蛙　　鸣

第 44 期

中国科学技术大学数学系

《蛙鸣》编委会学生会学习部合办

一九九一年四月

热烈祝贺《蛙鸣》创刊十周年

献　　给

帮助者、支持者和为此付出辛勤劳动的人

一九九一年四月

这样的时代：智者并不沉默，

只是被无尽的嘈杂声

窒息了。于是退避于

那些无人阅读的书。

Thomas

《蛙鸣》第44期目录

蛙鸣第44期

1991年4月

数学札记（I）

881吕金波

本文将给出Cramer法则的一个直接推广。

设A、B是数域F上的两个n×n方阵。引入记号A×B仍表示一个n×n方阵，它在（i，j）处的系数是B的第j列代替A的第i列得到的行列式。如：

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

定理：$A(A\times B)=(\det A)B$

证明：设A非异。记$A=(a_{ij})$　$B=(b_{ij})$，由Gamer法则$Ax=\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$有唯一解

$$x_j=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} b_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n-1} & b_{1j} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & b_{nj} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$(1\leqslant j\leqslant n)$从面有：$A(x_1, x_2, \cdots x_n)=B$，再由A×B的定

义立即得到 $A(A\times B)=(\det A)B$，用微扰法可证得 $\det A=0$ 的情况。

下面罗列运算 $A\times B$ 的几个基本性质（它们的）应用是值得怀疑的）证明是极其简单的。

性质1°、A、B可逆且 $\det A=\det B$ 则 $A\times B=B\times A$ 当且仅当 $AB^{-1}=BA^{-1}$ 即 $(AB^{-1})^2=I(n)$

2°、λ、γ F、$A\times(\lambda B+\gamma C)=\lambda(A\times B)+\gamma(A\times C)$

$(\lambda A)\times B=\lambda^{n-1}(A\times B)$

3°、$(A\times B)\times(C\times D)=(\det A)^{n-2}(B\times A)(C\times D)$

（当 $n=1$ 时要求 $A\neq 0$）

$(A\times B)(B\times C)=(\det B)(A\times C)$　$(A\times B)(B\times A)=(\det AB)I(n)$　$(A\times B)\times(A\times C)=(\det A)^{n-1}B\times C$

$(AB)\times(AC)=(\det A)(B\times C)$　$A\times(BC)=(A\times B)C$

$(AB)\times C=B\times(A\times C)$

4°、$\det(A\times B)=\det B(\det A)^{n-1}$

5°、$I(n)\times A=A$；A可逆，则A关于运算"x"存在唯一右逆 $\frac{A}{\det A}$，存在左逆 $\frac{A}{(\det A)^{\frac{1}{n-1}}}$（假设存在f F使 $f^{n-1}=\det A$，$n>1$）

一般情况下，域F上方阵关于运算"X"不构成半群，但在 $n=1$ 时有：

6°、$\forall a\cdot b$ F，$a\times b=b$

7°、集合F及其上的二元运算"X"构成一半群且所有元素关于F中幺元1有唯一的共同右逆1；F中所有元素都是半群中的左幺元。

3°、"×"对于F中加法只具有一个方面的分配律，即：

$$a\times(b+c)=a\times b+a\times c \text{ 但 } (b+c)\times a\neq b\times a+c\times a$$

上面三个结论是不难验证的。

下面举例说明文中定理的应用。

1、求$A^{-1}B$

解：由定理：$A^{-1}B=\dfrac{1}{\det A}(A\times B)$，按照$A\times B$的定义，通过计算$n^2+1$个$n\times n$行列即可求得$A^{-1}B$。（比较：一般的方法是先求$A^{-1}$，这需要计算$n^2+1$个$(n-1)\times(n-1)$行列式，然后作乘积$A^{-1}B$）。若令$B=I_{(n)}$，便求得$A^{-1}$，实际上，这里的里的方法是利用附属方阵求逆的不漂亮的推广。

2、$A=(a_{ij})$ A_{ij}为代数余子式，有 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=\delta_{ik}\det A$ $1\leqslant i,k\leqslant n$

证明：将$A(A\times I_n)$按照定义展开得：

$\left(\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}\right)=(\det A)I_n$ 此即结论。

若$\det A=0$由定理立即结得到：

$$a_{i1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\cdots a_{n1} \\ \vdots & \vdots \\ b_n & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}+a_{i2}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\cdots a_{n1} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n\cdots a_{nn}\end{vmatrix}+\cdots+a_{in}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1,n-1} & b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{n,n-1} & b_n\end{vmatrix}=0\ (1\leqslant i\leqslant n)$$

3、作者感谢王斌同学作了验证并更正了文中的错误。

研究与讨论

蛙鸣第44期

1991年4月

关于假流形

8701 杨庆

本文探讨了假流形上的一些问题，证明了流形成为假流形的一个充分条件，并证明了流形的定向和流形作为假流形所有的定向的等价性。

定义1、一个相对假n—流形是指一个单纯对（K，K_0）（即K，K_0为单纯复形）满足：

(1)、$|K|-|K_0|$的闭包等于一些n—单形之并；

(2)、K的每一不在K_0中的n－1－单形刚好是两个n－单形的面；

(3)、任给定两不在K_0中的K的n－单形σ，σ'存在一个K中不在K_0中的n－单形序列：$\sigma=\sigma_0, \sigma_1 \cdots \sigma_k=\sigma'$使得$\sigma_i \cap \sigma_{i+1}$是不在$K_0$中的n－1－单形，$\forall i$

特别地，若$K_0=\varnothing$，则K就称为假n－流形，（参见〔1〕）

为了证明后面的定理，先证明

引理2 设P，Q是R^n中两个球，$P\cap Q$非空，不妨设互不包含球心$\overline{\mathrm{Bd}\, p\cap Q}$有一剖分，此剖分诱导出$\overline{P\cup Q}$的一个剖分。在$\overline{\mathrm{Bd}\, P\cap Q}$上一致。

证明：设P，Q球心分别为Q_1，Q_2，$\overline{P\cup Q}$可分为下列几部分：以O_1为顶点，$\overline{\mathrm{Bd}\, P\cap Q}$为“底”的锥，$O_2$为顶点，$\overline{\mathrm{Bd}\, P\cap Q}$为

“底”的锥，以及O_1、O_2为顶点，球面其余部分为“底”的锥由关于剖分的Suspention的知识，是直观的。

下面的定理指出了流形和假流形的联系。

定理3　M是一个可三角剖分，连通A_2的带边n－流形，则M可看作相对假n－流形，

证明：设$h: |K| \to M$是一三角剖分。

Step 1：K中每一单形要么是n－单形，要么是n－单形的面。为此考虑局部同调群$\widetilde{H}_i(M, M-X)$，在M上有

$$\widetilde{H}_i(M, M-X)=0, \qquad i \neq n$$

$\therefore$ X不能在n＋k－单形内，因这时$H_{n+k}(M, M-X) \cong Z$，又X不能在与每一n－单形交为空的n－k－单形内，因这时对某个$m<n$，有$\widetilde{H}_m(M, M-X) \cong Z$，而n－k－单形交n－单形非空，必为其真面，$k \in N$；step2，k的任一n－1－单形S要么刚好是某一n－单形的面，这时$S \subset h^{-1}(Bd\,M)=|K_0|$，要么刚好是两个n－单形的面，这只要注意〔1〕Th35.3就可以了，Step3注意$|K_0|=h^{-1}(Bd M)$ $\overline{|K|-|K_0|}=M$。

