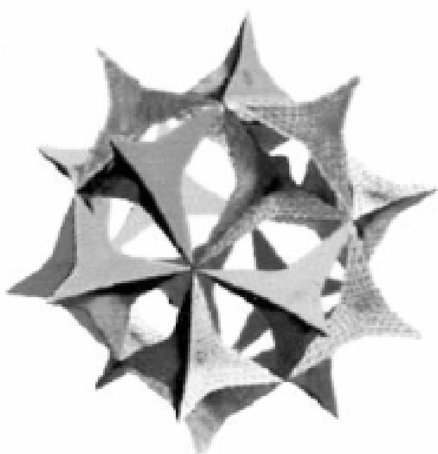
蛙　　鸣

16



中国科技大学数学系学生会主办

一九八四年三月

Eisenstein定理的推广

821　　刘弘泉

给定整系数多项式 $f(x)$，若有在两整系数多项式 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$，使 $f(x)=\varphi(x)\cdot\psi(x)$，则 $f(x)$ 称为可约。反之称为不可约。通常判别一个多项式可化与否，应用Eisenstein 定理：

定理1（Eisenstein）设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，$a_i\in Z$，p为一素数，$P\mid(a, a_1 \cdots a_n)$ $P^2\nmid a_0$，$P\nmid a_n$ 则 $f(x)$ 不可约。

这篇短文，拟以 $P^l\| a_0$（即 P^l/a_0 但 $P^{l+1}\nmid a_0$，l为正整数）代 $P\| a_0$，相应可得下面 Hm：

定理2设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a x^i$，$a_i\in Z$，P为一素数，$P\mid(a_1 \cdots a_{n-1})$ $p\nmid a_n$，$P^l\| a_0$，则 $f(x)$ 至多可分解成L个不可约多项式之乘积。

证明：用归纳法。L＝1时即是定理1。

今假设命题对所有 $\leq L-1$ 的正整都成立，考虑L的情形，如果 $f(x)$ 不可约化，结论自然成立。

如果 $f(x)$ 可约，设 $f(x)=g(x)h(x)$ 其中 $g(x)$，$h(x)$ 都为整系数多项式，设 $g(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_{n_1}x^{n_1}$，

$$h(x)=C_0+C_1x+\cdots+C_{n_2}x^{n_2}$$

$n_1+n_2=n$，$n-1\geqslant n_1$，$n_2\geqslant 1$，由 $p\nmid a_n=b_{n_1}\cdot c_{n_2}$ 知 $p\nmid b_{n_1}$，$p\nmid c_{n_2}$。

又由 $P^l\| a_0=b_0\cdot C_0$，则只可能有下面三种情形：

（I）$P^l\| b_0$，$P\nmid C_0$，（II）$P^{l-e}\| b_0$，$P^e\| C_0$，（$1\leq e\leq l-1$ 中某一值）（III）$p\nmid b_0$，$p^l\| c_0$

如果（Ⅰ）$p^{l} \| b_0$，$p \nmid c_0$。设$p \mid (b_0, b_1, \cdots, b_r)$，$p \nmid b_{r+1}$，$0 \le r \le n_1 - 1$，则由$r+1 \le n_1 < n$故 $p \mid a_{r+1} = b_0 c_{r+1} + b_1 c_r + \cdots + b_r c_1 + b_{r+1} c_0 \Rightarrow p \mid b_{r+1} c_0$。但 $p \nmid c_0$则 $p \mid b_{r+1}$。又设$p \mid (b_{r+1}, \cdots, b_{r+t})$，$p \nmid b_{r+t+1}$，$0 \le t \le n_1 - r - 1$ 由 $t+r+1 \le n_1 < n$ 知 $p \mid a_{t+r+1} = b_0 c_{t+r+1} + \cdots + b_{t+r} c_1 + b_{t+r+1} c_0 \Rightarrow p \mid b_{r+t+1} c_0$，此与$p \nmid b_{r+t+1}$，$p \nmid c_0$矛盾！于是这种情况不会出现。

（注意：如c_j中$j>n_2$，则实际上$c_j=0$下类同）

如果（Ⅱ）　$p^{l-e} \| b_0$，$p^{e} \| c_0$。设$p \mid (b_0, b_1, \cdots, b_r)$，$p \nmid b_{r+1}$，$p \mid (c_0, c_1, \cdots, c_s)$　$p \nmid c_{s+1}$　$0 \le r \le n_1 - 1$　$0 \le s \le n_2 - 1$。

如果，$r=n_1-1$和$s=n_2-1$有一个不成立，那么，$r+s+2 < (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + 2 = n_1 + n_2 = n$从而$p \mid a_{r+s+2} = b_0 c_{r+s+2} + \cdots + b_r c_{s+2} + b_{r+1} c_{s+1} + b_{r+2} c_s + \cdots + b_{r+s+2} c_0$易看出應有$p \mid b_{r+1} c_{s+1}$此与$p \nmid b_{r+1}$，$p \nmid c_{s+1}$矛盾。

故若（Ⅱ）成立，则必$r=n_1-1$且$s=n_2-1$。

则对于$g(x)$与$h(x)$用归纳假设，分别可分解为不超过$l-e$个，e个不可约的多项式之乘积。可是，$f(x)=g(x)h(x)$可分解为不多于$(l-e)+e=l$个不可分解多项式之积，故对(Ⅱ)这种情况归纳会成。

至于（Ⅲ）的情形，同（Ⅰ）可证在$f(x)$可约的前提下不可能出现。

证完。

Geppert定理的证明

(1)56页有习题："若单位球面上的弧长参数闭曲线的曲率$k\neq 1$，证明：全挠率$\int_0^l \tau(s)ds=0$""其实，单位球面可改为一般球面，$k\neq 1$这一条件可除去，由此，我们就得到了Geppert 定理：任意球面上的弧长参数闭曲线的全挠率$\int_0^l \tau(s)ds=0$，本文中，我们首先给出球面曲线的一些特征，然后应用这些特征证明Geppert定理。为讨论方便起见。本文中的球面曲线C 都是C^4一函数。

引理1：设C(s)是球面S^2上的一条曲线，S为弧长参数，其曲率为K。挠率为τ；$\neq 0$)。则$C=-\frac{1}{K}N-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'B$。

〔证明〕：见(1) 14页。单位球面改为一般球面。证明没有本质区别

引理2：设C为以弧长作参数的球面曲线。K和挠率$\tau\neq 0$满足方程$\frac{\tau}{k}+\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right]'=0$

〔证明〕：由引理1。$C=-\frac{1}{k}N-\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'B$，$\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'$

$=-C\cdot B\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right]'=-(T\cdot B+C(-\tau N))$

$=\tau C\cdot N=\frac{\tau}{k}$

$\therefore \frac{\tau}{k}\left[\frac{1}{\tau}\left(\frac{1}{k}\right)'\right]'=0$

定理1：弧长参数曲线C(s)为球面曲线当且仅当~~$K\neq 0$~~。且存在定义在〔0，L〕上的C^1一函数f(s)满足$f\tau=\left(\frac{1}{k}\right)'$，$f'+\frac{1}{k}=0$。其中L为C的弧长。

〔证明〕：必要性：　设$C=xT+yN+zB$

$\because C$ 在球面上。 $\therefore C' \cdot C = k^2$ $2CC' = 0$ 即 $X = C \cdot T = 0$。

再微分。得 $1 + kC \cdot N = 0$ $\therefore k \neq 0$。由此 存在。且是连续可微

的定义当 $\tau \neq 0$ 时。$f(s) = \frac{1}{\tau}(\frac{1}{k})'$ 。当 $\tau = 0$ 时。

$f(s) = -C(s) \cdot B(s)$ 由引理1的证明过程得引理2。

知 $f(s)$ 是 $[0, L]$ 上的连续可微函数且适应 $f\tau = (\frac{1}{k})'$。

$f' + \frac{\tau}{k} = 0$

充分性：设存在连续可微函数 f 满足 $f\tau = (\frac{1}{k})'$。$f' + \frac{\tau}{k} = 0$。

在 $C(s)$ 的 Frenet 标架上构造曲线 $D(s) = -\frac{1}{k}N - fB$

$\because D(s)' = -T + [(\frac{1}{k})' - f\tau]N + (\frac{\tau}{k} + f')B = -T$ $|D'(s)| = 1$

