蛙　　鸣

第 26 期

中国科学技术大学数学系学生会

目　录

第26期　　1986.12

〔研究与讨论〕　作者　页数

有关R^n中开集的一个定理……841 周坚 1

多边形中的不等式……831 李广兴 陈计 3

数列的最大公约数问题……851 罗承辉 11

构造一个非Borel集的（　）可测集……841 王俊 14

关于凸函数定义的讨论……841 周坚 16

R.Bellman问题的一个回答……831 陈计 季文 18

〔报告〕

关于Archimedes-Heron公式……831 吴名 21

〔未解决的问题〕

艾尔兑斯一莫迪尔不等式的指数推广……831 李广兴 陈计 33

〔问题与猜想〕 38

〔译文选登〕

关于LiouLilla定理……841 王岚 39

〔介绍〕

学科简介——不等式的控制理论……831 吴名 41

简讯

中国数学会加入国际数学联合会。国际数学联合会（IMU）第十届会员国代表会议于1986年7月31日至8月1日在美国加州的奥克兰举行。会上修改了IMU的会章，解决了中国加入IMU的问题。中国列在IMU最高的一组（第五组）可以有五票表决权——中国数学会三票，位于中国台北的数学会两票。

有关R^n中开集的一个定理

841　周坚

定理：

R^n中开集不可表为多于一个的互不相交n维闭集簇之并。

以上为本文所要证的主要结论。与此相关的结论："R^n中开集可表为多于一个的互不相交的$n-1$维闭集簇之并"成立。但证明较繁，本文不讨论。

引理1：

R^n中开集不可表为互不相交的至多可列个（多于一个）非空闭集的并。

〔证明〕：用归纳法加以证明：

$n=1$时，对开区间(a, b)结论成立（参见〔1〕）。由R^1中开集构造定理便知$n=1$时结论成立。

设$n=K$时结论成立，则$n=k+1$时，若O为R^{k+1}中，$O=\bigcup_k F_k$，$\{F_k\}$为非空闭集列且两两不交。则取$X_1\in F_1$，$X_2\cap F_2$，过X_1，X_2作一k维超平面π，则有$\pi\in O=\bigcup_k(F_k\ \pi)$，注意到$\pi\in O$为$\pi$中开集，因而与归纳假设矛盾。

所以引理1成立 #

引理2：

R^n中任一n维子集必包含一开球。

〔证明〕：参见〔2〕P44，Th.IV.3.#

下面给出定理的证明：

如果R^n中开集$O=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}F_\alpha$，$\{F_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$为一互不相交的n维闭集。则由引理2，知$r_\alpha\in F_\alpha\cap Q^n$，对不同的$\alpha$，$r_\alpha$不同，又

Q n 可数。故 至多可数。这与引理 1 是矛盾的。#

参 考 文 献：

〔1〕、国防科大编：实变函数论习题解答 $P_{17 \cdot 3}$。

〔2〕、Hurewicz and Wallman：Dimension Theory.

〔数学新闻〕

π 的千百万位小数

林志宏

今年初，一位美国科学家用一台新的 Cray－2 型巨型计算机求得了π的 29，360，000 位小数。这次计算共运算了 1 2 万亿次，在机上运行了 2 8 小时。

引起人们对π的十进制小数感兴趣的一个原因是大多数数学家怀疑π的小数的序列是无规则的。平均，0～9各数字的出现几率应为 1/1 0。然而，这个假设从未得到证明。

因此，数学家一直对π的小数的展开式进行统计分析，以查明是否有一定的模式。上述美国科学家也对他所求得的π的小数的频率做了一次粗略的分析。结果并未发现有任何不正常的统计学情况。

另一个有趣的数学问题，是确定计算π小数速度的理论下限。证明这种算法的计算速度不能超过特定值，将使人们进一步了解π的小数值。

编译自美国《Science News》

多边形中的不等式

831　李广兴　陈计

设a，b，c为三角形ABC的三边，r和R分别表示它的内切圆和切圆和外切圆的半径。则有

$$6\sqrt{3}\,r \leq a+b+c \leq 3\sqrt{3}\,R. \qquad (1)$$

于是

$$R \geq 2r \qquad (2)$$

又设O和I分别表示△ABC的外切圆和内切圆的圆心。则有

$$R^2 \geq 4r^2 + IO^2. \qquad (3)$$

近年来，日本千叶大学T.Shimizu和美国Alberta大学M.S.Klamkin先后把Euler定理(2)和(3)推广到高维空间的单纯形。

本文中，我们对凸多边形建立了类似于(1)的等周不等式，进而对任意多边形建立了类似于(2)的不等式。

为此，我们首先引入在多边形中与三角形的外接圆和内切圆相类似的概念。

定义：多边形D所包含的圆中面积最大的圆叫D的内极圆。它的半径叫D的内径，我们以r表示；包含D的面积最小的圆叫D的覆盖圆。它的半径叫D的围径，以R表示。

三角形的内切圆虽然就是含于三角形的最大的圆；不过，三角形的外接圆与覆盖圆当且仅当三角形有钝角时是不同的。

定理1　如图1所示。

i）　$$6\sqrt{3}\,r \leq a+b+c \leq 3\sqrt{3}\,R \qquad (4)$$

于是

$$R \geq 2r \tag{5}$$

ii) $$R^2 \geq 4r^2 + \overline{IO}^2 \tag{6}$$

证明 i）过C引AB的垂线，交○O于C'，连AC'，BC'。对△ABC'用(1)得

$$AB + AC' + BC' \leq 3\sqrt{3}R$$

又显然有$AC \leq AC'$，$BC \leq BC'$，所以(4)成立。

ii）在$\triangle AOO_*$和$\triangle IOO_*$中，

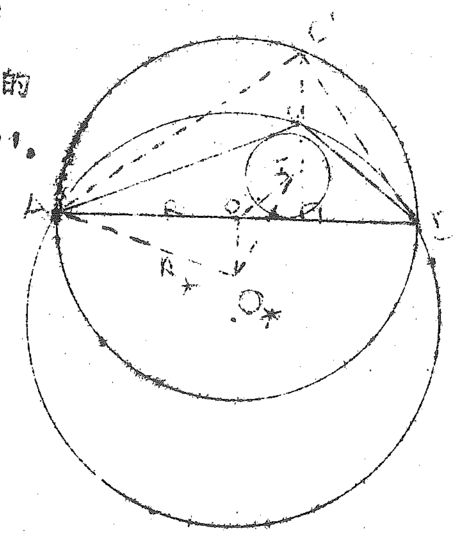


图1

$$R_*^2 - R^2 = OO_*^2 \leq IO_*^2 - IO^2$$

所以

$$R^2 - IO^2 \geq R_*^2 - IO_*^2 = 2R_* r \geq 4r^2$$

从而得证。

显然$R_* \geq R$，所以(4)和(5)分别强于(1)和(2)。下面，我们把定理1推广为：

定理2 设a_1，a_2，…，a_n为凸n边形的边长，r和R分别表示它的内极圆和覆盖圆的半径，则有

$$2nr\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq 2nR\sin\frac{\pi}{n}$$

定理3 设任意n边形的围径和内径分别为R和r，则

$$R \geq r\sec\frac{\pi}{n} \tag{8}$$

引理1　凸n边形的边长为a_1，a_2，…，a_n，它的覆盖圆半径为R，
为R，则有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \leq 2nR\sin\frac{\pi}{n} \qquad (9)$$

证明　我们分两步来证。

首先假定n边形内接于覆盖圆，于是

$a_i=2R\sin\theta_i$，

$i=1，2，\cdots，n$。

所以(9)等价于三角不等式

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n \leq n\sin\frac{\pi}{n} \qquad (10)$$

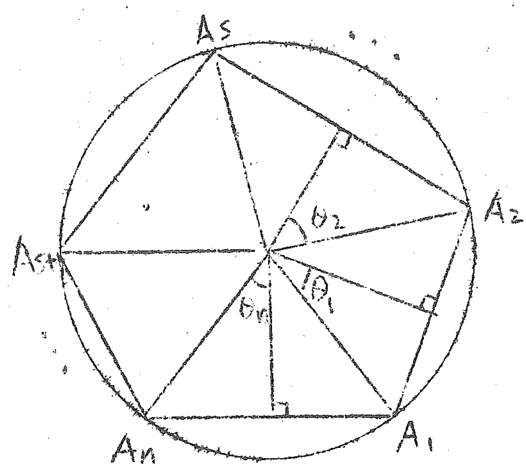


图　2

其中

$$\theta_i\in(0,\pi)，\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi$$

在(0，π)上定义函数$f(\theta)=\sin\theta$，则

$$f'(\theta)=\cos\theta，\ f''(\theta)=-\sin\theta<0 \qquad (11)$$

所以$f(\theta)$为上凸的，由Jensen不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(\theta_i) \leq f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right) \qquad (12)$$

