蛙鸣

第56期

数学系学生会学习部
《蛙鸣》编委会

刊首寄语

《蛙鸣》今年 21 岁了，属鸡，和我们班大多数同岁，这种巧合具有唯一性。

《蛙鸣》自诞生起，一直是师兄师姐们大学生涯的生动部分，他们读《蛙鸣》，到上面吊嗓子，直到办《蛙鸣》。蛙声一片之中，令人看到稻花香里的丰收情景：在数学及其他领域，可以听到不少他们的声音；料想不久之将来，这种声音应会更大，更动听……

《蛙鸣》走过的路恰似数学系发展的侧影，她更美好的未来，依赖于大家更多的努力和热情。

《蛙鸣》(56) 的编写得到了胡森、舒其望、汪芳庭等老师的热情鼓励和帮助，特此致谢！感谢各位倾听我们的《蛙鸣》！

目　录

中国的数学*

— 几件数学新闻和对于中国数学的一些看法

陈省身

张存浩先生要我讲点数学，这么短的时间，而数学这么大，只好举几个要点谈谈。

数学是什么？数学是根据某些假设，用逻辑的推理得到结论，因为用这么简单的方法，所以数学是一门坚固的科学，它得到的结论是很有效的。这样的结论自然对学问的各方面都很有应用，不过有一点很奇怪的，就是这种应用的范围非常大。

最初你用几个数或画几个图就得到的一些结论，而由此引起的发展却常常令人难以想象。在这个发展过程中，我认为不仅在数学上最重要，而且在人类文化史上也非常突出的就是 Euclid 在《几何原本》。这是第一本系统性的书，主要的目的是研究空间的性质。这些性质都可以从很简单的公理用逻辑的推理得到。这是一本关于整个数学的书，不仅仅限于几何学。例如， Euclid 书上首先证明素数的个数是无穷的，这便是一个算术的结论。随着推理的复杂化，便有许多“深刻”的定理，需要很长的证明。例如，有些解析数论定理的证明，便需几十条引理。最初，用简单的方法证明几个结果，大家很欣赏，也很重要。后来方法发展了，便产生很复杂的推理，有些定理需要几十页才能证明。现在有的结果的证明甚至上百页，上千页。看到这么复杂的证明，我们固然惊叹某些数学家高超的技巧和深厚的功力，但心中难免产生一些疑问，甚或有些无所适从的感觉。所以我想，日后数学的重要进展，在于引进观念，使问题简化。

先讲讲有限单群的问题。

1. 有限单群

我们知道，数学的发展中有一个基本观念——群。群也是数学之中各方面的最基本的观念。怎样研究群的结构呢？最简单的方法是讨论它的子群，再由小的群的结构慢慢构造大一些的群。群中最重要的一种群是有限群，而有限群是一个难极了的题目，需要用特别的方法，特别的观念去研究。

命 G 为群， $H \leq G$ 为一子群，如对任何 $g \in G, g^{-1}Hg \leq H$ ，则称 H 为正规

* 本文为庆祝自然科学基金制设立 15 周年和国家自然科学基金委员会成立 10 周年的讲演

的 (nomal). 正规子群存在，可使 G 的研究变为子群 H 及商群 G/H 的研究。这样就有一个很自然的问题, 有哪些有限的单群 (simple group). 单群除了它自己和单位元 (identity) 之外，没有其他的非平凡的正规子群 (normalsubgroup). 数学上称其为简单群，其实一点也不简单。

有限群论的一个深刻的定理是 Fei-Thompson 定理：非交换单群的阶 (数)(即群中元素的个数) 是偶数。更不寻常的是除了某些大类 (素数阶循环群 Z_p，交错群 $A_n(n \geq 5)$， Lie 型单群) 外，后来发现了 26 个零零碎碎的有限单群 (散在单群，离散单群)，现在知道，最大的散在单群的阶是

$$2^{46} \times 3^{20} \times 5^9 \times 7^6 \times 11^2 \times 13^3 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 \times 31 \times 41 \times 47 \times 59 \times 71$$

$$= 808017424794512875886459904961710757005754368000000000 \quad \approx 8 \times 10^{53}.$$

这是很大的单群, 由 B.Fisher 和 R.L.Griess 两位数学家所发现, 数学家称它为魔群 (怪物， Monster). 单群的权威数学家 D.Gorenstein 相信有限单群都在这里了，这当然是数学上一个很好的结果。把单群都确定了，就像化学家把元素都确定了，物理学家把核子的结构都确定了一样。可这里有个缺点， Gorenstein 并未将证明定出来。他讲若将证明写出来至少有 1000 页，而 1000 页的证明无论如何很容易有错误。可是 Gorenstein 又说，不要紧，若有错误，这个错误一定可以补救。你相信不相信？数学界有些人怀疑这样的证明是否必要。现在计算机的出现，许多问题可以验证到很大的数，是否还需要严格的证明，已变成数学上一个有争论的问题。这个争论看来一时无法解决。段学复先生是我的老朋友，是有限群论的专家，也许我们可以问一下他的意见。我个人觉得这个问题很难回答。不过数学家有个自由，当你不能做或不喜欢做一个问题时，你完全不必投入，你只需做一些你能做或喜欢做的问题。

2. 四色问题

把地图着色，使得邻国有不同的颜色，需要几种颜色？经验告诉我们，四色够了。但是严格的证明极难。这就是有名的四色问题。

地图不一定在球面上，也可在亏格高的的曲面上 (一个亏格高为 g 的曲面在拓扑上讲是球面加 g 个把手；亏格为 1 的曲面可设想为环面)。可惊奇的是，这个着色问题，对于 $g \geq 1$ 的曲面完全解决了。可以证明：有整数 $\chi(g)$, 满足条件：在亏格为 g 的曲面上任何地图都可用 $\chi(g)$ 种颜色着色，使邻国有不同颜色，且有地图至少需要 $\chi(g)$ 种颜色。这个数在 $g \geq 1$ 时可以完全确定。我们知道 $\chi(1) = 7$，即环面上的地图可用七色着色，四色不够。

令人费解的是，证明地球上四色定理，困难多了。现有的证明，需要计算机的帮助，与传统的证明不同。而我们觉得最简单的情况，即我们住的地球球面上

I am interested in mathematics only as a creative art. —— *G.H.Hardy*

的着色问题反而特别复杂。把扩充的问题解决了，得到了很有意思的结论。但是回到基本问题，反而更难。这种现象不止这一个，还有很多，一个例子是所谓的低维拓扑，即推广的问题更简单，而本身核心的问题反而不易克服，这确是数学神秘性的一面。

3. 椭圆曲线

最近的数学进展，最受人注意的结果就是 Fermat 大定理的证明。 Fermat 大定理说：方程式 $x^n + y^n = z^n, n > 2$ 没有非平凡的整数解 (即 $xyz \neq 0$). 这个传说了 300 年的结果的证明，最近由 Princeton 大学的教授 Andrew J.Wiles(英国数学家) 给出。但证明中缺一段，是由他的学生 Richard Tarlor 补充的。因此， Fermat 定理现在已经有了一个完全的证明。整个文章发表在最近一期的“ Annals of Mathematics ” (Princeton 大学杂志， 1996 ，第一期) 整个一期登的是 Wiles 与 Taylor 的论文，证明 Fermat 定理 (Wiles 为此同 Robert Langlands 获得了 1996 年的 Wolf 奖与 National Academy Science Award in Mathematics).

有意思的是，证明这个定理的关键是椭圆曲线。这是代数数论的一个分支。有以下一则故事。英国的大数学家 G.H.Hardy(1877-1947) 有一天去医院探望他的朋友，印度天才数学家 S.A.Ramanujan(1887-1920).Hardy 的汽车号是 1729 。他向 Ramanujan 说，这个数目没有意思。 Ramanujan 说，不然，这是可以用两种不同方法写为 2 个立方之和的最小的数，如 $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ 这结果可用椭圆曲线论来证明。我们知道，要找一个一般方程的解不容易的，而要找一个系数为整数的多项式方程 $P(x, y) = 0$ (传统上叫 Diophantine 方程) 的整数解更困难。因为普通的解不会是整数，这是数论中的一个主要问题。

需要说明的, 在 Wiles 完成这个证明之前, 我有一位在 Berkley 的朋友 Kenneth A.Ribet, 他有重要的贡献。他证明了一日本数学家 Yutaka Taniyama 的某一个关于椭圆曲线的假设包含 Fermat 定理。于是可将 Fermat 定理变为一个关于椭圆曲线的定理。 Wiles 根据 Ribet 的结果又继续经过了许多步骤，以至达到最后的证明。即在复平面内得到曲线。由复变函数论知道，复平面内的曲线就成为一个 Riemann 曲面。 Riemann 曲面为定向曲面，它可以是球，也可以是球加上好多把手。其中有一个最简单的情形，就是一个球加上一个把手，即一个环面。环面是个群，且为可交换群。

所谓椭圆曲线, 就是把这个曲线看成复平面内亏格 (genus) 等于 1 的复曲线。亏格等于 1 的曲线有一个非常深刻而巧妙的性质。即它上面的点有一个可交换群的构造。两个点可以加起来，且有群的性质。这是很重要的性质。椭圆曲线与椭圆无关。原因是, 若所有曲线的亏格大于 1 , 相当于 Riemann 曲面有一个 Poincare

度量，它的曲率等于 1，所有曲面若其曲率等于 -1，则叫做双曲的。亏格等于 1 的叫椭圆。亏格等于 0 的叫抛物线。椭圆曲线的研究是数论中非常重要，非常有意思的方面。最近一期的科学杂志 (Science)，有位先生写了一篇关于椭圆曲线的文章。椭圆曲线在电报的密码上有应用。而中国也有很多人在做代数几何与代数数论方面的工作。最近在黄山有一个国际性的，题为“代数几何与代数数论”的会议，由冯克勤先生主持。

从这个定理我们应认识到：高深的数学是必要的。 Fermat 定理的结论虽然简单，但它蕴藏着许多数学的关系，远远超出结论中的数学观念。这些关系日新月异，十分神妙，学问之奥，令人拜赏。我相信， Fermat 定理不能用初等方法证明，这种努力是徒劳的。数学是一个整体，一定要吸取几千年所有的进步。

4. 拓扑与量子场论

1995 年初的一天晚上，我在家看晚间电视新闻。突然，我听到自己的名字，大吃一惊。原来加利福尼亚发一种彩票，头彩 300 万美元，若无人中彩的话，可以积累到下一次抽彩。我从前的一个学生，名 Robert Uomini, 中了头彩美金 2200 万元。他曾选过我的本科课，当时还对微分几何很有兴趣。他很念旧，以 100 万美元捐赠加州大学，设立“陈省身讲座”。学校决定，以此讲座邀请名学者为访问教授。第一位应邀的为英国数学家 Sir Michael Atiyah. 他到中国不止一次。他是英国影响最大的数学家，剑桥大学三一学院的院长，卸任的英国皇家协会会长。 Atiyah 很会讲学，也很博学，他的报告有很大的吸引力。他作了八讲，讲题是“拓扑与量子场论”。

这是当前一个热门的课题，把高深的数学和物理联系起来了，导出了深刻的结果。现在拓扑在物理上有非常重要的应用，这跟杨振宁的 Yang-Mills 场方程有很密切的关系。杨先生喜欢说，你们数学家写的东西，我们学物理的人看不懂，等于另外一种文字。我想我们搞数学的人有责任把我们的结果，写成不是本行的人也至少知道你讲的是怎么一回事。

物理学，量子力学，尤其是量子场论与数学的关系其实并不复杂。说到数学的应用，讲一下矢量空间， Euclid 空间就是一个矢量空间。再进一步，多个矢量空间构成一个拓扑空间，这就是所谓的矢量丛，即一束这样的空间。这样的空间有一些简单的性质。比如说，局部来讲，这种矢量空间是一个 chart，是一个集，可用坐标来表示。结果发现矢量丛这种空间在物理上很有用。物理学的一个基本观念是“场”。最简单的场是电磁场，尤为近代生活的一部分。电磁场的“势”适合 Maxwell 方程。 Hermann Weyl 第一个看出这个势不是一个确定的函数。它可以变化。这在物理上叫做规范 (gauge, 不完全确定的，可以变化的)，这就是物理

上规范场论的第一个情形。

物理上有 4 种场：电磁场，引力场，强作用场和弱作用场。现在知道，这些场都是规范场。即数学系上是一束矢量空间，用一个线性群来缝住的。电磁场的重要推广，是 Yang-Mills 的规范场论。杨先生的伟大贡献就是在 SU(2) (special unitary group in two variables) 情形下得到物理意义明确的规范场，即同位旋 (isospin) 规范场，这种将数学现象给以物理的解释，是件了不起的工作，因为以往的 Maxwell 场论是一个可交换的群。现在变为在 SU(2)，群是不能交换的。而实际上，物理中找到了这样的场，这是科学上一个伟大的发展。数学家可以自豪的是，物理学家所需的几何观念和工具，在数学上已经发展了。

杨先生之所以有这么大的成就，其中一个很重要的，很了不起的原因是除了物理的感觉以外，他有很坚实的数学基础。他能够在这大堆复杂的方程中看出某些规律，它们具有某种基本的数学性质。Yang-Mills 方程的数学基础是纤维丛。这种观念 Dirac 就曾有过。Dirac 的一篇基本论文中就讲到这种数学。但 Dirac 没有数学的工具。所以他在讲这种观念时，不但数学家不懂，就连物理学家也不懂。不过，其中有一个到现在还未解决的物理含义，即有否磁单极 (magnetic monople)。可能会有。就是说，有否这样的场，它的曲率不等于 0(曲率是度量场的复杂性的)？物理上要是发现了这种场，会是件不得了的事实。这些观念的数学不简单。

Yang-Mills 方程反过来影响到拓扑。现在的基础数学中，所谓低维拓扑 (二维，三维，四维) 非常受人注意。因为物理空间是四维空间。而四维空间有许多奇妙的性质。我们知道代数几何，曲线论，复变函数论等许多基础数学理论是二维拓扑。而现在必到四维，四维有 spinor 理论，有 quantum 结构。四维与物理更接近。它的结构是 Lorentz 结构，而不是 Riemann 结构。这方面有很多工作可做。根据 Yang-Mills 方程，对于四维拓扑， Atiyah 的学生英国数学家 Simon Donaldson 有很重要的贡献。其中有一个结果就是利用 Yang-Mills 方程证明四维 Euclid 空间 R4 有无数微分结构与其标准结构不同。这一结果最近又由 Seiberg-Witten 的新方程大大的简化了。这是最近拓扑在微分几何，理论物理应用方面最引人注意的进展。

二维流形的发展有一段光荣的历史，牵涉到许多深刻的数学，可以断言，三维，四维流形将更为丰富和神妙。

5. 球装问题 *(Sphere Packing)*

如何把一定的空间装得最紧，显然是一个实际而重要的问题。项武义教授最近在这方面做了很重要的工作。这里先介绍一个有关的问题：围着一个球，可以放几个同样大小的球？我们不妨假定球的半径为一，即单位球。在平面情形，绕

一单位圆我们显然可以放 6 个单位圆 . 而在三维空间的情况则更为复杂。如果把单位球绕单位球相切，不难证明， 12 个球是放得进的。这时虽然还剩下许多空间，但不可能放进第 13 个球。要证明这一结论并不容易。当年 Newton 与 Gregory 有个讨论。 Newton 说第 13 个球装不进， Gregory 说也许可以。这个争论长期悬而未决。一直到 1953 年， K.Schutte 和 B.L.van der Waerden 才给了一个证明。这个证明是很复杂的。

一个更自然的问题是怎样把一个立方体空间用大小相同的球装得最紧。衡量装得是否紧凑的尺度是密度 (density) ，即所装的球的总的体积和立方体空间的体积的比例。

Kepler 于 1611 年提出了一个猜想：他认为立方体的球装的密度不会大于 $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$. 项武义说他证明了这个猜想。可是有人 (Gabor Fejes Toth) 认为他的证明不完全，甚至有人 (Thomas L.Hales) 说是错误的。“ Mathematical Intelligencer ”这个杂志上 (1995 年), 有关于这一问题的讨论，项武义有个答复。 Toth 是匈牙利数学家，三代人搞同一个课题。匈牙利数学很发达，在首都布达佩斯有个 200 多人的几何研究所。我不知道几何中是否有这么多重要的问题需要这么多人去做。最年轻的 Toth 在“ Mathematics Reviews ”中有篇关于项的文章的评论。他说项的文章有些定理没有详细的证明。天下的事情就是这样。做重要工作有争议的时候，便产生一些有趣的现象。不过他觉得项的意思是对的。不但项的意思是对的，甚至表示这个意思他从前也有。最近项武义把他认为没有的证明都写出来了。

最主要的，我要跟大家说的是立体几何在数学中是很重要而困难的部分。即使平面几何也可能很难。到了立体时，则更为复杂。近年来对碳 60(C60) 的研究显示了几何在化学中的应用。多面体图形的几何性质对固态物理也有重大的作用。球装不过是立体几何的一个问题。立体几何是大有前途的。

6.Finsler 几何

最近经我鼓励， Finsler 几何有重大发展，作简要报告如下：

在 (x,y) 平面上设积分 $s=\int_a^b F(x,y,\frac{dy}{dx})dx$ 其中 y 是 x 的未知函数。求这个积分的极小值，就是第一个变分学的问题。称积分 s 为弧长，把观念几何化，即得 Finsler 几何。Gauss 看出，在特别情形： $F^2=E(x,y)+F(x,y)y'+G(x,y)y'^2, y'=\frac{dy}{dx}$ 其中 E,F,G 为 x,y 的函数，几何性质特别简单。 1854 年， Riemann 的讲演讨论了整个情形，创立了 Riemann-Finsler 几何。百余年来， Riemann 几何在物理中有重要的应用，而整体 Riemann 几何的发展更是近代数学的核心部分。

Riemann 的几何基础包含 Finsler 几何。我们最近几年的工作，把 Riemann 几何的发展，局部的和整体的，完全推广到 Finsler 几何，而且很简单。因此，

我觉得以后的微分几何课或 Riemann 几何课都应该讲一般情形. 最近有几个拓扑问题. 最主要的一个是 Riemann 流形的一个重要性质，即英国数学家 Hodge 的调和积分。现在有 2 个年轻人，一个是 David Bao, 另一个是他的美国学生，把这个 Hodge 的调和积分推广到了 Finsler 情形。这将是微分几何的一块新园地，预料前景无限。 1995 年夏在美国西雅图有一 Finsler 几何的国际会议。其论文集已于今年由美国数学会出版.

