

# 蛙鸣



皇榜 星辰 初阳 蛙鸣记忆  
蛙声一片 笔墨诗篇



第64期



1981.6 - 2021.6

中国科大数学杂志

# 院长寄语

《蛙鸣》承载着科大数院的同学们探索数学、分享知识、创造新天地的满腔热情和无限期待。一声声纯粹而质朴的“蛙鸣”，其形虽小，其声也宏。值此《蛙鸣》创刊40周年之际，希望同学们以此为新的起点，携手奋进，将科大数学的精神薪火相传，在数学世界里继续追寻纯粹崇高的理想，求实求真，勇于创新，奏响科大数学人的最强音！

马志明

2021年6月4日

蛙  
鸣

其形也微

其声也宏

其形也微  
其声也宏

其声也宏

## 卷首语

诞生于1981年6月的《蛙鸣》，在过去见证了科大数院学生们无数思维火花的迸发与碰撞，汇聚了无数智慧的结晶。当年那些热情撰文的同学们，已然成为我们身边的老师和出色的数学工作者。

岁月洪流之间，蛙鸣之声渐渐销声匿迹，这本刊物于十年前遗憾停刊。但一代又一代的科大数学人仍执着于探索数学世界的深邃，企盼着分享灵光乍现的奥妙。年复一年，我们希望复兴《蛙鸣》的愿望愈发强烈，我们想要重新拥有属于我们自己的那个自由开放、原创独立的数学讨论平台。

2021年初夏，阔野万里中的一声蛙鸣打破了尘封十余年的寂静。创刊四十周年之际，在科大数院老师、校友、同学们的支持和关心之下，我们带着《蛙鸣》回来了！这期《蛙鸣》已是长眠之后的苏醒，愿它能点燃你我心中对数学的热情；能唤起蛰伏于你我心中那一声声纯粹质朴的蛙鸣，在未来延绵不绝、生生不息。

蛙鸣者，其形也微，其声也宏，我们一直如此。

第64期《蛙鸣》编辑部  
2021年6月9日

# 第64期《蛙鸣》编辑部

(按汉语拼音排序)

主 编

章俊彦

编 委

陈恒宇 黄欣祺 邵 锋

宋秋阳 王麒翔 姚一晨

章俊彦 郑伟豪

设 计

宋秋阳 吴 迪

排 版

吴松宇

记 录

王一越

投稿 / 建议 / 勘误

mathsu01@ustc.edu.cn

扫描二维码获取更多信息



蛙鸣主页  
获取电子版

联系我们  
数院学生会QQ

# 目录

蛙鸣记忆 ... 鄂维南 胡森 黄文 1

## 初阳

关于介值性的思考 ... 谭午煊 8

使用松弛法求解带有Dirichlet边界  
条件的矩形区域上的Poisson方程  
问题 ... 周文斌 14

## 星辰

暖阳中生长——采访叶向东院士

... 陈恒宇 黄欣祺 30

“浪迹天涯的师兄们”座谈实录

... 温丰宁 34

How to do mathematics (翻译稿节选)

... Benson Farb 43

从正多边形中的有理比到 $\tan(\pi/n)$   
的极小多项式

——纪念杨武之先生(1896–1973)

诞辰125周年 ... 林开亮 52

## 蛙声一片

图兰定理与多项式方法	... 马 岳	82
同调群与上同调的几何解释	... 马 晓	86
流体自由边界问题（一） ——理想流体与水波	... 章俊彦	93
Brunn-Minkowski 不等式	... 曹鸿艺	112
一道丘赛题的解答与推广：随机幂级数 在端点处的渐近性态	... 邵 锋	119
Laplace特征函数零点集与丘成桐猜想	... 叶子恺	127
例子与分类定理	... 周潇翔	136
算术函数的震荡定理	... 邹广翼	150
遍历定理	... 姚一晨	162
内接正方形问题和内接矩形问题	... 宋晨锴	172
非线性对流扩散方程的间断有限元方法	... 金晨浩	182
Kakeya猜想的简单介绍	... 吴澍坤	197

蛙

## 笔墨诗篇

现代诗四首	... 陈 凡	204
-------	---------	-----

## 皇榜

皇榜	... 208
致谢	... 221
征稿启事	... 222

虫鸣

我们是一群小青蛙，《蛙鸣》就是这个意思吧。

当初我们办《蛙鸣》，是为了活跃学术气氛，大家可以增加学术方面的交流，分享学习过程中的感想。百花齐放，百家争鸣，不仅仅是绩点和上课，同学们之间也应该有各种各样的交流讨论。比方说我们78级那时候办过一个青年自然学会，大家讨论一些科学方面的事情，我们组织过各种各样的学术讨论班，78级的同学还一起翻译了do Carmo的微分几何书。我们做了很多这种事情，我个人觉得像《蛙鸣》、青年自然学会这样的讨论，对我的影响是非常大的。尽管那时候做的一些事都比较稚嫩，但是这样一个过程对我个人价值观的树立还是很有帮助的。

在大学时代，很重要的一件事就是建立人生的价值观：你这一辈子想干什么。绩点固然重要，但如果把全部功夫都花在绩点上，那显然不是一个成功的教育模式。更重要的是你各方面的价值观，人生的、社会的价值观，包括学问的价值观。什么样的学问是一个好学问，这也是一个非常重要的价值观问题。

像我一辈子做学问的过程，很大程度上就是在追求、探索应用数学该怎么做，几十年来都是如此。我个人觉得数学会面临一个比较大的变化，现在有了人工智能、机器学习，这些会对数学产生非常大的影响。数学以前跟应用的连接是相对间接的，而现在是非常直接的，而且这个直接的连接会是未来社会、技术发展的热点，这是我们没办法避免的。

我个人觉得数学面临着前所未有的机会，所以一方面我希望科大的同学能够像过去几十年一样坚持扎实的学风，另一方面我也希望科大的同学能够把握住这个机会，能够率先利用这个机会把数学推到一种新的发展方向。

文/鄂维南



图/数学系1978级学生“青年自然学会”成员合影

前排左起：陈家骅、胡森、汪扬、周东航、张继江、孙国璋、马文秀

中排左起：孙业能、江明昌、刘西所、施皖雄、林诚、苏宇、涂冬生、张平、鄂维南

后排左起：王建荣、王小林、陈泽森、莫小康、李从明、孙瑞平、文小芒、周建伟、王翎、耿晓

# 蛙鸣

文/胡森

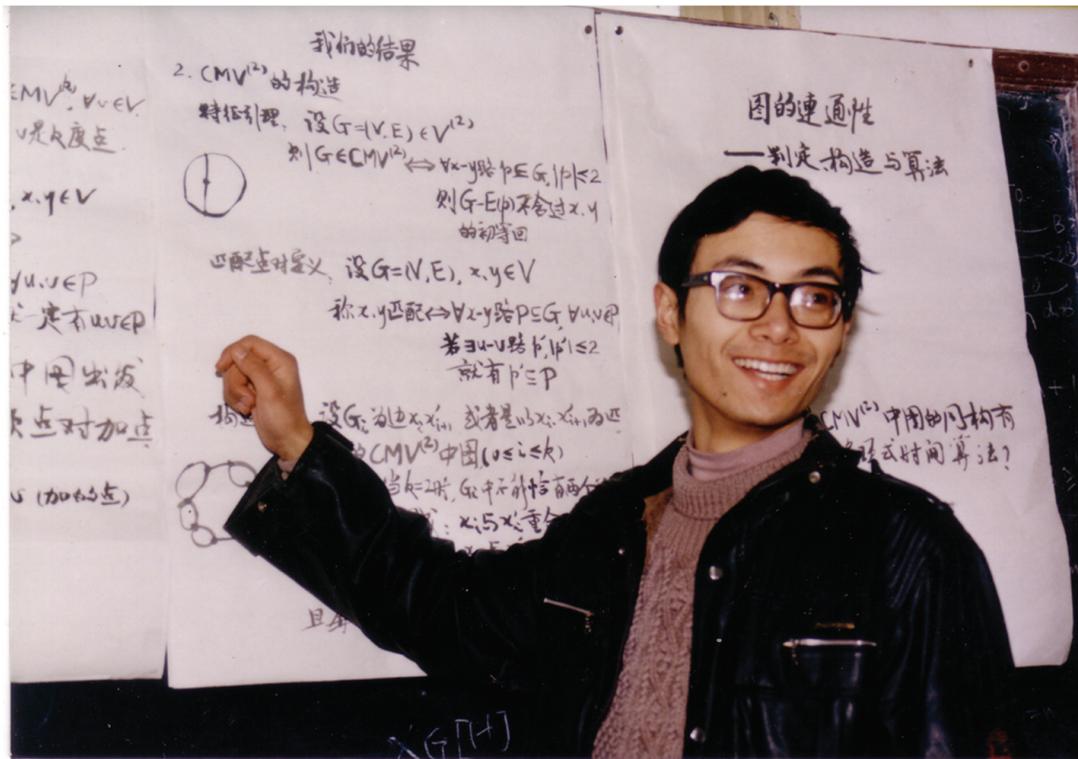
在81年的时候，我们几位78级的同学决定创办一本杂志，于是就有了《蛙鸣》。本来我们平时的交流就比较多，兴趣都很广泛，文学名著、古文外文经典、物理书籍、经济书籍等等都有同学在学习，大家还自发组织讨论。像我对哲学很感兴趣，论语孟子，罗素康德都读过。当时我们的思想很活跃，还成立了一个青年自然学会。我们办的前几期涉及的内容很广，物理哲学经济等等都有，不只是数学问题，几乎都不太像是数学系的同学办的杂志了。我自己也写过一点，写怎么理解范畴、函子。当时根本就没有这门课，我自己在那儿看了半天，然后写了个笔记。现在回去看，觉得写得还可以，而今天这套理论变成了很有用的数学。

同学们可以思考一下应该要学哪些东西，哪些东西对我们来说是基本的，我们对哪些东西有兴趣。学这些的目的都是为将来能够解决问题。一方面，我们要了解现代数学的发展，它的主干是什么，它的主流是什么？这些是活的数学。另一方面，为了这个主流我们需要学习哪些东西，才能进到里面去？它的发展趋势是什么，大家关注什么问题，这些年有哪些重要的工作？这些都是可以去学、可以去了解的。Grothendieck在代数几何领域，丘成桐先生在几何分析领域，我的导师Thurston在几何拓扑领域，Witten在弦论和量子场论领域等等，他们都是以自己的工作改变了数学的发展，而将来你们要继续去创新、去发展。当你了解这些比较主流的发展，思路就会比较开阔。这样你学的东西就有意义了，否则，大家也许会问，我整天学这个那个能干什么，对不对？

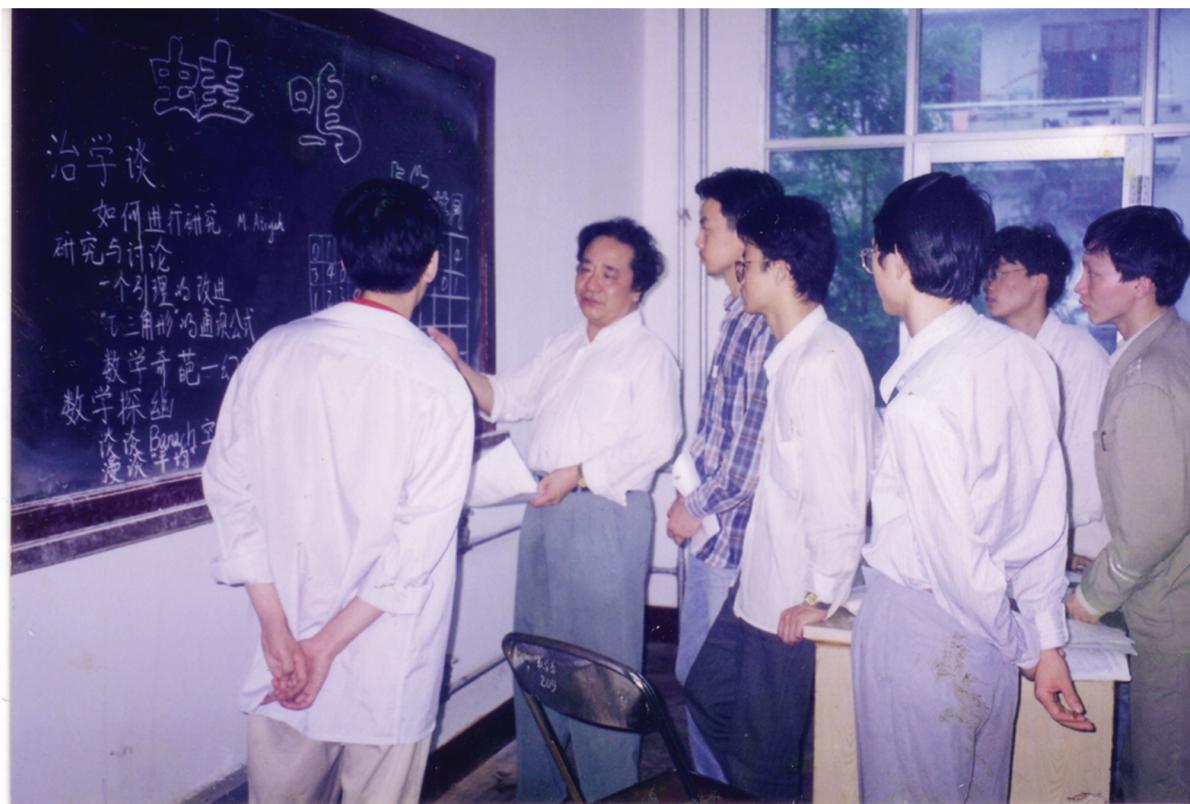
数学家本身注重的也是思想，很多大数学家的兴趣非常广泛。大数学家Hermann Weyl，他也是一个大物理学家，他对物理的很多发展方向都非常关注，也很了解。数学整体的发展是和其他领域联系在一起的，你必须要思考数学是怎么发展的。你有哪些最基本的问题，在最基本的问题上你解决了什么，有什么样的困难。但是现在我们数学的培养还是比较注重形式上的概念，比较形式化。在学习数学的过程中，很多同学可能会钻“牛角尖”，但如果那几个“牛角尖”不能解决问题，就可以不用去钻。要以理解概念，理解问题为主，要关注实际问题，不能流于形式化，不能被圈住思路。数学中的定义是为了简化现象，是通过一些概念来综合很多事实，而不是单纯地为了定义而定义。过于形式化，碰到实际问题反而会找不到门路，一筹莫展。应该是反过来的，碰到实际问题，我们有很多招数能够解决问题，在这个过程中把它提炼成一种好的方法，找到一些有共性的东西。

还记得以前数学系上课的教室在四牌楼<sup>1</sup>，那时候周围都是农田，有时候晚上跑出去，随便一捞就捞出很多龙虾来。有一次我们自然学会的几位同学就在那间小教室里讨论。想了半天没有想出好的杂志名字，我还清清楚楚地记得有同学在黑板上画了一只虾，很生动。最后想到就叫“蛙鸣”，大家都觉得很好。

<sup>1</sup> 原址在今天的物质科研楼



图/《蛙鸣》编委在讨论稿件



图/原系主任李尚志教授和学生讨论《蛙鸣》选题

1981年6月20日自写、自编、自刻、自印，诞生了一本属于我们中科大本科学子自己的数学期刊——《蛙鸣》。白驹过隙，时光荏苒，转瞬间《蛙鸣》创刊40周年将至，在各位同仁和同学们的共同努力下，《蛙鸣》将再次出版，这于我这位《蛙鸣》曾经的作者而言，是一种深深的感动和无比的期盼。

回首来路，1998年那个秋，我们还是科大数学系大四的学生，恰同学少年，风华正茂。作为班上的学习委员，我和同班同学万振东、李锦嘉一起作为责任编辑负责出版了《蛙鸣》第53期。特别要感谢我多年的挚友四川老乡数学系93级吕林军师兄以及数学系96级诸位师弟的大力支持。那时哪怕是一个不等式，一个趣味问题，一个简明解法……都让

我们欣喜若狂，我们在自己能感悟到的小世界里探索，未必是多深奥的问题，不必是太深刻的认识，只是一次次探索，一点点尝试，慢慢体会在成长中失败，在失败中成长。于我而言，那是第一次尝试从做习题到自己学会去找问题，并不断尝试解决这些问题的过程。我们为此苦，为此癲，为此喜，那种种感受到如今都还历历在目，如此美好、如此梦幻。我们见证了《蛙鸣》的成长，它也见证我们的成长。未来可期，不负韶华，愿数学《蛙鸣》杂志在我们科大学子手中薪火相传，与我们同呼吸，共成长，不忘初心，方得始终。

文/黄文

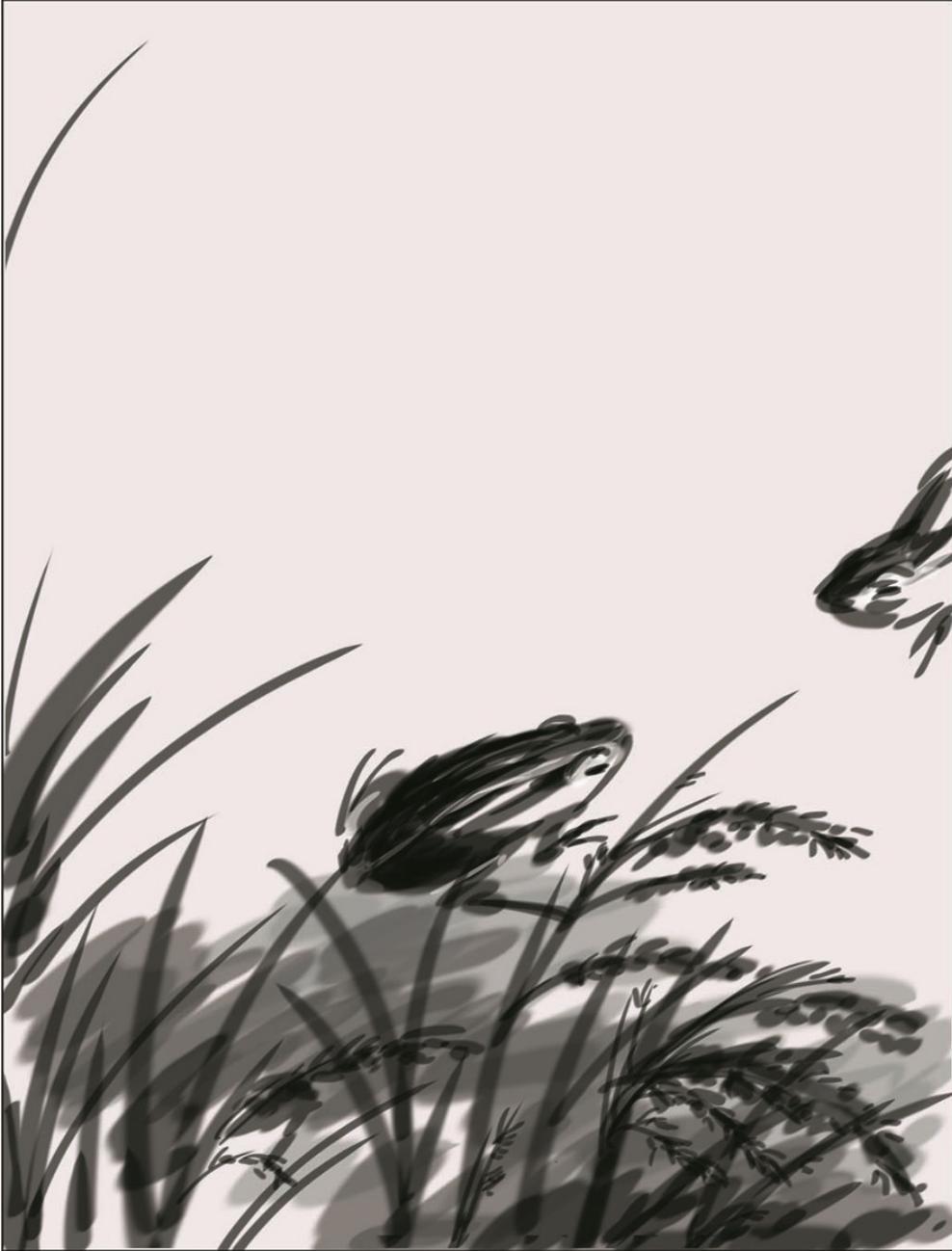


图\第四届《蛙鸣》编委会合影

炽红之心

初起之阳

泼洒满金黄



稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》

初  
阳

阳

阳

壹 · 初阳

# 关于介值性的思考

谭午烜

## 摘要

“连续函数具有介值性”，这是一个经典的结论，由这一性质，我们可以产生很多的思考。一个思考是该命题的反面，它的逆命题并不成立，函数  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})(x \neq 0), f(x) = 0(x = 0)$  是一个容易想到的例子。但是，这个函数仅仅在  $x = 0$  处不连续，可以说算不上一个很强的反例。我们自然会想去构造更强的反例，[12] 中有这样的一个思考题：“举例说明：区间上的函数即使处处不连续，也可以具有介值性质”，利用数码或是其他方法，我们可以构造这样的函数。另一个思考源于 Darboux 的介值性定理，它断言导函数一定具有介值性，这引发我们对于导函数、连续函数、有介值性的函数这些函数类的关系的思考，并延伸到对于这些函数类自身性质的研究。

## 1 问题的开始

在学习连续函数时，我们证明了一个重要并且也符合直觉的定理——介值性定理，它的表述如下：

**定理 1.1.** [11] 设  $f$  是区间  $[a, b]$  上非常值的连续函数， $\gamma$  是介于  $f(a)$  与  $f(b)$  之间的任何实数，则必存在  $c \in (a, b)$ ，使得  $f(c) = \gamma$ .

由于  $f$  在  $[a, b]$  上连续可以导出  $f$  在  $[a', b'] \subset [a, b]$  上也连续，因此，对于任何实数  $\gamma'$  介于  $f(a')$  与  $f(b')$  之间，也一定存在  $c' \in (a', b')$ ，使得  $f(c') = \gamma'$ . 通过这个观察，我们想以如下方式明确定义介值性：

**定义 1.2.** 对于定义域为  $A$  的函数  $f(A$  可以是任何集合)，如果  $f$  满足：对于任意区间  $[a, b] \subset A$ ，只要  $\gamma$  是介于  $f(a)$  与  $f(b)$  之间的实数，就一定存在  $c \in (a, b)$ ，使得  $f(c) = \gamma$ . 我们就称  $f$  具有介值性，或者更具体地， $f$  在  $A$  上具有介值性.

很自然地，我们会思考介值性定理的反面：如果有介值性，是否就一定是连续函数？从我们熟悉的一些特别的函数中，不难找出下面的例子：

### 例 1.1.

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

函数  $f$  在  $x = 0$  处不连续，但在  $\mathbb{R}$  上具有介值性.

这个例子已经表明介值性与连续性不能等同，但它们之间又有多大的差距？其实，在一些额外的条件下，我们可以由前者导出后者。例如，函数单射、函数单调、函数图像连通。对于一般的情况，是否存在“很不连续”，但又有介值性的函数？还是介值性总可以导出一定的连续性？（比如在某些点处）我们将在下面两节中回答这一问题。

作者：谭午烜，2020 级数学科学学院，邮箱: [uranus@mail.ustc.edu.cn](mailto:uranus@mail.ustc.edu.cn).

稿件信息：本稿件于 1 月 29 日来稿，3 月 9 日第一次修改，3 月 21 日第二次修改，3 月 23 日接受。稿件编辑：章俊彦。

## 2 不连续的 $\mathcal{DC}$ 函数

在 Darboux 之前, 一些数学家认为介值性等同于连续性, 介值性可以作为连续的定义 [1]. Darboux 在 1875 的一篇论文中给出了导函数的介值性定理, 并以此为基础构造了在有理数点不连续的导函数, 其出发点是这样一个函数:

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

函数  $\varphi$  在  $\mathbb{R}$  上可导, 且  $\varphi'$  在  $x = 0$  处不连续, 而由 Darboux 介值性定理,  $\varphi'$  又具有介值性. 我们将介值性称为 Darboux 性质或是 Darboux 连续, 定义在  $\mathbb{R}$  上具有 Darboux 性质的函数构成的集合记为  $\mathcal{DC}$ . (Darboux continuous)

Darboux 构造了一个函数列  $g_n(x) = \frac{a_n}{n} \varphi(\sin n\pi x)$  (这里  $a_n$  是满足  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$  的实数序列), 再令  $f_n(x) = g'_n(x) = \pi a_n \cos(n\pi x) \varphi'(\sin n\pi x)$ , 考虑它们分别构成的级数

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x), \quad f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

由 Weierstrass 判别法, 它们都是一致收敛的. 因此  $g$  为  $f$  的原函数 ([8] 定理 7. 17), 再由 Darboux 定理,  $f \in \mathcal{DC}$ . 注意到  $f_n$  的不连续点构成集合  $\left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$ , 因此  $f$  在无理数点处一定连续. Darboux 不加证明地指出了  $f$  在有理数点处一定不连续, 利用级数的知识可以严格证明这一断言. [6]

Darboux 的构造表明  $\mathcal{DC}$  函数可以“很不连续”, 他的构造是从导函数的性质出发, 实际上构造了一个  $\mathcal{D}'$  中“很不连续”的函数. 当抛开具有原函数这一要求后, 我们其实可以构造一个处处不连续的  $\mathcal{DC}$  函数! 就像 Weierstrass 构造了一个“连续但处处不可导”的函数一样令人诧异.

下面是 Lebesgue 利用数码给出的一个构造 [6]: 将  $x$  表示为无限小数的形式  $I.a_1a_2\dots a_n\dots$ , 如果  $.a_1a_3\dots a_{2n-1}\dots$  不是最终周期的, 则令  $f(x) = 0$ , 如果是最终周期的, 且从  $a_{2n-1}$  开始周期, 则令  $f(x) = .a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\dots$  这样的定义在全体实数上的函数  $f$  在任何非空开区间上都可以取到  $[0, 1]$  中任意值, 而由定义  $0 \leq f(x) \leq 1$  恒成立. 因此  $f \in \mathcal{DC}$  但处处不连续. 一个类似的构造也是考虑  $x$  的小数部分  $.a_1a_2\dots a_n\dots$ , 并定义  $f(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .

## 3 更多的例子

Lebesgue 的例子为我们在构造上带来了启发——只需要找出一个在任何非空开区间内都可以取到任何实数值的函数 (称这样的函数为  $(\star)$ -函数), 它就一定处处不连续但又有介值性. 在这一想法的引导下, 我们可以更容易地找到一些例子. [7](尽管它们的形式很奇怪)

第一个例子是 Conway 的 base 13 函数, 利用 13 进制表示定义的函数. 我们把“0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C”视为 13 进制下的数码. 对于每个  $[0, 1)$  中的实数  $r$ , 它可以按 13 进制表示成下面的形式:

$$r = .c_1c_2c_3\dots c_n\dots,$$

其中  $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C\}$ , 并且, 如果要求对于任意的  $n > 0$ , 存在  $m > n$  使得

$c_m \neq C$ , 那么这样的表示是唯一的. 我们称之为标准表示, 在下一节我们还会用到类似定义的二进制的标准表示.

对于序列  $c_j c_{j+1} c_{j+2} \dots (j \geq 1)$ , 我们称它为  $r$  的“尾部”. 对于  $r$  的一个尾部  $x_0 x_1 x_2 \dots x_n y_0 y_1 y_2 \dots$  (为了表述方便改变了字母), 我们称它是“特别的”, 如果下面的条件均成立:

$$(i) x_0 = B \text{ 或 } x_0 = C;$$

$$(ii) y_0 = A;$$

$$(iii) n \text{ 为正整数, 且对于任意 } i > 0, x_i, y_i \text{ 都属于 } \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

容易看出, 对  $r \in [0, 1)$ ,  $r$  并不一定具有特殊的尾部, 但如果有, 那它一定是唯一的! 现在, 我们可以定义 Conway 的 base 13 函数了. 对于  $x \in [0, 1)$ , 设  $x = .c_1 c_2 c_3 \dots$  是它在 13 进制下的标准表示, 令

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 没有特别的尾部;} \\ x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots, & \text{如果 } x_0 x_1 x_2 \dots x_n A y_1 y_2 \dots \text{ 是特别的尾部, 且 } x_0 = B; \\ -x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 \dots, & \text{如果 } x_0 x_1 x_2 \dots x_n A y_1 y_2 \dots \text{ 是特别的尾部, 且 } x_0 = C. \end{cases}$$

需要注意到的是,  $f$  的像是在 10 进制下的. 由于特别的尾部的唯一性,  $f$  是良好定义的. 下面证明对于任意非空的开区间  $I \subset [0, 1)$ , 都有  $f[I] = \mathbb{R}$ .

设  $I = (a, b)$ ,  $0 \leq a < b < 1$ , 令  $a = .a_1 a_2 a_3 \dots, b = .b_1 b_2 b_3 \dots$  为 13 进制下的标准表示. 设  $i$  是最小的使得  $a_i < b_i$  的正整数,  $j$  是满足  $j > i$  且  $a_j < C$  的最小正整数. (标准表示保证了  $j$  的存在性) 对任何一个十进制表示下的非负实数  $x := x_1 x_2 \dots x_n y_1 y_2 y_3 \dots$ , 考虑 13 进制表示下的实数

$$c := .a_1 a_2 a_3 \dots a_i C_{i+1} C_{i+2} \dots C_j x_0 x_1 x_2 \dots x_n A y_1 y_2 y_3 \dots$$

(这里  $C_{i+1} = C_{i+2} = \dots = C_j = C, x_0 = B$ ). 易于验证  $a < c < b$ , 并且由定义,  $f(c) = x$ . 类似地, 对于  $c$  我们将  $x_0 = B$  修改为  $x_0 = C$  得到  $c'$ , 这样就有  $a < c' < b$ , 并且  $f(c') = -x$ . 由  $x$  的任意性可知  $f[I] = \mathbb{R}$ .

最后, 令  $\bar{f}(x_1 x_2 x_3 \dots x_n y_1 y_2 y_3 \dots) = f(.y_1 y_2 y_3 \dots)$ , 我们将  $f$  延拓到  $\mathbb{R}$  上, 得到  $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . 根据之前的论证, 可以得到  $\bar{f}[I] = \mathbb{R}$  对任意非空开区间  $I \subset \mathbb{R}$  成立, 从而  $\bar{f}$  是一个( $\star$ )-函数.

下面我们再简要介绍两个例子. 第二个例子的想法是在每个以有理数为端点的非空开区间  $(r_i, s_i)$  (注意它们是可列的!) 中定义足够多个点处的函数值, 使得  $f[(r_i, s_i)] = \mathbb{R}$ , 从而由有理数的稠密性可以导出  $f[I] = \mathbb{R}$ . 在定义  $f$  的过程中, 需要引入 Cantor 集, 并利用它的性质(零测, 在  $\mathbb{R}$  中闭, 不可数). 首先, 我们可以选出一列 Cantor 集  $\{C_1, C_2, C_3, \dots\}$  使得  $C_i \subset (r_i, s_i)$ , 并且两两不交. 再结合  $C_i$  与  $\mathbb{R}$  基数相同, 即可定义  $f$  使  $f[C_i] = \mathbb{R}$ , 进而  $f[(r_i, s_i)] = \mathbb{R}$ .

第三个例子的想法是将  $\mathbb{R}$  划分为不可数个稠密集. 一个自然的方式是考虑  $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (加法下的商群), 它的基数与  $\mathbb{R}$  相同, 从而存在双射  $g: \mathbb{R}/\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们再定义  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , 其中  $h(r) := \mathbb{Q} + r$ (陪集). 令  $f := g \circ h$ , 则有  $f[I] = \mathbb{R}$  对任意非空的开区间  $I$  成立. 这是因为, 对任意  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q} + x$  在  $\mathbb{R}$  中稠密, 从而存在  $\alpha \in (\mathbb{Q} + x) \cap I$ , 而  $f(\alpha) = g(\mathbb{Q} + \alpha) = g(\mathbb{Q} + x)$ , 由  $g$  为双射及  $x$  的任意性可知  $f[I] = \mathbb{R}$ .

## 4 $\mathcal{DC}$ 函数类的性质

我们记  $\mathcal{C}$  为定义在  $\mathbb{R}$  上的连续函数构成的集合.

前面的种种构造已表明,  $\mathcal{DC}$  函数可以足够不连续, 与  $\mathcal{C}$  函数具有很大的差别. 其实, 从整个  $\mathcal{DC}$  函数类的角度去考虑, 我们会发现更大的差别, 下面的结果表明,  $\mathcal{DC}$  函数类实际上“很大”.

**定理 4.1.** 对于任意函数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 存在  $f_1, f_2 \in \mathcal{DC}$ , 使得  $f = f_1 + f_2$ .

**定理 4.2.** 对于任意函数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 存在一个由  $\mathcal{DC}$  函数构成的序列  $\{f_n\}$  满足逐点收敛到  $f$ .

**定理 4.3.** 对于任意函数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , 存在  $g \in \mathcal{DC}$ , 使得  $\{x | f(x) \neq g(x), x \in \mathbb{R}\}$  为零测集且为 Baire 第一范畴集. (可数个无处稠密集的并, 其严格定义和相关应用参见 [9])

在  $\mathcal{C}$  函数类中, 任意两者之和仍在  $\mathcal{C}$  中, 任意逐点收敛得到的函数也很连续. (这是 Baire 范畴定理的一个应用) 这与  $\mathcal{DC}$  函数类的性质有很大差别.

关于定理的证明, 定理 4.1 可以由前一节中 (★)-函数构造得到 [10]. 下面一个更强的构造 [5] 可以同时推出定理 4.1, 定理 4.2, 也是利用数码:

对于  $x \in \mathbb{R}$ , 如果  $\{x\} = x - [x]$  的二进制标准表示具有如下形式,

$$0.a_0a_1a_2 \cdots a_k 0 \overbrace{11 \cdots 1}^m 0 \overbrace{11 \cdots 1}^n 0 \overbrace{11 \cdots 1}^p 0 \overbrace{11 \cdots 1}^q 0b_00b_10b_20b_3 \cdots$$

$(a_i, b_i = 0, 1; q \geq 2; k, m, n, p \geq 0)$

我们定义

$$\begin{aligned} g(x) &= (m - n) + 0.b_1b_3b_5b_7 \dots, \\ h(x) &= (p - q) + 0.b_2b_4b_6b_8 \dots. \end{aligned}$$

对于其他的实数  $x$ , 我们定义  $g(x) = h(x) = 0$ .

对于任意一个二元函数  $F(x, y)$ , 我们定义  $u(x) = h(x) - F(x, g(x))$ . 对每一个实数  $y_0$ , 考虑集合  $\{x | g(x) = y_0\}$ , 可以证明关于  $x$  的一元函数  $F(x, y_0) + u(x)$  为 (★)-函数.

令  $F(x, y) = \begin{cases} f(x), & y \neq 0; \\ 0, & y = 0, \end{cases}$  可知存在  $u(x)$ , 使  $u(x), f(x) + u(x)$  均为 (★)-函数, 属于  $\mathcal{DC}$ , 这就证明了定理 4.1.

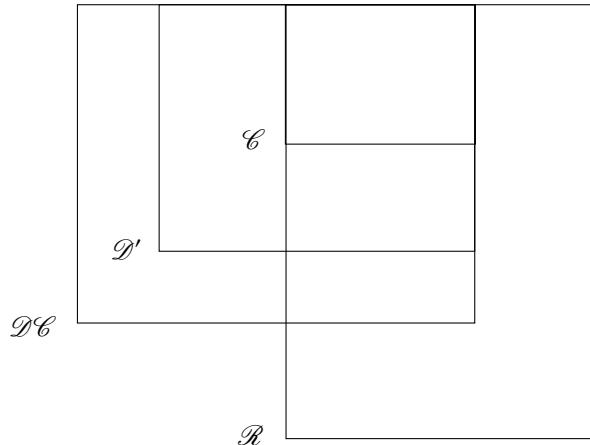
令  $F(x, y) = \begin{cases} (n - 1)f(x), & y = n(n = 1, 2, \dots); \\ 0, & \text{其他情形}, \end{cases}$  可知存在  $u(x)$ , 使  $(n - 1)f(x) + u(x)(n = 1, 2, \dots)$  均为 (★)-函数, 属于  $\mathcal{DC}$ . 从而  $f_n(x) := (1 - \frac{1}{n})f(x) + \frac{1}{n}u(x) \in \mathcal{DC}$ . 我们又有  $\{f_n(x)\}$  逐点收敛到  $f(x)$ , 这就证明了定理 4.2.

对于定理 4.3 的证明 [4] 需要对于实数集更深入的分析, 我们略去.

## 5 更多的思考

在第二节中, 我们提到了 Darboux 的介值性定理以及他在  $\mathcal{D}'$  中寻找  $\mathcal{DC}$  函数的想法, 我们也会由此去考虑“具有介值性的函数是否一定有原函数”这一问题. 更进一步, 甚至去

考虑与 Riemann 可积性的关联. 事实上, 定义在  $\mathbb{R}$  上的连续函数 ( $\mathcal{C}$ ), 有原函数的函数 ( $\mathcal{D}'$ ), 有介值性的函数 ( $\mathcal{DC}$ ), Riemann 可积函数 ( $\mathcal{R}$ ) 分别构成的四个函数类, 它们具有下面的包含关系 [10].



(图中的每个区域都非空)

我们给出一个在  $\mathcal{DC}$  中但不在  $\mathcal{D}'$  中的例子, 考虑

### 例 5.1.

$$g(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

它与之前所给出的  $f$  都属于  $\mathcal{DC}$ , 但两者中必有一者不在  $\mathcal{D}'$  中, 否则  $g - f \in \mathcal{D}'$ , 而  $g - f$  不具有介值性, 这与 Darboux 定理相矛盾. (在这里, 我们注意到  $\mathcal{D}'$  与  $\mathcal{DC}$  的一个差别, 前者加法封闭, 而由定理 4.1, 后者加法不封闭.)

在 Darboux 自己给出的不连续的  $\mathcal{DC}$  函数的构造中, 得到的函数不仅仅属于  $\mathcal{DC}$ , 也属于  $\mathcal{D}'$ . 这个函数并不是处处不连续, 事实上,  $\mathcal{D}'$  中并没有处处不连续的函数! 准确地说, 我们有下面的定理:

**定理 5.1.** 如果函数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  具有导函数  $f'$ , 那么  $f'$  的不连续点构成的集合是 Baire 第一范畴集.

它可以由 Baire 范畴定理得到, 相关内容可以参考 [9].

在  $\mathcal{D}'$  函数类中, 也可以找到一些不连续点集具有特定性质的函数, 在 [3] 中有较多的讨论.

## 6 总结

从对于介值性的思考开始, 我们得到了一系列相关结果,  $\mathcal{C}, \mathcal{D}', \mathcal{DC}$  函数类的差异得到展现. 在这些讨论中, 构造例子起到了关键的作用, 构造并不完全是一些奇思妙想, 其中也有对于一些基本性质的深刻洞察, 还可能是一些研究的副产物. 对于这些函数类的研究也可以更加深入, 这将会引出新的概念与方法, 相关内容可以参考 [4][9][10].

## 参考文献

- [1] "Are there written (19th century) sources expressing the belief that the intermediate value property is equivalent to continuity?". History of Science and Mathematics Beta. <https://hsm.stackexchange.com/questions/59>.
- [2] "Continuity  $\Rightarrow$  Intermediate Value Property. Why is the opposite not true?". MathStackExchange. <https://math.stackexchange.com/questions/622076>.
- [3] "How discontinuous can a derivative be?". MathStackExchange. <https://math.stackexchange.com/questions/112067>.
- [4] Andrew M. Bruckner. *Differentiation of Real Functions*, volume #5 of CRM Monograph Series. American Mathematical Society, 2nd edition, 1994.
- [5] H. Fast. Une remarque sur la propriété de Weierstrass. *Colloq. Math.*, 7:75–77, 1959.
- [6] I. Halperin. Discontinuous functions with the Darboux property. *Can. Math. Bull.*, 2(2):111–118, 1959.
- [7] Greg Oman. The Converse of the Intermediate Value Theorem: From Conway to Cantor to Cosets and Beyond. *Missouri J. Math. Sci.*, 26(2):134–150, 2010.
- [8] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis 3rd edition*. McGraw-Hill: New York, 1976.
- [9] Elias M. Stein and Rami Shakarchi. *Functional Analysis: Introduction to Further Topics in Analysis*. Princeton University Press, 2011.
- [10] A.C.M. van Rooij and W.H. Schikhof. *A second course on real functions*. Cambridge University Press, 1982.
- [11] 常庚哲、史济怀. 《数学分析教程》第三版·上册. 中国科学技术大学出版社, 2008.
- [12] 谢惠民、恽自求、易法槐、钱定边. 《数学分析习题课讲义》第一版·上册. 高等教育出版社, 2003.

# 使用松弛法求解带有第一类边界条件的矩形区域上的泊松方程

周文斌

## 摘要

本文展示了推导泊松方程以及矩形区域的第一类边界条件问题的有限差分方法的过程,介绍了 Jacobi 迭代法、Gauss-Seidel 法与逐次超松弛迭代法求解泊松方程的基本原理与具体方法,并且针对逐次超松弛迭代法进行了其收敛性的拓展介绍。再以一个具体的静电学方程的边值问题作为引导,使用逐次超松弛迭代法提供了一份求解该问题的 MATLAB 程序代码。本文的研究可以对使用 MATLAB 进行偏微分方程解法的数值研究提供一些有用的理论依据与实例,也可以作为其他研究项目的拓展研究对象。

## 1 引言

通过对于调和方程和格林函数的学习我们已经掌握了对于基本的初边值条件下调和方程的求解方法。然而,我们也注意到了求解格林函数的过程是比较困难并且复杂的。更一般地,在实际求解偏微分方程的定解问题时,除了在一些特殊情况下可以方便地求得其精确解外,在一般情况下,当方程或定解条件具有比较复杂的形式,或求解区域具有比较复杂的形状时,往往求不到或不易求到其精确解。实际的需要促使我们去寻找偏微分方程的定解问题的近似解,特别是数值近似解,简称数值解。下面我们将具体研究一下二维 Poisson 方程的 Dirichlet 问题的数值解求解思路。

## 2 差分方法

要求得一个二维 Poisson 方程的 Dirichlet 问题的数值近似解,首先要将相应的微分方程离散化,有限差分法就是最常用的离散化方法之一。它的基本思路是:将一个区域  $\Omega$  上的一个未知函数的问题化为求在结点上的解的近似值这有限个未知数的问题,从而将一个无限维的问题转化成了一个有限维的问题。

### 2.1 二维 Poisson 方程的离散——五点差分格式

考虑二维 Poisson 方程

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2.1)$$

为了叙述方便,假设  $\Omega = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$ ,并将其剖分成规则的正方形网格<sup>1</sup>,其中网格线是两组分别平行于坐标轴的直线

$$x_j = jh, \quad y_k = kh, \quad 0 \leq j, k \leq M + 1.$$

作者: 周文斌, 2019 级管理学院统计系, 邮箱: zhouwenbin@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 2 月 4 日来稿, 4 月 10 日第一次修改, 5 月 3 日第二次修改, 5 月 12 日第三次修改, 5 月 21 日接受。  
稿件编辑: 郑伟豪。

<sup>1</sup>也可以剖分为长方形,但是为了叙述方便,我们只对正方形进行讨论。

如前, 网格中两组平行线的交点称为网格结点,  $h = 1/(M + 1)$  是网格步长.

如果(2.1)的解足够光滑, 则在结点  $(jh, kh)$  或简记为  $(j, k)$  处有 Taylor 展开

$$u(x_j \pm h, y_k) = \left( u \pm h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)_{j,k},$$

$$u(x_j, y_k \pm h) = \left( u \pm h \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \pm \frac{h^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \dots \right)_{j,k},$$

因而有

$$\frac{\delta_x^2 u(jh, kh)}{h^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dots \right)_{j,k},$$

$$\frac{\delta_y^2 u(jh, kh)}{h^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \dots \right)_{j,k},$$

其中

$$\begin{aligned} \delta_x^2 u(jh, kh) &= u((j+1)h, kh) - 2u(jh, kh) + u((j-1)h, kh), \\ \delta_y^2 u(jh, kh) &= u(jh, (k+1)h) - 2u(jh, kh) + u(jh, (k-1)h). \end{aligned} \quad (2.2)$$

这就是二阶中心差商, 它是一种近似偏微分方程中的导数的方法, 因此我们可以将偏微分方程用差分方程来近似代替. 值得注意的是, 一个偏微分方程往往可以列出多种多样的差分格式, 例如前向差商, 后向差商等, 我们可以根据实际求解的需要来进行优选, 这就给偏微分方程的差分解法提供了丰富的内容和广阔的选择余地.

回到刚才的问题, 将(2.2)中两式相加得

$$\frac{(\delta_x^2 + \delta_y^2)u(jh, kh)}{h^2} = \Delta u(x_j, y_k) + R_{j,k}, \quad (2.3)$$

其中

$$R_{j,k} = \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right]_{j,k} + O(h^4). \quad (2.4)$$

被称为截断误差, 我们在之后的操作中将截断误差舍弃. 这是因为我们本来的目的就是想要使用比二阶偏导更简单的函数形式逼近二阶偏导, 而  $R_{j,k}$  的式子中含有许多较为复杂的高阶偏导项, 违背了我们的初衷; 并且注意到, 当网格步长  $h$  趋近无穷小时,  $R_{j,k}$  为  $h$  的二阶无穷小量,  $R_{j,k}$  的绝对值小于  $h^2$  的某一个常数倍, 也趋近于无穷小, 因此可以被舍弃掉. 这样, 在每个内结点  $(jh, kh)$  处,  $1 \leq j, k \leq M$ , Poisson 方程(2.1)可以离散为

$$\Delta_h u_{j,k} := \frac{(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{j,k}}{h^2} = f(x_j, y_k), \quad (2.5)$$

或写成

$$u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4u_{j,k} = h^2 f(x_j, y_k) \quad (x_j, y_k) \in \Omega^\circ. \quad (2.6)$$

这是一个常用的五点差分格式, 其截断误差是  $R_{j,k}$ . 根据朗道符号的定义, 我们将差分格式(2.6)逼近微分方程(2.1)的阶记为  $O(h^2)$ , 寓意误差项与  $h^2$  是同阶的. 在实际应用中, 减少计算误差的方法主要有两种: 缩小网格步长, 或者选用阶数更高的差分格式.

我们从五点差分格式的外观也可以观察到其与调和方程平均值公式的微妙联系. 若  $f(x_j, y_k) = 0$ , 则(2.6)也可以化为

$$u_{j,k} = \frac{1}{4}(u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1}). \quad (2.7)$$

上式表明,一个内结点  $(j,k)$  处的解值可以表示为周围上下左右四个结点处解值的算术平均值. 这可以视作是调和方程的平均值定理<sup>1</sup>的离散化表示. 然而这个表示是不准确的,因为依照平均值定理,调和函数定义域中任何一点的函数值应该是邻域圆周的所有点的函数值平均值(环路积分除以环路周长),而在五点差分格式中只选取了邻域圆周的四个点作平均值. 输入信息量的减少必然导致输出估计的不准确性,这也便是差分格式存在误差的内在原因.

## 2.2 矩形区域的 Dirichlet 边界条件的离散

考虑求解有 Dirichlet 边界条件的二维 Poisson 方程

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = \gamma(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.8)$$

其中(2.8)中的  $\Omega$  是矩形区域,则总可以使  $\Omega$  的边界落在网格线上. 此时(2.8)的第一类边界条件可以直接离散

$$\begin{aligned} u_{0,k} &= \gamma(0, y_k), & u_{M+1,k} &= \gamma(1, y_k), & 0 \leq k \leq M+1, \\ u_{j,0} &= \gamma(x_j, 0), & u_{j,M+1} &= \gamma(x_j, 1), & 0 \leq j \leq M+1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

这里没有引入任何截断误差. 至此(2.6)和(2.9)可以构成一个逼近边值问题(2.8)的离散 Dirichlet 问题. 因此,对于每个结点都可以列出一个线性代数方程,我们就得带一个以各结点上的函数值为未知数的线性代数方程组. 其中,未知元个数与线性代数方程个数即为  $\Omega$  中内结点的个数  $M^2$ . 可以证明,这个线性代数方程组恒有唯一的解,且可以通过下面即将介绍的迭代法进行求得.

## 3 三种迭代法

迭代法的基本思想是:构造一个收敛于线性方程组的解  $u_{i,j}$  的序列  $\{u_{j,k}^{(n)}\}$ , 式子中令  $u_{j,k}^{(1)}$  是选定的,作为方程组的一个初始猜测. 换句话说,迭代法就是根据某种方法对初始猜测  $u_{j,k}^{(1)}$  进行修正,并得到一个新的解  $u_{j,k}^{(2)}$ ,将它作为解  $u_{i,j}$  的一个新的初始猜测,再按前面的方法对其进行修正,从而可以得到一个解  $u_{j,k}^{(3)}$ ,依此类推,就有一个序列  $\{u_{j,k}^{(n)}\}$ ,希望  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{j,k}^{(n)} = u_{i,j}$ .

下面简单介绍一下三种迭代法: Jacobi 迭代法, Gauss-Seidel 法(简称 GS 法)以及逐次超松弛迭代法( Successive Overrelaxation, 简称 SOR 法)前两者是经典的迭代方法,而 SOR 法是 Young 和 Frankel 于 1950 年提出的,是基于 Jacobi 迭代法与 GS 法的算法. 而此篇论文着重研究的:

### 3.1 Jacobi 迭代法

下面介绍 Jacobi 迭代法. 从  $u_{j,k}^{(1)}$  开始,带入公式:

$$u_{j,k}^{(n+1)} = \frac{1}{4} [u_{j+1,k}^{(n)} + u_{j-1,k}^{(n)} + u_{j,k+1}^{(n)} + u_{j,k-1}^{(n)} - h^2 f_{j,k}], \quad (3.1)$$

递归求解.

可以证明,对于任意取定的  $j, k$ ,当  $n \rightarrow \infty$  时,  $u_{j,k} = \lim u_{j,k}^{(n)}$  是收敛到(3.1)的一个解的,因此 Jacobi 迭代法给出了一个可行的解法.但是事实证明, Jacobi 迭代法的收敛速度是非常缓慢的,并且通常  $N$  也是非常大的,所以 Jacobi 迭代法在实践中效率较低,我们需要寻找一个更加高效的方法.

<sup>1</sup> 平均值定理可以参考 [1] 和 [5] 等本科教材.

### 3.2 Gauss-Seidel 法

下面介绍 **GS** 法, 其迭代格式为: 从  $u_{j,k}^{(1)}$  开始, 带入公式:

$$u_{j,k}^{(n+1)} = \frac{1}{4} [u_{j+1,k}^{(n)} + u_{j-1,k}^{(n+1)} + u_{j,k+1}^{(n)} + u_{j,k-1}^{(n+1)} - h^2 f_{j,k}], \quad (3.2)$$

并且要自左下角开始, 从左至右, 从下至上 (我们称之为自然顺序) 逐行地递归求解<sup>1</sup>. 事实上, GS 法的迭代格式也可以根据不同的计算次序, 写成其他格式, 它们的形式与解法是相似的. 虽然 Jacobi 迭代法的迭代思想比 GS 法更加自然, 但是通常 GS 法具有比 Jacobi 迭代法更快的收敛速度. 简单来讲, 是因为 GS 法将第  $n$  层已经更新过的格点信息, 即  $u_{j-1,k}$  和  $u_{j,k-1}$ , 用于  $u_{j,k}$  的计算. 因此迭代会加速.

### 3.3 SOR 法

下面介绍 **SOR** 法, 它的迭代格式为: 从  $u_{j,k}^{(1)}$  开始, 带入公式:

$$u_{j,k}^{(n+1)} = u_{j,k}^{(n)} + \omega [u_{j+1,k}^{(n)} + u_{j-1,k}^{(n+1)} + u_{j,k+1}^{(n)} + u_{j,k-1}^{(n+1)} - 4u_{j,k}^{(n)} - h^2 f_{j,k}], \quad (3.3)$$

并且要自左下角开始, 从左至右, 从下至上逐行地递归求解.

其中,  $\omega$  称为松弛因子. 如果  $0 < \omega < \frac{1}{4}$ , 则称(3.3)为逐次低松弛方法, 如果  $\omega > \frac{1}{4}$ , 则称(3.3)是逐次超松弛迭代法. 特别的, 如果  $\omega = \frac{1}{4}$ , 则上述方法退化为 GS 法.

同理, 由于(3.3)中出现了上标为  $(n+1)$  的项, 我们也需要采取从左下角开始, 从左至右, 从下至上的递归次序. 为了方便起见, 以后不论  $\omega$  的具体取值, 我们统一地将(3.3)称为 **SOR** 法.

不同的  $\omega$  参数可以使得 SOR 法的收敛速度有显著不同. 使得 SOR 法拥有最快的收敛速度的松弛因子称为最佳松弛因子. SOR 法的核心任务便是如何选取最佳松弛因子. 可是目前为止还没有计算最佳松弛因子的普遍公式, 但是可以通过对差分方程的系数矩阵的特殊性质 (例如性质 A) 的观察来近似计算最佳松弛因子.

再次强调, 假设我们已经知道了  $u_{j,k} = \lim u_{j,k}^{(n)}$  这个极限是存在的, 则这个极限一定可以满足

$$u_{j,k} = u_{j,k} + \omega(u_{j+1,k} + u_{j-1,k} + u_{j,k+1} + u_{j,k-1} - 4u_{j,k} - h^2 f_{j,k}),$$

因此它满足上述五点差分格式(2.7).

### 3.4 判断 SOR 法的收敛性

值得注意的是, 对于不同的泊松方程和边界条件, SOR 法不总是收敛的. 下面介绍矩阵化处理方法与判断 SOR 法是否收敛的两个普通的判别定理. 此部分仅作为拓展资料供参考. 引入: 差分法矩阵化

通过前面五点差分法与迭代法的介绍我们注意到, 它们的本质是求解线性代数方程组, 因此我们很自然地联想到使用矩阵来处理问题.

对  $M^2$  个内网格结点处的未知量  $\{u_{j,k}, 1 \leq j, k \leq M\}$  按从左往右 ( $j \uparrow$ ), 由下往上 ( $k \uparrow$ ) 的顺序 (网格结点的自然次序) 排列, 得

$$\boldsymbol{u} := (u_{1,1}, u_{2,1}, \dots, u_{M,1}, u_{1,2}, u_{2,2}, \dots, u_{M,2}, \dots, u_{1,M}, u_{2,M}, \dots, u_{M,M})^T,$$

这里上标  $T$  表示向量的转置. 下面都将采用这种自然次序排列网格结点上的未知函数值. 根

<sup>1</sup>由于(3.2)中的“上项”和“右项”都具有上标  $(n+1)$ , 即代表着它们是在下一层计算才会出现的值, 这就要求我们需要按照所谓的自然顺序递归求解(3.2).

据这种排列次序, 我们将五点差分格式(2.6)写成如下矩阵向量的形式

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (3.4)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{I} & & \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -\mathbf{I} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} \\ & & -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{pmatrix},$$

而  $\mathbf{I}$  是  $M$  阶单位方阵,  $M$  阶方阵  $\mathbf{B}$  定义为

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

向量  $\mathbf{b}$  的元素由右端函数  $f(x, y)$  和函数  $\gamma(x, y)$  在边界结点上的值确定, 它的  $M$  个元素是

$$\begin{aligned} & \{-h^2 f(x_1, y_1) + \gamma(x_1, 0) + \gamma(0, y_1), -h^2 f(x_2, y_1) + \gamma(x_2, 0), \dots, \\ & -h^2 f(x_{M-1, y_1}) + \gamma(x_{M-1}, 0), -h^2 f(x_M, y_1) + \gamma(x_M, 0) + \gamma(1, y_1)\}. \end{aligned}$$

这是 Dirichlet 边值问题的五点差分格式的矩阵化处理. 它的中心思想很简单, 即使用矩阵来表示出结点间函数值的关系. 我们现在只需研究这个矩阵, 便可以了解五点差分格式的数学性质. 同理, 上述三种迭代法也能矩阵化, 那么我们也可以通过矩阵来研究它们的数学性质, 大大简化了问题内容.

### 迭代法基本理论

如前所述, 利用差分方法解 Poisson 方程 Dirichlet 边值问题可以归结为线性代数方程组的求解问题, 此时系数矩阵常常是大型稀疏阵. 使用迭代法求解大型稀疏方程组只要求相对比较少的计算机存储量, 程序实现也较为简单.

考虑线性代数方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.5)$$

其中  $\mathbf{A}$  是  $M \times M$  非奇异矩阵, 解方程组(3.5)的迭代法就是构造一个收敛于方程组的解  $\mathbf{x}^* := \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$  的序列  $\{\mathbf{x}^{[v]}\}$ , 其中  $\mathbf{x}^{[0]}$  是选择的一个  $M$  阶向量, 作为方程组的解的一个初始猜测, 换句话说, 迭代法就是根据某种方法对初始猜测  $\mathbf{x}^{[0]}$  进行修正, 并得到一个新的向量  $\mathbf{x}^{[1]}$ , 将它作为解  $\mathbf{x}^*$  的一个新的初始猜测, 再按前面的方法对其进行修正, 从而可以得到一个向量  $\mathbf{x}^{[2]}$ , 依此类推, 就有一个序列  $\{\mathbf{x}^{[v]}\}$ , 希望  $\lim_{v \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{[v]} = \mathbf{x}^*$ . 迭代公式通常可以表示成如下形式

$$\mathbf{x}^{[v+1]} = \Psi(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x}^{[v]}, \dots, \mathbf{x}^{[v-p+1]}), \quad v = 0, 1, \dots,$$

其中  $p$  是某个正整数, 称这样的公式为  $p$  阶迭代方法, 特别地,  $p = 1$  的公式称为一阶迭代方法, 它也是最常用的迭代方法.

如果  $\mathbf{B}$  是一个非奇异矩阵, 则方程组(3.5)可以写为

$$\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b},$$

或者

$$\mathbf{x} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}.$$

这样就可以建立一个一阶迭代公式

$$\mathbf{x}^{[\nu+1]} = \mathbf{G}\mathbf{x}^{[\nu]} + \mathbf{c}, \quad \nu = 0, 1, \dots,$$

其中  $\mathbf{x}^{[0]}$  是给定的初始猜测,  $\mathbf{G}$  通常称为迭代矩阵.

### SOR 法矩阵化

根据 SOR 法相应的线性代数方程, 迭代格式(3.3)有另一种表示方法

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^{[n+1]} &= \frac{b_i}{a_{ii}} - \sum_{j < i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{[n+1]} + \sum_{j > i} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{[n]}, \\ x_i^{[n+1]} &= x_i^{[n]} + \omega(\tilde{x}_i^{[n+1]} - x_i^{[n]}), \quad 1 \leq i \leq M. \end{aligned} \tag{3.6}$$

通过消去中间变量  $\tilde{x}_i^{[n+1]}$ , (3.6)便可以写成显式形式,

$$\mathbf{x}^{[n+1]} = (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}((1 - \omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{R})\mathbf{x}^{[n]} + \omega(\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}. \tag{3.7}$$

即一阶迭代公式的形式. 其中  $\mathbf{x}^{[n]}$  为  $x_i^{[n]}$  组成的向量,  $\mathbf{D}, \mathbf{L}, \mathbf{R}$  为系数矩阵  $\mathbf{A}$  的分解

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{R},$$

$\mathbf{D}$  为系数矩阵的主对角元素形成的对角矩阵,  $\mathbf{L}$  是严格下三角矩阵,  $\mathbf{D}$  是严格上三角矩阵. 将(3.6)的迭代矩阵记为

$$\mathbf{G}_{SOR} := (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})^{-1}((1 - \omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{R}).$$

通过迭代矩阵的一些性质, 我们可以对 SOR 法是否收敛做出判断.

### 判别定理

定义矩阵  $\mathbf{G}$  的谱半径为

$$\rho(\mathbf{G}) := \max_{1 \leq i \leq M} \{|\lambda_i(\mathbf{G})|\}$$

其中  $\lambda_i(\mathbf{G})$  表示矩阵  $\mathbf{G}$  的第  $i$  个特征值.

对于 SOR 方法, 有如下结论.

**定理 3.1.** SOR 方法收敛的充要条件为  $\rho(\mathbf{G}_{SOR}) < 1$ , 或者等价地要求方程

$$\det((1 - \omega)\mathbf{D} + \omega\mathbf{R} - (\mathbf{D} - \omega\mathbf{L})\eta) = 0. \tag{3.8}$$

的根  $\eta$  按模小于 1.

**证明.** 记第  $\nu$  迭代步的误差为  $\mathbf{e}^{[\nu]} = \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{[\nu]}$ . 由于  $\mathbf{x}^*$  满足  $\mathbf{x}^* = \mathbf{G}_{SOR}\mathbf{x}^* + \mathbf{c}$ , 所以  $\mathbf{e}^{[\nu]}$  满足方程

$$\mathbf{e}^{[\nu+1]} = \mathbf{G}_{SOR}\mathbf{e}^{[\nu]}.$$

由此递推公式得

$$\mathbf{e}^{[\nu]} = \mathbf{G}_{SOR} \mathbf{e}^{[\nu-1]} = \mathbf{G}_{SOR}^2 \mathbf{e}^{[\nu-2]} = \cdots = \mathbf{G}_{SOR}^\nu \mathbf{e}^{[0]}.$$

因此, 对于任意的初始向量  $\mathbf{x}^{[0]}$ , 当  $\nu \rightarrow \infty$  时序列  $\{\mathbf{x}^{[\nu]}\}$  收敛到解  $\mathbf{x}^*$  的充要条件为

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{e}^{[\nu]} = 0,$$

它等价于

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathbf{G}_{SOR}^\nu = 0. \quad (3.9)$$

由线性代数知识, (3.9)意味着对  $\mathbf{G}$  的任意特征值  $\lambda_i(\mathbf{G}_{SOR})$  有

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_i(\mathbf{G}_{SOR})^\nu = 0,$$

它等价于

$$\rho(\mathbf{G}_{SOR}) < 1. \quad (3.10)$$

方程(3.8)等号左侧即为  $\mathbf{G}_{SOR}$  的特征多项式, 方程的全体根即为矩阵的全体特征值. 要求所有特征值小于 1 等价于要求谱半径小于 1.  $\square$

注."迭代矩阵谱半径小于 1"也可以作为 Jacobi 法和 GS 法的收敛性判别法则. 它是最本质的收敛判别方法.

**定理 3.2.** 对所有  $\omega$  均成立不等式

$$\rho(\mathbf{G}_{SOR}) \geq |\omega - 1|. \quad (3.11)$$

当  $\omega$  是实数时, SOR 方法收敛的一个必要条件是  $0 < \omega < 2$ .

**证明.** 先计算矩阵  $\mathbf{G}_{SOR}$  的行列式

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{G}_{SOR}) &= \det((\mathbf{D} - \omega \mathbf{L})^{-1}((1 - \omega)\mathbf{D} + \omega \mathbf{R})) \\ &= \det((\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L})^{-1}((1 - \omega)\mathbf{I} + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R})) \\ &= \det((\mathbf{I} - \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L})^{-1} \det((1 - \omega)\mathbf{I} + \omega \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R})) \\ &= (1 - \omega)^M. \end{aligned}$$

其中  $M$  为迭代矩阵的阶数. 这意味着矩阵  $\mathbf{G}_{SOR}$  的所有特征值之积等于  $(1 - \omega)^M$ , 因此不等式(3.11)得证. (3.11)中的等号当且仅当  $\mathbf{G}_{SOR}$  的所有特征值的模相等时才成立.

如果 SOR 方法收敛, 则  $\rho(\mathbf{G}_{SOR}) < 1$ . 利用不等式(3.11)得  $|\omega - 1| < 1$ . 如果  $\omega$  是实数, 则  $\omega$  必须满足  $0 < \omega < 2$ .  $\square$

注. 在一些特殊情况下需要讨论  $\omega$  为复数的情况, 在此我们暂且略过.

**定理 3.3.** 如果系数矩阵  $\mathbf{G}$  是 Hermite 矩阵, 则 SOR 方法收敛的充要条件是  $\mathbf{G}$  正定和  $0 < \omega < 2$ .

证明参见 [2].

利用以上定理可以对 SOR 方法收敛性做出基础判断.

## 4 MATLAB 实践应用

有了以上的知识, 我们便可以对一个具体问题展开计算与应用了.

### 4.1 问题陈述

考虑如下问题: 给定一个电动统计学泊松方程

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = -\rho(x, y)/\epsilon_0, \quad (4.1)$$

它具有矩形边界条件

$$x \in [0, L_x], y \in [0, L_y], \quad (4.2)$$

试使用松弛法编写一个可以求解这个方程的程序, 并且使用

(a)

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &= 0, \varphi(0, y) = \varphi(L_x, y) = \varphi(x, 0) = 0, \\ \varphi(x, L_y) &= 1V, L_x = 1m, L_y = 1.5m; \end{aligned} \quad (4.3)$$

(b)

$$\begin{aligned} \rho(x, y)/\epsilon_0 &= 1V/m^2, \\ \varphi(0, y) &= \varphi(L_x, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, L_y) = 0, \\ L_x &= L_y = 1m. \end{aligned} \quad (4.4)$$

作为初值条件来测试你的程序结果.

我们不妨将(4.1)改写成为与上文相同的格式以方便理解

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = \gamma(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega, \\ f(x, y) = \frac{-\rho(x, y)}{\epsilon_0}, \\ \Omega = [0, L_x] \times [0, L_y], \end{cases} \quad (4.5)$$

### 4.2 针对具体问题的讨论分析

事实上, 注意到  $L_x$  与  $L_y$  二者不一定相等, 并且在考虑将矩形区域做离散化处理的时候, 若我们强制要求网格区域为正方形, 那么矩阵区域的长与宽与网格步长必须要满足一定比例才能实现该区域的完全剖分, 否则会出现如边界区域不在网格结点的情况发生, 这会导致我们最后得到的结果中的信息丢失. 为了防止这样的事情发生, 我们需要对(2.6)做一定的修改, 找到在  $\Omega$  被剖分为规则的长方形网格的时候, SOR 法的迭代公式. 这样不仅使计算结果更加严谨, 也能使得我们的 MATLAB 程序更加用户友好<sup>1</sup>.

在此, 我们不加证明地提供出长方形网格剖分下的 SOR 法迭代格式, 它的推导过程与前面对于正方形网格剖分下的 SOR 法是类似的

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(n+1)} &= (1 - \omega)u_{i,j}^{(n)} + \frac{\omega}{2(1 + \beta^2)}[u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n+1)} + \\ &\quad \beta^2(u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n+1)}) + \Delta x^2 f(i, j)], \end{aligned} \quad (4.6)$$

其中  $\beta = \Delta x / \Delta y$ ,  $\Delta x$  为横向网格步长,  $\Delta y$  为纵向网格步长.

至此, 我们便可以根据这个公式来编写一个可以解决问题的 MATLAB 程序了.

<sup>1</sup> 只需要输入参数  $n$  即可确定网格的剖分精度, 后面会介绍到.

### 4.3 MATLAB 编程实现

我们将主函数 SOR 设置为

```

1 | function n = SOR(w, x, Lx, Ly, x0, xe, y0, ye, f)
2 | %收敛因子w
3 | %剖分精度x
4 | %定义域的右边界Lx
5 | %定义域的上边界Ly
6 | %定义域的左边界的初始资料x0
7 | %定义域的右边界的初始资料xe
8 | %定义域的上边界的初始资料y0
9 | %定义域的下边界的初始资料ye
10 | %给定的函数f(x, y)
11 | %迭代次数n

```

这个函数会在 MATLAB 的命令行窗口输出迭代次数 n. 值得注意的是, 由上述分析, 函数  $f(x, y)$  是需要在  $\Omega$  内做差分化处理的, 因此理论上函数输入的参数 f 应该是一个与  $(x, y)$  相关的函数. 但是由于我们需要求解的(4.3)(4.4)中的函数  $f(x, y)$  都是常值函数, 我们不妨作简单化处理, 将 f 作为常值参数.

下面我们来为函数内容做填充:

首先求横向网格步长 hx 与纵向网格步长 hy<sup>1</sup>

```

1 | hy = Ly/x;
2 | hx = Lx/x;

```

再对迭代次数 n 赋初值为 0, 创建矩阵 T 并且所有元素赋值为 0, 创建矩阵 F 并且所有元素赋初值为 f. 其中矩阵 T 就是我们要求的解矩阵, 它的每个元素  $T_{i,j}$  近似地代表了函数  $u$  在二维空间坐标  $(i, j)$  下的取值. 矩阵 F 即是差分化处理后的函数  $f(x, y)$  的矩阵形式.

```

1 | n=0;
2 | T = zeros(x);
3 | F = zeros(x);
4 | F(:)=f;

```

此时, 视 T 为  $T^{(0)}$ , 即初始的迭代矩阵, 我们需要将所有的边界资料填入到 T 的边缘行列上<sup>2</sup>

```

1 | T(:,1) = x0;
2 | T(:,end) = xe;
3 | T(1,:) = ye;
4 | T(end,:)= y0;

```

考虑到迭代法的本质是构造一系列的收敛数列, 我们必须要设置一个参数 e 来判断解是否已经满足我们的误差要求. e 既不能太大也不能太小, 过大会导致解不够精确, 过小会导致需要的迭代次数增多, 求解速度变慢. 因此不妨设 e 为 0.0000001. 若我们考虑矩阵的 Euclid 空间中由矩阵范数自然诱导的距离, 那么可以题出以下收敛判别式

$$\sum_{i,j} (T_{i,j}^{(n+1)} - T_{i,j}^{(n)})^2 < \epsilon,$$

将其转化为 MATLAB 语言

```

1 | while(e > 0.0000001)      %判断是否满足收敛要求
2 | n = n+1;                  %记录迭代次数

```

<sup>1</sup>为了迎合 MATLAB 的画图特点, 这里横纵步长的值交换.

