蛙　　　鸣

第25期

中国科学技术大学数学系学生会

目 录

第 25期　　1986·11

组合数恒等式及其应用

821 刘弘泉 欧 军

设 $n \geq W \geq 1$，命 $M(n, W) = \sum_{k=0}^{W} (-1)^k C_{n+k-1}^{k} C_n^{W-k}$

命题1。 $M(n, W) = 0$

证明：由于 $C_{n+k-1}^{k} C_n^{W-k} = \frac{(n+k-1)!}{K!(n-1)!} \cdot \frac{n!}{(n-w+k)!(w-k)!}$

$$= \frac{n}{w} C_w^k C_{n+k-1}^{w-1}$$

只要证明：

$$\sum_{k=0}^{W} (-1)^k C_W^k C_{n+k-1}^{W-1} = 0$$

令 $g(x) = \sum_{k=0}^{W} (-1)^k C_W^k x^{n+k-1}$

则 $(g(x))^{(w-1)} = (w-1)! \sum_{k=0}^{W} (-1)^k C_W^k C_{n+k-1}^{n+k-w} x^{n+k-w}$

故只须去证 $g(x)^{(w-1)}|_{x=1} = 0$

然而 $g(x) = x^{n-1} \sum_{k=0}^{W} (-1)^k C_W^k x^k = x^{n-1}(1-x)^W$

故有 $g(x)^{(w-1)}|_{x=1} = 0$，证毕。

作为此命题的一个应用，我们有

定理1。约定 $u(x)$，$V(x) \in R[x]$，则在

$$x^m u(x) + (1-x)^n V(x) = 1 \qquad (1 \leq m \leq n)$$

由，可以取 $V(x)=\sum_{k=0}^{m+1} C_{n+k-1}^{k} X^{k}$

证明：由于 $(1-x)^{n}\left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{n+k-1}^{k} X^{k}\right)=$

$$=\left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{n+k-1}^{k} X^{k}\right)\left(\sum_{L=0}^{n}(-1)^{L} C_{n}^{L} X^{L}\right)$$

$$=1+\sum_{w=1}^{m-1}\left(\sum_{k=0}^{w} C_{n+k-1}^{k}(-1)^{w-k} C_{n}^{w-k}\right) X^{w}+X^{m} I(x)$$

其中 $I(x)\varepsilon R(x)$。故由命题 1 可得

$$(1-x)^{n}\left(\sum_{k=0}^{m+1} C_{n+k-1}^{k} X^{k}\right)=1+X^{m} I(x)$$

最后，本文给出一道研究生考题的简单解法，其中没用有关 Bernstein 多项式的知识。

原题：设 $p>0$，$q>0$，$p+q=1$，试分别在 (i) $p=q$ (ii) $p>q$ (iii) $p<q$ 时求

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} C_{n}^{k} p^{k} q^{n-k}$$

解：易知 $p=q=\frac{1}{2}$ 时极限为 $\frac{1}{2}$，设 $p\neq q$

设 $f_{n}(p,q)=\sum_{k=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} C_{n}^{k} p^{k} q^{n-k}$

则 $f_{n}(p,q)=\sum_{k=n-\left(\frac{n}{2}\right)}^{n} C_{n}^{k} p^{n-k} q^{k}$

$$f_{n}(p,q)+f_{n}(q,p)=\sum_{k=0}^{\left(\frac{n}{2}\right)} C_{n}^{k} p^{n-k} q^{k}+\sum_{k=n-\left(\frac{n}{2}\right)}^{n} C_{n}^{k} p^{n-k} q^{k}$$

$$=1+\triangle_{n}(p,q)$$

其中 $\Delta_n(q,q)=\begin{cases}0 & 2\nmid n\\ C_n^{[\frac{n}{2}]}(pq)^{\frac{n}{2}} & 2\mid n\end{cases}$

故由Stirling公式易得$\Delta n(p,q)=O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot(4pq)^{\frac{n}{2}}\right)$

因在 $p\neq q$ 时，$pq<\frac{1}{4}$，所以$\Delta_n(p,q)\to 0\ (n\to\infty)$，而且，

设 $p>q$，则由

$$f_n(p,q)=\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^k p^k q^{n-k}<(p/q)^{\frac{n}{2}}\cdot q^n\cdot\sum_{k=0}^{n} C_n^k=(pq\cdot 4)^{\frac{n}{2}}$$

可知 $f_n(p,q)\to 0$ 故 $f_n(q,p)\to 1$

所以 $p>q$ 时极限值为 0，$p<q$ 时极限值为 1。

Pedoe 不等式的推广

831 马授

本文约定：$\triangle$、a、b、c 与 $\triangle'$、a'、b'、c'、分别代表 $\triangle ABC$ 与 $A'B'C'$ 的面积与三边。

著名的 Pedoe 不等式是：

$$a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)\geq 16\triangle\triangle'$$

式中等号当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 相似时成立

这一不等式已有数十年的历史，特别是近年来国内对该问题讨论很多，有关文章多达十余篇，特别是高灵在1981年得到了如下的有趣结论：〔2〕

$$a'(b+c-a)+b'(c+a-b)+c'(a+b-c)\geq\sqrt{48\triangle\triangle'} \quad (2)$$

式中等号当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 均为正三角形时成立。

彭家贵、常庚哲两位教授在〔1〕中建立了如下不等式。

记 $\triangle_0$ 为 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt{c}$ 为边长所组成的三角形（这是可以作到的）的面积，则有：

$$\triangle_0^2\geq\sqrt{3}/4\cdot\triangle \quad (3)$$

他们还指出，由此可得(2)的一个新证法。

本文将从推广该式入手，建立如下不等式：

定理：$a'^{2\theta}(b^{2\theta}+c^{2\theta}-a^{2\theta})+b'^{2\theta}(c^{2\theta}+a^{2\theta}-b^{2\theta})$

$$+c'^{2\theta}(a^{2\theta}+b^{2\theta}-c^{2\theta})\geq 3\left(\frac{16}{3}\right)^{\theta}\triangle'^{\theta}\triangle^{\theta} \quad (4)$$

其中 $\theta\in(0,1)$，当 $\theta=0$ 时，(4)为恒等式；当 $\theta=1$ 时，等

号成立当且仅当$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$。当$0<\theta<1$时，等号当且仅当$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$全等边时成立。

显然，(4)是(1)与(2)的推广。

关于Pedoe不等式的证法，已有许多（例如可参见〔1〕）本文将其看成已证的结论。因此，本文中的所有θ都假定是属于（0，1）的。

下述引理是(3)的推广：

引理：以a^{θ}，b^{θ}，c^{θ}为边长可构成某三角形，记此三角形面积为$\triangle_{\theta}$，则

$$\triangle_{\theta}\geq(\sqrt{3}/4)^{1-\theta}\ \triangle^{\theta} \tag{5}$$

式中等号当且仅当$a=b=c$时成立。

证明：利用求导法易知$a^{\theta}+b^{\theta}>(a+b)^{\theta}$，因此引理的前半部分成立。下面集中力量证明(5)式。

记$A=(4\triangle_{\theta})^{2}$，$B=(4\triangle)^{2\theta}$由海伦公式(5)

即：$$\frac{A}{B}=\frac{2a^{2\theta}b^{2\theta}+2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta}}{(2a^{2}b^{2}+2b^{2}c^{2}+2c^{2}a^{2}-a^{4}-b^{4}-c^{4})^{\theta}}$$

$$\geq 3^{1-\theta}$$

首先证明A/B有最小值。为此，不妨设$a\geq b\geq c=1$问题化为证明二元函数A/B在区域

D：$1\leq b\leq a$，$0\leq a-b<1$

中有最小值。

令$X=\frac{1}{2}(-a+b+c)$，

$Y=\frac{1}{2}(a-b+c)$，$Z=\frac{1}{2}(a+b-c)$

$$A/B=\frac{2(1+\frac{}{})^{2\theta}+2(1+\frac{}{})^{2\theta}-(\frac{}{})^{2\theta}-[(x+z)^{\theta}}{|\sigma^{\theta}[xy(1+\frac{1}{z})]^{\theta}}$$

$$\geq\frac{4-(\frac{1}{z})^{2\theta}-[2(1+\frac{1}{z})^{\theta}]^{2}[(1+z)^{\theta}-z^{\theta}]^{2}}{16^{\theta}(\frac{1}{4})^{\theta}\ (1+\frac{1}{z})^{\theta}}$$

注意 $\lim\limits_{z\to\infty}[(1+z)^{\theta}-z^{\theta}]=0$ 故上式在端当 $z\to\infty$ 时趋于

$4^{1-\theta}>3^{1-\theta}$，从而 $\exists N$（与 x，y 无关）当 $z>N$ 时 $A/B>3^{1-\theta}$，另一方面 $a=b=c$ 时 $A/B=3^{1-\theta}$，为证明最小值存在，只须证 A/B 在 $E=\{(a,b)\mid a+b\leq 2N+1\}\cap D$ 中有最小值，易知：

$$A/B=\frac{(a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta})}{(a+b+c)^{\theta}}\cdot\frac{(-a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta})}{(-a+b+c)^{\theta}}\cdot\frac{(a^{\theta}-b^{\theta}+c^{\theta})}{(a-b+c)^{\theta}}\cdot\frac{(a^{\theta}+b^{\theta}-c^{\theta})}{(a+b-c)^{\theta}}$$

考虑E的如下边界 $a=b+1$，$1\leq b\leq N$，对该边界上的任一点 $(b_0+1，b_0)$ 当 $(a，b)\to(b_0+1，b_0)$ 时，上式中除第二项外都趋于非0常数，而第二项分子趋于非0常数，分母趋于0，故 A/B 趋于 $+\infty$，注意E的上述边界是一闭区间，由有限覆盖定理可知存在 δ，使得当 $(a，b)\in F=\{(a,b)\mid(a,b)\in E，a+b-1<\delta\}$ 时就有 $A/B>3^{1-\theta}$，而 $E-F$ 是有界闭集（注意，E是有界集）从而 A/B 在 $E-F$ 中有最小值，综上所述，该最小值就是 A/B 在其整个定义域 $\{(a，b，c)\mid a，b，c$ 构成某三角形的三边$\}$ 中的最小值。