Finsler 几何在 1900 年有名的 Hilbert 演讲中是第 23 个问题。

7. 中国的数学

数学研究的最高标准是创造性：要达到前人未到的境界，要找着最深刻的关键。从另一点看，数学的范围，是无垠的。我愿借此机会介绍一下科学出版社从俄文翻译的《数学百科全书》，全书 5 大卷，每卷约千页。中国能出版这样的巨著，即是翻译，也是一项可喜的在就。这是一部十分完备的百科全书，值得赞扬的。对着如此的学问大海，入门必须领导，便需要权威性的学校和研究所。数学是活的，不断有杰出的贡献，令人赞赏佩服。但一个国家，可以集中比较某些方面，不必完全赶时髦。当年芬兰的复变函数论，波兰的纯粹数学，都是专精一门而有成就的例子。中国应该发展实力较强的方面。但由百科全书的例子，可看出中国的数学是全面的。这是一个可喜的现象。中国的财富在“人民”。中国的数学政策，除了鼓励尖端的研究以外，应该用来提高一般的数学水平。我有两个建议：

(a) 设立数学讲座，待遇从优，其资格可能是对数学发展有重大贡献的人；
(b) 设立新的数学中心，似乎成都，西安，广州都是可能的地点。中心应有相当的经费，部分可由地方负担，或私人筹措。

近年因为国家开放，年轻人都想经商赚钱，当然国家社会需要这样的人。但是做科学的乐趣是一般人不能理解的。在科学上做了基本的贡献，有历史的意义。我想对于许多人，这是一项了不得的成就。在岗位上专心学问，提携后进，“得天下之英才而教育之”，应该是十分愉快的事情.

一个实际的问题，是个人应否读数学。 Hardy 说，一个条件是看你是否比老师强。这也许太强一些。我想学习应不觉困难，读名著能很快与作者联系，都是测验。数学是小科学，可以关起门来做。在一个多面竞争的社会中，是一项有优点的职业，即使你有若干能力。

中国的数学有相当水平。从前一个数学家的最高标准，是从国外名大学获得博士学位。我们国家现在所必需做的，是充实各大学的研究院，充实博士学位，人才由自己训练。

应用数学浅谈

舒其望

应用数学是一个比较广泛的概念，通常包括概率统计、随机过程、一部分微分方程及动力系统、数值分析及科学计算、数学物理，以及一些新兴的学科，比如计算生物学、材料科学的模拟和计算，等等。总而言之，一切对应用科学起作用的数学均可归入应用数学。这个概念同国内通常的定义不大一致，但确是国际上通用的概念。

应用数学的本质仍然是数学。纯粹数学和应用数学的区别，主要在最终的目的。对纯数学来说，只要是研究方法上有创新性，或者得到的结果是新的和数学上有意义的，都是好的工作；而对应用数学来说，因为其最终的目的是应用，所得到的结果必须有应用的价值，否则就不属于应用数学的范围了。拿《数值分析》这门学科来看，它的主要研究对象是计算方法的一些理论性质，诸如稳定性、收敛性和误差估计等等；用的工具也都是一些通常的数学分析。从这个意义上来说，似乎和纯数学中一些用到分析工具的学科无大区别。但实际上，因为数值分析的最终目的是设计、改进和完善实用的计算方法，所有的工作都必须围绕这个出发点。如果一个计算方法被实践证明是有效的，则对它的各种数值分析就特别有价值；即使这些分析不尽完善，也不能由此而去改动这一计算方法而得到更完善的分析，除非你的改动被实践证明比原来更有效。

对有志学习应用数学的同学，打好数学的基础是十分重要的。我历来反对在大学生阶段分基础数学和应用 / 计算数学；尤其是前三年，所有学数学的同学都应当修学同样的基础课程。科大在这一方面一直做得比较好。这一原则也适用于研究生第一年的课程；修学一些看上去与论文研究方向关系不大的课程，可以开拓视野、增加知识储备，在今后的研究工作中或迟或早、或直接或间接地总能受益。相反，如果过早地把所修学课程限制在较为狭隘的论文研究范围，也许能提前一两年发表论文，但后劲不足，而且以后再来补一些其他方向的课程也相对来说比现在困难。

因为应用数学的范围比较广泛，牵扯到的重要课程也比较多。对很大一类应

If one must choose between rigour and meaning, I shall unhesitatingly choose the latter. —— *René Thom*

用数学来说，概率、随机过程和数理统计是比较重要的基础知识，微分方程（包括常微分方程、动力系统、偏微分方程等）也是重要的基础工具，数值方法方面的课程对所有的想学应用数学的同学来说都是重要的。最后要提到的是，既然应用数学的最终目的是应用，学好几门应用学科的课程，如力学、其他的基本物理学、生物学等，也会是十分有益的。

最后，我想强调一下掌握好计算机编程和运算能力的重要性。计算机正以突飞猛进的速度发展，已成为很多领域中重要的研究工具和实验工具。在最近几个年代中，对计算机发挥效率的贡献，硬件和软件的发展占有同样的比重。在软件的发展中，优秀算法的设计和改进起到了举足轻重的作用，而应用数学对这一方向的贡献是起主导作用的。对于将来准备从事应用数学研究的同学，优秀的计算机使用能力是一个必要条件。即使对于将来准备从事其它数学方向的研究的同学，掌握好计算机的使用技巧也是十分重要的。举例来说，我现在担任主编的美国数学会的《计算数学》 (Mathematics of Computation) 杂志，有很多文章是数论方面的，这一纯数学的学科借助于计算机的力量和由数学原理指导的计算方法的设计和应用，得到了很多用传统数学工具不容易得到的结果。这是计算机和应用数学对纯数学做出贡献的一个典型的例子. 类似的例子还包括四色定理的计算机证明等。至于计算机和计算方法对工程的贡献的例子就更是举不胜举了。例如，波音 777 飞机的设计就全是通过计算流体力学的程序来试验的，没有用到传统的风洞试验，这种“数值风洞”比起传统的风洞来有成本小和效率高的优点。可以预见，在不久的将来，生物学、化学等领域的部分实验也可以通过计算机程序来实现。

作者简介：舒其望， 1982 年中国科技大学数学系学士毕业， 1986 年在美国 UCLA 获数学博士学位，现任美国 Brown University 应用数学系系主任、教授。中国科学技术大学数学系计算数学专业长江学者讲座教授。美国数学会 Mathematics of Computation 杂志的主编。研究方向为数值分析及科学计算。

应用数学专业的学生应该主要接受基于纯数学的训练。我相信，只有在对数学结构和过程深刻理解并且真正地和其他学科接触之后，一个人才能在应用数学中做出好的工作。 —— *S.Karlin*

$|D/(\alpha)| = N(\alpha)$ 的初等新证

9901 黄宏年 hnhuang@mail.ustc.edu.cn
9901 张超 chaos@mail.ustc.edu.cn
指导老师 余红兵

本文所要证明的是 $|D/(\alpha)| = N(\alpha)$, 其中 D 为 $Q(\delta)$,(δ 为代数整数).$(\alpha) = \alpha\mathcal{D}$ 为 α 生成的理想, $N(\alpha) \in \mathcal{N}$ 为 α 在 D 上的 **Norm**(其定义在后面给出).$|D/(\alpha)| = N(\alpha)$ 看起来应该是十分自然的事情, 因为 α 生成的理想与它本身应该有某种程度的联系.

首先介绍代数数域的一些知识.

定义 1 对于一个复数 α, 若其可为 $\mathcal{Z}$ 上的首一多项式的根, 即存在 $m \in \mathcal{N}$; $a_0, \ldots, a_{m-1} \in \mathcal{Z}$ 使得 $\alpha^m + a_{m-1} \cdot \alpha^{m-1} + \cdots + a_1 \cdot \alpha + a_0 = 0$, 则称其为代数整数.

显然 $\mathcal{Z}$ 中的数全为代数整数, 但是 $\mathcal{Q}$ 中的数却未必为代数整数, 而且可以证明, 若 $\alpha \in \mathcal{Q}$ 为代数整数, 则 $\alpha \in \mathcal{Z}$.

引理 1 设 $\mathcal{U} \in \mathcal{C}$ 为 $\mathcal{Z}$ 上的有限整模, $\alpha \in \mathcal{C}$. 若 $\alpha\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$, 则 α 为代数整数.

证明: 不妨设 $\beta_1, \ldots, \beta_n$ 为 $\mathcal{U}$ 上的一组基, 则有

$$\alpha\beta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j \quad , \quad i = 1, \ldots, n \quad , \quad a_{ij} \in \mathcal{Z}$$

从而有

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = 0$$

Algebra is generous: she often gives more than is asked for. —— *Jean d'Alembert*

由 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 的线性无关性，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\alpha & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\alpha & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\alpha \end{vmatrix} = 0$$

将此行列式展开则可知 α 满足一首一整系数方程，从而其为代数整数.

命题 1 *代数整数的全体 $\mathcal{V}$ 在通常意义的加法和乘法下构成了整环.*

证明: 若证得 $\mathcal{V}$ 为环，则显然其为可交换无零因子环. 从而只需证明其为环，即对任意的 $\alpha,\beta\in\mathcal{V}$, 有 $\alpha\pm\beta\in\mathcal{V},\alpha\beta\in\mathcal{V}$ 即可. 由于 α,β 为代数整数，可设 $\alpha^m+a_{m-1}\cdot\alpha^{m-1}+\cdots+a_1\cdot\alpha+a_0=0$ 及 $\beta^n+b_{n-1}\cdot\beta^{n-1}+\cdots+b_1\cdot\beta+b_0=0, a_i,b_j\in\mathcal{Z}$. 设 $\mathcal{U}=\mathcal{Z}(\alpha\beta,\ldots,\alpha_{m-1}\beta_{n-1})$ 为 $\mathcal{Z}$ 上的线性空间. 则当 $i<m-1$ 时， $\alpha\cdot\alpha^i\beta^j=\alpha^{i+1}\beta^j\in\mathcal{U}$; 当 $i=m-1$ 时，$\alpha\cdot\alpha^i\beta^j=\alpha^m\beta^j=-(a_{m-1}\cdot\alpha^{m-1}+\cdots+a_1\cdot\alpha+a_0)\beta^j\in\mathcal{U}$. 从而 $\alpha\mathcal{U}\subset\mathcal{U}$, 同理有 $\beta\mathcal{U}\subset\beta U$. 于是 $(\alpha\pm\beta)\mathcal{U}\subset\mathcal{U},\alpha\beta\mathcal{U}\subset\alpha\mathcal{U}\subset\mathcal{U}$. 由引理 1 即可得所求结论.

定义 2 *设 $\mathcal{F}$ 为 $\mathcal{C}$ 中的子域，称其为代数整数域，若 $[\mathcal{F}:\mathcal{Q}]<\infty$.*

令 $\mathcal{D}=\mathcal{V}\cap\mathcal{F}$, 则 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{F}$ 中代数整数的全体所组成的整环.

由线性代数基本知识，若设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ 为 $\mathcal{F}:\mathcal{Q}$ 的一组基， $\alpha\in\mathcal{F}$, 则存在 $a_{ij}\in\mathcal{Q},(i,j=1,\ldots,n)$ 使得

$$\alpha\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_j \quad , \quad .$$

定义 3 $N(\alpha)=det(a_{ij})$.

显然这种定义是合理的,即 $N(\alpha)$ 不依赖于基的选取. 事实上,不妨设 $\beta_1,\ldots,\beta_n$ 为 $\mathcal{F}$ 另外一组基，且 β_j 在 α_i 下的变换矩阵为 (c_{ij}). 则由

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1\alpha \\ \vdots \\ \beta_n\alpha \end{pmatrix}$$

可得

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1\alpha \\ \vdots \\ \alpha_n\alpha \end{pmatrix}$$

从而

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

这表明，$det(a_{ij}) = det(b_{ij})$, 即 $N(\alpha)$ 不依赖于基的选取. 另外，不难证明 $N(\alpha) = \prod_\sigma \sigma(\alpha), \sigma \in G(\mathcal{F}/\mathcal{Q})$.

接下来，我们便来证明本文的主要结果.

定理 1 设 $\alpha \in \mathcal{D}, (\alpha)$ 为 α 在 $\mathcal{D}$ 中生成的理想，则有 $|\mathcal{D}/(\alpha)| = N(\alpha)$.

证明：设 $[\mathcal{F} : \mathcal{Q}] = n$, 从而有 $\mathcal{F} = \mathcal{Q}(\delta), \delta \in \mathcal{C}$, 于是可设 δ 在 Q 上的极小多项式为 $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathcal{Z}, i = 0 \ldots n$. 显然 $a_n^{n-1} f(x) = (a_n x)^n + a_n a_{n-1}(a_n x)^{n-1} + \cdots + a_n^{n-2} a_1 (a_n x) + a_n^{n-1} a_0$ 为 $\mathcal{Q}$ 上的不可约多项式. 这表明 $a_n \delta \in \mathcal{D}$, 且 $1, a_n\delta, \ldots, (a_n\delta)^{n-1}$ 在 $\mathcal{Z}$ 上线性相关. 另外一方面，若存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathcal{D}$ 使得他们在 $\mathcal{Z}$ 上线性无关，那么它们在 $\mathcal{Q}$ 上也线性无关，这与 $[\mathcal{F} : \mathcal{Q}] = n$ 矛盾. 从而说明 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{Z}$ 的 n 维线性空间，设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 为 $\mathcal{D}$ 上的一组基. 并且设

$$\alpha = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \quad , \quad a_i \in \mathcal{Z}; \qquad \alpha_i \alpha_j = \sum_{k=1}^n b_{ij}^k \alpha_k \quad , \quad b_{ij}^k \in \mathcal{Z}$$

其中 b_{ij}^k 上的 k 仅为标号的作用，不是通常意义下的次方. 对于任意 $\beta \in \mathcal{D}, \beta$ 均可表示为 α_i 的整系数组合，而 α_i 的任一整系数组合又确定了 $\mathcal{D}$ 中的元素. 这说明 $\mathcal{D}$ 在加法的意义下与 n 维向量空间 $\mathcal{Z}^n$ 群同构.

现在我们来研究 (α) 中的元素与 $\mathcal{Z}^n$ 中元素的对应关系. $(\alpha) = \alpha\mathcal{D} = \{\alpha\gamma \mid \gamma \in \mathcal{D}\}$. 不妨设 $\gamma = \sum_i c_i \alpha_i$, $c_i \in \mathcal{Z}$. 于是,

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= \alpha(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= (\sum_i a_i \alpha_i \alpha_1, \ldots, \sum_i a_i \alpha_i \alpha_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= (\textstyle\sum_i a_i \sum_j b_{i1}^j \alpha_j, \ldots, \sum_i a_i \sum_j b_{in}^j \alpha_j) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= (\sum_j \alpha_j \sum_i a_i b_{i1}^j, \ldots, \sum_j \alpha_j \sum_i a_i b_{in}^j) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \begin{pmatrix} \sum_i a_i b_{i1}^1 & \cdots & \sum_i a_i b_{in}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_i a_i b_{i1}^n & \cdots & \sum_i a_i b_{in}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

令$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_i a_i b_{i1}^1 & \cdots & \sum_i a_i b_{in}^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum_i a_i b_{i1}^n & \cdots & \sum_i a_i b_{in}^n \end{pmatrix}$, 则 (α) 中的元素与 $\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n$ 中的元素相对应.

令 $c_1 = \cdots = c_n = 1$, 便可发现 $det(\mathbf{A}) = N(\alpha)$. 由 $\mathcal{D} \cong \mathcal{Z}^n, \mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n \cong (\alpha)$, 又 $\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n$ 为 $\mathcal{Z}^n$ 上的子群, 欲证 $\mathcal{D}/(\alpha) = N(\alpha)$, 只需证明 $|\mathcal{Z}^n/(\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n)| = det(\mathbf{A})$ 即可. 由线性代数的知识可知, $\mathbf{A}$ 可经列变换成对角线元素全为正整数的下三角阵 $\tilde{\mathbf{A}}$, 而列变换相当于右乘一初等阵. 从而 $\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n = \tilde{\mathbf{A}} \cdot \mathcal{Z}^n$, 于是便可令 $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}$.

