蛙　　鸣

中国科技大学数学系学生会

蛙　　鸣

第二一期　1985. 11. 5.

目　　录

Ramanujan 猜测几点注记

刘弘泉

本文是作者的文章〔1〕的若干补充。

我们知道，若命 $\prod_{1}^{\infty}(1-X^m)^{-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}p(n)X^n$（这里 $X=\exp(2\pi i\tau)$，$I_m\tau>0$），则Ramanujan的猜测就是

$P(11^{\alpha}l+\rho)\equiv 0\pmod{11^{\alpha}}$，$l=0, 1, 2, \cdots$；$\alpha=1, 2, \cdots$此处 ρ 为使得 $24\rho\equiv 1\pmod{11^{\alpha}}$ 的最小正整数。其实，早在1967年，Atkin就已完全解决了此问题，但在科大确实不到其证明（他曾说发表于Glasgow. Math. J上）。现能查到J. Lehner的文章〔2〕、〔3〕他给出 $\alpha=1$，2和 $\alpha=3$ 的证明。重要的是，〔2〕引进了一种方法，从而将这个猜测转化为另一些同余式的证明。作者用此法给出 $\alpha=4$ 的证明（见〔1〕）。一切记号同〔1〕本文利用〔1〕所造之数表进行一些计算，证明了下述结论。

定理1 $U\Phi C^2\equiv 11\cdot\sigma\cdot\{DC+D-2C^2-C\}+133C-11D\pmod{11^2}$（其中 σ 为某一整数）。

证明：用熟知的方法我们有

$$11^6U\Phi C^2\equiv 11^3\alpha_1 C+11^5\alpha_2 C^2+11^7\alpha_3 C^3+11^4\beta_0 D+$$
$$+11^6DC\beta_1\pmod{11^8}$$

其中，α_i 与 β_j 都是待定整数。模 11^2 计算 ΦC^2 之 X^{11k}（$1\leq k\leq 5$）系数，并比较上式两边 X^k 之系数（$1\leq k\leq 5$），即得同余式组

$$
\begin{cases}
11^3\times 23\equiv \alpha_1+11\beta_0 \\
11^3\times 5\equiv 5\alpha_1+11^2\alpha_2+6\times 11\beta_0+11^3\beta_1 \\
11^3\times 52\equiv 19\alpha_1+10\times 11^2\alpha_2+11^4\alpha_3+11\times 28\beta_0 \\
\qquad +11^4\beta_1 \qquad\qquad (\bmod 11^5) \\
11^3\times 118\equiv 63\alpha_1+63\times 11^2\alpha_2+15\times 11^4\alpha_3+11\times 112\beta_0 \\
\qquad +7\times 11^4\beta_1 \\
11^3\times 95\equiv 185\alpha_1+316\times 11^2\alpha_2+132\times 11^4\alpha_3+ \\
\qquad +399\times 11\beta_0+429\times 11^3\beta_1
\end{cases}
$$

解之，易得

$$\alpha_1\equiv 11^3(-11\sigma+133)\pmod{11^5}$$

$$\alpha_2\equiv -2\times 11^2\sigma\pmod{11^3}$$

$\alpha_3\equiv 0\pmod{11}$，$\beta_1\equiv 11\alpha_1$ $\beta_0\equiv 11^3(\sigma-10)\pmod{11^4}$

代入简即所证。

定理2　$UDC\varnothing\equiv 2C+x(DC+D-C-2C^2)\pmod{11}$

证明：用熟知的方法我们有

$$11^4UDC\varnothing\equiv \alpha_0C+\alpha_1 11^2C^2+\alpha_3\cdot 11^4C^3+\beta_0\cdot 11D$$
$$+\beta_1\cdot 11^3DC\pmod{11^5}$$

计算$DC\varnothing$的X^{11k}（$1\leq K\leq 5$）的系数（模11），然后比较上式两端同余式，得

$$
\begin{cases}
2\times 11^4\equiv \alpha_0+11\beta_0 \\
-11^4\equiv 5\alpha_0+66\beta_0+11^2\alpha_1+11^3\beta_1 \qquad \bmod 11^5 \\
5\times 11^4\equiv 19\alpha_0+28\times 11\beta_0+10\times 11^2\alpha_1+11^4\beta_1 \\
\qquad +11^4\alpha_3 \\
5\times 11^4\equiv 63\alpha_0+11\times 112\beta_0+63\times 11^2\alpha_1+7\times 11^4\beta_1
\end{cases}
$$

$$\left\{\begin{array}{l} \quad +15\times 11^{2}\alpha_{3} \\ 11^{4}\times 7\equiv 185\alpha_{0}+399\times 11\beta_{0}+316\times 11^{2}\alpha_{1}+429\times 11^{3}\beta_{1} \end{array}\right.$$

解之，得

$$\alpha_{1}\equiv -2\times 11^{2}r\pmod{11^{3}},\ \beta_{1}=11r,\ 11\mid\alpha_{3}$$

$$\alpha_{0}\equiv 2\times 11^{4}-11^{4}r\pmod{11^{5}},\ \beta_{0}\equiv 11^{3}r\pmod{11^{4}}$$

代入化简即得所需。（其中 r 为某一整数）。

定理2 $U_{C}\equiv 11\cdot(4C+55D)\pmod{11^{3}}$

$U_{D}\equiv 77C\pmod{11^{2}}$

$U_{\varnothing C}\equiv 55C\pmod{11^{2}}$

$U_{\varnothing D}\equiv 0\pmod{11}$

证明：由 $U_{C}\equiv\alpha_{1}C+11^{2}\alpha_{2}C^{2}+11\beta_{0}D\pmod{11^{3}}$

直接查〔1〕中表，得同余式组

$$\left\{\begin{array}{l} -682\equiv\alpha_{1}+11\beta_{0} \\ -1474\equiv 5\alpha_{1}+11^{2}\alpha_{2}+66\beta_{0}\pmod{11^{3}} \\ -858\equiv 19\alpha_{1}+10\times 11^{2}\alpha_{2}+28\times 11\beta_{0} \end{array}\right.$$

解之，就得 $U_{C}\equiv 11(4C+55D)\pmod{11^{3}}$

由 $11U_{\varnothing C}\equiv\alpha_{1}C+11^{2}\alpha_{2}C^{2}+11\beta_{0}D\pmod{11^{3}}$

查〔1〕中表计算中 C 之 x^{11k}（$1\leq K\leq 3$）的系数，得

$$\left\{\begin{array}{l} 5\times 11^{2}\equiv\alpha_{1}+11\beta_{0} \\ 3\times 11^{2}\equiv 5\alpha_{1}+66\beta_{0}+11^{2}\alpha_{2}\pmod{11^{3}} \\ 7\times 11^{2}\equiv 19\alpha_{1}+28\times 11\beta_{0}+10\times 11^{2}\alpha_{2} \end{array}\right.$$

解之，即得 $U_{\varnothing C}\equiv 55C\pmod{11^{2}}$

由 $11U_{D}\equiv 11\alpha_{0}D+\beta_{1}C+11^{2}\beta_{2}C^{2}\pmod{11^{3}}$，

有
$$\begin{cases} 7\times 11^2 \equiv 11\alpha_0 + \beta_1 \\ 2\times 11^2 \equiv 66\alpha_0 + 5\beta_1 + 11^2\beta_2 \quad (\mathrm{mod}\ 11^3) \\ 1\times 11^2 \equiv 28\times\alpha_0 + 19\beta_1 + 10\times 11^2\beta_2 \end{cases}$$

解之，得 $U_D \equiv 77C \pmod{11^2}$

由 $11^2 U_{\emptyset D} \equiv \alpha_1 C + 11^2\alpha_2 C^2 + 11\beta_0 D \pmod{11^3}$

计算$\emptyset D$的X^{11}，X^{22}，X^{33}的系数后，得

$$0 \equiv \alpha_1 + 11\beta_0$$
$$0 \equiv 5\alpha_1 + 66\beta_0 + 11^2\alpha_2 \quad (\mathrm{mod}\ 11^3)$$
$$0 \equiv 19\alpha_1 + 28\times 11\beta_0 + 10\times 11^2\alpha_2$$

解之，易知 $U_{\emptyset D} \equiv 0 \pmod{11}$

〔注〕这定理在〔1〕中一带而过，未详加证明。

〔2〕中引进基函数A，B，C，D，其中C、D的Γ与$\emptyset$相乘然后用算子$U=U_1$，去作用。确实满足许多同余式。如上面的定理1、2、3，可它们本身却只有一个同余式，即$AC-1\equiv 0(11)$。现在笔者认为$D+CD-C-2C^2\equiv 0 \pmod{11}$是对的。借助于计算器。模$2\cdot 11^5$（$=322102$）计算A、B，可以验证：直到$X^{55}$，$D+CD-C-2C^2$的系数都被11整除。如确实能证明这点，我认为再经过不多计算，然后借助归纳法，即可完全解决Ramanujan的猜测。

参 考 文 献

〔1〕作者，Ramanujan一个猜想模11⁴情形的证明中国科大学生学报，（即出）

〔2〕J. Lehner, "Ramanujan identities involving the partition function for the moduli 11^α", Amer Journ of Math, Vol. 65 (1943) pp. 492-520.

〔3〕J. Lehner, "proff of Ramanujan's Congruence for the modulus 11³". Proc Amer Math Soc, 72 (1950), pp172-182.