设A／B在（a，b，c）处取最小值，由于A／B的定义域是开集，故A／B在该点偏导数为0，从而

$$\frac{A_a}{B_a}=\frac{A_b}{B_b}=\frac{A_c}{B_c}\left(=\frac{A}{B}\right)$$

即
$$\frac{a^{2\theta}(b^{2\theta}+c^{2\theta}-a^{2\theta})}{a^2(b^2+c^2-a^2)}=\frac{b^{2\theta}(a^{2\theta}+c^{2\theta}-b^{2\theta})}{b^2(a^2+c^2-b^2)}$$

$$=\frac{c^{2\theta}(a^{2\theta}+b^{2\theta}-c^{2\theta})}{c^2(a^2+b^2-c^2)}=K\left(=\frac{\triangle_\theta^2}{\triangle^2}\right)\qquad (A)$$

对前面一式用等比定理并和后面一式比较得

$$\frac{(a^{2\theta}-b^{2\theta})(a^{2\theta}+b^{2\theta}-c^{2\theta})}{(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}=\frac{c^{2\theta}(a^{2\theta}+b^{2\theta}-c^{2\theta})}{c^2(a^2+b^2-c^2)}\qquad (B)$$

显然$K=\triangle^2_\theta/\triangle^2$是有限的非零实数，故由（A）式知（B）式二端的$a^{2\theta}+b^{2\theta}-c^{2\theta}/\ a^2+b^2-c^2$可约去得，

$$\frac{a^{2\theta}-b^{2\theta}}{a^2-b^2}=\frac{c^{2\theta}}{c^2}=\frac{a^{2\theta}-b^{2\theta}-c^{2\theta}}{a^2-b^2-c^2}$$

最后一式由　比定理推得；

同理　$$\frac{a^{2\theta}-c^{2\theta}}{a^2-b^2}=\frac{b^{2\theta}}{b^2}=\frac{a^{2\theta}-b^{2\theta}-c^{2\theta}}{a^2-b^2-c^2}$$

不妨设$a\leq b\leq c$，这时$a^{2\theta}-b^{2\theta}-c^{2\theta}\ /a^2-b^2-c^2$不是零比零型，比较上面二式得$b=c$，进一步可得a，b，c相同，而A／B的最小值是存在的，故当且仅当$a=b=c$时，A／B取最小值$3^{1-\theta}$，引理获证。

下面给出定理的证明：

以Δ'_θ、Δ_θ分别记a'^θ、b'^θ、c'^θ与a^θ、b^θ、c^θ为边长的三角形之面积，对这两个三角形用Pedoe不等式得：

(4)式左边$\geq 16\Delta'_\theta\Delta_\theta$

由引理得$\Delta'_\theta\Delta_\theta \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{2-2\theta}\Delta'^\theta\Delta^\theta$

立知(4)成立，其中等号成立条件是引理中相应结论的推论。

顺便指出，用(5)代替海伦公式，可以按〔1〕证明Pedoe不等式的方法直接证明(4)，而不必依赖(1)式成立的假定。

在(4)中取$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$全等，即得(5)，故定理与引理等价。若$\theta\in(0,1)$，a^θ，b^θ，c^θ不一定能组成三角形，这时(5)式分子可为负数，故(5)不真，因此定理中关于θ的假设也是不可去掉的。

最后，我们指出引理是一个强有力的命题，利用它，许多涉及三角形面积的不等式（如〔1〕中提到的Pedoe不等式的加强及Oppenheim不等式）都可类似地推广，本文不再列举。

参考文献：

〔1〕彭家贵、常庚哲《再谈匹多不等式》初等数学论丛，第6辑。

〔2〕高灵《Mathematics Magazine》55，（1982）第五期 P299，问题1156。

简　讯

清池学社在老师们的帮助下于上学期期末成立了。它是我们八五一班的第一个学术性兴趣小组。

清池学社旨在共同提高寻求学习方　法。提高社员们的学习能力同时也希望和全班同学一起探讨。研究。为开创生气勃勃的新学风而努力。

清池学社在上学期请了不少老师作学术报告。介绍数学学科上的某些分支。同时我们自已也搞了几次读书研讨会。在这学期里我们将以新的方式。新的内容去创造新的成绩。

清池学社

1986。9。9。

谈Neuberg-Pedoe 不等式的多边形推广

831 陈计

1891年，J. Neuberg 提出了一个涉及到两个三角形的边长和面积的不等式：

设$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$的边长分别是a_1，a_2，a_3和b_1，b_2，b_3，它们的面积记为Δ_1和Δ_2，则

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)$$
$$\geq 16\Delta_1\Delta_2 \qquad (1)$$

式中等号当且只当$\triangle A_1A_2A_3$　$\triangle B_1B_2B_3$时成立。

美国Purdue 大学教授D. Pedoe 在1943年证明了这个不等式〔1〕。1963年，他又在《美国数学月刊》的问题栏中提出，并给出了另一种证法〔2〕；当时美国Duke 大学教授L. Carlitz 等人也给出了自己的证明，从此这个不等式被人们注意并称为Neuberg- Pedoe 不等式。1979年 我校的常庚哲教授首次把这一不等式介绍给国内读者，并引起了广泛的兴趣。近年来，人们围绕着这个不等式的推广和加强进行了细致的讨论〔3-11〕但如何将Pedoe 不等式推广到多边形的情形，至今仍是一个没有解决好了的问题。

在本文中，我们主要讨论Neuberg-Pedoe 不等式的四边形推广，末了也指出一个涉及两个n边形的边长和面积的不等式。

1984年，重庆市第二十三中学教师高灵在〔10〕中提出并证明了如下

定理1　设$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$是两个圆内接四边形，它们的边长分别是a_1，a_2，a_3，a_4和b_1，b_2

b_3，b_4，它们的面积是 F_1 和 F_2，则

$$4(a_1a_2+a_3a_4)(b_1b_2+b_3b_4)$$
$$-(a_1^2+a_2^2-a_3^2-a_4^2)(b_1^2+b_2^2-b_3^2-b_4^2)$$
$$\geq 16F_1F_2 \qquad (2)$$

等号当且只当对应角 A_2 和 B_2 相等时成立。

这个不等式外形不够优美，它的左边不象“Pedoe 和”那样对称。那末是否有不等式：

猜想 1 $a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)$
$$+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)$$
$$\geq 8F_1F_2 \qquad (3)$$

考虑边长为 $a_1=a_2=a_3=b_1=b_2=b_3=1$，$a_4=b_4=2$ 的梯形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$，容易算得

(3)式左边 $=11$，而右边 $=\frac{27}{2}$

这说明猜想 1 不对。不过，我们可以证明下面的

定理 2 设 a_i，b_i（$1\leq i\leq 4$）分别表示四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 的四边，F_1 和 F_2 分别表示它们的面积，则有不等式。

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)$$
$$+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+bb_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)$$
$$+4\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}a_1a_2a_3a_4\right.$$
$$\left.+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}b_1b_2b_3b_4\right)$$

$$\geq 8\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}F_1^2+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}F_2^2\right) \quad (4)$$

式中等号当且只当A_1 A_2 A_3 A_4 和B_1 B_2 B_3 B_4 为相似的圆内接四边形时成立。

证明　由Brahmagupta 定理，对给定边长的四边形，以内接于圆者面积为最大，若以a，b，c，d表示四边长，S表示它的半周长，则最大面积可表为

$$F=\left[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)\right]^{1/2} \quad (5)$$

从而可得

$$16F^2=8abcd+(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(a^4+b^4+c^4+d^4) \quad (6)$$

再由cauchy-Schwartz 不等式和算术平均一几何平均不等式可得：

$$2\Sigma a_i^2b_i^2\leq 2\sqrt{\Sigma a_i^4\Sigma b_i^4}$$

$$=\sqrt{\left[(\Sigma a_i^2)^2+8\pi a_i-16F_1^2\right]\left[(\Sigma b_i^2)^2+8\pi b_i-16F_2^2\right]}$$

$$=\Sigma a_i^2\Sigma b_i^2\sqrt{1+\frac{8\pi a_i-16F_1^2}{(\Sigma a_i^2)^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{8\pi b_i-16F_2^2}{(\Sigma b_i^2)^2}}$$

$$\leq\Sigma a_i^2\Sigma b_i^2\left[1+\frac{4\pi a_i-8F_1^2}{(\Sigma a_i^2)^2}+\frac{4\pi b_i-8F_2^2}{(\Sigma b_i^2)^2}\right]$$

$$=\Sigma a_i^2\Sigma b_i^2+4\left(\frac{\Sigma b_i^2}{\Sigma a_i^2}\pi a_i+\frac{\Sigma a_i^2}{\Sigma b_i^2}\pi b_i\right)-$$

$$-8\left(\frac{\Sigma b_i^2}{\Sigma a_i^2}F_1^2+\frac{\Sigma a_i^2}{\Sigma b_i^2}F_2^2\right)$$

由此可知

$$\Sigma a_i^2 \Sigma b_i^2 - 2\Sigma a_i^2 + b_i^2 + 4\left(\frac{\Sigma b_i^2}{\Sigma a_i^2}\pi a_i + \frac{\Sigma a_i^2}{\Sigma b_i^2}\pi b_i\right)$$

$$\geq 8\left(\frac{\Sigma b_i^2}{\Sigma a_i^2}F_1^2 + \frac{\Sigma a_i^2}{\Sigma b_i^2}F_2^2\right) \qquad (7)$$

这可化为不等式(4)，等号成立的条件是 $a_1^2 : a_2^2 : a_3^2 : a_4^2 = b_1^2 : b_2^2 : b_3^2 : b_4^2$，并且两个四边形均有外接圆；这表明 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形。