<sup>2</sup>为了迎合 MATLAB 的画图特点, 这里矩阵第一行和最后一行的初始资料交换.

```

3 | T1 = sor(T,F,w,hx,hy,1); %迭代函数
4 | e = sum((T1(:)-T(:)).^2); %矩阵距离计算
5 | T = T1; %保存已更新的数据
6 | end

```

注意到上述注释里提到了迭代函数 `sor`, 它实际上就是迭代格式(3.6)的 MATLAB 程序化

```

1 | function T = sor(T,F,w,dx,dy,N)
2 | b = dx/dy;
3 | B2 = b*b;
4 | DX2 = dx*dx;
5 | C = w/(2*(1+B2)); %代替变量
6 | for t = 1:N
7 | for i = 2:size(T,1)-1 %横向遍历
8 |     for j = 2:size(T,1)-1 %纵向遍历
9 |         T(i,j) = (1-w)*T(i,j) + ...
10 |             C*(T(i+1,j)+T(i-1,j) + ...
11 |                 B2*(T(i,j+1)+T(i,j-1)) + ...
12 |                     DX2*F(i,j));
13 |     end
14 | end
15 | end

```

注意, 与迭代格式中不同的是, 矩阵中元素的坐标的顺序排布是与坐标系中坐标排布不同的! 因此 MATLAB 程序中的遍历顺序要做相应的调整. 最后, 如果想要直观展示解矩阵 `T`, 我们可以再向主函数 `SOR` 中添加函数中的一个

```

1 | surf(T) %三维立体图, 我们选这个
2 | contour(T, 100) %二维等势图
3 | T %直接在命令行窗口输出矩阵

```

将上述所有讨论到的 MATLAB 代码衔接起来, 就得到

```

1 | %完整代码
2 | function n = SOR(w,x,Lx,Ly,x0,xe,y0,ye,f)
3 | hy = Lx/x;
4 | hx = Ly/x;
5 | n=0;
6 |
7 | T = zeros(x);
8 | F = zeros(x);
9 | F(:)=f;
10 |
11 | T(:,1)=x0;
12 | T(:,end)=xe;
13 | T(1,:)=ye;
14 | T(end,:)=y0;
15 |
16 | e = 1;
17 | while(e>0.0000001)
18 | n = n+1;
19 | T1 = sor(T,F,w,hx,hy,1);
20 | e = sum((T1(:)-T(:)).^2);
21 | T = T1;
22 | end
23 | surf(T) %展示解的三维图像
24 |
25 | function T = sor(T,F,w,dx,dy,N)
26 | b = dx/dy;
27 | B2 = b*b;
28 | DX2 = dx*dx;

```

```

29 | C = w/(2*(1+B2));
30 | for t = 1:N
31 | for i = 2:size(T,1)-1
32 |   for j = 2:size(T,1)-1
33 |     T(i,j) = (1-w)*T(i,j) + ...
34 |     C*(T(i+1,j)+T(i-1,j) + ...
35 |     B2*(T(i,j+1)+T(i,j-1)) + ...
36 |     DX2*F(i,j));
37 |   end
38 | end
39 | end

```

关于 MATLAB 代码的内容可以参考 [3] 与 [4] 进行学习.

#### 4.4 运行展示

经过作者的尝试, 当选择  $\omega = 1.5, x = 30$  时计算结果是较为合适的, 因此不妨取定二者为上述值.

将(4.3)带入运行, 运行窗口输入参数如下

```
1 | SOR(1.5,30,1,1.5,0,0,1,0,0)
```

输出结果为

```
1 | ans = 176
```

图像见图4.1.

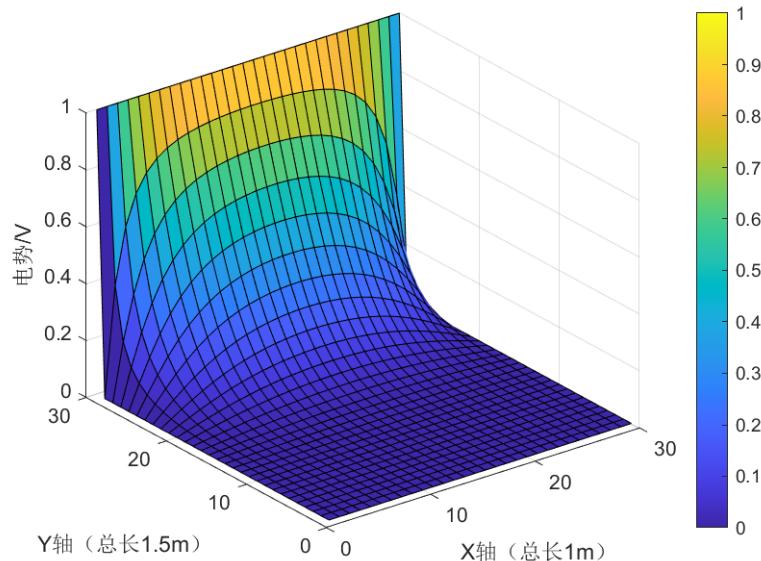


图 4.1: 情况 (a) 的解的三维图像

将(4.4)带入运行, 运行窗口输入参数如下

```
1 | SOR(1.5,30,1,1,0,0,0,0,-1)
```

输出结果为

```
1 | ans = 137
```

图像见图4.2.

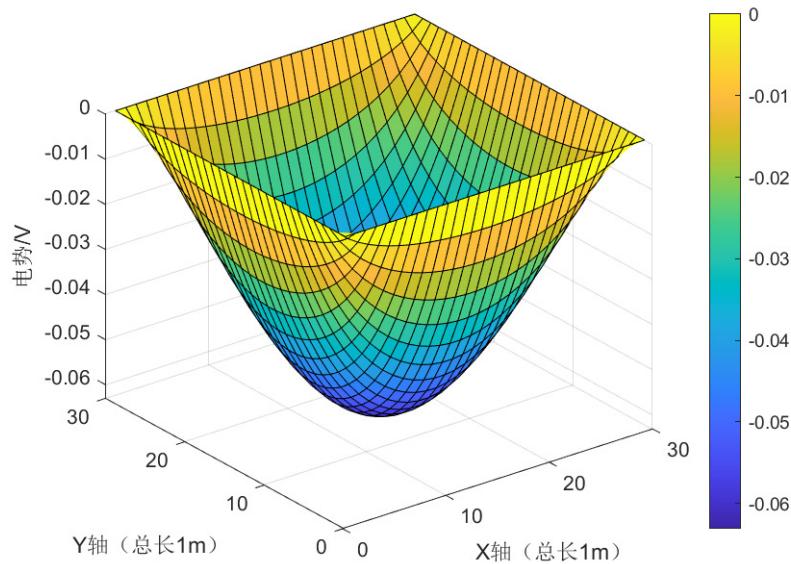


图 4.2: 情况 (b) 的解的三维图像

## 4.5 结果分析

首先来分析一下结果的误差. 由于我在 MATLAB 代码中设置的误差控制参数为 0.000001, 即相邻两个迭代矩阵在模意义上的距离小于 0.0000001. 由收敛性与直观观察我们可以推知, 最后一次形成的迭代矩阵与精确解之间的误差已经被控制得"足够小"了, 我们可以认为所得图像已经是精确解图像的一个足够准确的反映, 实验是成功的. 实际上, 对于不同的误差要求, 我们可以选取不同的误差控制参数, 以满足不同的精度要求.

对于例如 (a) 提供的情况, 由于边界上函数值并不连续, 因此我们没有办法寻找到可以使用初等方法求解得到的经典解. 因此, 此数值解可以视作是在误差允许范围内的方程的解. 所以使用数值方法是很多时候我们求解一些复杂的偏微分方程的主要方法.

接下来分析一下结果的收敛速率. 程序输出的 `ans` 为程序的循环次数, 亦即迭代次数, 它可以作为收敛速率的一个直观反应. 如果我们将上述程序中的 `w` 参数修改成为 1 的话<sup>1</sup>, 那么 SOR 法就退化成为了 GS 法. 对其带入相同的数据, 我们有如下结果.

```
1 | ans = 425
```

```
1 | ans = 318
```

如果将代码修改成为 Jacobi 迭代法<sup>2</sup>, 那么带入相同数据可以得到如下结果.

```
1 | ans = 799
```

```
1 | ans = 516
```

可以看到, 即使是在我们自行选取的 `w` 参数并非为最佳松弛因子的数值的此情况下, 收敛速度依然呈如下关系:

$$\text{SOR} > \text{GS} > \text{Jacobi}.$$

<sup>1</sup>这与我之前陈述的有所不同是因为这里的迭代格式是不同的.

<sup>2</sup>可以基于 SOR 法代码进行改造: 将 `sor` 函数中最里层循环的公式改为:  $T(i,j) = 1/4 * (T2(i+1,j) + T2(i-1,j) + T2(i,j+1) + T2(i,j-1)) + DX2 * F(i,j)$ . 其中  $T2=T$ , 记录了  $T$  在被更改前的数值信息.

因此, 在该问题中, SOR 法相比于其他两种迭代法更加高效.

## 5 总结

情况 (a) 与情况 (b) 都相对比较简单, 我编写的 MATLAB 代码内容也较为初等. 用 SOR 法编写的 MATLAB 程序在解泊松方程上有速度快, 准确度高, 普适性更强的特点, 具有更加广泛的应用. 对于本 MATLAB 程序的程序逻辑优化, 如何自主选取较优的松弛因子以及拓展到解决更复杂的微分方程问题也是值得研究的内容.

例如我们可以思考应当如何将 SOR 法程序推广到圆形, 甚至其他不规则边界条件的情况? 作者设想, 根据简单的分析学知识, 我们可以对一些不规则的边界条件围成的图形做"分割", 分割称为一些较小的矩形的组合, 再利用我们本文介绍的方法与思想来分别计算每个矩形上的泊松方程即可.

我们也可以更深一步思考, 如果我们将泊松方程替换为其他类型 (如抛物型方程或者双曲型方程) 后该如何编写代码? 这个情形将会复杂很多, 因为上述介绍的 SOR 法公式是依赖与泊松方程的特征的. 但是我们可以设想, 由于这些方程都具有一个共同的特点: 定义域上每个点的一些数字特征 (如函数值、函数一阶、二阶偏导数等) 都会影响其邻域上点的数字特征, 因此我们同样也可以使用差分方法来构造一个类似的迭代方程, 并且可以转化成为 MATLAB 语言, 使用计算机进行求解.

## 参考文献

- [1] Walter A Strauss. *Partial Differential Equations: An Introduction*. John Wiley and Sons, 2008.
- [2] 余德浩、汤华中. 《微分方程数值解法》第二版. 科学出版社, 2018.
- [3] 张德丰. 《MATLAB 实用数值分析》. 清华大学出版社, 2012.
- [4] 张德丰等. 《MATLAB 数值计算方法》. 机械工业出版社, 2010.
- [5] 谷超豪等. 《数学物理方程》第三版. 高等教育出版社, 2012.

星辰绚烂

缀满夜空

指引心之所向



稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》

# 星辰

贰 · 星辰

# 暖阳中生长

## ——采访叶向东院士

2018 级数学科学学院 陈恒宇 黄欣祺

### 人物介绍

叶向东，中国科学技术大学教授，曾任中国数学会副理事长、中国科学技术大学党委副书记、副校长。长期从事基础数学中拓扑动力系统、遍历理论以及它们在组合数论中应用的研究。他与合作者在动力系统的结构定理、多重遍历平均的收敛、熵的理论、动力系统的复杂性等方面进行了深入研究并得到了一系列深刻的结果。1996 年获得国家杰出青年科学基金资助；2000 年被聘为教育部“长江学者奖励计划”特聘教授；2013 年获得第十四届陈省身数学奖；与研究团队获得 2018 年度国家自然科学二等奖；2019 年当选中国科学院院士；2020 年获得何梁何利科学与技术进步奖。



天气晴朗，冬日的暖阳在窗口驻足，挥洒成片的灿烂金黄。面朝着办公室里那两块长长的大黑板，我们有幸采访了叶向东老师。

### 1 独立思考的精神

“我印象比较深刻的一点是，从国内外大学里培养的学生来看，中国学生不太善于提问。这说明他们缺乏一种独立思考的精神。这可能是从幼儿园开始，小学、中学的教育所形成的一个结果。当然，形成目前的状况有其历史原因，要改变它可能是一个长时期的任务。”

许多老师向叶老师提起，考试前学生常常会问：老师，可不可以划一划知识点。这让叶老师有些惊讶，因为在他的学生时代，大家不太会这样。在那个时候，高中课程也会一直上到高三的最后，他们稍加复习就要参加高考了。但现在，很多高中用两年把课程上完，三年级全部用来复习和做题。“学生很多时候是把题型记下来，很熟练，看到可能就会。这当然需要。但是我觉得对于以后从事研究工作来讲，更需要的是：拿到一个题目，你怎么进行思考，想办法把它解决。”

“科大整体的教育理念，还是希望学生以后有科学的志向，能够为社会的、人类的进步做一些贡献。这样的话，就更加需要有创新思维。”回想我们自己学习的过程，很多时候关注的只是课本和课堂笔记里那些自己还没理解的字句，主动思考的时光很少，自己却丝毫没有意识到。叶老师的一番教诲，真是醍醐灌顶。



暖阳中生长

## 2 喜欢的、发现的、踏实地

叶老师启发着我们：

**首先，要培养学习数学的兴趣。**

从教学上来看，老师们要提供一些很好的教材，从教学的方式方法上鼓励学生多提问，留一些比较好的题目给学生思考。学生之间，可以组织一些小型的讨论班，在老师的指导下，研讨一些难题。

“写在课本上的定理，它的陈述和证明可能比较简洁。很多老师会希望，我们能不能去读一些原始的文献呢？有可能你要理解一个定理，就要看它原来是怎么想的。因为很多东西是经过整理才变得简洁的，而原始的思想往往会被掩盖住。对定理发展历程的理解，就有利于你们自己去解决一个新的问题，发现一个新的定理。”这也是很好的研讨话题。

**其次，选择自己喜欢的研究方向。**

老师说，他大三大四的时候，对于以后要研究什么方向也有些迷茫。在这个阶段，我们已经接触了一些大学的数学课程，发现数学有很多方向，同时也感觉到自己了解的还很少。这些方向关心什么？又藏着怎样有意思的数学呢？叶老师悄悄地提示我们，最近学院里组织了不少专题讲座，可以多听一点，在那里可以遇见各个方向的学者。“还可以和老师们多聊聊，问问他们的方向在做些什么。”

“选择研究方向，有的时候也不能跟着热门跑。任何一个学科的发展，都是波浪式的。一个学科比较热门的时候，很多人进入，渐渐地一些问题就被解决了。然后就会有一个沉寂的阶段，因为有些大的问题，大家都做不动。这种沉寂其实是在积累。积累到一定程度，可能某一个瓶颈问题被解决了，很多问题又可以研究了，新的热潮又会渐渐形成。”

**最后，视野要开阔。**

“现代数学有很多的分支，它们之间的联系非常紧密。虽然你做研究的时候要深入到某一个分支里去，但你并不知道你的学科会用到其他什么学科的知识。一个重大的数学问题，发展到一定程度时，往往不是以它本身学科的方法来解决的。”最简单的例子是庞加莱猜想：

任何一个单连通的、紧致无边的三维流形必然同胚于三维球面。

这是一个拓扑的问题，却是用分析的方法解决的。叶老师的研究领域是动力系统，初看起来它和数论似乎没什么关系。但是一次偶然的机会，Furstenberg（2020年阿贝尔奖得主）用动力系统的方法解决了一些组合数论的问题，从而开辟了一个崭新的研究方向。“学数学，你可能会偏爱一个方向，但其他方向你也要学，而且学得好肯定对你有帮助。我们现在做动力系统，就会涉及到一些李群李代数和数论，刚开始学的时候我们也不知道会这样。如果再往下要做一个问题，你也不知道哪个学科的方法能够把它解决。你的眼界要开阔，要多听讲座，说不定哪一天其他方向的思想就会给你带来启发。”

“数学最早当然是来源于实际的问题，在发展过程中它有一个转折点，渐渐地追求数学内在本身的逻辑。相当于说数学的驱动来源于两方面：一方面是现实问题；另一方面是数学本身，它追求逻辑的完善，证明的简洁，整个体系的建立。”如今我们的国家越来越重视基础科学的研究。而因为企业对创新的需求，数学的应用也迎来了黄金阶段。

### 3 成长

聊起学生时代的成长经历，叶老师说，他的高中数学老师常常会给他出一些题目。渐渐地他开始觉得那些题做起来并不费力。后来参加了数学竞赛，他的成绩在徽州地区很好。虽然高考的时候和家人意见不一致，但老师还是觉得自己喜欢数学，坚持选择了数学。

进入大学以后，当然就是踏踏实实地学数学课。“我想老师有的时候也很重要，李炯生老师有一次在讲课中说，我们来欣赏一下这个定理。那时候才发现数学还可以作为一门艺术来欣赏！所以在老师的潜移默化里面，就喜欢上了数学。我觉得当时所用的教材和老师的认真程度，使我们打下了比较好的数学基础。这让我坚定了以后要从事数学研究。”

学习一个概念并不是第一次学的时候就能够理解很深的，比如刚开始学实数公理系统的时候，循着课本上的思路我们差不多能读懂。但为什么要这样呢？这就要在后续的过程里不断重复、不断琢磨，慢慢加深理解。到了某个时刻，噢！就真的明白了。所以刚开始的时候不要太着急。

“现在我们做研究也一样，渐渐地要形成自己理解数学的一套方式。别人讲了一个定理，我可能不知道怎么做，但我首先要理解这个定理到底讲的是什么。把它纳入到自己理解的范畴里来，对这个定理的理解就比较深刻。”本科毕业后叶老师成为了数学系的研究生，追随那时研究动力系统的三位老师：张景中、杨路和熊金城。在学习课程以外，他找了一个问题进行思考，作为硕士论文的主题，但并没有在那时完全解决。当时国家教委有十个名额可以到前苏联学习，科大的数学、物理方向各有一个名额。Kolmogorov，Gelfand 这样如雷贯耳的名字当然令人神往，他努力把握住了这一次宝贵的机会。

在莫斯科的时候，虽然导师的兴趣并不在他的硕士论文题目上。但他觉得自己对这个问题真的感兴趣，就继续思考这个题目，导师也非常支持。当时有位乌克兰数学家 Sharkovsky，是他所考虑的问题的顶尖专家。还有当时波兰的数学家 Misiurewicz 经常会到基辅访问，所以导师就让他去跟他们一块交流合作。“这段经历让我很受益。一个问题，我从头开始，慢慢地靠自己的努力把它做完了。以后再遇到别的问题，我就不害怕了。所以说你对某一个喜欢的问题，还是要坚持。一天两天做不完也没关系，你还是放那里，只要有机会就做。”

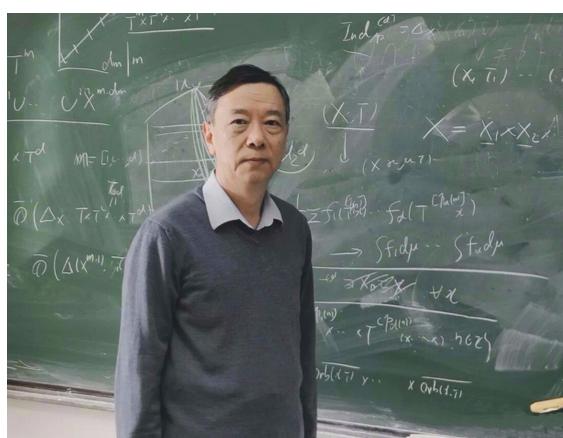
“我和黄文老师、邵松老师从 2015 年开始考虑一个问题，当时解决了一些特殊的情况。后来我们把这个问题转换成另外一个问题，发现与两位以色列数学家 Glasner，Weiss 以前做的工作有联系。我们就跟他们讨论，一起合作。也是一点点积累，今年七月份把这个问题解决了。”

“还有一篇文章，我们大概做了十年左右，也是一点一点解决的。”

看着眼前两块长长的黑板，正是它们无数个日日夜夜的陪伴，书书写写，涂涂画画，才有了无数的灵光闪现，一场又一场的数学探险。它们承载了多少的坚持和真挚的热爱啊！

“科大在这么多年的教学过程中，形成了很好的训练学生的方式，只要你按照这种方式自己积极思考，多做题目，和同学多讨论，就能成长起来。还是要一步一步地，脚踏实地，要学好这些课程。”

“也就是在每个阶段做好每个阶段的事。



首先有一点，你再有天赋，但你不努力，那是不行的。你看陶哲轩，是世界上最聪明的人之一。你们可以到预印本网站 arxiv.org 上面看一看，他每年大概都有十几篇论文，而且每篇文章都很长。你可以想象他要教书还要带学生，不努力是不可能那样高产的。你想这基本上是一个月一篇，当然他肯定不是那样做的，他可能有很多问题在同时考虑。这不光是写那些论文，一篇文章稍微长一点，我也要修改很多次。”

“所以就是说第一你要喜欢，第二要愿意付出时间，做学问要一步步，脚踏实地。”

## 4 尾声

走在回去的路上，脑海里浮现的是叶老师和蔼的笑容，阳光暖暖的。

在老师的办公室里，窗口边的小盆栽沐浴着暖阳，倔强生长。如同我们，在老师们的呵护中一路成长。

# “浪迹天涯的师兄们”座谈实录

2020年12月30日，科大05级校友谢俊逸、科大11级校友杨若涛和几位留法归来的老师在5506教室给中法班、华罗庚英才班的同学介绍留学法国学习数学的经验。

下面是访谈实录。

**梁永祺：**我先简单介绍一下几位嘉宾。谢俊逸是科大05级的学长，他考上了巴黎高师，然后在巴黎综合理工学院读博士，现在在CNRS（法国国家科学研究中心）担任副研究员。他在法国生活了很多年，所以对法国非常熟悉。

然后是11级的杨若涛学长。他拿过丘成桐大学生数学竞赛的金牌，毕业后进入法国巴黎十一大FMJH项目学习。

**梁永祺：**接着是胡勇老师，他本科在清华大学，后来进入法国巴黎十一大（欧盟的ALGANT项目）。他还在荷兰学习过一年，最后在巴黎十一大取得博士学位。毕业后，他到了Caen，拿到了法国永久的讲师职位。现在他在南方科技大学当老师。

然后是曹阳老师。曹阳本科在山东大学，毕业后到首都师范大学跟随徐飞老师读硕士。因为我是徐老师学生，所以当时他是我的师弟。但是后来他到FMJH项目读博士，博士导师是我导师的老板，于是他又成为了我的师叔。

（全场大笑）

毕业后他在德国工作了三年，刚刚才回到科大，成为我们中法班的老师。大家关于法国和德国的问题都可以问他。

**梁永祺：**最后是我们的韩邦先老师。韩老师是科大07级的学长。毕业后，他去PGSM项目读硕士，最后在巴黎九大取得博士学位。后来他先在波恩的马普所，然后去以色列做博士后，今年回来成为我们中法班的老师，大家欢迎！

**主持人：**今天的座谈会就是自由聊天，19级同学也为我们准备了一些问题。让我们开始吧！

**同学A：**师兄好，我想问一下在巴黎的生活怎么样？有没有需要格外注意的地方？

**梁永祺：**在巴黎的生活，我觉得最难受的就是随时要防抢，防备黑人大哥抢我们的东西。你要知道哪些区域是相对安全的，哪些区域是比较不安全的。而且法国有些很特别的假期，而放假的时候街上没什么人，很容易被抢。比如，巴黎十三大在巴黎北边，那边环境较差，比较不安全。我听说有学生去访问巴黎十三大，有一天他不知道是放假，就自己一个人去了学校，结果去的路上被人抢走了笔记本电脑，回来的时候好像手机也被抢了……

（全场大笑）

另外，我印象里很多食堂周末会休息，所以你要自己去买菜做饭。我的厨艺就是那时候练出来的。如果你喜欢做中国菜的话，巴黎有很多中国超市。不过有时候中国超市里头普通话不太好使，倒是广东话却很有用。多一门外语的话，是好的。几位老师都在巴黎的生活了



梁永祺老师正在介绍各位老师和学长

不短时间了，你们有没有被抢过呢？

（全场大笑）

韩邦先：我被抢过。但我不是在巴黎，去意大利的火车上被抢过，还是很严重的抢，所有东西都被抢走了。

（全场大笑）

然后我去报警，但是意大利警察没有接触过这种外国人被抢的情况，而且他们也没有会英语的，还需要从警察总部调一个会说外语的人去处理这个事情。要是非要想听巴黎的有意思的事情是很多的，想说这个不堪回首的事情，这一想起来也是蛮多的。比如，如果你的学校不帮你处理签证问题的话，每年去续签证是一个很痛苦的事情。

梁永祺：是，我觉得巴黎主要吸引人的地方是他们的数学比较好，我们去学数学，其他的缺点，只能这样了。

胡勇：对，说点积极的，你去法国，你可以跟顶级的数学家靠的很近。梁老师可以坐在Serre旁边可以给他倒一杯酒，对吧。

梁永祺：我还记得复分析或者复流形中的 Dolbeault。后来发现这个人突然出现在我面前，老爷爷还挺可爱的。很多在书上写的人，现在还可以活生生地跑到现实生活中，我觉得挺有趣的。

同学 B：在法国能够用英语交流吗，还是说要纯法语？

谢俊逸：一般人也会说英语。你做学术的话，他们应该都会说英语，跟老板也会说英语。但是一般来他们的报告会是法语，而且有的时候他们有一些年纪比较大的人，有时候不太愿意说英语。不管怎么说，你要去法国的话，总归是要学一点法语。

同学 C：在生活当中，英语是很重要的吗？就比如说出去买个东西之类的。

梁永祺：我觉得日常生活中手语还是最重要的（打手势）。

谢俊逸：我觉得有的时候你都不用说话也可以做很多事，是吧？

同学 D：巴黎的各个大学有什么特色或者优势呢？

梁永祺：巴黎高师只有硕士，而且它没有长期任教的教授，它是借调其他的大学的老师，教书比较好的就会借过去。

谢俊逸：其实你学数学，你也不是很在意一个大学怎么样，关键就是这个学校里面有没有你感兴趣的老师，他研究的方向你觉得有没有意思。而且你在巴黎哪个大学其实区别也不是很大，因为巴黎所有的学校的课你都是可以去听的，他们开的课你只要愿意你都可以过去。然后你要找老师的话，其实也跟你自己在哪个学校没有关系，你感兴趣的老师在哪里，你想跟他做学生，你就到他学校去跟他做学生，就这样。

同学 E：巴黎高校整体的风貌是怎么样的呢？

梁永祺：像十一大这种的话，是有个比较大的校园。但是像巴黎七大就只有城市之中的几栋建筑，它楼下的路不是围起来，而是城市的公用的道路，所以很难说什么校园氛围。

谢俊逸：他们的大学并不是说像科大一样。你在科大上学，你就基本上整天都在科大里面呆着。但在法国的话，比如你注册在六大，但其实相当于你生活在巴黎，任何一个大学有课，你都可以过去上。所以说，学校的风貌真的也不太感受得出来。你只是上课的时候去学校里，其实平时生活并不是在学校里面生活。

梁永祺：而且好像现在巴黎学校的学分都是互相认可的。

谢俊逸：对，比如说你注册在六大，但你在七大修的学分，也都是可以算进去，其实影响不是很大。

**主持人：**之前有同学给我留了这个问题：就是说在法国住哪里？住宿生活是怎么样的？

**杨若涛：**我住的地方很多，我换过 10 个地方。但是我主要是住在学校宿舍里，那里有一个类似学生会的给学生安排福利的那种机构。他们有一些房子叫 Crous，然后在 Crous 里边的话房子一般不是非常贵，你可以住在那里。巴黎南郊和外省的 Crous 是比较好申请的，我读硕博的时候都住在那里。但是在巴黎地区，Crous 会比较紧张一点，可能就需要自己找房子。

**胡勇：**你只要把你的学生证亮给这个机构，机构就会帮你找合适的房东。房东也会找这个机构，因为房东也不希望找一些不靠谱的人去租他的房子。我们中国人比较老实，会按时交房租，他们知道我们的口碑比较好的，会愿意租给我们。

**谢俊逸：**之前我在高师的话，高师是有自己的宿舍的，所以我就住在高师宿舍。我是在巴黎综合理工读的博士，它也有自己的宿舍，所以我基本上都是在宿舍里面。后来我是博士毕业后，我自己找房子住了。

**同学 F：**学长们可以介绍一下法国的奖学金吗？

**韩邦先：**其实我大三的时候申请了高师，但是我没有考上。后来麻小南老师和我说有一个巴黎研究生学校的项目，叫 PGSM。2011 年，我参加的项目奖学金大概是 1100 欧元一个月。而且刚去的时候，如果你之前没有收入的话，一般前两年是可以拿全额房补的一半，大约 200 多块钱一个月。之后读博士，费用是不能自费的，就是说你一定要得到奖学金才能读博士，一般博士奖学金大家都是一样的。读博士的时候，你就在你注册的学校申请奖学金。

**同学 G：**那奖学金是不是可以抵掉学费和生活费呢？

**韩邦先：**当时我们在读书的时候，法国是没有学费这一说的。但是最近可能会有这个说法，有传言是说以后要收学费了。

**胡勇：**现在说的是，非欧盟国家的同学好像是要交 3770 多欧。但是据说有的学校还是可以免的，比如高师，大家可以去学校的官网确认。我觉得可以跟具体的学校去反映情况，比如说我当年就是说我家庭困难，当时没有收过我的学费。

住宿的话，就像刚才杨若涛说的，最开始的时候他会照顾第一次从国外过去的留学生，会优先给你分配一个房间。至于房租，你拿了房补以后，可能你只要交不到 100 欧。

其实生活费也不是很高，吃食堂的话是很便宜的，当年是不到 3 欧，如果你忍得下去的话也不是很难吃，其实很好吃。

(笑声)

另外，后面你要靠你攒点积蓄，你将来读博士的时候要自己找房子。我觉得当年我住得还是可以的，但是房租比学生宿舍贵一点。所以假如你是男生，每个月给你 1000 欧可能还会剩下一些。

**主持人：**聊完生活，我们聊点学习的事。同学们想问丘赛应该怎么准备？

**杨若涛：**准备丘赛的话，首先，知识量不在多，而在精，在于你能不能对一个领域把那些题目全都给搞清楚如果你要是基本上都能够自己解决课后那些习题，然后里边的一些定理可以自己推，就能够做到精。如果自己不能推，看一下答案，之后自己尝试再推一次，这样对你提高证明的能力也是很有帮助的。主要还是做题，如果你要是题目做得够透彻够全



座谈会现场主持人正在提问

面，我觉得丘赛应该不会考很差。

另外一点，大家要有几个好朋友可以一起互相讨论问题，因为团赛的时候是大家一起讨论。当时我是主考代数，在团赛讨论的时候，有些题我看完了，我并没有思路，但是有一个主考分析的同学看到这个问题之后就有一些思路，他就给我一种思路。同样地，我也帮助了几个同学。沟通交流，可能是我们团队为什么考得好的原因。

**主持人：**有同学想问，对于法国教授的课程，记笔记有什么技巧吗？

(全场大笑)

**梁永祺：**是不是觉得字太难认？我一开始也觉得字很难认，但是可能是因为我自己本身字也比较潦草，所以我理解老师写字的心态，大概知道他们想是为什么要这样“潦”。大概知道他就在哪里偷懒之后，我就比较容易认得清。

然后还有一个办法，我觉得要靠听，要把他说的那些词汇要放在脑袋里，然后你看这个词的时候，你就找一下哪个单词是对得上。开始的时候我就是这样子的，后来听力也慢慢往上涨了一点之后，就容易一些了。一开始我觉得也是有点痛苦的。你们有什么经验呢？

**胡勇：**现在你们应该没这个问题了，因为现在大家可以拍下来或者录下来。另外，因为讲的是数学，我们可以靠我们数学的理解去猜它这地方应该讲了什么，讲函数它不可能突然变成一个别的什么东西。总之，到了法国，适应了纯法语的教学环境就好了。

**杨若涛：**我也有一个方法。因为我刚去法国的时候，也是一点不会都法语的，也看不懂老师写的板书，所以我觉得我和大家的情况比较相近。虽然大家现在学了一些法语，但是我想大家在刚开始接触法语教学的时候，可能也会遇到这样的问题。我当时的想法是找一些法语比较好而且做笔记的同学。他们写的笔记无论是英化版的还是汉化版的，可能都会比老师更好辨认。半学期之后，你可能就对老师的字迹有所了解了，那个时候就和师兄们刚刚说的那种状态一样了。一开始的时候，我觉得可以找班里那些比较熟悉法语的同学看一下他们的笔记。

**谢俊逸：**好，我也说一下。怎么说，我觉得记笔记这件事情它是一个比较偏向具体的技术层面的事情。然后我觉得你们可能真正想问的可能是在法国上课应该怎么样。我觉得比较重要的一点，是要勇于提问题，而且你不要担心自己问的问题比较傻。我的一个观点是，特别聪明的人，他理解东西有时候会比别人慢一点，你比别人理解慢，并不是说明你比别人傻。我觉得你做学问，学会怎么问是很重要的一件事情，甚至比你怎么学习怎么解决问题更加重要。所以说一个学生你要是上课的时候能够经常问问题，而且偶尔能够问出一些很好的问题，其实老师会觉得你很优秀。所以我觉得大家不要害怕问问题。你不要太在意别人怎么想，你有的地方没有听懂，你就去问老师这个地方是怎么回事，然后让他再解释给你听。我现在听别人做报告的时候，哪怕一些很优秀的数学家，他也会问一些很傻的问题，别人跟他讲了很多遍，他没有理解，甚至所有人都理解了，他还没有理解。他还要走到黑板上面去跟别人辩论，然后辩论了两分钟以后，他也想：“哦，原来是这样”。你看数学家也会这样，所以说，没有理解又怎么样对吧？

**同学 H：**听说在法国学习会轻松一点，那么人容易变懒散吗？会不会利用不好时间呢？

**梁永祺：**我去法国之前在意大利呆了一年，因为我自己奖学金项目是一个欧盟给钱的项目，欧盟是要求在这两个国家待。就胡勇也在荷兰待了一年，但他在荷兰也没有学会吸大麻什么之类的。

(笑声)

我出国之前还是几乎所有时间都是花在学习上，但是倒是去了意大利，当时我觉得硕士一年级的课程比较简单，我就发现我开始喜欢到处旅游了，那时候也挺方便，因为有个申根

签证就可以很多欧洲国家随便乱跑。基本上每一年我都要到外面出去玩那么一两个月，每逢放假我肯定跑外面去玩去了。

这在于你自己希望选择怎么样的一种生活吧。对于我而言，就觉得数学很重要的是生活中不可以缺的一部分，但是我也觉得数学不会也不是我生活中的百分百的东西，也要有点其他的其他东西，所以那时候我就挺喜欢旅游。

**杨若涛：**那你每个月一千够吗？

**梁永祺：**所以我平时比较节省，那个时候节省的钱都花到旅游上。

**同学 I：**巴黎现在还能说是那种弥漫着艺术气息的艺术中心吗？现在那边还有什么像先锋艺术之类的东西吗？

**梁永祺：**巴黎还是有很多博物馆很有意思的。博物馆里头很多人类的艺术精华，这种东西真的是还真不错。我倒是觉得古典东西还挺有意思，为什么？因为我觉得我们高中历史书上的东西和人又跑到了我们面前来。

**主持人：**那看起来是梁老师有魔法，可以让他看到的东西和人都跑到他面前。

(笑声)

**谢俊逸：**我想补充一下，我觉得很难说有什么懒散或者勤奋，主要看你想要怎么样。一个人感觉累，很多时候是因为你要做很多不得不做，却又不想做的事情。学数学很多时候是你自己想做这件事情，那你当然愿意花一些时间在上面。

在中学时代，大家可能很喜欢和别人竞争，觉得我一定要学得很快，别人学到什么很难的东西，我也要马上学会。其实，你没有必要跟别人比，也不一定要那么着急，除非你真的必须要在 40 岁以前拿菲尔兹奖。

我的理解是我把数学作为我生活的一部分，我很享受它。开心的时候我就多学一点；今天不想学数学了，我就干点别的事情。

**同学 M：**一般师兄们是怎么安排自己的学习与生活的？学习大概会花多长时间呢？

**曹阳：**说不来，做研究和正常学习是两回事，做研究的时候你没有时间的概念。做一道题，你可以 10 分钟、20 分钟就做完；但是对于做研究，这个时间可能是几个月甚至几年。不是有个笑话叫“数学家每天过得像周末一样”，这是第一张图写的；第二张图就是“于是每个周末都要工作”。

(全场大笑)

**同学 N：**我想问一下学长，你们平时听课吗？还是以自学为主？

**梁永祺：**我是比较听课的，但每个人不一样。

**谢俊逸：**对，我会听一些课，但不算特别多。我觉得听课和自学相比有一个很大的好处：自学的时候，读书你也不知道是书错了还是你自己错了；而听课的时候，你有不理解的地方就可以去问别人。而且学数学不光是要了解我们知道什么，你也需要了解我们不知道什么。书本上写的是我们知道什么，但是你跟别人交流时就会发现我们不知道什么。有时你会发现书上有一个东西很难，你觉得你没有很好地理解它，也不知道应该理解到什么程度。但如果你跟别人交流，可能就会发现这个方向的专家也不理解它，这时候你就很接受自己的不理解。

(笑声)

这就给了你一些自信。我觉得上课，或者是更广义的与别人交流，让别人教你一些东西，很多时候比你自己单纯地看书要容易一些，而且在这个过程中你会获得更多的信息。

**同学 O：**我想问一下你们在国内学数学和去法国学数学的时候，有哪些不一样的感受？

**韩邦先：**我感觉变化还是非常大的。当时很巧，我去法国的时候跟谢俊逸师兄，还有03级的申述师兄一起在一个班里听过课。大家课上、课下交流可能比国内多，给我留下了比较深的印象。我也说一下法语上课能不能听懂的问题，在法国，不同的学校同一门课程会开很多遍，你总是可以选一些有讲义的，或者是板书比较清晰的老师。

**曹阳：**至少我在国内没怎么听过课，但在法国我是听课了。我最喜欢巴黎的地方就在于巴黎开了很多中等级别的课，它既不是最前沿的研究，也不是那种基础课。法国布尔巴基学派的数学特点是他们喜欢把东西重新整理，不是有个笑话说，好多数学都是在法国人重新整理之后，变成了法国人的数学。他们这种重新整理的目的就是把数学变得更加整体、更加结构化，他们认为这样更能被人类传播下去。

也正是因为这个习惯，比如在代数几何方面，他们很喜欢讲一些20世纪八九十年代的那些最经典的工作。在法国、在巴黎经常会有这样的课，把这些东西全讲出来。既不像一些地方只有基础课，也不像那些美国的顶尖学校，一般是老师直接讲自己的研究成果。研究更像是一场探险，而那些经典的结果都是非常漂亮的、已经成型的东西。我看过好多地方，只有巴黎会疯狂地开这种课，让你在做研究之前见识到各种各样的数学。所以我每年春季都会去听一点因为只有春季才有，离开巴黎之后就再也没有机会了。

**杨若涛：**我说两点不同，第一个我感觉法国的教学中习题是精髓，他们的题目会出得非常好，在习题课上你也可以学到很多新的东西以及课外的延伸。他们会把一些重要的定理拆解成几个部分，然后引导你一点一点地去推。这样对你以后做研究是很有帮助的。

第二个，刚才有一个词我一直没想好，但曹师兄说的“中等难度的课程”非常好。我感觉科大的课相对来说会简单一些。我在大三时总共修了9门研究生课，大三上3门，大三下6门。但我感觉如果这些课放在巴黎，可能两三门就够呛，他们的课程会相对深入一些，细节也会抓得更多一些。

**谢俊逸：**我的感觉也差不多，但我想国内会渐渐好起来，现在很多年轻老师回来可以开一些以前开不出来的课。我觉得巴黎还有一个好处，这在美国可能也没有。巴黎是一个很大的城市，你可以同时学到两种风格很不一样的数学。你可以想象数学有很多分支，它们都有着自己独特的审美趣味。

然后我觉得还有一点，在法国很多时候是很好的研究者给你上课，当然现在国内也会越来越好。学习知识并不只是为了知识本身，有时候也要学习别人如何看待问题。一个领域的专家是怎样做研究的呢？这是你在上课、在跟别人讨论问题的时候可以了解到的。

不过，我也想说一个国内的优势。现在有一些比较优秀的年轻老师，比如说像梁老师，回到国内，他们可以用中文给你们讲课。这一点其实非常好。我有一个观察，在巴黎的时候，面对一些比较难的数学我的反应会慢一些；但是在在国内听同样的东西，别人用中文讲，我的反应就会快很多。其实我觉得语言对一个人的思考还是很重要的，用外语来思考总归是隔着一层。另一方面，如果用中文讲，很多人会把自己的心得、一些不是那么严格的东西讲给你听，而这些往往可以帮助你理解。

**梁永祺：**可能我在国内的时候算是一个比较优秀的学生，我觉得压力没有那么大。但是



座谈会现场气氛很活跃

到国外以后发现，唉，身边的人怎么这么牛。我就会担心自己考试能不能过等等。因为在十一大读书，也许哪天你会发现以前的某个同学拿了菲尔兹奖，这也不是特别奇怪。好像最近连续好多年的菲尔兹奖得主都跟十一大有点关系，要么在那里读过书，要么在那里工作。而且我觉得国内的老师们都不太会让学生不及格，但是在国外就完全不是这样。

**主持人：**我们还收到了一个问题：建议提早自学更高级的研究生层次的数学知识吗？

**梁永祺：**至少我自己本科的时候没怎么提前。我曾经想去看一点代数几何，但那个时候我看不懂。本科时我的成绩比较好，这可能也是个问题。后来我去中科院读研究生，那时候经常去清华听课，或者去北大蹭课，发现怎么清华北大学生学的比我多。我研一的时候可能学得比较狠，那时候和许金兴老师还有胡勇老师一起上一门课，他们都很厉害，所以我拼命地追赶他们。

**谢俊逸：**我觉得要看每个人的状况，要是你自己愿意学就学，要是不愿意就不学。其实你学得快学得慢并不代表什么，人不要总是去跟别人比较，按照自己的节奏来，你要相信自己是很优秀的。我书看不懂，题也不会做，但是我是个好学生。

(全场大笑)

我觉得对于数学，最重要的是你做一件事情要有耐心，不要急躁。其实数学里面要说有什么东西很难，人类无法理解，我觉得现在还没有，它们都是人做出来的。只要你肯花时间，慢慢地想，慢慢地看，总是能学会的，而且你还能想到前人没有做出来的东西。你要相信自己是可以做到的。

另外，我比较鼓励大家早一点学，只要你自己有意愿。比如说像代数几何，它确实很漂亮，很有意思。而且有些人确实有这种自学能力，但在以前信息不通畅，你可能就错过了这个机会，确实有点可惜。你要是对某些东西感兴趣，然后自己花点时间钻研，哪怕学得慢一点，你依然会觉得这是一个很有趣的过程。

**杨若涛：**我也希望大家能提前学一些东西，但前提是你要把学过的东西掌握扎实。因为你掌握好一个东西之后，你是可以拿它来做数学的；而你形式地翻完5本书之后，你可能只会跟别人讲故事，仅此而已。

我大三的时候，可以说大家有一点互相竞争的感觉吧，但当时我们没有意识到这个问题。大家都希望自己能够多学一些，因为别人在学了那你肯定也想学，但是后来我发现这样的效果并不是非常好。我前一学期只学3门课，对我来说收获远比后一学期学6门课要好得多。

**曹阳：**你的问题，一个是快慢，一个是要不要自学。学得快慢其实不重要，数学主要是你能不能走得比较深，学得慢的人有的是，比如Grothendieck刚到巴黎的时候他也受不了，然后去南锡，在南锡待了很久之后，他做出来了最顶尖的数学。你看Grothendieck这样的人，他都跟不上。还有广中平佑，他早期学数学是抄书的。你看连这种大神级的人物他们都是慢慢来的，所以快慢不重要，重要的是你能走多深。另外，关于要不要提前学东西，我想反过来问一个问题，那边有那么多漂亮的东西，你自己不愿意去学吗？就像我习题课给大家展示那么多漂亮的结论，难道你们不想去把这些漂亮结论以及背后的东西都学一学吗？

**韩邦先：**还是说一下很现实的问题：最后无论是要出国、考研，还是保研最后都要看成绩的。所以如果选研究生课影响到你的学习成绩了，而你只是为了在同学面前炫耀一下新名词，那就没有意思了是吧？终归还是要把主要的课先学扎实了，然后如果有余力，按科大现在的情况我觉得是适合多学一些课的。

**谢俊逸：**你可以旁听，不去考试嘛。

**主持人：**我问一个同学们可能不太好意思提的问题，在法国怎么认识异性留学生？然后

留学会影响谈恋爱吗？

**梁永祺：**读博士的时候你会担心很多事情，首先是担心自己能不能毕业，然后毕业之后会很担心去哪找工作，这是很烦人的事情。所以我认识我老婆是在我找到稳定工作之后。

**谢俊逸：**这个问题是同学们发给你的？还是你自己发给自己的？

(全场大笑)

我也不知道。这可能跟人的性格有关系，比如有些人比较内向……而且我觉得梁永祺说得对，进入学术界的早期比较奔波，维持一个恋爱关系也不是很容易。这种事情可能还是看缘分吧。

**主持人：**我们还可以聊五分钟，大家还有没有想问什么问题？那我提个问题吧，老师们是怎么选择了现在的研究方向的呢？

**梁永祺：**我本科一开始学的分析比较多，但是代数比较少，然后到后半场我自己学了很多代数，发现代数比分析有意思，慢慢地就丢下了分析。等到读博士要选方向的时候，发现自己的分析太烂了，于是我就选了纯代数的老师。

**谢俊逸：**这里有两件事情，一个是你怎么选择自己的导师，另一个是怎么选择研究方向。它们有一定的联系，但也不完全一样。我找导师的时候，有人跟我提起我导师这个人，我看了一下觉得他做的东西还比较有意思，然后我就跟他联系。我做的是算术动力系统，它涉及到的领域比较多，需要用到一些代数几何、数论，还有动力系统的知识。

我的观念可能和很多人的不太一样，我并不觉得数学里有什么问题是必须要解决的。我的理解是数学比较像写作，它是一种表达自己的方式，就好比写作题材可以是散文、小说、诗歌，还有数学。你把你的文章写成这种证明的形式来表达你的想法。算术动力系统这个领域比较好的地方在于它比较新，这样你就没有必要去追随(follow)别人的那些纲领(program)，也就是没有必要去追随别人的想法。你可以有很多自己的想法，你可以去做自己喜欢的问题，然后跟别人说：我们要来做这个问题，你可以发展很多完全属于你自己的东西，这样你表达自己的空间、自由度就比较大。这点是它比较吸引我的地方。

**韩邦先：**我选择方向其实很偶然，在去法国之前我都没有听说过这个方向——最优传输(Optimal transport)。当时纯粹是因为它比较热门。因为我2011年去法国，2010年Villani拿了菲尔兹奖，他在最优传输理论做出过重大贡献，而他正好就是我们PGSM项目背后的庞加莱研究所的主任。那时法国的数学界跟分析相关的所有人都在讨论这个问题，所以就自然而然地会想要学习一些。

当然你会问为什么非要去学分析有关的方向，因为当时有一个比较现实的问题：我们去法国是从硕士二年级开始读的，很快就要决定方向，而且也不见得有多认真。恰好我法语不行，那些有讲义的课和板书比较清楚的老师都是跟分析相关的。

(笑声)

**曹阳：**这是两个问题，第一个是我为什么选择代数几何，第二个是我为什么选择现在的研究方向。我选代数几何完全是在图书馆里一点点地随便翻书最终走到的。其实最开始我也是选择分析的书，反正我又不喜欢上课，大一的时候就在图书馆里先学实变、泛函之类的课程。然后失败以后我又听说了范畴论，说这是最普遍(universal)的理论，你知道年轻人都喜欢。

(笑声)

你知道现在好多本科生就喜欢无穷范畴，年轻人可能就喜欢最抽象的东西，所以当时我听说范畴论最抽象，那我就学了。范畴论其实并不难，学完之后我发现有一本同调代数的书，书上第一章就是范畴，于是我就开始学同调。学完同调之后，我就想我应该怎么样用，然后发

现有一本代数几何书上有一章叫上同调，我就去读了代数几何。

我觉得看哪个理论你觉得学起来舒服，那你就去读吧。我自己也翻过别的书，一本解析数论，巨厚无比，最后刷了几十页就扔了。

(笑声)

我心里想“这是什么鬼”。所以从那以后我就把自己想做的方向定义为“应用代数几何”——哪里会用得到代数几何我都可以去做。但是我最后的方向完全随机，因为我在北京读书的时候，导师做那个，我就跟着做了。并且到了法国之后，我还同时做过另外一个领域。其实你做的研究领域并没有那么固定，很多人博士毕业之后，找个合作者就可以换个领域。有些时候我觉得更重要的是你要掌握一项核心的基本功，如果你把这项基本功练得比较好了，你就可以拿着它去做任何一个相关的领域，也可以凭着它去找合作者。

**梁永祺：**那你选博士导师是为了当我的师叔吗？

**曹阳：**因为他要我啊(笑)。主要是他做得更几何，我就选了一个跨着几何和算术两边都做的导师。其实梁永祺老师主页上也写着他的选择领域心路历程。

**胡勇：**我觉得这要凭你自己兴趣对不对？你先找一个自己感兴趣的，然后看能不能走下去，走下去就不用再选了，走不下去就只能再选。就好像你要找男朋友或者女朋友，最想表白的你先表白一下，成功了你就不用再表白了，不然的话你就重新再调整一下。而且这跟每个人的情况有关系，你上大学的时候最开始对哪门课有点感觉，你会发现哪门课吸引你，你就会不自觉地朝这个方向多学一点。

印象中我找导师其实就是这样的，我听过他讲座，当时觉得他的方向挺有意思的。我就给老师写信，说我想跟着你学。有一个就先试一个嘛。

**梁永祺：**杨若涛学长现在这个方向非常热门，非常高大上。

**杨若涛：**我现在算是在做几何朗兰兹纲领。本科阶段我比较喜欢一些代数的东西，一是因为我觉得代数比较容易；二是我觉得代数比较有意思。然后我就会去问其他人代数领域以后做什么比较好，他们说是表示论；然后我又问他们学表示论以后做什么比较好，他们说几何表示论。大二的时候，我去中科院找了一位导师，老师们还是比较喜欢带科大的学生做一些研究的，我就慢慢地接触了一些几何表示论的东西。等到去了法国，正好有一位几何表示论领域的巨佬在法国高等科学研究所(IHES)访问。我去听了报告，抱着试一试的心态，我就问他你要不要我；然后他说，好呀。

(全场大笑)

**胡勇：**你这个特别像我刚才说的表白，对不对？

**杨若涛：**然后我就一直跟着他，进入了这个领域。

**主持人：**我们的时间差不多到了，如果大家还想了解谢师兄和杨师兄的研究方向，可以今晚来听华罗庚讨论班的岁末专场讲座。晚上也可以继续问问题，谢师兄也鼓励大家问问题对吧？大家最后用热烈的掌声感谢我们的师兄们。谢谢大家，我们晚上再见。

记录 & 整理：2020 级数学科学学院 溫丰宁  
审核：梁永祺老师

# 晨兴通俗报告：How to do mathematics

(任金波、李莘整理, 王昌盛审核, 郑伟豪、章俊彦润色)

讲座题目: How to do Mathematics? (A personal viewpoint)

主讲人: Prof. Benson Farb, 芝加哥大学

时间: 2013 年 7 月 1 日, 晚上 19:00-20:30

地点: 中国科学院数学与系统科学研究院 · 晨兴数学中心 110 室

## Benson Farb 简介

- 他是芝加哥大学最受欢迎的教授之一
- 他对数学都有很多独到的见解
- 他是 Thurston (几何化猜想的提出者) 非常杰出的学生
- 他已经指导了 29 个博士生

**季理真:** 欢迎来到“现代数学概观”特别讲座“如何从事数学研究”。我相信在座各位都是热爱数学的, 也相信大家都想在数学方面有所建树。所以首先, 我认为大家得为自己选择一个方向。生活中, 你会和你的伴侣共度一生, 大家都会很慎重地选择自己的伴侣。在数学研究中也是这样, 你必须首先找到一个好的方向。而一旦你选定了一个方向, 下一步就要开启你的研究之旅, 然后问题就在于“怎么样去做数学研究”。Farb 教授对这个问题有着自己独到的见解, 我认为他很有资格来对此发表评论。正如大家在海报上所见, 他已经培养了 29 个博士生, 是芝加哥大学最受欢迎的教授之一。此外, 他也是 Thurston 最出色的学生之一。如果你听过他的讲座, 我觉得你可以感受到他沿袭了 Thurston 的风格。今晚, 他将告诉我们如何去做数学研究, 讲讲什么是好的数学、什么是坏的数学, 以及在研究中你需要知道什么, 而不必知道什么。让我们一起欢迎 Farb!

**Farb:** 非常感谢! 感谢大家的到来! 两天前, 理真极力地建议我在此为大家 (尤其是为在场的学生们) 做一个这样主题的演讲, 我同意了, 于是在很短时间内做出了这些幻灯片。首先, 我要对理真的话做个简短的评论: 夫妻之间会有分分合合, 但数学却总是在这里, 不离不弃。因此选择数学的方向可能 (比找对象) 更重要, 但不要告诉我的妻子我说过这些 (哈哈)。无论如何, 很可怕的一点是, 给大家分享我的观点难免会显得有点愚蠢, 所以我认为讲座的标题可以改为“一个带有偏见的人的一些建议”。这个“有偏见的人”当然是我, 这也是我主要想分享给大家的东西。

**Farb:** 现在我正式开始讲。我要讲的第一点是不言自明的

**断言 1:** 每个数学家都要找到属于自己的道路。

话虽如此, 听闻别人的历程也是有用的。并且事实上, 我认为我们在学生阶段总是忘记了这样一件事: 时刻思考我们正在做的事情, 思考数学的过程, 思考我们今晚要讨论的问题。数学已经够难了, 那我们把自己的时间都奉献给数学真的是值得的吗? 人总是要花点时间想自己在做什么, 自己想步入哪个方向。这些非常重要的问题会伴随你的一生, 去仔细想想其中的一点一滴, 这个思考的过程会使你受益无穷。

首先, 我想讲“如何做一名博士生”。数学方面, 我会简要提到一些关于数学研究的东西, 这并不是在聊数学, 当然它们之间差别不大。我只有 48 小时的时间准备, 所以措辞并不一定很有条理。下面是我的一些建议:

(A). 听取顶级人士的建议

关于如何成为一名优秀的研究生, 已经有很多成文的建议。比如 Ravil Vakil 和 Jordan

Ellenberg, 他们都是顶尖的数学家, 在他们的主页上你可以找到非常棒的建议。我尤其喜欢 Ravil Vakil 对于如何听报告的建议。大部分人在报告听了五分钟之后就感觉没什么兴趣, 然后就干坐着发呆, 浪费了自己生命中宝贵的 55 分钟。但 Vakil 认为你没必要这样, 你可以把听一场报告看成是玩一局游戏, 其任务是试着从中发现三样你能学到的东西。我非常鼓励你们去读一读他提出的这些建议, 他算是一个非常能言善辩的人。

### (B). 如何选导师

这点至关重要, 因为它不仅决定了你接下来四年五年或者六年的博士学习生涯, 它还很可能决定你接下来十年甚至五十年的发展。对于这个问题, 我认为如下几点是十分重要的:

#### 1. 选择一个“对路子”的课题(能让你投入其中并使你始终离不开它)

在选择导师的时候, 有时你可能只是大概地了解这位教授在研究数论, 那位教授在研究偏微分方程, 但是你并不完全知道教授们具体在做什么。此时, 你应当试着更具体地了解他们在做什么, 试着去读他们论文的介绍部分。选择导师和课题是很困难的, 因为你要基于这些不全面的信息作出一个非常重大的决定。我对此只能说: 很不幸, 事实如此, 别无他法。但是从根本上讲, 你选择的导师最好能和你产生“共鸣”。这样的话, 在你花大量时间和导师合作的过程中, 你会受益无穷。比如说, 我刚去读研究生的时候是跟随项武忠教授学习 K-理论, 但后来我完全转换了方向。我转而跟随 Thurston, 因为这个选择符合我对我的数学哲学的思考, 同时很多的个人原因导致了我最终决定去做 Thurston 做的东西。比如我非常喜欢用  $\Gamma$  来表示李群  $G$  的离散子群, 每当我见到  $\Gamma$  用来表示离散子群的时候我都对此很喜欢。你也许会觉得这比较傻, 但我从那时候开始已经写了不下三十万个“ $\Gamma$ ”了, 并且我非常热衷于学习关于  $\Gamma$  的更多东西。我可能是有些傻, 但我是认真的, 是发自内心的。这也就是我所说的情感上产生了共鸣。我总是跟我的学生说“去发掘一些能让你一直保持精力集中的东西”。到你博士阶段的末期, 你是睡不着的, 因为你需要整夜思考你所研究的问题的答案, 否则你完不成你的博士论文。除了 J. P. Serre 之外, 我想没有人聪明到能不用整晚熬夜就能写出伟大的数学工作。你要知道, 你很难一眼看出你思考的数学问题的答案, 你需要用一整个晚上的时间去尝试各种思路。

#### 2. 你的导师应该是你选择的领域的专家。

这一点相当关键。这个问题有很多人很感兴趣, 每天都有人在 MathOverflow 上讨论这个问题, 对此我的朋友 Matthew Emerton 给出了很好的回答, 你们应该去看一看那个回答。假如你对某个方向感兴趣, 我们就比如说数论中的二次型吧, 那么不管你在哪个大学, 你不能只学二次型, 你需要找一个你们学校的教授来指导你。如果这个数学领域很活跃并且有优秀的数学家的话, 它往往发展很快, 并且有许多优秀的研究团队。这些团队很可能知道大家不知道的东西, 你的导师应当是这些人中的一员。选导师要注意很多, 我不打算现在全部展开。无论如何, 你要找一个在该领域内学术上很活跃的专家来做你的导师(你可以从他的文章和其他一些方面来评判), 因为不管他们做二次型还是谷山志村猜想, 或者微分拓扑, 他们知道这个领域正在发生些什么。如果你在大学里只是孤军奋战, 而想去跟进某个领域, 你或许会做出很多的努力。你会给专家写邮件, 你会每天刷 arXiv, 你会读书, 你很努力学习, 但是这些都不够, 你很可能走的是一条死路, 因为你可能在做别人已经做过的工作或在研究大家都熟悉的东西。比如, Mark Kisin 在做你想跟进的方向的时候, 你还只是在念 Hartshorne。这样子的例子数不胜数。找一个专家做你的导师可能会把你的兴趣范围缩小, 因为你的学校并不总是有你感兴趣的每个领域的专家。但愿你能找到符合上述要求的教授, 如果没有, 那么恐怕你得离开你的学校。

#### 3. 你必须信任你的导师

除非你是百万里挑一的那种人(即使你是这种人, 你往往也不会意识到), 否则你必

须信任你的导师。如果你的导师让你学某个特定的东西，你可以质疑其原因；如果你的导师仍然坚持但你不同意，你可以说出你的见解；可是如果最终导师坚持认为你确实要学这个，那么你必须去学。否则你无法和导师建立师生关系。我可以从导师的角度来讲：如果你不听话，导师会很快放弃你的，我们都会很快放弃你，我没什么地方可以帮助你，我不会去浪费时间。如果你拿出一个有逻辑的论点，那么你可以去理论，我也会听；但是到头来，你还是得完成你的任务，因为我是老板。有时你不明白为什么这个问题很有趣，你可以问导师也应当问导师，但有时回答可能是：你要有更广阔的视野，要去学习更广阔的知识，最终你会看到它们的联系。你要相信这一点。

#### 4. 导师 = 父母

一日为师，终生为父，导师是与你一生相伴的人。就在讲座开始前五分钟，确切地讲，在我跨入这扇门坐在这里之前，我收到我之前一个学生的邮件。他是十二年前毕业的，现在已经是教授了。这段师生关系永远不会断绝，会伴随你一辈子。所以，（选导师）是个重大的决定。你必须严肃认真对待。

这是我的导师，我和他的关系不甚融洽，但那是另一回事了。这其中的故事说来话长，但最终的结果是我改变了当初的研究方向，我希望 Thurston 成为我的导师，他答应了。他是不怎么给学生问题的，但他当年居然给我了一个问题。经过数周的挣扎之后，我去和别人讨论这个问题的思路，他告诉我“这其实是个很有名的公开问题。”于是我就不再做他给的问题了。他显然不是很擅长给学生问题，但是不管怎么说，我开始做我自己的问题了。这个问题是关于双曲群的，我告诉他我在做这个问题，他说这是个不错的选择。他斜着眼，望着天空。当时我想弄懂双曲复几何中李群的格，他说“哦，这就像一堆泡沫状的气泡，气泡之间有有界的相互作用。”我当时很单纯，把他说的话都用笔记下来，我写着“泡沫、气泡”，和他告别之后就去图书馆查文献。是的，我已经准备好了，我准备好开始做我的问题，准备好去解开“泡沫、气泡”的意义。最初，我根本不知道怎么处理气泡，甚至连怎么列方程都不知道，但是经过三年的痛苦和煎熬，我最终解决了这个问题。如果你要我给出五个词概括我的论文的话，我可以说“气泡堆之间的有界作用”(froth of bubbles bounded interaction)，我的论文大体就是基于这些。他告诉我的已经是足够多的东西了，所以研究到最后我一定会把他的意思表达出来。

#### (C). 如何工作

我有很多博士生，所以我认为在这个话题上我比较有发言权。

我相信研究生时期是科研中最艰难的阶段，至少对我是这样。因为我在这时对数学了解的最少，但我还得证明定理。同时这个时期往往有各种与数学无关的事情发生。对比之下现在我懂得更多数学，证明变得容易多了。但是我相信你们都是聪明人，你们可以搞定这些问题，否则不会读数学博士。诚然，有的博士写的论文比其他的博士优秀，但真正的挑战是源于心理上的。你可能会感到沮丧、抑郁，可能会遇到瓶颈，甚至你会想自己为什么要做数学，你可能想要去做一些其它能帮助这个世界服务他人的事。尽管我认为数学也是服务于世界的，但对其他人来说这可能是另外一回事了。这些困难你都要去努力克服。这和工作很类似，工作很辛苦，可没有人强迫你去工作，事实上在美国，理论上你从现在开始三年什么也不做也不会有人说什么。每天都投入工作是一件很难的事情，但一般你开始工作后你会享受工作带给你的感觉；有时又会萌生逃离数学的想法，因为数学很难。所以我觉得困难主要是源于心理上的。我多么希望当初有人能告诉我一些这方面的东西，这会让我当时的生活轻松得多。关于数学的研究工作，我有如下几点建议：

##### 1. 让你的生活、呼吸、睡眠都与数学相伴

如果你不愿意这样的话，那你就应该去做数学研究，你就不适合去做数学研究。在芝

加哥大学这种世界前五的学校，甚至也有这样的学生：多年前，有个学生说“夏天到了，我要回家，我准备好去过暑假生活了”——“你不能放假！你在说什么？你不能这样，休息一周或两周是可以的，但是如果你不愿让自己沉浸在数学中，那你就太傻了——学数学这么难，这么艰辛，你却不去坚持，那你为什么不去投资银行赚更多钱呢？”我只是说，既然这么难，那你还是去挣钱好了，至少挣钱你可以有所收获。我总是对我学生讲“我们给你付工资（研究生助教工作），你得工作，大多数人都从早上九点工作到下午五点，每周 40 个小时，这是底线。如果每周不足 40 小时，那么你是在坑你的学校——你拿了钱但是不干事。”当然每周 40 小时肯定不够，你得额外花很多时间用纸笔演算数学。如果你只想成为一个极度平庸数学家，那就每周工作 40 小时好了。每周 40 小时或许也会让你侥幸成功，但每周 80 个小时一定会让你离成功更近些。相信我，我也知道拖延的毛病，我也知道那些电脑游戏，这些都可以作为你不做数学的借口。但是一旦你开始做数学，你就不要做那些事情。我自己之前也做过这样的事情，但有一天，我决定了我应该让数学包围我的全部生活。每次我拿着笔，我在做数学的时候，不能仅仅把书本放在面前，不能只是在单纯地看书。作为一个数学家，只读书不写下东西，那几乎就等于没看。我想，你应该时时刻刻去阅读，但是你也得去解决问题，去尝试算一些数学中的例子。

托马斯·爱迪生说过：天才是 1% 的灵感和 99% 的汗水。

我想大多数人都听说过这个，爱迪生是历史上最伟大的发明家之一。汗水，指的是努力工作。他想说努力工作几乎是成功的全部。在数学中，我有另一个名言，这是我自己的体会：

天才是 1% 的灵感，35% 的汗水和 64% 的“强迫症”。

这“强迫症”是有用的，它让你离不开你从事的东西，让你专注于此。你不会休（太久）假，你不会做任何（其它）事情，就像精神病一样，你完全集中精力，你完全在想着它。也许你在看着某个人，点着头，但是其实你在想数学。我见到的优秀数学家都有这种“强迫症”。

## 2. 不要只去读，要动笔写下来！——解决问题

我很庆幸自己意识到了这一点。当我从 Cornell 本科毕业后，我去了 Princeton，那真是个好地方。那是在 1989 年，我开始读 Milnor 的《示性类》，我坐在河边，坐在瀑布边读着 Milnor 的书，那里的景色是那样美丽、纯净，书里的内容也是一样。到了最后，我学到了很多奇妙的东西——比如从流形的曲率张量构造陈类。我学到的数学是非常漂亮、复杂而又精妙的数学，然后我思考了一个很简单的例子——环面，它的示性类、它的 Stiefel-Whitney 类是什么？我发现我想不出来，我这才意识到我做不了任何事，原来我什么也不懂。Milnor 书中的内容干净利落、很漂亮，但是我什么也没写下来。我以为我什么都知道了，但我什么都不懂。我只知道名词，我只能把它们说出来。我会吹牛，在讲台上大讲一通，但是我什么也做不了。我认为，到了最后只有纸、笔和草稿本，只有这些才是你所剩下的。是的，只有这些，剩下的都是没有用的——只有这些是你能用的，只有这些是你能用来证明问题的。如果我不能用我掌握的陈类在黑板上算出些什么，那就完全没有用。仅仅去阅读，那么你什么也完成不了。只去阅读的习惯是难以克服的，因为这样学起来有趣，你可以了解到什么是高阶 K-理论、无穷范畴或者拓扑量子场论，但是这样你能计算哪些呢？

我记得我有一个学生，他说“你在课上讲微分拓扑时候我都想睡觉”，我说“到我办公室来，我给你一个口试，看看最基本的内容你有没有掌握。”于是他来了，我便问他：“什么是 Morse 函数，请定义 Morse 函数”。“Milnor 写过一本很好的关于 Morse 理论的书，在这本书的第 1 页。在讲 Morse 函数之前，他画了一个很漂亮的插图，这图中有个环面、有高度函数、梯度流和四个临界点，这是一张非常漂亮的图。”我说：“好的，告诉我什么是 Morse 函数。”这大概在 Milnor 的书的第二页，然后他说：“是的，这个东西很玄妙……”我打断

了他：“我不需要知道它玄妙不玄妙，我也不想听它的哲学，请你在黑板上写出它的定义就好了。”其实，这也就是关于函数的微分的，但是他支支吾吾写不出来。这样学习是没有价值的，甚至价值是负面的。自欺欺人很简单，我们欺骗自己，因为我们不希望自己一无是处。你会意识到欺骗自己真的很容易，并且人因为天性使然总是想走容易的路。有一个非常有效的检验自己的方式就是找本书，做里面的习题！我看到你们在座的有人拿着 Hartshorne，我很支持你们把它的习题全做了。我很高兴看到这书已经有些破了，它不像是新的，它像是用过的。没有什么事情可以像拿起一本书并做完所有习题一样让我们感觉这么爽。当你做完习题时你的书已经破破烂烂了，沾满了咖啡渍。但你会有一种从其他事情中感受不到的成就感。

### 3. 每周都花十分钟照照镜子看看自己

在座各位应该都明白，“照镜子”只是字面意思。确切地说，你并不用真对着镜子照自己，我只是希望你认清现实。比如我认识到当初并没有真正在读 Milnor 的《示性类》这本书，我只是在浪费时间，浪费自己的生命。认清自己、认清现实很艰难，但是你一定要去尝试——比如问问自己“我能通过切空间将曲面参数化吗？”。孔子很伟大，他说过我们要“吾日三省吾身”。我们应该学习孔子，多多反省自己。第一我想我们要反省自己“我这周学到了什么？”。我要求我的学生每周给我写邮件，并且每两周我会和他们见几个小时的面。每周我都允许你说“我什么也没做”，我不会责备你，我只会让你感觉到尴尬。但如果你连续两个星期什么都没做，那也许你永远也不会做到了。第二我们要反省自己“我最近学到了什么新工具？”。你需要学各种各样的工具，你不能光是乱写乱画，工具对你的帮助是非常大的。你一个月应该学会一个新的、大的、困难的工具，这目标可能有点太高了，但是我们总得尝试。最后，还要问问自己“我学了多少个小时？”。总有些人嘲笑我和我的学生是工作狂。我不是说一定非得怎么样，但是，你现在在这里（用手指着黑板上较低的位置），以你现在进步的速度，你可以达到这里（用手指指着稍微靠上的位置），但是我需要你达到这个位置（用手指着远比刚才高的位置），你得做点什么，你得改变！你要加快你进步的速度。这是没有捷径，没有捷径的！我再次强调一下，真正的挑战在于“对自己要诚实”。