这三步证明了相对假n－流形条件的(1)、(2)，Step4，由条件，M道路连通：对两个n－单形S_1，S_2，取S_1，S_2两个不在K_0中的n－1－面t_1，t_2，从t_1的重心到t_2的重心有一条道路，取一些性质良好的坐标邻域复盖此道路的象，再由引理1可作出若干个n－单形连系S_1，S_2，再注意两个n－单形相交于一点在同一坐标邻域中，可取一些中间单形连系它们，（直观上是显然的），这就证明了(3)，故得定理。

下面考察定向问题，自然地对于相对n－假流形(K, K_0)

$\forall S \neq S'$ 不在 K_0 中， 序列 $S=S_0, S_1, \cdots, S_K=S'$，$S_i$ s.t. S_i 无重复，现对 S_i 已定向，则取 S_{i+1} 的定向使 $\partial S_i+\partial S_{i+1}$ 在 $S_i \cap S_{i+1}$ 上取 0 值，则递归地由 S 定向决定了 S' 的定向，下面的定义就是自然的。

定义 4　$\forall S, S'$ 如上，S' 如可由 S 唯一决定定向，则 (K, K_0) 称可定向的。

我们来仔细分析一下定向的含义，n－单形的定向是顶点排列的等价类 $(a_{i_0}, a_{i_1}, \cdots, a_{in})$，或等价地，边排列的等价类 $(e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{in})$，$e_{ij}=a_{ij}-a_{i_0}$，$a_{ij}$ 相对的 $n-1$ 单形有一诱导定向，下面的事实是显然的：

引理 5　S，t 两 n－单形，$t \cap S=V$ 是一 $n-1$ 单形，S 定向和由 t 定向诱导定向一致，则在 V 上，S，t 诱导的定向相反。

或者等价地，当由 S 进入 t 时，V 取定的一组顶点逆序数 $+1$ 或 -1。

但是，对于流形，引入两个邻域间诱导定向的概念，可更方便地看出两者间内在联系。

定义 6　(U, φ)，$(V, \psi) \in \mathcal{D}$，$U \cap V \neq \emptyset$，U，V 上有定向，$U \cap V$ 的一个正则 $n-1$ 子流形 N，如 $\varphi(N) \to 1\ R^{n-1} \times \{0\}$，则 N 有分别关于 U，V 定向的诱导定向，如两者相反，则 U，V 定向称互相诱导。

下面的事实也是显然的。

引理 7　条件同上，U，V 定向一致 $\Leftrightarrow$ 相互诱导定向。

换句话说，在正则子流形 N 上，基 $(e_1 \cdots e_{n-1})$ 的逆序数 $+1$

或－1。

另一方面，对一 n －单形 S，取 U ⊃ h(s)，φ 把 h(s) 的 n＋1 个顶点映到 R^n 中，这 n＋1 个点（不同！）唯一决定了一个 n －球 O，令 $U' = \varphi^{-1}(O)$，把 S 和（U'，φ）联系起来考虑，由引理6，引理7及关于逆序数的注，易得

定理8　流形定向和作为假流形定向定义是等价的。

一般来说，单纯同调群较易计算，而奇异同调群则很不容易计算，虽然两者是一样的。

一般地，对相对 n －假流形有下面的结果：

$$H_n(K,K_0)\cong\begin{cases} Z & (K,K_0)\text{可定向} \\ 0 & (K,K_0)\text{不可定向}\end{cases}$$

及

$$H^n_0(K,K_0)\cong\begin{cases} Z & (K,K_0)\text{可定向} \\ Z/2 & (K,K_0)\text{不可定向}\end{cases}$$

因此，对一般的流形，其奇异下同调和奇异上同调自然也有类似结果了，即推论

推论9　M 为 n－带边流形，M 可定向，则 $H_n(M,BdM)\cong Z$，$H^n(M,BdM)\cong Z$，M 不可定向 $H_n(k,K_0)=0$，$H^n(K,K_0)\cong Z/2$

当然，这也可用来判断 M 作为流形的可定向性，顺便得到熟知的

推论10　Mobius 带和 Klein 瓶，RP^2 或 RP^2 的 R－连通和均不可定向。

RP^2 的 R－连通和指 $\underbrace{P^2\#P^2\#\cdots\cdots\#P^2}_{K\text{个}}$

这因为上述空间的 H_n 均为 0

作者感谢徐森林老师的指导。

参 考 文 献

〔1〕、J.R.Munkres Elements of Algebraic Topology

〔2〕、徐森林：《流形讲义》

〔3〕、江泽涵：《拓扑学引论》

〔4〕、李元喜 张国梁：《拓扑学》

研究与讨论

蛙鸣第44期

1991年4月

关于一般Fibonacci数列的一些结果

8701 徐文青

著名的Fibonacci数列是指如下定义的序列 $\{f_m\}$：$F_0=0$，$F_1=1$，$F_{m+2}=F_{m+1}+F_m$。这里一般Fibonacci数列仅就初值 F_0，F_1 的改变而言。本文将主要给出有限环 Z_n 特别是有限域 Z_p 中一般Fibonacci数列关于循环性方面的一些结果。

一、引子及几个基本命题

对Fibonacci数列 $\{F_m\}$，可以证明，成立如下结论：

$\forall n\in N$，$\exists R\in N$，s.t. $n\mid F_R$，即在整环 Z_n 中 $\exists R>0$，s.t. $F_R=0$

事实上，在 Z_n 中 $\{F_m\}$ 还是循环的。（后面将作为推论给出）。

由此可以提不少进一步的问题，如：(1)、对一般 Fibonacci 数列，其中是否还有 n 的倍数出现；(2)、循环的情况又怎样？这两个问题是本文所主要关心的。

命题1：在 Z_n 中，一般 Fibonacci 数列 $\{f_m\}$：$f_0=a$，$f_1=b$，$f_{m+2}=f_{m+1}+f_m$，则 $\{f_m\}$ 必是循环的。

（证）：Z_n^2 中序对（x，y）个数有限，由鸽舍原理，必有 $k\neq l$，使 $(f_k,f_{k+1})=(f_l,f_{l+1})$，进而易证 $\{f_m\}$ 是循环的。#

且称这样的（最短）一段循环为一条（有向）回路，（不计起点，视为闭回路），易知，若另一对初始值（u，v）产生相同的回路，当且仅当（u，v）为 $\{f_m\}$ 中的前后相邻两项，（以下也称（u，v）在回路中）因此产生同一条回路的初始值的对数恰为回路的长度即循环的周期，而且容易看出，这里事实上是按回路给 Z_n^2 中的元素作了等价分类。

以下我们总不考虑 $f_0=f_1=0$ 的情形。

命题2：一条回路中若包含 0，则 0 必等间隔地出现。

（证）：不妨设 $f_0=0$，$f_1=a$，则 $f_k=aF_k$，若 $F_t=F_0=0$，$F_{t+1}=b=b\cdot bF_1$ 于是 $F_{2t}=b\cdot F_t=0$，再由循环性可知回路中 0 等间隔地出现。#