不妨设 $\mathbf{A}$ 对角线上的数为 $d_1, \ldots, d_n$, $d_i \in \mathcal{N}$, 于是 $det(\mathbf{A}) = \prod_i d_i$, 接下来证明商群 $\mathcal{Z}^n/(\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n)$ 中共有 $\prod_i d_i$ 个元素. 下面用 $\overline{(c_1 \ldots c_n)}$ 表示 $(c_1 \ldots c_n)$ 在 $\mathcal{Z}^n/(\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n)$ 中的代表元.

首先可以证明 $\overline{(c_1 \ldots c_n)}$,$0 \le c_i < d_i$,$i = 1 \ldots n$ 为 $\mathcal{Z}^n/(\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n)$ 上不同的元素. 这是因为若 $\overline{(b_1 \ldots b_n)} = \overline{(c_1 \ldots c_n)}$,$0 \le b_i < d_i$,$0 \le c_i < d_i$,$i = 1 \ldots n$, 则存在 $(a_1 \ldots a_n) \in \mathcal{Z}^n$ 使

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - c_1 \\ \vdots \\ a_n - c_n \end{pmatrix}$$

由 $d_1 \cdot a_1 = b_1 - c_1$, 可得 $a_1 = 0$, 如此类推, 有 $a_1 = \cdots = a_n = 0$, 即 $b_i = c_i$, $i = 1, \ldots, n$.

另一方面, 对于任意 $(b_1 \ldots b_n) \in \mathcal{Z}^n$, 总存在 $(c_1 \ldots c_n)$,$0 \le c_i < d_i$,$i = 1 \ldots n$, 使 $\overline{(b_1 \ldots b_n)} = \overline{(c_1 \ldots c_n)}$. 即我们可以取到 $(a_1 \ldots a_n) \in \mathcal{Z}^n$ 使

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ * & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

符号常常比发明他们的数学家门更能推理。 —— F.Klein

由 $b_1 - a_1 \cdot d_1 = c_1$, 于是便可取 a_1 使 $0 \le c_1 < d_1$, 如此做下去，便可取到使条件满足的 $(a_1, \ldots, a_n)$.

从而 $|\mathcal{Z}^n/(\mathbf{A} \cdot \mathcal{Z}^n)| = \prod_i d_i = det(\mathbf{A})$, 即 $|\mathcal{D}/(\alpha)| = N(\alpha)$.

证毕.

本文的结论，其实仅是一般代数数论一个很基本的性质，但是一般书中所给的证明往往涉及比较多的概念，多较冗繁。在这里我们用已学过的线性代数知识，给出了一个比较容易理解的证明。

参考文献

[1] Kenneth Ireland & Michael Rosen, 《 *A Classical Introduction to Modern Number Theory* 》

你知道吗

一日，鬼谷子在 2–100 这 99 个数字中选了 2 个数字，然后把它们的和告诉了庞涓，把积告诉了孙膑。当然，庞涓不知道积是多少，孙膑不知道和是多少。

第二日，庞涓遇见孙膑。庞很傲慢地对孙说：“虽然我不知道这两个数是多少但是我肯定你也不知道。”孙膑立刻还击道：“本来我不知道的，但是现在我知道这两个数是多少了。”庞涓想了一会，说道：“现在我也知道这两个数是多少了。”

你想想看，这两个数是多少？

(呵呵，不是那么简单的！ ~)

群环 $R[G]$ 的中心 $C(R[G])$ 和理想 $I(R[G])$

0001 李辰旭

[引言] 文 [1] 的“环和域”一章中有这样一个定义：设 G 是乘法群， R 为环。我们定义集合

$$R[G] = \{\sum_{g \in G} r_g g : r_g \in R\}$$

并且对于每个元素，其中只有有限多个 $\mathrm{r}_g \neq 0$

同时在集合 $R[G]$ 上定义元素的加法和乘法运算如下：

$$\sum_{g \in G} r_g g + \sum_{g \in G} t_g g = \sum_{g \in G} (r_g + t_g) g$$

$$(\sum_{g \in G} r_g g)(\sum_{g \in G} t_g g) = \sum_{g \in G} S_g g$$

其中 $S_g = \sum\limits_{g'g''=g} r_{g'} r_{g''}$

容易知道上面定义的加法和乘法运算是集合 $R[G]$ 上的二元运算。$R[G]$ 符合环的代数结构，因此称为群在环上的 **群环** 。

本文中作者将给出群环中心 $C(R[G])$ 和理想 $I(R[G]$ 的表达式。

[约定于特殊符号]

对于通常的情形我们首先假定环 R 具有幺元素 1_R, 并且对于中心和理想为空的情形不予考虑，这样将给问题的讨论和叙述带来一些方便。

与此同时，约定 $[G]$ 表示群 G 中的元素 g 所在的共轭类。

对于任意 $x, y \in R[G]$, 设 $x = \sum\limits_{g \in G} a_g g, \qquad y = \sum\limits_{g \in G} b_g g,$

规定

$$x = y \Leftrightarrow a_g = b_g, \forall g \in G$$

并且规定

$\sum_{g \in S} 0_g g = 0_{R[G]}, \qquad$ 其中 S 为 G 的任意子集。

1. 求解群环的中心 $C(R[G])$

[解] 设 $\sum\limits_{g\in G} r_g g \in C(R[G])$

由于群环 $R[G]$ 具有环的结构，其乘法对加法的分配律使得我们只需考虑与形如 $r_0 g_0$ 的元素可交换时的情形。

$$\forall g_0 \in G, \qquad r_0 \in R \qquad (\sum_{g\in G} r_g g) r_0 g_0 = r_0 g_0 (\sum_{g\in G} r_g g)$$

根据上述乘法的定义，

$$(\sum_{g\in G} r_g g) r_0 g_0 = \sum_{g\in G} r_{gg_0^{-1}} r_0 g$$

$$r_0 g_0 (\sum_{g\in G} r_g g) = \sum_{g\in G} r_0 r_{gg_0^{-1}} g$$

于是

$$\sum_{g\in G} r_0 r_{gg_0^{-1}} g = \sum_{g\in G} r_{gg_0^{-1}} r_0 g$$

故

$$r_{gg_0^{-1}} r_0 = r_0 r_{gg_0^{-1}}, \forall g \in G$$

记

$$a = gg_0^{-1}, \qquad g_0^{-1} g = g_0^{-1} a g_0$$

显然，当 g 跑遍 G 时， a 也跑遍 G，

这时 $\quad r_a r_0 = r_0 r_{g_0^{-1} a g_0}, \qquad \forall a, g_0 \in G$ 特别地，取 $g_0 = a$，

$$r_a r_0 = r_0 r_a, \qquad \forall r_0 \in G$$

即

$$r_a \in C(R), \qquad \forall a \in G$$

继而有

$$r_a r_0 = r_0 r_{g_0^{-1} a g_0} = r_{g_0^{-1} a g_0} r_0$$

即

$$(r_a - r_{g_0^{-1} a g_0}) r_0 = 0$$

特别地，取

$$r_0 = 1_R$$

此时

$$r_a - r_{g_0^{-1}ag_0} = 0$$

即成立着

$$r_a = r_{g_0^{-1}ag_0}, \qquad \forall a, g_0 \in G$$

因此得到

$$C(R[G]) = \{\sum_{g\in G} r_g g : r_g \in C[R], \forall g_1, g_2 \in G, g_2 \in G, g_1 \in [g_2] \Longrightarrow r_{g_1} = r_{g_2}\}$$

[**推论**] R[G] 是交换环的充分必要条件是 R 是交换环， G 是 Abel 群。

[**证明**] R[G] 是交换环当且仅当 $R[G] = C(R[G])$

首先， $R[G] = C(R[G])$, 即是交换环。

此外，对于一种具有特殊形式的元素

$$\sum_{g\in G} r_g g, \qquad \forall g_1 \neq g_2, r_{g_1} \neq r_{g_2}$$

同样有

$$\sum_{g\in G} r_g g \in C(R[G]), \qquad \forall g_1 \neq g_2, r_{g_1} \neq r_{g_2}$$

由上段的论证过程可以看出

$$r_a = r_{g_0^{-1}ag_0}, \qquad \forall a, g_0 \in G$$

故

$$a = g_0^{-1}ag_0, \qquad \forall a, g_0 \in G$$

即 G 是 Abel 群。

2. 求解群环的理想 $I(R[G])$

[**解**] 设 $I(R[G])$ 是群环 R[G] 的理想。

首先， $\forall x, y \in I(R[G])$

令 $x = \sum_{g\in G} r_g g, \qquad y = \sum_{g\in G} t_g g$

则 $x \pm y = \sum_{g\in G} (r_g \pm t_g) g \in I(R[G])$

即对于任意的 g 在 $I(R[G])$ 中 g 的系数元素集合 P_g 满足加法运算的封闭性。

此外，对于 $\forall r_0 \in R, \qquad \forall g_0 \in G$ 应有

如果不去注意刻画课程特征的那些抽象概念，那这门课就变成了数学以外的课程了。

—— C.V.Newsom

$$x(r_0g_0)=\sum_{g\in G}r_{gg_0^{-1}}r_0g\in I(R[G])\qquad(\star)$$
$$(\mathrm{r}_0g_0)x=\sum_{g\in G}r_0r_{gg_0^{-1}}g\in I(R[G])\qquad(\star\star)$$

于是，特别的取 g_0 为 G 的单位 e

那么 $\sum_{g\in G}r_gr_0g,\quad \sum_{g\in G}r_0r_gg\in I(R[G])$

故 $r_gr_0,r_0r_g\in P_g,\quad \forall r_0\in R$

可见，对于任意的 g，P_g 是 R 的理想。

接下来我们证明 $P_g=P_{g'},\quad \forall g\neq g'$

特别的在 $(\star),(\star\star)$ 中取 $r_0=1_R$, 有 $\sum_{g\in G}r_{gg_0^{-1}}g,\sum_{g\in G}r_{g_0^{-1}g}r_0g\in I(R[G])$

因此

$$r_{gg_0^{-1}},r_{g_0^{-1}g}\in P_g,\forall g_0\in G$$

由 x,y 的任意性，可知 $P_g=P_{g'},\quad \forall g\neq g'$

因此我们有

$$I(R[G])\subseteq\{I_Rg_1+I_Rg_2+\ldots+I_Rg_m:I_R\lhd R,\forall m\in N\}$$

接下来我们证明

$$I(R[G])\supseteq\{I_Rg_1+I_Rg_2+\ldots+I_Rg_m:I_R\lhd R,\forall m\in N\}$$

首先，记 $\mathrm{X}=\{I_Rg_1+I_Rg_2+\ldots+I_Rg_m:I_R\lhd R,\forall m\in N\}$

$\forall x,y\in M$ ，记 $x=\sum_{g\in G}r_gg,y=\sum_{g\in G}t_gg$, 有

$$x\pm y=x=\sum_{g\in G}(r_g\pm t_g)g\in \mathrm{X}$$

另一方面，我们证明对于任意 $Z\in R[G]$ 有 $xz,zx\in I(R[G])$, 由于 R[G] 有对乘法和加法的分配律，因此我们只要证明对于 $\forall r_0\in R,g_0\in G$ 有

$$x(r_0g_0)=\sum_{g\in G}r_{gg_0^{-1}}r_0g\in \mathrm{X},\qquad (r_0g_0)x=\sum_{g\in G}r_0r_{gg_0^{-1}}g\in \mathrm{X}$$

而由于 $I_R\lhd R[G]$, 故上式是成立的。综合上述证明得到：

$$I(R[G])=\{I_Rg_1+I_Rg_2+\ldots+I_Rg_m:I_R\lhd R,\forall m\in N\}$$

参考文献

[1] 冯克勤，李尚志，查建国，章璞，《近世代数引论》, 中国科技大学出版社，2002 年，合肥

≃≃

The universe is an enormous direct product of representations of symmetry groups.

—— *Hermann Weyl*

An Extension of Carlitz's Reciprocal Formulas and Application

0001 Jiahong Chen

§1 Introduction

In this paper we give an extension of Carlitz's formulas and show applications of our theorem.

First we define some symbols as follows:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k} \right\}_{p,q} = \frac{(p,q)_n}{(p,q)_k(p,q)_{n-k}}; \qquad (p,q)_n = \prod_{i=1}^{n}(1-p^iq^i), \qquad (pq \neq 1)$$

where $0 \leq k \leq n$ and $(p,q)_0 = 1$.For $k > n$ we may define$\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$.

Let $p = 1$,then $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left[{n \atop k} \right] = \left[{n \atop k} \right]_q = \frac{(q)_n}{(q)_k(q)_{n-k}}$, where $(q)_n = \prod_{i=1}^{n}(1-q^i)$

$\left[{n \atop k} \right]$ is called Gauss q — Coefficients

Denote $\Omega(x,n,p,q) = \prod_{i=1}^{n}(a_ip^x + b_iq^{-x}) \neq 0$, where $a_i \equiv a_i(p,q), b_i \equiv b_i(p,q)$ are any two sequences of complex valued functions of p and q . $\Omega(x,0,p,q) = 1, p, q \in \mathcal{C}$

We don't recount the meanings of the symbols in the following paragraph.

Now let's show the main theorem of this paper.

Theorem 1.1 *Assume the notation of above we yield the following pair of reciprocal relations:*

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} p^{\binom{n-k}{2}} \Omega(k,n,p,q)g(k) \tag{1.1}$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} q^{\binom{n-k}{2}} \frac{a_{k+1}p^k + b_{k+1}q^{-k}}{\Omega(n,k+1,p,q)} f(k) \tag{1.2}$$

Let $p = 1$ in *Theorem1.1*.Then we have the Carlitz's reciprocal relations.

§2 Proof of Theorem1.1

Lemma 2.1

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k = \prod_{i=0}^{n-1}(p^i - q^{n-i-1}x), \quad (n=1,2,\cdots) \tag{2.1}$$

Proof: Notice that $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = p^k q^k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}$.We are able to complete the proof by using mathematical induction.Yet we can give an elegant proof as follows:

Suppose $\mathcal{K}_n(x) = \prod\limits_{i=0}^{n}(p^i - q^{n-i-1}x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$

Then $(p^{n-1} - x)\mathcal{K}_n(pqx) = p^{n-1}(1 - pq^n x)\mathcal{K}_n(x)$

Inserting the power series and equating the coefficient of x^k,we obtain

$p^{n-1}(1-p^k q^k)c_k = (p^n q^n - p^{k-1}q^{k-1})c_{k-1}$ or $c_k = -\frac{q^{k-1}(1-(pq)^{n-k+1})}{p^{n-k}(1-p^k q^k)}c_{k-1}$,

for $1 \le k \le n$ and $c_0 = p^{\frac{1}{2}n(n-1)}$.Hence we have proved the identity (2.1).

Now it suffices to show that (1.2) implies (1.1).Consider the sum

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} p^{\binom{n-k}{2}} \Omega(k,n,p,q) g(k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \left\{ {n \atop k} \right\} p^{\binom{n-k}{2}} \Omega(k,n,p,q) \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \left\{ {k \atop j} \right\} q^{\binom{n-k}{2}} \frac{a_{j+1}p^j + b_{j+1}q^{-j}}{\Omega(k,j+1,p,q)} f(j)$$

Since $\left\{ {n \atop k} \right\}\left\{ {k \atop j} \right\} = \left\{ {n \atop j} \right\}\left\{ {n-j \atop k-j} \right\}$, we have the double sum is equal to

$$\sum_{j=0}^{n} \left\{ {n \atop j} \right\} (a_{j+1}p^j + b_{j+1}q^{-j}) f(j) \sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k p^{\binom{n-j-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n-j \atop k} \right\} \frac{\Omega(k+j,n,p,q)}{\Omega(k+j,j+1,p,q)}$$

Hence we must show that

$$\left\{ {n \atop j} \right\} (a_{j+1}p^j + b_{j+1}q^{-j}) \sum_{k=1}^{n-j}(-1)^k p^{\binom{n-j-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n-j \atop k} \right\} \frac{\Omega(k+j,n,p,q)}{\Omega(k+j,j+1,p,q)} = \delta_{n,j}$$

$$\text{or} \quad (a_{j+1}p^j + b_{j+1}q^{-j}) \sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{\Omega(k+j,n+j,p,q)}{\Omega(k+j,j+1,p,q)} = \delta_{n,0} \tag{2.2}$$

For $n=0$,the left number of (2.2) is $(a_{j+1}p^j + b_{j+1}q^{-j})\frac{\Omega(k+j,j,p,q)}{\Omega(k+j,j+1,p,q)} = 1$

For $n > 0$,we consider the sum

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n \atop k} \right\} \prod_{i=j+2}^{n+j}(a_i p^{k+j} + b_i q^{-k-j}), \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{2.3}$$

Clearly the product $\prod\limits_{i=j+2}^{n+j}(a_i p^{k+j} + b_i q^{-k-j}) = \sum\limits_{t=0}^{n-1} c_t (p^t q^{-n+1+t})^{k+j}$
where c_t doesn't depend on k .

