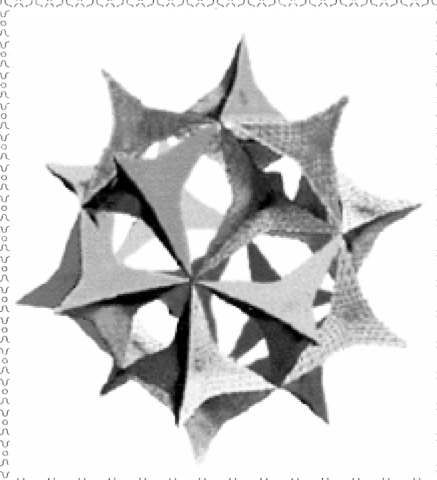
蛙鸣

第 54 期



中国科学技术大学

《蛙鸣》编委会
主办
数学系学生会学习部

一九九九年六月

其形虽小
其声也宏
充实基础
奏出强音

谷超豪

谷超豪先生一九九四年为《蛙鸣》题词

目　　录

本期主编　魏　斌

责任编辑　王作勤　盛　茂　尹治军　何维勇

如何进行研究

摘自 M. Atiyah [1] (阿蒂亚) 《数学的统一性》

让我一开始就说明，讲这样一个令人敬畏的题目，我并无把握。这个题目本身的真正含义到底是什么，其实并不完全清楚。人们至少能给出两种解释。如何搞研究可以指方法，人们用什么方法搞研究，暗指某项研究已进入数学家脑中的智力活动过程。它作为人类心理研究的课题非常迷人，许多著名数学家都写过有关的文章，如像阿达玛和庞加莱 (H. Poincare) 。我记得阿达玛推荐了他的经验，连续洗两个热水澡是刺激研究的一种方法。庞加莱似乎是在上下车时得到了他的大部分最出色的思想。

另外一种解释涉及态度，即持何种态度对待研究。此处态度二字意指各式各样的数学风格与类型。什么是数学研究，不同的人会从不同的观点出发来解释。今天我想谈谈这第二种解释。之所以选择它，部分原因是，我想我的同事哈默罗利 (J. Hammeroley) 会选择第一种解释来谈，我们应该有所分工；部分原因是，作为本次会议上的第一个讲演，我觉得在考查数学研究的诸多方面之前，先问问什么是数学研究，倒也不失为一个好主意。

我打算这样来讲，即罗列出涉及数学研究的各种可供选择或大不相同的方方面面。我列出这些可进行比较的方面，目的是为了便于分析而不是为了申斥其中的这一方或那一方。我将力图保持公允和平衡，不让个人的好恶介入得大多。在往下讨论之前我还要说明，在纯粹数学和应用数学之间确实存在一种主要的区别。我不想把这种区别说得那么绝对，那么界线分明，但我们确实很容易认出纯

[1] M. Atiyah 是当代著名数学家，英国人， 1966 年 Fields 奖获得者，其研究涉及从拓扑，几何，微分方程到数学物理的众多领域，反映了当代数学发展中学科交叉的特色，他尤善带有几何特征的研究课题，1990 年， M.Atiyah 当选为英国皇家学会会长，剑桥大学三一学院院长以及牛顿数学科学研究所所长．本文是作者在 IMA(The Institute of Mathematics and its Application) 的一个演讲，阐述了他对数学研究的类型及风格的哲学观．

粹数学家和应用数学家的工作之间的重要差异，尽管它们也有众多相同之处。我希望哈默罗利将关照应用的方面，这样我将述说的就是一名纯粹数学家的见解。

我提出的第一件事是解问题和建立理论之间的关系。当然，对这两方面都可以提出些质疑：如果一个理论不能解决问题、其效用何在；研究无穷多个毫无联系的问题，尽管每个也许都很有趣，又有什么用处。我想，我们也许可以这样来看问题：你从现存的问题出发，其中许多问题最初都有物理背景；为了解问题，你必需要有一个聪明的想法以及某种诀窍，当这种诀窍足够精巧又有足够多的类型相当的问题，你就可以把诀窍发展成一种技术；若存在大量的这一类型的问题，你就可以发展起一套方法；最后，假如你涉及的是一个非常广阔的领域，你就能获得某种理论，这就是从问题到理论的演化过程。

当然，理论之所以成为理论，并不仅仅在于它把你通过解各种问题而掌握的所有东西归在一起。我们必须在心中牢牢记住，数学是人类的一项活动。解问题或者做数学的目的大概是为了把我们获得的信息传递给后代。我们必须记住人的智力是有限的，肯定不能连续不断地去领会和消化无穷多的问题并把它们全部记住。理论的真正目的在很大程度上着眼于把过去的经验加以系统地组织，使得下一代人一我们的学生以及学生的学生，等等，能够尽可能顺利地汲取事物的本质内容。只有如此，你才能不断进行各种科学活动而不会走进死胡同。我们必须设法把我们的经验浓缩成便于理解的形式，这即是理论之基本所为。也许我可以在引用庞加莱在谈论这个主题时不得不说的话："科学由事实建造，正如房屋由石块建成一样；但是事实的收集并非科学，恰如石块的堆积并非屋宇。"

我想讲的下一个论点涉及形式推导与严格性之间的差异，是数学中有悠久历史的话题。在只重形式推导的方面做研究，只要结果正确，你用不着过多地去操心它们的精确含义。你可能会说，这种情况只在应用数学中发生，但事实恐非如此；我以为这种现象在纯粹数学中同样存在。历史上有许多只重形式研究的著名实例。最有名气的实践家当属欧拉 (Euler) 你们知道，欧拉导出了许多极其漂亮的公式。他对诸如 $\sum_{1}^{\infty} n$ 这样极度发散的级数"估值"，求出的值为 $-\frac{1}{12}$；只是在大约一个世纪之后，人们才给这类公式附加上精确的意义。在其他领域，你们知道亥维赛 (O. Heaviside) 的以及较晚的迪拉克的著名工作，他们讨论被大大推广了的函数，直到不久前才给它们奠定了严格的基础。只注重形式的数学研究属于这

样一种行为：你用某种聪明的技巧得到了正确的结果，接着就继续往前，并不过多地担忧其严格与否，对严格性持后会有期的态度。

现在你可能会问：什么是严格性？一些人把严格定义为“ rigor mortis ”（意为“尸僵”，指死后的僵直．—— 译注），相信伴随纯粹数学而来的，是对那些知道如何得到正确答案的人的活动的抑制。我想，我们必须再次记住数学是人类的一种活动。我们的目标不仅是要发现些什么，而且要把信息传下去。有些人，比如欧拉，他们知道如何写出一个发散级数又得到正确的答案。他们对该做什么和不该做什么必定具有某种非凡的感觉。欧拉从大量的经验中获得了某种直觉，而直觉是很难传达给别人的。下一代人不知道他的结果是怎么得出来的。严格的数学论证的作用正在于使得本来是主观的、极度依赖个人直觉的事物，变得具有客观性并能够加以传递。我完全不想拒绝这类直觉带来的好处，只是强调为了能向其他人传播，所获得的发现最终应以如下方式表述：清晰明确，毫不含糊，能被并无开创者那种洞察力的人所理解。此外，只要你在钻研某个范围的问题，你的直觉自然也能把你引向正确的答案，尽管你可能尚不能肯定如何去证明它。但是，一旦你进入研究的下一阶段，对已得到的结构开始提出更复杂、更精致的问题时，对最初的基础性工作的深入理解就会变得越来越重要了。所以，正是你所从事的研究本身，需要严格的论证。如果缺乏牢固的基础，你修建的整座建筑将岌岌可危。

我的下一个论题是有关数学中的深度和广度之间的区别的。我的意思是，当你研究一个特殊的领域或问题时，可以搞得非常精细，钻得越来越深，得到越来越具体的成果；或者，你可以选择另一种途径，分身于数学的众多领域之中，对相当大的范围内的课题都达到某种程度的理解，然后看看自己可以在哪方面发展并作出努力。

让我比较两种搞法各具什么优点，特别分析一下对想搞研究的学生的影响；在一个领域内往细节深钻好呢，还是应该在真正搞研究前，先去熟悉尽可能广的知识？当然，作这类选择很困难，平衡点往往在两个极端之间。让我描绘一下某些隐藏着的陷讲。如果你在一个领域搞得非常专，我们可以设想你正瞄准某个非常困难的问题，比如黎曼猜想。你可能要用毕生的时间来熟悉和完善某些技巧。假如运气甚佳，你将解决它，也许你就成了传世名家；一旦命运不佳，后果就很

糟，你将一无所获。专于一个领域的危险在于，在你所生活的时代，那些问题可能尚未达到能够解决的程度，所以你必定是在浪费时间；或者当你最终解决这个原本是重要和引人注目的问题时，数学界的时尚变了，人们对它已无多大兴趣。此时你再决定转变研究领域，你会发现已为时过晚。

一开始就涉足广阔的前沿领域有个优点，即年轻的学生学习新东西相对容易些。如果开始就在一个合理的范围内尽你所能，学习较多的前沿课题，你会从中获得较丰厚的储备以图后进。当数学时尚或人们关注的问题发生变化时，你便能随之而变。反对如上看法的人可能会说，数学最重要的是解问题，追求“广度”充其量只是一种佯攻，你们应该去搞硬问题。关于广度的讨论涉及数学的本质。在很大程度上，数学是一门将完全不同的和毫无联系的事物组织成一个整体的艺术。毕竟，数学在所有科学领域中达到了抽象的顶峰，它应该适用于广阔的现象领域。也许，我又可以引用庞加莱的一段话，我觉得它跟我的几个论题有关。他说：“什么是值得研究的数学事物呢，通过跟其他事物的类比，它们应能引导我们获得有关的数学定律的知识，正如实验事实引导我们获得物理定律的知识一样。数学中的结论将向我们揭示其他事实间意想不到的亲缘关系，虽然人们早已知道这些事实但一直错以为它们互不相干。”将众多来自经验科学或数学本身的不同事物结合在一起，乃是数学的本质特征之一。我们之中必定要有这样的人，他们努力把数学中的不同部分联接起来；也要有另一种人，他们把自己约束在一个领域内，在此方向尽可能获得更多的成果。

另一对问题跟数学的具体内容关系不大，而涉及数学家的工作方式：是个人奋斗还是合作研究。处理这类问题显然随人而异，差别很大。有些人不喜欢或无法跟别的数学家合作。他们最善于个人思考，自己写文章，这是他们的工作方式。另一些人喜欢跟同事联手，许多研究都是合作进行的。我认为有相当多的证据说明，后一种做法有优越性，将来也还会有更多的证据出现。首先，如果你和其他数学家合作，实际上大大增加了你所拥有的技巧，也开阔了自己对数学的看法，它必然会影响到研究工作。假定数学的多样性在增加，对任何单个人而言，想要熟悉所有的领域确实太困难了。正如我说过的，很多有趣的问题来自数学不同部分间的相互影响。数学家越来越需要在一起工作，集中他们的智谋，在某个特定的范围进行攻坚。当然，你不要想把观点完全不同的数学家拉到一起。你需

要基本志趣非常相近的人，他们以多少有点相似的方式思考，有相似的情感，但在创造个别具体事物时有足够的差异。合作研究另有一个好处。当你直接强攻一个数学问题时，常会走进死胡同，你所做的似乎一概不起作用，你会期盼能巧遇什么转机，那样问题也许就容易解决了。可是不会有人来帮忙，因为别人通常也在那儿等待转机。仅仅一处障碍就会耽搁你多少年，这在数学研究中是屡见不鲜的。可能因为出现简单的智力方面的阻滞，某个愚蠢的念头使你看不到下一步该怎么走，而你的同伴可能容易指出要害之处，这种现象十分普遍。这恰是合作的用武之地。另一方面，合作也有利于听到批评意见；我们大家都容易犯错误，容易带着不完全的论证匆匆向前冒进。有个人在你身边就大有好处，他会以批判的眼光检查你给出的论证，并挑出其中的漏洞。显然，挑别人的错比挑自己的容易得多！

最后，我们不能忽略遭单独监禁乃是人生最痛苦的经历。数学研究非常艰辛，我想从人的角度考虑，合作的好处也是值得重视的，它可以使数学思维过程变得更有乐趣。尽管我承认喜欢合作，但在关键时刻谁也代替不了你自己的冥思苦索。

