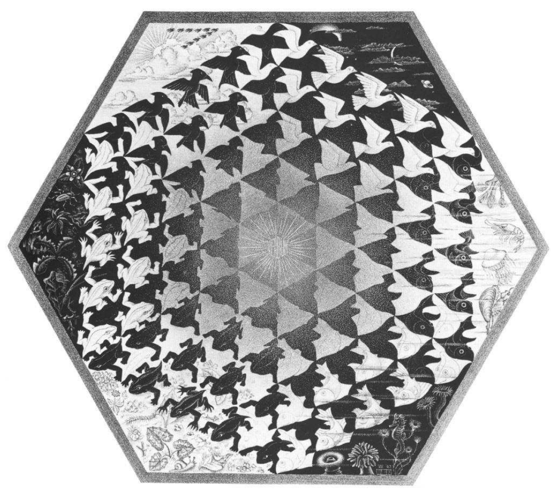
蛙鸣

第 59 期



中国科学技术大学数学系 编

2005 年 6 月

刊首寄语

初夏已至，23 岁的《蛙鸣》满载春天的财富和喜悦，像清晨阳光中的静谧，落在等待收获的田野上。

地上盛开的第一朵花是对未来之歌的邀请。在《蛙鸣》中，我们散播思想的花瓣，不是为了未来的果实，而是为了片刻的玄思妙想。在这里，你可以领略数学大家的风采，可以体味身边良师的心路历程，也可以聆听同龄人青涩却锐意的成长宣言。也许言语稍显稚嫩，但遮掩不住同学们如金子般闪烁的思想火花和在数学道路上探寻求知的激情。

河岸对河流说，我留不住你的浪花，就让我把足迹留在心里吧。希望我们的《蛙鸣》能在你的心中留下些许痕迹，也祝福我们的生命像多节的芦笛，经过希望和收获的缺口，奏出多姿多彩的未来之歌。

目　录

一个数学家的辩白（节选）

［英］G H 哈代

假如真的能把我的雕像塑在伦敦纪念碑上的话，我是希望这座碑高耸入云，以至人们见不到雕像呢，还是希望纪念碑矮得可以使人们对雕像一目了然呢？我会选择前一种，而斯诺博士可能会选择后一种。

§ 2

我建议对数学进行辩解。也许有人会跟我说这根本没必要，因为，不论原因如何，目前还没有哪一种学科被公认为比数学更有用、更值得称颂的。这或许是真实的。实际上，由于有了爱因斯坦的惊人成就，星体天文学与原子物理学可能已成为普遍高度评价的科学。数学家现在不必认为自己在自卫，因为他不会遭到像布拉德雷 (Bradley) 在他的值得钦佩的形而上学辩护词中所描绘的那种对抗的处境，那次卓有成效的捍卫使一部介绍形而上学的书《现象与实在》(Appearance Reality) 得以完成。

布拉德雷说，有人会对一个形而上学家说，形而上学知识整体而言是不可能的；即使在某种程度上是可能的，实际上它也决不是名副其实的知识。形而上学家还会听人说：“同样的问题，同样的争论，同样的彻底失败。为什么还不放弃这种知识？难道再也没有别的事值得你付出劳动了吗？”没有人会愚蠢到用同样语言讨论数学问题。数学的大部分真理都是显而易见的；数学的实际运用，如在桥梁、蒸汽机和发电机等正冲击着人们迟钝的想象。没有必要说服公众让他们相信数学是有用的。

这一切都以其独特的方式让数学家感到欣慰，而真正的数学家几乎不可能对此感到满足。任何一个真正的数学家一定会体会到，数学的真正美名并不是基于这些粗略的成就，数学之所以享有普遍的美名很大程度上是基于无知与混乱，因此，仍有必要对它进行更合理的辩解。不管如何，我有意来试试。我想这种辩解比起布拉德雷的艰难的辩白来，任务该会简单些。

接着我要问：“数学为什么值得人们进行认真的研究？一个数学家用一生的时间从事这些工作的充足理由是什么？”像人们希望一个数学家所回答的那样，在多数情况下，我会这么回答：我认为数学研究值得做，而且以数学家为职业的理由是充分的。但是同时我也要说：我对数学的辩护也是为我自己辩护。我的辩

解在一定程度上是利己的。因为假如我真的把自己看作是一名失败的数学家，我就不认为对自己所研究的学科进行辩解是件值得做的事了。

在辩护中带着某种程度的利己主义的态度是难免的，我想，对这一点是用不着辩解的。我认为“谦卑”的人做不出优秀的工作。比方说，在任何一个学科里，教授的首要职责之一就是对自己这一学科的重要性以及自己本人在这一学科的重要性进行一点夸大。假如一个人总在问自己：“我所做的事是值得做的吗？”以及“我做这个合适吗？”这都会使自己永远无能而且也让别人泄气。这种人该把眼睛闭上一会儿，更多地考虑自己的学科和自己本人的情况，而不是更多地考虑学科与自己所应得的报酬。这不太困难，因为更加困难的是依靠紧闭眼睛来使自己的学科与自己本人不受他人所嘲笑。

§ 3

一个人在开始为自己的生活和活动的合理性进行辩解时，必须要认清两个问题。第一是他所做的工作是否值得做；第二则是他为什么要做这一工作，而并不在乎其价值。第一个问题常常很难且答案让人失望。而大多数人会觉得回答第二个问题却是十分容易的。如果这些人是诚实的话，他们通常会采取两种形式中的一种。第二种形式仅仅是第一种形式的更简略的变形。而第一种形式是我们需要考虑的惟一形式。

我之所以做我的事，因为这事是，而且是惟一的一件我完全可以做好的事。我是个律师，或者是一个股票经纪人，或者是一个职业板球手，这都是因为我对这一特别的工作有些真正的才能。我做律师，是因为我伶牙俐齿，而且对法律之微妙感兴趣；我做股票经纪人，是因为我对股市行情的判断迅速而准确；我做职业板球手，是因为我挥拍非同一般地好。有人说，我做个诗人或数学家也许更好，但不幸的是，我并没有才能做这样的工作。

我并不认为大多数人能够做出上述那样的辩解，因为多数人什么工作也做不好。可是只要这种辩解说得振振有词，它就很难反驳，事实上只有少数人能进行这样的辩解：也许只有 5% 或 10% 的人可做得不错。而只有极少数人可做得真正好。而能做好两件事的人只有寥寥无几的了。假如一个人有真正的才能，他就应该乐于牺牲几乎所有的一切，以充分发挥自己的才能。

约翰逊 (Johnson) 博士赞成这一观点，当我告诉他，我看过约翰逊 (与他同名的人) 骑在三匹马上，他说：“先生，这样的人应得到鼓励，因为他的表演显示了人类的能力限度……”

同样地，他会赞扬登山者，海峡泅渡者，闭目下棋者。至于我的看法，我也是将这些能力统统视为非常不一般的成绩。我甚至还称道魔术家和口技者；当阿廖欣 (Alekhine) 和布拉德曼 (Bradman) 在决定破记录时，假如他们失败了，我会

极为失望的。在这种情况下，约翰逊博士同我与公众的感觉是一样的。正像 W.J. 特纳 (Turner) 曾说过的一句实话那样：只有那些自以为“博学”的人 (令人产生不悦之感之称谓)，才不去赞扬“真正的名家”。

当然我们不能不考虑到以上两种工作之间价值上的不同。我宁愿做一个小说家或画家，而不愿成为政治家或诸如此类的人物。事实上，尽管有很多成名之路，但我们大部分人会因其甚为有害而宁可拒绝走这样的路。但是这种价值的不同，很少会改变一个人的择业范围，因为这种职业的选择是受着人们生就的能力限度的制约的。诗集比板球更有价值，但假如布拉德曼放弃板球去写二流小诗 (我想，他不大可能会写得更好) 的话，他一定是个傻瓜。假如他的板球打得并不那么超众，而诗歌却还写得好些，那么对他来说选择就更加困难了。我不知道自己是成为特朗普尔 (Trumper) 还是布鲁克 (Brooke)。值得庆幸的是像这种左右为难的情况很少出现。

我还想补充说一点，他们特别不可能指望自己成为数学家。人们常常过分夸大数学家与其他人的思维过程的不同。但不容否认的是，对一个数学家来说，他的天赋是他诸多特殊才能中的一方面。数学家们作为一个阶层，并不因一般的能力和多才多艺而格外超群出众。假如一个人成为任何意义上的真正的数学家，那么，可以说他的数学百分之九十九会比他能做的任何其他事都好得多。而假如他为了做其他领域的普通工作，而放弃了任何一次发挥自己才能的适宜的机会，那么他就是愚蠢的。这样的牺牲，只有在经济需要或年龄条件变化的情况下才是情有可原的。

§ 6

现在应该考虑在 § 3 我所谈到的问题了。这个问题比第二个问题难得多。数学，即我和别的数学家所认为的数学这一学科，是否值得研究？假如值得，理由是什么？我一直在回顾着我的一篇讲稿的头几页 (那是我于 1920 年在牛津大学就职时的首次演讲稿)。在那几页中我写到了有关对数学进行辩解的要点。这种辩解是不够的 (只写了不足两页纸)，而且其文体风格现在看来并不使我感到特别自豪 (我想，这可能是我用当时想象为“牛津”风格写成的第一篇论文)。但是我仍然觉得，不论它需要怎样改进，它还是包含了问题的实质。这里我愿重新把原来说过的话拿来作为全面讨论的前言。

(1) 首先我要强调数学的“无害性”。也就是说，“即使数学研究无利可图，但它也绝对是无害而清白的职业”。我坚持这一点，当然它需要大量的扩展和解释。

数学真的是无利可图吗？显然，在某种意义上并非如此。比如，它为不少的人带来了很大的快乐。然而我是从更狭隘的意义上来考虑所谓“利益”的。数学是否有用，是否像化学和生理学等其他科学那样有直截了当的用途？这并不是一

个容易回答或无可争议的问题。尽管有一些数学家和大多数外行会毫无疑问地作出肯定的回答，但我最终的回答还会是否定的。那么数学是“无害”的吗？对此，回答也是不确定的。在某种意义上我宁可回避这个问题。其理由是它提出了科学对战争的影响问题。例如，化学在这方面显然是有害的，那么是否可以说数学在同样的意义上是“无害”的？以后我一定回头再来谈这两个问题。

(2) 当时我还接着说“宇宙的范围很大，所以，如果我们在浪费着自己的时间，那么浪费大学里几位名家、教授的生命决不会带来了不起的大灾大难”。这里我或许像是要采取或故意装出虚伪的谦卑态度，而这种态度是我刚刚所反对的。我确信，这种态度并不是我真正意愿中的态度，我是企图用一句话把我在 § 3 里所谈的冗长的内容概括出来。我在想，我们这些名家、教授确实没有多少才能，而我们应尽可能地充分发挥运用这些才能才是。

(3) 最后 (以一些对我来说如今读起来仍感夸张的修辞)，我强调了数学成就的持久性 - 我们所做的工作也许很少，但都有着某种持久性的特点；我们所完成的任何事情，无论是一本诗集还是一条几何定理，只要能引起哪怕是最微小的但却是永久的兴趣，也就意味着已经做出了完全超出大部分人的能力的事情。

我还写道 - 在古代与现代研究有冲突的今天，对于某一门研究来说，一定存在某些值得一谈的东西，而这种研究并非始于毕达哥拉斯，也不会止于爱因斯坦，但它却是所有研究学科中最古老的，也是最年轻的。

所有这一切都是“言过其实”的，但在我看来，其实质仍包含着真理，对此，我可以马上进行扩展，同时又不致过早涉及我所留下的其他没有回答的问题。

§ 19

我现在必须回到我的牛津讲演上，对在 § 6 尚未谈及的问题作一些说明。从以上论述读者可以看到，我只对把数学当作一种创造性艺术感兴趣，但有很多问题还值得考虑，尤其是数学的“实用性”，它曾引起许多争议。此外还有必要检查一下数学是否真如我在牛津演讲中提到的那样“百利而无一害”，如果科学或艺术的发展能增加资源、方便人类，或增加人们情感上的愉悦，那么我们就可以认为它们是“有用”的。医学和生理学能减轻病痛，所以是有用的；工程设计能建筑高楼、桥梁，从而提高生活水平 (当然工程设计也会带来害处，但此处暂不涉及)，所以也是有用的。依此来看，数学也必然是有用的，工程师如没有数学基础是无法进行工程设计的，数学也正开始运用于生理学中。因此我们有为数学作辩护的依据，虽说并不完备，但值得去钻研。数学应用的更高层次，即运用于各种创造性艺术中，将与我们的研究无关。数学如同诗歌、音乐一样，能训练并陶冶人的性情，所以对数学家或数学爱好者来说，沉迷于其中，其乐也融融。不过，如从这方面去论证数学的用处，只不过是更为详尽地重复我的老话，而现在要考

虑的应是数学的原始的应用。

§ 20

这一切似乎是不言而喻的，但就这样也有不少争议，因为大多数“有用”的学科对我们中的多数人来说往往是学而无用的。生理学家和工程师对社会功用不小，但对常人来说，生理学和工程学并无多大用处 (尽管他们的学习也许会基于其他原因)，就我自己来说，我从未发现我拥有的纯数学之外的科学知识给我带来过些微的益处。

事实上我们不得不诧异，科学知识给普通人带来的实用价值是如此之小，如此乏味，而且毫无特色，其价值似乎与其在外的功用名声成反比。如果在简单的算术上反应快，是会很有用的；懂一点法语、德语，懂一点历史、地理或经济学知识也会是有用的；但仅懂一点化学、物理或生理学，在日常生活中却毫无用处。不用知道气体的组成我们便可以知道它会燃烧；汽车坏了我们自然送到修车厂去；胃不舒服会去看医生或去药店买药。我们的生活要么自有其规律操纵，要么需要各行各业人的帮助。

然而，这只是枝节问题，一个教育的问题，只有教师们对它感兴趣，因为他们必须说服那些为自己孩子的“有用的”教育而喋喋不休的父母们。当然，我们说生理学有用，并非鼓吹大多数人去学习生理学，但如有一定数量的专家致力于生理学的发展、研究，将会使绝大多数人受益。重要的问题是，数学的有用性究竟能延及多远？哪些数学领域有用性最强？怎样才能仅仅以这种“有用性”为理由，来为认真的数学研究，即数学家们所理解的数学研究进行辩护？

§ 21

我将作出的结论到这里似乎是显而易见的了，所以我先武断地将它表述出来，再对之详述。不可否认，初等数学中的很大一部分 - 我用的“初等”一词是职业数学家使用的那种意思，它包括诸如有关微积分等应用知识 - 是具有一定使用价值的。数学中的这些部分整体来说是比较枯燥的，它们是最乏美学价值的部分。“真正”的数学家所研究的“真正”的数学，如费马、欧拉、高斯和阿贝尔所研究的数学，几乎是完全“无用”的。(这一点对“应用”数学和“纯”数学来说都是如此。) 以“实用性”为标尺来衡量一个天才数学家的工作是不可能的。