### 4. 你能学多少东西？

在证明定理的时候，我很多次我都希望定理是对的，并且我也以为我自己快要证明出来了。但是我发现我逃避了一些问题，我没有发掘出最关键的东西。现在，我要给出一个关于你能学多少的规律。你现在在这里（手指较低位置），我认为要想成为一个像样的数学家，你至少得到这里（手指较高位置），以你现在的学习速度你不可能达到这个位置。可能你在讲座中听到了什么东西然后去书里面查，但也许你会说“我无法把它们都学会。”你说得对，如果你仅仅维持现在的速度，你不可能把它们全掌握。有句话叫“如果你追求平庸，你就不可能成功。”所以你需要改变学习方式，让自己能学会这些东西。下面我说一个命题。你要相信我这绝对是真的，我没有丝毫夸大。

命题：令： $X = \text{你认为你一个月能学的东西}$ ， $Y = \text{你一个月实际能学的东西}$ 。则

$$(1) Y = 2X.$$

(2) 在 (1) 中把  $X$  与  $Y$  互换也是对的。

当然这确实因人而异。有人学东西的速度确实是一成不变的，那么这些人就不能再继续做数学了，他不适合数学。我想对于大多数人，为什么他们做不到呢？首先记住  $Y = 2X$ ，只要你大胆地尝试一次，你完全可以学到你认为你能学到的两倍的东西。我说的“学”是指一支笔、一个本子，每天打一百张草稿纸。我有个学生，他说“我没有办法再继续读下去了。”，我说“你只是达到了最低标准，你得改变。”于是我跟他说“这本书拿去，把所有题目做了。”过了一周他来找我，给了我一个 75 页的文档——他一个星期完成了书中的所有习题。“哦，

天哪，我真没想到你居然做到了！”我当时感叹道。他开始认为他一定做不到的，而我说我确信你能做到。现在，他已经写了 15 篇论文了，他已经成了一个非常优秀的数学家。

当你完成这一点的时候，你说：“我能做到  $2X$  了，但也就  $2X$  了”，你又错了，你能学的还可以再加倍，这样可以一直进行下去。我的本科是在 Cornell 读的——它是个很好的学校，有很多天资聪颖的研究生。但 Cornell 和 Princeton 的学生区别在于，后者的学生总是尝试着同时学海量的东西，当然他们不是像我读 Milnor 的书那样仅仅快速翻着书页，他们是要尝试着去做 Hartshorne 的所有习题的。那时很多 Cornell 的学生是很聪明的，但是当有人提到“让我们学这本书，并且做它的习题吧”时，回应总是“天哪，我们不可能做到的”。现在回想起来，我们有能力学相当于那时学的五倍的内容，但问题在于我们总是不去尝试。而如果我们不去尝试，就不可能达到更高的水平。

#### (D). 学什么？怎么学？

##### 1. 听取你导师的意见，导师是最懂得行的。

这个刚才已经基本上谈过了，你总是需要某个人对你进行指导，而这个人就是你的导师。如果你不相信你的导师，你应该另选他人做你的导师。作为过来人，你一定要信任你的导师。你永远不可能靠你一个人完成学业。

##### 2. 整体框架 (big picture) 和细节都要学

从科学的角度讲，这也是对的。我和很多人，甚至是博士后交谈的时候我问他“你的论文在做什么？”，他说一堆抽象的东西；“为什么你要做这个？”“我不知道！”“你不知道，那你为什么会对它感兴趣呢？你要去了解整体框架，即使这不是你的论文的主要内容。在历史上，Serre 和 Tate 都写出了很好的博士论文，而其他人的论文水平就相对来说比较一般。你的研究处于一个大框架中，这是个巨大的拼图，你研究生阶段做的研究不太可能会是这个拼图最大的一块，这只是你科研的第一步。你一定要明白大框架是什么，否则我都不知道你怎么让你的学生对此感兴趣。”我跟很多学生都说过这个，这也是非常重要的一点。我知道细节可以非常复杂。如果你的导师在做极小模型纲领 (minimum model programme)，这其中涉及很多的数学知识，非常非常困难，而你可能做一些非常具体、非常细节的工作，但你还是一定要去学习大的框架，因为只去研究每个细节是不足以让你了解整个大框架的。尽管这并不有趣，但是不这样做的话，你永远证明不了很宏伟的定理，永远无法和他人交流你在做什么。而交流恰恰是你所需要的，特别是当你年轻的时候。一个人不和别人交流的话，是不会有什么大出息的。

我再讲另一个学生常犯的错误，我以前有个学生，他的名字我还记得，我说：“Justin，你试试算下这个，我想可以这样算。”然后学生说：“我两周后来见您。”两周后，学生回来了，说我的方法行不通并解释了一下。但是，解释我的方法行不通最多只需 30 秒。于是我说：“发现这个最多花了你 5 分钟时间吧，那你有没有尝试其它方法？”“没有。”“那你这两周都干什么去了？”我想表达的是，数学很难，有的学生会陷进细节里面去，并且大多数人如果一次不行，就不愿再尝试。我有一次被一个问题难住了，我花了一周时间去想不可定向的情形，因为文章没有说可定向。可能这种情况根本无所谓，写文章的人估计是忘了。但这个细节实际上有多重要呢？这其实是一个大问题。如果你正在证一个需要十多页篇幅解释的定理，有的人甚至要用三四十页、五六十页来证明它。你一定要有一个整体框架。你必须要能说出“这其中有什么主要步骤，第一步是……”，你需要有把它们解构问题的能力。而对全局都做了解则代表着，你需要在每一个细节上下功夫。

##### 3. 记住每个细节太难，要掌握主要思想。

你要在每一个细节上下功夫，这是毋庸置疑的。但你很难把它们都记住。写下证明的概要是学数学的一个好方法。我读研究生的时候，写下了海量数学定理的证明概要，当然了，

只是写主要思想。举个例子：坐标变换。我们都体会过，当我们面对一个困难的问题的时候，我们要么变换基，要么变换坐标，或者用 Möbius 变换。有时候我忘了定理了，但我记得思想。这没关系，因为思想更重要。比如说当我自己尝试证明一个已知的定理的时候，我只记得是先画一个圆，然后呢？再画一个圆和它相切，然后再画一个圆，也许和两个都相切。然后关于它有个定理，我忘了定理了，没关系，我记得这其中的技巧。外面的圆记为  $l$ ，里面的圆记为  $l'$ ，用一个 Möbius 变换，这两个圆切于一点。在黎曼球面上，我可以用一个 Möbius 变换，把  $l$  变成这个，把  $l'$  变成这个（直线），然后……我忘了定理了，但这个证明已经是小事一桩了。再比如说，全纯映射差不多就是让距离不增。当我说“差不多”，我是指它取决于映射从哪里映到哪里。这并不总是对的，你应当搞清楚这些东西什么时候是对的，什么时候是不对的。这个东西我最近才意识到，并且开始使用它。我现在知道这个思想，并且我在研究中需要一些东西它是让距离不增的，那么尽管我不是这方面的专家，我也能在我的研究中用上这个工具。

所以，我认为记住核心思想是学习数学的好方法，比如，你现在要让我证明 Thurston 的双曲化定理 (Hyperbolization Theorem)，我可以列出提纲，甚至更进一步的一些细节。就像网页一样，比如我想了解双曲结构，你可以点开五个步骤中的任何一个；你想知道 Mostow 刚性 (rigidity) 定理，那就是另外五个步骤了。如果你对其中任何一个感兴趣，你可以点开它，我可以给你讲这五个步骤，甚至在某些地方我可以讲一些更深层次的东西。当然，现在我记不得所有细节，但我记得大致的想法，这就够了。我讲的这些很重要，因为细节太多了，尝试去记住所有细节会让你不知所措。

#### 4. 去研究基本的例子

我认为你需要去

##### (a). 了解基本的例子胜过了解你的女朋友/男朋友

当然，在座的可能有人已经结婚了，那么你不该有男朋友或女朋友了（哈哈）。我想说的是，现在就开始花时间研究基本的例子吧，我是指非常基本的。我的博士论文是关于负曲率的低维流形，包括双曲流形。我做出这个研究的秘密是什么呢？我对去掉一个点的环面的双曲结构已经烂熟于心！当我弄懂这个的时候，一般情形也就迎刃而解了。当然（其他情形）会有一些不同，但是处理特殊情形的思想方法仍然很有用。我曾花了大量时间去画和这个曲面相关的图。例子越简单越好。当我到芝加哥大学的时候，我就致力于把 Thurston 的一些思想用于了解半单李群中的很多东西，芝加哥是这个研究领域的世界中心，还有 super-rigidity 和其他玄妙的东西。我与那里的学生和博后去交流，然后我们讨论各种深奥的数学，这些深奥的数学都是我想去学的。比如与半单李群相关的、与物理真的课程相关的，这里面蕴藏了很多东西。我发现他们对一些东西没感觉。三维李群，这是很初等的东西，但是我致力于这些。我的研究均基于此。至于一般的结构，我可以以后再学，并且我终究还是学会了。

##### (b). 手中要有大量的基本例子 (fingertips)，验证每一个不符合它的叙述

我是从理查德·费曼 (Richard Feynman) 身上学到的这一点，他是近百年来最伟大的科学家之一。他手边总有一大堆例子，然后检验与之对应的叙述。他总是让人印象深刻，因为当人说“来，我们来取一个有全纯向量场的 Kähler 流形”的话之时，费曼总是能找到极为简单的例子，比如环面。他总说“不，这里有个反例的……”大家会说“哇塞，太不可思议了”，但对他来说并不是这样，这些例子就在他手边。我完全感受到了这一点。你知道吗，就好比我尝试着从这里走到那里，并且到处都是地雷，如果我踩中了一个，那么我死定了。如果我不知道足够多的例子但却仍然迷恋于一些宏大的理论，那我也完蛋了。另外，如果我工作得不够，我也死定了。

##### (c). 任何例子都不会太简单，不用担心你的自尊心

当我是学生的时候，我换了方向，我的论文是关于几何的，微分几何的，但刚开始我对几何一窍不通，我得从平面曲线开始学起。曲线的二阶导，叫做曲率（做出说悄悄话的样子，意思是当时自己很弱，连这都不懂），然后我就一直和它打交道，然后我的 Princeton 的同学就取笑我说：“我们都在搞模空间，你居然（还在搞这么初等的东西），你在搞笑吗？”但是，不知为什么，我没有被这些话语影响，我有自己的想法。那些同学的话没有伤到我的自尊。他们都在做时髦的东西，但是到最后，虽然当时有很优秀的对手，但我还是第一个证明了这个定理。自负是一回事，但我真的对曲率非常了解。如果你在写关于曲率的论文，你知道关于 Kähler 流形的双全纯截面曲率却不懂平面上曲线的曲率，你又能发现什么呢？你又能做什么呢？你除了玩符号啥也干不了，你证不出任何定理。到头来，你如果没弄懂这个数学，那你骗谁也骗不了。你的成果是不会骗人的。你的理解只能通过你在草稿纸上的演算来体现。如果你不理解平面曲线，你就是在自欺欺人，你什么也证明不了。当然，你可以暂时把它敷衍过去，但你最终仍然得证明定理。这个时候还谈何自尊？

#### (E). 关于和其他人的比较

关于这个话题，我有如下的建议：

##### 1. 尽可能向其他同学学习

有一个比我高一届的研究生，我向他学到的东西是最多的。我在和他交谈期间，数学水平不断提高，同时我也教他一些东西，不过我不记得教了哪些。你不可能一直和你的教授们待在一起，但你可以和你的同学们每天都讨论很久，你可以向他们学习。你可能会觉得有点竞争：某个导师有两个学生，导师也许会认为另一个学生更好。但你仍然可以继续学习，不管如何，你的同学们是你非常好的学习资源，常向他们学习对你会大有裨益。

##### 2. 模仿大数学家的风格，但也要发展自己的风格

暂时没有风格不是错。如果你只是一年级的学生，那你当然没有自己的风格了，因为你还不懂数学、不懂科研方法，你是从零开始的。我想，培养自己的风格最快的方法是选定一个大数学家并且去模仿他，模仿他们的风格是非常好的，学他们的风格、他们做的数学，可以让你很快变得优秀。当然对于这些大数学家，你不应该仅仅沿袭他们的风格从而只成为他们的小小的复制品。

##### 3. 不用顾虑自己比别人差多少

这一点很难做到。我有个学生，他很小的时候就成了我的学生。我能很明显地觉察到，当时我手下的另外七个学生不得不感慨这个小家伙比他们强太多了。我能理解他们的自信心受到了些打击。对此，我能说的就只有下面这些。

###### (a). 你并不能很好地评价你自己（也很可能无法很好地评价他人）

你也许没有想象中那样差劲，也没有想象中那么优秀。当然有的人确实相当优秀。可你是人，你一定会有你的局限，你不可能做到十全十美。你得接受这个现实。

###### (b). 对此，你无能为力

所以你最好能克服这一点，学会带着这个想法继续过日子。我去 Princeton 最大的收获就是，我在 Cornell 本科毕业的时候获得了“最佳本科生”的荣誉，我暗暗觉得“我真了不起！”，但是当我到了 Princeton，一天之内我就发现我简直糟透了，我跟他们比起来连个菜鸡都算不上 (I am nothing to them)，我实在是和这些人不在一个级别。后来我成为了 Thurston 的学生，我更是感到之前一切的光环都被剥夺了。这段时间非常艰难，但我还是克服了这些困难。

###### (c). 世上总会有人比你强好几个档次。现在就适应它吧。

事实上，很有趣的是，即使是菲尔兹奖得主，也能决出个世界前五，他们还可以和他们

的前人进行比较，这种比较是无休止的。所以，我现在要给你们讲个故事，你们知道莫扎特 (Mozart) 和萨列里 (Salieri) 吗？有个电影叫《莫扎特传》，是关于莫扎特的：莫扎特是天才，萨列里相比要平庸的多，但是他也很优秀，因为只有他能明白莫扎特是何等的天才。每次他见到莫扎特，他就很痛苦，因为相比之下他只是一个庸才罢了。当我的事业开始起步的时候，我做得还不错，我的父母就很兴奋地对我说：“Benson，你准备好拿菲尔兹奖了吗？”“不不，这个圈子里有一票人呢，我不是最好的之一，跟最好的人比起来我只是个笨蛋，但是，”我说道，“我是萨列里，至少我能欣赏最优秀的人的工作，我不是他们的一份子，但我至少能欣赏。”然后，有好几年，我都这样告诉自己：“我是萨列里。”这种感觉也还算不错呢。但是后来，我参加了 Thurston 的生日晚会，在场的人中最出色的数学家之一是 Dennis Sullivan。他站起来说：“我之前觉得自己是世上最出色的拓扑学家，当时我是伯克利的教授，我以为我是莫扎特。可是有一次我做一个报告，一个研究生举起手来说他有个反例。于是我把这个研究生带上讲台，然后他开始画一些图。当时我惊呆了，下巴都快掉了。我知道了两件事，第一件事是这是我接触的第一个纯几何的论述，第二，我意识到自己不是莫扎特，他才是。那个研究生就是 Thurston！”当然，Dennis 说的第二件事暗示我，我连萨列里都不是。我把这件事跟一群人讲过，就像今天这样。有人就笑了，我问他为什么笑，他说“Benson，你知道吗？我一直以为我是萨列里，我现在听了 Dennis 说了这些，我意识到我不是。然后，我进一步意识到，我甚至都算不上一个能欣赏萨列里的人。”这个故事今天就不继续讲下去了。总之，人的档次是分了太多层的。你要习惯它。

尽管如此，好消息是：你仍然可以探索出许多东西，做出贡献。

那些大牛们也是人，他们不可能把所有问题都做了。所以这是个好消息：你仍然可以探索发现许多东西，做出贡献。我听到有些人说：“如果我不是最优秀的，我就不打算做这方面，那我需要离开数学吗？”我的回答是：“你知道吗，你确实不是最优秀的，我可以跟你明说，在这里没有人是最优秀的。”我永远不知道谁才是最优秀的。

#### (F). 品味

我觉得数学品味是特别重要的，你要培养出自己的品味——也就是你所认为的什么是好的数学，什么是不好的数学。当然这是由你决定的，没有书告诉你什么是正确答案，这是没有正确答案的。它就在那里，很难明确定义。不过，你可以和伟大的人学习他们的品味。发展好的品味最简单的方法就是接受伟大数学家的影响，然后发展自己的风格。以下列出一些伟大的人：Serre, Milnor, Thurston, McMullen，他们写的东西都吸引人，我认为他们做的数学都是非常好的数学。当然，这绝对是带有偏见的，因为我的兴趣在几何跟拓扑上，Serre 这些人也是。他们都能写出很精彩的数学，我想他们做的数学都可以被定义为好的数学。

不管怎样，我想说的关于如何做研究生的总结是：这条路很难，这条路毫无疑问非常非常难。但是，我也完全相信下面的话：

任何值得去做的事情都很难。

# 从正多边形中的有理比到 $\tan \frac{\pi}{n}$ 的极小多项式

——纪念杨武之先生 (1896–1973) 诞辰 125 周年

林开亮

## 摘要

自古希腊以来, 人们就熟知: 正方形与正五边形的对角线与边长之比皆为无理数, 而正六边形最长对角线与边长之比为有理数 2. 本文证明, 在正  $n$  边形中, 不同长度的两条广义对角线之比均为无理数, 除了在正  $6m$  边形中出现的比值为 2 的唯一例外. 这就为 1983 年由 E. J. Barbeau 提出、2020 年由 G. Vincenzi 部分解决的问题划上了圆满的句号. 我们以统一的方式得到两个有理角的各个三角函数之比为有理数的刻画, 在余弦和正切的情况, 对应结果此前分别由 D. B. Shapiro, A. Berger 和蔡进一等分别得到, 事实上它们与本文关于正弦的主要结果等价. 我们还得到了有理角正切函数乘积的结果, 补充了 S. Galovich 关于正弦、余弦乘积的结果. 本文还确定出  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式, 完善了 J. S. Calcut 和 W. E. Heierman 的相关工作. 这一结果比 L. I. Galieva 和 I. G. Galyautdinov 的表述更简洁精炼. 文末提出了可进一步研究的问题与猜想.

## 1 问题的提出

$\sqrt{2}$  之无理性与素数之无限性, 被英国数学家 G. H. Hardy 在其名著《一个数学家的辩白》[39] 中称为“serious mathematics”的两个典范.  $\sqrt{2}$  之无理性有许多推广, 以下两个也许是大家都熟悉的.

**命题 1.1.** 若正整数  $n$  不是完全平方数, 则  $\sqrt{n}$  是无理数.

**命题 1.2.** 设正整数  $k \geq 2$ . 若正整数  $n$  不是一个正整数的  $k$  次方, 则  $\sqrt[k]{n}$  是无理数.

众所周知, 命题 1.2 的一个简单证明, 是用有理根定理 (参见下一节引理 1). 据 Niven [56, p. 15] 讲, 从  $\sqrt{2}$  之无理性到命题 1.2 的推广, 归功于 Gauss.

历史上,  $\sqrt{2}$  是无理数的表述富有几何风味: 正方形的对角线与边长之比不可公度 (不是正整数之比). 从几何上看, 正方形的一个自然推广是正  $n$  边形. 因此, 我们可以考虑正  $n$  边形的广义对角线 (包括边长在内) 之比, 问这个比值是否为有理数. 一个熟知的结果是, 正五边形的对角线与边长之比为  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . 这是一个很有名的无理数, 被称为黄金比例 (golden ratio) 或神圣比例 (divine proportion).

如果考虑一般的正  $n$  边形 (这里  $n \geq 4$ ), 那么我们会引出以下问题.

**问题 1.1.** 设正整数  $n \geq 4$ ,  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$ . 问: 在满足以上条件的三元数组  $(n, k_2, k_1)$  中, 有哪些使得比值

$$\frac{\sin \frac{k_2 \pi}{n}}{\sin \frac{k_1 \pi}{n}} \quad (1.1)$$

为有理数?

作者: 林开亮, 西北农林科技大学理学院讲师, 邮箱: kailiang\_lin@163.com.

稿件信息: 本稿件于 3 月 10 日来稿, 3 月 31 日接受. 稿件编辑: 黄欣祺.

为说明比值 (1.1) 的由来, 我们考虑单位圆的内接正  $n$  边形. 它的  $n$  个顶点可以用复数坐标化, 恰好是  $n$  次单位根:

$$\varepsilon_k = \zeta_n^k, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

其中

$$\zeta_n = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

由此求出顶点  $\varepsilon_0 = 1$  与  $\varepsilon_k$  之间的距离为

$$|\varepsilon_0 - \varepsilon_k| = 2 \sin \frac{k\pi}{n},$$

从而得到比值 (1.1). 之所以限定  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$ , 是因为我们有对称性:

$$\sin \frac{k\pi}{n} = \sin \frac{(n-k)\pi}{n}.$$

当  $n = 4$  时, 满足条件的  $(k_1, k_2)$  是唯一的, 即  $k_1 = 1, k_2 = 2$ , 从而我们得到正方形的对角线与边长之比为

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}.$$

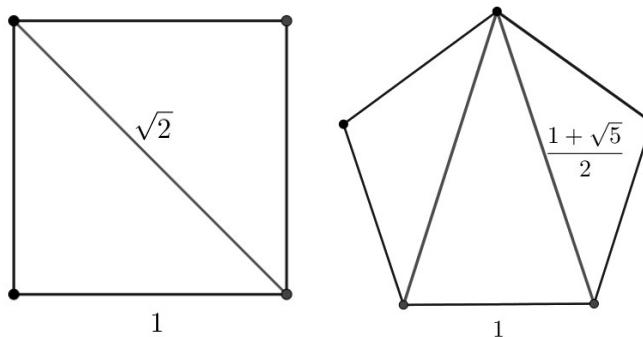


图 1.1: 左: 正方边形中的无理比例  $\sqrt{2}$ ; 右: 正五边形中的无理比例  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

当  $n = 5$  时, 满足条件的  $(k_1, k_2)$  仍然是唯一的, 即  $k_1 = 1, k_2 = 2$ , 从而我们得到正五边形的对角线与边长之比为<sup>1</sup>

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{5}}{\sin \frac{\pi}{5}} = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

当  $n = 6$  时, 满足条件的  $(k_1, k_2)$  有三个, 分别是  $(k_1, k_2) = (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ . 它们在 (1.1) 中所给出的值分别是

$$\frac{\sin \frac{2\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}, \quad \frac{\sin \frac{3\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2, \quad \frac{\sin \frac{3\pi}{6}}{\sin \frac{2\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (1.2)$$

(1.2) 中第二式给出了第一个满足条件的数组  $(n, k_2, k_1) = (6, 3, 1)$ , 如图 1.2.

一般情况如何呢? 这一问题由加拿大数学家 E. J. Barbeau [4] 在 1983 年提出. Barbeau 证明了, (i) 在  $k_1 = 1, k_2 = 2$  的情形, 比值 (1.1) 总是无理数;(ii) 在  $k_1 = 1, k_2 = 3$  且  $n \geq 7$  的情形, 比值 (1.1) 总是无理数. 奇怪的是, 这个如此自然的一般问题, 多年来似乎未引起关注. 2020 年, 意大利数学家 G. Vincenzi [72] 证明了以下定理:

<sup>1</sup>关于后一个等式  $2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , 可参见 H. P. Boas [9] 的精彩论述.

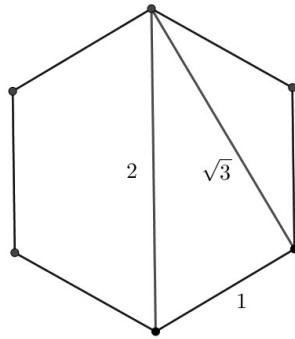


图 1.2: 正六边形中的有理比例: 直径与边长之比为 2.

**定理 1.3.** 设  $n \geq 4$ , 若  $6 \nmid n$ , 则对任意的满足  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$  的正整数  $k_1, k_2$ , 比值 (1.1) 皆为无理数.

因此, 只剩下  $6 \mid n$  的情况有待解决.

## 2 第一个主要结果

我们将证明以下结果. 它本质上是说, 正六边形中出现的有理比值是唯一例外(图 1.2). 从而完全解决了 Barbeau 提出的问题.

**定理 2.1.** 设正整数  $n \geq 4, k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$ . 则

$$\frac{\sin \frac{k_2 \pi}{n}}{\sin \frac{k_1 \pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6m, 3m, m),$$

其中  $m$  是正整数, 而且此时比值等于 2.

我们的证明不依赖于 Vincenzi 的结果, 但最初的版本(后来有所简化)确实受到其激励和启发.

## 3 预备定理

### 3.1 预热

为证明定理 2.1, 我们需要一些基本结果. 其中最简单的, 是有理根定理, 如下:

**引理 3.1 (有理根定理).** 设  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$  是整系数多项式, 若有理数  $\frac{r}{s}$  是  $f(x)$  的一个根, 其中  $r, s$  是互素的整数且  $s > 0$ , 则必有  $s \mid a_n, r \mid a_0$ . 特别地, 首一整系数多项式的有理根是整数根.

这个结果通常是用 Gauss 引理<sup>1</sup> 来证明(例如, [5, p. 32] 定理 12). 以下我们给出一个直接证明.

证明: 我们有

$$s^n f\left(\frac{r}{s}\right) = 0.$$

<sup>1</sup>Gauss 引理: 两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

即

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n = 0.$$

显然  $r \mid a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1}$ , 即  $r \mid -a_0 s^n$ . 由于  $r, s$  互素, 从而  $r, s^n$  互素. 于是, 根据 Euclid 引理<sup>1</sup>, 就有  $r \mid a_0$ . 同理可证  $s \mid a_n$ . 特别地, 当  $a_n = 1$  时, 由  $s \mid 1$  得到  $s = 1$ , 从而  $\frac{r}{s} = r$  是整数. 证毕.

我们还将用到关于不可约多项式的基本定理(见[28]第25题与[30,p.913]), 如下:

**引理 3.2 (Abel–Galois).** 设  $f(x), g(x)$  是有理系数多项式, 且  $g(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上不可约. 若  $g(x)$  有一个根是  $f(x)$  的根, 则  $g(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上整除  $f(x)$ .

**证明:** 令  $d(x) = \gcd(f(x), g(x))$  是  $f(x), g(x)$  的最大公因式, 则由于  $g(x)$  不可约, 必定有  $d(x) = 1$  或  $d(x) = cg(x)$ , 其中  $c$  为非零有理数. 将用反证法证明  $d(x) = 1$  不可能. 否则的话, 根据 Euclid 算法, 就有 Bézout 等式

$$1 = u(x)f(x) + v(x)g(x).$$

设  $\alpha$  是  $f(x), g(x)$  的公共根, 则在上式中令  $x = \alpha$ , 就得到  $1 = 0$ . 矛盾! 证毕.

**注.** 引理 3.1 和引理 3.2 分别是都是整数和多项式的带余除法之推论. 不过引理 3.2 的重要性似乎未被中学和大学的师生认识到, 正是它保证了不可约多项式各个根如“桃谷六仙”一样形影不离. 形象地说, 一个不可约多项式的各个根——“共轭元”——就是“同卵多胞胎”

### 3.2 有理角三角函数的有理值

为证明定理 2.1, 我们还需要两个关键的结果, 即定理 3.7 和定理 3.8(见下一小节). 为介绍定理 3.7, 我们从以下更熟知的经典结果开始.

**定理 3.3.** 设  $\theta = r\pi$ , 其中  $r \in \mathbb{Q}$ , 则  $\cos \theta$  或  $\sin \theta$  仅有的有理取值为以下五个数之一:

$$1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1.$$

定理 3.3 通常归功于 J. M. H. Olmsted [57] 或 I. Niven [56, p. 41], 但实际上第一个正式发表该结果的, 是 R. S. Underwood [68], 距今恰好 100 年! Underwood [70] 还得到关于正切的一个平行结果:

**定理 3.4.** 设  $\theta = r\pi$ , 其中  $r \in \mathbb{Q}$ , 则  $\tan \theta$  仅有的有理取值为  $1, 0, -1$ .

**注.** 鉴于 Sylvester [66, p. 367] 在 1879 年就注意到关于余弦函数有理取值的这一事实, 定理 3.3 也许可以称为 Sylvester 定理. 另外, 从定理 3.3 中关于正弦的结果, 我们立即看出, 单位圆内接正  $n$  边形 ( $n \geq 3$ ) 的边长  $2 \sin \frac{\pi}{n}$  为有理数当且仅当  $n = 6$ .

定理 3.3 与定理 3.4 有许多证明, 曾反复出现于文献中, 见 [6, 9, 18, 22, 23, 35, 53, 55, 56, 57, 62, 63, 67, 73], 也见 Pólya–Szegő [60, p. 144] 问题 197.1.<sup>2</sup> 证明定理 3.3 的最初等办法是利用有理根定理与 Chebyshev 多项式  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ (参见 [60, p. 71] 引言或 [61] 第 9 章), 但它本质上是分圆域理论的直接推论, 参见 [50] 或 [60, p. 149] 问题 227, 227.1, 227.2 以及下一节给出的证明. 而定理 3.4 则可以视为定理 3.3 的直接推论, 见下面的推导.

<sup>1</sup>Euclid 引理: 设  $a, b, d$  是整数. 若  $d \mid ab$  且  $d$  与  $a$  互素, 则  $d \mid b$ .

<sup>2</sup>2020 年, 《数学传播》刊登了一篇讨论这个主题的文章 [43], 但仅引用了一篇主题文献 [22], 真是不可思议!

为方便读者, 我们这里引用文献里反复出现的定理 3.3 与定理 3.4 的两个初等证明如下.

**引理 3.5.** 对任意的正整数  $n$ ,  $2 \cos nz$  是  $2 \cos z$  的首一整系数多项式.

这个结果是如此经典, 以至于被作为加州 Berkeley 大学 2003 年博士资格考试的原题, 见 [65, p. 66]. 下面给出的证明也许比书中给出的解答 ([65, p. 307]) 更简洁, 参见 [51, p. 210] 问题 11.

**引理 3.5 的证明:** 我们要求出一个首一整系数多项式  $D_n$ , 使得  $2 \cos nz = D_n(2 \cos z)$ . 对  $n = 1$ , 可取  $D_1(x) = x$ . 对  $n = 2$ , 由于  $2 \cos 2z = 2(2(\cos z)^2 - 1) = (2 \cos z)^2 - 2$ , 可取  $D_2(x) = x^2 - 2$ . 另一方面, 注意到, 三角多项式序列  $\{2 \cos nz\}$  之间有递推关系

$$2 \cos(n+1)z = (2 \cos z)(2 \cos nz) - 2 \cos(n-1)z.$$

从而由归纳法可知, 当  $n \geq 2$  时, 可取

$$D_{n+1}(x) = xD_n(x) - D_{n-1}(x).$$

容易看出,  $D_n(x)$  为首项系数为 1 的整系数多项式. 证毕.

**注.** 引理 3.5 中构造的  $D_n(x)$  称为 Dickson 多项式. 它可以视为 Chebyshev 多项式  $T_n(x)$  的一个变形:  $D_n(x) = 2T_n(\frac{x}{2})$ . 跟 Chebyshev 多项式一样, Dickson 多项式也有封闭公式, 从略. 值得一提的是, 台湾清华大学萧弘人教授 (1941–2002) [41] 首先研究了  $D_n(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上的因式分解, 这一工作有广泛的影响, 参见 [12] 与 [26, p. 58].

**定理 3.3 的初等证明:** 先证明关于余弦的结果. 设  $\theta = \frac{m}{n}\pi$  (其中  $m, n$  是整数且  $n > 0$ ) 使得  $\cos \theta$  是有理数. 那么就有

$$D_n(2 \cos \theta) = 2 \cos n\theta = 2 \cos m\pi = 2(-1)^m.$$

这就意味着,  $2 \cos \theta$  是首项系数为 1 的整系数多项式  $D_n(x) - 2(-1)^m$  的有理根, 从而是整数根 (引理 3.1), 于是  $2 \cos \theta \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ , 进而有关于余弦的结果.

根据正余弦的关系式  $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ , 可得正弦的结果. 证毕.

**注.** 关于定理 3.3, 本刊 1994 年曾发表喻甫祥 (中科大 9201 班学生) 的一个证明 [73], 要点如下:

设  $\theta = r\pi$ , 其中  $r = \frac{m}{n}$ , 而  $m, n$  是互素的整数且  $n > 0$ . 若  $\cos \theta$  是有理数, 则  $\cos \theta + i \sin \theta$  满足有理系数多项式方程

$$q(x) = (x - (\cos \theta + i \sin \theta))(x - (\cos \theta - i \sin \theta)) = x^2 - 2 \cos \theta x + 1 = 0.$$

注意, 当  $n \geq 3$  时, 在  $\mathbb{C}$  上有  $q(x) \mid x^n - 1$ . 从而在  $\mathbb{Q}$  上有  $q(x) \mid x^n - 1$ .  
从而  $q(x)$  是整系数多项式. 进而有  $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$ . 由此得到  $2 \cos \theta \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ .

我们指出, 划横线处是关键所在, 需用 Gauss 引理<sup>1</sup>说明.

<sup>1</sup>事实上, 此处恰好用到 Gauss 对 Gauss 引理的原始表述 (见 [36] 第 42 节) 如下: 设  $f(x), g(x)$  是首一有理系数多项式, 若  $f(x)$  或  $g(x)$  不是整系数多项式, 则  $f(x)g(x)$  也不是整系数多项式.

注. 根据定理 3.3 中关于正弦的结果, 我们可以将定理 2.1 的结果理解为:  $(0, \frac{\pi}{2}]$  的两个有理角  $\theta_1 < \theta_2$  的正弦比  $\frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \in \mathbb{Q}$  当且仅当  $\sin \theta_1 \in \mathbb{Q}, \sin \theta_2 \in \mathbb{Q}$ .

根据定理 3.3 容易推出, 对有理角  $\theta, \cos \theta$  与  $\sin \theta$  同时为有理数, 当且仅当  $\theta = k\frac{\pi}{2}$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}$ . 对此事实的另一个证明, 可见 [42].

为证明定理 3.4, 我们证明下述更强的结果 (见 [60, p. 144] 问题 197.5).

**定理 3.6.** 设  $\theta = r\pi$ , 其中  $r \in \mathbb{Q}$ , 则  $(\tan \theta)^2$  仅有的有理数取值为  $0, \frac{1}{3}, 1, 3$ .

**证明:** 由二倍角公式  $\cos 2\theta = \frac{1 - (\tan \theta)^2}{1 + (\tan \theta)^2}$  可知,  $(\tan \theta)^2 \in \mathbb{Q} \iff \cos 2\theta \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ . 根据定理 3.3, 后者成立当且仅当  $\cos 2\theta = 1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}$ . 从而立即得出  $(\tan \theta)^2 = \frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$  可以取到的有理值为  $0, \frac{1}{3}, 1, 3$ . 证毕.

**定理 3.4 的证明:** 由定理 3.6,  $(\tan \theta)^2 = 0, \frac{1}{3}, 1, 3$ . 由于  $\frac{1}{3}$  和 3 不是有理数的平方, 而 0, 1 的平方根分别为 0 和  $\pm 1$ , 即得结论. 证毕.

根据二倍角公式  $\cos 2\theta = 2(\cos \theta)^2 - 1 = 1 - 2(\sin \theta)^2$ , 由定理 3.3 可以得到定理 3.6 的以下平行结果 (参见 Conway [23]).

**定理 3.7.** 设  $\theta = r\pi$ , 其中  $r \in \mathbb{Q}$ ,  $f(\theta)$  是  $\cos \theta$  或  $\sin \theta$  之一. 则

$$(f(\theta))^2 \in \mathbb{Q} \iff (f(\theta))^2 \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}.$$

### 3.3 实分圆多项式的特殊值

我们需要的第二个关键结果 (定理 3.8), 是关于  $2 \cos \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式的基本结果.

如引理 3.5 所表明的,  $2 \cos \frac{2\pi}{n}$  满足  $\mathbb{Q}$  上的一个多项式方程  $D_n(x) - 2 = 0$ . 从而  $2 \cos \frac{2\pi}{n}$  在  $\mathbb{Q}$  上满足唯一的次数最低的首一多项式, 称为  $2 \cos \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式. 它又称为第  $n$  个实分圆多项式, 记为  $\Psi_n(x)$ . 例如  $\Psi_1(x) = x - 2, \Psi_2(x) = x + 2$ .

对  $n \geq 3$ ,  $\Psi_n(x)$  可以这样求得. 设  $\Phi_n(x)$  是  $\zeta_n = e^{i\frac{2\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式, 即第  $n$  个分圆多项式. 则有 (注意  $\Phi_n(x)$  是互反多项式——reciprocal polynomial, 参见 Cafure [12] 或 Niven [56, p. 37] 引理 3.8)

$$\frac{\Phi_n(x)}{x^{\frac{\varphi(n)}{2}}} = \Psi_n(x + x^{-1}), \quad (3.1)$$

其中  $\varphi(n)$  是 Euler 函数, 表示  $\{1, \dots, n\}$  中与  $n$  互素的数的个数. 据此,  $\Psi_n(x)$  的计算, 归结为  $\Phi_n(x)$  的计算. 而分圆多项式  $\Phi_n(x)$  可以通过以下等式 (参见 [49, p. 297] 或 [56, p. 34], 归功于 Gauss) 递归计算:

$$x^n - 1 = \prod_{\substack{1 \leq d \leq n \\ d|n}} \Phi_d(x). \quad (3.2)$$

注意, (3.2) 给出了多项式  $x^n - 1$  在  $\mathbb{Q}$  上的不可约多项式分解. 事实上,  $\Phi_n(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上的不可约性, 位于 Gauss 分圆域理论 (见 [36] 第七章) 的核心. Gauss 指出, 在  $\mathbb{C}$  上,  $\Phi_n(x)$  有以下分解:

$$\Phi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k, n)=1}} (x - \zeta_n^k).$$

由此容易推出

$$\frac{\Phi_n(x)}{x^{\frac{\varphi(n)}{2}}} = \frac{\prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ \gcd(k,n)=1}} (x - \zeta_n^k)}{x^{\frac{\varphi(n)}{2}}} = \prod_{\substack{1 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(k,n)=1}} \frac{(x - \zeta_n^k)(x - \zeta_n^{n-k})}{x} = \prod_{\substack{1 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(k,n)=1}} \left( x + x^{-1} - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right).$$

结合  $\Psi_n(x)$  的定义式(3.1), 我们得到  $\Psi_n(x)$  在  $\mathbb{C}$  上的分解:

$$\Psi_n(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(k,n)=1}} \left( x - 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right).$$

实分圆多项式  $\Psi_n(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上的不可约性, 是分圆多项式  $\Phi_n(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上的不可约性的自然推论. 这里应用了互反多项式的一个基本性质, 参见 [12, p. 40].

1879 年, Sylvester [66, p. 367] 曾给出一个表, 列出  $1 \leq n \leq 36$  所对应的  $\Phi_n(x)$  与  $\Psi_n(x)$ (为方便读者, 我们这里截取其中一半). Sylvester 正是通过观察这个表而得出定理 3.3 中关于余弦的结论. 对照  $n = 1, 2, 3, 4, 6$  各行, Sylvester 已经注意到以下结果:  $\cos \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{Q} \iff n = 1, 2, 3, 4, 6$ . 事实上, 利用分圆多项式  $\Phi_n(x)$  的基本性质, 可以给出定理 3.3 的一个高等证明, 参见 [55]. 借花献佛, 我们分享给读者.

**定理 3.3 的高等证明.** 设  $\theta = r\pi$ , 其中  $r = \frac{m}{n}$ , 而  $m, n$  是互素的整数且  $n > 0$ . 若  $\cos \theta$  是有理数, 则  $\cos \theta + i \sin \theta$  满足有理系数多项式方程

$$q(x) = (x - (\cos \theta + i \sin \theta))(x - (\cos \theta - i \sin \theta)) = x^2 - 2 \cos \theta x + 1 = 0.$$

而  $\zeta_n$  在  $\mathbb{Q}$  上的极小多项式为  $\Phi_n(x)$ . 根据 Abel–Galois 定理(引理 3.2), 就有  $\Phi_n(x) | q(x)$ , 从而比较次数就得到  $\varphi(n) \leq 2$ , 由此容易确定出  $n = 1, 2, 3, 4, 6$ (参见 [60, p. 119] 问题 38.1). 进而得到各种情况下  $m$  的取值, 从而算出  $\theta$  与  $\cos \theta$  的值.

$n$	$\Phi_n(x)$	$\Psi_n(x)$
1	$x - 1$	$x - 2$
2	$x + 1$	$x + 2$
3	$x^2 + x + 1$	$x + 1$
4	$x^2 + 1$	$x$
5	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	$x^2 + x - 1$
6	$x^2 - x + 1$	$x - 1$
7	$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$	$x^3 + x^2 - 2x - 1$
8	$x^4 + 1$	$x^2 - 2$
9	$x^6 + x^3 + 1$	$x^3 - 3x + 1$
10	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	$x^2 - x - 1$
11	$x^{10} + x^9 + \dots + x + 1$	$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
12	$x^4 - x^2 + 1$	$x^2 - 3$
13	$x^{12} + x^{11} + \dots + x + 1$	$x^6 + x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1$
14	$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$	$x^3 - x^2 + 2x + 1$
15	$x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$	$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1$
16	$x^8 + 1$	$x^4 - 4x^2 + 2$
17	$x^{16} + x^{15} + \dots + x + 1$	$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1$
18	$x^6 - x^3 + 1$	$x^3 - 3x + 1$

追随 Gauss, 在一种特别简单的情况, 即  $n = p = 2d + 1$  是奇素数的情况下, Sylvester [66, p. 367] 给出了  $\Psi_p(x)$  的表达式 (Gauss 在 [36] 中其实已经隐含地给出这个结果, 100 多年以后, 这一结果又被 [54] 重新指出):

$$\Psi_p(x) = x^d + x^{d-1} - \binom{d-1}{1} x^{d-2} - \binom{d-2}{1} x^{d-3} + \binom{d-2}{2} x^{d-4} + \binom{d-3}{2} x^{d-5} - \dots . \quad (3.3)$$

与之平行的  $\Phi_p(x)$  属于 Gauss [36], 更简单:

$$\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1. \quad (3.4)$$

在这个特殊情况, 关于  $\Phi_p(x)$  在  $\mathbb{Q}$  上的不可约性, Gauss 最初的证明比较复杂, 现在通行的证明是作为 Schönemann–Eisenstein 判别准则的一个标准应用, 参见 [24]. 顺便说一句, Gauss (见 [36] 第 365 节, 即全书的倒数第二节) 正是从方程  $\Psi_{17}(x) = 0$  解出

$$\cos \frac{2\pi}{17} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16} \sqrt{17} + \frac{1}{16} \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{8} \sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}},$$

进而得到正十七边形可尺规作图的结论.

回到本文开头所考虑的问题 1.1, 证明定理 3.1 所需要的第二个结果, 如下 ([52, p. 307] 定理 4.2):

**定理 3.8.** 设正整数  $n \geq 3$ ,  $\Psi_n(x)$  是  $2 \cos \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式, 则有

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 - 2 \cos \frac{2j\pi}{n}\right) = \Psi_n(2) = \begin{cases} p, & \text{若 } n = p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是素数;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

根据 (3.1),  $\Psi_n(2) = \Phi_n(1)$ , 因此定理 3.8 等价于以下结果:

**定理 3.9.** 设正整数  $n \geq 3$ ,  $\Phi_n(x)$  是第  $n$  个分圆多项式, 则有

$$\Phi_n(1) = \begin{cases} p, & \text{若 } n \text{ 是素数 } p \text{ 的幂;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

这是分圆域中的一个经典结果, 参见 [48, p. 74].

定理 3.9 是高中数学中偶尔出现的一类三角函数乘积公式的基础, 参见 Galovich [34, p. 107] 定理 1, 该文于次年 (1988 年) 获得美国数学协会 (MAA) 的 Carl B. Allendoerfer 写作奖. Galovich 的主要结果之一, 是求出

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \sin \frac{2j\pi}{n}\right) \quad \text{与} \quad \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \cos \frac{2j\pi}{n}\right) = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \Psi_n(0)$$

的值 (他采用的记号分别是  $S_{\frac{1}{2}}(n)$  与  $C_{\frac{1}{2}}(n)$ ).  $\Psi_n(0)$  的确定, 也见 [52, p. 308] 定理 4.4. 鉴于该结果的种种特例也偶尔零散出现于高中读物, 我们将这个一般结果 ([34, p. 110] 表格 1 中的打印错误此处已经更正) 引述如下 (对于  $n = 2, 3, 4$  的退化情况, 容易求出, 正、余弦的乘积分别等于 0,  $\sqrt{3}, 2$  和  $-2, -1, 0$ ):

**定理 3.10.** 设  $n \geq 5$ , 则有

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \sin \frac{2j\pi}{n}\right) = \begin{cases} 2, & \text{若 } n = 2^e, \text{ 其中 } e \geq 3; \\ \sqrt{p}, & \text{若 } n = p^e \text{ 或 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \cos \frac{2j\pi}{n}\right) = \begin{cases} -2, & \text{若 } n = 8; \\ 2, & \text{若 } n = 2^e, \text{ 其中 } e \geq 4; \\ \left(\frac{2}{p}\right), & \text{若 } n = p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ \left(\frac{-2}{p}\right), & \text{若 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ \left(\frac{-1}{p}\right)p, & \text{若 } n = 4p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

其中  $\left(\frac{a}{p}\right)$  是 Legendre 记号. 更明确地, 我们有

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}, \quad \left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{2}{p}\right).$$

Galovich 还得到了

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \sin \frac{2j\pi}{n}\right), \quad \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \cos \frac{2j\pi}{n}\right), \quad \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{4} \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \sin \frac{2j\pi}{n}\right), \quad \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{4} \\ \gcd(j,n)=1}} \left(2 \cos \frac{2j\pi}{n}\right)$$

的值 (后两个乘积中假定  $4 \mid n$ ). 他采用的记号分别是  $S_1(n), C_1(n), S_{\frac{1}{4}}(n), C_{\frac{1}{2}}(n)$ . 但就  $S_1(n)$  的情况而言, 部分结果已经为萧弘人 [41] 命题 2 得到.

## 4 主要结果的证明

现在可以给出定理 2.1 的证明. 如同证明定理 3.4 一样, 我们将先证明一个更强的结果:

**定理 4.1.** 设正整数  $n \geq 4, k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 \leq \frac{n}{2}$ . 则

$$\left(\frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}}\right)^2 \in \mathbb{Q}$$

$$\iff (n, k_2, k_1) = (4m, 2m, m), (6m, 3m, m), (6m, 2m, m), (6m, 3m, 2m), (12m, 4m, 3m), (12m, 3m, 2m),$$

其中  $m$  是正整数, 且对应的有理比值分别为  $2, 4, 3, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2$ .

证明: 设

$$\left(\frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}}\right)^2 = r \in \mathbb{Q}. \tag{4.1}$$

由二倍角公式  $2(\sin \theta)^2 = 1 - \cos 2\theta$ , 我们有

$$\left(\frac{\sin \frac{k_2\pi}{n}}{\sin \frac{k_1\pi}{n}}\right)^2 = \frac{2 - 2 \cos \frac{2k_2\pi}{n}}{2 - 2 \cos \frac{2k_1\pi}{n}}.$$

对  $i = 1, 2$ , 令

$$\alpha_i = 2 \cos \frac{2k_i\pi}{n} = 2 \cos \frac{2\ell_i\pi}{m_i}, \quad \text{其中 } \gcd(\ell_i, m_i) = 1 \quad \text{且} \quad m_i > 0.$$

于是  $\alpha_i$  的极小多项式是实分圆多项式  $\Psi_{m_i}(x)$ ,  $i = 1, 2$ . 从而  $\beta_i = 2 \cos \frac{2k_i\pi}{n} - 2 = \alpha_i - 2$  的极小多项式为  $\Psi_{m_i}(x + 2)$ ,  $i = 1, 2$ . 而且根据  $\frac{\ell_1}{m_1} = \frac{k_1}{n} < \frac{k_2}{n} = \frac{\ell_2}{m_2} \leq \frac{1}{2}$ , 容易推出  $m_1 > 2\ell_1 \geq 2$ ,  $m_2 \geq 2\ell_2 \geq 2$ . 注意  $m_1 \geq 3$ .

设  $\beta_2 = r\beta_1$ , 其中  $r \in \mathbb{Q}$ . 则容易看到  $\beta_2$  满足多项式方程

$$r^{\frac{\varphi(m_1)}{2}} \Psi_{m_1} \left( \frac{x}{r} + 2 \right) = 0.$$

注意到  $r^{\frac{\varphi(m_1)}{2}} \Psi_{m_1} \left( \frac{x}{r} + 2 \right)$  也是  $\mathbb{Q}$  上的首一不可约多项式, 从而它就是  $\beta_2$  的极小多项式. 即我们有

$$\Psi_{m_2}(x + 2) = r^{\frac{\varphi(m_1)}{2}} \Psi_{m_1} \left( \frac{x}{r} + 2 \right).$$

比较等式两边多项式的次数与常数项 (令  $x = 0$ ) 分别有

$$\deg(\Psi_{m_2}) = \frac{\varphi(m_1)}{2} = d,$$

$$\Psi_{m_2}(2) = r^d \Psi_{m_1}(2).$$

下面分两种情况讨论.

第一种情形: 若  $m_2 \geq 3$ , 则  $\deg(\Psi_{m_2}) = \frac{\varphi(m_2)}{2}$ . 而且, 根据定理 3.8,  $\Psi_{m_i}(2) \in \{1, p\}$ , 其中  $p$  是素数. 从而

$$r^d = \frac{\Psi_{m_2}(2)}{\Psi_{m_1}(2)} \in \left\{ 1, \frac{1}{p}, p, \frac{p_2}{p_1} \right\}.$$

注意在已知条件下有  $r > 1$ , 因此有

$$r^d = p \quad \text{或} \quad r^d = \frac{p_2}{p_1} \quad (\text{其中 } p_2 > p_1).$$

显然  $r \in \mathbb{Q}$  就要求  $d = 1$ . 这就意味着  $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) = 2$ , 即  $m_1, m_2 \in \{3, 4, 6\}$ . 此时容许的角度  $\frac{\ell_i\pi}{m_i}$  与对应的正弦平方取自下表中间三列:

$\frac{\ell\pi}{m}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$(\sin \frac{\ell\pi}{m})^2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

第二种情形: 若  $m_2 = 2$ . 此时  $\frac{\ell_2\pi}{m_2} = \frac{\pi}{2}$ , 从而其正弦平方为 1(上表最后一列). 为保证比值 (4.1) 为有理数, 只需  $(\sin \frac{k_1\pi}{n})^2 \in \mathbb{Q}$ , 根据定理 3.7,  $\frac{k_1\pi}{n} = \frac{\ell_1\pi}{m_1}$  恰好取自上表中间三列.

总之, 所有的有理比值源自上表, 容易算出这  $\binom{4}{2} = 6$  个有理比值分别是

$$\frac{(\sin \frac{\pi}{2})^2}{(\sin \frac{\pi}{6})^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4, \quad \frac{(\sin \frac{\pi}{2})^2}{(\sin \frac{\pi}{4})^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2, \quad \frac{(\sin \frac{\pi}{2})^2}{(\sin \frac{\pi}{3})^2} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3, \quad \frac{\left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^2}{\left(\sin \frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2.$$

**定理 4.1 证毕.**

**定理 2.1 的证明:** 由定理 4.1, 比值 (1.1) 仅有的 6 个有理取值是  $4, 3, 2, 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}$ . 其中平方根为有理数的仅有 4. 即得结论. **证毕.**

## 5 推广与平行的结果

我们有平行于定理 3.8 的以下结果 ([52, p. 308] 定理 4.3):

**定理 5.1.** 设正整数  $n \geq 3$ ,  $\Psi_n(x)$  是  $2 \cos \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式, 则有

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} (-2 - 2 \cos \frac{2j\pi}{n}) = \Psi_n(-2) = \begin{cases} -2, & \text{若 } n = 4; \\ 2, & \text{若 } n = 2^e, \text{ 其中 } e \geq 3; \\ \left(\frac{-1}{p}\right), & \text{若 } n = p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数}; \\ \left(\frac{-1}{p}\right)p, & \text{若 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数}; \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

其中  $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$  是 Legendre 记号.

它的地位相当于分圆域中的下述结果 (参见 [11, 17]):

**定理 5.2.** 设正整数  $n \geq 3$ ,  $\Phi_n(x)$  是第  $n$  个分圆多项式, 则有

$$\Phi_n(-1) = \begin{cases} 2, & \text{若 } n = 2^e; \\ p, & \text{若 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 为素数}; \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

用类似的分析, 我们可以证明以下结果, 它是定理 4.1 的正弦版本.

**定理 5.3.** 设正整数  $n \geq 5$ ,  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ . 则

$$\left( \frac{\cos \frac{k_2\pi}{n}}{\cos \frac{k_1\pi}{n}} \right)^2 \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6m, 2m, m), (12m, 4m, 3m), (12m, 3m, 2m).$$

其中  $m$  是正整数, 而且对应的有理取值分别为  $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ .

从定理 5.3 容易推出以下结果, 它可以视为定理 2.1 的平行版本, 当然也可以直接证明.

**定理 5.4.** 设正整数  $n \geq 5$ ,  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ . 则  $\frac{\cos \frac{k_2\pi}{n}}{\cos \frac{k_1\pi}{n}}$  为无理数.

定理 5.4 曾经为 Berger [7] 得到, 见该文 p. 327 推论 5.

**注.** 定理 5.4 与定理 2.1 等价, 定理 5.3 与定理 4.1 等价, 因为我们有  $\cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ,  $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ . 因此, 在某种意义上说, 我们的主要结果之一——定理 2.1——已经隐含于 Berger

[7]. 我们是在解决问题 1.1 之后才认识到这一点的. 此外, 山东大学的李良攀教授也注意到, 利用 Berger [8] 的定理 1.1 可以证明本文定理 2.1 与定理 4.1. 但 Berger 对其主要定理的证明过于复杂.

Cavachi [19] 曾考察过一个特例. 该特例可以归结为下述一般结论, 它就一种典型的情况解释了为何问题 1.1 中出现的比例为无理数.<sup>1</sup>

**定理 5.5.** 设  $\alpha, \beta$  在  $\mathbb{Q}$  上共轭, 即它们满足同一个不可约有理多项式方程, 且  $\alpha \neq \beta$ . 则

$$\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q} \iff \frac{\alpha}{\beta} = -1.$$

**证明:** 只要证必要性. 设  $\alpha, \beta$  所满足的  $\mathbb{Q}$  上的极小多项式为  $g(x)$ , 其次数为  $d \geq 2$ . 显然  $g(0) \neq 0$ , 否则  $g(x) = x$ . 设  $\frac{\alpha}{\beta} = r \in \mathbb{Q}$ , 则显然  $r \neq 0$ . 注意到  $\alpha = r\beta$  满足首一不可约多项式方程

$$r^d g\left(\frac{x}{r}\right) = 0.$$

根据  $\alpha$  的极小多项式的唯一性, 有

$$r^d g\left(\frac{x}{r}\right) = g(x).$$

令  $x = 0$ , 就得到  $r^d g(0) = g(0)$ . 从而  $r^d = 1$ . 由于  $r$  是有理数, 根据有理根定理, 就推出  $r = \pm 1$ . 又  $\alpha \neq \beta$ , 所以  $r \neq 1$ . 于是  $r = -1$ . 证毕.

**注.** 更进一步, 我们可以得到以下结果 (它曾经为 [29] 提及). 若  $\mathbb{Q}$  上的不可约多项式  $g(x)$  有两个互为相反数的不同根  $\alpha, \beta$ , 则  $g(x)$  的次数  $d$  为偶数, 且  $g(x)$  是偶多项式. 因为根据此前的推理, 有  $(-1)^d g(-x) = g(x)$ . 令  $x = 0$ , 就得到  $(-1)^d g(0) = g(0)$ , 从而  $(-1)^d = 1$ , 即  $d$  是偶数. 进而  $(-1)^d g(-x) = g(x)$  化简为  $g(-x) = g(x)$ , 即  $g(x)$  是偶多项式.

事实上, 推广定理 5.5 中的上述推理, 我们可以给出定理 5.4(进而定理 2.1) 的一个独立证明如下.

**定理 5.4 的证明:** 对  $i = 1, 2$ , 令

$$\alpha_i = 2 \cos \frac{k_i \pi}{n} = 2 \cos \frac{2\ell_i \pi}{m_i}, \quad \text{其中 } \gcd(\ell_i, m_i) = 1 \quad \text{且} \quad m_i > 0.$$

于是  $\alpha_i$  的极小多项式是实分圆多项式  $\Psi_{m_i}(x)$ ,  $i = 1, 2$ . 而且根据  $\frac{2\ell_i}{m_i} = \frac{k_i}{n} < \frac{1}{2}$ , 容易推出  $m_i > 4\ell_i \geq 4$ , 从而  $m_i \geq 5$ .

我们用反证法. 设  $\alpha_2 = r\alpha_1$ , 其中  $r \in \mathbb{Q}$ . 则容易看到  $x = \alpha_2$  满足多项式方程

$$r^{\frac{\varphi(m_1)}{2}} \Psi_{m_1}\left(\frac{x}{r}\right) = 0.$$

注意到  $r^{\frac{\varphi(m_1)}{2}} \Psi_{m_1}\left(\frac{x}{r}\right)$  也是  $\mathbb{Q}$  上的首一不可约多项式, 从而它就是  $\alpha_2$  的极小多项式. 即我们有

$$\Psi_{m_2}(x) = r^{\frac{\varphi(m_1)}{2}} \Psi_{m_1}\left(\frac{x}{r}\right).$$

比较等式两边多项式的次数与常数项分别有

$$\frac{\varphi(m_2)}{2} = \frac{\varphi(m_1)}{2} = d,$$

<sup>1</sup>这个结果如此简单, 应该已经见诸文献. 但我们大海捞针徒劳无获 (若有读者了解还望告知). 在试图解决问题 1.1 时, 我们发现了这一结果. 显然这一结果可以推广到一般的域  $F$ , 本质上只用到  $r^d = 1$  在  $F = \mathbb{Q}$  中的解仅有  $\pm 1$ .

$$\Psi_{m_2}(0) = r^d \Psi_{m_1}(0).$$

根据 [52, p. 308] 定理 4.4 或本文定理 3.10, 当  $m_i \geq 5$  时有  $|\Psi_{m_i}(0)| \in \{1, 2, p\}$ , 其中  $p$  是奇素数. 从而

$$r^d = |r|^d = |r^d| = \frac{|\Psi_{m_2}(0)|}{|\Psi_{m_1}(0)|} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{p}, 2, \frac{2}{p}, p, \frac{p}{2}, \frac{p_2}{p_1}\right\}.$$

注意在已知条件下有  $0 < r < 1$ , 因此有

$$r^d = \frac{1}{2}, \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{p_2}{p_1} (\text{其中 } p_2 < p_1).$$

显然  $r \in \mathbb{Q}$  就要求  $d = 1$ . 这就意味着  $\varphi(m_1) = \varphi(m_2) = 2$ , 即  $m_1, m_2 \in \{3, 4, 6\}$ . 现在  $m_i \geq 5$ , 从而  $m_1 = m_2 = 6$ . 而此时  $\ell_1 = \ell_2 = 1$  只有唯一的取法, 而这个取法都不能满足最基本的条件  $\frac{k_1}{n} < \frac{k_2}{n} < \frac{1}{2}$ , 矛盾. 证毕.

注意到

$$(\tan \theta)^2 = \frac{4(\sin \theta)^2}{4(\cos \theta)^2} = \frac{2 - 2 \cos 2\theta}{2 + 2 \cos 2\theta} = \frac{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})}{(-1 - e^{i\theta})(-1 - e^{-i\theta})},$$

从而根据定理 3.9 与定理 5.2, 容易推出以下结果:

**定理 5.6.** 设正整数  $n \geq 3$ ,  $\Phi_n(x)$  是第  $n$  个分圆多项式. 则有

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} \left(\tan \frac{j\pi}{n}\right)^2 = \frac{\Phi_n(1)}{\Phi_n(-1)} = \begin{cases} p, & \text{若 } n = p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ \frac{1}{p}, & \text{若 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

由定理 5.6, 我们可以推出关于正切的平行结果如下:

**定理 5.7.** 设正整数  $n \geq 5$ ,  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ . 则

$$\left(\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}}\right)^2 \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6m, 2m, m), (10m, 4m, 3m), (10m, 2m, m), \\ (12m, 4m, 3m), (12m, 3m, 2m),$$

其中  $m$  是正整数, 对应的有理取值分别为 9, 5, 5, 3, 3.

**定理 5.8.** 设正整数  $n \geq 5$ ,  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ . 则

$$\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \iff (n, k_2, k_1) = (6m, 2m, m),$$

其中  $m$  是某正整数, 此时其有理取值为 3.

如前, 定理 5.8 也可以直接证明. 它也不是新的, 见 Shapiro [64, p. 106] 推论 13 以及蔡进一 [13] 定理 1.

李良攀教授指出, 定理 5.8 与定理 2.1 等价. 由于这不是显而易见的, 我们说明如下:

$$\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{k_2\pi}{n} \cos \frac{k_1\pi}{n}}{\cos \frac{k_2\pi}{n} \sin \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{2 \sin \frac{k_2\pi}{n} \cos \frac{k_1\pi}{n}}{2 \cos \frac{k_2\pi}{n} \sin \frac{k_1\pi}{n}} = \frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n} + \sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n} - \sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} = \frac{\frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} + 1}{\frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} - 1}.$$

因此

$$\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\} \iff \frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} \in \mathbb{Q} \setminus \{1\},$$

而且

$$\frac{\tan \frac{k_2\pi}{n}}{\tan \frac{k_1\pi}{n}} = 3 \iff \frac{\sin \frac{(k_2+k_1)\pi}{n}}{\sin \frac{(k_2-k_1)\pi}{n}} = 2.$$

## 6 Galovich 定理的正切版本

值得注意的是, Galovich[34] 在定理 3.10 中给出关于正弦函数和余弦函数的定理, 而未提及正切函数的定理. 结合 J. S. Calcut [14] 所得的结果 (参见下一节引理 7.2), 关于正切函数的相应问题的一个恰当提法 ( $n \leq 4$  属例外) 如下:

**问题 6.1.** 设正整数  $n \geq 5$ . 求

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j,n)=1}} \tan \frac{j\pi}{n} \quad \text{与} \quad \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j,n)=1}} \tan \frac{j\pi}{n}$$

若  $4 \mid n$ , 求

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} \tan \frac{j\pi}{n}.$$

问题 6.1 之所以更微妙, 是因为  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式比  $2 \cos \frac{2\pi}{n}$  和  $2 \sin \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式 (后者的结果, 可见 Cafure [12]) 更加复杂 (例如, 见 [17] 的编辑评论与下一节). 下面我们给出问题 6.1 的一个回答. 它是定理 5.6 的细化.

**定理 6.1.** 设正整数  $n \geq 5$ . 则

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j,n)=1}} \tan \frac{j\pi}{n} = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2}} p, & \text{若 } n = p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{p}, & \text{若 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j,n)=1}} \tan \frac{j\pi}{n} = \begin{cases} \sqrt{p}, & \text{若 } n = p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ \frac{1}{\sqrt{p}}, & \text{若 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases} \quad (6.2)$$

当  $4 \mid n$  时, 有

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} \tan \frac{j\pi}{n} = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} \sqrt{p}, & \text{若 } n = p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ (-1)^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{p}}, & \text{若 } n = 2p^e, \text{ 其中 } p \text{ 是奇素数;} \\ (-1)^{\lfloor \frac{n}{8} \rfloor}, & \text{其它情况.} \end{cases} \quad (6.3)$$

其中  $\lfloor \frac{n}{8} \rfloor$  是不超过  $\frac{n}{8}$  的最大整数.

**证明:** 由于

$$2 \cos 2\theta = \frac{2 - 2(\tan \theta)^2}{1 + (\tan \theta)^2},$$

从而对一切  $1 \leq j \leq n$  且  $\gcd(j, n) = 1$ ,  $r_j = \tan \frac{j\pi}{n}$  满足一个  $\varphi(n)$  次的有理系数多项式

$$R_n(x^2) = 0,$$

其中

$$R_n(x) = (1+x)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \Psi_n\left(\frac{2-2x}{1+x}\right).$$

设

$$R_n(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_0,$$

其中  $d = \frac{\varphi(n)}{2}$ . 则不难定出其首项和常数项分别为

$$a_d = \Psi_n(-2), \quad a_0 = \Psi_n(2).$$

它们同时也是  $R_n(x^2)$  的首项和常数项, 于是根据根与系数的关系, 我们得到

$$\prod_{j=1}^{\varphi(n)} r_j = (-1)^{\varphi(n)} \frac{a_0}{a_d} = (-1)^{\varphi(n)} \frac{\Psi_n(2)}{\Psi_n(-2)}.$$

从而根据定理 3.8 和定理 5.1 即得 (6.1) 式.

为证明 (6.2) 式, 注意  $1 \leq j \leq \frac{n}{2} \iff 1 \leq n-j \leq \frac{n}{2}$  以及  $r_j = -r_{n-j}$ . 从而

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j, n)=1}} r_j = \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \prod_{\substack{\frac{n}{2} \leq j \leq n \\ \gcd(j, n)=1}} r_j = \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} r_{n-j} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} (-r_j) = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \right)^2.$$

两边取绝对值并开方, 就得到

$$\left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \right) = \pm \sqrt{\left| \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \right|}.$$

由于左边乘积中的每一个因子都是正的, 乘积为正, 于是右边取正号, 就得到

$$\left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq \frac{n}{2} \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \right) = \sqrt{\left| \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j, n)=1}} r_j \right|}.$$

从 (6.1) 式立即得到 (6.2) 式.

现在假定  $4 \mid n$ , 则注意到  $j \equiv 1 \pmod{4} \iff (n-j) \equiv 3 \pmod{4}$  以及  $r_j = -r_{n-j}$ , 从而

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ \gcd(j, n)=1}} r_j = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} r_j \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 3 \pmod{4}}} r_j = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} r_j \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} (r_{n-j}) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} r_j \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} (-r_j) = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \left( \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} r_j \right)^2.$$

如前, 就得到

$$\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} r_j = \pm \sqrt{\left| \prod_{j=1}^{\varphi(n)} r_j \right|}.$$

我们只要确定出  $\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} r_j$  的正负号. 为此只要数出乘积中的负因子个数. 注意

$$r_j < 0 \iff \tan \frac{j\pi}{n} < 0 \iff \frac{j}{n} > \frac{1}{2}.$$

令  $j = 4s + 1$ , 其中  $0 \leq s \leq \frac{n}{4} - 1$ . 则

$$\frac{j}{n} > \frac{1}{2} \iff \frac{4s+1}{n} > \frac{1}{2} \iff s > \frac{n-2}{8} \iff s \geq \frac{n}{8} \iff s \geq \left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil,$$

其中  $\left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil$  是不小于  $\frac{n}{8}$  的最小整数. 于是我们确定出

$$r_j < 0 \iff \left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil \leq s \leq \frac{n}{4} - 1.$$

这样的  $s$  共有  $\frac{n}{4} - \left\lceil \frac{n}{8} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor$  个, 从而  $\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \equiv 1 \pmod{4}}} r_j$  的符号为  $(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor}$ , 即得 (6.3). 证毕.

## 7 $\tan \frac{\pi}{n}$ 的极小多项式

上一节的解法受到 Heierman [40] 的启发. 他与 Calcut [14] 都曾试图确定  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式, 在  $4 \mid n$  的情形, 均未获得满意的结果. 他们所缺的, 正是 (6.3) 式这样的结果——它可以给出  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式常数项的正负号. 他们的结果现在可以表述如下. 当  $4 \nmid n$  时,  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式是  $R_n(x^2)$ ; 当  $4 \mid n$  时,  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式是  $R_n(x^2)$  的两个因式之一, 究竟是哪一个, 由 (6.3) 式给出的正负号选择. 但应该指出, 他们的方法在  $4 \mid n$  的情形仍然是有瑕疵的, 原则上他们需要对多项式  $R_n(x^2)$  做因式分解, 而他们是借助计算机来实现因式分解, 从数学上讲缺乏恰当的算法基础.

我们从最一般的原理出发. 根据 Cox [25, p. 152], 以下结果 (也见 [3, p. 38] 命题 15) 本质上属于 Galois.

**定理 7.1 (Galois).** 设  $E$  是域  $F$  的有限 Galois 扩张, 其 Galois 群为  $G$ . 设  $\alpha \in E$  在  $G$  作用下的不同的像为  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ , 则  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  是  $\alpha$  的所有  $F$ -共轭元. 而且,

$$g(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_s).$$

是  $\alpha$  在  $F$  上的极小多项式.

回到  $\tan \frac{\pi}{n}$ , 我们的讨论基于以下引理.

**引理 7.2.** 设  $n \geq 3$ , 则  $\tan \frac{\pi}{n}$  在  $\mathbb{Q}$  上的次数如下:

$$\deg_{\mathbb{Q}} \left( \tan \frac{\pi}{n} \right) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{若 } 4 \nmid n; \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{若 } 4 \mid n. \end{cases}$$

并且, 当  $4 \nmid n$  时,  $\tan \frac{\pi}{n}$  在  $\mathbb{Q}$  上的共轭元是  $\tan \frac{k\pi}{n}$ , 其中  $k$  取遍  $\{1, 2, \dots, n\}$  中与  $n$  互素的数; 当  $4 \mid n$  时,  $\tan \frac{\pi}{n}$  在  $\mathbb{Q}$  上的共轭元是  $\tan \frac{k\pi}{n}$ , 其中  $k$  取遍  $\{1, 2, \dots, n\}$  中与  $n$  互素且模 4 同余于 1 的数.