$\therefore D(s)$ 也是被其弧长参数化。 $\because (\frac{1}{k^2} + f^2)' = -2\frac{f\tau}{k} + 2ff'$

$= 0$ $\therefore \frac{1}{k^2} + f^2$ 为常数

$\because D(s) \cdot D(s) = \frac{1}{k^2} + f^2$ $\therefore (xs)$ 是半径为 $(\frac{1}{k^2} + f^2)^{\frac{1}{2}}$ 球面上的曲线设 $D(s)$ 的曲率和挠率为 $k^*(s)$。$\tau^*(s)$

运用 Frenet 公式不难得出 $k^*(s) = k$。$\tau^*(s) = \tau$

所以，由曲线论的基本定理知。$C(s)$ 可由 $D(s)$ 经运动而到。所以。$C(s)$ 也为球面曲线

定理2： 设 $C(s)$ 是弧长参数曲线。其曲率和挠率为 k 和 τ 则它为球面曲线的充要条件是：

$$\left(A\cos\int_0^s \tau ds + B\sin\int_0^s \tau ds\right)k(s) = 1$$

其中 A、B 是常数，且满足上式的球面必在半径为 $(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}$ 的球面上

〔证明〕：充分性：设 $C(s)$ 满足上式。显然 $k(s) \neq 0$。

且 $(\frac{1}{k})' = (-A\sin\int_0^s \tau ds + B\cos\int_0^s \tau ds)\tau(s)$ 令 $f(s) = -A$

……

令$f(s)=-A\sin\int_0^s\tau ds+B\cos\int_0^s\tau ds$，则易证$f\tau=(\frac{1}{k})'$，

$f'+\frac{\tau}{k}=0$ 由定理1知，C(s)为球面曲线。

必要性：设C(s)为球面曲线，令$\psi(s)=\int_0^s\tau ds$，则由定理1存在连续可微函数f，满足$f\tau=(\frac{1}{k})'$，$f'+\frac{\tau}{k}=0$，不难验证$(\frac{1}{k}\cos\psi-f\sin\psi)'=0$，$(\frac{1}{k}\sin\psi+f\cos\psi)'=0$

$\therefore\frac{1}{k}\cos\psi-f\sin\psi=A$，$\frac{1}{k}\sin\psi+f\cos\psi=B$，A、B为常数。由此解得$\frac{1}{k}=A\cos\psi+B\sin\psi$ $f=B\sin\psi+A\cos\psi$

$[(\frac{1}{k})^2+f^2]=[(A\cos\psi+B\sin\psi)^2+(B\sin\psi+A\cos\psi)^2]^{\frac{1}{2}}$
$=(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}$ $\therefore$C(s)位于半径为$(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}$的球面上，具有$(A\cos\int_0^s\tau ds+B\sin\int_0^s\tau ds)k(s)=1$

下面，我们来证明Geppert定理。

〔证明〕：设C(s)为任意一球面上的弧长参数闭曲线其曲率和挠率分别为K(s)，τ(s) 若C(s)为球面上的大圆，则结论是显然的，可设非平面曲线，则k(s)>0， 由定理2存在常数A。B使得。$(A\cos\int_0^s\tau ds+B\sin\int_0^s\tau ds)k(s)=1$。

$\therefore Ak(0)=1$。$(A\cos\int_0^s\tau ds+B\sin\int_0^s\tau ds)k(L)=1$ $\because$C(s)为闭曲线$\therefore k(0)=k(L)$ 具有$(-A\sin\int_0^s\tau ds+B\cos\int_0^s\tau ds)k(s)\tau(s)+(A\cos\int_0^s\tau ds+B\sin\int_0^s\tau ds)k'(s)=0$ $Bk(0)\tau(0)+AK'(0)=0$。$(-A\sin\int_0^L\tau ds+B\cos\int_0^L\tau ds)k(L)\tau(L)$
$+(A\cos\int_0^L\tau ds+B\sin\int_0^L\tau ds)K'(L)=(-A\sin\int_0^L\tau ds+B\cos\int_0^L\tau ds)$
$\cdot K(0)\tau(0)+\frac{1}{k(0)}\cdot K'(0)=0$ 由此可推得：
$A\cos\int_0^L\tau ds+B\sin\int_0^L\tau ds=A$。$(-A\sin\int_0^L\tau ds+B\cos\int_0^L\tau ds)\tau(0)=B\tau(0)$， 由于C(s)为非平面曲线，
$\therefore\tau(s)\neq0$，可设$\tau(0)\neq0$ $\therefore-A\sin\int_0^L\tau ds+B\cos\int_0^L\tau ds=B$

由此解得 $\sin\int_0^{L}\tau\, ds=0$ $\therefore\int_0^{L}\tau\, ds=n\pi$，不妨设 $n>0$ $\because\int_0^{s}\tau\, ds$ 是连续函数，∴由介值定理，知：存在 $s_1\in(0,1)$，使得 $\int_0^{s_1}\tau\, ds=\pi$，

$\because\left(A\cos\int_0^{s_1}\tau\, ds+B\sin\int_0^{s_1}\tau\, ds\right)k(s_1)=1$ $\therefore -Ak(s_1)=1$，

$\because A=\dfrac{1}{k(0)}>0$ $\therefore k(s_1)<0$，矛盾，至于 $n<0$，同样可推得矛盾

$\therefore n=0$ 即 $\int_0^{L}\tau\, ds=0$。

参考文献：

(1)：苏步青等人编《微分几何》。

(2)：Chuan—Chih Hsiung "Afirst Couvs in Differenftial geometry"，P104 wred P147

(3) W、Klingmberg "A course in differenfiat geometry"

821 沙虎云

一个反例

金城老师编的《点集拓扑讲义》P73 习题3要我们证明：当拓空间（X， ）可数时，定理7。5和7。6的逆命题成立。在《哇鸣》第九期上曾经有过一个反例，这里再给出一个比较有趣的反例，但为了避免重复就略去了命题的叙述和一些简单的验证。

令 $X=\{1,2,3,\cdots\}$， $=\{X-A \mid A\subseteq X$，且 A 满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|\{1,n\}\cap X|}{n}=0\}\cup\{\phi\}$，不难验证：

①（X， ）为拓扑空间。

② ，必有 i （$X-\{i\}$）。

③任给 $X-\{i\}$ 中的序例 $\langle x_j\rangle$，$\langle x_j\rangle$ 不收敛于 i；序例 $\langle y_j\rangle\subseteq X$

则$y_j \to i$，$j \to +\infty$当且仅当 N X，当$j > N$时，$y_j = i$。

④对于(X, τ)，定理7.5的逆不成立。

⑤令$Y = X$，r为离散拓扑。映射$f: X \to Y$，$f(X) = X$。则由③知X中的任意序列$\langle y_j \rangle$，若$y_j \to i$，$j \to +\infty$，则$f(y_j) \to f(i) \to (i)$，$j \to +\infty$。但f在i处不连续，定理7.6的逆不成立。

在结束本文之前，我们给出一个问题供大家讨论。

问题：设(X, τ)为紧致拓扑空间，且X的紧致子集必为闭集问(X, τ)是否一定为Hausdorff空间？

注意：①当X有限时(X, τ)一定为Hausorff的。②很显然(X, J)为T_2空间。③当(X, τ)没有紧致条件时，上面给出的反例可以说明(X, τ)不必为Hausdorff 空间。（请大家自行验证）。 ④徐森林老师认为答案是否定的，但至少我至今还不得其解

811 陈贵忠

整数是所有数学的源泉。 ——— H. Minkowski

自然科学的某些分支（如物理天文学和光学），其大部分由于缺乏正规的数学教育而还不能深入。

——— Duigald Stewart

中国科学院计算中心

1984年研究生入学试题

线性代数

（每题20分；五、六两题任选一题）

一、试就a与b的不同取值，讨论方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a-b+2)x_2 + (a-2)x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + (ab-2)x_3 = 2 \end{cases}$$