如我所说，当你注视数学的未来 —— 假定数学确实有其未来，想要预见比如 500 年后数学的动向，那是非常困难的。随着数学的加速发展，出版物大量涌现，研究多样化趋势的迅猛增长，我们怎样才能控制住局面，如何才能使数学中的不同部分保持总体上的联系？看来，我们越来越需要以合作的方式研究数学了，这恐怕是不可避免的。

我要比较的下一对论题是主流数学和非主流数学[1]。我们感觉到数学具有它的核。数学中的一些主要问题，经逐渐积累和筛选，其中重要的被保留下来，形成数学中的一条主流。但我们还有许多旁支侧流，它们不时出现并为主流供水，你必须决定是在尽可能靠近中心的部分工作，还是我行我素，试图去发现以前尚未被发掘过的有趣的领地。无疑，这回我们又需要两类数学家。真正的开拓者会独立行动，下决心不被卷入过去已经做过的任何事情。它们打算重打鼓另开张，以全新的观点考虑问题。数学中真正新的创造以及全新级域的出现，无疑是以此

[1] 主流数学，原文是 main-stream mathematics；非主流数学，原文是 off-beat mathematics，直译为“弱拍数学” — 译注

类行动为发端的拓荒者的功劳。当然，这种做法存在危险，毕竟成功的开拓者为数甚少，而失败者甚众。就像你们都想挖出金子，有一个人找到了，其余的皆空手而归。所以你们必须认识到，当你打破常规走进荒漠，你可能做出某种数学；假如你运气不错，会得到一些人的承认，说你的工作给数学增添了新鲜血液；但是当代的 99 %的反映将是“对，非常有趣。但似乎毫无前途“。所以，你真的得碰运气。你想要发现真正的金矿而不只是一片荒漠，真有点赌博的味道。

然而，身处数学主流也有难处。这类领域已被大部分著名数学家研究过，想在数学的核心部分得到新结果将难上加难。当你确实有望在这种领域做出成绩时，因为它属于数学主流，成果会显得更加重要。

最后，我想对比一下数学论证是否“有效”和“优美”的问题。我们所有的人都不会漠视这方面的问题。一个有效的证明不一定是优美的，它可能是一副强蛮的面孔，完全靠力气，靠推土机式的技巧获得成功。你写下一页又一页的公式向前跋涉，看起来很不舒服，事实也确是如此！不过最终还是达到了目的。至于优美的工作，你似乎并不费力，只要写上几页纸，嗨，你瞧！耀眼的结果出现了，令四座皆惊。

这回，我们还是需要两类数学家，这是毫无疑问的。许多结果首先是完全靠蛮力证明的。一些人坚韧不拔地一直往下算，不在乎它是否优美，最后得到答案。接下去，对此结论感兴趣的人会继续考虑，试图理解它，最后把它打扮得很漂亮，富于感染力。当然，这并非简单的粉饰门面。因为优美是一种评价标准，若想让数学继续保持旺盛的活力，坚持这一标准是非常重要的。如果你想让其他人理解某个论证的实质，原则上它必须是简单和优美的；这显示了质量：表达最明朗，最容易被人类的心智在数学框架内所理解。事实上，庞加莱将简明性视为数学理论的定向力，使我们选择某个方向而不是另一个方向前进。所以，优美与否是非常重要的，不仅对基本结构如此，而且对次一层的结构亦然。

我想我可能已经提到了与会者将要论及的各种问题。关于“优美”，我期待彭罗斯 (Penrose) 教授 (从他的报告题目可知) 会有内容更丰富的阐释。如果我理解得不错的话，会上还有一个关于数学交流问题的报告；我想我讲的大部分内容在广义上跟交流问题有密切的联系。数学交流首先涉及数学杂志上的文章，以及你该怎样去写和怎样去读数学。不过在更广的意义上，它还应包括如何将数学传达

给当代人和子孙后代的问题，使得数学成为人类的一项连续不断的活动。如果数学要继续存在下去，那么其理论方面必须保持强壮有力。即使你主要关心解决问题的技巧的发展，如果你想让这些技巧为后代数学家所理解，你也必须把它们联系起来，使之变得简单紧凑，让一年级大学生能够理解。终究这是我们的目的之所在；微积分是牛顿和莱布尼茨的伟大创造，我们现在可以教给 14 岁的学生；爱因斯坦 (A. Einstein) 的相对论肯定已在向大学新生讲授，甚至作为中学毕业班的课程。我们的前辈留下的最难的数学，经提炼而成的精华，已可教会非常年轻的数学家。不难看出，浓缩精炼我们所有的数学经验，是使后继者能继往开来的唯一途径。真的，我认为这是我的一个主要课题，不知你们是否喜欢它。我很抱歉没有多讲智力活动的过程。怎样才能得到好的想法，热水澡或是上下车是否是刺激我们思维的最好方式，这些问题很迷人；但是我认为，承认数学能力的多样性，认识解决问题或建立数学理论有多种途径，也是同样重要的。你不应该这样想，似乎数学家都在卖力地做着相同的事；他们可能在同一数学领域工作，但并不意味他们在以同样的方式工作。世上有各种类型的数学家，他们全都是我们需要的。

系　讯

1. 我系毕业生沈建获得 1998-1999 年度加拿大总督金奖 (Governor Genoral's Academic Gold Medal). 该奖是奖给上一年度在加拿大毕业的最优博士，平均每毕业 1500 名研究生 (含博士和硕士), 可评选出一人获得此奖，这是为加拿大政府在学术界的最高荣誉奖.

目前，沈建在美国 University of Wiscollsin-Madison 做博士后研究.

2. 我校参加 1999 年美国大学生数模竞赛的 6 个队，有 2 个队获得一等奖，3 个队获得二等奖.

3. 目前仍在国外留学的我系毕业生周建伟、荣用武、朱梅俊、胡森、王骥、舒其望、李岩岩等同学，今年相继回母校看望老师和同学，并做学术报告.

浅谈 Banach 空间中的基

魏 斌 王作勤

由于现行泛函分析教科书中关于基的理论涉及较少，而基的理论又是一个十分重要且有趣的领域，本着抛砖引玉的想法，写下此文，希望对大家会有所帮助，有所启迪.

要想把 Banach 空间看一个“几何的”空间，一种自然的方式是在其中引入某种坐标系. 其中，常用的方法是在其中引入 Schauder 基：（不引起混淆时，简称 Schauder 基为基).

定义 1 Banach 空间 X 中的序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 叫做 X 的 Schauder 基，如果对每个 $x \in X$，存在唯一的数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 使得 $x=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$，(即 $lim_{n\to\infty}||x-\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||=0$).

另一方面，为了更深入的讨论 Banach 空间的结构性质，人们引入了下面这种更强的无条件基的概念，它能提供比 Schauder 基更多的关于空间的几何及结构性质：

定义 2 一个 (Schauder) 基称为是无条件的，若对每个正负号序列 $\theta=\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$，只要级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛，就有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n a_n x_n$ 收敛，(或等价的，算子 $T(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i)$ $=\sum_{i=1}^{\infty} \theta_i a_i x_i$ 是有界的，该定义还等价于，对 N 的任一排列 $\{\pi(n)\}_{n=1}^{\infty}$，由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛可推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} x_{\pi(n)}$ 收敛.)

下面，我们先来介绍一下关于无穷维 Banach 空间的基的几个基本问题的背景及近期进展，尤其是 98 年度 Fields 获奖得者 W.T.Gowers 的有关工作.

显然，具有基的 Banach 空间是可分的，反之，一些常见的可分 Banach 空间中很容易找到基. 是否每个可分 Banach 空间都有基？这个由 Banach 在 1932 年提出的“基问题”直到 1973 年才由 P.Enflo 否定地解决：他构造了一个没有逼近性质的可分 Banach 空间，而逼近性质是由基的存在性所蕴含的. 对于无条件基，不难证明一些常见的空间 (如 $L_1(0,1)$ 或 $C(0,1)$) 没有无条件基，由于每个无穷维 Banach 空间一定有一个无穷维子空间有基，很自然地会问，是否每个无穷维 Banach 空间都有一个无穷维子空间有无条件基？这也曾是一个长期悬而未

决的开问题，长时间以来，人们希望无穷维 Banach 空间有一个更好的性质，即含有某个子空间同构于 c_0 或某个 $l_p,1 \leq p < \infty$. 但这个希望因为 B.S.Tsirelson 的一个结果而变得渺茫，他构造了一个自反空间，其中没有任何子空间同构于 $l_p,1 < p < \infty$. 他的构造有一个值得注意的特色，即该空间 (范数) 不是由某个公式显式定义的 (到当时为止的所有 Banach 空间的例子都是显式定义的)，而是由一个隐式方程定义的，（下文提到的几个例子都是由此类程序构造的）. 所有这些是到本世纪 70 年代中期就知道了.

最近的发展是由 T.Schlumprecht 在 91 年的一篇文章引起的，他修改了 Tsirelson 的例子，得到了一个空间是"任意可畸变的"，利用 Schlumprecht 的结果，Gowers 与 Maurey 构造了一个可分 Banach 空间 Y，使其任何无穷维子空间均没有无条件基. 事实上，这个空间 Y 被证明有一个更强的性质：若 Z 是 Y 的任一子空间，则在 Z 上的任何有界线性投影是平凡的 (即要么 $\dim PZ < \infty$，要么 $\dim Z/PZ < \infty$). 而若一个空间 Z 有无条件基 $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$，则在 Z 上有很多非平凡的有界线性投影. (对任何 $M \subset \mathrm{N}$, $P_M(\sum_{i=1}^{\infty} a_i z_i) = \sum_{i \in M} a_i z_i$ 是一个有界线性投影). 这个例子还解决了另外一个问题，即是否存在一个无穷维 Banach 空间不能被表示成直和 $X = X_1 \oplus X_2$，其中 $\dim X_1 = \dim X_2 = \infty$.

有了上面一些前沿方面的介绍，下面再谈谈基的一些背景及性质等，这样大家对基的理解会更清楚一些，由于篇幅的限制，以下的证明大都略去，感兴趣的同学可在后附的参考文献中查到.

定理 1 (基的判别定理)　设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 Banach 空间 X 中向量序列，则 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 的基的充要条件是

(i) 对于每个 $i, x_i \neq 0$,

(ii) 存在一常数 $K > 0$，使得对于任意数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 和任意正整数 $m < n$ 有 $\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| \leq K\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|$,

(iii) $\overline{\mathrm{span}\{x_i\}_{i=1}^{\infty}} = X$.

定理 2 (基的等价性)　设 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是 Banach 空间 X 和 Y 的基，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 当且仅当 X 与 Y 之间存在一同构映射 T，使得 $Tx_n = y_n$，$n = 1, 2, \cdots$.

注　称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与 $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 等价 (记作 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \sim \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$)，如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 和

$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ 分别是 Banach 空间 X 和 Y 的基，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ 收敛当且仅当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ 收敛.

定理 3 (无条件基的判别法) 设非零向量序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的 $\mathrm{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 Banach 空间 X 中稠密，则 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 x 的无条件基，当且仅当存在一正数 K 使得对于 N 的一切两两不交的有限子集 A、B 和任意数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有 $\|\sum_{n\in A} a_n x_n\| \leq K\|\sum_{n\in A\cup B} a_n x_n\|$.

定义 3 设 $\{x_n\}$ 为 Banach 空间 E 的基，则由 $\delta_j(x) = \alpha_j(x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in E)$ $j = 1, 2, \cdots$, 所定义的线性泛函列 $\{f_n\}$ 称为“联系于基 $\{x_n\}$ 的系数泛函列”，简称“相关的系数泛函列”. (the associated sequence of coefficient functionals)

定理 4 若 X 是 Banach 空间，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 X 的一个基，则相应的系数泛函 (或称坐标泛函)f_n 连续！进一步，存在常数使得 $1 \leq \|x_n\|\|f_n\| \leq M$.

下面对基的性质作稍微的展开论述，由于复 Banach 空间与实 Banach 空间存在前着一些密切的联系，下面来看看在复 Banach 空间和实 Banach 空间中的基有怎样的联系

定理 5 (数域的限制复域 - 实域) 序列 $\{x_n\}$ 是复 Banach 空间的 E 的基，当且仅当由 $\begin{cases} Z_{2n-1} = x_n \\ Z_{2n} = ix_n \end{cases}$ $n \in \mathrm{N}$ 定义的序列 $\{z_n\}$ 是 $E(r)$ 的基，(但 $E(r)$ 还可有不同于上述形式的基)

注 $E(r)$ 称为“通过数域的限制从 E 得到的实 Banach 空间” (the real Banach Space obtained from E by the restriction of the field of scalers), 即将复 Banach 空间 E 的数域限制到实域上得到的空间.