**证明.** 不妨设  $n \neq 4$ . 容易看出

$$\tan \frac{\pi}{n} = i \frac{1 - \zeta_n}{1 + \zeta_n}.$$

因此它位于  $i = \zeta_4$  和  $\zeta_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$  生成的域  $\mathbb{Q}(\zeta_4, \zeta_n)$  中。根据分圆域的基本性质(参见[20]或[32, p. 15]习题8), 我们有

$$\mathbb{Q}(\zeta_4, \zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_4)\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_m),$$

其中  $m = \text{lcm}(4, n)$  是4与n的最小公倍数。容易看出

$$\text{lcm}(4, n) = \begin{cases} 4n, & \text{若 } n = 2\ell - 1; \\ 2n, & \text{若 } n = 4\ell - 2; \\ n, & \text{若 } n = 4\ell. \end{cases}$$

于是我们分情况逐一讨论。

第一种情况,  $n = 2\ell - 1$ , 此时  $m = 4n$ , 而

$$\tan \frac{\pi}{n} = \zeta_{4n}^n \frac{1 - \zeta_{4n}^4}{1 + \zeta_{4n}^4}$$

任取  $1 \leq k \leq 4n$  且  $\gcd(k, 4n) = 1$ . 它决定的自同构  $\sigma_k \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{4n})/\mathbb{Q})$  作用于  $\tan \frac{\pi}{n}$ , 得到

$$\sigma_k \left( \tan \frac{\pi}{n} \right) = \zeta_{4n}^{kn} \frac{1 - \zeta_{4n}^{4k}}{1 + \zeta_{4n}^{4k}} = i^k \frac{1 - \zeta_n^k}{1 + \zeta_n^k} = i^{k-1} \tan \frac{k\pi}{n}.$$

于是有

$$\sigma_k \left( \tan \frac{\pi}{n} \right) = \tan \frac{\pi}{n} \iff i^{k-1} \tan \frac{k\pi}{n} = \tan \frac{\pi}{n} \iff k = 1, 4n - 1.$$

从而当  $n = 2\ell - 1$  是奇数时,  $\tan \frac{\pi}{n}$  的次数为  $\frac{\varphi(4n)}{2} = \varphi(n)$ . 而  $\tan \frac{\pi}{n}$  在  $\mathbb{Q}$  上的共轭元为  $\sigma_k \left( \tan \frac{\pi}{n} \right) = i^{k-1} \tan \frac{k\pi}{n}$  中的不同元素, 其中  $1 \leq k \leq 4n$  且  $\gcd(k, 4n) = 1$ . 容易确定出, 它们就是  $\tan \frac{k\pi}{n}$ , 其中  $k$  取遍  $\{1, 2, \dots, n\}$  中与  $n$  互素的数。

类似地, 当  $n = 4\ell - 2$  时, 自同构  $\sigma_k \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{2n})/\mathbb{Q})$  作用于

$$\tan \frac{\pi}{n} = \zeta_{2n}^{\frac{n}{2}} \frac{1 - \zeta_{2n}^2}{1 + \zeta_{2n}^2}$$

得到

$$\sigma_k \left( \tan \frac{\pi}{n} \right) = \zeta_{2n}^{\frac{nk}{2}} \frac{1 - \zeta_{2n}^{2k}}{1 + \zeta_{2n}^{2k}} = i^{k-1} \tan \frac{k\pi}{n}.$$

$$\sigma_k \left( \tan \frac{\pi}{n} \right) = \tan \frac{\pi}{n} \iff i^{k-1} \tan \frac{k\pi}{n} = \tan \frac{\pi}{n} \iff k = 1, 2n - 1.$$

从而当  $n = 4\ell - 2$  时,  $\tan \frac{\pi}{n}$  的次数为  $\frac{\varphi(2n)}{2} = \varphi(n)$ . 类似地, 可以确定  $\tan \frac{\pi}{n}$  在  $\mathbb{Q}$  上的共轭元。

最后, 当  $n = 4\ell$  时, 同上可证,  $\tan \frac{\pi}{n}$  的次数为  $\frac{\varphi(n)}{2}$ . 并确定出  $\tan \frac{\pi}{n}$  在  $\mathbb{Q}$  上的共轭元。证毕。

我们还需要关于  $2 \sin \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式的下述结果(注意, 当  $n = 4(4m + 1)$  是偶数时, 它纠正了[12, p. 51]命题24(其错误根源在命题23), 也见[8]引理2.10)

引理 7.3. 设  $n$  是正整数, 设  $g_n(x)$  为  $2 \sin \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式. 则

$$g_n(x) = \begin{cases} \Psi_{4n}(x), & \text{若 } n = (2m-1); \\ \Psi_{2n}(x), & \text{若 } n = 2(2m-1); \\ \Psi_{\frac{n}{2}}(x), & \text{若 } n = 4(4m-1); \\ \Psi_{\frac{n}{4}}(x), & \text{若 } n = 4(4m+1); \\ \Psi_n(x), & \text{若 } n = 8m. \end{cases}$$

进而有

$$\deg_{\mathbb{Q}} \left( \sin \frac{2\pi}{n} \right) = \begin{cases} \varphi(n), & \text{若 } 4 \nmid n; \\ \frac{\varphi(n)}{2}, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod{8}; \\ \frac{\varphi(n)}{4}, & \text{若 } n \equiv 4 \pmod{8} \text{ 且 } n \neq 4; \\ 1 & \text{若 } n = 4. \end{cases}$$

证明: 本质上我们的证明源自 [56].

$$2 \sin \frac{2\pi}{n} = 2 \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n} \right) = 2 \cos \left( \frac{2\pi}{4} - \frac{2\pi}{n} \right) = 2 \cos \left( 2\pi \frac{n-4}{4n} \right).$$

当  $n = 4$  时, 结论显然. 以下假定  $n \neq 4$ .

因此, 只要求出分数  $\frac{n-4}{4n}$  的既约形式, 为此只要确定出  $\gcd(n-4, 4n)$ . 分情况讨论, 不难确定出

$$\gcd(n-4, 4n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = (2m-1); \\ 2, & \text{若 } n = 2(2m-1); \\ 8, & \text{若 } n = 4(4m-1); \\ 16, & \text{若 } n = 4(4m+1); \\ 4, & \text{若 } n = 8m. \end{cases}$$

从而得到结论. 进而在各个情形求出其次数  $\frac{\varphi(\frac{4n}{d})}{2}$ , 就得到关于次数的结论. 证毕.

现在我们来讨论  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式.

当  $4 \nmid n$  时, 如上一节定理 15 中证明的,  $\tan \frac{\pi}{n}$  所满足的有理系数多项式

$$(1 + x^2)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \Psi_n \left( \frac{2 - 2x^2}{1 + x^2} \right)$$

恰好是  $\varphi(n)$  次的, 与  $\tan \frac{\pi}{n}$  的次数吻合, 因而它就是不可约的.

现在我们来处理  $4 \mid n$  的情形. 此时分两种情况, 较简单的情况是  $n = 4(2k+1)$ . 不妨设  $k \geq 1$ . 此时我们可以用以下等式

$$2 \sin 2\theta = \frac{4 \tan \theta}{1 + (\tan \theta)^2}.$$

当  $n = 4(4m-1)$  且  $m \geq 1$  时,  $2 \sin \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式是  $\Psi_{\frac{n}{2}}(x)$ . 从而我们得到  $\tan \frac{\pi}{n}$  的一个零化多项式为

$$(1 + x^2)^{\frac{\varphi(n)}{4}} \Psi_{\frac{n}{2}} \left( \frac{4x}{1 + x^2} \right) = 0,$$

这是一个  $\frac{\varphi(n)}{2}$  次的多项式, 因此自然就是  $\tan \frac{\pi}{n}$  的不可约零化多项式.

当  $n = 4(4m+1)$  且  $m \geq 1$  时,  $2 \sin \frac{2\pi}{n}$  的极小多项式是  $\Psi_{\frac{n}{4}}(x)$ . 从而我们得到  $\tan \frac{\pi}{n}$  的一个零化多项式为

$$(1+x^2)^{\frac{\varphi(n)}{4}} \Psi_{\frac{n}{4}}\left(\frac{4x}{1+x^2}\right) = 0,$$

这是一个  $\frac{\varphi(n)}{2}$  次的多项式, 因此自然就是  $\tan \frac{\pi}{n}$  的不可约零化多项式.

最后我们来考虑  $8 \mid n$  的情况. 此时我们利用最后一个万能公式(正切的二倍角公式)

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - (\tan \theta)^2}. \quad (7.1)$$

于是, 若设  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式为  $\Theta_n(x)$ , 次数为  $\frac{\varphi(n)}{2}$  次, 则  $\tan \frac{\pi}{2n}$  满足零化多项式

$$(1-x^2)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \Theta_n\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 0.$$

这是一个  $\varphi(n)$  次的多项式, 自然就是  $\tan \frac{\pi}{2n}$  的极小多项式. 总的来说, 在  $n = 2^e n_0$  (其中  $e \geq 3$  且  $n_0$  为奇数) 的情况, 是从  $4n_0$  开始算(由第二种情形的结果), 依次算出  $8n_0, \dots, 2^e n_0$  多对对应的极小多项式. 当然我们也可以写出一个一步到位的计算结果. 这需要引入 Chebyshev 多项式的类比(参见 Euler [31] 第十四章), 这是关于正切的二倍角公式(7.1) 的多倍推广(从 2 到  $n$ ).

**引理 7.4.** 对每个正整数  $n$ , 存在有理函数  $F_n(x)$  使得

$$\tan n\theta = F_n(\tan \theta)$$

对一切满足  $n\theta \notin \mathbb{Z}\frac{\pi}{2}$  的实数  $\theta$  恒成立.

**证明.** 令  $T = \tan \theta \in \mathbb{R}$ , 记  $z = 1 + i \tan \theta = 1 + iT$ . 由于  $z$  的辐角是  $\theta$ , 从而  $z^n$  的辐角为  $n\theta$ . 于是

$$\tan n\theta = \frac{\operatorname{Im}(z^n)}{\operatorname{Re}(z^n)}.$$

注意, 根据牛顿二项式定理, 有

$$z^n = (1+ix)^n = \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} T^{2k} \right) + i \left( \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} T^{2k+1} \right).$$

从而

$$\tan n\theta = \frac{\operatorname{Im}(z^n)}{\operatorname{Re}(z^n)} = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} (\tan \theta)^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} (\tan \theta)^{2k}}.$$

因此, 可令

$$F_n(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)},$$

其中 (注意,  $P_n(x), Q_n(x)$  恰好分别是  $(1+ix)^n$  的虚部和实部)

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{2k+1}, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{2k}. \quad (7.2)$$

证毕.

不难发现, 利用  $P_n(x), Q_n(x)$ , 可以将  $4 \mid n$  这种情况下的  $\Theta_n(x)$  写得更清楚. 最终全部的结果可总结如下:

**定理 7.5.** 设正整数  $n \geq 3$ , 设  $\tan \frac{\pi}{n}$  的所满足的有理不可约多项式为  $\Theta_n(x)$ . 则可取

$$\Theta_n(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \Psi_n\left(\frac{2-2x^2}{1+x^2}\right), & \text{若 } 4 \nmid n; \\ (1+x^2)^{\frac{\varphi(n)}{4}} \Psi_{8m-2}\left(\frac{4P_{2^e}(x)Q_{2^e}(x)}{(1+x^2)^{2^e}}\right), & \text{若 } n = 4 \cdot 2^e(4m-1); \\ (1+x^2)^{\frac{\varphi(n)}{4}} \Psi_{4m+1}\left(\frac{4P_{2^e}(x)Q_{2^e}(x)}{(1+x^2)^{2^e}}\right), & \text{若 } n = 4 \cdot 2^e(4m+1) \text{ 且 } m \geq 1; \\ P_{2^e}(x) - Q_{2^e}(x), & \text{若 } n = 4 \cdot 2^e. \end{cases}$$

其中  $P_n(x), Q_n(x)$  由 (7.2) 定义.

注. 文献 [33] 给出了  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式的完整结果, 但其表述不及此处简洁明了.

$n$	$\tan \frac{\pi}{n}$	$\mathbb{Q}$ 上不可约多项式	$\mathbb{Q}$ 上共轭元的乘积公式
3	$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$	$x^2 - 3$	$\tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{2\pi}{3} = -3$
4	$\tan \frac{\pi}{4} = 1$	$x - 1$	$\tan \frac{\pi}{4} = 1$
5	$\tan \frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$x^4 - 10x^2 + 5$	$\prod_{k=1}^4 \tan \frac{k\pi}{5} = 5$
6	$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$3x^2 - 1$	$\tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{3}$
7	$\tan \frac{\pi}{7}$	$x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 7$	$\prod_{k=1}^6 \tan \frac{k\pi}{7} = -7$
8	$\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$	$x^2 + 2x - 1$	$\tan \frac{\pi}{8} \tan \frac{5\pi}{8} = -1$
9	$\tan \frac{\pi}{9}$	$x^6 - 33x^4 + 27x^2 - 3$	$\prod_{k=1,2,4,5,7,8} \tan \frac{k\pi}{9} = -3$
10	$\tan \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}$	$5x^4 - 10x^2 + 1$	$\tan \frac{\pi}{10} \tan \frac{3\pi}{10} \tan \frac{7\pi}{10} \tan \frac{9\pi}{10} = \frac{1}{5}$
11	$\tan \frac{\pi}{11}$	$x^{10} - 55x^8 + 330x^6 - 462x^4 + 165x^2 - 11$	$\prod_{k=1}^{10} \tan \frac{k\pi}{11} = -11$
12	$\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1$	$\tan \frac{\pi}{12} \tan \frac{5\pi}{12} = 1$

## 8 延伸的问题

我们知道, 有理数相当于次数为 1 的代数数. 由于单位圆内接正多边形的对角线长是代数数, 其商也是代数数, 因此就有其次数 (可以说, 正是这个次数度量了代数无理数究竟有多

“无理”). 本文相当于确定出哪些广义对角线之比的次数为 1. 自然地, 我们可以接着问, 哪些广义对角线之比的次数为 2? 关于余弦函数的这类问题 (由 Hancock [38] 提出), 最早也是由 Underwood [69] 回答的. 该结果也值得了解 (例如 [21] 引理 23 中所证明的  $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$  不是有理角的余弦值, 就是其直接推论):

**定理 8.1.** 设  $\theta = r\pi$ , 其中  $r \in \mathbb{Q}$ , 则  $\cos \theta$  仅有的二次无理数取值为以下 8 个数之一:

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

根据定理 8.1, 可以再次证明定理 3.7. 定理 3.3 和定理 3.7 一起给出了高中教材中最常见的有理锐角的余弦值 (参见 [16]), 如下表所示 (其中有理值用粗体标记):

$r \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$
$\cos r\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

对应的正弦表如下:

$r \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{3}$
$\sin r\pi$	$\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

正切表如下:

$r \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cap \mathbb{Q}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{12}$
$\tan r\pi$	$2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{2} - 1$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2} + 1$	$2 + \sqrt{3}$

值得指出的是, 收入《精彩的数学证明》的下述结果 ([1, p.52] 定理 3), 只是定理 3.7 的一个推论.

**定理 8.2.** 对每个奇数  $n \geq 3$ ,

$$\frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \notin \mathbb{Q}.$$

事实上, 从定理 3.7 可以立即推出以下更一般的结果 (见 Varona [71], 关于  $\arctan x$  的相应结果则可由定理 3.6 导出):

**定理 8.3.** 设  $r \in \mathbb{Q}$ , 且  $0 \leq r \leq 1$ .  $f(x)$  是  $\arcsin x$  或  $\arccos x$  之一. 则

$$\frac{1}{\pi} f(\sqrt{r}) \in \mathbb{Q} \iff r \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}.$$

**注.** 定理 8.3 的特例也常出现于中学数学竞赛的问题中, 如 [51] p. 153 和 p. 162. 我们认为, 值得优先收入《精彩的数学证明》[1] 的, 是定理 3.3–3.7 和定理 8.3(及其平行的反正切版本, 此处从略), 而不是定理 8.2(特别是考虑到, 两位作者在该书其它章还介绍了 Chebyshev 多项式). 定理 3.3 和定理 3.4 在几何上有诸多有趣的应用, 参见 [45, 46, 58, 73].

据说, 去年过世的数学家 John Conway (1937–2020) 曾有计划与 Steve Sigur (1946–2008) 合作写一本关于三角形的小书 (书名预告为 The Triangle Book, 一如 Conway 与 Richard K. Guy 合写的 The Book of Numbers). 遗憾的是, 两位作者生前未能写完. 可以设想, Conway 的构思中会有短文 [23] 所包含的一些结果, 如他引以为傲的 “Little Theorem” ([23] 定理 1) 与前述定理 3.7.

近年来, 还有一个相关的小问题引发了人们的兴趣. 在 2018 年的一期 PBS Infinite Series 中, Perez-Giz [59] 提出了以下问题:

**问题 8.1.** 对哪些正整数  $k$ ,

$$\phi_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} \quad (8.1)$$

可以实现为某个正多边形的两条对角线 (允许其中之一是边长) 之比?

已知的结果如下.

对  $k = 1$ ,  $\phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  (黄金比例), 它是正五边形的对角线与边长之比, 见第 1 节图 1.1.

对  $k = 2$ ,  $\phi_2 = 1 + \sqrt{2}$  (称为白银比例, silver ratio), 是正八边形的一条对角线与边长之比, 如图 8.1.

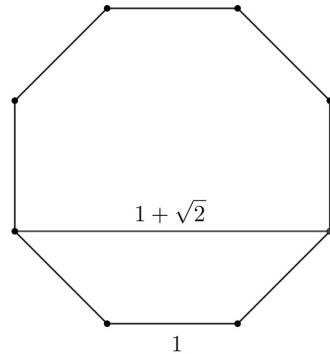


图 8.1: 正八边形中的白银比例:  $1 + \sqrt{2}$ .

对  $k = 3$ ,  $\phi_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$  (称为青铜比例, bronze ratio). Buitrago [10] 证明,  $\phi_3$  不能成为正多边形的对角线与边长之比.

T. Grubb 和 C. Woll 于 2019 年挂出的预印本 [37] (注: 最近已正式发表于 *Integers* 第 21 卷) 的定理 1.1, 蕴含了问题 8.1 的回答:  $\phi_k$  可实现为某个正多边形的两条广义对角线之比当且仅当  $k = 1$  或  $k = 2$ .

从数论的眼光看, 比问题 8.1 更自然的问题如下 (一个相关的结果见 [8, p. 165] 定理 3.2):

**问题 8.2.** 设正整数  $n \geq 4$ ,  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ . 问: 在满足以上条件的三元数组  $(n, k_2, k_1)$  中, 有哪些使得比值  $\frac{\sin \frac{k_2 \pi}{n}}{\sin \frac{k_1 \pi}{n}}$  为二次无理数.

注意, 对问题 8.2 的回答可引出问题 8.1 的答案. 对于问题 8.2, 基于 WolframAlpha 软件计算, 我们提出以下猜想.

**猜想 8.4.** 设  $n \geq 4$  是正整数, 正整数  $k_1, k_2$  满足  $k_1 < k_2 < \frac{n}{2}$ . 则比值  $\frac{\sin \frac{k_2 \pi}{n}}{\sin \frac{k_1 \pi}{n}}$  为二次无理数, 当且仅当  $(n, k_2, k_1)$  取值于下表第一列 (本质上共 15 种可能), 而对应的比值与极小多项式分别由第二、三列给出: 其中  $m$  是某正整数.

$(n, k_2, k_1)$	$\frac{\sin \frac{k_2 \pi}{n}}{\sin \frac{k_1 \pi}{n}}$	极小多项式
$(4m, 2m, m)$	$\sqrt{2}$	$x^2 - 2 = 0$
$(5m, 2m, m)$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$
$(6m, 3m, 2m)$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$x^2 - \frac{4}{3} = 0$
$(6m, 2m, m)$	$\sqrt{3}$	$x^2 - 3 = 0$
$(8m, 3m, m)$	$1 + \sqrt{2}$	$\boldsymbol{x^2 - 2x - 1 = 0}$
$(10m, 5m, 3m)$	$-1 + \sqrt{5}$	$x^2 + 2x - 4 = 0$
$(10m, 5m, m)$	$1 + \sqrt{5}$	$x^2 - 2x - 4 = 0$
$(10m, 3m, m)$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	$x^2 - 3x + 1 = 0$
$(12m, 5m, 3m)$	$\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$	$x^2 - x - \frac{1}{2} = 0$
$(12m, 5m, m)$	$2 + \sqrt{3}$	$x^2 - 4x + 1 = 0$
$(12m, 4m, 3m)$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$x^2 - \frac{3}{2} = 0$
$(12m, 3m, 2m)$	$\sqrt{2}$	$x^2 - 2 = 0$
$(12m, 3m, m)$	$1 + \sqrt{3}$	$x^2 - 2x - 2 = 0$
$(30m, 9m, 5m)$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$
$(30m, 5m, 3m)$	$\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$	$\boldsymbol{x^2 - x - 1 = 0}$

若猜想 8.4 成立, 则问题 8.2 立即得解. 只需注意由 (8.1) 式,  $\phi_k$  满足的方程是

$$x^2 - kx - 1 = 0.$$

于是, 根据上表第三列立即读出, 仅有的可能出现在加粗的各行, 从而  $k = 1$  或  $k = 2$ .

我们还得到了关于二次无理余弦比值和正切比值的平行猜想 (它们都等价于猜想 8.4), 暂且不表. 此外, 我们通过大量测试, 也猜出了各个比值的次数 (Barbeau [4] 曾提出这一问题, 而更基本的问题是求出它们的极小多项式), 如下:

**猜想 8.5.** 设正整数  $n \geq 5$ ,  $k_1, k_2$  满足

$$k_1 < k_2 < \frac{n}{2} \quad \text{且} \quad \gcd(n, k_1, k_2) = 1.$$

进一步假定

$$\frac{k_1}{n} \neq \frac{1}{6}, \quad \text{且} \quad \frac{k_2}{n} \neq \frac{1}{6}.$$

则有

$$\deg_{\mathbb{Q}} \left( \frac{\sin \frac{k_2 \pi}{n}}{\sin \frac{k_1 \pi}{n}} \right) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{2}, & n \text{ 是偶数且 } k_1, k_2 \text{ 是奇数} \\ \frac{\varphi(2n)}{2}, & \text{其它情况} \end{cases} \quad (8.2)$$

注意, 猜想 8.5 蕴含猜想 8.4. 西安电子科技大学的张哲博士对  $n = p$  为素数的情况证明了猜想 8.5. Grubb [37, p.2] 定理 1.2 的结果也支持了猜想 8.5 成立.

与猜想 8.5 等价的余弦猜想如下:

**猜想 8.6.** 设正整数  $n \geq 5, k_1, k_2$  满足

$$k_1 < k_2 < \frac{n}{2} \quad \text{且} \quad \gcd(n, k_1, k_2) = 1.$$

进一步假定

$$\frac{k_1}{n} \neq \frac{1}{3}, \quad \text{且} \quad \frac{k_2}{n} \neq \frac{1}{3}.$$

则有

$$\deg_{\mathbb{Q}} \left( \frac{\cos \frac{k_2 \pi}{n}}{\cos \frac{k_1 \pi}{n}} \right) = \begin{cases} \frac{\varphi(n)}{2}, & n \text{ 是偶数且 } k_1, k_2 \text{ 是奇数} \\ \frac{\varphi(2n)}{2}, & \text{其它情况} \end{cases} \quad (8.3)$$

关于正切的猜想看起来最简单 (正如前面指出的, 它也等价于猜想 8.5), 如下:

**猜想 8.7.** 设正整数  $n \geq 5, k_1, k_2$  满足

$$k_1 < k_2 < \frac{n}{2} \quad \text{且} \quad \gcd(n, k_1, k_2) = 1.$$

进一步假定

$$\frac{k_1}{n} \neq \frac{1}{4}, \quad \text{且} \quad \frac{k_2}{n} \neq \frac{1}{4}.$$

则有

$$\deg_{\mathbb{Q}} \left( \frac{\tan \frac{k_2 \pi}{n}}{\tan \frac{k_1 \pi}{n}} \right) = \frac{\varphi(n)}{2}. \quad (8.4)$$

## 9 结语

关于有理角的三角函数问题, 是沟通代数、数论与几何、衔接中学与大学数学的绝佳题材. 本文所讨论的问题中有一部分是适合这一需求的. 而更贴切这个目标的, 也许是 T. Kowalski [47]. 该文曾获得 MAA 颁发的 George Pólya 写作奖与 Chauvenet 写作奖, 推荐给有兴趣的读者.

2020 年 10 月初, 作者在为本校 2020 级数学系新生准备“新生研讨课”时偶然想到问题 1.1. 曾作为例子在第一堂课分享给大一新生, 本意只是想启发学生发散思维, 主动提问. 两个月以后, 我捡起这个问题, 开展研究. 在师友的指导激励下, 最终解决了这一问题, 并附带解决了问题 6.1、求出  $\tan \frac{\pi}{n}$  的极小多项式 (第 7 节). 回想起来, 我之所以会在备课时想到问题 1.1, 与我在数学史方面的兴趣有密切关系.

问题 1.1 解决之后, 我认识到这个结果 (定理 2.1) 原本可以被 D. B. Shapiro (1984), A. Berger (2017) 和蔡进一等人 (2018) 顺便得到, 因为他们得到了与之等价的定理 (余弦、正切版本). 唯有正弦, 是源自正多边形广义对角线比值的几何版本.

我相信,这类结果是 Ralph S. Underwood (1891–1974), Derrick H. Lehmer (1905–1991), Ivan M. Niven (1915–1999) 所乐于了解的。凑巧,这三位都曾是 Leonard Eugene Dickson (1874–1954) 的博士。Underwood 和 Niven 分别于 1930 年和 1938 年得到学位,而 Lehmer 则中途转学换导师 Jacob David Tamarkin,于 1930 年得学位。

本文献给 Dickson 的另一位博士,将近世代数和数论引入中国的数学家、数学教育家杨武之 (1896–1973)。杨武之 1928 年在芝加哥大学 Dickson 门下得博士学位,旋即回国。先后任教厦门大学、清华大学、西南联大、同济大学、复旦大学,致力于培养数学人才。杨武之教授是华罗庚、柯召、闵嗣鹤研究数论的引路人和提携者。

华人之光(自然更是安徽人的骄傲)杨振宁(宁指怀宁)是杨武之的长子。杨先生曾提起(见 [44, p. 47] 脚注),在他儿时父亲曾经告诉他两个漂亮的数学定理,一个是代数基本定理,一个是正十七边形可以尺规作图(足见武之先生对数学的爱,对儿子的期许)。本文考虑的问题,与后者同出一源(正多边形下隐藏的分圆域),愿武之先生在天之灵喜欢。附歪诗一首:

念念不忘生回响  
分圆方程高斯解, 钟爱对称伽罗瓦。  
狄氏西学武之传, 代数数论播华夏。  
尺规奥妙振宁悟, 慧眼识英柯闵华。  
非阿贝尔释核力, 神笔重生英贤花。

注。末句中的“英贤”广义言之解作英豪先贤,狭义言之解作两位英国理论物理家——Maxwell 和 Dirac。杨振宁与 Mills 的同位旋相位场(见 [44, p. 392]),是 Maxwell 电磁场的直接推广,相当于把表示幅角的数(对应于单位复数群  $U(1)$ )变成了二阶方阵(对应于单位四元数群  $SU(2)$ )。杨振宁与 Mills 开创 Yang–Mills 方程之手笔,又与 Dirac 创造石破天惊的 Dirac 方程神似。

## 致谢

感谢首都师范大学李克正教授指引作者从分圆域入手考虑问题 1.1。感谢吴帆老师、陈见柯博士、陈珊博士、梁钝博士、林贤祖博士、刘玉明博士、刘云朋博士、王兢博士、王秋艳博士、辛赫博士、张爱仙博士、张宝群博士、张超博士、张汉雄博士、张浩博士、郑豪博士、孙志跃老师与作者讨论。尤其感谢学友吴帆提供 Vincenzi 教授的最新文献 [72],并激励作者迎难而上、勇往直前。感谢首都师范大学方复全教授、朱一心教授、赵学志教授、山东大学李良攀教授、香港城市大学陈关荣教授、南开大学陈省身数学所唐梓洲教授、北京师范大学葛建全教授、南京大学朱富海教授、郭学军教授、华东师范大学詹兴致教授、刘治国教授、上海交通大学吴耀琨教授、西安电子科技大学张哲博士、重庆大学邵红亮博士、复旦大学邵美悦博士、西安交通大学林明华博士、曲阜师范大学李修美博士、渭南师范学院赵教练教授、西北农林科技大学郑跃飞博士对初稿提出宝贵意见!感谢山东大学许光午教授指出文献 [13] 中结果与本文的联系。感谢新加坡国立大学曾衡发教授指出文献 [21] 中结果与本文的联系。感谢台湾交通大学吴培元教授、天津大学物理系戴伍圣教授和美国加州大学圣巴巴拉分校林家声同学帮忙传递文献。感谢浙江省永嘉中学叶卢庆老师帮忙制图。感谢《蛙鸣》编辑部各位编辑同学对初稿提出宝贵意见!

## 参考文献

- [1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*. Sixth Edition. Springer, 2018. 第 5 版有中译本, 《数学天书中的证明》, 冯荣权、宋春伟、宗传明、李璐译, 北京: 高等教育出版社, 2016.
- [2] B. H. Arnold, H. Eves, A simple proof that, for odd  $p > 1$ ,  $\arccos\left(\frac{1}{p}\right)$  and  $\pi$  are incommensurable. *Amer. Math. Monthly* 56 (1949) 20–21.
- [3] E. Artin, *Galois Theory: Lectures Delivered at the University of Notre Dame*, Dover, 1998. 有中译本, 李同孚译, 《伽罗瓦理论》, 哈尔滨工业大学出版社, 2011.
- [4] E. J. Barbeau, Incommensurability proof: a pattern that peters out. *Math. Mag.* 56 (1983) 82–90.
- [5] 北京大学数学系前代数小组, 《高等代数》(第四版), 高等教育出版社, 2013.
- [6] J. Bergen, Values of trigonometric functions. *Math Horizons* 16(3) (2009) 17–19.
- [7] A. Berger, More grade school triangles. *Amer. Math. Monthly* 124 (2017) 324–336.
- [8] A. Berger, On linear independence of trigonometric numbers. *Carpathian Journal of Mathematics* 34 (2018) 157–166.
- [9] H. P. Boas, The oldest trig in the book. *College Math. J.* 50 (2019) 9–20.
- [10] A. R. Buitrago, Polygons, diagonals, and the bronze mean. *Nexus Network Journal*, 9 (2007), No.2: 321–326.
- [11] B. Bzdega, A. Herrera-Poyatos, P. Moree, Cyclotomic polynomials at roots of unity. *Acta Arith.* 184 (2018) 215–230.
- [12] A. Cafure, E. Cesaratto, Irreducibility criteria for reciprocal polynomials and applications. *Amer. Math. Monthly* 124 (2017) 37–53.
- [13] J. Y. Cai, Z. G. Fu, K. Girstmair, M. Kowalczyk, A complexity trichotomy for  $k$ -regular ssymmetric spin systems using number theory. *Innovations in Theoretical Computer Science* (2018) 2:1–2:22.
- [14] J. S. Calcut, Rationality and the tangent function. Preprint (2009), <http://www.oberlin.edu/faculty/jcalcut/papers.htm>, accessed 29 June 2016.
- [15] J. S. Calcut, Gaussian integers and arctangent identities for  $\pi$ . *Amer. Math. Monthly* 116 (2009) 515–530.
- [16] J. S. Calcut, Grade school triangles. *Amer. Math. Monthly* 117 (2010) 673–685.
- [17] D. Callan, A. Nijenhuis, Problem E 3461. *Amer. Math. Monthly* 104 (1997) 171–172. Editorial comment. *Amer. Math. Monthly* 104 (1997) 984.
- [18] L. Carlitz and J. M. Thomas, Rational tabulated values of trigonometric functions. *Amer. Math. Monthly* 69 (1962) 789–793.
- [19] M. Cavachi, O. P. Lossers, Problem 11540. *Amer. Math. Monthly* 120 (2013) 77.
- [20] R. Chalkley, A lattice of cyclotomic fields. *Math. Mag.* 48 (1975) 42–44.
- [21] E. C. Chang, S. W Choi, D. Y. Kwon, et al. Shortest path amidst disc obstacles is computable. In *Proceedings of the 21st ACM Symposium on Computational Geometry*, 2005, 116–125.
- [22] 程其襄. 三角函数表上的数哪些是无理数. 数学教学, 1955 年第 1 期, 16–18.
- [23] J. Conway, A characterization of the equilateral triangles and some consequences. *Math. Intelligencer* 36 (2014) No.2: 1–2.
- [24] D. A. Cox, Why Eisenstein proved the Eisenstein criterion and why Schönemann discovered it first. *Amer. Math. Monthly* 118 (2011) 3–21.
- [25] D. A. Cox, *Galois Theory*, Second Edition, Wiley, 2012.
- [26] D. A. Cox, T. Hyde, The Galois theory of the lemniscate. *Journal of Number Theory* 135 (2014) 43–59.
- [27] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Second Edition. Wiley, New York, 1989.
- [28] H. Dörrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover, New York, 1965. 有中译本, 《100 个著名初等数学问题》, 罗宝华、杨骥江、谭学金、朱建民、池贵法、郭留宝、王秀芝译, 上海科学技术出版社, 1982 年.
- [29] A. Dubickas, C. Smyth, Problem 11123. *Amer. Math. Monthly* 111 (2004) 915–922.
- [30] H. M. Edwards, Galois for 21st-century readers. *Notices of the A.M.S.* 59 (2012), 912–923.
- [31] L. Euler, 1748, *Introductio in Analysis Infinitorum*, St. Petersburg; English translation by J. Blanton. 有中译本, 《无穷分析引论》, 张延伦译, 山西教育出版社, 1997 年.
- [32] 冯克勤, 《代数数论》, 北京: 科学出版社, 2000 年.
- [33] L. I. Galieva, I. G. Galyautdinov, One class of equations solvable in radicals. *Russ. Math.* 55 (2011) 18–25.
- [34] S. Galovich, Products of sines and cosines. *Math. Mag.* 60 (1987) 105–113.
- [35] S. Garibaldi, Somewhat more than governors need to know about trigonometry. *Math. Mag.* 81(3) (2008) 191–200.
- [36] C. F. Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, translated by A. A. Clarke, Springer, 1986. 有中译本, 《算术探索》, 潘承彪、张明尧译, 哈尔滨工业大学出版社, 2011.
- [37] T. Grubb, C. Woll, Cyclotomic points and algebraic properties of polygon diagonals,

- https://arxiv.org/abs/1910.10325.
- [38] H. Hancock, Question 36. Amer. Math. Monthly 26 (1919) 291.
  - [39] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*. Cambridge, Cambridge University Press, 1940. 有四个中译本。有三本译作《一个数学家的辩白》，分别是：王希勇译，商务印书馆，2007年；李文林、戴宗铎、高嵘译，大连理工大学出版社，2014年；何生译（双语版），图灵公司出版，2020年。另一本译作《一个数学家的自白》，李泳译，湖南科学技术出版社，2007年。
  - [40] W. E. Heierman, Minimal polynomials for trig functions of angles rationally commensurate with  $\pi$ .
  - [41] H. J. Hsiao, On factorization of Chebyshev's polynomials of the first kind. Bull. Inst. Math. Acad. Sin. 12 (1) (1984), 89–94.
  - [42] T. Hsu, Rational nonaxis points on the unit circle have irrational angles. Amer. Math. Monthly 123 (2016) 490
  - [43] 黄越, 有理角的三角函数哪些是无理数, 数学传播, 2020年(44卷)第3期, 87–93.
  - [44] 季理真、林开亮,《杨振宁的科学世界: 数学与物理的交融》,北京: 高等教育出版社, 2018年。
  - [45] R. B. Killgrove and D. W. Koster, Regular polygons with rational area or perimeter. Math. Mag. 64 (1991) 109–114.
  - [46] M. Klamkin, H. E. Chrestenson, Problem 5014. Amer. Math. Monthly 77 (1963) 447–448.
  - [47] T. Kowalski, The sine of a single degree. College Math. J. 47 (2016) 322–332.
  - [48] S. Lang, Algebraic Number Theory. Second edition. Graduate Texts in Mathematics 110, Springer-Verlag, New York, 1994.
  - [49] S. Lang, Algebra. Revised Third Edition. Graduate Texts in Mathematics 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
  - [50] D. H. Lehmer, A note on trigonometric algebraic numbers. Amer. Math. Monthly 40 (1933) 165–166.
  - [51] 李克大、李尹裕,《有趣的差分方程》(第2版),合肥: 中国科学技术大学出版社, 2019。
  - [52] K. A. Loper and N. J. Werner, Resultants of minimal polynomials of maximal real cyclotomic extensions. J. Number Theory 158 (2016) 298–315.
  - [53] A. Makowski, D. E. Penney, Problem E2333. Amer. Math. Monthly 80 (1973) 77–78.
  - [54] P. McCombs, D. B. Surowski, Homogeneous polynomials and the minimal polynomial of  $\cos(2\pi/n)$ . Missouri J. Math. Sci. 15 (1) (2003) 4–14.
  - [55] K. Motose, Rational values of trigonometric functions. Amer. Math. Monthly 114 (2007) 818.
  - [56] I. Niven, Irrational Numbers, Carus Mathematical Monographs, 11, M.A.A., 1956.
  - [57] J. M. H. Olmsted, Rational values of trigonometric functions. Amer. Math. Monthly 52 (1945) 507–508.
  - [58] W. Page, A rational approach to lattice polygons. Two-Year Coll. Math. J. 18 (1987) 316–318.
  - [59] G. Perez-Giz. Beyond the golden ratio. PBS Infinite Series, Youtube Channel, 2018. <https://www.youtube.com/watch?v=MlxvZ6jwTuA>
  - [60] G. Pólya, G. Szegő, *Problems and Theorems in Analysis II*, Springer, 1978. 有中译本,《数学分析中的问题和定理(第二卷)》,张奠宙、宋国栋、魏国强译,李锐夫、程其襄、陆洪文校,上海: 上海科学技术出版社, 1981。
  - [61] V. V. Prasolov, Essays on Numbers and Figures, Mathematical World 16, American Mathematical Society, 2000.
  - [62] H. W. Richmond, An elementary note in trigonometry. Math. Gaz. 20 (1936) 333–334.
  - [63] N. Schaumberger, A classroom theorem on trigonometric irrationalities. Two-Year Coll. Math. J. 5 (1974) 73–76.
  - [64] D. B. Shapiro, A periodicity problem in plane geometry. Amer. Math. Monthly 91 (1984) 97–108.
  - [65] P. N. de Souza, J-N Silva, *Berkeley Problems in Mathematics*, (3rd ed.) Springer-Verlag, New York, 2004.
  - [66] J. J. Sylvester, On certain ternary cubic equations. Amer. J. Math. 2 (1879) 357–381.
  - [67] P. Tangsupphathawat, Algebraic trigonometric values at rational multipliers of  $\pi$ . Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica, 18(1) (2014) 9–18.
  - [68] R. S. Underwood, On the irrationality of certain trigonometric functions. Amer. Math. Monthly 28 (1921) 374–376.
  - [69] R. S. Underwood, Replies. Amer. Math. Monthly 29 (1922) 255–257.
  - [70] R. S. Underwood, Supplementary note on the irrationality of certain trigonometric functions. Amer. Math. Monthly 29 (1922) 346.
  - [71] J. L. Varona, Rational values of the arccosine function. Cent. Eur. J. Math. 4 (2006) 319–322.
  - [72] G. Vincenzi, A characterization of regular  $n$ -gons whose pairs of diagonals are either congruent or incommensurable. Arch. Math. 115 (2020) 467–477.
  - [73] 喻甫祥, 正多边形的空间实现及其它,《蛙鸣》, 第50–51期(1994) 33.

穿行于荷香与稻香

欢快而热烈

一支又一支唱给盛夏的歌



稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》



叁・蛙聲一片

# 图兰定理与多项式方法

马岳

## 1 图兰定理的过饱和版本

在图论中, 简单图  $G = (V, E)$ , 指的是点集为  $V$ 、边集为  $E \subseteq \binom{V}{2}$  的结构. 若  $E = \binom{V}{2}$  取尽所有可能边, 则称  $G$  为  $|V|$  点完全图, 记作  $K_{|V|}$ . 若另一个图  $H = (V', E')$  在单射意义下满足  $V' \subset V$  且  $E' \subset E$ , 则称  $H$  为  $G = (V, E)$  的一个子图.

现考虑一个  $n$  点简单图  $G$ , 若  $G$  不含  $K_r$  作为其子图, 则  $G$  的边数不会超过  $\frac{r-2}{2(r-1)}n^2$ , 且取到最大边数的图  $G$  只可能是各部点数尽量平衡的完全  $(r-1)$  部图. 这是极值图论领域最经典的奠基性结论——“Turán 定理”, 凡接触过组合、图论课程的同学都应知道.

自 1941 年的 Turán 定理乃至更早的 Mantel 定理 (1907 年, 为 Turán 定理在  $r=3$  时的特例) 开始, 组合研究者越来越关心在  $n$  点图  $G$  中禁止某个子图  $H$  或某个子图族  $\mathcal{H}$  时其边数的上界, 这类问题被统称为 Turán 类问题. 我们用符号  $ex(n, H)$  或  $ex(n, \mathcal{H})$  来标记这个上界, 并称之为 Turán 数.

Turán 类问题一直是极值图论研究的一大主线, 相关的结论不可胜数, 其中一个历史性进展由 Erdős 与 Simonovits 在 1966 年给出:

**定理:** 若  $\chi$  为图族  $\mathcal{H}$  中图的最小点色数, 则  $ex(n, \mathcal{H}) = (1 - \frac{1}{\chi-1})\binom{n}{2} + o(n^2)$ .

**注 1:** 图  $G$  的点色数指的是最小正整数  $k$ ,  $G$  的点集可以被划分为  $k$  份, 每份内部任意两点间无边相连, 此数一般记作  $\chi(G)$ ; 定理中的  $\chi = \min_{G \in \mathcal{H}} \chi(G)$ .

这个结论终结了简单图上 Turán 类问题在色数超过 2 时的渐近界的研究, 只留给后人与二部图、精确界缠斗的空间. 于是, 更多研究者将目光转向了 Turán 类问题的变形与推广.

一个很自然的推广是: 既然无子图  $K_r$  的  $n$  点图  $G$  边数不超过  $ex(n, K_r) \approx \frac{r-2}{2(r-1)}n^2$ , 那么边数超过它的  $n$  点图能有多少子图  $K_r$  呢? 它的下界是多少? 什么样的  $G$  可以取到这个界?

事实上, 为了研究经典的 Turán 类问题, 我们本身就已经积累了一些方法与引理可以对这个问题做出一些粗糙的解答. 例如, 如果  $G$  的边数溢出  $ex(n, K_r)$  的部分达到  $\Omega(n^2)$ , 则子图  $K_r$  的数量便已经可以达到  $\Omega(n^r)$  级别 (注意到:  $K_n$  中也不过只有  $\binom{n}{r} = \Theta(n^r)$  个子图  $K_r$ ).

这是因为, 既然图溢出的边数足以改变主项  $n^2$  的系数, 那么整个图  $G$  相比于  $ex(n, K_r)$  边的图自然是更“稠密”了, 因此存在一个固定的整数  $m$ ,  $G$  有相当数量的 ( $O(n^m)$  级别)  $m$  点子图边数超出了  $ex(m, K_r)$ . 因而, 它们每一个都含有至少一个  $K_r$  作为子图, 而每个这样的  $K_r$  至多含在  $O(n^{m-r})$  个这样的  $m$  点子图中, 因此  $G$  中的  $K_r$  数量便有  $O(n^r)$  个.

以上是著名的“过饱和引理”, 在考虑一些 Turán 类问题的稳定性、临界情况时非常有用. 可惜的是, 过饱和引理只是一个粗放的刻画, 我们仍不知道给定边数的  $n$  点图的子图  $K_r$  数的下界具体是多少, 又是什么样的图取到这个值.

为了研究这个问题, 我们首先得提出一个猜想, 即先猜测这个下界的值. 而要猜测这个值, 我们当然得给出一个取到此值的图 (极图) 的构造.

类比于 Turán 定理, Lovász 与 Simonovits 猜想这个极图很可能是个完全多部图. 若限制在完全多部图上考虑, 通过繁琐但初等的计算可以得出, 这个图应当是其中  $s$  部点数相同, 余

作者: 马岳, 2014 级少年班学院, 邮箱: mymy@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 3 月 11 日来稿, 3 月 24 日修改, 3 月 29 日接受. 稿件编辑: 陈恒宇.

下一部点数较少的完全  $(s+1)$  部图 (实际上, 这相当于在给定  $\sum_{i \in [s]} a_i = n$  与  $\sum_{i < j} a_i a_j = \gamma n^2$  时, 求  $\sum_{i_1 < \dots < i_r} a_{i_1} \dots a_{i_r}$  的下界何时取到). 具体来说, 若限制  $n$  点图  $G$  的边数为  $\gamma n^2 > \frac{r-2}{2(r-1)} n^2$ , 则存在唯一的整数  $s$  与实数  $\alpha \in [0, \frac{1}{s}]$ , 使得  $\gamma = \frac{s}{2(s+1)}(1 - \alpha^2)$ , 此时我们定义  $G$  为  $s$  部点数均为  $(1 + \alpha) \frac{n}{s+1}$ 、仅一部点数为  $(1 - s\alpha) \frac{n}{s+1}$  的完全  $(s+1)$  部图, 则  $G$  边数符合条件. 此时  $G$  的子图  $K_r$  个数为  $\frac{1}{(s+1)^r} \binom{s+1}{r} (1 + \alpha)^{r-1} (1 - (r-1)\alpha) n^r$ .

**猜想:** 对  $r \geq 3$  及  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ , 有  $\gamma n^2$  边的  $n$  点图含有至少

$$\frac{1}{(s+1)^r} \binom{s+1}{r} (1 + \alpha)^{r-1} (1 - (r-1)\alpha) n^r$$

个子图  $K_r$ , 其中整数  $s \geq 1$ ,  $\gamma \in [\frac{s-1}{2s}, \frac{s}{2(s+1)}]$ , 且  $\alpha \in (0, \frac{1}{s}]$  满足  $\gamma = \frac{s}{2(s+1)}(1 - \alpha^2)$ .

这个猜想在 2016 年被 Reiher 完全解决, 他用的主要工具是多项式. 在组合数学中, 当我们提到多项式方法时, 往往指的是线性代数方法的一个分支——我们通过把组合对象对应到多项式上, 以这个多项式的维数、零点等信息得到组合对象的一些界. 然而, 本文所说的多项式方法并不在此列.

## 2 分析色彩的多项式方法

本部分将简述 Reiher 给出的 Lovász-Simonovits 猜想的证明.

$n$  点简单图, 说白了, 就是  $n$  个点及其内蕴的  $\binom{n}{2}$  个点对, 这些点对有的是边, 有的不是. 由此, 我们可以定义一种比图更广的概念——“带权图”. 一个  $n$  点带权图  $\mathcal{G}$ , 指的是一个二元组  $\mathcal{G} = (\vec{x}, a)$ , 其中  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  指代  $n$  个点, 满足  $\forall i \in [n], x_i \geq 0$  且  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ ;  $a$  为映射  $a : \binom{[n]}{2} \rightarrow [0, 1]$  指代边集. 对于  $n$  点图  $G$ , 将  $n$  点带权图的每个点的权  $x_i$  令为  $\frac{1}{n}$ , 使其地位均等, 再将映射  $a$  中所有  $G$  的边  $e$  的像  $a_e$  令为 1, 其余为 0, 则这个带权图就退化到了简单图  $G$  的情况. 因此, 一个结论若在带权图上成立, 自然也就在简单图上有其对应版本.

接着, 我们定义带权图  $\mathcal{G}$  的  $K_r$  密度  $\mathcal{G}(K_r) = \sum_{M \in \binom{[n]}{r}} \prod_{e \in \binom{M}{2}} a_e \prod_{i \in M} x_i$ . 不难看出, 若  $\mathcal{G}$  是退化的简单图, 则  $\mathcal{G}$  中的  $K_r$  数为  $\mathcal{G}(K_r) n^r$ . 因此, 为了推出原猜想, 我们只要通过  $\mathcal{G}(K_2) = \frac{s}{2(s+1)}(1 - \alpha^2)$  推出  $\mathcal{G}(K_r) \geq F_r(\mathcal{G}(K_2)) = \frac{1}{(s+1)^r} \binom{s+1}{r} (1 + \alpha)^{r-1} (1 - (r-1)\alpha)$  即可, 易验证  $F_r$  为函数.

**注 2:** 此式中的  $F_r : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow [0, \frac{1}{r!}]$  为与前一部分的猜想中、描述相适应的函数: 对于给定的  $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$ , 取唯一  $s$  使得  $\gamma \in [\frac{s-1}{2s}, \frac{s}{2(s+1)}]$ , 再确定唯一  $\alpha \in (0, \frac{1}{s}]$  使得  $\gamma = \frac{s}{2(s+1)}(1 - \alpha^2)$ , 令  $F_r(\gamma) = \frac{1}{(s+1)^r} \binom{s+1}{r} (1 + \alpha)^{r-1} (1 - (r-1)\alpha)$ .

通过带权图的定义, 我们表面上仅仅是换了种语言, 把猜想系数后面的  $n^r$  去掉, 实际却已将一个离散的组合问题转化为了一个连续的函数问题, 接下来的问题便只在计算分析函数  $F_r(\gamma)$  了.

**注 3:**  $F_r(\gamma)$  并不是一个完全“好”的函数, 它连续、单调增、在  $[0, \frac{r-2}{2(r-1)}]$  上取值为 0, 但仅仅是逐段可导 (且上凸), 在  $\alpha = 0, \frac{1}{s}$ , 即自变量  $\gamma$  取形如  $\frac{t-1}{2t}$  时并不可导. 在具体证明中, Reiher 也是先证明了一个弱化版本处理掉了这些尖点, 再进一步处理逐段的情况, 具体不赘述.

做好了这些准备工作, 接下来将给出  $\mathcal{G}(K_r) \geq F_r(\mathcal{G}(K_2))$  的证明梗概.

以下考虑反证法并取极端最小反例. 具体而言, 取不符合上述不等式的最小的  $r$  及此  $r$  下最小的  $n$ ; 由  $F_r$  连续, 映射  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(K_r) - F_r(\mathcal{G}(K_2))$  在  $\mathcal{G}$  取遍所有  $n$  点带权图时能取到一个特定最小值, 取达到这个最小值的某带权图为  $\mathcal{G}$ , 令  $\gamma = \mathcal{G}(K_2)$ . 若尖点已由弱化版本处理

完, 则不妨认为  $F_r(\gamma)$  在  $\gamma$  处可导, 故可令  $\lambda = F'_r(\gamma)$ .

对  $\{i_j\}_{j=1}^m \subset [n]$ ,  $q \geq 1$  及  $I = [n] - \{i_j\}_{j=1}^m$ , 令

$$\mathcal{G}_{i_1, \dots, i_m}(K_q) = \sum_{M \in \binom{I}{q}} \prod_{(k, j) \in [m] \times M} a_{i_k j} \prod_{e \in \binom{M}{2}} a_e \prod_{j \in M} x_j.$$

观察可以发现, 若退化到简单图上, 此式实际上刻画的是  $i_1, \dots, i_m$  点的公共邻居中  $K_q$  的数目. 因而  $\mathcal{G}(K_1) = \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j$  就相当于简单图的点度, 而简单图上的握手引理就对应等式  $\sum_{i \in [n]} x_i \mathcal{G}_i(K_1) = 2\mathcal{G}(K_2) = 2\gamma$ . 最漂亮的是, 可以验证,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{G}(K_r) = \mathcal{G}_i(K_{r-1}),$$

其中右式大致相当于刻画了包含点  $i$  的  $K_r$  的个数, 它显然是我们计数  $K_r$  的关键中间量. 有了这个式子, 我们便把微分的工具引入了我们的计算.

注意到  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  是  $\{(y_1, \dots, y_n) \in [0, 1]^n : \sum y_i = 1\}$  的内点 (否则存在  $x_i$  为 0, 但这样我们不妨删掉这个点, 与  $n$  最小性矛盾), 因此我们可以对  $\mathcal{G}(K_r) - F_r(\mathcal{G}(K_2))$  使用拉格朗日乘数法, 得到: 对任意  $i \in [n]$ , 存在固定实数  $\mu$ , 使得,

$$\mathcal{G}_i(K_{r-1}) = \lambda \mathcal{G}_i(K_1) - \mu. \quad (2.1)$$

另外, 类比一元函数极小值点二阶导数  $\geq 0$  的性质, 由扰动法可以证明: 对任意  $\{i, j\} \in \binom{[n]}{2}$ ,

$$a_{ij}(\lambda - \mathcal{G}_{ij}(K_{r-2})) \geq 0. \quad (2.2)$$

至此, 我们已完成了证明的第一步——对组合问题的分析化处理, 将映射  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(K_r) - F_r(\mathcal{G}(K_2))$  的最小性转化为了两个式子.

在第二步中, 我们调用这两个式子, 通过计算, 得到  $\mathcal{G}(K_r)$  的一个递推性的不等式估计.

**引理 1:** 对  $r \geq 3$ ,  $3\lambda \mathcal{G}(K_3) - (r+1)\mathcal{G}(K_{r+1}) \geq (r-1)\mathcal{G}(K_r) - \lambda\gamma + 2\gamma\mu$ .

**注 4:** 引理 1 的计算繁琐而充满技巧, 其大旨是对  $\Omega = \sum_{i \in [n]} x_i \mathcal{G}_i(K_1) \mathcal{G}_i(K_{r-1})$  的算两次估计. 一方面, 由 (2.1),  $\Omega = \lambda \sum_{i \in [n]} x_i \mathcal{G}_i(K_1)^2 - 2\gamma\mu$ ; 另一方面, 使用 (1.2) 及一些基于定义与分类讨论的不等式, 我们可以给出  $\Omega$  的含平方因式 (形如  $x_i^2$ ) 的项和的下界估计, 进而得到  $\Omega$  的一个下界. 比较两式即得此引理.

第三步是对 (2.1) 式中  $\mu$  的估计.

**引理 2:**  $(\frac{s-1}{s})^{r-2} > \frac{s-r+1}{s-1} M^{r-2}$ , 其中  $M$  是满足  $\mu = (\frac{r-2}{s+1})^{r-2} \binom{s+1}{r} (1+\alpha)^{r-1} M$  的实数.

**注 5:**  $M$  是原作者为了计算书写方便额外定义的量. 事实上, 由 (2.1),  $r\mathcal{G}(K_r) = 2\gamma\lambda - \mu$ . 若把此式出现的所有字母翻译回定理描述中的  $s, r, \alpha$  及刚刚定义的  $M$ , 并将其与  $F_r(\mathcal{G}(K_2))$  式对照, 原定理即证  $M \leq 1$  (考虑反证法则  $M > 1$ ). 引理 2 只是它的一个弱化版本, 证明也是纯计算. 其核心是利用本注的前式, 对  $r\mathcal{G}(K_r)$  及  $r-2$  个配凑用的常数使用均值不等式, 得到  $\mathcal{G}(K_r)$  的一个上界估计, 再利用处理尖点时  $\mathcal{G}(K_r)$  的弱化版的下界估计得到结论.

至第四步, 我们须给出  $3\lambda \mathcal{G}(K_3) - (r+1)\mathcal{G}(K_{r+1})$  的一个上界, 期待它与反证假设及第二步给出的引理 1 相矛盾.

既然我们取的是最小反例, 而第二步的计算已充分利用第一步给出的映射  $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(K_r) - F_r(\mathcal{G}(K_2))$  最小性的刻画, 那此处为了得到与第二步不等式相悖的另一个估计, 自然应转而利用  $n$  与  $r$  的最小性, 即考虑归纳证明. 我们考虑  $\mathcal{G}^*$  为  $\mathcal{G}$  删掉点  $n$  后, 其他点权重重新做归一

化处理, 映射  $a$  直接做限制得到的  $n - 1$  点带权图, 即  $\mathcal{G}^* = ((x_1^*, \dots, x_{n-1}^*), a|_{\binom{[n-1]}{2}})$ , 其中对任意  $i \in [n - 1]$ ,  $x_i^* = \frac{a_{in}x_i}{\mathcal{G}_n(K_1)}$ . 由  $r, n$  最小反例性, 这个带权图符合猜想, 故有  $\mathcal{G}^*(K_{r-1}) \geq F_{r-1}(\mathcal{G}^*(K_2))$  及  $\mathcal{G}^*(K_r) \geq F_r(\mathcal{G}^*(K_2))$ . 由  $\mathcal{G}^*$  定义, 易知  $\mathcal{G}^*(K_r) = \frac{\mathcal{G}_n(K_r)}{\mathcal{G}_n(K_1)^r}$ . 故上述两个不等式又可以通过一系列计算转化为关于  $\mathcal{G}(K_{r+1})$  及  $\mathcal{G}(K_3)$  的不等式估计.

最后一步便是计算, 得到后者的归纳法估计与前者引理 1 的估计是矛盾的, 因此证毕.

## 参考文献

- [1] Christian Reiher, The clique density theorem. *Annals of Math*, **184**(2016), 683-707.
- [2] Paul Turán, On an extremal problem in graph theory (in Hungarian). *Mat. Fiz. Lapok*, **48**(1941), 436-452.
- [3] P. Erdős and M. Simonovits, A limit theorem in graph theory, *Studia Sci. Math. Hungar*, **1**(1966), 51-57.

# 同调群与上同调群的几何解释

马骁

## 摘要

对代数拓扑有一定了解的小伙伴们都知道, 代数拓扑中最重要的两个拓扑不变量是同调群和同伦群 (不知道也没关系哦, 不影响下面的阅读), 这里我们主要讨论同调群. 同调群是代数拓扑中的难点, 通常来说同调群被定义为链群的商群, 大部分教材 (比如 Hatcher 的 Algebraic Topology) 都花了大量的篇幅讲述这一定义过程中所需要的代数工具, 但是相关的几何图像却鲜有教材深究. 在这篇文章中, 我们来谈一谈这其中的几何图像.

## 1 本文提要

本文的提纲如下

1. 对于一个流形  $M$  我们可以将它的两个子流形的并集定义为这两个子流形的加法.
2. 对于每个子流形取边界的映射是一个线性映射. 没有边界的子流形称为闭子流形.
3. 我们有一个非常好的方式来定义什么叫做一个子流形可以连续形变到另外一个子流形, 我们称这样的两个子流形等价.
4. 对于一个流形  $M$  它的闭子流形集合商掉上述的等价关系后在上述的加法下构成一个群, 称为同调群.
5. 闭子流形的相交给出一个同调群的乘法结构.
6. 流形与微分形式有一个对偶关系, 这个对偶将可以在微分形式上也定义一个同调群, 称为 De Rham 上同调.

阅读本文需要一点点微分流形和拓扑学的知识, 这些都可以在文末最后一节找到.

## 2 同调群的定义

在这一节中, 我们来讨论提纲中的 (1)–(4).

所谓同调理论, 其实就是关于带边子流形与闭子流形的理论. 在这个理论中, 我们可以像通常的子流形理论一样定义子流形的并集、交集、边界. 我们还会定义子流形的“连续形变”. 接下来我们会看到, 为了使得这些运算满足一定的规则 (加法公理, 线性性), 我们必须稍微修改这些运算的定义.

**带边子流形的加法和边界映射:** 考虑两个带边子流形  $X, Y \subseteq M$ , 我们定义它们的加法为  $X + Y := X \cup Y$ , 边界映射为  $\partial(X + Y) := \partial X + \partial Y$ , 这个定义和通常拓扑学里的定义一样.

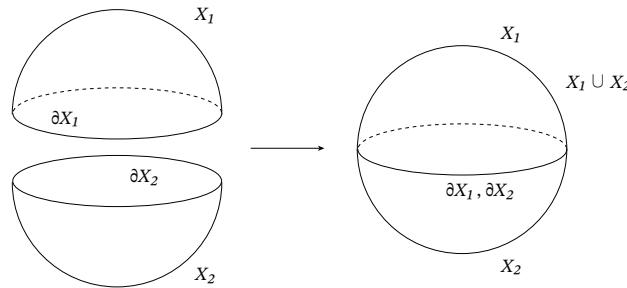
作者: 马骁, 2014 级少年班学院, 邮箱: [xiaom@math.princeton.edu](mailto:xiaom@math.princeton.edu).

稿件信息: 本稿件于 4 月 22 日来稿, 5 月 18 日修改, 5 月 21 日接受. 稿件编辑: 章俊彦.

在集合论里面我们有  $X \cup Y = Y \cup X$ ,  $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ , 所以用  $X + Y := X \cup Y$  定义的加法满足交换律与结合律. 如果  $X, Y$  不相交的话, 我们还有  $\partial(X + Y) = \partial X + \partial Y$ , 所以边界映射很多情况下是线性的.

但是按照这个定义我们发现,  $2X = X + X := X \cup X = X$ , 所以  $2X = X$ , 也就是说“+”根本不是一个加法, 这里我们遇到了一个困难.

另外一个困难如下图所示,



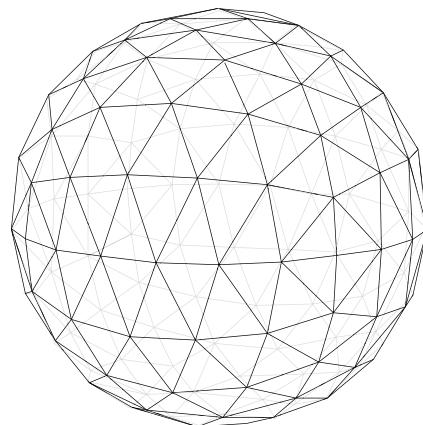
我们知道  $X_1, X_2$  两个半球取并集之后变成一个整球, 没有边界. 但是  $\partial X_1 + \partial X_2 := \partial X_1 \cup \partial X_2 = \partial X_1 \neq 0$ , 这两个边界的并不是空集, 所以我们遇到了另外一个困难.

解决这两个困难的办法是, 定义流形的重数. 对于一个流形  $X$ , 和一个整数  $k$ , 我们定义  $kX$  为  $k$  个  $X$  “摞”在一起但是并不视为相同所得到的流形(这里可以类比多项式的重根). 对于一个流形  $X$ , 我们定义  $-X$  为和  $X$  定向相反但作为集合一样的流形. 之后我们发现上面的两个困难就都被解决了:  $X + X$  这时等于  $2X$  而不是  $X$ .  $X_1, X_2$  的边界定向相反, 所以  $\partial X_1 = -\partial X_2$ , 他们加起来是 0. 之后我们能验证“+”确实定义了一个加法,  $\partial$  关于这个加法是线性的.

**将子流形分解成三角形:** 由以上我们已经可以在所有  $i$  维子流形的集合  $\tilde{C}_i$  上定义加法“+”与边界映射  $\partial_i$ . 但是所有  $i$  维子流形的集合  $\tilde{C}_i$  似乎是一个非常“大”的集合, 这个集合大到我们都很难用代数语言来描述它. 下面我们就来解决这个问题.

对任意维数, 我们都有“三角形”的概念: 一维三角形是线段, 二维三角形是三角形, 三维三角形是三棱锥, 聪明的你一定能想的出高维三角形怎么定义. 我们称任意维数的三角形为 **单形 (simplex)**.

我们知道, 一个单形(三角形)虽然形状很简单, 但如果允许它们取并集, 那最终是可以生成非常复杂的几何形状的, 比如如下图所示它们可以组合成球面.



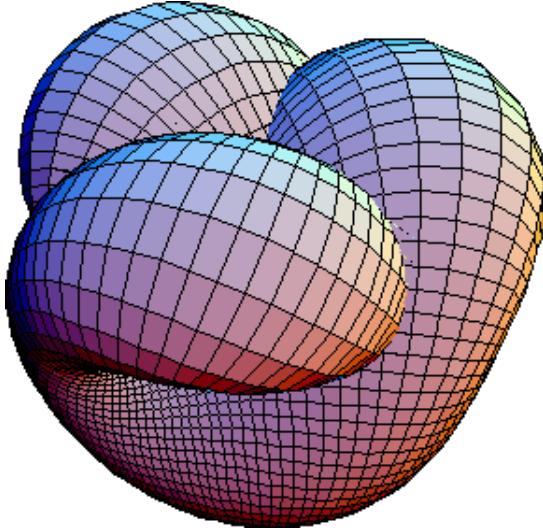
记这些组成球面的单形为  $\tilde{\Delta}_k$ , 那么我们知道  $S^2 = \sum \tilde{\Delta}_k$ . 当然了, 这些组成球面的三角形并不严格是平的, 他们其实是带曲率的, 但是他们离平的三角形很近, 所以存在连续映射  $p_k$

使得  $\tilde{\Delta}_k = p_k(\Delta_k)$ , 这里  $\Delta_k$  是平的三角形. 所以我们最后有  $S^2 = \sum p_k(\Delta_k)$ .

其实不只是可以组合成球面, 三角形们可以组成  $M$  的任意子流形 (只要将该子流形三角剖分即可将它分成一堆单形的并集). 除了光滑子流形以外, 它们也可以组成一些  $M$  的带奇性的子流形.

总之,  $\tilde{C}_i$  里的元素都具有  $\sum p_k(\Delta_k)$  这样的形式. 是不是感觉这样表示后  $\tilde{C}_i$  就小的多了? 事实上, 现在我们已经可以代数地描述  $\tilde{C}_i$  了: 它含于三角形  $p_k(\Delta_k)$  生成的阿贝尔群.

子流形光不光滑对下文没有影响, 所以我们定义  $C_i$  为所有形如  $\sum p_k(\Delta_k)$  的元素的集合, 此时  $\tilde{C}_i$  是  $C_i$  的子群. 它之中的元素可以想成是  $M$  的 (可能带奇点的) 子流形.  $C_i$  称做 链复形. 如下图所示, 三角形构成的流形可能不是光滑的 (下面的图里面的流形是用方形构成的流形, 因为作者实在是找不到合适的图, 方形只要对角切分一下就是三角形).



**为什么希望代数地描述  $\tilde{C}_i$ ?** 我们研究子流形构成的群的最终目标还是希望这个群是个容易计算的拓扑不变量, 从而在拓扑学中找到应用. 单纯地寻找拓扑不变量其实不是一件困难的事, 比如全体子流形的集合就是一个拓扑不变量, 但是这没有意义, 因为集合太大我们找不到好的生成元去表示它. 我们刚才将流形写成三角形的并就是缩小集合所做的第一件事, 后面我们会引入“连续形变”和流形之间的等价性, 商掉等价性后全体子流形的集合就变的足够小, 以至于我们可以计算它.

**链复形的定义:** 之前我们一直考虑光滑子流形, 不过因为光滑性对于代数拓扑没有影响, 所有我们接下来考虑所有由三角形组成的 (可能不光滑的) 流形. 从现在开始, 我们不再考虑光滑子流形集合  $\tilde{C}_i$ , 我们考虑由三角形组成的不光滑的流形的集合  $C_i := \{\sum p_k(\Delta_k) : \Delta_k \text{ 是 } i \text{ 维三角形}\}$ , 这个集合被叫做链复形.

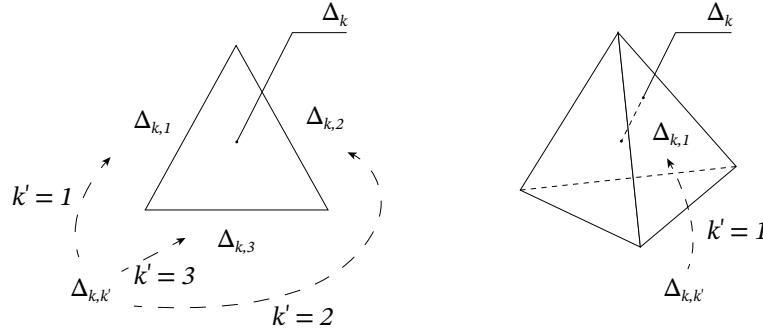
链复形是由三角形生成的自由群, 和光滑子流形集合相比在代数上容易刻画的多. 光滑子流形划分出的那些三角形满足一个性质: 相邻的三角形沿着共同边的切平面相同, 这一性质很难用代数刻画, 而且对于代数拓扑的帮助作用不大.

我们知道对于光滑流形怎么定义它的并集 (加法)、边界, 接下来我们定义由三角形组成的流形的并集 (加法)、边界.

链复形  $C_i$  中的元素都形如  $\sum p_k(\Delta_k)$ . 对于其中的两个元素  $\sum p_k(\Delta_k), \sum p_{k'}(\Delta'_k)$ , 加法被定义为  $(\sum p_k(\Delta_k)) + (\sum p_{k'}(\Delta'_k))$  就是  $(\cup p_k(\Delta_k)) \cup (\cup p_{k'}(\Delta'_k))$ .

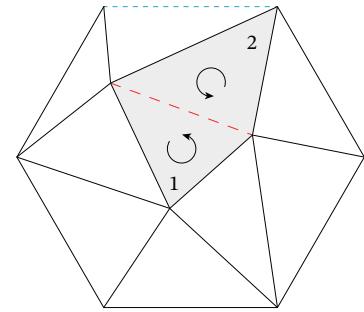
如果我们对于自由群想构造一个线性映射 (自同态), 我们只要对每个生成元构造就可以. 我们将要构造一个边界映射, 对于链复形的一个生成元  $p_k(\Delta_k)$ , 我们对它定义边界映射:

对于  $p_k(\Delta_k)$  如下图所示它的边界是由一些三角形  $\Delta_{k,k'}$  组成的, 我们定义  $p_k(\Delta_k)$  在边界映射下的像为  $\partial(p_k(\Delta_k)) := \sum_{k'} p_k(\Delta_{k,k'})$ .