利用算术平均—几何平均不等式，放松不等式(4)，以消去分母：

推论 1　$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)$$

$$+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)$$

$$+\sqrt{a_1a_2a_3a_4}\,(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+$$

$$+\sqrt{b_1b_2b_3b_4}\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2+b_4^2)$$

$$\geq 16F_1F_2 \qquad (8)$$

式中等号当且只当 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 均为正方形时成立。

在定理1中，当 $A_4=A_3$，$B_4=B_3$ 时，四边形蜕化为三角形，(4)式化为

推论 2　$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)$$

$$+a_3^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geq 8\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\triangle_1^2+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\triangle_2^2\right)$$

$$(9)$$

式中等号当且只当 $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$ 时成立

这是我校彭家贵和常庚哲两位教授在〔8〕中证明的一个不等式，上述对定理2的证明，就是沿用了他们导出不等式(9)时的方法。

显然，定理2及其推论是包括Neuberg-Pedoe 不等式(1)为其特例的。下面，我们再证明一个涉及两个四边形的不等式，它左边的形式更象"Pedoe 和"：

定理3　符号同定理2。

$$a_1^2\left(-\frac{3}{5}b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2\right)+a_2^2\left(b_1^2-\frac{3}{5}b_2^2+b_3^2+b_4^2\right)$$

$$+a_3^2\left(b_1^2+b_2^2-\frac{3}{5}b_3^2+b_4^2\right)+a_4^2\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2-\frac{3}{5}b_4^2\right)$$

$$\geq\frac{48}{5}F_1F_2 \tag{10}$$

式中等号当且只当两个四边形均为正方形时成立。

证明　注意到有代数不等式

$$12abcd\leq(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-(a^4+b^4+c^4+d^4) \tag{11}$$

将它与(6)式联立，消去abcd 项得

$$8(a^4+b^4+c^4)+48F^2\leq5(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \tag{12}$$

再用定理2的证法

$$8\Sigma a_i^2b_i^2+48F_1F_2$$

$$\leq\sqrt{(8\Sigma a_i^4+48F_1^2)(8\Sigma b_i^4+48F_2^2)}$$

$$\leq\sqrt{5(\Sigma a_i^2)^2\cdot5(\Sigma b_i^2)^2}=5\Sigma a_i^2\Sigma b_i^2$$

由此可知

$$\Sigma a_i^2\Sigma b_i^2-\frac{8}{5}\Sigma a_i^2b_i^2\geq\frac{48}{5}F_1F_2 \tag{13}$$

这可化为不等式(10)，由（11）式取等号的条件：a＝b＝c＝d，可知可知(10)式等号成立当且只当两个四边形同时为正方形。

1982年，高灵在美国《数学杂志》的问题栏中提出并证明了如下的不等式[9]：

$$a_1(-b_1+b_2+b_3)+a_2(b_1-b_2+b_3)(b_1+b_2-b_3)$$

$$\geq\sqrt{48\Delta_1\Delta_2} \qquad (14)$$

式中等号当且只当$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$均为正三角形时成立。

联系(1)、(14)和(12)式，自然会问

猜想2　符号同定理2。

$$a_1\left(-\frac{3}{5}b_1+b_2+b_3+b_4\right)+a_2\left(b_1-\frac{3}{5}b_2+b_3+b_4\right)$$

$$+a_3\left(b_1+b_2-\frac{3}{5}b_3+b_4\right)+a_4\left(b_1+b_2+b_3-\frac{3}{5}b_4\right)$$

$$\geq\frac{48}{5}\sqrt{F_1F_2} \qquad (15)$$

文〔8〕中证明一个有用的不等式：

$$[\Delta(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})]^2\geq\frac{\sqrt{3}}{4}\Delta(a,b,c) \qquad (16)$$

其中$\Delta(a,b,c)$表示由a，b，c组成的三角形的面积，但类似的结论对四边形是不成立的。如何解决猜想2看来还得另寻途径。不过，我们知道下列命题是真的：

定理4　符号同定理2。

$$a_1(b_2+b_3+b_4)+a_2(b_1+b_3+b_4)+a_3(b_1+b_2+b_4)$$

$$+a_4(b_1+b_2+b_3)\geq12\sqrt{F_1F_2} \qquad (17)$$

式中等号当且只当两个四边形均为正方形时成立。

取四边形$A_1A_2A_3A_4\cong B_1B_2B_3B_4$，这时上式变为

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd\geq6F \qquad (18)$$

这是合肥工业大学教师苏化明1986年在〔12〕上提出并证明的。

对于多边形，我校近代物理系84级学生王坚曾证明了

定理5　若两个n边形边长分别是a_1，a_2，…a_n和b_1，b_2，…，b_n，面积是S_1和S_2，且满足

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \text{和} b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \tag{19}$$

则

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+\cdots+b_n^2)+\cdots\cdots$$

$$+a_n^2(a_1^2+a_2^2+\cdots-a_n^2) \geq \frac{16(n-2)}{n}(tg\frac{\pi}{n})\cdot S_1 S_2 \tag{20}$$

如果去掉条件（19），由猜想1的不对，知（20）也不成立。不过，我们利用等周定理和代数不等式，可以证明

定理6　设a_1，a_2…，a_n和b_1，b_2，…，b_n分别表示n边形$A_1A_2\cdots A_n$和$B_1B_2\cdots B_n$的n条边，S_1和S_2分别表示它们的面积，则有不等式

$$a_1^2\left(\frac{4}{n+1}b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)+a_2^2\left(b_1^2+\frac{4}{n+1}b_2^2+\cdots+b_n^2\right)$$

$$+\cdots\cdots+a_n^2\left(b_1^2+b_2^2+\cdots+\frac{4}{n+1}b_n^2\right) \geq \frac{16(n^2+3)}{n(n+1)}tg^2\frac{\pi}{n}S_1S_2$$

式中等号当且只当$A_1A_2\cdots A_n$和$B_1B_2\cdots B_n$均为正n边形时成立。

由n＝3和4的情形可知，这是一个较强的不等式，因此我们就不想写出证明了。

问题：Neuberg-Pedoe 不等式多边形推广的合理形式是什么？

参考资料

〔1〕 Pedoe.D..An inequality for two triangles .Proc. Cambridge Philos Soc. Vol. 38(1943).Part 4.P397-398

〔2〕 Pedoe.D..A two-triangle inequality Amer Math Monthly .70(1963).P.1012

〔3〕 Carlitz.L..Inequalities for area of two triangles.Amer Math. Monthly. 80(1973). 910-911

〔4〕 杨路．张景中．关于三角形的可匹配性．数学通报．1983年第10期。

〔5〕 杨路．张景中．Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及应用．数学学报．1981年第3期．401-408

〔6〕 马援．Pedoe 不等式的推广（待发表）

〔7〕 程龙．关于匹多不等式．初等数学论丛．第2辑．上海教育出版社．1981年版．183-203

〔8〕 彭家贵、常庚哲．再谈匹多不等式．初等数学论丛．第6辑．上海教育出版社．1983年版．17-25

〔9〕 高灵．Mathematics Magazine.55(1982). 5.P299.

〔10〕 高灵．Pedoe 不等式的四边形推广．福建中学数学．1984年第5期

〔11〕 杨学枝．匹多不等式的四边形推广的代数证法．厦门数学通讯．1986年第1期

〔12〕 苏化明．关于四边形的一个不等式．湖南数学通讯．1986年第4期．25-26。

对称函数的一类不等式链

831 陈计

本文中引入如下记号：

$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

$1+x=(1+x_1, 1+x_2, \cdots, 1+x_n)$

$1-x=(1-x_1, 1-x_2, \cdots, 1-x_n)$

$$E_r(x)=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \pi_{j=1}^{r} x_{i_j},$$

$$P_r(x)=(E_r(x)/C_n^r)^{\frac{1}{r}}$$

$$S_r(x)=\pi_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n} \Sigma_{j=1}^{r} x_{i_j},$$

$$Q_r(x)=\frac{1}{r}\{S_r(x)\}^{1/C_n^r}$$

$$R_r(x)=\frac{1}{C_n^r}\sum_{1\le i_1<\cdots<i_r\le n}(\pi_{j=1}^{r} x_{i_j})^{\frac{1}{r}}$$

其中，$P_r(x)$ 是正数组 x 的 r 次对称平均数；$Q_r(x)$（或 $R_r(x)$））是在 n 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中，任取 r 个，作出它们的算术（or 几何）平均数，再对所得的 C_n^r 个算术（or几何）平均数作几何（or 算术）平均所得到的一种对称平均数。

BecKenbach 和 Bellman 在［1］中建议使用反向归纳法证明下列的 K_y Fan 不等式

定理1　若 $0\le x_i\le\frac{1}{2}$（$1\le i\le n$），则

$$\pi_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1-x_i}) \le \frac{\Sigma_{i=1}^{n} x_i}{\Sigma_{i=1}^{n}(1-x_i)} \tag{1}$$

朱尧辰在〔2〕中用反向归纳法证明了

定理2　若 $x_i \geq 0$（$1 \leq i \leq n$），则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{1+X_i}\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n}(1+X_i)} \tag{2}$$

王挽澜等在〔3〕和〔4〕中将(1)作如下加细

定理3　若 $0 \leq X \leq \frac{1}{2}$，则

$$\text{(i)}\quad \frac{P_n(X)}{P_n(1-X)} \leq \frac{P_{n-1}(X)}{P_{n-1}(1-X)} \leq \cdots \leq \frac{P_r(X)}{P_r(1-X)} \leq \cdots \leq \frac{P_1(X)}{P_1(1-X)} \tag{3}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{Q_1(X)}{Q_1(1-X)} \leq \frac{Q_2(X)}{Q_2(1-X)} \leq \cdots \leq \frac{Q_r(X)}{Q_r(1-X)} \leq \cdots \leq \frac{Q_n(X)}{Q_n(1-X)} \tag{4}$$

我们沿用了〔3〕和〔4〕中的方法，加密了(2)。

定理4　若 $X \geq 0$，则

$$\text{(i)}\quad \frac{P_n(x)}{P_n(1+x)} \leq \frac{P_{n-1}(x)}{P_{n-1}(1+x)} \leq \cdots \leq \frac{P_r(x)}{P_r(1+x)} \leq \cdots \leq \frac{P_1(x)}{P_1(1+x)} \tag{5}$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{Q_1(x)}{Q_1(1+x)} \leq \frac{Q_2(x)}{Q_2(1+x)} \leq \cdots \leq \frac{Q_r(x)}{Q_r(1+X)} \leq \cdots \leq \frac{Q_n(x)}{Q_n(1+X)} \tag{6}$$