反过来，再来考虑数域的扩张 (从实域扩张到复域) 时，基之间的联系，然而，对什么样的实 Banach 空间 F, 存在复 Banach 空间 E 使 $E(r) = F$? 或者更一般的，对什么样的实 Banach 空间 F, 存在从 F 复 Banach 空间 E 的 $E(r)$ 同构 (此时称 F 容许一个复结构 (admit a complex structure)). 事实上，一个实 Banach 空间上容许一个复结构，当且仅当存在 F 的自同构 u, 使得 $u^2(x) = -x$ $(x \in F)$. 可以证明，对任何实 Banach 空间 G, $G \times G$ 上容许一个复结构，设 $G \times G$ 同构于复 Banach 空间 E 的 $E(r)$, 此时 G 可嵌入 E, 称 E 为 G 的复化，(the complesification of G), 相应的有：

定理 6 (数域的扩张：实域 $\to$ 复域) 设 G 是实 Banach 空间，E 是 G 的复

化，则序列 $\{y_n\} \subset G$ 是 G 的基当且仅当它是 F 的基．（但 E 可以有基 $\not\subset G$.）

下面再谈谈 Hamel 基：

定义 4　Banach 空间 X 的子集 A 叫做 X 的 Hamel 基，如果每个 $x \in X$ 均可唯一地表成 A 的元的有限线性组合．

由定义易见，在有限维空间中， Schauder 基与 Hamel 基是一致的， Hamel 基是极大线性无关集， Schauder 基是极大弱线性无关集．但另一方面， Schander 基与 Hamel 基还是有很大区别的．例如：

(1) Schander 基是一个序列，但 Hamel 基只是一个集合 (与元素顺序无关)，且不一定可数；

(2) 如前所述，即使是可分的 Banach 空间，也不一定有 Schander 基，但任何一个至少含两个元素的 Banach 空间一定有 Hamel 基，即下面的性质 2.

性质 1　Banach 空间 X 的子集 A 为 Hamel 基当且仅当 A 为 X 的极大线性无关集

性质 2　至少有两个元素的任何向量空间都含有一个 Hamel 基，更一般的，若 $A \subset S \subset X$，其中 A 为线性无关子集而 $\mathrm{span}S = X$，则存在 Hamel 基 B 使 $A \subset B \subset S$.

性质 3　设 A 、 B 为 X 上的两个 Hamel 基，则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$(称为 X 的代数维数或线性维数).

性质 4　无穷维 Banach 空间中的 Hamel 基是不可数的 (因此， Hamel 基也不同于无条件基)

最后，我们给出 Hamel 基的一个应用，即证明如下的

定理 7　任何无穷维 Banach 空间 X 上，一定有不连续线性泛函．

证　任取 X 上的一个 Hamel 基 A，并取一列非零线性无关元 $\{x_n^0\}_{n=1}^{\infty} \subset A$，对 $\forall x \in E$，则 X 可表为 A 中有限个元素的线性组合，设 $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^0 + \sum_{i=1}^{m} u_i x_i$，其中 $x_i \in A - \{x_n^0\}_{n=1}^{\infty}$，定义 $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot k \cdot ||x_k^0||$，则由 A 为 Hamel 基易知 $f(x)$ 为 X 上确定的线性泛函，但由 $f(x_k^0) = k||x_k^0||$ 知 f 是无界的，故 f 为 X 上的不连续泛函。

注　由于 R 可视为 Q 上的无穷维线性空间，故类似可知 Cauchy 函数方程 $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ 存在不连续解。

最后，感谢梁进老师对本文的巨大帮助.

参考文献

[1] Joram Lindenstrauss ,The Work of William Timothy Gowers, Notices of the AMS, 1999,1.

[2] Singer, I. Base in Banach Spaces I, Springer-Verlag, Berlin 1970

[3] 赵俊峰， Banach 空间结构理论，武汉大学出版社， 1991

[4] 俞鑫春， Banach 空间几何理论，华东师大出版社， 1986

[5] E.Hewitl, K. Stromberg, Real and Abstract Analysis, GTM 25. Springer-Verlag, Berlin, 1965

[6] 定先桂，巴拿赫空间引论，科学出版社， 1997,P151

[7] W.T.GOWERS and B.MAVREY, The unconditional basic sequence problem, J. Amer. Math. Soc. 6 (1993), 851-874.

漫谈“平均”

王作勤　盛　茂

一、引言

本文的作者曾在相当长一段时间内对“平均”这个概念有着浓厚的兴趣，因而在学习过程中也收集了一些有趣的材料，特编成此文，若读者能从中发现一些感兴趣的东西，那么本文的目的就达到了．限于学识与篇幅，文中主要收录一些基本而初等的内容，且大多结论未给出证明，文中还留了一些问题，给有兴趣者研究．

二、常见的平均

关于 n 个正数 $a=(a_1,a_2,\cdots a_n)$ 常见的平均有：

算术平均　$A(a)=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

几何平均　$G(a)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

r 次幂平均　$M_r(a)=\left(\frac{a_1^r+a_2^r+\cdots+a_n^r}{n}\right)^{1/2}$

调和平均　$H(a)=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$

k 次对称平均 $P_k(a)=\left(\frac{E_k(a)}{C_n^k}\right)^{1/k}$，其中 $E_k(a)=\sum\limits_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\prod\limits_{j=1}^{k}a_{i_j}, k=1,2,\cdots,n.$

关于函数 f 的对称拟算术平均 $M_f=f^{-1}\left(\frac{f(a_1)+\cdots+f(a_n)}{n}\right)$，其中 f 为 $(0,+\infty)$ 上的单调正值函数．

在实际使用中，除了上述“标准”的平均外，还有各种加权平均，积分平均等，例如：

r 次加权幂平均　$M_r(a,p)=\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i^r}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right)^{1/\gamma}$

关于 f 的非对称拟算术平均　$M_f(a,p)=f^{-1}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i(a_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}p_i}\right)$

积分算术平均　$A(f)=\frac{1}{m(E)}\int_E f(x)dx$

积分几何平均　$G(f)=\exp\left(\frac{1}{m(E)}\int_E \ln f(x)dx\right)$

积分调和平均　$H(f)=\frac{m(E)}{\int_E [f(x)]^{-1}dx}$

r 次积分幂平均 $M_r(f)=\left(\frac{1}{m(E)}\int_E f^r(x)dx\right)^{1/r}$

r 次加权积分幂平均　$M_r(f,p)=\left(\frac{\int_E p(x)f^\gamma(x)dx}{\int_E p(x)dx}\right)^{1/\gamma}$

关于这些平均，略作几点说明如下：

① A 、 B 、 H 为 M_r 的特例； A 、 G 为 P_k 的特例； M_r 为 M_f 的特例.

② $\lim\limits_{r\to 0}M_r=G, \lim\limits_{r\to+\infty}M_r=\max\limits_{1\le k\le n}\{a_k\}$ (或 $\sup f$), $\lim\limits_{r\to\infty}M_\gamma=\min\limits_{1\le k\le n}\{a_k\}$ (或 $\inf f$).

③ A 、 G 、 H 、 M_r 均可互相转化，如 $G(a)=\exp(A(\ln a))$.

④ $A(a)$ 为函数 $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-x)^2$ 的极小值点. 类似的， $G(a)$ 为函数 $=\prod\limits_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{x})^{\ln\frac{a_i}{x}}$ 的极小值点.

三、平均不等式

由于平均是按某种标准对一组量的估计，故平均与不等式有自然的联系，有关的不等式及其丰富，下面仅列举几个有代表性的：

算术平均 - 几何平均不等式： $A(a)\ge G(a)$.

关于这个不等式，最早也最精彩的证明是由 Cauchy 给出的，他在此第一次使用了反向归纳法. 下面我们介绍一个由 Bellman 给出的基于函数方程的证法：我们在条件 $x_1+\cdots+x_n=a, x_i\ge 0$ 下求 $x_1\cdots x_n$ 的最大值. 记该最大值为 $f_n(a)$，则通过变换 $x_i=ay_i$ 易见 $f_n(a)=a^n f_n(1)$.

下面我们来求 $f_n(1)$ 与 $f_{n-1}(1)$ 的关系，将条件改记为 $x_1+\cdots+x_{n-1}=a-x_n, x_i\ge 0$, 易见,

$$
\begin{aligned}
f_n(1)&=\max_{0\le x_n\le 1}[x_n f_{n-1}(1-x_n)]=\max_{0\le x_n\le 1}[x_n(1-x_n)^{n-1}f_{n-1}(1)]\\
&=f_{n-1}(1)\max_{0\le x_n\le 1}[x_n(1-x_n)^{n-1}], n=2,3,\cdots \text{ 且 } f_1(1)=1.
\end{aligned}
$$

由数学分析易知

$$
\max_{0\le x\le 1}x(1-x)^{n-1}=\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},
$$

故

$$f_n(1) = f_{n-1}(1)\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n},$$

即

$$f_n(1)\cdot n^n = f_{n-1}(1)\cdot(n-1)^{n-1} = \cdots = f_1(1)\cdot 1^1 = 1$$

所以

$$f_n(1) = \frac{1}{n^n},\quad f_n(a) = \frac{a^n}{n^n},$$

由此即得 $G(a) \le A(a)$. 证毕.

幂平均不等式：设 $-\infty \le r < s \le +\infty$, 则 $M_r(a) \le M_s(a)$.

对称平均值基本定理： $G(a) = P_n(a) \le P_{n-1}(a) \le \cdots \le P_2(a) \le P_1(a) = A(a)$.

Hölder 不等式：设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则 $p>1$ 时， $M_p(a)M_q(b) \ge M_1(ab)$, 而 $0<p<1$ 时， $M_p(a)M_q(b) \le M_1(ab)$.

Minkowski 不等式：设 $r>1$, 则 $M_r(a+b) \le M_r(a)+M_r(b)$.

Rado 不等式：记 $R_n(a) = n(A_n(a)-G_n(a))$, 则 $R_{n-1}(a) \le R_n(a)$,

Popovic 不等式：记 $P_n(a) = \left(\frac{A_n(a)}{G_n(a)}\right)^2$, 则 $P_{n-1}(a) \le R_n(a)$.

最后，我们要说明的是，有不少不等式可以推广到加权平均、积分平均的情况，或者有各种形式的类比，例如：

加权算术平均几何平均不等式： $A(a,p) \ge G(a,p)$.

积分算术平均 - 几何平均不等式： $A(f) \ge G(f)$.

矩阵的 Hölder 不等式：设 A, B 为两个 n 阶半正定 Hermite 阵， $A \ne 0, B \ne 0, p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则 $trA^{1/p}B^{1/p} \le (trA)^{1/p}(trB)^{1/q}$.

随机的 Minkowski 不等式， $(E|X+Y|^p)^{1/p} \le (E|X|^p)^{1/p} + (E|Y|^p)^{1/p}, p>1$.

四、平均的“公理化”刻划

面对各种各样的平均，大家自然会想到能否给诸平均一个公理性刻划这样一个问题. 例如，我们可以定义满足如下三个条件的 n 元函数 $f: \mathrm{R}_+^n \to \mathrm{R}_+$ 为一个“平均函数”：

(1) 对称性: 设 $i_1, \cdots, i_n$ 为 $1, \cdots, n$ 的任一个重排, 则 $f(a_1,\cdots,a_n) = f(a_{i_1},\cdots,a_{i_n})$.

(2) 单调性：设 $a_1 < \tilde{a}_1$, 则 $f(a_1,a_2,\cdots,a_n) \le f(\tilde{a}_1,a_2,\cdots,a_n)$.

(3) 介值性: $\min\limits_{1\le i\le n} \le f(a_1,\cdots,a_n) \le \max\limits_{1\le i\le n} a_i$, 这样定义下的"平均函数"较符合我们的直观，但难以入手研究其性态，不过，有兴趣的读者不妨试试在诸如加性、齐性、超 (次) 加性，凸性之类的条件下研究这样的"平均函数"的性态.

另一方面，苏淳老师曾开创了一种用函数序列的观点来刻划平均值的方法，为我们指明了一条新路，他给出了如下的结果:

算术平均值的刻划定理: 设 $f_1(x_1), f_2(x_1,x_2),\cdots,f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 为一列实函数，具备下述性质:

(i) 对 $\forall n\in \mathrm{N}, t, y\in \mathrm{R}$, 有 $f_n(tx_1+y,\cdots,tx_n+y)=tf_n(x_1,\cdots,x_n)+y$.