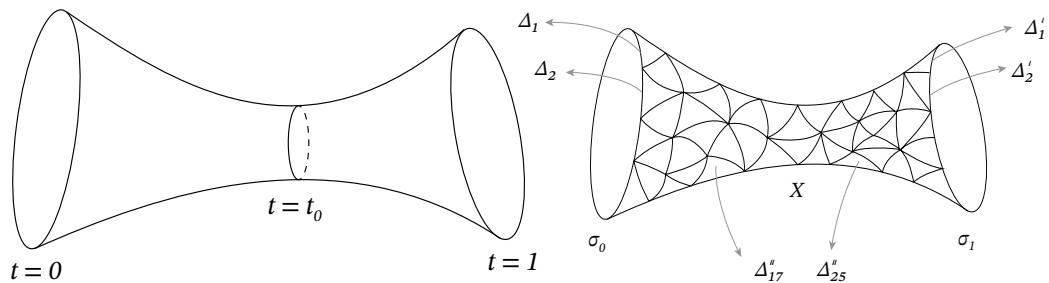
而  $\partial(\sum p_k(\Delta_k))$  被定义为其中每个三角形边界的和:  $\sum \partial(p_k(\Delta_k))$ . 注意因为在这个对边界的求和中有抵消, 这样定义的边界映射和对流形定义的边界是一样的.

如右图所示, 如果  $\partial p_k(\Delta_k)$  中的一条边  $\sigma$  如果没有出现在  $\sum p_k(\Delta_k)$  的边界上, 那么这个边至少是两个  $p_k(\Delta_k), p_{k'}(\Delta_{k'})$  的共同边, 所以在  $\sum \partial(p_k(\Delta_k))$  中  $\sigma$  至少出现了两次, 定向相反, 所以被消掉. 最终在  $\sum \partial p_k(\Delta_k)$  求和后能剩下的边都出现在  $\sum p_k(\Delta_k)$  的边界上. (如下图所示, 长虚线代表的边是一个不出现在边界上的边, 它是标号为 1、2 两个三角形的共同边, 它在求和中被抵消, 但短虚线代表的边是一个出现在边界上的边, 它在求和中不被抵消.)



**定义连续形变——配边:** 我们的目标是研究子流形的拓扑, 而任何拓扑理论都需要指定一种“连续形变”, 所以我们现在来定义这个“连续形变”.

最自然的“连续形变”叫做同伦 (homotopy), 说的是存在关于  $t$  连续的一族子流形  $\sigma_t$ , 使得  $\sigma_0 = \sigma, \sigma_1 = \sigma'$ . 如下左图所示



根据之前的解释, 我们想要把“同伦”这一连续形变概念用三角形之间的代数关系来表示. 我们可以把上左图中的连续曲面族如上右图所示分成三角形,

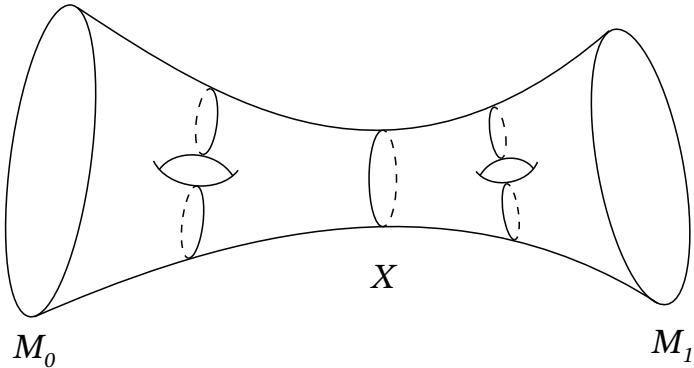
这里我们知道,  $\sigma_0 = \sum \Delta_k, \sigma_1 = \sum \Delta'_k, \cup \sigma_t = \sum \Delta''_k$  (注意  $\Delta''_k$  比  $\Delta_k$  和  $\Delta'_k$  维数要高一维). 所以我们发现存在连续形变  $\sigma_t$  等价于

$$\sigma_0 - \sigma_1 = \partial(\cup \sigma_t) \iff \sum \Delta_k - \sum \Delta'_k = \partial(\sum \Delta''_k).$$

所以用三角形的语言来说,  $\sum \Delta_k$  可以用连续形变变到  $\sum \Delta'_k$  等价于  $\sum \Delta_k - \sum \Delta'_k = \partial(\sum \Delta''_k)$ . 但是仔细想想我们会发现,  $\cup \sigma_t$  这个流形总是需要长成  $[0, 1] \times$  某个子流形 这种样子, 这样样

子的子流形划分出的三角形虽然形如  $\sum \Delta_k''$ , 但可不是所有形如  $\sum \Delta_k''$  的子流形都长  $[0, 1] \times$  某个子流形这种样子. 我们碰到了和之前定义链复形时类似的问题, 形如  $[0, 1] \times$  某个子流形的连续形变不容易用代数刻画, 所以我们不采用这种定义.

更本质的应该是这个等式,  $\sigma_0 - \sigma_1 = \partial(\cup \sigma_t)$ . 因为  $\cup \sigma_t$  并不本质, 我们考虑更一般的等式:  $\sigma_0 - \sigma_1 = \partial(\sum \Delta_k'')$ . 由这个等式我们就引出了一种新的连续形变的定义——配边 (Cobordism), 这种连续形变的定义是:  $\sigma$  和  $\sigma'$  是可配边的当且仅当存在由三角形构成的子流形  $X = \sum \Delta_k''$  使得  $\partial X = \sigma \cup \sigma'$ , 此时有  $\sigma_0 - \sigma_1 = \partial X$ . 为了搞清配边和同伦有什么区别, 我们来看如下图所示的一个例子.



如上图所示  $M_0$  和  $M_1$  是可配边的, 其实刚才同伦的图中  $t = 0$  和  $t = 1$  的两个子流形也是可配边的 (同伦的那族曲面  $\sigma_t$  划过一个流形, 这个流形可以当成配边定义中的流形  $X$ ), 所以其实同伦是一种特殊的配边. 但如上图所示, 配边的流形  $X$  可以出现洞, 可以出现流形的奇怪的缠绕. 配边对中间划过的流形  $X$  比同伦要求更少, 它不一定能被一个参数  $t$  参数化, 但总之它还是一种连续形变.

**同调群的定义:** 有了以上的介绍之后我们终于可以给出同调群的定义了. 几何地来说, 同调群就是所有的闭子流形的集合, 而且在这个集合中还定义了一个等价关系: 如果  $\sigma$  可以连续形变到  $\sigma'$  (它们可配边) 那么我们把它们看成一样的.

先说什么是闭子流形, 如果一个子流形  $\sigma$  没有边界, 那么它就是闭子流形, 我们考虑的流形都是三角形的线性组合  $\sum \Delta_k$ , 所有这等价于  $\partial\sigma = \partial(\sum \Delta_k) = 0$ . 所以所有闭子流形的集合就是  $\text{Ker } \partial$ . 考虑所有  $i$  维子流形集合  $C_i$ , 记  $\partial_i$  为  $\partial$  限制到  $C_i$  上得到的映射. 所以  $\text{Ker } \partial_i$  代表所有  $i$  维闭子流形.

闭子流形  $\sigma_0$  可以连续形变到  $\sigma_1$  当且仅当,  $\sigma_0 - \sigma_1 = \partial X \in \text{Im } \partial$ , 也即  $\sigma_0 - \sigma_1 \in \text{Im } \partial$ . 因为  $\sigma_0, \sigma_1$  维数是  $i$ , 所以  $X$  维数是  $i+1$ , 所以  $\sigma_0 - \sigma_1 \in \text{Im } \partial_{i+1}$ .

所以, 同调群就是所有  $i$  维闭子流形集合  $\text{Ker } \partial_i$  商掉等价关系  $\sigma_0 \sim \sigma_1 \iff \sigma_0 - \sigma_1 \in \text{Im } \partial_{i+1}$ . 在群论里面我们知道商掉等价关系得到的集合是商群  $\text{Ker } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}$ , 因此同调群的定义就是:

$$H_i = \text{Ker } \partial_i / \text{Im } \partial_{i+1}$$

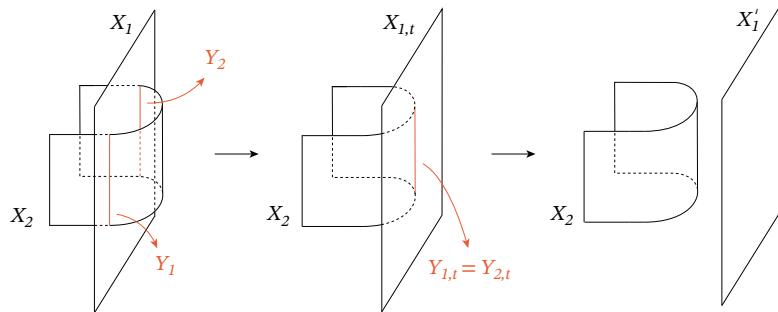
### 3 相交理论

在这一节中, 我们来讨论提纲中的 (5)(6).

**子流形的相交:** 以上同调群的定义中我们主要考虑子流形之间的并与子流形的边界, 这

定义了其中的加法结构与边界映射. 但其实我们还可以考虑子流形之间的相交, 这给同调群定义了一个更强的结构——乘法, 并将同调群变成一个环.

如果简单地考虑子流形作为集合的相交还是会出问题的, 如下图所示  $X_1$  可以连续形变到  $X'_1$  但  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$  而  $X'_1 \cap X_2 = \emptyset$



解决这个问题的方法非常简单, 我们给交集的两个分支  $Y_1, Y_2$  各自赋予一个定向, 这种赋予方式应该让这两个流形的定向相反. 如上图所示, 在  $X_1$  连续形变到  $X'_1$  的过程中, 必然存在一个临界时刻, 两个分支此时重合, 所以  $Y_1$  可以连续形变到  $Y_2$ , 所以  $Y_1 = Y_2$ , 因为它们定向相反, 所以  $X_1 \cap X_2 = Y_1 - Y_2 = 0 = X'_1 \cap X_2$  (减号是考虑到定向). 以上涉及的关于相交、定向的具体定义就不说了, 这个涉及到横截相交 (transversality) 的概念, 只需要知道, 如果  $X, X'$  都是光滑子流形并且它们的相对位置满足一定条件 (它们互相横截) 并且赋予正确的定向, 这个“相交”就是  $X, X'$  的交集.

它在  $H_*(M)$  中定义了乘法结构. 交换律是因为  $X \cdot X' = X \cap X' = X' \cap X = X' \cdot X$ , 结合律证明一样, 分配律是因为  $(X + X') \cdot X'' = (X \cup X') \cap X'' = (X \cap X'') \cup (X' \cap X'') = X \cdot X'' + X' \cdot X''$  定义  $M$  自己是单位元 (注意到对任意  $X, M \cap X = X$ ),  $H_*(M)$  就是一个环.

以上定义的环有两个问题, 第一, 指标不太对, 若  $X \in H_i, X' \in H_j$ , 则  $X \times X' \in H_{i+j-n}$  (这是因为  $i$  维流形交  $j$  维流形是  $i + j - n$  维流形), 因为  $i + j - n < i, j$ , 所以越乘积次数越小, 这样的话  $H_*(M)$  很难能和多项式环建立同构关系, 所以这个环不好表示. 第二, 不像边界映射那样, 我们没法合理地在链复形里定义两个三角形的相交, 因为两个三角形的交不见得还是个三角形. 解决这两个问题的办法就是考虑上同调与 cup product, 这里我们就不详细介绍这些定义了, 有兴趣的小伙伴可以参看 Hatcher 的代数拓扑书的第三章.

**De Rham 上同调群:** 在微分流形课上我们学习了微分形式的概念, 两个微分形式  $\alpha, \beta$  可以相加, 我们还学习了外微分算子  $d$ , 学习了怎么在子流形上对外微分形式积分. 特别地, 我们学习了 Stokes 公式:  $\int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega$ .

在子流形上积分其实告诉我们了一件不平凡的事情: 每一个外微分形式实际上定义了一个子流形集合上的线性函数: 给定一个外微分形式  $\omega$  与子流形  $X$ , 定义  $F(X) := \langle \omega, X \rangle := \int_X \omega$ .

在线性代数里我们知道,  $\partial$  的对偶映射  $\partial^*$  的定义为  $\partial^* F(X) := F(\partial X)$ , 所以  $\langle \partial^* \omega, X \rangle = \partial^* F(X) = F(\partial X) = \langle \omega, \partial X \rangle = \int_{\partial X} \omega = \int_X d\omega = \langle d\omega, X \rangle$  (最后一步是 Stokes 公式). 所以实际上我们得到  $\langle \partial^* \omega, \cdot \rangle = \langle d\omega, \cdot \rangle$ , 因此我们有  $\partial^* = d$ , 也就是说  $d$  是  $\partial$  的对偶算子.

既然  $d$  是  $\partial$  的对偶算子, 而且关于  $\partial$  我们已经成功地定义了同调群, 那么我们自然地想, 是不是关于  $d$  我们也可以定义一个同调群呢. 事实证明这个确实是可能的, 以这种方式定义的同调群称为 De Rham 上同调群.

具体定义很简单: 我们定义  $C^i$  为所有  $i$  阶微分形式构成的加法群,  $d^i : C^i \rightarrow C^{i+1}$  是  $d$  限制到  $C^i$  得到的算子, 最后 De Rham 上同调群定义为  $H_{DR}^i := \text{Ker } d_i / \text{Im } d_{i-1}$ . 在 De Rham 上

同调群中，乘积可以自然地定义成外微分形式的外积。

可以证明，De Rham 上同调群和我们上面定义的同调群之间有一个环同构，并且 De Rham 上同调群的乘积环没有越乘积次数越小的问题。

## 4 微分流形的基本概念

想要深入理解本文的小伙伴需要了解微分流形中的一些基本概念：流形、子流形、边界、定向。

流形的概念非常简单，1 维流形就是曲线，2 维流形就是曲面，高维流形是曲线曲面的高维类比。

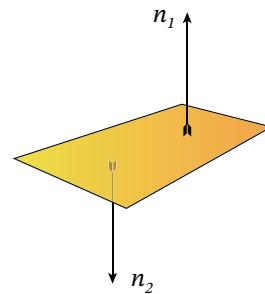
一个流形  $N$  是  $M$  的子流形基本上是说， $N \subseteq M$ 。

如果流形  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  是  $\mathbb{R}^N$  中闭集，那么  $M$  的边界  $\partial M$  就是  $M$  在拓扑学意义上的边界。

定向这一概念有点复杂，我们以  $\mathbb{R}^3$  中的曲面为例解释。比如右图这个带边子流形  $M$ ，它的法向量有两种选择，分别代表了曲面的两侧。我们有时候会把法向量是  $n_1$  的  $M$  和法向量是  $n_2$  的  $M$  想成是不同的流形，我们称这两个流形定向相反。

对于不是曲面的流形来说，我们需要法向量、切空间一类概念的高维推广——法丛、切丛，有了这些概念以后定向就可以类似地定义了。

对于不光滑的带边流形，比如文中用到的三角形，定向的定义是相同的，我们也可以用法向量（法丛）来定义定向。



## 5 延伸阅读

更多的内容，同学们可以阅读 R. Bott, Loring W. Tu 所著的《代数拓扑中的微分形式》(GTM82)。当然这本书的讲法和本文并不一样，同学们可以思考一下为什么两种讲法是等价的（这种等价并不是平凡的）。同学们还可以阅读 David Eisenbud 所著的“Intersection Theory in Algebraic Geometry”。

# 流体自由边界问题 (一)

## ——理想流体与水波

章俊彦

### 摘要

本文将简述流体偏微分方程自由边界问题的主要进展、研究方法与未解决的问题。文中考虑的流体均为二维或三维的无粘性流体。我们首先介绍流体自由边界问题的基本设定。此后，我们按照不可压无旋流体 → 不可压带旋流体 → 可压流体的顺序依次介绍主要结果，分析方程结构，简述局部与整体适定性的证明思路，并指出本质困难与精妙观察所在。

### 1 欧拉方程自由边界问题的数学设定

小到身边不起眼的水珠，大到浩瀚无尽的海洋，流体的运动在现实生活中处处可见。物理上，人们用欧拉方程和 Navier-Stokes 方程来分别刻画无粘性流体和带粘性流体的运动。设  $u$  为流体的速度场， $\nabla p$  为流体的压力， $\rho$  为流体的密度，并定义物质导数为  $D_t := \partial_t + u \cdot \nabla$ ，则上述方程可以写为

$$\rho D_t u - \nu \left( \Delta u + \frac{1}{3} \nabla \operatorname{div} u \right) = -\nabla p + \text{外力}, \quad D_t \rho + \rho \operatorname{div} u = 0.$$

这里  $\nu \geq 0$  为粘性系数，当  $\nu = 0$  时为欧拉方程，否则为 Navier-Stokes 方程。这里，我们暂且将  $D_t$  视作时间导数（后面会用拉格朗日坐标系解释原因）。例如  $\nu = 0$  的情况，左边为  $\rho D_t u$ ，可以视作体积为 1、密度为  $\rho$  的流体的质量 ( $\rho \cdot 1$ ) 乘以加速度  $D_t u$ ，而右边则为该流体所受的合外力。而第二个方程则是我们在数学分析里就学过的连续性方程。所以说，这个方程组实际上是动量守恒（或者牛顿第二定律）和质量守恒的数学表示。

下面我们来严格叙述数学上如何定义流体偏微分方程的自由边界问题。设  $\mathcal{D}_t$  为  $t$  时刻流体占据的区域（本文默认  $\mathcal{D}_t$  为单连通的区域）， $\mathcal{D} := \cup_{0 \leq t \leq T} \{t\} \times \mathcal{D}_t$  为时空区域。注意，流体区域本身也是一个未知量！那么欧拉方程的自由边界问题可以用如下方程组描述：

$$\begin{cases} \rho D_t u = -\nabla p + \text{外力} & \text{in } \mathcal{D}, \\ D_t \rho + \rho \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathcal{D}. \end{cases} \quad (1.1)$$

#### 1.1 方程的边界条件与其它限制

注意到，我们有  $u, p, \rho, \mathcal{D}$  这四个未知量（暂且假设外力是给定的），那么需要四个独立的方程才能给该问题定解。在此，我们还需引进定义：若  $\rho$  为常数（本文中该情况均假设  $\rho = 1$ ），则称该流体是不可压缩的（incompressible），否则称流体是可压缩的（compressible）。

作者：章俊彦，2013 级数学科学学院，邮箱：yx3x@mail.ustc.edu.cn。

稿件信息：本稿件于 3 月 27 日来稿，4 月 14 日修改，4 月 15 日接受。稿件编辑：邵锋。

当流体是不可压缩的时候,  $\rho = 1$ , 上述方程简化为

$$\begin{cases} D_t u = -\nabla p + \text{外力} & \text{in } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathcal{D}. \end{cases} \quad (1.2)$$

当流体是可压缩的时候, 我们还需要状态方程将  $p$  和  $\rho$  联系起来. 本文考虑的情况均为等熵 (isentropic) 流体<sup>1</sup>, 此时压力  $p := p(\rho)$  是  $\rho$  的严格递增函数, 一般地, 可以假设  $p(\rho) = A\rho^\gamma - B$ .  $c^2 := p'(\rho)$  称作声速<sup>2</sup>, 其反映的是流体的可压程度: 声速越高, 流体的可压程度就越轻微. 一般来说, 我们设定声速的倒数  $\rho'(p)$  及其高阶导数均是一致有界的 (甚至可以是很小的).

至此, 我们还需要一个方程才能定解这个问题, 该方程被称作运动学 (kinematic) 边界条件

$$\operatorname{Velocity}(\partial\mathcal{D}_t) = u \cdot n \quad \text{on } \partial\mathcal{D}_t,$$

这里  $n$  是  $\partial\mathcal{D}_t$  的单位外法向量. 这个条件是流体自由边界问题的定义, 它可以被等价地写作  $D_t \in \mathcal{T}(\partial\mathcal{D})$  或者  $(1, u) // \partial\mathcal{D}$ , 即  $D_t$  限制在时空区域的边界上是切向导数.

最后, 我们还需要给出边界条件<sup>3</sup>, 对应到物理上则是压力平衡条件<sup>4</sup>该边界条件为

$$p_{\text{总}} = \sigma H \quad \text{on } \partial\mathcal{D}_t.$$

其中  $\sigma \geq 0$  为表面张力系数,  $H$  为自由边界  $\partial\mathcal{D}_t$  的平均曲率,  $p_{\text{总}}$  为总压力 (外力部分可能包含压力).

注. 若  $\sigma = 0$ , 我们还需要 Rayleigh-Taylor 符号条件  $-\nabla_n p_{\text{总}} \geq c_0 > 0$  才能保证问题是适定的. 若该条件不满足, Ebin [21] 给出了使得方程不适定 (ill-posedness) 的反例. 物理上来看, Rayleigh-Taylor 符号条件表明流体内部的压力大于边界上的压力. 若该条件不成立, 则可以视作流体自发地将外部真空往里面挤从而产生气泡. 数学上, 这个额外的条件并不会导致方程组边界条件超定, 这实际上只需对初值假设成立即可<sup>5</sup>.

至此, 我们可以完整地写出欧拉方程自由边界问题的严格数学表述

- 不可压方程

$$\begin{cases} D_t u = -\nabla p + \text{外力} & \text{in } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathcal{D}, \\ \operatorname{Velocity}(\partial\mathcal{D}_t) = u \cdot n & \text{on } \partial\mathcal{D}, \\ p_{\text{总}} = \sigma H \ (\sigma > 0) & \text{on } \partial\mathcal{D}, \\ p_{\text{总}} = 0 \text{ 且 } -\nabla_n p_{\text{总}} \geq c_0 > 0 & \text{on } \partial\mathcal{D}, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>一般情况还要引入物理量“熵 (entropy)”  $S$ , 满足方程  $D_t S = 0$ , 状态方程为  $p = p(\rho, S)$  且  $\partial_\rho p > 0$ . 例如  $p = (A\rho^\gamma - B)e^{c/S}$ .

<sup>2</sup>可压流体中存在声波.

<sup>3</sup>结合方程和边界条件, 我们可以证明外力为 0 时方程具有守恒的  $L^2$ -能量.

<sup>4</sup>本文中若不加额外说明, 我们假设流体外部区域是真空.

<sup>5</sup>若考虑局部适定性, 则可以用 Morrey 嵌入证明  $-\nabla_n p_{\text{总}}$  是关于  $t, x$  的 Hölder 连续函数, 从而短时间可以演化. 对长时间的情况, 该条件不一定能一直成立, 需要视模型而论.

- 可压方程

$$\begin{cases} \rho D_t u = -\nabla p + \text{外力} & \text{in } \mathcal{D}, \\ D_t \rho + \rho \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathcal{D}, \\ p = p(\rho) \text{ 严格递增} & \text{in } \mathcal{D}, \\ \text{Velocity}(\partial \mathcal{D}_t) = u \cdot n & \text{on } \partial \mathcal{D}, \\ p_{\text{总}} = \sigma H \ (\sigma > 0) & \text{on } \partial \mathcal{D}, \\ p_{\text{总}} = 0 \text{ 且 } -\nabla_n p_{\text{总}} \geq c_0 > 0 & \text{on } \partial \mathcal{D}. \\ (u, p)|_{t=0} = (u_0, p_0). \end{cases} \quad (1.4)$$

注. 对不可压方程而言,  $p$  的初值  $p_0$  是完全被  $u_0$  决定的, 所以不需要事先给定. 对(1.3)的第一个方程求散度, 并代入  $\operatorname{div} u = 0$ , 限制在  $t = 0$  上可以得到  $p_0$  的椭圆方程

$$-\Delta p = \partial_i u_0^j \partial_j u_0^i + \dots,$$

再结合 Dirichlet 边界条件  $p = 0$ (无表面张力情况) 或 Young-Laplace 边界条件(有表面张力的情况) 即可定解. 但对可压方程,  $p$ (或者  $\rho$ ) 的初值是要事先给定的. 需要注意, 并不是任何 Sobolev 函数  $(u_0, p_0)$  都可以作为欧拉方程的初值. 对(1.4)第一个方程求散度, 即可得到一个波动方程

$$\rho'(p) D_t^2 p - \Delta p = \partial_i u^j \partial_j u^i + \dots.$$

而波动方程的初值需要满足相容性条件. 对可压欧拉方程而言 ( $\sigma = 0$ , 无外力的情况), 由于  $p|_{\partial \mathcal{D}} = 0$  以及  $D_t|_{\partial \mathcal{D}}$  是切向导数, 我们知道(1.4)第二个方程限制到边界上可以推出  $\operatorname{div} u|_{\partial \mathcal{D}} = 0$ , 这就要求我们的初值满足  $p_0|_{\partial \mathcal{D}_0} = \operatorname{div} u_0|_{\partial \mathcal{D}_0} = 0$ . 一般地, 对  $m \in \mathbb{N}^*$ , 我们定义  $m$  阶相容性条件为  $D_t^k p|_{\partial \mathcal{D}_0} = 0, \forall 0 \leq k \leq m$ . 具体可以参见 [37] 的初值构造部分.

本文中, 我们假定  $\rho$  是大于 0 的(即, 我们刻画的流体都是液体, 而非气体). 我们主要讨论外力为 0 的情况和外力为重力  $-\rho g e_d$  ( $d = 2, 3$ ) 的情况, 前者描述的是理想流体的运动, 后者则被称作**重力水波**. 当然, 研究后者的时候, 我们通常假设流体占据的区域是近似于半空间  $\mathbb{R}^{d-1} \times (-\infty, 0)$  的情况(想象成海洋模型).

注. 若考虑的是水波模型, 我们要求方程具有局部化的初值, 即在  $|x| \rightarrow \infty$  时有  $\rho \rightarrow 1, |u| \rightarrow 0$ (及其时间导数等等). 这是因为区域  $\mathbb{R}^{d-1} \times (-\infty, 0)$  是无界的. 此时, 水波模型在没有表面张力的情况下是不能忽略重力项的:

$$-\nabla_n p \approx x_n \cdot n + n \cdot g e_d,$$

而  $v_t = x_n$  在无穷远处衰减到 0. 若没有最后那项重力的贡献, 该式就会和 Rayleigh-Taylor 条件矛盾.<sup>1</sup>

## 2 不可压缩无旋流体: 边界运动决定内部、色散结构与整体解

在上个世纪 70-80 年代, 有少量关于不可压水波方程的研究, 例如 Nalimov [44], Kano-Nishida [30], Yoshihara [58] 等等工作, 证明的是例如“小初值局部适定性”, 或者“解析初

<sup>1</sup>具体讨论可以参见郭似珏 [53] 和罗辰昀 [39].

值的适定性”，而且具有无旋假设<sup>1</sup>. 但对一般的 Sobolev 初边值问题，其局部适定性理论在当时是困难重重的.

## 2.1 开山之作：邬似珏的复分析方法与拟线性化技巧

1997 年-1999 年，僵局终于被打破. 华人数学家邬似珏教授的论文 [53, 54] 横空出世. 她证明了二维、三维不可压无旋水波方程(无表面张力情况) 对一般 Sobolev 初值的局部适定性，这被视作自由边界欧拉方程的研究的首个重大突破. 虽然文章计算非常复杂，但是她的方法却是非常自然的.

**边界决定内部**

以 2 维水波为例，我们把二维空间视作复平面，自由边界设作一个函数图像  $\partial\mathcal{D}_t : z = z(\alpha, t)$ ，其中  $\alpha \in \mathbb{R}$  是参数<sup>2</sup>. 则  $z_t = u(z(\alpha, t), t)$  是流体在界面上的运动速度，再求时间导数，就得到了加速度  $z_{tt} = u_t + (u \cdot \nabla)u(z(\alpha, t), t)$ . 另一方面，注意到  $p$  及其切向导数在边界上为 0 说明  $\nabla p \perp \partial\mathcal{D}_t$  恒成立，于是我们有  $\nabla p = -i\alpha z_\alpha$ ，其中  $\alpha = -\frac{1}{|z_\alpha|} \nabla_n p$ ， $i$  为虚数单位. 二者联立，我们得到了边界运动方程

$$z_{tt} + i = i\alpha z_\alpha. \quad (2.1)$$

注意到，我们在导出(2.1)的过程中已经用到了  $\operatorname{div} u = 0, \operatorname{curl} u = \mathbf{0}$  以外的所有条件. 而这两个条件恰好可以让我们用边界完全决定内部的方程：它们可以推出  $\bar{u}$ (即  $u$  的复共轭) 在内部  $\mathcal{D}_t$  中是全纯函数<sup>3</sup>！这样，不可压 + 无旋条件就化作“ $\bar{z}_t$  是  $\mathcal{D}_t$  中全纯函数的边值”，即它的 Hilbert 变换等于它自身.

**引理 2.1.** 设  $\Omega \subset \mathbb{C}$  是单连通域且具有顺时针定向的边界  $\Sigma : z = z(\alpha)$ . 定义 Hilbert 变换如下：

$$\mathfrak{H}f(\alpha) := \frac{1}{\pi i} P.V. \int \frac{z_\beta(\beta)}{z(\alpha) - z(\beta)} f(\beta) d\beta.$$

设  $g \in L^p(\Sigma)$ ,  $1 < p < \infty$ . 则

- (1)  $g$  是  $\Omega$  中全纯函数  $G(z)$  的边值 (要求  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} G(z) = 0$ )，当且仅当  $g = \mathfrak{H}g$ .
- (2)  $P_H g := \frac{1}{2}(I + \mathfrak{H})g$  是  $\Omega$  中全纯函数  $\mathfrak{G}(z)$  的边值，且  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} \mathfrak{G}(z) = 0$ .
- (3)  $\mathfrak{H}1 = 0$ ,  $\mathfrak{H}^2 = I$ .

这样，我们可以用如下定义在自由边界上的方程组来等价地刻画二维不可压无旋水波

$$\begin{cases} z_{tt} + i = i\alpha z_\alpha & \text{on } \partial\mathcal{D}_t, \\ \bar{z}_t = \mathfrak{H}\bar{z}_t & \text{on } \partial\mathcal{D}_t. \end{cases} \quad (2.2)$$

### 黎曼映射定理

(2.2)是一个完全非线性的方程组. 为了证明适定性以及挖掘其结构，我们需要将这个方程组进一步化简：再求一阶时间导数，可将方程组进行拟线性化. 另一方面，在自由区域上，Hilbert 变换是非线性、非局部地依赖于自由边界. 而复分析的工具使得我们可以用黎曼映射定理将水波区域拉直为半空间. 在半空间内，Hilbert 变换的积分核是  $1/\alpha'$ ，方便计算，且不依赖于自由边界.

设  $\Phi(\cdot, t) : \mathcal{D}_t \rightarrow P_-$  是从  $\mathcal{D}_t$  到下半平面  $P_-$  的黎曼映射，其满足  $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi_z(z, t) = 1$ . 令

<sup>1</sup>对欧拉方程组(外力为 0 或为常值的情况下)的第一个方程两边求旋度，即可证明  $D_t(\operatorname{curl} u) = 0$ . 从而只要初值旋度为 0，解的旋度就一直是 0. 所以无旋假设仅是对初值的限制，并不会导致方程组是超定的.

<sup>2</sup>可以视作初始时刻参数为  $\alpha$  的液滴在  $t$  时刻运动到了  $z(\alpha, t)$  这个地方.

<sup>3</sup>邬似珏教授的文章使用的是复分析的方法. 若直接在  $\mathbb{R}^2$  里面考虑，则  $\operatorname{curl} u = 0$  推出  $u$  可以写作向量势  $u = \nabla\varphi$ ，代入  $\operatorname{div} u = 0$  可得  $\Delta\varphi = 0$ ，而调和函数在内部的取值完全由边值决定.

$h(\alpha, t) := \Phi(z(\alpha, t), t)$ , 则  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  是同胚, 其逆映射定义为  $h(h^{-1}(\alpha', t), t) = \alpha'$ ,  $\alpha' \in \mathbb{R}$ . 记  $Z := z \circ h^{-1}$ ,  $Z_t := z_t \circ h^{-1}$ ,  $Z_{tt} := z_{tt} \circ h^{-1}$  为参数  $\alpha'$  下的  $z, z_t, z_{tt}$ . 则  $\Phi^{-1}(\alpha', t) = Z(\alpha', t)$ . 注意到  $\bar{u} \circ \Phi^{-1} = \bar{Z}_t(\alpha', t)$  是下半平面的全纯函数的边值. 这样, 方程组(2.2)可以在复合黎曼映射之后被写成

$$Z_{tt} + i = i\mathfrak{A}Z_{\alpha'}, \quad \bar{Z}_t = \mathbb{H}\bar{Z}_t \quad \text{on } \partial P_-.$$
 (2.3)

这里  $\mathfrak{A} \circ h = ah_\alpha$ ,  $\mathbb{H}$  为半平面内的 Hilbert 变换, 定义如下 (注意该定义不再依赖自由边界)

$$\mathbb{H}f(\alpha') = \frac{1}{\pi i} P.V. \int \frac{f(\beta')}{\alpha' - \beta'} d\beta'.$$

下面求一阶时间导数, 方程组就可以被拟线性化<sup>1</sup>. 首先, (2.2)求时间导数可得

$$\bar{z}_{ttt} + i\mathfrak{a}\bar{z}_{t\alpha} = -i\mathfrak{a}_t\bar{z}_\alpha = \frac{\mathfrak{a}_t}{\mathfrak{a}}(\bar{z}_{tt} - i),$$
 (2.4)

这样, 在复合黎曼映射之后, 方程组(2.3)就变成

$$\bar{Z}_{ttt} + i\mathfrak{A}\bar{Z}_{t\alpha'} = \frac{\mathfrak{a}_t}{\mathfrak{a}} \circ h^{-1}(\bar{Z}_{tt} - i), \quad \bar{Z}_t = \mathbb{H}\bar{Z}_t \quad \text{on } \partial P_-.$$
 (2.5)

### 拟线性化

那么, 如何证明方程组(2.3)的确是一个关于变量  $\bar{Z}_t$  的拟线性方程呢? 这需要我们证明右边是低阶项. 回忆引理 2.1, 我们知道  $g$  作为全纯函数的边值当且仅当  $(I - \mathbb{H})g = 0$ , 对这样的  $g$  我们有  $(I - \mathbb{H})(fg) = [f, \mathbb{H}]g$ . 所以我们可以在方程两边作用以  $I - \mathbb{H}$ , 将各项尽可能化为 0 或交换子, 而 Hilbert 变换的交换子是低阶项, 具有非常好的估计. 更进一步, 对  $\partial \mathcal{D}_t$  上任一函数  $g$ ,  $(I - \mathfrak{H})g$  这个量刻画了  $g$  有多么“不全纯”: 若这个量为 0, 则  $g$  是全纯函数的边值; 若这个量可以写作 Hilbert 变换的交换子, 则称  $g$  是几乎全纯的. 实际上, 我们可以算出  $(I - \mathfrak{H})\bar{z}_t = 0$  以及  $(I - \mathfrak{H})(\bar{z}_{ttt} + i\mathfrak{a}\bar{z}_{t\alpha}) = [\partial_t^2 + i\mathfrak{a}\partial_\alpha, \mathfrak{H}]\bar{z}_t$ , 正是这样的恒等式让我们断言方程右边必是几乎全纯的, 剩下要做的就是把方程右边在  $(I - \mathfrak{H})$  作用下写成交换子的形式. 下面我们计算  $\mathfrak{A}$  这个量并由此从方程直接推出 Rayleigh-Taylor 符号条件<sup>2</sup>.

首先,  $\mathfrak{A}$  和  $-\nabla_n p$  是密切相关的, 根据定义我们有  $\mathfrak{A} \circ h = ah_\alpha$ , 这样就有

$$-\nabla_n p|_{z=z(\alpha,t)} = (\mathfrak{A}|Z_\alpha|) \circ h.$$
 (2.6)

这样的话, 我们只需要计算  $\mathfrak{A}$  就可以计算 Taylor sign. 对(2.3)第一个方程求复共轭并乘以  $Z_{\alpha'}$ , 得到

$$Z_{\alpha'}(\bar{Z}_{tt} - i) = -i\mathfrak{A}|Z_{\alpha'}|^2 =: -iA_1.$$
 (2.7)

上式的左边是几乎全纯的. 首先,  $Z_{\alpha'}$  是全纯函数  $(\Phi^{-1})_z$  的边值. 其次, 我们证明  $\bar{z}_{tt}$  是几乎全纯的. 作出这个预判是基于  $\bar{z}_t$  在边界上自身是全纯函数的边值, 于是我们可以用链式法则求一阶时间导数来完成证明. 令  $F = \bar{u}$ , 则  $F$  在  $\mathcal{D}_t$  内是全纯函数,  $\bar{z}_t = F(z(\alpha, t), t)$ , 于是

$$\bar{z}_{tt} = F_t(z(\alpha, t), t) + F_z(z(\alpha, t), t)z_t(\alpha, t), \quad \bar{z}_{t\alpha} = F_z(z(\alpha, t), t)z_\alpha(\alpha, t),$$

<sup>1</sup> 这里是指, 求了时间导数之后, 我们可以看见方程右边均为低阶项. 这些验证均可以用 Hilbert 变换自身的性质来完成.

<sup>2</sup> 当然, 这里需要额外假设初值满足这个条件.

进而有  $\bar{z}_{tt} = F_t \circ z + \frac{\bar{z}_{t\alpha}}{z_\alpha} z_t$ . 该式与黎曼映射复合, 再减去  $-i$ , 两边乘以  $Z_{\alpha'}$  便有

$$Z_{\alpha'}(\bar{Z}_{tt} - i) = Z_{\alpha'}F_t \circ Z + Z_t\bar{Z}_{t\alpha'} - iZ_{\alpha'} = -iA_1. \quad (2.8)$$

下面来验证其几乎全纯性, 两边作用  $I-\mathbb{H}$ . 注意到  $F_t \circ Z$  是全纯函数  $F_t \circ \Phi^{-1}$  的边值 (回忆  $\Phi^{-1}(\alpha', t) = Z(\alpha', t)$ ), 这样  $(I-\mathbb{H})(Z_{\alpha'}F_t \circ Z) = 0$ ,  $(I-\mathbb{H})Z_{\alpha'} = 1$ , 从而  $-i(I-\mathbb{H})A_1 = (I-\mathbb{H})(Z_t\bar{Z}_{t\alpha'}) - i$ . 两边取虚部, 并注意到  $(I-\mathbb{H})\bar{Z}_t = 0$  可以导出  $(I-\mathbb{H})\bar{Z}_{t\alpha'} = 0$  (因为  $\partial_{\alpha'}$  是实导数), 我们得到

$$A_1 = 1 - \operatorname{Im} [Z_t, \mathbb{H}] \bar{Z}_{t\alpha'}, \quad (2.9)$$

从而构造出了交换子的形式.

进一步地, 我们具体计算

$$\begin{aligned} -\operatorname{Im} [Z_t, \mathbb{H}] \bar{Z}_{t\alpha'} &= -\frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int \frac{(Z_t(\alpha', t) - Z_t(\beta', t))\partial_{\beta'}(\bar{Z}_t(\alpha', t) - \bar{Z}_t(\beta', t))}{\alpha' - \beta'} d\beta' \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \frac{\partial_{\beta'}|Z_t(\alpha', t) - Z_t(\beta', t)|^2}{\alpha' - \beta'} d\beta' \stackrel{\partial_{\beta'}}{=} \frac{1}{2\pi} \int \frac{|Z_t(\alpha', t) - Z_t(\beta', t)|^2}{(\alpha' - \beta')^2} d\beta'. \end{aligned}$$

最终得到结论

**命题 2.2.** 如下等式成立:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 - \operatorname{Im} [Z_t, \mathbb{H}] \bar{Z}_{t\alpha'} = 1 + \frac{1}{2\pi} \int \frac{|Z_t(\alpha', t) - Z_t(\beta', t)|^2}{(\alpha' - \beta')^2} d\beta' \geq 1. \\ \mathfrak{A} &= \frac{A_1}{|Z'_\alpha|^2} = \frac{|\bar{Z}_{tt} - i|^2}{A_1}, \quad -\nabla_n p = \frac{A_1}{|Z_{\alpha'}|} \gtrsim 1 > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

模仿上述方法, 经过更加复杂的计算, 我们可以得到

**命题 2.3.** 如下等式成立:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} := h_t \circ h^{-1} &= \operatorname{Re} \left( [Z_t, \mathbb{H}] \left( \frac{1}{Z_{\alpha'}} - 1 \right) \right) + 2\operatorname{Re} Z_t. \\ \frac{\alpha_t}{\alpha} \circ h^{-1} &= \frac{-\operatorname{Im} (2[Z_t, \mathbb{H}] \bar{Z}_{t\alpha'} + 2[Z_{tt}, \mathbb{H}] \partial_{\alpha'} \bar{Z}_t - [Z_t, Z_t; z_\alpha^{-1} \partial_{\alpha'} \bar{Z}_t])}{A_1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

至此, 我们就得到了拟线性化之后的二维水波方程

$$\begin{cases} (\partial_t + \mathfrak{B}\partial_{\alpha'})^2 \bar{Z}_t + i\mathfrak{A}\partial_{\alpha'} \bar{Z}_t = (\bar{Z}_{tt} - i) \cdot \frac{-\operatorname{Im} (2[Z_t, \mathbb{H}] \bar{Z}_{t\alpha'} + 2[Z_{tt}, \mathbb{H}] \partial_{\alpha'} \bar{Z}_t - [Z_t, Z_t; z_\alpha^{-1} \partial_{\alpha'} \bar{Z}_t])}{A_1} & \text{on } \partial P_-, \\ \bar{Z}_t = \mathbb{H}\bar{Z}_t & \text{on } \partial P_-. \end{cases} \quad (2.12)$$

其右边均为交换子组成的项, 从而上述方程组大约具有形式  $\partial_t^2 U + |D|U = F(U_t, |D|U)$ . 这个拟线性方程 (其中  $U = \bar{Z}_t$ ) 的局部适定性是有标准理论的. 我们可以用能量法 + 皮卡迭代的方法直接证明  $(U, U_t) \in C([0, T]; H^{s+\frac{1}{2}} \times H^s)$ ,  $s \geq 4$  的局部适定性.

**二维走向三维: Clifford 分析**

上一节提到的证明是依赖黎曼映射定理的, 但是如果我们想推广到三维水波, 就必须给出不依赖黎曼映射定理的证明! 三维的情况, Clifford 分析可以拿来代替传统的复分析, 但是黎曼映射定理不再有三维的类似版本. 具体的证明可以参考邬似珏教授的文章 [53, 54], 我们不再叙述证明过程.

## 2.2 百花齐放: 带底部、带表面张力、涡层问题的局部适定性

文章 [53, 54] 问世之后, 立刻引起了偏微分方程界的强烈反响. 例如 Lannes[32] 证明了带底部不可压无旋重力水波的局部适定性. 而在非零表面张力的情况, Iguchi[28], Ambrose-Masmoudi[6] 和明梅-章志飞 [43] 用不同的方法证明了不可压无旋水波局部适定性和零张力极限, Ambrose [5], Ambrose-Masmoudi [7] 证明了带表面张力情况不可压无旋涡层<sup>1</sup>的局部适定性. Alazard-Burq-Zuily[1, 2] 利用调和分析中的仿线性化方法和 Zakharov-Sulem 约化 (下一节会提到) 证明了边界曲率无界的情况以及低正则性的适定性. 上述文章用到的方法都各有不同, 可以说自 1999 年开始的十余年内, 不可压无旋流体自由边界问题迎来了十余年井喷式的发展.

## 2.3 色散结构: 小初值整体解

水波方程是一个发展方程, 我们在证明了局部适定性之后自然会问: 解能否演化的长时间? 解的长时间行为和衰减机制又是什么? 这一连串的问题又困扰了人们十余年的时间, 直到 2009 年, 这个困难重重的问题再次被邬似珏教授首先攻克.

### 首次突破: 邬似珏的拟线性和非线性变换技巧

在证明局部适定性的时候, 我们往往是通过让解的存在时间尽可能小来封闭能量估计. 其原理都是 Gronwall 不等式: 记我们设计的能量泛函为  $E(t)$ , 其初值  $E(0) < \infty$ , 那么我们只要证明  $\forall 0 < \kappa \ll 1$

$$E(T) \leq \kappa P(E(T)) + P(E(0)) + P(E(T)) \int_0^T P(E(t)) dt,$$

便可以用 Tao [50] 第二章的非线性 Gronwall 不等式得到: 存在仅依赖于  $E(0)$  的时间  $T > 0$ , 使得

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E(t) \leq 2E(0).$$

这里  $P(\dots)$  是指  $\dots$  的一个正系数多项式.

但如果我们要证明解的长时间存在性, 那么就不能依靠取  $T$  很小来封闭能量. 一个很自然的想法就是让  $E(t)$  自身产生时间的衰减, 要做到这一点, 我们就要挖掘出方程的衰减结构, 例如色散方程、具有零条件的拟线性波方程、带阻尼项的传输方程、热方程等等, 而且此时非线性项的结构也影响着解的衰减性和寿命. 举个例子, 我们考虑齐次化之后的无旋水波近似模型: 即定义在  $\mathbb{R}^{d-1}$  上的方程<sup>2</sup>  $\partial_t^2 U + |D|u = 0$ , 这里  $|D| = \sqrt{-\Delta}$ . 两边作傅立叶变换即可求解并得到  $\|U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})} \lesssim t^{-\frac{d-1}{2}}$ . 接下来我们再考虑对应的半线性方程  $\partial_t^2 U + |D|u = (\partial_t u)^{p+1}$ . 其能量泛函为<sup>3</sup>

$$E_s(t) := \sum_{|j| \leq s} \int |\partial^j \partial_t U(\alpha, t)|^2 + |\partial^j |D|^{\frac{1}{2}} U(\alpha, t)|^2 d\alpha.$$

假设我们现在有衰减估计  $\|\partial^j \partial_t U(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{d-1})} \lesssim (1+t)^{-\frac{d-1}{2}} \sqrt{E_s(t)}$ . 那么我们可以直接算出

$$\frac{d}{dt} E_s(t) \lesssim (1+t)^{-\frac{d-1}{2}} E_s(t)^{\frac{p}{2}+1},$$

两边对时间积分, 便有  $E_s(0)^{-\frac{p}{2}} - E_s(T)^{-\frac{p}{2}} \lesssim \int_0^T (1+t)^{-\frac{(d-1)p}{2}} dt$ . 只要  $E_s(t)$  还是有限数, 那么解就可以 (至少在这个对应的函数空间里) 继续演化直到能量泛函爆破, 于是我们就要考察

<sup>1</sup> 涡层 (Vortex Sheet): 指两个互不渗透的不可压理想流体的虚拟交界面, 两个流体内部均各自满足欧拉方程, 边界上要求法向没有间断.

<sup>2</sup> 即:  $|D|f = (|\xi| \hat{f})^\vee$ , 而  $-\Delta$  对应的傅立叶乘子恰好是  $|\xi|^2$ , 开根号即为  $|D|$  对应的傅立叶乘子.

<sup>3</sup> 对方程求导数  $\partial^j$ , 再与  $\partial^j \partial_t u$  作  $L^2$  内积, 第二项分部积分  $|D|^{\frac{1}{2}}$  就可得到该能量泛函的时间导数.

$\int_0^T (1+t)^{-\frac{(d-1)p}{2}} dt \lesssim E_s(0)^{-\frac{p}{2}}$ . 假设  $E_s(0) = O(\epsilon)$ :

- $p = 1$ : 即非线性项均为二次项, 则左边的积分在  $d = 2, 3$  均为无穷, 从而我们不能期待此时有小初值整体解.
- $p = 2$ : 可以解出  $d = 2$  时  $T \gtrsim e^{1/\epsilon^2}$ (此时称作“几乎整体解”),  $d = 3$  时,  $T = \infty$ . 所以说, 从这个色散关系, 我们可以期待二维水波有几乎整体解, 三维水波有整体解.

下面我们就需要将水波方程组(2.12) (或者(2.1)) 尽可能地化简到上述的模型.

**命题 2.4.** 设  $z = z(\alpha, t)$  是二维水波方程的解. 令  $\Pi := (I - \mathfrak{H})(z - \bar{z})$ ,  $k = k(\cdot, \cdot, t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  为任一微分同胚,  $\zeta := z \circ k^{-1}$ ,  $D_t \zeta = z_t \circ k^{-1}$  则

$$\begin{aligned} (D_t^2 - iA\partial_\alpha)(\Pi \circ k^{-1}) &= \frac{4}{\pi} \int \frac{(D_t \zeta(\alpha, t) - D_t \zeta(\beta, t))(\operatorname{Im} \zeta(\alpha, t) - \operatorname{Im} \zeta(\beta, t))}{|\zeta(\alpha, t) - \zeta(\beta, t)|^2} \partial_\beta D_t \zeta(\beta, t) d\beta \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int \left( \frac{D_t \zeta(\alpha, t) - D_t \zeta(\beta, t)}{\zeta(\alpha, t) - \zeta(\beta, t)} \right)^2 \partial_\beta \operatorname{Im} \zeta(\beta, t) d\beta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

注意到, 上式右边的非线性项都是三次 (即三个项相乘), 对应上面的  $p = 2$ , 但等式左边还是二次的. 所以我们需要寻找合适的坐标变换  $k$  使得  $b := k_t \circ k^{-1}$  和  $A - 1 = (\alpha k_\alpha) \circ k^{-1} - 1$  自身是二次项. 事实上, 从前面计算  $h_t \circ h^{-1}$  的过程中, 我们可以发现, 令  $k(\alpha, t) = 2\operatorname{Re} z(\alpha, t) - h(\alpha, t)$  的话, 就得到

**命题 2.5.** 如下恒等式成立

$$(I - \mathcal{H})b = -[D_t \zeta, \mathcal{H}] \frac{\bar{\zeta}_\alpha - 1}{\zeta_\alpha}, \quad (I - \mathcal{H})(A - 1) = i[D_t \zeta, \mathcal{H}] \frac{\partial_\alpha \overline{D_t \zeta}}{\zeta_\alpha} + i[D_t^2 \zeta, \mathcal{H}] \frac{\bar{\zeta}_\alpha - 1}{\zeta_\alpha}. \quad (2.14)$$

其中  $\mathcal{H}$  为坐标变换后的区域上的 Hilbert 变换.

如上两个命题表明,  $\theta := \Pi \circ k^{-1} = (I - \mathcal{H})(\zeta - \bar{\zeta})$  满足方程组

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - i\partial_\alpha)\theta = G, \\ (I + \mathcal{H})\theta = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

其中  $G$  只包含三次及以上的非线性项. 这样的话, 我们就可以严格地将水波方程经过如上坐标变换之后化成我们想要的形式, 其衰减估计、(几乎) 整体解的证明也就可以根据之前的讨论做出来. 在此我们略去过程, 具体证明可以参见邬似珏 [55]. 而三维的情况则需要用 Clifford 分析来完成类似的步骤, 见邬似珏 [56]. 此外, Ifrim-Tataru [26] 用类似的全纯坐标方法做到了低正则性解.

### Zakharov/Craig-Sulem 约化与色散方法

下面我们不加证明地介绍 Zakharov[59]/Craig-Sulem[17] 约化方法, 该方法同样可以将水波方程组约化到边界  $\mathbb{R}^{d-1}$  上的拟线性色散系统. 据此观察, 人们可以大量地利用调和分析的工具计算衰减估计, 以谋求解的更长存在时间、精准刻画长时间渐近行为. 详细内容参见 David Lannes 的专著 [33].

设自由边界是函数图像  $\partial\mathcal{D}_t := \{(x, y) : y = h(t, x)\}$ , 区域  $\mathcal{D}_t := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : y \leq h(t, x)\}$ . 由于无旋假设, 我们可以设  $v = \nabla\phi$ , 再结合不可压条件有  $\Delta\phi = 0$ . 下面令  $\varphi(t, x) := \Phi(t, x, h(t, x))$  为  $\Phi$  在自由边界上的限制. 由于  $\Phi$  在内部是调和函数, 那么我们只要

考察边界运动方程.

$$\begin{cases} \partial_t h = \underbrace{\sqrt{1 + |\nabla h|^2} \nabla_n \Phi \varphi}_{G(h)} \\ \partial_t \varphi = -gh + \sigma \operatorname{div} \left( \frac{\nabla h}{\sqrt{1 + |\nabla h|^2}} \right) - \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{(G(h)\varphi + \nabla h \cdot \nabla \varphi)^2}{2(1 + |\nabla h|^2)} \end{cases} \quad (2.16)$$

这个方程组<sup>1</sup>看上去很复杂, 但如果我们考虑其在平坦静止界面附近的线性化方程

$$\partial_t h = |D|\varphi, \quad \partial_t \varphi = -gh + \sigma \Delta h + \dots,$$

那么这个方程就可以被写作一个色散方程

$$\partial_t U + i\Lambda_{g,\sigma} U = 0, \quad U := \sqrt{g + \sigma|D|^2} h + i|D|^{\frac{1}{2}} \varphi, \quad \Lambda_{g,\sigma} := \sqrt{g|D| + \sigma|D|^3}.$$

据此, 我们可以用调和分析中的非常精细的仿微分运算来精准计算其衰减速率与渐近行为. 参见 Alazard-Delort [3], Ionescu-Pusateri [29], 邓煜-Ionescu-Pausader-Pusateri [18] 等文献. 另一方面, 该色散组的解也可以在时空傅立叶变换之后用震荡积分表示出来, 从而我们可以用震荡积分中的固相法、Coifman-Meyer 乘子定理以及更精细的函数空间刻画、插值来分析解的行为. 具体参见 Germain-Masmoudi-Shatah [22, 23]. 此外, 还有关于长时间渐近模型 (KdV、薛定谔方程等等) 的研究, 在此不展开讨论.

### 3 不可压带旋流体: 旋度影响内部、内部带动边界、边界控制内部

之前我们介绍了不可压无旋流体的局部与整体适定性理论. 然而现实中的流体往往是带有旋度的, 例如海洋中的漩涡. 回顾我们之前的分析, 最重要的一步就是用  $\operatorname{curl} u = \mathbf{0}$  和  $\operatorname{div} u = 0$  将方程等价地写到自由边界上. 然而  $\operatorname{curl} u \neq \mathbf{0}$  时第一步就出现了问题. 所以我们必须同时研究流体的旋度、切向, 以及边界的运动并挖掘出它们之间的联系. 这方面, 首个突破由 Christodoulou-Lindblad [13] 完成, 这篇文章的思路可以说是后继几乎所有无粘性带旋流体研究的基础.

#### 3.1 精神纲领: Christodoulou-Lindblad 型的先验估计

文章 [13] 证明的是球状区域的不可压理想流体运动的先验估计 (而非适定性). 原文中的记号比较复杂, 里面的估计也不是最优的. 我们在此将其简化到边界平坦的周期性区域  $\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$  上, 这可以通过单位分解 + 微分同胚 (进行边界拉直) 完成, 由于我们只考虑局部能量估计与适定性, 所以这样的假设是合理的. 回顾不可压欧拉方程 (本节的讨论默认维数 = 3)

$$\begin{cases} D_t u = -\nabla p & \text{in } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \mathcal{D}, \\ D_t \in \mathcal{T}(\partial\mathcal{D}) & \text{on } \partial\mathcal{D}, \\ p = 0, \quad -\nabla_n p \geq c_0 > 0 & \text{on } \partial\mathcal{D}. \end{cases} \quad (3.1)$$

<sup>1</sup>方程组中的  $G(h)$  可以视作一个一阶 (导数) 的、线性的非局部的算子, 并且非线性地依赖于自由边界.

<sup>2</sup>具体证明参见 Coutand-Shkoller [15]. 这个化简可以使得我们在单个坐标卡下进行计算, 而且该区域的边界是平坦的.

### 拉格朗日坐标系

首先, 我们将自由边界问题化为固定边界问题, 这可以通过引进拉格朗日坐标系完成. 注意, (3.1) 描述的是  $t$  时刻在  $x$  处的液滴的运动状态. 而无论这个液滴运动到哪里, 其初始位置总是已经被初值给定的! 我们假设该液滴的初始位置为  $y \in \Omega$ . 则我们可以定义速度场的流映射  $\eta$  为:

$$\eta(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathcal{D}_t, \quad y \mapsto \eta(t, y) = x(t, y), \quad \partial_t \eta(t, y) = u(t, x(t, y)), \quad \eta(0, y) = y.$$

令  $a^{\mu\alpha} = \partial y^\mu / \partial x^\alpha$  (即  $a = [\partial \eta]^{-1}$ ). 那么在  $y$  坐标下, 物质导数  $D_t$  就变成了时间导数  $\partial_t$

$$\partial_t f(t, \eta(t, y)) = \partial_t f + \sum_{\alpha=1}^3 \partial_t \eta^\alpha \partial_\alpha f = (\partial_t + u \cdot \nabla) f.$$

现在令  $v(t, y) = u(t, \eta(t, y))$ ,  $q(t, y) = p(t, \eta(t, y))$ , 则(3.1)可以被写作

$$\begin{cases} \partial_t v = -\nabla_a q & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}_a v = 0 & \text{in } \Omega, \\ q = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ -\partial q / \partial N \geq c_0 > 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $\nabla_a^\alpha := a^{\mu\alpha} \partial_\mu$  为原坐标系 (称作欧拉坐标系) 下的导数, 在拉格朗日坐标系下就变为共变导数,  $\operatorname{div}_a$  为共变散度. 我们设置能量泛函<sup>1</sup>为

$$E(t) := \|v(t)\|_4^2 + \left| a^{3\alpha} \bar{\partial}^4 \eta_\alpha \right|_0^2. \quad (3.3)$$

其中  $\|\cdot\|_s, |\cdot|_s$  分别表示  $\Omega$  内部和边界的  $H^s$  范数.

#### 散度-旋度-边界分解与法向迹定理

能量泛函的主项是  $\|v\|_4^2$ , 其包含了切向导数  $\partial_1, \partial_2$  和法向导数  $\partial_3$  (注意此时我们的区域是  $\Omega = \mathbb{T}^2 \times (0, 1)$ ). 在估计法向导数的时候, 我们如果分部积分就会产生边界项, 而边界上除了  $q = 0$  以外没有任何其它条件, 所以我们需要另外处理法向导数, 其方法是 Hodge 分解 (又称散度-旋度分解).

**引理 3.1** (Hodge 分解 (div-curl 分解)). 设  $s \geq 1$ , 则对任意向量场  $X$  成立不等式

$$\|X\|_s \lesssim \|X\|_0 + \|\operatorname{div} X\|_{s-1} + \|\operatorname{curl} X\|_{s-1} + |\bar{\partial} X \cdot N|_{s-1.5}.$$

引理3.1的证明依赖于恒等式  $-\Delta X = \operatorname{curl} \operatorname{curl} X - \nabla \operatorname{div} X$  和分部积分. 而上式的最后一项则可以用法向迹定理化到内部切向导数估计

**引理 3.2** (法向迹定理).

$$|\bar{\partial} X \cdot N|_{-0.5} \lesssim \|\operatorname{div} X\|_0 + \|\bar{\partial} X\|_0.$$

**证明.** 设  $\varphi \in H^{0.5}(\partial\Omega)$  为测试函数, 其延拓<sup>2</sup>到内部成为  $\phi \in H^1(\Omega)$ . 则由散度定理,

$$\int_{\partial\Omega} \bar{\partial} X \cdot N \varphi = \int_{\Omega} \operatorname{div} (\bar{\partial} X \phi) = \int_{\Omega} \bar{\partial} X \nabla \phi - \int_{\Omega} \operatorname{div} X \bar{\partial} \phi \lesssim (\|\bar{\partial} X\|_0 + \|\operatorname{div} X\|_0) \|\phi\|_{0.5}.$$

□

<sup>1</sup>该能量泛函的构造可以直接从  $\|u\|_{H^4}$  的计算中得出.

<sup>2</sup>此处的延拓可以利用迹定理的右逆或者直接调和延拓.

于是, 我们令  $X = v$ ,  $s = 4$ , 便可以将  $u$  的  $H^4$  范数归结为  $u$  的  $L^2$  范数 (这是能量守恒的直接结果, 在(3.1)两边点乘  $v$  直接计算即可)、 $v$  的旋度、 $v$  的散度和  $\|\bar{\partial}^4 v\|_0$  的估计. 我们假设  $\|a - Id\|_3$  是充分小的<sup>1</sup>, 那么估计  $v$  在拉格朗日坐标系下的散度和旋度就可以归结为欧拉坐标系下的散度和旋度附加一个小量, 而后者是容易计算的.

### 切向估计的通法: Alinhac 好变量 (Alinhac good unknown)

对不可压方程而言, 切向估计的计算方法有很多. 在此我们并没有选取最优的算法, 而是介绍一个更具有普适性, 不依赖欧拉方程无旋假设的做法. 直接计算<sup>2</sup>可得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int |\bar{\partial}^4 v|^2 dy = - \int \bar{\partial}^4 v_\alpha \bar{\partial}^4 (a^{\mu\alpha} \partial_\mu q) \stackrel{\partial}{=} \int \bar{\partial}^4 \partial_\mu v_\alpha \bar{\partial}^4 (a^{\mu\alpha} q) - \int_{\partial\Omega} \bar{\partial}^4 v_\alpha \bar{\partial}^4 (a^{\mu\alpha} N_\mu q).$$

然而  $a^{\mu\alpha}$  的具体表达式是  $\partial\eta \times \partial\eta$  的形式. 如果我们要把  $a^{\mu\alpha}$  从括号里面提取出来, 就必须去估计  $\bar{\partial}^4$  全部落在  $a$  上的项, 这样就出现了  $\eta$  的五阶导数. 而能量泛函里面只假设了  $v \in H^4$ ,  $\eta$  作为  $v$  的时间积分也只有  $H^4$  的正则性. 对不可压欧拉方程而言, Coutand-Shkoller 的方法是分部积分半阶 (切向) 导数, 利用欧拉方程的无旋假设<sup>3</sup>可以推出  $\operatorname{curl} \eta \in H^{3.5}$  进而  $\eta \in H^{4.5}$  来完成估计. 但是如果考虑一些复杂的情况 (例如弹性流体、磁流体、相对论流体等等), 这样的旋度假设不再成立. 为了避免  $\eta$  的高正则性, 我们采用 Alinhac 好变量方法. 注意, 如上困难本质上是出自交换普通导数  $\bar{\partial}^4$  和共变导数  $\nabla_a$ . 根据链式法则有  $\bar{\partial}_i f = \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial y^i}{\partial \eta^\alpha} = \bar{\partial}_i \eta \cdot \nabla_a f$ , 进而

$$\nabla_a (\bar{\partial}^4 f) = \nabla \left( (\bar{\partial}\eta \cdot \nabla_a) (\bar{\partial}\eta \cdot \nabla_a) (\bar{\partial}\eta \cdot \nabla_a) (\bar{\partial}\eta \cdot \nabla_a) f \right) \approx \bar{\partial}^4 (\nabla_a f) + \nabla_a (\bar{\partial}^4 \eta \cdot \nabla_a f) + \text{低阶项}.$$

也就是说,  $\bar{\partial}^4 (\nabla_a f)$  中的本质高阶项不仅仅是  $\nabla_a (\bar{\partial}^4 f)$ , 还有全部导数落在链式法则的系数上的对应项. 令  $F = \bar{\partial}^4 f - \bar{\partial}^4 \eta \cdot \nabla_a f$  为  $f$  的 Alinhac 好变量 [4], 则  $\bar{\partial}^4 (\nabla_a f) = \nabla_a F + \text{低阶项}$ , 也就是说, 真正的最高阶项是 Alinhac 好变量的共变导数! 这样, 我们就在交换普通导数和共变导数的时候避免了  $\eta$  高阶项.

现在, 令  $V = \bar{\partial}^4 v - \bar{\partial}^4 \eta \cdot \nabla_a v$ ,  $Q = \bar{\partial}^4 q - \bar{\partial}^4 \eta \cdot \nabla_a q$  为  $v, q$  的 Alinhac 好变量. 方程化为

$$\partial_t V + \nabla_a Q = -C(Q) + \partial_t (\bar{\partial}^4 \eta \cdot \nabla_a v), \quad (3.4)$$

以及

$$\operatorname{div}_a V = \bar{\partial}^4 (\operatorname{div}_a v) - C(v) = -C(v), \quad Q|_{\partial\Omega} = -\bar{\partial}^4 \eta_\alpha a^{3\alpha} (\partial q / \partial N).$$

这里  $C(q), C(v)$  为 Alinhac 好变量定义中产生的交换子. 直接对方程(3.4)作  $L^2$  估计, 内部项都可以直接控制, 只剩边界项需要处理.

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial N} \bar{\partial}^4 \eta_\beta a^{3\beta} a^{3\alpha} V_\alpha = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial N} \bar{\partial}^4 \eta_\beta a^{3\beta} a^{3\alpha} (\bar{\partial}^4 \partial_t \eta_\alpha - \bar{\partial}^4 \eta_\nu a^{\mu\nu} \partial_\mu v_\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial N} \left| a^{3\alpha} \bar{\partial}^4 \eta_\alpha \right|^2 - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial N} a^{3\beta} \bar{\partial}^4 \eta_\beta \partial_t a^{3\alpha} \bar{\partial}^4 \eta_\alpha - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial q}{\partial N} \bar{\partial}^4 \eta_\beta a^{3\beta} a^{3\alpha} \bar{\partial}^4 \eta_\nu a^{\mu\nu} \partial_\mu v_\alpha + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

将 Rayleigh-Taylor 符号条件代入(3.5)的第一项, 就自动出来了  $E(t)$  中的第二项能量. 而后两项则可以在  $\nu = 1, 2$  时通过代入  $\partial_t a^{3\alpha} = -a^{3\mu} \partial_\nu v_\mu a^{\nu\alpha}$ , 在  $\nu = 3$  时被边界上出来的能量项直接控制.

<sup>1</sup>这是因为我们仅考虑短时间的解, 而  $a$  的初值便是  $Id$ . 事实上  $a - Id = -\int_0^T a : \partial v : a$ , 取  $T$  充分小即可.

<sup>2</sup>这里用到了 Piola 恒等式: 对行列式为  $J^{-1}$  的矩阵  $a^{\mu\alpha}$  有  $\partial_\mu (Ja^{\mu\alpha}) = 0$ . 对不可压的情况容易证明  $J = 1$ .

<sup>3</sup>具体的证明可以参见 Kukavica-Tuffaha-Vicol [31].

### 压力项: Christodoulou-Lindblad 椭圆估计

在上面的计算中, 我们还需要估计  $\|q\|_4, \|\partial_t q\|_3$ , 由于它们的边值是 0, 则可以用下面的椭圆估计

**引理 3.3** ([24] 命题 5.3). 设函数  $f$  在边界上取值为 0, 则对  $r \geq 2$  成立

$$\|\nabla_a f\|_r \lesssim P(\|\eta\|_r) (\|\Delta_a f\|_{r-1} + \|\bar{\partial}\eta\|_r \|f\|_r).$$

当  $r = 1$  时,  $\|\eta\|_r, \|\bar{\partial}\eta\|_r$  要改成  $H^2$  范数.

另一方面, 对(3.2)求  $\operatorname{div}_a$ , 可以得到  $q$  的椭圆方程  $-\Delta_a q = (\nabla_a v) \cdot (\nabla_a v) + \dots, \quad q|_{\partial\Omega} = 0$ . 方程右边只有一阶导数, 代入上述不等式即可完成估计.

**注.** 上述证明梗概表明: 压力的估计会归结为速度场的估计, 而速度场的估计最后归结于切向导数估计, 最后再归结到边界积分的结果. 而 Rayleigh-Taylor 符号条件是封闭整个能量估计的最后一环. 其给出的边界能量项  $|a^{3a} \bar{\partial} \eta|_0^4$  恰好反映的是自由边界的第二基本形式的正则性! <sup>1</sup> 证明的想法呼应了本节的标题“旋度影响内部, 内部带动边界, 边界控制内部”, 也完美地契合了 [13] 的核心结论 “**The regularity and geometry of free surfaces enter to highest order.**” 另一方面, 从直观的角度想象, 若我们不允许流体的自由界面产生自交, 那么整个流体的运动完全被自由边界所限制, 而 Rayleigh-Taylor 符号条件恰好是在不考虑表面张力情况下阻止流体产生奇异性的稳定性条件.

## 3.2 局部适定性: 从 Nash-Moser 迭代到切向光滑化

然而, 流体自由边界问题的局部适定性并不能直接在先验估计的基础上用线性化 + 迭代的方法导出: 因为在构造线性化方程解的过程中必须要用  $v = v_0 + \int_0^T \partial_t v$  来验证不动点定理的条件, 从而用椭圆估计的时候出现  $\|\bar{\partial}\eta\|_4$  损失一阶导数. 注意到, 该导数损失的结束是固定的 (1 阶), 所以可以用 Nash-Moser 迭代法 (可以视作 Banach 空间族的“隐函数定理”) 间接地做出解的局部适定性. Lindblad [35] 就是采用线性化 + N-M 迭代的方法求解方程. 然而 N-M 迭代构造解的过程中会损失大量的正则性, 本质上作出的是光滑解的存在性. 另一方面, 由于上述导数损失是切向的, 而流体区域  $\mathbb{T}^2 \times (0, 1)$  在切向没有边界, 所以可以考虑将  $\eta$  切向光滑化. 2005 年, Coutand-Shkoller [15] 就采用该方法一举拿下  $\sigma = 0$  和  $\sigma > 0$  的局部适定性. 这里我们讨论的是  $\sigma = 0$  的简化证明, 参考了 [16, 25, 40].

定义  $\tilde{\eta} := \Lambda_\kappa^2 \eta$ ,  $\tilde{a} := [\partial \tilde{\eta}]^{-1}$ ,  $\tilde{J} := \det[\partial \tilde{\eta}]$ . 我们设定  $\kappa$ -逼近方程为

$$\begin{cases} \partial_t \eta = v + \psi & \text{in } \Omega, \\ \partial_t v = -\nabla_{\tilde{a}} q & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}_{\tilde{a}} v = 0 & \text{in } \Omega, \\ q = 0, & \text{on } \partial\Omega, \\ -\partial q / \partial N \geq c_0 > 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.6)$$

这里  $\psi$  是由边界上调和延拓到内部的误差项<sup>2</sup>, 加入  $\psi$  是因为光滑化导致之前的消去结构(3.5)被破坏. 那么, 我们要做的就是

(1) 对固定的  $\kappa > 0$ , 求解逼近方程(3.6): 这可以通过标准的线性化 + 不动点法完成.

