1. 设 ω 是 $\mathbb{R}^n$ 上的非负、光滑紧支函数，而且 $\int_{\mathbb{R}^n}\omega(x)dx = 1$。用 L 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的一个 k 维仿射子空间（未必过原点）。所有这样的 L 全体记作 $X(k;n)$，或者 X。用 $d(x,L)$ 表示点 x 到 L 的距离。定义 $F : X \to \mathbb{R}$,
$$F(L) = \int_{\mathbb{R}^n} d^2(x,L)\omega(x)dx.$$
(2.1) 设 $X_1 = \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \times \cdots \times S^{n-1}$，其中 S^{n-1} 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的单位求，共计 k 个。令
$$X_2 = \{(p, e_1, \cdots, e_k) \in X_1 | \, e_1, \cdots, e_k \text{单位正交}\}.$$
定义：$\Psi : X_2 \to X$ 如下
$$\Psi((p, e_1, \cdots, e_k)) = \{p + t_1 e_1 + \cdots + t_k e_k | \, t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{R}\}.$$
求证：$F \circ \Psi$ 是连续函数。

(2.2) 令
$$X_3 = \{(p, e_1, \cdots, e_k) \in X_2 | \, p \perp e_1, \cdots, p \perp e_k\}.$$
证明:
$$\lim_{|p|\to\infty} F \circ \Psi|_{X_3} = \infty.$$
进而存在 $L \in X$ 使得 $F(L) = \inf_{\tilde{L}\in X} F(\tilde{L})$.

(2.3) 令
$$x^i_{cm} = \int_{\mathbb{R}^n} x^i \omega(x)dx, \qquad i = 1, \cdots, n.$$
称 $x_{cm} = (x^1_{cm}, \cdots, x^n_{cm})$ 为 ω 的重心。求证：(2.2) 中的 L 经过点 x_{cm}.

(2.4) 定义
$$\lambda_1 = \max_{v\in S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_{cm}, v\rangle|^2 \, \omega(x)dx.$$
并且设 v_1 是上述定义中取到最值的一个 v。归纳的定义 λ_l 和 v_l 如下：令
$$\lambda_l = \max_{v\in S^{n-1}, v\perp v_1,\ldots,v_{l-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_{cm}, v\rangle|^2 \, \omega(x)dx$$
且 v_l 是上式中取到最值的点。

求证：(2.2) 中的 L 具有形式
$$L = \{x_{cm} + t_1 v_1 + \cdots t_k v_k | \, t_i \in \mathbb{R}\}.$$

(2.5) 验证 v_k 和 λ_k 满足方程：对于每个分量 $i = 1, \cdots, n$
$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k\rangle (x^i - x^i_{cm})\omega(x)dx = \lambda_k v^i_k.$$

2. 设 f 是平面上的光滑函数，f 在平面上只有唯一的一个临界点，而且是个严格极小值点，请问这个点是不是函数的最小值点。

3. 设 $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_{100}]$ 是复数域上的一个多项式环。S 中形如 $f = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_{100}^{a_{100}}$ 的元素被称作单项式，其中所有的 $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，而该单项式的次数为 $degf = a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}$。设 I 是 S 中 1958 个次数为 20 的不同的单项式 $f_1, \ldots, f_{1958}$ 生成的理想，求 I 中次数为 21 的所有单项式张成的线性空间 I_{21} 的维数的最小值。