(ii) 对称性. $\forall n\in \mathrm{N}$, 设 $i_1,\cdots,i_n$ 为 $1,\cdots,n$ 的任一置换, 则 $f_n(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})=f_n(x_1,\cdots,x_n)$.

(iii) 递归性. $f_n(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=f_n(f_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1}),\cdots,f_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1}),x_n)$, 则 $f_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}, \forall n\in \mathrm{N}$.

完全类似的，还可以给出几何平均值的刻划定理.

问: 能否类似地给出幂平均或对称平均的刻划?

函数列的方法不仅可以刻划具体的平均，还可以用来刻划一大类平均的共性，具体结果如下:

定义　一个函数序列 $\{f_n\}$ 称为平均值函数列，若

(I) $f_1(x)=x$.

(II) $f_3(x_1,x_2,x_3)=f_3(x_1',x_2',x_3')$, 其中 (x_1',x_2',x_3') 为 x_1,x_2,x_3 的任一重排.

(III) $f_{2n}(x_1,\cdots,x_{2n})=f_2(f_n(x_1,\cdots,x_n),f_n(x_{n+1},\cdots,x_{2n}))$.

(IV) 当且仅当 $y=f_n(x_1,\cdots,x_n)$ 时, $f_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)=y$.

(V) 若 $y\le y'$, 则 $f_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y)\le f_{n+1}(x_1,\cdots,x_n,y')$.

设 $\{f_n\}$ 为平均值函数列，则可以证明它满足一些很好的性质，如对称性，介值性，递归性等，且若 f_2 满足齐次性，则 f_n 也有齐次性. 不难验证，算术平均、几何平均、调和平均、幂平均、对称拟算术平均各自构成的函数列均为平均值函数列. 另外，易见，平均值函数列的通项仅由 $f_2(x_1,x_2)$ 决定，这里便产生了一个问题: 对于哪些二元函数 $f_2(x,y)$, 它可以唯一确定一个平均值函数列? 有兴趣的同学不妨思考之.

关于平均值函数列，还有下面三个很有意思的定理，证明均可用反向归纳

法.

定理 1　设 $\{f_n\},\{g_n\}$ 为两个平均值函数列，且 $f_2(x_1,x_2)\le g_2(x_1,x_2)$，则 $f_n(x_1,\cdots,x_n)\le g_n(x_1,\cdots,x_n)$.

定理 2　设 $\{f_n\}$ 为平均值函数列，φ 为实函数. 若 $\varphi(f_2(x_1,x_2))\le f_2(\varphi(x_1),\varphi(x_2))$，则 $\varphi(f_n(x_1,\cdots,x_n))\le f_n(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))$.

定理 3　设 $\{f_n\}$ 为平均值函数列，φ 为严格单调的连续函数，$F_n(x_1,\cdots,x_n)=\varphi^{-1}(f_n(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n)))$，则 $\{F_n\}$ 为平均值函数列.

五、平均的"迭代"

下面我们来考虑平均值的迭代问题，设 $x_1=a_1,\cdots,x_m=a_m$ 均已知，f 为 m 元平均函数，定义 $x_{n+m}=f(x_{n+m-1},x_{n+m-2},\cdots,x_n),(n\ge 1)$，则 $\{x_n\}$ 为 $\{a_1,\cdots,a_m\}$ 经函数 f 迭代后生成的数列，我们感兴趣的是 $\{x_n\}$ 的极限值，例如，若 f 分别为 A_2,G_2,H_2，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 相应地分别为 $\frac{a_1+2a_2}{3},\sqrt[3]{a_1a_2^2},\frac{3a_1a_2}{a_1+2a_2}$. 更一般地，我们有：

定理　对 $m(\ge 2)$，f 为 m 元 r 次幂平均，则

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\begin{cases}\left(\dfrac{ma_m^r+(m-1)a_{m-1}^r+\cdots+2a_2^r+a_1^r}{m(m+1)/2}\right)^{1/r}, & r\ne 0\\ \sqrt[m(n+1)/2]{a_m^m a_{m-1}^{m-1}\cdots a_2^2a_1}, & r=0.\end{cases}$$

注　此结论还可类似 (在 $\{x_n\}$ 收敛的条件下) 推广到对称拟算术平均或加权平均的情况，具体结果略.

问题：若 f 为某平均值函数列中的函数，迭代后会有何现象？ (是否收敛？极限如何？)

最后，我们来介绍一个由迭代生成的平均，即著名的高斯算术 - 几何平均，给定 $a_0\ge b_0>0$，令 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$ 则不难证明 $\{a_n\},\{b_n\}$ 都收敛于同一个值，记为 $M(a_0,b_0)$，称为数 a_0,b_0 的高斯算术 - 几何平均，易见 $M(a_0,b_0)$ 有对称性、齐次性. 一个基本问题是，$M(a_0,b_0)$ 的表达式是什么？这个问题很不简单，事实上，该表达式是一个椭圆积分，即

定理　$$M(a_0,b_0)=\frac{\pi}{2\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a_0^2\cos^2x+b_0^2\sin^2x)^{1/2}}}.$$

证明 先给出 Gauss 的一个引理：设 $A=\frac{ab}{2}, B=\sqrt{ab}$, 则

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^{1/2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(A^2\cos^2x+B^2\sin^2x)^{1/2}}.$$

引理的证明：作代换 $\sin x=\frac{2a\sin t}{(a+b)+(a-b)\sin^2t}$, 则

$$\cos x=\frac{[(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2t]^{1/2}}{(a+b)+(a-b)\sin^2t}\cos t,$$

$$dx=2a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^2t}{(a+b)+(a-b)\sin^2t}\frac{dt}{[(a+b)^2-(a-b)^2\sin^2t]^{1/2}},$$

代入即得该引理，由此引理，立得

$$\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a_n^2\cos^2x+b^2\sin^2x)^{1/2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a_0^2\cos^2x+b_0^2\sin^2x)^{1/2}}\triangleq G$$

为常数，且显然 $\frac{\pi}{2a_n}<G<\frac{\pi}{2b_n}$, 令 $n\to\infty$, 得

$$\frac{\pi}{2M(a_0,b_0)}=G=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a_0^2\cos^2x+b_0^2\sin^2x)^{1/2}},$$

故 $M(a_0,b_0)=\pi/(2\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{(a_0^2\cos^2x+b_0^2\sin^2x)^{1/2}})$. 证毕.

需要说明的是，这个“算术 - 几何平均”在椭圆函数论中扮演了重要的角色，事实上， Gauss 在此函数基础上建造了整个理论！也许，只有伟大如 Gauss 的人，才可能做到这个吧.

另外，对 m 个正数 $a_0^{(1)}\geq\cdots\geq a_0^{(m)}>0$. 令 $a_{n+1}^{(1)}=P_1(a_0), a_{n+1}^{(2)}=P_2(a_0),\cdots,$ $a_{n+1}^{m}=P_m(a_0)$, 其中 P_k 表示 m 元 k 次对称平均，则可证明 $\{a_n^{(1)}\},\{a_n^{(2)}\},\cdots,\{a_n^{(m)}\}$ 收敛于同一个数 $M(a_0^{(1)},\cdots,a_0^{(m)})$, 只是，能写出此 $M(a_0^{(1)},\cdots,a_0^{(m)})$ 的表达式吗？

参考文献

[1] Hardy, G. H, Littlewood, J. E. and Polya. G. Inequalities, 1953 年第二版，Ch2,Ch3,Ch6,Cambridge.

[2] Beckenbach, E. F., Bellman, R. Inequalities. Fourth Printing, Ch1, Springer. Verlag. New, York. 1965

[3] 苏淳，算术平均值的刻划定理，初等数学论丛第 6 辑

[4] 经家麒，平均值函数列，数学的实践与认识， 1998 年第 3 期.

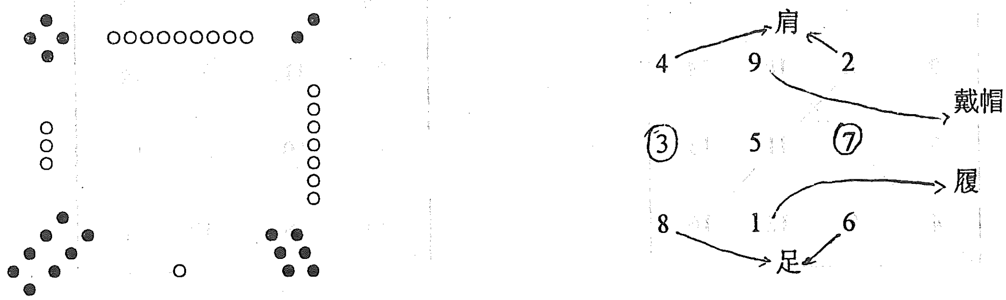
数学奇葩——幻方

尹治军

数学界风靡三千多年的幻方，倾倒多少聪明人，使之惊叹数学世界之神奇，方寸之间的玄妙。幻方，确乎令人拍案叫绝！

历史上曾出现过多种幻方构形：正方形，多角形，圆形，正方体等。但最常见，也最早有资料记载的，为正方形幻方。本文将就此类幻方作一些讨论，以抛砖引玉，唤起读者的积极参与，丰富和完善这一数学奇葩。

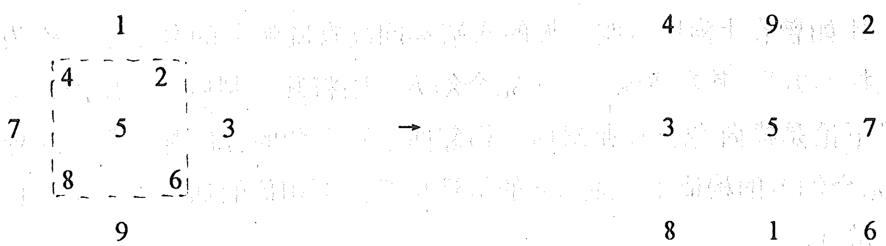
正方形幻方的史料记载，最早出现于中国的商，周时代。《易经》载：大禹制服水患，洛河浮出一只神龟，背驮如下图，所谓“洛书”，赐献大禹，以示褒奖。事实上，这正是一个三阶幻方。



原　图　　　　原 理 图

图　一

关于此幻方的构造方法，于公元 1275 年，由我国宋代数学家杨辉给出：“九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺进，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足。”这指明了“洛书”的玄机，即：先将 1 至 9 按顺序先从左上到右下每三个排为一列，再将所形成的各列向左下方排，形成斜方阵。然后将 3*3 方阵以外的部分整体平行地移入方阵，楔入方阵中的空位，即得到一个 3*3 的幻方。而这正是“洛书”的数字化表示！



图二　三阶幻方构造过程图

事实上，这一幻方的构造方法可以很容易地推广为任意的奇数阶幻方，感兴趣的读者不妨一试。

幻方的严格定义为，满足以下规则的 n 阶方阵：将 1 至 n^2 填入该方阵后，满足每行之和,每列之和,主对角线之和,副对角线之和共 2n+2 个数皆相等。

除了奇阶幻方，4k 阶幻方目前也已有简便易行的构造方法。以 4 阶幻方为例，4k 阶幻方可相应的推广得出。先将 1 至 16 按顺序从上到下每四个排为一列，再将所形成的各列从左向右排，形成一个 4*4 的方阵。第二步，将处于主,副对角线上的元素对 4 阶方阵的几何中心作中心对称，即得到 4 阶幻方。易于求得，行和为 34。至于 4k 阶幻方，只须先将其分为边长为 4 的小方块所组成的 k*k 方阵，作出每个小方块的对角线后，对所有处于对角线上的元素全部进行中心对称得出。

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

→

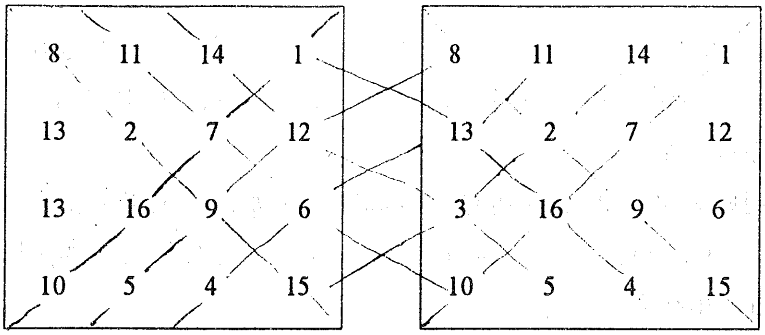
16	5	9	4
2	11	7	14
3	10	6	15
13	8	12	1

图三　4k 阶幻方构造过程

其它阶的幻方则一般较难构造。

对幻方的存在性和唯一性，有如下的一般性结论：2 阶幻方不存在，3 阶幻方存在且唯一，而 4 阶以上的幻方存在且不唯一。事实上，细心的读者可能注意到，对一个已知的幻方通过旋转和中心对称，就可以得到 8 个形式上完全不同的幻方。但请注意，从数学角度看，在同构意义下这 8 个幻方被认为是同一个！