<sup>1</sup> 回忆第二基本形式的定义为  $\Pi := \bar{\nabla} n$ , 在此  $n^\alpha = a^{3a} / |a^3|$ .

<sup>2</sup> 这个并不是原文的证明. 笔者在证明可压水波局部适定性 [40] 的时候受到顾旭旻-王焰金 [25] 的启发, 发现他们做不可压 MHD 的这个小技巧可以用在欧拉方程上面, 避免估计带权高阶项.

(2)(3.6)有  $\kappa$ -一致估计, 这样对  $\kappa \rightarrow 0_+$  取弱极限, 而先验估计在  $\kappa = 0$  时将弱解提升为强解.

实现了这两步, 局部适定性的证明也就完成了.

### 3.3 表面张力: Young-Laplace 边界条件及其抛物正则化方法

当  $\sigma > 0$  的时候, 边界条件  $p = \sigma H$  在拉格朗日坐标系<sup>1</sup>下可以写作  $a^{\mu\alpha} N_\mu q = -\sigma \sqrt{g} \Delta_g \eta^\alpha$ , 其中  $g_{ij} = \bar{\partial}_i \eta^\mu \bar{\partial}_j \eta_\mu$  为自由边界的度量,  $\Delta_g$  为度量  $g$  对应的 Laplacian-Beltrami 算子. 由于边界条件的变化, 我们做能量估计和局部适定性的方法也要作出很大的改变.

**1. 椭圆估计:**  $q$  及其时间导数的椭圆估计需要用 Neumann 边界条件来完成, 否则边界上的拉普拉斯项使得能量估计损失导数. 这一步还要求我们做能量估计的时候需要计算时间导数.

**2. 空间导数 div-curl 分解的切向部分:**  $|v^3|_{s=0.5}$  不再用法向迹定理化为内部切向估计, 否则会边界上出现超高阶空间导数. 此时注意到, Young-Laplace 边界条件本身是  $\eta$  的椭圆方程, 我们对它求一阶时间导数并且令  $\alpha = 3$  便可以在边界上用椭圆估计<sup>2</sup>直接控制 div-curl 产生的边界项.

**3. 能量泛函的重置:** 我们需要的能量泛函变为如下形式 ( $N \geq 3$ )

$$E_N(t) = \|\eta\|_{N+0.5}^2 + \sum_{k=0}^{N-1} \|\partial_t^k v\|_{N+0.5-k}^2 + \|\partial_t^N v\|_0^2 + \left| \Pi \bar{\partial} \partial_t^{N-1} v \right|_0^2 + \left| \Pi \bar{\partial}^2 \partial_t^{N-2} v \right|_0^2, \quad (3.7)$$

其中  $\Pi$  是边界上往欧拉坐标法向  $n$  的投影算子,  $\Pi_\lambda^\mu := n^\mu n_\lambda = \delta_\lambda^\mu - g^{kl} \bar{\partial}_k \eta^\mu \bar{\partial}_l \eta_\lambda$ .

**4. 高阶时间导数的边界处理:** 第  $N-1, N-2$  阶时间导数的边界项不能用椭圆估计 (至少要  $H^2$  正则性). 我们将它和欧拉坐标系的法向投影比较. 由于二者初值相同, 演化短时间误差应当充分小. 而后者 (即能量泛函最后两项) 恰好出自  $\bar{\partial} \partial_t^{N-1}, \partial_t^N$ -切向估计<sup>3</sup>, 这样就可以封闭能量.

**5. 边界条件的抛物正则化:** 然而在证明局部适定性的过程中, 切向光滑会导致边界上消去结构被破坏. 而注意到  $\partial_t^N v$  仅有内部  $L^2$  正则性, 而没有边界估计. 从而我们要在边界上加上“人工粘性项”, 把方程投影到光滑化后的欧拉法向, 利用加权高阶项去控制边界 (和内部) 的误差项

$$q\tilde{n} = \sigma \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g}} H(n \cdot \tilde{n}) \tilde{n} - \kappa \bar{\Delta}_{\mathbb{R}^2} (v \cdot \tilde{n}) \tilde{n}.$$

**6. 逼近方程的求解:** 即使我们对逼近方程作出了  $\kappa$ -一致估计, 我们也难以用线性化 + 不动点法求解具有 Young-Laplace 边界条件的方程组. 目前已知的做法是对线性化方程用罚函数方法, 再取极限以及用 Galerkin 逼近的方法作出弱解, 最后再用 div-curl 分解逆定理<sup>4</sup>证明该弱解是强解.

表面张力的计算过于复杂, 可参考 Coutand-Shkoller [15] 第 10-12 节或 Disconzi-Kukavica [19].

### 3.4 长时间行为与奇异性: 举步维艰

文章 [13, 15, 16, 35] 的发布立刻激起了又一股浪潮. 后继关于不可压带旋流体局部适定性的深入研究不断涌现, 我们在此列出一些主要结果: Schweizer [45] 研究了带表面张力的情况, Cheng-Coutand-Shkoller [11] 证明了 3D 带旋带表面张力的涡层稳定性, 张平-章志

<sup>1</sup> 将  $p = \sigma H$  投影到欧拉坐标系的单位法向  $n = a^{\mu\alpha} / \sqrt{g}$  再用嵌入子流形的平均曲率计算公式.

<sup>2</sup> 该椭圆估计只需  $g \in BMO$  即可, 具体参考 [19] 的命题 3.4.

<sup>3</sup> 注意:  $\sqrt{g} \Delta_g \eta^\alpha = g^{ij} \Pi_\lambda^\alpha \bar{\partial}_{ij}^2 \eta^\lambda$ , 分部积分一阶切导数即可造出该能量项, 具体参见 [19].

<sup>4</sup> 证明参见 [12].

飞 [61] 推广了邬似珏 [53, 54] 的方法证明了不可压带旋水波的局部适定性, Shatah-曾崇纯 [46, 47, 48] 则从几何的角度证明了 3D 带旋带表面张力的涡层稳定性, 王超-章志飞-赵威任-郑云瑞 [52] 证明了  $H^{3+}$ -局部适定性和爆破准则……然而更进一步考虑长时间解, 人们至今也没有太多办法. 究其原因, 则是旋度缺少衰减性. 迄今为止的结果基本都是在无旋假设上附加一些特殊条件, 例如改为常值旋度 [27], 无旋 + 自重位势 (可以刻画液态星体的运动) [8], 带两个具有对称性的点涡 [49] 等等. 可以说, 带旋流体长时间行为的研究几乎没有本质突破. 另一方面, 我们也可以考虑: 流体演化长时间会不会出现奇异性? 例如自由界面产生自交, 流体不断汇聚导致边界的平均曲率爆破等等. 这些都是现实中能观察到的现象. 然而迄今为止, 这方面的研究也只有 Córdoba, Fefferman 等人做出了“浪花拍岸” (splash singularity) 的适定性 [9, 10]. 另一方面, 邬似珏 [57] 证明了带角水波运动<sup>1</sup>的适定性, 这又是新的突破, 此后还有明梅-王超的工作 [41, 42]. 带旋自由边界流体其它奇异性形成机制目前还是公开问题.

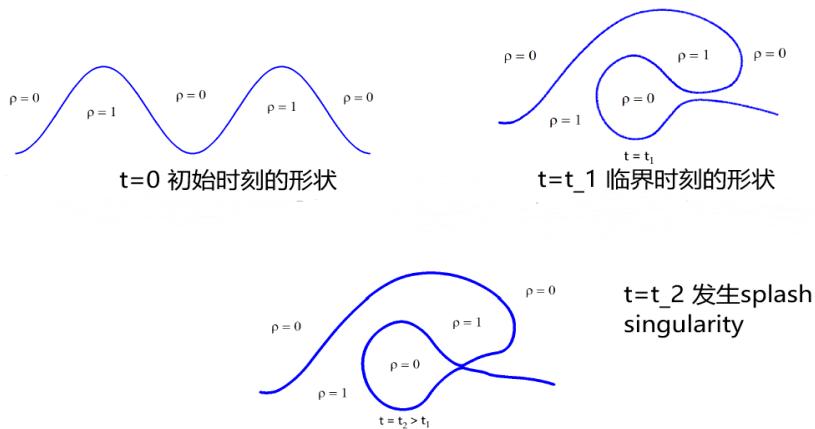


图: Splash singularity 的图示.

## 4 可压流体: 引入声波

更进一步, 若我们考虑流体密度的变化, 即可压欧拉方程(1.4), 研究的方法、方程的结构、解的性质相对不可压的情况而言就发生了非常大的改变. 例如, 不可压方程的压力  $p$  是一个拉格朗日乘子 [15, 第 7-8 节], 然而可压方程的压力项则是波动方程的解. 除去 4.2 节之外, 我们都假设  $\sigma = 0$  和 Rayleigh-Taylor 符号条件成立.

### 4.1 两个视角: 一阶对称双曲组的特征边界问题 vs 波动方程组

当  $\sigma = 0$  时, 我们可以引进物理量“焓” (enthalpy) 来替代压力  $p$  以化简方程. 令  $h(\rho) = \int_1^\rho p'(R)/R dR$ ,  $e(h) = \log \rho(h)$ , 则  $h = h(\rho)$  也是严格递增函数, R-T 符号条件也可以换

<sup>1</sup>之前的适定性结果至少要求自由边界的正则性在  $C^{1,\alpha}$  或更高, 但带角水波的自由边界正则性不到  $C^1$ .

成  $h$ . 方程化为

$$\begin{cases} D_t v = -\nabla h & \text{in } \mathcal{D}, \\ \operatorname{div} v = -D_t e(h) & \text{in } \mathcal{D}, \\ D_t \in \mathcal{T}(\partial\mathcal{D}) & \text{on } \partial\mathcal{D}, \\ h = 0 \text{ 且 } -\nabla_n h \geq c_0 > 0 & \text{on } \partial\mathcal{D}. \\ (v, h)|_{t=0} = (v_0, h_0). \end{cases} \quad (4.1)$$

可以看见, 方程(4.1)的形式和不可压方程(1.3)非常相似. 可压方程的焓充当的角色类似于不可压方程中的压力. 然而, 对第一个方程求散度, 我们得到的是波方程而非椭圆方程

$$e'(h)D_t^2 h - \Delta h = \partial_i u^j \partial_j u^i + e''(h)(D_t h)^2, \quad h|_{\partial\mathcal{D}_t} = 0.$$

早在 2003-2004 年, Lindblad 就注意到了这个波方程的结构. 圈于当时技术工具的不成熟, Lindblad [36] 使用了 Nash-Moser 迭代才把局部适定性解决. 另一方面, 方程组(4.1)本身是一阶拟线性对称双曲组, 且具有特征边界条件<sup>1</sup>. 此类问题均可以用 Lax-Phillips[34] 的对偶方法解出线性化方程, 再用适当的迭代法求解非线性方程. 在自由边界的情况大多数时候需要用 Nash-Moser 迭代. 2008 年末, Trakhinin [51] 就用双曲组 +N-M 迭代的方法证明了非等熵情况下的局部适定性. 然而在当时, 人们始终没能寻得一个合适的、不损失正则性的能量估计.

## 4.2 表面张力: Young-Laplace 边界条件抛物正则化的困境

2012 年, Coutand-Hole-Shkoller 证明了  $\sigma > 0$  有界区域情况的局部适定性, 并且可以对  $\sigma \rightarrow 0$  取极限得到  $\sigma = 0$  的解和能量估计. 他们采取的是内部 + 边界更复杂的抛物正则化方法<sup>2</sup>, 其逼近方程在内部可以化成  $v$  的热方程并具有 Neumann 边界条件. 然而这篇文章对线性化方程的求解还需要再将所有系数光滑化, 方法无比复杂而且不能用在无界区域上, 文中大量的计算又被跳过, 让人很难理解. 此后, Disconzi-罗辰昀 [20] 证明了  $\sigma > 0$  情况下的不可压极限. 但目前, 带表面张力的可压水波问题局部适定性仍然是未解决的.

## 4.3 不可压极限: 轻微可压流体

2016 年, Lindblad-罗辰昀 [37] 将 [13] 推广, 给出了首个可压欧拉方程的先验估计 (无正则性损失), 并且由罗辰昀 [39] 推广到可压水波的先验估计. 他们设置的  $H^4$ -能量泛函则需要  $\|\partial_t^4 h\|_1$  和  $\|\partial_t^5 h\|_0$ , 即  $\partial_t^4$ -波方程对应的能量泛函, 这是因为他们的能量估计包含了边界积分的时间导数. 幸运的是, 这个波方程右边只有一阶空间导数. 我们可以通过如下过程完成能量估计: 考虑波方程

$$e'(h)D_t^6 h - \Delta D_t^4 h = D_t^4(\nabla v)(\nabla v) + \dots,$$

其能量估计为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int |\sqrt{e'(h)} D_t^5 h|^2 + |\nabla D_t^4 h|^2 \right) \lesssim \int (\nabla D_t^4 v)(\nabla v)(D_t^5 h) + \dots$$

右边的控制需要  $\|\nabla D_t^4 v\|_0$ , 此时我们代入第一个方程可以将这项化为  $\|\nabla^2 D_t^3 h\|_0$ , 再利用椭圆估计 (引理3.3) 得到

$$\|\nabla^2 D_t^3 h\|_0 \lesssim \|\Delta D_t^3 h\|_0 + \text{低阶项}$$

<sup>1</sup> 双曲组的系数矩阵在边界上的法向投影非满秩但秩为常数.

<sup>2</sup> 如果按 [15] 的方法作逼近的话, 无法估计高阶带权项的散度. 所以他们被迫在内部再次进行抛物正则化.

再代入  $\partial_t^3$ -波方程  $e'(h)D_t^5 h - \Delta D_t^3 h = D_t^3(\nabla v)(\nabla v)$ , 从而得到

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \int \left| \sqrt{e'(h)} D_t^5 h \right|^2 + \left| \nabla D_t^4 h \right|^2 \right) \lesssim \left( (\|e'(h)D_t^5 h\|_0 + \|\nabla D_t^3 v\|_0) \|\nabla v\|_{L^\infty} \right) \|D_t^5 h\|_0 + \dots$$

完成能量估计.

另一方面, [37] 证明了不可压极限, 即: 若可压方程的初值  $(v_0, h_0)$  强收敛到不可压方程的初值  $(u_0, p_0)$ , 则可压方程的解  $(v, h)$  强收敛<sup>1</sup>到不可压方程的解  $(u, p)$ . 而可压流体的“可压程度”可以被声速刻画, 在这里则是  $e'(h)$ . 所以为了导出不可压极限, 我们需要能量泛函的估计是关于  $e'(h)$  一致的. 为此, 唯一需要注意的地方是波方程的能量估计. 按照上面的过程计算的话, 左边只能给出  $\|\sqrt{e'(h)} D_t^5 h\|_0$ , 而右边的估计则需要  $\|D_t^5 h\|_0$  来完成. 在取极限的过程中  $|e'(h)| \ll 1$ . 所以我们必须作加权能量估计, 即乘以  $e'(h)D_t^5 h$  来计算.

不可压极限是具有物理意义的, 它有助于我们用不可压流体去理解轻微可压流体的行为. 例如现实中的水波, 尽管它无限接近于不可压流体, 但是实测表明声波的确存在, 所以用轻微可压流体的模型去刻画是更加接近现实的. 另一方面, 如果我们要在不改变状态方程的前提下严格刻画可压水波, 我们必须用不可压极限的观点来“定义”无穷深处的水波, 以让压力项平衡掉重力的作用.

同样地, 这个先验估计并不能直接导出局部适定性. 后来, Ginsberg-Lindblad-罗辰昀 [24] 用切向光滑化的方法证明了带重力位势<sup>2</sup>情况的局部适定性, 但是 [24] 并没有注意到 Alinhac 好变量的妙用, 也没有注意到边界修正项的观察, 导致最后的证明极度复杂. 2020 年, 笔者和罗辰昀 [40] 结合了这两个精妙的方法, 避开了边界能量中的时间导数, 避开了高阶波方程的研究, 直接拿下可压带旋水波的局部适定性. 笔者近期在研究可压弹性流体 [60] 的时候发现, 即便是证明不可压极限, 也可以通过合理地设定权函数的幂次以避开高阶波方程的研究<sup>3</sup>. 笔者的工作 [40, 60] 已经将可压带旋流体在  $\sigma = 0$  情况下的适定性和不可压极限证明作出了最大程度的简化. 目前, 笔者正和合作者在研究  $\sigma > 0$  的可压水波模型的适定性理论, 希望能给出一个干净利落的证明.

#### 4.4 长时间行为: 完全公开的问题

可压流体的局部适定性理论从 2016 年开始才有较明显的进展, 而其小初值、长时间的适定性和渐近行为的研究至今是完全空白. 以  $\sigma = 0$  的情况为例, 可压无旋水波可被等价地写成半空间内 (具有零条件的) 波动方程组 (假设声速 = 1, 则对应的度量为  $g := -D_t \otimes D_t + dx_i \otimes dx^i$ .)

$$\begin{cases} D_t^2 v - \Delta v = (\nabla v)(\nabla h) \\ D_t^2 h - \Delta h = (\nabla v)(\nabla v) \\ h|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

然而迄今为止半空间带边界的色散方程理论是一片空白. 想做长时间适定性的关键步骤衰减估计都无从下手. 此外, 可压方程也不能用边界运动来决定内部 (因为内部具有声波), 即便有了衰减估计, 如何处理内部与自由边界的耦合也是一个非常困难的问题. 笔者与几个合作者目前正在尝试摸索一些思路, 期待未来能在此问题上有所建树.

<sup>1</sup>可压方程的压力项并不收敛到不可压方程的压力项.

<sup>2</sup>外力  $= \nabla \varphi$ , 其中  $\Delta \varphi = \rho \chi_{D_t}$ .

<sup>3</sup>高阶波方程的能量泛函对弹性流体是无法封闭的.

## 5 复杂流体：走向多特征波速问题

这一期的《蛙鸣》我们着重介绍了理想流体(无外力, 能量守恒)和重力水波的基本设定与发展历程, 然而现实中的流体并没有这么理想化。此外, 理想流体的研究并没有考虑到外界环境附加的物理量。现实中还有气体-液体两相流涡层问题、弹性流体、磁流体(MHD)、(广义)相对论流体(Einstein-Euler)等等。对后面三者, 在流体可压缩的情况下, 流体里面除了声波以外还有附加物理量引入的波与之耦合, 例如MHD中就有磁声波。数学上来说, 这种多波速问题使得我们无法将方程组写成在某个给定的度量下的波方程组, 而且会导致法向导数估计出现严重的问题(例如弹性流体的散度、MHD的旋度), 进而需要更深刻的分析。目前为止, 除了笔者证明了可压弹性流体的能量估计、局部适定性与不可压极限[60]和可压MHD的能量估计[38]之外, 其它复杂模型(例如涡层(vortex sheet)稳定性证明、接触间断(contact discontinuity))的适定性证明均是依赖于一阶对称双曲组的特征边界方法+Nash-Moser迭代完成, 能量估计完全未知。而不带对称性假设的广义相对论流体的数学理论更是完全空白。可以说, 人们距离理解可压缩复杂流体及其相关的多特征波速问题还非常的遥远。下一期的《蛙鸣》, 笔者将分别从多特征波方程和一阶双曲组这两个方面简要地介绍一下可压缩复杂流体的自由边界问题的不同模型(切向间断/涡层问题、接触间断、激波)及其大致进展和困难所在。

## 参考文献

- [1] Alazard, T., Burq, N., and Zuily, C. (2011). *On the water-wave equations with surface tension*. Duke Math. J., 158(3): 413-499.
- [2] Alazard, T., Burq, N., and Zuily, C. (2014). *On the cauchy problem for gravity water waves*. Invent. Math., 198(1): 71-163.
- [3] Alazard, T. and Delort, J.-M. (2015). *Global solutions and asymptotic behavior for two dimensional gravity water waves*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, (4) 48(5): 1149-1238.
- [4] Alinhac, S. (1989). *Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels*. Communications in Partial Differential Equations, 14(2): 173-230.
- [5] Ambrose, D. M. (2003). *Well-posedness of vortex sheets with surface tension*. SIAM J. Math. Anal., 35: 211-244.
- [6] Ambrose, D. M. and Masmoudi, N. (2005). *The zero surface tension limit of two-dimensional water waves*. Comm. Pure Appl. Math., 58(10): 1287-1315.
- [7] Ambrose, D. M. and Masmoudi, N. (2007). *Well-posedness of 3D vortex sheets with surface tension*. Comm. Math. Sci., 5: 391-430.
- [8] Bieri, L., Miao, S., Shahshahani, S. and Wu, S (2017). *On the Motion of a Self-Gravitating Incompressible Fluid with Free Boundary*. Comm. Math. Phy., 355(1): 161-243.
- [9] Castro, A., Córdoba, D., Fefferman, C., Gancedo, F. and Gómez-Serrano J. (2013). *Finite time singularities for the free boundary incompressible Euler equations*. Ann. of Math., 178(3), 1061-1134.
- [10] Castro, A., Córdoba, D., Fefferman, C., Gancedo, F. and Gómez-Serrano, J. (2013). *Finite time singularities for water waves with surface tension*. J. Math. Phy., 53(11), 4765339.
- [11] Cheng, C.-H. A., Coutand, D. and Shkoller, S. (2008). *On the Motion of Vortex Sheets with Surface Tension in Three-Dimensional Euler Equations with Vorticity*. Comm. Pure Appl. Math., 61(12): 1715-1752.
- [12] Cheng, C.-H. A. and Shkoller, S. (2017). *Solvability and Regularity for an Elliptic System Prescribing the Curl, Divergence, and Partial Trace of a Vector Field on Sobolev-Class Domains*. J. Math. Fluid Mech., 19: 375-422.
- [13] Christodoulou, D. and Lindblad, H. (2000). *On the motion of the free surface of a liquid*. Comm. Pure Appl. Math., 53(12): 1536-1602.
- [14] Coutand, D., Hole, J. and Shkoller, S. (2007). *Well-Posedness of the Free-Boundary Compressible 3-D Euler Equations with Surface Tension and the Zero Surface Tension Limit*. SIAM J. Math. Anal., 45(6): 3690-3767.
- [15] Coutand, D. and Shkoller, S. (2007). *Well-posedness of the free-surface incompressible Euler equations with or without surface tension*. Journal of the American Mathematical Society, 20(3): 829-930.

- [16] Coutand, D. and Shkoller, S. (2010). *A simple proof of well-posedness for the free-surface incompressible Euler equations*. Discrete and Continuous Dynamical Systems (Series S), 3(3): 429-449.
- [17] Craig, W., Sulem, C. and Sulem, P.-L. (1992) *Nonlinear modulation of gravity waves: a rigorous approach*. Nonlinearity 5(2), 497-522.
- [18] Deng, Y., Ionescu, A. D., Pausader, B. and Pusateri, F. (2017). *Global solutions of the gravity-capillary water-wave system in three dimensions*. Acta Mathematica, 219(2), 213-402.
- [19] Disconzi, M. M. and Kukavica, I. (2019). A priori estimates for the free-boundary Euler equations with surface tension in three dimensions. *Nonlinearity*, Vol 32(9), 3369-3405.
- [20] Disconzi, M. M. and Luo, C. (2019). *On the incompressible limit for the compressible free-boundary Euler equations with surface tension in the case of a liquid*. arxiv: 1901.09799, preprint.
- [21] Ebin, D. G. (1987). *The equations of motion of a perfect fluid with free boundary are not well posed*. Communications in Partial Differential Equations, 12(10): 1175–1201.
- [22] Germain, M., Masmoudi, N. and Shatah, J. (2012). *Global solutions for the gravity water waves equation in dimension 3*. Ann. of Math., 175(2), 691-754.
- [23] Germain, M., Masmoudi, N. and Shatah, J. (2012). *Global Existence for Capillary Water Waves*. Comm. Pure Appl. Math., 68(4), 625-687.
- [24] Ginsberg, D., Lindblad, H. and Luo, C. (2020) *Local well-posedness for the motion of a compressible, self-gravitating liquid with free surface boundary*. Arch. Ration. Mech. Anal., 236(2), 603-733.
- [25] Gu, X. and Wang, Y. (2019). *On the construction of solutions to the free-surface incompressible ideal magnetohydrodynamic equations*. J. Math. Pures Appliquées, 128: 1-41.
- [26] Ifrim, M. and Tataru, D. (2016) *Two dimensional water waves in holomorphic coordinates II: global solutions*. Bulletin de la Société Mathématique de France, 144(2), 369-394.
- [27] Ifrim, M. and Tataru, D. (2019) *Two dimensional gravity water waves with constant vorticity: I. Cubic lifespan* Anal. PDE, 12(4), 903-967.
- [28] Iguchi, T. (2001). *Well-posedness of the initial value problem for capillary-gravity waves*. Funkcial. Ekvac. 44(2), 219–241.
- [29] Ionescu, A. D. and Pusateri, F. (2015) *Global solutions for the gravity water waves system in 2D*. Invent. Math., 199(3), 653-804.
- [30] Kano, T. and Nishida, T. (1979). *Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde*. J. Math. Kyoto Univ., 19(2): 335-370.
- [31] Kukavica, I., Tuffaha, A., and Vicol, V. (2017). On the local existence and uniqueness for the 3D Euler equation with a free interface. *Applied Mathematics & Optimization*, 76(3): 535–563.
- [32] Lannes, D. (2005). *Well-posedness of the water-waves equations*. Journal of the American Mathematical Society, 18(3), 605-654.
- [33] Lannes, D. (2013). *The Water Wave Problem: Mathematical Analysis and Asymptotics*. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 188, AMS.
- [34] Lax, P. D. and Phillips, R. S. (1960). *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators*. Communications on Pure and Applied Mathematics, 13: 427-455.
- [35] Lindblad, H. (2005). *Well-posedness for the motion of an incompressible liquid with free surface boundary*. Ann. of Math., 162(1): 109-194.
- [36] Lindblad, H. (2005). *Well-posedness for the motion of a compressible liquid with free surface boundary*. Comm. Math. Phys., 260(2): 319-392.
- [37] Lindblad, H. and Luo, C. (2018). *A priori estimates for the compressible Euler equations for a liquid with free surface boundary and the incompressible limit*. Comm. Pure Appl. Math., 71(7): 1273-1333.
- [38] Lindblad, H. and Zhang, J. (2021). *Anisotropic Regularity of the Free-Boundary Problem in Compressible Magnetohydrodynamics*. Preprint.
- [39] Luo, C. (2018). *On the Motion of a Compressible Gravity Water Wave with Vorticity*. Annals of PDE, 4(2): 2506-2576.
- [40] Luo, C. and Zhang, J. (2020). *Local Well-posedness for the motion of a compressible gravity water wave with vorticity*. Preprint.
- [41] Ming, M. and Wang, C. (2020). *Water Waves Problem with Surface Tension in a Corner Domain I: A Priori Estimates with Constrained Contact Angle*. SIAM J. Math. Anal., 52(5), 4861-4899.
- [42] Ming, M. and Wang, C. (2020). *Water Waves Problem with Surface Tension in a Corner Domain II: The Local WellPosedness*. Comm. Pure Appl. Math., 74(2), 225-285.
- [43] Ming, M. and Zhang, Z. (2009). *Well-posedness of the water-wave problem with surface tension*. J. Math. Pures Appliquées, 92(5), 429-455.
- [44] Nalimov, V. (1974). *The Cauchy-Poisson Problem*. Dinamika Splošn. Sredy,(Vyp. 18 Dinamika Zidkost. so Svobod. Granicami), 254: 104–210.
- [45] Schweizer, B. (2005). *On the three-dimensional Euler equations with a free boundary subject to surface tension*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 22(6):753–781.
- [46] Shatah, J. and Zeng, C. (2008). *Geometry and a priori estimates for free boundary problems of the*

- Euler's equation.* Comm. Pure Appl. Math., 61(5): 698–744.
- [47] Shatah, J. and Zeng, C. (2008b). *A priori estimates for fluid interface problems.* Comm. Pure Appl. Math., 61(6): 848–876.
- [48] Shatah, J. and Zeng, C. (2011). *Local well-posedness for fluid interface problems.* Arch. Ration. Mech. Anal., 199(2): 653–705.
- [49] Su, Q. (2020).. *Long time behavior of 2D water waves with point vortices.* Comm. Math. Phy. 380, 1173-1266.
- [50] Tao, T. (2006). *Nonlinear dispersive equations: Local and global analysis.* CBMS Regional Conference Series in Mathematics 106, American Mathematical Society.
- [51] Trakhinin, Y. (2009). *Local existence for the free boundary problem for nonrelativistic and Relativistic compressible Euler equations with a vacuum boundary condition.* Comm. Pure Appl. Math., 62(11): 1551-1594.
- [52] Wang, C., Zhang, Z., Zhao, W., and Zheng, Y. (2015). *Local well-posedness and break-down criterion of the incompressible Euler equations with free boundary.* Memo. Amer. Math. Soci., to appear.
- [53] Wu, S. (1997). *Well-posedness in sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D.* Invent. Math., 130(1): 39–72.
- [54] Wu, S. (1999). *Well-posedness in sobolev spaces of the full water wave problem in 3-D.* Journal of the American Mathematical Society, 12(2): 445–495.
- [55] Wu, S. (2009). *Almost global well-posedness of the 2-D full water wave problem.* Invent. Math., 177(1): 45-135.
- [56] Wu, S. (2011). *Global well-posedness of the 3-D full water wave problem.* Invent. Math., 184(1): 125-220.
- [57] Wu, S. (2019). *Wellposedness of the 2D full water wave equation in a regime that allows for non- $C^1$  interfaces,* Inventiones mathematicae, 217(2): 241-375.
- [58] Yosihara, H. (1982). *Gravity Waves on the Free Surface of an Incompressible Perfect Fluid of Finite Depth.* Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. 18 (1982), 49-96.
- [59] Zakharov, V. E. (1968). *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid.* Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki 9(2), 86-94.
- [60] Zhang, J. (2021). *Local Well-posedness and Incompressible Limit of the Free-Boundary Problem in Compressible Elastodynamics.* arXiv: 2102.07979, preprint.
- [61] Zhang, P. and Zhang, Z. (2008). *On the free boundary problem of three-dimensional incompressible Euler equations.* Comm. Pure Appl. Math., 61(7), 877-940.

# Brunn-Minkowski 不等式

曹鸿艺

## 摘要

本文给出了测度论中著名的 Brunn-Minkowski 不等式的一个证明. 以及作为应用, 我们将用 Brunn-Minkowski 不等式给出等径不等式和在光滑边界条件下等周不等式的证明, 最后我们将讨论  $p = 1$  时 Sobolev 不等式的最佳常数.

本文的  $m$  与  $\mathcal{L}^d$  都表示  $d$  维欧式空间  $\mathbb{R}^d$  的 Lebesgue 测度.  $\mathcal{H}^s$  表示  $s$  维 Hausdorff 测度.(Hausdorff 测度相关知识可参考 Lawrence C.Evans, Measure theory and fine properties of function 中第二章)[2]

## 1 问题简介

Brunn-Minkowski 不等式是欧式空间中关于两个集合测度的一个不等式, 它看起来虽然简单, 但是实际上非常深刻: 等周不等式, Sobolev 不等式与它都有着紧密的联系.

**定理 1.1.** 设  $A$  和  $B$  为  $\mathbb{R}^d$  中的非空 Lebesgue 可测集, 则关于它们的 Lebesgue 测度满足:

$$m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \leq m^*(A + B)^{\frac{1}{d}},$$

且当不等式左端为无穷时, 右端也自动为无穷.

注 .

- 反向不等式一般不成立, 我们甚至可以构造出  $[0, 1]$  中 Hausdorff 维数为 0 的两个集合  $A$  和  $B$ , 使  $[0, 1] \subseteq A + B$ .
- 事实上, 不等式中的指数  $1/d$  可以换成任意一个大于  $1/d$  的常数  $\alpha$ , 这只需注意到当  $\alpha \geq 1/d$  时, 有  $(x^{1/d} + y^{1/d})^d \geq (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha}$ .
- 一般而言,  $A$  和  $B$  是 Lebesgue 可测集不能推出  $A + B$  也是 Lebesgue 可测集. 如在  $\mathbb{R}^2$  取  $A = [0, 1] \times \{0\}, B = \{0\} \times S$ , 其中  $S$  为  $[0, 1]$  中的不可测集. 则  $A$  和  $B$  均为  $\mathbb{R}^2$  中的零测集, 但  $A + B = [0, 1] \times S$  不是可测集. 但当  $A$  和  $B$  均为闭集, 或者其中一者为开集时,  $A + B$  是可测的.

## 2 Brunn-Minkowski 不等式的证明

本节我们来证明 Brunn-Minkowski 不等式. 证明分为以下几步:

- (1)  $A$  和  $B$  均为闭矩体的情形.
- (2) 用归纳法证明当  $A$  和  $B$  均为有限个内部不交的闭矩体之并集的情形.

作者: 曹鸿艺, 2016 级数学科学学院, 邮箱: chyyy@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 3 月 12 日来稿, 3 月 31 日第一次修改, 5 月 6 日第二次修改, 5 月 9 日接受. 稿件编辑: 邵锋.

(3)  $A$  和  $B$  均为开集, 紧集的情形.

(4) 用内正则性证明一般可测集的情形.

(1) 和 (2) 讨论的矩体的各个面分别平行于坐标轴平面.

证明. (1)  $A$  和  $B$  均为闭矩体,

$$A = \prod_{i=1}^d [0, a_i], B = \prod_{i=1}^d [0, b_i], A + B = \prod_{i=1}^d [0, a_i + b_i], \lambda_i = \frac{a_i}{a_i + b_i}, \mu_i = \frac{b_i}{a_i + b_i}, \lambda_i + \mu_i = 1$$

由均值不等式有

$$\left( \prod_{i=1}^d \lambda_i \right)^{\frac{1}{d}} + \left( \prod_{i=1}^d \mu_i \right)^{\frac{1}{d}} \leq \frac{1}{d} \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i + \sum_{i=1}^d \mu_i \right) = 1.$$

两边同时乘以  $\prod_{i=1}^d (a_i + b_i)^{\frac{1}{d}}$  得到

$$\left( \prod_{i=1}^d a_i \right)^{\frac{1}{d}} + \left( \prod_{i=1}^d b_i \right)^{\frac{1}{d}} \leq \prod_{i=1}^d (a_i + b_i)^{\frac{1}{d}},$$

即

$$m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \leq m(A + B)^{\frac{1}{d}}.$$

(2) 当  $A$  和  $B$  均为有限个内部不交的闭矩体的并集, 我们对  $A$  和  $B$  所包含的矩体总数  $n$  作归纳. 当  $n = 2$  时, 由 (1) 知命题成立, 现假设  $A$  和  $B$  中总矩体数不超过  $n$  时命题成立. 下证总数为  $n + 1$  时命题成立.

假设  $A$  和  $B$  包含的矩体数为  $n_A$  和  $n_B$ , 且  $n_A + n_B = n + 1$ ,  $n_A > 1$ . 任取  $A$  中的一个矩体  $Q$ , 它共有  $2d$  个面, 选其中任意一个面, 将其所在的超平面记为  $\Sigma$ , 则  $\Sigma$  将  $\mathbb{R}^d$  分成  $\Sigma^+$  与  $\Sigma^-$  两部分 (若  $A$  中矩体与超平面相交, 则把该矩体拆分为被超平面分割成的两部分). 不妨设  $Q \subseteq \Sigma^+$ , 则  $\Sigma^-$  中的矩体数不超过  $n_A - 1$ .  $\Sigma^+$  中的矩体数不超过  $n_A$ , 为  $n_A$  当且仅当  $A$  中的每个矩体内部均与  $\Sigma^+$  相交.

但若存在  $Q$  以外的某个矩体  $P$ , 使得  $P$  内部与  $Q$  的  $2d$  个面所在平面  $\Sigma_i^+(1 \leq i \leq 2d)$  都相交, 则  $P$  与  $Q$  的内部交非空, 产生矛盾. 从而必存在某个超平面  $\Sigma$  把  $A$  分成矩体数都不超过  $n_A - 1$  的两部分. 即  $A = A^+ \cup A^-$ , 且  $n_{A^\pm} \leq n_A - 1$ . 对于  $B$ , 存在某个超平面  $\Pi$  平行于  $\Sigma$ ,  $\Pi$  把  $B$  分成  $B^+$  和  $B^-$  两部分,  $n_{B^\pm} \leq n_B$ , 且它们的测度满足

$$\frac{m(A^+)}{m(B^+)} = \frac{m(A^-)}{m(B^-)} = \frac{m(A^+ \cup A^-)}{m(B^+ \cup B^-)} = \lambda.$$

易知  $A^+ + B^+$  与  $A^- + B^-$  内部不交, 且  $n_{A^\pm} + n_{B^\pm} \leq n_A - 1 + n_B = n$ . 因此

$$\begin{aligned} m(A + B) &= m((A^+ \cup A^-) + (B^+ \cup B^-)) \\ &\geq m((A^+ + B^+) \cup (A^- + B^-)) \\ &= m(A^+ + B^+) + m(A^- + B^-) \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \left( m(A^+)^{\frac{1}{d}} + m(B^+)^{\frac{1}{d}} \right)^d + \left( m(A^-)^{\frac{1}{d}} + m(B^-)^{\frac{1}{d}} \right)^d \\ &= (m(B^+) + m(B^-)) \left( \lambda^{\frac{1}{d}} + 1 \right)^d \\ &= m(B) \left( \lambda^{\frac{1}{d}} + 1 \right)^d \end{aligned}$$

$$= (m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}})^d,$$

其中 (\*) 处是由于归纳假设. 故矩体总数为  $n+1$  时也成立, 由数学归纳法知  $A$  和  $B$  均为有限个内部不交的闭矩体之并时结论成立.

- (3) 设  $A$  和  $B$  均为有限测度的非空开集,  $\mathbb{R}^d$  中的开集可以写成可数个内部不交的二进制闭矩体的并. 特别的, 由单调收敛定理知对任意  $\epsilon > 0$ , 存在  $\tilde{A} \subset A$  与  $\tilde{B} \subset B$  为有限个内部不交的闭矩体的并, 满足  $m(\tilde{A}) + \epsilon > m(A)$ ,  $m(\tilde{B}) + \epsilon > m(B)$ . 则有

$$\begin{aligned} (m(A) - \epsilon)^{\frac{1}{d}} + (m(B) - \epsilon)^{\frac{1}{d}} &\leq m(\tilde{A})^{\frac{1}{d}} + m(\tilde{B})^{\frac{1}{d}} \\ &\stackrel{(2)}{\leq} m(\tilde{A} + \tilde{B})^{\frac{1}{d}} \\ &\leq m(A + B)^{\frac{1}{d}}. \end{aligned}$$

由  $\epsilon$  的任意性,  $A$  和  $B$  均为有限测度的非空开集情形得证.

设  $A, B$  均为非空紧集, 则  $A + B$  也为紧集, 令

$$A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \rho(x, A) < \epsilon\}, B_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \rho(x, B) < \epsilon\}.$$

它们均为有界开集, 且

$$A_\epsilon + B_\epsilon \subseteq (A + B)_{2\epsilon}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (A + B)_{2\epsilon} = A + B.$$

由测度的单调减收敛定理有

$$\begin{aligned} m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( m(A_\epsilon)^{\frac{1}{d}} + m(B_\epsilon)^{\frac{1}{d}} \right) \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} m(A_\epsilon + B_\epsilon)^{\frac{1}{d}} \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} m((A + B)_{2\epsilon})^{\frac{1}{d}} \\ &= m(A + B)^{\frac{1}{d}}, \end{aligned}$$

从而  $A, B$  均为非空紧集的情形得证.

- (4)  $A$  和  $B$  为非空可测集, 设  $\tilde{A}$  与  $\tilde{B}$  为  $A$  与  $B$  中的任意非空紧集, 则有

$$m(\tilde{A})^{\frac{1}{d}} + m(\tilde{B})^{\frac{1}{d}} \leq m(\tilde{A} + \tilde{B})^{\frac{1}{d}} = m^*(\tilde{A} + \tilde{B})^{\frac{1}{d}} \leq m^*(A + B)^{\frac{1}{d}}.$$

由可测集的内正则性知

$$m(A)^{\frac{1}{d}} + m(B)^{\frac{1}{d}} \leq m^*(A + B)^{\frac{1}{d}}$$

□

注. 事实上, 定理1.1去掉可测性条件也成立, 即有

$$m^*(A)^{\frac{1}{d}} + m^*(B)^{\frac{1}{d}} \leq m^*(A + B)^{\frac{1}{d}}.$$

此时我们要考虑

$$S^* = \left\{ x : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{m^*(S \cap B(x, r))}{\alpha(n)r^n} = 1 \right\}.$$

可以证明  $S^*$  是可测的, 且  $m^*(S) = m(S^*)$  (参见 [3] 的 2.9.11 节). 再注意到  $A^* + B^* \subset (A+B)^*$ , 这样就证明了一般情形.

### 3 用 Brunn-Minkowski 不等式证明等径不等式

几何中一个自然的问题是: 给定一个集合的直径, 问它的测度是否有一个上界? 比较自然地猜测当这个集合是球的时候, 测度能达到最大值. 等径不等式给了一个确定的回答.

**定理 3.1** (等径不等式). 设  $A$  为  $\mathbb{R}^d$  中的集合,  $\text{diam } A := \sup_{x,y \in A} \rho(x,y)$ , 则有

$$m^*(A) \leq \alpha(\rho) \left( \frac{\text{diam } A}{2} \right)^d$$

其中  $\rho$  为  $\mathbb{R}^d$  在某个范数下的度量,  $\alpha(\rho)$  为在该范数下单位球的 Lebesgue 测度.

**证明.** 易知  $\text{diam } A = \text{diam } \bar{A}$ ,  $m^*(A) \leq m^*(\bar{A}) = m(\bar{A})$ . 当  $x, y \in \bar{A}$  时有  $\|x - y\| = \rho(x, y) \leq \text{diam } \bar{A}$ , 故  $\bar{A} - \bar{A} \subset \overline{B(0, \text{diam } A)}$ .

由 Brunn-Minkowski 不等式有

$$\begin{aligned} 2m(\bar{A})^{\frac{1}{d}} &= m(\bar{A})^{\frac{1}{d}} + m(-\bar{A})^{\frac{1}{d}} \\ &\leq m^*(\bar{A} - \bar{A})^{\frac{1}{d}} \\ &\leq m(B(0, \text{diam } A))^{\frac{1}{d}} \\ &= m(\text{diam } (A) \cdot B(0, 1))^{\frac{1}{d}} \\ &= \text{diam } A \cdot (\alpha(\rho))^{\frac{1}{d}} \end{aligned}$$

因此

$$m^*(A) \leq m(\bar{A}) \leq \alpha(\rho) \left( \frac{\text{diam } A}{2} \right)^d.$$

当  $A$  为球体时, 等号成立. □

**注.** 运用该形式的等径不等式可以证明:  $\mathbb{R}^d$  的  $d$  维 Hausdorff 测度  $\mathcal{H}^d$  定义中的直径可以换成其他范数下的直径, 相应的常数  $\alpha(d)$  换成该范数下单位球的 Lebesgue 测度. 这样新定义的  $\widetilde{\mathcal{H}^d}$  也与 Lebesgue 测度  $\mathcal{L}^d$  相同, 这说明了  $\mathbb{R}^d$  的  $d$  维 Hausdorff 测度不依赖于范数.

### 4 用 Brunn-Minkowski 不等式证明等周不等式

在平面上给定曲线的周长, 问它围成的面积是否有一个上界? 这是著名的等周问题. 事实上等周问题能推广到高维情形, 这时我们需要用表面积 ((d-1) 维 Hausdorff 测度) 来代替二维曲线的周长, Lebesgue 测度来代替二维区域的面积, 这就是著名的等周不等式.

**定理 4.1** (边界光滑条件下的等周不等式). 设  $\Sigma$  为  $\mathbb{R}^d$  中的光滑封闭曲面,  $\Omega$  为  $\Sigma$  所围成的区域, 并且  $\Omega$  与  $\Sigma$  都是可测的. 则有

$$a^d m(\Omega)^{d-1} \leq \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\Sigma)^d}{\alpha(d)}.$$

证明. 在 Brunn-Minkowski 不等式中取  $A = \Omega, B = B(0, r)$ , 则有

$$m(\Omega)^{\frac{1}{d}} + \alpha(d)^{\frac{1}{d}}r \leq m(\Omega + B(0, r))^{\frac{1}{d}}.$$

所以

$$\begin{aligned} \alpha(d)^{\frac{1}{d}} &\leq \frac{m(\Omega + B(0, r))^{\frac{1}{d}} - m(\Omega)^{\frac{1}{d}}}{r} \\ &= \frac{m(\Omega + B(0, r)) - m(\Omega)}{r} \cdot \frac{1}{d} (m(\Omega) + o(1))^{\frac{1}{d}-1}. \end{aligned} \quad (*)$$

由余面积公式 (可参考 Lawrence C.Evans, Measure theory and fine properties of function 中第三章)[2]

$$\begin{aligned} m(\Omega + B(0, r)) - m(\Omega) &= m(\{x \mid 0 < \rho(x, \Omega) \leq r\}) \\ &= \int_0^r \mathcal{H}^{d-1}(\{x \mid \rho(x, \Omega) = t\}) dt. \end{aligned}$$

因为  $\Sigma$  光滑, 所以

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{H}^{d-1}(\{x \mid \rho(x, \Omega) = r\}) = \mathcal{H}^{d-1}(\Sigma).$$

在 (\*) 中令  $r \rightarrow 0$  移项整理得到

$$d^d m(\Omega)^{d-1} \leq \frac{\mathcal{H}^{d-1}(\Sigma)^d}{\alpha(d)}.$$

□

## 5 Sobolev 不等式最佳常数讨论

**定理 5.1.** 假设  $\Omega$  是  $\mathbb{R}^d$  中的开集,  $q \geq 1$ ,  $V \subset\subset \Omega$  为具有光滑边界的开集, 若有

$$C = \sup_V \frac{\mathcal{L}^d(V)^{\frac{1}{q}}}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial V)} < \infty,$$

则对任意  $u \in C_c^\infty(\Omega)$ , 有

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)},$$

此外常数  $C$  是最佳的.

我们需要一个引理.

**引理 5.2.** 设  $f$  是  $(0, +\infty)$  上的非单调递减函数,  $p \geq 1$ , 则有

$$p \int_0^\infty x^{p-1} f(x)^p dx \leq \left( \int_0^\infty f(x) dx \right)^p.$$

证明. 由  $f$  单调递减, 有

$$p \int_0^\infty (xf(x))^{p-1} f(x) dx \leq p \int_0^\infty \left( \int_0^x f(t) dt \right)^{p-1} f(x) dx = \int_0^\infty \frac{d}{dx} \left( \int_0^x f(t) dt \right)^p dx = \left( \int_0^\infty f(x) dx \right)^p.$$

□

现在我们来证明定理5.1.

定理5.1的证明. 设  $A_t = \{x : |u(x)| > t\}$ , 则

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \left( q \int_0^\infty \mathcal{L}^d(A_t) t^{q-1} dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

由于  $\mathcal{L}^d(A_t)^{\frac{1}{q}}$  是非负单调递减的, 运用引理得到

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \int_0^\infty \mathcal{L}^d(A_t)^{\frac{1}{q}} dt \leq \int_0^\infty \frac{\mathcal{L}^d(A_t)^{\frac{1}{q}}}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial A_t)} \mathcal{L}^d(A_t)^{\frac{1}{q}} dt \leq \sup_V \frac{\mathcal{L}^d(V)^{\frac{1}{q}}}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial V)} \int_0^\infty \mathcal{H}^{d-1}(\partial A_t) dt.$$

可以证明  $u \in C_c^\infty(\Omega)$  时, 对于几乎处处的  $t$ ,  $A_t$  的边界是光滑的且  $\partial A_t = \{x : |u(x)| = t\}$ . [4]

运用余面积公式

$$\|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} = \int_0^\infty \mathcal{H}^{d-1}(\{x : |u(x)| = t\}) dt = \int_0^\infty \mathcal{H}^{d-1}(\partial A_t) dt,$$

于是

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq \sup_V \frac{\mathcal{L}^n(V)^{\frac{1}{q}}}{\mathcal{H}^{n-1}(\partial V)} \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)} = C \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)},$$

不等式得证. 以下说明常数是最佳的.

设  $V \subset\subset \Omega$  具有光滑边界, 定义  $d(x) = dist(x, V)$ ,  $V_t = \{x : d(x) < t\}$ ,  $u_\varepsilon(x) = \alpha(d(x))$ , 其中  $\alpha(d)$  是  $[0, 1]$  上的光滑单调减函数, 且在 0 附近为 1, 在  $(\varepsilon, 1]$  上为 0. 由余面积公式有

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon| dx = \int_0^\varepsilon -\alpha'(t) \mathcal{H}^{d-1}(\partial V_t) dt.$$

一方面, 由光滑性当  $t \rightarrow 0$  时, 有  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial V_t) \rightarrow \mathcal{H}^{d-1}(\partial V)$ , 而

$$\int_0^\varepsilon -\alpha'(t) = 1,$$

因此

$$\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon| dx \rightarrow \mathcal{H}^{d-1}(\partial V).$$

另一方面,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \geq \mathcal{L}^d(V)^{1/q},$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 故常数  $C$  是最佳的.  $\square$

当  $\Omega = \mathbb{R}^d (d \geq 2)$  时, 等周不等式说明了

$$C = \sup_V \frac{\mathcal{L}^d(V)^{\frac{1}{q}}}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial V)} \leq d^{-1} \alpha(d)^{-\frac{1}{d}}$$

且等号在  $V$  为单位球时取得. 因此我们得到

$$\|u\|_{L^{\frac{d}{d-1}}(\mathbb{R}^d)} \leq d^{-1} \alpha(d)^{-\frac{1}{d}} \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

对任意  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  成立, 并且右端的常数  $d^{-1} \alpha(d)^{-\frac{1}{d}}$  是最佳的.

运用余面积公式的方法我们看出等周问题事实上可等价于  $p = 1$  的 Sobolev 不等式的最佳常数问题.

当  $d > p \geq 1$  时, 将上式中的  $u$  替换为  $|u|^{p(d-1)/(d-p)}$ , 得到

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{pd/(d-p)}}^{p(d-1)/(d-p)} &\leq \frac{p(d-1)}{d(d-p)} \alpha(d)^{-\frac{1}{d}} \| |u|^{d(p-1)/(d-p)} \nabla u \|_{L^1} \\ &\leq \frac{p(d-1)}{d(d-p)} \alpha(d)^{-\frac{1}{d}} \|u\|_{L^{pd/(d-p)}}^{d(p-1)/(d-p)} \|\nabla u\|_{L^p},\end{aligned}$$

因此

$$\|u\|_{L^{pd/(d-p)}} \leq \frac{p(d-1)}{d(d-p)} \alpha(d)^{-\frac{1}{d}} \|\nabla u\|_{L^p}.$$

但当  $p > 1$  时, 上述的常数不是最佳的, 此时我们仍然可以借助 Brunn-Minkowski 不等式和更精细的方法研究它的最佳常数问题. [1]

## 参考文献

- [1] SG Bobkov and Michel Ledoux. From brunn–minkowski to sharp sobolev inequalities. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 187(3):369–384, 2008.
- [2] L. C. Evans and R. F. Gariepy. Measure theory and fine properties of functions. CRC Press,, 1991.
- [3] Herbert Federer. *Geometric measure theory*. Springer, 2014.
- [4] Vladimir Maz'ya. *Sobolev spaces*. Springer, 2013.

# 一道丘赛题的解答与推广：随机幂级数在端点处的渐近性态

邵锋

## 摘要

在本文中, 我们考虑随机幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, x \in [0, 1),$$

其中幂级数的系数  $\{a_n\}$  是独立同分布的随机变量列, 其共同分布为取值于某个有限集的离散均匀分布, 即取到该有限集上任何值的概率都相同. 我们将证明, 如果系数的期望是正数 (或者负数), 那么就有

$$P\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \infty\right) = 1 \quad \left(\text{或者 } P\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\infty\right) = 1\right).$$

如果系数的期望是 0, 则

$$P\left(\limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \infty, \quad \liminf_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\infty\right) = 1.$$

这是 2019 年丘赛初赛概率统计个人赛的一道题的推广, 我们会先给出这道题的证明, 然后再简要证明推广的结果.

## 1 简介

### 1.1 问题的引入

2019 年 4 月份举办的丘成桐大学生数学竞赛概率统计个人赛中有这样一道题:

**命题 1.1.** Suppose  $(\epsilon_n)_{n \geq 1}$  is a sequence of i.i.d. random variables and the common law is Bernoulli:

$$\mathbb{P}[\epsilon_1 = 1] = \mathbb{P}[\epsilon_1 = -1] = 1/2.$$

Consider the random series  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x^n$ . Show that the random series attains zero infinitely many times on  $x \in [0, 1)$  almost surely.

当然了, 考场上我没做出来, 据说当年没有考生做出来这道题. 后来我在学随机过程的时候, 了解到布朗运动也有类似的性质: 假设  $B = (B_t)_{t \geq 0}$  是一维布朗运动, 则以概率 1, 对所有  $\epsilon > 0$ ,  $B$  会在时间  $s \in (0, \epsilon)$  内无数次经过出发点 (见 [1], Proposition 2.14.) 于是就在 mathematics stackexchange 上问了这道题 [2], 结果热心的法国网友在当天就回答了问题 [6], 并且指出了该问题在 [4] 中有进一步的推广. 现在我们就来尝试推广问题 1.1 的结论.

作者: 邵锋, 2017 级数学科学学院, 邮箱: sf1999yy2001@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 3 月 12 日来稿, 3 月 23 日接受. 稿件编辑: 章俊彦。

设  $D = \{d_1, \dots, d_k\}$  是实数集的一个有限子集. 考虑

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n,$$

其中  $a_n$  是取值于  $D$  中的独立同分布的随机变量, 它们取每个  $d_j (1 \leq j \leq k)$  的概率都是  $1/k$ . 为了排除平凡的情形, 我们假设  $k \geq 2$ .<sup>1</sup>

首先建立我们的概率空间  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . 对每个  $n \in \mathbb{N}$ , 考虑概率空间  $(D, \mathcal{A}_n, P_n)$ , 这里  $\mathcal{A}_n$  是  $D$  上的离散拓扑, 概率测度  $P_n$  定义为

$$P_n(D') = \frac{\#D'}{\#D} = \frac{\#D'}{k}, \quad D' \subset D.$$

我们需要的概率空间就定义为  $(D, \mathcal{A}_n, P_n)$  的乘积空间, 即  $\Omega = \prod_{n \in \mathbb{N}} D$ ,  $\mathcal{A}$  是  $\Omega$  上的 Borel 集 ( $\Omega$  上的拓扑是乘积拓扑  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ ), 概率测度为  $P = \prod_{n \in \mathbb{N}} P_n$ .

任取  $\Omega$  中的一个元素, 我们记为  $(a_n)$ , 其中  $a_n$  是它的第  $n$  个分量. 对每个  $(a_n) \in \Omega$ , 我们定义相应的幂级数

$$f_{(a_n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

在接下来的文字中, 大部分情况下我们都是对某个固定的  $(a_n) \in \Omega$  处理的, 所以我们用更简短的记号  $f$  来代替  $f_{(a_n)}$ . 当然了, 一旦有混淆的可能, 我们会重新使用更长的记号  $f_{(a_n)}$ .

设  $R$  是  $f$  的收敛半径, 根据 Hadamard 公式以及  $a_n \in D$  可知

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = 0 \text{ 或 } 1,$$

并且  $1/R = 0$  当且仅当存在  $m \in \mathbb{N}$  使得  $a_n = 0$  对所有  $n \geq m$  都成立, 即

$$\{R \neq 1\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{(a_n) \in \Omega : a_n = 0\}.$$

因为事件  $\{(a_n) \in \Omega : a_n = 0\}$  互相独立并且  $P(\{(a_n) \in \Omega : a_n = 0\}) \leq 1/k \leq 1/2$ , 所以我们可以很容易地得到  $P(R \neq 1) = 0$ , 即  $P(R = 1) = 1$ . 作为问题 1.1 的推广, 我们考虑当  $x \rightarrow 1^-$  时,  $f$  的渐近性态. 根据我们对收敛半径的讨论, 我们对以下三种情形会比较感兴趣:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \tag{1.1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \tag{1.2}$$

$$\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty \text{ 且 } \liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty. \tag{1.3}$$

## 1.2 主要结果

我们的第一个结果是: 几乎对所有  $\Omega$  中的序列, 都会满足上述三条性质之一.

**命题 1.2.** 我们有

$$P(f \text{ 满足(1.1) 或(1.2) 或(1.3)}) = 1.$$

我们还会指明在何条件下上述三条性质其中之一几乎处处成立, 我们把结果写成两条定

---

<sup>1</sup>这里我们假设幂级数从  $x$  的一次项开始, 其实也可以从零次项开始. 这里我们沿用 [4] 中的记号, 在本文中,  $\mathbb{N}$  表示正整数集.

理.

**定理 1.3.** 如果  $\sum_{d \in D} d > 0$ , 则

$$P(f \text{ 满足(1.1)}) = 1.$$

如果  $\sum_{d \in D} d < 0$ , 则

$$P(f \text{ 满足(1.2)}) = 1.$$

**定理 1.4.** 如果  $\sum_{d \in D} d = 0$ , 则

$$P(f \text{ 满足(1.3)}) = 1.$$

现在定理1.4有如下的简单推论, 也就回答了我们的问题1.1.

**推论 1.5.** 如果  $\#D \geq 2$ , 且  $\sum_{d \in D} d = 0$ , 则以概率 1, 对任意实数  $y \in \mathbb{R}$ , 都存在无穷多个  $x \in (0 < x < 1)$  满足

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

在开始我们的一系列证明之前, 我们还需要说清楚一件事: (1.1)-(1.3) 所定义的集合确实是可测集! 也就是说  $\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  和  $\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  都是随机变量.

**引理 1.6.** 对任意  $a \in \mathbb{R}$ , 我们有

$$\left\{ (a_n) \in \Omega : \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n > a \right\} \in \mathcal{A},$$

$$\left\{ (a_n) \in \Omega : \liminf_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n > a \right\} \in \mathcal{A}.$$

该引理的证明我们略去, 感兴趣的读者可参考 [4].

## 2 丘赛题的解答

刚才已经指出, 问题1.1的证明可由我们推广后的定理1.4给出, 但这个丘赛题总归是特殊情况, 而我们推广后的证明是比较长的, 这相当于“杀鸡用了宰牛刀”. 为了方便同学们备考丘成桐大学生数学竞赛, 在这里我们给出问题1.1的比较简短的直接证明. 当然了, 证明的思路应当和上面叙述定理的思路是差不多的, 即: 在  $D = \{-1, 1\}$  的情况下, 先证明命题1.2, 再证明定理1.4. 值得指出的是, 在证明中用到了随机过程的一些概念和想法.

**问题1.1的证明.** 将随机变量  $\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  的分布记为  $\mu$ , 即

$$\mu(B) := P\left(\limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x^n \in B\right), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

定义停时

$$\tau := \inf \left\{ N \in \mathbb{N} : \sum_{n=1}^N \epsilon_n = 1 \right\},$$

则  $P(\tau < \infty) = 1$  且

$$\xi_n := \epsilon_{n+\tau}, \quad n \in \mathbb{N}$$

是一列独立同分布的 Bernoulli 随机变量 (根据随机游走的强 Markov 性, 具体证明可见 [6] 的评论区). 特别地,  $(\xi_n)$  与  $(\epsilon_n)$  是同分布的, 所以

$$\mu(B) = P\left(\limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x^n \in B\right), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \quad (2.1)$$

又注意到

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x^n &= \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=\tau+1}^{\infty} \epsilon_n x^n \\ &= - \sum_{n=1}^{\tau} \epsilon_n + \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x^n \\ &= -1 + \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n x^n, \end{aligned}$$

这与 (2.1) 相结合就可以得到

$$\mu(B) = \mu(B + 1), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

于是,  $\mu$  就是  $\mathbb{R}$  上平移不变的有限 Borel 测度, 从而是平凡测度<sup>1</sup>, 即  $\mu(\mathbb{R}) = 0$ . 这说明

$$P\left(\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ 或 } -\infty\right) = 1.$$

同理对  $\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  我们也有

$$P\left(\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \text{ 或 } -\infty\right) = 1.$$

这就证明了  $D = \{-1, 1\}$  时的命题1.2.

最后, 注意到  $(-\epsilon_n)$  与  $(\epsilon_n)$  同分布, 所以  $\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  与  $\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  同分布, 从而

$$P\left(\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty \text{ 且 } \liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty\right) = 1.$$

这就完成了证明. □

### 3 命题1.2的证明

现在我们转到推广的情形. 我们先证明命题1.2, 该证明与之前的简单情形有相似之处.

定义

$$\mu_+(B) = P\left(\limsup_{x \rightarrow 1^-} f(x) \in B\right), \quad \mu_-(B) = P\left(\liminf_{x \rightarrow 1^-} f(x) \in B\right), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

与之前一样, 我们只需证明  $\mu_+, \mu_-$  都是平移不变的, 从而  $\mu_+ = 0, \mu_- = 0$ . 我们首先需要定义一组平移函数, 来代替之前证明过程中用到的停时. 因为在我们推广的条件下, 如果还继续定义那样的停时  $\tau$ , 我们不一定能得到  $P(\tau < \infty) = 1$ , 而这在证明中是关键的. 对任意  $N \in \mathbb{N}$ , 我

<sup>1</sup>这是 Haar 测度的一般性质, 但在此处, 可以作为一个实分析的不难的习题, 如果尝试无果, 可以在 [7] 中找到提示.

们定义满足下列条件的函数  $g_N^\sharp : \text{dom } g_N^\sharp \subset D^N \rightarrow D^N$ :

- (i)  $g_N^\sharp$  是定义域与值域之间的双射;
- (ii) 如果  $g_N^\sharp((a_1, \dots, a_N)) = (b_1, \dots, b_N)$ , 则

$$\sum_{n=1}^N b_n = (d_2 - d_1) + \sum_{n=1}^N a_n.$$

容易看出, 一般我们不能把  $g_N^\sharp$  定义在整个  $D^N$  上. 尽管如此, 我们下面的引理说明, 我们可以在一个相当大的子集上定义  $g_N^\sharp$ .

**引理 3.1.** 我们可以选取满足要求的函数  $g_N^\sharp$  使得

$$\#\text{dom } g_N^\sharp = k^N(1 - o(1)), \quad N \rightarrow \infty.$$

该引理的证明比较繁琐, 在此略去, 感兴趣的读者<sup>1</sup>可参考 [4]. 有了这个引理, 就可以证明命题1.2了.

**引理 3.2.** 测度  $\mu_+$  满足

$$\mu_+(B) = \mu_+(B + d_2 - d_1), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

**证明.** 为了记号简便, 记  $\mu = \mu_+$ . 首先固定  $\epsilon > 0$ . 对  $\mathbb{R}$  的任意子集  $S$  定义

$$L(S) := \left\{ (a_n) \in \Omega : \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \in S \right\}.$$

对  $(a_n) \in \Omega$  并且  $(a_1, \dots, a_N) \in \text{dom } g_N^\sharp$ , 我们记

$$G_N^\sharp((a_n)) = (b_n),$$

其中  $(b_1, \dots, b_N) = g_N^\sharp((a_1, \dots, a_N))$ , 且当  $n > N$  时有  $b_n = a_n$ , 进而

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n &= \sum_{n=1}^N b_n + \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n x^n \\ &= d_2 - d_1 + \sum_{n=1}^N a_n + \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \\ &= d_2 - d_1 + \limsup_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

这说明如果  $(a_n) \in \text{dom } G_N^\sharp \cap L(B)$ , 那么  $G_N^\sharp((a_n)) \in L(B + d_2 - d_1)$ , 其中  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

根据引理3.1, 如果  $N$  充分大, 则  $P(\text{dom } G_N^\sharp) \geq 1 - \epsilon$ , 于是  $P(\text{dom } G_N^\sharp \cap L(B)) \geq P(\text{dom } G_N^\sharp) + P(L(B)) - 1 \geq \mu(B) - \epsilon$ . 再利用  $P(G_N^\sharp(B)) = P(B)$ ,  $B \subset \text{dom } G_N^\sharp$ , 我们有

$$\mu(B + d_2 - d_1) = P(L(B + d_2 - d_1)) \geq P(G_N^\sharp(\text{dom } G_N^\sharp \cap L(B))) \geq \mu(B) - \epsilon.$$

<sup>1</sup>虽然我并不建议你们读.

最后再利用  $\epsilon > 0$  的任意性可得

$$\mu((B + d_2 - d_1) \geq \mu(B).$$

类似我们可以证明  $\mu((B - d_2 + d_1) \geq \mu(B)$ . □

最后再利用刚才用过的事实:  $\mathbb{R}$  上平移不变的有限 Borel 测度只有平凡测度. 这就完成了命题1.2的证明.

## 4 期望不为 0 的情形

本节我们证明定理1.3. 因为该定理的两部分有对称关系, 我们只需证明第一条. 在本节我们假设  $\sum_{j=1}^k d_j > 0$ .

**引理 4.1.** 我们有

$$P(f \text{ 满足(1.1)}), P(f \text{ 满足(1.2)}) \in \{0, 1\}.$$

**证明.** 对任意  $n \in \mathbb{N}$ , 令  $\mathcal{F}_n = \sigma(a_n, a_{n+1}, \dots)$ . 则尾  $\sigma$  代数为  $\mathcal{T} = \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$ . 令

$$A_+ = \left\{ (a_n) \in \Omega : \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \infty \right\}, A_- = \left\{ (a_n) \in \Omega : \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = -\infty \right\}.$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \pm\infty \text{ 当且仅当 } \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n = \pm\infty, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

所以  $A_{\pm} \in \mathcal{T}$ . 根据 Kolmogorov 0-1 律<sup>1</sup>, 我们有  $P(A_{\pm}) \in \{0, 1\}$ . □

根据引理4.1, 要证明定理1.3, 只需证  $P(f \text{ 满足(1.1)}) > 0$  即可. 再根据命题1.2, 只需证  $P(f \text{ 满足(1.2) 或(1.3)}) < 1$  即可.

**引理 4.2.** 存在  $K \in \mathbb{R}$  使得

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n > K, \quad \forall 0 < x < 1\right) > 0.$$

**证明.** 若  $\min D \geq 0$ , 则  $K = 0$  就满足要求, 所以我们假设  $\min D < 0$ . 记  $S_l = \sum_{n=1}^l a_n$  为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和, 则  $S_l$  是  $l$  个独立同分布的随机变量之和. 因为  $\sum_{j=1}^k d_j > 0$ , 由强大数律,

$$P\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty\right) = 1.$$

记  $A_m = \{(a_n) \in \Omega : \sum_{n=1}^l a_n > 0, \quad \forall l > m\}$ , 则

$$P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = 1.$$

<sup>1</sup>Kolmogorov 0-1 律在任何标准的概率论教材中都能找到, 比如 [3] 中的定理 16.3B.

所以存在  $m \in \mathbb{N}$  使得  $P(A_m) > 0$ . 固定这样的  $m$ , 我们有

$$P(S_l > m \cdot \min D, \forall l) > 0.$$

在集合  $\{S_l > m \cdot \min D, \forall l\}$  上, 对任意  $x \in (0, 1)$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n (x^n - x^{n+1}) \\ &> (m \cdot \min D) \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) \\ &= (m \cdot \min D)x > m \cdot \min D. \end{aligned}$$

所以,  $K = m \cdot \min D$  满足要求.  $\square$

该引理说明,  $P(f \text{ 满足(1.2) 或(1.3)}) < 1$ , 正如之前提到的, 这就证明了定理1.3.

## 5 期望为 0 的情形

本节我们证明定理1.4, 此处的证明与之前问题1.1对应部分的证明有相似之处. 假设  $\sum_{j=1}^k d_j = 0$ . 我们引入  $D$  上的置换  $p$ :  $p(d_j) = d_{j+1}, 1 \leq j \leq k-1; p(d_k) = d_1$ . 这诱导了一个  $\Omega$  上的置换  $\mathbf{p}$ :  $\mathbf{p}((a_n)) = (b_n)$ , 其中  $b_n = p(a_n), \forall n \in \mathbb{N}$ . 现在, 对任意  $x \in (0, 1)$ , 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} f_{\mathbf{p}^j((a_n))}(x) &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} p^j(a_n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^{k-1} p^j(a_n) \right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{j=1}^k d_j \right) = 0. \end{aligned}$$

所以对任意  $(a_n) \in \Omega$  以及任意  $x \in (0, 1)$ , 在  $f_{(a_n)}(x), f_{\mathbf{p}((a_n))}(x), \dots, f_{\mathbf{p}^{k-1}((a_n))}(x)$  中至少有一个是非负的, 也至少有一个是非正的. 换句话说, 对任意  $(a_n) \in \Omega$ , 随着  $x \rightarrow 1-$ , 在  $f_{(a_n)}(x), f_{\mathbf{p}((a_n))}(x), \dots, f_{\mathbf{p}^{k-1}((a_n))}(x)$  中至少有一项不满足 (1.1), 也至少有一项不满足 (1.2).

注意到置换  $\mathbf{p}$  是保测的, 即  $P(A) = P(\mathbf{p}(A)), \forall A \in \mathcal{A}$ , 所以

$$P(f \text{ 满足(1.1)}), P(f \text{ 满足(1.2)}) \leq 1 - 1/k.$$

由引理4.1, 这说明

$$P(f \text{ 满足(1.1)}), P(f \text{ 满足(1.2)}) = 0.$$

最后根据命题1.2可知, 定理1.4得证.