即得(8)式。

其次，如图3所示，在覆盖圆O上的两点A_S和A_τ（$S<\tau$）中的$\tau-S-1$个点都不在⊙O上，让A_{S+1}，…，$A_{\tau-1}$以垂直于A_SA_τ的方向的相同速度接近⊙O，若某个$A_r(s<r<\tau)$先达⊙O

上，则停止运动，并记之为 $A'_{s+1},\cdots,A'_{t-1}$，显然

$$A_sA_{s+1}\leq A_sA'_{s+1},\ A_{s+1}A_{s+2}=A'_{s+1}A'_{s+2},\cdots,$$
$$A_{t-1}A_t\leq A'_{t-1}.$$

于是，得到一个新的 n 边形，其每边都较大，不在⊙O上的点比原先的要少。

经有限次上述过程，我们就得就得到一个内接于⊙O的，每边都较大的 n 边形，对此，用前面证过的情形，便得(9)式成立。

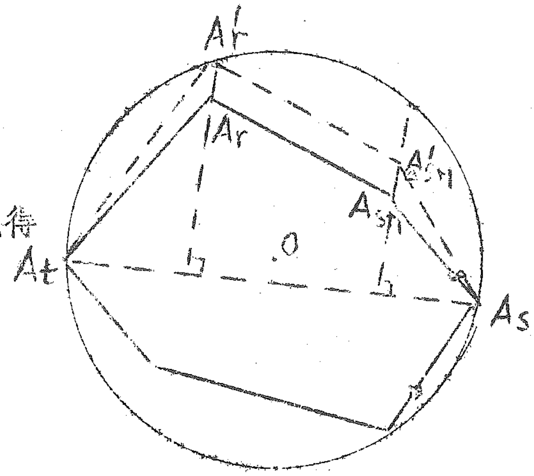


图 3

推论1　设 $0\neq K<1$，则

$$\left(\frac{a_1^K+a_2^K+\cdots+a_n^K}{n}\right)^{1/K}\leq 2R\sin\frac{\pi}{n} \tag{13}$$

和

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}\leq 2R\sin\frac{\pi}{n} \tag{14}$$

证明：用 schlomilch 的幂平均定理。

注记1　对于大于1的常数K，(13)一般不成立，事实上，考虑一个凸 n+1 边形退化成一个正 n 边形时，必须有

$$(n+1)^{1/K}\sin\frac{\pi}{n+1}\geq n^{1/K}\sin\frac{\pi}{n} \tag{15}$$

即

$$K\leq\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln\sin\frac{\pi}{n}-\ln\sin\frac{\pi}{n+1}} \tag{16}$$

当$n\to+\infty$时。(16)的 左式$\to 1$。所以$K\leq 1$。

但是，对于固定的边数n，比如对三角形K可以大于1：

命题1　$a^2+b^2+c^2\leq 9R^2$　(17)

引理2　设半径为r的圆的外切n边形的边长为a_1，a_2…，a_n，则

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq 2nr\,tg\frac{\pi}{n} \tag{18}$$

证明　如图4所示

$a_1=r(tg\theta_1+tg\theta_2)$，

$a_2=r(tg\theta_2+tg\theta_3)$，

……………………

$a_n=r(tg\theta_n+tg\theta_1)$

所以(18)等价于三角不等式：

$$tg\theta_1+tg\theta_2+\cdots+tg\theta_n\geq n\,tg\frac{\pi}{n} \tag{19}$$

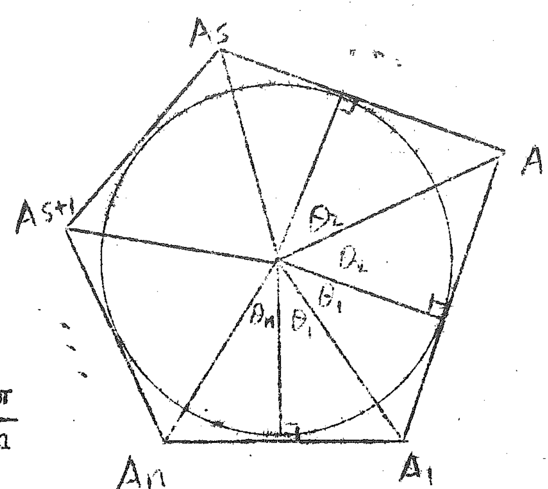


图4

其中$\theta_i\in(0,\frac{\pi}{2})$，$i=1,2,\cdots,n$，$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi$。

在$(0,\frac{\pi}{2})$上定义函数$g(\theta)=tg\theta$，则

$$g'(\theta)=\sec^2\theta,\ g''(\theta)=2\sec^2\theta\,tg\theta>0 \tag{20}$$

所以$g(\theta)$为下凸的，由Jensen不等式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}g(\theta_i)\geq g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_i\right) \tag{21}$$

即得(19)式。

推论2　设$K>1$，则

$$\left(\frac{a_1^k+a_2^k+\cdots+a_n^k}{n}\right)^{1/k}\geq 2r\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} \tag{22}$$

证明　用Schlömilch不等式。

注记2　对于小于1的常数K，（22）一般不成立，事实上，不妨设$0<K<1$时，考虑圆的外切n^2边形有联接的几条边退化为点，n^2边形退化为正n^2-n+1边形时，必须有

$$n^2-n-2+2\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\geq n^2\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{n^2}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n^2-n-1}\right)^k \tag{23}$$

从而必须有

$$n^2-n\geq n^2\left(\mathrm{tg}\frac{\pi}{n^2}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n^2-n+1}\right)^k \tag{24}$$

即

$$K\geq\frac{\ln n-\ln(n-1)}{\ln\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n^2}-\ln\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n^2-n-1}} \tag{25}$$

当$n\to\infty$时，（23）的左边→1，所以$K\geq1$。

但是，对于固定的边数n，K可以小于1；

命题2　在三角形中，有

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{1}{4r^2} \tag{26}$$

命题3　在圆的外切四边形中，有

$$abcd\geq 16r^4 \tag{27}$$

于是，对于$K>0$，有

$$\left(\frac{a^k+b^k+c^k+d^k}{4}\right)^{1/k}\geq 2r \tag{28}$$

并且，当K＜0时，(25)不成立。

引理3　设边长为a_1，a_2，…，a_n的凸n边形的内切圆的半径是r，则有

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\geq 2nr\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n} \qquad (29)$$

证明　如图5所示。

将不与内切圆I相切的边平行向⊙I移动，使之与⊙I相切，这样得到一个⊙I的外切n边形，显然其周长较小，用引理2得证。

定理2的证明：用引理1和引理3。

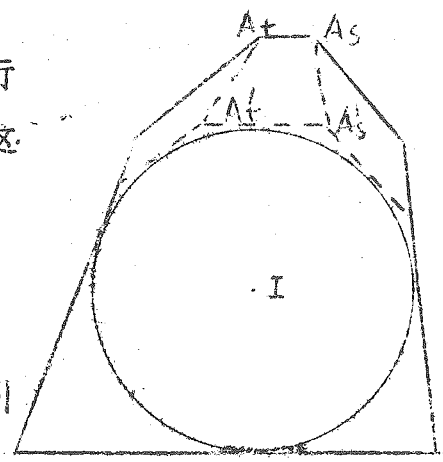


图　5

定理3的证明：如图6所示取n边形的凸包，凸包的边界是一个边数较小的多边形，并且它的周长也较小，内径却较大，覆盖圆不变。

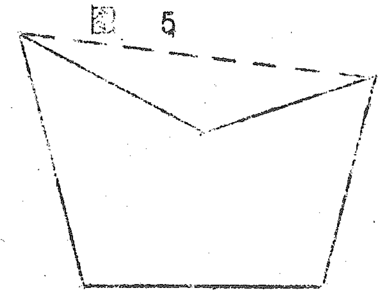


图　6

由$\varphi(n)=n\sin\frac{\pi}{n}$的单调递增性，$\psi(n)=n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}$的单调递减性和定理2得证。