幻方中有一类更漂亮，被称作“完全幻方”的，其比起普通的幻方还有更好的性质。比如曾在上海陆家咀发掘的嘉靖年间高官陆源之的墓室中，作为陪葬品的“玉挂幻方”。其实质就是一个完全幻方。因将其复制后一层层悬挂下来之后，满足不论是横向,纵向还是斜向，相邻四个数之和的数值都相等。此处的值为 34。完全幻方的构造比一般幻方的构造更难，不相信的话，请您也亲自动手构造一个试试。



图四　“玉挂幻方”

还有一类同样较普通幻方更奇妙的，称为“慈母怀婴”。即在一个幻方的内部，还有一个小一些的方阵，次方阵满足行和,列和,主对角线,副对角线之和的数值相等。如下图所示。

50	12	13	52	47	26	37	23
24	32	6	55	7	64	51	21
22	62	63	5	30	4	29	45
53	9	56	8	57	34	18	25
28	2	3	38	60	61	19	49
33	59	36	58	10	1	43	20
39	40	42	27	35	16	15	46
11	44	41	17	14	54	48	31

慈母怀婴

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	26	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

国际象棋马遍历幻方

图　五

幻方的定义规则是相对严格的，但有一类接近幻方定义，但又不完全符合，在此不妨称之为拟幻方。

作为 1999 年的特别献礼，这里有一个素 9 幻方。其各个位置上的数字皆为素数，且同时满足个位为九。当然，此时各数已不再遵循从 1 到 n^2 填入。其构造是相当困难的，不信可以一试。一个三阶素 9 幻方如下图所示。

569	59	449
239	359	479
269	659	149

图六　三阶素 9 幻方

国际象棋的马遍历问题，曾提供了我们一个很特别的拟幻方：各数字是马每步所到之格的步数，每格到且仅到一次，形成了一个哈密尔顿圈。可以验证，

其每行,每列之和都等于 260，但因其比一般幻方多了一个“马遍历”的内容，故而仍得到不少数学爱好者的锺爱。顺便提个小问题：上述“马幻方”是否唯一？若否，还有几个？

在幻方规则之外，也还有其它一些规则。比如说，反幻方的填数规则为：将 1 至 n^2 填入该方阵后，满足每行之和,每列之和,主对角线之和,副对角线之和共 2n+2 个数两两响异。

很多人见过的螺旋方阵即为反幻方中的一个类。

1	2	3
8	9	4
7	6	5

9	8	7
2	1	6
3	4	5

图七 反幻方

幻方世界，奥妙无穷。身处学生时代的我们，通过了解,认识幻方，对激发数学兴趣，活跃思维，在通向成功的道路上保持一颗年轻,富于创造性的心灵，是很有意义的。

附：全稿在数学系王树禾老师指导与帮助下完成。

Fields 奖得主在 1998 年国际

数学家大会上的报告 (摘要)

编者注：1998 年国际数学家大会上将本届 Feilds 奖授予：Richard E. Borcherds (英国), Maxim Kontsevich (俄国人，在法国工作),W. Timothy Gowers (英国),Curtis T. McMullen (美国). Nevanlinna 奖的得主是： Petter W. Shor (美国). 会上还授予 Andrew J. Wiles 特别贡献奖. 现将四位 Fields 奖得主在大会上报告的摘要译出并刊登如下，供读者参考.

什么是梦幻猜想

Richard E. Borcherds

我将试图阐明什么是 Conway 与 Norton 的梦幻猜想，并给出它与李代数，顶点代数及自守形式之间一些关系的非技巧性的解释.

Galois 群及形变量子化

Maxim Kontsevich

我最近做好的定理给出了 Poisson 流形的形变量子化的显式表达的公式，这些公式中的数值系数是 Q 上代数簇的周期.

我将要阐明，这个事实表明了主题 Galois 群应该作用在非交换代数的参模空间上. 这意味着，在代数簇的 Hochschild 上同调及在万有包络代数的中心上存在着新的对称性.

Fourier 分析和 Szemerédi 定理

W. Timothy Gowers

著名的 Szemerédi 定理解决了 Erdös 和 Turán 提出的一个古老的问题: 对每个自然数 k 和任意 $\delta > 0$, 存在正整数 N 使得 $\{1, \cdots, N\}$ 的至少大小为 δN 的每个子集包含一个长度为 k 的算术数列. Szemerédi 证明这个结果后不久, Furstenberg 给出了另一个不同的证明方法. Furstenberg 的证明使用了遍历理论. 虽然其证明过程决非易事, 但比起 Szemerédi 的证明要简单的多. 然而, 人们仍然对该问题兴趣浓厚, 这是因为没有一个证明给出以下任何想法: 依赖于 k 和 δ 的 N 到底有多大! (虽然从 Szemerédi 的证明中基本上可以推出一个极其粗糙的范围 !)

$k = 3$ 的情形与一般情形有点不同. 对此, Roth 给出了一个漂亮的证明. 他的证明使用了指数和或者称 Fourier 分析, 而这仅仅是同一事情的不同名字. Roth 的证明给出 $\exp\exp(e/\delta)$ 一个界, 而后来 Szemerédi 和 Heath-Brown 将 $\exp\exp(e/\delta)$ 提高到 $\exp(\delta^{-e})$.

在这篇报告中, 我们将描述 Szemerédi 定理的一个新的证明. 这个证明可以看作是 Roth 方法的推广. 然而, 对证明我们首先必须介绍几个新的辅助性结果. 这些结果中最重要的就是 Freiman 描述具有小和集的整数集的一个深刻定理 (集 A 的和集为 $A + A = \{x + y | x, y \in A\}$). 我们的证明将集中在 $k = 4$ 的情形. 因为这一情形较简单, 但它给出了一般情形的思想. 由此方法得到的是具有形式为 $\exp\exp\,(\delta^{-e(k)})$ 的界.

共形动力学的刚性与非曲性

Gurtis T. McMullen

本报告介绍共形动力系统理论的进展, 特别是 Riemann 球面和 Klein 群上的有理映射. 我们将讨论双曲 3 维流形的刚性与动力学中万有尺度现象的关系, 以及在 3- 维流形理论, 如圆上的纤维、单峰映射的正规化、临界圆周映射和 Siegel 圆的作用.

胥鸣伟 (报告摘要 1,2), 李登峰 (3), 何育赞 (4) 译　　何育赞, 谌秋辉, 王跃飞 校

一道习题的加强与推广

王作勤　　吴英毅

实变函数课本 P90 有这样一道习题 (题 20): 设 $E \subset [a,b]$ 是可测集， $I_k \subset [a,b]$ $(k=1,2,\cdots,)$ 为开区间列，满足 $m(I_k \cap E) \geq \frac{2}{3}|I_k|$ $(k=1,2,\cdots,)$, 求证:

$$m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E\right) \geq \frac{1}{3} m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)$$

在解题过程中，通过研究一些实例，我们可以发现，结论中的系数 $\frac{1}{3}$ 可以改进至 $\frac{1}{2}$. 更一般地，我们有

命题　设 $E \subset [a,b]$ 为可测集， $I_k \subset [a,b](k=1,2,\cdots)$ 为开区间列，满足 $m(I_k \cap E) \geq t|I_k|(k \in \mathrm{N})$, 其中 $0 \leq t \leq 1$, 则 $m\left(\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E\right) \geq \frac{t}{2-t} \cdot m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k\right)$, 且系数 $\frac{t}{2-t}$ 是可以达到的.

证明　$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\{I_k\}$ 中的有限个开区间，不妨设为 $I_1, I_2, \cdots, I_n$, 满足:

(1) $m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} I_k\right) > m\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k\right) - \varepsilon$;

(2) 不存在 $1 \leq i \neq j \leq n$ 使 $I_i \subset I_j$;

(3) $\{I_k\}_{k-1}^{n}$ 中任意三个不交 (若有三个开区间的交集不空, 则显然中间一个必属于另外两个的并集，从而可以去掉它而不影响结果). 此外，我们假定 $I_1, \cdots, I_n$ 在 $[a,b]$ 上按左端点的次序从左到右依次排好.

记 $I_k \cap E = J_k, I_k \cap I_{k-1} = I_{k,0}, I_k \backslash (I_{k-1} \cup I_{k+1}) = I_{k,1}, I_k \cap I_{k+1} = I_{k,2} (1 \leq k \leq n)$, 约定 $I_0 = I_{n+1} = \phi$). 并记 $I_{k,j} \cap E = J_{k,j}(1 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq 2)$, 则易见:

①当 $i \geq 2$ 时， $I_k \cap I_{k+i} = \phi, J_k \cap J_{k+i} = \phi$.

② $m(J_k) = m(J_{k,0}) + m(J_{k,1}) + m(J_{k,2})$.

③ $m(J_k \cap J_{k+1}) = m(J_{k,2}) = m(J_{k+1}, 0) = \frac{1}{2}(m(J_{k,2}) + m(J_{k+1,0}))$.

④ $m(J_k) \geq t \cdot m(I_k)$.

故有

$$m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)\cap E\right) \geq m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right)\cap E\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n}(I_k\cap E)\right) = m\left(\bigcup_{k=1}^{n} J_k\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} m(J_k) - \sum_{k=1}^{n-1} m(J_k\cap J_{k+1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(m(J_{k,0})+m(J_{k,1})+m(J_{k,2})) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(m(J_{k,2})+m(J_{k+1,0}))$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m(J_{k,1}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m(J_k)$$
$$\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m(J_{k,1}) + \frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n} |I_k|.$$

而

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} I_k\right) = \sum_{k=1}^{n}|I_k| - \sum_{k=1}^{n-1}|I_k\cap I_{k+1}|$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(|I_{k,0}|+|I_{k,1}|+|I_{k,2}|) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{|I_{k,2}|+|I_{k+1,0}|}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|I_{k,1}| + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}|I_k|.$$

下证

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m(J_{k,1}) + \frac{t}{2}\sum_{k=1}^{n}|I_k| \geq \frac{t}{2-t}\cdot\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}|I_{k,1}| + \sum_{k=1}^{n}|I_k|\right).$$

即

$$\frac{t-t^2}{2-t}\sum_{k=1}^{n}|I_k| \geq \frac{t}{2-t}\sum_{k=1}^{n}|I_{k,1}| - \sum_{k=1}^{n} m(J_{k,1}) \tag{*}$$

事实上，由 $m(J_k)\geq t|I_k|$ 知 $|I_{k,1}| - m(J_{k,1}) \leq (1-t)|I_k|$, 故

$$\frac{t-t^2}{2-t}\sum_{k=1}^{n}|I_k| \geq \frac{t}{2-t}\sum_{k=1}^{n}|I_{k,1}| - \frac{t}{2-t}\sum_{k=1}^{n} m(J_{k,1}) \geq \frac{t}{2-t}\sum_{k=1}^{n}|I_{k,1}| - \sum_{k=1}^{n} m(J_{k,1})$$

即 (*) 成立.

所以

$$m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)\cap E\right) \geq \frac{t}{2-t} m(\bigcup_{k=1}^{n} I_k) \geq \frac{t}{2-t}\left(m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) - \varepsilon\right).$$

令 $\varepsilon \to 0$, 即得

$$m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E\right) \geq \frac{t}{2-t} m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right).$$

最后, 我们说明系数 $\frac{t}{2-t}$ 是可以达到的. 为此, 取 $a < \tilde{a}_1 < a_1 < b_1 < \tilde{b}_1 < b$ 使得 $\tilde{b}_1 - a_1 = b_1 - \tilde{a}_1 = \frac{1}{t}(b_1 - a_1)$, 并令 $E = (a_1, b_1), I_1 = (\tilde{a}_1, b_1), I_n = (a_1, \tilde{b}_1)(n \geq 2)$. 则 $m(I_k \cap E) = m(E) = t \cdot |I_k|, (k \in \mathrm{N})$, 且 $m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \cap E\right) = m(E) = \frac{t}{2-t}(\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1) = \frac{t}{2-t} m\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right)\right)$. 故下界 $\frac{t}{2-t}$ 可以达到. 证毕.