其中(1)的证明见[5]。下面我们使用(2)来证

$$\frac{Q_r(x)}{Q_r(1+x)} \geq \frac{Q_{r-1}(x)}{Q_{r-1}(1+x)}, \quad r=2,3,\cdots,n$$

$$左边=\left\{\prod_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}\frac{x_{i_1}+\cdots\cdots+x_{i_r}}{(1+x_{i_1})+\cdots\cdots+(1+x_{i_r})}\right\}^{1/C_n^r}$$

$$=\left\{\prod_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}\frac{\frac{x_{i_1}+\cdots+x_{i_{r-1}}}{r-1}+\cdots\cdots+\frac{x_{i_2}+\cdots+x_{i_r}}{r-1}}{\left(1+\frac{x_{i_1}+\cdots+x_{i_{r-1}}}{r-1}\right)+\cdots\cdots+\left(1+\frac{x_{i_2}+\cdots+x_{i_r}}{r-1}\right)}\right\}^{1/C_n^r}$$

$$\geq\left\{\prod_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}\left(\frac{\frac{x_{i_1}+\cdots+x_{i_{r-1}}}{r-1}\times\cdots\cdots\times\frac{x_{i_2}+\cdots+x_{i_r}}{r-1}}{\left(1+\frac{x_{i_1}+\cdots+x_{i_{r-1}}}{r-1}\right)\times\cdots\cdots\times\left(1+\frac{x_{i_2}+\cdots+x_{i_r}}{r-1}\right)}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}^{1/C_n^r}$$

$$=\left\{\prod_{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n}\ \prod_{1\leq j_1<\cdots<j_{r-1}}\frac{x_{ij_1}+\cdots\cdots+x_{ij_{r-1}}}{(r-1)+x_{ij_1}+\cdots\cdots+x_{ij_{r-1}}}\right\}^{1/C_n^r}$$

$$=\left\{\prod_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_r\leq n\\1\leq j_1<\cdots<j_{r-1}\leq r}}\frac{x_{ij_1}+\cdots\cdots+x_{ij_{r-1}}}{(1+x_{ij})+\cdots\cdots+(1+x_{ij_{r-1}})}\right\}^{\frac{1}{rC_n^r}}$$

$$=\left\{\prod_{1\leq k_1<\cdots<k_{r-1}\leq n}\frac{x_{k_1}+\cdots\cdots+x_{k_{r-1}}}{(1+x_{k_1})+\cdots\cdots+(1+x_{k_{r-1}})}\right\}^{1/C_n^{r-1}}$$

=右边。

证毕。

设a是正数，则(6)可改写为

$$\frac{Q_1\left(\frac{x}{a}\right)}{Q_1\left(1+\frac{x}{a}\right)}\leq\frac{Q_2\left(\frac{x}{a}\right)}{Q_2\left(1+\frac{x}{a}\right)}\leq\cdots\leq\frac{Q_r\left(\frac{x}{a}\right)}{Q_r\left(1+\frac{x}{a}\right)}$$

$$\leq\cdots\leq\frac{Q_n\left(\frac{x}{a}\right)}{Q_n\left(1+\frac{x}{a}\right)}$$

将$Q_r\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{a}Q_r(x)$代入上式，得到

$$\frac{Q_1(x)}{Q_1\left(1+\frac{x}{a}\right)}\leq\frac{Q_2(x)}{Q_2\left(1+\frac{x}{a}\right)}\leq\cdots\leq\frac{Q_n(x)}{Q_n\left(1+\frac{x}{a}\right)}\tag{6a}$$

注意到，当$a\to+\infty$时，$Q_r(1+$ —— $)\to 1$，由此得到(6a)的极限形式：

定理5　设$x\geq 0$，则

$$Q_1(x)\leq Q_2(x)\leq\cdots\leq Q_r(x)\leq\cdots\leq Q_n(x)\tag{7}$$

这个不等式(7)同著名的Maclaurin对称平均数定理（见〔6〕）一样，可以视为算术平均一几何平均不等式的一种加密，李大元老师在〔7〕中证明了

定理6　设$x\geq 0$，则

$$R_n(x)\leq R_{n-1}(x)\leq\cdots\leq R_r(x)\leq\cdots\leq R_1(x)\tag{8}$$

显然，它与(7)可以称为是对偶的。由定理3和4，我们有理由指望下列两个不等式链成立：

猜想1　若$0\leq x\leq\frac{1}{2}$，则

$$\frac{R_n(x)}{R_n(1-x)}\leq\frac{R_{n-1}(x)}{R_{n-1}(1-x)}\leq\cdots\leq\frac{R_r(x)}{R_r(1-x)}\leq\cdots\leq\frac{R_1(x)}{R_1(1-x)}\tag{9}$$

猜想2　若$x\geq 0$，则

$$\frac{R_n(x)}{R_n(1+x)}\leq\frac{R_{n-1}(x)}{R_{n-1}(1+x)}\leq\cdots\leq\frac{R_r(x)}{R_r(1+x)}$$

$$\leq\cdots\leq\frac{R_1(x)}{R_1(1+x)}\qquad(10)$$

下面我们证明猜想2的一部分。

定理7　若$x_1\geq x_2\geq\cdots\geq x_n\geq 0$，则

$$\frac{R_n(x)}{R_n(1+x)}\leq\frac{R_{n-1}(x)}{R_{n-1}(1+x)}\qquad(11)$$

证明　不妨设$x_n>0$，将(11)式变形：

$$\left(\frac{x_1\cdots x_n}{(1+x_1)\cdots(1+x_n)}\right)^{\frac{1}{n}}\leq\left(\frac{x_1\cdots x_n}{(1+x_1)\cdots(1+x_n)}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

$$\times\frac{x_1^{-\frac{1}{n-1}}+\cdots+x_n^{-\frac{1}{n-1}}}{(1+x_1)^{-\frac{1}{n-1}}+\cdots+(1+x_n)^{-\frac{1}{n-1}}}$$

即

$$\left(\frac{x_1\cdots x_n}{(1+x_1)\cdots(1+x_n)}\right)^{\frac{-1}{n(n-1)}}\leq\frac{\quad}{(1+x_1)^{-\frac{1}{n-1}}+\cdots+(1+x_n)^{-\frac{1}{n-}}}\ \frac{1}{n-}$$

用算术平均一几何平均不等式和Tchebychef 不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-\frac{1}{n-1}}\left[\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{-\frac{1}{n-1}}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(1+x_i)^{-\frac{1}{n-1}}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{1+x_i}\right)^{-\frac{1}{n-1}}\right]\leq \sum_{i=1}^{n} x_i^{-\frac{1}{n-1}}$$

这就证明了定理7。

参考文献

〔1〕 Beckenbach，E. F. and Bellman，R. Inequ inequalities，Springer-Verlag，1961，p5。

〔2〕 朱尧辰，一个不等式——反向归纳法的一个例子，数学通报，1982年第11期，30－32

〔3〕 王挽澜，王鹏飞，对称函数的一类不等式，数学学报，1984年第27卷第4期，485－497

〔4〕 王挽澜，吴昌久，Ky Fan 不等式之推广，成都科技大学学报，1980年第1期，15－22

〔5〕 陈计，初等对称函数的一个不等式，厦门数学通讯，1986年第1期，15－16

〔6〕 莫颂清，关于对称平均数定理及其应用数学通报，1982年第12期，25－27。

〔7〕 大元，数学教学，1983年第1期问题3。

幂平均函数的一类不等式(一)

831　陈计

§1 引 言

1981年，林秀鼎在〔1〕中用优势理论得到了一个有独立意义的结果：设 $0 \le x_1 \le \cdots \le x_n$，则有

$$\left(\prod_{k=1}^{i} \frac{x_k}{1+x_k}\right)^{1/i} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)}, \quad 1 \le i \le n \tag{1}$$

1982年，朱尧辰在〔2〕中用反向归纳法证明了(1)在 $i=n$ 时的特殊情形：

$$\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{1+x_k}\right)^{1/n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)} \tag{2}$$

1983年，方献亚在〔3〕中试图推广(2)，在 $\alpha \le 1 \le \beta$ 的条件下，他证明了：

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\alpha}}\right)^{1/\alpha} \le \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}\right)^{1/\beta} \tag{3}$$

特别地，当 $\alpha \to 0$，$\beta = 1$ 时，由熟知的极限〔4〕，

$$\lim_{\alpha \to 0}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}\right)^{1/\alpha} = \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \tag{4}$$

便得到(2)。

1985年，陈计在〔5〕中证明了(3)对 $\alpha < 0 < \beta$ 也成立，并

指出了当$\alpha\leq 1\leq\beta$时(3)的一个简明证法。

在本文中，我们用〔1〕中的方法，推广上述(1)—(3)，给出了：当$\alpha<\beta$时，设$0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n$，则有

$$(5)\quad \left(\frac{\sum_{k=1}^{i} x_k^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{i}(1+x_k)^{\alpha}}\right)^{1/\alpha}\leq\left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}\right]^{1/\beta},\quad 1\leq i\leq n$$

特别地，当$\alpha\to 0$，$\beta=1$时，得(1)；当$\alpha\to 0$，$\beta=1$，$i=n$时，得(2)；当$\alpha\leq 1\leq\beta$，$i=n$时，得(3)；当$\alpha<0<\beta$，$i=n$时，得〔5〕中的结果。

§2 引理

为了证明(5)式，我们需要一个已知的优势不等式作为引理，（参见〔1〕）。

对$t\in R^n$，我们设$t_{[1]}\geq\cdots\geq t_{[m]}$为$t$的坐标。若$a$，$b\in R^n$，则我们说$a$优于$b$，记为$a(>)b$，是指

$$(6)\quad \sum_{k=1}^{i} a_{[k]}\geq\sum_{k=1}^{i} b_{[k]},\quad 1\leq i\leq n$$

并且

$$(7)\quad \sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{n} b_k$$

引理　若a，$b\in R_+^n$，且满足$a>b$，则有

$$(8)\quad a_1^{\sigma}+\cdots+a_i^{\sigma}\leq b_1^{\sigma}+\cdots+b_i^{\sigma},\quad \sigma>1,$$

$$(9)\quad a_{n-i+1}^{\sigma}+\cdots+a_n^{\sigma}\geq b_{n-i+1}^{\sigma}+\cdots+b_n^{\sigma},\quad 0<\sigma<1;$$

(10) $a^{\sigma}_{n-i+1}+\cdots+a^{\sigma}_{n}\leq b^{\sigma}_{n-i-1}+\cdots+b^{\sigma}_{n}$，$\sigma<0$。