的解的个数，并且当有解时求出所有的解。

二、设n阶矩阵

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

（1）求出A_n的全部特征值和对应的一组线性无关的特征向量；

（2） 当$n=3$时，给出一个实正交矩阵T和对角线矩阵D，使得 $A=TDT^{-1}$，

三、设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & & & & \\ c_2 & 0 & b_2 & & \text{\Large 0} & \\ & c_3 & 0 & b_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & \text{\Large 0} & & c_{n-1} & 0 & b_{n-1} \\ & & & & c_n & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $b_1, \cdots, b_{n-1}$ 和 $c_2, \cdots, c_n$ 皆为实数，并且 $b_i c_{i+1} \neq 0$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$，试求出 $AA^T = A^T A$ 的必要与充分条件。

四、设A是n阶复数矩阵，其特征值为 λ_1、λ_2、…、λ_n，定义 $\gamma(A) = \max\limits_{\|u\|_2 = 1} \left| (Au, u) \right|$，证明

(1) $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| \lambda_i \right| \leqslant \gamma(A)$，

(2) $\frac{1}{2} \|A\|_2 \leqslant \gamma(A) \leqslant \|A\|_2$，

以下两题，任选一题：

五、 求证：定义在一个区间上的n个函数 $u_1(t), u_2(t), \cdots$ $u_n(t)$ 线性无关的必要与充分条件是在该区间上存在n个不同的点 t_1、t_2、…、t_n，使得行列式

$$\det u_i(t_j) = \begin{vmatrix} u_1(t_1) & u_1(t_2) & \cdots u_1(t_n) \\ u_2(t_1) & u_2(t_2) & \cdots u_2(t_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u_n(t_1) & u_n(t_2) & \cdots u_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0 \text{。}$$

六、 设 $A = (a_{ij})_{\substack{1 < i < m \\ 1 < j < n}}$ 满足 $\mathrm{rank}(A) = \gamma$，记 $A = (a_1,$ $\cdots, a_n)$ 和 $A = \begin{matrix} a^1 \\ \vdots \\ a^m \end{matrix}$，其中 a_j 表示A的第j列 $(1 < j < n)$，a^i 表示A的第i行 $(1 < i < m)$，令

$A_1 = (a_1, \cdots, a_r)$，$\quad A = \begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1\gamma} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{\gamma 1} \cdots a_{\gamma\gamma} \end{matrix}$，

证明

（1） 如果a_1，…a_r线无关，则存在秩为Y的矩阵C，使得$A=A_1C$；

（2）如果a_1，…，a_r线性无关，a_1，…a_r也线性无关，则$\det A\neq 0$。

体育竞赛中一个有趣的概率问题

下述数学模型可以近似地描述许多种体育竞赛：设在甲、乙双方之间的一次对抗比赛中，甲得1分的概率为p，乙得1分的概率为$q=1-p$，以先得至少n分，且超过对方至少k分者为胜，称此种竞赛制度为n——k制。例如：乒乓球正式比赛每局为21——2制每盘为3——1制（或5决3胜制，以每局为一次对抗），等等。

记n——k制中，甲胜的概率为$P_{n,k}(p)$，本文只讨论n——1制（或2n－1决n胜制）和n——2制的情况并由此证明几个等式。

一、n——1制，我们有

$$P_{1,1}(p)=p$$

$$P_{2,1}(p)=p^2+C_2^1p^2q=p^2(1+C_2^1)$$

$$P_{3,1}(p)=p^3+C_3^1p^2qp+C_4^2p^2q^2p=p^3(1+C_3^1q+C_4^2q^2)$$

…… …… …… ……

一般地 $$P_{n,1}(p)=p^n\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}\,q^i \qquad (1)$$

下面我们研究$P_{n,1}(p)$随n变化的规律，首先比较$P_{n+1,1}(p)$与$P_{n,1}(p)$的大小，有：

命题1： $$P_{n+1,1}(p)-P_{n,1}(p)=(2P-1)C_{2n-1}^{n}p^nq^n \qquad (2)$$

〔证〕由（1）得：

$$P_{n+1,1}(p)-P_{n,1}(p)=p^{n+1}\sum_{i=0}^{n}C_{n+i}^{i}q^{i}-p^{n}\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}^{i}q^{i}=p^{n}\left((1-q)\sum_{i=0}^{n}C_{n+i}^{i}q^{i}-\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}^{i}q^{i}\right)$$

$$=p^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(C_{n+i}^{i}-C_{n+i-1}^{i})q^{i}-\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i}^{i}q^{i+1}+(1-q)C_{2n}^{n}q^{n}\right)=p^{n}\left(\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}^{i-1}q^{i}+(1-q)C_{2n}^{n}q^{n}\right)$$

$$=p^{n}\left(-C_{2n-1}^{n-1}q^{n}+C_{2n}^{n}q^{n}-C_{2n}^{n}q^{n+1}\right)$$

$$=p^{n}q^{n}\left(C_{2n-1}^{n}-2C_{2n-1}^{n}q\right)=(2p-1)C_{2n-1}^{n}p^{n}q^{n}$$

由此可知：

$$\therefore P_{n+1,1}(p)-P_{n,1}(p)\begin{cases}<0 & 0<p<\frac{1}{2}\ (\text{即}0<p<q<1)\\ =0 & p=0,\frac{1}{2},1\\ >0 & \frac{1}{2}<p<1\ (\text{即}\ 0<q<p<1)\end{cases}\qquad(3)$$

即：当 $p<q$ 时，$P_{n+1,1}(p)$ 对n个单调减；$p>q$ 时，$P_{n,1}(p)$ 对n单调增。这表明：在 2n－1 决n胜利中，对抗次数越多，较强的一方获胜的概率越大。由命题1立得：

命题2：

$$P_{n,1}(p)=p^{n}\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}^{i}q^{i}=p+(2p-1)\sum_{k=1}^{n-1}C_{2k-1}^{k}p^{k}q^{k}\qquad(4)$$

现在我们求 $P_{n,1}(p)$ 当 $n\to\infty$ 时的极限（因为由 $P_{n,1}$ 的单调性知：$\lim P_{n,1}(P)$ 存在），为此先证引理：级数 $\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}^{k}x^{k}$ 当 $|x|<\frac{1}{4}$ 时收敛于 $\frac{1}{2\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{2}$ 〔证〕易见，的

收敛半径为：$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{C_{2k-1}^{k}}{C_{2k+1}^{k+1}}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{k+1}{2(2k+1)}=\frac{1}{4}$

∴ $|X|<\frac{1}{4}$ 时，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}^{k}X^{k}$ 收敛，令

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-4x}}-\frac{1}{2} \qquad x\in\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

则

$$f^{(k)}(x)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)(-4)^{k}(1-4x)^{-\frac{1}{2}-k}$$

$$=(2k-1)!!\,2^{k-1}(1-4x)^{-\frac{1}{2}-R}$$

$$=k!\,C_{2k-1}^{k}(1-4x)^{-\frac{1}{2}-k}$$ 所以 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}^{k}X^{k}$

命题3 $P_{\infty,1}(p)=\begin{cases}0 & 0\leqq p<\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & p=\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<p\leqq 1\end{cases}$

〔证〕当 $p=\frac{1}{2}$ 时，由（4）知：对 n 有 $p_{n,t}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$

∴$p_{\infty,1}(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。当 $p\neq\frac{1}{2}$ 时 $pq<\left(\frac{p+q}{2}\right)^{2}=\left(\frac{1}{4}\right)$，

于是由（4）得引理，得：

$$P_{\infty}(p)=p+(2p-1)\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}^{k}(pq)^{k}$$

$$=p+(2p-1)\left(\frac{1}{2\sqrt{1-1+pq}}-\frac{1}{2}\right) \qquad (\text{由于 } q=1-p)$$

$$=p+(2p-1)\frac{1-|2p-1|}{2(2p-1)}=\begin{cases}0 & 0\leqq p<\frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}<p<1\end{cases}$$