推论1：$n\in N$，Fibonacci 数列 $\{F_m\}$ 中必有无穷多项是 n 的倍数，并且它们所在的项数间隔相等。

（证）：由于 $F_0=0$，由命题1、命题2立知。#

推论2：若 $d\mid k$，则 $F_d\mid F_k$，

若 $F_d \mid F_k$，且 $d \neq 2$，则 $d \mid k$。

〔证〕：只要令 $n = F_d$，由推论1便知。#

命题3：若 n 为合数，则 Z_n 中回路不止一条。

〔证〕：设 p 是 n 的最小素因子，$q=n/p$，则 Z_n 中以 $(0,q)$ 为初始值的回路对应于 Z_p 中以（0，1）为初始值的回路（下称标准回路），其长度 $\leqslant p^2-1$，这条回路最多对应于 Z_n 中的 p^2-1 对初始值，而 Z_n 中共有 n^2-1（$>p^2-1$）对初始值，故回路不止一条。#

命题4：各条回路中，标准回路总是最长的，且其长度为偶数，其它回路的长度总是其因子。

〔证〕：设 $f_0=a$，$f_1=b$，则 $F_k=aF_{k-1}+bF_k$，若 $(F_m, F_{m+1})=(0,1)$，从而 $(f_m, f_{m+1})=(a,b)=(f_0, f_1)$，于是 (a,b) 产生的回路的长度总是标准回路长度的因子。

又对 $\{F_k\}$ 成立：$F_k \cdot F_{k+2}-F_{k+1}^2=(-1)^{k+1}$，在 Z_n 中这也正确，若 $(F_m, F_{m+1})=(0,1)$，则 $F_m \cdot F_{m+2}-F_{m+1}^2=(-1)^{m+1}=-1$，$2 \mid m$，从而标准回路的长度为偶数。#

二、主要结论

标准回路的重要性是明显的，它在某种程度上起着基的作用，下面的部分大多是从标准回路出发来考虑的。

命题5：$p>5$ 为素数。

(i) 若 $p \equiv \pm 1 \pmod 5$，则在 Z_p 中标准回路的长度 L 是 $p-1$ 的因子；

(ii) 若 $p \equiv \pm 2 \pmod 5$，则在 Z_p 中标准回路的长度 L 是

$2(p+1)$的因子，且$2(p+1)/L$为奇数。

〔证〕：对Fibonacci数列$\{F_n\}$，有$F_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$其中

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$。

$$F_p=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^p-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right\}=\frac{1}{2^{p-1}}\left\{C_p^1+C_p^3\cdot 5+\cdots\right.$$

$$\left.+C_p^{p-2}5^{\frac{p-3}{2}}+C_p^p5^{\frac{p-1}{2}}\right\}\equiv 5^{\frac{p-1}{2}}\equiv\left(\frac{5}{p}\right)\pmod{p}。$$

（由Fermat定理：$2^{p-1}\equiv 1 \pmod{P}$，$\dfrac{1}{2^{p-1}}\equiv 1 \pmod{P}$，）

由Gauss互反律：$\left(\dfrac{5}{p}\right)=\left(\dfrac{p}{5}\right)$

于是

$$F_p=\begin{cases}1 & p\equiv\pm 1 \pmod{5}\text{时}\\ -1 & p\equiv\pm 2 \pmod{5}\text{时}\end{cases}\quad(\text{在 }Z_p\text{中，下同})$$

同样地可得：

$$F_{p+1}=\begin{cases}1 & p\equiv\pm 1 \pmod{5}\text{时}\\ 0 & p\equiv\pm 2 \pmod{5}\text{时}\end{cases}$$

于是：(i) 当$p\equiv\pm 1 \pmod{5}$时，$F_p=F_{p+1}=1$，$F_{p-1}=0$

$(F_{p-1},F_p)=(F_0,F_1)$，标准回路长度为$p-1$的约数；

(ii) 当$p\equiv\pm 2 \pmod{5}$时$F_p=-1$，$F_{p+1}=0=-F_0$

$F_{p+2}=-1=-F_1$，$F_{2(p+1)}=-F_{p+1}=0$，$F_{2(p+1)+1}=-F_{p+2}$

$=1$，$(F_{2(p+1)},F_{2p+3})=(F_0,F_1)$，标准回路的长度的

$2(p+1)$的约数，而且$2(p+1)/L$只能是奇数。#

推论：若素数p满足$p\equiv\pm1\pmod5$，则在Z_p中至少有一条回路不含有0。

〔证〕：每条回路的长度$\leqslant p-1$从而回路的条数$\geq\frac{p^2-1}{p-1}=$ $p+1$，至少有一条回路不能由$(0，a)$产生，这条回路中没有0。#

命题6：若$n>3$，则在Z_n中回路不止一条。

〔证〕：对$p>5$的素数，Z_p中回路不止一条（最长的不超过$2(p+1)<p^2-1$）。又对$p=5$，Z_5中有2条回路，结合命题3，知结论正确，（也可从标准回路中最多只能有4个0出发来证得）#

命题7：p为素数，且$p\equiv\pm2\pmod5$，则在Z_p中，各条回路均等长。

〔证〕：在Z_p中，设$f_0=a，f_1=b，f_n=aF_{n-1}+bF_n$，若$(f_m，f_{m+1})=(f_0，f_1)$，于是：

$$\begin{cases}f_m=aF_{m-1}+bF_m=a\\ f_{m+1}=bF_{m-1}+(b+a)F_m=b\end{cases}$$

变形得：

$$\begin{cases}(a^2+ab-b^2)(F_{m-1}-1)=0\\ (a^2+ab-b^2)F_m=0\end{cases}$$

因$(a，b)\neq(0，0)$，$p\equiv\pm2\pmod5$，由下面引理知，$a^2+ab-b^2\not\equiv0\pmod p$，所以，$F_{m-1}=1，F_m=0$，$F_{m+1}=1$，$(F_m，F_{m+1})=(F_0，F_1)$，由此易知，在$Z_p$中各条回路均等长。#

引理：$p>5$为素数，则

(i)、$p\equiv\pm 2\pmod 5$ 时，$x^2+xy-y^2=0$ 在 Z_p 中无非 0 解；

(ii)、$p\equiv\pm 1\pmod 5$ 时，$x^2+xy-y^2=0$ 在 Z_p 中有非 0 解。

〔证〕：在数域 Z_p 中，若 $x^2+xy-y^2=0$ 有非 0 解 (x, y)，易见 $x\neq 0$，$y\neq 0$，令 $l=x^{-1}y$，则 $x^2(1+l-l^2)=0$，$1+l-l^2=0$，而 $1+l-l^2\equiv 0\pmod p \rightleftharpoons 4l^2-4l-4\equiv 0\pmod p$ $\rightleftharpoons (2l-1)^2\equiv 5\pmod p$，$\rightleftharpoons (\frac{5}{p})=(\frac{p}{5})=1 \rightleftharpoons p\equiv\pm 1\pmod 5$ #

命题 8：p 为素数，且 $p\equiv\pm 1\pmod 5$，则在 Z_p 中，各条回路的长度最多有两种取值，此时长者为短者的 2 倍长。

〔证〕：设 $f_0=a$，$f_1=b$，$(a, b)\neq(0, 0)$，

若 $a^2+ab-b^2\not\equiv 0\pmod p$，则该回路（即由 (a, b) 产生的回路）恰与标准回路等长；

若 $a^2+ab-b^2\equiv 0\pmod p$，设 $(f_m, f_{m+1})=(f_0, f_1)=(a, b)$，则 $f_m=aF_{m-1}+bF_m=a$，$F_{m-1}=1-a^{-1}bF_m$（在数域 Z_p 中），记 $k=a^{-1}F_m$，于是 $F_m=ak$，$F_{m-1}=1-bk$，$F_{m+1}=1+(a-b)k$，$F_{m-1}\cdot F_{m+1}-F_m^2=(-1)^m=1+(a-2b)k$，但 $a-2b\not\equiv 0\pmod P$ 否则 $0\equiv 4(a^2+ab-b^2)\equiv 5a^2-(a-2b)^2\equiv 5a^2\pmod p$，这不可能，所以在 Z_p 中 k 最多只有两种取值，而 $k=0$ 必是其一。如果只能是 $k=0$，那末该回路仍与标准回路等长，如果 k 确能取到两种值，这两种值必交替出现，此时该回路的长度为标准回路的长度的一半，（最小的）m 为奇数，从而标准回路的长度不能是 4 的倍数。#