和

(11) $a_{n-i-1}a_{n}\geq b_{n-i+1}\cdots b_{n}$

这里 $1\leq i\leq n$

§3 证　明

已设 $0\leq x_1\leq\cdots\leq x_n$，再令 $\sigma=\alpha/\beta$

$$a_k=\frac{X_k^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n}X_k^{\beta}}，\quad b_k=\frac{(1+x_k)^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}，1\leq k\leq n$$

i 当 $\alpha<\beta<0$ 时，$\sigma=\alpha/\beta>1$。

$x_1{}^{\beta}\geq\cdots\geq x_n^{\beta}\geq 0$，

$(1+x_1)^{\beta}\geq\cdots\geq(1+x_n)^{\beta}\geq 0$

所以

(12)
$$\begin{cases}a_1\geq\cdots\geq a_n\geq 0\\ b_1\geq\cdots\geq b_n\geq 0\end{cases}$$

又

$$0\leq\frac{x_1}{1+x_1}\leq\cdots\leq\frac{x_n}{1+x_n}$$

由于 $\beta<0$，

$$\left(\frac{x_1}{1+x_1}\right)^{\beta}\geq\cdots\geq\left(\frac{x_n}{1+x_n}\right)^{\beta}\geq 0$$

用分式的性质

$$\frac{x_1^{\beta}+\cdots+x_i^{\beta}}{(1+x_1)^{\beta}+\cdots+(1+x_i)^{\beta}} \geq \frac{x_1^{\beta}+\cdots+x_n^{\beta}}{(1+x_1)^{\beta}+\cdots+(1+x_n)^{\beta}},\quad 1\leq i\leq n$$

$$\frac{x_1^{\beta}+\cdots+x_i^{\beta}}{x_1^{\beta}+\cdots+x_n^{\beta}} \geq \frac{(1+x_1)^{\beta}+\cdots+(1+x_i)^{\beta}}{(1+x_1)^{\beta}+\cdots+(1+x_n)^{\beta}}$$

所以

$$(13)\begin{cases} a_1+\cdots+a_i\geq b_1+\cdots+b_i, \\ a_1+\cdots+a_n=b_1+\cdots+b_n \end{cases} \quad 1\leq i\leq n$$

从而，用引理中(8)式，有

$$a_1^{\sigma}+\cdots+a_i^{\sigma}\geq b_1^{\sigma}+\cdots+b_i^{\sigma},\quad 1\leq i\leq n$$

既有

$$\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{x_k^{\beta}}{\Sigma_{k=1}^{n} y_k^{\beta}}\right)^{\alpha/\beta} \geq \sum_{k=1}^{i}\left(\frac{(1+x_k)^{\beta}}{\Sigma_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}\right)^{\alpha/\beta}$$

$$\frac{\Sigma_{k=1}^{i} x_k^{\alpha}}{\Sigma_{k=1}^{i}(1+x_k)^{\alpha}} \geq \left(\frac{\Sigma_{k=1}^{n} x_k^{\beta}}{\Sigma_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}\right)^{\alpha/\beta}$$

两边开α次方，得(5)式：

$$\left(\frac{\Sigma_{k=1}^{i} x_k^{\alpha}}{\Sigma_{k=1}^{i}(1+x_k)^{\alpha}}\right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{\Sigma_{k=1}^{n} x_k^{\beta}}{\Sigma_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}\right)^{1/\beta},\quad 1\leq i\leq n$$

ii) 当$\alpha<0<\beta$时，$\sigma=\alpha/\beta<0$，同样地，有

$$(15)\begin{cases} 0\leq a_1\leq\cdots\leq a_n \\ 0\leq b_1\leq\cdots\leq b_n \end{cases}$$

$$(16)\quad \begin{array}{l} a_1+\cdots+a_i \le b_1+\cdots+b_i, \\ a_1+\cdots+a_n = b_1+\cdots+b_n \end{array} \quad 1\le i\le n$$

从而，用引理中 $\sigma<0$ 的情形，有

$$\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{x_k^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\beta}}\right)^{\alpha/\beta} \le \sum_{k=1}^{i}\left[\frac{(1+x_k)^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}\right]^{\alpha/\beta}$$

所以可得(5)式：

iii) 当 $0<\alpha<\beta$ 时，$0<\sigma<1$，同样地用引理得(5)式。

当 $\alpha\beta=0$ 时，用极限(4)立知(5)对 $\alpha<\beta$ 成立。

§4 应 用

在(5)中，令 $i=n$ 得

$$(18)\quad \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\alpha}}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\alpha}}\right]^{1/\alpha} \le \left[\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k^{\beta}}{\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}}\right]^{1/\beta},\ \alpha<\beta$$

它的矩阵表示为：设 C 为正定对称矩阵，则当 $\alpha<\beta$ 时

$$(19)\quad \left[\frac{t_r C^{\alpha}}{t_r (I+C)^{\alpha}}\right]^{1/\alpha} \le \left[\frac{t_r C^{\beta}}{t_r (I+C)^{\beta}}\right]^{1/\beta}$$

当 $\alpha\le 1\le\beta$ 时，这个结果尚可改进为：

$$\left[\frac{t_r (I+C)^{\alpha}}{t_r C^{\alpha}}\right]^{1/\alpha} \ge 1+\frac{n}{(t_r C^{\alpha})^{1/\alpha}} \ge$$

$$1+\frac{n}{(t_r C^{\beta})^{1/\beta}} \ge \left[\frac{t_r (I+C)^{\beta}}{t_r C^{\beta}}\right]^{1/\beta}$$

事实上，用Minkowski 不等式

$$(21)\quad \left[\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\alpha}\right]^{1/\alpha} \geq n+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \quad \alpha\leq 1$$

$$(22)\quad \left[\sum_{k=1}^{n}(1+x_k)^{\beta}\right]^{1/\beta}\leq n+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^{\beta}\right)^{1/\beta}，\beta\geq 1$$

和幂平均定理

$$(23)\quad \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k{}_k^{\beta}\right)^{1/\beta}$$

立知(22)成立。

特别地，当$\alpha\to 0$，$\beta=1$，$C=AB$（A，B为同阶正定方阵）时，(20)化为

$$\left(\frac{\det(I+AB)}{\det(AB)}\right)^{\frac{1}{n}}\geq 1+\frac{1}{[\det(AB)]^{1/n}}\geq 1+\frac{n}{t_r(AB)}$$

即有

$$(24)\quad \det(I+AB)\geq \left[1+(\det A)^{\frac{1}{n}}(\det B)^{\frac{1}{n}}\right]^{n}$$

$$\geq \left[1+\frac{n}{t_r(AB)}\right]^{n}(\det A)(\det B)$$

这就是石钟慈教授在〔6〕中所得到的一个不等式。

参考文献：

〔1〕林秀鼎．Hermitian 矩阵不等式（英文）．中国科学技术大学学报．11（1981）．No．1．17-29）

〔2〕朱尧辰．一个不等式．数学通报．1982年第11期．

〔3〕方献亚．一个不等式的推广．数学通报．12（1983）．

〔4〕史济怀．平均．人民教育出版社．1964年版．

〔5〕陈 计．一个不等式的推广．数学教学研究．1986年第4期． 蛙鸣．第20期．37-39

〔6〕石钟慈．对“Hermitian 矩阵不等式”一文的讨论．中国科学技术大学学报．11（1983）．No．3．128-131．

〔注〕本文的简报刊于1985年11月的《蛙鸣》第21期P28-30．

幂平均函数的一类不等式（二）

831 李广兴　陈计

记 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，

$1-x=(1-x_1, 1-x_2, \cdots, 1-x_n)$，

$$M_t(x)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^t\right)^{1/t},\quad t\neq 0$$

$$M_0(x)=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}=G(x)$$

$$M_{+\infty}(x)=\max_{1\leq i\leq n} x_i,\quad M_{-\infty}(x)=\min_{1\leq i\leq n} x_i.$$

在《蛙鸣》第22期"未解决的问题"栏中，本文的第二作者提出了如下猜想〔1〕：设 $0\leq x\leq\frac{1}{2}$，当 $\alpha<\beta$ 时，有

$$(1)\qquad \frac{M_\alpha(x)}{M_\alpha(1-x)}\leq\frac{M_\beta(x)}{M_\beta(1-x)}$$

特别地，当 $\alpha=0$，$\beta=1$ 时，(1)化为　不等式〔2〕：

$$(2)\qquad \frac{G(x)}{G(1-x)}\leq\frac{A(x)}{A(1-x)}$$

当 $\alpha=-1$，$\beta=0$ 时，(1)化为

$$(3)\qquad \frac{H(x)}{H(1-x)}\leq\frac{G(x)}{G(x)}.$$

这是王挽澜和王鹏飞在〔3〕中的一个引理。

张在明在〔4〕中证明了：当 $\alpha=1$，$\beta=2$ 时，(1)也成立。

即

$$(4)\qquad \frac{A(\alpha)}{A(1-x)}\leq\frac{R(x)}{R(1-x)}$$

1985年，王鹏飞和王挽澜在〔5〕中又证明了：

$$(5)\qquad \left\{\frac{x_1^t x_2^t}{(1-x_1)^t(1-x_2)^t}\right\}^{1/2}\leq\frac{x_1^t+x_2^t}{(1-x_1)^t+(1-x_2)^t}，t\geq 0$$

并认为"如果不限于初等方法，可把不等式(5)推广到n个量x_i，$i=1，2，\cdots，n$的情形"，即断言有下式成立：

$$(6)\qquad \frac{M_0(x)}{M_0(1-x)}\leq\frac{M_t(x)}{M_t(1-x)}，t\geq 0$$

事实并非如此，例如，当$t=+\infty$时，取$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=\frac{1}{2}$，$x_n=\frac{4}{9}$，则

$$式(6)的左边=\left(\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}}\right)^{1/n}=\left(\frac{4}{5}\right)^{1/n}$$

$$式(6)的右边=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{9}}=\frac{9}{10}$$

当$n\geq 3$时，$\frac{9}{10}>\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{n}}$是容易验证的，所以(6)式只对$n=2$成立。

这个反如同时地说明：猜想(1)在$n\geq 3$时是不成立的，但在$n=2$时，(1)式是成立的。

事实上，当$\alpha<\beta$，$\alpha\beta\neq 0$时，有

$$(7)\qquad \left\{\frac{x_1^\alpha+x_2^\alpha}{(1-x_1)^\alpha+(1-x_2)^\alpha}\right\}^{1/\alpha}\leq\left\{\frac{x_1^\beta+x_2^\beta}{(1-x_1)^\beta+(1-x_2)^\beta}\right\}^{1/\beta}$$

