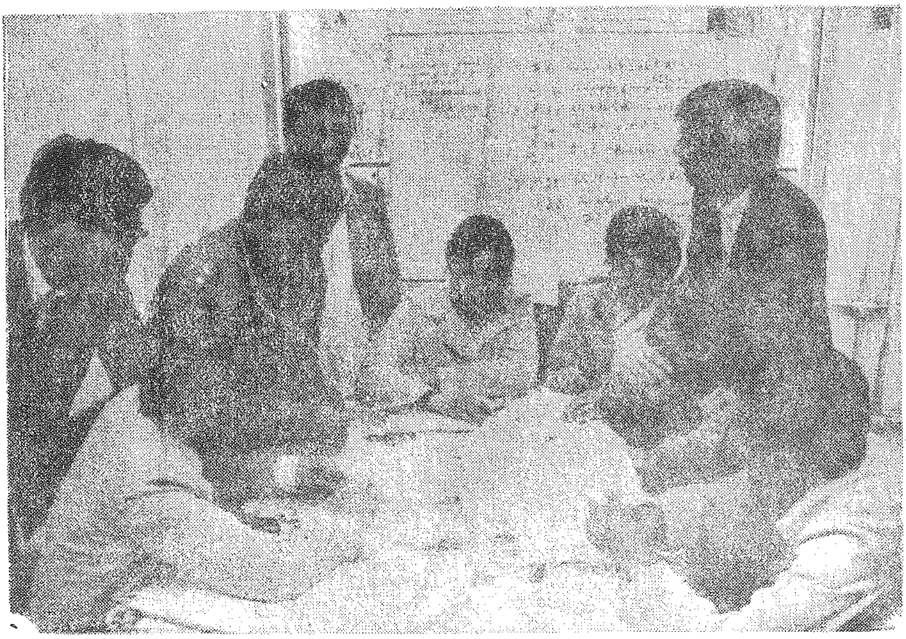
蛙鸣数学杂志

第 36 期

中国科技大学数学系学生会主办

一九八八年八月



第六届《蛙鸣》编委编委评奖活动（新华社记者摄）

第四届《蛙鸣》编委与指导老师合影留念

目　　录

研 究 与 讨 论

未 解 决 问 题

编　译　报　告

国 外 新 书 评 介

人 物 与 传 记

数　学　教　育

问 题 有 奖 征 解

研究与讨论

·蛙鸣·第36期
1988年 8 月

关于对数平均的下界

数学系 陈计 王振

设 x 和 y 是两个不相等的正数。对于任意实数 p，我们定义 x 与 y 的幂平均 M_p 如下：

$$M_p = M_p(x, y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \neq 0) \tag{1}$$

$$M_0 = \lim_{p\to 0} M_p = \sqrt{xy} \tag{2}$$

再引入对数平均 L 如下：

$$L = L(x, y) = \frac{x - y}{\ln x - \ln y} \tag{3}$$

1966年，B. C. Carlson [1] 指出：对数平均大于几何平均，即

$$M_0 < L \tag{4}$$

1972年，他 [2] 又把（4）精密化成

$$M_0^{\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} < L \tag{5}$$

1981年，王中烈和王兴华 [3] 用带余项的求积公式建立了：

$$M_0^p M_p^{1-p} < L \tag{6}$$

其中 $p = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$。

本文中，我们将证明（6）对任意实数 p 都是成立的。

引理 设 $|t| < 1$，α 是任意实数，则

$$(1+t)^\alpha + (1-t)^\alpha \geqslant 2\sqrt{1-t^2} \tag{7}$$

等号成立当且仅当 $t = 0$。

证明 下设 $t \neq 0$。

当 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时，

$$(1+t)^\alpha + (1-t)^\alpha \geqslant 2(\sqrt{1-t^2})^\alpha > 2\sqrt{1-t^2} \tag{8}$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 或 $\alpha < 0$ 时，

(9) $$(1+t)^a+(1-t)^a \geqslant 2\left(\frac{(1+t)+(1-t)}{2}\right)^a = 2 \quad 2\sqrt{1-t^2}$$

证毕。

定理 设 x 和 y 是两个正数，p 是任意实数，则

(10) $$\frac{x-y}{\ln x-\ln y} \geqslant (xy)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1-p}{p}},$$

等号成立当且仅当 $x=y$ 。

证明 不妨设 $x^p=1+t$，$y^p=1-t$，$t>0$，则（10）化为

(11) $$\frac{p[(1+t)^{\frac{1}{p}}-(1-t)^{\frac{1}{p}}]}{\ln(1+t)-\ln(1-t)} \geqslant \sqrt{1-t^2} .$$

作函数

(12) $$f(t)=p[(1+t)^{\frac{1}{p}}-(1-t)^{\frac{1}{p}}]-\sqrt{1-t^2}[\ln(1+t)-\ln(1-t)] .$$

则

(13) $$\begin{aligned} f'(t) &= (1+t)^{\frac{1}{p}-1}+(1-t)^{\frac{1}{p}-1}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}[\ln(1+t)-\ln(1-t)] \\ &\quad -\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right) \\ &\geqslant 2\sqrt{1-t^2}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}[\ln(1+t)-\ln(1-t)]-\frac{2}{\sqrt{1-t^2}} ,\end{aligned}$$

从而

(14) $$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,f'(t) &\geqslant \frac{t}{2}[\ln(1+t)-\ln(1-t)]-t^2 \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n-1} \geqslant 0 .\end{aligned}$$

所以 $f(t)>f(0)=0$，即（11）成立。

证毕。

作者们感谢上海科技大学刘启铭老师的指导和帮助！

参　考　文　献

[1] B.C.Carlson, Some Inequalities for Hypergeometric Functions, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 32—39.

[2] B.C.Carlson, The Logarithmic Mean, Amer. Math. Monthly, 79 (1972), 615—618.

[3] 王中烈，王兴华，求积公式与分析不等式——关于对数平均对幂平均的分隔 杭州大学学报，第 9 卷，第 2 期，156—159 .

研究与讨论

·蛙鸣·第36期
1988年 8 月

Mitrinović–Djoković不等式的推广

数学系　余红兵　陈 计

南斯拉夫的D. S. Mitrinović 教授和加拿大的D. Z. Djoković 教授在书[1]中发表了如下结果：

若 $x_k \quad 0$ $(k=1,\cdots,n)$，$x_1+\cdots+x_n \quad 1$，且 $a \quad 0$，则

$$(1)\qquad \sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^a \quad \frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}}.$$

本文中，我们推广了上述结果，建立了下列

定理　若 $x_k \quad 0$，$k=1,2,\cdots,n$，$n \quad 2$，$x_1+x_2+\cdots+x_n \quad s \quad 2\sqrt{3}$，且 $a \quad 1$，则

$$(2)\qquad \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^a\right]^{\frac{1}{a}} \quad \frac{s}{n}+\frac{n}{s},$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，并且 $2\sqrt{3}$ 是使上式成立的最大常数

证明　我们先证 $a=-1$，$n=2$ 的情形：

$$(3)\qquad \left[\frac{\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^{-1}+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^{-1}}{2}\right]^{-1} \quad \frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}.$$

注意下面恒等式：

$$(4)\qquad 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}\right)^{-1}-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^{-1}-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^{-1}$$

$$=\frac{4(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2+4}-\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2(3-x_1x_2)}{[(x_1+x_2)^2+4](x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)^4+(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2[12-(x_1+x_2)^2]}{4(x_1^2+1)(x_2^2+1)[(x_1+x_2)^2+4]}$$

在 $(x_1+x_2)^2\leqslant 12$ 或 $x_1+x_2\leqslant 2\sqrt{3}$ 时，(4) 式 $\geqslant 0$，等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时取。

现对 $\delta \quad 0$ 来考虑 $(x_1+x_2)^2=12+\delta$，代入上式分子得

$$(5)\qquad (x_1+x_2)(x_1-x_2)^2[(x_1-x_2)^2-\delta].$$

[illegible]$x_1 \neq x_2$但两者足够接近时，(5) 式为负，从而 (4) 式为负。即$2\sqrt{3}$具有最佳性。

下面我们指出$a=-1$时 (2) 对自然数$n \geqslant 3$也成立，即

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^{-1}\right]^{-1} \geqslant \frac{s}{n}+\frac{n}{s} \quad . \tag{6}$$

若$x_1, x_2, \cdots, x_n$中有两个x_i, x_j，$x_i \neq x_j$，则$x_i+x_j<2\sqrt{3}$．我们用$\frac{1}{2}(x_i+x_j)$取代x_i与x_j，其和式不变，但由 (3) 知 (6) 左边的值变小。所以$x_i \neq x_j$时，(6) 式左边不能取到最小值，等价地说，(6) 式左边取最小值时$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{s}{n}$。

再用幂平均定理据 (6) 式即知 (2) 式成立。

证毕。

参　考　文　献

[1] D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, 1970.

(上接第 6 页)

也就是要证　$\Delta_{\eta_1} \geqslant \Delta_0^{1-\frac{\eta_1}{\eta_2}} \quad \Delta_{\eta_2}^{\frac{\eta_1}{\eta_2}}$

这只要在定理中取$\theta_1=\eta_2 \ \theta_2=0$．　$\lambda=\frac{\eta_1}{\eta_2}$即得。在$\eta_1<0<\eta_2$及$\eta_1<\eta_2<0$这两种情形下，同理可证。

推论 2 [1] 设a_1, b, c为$\triangle ABC$的三边长，$\triangle$表示其面积，则当$\theta \in [0, 1]$时，

$$\Delta_\theta \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{1-\theta} \quad \Delta^\theta \quad .$$

参　考　文　献

[1] 马援，Pedoe 不等式的推广，数学通讯，1987年第 7 期

[2] 陈计，Heron 公式的指数推广及其应用，数学通讯，1987年第12期

研究与讨论

·蛙蛙鸣·第36期
1988年8月

三角形面积Δ_θ的对数凸性

数学系86级 钱黎文 王 振

设三个正数 a,b,c，若 $a^\theta,b^\theta,c^\theta\ (\theta\in R)$ 可构成一个三角形，记其面积为 Δ_θ。本文揭示了 Δ_θ的一个基本性质——对数凸性。

定理 当 $0<\lambda<1$ 时，有

$$\Delta_{\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2}\geq\Delta_{\theta_1}^{\lambda}\ \Delta_{\theta_2}^{1-\lambda}$$

其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立。

证明 因 Heron 公式

$$\Delta_\theta=\frac{1}{4}\sqrt{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)(a^\theta+b^\theta-c^\theta)(a^\theta-b^\theta+c^\theta)(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)}$$

记 $f(\theta)=\ln\Delta_\theta$， 则

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\Big[\ln(a^\theta+b^\theta+c^\theta)+\ln(a^\theta+b^\theta-c^\theta)+\ln(a^\theta-b^\theta+c^\theta)$$

$$+\ln(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)\Big]-\ln 4\ .$$

因此，

$$f'(\theta)=\frac{a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c}{a^\theta+b^\theta+c^\theta}+\frac{a^\theta\ln a+b^\theta\ln b-c^\theta\ln c}{a^\theta+b^\theta-c^\theta}$$

$$+\frac{a^\theta\ln a-b^\theta\ln b+c^\theta\ln c}{a^\theta-b^\theta+c^\theta}+\frac{-a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c}{-a^\theta+b^\theta+c^\theta}\ ;$$

$$f''(\theta)=\frac{(a^\theta\ln^2a+b^\theta\ln^2b+c^\theta\ln^2c)(a^\theta+b^\theta+c^\theta)-(a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c)^2}{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}$$

$$+\frac{(a^\theta\ln^2a+b^\theta\ln^2b-c^\theta\ln^2c)(a^\theta+b^\theta-c^\theta)-(a^\theta\ln a+b^\theta\ln b-c^\theta\ln c)^2}{(a^\theta+b^\theta-c^\theta)^2}$$

$$+\frac{(a^\theta\ln^2a-b^\theta\ln^2b+c^\theta\ln^2c)(a^\theta-b^\theta+c^\theta)-(a^\theta\ln a-b^\theta\ln b+c^\theta\ln c)^2}{(a^\theta-b^\theta+c^\theta)^2}$$

$$+\frac{(-a^\theta\ln^2a+b^\theta\ln^2b+c^\theta\ln^2c)(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)-(-a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c)^2}{(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}$$

$$
=\frac{1}{2}\left[\frac{a^\theta b^\theta\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2+b^\theta c^\theta\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2+c^\theta a^\theta\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}\right.
$$

$$
+\frac{a^\theta b^\theta\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2-b^\theta c^\theta\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2-c^\theta a^\theta\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(a^\theta+b^\theta-c^\theta)^2}
$$

$$
+\frac{-a^\theta b^\theta\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2-b^\theta c^\theta\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2+c^\theta a^\theta\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(a^\theta-b^\theta+c^\theta)^2}
$$

$$
\left.+\frac{-a^\theta b^\theta\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2+b^\theta c^\theta\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2-c^\theta a^\theta\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}\right]
$$

不妨设$a^\theta \quad b^\theta \quad c^\theta$，并记

$$
A=1/(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2,\qquad B=1/(a^\theta+b^\theta-c^\theta)^2,
$$

$$
C=1/(a^\theta-b^\theta+c^\theta)^2,\qquad D=1/(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2。
$$

显然有$A< B\leqslant C\leqslant D$。 则

$$
f''(\theta)=\frac{1}{2}\left[a^\theta b^\theta\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2(A+B-C-D)\right.
$$

$$
+b^\theta c^\theta\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2(A-B-C+D)
$$

$$
\left.+c^\theta a^\theta\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2(A-B+C-D)\right].
$$

$$
=\frac{1}{2}\left[a^\theta b^\theta\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2(A+B-C-D)+2b^\theta c^\theta\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2(A-B)\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{\theta^2}\left(c^\theta a^\theta\left(\ln\frac{a^\theta}{c^\theta}\right)^2-b^\theta c^\theta\left(\ln\frac{b^\theta}{c^\theta}\right)^2\right)(A-B+C-D)\right]\leqslant 0.
$$

因此$f(\theta)$为上凹函数，从而

$$
\ln\Delta_{\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2}\geqslant\lambda\ln\Delta_{\theta_1}+(1-\lambda)\Delta_{\theta_2}.
$$