命题 9：若素数 $p\equiv\pm 1\pmod 5$ 且 $p\equiv -1\pmod 4$，则各条回路不会全等长。

〔证〕：在上题证明中，令 $A=1-bk=F_{m+1}$，$F_m=ak=2bk$

$-2=-2A$，$F_{m+1}=-A$，$2\nmid m$，于是 $5A^2\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$，因 $p\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,5)$，这有解，如果 $(-2A,-A)$ 或 $(2A,A)$ 在标准回路中（Z_p 中元素），则必定有长度为标准回路长度一半的回路存在，否则，各条回路的等长，而完全类似前面的计算可知，（Z_p 中）。

$$5F_{\frac{p+1}{2}}^2=3-2(-1)^{\frac{p+1}{2}}，5F_{\frac{p-1}{2}}\cdot F_{\frac{p+1}{2}}=1-(-)^{\frac{p-1}{2}}$$

当 $p\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4)$ 时，$5F_{\frac{p+1}{2}}^2=1$，$5F_{\frac{p-1}{2}}\cdot F_{\frac{p+1}{2}}=-2$，

$F_{\frac{p-1}{2}}=-2F_{\frac{p+1}{2}}$，于是确实有长度仅为标准回路一半的回路存在。#

命题10：若素数 $p\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\,5)$，且 $p\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4)$。则各条回路中不会均有0。

〔证〕：对 $p\equiv\pm 2(\mathrm{mod}\,5)$，$p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$，在 Z_p 中，不难算得：

$$F_{\frac{p+1}{2}}^2=0，\quad F_{\frac{p+3}{2}}^2=-1。$$

这样 $(0,\pm 1)$，$(0,\pm F_{\frac{p+3}{2}})$ 均在标准回路中即标准回路有4个0，又长度为 $2(p+1)$ 的约数，这样 $p-1$ 个0被分到 $\frac{p-1}{4}$ 条回路中，对应总长度 $\leqslant\frac{p-1}{4}\times 2(p+1)=\frac{1}{2}(p^2-1)$，因而至少一半数目的回路中没有0出现。#

三、遗留问题

至此仍有两个问题未能彻底解决：

1°：对 $p\equiv\pm 1(\mathrm{mod}\,5)$，$p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 的素数，有时出现等

长的情形（$p=41$，61，89，$109\cdots\cdots$），有时出现不等长的情况（$p=29$，$101\cdots\cdots$）。具体情况究竟如何？

2^{0}：对 $p\equiv\pm2(\bmod 5)$，$p\equiv-1(\bmod 4)$ 的素数，有时各条回路中均有 0（$p=23$，43，67，83，$103\cdots$），有时各条回路中不全包含 0（$p=7$，47，$\cdots$）。具体情况又如何？

对后一问题，可以算得 $F_{\frac{p+1}{2}}^{2}=-4\cdot5^{-1}$，$F_{\frac{p+3}{2}}^{2}=-5^{-1}$，从而标准回路中恰有 2 个 0，于是 Z_p 中各条回路均有 0（2 个 0），当且仅当标准回路的长度恰为 $2(p+1)$（即有 $\frac{p-1}{2}$ 条回路），另一方面，这些 Z_p^{2} 中序对 (a,b) 在 Z_p 中按 $(a^2+ab-b^2)^2$ 分恰好有 $\frac{p-1}{2}$ 种取值，因而 Z_p 中各条回路均含 0 的充要条件是：

$\forall(a,b)\in Z_p^2$，$a^2+ab-b^2\equiv\pm1(\bmod p)$，则 (a,b) 在标准回路中，所以同前一问题一样，它也和 Diophantous 方程有着深刻的联系，而问题 2^{0} 又要困难得多。（这里要用到这样一个命题，$x,y\in Z$，$x(x+y)-y^2=\pm1\Leftrightarrow\exists n\in Z$ 使 $x=F_n$，$y=F_{n+1}$，其中 $\{F_n\}_{n\in Z}$ 为 Fibonacci 数列。）

对于合数的情形，可以预料问题会更复杂，不过也有一些整齐的结果，如 $n=p^k$，特别是 $n=3^k$ 的时候：Z_n 中的各条回路中恰有 2 个 0，回路的条数为 $\frac{n-1}{2}$，按长度或同长度的回答条数来分也很整齐，当然，这是极特殊的情形。

研究与讨论

蛙鸣第44期

1991年4月

一个初值延拓问题

871 李文志 周家幸

半有界直线上有如下两个热传导方程 $U_t-U_{xx}=0$ 的混合问题

$$(1)\quad \begin{cases} u(x,0)=\varphi(x),\ x>0 \\ u(0,t)=0,\ t>0 \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} u(x,0)=\varphi(x),\ x>0 \\ u_x(0,t)=0,\ t>0 \end{cases}$$

很多参考书和习题集都对(1)的初值进行奇延拓，对(2)的初值进行偶延拓，然后利用基本解的公式得到解。如〔1〕中第十章，〔2〕的第4章及〔3〕的第十一章，都是这样处理的。一个自然的问题是，这种解法中对初值的延拓是唯一的吗？本文通过建立下面的定理来证明这种唯一性。

定理 设 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的连续函数，$|f(x)|\leq Me^{Ax^2}$ M，A 为正常数，对任意 $a>0$，积分

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-ax^2}dx=0,$$

则 $f(x)\equiv 0$

证明 记

$$g(x)=f(x)e^{-(A+1)x^2}$$

则 $|g(x)|\leqslant Me^{-x^2}$。定义 $[0,1]$ 上的函数

$$h(y)=\begin{cases} g(\sqrt{-\ln y}), & y\in(0,1) \\ g(+\infty)=\lim\limits_{y\to\infty}g(y)=0, & y=0 \end{cases}$$

易见 $h(y)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，从而由Weierstrass定

定理知，对任意 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(y)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_jy^j$ 使得

$$|P(y)-h(y)|<\frac{2\varepsilon}{M\sqrt{\pi}},\quad \forall y\in[0,1]$$

对任意 $x\in[0,+\infty)$，令 $y=e^{-x^2}\in(0,1]$ 代入上式得

$$|P(e^{-x^2})-g(x)|<\frac{2\varepsilon}{M\sqrt{\pi}}$$

从而

$$\int_0^{+\infty}g^2(x)dx$$

$$=\int_0^{+\infty}P(e^{-x^2})g(x)dx+\int_0^{+\infty}g(x)[g(x)-P(e^{-x^2})]dx$$

$$<\int_0^{+\infty}\sum_{j=0}^{n}a_je^{-jx^2}\cdot f(x)\cdot e^{-(A+1)x^2}dx+\frac{2\varepsilon}{M\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}g(x)dx$$

$$\leqslant\sum_{j=0}^{n}a_j\int_0^{+\infty}e^{-(j+1+A)x^2}f(x)dx+\frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

$$=\varepsilon$$

由 ε 的任意性知 $\int_0^{+\infty}g^2(x)dx=0$，于是得到 $g(x)\equiv0$，从

而$f(x)\equiv 0$，证毕。

利用上述定理，我们来证明：问题(2)的初值只能进行偶延拓（类似地可证问题(1)的初值只能进行奇延拓）。

将$\varphi(x)(x>0)$延拓到整个数轴上记为$\psi(x)$，当$x>0$时$\psi(x)=\varphi(x)$。应用基本解的公式

$$u(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(y)e^{-\frac{(y-x)^2}{4t}}dy$$