当$x_1=x_2$时，(7)式取等号，(7)式取等号，不妨设$0\leq x_1<x_2$

$\le \frac{1}{2}$。

将(7)式改写

$$\frac{(x_1^\alpha+x_2^\alpha)^{1/\alpha}}{(x_1^\beta+x_2^\beta)^{1/\beta}} \le \frac{[(1-x_1)^\alpha+(1-x_2)^\alpha]^{1/\alpha}}{[(1-x_2)^\beta+(1-x_1)^\beta]^{1/\beta}}$$

即

$$\frac{[(\frac{x_1}{x_2})^\alpha+1]^{1/\alpha}}{[(\frac{x_1}{x_2})^\beta+1]^{1/\beta}} \qquad \frac{[1+(\frac{1-x_2}{1-x_1})^\alpha]^{1/\alpha}}{[1+(\frac{1-x_2}{1-x_1})^\beta]^{1/\beta}}$$

令 $S=x_1/x_2$，$S^*=(1-x_2)/(1-x_1)$。上式又可改写成

$$\frac{(1+S^\alpha)^{1/\alpha}}{(1+S^\beta)^{1/\beta}} \le \frac{(1+S^{*\alpha})^{1/\alpha}}{(1+S^{*\beta})^{1/\beta}} \tag{8}$$

不难验证 $0\le S<S^*<1$。

事实上，

$$\frac{x_1}{x_2} < \frac{1-x_2}{1-x_1}$$

等价于

$$x_1(1-x_2)<x_2(1-x_2) \tag{9}$$

而 $f(x)=x(1-x)=x-x^2$，$f'(x)=1-2x>0$ $(0<x<\frac{1}{2})$，所以对于 $0\le x_1<x_2\le\frac{1}{2}$，(9)成立。

下面只须证明：

$$g(s)=\frac{(1+s^\alpha)^{1/\alpha}}{(1+s^\beta)^{1/\beta}}$$

是在(0，1)上的严格单调的递增函数。取对数

$$\ln g(s)=\frac{1}{\alpha}\ln(1+s^{\alpha})-\frac{1}{\beta}\ln(1+s^{\beta})$$

求导数

$$\frac{g'(s)}{g(s)}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha s^{\alpha-1}}{1+s^{\alpha}}-\frac{1}{\beta}\cdot\frac{\beta s^{\beta-1}}{1+s^{\beta}}$$

$$=\frac{s^{\alpha-1}-s^{\beta-1}}{(1+s^{\alpha})(1+s^{\beta})}>0$$

所以$g'(s)>0$，即$g(s)$是在$(0,1)$上严格单调地递增。

由此立知(8)成立，从而(7)成立。

当α或β为零时，由熟知的极限(6)：

(10) $$\lim_{t\to 0} M_t(x)=C_1(x)=M_0(x)$$

知(1)在$n=2$时成立，显然取等号在且仅在$x_1=x_2$时。

证毕。

尽管已经猜想(1)不成立，但是，有(2)-(4)对任意自然数n都成立，即有

$$(-1,0),(0,1),(1,2)\in C=\{(\alpha,\beta)\mid\frac{M_{\alpha}(x)}{M_{\alpha}(1-x)}\le\frac{M_{\beta}(x)}{M_{\beta}(1-x)},\ 0\le x\le\tfrac{1}{2}\}$$

因此确定集合C仍是一个未解决的问题。

参考文献：

〔1〕陈计，问题两侧，蛙鸣，22(1985)，bb14。

〔2〕E. F. Beckenbach, R. Bellman, lnegualities.

Springer-Verlag,1961,pp5.

〔3〕 王挽澜,王鹏飞,对称函数的一类不等式,数学学报,27(1984),pp485-495.

〔4〕 张在明,Ky Fan型不等式,湖南数学通报,3(1986)

〔5〕 王鹏飞,王挽澜,对称函数的一个不等式,成都科技大学学报,2(1985),pp87-91.

〔6〕 史济怀,平均,人民教育出版社,1964年版.

猜想数则

〔猜想1〕设平面多边形的 n 条边是 a_1，a_2，…，a_n，其面积为 A，是否一定有：

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \ge \left(2(n-1)\,tg\frac{\pi}{n}\right)A$$

〔注〕 由 Maclaurin 的对称平均数定理知，上式强于等周不等式：

$$\sum_{1\le i\le n} a_i \ge 2\sqrt{n\ tg\frac{\pi}{n}}\ A^{1/2}$$

当 n＝3和4时，问题的回答是肯定的。参见合肥工业大学苏化明《关于四边形的一个不等式》一文。（载于《湖南数学通讯》1986年第4期。

831　陈计提供

〔猜想2〕设 a_1，a_2，…，a_n 是n个正数，证明或否定：

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{K}\cdot\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{k+1}}{K}\cdots\cdots\frac{a_n+a_1+\cdots+a_{k-1}}{K}$$

$$\ge \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\left(a_1 a_2\cdots a_n\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

北京　莫颂清提

831　陈计推荐

〔猜想3〕集合{$x|1<x<4^n$，n，x 是自然数}内素数的个数是偶数。

851 罗承辉提供

反 例 一 则

821 刘弘泉

何琛、史济怀、徐森林三位老师合编的《数学分析》一书第一册（高等教育出版社，1985年版）第二章第二节练习25叙述如此：

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次可导，且 $f'(a)=f'(b)$，求证存在 $C\in(a,b)$，使得

$$|f''(C)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

事实上，若没有加强的条件，则此题是错的，我们考虑以下的反例。

取 $f(x)=\sin\left(x-\frac{a+b}{2}\right)$，则

$$f'(a)=f'(b)=\cos\frac{a-b}{2}$$

若练习25结论成立，则有 $C\in(a,b)$ 使

$$\left|\sin\left(C-\frac{a+b}{2}\right)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\cdot 2\left|\sin\frac{b-a}{2}\right|$$

$$=\frac{\left|\sin\frac{b-a}{2}\right|}{\left|\frac{b-a}{2}\right|}\cdot\frac{4}{b-a}\qquad\text{————}(*)$$

请转下页：

〔编者按〕这个二阶微分中值不等式是个陈题，例如吉米多维奇习题集第1266题原有条件"$f'(a)=f'(b)=0$"或系教材可能在排印时脱漏了。另外成立着类似的n阶微分中值不等式：

设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的$f'(x)$，$f''(x)$，…，$f^{(n-1)}(x)$，在(a,b)内有$f^{(n)}(x)$，且$f'(a)=f'(b)=f''(a)=f''(b)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=f^{(n-1)}(b)=0$，则存在$C\varepsilon(a,b)$使

$$|f^{(n)}(C)|\geq\frac{2^{n-1}n!}{(b-a)^n}|f(b)-f(a)|，n\geq 1。”$$

若此式对任何区间$[a,b]$成立，在上式中令$b\to a$，由于$\frac{\sin x}{x}\to 1$，当$x\to 0$时，所以(*)式右边趋向于无穷大，而左边$|\sin(c-\frac{a+b}{2})|\leq 1$总成立，于是导致了矛盾。

多项式逼近：插值与最优节点

821　刘启铭译

用简单函数的线性组合逼近任意函数的想法在很久以前就被提出并已得到广泛研究。本文讲述用多项式逼近的问题。

f是〔a，b〕上的连续函数，即C〔a，b〕的元素。模 $\|f\| = \max_{a\le x\le b} |f(x)|$ 。p_n 是所有次数不超过n次的多项式全体，f在 p_n 中的最佳一致逼近 Bf 定义为：$\|f-Bf\| = \inf\{\|f-q\| : p\varepsilon\, p_n\} = dis(f, p_n)$ 。

一些有效的算法被计算机用来近似地计算给定f的最佳逼近。然而，在计算机时代之前，寻找最佳多项式逼近是极其困难的。

也许由于插值提供了一种逼近的方法，本世纪初一些著名数学家都致力于研究多项式插值的理论性质。什么是多项式插值？简单地说它是一种逼近方法：求一个多项式在一组特殊已给点组（称为节点）上述达到一个给定函数f的值，特别地，令 $a=t_0$ ，$b=t_n$ 及。

$T = \{t = \langle t_1, \cdots, t_{n-1}\rangle \varepsilon R^{n-1} : a<t_1<\cdots<t_{n-1}<b\}$

相应于每一个 $t\varepsilon T$ ，存在一组多项式基 $\{L_k(x)\}_{k=0}^{n}$ 其中

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\ne i}}^{n} (x-tj)/(ti-tj) \quad i=0,1,\cdots,n$$

因为 $L_i(t_i)=1$ 及 $L_i(tj)=0$ 　$i\ne j$ ，所以f在节点 $\{t_j\}_{j=0}^{n}$ 的插值多项式是 $(p_t f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(ti)\, L_i(x)$ ，所以多项式是 $(p_t f)(x) = \sum_{i=0}^{n} f(t_i) L_i(x)$ ，所以多项式pt 很容易构造，而且在很多情况下当n很大而且节点“很好”地分布于

〔a，b〕时，$p_t f$ 一致逼近于 f，不幸地是插值多项式有时也会振荡而且与 f 很不相似。

例如1901年Runge 指出若 $r(x)=1/(1+x^2)$，$-5\leq x\leq 5$，及 $t_j=-5+10j/n$，$j=0,1,\cdots n$，则 $\|r-p_t r\|\to\infty$ 当 $n\to\infty$ 时，区间端点处的一批节点可以本质地改变Runge 例子建立的现象，例如节点选在相应于区间〔a，b〕的n+1阶chebyshev 多项式的零点，则 $\|r-p_t r\|\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时，注意到Runge 例子中节点的变化所产生的差别，自然会问是否存在一组节点 $\{t_j^{(n)}\}_{n=0}^{n}$ 与 f 无关，使 $\|f-P_t f\|\to 0$ 当 $n\to+\infty$ 时，Faber 在1914年证明了对任何一组节点 $\{t_j^{(n)}\}_{i=0}^{n}$，存在一个函数 $f\in C[a,b]$，使得 $\sum_{i=0}^{n} f(t_i^{(n)})L_i^{(n)}$

