

第六十七期

# 虹鸣

1981.06-2025.07

中国科大学生数学杂志

喜聽蛙鳴

科大學風淳  
蛙鳴顯精神  
前輩栽好樹  
更有後來人

覃博 辛丑

## 院长寄语

《蛙鸣》承载着科大数院的同学们探索数学、分享知识、创造新天地的满腔热情和无限期待。一声声纯粹而质朴的“蛙鸣”，其形虽小，其声也宏。值此《蛙鸣》创刊40周年之际，希望同学们以此为新的起点，携手奋进，将科大数学的精神薪火相传，在数学世界里继续追寻纯粹崇高的理想，求实求真，勇于创新，奏响科大数学人的最强音！



马志明

2021年6月4日



蛙鸣

其形也微  
其声也宏

## 卷首语

1981年，一群数学青年怀揣热忱，以油墨为声，以纸张为田，自写、自编、自刻、自印，刻录下探索的勇气与思想的纯粹。《蛙鸣》，不止于杂志——它是深植科大求索坚韧之根脉的精神沃土，浸润师长殷殷关切之雨露，更承载着我们叩问数学世界时，那份本真的好奇与兴奋。岁月奔流，昔年执笔的“小青蛙”，今已化身为我们仰望的引路星辰；而这一声穿越四十四载的鸣唱，始终以最忠实的姿态，作证同学们的每一程成长。

2021年仲夏，沉寂十年的“蛙鸣”再度响起，宣告着这份自由探索、分享交流的精神火种，从未熄灭，且愈燃愈旺，并在新一代科大人的心中激荡回响。

回望复刊至今，我们欣喜地看到，“蛙鸣”的池塘愈加丰盈：它容纳着同学们课业间隙的灵光乍现——一道难题的巧妙解法，一篇深刻的阅读札记，一次理论前沿的勇敢探索；它珍藏着对经典问题的潜心思索，对未解之谜的执着叩问；它从不拒绝对美的感悟，一首小诗，一段随笔，皆是心灵跃动的涟漪。这里，问题被提出、被争鸣、被解答；思想在碰撞、在交融、在生长。每一篇稚嫩或成熟的文字，都是我们向数学殿堂迈进的坚实足印，共同谱写着属于这个盛夏的青春交响。

今日，第67期《蛙鸣》如约而至。望诸君，共见这份奔涌的盛夏——它是四十四年后再度奏响的鸣唱，是奔腾不息的思想之潮浪，更是数院人一腔赤忱的激荡。

第67期《蛙鸣》编辑部  
2025年7月6日

# 第67期《蛙鸣》编辑部

(按汉语拼音排序)

## 顾 问

黄欣祺 吴松宇

## 主 编

朱葛瑄

## 编 委

卞泽宇 郭 谦 施舒恒

王鼎涵 杨萱泽 俞嘉权

郑登煌

## 设 计

常毅寒 江彦樟 李 翊

施舒恒 杨玄烨

## 排 版

郭 谦 胡洁洋 林俊杰

罗腾宇 孙玉泽 杨永博

张涵轩

## 记 录

朱葛瑄

## 投稿 / 建议 / 勘误

mathsu01@ustc.edu.cn

扫描二维码获取更多信息



中国科大

联系我们

数学科学学院学生会 蜗壳的书院

# 目录

## 初阳

Roth定理的遍历论证明

... 蒋建树 3

A Study on the Moment of Order Statistics

... 赖志鑫 22

随机微分方程在生物群落演化中的应用

... 谢鸿瑞 29

## 蛙声一片

有理角余弦比值的次数

... 林开亮 39

无粘流体的低马赫数奇异极限

... 章俊彦 50

林开亮提出的一个问题

... 李克正 69

蛙

## 笔墨诗篇

诗词三首

... 张文锦 76

## 皇榜

皇榜 · 征解

... 79

致谢

... 81

征稿启事

... 82

蛙鸣



初

初  
明  
日



稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》

# Roth 定理的遍历论证明

蒋建树

## 摘要

通过遍历理论, 或者更一般的, 动力系统的方法来研究组合数论是一个相对年轻的方向。两个领域之间的联系在 1977 年 Furstenberg 给出了 Szemerédi 定理的一个遍历论证明而达到高潮。在本文中, 我们将跟随 Furstenberg 的思想, 给出 Szemerédi 定理的第一个非平凡情形 (Roth 定理) 的证明。

## 1 预备知识

我们在本章简单的介绍一下遍历理论, 为后文相关结果的证明做出相应的准备。

**定义 1.1.** 给定两个概率空间  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$ , 我们称一个可测映射  $T : X \rightarrow Y$  是一个保测映射是指: 对任意  $B \in \mathcal{B}$ ,  $T^{-1}B \in \mathcal{A}$  且有  $\mu(T^{-1}B) = \nu(B)$ .

通过实分析理论中标准的利用简单函数逼近可测函数的方法, 我们可以得到

**命题 1.1.**  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  是两个概率空间, 可测映射  $T : X \rightarrow Y$  是保测映射当且仅当对任意  $f \in L^2(X)$ , 函数  $f \circ T \in L^2(Y)$  且满足

$$\int_X f \circ T = \int_Y f \, d\nu.$$

每个保测映射会诱导如下线性算子:

**定义 1.2.** 给定概率空间  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  之间的一个保测映射  $T : X \rightarrow Y$ , 我们称线性算子

$$\Phi_T : L^2(Y) \rightarrow L^2(X), f \mapsto f \circ T$$

是保测映射  $T$  对应的 Koopman 算子。

现在我们引入遍历理论中的基本研究对象——保测系统。

**定义 1.3.** 一个保测系统是指一个四元组  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , 其中  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  为一个概率空间,  $T : X \rightarrow X$  是一个保测映射。

**例 1.1.** (圆周旋转) 考虑紧群  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , 赋予它由  $[0, 1]$  上 Lebesgue 测度诱导的 Haar 测度  $\mu$ . 对任意  $a \in \mathbb{T}$ , 考虑映射  $T_a : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, x \mapsto x + a$ . 显然  $T_a$  是一个保测映射, 从而  $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}), \mu, T_a)$  形成了一个保测系统。

当然, 紧群  $\mathbb{T}$  等距同构于圆周  $S^1 \subset \mathbb{C}$ ,  $S^1$  也能在复数乘法下视为一个群。在这个观点下  $T_a$  能对应  $S^1$  上的映射  $R_\alpha : z \mapsto \alpha \cdot z = e^{2\pi i \alpha} \cdot z$ .  $(S^1, \mathcal{B}(S^1), \mu, R_\alpha)$  也是一个保测系统。

以上例子可以推广到任意紧交换群  $G$  上的“旋转”, 对任意  $\alpha \in G$ , 由 Haar 测度的定义, 映射  $R_\alpha : x \mapsto x + \alpha$  保持测度。从而  $(G, \mathcal{B}(G), \mu, R_\alpha)$  是一个保测系统。我们称这样的系统为 Kronecker 系统。

作者信息: 蒋建树, 2020 级数学科学学院, 邮箱: eric\_jiang@mail.ustc.edu.cn.

接下来我们介绍遍历理论中另一个重要的概念——遍历性。“遍历”一词来源与 Boltzmann 在热力学中提出的“遍历性假设”，用一句话概括此假设，就是“时间上的平均等于空间上的平均”。在保测系统的语境下，“遍历假设”实际上就在说随着时间延长， $A$  中一点  $x$  的轨迹  $\{x, Tx, T^2x, \dots\}$  中的点落在  $A$  中的时间的比例会趋向于  $\mu(A)$ 。事实上这也是我们后面要讨论的遍历定理的内容。我们现在先给出遍历性的定义。

**定义 1.4.** 一个保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是遍历的是指：对任意  $A \in \mathcal{B}$  满足  $T^{-1}A = A$ ，我们都有  $\mu(A) = 1$  或者  $\mu(A) = 0$ 。

**命题 1.2.** 一个遍历系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是遍历的当且仅当任意满足  $f \circ T = f$  a.e. 的函数（这样的函数我们称为  $T$ -不变函数） $f \in L^2(X)$  都几乎处处是一个常数函数。

**证明.** 对于充分性，设  $A \in \mathcal{B}$  满足  $T^{-1}A = A$ ，则显然我们有  $1_A \circ T = 1_{T^{-1}A} = 1_A \in L^2(X)$ 。所以  $1_A$  几乎处处为常数，即  $\mu(A) = 0$  或  $\mu(A) = 1$ 。

下面证明必要性，假设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ,  $f \in L^2(X)$  是  $T$ -不变的，则对任意  $t \in \mathbb{R}$ ，集合

$$A_t := \{x \in X : f(x) > t\}$$

是  $T$ -不变的。因此  $\mu(A_t) = 0$  或  $\mu(A_t) = 1$ 。设  $r := \inf\{t \in \mathbb{R} : \mu(A_t) = 0\}$ ，则因为  $A_r = \bigcup_{n \geq 1} A_{r+1/n}$ ，有  $\mu(A_r) = 0$ 。另一方面，对  $t < r$ ，我们有  $\mu(A_t) = 1$ 。从而有  $\mu(\{x : f(x) \geq r\}) = 1$ ，因此  $f = r$  a.e.  $\square$

所谓遍历定理，粗略来说，其断言遍历系统满足“遍历假设”。给定一个保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ ，定义集合  $\mathcal{I} := \{f \in L^2(X) : f \circ T = f \text{ a.e.}\}$ 。这是一个  $T$ -不变闭子空间，因此我们可以考虑正交投影映射  $P_{\mathcal{I}} : L^2(X) \rightarrow \mathcal{I}$ ,  $P_{\mathcal{I}}$  将一个函数  $f$  映为  $\mathcal{I}$  中与  $f$  距离最小的点。

**定理 1.3.** (Birkhoff 逐点遍历定理) 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统，则对任意  $f \in L^2(X)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} f \circ T^n := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n = P_{\mathcal{I}} f \text{ a.e.}$$

特别地，如果系统是遍历的，则  $\mathcal{I}$  中只存在几乎处处为常数的函数且  $P_{\mathcal{I}} f = \int_X f \, d\mu$ .

**推论 1.4.** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个遍历系统，则对任意  $A \in \mathcal{B}$ ，和几乎每个  $x \in X$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{n \in \{1, 2, \dots, N\} : T^n x \in A\}| = \mu(A).$$

**证明.** 对示性函数  $1_A$  使用定理1.3即可。  $\square$

**推论 1.5.** 一个保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是遍历的当且仅当对任意  $A, B \in \mathcal{B}$ ，有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B).$$

**证明.** 假设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是遍历的。令  $f = 1_B$ ，运用定理1.3，我们得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} 1_B(T^n x) = \mu(B) \text{ a.e.}$$

两边乘上  $1_A$  即为

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} 1_B(T^n x) 1_A(x) = \mu(B) 1_A(x) \text{ a.e.}$$

由控制收敛定理得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A)\mu(B).$$

反之, 设  $T^{-1}E = E$ ,  $E \in \mathcal{B}$ . 令  $A = B = E$ , 由条件得

$$\mu(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \mu(E) = \mu(E)^2.$$

所以  $\mu(E) \in \{0, 1\}$ , 即  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是遍历的.  $\square$

**定理 1.6.** (von Neumann 平均遍历定理) 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 则对任意  $f \in L^2(X)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} f \circ T^n \xrightarrow{L^2} P_T f.$$

在这一章的最后我们还需要介绍一个重要的定理——遍历分解定理, 它告诉我们任意一个  $T$ -不变的概率测度  $\mu$  实际上就是一些遍历  $T$ -不变测度的凸组合. 有了这个定理, 我们经常可以不失一般性的假设一个保测系统是遍历的.

**定理 1.7.** (遍历分解定理) 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是一个保测系统, 则存在一个 Borel 概率空间  $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$  和一个可测映射  $y \rightarrow \mu_y$ , 使得对  $\nu-a.e.$   $y \in Y$ , 四元组  $(X, \mathcal{B}, \mu_y, T)$  是一个遍历的保测系统, 且对任意  $A \in \mathcal{B}$ , 有

$$\mu(A) = \int_Y \mu_y(A) d\nu(y) \quad (1.1)$$

其中(1.1)有时也简记为  $\mu = \int_Y \mu_y d\nu(y)$ .

注. 本章的所有内容都可以在标准的遍历理论的教材/讲义中找到, 如 [1, 9, 3].

## 2 Szemerédi 定理与 Furstenberg 对应原则

### 2.1 Szemerédi 定理

**定理 2.1.** (van der Waerden 定理) 给定自然数集的一个有限剖分  $\mathbb{N} = C_1 \cup \dots \cup C_r$ , 则存在  $i \in \{1, \dots, r\}$  满足  $C_i$  中包含任意长度的等差数列, 即对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $a, d \in \mathbb{N}$  使得  $\{a, a+d, \dots, a+(k-1)d\} \subset C_i$ .

van der Waerden 定理是 Ramsey 理论中最古老的结果之一, 这个定理被 Khinchin 誉为“数论中的三颗明珠”之一. 从 van der Waerden 定理出发, 一个自然的问题是: 对于一个自然数的子集, 是否只要它“足够大”, 他就能包含任意长度的等差数列呢? 在 1936 年, Erdős 和 Turán 就提出猜想: 如果一个自然数的子集在自然数中所占的比例是正的 (具有正的“上密度”), 那么它就会包含任意长的等差数列. 我们接下来定义上密度. 对  $N \in \mathbb{N}$ , 我们用  $[1, N]$  表示  $\mathbb{N} \cap [1, N]$ .

**定义 2.1.** 给定集合  $A \subset \mathbb{N}$ , 我们定义  $A$  的上密度为

$$\bar{d}(A) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|A \cap [1, N]|}{N}. \quad (2.1)$$

当极限(2.1)存在, 我们把它记作  $d(A)$ , 称为集合  $A$  的密度.

Erdős 和 Turán 的猜想在 1976 年被 Szemerédi 解决.

**定理 2.2.** (Szemerédi 定理) 设  $E \subset \mathbb{N}$ ,  $\bar{d}(E) > 0$ , 则  $E$  中含有任意长度的等差数列.

时至今日, Szemerédi 定理已经有了多个证明, 使用的工具横跨各个领域, Szemerédi 定理的每一个新证明, 几乎都会带动一个领域的发展. 更令人振奋的是, 尽管各个证明使用的

工具大不相同, 但它们却存在一些共同的思想, 详见 Terence Tao 2006 年的 ICM 报告 [8]. 在本文中, 我们主要关注 Furstenberg[4, 3] 给出的利用遍历理论的证明. 我们会给出等差数列长度为 3 时的完整证明 (长度为 3 对应的结果最早是由 Roth 给出 [7]).

在进一步讨论 Furstenberg 是如何将 Szemerédi 定理的证明转化为一个遍历论的问题之前, 我们先给出上密度的一些基本性质. 给定  $A, B \subset \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 我们定义  $A - n := \{m \in \mathbb{N} : m + n \in A\}$ ,  $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B, a > b\}$ .

**命题 2.3.** 对任意  $A, B \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 我们有

- (1)  $\bar{d}(A \cup B) \leq \bar{d}(A) + \bar{d}(B)$ ;
- (2)  $\bar{d}(A - n) = \bar{d}(A)$ .

**证明.** (1). 注意到对任意  $N \in \mathbb{N}$ ,  $|A \cup B \cap [1, N]| \leq |A \cap [1, N]| + |B \cap [1, N]|$  即可.

(2). 显然, 我们只需要证明  $n = 1$  的情形即可. 注意到对任意  $N \in \mathbb{N}$  有

$$|(A - 1) \cap [1, N]| - |A \cap [1, N]| \leq 1,$$

所以

$$\bar{d}(A - 1) - \bar{d}(A) = \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{|(A - 1) \cap [1, N]| - |A \cap [1, N]|}{N} = 0.$$

□

## 2.2 Furstenberg 对应原则

考虑映射  $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ , 由命题 2.3(2) 知, 对任意  $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\bar{d}(S^{-1}A) = \bar{d}(A)$ . 在这个意义下,  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \bar{d}, S)$  看起来非常像一个保测系统, 但不幸的是,  $\bar{d}$  并不是一个测度. 而 Furstenberg 对应原则所蕴含的想法就是将我们的上述考虑在某种意义下合理化.

**引理 2.4** (Furstenberg 对应原则). 给定  $E \subset \mathbb{N}$ , 则存在一个保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  和  $A \in \mathcal{B}$  满足  $\mu(A) = \bar{d}(E)$  使对任意有限  $F \subset \mathbb{N}$

$$\mu \left( \bigcap_{n \in F} T^{-n} A \right) \leq \bar{d} \left( \bigcap_{n \in F} S^{-n} E \right). \quad (2.2)$$

**证明.** 记  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ . 赋予  $\{0, 1\}$  离散拓扑 (故是紧集), 令  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}_0}$ , 由 Tychonoff 定理, 在乘积拓扑下  $X$  为紧集. 记  $\mathcal{B}$  为  $X$  生成的  $\sigma$ -代数.  $T : X \rightarrow X$ ,  $(x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (x_{n+1})_{n=0}^{\infty}$  为转移映射. 设

$$A := \{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X : x_0 = 1\}.$$

我们还需要构造一个不变测度. 设  $\{N_j\}_j$  为数列使得

$$\bar{d}(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|E \cap [1, N_j]|}{N_j}.$$

令  $1_E = w = (w_n)_{n=0}^{\infty} \in X$ , 即  $w_n = 1$  当且仅当  $n \in E$ . 对每个  $j$ , 定义  $(X, \mathcal{B})$  上的概率测度

$$\mu_j := \frac{1}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} \delta_{T^n w},$$

其中  $\delta_y$  为在  $y$  点的 Dirac 测度. 不难发现

$$\bar{d}(E) = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|E \cap [1, N_j]|}{N_j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{N_j} \sum_{n=1}^{N_j} w_n = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j(A).$$

取  $\mu$  为序列  $\{\mu_j\}_j$  在弱 \* 拓扑意义下的一个极限点, 则  $\mu(A) = \bar{d}(A)$ . 不仅如此,  $\mu$  还是一个  $T$ -不变测度. 为了证明  $\mu$  是一个  $T$ -不变测度, 我们考虑  $X$  中如下形式的集合 (称为柱状集):

$$\{(x_n)_{n=0}^{\infty} \in X : x_0 = a_0, \dots, x_k = a_k\}$$

其中  $k \in \mathbb{N}$  为某自然数,  $a_0, \dots, a_k \in \{0, 1\}$ . 由 Stone-Weierstrass 定理, 有限个柱状集的特征函数的线性组合在  $X$  的连续函数空间  $C(X)$  中是稠密的, 因此我们只需要证明对任意柱状集  $B$  有  $\mu(T^{-1}B) = \mu(B)$  即可.

$$|\mu_j(B) - \mu_j(T^{-1}B)| = \left| \frac{\#\{n \in [1, N_j] : T^n w \in B\} - \#\{n \in [1, N_j - 1] : T^n w \in B\}}{N_j} \right| \leq \frac{2}{N_j}$$

令  $j$  趋向无穷我们可以得到  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是一个保测系统. 最后我们证明(2.2),

$$\begin{aligned} \mu_j\left(\bigcap_{n \in F} T^{-n} A\right) &= \frac{1}{N_j} \left| \left\{ m \in [1, N_j] : (T^m w)_n = w_{m+n} = 1, \forall n \in F \right\} \right| \\ &= \frac{1}{N_j} \left| \left\{ m \in [1, N_j] : m + n \in E, \forall n \in F \right\} \right| \\ &= \frac{1}{N_j} \left| \left\{ m \in [1, N_j] : m \in \bigcap_{n \in F} S^{-n} E \right\} \right|. \end{aligned}$$

因此, 对任意有限集  $F \subset \mathbb{N}$ , 有

$$\bar{d}\left(\bigcap_{n \in F} S^{-n} E\right) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{N_j} \left| \bigcap_{n \in F} S^{-n} E \cap [1, N_j] \right| = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu_j\left(\bigcap_{n \in F} T^{-n} A\right) = \mu\left(\bigcap_{n \in F} T^{-n} A\right).$$

□

现在我们回过头来看 Szemerédi 定理. 注意到

$$\{a, a+b, \dots, a+kb\} \subset E \iff a \in E \cap S^{-b} E \cap \dots \cap S^{-kb} E,$$

因此 Szemerédi 等价于: 若  $E \subset \mathbb{N}$  满足  $\bar{d}(E) > 0$ , 则对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $b \in \mathbb{N}$  使得  $E \cap S^{-1} E \cap \dots \cap S^{-kb} E \neq \emptyset$  事实上, Furstenberg 证明了如下更强的结果:

**定理 2.5.** 若  $E \subset \mathbb{N}$  满足  $\bar{d}(E) > 0$ , 则对任意  $k \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \bar{d}(E \cap S^{-n} E \cap \dots \cap S^{-kn} E) > 0.$$

通过对应原则, 我们要证明定理2.5, 只需证明

**定理 2.6 (Furstenberg 多重恢复定理).** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统,  $A \in \mathcal{B}$  且  $\mu(A) > 0$ , 则对任意  $k \in \mathbb{N}$ , 存在  $n \in \mathbb{N}$  使得

$$\mu(A \cap T^{-n} A \cap \dots \cap T^{-kn} A) > 0,$$

事实上, 可以证明

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \mu(A \cap T^{-n} A \cap \dots \cap T^{-kn} A) > 0.$$

**注 .** 需要注意的是在 Furstenberg 1977 年的文章, 他并没有证明上式极限存在. 事实上多重恢复性对于证明 Szemerédi 定理已经完全够用. 关于收敛性, 直到 2005 年才由 Host.B, Kra.B [5] 给出了相应的证明.

在本节的最后, 我们介绍如何通过遍历分解定理1.7将多重回复定理2.6化归到遍历系统的情形.

**命题 2.7.** 如果定理2.6对遍历系统成立, 则其对一般的保测系统均成立.

**证明.** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统,  $A \in \mathcal{B}$  满足  $\mu(A) > 0$ . 令  $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$  为满足定理1.7的 Borel 概率空间. 记

$$Y' = \{y \in Y : \mu_y(A) > 0\}$$

由 (1.1) 知  $\nu(Y') > 0$ . 因为集合  $\tilde{Y} := \{y \in Y : (X, \mathcal{B}, \mu_y, T)\}$  是满测集, 所以  $Y' \cap \tilde{Y} \neq \emptyset$ . 取  $y \in Y' \cap \tilde{Y}$ ,  $(X, \mathcal{B}, \mu_y, T)$  为遍历系统. 利用定理2.6, 取  $n_y \in \mathbb{N}$  使得

$$\mu_y(A \cap T^{-n_y} A \cap \cdots \cap T^{-k n_y}) > 0.$$

对  $m \in \mathbb{N}$ , 设  $Y_m := \{y \in Y' \cap \tilde{Y} : n_y = m\}$ , 显然  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} Y_m = Y' \cap \tilde{Y}$ , 所以存在  $m \in \mathbb{N}$  使得  $\nu(Y_m) > 0$ . 对  $\varepsilon > 0$ , 设  $Y_{m,\varepsilon} := \{y \in Y_m : \mu_y(A \cap T^{-n_y} A \cap \cdots \cap T^{-k n_y}) > \varepsilon\}$ . 类似的, 因为  $Y_m = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_{m,1/n}$ , 存在  $\varepsilon > 0$  使得  $\nu(Y_{m,\varepsilon}) > 0$ . 记  $Y^* = Y_{m,\varepsilon}$ . 由遍历分解定理

$$\begin{aligned} \mu(A \cap T^{-m} A \cap \cdots \cap T^{-km} A) &= \int_Y \mu_y(A \cap T^{-m} A \cap \cdots \cap T^{-km} A) d\nu(y) \\ &\geq \int_{Y^*} \mu_y(A \cap T^{-m} A \cap \cdots \cap T^{-km} A) d\nu(y) \geq \varepsilon \nu(Y^*) > 0. \end{aligned}$$

□

### 3 弱混合系统

#### 3.1 弱混合系统与其基本性质

在本节我们介绍弱混合系统的相关性质与判定条件, 开始之前我们先引入以下记号和乘积系统的概念.

给定函数  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  和  $g : Y \rightarrow \mathbb{C}$ , 我们定义函数

$$f \otimes g : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}, (f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y).$$

**定义 3.1** (乘积系统). 给点两个保测系统  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{A}, \mu, T)$ ,  $\mathbf{Y} = (Y, \mathcal{B}, \nu, S)$ , 我们定义它们的乘积为保测系统  $\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = (Z, \mathcal{C}, \lambda, R)$ , 其中  $(Z, \mathcal{C}, \lambda)$  为概率空间  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  的乘积概率空间,  $R : Z \rightarrow Z$  定义为  $R(x, y) = (Tx, Sy)$ .

**定义 3.2** (弱混合). 令  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统,  $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$  为其乘积系统. 系统  $\mathbf{X}$  被称为是弱混合的, 是指  $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$  为遍历的.

**命题 3.1** (弱混合的等价刻画). 令  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 则如下等价:

- (1).  $\mathbf{X}$  为弱混合的;
- (2). 对任意的  $A, B \in \mathcal{B}$ , 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} |\mu(A \cap T^{-n} B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

- (3). 对任意  $f, g \in L^2(X)$ , 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n f \cdot g \, d\mu - \int_X f \, d\mu \int_X g \, d\mu \right| = 0.$$

(4). 对任意  $A, B \in \mathcal{B}$ , 存在上密度为 0 的子集  $E \subset \mathbb{N}$  使得

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin E}} \mu(A \cap T^{-n}B) = \mu(A)\mu(B).$$

**证明.** 我们按照如下顺序证明命题

(1)  $\Rightarrow$  (3) 不失一般性, 我们总可以假设  $\int_X f d\mu = 0$ , 因为我们总是可以用  $f - \int_X f d\mu$  替换  $f$ . 于是, 根据 Cauchy-Schwartz 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n f \cdot g d\mu \right| \right)^2 &\leq \limsup_N \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n f \cdot g d\mu \right|^2 \\ &= \limsup_N \mathbb{E}_{n < N} \int_X T^n f \cdot g d\mu \cdot \int_X T^n \bar{f} \cdot \bar{g} d\mu \\ &= \limsup_N \mathbb{E}_{n < N} \int_{X \times X} (f \otimes \bar{f}) \circ (T \times T)^n \cdot (g \otimes \bar{g}) d(\mu \otimes \mu). \end{aligned}$$

由于  $X \times X$  为遍历的, 我们对函数  $f \otimes \bar{f}, g \otimes \bar{g} \in L^1(X \times X)$  使用 von-Neumann 遍历定理得

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_{X \times X} (f \otimes \bar{f}) \circ (T \times T)^n \cdot (g \otimes \bar{g}) d(\mu \otimes \mu) = \int_{X \times X} f \otimes \bar{f} d(\mu \otimes \mu) \int_{X \times X} g \otimes \bar{g} d(\mu \otimes \mu).$$

注意到  $\int_{X \times X} f \otimes \bar{f} d(\mu \otimes \mu) = |\int_X f d\mu| = 0$ , 所以上述方程可写为:

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n f \cdot g d\mu \right| \right)^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n f \cdot g d\mu \right|^2 = 0,$$

证明完毕.

(3)  $\Rightarrow$  (2) 令  $f = 1_A, g = 1_B$  即可.

(2)  $\Rightarrow$  (4) 固定  $m \in \mathbb{N}$ , 定义集合

$$A_m := \{n \in \mathbb{N} : |\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| > \frac{1}{m}\}.$$

注意到

$$\mathbb{E}_{n < N} |\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| \geq \frac{1}{m} \frac{|A_m \cap [1, N]|}{N},$$

令  $N \rightarrow \infty$  得对所有  $m \in \mathbb{N}$   $\bar{d}(A_m) = 0$ . 因此对任意  $m \in \mathbb{N}$ , 存在  $N_m$ , 使得对任意  $N > N_m$ , 有  $|A_m \cap [1, N]| \leq N/m$ , 定义

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} (A_m \cap [N_m + 1, N_{m+1}]),$$

显然对任意  $k \in \mathbb{N}$ ,  $A_k \subset A_{k+1}$ . 因此对任意  $N \in \mathbb{N}$ , 选择  $m$  使得  $N \in [N_m + 1, N_{m+1}]$ , 我们有  $E \cap [1, N] \subset A_m \cap [1, N]$ , 进而  $|E \cap [1, N]| \leq N/m$ . 令  $N \rightarrow \infty$  可得  $\bar{d}(E) = 0$ .

最后, 对任意  $m \in \mathbb{N}$ , 令  $N \geq N_m$ , 则假若  $N \notin E$ , 必有  $N \notin A_m$ , 所以  $|\mu(A \cap T^{-n}B) - \mu(A)\mu(B)| < 1/m$ .

(4)  $\Rightarrow$  (1) 我们考虑利用推论 1.5 说明  $X \times X$  是遍历的. 取  $A_i, B_i \in \mathcal{B}$ , 由 (4), 存在  $E_i \subset \mathbb{N}$  满足  $\bar{d}(E_i) = 0$ , 使得

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin E_i}} \mu(A_i \cap T^{-n}B_i) = \mu(A_i)\mu(B_i), i = 1, 2.$$

集合  $E := E_1 \cup E_2$  也满足  $\bar{d}(E) = 0$  且有

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin E}} (\mu \otimes \mu)((A_1 \times B_1) \cap (T \times T)^{-n}(A_2 \times B_2)) = \mu(A_1)\mu(A_2)\mu(B_1)\mu(B_2).$$

因此

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} (\mu \otimes \mu) (((A_1 \times B_1) \cap (T \times T)^{-n} (A_2 \times B_2))) = (\mu \otimes \mu)(A_1 \times B_1) (\mu \otimes \mu)(A_2 \times B_2).$$

在通过标准的利用可测方体逼近乘积测度下的可测集的操作, 我们得到对任意  $A, B \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} (\mu \otimes \mu)(A \cap (T \times T)^{-n} B) = (\mu \otimes \mu)(A) (\mu \otimes \mu)(B).$$

所以由推论 1.5,  $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$  是遍历的.

□

我们在本节再给出一个系统是弱混合的等价条件, 它会在我们下节证明弱混合系统的多重回复定理的时候派上用场.

**命题 3.2.** 设  $k \in \mathbb{N}$ , 一个保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是弱混合的当且仅当  $(X, \mathcal{B}, \mu, T^k)$  是弱混合的.

**证明.** 我们先假设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是弱混合的. 由命题 3.1(4), 存在  $A, B \in \mathcal{B}$  和上密度为 0 的自然数子集  $E$  使得

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin E}} \mu(A \cap T^{-n} B) = \mu(A) \mu(B).$$

定义  $\tilde{E} := \{m \in \mathbb{N} : km \in E\}$ . 显然  $\bar{d}(\tilde{E}) = 0$  且

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \notin \tilde{E}}} \mu(A \cap (T^k)^{-m} B) = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ m \notin \tilde{E}}} \mu(A \cap T^{-mk} B) = \mu(A) \mu(B),$$

因此  $(X, \mathcal{B}, \mu, T^k)$  是弱混合的.

反过来, 假设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T^k)$  是弱混合的. 假若  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  不是弱混合的, 由定义有:  $(X \times X, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \mu, T \times T)$  不是遍历的, 则存在  $T \times T$  的不变集  $A \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$  满足  $\mu \otimes \mu(A) \in (0, 1)$ . 注意到  $A$  也是保测变换  $(T^k \times T^k) = (T \times T)^k$  下的不变集, 这意味着  $(X \times X, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \mu, T^k \times T^k)$  也不是遍历的, 产生了矛盾!

□

### 3.2 弱混合系统的多重回复定理

在本小节中我们将会证明弱混合系统的多重回复定理, 为了简化记号, 在不产生歧义的情况下, 我们用  $Tf$  表示  $f \circ T$ . 我们将证明如下命题:

**命题 3.3.** 设  $r \geq 1$ .  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个弱混合系统, 则对于任何  $f_1, \dots, f_r \in L^\infty(X)$ ,

$$\mathbb{E}_{n < N} T^n f_1 \cdots T^{rn} f_r \xrightarrow{L^2} \prod_{i=1}^r \int_X f_i d\mu_i, \quad N \rightarrow \infty.$$

特别地, 若  $A \in \mathcal{B}$  满足  $\mu(A) > 0$ , 我们令  $f_1 = \dots = f_r = 1_A$  就可以得到弱混合系统的多重回复性.

在证明命题3.3之前, 我们需要引入如下关键性的引理, 即 van der Corput 引理:

**引理 3.4.** (van der Corput) 设  $\{x_n\}$  为 Hilbert 空间  $V$  中的一列元素, 且对任意  $n$ ,  $\|x_n\| \leq 1$ , 则

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|\mathbb{E}_{n < N} x_n\|^2 \leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{h < H} \left| \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle \right|.$$

证明. 我们引入如下记号: 设  $H$  为一个参数, 我们记  $o_{H,N \rightarrow \infty}(1)$  表示  $V$  中当  $N \rightarrow \infty$  时, 范数趋于 0 的量, 收敛速度与  $H$  有关. 需要注意的是, 在不同的式子中此记号可能代表不同的量.

固定  $H$ , 设  $h < H$ , 我们有如下观察:

$$\mathbb{E}_{n < N} x_n = \mathbb{E}_{n < N} x_{n+h} + o_{H,N \rightarrow \infty}(1), \quad (3.1)$$

这是因为

$$\|\mathbb{E}_{n < N} x_n - \mathbb{E}_{n < N} x_{n+h}\| = \left\| \frac{1}{N} (x_0 + \cdots + x_{h-1} - x_N - \cdots - x_{N+h-1}) \right\| < \frac{2H}{N}.$$

对(3.1)左右同时对  $h < H$  取平均有

$$\mathbb{E}_{n < N} x_n = \mathbb{E}_{n < N} \mathbb{E}_{h < H} x_{n+h} + o_{H,N \rightarrow \infty}(1),$$

于是

$$\begin{aligned} \|\mathbb{E}_{n < N} x_n\|^2 &= \|\mathbb{E}_{n < N} \mathbb{E}_{h < H} x_{n+h}\|^2 + o_{H,N \rightarrow \infty}(1) \\ &\leq \mathbb{E}_{n < N} \|\mathbb{E}_{h < H} x_{n+h}\|^2 + o_{H,N \rightarrow \infty}(1) \\ &= \mathbb{E}_{n < N} \langle \mathbb{E}_{h < H} x_{n+h}, \mathbb{E}_{h < H} x_{n+h} \rangle + o_{H,N \rightarrow \infty}(1) \\ &\leq \mathbb{E}_{h_1 < H} \mathbb{E}_{h_2 < H} |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2} \rangle| + o_{H,N \rightarrow \infty}(1). \end{aligned}$$

记  $\mathbb{E}_{h_1, h_2 < H} := \mathbb{E}_{h_1 < H} \mathbb{E}_{h_2 < H}$ , 上式能写为

$$\|\mathbb{E}_{n < N} x_n\|^2 \leq \mathbb{E}_{h_1, h_2 < H} |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2} \rangle| + o_{H,N \rightarrow \infty}(1). \quad (3.2)$$

再次利用(3.1), 我们有

$$\mathbb{E}_{n < N} \langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2} \rangle = \mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h_2-h_1} \rangle + o_{H,N \rightarrow \infty}(1), \quad (3.3)$$

和

$$\mathbb{E}_{n < N} \langle x_{n+h_1}, x_{n+h_2} \rangle = \mathbb{E}_{n < N} \langle x_{n+h_1-h_2}, x_n \rangle + o_{H,N \rightarrow \infty}(1) = \overline{\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h_1-h_2} \rangle} + o_{H,N \rightarrow \infty}(1). \quad (3.4)$$

将(3.3)和(3.4)带入(3.2), 更具体地说,  $h_2 \geq h_1$  时带入 (3.3),  $h_2 < h_1$  时带入(3.4) 得

$$\|\mathbb{E}_{n < N} x_n\|^2 \leq \frac{1}{H^2} \sum_{h < H} w(h) |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| + o_{H,N \rightarrow \infty}(1), \quad (3.5)$$

其中  $w(h)$  为当  $h_1, h_2 < H$  时,  $h = h_1 - h_2$  或  $h = h_2 - h_1$  的所有可能的方法的数量, 因此

$$w(h) = \begin{cases} H, & h = 0; \\ 2(H-h), & 1 \leq h \leq H-1. \end{cases}$$

在3.5左右两边对  $N$  同时取上极限,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \|\mathbb{E}_{n < N} x_n\|^2 \leq \frac{1}{H^2} \sum_{h < H} w(h) \limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle|. \quad (3.6)$$

我们断言, 对任意有界数列  $\{y_h\}$ , 我们有

$$\limsup_{H \rightarrow \infty} \frac{1}{H^2} \sum_{h < H} w(h) y_h \leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{h < H} y_h. \quad (3.7)$$

假设断言成立, 只需令  $y_h = \limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle|$ , 则引理 3.4 成立.