《蛙鸣》编委们讨论工作

一个引理的改进

魏 斌 魏达盛

在现行教材《数值线代数讲义》(孙献著，南开大学出版社) 中，有如下一条引理：

引理 2.8.1 设 $|\delta_i| \le 2^{-t}(I=1,2,\cdots,n)$ 且 $n\cdot 2^{-t}\le 0.01$ 则当有 $n\ge 2$ 时，有

$$1-n\cdot 2^{-t}<\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i)<1+1.01n\cdot 2^{-t}$$

或者写为：

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\delta_i)=1+1.01n\theta\cdot 2^{-t}, \text{其中 } |\theta|<1.$$

该引理在算术运算的舍入误差估计中起着关键作用. (证明请参阅该书 P.167)

下面对其结论中不等式右端加以改进，将 $1+1.01n^{-t}$ 改进为 $1+1.0051n\cdot 2^{-t}$. 证明如下：

因为 $|\delta_i| \le 2^{-t}(i=1,2,\cdots,n)$. 故 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_i) \le (1+2^{-t})^n \le e^{2^{-t}\cdot n}$ (因为 $1+\varepsilon\le e^{\varepsilon}, \forall\varepsilon\ge 0$)

又

$$\begin{aligned}
e^{\varepsilon} &= 1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^3}{3!}+\cdots+\frac{\varepsilon^n}{n!}+\cdots \\
&= 1+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon\left(1+\frac{2\varepsilon}{3!}+\frac{2\varepsilon^2}{4!}+\cdots\right)=1+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon\left(1+\frac{1}{3}\left(\varepsilon+\frac{3\times 2\varepsilon^2}{4!}+\cdots\right)\right)
\end{aligned}$$

又当 $\varepsilon\ge 0$ 时，由于 $\frac{2\cdot 3}{n!}\le\frac{1}{(n-2)!}(n\ge 3)$, 故对于上式有

$$\varepsilon+\frac{3\times 2\varepsilon^2}{4!}+\frac{3\times 2\varepsilon^3}{5!}+\cdots\le\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2!}+\frac{\varepsilon^3}{3!}+\cdots=e^{\varepsilon}-1$$

故

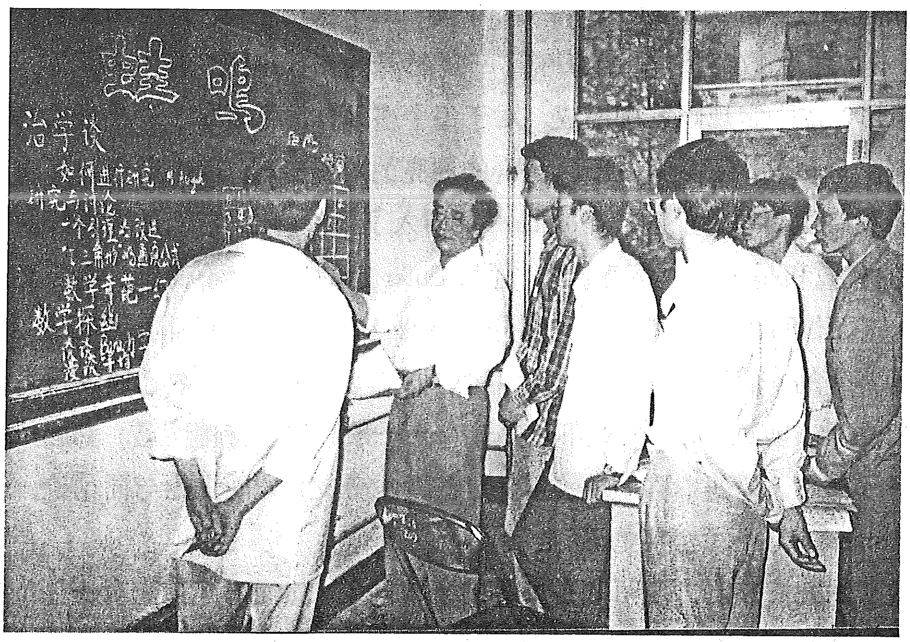
$$e^{\varepsilon}\le 1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(1+\frac{1}{3}(e^{\varepsilon}-1)\right)=1+\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{2+e^{\varepsilon}}{3}\right)$$

故当 $0\le\varepsilon\le 0.01$ 时

$$e^{\varepsilon}\le 1+\varepsilon+\varepsilon\cdot 0.01\times\frac{1}{2}\times\frac{2+e^{\varepsilon}}{3}<1+1.0051\varepsilon$$

将 $\varepsilon = n \cdot 2^{-t} \leq 0.01$ 代入即得 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\delta_i) < 1 + 1.0051n \cdot 2^{-t}$.　　证毕.

有兴趣的同学不妨试着将左边不等式或将上述的改进进一步加以改进，也许能得到更漂亮的结果.



系主任李尚志教授指导《蛙鸣》编委们

拓扑史浅谈

[博士生] 梅加强

这篇小文主要谈拓扑学的发展概况．时至今日，拓扑学已发展成为一门庞大和较成熟的学科．因此，下面的叙述不免挂一漏万，贻笑大方．不过好在我们不是史学家，对于历史，了解一点就行了．下面，我们的着重点将放在拓扑学的若干近代进展上．

“拓扑学”一词，早期亦可写成“拓扑学”，是音译自英文单词“ topolgy ”，后者是 S. Lefschetz 转借于德文单词“ topologie ”．“ topologie ”则是由 Gauss 的学生 J. B. Listing 首先使用的．拓扑学的一个古老的定理是所谓的 Euler 公式，这个公式是说，若将球面作三角剖分的话，则顶点数与面数之和减去边数恒为常数 2. 这一公式是由 Euler 证明的，但它早为 Descartes 所知．现在我们知道，这一公式只不过是极一般情形的一个特例．十九、二十世纪之交，法国伟大的数学家 Poincaré 创立了代数拓扑学．他研究了一类特殊的拓扑空间，称为多面体，是由若干“单形”按一定规则堆砌而成．对于每个多面体，可以赋予一个分次群，称为同调群， Poincaré 证明了关于同调群的漂亮的对偶定理，这个定理到目前为止似乎也还没有更简单的证明． Poincaré 又引入了 Betti 数，它们是同调群的秩．Betti 数的代数和是一个“不变量”，称为 Euler 示性数．“不变量”的含义之一是，一个多面体可以有许多的方式剖分为小的“单形”，但对不同的剖分， Euler 示性数是不变的．而紧接着的一件事实是，同维数“单形”个数之代数和也等于 Euler 数！因此，前述 Euler 公式不过是这个更一般事实的特例而已． Poincaré 还引入了另一概念，即基本群．代数拓扑学的两大分支，即同调论与同伦论，就是这样由 Poincaré 打下了坚实的基础．

从代数的角度来看，多面体是很好的研究对象．然而对几何而言，它却并不方便．最方便的研究对象是流形．流形的概念是 1854 年由 Riemann 在其就职演讲中提出的．所谓流形，是指局部上看来为欧氏空间的一类特殊拓扑空间．因为微分几何是要做微分的，因而还可要求流形上引入微分构造，称为微分流形．微分流形的近代描述是 1913 年由 H. Weyl 在他关于 Riemann 曲面的书中提出的，是

年他才二十六岁，这本书后来成为一本经典著作，尽管据称比较难读. H. Weyl 是 Hilbert 的学生，虽然两人对数学基础看法不一，但 Hilbert 仍传位于 H. Weyl；而后来 H. Weyl 被大家认为是数学史上最后一位全才

到这儿可能有人要问，我们在大学本科阶段所学的“拓扑”与上面所讲的有什么关系呢？上面所提到的多面体与流形（实际上，紧致的流形也可视为多面体）都是“特殊”的拓扑空间. 我们通常所学的，是所谓的“一般拓扑”，或称为“点集拓扑”. 它主要关心那些与连续性有关的性质，自然，它是其它拓扑分支共同的基础.

二十世纪是拓扑学发展的辉煌时期. 沿着 Poincaré 开创的道路，代数拓扑学取得了巨大的成就. 在同调论方面，除 Poincaré 创立的多面体同调外，又有奇异同调、Cěch 同调以及更抽象的层的同调理论. S. Eilenberg 与 N. Steenrod 更是提出一套公理，它是所有同调理论的框架. 同调理论本身也成了研究对象. 例如，在上同调环中可引入各种上同调运算， Steenrod 平方就是有名的一种. 同调理论的抽象化吸引了代数学家的注意，他们借此而发展出纯代数的理论，如同调代数，群的上同调理论等.

除了上面提到的满足 Eilenberg-Steenrod 公理的各种同调理论外，还有一些同调理论只满足 Eilenberg- Steenrod 公理中的某些公理，例如 K- 理论以及各种配边理论. K- 理论由 A. Grothendieck 及 M. F. Atiyah 等发展起来，并被 J. Milnor 等人代数化，成为代数 K- 理论. A. Grothendieck 与 M. F. Atiyah 于 1966 年获 Fields 奖. J. Milnor 则获 1962 年 Fields 奖. 而 D. G. Quillen 则由于在代数拓扑、代数 K 理论、同调代数方面做出突出贡献而获得 1978 年 Fields 奖. 至于配边理论，最初则是由俄国盲人数学家 Pontrjagin 提出并由法国数学家 R. Thom 发展，并且 Thom 因此获得了 1958 年的 Fields 奖. R. Thom 是充满梦幻的数学家，微分拓扑学的许多重要概念. 例如横截性的概念，就是源于他. 后来他曾提出“灾变”理论，反响很大，争论也很多.

在同伦论方面，高维的同伦群最初是 1935 年 W. Hurewicz 引入并加以讨论的. 有名的 Hurewicz 同构定理是刻划空间的同伦群与同调群之间关系的一个重要结果. 同伦论所适合的研究对象是所谓的 CW 复形，它是多面体的推广. 许多结果在 CW 复形的范畴中有最好的表述，例如 J. H. C. Whitehead 的一个定理

告诉我们，若两个 CW 复形之间的各阶同伦群之间的同构可以由一个映射几何实现的话，则这两个 CW 复形必同伦等价．这个定理的证明是用逐步扩充的办法，这个办法导致了更一般的阻碍理论的产生．阻碍理论的一个用处是定义示性类．吴文俊先生在这方面有重要贡献．他发现了关于 Stiefel-Whitney 示性类的一个公式，后来被称为“吴公式”，这个公式消除了人们关于 Stiefel-Whitney 示性类的神秘感．当然，吴先生的老师陈省身先生，更是以他发现的“陈类”而著称于世．这些成就的取得，与四十年代陈先生在那样困难的条件下带领一批学生研读最新的代数拓扑学方面的论文是分不开的．

同伦群的定义是非常简单的，然而计算却很难．在这方面， J.-P. Serre 意义下的纤维空间的概念是十分有用的．另一强大的工具则是谱序列．它由 J. Lemy 于 1946 年首先提出，后经 J.-P. Serre 与 W. S. Massey 等人研究．由于 J.-P. Serre 在代数拓扑方面的突出贡献，他被授予 1954 年的 Fields 奖．

同伦论的其它发展包括单同伦理论以及六十年代末 D. Sullivan 提出的有理同伦论等．后者是计算有理同伦群的重要方法，八十年代，吴文俊先生也曾有重要工作．

代数拓扑学有这么多的进展，那么其威力何在？我们可以看两个简单的例子．一是有名的 Jordan 分割定理，是说平面上的任一简单闭曲线必定把平面分割为两个连通区域．从直观上讲这个结论是显而易见的，然而要给出严格证明并非易事．倘若学了基本群，则可以给出这样一个证明．并且定理的结论可以推广至高维，这就是各种对偶定理．另一个例子是问，是否存在平面上单位圆盘到单位圆周的连续映射，使得限制在圆周上该映射为恒同？从直观上看应是不存在的，因为倘若不撕破圆盘的话，我们无法将圆盘内的点都挤到边上去年．同样，严格的证明来自代数拓扑．当然，代数拓扑本身亦有许多弱点，例如，建立了庞大的结构和经过多次的抽象以后，人们仍然无法解决某些具体的问题．象二维球面的同伦群，就至今未完全计算出来．

拓扑学发展的另一方向是微分拓扑学．微分拓扑学主要研究微分流形的分类问题，即区分互不微分同胚的微分流形．自然地，代数拓扑是重要的工具．

微分流形的定义是抽象的，因此首先要考虑的，是它们的“实现”问题．在这方面，首先有重要工作的，是 H. Whitney. 他曾是 Yale 大学学音乐的学生．有

一次赴欧洲度假，在住地有人讲量子力学的课，他跑去听，结果什么也听不懂，就问讲课者，称自己是 Yale 来的最厉害的学生，为什么听不懂你的课. 讲课者得知他的学习背景后去告诉他得有某些预备知识才能听懂. Whitney 后来就找了些书来看，终于迷上数学. 本世纪三、四十年代，他的工作加深了人们对于流形的理解，其有名的工作是说每个微分流形均可实现为适当高维欧氏空间的子流形. 在这些工作中，他还发现了有用的 Whitney 引理. 其后，S. Smale, M. Hirsch 等人接着做出了重要的工作. 吴文俊先生在这方面也有重要贡献.