即$\Delta_{\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2}\geqslant\Delta_{\theta_1}^{\lambda}\Delta_{\theta_2}^{1-\lambda}$。 证毕

推论1：函数$g(\eta)=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta_\eta\right)^{\frac{1}{\eta}}$关于$\eta$单调减。

证明 显然$\frac{\sqrt{3}}{4}=\Delta_0$。当$0<\eta_1<\eta_2$时，即只要证

$$
\left(\frac{\Delta_{\eta_1}}{\Delta_0}\right)^{\frac{1}{\eta_1}}\geqslant\left(\frac{\Delta_{\eta_2}}{\Delta_0}\right)^{\frac{1}{\eta_2}}
$$

（下转第4页）

·蛙鸣·第36期
1988年8月

一 个 覆 盖 问 题

数学系87级 冯 磊

问题：一条宽为 ℓ 的无限长的带子覆盖面积为1的正方形，问如何何使覆盖面积最大积最大，并求最大面积。

解：这个问题要分几步来考虑。

（一）首先，因为正方形面积为1，所以正方形边长为1，如果 $\ell>1$，那么带子可以把正方形全部覆盖住（如图1）。

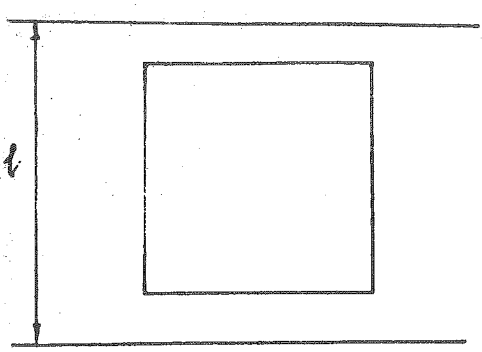


图 1

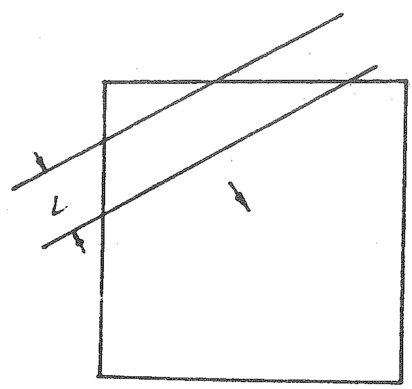


图 2

（二）如果 $\ell<1$。

（1）这条带子一定覆盖住正方形的一条对角线，因为如果带子不盖住正方形的一条对角线，那么有以下三种情况：

（i）带子在正方形上的位置（如图2），把带子向箭头的方向移动，覆盖面积会增大。

（ii）位置如图3。如果把带子向箭头方向移动，使带子边缘过正方形的一个顶点。则移动后增加的四边形面积比减少的四边形面积多了带阴影的三角形面积，所以移动后覆盖面积增大了。

（iii）位置如图4。设 $\angle FAD\geqslant 90°$。取 $BC=AD$，取法如图。连结 CE，DF。$\because \angle FAD\geqslant 90°$，$\therefore$ 在 $\triangle FDA$ 中，$FD>FA$，而 $ECDF$ 和 $EBAF$ 面积相等，$\therefore FA\cdot l=FD\cdot h$ $\therefore l>h$。所以移动后带子的宽度比原来小，如果把带子宽度放大成 l，那么 $FA\cdot\ell<FD\cdot\ell$ $\therefore$ 覆盖面积增大。

由此可得，如果带子不覆盖正方形的一条对角线，那么覆盖面积就不是最大的。因

此带子覆盖住正方形的一条对角线。

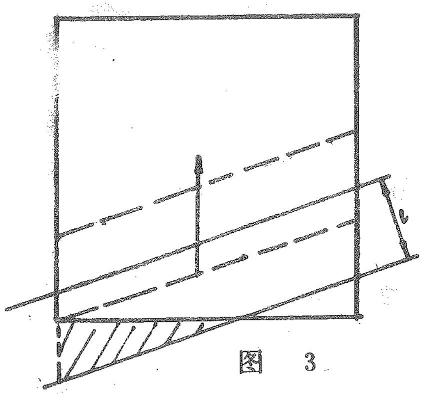


图 3

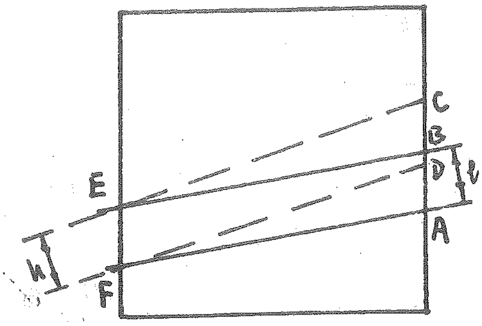


图 4

(2) 带子两边在正方形内的截长一定相等。即图 5 中$a=b$，假设 $b>a$，把带子从 a向 b的方向（如图 5 箭头所示）移动一个非常小的距离，使移动后的截长$a'<b'$，由于$a' \parallel a, b' \parallel b$，移动后覆盖面积增大的梯形面积比减小的梯形面积要大。∴覆盖面积增大。

从而得出带子两边在正方形的截长相等，这时带子的中心线一定通过正方形两对角线的交点。

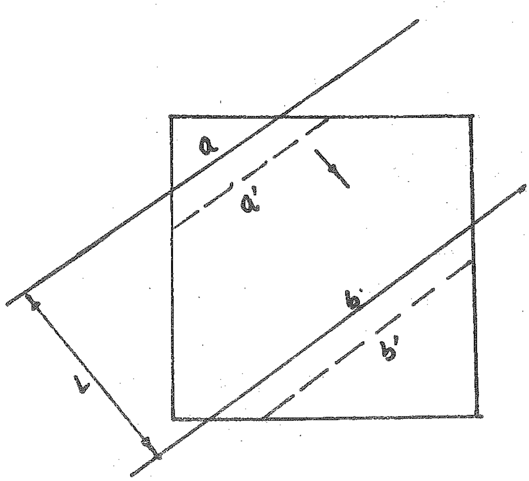


图 5

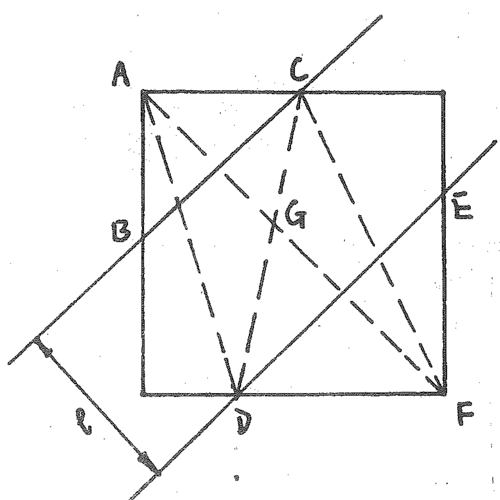


图 6

证：如图 6。连结CD，AF。∵$BC=DE$。$\angle ABC=\angle FED$，∵$\triangle ABC\cong\triangle FED$ ∴$AC=DF$。连AD，CF。则$ADFC$是▱。∴CD与AF的交点G是AF的中点，即G是正方形对角线的中点。G又是CD的中点，即G是带子 l的中心线上的点。∴带子的中心线一定通过正方形两对角线的交点。

(3) 求出阴影三三角形的面积。设 $h=OC$，$x=DC$，$OB=m$，$OA=n$ 及$\angle\ \alpha$如图 7 所示。则

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,$$

$$x = h - \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{l}{2},$$

$$m = \sin 45^\circ \frac{\sqrt{2}/2}{\sin(45^\circ + \alpha)} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin(45^\circ + \alpha)}。$$

$$n = [2\sin(45^\circ - \alpha)]^{-1}$$

$$m + n = \frac{\frac{1}{2}[\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)]}{\sin(45^\circ + \alpha)\sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}。$$

$$S_{阴影三角形} = \frac{\frac{1}{2}(m+n)\cdot h\cdot x^2}{h^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\alpha - 1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - l}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha - \frac{l}{2}\right)^2}{2\cos^2\alpha - 1}。$$

(4) 当 $\alpha = 0°$时，$S_{阴影三角形} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{l}{2}\right)^2$。

在符合前(1) 和(2) 所确定的带子在正方形内的位置情况下，$\angle\alpha$的最大度数如图8。这时：

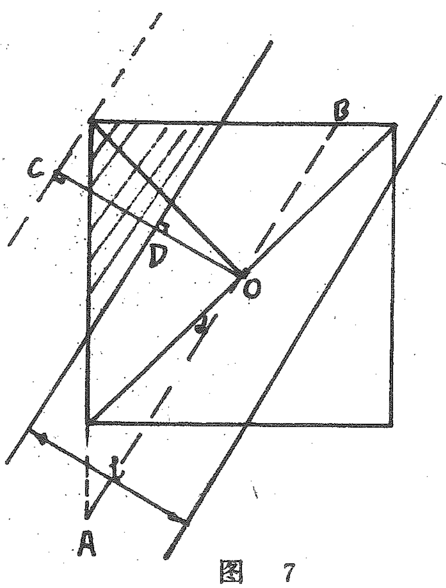


图 7

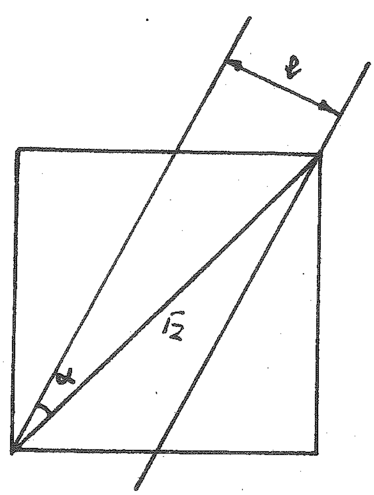


图 8

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{l^2}{2}}=\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}\ .$$

而 $\alpha>0$ $\quad\therefore\quad \sqrt{\frac{2-l^2}{2}}\leq\cos\alpha\leq 1$。

（5）当 $l>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，在 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}l}$ 时，阴影三角形面积最小，覆盖面积最大

证：要证当 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}l}$（因为 $l>\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时 $\frac{1}{\sqrt{2}l}\leqslant 1$）时阴影三角形面积一定小于 $\cos\alpha$ 为任何其他值时的面积，设 $\cos\alpha=t$，即要证：

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}\quad\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}l}l-\frac{l}{2}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}l}\right)^2-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2l}-\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{l^2}-1}=\frac{1-l^2}{4}$$

移项后：

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}\quad\frac{1-l^2}{4}$$

$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}tl+\frac{l}{4}\right)^2-(2t^2-1)(1-t^2)}{4(2t^2-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}tl-1)^2}{4(2t^2-1)}$$

由于 $l<1,\ t\geqslant\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}$，从而

$$4(2t^2-1)\geqslant 4(2-l^2-1)>0\qquad\qquad(\cdot)$$

而 $t\neq\frac{1}{\sqrt{2}l}$ 时，$\sqrt{2}tl-1\neq0$，于是 $\frac{(\sqrt{2}tl-1)^2}{4(2t^2-1)}>0$。

即当$\cos\alpha \neq \frac{1}{\sqrt{2}\,l}$时，$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1} > \frac{1-l^2}{4}$ ∴原命题得证。这时覆盖面积最大为

$$1-2\,\frac{1-l^2}{4}=\frac{1+l^2}{2}。$$

(6) 当$l<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，在$\cos\alpha=1$(即 $\alpha=0°$) 时，阴影三角形面积最小。

证：设$\cos\alpha=t$(取值为$\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}\leqslant t<1$) 于是

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}-\frac{(\sqrt{2}-l)^2}{4}$$

$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}tl+\frac{l^2}{4}\right)-(2t^2-1)(2tl^2-2\sqrt{2}\,t)}{4(2t^2-1)}$$

$$=\frac{(-2-2l^2+4\sqrt{2}\,l)t^2-2\sqrt{2}\,tl+2l^2+2-2\sqrt{2}\,l}{2(2t^2-1)},$$

要证此式>0,由(5) 的·处得$4(2t^2-1)>0$。

而$(-2-2l^2+2\sqrt{2}\,l)t^2-2\sqrt{2}\,tl+2l^2+2-2\sqrt{2}\,l$

$=(t-1)[(-2-2l^2+4\sqrt{2}\,l)t+(2\sqrt{2}\,l-2-2l^2)]$

$=(1-t)[(2-4\sqrt{2}\,l+2l^2)t+(2l^2-2\sqrt{2}\,l+2)]$

由于$1-t>0$,只需证

$(t^2-4\sqrt{2}\,t+2)t+(2t^2-2\sqrt{2}\,t+2)>0$。 (△)

(i) 若$2l^2-4\sqrt{2}\,l+2\geqslant0$,那么$2l^2-2\sqrt{2}\,l+2\geqslant2\sqrt{2}\,l>0$。于是(△)式成立。

(ii) 若$2l^2-4\sqrt{2}\,l+2<0$，那么(△)式左边$>(2l^2-4\sqrt{2}\,l+2)$

$+(2l^2-2\sqrt{2}\,l+2)=(4l^2-6\sqrt{2}\,l+4)=(4l-\sqrt{2})\left(l-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

而由题设得$l<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴$4(l-\sqrt{2})\left(l-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$,从而(△)式也成立。∴原命题得证，这时最大覆盖面积为

$$1-2\frac{(\sqrt{2}-l)^2}{2}=\frac{2\sqrt{2}\,l-l^2}{2}。$$

到此，本题全部解完。本题整个答案为(以$f(l)$表示问题最大覆盖面积)：

$l\geqslant1$时，$f(l)=1$,覆盖方式如图1。

当$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant l\leqslant1$时，$f(l)=\frac{1+l^2}{2}$，覆盖方式如图7,其中，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}\,l}$。

当$0 < l \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$时，$f(l) = \frac{2\sqrt{2}\ l - l^2}{2}$，覆盖方式如图9.其中带子边与带子盖住的的正方形的那条对角线平行。