但是这里我要纠正一个错误概念。有人认为纯数学家以其工作的无用性为荣，并宣称他们的工作没有实际应用价值。这种念头是基于高斯的一句不谨慎的话，其大意是：如果数学是科学中的皇后，那么数论由于其极端无用性而成为数学中的皇后 - 我从没能找到这话的确切引用。我敢肯定高斯的原话 (如果真的是他说的) 被很粗鲁地曲解了。如果数论能够被应用于任何实用的、显赫的目的，如果它能像物理甚至化学那样直接增加人类的欢乐和减少人类的痛苦，那么高斯或

****

二分之一个证明等于 0。　　— 高斯

其他数学家决不会愚蠢到为这种应用哀叹或后悔。但是科学可为善服务，也可为恶助纣 (特别是在战争时期)，这样高斯和另一些数学家就应该庆幸有一种科学，就是他们的科学，由于其远离人类日常的活动而保留了其纯洁性。

§ 23

纯数学和应用数学间最大的差异也许表现在几何学方面。纯几何学科包括很多分支，如射影几何、欧几里得几何、非欧几何，等等。每一种几何都是一种模型，即概念构成的造型，应该按照各个独特造型的意义和美加以鉴别。几何是一幅图像，是很多方面的合成品，也是数学实在的一部分，并且是一个不完全的复本 (然而，在其范围内又是准确的复本)。但是现在对我们最重要的一点是：纯几何学无论如何也不能描写物理世界的时空实体，因为地震和日食不是数学概念。

这些话对于外行来说可能有点矛盾，但对于一个几何学家来说则是真理，我可以举一个形象的例子来加以说明。假如我作一个有关几何学的讲座，例如普通的欧几里得几何，我会在黑板上画一些图形，一些直线、圆或椭圆的草图来激发听众的想象。显然，我画图的质量不会对我所证明的定理有什么影响，图形的作用只是将我的意思明白地传达给听众，如果我已做到这一点，那么让技巧高超的画师来重画一遍是毫无必要的，它们只是辅助教学的工具，不是讲座的实质内容。

让我们再进一步。我讲课的教室是物理世界的一部分，有其固定的形状。对于这种形状以及对于物理世界的一般形状的研究本身就是科学，可称之为“物理几何”。假设现在有一个高功率的发电机，或一个巨大的引力体搬进教室，物理学家就会告诉我们教室的几何结构已改变，它的整个物理造型已经轻微但确实被改变了。那么我所证明的定理是否也变得错误了？我的求证当然是没受影响的，这就像莎翁的剧作不会由于读者不小心将茶泼在某一页上而改变一样。剧本是独立于所印刷的纸张的，“纯几何”也是独立于教室或物理世界的其他部分的。

这是纯数学家的观点。应用数学家、数学物理学家自然是另一种看法，因为物理世界 (也有其结构和形状) 已经在他脑中先人为主了，对于这种形状我们不能像描述纯几何学那样确切描绘，但是我们能说出几点名堂来。我们可以精确或粗略地描绘出它的组成部分之间的关系，并把这种关系与某些纯几何体系的组成间精确的关系作一个比较，这样我们也许可以找出两种关系间的相似之处，那么我们面前就会有一幅“符合物理世界的事实”的图来。几何学家给物理学家提供了一整套可供选择的图形，这当中可能某一幅图比其他的更符合事实，于是提供这幅图的几何学就成了应用数学家最重要的几何学。我可以补充一句，即使是纯数学家也会对这种几何学更加欣赏，因为还没有哪个数学家纯到对物理世界毫无兴趣的地步。但是，一旦他屈服于这种诱惑，他就放弃了他纯数学的立场。

史济怀教授访谈

0301 刘阔

在科大数学系，没有听过史济怀先生数分课的同学恐怕是少之又少的 —— 事实上，不论先生是否教大家，只要有机会，“蹭课” 的同学绝对是大有人在的。史先生的课堂总是坐得满满的：本系的、外系的；本届的、上届的；甚至外校的同学，读研的同学 …… 个个仔细聆听，认真笔记。每临学期终了，同学们也总是团团围住史先生，请他在他和常庚哲先生编著的《数学分析》上签名留念 …… 先生深入浅出的讲解，淡然谦逊的风度，相信每个上过他数分课的同学都有深深的体会，都难以忘怀。

带着对先生深深的尊敬，我们有幸在近日采访了他。

早在 1958 年科大创建时，先生就来到了科大。回忆起科大当年下迁合肥时的情景，先生说，当时的科大都是泥巴路，校园是很荒芜的，以致农民们放牛都会常常进到科大。学校修围墙，常常是今天刚修好，明天就添了几个洞 — 附近的居民把砖头敲去自家用了。科大就是在那样艰苦的环境下一点一点发展起来的。

先生在科大教书已经 48 年了，其间不知上过多少节课，教过多少学生。问及先生当老师的体会，先生说，“我们科大有句话，‘今天我以科大为荣，明天科大以我为荣’，当老师教学生也差不多是这样。77，78 级第一届少年班，我教他们高等数学。当时他们是十几岁的小孩，我四十几岁；去年他们回科大，他们四十几岁了，有的还带着自己的小孩，我成老头子了。” 说罢就哈哈的笑起来。史先生谈到这两届学生中，出了不少人才，其中就有微软的全球副总裁张亚勤，还有德意志银行上海分行的总经理，还有 …… 史先生依稀回忆起当年的情景，非常感慨。

史先生说，教学生的效果短时间里是看不出来的。可是如今，看到几十年前的学生现在都那么有成就，相信先生心里一定是倍感欣慰的吧。先生说，“我为什么喜欢教本科生呢？就是因为和你们在一起特别高兴，觉得你们当中一定能培养出一批人才。至于这个人才是张三还是李四，就要靠自己的勤奋努力了，光靠小聪明是成不了才的!”

史先生 1935 年出生，经历了 “反胡风”、“反右”、“大跃进”、“文化革命” 等等运动，用他自己的话说，他们是什么运动都经历过的一代人。史先生还能清晰的记得大跃进时，全国钢铁总产量计划要从 535 万吨翻一番达到 1070 万吨，高楼上到处写着 1070；除四害时，大家在厕所旁抓蛆，围追麻雀，麻雀被追得飞不

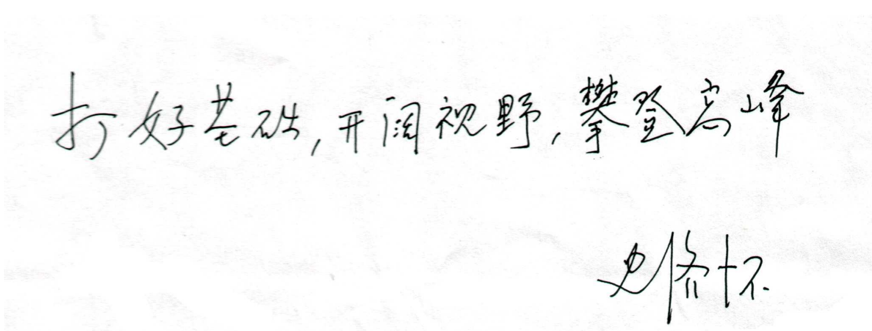
动，直接从天上落了下来。先生说，“那些都是些很无聊的事情，可是大家都必须得做这个。十年动乱期间，很多人受到迫害，知识分子不能做自己想做的事。所以四人帮被打倒后，大家真的是像被解放了一样高兴，群众自发的到街上游行，放鞭炮。”

先生说，文革十年，积压了很多人才。文革之后，科大作为科学院的大学，在体制等许多方面非常灵活，不拘一格，招了很多人才。先生说，这也许正是科大历经坎坷却在文革后迅速崛起的原因。著名代数几何学家肖刚教授，当时是江苏师范学院（苏州大学的前身）英语系大三的学生。而现任中科院研究生院博士生导师的李克正教授，那时正在街道工厂劳动。他们热爱数学，自学了从高中到大学的所有数学课程，而且出色地通过了科大的考核，被科大破格录取为研究生。还有我们系的刘太顺教授文革后考上了中南矿业学院，自己退学自学数学考上了科大的研究生。

谈到出国留学，史先生说：“你们知道现在国家对留学的政策是什么吗？有 12 个字：‘鼓励留学，欢迎回国，来去自由’。以前是没有这样的自由的，总担心一流的人才都流失到了国外。其实这样是好的。如果不出国，有些知识技术在国内是学不来的。有些人出国要回来，可以报效祖国；有的人不回来，但也是很有爱国心的，也能很好的报效祖国，比方说杨振宁、李政道。中国人很多，人才是不会缺的。二战以后，日本最优秀的人才也是纷纷去了美国，可是日本依然发展的很好很快，‘二流’的人才办起了索尼松下，‘二流’成了‘一流’，可见两者并不是绝对的。”访谈期间，史先生还问起 02 级出国及留校的情况，对科大学子的关心溢于言表。

最后，当我们请史先生给同学寄语时，先生说：“你们现在环境真的很好，我希望大家不要浪费时间，一定要好好学习。大家既然考进了科大，就说明你的智力能力已经达到了一定的水平，至于能不能成才就靠自己的努力了。”

史先生为《蛙鸣》的题词



从实用的观点来判断，我的数学生涯的价值等于零。 —哈代

A Proof of Finite Sum Theorem Using the Concept of Ultrafilter

0201 Lei Tao

In this discussion we aim towards a proof of a celebrated result in combinatorial number theory, the Finite Sum Theorem. Originally proven by Professor N.Hindman with number theoretic techniques, we here show a proof that involves a unique synthesis of topology and algebra. We state the theorem:

Theorem 1 (Finite Sum Theorem(Hindman)) *Let $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ be a finite partition of the set of natural numbers N. There exists an A_i that contains an infinite sequence whose finite, nonrepeating sums remain in A_i.*

We will need the very useful concept of ***ultrafilter*** from set-theroetic topology.

Definition 1 *Let X be a set. A nonempty family $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ is a **filter** provided:*

(1) $F \in \mathcal{F}$ implies $F \neq \emptyset$

(2) $F, G \in \mathcal{F}$ implies $F \cap G \in \mathcal{F}$

(3) $F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{P}(X)$ and $G \supset F$ imply $G \in \mathcal{F}$ (Superset Property)

Definition 2 *A filter $\mathcal{F}$ on a set X is an **ultrafilter** if it is a maximal element in the set of all filters on X, partially ordered by inclusion. I.e, $\mathcal{F}$ is not contained in any strictly larger filter on X.*

If $\mathcal{U}$ is an ultrafilter then it contains so many subsets of X that for all $A \subset X$ either $A \in \mathcal{U}$ or $X \backslash A \in \mathcal{U}$.

Let $\beta N = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ is an ultrafilter on N $\}$.

For a given $n \in N, \mathcal{U} = \{A \subset N : n \in A\}$ is an ultrafilter on N. These are *principle* ultrafilters.

A Topological Structure on βN:

For $A \subset N$, set $A^* = \{\mathcal{U} \in \beta N : A \in \mathcal{U}\}$. Then the set $\{A^* : A \subset N\}$ forms a basis for a compact Hausdorff topology on βN. Next, we would like to identify the elements of N with certain elements of βN, so that we can think of N as being contained in βN. We do this using the principle ultrafilters. We note that for $n \in N$, $\{n\}^*$ consists of one ultrafilter. [Suppose there exist $\mathcal{U}$ and $\mathcal{V}$ in $\{n\}^*$. If $A \in \mathcal{U}$, then $n \in A$. As $\{n\} \in \mathcal{V}$, we have $A \in \mathcal{V}$ by the superset property of $\mathcal{V}$. This shows $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Similarly, $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. So, $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.] Let n^* be the unique element of $\{n\}^*$. We then identify $n \in N$ with $n^* \in \beta N$. With this identification, it turns out that N is dense in βN and βN is the Stone-Cech Compactification of N.

An Algebraic Structure on βN:

We now define an algebraic operation (+) on βN that extends the ordinary sum on N, i.e. $n^* + m^* = (n+m)^*$. For $A \subset N$, define $A - n = \{k \in N : k + n \in A\}$. This is simply the elements of A shifted to the left n units. For $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta N$, define:

$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{A \subset N : \{n \in N : A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}\}$.

Theorem 2 $n^* + m^* = (n+m)^*$, *for all* $n, m \in N$

Proof

$$\begin{aligned} n^* + m^* &= \{A \subset N : \{k \in N : A - k \in n^*\} \in m^*\} \\ &= \{A \subset N : \{k \in N : n \in A - k\} \in m^*\} \\ &= \{A \subset N : \{k \in N : n + k \in A\} \in m^*\} \\ &= \{A \subset N : A - n \in m^*\} \\ &= \{A \subset N : m \in A - n\} \\ &= \{A \subset N : n + m \in A\} \\ &= (n+m)^* \end{aligned}$$

□

It can be shown that (+) defined above is closed and associative, making $(\beta N, +)$ a semigroup. Furthermore, the topological and algebraic structures on βN interact well: For a fixed $\mathcal{U} \in \beta N$, the left translation map $L_{\mathcal{U}} : \beta N \to \beta N$ defined by $L_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} + \mathcal{V}$ is continuous. Then, we finally have the necessary structure on βN for the proof of the Finite Sum Theorem: $(\beta N, +)$ is a *compact, left-topological semigroup.*

A very important theorem is known about such structures:

Theorem 3 (Auslander-Ellis) *Every compact left-topological semigroup has an idempotent, i.e. an element* a *such that* $a + a = a$.

In great mathematics there is a very high degree of unexpectedness, combined with inevitability and economy.

— G H Hardy

As $(\beta N, +)$ is such a structure, the following is an immediate corollary:

Theorem 4 (Glazer) *There exists* $\mathcal{U} \in \beta N$ *such that* $\mathcal{U} + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Lemma 1 (Galvin) *Let* $\mathcal{U}$ *be an idempotent element of* βN. *Then for all* $A \in \mathcal{U}$ *there exists an infinite sequence* $B \subset A$ *such that all nonempty finite sums of elements in* B *remains in* A.

Proof of Finite Sum Theorem . Consider the partition $N = \cup_{i=1}^{k} A_k$, and let $\mathcal{U}$ be an idempotent ultrafilter on N. There exists some $i \in \{1, \cdots, k\}$ such that $A_i \in \mathcal{U}$. By Galvin's Lemma, there exists an infinite sequence $B \subset A_i$ such that all nonempty finite sums of elements of B remain in A_i. $\square$

As a final remark, we note that techniques similar to the above can be used to prove other results in combinatorial number theory, notably Van der Waerden's Theorem and the Hales-Jewett Theorem.