猜想　如果O，I，R和r分别是n边形的覆盖圆和内极圆（不一定唯一）的圆心和半径。

那么

$$R^2\geq r^2\sec^2\frac{\pi}{n}+\overline{OI}^2 \qquad (30)$$

“说自己知道的话，

干自己应干的事，

做自己想做的人。“

——— 索菲娅

今日中学数学课程，仍继续忽视不等式课题，而每一数学家都深知不等式，于所有数学门类中，十分重要，有时甚至于较等式为尤重要。

—— 卡萨里洛夫

在我看来，一个人如果要在数学上有所进步，他必须向大师们学习，而不应向徒弟学习。

—— 阿贝尔

我们要学习的不是同辈人和竞争对手，而是古代的伟大人物。

—— 歌德

一个人的头脑埋没在伟大人物的形象中间，如果他自己并不伟大起来，那是什么用处也没有的。

—— 夏目漱石

数列的最大公约数的封闭性

－851　罗承辉

给定数列$\{F_n\}$($F_n\in Z$)。若$(F_m, F_n)=|F_d|$($m, n, d\in N$)，加绝对值是因为F_d可能为负整数。则称数列$\{F_n\}$具有最大公约数的封闭性。刘□泉同学实际上证明了Tibonacci数列是这种数列；

$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，则$(F_m, F_n)=F_{(m,n)}$

本文只在给出一类这种数列。

定理：若数列$\{F_n\}$满足条件：

1、$F_{n+1}=aF_{n+1}+bF_n$。

2、$a, b\in Z$ 且$b\neq 0$，$(a, b)=1$。

3、$\triangle=a^2+4b\neq 0$。

4、$\dfrac{F_2}{F_1}=a$，$F_1\in Z$。

则有：$(F_m, F_n)=|F_{(m,n)}|$。

显然Fibonacci数列是满足条件的。

我们不妨设$F_1=1$（否则作$F_n'=\dfrac{F_n}{F_1}$即化为此类）。又为方便起见记$a=X_1+X_2$，$b=-X_1X_2$，由条件3，$X_1\neq X_2$。

用数学归纳法易证：

引理1：$F_n=\dfrac{X_1^n-X_2^n}{X_1-X_2}$　　由此可证：

引理2：$F_m=(X_1^n+X_2^n)F_{m-n}-X_1^nX_2^nF_{m-2n}$.（$m\geq 2n$，必要时取$F_0=0$）

引理3：$F_{m+n}=F_{m+1}F_n-X_1X_2F_mF_{n+1}$　　又可证：

引理4：$X_1^n+X_2^n\in Z$。

证明：记$L_n=X_1^n+X_2^n$容易得出其递推关系：

$$L_{n+2}=(X_1+X_2)L_{n+1}-X_1X_2L_n$$

同$L_1=F_2\in Z$，$L_2=F_2^2-2X_1X_2\in Z$ 可知$L_n\in Z$。

由引理2，4和数学归纳法易证引理5：$(F_n,F_{nd})=|F_n|$。

引理6：$(F_n,X_1X_2)=1$。

证明：（用数学归纳法）1）显然$(F_1,X_1X_2)=1$，

$$(F_2,X_1X_2)=(X_1+X_2,X_1X_2)=1$$

2）设$(F_k,X_1X_2)=1$，则$(F_{k+1},X_1X_2)=((X_1+X_2)F_k-X_1X_2F_{k-1},X_1X_2)$

$$=((X_1+X_2)F_k,X_1X_2)$$
$$=1$$

故知对任何$n\in N$，均有$(F_n,X_1X_2)=1$。显然

$(F_n,X_1^mX_2^m)=1$。

利用引理6，仿照此法可证：

引理7：$(F_n,F_{n+1})=1$。

利用引理3，6，7可证。

引理8：$(F_{m+n},F_n)=(F_n,F_m)$。

在此基础上可以正面接触定理的证明了。

证明：不妨设$m\geq n$，$m=qn+r(1\leq r\leq n)$。由引理4，5：

$$\begin{aligned}(F_{m+n},F_m)&=(F_{(q+1)n+r},F_{qn+r})\\&=(F_{qn+r},F_{(q1)n+r})=\cdots\cdots\\&=(F_{n+r},F_r)。\end{aligned}$$

对左右两端用引理8得：

$(F_m, F_n)=(F_n, F_r)$。至此可继续用辗转相除法得：

$$(F_m, F_n)=(F_n, F_r)=(F_r, F_{r'})=\cdots\cdots$$

$$=(F_{(m,n)}, F_{(m,n)d})=F_{(m,n)}。$$

于是，定理获得。

当然，定理并未给出所有的最大公约数封闭的数列，甚至不包括$F_n=n^p$这个显然的数列。有兴趣的同学可继续寻找具有这种美妙性质的数列。

参 考 资 料：

刘 东。《Fibonacci数列的一个性质》，《蛙鸣》21期。

构造一个非Borel集的可测集

$f:(0,1] \longrightarrow R$

$\forall \alpha\in(0,1]$，则 $\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{2^n}$，其中 $C_n\in\{0,1\}$。

且∃$\{n_k, k=1,2,\cdots\cdots\}$，$C_{n_k}=1$

令 $f(\alpha)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2C_n}{3^n}$ 易知f是有意义的

Z是[0，1]上不可测集，则f(Z)即为所求。

[证](1)∵ $f: X\longrightarrow f(X)$ 是保序的双射。

∀ X上的集类P，定义 $f(P)=\{f(p)\mid P\in P\}$

若P为σ—环，即P对有限差和可列并封闭。∵ f是双射

∴ $\forall f(E_1), f(E_2)\quad f(P)$

有 $f(E_1)-f(E_2)=f(E_1-E_2)\quad f(P)$

$\forall f(E_n)\quad f(P)\quad n=1,2,\cdots\cdots$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} f(E_n)=f(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\quad f(P)$

∴ f(P)是σ—环。

同理可知若f(P)是σ—环，P也是σ—环。

∴ ∀ X上集簇P，有 $f(S(P))=S(f(P))$

(2)

令P={R中区间全体}$=\{<\alpha,\beta>, \beta>\alpha\}$

∴ $P\cap X=\{<\alpha,\beta>\cap X, \beta>\alpha\}$ 是X上的集簇。

∵ f保序 ∴ $f(P\cap X)=P\cap f(X)$

∴ $f(S(P\cap X))=S(P\cap f(X))$

即 $f(B\cap X)=B\cap f(X)$ B为Borel集全体

易知：$f(X)=$Cantor集$=\{\sum_{n=1}^{k}\frac{2\times C_n}{3^n}, C_n\in\{0,1\}, K=1,2,\cdots\cdots\}$

$\therefore f(x)\in B$ $m(f(x))=0$

$\because f(Z)$ $f(X)$ $\therefore f(Z)$可测

若$f(Z)\in B$ $\therefore f(Z)\in B\cap f(X)=f(B\cap X)$

$\therefore \exists Z'\in B\cap X$ $f(Z)=f(Z')$

$\because f$为双射 $\therefore Z=Z'\in B\cap X\subset B$ 与Z不可测矛盾

$\therefore f(Z)$为非Borel集的可测集。

关于凸函数定义的讨论

841 周坚

凸函数定义为：λ (0，1)，有

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\le\lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2) \qquad (*)$$

在 f 连续时，f 凸当且仅当下式成立：

$$f(\tfrac{1}{2}(X_1+X_2))\le\tfrac{1}{2}(f(X_1)+f(X_2)) \qquad (**)$$

实际上，我们有：

定 理：

f 在区间 (−1，1) 上可测，且满足 (**) 式，则 f 为凸函数。

〔证明〕：由〔1〕只须证 f 在 $I=(-1,1)$ 的任一闭子区间有上界。因而由 Heine-Boiel 定理只须证在每一点有一领域内有界。不失一般性，对 $X=0$ 证明。

如果 f 在 $X=0$ 的任一领域内无界，则存在 $\tau_n\longrightarrow 0$ 使 $f(\tau_n)\longrightarrow+\infty$。