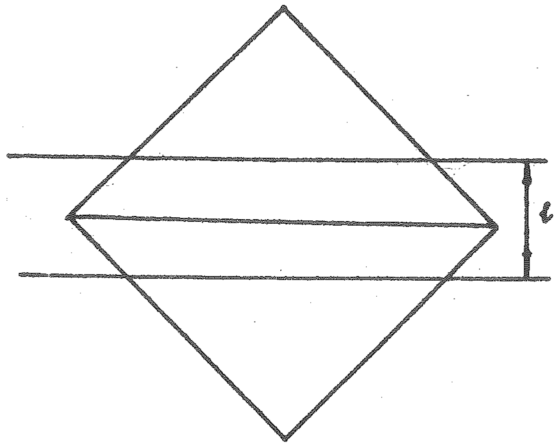


图 9

函数$f(l)$如图10所示，它由三段组成，第一段$\left(0 < l \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$为朝下的抛物线，第二段$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} < l \leqslant 1\right)$为朝上的抛物线，第三段（$l > 1$）为直线。

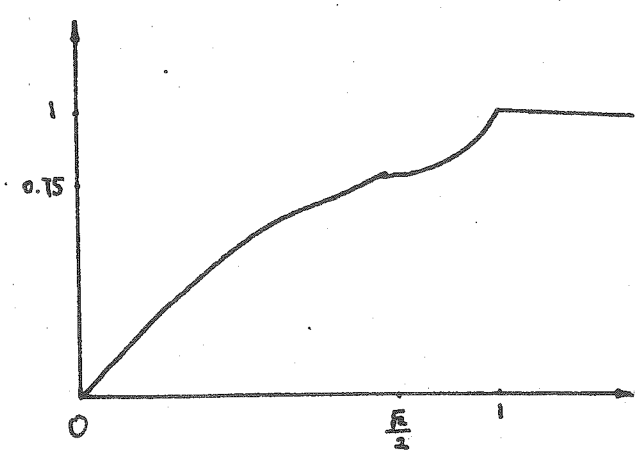


图 10

研究与讨论

·蛙鸣·第36期
1988年8月

Szász不等式的简单证明

数学系　余红兵

Szász证明了下面的有趣结果[1]

如果A是n阶正定矩阵，P_k表示其所有k阶主子式的乘积，则有

$$P_1^{\frac{1}{\binom{n-1}{0}}} \geqslant P_2^{\frac{1}{\binom{n-1}{1}}} \geqslant \cdots \geqslant P_k^{\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}} \geqslant \cdots \geqslant P_n^{\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}}$$

这篇注记将给予Szasz不等式的非常简单的证明。

证明　1°　设$A_{i,k+1}$是A的任一k+1阶主子式，（k=0,…，n−1），则$A_{i,k+1}$对应的矩阵$B_{i,k+1}$是k+1阶正定阵。

考虑$B_{i,k+1}$的k次复合矩阵$B^{(k)}_{i,k+1}$，熟知[2]，$B^{(k)}_{i,k+1}$仍然正定，且主对角线元素恰好是$B_{i,k+1}$的所有k阶主子式，以及

$$\det B^{(k)}_{i,k+1} = (\det B_{i,k+1})^{\binom{k+1-1}{k-1}} = A_{i,k+1}^{\binom{k}{k-1}}$$

由熟知的Hadamard不等式，得

$\det B^{(k)}_{i,k+1} \leqslant B^{(k)}_{i,k+1}$的阶有主对角线元素之积

$=B_{i,k+1}$的所有k阶主子式之积

从而　$A_{i,k+1} \leqslant (B_{i,k+1}\text{的所有}k\text{阶主子式的积})^{\frac{1}{\binom{k}{k-1}}}$　(*)

2°　另一方面，将A的每一个k+1阶主子式都取出其k阶主子式相乘，则A的每个k阶主子式都重复n−k次，这是因为对某个k阶主子式，从其余的n−k行中取出一行增补成k+1阶主子式当然是n−k种。

3°　P_{k+1} = A的所有k+1阶主子式的积

$=\prod_i A_{i,k+1}$　(设)

应用(*)及2°，得到

$$P_{k+1} \leqslant \left(\prod_i(B_{i,k+1}\text{的所有}k\text{阶主子式的积})\right)^{\frac{1}{\binom{k}{k-1}}}$$

$$= \left(P_k^{n-k}\right)^{\frac{1}{\binom{k}{k-1}}} = P_k^{\frac{n-k}{\binom{k}{k-1}}}$$

故

$$P_{k+1}^{\frac{1}{\binom{n-1}{k}}} < P_k^{\left(\frac{n-k}{\binom{k}{k-1}}\right)\times\frac{1}{\binom{n-1}{k}}} = P_k^{\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}} \qquad (k=0,1,\cdots, n-1)$$

这就证明了结果

参　　考　　文　　献

[1] E. F. Beckenbach 和R. Bellman.《Inequalities》, Springer-Verlag, 1961. P64.

[2] 张远达，《线性代数原理》, 1980年，PP 447-457.

美国华裔数学家樊墭简介

樊墭（1915—）于1936年在北京大学毕业，1941年在法国著名数学家Fréchet指导下获博士学位。1945—1947年曾在普林斯顿高级研究所担任过Von Neumann的助手，深受其影响。以后在美国诸大学任教，1965年转到加州大学（圣他巴巴拉分校)任教授，在那里工作20年直至退休。

樊墭对算子与矩阵理论、凸分析与不等式、线性与非线性规划、拓扑与不动点理论以及拓扑群理论都有根本性的贡献。他的工作看上去很平常，却都是最基本的东西，因而获得高度评价。

1985年6月举行退休盛会时，北京大学教授张恭庆到会祝贺。加州大学（圣他巴巴拉分校）宣布设立樊墭助理教授职位（Ky Fan Assistant Professorship)，以便持久地表彰樊墭的贡献。

樊墭曾兼任台湾中央研究院数学研究所所长。据他的一位学生说，樊教授曾希望台湾的数学有较快的发展，但结果使他失望。

樊墭原定于1983年来北京大学讲学，后因故未能成行。后来又表示愿将藏书捐赠母校北京大学，这些反映了他的爱国怀乡之情。

（陈计摘自《中国现代数学史话》）

Inequalities on Positive Semidefinite Hermitian Matrix

Guang -Xing Li

Department of Mathematics

University of Science and Technology of China
Hefei, Anhui, China

Abstract We prove two inequlities on positive semidefinite matrix $A=(a_{ij})$ of order n.

$$detA\leqq\prod_{i=1}^{n}a_{ii}-\left|\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}\right|$$

$$perA\geqq\prod_{i=1}^{n}a_{ii}+\left|\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}\right|$$

σ is an arbitray permutation except the identity of S_n

1. Introduction. We use A O to denote that A is a positive Semidefinite hermitian matrix, Sn denotes the symmetric group of order n, e is the identity of Sn. Two inequalities are given in the following theorem.

Theorem. If $A=(a_{ij})\geqslant O$, A is of order n, we have

$$\det A\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_{ii}-\left|\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}\right| \tag{1}$$

$$perA\geqslant\prod_{i=1}^{n}a_{ii}+\left|\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}\right| \tag{2}$$

Where $\sigma\neq e$, $\sigma\in Sn$, and det, per denote determminant and permanent respectively.

2. Proof

Lemma 1. If $A=\begin{vmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{vmatrix}\geqslant O$, A_{11} is a square submatrix, we have

(a) $\det A\leqslant \det A_{11}\ \det A_{22}$

(b) $\quad \operatorname{per}A \geq \operatorname{per}A_{11} \cdot \operatorname{per}A_{22}$

This lemma is prove in [1] and [2].

Lemma 2. If $A=(a_{ij})\geq 0$, A is of order n, for any σ in S_n, we have

$$(3) \qquad \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geq \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|$$

Proof. Because $A \geq 0$,

$$a_{ii}\, a_{\sigma(i)\sigma(i)} \geq |a_{i\sigma(i)}|^2 \qquad i=1,2,\cdots\cdots n.$$

multiply from 1 to n, we get

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 \geq \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right|^2$$

hence

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geq \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right|$$

Now we begin to prove the theorem.

Proof of the theorem. at first, we try to show that for arbitrary σ $\sigma \neq e$ in S_n, there exists $i_1 \neq i_2 = \sigma(i_1)$ such that

$$(4) \qquad \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right| \leq |a_{i_1 i_2}|^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i_2}}^{n} a_{ii}$$

otherwise, for any pair i_1, i_2 satisfying $\sigma(i_1)=i_2 \neq i_1$.

$$(5) \qquad \left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right| > |a_{i_1 i_2}|^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i_2}}^{n} a_{ii}$$

Let $S=\{1 \leq i \leq n \mid \sigma(i)=i\}$ and $T=\{1 \leq i \leq n \mid \sigma(i) \neq i\}$, then $S \cup T=\{1,2,\cdots\cdots n\}$, $S \cap T=\phi$, multiply the two side of (4) for all $i \in T$

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right|^{|T|} > \left|\prod_{i_1 \in T} a_{i_1\sigma(i_1)}\right|^2 \left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^{|T|} \Big/ \left(\prod_{i \in T} a_{ii}\right)^2$$

equivalently

$$\left|\prod_{i \in T} a_{i\sigma(i)}\right|^{|T|} \left(\prod_{i \in S} a_{ii}\right)^{|T|} > \left|\prod_{i \in T} a_{i\sigma(i)}\right|^2 \left(\prod_{i \in S} a_{ii}\right)^{|T|} \left(\prod_{i \in T} a_{ii}\right)^{|T|-2}$$

cancel the same part of the two side

$$\left|\prod_{i \in T} a_{i\sigma(i)}\right|^{|T|-2} > \left(\prod_{i \in T} a_{ii}\right)^{|T|-2}$$

i.e

$$(6) \qquad \left|\prod_{i \in T} a_{i\sigma(i)}\right| > \prod_{i \in T} a_{ii}$$

We cancel the columns and rows which have index belonging to S, the left square matrix has diagonal elements a_{ii}, $i \in T$, hence (6) contradicts to lemma 2.

From lemma 1, we have

$$(7)\qquad \det A \leqslant \Big(\prod_{\substack{i\neq i_1,\, i_2 \\ \sigma(i_1)=i_2\neq i_1}} a_{ii}\Big)\, det \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} \\ \bar{a}_{i_1 i_2} & a_{i_2 i_2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \Big(\prod_{\substack{i=1 \\ i\neq i_1, i_2}}^{n} a_{ii}\Big) |a_{i_1 i_2}|^2$$

$$(8)\qquad \mathrm{par}A \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii} + \Big(\prod_{i\neq i_1, i_2} a_{ii}\Big) |a_{i_1 i_2}|^2$$

We choose i_1, i_2 such that (4) holds, then (7) and (8) yield (1) and (2) respectively.

3. Remarks

1. The inequalities (1) and (2) are best in the following sense, for every n, there exist matrices $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ of order n, and σ, $\tau \in S_n$, σ, $\tau\neq e$, $\sigma\neq\tau$ such that

$$\det A \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\Big| - \Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\tau(i)}\Big|$$

$$\mathrm{per}A \leqslant \prod_{i=1}^{n} b_{ii} + \Big|\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}\Big| + \Big|\prod_{i=1}^{n} b_{i\tau(i)}\Big|$$

for example, let $\sigma=(23)$, $\tau=(12)$ and

$$A = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & I_{(n-3)} \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & I_{(n-3)} \end{vmatrix}$$

2. For $A=(a_{ij})>0$ of order n, define $\tilde{A}=(a_{\sigma\tau})$ of order $n!$, σ, $\tau\in S_n$, $a_{\sigma\tau}=\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\tau(i)}$, then (1) can be deduced from a result due to Schur which says that $\det A$ is the smallest eigenvalue of $\tilde{A}$ [3].

Because

$$\tilde{A} - (\det A)\, I \geqslant 0$$

we have

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \det A \geqslant \Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\Big|, \quad \sigma\neq e,$$

equivalently

$$\det A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\Big|$$

Acknowledgements. I am grateful to Professor Jiong-Sheng Li for his helpful advice.

Reference

1 Beckenbach . B . F and R . Bellman, Inequalities, Berlin -Heidelbe Heidelberg -New York . 1961

2 H . Minc, Permanents, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol 6, Addison - Wesley, Reading Mass, 1978.

3 I . Schur, Uber endliche Gruppen und Hermitesche Formen, Math, Z, 1: 184 -207 .

(上接第20页)

$$\begin{cases} a=a' & (C_1) \\ (a'+b'+c')/a'b'c' = (a+b+c)/abc & (C_2) \\ b^2-b'^2=c^2-c'^2 & (C_3) \end{cases}$$

可推出 $b=b'$，$c=c'$

由 (C_3) 若 $b>b'$，则 $c>c'$ 故 $1/b'>1/b$，$1/c'>1/c$，$1/b'c'>1/bc$ 结合 (C_1) 可知 $(a'+b'+c')/a'b'c'>(a+b+c)/abc$ 与 (C_2) 矛盾，如(2) 这表明 $b=b'$，$c=c'$ 成立。

至此，定理全部证完。

利用本文方法，还可给出其它一些 λ 值，使得(4) 式成立。但它们或者外形过于复杂（如取 $\lambda=(a'b'c'/abc)^{2/3}$）或者等号成立的条件不够简明（如 $\lambda=a'^2/a^2$）本文就不再一一列举了，值得指出的是，取 $\lambda=R'^2/R^2$ 时(4) 式不能成立，只须取 ΔABC 为单位圆的内接正三角形，$\Delta A'B'C'$ 为单位圆的内接三角形，且令 a'，b'，c' 趋于0。这时 H 趋于0，而(4) 式右边趋于正数 $8\Delta^2$，故(4) 式不成立。

参 考 文 献

[1] D.Pedoe, An inequality for two triangles, Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 38(1942)397—398.

[2] D.Pedoe, Thinking geometrically, American Mathematical Monthly, 77(1970)711—721.

[3] L.Carlitz, Inequalities for the area of two triangles, American Mathematical Monthly.80(1973) 910—911.

[4] 常庚哲，Pedoe 定理的复数证明，中学理科教学，1979，2.

[5] 杨路，张景中，Neuberg - Pedoe 不等式的高维推广及应用，数学学报，1981，3.

[6] 高灵，Mathematics Magazine，55(1982) P299 .

[7] 彭家贵，Sharpening the Neuberg —Pedoe inequality : I，Crux Mathematicorum，10(1984) 68—69.

[8] 马援，Pedoe不等式的推广，数学通讯，1987，7.