由此得到

$$u_x(0,t)=\frac{1}{2t\sqrt{4\pi t}}\int_0^{+\infty}y[\psi(y)-\psi(-y)]e^{-\frac{y^2}{4t}}dy$$

代入齐次边界条件得

$$\int_0^{+\infty}y[\psi(y)-\psi(-y)]e^{-\frac{y^2}{4t}}dy=0$$

对任意$t>0$成立。由热传导方程定解条件知存在正常数M、A使得$|y(\psi(y)-\psi(-y))|<Me^{Ay^2}$，于是可用本文定理，$\psi(y)-\psi(-y)=0$，$\psi$为偶函数

$$\psi(y)=\begin{cases}\varphi(y), & y\geq 0\\ \varphi(-y), & y\leqslant 0\end{cases}$$

这样便证明了延拓的唯一性，代入基本解公式即得问题(2)的解

$$u(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\varphi(y)e^{-\frac{x^2+y^2}{4t}}(e^{\frac{xy}{2t}}+e^{-\frac{xy}{2t}})dy$$

若将(1)或(2)的齐次边界条件换为非齐次边界条件，仍可使用延

拓法，只不过要先作未知函数的换元以消除非齐次边界条件（见〔3〕第十一章第39节）。

本文定理中，条件 $|f(x)| \leqslant Me^{Ax^2}$ 能否去掉？这就是蛙鸣问题97，这个问题仍未解决。

参考文献

〔1〕 吴时敏：《数学物理方法》，北京师范大学出版社，1987。

〔2〕 梁昆森：《数学物理方法习题解答》，天津科技出版社，1981。

〔3〕 陈庆益，李志深：《数学物理方程》上册，高教出版社，1983。

〔4〕 《蛙鸣》43期问题（原问题有误，见本期"更正"）。

蛙鸣第44期

1991年4月

n维空间$K_m=0$的曲线性状

8301 陈春生 吕金波

三维空间中Frenet标架以及Frenet公式推广到n维空间中是采用如下方法的：

设C：$\vec{r}=\vec{r}(s)$是R^n中的一条曲线，S为它的弧长参数。$\dot{\vec{r}}(s)=\dfrac{d}{ds}\vec{r}$是单位向量，记$\vec{v}_1=\dot{\vec{r}}$，若$\dot{\vec{v}}_1\neq 0$，则令$k_1=|\dot{\vec{v}}_1|$，$\vec{v}_2=\dfrac{\dot{\vec{v}}_1}{k_1}$，接下来，若$\dot{\vec{v}}_2+k_1\vec{v}_1\neq 0$，则令$k_2=|\dot{\vec{v}}_2+k_1\vec{v}_1|$，$\vec{v}_3=\dfrac{\dot{\vec{v}}_2+k_1\vec{v}_1}{k_2}$，进一步，若

$\dot{\vec{v}}_3+k_2\vec{v}_2\neq 0$

$\dot{\vec{v}}_3\cancel{+k_2\dot{\vec{v}}_2\neq}0$，则令$k_3=|\dot{\vec{v}}_3+k_2\vec{v}_2|$，$\vec{v}_4=\dfrac{\dot{\vec{v}}_3+k_2\vec{v}_2}{k_3}$ ………

由此建立Frenet标架（$\vec{r}$，$\vec{v}_1$，$\vec{v}_2$，………，$\vec{v}_n$）和相应的n维空间中的Frenet公式：

$$
\begin{pmatrix}\dot{\vec{v}}_1\\ \dot{\vec{v}}_2\\ \vdots\\ \dot{\vec{v}}_n\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}
0 & k_1 & & & & \\
-k_1 & 0 & k_2 & & & \\
 & -k_2 & 0 & k_3 & & \\
 & & \cdots & \cdots & & \\
 & & & \cdots & \cdots & \\
 & & & -k_{n-2} & 0 & k_{n-1}\\
 & & & & -k_{n-1} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_n\end{pmatrix}
$$

我们的问题是，如果在上述"建立"过程中的某步出现了 $\vec{v}_m + k_{m-1}\vec{v}_{m-1} = 0$ 即 $k_m = 0$ 的情形，曲线将会具有什么样的特殊性质?

我们先考查两种较为特殊的情况：一是平面曲线（即 $n = 2$）满足 $k = 0$ 则是直线（一维），另一则是三维空间（$n = 3$）中满足 $k = 0$ 或 $\tau = 0$ 的曲线分别是直线（一维）或平面曲线（二维）。由此，我们得到一个猜想：$k_m = 0$ 的曲线，在适当的坐标基下，将成为 R^m 中的曲线；反之，R^n 的 m 维子空间中的曲线亦满足 $k_m = 0$。

我们假设上述曲线是无穷次可微的，并且可以在一点附近（不妨设为 $S = 0$ 处）展成无穷幂级数的形式，即

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\vec{r}^{(k)}(0)}{k!} s^k$$

从 n 维空间的 Frenet 公式可以看出，当 $k_m = 0$ 时，$r^{(k)}(0)$ 可以表示成 $\vec{v}_1(0)$，$\vec{v}_2(0)$，……，$\vec{v}_m(0)$ 的线性组合，这一点采用归纳法可以证明，因为若 $\vec{r}^{(k)}(0) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i(0)$，则

$$\vec{r}^{(k+1)}(0) = \beta_1 k_1 \vec{v}_2(0) + \beta_2(-k_1\vec{v}_1(0) + k_2\vec{v}_3(0)) + \cdots + \beta_{m-1}(-k_{m-2}\vec{v}_{m-2}(0) + k_{m-1}\vec{v}_m(0)) + \beta_m(-k_{m-1}\vec{v}_{m-1}(0)) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \vec{v}_i(0)。$$

因此，我们选取 $\{\vec{v}_1(0), \ldots, \vec{v}_m(0)\}$ 以及其正交补空间中的 $n - m$ 个互相垂直的单位向量作为坐标基，于是 $\vec{r} = \vec{r}(s)$ 成为 R^m 中的曲线。

上述的证明是不严格的，但毕竟为我们证明猜想增强了信心。

现在，我们可以给上面的猜想作出一个详尽的叙述并给出严格

的证明了。

〔定理〕 n维空间中的曲线c，$\vec{r}=\vec{r}(s)$，满足k_1……$K_{m-1}>0$，则$K_m=0$当且仅当可以选取适当的直角坐标系，使得曲线C成为R^n的m维子空间R^m中的曲线。