接下来我们证明断言. 注意到

$$\sum_{h < H} w(h)y_h = -Hy_0 + 2 \sum_{H'=1}^H \sum_{h < H'} y_h. \quad (3.8)$$

设  $H \geq H_0$  时,  $\mathbb{E}_{h < H} y_h \leq C$ , 由(3.8), 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{H^2} \sum_{h < H} w(h) y_h &= -\frac{y_0}{H} + 2 \sum_{H'=1}^{H_0-1} \sum_{h < H'} y_h + 2 \sum_{H'=H_0}^H \sum_{h < H'} y_h \\ &\leq \frac{y_0}{H} + 2 \frac{H_0^2}{H} + \frac{2}{H^2} \sum_{H'=H_0}^H CH' \\ &\rightarrow C, \quad H \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

证毕.  $\square$

**证明.** (命题3.3) 我们对  $r$  进行归纳. 若  $r = 1$ , 命题就是 von-Neumann 遍历定理. 假设  $r \geq 2$ , 不失一般性, 我们可以假设  $\int_X f_r d\mu = 0$ . 又因为  $f_i \in L^\infty(X)$ , 我们也总能假设  $\|f_i\|_\infty \leq 1$ . 我们记  $\Delta_h f_i := f_i T^h f_i$ . 注意到  $\|\Delta_h f_i\|_\infty \leq 1$ , 我们有对任意  $i, h \in \mathbb{N}$ ,  $\|\Delta_h f_i\|_2 \leq 1$ .

我们的目标是证明

$$\mathbb{E}_{n < N} T^n f_1 \cdots T^{rn} f_r \xrightarrow{L^2} 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

令  $x_n := T^n f_1 \cdots T^{rn} f_r$ , 注意到

$$\langle x_n, x_{n+h} \rangle = \int_X (T^n \Delta_h f_1) \cdots (T^{rn} \Delta_{rh} f_r) d\mu,$$

由引理3.4, 我们只需要证明

$$\limsup_{H \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{h < H} \left| \limsup_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X (T^n \Delta_h f_1) \cdots (T^{rn} \Delta_{rh} f_r) d\mu \right| = 0. \quad (3.9)$$

因为  $T$  为保测映射, 我们有

$$\int_X (T^n \Delta_h f_1) \cdots (T^{rn} \Delta_{rh} f_r) d\mu = \int_X (\Delta_h f_1)(T^n \Delta_h f_2) \cdots (T^{(r-1)n} \Delta_{rh} f_r) d\mu.$$

由 Cauchy-Schwartz 不等式, 得

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E}_{n < N} \int_X (T^n \Delta_h f_1) \cdots (T^{rn} \Delta_{rh} f_r) d\mu \right| &= \left| \int_X (\Delta_h f_1) \cdot \mathbb{E}_{n < N} (T^n \Delta_{2h} f_2 \cdots T^{(r-1)n} \Delta_{rh} f_r) d\mu \right| \\ &\leq \left\| \mathbb{E}_{n < N} (T^n \Delta_h f_2 \cdots T^{(r-1)n} \Delta_{rh} f_r) \right\|_2. \end{aligned}$$

令  $N \rightarrow \infty$ , 由归纳假设, 有

$$\begin{aligned} \limsup_N \left| \mathbb{E}_{n < N} \int_X (T^n \Delta_h f_1) \cdots (T^{rn} \Delta_{rh} f_r) d\mu \right| &\leq \left| \prod_{j=2}^r \int_X \Delta_{jh} f_j d\mu \right| \\ &\leq \left| \int_X \Delta_{rh} f_r d\mu \right| = |\langle f_r, T^{rh} f_r \rangle|. \end{aligned}$$

其中  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是  $L^2(X)$  中的内积, 对  $f, g \in L^2(X)$ ,  $\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu$ . 因为  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是弱混合的, 由命题3.2,  $(X, \mathcal{B}, \mu, T^r)$  也是弱混合的, 对此系统利用命题3.1(4), 又因为  $\int_X f_r d\mu = 0$ , 我们得到

$$\limsup_{H \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{h < H} |\langle f_r, T^{rh} f_r \rangle| = \limsup_{H \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{h < H} \left| \int_X (T^r)^h \bar{f}_r \cdot f_r d\mu \right| = 0,$$

于是(3.9)成立, 命题证毕.  $\square$

## 4 几乎周期系统

### 4.1 几乎周期函数

**定义 4.1.** 设  $\mathbf{X}$  为一保测系统,  $f \in L^2(X)$ . 我们称  $f$  是几乎周期的 (或者, 紧的), 是指它的轨道闭包  $\overline{\{T^n f : n \in \mathbb{N}\}}$  作为  $L^2(X)$  的子集是紧的. 几乎周期函数的全体构成的集合我们记为  $\mathcal{H}_{ap}$ . 若  $L^2(X) = \mathcal{H}_{ap}$ , 则称保测系统  $\mathbf{X}$  是一个几乎周期系统.

我们在本节探究一些几乎周期函数的基本性质.

**引理 4.1.** 设  $\mathbf{X}$  为一个保测系统, 令  $\phi : L^2(X) \times L^2(X) \rightarrow L^2(X)$  满足

$$(1) \quad \phi(Tf, Tg) = T\phi(f, g);$$

(2)  $\phi$  一致连续;

则对任意  $f, g \in \mathcal{H}_{ap}$ ,  $\phi(f, g) \in \mathcal{H}_{ap}$ .

**证明.** 固定  $\varepsilon > 0$ , 因为  $\phi$  是一致连续的, 故存在  $\delta > 0$  使得如果  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(X)$  满足  $\|f_1 - f_2\|_2 < \delta$ ,  $\|g_1 - g_2\|_2 < \delta$ , 则有  $\|\phi(f_1, g_1) - \phi(f_2, g_2)\|_2 < \varepsilon$ .

设  $f, g \in \mathcal{H}_{ap}$ , 令  $\{B_i\}, \{C_j\}$  分别为  $f$  和  $g$  的轨道闭包的一个有限开覆盖, 其中每一个开集的直径都小于  $\delta$ . 于是对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 我们有  $T^n f \in B_{i(n)}, T^n g \in C_{j(n)}$ . 因此  $T^n \phi(f, g) = \phi(T^n f, T^n g) \in \phi(B_{i(n)}, C_{j(n)})$ . 由于每个  $B_i, C_j$  的直径都小于  $\delta$ , 我们知道  $\phi(B_i, C_j)$  的直径小于  $\varepsilon$ . 所以

$$\overline{\{T^n \phi(f, g) : n \in \mathbb{N}\}} \subset \bigcup_{i,j} \phi(B_i, C_j).$$

注意到右边的并是有限的, 所以  $\phi(f, g)$  的轨道闭包是完全有界的, 进而是紧的. 这就完成了  $\phi(f, g) \in \mathcal{H}_{ap}$  的证明  $\square$

**命题 4.2.** 设  $\mathbf{X}$  为一个保测系统,  $\mathbf{X}$  上几乎周期函数的全体构成的集合为  $\mathcal{H}_{ap}$ . 则

(1).  $\mathcal{H}_{ap}$  为一个  $T$ -不变的线性闭子空间;

(2). 设实值函数  $f, g \in \mathcal{H}_{ap}$ , 则  $\min(f, g), \max(f, g) \in \mathcal{H}_{ap}$ .

(3). 对任意  $f, g \in L^\infty(X) \cap \mathcal{H}_{ap}$ ,  $fg \in \mathcal{H}_{ap}$ .

**证明.** (1). 显然,  $\mathcal{H}_{ap}$  是  $T$ -不变的. 接下来我们证明  $\mathcal{H}_{ap}$  是闭线性子空间. 注意到映射  $(f, g) \mapsto f+g$  是一致连续的, 由引理 4.1 知,  $\mathcal{H}_{ap}$  为一个线性子空间. 接下来证明其是闭集. 设  $f \in \overline{\mathcal{H}_{ap}}$ , 我们证明  $f$  是几乎周期函数. 设  $\varepsilon > 0$ , 令  $g \in \mathcal{H}_{ap}$  使得  $\|f-g\|_2 < \varepsilon/2$ . 由于  $T$  是保测变换, 对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|T^n f - T^n g\|_2 \leq \varepsilon/2$ . 取  $x_1, \dots, x_m \in \overline{\{T^n g : n \in \mathbb{N}\}}$  使得

$$\overline{\{T^n g : n \in \mathbb{N}\}} \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \frac{\varepsilon}{2}),$$

从而有

$$\overline{\{T^n f : n \in \mathbb{N}\}} \subset \bigcup_{i=1}^m B(x_i, \varepsilon),$$

所以  $f$  的轨道闭包完全有界, 为紧集,  $f$  为几乎周期函数.

(2). 设  $\phi : L^2(X, \mathbb{R}) \times L^2(X, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(X, \mathbb{R}), (f, g) \mapsto \min(f, g)$ . 显然有

$$T\phi(f, g)(x) = \phi(f, g)(Tx) = \min(f(Tx), g(Tx)) = \min(Tf(x), Tg(x)).$$

其次, 注意到

$$\begin{aligned} \|\phi(f_1, g_1) - \phi(f_2, g_2)\|_2 &= \left\| \frac{1}{2}(f_1 + g_1) - \frac{1}{2}|f_1 - g_1| - \frac{1}{2}(f_2 + g_2) + \frac{1}{2}|f_2 - g_2| \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|(f_1 - g_1) + (f_2 - g_2)\|_2 + \frac{1}{2}\||f_1 - g_1| - |f_2 - g_2|\|_2 \\ &\leq \|f_1 - g_1\|_2 + \|f_2 - g_2\|_2. \end{aligned}$$

因此  $\phi$  是一致连续的, 从而由引理4.1,  $\min(f, g) \in \mathcal{H}_{ap}$ . 完全类似的, 我们也能证明  $\max(f, g) \in \mathcal{H}_{ap}$ .

- (3). 设  $f, g \in L^\infty(X) \cap \mathcal{H}_{ap}$ . 不失一般性, 我们可以假设  $\|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1$ . 取定  $\varepsilon > 0$ , 存在  $F \subset \overline{\{T^n f : n \in \mathbb{N}\}}$ ,  $|F| < \infty$ ;  $G \subset \overline{\{T^n g : n \in \mathbb{N}\}}$ ,  $|G| < \infty$  满足

$$\begin{aligned} \overline{\{T^n f : n \in \mathbb{N}\}} &\subset \bigcup_{f \in F} B(f, \varepsilon/2); \\ \overline{\{T^n g : n \in \mathbb{N}\}} &\subset \bigcup_{g \in G} B(g, \varepsilon/2). \end{aligned}$$

对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 存在  $f' \in F, g' \in G$  使得

$$\|T^n f - f'\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|T^n g - g'\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned} \|T^n(fg) - f'g'\|_2 &\leq \|(T^n f - f') \cdot T^n g\|_2 + \|f' \cdot (T^n g - g')\|_2 \\ &\leq \|g\|_\infty \cdot \|T^n f - f'\|_2 + \|f\|_\infty \cdot \|T^n g - g'\|_2 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

记  $H = \{fg : f \in F, g \in G\}$ , 则  $H$  是一个有限集, 且

$$\overline{\{T^n(fg) : n \in \mathbb{N}\}} \subset \bigcup_{h \in H} B(h, \varepsilon).$$

于是  $fg$  的轨道是完全有界的, 从而是紧的, 即  $fg \in \mathcal{H}_{ap}$ .

□

## 4.2 几乎周期系统的多重回复定理

在本章的最后我们证明几乎周期系统的多重回复定理.

**定理 4.3.** 设  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统,  $f \in L^\infty(X)$  为一个几乎周期函数, 假设  $f \geq 0$ , 且  $f$  不几乎处处为 0, 则对任意  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ , 有

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f \, d\mu > 0.$$

特别的, 若  $\mathbf{X}$  是一个几乎周期系统,  $A \in \mathcal{B}$  满足  $\mu(A) > 0$ , 取  $f = 1_A$  则有

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f \, d\mu = \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \mu(A \cap T^{-n} A \cap \cdots \cap T^{-(k-1)n} A) > 0.$$

我们先给出几乎周期函数的一个性质.

**定义 4.2.** 一个集合  $A \subset \mathbb{N}$  被称为是 syndetic 集, 是指存在  $N \in \mathbb{N}$  满足

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^N (A - n),$$

换句话说, 集合  $A$  在数轴上相邻元素之间的间距有限.

**命题 4.4.** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统, 若函数  $f \in L^2(X)$  是几乎周期的, 则对任意  $\varepsilon > 0$  集合

$$R_\varepsilon := \{n \in \mathbb{N} : \|T^n f - f\|_2 < \varepsilon\}$$

是 syndetic 集.

**证明.** 固定  $\varepsilon$ . 假设  $f \in \mathcal{H}_{ap}$ , 由于  $O_f := \overline{\{T^n f : n \in \mathbb{N}\}}$  为紧集, 所以对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbb{N}$  满足

$$O_f \subset \bigcup_{j=0}^N \{g \in L^2(X) : \|T^j f - g\|_2 < \varepsilon\}. \quad (4.1)$$

假若  $R_\varepsilon$  不是 syndetic 的, 则对任意  $j \in \mathbb{N}$ , 存在  $n_j$  满足  $R_\varepsilon \cap [n_j, n_j + j] = \emptyset$ . 因为  $O_f$  是紧的,  $\{T^{n_j} f\}$  至少存在一个极限点  $g \in O_f$ . 不难验证, 这个极限点满足对任意  $k \in \mathbb{N}$

$$\|T^k g - f\|_2 \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|T^{n_j+k} f - f\|_2 \geq \varepsilon.$$

由于  $T$  为保测映射, 我们有对任意  $h \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $\|T^{k+h} f - T^h f\|_2 \geq \varepsilon$ . 这与(4.1)矛盾.  $\square$

**证明.** (定理4.3) 设  $f \in L^\infty(X) \cap \mathcal{H}_{ap}$  满足  $f \geq 0$ , 且  $f$  不几乎处处为 0. 不失一般性我们可以假设  $\|f\|_\infty = 1$ . 取  $\varepsilon = 1/2 \int_X f^k d\mu$ , 则  $\varepsilon > 0$ . 记

$$N_\varepsilon := \left\{n \in \mathbb{N} : \|T^n f - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{k2^k}\right\}.$$

设  $n \in N_\varepsilon$ , 因为  $T$  是保测映射我们有对任意  $j \in \mathbb{N}$ ,  $\|T^{jn} f - T^{(j+1)n} f\|_2 < \varepsilon'$ . 由三角不等式我们得: 对  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ ,  $\|f - T^{jn} f\|_2 < \varepsilon/2^k$ . 记  $g_j = f - T^{jn} f$ , 则

$$\int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f d\mu = \int_X f(g_1 \cdots g_{k-1}) d\mu, \quad (4.2)$$

将(4.2) 右边展开, 会得到  $\int_X f^k d\mu$  加上不多于  $2^k$  项, 其中每一项都具有形式  $\langle g_j, F \rangle$ , 其中  $\|F\|_\infty \leq 1$ , 于是  $|\langle g_j, F \rangle| < \varepsilon/2^k$ . 因此

$$\int_X f T^n f \cdots T^{(k-1)n} f d\mu \geq \int_X f^k d\mu - \varepsilon = \varepsilon > 0.$$

设  $b_\varepsilon$  为  $N_\varepsilon$  的最大间距, 则

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n \leq N} \int_X f \cdot T^n f \cdots T^{(k-1)n} f d\mu &\geq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n \in R \cap [0, N-1]} \int_X f \cdot T^n f \cdots T^{(k-1)n} f d\mu \\ &\geq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{|R \cap [0, N-1]|}{N} \cdot \varepsilon \\ &\geq \frac{1}{2b_\varepsilon} \cdot \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

$\square$

## 5 Roth 定理的证明

### 5.1 弱混合系统 v.s. 几乎周期系统

给定一个保测系统, 其并不一定要么是几乎周期的, 要么是弱混合的. 但是, 对于一个不是弱混合的系统, 其一定存在几乎周期的部分, 即

**定理 5.1.** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是一个非弱混合的保测系统, 那么  $L^2(X)$  中一定存在一个非常值的几乎周期函数.

这个定理的证明需要用到谱理论中的 Hergoltz 定理, 我们在这里略去. 感兴趣的读者可以参考 [6]. 此节的目的是给出一个保测系统的  $L^2$  空间的一个分解刻画, 为下一节 Roth 定理的证明做最后的准备.

**定义 5.1.** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统,  $f \in L^2(X)$ . 我们称函数  $f$  是弱混合的是指

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} |\langle T^n f, f \rangle| = 0.$$

弱混合函数的全体构成的集合我们记为  $\mathcal{H}_{wm}$ .

类似于几乎周期函数与几乎周期系统的关系, 弱混合函数与弱混合系统也有紧密的联系:

**命题 5.2.** 一个保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是弱混合的当且仅当任意  $f \in L^2(X)$  满足  $\int_X f \, d\mu = 0$  都有  $f \in \mathcal{H}_{wm}$ .

这个命题必要性部分的证明是显然的. 对于弱混合的保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , 由命题 3.1(4) 知: 当  $f \in L^2$  且  $\int_X f \, d\mu = 0$  时,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |\langle T^n f, f \rangle| = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n f \cdot \bar{f} \, d\mu - \int_X f \, d\mu \int_X \bar{f} \, d\mu \right| = 0,$$

即  $f \in \mathcal{H}_{wm}$ . 为了证明充分性, 我们要用到如下引理:

**引理 5.3.** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统,  $f \in \mathcal{H}_{wm}$ , 则对任意  $g \in L^2(X)$ , 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} |\langle T^n f, g \rangle| = 0.$$

**证明.** 证明使用 van der Corput 引理 3.4. 不失一般性, 我们可以设  $\|f\|_2, \|g\|_2 \leq 1$  设  $x_n = T^n f \overline{\langle T^n f, g \rangle}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{h < H} \limsup_N |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| &= \mathbb{E}_{h < H} \limsup_N \left| \mathbb{E}_{n < N} \overline{\langle T^n f, g \rangle} \cdot \langle T^{n+h} f, g \rangle \cdot \langle T^n f, T^{n+h} f \rangle \right| \\ &\leq \mathbb{E}_{h < H} \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 \cdot |\langle f, T^h f \rangle|. \end{aligned}$$

由于  $f \in \mathcal{H}_{wm}$ , 上式两边对  $H$  取极限得

$$\lim_{H \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{h < H} \limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| = \|f\|_2^2 \|g\|_2^2 \lim_{H \rightarrow \infty} |\langle T^h f, f \rangle| = 0.$$

由引理 3.4, 我们知  $\mathbb{E}_{n < N} x_n = 0$ . 因此

$$\begin{aligned} \lim_N \mathbb{E}_{n < N} |\langle T^n f, g \rangle|^2 &= \lim_N \mathbb{E}_{n < N} \langle T^n f, g \rangle \cdot \overline{\langle T^n f, g \rangle} \\ &= \lim_N \left\langle \mathbb{E}_{n < N} (T^n f \cdot \overline{\langle T^n f, g \rangle}), g \right\rangle \\ &= \lim_N \langle \mathbb{E}_{n < N} x_n, g \rangle = 0. \end{aligned}$$

证毕. □

注. 类似于命题3.1(4), 此引理由如下等价描述: 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统,  $f \in \mathcal{H}_{wm}$ , 则存在  $S \subset \mathbb{N}$ ,  $d(S) = 1$  使得对任意  $g \in L^2(X)$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{n \in S} |\langle T^n f, g \rangle| = 0.$$

证明. (命题5.2) 我们只需要证明充分性. 注意到对于任意  $f \in L^2(X)$ , 令  $\tilde{f} := f - \int_X f \, d\mu$  则  $\tilde{f}$  满足  $\int_X \tilde{f} \, d\mu = 0$ . 因此, 对任意  $g, h \in L^2(X)$ ,

$$\mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n g \cdot h \, d\mu - \int_X g \, d\mu \int_X h \, d\mu \right| = \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n \tilde{g} \cdot \tilde{h} \, d\mu \right| = \mathbb{E}_{n < N} \langle T^n \tilde{g}, \tilde{h} \rangle.$$

由条件知,  $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathcal{H}_{wm}$ , 故由引理5.3

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \left| \int_X T^n g \cdot h \, d\mu - \int_X g \, d\mu \int_X h \, d\mu \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle T^n \tilde{g}, \tilde{h} \rangle = 0.$$

证毕.  $\square$

命题 5.4. 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统. 若非零函数  $f \in L^2(X)$  不是弱混合的, 则存在一个几乎周期函数  $\phi \in L^2(X)$  满足  $\langle f, \phi \rangle \neq 0$ .

证明. 注意到当  $\int_X f \, d\mu \neq 0$  时, 我们取  $\phi = 1$  即可. 接下来我们考虑  $\int_X f \, d\mu = 0$  的情形. 不失一般性, 我们假设  $\|f\|_2 \leq 1$ .

定义函数  $K \in L^2(X \times X)$

$$K(x, y) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} T^n f(x) T^n \bar{f}(y),$$

由 von-Neumann 遍历定理知,  $K$  是良好定义的. 事实上, 根据遍历定理我们还知道,  $K$  就是函数  $f \otimes \bar{f} \in L^2(X \times X)$  在  $(T \times T)$ -不变函数空间上的投影, 即  $K$  是  $(T \times T)$ -不变的. 定义函数

$$\phi(x) := \int_X K(x, y) f(y) \, d\mu(y),$$

我们有

$$\begin{aligned} \langle f, \phi \rangle &= \int_X f(x) \cdot \overline{\int_X \left( \lim_N \mathbb{E}_{n < N} T^n f(x) \cdot T^n \bar{f}(y) \right) f(y) \, d\mu(y)} \, d\mu(x) \\ &= \lim_N \mathbb{E}_{n < N} \left( \int_X f(x) \cdot T^n \bar{f}(x) \, d\mu(x) \right) \cdot \left( \int_X \bar{f}(y) \cdot T^n f(y) \, d\mu(y) \right) \\ &= \lim_N \mathbb{E}_{n < N} |\langle f, T^n f \rangle|^2. \end{aligned}$$

在上式右边的第一行到第二行我们使用了控制收敛定理以及 Fubini 定理, 由于  $f$  不是弱混合的, 所以  $\langle f, \phi \rangle \neq 0$ .

最后我们证明  $\phi$  是几乎周期函数. 注意到

$$\begin{aligned} T^n \phi(x) &= \int_X K(T^n x, y) \cdot f(y) \, d\mu(y) \\ &= \int_X K(T^n x, T^n y) \cdot T^n f(y) \, d\mu(y) \\ &= \int_X K(x, y) \cdot T^n f(y) \, d\mu(y). \end{aligned}$$

其中最后一步用到了  $K$  是  $(T \times T)$ - 不变的. 因此

$$\overline{\{T^n\phi : n \in \mathbb{N}\}} \subset \left\{ \int_X K(x, y)g(y) d\mu(y) : \|g\|_2 \leq 1 \right\}.$$

由 Hilbert-Schmidt 定理 [2, Proposition 6.11] 知, 上式右边的闭包是紧的, 因此  $\phi$  是几乎周期的.  $\square$

**命题 5.5.** 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统, 若函数  $f \in \mathcal{H}_{wm}$ , 则对任意函数  $g \in \mathcal{H}_{ap}$ , 有  $\langle f, g \rangle = 0$ .

**证明.** 不失一般性我们假设  $\|f\|_2 = 1$ . 固定  $\varepsilon > 0$ , 由于  $g \in \mathcal{H}_{ap}$ , 故存在  $N \in \mathbb{N}$  使得

$$\overline{\{T^n g : n \in \mathbb{N}\}} \subset \bigcup_{j=0}^N B(T^j g, \varepsilon),$$

对任意  $m \in \mathbb{N}$ , 记  $j_m \in \{0, 1, \dots, N\}$  满足  $T^m g \in B(T^{j_m} g, \varepsilon)$ . 我们有

$$|\langle f, g \rangle| = |\langle T^m f, T^m g \rangle| = |\langle T^m f, T^{j_m} g + T^m g - T^{j_m} g \rangle| \leq \varepsilon + |\langle T^m f, T^{j_m} g \rangle| \leq \varepsilon + \sum_{j=0}^N |\langle T^m f, T^j g \rangle|.$$

因此, 对任意  $M \in \mathbb{N}$ ,

$$|\langle f, g \rangle| = \mathbb{E}_{m < M} |\langle T^m f, T^m g \rangle| \leq \varepsilon + \sum_{j=0}^N \mathbb{E}_{m < M} |\langle T^m f, T^j g \rangle|.$$

利用引理5.3, 我们可以取  $M$  充分大使得对任意  $j \in \{0, 1, \dots, N\}$ ,  $\mathbb{E}_{m < M} |\langle T^m f, T^j g \rangle| < \varepsilon/j$ . 所以我们有  $|\langle f, g \rangle| < 2\varepsilon$ . 因为  $\varepsilon$  是任意的, 我们有  $\langle f, g \rangle = 0$ .  $\square$

**定理 5.6.** (Jacobs-de Leeuw-Glicksberg 分解) 设  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统, 则  $\mathcal{H}_{ap}$  和  $\mathcal{H}_{wm}$  为  $L^2(X)$  的闭不变子空间, 它们相互正交且  $L^2(X) = \mathcal{H}_{ap} \oplus \mathcal{H}_{wm}$ .

**证明.** 我们在之前已经证明了  $\mathcal{H}_{ap}$  为闭不变子空间. 在这里我们先证明  $\mathcal{H}_{wm}$  也是闭不变子空间. 其中不变子空间的部分由定义是显然的. 我们主要说明  $\mathcal{H}_{wm}$  是一个闭集. 固定  $\varepsilon > 0$ , 对任意  $f \in \overline{\mathcal{H}_{wm}}$ , 取  $g \in \mathcal{H}_{wm} \cap B(f, \varepsilon)$ . 则

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{n < N} |\langle T^n f, f \rangle| &\leq \mathbb{E}_{n < N} |\langle T^n g, g \rangle| \\ &\quad + \mathbb{E}_{n < N} \left( |\langle T^n g, f - g \rangle| + |\langle T^n(f - g), g \rangle| + |\langle T^n(f - g), f - g \rangle| \right) \\ &\leq \mathbb{E}_{n < N} |\langle T^n g, g \rangle| + 2\varepsilon \|g\|_2 + \varepsilon^2. \end{aligned}$$

因为  $g \in \mathcal{H}_{wm} \cap B(f, \varepsilon)$ , 两边令  $N$  趋于  $\infty$  并让  $\varepsilon$  趋于 0 得  $f \in \mathcal{H}_{wm}$ . 所以  $\mathcal{H}_{wm}$  为闭不变子空间.

由命题5.4 和命题 5.5 知  $f \in \mathcal{H}_{wm}$  当且仅当其与  $\mathcal{H}_{ap}$  正交, 所以有  $\mathcal{H}_{wm} = \mathcal{H}_{ap}^\perp$ . 定理证毕.  $\square$

## 5.2 Roth 定理

Roth 在 1953 年利用傅里叶分析的办法证明了如下结果:

**定理 5.7.** 设  $A \subset \mathbb{N}$  有正上密度, 则  $A$  中包含了长度为 3 的等差数列.

我们在之前已经通过 Furstenberg 对应原则将定理5.7转换为如下关于保测系统的多重回复问题.

**定理 5.8.**  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为一个保测系统, 设  $A \in \mathcal{B}$  满足  $\mu(A) > 0$ , 则存在  $n \in \mathbb{N}$  使得  $\mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A) > 0$ . 事实上我们有

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A) > 0. \quad (5.1)$$

在第二章结尾我们已经证明了, 通过遍历分解定理, 我们可以假设  $\mathbf{X}$  是遍历系统. 证明定理5.8的基本思想是利用定理5.6将  $A$  的示性函数  $1_A$  分解为一个几乎周期函数和弱混合函数的和, 即  $1_A = f_{ap} + f_{wm}$ . 这样我们就能将 (5.1) 展开为 4 项.

$$\begin{aligned} \mu(A \cap T^{-n}A \cap T^{-2n}A) &= \int_X 1_A \cdot T^n 1_A \cdot T^{2n} 1_A \, d\mu \\ &= \int_X 1_A \cdot T^n(f_{ap} + f_{wm}) \cdot T^{2n}(f_{ap} + f_{wm}) \, d\mu \\ &= \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} \, d\mu + \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{wm} \, d\mu \\ &\quad + \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{ap} \, d\mu + \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{wm} \, d\mu. \end{aligned}$$

根据定理4.3, 我们希望上式右边第一项求平均之后为正; 根据正交性, 我们可以期望中间两项求平均之后为 0; 最后根据弱混合函数的性质, 我们能证明最后一项求平均后也为 0. 接下来我们一步步的建立我们需要的一些引理.

**引理 5.9.** 设  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 令  $f \in L^2(X)$ , 设  $f = f_{ap} + f_{wm}$  为形如定理5.6 中的分解, 若  $f$  的值域在  $[0, 1]$  中, 则  $f_{ap}$  的值域也在  $[0, 1]$  中.

**证明.** 设  $g_0 = \Re f_{ap}$  为函数  $f_{ap}$  的实部. 显然有

$$\overline{\{T^n g_0 : n \in \mathbb{N}\}} = \Re \overline{\{T^n f_{ap} : n \in \mathbb{N}\}}.$$

因为  $\Re : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$  为连续的, 所以  $\Re \overline{\{T^n f_{ap} : n \in \mathbb{N}\}}$  也是紧的, 从而  $g_0 = \Re f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$ . 又因为常数函数都是几乎周期函数, 所以由引理4.1知  $g_1 := \min(g_0, 1)$ ,  $g := \max(g_1, 0)$  都是几乎周期的. 显然  $g$  的值域在  $[0, 1]$  中, 且  $\|g_0 - f\|_2 \leq \|f_{ap} - f\|_2$ . 因此有

$$\|g - f\|_2 \leq \|g_1 - f\|_2 \leq \|g_0 - f\|_2 \leq \|f_{ap} - f\|_2.$$

接下来我们证明  $f_{ap} = g$ . 因为  $f - f_{ap} \in \mathcal{H}_{wm}$ , 我们有  $f - f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$ . 特别地, 因为  $f_{ap} - g \in \mathcal{H}_{ap}$ , 所以

$$\|f - f_{ap}\|_2^2 \geq \|f - g\|_2^2 = \|(f - f_{ap}) + (f_{ap} - g)\|_2^2 = \|f - f_{ap}\|_2^2 + \|f_{ap} - g\|_2^2$$

从这我们可以看出  $\|f_{ap} - g\|_2^2 = 0$ , 证毕.  $\square$

**引理 5.10.** 设  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为可逆遍历的保测系统, 令  $f, g \in L^2(X)$ . 如果  $f, g$  中有任何一个是弱混合的, 则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} T^n f \cdot T^{2n} g \xrightarrow{L^2} 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

证明. 我们使用 van der Corput 引理. 设  $x_n = T^n f \cdot T^{2n} g$ , 我们有

$$\langle x_{n+h}, x_n \rangle = \int_X T^{n+h} f \cdot T^{2n+2h} g \cdot T^n \bar{f} \cdot T^{2n} \bar{g} \, d\mu \quad (5.2)$$

$$= \int_X (T^h f \cdot \bar{f}) \cdot T^n (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \, d\mu \quad (5.3)$$

$$= \int_X T^{-n} (T^h f \cdot \bar{f}) \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \, d\mu. \quad (5.4)$$

当  $f$  弱混合时我们运用5.4;  $g$  弱混合时我们运用5.3.

先设  $f$  弱混合, 则利用5.4和 von Neumann 遍历定理

$$\begin{aligned} \limsup_N |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| &= \limsup_N \left| \int_X \mathbb{E}_{n < N} (T^{-n} (T^h f \cdot \bar{f})) \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \, d\mu \right| \\ &\leq \int_X \left| \limsup_N \mathbb{E}_{n < N} (T^{-n} (T^h f \cdot \bar{f})) \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \right| \, d\mu \\ &= \int_X \left| \int_X T^h f \cdot \bar{f} \, d\mu \cdot (T^{2h} g \cdot \bar{g}) \right| \, d\mu \\ &\leq \|g\|_\infty^2 \cdot |\langle T^h f, f \rangle|. \end{aligned}$$

由于  $f$  弱混合, 所以有  $\lim_{H \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{h < H} |\langle T^h f, f \rangle| = 0$ . 从而由 van der Corput 引理

$$\begin{aligned} \limsup_N \|\mathbb{E}_{n < N} x_n\|_2^2 &\leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \left| \limsup_N \mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle \right| \\ &\leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \limsup_N |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| \\ &\leq \limsup_{H \rightarrow \infty} \|g\|_\infty^2 \cdot |\langle T^h f, f \rangle| = 0. \end{aligned}$$

接着我们假设  $g$  是弱混合的, 利用5.3 和 von Neumann 遍历定理, 完全类似的计算我们有

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} |\mathbb{E}_{n < N} \langle x_n, x_{n+h} \rangle| \leq \|f\|_\infty^2 |\langle T^{2h} g, g \rangle|.$$

利用  $g$  是弱混合的我们可以得到  $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|\mathbb{E}_{n < N} x_n\|_2^2 = 0$ .

□

终于, 我们能够证明当系统为可逆遍历系统时的定理5.8.