·蛙鸣·第36期
1988年8月

Pedoe不等式的加强

数学系83级　马　援

本文约定：用a，b，c，△，R和r分别代表$\triangle ABC$的三边边长，面积，外接圆半径和内切圆半径；用a'，b'，c'，$\triangle'$，R'和r'分别代表$\triangle A'B'C'$的三边边长，面积，外接圆半径和内切圆半径。记$H=a'^2(-a^2+b^2+c^2)+b'^2(a^2-b^2+c^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)$。

著名的Pedoe不等式断言：

$$H\geqslant 16\Delta\Delta' \qquad (1)$$

式中等号当且只当$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$时成立。

几十年来，围绕着这个著名不等式，人们进行着广泛的探讨，得出了许多有趣的结论[1]-[8]。特别地，美国杜克大学的L. Carlitz教授在1973年讨论了将（1）加强成：

$$H\geqslant 8(\Delta^2+\Delta'^2) \qquad (2)$$

的可能性，得到了（2）式成立的充要条件。[3]不难看出，保持ΔABC不动，令$\Delta A'B'C'$的三边都趋于0，则H趋于0，而（2）式右边趋于正数$8\Delta^2$因此（2）式不能普遍成立。那么怎样给出（1）式的适当加强呢？中国科学技术大学的彭家贵教授在1984年证明了：[7]

$$H\geqslant 8\left(\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{a^2+b^2+c^2}\Delta^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{a'^2+b'^2+c'^2}\Delta'^2\right) \qquad (3)$$

式中等号当且只当$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$时成立。

本文将用不同于[7]的方法给出（1）式的更多加强形式。

定理：当（1）$\lambda=(a'^2+b'^2+c'^2)/(a^2+b^2+c^2)$，（2）$\lambda=(a'+b'+c')^2/(a+b+c)^2$，（3）$\lambda=(a'b'+b'c'+c'a')/(ab+bc+ca)$，（4）$\lambda=r'^2/r^2$（5）$\lambda=R'r'/Rr$时，

$$H\geqslant 8\left(\lambda\Delta^2+\frac{1}{\lambda}\Delta'^2\right) \qquad (4)$$

式中等号当且只当$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$时成立。

为了证明这个定理，我们需要一个引理，它的一部分包含在L. Carlitz的结果之中。

引理：记$A=a^2-a'^2$，$B=b^2-b'^2$，$C=c^2-c'^2$若$A\leqslant 0$，$B\geqslant 0$，$C\geqslant 0$则

$$H\geqslant 8(\Delta^2+\Delta'^2) \qquad (2)$$

式中等号当且只当$A=0$，$B=C$时成立。

证明：利用海伦公式不难验证

$$2H-16(\Delta^2+\Delta'^2)=-2A(B+C)+A^2+(B-C)^2\geq 0$$

式中等号当且只当 $A=0$，$B=C$ 时成立。

定理的证明：

（1）不难看出，（4）式成立与否在对 $\Delta A'B'C'$（或 ΔABC）进行相似变换时保持不变。因此为证（4）式成立不妨设 $\lambda=1$，即 $a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$ 此时 A，B，C 不能同时为正或同时为负。不妨设 A，B，C 中有两个非负一个非正（若 A，B，C 中有两个非正一个非负，则交换 ΔABC 与 $\Delta A'B'C'$）进一步不妨设 $A\leqslant 0$，$B\geqslant 0$，$C\geqslant 0$，利用引理（注意 $\lambda=1$）即得。

$$H\geqslant 8(\Delta^2+\Delta'^2)$$

$$=8\left(\lambda\Delta^2+\frac{1}{\lambda}\Delta'^2\right)$$

进而，当 $\lambda=1$ 时，等号成立的充要条件是：$A=0$，$B=C$，即 $a=a'$，$b^2-b'^2=c^2-c'^2$。再利用 $a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2$ 与以上二式联立可解出 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$。即在 $\lambda=1$ 的假设下，（4）式等号成立的充要条件是 $\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$。而（4）中等号成立与否在对 ΔABC（或 $\Delta A'B'C'$）进行相似变换时也是保持不变的。因此（4）式中等号成立的充要条件是 $\Delta A'B'C'$ 和 ΔABC 在相似变换下能够全等，即 $\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$。

（2）用（1）中的方法可证（4）式成立，分析（1）中的方法可知，为讨论等号成立条件只须证明由

$$\begin{cases} a=a' & (A_1)\\ a+b+c=a'+b'+c' & (A_2)\\ b^2-b'^2=c^2-c'^2 & (A_3)\end{cases}$$

能推导出 $b=b'$，$c=c'$

由（A_3）若 $b>b'$ 则 $c>c'$ 从而联合（A_1）可知 $a+b+c>a'+b'+c'$ 与（A_2）矛盾。同理，$b<b'$ 亦不能成立，故 $b=b'$。进而可知 $c=c'$。至此情况（2）全部证完。

（3）如（2）只须由

$$\begin{cases} a=a' & (B_1)\\ ab+bc+ca=a'b'+b'c'+c'a' & (B_2)\\ b^2-b'^2=c^2-c'^2 & (B_3)\end{cases}$$

推出 $b=b'$，$c=c'$。

由（B_3）若 $b>b'$ 则 $c>c'$。结合（B_1）可知 $ab+bc+ca>a'b'+b'c'+c'a'$。与（B_2）矛盾，如（2）所示这表明 $b=b'$，$c=c'$ 成立。

（4）利用公式 $r=2\Delta/(a+b+c)$ 可知（4）等价于（2）。

（5）利用 $r=2\Delta/(a+b+c)$ 和 $R=abc/4\Delta$ 可知这相当于 $\lambda=(a+b+c)a'b'c'/(a'+b'+c')abc$ 如（2）只须再证由

（下转第18页）

未解决问题

·蛙鸣·第36期
1988年 8 月

Nerberg—Pedoe 不等式的多边形推广

中国科学技术大学　陈计　王振

1891年，J. Neuberg 提出了一个涉及到两个三角形的边长和面积的不等式：

设$\triangle A_1A_2A_3$ 和$\triangle B_1B_2B_3$的边长分别是a_1，a_2，a_3和b_1，b_2，b_3，它们的面积记为$\triangle_1$和$\triangle_2$，则

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)\geqslant 16\triangle_1\triangle_2, \tag{1}$$

式中等号当且仅当$\triangle A_1A_2A_3 \backsim \triangle B_1B_2B_3$时成立。

美国几何学家D. Pedoe 在1942年证明了这个不等式[1]。1963年，他又在《美国数学月刊》的问题栏中给出了另一种证法[2]。从此这个不等式为人们注意，并被Pedoe 本人称为Neuberg - Pedoe 不等式[3]。几十年来，人们围绕着这个不等式的证法、加强和推广进行了细致的讨论，但如何将它推广到多边形，至今仍是一个没有解决好了的问题。

本文中，我们将提出Neuberg - Pedoe 不等式的多边形推广的两种形式，并对四边形都作了解决。

猜想 1　设两个圆外切 n 边形的边长分别是a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n，面积分别是S_1和S_2，则

$$\begin{aligned}&a_1^2(-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+\cdots+b_n^2)\\&+\cdots\cdots+a_n^2(b_1^2++b_2^2+\cdots-b_n^2)\\&\geqslant\frac{16(n-2)}{n}tg^2\frac{\pi}{n}S_1S_2.\end{aligned} \tag{2}$$

猜想 2　设任意两个面积是S_1和S_2，边长是a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n 的 n 边形，则

$$\begin{aligned}&a_1^2\left(-\frac{2n-3}{n^2-3n+3}b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)+a_2^2\left(b_1^2-\frac{2n-3}{n^2-3n+3}b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\\&+\cdots\cdots+a_n^2\left(b_1^2+b_2^2+\cdots-\frac{2n-3}{n^2-3n+3}b_n^2\right)\\&\geqslant\frac{16(n-2)^2}{n^2-3n+3}tg^2\frac{\pi}{n}S_1S_2.\end{aligned} \tag{3}$$

下面，我们对 $n=4$ 证明猜想1 和2 。

定理 1 设a_i，b_i($1\leqslant i\leqslant 4$) 分别表示两个圆外切四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$的四边长，F_1和F_2分别表示它们的面积，则有不等式：

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)$$
$$+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)\geqslant 8F_1F_2, \tag{4}$$

式中等号当且只当$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$为相似的圆内接四边形时成立。

证明 由Steiner定理，对给定边长的四边形，以有外接圆者面积为最大。因此，不妨设$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$均有外接圆。

若以a，b，c，d表示$ABCD$的四边长，s表示它的半周长，则最大面积可表为

$$F=[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

从而可得

$$16F^2=8abcd+(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$
$$-2(a^4+b^4+c^4+d^4) \tag{6}$$

又当四边形$ABCD$内切于圆时，$a+c=b+d$，所以由（5）可知它的最大面积F为四边长乘积的平方根。再由（6）得

$$8F^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(a^4+b^4+c^4+d^4) \tag{7}$$

用Cauchy－Schwartz 不等式可得

$$2\sum a_i^2b_i^2+8F_1F_2$$
$$\leqslant\sqrt{(2\sum a_i^4+8F_1^2)(2\sum b_i^4+8F_2^2)}$$
$$=(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) \tag{8}$$

由此可知

$$(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)-2\sum a_i^2b_i^2\geqslant 8F_1F_2 \tag{9}$$

这可化为不等式(4)。等号成立的条件是$a_1^2:a_2^2:a_3^2:a_4^2:F_1=b_1^2:b_2^2:b_3^2:b_4^2:F_2$并且两个四边形均有外接圆；这表明四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$为相似的圆的内接四边形。

证毕。

引理 若a，b，c，d为四边形$ABCD$的四边长，则

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-4(a^4+b^4+c^4+d^4)\geqslant 32abcd, \tag{10}$$

式中等号当且只当四边形$ABCD$为菱形时成立。

证明 不妨设$a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，定义函数

$$f(d)=3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-4(a^4+b^4+c^4+d^4)-32abcd \tag{11}$$

则

$$f'(d)=12(a^2+b^2+c^2)d-4d^3-32abc, \tag{12}$$

$$f''(d)=12(a^2+b^2+c^2-d^2). \tag{13}$$

显然，当$\sqrt{a^2+b^2+c^2}<d<a+b+c$时，$f''(d)<0$；当$c<d<\sqrt{a^2+b^2+c^2}$时，$f''(d)\geqslant 0$．又由于

$$f'(c)=12(a-b)^2c+8(c^2-ab)c\geqslant 0, \tag{14}$$

因此，当$d\in[c,\sqrt{a^2+b^2+c^2}]$时，$f'(d)\geqslant 0$。

所以，函数$f(d)$在$[c,\sqrt{a^2+b^2+c^2}]$上单调上升；在$(\sqrt{a^2+b^2+c^2},a+b+c)$上严格下凹。又

$$\begin{aligned}f(a+b+c)&=3[a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2]-4[a^4+b^4+c^4+(a+b+c)^4]\\&\quad-32abcd(a+b+c)\\&=4(a^4+b^4+c^4)+8(a^3b+a^3c+b^3c+b^3a+c^3a+c^3b)\\&\quad+12(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-32abc(a+b+c)\\&=2[(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(a^2-b^2)^2]\\&\quad+8[bc(b-c)^2+ca(c-a)^2+ab(a-b)^2]\\&\quad+16[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2]\\&\geqslant 0,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}f(c)&=3(a^2+b^2+2c^2)^2-4(a^4+b^4+2c^4)-32abc^2\\&=-a^4-b^4+4c^4+12b^2c^2+12c^2a^2+6a^2b^2-32abc^2\\&=4(c^2-a^2)(c^2-b^2)+2(8c^2-a^2-b^2)(a-b)^2+(a-b)^4\\&\geqslant 0.\end{aligned} \tag{16}$$

因此，$f(d)\geqslant 0$。并且从上述过程容易看出（10）式中取等号当且仅当$a=b=c=d$。

证毕。

定理 2 设a_i，b_i（$1\leqslant i\leqslant 4$）分别表示四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$的四边长，F_1和F_2分别表示它们的面积，则有不等式

$$\begin{aligned}&a_1^2\left(-\frac{5}{7}b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2\right)+a_2^2\left(b_1^2-\frac{5}{7}b_2^2+b_3^2+b_4^2\right)\\&+a_3^2\left(b_1^2+b_2^2-\frac{5}{7}b_3^2+b_4^2\right)+a_4^2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2-\frac{5}{7}b_4^2\right)\\&\geqslant\frac{64}{7}F_1F_2.\end{aligned} \tag{17}$$

式中等号成立当且仅当四边形$A_1A_2A_3A_4$和四边形$B_1B_2B_3B_4$均为正方形。

证明 将（6）与（10）联立，消去$abcd$项，得到

$$12(a^4+b^4+c^4+d^4)+64F^2\leqslant 7(a^2+b^2+c^2+d^2)^2, \tag{18}$$

再用Cauchy－Schwartz 不等式

$$\begin{aligned}&12\sum a_i^2b_i^2+64F_1F_2\\ &\leqslant\sqrt{(12\sum a_i^4+64F_1^2)(12\sum b_i^4+64F_2^2)}\\ &\leqslant 7(\sum a_i^2)(\sum b_i^2),\end{aligned} \tag{19}$$

因此

$$\sum a_i^2b_i^2-\frac{12}{7}\sum a_i^2b_i^2\geqslant\frac{64}{7}F_1F_2 \tag{20}$$

这可化为不等式（17）。

由（10）式取等号的条件$a=b=c=d$，可知（17）式等号成立当且只当两个四边形同时为正方形。

证毕。

参　考　文　献

[1] D. Pedoe, An inequality for two triangles, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 38(1943), Part 4; 397－398.

[2] D. Pedoe, A two-triangle inequality, Amer. Math. Monthly, Vol. 70 (1963), 1012, Problem E 1562.

[3] D. Pedoe, Inside-outside, the Neuberg-Pedoe inequality, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 544－576(1976), 95－97.