Thus (2.3) is equal to $\sum\limits_{t=0}^{n-1} c_t (p^t q^{-n+1+t})^j \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n \atop k} \right\} (p^t q^{-n+1+t})^k$

Notice that

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k p^{\binom{n-k}{2}} q^{\binom{k}{2}} \left\{ {n \atop k} \right\} (p^t q^{-n+1+t})^k = \prod_{i=0}^{n-1}(p^i - p^t q^{t-i}) \qquad \text{(by } \textit{Lemma 2.1})$$

But $\prod\limits_{i=0}^{n-1}(p^i - p^t q^{t-i}) \equiv 0, \quad t = 0, 1, \cdots, n-1$. This proves (2.2) and complete the proof of *Theorem1.1*

§3 Inverse chain

If we denote (1.1) and (1.2) as follows:

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} g(k) \tag{3.1}$$

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k} f(k) \tag{3.2}$$

Assume $\vec{f} = (f(1), f(2), \cdots, f(n), \cdots)$; $\vec{g} = (g(1), g(2), \cdots, g(n), \cdots)$
Then we obtain the matrix form of *Theorem1.1*

$$\vec{f} = \mathbb{A}\vec{g} \tag{3.3}$$

$$\vec{g} = \mathbb{B}\vec{f} \tag{3.4}$$

where $\mathbb{A} = (\alpha_{n,k})$, $\mathbb{B} = (\beta_{n,k})$ are all infinite matrixes and $\mathbb{AB} = \mathbb{BA} = \mathbb{I}$ (infinite identity matrix).

Notice that $\mathbb{A}^T\mathbb{B}^T = \mathbb{B}^T\mathbb{A}^T = (\mathbb{AB})^T = \mathbb{I}$.Then we have another form of *Theorem1.1*:

$$\vec{f'} = \mathbb{A}^T \vec{g'} \tag{3.5}$$

$$\vec{g'} = \mathbb{B}^T \vec{f'} \tag{3.6}$$

(3.5) and (3.6) is equal to

$$\overline{f}(n)=\sum_{k=n}(-1)^k p^{\binom{k-n}{2}}\left\{ {k \atop n} \right\}\Omega(n,k,p,q)g(k) \tag{3.7}$$

$$\overline{g}(n)=\sum_{k=n}(-1)^k q^{\binom{k-n}{2}}\left\{ {k \atop n} \right\}\frac{a_{n+1}p^n+b_{n+1}q^{-n}}{\Omega(k,n+1,p,q)}f(k) \tag{3.8}$$

The upper indicator of the sum is omitted because it may be chosen at pleasure ,finite or infinite .

By using the method which appears in [4],we have the following commutative diagram ,where $\vec{f}\xrightarrow{\mathrm{B}}\vec{g}$ means that $\vec{g}=\mathbb{B}\vec{f}$

$$\begin{tikzcd}
\vec{f} \arrow[r, "\mathbb{B}=\mathbb{A}^{-1}"] \arrow[d, "\mathbb{D}"'] & \vec{g} \arrow[r, "\mathbb{A}"] \arrow[d, "\mathbb{C}"] & \vec{f} \arrow[d, "\mathbb{D}"] \\
\vec{f'} \arrow[r, "\mathbb{B}=\mathbb{A}^{-1}"] & \vec{g'} \arrow[r, "\mathbb{A}"] & \vec{f'}
\end{tikzcd}$$

We call the matrix A and D is an inverse chain in the above diagram and write $(\mathbb{A},\mathbb{D})$ for it.Obviously inverse chain $(\mathbb{A},\mathbb{D})$ exists if and only if

$$\mathbb{C}=\mathbb{A}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{A}=(\gamma_{n,k}) \tag{3.9}$$

Assume $f^{'}(n)=(\mathbb{D}\vec{f})_n=\dfrac{f(n)}{a_{n+1}p^n+b_{n+1}q^{-n}}$, $g^{'}(n)=(\mathbb{C}\vec{g})_n=\sum\limits_{k\le 0}\gamma_{n,k}g(n)$ where $f(n)$ and $g(n)$ appears in the *Theorem1.1.*That is to say

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{ {n \atop k} \right\}q^{\binom{n-k}{2}}\frac{a_{k+1}p^k+b_{k+1}q^{-k}}{\Omega(n,k+1,p,q)}f(k)$$

Then it holds $\quad g'(n)=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left\{ {n \atop k} \right\}q^{\binom{n-k}{2}}\dfrac{a_{k+1}p^k+b_{k+1}q^{-k}}{\Omega(n,k+1,p,q)}f'(k)$

Here we must show that (3.9) is satisfied.Thus we get $\gamma_{n,k}=\sum\limits_{j=k}^{n}\beta_{n,j}\sigma_j\alpha_{j,k}$, $(\gamma_{0,0}\equiv 1)$

Here D=diag$(\sigma_0,\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ *with* $\sigma_j=\dfrac{1}{a_{j+1}p^j+b_{j+1}q^{-j}}$

Then $\quad \gamma_{n,k}=\sum\limits_{j=k}^{n}(-1)^j\left\{ {n \atop j} \right\}q^{\binom{n-j}{2}}(-1)^k\left\{ {j \atop k} \right\}p^{\binom{j-k}{2}}\dfrac{\Omega(k,j,p,q)}{\Omega(n,j+1,p,q)}$

$$=\left\{ {n \atop k} \right\}\sum_{j=0}^{n-k}(-1)^k\left\{ {n-k \atop j} \right\}p^{\binom{j}{2}}q^{\binom{n-k-j}{2}}\frac{\Omega(k,j+k,p,q)}{\Omega(n,j+k+1,p,q)}$$

A great truth is a truth whose opposite is also a great truth. —— *Niels Bohr*

We have no method to calculate the above sum in general case.In fact this sum also include the main *Theorem2.2* in [4] as a special case .But we could calculate some special cases .For example,if we let $a_k = b_k = 1$,then we obtain

$$\gamma_{n,k} = \frac{t^k}{p^n + q^{-n}} \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \left\{ {n-k \atop j} \right\} p^{\binom{j}{2}} q^{\binom{n-k-j}{2}} t^j, \quad \text{where} \quad t = \frac{p^k + q^{-k}}{p^n + q^{-n}}.$$

By using *Lemma2.1*,we have $\gamma_{n,k} = \dfrac{t^k}{p^n + q^{-n}} \prod_{i=1}^{n-k-1} (q^i - p^{n-k-1-i}x),\ (0 \le k \le n-1)$
We denote $\gamma_{n,n} \equiv 1 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$ Notice that

$$\mathbb{C} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{D}\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{A}\mathbb{C} = \mathbb{D}\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}\mathbb{D}$$

We can have two interesting identities.But the identities seem a bit long and are omitted.

§4 Remarks

Remark 1 *If we have proved one direction of a pair of reciprocal relations ,then the other direction is established at once.It often happens that the proof in one direction is more simple or significant than in the other.*
Remark 2 *For example ,if we show that (1.1) implies (1.2),we have to prove*

$$\sum_{k=j} (-1)^{k-j} \left\{ {n-j \atop k-j} \right\} p^{\binom{k-j}{2}} q^{\binom{n-k}{2}} (a_{k+1}p^k + b_{k+1}q^{-k}) \frac{\Omega(j,k,p,q)}{\Omega(n,k+1,p,q)} = \delta_{n,j} \qquad (4.1)$$

(1.1) may be proved by a tricking splitting of the factor

$$a_{k+1}p^k + b_{k+1}q^{-k} = p^{k-j}\frac{1-(pq)^{n-k}}{1-(pq)^{n-j}}(a_{k+1}p^j + b_{k+1}q^{-j}) + q^{n-k}\frac{1-(pq)^{k-j}}{1-(pq)^{n-j}}(a_{k+1}p^n - b_{k+1}q^{-n})$$

Remark 3 *In fact Lemma2.1 is an analogue of binomial theorem .To give analogues of these identities ,which lead us to discover the orthogonal polynomials is an interesting and significant thing.At last se can't help saying that [1] is a basic but clear and readable book for the beginners.It is well worth reading.*

References:

[**1**] Shi Jihuai,*Combinatorial Identities*, [M]. USTC Publishing House ,2001.2

[**2**] RIORDAN J.,*Combinatorial Identities*, [M]. New York ,1968

[**3**] Carlitz.L,*Some inverse relations(p.893 − −901)*, [J]. Duck Math J ,40(1973)

[**4**] XIA Xin-rong and WANG Tian-ming ,*Inverse Chain of Inverse Relation*, [J].J. Math.Res &Exposition .2001,21(1):7–16

[**5**] Hardy.G.H &Wright,E.M,*An Introduction to the Number Theory*, [M]. Oxford University Press ,London and New York,1960

数学家本质上是热心人。没有热心就没有数学。 —— *Novalis*

有关 k 维曲面的正交曲线网的一点讨论

9901 赖荣杰

在古典微分几何中，我们曾有这样一个有趣的结果：在任何光滑的 2 维曲面上总可以取到正交参数曲线网。自然有这样的一个问题，对于 R^n 中的 k 维曲面，是否也存在着这样的正交参数曲线网。下面我们就这一问题给出正交参数曲线网存在的一充要条件。

为了叙述的方便，在此仅考虑一个曲面片，并且假定曲面片是足够的光滑。我们先来叙述一个引理：

引理 1 形如：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x_1} = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \qquad \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

其中 $f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (i = 1, \cdots, n)$ 是连续可微的函数的偏微分方程组有解的充要条件是满足可积条件：

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \quad i, j = 1, \cdots, n$$

有关这个引理的证明，在此不加以叙述，可以参看书 [2] 。

下面我们就来给出主要的定理

定理 1 设 M 为 R^n 中的 k 维曲面片，记为 $r(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，在 M 上给出了 K 个处处线性无关的光滑向量场 $\{\vec{\alpha}_1(u_1, u_2, \cdots, u_n), \vec{\alpha}_2(u_1, u_2, \cdots, u_n), \cdots, \vec{\alpha}_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)\}$，当然有可逆矩阵 $A = (a_{ij}(u_1, u_2, \cdots, u_n))_{k\times k}$，使得

$$\{\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \cdots, \vec{\alpha}_k\} = \{r_{u_1}, r_{u_2}, \cdots, r_{u_k}\} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

则可以选到新的参数 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_k)$，使得在新的参数下，$\bar{u}_i$ 曲线与向量场 $\vec{\alpha}_i$ 平行 $(i = 1, \cdots, k)$，当且仅当存在矩阵 $\Theta = diag\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k\}$，$\theta_i (i = 1, \cdots, k)$

Try a hard problem. You may not solve it, but you will prove something else.
—— John.E.Littlewood

为 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 的函数，且 $det(\Theta)$ 处处不为零，使得

$$\frac{\partial(A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1}_{t列} = \frac{\partial(A\Theta)}{\partial u_t} \cdot (A\Theta)^{-1}_{s列} \qquad \cdots\cdots(1).$$

其中 $\frac{\partial(A\Theta)}{\partial u_s}$ 表示对 $(A\Theta)$ 的每一个与元素求偏导，$(A\Theta)^{-1}_{t列}$ 表示 $(A\Theta)^{-1}$ 的第 t 列

。

[证明]:(必要性) 若可以选到新的参数 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_k)$, 使得在新的参数下， $\bar{u}_i$ 曲线与向量场 $\vec{\alpha}_i$ 平行 $(i = 1, \cdots, k)$ ，即 $\{r_{\bar{u}_1}, r_{\bar{u}_2}, \cdots, r_{\bar{u}_k}\} = \{\theta_1\vec{\alpha}_1, \theta_2\vec{\alpha}_2, \cdots, \theta_k\vec{\alpha}_k\}$

对于新的参数 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_k)$ ，

有

$$r_{\bar{u}_i} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial r}{\partial u_j}\frac{\partial u_j}{\partial \bar{u}_i} = (r_{u_1}, r_{u_2}, \cdots, r_{u_k}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_1} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, \cdots, k)$$

于是，有矩阵 $\Theta = diag\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k\}$ ，且 $det(\Theta)$ 处处不为零，使得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_k} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_2} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_k \end{pmatrix}$$

成立。由于 A 是可逆矩阵，故有

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_k} \\ \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial u_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_1} & \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_k} \end{pmatrix} = (A\Theta)^{-1}$$

记 $(A\Theta)^{-1} = (b_{ij})_{k\times k}$

于是如下的方程组列：

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_1} = b_{11} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial u_k} = b_{1k} \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial u_1} = b_{l1} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial u_k} = b_{lk} \end{cases} \quad \cdots \quad \begin{cases} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_1} = b_{k1} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial u_k} = b_{kk} \end{cases} \quad \cdots(\star)$$

$l = 1, \cdots, k$ 有解。

每个人都知道曲线是什么，但是他如果学习了很多数学，反而会被无数的反例情况搞糊涂。

—— *F.Klein*

对于第 l 个方程组，由引理 1 ，满足可积条件：

$$\frac{\partial b_{ls}}{\partial u_t} = \frac{\partial b_{lt}}{\partial u_s}, \quad s,t = 1, \cdots, k \qquad \cdots\cdots (2)$$

由 $(A\Theta) \cdot (A\Theta)^{-1} = I_k$

两边对 u_s 求偏导得到：

$$\frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1} + (A\Theta) \cdot \frac{\partial (A\Theta)^{-1}}{\partial u_s} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1} = -(A\Theta) \cdot \frac{\partial (A\Theta)^{-1}}{\partial u_s}$$

$$\Rightarrow \cdot \frac{\partial (A\Theta)^{-1}}{\partial u_s} = -(A\Theta)^{-1} \cdot \frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1}, \qquad s = 1, \cdots, k$$

于是，得到：

$$\frac{\partial b_{lt}}{\partial u_s} = (A\Theta)^{-1}_{l\text{行}} \cdot \frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1}_{t\text{列}}, \quad l,s,t = 1, \cdots, k$$

对于固定的 $l(l = 1, \cdots, k)$, 代入 (2) 式得到：

$$(A\Theta)^{-1}_{l\text{行}} \cdot \frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1}_{t\text{列}} = (A\Theta)^{-1}_{l\text{行}} \cdot \frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_t} \cdot (A\Theta)^{-1}_{s\text{列}}$$

进一步有，

$$\frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1}_{t\text{列}} = \frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_t} \cdot (A\Theta)^{-1}_{s\text{列}} \quad .$$

(充分性) 若对于矩阵 A ，存在矩阵 $\Theta = diag\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k\}$ ，且 $det(\Theta)$ 处处不为零，使得

$$\frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_s} \cdot (A\Theta)^{-1}_{t\text{列}} = \frac{\partial (A\Theta)}{\partial u_t} \cdot (A\Theta)^{-1}_{s\text{列}}$$

成立，

由必要性的证明可以看出，该条件保证了

$$\frac{\partial b_{ls}}{\partial u_t} = \frac{\partial b_{lt}}{\partial u_s}, \quad l,s,t = 1, \cdots, k$$

成立，由引理 1 ，知方程组列： $(\star)$ 均有解，

也就是说可以选到新的参数 $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_k)$, 使得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial \bar{u}_k} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial \bar{u}_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_1} & \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_2} & \cdots & \frac{\partial u_k}{\partial \bar{u}_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_k \end{pmatrix}$$

成立，于是得到

$$\{r_{\bar u_1},r_{\bar u_2},\cdots,r_{\bar u_k}\}=\{r_{u_1},r_{u_2},\cdots,r_{u_k}\}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\theta_1&0&\cdots&0\\0&\theta_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&\theta_k\end{pmatrix}$$

$$=\{\theta_1\vec\alpha_1,\theta_2\vec\alpha_2,\cdots,\theta_k\vec\alpha_k\}$$

这便说明在新的参数下， $\bar u_i$ 曲线与向量场 $\vec\alpha_i$ 平行 $(i=1,\cdots,k)$ ，
定理证毕。

于是，由定理 1 立刻可以得到：

定理 2 设 M 为 R^n 中的 k 维曲面片，记为 $r(u_1,u_2,\cdots,u_k)$, 若 M 上有 K 个处处正交的光滑向量场 $\{\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\cdots,\vec\alpha_k\}$,
记 $\{\vec\alpha_1,\vec\alpha_2,\cdots,\vec\alpha_k\}=\{r_{u_1},r_{u_2},\cdots,r_{u_k}\}A,\quad A=(a_{ij})_{k\times k}$,
则正交曲线网存在的充分必要条件是存在可逆矩阵 $\Theta=diag\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k\}$ ，使得

$$\frac{\partial(A\Theta)}{\partial u_s}\cdot(A\Theta)^{-1}_{t列}=\frac{\partial(A\Theta)}{\partial u_t}\cdot(A\Theta)^{-1}_{s列},\qquad s,t=1,\cdots,k$$

成立。

特别的, 我们来看一看 R^3 中的 2 维曲面片的情况, 显然, 正交向量场 $\{\vec\alpha_1,\vec\alpha_2\}$ 是存在的。记其转换矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$， 则 $A^{-1}=\frac{1}{Det(A)}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$

现在我们只需要看是否存在 $\Theta=diag(\theta_1,\theta_2)$, 使得 $A\Theta$ 满足 (1); 又由常微分方程理论知道，必分别存在非 0 的积分因子 θ_1,θ_2 使得有下式成立：

$$\theta_2(a_{22}du_1-a_{12}du_2)=d\bar u_1$$

$$\theta_1(-a_{21}du_1+a_{11}du_2)=d\bar u_2$$

于是立即可知 (1) 式是满足的。这便说明， R^3 中的 2 维正交曲线网是存在的。

一个要紧的问题 想知道 (1) 式的几何解释，比如对于空间弯曲程度的要求等。

参考文献

[1] 苏步青，胡和生等， 《微分几何》, 高教出版社出版社， 1995 年 4 月
[2] E. 卡姆克， 《一阶偏微分方程手册》， 科学技术出版社， 1983 年 6 月

学习任何数学主体的第一步是发展直觉。 —— C.B.Allendoerfer

Some Skills in Math Study

Digest

Active Study vs. Passive Study

Be **actively** involved in managing the learning process, the mathematics and your study time:

- Take responsibility for studying, recognizing what you do and don't know, and knowing how to get your Instructor to help you with what you don't know.
- Attend class every day and take complete notes. Instructors formulate test questions based on material and examples covered in class as well as on those in the text.
- Be an active participant in the classroom. Get ahead in the book; try to work some of the problems before they are covered in class. Anticipate what the Instructor's next step will be.
- Ask questions in class! There are usually other students wanting to know the answers to the same questions you have.
- Go to office hours and ask questions. The assistant instructor will be pleased to see that you are interested, and you will be actively helping yourself.