菲尔兹奖奖章

正面

反面

菲尔兹奖是以加拿大数学家、教育家约翰 · 菲尔兹的名字命名的一项著名的世界性数学奖。1932 年在第 9 届国际数学家大会上设立，专门用于奖励 40 岁以下的年轻数学家的杰出成就。1936 年首次颁奖，每 4 年一次，每次获奖者不超过 4 人，每人可获得一枚奖章和 1500 美元。

菲尔兹奖章正面有希腊数学家阿基米德的头像，并用拉丁文镌刻着:“超越人类极限，做宇宙主人”的格言；背面用拉丁文写着:“全世界的数学家们：为知识作出新的贡献而自豪”。

Mathematics is a game played according to certain simple rules with meaningless marks on paper.

—David Hilbert

A general approach rate to the strong law of large numbers

0217 Hu Ming

We obtain the strong growth rate for the sum S_n of random variables by using a Hajek-Renyi type maximal inequality. Under the same conditions as that in Fazekas and Klesov(Theory Probab. Appl. 45 (2000) 436), we get sharper results for some dependent sums.

Introduction

The strong law of large numbers (SLLN) asserts that a sequence of cumulative sums of random variables becomes "nonrandom" by normalizing it by an appropriate sequence of nonrandom numbers and approaching the limit. Many results of this type were obtained for both independent and dependent summands forming cumulative sums.

There are two basic approaches to prove the strong law of large numbers. The first is to prove the desired result for a sub sebsequence and then reduce the problem for the whole sequence to that for the subsequence. In so doing, a maximal inequality for cumulative sums is usually needed for the second step. Note that maximal inequalities make up a well-developed branch of probability theory and many inequalities are known for different classes of random variables.

The second approach is to use directly a maximal inequality for normed sums. Inequalities of this kind are said to be of Hajek-Renyi type, referring to the paper by Hajek and Renyi devoted to independent summands. However, after a Hajek-Renyi inequality is obtained, the proof of the strong law of large numbers becomes an obvious problem.

In this paper, our goals are to show that a Hajek-Renyi type inequality is , in fact, a consequence of an appropriate maximal inequality for cumulative sums and to show that the latter automatically implies the strong law of large numbers. Most important, we made no restriction on the dependence structure of random variables.

Recently, Fazekas and Klesov obtained a Hajek-Renyi type maximal inequality. Then they proved the strong law of large numbers for general summands, and give some applications for dependent summands. In this paper, we study the strong growth rate for sums of random variable under the same conditions as that in Fazekas and Klesov. We get sharper results for some dependent random variable sums.

Hajek-Renyi type maximal inequality and strong law of large numbers

Lemma 1 *(Hajek-Renyi type maximal inequality) Let $\beta_1, \cdots, \beta_n$ be a nondecreasing sequence of positive numbers. Let $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ be nonnegative numbers. Let r be a fixed positive number. Assume that for each m with $1 \le m \le n$*

$$E\left[\max_{1\le l\le m}|S_l|\right]^r \le \sum_{l=1}^{m}\alpha_l \tag{1}$$

Then

$$E\left[\max_{1\le l\le n}|\frac{S_l}{\beta_l}|\right]^r \le 4\sum_{l=1}^{n}\frac{\alpha_l}{\beta_l^r} \tag{2}$$

Proof First, we multiply β_1^r on both side of (2). Since $\beta_1 > 0$, (2) holds true if and only if

$$E\left[\max_{1\le l\le n}|\frac{S_l}{\beta_l/\beta_1}|\right]^r \le 4\sum_{l=1}^{n}\frac{\alpha_l}{(\beta_l/\beta_1)^r}$$

So we can suppose that $\beta_1 = 1$.

Let $c = 2^{1/r}$. Consider the sets

$$A_i = \{k : c^i \le \beta_k < c^{i+1}\}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots$$

Because $\beta_1 = c^0 = 1$, we notice that $1 \in A_0$, $A_0 \ne \varnothing$. Using A_i, we can seperate $1, \cdots, n$ into some pieces.

Denote by $i(n)$ the index of the last nonempty A_i. When i is large enough such that $\beta_n < c^i$, $A_i = \varnothing$. So $i(n) < \infty$. If A_i is nonempty, let $k(i) = \max\{k : k \in A_i\}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, while $k(i) = k(i-1)$ if A_i is empty. Let $k(-1) = 0$.

If A_l is nonempty, let

$$\delta_l = \sum_{j=k(l-1)+1}^{k(l)}\alpha_j, \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

where δ_l is considered to be zero if A_l is empty.

For a fixed ω_0, there exists some l_0, A_{i_0} such that $l_0 \in A_{i_0}$, and:

$$\max_{1\le l\le n} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r(\omega_0) = |\frac{S_{l_0}}{\beta_{l_0}}|^r(\omega_0) \le \max_{l\in A_{i_0}} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r(\omega_0) \le \sum_{i=0}^{i(n)} \max_{l\in A_i} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r(\omega_0)$$

The inequality above holds true for almost every $\omega_0 \in \Omega$. After take expectation on both sides, the inequaltiy still holds true. We have:

$$E\left[\max_{1\le l\le n} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r\right] \le E\left[\sum_{i=0}^{i(n)} \max_{l\in A_i} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r\right] = \sum_{i=0}^{i(n)} E\left[\max_{l\in A_i} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r\right]$$

Since $i(n) < \infty$, we can change the sum and expectation. According to the definition of A_i, when $l \in A_i$, $\beta_l \ge c^i$, so $\beta_l^{-r} \le c^{-ir}$. We have:

$$\sum_{i=0}^{i(n)} E\left[\max_{l\in A_i} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r\right] \le \sum_{i=0}^{i(n)} c^{-ir} E\left[\max_{l\in A_i} |S_l|^r\right]$$

Since $k(i) = \max\{k : k \in A_i\}$, $i = 0, 1, 2, \cdots$, we notice that $A_i \subset \{1, \cdots k(i)\}$ Using the condition (1), we have:

$$E\left[\max_{l\in A_i} |S_l|^r\right] \le E\left[\max_{1\le l\le k(i)} |S_l|^r\right] \le \sum_{l=1}^{k(i)} \alpha_l$$

$$\sum_{i=0}^{i(n)} c^{-ir} E\left[\max_{l\in A_i} |S_l|^r\right] \le \sum_{i=0}^{i(n)} c^{-ir} \sum_{k=1}^{k(i)} \alpha_k$$

According to the defintion of δ_l and change the order of sum, we have:

$$\sum_{i=0}^{i(n)} c^{-ir} \sum_{k=1}^{k(i)} \alpha_k = \sum_{i=0}^{i(n)} c^{-ir} \sum_{l=0}^{i} \delta_l = \sum_{l=0}^{i(n)} \delta_l \sum_{i=l}^{i(n)} c^{-ir}$$

Now we get the inequality:

$$E\left[\max_{1\le l\le n} |\frac{S_l}{\beta_l}|^r\right] \le \sum_{l=0}^{i(n)} \delta_l \sum_{i=l}^{i(n)} c^{-ir} \le \sum_{l=0}^{i(n)} \delta_l \sum_{i=l}^{\infty} c^{-ir} = \frac{1}{1-c^{-r}} \sum_{l=0}^{i(n)} \delta_l c^{-lr}$$

According to the definition of δ_l, we have:

$$\frac{1}{1-c^{-r}} \sum_{l=0}^{i(n)} \delta_l c^{-lr} = \frac{1}{1-c^{-r}} \sum_{l=0}^{i(n)} c^{-lr} \sum_{j=k(l-1)+1}^{k(l)} \alpha_j$$

On earth there is nothing great but man; in man there is nothing great but mind.

—William Rowan Hamilton

Using the defintion of A_i, when $j \in A_l$, $\beta_j < c^{l+1}$, we have:

$$
\begin{aligned}
E\left[\max_{1\le l\le n}|\frac{S_l}{\beta_l}|^r\right] &\le \frac{1}{1-c^{-r}}\sum_{l=0}^{i(n)}c^{-lr}\sum_{j=k(l-1)+1}^{k(l)}\alpha_j \\
&\le \frac{1}{1-c^{-r}}\sum_{l=0}^{i(n)}c^{-lr}\sum_{j=k(l-1)+1}^{k(l)}c^{(l+1)r}\frac{\alpha_j}{\beta_j^r} \\
&= \frac{c^r}{1-c^{-r}}\sum_{l=0}^{i(n)}\sum_{j=k(l-1)+1}^{k(l)}\frac{\alpha_j}{\beta_j^r} = 4\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{\beta_k^r}
\end{aligned}
$$

This completes the proof.

Lemma 2 *(Fazekas-Klesov strong law of large numbers) Let $b_1, b_2, \cdots$ be a nondercreasing unbounded sequence of positive numbers. Let $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ be nonnegative numbers. Let r be a fixed positive number. Assume that for each $n \ge 1$*

$$E\left[\max_{1\le l\le n}|S_l|\right]^r \le \sum_{l=1}^{n}\alpha_l \tag{3}$$

if $\sum_{l=1}^{\infty}(a_l/b_l^r) < \infty$, then

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n} = 0 \quad a.s. \tag{4}$$

Proof Case 1: We assume that there exists an integer m, such tha $\alpha_n = 0$, $n \ge m$. Using condition (3), for all $n > 1$, we have:

$$E\left[\max_{1\le l\le n}|S_l|\right]^r \le \sum_{l=1}^{m}\alpha_l$$

Let $n \to \infty$. By monotone convergence theorem, we get change the order of limitation and expectatioin:

$$\lim_{n\to\infty}E\left[\max_{1\le l\le n}|S_l|\right]^r = E\left[\lim_{n\to\infty}\max_{1\le l\le n}|S_l|\right]^r = E\left[\sup_{n\ge1}|S_n|\right]^r \le \sum_{l=1}^{m}\alpha_l < \infty$$

So we get:

$$\sup_{n\ge1}|S_n|^r < \infty \quad a.s.$$

For almost every $\omega_0 \in \Omega$,

$$\frac{|S_n(\omega_0)|}{b_n} \le \frac{\sup_{n\ge1}|S_n(\omega_0)|}{b_n} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

So we have the conclusion:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{b_n}=0,\quad a.s.$$

Case 2: We assume that $\alpha_n>0$ for an infinite number of indices n. Set:

$$v_n=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{\alpha_k}{b_k^r},\quad \beta_n=\max_{1\le k\le n} b_k v_k^{1/2r}$$

It is easy to see that $0<v_n<\infty$, for all $n\ge 1$, and v_n is a decreasing sequence. Using the mean value theorem: $\forall\ 0<\alpha<1$, there exists $\xi\in(v_{n+1},v_n)$, such that:

$$v_n^{1-\alpha}-v_{n+1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)(v_n-v_{n+1})\xi^{-\alpha}\ge(1-\alpha)\frac{\alpha_n}{b_n^r v_n^\alpha}$$

Sum from 1 to ∞, we have:

$$(1-\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{b_n^r v_n^\alpha}<v_1^{1-\alpha}-\lim_{n\to\infty}v_{n+1}^{1-\alpha}=v_1^{1-\alpha}<\infty$$

At the same time, we notice that $v_k\to 0$, since $\sum\limits_{k=1}^{\infty}v_k<\infty$. $\forall\varepsilon>0$, there exists $N\in\mathbf{N}$, such that when $i>N$, $v_i^{1/2r}<\varepsilon$ When k is large enough, we have:

$$\frac{\beta_k}{b_k}\le\frac{\max\limits_{1\le i\le N}b_i v_i^{1/2r}}{b_k}+\frac{\max\limits_{N+1\le i\le k}b_i v_i^{1/2r}}{b_k}\le\frac{\max\limits_{1\le i\le N}b_i v_i^{1/2r}}{b_k}+\varepsilon$$

Let $k\to\infty$, we have $\beta_k/b_k<\varepsilon$. Let $\varepsilon\to 0$, we prove that $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k/b_k=0$

So the sequence $\{\beta_n,n\ge 1\}$ is such that

(a) $\beta_k<\beta_{k+1},k=1,2,\cdots;$

(b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k/\beta_k^r\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k/b_k^r v_k^{1/2}<\infty$

(c) $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k/b_k=0$

Then Lemma 1 implies that (2) is satisfiled. Therefore, $E[\sup\limits_{l\ge 1}|S_l/\beta_l|]^r\le 4\sum\limits_{l=1}^{\infty}\alpha_l/\beta_l^r<\infty$. This implies $\sup\limits_{l\ge1}|S_l/\beta_l|<\infty$, a.s.

Finally,

$$0\le\left|\frac{S_l}{b_l}\right|=\left|\frac{S_l}{\beta_l}\right|\frac{\beta_l}{b_l}\le\left\{\sup_{l\ge1}\left|\frac{S_l}{\beta_l}\right|\right\}\frac{\beta_l}{b_l}\to 0,\quad a.s.\quad as\quad l\to\infty$$

The lemma is proved. □

Number theorists are like lotus-eaters - having tasted this food they can never give it up.

—Leopold Kronecker

Strong growth rate of random sequence under moment conditions

Lemma 3 *(Dini Theorem) Let $c_1, c_2, \cdots$ be nonnegative numbers, $v_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k$, if $0 < c_n < \infty$ for $n \geq 1$,then*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{v_n^{\delta}} < \infty, \quad \forall 0 < \delta < 1 \tag{5}$$

Proof Let $f(x) = x^{1-\delta}$, $x > 0$, $0 < \delta < 1$, then $f'(x) = (1-\delta)/x^{\delta}$. By the mean value theroem, there exists a $\xi \in (b, a)$, such that $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$. Take $b = v_n$, $a = v_{n+1}$, then we have:

$$v_n^{\delta} - v_{n+1}^{\delta} = (1-\delta)(v_n - v_{n+1})/\xi^{\delta} \geq (1-\delta)c_n/v_n^{\delta}, \quad \xi \in (v_n, v_{n+1})$$

Thus:

$$(1-\delta)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{v_n^{\delta}} \leq v_1^{\delta} - \lim_{n\to\infty} v_{n+1}^{\delta} = v_1^{\delta} < \infty$$

Then the lemma is proved. □

Theorem 1 *Let $b_1, b_2, \cdots$ be a nondecreasing unbounded sequence of positive numbers and $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ be nonnegative numbers. Let r and C be fixed positive numbers. Assume that for each $n \geq 1$*

$$E\left(\max_{1\leq l\leq n} |S_l|\right)^r < C\sum_{l=1}^{n} \alpha_l \tag{6}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l}{b_l^r} < \infty \tag{7}$$

then

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{b_n} = 0 \quad a.s. \tag{8}$$

and with the growth rate

$$\frac{S_n}{b_n} = O\left(\frac{\beta_n}{b_n}\right) \quad a.s. \tag{9}$$

where

$$\beta_n = \max_{1\leq k\leq n} b_k v_k^{\delta/r} \quad \forall 0 < \delta < 1, \quad v_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\alpha_k}{b_k^r}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\beta_n}{b_n} = 0 \tag{10}$$

Proof 1) First we assume that there exists an integer m such that $\alpha_n = 0$ for $n \geq m$, thus $\beta_n = \max\limits_{1\leq k\leq m} b_k v_k^{\delta/r}$ for $n \geq m$. By monotone convergence theorem, we have

$$E\left(\sup_{n\geq 1} |S_n|\right)^r = \lim_{n\to\infty} E\left(\max_{1\leq l\leq n} |S_l|\right)^r \leq C\sum_{l=1}^{m} \alpha_l < \infty,$$

thus $\sup\limits_{n\geq 1} |S_n| < \infty$, a.s., and this easily gives (8)-(10).

