steinhei 于 1837 年和美国的 Morse 于 1838 年独立地发明了更高效的电报机。

在哥廷根 Gauss 还发明了日光反射信号仪，一种能用于更精确地确定地球形状的三角测定仪，在哥廷根耸立着一尊 Gauss 和 Weber 发明电报机的雕像。James Clerk Maxwell 在他的著名著作《电磁学》一书中多次提到 Gauss 的工作。1839 年 Gauss 发表了关于与距离平方成反比的力的一般理论的基本论文，这篇《普通原理》是位势理论作为一个数学分支的开始，并导致了称为 Dirichlet 原理的最后由 D. Hilbert 证明的关于空间积分的极小性原理。

他的发现中还包括被称为高斯定理的关于现代向量分析的收敛定理和关于调和函数的均值定理。

1811 年 Gauss 提出考察今天称为复变解析函数的问题。在给朋友 F. Bessel 的信中他陈述了解析函数这一 19 世纪最活跃的数学领域之一中的基本定理，这个被 A. L. Cauchy 重新发现的定理和另一相似的定理诱导了复分析中许多重要的结果。

1810 年 N. H. Abel, J. Fourier, C. F. Gauss 和 B. Bolzano 开始处理无穷级数。1812 年在“无穷级数的一般研究”一文中， Gauss 对无穷级数的收敛性作出了第一个重要而严格的考察，他考虑了超几何级数 $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ 的收敛性。在其许多工作中他称一个级数收敛，如果从某项开始级数的项递减趋于零，但在 1812 年的文章中他纠正了这个不正确的概念。随着 α,β,γ 的选取不同，超几何级数可以代表不同的函数，这促使他发展对这种级数收敛性的精确判别法。

Gauss 证明了超几何级数对于满足 $|x|<1$ 的复数 x 总收敛，而对 $|x|>1$ 则发散。若 $x=1$, 则级数收敛当且仅当 $\alpha+\beta<\gamma$; 而对 $x=-1$, 级数收敛当且仅当 $\alpha+\beta<\gamma+1$ 。

在天文和测地工作中 Gauss 和同时代人一样，在实际应用中仅使用无穷级数的有限项而忽视其余项。当他看到下面的项数值很小时便停止而未估计误差。在其未发表的论文中记录了他在两个主要领域里的创新工作：椭圆函数和非欧几何。

从欧几里德时代到 Guass 的童年，欧氏几何的假设在逻辑上被认为是理所当然的，然而两千年来数学家们被这样的问题所困惑：欧几里德的平行假设是否可以从其它假设中推出并试图将其证明为一个定理，然而均没有成功。 Guess 是相信欧几里德平行假设独立性的第一人：不同的公理选择将产生不同的几何。

1820 年他得到了非欧几何 (这是 Guass 给起的名字) 的主要定理但却从未发表，原因如他 1829 年 1 月 27 日给 Bessel 信中所说，他害怕被人耻笑，或者如他写的，他害怕“ Boeti 人的嚷嚷”。数学家们将平行假设变成一条定理的不成功的努力引起了对欧几里德将此作为公理的智慧的充分欣赏，也导致了所谓的非欧几何的诞生。 1829 年和 1832 年俄国数学家 Nilolai Ivanovitch Lobachevsky(1792-1856) 和匈牙利数学家 Jomos Bolyai(1802-1860) 各自独立发表了关于非欧几何的工作。

同样 Guass 在椭圆函数这一丰富的分析领域内从未发表过任何结果，而且也未从 Abel(1827) 和 Jacobi(1828-29) 的工作中断言任何事情，然而人们逐渐得知早在 Abel 和 Jacobi 诞生之前他就在这方面发现了许多结果，对此国际数学界十分吃惊。

1840 年 Jacobi 访问过 Gauss 之后写信给他的兄弟：“如果实际天文学没有分散这位巨星辉煌的生涯，数学将处于多么不同的地位。”