二、n—— 2制（n>2）。这时，甲胜可分为"以n比i（0<i<n−2)获胜"和"以n+1+k比n+k−1（k=0，1，2，…）获胜"两种情况，易见，前者的概率为 $p^{n}C_{n+i-1}q^{i}$ 后者的概率为 $C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}q^{n-1}(2pq)^{k}p^{2}=p^{n+1}q^{n-1}C_{2n-2}^{n-1}(pq)^{k}$

故

$$P_{n,2}(p)=\sum_{i=0}^{n-2}p^{n}C_{ni-1}^{i}q^{i}+\sum_{k=0}^{\infty}p^{n+1}q^{n-1}C_{2n-2}^{n-1}(2pq)^{k}$$

$$=p^n\sum_{i=0}^{n-2}C_{n+i-1}^{i}q^{i}+p^{n+1}q^{n-1}C_{2n-2}^{n-1}\frac{1}{1-2pq}$$

$$=p_{n,1}(p)+p^{n+1}q^{n-1}\frac{C_{2n-2}^{n-1}}{p^2+q^2}-p^nC_{2n-2}^{n-1}q^{n-1}$$

$$=p_{n,1}(p)+\frac{p^nq^nC_{2n-2}^{n-1}(2p-1)}{p^2+q^2}$$

由此，得

命题(4)： $p_{n,2}(p)=p_{n,1}(p)+\dfrac{p^nq^nC_{2n-2}^{n-1}(2p-1)}{p^2+q^2}$

推论 $\quad p_{0,2}=\lim\limits_{n\to\infty}p_{n,2}=p_{\infty,1}$

〔证〕由(6)，得：

$$p_{n,2}(p)=\begin{cases}<p_{n,1}(p) & 0\leqq p\leqq\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & p=\frac{1}{2}\\ >p_{n,1}(p) & \frac{1}{2}<p\leqq 1\end{cases}$$

令 $n\to\infty$ 取极限，即得(7)。

命题3。4及推论表明：在n——1制和n——2制的对抗中，此要甲比乙稍强一些，那么，如果对抗次数充分多，甲就可以充分接近于1的概率取得胜利。

三、几个组合恒等式，由此上讨论，我们顺便得到几个组合恒等式：

命题5：对 P和正整数n，有

$$p^n\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}^{i}(1-p)^{i}+(1-p)^n\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}^{i}p^{i}=1 \qquad (8)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}C_{n+i-1}^{i}(1-p)^{i}+(2p-1)C_{2n-1}^{n}(1-p)^{n}=p\sum_{i=0}^{n}C_{n+i}^{i}(1-p)^{i} \qquad (9)$$

$$p^n\sum_{i=0}^{n}C_{n+i}^{i}(1-p)^{i}=1-(2p-1)\sum_{k=1}^{n}C_{2k-1}^{k}p^{k-1}(1-p)^{k}$$

〔证〕1°。当 $0<p<1$ 时，由 $P_{n,1}(p)+P_{n,1}(1-p)=1$ 及(1)即得(8)；由(1)及(2)即得(9)；由(4)即得(10)。

2 $\qquad$ 2°对∀P，令

$$f(p)=p^n\sum_{i=0}^{n-1} C_{n+i-1}^{i}(1-p)^i+(1-p)^n\sum_{i=0}^{n-1} C_{n+i-1}^{i}-1$$

则f(p)是关于p的多项式，由1°知：f(p)=0 有无穷多个解，于是由代数基本定理知：(8)对 P成立。同理可证：(9)、(10)对∀p也成立

801　　　桑东兵

第一个获得菲尔兹奖的华人——丘成桐

菲尔兹奖是一项权威性的数学大奖，在所有数学家的心目中，荣耀可与驰誉世界的诺贝尔奖相比美，而且，作为数学——一切科学家之基础、神圣的最高大奖。其更忠实地鼓励了当代数学家中的新思想，新概念，新成果，因为它仅授与那些年轻的人们。

一九八二年，三十五的华侨数学家丘成桐教授被授与了此届菲尔兹奖，以奖励他的成就的深刻性、影响力以及方法和应用的广范性。下面是我们摘录的对丘成桐教授的简介。

……，他一九四九年出生在广东，后随全家迁居香港，他的弟弟丘成洞和他对数学极为入迷，两人一起读了不少数学著作，就这样，为今后的成功打下了基础……。

一九六八年，他在香港中文大学数学系读三年级，其优异才能使陈省身教授大为赏识，让他到加州大学伯克利分校越级读研究生，三年后，便获得博士学位，此时他年仅二十二岁。六年之后，他又成为正教授。……

丘成恫的主要工作如下：

"证明了卡拉比在五十年代的一个猜想；即对于紧致密凯流形，一维陈省身示性类可以用里奇曲率表示。

解决了广义相对论中的正质量猜想这是一个极其困难的大范围微分几何问题。

另外，在多复变函数得代数几何等，他运用了自己的一套创造性的方法，也出现了许多重要成果，比如解决了商维闵可夫斯基问题。利用解答蒙日———安培方理证明了塞梵利猜想。以及在很大的一类紧致复流形中，证明了存在爱因斯度量……

有意思的是，他和色斯顿[1]等人从不同的角度一起解决了猜想，他的途径是从极小曲面出发来研究微分流形的拓扑学，这是第一次菲尔兹奖获得者曾经做过的工作，丘成恫对此作了发挥和完善。对付极小曲面并不容易，须要大范围微分几何和非线性偏微分方程，而丘成恫却能做到左右途源，由此可以看出他精深的功力。

……"

限于篇幅，我们对丘成恫教授的工作仅作了一个泛泛的介绍，可以肯定，他的成就和对当今数学的影响，是远非本文的数笔所能言尽的。但是，有一点我们可以引以为傲，就是丘成恫教授是第一个获得菲尔兹奖的华人，而且，可以预言，这也绝非是最后一个。这句话对于我们所有的人来说，既是预言，也是一种希望。

《哇鸣》　编辑部

斯特林公式的推广

821　刘弘泉

众所周知，n! 的无穷大之阶与（—）　相同，且有

$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta_n}{12n}}\ (0<\theta_n<1)$，这即所谓斯特林公式。注意到 $n!$ 是首项和公差均为 1 的等差数列前 n 项之积，人们不禁要求 $n_1(n_1+d)(n_1+2d)\cdots(n_1+(n-1)d)$ 的无穷大之阶。为此，我们有如下定理，其证明与斯特林公式的证明形式上完全相同。

定理 1：设 n_1，d 是任意正数，n 是正整数，则 $n_1(n_1+d)(n_1+2d)\cdots(n_1+(n-1)d)=f(n_1,d)\sqrt{n_1+(n-1)d}$

$$\left(\frac{n_1+(n-1)d}{e}\right)^{n-1+\frac{n_1}{d}}\ e^{\frac{\theta_n}{12\left(n-1+\frac{n_1}{d}\right)}}\quad(0<\theta_n<1)$$

证明：$\because\ \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\cdots$

$(0<x<1)$

$$\log(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots$$

$\therefore\ 2x<\log\frac{1+x}{1-x}=\log(1+x)-\log(1-x)=2x\left(1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+\cdots+\frac{x^{2n}}{2n+1}+\cdots\right)<2x\left[1+\frac{x^2}{3}(1+x^2+x^4+\cdots)\right]$,

令 $x=\frac{d}{d(2n-1)+2n_1}$，则 $\frac{1+x}{1-x}=1+\frac{d}{n_1+(n-1)d}$ 从上式可得 $1<\left(\frac{n_1}{d}+n-\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{d}{n_1+(n-1)d}\right)<1+\frac{1}{12}\cdot$

$$\frac{1}{\left(n+\frac{n_1}{d}-1\right)\left(n+\frac{n_1}{d}\right)}$$

$$\therefore\ 1<\frac{1}{e^d}\left(1+\frac{d}{n_1+(n-1)d}\right)^{n_1+\left(n-\frac{1}{2}\right)d}<e^{\frac{1}{12}\cdot\frac{d}{\left(n+\frac{n_1}{d}-1\right)\left(n+\frac{n_1}{d}\right)}}$$