对于流形的分类而言，人们不能指望有十分完备的结果. 注意力一般集中在紧致无边流形上. 就是这样也还不够，因为由群论中的一个不可分类的结果可以知道，人们不可能把紧致无边流形完全分类. 尽管我们知道这样的流形互不微分同胚的至多只有可数个.

1956 年，J. Milnor 发现，七维球现上存在着不同寻常的微分结构，这样的球面称为 “Milnor 怪球”. 这一发现引起很大轰动，极大地刺激了微分拓扑学的发展. Milnor 和其他人接着就研究了其它高维球面上的微分结构，得到了重要的结果. 1961 年，S. Smale 证明了推广的 Poincaré 猜测，即证明了维数大于四的流形，若同伦等价于球面，则必同胚于球面. S. Smale 的证明基于 Morse 理论的新发展，这些发展形成了所谓“环柄理论”. S. Smale 获 1966 年 Fields 奖.

对于一般的高维流形，也有许多研究. 例如 S. P. Novikov 因此而获 1970 年 Fields 奖. 而 D. Browder 和 C. T. C. Wall 等更是发展出一套理论，称为“换球术”. 总之，经过六、七十年代诸多数学家的不懈努力，人们对于高维流形的分类问题有了比较清楚的了解，许多问题被代数化. 因此，人们的视线转向低维流形的研究. 一维的紧致无边流形除圆周外别无其它，而二维的紧致无边流形也是早为人知的. 三维流形呢？问题就十分复杂了. 其中 Poincaré 猜测至今亦未解决，尽管它被转化为群论、分析等其它问题. Poincaré 最初提出的问题是，如果一个三维流形的同调群与三维球面的同调群同构，则是否该流形同胚于三维球面. 后来他自己就找到了反例. 因此，换一种问法，一个三维流形，若与三维球面同伦等价，则是否同胚于三维球面？此即为 Poincaré 猜测，自然地亦有相应的高维推广.

三维流形的研究与纽结的研究密不可分. 这是因为通过“换球术”，三维流

形与纽结或链环之间有一一对应. 纽结或链环是指圆周在三维欧氏空间中的同胚像. C. Kirby 从高维拓扑研究转向低维拓扑的研究后, 曾以关于纽结的 Kirby 演算著称. 为了区分不同的纽结, 需要有一些不变量, Alexander 多项式是较早的这种不变量. 八十年代后期, 研究算子代数的 V. Jones 偶然地得知他所研究的一个结论与纽结理论中的一个结论很相似, 由此发现了 Jones 多项式, 并且获得 1990 的 Feilds 奖. 同时获奖的还有理论物理学家 E. Witten.Witten 曾随 R. Bott 学习 Morse 理论. 有一次 Bott 给一群年青的物理学家做报告, 听众中只有 Witten 很专心, 且不时发问. 以后过了八个月, Witten 给 Bott 去了一封信, 声称终于弄懂了什么是 Morse 理论. 1982 年, Witten 在 "微分几何杂志" 上发表关于超对称与 Morse 理论的文章, 引起很大重视, 这大概是他对数学的第一个重要贡献. 其后, Witten 又以物理的方式定义三维流形及纽结的不变量. 当然, 这种方式虽然漂亮但无数学意义, 后来别人又以另外的方式加以定义和研究. 现在, 更多的不变量已被定义和研究, 这一领域是数学前沿之一.

1982 年, M. Freedman 对单连通的紧致四维流形做了完全的拓扑分类, 特别地, 证实了四维情形的 Poincaré 猜测. 他被授予 1986 年的 Fields 奖. 同时获奖还有 M. F. Atiyah 的学生 S. Donaldson. S. donaldson 的定理给出了微分构造存在的拓扑障碍. 他们的工作结合起来可以推知, 在四维欧氏空间上有存在着不同寻常的微分构造. 这也是令人吃惊的因为对其它维数, 这种情况不会出现. 在四维球面上是否存在不同寻常的微分构造, 目前还不清楚.

Donaldson 所用的方法不同以往, 他用的是分析的办法, 利用了物理里的 Yang-Mills 方程. 如果要追溯以往的话, 则实际上拓扑与分析之间是有密切联系的. 有两个例子可以说明这一点, 一是可定向 Riemann 流形的 Hodge 定理, 一是 M. F. Atiyah 与 I. M. Singer 证明的关于椭圆算子的指标定理. 两者的影响都是十分深远的.

Donaldson 的分析是十分复杂的. 1994 年秋天, E. Witten 提出另外的一套方程, 称为 Seiberg-Witten 方程, 用它来定义四维流形的微分不变量. 这一套方程分析起来比较简单, 也可以重新证明 Donaldson 得到的一些结果. 并且可以用来解决以前的若干问题, 例如 Thom 猜测. 因此, 当时的数学界又一次受到很大震动.

如上所述，拓扑学领域里的进展是使人目不暇给的，有许多的内容上面还没有涉及，有兴趣者不妨自己去钻研．最后我们要提一下近年来的研究热点，即辛拓扑．辛流形的研究当然很早就开始（一个流形上如果存在非退化的闭二次微分形式，就称为辛流形）．例如很早就知道辛流形局部上都是同构的．但是 M. Gromov 在 1985 年发表的一篇文章掀起了辛流形领域内的一场革命．其后，辛流形的不变量被定义出来；并且人们研究了它的性质和各种应用，例如用来解决 Arnold 猜测， Weinstein 猜测等等．在这方面，我国旅美学者阮勇斌和田刚有很重要的贡献．

“τ 三角形”的通项公式

王作勤　魏　斌

《蛙鸣》第 53 期上，邹晖同学给出了一个“τ 三角形”，下面，我们将求出它的一个显式通项公式. 为方便起见，将该“τ 三角形”改写成无穷方阵形式：

τ 三角形：

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 3 & 1 & & \\
1 & 7 & 6 & 1 & \\
1 & 15 & 25 & 10 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & &
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
a_{m,n} = a_n^{m+n-1} \\
\Longrightarrow
\end{array}
\quad
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots \\
1 & 7 & 25 & 65 & 140 & \cdots \\
1 & 15 & 90 & 350 & 1050 & \cdots \\
1 & 31 & 301 & 1701 & 6951 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & & &
\end{array}
$$

递推关系：　$a_k^{n+1} = a_k^n \cdot k + a_{k-1}^n$　　　　$a_{m,n} = na_{m-1,n} + a_{m,n-1}$.

下面，我们在初值条件 $a_{n1} = a_{1n} = 1(\forall n \in \mathrm{N})$ 下求偏差分方程 $a_{m,n} = na_{m-1,n} + a_{m,n-1}$ 的解.

首先，令 $n = 2$, 得

$$a_{m,2} = 2a_{m-1,2} + a_{m,1} = 2a_{m-1,2} + 1$$

即

$$a_{m,2} + 1 = 2(a_{m-1,2} + 1)$$

故

$$a_{m,2} + 1 = c \cdot 2^m.$$

令 $m = 1$, 得

$$1 + 1 = c \cdot 2$$

所以

$$c = 1$$

所以

$$a_{m,2}=2^m-1.$$

再用归纳法. 设

$$a_{m\ n}=b_{n,n}n^m+b_{n,n-1}(n-1)^m+\cdots+b_{n,2}\cdot 2^m+b_{n,1},$$

其中 $b_{i,j}$ 为系数，则

$$a_{m,n+1}=(n+1)a_{m-1,n+1}+a_{m,n}=(n+1)a_{m-1,n+1}+\sum_{k=1}^{n}b_{n,k}k^m \tag{*}$$

式 (*) 可以看成是关于 m 的非齐次（常）差分方程，齐次部分 $a_{m,n+1}=(n+1)a_{m-1,n+1}$ 的通解为 $a_{m,n+1}=c\cdot(n+1)^m$, 其中 c 为常数. 下面求 (*) 的特解. 事实上，对每个 $1\le k\le n$, 由

$$a_{m,n+1}=(n+1)a_{m-1,n+1}+k^m$$

得

$$a_{m,n+1}+\frac{k}{n+1-k}k^m=(n+1)\left(a_{m-1,n+1}+\frac{k}{n+1-k}\cdot k^{m-1}\right)$$

故 $a_{m,n+1}=-\frac{k}{n+1-k}k^m$ 为一个特解. 从而 (*) 的特解为

$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{n+1-k}\right)\cdot b_{n,k}\cdot k^m$$

所以 (*) 的通解形式为

$$a_{m,n+1}=c(n+1)^m+\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{k}{n+1-k}\right)b_{n,k}\cdot k^m\triangleq\sum_{k=1}^{n+1}b_{n+1,k}k^m$$

故由归纳法知， $a_{m,n}$ 的通项形如 $\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n,k}k^m$, 且有

$$b_{n,k}=-\frac{k}{n-k}b_{n-1,k}=\left(-\frac{k}{n-k}\right)\left(-\frac{k}{n-1-k}\right)b_{n-2,k}=\cdots=(-1)^{n-k}\frac{k^{n-k}}{(n-k)!}\cdot b_{k,k}$$

下面求 $b_{n,n}$. 通过计算可知

$$b_{1,1}=1,b_{2,2}=1,b_{3,3}=\frac{3}{2},b_{4,4}=\frac{8}{3}=\frac{16}{6},b_{5,5}=\frac{125}{24},$$

由此，可以猜想 $b_{n,n}=\frac{n^{n-2}}{(n-1)!}$. 我们用归纳法证明之. 设 $k<n$ 时均有 $b_{k,k}=\frac{k^{k-2}}{(k-1)!}$，则

$$b_{n,k}=(-1)^{n-k}\frac{k^{n-k}}{(n-k)!}b_{k,k}=-1^{n-k}\frac{k^{n-1}}{(n-k)!k!}\quad(k\le n).$$

于是，在 $a_{m,n}=\sum\limits_{k=1}^{n}b_{n,k}k^m$ 中令 $m=1$, 得

$$1=b_{n,n}\cdot n+\sum_{k=1}^{n-1}b_{n,k}\cdot k=b_{n,n}\cdot n+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{k^{n-1}}{(n-k)!k!}\cdot k=n\cdot b_{n,n}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{k^n}{(n-k)!k!},$$

只要验证 $b_{n,n}=\frac{n^{n-2}}{(n-1)!}$ 满足上式即可. 以 $b_{n,n}$ 代入，得

$$\text{右边}=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k}\frac{k^n}{(n-k)!k!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\cdot\frac{k^n}{(n-k)!k!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k\cdot k^n$$

而由 Euler 等式 $\sum\limits_{i=1}^{n}C_n^i(-1)^i i^n=(-1)^n n!$, 变形即得 $\frac{1}{n!}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k k^n=1$. 故 $b_{n,n}$ 确实为 $\frac{n^{n-2}}{(n-1)!}$.

所以

$$b_{n,k}=(-1)^{n-k}\frac{k^{n-1}}{(n-k)!k!},\quad 1\le k\le n;\qquad a_{m,n}=\sum_{k=1}^{n}b_{n,k}\cdot k^n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k^{m+n-1}}{(n-k)!k!}$$

回到原文的“τ 三角形”，则有

$$a_n^m=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k^m}{(n-k)!k!}.$$

注 1 我们是通过解差分方程求出该通项的. 事实上，还有一种极其简洁的办法，即从原文的引理 1 出发，则可立即得到该通项公式.