当 $n\to\infty$ 时不收敛于 f。

尽管有Faber 的工作，必须重申 $p_t f$ 的许多 $f\in C[a,b]$ 的确收敛于 f，同时Runge 的例子指出了在多项式插值中节点位置的重要性，是否存在与 f 无关的节点的"最佳选择"？

给节点 $\{t_j^{(n)}\}_{j=0}^{n}$ 我们看映射 $p_t: C[a,b]\to p_n$ $f\to p_t f$ 这是个投影映射，且 $\|p_t\|=\sup\{\|p_t f\|,f\in C[a,b]$ 且 $\|f\|=1\}=\max\limits_{x\in[a,b]}\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|$，同时我们

看到因为 $p_t Bf=Bf$，我们有 $\|f-p_t f\|=\|f-Bf+p_t Bf-p_t f\|$ $\|(I-p_t)(f-Bf)\|$ 因此 $\|f-p_t\|\leq(1+\|p_t\|)\,dis(f,p_n)$。取节点为相近的chebyshev 零点，可以说明这个不等式的用处：这时 $\|p_t\|=O(\log(n+1))$，并且若 f 是 k 次可微的，则 $dis(f,p_n)=O(\frac{1}{n^k})$ 于是对这样的节点 $\|f-p_t\|$

$= O\left(\frac{1}{n^k}\log\ln+1\right)$，因此chebyshev 节点是一个节点的很好选择。

重新考虑这个不等式，我们看到"节点的最佳选择"的一个合理的意义：选取一组节点使$\|p_t\|$最小。

是否存在一组节点$t^*\in T$，使$\|p_{t^*}\|=\inf\{\|p_t\|,t\in T\}$，如果存在，这个"优"节点是否唯一？它是否可用一些特殊性质表达出来？两个古典的逼近论猜想是关于最优插值节点的。令：

$$\wedge_t(x)=\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)| \qquad x\in[a,b]$$

并令：

$$\wedge_i(t)=\max_{t_{i-1}\le x\le t_i}\wedge_t(x),\quad i=1,2,\cdots,n$$

这个函数$\wedge_t(x)$被称为等振的，若$\wedge_1(t)=\wedge_2(t)=\cdots=\wedge_n(t)$，即$\wedge_t$在区间$[t_{i-1},t_i]$ $1\le i\le n$上有相等的最大值，1931年S. Bernstein 猜想$\|p_t\|$是最小的当Lebesgue 函数$\wedge_t(x)$是等振的，后来，1947年P. Erdos 猜想可以选取一个t，使$\wedge_t(x)$等振，且而当$\wedge_t$等振时，$\min\wedge_i(t)$达到最大值。

在这两个紧密相关的猜想出来以后，它们成为许多杰出的逼近论专家考虑的问题，尽管这样，一直到1978年Bernstein 和Erdos 猜想才同时得到证实，考虑到从提到解决经历了47年，Bernstein 猜想（包括最优节点的唯一性）在同一年里被kilgore，de Boor 和pinkus 同时证明也许是惊奇的，后两个作者亦证明了Erdos 猜想。

尽管这两篇论文使用了不同的技术来证明Bernstein 猜想，

它们都用到了较早的kilgore 的一个定理。

若$||p_t^*||=\inf\{||p_t||:t\varepsilon T\}$则$\Lambda_t^*$是等振的。对不同的$t_j$，$\Lambda_i(t)$，$1\leq j\leq n-1$，$1\leq i\leq n$。

Bernstein 猜想是这个定理的逆命题。

尽管$n\leq 15$最优点已经被算出，它的简单公式尚未得到，已经证明$||p_t^*||=O(\log(n+1))$，当t^*是最优的，因此从实用的目的可认为Chebyshev 是最优节点。

译自美国数学月刊1984年第8期"进展报告"。

关于Euclid 环的一些注记

〔日〕 永田雅宜

在这篇注记中，我们表明Euclia 环可以按下面方式定义，并且很容易就证明有限多个Euclid 环的直和仍是Euclid 环。

定义1。一个带1交换环称作是一个Euclid 环，如果存在从 $R-\{0\}$ 到一具有极小条件的有序集M的映射φ，满足条件：

如 $a, b\in R$，且 $a\neq 0$，则存在 $q, r\in R$ 使得 $b=aq+r$，且 $r=a$ 或 $\varphi r<\varphi a$。

这时我们称（R，M，φ）是一个Euclid 环（见〔1〕）。

定义2。上面的r称作b被a除时的余数，当 $a=0$ 时，我们说b是b被0除的余数。

在这篇注记中我们也得到，如R是Euclid 环，则我们可以选择一个良序集W和从 $R-\{0\}$ 到W的映射ψ，使得（R，W，φ）是Enclid 环。这表明通过约定ψ（0）比W中任何元素都小，我们的Euclid 环成为Samuel〔2〕意义下的Euclid 环。

命题1。如R，M，φ）是Euclid 环，则R是主理想环。

证明，设I是R中一非零理想，在 $\{\varphi x\mid x\in R, x\neq 0\}$ 中取出极小元素 φa（$a\in I$），对任意 $b\in I$，设r是b被a除时的余数，由φa的极小性，我们有 $r=a$，这表明b能被a除尽，由此 $I=aR$。（证毕）

现在假定（R，M，φ）和（S，N，ψ）是Euclid 环，设 $M'=M\cup\{t\}$，$N'=N\cup\{u\}$ 其中t和u分别大于M和N的元素。我们扩张φ和ψ使 $\varphi 0=t$ 和 $\psi 0=u$，通过定义 $(m', n')\geq(m, n)$ 当且仅当 $m'\geq m$ 且 $n'\geq n$，$M'\times N'$ 成一满足极小条件的有序集。从直和 $R+S$ 到 $M'\times N'$ 的映射（φ，ψ）自然定义成

$(a,b)\to(\varphi a,\psi b)$，我们得到

定理2。直和$(R+S, M'\times N', (\varphi,\psi))$是Euclid环。

证明设(a,b)和(c,d)是$R+S$的元素，$(a,b)\neq(0,0)$，r，s分别为c，d被a，b除时的余数，有下面几种情况：

(1) $(r,s)=(a,b)$　　(2) $r=a$，$\psi s<\psi b$

(3) $\varphi r<\varphi a$，$s=b$　　(4) $\varphi r<\varphi a$，$\psi s<\psi b$

(5) $a=0$，$b\neq 0$，$r=c$　　(6) $a\neq 0$，$b=0$，$s=d$

显然(1)—(4)情形是好的，在情形(5)，如$c\neq 0$，则$\varphi c<\varphi c$且$\psi s\leq\psi b$，这是好的情形，情形(6)也一样。

定理3。如K是Euclid环，则存在从$R-\{0\}$到适当的良好序集W的映射ρ，使得(R, W, ρ)是Euclid环。

为证明定理，证明下面命题就够了。

命题4，如M是具有极小条件的有序集，则存在从$R-\{0\}$到一适当的良序集W的映射f，当$a, b\in M$，$a>b$时，$fa>fb$

证明取足够大的良序集W（以后如需要，我们可以通过添加比W的原来的元素都大的新元素来扩大W），我们归纳定义f，即，考虑W的一元素w，假设对w和一切$y<w$，$f^{-1}(y)$有定义，设$M_w=M-T_w$，$T_w=\bigcup_{y<w} f^{-1}(y)$，则定义$f^{-1}(w)$为$M_w$的极小元素的集合。这样，我们在所有$f^{-1}(w)$的并上定义了f，如果这个这个并集不等于M，则由于极小条件，可以继续进行上面的定义过程。因此，f是从M到W的映射，如$a>b$（$a, b\in M$），$fb=w$，则$a\in M_y$，对$y\leq w$（$y\in w$），因此$a>b\in M_y$且a不是任何M_y的极小元素。因此$fa>fb$。　　（证毕）

〔参考文献〕

〔1〕M. Nagata, On Euclid algorithm, c. P. Ramanujam A Triblute, Stud Math, 8, Tata Inst. Fund Res., (1978), 175-186。

〔2〕P. Samuel, About Euclidean rings, J. of Alg 19 (1971), 282-301

（本文译自M. Nagata, Seme remarks on Euclid rings, J. Math Kyoto univ. 25-3 (1985) 421-422。

原作者Masayoshi Nagata 永田雅宜 曾于1958年左右给出Hilbert 第十四问题的否定解答，现为日本京都大学数学系教授）。

821 严峰生译

小 问 题

定理1。从 Z_m 到 Z_n 的群同态共有 (m, n) 个。

证明：$Z_m \xrightarrow{\pi} Z_n$

则对 $a \in Z_m$，$\pi(a) | m$，$\pi(a) | n$，$\therefore \pi(a) | (m, n)$

若 $K | (m, n)$，Z_n 有且仅有一子群的阶为 K，有 $\varphi(k)$ 个生成元。把 Z_m 同态 H（H 为 Z_n 的子群）只要把1对应把 H_1 的一个生成元。

$\therefore$ 群同态有 $\sum\limits_{k|(m,n)} \varphi(k) = (m, n)$

定理2。从 Z_m 到 Z_n 的环同态的个数为 $2^{W(n)-W(n/(m,n))}$

其中 $W(k)$ 表示整数 k 的不同的素因子的个数

证明：首先，环同态完全由对1的作用决定。

因为1在 Z_m 中幂等。

故1的象在 Z_n 中幂等。

设 $n = q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_s^{t_s}$ 是 n 的素因子分解式

则 Z_n 有自然的环同构

$$Z_n \cong Z_{q_1^{t_1}} + Z_{q_2^{t_2}} + \cdots + Z_{q_s^{t_s}}$$

注意到从 $Z_m \to Z_n$ 的环同态诱导出从 $Z_m \to Z_{q_i^{t_i}}$ $(i = 1, 2 \cdots s)$ 的环同态，设 a 是 Z_n 的一个元素，是 $Z_n \to Z_n$ 环同态的1的象，在直和中 a 对应于 $(a_1 \cdots a_s)$ $a_i \in Z_{q_i^{t_i}}$ $(i = 1 \cdots s)$ 那末 a_i 是 $Z_{q_i^{t_i}}$ 中的幂等元素，因此 a_i 为0或1