〔证明〕 充分性：选取适当的直角坐标系，使得C成为R^m中的曲线。于是C满足m维空间的Frenet公式：

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_1 & & & \\ -k_1 & 0 & k_2 & & \\ & \cdots\cdots & & & \\ & & \cdots\cdots & & \\ & & -k_{m-2} & 0 & k_{m-1}\\ & & & -k_{m-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}_1\\ \vec{v}_2\\ \vdots\\ \vec{v}_m\end{pmatrix}$$

因而$\dot{\vec{v}}_m+k_{m-1}\vec{v}_{m-1}=0$，即$k_m=0$。

必要性：设$k_m=0$．$\{\vec{v}_1(s),\cdots\cdots,\vec{v}_m(s)\}$已经确定。取$\vec{\alpha}_{m+1}$，$\vec{\alpha}_{m+2}$，…，$\vec{\alpha}_n$为两两垂直的常向量，并且$\{\vec{v}_1(0)$，$\vec{v}_2(0)$，…，$\vec{v}_m(0)$，$\vec{\alpha}_{m+1}$，…，$\vec{\alpha}_n\}$成为右手规范正交系。

$$\frac{d}{ds}(\vec{\alpha}_j\cdot\vec{v}_i)=\vec{\alpha}_j\cdot\frac{d}{ds}\vec{v}_i$$

$$=-k_{i-1}\vec{\alpha}_j\cdot\vec{v}_{i-1}+k_i\vec{\alpha}_j\cdot\vec{v}_{i+1},$$

$1\leqslant i\leqslant m$，$m+1\leqslant j\leqslant n$，$k_0=k_m=0$，$k_2$，…，$k_{m-1}>0$。这是一个$m(n-m)$阶线性微分方程组。

若记$\vec{\alpha}_j\cdot\vec{v}_i=x_{ij}$，上述方程组可以表为：

$$\frac{d}{ds}x_{ij}=-k_{i-1}x_{i-1,j}+k_i x_{i+1,j},\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$

$m+1\leqslant j\leqslant n$。

由于此方程组是线性的，因而满足 Lipschitz 条件。根据 Picard 逼近定理，此方程组在初值给定（$\vec{\alpha}_j\cdot\vec{v}_i(0)=0$，$1\leqslant i\leqslant m$，$m+1\leqslant j\leqslant n$）的情况下解唯一确定。又 $\vec{0}$ 显然是方程组的满足初始条件的一个解，于是

$$\alpha_j\cdot\vec{v}_i=x_{ij}\equiv 0,\ 1\leqslant i\leqslant m,\ m+1\leqslant j\leqslant n$$

由于 $\vec{\alpha}_{m+1},\cdots,\vec{\alpha}_n$ 是常向量。因此我们证明了 $\vec{v}_i\equiv\vec{v}_i(0)$ 从而 $k_m=0$ 的曲线是 R^m 中的曲线。必要性证毕。

一题一议

蛙鸣第44期

1991年4月

Bellman 不等式的一个证明及推广

8901　　彭　华

本文给出 Bellman 不等式的一个证明，并从证明过程中得到一些线索，由此给出 Bellman 不等式的一个推广。

首先证明一个引理。

引理：设 $x(t)$，$f(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续，且 $f(t)$ 非负，满足 $x(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}x(\tau)f(\tau)d\tau$

则 $x(t)\leqslant 0$　　$t\in[t_0, t_1]$

证：$\because f(t)\geqslant 0$　　$\therefore x(t)f(t)\leqslant f(t)\int_{t_0}^{t}x(\tau)f(\tau)d\tau$

令 $\int_{t_0}^{t} f(\tau)x(\tau)d\tau = F(t)$ $\therefore F'(t)-f(t)F(t) \leqslant 0$

$$\therefore \left[e^{-\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau} F(t) \right]' \leqslant 0$$

$\therefore e^{-\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau} F(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上不增

又 $\because F(t_0)=0$ $\therefore F(t) \leqslant 0$ $t \in [t_0, t_1]$

又 $\because x(t) \leqslant F(t)$ $\therefore x(t) \leqslant 0$

证毕

由此我们来证明 Bellman 不等式。

定理 1、(Bellman)：设 $x(t)$，$f(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续，且 $f(t)$ 非负，满足 $x(t) \leqslant M+\int_{t_0}^{t} x(\tau)f(\tau)d\tau$ 则

$$x(t) \leqslant Me^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}$$

证：考虑 Cauchy 方程 $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t)x(t) \\ x(t_0) = M \end{cases}$ 之解

可知此 Cauchy 方程有唯一解，解为 $x_0(t)=Me^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}$

另一方面，解 $x_0(t)$ 满足 $x_0(t)=M+\int_{t_0}^{t} f(\tau)x_0(\tau)d\tau$

$\therefore x(t)-x_0(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} f(\tau)(x(\tau)-x_0(\tau))d\tau$ 由引理可知

$$x(t)-x_0(t)\leqslant 0 \qquad x(t)\leqslant Me^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}$$

证毕

可看到，上述结果并不要求对 $x(t)$ 及 M 的正负加以限制。

以上证明的想法在于，将 $x(t)$ 分成两部分 $x(t)=x_0(t)+x_1(t)$，使其中一部份满足 $x_0(t)=M+\int_{t_0}^{t} x_0(\tau)f(\tau)d\tau$

则命题得以简化。方程 $x_0(t)=M+\int_{t_0}^{t} x_0(\tau)f(\tau)d\tau$ 等价于

Cauchg 方程 $\begin{cases}\dfrac{dx_0}{dt}=x_0(t)f(t)\\ x_0(t_0)=M\end{cases}$ 自然想到，若考虑更一般的

Cauchg 方程 $\begin{cases}\dfrac{dx_0}{dt}=x_0(t)f(t)+g(t)\\ x_0(t_0)=M\end{cases}$ 会得到什么结果。下面

给出 Bellman 不等式的一个推广。

定理 2：设 $x(t)$，$f(t)$ 在 $[t_0, t_1]$ 上连续，$f(t)$ 非负，满足 $x(t)\leqslant M+\int_{t_0}^{t}[x(\tau)f(\tau)+g(\tau)]d\tau$ 则

$$x(t)\leqslant\left[M+\int_{t_0}^{t}\left(e^{-\int_{t_0}^{\tau} f(s)ds}g(\tau)\right)d\tau\right]e^{\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau}$$

证：证明类似于定理 1

当取 $g(t)\equiv C$ 时，并注意到 $e^{-\int_{t_0}^{t} f(s)ds}\leqslant 1$，则由 $x(t)$

$\leq M+\int_{t_0}^{t}(x(\tau)f(\tau)+C)d\tau$ 可得到

$$x(t)\leqslant(M+CT)e^{\int_{t_0}^{t}f(\tau)d\tau}\qquad(T=t-t_0)$$

新生园地

蛙鸣第44期

1991年4月

Mŏbius带的一些性质

871　杨庆

从所周知，Mŏbius带是将正方形对边反向粘合而成的商空间，它具有很多有意思的性质。

先考虑它的几种等价定义

定义1　如上：

定义2　R^2中定义～如下。$(x,y)\sim(x+2k\pi,(-1)^k y)$则 $R^2/\sim$成商空间为一（无界）Mŏbius带，比较正规的定义把它看成$\mathbb{R}P_1$上的线丛。

定义3　$\eta_1=\{([x],\lambda x)\mid x\in S^2,\lambda\in\mathbb{R}\}$是Mŏbius带它是$\mathbb{R}P1\times\mathbb{R}^2$的子丛。（参看〔1〕）