〔4〕Tom, M. Apostol, Modular functions and Dirichlet series in Number Theory 1976. Springer-Verlag

樊增不等式的推广及其应用

831 陈计

1951年，樊𡋾在《美国数学月刊》第58卷第194页上提出了一个关于Hermite变换的特征值的极小性质：

樊𡋾不等式（1949年）设H是n维酉空间中的非负定Hermite变换，若特征值为$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$，则对于任何$i\leq n$有

$$(1)\quad \prod_{j=1}^{i}\lambda_j\leq\prod_{j=1}^{i}(Hx_j,x_j)$$

其中x_1，x_2，…，x_n为单位正交向量，(Hx_j,x_j)是向量Hx_j和x_j的内积。

本文本文旨在推广这个不等式，然后给出推广的一些应用，最后提出一个猜想。

定理 符号同上，对i＝1，2，…，n，有

$$(2)\quad (\Sigma_{j=1}^{i}\lambda_j^{k})^{1/k}\leq(\Sigma_{j=1}^{j}(Hx_j,x_j)^k)^{1/k},\ K\leq 1；$$

$$(3)\quad (\Sigma_{j=n-i+1}^{n}\lambda_j^{k})^{1/k}\geq(\Sigma_{j=n-i+1}^{n}(Hx_j,x_j)^k)^{1/k}$$

$k\geq1$。

定理的证明基于一个

引理（1983年） n阶正定对称方阵C的P—迹平均值为

$$jp(C)=(\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i^{p})^{1/p}，P\neq0。$$这里$\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots\leq\lambda_n$是C的特征值。补充定义$J_0(C)=(\det C)^{1/n}$。记$\Delta C=\mathrm{diag}(c_1,$

$C_{22}, \cdots C_{nn}$)，则

(4) $J_p(C) \leq J_p(\Delta C)$，$P \leq 1$；

(5) $J_p(C) \geq J_p(\Delta C)$，$P \geq 1$

特别地，令 $p=0$ 时即Habamard不等式

(6) $\det C \leq \pi_{j=1}^{n} c_{jj}$

这个引理是J. Borwein在《美国数学月刊》第90卷第402页上提出的。

定理的证明：设西空间由n个正交单位向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 生成 X是以这n个向量为行的矩阵。X^* 是它的共轭转置。则矩阵 X^*HX 的特征值与H相同。

设 H_i 为 X^*HX 删去最后 $n-i$ 行和列而得到的矩阵。显然 H_i 也是非负定Hermite矩阵。

记 H_i 的特征值为 $\lambda_1^{(i)} \leq \lambda_2^{(i)} \leq \cdots \leq \lambda_i^{(i)}$。由熟知的结果 $\lambda_1^{(i+1)} \leq \lambda_1^{(i)} \leq \lambda_1^{(i)} \leq \lambda_2^{(i+1)} \leq \cdots \leq \lambda_i^{(i)} \leq \lambda_{i+1}^{(i+1)}$，和由上述假设推知的结果 H_i 对角元为 (Hx_j, x_j)，$1 \leq j \leq i$。从而由引理，得

$$(\Sigma_{j=1}^{j} \lambda_j^k)^{1/K} \leq (\Sigma_{j=1}^{i} \lambda_j^{(i)k})^{1/k} \leq$$

$$[\Sigma_{j=1}^{i} (Hx_j, x_j)^k]^{1/k}, \quad k \leq 1.$$

同理可证 $k \geq 1$ 的情形。证毕。

下面，我们给出定理的一些有趣的应用，许多著名的不等式都将作为特列出现。

推论1 设A是n维酉空间的线性变换，假A和$(A+A^*)/2$的特征值分别为$\{\lambda_i\}$和$\{\rho_i\}$，$\rho_1\leq\rho_2\leq\cdots\leq\rho_n$，则对于$i=1,2,\cdots,n$，有

$$(7)\quad \left(\Sigma_{j=1}^{i}\rho_j{}^k\right)^{1/k}\leq\left(\Sigma_{j=1}^{i}(R\lambda_i)^k\right)^{1/k},\ k\leq 1;$$

$$(8)\quad \left(\Sigma_{j=n-i+1}^{n}\rho_j{}^k\right)^{1/k}\geq\left(\Sigma_{j=n-i+1}^{n}(R\lambda_i)^k\right)^{1/k},$$

$$k\geq 1$$

证明 由Schur上三角标准型，存在n个单位正交向量x_1，x_2，…，x_n，使$(Ax_j,x_j)=\lambda_j$，$1\leq i\leq n$则有

$$\left(\frac{A+A^*}{2}x_j,x_j\right)=\frac{\lambda_j+\bar{\lambda}_j}{2}=R\lambda_j,\ 1\leq j\leq n$$

从而

$$\left[\Sigma_{j=1}^{i}\left(\frac{A+A^*}{2}x_j,x_j\right)^k\right]^{1/k}=\left[\Sigma_{j=1}^{i}(R\lambda_j)^k\right]^{1/k}$$

由于$(A+A^*)/2$是非负定的，根据定理知，

当$k\leq 1$时左边$\geq(\Sigma_{j=1}^{i}\rho_i{}^h)^{1/k}$。这就证明了（7），同理可证（8）。证毕。

在（7）中，令$k\to 0$即得另一个樊域不等式（1953年）

$$(9)\quad \pi_{j=1}^{i}\rho_j\leq\pi_{j=1}^{i}R\lambda_j,\qquad 1\leq i\leq n$$

在上式中，再取$i=n$，得

$$(10)\quad \det\frac{A+A^*}{2}\leq\pi_{j=1}^{n}R\lambda_j$$

但是上式左边≤|detA|。所以得到Ostrowski-Taussky不等式（1952年）

$$(11)\quad \det\frac{A+A^*}{2}\leq|\det A|$$

下面的推论2是一个已知的结果（参看我校学报第11卷第1期和第3期，1981年）。

推论2　设A，B是两个n阶非负定Hermite矩阵，A，B A＋B的特征值分别为

$$A:\quad \alpha_1\leq\alpha_2\leq\cdots\leq\alpha_n$$

$$B:\quad \beta_1\leq\beta_2\leq\cdots\leq\beta_n$$

$$A+B:\ r_1\leq r_2\leq\cdots\leq r_n$$

则对 $i=1,2,\cdots n$，有

$$(12)\quad (\Sigma_{j=1}^{i} r_j^k)^{1/k}\geq(\Sigma_{j=1}^{i}\alpha_j^k)^{1/k}+(\Sigma_{j=1}^{i}\beta_i^k)^{1/k},\quad k\leq1;$$

$$(13)\quad (\Sigma_{j=n-i+1}^{n} r_j^k)^{1/k}\leq(\Sigma_{j=n-i+1}^{n}\alpha_j^k)^{1/k}+(\Sigma_{j=n-i+1}^{n}\beta_j^k)^{1/k},\ k\geq1$$

证明　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是A＋B n个单位正交向量，则对于 $1\leq j\leq n$，有

$$(A+B)x_j=r_jx_j$$

由定理，当 $k\leq1$ 时，有

$$\left(\Sigma_{j=1}^{i}\alpha_j^k\right)\leqq\left[\Sigma_{j=1}^{i}(Ax_j, x_j)^k\right]^{1/k}$$

$$\left(\Sigma_{j=1}^{i}\beta_j^k\right)^{1/k}\leqq\left[\Sigma_{j=1}^{i}(Ax_j, x_j)^k\right]^{1/k}$$

两式相加，再用Minkowski不等式，得

$$\left(\Sigma_{j=1}^{i}\alpha_j^k\right)^{1/k}+\left(\Sigma_{j=1}^{i}\beta_j^k\right)^{1/k}$$

$$\leqq\left[\Sigma_{j=1}^{i}(Ax_j, x_j)^k\right]^{1/k}+\left[\Sigma_{j=1}^{i}(Bx_j, x_j)^k\right]^{1/k}$$

$$\leqq\left[\Sigma_{j=1}^{i}((A+B)x_j, x_j)^k\right]^{1/k}=\left(\Sigma_{j=1}^{i}r_j^k\right)^{1/k}$$

同理可证当 $k\geqq 1$ 时的情形。证毕。

在(12)，令 $k\to 0$ 即是Oppenkeim不等式（1954年）

$$(14)\quad\left(\pi_{j=1}^{i}r_j\right)^{1/i}\geqq\left(\pi_{j=1}^{i}\alpha_i\right)^{1/i}+\left(\pi_{j=1}^{i}\beta_j\right)^{1/i}$$

在上式中，再取 $i=n$，即是Mjnkowski不等式（1902年）

$$(15)\quad[\det(A+B)]^{1/n}\geqq(\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}$$

设 λ，$\mu>0$，$\lambda+\mu=1$，则从上式可得

$$(16)\quad[\det(\lambda A+\mu B)]^{1/n}\geqq\lambda(\det A)^{1/n}+\mu(\det B)^{1/n}$$

对上式左边用算术平均—几何平均不等式，得到又一个樊域不等式（1950年）

$$(17)\quad\det(\lambda A+\mu B)\geqq(\det A)^{\lambda}(\det B)^{\mu}$$

顺便指出，彭明海于1983年在《数学通讯》第1期上数

学归纳法推广成

(18) $\det(\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_2+\cdots+\lambda_m A_m)\geqq(\det A_1)^{\lambda_1}(\det A_2)^{\lambda_2}\cdots(\det A_m)^{\lambda_m}$

其中$\lambda_k>0$，$1\leqq k\leqq m$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1$

其实，把本文中所给出的不等式从两个情形推广到m个情形，用数学归纳法时没有实质的困难。

在推论2中，令$i=n$，得到两个k－迹不等式：

(19) $\{\mathrm{tr}(A+B)^k\}^{1/k}\geqq(\mathrm{tr}A^k)^{1/k}+(\mathrm{tr}B^k)^{1/k}$，

$k\leqq1$；

(20) $\{\mathrm{tr}(A+B)^k\}^{1/k}\leqq(\mathrm{tr}A^k)^{1/k}+(\mathrm{tr}B^k)^{1/k}$

$k\geqq1$。

众所周知，矩阵的迹和元数之和有许多相似的地方。由(19)和(20)，我们不禁猜测成立如下不等式：

猜想　设A，B为半定的非负方阵，则

(21) $\{\mathrm{su}(A+B)^k\}^{1/k}\geqq(\mathrm{su}A^k)^{1/k}+(\mathrm{su}B^k)^{1/k}$

$k\leqq1$；

(22) $\{\mathrm{su}(A+B)^k\}^{1/k}\leqq(\mathrm{su}A^k)^{1/k}+(\mathrm{sv}B^k)^{1/k}$

$k\geqq1$

在(21)中，当$k\to0$时，即是Minkowski不等式(15)。

Cauchy函数方程的一个注记

821 刘启铭

A. L. Cauchy证明了R^1上连续函数f若满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$ （1）则必为线性齐次函数cx（参见文[1]）

显见（1）式蕴含$f(mx)=mf(x)$ $(m\in N)$和$f(-x)=-f(x)$ Cauchy正是从这两式出发证明了结论。

因此我们自然会问$[0, +\infty)$上满足下列方程组：

$$\begin{cases} f(k_1x)=k_1f(x) \\ f(k_2x)=k_2f(x) \\ \quad\vdots \\ f(k_nx)=k_nf(x) \end{cases} \quad k_i>0, k_i\neq 1 \quad (1\leq i\leq n) \quad (2)$$