由鲁津定理，存在闭集 $F\subset(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，$mF>\dfrac{4}{5}$

f 在 F 上连续，因而有上界 $M>0$。

取 $\tau_0\in(-1,1)$，使 $f(\tau_0)>M$，$|\tau_0|<\dfrac{3}{4}$，不妨设 $\tau_0>0$。令 $\widetilde{F}=\{y=2\tau_0-X,\ X\in F\}$，则 $\widetilde{F}\subset(-\frac{1}{2},1)$，$F\cup\widetilde{F}$ $(-\frac{1}{2},1)$

又由于 $\forall y\in\widetilde{F}$，有

$$f(y)\ge 2f(\tau_0)-f(2\tau_0-y)>M$$

$\therefore F\cap\widetilde{F}=\varnothing$，故 $M(F\cup\widetilde{F})=MF+m\widetilde{F}=2mF$

$\therefore \dfrac{4}{5}<MF=\frac{1}{2}m(F\cup\widetilde{F})\le\frac{1}{2}m(-\frac{1}{2},1)=\dfrac{3}{4}$ 矛盾。

故定理得证 #

在没有f可测的条件下，（**）前不能推出（*）。如下例（参见〔2〕）。

设H＝{1，　，…，　，…}为R看成Q上线性　间时的一组基。任给$X\in R$，$X=a+a_2 Z\alpha+\cdots+a_n Z\alpha n$定义$f(X)=a$。则f满足$f(x+y)=f(X)+f(y)$。

但是f在任一点的任一领域光能取到任一有理数！因而显然非凸。

如果令$g(X)=f(X)-x^2$，则g满足

$$g\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)<\frac{1}{2}\left(g(X_1)+g(X_2)\right)$$

但g非凸。

参　考　文　献：

〔1〕、孙本旺、汪浩主编：

《数学分析中的典型例题和解题方法》P_{249}。

〔2〕、谢邦杰：《超穷数与超穷归纳法》P_{68}。

感谢叶怀安老师的指导！

R.Bellman 问题的一个回答

831　陈计　季文

1978年，在国际第二次一般不等式会议上，理查·贝尔曼教授提了这样一个问题[1]：对于算术平均-几何平均的不等式，矩阵里是否有类似的结论？

我们试图从正面回答这个问题。为此，我们需要两个引理。它们都是课本[2]中的习题。

引理1　设S是n阶半正定对称方阵，则存在唯一的半正定对称方阵S_1，使得$S=S_1^{\,m}$，m是自然数。S_1称为方阵S的m次方根，记为$S^{1/m}$。

引理2　对于两两可交换的同阶实对称方阵的有限集合，一定存在一个共同的正交方阵，它把集合中的方阵同时化为对角形。

现在，我们可以给出算术平均-几何平均不等式在矩阵中的一个类似：

定理1　设m阶半正定对称方阵A_1，A_2…，A_m之间两两可交换，则

$$\frac{A_1+A_2+\cdots+A_m}{m}\geq(A_1A_2\cdots A_m)^{\frac{1}{m}},$$

等号成立当且仅当$A_1=A_2=\cdots=A_m$。

证明　由引理2，存在一个正交方阵O，使得

$$O'A_iO=\begin{pmatrix}\lambda_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{im}\end{pmatrix},\quad 1\leq i\leq m,$$

即有

$$A_i = O\begin{pmatrix} \lambda_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{im} \end{pmatrix}O'$$

所以

$$A_1 A_2 \cdots A_m = O\begin{pmatrix} \lambda_{11}\lambda_{21}\cdots\lambda_{m1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{1n}\lambda_{2n}\cdots\lambda_{mn} \end{pmatrix}O'。$$

由引理1知，定理中不等号右边是定义好了的。并且

$$(A_1 A_2 \cdots A_m)^{1/m} = O\begin{pmatrix} \sqrt[m]{\lambda_{11}\cdots\lambda_{m1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt[m]{\lambda_{1n}\cdots\lambda_{mn}} \end{pmatrix}O'。$$

因此

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_m}{m} - (A_1 A_2 \cdots A_m)^{1/m}$$

$$= O\begin{pmatrix} \frac{\lambda_{11}+\cdots+\lambda_{m1}}{m} - \sqrt[m]{\lambda_{11}\cdots\lambda_{m1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{\lambda_{1n}+\cdots+\lambda_{mn}}{m} - \sqrt[m]{\lambda_{1n}\cdots\lambda_{mn}} \end{pmatrix}O'$$

用算术平均－几何平均不等式和方阵在相合下半正定的不变性，得

$$\frac{A_1 + A_2 + \cdots + A_m}{m} \geq (A_1 A_2 \cdots A_m)^{1/m}$$

等号成立当且仅当 $\lambda_{1i}=\lambda_{2i}=\cdots=\lambda_{mi}\ (1 \leq i \leq n)$ 时，即 $A_1 = A_2 = \cdots = A_m$。定理1证毕。

定理1中，当 A_1，A_2，…，A_n都是一阶时，即得到通常的算术平均－几何平均不等式。所以，我们可以把定理1视为算术平均－几何平均不等式的一个推广。

顺便提出，用本文的方法可以把包括幂平均定理等一些著名的不等式推广到矩阵；但所得结论几乎都要加上矩阵之间两两可换这个条件；不过这个条件对某些不等式是可以去掉的。例如，对于均方根—算术平均不等式，有

定理2　设A_1，A_2，…，A_n是同阶实对称方阵，则

$$\left(\frac{A_1^2+A_2^2+\cdots+A_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\geq\frac{A_1+A_2+\cdots+A_n}{n}$$

等号当且仅当$A_1=A_2=\cdots=A_n$时成立。

证明：参见〔3〕。

参　考　文　献：

〔1〕、Richard Bellman, Some Inegvalities for Positive Definite Matrices, General Inequalites2 (E.F.Backenbach, Ed), Birkhause Verlag, 1980, 89—90.

〔2〕、李炯生老师，《线性代数》下册，油印本。

〔3〕、陈计，季文，《蛙鸣》，第1 9期。

〔报告〕

关于Archimedes–Heron公式

吴 名

§1 名称和历史

古希腊Alexander时期，机械工程师Heron（约公元一世纪）在他的《测地术》（Geodesy）中采用了古代最伟大的数学家Archimedes（公元前287–212年）的三角形的面积公式

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

这里a，b，c是三边，s是半周长。这公式人们归功于Heron，还因为在他的《经纬仪》（Dioptra）和《量度》（Metrica）两书中有一个证明〔1〕。

在国内，有些人喜欢把(1)叫做秦九韶（约公元1202–1261年）公式。南宋时，蜀人秦九韶在他的《数书九章》（共十八卷，公元1247年）第五卷（田域类）中，独立地得到了三角形"三斜求积"术：

$$\Delta=\sqrt{\frac{1}{4}\left[a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2\right]} \tag{2}$$

又印度数学家Baskara（公元1114–?年）所著的《Lilawati》第二部分也有三斜求积公式，在秦九韶之前。〔2〕

§2 类比和推广

匈牙利数学教育家G.polya的名著《数学的发现》中有Heron公式的两个类比定理。〔3〕

命题1 一个四面体有一个三直角顶点，与这个三直角顶点相

对的边的边长为a，b和c，则这个四面体的体积

$$V=\frac{1}{b}\sqrt{(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-c^2)} \tag{3}$$

其中$s^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

命题2　一个四面体的一个面的三条棱的棱长为a，b和c，并且假定四面体的每一条棱与其对棱等长，则

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{(s^2-a^2)(s^2-b^2)(s^2-c^2)} \tag{4}$$

发现高维单纯形中Heron公式的类比定理是个有意义的课题。

关于已知多边形的边长求其最大面积的问题，我们还没有见过一般性的讨论。对于四边形，Brahmagupta给出了最大面积公式〔4〕。

$$F=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \tag{5}$$

这里a，b，c，d是四边长，s是半周长。它是包含Heron公式为其特例的。我们猜想："一般n边形当$n\geq5$时，其最大面积不能够用边长表出。"正如"n次一般多项式当$n\geq5$时，不能够用根号解出"一样。

heron公式的另一个实质性的推广，是最近两个月由831马援同学在推广pedoe不等式时给出的。〔5〕

§3　最新的进展

Heron公式等价于

$$16\Delta^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4 \tag{6}$$

1986年11月，马援在《蛙鸣》第25期上证明了：对于$0<\theta<1$，有不等式

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^\theta \le \frac{16}{3}\Delta^2(a^\theta,b^\theta,c^\theta) \tag{7}$$