Mŏbius带是不可定向的流形的最简单例子，证明也多种多样，可以用连通性，同调群，截面等多种手段，（参看〔1〕，〔2〕〔3〕、〔4〕）这些书中并且有很好的图帮助理解。

由有界的Mŏbius带粘合对边的点，就得到了难以想象但非

常重要的Klein瓶。

下面转入一些深入一点的讨论 有

定理1 $S^1(=\mathbb{R}P^1)$上的线丛只有两种：要么同构于η_1，要么同构于$S^1\times\mathbb{R}^1$（圆柱）

证明：$S^1\times\mathbb{R}^1$是S^1上的平凡丛，S^1的线丛L上取一单位向量e绕一圈，要么变为$-e$，要么不变，不变，则L有处处非0的横截面（Cross-Section）L平凡，反之，可以作出到η_1（Möbius）带上线丛的同构。

令人惊奇的是，$\eta_1\oplus\eta_1$却又同构于$S^1\times\mathbb{R}^2$，平凡的；（$\oplus$为Whitsey和）因而可进一步证明S^1上的$\mathbb{R}^n$丛也只有两种形式，在同构意义下。

$\mathbb{R}P^2$和Mobius带有着深刻的联系，一方面$\mathbb{R}P^2$可由一Möbius带和一圆盘适当地在公共边界S^1上粘合得到，另一方面$\mathbb{R}P^2$本质上就是Möbius带的加一点紧致化，首先有

定理2 $\mathbb{R}P^2-\{P\}\cong\eta_1$。

证明：$\mathbb{R}P^2$中的点地位是相等的，不妨设$P=(0,0,1)$。

验证：$h:\mathbb{R}P^2-\{P\}\to\eta_1$

$$h((x_1,x_2,x_3))=((x_1,x_2),\frac{x_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}(x_1,x_2))$$ 是所求的同构。

在一次愉快的课间讨论中，谈到这个有趣的事实时，陈卿提出η_1的加一点紧致化是否就是$\mathbb{R}P^2$呢？林强随即指出这是正确的因为加一点紧致化本质是唯一的，而$\mathbb{R}P^2$紧。

也许，Möbius带还有许多更加深刻的性质，事实上，它决不

仅仅是用来观察的。示性类理论中刻画向量丛的Stiefel-Whitnty上同调类的四条公理中，最后一条就是对Möbius带的描述。有些极简单的东西可引出极有价值的结果，（当然这些东西后本身也许就有深刻的背景），Jones研究，绳结引进的Jones多项式和其他一些工作使他获得了Fields奖。或许每一不寻常的事都隐藏着一个深刻的故事。

本文是受陈卿鼓励写成的，在此表示感谢。

参 考 文 献

〔1〕 TH.BRÖCKER and K.JANICH: Introduction to differntial topology

〔2〕 JOHN MILNOR and JAMES D.STASHEFF Characteristic Classes

〔3〕 徐森林：《流形讲义》

〔4〕 杨 庆：《关于假流形》本期《蛙鸣》

蛙鸣第44期

1991年4月

美国加州大学洛杉矶分校（UCLA）
博士资格考题（1986年秋季）
代　　数

所有题目分数相同。

从四部分中每部分选择两题，请指明你要得分的题。

群论

1、设G为有限群，H为G的真子群，试证：G不是H的所有共轭子群之并。

2、设S_n为n个元素之集合X的所有置换构成之对称群，设$G<S_n$是p^k阶子群，其中p为素数，且除不尽n。试证：G自然地作用于X上有一个不动点（即证明存在元素$x\in X$，使得$\sigma(x)=x, \forall\sigma\in G$）。

3、设G为Abel群，它有子群A，B使得

$$A+B=G,\ A\cap B=\{0\}$$

（即G为A和B之直接和），这个分解称为rigid的，如果对G之任一自同构σ，它使A不变（即$\sigma(A)\subset A$），则也使B不变，反之亦然。

(a) G，A，B如上，设B中元素至少两个，且B同构于A的一个子群。试证上述分解不是rigid的。

(b) 试证：若G是有限Abel群，且它的任一直接和分解为

rigid的。试证：G为循环群。

环与模

1、(a) 试证：R上所有实值连续函数构成之环C不是Neotherr环；

(b) 试给一个有么元整环A之例，使得在A中有不可约元f，其由f生成之主理想(f)$\subset$A不是素理想。(非零元f$\in$A是不可约的，是指它不是单位，且不能写成两个非单位之乘积)。

2、设A为含么元交换环，x$\in$A称为幂零的，如果对某个$n>0$，有$x^n=0$，记N(A)为A中所有幂零元构成之集合(称为A的幂零根)

(a) 试证N(A)为A之理想。

(b) 设M(A)$\subset$A为A的所有素理想之交，试证：N(A)$\subset$M(A)。

(c) 记号如(b)，试证N(A)=M(A)。

((c)之提示：取定非幂零元f$\in$A，令Σ为A中所有适合下述条件之理想I构成之集合，这里条件为：

$$I\cap\{f^n \mid n\geq 0\}=\emptyset$$

用包含关系作为Σ之序。试证：Σ有极大之P，去证：p为素理想。)

3、设$I\subset C[X_1,\ldots,X_r]$为理想，它具有下面的性质：对每个f$\in$I，$C^r$中使f为零之子集只有原点，即

$$\{(a_1,\ldots,a_r)\mid f(a_1,\ldots,a_r)=0,\ \forall f\in I\}=\{(0,\ldots,0)\}$$

试证：$C[X_1,\ldots,X_r]/I$为C上有限维向量空间。

(提示：先证理想$(X_1,\ldots,X_r)$的某个方幂包含在I中)。

域

1、考虑域的扩张

$$K = Q(\sqrt[8]{5}, i) \supseteq Q$$

试明确地给出。

(a) 此扩张之Galois群之生成元及这些生成元适合之关系。

(b) 所有中间域 $K \supseteq L \supseteq Q$，使得 L 在 Q 上正规。

2、设 K 为特征零之域，对 $K(X)$ 中每个奇数项多项式 f 在 K 中必有根（例如 $K = R$）。

试证：若 L 为 K 之有限扩张，则存在整数 n，使得

$$[L : K] = 2^n$$

（提示：用Sylow定理）

3、设 n 为正整数，考虑代数数

$$\xi_n = \cos(2\pi/n).$$

(a) 试证：若 $n > 2$，则

$$[Q(\xi_n) : Q] = \phi(n)/2$$

其中 ϕ 为Euler ϕ 函数。（注意：你可以任意使用分圆域 $Q(e^{2\pi i/n})$ 的标准定理。）

(b) 试证：$\cos(2\pi/n) \in Q$，当且仅当 $n = 1, 2, 3, 4, 6$。

线代数

1、设 A 为 2×2 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) 存在两个以上的复矩阵 B 满足 $B^2 = A$。

(b) 求一个上述之 B。（你的答案可以用矩阵之积来表示）。

2、设v和ω为R^n中互相正交之单位向量，设$A=v\cdot\omega^t-I$

试用n表示detA。

3、设T，U，V→V为域k上n维向量空间上线性算子。设$T\circ U=U\circ T$，且T幂零，但是$T^{n-1}\neq 0$。试证：存在$f(x)\in k[x]$使得$U=f(T)$。