的连续函数f是否必为线性齐次函数？这篇短文将回答这个问题。

当$n=1$时答案是否定的

引理一：在$[0, +\infty)$上满足$f(kx)=kf(x)$（k是某一正数）的连续函数不全为线性齐次函数

证明：$k=1$时结论是显然的。

$$f(kx)=kf(x)。等价于 f\left(\frac{1}{k}x\right)=\frac{1}{k}f(x)$$

$\therefore$ $k\neq 1$时不妨设$k>1$

在$[0, +\infty)$上令

$$f(x)=\begin{cases} k^n\sin\dfrac{\pi x}{k^n} & k^n\leq x<k^{n+1} \quad (n\in z) \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

不难验证 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且满足 $f(kx)=kf(x)$ 但不是线性齐次函数。 命题成立

引理二：若 α 是无理数，则存在无数多个整数 p、q $(p,q)=1$ 使

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$$

这是有理数逼近无理数的基本定理。参见文〔2〕。

引理三：若 k_1，$k_2>0$，k_1，$k_2\neq1$ $\frac{\log k_2}{\log k_1}$ 是无理数，则点集 $s=\{k_1^{m}k_2^{n}\mid m,n\in Z\}$ 是 $[0,+\infty)$ 上稠密集

证明：由引理二知存在无数多个整数 p、q，$(p,q)=1$ $q>0$，使

$$\left|\frac{\log k_2}{\log k_1}-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$$

$$\therefore\quad e^{-\frac{|\log k_1|}{q}}<\frac{k_1^{p}}{k_2^{q}}<e^{\frac{|\log k_1|}{q}}$$

$\therefore$ S 在 $x=1$ 处稠密，在 $x=0$ 处稠密是显然的

$a>0$

令 $s'=\{x>a\mid x\in s\}$，则 s' 有下界 a，故有下确界 ka $(k\geq1)$

若 $k>1$，则存在 $x_0\in s$ $\frac{1}{k}<x_0<1$

$\therefore \forall x\in s'$，$x_0 x>\frac{1}{K}x\geq a$ 而 $x_0 x\in s$，$x_0 x\in s'$

$\therefore$ $x_0 x\geq ka$ $x\geq\frac{ka}{x_0}$ 这与 ka 为 s' 下确界矛盾

$\therefore$ $k=1$ S 在 $x=a$ 处稠密 命题成立

定理：在 $[0+\infty)$ 上满足（2）的连续函数必为线性齐次函数的充要

条件是$\frac{\log k_i}{\log k_1}$（$1\leq i\leq n$）不全为有理数。

证明：必要性：若$\frac{\log k_i}{\log k_1}$（$1\leq i\leq n$）全为有理数。

则存在整数$m_1\cdots m_n$：$\frac{\log K_i}{\log k_1}=\frac{m_i}{m_1}$（$1\leq i\leq n$）

$\therefore$存在$t\in S$：$\log K_i=m_i t$　　（$1\leq i\leq n$）

令$a=e^t$，则$k_i=a^{m_i}$　　（$1\leq i\leq n$）

$\therefore$（2）即$f(a^{m_i}x)=a^{m_i}f(x)$　（$1\leq i\leq n$）　（3）

由引理一知：存在〔0，+∞）上非线性连续函数$f(x)$满足$f(ax)=af(x)$由归纳法知$f(a^n x)=a^n f(x)$　$n\in Z$所以满足（3）矛盾。必要性得征

充分性：$\frac{\log k_i}{\log k_1}$不全为有理数（$1\leq i\leq n$），则$n\geq 2$不妨设$\frac{\log k_2}{\log k_1}$是无理数。

$f(k_1 x)=k_1 f(x)$。$f(k_2 x)=k_2 f(x)$。由归纳法知

$f(k_1{}^m K_2{}^n x)=k_1{}^m k_2{}^n f(x)$. $\therefore f$在〔0，+∞）上的稠密集S上满足$f(a)=af(1)$（据引理三）。

f是连续函数，$\therefore$在〔0，+∞）上$f(a)=af(1)$

充分性得征。

在自然数范围上成立结论：

推论：在〔0，+∞）上满足$f(m_i x)=m_i f(x)$ $m_i>1$，$m_i\in N$（$1\leq i\leq n$）的连续函数必为线性齐次函数的充要条件是不存在$a, k_1, \cdots, k_n\in N$：$m_i=a^{k_i}$（$1\leq i\leq n$）

参考书目：

〔1〕 G. Klambauer，数学分析，庄亚栋译，上海科学技术出版社（1981）。P147－153。

〔2〕 华罗庚，数论导引，科学出版社（1979）P140－145。

斐波纳契数列一个性质

刘弘泉

斐波纳契数列 $\{F_n\}$ 定义为：

$$F_1=F_2=1,\ F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \quad (n\geq 1)$$

众所周知，它是二阶循环数列。本文只拟给出此数列的一个算术性质。

定理，对任意正整数 m 和 n，我们有

$$(F_m, F_n)=F_d \Leftrightarrow (m, n)=d$$

先给出四条引理。

引理1。$m\mid n \Rightarrow F_m\mid F_n$

证：由 $m\mid n$ 设 $n=mk$，K 是正整数。

当 $K=1$ 时，$F_n=F_m$，$F_m\mid F_n$

设当 K 时成立，即 $F_m\mid F_{mk}$。则由

$$F_{m(k+1)}=F_{mk+m-1}+F_{mk+m-2}$$

$$=2F_{mk+m-2}+F_{mk+m-3}$$

$$=F_3F_{mk+m-2}+F_2F_{mk+m-3}$$

$$=\cdots\cdots$$

$$(1)\qquad =F_mF_{mk+1}+F_{m-1}F_{mk}$$

由归纳假设，$F_m\mid F_{mk}$，故知 $F_m\mid F_{m(k+1)}$。由归纳法，便知结论成立。

引理2。$(F_{nq+1}, F_n)=1$

证：若有素数 $P(\geq 2)$ 使 $P\mid(F_{nq+1}, F_n)>1$，将导出矛盾。事实上由

$$F_{nq+1}=F_{nq}+F_{nq-1}$$

及引理1，知

$P | F_{nq}$；又 $P | F_{nq+1}$，故有

$P | F_{nq-1}$

再利用

$$F_{nq}=F_{nq-1}+F_{nq-2}$$

又知

$$P \mid F_{nq-2}$$

这样一直推导下去，最后将有

$$P | F_2 =1$$

这不可能。故必 $(F_{nq+1}, F_n)=1$。

引理3。$F_n | F_m \Rightarrow n | m$

证：如果 $n \nmid m$，由于显然 $F_n<F_m \Rightarrow n<m$

由带余除法可得

$$m=nq+r$$

其中 $q \geq 1$ 而 $1\leq r\leq n-1$。则由

$$F_m=F_{nq+r}=F_{nq+r-1}+F_{nq+r-2}$$
$$=F_3 \cdot F_{nq+r-2}+F_2 \cdot F_{nq+r-3}$$
$$=\cdots\cdots\cdots$$

$$=F_r F_{nq+1}+F_{r-1} F_{nq} \qquad (2)$$

由引理1知 $F_n | F_{nq}$，又 $F_n | F_m$ 已知，由（2）式有

$$F_n | F_r F_{nq+1}$$

由引理2知 $(F_n, F_{nq+1})=1$，故必 $F_n | F_r$，但 $1 \leq r \leq n-1$，$F_r<F_n$，故 $F_n | F_r$ 为一矛盾。于是必 $n | m$。

引理4。如果 $m=nq+r$，$q\geq 0$ 而 $1 \leq r \leq n$

且 $n=rq_1+r_1$，$q_1\geq 0$而$1\leq r_1\leq r$，则有

$$(F_m, F_n)=(F_n, F_r)=(F_r, F_{r_1})$$

证：只须证$(F_m, F_n)=(F_n, F_r)$。由（2）式有

$$(F_m, F_n)=(F_rF_{nq+1}+F_{r-1}F_{nq}, F_n)$$

由引理1，$F_n \mid F_{nq}$，故有

$$(F_m, F_n)=(F_rF_{nq+1}, F_n)=(F_r, F_n)。$$

上面最后一步又用到引理2。

定理的证明：设$(m, n)=d$；不妨设$m\geq n$，则可得如下一串辗转相除式：

$$m=nq_0+r_0，n=r_0q_1+r_1$$

$$r_0=r_1q_2+r_2，\cdots\cdots$$

$$r_s=r_{s+1}q_{s+2}+r_{s+2}，且r_{s+2}=d，即$$

$$r_{s+2}=(r_{s+2}, r_{s+1})=(r_{s+1}, r_s)=\cdots=(r_1, r_0)=(r_0, n)=(m, n)=d。$$

由引理4，得

$$(F_m, F_n)=(F_n, F_{r_0})=(F_{r_0}, F_{r_1})=\cdots=(F_{r_s}, F_{r_{s+1}})$$

$$=(F_{r_{s+1}}, F_{r_{s+2}})=F_{r_{s+2}}=F_d$$

最后一步用到了引理1（由于$r_{s+2} \mid r_{s+1}$）。

反过来，设$(F_m, F_n)=F_d$，而$(m, n)=d'$

则同上可得一串辗转相除式，而

$$(F_m, F_n)=(F_n, F_{r_0})=\cdots=(F_{r_{s+1}}, F_{r_{s+2}})=F_{r_{s+2}}$$

$$=F_{d'}$$

所以 $F_d=F_{d'}\Rightarrow d=d'$。证毕。

推论。若$F_n \neq 3$且F_n为素数，则n必为素数。证：如果$2 \mid n$，因$F_2 = 1$，$F_4 = 3$，故$n \neq 2$，4。设$n = 2n'$，$n' \geq 3$，于是由引理1，$F_{n'} \mid F_n$。且$F_{n'} \neq 1$，$F_{n'} \neq F_n$，这导致矛盾。

如果$2 \nmid n$，设$n = n_1 n_2$，$n_1 \geq 3$，$n_2 \geq 3$，则由$F_{n_1} \mid F_n$同样得出矛盾。所以此时n必素数。

Cochran定理在任意域上的等价性推广

821 严峰生

在数理统计中有下面的矩阵命题：

（Cochran定理）设 A_1，A_s均为非零的n阶实对称矩阵。如果它们的和A为K^2—矩阵且秩 $A=\sum_{i=1}^{s}$ 秩 A_i，则 A_1，A_2，…A_s必为互相正交的K^2—矩阵（数理统计中，K^2—矩阵定义为非零的等方实对称矩阵。