或

$$3^{1-\theta}(16\Delta^2)^\theta \le 2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta} -a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta} \tag{8}$$

等号当且只当 $a=b=c$ 时成立。

我们指出：当 $\theta<0$ 或 $\theta>1$ 时，(8)的不等号反向。

证明：若以 a^θ，b^θ，c^θ 为边长不能构成三角形，则(8)的左式 ≤ 0，不等号显然反向。

下设 a^θ，b^θ，c^θ 为边长可构成三角形：当 $\theta>1$ 时，$0<\frac{1}{\theta}<1$ 用(7)得

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a^\theta,b^\theta,c^\theta)\right]^{1/\theta} \le \frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)$$

或

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^\theta \ge \frac{16}{3}\Delta^2(a^\theta,b^\theta,c^\theta) \tag{9}$$

式中等号成立当且只当 $a^\theta=b^\theta=c^\theta$，即 $a=b=c$ 时

下面考虑 $\theta<0$，我们在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义连续函数

$$f(\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{b^{2\theta}c^{2\theta}+c^{2\theta}a^{2\theta}+a^{2\theta}b^{2\theta}}{3}\right)^{1/\theta} - \left[\dfrac{a^{4\theta}+b^{4\theta}+c^{4\theta}+3\left(\frac{16\Delta^2}{3}\right)^\theta}{6}\right]^{1/\theta} & \text{当 } \theta\ne 0 \text{ 时;}\\ (abc)^{4/3}-(abc)^{2/3}\left(\dfrac{16}{3}\Delta^2\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{当 } \theta=0 \text{ 时。}\end{cases} \tag{10}$$

若 $a=b=c$ 时，$f(\theta)=0$；下设 a，b，c 不全相等

由polya-Szego 不等式〔6〕

$$\triangle < \frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3} \tag{11}$$

知 $f(0)>0$。……………………………(12)

由函数 $f(\theta)$ 的连续性，存在绝对值充分小的 $\delta<0$，使对于 $\theta\in[\delta,0)$，$f(\theta)>0$，即有

$$\left[\frac{16}{3}\triangle^2(a,b,c)\right]^{\theta} > \frac{16}{3}\triangle^2(a^{\theta},b^{\theta},c^{\theta}) \tag{13}$$

对于 $\theta<\delta<0$，有 $\frac{\theta}{\delta}>1$，用(9)得

$$\left[\frac{16}{3}\triangle^2(a^{\delta},b^{\delta},c^{\delta})\right]^{\theta/\delta} > \frac{16}{3}\triangle^2(a^{\theta},b^{\theta},c^{\theta}) \tag{14}$$

在(13)中取 $\theta=\delta$，得

$$\left[\frac{16}{3}\triangle^2(a,b,c)\right]^{\delta} \geqslant \frac{16}{3}\triangle^2(a^{\delta},b^{\delta},c^{\delta})$$

从而

$$\left[\frac{16}{3}\triangle^2(a,b,c)\right]^{\theta} > \left[\frac{16}{3}\triangle^2(a^{\delta},b^{\delta},c^{\delta})\right]^{\theta/\delta} \tag{15}$$

联系(14)和(15)，得在 $\theta<\delta$ 时

$$\left[\frac{16}{3}\triangle^2(a,b,c)\right]^{\theta} \geq \frac{16}{3}\triangle^2(a^{\theta},b^{\theta},c^{\theta}) \tag{16}$$

于是，上式对 $\theta<0$ 成立，取等号当且只当 $a=b=c$ 时。

这样，我们就对任意实数 θ 对 Heron 公式的等价形式(6)作了幂指数推广。不过，由上述过程可以看出马援同学所证的 $0<\theta<1$ 情形是最实质的。

§4　统一观点

我们定义在区域：$\{(a,b)\mid a+b>c\}\cap\{(a,b)\mid -c<a-b<c\}$ 上的二元函数

$$\lambda(a,b)=\frac{2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta}}{(2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4)^{\theta}}$$

$$=\left[\frac{16\Delta_{\theta}^{2}}{(16\Delta^2)^{\theta}}\right] \tag{17}$$

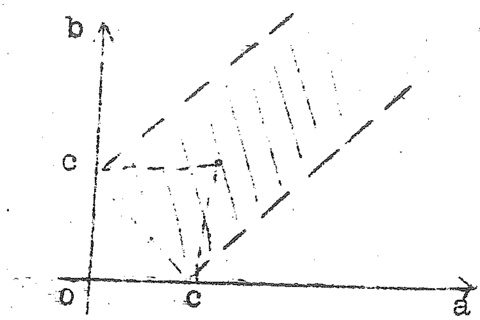


图1

其中 $0\neq\theta\neq1$

求驻点：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\lambda}{\partial a}(a,b)=\dfrac{4\theta}{a(16\Delta^2)^{\theta+1}}\{a^{2\theta}(b^{2\theta}+c^{2\theta}-a^{2\theta})(16\Delta^2)\\ \qquad -a^2(b^2+c^2-a^2)(16\Delta_{\theta}^2)\}=0\\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial b}(a,b)=\dfrac{4\theta}{a(16\Delta^2)^{\theta+1}}\{b^{2\theta}(c^{2\theta}+a^{2\theta}-b^{2\theta})(16\Delta^2)\\ \qquad -b^2(c^2+a^2-b^2)(16\Delta_{\theta}^2)\}=0\end{cases} \tag{18}$$

在上式中，有 $b^2+c^2\neq a^2$，$c^2+a^2\neq b^2$。否则反设 $b^2+c^2=a^2$

$a^{2\theta}=(b^2+c^2)^{\theta}\neq b^{2\theta}+c^{2\theta}$，$\dfrac{\partial\lambda}{\partial a}\neq0$，矛盾！

所以

$$\frac{a^{2\theta}(b^{2\theta}+c^{2\theta}-a^{2\theta})}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{16\Delta_\theta^2}{16\Delta^2}$$

$$=\frac{b^{2\theta}(c^{2\theta}+a^{2\theta}-b^{2\theta})}{b^2(c^2+a^2-b^2)} \qquad (19)$$

反设 $b\neq c$。用等比定理得

$$\frac{a^{2\theta}(b^{2\theta}+c^{2\theta}-a^{2\theta})}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=$$

$$=\frac{a^{2\theta}(b^{2\theta}+c^{2\theta}-a^{2\theta})+2b^{2\theta}(c^{2\theta}+a^{2\theta}-b^{2\theta})-16\Delta_\theta^2}{a^2(b^2+c^2-a^2)+2b^2(c^2+a^2-b^2)-16\Delta^2}$$

$$=\frac{(b^{2\theta}-c^{2\theta})(b^{2\theta}+c^{2\theta}-a^{2\theta})}{(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}$$

又有 $b^{2\theta}+c^{2\theta}\neq a^{2\theta}$，反设 $b^{2\theta}+c^{2\theta}=a^{2\theta}$，则 a^θ，b^θ，c^θ 构成直角三角形。$\Delta_\theta\neq 0$。同时

$$a^2=(a^{2\theta})^{1/\theta}=(b^{2\theta}+c^{2\theta})^{1/\theta}\neq b^2+c^2$$

所以 $\dfrac{\partial\lambda}{\partial a}\neq 0$。与(18)矛盾。从而 $b=c$。于是由(19)得

$$\frac{a^{2\theta}(2b^{2\theta}-a^{2\theta})}{a^2(2b^2-a^2)}=\frac{b^{2\theta}a^{2\theta}}{b^2a^2}$$

$$\Rightarrow\frac{a^{4\theta}}{a^4}=\frac{a^{2\theta}b^{2\theta}}{a^2b^2}\Rightarrow\frac{a^{2\theta}}{a^2}=\frac{b^{2\theta}}{b^2}$$

$$\Rightarrow a^{2(\theta-1)}=b^{2(\theta-1)}\Rightarrow a=b$$

于是 $\lambda(a,b)$ 有唯一的一个驻点 (c,c)。因此 λ 有唯一的

一个可能的极值点。又

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial a^2}(c,c)=\frac{\partial^2\lambda}{\partial b^2}(c,c)=\frac{16\theta(1-\theta)}{3^{1+\theta}c^2},$$

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial a\partial b}(c,c)=\frac{8\theta(\theta-1)}{3^{\theta+1}c^2}.$$