令 $a_n = \dfrac{(n_1(n_1+d)\cdots(n_1+(n-1)d))^d \cdot e^{n_1+(n-1)d}}{(n_1+(n-1)d)^{n_1+(n-1)\cdot d+\frac{d}{2}}}$

则：$1<\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{e^d}\left(1+\dfrac{d}{n_1+(n-1)d}\right)^{n_1+(n-\frac{1}{2})d}$

$$< e^{\frac{1}{12}\cdot\frac{d}{(n+\frac{n_1}{d}-1)(n+\frac{n_1}{d})}},$$

∴$a_n>a_{n+1}$，由 a_n 单调下降且 $a_n>0$，故必收敛于 a^d，

再由 $a_n e^{-\frac{1}{12}\frac{d}{n+\frac{n_1}{d}-1}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12}\cdot\frac{d}{n+\frac{n_1}{d}}}$

故 $a_n e^{-\frac{1}{12}\frac{d}{n+\frac{n_1}{d}-1}}$ 是单调上升序列，∵ a_n 收敛

∴ a_n 存在∴ $a_n e^{-\frac{\ }{12}\cdot\frac{d}{+\frac{n_1}{d}-1}}$ 存界

∴ $a_n e^{-\frac{1}{12}\cdot\frac{d}{n+\frac{n_1}{d}-1}}$ 必收敛于 b^d，易知 $a=b$ 是仅与 n_1 和d有关的数。我们以 $f(n_1,d)$ 记之。由于

$$a_n e^{-\frac{1}{12}\frac{d}{n+\frac{n_1}{d}-1}} < (f(n_1,d))^d < a_n e^0$$

$$\therefore \left(f(n_1,d)\right)^d = a_n e^{-\frac{1}{12}\cdot\frac{\theta_n}{n+\frac{n_1}{d}-1}} \quad 0<\theta_n<1$$

$$\therefore \quad a_n = (f(n_1, d))^{d} e^{\frac{d}{12}\cdot\frac{\theta_n}{n+\frac{n_1}{d}-1}}$$

$$= \frac{n_1(n_1+d)\cdots(n_1+(n-1)d)^{d} \cdot e^{n_1+(n-1)d}}{(n_1+(n-1)d)^{n_1+(n-1)d+\frac{d}{2}}}$$

即 $n_1(n_1+d)\cdots(n_1+(n-1)d) = f(n_1, d)\sqrt{n_1+(n-1)d}$

$$\left(\frac{n+(n-1)d}{e}\right)^{n-1+\frac{n_1}{d}} e^{\frac{\theta_n}{12(n-1+\frac{n_1}{d})}} \quad (0<\theta_n<1$$

下面，为了得到系数 $f(n_1, d)$ 满足的一些关系式，我们用斯特林确定 2π 类似的方法。

定理2：$f(n_1, d)$ 满足下面三个性质：

(A) $f(Ln_1, Ld) = L^{\frac{1}{2}-\frac{n_1}{d}} f(n_1, d) \quad (L>0)$

(B) $f(n_1+\frac{d}{2}, d) = \frac{1}{\sqrt{d}} \frac{\Gamma(\frac{n_1}{d})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+\frac{1}{2})} f(n_1, d)$

($\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dx$，定义域为 $X>0$，满足 $\Gamma(X+1) = X\Gamma(X)$)

(C) $f(k, 1) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(k-1)!}$ （k为正整数）

证明：性质(C)显然可从斯特林公式中看出。

又由 $n_1(n_1+d)(n_1+2d)\cdots(n_1+(n-1)d) = f(n_1, d)$

$$\sqrt{n_1+(n-1)d}\left(\frac{n_1+(n-1)d}{e}\right)^{n-1+\frac{n}{d}} \cdot e^{\frac{\theta_n}{12(n-1+\frac{n_1}{d})}}$$

$Ln_1(Ln_1+Ld)\cdots(Ln_1+(n-1)Ld) = f(Ln_1, Ld)$

$$\text{Ln}_1+(n-1)\,\text{d}\left(\frac{\text{Ln}_1+(n-1)\text{Ld}}{e}\right)^{n-1+\frac{L_1}{d}}\cdot e^{\frac{\theta_n}{12(n-1+\frac{n_1}{d})}}$$

$$(0<\theta_n,\theta'_n<1)$$

两式相比得 $L^n=\dfrac{f(\text{Ln}_1,\text{Ld})}{f(n_1,d)}\sqrt{L}\,L^{n-1}$

$$\cdot L^{n-1+\frac{n_1}{d}}\cdot e^{\frac{\theta'n-\theta n}{12(n-1+\frac{n_1}{d})}}$$

消去L^n并令$n\to\infty$，整理后即得(A)式。

下面证明性质(B)：

因为 $\sin^{2(n-1+\frac{n_1}{d})}x>\sin^{2(n+\frac{n_1}{d})}x$，$\frac{\pi}{2}\geqq x\geqq 0$

故$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(n-1+\frac{n_1}{d})}x\,dx\geqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(n-1+\frac{n_1}{d})+1}x\,dx$

$\displaystyle\geqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2(n+\frac{n_1}{d})}x\,dx$ 但$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\,dx=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}$ $(m>0)$

故得：$$\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+1)}\geqq\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})}\geqq\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}\cdots\cdots(1)$$

命 $$x_n=\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+1)}\,\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+\frac{1}{2}+n)}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}=\frac{1}{n+\frac{n_1}{d}}\left(\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}\right)^2$$

$$y_n=\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n-\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}\,\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}=\frac{1}{n+\frac{n_1}{d}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}\right)$$

从(4)式显然有$x_n>1>y_n$，$x\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{y_n}{X_n}=1$，由$\dfrac{y_n}{Xn}<y_n<1$，

立得$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1$，从而$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{y_n}=1$，即$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+\frac{n_1}{d}-\frac{1}{2}}}$

$$\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)}=1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

但 $\Gamma(\frac{n_1}{d}+n+\frac{1}{2})=\Gamma(\frac{n_1}{d}+\frac{1}{2})(\frac{n_1}{d}+\frac{1}{2})(\frac{n_1}{d}+\frac{3}{2})\cdots\cdots(\frac{n_1}{d}+\frac{2n-1}{2})$

$=\Gamma(\frac{n_1}{d})(\frac{n_1}{d})(\frac{n_1}{d}+1)\cdots\cdots\cdots(\frac{n_1}{d}+n-1)$

$\Gamma(\frac{n_1}{d}+n)=\Gamma(\frac{n_1}{d})(\frac{n_1}{d})(\frac{n_1}{d}+\cdots\frac{n_1}{d}+n-1)$

$=\Gamma(\frac{n_1}{d})\frac{1}{d^n}f(n_1,d)n_1+(n-1)d\,(\frac{n_1+(n-1)d}{e})^{n-1+\frac{n_1}{d}}$

$\cdot e^{\frac{\theta_n'}{12(n-1+\frac{n_1}{d})}}$ 代入(2)式，取极限后可得(B)式。 证定

在(B)式中取 $n_1=1$，$d=2$，$f(2,2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{1}\cdot f(1,2)$

$=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot f(1,2)$，再由(A)式，即有 $f(1,2)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(2,2)$

$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot 2^{\frac{1}{2}-1}f(1,1)=\sqrt{\frac{2\pi}{\pi}}=\sqrt{2}$

这样，对任意正整数 k，我们可求出 $f(k,2)$。

如果 $k=2k_1$，$f(k,2)=2^{\frac{1}{2}-k_1}\frac{\sqrt{2\pi}}{(k_1-1)!}=2^{\frac{1}{2}(1-k)}\frac{\sqrt{2\pi}}{(\frac{k}{2}-1)!}$

如果 $k=2k_1+1$，若 $k_1=0$ $f(1,2)=2$ 若 $k_1>0$

$f(2k_1+1,2)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(k_1)}{\Gamma(k_1+\frac{1}{2})}f(2k_1,2)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(k_1)}{\Gamma(k_1+\frac{1}{2})}$