编译报告

·蛙鸣·第36期
1988年8月

矩阵的 Trace 与 Sum

数学系85级 罗承辉

§1 引 言

我们采用下列记号：

$n\in Z_+$；　　μ^n：实 $n\times n$ 矩阵全体；

μ^n_+：非负实 $n\times n$ 矩阵全体；

（注：此处非负是指矩阵的所有元素非负。）

$\mathscr{S}^n$：实 $n\times n$ 对称矩阵全体；

$\mathscr{T}^n$：实对称、半定正的 $n\times n$ 矩阵全体；

$A=(a_{ik})\in\mu^n$；　　$suA=\sum\limits_i\sum\limits_k a_{ik}$；

$trA=\sum\limits_i a_{ii}$；　　$\rho(A)=A$ 的谱半径；

$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}=A$ 的谱；$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$（如果特征根均为实数），

$\{U_1,\cdots,U_n\}=$ 对应于特征向量的标准正交基。

$E=(1,\cdots,1)^T\in R^n$；　　$E=c_1U_1+\cdots+c_nU_n$。

令 $m\in Z_+$，则

$$suA^m=E^TA^mE=c_1^2\lambda_1^m+\cdots+c_n^2\lambda_n^m \tag{1}$$

$$trA^m=\lambda_1^m+\cdots+\lambda_n^m \tag{2}$$

这种形式的相似促使我们去研究 su 和 tr 的性质能相似到何种程度。我们特别对 tr 是否具有[1],[6],[7],[8],[9]中 su 的性质感兴趣。

§2 基 本 性 质

下列性质是熟知的或易证的。

命题 1：(S_1) $su(A+B)=suA+suB$，$su(cA)=csuA$，$\forall A、B\in\mu^n$，$c\in R$；

(T_1) $tr(A+B)=trA+trB$，$tr(cA)=ctrA$，$\forall A,B\in\mu^n$，$c\in R$。

命题 2：(S_2) $suA\geqslant 0\wedge(suA=0\Longleftrightarrow A=0)$，$\forall A\in\mu^n_+$；

(T_2) $trA\geqslant 0\wedge(trA=0\Longleftrightarrow A=0)$，$\forall A\in\mathscr{T}^n$。

因而 su 是 μ_+^n 中，tr 是 $\mathscr{F}^n$ 中的范数。

命题 3：(S_3) $\langle A,B\rangle = suA^TB$ 是 μ^n 中的半内积，μ_+^n 中的内积；

(T_3) $\langle A,B\rangle = trA^TB$ 是 μ^n 中的内积。

因而 $su(A^TA)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_i\left(\sum_k |a_{ik}|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 是 μ^n 中的半范数（seminorm），μ_+^n 中的范数 $(trA^TA)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_i\sum_k a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是熟知的 Frobenius 范数。

命题 4：(S_4) $|suA^TB| \leqslant (suA^TA)^{\frac{1}{2}}(suB^TB)^{\frac{1}{2}}$，$\forall A, B\in\mu^n$；

(T_4) $|trA^TB| \leqslant (trA^TA)^{\frac{1}{2}}(trB^TB)^{\frac{1}{2}}$，$\forall A, B\in\mu^n$。

命题 5：(S_5) $suAB\leqslant suAsuB$，$\forall A, B\in\mu_+^n$；

(T_5) $trAB\leqslant trAtrB$，$\forall A, B\in\mathscr{F}^n$。

§2．幂 的 su 和 tr

令 μ 是 μ^n 中的范数，下列是熟知的见（[10]，[11]）。

若 μ 是次积性范数（submultiplicative），则

(N_1) $\rho(A)\leqslant\mu(A)$，$\forall A\in\mu^n$；而对任何 μ

(N_2) $\lim_{m\to\infty}\mu(A^m)^{\frac{1}{m}}=\rho(A)$，$\forall A\in\mu^n$。从 (N_2) 易得

(N_3) $\lim_{m\to\infty}\dfrac{\mu(A^{m+1})}{\mu(A^m)}=\rho(A)$（若极限存在）。

我们现在研究 su 和 tr 是否具有与 (N_1)，(N_2)，(N_3) 相关的性质。

命题 6：(S_6) $\rho(A)\leqslant suA$，$\forall A\in\mu_+^n$；

(T_6) $\rho(A)\leqslant trA$，$\forall A\in\mathscr{F}^n$。

命题 7：(S_7) $\lim_{m\to\infty}(suA^m)^{\frac{1}{m}}=\begin{cases}\rho(A), & \forall A\in\mu_+^n\\ \lambda_p, & \forall\in\mathscr{F}^n\end{cases}$ 其中 $c_1=\cdots=c_{p-1}=0$，$c_p\neq 0$ （3）

(T_7) $\lim_{m\to\infty}(trA^m)^{\frac{1}{m}}=\rho(A)$，$\forall A\in\mu^n$，其中 $\lambda_1>|\lambda_n|$ （4）

命题 8：(S_8) $\lim_{m\to\infty}\dfrac{suA^{m+1}}{suA^m}=\lambda_p$，$\forall A\in\mathscr{F}^n/\{0\}$，满足（3）。（参考［8］定理3.）

(T_8) $\lim_{m\to\infty}\dfrac{trA^{m+1}}{trA^m}=\rho(A)$，$\forall A\in\mu^n/\{0\}$ 满足（4）

命题 9：关于数列 (X_m)：

$(S_9)(a)$ $X_m=(suA^m)^{\frac{1}{m}}$ 递减，$\forall A\in\mu_+^n\cap\mathscr{F}^n$；

(b) $X_m=\left(\dfrac{suA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$ 递增，$\forall A\in\mathscr{F}^n$（见［6］，518页）

(c) $X_m=\dfrac{suA^{m+1}}{suA^m}$ 递增，$\forall A\in\mathscr{F}^n/\{0\}$（参考［8］，定理3）

$(T_9)(a)$ $X_m=(trA^m)^{\frac{1}{m}}$ 递减，$\forall A\in\mathscr{F}^n$；

(b) $X_m=\left(\frac{trA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$ 递增，$\forall A\in\mathscr{T}^n$；

(c) $X_m=\frac{trA^{m+1}}{trA^m}$递增，$\forall A\in\mathscr{T}^n/\{0\}$。

证明：由(1)和(2)知，$(T_9)(a)$和$(S_9)(b)$就是*Jensen*和*Schlömich*不等式的直接形式。对于$(S_9)(c)$和$(T_9)(c)$由$X_m\leq X_{m+1}$可以直接推导出来。

对于$(S_9)(a)$，我们采用证*Jensen*不等式的同样方法。不妨设$A\neq 0$且$\lambda_1=1$，由*Perron—Frobenius*理论，存在$U_1\geq 0$，所以$c_1=E^TU_1\geq E^T(1,0,\cdots,0)^T=1$，现在 $X_m=(c_1^2+c_2^2\lambda_2^m+\cdots+c_n^2\lambda_n^m)^{\frac{1}{m}}=K^{\frac{1}{m}}_m$

因$1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0$，$K_m\geq 1$，$m$增时，$\lambda_2^m$，…，$\lambda_n^m$减，故$K_m$减且$\geq 1$，因而$X_m$递减。

$A\in\mathscr{S}^n$时，非负性或半定正性均不能单独保证$(S_9)(a)$。例如：$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$suA=1\quad\sqrt{5}=(suA^2)^{\frac{1}{2}}$。

第二个反例是

$$A=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\in\mu^n_+,\qquad (5)$$

$A^3=(n-1)A$，$A^4=(n-1)A^2$。故$(suA^3)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{2}{3}}$，

$(suA^4)^{\frac{1}{4}}=n^{\frac{1}{4}}(n-1)^{\frac{1}{2}}$，但前者比后者小当$n\geq 14$时。对于$n<14$，在$\mathscr{S}^n\cap\mu^n_+$中找一个反例还悬而未决。

容易明白

$$(suA^3)^{\frac{1}{3}}\leq(suA^2)^{\frac{1}{2}}\leq suA,\quad A\in\mu^n_+。$$

$A\in\mathscr{S}^n\cap\mu^n_+$也不能保证命题9中的性质，对$(S_9)(b)$，(5)即为一个反例。对$(S_9)(c)$见下面的12*S*，找$(T_9)$的反例很容易。

下面我们提供一些在更弱条件下与命题9对应的结论。

命题10：$(S_{10})\ (suA^m)^{\frac{1}{m}}\leq suA$，$\forall A\in\mu^n_+$；

$(T_{10})\ (trA^m)^{\frac{1}{m}}\leq trA$，$\forall A\in\mu^n_+$ 满足 $\sum_{i\neq k}\sum_k\lambda_i\lambda_k\geq 0$。

证明：(S_5)可推出(S_{10})。对(T_{10})，令$m\geq 2$，由*Jensen*不等式

$$(\lambda_1^m+\cdots+\lambda_n^m)^{\frac{1}{m}}\leq(|\lambda_1|^m+\cdots+|\lambda_n|^m)^{\frac{1}{m}}\leq(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}\qquad(6)$$

由假设，$\lambda_1+\cdots+\lambda_n\geq 0$ 且$\sum_{i\neq k}\lambda_i\lambda_k\geq 0$，故

$$(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}\leq\lambda_1+\cdots+\lambda_n\qquad(7)$$

由(6)和(7)即推出(T_{10})

命题11：(*Mulholland and Smith* [9]，*Loewy and London* [5]，*Johnson* [3])

$$(S_{\text{II}})\quad \frac{suA}{n} \quad \left(\frac{suA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \quad \forall A\in \mathscr{S}^n\cap\mu^n;$$

$$(T_{\text{II}})\quad \frac{trA}{n} \quad \left(\frac{trA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad \forall A\in \mu^n.$$

(T_{II})的证明：设 $A=(a_{ik})$，$a_{ik}\quad 0$，则

$$\left(\frac{trA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}} \quad \left(\frac{a_{11}^m+\cdots+a_{nn}^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\frac{a_{11}+\cdots+a_{nn}}{n}=\frac{trA}{n}.$$

此外还可参见[5] 定理1，[3] 定理4。

(S_{II})的证明：事实上，*Mulholland*和*Smith*[9] 证得了更一般的结论：令 α，A分别为$n\times 1$，$n\times n$的非负矩阵，又$A^T=A$，则

$$\text{(i)}\qquad \frac{\alpha^TA^m\alpha}{\alpha^T\alpha} \quad \left(\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^T\alpha}\right)^m \qquad (\alpha\neq 0)$$

等号成立当且仅当α为A的特征向量。

记 $s_m\quad \alpha^TA^m\alpha$，则证（i）就是证

$$\text{(ii)}\qquad f(\alpha)=\frac{s_m}{s_0}-\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^m \quad 0,$$

满足条件：1）$\alpha_i\quad 0$，2）$a_{ij}=a_{ji}\geqslant 0$，3）α不是A的特征向量。

我们知道，存在正交矩阵O将A对角化，令$\beta=O^T\alpha$，则有：

$$\text{(ii)}\qquad s^m=\alpha^TA^m\alpha=\beta^TB^m\beta=\sum_{j=1}^n c_j^2\lambda_j^m$$

又由条件 3）α不是A的特征向量，则存在i，j使得

$$\text{(iv)}\qquad c_i\neq 0,\qquad c_j\neq 0,\qquad \lambda_i\neq\lambda_j$$

我们现在用反证法证(i)。假设(i)不成立，在条件1)，2)，3)下选择维数最低的n使得(i)不成立。显然$n>1$。由于维数最低，故可设$\alpha_i>0$。此时$f(\alpha)$是仅依赖于α的连续函数。当α在满足(i)，有的$\alpha_i=0$的α集合的边界上时$f(\alpha)\quad 0$，当α为此集合内且满足(iii)的一些点α^*时，$f(\alpha)\quad 0$。所以满足(i)的这些点中至少有一点α使得$f(\alpha)$取最小值$m\leqslant 0$并且是光滑的。

再记$f(\alpha)=g(\beta)$，其中$\beta=O^T\alpha$，记$\widetilde{\beta}=O^T\alpha$，则在$\widetilde{\beta}=\beta$时满足(iv)，$g(\beta)$是光滑的，故$\dfrac{\partial g(\beta)}{\partial c_i}=0$。又由(iii)$\dfrac{\partial g(\beta)}{\partial c_i}=2c_i\lambda_i^m$，对每个$i$，当$\widetilde{\beta}=\beta$时，不是$A_i=0$就是

$$s_0\lambda_i^m-s_m-m\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^{m-1}(s_0\lambda_i-s_1)=0$$

后一种情形中λ_i是方程

$$\text{(v)}\qquad \lambda^m-m\lambda\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^{m-1}+(m-1)\left(\frac{M_1}{M_0}\right)^m-f(\alpha)=0$$

的根。把(v)的左端仅仅当作λ的函数，对非负的λ有唯一最小值。且当$\lambda=\frac{s_1}{s_0}$时，其值为$-f(\alpha)\geqslant 0$：这样唯一可能的非负根$\lambda=\frac{s_1}{s_0}$。故无论何时$c_i\neq 0$，都有$\lambda_i=\frac{s_1}{s_0}$。但$\frac{\tilde{\beta}^T B\tilde{\beta}}{\tilde{\beta}^T\tilde{\beta}}=\frac{s_1}{s_0}$。而$\sum_{j=1}^{n}c_j^2 t_j=\frac{s_1}{s_0}\sum_{j=1}^{n}c_j^2$。仅当$\lambda_i=\frac{s_1}{s_0}$，$c_i\neq 0$时成立。这与(iv)当$\tilde{\beta}=\beta$时相矛盾。于是(i)式获证。

此外，*London*还得到了(S_{11})的一个推广形式([6]，定理1)。

§4．进一步的性质

现在，我们考虑与命题9(c)有关的结果。

命题12S(*London*[7]，*Kankaapää*和*Merikoski*[4]，*Kankaanpää*，*Merikoski*和*Virtanen*[12])下列的条件是同样的($n\geqslant 3$)：

$$(S_{12})\quad \frac{suA^3}{suA^2}\geqslant\frac{suA}{n},\ \forall A\in\mathscr{S}^n\cap\mu_+^n\setminus\{0\};$$

$$(S_{12}')\quad \frac{suA^{m+1}}{suA^m}\geqslant\frac{suA}{n},\ \forall A\in\mathscr{S}^n\cap\mu_+^n\setminus\{0\},\ m\in Z$$