显然，在驻点（c，c），有

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial a^2}\quad\frac{\partial^2\lambda}{\partial b^2}>\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial a\partial b}\right)^2 \tag{20}$$

并且，当 $0<\theta<1$ 时，$\frac{\partial^2\lambda}{\partial a^2}>0$，$\lambda(c,c)$ 是极小；

当 $\theta<0$ 或 $\theta>1$ 时，$\frac{\partial^2\lambda}{\partial a^2}<0$，$\lambda(c,c)$ 是极大。

可以证明：（c，c）点确使 λ 达到最值（参阅〔7〕）。又因为 $\lambda(c,c)=3^{1-\theta}$，所以

当 $0<\theta<1$ 时，$\lambda(a,b)\geq 3^{1-\theta}$；（21）

当 $\theta>1$ 或 $\theta<0$ 时，$\lambda(a,b)\leq 3^{1-\theta}$。（22）

§5　变形

设 a，b，c 为△ABC 的三边，△表示它的面积。则当 $0\leq\theta\leq 1$ 时，有

$$a^{4\theta}+b^{4\theta}+c^{4\theta}\geq 3\left(\frac{16}{3}\Delta^2\right)^{\theta}+(b^{2\theta}-c^{2\theta})^2+(c^{2\theta}-a^{2\theta})^2+(a^{2\theta}-b^{2\theta})^2 \tag{23}$$

当 $\theta>1$ 或 $\theta<0$ 时，不等号反向。

特别地，当$\theta=\frac{1}{2}$时，(23)化为Finsler-Hadwiger不等式(1938年)：[8]

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}\triangle+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2 \qquad (24)$$

取$\theta=-\frac{1}{2}$时，有

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leq\frac{3\sqrt{3}}{4\triangle}+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2 \qquad (25)$$

§6 应用

同文[5]一样，我们来推广杨路、情景中两位教授关于三角形的的可匹配性定理[9]。

定义 两个三角形$A_1A_2A_3$和$B_1B_2B_3$在空间R^2中叫做"可匹配的"(matchable)，如果存在三条平行直线P_1、P_2、P_3和刚性运动σ、τ，使得$\sigma(A_i)$和$\tau(B_i)$位于p_i上($i=1,2,3$)。(图2)。

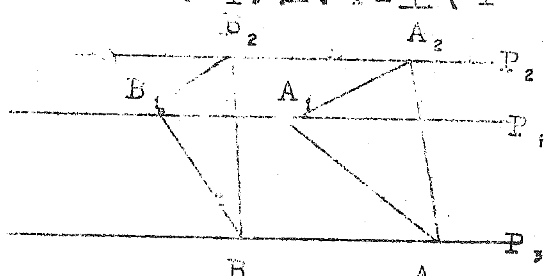


图2

张、杨两教授证明了：$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$可匹配的充分必要条件是

$$8(\triangle_1^2+\triangle_2^2)\leq a_1^2(b_2^2+b_3^2-b_1^2)+a_2^2(b_3^2+b_1^2-b_2^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2) \qquad (26)$$

应用1 若$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$可匹配，则当$0\leq\theta\leq1$时，有

$$\frac{3}{2}\left(\frac{16}{3}\right)^{\theta}\left(\Delta_1^{2\theta}+\Delta_2^{2\theta}\right)\le a_1^{2\theta}\left(b_2^{2\theta}+b_3^{2\theta}-b_1^{2\theta}\right)$$

$$+a_2^{2\theta}\left(b_3^{2\theta}+b_1^{2\theta}-b_2^{2\theta}\right)+a_3^{2\theta}\left(b_1^{2\theta}+b_2^{2\theta}-b_3^{2\theta}\right) \qquad (27)$$

反之，若$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$不可匹配，则当$\theta\ge 1$或$\theta\le 0$时，上述不等号反向。

1954年，Beatty在〔10〕中提出并证明了

$$\frac{(K-H)^2}{12}\ge\Delta^2\ge\frac{(K-H)(3K-5H)}{12} \qquad (31)$$

其中$H=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$，$K=bc+ca+ab$。

第一个不等式等价于Finsler-Hadwiger不等式；下面我们把第二个不等式推广为

应用2：当$\theta\ge 1$或$\theta\le 0$时

$$\Delta^{2\theta}\ge 2^{2-4\theta}3^{\theta-2}(K_\theta-H_\theta)(3K_\theta-5H_\theta) \qquad (32)$$

其中$H_\theta=\frac{1}{2}(a^{2\theta}+b^{2\theta}+c^{2\theta})$，$K=b^\theta c^\theta+c^\theta a^\theta+a^\theta b^\theta$

特别地，取$\theta=-1$，有

$$\frac{1}{\Delta^2}\ge\frac{64}{27}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2c^2}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{3}{bc}+\frac{3}{ca}+\frac{3}{ab}-\frac{5}{2a^2}-\frac{5}{2b^2}-\frac{5}{2c^2}\right) \qquad (33)$$

1957年，Frucht改进了（31）式〔11〕

$$\frac{s(s-q)^2(s+2q)}{27}\ge\Delta^2\ge\frac{s(s+q)^2(s-2q)}{27} \qquad (34)$$

其中$q=(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)^{\frac{1}{2}}$。用前述的方法也可以对上式进行指数推广。这里不再累述。

§7 其它

三角形中的通常的一些三边函数公式也可以进行指数推广。例如

$$S=\frac{a+b+c}{2},\quad r=\frac{\triangle}{S},\quad R=\frac{abc}{4\triangle}$$

等等。当 $0<\theta<1$ 时

$$s(a^\theta, b^\theta, c^\theta)=\frac{1}{2}(a^\theta+b^\theta+c^\theta)$$

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{a^\theta+b^\theta+c^\theta}{3}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^\theta$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\theta}[s(a, b, c)]^\theta$$

或 $$\left[\frac{2}{3}s(a, b, c)\right]^\theta\geq\frac{2}{3}s(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \qquad (28)$$

$$r(a^\theta, b^\theta, c^\theta)=\frac{\triangle(a^\theta, b^\theta, c^\theta)}{s(a^\theta, b^\theta, c^\theta)}$$

$$\geq\frac{\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^{\theta-1}[\triangle(a, b, c)]^\theta}{\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\theta}[s(a, b, c)]^\theta}=(2\sqrt{3})^{\theta-1}[r(a, b, c)]^\theta$$

或

$$[2\sqrt{3}r(a, b, c)]^\theta\leq 2\sqrt{3}\,r(a^\theta, b^\theta, c^\theta) \qquad (29)$$

$$R(a^\theta, b^\theta, c^\theta)=\frac{a^\theta b^\theta c^\theta}{4\triangle(a^\theta, b^\theta, c^\theta)}$$

$$\leq\frac{a^\theta b^\theta c^\theta}{4\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^{\theta-1}[\triangle(a, b, c)]^\theta}=(\sqrt{3})^{\theta-1}[R(a, b, c)]^\theta$$

或 $[\sqrt{3}\ R(a, b, c)]^{\theta} \geq \sqrt{3}\ R(a^{\theta}, b^{\theta}, c^{\theta})$ (30)

参 考 文 献：

[1]、M.Kline，古今数学思想。第一册。上海科学技术出版社1979年版。

[2]、李严。中国数学大纲，上册。科学出版社1958年版。

[3]、G.Polya。数学的发现，第一卷，科学出版社1982年版。

[4]、F.Cajori。A History of Mathemations，Macmillan，New York 1931.

[5]、马援，Pedoe 不等式的推广，数学通讯。待发表；蛙鸣，第25期：1986年11月.

[6]、G.波利亚，G，舍贵：数学分析中的问题和定理，第二卷，上海科学技术出版社1985年版

[7]、何琛，史济怀，徐森林：数学分析，第二册，高等教育出版社1985年版。

[8]、王玉怀，费恩斯列尔－哈德维格尔不等式，数学通讯，1983年第11期。

[9]、杨路，张景中。关于三角形的可匹配性。数学通报，1983年第10期。

[10]、S.Beatty，Upper and lower estimates for the area of a triangle，Trans Roy soc Canada Ⅲ(3) 48(1954)，1-5.

[11]、R.Frucht Upper and lower bounds for the

area of a troiangle for whose sides two symmetric functions are know. Canad J Math 9(1957), 227-231.