**定理 5.11.** 设  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为可逆遍历的保测系统,  $A \in \mathcal{B}$  满足  $\mu(A) > 0$ , 则

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \mu(A \cap T^{-n} A \cap T^{-2n} A) > 0. \quad (5.5)$$

**证明.** 利用定理5.6, 我们将  $1_A$  分解为  $f_{ap} + f_{wm}$ , 其中  $f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$ ,  $f_{wm} \in \mathcal{H}_{wm}$ . 由引理5.9, 我们知道  $f_{ap}$  的值域在  $[0, 1]$  中. 又因为  $1 \in \mathcal{H}_{ap}$ , 所以  $1 \perp f_{wm}$ , 从而

$$\int_X f_{ap} \, d\mu = \langle f_{ap}, 1 \rangle = \langle 1_A, 1 \rangle = \mu(A) > 0$$

因此  $f_{ap}$  不是几乎处处为 0, 从而利用定理4.3 知

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X f_{ap} \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} \, d\mu > 0.$$

由命题4.2(2),  $T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} \in \mathcal{H}_{ap}$ , 所以  $\langle T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap}, f_{wm} \rangle = 0$ , 从而

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} d\mu = \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X f_{ap} \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{ap} d\mu > 0. \quad (5.6)$$

接下来, 使用引理5.10 3 次我们可以分别得到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{ap} \cdot T^{2n} f_{wm} d\mu = 0; \quad (5.7)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{ap} d\mu = 0; \quad (5.8)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{n < N} \int_X 1_A \cdot T^n f_{wm} \cdot T^{2n} f_{wm} d\mu = 0. \quad (5.9)$$

最后, 将 (5.6), (5.7), (5.8) 和 (5.9) 加起来我们就得到了(5.5).  $\square$

注 . 在引理5.10 和定理 5.11 时, 我们假设了保测系统是可逆的. 事实上, 这并不是一个不合理的假设, 因为给定一个保测系统  $\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , 我们总是能构造一个可逆的保测系统  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$ (这个系统称为是  $\mathbf{X}$  的可逆扩充) 满足(5.1)对  $\mathbf{X}$  成立当且仅当对  $\tilde{\mathbf{X}}$  成立. 接下来我们阐述构造的细节.

$\mathbf{X} = (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  是一个保测系统, 我们定义

- $\tilde{X} := \{x \in X^{\mathbb{Z}} : x_{k+1} = Tx_k, k \in \mathbb{Z}\};$
- 对任意  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \tilde{X}$ ,  $(\tilde{T}x)_k = x_{k+1};$
- 对任意  $A \in \mathcal{B}$ ,  $\tilde{\mu}(\{x \in \tilde{X} : x_0 \in A\}) = \mu(A)$ . 不难发现

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\tilde{T}^{-1}\{x \in \tilde{X} : x_0 \in A\}) &= \tilde{\mu}(\{x \in \tilde{X} : x_1 \in A\}) \\ &= \tilde{\mu}(\{x \in \tilde{X} : x_0 \in T^{-1}A\}) \\ &= \mu(T^{-1}A) = \mu(A) = \tilde{\mu}(\{x \in \tilde{X} : x_0 \in A\}); \end{aligned}$$

•  $\tilde{\mathcal{B}}$  为最小的  $\tilde{T}$ - 不变的, 使得对任意  $n \in \mathbb{Z}$ , 映射  $\tilde{X} \rightarrow X$ ,  $x \rightarrow x_n$  可测的  $\sigma$ - 代数.

$\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}, \tilde{T})$  为一个保测系统, 称为是  $\mathbf{X}$  的可逆扩充.

## 参考文献

- [1] Einsiedler, Manfred and Ward, Thomas. Ergodic theory with a view towards number theory. Springer-Verlag London, Ltd., London. 2011.
- [2] Manfred Einsiedler, Thomas Ward, et al. Functional analysis, spectral theory, and applications, volume 276. Springer, 2017.
- [3] H. Furstenberg. Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1981. M. B. Porter Lectures.
- [4] Harry Furstenberg. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. J. Analyse Math., 31:204–256, 1977.
- [5] Bernard Host and Bryna Kra. Nonconventional ergodic averages and nilmanifolds. Ann. of Math.(2), 161:397–488, 2005.
- [6] Mahendra Ganpatrao Nadkarni et al. Spectral theory of dynamical systems. Springer, 1998.
- [7] K. F. Roth. On certain sets of integers. Journal of the London Mathematical Society, s1-28(1):104–109.
- [8] Terence Tao. The dichotomy between structure and randomness, arithmetic progressions, and the primes. 2005.
- [9] Peter Walters. An introduction to ergodic theory, volume 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [10] Tao, Terence. Poincaré's legacies, pages from year two of a mathematical blog. Part I. American Mathematical Society, Providence, RI, x+293, 2009.

# A Study on the Moment of Order Statistics for the Uniform Distribution

Zhixin Lai

## Abstract

This note focuses on the moments of order statistics for the uniform distribution. It includes the derivation of the density function, expectation, and variance of order statistics prior to standardization. Additionally, we demonstrate that after standardization, the higher-order moments of extreme order statistics exhibit greater instability compared to those of non-extreme order statistics. A comparison of the derived moment with the moment of standard normal distribution shows that when the sample size goes to infinity, extreme order statistics will exhibit tail probability denser than standard normal while the non-extreme order statistics remain sub-Gaussian. All the derivations are provided in the appendix.

## 1 Preliminaries

Suppose we have a set of independent random variables  $X_1, \dots, X_n$  sampled from standard uniform distribution  $\text{Unif}(0, 1)$  with probability density function  $f(x) = 1\{0 \leq x \leq 1\}$  and cumulative distribution function  $F(x) = x\{0 \leq x \leq 1\} + 1\{x > 1\}$ . We are interested in the order statistics generated by these random variables, which are defined as:

$$X_{(k)} := \min\{X_j : \sum_{h=1}^n 1\{X_j > X_h\} \geq k - 1, j = 1, \dots, n\} \quad (1.1)$$

particularly, when  $k = 1$  and  $k = n$ , by this definition, respectively we have:

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= \min\{X_j : \sum_{h=1}^n 1\{X_j > X_h\} \geq 0, j = 1, \dots, n\} = \min\{X_1, \dots, X_n\} \\ X_{(n)} &:= \min\{X_j : \sum_{h=1}^n 1\{X_j > X_h\} \geq n - 1, j = 1, \dots, n\} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \end{aligned}$$

It is well-known that the density function and the moment of  $X_{(k)}$  can be easily derived as:

$$f_{X_{(k)}}(x_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} (F(x_k))^{k-1} (1-F(x_k))^{n-k} f(x_k) \quad (1.2)$$

particularly, when  $f(x) = 1\{0 \leq x \leq 1\}$  and  $F(x) = x\{0 \leq x \leq 1\} + 1\{x > 1\}$ , we have:

$$f_{X_{(k)}}(x_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x_k^{k-1} (1-x_k)^{n-k} 1\{0 \leq x_k \leq 1\} \quad (1.3)$$

and furthermore, the expectation and variance are:

$$\mathbf{E}X_{(k)} = \frac{k}{n+1} \quad (1.4)$$

$$\text{Var}X_{(k)} = \frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)} \quad (1.5)$$

---

作者信息: 赖志鑫, 2021 级管理学院, 邮箱: lzx13421565815@mail.ustc.edu.cn.

**Remark 1.** This expectation is in line with intuition, in that according to the definition of  $X_{(k)}$ , there should be  $k - 1$  variables less than  $X_{(k)}$  and at the same time  $n - k$  variables larger than  $X_{(k)}$ , which makes it lie at the  $k$ th position when one cuts the interval  $(0, 1)$  into  $n + 1$  disjoint pieces.

This variance is also insightful. The numerator in the expression indicates that when  $k$  is close to 1 or  $n$ , the variance decays at the rate of  $n^{-2}$ , while when  $k$  is close to  $\frac{n}{2}$ , the variance decays at the rate of  $n^{-1}$ . This implies that the more extreme the order statistics is, the smaller its variance is.

## 2 Main Results

In applied statistics, researchers often deal with a centered and re-scaled order statistics which takes the form as:

$$\bar{X}_{(k)} = \frac{X_{(k)} - \mathbf{E}X_{(k)}}{\sqrt{\text{Var}X_{(k)}}} \quad (2.1)$$

the random behavior of this standardized order statistics is of our interest, especially its tail probability. In the following context, we respectively study the behavior of higher-order moments of extreme-order statistics and non-extreme-order statistics to get an understanding of their tail probability behavior regarding their order. The following theorem summarizes our main results

**Theorem 1.** when  $n > \frac{4e}{(r-1)(\sqrt{e}-1)^2}$  and  $n > r$ , where  $r$  is an even integer, we have:

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(n)})}}\right]^r > \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{n}{n+2}} \frac{n^2}{2(n+1)^2} \left(\frac{n+1}{n} \sqrt{\frac{n+2}{n}}\right)^r \left(\frac{1}{2e}r\right)^r \sqrt{r} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_{(\frac{n}{2})} - \mathbf{E}X_{(\frac{n}{2})}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(\frac{n}{2})})}}\right]^r < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r + \frac{3e^3}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n(n-2)}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{e}+1}{2\sqrt{e}}\right) \sqrt{r}^r \quad (2.3)$$

**Remark 2.** The condition  $n > r$  is needed to simplify the bound by dealing with terms like  $(1 + \frac{r}{n})^n$  in the proof of (2.2). This condition demands a lower bound of the sample size to obtain an explicit form of the lower bound of extreme order statistics. A greater value of  $n$  implies the maximum order statistics to be more extreme. Such extremity provides extra convenience for us to derive the bound. There is still more investigation left to be done in order to get a thorough understanding of the relationship between sample size and the moment order.

**Remark 3.** The condition  $n > \frac{4e}{(r-1)(\sqrt{e}-1)^2}$  is not a rigid condition, especially when  $n$  and  $r$  are larger, we develop this condition to just simplify the bound.

When  $n \gg r$ , this bound is informative, in that we can find some positive constant  $C_1$  and  $C_2$ , such that  $\mathbf{E}\left[\frac{X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(n)})}}\right]^r > C_1 \left(\frac{1}{2e}r\right)^r \sqrt{r}$  and  $\mathbf{E}\left[\frac{X_{(\frac{n}{2})} - \mathbf{E}X_{(\frac{n}{2})}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(\frac{n}{2})})}}\right]^r < C_2 \left(\frac{\sqrt{e}+1}{2\sqrt{e}}\right) \sqrt{r}^r$ . Since  $(\sqrt{r})^r$  is slower than  $r^r \sqrt{r}$ , consequently, when  $r$  is a fixed large value, we have:

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_{(\frac{n}{2})} - \mathbf{E}X_{(\frac{n}{2})}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(\frac{n}{2})})}}\right]^r < C_2 \left(\frac{\sqrt{e}+1}{2\sqrt{e}}\right) \sqrt{r}^r < C_1 \left(\frac{1}{2e}r\right)^r \sqrt{r} < \mathbf{E}\left[\frac{X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(n)})}}\right]^r \quad (2.4)$$

The equation (2.4) implies that the higher-order moment of the extreme order statistics is more unstable than the non-extreme order statistics after standardization.

### 3 Discussion

Suppose  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ , it is well-known that its moment is:

$$\mathbf{E}Z^r = \begin{cases} 0 & r \text{ is odd} \\ \frac{r!}{2^{\frac{r}{2}}(\frac{r}{2})!} & r \text{ is even} \end{cases} \quad (3.1)$$

by slight calculation, we have:

$$\frac{r!}{2^{\frac{r}{2}}(\frac{r}{2})!} < \frac{r^r}{2^{\frac{r}{2}}e^r} \sqrt{r} e \frac{e^{\frac{r}{2}}}{\sqrt{\pi r} (\frac{r}{2})^{\frac{r}{2}}} = \frac{e}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{r} \right)^r$$

so we have

$$\mathbf{E}Z^r < \frac{e}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{r} \right)^r \quad (3.2)$$

comparing the inequality chain in (2.4) and the moment of standard normal distribution (3.2), we know that, the moment of extreme order statistics after standardization is larger than the moment of standard normal distribution, in that  $(\sqrt{r})^r$  grows slower than  $r^r \sqrt{r}$ . This implies that the tail probability of  $\bar{X}_{(k)}$  will be heavier than the standard normal distribution when  $n$  goes to infinity.

This will not counter the fact that *a bounded variable is always sub-Gaussian*, since we require  $n$  to go to infinity, under which the limiting random variable  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_{(k)}$  will be unbounded.

However, the non-extreme order statistics is still sub-Gaussian, since the growth rate of its moment is comparable to standard normal, making its tail probability as light as standard normal distribution.

The moment behavior of other order other than  $n$  or  $\frac{n}{2}$  is left for the future work. And possibly a more general problem should be the relationship between the growth rate of the moment of a population and the growth rate of the moment of its corresponding order statistics. Specifically, suppose  $X_1, \dots, X_n \sim X$  are independent and identically distributed random variables, and  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  are their order statistics. What is the relationship between the growth rate of  $\mathbf{E}\left[\frac{X - \mathbf{E}X}{\sqrt{\text{Var}(X)}}\right]^r$  and the growth rate of  $\mathbf{E}\left[\frac{X_{(k)} - \mathbf{E}_{(k)}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(k)})}}\right]^r$ ?

# Appendix

## 1 Proof of Theorem 1

*Proof.*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}]^r &= \int_0^1 \left(t - \frac{n}{n+1}\right)^r nt^{n-1} dt = \int_0^1 \left(t - \frac{n}{n+1}\right)^r nt^{n-1} dt = \int_0^1 \left(t - 1 + 1 - \frac{n}{n+1}\right)^r nt^{n-1} dt \\ &= \int_0^1 \left(t - 1 + \frac{1}{n+1}\right)^r nt^{n-1} dt = \int_0^1 \left(1 - t - \frac{1}{n+1}\right)^r nt^{n-1} dt \end{aligned}$$

Since  $g(t) = t^r$  is a strongly convex function, we have  $g(t_1) > g(t_2) + g'(t_2)(t_1 - t_2) + \frac{1}{2}g''(t_2)(t_1 - t_2)^2$ , let  $t_1 = 1 - t - \frac{1}{n+1}$  and let  $t_2 = 1 - t$ , we have:

$$(1 - t - \frac{1}{n+1})^r > (1 - t)^r - r(1 - t)^{r-1} \frac{1}{n+1} + \frac{r(r-1)}{2}(1 - t)^{r-2} \frac{1}{(n+1)^2} \quad (1.1)$$

by using this lower bound, we have:

$$\mathbf{E}[X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}]^r > \int_0^1 (1-t)^r nt^{n-1} dt - \int_0^1 r(1-t)^{r-1} \frac{1}{n+1} nt^{n-1} dt + \int_0^1 \frac{r(r-1)}{2}(1-t)^{r-2} \frac{1}{(n+1)^2} nt^{n-1} dt \quad (1.2)$$

now we focus on the term  $\int_0^1 (1-t)^r nt^{n-1} dt$ . By using the beta function, we have:

$$\int_0^1 (1-t)^r nt^{n-1} dt = n \int_0^1 (1-t)^{r+1-1} t^{n-1} dt = n \text{Beta}(n, r+1) = n \frac{\Gamma(n)\Gamma(r+1)}{\Gamma(n+r+1)} = \frac{n!r!}{(n+r)!}$$

similarly, we have:

$$\begin{aligned} \int_0^1 r(1-t)^{r-1} \frac{1}{n+1} nt^{n-1} dt &= \frac{rn}{n+1} \int_0^1 (1-t)^{r-1} t^{n-1} dt \\ &= \frac{rn}{n+1} \text{Beta}(r, n) = \frac{rn}{n+1} \frac{(r-1)!(n-1)!}{(r+n-1)!} = \frac{n!r!}{(n+r)!} \frac{r+n}{n+1} \\ \int_0^1 \frac{r(r-1)}{2}(1-t)^{r-2} \frac{1}{(n+1)^2} nt^{n-1} dt &= \frac{r(r-1)n}{2(n+1)^2} \int_0^1 (1-t)^{r-2} t^{n-1} dt \\ &= \frac{r(r-1)n}{2(n+1)^2} \text{Beta}(r-1, n) = \frac{r(r-1)n}{2(n+1)^2} \frac{(r-2)!(n-1)!}{(n+r-2)!} = \frac{n!r!}{(n+r)!} \frac{(n+r)(n+r-1)}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

combing these terms together yields:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}]^r &> \int_0^1 (1-t)^r nt^{n-1} dt - \int_0^1 r(1-t)^{r-1} \frac{1}{n+1} nt^{n-1} dt + \int_0^1 \frac{r(r-1)}{2}(1-t)^{r-2} \frac{1}{(n+1)^2} nt^{n-1} dt \\ &= \frac{n!r!}{(n+r)!} - \frac{n!r!}{(n+r)!} \frac{r+n}{n+1} + \frac{n!r!}{(n+r)!} \frac{(n+r)(n+r-1)}{2(n+1)^2} \\ &= \frac{n!r!}{(n+r)!} \left(1 - \frac{r+n}{n+1} + \frac{(n+r)(n+r-1)}{2(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n!r!}{(n+r)!} \frac{(n+r)(n+r-1) - 2(r-1)(n+1)}{2(n+1)^2} \\ &= \frac{n!r!}{(n+r)!} \frac{n^2 + n + (r-1)(r-2)}{2(n+1)^2} \\ &> \frac{n!r!}{(n+r)!} \frac{n^2}{2(n+1)^2} \end{aligned}$$

using the fact that  $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$ , we have:

$$\frac{n!r!}{(n+r)!} > \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi r} \frac{r^r}{e^r} \frac{e^{n+r}}{e(n+r)^{n+r} \sqrt{n+r}} = \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{rn}{n+r}} \left(\frac{r}{n}\right)^r \frac{1}{(1+\frac{r}{n})^{n+r}}$$

when  $n > r$ , we have  $(1 + \frac{r}{n})^{n+r} = (1 + \frac{r}{n})^{\frac{n}{r}r+r} < e^r(1 + \frac{r}{n})^r < (2e)^r$ . So ultimately, we have:

$$\frac{n!r!}{(n+r)!} > \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{rn}{n+r}} \left(\frac{r}{2en}\right)^r$$

so we have:

$$\mathbf{E}[X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}]^r > \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{rn}{n+r}} \left(\frac{r}{2en}\right)^r \frac{n^2}{2(n+1)^2}$$

so immediately, we have:

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(n)})}}\right]^r > \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{rn}{n+r}} \left(\frac{r}{2en}\right)^r \frac{n^2}{2(n+1)^2} (n+1)^r \left(\sqrt{\frac{n+2}{n}}\right)^r$$

by sorting terms, we have:

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_{(n)} - \mathbf{E}X_{(n)}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(n)})}}\right]^r > \frac{2\pi}{e} \sqrt{\frac{n}{n+2}} \frac{n^2}{2(n+1)^2} \left(\frac{n+1}{n}\sqrt{\frac{n+2}{n}}\right)^r \left(\frac{1}{2e}r\right)^r \sqrt{r}$$

Now we aim for an upper bound when  $k = \frac{n}{2}$ , by definition of the centered moment, we have:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X_{(\frac{n}{2})} - \mathbf{E}X_{(\frac{n}{2})}]^r &= \int_0^1 \left(x - \frac{n}{2(n+1)}\right)^r \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)}\right)^r \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx \\ &= \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^{r-h} \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx \end{aligned}$$

Now, let us find an upper bound for the term  $\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx$ . The tricky part of this integral is the term  $(x - \frac{1}{2})^h$ . Intuitively, we know that  $\int_0^1 (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx < \int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!}{n!}$ , meaning the bound should be smaller than the rate of  $\frac{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!}{n!}$ .

We start from the tricky part of this integral by introducing a cutting parameter  $\epsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx \right| &= \left| \int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h (1-x)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{n}{2}} dx \right| \\ &< \int_0^{\frac{1}{2}} |x - \frac{1}{2}|^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h (1-x)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{n}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h (1-x)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{n}{2}} dx \end{aligned}$$

since  $0 < x < \frac{1}{2}$ , we have  $(1-x)^{\frac{n}{2}} < (1-x)^{\frac{n}{2}-1}$  and also we have  $x^{\frac{n}{2}} < \frac{1}{2}x^{\frac{n}{2}-1}$ . So we can control the above integral as:

$$< \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h (1-x)^{\frac{n}{2}-1} x^{\frac{n}{2}-1} dx = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} dx$$

So far, we have:

$$\left| \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx \right| < \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} - x)^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} dx$$

focus on the right-hand side, we have:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right)^h x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} dx \stackrel{2x=y}{=} \frac{3}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y\right)^h \left(\frac{1}{2}y\right)^{\frac{n}{2}-1} \left(1 - \frac{1}{2}y\right)^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{2} dy \\ &= \frac{3}{2^{n+h}} \int_0^1 (1-y)^h y^{\frac{n}{2}-1} (2-y)^{\frac{n}{2}-1} dy \stackrel{1-y=t}{=} \frac{3}{2^{n+h}} \int_0^1 t^h (1-t)^{\frac{n}{2}-1} (1+t)^{\frac{n}{2}-1} dt \\ &= \frac{3}{2^{n+h+1}} \int_0^1 (t^2)^{\frac{h+1}{2}-1} (1-(t^2))^{\frac{n}{2}-1} d(t^2) = \frac{3}{2^{n+h+1}} \int_0^1 x^{\frac{h+1}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} dx \end{aligned}$$

By using the Beta function, when  $h = 1, \dots, r$ , we have:

$$\frac{3}{2^{n+h+1}} \int_0^1 x^{\frac{h+1}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}-1} dx = \frac{3}{2^{n+h+1}} \text{Beta}\left(\frac{h+1}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{3}{2^{n+h+1}} \frac{\Gamma(\frac{h+1}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{h+n+1}{2})} = \frac{3}{2^{n+h+1}} \frac{(\frac{h-1}{2})!(\frac{n}{2}-1)!}{(\frac{h+n-1}{2})!}$$

by using the fact that  $\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n < n! < e(\frac{n}{e})^n \sqrt{n}$ , we have:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2^{n+h+1}} \frac{(\frac{h-1}{2})!(\frac{n}{2}-1)!}{(\frac{h+n-1}{2})!} < \frac{3}{2^{n+h+1}} e^{\frac{(\frac{h-1}{2})^{\frac{h-1}{2}}}{e^{\frac{h-1}{2}}}} \sqrt{\frac{h-1}{2}} e^{\frac{(\frac{n}{2}-1)^{\frac{n}{2}-1}}{e^{\frac{n}{2}-1}}} \sqrt{\frac{n}{2}-1} \frac{e^{\frac{h+n-1}{2}}}{(\frac{h+n-1}{2})^{\frac{h+n-1}{2}}} \sqrt{2\pi(\frac{h+n-1}{2})} \\ &= \frac{3}{2^{n+h+1}} e^3 \sqrt{\frac{(\frac{h-1}{2})(\frac{n}{2}-1)}{2\pi(\frac{h+n-1}{2})}} \frac{(\frac{h-1}{2})^{\frac{h-1}{2}} (\frac{n}{2}-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(\frac{h+n-1}{2})^{\frac{h+n-1}{2}}} \\ &= \frac{3}{2^{n+h+1}} e^3 \sqrt{\frac{(\frac{h-1}{2})(\frac{n}{2}-1)}{2\pi(\frac{h+n-1}{2})}} \frac{(\frac{h-1}{2})^{\frac{h-1}{2}} (\frac{n}{2}-1)^{\frac{n}{2}-1}}{(\frac{n}{2}-1)^{\frac{h+n-1}{2}}} \frac{1}{(1 + \frac{\frac{h+1}{2}}{\frac{n}{2}-1})^{\frac{h+n-1}{2}}} \\ &= \frac{3}{2^{n+h+1}} e^3 \sqrt{\frac{(\frac{h-1}{2})(\frac{n}{2}-1)}{2\pi(\frac{h+n-1}{2})}} \frac{\frac{h-1}{2}}{(\frac{n}{2}-1)^{\frac{h-1}{2}}} \frac{1}{(1 + \frac{\frac{h+1}{2}}{\frac{n}{2}-1})^{\frac{h+1}{2}}} \\ &< \frac{3}{2^{n+h+1}} e^2 \sqrt{\frac{(\frac{h-1}{2})(\frac{n}{2}-1)}{2\pi(\frac{h+n-1}{2})}} \left(\frac{\frac{h-1}{2}}{e(\frac{n}{2}-1)}\right)^{\frac{h-1}{2}} \frac{1}{(\frac{n}{2}-1)} \\ &< \frac{3e^2}{2^{n+2}} \sqrt{\frac{r-1}{\pi(n-1)(n-2)}} \left(\sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^{h-1} \end{aligned}$$

so we have:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbb{E}[X_{(\frac{n}{2})} - \mathbb{E}X_{(\frac{n}{2})}]^r \right| \\ &< \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \left[ \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r \int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx + \sum_{h=1}^r \binom{r}{h} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^{r-h} \frac{3e^2}{2^{n+2}} \sqrt{\frac{r-1}{\pi(n-1)(n-2)}} \left(\sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^{h-1} \right] \\ &= \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \left[ \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r \int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx + \sum_{h=1}^r \binom{r}{h} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^{r-h} \frac{3e^2}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{e}{\pi(n-1)}} \left(\sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^h \right] \\ &< \underbrace{\frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r \int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx}_{\eta_1} + \underbrace{\frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^{r-h} \frac{3e^2}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{e}{\pi(n-1)}} \left(\sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^h}_{\eta_2} \end{aligned}$$

For the first part:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r \int_0^1 x^{\frac{n}{2}-1} (1-x)^{\frac{n}{2}} dx = \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r \text{Beta}\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1\right) \\ &= \frac{n!}{(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r \frac{(\frac{n}{2}-1)!(\frac{n}{2})!}{n!} = \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r \end{aligned}$$

for the second part:

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^{r-h} \frac{3e^2}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{e}{\pi(n-1)}} \left(\sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^h \\ &= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \frac{3e^2}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{e}{\pi(n-1)}} \sum_{h=0}^r \binom{r}{h} \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^{r-h} \left(\sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^h \\ &= \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} \frac{3e^2}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{e}{\pi(n-1)}} \left(\frac{1}{2(n+1)} + \sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^r \end{aligned}$$

it remains to deal with the term  $\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!}$ , we have:

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}-1\right)!} < e \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n} \frac{e^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi\frac{n}{2}}} \frac{e^{\frac{n}{2}-1}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)^{\frac{n}{2}-1} \sqrt{2\pi\left(\frac{n}{2}-1\right)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{n-2}} \frac{n}{2} \frac{n^n}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} < \frac{2^{n-1}n}{\pi\sqrt{n-2}} e$$

so the second term can be bounded in the following manner:

$$\eta_2 < \frac{2^{n-1}n}{\pi\sqrt{n-2}} e \frac{3e^2}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{e}{\pi(n-1)}} \left(\frac{1}{2(n+1)} + \sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^r = \frac{3e^3}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\frac{1}{2(n+1)} + \sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^r$$

By observing that when  $n$  is relatively large, the dominant term in  $\frac{1}{2(n+1)} + \sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}$  should be the latter one. Indeed:

$$\left(\frac{1}{2(n+1)} + \sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^r = \frac{1}{2^r} \left(\sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}}\right)^r \left(\sqrt{\frac{e(n-2)}{r-1}} \frac{1}{n+1} + 1\right)^r < \frac{1}{2^r} \left(\sqrt{\frac{r}{e(n-2)}}\right)^r \left(\sqrt{\frac{en}{r-1}} \frac{1}{n} + 1\right)^r$$

let  $n > \frac{4e}{(r-1)(\sqrt{e}-1)^2}$ , then we have  $\sqrt{\frac{en}{r-1}} \frac{1}{n} < \frac{\sqrt{e}-1}{2}$ , consequently, we have:

$$\left(\frac{1}{2(n+1)} + \sqrt{\frac{r-1}{e(n-2)}} \frac{1}{2}\right)^r < \frac{1}{2^r} \left(\sqrt{\frac{r}{e(n-2)}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{e}+1}{2}\right)^r = \left(\sqrt{\frac{r}{e(n-2)}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{e}+1}{4}\right)^r$$

so ultimately, we have:

$$\eta_2 < \frac{3e^3}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\sqrt{\frac{r}{e(n-2)}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{e}+1}{4}\right)^r$$

combing the bound for  $\eta_1$  and  $\eta_2$  together yields:

$$\mathbf{E}[X_{(\frac{n}{2})} - \mathbf{E}X_{(\frac{n}{2})}]^r < \left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r + \frac{3e^3}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\sqrt{\frac{r}{e(n-2)}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{e}+1}{4}\right)^r$$

after scaling by the standard deviation, we have:

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_{(\frac{n}{2})} - \mathbf{E}X_{(\frac{n}{2})}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(\frac{n}{2})})}}\right]^r < \left[\left(\frac{1}{2(n+1)}\right)^r + \frac{3e^3}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\sqrt{\frac{r}{e(n-2)}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{e}+1}{4}\right)^r\right] \left(\frac{2(n+1)}{\sqrt{n}}\right)^r$$

by sorting terms, we have:

$$\mathbf{E}\left[\frac{X_{(\frac{n}{2})} - \mathbf{E}X_{(\frac{n}{2})}}{\sqrt{\text{Var}(X_{(\frac{n}{2})})}}\right]^r < \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r + \frac{3e^3}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{n}{\sqrt{(n-1)(n-2)}} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n(n-2)}}\right)^r \left(\frac{\sqrt{e}+1}{2\sqrt{e}} \sqrt{r}\right)^r$$

□

# 随机微分方程在生物群落演化中的应用

谢鸿瑞

## 摘要

在本文中，我们研究了生物种群增长的随机微分方程模型，并着重研究了乘性噪声的影响。通过计算机模拟数值解我们分析了解的合理性，同时我们计算了种群灭绝概率和种群稳定存在概率。在种群稳定存在的情况下我们分析了稳态概率密度的行为并研究了种群规模的期望和方差。通过计算我们得到结论：更大的噪声会提升种群灭绝的概率。

## 1 概述

通常来说，许多物理和生物模型中都会遇到随机效应，因此在建模中考虑这些效应是至关重要的。在生物学领域，已经构建了群落增长的微分方程模型，然后提出了随机群落增长模型。因此，我们十分有必要研究在环境变化，存在随机干扰情况下的群落增长，以应用于对濒危生物的保护以及对有害生物的控制等领域。

本文研究了随机干扰且有捕食者情况下的群落增长，在第 2 章本文介绍了随机微分方程 (SDEs) 的基本理论，第 3 章中给出了群落增长的随机微分方程模型并对该方程做了简单的数学处理，第 4 章中我们对方程进行了计算并讨论了种群灭绝及稳定存在的条件，第 5 章中我们进行了数值模拟。第 6 章我们研究了种群规模的期望和方差。第 7 章中我们做出了总结，第 8 章介绍了一些引申结论。

本文的创新点在于首次在随机干扰且有捕食者情况下的群落增长模型中运用 Lyapunov 指数理论研究了随机微分方程解的稳定性，并近似推导了解的均值和方差满足的微分方程。本文运用了 Euler-Maruyama 方法做数值模拟，取多种参数验证了结论。

## 2 随机微分方程理论简介

随机微分方程 (SDEs) 理论是研究随机过程的微分方程的一个分支。它的主要目的是研究随机过程的演化规律，以及随机过程的统计性质。随机微分方程的一般形式为：

$$dX_t = a(X_t, t)dt + b(X_t, t)dW_t$$

其中， $X_t$  是随机过程， $a(X_t, t)$  和  $b(X_t, t)$  是已知的函数， $W_t$  是标准布朗运动 (Wiener 过程)。这个方程描述了随机过程在时间  $t$  的微小变化，其中  $dW_t$  表示布朗运动在时间  $t$  到  $t+dt$  之间的变化量。

随机微分方程的解通常是一个随机过程，因此需要对其进行概率分析。常用的方法包括随机积分、离散化方法、蒙特卡罗模拟等。

随机微分方程理论在金融、物理、生物等领域都有广泛的应用。例如，它可以用来研究股票价格的变化、分子在细胞内的扩散、气体分子的运动等。

在随机微分方程理论里，如 Gronwall 定理等依然存在，我们仍然可以使用变种的 Peano 定理研究解的存在性及唯一性等性质。同时，我们有 Fokker-Planck 方程等工具研究解的演

作者信息：谢鸿瑞，2022 级数学科学学院，邮箱：xhr@mail.ustc.edu.cn.

化。

### 3 群落增长 SDE 模型

考虑一个理想有边界的生态系统，存在捕食者，且环境容纳量有上限，我们可以做出如下基本假设：

(i) 若无捕食者及环境容纳量上限，生物种群数量增速随种群数量而增大，个体产生后代数量与种群密度成正比。

(ii) 实际情况下，环境容纳量上限决定种群增长速度，种群密度大时，每个个体产生后代数量被抑制。

(iii) 捕食者发现猎物概率与种群密度正比，但每个捕食者在固定时间（一天）之内有捕食量上限，且捕食者数量相对固定。

(iv) 种群中不存在随机的个体死亡或其他种群个体进入，每个个体的后代数量固定。则我们可以提出群落增长的经典模型：

$$\frac{dx}{dt} = (a - bx^{m-1})x - \frac{\beta x}{1+x}, m \geq 2. \quad (1.1)$$

这里的  $x$  是种群的规模， $a$  是马尔萨斯增长参数。公式 (1) 中的第二项表示了由于拥挤和资源竞争的影响而出现的生长速度限制，其参数为  $b$ 。 $m$  描述了在有限空间下由于生存压力种群生育率衰减速度的参数，在 [5][6] 的工作中我们选择假设衰减速度关于种群规模线性，取  $m = 2$ 。最后一项表示捕食者的掠食行为，其中参数  $\beta$  是一个和捕食者掠食速度相关的参数。这里所有参数都是恒正且无量纲的。

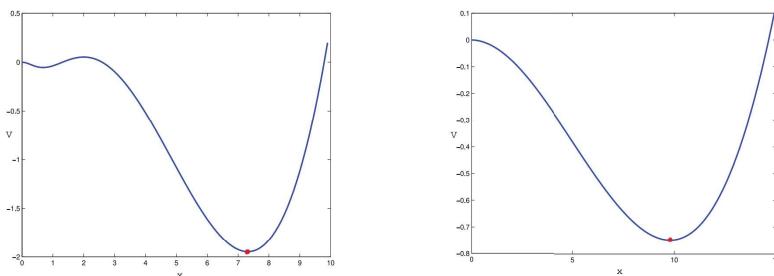


图 1.1：左图为  $a = 0.1, b = 1, \beta = 2$  时的 Lyapunov 函数图像，纵轴为  $V$  横轴为  $x$ ，右图为  $a = 0.05, b = 0.005, \beta = 0.01$  时图像，红点处为稳定点

我们通过构造 Lyapunov 函数先探测经典解的性质：当  $m = 2$  时，有 Lyapunov 函数

$$V(x) = \frac{1}{3}bx^3 - \frac{1}{2}ax^2 + \beta(x - \ln(1+x)). \quad (1.2)$$

求 2 阶导数并作图知，方程 (1) 有一个稳定点，我们据此推测对应随机模型性质。

为了将随机性纳入经典模型中，我们放弃假设 (iv)。具体而言，可以存在随机波动通过外部参数影响系统。假设这种随机波动是独立且等同分布的，为了模拟种群中每一个个体的随机死亡及出生情况，我们取

$$a_t = a + \sigma \xi_t, \quad (1.3)$$

式中  $a$  为随机变量均值， $\xi_t$  为高斯白噪声， $\sigma$  为白噪声强度。则我们可以把 (1) 式重写为

随机微分方程形式:

$$\frac{dX_t}{dt} = (a - bX_t^{m-1})X_t - \frac{\beta X_t}{1 + X_t} + \sigma X_t \frac{dW_t}{dt}, X_0 = x_0, \quad (1.4)$$

式中  $X_t$  是种群规模的随机变量,  $W_t$  是 Wiener 过程。

## 4 对解过程的分析

我们使用 Fokker-Planck 方程求解稳态概率密度, 有:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial A(x)P(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 B(x)P(x, t)}{\partial x^2}, \quad (1.5)$$

其中有

$$A(x) = (a - bx^{m-1})x - \frac{\beta x}{1 + x}, \quad B(x) = \frac{\sigma^2 x^2}{2}, \quad (1.6)$$

由 (5)(6), 令 (5) 式左边为 0, 解出稳态概率密度

$$P_s(x) = N_s x^{2((a-\beta)/\sigma^2-1)} (x+1)^{2\beta/\sigma^2} \exp\left(-\frac{2bx^{m-1}}{\sigma^2(m-1)}\right), \quad (1.7)$$

其中  $N_s$  是归一化常数, 发现仅当  $a > \sigma^2/2$  时可以被归一化, 研究  $A(x) - B'(x)$ , 由随机微分方程稳定性理论, 我们得到以下结论:

- (i) 如果  $a < \sigma^2/2$ , 则零点是稳定点。
- (ii)  $a = \sigma^2/2$  是方程的第一相变点。
- (iii) 如果  $\sigma^2/2 < a < \sigma^2$ , 稳定点将偏移零点, 但零点仍为概率最大点。
- (iv) 当  $a > \sigma^2$  时, 方程性质改变,  $a = \sigma^2$  为第二相变点, 这表明该系统可以通过保持平均状态并增加或减小其波动强度来使系统相变。

我们现在继续用 Lyapunov 指数理论研究解的稳定性, 由 Ito 公式, 知:

$$d \ln X_t = \left( a - bX_t^{m-1} - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\beta}{1 + X_t} \right) dt + \sigma dW_t \quad (1.8)$$

即为

$$d \ln X_t \leq \left( a - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t. \quad (1.9)$$

将 (9) 式从 0 到  $t$  积分, 得到:

$$\frac{1}{t} \ln X_t \leq \frac{1}{t} \ln X_0 + a - \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma W_t}{t}. \quad (1.10)$$

取  $t \rightarrow \infty$ , 且由 Wiener 过程的强大数律,  $\frac{\sigma W_t(t)}{t} \rightarrow 0$  a.s.