Studying Math is Different from Studying Other Subjects

- Math is learned by doing problems. Do the homework. The problems help you learn the formulas and techniques you do need to know, as well as improve your problem-solving prowess.
- A word of warning: Each class builds on the previous ones, all semester long. You must keep up with the Instructor: attend class, read the text and do homework every day. Falling a day behind puts you at a disadvantage. Falling a week behind puts you in deep trouble.
- A word of encouragement: Each class builds on the previous ones, all semester long. You're always reviewing previous material as you do new material. Many of the ideas hang together. Identifying and learning the key concepts means you don't have to memorize as much.

College Math is Different from High School Math

A College math class meets less often and covers material at about twice the pace that a High School course does. You are expected to absorb new material much more quickly. Tests are probably spaced farther apart and so cover more material than before. The Instructor may not even check your homework.

The object of mathematics is the honor of the human spirit. —— *Carl Jacobi*

- Take responsibility for keeping up with the homework. Make sure you find out how to do it.
- You probably need to spend more time studying per week - you do more of the learning outside of class than in High School.
- Tests may seem harder just because they cover more material.

Tips on Problem Solving

- Apply Pólya's four-step process:
  1. The first and most important step in solving a problem is to **understand the problem**, that is, identify exactly which quantity the problem is asking you to find or solve for (make sure you read the whole problem).
  2. Next you need to **devise a plan**, that is, identify which skills and techniques you have learned can be applied to solve the problem at hand.
  3. **Carry out the plan.**
  4. **Look back:** Does the answer you found seem reasonable? Also review the problem and method of solution so that you will be able to more easily recognize and solve a similar problem.
- Some problem-solving strategies: use one or more variables, complete a table, consider a special case, look for a pattern, guess and test, draw a picture or diagram, make a list, solve a simpler related problem, use reasoning, work backward, solve an equation, look for a formula, use coordinates.

Everyday Study is a Big Part of Test Preparation

Good study habits throughout the semester make it easier to study for tests.

- **Do** the homework when it is assigned. You cannot hope to cram 3 or 4 weeks worth of learning into a couple of days of study.
- On tests you have to solve problems; homework problems are the only way to get practice. As you do homework, make lists of formulas and techniques to use later when you study for tests.
- Ask your Instructor questions as they arise; don't wait until the day or two before a test. The questions you ask right before a test should be to clear up minor details.

Asking Questions

Don't be afraid to ask questions. **Any** question is better than no question at all (at least your Instructor/tutor will know you are confused). But a **good question** will allow your helper to quickly identify exactly what you don't understand.

- Not too helpful comment: "I don't understand this section." The best you can expect in reply to such a remark is a brief review of the section, and this will likely overlook the particular thing(s) which you don't understand.
- Good comment: "I don't understand why f(x + h) doesn't equal f(x) + f(h)." This is a very specific remark that will get a very specific response and hopefully clear up your difficulty.

- Good question: "How can you tell the difference between the equation of a circle and the equation of a line?"
- Right after you get help with a problem, work another similar problem by yourself.

You Control the Help You Get

Helpers should be **coaches**, not crutches. They should encourage you, give you hints as you need them, and sometimes show you how to do problems. But they should not, nor be expected to, actually do the work you need to do. They are there to help you figure out how to learn math for **yourself.**

- When you go to office hours, your study group or a tutor, have a specific list of questions prepared in advance. You should run the session as much as possible.
- Do not allow yourself to become dependent on a tutor. The tutor cannot take the exams for you. You must take care to be the one in control of tutoring sessions.
- You must recognize that sometimes you do need some coaching to help you through, and it is up to you to seek out that coaching.

系讯

我校 5 位校友应邀在第 24 届国际数学家大会上作 45 分钟学术报告

第 24 届国际数学家大会于 2002 年 8 月 20 – 28 日在北京举行，这是 100 多年来首次在发展中国家主办。国际数学家大会一直被称为“数学奥林匹克”盛会，能在大会上作 1 小时大会报告和 45 分钟邀请报告，每一位被邀请的数学家都将此视为极高的荣誉而备受珍视。在以往的历届国际数学家大会上，我国仅有华罗庚、吴文俊、陈景润、冯康、张恭庆、马志明等几个人接到过这样的邀请。在本次国际数学家大会上，共有 22 位华人学者应邀作 45 分钟报告，其中有我校 5 位校友，他们分别是：

严加安（ 591 ），中科院院士，中科院数学与系统科学研究院研究员；
李岩岩（ 771 ），美国 Rutgers 大学数学系教授；
鄂维南（ 781 ），美国普林斯顿大学数学系教授；
陈秀雄（ 821 ），美国普林斯顿大学、威斯康星大学教授；
葛利民（ 87 研），中科院数学与系统科学研究院研究员。

We arrive at truth, not by reason only, but also by the heart. —— *Blaise Pascal*

做题有感

0001 黄祥娣

一. 递归函数

问题 1 设 $\{f_k[x]\}$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 的一列函数，n 是一个固定的自然数，如果

$(1) f_0[x]=x, f_1[x]=x^2-2x+n,$

$(2) f_k[x]=(x-2k)f_{k-1}[x]+k(n-k+1)f_{k-2}[x], k\geq 2, (\forall x\in R)$

求证： $f_n[x]=(x-n)^{n+1}.$

证明: $(\star)$ 背景 此乃科大版《线性代数》 P_{117} 页一个行列式结果。原题为求：

$$\begin{vmatrix} x & 1 & & & & \\ -n & x-2 & 2 & & & \\ & -(n-1) & x-4 & 3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -2 & x-2n+2 & n \\ & & & & -1 & x-2n \end{vmatrix}$$

我将其转化为递归数列而得之。由于递归数列有十分烦琐的表达式，故一直未解决，后来求教于史济怀老师，才得此妙解！

$(\star\star)$ 解答如下：

注意 n 一经确定，数列 $\{f_k[x]\}$ 便唯一确定。把 $f_k[x]$ 看成 x 的多项式，欲证 $f_n[x]=(x-n)^{n+1}$ ，只要证： $f_n^{(l)}[x]|_{x=n}=0, (0\leq l\leq n)$ 即可！

(1) 首先用归纳法证明： $f_k[n]=n(n-1)\cdots(n-k).$

(a) $k=0, f_0[n]=n;$

$k=1, f_1[n]=n(n-1).$

(b) 设 $f_{k-2}[n]=n(n-1)\cdots(n-k+2),$

$$f_{k-1}[n]=n(n-1)\cdots(n-k+1),$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_k[n] &= (n-2k)n(n-1)\cdots(n-k+1)+k(n-k+1)n(n-1)...(n-k+2)\\ &= n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-2k+k)\\ &= n(n-1)\cdots(n-k)\end{aligned}$$

(2) 再用归纳法证明：

$$f_k^{(l)}[n]=(k+1)k(k-1)\cdots(k-l+2)(n-l)(n-l-1)\cdots(n-k)$$

(a) $l=0, f_k^{(l)}[n]=n(n-1)\cdots(n-k)$

(b) $f_k[x]=(x-2k)f_{k-1}[x]+k(n-k+1)f_{k-2}[x]$

两边求导 l 次，用 Leibniz 公式知

$$\begin{aligned}f_k^{(l)}[x] &= [(x-2k)f_{k-1}[x]]^{(l)}+[k(n-k+1)f_{k-2}[x]]^{(l)}\\ &= \sum_{l=0}^{k}C_l^i(x-2k)^{(i)}f_{k-1}[x]^{(l-i)}+k(n-k+1)f_{k-2}[x]^{(l-i)}\\ &= (x-2k)f_{k-1}^{(l)}[x]+lf_{k-1}^{(l-1)}[x]+k(n-k+1)f_{k-2}^{(l)}[x]\end{aligned}$$

令 $x=n$,

$$f_k^{(l)}[n]=(n-2k)f_{k-1}^{(l)}[n]+lf_{k-1}^{(l-1)}[n]+k(n-k+1)f_{k-2}^{(l)}[n](*)$$

由上知， $f_k^{(l)}[n]$ 是唯一确定的！那么只要验证

$$f_k^{(l)}[n]=(k+1)k(k-1)\cdots(k-l+2)(n-l)(n-l-1)\cdots(n-k)$$

满足题设即可！

在 (*) 中，

$$\text{左边}=(k+1)k(k-1)\cdots(k-l+2)(n-l)(n-l-1)\cdots(n-k)$$

$$\begin{aligned}\text{右边}=&(n-2k)k(k-1)\cdots(k-l+1)(n-l)(n-l-1)\cdots(n-k+1)\\ &+lk(k-1)(k-2)\cdots(k-l+2)(n-l+1)(n-l)\cdots(n-k+1)\\ &+k(n-k+1)(k-1)\cdots(k-l)(n-l)(n-l-1)\cdots(n-k+2)\end{aligned}$$

两边同时除以

$$k(k-1)\cdots(k-l+2)(n-l)(n-l-1)\cdots(n-k+1)$$

The God that reigns in Olympus is Number Eternal. —— *Carl Jacobi*

则左边为

$$(k+1)(n-k) = nk - k^2 + n - k;$$

右边为

$$(n-2k)(k-l+1) + l(n-l+1) + (k-l+1)$$

$$= nk - nl + n - 2k^2 + 2kl - 2k + ln - l^2 + l + k^2 - kl - lk + l^2 + k - l$$
$$= nk - k^2 + n - k$$

从而证明了

$$f_k^{(l)} = (k+1)k(k-1)\cdots(k-l+2)(n-l)(n-l-1)\cdots(n-k)$$

在上式中令 k=n ，即有

$$f_n^{(l)}[n] = 0, (0 \le l \le n)$$

至此结论证毕！

二. 由一道数分题目想到的

问题 2 设 $P[x] \in R[x]$, 若对 $\forall x \in R$, 只要 $P[x] + P[x]' - KP[x]'' \ge 0$ 恒成立, 就一定有 $P[x] \ge 0$, 求 K 的最小值。

背景: 此题乃是我读大一上半学期的时候，常庚哲老师期中考试最后一道题的改编。原题如下：

问题 3 设 $P[x] \in R[x]$, 已知 $P[x] + P[x]' - P[x]'' \ge 0$ 对 $\forall x \in R$ 成立，求证：$P[x] \ge 0$ 。

原题之解甚容易，在此略过。而这次改动具有实质上的困难。经过探索，得解答如下：

(1) 首先证明：对 $P[x] \in R[x], \forall \lambda \in R$, 当 $P[x] + \lambda P[x]' \ge 0, \forall x \in R$ 恒成立时，就一定有 $P[x] \ge 0$ 。

这是由于 $P[x] + \lambda P[x]' \ge 0, \forall x \in R, P[x]$ 一定是偶数次多项式，从而 $P[x]$

一定可以在 $x = x_0 \in R$ 上取到最小值 $P[x_0]$，且 $P[x_0]' = 0$ 。从而 $P[x_0] + P[x_0]' \geq 0$,

故 $P[x_0] \geq 0$, 即 $P[x] \geq 0, \forall x \in R$

(2) 下证 $K \geq -\frac{1}{4}$ 时，结论成立。

当 $K \geq -\frac{1}{4}$ 时， $\exists \lambda \in R$, 使 $\lambda(1-\lambda) = -K$, 于是

$$P[x] + P[x]' + (-K)\,P[x]'' = (P[x] + P[x]') + (1-\lambda)(P[x]' + P[x]'')$$

$$Q \triangleq (P[x] + P[x]') \quad \Rightarrow \quad Q[x] + \lambda\, Q[x]' \geq 0, (\quad \forall x \in R)$$

从而由 (1) 知 $Q[x] \geq 0$, 再由 (1) 知 $P[x] \geq 0$. 证毕！

下面证明 $K < -\frac{1}{4}$ 时，结论不一定成立。举反例如下：

令 $P[x] = x^{2n} + x$,(x 待定),$-K = \dfrac{1}{4} + \delta(\delta > 0)$, 从而

$$P[x] + P[x]' + (-K)\,P[x]''$$
$$= \mathrm{x}^{2n} + x + 2nx^{2n-1} + 1 + \tfrac{1}{4}(2n(2n-1)x^{2n-2}) + \delta(2n(2n-1)x^{2n-2})$$
$$= \mathrm{x}^{2n-2}(x+n)^2 + (2n(2n-1)\delta - \frac{n}{2})x^{2n-2} + x + 1$$

由于 $\delta > 0$, 取 n(例如 $n > \dfrac{1+4\delta}{8\delta}$), 就有 $2n(2n-1)\delta - \dfrac{n}{2} > 1$,

故上式 $\geq x^{2n-2}(x+n)^2 + x^{2n-2} + x + 1 \quad \geq x^{2n-2}(x+n)^2 + x + 1$:

A) 当 $x < 1, 1 + x > 0, x^{2n-2} + x + 1 >^{2n-2} (x+n)^2 \geq 0$

B) 当 $x > 1, x^{2n-2} + x > 0, x^{2n-2} + x + 1 > 1 > 0$

即总有 $P[x] + P[x]' + (-K)\,P[x]'' \geq 0$ 成立。但 $P[x] = x^{2n} + x$ 并不对 $\forall x \in R$ 都有 $P[x] \geq 0$, 比如 $P[-\frac{1}{2}] = \frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{2} < 0$.

综上所述， $K_{min} = -\frac{1}{4}$ 至此，本题全部解决！

矩阵同时对角化为 Hermite 标准形的一个等价条件

0001　李辰旭

命题 1　设矩阵 $A, B \in F^{m\times n}$, $rank(A+B) = rankA + rankB$ 成立的充要条件是存在 F 上的 m 阶与 n 阶可逆方阵 P 与 Q，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

其中 $r = rankA, s = rankB$, 并且 $r + s \leq min\{m, n\}$.

以上问题给出一个关于矩阵秩的不等式 $rank(A+B) \leq rankA + rankB$ 的等号成立的一个充要条件，同时也给出两个矩阵 A, B 同时对角化为 Hermite 标准形的一个等价条件。文 [1] 中已经提出了这个、一有趣的结论，并且文 [2] 中给出了一个用空间的线性代数的观点的证明。本文将给出的是一个单纯依靠矩阵方法和矩阵运算技巧的证明；而后对这一命题作出一个直接的推论，并提出一个问题。

我们先来看几个引理：

引理 1　$n \times m$ 阶矩阵 A 为列满秩的充要条件是存在 m 阶可逆方阵 P，使得

$$AP = \begin{pmatrix} I_n & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{0}$ 是 $n \times (m-n)$ 阶零矩阵.

引理 2　$m \times n$ 阶矩阵 A 为行满秩的充要条件是存在 m 阶可逆方阵 Q，使得

$$QA = \begin{pmatrix} 0 \\ I_n \end{pmatrix}$$

其中 $\mathbf{0}$ 是 $(m-n) \times n$ 阶零矩阵.

类似于文 [1] 中 170 页习题 10，更一般地，我们有

引理 3　设 $m \times n$ 阶矩阵 A 中任取 s 个行构成矩阵 B，则 $s \times n$ 阶矩阵 B，满足

$$rankB \geq rankA + s - m$$

证明：首先，$\exists P_1 \in F^{m\times n}$ 满足 $P_1A = \begin{pmatrix} B \\ X \end{pmatrix}$

进一步，显然存在可逆方阵 P_2, 使 $P_2P_1A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{rankB} & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ X \end{pmatrix}$

于是 $rankA = rankP_2P_1A \le rankB + m - s$

从而 $rankB \ge rankA + s - m$

同样地，可以得到

引理 4 设 $m \times n$ 阶矩阵 A 中任取 s 个列构成矩阵 B，则 $m \times s$ 阶矩阵 B，满足

$$rankB \ge rankA + s - m$$

下面我们开始证明主要的命题，而其中的充分性证明甚易，只要证明必要性.