数学哲学文摘

数学奇才的悲剧

王建军

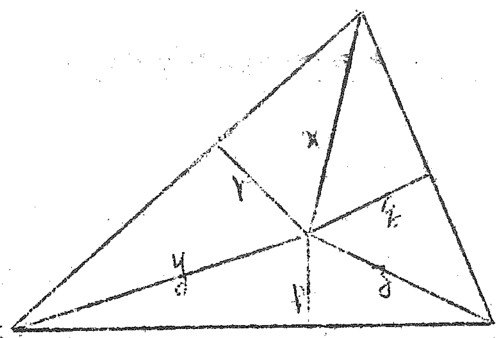
数学史上贡献最大而命运最悲惨的人物之一要算康托了。康托是集合论的奠基人。而集合论是全部现代数学的基础理论之一。康托29岁提出集合论的思想后，受到他的老师克罗内克的猛烈攻击，出于专业上的忌妒，他甚至阻挠康托在柏林大学获得一个职位。由于巨大的精神压力和内心痛苦，康托39岁时患了精神病，1918年病逝于哈雷精神病院。数学史上这种“才如江海命如丝”的悲剧典型还有伽罗华和阿贝尔。伽罗华是群论的奠基人，被称为“自古以来的二十五位大数学家之一”。但他两次报考巴黎综合技术学校都不及格，因投身政治又两次入狱，被学校开除。他的数学著作两投巴黎科学院，一次被柯西遗失，一次被泊松退回。他寄给雅柯比和高斯的三篇论文也没有得到答复，这些人都是当时世界上第一流的大数学家。伽罗华在狱中因病入院，出狱的第二天就死于决斗，只有二十岁。阿贝尔把“一般五次方程不能用根号求解”的重要成果寄给高斯，高斯叫道：“又是一个怪物。”随即把手稿一扔。他的另一篇有关超函数的重要论文寄给柯西，也被柯西遗失在自己的手稿中。阿贝尔回国后没有固定的工作，“穷得象教堂里的老鼠”，二十六岁就死于贫病之中。

未解决的问题

艾尔兑斯—莫迪尔不等式的指数推广

831 李广兴 陈计

设0是三角形T内的任意一点。如图所示。x，y，z和p，q，r是从0到顶点和边的距离。



则

$$x+y+z \geq 2(p+q+r) \quad (1)$$

式中等号当且只当T为正三角形，0是它的中心时成立。

这是匈牙利数学家P. Erdös在1935年猜测的一个几何不等式。1937年，英国数学家L. J. Mordell给出了这个不等式的一个证明。〔1〕

1958年，A. Folorian证明了，〔2〕当 $0<k\leq 1$ 时，

$$x^k+y^k+z^k \geq 2^k(p^k+q^k+r^k) \quad (2)$$

等式成立的条件同上。当 $K>1$ 时，

$$x^k+y^k+z^k > 2(p^k+q^k+r^k) \quad (3)$$

1961年，A. Oppenheim指出〔3〕，当 $-1\leq k<0$ 时，

$$x^k+y^k+z^k \leq 2^k(p^k+q^k+r^k) \quad (4)$$

当 $k<-1$ 时，

$$p^k+q^k+r^k > 2(x^k+y^k+z^k) \tag{5}$$

事实上，Oppenheim证明了如下的原理：包含x，y，z，p，q，r的齐次不等式（或等式），经置换

$$R:\ (x,y,z,p,q,r) \longrightarrow (p^{-1},q^{-1},r^{-1},x^{-1},y^{-1},z^{-1})$$

后，仍然成立。

从而可知：(2)与(4)，(3)与(5)是互相等价的。

1986年，湖南省澧县第八中学教学教师田隆岗试图加强、推广Erdos不等式[4]，他所列的结果是明显有误的。不过，他实际上已证得：对于任意自然数k，成立非严格不等式

$$x^k+y^k+z^k \geq 2(p^k+q^k+r^k)+6(2^{k-1}-1)(\sqrt[3]{pqr})^k \tag{6}$$

当k=1时，上式即为Erdos-Mordell不等式；进一步，对于任意大于1的实数k，(6)式是否成立？

本文中，我们证明了(6)式对实数$k \geq 2$是成立的。为此需要一个分析不等式作为引理：

设$x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$；$k \geq 2$，或$0 \leq k \leq 1$，则

$$(x_1+x_2)^k \geq x_1^k+x_2^k+(2^k-2)(\sqrt{x_1x_2})^k \tag{7}$$

当$1<k<2$时，不等号反向。

证明　下面只证$k \geq 2$的情形。

显然当k=2或$x_1=x_2$时，(7)式取等号，所以不妨设$k>0$，$x_1<x_2$，并令$\frac{x_1}{x_1+x_2}=\tau$，则$\frac{x_2}{x_1+x_2}=1-\tau$，于是(7)式等价于

$$1>\tau^k+(1-\tau)^k+(2^k-2)[\sqrt{\tau(1-\tau)}]^k \tag{8}$$

其中$0<\tau<\frac{1}{2}$。

令

$$f(\tau)=\frac{1-\tau^k-(1-\tau)^k}{(\tau-\tau^2)^{k/2}}$$

则

$$f'(\tau)=\frac{k}{2}(\tau-\tau^2)^{-\frac{k}{2}-1}\left[(1-\tau)^k-\tau^k+(2\tau-1)\right]$$

再令

$$g(\tau)=(1-\tau)^k-\tau^k+(2\tau-1)$$

则

$$g''(\tau)=k(k-1)\left[(1-\tau)^{k-2}-\tau^{k-2}\right]>0$$

又因为$g(0)=g(\frac{1}{2})=0$，所以$g(\tau)<0$，即有$f'(\tau)<0$；再因为$f(\frac{1}{2})=2^k-2$，所以$f(\tau)>2^k-2$，即右(8)式成立。于是(7)式成立。并且等号仅在$k=2$或$x_1=x_2$时取。

现在我们用〔5〕中的方法，在$k\geq 2$时证明(6)式：

利用已知的结果〔3〕～〔5〕，即$ax\geq cq+br$，

$$by\geq ar+cp,\quad cz\geq bp+aq \tag{9}$$

以及算术平均—几何平均不等式：

$$x^k+y^k+z^k$$

$$\geq(\frac{c}{a}q+\frac{b}{a}r)^k+(\frac{a}{b}r+\frac{c}{b}p)^k+(\frac{b}{c}p+\frac{a}{c}q)^k$$

$$\geq(\frac{c}{a}q)^k+(\frac{b}{a}r)^k+(2^k-2)(\frac{bc}{a^2}qr)^{k/2}$$

$$+(\frac{a}{b}r)^k+(\frac{c}{b}p)^k+(2^k-2)(\frac{ca}{b^2}rp)^{k/2}$$

$$+\left(\frac{b}{c}p\right)^k+\left(\frac{a}{c}q\right)^k+(2^k-2)\left(\frac{ab}{c^2}pq\right)^{k/2}$$

$$=\left[\left(\frac{b}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{b}\right)^k\right]p^k+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^k+\left(\frac{a}{c}\right)^k\right]q^k+\left[\left(\frac{a}{b}\right)^k+\left(\frac{b}{a}\right)^k\right]r^k$$

$$+(2^k-2)\left[\left(\frac{bc}{a^2}qr\right)^{k/2}+\left(\frac{ca}{b^2}rp\right)^{k/2}+\left(\frac{ab}{c^2}pq\right)^{k/2}\right]$$

$$\geq 2(p^k+q^k+r^k)+6(2^{k-1}-1)(pqr)^{k/3}$$

这就证明了(6)式在 $k\geq 2$ 时成立。

施用等价置换。R 于(6)式。得在 $k\leq -2$ 时

$$p^k+q^k+r^k\geq 2(x^k+y^k+z^k)+6(2^{k-1}-1)(\sqrt[3]{xyz})^k \qquad (10)$$

综上所述。Erdös-Mordell 不等式的幂指数推广的形式似乎应为

在 $0<|k|\leq 1$ 时

$$(x^k+y^k+z^k)^{1/k}\geq 2(p^k+q^k+r^k)^{1/k} \qquad (11)$$

当 $k\to 0$ 时，

$$xyz\geq 8pqr \qquad (12)$$

在 $k>1$ 时。

$$x^k+y^k+z^k\geq 2(p^k+q^k+r^k)+6(2^{k-1}-1)(pqr)^{k/3} \qquad (13)$$

在 $k<-1$ 时

$$p^k+q^k+r^k\geq 2(x^k+y^k+z^k)+6(2^{-k-1}-1)(xyz)^{k/3}$$

(14)