知  $X_t(t)$  在  $a < \sigma^2/2, t \rightarrow \infty$  时 a.s. 收敛到 0。

下面我们证明: 对于任意  $a > \sigma^2/2 + \beta$  及任意初值  $X_t(0)$ , 我们有

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} X_t > \xi = \left( \frac{a - \beta - \sigma^2/2}{b} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (1.11)$$

证明: 反证, 假设有  $\epsilon > 0$ , 使  $P(\Omega_1) > \epsilon$ , 式中  $\Omega_1 = \{\omega : \limsup_{t \rightarrow \infty} X_t(t, \omega) < \xi - 2\epsilon\}$ 。则我们存在  $T(\omega) > 0$ , 使得:

$$X_t(t, \omega) < \xi - 2\epsilon, \forall t > T(\omega). \quad (1.12)$$

又由大数律, 有  $\Omega_2, P(\Omega_2) = 1$ , 使  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma dW_s(s, \omega) = 0, \forall \omega \in \Omega_2$ .

我们取  $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  $g(x) = -\frac{\sigma^2}{2} + a - bx^{m-1} - \beta$ , 由于  $g(X_t(t, \omega)) > g(\xi - \epsilon), \forall t > T(\omega)$ , 我们可以推出:

$$\ln(X(t, \omega)) \geq \ln(X_0) + \int_0^t g(X_s) ds + \int_0^t \sigma dW(s, \omega) \quad (1.13)$$

也就是

$$\ln(X(t, \omega)) \geq \ln(X_0) + \int_0^{T(\omega)} g(X_s) ds + (t - T(\omega))g(\xi - \epsilon) + \int_0^t \sigma dW(s, \omega). \quad (1.14)$$

可以得到:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(X(t, \omega)) \geq g(\xi - \epsilon) > 0, \quad (1.15)$$

这即可得到  $X(t, \omega) \rightarrow \infty$ , 与假设矛盾, 则我们完成了证明。由此我们得到初步结论:

(i)  $a < \sigma^2/2$  时, 种群 a.s. 灭绝。

(ii)  $a > \sigma^2/2 + \beta$  时, 种群分布 a.s. 收敛到一非零稳态随机变量。

我们还不知道  $\sigma^2/2 < a < \sigma^2/2 + \beta$  的情况 (但由 SDE 稳定性理论, 我们知道其必然收敛), 下面我们数值模拟处理。

## 5 数值模拟

由于扩散过程是一个马尔可夫过程, 我们采用 Euler-Maruyama 方法做数值模拟:

$$X_{t_{n+1}} = X_{t_n} + (a - bX_{t_n}^{m-1}) X_{t_n} \Delta t - \frac{\beta X_{t_n}}{1 + X_{t_n}} \Delta t + \sigma X_{t_n} \Delta W_{t_n}, \quad (1.16)$$

其中  $X_{t_n} = X_t(t_n)$ ,  $\Delta W_{t_n} = \sqrt{\Delta t} \cdot Z_n, Z_n$  为标准正态分布,  $\Delta t$  为很小的步长,  $t_n = n\Delta t$ 。

我们写出 Mathematica 代码:

```

1  a = 1.5;
2  b = 0.5;
3  m = 2;
4  \[Beta] = 0.5;
5  \[Sigma] = 0.2;
6  \[Delta]t = 0.01;
7  n = 10000;
8  SeedRandom[1234];
9  Z = RandomVariate[NormalDistribution[], n];
10 X = ConstantArray[0, n];
11 X[[1]] = 1;
12 For[i = 2, i <= n, i++,
13   X[[i]] = X[[i - 1]] + (a - b X[[i - 1]]^(m - 1)) X[[i - 1]] \[Delta]t - \[
14     Beta] X[[i - 1]]/(1 + X[[i - 1]]) \[Delta]t + \[Sigma] X[[i - 1]] \[Sqrt]
15     [\[Delta]t] Z[[i - 1]];
]
Histogram[X, Automatic, "PDF"]

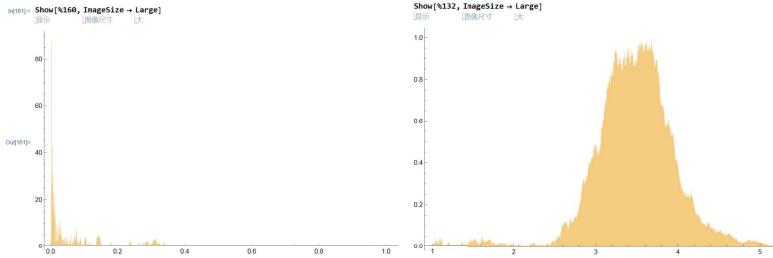
```

下列图中横轴为  $X_t$ , 纵轴表示在  $n$  个随机采样中  $X_t$  落在某个范围的次数。

我们分别选取  $a < \sigma^2/2$ ,  $a > \sigma^2/2 + \beta$  和  $\sigma^2/2 < a < \sigma^2/2 + \beta$  三种情况下的参数  $a$ , 观察结果得出结论。

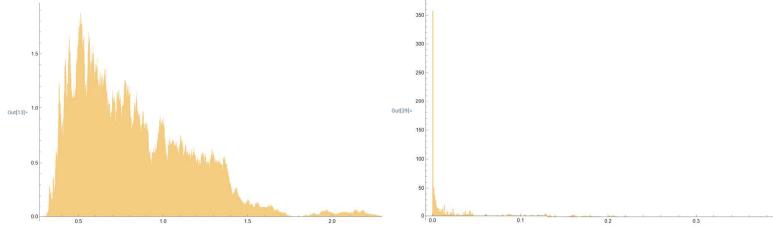
左图给出  $a = 0.005, b = 0.005, \beta = 0.01, \sigma = 0.02, m = 2, n = 10^7$  时性态, 发现在  $\sigma^2/2 < a < \sigma^2/2 + \beta$  时也有可能有  $X_t(t)$  收敛到 0。

右图给出  $a = 0.02, b = 0.005, \beta = 0.01, \sigma = 0.02, m = 2, n = 10^7$  时性态, 发现在  $a > \sigma^2/2 + \beta$  时有  $X_t(t)$  收敛到非零稳态随机变量。



左图给出  $a = 0.05, b = 0.005, \beta = 0.01, \sigma = 0.02, m = 2, n = 10^7$  时性态, 发现在  $\sigma^2/2 < a < \sigma^2/2 + \beta$  时也有可能有  $X_t(t)$  收敛到非零稳态随机变量。

右图给出  $a = 0.001, b = 0.005, \beta = 0.01, \sigma = 0.02, m = 2, n = 10^7$  时性态, 发现在  $a < \sigma^2/2$  时有  $X_t(t)$  收敛到 0。



综上, 我们有结论:

- (i)  $a < \sigma^2/2$  时, 种群 a.s. 灭绝。
- (ii)  $a > \sigma^2/2 + \beta$  时, 种群分布 a.s. 收敛到一非零稳态随机变量。
- (iii)  $\sigma^2/2 < a < \sigma^2/2 + \beta$  时, 情况为上述两者之一。

## 6 种群规模的期望和方差

我们使用方程 (6) 中记号推导, 记  $m_t$  为种群规模的期望,  $s_t$  为种群规模的方差, 记  $\langle \rangle$  为求期望符号, 则有:

$$\frac{d}{dt} \langle X \rangle = \langle A(X) \rangle. \quad (1.17)$$

将方程展开, 可以得到近似方程:

$$\frac{d}{dt} \langle X \rangle = A \langle X \rangle + \frac{1}{2} \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle A''(\langle X \rangle) + \dots \quad (1.18)$$

为了求期望, 我们有:

$$\frac{d}{dt} \langle X^2 \rangle = 2 \langle XA(X) \rangle + 2 \langle B(X) \rangle. \quad (1.19)$$

则我们可以写出:

$$\frac{ds_t}{dt} = 2 \langle B(X) \rangle + 2 \langle (X - \langle X \rangle)A(X) \rangle. \quad (1.20)$$

小扰动展开，有：

$$\langle (X - \langle X \rangle) A(\langle X \rangle + X - \langle X \rangle) \rangle = A'(\langle X \rangle) \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle + \frac{1}{2} A''(\langle X \rangle) \langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle + \dots \quad (1.21)$$

我们讨论期望和方差的近似性质，由于我们可以出于现实原因假设随机变量  $X_t$  有界，我们舍去二阶以上矩，得到  $m_t, s_t$  的微分方程：

$$\frac{ds_t}{dt} = 2as_t - 2mbm_t^{m-1}s_t + \sigma^2 m_t^2 - \frac{2\beta s_t}{(1+m_t)^2}, \quad (1.22)$$

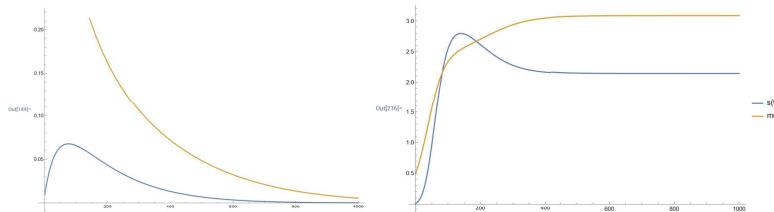
$$\frac{dm_t}{dt} = am_t - bm_t^2 - \frac{1}{2}m(m-1)bm_t^{m-2}s_t - \frac{\beta m_t}{1+m_t} + \frac{2\beta s_t}{(1+m_t)^3} \quad (1.23)$$

我们数值求解  $m = 2$  时情况，写出代码如下：

```

1  a = 1;
2  b = 1;
3  \[Sigma] = 1;
4  \[Beta] = 1;
5  s0 = 1;
6  m0 = 1;
7  tmax = 10;
8  sol = NDSolve[{s'[t] ==
9    2 a s[t] -
10   4 b m[t] s[
11     t] + \[Sigma]^2 m[t]^2 - (2 \[Beta] s[t])/((1 + m[t])^2),
12   m'[t] ==
13     a m[t] - b m[t]^2 -
14   b s[t] - (\[Beta] m[t])/(1 +
15     m[t]) + (2 \[Beta] s[t])/((1 + m[t])^3), s[0] == s0,
16   m[0] == m0}, {s, m}, {t, 0, tmax}];
17 Plot[Evaluate[{s[t], m[t]} /. sol], {t, 0, tmax},
18 PlotLegends -> {"s(t)", "m(t)"}]
```

有解如图：左图给出  $a = 0.005, b = 0.01, \beta = 0.01, \sigma = 0.01, s_0 = 0.01, m_0 = 0.5$  时性态，右图给出  $a = 0.04, b = 0.01, \beta = 0.01, \sigma = 0.01, s_0 = 0.01, m_0 = 0.5$  时性态，符合前面对解过程推导的预测。



## 7 总结

在本文中，我们研究了生物种群增长的随机微分方程模型。该模型描述了生物群落规模在随机波动下的动力学，并使用由乘性高斯噪声驱动的随机微分方程建模方法。借助 Fokker-Planck 方程，我们进行了计算分析，以研究解过程的行为。我们讨论了种群灭绝概率和达

到稳态种群的概率及条件。此外，我们计算了种群规模的期望和方差，以分析灭绝状态和稳态之间的相变。

模型结果的含义如下所述。首先，我们看到噪声参数  $\sigma$  的变化（即随机波动的强度度量）会导致模型行为的剧烈变化。这种变化称为相变，可以由随机波动的增加或减少引起。其次，如果捕食率  $\beta$  小于某个临界值，则达到较大稳态种群规模是几乎必然的。此外，随着乘性噪声强度  $\sigma$  的增加，种群灭绝概率可以上升。

总之，随机乘性噪声的存在会提升种群灭绝概率，较大的随机乘性噪声几乎必然导致种群灭绝。

## 8 引申

由随机微分方程的 Markov 性质，我们提出平均首次穿越时间 (MFPT) 来研究相变行为：

$$T_{x_i x_f} = \int_{x_i}^{x_f} \frac{dx}{B(x)P_s(x)} \int_0^x P_s(y)dy, \quad (1.24)$$

我们认为式中  $T_{x_i x_f}$  为  $x_i$  到  $x_f$  的平均相变时间。

对于一个没有边界的种群规模问题，我们需要考虑扩散问题：扩散问题是指物质在空间中的分布随时间的变化。它可以用扩散方程来描述，其中  $u(x, t)$  表示物质浓度， $D$  表示扩散系数， $t$  表示时间， $x$  表示空间位置。

如果我们考虑一个初始浓度分布为  $u(x, 0) = \delta(x)$  的情况，其中  $\delta(x)$  是狄拉克函数，表示在  $x = 0$  处有一个点源。那么，扩散方程的解为：

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

这个解表示了物质从点源开始扩散后的浓度分布。其中， $t$  越大，物质扩散得越远，浓度越小。这个解也被称为高斯函数，因为它的形状是一个高斯分布。

在考虑扩散问题情况下的生物群落模型是极端复杂的，超出了本文的讨论范围。

**参考文献** [1] Horsthemke W, Lefever R. Noise-induced transitions. Berlin: Springer-Verlag;1984.

[2] Skorokhod AV. Asymptotic methods in the theory of stochastic differential equations, Translated from the Russian By H.H. McFaden, Transl. Math. Monogr.78. RI: Amer. Math. Soc. Providence; 1989.

[3] Øksendal, B., Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application. 6th ed. Springer 2005

[4] Kang Y-M, Chen X, Lin X-D. Mean first passage time and stochastic resonance in transcriptional regulatory system with non-Gaussian noise. Fluct Noise Lett 2017;16:1750007.

[5] Wang C-J, Li D, Mei D-C. Pure multiplicative noises induced population extinction in an anti-tumor model under immune surveillance. Commun Theor Phys 2009;52:463-7.

[6] Valenti D, Schimansky-Geier L, Sailer X, Spagnolo B. Moment equations for a spatially extended system of two competing species. Eur Phys J B 2006;50:199-203.

[7] Murray JD. Mathematical biology. Springer-Verlag; 1993.

- [8] Han L, He C, Kuang Y. Dynamics of a model of tumor-immune interaction with time delay and noise. *Discrete Contin Dyn Syst Ser S* 2020;13:2347–63
- [9] Kloeden PE, Platen E. Numerical solution to stochastic differential equations. Berlin: Springer; 1999.
- [10] 微分方程讲义. 宁吴庆. 中国科大出版社.2023
- [11] 应用随机分析. 刘勇. 北京大学出版社.2023

蛙  
一 片 声





稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》

# 有理角余弦比值的次数

林开亮

## 摘要

作为 [9] 的续篇, 本文通过考虑有理角的余弦比值在伽罗瓦群作用下的稳定子群, 研究了其次数, 更正了 [9] 中的猜想, 并指出了前人更早的相关工作.

## 1 引言

在文 [9] 中, 作者从几何角度推广了  $\sqrt{2}$  是无理数这一事实, 证明了对任意的正  $n$  边形 ( $n \geq 4$ ), 其任意两条不等长的广义对角线 (包括边长在内) 之比都是无理数, 唯一的例外是正  $6m$  边形中出现的有理比值 2. 作者后来了解到, 该结果已经为 R. J. Evans 和 I. M. Isaacs ([6, p. 257]) 与 C. T. McMullen ([12, p.7]) 各自独立得到, 它可表述如下 ([9, p. 54]):

**定理 1.1** (Evans–Isaacs, 1977; McMullen, 2006). 设正整数  $k_1, k_2, n$  满足  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$  且  $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$ , 则

$$\alpha = \frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6, 3, 1),$$

而且此时比值  $\alpha = 2$ .

文 [9] 指出, 与定理 1.1 等价的正切结果曾经为 D. B. Shapiro [17], 蔡进一等 [4] 得到, 我们引述如下.

**定理 1.2** (Shapiro, 1984; 蔡进一等人, 2018). 设正整数  $k_1, k_2, n$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$  且  $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$ , 则

$$\gamma = \frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6, 2, 1),$$

而且此时比值  $\gamma = 3$ .

定理 1.2 与定理 1.1 等价, 是因为正切比与正弦比之间有以下基本关系 (蒙山东大学李良攀教授指出)

$$\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{k_2\pi}{n} \cos \frac{k_1\pi}{n}}{\cos \frac{k_2\pi}{n} \sin \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{2 \sin \frac{k_2\pi}{n} \cos \frac{k_1\pi}{n}}{2 \cos \frac{k_2\pi}{n} \sin \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n} + \sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n} - \sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} = \frac{\frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} + 1}{\frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} - 1} \quad (1.1)$$

文 [9] 指出, 与定理 1.1 等价的余弦结果曾为 A. Berger [2] 得到. 这里要补充的是, 更早的时候, Evans–Isaacs [6] 与 Robinson [16] 等也得到了这个结果, 如下:

**定理 1.3** (Evans–Isaacs, 1977; Robinson 等, 1998; Berger, 2017). 设正整数  $n, k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ , 则  $\frac{\cos \frac{k_2\pi}{n}}{\cos \frac{k_1\pi}{n}}$  为无理数.

作者信息: 林开亮, 西北农林科技大学理学院讲师, 邮箱: kailiang\_lin@163.com.

定理 1.3 与定理 1.1 等价, 是因为余弦比与正弦比之间有以下基本关系

$$\frac{\cos \frac{k_2\pi}{n}}{\cos \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k_2\pi}{n}\right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k_1\pi}{n}\right)}. \quad (1.2)$$

Robinson 等 [16] 对定理 1.3 给出的证明值得分享给读者. 他们实际上证明了以下结果:

**命题 1.4.** 设  $\theta, \varphi$  为有理角 (即  $\theta/\pi, \varphi/\pi \in \mathbb{Q}$ ). 若  $\cos \theta, \cos \varphi$  都是无理数, 且  $r = \cos \theta / \cos \varphi \neq \pm 1$ , 则  $r$  为无理数.

**证明:** [比原来的证明略有简化] 用反证法. 设  $r \in \mathbb{Q}$ . 则显然有  $\mathbb{Q}(\cos \theta) = \mathbb{Q}(\cos \varphi) = F$ . 由于  $\cos \theta \notin \mathbb{Q}$ , 从而  $e^{i\theta} \notin \mathbb{R}$ , 进而  $[\mathbb{Q}(e^{i\theta}) : \mathbb{Q}(\cos \theta)] = 2$ . 类似地,  $[\mathbb{Q}(e^{i\varphi}) : \mathbb{Q}(\cos \varphi)] = 2$ .

令  $K = \mathbb{Q}(e^{i\theta}) \cap \mathbb{Q}(e^{i\varphi})$ . 注意, 根据分圆域的基本性质,  $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ , 这里  $\zeta$  是某个单位根, 其阶数是  $e^{i\theta}, e^{i\varphi}$  的阶数的最大公约数. 参见 [5].

我们有

$$F \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(e^{i\theta})$$

注意  $[\mathbb{Q}(e^{i\theta}) : \mathbb{Q}(\cos \theta)] = 2$  是素数, 所以或者有  $K = F = \mathbb{Q}(\cos \theta) = \mathbb{Q}(\cos \varphi)$ , 或者有  $K = \mathbb{Q}(e^{i\theta}) = \mathbb{Q}(e^{i\varphi})$ .

我们说明这两种情况都不成立. 在前一种情况,  $K \subseteq \mathbb{R}$ . 而  $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ , 这里  $\zeta$  是单位根, 由此推出  $\zeta \in \mathbb{R}$ . 从而  $\zeta = \pm 1$ , 从而  $K = \mathbb{Q}(\pm 1) = \mathbb{Q}$ . 于是就有  $\cos \theta \in F = K = \mathbb{Q}$ , 与假定矛盾.

在后一种情况, 由分圆域的基本性质 (参见 [5]), 可推出或者  $e^{i\theta}$  与  $e^{i\varphi}$  是同次的本原单位根, 或者  $e^{i\theta}$  与  $-e^{i\varphi}$  是同次的本原单位根. 进而推出  $\cos \theta$  共轭于  $\cos \varphi$  或  $-\cos \varphi$ . 对  $\cos \theta = r \cos \varphi$  两边取范数, 就有  $1 = r^d$  或  $1 = (-r)^d$ , 这里  $d = \deg_{\mathbb{Q}}(\cos \theta)$ . 由此推出  $r = \pm 1$ , 与假定矛盾! 命题 1.4 证毕.

正多边形广义对角线比值的有理性问题, 是 E. J. Barbeau 在 1983 年的文章 [1] 中首先考虑的, 他还建议研究广义对角线比值 (在有理数域上) 的次数. 这一问题与相关的问题曾被许多作者讨论过, 如 [2, 3, 12]. 特别地, McMullen [12, p. 7] 定理 2.3 确定了所有的二次无理比值, 结果如下:

**定理 1.5** (McMullen, 2006). 设正整数  $n, k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$  且  $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$ . 则比值  $\frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}}$  为二次无理数当且仅当  $(n, k_2, k_1)$  取值于下表第一列 (共 15 种可能), 而对应的比值与极小多项式分别由第二、三列给出:

$(n, k_2, k_1)$	$\frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}}$	极小多项式
(4, 2, 1)	$\sqrt{2}$	$x^2 - 2 = 0$
(5, 2, 1)	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$x^2 - x - 1 = 0$
(6, 3, 2)	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$x^2 - \frac{4}{3} = 0$
(6, 2, 1)	$\sqrt{3}$	$x^2 - 3 = 0$
(8, 3, 1)	$1 + \sqrt{2}$	$x^2 - 2x - 1 = 0$
(10, 5, 3)	$-1 + \sqrt{5}$	$x^2 + 2x - 4 = 0$

(10, 5, 3)	$-1 + \sqrt{5}$	$x^2 + 2x - 4 = 0$
(10, 5, 1)	$1 + \sqrt{5}$	$x^2 - 2x - 4 = 0$
(10, 3, 1)	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	$x^2 - 3x + 1 = 0$
(12, 5, 3)	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$	$x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$
(12, 5, 1)	$2 + \sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
(12, 4, 3)	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$x^2 - \frac{3}{2} = 0$
(12, 3, 2)	$\sqrt{2}$	$x^2 - 2 = 0$
(12, 3, 1)	$1 + \sqrt{3}$	$x^2 - 2x - 2 = 0$
(30, 9, 5)	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$x^2 - x - 1 = 0$
(30, 5, 3)	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$x^2 - x - 1 = 0$

这意味着 [9] 中的猜想 8.4 已然是定理, 进而 Perez-Giz 于 2018 年提出的问题 (见 [15], 即 [9, p.73] 问题 8.1) 之解答也蕴含在 McMullen 2006 年的文章中. 即有 (参见上表第三列中出现的 4 行黑体):

**推论 1.6.** 设  $k$  是正整数, 则  $\phi_k = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$  可以实现为某个正多边形的两条广义对角线之比当且仅当  $k = 1$  或  $k = 2$ .

根据 (1.2) 式, 我们不难得到定理 1.5 的等价余弦版本:

**定理 1.7.** 设正整数  $n, k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$  且  $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$ . 则比值  $\frac{\cos \frac{k_2 \pi}{n}}{\cos \frac{k_1 \pi}{n}}$  为二次无理数当且仅当  $(n, k_2, k_1)$  取值于下表第一列 (共 11 种可能), 而对应的比值与极小多项式分别由第二、三列给出:

$(n, k_2, k_1)$	$\frac{\cos \frac{k_2 \pi}{n}}{\cos \frac{k_1 \pi}{n}}$	极小多项式
(5, 2, 1)	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$	$x^2 - 3x + 1 = 0$
(6, 2, 1)	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$x^2 - \frac{1}{3} = 0$
(8, 3, 1)	$-1 + \sqrt{2}$	$x^2 + 2x - 1 = 0$
(10, 3, 1)	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$	$x^2 + x - 1 = 0$
(12, 5, 3)	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$	$2x^2 + 2x - 1 = 0$
(12, 5, 1)	$2 - \sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
(12, 4, 3)	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x^2 - \frac{1}{2} = 0$
(12, 3, 2)	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$x^2 - \frac{2}{3} = 0$
(12, 3, 1)	$-1 + \sqrt{3}$	$x^2 + 2x - 2 = 0$
(15, 6, 5)	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	$x^2 + x - 1 = 0$
(15, 5, 3)	$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$	$x^2 + x - 1 = 0$

类似地, 根据 (1.1) 式, 不难得得到定理 1.5 的等价正切版本:

**定理 1.8.** 设正整数  $n, k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$  且  $\gcd(n, k_1, k_2) = 1$ . 则比值  $\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}}$  为二次无理数当且仅当  $(n, k_2, k_1)$  取值于下表第一列 (共 22 种可能), 而对应的比值与极小多项式分别由第二、三列给出:

$(n, k_2, k_1)$	$\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}}$	极小多项式
$(5, 2, 1)$	$2 + \sqrt{5}$	$x^2 - 4x - 1 = 0$
$(8, 3, 2)$	$1 + \sqrt{2}$	$x^2 - 2x - 1 = 0$
$(8, 3, 1)$	$3 + 2\sqrt{2}$	$x^2 - 6x + 1 = 0$
$(8, 2, 1)$	$1 + \sqrt{2}$	$x^2 - 2x - 1 = 0$
$(10, 4, 3)$	$\sqrt{5}$	$x^2 - 5 = 0$
$(10, 4, 1)$	$5 + 2\sqrt{5}$	$x^2 - 10x + 5 = 0$
$(10, 3, 2)$	$\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}$	$5x^2 - 10x + 1 = 0$
$(10, 3, 1)$	$2 + \sqrt{5}$	$x^2 - 4x - 1 = 0$
$(10, 2, 1)$	$\sqrt{5}$	$x^2 - 5 = 0$
$(12, 5, 4)$	$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$	$3x^2 - 6x - 1 = 0$
$(12, 5, 3)$	$2 + \sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
$(12, 5, 2)$	$3 + 2\sqrt{3}$	$x^2 - 6x - 3 = 0$
$(12, 5, 1)$	$7 + 4\sqrt{3}$	$x^2 - 14x + 1 = 0$
$(12, 4, 3)$	$\sqrt{3}$	$x^2 - 3 = 0$
$(12, 4, 1)$	$3 + 2\sqrt{3}$	$x^2 - 6x - 3 = 0$
$(12, 3, 2)$	$\sqrt{3}$	$x^2 - 3 = 0$
$(12, 3, 1)$	$2 + \sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
$(12, 2, 1)$	$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$	$3x^2 - 6x - 1 = 0$
$(24, 7, 1)$	$5 + 2\sqrt{6}$	$x^2 - 10x + 1 = 0$
$(24, 5, 1)$	$3 + 2\sqrt{2}$	$x^2 - 6x + 1 = 0$
$(30, 7, 2)$	$2 + \sqrt{5}$	$x^2 - 4x - 1 = 0$
$(30, 4, 1)$	$2 + \sqrt{5}$	$x^2 - 4x - 1 = 0$

T. Grubb 和 C. Woll 在 2021 年发表的文章 [8, p. 3] 中给出以下结果 (其定理 2).

**命题 1.9.** 设正整数  $n, k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$  且  $\gcd(k_1, k_2) = 1$ .  $\varphi$  是欧拉函数. 则

- 若  $n$  是奇数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}} \left( \frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}} \right) = \frac{\varphi(4n)}{4} = \frac{\varphi(n)}{2}. \quad (1.3)$$

- 若  $n$  是偶数, 则

$$\deg_{\mathbb{Q}} \left( \frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}} \right) \geq \frac{\varphi(4n)}{10} = \frac{\varphi(2n)}{5}. \quad (1.4)$$

之所以我们将这个结果改称为命题, 是因为它不全对. (1.3) 是成立的, 但 (1.4) 不成立. 一个反例是  $(n, k_2, k_1) = (30, 5, 3)$  (定理 1.5 中的表最后一行), 此时

$$\frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{5\pi}{30}}{\sin \frac{3\pi}{30}} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{1}{2 \cos \frac{2\pi}{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad (1.5)$$

其次数为 2. 而

$$\frac{\varphi(2n)}{5} = \frac{\varphi(60)}{5} = \frac{\varphi(3 \cdot 4 \cdot 5)}{5} = \frac{\varphi(3)\varphi(4)\varphi(5)}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{5} = \frac{16}{5} = 3.2 > 2.$$

对于有理角三角函数的比值之次数, 本文作者在 [9, pp. 74–75] 中也提出了一些猜想 (猜想 8.5, 8.6, 8.7). 但后来发现, 这些猜想也不对. 本文将重新考虑这些问题, 给出正确的结果. 特别地, 定理 2.1 与 4.1 将分别将给出 [9, pp. 74–75] 猜想 8.6 与 8.5 的修正.

下文主要考虑余弦比值的情况, 如前所述, 由此不难推出正弦比值的结果, 进而导出关于正切比值的结果.

## 2 有理角余弦比值的次数

相比于正弦比和正切比, 余弦比更简单. 我们将要证明的主要结果如下:

**定理 2.1.** 设  $\theta_i = \frac{2k_i\pi}{m_i}$ ,  $i = 1, 2$ , 其中  $k_i, m_i$  是互素的整数,  $m_i \geq 3$ . 设  $\cos \theta_1 \cos \theta_2 \neq 0$  且

$$\beta = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1} \neq \pm 1. \quad (2.1)$$

令

$$d = \gcd(m_1, m_2), \quad m = \text{lcm}(m_1, m_2). \quad (2.2)$$

则对于  $\beta$  在有理数域  $\mathbb{Q}$  上的次数  $\deg_{\mathbb{Q}}(\beta)$ , 有以下结论:

- 若  $d \in \{1, 2, 4\}$ , 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \frac{\varphi(m)}{4}. \quad (2.3)$$

- 若  $d \notin \{1, 2, 4\}$ , 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \begin{cases} \frac{\varphi(m)}{4}, & \text{若 } 4 \mid m \text{ 且 } \frac{m}{d} \text{ 为奇数} \\ \frac{\varphi(m)}{2}, & \text{否则} \end{cases} \quad (2.4)$$

其中  $\varphi(m)$  为欧拉函数.

如文 [9], 我们将从分圆域入手.  $\beta$  落在一个天然的域中:

$$\beta \in \mathbb{Q}(\zeta_m), \quad (2.5)$$

这里  $\zeta_m = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ . 基本的事实是, 分圆域  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  是  $\mathbb{Q}$  的 Galois 扩张, 具有 Galois 群  $G_m \approx (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ . 对任意的  $j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ , 我们用  $\sigma_j$  表示它在  $G_m$  中的同构像, 即  $\sigma_j : \zeta_m \mapsto \zeta_m^j$ .

根据 Galois 理论的基本结果, 有

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\beta) = \frac{|G_m|}{|G_\beta|}, \quad (2.6)$$

其中  $G_\beta$  是  $\beta$  在  $G_m$  作用下的固定子群, 即

$$G_\beta = \{\sigma \in G_m \mid \sigma(\beta) = \beta\}. \quad (2.7)$$

由于  $|G_m| = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times| = \varphi(m)$ , 因此我们只需确定  $G_\beta$  (甚至只需确定其阶数  $|G_\beta|$ ).

为此, 我们先证明以下引理 (它曾作为一个猜想在本刊网页版提出, 见 [10, 11]):

引理 2.2. 设  $\theta_i = \frac{2k_i\pi}{m_i}$ ,  $i = 1, 2$ , 其中  $k_i, m_i$  是互素的整数,  $m_i \geq 3$ . 设  $\cos \theta_1 \cos \theta_2 \neq 0$  且  $|\cos \theta_1| \neq |\cos \theta_2|$ . 令  $m = \text{lcm}(m_1, m_2)$ . 设整数  $j$  与  $m$  互素, 且使得

$$\frac{\cos(j\theta_2)}{\cos(j\theta_1)} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}. \quad (2.8)$$

则必有

$$\cos(j\theta_1) = \cos \theta_1, \quad \cos(j\theta_2) = \cos \theta_2, \quad (2.9)$$

或

$$\cos(j\theta_1) = -\cos \theta_1, \quad \cos(j\theta_2) = -\cos \theta_2, \quad (2.10)$$

注意, 若 (2.9) 或 (2.10) 成立, 则 (2.8) 也成立. 因此, 引理 2.2 将  $G_\beta$  的确定转化为方程 (2.9) 与 (2.10) 的求解.

引理 2.2 的证明: 基本想法是将 (2.8) 写成等价的乘积表达式

$$\cos \theta_1 \cos(j\theta_2) = \cos \theta_2 \cos(j\theta_1). \quad (2.11)$$

然后利用 G. Myerson[13, p. 80] 的定理 4, 它相当于说, 若有理数  $x_1, x_2, x_3, x_4$  满足

$$\cos(x_1\pi) \cos(x_2\pi) = \cos(x_3\pi) \cos(x_4\pi), \quad (2.12)$$

则除了由  $\{\cos \theta, \cos \phi, \pm \cos \theta, \pm \cos \phi\}$  等构成的平凡解以外, 其它非平凡解如下构成:

$$\cos \frac{\pi}{3} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = \cos \frac{\phi}{2} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) \quad (2.13)$$

此外, 如果  $x_1, x_2, x_3, x_4$  满足  $\frac{\pi}{2} > x_1 > x_3 \geq x_4 > x_2 \geq 0$ , 则由下表给出

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$19/42$	$5/42$	$3/7$	$2/7$
$13/42$	$1/42$	$2/7$	$1/7$
$3/7$	$1/7$	$17/42$	$11/42$
$9/20$	$1/20$	$13/30$	$7/30$
$11/30$	$1/30$	$7/20$	$3/20$
$7/15$	$1/5$	$13/30$	$11/30$
$13/30$	$1/30$	$2/5$	$4/15$
$2/5$	$1/15$	$11/30$	$7/30$
$7/30$	$1/30$	$1/5$	$2/15$
$7/15$	$2/15$	$2/5$	$2/5$
$4/15$	$1/15$	$1/5$	$1/5$
$13/30$	$7/30$	$2/5$	$1/3$
$11/30$	$1/30$	$1/3$	$1/5$
$5/12$	$1/12$	$2/5$	$1/5$
$2/5$	$1/5$	$1/3$	$1/3$

在 (2.11) 式中, 由于  $j$  与  $m$  互素, 所以  $\cos j\theta_i$  与  $\cos \theta_i$  生成相同的域, 从而等式 (2.11) 左边的两个因子生成的域分别等于右边两个因子生成的域.