Gauss 也是拓扑学的开拓者，在 1799 年的博士论文中他预见位置分析将是数学的主流之一。他或许是认识到从数学上研究纽结的可能性的第一人，并在其对电动力学的考察中提出了连接数的解析表达式，这是纽结理论和其它拓扑分支的基本概念。虽然 Guass 并未在拓扑学方面发表过论文，但从他去世后发表的作品中发现他已开始了这项研究，他关于拓扑重要性的预见在我们这一代得到应验。

1848 年 Johann B.Listing(1806-1882), Gauss 1834 年的学生，后成为哥廷根大学的物理学教授，发表了《拓扑学的初步研究》，其中他宁愿将所讨论的内容称为点的几何，但这一术语已被 Von Staudt 在射影几何中用过，因此改用了拓扑一词。 J. B. Listing 企图寻求几何图形的定性规律，例如，他试图推广 Euler 关系 $V-E+F=2$ 。

A. Möbius 在 1863 年的论文《初等关系的理论》中论述是对拓扑学研究的本质提出恰当说法的第一人。他是 Gauss 1913 年的助教。 Möbius 和 Listing 于 1858 年各自独立地发现了单侧曲面，其中以 Möbius 带最为著名。

拓扑研究的最大推动力来自于 Gauss 的另一个学生 Riemann 的工作。在 1851 年关于复变函数的毕业论文中以及在 Abel 函数的研究中他都强调在研究函数时位置分析的一些定理是必不可少的．在这些研究中他发现并引进了连通性，并根据连通性将曲面分类．正如他认识到的，他已引进了拓扑性质．

Gauss 在光学领域里也有工作．这一领域自 Euler 时代后就被忽视了．他于 1838 年至 1841 年所做的考察为处理光学问题提供了一个全新的基础．在毛细作用、结晶学、力学诸领域 Gauss 均有基本的贡献．很少有一个数学、物理和天文学领域 Gauss 没有涉猎过．他的学生中包括 Dedekind, Dirichlet, Eisenstein, Kummer . Gauss 对于教学热情不高，他认为这是在浪费自己的时间．出于不同的原因他认为去教有才华和无才华的学生都是无用的．尽管如此，如果教学是不可避免的他显然做得很出色．根据 Dedekind 的回忆， Gauss 的课程在 50 年以后仍是“我所听过的最好课程，保持着难以忘怀的记忆”．

Gauss 喜欢社交生活，他曾结婚 2 次，有 6 个孩子，其中 2 人移居美国．除了科学和家庭外，他的主要兴趣在历史和世界文学、国际政治和公共财务．可能是由于保险统计工作的刺激， Gauss 养成了从报刊、书籍和日常的观察中收集各种统计数据的习惯．毫无疑问，这些数据帮助他获得相当于年薪 200 倍的金融投机．如他的父亲对他的称呼，这位“星空的凝观者”取得了令他的那些“只讲实用”的亲戚们难以置信的经济状况．奢侈从来没有吸引过这位数学王子．他的一生从 20 岁开始就真挚地贡献给了科学，正如他的朋友 Sartorius von Waltershausen 写道“从青年到老年， Gauss 都是一个真实而简单的人．一间小书房，一张铺着绿色台布的工作台，一张白色的写字桌，一个窄沙发．70 岁以后又添了一把手扶椅和一架带灯罩的台灯，一张床，简单的食物，一件长外衣，一顶天鹅绒便帽，这些东西是他一生的需求．”而 Gauss 却拥有约 6 千册的藏书，包括西腊文、拉丁文、英文、法文、俄文、丹麦文，当然还有德文的书籍．

几位选过他课的学生说， Gauss 老年时开始喜欢教学并比年轻时上更多的课．促使他态度转变的原因之一可能是这时他的学生都准备得更好而且更有兴趣． Gauss 的最后一批学生中包括以多卷本数学史而闻名的 M. Cantor 和以数论和代数著名的 R. Dedekind ．我们摘录 Dedekind 于 1901 年写下的一段话：“通常他以舒适的态度坐着，注视着下方，有点弯腰，双手放在膝上，说起话来非常轻松、非常清楚、简单和明了．但当他想用一个特别的词来强调一个新的观点时，他