文〔1〕中，谢邦杰教授把它推广到任意体上非对称矩阵的命题：

（体上Cochran定理）设 A_1，A_2，…A_s为任意体上的非零的n阶矩阵。如果它们的和A为等方的且秩 $A=\sum_{i=1}^{s}$ 秩 A_i，则 A_1，A_2，…A_s必为互相正交的等方矩阵。

为了寻找一般体上方阵的相抵，相似标准形，谢先生使用的方法比在域上解决相应问题要多用一套技巧〔2〕（虽然问题的答案并没有太多区别。值得一提的是，很多问题可以通过这种技巧而得到简单的证明）使用这套完整的技术，谢先生在〔1〕中得出了Cochran定理在任意体上的推广。

本文用大家熟悉的线性方法，给出一般域上等价性Cochran定理：

（域上等价性Cochran定理）设 A_1，A_2，…，A_s均为任意域F上非

零的n阶方阵，$A=\sum_{i=1}^{s}A_i$，则下面条件等价

$$(i)A^2=A\text{且}\quad rankA=\sum_{i=1}^{s}rankA_i$$

$$(ii)A_iA_j=O(i\neq j),A_i^2=A_i$$

证明：域F上n维行向量空间$V=F(n)$有一组标准基向量$\{e_i\}$

$e_i=(1,0,\cdots,0),\cdots\cdots h=(0,\cdots,0,1)$，通过这组基，我们知道从$M_n(F)$到 $nd(V)$有一个同构映射（作为域F的代数）

及其矩阵X和线性变换X为同一个字母。

从$A=\sum_{i=1}^{s}A_i$ 知 $AV=\sum_{i=1}^{s}A_iV$ 性质，这样矩阵上的命题等价于线性空间的命题，为方便我们记

$dimXV=rankX$，由此知

$AV=\bigoplus_{i=1}^{s}A_iV$等价于$rankA=\sum_{i=1}^{s}rankA_i$

(i)⟹(ii)由 $rankA=\sum_{i=1}^{s}rankA_i$得到

$$AV=\bigoplus_{i=1}^{s}A_iV$$

(ii)⟹(i)如果$O=\sum_{j=1}^{s}A_iy_j$，则 $O=\sum_{j=1}^{s}A_iA_jy_j=A_iy_i$

A_iV 故 $y\in V$，$A_iV\in AV$，这时

$y_i\quad V,A_iy=A_y,\quad A\quad\sum_{y=1}^{n}A_jy_i$

故$A_iy=A_iy_i$，$O=A_jy_i(j\neq i)$，又$A^2=A$
由此$A_iy=Ay_i=A$，Ayi，得到

$A_i y = A_i \cdot Ay_i$，$0 = A_j \cdot Ay_i$，即

$A_i y = A_i \cdot A_i y$，$0 = A_j \cdot A_i y$

故 $A_i = A_i^2$，$0 = A_j A_i$（$j \neq i$）。

即知 $\sum_{i=1}^{s} A_i V = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i V$

又 $\forall y \in V$，$A_i y = A \cdot A_i y \in AV$

得到 $AV = \bigoplus_{i=1}^{s} A_i V$

$A^2 = A$ 为显然。

至此，把结果用矩阵语言表出，就得出域上等价性 Cochran 定理。

注1，证明中（i）⟹（ii）就是域上 Cochran 定理的简单证法。

2，体上的等价性命题也是成立的。

3、体上定理的简洁证明尚待发现。

参考文献：

〔1〕谢邦杰，Cochran 定理在任意体上的推广，1／1978 吉林大学学报

〔2〕谢邦杰，抽象代数学，（八二年第一版），上海科学技术出版社

内Rrower不动点定理证明Jordan曲线定理

IR. MAEHRA

闭区间〔a、b〕（a＜b）同胚下的像称为一个弧，而一个圆的胚像称为一条约当曲线，拓扑学中最经典的定理之一就是：

定理（Jordan曲线定理）

平面R^2上的一条约当曲线J的余集合有两个分支，而且每一分支都分支都以J为边界。

定理（Rrower不动点定理）

任一圆盘的连续自映射有一个不动点。

首先，我们注意两个有关R^2-J的分支的事实。这里J是一条约当曲线。

（a）R^2一恰好含有一个无界的分支，同时

（b）R^2-J的每一分支都是道路连通的而且为开集

断言（a）由J的有界性得出，而（b）

由R^2的局部连通性和J为闭集得出

引理1，若R^2-J不连通，那么每一支都以J为边界

证明：由假定，R^2-J至少含有两个分支，得U是任一分支。因为任一其它分支W都与U不相交，而且为开集，故W　$V=\Phi$于是U的边界$U\cap U^C$与W的交集为Φ，故$U\cap U^C\subset J$。若U　UC$\neq J$，则存在一条弧$A\subset J$使得$U\cap U^C\subset A$（　）下面我们由此导出矛盾，由（n），R^2-J至少有一个有更分支，用O记一个有界分支中的一点，若U有果则选择$O\in U$，设D是一个以O为圆心的木圆，整个J含于D的内部，则D的边界S包含在R^2-J的无界分支内，由弧A同胚于〔0，1〕，应

用Tietse扩张定理知。恒同映射$A \to A$存在连续扩张$r: D \to A$。根据U有界或无界，我们分别定义映射$D \to D-\{0\}$如下：

$$q(z)=\begin{cases} r(z) & 若 z \in U \\ z & 若 z \in U^C \end{cases} \quad 或 q(z)=\begin{cases} z & 若 z \in U \\ r(z) & 若 z \in U^C \end{cases}$$

由（ ）知。$U \cap U^C \subset A$，而且$r|_A$=恒同映射

以J为 故q是有意义而且连续的，注意到$q|_S$=恒同映射

定义：$P: D-\{0\}$为自然投影 而$t: S \to S$是对映映射。则复合映射$t \circ p \circ q \circ: D \to S$没有不动点，与Brower不动点定理矛盾。故必有$U \cap U^C = J$。

我们可以看到上面的证明隐含证明了一个讨论约当曲线经常用的引理：没有一条弧能够分离R^2

为了证明定理，我们需要另外一个引理

用$E(a, b, c, d)$代表平面R^2中矩形集合$\{(x, y)$ $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$这里$a<b, c, <d$

引理2 设$h(t)=(h_1(t), h_2(t))$和$V(t)=(v_1(t), v_2(t))$ $(-1 \leq t \leq 1)$

是$E(a, b, c, d)$内连续的道路，满足

$h_1(-1)=a, h_1(1)=b, V_2(--1)=C, V_2(1)=d$

于是这两条道路必相交，即存在$S, t[-1, 1]$

满足$h(s)=V(t)$

证明：设$\forall s, t$ 画$h(S) \neq V(t)$

用$N(s, t)$代表$h(s)-v(t)$的最大模

即$N(s, t)=\max\{|h_1(s)-v_1(t)|,$

$|h_2(s), -V_2(t)|\}$

任意则数 s, t，有 $N(s, t) \neq 0$

定义一个连续映射F：$E(-1, 1; -1, 1) \to E(-1, 1; -1, 1)$ 如下：

$$F(s, t) = \left(\frac{v_1(t) - h_1(s)}{N(s, t)}, \frac{h_2(s) - v_2(t)}{N(s, t)}\right)$$

注意到F的像在 $E(-1, 1; -1, 1)$ 的边界上。为了证明F没没有不动点。假设有 $F(s_0, t_0) = (s_0, t_0)$，于是有 $|s_0| = 1$ 或 $|t_0| = 1$

例如设 $s_0 = -1$，由 （＊＊） $F(-1, t_0)$ 的第一个分量 $v_1(t_0) - h_1(-1)/N(-1, t_0)$ 非负故不可能等于 $s_0\ (=-1)$。同样 $|s_0| = 1$ 或 $|t_0| = 1$ 的其他情形不成立与Brower不动点点定理矛盾

（这里是对与圆盘同胚的 $E(-1, 1; -1, 1)$ 应用Brower不动点定理）

现在我们已经准备证明约当曲线定理。由引理1，只须证明 $R^2 - J$ 存在而且只存在一个有界的分支

证明分成三步。建立起记号同时定义 $R^2 - J$ 中的一个点 z_0，证明含有 z_0 的分支U有界。证明不存在异于U的其它分支。

由于J是紧张的，故存在J中的点a，b使得距离 $||a-b||$ 为最大。我们可以假设 $a = (-1, 0)$，$b = (1, 0)$，于是矩形集合 $E(-1, 1; -2, 2)$ 包含J，它的边界 交J恰好两个点a，b。用n记 $E(-1, 1; -2, 2)$ 顶边的中点，S为底边的中点，即 $n = (0, 2)$，$S = (0, -2)$ 由引理2。线段

ns与J相交。用l记J$\cap\bar{n}$s中y分量最大的点（即形如（o，y）而y最大）。点a和b把J分成两段弧用Jn记包含l的那部分。另一部分记为Js。用m记Jn$\cap$ns中分量y最小的点（可能有l＝m）于是线段ms与J_s相交，否则道路nl+lm+ms（lm记Jn的一段弧端点为l，m）与Js不相交与引理2矛盾

用P和q分别记$J_s\cap$ms中y最大和最小的点（意义同上）最后，令z_0为线段mp的中点（见图1）

现在我们证明R^3－J的包含z_0的分支U有界

假设U无界，由于U是道路连通的，故存在U中从z_0到E（－1，1；－2，2）外的一条道路α用W记α交E（－1，1；－2，2的边界Γ的第一个点，用α_w记α的从z_0到W的部分如果W在Γ的下半部分，我们能找到P中的从W到S的道路WS不含a，b考虑道路nl+lm+mz_0+α_w+ws这条道这条道路与J_s不相交，与引理2矛盾，同理，如果W在P的上半部分，道路sz_0+α_w+wn与Jn不相交，这里Wn是P中从W到n的最短距离，与引理2矛盾

所以U是有界分支。

S

Fig 1

最后，假设存在另一个R^3－J的有界分支W（≠U）显然，W ⊄E(－1，1；－2，2)，我们用β记道路nl+lm+mp+pq+qs，这里pq是从p到q的J_s的一段弧，明显地β∩W＝Φ，由于a，b

部分别存在a，b的球形邻域 V_a，V_b满足 $V_a \cap \beta = \Phi$，$V_b \cap \beta = \Phi$，由引理1，理1，a和b属于W，故存在 $a_1 \in \overline{W} \cap V_a$，$b_1 \in \overline{W} \cap V_b$ 设 a_1 b_1 为W中从 a_1 从 a_1 到 b_1 的一条道路，则道路 $\overline{aa_1} + \overline{a_1 b_1} + \overline{b_1 b}$ 与β不相交，与引理2矛盾至此，定理，证毕