God made the integers, all else is the work of man. —Leopold Kronecker

2) We assume that $\alpha_n > 0$ for infinitely many n. By (7) and Lemma 3, we know that $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n / b_n^r v_n^\delta < \infty$, it is easy to see that $0 < \beta_k \le \beta_{k+1}$ for $k \ge 1$, and $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n / \beta_n^r \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n / b_n^r v_n^\delta < \infty$,

$$\frac{\beta_k}{b_k} \le \frac{\max\limits_{1 \le l < k_1} b_l v_l^{\delta/r}}{b_k} + \frac{\max\limits_{k_1 \le l \le k} b_l v_l^{\delta/r}}{b_k} \le \frac{\max\limits_{1 \le l < k_1} b_l v_l^{\delta/r}}{b_k} + v_{k_1}^{\delta/r},$$

by (7) and $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, we get $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n / b_n = 0$. (6) and Lemma 2 imply that

$$E\left(\max_{1 \le l \le n} \left|\frac{S_l}{\beta_l}\right|\right)^r \le 4C \sum_{l=1}^{n} \frac{\alpha_l}{\beta_l^r} \le 4C \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l}{\beta_l^r} < \infty,$$

hence by monotone convergence theorem, we have

$$E\left(\sup_{n \ge 1} \left|\frac{S_n}{\beta_n}\right|\right)^r = \lim_{n\to\infty} E\left(\max_{1 \le l \le n} \left|\frac{S_l}{\beta_l}\right|\right)^r \le 4C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n^r} < \infty,$$

so that $\sup\limits_{n \ge 1} |S_n / \beta_n| < \infty$, a.s., and

$$0 \le \left|\frac{S_n}{b_n}\right| \le \frac{\beta_n}{b_n} \sup_{n \ge 1} \left|\frac{S_n}{\beta_n}\right| = O\left(\frac{\beta_n}{b_n}\right), \quad \text{a.s.},$$

this completes the proof.

$\square$

Reference

[1] Hajek, J., Renyi, A., 1955. Generalization of an inequality of Kolmogorov, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 6, 281-283.

[2] Fazekas, I., Klesov, O., 2000. A general approach to the strong law of large numbers. Theory Probab. Appl. 45, 436-449.

从局部最短到整体最短

0201　张鹏飞

摘要： 测地线是所有几何及相关科学中的核心概念。在几何上测地线的特征是局部最短性。对一条给定的测地线，我们比较关心它在什么标准下具有特定的最短性的。本文通过引入一些很自然的概念来描述这件事情，然后给出那些最常见的例子的有关最短性质结论.

引言 - 从局部最短出发

设 (M,g) 是 n 维定向黎曼流形，其黎曼度量为 g。设 D 为 M 上的 Levi-Civita 联络. 则 $D_XY-D_YX=[X,Y]$ 且曲率算子 $R_{XY}=D_{[X,Y]}-[D_X,D_Y]$。

给了一条曲线 $\gamma:[a,b]\to M$ 后，我们问：在 M 上所有连接 $p=\gamma(a)$ 到 $q=\gamma(b)$ 的曲线中 γ 是不是最短的？有如下的考虑：

(1) 在 $\gamma(a)$ 的一个充分的小邻域内 (q 离 p 很近)。这时我们可以计算看它是不是满足测地线方程。这时最短性其实就是指数映射的性质。

(2) 在 γ 的一族临近曲线中（比如在管状邻域中）。由于一条不光滑的曲线在经过适当的光滑化之后总能得到更短的曲线，那么我们只需要把那些光滑的曲线拿过来比较它们的长短。这时一个有效的办法是计算变分，在微积分中我们已经很熟悉了。

如果考虑大范围上的最短性，用变分的方法就不够了。因为把流形 M 某点“吹大”之后，通过该点的最短测地线的最短性就被破坏了。扰动后最短的线将分成几个方向向山脚滑落（视吹大的那个点为山峰）。控制扰动的形状就可以得到整体上不是最短但在临近曲线中最短的线。因为变分只是在临近曲线中考虑的，在大范围上还没有很有效的方法。作为变通引入一个整体最短性的几何定义：割点。

第一变分与第二变分

考虑 M 上两个点 p,q 及给定的一条从 p 到 q 的测地线 $\gamma:[a,b]\to M$。在它附近有一族测地线 $\gamma:[a,b]\times[0,\epsilon]\to M$，或者记为 $\gamma_u:[a,b]\to M, u\in[0,\epsilon]$，满足

$$\gamma(t,u)=\gamma_u(t);\gamma_0=\gamma;\gamma_u(a)=\gamma(a),\gamma_u(b)=\gamma(b)$$

记 $L(u)=L(\gamma_u)=\int_a^b|\dot{\gamma}_u(t)|dt$ 为测地线 γ_u 的长度，$u\in[0,\epsilon]$。可定义沿 γ 的两个向量场如下：

(1)$T(\gamma(t,u))=d\gamma(\frac{\partial}{\partial t}(t,u))$

(2)$U(\gamma(t,u))=d\gamma(\frac{\partial}{\partial u}(t,u))$(称为 γ_u 的横截向量场。)

由 $[\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial u}]=0$ 可知 $[T,U]=0$. 显然 $D_TT=0$. 于是

$$D_TD_TU=D_TD_UT=D_TD_UT-D_UD_TT-D_{[T,U]}T=-R_{TU}T$$

将此方程限制在 γ 上，得到 Jacobi 方程： $D_TD_TU+R_{TU}T=0.$

一般的，我们称沿曲线 γ 适合 Jacobi 方程的向量场 U 为 Jacobi 场. 选定一个沿 γ 平行的单位正交标架场 $\{e_1(t),\cdots,e_n(t)\}$，不妨设 $e_1(t)=\dot{\gamma}(t)$. 如果记 $U(t)=f^i(t)e_i(t)$，$R_{e_i(t)e_j(t)}e_k(t)=R^l_{ijk}(t)e_l(t)$ (上下指标重复表示我们进行从 1 到 m 的求和)，则 Jacobi 方程等价于 $\ddot{f}^i(t)+R^i_{1j1}(t)f^j(t)=0,\forall i.$

由常微分方程组解的存在唯一性定理可得：

命题 1 *(1) 设测地线 γ, 给定 $v,w\in M_{\gamma(0)}$, 则存在唯一沿 γ 的 Jacobi 场 U 使得 $U(0)=v,\dot{U}(0)=w$.*

(2) 沿一条测地线的 Jacobi 场的零点是离散的，除非此 Jacobi 场恒为零.

引理 1 *设 U 是沿测地线 γ 的一个 Jcaobi 场，那么存在 $a,b\in\mathcal{R}$, 给出下面的分解*

$$U=U^{\perp}+(at+b)\dot{\gamma}$$

其中 $U^{\perp}$ 也是沿 γ 的 Jcaobi 场并且 $<U^{\perp},\dot{\gamma}>=0$

这个引理表明，垂直于 γ 的 Jacobi 场才是有意义的。称与 γ 垂直的 Jacobi 场为正常 Jacobi 场。直观上讲，给了一个 Jacobi 场 U，沿 γ“拉伸”$tU(t\in[0,\epsilon])$ 就可以得到一个单参数测地线族。由于 U 沿 $\dot{\gamma}$ 的分量并不影响拉伸曲线的长度，只是改变了沿曲线走的速度。这相当于对 γ 进行重新参数化。故 $U^{\perp}$ 才是对曲线长度变化有贡献的量。

历史使人聪明，诗歌使人机智，数学使人精细，哲学使人深邃，道德使人严肃，逻辑与修辞使人善辩。

—培根

定义 1 $p\in M, X\in M_p, \exp_p: M_p\to M$. 称 $d\exp_p$ 在 X 处退化，如果在 $\gamma(t)=\exp_p(tX)$ 上存在一个不恒为零的正常的 *Jcaobi* 场 U, 满足 $U(p)=0=U(\exp_p(X))$. 这时称 X 为指数映射在 p 处的共轭点，称 $\exp_p X$ 为 p 沿着 $\gamma=\exp_p tX$ 的共轭点。

下面给出变分公式。不妨设 t 为 γ 的弧长参数，于是 $|\dot\gamma|=1, L(u)=\int_a^b|\dot\gamma_u(t)|dt$。由于 $T=\dot\gamma_u(t), U=d\gamma(\frac{\partial}{\partial u}), [T,U]=0$ 可知：

$$L'(u)=\int_a^b\frac{d}{du}\sqrt{<\dot\gamma_u(t),\dot\gamma_u(t)>}dt=\int_a^b\frac{1}{T}<T,D_UT>dt=\int_a^b\frac{1}{T}<T,D_TU>dt$$

特别的，u=0 时得到弧长第一变分公式：

$$L'(0)=\int_a^b<\dot\gamma,D_{\dot\gamma}U>dt=<\dot\gamma(t),U(t)>|_a^b-\int_a^b<\ddot\gamma(t),U(t)>dt$$

如果拉伸时端点固定，即 $U(a)=U(b)=0$，则 $L'(0)=-\int_a^b<\ddot\gamma(t),U(t)>dt$。

当 $L'(0)=0$, 我们知道测地线 γ 的长度在临近曲线沿 U 方向扰动的长度变化中是个临界值。为了判断 γ 是否是最短的，还需要考虑弧长的二阶变分 $L''(0)$:

$$L''(u)=\int_a^b\frac{d}{du}(\frac{1}{T}<T,D_TU>)dt$$

$$L''(0)=\int_a^b(|\dot U(t)|^2-<\dot\gamma,R_{U\dot\gamma}U>-[<\dot\gamma(t),U(t)>']^2+<D_UU,\dot\gamma>')dt.$$

以下我们总假设 U 是端点固定的正常 Jacobi 场，计算出上式：

$$L''(0)=\int_a^b[|\dot U(t)|^2-<R_{\dot\gamma U}\dot\gamma,U>]dt.$$

现在推广这个定义到较一般的向量场。对所有沿 γ 的满足 $X(t)\perp\dot\gamma(t)\quad\forall t\in(a,b)$ 的分段 C^∞ 向量场 X 的全体记为 $C_p^\infty[a,b]$。可以引入指标形式：

$$I(X,X)=\int_a^b[|\dot X(t)|^2-<R_{\dot\gamma X}\dot\gamma,X>]dt.$$

（对一个 C_p^∞ 的函数的积分视为在各个光滑片上的积分的和，而 $\dot X=D_{\dot\gamma}X$.）

直接计算得 I 对 $\mathcal{R}$ 为线性的：$I(aX,aX)=a^2I(X,X)$。可定义相应的二次型：$I(X,Y)=\frac{1}{2}[I(X+Y,X+Y)-I(X,X)-I(Y,Y)],\forall\ \ X,Y\in\mathcal{C}_p^\infty$。展开得到：

$$I(X,Y)=\int_a^b[<\dot X(t),\dot Y(t)>-<R_{\dot\gamma(t),X(t)}\dot\gamma(t),Y(t)>]dt.$$

这是一个对称二次型，称它为指标形式。这是我们从 γ 的变分诱导出的一个关于横截向量场的一个的二次型。这把曲线的变分分解为沿各个横截向量场的拉伸，而在各个横截向量场的拉伸能线性化研究。这是很大的改善，我们在微分几何中常这么做。

指标形式与测地线的最短性

设 M 上一条从 p 到 q 的一条测地线 $\gamma:[a,b]\to M$。$\gamma[a,t]$ 在 t 充分接近 a 时我们知道 γ 在所有 M 上的连结 $\gamma(a)$ 到 $\gamma(t)$ 是最短的。当 t 走的比较远的时候，情况就有可能发生变化。一个常见的例子就是二维球面。一旦终点超过起始点的对径点，那么我们走的路就不是最短的了。下面我们会知道起始点的对径点就是它的共轭点。

引理 2 正规测地线 $\gamma:[a,b]\to M$. 如果 $\gamma(a)$ 共轭与 $\gamma(b),U$ 为沿 γ 的使 $U(a)=U(b)=0$ 的正常 *Jacobi* 场，则 $I(U,U)=0$。

证明 $I(U,U)=\int_a^b(|\dot{U}|^2+<\ddot{U},U>)dt=<\dot{U},U>|_a^b=0$。 □

下面叙述一个关键的等式：设 $X,Y\in C^\infty[a,b]$，且 $X,Y\perp\dot{\gamma}$

$$I(X,Y)=<\dot{X}(t),Y(t)>|_a^b-\int_a^b<\ddot{X}(t)+R_{\dot{\gamma}(t),X(t)}\dot{\gamma}(t),Y(t)>dt \tag{1}$$

按照伍先生 [1] 中的记号引入：

$\mathcal{V}=$ 所有沿 γ 满足 $X(t)\perp\dot{\gamma}(t)$ 的 $X\in C_p^\infty$ 向量场 X 的全体。

$$\mathcal{V}_0=\{X\in\mathcal{V}:X(a)=X(b)=0\}$$

命题 2 设正规测地线 $\gamma:[a,b]\to M,U\in\mathcal{V}$. 则 $I(U,V)=0,\forall V\in\mathcal{V}\Leftarrow:U$ 为 *Jacobi* 场。

命题 3 如果 $\gamma[a,b]$ 上不含 $\gamma(a)$ 的共轭点，则指标形式在 $\mathcal{V}_0$ 上为正定的。

命题 4 设 $\gamma(b)$ 是沿 γ 的关于 $\gamma(a)$ 的第一个共轭点，则指标形式在 $\mathcal{V}_0$ 上是半正定而非正定的。

命题 5 设 $\gamma(c)$ 是沿 γ 的关于 $\gamma(a)$ 的第一个共轭点，$a<c<b$，则指标形式在 $\mathcal{V}_0$ 上是不正定的。

这些性质的完整证明可在 [1] 里找到。比如第一个，由公式 (1) 可知，如果 U 为 Jacobi 场，则 $I(U,V)=0,\forall V\in\mathcal{V}_0$. 反之，取 [a,b] 上的一个分段光滑的非负函数 f，它恰在不光滑点为 0。考虑 $V=f*(\ddot{U}+R_{\dot{\gamma},U}\dot{\gamma})\in\mathcal{V}_0$ 则

$$0=I(U,V)=-\sum_i\int_{a_i}^{a_{i+1}}f(t)|\ddot{U}_i+R_{\dot{\gamma},U}\dot{\gamma}|^2dt$$