若  $|\cos(k\theta_1)| \neq |\cos \theta_1|$ , 则根据以上结果, 必定有以下情形之一:

(i)  $|\cos(k\theta_2)| = |\cos \theta_2| = \cos \frac{\pi}{3} \in \mathbb{Q}$ , 进而必定有  $|\cos(k\theta_1)| = |\cos \theta_1|$ , 矛盾!

(ii)  $|\cos \theta_1|, |\cos(k\theta_2)|$  将取自上表的第一二列 (或三四列) 角度 (乘以  $\pi$ ) 对应的余弦值,  $|\cos \theta_2|, |\cos(k\theta_1)|$  将取自上表同一行中的第三四列 (或一二列) 角度对应的余弦值. 但通过比较次数, 容易看到, 同一行中, 第一二列的余弦值生成的域总是不等于第三四列的余弦值生成的域. 矛盾! 引理 2.2 证毕.

注. 此处所引的 G. Myerson 的定理, 等价于 L. Włodarski 的一个定理, 见 [20]. 此外, 笔者猜测, 此处对引理 2.2 的证明并非最简明的. 期待有兴趣的读者给出高见.

如前所述, 根据引理 2.2, 对于  $j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ ,  $\sigma_j \in G_\beta$  当且仅当  $j$  满足方程 (2.9) 或 (2.10). 从而, 为确定  $G_\beta$ , 就只需在  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  中求解方程 (2.9) 与 (2.10).

容易看到, (2.9) 等价于方程

$$(j \pm 1)\theta_1 \equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad (j \pm 1)\theta_2 \equiv 0 \pmod{2\pi}, \quad (2.14)$$

根据已知条件  $m_i, n_i$  互素, 上述方程进一步等价于

$$(j \pm 1) \equiv 0 \pmod{m_1}, \quad (j \pm 1) \equiv 0 \pmod{m_2}, \quad (2.15)$$

它等价于:

$$j \equiv \pm 1 \pmod{m_1}, \quad j \equiv \pm 1 \pmod{m_2}, \quad (2.16)$$

正负号的选择一共给出四个方程, 其中同号的两个方程是容易求解的, 它们给出  $j \equiv \pm 1 \pmod{m}$ , 显然  $j$  的这两个值都与  $m$  互素. 对于异号的两个方程, 只需考虑其中之一. 因为若  $j$  与  $m$  互素, 且满足

$$j \equiv 1 \pmod{m_1}, \quad j \equiv -1 \pmod{m_2}, \quad (2.17)$$

则显然有  $-j$  (它与  $m$  也互素) 满足

$$-j \equiv -1 \pmod{m_1}, \quad -j \equiv 1 \pmod{m_2}. \quad (2.18)$$

对于方程 (2.17), 我们可用一般的中国剩余定理 (参见 [14]) 求解. 令  $d = \gcd(m_1, m_2)$ , 则根据一般的中国剩余定理, (2.17) 有解当且仅当

$$d \mid 1 - (-1) = 2, \quad (2.19)$$

并且此时, 它的解为

$$j \equiv u_1 \frac{m}{m_1} - u_2 \frac{m}{m_2} \pmod{m} \quad (2.20)$$

其中整数  $u_1, u_2$  使得

$$u_1 \frac{m}{m_1} + u_2 \frac{m}{m_2} = 1. \quad (2.21)$$

我们需要进一步判定, 在所给条件  $d \mid 2$  下,

$$j_* = u_1 \frac{m}{m_1} - u_2 \frac{m}{m_2} \quad (2.22)$$

是否与  $m$  互素. 注意,  $j_*^2$  满足

$$j_*^2 \equiv 1 \pmod{m_1}, \quad j_*^2 \equiv 1 \pmod{m_2}, \quad (2.23)$$

从而

$$j_*^2 \equiv 1 \pmod{m}, \quad (2.24)$$

这意味着  $j_*^2$  与  $m$  互素, 从而  $j_*$  与  $m$  互素.

接下来我们考虑方程 (2.10), 不难发现, 它仅在  $m_1, m_2$  同时也为偶数时才有解, 并且此时等价于以下四个方程

$$\frac{j+1}{\frac{m_1}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad \frac{j+1}{\frac{m_2}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad (2.25)$$

$$\frac{j-1}{\frac{m_1}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad \frac{j-1}{\frac{m_2}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad (2.26)$$

$$\frac{j-1}{\frac{m_1}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad \frac{j+1}{\frac{m_2}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad (2.27)$$

$$\frac{j+1}{\frac{m_1}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad \frac{j-1}{\frac{m_2}{2}} \equiv 1 \pmod{2}, \quad (2.28)$$

我们逐一求解.

对于 (2.25),  $j$  首先要满足

$$j+1 \equiv 0 \pmod{\frac{m_1}{2}}, \quad j+1 \equiv 0 \pmod{\frac{m_2}{2}}, \quad (2.29)$$

由此推出  $j+1 \equiv 0 \pmod{\frac{m}{2}}$ , 从而  $j \equiv -1, \frac{m}{2}-1 \pmod{m}$ . 显然  $j \equiv -1 \pmod{m}$  不满足 (2.25). 只需考虑  $j \equiv \frac{m}{2}-1 \pmod{m}$ . 此时只要验证 (2.25) 对  $j_{-1} = \frac{m}{2}-1$  是否成立. 这就相当于判定  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  是否都是奇数. 为进一步判定  $j_{-1}$  是否与  $m$  互素, 注意  $m-2j_{-1}=2$ , 因此  $\gcd(j_{-1}, m) \mid 2$ . 由于  $m$  是偶数, 所以  $\gcd(j_{-1}, m)=1 \iff j_{-1}$  是奇数  $\iff 4 \mid m$ . 综上, 方程 (2.25) 有解当且仅当  $4 \mid m, m_1, m_2$  是偶数, 且  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  都是奇数, 并且此时解为  $j \equiv j_{-1} \pmod{m}$ .

类似地, 对于 (2.26), 它有解当且仅当  $4 \mid m, m_1, m_2$  是偶数, 且  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  都是奇数, 并且此时解为  $j \equiv j_1 \pmod{m}$ , 其中  $j_1 = \frac{m}{2}+1$ .

接下来考虑方程 (2.27),  $j$  首先要满足

$$j \equiv 1 \pmod{\frac{m_1}{2}}, \quad j \equiv -1 \pmod{\frac{m_2}{2}}, \quad (2.30)$$

根据前边对方程 (2.17) 的讨论, (2.29) 在  $(\mathbb{Z}/\frac{m}{2}\mathbb{Z})$  的解如下: 若  $d \notin \{2, 4\}$ , 则无解; 若  $d=2$  或  $d=4$ , 则解为

$$j \equiv j_* \pmod{\frac{m}{2}}$$

从而 (2.29) 在  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$  的解为

$$j \equiv j_*, j_* + \frac{m}{2} \pmod{m}. \quad (2.31)$$

接下来我们分析  $j_*$  或  $j_* + \frac{m}{2}$  为方程 (2.27) 的解的充要条件.

由于  $j_*$  与  $\frac{m}{2}$  互素, 且  $j_*$  是奇数, 所以  $j_*$  与  $m$  互素. 类似地, 由于  $j_* + \frac{m}{2}$  与  $\frac{m}{2}$  互素, 所以  $j_* + \frac{m}{2}$  与  $m$  互素当且仅当  $j_* + \frac{m}{2}$  是奇数, 当且仅当  $4 \mid m$ .

注意, 根据 (2.21) 与 (2.22), 有

$$\frac{j_*-1}{\frac{m_1}{2}} = -u_2 \frac{4m}{m_1 m_2} = -u_2 \frac{4}{d}, \quad \frac{j_*+1}{\frac{m_2}{2}} = u_1 \frac{4m}{m_1 m_2} = u_1 \frac{4}{d} \quad (2.32)$$

进而

$$\frac{j_* + \frac{m}{2} - 1}{\frac{m_1}{2}} = -u_2 \frac{4}{d} + \frac{m}{m_1}, \quad \frac{j_* + \frac{m}{2} + 1}{\frac{m_2}{2}} = u_1 \frac{4}{d} + \frac{m}{m_2} \quad (2.33)$$

我们分成以下情况讨论, 总的假定是  $m_1, m_2$  都是偶数:

若  $d = 2$ , 则 (2.32) 中两个式子右边皆为偶数, 从而  $j_*$  不满足方程 (2.27). 进一步, 可以证明  $j_* + \frac{m}{2}$  也不满足 (2.27). 如前所述, 只需考虑  $4 \mid m$  的情况, 此时  $\frac{m}{m_1} \frac{m}{m_2} = \frac{m^2}{m_1 m_2} = \frac{m}{d} = \frac{m}{2}$  是偶数, 这就意味着  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  一个是奇数一个是偶数 (注意  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  互素, 所以不可能两个同时为偶数. 这就意味着 (2.33) 中两个式子右边一个奇数一个偶数.

若  $d = 4$ , 则必定有  $4 \mid m$ . 我们分两种情况讨论:

情形 1:  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  都是奇数, 则根据 (2.21) 可知,  $u_1, u_2$  一奇一偶, 从而 (2.32) 中的两个式子右边一奇一偶, 这意味着  $j_*$  不满足 (2.27). 同样的, 由于  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  都是奇数, (2.33) 中的两个式子右边一奇一偶, 这意味着  $j_* + \frac{m}{2}$  不满足 (2.27).

情形 2:  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  一奇一偶.

若  $\frac{m}{m_1}$  是奇数,  $\frac{m}{m_2}$  是偶数. 则根据 (2.21) 知,  $u_1$  是奇数. 若  $u_2$  是奇数, 则  $j_*$  满足 (2.27), 但同时由于  $-u_2 + \frac{m}{m_1}$  是偶数, 所以  $j_* + \frac{m}{2}$  不满足方程 (2.27). 若  $u_2$  是偶数, 则  $j_*$  不满足 (2.27), 但  $j_* + \frac{m}{2}$  满足方程 (2.27).

若  $\frac{m}{m_1}$  是偶数,  $\frac{m}{m_2}$  是奇数. 则根据 (2.21) 知,  $u_2$  是奇数. 若  $u_1$  是奇数, 则  $j_*$  满足 (2.27), 但同时由于  $u_1 + \frac{m}{m_2}$  是偶数, 所以  $j_* + \frac{m}{2}$  不满足方程 (2.27). 若  $u_1$  是偶数, 则  $j_*$  不满足 (2.27), 但  $j_* + \frac{m}{2}$  满足方程 (2.27).

综上, 对于方程 (2.27), 它在  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  的解如下: 它有解当且仅当  $d = 4$ , 且  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  一奇一偶, 并且此时它的解为  $j_*$  与  $j_* + \frac{m}{2}$  中的一个.

类似地, 对于方程 (2.28), 它在  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$  的解如下: 它有解当且仅当  $d = 4$ , 且  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  一奇一偶, 并且此时它的解为  $-j_*$  与  $-j_* + \frac{m}{2}$  中的一个.

注意  $\frac{m}{m_1} \frac{m}{m_2} = \frac{m}{d}$  从而  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  同时为奇数等价于  $\frac{m}{d}$  为奇数.

综上, 我们得到以下结果:

**定理 2.3.** 设  $\theta_i = \frac{2k_i \pi}{m_i}, i = 1, 2$ , 其中  $k_i, m_i$  是互素的整数,  $m_i \geq 3$ . 设  $\cos \theta_1 \cos \theta_2 \neq 0$  且  $|\cos \theta_1| \neq |\cos \theta_2|$ . 令  $d = \gcd(m_1, m_2)$ ,  $m = \text{lcm}(m_1, m_2)$ . 设  $j \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ , 使得

$$\frac{\cos(j\theta_2)}{\cos(j\theta_1)} = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}. \quad (2.34)$$

则有以下结论:

- 若  $d = 1$  或  $d = 2$ , 则

$$j \equiv \pm 1, \pm j_* \pmod{m}. \quad (2.35)$$

- 若  $d = 4$ , 则当  $\frac{m}{4}$  是偶数且  $\frac{m}{m_1}, \frac{m}{m_2}$  一奇一偶时, 有

$$j \equiv \begin{cases} \pm 1, \pm \left(j_* + \frac{1+(-1)^{u_2}}{2} \frac{m}{2}\right) & (\text{mod } m), \\ \pm 1, \pm \left(j_* + \frac{1+(-1)^{u_1}}{2} \frac{m}{2}\right) & (\text{mod } m), \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{若 } \frac{m}{m_1} \text{ 是奇数} \\ \text{若 } \frac{m}{m_2} \text{ 是奇数} \end{array} \quad (2.36)$$

否则

$$j \equiv \pm 1, \frac{m}{2} \pm 1. \quad (2.37)$$

- 若  $d \notin \{1, 2, 4\}$ , 则当  $4 \mid m$  且  $\frac{m}{d}$  为奇数时,

$$j \equiv \pm 1, \frac{m}{2} \pm 1, \quad (2.38)$$

否则

$$j \equiv \pm 1. \quad (2.39)$$

如前所述, 由定理 2.3 即可推出定理 2.1.

### 3 有理角余弦比值的二次取值

作为定理 2.1 的应用, 我们来证明定理 1.7, 由于它与定理 1.5 等价, 这就给出了 McMullen 定理的一个新证明途径.

**定理 1.7 的证明概述.**

设  $\beta = \frac{\cos \theta_2}{\cos \theta_1}$  的次数为 2, 其中  $\theta_i = \frac{2n_i\pi}{m_i}$ ,  $n_i, m_i$  互素, 且  $0 < n_i/m_i < \frac{1}{4}$ . 这意味着  $m_i \geq 5$ . 则根据定理 2.1,  $\frac{\varphi(m)}{4} = 2$  或  $\frac{\varphi(m)}{2} = 2$ .  $\frac{\varphi(m)}{4} = 2$  当且仅当  $\varphi(m) = 8$  注意  $\varphi(m)$  仅有的素因是 2, 这意味着  $m$  的奇素数因子只能是 Fermat 素数, 即  $3, 5, 17, \dots$ , 并且它们的次数至多是一次. 注意  $\varphi(17) = 16 > 8$ , 所以  $m$  的奇素数因子只能是 3, 5. 据此  $m = 2^4, 2^3 \cdot 3, 2^2 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5, 3 \cdot 5$ . 即我们有

$$\frac{\varphi(m)}{4} = 2 \iff \varphi(m) = 8 \iff m \in \{16, 24, 20, 30, 15\}.$$

类似地

$$\frac{\varphi(m)}{2} = 2 \iff \varphi(m) = 4 \iff m \in \{5, 8, 12, 10\}.$$

接下来只需对这些  $m$  逐一分析. 细节从略.

### 4 有理角正弦比值的次数

用类似的方法, 我们可以确定有理角正弦比值的次数. 限于篇幅, 这里仅仅给出结果如下:

**定理 4.1.** 设  $\theta_i = \frac{2k_i\pi}{m_i}, i = 1, 2$ , 其中  $k_i, m_i$  是互素的整数,  $m_i \geq 3$ . 设  $\sin \theta_1 \sin \theta_2 \neq 0$  且

$$\alpha = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \neq \pm 1. \quad (4.1)$$

令

$$d = \gcd(m_1, m_2), \quad m = \text{lcm}(m_1, m_2). \quad (4.2)$$

则对于  $\alpha$  在有理数域  $\mathbb{Q}$  上的次数  $\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha)$ , 有以下结论:

- 若  $d \in \{1, 2\}$ , 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varphi(m)}{2}, & \text{若 } \frac{m}{d} \text{ 为奇数} \\ \frac{\varphi(m)}{4}, & \text{否则} \end{cases} \quad (4.3)$$

- 若  $d = 4$ , 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varphi(m)}{8}, & \text{若 } \frac{m}{4} \text{ 为奇数} \\ \frac{\varphi(m)}{4}, & \text{否则} \end{cases} \quad (4.4)$$

- 若  $d \notin \{1, 2, 4\}$ , 则

$$\deg_{\mathbb{Q}}(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varphi(m)}{4}, & \text{若 } m_1, m_2 \text{ 为偶数且 } \frac{m}{d} \text{ 为奇数, 且 } 4 \mid m \\ \frac{\varphi(m)}{2}, & \text{否则} \end{cases} \quad (4.5)$$

其中  $\varphi(m)$  为欧拉函数.

我们指出, 由定理 4.1 不难推出 McMullen 的下述定理 ([12] 定理 2.3):

**定理 4.2.** 对每个正整数  $d$ , 仅存在有限多个有理数对  $(\theta_1, \theta_2)$  使得  $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{1}{2}$  且  $\deg_{\mathbb{Q}}\left(\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1}\right) = d$ .

注意, 根据 (参见 (1.1) 式)

$$\frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1}{\cos \theta_2 \sin \theta_1} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{2 \cos \theta_2 \sin \theta_1} = \frac{\sin(\theta_2 + \theta_1) + \sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_2 + \theta_1) - \sin(\theta_2 - \theta_1)} = \frac{\frac{\sin(\theta_2 + \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} + 1}{\frac{\sin(\theta_2 + \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} - 1}, \quad (4.6)$$

有理角正切比值

$$\gamma = \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1}$$

的次数归结为有理角正弦比值

$$\frac{\sin(\theta_2 + \theta_1)}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$$

的次数, 而后者可经定理 4.1 导出.

## 致谢

感谢首都师范大学李克正教授、山东大学李良攀教授、国立台湾大学付航教授、南京大学朱富海教授、西安电子科技大学张哲博士、中国传媒大学陈见柯博士、中央民族大学王兢博士、中国矿业大学(北京)张汉雄博士、北京市朝阳区教研中心张浩博士与作者讨论交流. 感谢西安邮电大学全秋娟老师帮忙传递文献. 感谢本刊审稿人对初稿提出宝贵意见.

## 参考文献

- [1] E. J. Barbeau, Incommensurability proof: a pattern that peters out. *Math. Mag.* 56 (1983) 82–90.
- [2] A. Berger, More grade school triangles. *Amer. Math. Monthly* 124 (2017) 324–336.
- [3] A. Berger, On linear independence of trigonometric numbers. *Carpathian Journal of Mathematics* 34 (2018) 157–166.
- [4] J. Y. Cai, Z. G. Fu, K. Girstmair, M. Kowalczyk, A complexity trichotomy for  $k$ -regular ssymmetric spin systems using number theory. *Innovations in Theoretical Computer Science* (2018) 2:1–2:22.
- [5] R. Chalkley, A Lattice of Cyclotomic Fields, *Math. Mag.* 48 (1975) 42–44.
- [6] R. J. Evans and I. M. Isaacs, Fields generated by linear combinations of roots of unity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 229 (1977), 249–258.
- [7] R. Evans, I. M. Isaacs, Problem E 2668: Special non-isosceles triangle. *Amer. Math. Monthly* 85 (1978) 825.
- [8] T. Grubb, C. Woll, Cyclotomic points and algebraic properties of polygon diagonals, *Integers* 21 (2021).
- [9] 林开亮, 从正多边形中的有理比到  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式, 《蛙鸣》第 64 期 (2021 年 6 月), 52–78.
- [10] 林开亮, 悬赏征解, 《蛙鸣》第 64 期勘误修订.
- [11] 林开亮, 从  $\sqrt{2}$  是无理数引出的一个数论研究与普及故事, 《数学通报》, 2022 年第 61 卷第 4 期, 1–4.
- [12] C. T. McMullen, Teichmüller curves in genus two: Torsion divisors and ratios of sines. *Invent. Math.* 165(3) (2006): 651–672.
- [13] G. Myerson, Rational products of sines of rational angles, *Aequationes Math.* 45 (1993), no. 1, 70–82.
- [14] O. Ore, The general Chinese remainder theorem, *Amer. Math. Monthly* 59 (1952) 365–370.
- [15] G. Perez-Giz. Beyond the golden ratio. PBS Infinite Series, Youtube Channel, 2018. <https://www.youtube.com/watch?v=MIxvZ6jwTuA>
- [16] R. M. Robinson and J. H. Lindsey II, Problem 10550: Rational cosine ratios, *Amer. Math. Monthly* 105 (1998) p. 277.
- [17] D. B. Shapiro, A periodicity problem in plane geometry. *Amer. Math. Monthly* 91 (1984) 97–108.
- [18] G. Vincenzi, A characterization of regular  $n$ -gons whose pairs of diagonals are either congruent or incommensurable. *Arch. Math.* 115 (2020) 467–477.
- [19] G. Vincenzi, B. Paolillo, P. Rizzo, Commensurable diagonals in regular  $n$ -gons. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Published online: 01 Jul 2021.
- [20] L. Włodarski, On the equation  $\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \cos \alpha_3 + \cos \alpha_4 = 0$ , *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math.* 12 (1969) 147–155.

# 无粘流体的低马赫数奇异极限

章俊彦

## 摘要

流体的内部存在着传播速度有限的声波，这是由于现实中的流体均是可压缩的。当可压缩性对流动的影响很小时，可以假设流体为不可压缩（密度为常值）以简化模型。数学上严格验证该“不可压极限”（或称作“低马赫数极限”）过程则需引进物理量马赫数（Mach number），其定义为流体速度大小与局部声速大小的比值。马赫数越大，可压缩性对流体运动的影响越大，反之亦然。然而当马赫数趋于 0 时，方程的性质会发生改变：可压缩流的状态方程失效，因此低马赫数极限又被视作一类“奇异极限”。流体的奇异极限问题不仅在数学上颇具挑战性，而且具有极为重要的物理和应用背景。本文将以可压缩欧拉方程为首的无粘性流体为例，介绍该类奇异极限问题的研究进展、基本技术、本质困难以及尚未解决的问题。

## 1 基本术语与问题设定

不妨设空间维数是 3，考虑  $\mathbb{R}^3$  中的可压缩欧拉方程如下，其描述了密度非常值的理想流体（忽略粘性、外力等作用）的运动

$$\begin{cases} \rho D_t u = -\nabla p \\ D_t \rho + \rho \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中  $\rho, u = (u_1, u_2, u_3), p$  分别代表流体的密度、速度场和流体压力。微分算子  $D_t := \partial_t + u \cdot \nabla$  称作“物质导数”。若  $\rho$  为常数，则称流体是不可压缩的（incompressible），否则称流体是可压缩的（compressible）。对可压缩流，上述方程组有三个未知变量，因此还需一个额外的方程来封闭该系统，这个方程即为状态方程（equation of state），其表明流体压力由密度和熵唯一决定，且一般假设流体压力是关于密度的严格递增函数（常用的状态方程有  $p = (A\rho^\gamma - B)e^{S/C}$ ，其中  $A, C > 0, B \geq 0, \gamma \geq 1$ ），即

$$p = p(\rho, S), \quad \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, S) > 0. \quad (1.2)$$

而熵则满足传输方程  $D_t S = 0$ 。若  $S$  为常数，则称该可压缩流是等熵的（isentropic），否则称之为非等熵的（non-isentropic）。这里，我们一般进一步假设流体的密度具有正的下界，即不考虑出现真空的情况。如上方程即为动量守恒、质量守恒和自由能守恒的推导结果。

进一步我们定义流体的局部声速为  $c_s := \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, S)}$ ；定义马赫数  $M := |u|/c_s$ ，即流体（相对边界的）运动速率与局部声速的比值。实际应用中，当马赫数小于 0.3 时可认为流体压力造成的可压缩性不足以对流体的流动带来太大影响，此时我们称流体为亚音速不可压缩流；当马赫数介于 0.3 到 1 之间时，称作亚音速可压缩流；当马赫数大于 1 时，称作超音速流，该情况往往在航空动力学或者天体物理中出现。

那么如何严格验证当马赫数很小时，可压缩流满足的方程可以被不可压缩流体模型逼近？数学上这个问题化为验证当马赫数趋于 0 时，可压缩流满足的方程组的解收敛到对应的不可压方程组的解，并且这个极限过程需要是强收敛（弱收敛并不意味着所得到的极限方程

作者信息：章俊彦，2013 级数学科学学院 PB13001112，数学科学学院特任教授，邮箱：yx3x@ustc.edu.cn。

真实存在)。然而, 马赫数趋于 0 的这个极限过程是一类“奇异极限”过程: 不可压方程的压力项不满足状态方程(否则密度不变意味着压力是常值, 进而所有方程全部退化), 连续性方程(即(1.1)的第二个方程)的时间导数项退化(方程组的双曲性部分退化)。接下来我们会看到, 即使可压方程的初值是不可压方程初值的小摄动, 可压方程的解也仅有密度、速度场会收敛到不可压方程的解, 而压力项没有对应的收敛关系。

### 1.1 方程组的无量纲化

本节参考的是 Klainerman-Majda [18, 19] 的开创性工作。首先我们可以通过对方程组进行“无量纲化”, 从数学上解释为什么压力项具有奇性。为了简便, 我们以等熵的多方气体为例 ( $p = A\rho^\gamma, \gamma > 1, A > 0$ )。设可压缩欧拉方程组(1.1)的初值为  $(u_0(x), \rho_0(x))$  并记  $|u_m| = \sup_x |u_0(x)|, \rho_m = \sup_x \rho_0(x)$ 。现在令

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= u/|u_m|, & \tilde{\rho} &= \rho/\rho_m; \\ x' &= x, & t' &= |v_m|t.\end{aligned}$$

此时, 可压缩欧拉方程组可以写作如下形式

$$\begin{cases} \tilde{\rho}(\partial_{t'} + \tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + \lambda^2 \nabla p = 0 \\ (\partial_{t'} + \tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{\rho} + \tilde{\rho} \nabla \cdot \tilde{u} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

其中

$$\lambda^2 := \frac{1}{\gamma A} \frac{\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho_m)}{|v_m|^2}$$

是一个无量纲的常数。特别地, 马赫数在此定义为  $M = |v_m|/c_s(\rho_m)$ , 其中  $c_s(\rho_m) := \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}(\rho_m)$  为局部声速, 而无量纲常数  $\lambda = (\gamma A)^{-\frac{1}{2}} M^{-1}$  则反比于马赫数。当马赫数很小时,  $\lambda$  非常大。以室温下的空气为例,  $A = 1, \gamma = 1.4, c_s = 333\text{m/s}$ , 若空气的流速为 10m/s, 则对应的  $\lambda^2 \approx 650$  是一个非常大的数值。

### 1.2 极限方程的形式推导

下面我们来推导  $\lambda \rightarrow \infty$  时, 方程组求极限是怎样的形式。为了记号简便, 我们略去(1.3)里的~和'并将其写成如下形式

$$\begin{cases} \rho(p^\lambda) D_t u^\lambda + \lambda^2 \nabla p^\lambda = 0, \\ (\gamma p^\lambda)^{-1} D_t p^\lambda + \nabla \cdot u^\lambda = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中  $\rho(p^\lambda)$  由等熵的状态方程  $p = A\rho^\gamma$  确定。方程的初值记为  $p^\lambda(0, x) = p_0^\lambda(x)$  和  $u^\lambda(0, x) = u_0^\lambda(x)$ 。接下来, 我们假设  $p^\lambda, v^\lambda$  有如下渐进展开

$$\begin{aligned}p^\lambda &= p_0 + \frac{1}{\lambda} p_1 + \frac{1}{\lambda^2} p_2 + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \\ u^\lambda &= u_0 + \frac{1}{\lambda} u_1 + \frac{1}{\lambda^2} u_2 + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).\end{aligned}$$

在推导极限方程之前, 我们回顾在  $L^2(\mathbb{R}^d)$  中有如下正交分解

**引理 1.1.** 对任意  $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , 存在唯一的正交分解  $u = w + \nabla\phi$  满足  $\nabla \cdot w = 0$ 。这里我们记  $w = \mathcal{P}u, \nabla\phi = (1 - \mathcal{P})v$ 。并且对任意  $s \geq 0$  都有  $\|\mathcal{P}u\|_{H^s} \leq \|u\|_{H^s}$ 。实际上,  $w$  是向量场  $u$  的“旋度部分”,  $\nabla\phi$  是向量场  $u$  的“无旋部分”。

现在我们将上述渐近展开代入(1.4)中的第一个方程并利用  $\mathcal{P}(\nabla p^\lambda) = 0$  得到

$$\nabla p_0 = 0, \quad \nabla p_1 = 0, \quad \mathcal{P}(\rho(p_0) D_t u^\infty) = 0 \quad \text{as } \lambda \rightarrow \infty.$$

特别地, 前两个式子表明, 存在一个仅依赖于时间  $t$  的函数  $P_0(t)$  以及函数  $p(t, x)$ , 使得

$$\rho(p_0)D_t u^\infty = -\nabla p^\infty, \quad p_0 = P_0(t). \quad (1.5)$$

接下来再把渐近展开式带进(1.4)的第二个方程, 并利用上式, 得到

$$(\gamma P_0(t))^{-1} \frac{d}{dt} P_0(t) + \nabla \cdot u^\infty. \quad (1.6)$$

注意到该式中第一项仅和时间相关, 第二项仅依赖于  $t$  和  $x$ , 因此这两项必须都等于 0.

$$\nabla \cdot u^\infty = 0, \quad P_0(t) = P_0 \text{ (constant)}.$$

进一步我们可以通过调整  $P_0(t)$  的取值使得渐近展开中的一阶项  $p_1 = 0$ . 这样我们就得到当马赫数趋于 0(即  $\lambda \rightarrow \infty$ ) 时, 速度场  $u^\lambda$  和压力项  $p^\lambda$  的渐近展开实则如下

$$p^\lambda = P_0 + \frac{1}{\lambda^2} p^\infty(t, x) + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad (1.7)$$

$$u^\lambda = u^\infty(t, x) + \frac{1}{\lambda} u_1(t, x) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (1.8)$$

其中极限函数  $u^\infty, p^\infty$  满足方程组

$$\begin{cases} \rho_0(\partial_t + u^\infty \cdot \nabla) u^\infty + \nabla p^\infty = 0, \\ \nabla \cdot u^\infty = 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

系数  $\rho_0 = \rho(P_0)$ . 显见, 该极限方程组的初值应当满足

$$p_0^\lambda(x) = p_0 + \frac{1}{\lambda^2} p_0^1(x), \quad (1.10)$$

$$u_0^\lambda(x) = u_0^\infty(x) + \frac{1}{\lambda} u_0^1(x), \quad \nabla \cdot u_0^\infty = 0. \quad (1.11)$$

可以看出, 对不可压缩的初值如上摄动时, 压力的变化要远比速度的变化小. 如上过程给出了可压缩流在逼近不可压缩流时的渐近关系, 同时也可以看出  $\lambda \rightarrow \infty$  的这个极限过程是一个“奇异极限”(singular limit): 原方程(1.3)中的速度场仍然保持有界, 但一些其它的特征速度(例如声速, 即  $O(\lambda)$ ) 则已经变成无穷大.

最后, 我们需要指出上述渐近展开仅是形式推导, 并没有拓展到高阶项. 实际正确的渐近展开式应是

$$p^\lambda = P_0 + \frac{1}{\lambda^2} (p^\infty(t, x) + p_1(t, x; \lambda)) + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \quad (1.12)$$

$$u^\lambda = u^\infty + \frac{1}{\lambda} u_1(t, x; \lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad (1.13)$$

其中  $p_1, u_1$  可能依赖参数  $\lambda$ , 且它们的初值不一定关于  $\lambda$  一致有界. 这种“坏情况”会导致速度场初值不收敛. 实际上, 附加项  $p_1(t, x; \lambda)$  和  $u_1(t, x; \lambda)$  对应一些线性声波, 其满足变系数的波动方程, 系数依赖于极限函数  $u^\infty$ . 我们在严格证明可压缩流的低马赫数极限时, 需要区分  $u_0^\lambda - u_0^\infty = O(1/\lambda)$  (小摄动初值) 和  $u_0^\lambda - u_0^\infty = O(1)$  (一般初值) 这两种情况. 前者实际蕴含了一阶时间导数初值的一致有界性, 因此只需证明方程组解对  $\lambda$  的一致估计即可直接利用紧性定理(Arzelà-Ascoli 引理、Aubin-Lions 引理等等) 得到强收敛; 而后者的一致估计只能得到解的弱-\* 收敛, 欲得到强收敛, 则需要找到合适的函数空间以过滤掉  $p_1, u_1$  中无界的“坏项”.

### 1.3 数学上的严格叙述

现在我们对上述记号作一定的简化. 令  $\varepsilon = 1/\lambda$ , 由于  $\lambda = (\gamma A)^{-\frac{1}{2}} M^{-1}$  且  $A, \gamma$  被状态方程给定, 所以我们在此对记号稍作混淆, 称  $\varepsilon$  为马赫数. 为了使得无量纲化之后的方程组为对称化, 我们令  $\tilde{p} = P_0 e^{\varepsilon q}$  (其中  $P_0 > 0$  是一个常数). 现在, 将(1.3)中的变量  $(t', x')$  重新记作  $(t, x)$ , 变量  $\tilde{u}$  改写为  $v$ , 我们得到如下形式的方程

$$\begin{cases} \rho(\varepsilon q)(\partial_t + v \cdot \nabla)v + \frac{1}{\varepsilon}\nabla q = 0 \\ a(\varepsilon q)(\partial_t + v \cdot \nabla)q + \frac{1}{\varepsilon}\nabla \cdot v = 0 \end{cases} \quad (1.14)$$

其中  $\rho(\cdot), a(\cdot) > 0$  是足够光滑的函数. 对非等熵流, 我们也可以作类似的“无量纲化”, 得到

$$\begin{cases} \rho(\varepsilon q, S)(\partial_t + v \cdot \nabla)v + \frac{1}{\varepsilon}\nabla q = 0 \\ a(\varepsilon q, S)(\partial_t + v \cdot \nabla)q + \frac{1}{\varepsilon}\nabla \cdot v = 0 \\ (\partial_t + v \cdot \nabla)S = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

换言之, 可压缩流状态方程(1.2)的信息现在转移到了方程系数  $\rho, a$  里面, 使得两个方程里面的变量统一为压力. 欲严格验证马赫数很小时可压缩流体方程到不可压缩流体方程的收敛性, 我们需要证明 (以等熵流方程(1.14)为例)

**定理 1.2.** 假设存在常数  $P_0 > 0, C_0 > 0, s \in \mathbb{N}^*$ , 使得(1.14)的初值  $v_0^\varepsilon, q_0^\varepsilon$  满足

$$\|v_0^\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|q_0^\varepsilon - P_0\|_{H^s}^2 \leq C_0, \quad (1.16)$$

则存在  $\varepsilon_0 > 0$ 、仅依赖于初值的时间  $T > 0$  和依赖于  $s$  的常数  $C_s > 0$ , 满足

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|v^\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|q^\varepsilon\|_{H^s}^2 + \varepsilon(\|\partial_t v^\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|\partial_t q^\varepsilon\|_{H^s}^2) \leq C_s. \quad (1.17)$$

进一步地, 若初值还满足

$$v_0^\varepsilon(x) = v_0^0(x) + \varepsilon v_1(x), \quad \nabla \cdot v_0^0 = 0, \quad q_0^\varepsilon(x) = P_0 + \varepsilon q_1(x), \quad (1.18)$$

$$\|v_1(x)\|_{H^s} + \|q_1(x)\|_{H^s} \leq C'_0, \quad (1.19)$$

则在同样的时间区间  $[0, T]$  中有

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\partial_t v^\varepsilon\|_{H^s}^2 + \|\partial_t q^\varepsilon\|_{H^s}^2 \leq C'_s. \quad (1.20)$$

且当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 方程(1.14)的解  $(v^\varepsilon, q^\varepsilon)$  在  $L^\infty([0, T]; H^s)$  中弱收敛, 在  $C_{\text{loc}}([0, T]; H_{\text{loc}}^{s-\delta})$  中强收敛, 极限函数为  $v^0(t, x)$  和  $P_0$ , 其中  $v^0(t, x)$  满足如下不可压缩欧拉方程

$$\begin{cases} \rho(0)(\partial_t + v \cdot \nabla)v^0 + \nabla q^0 = 0, \\ \nabla \cdot v^0 = 0, \\ v^0(0, x) = v_0^0(x). \end{cases} \quad (1.21)$$

**注记 1.** 当可压缩欧拉方程(1.14)的初值满足(1.18)时, 其在  $\varepsilon \rightarrow 0$  时会收敛到不可压缩欧拉方程(1.21)的初值, 这类初值称作“小摄动初值”(well-prepared data). 该类初值对应的解也有对应的强收敛关系. 实际上, (1.18)蕴含了方程(1.14)解的一阶时间导数的初值也关于  $\varepsilon$  一致有界, 从而解也满足类似的性质, 即(1.20). 据此并结合紧性定理, 对(1.14)作出关于  $\varepsilon$  一致估计可以直接推出强收敛的结果. 但是, 对一般初值 (ill-prepared data), 即只满足(1.16)的初值, 我们只能从估计(1.17)中得到弱-\* 收敛, 仍需寻找合适的函数空间来“过滤掉”  $v_1$  以证明强收敛.