注 2 求通项公式的另一条思路是直接从算子 τ 的性质出发. 由于

$$\tau^k(f_1+f_2)=\tau^k(f_1)+\tau^k(f_2)\tag{1}$$

$$\tau^n(x^k)=k^n x^k$$

故在 $\tau^n(f)=\sum_{k=1}^{n}a_k^n x^k f^{(k)}$ 中分别令 $f(x)=x^k(1\le k\le n)$, 则得如下的线性方程

组

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 2\times 1 & & & 0 \\ 3 & 3\times 2 & 3\times 2\times 1 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ n & n\times(n-1) & n\times(n-1)\times(n-2) & \cdots & n! \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^n \\ a_2^n \\ a_3^n \\ \vdots \\ a_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^n \\ 2^n \\ 3^n \\ \vdots \\ n^n \end{pmatrix}$$

左端系数矩阵的逆矩阵不太好求. 现若反其道而行之, 则可由通项公式得出该矩阵的逆矩阵为 $D=(d_{i,j})_{n\times n}$, 其中

$$d_{i,j}=\frac{(-1)^{i-j}}{(i-j)!j!}.\quad (i\geq j)\quad d_{i,j}=0(i<j)$$

注 3　我们知道, 对常差分方程而言, 有一套与常微分方程极其类似的理论, 但是, 偏差分方程则很不好求解. 我们这里是采用固定一个下标, 将偏差分方程化为常差分方程, 再对该固定下标进行归纳的方法做的. 该方法可以解一些偏差分方程, 但难点在于如何通过初值条件来确定解中的未知参数. 例如, 如何求解方程 $a_{m,n}=f(n)\cdot a_{m-1,n}+a_{m,n-1}, a_{1,n}=a_{n,1}=1$? 或更一般地, 求解 $a_{m,n}=f(n)a_{m-1,n}+g(m)a_{m,n-1}$?

达西浦之行

9401 黄泰山

从3月11号到4月底，我们几个同学在侯定丕教授的带领和指导下，到位于合肥高新技术开发区的达西浦国际实业有限公司，进行了为期一个半月的社会实践活动。

达西浦国际实业有限公司生产飞歌空调，是一个设备非常现代化的企业。而且工人的素质也比较高。但整个公司的管理显得稍稍落后了些。比如公司花了很多气力统计、积累了不少数据，但要把这些数据运用到生产决策中去，还有很长的路要走。

比如我们进行材料核算时，发现多种材料"实际消耗"的比领用还多，这说明有些数据是有问题的。可以想象任何不正确的数据，即使有高明的分析手段，恐怕也难得出令人信服的结论。为搞清楚错误发生在哪个环节，我们开始追查数据的来源，发现无论是定额指标的确定，还是库存数量的记录都有可疑之处。于是我们又花了三天时间现场采样抽查，结果也验证了我们的想法。

接下来，我们开始接触生产计划与安排问题。首先是在生产线上抽样，观察一些薄弱的环节。然后与管理人员和技术人员交谈，看我们的一些想法是否合理。最后确定我们可以深入研究的问题。我们在实习过程中发现各条生产线的生产能力是不一样的。明显滞后的是钣金线，它影响了整个生产线的进程。如果把生产看成一个网络模型，那么钣金线就构成关键线路的一部分。钣金线由冲压段、点焊段、和涂装段组成。其中以冲压段生产能力最低，原因是设备有限，部分机器的生产能力不足，而且换模频繁。我所讨论的问题的就是钣金生产线的生产安排问题。

讨论的思路是：

找出关键线路（观察、询问）→ 找出瓶颈接点（计算、查证）→ 由单机型的简单任务入手，确定参数的取值范围求出单工作日最高产量 → 作合理的生产顺序安排，调节参数值，求出生产两种机型时的最高产量 → 比较前面的结果，找出规律，求多种机型的最高产量 → 根据达到最高产量的条件，作计划产量下的生产安排 → 考虑增加存储，进一步优化生产安排 → 用结论检验生产。

在讨论问题的过程中，我得到一个有趣的模型，我将它称为"木桶效应"规划定理：

已知$\{a_i\}$是一列正数，$i=1,2,\cdots n$；$\{c_i\}$是一列非负数，$i=1,2,\cdots n$，c是正常数。$t_1,t_2\cdots t_n$为n个非负的变量，设$\omega=\min\limits_i\{a_it_i\}$，则

（1）规划
$$\begin{cases}\max Q=nc\omega+\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(a_it_i-\omega)\\ s.t.\quad \sum\limits_{t=1}^{n}t_i=T_0 \qquad (T_0\text{为正常数})\\ t_i\ge 0 \qquad (i=1,2,3\cdots n)\end{cases}$$

的规划函数的最大值$Q_{\max}=\max\{\max\limits_i\{a_ic_i\},cs\}T_0$，其中$s$为$\{a_i\}$的调和平均值；

（2）若$a_ic_i<cs$对所有的i成立，则当且仅当$a_it_i=a_jt_j$对任意的i,j都成立时，

Q取到最大值。

证明：（1）可以肯定Q是（$t_1,t_2,\cdots t_n$）的连续函数，并且（$t_1,t_2,\cdots t_n$）的定义域是有限闭集，$\therefore Q$能取到最大值。我们假设Q在（$t_{10},t_{20}\cdots t_{n0}$）取最大值。 又不妨设

$a_k t_{ko}=\min\limits_i\{a_i t_{i0}\}$，然后令$t_{i0}^{'}=\dfrac{a_k t_{k0}}{a_i},t_i^{"}=t_{i0}-t_{i0}^{'}$，$T_0^{'}=\sum\limits_{i=1}^{n}t_{i0}^{'},T_0^{"}=\sum\limits_{i=1}^{n}t_{i0}^{"}$。则

$t_{io}^{'}\geq 0,t_{i0}^{"}\geq,$且$t_{i0}^{'}+t_{io}^{"}=t_{io}$，$T_o^{'}\geq 0,T_0^{"}\geq 0,$且$T_0^{'}+T_0^{"}=T_0$

$$T_0^{'}=\sum_{i=1}^{n}t_{i0}^{'}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_k t_{k0}}{a_i}=a_k t_{k0}\sum_{i=1}^{n}1/a_i\Rightarrow n a_k t_{k0}=sT_0。$$

$$则Q=nc\,a_k t_{k0}+\sum_{i=1}^{n}a_i c_i t_{i0}^{"}\leq csT_0^{'}+\max_i\{a_i c_i\}T_0^{"}$$

又$T_0^{'}+T_0^{"}=T_0$，$\therefore Q\leq\max\{\max\limits_i\{a_i c_i\},cs\}T_0$ 。

（2）若$a_i c_i<cs$对所有的i成立，则$Q\leq csT_0$,并且当且仅当$T_0^{"}=0$时等号成立，

而$T_0^{"}=0\Leftrightarrow\sum\limits_{i=1}^{n}t_{i0}^{"}\Leftrightarrow t_{i0}^{"}=0,$对所有$i$成立$\Leftrightarrow t_{i0}^{'}=t_{i0}$对所有的$i$成立$\Leftrightarrow a_i t_{i0}=a_j t_{j0}$对所有的$i,j$成立。#

经过这次实习，最主要的收获是：

（一）了解实际生产过程。包括原材料的采购、保管、半成品的交接、各生产线的协作安排等。

（二）各生产线的协作很重要。如果一件产品由若干零部件组成，那么事实上的产量将只受生产能力最小的那个零部件的控制。好象一只木桶，其容水量只与最短的那片木板有关。上述的木桶效应规划定理就是来描述这种现象的。

（三）信息沟通对企业生产至关重要。及时了解需求、材料的的供应、机器的生产状况，是下达可行高效的生产计划的前提。

（四）目前，科学研究总是走在实际应用的前面。并且许多科学的知识远没有达到应用充分的地步。

第五十六届 William Lowell Putnam 数学竞赛

Leonard F. Klosinski, Gerald L. Alexanderson, Loren C. Larson

1995 年 12 月 2 日举行了第五十六届 William Lowell Putnam 数学竞赛. 来自加拿大和美国的 405 所高等院校的 2468 名学生参加了此次竞赛. 306 个院校参加了团体赛. 此次竞赛的命题委员会由宾夕法尼亚大学的 Fan chung(主席),Carleton 学院的 Mark I. Krusemeyer 以及 Calgary 大学的 Richard K. Guy 组成, 而且他们提供了公众多解答中最杰出的解答.

问 题

问题 A-1 设 S 是一个实数集合, 它对于乘法封闭 (即, 如果 a 与 b 都属于 S, 则 ab 也属于 S). 设 T 与 U 是 S 的两个不相交子集, 且其并集为 S, T 中任意三个元素 (可以相同) 的乘积仍在 T 中, U 中任意三个元素的乘积也在 U 中. 证明 T 与 U 中至少有一个对乘法是封闭的.

问题 A-2 对什么样的正实数 a, b 广义积分

$$\int_b^\infty \left(\sqrt{\sqrt{(x+a)}-\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-b}}\right) dx$$

是收敛的?

问题 A-3 数 $d_1d_2\cdots d_9$ 是 9 位 (可以相同) 的十进制数. 数 $e_1e_2\cdots e_9$ 是这样的数: 对于每个 $i(1\leq i\leq 9)$, 在 $d_1d_2\cdots d_9$ 中用 e_i 代替 d_i 后所得的数能被 7 整除. 数 $f_1f_2\cdots f_9$ 可用同样的规则由 $e_1e_2\cdots e_9$ 得到, 即把 $e_1e_2\cdots e_9$ 中的 e_i 用 f_i 代替后所得的数能被 7 整除. 证明对每个 i, $d_i - f_i$ 可被 7 整除. [例如, 如果 $d_1d_2\cdots d_9 = 199501996$, 则 e_6 可为 2 或 9, 因为 199502996 和 199509996 是 7 的倍数.]

问题 A-4 给定 n 个珠子的项链, 每个珠子标上一个整数, 所有的这些整数之和为 $n-1$. 证明可以把项链从某处剪断得到一串珠子, 按先后顺序, 其标上的

整数依次为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 满足下列不等式:

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \le k-1, \quad k=1,2,\cdots,n.$$

问题 A-5　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是单变量 t 的可微的 (实值) 函数, 满足

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n
\end{aligned}$$

其中 $a_{ij} \ge 0$. 假如对任何 i, 当 $t \to \infty$ 时, $x_i(t) \to 0$. 问函数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必定是线性相关的吗?

问题 A-6　设 n 个人中的任一个把三个数 1,2,3 随机地写在 $3\times n$ 矩阵的某一列上, n 个人的写法是相互独立的. 设三行的和分别为 a, b, c, 并且重新排列 (如若有必要的话) 使得 $a \le b \le c$. 证明对某个 $n \ge 1995$, 出现 $b = a+1$ 和 $c = a+2$ 的情况至少为出现 $a = b = c$ 的情况的四倍.

问题 B-1　设 π 是集合 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 的一个划分, $\pi(x)$ 为包含 x 的那部分中元素的个数. 证明对任何两个划分 π 和 π', 在 $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ 中存在两个不同的数 x 和 y, 使得 $\pi(x) = \pi(y)$ 且 $\pi'(x) = \pi'(y)$.[集合的一个划分是指把 S 分成一些不相交子集的并集.]

问题 B-2　一个半轴长分别为 a 和 b 的椭圆在曲线 $y = c\sin(x/a)$ 上滚动而不滑动. 问 a, b, c 之间的关系怎样时, 椭圆在曲线上滚动了曲线的一个周期的同时, 它本身正好转了一圈?

问题 B-3　每个 n^2 位的十进制数, 对应一个矩阵的行列式. 例如 $n=2$ 时, 整数 8617 对应于 $\det\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 50$. 试找出一个自变量为 n 的函数, 它对应于所有 n^2 位十进制数的行列式的和. (首位数字假定非零, 例如对 $n=2$, 共有 9000 个行列式.)

问题 B-4　计算

$$\sqrt[8]{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cfrac{1}{2207 - \cdots}}}$$

并把答案表示成 $(a+b\sqrt{c})/d$ 的形式，其中 a,b,c,d 均为整数.

问题 B-5　有 4 堆豆子，每堆的豆子颗数分别为 3, 4, 5 和 6 粒. 两个人玩游戏，每次拿取豆子的方式有两种：

a. 从一堆里拿取一粒豆子，但这堆里必须还剩至少两粒.

b. 如果某堆只含 2 粒或 3 粒，则可以全部拿取.

两个人依次拿取豆子，拿取最后一堆豆子的人为赢者. 为了成为赢者，你愿意是先开始拿呢？还是后开始拿？并给出你获胜的策略.

问题 B-6　对正整数 α, 定义

$$S(\alpha)=\{\lfloor n\alpha\rfloor : n=1,2,3,\cdots\}.$$

试证明 $\{1,2,3,\cdots\}$ 不能够表为三个集合 $S(\alpha),S(\beta)$ 和 $S(\gamma)$ 的不相交交集. ($\lfloor x\rfloor$ 代表不大于 x 的最大整数.)

注　解答见下期《蛙鸣》.