从而 U 为沿 γ 的 Jacobi 场。这样我们可以跳过其他的证明，来获得上面的直观解释。最典型的例子是三维空间中的单位球面 $M=S^2$，很容易想到一个点 $p\in S^2$ 的对径点 q 应该是它的共轭点，这是什么意思呢？

考虑球面在 p 点的切空间 T_pS^2 及其上的指数映射 $\exp : T_pS^2 \to S^2$。且可以假设 $\exists X\in T_pS^2, |X|=1, s.t. q=\exp(\pi X)$. 开始时不妨称呼它们为南极和北极。这时看切空间 T_pS^2 中一条特殊的圆 $C_t=\{Y\in T_pS^2, |Y|=1\}$ 在指数映射下的像：$\{\exp(\pi Y): Y\in C_t\}$。由圆的对称性可以知道 $\exp(tY)$ 是从南极出发沿 Y 方向的经线，并且在 $t=\pi$ 时同时达到北极。考虑指数映射在 $X\in T_pS^2$ 处的切映射 $d\gamma_q = d\exp_q$。由于在 $X\in T_pS^2$ 处的切空间与 T_pS^2 同构，设 T_pS^2 是由 X, X_1 张成的，其中 $X_1\perp X$。由于当 t 从小于 π 增加到大于 π 时，$\exp(tX)$ 像穿过其它点一样一样穿过 q 点。我们知道 $|d\gamma_q(X)| = |\frac{\partial\gamma(t)}{\partial t}|_{t=\pi}=1$ 即在 X 方向时不退化的，但在 X_1 方向却是退化的，因为 $\exp(\pi Y)=q, \forall Y$ 在切空间中与 X 垂直。由共轭点的定义可知道 γ 临近曲线中不是唯一最短的。

在几何上看这个是显然的，因为从其它经线出发走过的距离是一样。此时应该有一个沿 γ 的非零 Jacobi 场 $U, U(a)=U(b)=0$ 使得 $I(U,U)=0$。下面计算一下 Jacobi 方程。取 $e_1(t)=\dot\gamma(t), e_2(t)\perp e_1(t)$ 且保持定向。则 $U(t)=\sin(t)e_2(t), t\in[0,\pi]$ 即是在端点消失的，且满足 Jacobi 方程：$\ddot f(t)+1*f(t)=0$(因为此时曲率为 1) 的一个横截向量场。其实这个横截向量场在相差一个伸缩下是唯一的。即所有在端点消失的横截向量场：$U(t)=a\sin(t)e_2(t)$（是由方程解出来并满足初始条件的）。

一旦测地线走过共轭点之后，即使在临近曲线中它也不是最短的。例如我们把一根皮筋绷在球面上，把一个端点固定在南极，另一个端点向北极移动，一旦走过北极，皮筋就会向球的另一侧收缩。这说明在普通度量下，在它的附近有更短的连接两端的球面道路。现在我们对共轭点有了一点了解，在碰到第一共轭点之前测地线是在临近曲线中最短的，走过第一共轭点之后就不是最短了，即是在临近曲线中也有比它还要短的。进一步我们会问：什么时候测地线是整体最短的呢？

整体最短及割点的意义

下面考虑测地线什么时候是整体最短的。我们想找一个一般性的依据来判断整体最短性。首先会问: 如果还没碰到共轭点，那么一条测地线是整体最短的吗？再看一个常见的例子：圆柱面。为了方便起见，设出它在 R^3 中的坐标表

示：$x^2+y^2=1, \forall z$. 记 $p=(-1,0,0), q=(1,0,0)$. 设 X 是 p 处的切向量 $X=(0,1,0), \gamma(0)=p, \dot{\gamma}(0)=X$, 则 γ 是从 p 出发到 q 的测地线，且 $\exp(\pi X)=q$。从切空间到柱面的指数映射处处非退化，从而共轭点集是空集。但这时又有一些测地线不是最短的，比如当 γ 走过 q 点之后来到 q'，虽然在临近曲线中它还是最短的，但是走 $\exp(-tX)$ 显然会比走 $\exp(tX)$ 更早到 q'。现在我们再给出一个定义：

定义 2 M 为完备的 *Riemann* 流形，$\gamma: \mathcal{R}_+ \to M$ 为一条正规测地线。或者对所有的 t, $\gamma[0,t]$ 都是最短的，或者存在某个正值 $t_0, \gamma[0,t_0]$ 是最短的，但对任何 $s>t_0$, 都有比 $\gamma[0,s]$ 要短的连结 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(s)$ 的道路。在第二种情况，称 $\gamma(t_0)$ 为 γ 的关于 $\gamma(0)$ 的割点。

这个定义等价于说：在碰到割点之前，测地线都是整体最短的。如果共轭点和割点都出现的话，易见会先碰到割点。有时它们重合，比如在球面上，它们都是对径点。有时共轭点集是空集。比如上面的圆柱面，这时 p 的所有割点恰是 $\{x=1, y=0, \forall z\}$ 这条直线。在没碰到它之前，从 p 出发的测地线都是整体最短的。

对 $p \in M$，记 $\mathcal{C}(p)$ 为从 p 出发碰到的所有割点的集合，称为割迹。记 $\mathcal{V}(p)$ 为割迹的内部 (这是包含 p 的一个连通开集)。从 p 出发的测地线在割迹内部不会碰到割点，且存在 T_pM 中包含原点的一个开集 $V(p)$，使得 $\exp: V(p) \to \mathcal{V}(p)$ 为微分同胚，又有 $V(p)$ 微分同胚于单位开球（同胚是很显然的）。记 $V(p)$ 的边界为 $C(p)$。

定理 1 完备的 *Riemann* 流形 M 是紧致的当且仅当 $\forall x \in M, C(x)$ 都同胚于单位球面 $S_x \subset T_xM$

证明 若 M 紧致，记 $d(M)=\delta$. 于是正规测地线 $\gamma: \mathcal{R}_+ \to M, \gamma(0)=x$ 在走过 δ 长之后就不是最短了，且存在 $\epsilon>0$ 使得 $\gamma[0,\epsilon]$ 总是最短的，

$$=:C(x) \in B_x(0,\delta+\epsilon) \backslash B_x(0,\epsilon)$$

从而 $C(x)$ 同胚于 $S_x \in T_xM$. 反之，$C(x)$ 同胚于 $S_x \in T_xM$, 则 $V(x) \cup C(x)$ 紧致。令 $d=\max\limits_{x\in M}\max\limits_{X\in C(x)}|X|$, 则 $d(M)=d<\infty$, 从而 M 紧致。 □

定义 3 称 $U \subset M$ 为**一点凸的** (关于 $x \in U$)，如果 U 中任意一点恰可以用一条最短的测地线与 x 相连结。

由定义可知 $\mathcal{V}(p)$ 为关于 p 的最大的一点凸集。作为本文的结尾我们计算几个一点凸集的简单例子。

我此生没有什么遗憾，死亡并不可怕，它只不过是我要遇到的最后一个函数。 —拉格朗日

例 1

1). 欧氏空间 $\mathcal{R}^n$。割迹是空的，$\mathcal{V}(p)=\mathcal{R}^n$，比如 $\mathcal{R}^3$。

2). 球面 S^n。仅有 p 的对径点 q 是割点（亦是共轭点），$\mathcal{V}(p)=S^n\backslash q$，比如 S^2。

3). R^3 中的圆柱面 M：$\{x^2+y^2=1,\forall z\}$。$\mathcal{V}(-1,0,0)=M\backslash\{x=1,y=0\}$。

4). R^3 中的环面 M：$(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2=1$。$\mathcal{V}(-3,0,0)=M\backslash\{x^2+y^2=1,z=0\}\backslash\{(x-2)^2+z^2=1,y=0\}$。

我们看到环面的情况有点复杂，其实 $\{x^2+y^2=1,z=0\}\cup\{(x-2)^2+z^2=1,y=0\}$ 恰好是 $(-3,0,0)$ 的割点集。这是非常自然的，我们想像一下沿割迹把环面剪开，这个过程恰好是我们在拓扑上得到环面的逆过程。于是这个紧致流形可视为从一个闭的单位球通过对边界作某些“粘合”得到的（在严格意义上还要考虑保持度量）。对一般的紧致流形，这也是对的。这时，$V(p)\cup C(p)$ 微分同胚于闭单位球，$\exp_p:V(p)\cup C(p)\to M$ 是满射。这时指数映射就相当于对边界 $C(p)$ 进行的粘合，从而得到 $\mathcal{C}(p)$。我们想像一下球面和环面，这是两个非平凡的例子。一般性的证明见 [1]。

参考书 [1] 是本文的主要参考物，所有未给出的证明均可在其中找到。这是本异常好的教材。如果想对流形与拓扑之间的关系有一个较全面的认识，并且舍得花时间的话，[2] 是本绝好的参考书。

参考文献

[1] 伍鸿熙，沈纯理，虞言林。《黎曼几何初步》，北京大学出版社。

[2] 苏竞存。《流形的拓扑学》，武汉大学出版社。

Hodge 星算子及其性质

0201　孙俊

Hodge 星算子是微分几何中十分重要的一个算子，有了 Hodge 星算子的定义，我们就可以定义余微分算子，进而定义流形上的 Laplace-Beltrami 算子，最终可得到著名的 Hodge 分解定理。本文的主要目的是介绍 Hodge 星算子的定义及其基本性质。

设（M,g）是 m 维定向黎曼流形，其黎曼度量为 g。考虑 M 上任一坐标图（U,φ,x^i），我们有

$$g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j \tag{11}$$

$$g_{ij} = g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$$

以下若无特别说明，指标取值范围总是 $1,\cdots,m$。

易知 M 的体积元 η 可以表示成

$$\eta = \sqrt{G}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^m,\quad G = det(g_{ij}) \tag{12}$$

为了便于计算，我们引入 Kronecker 符号

$$\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = det\begin{pmatrix} \delta^{i_1}_{j_1} & \delta^{i_1}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_1}_{j_r} \\ \delta^{i_2}_{j_1} & \delta^{i_2}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_2}_{j_r} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \delta^{i_r}_{j_1} & \delta^{i_r}_{j_2} & \cdots & \delta^{i_r}_{j_r} \end{pmatrix} \tag{13}$$

当 r=1 时，这就是通常的 Kronecker delta δ^i_j，由定义式（3）直接看出，Kronecker 符号具有以下性质：

1. $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r}$ 关于指标 $(i_1,\cdots,i_r)$ 或 $(j_1,\cdots,j_r)$ 是反称的;
2. 若 $i_1<\cdots<i_r$,$j_1<\cdots<j_r$, 则 $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \delta^{i_1}_{j_1}\cdots\delta^{i_r}_{j_r}$;
3. $\delta^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_r} = \begin{cases} 0, & 若\ (j_1,\cdots,j_r)\ 不是\ (i_1,\cdots,i_r)\ 的置换; \\ 1, & 若\ (j_1,\cdots,j_r)\ 是\ (i_1,\cdots,i_r)\ 的偶置换; \\ -1, & 若\ (j_1,\cdots,j_r)\ 是\ (i_1,\cdots,i_r)\ 的奇置换。\end{cases}$

体积元 η 作为 M 的 m 次形式，可写成

$$\eta = \sum_{i<} \eta_{i_1 \cdots i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m} = \frac{1}{m!} \eta_{i_1 \cdots i_m} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_m} \tag{14}$$

其中

$$\sum_{i<} \equiv \sum_{i_1 < \cdots < i_m}$$

表示指标按大小顺序排列后求和，且

$$\eta_{i_1 \cdots i_m} = \sqrt{G} \delta^{1 \cdots m}_{i_1 \cdots i_m} \tag{15}$$

显然 dη=0，由于 $\eta_{i_1 \cdots i_m}$ 是 $(0, m)$ 型张量的分量，故

$$\eta_{i_1 \cdots i_m, k} = \frac{\partial \eta_{i_1 \cdots i_m}}{\partial x^k} - \sum_{t=1}^{m} \Gamma^l_{i_t k} \eta_{i_1 \cdots i_{t-i} l i_{t+1} \cdots i_m}$$

为 $(0, m+1)$ 型张量的分量。又 $dimM = m$，故有

$$\eta_{i_1 \cdots i_m, k} = 0 \tag{16}$$

用 $A^r(M)$ 表示 M 上 r 形式构成的向量空间，我们定义 Hodge 星算子 $*: A^r(M) \longrightarrow A^{m-r}(M)$ 如下：

定义 1 设 $\alpha \in A^r(M)$,$0 \leq r \leq m$, 局部可表示为

$$\alpha = \sum_{i<} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} = \frac{1}{r!} \alpha_{i_1 \cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \tag{17}$$

定义 $*\alpha \in A^{m-r}(M)$ 是

$$*\alpha = \sum_{j<} *\alpha_{j_{r+1} \cdots j_m} dx^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_m} \tag{18}$$

其中

$$*\alpha_{j_{r+1} \cdots j_m} = \sum_{i<} \eta_{i_1 \cdots i_r j_{r+1} \cdots j_m} \alpha^{i_1 \cdots i_r} \tag{19}$$

$$\alpha^{i_1 \cdots i_r} = g^{i_1 k_1} \cdots g^{i_r k_r} \alpha_{k_1 \cdots k_r}, \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$$

$*\alpha$ 称为 α 的**伴随形式**。

设 $\beta \in A^r(M)$，

$$\beta = \sum_{i<} \beta_{i_1\cdots i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_r} \tag{20}$$

定义 2 r 次形式 α 和 β 的**局部内积** $<\alpha, \beta>$ 定义为

$$<\alpha, \beta> = \sum_{i<} \alpha^{i_1\cdots i_r} \beta_{i_1\cdots i_r} = \frac{1}{r!} \alpha^{i_1\cdots i_r} \beta_{i_1\cdots i_r} \tag{21}$$

以上我们均已假设 $\alpha_{i_1\cdots i_r}$ (或 $\beta_{i_1\cdots i_r}$) 关于 $i_1, \cdots, i_r$ 是反对称的。

为了简化计算, 我们有时取局部正交规范标架场 $\{e_i\}$ 及其对偶标架场 $\{w^i\}$, 这样

$$g_{ij} =< e_i, e_j >= \delta^i_j, \quad g^{ij} = \delta^i_j, \quad \sqrt{G} = 1$$

如果设

$$\alpha = \sum_{i<} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$$

则由定义 1, 有

$$*\alpha = \sum_{j<} *\tilde{\alpha}_{j_{r+1}\cdots j_m} \omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m}$$

其中

$$\begin{aligned} *\tilde{\alpha}_{j_{r+1}\cdots j_m} &= \sum_{i<} \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m} \tilde{\alpha}^{i_1\cdots i_r} \\ &= \frac{1}{r!} \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m} \tilde{\alpha}^{i_1\cdots i_r} \end{aligned}$$