事实上, 一般初值带来的这一困难不仅仅体现在求极限这个过程中, 而且还对证明方程组关于  $\varepsilon$  的一致估计带来新的困难. 进一步地, 对非等熵流满足的方程(1.15), 其系数  $\rho, a$  同时依赖  $q, S$ , 且  $S$  项中并没有  $\varepsilon$  权. 对一般初值情况, 一阶时间导数的一致有界性缺失会导致导数落在系数  $a, \rho$  上时也产生额外带有奇性的项. 这些一致估计中的困难可以利用一些简单的分析技巧解决, 而能让解有强收敛的函数空间的方法, 则在等熵、非等熵的情况下完全不同.

## 2 固定区域问题: 小摄动初值

下面我们以非等熵欧拉方程组(1.15)在半空间  $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0)$  中的初边值问题为例, 来简要介绍如何对小摄动初值的方程组建立关于  $\varepsilon$  一致的能量估计. 由于  $\Omega$  现在是带边区域, 所以我们还需要给方程组(1.15)加上边界条件, 该边界条件称作“滑动 (slip) 边界条件”

$$v \cdot N = 0 \quad \text{on } \Sigma := \partial\Omega = \mathbb{R}^2 \times \{x_3 = 0\}. \quad (2.1)$$

事实上, 由于可压缩欧拉方程组是一阶对称双曲方程组, 其边界条件个数是由系数矩阵唯一确定的, 在滑动边界条件下, 可以计算出 (具体参见 [29]) 其边界条件只有 1 个, 因此不能再添加其它任何边界条件. 此外, 我们在证明一致估计时需要计算解的高阶时间导数, 因此(1.15)的初值也需要满足特定的相容性条件. 我们称(1.15), (2.1)的初值满足  $m$  阶相容性条件是指

$$\partial_t^j (v \cdot N)|_{\Sigma} = 0 \quad 0 \leq j \leq m. \quad (2.2)$$

对给定的  $s \geq 0$ , 区域  $\Omega$  和函数  $f(x)$ , 我们引进记号  $\|f\|_s := \|f\|_{H^s(\Omega)}$  以及  $|f|_s := \|f\|_{H^s(\partial\Omega)}$ . 现在我们希望对初边值问题(1.15), (2.1) 证明如下定理

**定理 2.1 (一致估计).** 设  $m \geq 3$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ), 设方程(1.15)的初值  $(v_0^\varepsilon, q_0^\varepsilon, S_0^\varepsilon) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$  满足  $(m-1)$  阶相容性条件以及  $E_m^\varepsilon(0) \leq C_0$ , 则存在与  $\varepsilon$  无关的时间  $T > 0$ , 使得对应的解满足能量估计  $\sup_{0 \leq t \leq T} E_m^\varepsilon(t) \leq C(E_m^\varepsilon(0))$ . 其中能量泛函  $E_m^\varepsilon(t)$  定义为

$$E_m^\varepsilon(t) := \sum_{k=0}^m \left\| \varepsilon^{(k-1)+} \partial_t^k (v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon) \right\|_{m-k}^2. \quad (2.3)$$

$C_0 > 0$  是与  $\varepsilon$  无关的常数,  $C(\cdot) > 0$  是正值连续函数,  $(k-1)_+ = \max\{0, k-1\}$ .

由于上述能量泛函中的一阶时间导数项仍然关于  $\varepsilon$  一致有界, 因此结合 Aubin-Lions 紧性定理, 可以直接从如上一致估计得到解的强收敛, 即所谓的“不可压极限”. 由于现在考虑的是非等熵流, 因此密度函数的极限并不是常值, 而是满足一个简单的传输方程, 此时称该流体是非均匀的 (non-uniform), 方程如下

$$\begin{cases} \rho^0 (\partial_t + v^0 \cdot \nabla) v^0 + \nabla \pi^0 = 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega \\ \nabla \cdot v^0 = 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega \\ (\partial_t + v^0 \cdot \nabla) S^0 = 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega \\ v_3^0 = 0 & \text{on } [0, T] \times \Sigma \\ (v^0, S^0)|_{t=0} = (v_0^0, S_0^0) & \text{in } [0, T] \times \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

其中  $\rho^0 := \rho(0, S^0)$ , 不难验证其满足传输方程  $(\partial_t + v^0 \cdot \nabla) \rho^0 = 0$ . 上述方程中的  $\pi^0$  即为满足方程的压力函数 (注意:  $q^\varepsilon$  到  $\pi^0$  之间没有收敛关系! )

**推论 2.2 (不可压极限).** 在定理2.1的条件下, 设方程(1.15)的初值  $(v_0^\varepsilon, q_0^\varepsilon, S_0^\varepsilon)$  在  $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$  中强收敛到  $(v_0^0, P_0, S_0^0)$ , 则在  $[0, T]$  内也有解的对应收敛关系

$$\begin{aligned} (v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon) &\xrightarrow{L^\infty([0, T]; H^4(\Omega) \times H^4(\Omega) \times H^4(\Omega)) \text{ 弱-* 收敛}} (v^0, P_0, S^0), \\ (v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon) &\xrightarrow{C([0, T]; H^{4-\delta}(\Omega) \times H^{4-\delta}(\Omega) \times H^{4-\delta}(\Omega)) \text{ 强收敛}} (v^0, P_0, S^0). \end{aligned}$$

这里  $\delta$  可以是  $(0, 1)$  区间中任意一个常数.

下面我们简要叙述一致估计的证明. 首先, 可压缩欧拉方程是双曲守恒律方程, 因此具有守恒的  $L^2$  能量. 但是, 当欧拉方程求导之后, 边界条件只有在求切向导数的时候才能保持, 因此我们必须通过其它手段来约化法向导数, 且该过程不能造成  $\varepsilon$  权的损失.

以  $m = 3$  为例, 对大多数无粘流体方程, 我们约化法向导数的主要工具即为散度-旋度分解. 其动机也很容易理解, 法向导数总共只有  $\partial_3 v_1, \partial_3 v_2, \partial_3 v_3$  这三项, 而它们均可以写成旋度分量或散度加上切向导数的形式. 我们用如下不等式

**引理 2.3.** 设  $s \geq 1, X \in H^s(\Omega)$  为给定的向量场, 则

$$\|X\|_s^2 \lesssim C(|\partial\Omega|_{s+\frac{1}{2}})(\|X\|_0^2 + \|\nabla \cdot X\|_{s-1}^2 + \|\nabla \times X\|_{s-1}^2 + |X \cdot N|_{s-\frac{1}{2}}^2).$$

该不等式实际上是对向量恒等式  $-\Delta X = \nabla \times (\nabla \times X) - \nabla(\nabla \cdot X)$  作能量估计得来, 读者可以直接在半空间这类边界平直的区域验证该估计. 借此不等式, 我们有如下的约化过程

- 散度: 利用连续性方程 (即(1.15)的第二个方程), 可将  $\nabla \cdot v$  转化为  $-\varepsilon a \partial_t q$ .
- $q$  的空间导数: 利用动量方程 (即(1.15)的第一个方程), 可将  $\nabla q$  转化为  $-\varepsilon \rho \partial_t v$ .
- 旋度: 可以对动量方程求旋度之后直接做能量估计.
- 边值:  $v_3|_\Sigma = 0$  同时蕴含了  $\partial_t^k v_3|_\Sigma = 0$ .

我们可以从全空间导数  $\partial^3(v, q)$  开始, 一直向下约化, 直到最后只剩下全时间导数  $\varepsilon^2 \partial_t^3(v, q)$  的  $L^2$  估计, 而这个估计则是与证明  $L^2$  能量守恒是类似的 (因为时间导数是切向导数, 求切向导数仍然保持边界条件不变). 并且, 在上述过程的第一、第二步中我们每将一个空间导数换成时间导数, 都会获得一个  $\varepsilon$  权. 而小摄动初值要求一阶时间导数是关于  $\varepsilon$  一致有界的, 因此我们只能从二阶时间导数开始加权, 并且每增加一个时间导数就增加恰好 1 个  $\varepsilon$  权. 这也说明了为什么我们将能量泛函中  $\partial_t^k(v, q)$  的权设置成了  $\varepsilon^{(k-1)_+}$ .

### 3 固定区域问题: 一般初值

如果我们将初值奇异摄动的“小性”去掉, 考虑一般初值, 即方程组(1.15)的一阶时间导数关于 Mach 数无界 ( $\partial_t v = O(1/\varepsilon), \nabla \cdot v = O(1)$ ), 之前定义的能量泛函需要修改为如下形式

$$E_m^\varepsilon(t) := \sum_{k=0}^m \|\varepsilon^k \partial_t^k(v^\varepsilon, q^\varepsilon, S^\varepsilon)\|_{m-k}^2. \quad (3.1)$$

这种情况下, 一致估计和求极限的证明都与小摄动情况有较大的差别。

一般初值情况主要有如下两大困难.

1. 一阶时间导数无界导致一致能量估计仅能推出弱-\* 收敛, 因此我们需寻找合适的函数空间使得可压方程的解强收敛到不可压方程的解. 需注意的是, 强收敛的函数空间一定不可能是小摄动初值情况的  $C([0, T]; X)$  型函数空间, 这是因为可压方程的初值  $v_0^\varepsilon$  根本不收敛到不可压缩方程的初值  $v_0^0$  (否则与  $\nabla \cdot v_0^\varepsilon = O(1)$  矛盾!), 因此, 我们只能退而求其次寻找  $C((0, T]; X)$  型的函数空间或者  $L^p(0, T; X)$ ,  $(p < \infty)$  型的函数空间来证明强收敛.

2. 对非等熵流, 方程组的系数  $\rho(\varepsilon q, S)$ ,  $a(\varepsilon q, S)$  均依赖于熵, 并且熵的分量并没有  $\varepsilon$  权. 因此, 在进行旋度估计或空间导数的切向估计时, 我们会因为导数掉在熵的分量上产生  $\varepsilon$ -权的损失, 相当于一个  $O(1)$  阶的系数落在了  $O(1/\varepsilon)$  阶的量上.

$$\partial^\alpha(\rho(\varepsilon q, S)\partial_t f) = \rho\partial_t\partial^\alpha f + \partial^\alpha(\rho(\varepsilon q, S))\partial_t f = \rho\partial_t\partial^\alpha f + \varepsilon\partial_q\rho\partial^\alpha q\partial_t f + \underline{\partial_S\rho\partial^\alpha S\partial_t f} + \dots$$

这在小摄动初值的情况不会出现, 因为其要求了一阶时间导数的一致有界性. 此外, 如果  $\partial^\alpha$  全部换成时间导数也不会有类似的问题, 因为  $D_t S = 0$  蕴含了  $\partial_t S = -u \cdot \nabla S$ , 这可以让我们去掉一个时间导数从而这一项可以少放一个  $\varepsilon$  权.

### 3.1 一般初值情况关于马赫数的一致能量估计

本节只讨论可压缩欧拉方程奇异极限的困难. 首先讨论第 2 点, 如何在传输型估计中规避  $\varepsilon$  权的损失? 以动量方程  $\rho D_t v = -\varepsilon^{-1} \nabla p$  为例, 上述困难项主要是源自方程左边在求  $\partial^\alpha$  之后, 时间导数  $D_t v$  会和  $\rho$  项分开, 导致权的损失. 我们现在则希望在求导时“强行合并”两项.

这个想法在旋度估计中是可行的. 具体来说, 我们要将方程的系数  $\rho(\varepsilon q, S)$  换成  $\rho^0 := \rho(0, S)$ , 从而利用  $D_t \rho^0 = 0$  将方程改写成

$$D_t(\rho^0 v) = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla q + \frac{\rho - \rho^0}{\varepsilon \rho} \nabla q.$$

而注意到误差项可以由中值定理计算  $\rho - \rho^0 = \rho(\varepsilon q, S) - \rho(0, S) = \rho(\theta \varepsilon q, S) \varepsilon q$  而产生一个额外的  $\varepsilon$  权, 恰好弥补了上述方程最后一项中产生的  $1/\varepsilon$  项造成的损失. 同时, 右边额外多出来的这个误差项的高阶部分仍是梯度形式, 其旋度为零, 因此在旋度估计中也不会产生导数损失. 而由于密度函数非退化, 因此我们可以把  $v$  的估计转化为  $\rho^0 v$  的估计以避免损失  $\varepsilon$ -权, 再通过“除以  $\rho^0$ ”的方法还原出  $v$  本身的旋度估计. 而这是容易的, 因为  $\rho^0$  本质上只依赖于  $S$ ,  $S$  的物质导数是 0, 因此可以直接做估计.

**注记 2.** 事实上, 当流体运动与其它物理量耦合 (例如磁流体、弹性介质等等), 非等熵的情况要比等熵情况困难很多, 附加物理量和导数可能同时出现在含熵的项中, 不仅造成  $\varepsilon$ -权的损失, 还会造成导数损失. Schocet [31] 早年做出的能量框架在这种情况下并不适用. 此时需要结合其它物理量自身的性质做出更精细的分析与对这些耦合模型作出特定的观察, 可以参见笔者近期与合作者的文章 [38, 17].

### 3.2 一般初值情况证明强收敛的方法

上述提到的第一个困难, 即奇异极限收敛性的取法, 则是更加本质的困难: 从一致能量估计到强收敛, 如何构造出缺失的紧性? 回想一下, 一般初值情况下,  $v_0^\varepsilon$  在  $\varepsilon \rightarrow 0$  的极限并不是不可压方程的初值  $v_0^0$ , 而是需要过滤掉其中散度非零的部分. 那么一个自然的想法是: 能否先考虑在“散度为 0”这个“子空间”上做出一阶时间导数有界的一致估计, 从而继续利用紧性定理得到该子空间上证明强收敛, 然后再证明余下的散度非零部分会随着 Mach 数趋于 0 而消失 (从而解的强收敛空间是  $C((0, T]; X)$  型的函数空间)? 这个想法并非毫无根据, 除了上面提到的“过滤”之外, 实际上散度非零的部分是以声波的形式存在, 而其传播速度为  $O(1/\varepsilon)$ . 当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时, 这部分的贡献将会以极快的速度散播开来 (显然这要求区域  $\Omega$  无界) 从而趋于 0. 然而, 上述想法仅仅适用于等熵流. 对非等熵流, 由于系数依赖于  $S$  且这部分没有  $\varepsilon$  权, 此时需要更复杂的方法去构造出紧算子, 以及利用  $q$  满足波方程这一事实, 求得在  $L^2([0, T]; X)$  型的函数空间中的强收敛.

本节剩下部分均假设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^d$ 、半空间  $\mathbb{R}_+^d$  或  $\mathbb{R}^d$  挖去一个边界足够光滑的紧区域.

### 等熵情况：直接利用 Leray 投影

我们先讨论等熵流在一般初值情况下是如何取低马赫数奇异极限的，下面叙述的框架是由日本人 Ukai [36] 在 1986 年提出的，后来被 Isozaki [13], Asano [5] 和 Iguchi [12] 等人推广。对等熵流，不妨设密度函数最终的极限是 1 并记  $U = (q, v)^\top$ ，那么我们可以将(1.14)写成如下形式

$$\partial_t U + i\mu\varepsilon^{-1} L U = F, \quad (3.2)$$

其中  $L = \begin{bmatrix} 0 & \nabla \cdot \\ \nabla & O_{3 \times 3} \end{bmatrix}$ ,  $F = \begin{bmatrix} -(v \cdot \nabla)q - \gamma q \nabla \cdot v & -(\rho - 1)v_t + \rho(v \cdot \nabla)v \end{bmatrix}$ ,  $\mu > 0$  是一个正常数。需注意的是，只有等熵的情况才能把方程左边写成一个常系数线性双曲组。

接下来我们首先将“散度为 0”的“不可压”部分和“散度非零”的“声波”部分分离开来，这里需要用到一个关于  $L^2(\Omega)$  空间的正交分解引理

**引理 3.1.** 我们有正交分解  $L^2(\Omega) = H_\sigma \oplus G_\sigma$ , 其中

$$H_\sigma = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u \cdot \nabla \phi \, dx = 0, \forall \phi \in H^1(\Omega) \right\}, \quad G_\sigma = \{ \nabla \zeta : \zeta \in H^1(\Omega) \}.$$

令  $\mathcal{P}$  和  $\mathcal{Q} := Id - \mathcal{P}$  分别为  $L^2(\Omega)$  到  $H_\sigma$  和  $G_\sigma$  的正交投影，则对任意  $s \geq 0$  均有  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  是  $H^s(\Omega) \rightarrow H^s(\Omega)$  的有界线性算子。

据此引理，我们也可以对算子  $L$  进行分解

**引理 3.2.** 算子  $L$  满足

1.  $L$  是  $L^2(\Omega)$  上的自伴算子；
2.  $\ker L = \{0\} \times H_\sigma$ ,  $(\ker L)^\perp = L^2(\Omega) \times G_\sigma$ ；
3. 对  $U = (q, v)^\top \in L^2(\Omega)$ , 我们有  $\mathcal{E}_0 U = (0, \mathcal{P}v)^\top$  以及  $\mathcal{E} U = (q, \mathcal{Q}v)^\top$ .

其中  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}$  分别为  $L^2(\Omega)$  到  $\ker L$  和  $(\ker L)^\perp$  的正交投影。特别地，我们有  $\mathcal{E}_0 L = \mathcal{E}_0$ .

现在，我们利用 Duhamel 原理给出方程  $\partial_t U + i\mu\varepsilon^{-1} L U = F$  的解为

$$U(t) = e^{-i\mu\varepsilon^{-1} t L} U_0 + \int_0^t e^{-i\mu\varepsilon^{-1} (t-\tau) L} F(\tau) \, d\tau,$$

并且希望证明

- $\|\mathcal{E}_0 U\|_4 + \|\mathcal{E}_0 \partial_t U\|_3$  关于  $\varepsilon$  一致有界，
- $\sup_{t \geq \tau} \|\mathcal{E} e^{-i\mu\varepsilon^{-1} t L} U\|_{L^\infty} \rightarrow 0$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$  对任意  $\tau > 0$  成立。

前者的证明是容易的，因为  $\|\mathcal{E}_0 \partial_t U\|_3$  可以通过代方程化成不带时间导数的项，而  $\|\mathcal{E}_0 U\|_4$  则不超过  $\|U\|_4$  (因为  $\mathcal{E}_0$  是正交投影)，因此这些都可以用一致估计的结果来完成。而后者则用到了区域的无界性以导出如下色散估计。

**命题 3.3** ([12, Proposition 3.3]). 设  $s \geq 3/2$ . 则存在常数  $K > 0, \delta \in (0, \frac{1}{2})$ , 使得对任意  $\varepsilon > 0, t > 0, U = (q, v) \in H^s(\Omega) \cap L^1(\Omega), v_3|_\Sigma = 0$  都有

$$\|\mathcal{E} e^{-i\mu\varepsilon^{-1} t L} U\|_{L^\infty} \leq K \varepsilon^\delta t^{-\delta} \|U\|_{L^1}^{2\delta} \|U\|_s^{1-2\delta}.$$

进一步，我们有

$$\|\mathcal{E} e^{-i\mu\varepsilon^{-1} t L} U\|_{L^\infty} \leq K \|U\|_s, \quad \sup_{t \geq \tau} \|\mathcal{E} e^{-i\mu\varepsilon^{-1} t L} U\|_{L^\infty} \rightarrow 0.$$

借助如上两条性质，我们可以证明

**定理 3.4 (一般初值的一致估计).** 设  $m \geq 3$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ), 设方程(1.15)的初值  $(v_0^\varepsilon, q_0^\varepsilon) \in H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$  满足  $(m-1)$  阶相容性条件以及  $E_m^\varepsilon(0) \leq C_0$ , 则存在与  $\varepsilon$  无关的时间  $T > 0$ , 使得对应的解满足能量估计  $\sup_{0 \leq t \leq T} E_m^\varepsilon(t) \leq C(E_m^\varepsilon(0))$ . 其中能量泛函  $E_m^\varepsilon(t)$  定义为

$$E_m^\varepsilon(t) := \sum_{k=0}^m \|\varepsilon^k \partial_t^k(v^\varepsilon, q^\varepsilon)\|_{m-k}^2. \quad (3.3)$$

$C_0 > 0$  是与  $\varepsilon$  无关的常数,  $C(\cdot) > 0$  是关于其变量连续的正值函数.

**推论 3.5 (一般初值等熵流的不可压极限).** 在定理3.4的条件下, 设方程(1.15)的初值  $(v_0^\varepsilon, q_0^\varepsilon)$  在  $H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)$  中弱-\* 收敛, 在  $H^{m-\delta}(\Omega)$  中强收敛到  $(\bar{v}, P_0)$ , 则对应的解有如下收敛关系

$$\begin{aligned} (v^\varepsilon, q^\varepsilon) &\xrightarrow{L^\infty([0,T]; H^m(\Omega) \times H^m(\Omega)) \text{ 弱-* 收敛}} (v^0, P_0), \\ (v^\varepsilon, q^\varepsilon) &\xrightarrow{C_{loc}((0,T] \times \Omega) \text{ 强收敛}} (v^0, P_0). \end{aligned}$$

这里  $\delta$  是  $(0, 1)$  区间的任意常数,  $v^0$  是不可压缩欧拉方程组(2.4)的解, 且  $v^0$  的初值  $v_0^0 = \mathcal{P}\bar{v}$ .

#### 非等熵情况: 微局部“缺陷测度”方法刻画紧性的缺失

对非等熵的情况, 由日本人提出的上述框架在第一步就失效, 因为此时方程的系数  $\rho, a$  都依赖于熵. 下面我们简要介绍 Métivier-Schochet 的文章 [26] 取极限的框架, 其在边值问题的推广可以参考 Alazard [1].

首先, 我们可以将方程组写成  $E(0, S)\partial_t U + \varepsilon^{-1} \mathcal{L}U = f$ , 其中

$$E(0, S) = \begin{bmatrix} a(0, S) & 0 \\ 0 & \rho(0, S)I_3 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & \nabla \cdot \\ \nabla & O_3 \end{bmatrix},$$

$\{f\}_{\varepsilon>0}$  是  $C([0, T]; H^3(\mathbb{R}^d))$  中的一致有界函数族. 求弱-\* 极限并利用区域的无界性可以得到, 最终的极限函数满足  $q^0 = \nabla \cdot u^0 = 0$ .

接下来我们介绍 Métivier-Schochet [26] 取极限框架的核心想法. 以证明  $q^\varepsilon \rightarrow 0$  的强收敛为例, 我们现在已经知道  $\{q^\varepsilon\}$  是  $L^2(\mathbb{R}^d)$  中的一致有界序列, 但是未必强收敛. 因此, 我们希望找到一个合适的工具来刻画“紧性缺失”, 即“不强收敛”的部分能否有显式表达式? 完成这件事情, 我们需要用到法国数学家 P. Gérard 在 1991 年引进的“微局部缺陷测度” (microlocal defect measure) 技巧.

**引理 3.6.** 设  $\{\Theta^\varepsilon(t, \tau, x)\} \subset L^2(\mathbb{R}^{2+d})$  是关于小参数  $\varepsilon > 0$  一致有界的函数族, 则存在一个子列 (仍记作  $\{\Theta^\varepsilon\}$ ) 使得存在一个非负 Borel 测度  $\mu$ 、一个非负自伴的迹类 (trace-class) 算子  $M \in L^1(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}_+, \mu)$  满足对任意的连续紧算子族  $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^2; \mathcal{K})$  都有如下积分式成立

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\Phi \Theta^\varepsilon, \Theta^\varepsilon)_{L^2} dt d\tau \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \text{Tr}(\Phi(t, \tau) M(t, \tau)) \mu(dt, d\tau).$$

这里  $\mathcal{K}$  表示  $L^2(\Omega)$  上的全体紧算子.

上述引理给出了“紧性缺失”在相空间  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  上的具体刻画, 那么现在我们就把方程也变换到相空间去做, 这需要对原方程组做波包变换。它的定义如下, 而本质上则是对时间变量作傅立叶变换, 将  $\varepsilon \partial_t$  变为傅立叶乘子  $i\tau$ .

**定义 3.1.** 固定  $\varepsilon > 0$ , 对  $v \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ , 定义其波包变换为

$$W^\varepsilon v(t, \tau, x) := (2\pi^3)^{-\frac{1}{4}} \varepsilon^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i(t-s)\tau - (t-s)^2}{\varepsilon}} v(s, x) ds.$$

可以验证波包变换是  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  到  $L^2(\mathbb{R}_{t,\tau}^2 \times \mathbb{R}^d)$  的等距。实际应用时，我们要将定义在  $[0, T]$  上的变量延拓到  $t \in \mathbb{R}$  上，这可以通过直接乘以一个合适的截断函数来完成，此处略去。

我们的最终目的是证明  $q^\varepsilon$  强收敛到 0。根据上述引理，我们需要的是找到一类特殊的紧算子族  $\Phi$ ，使得右边得到的迹类算子  $M$  恒为 0。而  $\mu, M$  完全取决于  $q^\varepsilon$ ，所以一旦证到  $M = 0$ ，那么再取  $\Phi = KK^*$ ,  $K \in \mathcal{K}$  即可证明  $Kq^\varepsilon \rightarrow 0$  对任何  $L^2(\mathbb{R}^d)$  上的紧算子都成立，特别地，将  $K$  取成  $H^s \hookrightarrow L^2$  的紧嵌入就是我们想要的结果。

找到这个“特殊的紧算子族”关键在于观察到  $q^\varepsilon$  自身满足一个变系数波动方程。做了波包变换之后，我们得到

$$P^\varepsilon(t, \tau, \nabla)(W^\varepsilon q) = O(\varepsilon) \text{ 尺度的可控项},$$

其中  $P^\varepsilon(t, \tau, \nabla) := a_0(S^\varepsilon)\tau^2 + \nabla \cdot (\rho^0(S^\varepsilon)^{-1}\nabla \cdot)$  是波算子的波包变换（此时是一个带位势的变系数椭圆算子）。经过计算，我们可以证明

$$\begin{aligned} \phi K P^\varepsilon(t, \tau, \nabla) q^\varepsilon &\xrightarrow{L^2(\mathbb{R} \times \Omega)} 0, \quad \forall K \in \mathcal{K}, \phi \in C_0(\mathbb{R}^2), \\ \ker_{L^2(\mathbb{R}^2)} P^0(t, \tau, \nabla) &= \{0\}. \end{aligned}$$

又注意到此时  $P^\varepsilon$  的系数是只依赖熵的，而熵的一阶时间导数一致有界，本身已经有强收敛，那么  $P^\varepsilon$  和  $P^0$  只差应当也是  $O(\varepsilon)$  尺度的。所以我们可以通过换系数的方式得到

$$\phi K P^0(t, \tau, \nabla) q^\varepsilon \xrightarrow{L^2(\mathbb{R} \times \Omega)} 0, \quad \forall K \in \mathcal{K}, \phi \in C_0(\mathbb{R}^2).$$

现在我们在引理3.6中选取  $\Phi(t, \tau) = \phi(t, \tau)K P^0(t, \tau, \nabla)$ ，上述结果直接导致了

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\Phi q^\varepsilon, q^\varepsilon)_{L^2} dt d\tau \rightarrow 0,$$

又因为  $K, \phi$  都是任意的，所以这直接迫使由  $q^\varepsilon$  决定的缺陷测度  $\mu$  和迹类算子  $M$  满足  $M(t, \tau) = 0$  对  $\mu$ -a.e.  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$  成立，从而达到了我们的目的。

在上述过程中，证明  $\ker_{L^2(\mathbb{R}^2)} P^0(t, \tau, \nabla) = \{0\}$  用到了区域  $\Omega$  的无界性，并且要求熵函数在远处有衰减性：存在  $\alpha \in (0, 1)$  和  $N_0 > 0$  使得

$$|S_0(x)| \leq N_0|x|^{-1-\alpha}, \quad |\nabla S_0(x)| \leq N_0|x|^{-2-\alpha}. \quad (3.4)$$

因此，非等熵情况下的强收敛定理可以叙述如下

**定理 3.7.** 设可压缩方程(1.14)的初值  $(u_0^\varepsilon, S_0^\varepsilon) \xrightarrow{H^3(\Omega)} (u_0^0, S_0^0)$  且在  $\Sigma = \partial\Omega$  上满足  $u_{03}^0 = 0$ 。设存在正常数  $N_0$  和  $\sigma$  使得熵的初值满足衰减条件

$$|S_0(x)| \leq N_0|x|^{-1-\sigma}, \quad |\nabla S_0(x)| \leq N_0|x|^{-2-\sigma}. \quad (3.5)$$

则可压方程(1.14)的解  $(q, u, S)$  以如下形式收敛到不可压方程(1.15)的解  $(0, u^0, S^0)$ ：

弱-\* 收敛空间为  $L^\infty([0, T]; H^3(\Omega))$ ，强收敛空间为  $L^2([0, T]; H_{loc}^{3-\delta}(\Omega))$ ,  $\delta > 0$ 。

其中  $(u^0, S^0) \in C([0, T]; H^3(\Omega))$  的初值为  $(u^0, B^0, S^0)|_{t=0} = (w_0, S_0^0)$ ，该速度场  $w_0 \in H^3(\Omega)$  由如下三式唯一决定

$$w_{03}|_\Sigma = 0, \quad \nabla \cdot w_0 = 0, \quad \nabla \times (\rho(0, S_0^0)w_0) = \nabla \times (\rho(0, S_0^0)u_0^0). \quad (3.6)$$

## 4 自由边界问题的奇异极限

上面一节, 我们主要讨论了对固定区域如何求解可压缩欧拉方程的低马赫数极限问题。现在, 如果流体区域也会运动, 例如描述海洋流动的水波问题, 如何严格验证小马赫数极限呢? 这个推广并非只是数学上的推广, 而是在实际应用中人们确实用不可压缩模型来计算水波的运动更加简单。事实上, 水里面的声速约为 1500m/s, 而大海中水的流速一般也不可能达到声速的 0.3 倍。

假设流体占据的区域位于一个函数图像的下方, 即  $\Omega(t) := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 < \psi(t, x')\}$ ,  $x' = (x_1, x_2)$ , 并记自由界面  $\Sigma(t) := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \psi(t, x')\}$ ,  $\mathcal{D} := \bigcup_{0 \leq t \leq T} \{t\} \times \Omega(t)$ 。考虑如下 (经过无量纲化处理后的) 等熵流自由边界问题

$$\begin{cases} \varrho(\varepsilon p^\varepsilon) D_t^\varepsilon u^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla p^\varepsilon = 0 & \text{in } \mathcal{D}, \\ a(\varepsilon p^\varepsilon) D_t^\varepsilon p^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot u^\varepsilon = 0 & \text{in } \mathcal{D}, \\ p^\varepsilon = \varepsilon \sigma \mathcal{H}^\varepsilon & \text{on } \partial \mathcal{D}, \\ \partial_t \psi^\varepsilon = u^\varepsilon \cdot N^\varepsilon, \quad N^\varepsilon = (-\bar{\partial}_1 \psi^\varepsilon, -\bar{\partial}_2 \psi^\varepsilon, 1)^\top & \text{on } \partial \mathcal{D}, \\ (u^\varepsilon, p^\varepsilon, \psi^\varepsilon)|_{t=0} = (u_0^\varepsilon, p_0^\varepsilon, \psi_0^\varepsilon). \end{cases} \quad (4.1)$$

其中  $D_t^\varepsilon := \partial_t + u^\varepsilon \cdot \nabla$  为物质导数,  $\mathcal{H} = -\bar{\nabla} \cdot \left( \frac{\nabla \psi}{\sqrt{1+|\nabla \psi|^2}} \right)$  是自由界面  $\Sigma(t)$  平均曲率的-2 倍,  $\bar{\nabla} = (\bar{\partial}_1, \bar{\partial}_2)$ ,  $\sigma \geq 0$  是表面张力常数。需注意的是, 若  $\sigma = 0$ , 我们还需额外假设 Rayleigh-Taylor 符号条件  $-N \cdot \nabla p \geq \varepsilon c_0|_{\Sigma(t)} > 0$  成立才能保证局部适定性。本文中, 我们假设  $\sigma > 0$  是一个给定的常数。该问题的适定性由笔者与合作者在 [22, 23] 证出。

首先我们应当将自由边界问题化为固定边界问题来研究。由于区域  $\Omega(t)$  具有图像边界, 因此可以直接引进一个显式的微分同胚, 将区域  $\Omega(t)$  拉直为  $\Omega := \mathbb{R}^2 \times (-\infty, 0)$ 。对  $t > 0$ , 我们定义  $\Phi(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \Omega(t)$  为

$$\Phi(t, x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, \varphi(t, x_1, x_2, x_3)), \quad \varphi(t, x_1, x_2, x_3) = x_3 + \chi(x_3) \psi(t, x_1, x_2). \quad (4.2)$$

这里  $\chi \in C_c^\infty(-\infty, 0]$  是一个光滑的截断函数, 并满足下述条件

$$\|\chi'\|_{L^\infty(-\infty, 0]} \leq \frac{1}{\|\psi_0\|_\infty + 1}, \quad \sum_{j=1}^5 \|\chi^{(j)}\|_{L^\infty(-\infty, 0]} \leq C, \quad \chi = 1 \text{ on } (-1, 0]. \quad (4.3)$$

直接计算可得  $\partial_3 \varphi(t, x', x_3) = 1 + \chi'(x_3) \psi(t, x') > 0$ ,  $t \in [0, T]$ , 这说明  $T$  较小时,  $\Phi(t) : \Omega \rightarrow \Omega(t)$  确实是一个微分同胚。现在, 可以引进固定区域  $\Omega$  中的新变量

$$v(t, x) = u(t, \Phi(t, x)), \quad \rho(t, x) = \varrho(t, \Phi(t, x)), \quad q(t, x) = p(t, \Phi(t, x)) \quad (4.4)$$

对应地, 微分算子也变成带系数的共变导数

$$\partial_a \rightarrow \nabla_a^\varphi = \partial_a^\varphi = \partial_a - \frac{\partial_a \varphi}{\partial_3 \varphi} \partial_3, \quad a = t, 1, 2, \quad (4.5)$$

$$\partial_3 \rightarrow \nabla_3^\varphi = \partial_3^\varphi = \frac{1}{\partial_3 \varphi} \partial_3. \quad (4.6)$$

进而方程组(4.1)化为  $\Omega$  内的固定边界问题 (为了记号简便, 略去上标  $\varepsilon$ )

$$\begin{cases} \rho(\varepsilon q)D_t^\varphi v + \frac{1}{\varepsilon}\nabla^\varphi q = 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega, \\ a(\varepsilon q)D_t^\varphi q + \frac{1}{\varepsilon}\nabla^\varphi \cdot v = 0 & \text{in } [0, T] \times \Omega, \\ q = -\varepsilon\sigma\bar{\nabla} \cdot \left( \frac{\nabla\psi}{\sqrt{1+|\bar{\nabla}\psi|^2}} \right) & \text{on } [0, T] \times \Sigma, \\ \partial_t\psi = v \cdot N, \quad N = (-\bar{\partial}_1\psi, -\bar{\partial}_2\psi, 1)^\top & \text{on } [0, T] \times \Sigma, \\ (v, q, \psi)|_{t=0} = (v_0, q_0, \psi_0). \end{cases} \quad (4.7)$$

其初值的  $m$  阶相容性条件是指

$$\begin{aligned} (D_t^\varphi)^k q|_{t=0} &= \varepsilon(D_t^\varphi)^k(\sigma\mathcal{H})|_{t=0} \text{ on } \Sigma, \quad 0 \leq k \leq m, \\ (D_t^\varphi)^k \partial_t\psi|_{t=0} &= (D_t^\varphi)^k(v \cdot N)|_{t=0} \text{ on } \Sigma, \quad 0 \leq k \leq m. \end{aligned} \quad (4.8)$$

首先我们回顾 [23] 中关于固定  $\sigma > 0$  的适定性结果, 事实上这个结果已经蕴含了关于  $\varepsilon > 0$  的一致估计.