而tr没有类似的结果，例如

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

我们却有

$$\frac{trA^3}{trA^2}=\frac{1}{9}<\frac{1}{3}=\frac{trA}{3}。$$

一个较弱的结果是：

命题12T：设$A\in\mathscr{S}^3\cap\mu_+^3\setminus\{0\}$，若$A$最大的对角元和非对角元位于同一行，则有

$$(T_{12})\quad \frac{trA^3}{trA^2}\geqslant\frac{trA}{3}。$$

(12T)的证明：令a，b，c，d，e，$f\geqslant 0$，

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix},$$

则 $trA=a+d+f$，　$trA^2=a^2+2b^2+2c^2+d^2+2e^2+f^2$，

$trA^3=a^3+d^3+f^3+3(ab^2+ac^2+b^2d+c^2f+de^2+e^2f)+6bce$，

则 $3trA^3-trAtrAtrA^2=(a^2-d^2)(a-d)+(a^2-f^2)(a-f)+(d^2-f^2)(d-f)+K$，$K=7(ab^2+ac^2+b^2d+c^2f+de^2+e^2f)+18bce-2(ae^2+b^2f+c^2d)$

$=$非负项$+2a(b^2-e^2)+2(b^2-c^2)(d-f)$

$= \text{非负项} + 2d(b^2 - c^2) + 2(b^2 - e^2)(a - f)$。

不妨设 $b \geqslant c$，e；由假设 $d \geqslant f$ 或 $a \geqslant f$，导出 $K \geqslant 0$，从而证明(T_{12})

(S_{12})的证明：当 $n = 3$ 时，

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \geqslant 0 ,$$

并记

$$f(A) = 3\,suA^3 - suA\,suA^2 ,$$

$$\gamma_1 = a + b + c, \quad \gamma_2 = b + d + e, \quad \gamma_3 = c + e + f,$$

$$R = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T, \quad E = (1, 1, 1)^T ,$$

则

$$\begin{aligned} f(A) &= (E^T E)(E^T A^3 E) - (E^T A E)(E^T A^2 E) \\ &= E^T(EE^T A - AEE^T)A^2 E \\ &= E^T(ER^T - RE^T)AR = \cdots \\ &= (\gamma_1 - \gamma_2)^2(\gamma_1 + \gamma_2 - 3b) + (\gamma_1 - \gamma_3)^2(\gamma_1 + \gamma_3 - 3c) \\ &\quad + (\gamma_2 - \gamma_3)^2(\gamma_2 + \gamma_3 - 3e) = \cdots \\ &= (\gamma_1 - \gamma_2)^2(2a + d + 2e + f) + (\gamma_2 - \gamma_3)^2(a + 2b + d + 2f) \\ &\quad + 2(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(a + b + c + f - c) \end{aligned}$$

不妨设 $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3$，有

$$\begin{aligned} f(A) &\geqslant (a + d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (a + d + f)(\gamma_2 - \gamma_3)^2 \\ &\quad + 2(a - d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3) \\ &\geqslant (a + d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (a + d + f)(\gamma_2 - \gamma_3)^2 \\ &\quad - 2(a + d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3) \\ &= (a + d + f)[(\gamma_1 - \gamma_2) - (\gamma_2 - \gamma_3)]^2 \\ &= trA(\gamma_1 + \gamma_3 - 2\gamma_2)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$ 。

等号成立的条件是 A 或 A^2 的行和相等。

关于$(12S)$，London指出当 $n \geqslant 4$ 时是不成立的，例如：

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$suA_n = 2(n-2) + \alpha ,$$

$$suA_n^2 = (n-1)(n-2) + \alpha^2 ,$$

$$suA_n^3 = 2(n-2)^2 + \alpha^3 。$$

于是

$$nsuA_n^3 - suA_n^2\,suA_n = [\alpha^2 - (n-2)][(n-1)\alpha - 2(n-2)] = f(\alpha)$$

所以当 $2(n-2)/(n-1)<\alpha<\sqrt{n-2}$ 时，$f(\alpha)$ 0。而当 $n\geqslant 4$ 时，这样的 α 是存在的。

London还指出：(S_{12})对奇数 m 和自然数 n 均成立；而对偶数 m 且当 $n\geqslant 4$ 时不成立。即使对偶数 $m\geqslant 4$，$n=3$，(S_{12})成立与否尚无定论。

命题13（Marcus和Newman[8]，定理5）

$$(S_{13})\quad \frac{su(A+B)^2}{su(A+B)}\leqslant\frac{suA^2}{suA}+\frac{suB^2}{suB},$$

$\forall A, B\in\mathscr{S}_n$ 且 $suA, suB>0$；

$$(T_{13})\quad \frac{tr(A+B)^2}{tr(A+B)}\leqslant\frac{trA^2}{trA}+\frac{trB^2}{trB},$$

$\forall A, B\in\mathscr{S}_n$ 且 $trA, trB>0$。

证明：(T_{13})等价于

$$2\,trAB\,trA\,trB\leqslant(trA)^2trB^2+(trB)^2trA^2$$

由(T_4)及算术—几何平均不等式：

$$\begin{aligned}2\,trAB\,trA\,trB&\leqslant 2(trA^2)^{\frac{1}{2}}(trB^2)^{\frac{1}{2}}trA\,trB\\&=2\,trA(trB^2)^{\frac{1}{2}}\cdot trB(trA^2)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant(trA)^2trB^2+(trB)^2trA^2\end{aligned}$$

同样我们得到(S_{13})的另一证法。

关于(S_{13}) Marcus和Newman的证法是：

记 $f(t)=f(t_1,\cdots,t_n)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}t_it_j\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$，则

$$f(a+b)-f(a)-f(b)=\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i\sum_{j=1}^{n}b_j-b_i\sum_{j=1}^{n}a_j\Big)^2\Big/2\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j$$

显然 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i, \sum\limits_{i=1}^{n}b_i>0$ 时有 $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$。

再记 $g(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$，则 $g(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i-2f(t)$。同时

若 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i, \sum\limits_{i=1}^{n}b_i>0$，则

$$\begin{aligned}g(a+b)&=\sum a_i+\sum b_i-2f(a+b)\\&\leqslant\sum a_i-2f(a)+\sum b_i-2f(b)\\&=g(a)+g(b)。\end{aligned}$$

再记 $r(A)=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，$r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$。则

$\dfrac{suA^2}{suA}=\dfrac{\Sigma r_i^2}{\Sigma r_i}=g(r(A))$。于是在题设条件下：

因 $g(r(A+B))=g(r(A)+r(B))\leqslant g(r(r(B)))$。即是：

$$\frac{su(A+B)^2}{su(A+B)} < \frac{suA^2}{suA} + \frac{suB^2}{suB}$$ 。

反例：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{pmatrix},$$

表明(S_{13})和(T_{13})中对称性是必不可少的，对称性在(S_{12})中也是必需的，反例是：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad suA = 10, \quad suA^2 = 32, \quad suA^3 = 100,$$

但(S_{12})式不成立。

参 考 文 献

[1] F. V. Atkinson, G. A. Watterson and P. A. Moran, A matrix inequality, Quart. J. Math, Oxford 11: 137-140(1960)

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, 2nd ed. Cambridge, U. P. New York, 1952

[3] C. R. Johnson, Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices, Linear and Multilinear Algebra 10: 113—130(1981)

[4] H. Kankaanpää and J. K. Merikoski, Two inequalities for the sum of elements of a matrix, Linear and Multilinear Algebra 18: 9-22(1985)

[5] R. Loewy and D. London, Anote on an inverse problem for nonnegative matrices. Linear and Multilinear Algebra 6: 83-90(1978)

[6] D. London, Inequalities in quadratic forms, Duke Math. J. 33: 511-522 (1966)

[7] D. London, Two inequalities in nonnegative symmetric matrices, Pacific J. Math. 16: 515-536 (1966)

[8] M. Marcus and M. Newman, The sum of the elements of the powers of a matrix, Pacific J. Math. 12: 627-635(1962)

[9] H. P. Mulholland and C. A. B. Smith, An inequality arising in genetical theory, Amer. Math. Monthly 66: 673-683(1959)

[10] A. Ostrowski, Uber Normen von Matrizek. Math. Z. 63: 2-18(1955)

[11] T. Yamamoto, On the extreme values of the roots of matrices. J. Math. Soc. Japan 19: 173-178(1967)

[12] H. Kankaanpää, J. K. Merikoski and A. Virtanen, Improving an inequality for sums of elements of matrix powers, Linear Algebra and its Applications 92: 225-229(1987)

·国外新书评介·

编者按：加拿大British Columbia大学Albert W. Marshall教授和美国的Stanford大学Ingram Olbin教授合著的《Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications》(Mathematics in Science and Engineering, Vol. 143. Academic Press, New York-London-Toronto, Ont. 1979. xx+569pp.)已引起了越来越多的关注；1984年《应用数学与计算数学》杂志上，中国科学院应用数学所方开泰副所长专文将该书的重要内容作了简单介绍，加拿大Regina大学王中烈教授也向我校不等式研习小组极力推荐过这本书；这里我们请数学系83级张新发同学编译M. O. Albertson在1981年的美国《数学评论》上的介绍文章，供参考。

《不等式——优超理论及其应用》

该书的作者在前言的开头写道："虽然不等式在数学的各个领域都充当一个十分重要的角色，它们却往往是用特别的方法得到，而并非由某个'不等式理论'推出。然而，对相当一类的不等式，由'优超'的想法却可引导出一个在产生不等式方面非常有效的理论。不仅如此，用优超方法得到不等式，不仅对于加深理解，而且对于引导自然推广都是十分有益的！"

该书分为五部分。第一部分是关于优超理论的，以引人入胜的介绍开头，随后一章论述双随机矩阵，包括Hardy，Littlewood，Pólya以及Birkhoff的定理，并附有大量的改进。第三章是讨论保优超次序的函数，即所谓的Schur凸函数，第一部分的末尾包含一个足以缠函优超以及等价的条件表示。第二部分是关于数学应用的，包含组合分析、几何不等式、矩阵论以及数值分析方面的章节。其中的典型定理是Gale-Ryser定理以及Schur的有关Hermite矩阵对角元以及特征值的最早工作，（书中对这个结果提出三个证明）。第三部分是有关随机问题方面的应用，包含有大量的最新资料。第四部分是关于不等式的推广，由关于优超及多元优超的离散推广构成，写得比较简略。由于在这方面还有不少未被触及的领域，所以本人认为这部分的后一章似应多下一点笔墨。第五部分收集了一些补充论题，写这一部分的目的，按作者的话说，是为了"使本书更加自成一体"，在主要内容之后，是广泛的参考文献索引以及课题目录等等。

《不等式——优超理论及其应用》一书享有极高的评价。该书不落俗套，但是却又保留了不等式的原有内容，文笔也十分流畅，最为重要的是，读起该书会使人觉得是一种乐趣，该书的作者还联系了不等式方面的历史，体现了作者的丰富的洞察力，在某些重要的地方，该书还阐明了来龙去脉，由于该书具有大量的文献索引，从而使对某一特别的结果有兴趣的读者能从索引指定的书中开始探索，这本书真不失为一本很有价值的参考书。

Joseph H. Silverman著《椭园曲线的算术理论》

J. W. S. Cassels

目前，关于亏格为0的曲线的算术性质已为人们理解得差不多了，而对亏格大于1的曲线，人们的研究还仍然处于初始阶段，令人很不满意。对于亏格为1的曲线，现在不仅已建立了庞大的理论，而且还具有许多相互联系的猜想，所有这些，目前都正处于蓬勃的发展之中。

我们的研究是在一个基域 k 上进行的，例如有理数域 Q，整体域及局部域，域 k 上的一椭园曲线由在 k 上定义的亏格为1的曲线以及该曲线上的一个点0组成（我们常称"在域 k 上定义的"为"有理的"），在此，我们遇到了第一个麻烦，这就是我们还没有现成的算法来断定一个给定的亏格为1的曲线是否具有一个有理点，特别地，我们没有类似的 Hasse 原理（局部—整体原理），然而，对每个亏格为1的曲线，同一域上相应的椭园曲线却具有一个典型的处理方法，于是，亏格为1的曲线理论便主要归结于椭园曲线理论之中。

椭园曲线上的点有一个自然的结构，使之成为一个Abel群，给定的点0便为该群的零元。事实上，域 k 上的椭园曲线恰为 k 上的一维Abel簇，特别地，有理点的集合具有一个自然的Abel群结构。当 $k=Q$ 时，著名的 Mordell 定理指出该群是有限生成的，这个结果后来为 Weil 及其它人所推广，通常便称这个群为 Mordell—Weil 群（对给定的椭园曲线及基域），然而，目前还没有决定 Mordell—Weil 群的算法，虽然对一些特殊情形是可以的。这里，缺少有效算法的原因与上述 Hasse 原理的失效密切相关。Hasse 原理的"障碍"最后归结到由 Tate 和 Shafarevich 各自独立发现的一个群之中，这就是 Tate—Shafarevich 群，它具有许多有趣的性质，有的被证明了，有的却还只是猜想。不容置疑，评著者对该理论的最大贡献是引入罗马字母Ш来表示该群，这种记号目前已被普遍采用。

当 $k=Q$ 时，早期的数学家认为 Mordell—Weil 群的秩（即有限生成元的个数）有界，然而现在却作出了相反的猜测。究竟是丁是卯，目前尚无定论，然而，关于Mordell—Weil 群的扭群部分的可能结构，已为Mazur利用模形式的工具得到。

与整体域（例如Q）上的椭园曲线相关的 L—函数，有许多仍作为猜想的性质。根据直观启发以及大量的数值计算，Birch和 Swinnerton-Dyer提出了有关 L—函数 性状，Mordell—Weil 群以及 Tate—Shafarevich群的一些非常精细的猜想，这些猜想后来都经受住了许多检验，但只是在近几年才有其中的一小部分得到了证明。

上述很不完全的叙述已足以表明椭圆曲线理论的中心位置以及由此而产生的大量课题。书的作者明确指出："目前在这个领域有如此多的研究工作，而入门书竟如此的贫乏，这不能不令人感到吃惊！"就本人看来，他的书非常令人钦佩地填补了这个缺口，对于一个行家来说，这种类型的书也许不会得到赞赏，但研究生们却是一致地对该书作了高度的评价。