REFERENCES

1. J. A. Bondy and U. S. R. Murty, Graph Theory With Applications. NawYork. 1976
2. J. Duguadj Topology Boston 1966
3. E. E. Moise Geometry, Topology in Dinansion 2 and 3
4. O. Veblen Thery of Plane curves in nometrial anylysis sits

译自 AMM. DEC. 1984

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematices

G. H. Farcdy

a

〔研究简报〕

一个不等式的推广

831 陈计

1982年，朱亮豪用反向归纳法证明了〔1〕

$$(1)\quad \left(\frac{\pi_{j=1}^{n} x_j}{\pi_{j=1}^{n}(X_j+1)}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\Sigma_{j=1}^{n} X_j}{\Sigma_{j=1}^{n}(X_j+1)}, X_j \geq 0$$

$$i=1, 2, \cdots, n$$

其实，在1981年，我校林秀鼎就已经证明了一个比（1）更一般的不等式〔2〕

$$(2)\left[\frac{\pi_{j=n-i+1}^{n} X_j}{\pi_{j=n-i+1}^{n}(x_j+1)}\right]^{1/i} \leq \frac{\Sigma_{j=1}^{n} X_j}{\Sigma_{j=1}^{n}(X_j+1)}$$

$$X_1 \geq X_2 \geq \cdots \geq X_n \geq 0$$

特别地，取 $i=n$ 时即为（1）。

1983年，方爵亚提出了（1）的一个推广〔3〕

$$\frac{M_\alpha(X)}{M_\alpha(X+1)} \leq \frac{M_\beta(X)}{M_\beta(X+1)}, \alpha \leq 1 \leq \beta)$$

其中，$M_\alpha(X)$为正数组 $X_1\ X_2, \cdots, X_n$的 α 次幂平均，等等，下同

1985年，陈计用排序原理证明了〔4〕

$$\frac{M_\alpha(x)}{M_\alpha(X+1)} \leq \frac{M_\beta(X)}{M_\beta(X+1)}, \alpha \leq 0 \leq \beta$$

本文给出如下定理，（1）－（4）均为其特例。

定理　设$X_1 \geqq X_2 \geqq \cdots \geqq X_n \geqq 0$，且　$h < k$，则

$$(5)\quad \left[\frac{\Sigma_{j=n-i+1}^{n} X_j^{h}}{\Sigma_{j=n-i+1}^{n} (X_j+1)^{h}}\right]^{1/h} \leq \left(\frac{\Sigma_{j=1}^{n} X_j^{k}}{\Sigma_{j=1}^{n} (X_j+1)^{k}}\right)^{1/k}$$

$$i=1, 2, \cdots, n$$

特别地，令 $i=n$ 得

$$(6)\quad \frac{M_h(X)}{M_k(X+1)} \leq \frac{M_k(X)}{M_k(X+1)}$$

定理的证明基于下面这个排序不等式：

引理　若

(i) $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_n \geqq 0$，$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \cdots \geqq \beta_n \geqq 0$

(ii) $(\Sigma_{j=1}^{i} \alpha_j^{k})^{1/k} \leq (\Sigma_{j=1}^{i} \beta_j^{k})^{1/k}$，$i=1, 2, \cdots, n$

(iii) $(\Sigma_{j=1}^{n} \alpha_j^{k})^{1/k} = (\Sigma_{j=1}^{n} \beta_j^{k})^{1/k}$

则当 $h < k$ 时，有

$$(7)\quad (\Sigma_{j=n-i+1}^{n} \alpha_j^{h})^{1/h} \leq (\Sigma_{j=n-i+1}^{n} \beta_i^{k})^{1/h},$$

$$1 \leq i \leq n$$

参考文献

〔1〕朱尧辰，数学通报，1982年第11期

〔2〕林秀鼎，中国科学技术大学学报，第11卷，第1期，198年。

〔3〕方献业，数学通报，1983年第12期。

〔4〕陈　计，蛙鸣，第20期。

〔研究简报〕

关于Eisenstein定理的推广

821 刘启铭

关于推广经典的Eisenstein定理，在《蛙鸣》第16期，第20期上得到过有意义的探讨，特别是马披同学给出了一个很漂亮的结果，（即本文定理二），本文首先再给出一个结果（定理三）

在本文中，设D为UFD $f(x)=\sum_{i=0}^{n(f)} a_iX^i \in D[X]$，

$\deg f=n(f)\geq 1$ P是D中一个不可约元素，使得 $P^{l(f)}\| a_0$，$P|a_i$ $(-1\leq i\leq k(f)$，这里记 $a_{-1}=0)$ 且 $P\nmid a_{k(f)+1}$，$-1\leq k(f)<n(f)$ （显见 $l(f)=0 \Leftrightarrow k(f)=-1$），在不致混淆的情况下，简记 $n(f)=n$，$k(f)=k$，$l(f)=l$，称 (n, k, l) 为 $f(x)$ 的特征向量。

定理一（Eisenstein），若 $k=n-1$、$l=1$，则 $f(x)$ 在 $D[X]$ 中不可约。

定理二：若 $l\geq 1$，则 $f(x)$ 在 $D[X]$ 中必有次数 $\geq\frac{k+1}{l}$ 的素因子。

定理三：$f(x)$ 在 $D[X]$ 中至多可分成 $n-k+l-1$ 个素因子的乘积。

定理二和定理三具有最佳性，即成立下列结果：

定理四：若 $l\geq k+1$ 时，对任意 $n\geq k+1$，存在 $f(x)\in D[X]$ f(f(x)的特征向量为 (n, k, l) 且 $f(x)$ 是n个一次因子的乘积。

证明：$f(x)=(x+1)^{n-k-1}(x+p)^k(x+p^{l-k})$

定理五、当 $1\leq l\leq k+1$ 时，对任意 $n\geq k+1$，存在 $f(x)\in D[X]$ f(x)

的特征向量为（n，k，l）且其最高次素因子为$\left[\dfrac{K+1}{l}\right]$（当$l \mid k+1$时或$\left[\dfrac{K+1}{l}\right]+1$（当$l \nmid K+1$时）

证明：　设$K+1=ml+t$　$(0 \leqq t < l)$

$$f(x)=(X^{m+1}+P)^{t}(X^{m}+P)^{l-t}\quad(X+1)^{n-k-1}$$

定理六：当$l \leqq K+1$时，对任意$n \geqq K+1$，存在$f(x) \in D[x]$：$f(x)$的特征向量为（n，k，l）。且$f(x)$是$n-k+l-1$个素因子的乘积。

证明：$f(x)=(x+1)^{n-k-1}(x+p)^{l-1}(X^{k-l+2}+P)$

〔数学争鸣〕

M. Atiyah 访问记

R. Minio

Michael Atiyah生于1929年，在剑桥三一学院获得其学士及博士学位（1952，1955）。他历任牛津大学的Savi-liar几何讲座教授（1963-1969）及普林斯顿高等研究所数学教授（1969-72）；现在他是牛津大学的皇家学会专职研究数学教授。

Atiyah教授荣获的称号包括：皇家学会会员以及法国、瑞典、美国的科学院院士。他在1966年莫斯科国际数学家大会上获Fields奖。他的研究领域涉及到数学的广大的部分，包括拓扑、几何、微分方程和数学物理。

下面是本刊（The Intelligencer）原编辑R. Minio于牛津采访他的正式交谈。

Minio（以下简称为M）：我认为关于你的一些背景性材料可能是有价值的。你是什么时候开始对数学发生兴趣的？有多早？

Atiyah（下面简称为A）：我觉得我年纪很轻时就开始对数学有兴趣。有一个阶段，大约是十五岁时，我对化学有浓厚的兴趣，认为它很有前途；大约经过了一年的高等化学的学习之后，我发现它不是我想干的东西，因而又回到了数学，我们从来没有认真考虑过去干别的。

M：这一点在很早就显露出来了！

A：是的，我认为如此。我的父母从我小时候起就认为我生来就是搞数学的料，他们一直这么认为。

M：但他们不是数学家？

A：他们不是，不是的。

M：你在中学时得到过指导吗？你的老师对你还好吗？

A：我认为我的老师都挺好。我们的关系也好。我开始是在埃及上的学，那是个相当好的学校。

M：你生在那里？

A：不，我出生在英格兰，但我生长在中东。我父亲在苏丹工作，因此我中学主要是在埃及念的。大战结束后我们回国。我在英国又念了几年。那是个好学校，那儿有很多好学生。然后我去剑桥，那儿的好学生也很多。

我认为我没有受到哪一个人的特别大的影响。但是我受到的教育是好的。我有很多机会去接触好的数学家；在这个意义下我的底子是好的。

M：在剑桥你主要是自己干？

A：我是服了两年兵役之后去的剑桥（这是两个极端）。事实上，我去剑桥的时间比学年开始要早一点儿，我念了一个夏季学期。那儿的迷人的气候及美丽的环境给我极其深刻的印象。我喜欢呆在图书馆里读书，周围全是书，那儿的气氛令人难忘。它诱发了我的想象力。

那儿有许多聪明的学生。我从教师那儿也得到应有的指导。我不觉得哪位老师给我的灵感特别多；有些课是好的，有些并不那么好

M：你早期的论文之一是与Hodge合作的是吧？

A：是的。它事实上是我的学位论文的一部分。他是我的研究导师。对我来说，能与他一起工作是很重要的事。我来到剑桥时几何学正着重在老式的经典的投影代数几何上。我非常喜欢它。要不是

Hodge使我认识到他所代表的新潮流，即微分几何要与拓扑挂钩，我会一直沿那个方向搞下去的；这是我的非常重要的抉择。我完全可以搞费佳些的东西，但我认为我的抉择是明智的。通过与他一起工作，我更加熟悉了近代的思想。他给我很好的指导而且在一个时期还合作过。那时法国出了一些有关层（sheaf）论的最新工作我对此有兴趣，他也有兴趣，我们一起开始工作并合写了论文，即我的学位论文的一部分，这对我是很有益的。

M：一件突出的事实是你同其他人合作得很多，同Singer，同Hirzebruch，同Bott。

A：是的，是如此。我经常与别人合作，我认为这是我的风格这有许多原因，其中之一是我涉猎于好几个不同的领域。不同学科的东西有相互作用这一事实正是我有兴趣的；有的人在另一些方面知道得多些，可以补充你的不足，与他们合作是很有帮助的。我发现与别人交流思想是非常激励人的。