**定理 4.1.** 固定  $\sigma > 0$ . 设  $(v_0, q_0, \psi_0) \in H^4(\Omega) \times H^4(\Omega) \times H^5(\Sigma)$  是(4.7)满足 3 阶相容性条件的初值, 且满足  $|\psi_0|_{L^\infty} \leq 1/2$ . 则存在仅依赖于  $\sigma$  和初值的时间  $T > 0$ , 使得方程组(4.7)在  $[0, T]$  内有唯一的强解  $(v, q, \psi)$ , 且该解满足如下估计

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E(t) \leq C(E(0)), \quad \sup_{0 \leq t \leq T} |\psi(t)| \leq 1.$$

其中能量泛函  $E(t)$  定义如下

$$E(t) = \sum_{k=0}^4 \|\partial_t^k(v, q)\|_{4-k}^2 + \sigma|\partial_t^k\bar{\nabla}\psi|_{4-k}^2.$$

可见, 上述估计不仅要求初值小摄动 (well-prepared), 而且还额外要求直到最高阶时间导数都关于马赫数  $\varepsilon$  一致有界. 接下来, 我们将简要叙述如何证明该定理, 以及如何将对小摄动初值施加的“额外要求”(即  $\geq 2$  阶时间导数的一致有界性) 去除. 从对后者的分析中, 我们将会看出为什么在证明适定性的时候用这个“更强的”能量泛函是更方便的.

#### 4.1 强能量泛函的一致估计

同固定边界一样, 我们仍然利用散度-旋度分解来约化法向导数. 而此时我们有两种不等式可以选择: 对  $s \geq 1$  有

$$\|X\|_s^2 \leq C(|\psi|_s, |\bar{\nabla}\psi|_{W^{1,\infty}})(\|X\|_0^2 + \|\nabla^\varphi \cdot X\|_{s-1}^2 + \|\nabla^\varphi \times X\|_{s-1}^2 + \|\bar{\partial}^s X\|_0^2). \quad (4.9)$$

$$\|X\|_s^2 \leq C(|\psi|_{s+\frac{1}{2}}, |\bar{\nabla}\psi|_{W^{1,\infty}})(\|X\|_0^2 + \|\nabla^\varphi \cdot X\|_{s-1}^2 + \|\nabla^\varphi \times X\|_{s-1}^2 + |X \cdot N|_{s-\frac{1}{2}}^2). \quad (4.10)$$

在证明适定性的时候我们选择前者, 即把散度、旋度之外的部分约化为切向导数的内部估计. 例如  $s = 4$ ,  $X = v$  时, 我们需要估计  $\|\bar{\partial}^4 v\|_0^2$ . 在这个过程中我们需要交换  $\bar{\partial}^4$  和  $\nabla^\varphi$ , 这其中会出现  $\psi$  的 5 阶导数. 若  $\sigma = 0$ , 即使假设 Rayleigh-Taylor 符号条件成立, 我们仍然无法得到如此高的正则性. 为了避免系数损失导数的困难, 我们采用所谓的“Alinhac 好变量”的方法, 即

$$\bar{\partial}^4 \partial_i^\varphi f = \partial_i^\varphi \mathbf{F} + C_i(f), \quad \mathbf{F} := \bar{\partial}^4 f - \bar{\partial}^4 \varphi \partial_3^\varphi f, \quad \|C(f)\|_0 \leq P(\|f\|_4, |\bar{\nabla}\psi|_3).$$

也就是说,  $\bar{\partial}^4 \partial_i^\varphi f$  中的本质最高阶项实际上是  $f$  对应的 Alinhac 好变量  $\mathbf{F}$ , 从而  $\bar{\partial}^4$  估计化成了对“好变量”的  $L^2$  估计, 同时还保持了原方程共变导数的结构.

经过计算, 可以证明

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho |\mathbf{V}|^2 + |\mathbf{Q}|^2 \partial_3 \varphi dx = -\varepsilon^{-1} \int_{\Sigma} \mathbf{Q} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) dx' + \text{可控项}$$

这个边界积分有三个主项

$$ST := - \int_{\Sigma} \bar{\partial}^4 (\sigma \mathcal{H}) \bar{\partial}^4 \partial_t \psi dx' \quad (4.11)$$

$$RT := -\varepsilon^{-1} \int_{\Sigma} (-\partial_3 q) \bar{\partial}^4 \psi \bar{\partial}^4 \partial_t \psi dx' \quad (4.12)$$

$$ZB := \varepsilon^{-1} \int_{\Sigma} \bar{\partial}^4 q [\bar{\partial}^4, N_i, v_i] dx', \quad Z := \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \bar{\partial}^4 q [\bar{\partial}^4, \mathbf{N}_i, \partial_3 v_i] dx. \quad (4.13)$$

其中 ST 项给出了自由界面  $H^5$  的正则性 (平均曲率算子是二阶椭圆算子). 若 Rayleigh-Taylor 符号条件成立, 则 RT 项可以给出自由界面的  $H^4$ -正则性. 而  $ZB + Z$  合起来可以利用散度定理去最高阶项, 并代方程  $-\bar{\partial} q \sim \varepsilon D_t^\varphi v$  以消去奇性. 从而再结合直接固定边界的约化过程, 我们就能完成对“强能量泛函”  $E(t)$  的一致估计.

## 4.2 去除高阶时间导数的一致有界性: 自由界面运动的仿线性化

自由界面运动必然导致之前方法失效

如果我们将能量泛函改进为“只假设一阶时间导数的有界性”, 即

$$\sum_{k=0}^4 \|\varepsilon^{(k-1)+} \partial_t^k (v, q)\|_{4-k}^2 + \sigma |\varepsilon^{(k-1)+} \partial_t^k \bar{\nabla} \psi|_{4-k}^2 + \text{其它可能需要的项}$$

上一节的约化方法就会失效. 事实上, 当我们把  $\bar{\partial}^4$  换成  $\bar{\partial}^3 \partial_t$  时, 上面证明一致估计的消去结构  $Z + ZB$  中会有  $\varepsilon$  权的损失: 我们不再能通过  $\partial_t \bar{\partial}^3 q \sim \varepsilon - \partial_t^2 \bar{\partial}^2 v$  来获得一个  $\varepsilon$  权弥补损失, 因为此时  $\partial_t^2 v$  本身就需要更高的权重. 除了这个 Alinhac 好变量的余项估计外, 上述“可控项”中的  $-\int_{\Omega} \varepsilon^{-1} \mathbf{V} \cdot C(q) dx$  也会出现损失权重的问题. 这些问题项完全是自由界面运动导致的, 因为固定边界问题根本不需要用 Alinhac 好变量来求解! 如上分析还说明我们不能使用(4.9)进行散度-旋度分解, 否则无法避免内部切向估计.

自由界面运动方程的导出及其仿线性化

我们现在就只能用(4.10)来约化  $v_t$  以及更高阶的时间导数了, 此时我们需要估计  $v_t \cdot \mathbf{N} \approx \psi_{tt}$  的  $H^{2.5}(\Sigma)$  范数. 因为要避免内部估计, 所以我们只能寄希望于研究自由界面自身的运动方程. 对  $\psi_t = v \cdot \mathbf{N}$  求一阶时间导数并代入(4.7)的第一个方程, 可得到

$$\rho \psi_{tt} = -\frac{1}{\varepsilon} \mathbf{N} \cdot \nabla^\varphi q + \dots$$

现在, 我们只知道  $q$  在内部满足波动方程 (对(4.7)第一个方程求散度, 再代入第二个方程即可)

$$\varepsilon^2 (D_t^\varphi)^2 q - \Delta^\varphi q = \varepsilon (\partial_i^\varphi v_j) (\partial_j^\varphi v_i) \text{ in } \Omega,$$

以及 Dirichlet 型边界条件  $q = \varepsilon \sigma \mathcal{H}$ . 可是, 出现在自由界面运动方程右边的项却是  $q$  的 Neumann 型边值. 这个时候, 我们就要将  $q$  的边值和内部的贡献“分离开来”, 并把它的 Dirichlet 边值转化为 Neumann 边值. 借助 Shatah-曾崇纯 [35] 的想法, 我们将压力  $q$  分解为  $q = q_h + q_w$ , 二者分别满足

$$-\Delta^\varphi q_h = 0 \text{ in } \Omega, \quad q_h|_{\Sigma} = q|_{\Sigma} = \varepsilon \sigma \mathcal{H}; \quad (4.14)$$

$$-\Delta^\varphi q_w = -\varepsilon^2 (D_t^\varphi)^2 q + \varepsilon (\partial_i^\varphi v_j) (\partial_j^\varphi v_i) \text{ in } \Omega, \quad q_w|_{\Sigma} = 0. \quad (4.15)$$

这个时候, 可以将自由界面运动方程写作  $\rho \psi_{tt} = -\varepsilon^{-1} \mathbf{N} \cdot \nabla^\varphi q_h - \varepsilon^{-1} \mathbf{N} \cdot \nabla^\varphi q_w + \dots$  由于  $q_h$  是表面张力项在内部的调和延拓, 因此这一项的 Neumann 边值恰好是 Dirichlet-to-Neumann (DtN) 算子  $\mathfrak{N}_{\psi}$  作用在  $\varepsilon \sigma \mathcal{H}$  上. 此处, 我们定义所谓的 DtN 算子如下

**定义 4.1** (Dirichlet-to-Neumann 算子). 给定  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , 定义区域  $\Omega$  关于拉直映射  $\psi$  的 Dirichlet-to-Neumann 算子为

$$\mathfrak{N}_\psi(f) = N \cdot \nabla^\varphi g,$$

其中  $g$  满足  $-\Delta^\varphi g = 0$  in  $\Omega$  和边界条件  $g = f$  on  $\Sigma$ .

这个时候, 自由边界运动方程写成

$$\rho\psi_{tt} + \sigma\mathfrak{N}_\psi(\mathcal{H}(\psi)) = -\frac{1}{\varepsilon}N \cdot \nabla^\varphi q_w + \dots \quad (4.16)$$

此时, 利用 DtN 算子和平均曲率算子的仿线性化, 可以证得  $\mathfrak{N} \circ \mathcal{H}$  是一个主象征严格正的三阶微分算子, 即我们可以形式上将上述方程写成

$$\rho\psi_{tt} + \sigma C|\langle\bar{\partial}\rangle|^3\psi = -\frac{1}{\varepsilon}N \cdot \nabla^\varphi q_w + \dots \quad \text{on } \Sigma = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \quad (4.17)$$

具体的仿线性化过程, 可参见笔者近期研究理想磁流体两相流涡片问题的奇异极限的文章 [43, Section 5]. 而仿微分运算的基本性质, 以及 DtN 算子、平均曲率算子的仿线性化计算, 则可参见 Métivier [25], Alazard-Métivier [3] 和 Alazard-Burq-Zuily [2].

从(4.17)可见, 我们可以同时估计  $\psi_t$  的  $H^{s-\frac{1}{2}}$  范数和  $\psi$  的  $H^{s+1}$  范数. 以  $s = 4$  为例, 我们需要估计上述方程右端的  $H^{3.5}$  范数. 这个时候可以将零边值的  $q_w$  的 Neumann 边值的贡献完全转化到内部贡献. 首先, 利用迹定理, 我们将其转化为  $\varepsilon^{-1}\|\nabla^\varphi q_w\|_{H^4}$ , 再用如下形式的散度-旋度分解

$$\|X\|_s^2 \leq C(|\psi|_{s+\frac{1}{2}}, |\bar{\nabla}\psi|_{W^{1,\infty}})(\|X\|_0^2 + \|\nabla^\varphi \cdot X\|_{s-1}^2 + \|\nabla^\varphi \times X\|_{s-1}^2 + |X \times N|_{s-\frac{1}{2}}^2) \quad (4.18)$$

即可将  $\varepsilon^{-1}\|\nabla^\varphi q_w\|_{H^4}$  化为  $\varepsilon^{-1}\|\Delta^\varphi q_w\|_{H^3}$ , 再代入  $q$  的波方程, 得知我们需要控制  $\varepsilon\|q_{tt}\|_{H^3}$ .

因此, 我们通过对自由界面方程仿线性化的方法避免了自由界面运动带来的  $\varepsilon$  权损失, 但是代价是我们需要控制 5 阶导数项  $\varepsilon\|q_{tt}\|_{H^3}$ . 因此, 我们需要引进一个加权的  $H^5$  能量, 以封闭能量估计. 经过仔细的分析, 可以得到满足条件的能量泛函是

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(t) &:= \mathfrak{E}_4(t) + \mathfrak{E}_5(t), \\ \mathfrak{E}_4(t) &:= \sum_{k=0}^2 \|\varepsilon^{(k-1)_+} \partial_t^k(v, q)\|_{4-k}^2 + \sigma |\varepsilon^{(k-1)_+} \partial_t^k \psi|_{5-k}^2 + |\partial_t^{k+1} \psi|_{3.5-k}^2, \\ \mathfrak{E}_5(t) &:= \sum_{k=0}^5 \|\varepsilon \partial_t^k(v, q)\|_{5-k}^2 + \sigma |\varepsilon \partial_t^k \psi|_{6-k}^2. \end{aligned}$$

**注记 3** (关于存在性的证明). 从上述分析可以看出, 去掉高阶时间导数一致有界性的关键步骤是分析自由界面本身的演化方程而不是像证明强能量泛函一致有界性那样研究内部切向估计. 但是, 这个方法不能用来证明解的存在性, 因为适定性的证明需要对线性化方程进行迭代, 而在迭代过程中就会遇到“鸡生蛋还是蛋生鸡”的问题, 也就是说给定前  $N$  组迭代序列, 在定义第  $N+1$  组解的时候到底是先有  $q_w^{(N+1)}$  还是先有  $q^{(N+1)}$ ? 需注意的是, 这个问题只在可压缩流的问题里面出现. 对不可压缩流,  $\varepsilon = 0$  时  $q_w$  定义的右端项没有  $q$ , 进而也就没有这个问题.

**注记 4** (关于高阶时间导数的控制). 我们在实际应用如上方法时, 需要对(4.17)两边求一个时间导数, 但这个步骤涉及到将仿微分算子与时间导数交换. 该交换子的估计在正则性较低时需要用仿微分算子的定义来具体展开计算, 此处暂不列出细节.

## 5 未解决的问题

正如摘要所述, 可压缩流体的奇异极限在数学上颇具挑战性, 稍有复杂性的模型就很难证明奇异极限, 而且对一般初值情况连证明一致估计或是取极限方法的通用手段都没有. 而这类问题有着重要的背景和应用, 尤其是在简化数值模拟的计算上, 以及严格验证某些物理现象上.

在介绍之前我们需要强调, 若考虑流体粘性, 即以可压缩 Navier-Stokes 方程为基础的奇异极限问题, 则有更多未解决的困难问题, 具体可以参见 Majda 所著的专业书籍 [24]. 例如:

- 带无滑动条件  $v|_{\Sigma} = 0$  的 N-S 方程具有强边界层效应, 如何验证一般初值情况下小马赫数极限? 这需要考虑一般初值含有的“高频震荡项”与强边界层的相互作用.
- 考虑温度 (热传导效应) 的奇异极限, 尤其是当初值的奇异摄动和温度变差都不具有小性的时候.
- 可压缩 N-S 方程自由边界问题带一般初值的小马赫数极限. 目前, 即使是自由界面和固定底部都带 Navier-slip 条件, 无论是等熵流和非等熵流都没有任何结果.
- 可压缩 N-S 方程长时间的小马赫数极限等等.

下面, 我们列举一些关于无粘流体目前尚未解决的奇异极限问题, 并简要叙述困难之处.

### 5.1 耦合方程组

欧拉方程组仅仅是描述了理想流体的运动, 也就是忽略了一切与外部物理量的耦合和外力的作用. 但是现实中, 很多流体模型都是流体运动与其它物理量耦合, 例如等离子体在电磁场中的运动由磁流体 (MHD) 方程组 (欧拉方程组 + 洛伦兹力作为外力, 磁场演化由法拉第定律和欧姆定律给出) 刻画, 弹性介质的运动由弹性力学方程组刻画 (欧拉方程组 + 胡克定律, 弹性形变演化由一个传输方程给出. 当然如果考虑非线性弹性体, 则弹性形变的方程更加复杂) 等等. 以下, 我们以理想磁流体方程 (即忽略流体粘性、磁扩散效应、热传导性) 为例, 简述几类奇异极限问题的进展.

#### 固定区域问题

当区域  $\Omega = \mathbb{R}^d, \mathbb{T}^d$  这种无边界的区域或是周期区域时, 带一般初值的小马赫数极限已经基本被解决, 可参见 [14] 等文章. 但是, 若区域  $\Omega$  是带边区域, 情况则复杂很多, 因为这涉及到如何给速度场和磁场加边界条件的问题. 具体来说, 以下三种边界条件都是合理的 (记  $B$  为磁场,  $u$  为流体速度场) .

- (绝缘壁条件)  $B \times N = \vec{0}, u \cdot N = 0$ . 此条件下, 非等熵、一般初值情况的奇异极限尚未解决. 该边界条件下, 等熵流有一个非常神奇的性质. 以  $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$  半空间为例, 可以证明  $\partial_3^{2k}(B_1, B_2, u_3)|_{\Sigma} = 0$  以及  $\partial_3^{2k-1}(B_3, u_1, u_2, p)|_{\Sigma} = 0$  成立, 这样的话所有边界项全部都能消失. 但是该性质对非等熵流不对.
- (完美电导体条件)  $B \cdot N = 0, u \cdot N = 0$ . 此条件下的低马赫数极限非常困难, 其原因在于该边界条件下, 固定边界问题的线性化方程在标准 Sobolev 空间里面不适当, 而是需要一类“将一个法向导数视作二阶导数的”各向异性函数空间才能做出适当性 (参见 [40, 33]), 该函数空间由陈恕行院士于 1982 年首先提出 [6]. 然而不可压缩流在标准 Sobolev 空间里却是适当的, 这种函数空间不匹配的现象一直得不到合理解释. 直到 2023 年 5 月, 北京应用物理与计算数学研究所的琚强昌研究员和王佳玮博士才解决了一个特殊情况 (对初值有更多限制). 而原始边界条件下的奇异极限, 则是在 2023 年 8 月由笔者和王佳玮博士共同解决 [37]. 我们发现, 对可压缩理想 MHD 方程的旋度分析中, 蕴含了一个由洛伦兹力提供的隐藏结构, 即旋度算子  $\nabla \times$  中的一阶法向导数, 实际上换出了  $\epsilon^2 D_t^2$  这个带权的二阶切向导数. 而当马赫数  $\epsilon$  趋于 0 时, 这些高阶部分全部消

失. 近期笔者与合作者已经完全解决区域无界情况的该问题 [37, 17].

- $B \cdot N \neq 0, u \equiv \vec{0}$ . 这个边界条件看似奇怪 (流体在边界上完全不动, 这本来是粘性流中的强边界层才有的现象), 但是恰好说明了法向非零的磁场对流体运动有稳定性作用. 此条件下, 并没有单纯做低马赫数的奇异极限结果, 其原因在于我们只知道磁场法向非零, 却不知道切向分量和法向分量究竟谁占主导.

以上几类模型均是理想磁流体方程组边值问题具有物理意义的模型, 在研究聚变过程中的磁约束时非常重要, 例如上述第 2、3 类边界条件对应的固定边界问题实则是 MHD 方程组两相流自由界面问题的不同简化模型.

### 多参数奇异极限问题

对磁流体而言, 磁场也可以进行奇异摄动. 这类问题在核聚变物理的应用中非常重要, 因为其涉及到强磁场对流体稳定性作用的刻画. 若考虑三维全空间, 那么当磁场在一个方向上强到极致的时候, 磁场会在该方向与流体“解耦”, 形成二维 MHD 方程和第三方向强磁场共同构成的方程组. 而磁场的摄动则由阿尔文数 (Alfvén number)  $\varepsilon_A > 0$  刻画, 其定义为流体速率与磁声波速度 ( $c_A := |B|/\sqrt{\rho}$ ,  $B$  是磁场) 的比值.

目前, 即使是  $\mathbb{R}^3$  全空间的情况, 这种多参数的奇异极限都完全无法做到各参数的尺度相互独立. 目前仅有的结果可以参考程斌、琚强昌和 Steve Schochet 的工作 [7, 8], 其证明了小摄动初值情况下, 当马赫数  $\varepsilon_M$  和阿尔文数  $\varepsilon_A$  同时趋于 0 且  $\varepsilon_M \gg \varepsilon_A$  时, 才能做出收敛性. 若考虑边值问题, 则目前仅有江松院士、琚强昌、徐鑫的工作 [15], 其证明了对垂直磁场加上一个小小的奇异摄动, 且 Alfvén 数和 Mach 数尺度相等的情况下, 也可以做到类似于“解耦”的极限问题. 而如果磁场的切向分量摄动非零, 则连取极限之后的状态都不知道. 造成这种困难的根本原因则是目前的求解框架均是假设磁场的摄动占主导而不是马赫数. 而一旦代入磁场的演化方程去计算又会出现  $\varepsilon_A^{-1}$  这样的奇性项. 不严格地说, 做小马赫数极限的框架和做小阿尔文数极限的框架在一定程度上是互相矛盾的.

此类多参数奇异极限问题的数学理论实际上非常困难. 上述提到的那些都只是一致估计里面的困难, 而更加本质的困难则是多参数奇异极限问题目前没有发展出对一般初值情况取极限的框架, 其根本原因在于对阿尔文数取极限时类似于 Leray 投影的算子性质非常差, 完全没有任何可以挖掘的信息.

### 自由界面两相流问题: 电流-涡片与磁流体接触间断

对可压缩流的间断问题, 若不考虑激波, 则对欧拉方程仅有涡片 (vortex sheet) 和熵波 (entropy wave) 两种可能, 而后者的数学模型在二维以上的情况实际上是边界条件超定的双曲方程组, 无法研究其适定性. 所谓涡片, 即为两个流体之间的一个间断面, 且在该间断面上流体的速度场有切向间断、没有法向间断, 同时也没有质量流穿越这个界面. 一般来说, 为了维持涡片的稳定, 我们需要考虑表面张力, 否则会立刻演化出所谓的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性 (类似于界面卷起来, 例如云的形成, 飞机喷气甩出的卡门涡街等等). 但是涡片问题的奇异极限一直没有得到解决. 2023 年底, 笔者首先解决了带表面张力的可压 MHD 电流-涡片问题的适定性与奇异极限 [42], 并对收敛到同一常值密度的等熵两相流去掉了高阶导数一致有界的假设 [43], 所用方法正是本文第 4 节提出的方法. 这系列结果是无粘两相流自由界面问题的首个奇异极限结果, 也是首次利用仿微分运算这一强力工具来研究奇异极限.

磁流体的两相流自由界面问题则更有物理意义, 若不考虑质量流穿过自由界面, 则根据磁场方向分以下两种情况

- (电流-涡片, current-vortex sheet)  $B^\pm \cdot N = 0, u^\pm \cdot N = 0, [u \cdot \tau] \neq 0, [q] = 0$ , 此为完美电导体边界条件到两相流的推广. 此类问题的适定性, 需要上下两部分磁场在交界面强度较强、且不共线. 它被用于刻画“日球层顶”、或者背对太阳一侧的地磁场屏障等天

体物理现象。另一方面，该问题也被用于描述等离子体约束模型。目前，该类问题的奇异极限进展仅有笔者近期的结果 [42, 43]。

- (磁流体接触间断, MHD contact discontinuity)  $B^\pm \cdot N \neq 0$ ,  $u^\pm \cdot N = 0$ ,  $[u] = 0$ ,  $[q] = 0$ , 此为第三类边界条件到两相流的推广。此类问题的适定性, 不需要任何其它边界条件 [39]。它被用于描述太阳的“光球”等天体物理现象。但是目前, 该类问题的奇异极限没有任何进展, 其困难也在于磁场主导方向不确定, 以及自由界面的运动导致无法解出“垂直磁场”这一稳态。

## 5.2 可压缩欧拉方程组自由边界问题的奇异极限

对可压缩无粘流的自由边界问题, 带一般初值的奇异极限则是完全没有进展。在笔者 [43] 发现能结合仿微分运算、波方程结构以及高阶带权能量改进奇异极限结果之前, 之前所有的进展基本都集中于不带表面张力的单相流问题 [20, 21, 9, 41], 且只有笔者的工作 [41] 能避免高阶时间导数一致有界的假设。这种情况简单是因为压力  $q$  直接具有零边值, 没有必要再去像第 4 节所述那样去分解压力项, 由波方程引入高阶带权项。另一方面, 若要研究一般初值的奇异极限问题, 则表面张力必须非零, 否则 Rayleigh-Taylor 符号条件的演化已经要求了压力的一阶时间导数必须一致有界, 这与“一般初值”的定义就矛盾了。笔者认为, 欲解决一般初值的奇异极限问题, 仍然需要结合方程自身的能量结构与 [43] 中的仿线性化技巧, 设计出一个“能量塔”, 即从  $H^m$  ( $m \geq 4$ ) 的能量出发, 最终停留在加合适  $\varepsilon$  权的  $2m$  阶时间导数, 才有可能封闭能量估计, 笔者与合作者也正在沿此想法攻克这一问题。而对两相流的涡片问题, 带一般初值的情况则更加困难: 因为在导出自由界面方程时需要对 DtN 算子求逆, 这个过程会引出带高阶时间导数的项, 可能造成马赫数权重的额外损失。

最后, 若假设欧拉方程的初值无旋, 则可以进一步考虑可压缩无旋欧拉方程的长时间奇异极限, 这是一个长期公开、从未有过任何进展的难题。即便是固定马赫数时解的长时间存在性也是完全未知。其难点在于可压缩流的散度非零, 则必须要估计流体内部波方程的长时间衰减性。但波方程的长时间存在性需要用 Christodoulou-Klainerman 的向量场方法(或类似方法)解决, 而该方法在带边区域目前没有任何进展。此外, 即使能够解决该问题, 如何控制声波传播与自由界面运动之间的相互作用也是完全未知的, 就更不要说关于马赫数一致的长时间估计了。

## 5.3 一般初值情况在有界区域内如何证明强收敛

从本文前面关于一般初值小马赫数极限的讨论中可以看到无论是等熵、非等熵情况, 在证明压力的收敛时, 区域的无界性都是必要的。可是如果考虑有界区域的情况呢? 此时强收敛的证明是没有完全解决的。更糟糕的是, 非等熵的情况迄今为止基本没有任何进展。

- 等熵: 若区域  $\Omega$  有界, 则可以证明 Leray 投影部分  $\mathcal{P}u \rightarrow 0$  具有强收敛,  $(1 - \mathcal{P})u$  部分只能做到弱-\* 收敛。参见 Secchi [34]。而对不带边的区域  $\mathbb{T}^3$ , Schochet [32] 通过滤波的方法可以证明收敛性。
- 非等熵: 目前唯一结果是 Métivier-Schochet [27] 证明的一维环面  $\mathbb{T}^1$  上的收敛性。边值问题或是高维环面的情况也没有任何进展。

真正需要解决的其实也是非等熵的情况, 因为等熵情况我们关注的“投影部分”是已经有强收敛了。这类问题的难点在于, 之前证明强收敛的框架均是基于压力  $q$  满足的波动方程的色散估计或者局部能量衰减估计, 而对有界区域或者环面的情况, 这类问题在色散方程领域并没有得到发展。尤其是非等熵情况下, 波方程还是变系数的, 传统的构造乘子进行 Morawetz 估计等等方法均不适用。

## 参考文献

- [1] Alazard, T. Incompressible limit of the nonisentropic Euler equations with the solid wall boundary conditions. *Adv. Differ. Equ.*, 10(1), 19–44, 2005.
- [2] Alazard, T., Burq, N., Zuily, C. On the Cauchy problem for gravity water waves. *Invent. Math.*, 198(1), 71–163. 2014.
- [3] Alazard, T., Métivier, G. Paralinearization of the Dirichlet to Neumann operator, and regularity of three-dimensional water waves. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 34(12), 1632–1704, 2009.
- [4] Alinhac, S. Existence d’ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 14(2), 173–230. (1989)
- [5] Asano, K. On the incompressible limit of the compressible Euler equation. *Japan J. Appl. Math.*, 4(3):455–488, 1987.
- [6] Chen, S.-X. Initial boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary. Translated from *Chin. Ann. Math.* 3(2), 222–232 (1982). *Front. Math. China* 2(1), 87–102 (2007).
- [7] Cheng, B., Ju, Q., Schochet, S. Three-Scale Singular Limits of Evolutionary PDEs. *TArch. Rational Mech. Anal.*, 229(2), 601–625, 2018.
- [8] Cheng, B., Ju, Q., Schochet, S. Convergence Rate Estimates for the Low Mach and Alfvén Number Three-Scale Singular Limit of Compressible Ideal Magnetohydrodynamics. *ESAIM: M2AN*, Vol.55, S733–S759, 2021.
- [9] Disconzi, M. M., Luo, C. On the incompressible limit for the compressible free-boundary Euler equations with surface tension in the case of a liquid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 237(2), 829–897, 2020.
- [10] Gérard, P. Microlocal defect measures. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 16(11), 1761–1794, 1991.
- [11] Hörmander, L. The analysis of linear partial differential equations. Vol. III, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [12] Iguchi, T. The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation in  $\mathbb{R}_+^n$ . *Math. Methods Appl. Sci.*, 20(11):945–958, 1997.
- [13] Isozaki, H. Singular limits for the compressible Euler equations in an exterior domain. *J. Reine Angew. Math.*, 381:1–36, 1987.
- [14] Jiang, S., Ju, Q., Li, F. Incompressible limit of the nonisentropic magnetohydrodynamic equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 48(1), 302–319, 2016.
- [15] Ju, Q., Schochet, S., Xu, X. Singular limits of the equations of compressible ideal magnetohydrodynamics in a domain with boundaries. *Asymptotic Anal.*, 113, 137–165, 2019.
- [16] Ju, Q., Wang, J. Incompressible limit of ideal magnetohydrodynamic equations with a perfectly conducting wall condition. *SIAM J. Math. Anal.*, 55(6), 7549–7574, 2023.
- [17] Ju, Q., Wang, J., Zhang, J. Uniform Anisotropic Regularity in Low-Mach Regime of Non-isentropic Ideal MHD Equations with a Perfectly Conducting Boundary. arXiv:2412.09943, preprint, 2024.
- [18] Klainerman, S., Majda, A. Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids. *Commun. Pure Appl. Math.*, 34(4), 481–524, 1981.
- [19] Klainerman, S., Majda, A. Compressible and incompressible fluids. *Commun. Pure. Appl. Math.*, 35(5), 629–651, 1982.
- [20] Lindblad, H., Luo, C. A priori estimates for the compressible Euler equations for a liquid with free surface boundary and the incompressible limit. *Commun. Pure. Appl. Math.*, 71(7), 1273–1333, 2018.
- [21] Luo, C. On the motion of a compressible gravity water wave with vorticity. *Ann. PDE*, 4(2):1–71, 2018.
- [22] Luo, C., Zhang, J. Local Well-posedness for the Motion of a Compressible Gravity Water Wave with Vorticity. *J. Differ. Equ.*, 332, 333–403. (2022)
- [23] Luo, C., Zhang, J. Compressible Gravity-Capillary Water Waves with Vorticity: Local Well-Posedness, Incompressible and Zero-Surface-Tension Limits. arXiv:2211.03600, preprint. (2022)
- [24] Majda, A. Compressible Fluids Flow and Systems of Conservation Laws in Several Space Variables. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 53, Springer-Verlag New York, 1984.
- [25] Métivier, G. Para-differential calculus and applications to the Cauchy problem for nonlinear systems. *Edizioni della Normale*, Pisa, (5) (2008).
- [26] Métivier, G., Schochet, S. The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 158(1):61–90, 2001.
- [27] Métivier, G., Schochet, S. Averaging theorems for conservative systems and the weakly compressible Euler equations. *J. Differ. Equ.*, Vol. 187:106–183, 2003.
- [28] Ohno, M., Shirota, T. On the initial-boundary-value problem for the linearized equations of magnetohydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 144(3), 259–299, 1998.
- [29] Rauch, J. Symmetric Positive Systems with Boundary Characteristic of Constant Multiplicity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 291(1), 167–187, 1985.
- [30] Schochet, S. The compressible Euler equations in a bounded domain: Existence of solutions and the incompressible limit. *Commun. Math. Phys.*, 104(1), 49–75, 1986.
- [31] Schochet, S. Singular limits in bounded domains for quasilinear symmetric hyperbolic systems having a vorticity equation. *J. Differ. Equ.*, 68:400–428, 1987.