突然抬起头，转向坐在身边的人，用他美丽而富有穿透力的蓝眼睛注视着他…，如果他要从解释原理而转向数学公式，他站起来以庄重而笔直的姿势、用独特而漂亮的板书写在身旁的黑板上；他总能在相当小的地方很经济而有条不紊地安排着板书，以数字为例，他总是将必需的数据很小心地写在纸条上。”

从 40 年代早期开始，Gauss 的活动强度开始减弱，发表的东西或者是老问题的变形、评论、报告、或者是小问题的解答．但他却继续从事天文观察．他几次担任过哥廷根的系主任．这十年中他忙于完成几件老的项目．例如，汉诺威测量的最后计算．1847 年他在 G. Eisenstein 这位命中注定疾病缠身的年青人的文集前言中雄辨地赞美了数论和这位年轻人，这是很少几位告诉 Gauss 所不知道的东西的人．接着他花了几年的时间将大学里的丧偶者基金做成一个可靠的保险金并计算必要的统计表．Gauss 可以流利地说和阅读俄文．1849 年在他获博士学位 50 周年的庆典上他收到许多祝词和荣誉称号．这一年他发表的论文是代数基本定理的第四个证明，基本上是他 1799 年博士论文中第一个证明的改进．庆典以后 Gauss 以慢节拍继续他的兴趣，成为一个私交以外难以接近的传奇人物．

1854 年 1 月 Gauss 做了彻底的体检，诊断是心脏扩张，来日已经不多，此后，他的健康有所改善．这期间 (约 1854 年 6 月)Riemann 得以发表关于几何基础的巨作“教授资格论文”，这是 Gauss 为他选定的题目．Riemann 作了题为“关于几何基础的假设”的演讲，从而获得了哥廷根大学开课的许可．几天后，Gauss 最后一次离开哥廷根去视察从卡塞儿出发的铁路的施工．从 8 月开始他的健康恶化已不能离开居室．到了秋天病情继续恶化．虽然已卧床不起，但他仍阅读、通信并经营证券．12 月 7 日，死亡又一次袭来但又一次被他驱走．在经历了一周左右持续的乏力之后，1855 年 1 月 23 日晨 Gauss 在睡眠中离去．据说他的手表在他去世后的几分钟后停了下来．Gauss 葬于哥廷根．

Gauss 的天才得到了同时代人的欣赏，在他去世的时候人们就已尊他为数学王子．

1880 年在他的诞生地 Brunswick 竖起了一块以正 17 边形为底座的纪念碑，汉诺威的君王特意定做了一枚勋章尊他为数学王子．1914 至 1919 年在哥廷根讲授 19 世纪数学发展的 Fleix Klein 在其讲座里曾这样评价 Gauss: 如果我们现在询问这个人不同寻常和独一无二的品质，回答一定是：在每一个所从事的领域内所取得的最伟大的个人成就与最宽广的多才多艺的结合；在数学上的创造性，追寻数学发展的力度和对其实际应用的敏感的完善结合，这包括精确无误的观察和测量；最后是对这种伟大的自我创造财富的最精炼的表达．

“仅有两个人的天赋可以与他相比，Archimedes 和 Newton．而 Gauss 活得更久从而得以取得更加充分的个人成就．Archimedes 代表了古代的科学成就，Newton 是高等数学的创立者，而 Gauss 则代表了数学上一个新时代的来临．”

Gauss 的印章上刻着他的座右铭：少而精．他充满了源思想，但没有时间等待这些思想成熟到他认为完美得可以发表，他是一个完美主义者，在他确认已得到了完整的结果并获得了最优雅和最精确的表达形式以前从不发表自己的工作．他关于非欧几何方面的许多结果在世时均未发表．Gauss 的全部发表物，包括他对自己工作的评论，均重印于 12 卷的“全集”，由哥廷根皇家学会发表 (莱比锡－柏林，1863–1933)，“全集”也包含了大量未发表的笔记和论文，相关的通信、评论和对他在每一领域内工作的深入的分析．