我同许多人合作过，其中一些，应该说其中许多人，合作持续多年而且广泛的。这一方面是由于我的性格我喜欢与别人交流的思考方式。另一方面也是由于我喜欢搞的数学面比较广，因而很难自己一人完全了解透彻。周围有对另一些领域知道得较多的人是很有益的。例如，他与Singer合作，他的分析强得多，我则较弱，而我对代数几何及拓扑知道得更多。

M：是否是由你来把问题提炼出来？

A：不，不是，这种合作是完全的交融；我们首先统一感兴趣的东西，然后互相学习对方的技巧。经过一段时间后，对问题的大多数部分双方的认识趋于一致；只是我们的专长有点不同罢了。

M：你是如何选择研究题目的？

A：我认为你这样问就已经暗含了所选的题目有解答。我觉得这根本不是我做研究的方式。有的人会这样做。他说："我想解决这个问题"然后坐下来。说道"我怎样才能解决这个问题？"我不这样做。我只是在数学的海洋中漫游，同时思索着，充满好奇心和兴趣我与别人交谈，把各种思想搅拌在一起：新的东西一出现，就紧追不舍。或者是，我发现某个东西同我已经知道的另外的东西发生了联系，我就试图把它们放在一起，从而新的东西发展了起来。事实上我们从来没有过从一开始就对我将要搞出的东西或者会搞成什么样子有任何概念：我对数学有兴趣、我交谈，我学习，我讨论，有意见的问题自然就呈现出来。除了理解数学这个目标外，我在开始之前从不订下什么具体的目标。

M：K－理论就是这样产生的吧？

A：是的，这从某些方面看很带有偶然性。我当时对Grothendieck在代数几何中做的事情有兴趣，到了波恩斯坦后我曾有兴趣学拓扑，我感兴趣的是I. James当时在研究的有关射影空间的拓扑中的某些问题。我发现用Grothendieck的公式可以解释这些现象，可以得到更好的结果。那时已有Bott关于周期性定理的工作；我认识他，也知道他的工作。用上这些，我发现一些有趣的问题可以得到解决。于是看起来有必要建立一个体系使它们形式化，于是K－理论就这样产生了。

你不可能靠事先预言崭新的思想或理论的办法来发展它们。它们本来只能通过深入考察一系列问题而显现。但是不同人的工作方式是不同的。有的人决心去解决某个基本性的问题，例如奇点的消除

解或有限单群的分类。他们把一生的大部分时间都花在这个问题上。我从没有这样干过：部分地是由于那样做需要一心一意地献身于一个问题，那是极大的冒险。

那样做也要求方法上的专一，从正面强攻。这意味着对专门的技巧运用得炉火纯青。现在有些人很擅长那样；我确实难如。我的专长是围绕那个问题，在它附近转，到它的背后去……，这样使问题解决。

M：你是否觉得数学中有主流的课题？是否有些学科比别的更重要？

A：是的，我认为是这样。我很反对那种认为数学是一些孤立的学科的并集，以及你可以写下公理1，2，3等等，一个人闭门造车就可以发明一门新数学分支的观点。数学更加象是一个发育的有机体。它同过去以及同其它学科的联系是历史悠久的。

在某种意义上，核心的数学一直没有变。它是研究现实的物质世界中产生的问题，以及与数、基本的计算及解方程有关的由数学本身产生的问题。这一直是数学的主体。任何能推动这些问题的发展都是数学的重要部分。

那些与这些相隔遥远、背道而驰并且对数学的主要部分没有帮助的分支，不太可能是重要的。也可能一个分支自己产生出来并且后来对其他部分有用。但是如果它走得太远因而被修剪掉，从数学上看这确实无关大局。确有些创造的思想，它们在一段时间内开辟了新的方向，但它们还与数学的其他的重要部分联结在一起并且互相作用。数学的某个分支的重要性大体上可以用它与数学其他分支的相互作用的多少来衡量。这好象是重要性的一个无矛盾的定义。

M：但是，某个东西在一段时期内没有用，而很多年之后它又被用上，这是可能的吧？

A：我认为确实会有人提出超前于他的时代的数学思想，也可能有人提出一个聪明的想法，但人们在很长的时期内看不到它的意义，显然这些都可能发生。

我刚才并没有怎么想到这类事情，我刚才想得更多的是现在的一种趋势，即人们闭门造车式地，并且相当抽象地创立一个个整个的数学领域，他们只是象海獭那样一个劲地啃，如果你问他们这是为什么，其意义何在，与其它的关系如何，你将发现他们说不上来。

M：你愿意举个例子吗？

A：近代数学的每个分支都有些例子：抽象代数的一些部分，泛函分析一些部分，点集拓扑一些部分，在这些部分里，人们会看到公理化方法的最恶劣的表现。

公理是为了把一类问题孤立出来，然后去发展解决问题的技巧而提炼出来的。一些人认为公理是用来界定一个自我封闭的完整的数学领域的，我认为这是错的。公理的范围越窄，你舍弃得就越多。

当你在数学中进行抽象化时，你把你想研究的与你认为是无关的东西分离开，这样做在一段时期里是方便的，它使思维集中，但是通过定义，你舍弃了你宣布你认为不感兴趣的东西，而从长远看来，你丢掉了很多根芽。如果你用公理化方法做了些东西，那么在一定阶段后你应该再回到它的来源处，在那儿进行同化和异花受精，这样是健康的。

你可以发现约三十年前von Neumann及H．Weyl就表示了这种意见，他们担心数学会走什么样的路，如果它远离了它的源泉

它就会变得不育。我认为这是非常正确的。

M：显然你对数学的整体性有很深的体会。你认为你的工作方式及你本人在数学上的贡献在多大程度上造成了这种整体性？

A：很难把一个人的个性同他对数学怎么看分开。我相信把数学看成一个整体是非常重要的。我的工作方式反映了这一观点；至于哪个在前这很难说。我发现数学不同分支的相互作用是有趣的。这一学科的丰富性就是来自这个复合性，而不是来自纯粹性及孤立的专门化。

但是，也还有哲学的及社会的道理。我们为什么搞数学？我们搞数学主要是因为我们喜欢搞数学。但从深一层上讲，为什么给我们钱搞数学？如果有人要我们辩明这一点，那末我们必须承认这个观点，即数学是一般的科学的文化的一部分。即使我正在搞的那个数学领域对于他人无直接关系和用途，我们也还是在为一个整个的思想的有机体做贡献。如果数学是思想的联合体，每一部分都有潜在的应用到其他部分的可能性，那么我们都是为一个共同的对象做贡献

如果数学被看成是一些支离破碎的门类，而且互不相干地，自管自地发展，那就是很难回答为什么要出钱给人去搞数学。我们不是表演者，象网球运动员申辩的，唯一的依据是数学对人类思想有真正的贡献。即使我不直接搞应用数学，我觉得我也是在对这样一种数学做贡献，即它能够而且必将对于那些有兴趣于把数学应用到其他地方的人们有用。

每个人都要为他的人生哲学辩护，至少要向自己辩护。如果你教书，你可以说："我的职业是教书，我培养出了年青人，因而我得到报酬。至于研究嘛，我是在业余搞。他们是出于宽宏大量才让

我搞的。"但是如何你是专职研究的，那么你要为自己的工作辩护就要更费力气去想了。

在某种意义上，我还在搞数学，因为我喜欢搞。我很高兴有人出钱让我干我喜欢的事，但是我也试图去感觉它还有更严肃的一面，提供辩护的一面。

M：有这种论调："纯粹数学用处不大，五年之内所有人都只在搞计算了。"对此你是如何看法？

A：这种观点永远含有某种危险，如果纯粹数学家采取象牙塔的态度，不去考虑他们与其他学科的关系，那末就存在这样一种危险，即人们会出来说，"我们确实不需要你们——你们是奢侈品——我们要雇用做更实际的工作的人"。我认为这种危险性一直是有的而在财政困难的时期则更为严重，例如我们现在正处于这个时期。我认为已经有这种信号出现了。

当然，在过去的五年或十年中，纯粹数学家越来越了解到他们必须更好地为他们自己干的事辩护。但我还是同意很多人的这种看法，即这是不自然的，是在压力之下才这么做的。假如广大的纯粹数学家更有自我批评的精神，那么情况就会健康起来。

M：再回到你做过的数学上，是否有一个定理在你证出的定理中使你感到最幸运？

A：我认为有。我与Singer一起证明的指数定理从很多方面看都是我所做过的东西中最清晰的一个。我确实认为指数定理是人们可以谈论的定理中，一个好的、清晰的定理。我的大部分工作都是以不同的方式以它为中心做的。

它从拓扑学及代数几何的工作开始，但后来它对泛函分析有相

当的推动，过去十年来，这个方向有许多人搞。而且现在还发现它与数学物理有有趣的联系。所以从很多方面看它仍在发展并且仍然活跃。在某种意义上，它象征了我的主要兴趣，即数学所有领域之间的相互作用及联系。这是一个代数拓扑分析（还有各种形式的微分方程）非常自然地结合在一起的领域。

M：你是否预见到了近来数学家对数学物理重新发生兴趣这件事？

A：实在没有。我对数学物理的兴趣有相当长时间了。它并不很深——我试图弄懂量子力学及有关的课题。但是过去五年发生的事情——数学家对规范场理论的兴趣——我是没料到的。我对物理知道得还不够多到可以知道这个事情会发生的程度。对我个人来讲，量子场论是那些神秘的大的字眼之一。

我认为物理学家自己也感到意外，几何的一面变得重要并且占了统治地位这一事实他们很多人也没有预言过（而且有些人仍然不同意这一点！）一些主要的问题看上去好象很不一样——分析的问题代数的问题。象R.Penrose这样一些人没有感到意外。他们从他们自己的观点在这方面工作了很久。但是我认为这是个好的例证，如果你是在主流中做有意思的基本的数学工作，那末当别人用上你的工作时，你不应感到意外。这证实了对于数学，包括物理在内的整体性的信仰。

M：你对这个命题相信的程度有多深？

A：我学的物理越多，我越加坚信物理提供了数学在某种意义上最深刻的应用。物理中产生的数学问题的解答及其方法过去一直是数学的活力的来源，现在仍是这样。物理学家处理的问题从数学