（数学系83级张新发译）

·蛙鸣·第36期
1988年8月

数学课程

A. Weil 著　陈天权 译

译者的话

A. Weil 是著名法国数学家，在多元复变、代数几何、抽象调和分析等方面都有过出色工作。战后，他移居美国，长期在芝加哥大学执教。本文是他给芝加哥大学数学系学生写的关于数学课程的简短指导。文章写在二十八年前。这二十八年来，数学又有了新的发展。数学与其它科学分枝的关系，数学与社会发展的关系都呈现了许多新的特色，这些在 A. Weil 的文章中当然不会有所反映，但是 A. Weil 的文章仍然不失为对学习纯粹数学的大学生的一篇很有价值的指导文章，文中有些观点对于学数学以外学科的同志也有参考价值，为此，将它译出，供大家工作和学习时参考。

译文

和欧洲大学生相比，美国大学生为一些自身的严重的缺点所困扰。严肃地指出这些缺点，让大家及时地认识它们并作出努力去克服它们，是非常必要的。除了缺乏早期的数学（或者选择攻读的其它领域）训练外，美国学生还缺乏基本技巧——阅读、写作和口述——的训练，也就是说，他们由于不善运用书面和口头语言而苦恼，例如：

A．中等程度的学生不善于从书本中进行学习，除非该书已把内容分割成许多小块（如用调羹给婴儿喂食）。为了在数学（或其它科学）上能有所成绩，他必须认识到，多数课题只包含很少几个基本思想，一旦掌握了这几个基本思想，通向围绕着它们的课题内容的细节的大道便畅通无阻了。阅读一本书或者一篇或长或短的文章绝不是要绕着它的外部边缘爬行，而是要以最适合于自己的方法直插课题的核心。从这儿出发，我们可以最清晰地看到课题的全貌，这是任何指望成功的科学家必须学会的最重要的技巧。

B．中等程度的学生不善于机智地记笔记。这是因为：在听讲时，不能敏捷地区分什么是重要的，是必须记下的和什么可以省略的（或因这只是个评注或例题解释，或因它在以后很容易被补出），几乎无需说明，当大学学习向前进行时，学生在课堂上的

＊本文译者是内蒙古大学数学教授，译文由本校余红兵老师提供。对他们的大力支持，我们深表感谢！

收益大小将越来越依赖于他记笔记的能力。

C．中等程度的学生不善于用确切而有说服力的语言作口头或书面的表述。考虑到现存考试制度的要求和毕业后可能担任教职这样的前景，他是必须学会不仅能用流畅的口语来表述（假若他在这方面尚有欠缺的话），而且，更主要的，在要他作简短报告时，善于组织题材，清晰地说出关于他的题目的全部材料，为了在书面表述中达到同样的目的，除了在英语作文的基本原理上下功夫外，别无它途，因为应用于科学题材的作文原理与一般的作文原理并无区别，遗憾的是，我们不得不提醒许多许多学生，即使在科学领域中，通常的英语拼写和语法规则仍然是须要遵守的，是不能忽略的。

无疑，学习和训练上述技巧是中学教育的任务，进入了大学而尚未掌握这些技巧的学生（这是现在大学生中的多数）必须学会它们，不然他就不可能达到硕士学位或哲学博士学位所要求的科学上成熟的程度。他应该明白，从他的大学老师那儿是不能指望得到很大帮助的。大学老师们首先是科学家，他们的主要兴趣是在他们的专题上，他们把自己的大部分时间和精力贡献在专题的教学和研究上，很少有人对教学过程中的问题有强烈兴趣，很少有人愿意直接去教这方面的问题。这是美国高等教育的最严重的几个问题之一，使它更为严重的是：假若学生不能认识自己在智力装备上的不足（这是常见的）便不自觉地将自己沉浸在日常作业和有时写得不怎样鼓舞人的教科书学习中去。这并不是说，要想在数学方面成为一个行家无须像在其它领域中那样掌握数学的细节，这只是说，在数学中也像在其它领域中那样，这样一种掌握只能通过对实质的深刻理解而获得。通过大量细节而达到实质的理解是需要一种技巧的，后者是必须和能够学会的。

上面说到的几点适用于任何学科，我们现在要专门对数学学习说几句，任何（初级阶段的）数学课学习都包含下列几方面：（a）掌握主要概念和定理。这些概念和定理在数量上是很少的，但它们构成了课题的核心，（b）日常的习题训练。通过训练，在与那些基本概念打交道的过程中获得必要的复习；（c）包含一些数学难点的问题。通过这些问题可以发展学生联系那些概念的创造和想像的能力。在初级阶段，这三方面的同样重要的。进入高级阶段后，（b）的重要性减弱，或者与（c）难以区别了，所以高级阶段的书或教科书将把很多东西留给学生自己去作，自己去思考，这时候，专门分设的问题已经变得不那样需要，但是学生在很大程度上变成了教师的积极的合作者，除非学生在初级阶段在解决（c）型问题方面已有足够训练，不然，他是不能指望成功的。

不言自明，假若没有机智地使用数学概念以解决具体问题的能力，真正理解这些基本概念是不可能的。反之，未能理解这些概念而想应用它们去解决具体问题更是不可想像的。因此，数学学习过程中的三方面（a）、（b）和（c）是不可分开的。也许是受了工程学院的影响，或者是由于所谓的数学的"实际"应用的错误概念作祟，美国学院的数学教学传统上包含或多或少的机械训练。这种训练对于"九九表"的教学是完全适合的，但对其它内容则很少有用了。在我系数学教程的新安排中，我们又把重点放回到原来的地方：主要概念的理解上。这也许会导致对学习过程中（b）和（c）这两部分的忽视，由于必修教材必须压缩在非常短的时间内教完，这种忽视便更易发生了。首先，美国学生进入大学时几乎没有什么值得说的数学知识；其次，美国还没有实行别的许多国家已经实行的方法：每一门数学课应配以由合格助手担任的经常性的习题课，这样，当

教授集中精力于他感兴趣的理论方面时，教学中的练习方面也能受到它应得的重视。由于（c）的重要性还只是刚刚受到应有的考虑和我们的大部分课程都是每周三小时的，重点放在（a）上的决策几乎不可避免地将以削弱（b）和（c）为代价，然而本系教师们正对所有这些问题给予应有的注意，正在许可的条件下，努力改进教学的各方面。当然改进将是逐步的。同学们，特别是决定以教学为职业的同学，必须力图保持（a）、（b）、（c）三方面的平衡。在即将到来的日子里，（c）是最容易被忽视的，他们不妨试用一些和他们所学的课题有关并有着不是常规方法能解的问题的习题集，美国或外国出版的均可，以补这方面之不足。

下面我们要讨论，构成目前教学计划中的各门课的内容及其相互关系。过去，传统课程的安排是简单的。在初级阶段，它包括：二维和三维（平面和立体）的解析几何，和所谓的"大学代数"，即初等方程式论，目的在于求实系数一元方程的数值解。解析几何表述的形式是18世纪 *Clairaut*, *Euler* 和 *Lagrange* 所达到的水平（虽然它的边缘由于此后的磨损而显得十分模糊了）。"代数"基本上是经牛顿改进后的笛卡儿的代数。紧接着便是微积分和它在曲面与曲线上的应用，这基本上仍是欧拉所定下的图式。后面便是所谓的应用数学，即沿着牛顿的线索被上一世纪的作者所发展了的初等理论力学。微积分又发展到单元复变函数，它是 *Cauchy*, *Riemann* 和 *Weirstrass* 工作的大大删节后的综述。最后，当学生已经学过椭圆函数的定义及它的一些公式后，他便被认为是一个训练有素的数学家，适于从事他的课题的高级研究工作了。

不幸，今日数学系的教师和学生不再能过这样轻松的生活了：上述课题仍然不失为基本的，但已是远远不够了的。因此，必须以一切方法使学生在短期内学得更多的东西。还有，过去的将近半个世纪的抽象"数学"和"公理化"方法的发展已经使我们越来越清楚地认识到下列事实：从某些方面看，数学是一种语言，而且这个语言必须跟上它必须满足的需要，这个语言又有它自己的语法和词汇。我们还必须学会这个语法，掌握这些词汇。近代数学的语法与词汇首先是由抽象集合论，其次是由一般拓扑与抽象代数供给的：这些都是数学的辅助分枝，它们之间又有着如此显著的差别：抽象集合论建立不到 100年以前，而一般拓扑则不到50年，两者都可被看作是已经成熟了的（至少从今日数学所关心的需要看是如此）；虽然代数起源于巴比仑人，但至今仍在茁壮地发展中，无论如何，这些分枝已经渗透到传统的课题（如微积分与几何）中去了。远在人们认识到在许多不同的课题中支离破碎地研究它们是一种浪费之前便如此了，例如，把二次型化为平方和的方法只不过是巴比仑人早知道的解二次方程的"配方"法，它对平面和立体解析几何中的二次曲线与曲面的研究和射影几何来说都是基本方法，它在高维情形的推广对于微积分中的极大极小的研究，Hilbert 空间中的"正交化方法"和在 Hilbert 空间被引入数学以前的许多具体情形来说也是有着根本的价值的。把所有这些课题中的概念，以它在各种应用中最合适的方式统一起来，毕其功以一役地加以处理是会带来明显的好处的。

同时，不能忘记，学习一种语言的语法是不能在实际使用这种语言之前进行的（也许对于语言学家是例外），它们是必须手拉手地一起前进的。同样，在数学中，抽象概念必须逐步地谨慎地引进，这对于初学者来说尤应如此。很幸运的是，由于下列事实这变

得比较容易了：一般拓扑中的大多数概念和代数（线代数与矩阵论中的较大部分）中的许多概念在很大程度有着强烈的几何背景而可以用几何语言来表达，这就容易被直观所接受。

以上所述，解释了当今的数学教程的安排，预科水平的课程是提供学生以弥补初等数学知识上的不足（如解析几何、三角学、复数等课题，这些都是今后的工作中常常用到的）。预科课程之后是微积分，它的主要目的是对满足适当的光滑性条件的一元和多元实变函数的局部性质的研究（“局部”是理解为“在变量的值的一个邻域内的”）在今日数学中（纯粹和应用）这种函数已不占有像一百年甚里五十年以前那样的重要地位了，但是对于培养有前途的数学家和专门应用数学于某个专业的科学家来说，研究这类函数的方法仍然是一般教育中的不可缺少的一部分，而且在初级阶段的学习中，学生的数学知识的实质部分（相对于形式部分而言）主要还是来自这方面的学习，微积分的学习被组织成连贯的四个部分，初学者可望逐个学习。这些课程中包括一些例解说明，但是，从长远观点看，更多的例解材料应放在初等微分几何与初等力学这样一些课程中，后者又为进一步学习这些题材铺平了道路。

学生开始学习微积分的同时或稍晚，便应该开始熟悉一些今后对他不可缺少的抽象概念，这就是一系列代数课的目的之一，以通常的整数和解析几何中的二维、三维向量空间为背景，一系列代数课将向学生介绍群、环、域，向量空间，线性变量等概念和关于这些概念的基本定理，这些概念已经渗入近代数学的大部分领域，包括微积分课程中的一些课题（如曲线和曲面积分，各种形式的 Stokes 定理需要 Grassmann 代数的知识，它是重线性代数的一个基本部分，又和行列式理论不可分割），因此细心地弥合代数课与微积分课之间的隙缝是必要的，同时，代数课中的很多知识又和有紧密联系的仿射几何，射影几何，任意维空间的欧氏几何不可区分的，假若代数的学习不是形式地进行的，而是在每个可能的场合尽力发展和提高学生的几何直观，就使得专门开设这些几何课失去了必要。

学习代数与微积分时，学生便逐渐认识到集合的一般概念和记号（不论它是实数集合、函数集合、群的元素的集合等）及集合运算（并，交，积等）的必要性，在代数里他又熟悉了一些数学对象并非作为先天存在而接受的，却是由一些性质来描述的，这些性质又不是完全确定它们，换言之，学生已经接触了抽象集合的处理以及公理化方法，不到五十年以前，这些训练还被认为对逻辑学家比对数学家更适合，数学的发展已经产生了这样的影响，不仅这些训练对数学系学生是必要的，而且只要学生在才智上已有接受它的准备，它应该提前得越早越好，具体地说，经验似乎告诉我们。不要比两年微积分学完后还要晚，以上说明是针对集合论与一般拓扑学课程的。虽然这两门课的实质内容都很平凡，但是它们提供了一种语言，这种语言将使以后要学的大部分课题能方便地表述出来。

在关于课程的描述中，现在已经到达了这样的地步，越过这步专门化（或分科化）便可开始了。是的，不知道伽罗华理论可以成为一个好的分析学家，不知道勒贝格积分可以成为一个好的代数学家，不知道代数数论可以成为一个好的拓扑学家。虽然，这一切都是可能的，但并是非值得称道的。现在，全能的数学家比以前稀罕了，我们不准备

在这儿讨论这种过早的专门化可能带来的灾难性后果，但是愿意指出，本系不愿意鼓励这种过早的专门化，我们期望所有的学生获得纯粹数学主要分枝的基本知识，这将使他们能够考验自己的能力，并能在确定今后的工作领域时，作出理智的选择。这些基本知识至少应包括：（a）分析中的近代积分理论的某些知识，（最好不要限于一元或多元实变的勒贝格积分，而应扩展到紧和局部紧空间上的积分理论），希尔伯特空间的知识，常微与偏微分方程的知识，一元复变函数的知识；（b）代数中的域与域扩张（包括Galois理论）的知识，（c）某些数论的知识，至少应包含二次可逆定律和二次域中的理想理论。（d）几何中的几何与群论的关系，（在欧氏，射影，非欧几何中这就是Erlanger纲领）和黎曼几何中的活动标架方法。（e）拓扑中的基本群和纳覆空间的知识，一维同调群的知识，闭曲面分类的知识。在很大程度上，这些知识可以互相独立地学习，祇有在高级阶段，数学各分枝之间的相互作用才会变得重要起来。学习它们的顺序可以根据学生的爱好和方便去决定，这只是个选择和机会的事。