命题的证明： 首先存在可逆方阵 $P_1 \in F^{m\times m}, Q_1 \in F^{n\times n}$

$$\text{使得} \quad P_1A = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}, BQ_1 = \begin{pmatrix} 0 & Y \end{pmatrix}$$

这里 $X \in F^{r\times n}, Q_1 \in F^{m\times s}$ （这相当于对 A, B 分别做行和列的初等变换）

由于 $rank(A+B) = rankA + rankB$，所以 $r + s = min\{m, n\}$,

于是

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad P_1BQ_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_{13} \\ 0 & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & Y_{33} \end{pmatrix}$$

其中，上述矩阵的分块方式保证了 $X_{11} \in F^{r\times r}, Y_{33} \in F^{s\times s}$

并且 P_1AQ_1 与 P_1BQ_1 的分块方式相同。

由于 $rank(A+B) = rankA + rankB$

且 $P_1AQ_1 + P_1BQ_1 = P_1(A+B)Q_1$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} + Y_{13} \\ 0 & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & Y_{33} \end{pmatrix}$$

根据引理 3， $s \ge rank \begin{pmatrix} Y_{23} \\ Y_{33} \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} 0 & \begin{pmatrix} Y_{23} \\ Y_{33} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \ge r + s + m - r - m = s$

The whole is more than the sum of its parts. —— *Aristotle*

因此有 $rank\begin{pmatrix} Y_{23} \\ Y_{33} \end{pmatrix} = s$ 可见 $\begin{pmatrix} Y_{23} \\ Y_{33} \end{pmatrix}$ 时列满秩的

由引理 2，存在可逆方阵 $N \in F^{(m-r)\times(m-r)}$ 使得 $N\begin{pmatrix} Y_{23} \\ Y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_s \end{pmatrix}$

同样的，由引理 4，$rank\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \end{pmatrix} = r$ 即 $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \end{pmatrix}$ 是行满秩的，

再由引理 1，存在可逆方阵 $M \in F^{(n-s)\times(n-s)}$ 使得 $\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix}$

这时，我们记 $Q_2 = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$， $P_2 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}$

则 $$P_1AQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \end{pmatrix} & X_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} & X_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

且此时，$$P_1BQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_{13} \\ 0 & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & Y_{33} \end{pmatrix}$$

于是，$$P_2P_1BQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & Y_{13} \\ 0 & 0 & Y_{23} \\ 0 & 0 & Y_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Y_{13} \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ I_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

且有 $$P_2P_1AQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} & X_{13} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

接着考虑对矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & Y_{13} \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ I_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ 实施行的初等变换：

存在可逆矩阵 $P_3 \in F^{m\times m}$，

满足 $$P_3P_2P_1BQ_1Q_2 = P_3\begin{pmatrix} 0 & Y_{13} \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ I_s \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 0 \\ I_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

同样道理，存在可逆矩阵 $Q_3 \in F^{n\times n}$，

满足 $$P_2P_1AQ_1Q_2Q_3 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

显然有 $$P_3P_2P_1AQ_1Q_2Q_3 = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}_3P_2P_1BQ_1Q_2Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}$$

记 $P = P_3P_2P_1$ ， $Q = Q_1Q_2Q_3$

则有

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad PBQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

并且 $r + s \leq min\{m,n\}$.

最后我们将命题作一些推广，得到

推论 1 设 $A_1, \ldots, A_t \in F^{m\times n}$ ，

若等式 $rank(A_1 + \cdots + A_t) = rankA_1 + \cdots + rankA_t$ $(\star)$ 成立，则对于任意两个矩阵 A_i, A_j 存在 m 阶方阵 P_{ij} 与 n 阶方阵 Q_{ij} 使得

$$P_{ij}AQ_{ij} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{ij}BQ_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

这里 $r_i = rankA_i, r_j = rankA_j, A2\text{”}GRr_i + r_j \leq min\{m,n\}$

[简证] 容易看出 $rank(A_1 + A_2 + \cdots + A_t) = rankA_1 + rank(A_2 + \cdots + A_t)$

进一步有 $rank(A_1 + A_2 + \cdots + A_t) = rankA_1 + rank(A_2) + \cdots + rank(A_t)$

$$rank(A_i + A_j) = rankA_i + rank(A_j) \qquad i, j = 1, \cdots, t$$

由此立即可得到推论。

[问题]: 在推论中，我们的证明了存在 m 阶方阵 P_{ij} 与 n 阶方阵 Q_{ij} 使得

$$P_{ij}AQ_{ij} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{ij}BQ_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{pmatrix}$$

提出的问题是：是否存在 m 阶方阵 P 与 n 阶方阵 Q 使得 $A_1, A2, \cdots, A_t$ 同时被对角化？

Mathematics is the art of giving the same name to different things. —— *Henri Poincaré*

一道函数证明题的推广及讨论

9901 殷彪

《蛙鸣》 49 期 30 页给出一道函数证明题，叙述如下：

$$f: N \to N, f(n+1) > f(f(n)); \text{证明}: f(n) = n$$

本文将致力于该题的推广，并由此出发引申出一些新的问题。首先给出本文涉及到的几个定义或记号：

$\mathbf{f^{(k)}}$:f 的 k 次迭代

凹函数: $f: R \to R, \forall t \in (0,1), \forall x, y \in R, f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$.

（如果 $\geq$ 改为 $>$，则称 f 为 **严格凹函数** ）

不动点: $f(x) = x$,x 称为 f 的不动点

推广之后的命题为：

命题 1 $f: N \to N$,$f(n+1) > f^{(k)}(n), k \geq 2$. 证明： $f(n) = n$

证明: 设 $f(n_s) = min\{f(n) | n \geq s, n \in N\}$

下面先用归纳法证明： $n_s = s$ 对 $\forall s \in N$ 都成立

a)$s = 1$ 时，若 $n_s \neq 1$ 即 $n_s \geq 2$, 则 $f(n_s) > f(f^{(k-1)}(n_s - 1))$, 这与 $f(n_s)$ 的定义矛盾。从而 $n_s = 1$

b) 假设 $s \leq m - 1 (m \geq 2)$ 时 $n_s = s$ 均成立；那么

当 $s = m$ 时，若 $n_m \geq m + 1$， $f(n_m) > f(f^{(k-1)}(n_m - 1))$ . . . . (i)

由假设知 $f(1) < f(2) < .... < f(m-1) < f(n_m - 1)$, 从而 $f(n_m - 1) \geq m$,

由递归易知 $f^{(k-1)}(n_m - 1) \geq m$

这样 (i) 就与 $f(n_m)$ 的定义矛盾！故 $n_m = m$

由上面的结论知 $f: N \to N$ 为严格增函数，故 $n + 1 > f^{(k-1)}(n)$，并且由递归知 $f^{(k-1)}(n) \geq n$, 从而 $f^{(k-1)}(n) = n$, 故 $f(n) = n, n \in N$. □

将原题再稍作变形，得到：

命题 2 $f: N \to N, f(n+2) > f(f(n) + 1), f(2) = 2$; 证明： $f(n) = n$

此题证明思路和 **命题 1** 的证明思路相似，证明从略。

上述的推广和引申仅仅局限在函数满足的不等式上，我们研究的对象依然是一数列 $f(n)$ 。如果将 f 的定义域扩充到有理数域 Q 甚至实数域 R 又会有什么样的结论呢？下面就 f 的定义域在实数域 R 内给出几个有意思的命题。

命题 3 *$f: R \to R$ 为连续的严格凹函数，若 $x, y \in R, y > x$，有 $f(y) > f(f(x))$ ，那么 f 最多有 1 个不动点。*

证明:（反证） 若 f 至少有两个不动点，不妨设其中两个为 $a, b, a < b$ ，

$f(a) = a, f(b) = b$,f 连续，故由介值定理， f 可以取到 $[a, b]$ 中的所有值。

设 $f(t_0) = \max f\{[a, b]\}$，由 f 为严格凹函数知最大值是唯一取到的。

若 $t_0 \in (a, b)$ ，那么存在 $x_0 \in (a, b)$，使得 $f(x_0) = t_0$，$f(f(x_0)) = f(t_0)$.

这时取 $y_0 = b$，有 $y_0 > x_0$，但是 $f(y_0) < f(f(x_0)) = f(t_0)$. 这便与条件矛盾！

故 $f(b) = \max f([a, b])$，此时可以证明 f 在 $[a, b]$ 上是严格增的。因为对

$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$ ，存在 $\lambda \in (0, 1)$ ，使得 $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)b$ 。于是有

$f(x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(b) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_1) = f(x_1)$. 又 $\forall x \in (a, b)$ ，

设 $x = \tau a + (1-\tau)b, \tau \in (0, 1)$ ，有 $f(x) > \tau f(a) + (1-\tau)f(b) = \tau a + (1-\tau)b = x$ 。

令 $y = (x + f(x))/2$ ，有 $f(x) > y > x$ 且 $f(f(x)) > f(y)$ 这又与条件矛盾！

综上所述 $f(x)$ 至多有一个不动点. □

若将 **命题 3** 中的 f 改为凹函数，则无法对 f 不动点的个数进行估计，原因是 f 可以取到 $y = x$ 中的一段。不过我们可以得出如下结论：

命题 4 *$f: R \to R$ 为连续的严格凹函数，若 $x, y \in R, y > x$，有 $f(y) > f(f(x))$ ，那么 $f(x) \leq x$*

证明:（反证）设存在 $x_0 \in R$，使得 $f(x_0) > x_0$

i) $f(f(x_0)) > f(x_0)$. 根据介值定理，存在 $y_0 \in (x_0, f(x_0))$，使得 $f(f(x_0)) > f(y_0) > f(x_0)$，这与条件矛盾！

ii) $f(f(x_0)) = f(x_0)$，即 $f(x_0)$ 是 f 的一个不动点. 这时 $\forall y > x_0$，必须 $f(y) > f(f(x_0)) = f(x_0)$. 取 $y_0 = 2f(x_0) - x_0 > f(x_0)$，有：

$$f(x_0) = f(f(x_0)) = f(\frac{y_0 + x_0}{2}) \geq \frac{f(y_0) + f(x_0)}{2} > \frac{f(x_0) + f(x_0)}{2} = f(x_0)$$

矛盾！

iii) $f(f(x_0)) < f(x_0)$. 记 $g(x) = f(x) - x$ ，则

$g(x_0) = f(x_0) - x_0 > 0$ ， $g(f(x_0)) = f(f(x_0)) - f(x_0) < 0$

由零值定理，存在 $y_0 \in (x_0, f(x_0))$ 使得 $g(y_0) = 0$, 即 $f(y_0) = y_0$, 这时仿 ii) 的情形便可以制造矛盾。

综合 i),ii),iii) 知 $f(x) \le x$ 对任意 $x \in R$ 均成立。

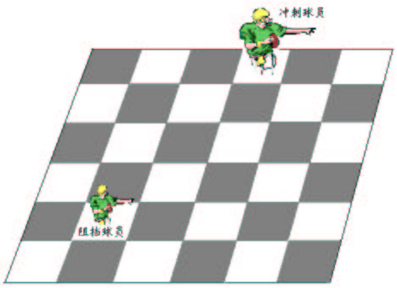
最后笔者提出如下问题，请读者解答：

问题 1　如果 $f: R \to R$ 连续，且 $\forall x, y \in R, y > x$ ，有 $f(y) > f(f(x))$, 那么是否有 $f(x) \le x$?

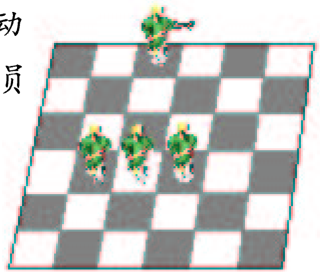
问题 2　如果 $f: R \to R$ 连续，且 $\forall x, y \in R, y > x$ ， $f(y) > f^{(k)} f(x)$ 对 $\forall k \in N$ 成立。是否该函数就一定是 $f(x) = x$?

冲刺与阻挡

Dennis E.Shasha



右图是在一个 6×6 的格子地上进行的橄榄球赛，场地北边的 1 名冲刺球员试图突破对方的 3 名防守队员。比赛规则：是冲刺球员每一次可以走 2 步，每 1 步只能向南、东南或西南方向移动 1 个格子；阻挡球员每 1 次只能走 1 步，但可以移动到相邻的任一格子里，也可以做原地踏步。冲刺球员只要达到最南边的一排格子中的任一个，就赢得了胜利。而阻挡的三个球员如果分别占领了冲刺球员前面的南、东南和西南方向的格子，防守球员就赢得了胜利。冲刺球员可以选择从最北边的任意一个格子开始比赛，而通过观察冲刺球员的起点站位，三个阻挡球员可以选择站在离他至少三格子远的任意格子里。冲刺球员先走，一次可以走两步，然后每每个阻挡球员各走一步加以阻挡。如此继续。请问，有没有办法保证冲刺方或阻挡方的绝对胜利。现在让我们改变一下比赛规则，假如三个阻挡球员必须从最南边的那个格子开始，在这种情况下有没有办法保证哪队绝对获胜？



数学的运动能量不是推理而是想象。　　—— *A.D.Morkan*

黄山路与金寨路交叉路口的出租车流问题

9801 徐 华

[背景]：

随着社会的不断进步，人们的生活水平在不断地提高，各种曾经被认为“奢侈”的生活工具不断地进入日常生活和工作当中，出租车就是其中之一，它的作用已经得到绝大多数大城市人们的认可，为人们的生活和工作做出了贡献。出租车的数量逐渐增大，一方面来说是提供了更多的方便，但另一方面对城市交通也会造成负面的影响. 现在对出租车的管理也成了研究的课题，根据研究结果也制订了许多的规定来强化管理。比如武汉市就规定隔日由尾牌号为单双号的出租车分别过长江大桥. 要加强对出租车的管理，了解出租车的流向行为规律是有必要的。本次调研旨在这方面做一点启发性的研究工作。

[数据的采集和建模]：

本人把研究对象锁定黄山路和金寨路的交叉十字路口上，分别采集了在三个时间段内每 5 分钟去往各方向的出租车数目，利用方差分析来分析一下出租车车流与时间和地理方向之间的关系。为此取 **x** 出租车数目的随机变量。 A 为时间段，取为 A_1 是 10:00am,A_2 是 12:00am， A_3 是 2:00pm， B 为路口方向， B_1 为向东去往美菱大道； B_2 向南去往南七； B_3 向西去往大蜀山； B_4 向北去往市中心。得到数据如下：

表 (1)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	54,60	68,53	30,46	69,71
A_2	80,68	76,81	54,43	88,81
A_3	66,69	70,58	39,51	77,61

其中出租车数量是在 5 分钟时间内去往该方向的出租车数。

[数据分析与处理]

因素 A 有 r=3 个不同水平 A_1, A_2, A_3 因素 B 有 4 个不同水平 B_1, B_2, B_3, B_4 共有 12 个水平组合 (A_i, B_j)(i=1,2,3； j=1,2,3,4) 对每个水平组合 (A_i, B_j) 独立重 复

The open secret of real success is to throw your whole personality at a problem.
—— George Polya

了 t=2 次试验，结果记为 X_{ijk}(i=1,2,3； j=1,2,3,4； k=1,2) 假定 $X_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ 且 rs 个样本 $X_{ij1}, \ldots, X_{ijt}$ 相互独立，有 $X_{ijk} \sim N(\mu_{ij,\sigma^2)}$(k=1,2) μ_{ij} 表示 (A_i, B_j) 下的均值，令 $\varepsilon_{ijk} = X_{ijk} - \mu_{ij}$ 是第 k 次重复试验的随机误差 $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$

建立双因素方差分析的数学模型：记

$$\mu = \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}$$

$$\mu_{i.} = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij}; \qquad \alpha_i = \mu_i - \mu \text{ 有 } \sum_{i=1}^{r}\alpha_i = 0$$

$$\mu_{.j} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij}; \qquad \beta j = \mu_j - \mu \text{ 有 } \sum_{j=1}^{s}\beta_j = 0$$

$\gamma_{ij} = (\mu_{ij} - \mu) - \alpha_i - \beta j$ 为交互效应，记为 A × B 得到双因素的方差分析的数学模型：

$$\begin{cases} X_{ijk}=\mu + \alpha_i + \beta j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}(\text{i=1,2,3；} \quad \text{j=1,2,3,4；} \quad \text{k=1,2}) \\ \sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i = 0; \quad \sum\limits_{j=1}^{s}\beta_j = 0; \quad \sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{s}\gamma_{ij} = 0 \\ \varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{ 且所有 } \varepsilon_{ijk} \text{ 相互独立} \end{cases}$$

为了检验 A,B 和 A × B 对 X 的影响显著性做如下的假设：

$\mathrm{H}_{01}: \alpha_i = 0$

$\mathbf{H}_{02}: \beta_i = 0$

$\mathbf{H}_{03}: \gamma_{ij} = 0$

下面对假设 H_{01}, H_{02}, H_{03} 做检验，为了简化计算，将数据表 (1) 中的数据都减去 60，得

表 (2)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	-6,0	8,-7	-30,-14	9,11
A_2	20,8	16,21	-6,-17	28,21
A_3	6,9	-10,-2	-21,-9	17,1

在这个变换下，所有的平方和值都保持不变。计算：

$T = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{2} X_{ijk} = 57$ r=3 s=4 t=2

$W = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{k=1}^{2} X_{ijk}^2 = 5007$ $S_T = W - \frac{T^2}{rst} = 4871.625$

非欧几何证明了数学是人的手工作品，他仅仅受到思维规律所规定的限制

—— *E.Kasner and J.Newman*

$$S_A = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}\right)^2 - \frac{T^2}{rst} = 607$$

$$S_B = \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}\right)^2 - \frac{T^2}{rst} = 3153.79$$

$$S_{A\times B} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{t}X_{ijk}\right)^2 - \frac{T^2}{rst} - S_A - S_B = 128.34$$