的角度看是极其有趣、困难和富有挑战性的问题。我认为应该有更多的数学家参与进来，并且设法学一些物理，他们应该把新的数学方法引进物理问题中去。

物理是很不简单的。它是非常数学的，物理的洞察力与数学方法的结合是两者之间很深刻的联系。

数学在（比如说）社会科学、经济学、计算上的较新的应用是重要的。我们培养具有这种应用数学的观点的学生是重要的，因为这是商业世界所要求的，成千上万的学生需要这样的观点。

另一方面，从用到的数学的深度来看，则是不可同日而语的，在诸如经济学与统计学中，也有些有意思的问题，但总的说来，用到的数学十分浅，真正深刻的问题仍然在物理科学中。为了数学研究的健康，我认为尽可能多保持这种联系是非常重要的。

M：你对教育显然有兴趣。另一方面，就你的职业而言，很清楚你是作研究的数学家。你如何解释这一点？

A：我对教育有兴趣的理由与我对数学整体性有兴趣的理由一样。大学是教育的机构并且还从事研究。我认为这是很重要的——应该有大学的及整个社会结构的整体性来力图保持数学教育与数学研究之间的广泛的平衡。当大学里为了教育的目的开课时，他们应该确保他们对学生做的事是做得对的，而不是仅仅因为他们对培养做研究的学生有兴趣而开（比方说）高等拓扑学课。那将是灾难性的错误。

大学必须保持两种活动的平衡。他们应该知道学生学些什么是有用的，要记住学生将来做什么。同时，他们还应该扶助研究。一些人将来全做研究，一些人将来主要是教书，而大部分是介于两者

之间。显然我只介入大学的研究任务，但我生活在大学里，我在大学里有同事我知道他们在干什么。所以我对大学里各种职能的平衡是达到感到关切。

M：你是否认为过去二十年里英国的大学增加得太多了？

A：我不认为增加得太多了。与其他国家，特别是美国比，显然受过高等教育的人比例太小，应该更多些；更重要的是，大学应继续增加。我不能相信到下个世纪，受到高等教育的人的比例还是现在这么多，那是肯定要改变的。

在一段时期的增长之后（这在战后是必要的），确实会产生一些问题，它带来了不连续性。你要了大量的人去大学教书，而当这个增长一旦停止时，你已经把所有的位置占满了——你不能再要年青人。人们可以批评当年各大学头脑发热和欠谨慎以致没有预见到这样做必然会产生的一些困难。例如，不象美国大学、英国大学在增长时期，拿到博士后可立即得到永久性的位子，因为当时各大学在互相竞争。我认为这是个错误，现在他们正在为这个错误付出代价

如果不是从一开始就给终身的职位而是采用灵活些的制度使他们适应，那就明智些。我们现在已经有了这个尖锐的不连续性，这导致危机与冲突，也许大学的人应该谨慎为好。

M：再用点时间回到教学与研究上去。你说过两者都是大学生活的重要部分，但你仍然是分别谈到它们的。近来研究所在增加——波恩，Warwick，Princeton——那儿都不教书，你认为这是健康的吗？

A：关于这类研究所首先要指出的是它们或者没有终身研究人员，或者只有很少的终身研究人员。大多数去那些地方的人都是进修性质的。他们从各大学到那儿呆一学期或者一年

然后再回去。所以它们类似广义的会议中心。人们在那儿碰头交流思想然后回去，进行他们的工作。他们只是帮助大学的人对科研保持活跃的兴趣——那是它们的主要功能。

可是，如果你采用类似于东欧的制度，即设立雇用大量终身职位的人员的庞大研究所，并且从各大学抽走相当比例的教授，这就会带来问题。那样你就真正使大学与研究严重脱节。但是就数学而言，这种中心数目是这样小，研究员也很少，而且去那儿再回来的人都只是为了加强大学体系，我认为这是十分健康的。

它们还有另一个目的，即帮助或引导人们进入那些富有成果的数学思想的领域。除了到一个中心去推动你自己当前的工作之外，年青人也可以到这类中心以期被引导选定一个有成效的研究方向。

Princeton的研究所，即我获得博士后所去的地方，在实现这一目的方面办得很好。我完成了博士学业，写好了论文，但我仍在寻找我在数学上的归宿。我不知道往哪儿走，也不知将来干什么。我来到这个大的中心，那儿有许多来自世界各地的有各种思想的能干的年青人、老年人。在差不多一年之后，我满载着新思想与新方向回到英国，这对我以后的数学发展有巨大的影响。

M：Princeton的人当中谁对你影响最大？

A：我觉得主要不是那些终身研究员们。我是1955年去的，当时去那儿的人比现在去那儿的同类型人年纪稍大些。

我碰上了Hirzebruch，Serre，Bott，Singer，…他们都是我去这个研究所时认识的。Kodaira及Spencer当时也X在我认识了这一大批人，数学上受到他们的影响。后来我与同样的这批人的合作不是偶然的。

〔问题〕中国科技大学

一九八五年硕士学位研究生入学考试试题

常微分方程

1。基本概念题（共20分）

（1）（5分）试举例说明微分方程Cauchy问题的解未必存在唯一。

（2）（5分）举例说明n阶齐次线性常微分方程组的解集合构成复数域上的n维线性空间，而非齐次n阶线性方程组则不然。

（3）（5分）数值函数 $f(t,x)$ 与 $F(t,x)$ 在 (t,x) 平面某区域G内连续，且 $f(t,x)<F(t,x)$，试用方向场概念说明Cauchy问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f(t,x), \\ x(t_0)=X_0 \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=F(t,x), \\ X(t_0)=X_0 \end{cases}$$

的积分曲线只有一个交点，并举一具体例子，画出示意图。

（4）（5分）$f_1(\lambda)$ 与 $f_2(\lambda)$ 是二互素的多项式 $P(\lambda)=f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)$ 记 $\dfrac{d}{dt}$ D，又知 $f_1(D)X=0$ 的解集合为 X_1，$f_2(D)X=0$ 的解集合为 X_2，问如何由 X_1 与 X_2 的元素构造出 $P(D)X=0$ 的全体解？举例说明之（不证明）

2、基本计算题（共40分）

（1）（10分）求解：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t-x+1}{t+x-3}$

（2）（10分）求解：$(D^2+3D+2)X=e^{e^t}$

我搞的。”但是如何你是专职研究的，那么你要为自己的工作辩护就要更费力气去想了。

在某种意义上，我还在搞数学，因为我喜欢搞。我很高兴有人出钱让我干我喜欢的事，但是我也试图去感觉它还有更严肃的一面，提供辩护的一面。

M：有这种论调：“纯粹数学用处不大，五年之内所有人都只会搞计算了。”对此你是如何看的？

A：这种观点永远含有某种危险，如果纯粹数学家采取象牙塔的态度，不去考虑他们与其他学科的关系，那末就存在这样一种危险，即人们会出来说，“我们确实不需要你们——你们是奢侈品——我们要雇用做更实际的工作的人”。我认为这种危险性一直是有的而在财政困难的时期则更为严重，例如我们现在正处于这个时期。我认为已经有这种信号出现了。

当然，在过去的五年或十年中，纯粹数学家越来越了解到他们必须更好地为他们自己干的事辩护。但我还是同意很多人的这种看法，即这是不自然的，是在压力之下才这么做的。假如广大的纯粹数学家更有自我批评的精神，那么情况就会健康起来。

M：再回到你做过的数学上，是否有一个定理在你证出的定理中使你感到最幸运？

A：我认为有。我与Singer一起证明的指数定理从很多方面看都是我所做过的东西中最清晰的一个。我确实认为指数定理是人们可以谈论的定理中，一个好的、清晰的定理。我的大部分工作都是以不同的方式以它为中心做的。

它从拓扑学及代数几何的工作开始，但后来它对泛函分析有相

当的推动，过去十年来，这个方向有许多人搞。而且现在还发现它与数学物理有有趣的联系。所以从很多方面看它仍在发展并且仍然活跃。在某种意义上，它象征了我的主要兴趣，即数学所有领域之间的相互作用及联系。这是一个代数拓扑分析（还有各种形式的微分方程）非常自然地结合在一起的领域。

M：你是否预见到了近来数学家对数学物理重新发生兴趣这件事？

A：实在没有。我对数学物理的兴趣有相当长时间了。它并不很深——我试图弄懂量子力学及有关的课题。但是过去五年发生的事情——数学家对规范场理论的兴趣——我是没料到的。我对物理知道得还不够多到可以知道这个事情会发生的程度。对我个人来讲，量子场论是那些神秘的大的字眼之一。

我认为物理学家自己也感到意外，几何的一面变得重要并且占了统治地位这一事实他们很多人也没有预言过（而且有些人仍然不同意这一点！）一些主要的问题看上去好象很不一样——分析的问题代数的问题。象R. Penrose这样一些人没有感到意外，他们从他们自己的观点在这方面工作了很久。但是我认为这是个好的例证：如果你是在主流中做有意思的基本的数学工作，那末当别人用上你的工作时，你不应感到意外。这证实了对于数学，包括物理在内的整体性的信仰。

M：你对这个命题相信的程度有多深？

A：我学的物理越多，我越加坚信物理提供了数学在某种意义上最深刻的应用。物理中产生的数学问题的解答及其方法过去一直是数学的活力的来源，现在仍是这样。物理学家处理的问题从数学

的角度看是極其有趣、困难和富有挑战性的问题。我认为应该有更多的数学家参与进来，并且设法学一些物理；他们应该把新的数学方法引进物理问题中去。

物理是很不简单的。它是非常数学的，物理的洞察力与数学方法的结合是两者之间很深刻的联系。

数学在（比如说）社会科学、经济学、计算上的较新的应用是重要的。我们培养具有这种应用数学的观点的学生是重要的，因为这是商业世界所要求的，成千上万的学生需要这样的观点。

另一方面，从用到的数学的深度来看，则是不可同日而语的。在诸如经济学与统计学中，也有些有意思的问题，但总的说来，用到的数学十分浅，真正深刻的问题仍然在物理科学中。为了数学研究的健康，我认为尽可能多保持这种联系是非常重要的。

M：你对教育显然有兴趣，另一方面，就你的职业而言，很清楚你是作研究的数学家，你如何解释这一点？

A：我对教育有兴趣的理由与我对数学整体性有兴趣的理由一样。大学是教育的机构并且还从事研究，我认为这是很重要的——应该有大学的及整个社会结构的整体性来力图保持数学教育与数学研究之间的广泛的平衡。当大学里为了教育的目的开课时，他们应该确保他们对学生做的事是做得对的，而不是仅仅因为他们对培养做研究的学生有兴趣而开（比方说）高等拓扑学课，那将是灾难性的错误。