$2^{\frac{1}{2}-k_1}f(k_1,1)=2^{-k_1}\frac{(k_1-1)!}{(2k_1-1)!!}\cdot 2^{k_1}\frac{2\pi}{(k_1-1)!}$

$=\frac{2\pi}{(2k_1-1)!!}=\frac{2\pi}{(k-2)!!}$

总之：$f(k,2)=\begin{cases}2^{\frac{1}{2}(1-k)}\dfrac{2\pi}{(\frac{k}{2}-1)!} & 2/k\\[2ex] \dfrac{2\pi}{(k-2)!!} & k>1,\ 2\nmid k\end{cases}$

现假定d固定，任给$m>0$（不一定是正整数），由带余除法有$m=\frac{d}{2}\cdot k+n_1$，$0<n_1<\frac{d}{2}$，此处k为非负整数，将（B）式书如

$$\frac{f(u_1+\frac{d}{2},d)}{f(n,d)}=\frac{1}{\sqrt{d}}\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+\frac{1}{2})}$$

先设$n_1\neq 0$，以n_1，$n_1+\frac{d}{2}$，… $n_1+\frac{d}{2}(k-1)$代上式中m，n_1，然后逐项相乘即得：

$$\frac{f(m,d)}{f(n,d)}=\frac{1}{(\sqrt{d})^R}\cdot\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d})}{\Gamma(\frac{k}{2}+\frac{n_1}{d})}\Rightarrow f(m,d)=f(n_1,d)\cdot\frac{1}{(\sqrt{d})^R}\frac{\Gamma(\frac{n_1}{d})}{\Gamma(\frac{n_1}{d}+\frac{k}{2})}$$

若$n_1=0$，$f(m,d)=f(\frac{d}{2}R,b)\overset{\text{由(4)式}}{=\!=\!=}(\frac{d}{2})^{\frac{1}{2}-\frac{R}{2}}f(R,2)$

再将上面$f(k,a)$之表达式代入即可。 由此结证不难看出，若d固定，则能求出所有$1<n_1<\frac{d}{2}$时$f(n_1,d)$的值即足。当a与n_1都是正整数时，有些系数虽求不出，但它们能满足一定的关系式。例如，$f(1,3)f(2,3)=3$，且$f(k+1,d)>f(k,d)$，等等。关于系数$f(n_1,d)$还有更丰富的东西供发掘，因篇幅所限，本文不再讨论。

问题征解

1：在〔0 b〕上定义的函数f(X)存在且单调下降，$f(10)=0$ 则对于 $0<X_1<X_2<X_1+X_2<b$有：

$$f(X_1+X_2)<f(X_1)+f(X_2)$$

（陈计提供）

2：证明 a）（Z P）为一完备度量空间，则Z中可列个稠密开集之并也为稠密。

b）〔1，0〕中无理数不能表为可列个闭集之并。

（陈贵忠提供）

3 设$a_1\cdots a_n$为自然数，则它们最大公因数为d，则存在n×n的整系数矩阵A，使第一行的元素恰为$a_1\cdots a_n$并且

$\det A = d$

（窦昌柱提供）

（希望同学们积极思考这些问题，解答请送给152楼209窦昌柱）

四平方定理的一个简单证明

811　张航　编译

人们早就知道每一个正整数可表为4个整数的平方和，1770年才由拉格朗日给出了第一个证明。以后人们又找到了许多不同的证明。本文是利用大学低年级学的代数知识给四平方定理一个漂亮的简短的证明。

证明利用了$Z[i]$（高斯整环）上的2×2矩阵的一个分解定理。我们先从一个著名的结果开始。

引理：　设P为一素数，Z_P为模P的整数环，那么Z_P的每一个元素r是一个平方和。

证明：　我们可以假定$P\neq 0$（P=2结论成立显然），

令$S_1=\{X^2 \mid X\in Z_P\}$，$S_2=\{r-y^2 \mid y\in Z_P\}$，那么$|S_1|=|S_2|=\frac{P+1}{2}$，因此$S_1\cap S_2\neq\varnothing$，故r是一个平方和。

推论，设n是无平方因子的，Z_n表示模n整数环，那么，任何一个元素$r\in Z_n$是一个平方和。

证明：　令　$n=P_1P_2\cdots P_k$　　$P_1,\cdots,P_k$为不同的素数，

由引理

$$r\equiv a_i^2+b_i^2 \pmod{p_i}\quad 1<i<k$$

M_i，使得 $M_i \equiv 0 \pmod{p_j}$ $i \neq j$

$M_i \equiv 1 \pmod{p_i}$

那么 $r = rM_1 + \cdots + rM_k$

$= (a_1^2 + b_1^2)M_1 + \cdots + (a_k^2 + b_k^2)M_k$

$= (a_1 M_1 + \cdots + a_k M_k)^2 + (b_1 M_1 + \cdots + b_k M_k)^2 \pmod{n}$

现在来证明四平方定理，我们可假定 n 是无平方因子的，因为如果 $n = a^2 n'$（n' 无平方因子） 若 $n' = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ 那么 $n = (aw)^2 + (ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2$。一旦 n 是无平方因子的，我们利用上叙推论（$r = -1$）找出整数 C，d和 m 使 $-1 = C^2 + d^2 - mn$，现在考虑方阵

$$A = \begin{pmatrix} n & C+di \\ C-di & m \end{pmatrix}$$ 注意到 $\det A = 1$

这种类型的方阵有如下分解定理！

定理：设 $A = \begin{pmatrix} n & C+di \\ C-di & m \end{pmatrix}$ 此处 m，n，C，d 为整数。

$n > 0$，$\det A = 1$，那么 $B \in Z[i]_{2\times 2}$

使 $A = B\bar{B}^{-1}$，

四平方定理是该定理的一个直接推论。

由 $\begin{pmatrix} n & * \\ * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w+xi & y+zi \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w-xi & * \\ y-zi & * \end{pmatrix}$

推出 $n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$

要证明分解定理，我们对 $C^2 + d^2$ 用归纳法，若 $C^2 + d^2 = 0$，根据假定必有 $A = I$，这时 $B = I$ 即可，所以在以后证明中我们假

定 $c^2+d^2>0$，这就是说 c 和 d 不同时为 0。

因为 $mn=1+c^2+d^2>0$ 故 $m>0$，考虑下列两种情形

$$0<n\leqslant m \quad 或 \quad 0<m\leqslant n$$

第一种 $0<n\leqslant m$，令 $A'=MAM^{-1}$

这里 $M=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x+yi & 1\end{pmatrix}$ x、y 为待定整数，

那么 $A'=\begin{pmatrix}n & c'+d'i\\ c'-d'i & *\end{pmatrix}$ $c'=c+nx$，

$d'=d+ny$，$\det A'=1$

如果我们能选出 x，y 使 $c'^2+d'^2<c^2+d^2$，根据归纳假设 $A'=C\bar{C}^{-1}$ 令 $B=M^{-1}C$ 则有 $A=B\bar{B}^{-1}$。

注意到只要 $c>\frac{n}{2}$，令 $x=-1$，$y=0$ 即可因为此时

$c'^2=(c-n)^2<c^2$ $d'^2=d^2$ 所以 $c'^2+d'^2<c^2+d^2$，

相似地如果 $c<-\frac{n}{2}$，令 $x,y=1,0$ 若 $d>\frac{n}{2}$ 令 $x,y=0,-1$，若 $d<-\frac{n}{2}$ $x,y=0,1$

因此如果能证明 $|c|>\frac{n}{2}$ 或 $|d|>\frac{n}{2}$ 即可，如果 $n=1$ 显然，因 c，d 不全为 0，如果 $n>1$，若 $|c|<\frac{n}{2}$，$|d|<\frac{n}{2}$ 那么 $n^2<nm=c^2+d^2+1<\left(\frac{n}{2}\right)^2+\left(\frac{n}{2}\right)^2+1$