$S_e = S_T - S_A - S_B - S_{A\times B} = 982.50$ A， B， A × B 和误差 e 的自由度分别为 2， 3， 6， 12 。可以做出双因素等重复试验方差分析表如下：

表 (3)

方差来源	平方和	自由度	均方	F 值
因素 A	607	2	303.5	3.707
因素 B	3153.79	3	1051.26	12.840
交互作用 A×B	6	31.39	-21,-9	0.261
误差	982.50	12	81.875	
总和	4871.625	23		

$3.89 = F_{0.95}(2,12) > 3.707 > F_{0.90}(2,12) = 2.81$

由于 $12.840 > F_{0.99}(3,12) = 5.95;$

$0.261 < F_{0.90}(6,12) = 2.33$

故接受 H_{03} 而拒绝 H_{01}, H_{02} 。在这个实验中车去往的方向对车流大小的影响是高度显著的，而时间段对车流大小有一定影响，时间段与车往方向的交互作用对车流大小的影响不显著。

[**分析与讨论**]：

由以上分析可以看出，出租车数量的大小（在十字路口）主要的差别在于车行的方向，很显然去往市区的出租车会比去往大蜀山的出租车要多，而由于金寨路的地理作用，比如通往南七和机场，又通往国道，南市区的繁华地区也会引来不少的出租车流，而向东位于合肥市的三环线上，为了避免主干道的交通拥挤，会有一定车流走向黄山东路。从现实生活的经验中可以想象到地理方向对出租车的数量影响会是高度显著的，这与方差分析的结果是吻合的。而时间段（作者故意选择了 10 点， 12 点和 14 点）由于作息制度的约束，时间段与出租车数量有一定的影响也是可以理解的。

问题解答

9901 陈洪佳

本文所要证明的是《蛙鸣》第 52 期“问题征解”的一道题目，原题如下：已知 $a_1+a_2+\ldots+a_n=0$, 求证：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tan\alpha_1 & \tan\alpha_2 & \cdots & \tan\alpha_n \\ \tan^2\alpha_1 & \tan^2\alpha_2 & \cdots & \tan^2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tan^{n-2}\alpha_1 & \tan^{n-2}\alpha_2 & \cdots & \tan^{n-2}\alpha_n \\ f(\alpha_1) & f(\alpha_2) & \cdots & f(\alpha_n) \end{vmatrix}=0$$

其中 $\mathrm{f}(\alpha)=\begin{cases}\sin 2\alpha, & \text{n 为奇数.}\\ \cos 2\alpha, & \text{n 为偶数.}\end{cases}$

为了叙述的方便，令 $\mathrm{f}_n(\alpha)=\begin{cases}\sin\alpha, & \text{n 为奇数.}\\ \cos\alpha, & \text{n 为偶数.}\end{cases}$

易知：

$$2f_n(x)\cos y=f_n(x+y)+f_n(x-y) \qquad \cdots\cdots(1)$$

$$f_n(x)-f_n(y)=(-1)^{n-1}2f_{n-1}(\tfrac{x+y}{2})\sin\tfrac{x-y}{2} \qquad \cdots\cdots(2)$$

我们先来给出一个引理：

引理 1

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tan\alpha_1 & \tan\alpha_2 & \cdots & \tan\alpha_n \\ \tan^2\alpha_1 & \tan^2\alpha_2 & \cdots & \tan^2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tan^{n-2}\alpha_1 & \tan^{n-2}\alpha_2 & \cdots & \tan^{n-2}\alpha_n \\ f_n(x+2\alpha_1) & f_n(x+2\alpha_2) & \cdots & f_n(x+2\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$
=K_n\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1\\
\tan\alpha_2 & \tan\alpha_3 & \cdots & \tan\alpha_n\\
\tan^2\alpha_2 & \tan^2\alpha_3 & \cdots & \tan^2\alpha_n\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\tan^{n-3}\alpha_2 & \tan^{n-3}\alpha_3 & \cdots & \tan^{n-3}\alpha_n\\
f_{n-1}(x+\alpha_1+2\alpha_2) & f_{n-1}(x+\alpha_1+2\alpha_3) & \cdots & f_{n-1}(x+\alpha_1+2\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

其中 $\qquad K_n=\cos\alpha_n\prod_{i=1}^{n-1}(\tan\alpha_i-\tan\alpha_n)$

[证明]：

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1\\
\tan\alpha_1 & \tan\alpha_2 & \cdots & \tan\alpha_n\\
\tan^2\alpha_1 & \tan^2\alpha_2 & \cdots & \tan^2\alpha_n\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\tan^{n-2}\alpha_1 & \tan^{n-2}\alpha_2 & \cdots & \tan^{n-2}\alpha_n\\
f_n(x+2\alpha_1) & f_n(x+2\alpha_2) & \cdots & f_n(x+2\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

将前 n-1 列给列分别减去第 n 列，得：

$$
\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1\\
\tan\alpha_1-\tan\alpha_n & \cdots & \tan\alpha_{n-1}-\tan\alpha_n & \tan\alpha_n\\
\tan^2\alpha_1-tan^2\alpha_n & \cdots & tan^2\alpha_{n-1}-tan^2\alpha_n & \tan^2\alpha_n\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\tan^{n-2}\alpha_1-tan^{n-2}\alpha_n & \cdots & tan^{n-2}\alpha_{n-1}-tan^{n-2}\alpha_n & \tan^{n-2}\alpha_n\\
f_n(x+2\alpha_1)-f_n(x+2\alpha_n) & \cdots & f_n(x+2\alpha_{n-1})-f_n(x+2\alpha_n) & f_n(x+2\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

$$
=\mathrm{K}_n^{'}\begin{vmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1\\
1 & \cdots & 1 & \tan\alpha_n\\
\tan\alpha_1+tan\alpha_n & \cdots & tan\alpha_{n-1}+tan\alpha_n & \tan^2\alpha_n\\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
\sum_{i=0}^{n-3}\tan^{n-3-i}\alpha_1 tan^i\alpha_n & \cdots & \sum_{i=0}^{n-3}\tan^{n-3-i}\alpha_{n-1}tan^i\alpha_n & \tan^{n-2}\alpha_n\\
2f_{n-1}(x+\alpha_1+\alpha_n)\cos\alpha_1 & \cdots & 2f_{n-1}(x+\alpha_{n-1}+\alpha_n)\cos\alpha_{n-1} & \frac{(-1)^{n-1}}{\cos\alpha_n}f_n(x+2\alpha_n)
\end{vmatrix}
$$

（其中 $\qquad K_n^{'}=(-1)^{n-1}\cos\alpha_n\prod_{i=1}^{n-1}(\tan\alpha_i-\tan\alpha_n)$ ）

第 i+1 行减去第 i 行的 $\tan\alpha_n$ 倍 $(i=1,\cdots,n-3)$, 并由 (1) 式得:

$$K_n\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \tan\alpha_2 & \cdots & \tan\alpha_n \\ \tan^2\alpha_2 & \cdots & \tan^2\alpha_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tan^{n-3}\alpha_2 & \cdots & \tan^{n-3}\alpha_n \\ f_{n-1}(x+\alpha_n+2\alpha_1)+f_{n-1}(x+\alpha_n) & \cdots & f_{n-1}(x+\alpha_n+2\alpha_{n-1})+f_{n-1}(x+\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$$=\mathrm{K}_n\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tan\alpha_2 & \tan\alpha_3 & \cdots & \tan\alpha_n \\ \tan^2\alpha_2 & \tan^2\alpha_3 & \cdots & \tan^2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tan^{n-3}\alpha_2 & \tan^{n-3}\alpha_3 & \cdots & \tan^{n-3}\alpha_n \\ f_{n-1}(x+\alpha_1+2\alpha_2) & f_{n-1}(x+\alpha_1+2\alpha_3) & \cdots & f_{n-1}(x+\alpha_1+2\alpha_n) \end{vmatrix}$$

引理证毕.

下面我们来证明原题:

[证明]：在引理中令 x=0, 得到:

$$D=K_n\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tan\alpha_2 & \tan\alpha_3 & \cdots & \tan\alpha_n \\ \tan^2\alpha_2 & \tan^2\alpha_3 & \cdots & \tan^2\alpha_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tan^{n-3}\alpha_2 & \tan^{n-3}\alpha_3 & \cdots & \tan^{n-3}\alpha_n \\ f_{n-1}(\alpha_1+2\alpha_2) & f_{n-1}(\alpha_1+2\alpha_3) & \cdots & f_{n-1}(\alpha_1+2\alpha_n) \end{vmatrix}$$

$=\cdots\cdots$

$$=\mathrm{K}_nK_{n-1}\cdots K_3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ f_2(\alpha_3+\cdots+\alpha_n+2\alpha_1) & f_2(\alpha_3+\cdots+\alpha_n+2\alpha_2) \end{vmatrix}$$

$=\cos(\alpha_3+\cdots+\alpha_n+2\alpha_2)-\cos(\alpha_3+\cdots+\alpha_n+2\alpha_1)$

$=2\sin(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)\sin(\alpha_1-\alpha_2)$

$=0$

定理证毕。

数学家只有在他内心感到真实的美是才是完美的。 —— *Goethe*

你喜欢数学吗？

9901 周大海

我无意篡改圣经。

但有一次在梦里，我梦见，上帝只用了两天就创造出了世界：

第一天：上帝说：“ Let MATHS be.” 于是有了数学。

第二天：上帝说：“ Let PHISICS be” 于是有了物理。

世界产生，万物生荣。

我没有资格谈数学，只能跟在前辈们的后面，从门缝里看看数学殿堂的样子。假如非要我信口雌黄一下，我看到了三种美：“简单 ”、“技巧 ” 和 “完备”。

我想我一生都不会忘记欧几里德对质数无穷的证明：现在有 n 个质数 $P_1, P_2, \ldots, P_n$，则 $(\prod_{i=1}^{n} P_i) + 1$ 也为质数。假如不看一个证明对其他方面的影响，那么最简单的证明是最美的。我喜欢简单的东西，它使人的心灵愉悦。

最先让我认识到技巧的，应该是初学习微积分的时候，徐老师对“无限小 ” 和“充分大 ” 的把握让我产生了五体投地的崇敬——当然，后来随着学习的深入发现这也不是非常高超的技巧. 现在我们在学习泛函，但是科大奇怪的课程（一大堆别的什么乱七八糟课）让我没有足够的时间好好学习数学。在偶尔的看书上大数学家对某个命题的证明时，往往被他们证明的技巧激动得拍案叫绝。这跟智商是有关系的——我想，愚笨的人或是平凡的人是绝对想不出那种巧夺天工的技巧。这直接的后果就是在后来提及那些伟大的数学家时，我从不吝惜用最光辉的辞藻赞美他们，并且知道了我和他们之间的差距是 ∞ ——我很不愿意的承认：也许像我这样的智商不会出什么成绩，也许我的能力不能够搞数学，虽然我非常爱它。每当想到这里，我的心里就非常难过。

真正使我喜欢数学的，是它的完备。绝对的正确，绝对的完美，绝对的存在，绝对的不可能，如此地深深打动我。数学不允许任何的模糊和敷衍，明确到底，追问到底。追问到最后，归结为若干条公理——与人的直观和感性往往相合的公理。虽然，公理修改过，大厦倾斜过，但经过天才的数学家们不懈的努力，凭着对完美的追求，人类构造出了相当完备的体系。我用了“相当 ”，当然没有人可

In mathematics you don't understand things. You just get used to them.

—— John von Neumann

以证明现在的体系已经真正完备了 。 Hilbert 曾犯过的错误（准确的说应该不是错误，而是一时的不严谨）使人们不敢妄称完备，可能几个小时后，就会有新的悖论产生。但一代又一代的数学家们必定会用尽心智，沿着伟人们的足迹，或是另辟蹊径，将数学推向完备的极至——激动人心的毫无瑕疵的完美。

数学是多么美好的事情！

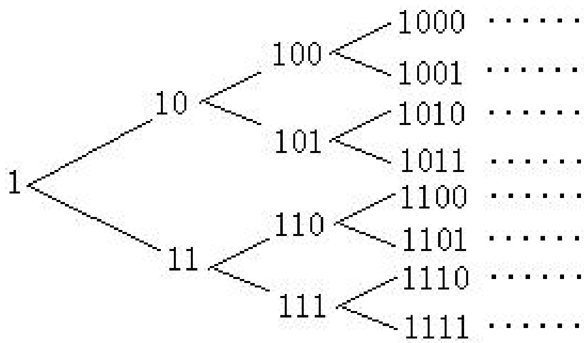
经常有人问起：“你们学数学有什么用啊？ ”当然他们对数学是无知的。我总是说：“没甚么用。”因为解释要费很多的口舌，不如否定到底。

其实，

为数学作出贡献的人们是幸福的，他们的工作贡献给了世界上最高尚的空间。

集论小题

9001 卢萌



已知：$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$(自然数集的幂集),

且 $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \bigcap B$ 为有限集

求：$|\mathcal{A}|$(序数) 最大为？

解：$|\mathcal{A}|$ 最大为 $\aleph$：

(1) $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph$

(2) 把自然数用二进制表示为图示的二叉树，则树的所有节点恰对应全体自然数；

令 $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N} | A$ 是上面树中的一条枝 $\}$

$\forall A, B \subset \mathcal{A}$, 若 $A \neq B$, 则 A, B 必在树的某一级上分叉，而由树的性质，一旦分叉，就永不相交。故 $A \bigcap B$ 有限 $\Longleftrightarrow A \neq B$

又树的每一条枝自然地视作二进制小数，

即作 f : 树 $\to (0,1]$; 枝 $\mapsto f($枝$) = f(a_1 a_2 \ldots) = 0.a_1 a_2 \ldots \in (0,1]$, 显然 f 为满射，

故 $|\mathcal{A}| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph$

由 Cantor — Bernstein 定理， $|\mathcal{A}| = |(0,1]| = \aleph$ （即树有 $\aleph$ 条枝）

如果你想要做数学家，那么你必须意识到，你的主要工作是为了未来。 —— *A.Renyi*

哥俩好

—— 调侃数学与物理

9901 张永超
zyao956@sina.com

纵观数学与物理的关系，会发现很有意思：他们象弟兄两个。

十八、十九世纪的数学和物理就象两个小哥们，竹马竹马，两小无猜的那种。当时数学的主流是分析，物理的主流是力学和天文学。一批牛人诸如 Euler 、 Gauss 、 Lagrange 、 Fourie 、 Laplace 、 Hamilton ⋯⋯不光给一堆数学名词贴上了他们自己的标签。天文学、力学、热学、光学、磁学等学科的理论方向都留下他们的漂亮工作，令物理学家们崇拜不已。

渐渐地，随着实验越来越深入物理的生活，物理渐渐疏远了数学。现在物理干脆叫做：一门实验的科学，听起来就象称克林顿为希拉里的克林顿一样。但在 20 世纪的几件事仍让人意识到数学与物理的血缘关系。

之一： Maxwell 写下了关于电磁学四个方程，人们担忧不已地发现：她和 Newton 的动力学方程结合之后不满足伽利略相对论； Poincare 和 Einstein 经深入研究，先后各自独立发现了它满足另外一种不变的相对性质。历史上称他们的理论为“狭义相对论”。

之二： Hilbert 在１９１５年１１月２０日提交一篇论文。之后在他的文集里他这样评价他的这篇文章：“我所获得的场的微分方程和 Einstein 稍后（注：5 天）发表的论文指出的广义相对论的漂亮理论不谋而合。 ”好戏还在后面， von Neumann 在其《量子力学的数学基础》一书中指出：量子力学实际上只是 Hilbert 积分方程的直接应用。

之三：数学家 Weyl 在 1918 年提出“规范场 ”的概念，物理学家便用“规范场”来描述基本粒子之间遵循的游戏规则，战果辉煌。后来渐渐发现数学家早已为他们准备了成套的武器，微分几何中的名词诸如纤维丛、联络、曲率等名词在场论中都有笔名。于是有一次杨振宁对陈省身说“这既令人震惊，也令人迷惑不解”，并怀疑这些在数学家看来自然的东西是“凭空梦想出来的”。

⋆ 文中不少例子源自于胡森老师的课堂笔记，深表感谢；文中观点皆个人之言，欢迎讨论。

数学和物理这哥儿俩往往在形式都很和谐，比如用节俭的方程描述基本规律。但自从物理和实验联姻以来，物理似乎有些惧内，以致于物理学家有时裹足于已知的物理事实而不前，几乎丧失了许多机会。下面的例子似可以说明这一点。

之一： Einstein 历时十年之久，将他所研究的物理空间由四维时空坐标系推广到 Riemann 空间的广义坐标系，物理史上描述这件事时说：他完成了由狭义相对论到广义相对论的工作。

之二： Dirac 得到一个很经典的方程，求解过程中发现一个很奇怪的东西。物理上唤此解为：正电子。 Dirac 坚持正电子的存在性，这遭到了除他自己以外几乎所有物理学家的反对，还好实验最终站在他一边。

之三：作为“黑洞可以辐射能量”这种听起来很荒谬说法的反对者之一， Hawking 考虑给提出这个理论的“不知深浅”的家伙一点严格的颜色看看，经过细致的计算，安慰他的却是将“黑洞可以辐射能量”这个了不起的发现主要归功于他。