于是, 在正交规范标架场下, 体积元可写成

$$\eta = \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m = *1 \tag{22}$$

利用下述命题易知:

$$*\eta = *(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^m) = 1$$

命题 1 设 $\alpha, \beta \in A^r(M), f \in C^\infty(M)$, 则有

$(i) * (\alpha + \beta) = *\alpha + *\beta, \quad *f\alpha = f(*\alpha)$

$(ii) * *\alpha = *(*\alpha) = (-1)^{r(m-r)}\alpha$

$(iii) \alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha =< \alpha, \beta > \eta$

证明 为简便起见，取局部正交规范标架场，设

$$\alpha = \sum_{i<} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$$

$$\beta = \sum_{i<} \tilde{\beta}_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}$$

则

$$g_{ij} = \delta^i_j, \sqrt{G} = 1, \eta_{i_1\cdots i_m} = \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_m}, \tilde{\alpha}^{i_1\cdots i_r} = \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}$$

(i) 由定义知显然。

(ii) 由定义 1 知：

$$\begin{aligned} *\tilde{\alpha} &= \sum_{j<} *\tilde{\alpha}_{j_{r+1}\cdots j_m}\omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m} \\ &= \sum_{j,i<} \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r}\omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m} \end{aligned}$$

故有

$$*(*\tilde{\alpha}) = \sum_{j,i<} \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m}\tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} * (\omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m})$$

记 $\tilde{\gamma} = \omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m}$, 则

$$\tilde{\gamma}_{l_{r+1}\cdots l_m} = \begin{cases} 1, & \text{当 } l_{r+1} = j_{r+1}, \cdots l_m = j_m \text{ 时;} \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

于是，

$$*\tilde{\gamma} = \sum_{k<} *\tilde{\gamma}_{k_1\cdots k_r}\omega^{k_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{k_r}$$

其中，

$$\begin{aligned} *\tilde{\gamma} &= \sum_{l<} \delta^{1\cdots m}_{l_{r+1}\cdots l_m k_1\cdots k_r}\tilde{\gamma}^{l_{r+1}\cdots l_m} \\ &= \sum_{l<} (-1)^{r(m-r)}\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r l_{r+1}\cdots l_m}\tilde{\gamma}_{l_{r+1}\cdots l_m} \\ &= (-1)^{r(m-r)}\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_m} \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} *(*\tilde{\alpha}) &= \sum_{j,i<} \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \sum_{k<} (-1)^{r(m-r)} \delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_m} \omega^{k_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{k_r} \\ &= \sum_{j,i,k<} (-1)^{r(m-r)} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m} \delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_m} \omega^{k_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{k_r} \end{aligned}$$

由于 $i_1 < \cdots < i_r, k_1 < \cdots < k_r$, 且最后和式中非零项满足 $\{i_1, \cdots, i_r\} = \{k_1, \cdots, k_r\} = \{1, \cdots, m\} - \{j_{r+1}, \cdots, j_m\}$，故有 $i_1 = k_1, \cdots, i_r = k_r$. 且当 $(i_1, \cdots, i_r)$ 固定时，$j_{r+1}, \cdots, j_m$ 也随之完全确定。故

$$\begin{aligned} *(*\tilde{\alpha}) &= \sum_{i,j<} (-1)^{r(m-r)} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \\ &= (-1)^{r(m-r)} \sum_{i<} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} = (-1)^{r(m-r)} \alpha \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} \alpha \wedge *\beta &= (\sum_{i<} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r}) \wedge (\sum_{j<} *\tilde{\beta}_{j_{r+1}\cdots j_m} \omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m}) \\ &= \sum_{i,j,k<} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \tilde{\beta}_{k_1\cdots k_r} \delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_m} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \wedge \omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m} \end{aligned}$$

由 $\delta^{1\cdots m}_{k_1\cdots k_r j_{r+1}\cdots j_m} \neq 0$ 及 $\omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \wedge \omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m} \neq 0$ 同 (ii) 中讨论可知，最后和式中非零项满足 $i_1 = k_1, \cdots, i_r = k_r$. 且当 $(i_1, \cdots, i_r)$ 固定时，$j_{r+1}, \cdots, j_m$ 也随之完全确定。于是有

$$\begin{aligned} \alpha \wedge *\beta &= \sum_{i,j<} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \tilde{\beta}_{i_1\cdots i_r} \delta^{1\cdots m}_{i_1\cdots i_r j_{r+1}\cdots j_m} \omega^{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega^{i_r} \wedge \omega^{j_{r+1}} \wedge \cdots \wedge \omega^{j_m} \\ &= (\sum_{i<} \tilde{\alpha}_{i_1\cdots i_r} \tilde{\beta}_{i_1\cdots i_r}) \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^m \end{aligned}$$

由定义 2 及 $\tilde{\beta}_{i_1\cdots i_r} = \tilde{\beta}^{i_1\cdots i_r}, \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^m = \eta$ 可知

$$\alpha \wedge *\beta = <\alpha, \beta> \eta$$

同理可证 $\beta \wedge *\alpha = <\beta, \alpha> \eta = <\alpha, \beta> \eta$。命题证毕。 □

或许你可以不相信上帝，但是你不得不相信数学；无论用什么方法论证，你都没法证到二加二不等于四，它决不可能等于五. —康威

推论 1 $\alpha\wedge *\alpha=0$ 当且仅当 $\alpha=0$。

为了更清楚地理解 Hodge 星算子，我们来看几个例子。

例 1 $\alpha=\alpha_1dx^1,m=3$, 求 $*\alpha$。

解： 由定义 *1*,

$$*\alpha=\sum_{j_1<j_2}*\alpha_{j_1j_2}dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}$$

而

$$\begin{aligned}*\alpha_{j_1j_2} &= \eta_{ij_1j_2}\alpha^i=\eta_{ij_1j_2}g^{ik}\alpha_k\\ &= \alpha_1\eta_{ij_1j_2}g^{i1}=\alpha_1\sqrt{G}\delta^{123}_{ij_1j_2}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}*\alpha &= \sum_{j_1<j_2}\alpha_1\sqrt{G}\delta^{123}_{ij_1j_2}dx^{j_1}\wedge dx^{j_2}\\ &= \alpha_1\sqrt{G}(g^{31}dx^1\wedge dx^2+g^{11}dx^2\wedge dx^3-g^{21}dx^1\wedge dx^3)\end{aligned}$$

例 2 $\alpha=\alpha_{12}dx^1\wedge dx^2,m=3$, 求 $*\alpha$。

解： 首先将 α 写成对称形式：

$$\alpha=\frac{1}{2}(\alpha_{12}dx^1\wedge dx^2-\alpha_{12}dx^2\wedge dx^1)$$

则 $*\alpha=\sum_j*\tilde{\alpha}_jdx^j$ 。其中：

$$*\tilde{\alpha}_j=\sum_{i_1<i_2}\eta_{i_1i_2j}\tilde{\alpha}^{i_1i_2}=\sum_{i_1<i_2}\sqrt{G}\delta^{123}_{i_1i_2j}g^{i_1k_1}g^{i_2k_2}\tilde{\alpha}_{k_1k_2}$$

注意到：

$$\tilde{\alpha}_{ij}=\begin{cases}\alpha_{12}, & \text{当 } i=1,j=2 \text{ 时;}\\ -\alpha_{12}, & \text{当 } i=2,j=1 \text{ 时;}\\ 0, & \text{其它。}\end{cases}$$

故

$$*\tilde{\alpha}_3=\sqrt{G}g^{1k_1}g^{2k_2}\tilde{\alpha}_{k_1k_2}=\alpha_{12}\sqrt{G}(g^{11}g^{22}-g^{12}g^{21})$$

$$*\tilde{\alpha}_1=\sqrt{G}g^{2k_1}g^{3k_2}\tilde{\alpha}_{k_1k_2}=\alpha_{12}\sqrt{G}(g^{21}g^{32}-g^{22}g^{31})$$

$$*\tilde{\alpha}_2 = -\sqrt{G} g^{1k_1} g^{3k_2} \tilde{\alpha}_{k_1k_2} = -\alpha_{12}\sqrt{G}(g^{11}g^{32} - g^{12}g^{31})$$

从而:

$$\begin{aligned} *\alpha &= \alpha_{12}\sqrt{G}[(g^{21}g^{32} - g^{22}g^{31})dx^1 - (g^{11}g^{32} - g^{12}g^{31})dx^2 + (g^{11}g^{22} - g^{12}g^{21})dx^3] \\ &= \alpha_{12}\sqrt{G} det \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & dx^1 \\ g^{21} & g^{22} & dx^2 \\ g^{31} & g^{32} & dx^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

例 3 $\alpha = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3, m = 3$, 求 $*\alpha$。

解: 首先将 α 写成对称形式:

$$\begin{aligned} \alpha &= dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \frac{1}{3!}[dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - dx^1 \wedge dx^3 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2 \\ &- dx^3 \wedge dx^2 \wedge dx^1 + dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3] \end{aligned}$$

于是 $\beta_{ijk} = \delta_{ijk}^{123}$. 由定义 *1* 知

$$\begin{aligned} *(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3) &= \sum_{i_1<i_2<i_3} \eta_{i_1i_2i_3}\beta^{i_1i_2i_3} = \sqrt{G}\beta^{123} \\ &= \sqrt{G} g^{1i_1} g^{2i_2} g^{3i_3} \beta_{i_1i_2i_3} \\ &= \sqrt{G}[g^{11}g^{22}g^{33} - g^{11}g^{23}g^{32} + g^{12}g^{23}g^{31} \\ &- g^{12}g^{21}g^{33} + g^{13}g^{21}g^{32} - g^{13}g^{22}g^{31}] \\ &= \sqrt{G} det \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{G} \cdot \frac{1}{G} = \frac{1}{\sqrt{G}} \end{aligned}$$

特别地, 在局部正交标架下,$dx^i = \omega^i, i = 1, 2, 3, G = det(g_{ij}) = 1$, 有

$$*(\omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3) = 1$$

.

参考文献

[1] 白正国, 沈一兵等著。《黎曼几何初步》, 高等教育出版社出版。

曲面的自然标架与正交标架

0201　修大成

在微分几何的课程中，我们利用正则曲面的自然标架与正交标架两种活动标架研究了曲面的几何，并结合运动方程推导了 $Gauss-Codazzi$ 方程，由此引出曲面理论中一系列更加深刻的结果。两种标架都用来描述曲面的几何，但借助于不同的符号。自然标架运用了复杂的 $Christoffel$ 符号，与之相反，正交标架运用了简洁的微分形式，将复杂的运动方程和结构方程以优美的形式展现了出来。我们不禁会想，既然两种表述语言是等价的，那么两种符号之间的关系是怎样的呢？

首先，让我们回顾一下曲面的自然标架和正交标架的基本概念。

定义 1 E^3 中参数曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 的自然标架场是全体 $\{r;r_1,r_2,n\}$ 标架构成的以 $\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 为原点的活动标架场。其中，r_1,r_2 是曲面的坐标切向量，$r_3=\frac{r_1\wedge r_2}{|r_1\wedge r_2|}$ 是 S 的单位法向量。

定义 2 E^3 中参数曲面 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u^1,u^2)$ 各点的切平面上取向量 e_1,e_2, 使得 $(e_1,e_1)=(e_2,e_2)=1$,$(e_1,e_2)=0$, 并且 e_1,e_2 关于 (u^1,u^2) 光滑。取 $e_3=e_1\wedge e_2$ 为曲面的单位法向量场，则 $\{r;e_1,e_2,e_3\}$ 构成了曲面 S 的一个正交标架。这些标架的全体构成曲面 S 正交标架场。

下面给出两种活动标架下曲面的运动方程，这是我们推导的出发点。

定理 1 曲面的运动方程

自然标架下:

$$\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}=r_\alpha \qquad (M_1)$$

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta}=\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}r_\gamma+b_{\alpha\beta}r_3 \qquad (M_2)$$

$$\frac{\partial r}{\partial u^\alpha}=-b^\beta_\alpha r_\beta \qquad (M_3)$$

正交标架下:

$$dr=\omega^\alpha\, e_\alpha,\quad \alpha=1,2 \qquad (M_4)$$

$$de_\eta=\omega^k_\eta\, e_k,\quad \eta,\, k=1,2,3 \qquad (M_5)$$

引理 1 设 $r_\alpha = a_\alpha^\eta e_\eta$, $\alpha,\beta,\gamma,\eta = 1,2$, 那么曲面两种标架下的运动方程中的系数有如下的关系:

$$a_\gamma^l \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma du^\beta - da_\alpha^l - a_\alpha^\eta \omega_\eta^l = 0 \tag{1.1}$$

$$b_{\alpha\beta} du^\beta = a_\alpha^\eta \omega_\eta^3 \tag{1.2}$$

证明

在 $r_\alpha = a_\alpha^\eta e_\eta$ 两边对 u^β 求导得:

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial u^\beta} = a_\alpha^\eta \frac{de_\eta}{du^\beta} + \frac{\partial a_\alpha^\eta}{\partial u^\beta} e_\eta$$

结合 (M_2),(M_5) 式得:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} r_3 = \frac{\partial a_\alpha^\eta}{\partial u^\beta} e_\eta + a_\alpha^\eta \frac{\omega_\eta^k}{du^\beta} e_k$$

设 $a_\alpha^\eta\, \tilde{a}_\eta^\lambda = \delta_\alpha^\lambda$, 再由 $r_\alpha = a_\alpha^\eta\, e_\eta$ 可知:

$$r_\lambda \tilde{a}_\eta^\lambda = e_\eta,\ e_3 = r_3,\ \lambda = 1,2$$

代入上式即得:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma r_\gamma + b_{\alpha\beta} r_3 = \frac{\partial a_\alpha^\eta}{\partial u^\beta} r_\lambda \tilde{a}_\eta^\lambda + a_\alpha^\eta \frac{\omega_\eta^k}{du^\beta} r_\lambda\, \tilde{a}_k^\lambda + a_\alpha^\eta \frac{\omega_\eta^3}{du^\beta} r_3 \quad l,k = 1,2,3$$

整理得:

$$(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \frac{\partial a_\alpha^\eta}{\partial u^\beta}\, \tilde{a}_\eta^\gamma - a_\alpha^\eta\, \tilde{a}_k^\gamma \frac{\omega_\eta^k}{du^\beta}) r_\gamma + (b_{\alpha\beta} - a_\alpha^\eta\, \frac{\omega_\eta^3}{du^\beta}) r_3 = 0 \quad \gamma = 1,2$$

由 r_1, r_2, r_3 的线性无关性知:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \frac{\partial a_\alpha^\eta}{\partial u^\beta} \tilde{a}_\eta^\gamma - a_\alpha^\eta \tilde{a}_k^\gamma \frac{\omega_\eta^k}{du^\beta} = 0$$

$$b_{\alpha\beta} - a_\alpha^\eta\, \frac{\omega_\eta^3}{du^\beta} = 0$$

用微分形式写出即得:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma du^\beta - da_\alpha^\eta \tilde{a}_\eta^\gamma - a_\alpha^\eta \tilde{a}_k^\gamma \omega_\eta^k = 0$$
$$b_{\alpha\beta} du^\beta - a_\alpha^\eta \omega_\eta^3 = 0$$
$$\alpha,\beta,\eta,\gamma,k = 1,2$$

最后在第一式两边乘以 a_r^l 即得结论。 □

通过以上论述,我们可以看出隐含在外微分形式 ω_η^k 后复杂的 $Christoffel$ 符号,由此可以看出利用微分形式表达运动方程的优越性。

[1] 中给出当 $e_1 = \frac{r_1}{\sqrt{E}}, e_2 = \frac{r_2}{\sqrt{G}}$ 时,自然标架与正交标架下 $Gauss-Codazzi$ 公式的等价性。下面我们利用上面的引理证明一般情形时,两组公式的一致性。

定理 2 *Gauss-Codazzi* 方程

自然标架下:

$$\frac{\partial\Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}\Gamma^{\xi}_{\eta\gamma} - \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}\Gamma^{\xi}_{\eta\beta} - b_{\alpha\beta}b^{\xi}_{\gamma} + b_{\alpha\gamma}b^{\xi}_{\beta} = 0 \qquad (G_1)$$

$$\frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\gamma}} - \frac{\partial b_{\alpha\gamma}}{\partial u^{\beta}} + \Gamma^{\xi}_{\alpha\beta}b_{\xi\gamma} - \Gamma^{\xi}_{\alpha\gamma}b_{\xi\beta} = 0 \qquad (C_1)$$

正交标架下:

$$d\omega^{\beta}_{\alpha} = \omega^{3}_{\alpha} \wedge \omega^{3}_{\beta} \qquad (G_2)$$

$$d\omega^{3}_{k} = \omega^{l}_{k} \wedge \omega^{3}_{l} \qquad (C_2)$$

定理 3 自然标架下的 *Gauss* 方程 *(G)* 和 *Codazzi* 方程 *(C)* 与正交标架下相应的方程是等价的.