其中。(12)和(13)式在 $1<|k|<2$ 时仍为猜想。

References:

[1]. Advancod problem 3740, Amer Math Monthly 44(1937), 252-254。

[2]. A.Florian, Zu einem satz von p.Erdos Elem Math, 13(1958), 55-58。

[3]. A.Oppenheim, The Erdös inequality and other inequalities for a triangla, Amar Meth.Monthly, 68(1961), 226-230

[4]. 田隆岗。Erdos不等式的加强与推广，数学通讯。1986年第10期，22。

[5]. 单墫，几何不等式。上海教育出版社，1980年版。

[6]. N.D.Kazarinoff, Geometric inequalities Random house, New York, 1961 有台译文。

我急于想要显示一下自己的能力，看一看自己能干些什么。

—— C.L.Siegel

数学家的大部分光阴是在挫折失败中度过的，只是偶然受到鼓舞舞。生手不应期望很快得到结果，如果来之迅速，则成果往往是低劣的。

—— J.E.Littlewood

〔问题与猜想〕

猜想1　在面积为1的三角形内，任给几点，则一定存在三点，它们组成三角形的面积$\leq\frac{1}{8}$

宁波　陈琦　陈计　提供

猜想2　设$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$为正数，$x_1+x_2+\cdots+x_n=S$

$S\leq n\sqrt{2+\sqrt{5}}$　则　$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i})\geq(\frac{s}{n}+\frac{n}{s})^n$

〔注〕：史济怀老师曾在$S\leq n$时证明了上式。参见《关于少年班一道试题的推广》，载《福建中学数学》1982年第3期。当$n=$

$n=2$时，上述不等式成立。

831　陈计　提供

猜想3　设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为正数，$n\geq3$，$r>1$，则

$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r\geq x_1^r+x_2^r+\cdots+x_n^r+(n^r-n)(x_1x_2\cdots x_n)^{r/n}$

831　李广兴　陈计提供

问题4（征解）：K为域。定义R为：

$R=\{f(x)\in K[x]$：f为首一多项式，$(f, f')=1\}$，在R上定义$f\odot g=(f, g)$　$f\oplus g=[f, g]/(f, g)$，其中（　）指最大公因子，〔　〕指最小公倍数，则：$(R, \odot, \oplus)$为环。

关于Liouville 定理

有界全纯函数为常数。在传统的复变教程中，此定理证明较迟，且要用哥西定理边界积分。也许只用必需的几个概念来证明和理解此定理在教学法上是有趣的。下面我们就只用复数代数，复域上的复级数，绝对收敛，绝对收敛级数逐项乘积知识来证明。

一个全纯函数可表示为 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 处处收敛故绝对收敛的幂级数形式。

设 $|f(z)|\leq M$ 对 $\forall z$ 成立

我们要证 $a_n=0$ （$n=1,2,\cdots\cdots$）只需证：

$$A(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}\leq M^2+2 \quad \text{对所有 } r>0 \text{ 成立}$$

$\forall r>0$，取 $k=k(r)$ 为最小的满足：

$$B(r)=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n\sum_{m\geq k}^{\infty}|a_m|r^m\leq 1 \text{ 的正整数。}$$

考虑 $F(r)$ 为 $|f|^2=f\bar{f}$ 在 $r\omega^j$ （$0\leq j\leq k-1$，$\omega=e^{2\pi/k}$）的 k 个值的算术平均值。

$$\because \frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\omega^{(n-m)j}=\begin{cases}1 & n\equiv m \pmod k\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

$$\therefore F(r)=\sum_{n\equiv m \pmod k} a_n\bar{a}_m r^{n+m}$$

又因 $|f(z)|\leq M$ $\quad\therefore F(r)\leq M^2$

记 $F(r)=A(r)+G(r)$

$A(r)$包括所有满足$n=m$的被加数。

因为$n\equiv m \pmod{k}$ $n\neq m$，则或$n\geq k$，或$M\geq k$。故$|G(r)|\leq 2B(r)$

$\therefore A(r)=F(r)-G(r)\leq F(r)+2B(r)\leq M^2+2$。

故Liouville定理得证。

几点注释：

(1) 在$A(r)\leq M^2+2$中，2不起实质性作用，事实上，很明显2可改为任意小的正数。故$A(r)\leq M^2$，当$M=\sup|f(z)|$时，这是最好的估计。

(2) 上述证明与一个有名的证明联系很紧，即：

$$A(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\,d\theta$$ 显然$A(r)\leq M^2$

——译自《美国数学杂志》

Mer.86

〔学科简介〕

不等式的控制理论

吴　名

对于x，$y \in R^n$，如果把x，y的分量重新排列为$x_{[1]} \geq \cdots \geq x_{[n]}$和$y_{[1]} \geq \cdots \geq y_{[n]}$　　(1)

它们若满足$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]}$，k＝1，…，n，则称y弱控制x。记作$x \prec_w y$；若还满足$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$，则称x被y所控制，记作$x \prec y$。

关于不等式的控制理论近年来发展很快。例如在概率统计、随机过程、矩阵论诸方面都有很成功的应用。A.W.Marshall和I.Olkin写的专著《Inequalitie：Theory of Majorization and Its Applications》在1979年应时出版。为国内外文献广泛引用。甚至有人以《优势理论及其应用》为题，专门著文向国内读者介绍此书。

笔者未能看到这本名著，只能举两个例子来与大家共赏。

例1　推广钟开莱不等式

设$a \in R^n$，$b \in R^n$，且满足$a \prec_w b$，则对任意$p>1$，有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \leq \sum_{i=1}^{n} |b_i|^p \qquad (2)$$

特别取p＝2，即得统计学家钟开莱教授在《美国数学月刊》上提出的不等式$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} b_i^2$　　(3)

事实上，由题设得到

$$(a_{[1]}^{p-1} - a_{[2]}^{p-1})a_{[1]} \leq (a_{[1]}^{p-1} - a_{[2]}^{p-1})b_{[1]}$$

$$(a^{p-1}_{(2)}-a^{p-1}_{(3)})(a_{(1)}+a_{(2)})\leq(a^{p-1}_{(2)}-a^{p-1}_{(3)})(b_{(1)}+b_{(2)})$$

……………………………

$$(a^{p-1}_{(n-1)}-a^{p-1}_{(n)})(a_{(1)}+\cdots+a_{(n-1)})$$

$$\leq(a^{p-1}_{(n-1)}-a^{p-1}_{(n)})(b_{(1)}+\cdots+b_{(n-1)})$$

$$a^{p-1}_{n}(a_{(1)}+\cdots+a_{(n-1)})\leq a^{p-1}_{(n)}(b_{(1)}+\cdots+b_{(n)})$$

将以上几个不等式双方相加，化简后得

$$a^{p}_{(1)}+\cdots+a^{p}_{(n)}\leq a^{p-1}_{(1)}b_{(1)}+\cdots+a^{p-1}_{(n)}b_{(n)} \qquad (4)$$

又由 Holder不等式，得出

$$\sum_{i=1}^{n}a^{p-1}_{(i)}b_{(i)}\leq(\sum_{i=1}^{n}a^{p}_{(i)})^{p-1/p}(\sum_{i=1}^{n}|b_{(i)}|^{p})^{1/p} \qquad (5)$$

联立(4)和(5)，约去 $(\sum_{i=1}^{n}a^{p}_{(i)})^{(p-1)/p}$再乘P次方即得不等式(2)。

例2 证明Bapag-Sunder 定理（1985年）

设$A\geq0$，$B\geq0$，记$\beta=(\mathrm{diag}\ B)\downarrow$，则

$$\lambda(A\circ B)(<_{w})\ \lambda(A)\circ\beta \qquad (6)$$

式中，Schur积$A\circ B=(a_{ij}\ b_{ij})$，谱$\lambda(A)=(\lambda_1(A),\cdots,\lambda_n(A))^{T}$，$\lambda_1(A)\geq\cdots\geq\lambda_n(A)$。并由此导出

$$\mathrm{tr}(A\circ B)^2\leq\lambda_1^2(A)b^2_{(11)}+\cdots+\lambda^2_n(A)b^2_{(nn)} \qquad (7)$$

限于篇幅，请读者自己试试。