## 6 总结

本文我们对一道丘赛题进行了适当的推广, 然而我们要思考的是: 能否继续推广? 比如随机幂级数如果不再是均匀分布, 这样的结论还对吗? 也就是说当  $D = \{d_1, \dots, d_k\}$ , 正数

$p_1, \dots, p_k$  满足  $\sum_{j=1}^k p_j = 1$  且系数取到每个值  $d_j$  的概率为  $p_j$  时, 我们的结论还对吗?

事实上, 在这种情况下, 命题1.2还是对的, 但是证明就要修改一下了, 因为函数  $G_N^\sharp$  不再是保测的了. 但最终我们可以证明  $\mu_\pm(B + d_2 - d_1) \geq \mu_\pm(B)$ . 而这样的有限 Borel 测速也只有平凡测度, 从而命题1.2就证好了. 至于定理1.3, 注意到我们用的证明里面并没有用到“系数服从均匀分布”的条件, 所以定理1.3自然还是对的. 但是定理1.4在现在这种情况下是否正确, 仍然是一个公开问题!

除此之外, 本文考虑的是概率层面的问题: 比如在定理1.4中, 我们证明了不满足 (1.3) 的集合在概率层面是很小的. 事实上, 我们也可以在 Baire 纲层面来考虑这问题. [4] 中证明了: 当  $D$  中既有正数又有负数的时候, 不满足 (1.3) 的集合是第一纲集. 定理1.3也有类似的对应结果. 关于 Baire 纲层面类似问题的研究有很多, 感兴趣的同学可以通过 [5] 的简介部分了解一些相关历史.

## 参考文献

- [1] Jean-François Le Gall. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics 274. Springer, Cham, 2018.
- [2] Feng Shao ([https://math.stackexchange.com/users/624428/feng\\_shao](https://math.stackexchange.com/users/624428/feng_shao)). A random series has infinitely many zeros in  $[0, 1]$  almost surely. Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/3221594> (version: 2019-07-09).
- [3] M. Loeve. *Probability Theory I. Fourth edition*. Graduate Texts in Mathematics 45. Springer, New York, NY, 1977.
- [4] Balázs Maga and Péter Maga. Random power series near the endpoint of the convergence interval. *arXiv e-prints*, page arXiv:1709.03705, September 2017.
- [5] Balázs Maga and Péter Maga. Generic power series on subsets of the unit disk. *arXiv e-prints*, page arXiv:2101.08654, 2021.
- [6] saz (<https://math.stackexchange.com/users/36150/saz>). A random series has infinitely many zeros in  $[0, 1]$  almost surely. Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/3222411> (version: 2020-06-12).
- [7] user17762. Translation invariant measures on  $\mathbb{R}$ . Mathematics Stack Exchange. URL:<https://math.stackexchange.com/q/147097> (version: 2012-05-19).

# Laplace 特征函数零点集与丘成桐猜想

叶子恺

## 摘要

丘成桐在 1982 年猜想：对任何  $C^\infty$  光滑闭 (紧致无边) Riemann 流形  $M$ ,  $M$  上 Laplace 算子的特征函数的零点集的  $n-1$  维 Hausdorff 测度与  $\sqrt{\lambda}$  可比，其中  $\lambda$  是对应的特征值。该猜想的上界估计目前仍是开放问题。本文会从 Laplace 特征函数和它的零点集的基础知识的介绍开始，再给出 2 维情形丘成桐猜想的证明与 Donnelly 和 Fefferman 在 1998 年对实解析流形版本的证明概述，最后介绍一些后续发展的技巧、方法以及未来的研究方向。

## 1 简介

### 1.1 丘成桐猜想

我们先给出丘成桐猜想的表述。在 1982 年，丘成桐在“Seminar on Differential Geometry”[22] 中提出了以下猜想：

**猜想 1.1.** 对任何  $C^\infty$  光滑闭 (紧致无边) Riemann 流形  $M$  以及  $M$  上 Laplace 算子的特征函数  $\varphi_\lambda$ ，即  $\Delta_M \varphi_\lambda + \lambda \varphi_\lambda = 0$ ，有

$$c\sqrt{\lambda} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\{\varphi_\lambda = 0\}) \leq C\sqrt{\lambda},$$

其中常数  $c, C > 0$  只依赖于  $M$  上的度量  $g$ ，与  $\lambda$  无关。

目前有很多研究 Laplace 特征函数的方法，比如变分法、随机特征函数、Kac-Rice 公式以及量子遍历等，本文不再一一介绍。本文将介绍与丘成桐猜想有关的结果与方法，比如 Laplace 特征函数零点集的几何结构以及椭圆方程解的增长性质，并用其证明 2 维光滑流形和  $n$  维实解析流形情形的丘成桐猜想。

### 1.2 例子

我们在本节给出两个例子，在第一个例子中我们可以验证丘成桐猜想对这个例子是正确的，在第二个例子中我们可以知道紧性条件不可以被删去。

先考虑闭流形  $\mathbb{T}^2 := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$  以及特征函数  $u_m(\theta_1, \theta_2) = \sin(2\pi m_1 \theta_1) \sin(2\pi m_2 \theta_2)$ ,  $m = (m_1, m_2)$ ,

则  $\lambda = 4\pi^2 \|m\|^2$  且  $\mathcal{H}^1(\{u_m = 0\}) \sim m_1 + m_2 \sim \sqrt{\lambda}$ ，符合丘成桐猜想。

再在非紧流形  $\mathbb{R}^2$  中考虑  $F_n(r, \theta) = r^n \sin(n\theta)$ , 则

$$\Delta F_n = ((\partial_r)^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}(\partial_\theta)^2)F_n = 0.$$

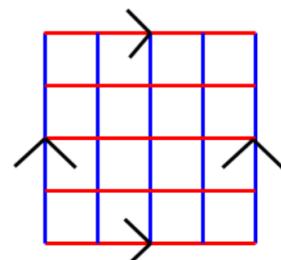


图 1.1:  $u_m$  的零点集

作者：叶子恺，2018 级数学科学学院，邮箱：yzkustc@mail.ustc.edu.cn。

稿件信息：本稿件于 3 月 7 日来稿，4 月 26 日修改，5 月 11 日接受。稿件编辑：章俊彦。

但  $\mathcal{H}^1(B_r \cap \{F_n = 0\}) \sim nr$ , 不符合丘成桐猜想, 因此流形的紧性条件不能被删去.

### 1.3 发展历史

在本节我们将列举前人取得的关于丘成桐猜想的成果.

1. Brüning(1978) “Über Knoten von Eigenfunktionen des Laplace-Beltrami Operators”[1]: 对 2 维光滑情形,

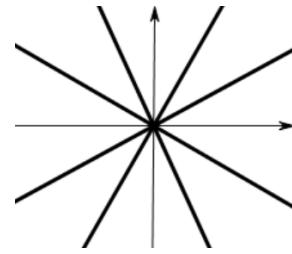


图 1.2:  $F_n$  的零点集

$$\mathcal{H}^1(\{\varphi_\lambda = 0\}) \geq C\sqrt{\lambda}.$$

使用的主要工具是变分法.

2. Donnelly, Fefferman(1988) “Nodal Sets of eigenfunctions on Riemannian Manifolds”[7]: 若  $M$  为实解析流形, 即  $M$  有实解析的度量以及坐标卡, 则丘成桐猜想成立. 特别地, 丘成桐猜想对球谐函数 (spherical harmonics) 成立.

对光滑流形情形:

3. Nadirashvili(1988)[18]: 对 2 维情形,  $\mathcal{H}^1(\varphi_\lambda = 0) \leq C\lambda \log \lambda$ .
4. Donelly, Fefferman(1990)[8], Rui-Tao Dong(1992)[6]: 对 2 维情形,  $\mathcal{H}^1(\{\varphi_\lambda = 0\}) \leq C\lambda^{\frac{3}{4}}$ .
5. Hardt-Simon(1989)[13]: 对  $n$  维情形,  $\mathcal{H}^{n-1}(\{\varphi_\lambda = 0\}) \lesssim \lambda e^{C\sqrt{\lambda}}$
6. Coding and Minicozzi(2011)[4], Sogge and Zelditch(2011[19], 2012[20]), Steinerberger(2014)[21]: 对  $n$  维情形,  $c\lambda^{\frac{3-n}{4}} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\{\varphi_\lambda = 0\})$ .
7. A.Logunov and E.Malinnikova(2017)[15][14]: 对  $n$  维情形,  $c\sqrt{\lambda} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\{\varphi_\lambda = 0\}) \leq C\lambda^{C_n}$ , 其中  $C_n > 0$ .

## 2 预备知识

为了更清晰地展现 Laplace 特征函数零点集的性质, 首先我们需要介绍本文所需的一些预备知识, 包括 Hausdorff 的定义以及 Laplace 特征函数的性质. 我们从 Hausdorff 测度的定义开始:

### 2.1 Hausdorff 测度

**定义 2.1.** 对  $A \subset \mathbb{R}^n$  和  $\delta > 0$ , 令

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \text{diam}(U_j)^d : \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j \supseteq A, \text{diam } U_j < \delta \right\},$$

则  $A$  的  $d(d > 0)$  维 Hausdorff 测度 ( $d$  可以不是整数) 定义为 (可能为  $+\infty$ )

$$\mathcal{H}^d(A) := \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^d(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^d(A).$$

注. 注意到  $\mathcal{H}_\delta^d(A)$  关于  $\delta$  单调下降, 从而  $\mathcal{H}^d(A)$  的定义是合理的.

注. 若  $d$  为整数, 则存在常数  $\gamma_d > 0$ , 使得  $\gamma_d \mathcal{H}^d$  与  $\mathbb{R}^d$  上 Lebesgue 测度相同 [10].

## 2.2 Laplace 算子与 Laplace 特征函数的性质

在本节, 我们将围绕丘成桐猜想, 介绍所需要的 Laplace 算子与 Laplace 特征函数的性质, 包括 Laplace 算子的定义, Laplace 算子的谱, Laplace 特征函数主特征值的性质, 主要目的是验证丘成桐猜想的良定性以及导出有关其零点集几何结构的两个重要的观察, 这两个观察将被用来证明 2 维光滑流形和  $n$  维实解析流形情形的丘成桐猜想. 我们不会给出所有性质的证明, 若没有特别标注参考文献, 则均为参考 [2][3].

我们先给出 Riemann 流形上的 Laplace-Beltrami 算子 (下简称 Laplace 算子) 的定义:

**定义 2.2.** 设  $M$  是  $n$  维可定向 Riemann 流形,  $g = (g_{ij})$  为  $M$  上的度量, 记  $\det(g_{ij})$  为  $g$ ,  $(g^{ij})$  为  $g^{-1}$ . 则  $M$  上 Laplace 算子  $\Delta_M$  定义为梯度的散度. 在局部坐标下可以表示为

$$\Delta_M f = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_j (\sqrt{g} g^{ij} \partial_i f).$$

我们再给出 Laplace 算子的谱的性质, 从而说明丘成桐猜想中的  $\sqrt{\lambda}$  是良定的:

**性质 2.3.** Laplace 算子  $\Delta_M$  (事实上是  $-\Delta_M$ ) 的谱为点谱

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_k \rightarrow \infty.$$

我们再验证 Laplace 特征函数  $\varphi_\lambda$  零点的存在性:

**性质 2.4.** 设所有条件与丘成桐猜想相同, 则 Laplace 特征函数  $\varphi_\lambda$  一定存在零点.

**证明.** 由散度定理,

$$\int_M \varphi_\lambda = -\lambda \int_M \Delta_M \varphi_\lambda = 0.$$

从而  $\varphi_\lambda$  不是常数 (否则恒等于零, 不是特征函数), 且  $\varphi_\lambda$  在  $M$  中变号, 从而一定存在零点.  $\square$

接下来我们介绍  $\varphi_\lambda$  的零点集 (nodal set) 的几何结构, 记其为

$$Z(\varphi_\lambda) = \{x \in M \mid \varphi_\lambda(x) = 0\},$$

则由上可知  $Z(\varphi_\lambda)$  非空. 事实上, 它还有以下性质:

**性质 2.5. 1.**  $Z(\varphi_\lambda)$  ( $n-1$  维 Hausdorff 可测, 且测度有限).

2.  $M \setminus Z(\varphi_\lambda) = \cup_j \Omega_j$ , 其中  $\Omega_j$  为  $M \setminus Z(\varphi_\lambda)$  的连通分支, 称为  $\varphi_\lambda$  的 nodal domain.

**注.** 事实上, 以下定理指出,  $\varphi_\lambda$  的 nodal domain 的个数是有限的:

**定理 2.6 (Courant nodal domain 定理 [5]).** 设  $\lambda_k$  是  $\Delta_M$  从小到大排列第  $k$  个特征值 (计重数), 则  $M \setminus Z(\varphi_{\lambda_k})$  的连通分支的个数至多为  $k$ .

由于每个  $\varphi_\lambda$  的 nodal domain 的边界均包含在  $\varphi_\lambda$  的零点集内, 因此  $\varphi_\lambda$  限制在每个 nodal domain 上都是 Dirichlet-Laplace 特征函数 (即在边界上等于 0 的 Laplace 特征函数). 因此我们考虑以下方程:

$$\begin{cases} \Delta_M \varphi_\lambda + \lambda \varphi_\lambda = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi_\lambda = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $\Omega$  为  $M$  中区域. 为了避免赘述, 我们承认以下的 Dirichlet-Laplace 算子的性质:

**性质 2.7.** (1) 主特征值(最小的特征值)重数为 1 且主特征函数不变号,

(2)  $\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \lambda_1(B_r(x)) = j_n, \forall x \in M$ , 其中  $B_r(x)$  为以  $x$  为中心的测地球,  $j_n$  为  $\mathbb{R}^n$  中单位球的 Dirichlet-Laplace 算子的主特征值, 该极限关于  $x$  一致 [3].

(3) 主特征值  $\lambda_1$  关于区域单调下降, 即

$$\lambda_1(\Omega_0) \geq \lambda_1(\Omega), \text{ 若 } \Omega_0 \subset \Omega.$$

又由分部积分可知若  $\lambda_k$  与  $\lambda_l$  为两个不相同的特征值, 则由分部积分可知

$$-\lambda_k \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_k} \varphi_{\lambda_l} = \int_{\Omega} \Delta_M \varphi_{\lambda_k} * \varphi_{\lambda_l} = \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_k} * \Delta_M \varphi_{\lambda_l} = -\lambda_l \int_{\Omega} \varphi_{\lambda_k} \varphi_{\lambda_l}.$$

从而有  $\varphi_{\lambda_k}$  与  $\varphi_{\lambda_l}$  正交. 因此除主特征函数之外, 其余 Dirichlet-Laplace 特征函数均变号. 注意到每个 Laplace 特征函数在 nodal domain 中均不变号(否则其在 nodal domain 中有零点, 与 nodal domain 的定义矛盾), 从而每个 Laplace 特征函数在 nodal domain 中均为 Dirichlet-Laplace 算子的主特征函数, 对应的特征值为主特征值. 最终, 我们可以导出以下两个关于 nodal domain 的重要观察:

**观察 2.8.** 存在  $c = c(M) > 0$ , 使得  $Z(\varphi_{\lambda})$  在  $M$  中  $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ -稠密, 即对  $M$  上每个半径至少为  $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$  的测地球,  $\varphi_{\lambda}$  在其中有零点.

**证明.** 若  $x \in M$  且  $\text{dist}(x, Z(\varphi_{\lambda})) > r$ , 则  $B_r(x)$  包含在某个 nodal domain  $\Omega_j$  中. 由上面的讨论知  $\lambda$  为  $\Omega_j$  上 Laplace 算子的主特征值,  $\varphi_{\lambda}$  为对应的主特征函数, 则由性质 2.7(2), 有

$$\lambda = \lambda_1(\Omega_j) < \lambda_1(B_r(x)) < C(M)r^{-2}.$$

从而有  $r < \frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ . □

**注.** 该观察在丘成桐猜想的研究中被非常频繁地使用, 比如 Alexander Logunov 对一般情形下的丘成桐猜想下界估计的证明中就使用了该观察. 它允许我们用数量为  $\sim \lambda^{\frac{n}{2}}$  的半径为  $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$  且球心落在  $Z(\varphi_{\lambda})$  的测地球覆盖  $M$ , 从而要证明下界估计. 只需证明在每个测地球上, 有  $\mathcal{H}^{n-1}(\{\varphi_{\lambda} = 0\}) \geq c\lambda^{-\frac{n-1}{2}}$ .

**观察 2.9.** 存在常数  $c = c(M) > 0$  使得若  $\varphi_{\lambda}$  是 Laplace 特征函数且  $\Omega_j$  是  $\varphi_{\lambda}$  的 nodal domain, 则  $\text{diam}(\Omega_j) \geq c(M)/\sqrt{\lambda}$ .

**证明.** 设  $\Omega_j$  包含在某个半径为  $r$  的测地球上  $\subset B_r$ . 则由性质 2.7(2)(3), 有

$$\lambda = \lambda_1(\Omega_j) \geq \lambda_1(B_r) > c_1 r^{-2}.$$

从而有  $\text{diam}(\Omega_j) \geq c_2 \lambda^{-\frac{1}{2}}$ . □

### 3 两个特殊情形

利用以上两个观察, 我们可以给出 2 维光滑流形情形丘成桐猜想的证明和  $n$  维实解析流形情形的证明概要.

### 3.1 2 维光滑流形情形

**定理 3.1.** 设  $M$  是 2 维光滑闭 Riemann 流形,  $\varphi_\lambda$  是  $M$  上 Laplace 算子的特征函数, 则

$$c\sqrt{\lambda} \leq \mathcal{H}^1(\{\varphi_\lambda = 0\}).$$

**证明.** 设  $x$  是  $\varphi_\lambda$  的一个零点, 则由观察2.9, 有

$$\mathcal{H}^1(\{\varphi_\lambda = 0\} \cap B_{\frac{c}{\sqrt{\lambda}}}(x)) \geq \frac{c}{\sqrt{\lambda}}.$$

又由观察2.8知  $Z(\varphi_\lambda)$  在  $M$  中  $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$ -稠密, 所以我们可以用数量为  $\sim \lambda$  的半径为  $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$  且球心落在  $Z(\varphi_\lambda)$  的测地球覆盖  $M$ .

因此我们有

$$\mathcal{H}^1(\{\varphi_\lambda = 0\}) \gtrsim \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \lambda = \sqrt{\lambda}.$$

□

### 3.2 $n$ 维实解析流形情形

现在我们考虑  $n$  维实解析流形的情形, Donelly 和 Fefferman 在 1988 年给出了该情形下丘成桐猜想的证明, 限于篇幅原因, 我们将只给出证明的概要和思路, 而忽略上界估计的大量繁琐细节以及下界估计的部分细节, 更多细节详见 [8].

**定理 3.2.** 设  $M$  为  $n$  维实解析闭 Riemann 流形,  $\varphi_\lambda$  为  $M$  上 Laplace 特征函数, 则

$$c\sqrt{\lambda} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\{\varphi_\lambda = 0\}) \leq C\sqrt{\lambda},$$

其中常数  $c, C > 0$  只依赖于  $M$  上的度量  $g$ , 与  $\lambda$  无关.

在证明该版本丘成桐猜想的过程中, 最关键的一步是 Donelly 和 Fefferman 证明了以下的特征函数消失阶数的估计, 定理的证明详见 [8]:

**定理 3.3.** 设  $\varphi_\lambda$  为 Laplace 特征函数, 则有

$$N(B_r) := \log \frac{\sup_{B_{2r}} |\varphi_\lambda|}{\sup_{B_r} |\varphi_\lambda|} \leq C\sqrt{\lambda}, \forall x \in Z(\varphi_\lambda). \quad (3.1)$$

**注.** 称一个函数  $f$  在零点  $x_0$  处的消失阶数为  $k$ , 如果  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^k}$  为非零有限数. 可以验证  $\lim_{r \rightarrow 0} N(B_r(x_0))$ (其中对数以 2 为底) 恰好为函数  $f$  在  $x_0$  处的消失阶数. 因此以上定理称为特征函数消失阶数的估计, Donelly 和 Fefferman 证明的思路之一即用消失阶数的估计控制零点集的大小.

接下来我们给出定理3.2的证明思路和概要.

#### 上界估计

对于上界估计, 证明的一个主要思路是找到特征函数  $\varphi_\lambda$  与  $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$  上阶数为  $C\sqrt{\lambda}$  的多项式  $P_{\sqrt{\lambda}}$  性质的相似性. 更具体地, 考虑所有与  $B_1(0)$  相交的直线的全体  $\mathcal{L}$ . 则可以证明以下与代数学基本定理类似的结果

$$\#\{L \cap \{P_{\sqrt{\lambda}} = 0\}\} \leq C\sqrt{\lambda} \text{ a.e. } L \in \mathcal{L}.$$

从而我们可以证明

$$\mathcal{H}^{n-1}(\{P_{\sqrt{\lambda}} = 0\} \cap B_1(0)) \leq \int_{\mathcal{L}} \#\{L \cap \{P_{\sqrt{\lambda}} = 0\} \cap B_1(0)\} d\mu(L) \lesssim \sqrt{\lambda}.$$

而对于一般的 Laplace 特征函数  $\varphi_\lambda$ , 可将其延拓为一个满足(3.1)的复解析函数, 再用类似的更精细的方法得到  $\mathcal{H}^{n-1}(\{\varphi_\lambda = 0\})$  的上界估计, 更多细节见 [8].

### 下界估计

接下来我们给出实解析情形丘成桐猜想的下界估计, 由观察2.8的注可知只需证在每个半径为  $\frac{c}{\sqrt{\lambda}}$  且球心落在  $Z(\varphi_\lambda)$  的测地球  $B_{\frac{c}{\sqrt{\lambda}}}$  中, 有

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z(u_\lambda) \cap B_{\frac{c}{\sqrt{\lambda}}}) \gtrsim \lambda^{-\frac{n-1}{2}}.$$

通过对  $B_{\frac{c}{\sqrt{\lambda}}}$  进行伸缩变换, 算子  $\Delta + \lambda$  可视为单位球  $B \subset \mathbb{R}^n$  上 Laplace 算子的一个扰动, 严格地说, 即在下方平均值公式中的  $\varphi_\lambda$  需要乘上一个扰动项  $\psi$ . 我们为了避免繁杂的估计, 侧重于展示证明思路, 因此在这里忽略这个扰动 (严格的证明细节见原始论文, 证明思路与下文类似).

由调和函数的平均值公式, 有

$$\int_B \varphi_\lambda = 0, \int_{B^+} |\varphi_\lambda| = \int_{B^-} |\varphi_\lambda|,$$

其中  $B^+ = B \cap \{\varphi_\lambda > 0\}$ ,  $B^- = B \cap \{\varphi_\lambda < 0\}$ .

因此有以下三种可能的情形,

- (i)  $|B^+| \sim |B^-|$ ;
- (ii)  $|\varphi_\lambda|$  在  $B^+$  中取值很大但  $|B^+| \ll |B^-|$ ;
- (iii)  $|\varphi_\lambda|$  在  $B^-$  中取值很大但  $|B^-| \ll |B^+|$ ;

我们能通过估计  $\varphi_\lambda$  在  $B^\pm$  上的  $L^1$  范数来排除情形 (ii) 和 (iii). 首先, 对任意  $r > 0$ , 我们有

$$\|\varphi_\lambda\|_{L^2(B_r)} \leq Cr^{\frac{d}{2}} \|\varphi_\lambda\|_{L^\infty(B_r)} \leq \|\varphi_\lambda\|_{L^2(B_{2r})},$$

其中第二个不等式 (局部有界性) 由 De Giorgi-Nash-Moser 迭代得到, 见 [11]. 此时我们需要承认一个事实 (这里省略证明, 可见原始论文)

$$\int_{B_{2r}} |\varphi_\lambda|^2 \leq C \int_{B_r} |\varphi_\lambda|^2.$$

从而有

$$\begin{aligned} \int_{B_r} |\varphi_\lambda|^2 &\leq \|\varphi_\lambda\|_{L^\infty} \int_{B_r} |\varphi_\lambda| \leq Cr^{-\frac{n}{2}} \left( \int_{B_r} |\varphi_\lambda|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \int_{B_r} |\varphi_\lambda|^2 \\ &\Rightarrow \left( \int_{B_r} |\varphi_\lambda|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq Cr^{-\frac{n}{2}} \int_{B_r} |\varphi_\lambda| \end{aligned}$$

对任意  $B_r$  的可测子集  $E$ , 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 有

$$\int_E |\varphi_\lambda| \leq \left( \int_E |\varphi_\lambda|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |E|^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_B |\varphi_\lambda|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |E|^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C r^{-\frac{n}{2}} \int_{B_r} |\varphi_\lambda| \cdot |E|^{\frac{1}{2}} = C \left( \frac{|E|}{|B_r|} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{B_r} |\varphi_\lambda|.$$

因此

$$\frac{\int_E |\varphi_\lambda|}{\int_{B_r} |\varphi_\lambda|} \leq C \left( \frac{|E|}{|B_r|} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

取  $B_r = B, E = B^\pm$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{\int_{B^\pm} |\varphi_\lambda|}{\int_B |\varphi_\lambda|} \leq C \left( \frac{|B^\pm|}{|B|} \right)^{\frac{1}{2}}. \\ \frac{1}{2} &\leq C \left( \frac{\min\{|B^+|, |B^-|\}}{|B|} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

即情形 (ii) 和 (iii) 不可能发生. 再由等周不等式 [9] 我们可以得到

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1} \left( B_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \cap Z(\varphi_\lambda) \right) &\gtrsim [\min\{|B_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \cap \{u_\lambda > 0\}|, |B_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} \cap \{\varphi_\lambda < 0\}|\}]^{\frac{n-1}{n}} \\ &\gtrsim (\lambda^{-\frac{1}{2}})^{n \cdot \frac{n-1}{n}} \sim \lambda^{-\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

因此最终我们证明了

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z(\varphi_\lambda)) \gtrsim \sqrt{\lambda}.$$

**注.** 事实上, 下界估计的证明过程蕴含了以下准对称猜想 (quasi-symmetr conjecture) 的实解析流形版本:

**猜想 3.4** (准对称猜想). 设  $\varphi_\lambda$  是光滑闭流形  $M$  的 Laplace 特征函数, 则有

$$c < \frac{\mathcal{H}^n(\{\varphi_\lambda > 0\})}{\mathcal{H}^n(\{\varphi_\lambda < 0\})} < C.$$

准对称猜想与丘成桐猜想有一定的联系, 例如 2 维的丘成桐猜想能够推出准对称猜想 [16].

**注.** 在严格证明中, 下界估计仍需要将  $\varphi_\lambda$  延拓为解析函数.

**注.** 流形的实解析性主要被用在把  $\varphi_\lambda$  延拓为复解析函数, 原文中许多更细节的估计需要用到复解析函数的性质 (如 Cauchy 估计等).

## 4 后续的发展及未来的研究方向

在 Donelly 和 Fefferman 证明实解析流形版本的丘成桐猜想之后, 人们又发展出了许多研究光滑流形版本丘成桐猜想的技巧与方法. 例如将  $\varphi_\lambda$  提升为调和函数, 以及将下界估计转化为证明 Nadirashvili 猜想等; 同时, 人们也不仅局限于研究 Laplace 特征函数的零点集, 而是将内容拓展为椭圆偏微分方程解的零点集以及奇异集. 接下来将对上述内容作非常简要的介绍, 更多细节详见 [16].

### 4.1 新的技巧与方法

以下的提升技巧在 Laplace 特征函数的研究中被频繁地使用, 它能简化 Donelly 和 Fefferman 的证明 (见 [12]). 设  $M$  是一个  $n$  维 Riemann 流形,  $\varphi_\lambda$  为 Laplace 特征函数, 则在  $M' = M \times \mathbb{R}$  上定义函数

$$h(x, t) = \varphi_\lambda(x) e^{\sqrt{\lambda}t},$$

则  $\Delta_{M'} h = 0$ . 在局部我们可以将  $h$  看作  $\mathbb{R}^{n+1}$  中某个区域上的散度型椭圆方程的解, 从而可以使用椭圆方程的估计来研究其性质.

此外, 通过上述提升技巧, Nadirashvili 将丘成桐猜想下界估计转化为以下猜想

**猜想 4.1** (Nadirashvili). 设  $M$  为  $n$  维光滑 Riemann 流形 (带边或不带边),  $B$  为  $M$  上半径为 1 的测地球. 则存在  $c > 0$  只依赖于  $M$  和  $B$ , 使得对任意定义在  $B$  上且以球心为零点的调和函数  $h$ , 有

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z(h) \cap B) \geq c.$$

Alexander Logunov 便是通过证明 Nadirashvili 猜想, 最终证明了丘成桐猜想的下界估计.

## 4.2 椭圆方程解的零点集与奇异集

除了研究 Laplace 特征函数的零点集, 目前人们还研究一般的椭圆方程的解的零点集和奇异集 (即所有使函数与梯度均为 0 的点的集合). 回忆定理3.3的定义的  $N(B_r)$  以及其注中提到的用函数的消失阶数控制其零点集大小的思路, 该思路也被人们用来研究椭圆方程解的零点集与奇异集. 以下考虑 Riemann 流形  $M$ (带边或不带边), 对于零点集, 在 [14] 中, Logunov 证明了对散度型二阶椭圆方程  $\operatorname{div}(A\nabla u) = 0$  的解  $u$ , 存在  $a = a(n)$ , 使得

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z(u) \cap B) \leq CN^{a(n)}, \quad N = N(B),$$

其中  $B$  为  $M$  上一个固定的测地球,  $C$  依赖于方程在  $2B$  中的系数. 对奇异集  $S(u) = \{x : u(x) = 0, \nabla u(x) = 0\}$ , 其大小目前由 Naber 和 Valtorta 给出以下估计 [17]:

$$\mathcal{H}^{n-2}(S(u) \cap B) \leq C^{N^2}, \quad N = N(B).$$

林芳华猜想奇异集的大小会有更强的上界  $\mathcal{H}^{n-2}(S(u) \cap B) \leq CN^2$ , 但目前该猜想即使对  $\mathbb{R}^3$  上的调和函数也不知道是否成立.

## 参考文献

- [1] Jochen Brüning. Über knoten von eigenfunktionen des laplace-beltrami-operators. *Mathematische Zeitschrift*, 158(1):15–21, 1978.
- [2] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Academic press, 1984.
- [3] Isaac Chavel. *Riemannian geometry: a modern introduction*, volume 98. Cambridge university press, 2006.
- [4] Tobias H Colding and William P Minicozzi II. Lower bounds for nodal sets of eigenfunctions. *arXiv preprint arXiv:1009.4156*, 2010.
- [5] R. Courant and D. Hilbert. Methods of mathematical physics, vol. i. *Physics Today*, 7:17–17, 1954.
- [6] R Dong. Nodal sets of eigenfunctions on riemann surfaces. 1991.
- [7] Harold Donnelly and Charles Fefferman. Nodal sets of eigenfunctions on reimannian manifolds. *Inventiones mathematicae*, 93(1):161–183, 1988.
- [8] Harold Donnelly and Charles Fefferman. Nodal sets for eigenfunctions of the laplacian on surfaces. *Journal of the American Mathematical Society*, 3(2):333–353, 1990.
- [9] H. Fédérer. Geometric measure theory. 1969.
- [10] Gerald B. Folland. Real analysis: Modern techniques and their applications. 1984.
- [11] Q. Han and F. Lin. Elliptic partial differential equations. 2000.
- [12] Qing Han and Fanghua Lin. Nodal sets of solutions of elliptic differential equations.
- [13] Robert Hardt, Leon Simon, et al. *Nodal sets for solutions of elliptic equations*. Centre for Mathematical Analysis, ANU, 1987.
- [14] A. Logunov. Nodal sets of laplace eigenfunctions: polynomial upper estimates of the hausdorff measure. *arXiv: Analysis of PDEs*, 2016.

- [15] Alexander Logunov. Nodal sets of laplace eigenfunctions: proof of nadirashvili's conjecture and of the lower bound in yau's conjecture. *Annals of Mathematics*, pages 241–262, 2018.
- [16] Alexander Logunov and Eugenia Malinnikova. Review of yau's conjecture on zero sets of laplace eigenfunctions. *arXiv preprint arXiv:1908.01639*, 2019.
- [17] A. Naber and D. Valtorta. Volume estimates on the critical sets of solutions to elliptic pdes. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 70:1835–1897, 2014.
- [18] Nikolai Semenovich Nadirashvili. On the length of the nodal curve of an eigenfunction of the laplace operator. *Russian Mathematical Surveys*, 43(4):227, 1988.
- [19] Christopher D Sogge and Steve Zelditch. Lower bounds on the hausdorff measure of nodal sets. *arXiv preprint arXiv:1009.3573*, 2010.
- [20] Christopher D Sogge and Steve Zelditch. Lower bounds on the hausdorff measure of nodal sets ii. *arXiv preprint arXiv:1208.2045*, 2012.
- [21] Stefan Steinerberger. Lower bounds on nodal sets of eigenfunctions via the heat flow. *Communications in Partial Differential Equations*, 39(12):2240–2261, 2014.
- [22] Shing-Tung Yau. *Seminar on differential geometry*, volume 102 of Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, Tokyo University Press, 1982.

# 例子与分类定理

周潇翔

## 摘要

作为一个偏复代数几何的入门级综述, 这篇文章以分类定理的方式介绍了众多几何对象, 并尝试总结理解这些例子的一套系统方式. 通过这篇文章, 我们希望读者:

- 了解到分类定理的存在;
- 对每个分类定理知道基本的例子;
- 尝试用例子来引导理论知识;
- 激发对经典几何理论的兴趣;
- 接受自己无法学会所有知识的事实, 初学时抓大放小;
- 在大框架下提出系统性的问题.

## 1 问题简介

或许除了 Grothendieck 以外, 人们很难在没有例子的情况下打磨自己的数学理解. 一个 toy example 有以下几种蹂躏的方式:

- 作为反例, 划定定理成立的边界;
- 验证满足定理的条件, 得到例子上满足的性质 (牛刀杀鸡法);
- 代入定理的证明, 对特例理解证明过程;
- 帮助正确记忆定理 (为了考试);
- 对猜想的“逐例”验证. 一般情况下, 要么对此特例成立, 要么无法验证. 前者缩小了反例的可能范围, 而后者则提出比原猜想更弱的子问题;
- 对几何例子, 提供并纠正数学工作者的几何直观: 画图, 计算例子中的不变量和结构, 描述例子的对称性 (自同构群), 对空间进行几何操作.

遗憾的是, 数学中存在成百上千的例子, 而他们在数学体系中的地位也不尽相同. 在分析中存在大量性质古怪的反例 (例如导数在无理点连续而在有理点间断的可微函数, 见 [18]), 笔者认为这种例子不是数学的主流. 与之相对, 简单深刻的例子也并不少见 (例如椭圆曲线), 但初学者往往无法在铺天盖地的例子中细细分辨. 再者, 单个例子不可能给出理论的全貌, 一叶障目容易失去对结构的宏观把握.

分类定理往往能给出一族简单深刻的例子. 有了分类定理, 我们可以按照从简单到复杂的方法论“逐个”讨论范畴中的对象, 把结论做到自己理解的边界. 本文笔者将列出截至目前学过的几何中 3 个个人认为最为重要的分类定理, 并尽量按照以下步骤阐述:

1. 给出分类定理中的初始例子;
2. 说明刻画的对象和等价关系, 必要时介绍分类定理所需要的不变量;
3. 阐述分类定理;

作者: 周潇翔, 2016 级数学科学学院, 邮箱: [xx352229@mail.ustc.edu.cn](mailto:xx352229@mail.ustc.edu.cn). QQ: 1051686409.  
稿件信息: 本稿件于 3 月 31 日来稿, 5 月 5 日修改, 5 月 21 日接受. 稿件编辑: 章俊彦。

4. 说明定理中的冗余对象, 给出参数空间;
5. 给出分类定理外的相关信息 (和例子).

## 2 闭曲面分类定理

### 2.1 初始例子: 紧致无边可定向闭曲面

众所周知, 我们有如下的紧致无边可定向闭曲面:

$g$	0	1	2	3
图像				

我们使用亏格来区分不同的闭曲面. 粗略地来说, 亏格是指这个曲面的 (1 维) 洞的个数除以 2, i.e.

$$g := \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} H^1(X, \mathbb{R})^1$$

(注意这里的曲面是空心的, 不要忘数“里面的洞”)

对紧致无边可定向曲面来说, 相同亏格的曲面相互之间互相同构. 故而给定某个曲面, 只需算出它的亏格即可理解这个空间的拓扑性质.

对几何空间来说我们总是会算它们的同调群、上同调环、同伦群:

$g$	0	1	2	3	4
$H_0, H^0$			$\mathbb{Z}$		
$H_1, H^1$	0	$\mathbb{Z}^2$	$\mathbb{Z}^4$	$\mathbb{Z}^6$	$\mathbb{Z}^8$
$H_2, H^2$			$\mathbb{Z}$		
$H^*(M, \mathbb{Z})$	$\mathbb{Z}[t]/(t^2)$	$\mathbb{Z}\langle x, y \rangle / (x^2, y^2, xy + yx)$	$\mathbb{Z}\langle x_i, y_i \rangle / (x_i^2, y_i^2, x_iy_i + y_ix_i, x_iy_i - x_jy_j, x_ix_j, x_iy_j, y_iy_j)$		
$\pi_0(M)$			{*}		
$\pi_1(M, x_0)$	0	$\langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle$		$\langle x_i, y_i \mid \prod_{i=1}^n x_iy_ix_i^{-1}y_i^{-1} \rangle$	
$\pi_2(M, x_0)$	$\mathbb{Z}$		0		

作为计算的副产品, 我们可以得到 Betti 数和 Euler 示性数:

$$b_i := \dim_{\mathbb{R}} H_i(X, \mathbb{R}) \quad \chi := \sum_{n=0}^2 (-1)^i b_i$$

对紧致无边可定向闭曲面来说, Euler 示性数与亏格之间满足关系

$$\chi = 2 - 2g.$$

### 2.2 分类定理

作为一个简单的推广, 我们去掉可定向和无边的条件. 考虑闭曲面构成的范畴, 等价关系为拓扑空间的同构, 我们有闭曲面分类定理 [19, Lec25, Theorem 3.2]:

<sup>1</sup> $\mathbb{Z}$  系数同调群均定义为奇异同调群, 不过大家几乎不用奇异同调群的定义来计算.

**定理 2.1.** 对一个紧的带边曲面  $M$ , 记  $m$  为  $\partial M$  连通分支数, 则一定同胚于以下某个曲面挖去  $m$  个开圆盘:

$$S^2, \quad \Sigma_k := \mathbb{T}^2 \# \cdots \# \mathbb{T}^2, \quad \tilde{\Sigma}_l := \mathbb{RP}^2 \# \cdots \# \mathbb{RP}^2$$

通过计算可以得知,  $\partial M$  连通分支数、Euler 示性类和可定向性可以唯一确定一个紧带边曲面的结构.

同样的我们可以算它们的同调群、上同调环、同伦群、Betti 数和 Euler 示性数. 当然, 一个典范的多边形表示是很好的起点. 这里还可以算两个闭曲面的连通和.

这里的参数空间是  $(\mathbb{N} \cup \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ (作为集合)<sup>1</sup>, 连通和给出了参数空间上的么半群结构.

### 2.3 推广: 拓扑流形

当我们考虑三维或更高维的拓扑流形时, 往往就不再有这样简单的分类定理. 任何一个紧致无边可定向三维拓扑流形可以唯一写成可定向素流形<sup>2</sup>的连通和 [9]. Thurston 的几何化猜想(由 Perelman 于 2006 年证明, 见 [10, 11])声称我们可以对可定向素流形沿着环面切割, 使得每一块流形都拓扑同胚于以下八种 Riemann 流形之一的商空间:

$$S^3, \mathbb{R}^3, \mathcal{H}^3, S^2 \times \mathbb{R}, \mathcal{H}^2 \times \mathbb{R}, \widetilde{\text{SL}_2(\mathbb{R})}, \text{Nil}, \text{Sol}^3$$

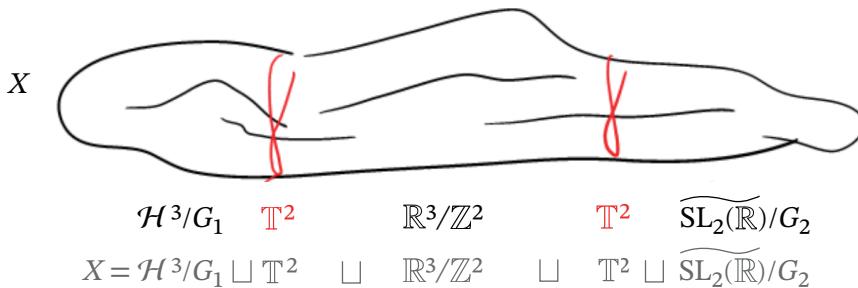


图 2.1: 沿环面切割的示意图

对四维情况, 任何一个有限表示群都可以实现为四维流形的基本群<sup>4</sup>, 故分类四维流形的难度比分类有限表示群的难度还大, 可以理解为不可分类. 而对于单连通的紧四维流形, 它的拓扑由相交形式与 Kirby–Siebenmann 不变量所唯一决定.<sup>5</sup>

在 <http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/> 中可以查到大量拓扑流形的相关知识.

## 3 复代数曲线的分类

这节主要参考 [15, Chapter 19], 书中总结了技术工具, 然后循序渐进地介绍了各类复代数曲线的性质. 对于复椭圆曲线的解析向处理主要参考 [17, 第八章].

复代数曲线指的是整的光滑射影 1 维  $\mathbb{C}$ -概形 (integral smooth projective curve of finite type over  $\mathbb{C}$ )<sup>6</sup>. 换句话说, 我们考虑的是性质最好的曲线: 没有奇点, 没有素数特征, 解析化后

<sup>1</sup>这里的  $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}$  表示无边曲面的参数空间, 最后一个  $\mathbb{N}$  记录的是  $\partial M$  的连通分支数.

<sup>2</sup>我们称三维流形  $M$  为素流形, 如果不存在不同构于  $S^3$  的三维流形  $M_1, M_2$ , 使得  $M \cong M_1 \# M_2$ .

<sup>3</sup>关于 Nil 和 Sol 的定义详见 [16, p16], 书中还详尽叙述了这些空间的几何结构.

<sup>4</sup>参见 <https://mathoverflow.net/questions/15411>.

<sup>5</sup>Freedman 于 1982 年在 [2, Theorem 1.5] 中给出了单连通的紧四维流形的分类. 关于单连通四维拓扑流形的例子, 可以看 [http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/4-manifolds:\\_1-connected](http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/4-manifolds:_1-connected) 和 <https://en.wikipedia.org/wiki/4-manifold>

<sup>6</sup>没学过代数几何的同学可以当成“由代数方程定义的光滑曲线”. 另外, 由于复代数曲线和紧黎曼面范畴等价, 大家也可以直接当成紧黎曼面来理解.

即成为一个紧的黎曼曲面<sup>1</sup>. 记  $g$  为该曲面的亏格, 它也可以从层上同调中得到:

$$g = \dim_{\mathbb{C}} H^1(C, \mathcal{O}_C) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \omega_C)$$

这使得我们能够开动层上同调机器来处理曲线. (但是不讲证明的话就可以不用理解层上同调?) 在闭曲面分类定理给出初步分类后, 我们可以逐亏格地考虑问题.

### 3.1 初始例子: 亏格 $g = 0, 1$

我们在初始例子中考虑亏格  $g = 0, 1$  的情况. 当  $g = 0$ , 则  $C \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

当  $g = 1$ , 事情开始变得复杂起来, 我们不再能单单从它的拓扑中得到它的所有信息 (e.g. 复结构, 概形结构). 幸运的是, 对单个亏格 1 的复代数曲线  $C$ , 我们可以用代数机器处理的很干净:

- 固定  $C$  上一闭点  $P$ , 则  $C$  上闭点具有自然的群结构 (以  $P$  为零点), 我们称  $(C, P)$  为椭圆曲线;
- $\mathbb{P}^2$  中的三次光滑超曲面给出了所有亏格 1 的复代数曲线的例子; 更进一步, 通过变量代换, 每一个亏格 1 的复代数曲线都对应于一个方程

$$E_{\lambda} : y^2 = x(x - 1)(x - \lambda), \quad \lambda \neq 0, 1$$

- 代数曲线和紧黎曼面具有一一对应的关系, 这样复椭圆曲线对应于亏格 1 的黎曼面 (+ 点  $P$ ), 同构于  $\mathbb{C}/\Lambda$ , 其中  $\Lambda$  是格点. 这样我们很容易得到复椭圆曲线中的挠点的结构, 群结构也刻画地很清楚;

这时我们就可以开始分类亏格 1 的复代数曲线了. 或者说, 分类所有的复环面  $\mathbb{C}/\Lambda$  (在全纯等价的意义下). 复环面之间的同构可以用格点刻画:  $\mathbb{C}/\Lambda_1 \cong \mathbb{C}/\Lambda_2$  当且仅当存在  $\alpha \in \mathbb{C}^\times$  使得  $\Lambda_2 = \alpha\Lambda_1$ . 这么说来, 复环面的参数空间即为

$$\{\text{lattices in } \mathbb{C}\}/\mathbb{C}^\times.$$

现在我们要代数化这个空间. 对格点  $\Lambda$ , 取定  $\Lambda$  的一组基  $(z_1, z_2)$ <sup>3</sup>, 则参数空间被代数化为

$$\left\{ (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid z_1, z_2 \text{ } \mathbb{R}\text{-linear independent, i.e. } \operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2} \neq 0 \right\} / \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z}) / \mathbb{C}^\times$$

现在我们已经得到了参数空间的代数表示, 只不过现在的变量和关系有点多. 当  $\operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2} < 0$  时, 通过矩阵  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$  交换  $z_1$  与  $z_2$  顺序, 这样参数空间简化至

$$\left\{ (z_1, z_2) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid \operatorname{Im} \frac{z_1}{z_2} > 0 \right\} / \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) / \mathbb{C}^\times$$

这时通过数  $\frac{1}{z_2} \in \mathbb{C}^\times$  的作用, 得到参数空间的最终简化版本

$$\{(z, 1) \in (\mathbb{C}^\times)^2 \mid \operatorname{Im} z > 0\} / \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathcal{H}/\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$$

<sup>1</sup>黎曼曲面指 1 维复流形.

<sup>2</sup>粗略来说, 层可以对应流形上的向量丛, 给定一个向量丛就得到流形上的一种同调, 得到这个流形的一部分信息; 使用不同的层可以得到流形的不同信息. 在 [15, Chapter 18] 中给出了层上同调的定义、性质以及重要例子.

<sup>3</sup>我们称  $(z_1, z_2)$  为格点  $\Lambda$  的基, 若  $\Lambda = \mathbb{Z}z_1 \oplus \mathbb{Z}z_2$ . 注意格点是几何对象, 同一个格点可以对应不同的基, 不同的基之间相差一个可逆矩阵  $M \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{Z})$ .

这个结果令人震惊：几何对象的参数空间似乎也自然存在着某种几何结构！ $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  作为拓扑空间同胚于  $\mathbb{C}$ ，这意味着“互不同构的复环面大概有  $\mathbb{C}$  这么多”。事实上，我们有经典的  $j$ -函数：

$$j : \{\mathbb{C}/\Lambda\}/\sim = \mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C} \quad [E_\lambda] \longmapsto \frac{256(\lambda^2 - \lambda + 1)^3}{\lambda^2(1 - \lambda)^2}$$

这给出了复环面和复数的一一对应。

故事至此并没有结束， $\mathcal{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  背后蕴含着模空间与模形式两大理论，只是限于笔者学识有限，力不能及。

### 3.2 结构刻画

鉴于 [15, Chapter 19] 已经将低亏格代数曲线的结构处理得很清晰明了，我们这里只做一个简单的总结。对亏格  $g > 1$  的代数曲线  $C$  可以分为两类：超椭圆曲线 (hyperelliptic curve) 和非超椭圆曲线 (non-hyperelliptic curve)。当  $C$  为超椭圆曲线时，存在 degree 为 2 的分歧映射  $\pi : C \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ，有  $2g + 2$  个分歧点，对应的典范丛  $\omega \cong (\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1}(1))^{\otimes(g-1)}$ ；当  $C$  不为超椭圆曲线时，典范丛  $\omega_C$  给出  $C$  至  $\mathbb{P}^{g-1}$  的射影嵌入。我们记  $\mathbb{P}_{a_1, \dots, a_{n-1}}^n$  为  $\mathbb{P}^n$  中  $n - 1$  个超曲面 (次数分别为  $a_1, \dots, a_{n-1}$ ) 截出来的曲线，例如  $\mathbb{P}_{2,3}^3$  为  $\mathbb{P}^3$  中的 2 次曲面和 3 次曲面截出来的 6 次曲线。

$g$	2	3	4	5	$\geq 6$
hyperelliptic	dim=3	dim=5	dim=7	dim=9	dim=2g-1
non-hyperelliptic	non-exist	$\mathbb{P}_4^2$ : trigonal dim=6	$\mathbb{P}_{2,3}^3$ dim=9	dense: $\mathbb{P}_{2,2,2}^4$ others: trigonal dim=12	not a complete intersection dim=3g-3

当然这里还有细节亟待解决。如何定义“亏格为  $g$  的代数曲线的模空间” $\mathcal{M}_g$ ？如何定义它的维数？如何将其紧化，紧化后怎样刻画模空间的结构？这些问题都可以在 [12] 中找到初步的处理及更进一步的参考文献。

### 3.3 推广：带奇点曲线

由于即使是光滑的复代数曲面也可能有带奇点的 1 维子簇，因此在进入下一节之前，我们有必要提及一些带奇点曲线的性质。奇点是局部现象，大家见到的第一个奇点应该是在仿射代数曲线  $y^2 = x^2(x + 1)$  和  $y^2 = x^3$  中，这两条曲线的图像给出了奇点的初始直观。我们可以定义不同类型的奇点 [15, 29.3]，可以通过各种手段消解奇点（如正规化 (normalization)）[8]，消解过程中几何亏格  $p_g(C) := h^0(\tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}})$  不变而代数亏格  $g_a(C) := \chi(\mathcal{O}_C) - 1$  变小。例如，退化的椭圆曲线  $y^2z = x^3$  在  $[0 : 0 : 1]$  处有一个奇点，几何亏格为 0 而算术亏格为 1。

另外值得一提的是，代数数论中的代数整数环  $\mathcal{O}_K$  可以视作仿射代数曲线 (over  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ ) 上的结构层，因此代数数论可以视作对某一类特殊代数曲线的研究。

## 4 复代数曲面的分类：Enriques-Kodaira classification

该节主要参考 [1]，在 [3] 里面也有一章来介绍，在 [15] 中则是零零散散地出现相关结论。由于科普的原因，笔者打算在介绍最基本的曲面例子的过程中以不严谨的方式介绍代数曲面中的一些概念和相关结论，之后再简要叙述分类及各类曲面的性质。在这之前我打算简

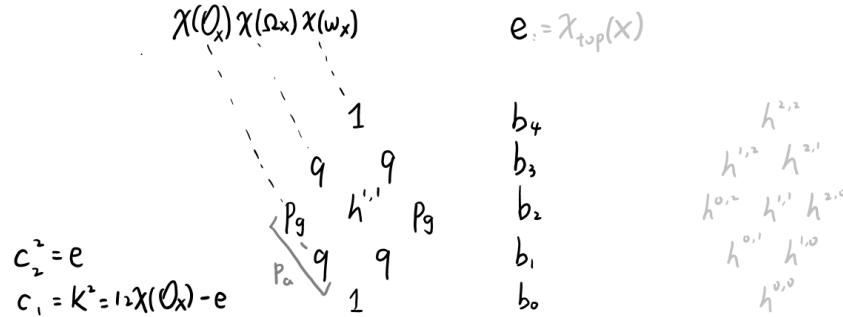
要总结下我所知的代数曲面中的不变量, 初识代数曲面的同学请直接跳过不变量这一小节.<sup>1</sup>

与复代数曲线的定义类似, (复) 代数曲面指的是整的光滑射影 2 维  $\mathbb{C}$ -概形 (integral smooth projective surface of finite type over  $\mathbb{C}$ ). 没学过代数几何的同学可以当成“由代数方程定义的光滑曲面”.

## 4.0 代数曲面的不变量

分类可以说就是在找不变量, 不变量是分辨不同空间的有力手段, 是反映空间结构的利器. 那么, 对代数曲面, 我们大致按照计算难度从高至低将不变量列举如下:

**4.0.1** 首先是 Hodge 菱形为代表的数值不变量, 如图所示<sup>2</sup>:



注意这里的  $q, p_g$  为双有理不变量而  $h^{1,1}$  不是, 其他的不变量全都是  $1, q, p_g, h^{1,1}$  的线性组合. 在这之外还有新的两个重要的双有理不变量<sup>3</sup>:

$$P_n := h^0(X, \omega_X^{\otimes n}) \quad \text{for } n \geq 0$$

$$\kappa := \begin{cases} -\infty, & \text{if } P_n \equiv 0 \text{ for all } n \geq 1; \\ \min \{k \in \mathbb{N}_{\geq 0} \mid P_n/n^k \text{ is bounded}\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们称  $P_n$  为多亏格 (plurigenus),  $P_1 = p_g$  为几何亏格 (geometric genus),  $\chi(O_X) - 1 = p_g - q$  为算术亏格;  $\kappa$  为 Kodaira 维数, 可以证明  $\kappa$  只能取  $-\infty, 0, 1, 2$  这四个值. 这一部分的信息是代数曲面中的基础信息, 可以在这个数据库中找到:<https://superficie.info/>.

**4.0.2** 然后是以 Picard 群为代表的 (线) 丛的信息.

$$\text{Filtration : } \underbrace{\text{Pic } X \supset \text{Pic}^\tau X \supset \text{Pic}^0 X \supset 0}_{\substack{\mathbb{Z}^{\rho(X)} \\ N^1(X) \\ NS(X)}} \supset \text{Pic}^{\text{torsion}} X \supset \text{Pic}^0 X \supset 0$$

该图最清楚的科普/解释是在 [15, 18.4.10] (或者说这个图就是这段话的图示). 在搞定 Picard 群后<sup>4</sup>, 我们有两个方向的延拓: 一方面, 我们可以计算 Grothendieck 群  $K_0(X)$  和 Chow 环  $CH^*(X)$ ; 另一方面, 在  $N^1(X) \cong \mathbb{Z}^{\rho(X)}$  上有自然的双线性型, 是由  $\text{Pic } X$  上的相交形式

$$\text{Pic } X \times \text{Pic } X \longrightarrow \mathbb{Z} \quad (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \mapsto \chi(O_X) - \chi(\mathcal{L}_1^\vee) - \chi(\mathcal{L}_2^\vee) + \chi(\mathcal{L}_1^\vee \otimes \mathcal{L}_2^\vee)$$

诱导的, 称作相交矩阵. 利用这个相交矩阵, 我们常常可以算出哪些线丛是 ample 的, 哪些线丛是 nef 的 (nef cone), 哪些线丛是 effective 的 (effective cone). 当然我们也希望能算出哪

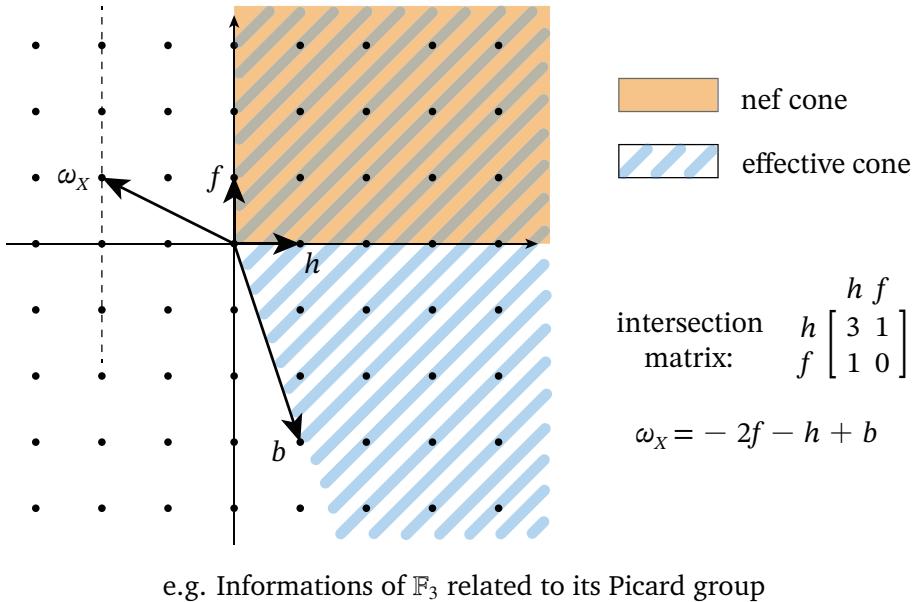
<sup>1</sup>然而就算对最简单的空间  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ , 我也没算出全部的不变量. 希望能有个数据库给出目前已知的所有结论.

<sup>2</sup>这里  $h^{i,j} := h^j(X, \Omega_X^i)$ ; 由于对复代数曲面的 Hodge 菱形上下左右对称, 不同的书上会把  $h^{i,j}$  放在不一样的位置. 这里放置的位置是为了作图的方便.

<sup>3</sup>注意! 当  $n < 0$  时  $h^0(X, \omega_X^{\otimes n})$  并不为双有理不变量!

<sup>4</sup>比如, 找出  $N^1(X)$  的生成元.

些线丛是 very ample 的, 不过这个难度就高出不少. 我们也关注特殊的线丛, 尤其是典范线丛  $\omega_X$ <sup>1</sup>.



e.g. Informations of  $F_3$  related to its Picard group

#### 4.0.3 再接着是代数拓扑中的不变量.

经典的群  $\pi_1(X_{\mathbb{C}}), \pi_n(X_{\mathbb{C}}), H_n(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}), H^n(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$  自然是计划中的一部分. 而单单视作概形, 我们也有类比的代数基本群 (algebraic fundamental group)<sup>2</sup>:

$$\pi_1^{\text{ét}}(X) := \varprojlim_{\substack{X_i \rightarrow X \\ \text{Gal cover}}} \text{Aut}_X(X_i)$$

提到这里, 我们也会关注  $X$  的自同构群  $\text{Aut } X$ . 谈论自同构时请务必小心: 我们的态射是双有理映射 (birational map) 还是作为概形的同态 (morphism)? 当  $X$  是某条曲线  $C$  上的纤维丛时, 态射还可能只是同态. 提到群作用就有商空间的问题, 不过商空间的理论难度过高, 这里略去不提.

我们也关注各种示性类, 不过对复向量丛来说, 一个 Chern 类就可以推出其它的示性类. 简记  $X := X_{\mathbb{C}}$ , 固定  $X$  上的一个 rank 为  $r$  的复向量丛  $E$  (例如切丛  $T_X$ ).<sup>34</sup>

Chern class	$c_i(E)$	$\in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$
Todd class	$td(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$	$\in H^{2*}(X, \mathbb{Z})$
Stiefel-Whitney class	$w(E) = 1 + c_1 + c_2$	$\in H^*(X, \mathbb{F}_2)$
Pontryagin class	$p(E) = 1 + c_1^2 - 2c_2$	$\in H^{4*}(X, \mathbb{Z})$
Euler class	$e(E) = c_r(E)$	$\in H^{2r}(X, \mathbb{Z})$

<sup>1</sup>有些书中也记作  $K_X$ . 该向量丛在 Serre 对偶中出现, 是上同调机器里很重要的一个概念

<sup>2</sup>Galois cover 的定义, 参见 [https://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89tale\\_fundamental\\_group](https://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89tale_fundamental_group). 这个定义使我们即使在更一般的概形中也能谈论“基本群”, 尽管对于复代数曲面, 代数基本群并不能给出比  $\pi_1(X)$  更多的信息.

<sup>3</sup>Chern 类、Todd 类的定义可参考 [14, Class 18], 其他示性类的一般定义请参考 wiki. 这里只给出限定在代数曲面上的公式.

<sup>4</sup>在下述五行中, 这些示性类中简记  $c_i := c_i(E)$ , 请勿与陈数混淆.

在这里补充一下 0.1 中的两个陈数 (Chern number) 的定义:

$$c_1^2 := c_1(T_X) \cup c_1(T_X) \in H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \quad c_2 := c_2(T_X) \in H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

#### 4.0.4 最后是无法被分到前面三类的相关信息.

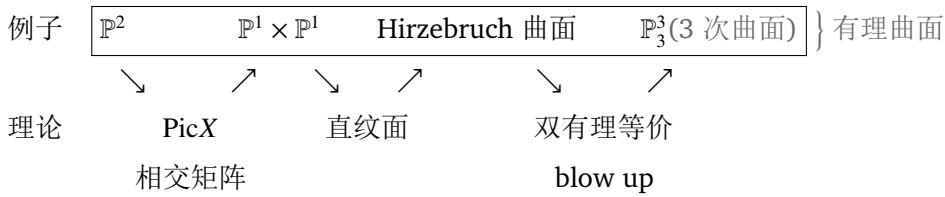
所有的光滑射影簇 (over  $\mathbb{C}$ ) 都可以视作 Kähler 流形, 那么代数曲面自然也不例外, 我们有相容的复结构、辛结构和 Riemann 度量, 有曲率和特殊的 Levi-Civita 联络, 有  $X$  上的微分算子层  $D_X$  和  $D_X$ -模结构. 这是复流形的视角.

固定  $X$  上的一个 very ample bundle  $\mathcal{L}$ , 即对应一个闭嵌入 (closed embedding)  $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ , 我们想知道  $X$  在这个闭嵌入下的方程、还有  $X$  中的直线、二次曲线. 这是古典代数几何的视角.

另外, 固定曲面  $X$  上的一个点  $P$ , 则  $(X, P)$  对应于一个 Abelian 簇  $\text{Alb}(X)$ , 称作 Albanese 簇. 我们有典范映射  $\alpha : X \rightarrow \text{Alb}(X)$ . 这个簇和映射在代数曲面许多结论的证明中起到了作用.

### 4.1 初始例子: 有理曲面

鉴于大部分没学过代数几何的同学对代数曲面基本没有了解, 我们在这里将花比较大的篇幅来刻画代数曲面最简单的一个例子<sup>1</sup>, 并且将  $X$  和它对应的复曲面  $X_{an}$  混淆起来. 本节的流程图如下:



想必复几何中第一个紧复流形的例子一定是复射影空间  $\mathbb{CP}^n$ , 那么第一个代数曲面的例子自然是二维复射影空间

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 := \text{Proj } \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2],$$

它的解析化就是  $\mathbb{CP}^2$ . 我喜欢画一个  $S^2$  作为  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  的几何直观, 尽管这不完美:  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  是一个复 2 维, 实 4 维的对象, 另外  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  上的两条直线只交于一点, 而  $S^2$  上两个大圆必交于 2 点<sup>2</sup>. 你可以用这些小结论来修正你的几何直观.

利用切除正合列 (excision exact sequence)[15, 14.2.8], 我们可以算出  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  的 Picard 群<sup>3</sup>

$$\varphi : \text{Pic } \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \cong \mathbb{Z}$$

对  $n \in \mathbb{Z}$ , 记  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2}(n) := \varphi^{-1}(n)$ . 我们有多种线丛的理解方式 [15, 14.1, 14.2, 15.2]:

- 固定  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  上的标准仿射开覆盖  $U_0 = \text{Spec } k[x_{1/0}, x_{2/0}], U_1, U_2$ , 我们用转移函数定义线丛  $\mathcal{L}_n$ , 例如:

<sup>1</sup>在双有理等价的意义下, 确实是一个例子.

<sup>2</sup> $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  上的直线指的是一个一次齐次方程确定的零点集, 例如  $[L : x_0 + 2x_1 - 4x_2 = 0]$  就是其中的一条直线.

<sup>3</sup>所有的线丛在张量的运算下构成一个群, 称为 Picard 群. 线丛直观来讲是秩为 1 的复向量丛, 不过代数几何中更多指的是  $X$  上秩为 1 的局部常值层.

$$\begin{array}{ccc}
 & \cdot \times x_{0/1}^n & \\
 & \swarrow \quad \searrow & \\
 \mathbb{C}[x_{1/0}, x_{2/0}] & & \mathbb{C}[x_{0/1}, x_{2/1}] \\
 & \nwarrow \quad \nearrow & \\
 & \cdot \times x_{1/0}^n &
 \end{array}$$

其中映射在

$$U_0 \cap U_1 = \text{Spec } k[x_{1/0}, x_{2/0}]_{(x_{1/0})} = \text{Spec } k[x_{0/1}, x_{2/1}]_{(x_{0/1})}$$

上定义, 我们有  $\mathcal{L}_n \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(n)$ .

这种方式容易证明是线丛 (局部平凡性 + 转移函数), 问题在于不容易描述全局截影, 给出的解答往往是局部的.

- 取超曲面截影  $H : x_0 = 0$ , 则  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(n) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(nH)$ , 其中

$$[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(nH)](U) = \{t \in K(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})^{\times} : \text{div}|_U t \geq -nH\} \cup \{0\}$$

这种方式容易描述线丛上的截影, 不过思考的时候需要做一个 twist, 有点转换参考系的感觉<sup>1</sup>. 另外, 这种方式暗示了“线丛对应曲线”的思维方式, 曲线的相交数由此转化为 Picard 群上的双线性型.

- 记分次环  $S_{\bullet} := \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ , 分次  $S_{\bullet}$ -模  $S(n)_{\bullet} := S_{n+\bullet}$ , 则拟凝聚层  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(n) = S(\tilde{n})_{\bullet}$  为  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \text{Proj } S_{\bullet}$  上的线丛.

这种方式最为抽象, 但是是一个整体描述, 不依赖于  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  上的坐标, 也容易给出不同线丛之间的映射.

理解了  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  上的线丛后, 运用  $dx_{1/0} \wedge dx_{2/0} = x_{0/1}^{-3} dx_{2/1} \wedge dx_{0/1}$ , 我们可以算出  $\omega_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(-3)$ ; 另外, 可直接计算出  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  上的层上同调 [15, 18.1.3]:

$$\dim_{\mathbb{C}} H^n(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(m)) = \begin{cases} \binom{m+2}{2}, & n=0, m \geq 0 \\ \binom{-m-1}{2}, & n=2, m \leq -3 \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$\begin{matrix}
 & & 1 & & \\
 & & 0 & 0 & \\
 & 0 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & \\
 & & & & 1
 \end{matrix}$$

结合  $H^2(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ , 我们得到  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  的 Hodge 菱形:

我们想知道  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  中曲线的相交情况. 事实上, 这是著名的 Bézout 定理:

**定理 4.1** (Bézout Theorem for plane curves, see [15, 18.6.K]). 对  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  上的  $m$  次曲线  $C$  和  $n$  次曲线  $C'$ , 若  $C$  与  $C'$  没有公共分支, 则在计重数的意义下交于  $mn$  个点.

这样的结论看上去似乎很难推广至其他代数曲面上, 这敦促我们寻找新的观点. 对代数曲面  $X$  及其上线丛  $\mathcal{L}$ , 定义  $\chi(\mathcal{L}) := \sum_{n=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{C}} H^n(X, \mathcal{L})$  以及 Picard 群上的双线性型

$$(-, -) : \text{Pic } X \times \text{Pic } X \longrightarrow \mathbb{Z} \quad (\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) := \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}_1^\wedge) - \chi(\mathcal{L}_2^\wedge) + \chi(\mathcal{L}_1^\wedge \otimes \mathcal{L}_2^\wedge),$$

<sup>1</sup>例如, 同样一个有理函数  $t \in K(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})^{\times}$ , 作为  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(nH)$  和  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(mH)$  上的有理截影, 对应的除子就不一致. ( $n \neq m$ )

这个双线性型恰好刻画了  $X$  中曲线的相交数: 可以证明, 对  $X$  中不可约曲线  $C_1, C_2 (C_1 \neq C_2)$ ,  $C_1$  与  $C_2$  的相交数 (计重数) 即为  $(\mathcal{O}_X(C_1), \mathcal{O}_X(C_2))$ .

这个推广有诸多不平凡之处. 首先, 它给出了不可约曲线  $C$  的自相交数 (self-intersection number):

$$C^2 := (\mathcal{O}_X(C), \mathcal{O}_X(C))$$

在某些例子的计算中, 曲线的自相交数可能为负数!

其次, 若两个除子  $D_1, D_2$  线性等价 (i.e.  $\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$  in  $\text{Pic } X$ ), 则计算相交数 (特别是自相交数) 时, 我们可以用  $D_2$  替换  $D_1$ . 例如  $H_0 : x_0 = 0$  与  $H_1 : x_1 = 0$  线性等价 ( $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(H_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(H_1) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}}(1)$ ), 那么  $H_0^2 = H_0 H_1 = 1$ .

再者, 当  $\text{Pic}(X) \cong \mathbb{Z}^r$  时<sup>2</sup>, 它将代数曲面相交理论的信息浓缩至一个  $r \times r$  的矩阵, 称为相交矩阵 (intersection matrix), 如下图所示:

$$\begin{array}{ccc} H & \begin{matrix} h & f \\ h & \left[ \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right] \\ f & \end{matrix} & \begin{matrix} h & f \\ h & \left[ \begin{matrix} n & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right] \\ f & \end{matrix} \\ \mathbb{P}^2 & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \mathbb{F}_n \end{array}$$

利用这个矩阵和一点小技巧, 我们能快速获取大量曲面信息: 例如, 对  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  上  $m$  次曲线  $C$ , 设  $C \sim kH$  ( $\text{Pic } \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{Z}$ ), 则

$$k = kH \cdot H = C \cdot H = m,$$

故  $C \sim mH$ . 对  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  上  $m$  次曲线  $C$  和  $n$  次曲线  $C'$ , 则有

$$C \cdot C' = mH \cdot nH = mn(H \cdot H) = mn$$

我们重新证明了 Bézout 定理.