$=\frac{n^2}{2}+1<n^2$，矛盾，所以在第一种情形下证明了定理，

对第二种情形（$0<m\leqslant n$）讨论类似。

令 $A'=MAM^{-1}$，此时 $M=\begin{pmatrix}1 & x+yi\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A'=\begin{pmatrix} * & c'+d'i \\ c'-d'i & m \end{pmatrix} \qquad c'=c+mx\ ,\ d'=d+my$$

只要找出 X，y 使 $C'^2+d'^2<C^2+d^2$ 即可，我们可以令

X，y=±1，0 或 0，±1，因为 $|C|>\frac{m}{2}$ 或 $|d|>\frac{m}{2}$

证毕。

原文登在，The American Mathematical Monthly volume 9 number 89 59–60页

821 沙虎云

方阵相似于对角阵的一种计算方法

要判定一方阵相似于对角阵，通常我们有定理：一方阵A能与一对角方阵相似的必要且充分条件是A之最小多项式无重零点，这往往是比较困难的，尤其是方阵的阶数很高时。本文中，我们将给出一种比较教条的计算性判定方法。过程1主要源于〔2〕，过程1：

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，计算 $A^p=(b_{ij})_{n\times n}$ $0<p<n^2$

$(A^0=I)$，映射 $(A^p)=b_{11},\cdots,b_{1n},b_{21},\cdots b_{2n},\cdots,b_{n1},\cdots b_{nn})$。令 $O_0=(A^0)/n$，$X_p=(A^p)-\Sigma$

$O^p=X_p/\|X_p\|$ 知 O_p是$\psi(A^0)$，$\psi(A)$，…，$\psi(A^p)$

Gram — Schmidt 正交化后的P个正交单位向量。正交化进行到某步，$X_m=0$，过程1完毕，得正整数m，（注一：由此可知 A^p 只需计算 $A^0,A^1,\cdots,A^n$）

过程2：计算 trA^{i+j}，$0<i,j<m-1$，建立方阵

$\tilde{A}=(trA^{ij})_{m\times n}$ 计算行列式 $det\tilde{A}$，过程2完毕。

结论：若 $det\tilde{A}\neq 0$，则A相似于对角阵，

证明： 引理1：过程I得到的m是方阵A的最小多项式的次数。

〔证明〕：设方阵A的极小多项式为 $m(\lambda)=\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$，则 $m(A)=A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_mI=0$，∵ ψ 是同构映射 ∴ $\deg m(\lambda)$ 应为 $\psi(A^p)$ 能被 $\psi(A^{p-1})$，$\psi(A^{p-2})$，…，$\psi(A)$ $\psi(A^0)$ 线性表示的P的最小次数，易见，若 $\psi(A^0)$，$\psi(A^p)$，…，$\psi(A^p)$ 线性无关，则正交代后的 O_0 O_1，…，$O_p\neq0$ 若 $\psi(A^0)$ …，$\psi(A^{p-1})$ 线性无关，而 $\psi(A^p)$ 是 $\psi(A^0)$，$\psi(A^1)$，… $\psi(A^{p-1})$ 的线性组合，则 O_0，…$O_{p-1}\neq0$ 而 $O_p=0$ 现由过程I得 $X_m=0$，而 $X_{m-1}\neq0$ ∴由下文所知 $\psi(A^m)$ 是 $\psi(A^0)$，…，$\psi(A^{m-1})$ 的线性组合，而 $\psi(A^0)$，…，$\psi(A^{m-1})$ 线性无关，故m是A的最小多项式的次数。

引理2：一方阵A能与一对角阵相似的充分条件是A之最小多项式无重零点。

定理：设方阵A的最小多项式的次数为m，$\widetilde{A}=(trA^{i+j})_{m\times m}$ $0<i$，$j<m-1$，则方阵相似于对角阵的充要条件是方阵 $\widetilde{A}$ 的行列式不等于零。

〔证明〕：必要性：设方阵A相似于对角阵，则特征根可设为 λ_1 … λ_m $(\lambda_i\neq\lambda_j$，$i\neq j)$，λ_i 的重数为 h_i，且 $\Sigma h_i=n$，

$trA^{i+j}=\sum_{k=1}^{m}h_k\lambda_k^{i+j}=(h_1\lambda_1^{i},h_2\lambda_2^{i},\dots,h_m\lambda_m^{i})\cdot(\lambda_1^{j},\dots,\lambda_m^{i})$，

$$\because\ trA^{i+j}{}_{m\times m}=\begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_m \\ h_1\lambda_1, & h_2\lambda_2, & \cdots & h_m\lambda_m \\ \vdots & & & \vdots \\ h_1\lambda_1^{m-1}, & h_2\lambda_2^{m-1} & \cdots & h_m\lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{m-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_m & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \det(trA^{i+j}) = h_1 h_2 \cdots h_m V^2(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m) \neq 0$$

其中$V(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$为Vandermonde 行列式，必要性得证

充分性：已知$\det(trA^{i+j})_{m\times m} \neq 0$ 若方阵A的最小多项式有重零点，则方阵A的互异特征根个数小于m，可设为m'，同样设λ_i的重数为h_i，则$\sum_{i=1}^{m} h_i = n$

$$trA^{i+j} = \sum_{k=1}^{m'} h_k \lambda_k^{i+j} = \left(h_1\lambda_1^i, \cdots h_{m'-1}\lambda_{m'-1}^i, \frac{h_{m'}}{m-m'+1}\lambda_{m'}^i, \right)$$

$$\cdot\left(\lambda_1^j, \cdots, \lambda_{m'-1}^j, \lambda_{m'}^j, \cdots, \lambda_{m'}^j\right)' \quad \therefore (trA^{i+j})_{m\times m}$$

$$= \begin{pmatrix} h_1, & \cdots, & h_{m'-1}, & \frac{h_{m'}}{m-m'+1}, & \cdots, & \frac{h_{m'}}{m-m'+1} \\ h_1\lambda_1, & \cdots, & h_{m'-1}\lambda_{m'-1}, & \frac{h_{m'}}{m-m'+1}\lambda_{m'}, & \cdots, & \frac{h_m}{m-m'+1}\lambda_{m'} \\ \vdots & & & & & \\ h_1\lambda_1^{m-1}, & \cdots, & h_{m'-1}\lambda_{m'-1}^{m-1}, & \frac{h_{m'}}{m-m'+1}\lambda_{m'}^{m-1}, & \cdots, & \frac{h_{m'}}{m-m'+1}\lambda_{m'}^{m-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & , & \lambda_1^{m-1} \\ & & & \\ 1 & \lambda_{m'-1} & , \cdots, & \lambda_{m'-1}^{m-1} \\ 1 & \lambda_{m'} & , \cdots, & \lambda_{m'}^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_{m'} & , \cdots, & \lambda_{m'}^{m-1} \end{pmatrix}$$

$\because\ m-m'+1>1\ \therefore\ \det\tilde{A}=\det(trA^{i+j})_{m\times m}=0$，而这和充分性假设矛盾，∴方阵A的最小多项式无重零点矣，而由引理2知：方阵A相似于对角阵，充分性争证。

参考书目：1：张远达著《行列式与矩阵》

2：Bernard R Gelbaum，An algorithm for the minimad polgnomial of a matrix，Amer Math. Monthly Vol90 16 Vol (1983) 43—44

If you try to understand fibre bundles by reading mathematics, if you are a physicist, you would probably not succeed, because modern mathematics is extremaly difficult to read, and I believe there ex exist only two kinds of mathematics books, one which you cannot read beyond the first page and one which you cannot read beyond the first sentence.