证明 对 *(1.1)* 和 *(1.2)* 式进行适当的变形可得:

$$\omega^{l}_{k} = \tilde{a}^{\alpha}_{k}a^{l}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}du^{\beta} - \tilde{a}^{\alpha}_{k}da^{l}_{\alpha} \qquad (2.1)$$

$$\omega^{3}_{k} = \tilde{a}^{\alpha}_{k}b_{\alpha\eta}du^{\eta} \qquad (2.2)$$

“$(C_2) \longrightarrow (C_1)$”

(2.2) 式两边微分得:

$$d\omega^{3}_{k} = b_{\alpha\eta}d\tilde{a}^{\alpha}_{k} \wedge du^{\eta} + \tilde{a}^{\alpha}_{k}db_{\alpha\eta} \wedge du^{\eta} = (b_{\alpha\eta}\frac{\partial\tilde{a}^{\alpha}_{k}}{\partial u^{\beta}} + \tilde{a}^{\alpha}_{k}\frac{\partial b_{\alpha\eta}}{\partial u^{\beta}})du^{\beta} \wedge du^{\eta}$$

$$\begin{aligned} \omega^{l}_{k} \wedge \omega^{3}_{l} &= (\tilde{a}^{\alpha}_{k}a^{l}_{\gamma}\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}du^{\beta} - \tilde{a}^{\alpha}_{k}da^{l}_{\alpha}) \wedge (\tilde{a}^{m}_{l}b_{m\eta}du^{\eta}) \\ &= (\tilde{a}^{\alpha}_{k}\Gamma^{m}_{\alpha\beta}b_{m\eta} - \tilde{a}^{\alpha}_{k}\tilde{a}^{m}_{l}b_{m\eta}\frac{\partial a^{l}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}})du^{\beta} \wedge du^{\eta} \end{aligned}$$

由 (C_2) $d\omega^{3}_{k} = \omega^{l}_{k} \wedge \omega^{3}_{l}$,

再结合 $du^{\beta} \wedge du^{\eta} = -du^{\eta} \wedge du^{\beta}$ 及 $\{du^{\beta} \wedge du^{\eta} \mid \beta < \eta\}$ 的无关性知,

$$\tilde{a}^{\alpha}_{k}(\Gamma^{m}_{\alpha\beta}b_{m\eta} - \Gamma^{m}_{\alpha\eta}b_{m\beta} + \frac{\partial b_{\alpha\beta}}{\partial u^{\eta}} - \frac{\partial b_{\alpha\eta}}{\partial u^{\beta}}) = b_{\alpha\eta}\frac{\partial\tilde{a}^{\alpha}_{k}}{\partial u^{\beta}} - b_{\alpha\beta}\frac{\partial\tilde{a}^{\alpha}_{k}}{\partial u^{\eta}} + \tilde{a}^{\alpha}_{k}\tilde{a}^{m}_{l}b_{m\eta}\frac{\partial a^{l}_{\alpha}}{\partial u^{\beta}} - \tilde{a}^{\alpha}_{k}\tilde{a}^{m}_{l}b_{m\beta}\frac{\partial a^{l}_{\alpha}}{\partial u^{\eta}}$$

两边乘以 a^{k}_{ξ}, 并适当调整求和指标, 即有

$$\Gamma^{m}_{\xi\beta}b_{m\eta} - \Gamma^{m}_{\xi\eta}b_{m\beta} + \frac{\partial b_{\xi\beta}}{\partial u^{\eta}} - \frac{\partial b_{\xi\eta}}{\partial u^{\beta}} = b_{\alpha\eta}a^{k}_{\xi}\frac{\partial\tilde{a}^{\alpha}_{k}}{\partial u^{\beta}} - b_{\alpha\beta}a^{k}_{\xi}\frac{\partial\tilde{a}^{\alpha}_{k}}{\partial u^{\eta}} + \tilde{a}^{\alpha}_{l}b_{\alpha\eta}\frac{\partial a^{l}_{\xi}}{\partial u^{\beta}} - \tilde{a}^{\alpha}_{l}b_{\alpha\beta}\frac{\partial a^{l}_{\xi}}{\partial u^{\eta}}$$

又由于 $a^{l}_{\xi}\tilde{a}^{\alpha}_{l} = \delta^{\alpha}_{\xi}$, 故有

$$\frac{\partial a_\xi^l}{\partial u^\beta} + a_\xi^k a_\mu^l \frac{\partial \tilde{a}_k^\mu}{\partial u^\beta} = 0$$

代入上式，即得上式右边为 0。

从而得到

$$\Gamma_{\xi\beta}^m b_{m\eta} - \Gamma_{\xi\eta}^m b_{m\beta} + \frac{\partial b_{\xi\beta}}{\partial u^\eta} - \frac{\partial b_{\xi\eta}}{\partial u^\beta} = 0$$

此即为 *Codazzi* 方程。

“$(C_1) \longrightarrow (C_2)$”

上述证明仅用到了消元，交换求和指标等方法，从而可以逆向推回，得证。

“$(G_2) \longrightarrow (G_1)$”

直接计算可得:

$$d\omega_k^l = (\frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} a_\gamma^l \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial u^\xi} \tilde{a}_k^\alpha a_\gamma^l + \tilde{a}_k^\alpha \frac{\partial a_\gamma^l}{\partial u^\xi} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} \frac{\partial a_\alpha^l}{\partial u^\beta}) du^\xi \wedge du^\beta$$

$$\omega_k^3 \wedge \omega_l^3 = \tilde{a}_k^m \tilde{a}_l^n b_{m\xi} b_{n\beta} du^\xi \wedge du^\beta$$

由 (G_2) 得到: $d\omega_k^l = -\omega_k^3 \wedge \omega_l^3$，将其代入上式整理得:

$$(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma}{u^\xi} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\xi}^\gamma}{u^\beta}) \tilde{a}_k^\alpha a_\gamma^l - \tilde{a}_k^m \tilde{a}_l^n (b_{m\beta} b_{n\xi} - b_{m\xi} b_{n\beta}) + a_\gamma^l (\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} - \Gamma_{\alpha\xi}^\gamma \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\beta}) + \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial a_\alpha^l}{\partial u^\xi} - \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} \frac{\partial a_\alpha^l}{\partial u^\beta} = 0$$

两边乘以 $a_s^k \tilde{a}_l^t$ 得到:

$$\begin{aligned}(\frac{\partial \Gamma_{s\beta}^t}{u^\xi} - \partial \Gamma_{s\xi}^t u^\beta) - \tilde{a}_l^t \tilde{a}_l^n (b_{s\beta} b_{n\xi} - b_{s\xi} b_{n\beta}) + a_s^k (\Gamma_{\alpha\beta}^t \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} - \Gamma_{\alpha\xi}^t \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\beta}) \\ + a_s^k \tilde{a}_l^t (\frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{\partial a_\alpha^l}{\partial u^\xi} - \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} \frac{\partial a_\alpha^l}{\partial u^\beta}) = 0\end{aligned} \qquad (A_1)$$

注意到上式第二项，并利用 $g^{\beta\alpha} = \tilde{a}_l^\alpha \tilde{a}_l^\beta$

得到:

$$\tilde{a}_l^n \tilde{a}_l^t (b_{s\beta} b_{n\xi} - b_{s\xi} b_{n\beta}) = g^{nt} (b_{s\beta} b_{n\xi} - b_{s\xi} b_{n\beta}) = b_{s\beta} b_\xi^t - bs\xi b_\beta^t \qquad (A_2)$$

结合已知结果: $\frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} + \frac{\partial a_\eta^\mu}{\partial u^\xi} \tilde{a}_\mu^\alpha \tilde{a}_k^\eta = 0$

代入 (1) 最后两项得到:

$$a_s^k (\Gamma_{\alpha\beta}^t \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} - \Gamma_{\alpha\xi}^t \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\beta}) + a_s^k \tilde{a}_l^t (\frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\beta} \frac{a_\alpha^l}{\partial u^\xi} - \frac{\partial \tilde{a}_k^\alpha}{\partial u^\xi} \frac{a_\alpha^l}{\partial u^\beta})$$

$$= -\Gamma^t_{\alpha\beta}\frac{\partial a^l_s}{\partial u^\xi}\tilde{a}^\alpha_l + \Gamma^t_{\alpha\xi}\frac{\partial a^l_s}{\partial u^\beta}\tilde{a}^\alpha_l - \tilde{a}^t_\mu\frac{\partial a^\mu_\alpha}{\partial u^\xi}\frac{\partial a^l_s}{\partial u^\beta}\tilde{a}^\alpha_l + \tilde{a}^t_\mu\frac{\partial a^\mu_\alpha}{\partial u^\beta}\frac{\partial a^l_s}{\partial u^\xi}\tilde{a}^\alpha_l$$

可以直接验证:

$$\text{上式} \;=\; \Gamma^\eta_{s\beta}\Gamma^t_{\eta\xi} - \Gamma^\eta_{s\xi}\Gamma^t_{\eta\beta} \tag{A_3}$$

综合 $(A_1),(A_2),(A_3)$ 式，得到 *Gauss* 方程:

$$\frac{\partial\Gamma^t_{s\beta}}{\partial u^\xi} - \frac{\partial\Gamma^t_{s\xi}}{\partial u^\beta} + \Gamma^\eta_{s\beta}\Gamma^t_{\eta\xi} - \Gamma^t_{s\xi}\Gamma^t_{\eta\beta} - b_{s\beta}b^t_\xi + b_{s\xi}b^t_\beta = 0$$

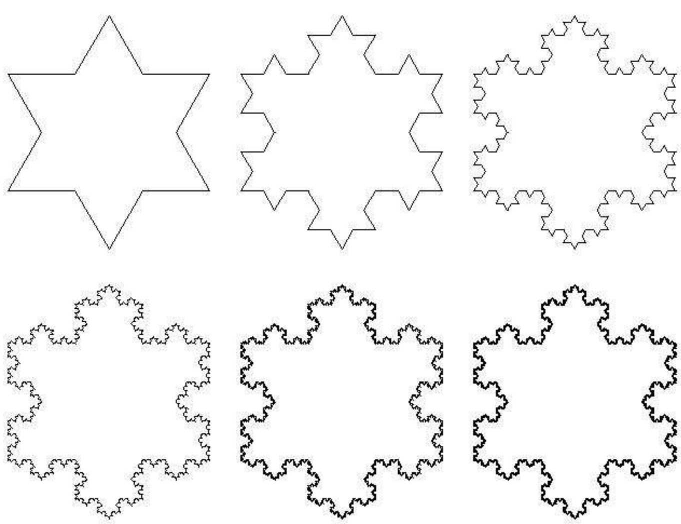
“$(G_1) \longrightarrow (G_2)$”

完全类似的，将上述证明反向回推即得。 □

参考文献

[1] 彭家贵，陈卿。《微分几何》，高等教育出版社。

Koch Snow Curves



数统治着宇宙。 —毕达哥拉斯

[-2,2] 中一类点集的稠密性

0201 朱家林

定义点集列:

$$F_1 = \{\pm\sqrt{2}\}$$
$$F_2 = \{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\}$$
$$F_3 = \{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}}\}$$
$$\vdots$$
$$F_n = \underbrace{\{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2 \pm \ldots \pm \sqrt{2}}}\}}_{n}$$

令

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

其中 F_n 中 $\pm$ 表示各处正负号均可任意组合, 例如

$$F_2 = \{\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{2}}\} = \{+\sqrt{2+\sqrt{2}}, +\sqrt{2-\sqrt{2}}, -\sqrt{2+\sqrt{2}}, -\sqrt{2-\sqrt{2}}\}$$

不难知道 $F_n \subset [-2,2]$, 从而 $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset [-2,2]$.

问题:S 在 $[-2,2]$ 中是否稠密? 即是否 $[-2,2]$ 中任意点均可用 S 中的点逼近?

下面将证明 $[-2,2]$ 中具有这种形式的点集的稠密性. 他们是某簇整系数多项式 $\{f_i\}_{i\in N}$ 在 $[-2,2]$ 中的零点集. 下面给出多项式簇 $\{f_i\}_{i\in N}$ 的定义: 令

$$f_1(z) = z^2 - 2$$

将 $f_n(z)$ 定义为由 $f_1(z)$ 作 n 次迭代得到的多项式

$$f_n(z) = f_1^n(z) = \underbrace{f_1 \circ \cdots \circ f_1(z)}_{n}$$

从 $f_n(z)$ 定义可知, 它是 2^n 次的整系数多项式且可验证集合 F_n 中的点均是 $f_n(z)$ 的零点. 2^n 次的整系数多项式至多有 2^n 个零点, 而 $|F_n| = 2^n$，故 F_n 为 $f_n(z)$ 的零点集。从而，我们得到:

结论 1多项式簇 $\{f_i\}_{i\in N}$ 的零点集为 S.