大学必须保持两种活动的平衡。他们应该知道学生学些什么是有用的，要记住学生将来做什么。同时，他们还应该扶助研究。一些人将来全做研究，一些人将来主要是教书，而大部分是介于两者

之间。显然我只介入大学的研究任务。但我生活在大学里。我在大学里有同事我知道他们在干什么。所以我对大学里各种职能的平衡是达到感到关切。

M：你是否认为过去二十年里英国的大学增加得太多了？

A：我不认为增加得太多了。与其他国家，特别是美国比。显然受过高等教育的人比例太小。应该更多些；更重要的是，大学应继续增加。我不能相信到下个世纪，受到高等教育的人的比例还是现在这么多。那是肯定要改变的。

在一段时期的增长之后（这在战后是必要的），确实会产生一些问题，它带来了不连续性。你要了大量的人去大学教书，而当这个增长一旦停止时，你已经把所有的位置占满了——你不能再要年青人。人们可以批评当年各大学头脑发热和欠谨慎以致没有预见到这样做必然会产生的一些困难。例如，不象美国大学、英国大学在增长时期，拿到博士后可立即得到永久性的位子，因为当时各大学在互相竞争。我认为这是个错误，现在他们正在为这个错误付出代价

如果不是从一开始就给终身的职位而是采用灵活些的制度使他们适应，那就明智些。我们现在已经有了这个尖锐的不连续性，这导致危机与冲突。也许大学的人应该谨慎为好。

M：再用点时间回到教学与研究上去。你说过两者都是大学生活的重要部分，但你仍然是分别谈到它们的。近来研究所在增加——波恩、Warwick、Princeton——那儿都不教书，你认为这是健康的吗？

A：关于这类研究所首先要指出的是它们或者没有终身研究人员，或者只有很少的终身研究人员。大多数去那些地方的人都是进修性质的。他们从各大学到那儿呆一学期或者一年

然后再回去。所以它们类似广义的会议中心。人们在那儿碰头交流思想然后回去，进行他们的工作。他们只是帮助大学的人对科研保持活跃的兴趣——那是它们的主要功能。

可是，如果你采用类似于东欧的制度，即设立雇用大量终身职位的人员的庞大研究所，并且从各大学抽走相当比例的教授，这就会带来问题。那样你就真正使大学与研究严重脱节。但是就数学而言，这种中心数目是这样小，研究员也很少，而且去那儿再回来的人都只是为了加强大学体系，我认为这是十分健康的。

它们还有另一个目的，即帮助或引导人们进入那些富有成果的数学思想的领域。除了到一个中心去推动你自己当前的工作之外，年青人也可以到这类中心以期被引导选定一个有成效的研究方向。

Princeton的研究所，即我获得博士后所去的地方，在实现这一目的方面办得很好。我完成了博士学业，写好了论文，但我仍在寻找我在数学上的归宿。我不知道往哪儿走，也不知将来干什么。我来到这个大的中心，那儿有许多来自世界各地的有各种思想的能干的年青人、老年人。在差不多一年之后，我满载着新思想与新方向回到英国，这对我以后的数学发展有巨大的影响。

M:Princeton的人当中谁对你影响最大？

A：我觉得主要不是那些终身研究员们。我是1955年去的，当时去那儿的人比现在去那儿的同类型人年纪稍大些。

我碰上了Hirzebruch，Serre，Bott，Singer，…他们都是我去这个研究所时认识的。Kodaira及Spencer当时也在。我认识了这一大批人，数学上受到他们的影响。后来我与同样的这批人的合作不是偶然的。

〔问题〕中国科技大学

一九八五年硕士学位研究生入学考试试题

常微分方程

1。基本概念题（共20分）

（1）（5分）试举例说明微分方程Cauchy问题的解未必存在唯一。

（2）（5分）举例说明n阶齐次线性常微分方程组的解集合构成复数域上的n维线性空间，而非齐次n阶线性方程组则不然。

（3）（5分）数值函数$f(t, x)$与$F(t, x)$在（t，x）平面某区域G内连续，且$f(t, x)<F(t, x)$，试用方向场概念说明Cauchy问题

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=f(t, x), \\ x(t_0)=X_0 \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=F(t, x), \\ X(t_0)=X_0 \end{cases}$$

的积分曲线只有一个交点，并举一具体例子，画出示意图。

（4）（5分）$f_1(\lambda)$与$f_2(\lambda)$是二互素的多项式

$P(\lambda)=f_1(\lambda)\cdot f_2(\lambda)$记$\dfrac{d}{dt}$ D，又知$f_1(D)X=0$的解集合为X_1，$f_2(D)X=0$的解集合为X_2，问如何由X_1与X_2的元素构造出$P(D)X=0$的全体解？举例说明之（不证明）

2、基本计算题（共40分）

（1）（10分）求通解：$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{t-x+1}{t+x-3}$

（2）（10分）求通解：$(D^2+3D+2)X=e^{e^t}$

(3) (10分)求通解：$ydx+(x^2y-x)dy=0$

(4) (10分)求通解：$\frac{dx}{dt}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}X$

3．(15分)证明齐次线性常微分方程组解之Wronsky行列式$W(t)$在$t_0\in(a,b)$处为零，则$W(t)\equiv 0$，$t\ (a,b)$。

4．(15分)$\varphi(t)$是$\frac{d^2x}{dt^2}+Q(t)X=0$之解，$Q(t)$在$(0,1)$内连续，恒负，又$\varphi(\frac{1}{2})=\varphi(\frac{2}{3})=0$，证明$\varphi(t)$是平凡解。

5．(10分)$a(t)$，$b(t)$，$f(t)$，在$[0,1]$上连续。

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+a(t)\dfrac{dx}{dt}+b(t)x=f(t),\\ X(0)=X(1)=0\end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\begin{cases}\dfrac{d^2x}{dt^2}+a(t)\dfrac{dx}{dt}+b(t)x=0\\ X(0)=X(1)=0\end{cases}$$

设(I)有解，则(I)的解是唯一的充分必要条件是(II)只有零解。试加证明。

实变函数与泛函分析

1.（15分）设X是一集，ε是X的某些子集的族$A\subset X$，记

$\varepsilon\cap A=\{B\cap A \mid B\ \varepsilon\}$。

$S(\varepsilon)$，$S(\varepsilon\cap A)$分别表示包含ε，$\varepsilon\cap A$最小的-环，则

$\bigcap S(\varepsilon)\cap A=S(\varepsilon\ A)$

2.（10分），设R是集X的某些子集组成的环，μ是环R上的测度，$\{E_n\}\subset R$，$E_1\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$且 $\bigcap_n E_n\ R$，如果至少有一个E_k，使得$\mu(E_k)<\infty$，则

$$\mu(\bigcap_n E_n)=\lim_n \mu(E_n)$$

并试举反例，说明条件"至少有一个E_k，使得$\mu(E_k)<\infty$"在这个结论中是不能省略的。

3.（15分），设实数列$\lambda_k\to\infty$，则函数例$\{\cos^2\lambda_k x\}_k$不可能对普遍的$x\in[0, 1]$收敛于0。

4.（15分），设（X，d）是紧距离空间，$\{U_l\}$是X的开复盖，则存在$\eta>0$，使得X中任何半径（依d）为η的开球仅包含于某个U_l之中。

5.（15分），设X，Y，Z是Banach空间，$T(\cdot,\cdot):X\times Y\to Z$，使得对每个$x\in X$，$T(X,\cdot)Y\to Z$是线性连续的，也对每个$y\in Y$ $T(\cdot,y):X\to Z$是线性连续的，则存在常数$K>0$，使得

$$\|T(x,y)\|\leq K\|x\|\|y\|\quad x\ X,\ y\ Y$$

6.（15分），设A是Banach空间X中的闭稠定线性算子，$\sigma(A)$是A的谱集，$\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\sigma(A)$，若有$\lambda_0\in\rho(A)$，使得$(A-\lambda_0 I)^{-1}$是紧的，则对任何$\lambda\in\rho(A)$，

$(A-\lambda I)^{-1}$也都是紧的

7．（15分），把矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

看作三维欧氏空间中的自伴算子，求它的谱族。

微分几何

（一）设 为E^3中的一条曲率处处不为零的曲线。试证明Γ为一般螺线的充分必要条件是：

$\frac{\tau}{k}$＝常数，其中τ，k，分别为Γ的挠率和曲率

（注：曲线Γ的切向量与一定长向量的夹角为定角时，称为一般螺线）。

（二）设两条曲线C，C^*之间可以建立对应使对应点有公共主法线，则称其为一对Bertrand曲线。

试证：对于一双Bertrand曲线而言，在上述对应下有

（1）对应点之间的距离为常数

（2）对应点的切线相交于定角

（三）证明：全脐点曲面Σ必为球面或平面的一部分

（四）（1）写出曲面之间等距对应的定义

（2）证明：平面到自身的等距对应必为欧氏运动或欧氏运加镜面反射（即正交线性变换）

（五）设Σ为E^3中亏格为1的紧致曲面

试证明 $\iint_{\Sigma}|K|dA\geq 8\pi$

其中K为高斯曲率。

【上期哇鸣问题解答】

6. 证明：考虑积分

$$S=\underbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\cdots\int_0^1}_{m\text{重}}(1-x_1x_2\cdots x_m)^n dx_1dx_2\cdots dx_m.$$

不难求出

$$S=\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\sum_{K=0}^{n}(-1)^k C_n^k x_1^k x_2^k\cdots x_m^k dx_1dx_2\cdots dx_m$$

$$=\sum_{K=0}^{n}(-1)^k C_n^k\frac{1}{(k+1)^m}=A(m,n)\text{，从而}$$

$$A(m,n+1)=\underbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}_{m}(1-x_1x_2\cdots x_m)^{n+1}dx_1dx_2\cdots dx_m$$

$$<\underbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}_{m}(1-x_1x_2\cdots x_m)^n dx_1dx_2\cdots dx_m=A(m,n)$$

$$A(m+1,n)=\underbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}_{m+1}(1-x_1x_2\cdots x_mx_{m+1})^n dx_1dx_2\cdots dx_m dx_{m+1}$$

$$>\underbrace{\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1}_{m+1}(1-x_1x_2\cdots x_m)^n dx_1dx_2\cdots dx_m dx_{m+1}$$

$$=\int_0^1 A(m,n)dx_{m+1}=A(m,n)$$

（李广兴提供）