——C.N.Yang

编者·作者·读者：

编者按：《蛙鸣》自创办以来，一直得到了我系老师们的热情关怀和鼓励。为了进一步办好这个学生自己的刊物，我们特开辟专栏，以期进一步沟通同学之间，同学老师之间的交流，欢迎各任课老师向专栏提供一些问题，供同学们研究。这期刊登的是我系石锺慈教授给82级沙虎云的一封信……

沙虎云同学：

看了你在13期的文章，很高兴你对矩阵特征值的计算有兴趣，现在用一个更简单的办法得出一个更强的结果：

如果A，B为n阶正定方阵，特征值依次为$\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\cdots\leqq\lambda_n$，$\mu_1\leqq\mu_2\leqq\mu_3\leqq\cdots\cdots\leqq\mu_n$ AB的特征根为$v_1\leqq v_2\leqq\cdots\leqq v_n$

那么 $\lambda_1\mu_1\leqq v_1\leqq v_n\leqq\lambda_n\mu_n$

证明：设λ为AB的一个特征值，相应的特征向量为x

$$ABx=\lambda x$$

$$\lambda=\frac{(ABx,x)}{(x,x)}=\frac{(Bx,Ax)}{(x,x)}=\frac{(A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}(A^{\frac{1}{2}}X),A^{\frac{1}{2}}X)}{(x,x)}$$

$$=\frac{[(A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})(A^{\frac{1}{2}}X),A^{\frac{1}{2}}X]}{(A^{\frac{1}{2}}X,A^{\frac{1}{2}}X)}\cdot\frac{(A^{\frac{1}{2}}X,A^{\frac{1}{2}}X)}{(X,X)}$$

$$=\frac{(A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}y,y)}{(y,y)}\cdot\frac{(AX,X)}{(X,X)}\cdot\qquad(y=A^{\frac{1}{2}}X)$$

由Uermite方阵特征根的一个性质有：

$$\lambda=\frac{(A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}y,y)}{(y,y)}\cdot\frac{(AX,X)}{(X,X)}$$

$$\leqq \max_{y\in \mathbb{C}^{n}-0} \frac{(A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}y, y)}{(y, y)} \cdot \max_{x\in \mathbb{C}^{n}-0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_n \mu_n$$

$$\lambda \geqq \min_{y\in \mathbb{C}^{n}-0} \frac{(A^{\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}y, y)}{(y, y)} \cdot \min_{x\in \mathbb{C}^{n}-0} \frac{(Ax, x)}{(x, x)} = \lambda_1 \mu_1$$

$$\therefore \quad \lambda_1 \mu_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_n \mu_n \qquad \#$$

这比你的结论要强

因为 $\dfrac{2}{\dfrac{1}{\lambda_1^2}+\dfrac{1}{\mu_1^2}} \leqq \lambda_1 \mu_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_n \mu_n \leqq \dfrac{\lambda_n^2+\mu_n^2}{2}$

问题　对一般方阵 A, B 有什么样的结论？

石锤慈

14/4

一个恒等式的一些讨论

关于恒等式：

$$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k+1)^n \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

的证明方法已有多种。本文试给出一种直观的证明方法，并进行一些讨论。

文中将反复利用等价符号"$\Longleftrightarrow$"，由于每步都是显然的，将不加说明。

:
$$n!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_n^k (n-k+1)^n$$

$$\Leftrightarrow (n-1)!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k c_{n-1}^k (n-k)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad n!=n\cdot(n-1)!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k n\cdot c_{n-1}^k (n-k)^{n-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k c_n^k\cdot(n-k)\cdot(n-k)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)!=\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k c_{n-1}^k (n-1-k)(n-1-k)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow n!=n(n-1)!=\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k\cdot n\cdot c_{n-1}^k (n-1-k)$$

$$\cdot(n-1-k)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n-2} c_n^k (n-k)(n-1-k)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow (n-1)!=\sum_{k=0}^{n-3}(-1)^k c_{n-1}^k c_{n-1}^k (n-1-k)(n-2-k)^{n-2}$$

$\Leftrightarrow$ ....

依次下去，最后得到：

$$n!=\sum_{k=0}^{0}(-1)^k c_n^k (n-k)(n-1-k)\cdots\cdots(1-k)\quad\cdots\quad(2)$$

意：(2)式是个恒等式，它与(1)式是等价的，故(1)式成立。

实，在证明过程中，我们得到一个附加的命题，即：

$$n!=\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k c_n^k (n-k)(n-k-1)\cdots\cdots$$

$$(n-k-i+2)(n-k-i+1)^{n-i}\quad\cdots\cdots\qquad(3)$$

式是(3)式的特殊形式

另外，关于(1)式，黄加武同学在蛙鸣第九期上曾得到一个更强的结论，即：

$$n!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}(x-k)^{n} \qquad \cdots\cdots\cdots \qquad (4)$$

(4)式的证法已经在蛙鸣第九题给出，其实，类似地，用上述方法也可证之。后来，黄加武同学又得到一个新的证明，证明也很漂亮。

归纳证之。

$n=0$　显然。

假设$n-1$时成立。即：

$$(n-1)!=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{n-1}^{k}(x-k)^{n-1}$$

故：$$\int_{x-1}^{x}(n-1)!\,dt=\int_{x-1}^{x}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}C_{n-1}^{k}(t-k)^{n-1}dt$$

整理得：

$$(n-1)!=\frac{1}{n}[(-1)^{n}C_{n-1}^{n-1}(t-n-1)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k}$$

$$\cdot(C_{n-1}^{k}+C_{n-1}^{k-1})(x-k)^{n}+(-1)^{0}C_{n-1}^{0}x^{n}]$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}C_{n}^{k}(x-k)^{n}$$

(4)式得证。

第十五期《习题征解》解答

一、解：令：$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\rho(k)x^{k-1}$

由形式 级数之乘积，及已知条件有：

$$xf^2(x)=f(x)-1$$

从而 $f(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$ 由 $P(1)=1$ 知：

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

将上式展开，比较一下系数即有：

$$p(n)=\frac{2^{n-1}(2n-3)!!}{n!}$$

二、令：$I=\{f(x)\in Q[x]:f(c)=0\}$

则 I 非空。取 $d(x)$ 为 I 中次数最低者。故 $\deg d(x)\geqq 1$

由带余除法知：

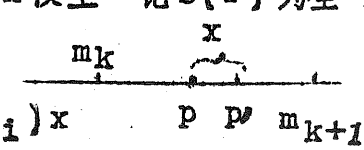
$$f(x)=d(x)q(x)+r(x)\qquad 0\leqq \deg r<\deg d$$

则有：$r(c)=f(c)-d(c)q(c)=0$ $\qquad\therefore r(x)\in I$ 方

故 $r(x)=0$

$\therefore d\mid f$ 同理 $d\mid g$

三、不妨设 $m_1\leqq m_n$ 任取一点 P 设 P 在第 k 段上，记 $S(P)$ 为全路程



则：$S(P')-S(P)=\left(\sum_{i=1}^{k}m_i-\sum_{i=k+1}^{n}m_i\right)x$

由此知 i：$\sum_{i=1}^{k}m_i-\sum_{i=k+1}^{n}m_i\geqq 0$ 则：$S(P')\geqq S(P)$

ii $\sum_{i=1}^{k} m_i - \sum_{i=k+1}^{n} m_i \leqq 0$ 则： $S(P') \leqq S(P)$

由此不难知道，小学可以设在第k个居民点上，其中k是使：

$$\sum_{i=1}^{k} m_i \geqq \sum_{i=k+1}^{n} m_i$$

成立的最小整数。

（由刘弘泉等解答）

Three heiku:

What Is Mathematics

Fire and Ice

Strange anomaly:
the flame of intuition
frozen in riger

Faith and Reason

Strands of axioms
intertwining with logic
in convolution

Truth and Beauty

Crucible of proof
outshining alabaster
outlasting marble

——Katharice O'Brien

If you try to understand fibre bundles by reading mathematics, if you are a physicist, you would proloobly not succeed, because modern mathematics is extremely difficult to read, and I believe there exist only two kinds of mathematics books, one which you cannot read beyond the first page and one which you cannot read begond the first sentence.

—— C.N.Yang

Three heiku:

What Is Mathematics

Fire and Ice

Strange anomaly:
the flame of intuition
frozen in riger

Faith and Reason

Strands of axioms
intertwining with logic
in convolution

Truth and Reauty

Crucible of proof
outshining alabaster
outlasting marble

—— Katharice O'Brien

整数是所有数学的源泉。 —— H. Minkowski

自然科学的某些分支（如物理天文学和光学），共大部分由于缺乏正规的数学教育而还不能深入。

—— Duigald Stewart

本 期 目 录