最后，学生必须认识到，数学是一门有着悠久历史的科学，假若对它的历史背景没有一些了解，要真正理解它是不可能的。首先，时间给出了人们心目中的数学和数学分枝的图象的一个维数。另外，数学中主要概念是不多的，清晰地理解它们的最好途径是追寻它们相互渗透时逐步发展的线索。这对于各级的有远见的数学教师来说尤其重要。对于他们来说，课堂上必须教的课题的干巴巴的知识远不如明瞭隐藏在这些课题背后的主要思想来得重要。最后，数学研究是一种知识的探索，学生将会失去对它的兴趣，除非它给予学生接触到智慧的伟大的机会，这种机会在教科书的学习中是不会碰到的，也不大可能从学生为了成为哲学博士而必须攻读的那类文献中遇上。在眼前的情况下，不能指望学生能对数学史有一个全面的了解，除非他专攻数学史。而且即使专攻数学史也可能不会有此了解。然而，可以指望他对他特别感兴趣的几个方面的过去的数学家的原著有所熟悉。

·蛙鸣·第36期
1988年8月

埃德温·F·贝肯巴克教授

数学系85级　余忠

1982年的数学杰出贡献奖（Award for Distinguished Service to Mathematics）获得者是数学界一位大名鼎鼎的人物——几十年来一直活跃于科研、教学、写作和一些学术组织的开拓性工作的埃德温.F.贝肯巴克（Edwin.F. Beckenbach）教授。他受到嘉奖是因为他在如此众多的方面都做出了长期的杰出的贡献。他的巨大的影响已经广为人知并将经久不衰。

埃德温.F.贝肯巴克1906年出生于美国德州达拉斯（Dallas）城，他在那儿上了学并一直念完高中。1924年秋季，他进了休斯顿（Houston）的莱斯（Rice）大学并于1931年获得哲学博士学位。他的论文是在雷斯特.R.福特（Lester .R. Ford）、四十年前曾任《美国数学月刊》编辑的一位杰出数学家指导下完成的。除此以外，Tibor Rado也对他的学术研究起着重要的影响作用。

大萧条的1931年，寻找职业实非易事。但是埃德温在三十年代的这段艰难岁月里却干得相当出色。他在普林斯顿（Princeton）、俄亥俄州（Ohio State）和芝加哥（Chicago）做了两年的国立研究员，后来又在莱斯大学获得了一个职位。不久他又到了密歇根（Michigan）大学，后又去了德克萨斯大学（University of Texas）。自1945年起，他在加利福尼亚州立大学洛杉矶分校（UCLA）当了三十多年的数学教授。埃德温.F.贝肯巴克是使该校显赫如今的几个学者之一。至于其他的贡献，则当推他在数值分析学院（Institute for Numerical Analysis）的建立过程中所起的重要作用了。

埃德温著述甚广，其中涉及到不等式、几何复变量理论。并从次调和函数逐渐延伸到表面理论。例如，他曾和理查德·贝尔曼（Richard Bellman）合写了两本有关不等式的书：一本被收进美国数学会的新数学系列丛书中，另一本比较深奥的现已成为一本标准参考书。埃德温还编辑了《现代工程数学》（Modern Mathematics for the Engineer）第一和第二卷，《应用组合数学》（Applied Combinatorial Mathematics）和《通信概要》（Concepts of Communications），后者曾被译成八国文字广为留传。另外，他还是数学大字典的编辑之一。除了这些高级工作外，埃德温还是一个作家，他与别人合写了几本具有初等、中等和高等水平的读物。他还为中学数学研究会（School Mathematics Study Group）、国家数学教师协会（the National Council of Teachers of Mathematics）和非州教育计划（African Education Program）写过文章。在写作

和编辑之余，埃德温把时间和精力都倾注在一些学术机构上，这其中当然包括美国数学协会。

埃德温是美国数学会的成员，当《数学评论》（ Mathematical Reviews）一度处于不景气状态时，他曾担任过一个与此有关的特别委员会主席来负责此事。他还是工程和应用数学会的会员，并曾担任过一个专门机构的主席来组织数学理事会的选举工作。除了曾担任过高等学术研究院委员会的受托人和西部分会的领导者以外，他还是国际一般不等式会议的组织者之一，这个为期一周的讨论会在德国俄伯沃尔范奇（Oberwolfach）的黑森林中的数学所自1976年起每两年举行一次，他编辑了这些国际会议的会议录。

冗长的列举容易使人厌倦，因此本文只限于对埃德温因世界数学事业做出的不胜枚举的贡献给出一个范例。尽管如此，如果不提及他在《太平洋数学杂志》（ Pacific Journal of Mathematics ）中所起的巨大作用，那么任何一篇报道都将是不甚全面的。事实上，这家杂志的1982年第 1 期刊首语就是献给创办该杂志的最杰出的两位奠基人：埃德温.F.贝肯巴克和伯克利（ Berkeley ）大学的弗兰提塞克·沃尔夫（ Frantisek Wolf）。对于常人来说，创办一种刊物已非易事，至于那些有足够的洞察力和精力，同时对两种刊物都做出重大贡献的人更是凤毛麟角，而埃德温就是这样一个出类拔萃的人。他长期的关于协会应该拥有自己的通讯刊物的呼吁终于导致了那本非常成功、内容精辟的《Focusc》的诞生。它的主编马歇.P.施瓦特（ Mauia P.Sword）称埃德温是"Focus之父"。

现在看重谈谈埃德温对数学会的其他贡献。他曾当选为德克萨斯分会的主席，但未埃上任就迁到密歇根。他还做过MAA的访问学者，并且担任了五年的《美国数学月刊》的通讯编辑。1971年后，他一直担任出版协会的主席，并以极大的热情，充沛的信心和高超的技巧来指导这些杂志、丛书和论文的问世。

在所有活动中，埃德温以他出色的谈判技巧、一贯的彬彬有礼和对他人的诚挚的关心及渊博的学识和恰到好处的幽默赢得了许多同事的合作。但是在其他活动中，他在会议桌上所表现出的那种合作和通融精神却消失殆尽：在网球场上，他是一个凶悍的人物，一个从不给对方一点喘息之机的强硬对手。三十年代，他曾是莱斯大学的网球冠军，后来又当了教练。整整六十年间，他对这项最喜爱的运动总是爱不释手。就是在最近，他还和妻子爱丽斯参加了全国的超级大赛。在更多的闲余时候，他们更是沉醉于另外一项终身嗜好中：在他们山边的农场栽植杏树和兰花。作为一个前数学会主席的女儿，爱丽斯从十一岁起就对各种数学会议起到了无可比拟的巨大帮助作用。

显而易见，埃德温在数学会的工作很出色，他的杰出的领导使人们受益匪浅。埃德温.F.贝肯巴克不愧是数学杰出贡献奖的最佳人选。

埃德温.F.贝肯巴克卒于1982年 9 月 5 日。

问 题 有 奖 征 解

本期问题选自以前的《蛙鸣》杂志，欢迎大家研讨。每个问题的第一个正确解答者得奖：第 x 个获解问题奖金 x 元；本刊将登出最佳解法，并酬以甲等稿费。来稿请寄：中国科技大学数学系83级陈计同学。

问题 1　设正数 a, b, c, d 满足 $a+b+c+d=2$，证明或否定：

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{c^2}{(c^2+1)^2}+\frac{d^2}{(d^2+1)^2}\leqslant\frac{16}{25}.$$

问题 2　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数，$n\geqslant 3$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=s\leqslant n+3$。证明或否定：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant\left(\frac{s}{n}+\frac{n}{s}\right)^n.$$

问题 3　设 $a_i\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant n$，当 $r\geqslant n/(n-1)$ 时，证明或否定：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^r+(n^r-n)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{r}{n}}$$

问题 4　设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n\geqslant 0$，$a_1/b_1\geqslant a_2/b_2\geqslant\cdots\geqslant a_n/b_n\geqslant 0$。证明或否定：

$$\left[\frac{E_n(a)}{E_n(b)}\right]^{\frac{1}{n}}\leqslant\left[\frac{E_{n-1}(a)}{E_{n-1}(b)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\left[\frac{E_2(a)}{E_2(b)}\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{E_1(a)}{E_1(b)},$$

式中 $E_r(x)=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}x_{i_1}\cdots x_{i_r}$，$1\leqslant r\leqslant n$。

问题 5　设 $0\leqslant x_i\leqslant\frac{1}{2}$，$1\leqslant i\leqslant n$，证明或否定：

$$\frac{G_n(x)}{G_n(1-x)}\leqslant\frac{G_{n-1}(x)}{G_{n-1}(1-x)}\leqslant\cdots\leqslant\frac{G_2(x)}{G_2(1-x)}\leqslant\frac{G_1(x)}{G_1(1-x)},$$

其中 $G_r(x)=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}(x_{i_1}\cdots x_{i_r})^{\frac{1}{r}}$，$1\leqslant r\leqslant n$。

问题6 所有单位面积的凸五边形中，求五条对角线所围成的小凸五边形的面积最大者。

问题7 平面任意 6 点组成的20个三角形中，其最大面积与最小面积的比为 u，试求 u 的最小值。

问题8 单位正方形内的任意一条简单闭曲线，其周长为 C，面积为 A，试求 C/A 的最小值。

问题9 球面上五个点，怎样分布时，诸点间所有(直线)距离之积最大？

问题10 证明或否定：单位面积凸五边形内一点及五顶点组成的20个三角形中必有一个面积小于七分之一。

问题11 单位圆内任置七点，必存在三点构成三角形的面积小于三分之一。试给出独立的证明。

问题12 证明或否定：单位面积的三角形内任置七点，必存在三点构成三角形的面积小于九分之一。

问题13 设平面上$3n(n\geqslant 2)$个圆片中的任意三个不两两相交（切），则是否可从中选出n个圆片，使它们是彼此相离的？

问题14 三角形ABC周界三等分点P、Q、R构成一个三角形，证明或否定：

$$3\,r_{\triangle PQR}>r_{\triangle ABC},$$ 其中r表示内切圆半径。

问题15 设a、b、c为三角形ABC的三边长，r和R分别表示它的内切圆和外接圆的半径。求使下式成立的所有实数k：

$$2\sqrt{3}\;r\leqslant\left(\frac{a^k+b^k+c^k}{3}\right)^{1/k}\leqslant\sqrt{3}\;R$$

问题16已知三角形ABC的三边长，设其内一点到各顶点和各边的距离分别为x、y、z和p、q、r，试求$(x+y+z)/(p+q+r)$的最小值。

问题17 三角形ABC内的点P到各顶点的距离分别为x、y、z，$\angle BPC$、$\angle CPA$、$\angle APB$的角平分线长分别为μ，v，ω，证明或否定：

$$x^k+y^k+z^k\geqslant 2^k(\mu^k+v^k+\omega^k),\ 0\quad k\quad 1。$$

问题18 设凸六边形的边长为a_1、a_2、……，a_6，其面积为A，证明或否定：

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6}a_ia_j\quad>\frac{10}{\sqrt{3}}\,A$$

问题19 证明或否定：面体内的任意一点到各顶点的距离之和大于该点到各棱的距离之和。

问题20 设圆外切凸n边形的边长为a_1，a_2，……，a_n，证明或否定：：

$$a_1^2a_2(a_1-a_2)+a_2^2a_3(a_2-a_3)+\cdots+a_{n-1}^2a_n(a_{n-1}-a_n)+a_n^2a_1(a_n-a_1)\geqslant 0\ 。$$

问题21 设n个正定对称实方阵A_1，A_2，…，A_n，对于自然数k，证明或否定：

$$tr(A_1^kA_2^k\cdots A_n^k)\geqslant tr(A_1A_2\cdots A_n)^k.$$

问题22 设A，B为半正定的非负方阵，证明或否定：

(i) $[\,su(A+B)^k\,]^{1/k}\geqslant(suA^k)^{1/k}+(suB^k)^{1/k}$，$k\leqslant 1$；

(ii) $[\,su(A+B)^k]^{1/k}\leqslant(suA^k)^{1/k}+(suB^k)^{1/k}$，$k\geqslant 1$。

问题23 方阵A的特征值的最大模称为谱半径r(A)。设A =(a_{ij})为n阶非负方阵。证明或否定：

$$r(A)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big)^a\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\Big)^{1-a},\quad 0\leqslant a\leqslant 1$$

问题24　两个同阶矩阵A =(a_{ik}) 和B (b_{ik}) 的Sckur 积定义为A * B =($a_{ik}b_{ik}$
设A和B 都是n 阶正定的 Hermite 方阵。证明或否定：

$$\prod_{i=k}^{n} \lambda_i(A * B) \geq \prod_{i=k}^{n} \lambda_i(AB^T)$$

其中特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 。

问题25　设 $f(x) = \lambda x(1-x)$ ， $0 < x < 1$ 。问当 $3.3 < \lambda < 4$ 时，是否有[0, 1] 上不减的连续函数g(t) ，满足

$$g(0) = 0,\quad g(1) = 1,\quad g(t) = g(x) + 1 - g(y)$$

此处 $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$ 是方程 " $t = \lambda x(1-x)$ " 的两个根。

问题26　记 p_n 是第n 个素数，证明或否定

$$f(n) = p_n \prod_{p<p_1\cdots p_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right),\quad (p\text{ 是素数})$$

是严格单调下降的数列。

问题27　设 n 是自然数，p 是素数。证明或否定：集合 $\{p \mid 1<p<4^n\}$ 元数个数是偶数。

问题28　a、b 是有理数，且 $a \neq 0$，是否存在有理数 λ，使关于 x、y 的方程

$$(ax^2+b)^2+y^4=\lambda$$

有无穷多组解？有至少 5 组正有理解？

问题29　任给 9 个正数，将它们排成的 3 阶正矩阵中，是否存在一个方阵的所有特征值都为非负实数？

问题30　设 Ω 是 R^2 中的凸开集，$f:\Omega\to R^1$（可微）. 若 $\forall\varepsilon>0, \delta>0$，当 (x, y)，$(x', y') \in \Omega$，且 $|x-x'|<\delta$，$|y-y'|<\delta$ 时，有

$$\frac{\left| f(x,y)-f(x',y') - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(x-x') - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(y-y') \right|}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} < \varepsilon.$$

则称 f 在 Ω 一致可微，问 f 在 Ω 一致可微是否可推出 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 Ω 一致连续？

WAMING MATHEMATICAL JOURNAL

No.36, August, 1988

蛙鸣数学杂志（双月刊）

第 36 期 1988 年 8 月