- 
- [32] Schochet, S. Fast Singular Limits of Hyperbolic PDEs. *J. Differ. Equ.*, 114(2):476–512, 1994.
- [33] Secchi, P. Well-posedness of characteristic symmetric hyperbolic systems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 134(2), 155–197, 1996.
- [34] Secchi, P. On the Singular Incompressible Limit of Inviscid Compressible Fluids. *J. Math. Fluid Mech.*, 2(2), 107–125, 2000.
- [35] Shatah, J., Zeng, C. Local well-posedness for fluid interface problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 199(2), 653–705. (2011)
- [36] Ukai, S. The incompressible limit and the initial layer of the compressible Euler equation. *J. Math. Kyoto Univ.*, 26(2):323–331, 1986.
- [37] Wang, J., Zhang, J. Incompressible Limit of Compressible Ideal MHD Flows inside a Perfectly Conducting Wall. *J. Differ. Equ.*, 425, 846–894. 2025.
- [38] Wang, J., Zhang, J. Low Mach Number Limit of Inviscid Elastodynamics with General Initial Data. arXiv:2412.09941, preprint, 2024.
- [39] Wang, Y., Xin, Z. Existence of Multi-dimensional Contact Discontinuities for the Ideal Compressible Magnetohydrodynamics. *Commun. Pure Appl. Math.*, 77(1), 583–629, 2024.
- [40] Yanagisawa, T., Matsumura, A. The fixed boundary value problems for the equations of ideal magnetohydrodynamics with a perfectly conducting wall condition. *Commun. Math. Phys.*, 136(1), 119–140, 1991.
- [41] Zhang, J. Local Well-posedness and Incompressible Limit of the Free-Boundary Problem in Compressible Elastodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 244(3), 599–697, 2022.
- [42] Zhang, J. Well-posedness and Incompressible Limit of Current-Vortex Sheets with Surface Tension in Compressible Ideal MHD. arXiv:2312.11254v3, preprint.
- [43] Zhang, J. On the Incompressible Limit of Current-Vortex Sheets with or without Surface Tension. arXiv:2405.00421, preprint.

# 林开亮提出的一个问题

李克正

## 摘要

代数几何是处理多元多项式因式分解问题的一个强有力工具.

## 1 问题的来源

对任一正整数  $n$ , 记  $x, y, z$  的多项式

$$f_n(x, y, z) = (x + y + z)^n - x^n - y^n - z^n. \quad (1.1)$$

若  $n$  为奇数, 易见  $f_n(x, y, z)$  有因子  $(x + y)(x + z)(y + z)$ . 林开亮用计算机试对  $f_n(x, y, z)$  作因子分解, 根据计算结果提出了两个猜想:

猜想 1.1. 若  $n$  为偶数, 则  $f_n(x, y, z)$  在  $\mathbb{Q}$  上不可约.

猜想 1.2. 若  $n \geq 3$  为奇数, 则  $\frac{f_n(x, y, z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$  在  $\mathbb{Q}$  上不可约.

我觉得这是很好的问题: 有背景, 简单, 看上去初等但颇有难度, 可能引申到更广泛和更深刻的问题.

事实上, 两个猜想不仅都成立, 而且可以改为更强的“在  $\mathbb{C}$  上不可约”. 但下面的证明要用到一点代数几何, 尽管只是古典的和初步的代数几何, 却是实质性地用到, 所以无论如何不能说这个证明是初等的.

我尝试了多种初等方法均未能成功. 诸位若有其他证明, 特别是初等的证明, 望不吝分享; 若看到值得参考的文献也望介绍.

## 2 一个事实

以下事实在代数几何中是熟知的, 但在很多教科书中并未明确写出, 所以即使学代数几何的人, 在面对多项式分解问题时也未必会直接应用.

引理 2.1. 设  $k$  为域,  $F(x, y, z) \in k[x, y, z]$  为 (非零) 齐次多项式, 则下列条件等价:

- i) 方程组

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

只有零解;

- ii)  $\mathbb{P}_k^2$  (齐次坐标为  $X, Y, Z$ ) 中的曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  是光滑的;
- iii)  $k[x, y, z]/(F)$  是几何整闭整环.

特别地, 此时  $F$  是不可约多项式,  $k[x, y, z]/(F)$  是整闭整环, 且曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  是约化、不可约和非奇异的.

证明不妨设  $k$  为代数闭域.

i)  $\Leftrightarrow$  ii): 对于曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  的一个闭点  $p = (X_0 : Y_0 : Z_0)$ , 由雅可比判据 (参看 [2, 命题 XVI.2.1]) 可见  $p$  为该曲线的光滑点当且仅当  $\frac{\partial F}{\partial X}|_{(X_0, Y_0, Z_0)}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial Y}|_{(X_0, Y_0, Z_0)}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial Z}|_{(X_0, Y_0, Z_0)}$  中至少有一个非零, 故条件 i) 等价于曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  无奇点, 即为光滑的.

ii)  $\Rightarrow$  iii): 先证明  $F(x, y, z)$  不可约. 若  $F$  有一个重因子  $G$ , 则曲线  $\{G(X, Y, Z) = 0\}$  的任一点为曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  的非光滑点; 而若  $F$  有两个线性无关的素因子  $G, H$ , 则曲线  $\{G(X, Y, Z) = 0\}$  与曲线  $\{H(X, Y, Z) = 0\}$  相交, 其任一交点为曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  的非光滑点, 均与条件 ii) 矛盾.

再来证明  $R = k[x, y, z]/(F)$  整闭, 即满足条件 (R<sub>1</sub>) 和 (S<sub>2</sub>) (参看 [2, 命题 XV.2.2]). 设  $p$  为  $R$  的极大理想, 若  $p \neq (x, y, z)$ , 则由条件 i) 可知  $R_p$  是正则环, 故满足 (R<sub>1</sub>) 和 (S<sub>2</sub>). 由此还可见对于  $R$  的任一高度为 1 的素理想  $p$ ,  $R_p$  是正则环. 剩下唯一需要验证的是对于  $p = (x, y, z)$ ,  $R_p$  有长度为 2 的  $p$ -正则列. 由于曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  光滑, 适当取  $X, Y, Z$  的线性齐次型  $G$ , 可使直线  $\{G(X, Y, Z) = 0\}$  与曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  仅有有限多个交点且都是单重交点, 这样  $G(x, y, z)$  在  $R_p$  中的象就是  $pR_p$  中的非零因子, 且有有限多个高度为 2 的齐次素理想  $P_1, \dots, P_n \subset k[x, y, z]$  使得  $k[x, y, z]/(F, G) \cong k[x, y, z]/P_1 \cdots P_n$ ; 任取  $x, y, z$  的线性齐次型  $h$  使得  $h \notin P_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), 则  $h$  在  $R_p/G(x, y, z)R_p$  中的象就是  $pR_p/G(x, y, z)R_p$  中的非零因子, 因为  $R_p/G(x, y, z)R_p$  中的零因子的集合为  $\bigcup_{i=1}^n P_i R_p/G(x, y, z)R_p - \{0\}$  (参看 [2, 推论 V.1.1]).

iii)  $\Rightarrow$  ii): 设  $p = (X_0 : Y_0 : Z_0)$  为曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  的一个闭点, 我们来证明  $p$  不是奇点. 不妨设  $Z_0 \neq 0$ , 可取局部坐标为  $x = \frac{X}{Z}$ ,  $y = \frac{Y}{Z}$ , 并记  $x_0 = \frac{X_0}{Z_0}$ ,  $y_0 = \frac{Y_0}{Z_0}$ , 则  $p$  对应于  $k[x, y]$  的极大理想  $(x - x_0, y - y_0)$  (滥用记号仍记为  $p$ ), 而对应于  $k[X, Y, Z]$  中的素理想  $P = (X - x_0 Z, Y - y_0 Z)$ . 注意  $(k[X, Y, Z]/(F))_P$  的零次齐次部分同构于  $(k[x, y]/(F(x, y, 1)))_p$ , 故

$$(k[X, Y, Z]/(F))_P \cong (k[x, y]/(F(x, y, 1)))_p \otimes_k k[Z, Z^{-1}]. \quad (2.2)$$

由条件 iii) 可见  $(k[x, y]/(F(x, y, 1)))_p$  是整闭的, 从而在  $k$  上光滑, 即  $p$  是曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  的光滑点. 证毕.

### 3 问题的解答

现在设  $k = \mathbb{C}$ . 我们先来计算曲线  $\{f_n(X, Y, Z) = 0\}$  的奇点.

由引理 2.1 可见这样一个奇点  $(X_0 : Y_0 : Z_0)$  满足条件

$$\frac{\partial f_n}{\partial X}|_{(X_0, Y_0, Z_0)} = \frac{\partial f_n}{\partial Y}|_{(X_0, Y_0, Z_0)} = \frac{\partial f_n}{\partial Z}|_{(X_0, Y_0, Z_0)} = 0 \quad (3.1)$$

即

$$n(X_0 + Y_0 + Z_0)^{n-1} - nX_0^{n-1} = n(X_0 + Y_0 + Z_0)^{n-1} - nZ_0^{n-1} = n(X_0 + Y_0 + Z_0)^{n-1} - nZ_0^{n-1} = 0. \quad (3.2)$$

记  $\zeta$  为  $n-1$  次本原单位根, 由 (3.2) 可见有非负整数  $i, j, k < n-1$  使得

$$X_0 + Y_0 + Z_0 = \zeta^i X_0 = \zeta^j Y_0 = \zeta^k Z_0. \quad (3.3)$$

记  $U = X_0 + Y_0 + Z_0$ , 则  $X_0 = \zeta^{-i} U$ ,  $Y_0 = \zeta^{-j} U$ ,  $Z_0 = \zeta^{-k} U$ , 代入 (3.2) 的第一式得  $(\zeta^{-i} + \zeta^{-j} + \zeta^{-k} - 1)U = 0$ , 注意  $U \neq 0$ , 否则  $X_0 = Y_0 = Z_0 = 0$ , 这样  $(X_0 : Y_0 : Z_0)$  不是  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  的点. 故有

$$\zeta^{-i} + \zeta^{-j} + \zeta^{-k} - 1 = 0. \quad (3.4)$$

我们来说明, 情形 (3.4) 很少出现.

先考虑  $n$  是奇数的情形, 此时  $-1$  是  $n-1$  次单位根, 记  $l = \frac{n-1}{2}$ , 则 (3.4) 化为

$$\zeta^{-i} + \zeta^{-j} + \zeta^{-k} + \zeta^{-l} = 0. \quad (3.5)$$

四个整数  $i, j, k, l$  中至少有两个同奇偶, 不妨设  $i, j$  同奇偶, 则对 (3.5) 两边乘以  $\zeta^{(i+j)/2}$  可化为形如

$$\zeta^i + \zeta^{-i} = -\zeta^k - \zeta^l. \quad (3.6)$$

左边是实数, 从而右边也是实数, 故  $k = -l$ , 由此又可得到  $\zeta^i = -\zeta^k$  或  $\zeta^i = -\zeta^l$ , 从而  $X_0, Y_0, Z_0$  中有两个加起来等于 0.

不妨设  $X_0 + Y_0 = 0$ , 在奇点  $(X_0 : Y_0 : Z_0)$  附近可取局部坐标  $x = X/Z, y = Y/Z$ , 而曲线  $f_n(X, Y, Z) = 0$  的局部方程为  $f_n(x, y, 1) = 0$ . 由上所述可取整数  $i$  使得奇点为  $x = \zeta^i, y = -\zeta^i$ . 记  $g(x, y) = \frac{f_n(x, y, 1)}{x+y}$ , 则  $(\zeta^i, -\zeta^i)$  也是  $g(x, y)$  的零点. 易见有分解  $g(x, y) = g_0(x, y) - h(x, y)$ , 其中

$$\begin{aligned} g_0(x, y) &= \frac{(x+y+1)^n - 1}{x+y} = (x+y)^{n-1} + n(x+y)^{n-2} + \cdots + n, \\ h(x, y) &= \frac{x^n + y^n}{x+y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + \cdots + y^{n-1}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

注意  $\frac{\partial g_0}{\partial x} = \frac{\partial g_0}{\partial y}$ , 可见在曲线  $g(x, y) = 0$  的奇点处有  $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial y}$ , 计算得

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial y} = n(x^{n-2} - x^{n-3}y + \cdots - y^{n-2}). \quad (3.8)$$

代入  $x = \zeta^i, y = -\zeta^i$ , 右边等于  $n(n-1)\zeta^{(n-2)i} \neq 0$ , 故  $(\zeta^i, -\zeta^i)$  不是曲线  $g(x, y) = 0$  的奇点. 由此可知曲线  $\frac{f_n(X, Y, Z)}{(X+Y)(Y+Z)(X+Z)} = 0$  是光滑的, 从而由引理 2.1 可见  $\frac{f_n(x, y, z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$  在  $\mathbb{C}$  上不可约.

再来考虑  $n$  是偶数的情形, 此时  $-1$  不是  $n-1$  次单位根, 但还是可以用上面的方法. 记  $\xi$  为  $2(n-1)$  次本原单位根使得  $\zeta = \xi^2$ , 则由 (3.4) 可得

$$x\xi^{-2i} + \xi^{-2j} + \xi^{-2k} + \xi^{n-1} = 0. \quad (3.9)$$

两边乘以  $\xi^{i+j}$  可化为

$$\xi^{j-i} + \xi^{i-j} = -\xi^{2k+i+j} - \xi^{n-1+i+j}. \quad (3.10)$$

左边是实数, 从而右边也是实数, 故  $2k+i+j = -(n-1+i+j)$ , 但  $2k+i+j$  与  $-(n-1+i+j)$  不同奇偶, 矛盾. 这说明 (3.4) 不可能成立, 从而曲线  $f_n(X, Y, Z) = 0$  无奇点. 由引理 2.1 可见  $f_n(x, y, z)$  在  $\mathbb{C}$  上不可约.

总之有

**命题 3.1.** 设  $k$  为特征 0 的域, 多项式  $f_n(x, y, z)$  由 (1.1) 给出.

i) 若  $n$  为偶数, 则  $f_n(x, y, z)$  在  $k$  上不可约.

ii) 若  $n \geq 3$  为奇数, 则  $\frac{f_n(x, y, z)}{(x+y)(x+z)(y+z)}$  在  $k$  上不可约.

事实上引理 2.1 告诉我们的更多: 若  $n$  为偶数, 则  $k[x, y, z]/(f_n(x, y, z))$  为整闭整环; 而若  $n$  为奇数, 则  $k[x, y, z]/(\frac{f_n(x, y, z)}{(x+y)(x+z)(y+z)})$  为整闭整环.

## 4 进一步的讨论

上面我们遇到的曲线正好是光滑的, 所以直接应用引理 2.1 就行了. 但这并非侥幸, 即使遇到不光滑的曲线, 原则上仍可以利用代数几何处理多项式的分解问题.

仍用引理 2.1 中的记号. 如果曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  不是约化的, 则方程组 (2.1) 的解中包含一条曲线, 由此就给出  $F(X, Y, Z)$  的一个重因子.

以下设曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  是约化的, 此时它只有有限多个孤立奇点. 如果  $F(x, y, z)$  有一个非平凡的分解  $F(x, y, z) = G(x, y, z)H(x, y, z)$ , 则曲线  $\{G(X, Y, Z) = 0\}$  和曲线  $\{H(X, Y, Z) = 0\}$  的交点都是曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  的奇点. 考察曲线  $\{F(X, Y, Z) = 0\}$  在各奇点处的局部函数环, 如果这些局部函数环都是整环, 则  $F(x, y, z)$  不可约; 若在某个点  $p$  处的局部函数环  $R$  不是整环, 则由  $R$  中的零因子就可给出  $F(x, y, z)$  的非平凡因子, 这样就将问题转化为  $k[x, y]$  的局部化中的因子分解问题. 再注意  $k[x, y]$  是 UFD, 这又可以化为  $k[x, y]$  的因子分解问题.

利用上述方法还可以研究二元非齐次多项式的分解问题 (先将二元非齐次多项式转化为三元齐次多项式).

采用代数几何的方法与初等方法大不相同, 下面的例子可以显示这一点.

例 4.1. 直接计算得

$$\frac{f_5(x, y, z)}{(x+y)(x+z)(y+z)} = 5(x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz). \quad (4.1)$$

我们来证明  $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$  不可约. 先看初等方法.

用反证法, 若  $g(x, y, z)$  可约, 由齐次性可见只能是分解为两个线性齐次型的积, 可设

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz = (x + ay + bz)(x + cy + dz). \quad (4.2)$$

比较两边  $y^2$  的系数可见  $ac = 1$ , 而较两边  $xy$  的系数可见  $a + c = 1$ , 故  $a, c$  分别是方程  $t^2 - t + 1 = 0$  的两个根, 即  $\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ , 不妨设  $a = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ ,  $c = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ . 同理  $b, d$  也分别是方程  $t^2 - t + 1 = 0$  的两个根. 有两种可能: 一是  $b = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ ,  $d = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ , 不难算出此时 (4.2) 右边  $yz$  的系数为 2; 另一是  $b = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}$ ,  $d = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ , 此时 (4.2) 右边  $yz$  的系数为 -1, 均与 (4.2) 左边  $yz$  的系数不同. 这个矛盾说明  $g(x, y, z)$  不可约.

再来看利用代数几何的方法, 考虑方程组  $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial z} = 0$ , 即

$$2x + y + z = 2y + z + x = 2z + x + y = 0. \quad (4.3)$$

易见这个方程组只有零解, 故由引理 2.1 可知  $g(x, y, z)$  不可约.

至于更多变元的多项式, 原则上也可以利用代数几何处理分解问题, 当然可能更复杂, 但至少不至于无从下手. 实际上, 一般难的地方是证明不可约性, 而利用代数几何处理可能反倒容易, 下面是一个例子.

例 4.2. 设  $k$  为特征 0 的域. 对任一正整数  $n \geq 2$ , 记  $x, y, z, u$  的多项式

$$g_n(x, y, z, u) = (x + y + z + u)^n - x^n - y^n - z^n - u^n. \quad (4.4)$$

我们来证明  $g_n(x, y, z, u)$  不可约. 先来计算  $\mathbb{P}_k^3$  (齐次坐标为  $X, Y, Z, U$ ) 中的曲线  $\{g_n(X, Y, Z, U) = 0\}$  的奇点. 对于方程组  $\frac{\partial g_n}{\partial x} = \frac{\partial g_n}{\partial y} = \frac{\partial g_n}{\partial z} = \frac{\partial g_n}{\partial u} = 0$  具体计算为

$$\begin{aligned} n((x + y + z + u)^{n-1} - x^{n-1}) &= n((x + y + z + u)^{n-1} - y^{n-1}) \\ &= n((x + y + z + u)^{n-1} - z^{n-1}) = n((x + y + z + u)^{n-1} - u^{n-1}) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

令  $\zeta$  为  $n - 1$  次本原单位根,  $t = x + y + z + u$ , 则有整数  $0 \leq i, j, k, l < n - 1$  使得  $x = \zeta^i t$ ,  $y = \zeta^j t$ ,  $z = \zeta^k t$ ,  $u = \zeta^l t$ , 由此可见曲线  $\{g_n(X, Y, Z, U) = 0\}$  至多只有有限多个奇点. 另一方面, 若一个齐次多项式  $g(x, y, z, u) \in \mathbb{C}[x, y, z, u]$  可约, 则曲线  $\{g(X, Y, Z, U) = 0\}$  的奇点集至少是 1 维的, 从而是无限集. 这个矛盾就说明  $g_n(x, y, z, u)$  在  $\mathbb{C}$  上不可约, 从而在  $k$  上不可约.

总之我觉得利用代数几何处理多项式的因式分解, 挺爽的.

## 参考文献

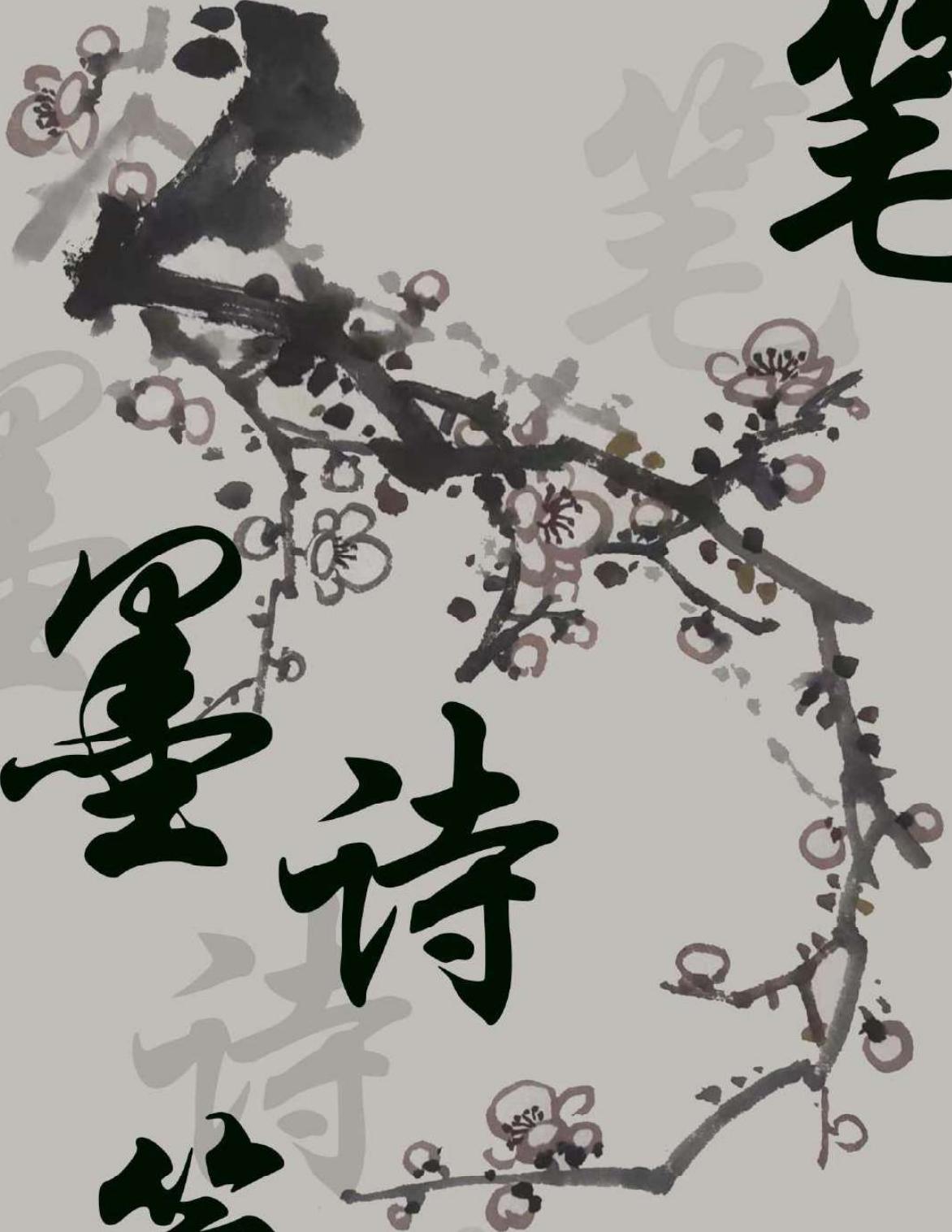
- [1] R. Hartshorne: Algebraic Geometry, GTM 52. Springer-Verlag (1977). 中译本: 冯克勤、刘木兰、胥鸣伟译, 代数几何, 科学出版社 (1994)
- [2] 李克正: 交换代数与同调代数, 中国科学院研究生教学丛书. 科学出版社 (1998), 第二次印刷 (1999)
- [3] 李克正: 代数几何初步. 科学出版社 (2004)
- [4] H. Matsumura: Commutative Algebra. W. A. Benjamin Co. (1970)

笔

墨诗篇

诗

篇





稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》

# 词三首

张文锦

## 水调歌头

蓬岛昔年事，宿靄误瀛洲。星楼空泛，月殿零落一身秋。  
心绪四年冷落，藜火三更斜照，彷彿此生休。惊起理残梦，犹解看吴钩。  
鲸波定，鳌背稳，放扁舟。千峰飞度，尚有沫雪拭新愁。  
已执青鸾笺纸，剩借转鹏羽翼，一夜越沧流。指顾江山外，霞气盖昆丘。

## 醉花阴·闻川普重添关税忆游包园

流年岂是芳菲妒，聊趁春深处。娇粉艳红时，且引愁丝，解与东风付。  
沈腰可约多情驻？惹得闲凄楚。对弱柳浓云，金缕重翻，漫把佳期误。

## 点绛唇

银汉漂云，桂华吹雪轻寒嫩。玉阶酥润，曾画双蛾晕。  
芳径复来，憔悴罗衣褪。难生恨。忍将方寸，锁向重门隐。

皇榜





稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》

# 皇榜 · 征解

## 1 思考题

本题的目标是通过 Lindeberg 替换术来证明一类随机矩阵的经验谱分布收敛至半圆律分布。具体来说，考虑如下矩阵模型：

令  $X_N$  是一个  $N \times N$  的随机矩阵，设它的特征值从大到小排列分别为  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ，定义它的经验谱分布为

$$\mu_{X_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}.$$

我们假设  $X_N$  是对称矩阵，矩阵元均为实值随机变量，上三角元素  $\{X_{ij}\}_{i \leq j}$  相互独立，均值为 0 方差为 1，且满足“矩阵的 Lindeberg 条件”：

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} \mathbb{E}[X_{ij}^2 \mathbf{1}_{|X_{ij}| > \epsilon \sqrt{N}}] = 0.$$

对于  $X_N$ ，我们的目标是证明当矩阵维数  $N \rightarrow +\infty$  时， $X_N$  的经验谱分布（这是一列随机概率测度，视为取值于  $\text{Pr}(\mathbb{R})$  上的随机变量） $\mu_{X_N}$  弱依概率收敛到 Wigner 半圆律分布

$$\rho_{sc}(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

### 1.1 第一部分

首先我们利用 Lindeberg 替换术证明一个“多元版本的 Lindeberg 中心极限定理”。具体来说，我们证明如下的估计：

定义两个随机向量  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  和  $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ ，它们的总共  $2n$  个分量均相互独立，取值于某个开区间  $I$ ，二阶矩存在，并且满足

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad \mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[Y_i], \quad \mathbb{E}[X_i^2] = \mathbb{E}[Y_i^2].$$

设  $f : I^n \rightarrow \mathbb{R}$  是一个各个分量均三次连续可微的函数，令  $U = f(\mathbf{X})$ ,  $V = f(\mathbf{Y})$ 。下面三个小问将证明如下结论：对于任意一个三次连续可微的函数  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  和任意  $K > 0$ ,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[g(U)] - \mathbb{E}[g(V)]| &\leq C_1(g)\lambda_2(f) \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{E}[X_i^2 \mathbf{1}_{|X_i| > K}] + \mathbb{E}[Y_i^2 \mathbf{1}_{|Y_i| > K}] \right) \\ &\quad + C_2(g)\lambda_3(f) \sum_{i=1}^n \left( \mathbb{E}[|X_i|^3 \mathbf{1}_{|X_i| \leq K}] + \mathbb{E}[|Y_i|^3 \mathbf{1}_{|Y_i| \leq K}] \right), \end{aligned}$$

其中记号含义如下（记  $\partial_i^p$  为对第  $i$  个分量求  $p$  阶偏导）：

$$C_1(g) := \frac{1}{2} \|g'\|_\infty + \frac{1}{2} \|g''\|_\infty, \quad C_2(g) := \frac{1}{6} \|g'\|_\infty + \frac{1}{2} \|g''\|_\infty + \frac{1}{6} \|g'''\|_\infty,$$

$$\lambda_r(f) := \sup\{|\partial_i^p f(\mathbf{x})|^{r/p} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq p \leq r, \mathbf{x} \in I^n\}.$$

- (1) 令  $h = g \circ f$ ，证明  $|\partial_i^2 h(\mathbf{x})| \leq 2C_1(g)\lambda_2(f)$  和  $|\partial_i^3 h(\mathbf{x})| \leq 6C_2(g)\lambda_3(f)$ 。
- (2) 计算  $h(\mathbf{Z}_i)$  和  $h(\mathbf{Z}_{i-1})$  在  $\mathbf{W}_i$  处的三阶泰勒展开，其中对于  $0 \leq i \leq n$ ，替换变量如下定义：

$$\mathbf{Z}_i := (X_1, \dots, X_{i-1}, X_i, Y_{i+1}, \dots, Y_n), \quad \mathbf{W}_i := (X_1, \dots, X_{i-1}, 0, Y_{i+1}, \dots, Y_n).$$

- (3) 通过用  $K$  进行截断，结合 (1) 和 (2) 证明原不等式。

## 1.2 第二部分

定义一个概率测度  $\mu$  的 Stieltjes 变换为:

$$S_\mu : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad S_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x - z} \mu(dx).$$

我们承认如下定理:

- 一列随机概率测度  $\{\mu_k\}$  弱依概率收敛到一个固定的概率测度  $\mu$ , 当且仅当对于任意上半复平面的点  $z$ , 有  $S_{\mu_k}(z) \xrightarrow{\mathbb{P}} S_\mu(z)$ .
- Wigner 半圆律定理: GOE 矩阵模型  $W_N$  (对称随机矩阵, 上三角元素  $\{W_{ij}\}_{i \leq j}$  相互独立, 非对角元  $W_{ij} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\forall i \leq j$ , 对角元  $W_{ii} \sim \mathcal{N}(0, 2)$ ) 的经验谱分布弱依概率收敛到 Wigner 半圆律分布。

接下来我们证明原题结论。

- (4) 对于一个  $m \times m$  矩阵  $A = (a_{ij})$ , 证明其经验谱分布  $\mu_A$  的 Stieltjes 变换的表达式:

$$S_{\mu_A}(z) = \frac{1}{m} \text{tr}(R(z; A)),$$

其中  $R(z; A) := (A - zI_m)^{-1}$  为矩阵的预解式。

- (5) 证明预解式的性质:

$$\frac{\partial R(z; A)}{\partial a_{ij}} = -R(z; A) \frac{\partial A}{\partial a_{ij}} R(z; A).$$

- (6) 下面记  $X_N$  的上三角元素按照某种方式排列形成的随机向量为  $\mathbf{x}_n$ , 其中  $n = N(N+1)/2$ 。

固定  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , 记  $f(\mathbf{x}_n) := S_{\mu_{\frac{X_N}{\sqrt{N}}}}(z)$ , 计算:

$$\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ij}^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_{ij}^3}.$$

- (7) 记  $v = \text{Im } z$ , 证明关于上述量的估计:

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} \right\|_\infty \leq 2|v|^{-2}N^{-3/2}, \quad \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x_{ij}^2} \right\|_\infty \leq 4|v|^{-3}N^{-2}, \quad \left\| \frac{\partial^3 f}{\partial x_{ij}^3} \right\|_\infty \leq 12|v|^{-4}N^{-5/2}.$$

- (8) 令  $U = \text{Re}(f(X_N))$ ,  $V = \text{Re}(f(W_N))$ , 运用第一步得到的定理证明, 对于任意一个三次连续可微的函数  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  和任意  $\epsilon > 0$ :

$$|\mathbb{E}[g(U)] - \mathbb{E}[g(V)]| \leq C(g, v) \left( \frac{1}{N^2} \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} (\mathbb{E}[X_{ij}^2 \mathbf{1}_{|X_{ij}| > \epsilon \sqrt{N}}] + \mathbb{E}[W_{ij}^2 \mathbf{1}_{|W_{ij}| > \epsilon \sqrt{N}}]) + \epsilon \right),$$

其中  $C(g, v)$  是只与  $g$  和  $v$  有关的常数。

- (9) 对  $f(X_N)$  的虚部进行类似的估计, 并结合 Wigner 半圆律定理得出欲证结论。

由隋秉成、宗语轩同学供题.

## 2 投稿方式

请同学们将思考题的解答发送到数院学生会的官方邮箱 [mathsu01@ustc.edu.cn](mailto:mathsu01@ustc.edu.cn). 具体投稿要求, 参见杂志最后一页的《征稿启事》。

## 致谢

《蛙鸣》自复刊以来，经历过大大小小的困难，历届编委给我们留下了宝贵的经验和教训。科大数院的各位老师、校友、同学们的共同努力下，第 67 期《蛙鸣》终于得以与大家见面。

在此，《蛙鸣》编辑部全体成员非常感谢各位投稿人的踊跃来稿，感谢第十一届数院学生会的同学参与排版设计和宣传工作。感谢各位积极参与过工作的编委和审稿人：王鼎涵、金胜昔、卞泽宇、张明杰、王效禹、宗语轩、杨萱泽。感谢他们在学习和科研的百忙之中抽出时间完成了谨慎、专业的审稿工作。感谢宗语轩、隋秉成同学协助《皇榜》栏目事宜。

编辑部在此感谢中国科学技术大学数学科学学院对第 67 期《蛙鸣》给予的全方位支持。编辑部还特别致谢郑芳老师、邵锡惠老师、黄欣祺学长、吴松宇学长对本期《蛙鸣》的编撰、筹备工作的悉心关怀与指导。感谢单尊老师、章俊彦老师、李克正老师、林开亮老师对创办本期《蛙鸣》的热情关切与鼓励。

最后，感谢各位读者阅读本期《蛙鸣》，期待与各位下期再见！

第 67 期《蛙鸣》编辑部

2025 年 7 月 17 日



# 《蛙鸣》第 68 期征稿启事

现在，我们正式为《蛙鸣》第 68 期征稿！

## 创刊宗旨

《蛙鸣》是中国科大数院的学生杂志。1981 年 6 月 20 日，首期《蛙鸣》由 78 级数学系的同学们自写、自编、自刻、自印而成。四十余年来，《蛙鸣》一直是一个完全由学生主导，共同探讨、自由交流数学的开放平台，让同学们可以互相交流彼此的思想和发现。所以，我们欢迎各位科大的校友和同学们踊跃投稿！同时，我们也欢迎外校师生投稿，增进交流！

## 投稿栏目

- (1) **蛙鸣记忆** 记录属于你的科大故事，叙述你与科大和数学的点点滴滴。
- (2) **初阳** 以小论文形式研究一个无需太高深的数学知识就足够理解和欣赏的问题，或对具有一定深度的数学内容进行深入浅出的科普。欢迎大一大二同学来稿！
- (3) **星辰** 分享你所喜爱或崇敬的数学工作者的故事、演讲与采访等，或让你印象深刻的讲座、座谈会与研讨会等的记录，或由你所撰写、翻译的数学科普与数学历史等。
- (4) **蛙声一片** 以小论文形式记录你对数学更深入的学习或研究，可以撰写关于一个前沿方向或经典问题与相关成果的综述，可以研究一个具有一定深度与背景的数学问题，也可以记录你对数学课程的进阶内容的学习与思考。
- (5) **笔墨诗篇** 分享你的原创文学作品，体裁不限。

## 投稿步骤

请将稿件发送到数院学生会官方邮箱：[mathsu01@ustc.edu.cn](mailto:mathsu01@ustc.edu.cn)

- (1) 邮件标题：蛙鸣 \_ 投稿栏目 \_ 文章标题 \_ 作者。
- (2) 邮件正文：作者信息、联系方式（邮箱、QQ 或微信等）。
- (3) 邮件附件：稿件 PDF（请隐去作者信息，以便盲审）。确定录用后请发送稿件 tex 源码。

## 文章要求

- (1) 含有较多公式的文章请使用 LaTeX 编写，推荐使用《蛙鸣》官网模板。
- (2) 数学类文章可以使用中文或英文撰写，要求语言朴实流畅，无明显语病。
- (3) 文章摘要：请在正文前简要介绍本篇文章用到的想法、思路、主要内容等概要信息。
- (4) 非原创内容请注明参考文献（尽可能详细到章节）。
- (5) 其他投稿相关问题可以发送邮件至 [mathsu01@ustc.edu.cn](mailto:mathsu01@ustc.edu.cn) 咨询。

更多资讯请关注数院学生会官方 QQ（2061453364）与微信公众号（中国科大数学科学学院学生会）了解。

感谢大家对蛙鸣的支持！

欢迎大家踊跃来稿！



数院学生会 QQ 号



数院学生会微信公众号



# 蛙鸣

第六十七期