几 何/拓 补

下列各题分数相同

几何

下列五题任选四题，所有流形都假设是无边界的光滑流形。

1、设C是M中的光滑闭曲线（即：$C=a(S^1)$其中$a:S^1\to M$是光滑嵌入）。求证：存在光滑向量场X，使得C是X的闭轨道。

2、定义由向量场X生成的微分同胚的局部单参数群。求证：若X，Y是向量场，使$[X,Y]=0$，那么由X，Y生成的微分同胚的两个单参数群彼此交换。

3、设T^*M是M的余切丛，对任意M上光滑1－形式ω，设$i_\omega: M\to T^*M$定义为

$$x\mapsto (x,\omega(x))$$

求证：i_ω是光滑嵌入。

4、设M，N是光滑紧致流形，使$\dim M<\dim N$。求证：任意嵌入$i:M\to N$，$i(M)\neq N$。（注，请勿引用Sard定理）。

5、设M是连通的，$\Lambda^n T^*M$是M上n－形式丛，其中$\dim M=n$，求证下述两条件等价。

(i) $\Lambda^n T^*M\diagup\{x(0):x\in M\}$恰好有两个分量。

（ii）M上存在光滑n－形式ω，用$\omega(x)\neq 0$， $x\in M$。

拓扑

下列五题任选四题

1、设连通的单复形X可以表示为两个连通单子复形Y，Z之并，$Y\cup Z$，且交$Y\cap Z$是不连通的。求证，X的基本群是无限群。

（一种可能做法：构造一个X的无限集的连通覆盖空间。）

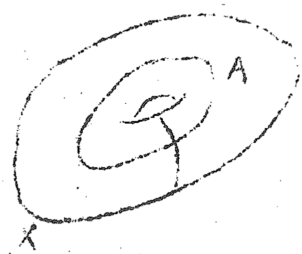
2、设T记2维环面$S^1\times S^1$，设RP^2是投影平面，即由2－球S^2中将相对极点看成等同所形成的空间。

（a）T和RP^2的基本群是什么？

（b）求证：恰好存在4个T的基本群到RP^2的基本群的同态。

（c）对（b）中四个同态中的每个同态，构造T到RP^2的映射，使得它诱导出这个同态。（提示：可将T视为一正方形将两对边粘起而成）。

3、（a）试定义边缘同态$\partial: H_q(X,A)\to H_{q-1}(A)$，使得它出现在$(X,A)$的同调群的长正合列中，其中X是单纯复形，A是X的子子复形。



（b）在$X=S^1\times S^1$，$A=S^1\times\{X_0\}\cup\{X^0\}\times S^1$的情形（其中$X_0\in S^1$是某个基点）确切描述：

$$\partial: H_2(X,A)\to H_1(A)$$

4、设$S^n=\{(X_0,X_1,\dots,X_n)\in R^{n+1}\mid \sum_{i=0}^{n} X_i^2=1\}$是$R^{n+1}$中的单位球，设映射$f: S^n\to S^n$，没有不动点（即$f(X_0)$，

$x_1, \cdots, x_n) \neq (x_0, x_1, \cdots, x_n)$，$\forall (x_0, x_1, \cdots, x_n) \in S^n$)。

(a) 求证 f 与对校映射：$a: S^n \to S^n$，$a(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (-x_0, -x_1, \cdots, -x_n)$ 是同价的。

(b) f 的阶是多少？

（注：答案依赖于 n，说明你的理由。）

5、设 $B^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in R^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1\}$ 是 R^n 中的闭的 n－单位球，求证：当 $m \neq n$ 时 B^n 与 B^m 不同胚。

（许以超译 [illegible]绪宁校）

蛙鸣第44期

1991年4月

问题100* 自然定义又范畴的子范畴或范畴嵌入。任意范畴是否可找到一个“完备化”嵌入，使之任一对象的集有积或上积。

871 杨 庆 提供

问题101* $\alpha \neq 0$，$|\alpha| < 1$，证明对于任何复序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ 成立时，下列方程组有唯一解，而且有

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leqslant \frac{1}{1-|\alpha|}$。

$$
\begin{pmatrix}
\binom{0}{0} & -\binom{1}{0}\alpha & \binom{2}{0}\alpha^2 & -\binom{3}{0}\alpha^3 & \binom{4}{0}\alpha^4 & \cdots \\
 & -\binom{1}{1}\alpha & \binom{2}{1}\alpha^2 & -\binom{3}{1}\alpha^3 & \binom{4}{1}\alpha^4 & \cdots \\
 & & \binom{2}{2}\alpha^2 & -\binom{3}{2}\alpha^3 & \binom{4}{2}\alpha^4 & \cdots \\
 & & & \cdots\cdots & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} x_0 \\ -\alpha a_1 \\ \alpha^2 a_2 \\ \vdots \end{pmatrix}
$$

881 吕金波 提供

问题102* 平面上n点之集B中任三点不共线，另有一点集A，如果对B中任三点组成的三角形内有A的点，则称A耗尽了B，证明：如果B的闭包是m边形，则需且只需 $2n-m-2$ 个点耗尽B。

（改自以色列竞赛题　陈计提供）

编者按：本刊自26期对问题统一编号，对提问者和编者都没有解决的以*号标出。

重要更正

蛙鸣第43期问题97及98有误，编者诚向提问者及广大读者深致歉意，更正如下：

问题97* 函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\forall a>0$，积分$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-ax^2}dx$存在并且为零。证明或否定：$f(x)=0$。

（87　李文志　提供）

问题98* 证明：若p_i（$1\leqslant i\leqslant n$）为奇素数，则

$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}\prod\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{P_i}$非自然数。

（宁高专　周晓东　提供）

（在此，其它错误不一一勘正了）

蛙鸣第44期
1991年4月

回顾与展望

871　李文志

十年前，我系学生自办的《蛙鸣》数学杂志诞生了。当时，一群矢志攻读的学子为了加强相互交流，增强学术气氛而创立了这份刊物。如今，他们大多已在国外，而由他们所创办的《蛙鸣》却在一届又一届学生的不懈努力下，茁壮成长着。

在《蛙鸣》创刊十周年之际，作为编委，我们回顾既往，不胜欣喜，展望未来，满怀希望。

十年来，《蛙鸣》取得了可喜的成绩。到今天，它不仅在校内颇颇有影响，而且与校外乃至国外的一些学术交流点建立了联系。其中发表的许多文章得到了著名学者的首肯和赞赏。越来越多的人在注意到，在这份非正式出版的杂志上，有一些珍珠般有价值的东西。

十年来，在为《蛙鸣》的发展而不懈努力的学生当中，涌现出许多善于研究的优秀的青年人，冯阳、黎荡修、陈计、王岚、王振等是他们当中杰出的代表。可以说，没有他们便没有《蛙鸣》的今天。他们不但锻炼了自己，还给后来者留下了优良的治学传统和浓厚的学术气氛，激励着一批又一批后来者为数学研究而孜孜进取。

蛙鸣的发行得到了系内老师及至校领导的热情的鼓励和不遗余力的支持。《蛙鸣》本身就是系内师生之间学术交流的一条纽带。其中一些问题是老师们提出的，许多文章是师生合作或是学生在教师的指导下完成的。作为编委，我们真诚欢迎老师给予指导和提出

改进意见。

勿庸讳言，作为一份学生刊物，《蛙鸣》不可避免地存在着一些缺陷，它的进一步发展也会遇到不少困难。但有广大师生和朋友们的热心支持，有全体编委的共同努力，它一定会不断克服困难和缺陷，得到发展。

春花烂漫的时节到了，声声蛙鸣交织成一曲原野耕耘的歌……