为证明多项式簇 $\{f_i\}_{i\in N}$ 零点集 S 在 $[-2,2]$ 中的稠密性，下面给出这些零点的另一种表示：做变换

$$z=\omega+\frac{1}{\omega}$$

则得

$$f_n(\omega)=f^n(\omega+\frac{1}{\omega})=\omega^{2^n}+\frac{1}{\omega^{2^n}}$$

下面求 $f_n(\omega)=0$ 的零点：

$$\omega^{2^n}+\frac{1}{\omega^{2^n}}=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega^{2^{n+1}}=-1=e^{i\pi}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega=\cos\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}},0\le k\le 2^{n+1}-1$$

$$\Updownarrow$$

$$z=\omega+\frac{1}{\omega}=2\cos\theta,\theta=\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}},0\le k\le 2^{n+1}-1$$

令

$$T=\{\theta|\theta=\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}},0\le k\le 2^{n+1}-1,\forall n\in N\}$$

有连续满映射 $\varphi:[0,2\pi]\longrightarrow[-2,2]$, $\theta\longmapsto 2cos\theta$ ，且 $\varphi(T)=S$. 因为不难看出 T 在 $[0,2\pi]$ 中稠密, 从而它的象 S 在 $[-2,2]$ 中稠密.

结论 2 S 在 $[-2,2]$ 中稠密.

类似 S 得定义，$\forall x\in[-2,2]$ 令

$$H_1(x)=\{\pm x\}$$

$$H_2(x)=\{\pm\sqrt{2\pm x}\}$$

$$H_3(x)=\{\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm x}}\}$$

$$\vdots$$

$$H_n(x)=\underbrace{\{\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\ldots\sqrt{2\pm x}}}\}}_{n}$$

令

$$H_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n(x)$$

作为结论 2 的一个推论我们有:

推论 3 $\forall\ x \in [-2,2], H_x$ 在 $[-2,2]$ 中稠密.

证明 不妨设 $x \in [0,2]$, 因为若 $x \in [-2,0]$ 则 $\sqrt{2-x} \in [0,2]$. 作点列 $\varepsilon_1 = \sqrt{x}, \varepsilon_2 = \sqrt{2-x}, \ldots, \varepsilon_k = \sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\sqrt{2-x}}}, \ldots\}$, 则不难证明

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \varepsilon_n = 2$$

$\forall\ y \in [-2,2]$ 和它的任何邻域 $U \subset [-2,2]$, 由 S 的稠密性知必然 $\exists n \in N, z \in F_n\ st.\ z \in U$ 从而 ε_k 充分接近 2 时, 则存在 z 的邻域 $V \subset U$ 使得 V 中具有这样形式的点

$$\underbrace{\pm\sqrt{2\pm\sqrt{2\pm\ldots\sqrt{2\pm\sqrt{\varepsilon_k}}}}}_{n} \in H_x,$$

从而 y 的邻域 U 中也存在这种形式的点. 故 H_x 也在 $[-2,2]$ 中稠密. 证毕.

[幽默二则]

最大面积

一位农夫请了工程师、物理学家和数学家来, 想用最少的篱笆围出最大的面积。工程师用篱笆围出一个圆, 宣称这是最优设计。物理学家将篱笆拉开成一条长长的直线, 假设篱笆有无限长, 认为围起半个地球总够大了。数学家好好嘲笑了他们一番。他用很少的篱笆把自己围起来, 然后说:“我现在是在外面。”

正确的回答

物理学家和工程师乘着热气球, 在大峡谷中迷失了方向。他们高声呼救:“喂! 我们在哪儿?” 过了大约 15 分钟, 他们听到回应在山谷中回荡:“喂! 你们在热气球里!” 物理学家道:“那家伙一定是个数学家。” 工程师不解道:“为什么?” 物理学家道:“因为他用了很长的时间, 给出一个完全正确的答案, 但答案一点用也没有。”

你能一直赌下去吗？

04001　管枫　罗世森

也许我们都听说过这样的告诫：如果你无限制地赌博，你迟早会倾家荡产。

这句话到底有多少道理？下面我们用随机游动模型来一探究竟（关于随机游动及其相关概念，可参看苏淳老师编著的《概率论》P74-75）。

我们的横坐标代表资产数，为简化讨论，我们假设资产取整数，0 代表破产，不能再赌。每次输的概率都设为 p，资产减少 1，在坐标轴体现为向左移动一格；赢的概率为 $q=1-p$，资产增加 1，坐标轴上体现为向右移动一格。

设初始资产为 k，若资产增加到 $m\ (m>k)$，则收手不赌。由苏淳老师编《概率论》P74 例题 2.4.4 的结果可以知道，输光的概率是：

$$p_k=\begin{cases}1-\dfrac{k}{m}, & p=1=\frac{1}{2};\\[2ex] \dfrac{\left(\dfrac{p}{q}\right)^k-\left(\dfrac{p}{q}\right)^m}{1-\left(\dfrac{p}{q}\right)^m}, & p\neq q.\end{cases}\tag{1}$$

可见，如果有节制地赌，输赢皆有可能。但如果无节制地赌，直到破产为止，那又是怎样的情形呢？将模型稍作修改：去掉 m 点的吸附壁，只剩 0 点一个吸附壁。我们想算出破产的概率 P。

并且，我们设初始资产为 1（由后面的方法三，我们会发现初始资产为 k 的情形容易从这种特殊情形推广得到）。

怎么算？一个最自然的想法是利用 (1) 式。令 $k=1$，$m\to+\infty$，得到：

$$P=\begin{cases}1, & p\geqslant\frac{1}{2};\\ \dfrac{p}{1-p}, & p<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

这么算合理吗？分析如下：

用 A 表示破产，A_i 表示在时刻 i 破产，$i=1,2,3,\cdots$。则 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，其中 A_i 两两不交。所以，

$$P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}P(A_i).$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}P(A_i)$ 正是 (1) 式中 $m=n$ 时求出的 p_i，故取极限是合理的。

以上方法我们称之为方法一。这个方法通过书上方法得到，下面来介绍几个其它的方法。

方法二:

这是一个最朴实的方法。A 的意义不变，用 B_l 表示先赢了 l 次，然后输了 $l+1$ 次的事件，$l=0,1,2,\cdots$。则 $A=\bigcup\limits_{l=0}^{\infty}B_l$，且 B_l 两两不交。所以有，

$$P(A)=\sum_{l=0}^{\infty}P(B_l)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\cdot p^{l+1}q^l.$$

其中 a_l 是 B_l 的走法数。利用组合数学的知识，可以算出

$$a_l=\frac{1}{1+l}\binom{2l}{l}.$$

由二项式定理知

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{i=1}^{+\infty}\binom{2i}{i}x^i,$$

两边积分可得:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{1-4x}+c=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{1+i}\binom{2i}{i}x^{i+1}.$$

令 $x=0$，得到 $c=\frac{1}{2}$。所以有:

$$\begin{aligned}P(A)&=\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{\infty}a_l\cdot(pq)^{l+1}=\frac{1}{q}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l+1}\binom{2l}{l}\cdot(pq)^{l+1}\\&=\frac{1}{2q}(1-\sqrt{1-4pq})=\frac{1}{2q}(1-|1-2p|).\end{aligned}$$

故

$$P=\begin{cases}1, & p\geqslant\frac{1}{2};\\ \dfrac{p}{1-p}, & p<\frac{1}{2}.\end{cases}$$

如果注意到一个事实，从坐标 2 出发走到坐标 1 的概率，等于从 1 出发能走到 0 的概率，那么能得到以下的方法三:

从 k 出发能走到 0 的概率记为 p_k，从 k 出发能走到 i 的概率记为 p_{k_i}。则有:

$$p_2=p_{21}p_{10}=p_1^2 \tag{2}$$

另外，显然有关系式:

$$p_1=p+(1-p)p_1^2 \tag{3}$$

联立 (2) 和 (3)，有

$$p_1=p+(1-p)p_1^2,$$

解之得:

$$p_1=1 \text{ 或 } \frac{p}{1-p}.$$

1. 当 $\frac{1}{2} \leqslant p$ 时，
$$\frac{p}{1-p} \geqslant 1, \text{而 } p_1 \in [0,1], \text{所以} p_1 = 1. \text{此即所求的} P.$$
2. $p < \frac{1}{2}$ 时，

由方法二，$p_1 = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \cdot p^{l+1} q^l$，$a_l$ 是与 p 无关的组合数。

而 $p^{l+1}q^l = p^{l+1}(1-p)^l = p(p(1-p))^l \leqslant p \cdot (\frac{1}{4})^l < (\frac{1}{2})^{l+1} \cdot (\frac{1}{2})^l$

当 $p = \frac{1}{2}$ 时，$p_1 = 1$。所以 $p < \frac{1}{2}$ 时，$p_1 < 1$。

所以 $p_1 = \frac{p}{1-p}$，此即P.

所以有
$$P = \begin{cases} 1, & p \geqslant \frac{1}{2}; \\ \dfrac{p}{1-p}, & p < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

同理于 (2)(3) 式，我们有 $p_k = p_1^k, p_k = p \cdot p_{k-1} + (1-p)p_{k+1}, k \geqslant 2$。由此即可求得 p_k，且易知，当 $p < \frac{1}{2}$ 时，k 越大，P 越小，即越不可能破产。

以上，我们从三个不同的角度，用三种不同的方法，得到了同一个结果。从讨论的结果可以知道，如果输的概率不小于一半，一直赌下去的结果是几乎必然会破产。

⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛⊛

念数学的名人

- **Music**

  Art Garfunkel: 这个就是无人不知了。Simon & Garfunkel 有著名的歌曲 Scarborough Fair. Columbia 1967 的 MA, 继续在 Columbia 念 PhD, 不过中途退学, 专心音乐事业

- **Literature**

  Lewis Carroll: “Alice in Wonderland”和“Through the Looking Glass”的作者. 真名 Charles Lutwidge Dodgson, 这时候他就是一逻辑学家

- **Finance**

  John Maynard Keynes: 经济学家, Cambridge

  J. P. Morgan: 银行, 钢铁, 铁路巨头. 不用细说, 详细见 www.jpmorgan.com. 传说 Gottigen 的数学家曾经意图劝说他做一个职业的数学家

- **Philosophers**

  Edmund Husserl: 现象学之父. Vienna 1883 PhD

  Ludwig Wittgenstein: 20 世纪哲学巨人. 师从 Bertrand Russel 学数理逻辑

- **Athletes**

  Michael Jordan: 篮球巨星. 不过他在 junior 的时候转系了

  David Robinson: 另一个 NBA 巨星. BS in math from Annapolis

钻研然而知不足，虚心是从知不足而来的。虚伪的谦虚，仅能博得庸俗的掌声，而不能求得真正的进步。

—华罗庚

The 65th William Lowell Putnam Mathematical Competition

Saturday, December 4, 2004

A1 Basketball star Shanille O'Keal's team statistician keeps track of the number, $S(N)$, of successful free throws she has made in her first N attempts of the season. Early in the season, $S(N)$ was less than 80% of N, but by the end of the season, $S(N)$ was more than 80% of N. Was there necessarily a moment in between when $S(N)$ was exactly 80% of N?

A2 For $i = 1, 2$ let T_i be a triangle with side lengths a_i, b_i, c_i, and area A_i. Suppose that $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2, c_1 \leq c_2$, and that T_2 is an acute triangle. Does it follow that $A_1 \leq A_2$?

A3 Define a sequence $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ by $u_0 = u_1 = u_2 = 1$, and thereafter by the condition that

$$\det \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} \\ u_{n+2} & u_{n+3} \end{pmatrix} = n!$$

for all $n \geq 0$. Show that u_n is an integer for all n. (By convention, $0! = 1$.)

A4 Show that for any positive integer n, there is an integer N such that the product $x_1 x_2 \cdots x_n$ can be expressed identically in the form

$$x_1 x_2 \cdots x_n = \sum_{i=1}^{N} c_i (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \cdots + a_{in} x_n)^n$$

where the c_i are rational numbers and each a_{ij} is one of the numbers $-1, 0, 1$.

A5 An $m \times n$ checkerboard is colored randomly: each square is independently assigned red or black with probability $1/2$. We say that two squares, p and q, are in the same connected monochromatic component if there is a sequence of squares, all of the same color, starting at p and ending at q, in which successive squares in the sequence share a common side. Show that the expected number of connected monochromatic regions is greater than $mn/8$.

A6 Suppose that $f(x, y)$ is a continuous real-valued function on the unit square $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. Show that

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dx \right)^2 dy + \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y) dy \right)^2 dx$$
$$\leq \left(\int_0^1 \int_0^1 f(x,y) dx\, dy \right)^2 + \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y))^2\, dx\, dy.$$

B1 Let $P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ be a polynomial with integer coefficients. Suppose that r is a rational number such that $P(r) = 0$. Show that the n numbers

$$c_n r,\ c_n r^2 + c_{n-1} r,\ c_n r^3 + c_{n-1} r^2 + c_{n-2} r,$$
$$\ldots,\ c_n r^n + c_{n-1} r^{n-1} + \cdots + c_1 r$$

are integers.

B2 Let m and n be positive integers. Show that

$$\frac{(m+n)!}{(m+n)^{m+n}} < \frac{m!}{m^m}\frac{n!}{n^n}.$$

B3 Determine all real numbers $a > 0$ for which there exists a nonnegative continuous function $f(x)$ defined on $[0, a]$ with the property that the region

$$R = \{(x, y); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

has perimeter k units and area k square units for some real number k.

B4 Let n be a positive integer, $n \geq 2$, and put $\theta = 2\pi/n$. Define points $P_k = (k, 0)$ in the xy-plane, for $k = 1, 2, \ldots, n$. Let R_k be the map that rotates the plane counterclockwise by the angle θ about the point P_k. Let R denote the map obtained by applying, in order, R_1, then $R_2, \ldots$, then R_n. For an arbitrary point (x, y), find, and simplify, the coordinates of $R(x, y)$.

B5 Evaluate

$$\lim_{x \to 1^-} \prod_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n}\right)^{x^n}.$$

B6 Let $\mathcal{A}$ be a non-empty set of positive integers, and let $N(x)$ denote the number of elements of $\mathcal{A}$ not exceeding x. Let $\mathcal{B}$ denote the set of positive integers b that can be written in the form $b = a - a'$ with $a \in \mathcal{A}$ and $a' \in \mathcal{A}$. Let $b_1 < b_2 < \cdots$ be the members of $\mathcal{B}$, listed in increasing order. Show that if the sequence $b_{i+1} - b_i$ is unbounded, then

$$\lim_{x \to \infty} N(x)/x = 0.$$

主编：　中国科学技术大学 2002 级数学系
编委：　修大成　雷　涛　张　智　王　可
审稿：　金天灵　张鹏飞　孙　俊　王麒翰
设计：　张翔雄　胡雪莹　刘　欣