数学在追求形式的和谐方面似潇洒浪漫多了，碰到上面情形的要是数学家，可能不管 3 * 7 = 2 1 把和谐的东西弄出来再说；碰巧他又有物理头脑，碰巧他就有很多发现。因此，物理领域中的数学家也许可以为该领域添加不少浪漫主义色彩。

受到实验的滋润，物理在某些程度上更趋于完美。作为一个很有意义的模型，“物理（为数学）提供了某种意义上最深刻的应用。”（ Atiyah 语）

低维拓扑 (n=3 、 4) 一直是数学里很前沿的领域， Fields 奖也曾屡屡光顾。拓扑‘不变量’的寻找是该领域不变的主题。物理世界大多生活在 3 、4 维空间，里面有众多的‘守恒量’。 Donaldson 从描述基本粒子游戏规则的 Yang(振宁) - Mills 方程入手寻出重要的‘ Donaldson 不变量’，他本人得到 1986 Fields 奖的垂青。后来 Witten 认识到该不变量可由物理中某适当场在 Yang - Mills 超对称扩张中的某个积分表示。

在几乎平坦的时空中，可以定义‘质量’的概念，但不知道‘质量’是正的还是负的。

Einstein 也许是为把广义相对论继续做下去，作出猜测：质量是正的。丘成桐和 Schoen 用微分几何中的极小曲面的给出了一个很长的证明； Witten 从物理中旋量场的 Dirac 方程入手给出另一个简短的证明。他于 1990 年以物理学家的身份征服了 Fields 奖这在数学史上是第一次。数学以这种方式向物理这位兄弟表示出自己的友好。

一个数学家越超脱越好。 —— *Anonymous*

物理学家现在忙什么呢？ Wiener(维纳) 作过一有意思的定义：“现代物理学家指的是这样的人，他一三五研究量子场论，二四六研究超对称引力，星期天做祷告的时候对上帝说‘主啊！让某些人特别是让我把两者统一起来吧！’”将量子理论和引力协调起来一直是物理学家做梦都想的事。目前，普遍认为有前途的是：弦 (String) 理论。

弦听来挺玄，里面的基本想法是，将开的或闭的弦，而不是将粒子作为研究对象，物理世界中各种不同的力看作是弦以不同方式在抖动。由于弦理论可以较好地协调量子理论和引力，物理正对自己作出检讨，物理学家正酝酿一次造反——“革命”一词可能更动听一点——估计拥贤‘(弦)’为王。

弦理论加上超对称（ supersymmetry ）后称为超弦—— Superstring 。它为许多数学问题的解决提供了新视角， Witten 由于在弦理论的贡献获得 Fields 奖。弦理论诱发出新的数学问题：它呼唤新的时空几何结构，被称为 ” 量子几何 ” 未来几何吸引了诸多数学家和物理学家的眼球；弦理论至今还没能精确找出描述自身规律的基本方程，也许现有的数学工具无能为力，必须象 Newton 发明微积分来刻画力学定律那样打造新的数学工具； ⋯ ⋯

物理现在可能很遗憾，弦理论目前仍得不到实验的支持，这多少让人觉得弦很“悬”。数学可能就乐了，历史表明，在未和实验真正发生关系以前的物理（比如 18 、 19 世纪天文学和力学， 20 世纪的量子理论和相对论）中，数学的作用是举足轻重的。等实验真的来了，物理好象找到真正属于自己的生活，数学只得离亲密的哥们远一点，去埋头经营属于自己的一亩三分地。

参考文献

[1] 李文林，《数学史教程》, 高教出版社 & Springer 出版社， 2000
[2] E.Hawking,《时间简史》， 湖南科学技术出版社， 1992.12
[3] M.Atiyah ,《数学的统一性》, 江苏教育出版社， 1995
[4] R.Penrose,《皇帝新脑》， 湖南科学技术出版社， 1996.10
[5] 陈省身 ， 《陈省身文选 · 传记通俗演讲及其他》, 科学出版社， 1989
[6] B.Green,《宇宙的琴弦》, 湖南科学技术出版社， 2002
[7] 《怪异旷世奇才》， 参考消息 · 科学技术版 ， 2002 年 3 月 22 日
[8] 《玄而又玄，众妙之门弦论整合万有引力量子论终会有时》， 参考消息 · 科学技术版 ， 2002 年 7 月 11 日

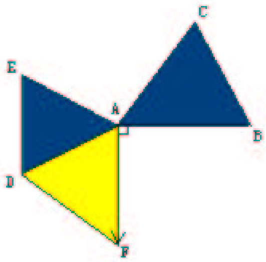
小小猜想

0001 黄祥娣

1 猜想: 设 $(n+1)$ 个 n 维超平面交成一个 n 维体，在该 n 维体的每个平面上，垂直于该面向外做一个向量，该向量的长度恰为该面的面积，则这 $(n+1)$ 个向量和为零！

2 说明: 这是我随想偶得的一个问题，我对 $(n=2,3)$ 的时候已经证明，难度也不大,当对一般的 (n) 是否有此结论呢？请老师和同学们指点！

（1）当 $n=2$ 时，如下图



$AF\perp AB, AF=AB;\quad AE\perp AC, AE=AC$

$AD\perp BC, AD=BC$

$\because\triangle\ ADE, AE=AC, DE=AF=AB,$

$\angle DEA=\pi-\angle EAF$

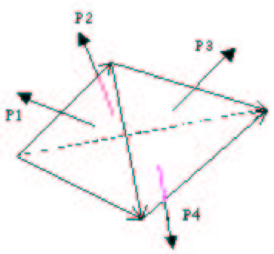
$=\pi-(2\pi-(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\angle CAB))$

$=\angle CAB$

$\Rightarrow\triangle\ ADE\cong\triangle\ ABC$

由三角形三边向量和为 0 立知 $n=2$ 时成立！

（2） $n=3$, 如下图



可以知道这四个向量分别为：P_1,P_2,P_3,P_4 在 $\triangle\ ABC$ 外和它垂直且长度等于它面积的向量恰为：$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}$

同理可得其它向量，和为：

$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}+(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})\times(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BD}=0$

至此， $n=3$ 的情形也证明了！

（3）对 $n\geq 4$，我还未解决，恳请老师和同学指点！

第六十一届 William Lowell Putnam 数学竞赛

Leonard F.Klosinski, Gerald L.Alexanderson, Loren C.Larson

第六十一届 William Lowell Putnam 数学竞赛于 2000 年 12 月 2 日举行，来自加拿大和美国的 434 个学院和大学的 2818 名学生参加了这次竞赛。命题委员会由圣路易华盛顿大学的 Steven G.Krantz (主席)，乔治亚大学的 Andrew J.Granville, 俄勒冈大学的 Eugene M.Luks 和郎讯技术 - 贝尔实验室的 Carl Pomerance 组成。他们出了题，而且提供了众多解答中最优秀的解答。不同的解答可在 Mathematics Magazine, 74(2001),p.77-83 中看到。

问题 A

问题 A1. 令 A 是一个正实数。给定 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ 是使得 $\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j = A$ 的正数，问：$\sum\limits_{j=0}^{\infty} x_j^2 = A$ 的取值范围是多少？

问题 A2. 证明，存在无穷多个整数 n, 使得 $n, n+1$, 和 $n+2$ 都是两个整数的平方和． [例如： $0 = 0^2 + 0^2 0, 1 = 0^2 + 1^2$ 和 $2 = 1^2 + 1^2$.]

问题 A3. 八边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ 内接于一圆周，它的顶点在圆周上的排列即为所述的次序。已知多边形 $P_1P_3P_5P_7$ 是一个面积为 5 的正方形，并且多边形 $P_2P_4P_6P_8$ 是一个面积为 4 的矩形。求八边形面积的最大值。

问题 A4. 证明，广义积分

$$\lim_{B\to\infty}\int_0^B \sin(x)\sin(x^2)dx$$

收敛。

问题 A5. 平面上具有整数坐标的三个不同的点位于半径为 $r > 0$ 的一个圆的圆周上。证明，其中两个点的距离至少为 $r^{\frac{1}{3}}$

问题 A6. 令 $f(x)$ 是一个整系数多项式。用 $a_0 = 0$ 和对所有 $n \geq 0, a_{n+1} = f(a_n)$ 来定义一个序列 $a_0, a_1, \ldots$ 证明，如果存在一个正整数 m 使得 $a_m = 0$ ，那么，或者 $a_1 = 0$ 或者 $a_2 = 0$.

≃≃

In mathematics the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.

—— Georg Cantor

问题 B

问题 B1. 令 a_j,b_j 和 c_j 对于 $1 \le j \le N$ 是整数。对于每个 j ，假设 a_j,b_j,c_j 中至少有一个为奇数。证明，存在整数 r,s,t ，使得对于至少 $\frac{4N}{7}$ 个 $j, 1 \le j \le N, ra_j+sb_j+tc_j$ 是奇数。

问题 B2. 证明，对于所有满足 $n \ge m \ge 1$ 的正数对 (m,n) ，表达式

$$\frac{gcd(m,n)}{n}\binom{n}{m}$$

是一个整数。[这里 $\binom{n}{m}=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ ，而 $gcd(m,n)$ 是 m 和 n 的最大公因子。]

问题 B3. 令 $f(t)=\sum\limits_{j-1}^{N} a_j \sin(2\pi jt)$ ，其中每个 a_j 是实的，并且对于 $t\in[0,1)$ ，$a_N \neq 0$ 令 N_k 表示 $\dfrac{d^kf}{dt^k}$ 的零点的数目（包括重数）。证明，

$$N_0 \le N_1 \le N_2 \le \ldots, \text{并且} \lim_{k\to 0} N_k = 2N.$$

问题 B4. 令 $f(x)$ 是一个连续函数，使得对于所有的 x 有 $f(2x^2-1)=2xf(x)$. 证明，对于 $-1 \le x \le 1$, 有$f(x)=0$.

问题 B5. 令 S_0 是正整数的一个有限集合。我们定义正整数的一列有限集合 $S_1,S_2,\ldots$ 如下：

整数 $a\in S_{n+1}$ 当且仅当 $a-1$ 和 a 中恰有一个在 S_n 中。证明，存在无限多个整数 N, 使得 $S_N=S_0\bigcup\{N+a : a\in S_0\}$.

问题 B6. 令 B 是 n 维空间中具有形式 $(\pm1,\pm1,\ldots,\pm1)$ 的超过 $\frac{2^{n+1}}{n}$ 个不同点的一个集合，其中 $n \ge 3$

证明：在 B 中存在三个不同的点，他们是一个等边三角形的顶点.

对 话

——关于《蛙鸣》及其他

时　间：2002 年 9 月 9 号晚八点
地　点：数学系 315
特邀老师：
胡森 7801《蛙鸣》首期主编 PRINCETON 博士 现科大教授 下简称 H
部云 8001《蛙鸣》早期编委 现加拿大 YORK 大学教授 下简称 G
（以下提问简称 W）

W：两位老师好！现在《蛙鸣》已经是第 56 期了……，你们那时出的好象是油印的．

H：是油印的，到部云他们那时就成铅印的……

G：后面那些期刊好象就变成 Latex 的了．

H：我和王翎是 81 年还是 82 年开始……

G：是 81 年；86 年学校请我们回来，我当时在北京；当时蛙鸣 5 周年，专门请我们回来开一个会，当时还是在校办举行的，很热闹．

W：现在好象没那么火了！

H：到现在好象 21 年了，我们中国人好象喜欢整数，20 年比 21 年好听．

W：你们那时大概多久办一期？

G：那时还比较多，大概两三个月办一期．

H：开始好象是不定期的……让我把历史先讲一下：我是 78 级的，在 81 年的时候，刚刚上了大三，已经学了很多课，下面的课比较少，有不少的空余时间．很多人念到这个时候，就感到数学没多少意思了，于是就看些别的书，像物理。我们班有个叫王翎的，他当时是学生会主席，特想为系里办点事情．他

现代数学主要对结构感兴趣．被选为实现这些结构的那些对象仅仅是作为一般对象生长的基础．
—— H.Hermes

找到我说要办一个刊物，另外一件事是办音乐讲座，请了张平，是拉小提琴的。我认为，学校里念书学东西很重要，另外一个很重要的就是同学之间互相切磋讨论问题；可以讨论各种问题，有数学的、社会的……在当时的情况下，很多人都有自己的想法，他们希望找一个地方发表一下。于是，《蛙鸣》的想法一经提出，就收到不少的文章。

W：都是些什么文章呢？

H：我至今印象比较深的一篇，是莫小康的。题目记不得了，大概是说，自然科学需要彻底的批判精神，不能迷信任何权威。他当时举了非常多的例子来支持他的观点。我对此深表赞同。因为在中国好象特别喜欢迷信权威，其实科学发展应该听前沿第一线工作的人的意见。爱因斯坦曾做出过很伟大的成就，但他对量子力学至死都不接受，有很强的偏见。如果太迷信权威的话，反而会阻碍科学的发展。当然，还有些其他的具体些的题目。

G：对书上的一些东西推广比较多，我记得有一个同学，他好象把 Cauchy 定理、Cauchy 中值定理作了一些推广；其实也不能指望作出太好的东西，因为知识面的原因。

H：除非你是天才，比如 Milnor，他本科阶段的论文是一个经典。这还需要很好的环境，他当时在普林斯顿。其实可以找一些有意思的东西，不止书上习题；问题不大，但好玩、有意思。可以在杂志上找一些，这样会刺激对数学的兴趣。大家对这方面有兴趣了，好好想，平时再多点儿讨论，文章就出来了。在大学阶段有个好处，就是你没有多少负担，不需要做什么，有很多时间，这个时候可以把你的知识面弄得广一些。其实很多学科和数学有关，比如物理，现在比我们那时候要密切多了。

G：很多数学问题都从物理那来的！

H：对，这次在北京开会碰到 Witten。实际上，现在对数学影响最大的就是 Witten。这十几年来，从八十年代以来到现在，都在他的影响下，大概除了数论，数论他不是很懂。

G：张寿武的观点就是这样，他说数学分作两类，不是数论就是数学物理，大概因为他是做数论的。现在数学物理很广，包括几何的、拓扑的、表示论的、代数的像李代数李群也算、非线性的观点像微分方程、偏微分方程都是数学物理。数学物理的范围实在是太广了……

H：Witten 曾开玩笑，就是数论也会融入到数学物理中。当然比较难，到现在还没有实现。但是现在很多线索似乎说明这不是不可能的。

G：对，因为它与代数几何有个桥梁，是有可能的。

H：对，原来代数几何大家觉得很玄的东西，纯粹的数学。现在代数几何做的问题基本上都是从数学物理上过去的。像数论可以看作代数几何的一个应用，但这中间的联系没有很明朗。 99 年数论大师 Mazur 在全美数学家大会上作的一个报告，就讲数论和弦论之间的联系。像部云他作代数，实际上现在代数主要作的都是无限维的，有限维的没什么可作的。无限维代数基本上都做数学物理。

G：对，基本上都是从数学物理上过去的。共形场，弦论这方面的。

H：Witten 有个看法，二十世纪的数学是理解量子力学，二十一世纪数学就是理解量子场论和弦论。实际上无限维代数就是量子场论的一部分。量子力学处理的问题本质上还是有限个粒子，虽然有无限维的表示，但本质上还是有限维的。

…… ……

其他还聊了很多，而且有许多有意思的；仅少量摘录于下

- 作数学不一定需要聪明，龚升教授说过，需要耐力和持久力，就是要能坚持，自己喜欢数学就坚持下来。
- 可能会碰到很多不懂的东西，没关系，只要还有学习的欲望就行了。有很多老美，他们基础很差，可是兴趣很浓。陈省身的一个学生 Griffiths，原是个打篮球的，是个球星，对数学兴趣来了，每天可以工作 20 个小时，结果成为代数几何的领袖人物。
- 看大家的原著、全集比较好，当然不是所有的都看，挑些有意思的、感兴趣的来看。所谓大家都是曾经做出过大东西的人，在他们做的过程中肯定有不少自己的看法。通过直接读这些人的东西，可以知道这些人当时是怎么想的，可以开阔自己的视野，有时候可能就对某个东西感兴趣了。我常读《陈省身文选》 — ‘陈选’ — 很有帮助。近来常读 Witten 的文章，每篇文章都有新鲜的东西。
- 一个讨论的氛围很重要，作数学不只是念书写文章，像 Hilbert，他周围经常有些人在讨论，早期像 Minkowski ，后面还有 Weyl, 还有他的很多学生。傍晚散步已成为哥廷根一种重要的文化，散步的人越来越多，哥廷根成了数学的中心。

- 大学时喜欢读古文，发现很多地方现在的理解都有问题。例如《论语》里有句话，“学而优则仕”，一般认为学习优秀就去当官，其实还有一句，“仕而优则学”，并且“优”应译为“悠闲”。学习不忙的时候去为大家服务。直接从根源上追，可能会发现有意思的新东西。
- 陈省身曾说过一句有意思的话：“中国哪门学问只要和吃联系不上，前途就很危险。”……对于中国数学缺乏原创性东西，有次碰到丘(丘成桐)说：“中国现在什么都不缺，缺的就是做一个大数学家的愿望。”

(本文由张永超同学整理)

Science is a differential equation. Religion is a boundary condition. —— *Alan Turing*

主　编：　李天江
责任编辑：李长征　赖荣杰
编　委：　李天江　陈洪佳　吕荐瑚　殷彪　张永超