这表明从 $Z_m \to Z_n$ 的环同态至多有 2^s 个。

但因环同态是群同态，对加法运算来讲，a_i 的阶必须被 m 整除，反之，若 $(a_1, \cdots, a_s)$ 是直和中满足 $a_i = 0$ 或1且 a_i 对于加法运算的阶能被 m 整除，则有环同态 $Z_m \to Z_{q_1^{t}} + \cdots + Z_{q_s^{t_s}}$

从 $1 \to (a_1 \cdots a_s)$。

因此从 $Z_m \to Z_n$ 的环同态个数是满足此两条件的有序 S 元组的个数。

又在 $Z_{q_i^{t_i}}$ 中 1 的加法阶为 $q_i^{t_i}$

故当 $q_i^{t_i} \mid m$ 时，a_i 于为 0，1

当 $q_i^{t_i} \nmid m$ 时，a_i 为 0

而 $q_i^{t_i} \nmid m \iff q_i \mid \frac{n}{(m,n)}$

$\therefore Z_m \to Z_n$ 的环同态个数为 $2^{w(n)-w(n/(m,n))}$

注：群 $Z_n \to Z_m$ 的同态个数 = 群 $Z_m \to Z_n$ 的同态个数。

对环此性质不成立。

841 王岚译自《美国数学月刊》

27届IMO 散记

861 沈建

国际数学奥林匹克竞赛（简称IMO）是在1959年在罗马尼亚等国倡导下开始举办的。每年由一个参加国主办。以后各国相继参加。到今年已有37个国家参加。IMO 的宗旨是通过竞赛提高各国中学数学水平。同时各国学生在竞赛中增进友谊。互相学习。取长补短。为今后的成才打下良好的基础。

今年我有幸被选入国家代表队参加7月份在波兰首都华沙举行的27届IMO 。6月30日晚我们一行八人（2名领队。6名学生）乘坐中国民航飞机去华沙。由于第一次坐飞机。我们对飞机上的一切都感到好奇。总要动手摸摸。机组人员对我们也特别关心。当飞机飞越阿尔卑斯山时。“空中小姐”特地指给我们看。

7月1日下午我们到达华沙。我们的向导在机场迎接我们。向导是华沙大学中文系二年级的学生。他的中文名字叫蔡彪。我们提前5天到华沙。做好赛前准备。适应一下环境气候。华沙与北京夏时制时差是八小时。虽说是7月份可是在华沙气温还不到20℃。华沙的街道不算宽但很清洁、整齐。使我们感到奇怪的是在街道上很难看到自行车。取而代之的是大量的小汽车。华沙是一个绿色的城市。绿化搞得真好。到处是绿荫。据说在华沙人均绿化面积为90平方米。赛前。向导领我们参观了华沙一些名胜。

2号。竞赛委员会把各国领队召去选题。7日又把副领队接去翻译题目。为了不让领队与学生接触。于是两位领队被关到“领队集中营”。他们被安住在另外一家旅馆。与此同时。我们被接到了一所中学。参加这次竞赛的210 名同学都来到这里。其中年龄最小的只有11岁。他是一位澳大利亚籍华人。中国名字叫陶哲轩。

哈！大家在一起真热闹。虽然来自不同的国家，彼此语言还不太懂，但到处是笑脸。下棋打牌的，踢足球的，打羽毛球的，打网球的。处处是欢声笑语。打乒乓球可算是中国人的拿手好戏，有些国家的学生专门邀请我们来和他们打乒乓球，于是我们也不推辞，把他们打得大败。然后给他们当“教练”，“指点指点”他们。可是在国内，我们只不过是个无名小败罢了，哈！真有趣。

八日下午，举行了开幕式。礼堂前并排地插着各个参加国的国旗。我们一眼就看到中国国旗（后来，在闭幕式上，我们在国旗前合照留影）。在异国他乡看到中国国旗，心里就涌现出一种说不出的自豪感。至于为什么？我也说不清楚。只有身临其境，才能体验到这种感觉。

9日、10日两天我们进行了考试，每天4½小时做三道题，题目和解答都用中文。这次考试我没能取得理想的成绩。除去时差，环境等方面的因素外，我觉得主要有下面两个原因，首先是赛前过于兴奋，思想负担重，临场经验不足。这是由于第一次参加这种高水平的国际性竞赛所造成，另一个原因是没有能充分利用考试时间，结果浪费了不少时间。这次考试，我们国家的总分是第四，从这一点来说，虽能给我一点安慰，但我还是不能原谅自己。我感到非常惭愧。

IMO 首先是一场竞赛，其次也是一场交往。我们经常和外国学生交谈，学到了不少东西，了解到许多异国风情，有些非常有趣。彼此间交换一些纪念品。南斯拉夫学生要我们给他们写一些汉字，我们则写了一些象形文字，如“月、日”之类的字，而科威特学生则要我们写出他们的中文名字，于是我们便根据他们名字的读音湖乱地写了几个字，他们便送我们一些邮票，于是皆大欢喜。在交往

中我们发现美国学生比较活跃，而苏联学生则比较拘束。

考后，我们参观了刚修复的波兰皇宫，游玩了华沙郊区的肖帮出身地，一睹维斯瓦河畔的美丽风光，领略了具有欧洲风格的油画和雕塑，所有这些虽然很美丽，但却无心观赏，我的心很沉，此时我多么想立刻回到祖国，尤其是一个人在遇到失败的时候，更需要祖国和亲人。人总是这样，一旦离开祖国，就好象失去了什么似的。虽然波兰人的热情好客使我感动，但我怎能忘记家乡和亲人？虽然维斯瓦河畔景色迷人，使人流连忘返，但是长江长城在我心中重千斤；虽然华沙街道豪华，超级市场繁荣，但是它跟我心中北京城相比，我更爱我伟大祖国的首都；当我回国走下飞机的时候，我在心里大声呼唤：祖国我又回到了您的怀抱！虽然我没有取得好成绩，但是您没有责备我，这一点尤使我感动，我深深地懂得：失败并不可怕，关键是如何对待失败。"胜固可喜，败亦欣然"，通过失败，我得到了许多只有失败者才能得到的收获，这也许就是我这次的"欣然"之处吧！

中国科学技术大学

1986 年硕士学位研究生入学考试试题（二）

数学分析

考应用数学（图论）专业的做 1、2、3、4、5、7，其他专业的做 1、2、3、4、5、6。

1、下列极限是否存在？如果存在，求出其值

(1) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} \frac{x^2+y^4}{x^4+y^2}$$

(2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}} x^2y^2\log(x^2+y^2)$$

2、如果函数 $f(x)=x|x-a_0|+|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$ 处处可导，求 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 的值。

3、$f(x)$、$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，求证

$$\int_0^1\int_0^1 x(f(x)g(xy)+f(xy)g(x))\,dx\,dy=\int_0^1 f(x)\,dx\cdot\int_0^1 g(x)\,dx$$

4、计算积分 $$\int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$$

（已知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$）

5。$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，$f(a)=f(b)$

(1) 证明在曲线 $y=f(x)$ 上（$x\in[a,b]$），一定能找到两点 A，B，线段AB平行于x轴，长为 $\frac{b-a}{2}$。

(2) 设 $0<d<b-a$，能否找到曲线 $y=f(x)$，（$x\in[a,b]$）上的两个点C，D，线段CD平行于x轴长为d？

6。已知 $a_n\geq 0$ ($n=1, 2, 3, \cdots$)，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛。

求证：当 $m\to+\infty$ 时，

$$\frac{\sum\limits_{\substack{n\leq m\\ a_n>\frac{1}{n}}}1}{m}\to 0.$$

其中 $\sum\limits_{\substack{n\leq m\\ a_n>\frac{1}{n}}}1$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中满足 $a_n>\frac{1}{n}$ 的 a_n 的个数。

7。求 x^3-3x^2+5 在 $[-2, 2]$ 上的最大值与最小值。

高等代数

1。（10分）求方阵A的逆 A^{-1}，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&0&1\\0&1&3&2\\1&2&1&4\end{pmatrix}$$

2。（15分）证明：若四面体两对对边互相垂直，则第三对对边也互相垂直，并且三对对边的平方的和彼此相等。

3。（15分）已知多项式 $f(x)$，$g(x)$ 满足

$$f(x)u(x)+g(x)V(x)=1 \qquad (1)$$

其中 $u(x)$，$V(x)$ 是 x 的多项式

证明：① $f(x)$ 和 $g(x)$ 互素

② 只有一对 $u(x)$，$V(x)$ 满足①并且

$$\deg u(x)<\deg g(x)$$

$$\deg v(x)<\deg f(x)$$

这里，$\deg f(x)$ 表示 $f(x)$ 的次数。

4。①（15分）设 A 是一个 $(n-1)\times n$ 矩阵，$n\geq 2$，A 的每个元素是 1 或 -1，且 $AA^T=nI_{n-1}$，这里 A^T 是 A 的转置矩阵，I_m 是 m 阶单位方阵，证明：必存在 n 阶方阵 H，H 的每个元素是 1 或 -1，$HH^T=nI_n$，且 H 的前 $n-1$ 行所组成的 $(n-1)\times n$ 子矩阵就是 A。

②（15分）证明：若 n 阶方阵 A 的行列式 $\det A=0$，则必有正交方阵 $P(\neq I)$，使 $PA=A$。

5。①（15分）证明：若方阵 B 的特征多项式为 $p(x)$，A 为另一方阵，则 $q(A)$ 为不可逆的充要条件是，A 与 B 至少具有一个相同的特征值。

②（15分）设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，证明：如果 A 和 B 没有一个相同的特征值，则

$$AZ = ZB$$

只要零解。

复变函数

1. 证明 $\int_0^{+\infty} \cos x^n dx = \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \cos \frac{\pi}{2n}$，$(n>1)$

2. 证明 $z^4+2z^3-2z+10=0$ 在每个象限恰有一个根。

3. a 非 π 的整数倍，将 $\sin(a-z)$ 展成无穷乘积。

4. 证明级数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ 所定义的函数在左半平面解析，且可解析开拓到除 $z=0$ 以外的整个复平面。

5. 设函数 $f(z)=u+iv=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在圆 $|z|<R$ 内解析，$r<R$，求证对 $n\geq 1$，

(1) $\pi r^n c_n = \int_0^{2\pi} u(\gamma e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta$

(2) $|c_n|\gamma^n \leq \max\{4A(\gamma), 0\} - 2R_e f(0)$。

其中 $A(\gamma)=\max\limits_{|z|=\gamma} R_e f(z)$