有了好的理论, 我们当然想把它应用到别的代数曲面上. 第二个常见的代数曲面是  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , 我脑海里想象时是类似  $T^2$  的图像. 直积的构造自然诱导两个投影映射  $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ , 观察  $\pi_2$ , 可以发现每个点的原像都是  $\mathbb{P}^1$ . 事实上, 这是第一个  $\mathbb{P}^1$ -bundle 的例子, 我们也称之为直纹面 (geometrically ruled surface).

在科大, 大部分同学都在解几中见过直纹面的例子: 单页双曲面和马鞍面. 这并不是偶然,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  实际上是  $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$  中的二次曲面: (验证在  $\text{Im } \phi$  中,  $z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$ )

$$\phi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}} \quad ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \mapsto \begin{bmatrix} x_0 y_0 & x_0 y_1 \\ x_1 y_0 & x_1 y_1 \end{bmatrix}$$

这样看来, 单页双曲面和马鞍面其实是  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  在实三维空间中的“影子”. 另外, 映射  $\phi$  也说明  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  是射影簇, 亦即“由代数方程定义的光滑曲面”. 利用与  $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$  类似的手法可以得到  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  的 Picard 群、层上同调、Hodge 菱形、相交矩阵, 权且留作习题.

回到直纹面, 代数曲面中底空间是  $\mathbb{P}^1$  的  $\mathbb{P}^1$ -bundle 可不止  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  一种, 我们统称它们为 **Hirzebruch 曲面**. 类比球丛往往是从高一维的向量从中处理得到 ( $S^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus O)/\sim$ ),

<sup>1</sup>除子不过是不可约曲线的线性组合, 除子和除子的相交数不过是曲线相交数的线性延拓; 也可以直接将除子  $D$  视作 Picard 群中的元素  $\mathcal{O}_X(D)$ , 简记  $D_1 \cdot D_2 := (\mathcal{O}_X(D_1), \mathcal{O}_X(D_2))$ .

<sup>2</sup>对一般情况,  $\text{Pic } X$  上的相交形式可以下降 (descent) 至  $N^1(X) \cong \mathbb{Z}^{r(X)}$ , 同样是一个有限维矩阵即可搞定.

$\mathbb{P}^1$ -bundle 也是从秩 2 的向量丛里得到。幸运的是，我们有  $\mathbb{P}^1$  上秩 2 向量丛的分类，取

$$\mathbb{F}_n := \text{Proj}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)), \quad n \geq 0$$

那么  $\mathbb{F}_n$  即为所有的 Hirzebruch 曲面。可以证明，当  $n \geq 1$  时， $\mathbb{F}_n$  有一个自相交数为  $n$  的曲线，记为  $h$ ； $\mathbb{F}_n$  有一个自相交数为  $-n$  的曲线，记为  $b$ ，这是  $\mathbb{F}_n$  上唯一有负自相交数的曲线； $h$  和  $b$  都是典范映射  $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{P}^1$  的截影，相互无交，记典范映射的纤维为  $f$ ，那么有  $h \cdot f = b \cdot f = 1, h \cdot b = 0; \text{Pic } \mathbb{F}_n \cong \mathbb{Z}^2$  由  $h$  与  $f$  生成。这些信息足够给出 Hirzebruch 曲面上的相交关系。

在双有理等价的意义下<sup>1</sup>，我们称所有和  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  双有理等价的曲面为有理曲面 (rational surface)。这些代数曲面可视作同一个曲面<sup>2</sup>。双有理等价和 blow up 这个操作有密切关系<sup>3</sup>，可以说 blow up 是两个双有理等价的曲面之间的桥梁：两个曲面之间的双有理映射可以由 blow up 和 blow down(即 blow up 的逆) 的操作联系起来。

$$C \leftarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \leftarrow \cdots \rightarrow C'$$

Blow down 可以简化曲面的复杂程度。我们想找某个双有理等价类中比较简单的代表元，严格说就是不能被 blow down 的曲面，称为极小曲面 (minimal surface)。可以证明，一个曲面只能经历有限次的 blow down 即中止，那么任意一个曲面一定是某个极小曲面经过有限次 blow up 得到，我们由此将焦点关注于极小曲面。如果曲面是由某个曲面做 blow up 得到的，那么这个曲面一定有一条 (-1)-curve (指同构于  $\mathbb{P}^1$ ，自相交数为 -1)；反过来，Castelnuovo 的著名判别法 (Castelnuovo's contractibility criterion) 告诉我们，如果曲面  $X$  上有 (-1)-curve，那么  $X$  可以沿着这个 (-1)-curve 做 blow down。有了这样的极小曲面判别法，我们可以轻而易举地看出 Hirzebruch 曲面除了  $\mathbb{F}_1$  以外均为极小曲面， $\mathbb{P}_2$  也是极小曲面。可以证明这些曲面构成了极小有理曲面的所有例子。在这种意义下，我们理解了所有的有理曲面<sup>4</sup>。

## 4.2 分类定理：部分结论

有理曲面的例子只是代数曲面万花丛中的一枝。我们在这里简略叙述部分的 Enriques-Kodaira 分类定理，并且略过模空间的陈述。我们按照 Kodaira 维数  $\kappa$  将代数曲面 (中的极小曲面)<sup>5</sup> 粗略分为 4 类：

- $\kappa = -\infty$ : 除了  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  以外都是某个光滑代数曲线上的  $\mathbb{P}^1$ -丛，同一条曲线上的两个  $\mathbb{P}^1$ -丛双有理等价。我们称  $\kappa = -\infty$  的 (可能非极小) 曲面为 ruled surface。
- $\kappa = 0$ : 我们按照 Hodge 菱形的不同将它们分为四类：
  - K3 曲面<sup>6</sup>: 它们的典范丛平凡 ( $\omega_X \cong \mathcal{O}_X$ )，这是四类曲面中研究得最彻底的曲面。典型例子是  $\mathbb{P}^3$  中的 4 次曲面。
  - Enriques 曲面: 它是某个 K3 曲面的二次覆盖；反过来，任给一个 K3 曲面和  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  在其上无固定点的群作用 (fixed-point free involution)，商空间即是 Enriques 曲面。典型例子见 wiki 或者 [1]。

<sup>1</sup> 双有理等价指的是两个代数曲面在一个 (Zariski) 开集上同构，因为有太多太多不同的代数曲面，更宽松的等价条件可以简化分类的难度。

<sup>2</sup> 不严格地说，他们都有开集  $\mathbb{A}^2$ ，或者说  $\mathbb{C}^2$ 。

<sup>3</sup> 个人认为 blow up 只有在算过具体例子之后才能理解。

<sup>4</sup> 还有一个有趣的有理曲面值得一提， $\mathbb{P}^3$  中的三次光滑曲面是由  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$  blow up 6 个点得到的，它上面有经典的 27 条直线。

<sup>5</sup> 当  $\kappa \neq -\infty$  时，双有理等价类中只有唯一的极小曲面。

<sup>6</sup> 以三位数学家的名字命名：Kummer, Kähler, Kodaira。事实上，还存在非代数的 K3 曲面。

$$\begin{array}{c} & 1 \\ & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ & 1 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c} 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ & 1 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ & 1 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c} 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ & 1 \end{array}$$

*K3      Enriques      abelian      bielliptic*

- Abelian 曲面: 它是 2 维的 Abelian 簇. 典型例子是两个椭圆曲线的乘积  $E_1 \times E_2$ .
- bielliptic 曲面: 它一定长成  $(E_1 \times E_2)/G$  的形式, 其中  $E_1, E_2$  是椭圆曲线,  $G$  是有限群, 在  $E_1$  和  $E_2$  上都有群作用, 在  $E_1$  上是平移作用, 而在  $E_2$  上的群作用诱导商空间  $E_2/G \cong \mathbb{P}^1$ . 这类曲面已经有完整的列表, 详见 [1, List VI.20].
- $\kappa = 1$ : 这些曲面一定是椭圆曲面 (elliptic surface); 存在曲线  $C$  及映射  $\pi := X \rightarrow C$  使得每个纤维都为椭圆曲线 (可能退化). 典型例子是椭圆曲线和亏格大于 1 的曲线的乘积  $E \times C$ .
- $\kappa = 2$ : 这类曲面被称为 “surfaces of general type”, 因为它们到目前为止还没有完全的分类, 只有零零散散的例子. 有一些不等式和等式限制了这类曲面的数值不变量. 典型例子是亏格大于 1 的两条曲线乘积  $C_1 \times C_2$ , 还有  $\mathbb{P}^3$  中的 5, 6, 7, … 次曲面.

$\kappa$	$-\infty$	0	1	2
ruled surface over $C$				
$g(C)=0$ rational		K3	abelian	
$p_2$ Hirzebruch	$g(C)=1$	$g(C) \geq 2$	Enriques	bielliptic

surfaces of general type

■ elliptic surface  
■ toric variety

partial classification (only consider minimal algebraic surface)

### 4.3 推广: 复曲面, 高维复代数簇

我们知道复代数曲线与紧 Riemann 面范畴等价, 但 2 维情况时, 无脑的类推就不再成立<sup>1</sup>: 事实上, 存在 2 维的紧复流形, 它不能实现为复代数曲面. Hopf 曲面就是这样一个例子. 一般的复 2 维流形会失去许多性质, 例如 Hodge 菱形的对称性减弱:

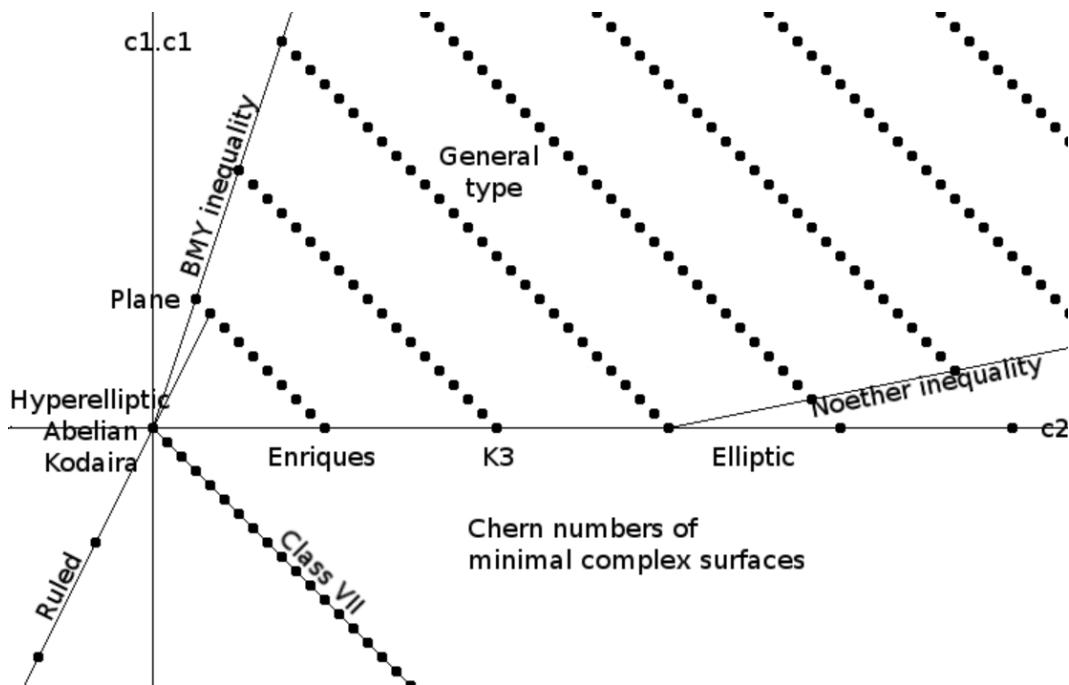
$$\begin{array}{c} 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 \end{array}$$

*Hopf surface*

好消息是, 数学上对代数曲面的分类已经推广至一般特征和紧复曲面了, 考虑问题时我们仍可以逐个击破<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>由 GAGA[13], 我们有光滑复射影簇与射影复流形范畴等价, 而一维情况时, 紧 Riemann 面一定是射影的.

<sup>2</sup>在这里强烈推荐 Kodaira 的原始论文 [4, 5, 6, 7], 其中对每一类曲面 (尤其是 Hopf 曲面) 都做了比较细致的刻画, 比如考虑了它们的形变理论.



Chern numbers of minimal compact complex surfaces(from wiki)

不过,对于更高维的复代数簇,情况变得更加棘手,许多公式(如 Riemann-Roch 公式)由于项数变多不再能发挥出在曲线曲面情形的威力. 不过数学家总能把理论推广到认知的极限,他们划出了多类特殊的代数簇,对每一类代数簇考虑它们的性质:

typical example	Names of variety
$\mathbb{P}^n, (\mathbb{P}^1)^n$	toric variety
Grassmannian $Gr(n, r)$	flag variety
$GL_n(\mathbb{C}), SL_n(\mathbb{C})$	group variety
$\mathbb{C}/\Lambda_1 \times \cdots \times \mathbb{C}/\Lambda_n$	abelian variety

## 5 总结

数学问题的无尽性恰如几何空间的无限性. 一个好的理论, 能在这无限的可能中划出一个恰当的边界, 在方寸之地创造艺术, 又仿佛于天地之间驰骋. 把简单的例子算清楚, 用分类定理叠出厚势, 格局虽小却稳扎稳打, 也不失为一种前行方法.

由于水平与篇幅的双重掣肘, 笔者只提及了几何中的分类定理, 无法提及有限单群的分类与 ADE classification(半单 Lie 代数的分类是其推广) 这两个经典的分类定理. 另外许多空间上的不变量也可以视作一个小的分类定理, 比如 Picard 群  $Pic(X)$  描述了概形  $X$  上线丛的分类. 线性代数中的相抵、相似、相合理论也可以看成是分类定理. 这么看来, 分类的思想无处不在.

## 参考文献

- [1] Arnaud Beauville and Beauville Arnaud. *Complex algebraic surfaces.* Number 34. Cambridge University Press, 1996.
- [2] Michael Hartley Freedman et al. The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(3):357–453, 1982. url: [https://maths.dur.ac.uk/users/mark.a.powell/1982\\_The%20topology%20of%20four-dimensional%20manifolds.pdf](https://maths.dur.ac.uk/users/mark.a.powell/1982_The%20topology%20of%20four-dimensional%20manifolds.pdf).
- [3] Robin Hartshorne. Algebraic geometry. volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [4] Kunihiko Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces, i. *American Journal of Mathematics*, 86(4):751–798, 1964.
- [5] Kunihiko Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces, ii. *American Journal of Mathematics*, 88(3):682–721, 1966.
- [6] Kunihiko Kodaira. On compact analytic surfaces, iii. *Annals of Mathematics*, pages 1–40, 1968.
- [7] Kunihiko Kodaira. On the structure of complex analytic surfaces, iv. *American Journal of Mathematics*, 90(4):1048–1066, 1968.
- [8] János Kollar. *Lectures on resolution of singularities (AM-166)*. Princeton University Press, 2009.
- [9] John Milnor. A unique decomposition theorem for 3-manifolds. *American Journal of Mathematics*, 84(1):1–7, 1962. url: <https://www.ams.org/journals/tran/1969-142-00/S0002-9947-1969-0246303-2/S0002-9947-1969-0246303-2.pdf>.
- [10] Grisha Perelman. The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications. *arXiv preprint math/0211159*, 2002. url: <https://arxiv.org/pdf/math/0211159v1.pdf>.
- [11] Grisha Perelman. Ricci flow with surgery on three-manifolds. *arXiv preprint math/0303109*, 2003. url: <https://arxiv.org/pdf/math/0303109v1.pdf>.
- [12] Johannes Schmitt. *The moduli space of curves*. 2021. url: <https://www.math.uni-bonn.de/people/schmitt/ModCurves/Script.pdf>.
- [13] Jean-Pierre Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique. 6:1–42, 1956. url: [http://archive.numdam.org/article/AIF\\_1956\\_\\_6\\_\\_1\\_0.pdf](http://archive.numdam.org/article/AIF_1956__6__1_0.pdf).
- [14] Ravi Vakil. Math 245a topics in algebraic geometry: Introduction to intersection theory in algebraic geometry. *preprint*, 2004. url: <http://math.stanford.edu/~vakil/245/>.
- [15] Ravi Vakil. The rising sea: Foundations of algebraic geometry. *preprint*, 2017. url: <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/FOAGnov1817public.pdf>.
- [16] John Zhang. A discussion of Thurston’s geometrization conjecture. *preprint*, 2014. url: <https://sites.math.washington.edu/~morrow/papers/john-thesis.pdf>.
- [17] 李文威. 模形式初步. 科学出版社, 2020. url: <https://wwli.asia/downloads/books/Modulform.pdf>.
- [18] 汪林. 实分析中的反例. 高等教育出版社, 2014.
- [19] 王作勤. 拓扑学讲稿. 2020. url: <http://staff.ustc.edu.cn/~wangzuoq/Courses/20S-Topology/index.html>.

# 算术函数的震荡定理

邹广翼

## 摘要

本文旨在介绍解析数论中关于震荡定理的一些结果和方法, 也即是误差项的下界估计, 这对于解析数论中关于渐近公式余项的猜想、数论函数的性质 (如某一数论函数减去另一数论函数的正负交替次数等) 时有着较为重要的作用.

## 1 本文介绍以及符号定义

### 1.1 简介及本文各部分内容扼要

在我们研究数论函数  $a(n)$  的部分和  $S(x) = \sum_{n < x} a(n)$  的渐近公式之时, 我们一般会得到一个形如  $S(x) = M(x) + R(x)$  的渐近表达式, 其中  $M(x)$  为该渐近公式的主项, 而  $R(x)$  为渐近公式的误差项, 或者余项, 为了说明  $M(x)$  的主项地位, 我们一般都会对  $R(x)$  进行一个上界估计, 使得原函数可以表示成  $S(x) = M(x) + O(f(x))$  的形式. 而我们考虑的数论函数的震荡性质则是反其道而行之, 讨论误差项的震荡性质, 也就是考虑说明  $R(x)$  不能够被某一函数  $f(x)$  (一般要求递增) 控制. 这对在误差项的实际研究中有着非常大的帮助, 在知道误差项的震荡情况后, 配合上对误差项的上界估计, 我们能够得到对于误差项较为准确的把握, 同时也能证明或证伪一些解析数论之中的猜想 (如  $4k+1$  型素数和  $4k+3$  型素数哪个“更多”等).

在第一节中我们会介绍一下有关震荡定理的一些历史, 并且在第二节之中给出数论函数震荡性质最基本的定理——Landau 定理的证明, 以及 Landau 定理的一些简单应用, 而在第三节中, 我们给出 Hardy 对于 Dirichlet 除数定理余项的震荡幅度的估计, 并且说明其和 Landau 定理证明思路的联系, 之后介绍了一部分关于震荡频率的结果.

### 1.2 本文用到的部分符号及一些定义

在本小节我们将为读者介绍本文会用到的一些符号及定义.

**定义 1.1.** 我们称一个集合为 X-集如果  $X = \{x_n\}$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . 如果这些  $x_n$  都是正整数, 我们称其为 Z-集.

同时我们会经常用到如下记号  $f(x) = \Omega(g(x))$ , 其中  $g$  一般是个单调递增的正函数, 如果

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{g(x)} > 0$$

以及  $f(x) = \Omega_+(g(x))$ , 如果

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

以及  $f(x) = \Omega_-(g(x))$ , 如果

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} < 0$$

以及  $f(x) = \Omega_\pm(g(x))$ , 如果上面两式皆成立. 事实上, 如果  $f(x) = \Omega_\pm(g(x))$ , 那么说明存在一个常数  $C$ , 使得  $f(x)$  无数次穿过  $[-Cg(x), Cg(x)]$  区间, 同时, 我们将形如这种形式的定理称

作者: 邹广翼, 2018 级数学科学学院, 邮箱: zouguangyi2001@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 2 月 2 日来稿, 3 月 31 日修改, 4 月 2 日接受. 稿件编辑: 陈恒宇.

为  $\Omega-$  型定理或结果. 同时我们会用到如下记号:  $\log_k x$  和  $e_k(x)$ , 其由如下归纳定义:

$$\log_1 x = \log x, \log_k x = \log(\log_{k-1} x),$$

以及

$$e_1(x) = e^x, e_k(x) = e^{e_{k-1}}.$$

同时会用到解析数论中一些约定俗成的函数, 如 Chebyshev- $\Psi$  函数,

$$\Psi(x) = \sum_{p^{\alpha} \leq x} \log p,$$

以及 Chebyshev- $\Theta$  函数

$$\Theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p.$$

## 2 历史引入以及 Landau 定理

1853 年, Chebyshev 在一封写给 Fuss 的信中, 做出  $4k+3$  型素数比  $4k+1$  型素数要更加多的断言, 从这个断言开始, Chebyshev 揭示了一系列被 Knapowski 和 Turán 所称为“比较素数理论”的问题. [7]

Chebyshev 提到的问题可以写成以下的具体形式, 表达式

$$\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1) \geq 0 \quad (2.1)$$

对于所有充分大的  $x$  都成立, 其中  $\pi(x; k, a)$  是指所有不超过  $x$ , 同时  $p \equiv a \pmod{k}$  素数的个数.

二十世纪初, Hardy 和 Littlewood 证伪了 Chebyshev 的断言, 并且给出了 (2.1) 震荡幅度的估计. 若记  $R(x)$  为 2.1 中前项的值, 他们事实上证明了

$$R(x) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \frac{\log_3 x}{\log x}).$$

他们并未发表过完整的证明, 但给出了证明的大致框架. 可见 [9]

不过在 Hardy-Littlewood 之前, 已经有一系列与素数分布有关的  $\Omega-$  型结果:

1898 年 E.Phragmén 证明了对任意  $\delta > 0$  存在一个  $X-$  集, 使得

$$|\{\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1)\}x^{-1/2} \log x - 1| \leq \delta \quad (2.2)$$

1899 年, J.L.W.V.Jensen 声称自己得到  $\pi(x) - \text{li } x = \Omega_{\pm}(x^{1/2-\epsilon})$ , 其中  $\pi(x)$  是小于  $x$  的素数个数,  $\text{li } x = \int_2^x (\log y)^{-1} dy$ . 但未给出证明.

在 1901 年, H.Von Koch 得到, 若黎曼猜想成立, 我们有

$$\pi(x) - \text{li } x = O(x^{1/2} \log x).$$

借着这个结果, E.Schmit 证明, 令

$$\theta = \sup\{\sigma | \zeta(\sigma + it) = 0\},$$

同时记

$$f_0(x) = \sum_{p^m \leq x} \frac{1}{m},$$

则对于任意的  $\lambda < \theta$ , 我们有:

$$f_0(x) - \text{li } x = \Omega_{\pm}(x^\theta).$$

并且给出了一个具体的估计:

$$f_0 - \text{li } x \gtrless \pm \frac{1}{29} x^{1/2} (\log x)^{-1}$$

1905 年, Landau[3] 证明了  $\Psi(x) - x \gtrless 0$  于  $X-$  集合, 同时给出了一个较为一般的方法.

1914 年, Littlewood 证明了

$$\Psi(x) - x = \Omega_{\pm}(x^{1/2} \log_3 x),$$

及

$$\pi(x) - \text{li } x = \Omega_{\pm}(x^{1/2} (\log x)^{-1} \log_3 x).$$

1930 年, Pólya 得到了一个关于震荡频率的结果  $\Psi(x) - x$  符号变化次数的一个下界, 其中  $x$  跑遍  $1 \leq x \leq y$ , 并且令  $\theta, \zeta$  如之前定义, 若令

$$P = \{s = \theta + it | \zeta(s) = 0\}$$

若  $P$  为空集, 则记  $\gamma = +\infty$ , 否则令  $\gamma = \min_{\theta+it \in P} |t|$ . 则

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \frac{W(y)}{\log y} \geq \frac{\gamma}{\pi}.$$

(以上译自 [7] 的第二节 Historic survey, 有适当修改)

1962-1963 年, Knapowski 和 Turán 发表了一系列比较数论的文章 (见 Comparative prime-number theory I-VIII).

1986-1987 年, Kaczorowski 和 Pintz 在 [10] 和 [11] 中将 Pólya 定理中的  $\limsup$  改进为  $\liminf$ , 并且将之推广到了代数数域上的函数 (如范数  $\leq x$  的素理想个数的震荡性质等).

### 3 Landau 定理

我们先介绍 Landau[3] 于 1905 年给出的关于震荡性质的广泛的结果:

**定理 3.1.** 令  $f(x)$  为一个实值函数, 且恒为正当  $x \geq x_0$ , 并且假设  $\int_{x_0}^{\infty} f(x)x^{-s-1}dx$  有一有限的收敛横坐标  $\theta$ , 则设  $F(s)$  在  $\sigma > \theta$  是为该积分, 并且可亚纯延拓到  $x_0$  的一个开邻域上, 则其在  $s = \theta$  处有一个奇点.

**推论 3.2.** 设  $F(s) = \int_{x_0}^{\infty} f(x)x^{-s-1}ds$ , 其中  $f(x)$  是实值函数, 若该积分在某个半平面内收敛且  $F(s)$  在  $\sigma > \theta$  全纯, 但不在任一  $\sigma > \theta - \epsilon, \epsilon > 0$  上全纯, 同时  $s = \theta$  不是  $F(s)$  奇点, 则  $f(x)$  符号改变的集合为一  $X-$  集.

**注.** 定理中  $F(s) = \int_{x_0}^{\infty} f(x)x^{-s-1}ds$  为如此形式是由于其出发自 Dirichlet 级数. Dirichlet 级数是形如  $D(s, a(n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$  的级数, 对于其值的表达, 依照 Lebesgue-Stieltjes 积分理论, 记

$f(x) = \sum_{n < x} a(n)$ , 则分部积分得到

$$D(s, a(n)) = \int_{x_0}^x x^{-s} df(x) = \frac{f(x)}{x^{-s}} \Big|_{x_0}^{\infty} + s \int_{x_0}^{\infty} f(x) x^{-s-1} dx,$$

例如 Riemann- $\zeta$  函数, 在  $s > 1$  时有  $a(n) = 1$ ,  $f(x) = [x]$  且

$$\zeta(s) = \frac{[x]}{x^{-s}} \Big|_{1^-}^{\infty} + s \int_{1^-}^{\infty} \frac{x - \{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{s}{s-1} - \int_{1^-}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx.$$

我们给出 [4]p177-178 页上关于该定理以及推论的证明:

定理3.1的证明. 不妨设  $x_0 = 1$ , 反证法, 假设  $F$  可全纯延拓到  $s = \theta$  的一个邻域, 则在  $\theta$  右侧  $s = \sigma$  处做 Taylor 展开

$$F(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} F^{(k)}(\sigma)(s - \sigma)^k$$

且该泰勒展开对于  $|s - \sigma| < 2|\theta - \sigma|$  收敛 (复分析中若在圆形上全纯, 那么泰勒级数便在圆内收敛), 又在  $s = \sigma$  处, 导函数的积分绝对收敛 (读者可自行验证), 故求导和积分号可交换, 从而:

$$F(s) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (s - \sigma)^k \int_{1^-}^{\infty} (-\ln x)^k x^{-\sigma-1} f(x) dx = \sum_{k \geq 0} \int_{1^-}^{\infty} \frac{1}{k!} (\ln x)^k (\sigma - s)^k x^{-\sigma-1} f(x) dx$$

而被积函数

$$(\ln x)^k (\sigma - s)^k x^{-\sigma-1} f(x)$$

在  $\theta - \epsilon$  到  $\sigma$  的实轴上恒为正, 故可以交换积分与求和, 从而

$$F(s) = \int_{1^-}^{\infty} f(x) x^{\sigma-s} x^{-\sigma-1} dx = \int_{1^-}^{\infty} f(x) x^{-s} dx$$

则取  $s = \theta - \epsilon/2$ , 得到  $F(s)$  收敛横坐标可以更小, 故矛盾.  $\square$

推论3.2的证明. 我们事实上可以说明  $f(x) = \Omega_{\pm}(x^{\theta-\epsilon})$ .

反证法, 如若不然, 不妨设

$$f(x) + Cx^{\theta-\epsilon} \geq 0$$

对于某个正常数  $C$  恒成立, 由于  $s = \theta$  不是奇点, 并且因加上  $Cx^{\theta-\epsilon}$  而新增的奇点在  $s = \theta$  左侧, 故积分的收敛横坐标不变, 从而由定理3.1知,  $s = \theta$  为奇点, 这就与假设矛盾. 因此  $f = \Omega_{-}(x^{\theta-\epsilon})$ , 同理有  $f = \Omega_{+}(x^{\theta-\epsilon})$ , 故有  $f(x) = \Omega_{\pm}(x^{\theta-\epsilon})$ , 从而  $f(x)$  改变符号无数次.  $\square$

注. 我们得到的不只是  $f(x)$  符号改变无数次, 我们还给出了  $f(x)$  震荡幅度下界的估计.

加强推论3.2条件, 我们可以得到如下推论:

**推论 3.3.** 在推论3.2的条件下, 若  $F(s)$  在  $\Re s = \theta$  上有一异于  $s = \theta$  的奇点, 则  $f(x) = \Omega_{\pm}(x^{\theta})$ .

推论3.3的证明. 考虑

$$G(s) = \int_{1^-}^{\infty} \{f(x) + Cx^{\theta}\} n^{-s-1} dx,$$

则其在  $\Re s = \theta$  上有至少两个极点, 设其中不在实轴上的为  $\theta + it$ , 则当横向逼近这两个极点的时候我们有:

$$F(\sigma + it) \sim \frac{C_1}{(\sigma - \theta)^n},$$

$$F(\sigma) \sim \frac{C}{\sigma - \theta},$$

令  $\sigma \rightarrow \theta^+$  时, 由于  $|F(\sigma + it)| < F(\sigma)$ (这是因为  $f(x) + Cx^\theta$  恒正), 这就可以得到  $C$  的一个正下界. 同理我们能够得到一个负的下界, 故  $f(x) = \Omega_\pm(x^\theta)$ .  $\square$

### 3.1 一些与 $\zeta$ 函数直接相关的震荡定理

Landau 定理有很多直接应用, 最为经典和简单的应用无疑就是与  $\zeta$  函数有关. 我们将会证明其中一部分, 剩下的留给读者做练习.

**定理 3.4.**  $\Psi(x) = x + \Omega_\pm(x^{1/2})$ .

证明. 我们需要一个预备知识:  $\zeta(s)$  在  $\Re s \geq \frac{1}{2}$  上有零点, 且在  $[0, 1]$  上无零点, 可参见 [2] 第 15 节.

考虑  $\zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$  的 Dirichlet 级数, 其形如:

$$\zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{-s}}$$

则其对应的  $f(x) = \sum_{n \leq x} 1 - \Lambda(n) = [x] - \Psi(x)$ . 并且该函数的极点是  $\zeta$  函数的零点. 而当  $\Re s > 1$  时我们有:

$$\zeta(s) + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum \frac{1 - \Lambda(n)}{n^{-s}} = s \int_{1^-}^{\infty} \frac{f(x)}{x^{-s-1}} dx \quad (3.1)$$

由于左侧函数在  $\sigma = \frac{1}{2}$  轴上有极点, 故设该积分收敛横坐标为  $\theta \geq \frac{1}{2}$ , 由推论 3.3, 我们有  $f(x) = \Omega_\pm(x^\theta)$ , 进而  $f(x) = \Omega_\pm(x^{\frac{1}{2}})$ .  $\square$

注.  $\zeta(s)$  在  $\Re s > \theta$  时无零点事实上是与  $f(x) = O(x^{\theta+\epsilon})$  对任意  $\epsilon > 0$  成立是等价的, 无零点带越朝  $\sigma = \frac{1}{2}$  逼近, 我们便能够证明更小的余项上界, 而若  $\sigma = \frac{1}{2}$  右侧有零点, 则可以证明更大的余项震荡. 事实上, 这也由与  $\Psi(x)$  的精确公式:

$$\Psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2} \log(1 - x^2)$$

相呼应, 其中  $\rho$  是  $\zeta$  函数的零点, 并且  $\frac{x^\rho}{\rho} = \frac{x^{\Re \rho} e^{i \ln x \Im \rho}}{\rho}$  会随着  $x$  的增加而震荡, 每一项的震荡幅度会控制在  $x^\theta$  之内.

**定理 3.5.**  $M(x) := \sum_{n \leq x} \mu(n) = \Omega_\pm(x^{1/2})$ .

注. 考虑  $\frac{1}{\zeta(s)}$ .

**定理 3.6.**  $Q(x) := \sum_{n \leq x} \mu^2(n) = \frac{6}{\pi^2} x + \Omega_\pm(x^{1/4})$

注. 考虑  $\frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ .  $Q(x)$  即为  $x$  以内无平方因子的数的个数.

同时我们能够证明一些不那么与  $\zeta$  函数相关的定理, 例如我们开头提到的,  $4k+1$  型素数和  $4k+3$  型素数哪个多?

### 3.2 $\pi(x; 4, 3) - \pi(x; 4, 1)$ 的符号改变

要研究这个问题, 我们首先得知道  $\pi(x; 4, 3)$  和  $\pi(x; 4, 1)$  的计算方法. 读者需要了解一点  $L$  函数与 Dirichlet  $\chi$  特征的基本知识, 具体可以参见 [2] 或 [15] 最后几章.

回到这个问题, 我们要先计算  $\Psi(x; 4, 1) - \Psi(x; 4, 3)$ , 考虑  $\mod 4$  的特征, 一共有两个, 分别满足  $\chi(3) = \pm 1$ , 对应的  $L$  函数分别为:

$$L(s, \chi_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

$$L(s, \chi_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$$

记  $\Lambda(n; q, a) = \Lambda(n)$ , 如果其  $a \equiv \mod q$ , 否则为 0. 则我们有:

$$-\frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_0(n; q, a)\Lambda(n)}{n^s},$$

$$-\frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_1(n)\Lambda(n; q, a)}{n^s},$$

从而我们有:

$$D(s, \Lambda(n; 4, 1)) = -\frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} - \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)}$$

$$D(s, \Lambda(n; 4, 3)) = -\frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} + \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)}$$

从而我们考虑

$$D(s, \Lambda(n; 4, 1) - \Lambda(n; 4, 3)) = -2 \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)}$$

在这里我们也需要假定读者知道  $L$  函数的一些相关知识:  $L$  函数在  $\sigma \geq \frac{1}{2}$  上有零点且落在  $\sigma < 1$  内 (可参见 [2] 第 16 节). 同时对于具体的  $L$  函数, 我们可以说明其在实轴上无零点 (现在还不能证明所有  $L$  函数在实轴上无零点), 类似定理 3.1 的证明, 我们能够得到

$$S(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n; 4, 1) - \Lambda(n; 4, 3) = \Omega_{\pm}(\sqrt{x})$$

从而我们有:

$$f_0(x; 4, 1) - f_0(x; 4, 3) = \sum_{p^m \leq x, p^m \equiv 1 \pmod{4}} \frac{1}{m} - \sum_{p^m \leq x, p^m \equiv 3 \pmod{4}} \frac{1}{m} = \int_{1^-}^x \frac{1}{\log t} dS(t) = \Omega_{\pm}\left(\frac{\sqrt{x}}{\log x}\right).$$

但是这离  $\pi(x; 4, 1) - \pi(x; 4, 3)$  还差了一点, 因为  $f_0(x; 4, 1)$  比  $f_0(x; 4, 3)$  多一个  $\frac{\pi(\sqrt{x})}{2}$ . 要得到这个结论, 我们需要对常数进行估计, 这是很简单的, 由于  $2 \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)}$  极点的留数都是偶数, 故绝对值不小于 1, 从而回顾 3.3 的证明过程, 我们可以得到  $\Omega_{\pm}$  的常数至少是 2, 而  $\frac{1}{2}\pi(\sqrt{x})$  常数为  $\frac{1}{2}$ . 因此我们可以得到  $\pi(x; 4, 1) - \pi(x; 4, 3)$  的符号改变无数次, 且震荡幅度至少是  $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$ .

**注.** 虽然我们得到了  $\pi(x; 4, 1) - \pi(x; 4, 3)$  的符号是无穷改变的, 但事实上, 由于 1 是 4 的二次剩余而 3 不是, 对于大多数情况,  $\pi(x; 4, 1) - \pi(x; 4, 3) > 0$ , 对于一般的  $\pi(x; n, a)$  也有类似的现象, 被称为 Chebyshev' bias.

本题证明适用于  $\pi(x; 3, 1) - \pi(x; 3, 2)$  的情况, 读者可自行尝试解决.

### 3.3 Landau 定理够了吗?——以 Dirichlet 除数问题为例

前面两小节为我们展示了 Landau 定理在一些震荡定理中的运用, 并且在与素数有关的一些结果之中都取得了非常好的结果. 那么为什么会这样呢? 为此我们需要分析一下 Landau 定理刻画震荡幅度的背后逻辑, 同时分析其不足之处, 并用具体的例子来说明 Landau 定理的缺陷.

我们知道 Landau 定理要求一个不在实轴上的极点  $\rho = \theta + i\gamma$ , 为什么是这样? 我们可以从得到  $\Psi(x)$  的精确公式时所用的方法来看. 我们首先有如下的定理:

**定理 3.7** (Parron 公式). 若  $c > 0$ , 则

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ \frac{1}{2} & x = 1 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

其中积分表示的积分回路为  $c - iT$  到  $c + iR$  的回路积分取极限.

证明可参看 [2] 的第 17 节.

对于 Dirichlet 级数, 如果能够亚纯延拓到全平面, 我们能够得到类似于

$$\Psi(x) = x - \sum_{\rho} \frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) - \frac{1}{2} \log(1 - x^2)$$

的精确公式, 这是因为我们能够考虑如下等式:

$$\Psi(x) = - \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^s \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds,$$

而后我们将积分的直线不断左移, 一般来说经过适当估计, 当  $c \rightarrow -\infty$  时, 积分是会趋向于 0 的, 从而可以用留数定理, 通过被积函数的极点来表示  $\Psi(x)$  的具体值.

而其中每个极点  $\rho$ , 都会贡献一个  $x^{\rho}$  的项. 当  $\rho$  是一个复数的时候,  $x^{\rho}$  就会不断震荡. 从而我们能够知道对于这样有极点的函数, 因此 Landau 定理虽然看似粗糙, 但对振幅的估计是非常接近的 ( $x^{\rho}$  的阶没有问题, 但实际振幅可能还会带上一些  $\log x$  之类的项), 同时可以给我们一些  $\Omega$  前常数项的估计, 但是对于震荡的频率, 以及最佳的振幅, Landau 定理就会遇到问题, 而需要一些对具体函数极点分布的知识——比如说我们知道  $\Psi - x = \Omega_{\pm}(\sqrt{x} \log x)$ , 其证明就用到对  $\zeta$  函数零点的性质. 因此, 对于极点存在的函数来说, 我们暗自依照着其精确公式存在的想法, 便可以用类似于 Landau 的定理给出相应的估计, 而对于极点不存在的函数, Landau 定理就无法直接运用, 但是思路却是一致的, 我们会在下一节中给出例子.

**问题 3.1** (Dirichlet 除数问题). 我们有:

$$\sum_{n < x} d(n) \sim x \log x + x(2\gamma - 1) + \Delta(x)$$

其中  $d(n)$  是  $n$  的因子个数,  $\gamma$  是欧拉常数. 我们要问的问题是:  $\Delta(x)$  的阶是多少?

很明显我们有:

$$D(s, d(n)) = \zeta^2(s),$$

如果我们想用 Landau 定理来算  $\Delta(x)$  的振幅, 我们自然会想去配一个部分和与其主项同阶的

函数, 大概会是  $\zeta'(s) + C\zeta(s)$  之类, 但遗憾的是,  $D(s, d(n)) - \zeta'(s) + C\zeta(s)$  除了  $s = 1$  以外没有什么可能的极点, , Landau 定理在这里便失效了, 若是用我们之前所用的解释, 则是  $\sum_{n < x} d(n)$  不能简单的直接用 Parron 公式积分写出精确表达式.

但仍然可以用着类似的想法来做这个问题, 稍加改动, 可以证明

$$\Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{4}}).$$

**注 . 2.1** 关于 Landau-type 定理, Grosswald 给出过推广, 具体可以参看 [7] 以及其 1965 年的文章 [6], 而 Redmond 对广义狄利克雷级数得到的一些  $\Omega$ -型结果, 可参见 [14]. 同时与  $\zeta$  函数相关的一些数论函数的余项的震荡性质, Landau 定理只是给出了一个非常基本的刻画, 读者如有兴趣, 可以自行进一步检索相关资料.

**2.2** 本小节中  $\pi(x, 4, 1) - \pi(x, 4, 3)$  的结论, 事实上是比较素数理论的一部分, 读者可以去查看 Knapowski 和 Turán 于 1962-1963 年陆续发表的一系列文章 (Comparative prime-number theory I-VIII), 也可参看更加现代的 [12] 和 [5] 等综述.

**2.3** Dirichlet 除数问题的余项上界也是还未解决的经典问题, Dirichlet 本人通过双曲求和法证明了  $\Delta(x) = O(\sqrt{x})$ , 即考虑

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} d(n) &= \sum_{n < x} \sum_{a|n} 1 = \sum_{n < x} \sum_{ab=n} 1 \\ &= \sum_{ab < x} 1 = \sum_{a < \sqrt{x}, ab < x} 1 + \sum_{b < \sqrt{x}, ab < x} 1 - \sum_{a, b < \sqrt{x}, ab < x} 1 \\ &= 2 \sum_{a < \sqrt{x}} \left[ \frac{x}{a} \right] - x + O(\sqrt{x}) = x \log x + x(2\gamma - 1) + O(\sqrt{x}). \end{aligned}$$

如果直接求和误差将是  $O(x)$  级别, 而 Dirichlet 将其对称划分为几个  $\sqrt{x}$  的求和, 显著减小了误差. 不过  $O(\sqrt{x})$  只是非常朴素的上界, 1922 年 van der Corput 通过三角和方法得到了  $\Delta(x) = O(x^{\frac{33}{100}+\epsilon})$ . 之后 Dirichlet 除数问题的阶也被不断改进, 同时出现逐点估计之外的积分估计, 如得到:

$$\begin{aligned} \int_0^x \Delta(x) dx &\sim \frac{x}{4}, \\ \int_0^x \Delta^2(x) dx &\sim Cx^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

目前普遍认为  $\Delta(x) = O_{\epsilon}(x^{\frac{1}{4}+\epsilon})$ .

## 4 其他形式的震荡定理

### 4.1 Dirichlet 除数问题的余项

Hardy 于 1917[8] 年证明了  $\Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{4}})$ . 本小节便主要依照于 [8], 接下来的证明如果遇到 Gap, 可直接参看 [8].

我们首先简述一下证明的思路. 我们之前介绍过, Landau 定理可以说是对精确公式进行的刻画, 因此当我们试图去得到  $\Delta(x)$  的余项震荡幅度之时, 我们也需要寻找一种类似于得到其精确公式的方式, 然后得到该公式的极点, 并且与  $n^{\frac{1}{4}}$  的情况作对比.

由于我们有 Laplace 变换或 Mellin 变换

$$e^{-s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} s^{-z} \Gamma(z) dz,$$

其中  $k > 0, \sigma = \Re s > 0$ . 这事实上就可以给我们灵感, 考虑  $\zeta(\frac{1+z}{2})^2 \Gamma(z)$ (读者可以自行尝试非  $\frac{1+z}{2}$  时的结果), 我们有:

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} s^{-z} \Gamma(z) \left\{ \zeta\left(\frac{1+z}{2}\right) \right\}^2 dz, \quad (4.1)$$

其中  $\sigma = \Re s > 0, k > 1$ ( $k > 1$  使得  $\Re \frac{1+z}{2} > 1$ ), 从而由留数定理有(加上适当的估计):

$$F(s) = -\frac{4 \log s}{s} + \sum_{n=0}^p \frac{(-s)^n}{n!} \left\{ \zeta\left(\frac{1-n}{2}\right) \right\}^2 + J_p, \quad (4.2)$$

其中  $p$  是任一正整数, 这里我们用到了  $\Gamma(s)$  延拓到全平面后在  $s = -n$  处有留数为  $\frac{1}{n!}$  的单极点,

$$J_p = \frac{1}{2\pi i} \int_{-p-\frac{1}{2}}^{-p-\frac{1}{2}+i\infty} s^{-z} \Gamma(z) \left\{ \zeta\left(\frac{1+z}{2}\right) \right\}^2 dz.$$

我们将积分回路不断左移, 可以得到  $F(s)$  的精确公式. 我们有:

$$F(s) = -\frac{4 \log s}{s} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \left\{ \zeta\left(\frac{1-n}{2}\right) \right\}^2 := -\frac{4 \log s}{s} + G(s). \quad (4.3)$$

则  $G(s)$  在  $|s| < 4\pi$  上面都是收敛的, 我们要研究  $F(s)$  的极点就需要研究  $G(s)$  的极点, 并且  $G(s)$  实际上不算太难研究, 由  $\zeta$  函数的函数方程(可参见 [2] 第 8 节),  $G(s)$  的精确表达式甚至都是能写出来的, 下面是繁琐的计算, 读者可以跳过这一部分. 我们有:

$$\zeta\left(\frac{1-n}{2}\right) = 2(2\pi)^{-\frac{1+n}{2}} \cos\left\{\frac{n+1}{4}\pi\right\} \Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right) \zeta\left(\frac{1+n}{2}\right),$$

从而我们可以记  $G(s)$  为

$$G(s) = A + Bs + \frac{1}{\pi} M\left(-\frac{s}{2\pi}\right) + \frac{i}{2\pi} M\left(-\frac{is}{2\pi}\right) - \frac{i}{2\pi} M\left(\frac{is}{2\pi}\right),$$

其中  $A, B$  是常数,  $M(s) = \sum_2^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})^2}{\Gamma(n+1)} \left\{ \zeta\left(\frac{1+n}{2}\right) \right\}^2 s^n$ . 记  $c_n = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})^2}{\Gamma(n+1)}$  从而我们只需要考虑  $M(s)$  的极点情况, 而对于  $M(s)$ , 我们有:

$$M(s) = \sum_2^{\infty} c_n s^n \sum_1^{\infty} \frac{d(q)}{q^{\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}}} = \sum_1^{\infty} \frac{d(q)}{\sqrt{q}} \sum_2^{\infty} c_n \left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right)^n =: \sum_1^{\infty} \frac{d(q)}{\sqrt{q}} L\left(\frac{s}{\sqrt{q}}\right).$$

我们只要考虑  $L(s)$  的极点情况, 而事实上我们可以具体得到  $L(s) = \sum_2^{\infty} c_n s^n$  的表达式:

$$\sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1+n}{2})^2}{\Gamma(n+1)} s^n = \sum_0^{\infty} s^n \int_0^1 \{w(1-w)\}^{\frac{n-1}{2}} dw = \frac{8}{\sqrt{4-s^2}} \arctan \sqrt{\frac{2+s}{2-s}}.$$

$$L(s) = -\pi - s + \frac{8}{\sqrt{4-s^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2+s}{2-s}} \right) \sim \frac{2\pi}{\sqrt{2-s}}.$$

(部分计算省去, 读者可之后自行补充) 其在  $s = 2$  处有个极点, 从而通过  $L(s)$  的极点, 我们能得到  $F(s)$  的极点情况.

通过适当估计可得  $M(s) - \sum_1^{p-1} \frac{d(q)}{\sqrt{q}} L(\frac{s}{\sqrt{q}})$  在  $|s| < 2\sqrt{p}$  上全纯, 从而我们将  $M(s)$  带回  $F(s)$  知:  $F(s)$  在  $s = \pm 4\pi i \sqrt{q}$  上有个阶为  $\frac{1}{2}$  的奇点, 并且有:

$$F(s) \sim \frac{i}{2\pi} M\left(-\frac{is}{2\pi}\right) \sim \frac{i}{2\pi} \frac{d(q)}{\sqrt{q}} L\left(-\frac{is}{2\pi\sqrt{q}}\right) \sim \frac{e^{\pi i/4} d(q)}{q^{\frac{1}{4}}} \sqrt{\frac{2\pi}{s - 4\pi i \sqrt{q}}}$$

当  $s = \sigma + 4\pi i \sqrt{q}$  且  $\sigma \rightarrow 0$  时.

现在我们就可以差不多可以证明  $\Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{4}})$  了, 我们接下来的任务是配出  $d(n)$  的前缀和  $\sum_{n < x} d(n)$  以及考虑系数是  $x^{\frac{1}{4}}$  时对应函数的极点情况.

我们先配出  $\sum_{n \leq x} d(n)$  的主要部分. 我们需要如下两个函数:

$$\phi(s) = \sum (\log n + 2\gamma) e^{-s\sqrt{n}}, \psi = \sum n^{-\frac{1}{4}} e^{-s\sqrt{n}}.$$

同样的, 用 Mellin 变换, 我们可以得到:

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} s^{-z} \Gamma(z) Z(z) dz, Z(z) = -\zeta'\left(\frac{z}{2}\right) + 2\gamma\zeta\left(\frac{z}{2}\right)$$

通过类似的留数定理, 我们可以得到:

$$\phi(s) = -\frac{4 \log s}{s^2} + \frac{4}{s^2} + g(s),$$

其中  $g(s)$  是一个整函数, 而对于  $\psi(s)$ , 我们有

$$\psi(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} s^{-z} \Gamma(z) \zeta\left(\frac{1}{4} + \frac{z}{2}\right) dz,$$

$$\psi(s) = \sqrt{\pi} s^{-\frac{3}{2}} + h(s).$$

其中  $h(s)$  是一个整函数, 而我们只需要考虑  $\psi(s)$  的极点情况.

现在我们考虑余项的和, 记  $d_n = d(n) - \log n - 2\gamma$ ,  $D_n = \sum_1^n d_v$ , 以及  $f(s) = \sum_{n \geq 1} d(n) e^{-s\sqrt{n}}$  则

$$\sum_{n \geq 1} d_n e^{-s\sqrt{n}} = \sum_{n \geq 1} D_n \{e^{-s\sqrt{n}} - e^{-s\sqrt{n+1}}\} = \frac{1}{2} s \sum \frac{D_n}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

记  $S(s) = \sum \frac{D_n}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}}$ . 第二步用  $e^{-s\sqrt{x}}$  带余项的 Taylor 展开, 及  $D_n = O(\sqrt{n})$  的朴素估计即可得到.

而  $f(s) = F'(s)$ , 从而有

$$f(s) \sim \frac{e^{\frac{1}{4}\pi i} d(q)}{2q^{\frac{1}{4}}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma^{\frac{3}{2}}}$$

当  $s = \sigma + 4\pi i \sqrt{q}$  中  $\sigma \rightarrow 0$  之时. 故

$$S(s) = \sum \frac{D_n}{\sqrt{n}} e^{-s\sqrt{n}} = \frac{2}{s} \sum_{n \geq 1} d_n e^{-s\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) = f(s) - \psi(s) + O\left(\frac{1}{\sigma}\right) \sim \frac{(1+i)d(q)}{4i\sqrt{\pi}q^{\frac{3}{2}}\sigma^{\frac{3}{2}}}.$$

我们再考虑  $s = 0$  附近  $\mathbf{S}$  的情况:

$$\sum_{n \geq 1} d_n e^{-s\sqrt{n}} = \frac{1}{2}s\mathbf{S}(s) + O\left(s^2 \sum \frac{e^{-s\sqrt{n}}}{n}\right) + O\left(s \sum \frac{e^{-s\sqrt{n}}}{n}\right) = \frac{s}{2}\mathbf{S}(s) + O(1)$$

而在原点附近  $f(s) \sim \frac{4}{s^2} - 4\frac{\log s}{s^2}$ , 故在原点与  $\phi(s)$  的极点抵消掉, 我们有  $\mathbf{S}(s) = O(\frac{1}{s})$ , 而

$$\sum n^{-\frac{1}{4}} e^{-(\sigma+4\pi i\sqrt{q})\sqrt{n}} \sim o(\sigma^{-\frac{3}{2}}).$$

$$\sum n^{-\frac{1}{4}} e^{-\sigma\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sigma^{\frac{3}{2}}}.$$

这两个读者可以自行用微积分方法计算, 或者用 Lebsgue-Stieltjes 积分计算.

从而, 类似于 Landau 定理推论的证明, 我们有若  $D_n + Kn^{\frac{1}{4}} > 0$  在某一项后恒成立, 那么就有:

$$\frac{C(q)}{\sigma^{\frac{3}{2}}} \sim \left| \sum \frac{D_n + Kn^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} e^{-(4\pi i\sqrt{q}+\sigma)\sqrt{n}} \right| \leq \sum \frac{D_n + Kn^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}} e^{-\sigma\sqrt{n}} \sim \frac{K\sqrt{\pi}}{\sigma^{\frac{3}{2}}}$$

故可以得到  $K$  的一个正下界, 也就是说  $K$  至少要大于一个可计算的正常数  $C$ , 才能使  $D_n + Kn^{\frac{1}{4}}$  在某一项后恒成立, 也就是  $D_n + (C - \epsilon)n^{\frac{1}{4}} > 0$  对  $\epsilon > 0$  都不恒成立, 这就能说明  $D_n = \Delta(n) = \Omega_+(n^{\frac{1}{4}})$ . 类似地我们能够得到  $\Delta(n) = \Omega_-(n^{\frac{1}{4}})$ , 从而  $\Delta(n) = \Omega_{\pm}(n^{\frac{1}{4}})$ .

$$\Delta(x) = \Omega_{\pm}(x^{\frac{1}{4}})$$

**注.** Hardy 证明 Dirichlet 除数问题的思想, 实际上和 Landau 定理推论3.3的证明思想类似, 主要是需要考虑将  $d(n)$  表示为某个  $\sum d(n)f_n(s)$  的系数, 若是谨记这个想法, 同时从模仿  $\Psi(x)$  得到精确公式所用的留数定理的角度出发, 并且知道 Mellin 变换或 Laplace 变换, 能够将这个  $d(n)$  表示出来, 那么剩下的工作全是繁琐但直接的计算, 以及函数选取上的尝试, 非常推荐读者自己计算一遍, 或将本结论推广到  $\sum_{n < x} d_k(n)$ ,  $d_k(n)$  为  $n$  写成  $k$  个正整数的乘积方式, 这并不难, 是个非常合适的练习题.

关于 Dirichlet 除数问题最近的一些进展, 可以参考本篇 survey[1].

## 4.2 实效的震荡定理以及定量震荡频率

除了余项的震荡幅度, 余项的震荡频率自然也是一个值得关心的问题, 1930 年 Pólya 在 [13] 中证明了如下定理:

**定理 4.1 (Pólya 定理).** 在 Landau 定理的条件下, 设  $F(s) = \int_{x_0}^{\infty} f(x)x^{-s-1}dx$  为某个半平面  $\sigma \geq \theta - c_0, c_0 > 0$  上的亚纯函数, 令  $\gamma = \inf\{|t|s = \theta + it \text{ 是 } F(s) \text{ 奇点}\}$ , 如果是空集则令  $\gamma = \infty$ , 则有:

$$\limsup_{Y \rightarrow \infty} \frac{V(f, Y)}{\log Y} \geq \frac{\gamma}{\pi}$$

其中  $V(f, Y)$  是  $[0, Y]$  上  $f$  符号改变次数.

囿于笔者的语言水平, 笔者并没有看懂 Pólya 的法文文章, 之后 Grosswald[6] 推广了 Pólya 的结果, 适当减弱了命题需要的条件, 但其证明过程也引用了 Pólya 的定理. 而后 Kaczorowski 和 Pintz 在 [10] 和 [11] 中将  $\limsup$  改为  $\liminf$ , 并且在其中给出了一定区间内符号改变次数的下界, 从而可以计算首次改变符号的上界, 并且推广到了代数数域上的一

些数论函数中去,但是证明之中有许多较为繁杂的计算,笔者在此也不想多进行赘述,感兴趣的读者可以自行前去查看 [10].

不过笔者倒是可以在此对该定理的震荡频率做一定的解释,如果我们考虑一个最简单的情况,使得

$$f(x) = x^{\theta+it} + x^{\theta-it} = 2x^\theta \cos(t \ln x),$$

事实上这对应的是  $F(s)$  在  $\sigma = \theta$  上只有两个极点  $\frac{1}{s - \theta + it} + \frac{1}{s - \theta - it}$  的情况,此时在  $[0, x]$  区间中,  $f(x)$  的符号改变量为  $\frac{t \log x}{\pi}$ ,这就是对应于 Pólya 定理中的  $\limsup_{Y \rightarrow \infty} \frac{V(f, Y)}{\log Y} \geq \frac{\gamma}{\pi}$ . 而 Kaczorowski 和 Pintz 的文章便也是基于这样的考虑,若  $f(x) = \sum x^\theta \cos(t \log x)$ ,其中  $\theta + it$  是极点,那么由复分析结论就有这些极点不会是聚点,那么其符号改变量实际上就是这个三角和的符号震荡频率,他们对区间进行适当划分,使得除去一些区间,除了最小那个  $t$  以外的其他的  $\cos(t \log x)$  一直比较小,从而得到在这个区间中  $f(x)$  必定会改变符号.

当然,这样的定理也是非常粗糙的,当临界线上极点有无穷多之时,它的震荡频率可能会变得比较快,就比如说记  $M(x) = \sum_{n < x} \mu(n)$ ,我们有  $M(x) = \Omega_+(x^{\frac{1}{2}})$ ,人们猜测:  $M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\epsilon})$ ,及其震荡频率  $V(M, Y) = \Omega_+(x^{\frac{1}{2}-\epsilon})$ .也就是说,对于具体的函数,我们会需要更多的信息, Landau 定理、Pólya 定理、以及 Hardy-Littlewood 他们的方法,虽然对很大一部分的函数都是适用的,并且恰好比较精细(对于  $x^\theta$  阶来说),但一旦我们需要更加精细的估计,我们便需要对于  $\zeta$  函数,  $L$ - 函数以及其他对应的函数的性质更加精细的研究.

## 参考文献

- [1] Bruce C. Berndt, Sun Kim, and Alexandru Zaharescu. The circle problem of gauss and the divisor problem of dirichlet—still unsolved. *American Mathematical Monthly*, 125(2):99–114, 2018.
- [2] Harold Davenport. *Multiplicative Number Theory 2rd Edition*. Springer, New York, NY, 2 edition, 2020.
- [3] Edmund Landau. Über einen Satz von Tschebyschef. pages 527–550, 1906.
- [4] Gerald Tenenbaum 著, 陈华一译. *解析与概率数论导引*, volume 163. 高等教育出版社, 2010.
- [5] Andrew Granville and Greg Martin. *Prime Number Races*, volume 113. 2006.
- [6] Emil Grosswald. On some generalizations of theorems by Landau and Pólya. *Israel Journal of Mathematics*, 3(4):211–220, 1965.
- [7] Emil Grosswald. Oscillation Theorems of Arithmetical Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 126(1):1, 1967.
- [8] G. H. Hardy. On dirichlet's divisor problem. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s2-15(1):1–25, 1917.
- [9] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Contributions to the theory of the riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes. *Acta Math.*, 41:119–196, 1916.
- [10] J. Kaczorowski and J. Pintz. Oscillatory properties of arithmetical functions. I. *Acta Mathematica Hungarica*, 48(1-2):173–185, 1986.
- [11] J. Kaczorowski and J. Pintz. Oscillatory properties of arithmetical functions. II. *Acta Mathematica Hungarica*, 49(3-4):441–453, 1987.
- [12] Greg Martin and Justin Scarfy. Comparative prime number theory: a survey. 13:1–37, 2012.
- [13] G. Pólya. *Über Das Vorzeichen Des Restgliedes im Primzahlsatz*, pages 233–244. Springer US, Boston, MA, 1969.
- [14] Don Redmond. Omega theorems for a class of Dirichlet series. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 9(4):733–748, 1979.
- [15] Elian M. Stein and Rami Shakarchi. *Complex analysis Princeton Lectures*. 2003.

# 遍历定理

姚一晨

## 摘要

遍历理论是动力系统领域的一个分支, 研究系统在保测映射下的遍历性质. 本文主要介绍遍历论的几个基本概念, 证明平均遍历定理和逐点遍历定理, 并介绍几个有意思的应用.

## 1 引论

### 1.1 遍历论的发展历程

本节参考: [4] 引言; [3] §0.1; [2] §1.3.

一般认为, 动力系统的起源可追溯到 Poincare 关于三体问题的研究. 他在著名的《天体力学的新方法》(1892-1899) 中, 引入了定性分析的方法, 着重研究相空间的几何, 将注意力从方程的单个解转移到所有可能的解曲线及其相互关系上来. 同时, 他还发现了如下的 Poincare 回复定理:

**定理 1.1** (Poincare 回复定理). 设  $(X, \mu)$  为测度空间,  $T : X \rightarrow X$  为保测变换,  $E \subseteq X, \mu(E) > 0$ , 那么几乎每个  $x \in E$  回到  $E$  中无穷多次.

俄罗斯数学家李雅普诺夫在 1899 年左右发展了一套方法, 定义了常微分方程组的稳定性. 同时他也创造了动力系统稳定性理论.

随着动力系统领域研究的深入, 两个重要的分支从动力系统中衍生出来: 拓扑动力系统和测度遍历系统, 后者常被称为遍历理论. 下文就主要介绍遍历理论的发展历史.

19 世纪 80 年代左右, 物理学家 Boltzmann 为研究热力学现象, 引入了“遍历性假设”, 即系统的时间平均等于空间平均. 事实上, 他的遍历性假设对一般的系统并不成立, 但由此人们将满足遍历性假设的系统称为遍历系统, 对遍历系统做了许多深刻的研究.

引入测度论来严格研究动力系统的遍历性质, 则要等到 20 世纪 30 年代初期, 美国数学家 Birkhoff 和 Von Neumann 分别证明了两个重要的遍历定理: (其中  $T$  为有限测度空间  $(X, \mu)$  上的保测变换)

**定理 1.2** (逐点遍历定理 (Birkhoff, 1931)).  $\forall f \in L^1, \exists f^* \in L^1,$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) \rightarrow f^* \text{ a.e. and in } L^1, \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

**定理 1.3** (平均遍历定理 (Von Neumann)).  $\forall f \in L^2,$

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) \rightarrow Pf \text{ in } L^2, \text{ 当 } n \rightarrow \infty.$$

其中  $P$  为向  $L^2$  的某个子空间上的投影算子.

遍历论的下一个重大进展在 1958 年, Kolmogorov 引入了熵的概念. 近些年来, 遍历理论被广泛用于证明其他数学领域的重要结果之中. 比如:

作者: 姚一晨, 2018 级数学科学学院, 邮箱: zkdtysz2018@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 3 月 7 日来稿, 3 月 27 日修改, 4 月 7 日接受. 编辑: 郑伟豪.

**例 1.1** (Weyl 等分布定理). 对  $\forall \alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}, (n\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$  的小数部分是在  $[0,1]$  中是平均分布的, 也就是说:

$$\forall a, b \in [0, 1], \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : a \leq \{n\alpha\} < b\}|}{N} = b - a$$

上式中  $\{n\alpha\}$  代表  $n\alpha$  的小数部分.

在本文的最后将用测度论的方法给出此定理的证明.

值得一提的是, 遍历论的方法被应用于解决一系列数论问题之中, 如下列一连串关于整数集合是否含有任意长的等差数列的问题:

**例 1.2.** 一个整数集合  $s$  被称为具有正的上 Banach 密度, 是指存在序列  $(m_j), (n_j)$ , 当  $j \rightarrow \infty$  时,  $n_j - m_j \rightarrow \infty$ , 使得

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{|S \cap [m_j, n_j]|}{n_j - m_j} > 0$$

**定理 (Szemerédi).** 任何具有正的上 Banach 密度的整数集合必定包含任意长度的等差数列.

Furstenberg 在 1977 年证明了此定理可由推广形式的 Poincaré 定理推出, 并证明了 Szemerédi 定理的推广形式. 2001 年, Gowers 给出了 Szemerédi 定理的另一种证明, 并给出了一个定量的结果:

**定理 (Gowers).** 对  $\forall s \geq 0$  和充分大的  $N$ , 若  $\{1, 2, \dots, N\}$  的子集  $S$  有至少

$$N(\log \log N)^{-2^{-2^{s+9}}}$$

个元素, 则  $S$  中必包含长为  $s$  的等差数列.

利用遍历理论的经典方法无法证明这个结果, 必须要利用组合和数论的方法. 由此也体现了遍历论方法的局限性. 虽然它可以用来证明一些很一般的定理, 并且这些定理一般没有其他的证明方法, 但遍历论在处理定量问题时常常无能为力.

后来也有许多人利用分别用组合、数论的方法和遍历论的方法给出了这一系列问题的进一步结果, Green 和 Tao 从他们的工作中受到启发, 并在 2006 年证明了长久以来的一个猜想:

**定理 (Green and Tao).** 所有素数的集合包含任意长的等差数列.

## 1.2 动力系统的研究对象

动力系统关心的问题是一个系统随时间的演变规律. 一个动力系统通常由以下三个要素组成: 相空间  $X$ , 时间  $\Sigma (= \mathbb{R}, \mathbb{N})$ , 演化规律  $T$ :

$$T^t : X \rightarrow X, x \mapsto T^t x,$$

$$T^{s+t} = T^s \circ T^t, s, t \in \Sigma$$

在相空间  $X$  中任取一点  $x, T^t x$  即表示  $x$  按演化规律  $T$  进行演化, 经过时间  $t$  后的状态. 根据相空间  $X$  和演化规律  $T$  的不同性质, 研究动力系统的方法也不尽相同. 例如, 研究拓扑空间  $X$  上连续映射  $T$  的理论, 称为拓扑动力系统; 研究测度空间  $X$  上保测映射  $T$  的理论, 称为遍历论; 研究微分流形  $X$  上光滑映射  $T$  的理论, 称为微分动力系统.

本文是对遍历论的基础内容做一个综述性质的报告, 介绍遍历理论中的几个基本概念, 并证明 Birkhoff 和 Von Neumann 的两个遍历定理 (定理 1.2 和 1.3). 第 2,3,4 节按照 [2] 第

二章的脉络介绍遍历性和遍历定理, 部分证明参考了 [3] 和 [1], 具体参考的地方在后文有注记.

## 2 基本概念

### 2.1 保测系统

考虑有限测度空间  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , 经过单位化可使得  $\mu(X) = 1$ , 即为概率空间. 本文中涉及的所有测度空间均为概率空间, 后面不再赘述.

**定义 2.1.** 映射  $T : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, \mathcal{C}, \nu)$  称为保测映射, 若  $T$  满足:

$$\forall C \in \mathcal{C}, T^{-1}(C) \in \mathcal{B}, \mu(T^{-1}(C)) = \nu(C).$$

当  $(X, \mathcal{B}, \mu) = (Y, \mathcal{C}, \nu)$  时, 也称  $T$  为保测变换,  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统.

**例 2.1** ( $S^1$  上的旋转). 令  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , 取其上的 Lebesgue 测度  $m$ , Lebesgue 可测集全体记为  $\mathcal{L}$ , 定义  $R_\alpha$ :

$$R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha \pmod{1}, \forall \theta \in S^1$$

即  $R_\alpha$  表示在圆周上(逆时针)旋转  $2\pi\alpha$  角度. 则  $(S^1, \mathcal{L}, m, R_\alpha)$  即为保测系统.

注. 上述保测系统是本文主要研究的保测系统, 后面将会多次用到这个系统.

**例 2.2** (加倍映射). 考虑区间  $I = [0, 1]$ , 取其上的 Lebesgue 测度  $m$ , Lebesgue 可测集全体记为  $\mathcal{L}$ , 定义  $T$ :

$$T(x) = 2x \pmod{1}, \forall x \in I$$

则对  $\forall 0 \leq a < b \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} T^{-1}((a, b]) &= \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right] \cup \left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right], \\ m(T^{-1}((a, b])) &= b - a = m((a, b]). \end{aligned}$$

因此  $T$  为保测变换,  $(I, m, \mathcal{L}, T)$  为保测系统.

### 2.2 遍历性

**定义 2.2.**  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 满足: 对任意可测集  $B$ , 由  $T^{-1}(B) = B$  可推出  $\mu(B)=0$  或 1, 则称  $T$  为遍历的.

注. 形象(但不准确)地说, 上述定义意味着, 在一个遍历的保测系统中, 相空间  $X$  在测度意义下的真子集一定会在  $T$  作用下发生迁移.

**命题 2.3** (遍历性的等价刻画).  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统,  $\mu(X)=1$ , 下列等价:

- (1)  $T$  是遍历的;
- (2) 若  $\mu(T^{-1}B \Delta B)=0$ , 则必有  $\mu(B)=0$  或 1;
- (3) 对任意可测集  $A$ , 若  $\mu(A) > 0$ , 则有  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}A)=1$ ;
- (4) 对任意可测集  $A, B$ , 若  $\mu(A)\mu(B) > 0$ , 则  $\exists n > 0$ , 使得  $\mu(T^{-n}A \cap B) > 0$ .

证明由定义易得. 可参见 [3, p. 27-28, 定理 1.5].

注. 上述命题中的(3)意味着让时间倒流, 不断追溯任何一个正测集的原像, 都可以覆盖整个空间, 即“遍历”全空间.

(4) 意味着任何正测集的原像一定会和任意的正测集发生碰撞, 即它的原像可以触碰到全空间的每一个角落.

**定理 2.4** (用函数的性质反映遍历性).  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 则

$$T \text{ 遍历} \Leftrightarrow \text{若 } f \in L^2, f = f \circ T \text{ a.e., 则存在常数 } c, f = c \text{ a.e.}$$

证明. “ $\Rightarrow$ ”: 对于  $f$  满足  $f = f \circ T$  a.e., 考虑

$$f^{-1}(n, k) := f^{-1}([\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]), \text{ 其中 } n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$T^{-1}(f^{-1}(k, n)) \Delta f^{-1}(k, n) \subset \{x \mid f(x) \neq f(Tx)\}$$

由于  $f = f \circ T$  a.e., 故

$$\mu(T^{-1}(f^{-1}(k, n)) \Delta f^{-1}(k, n)) \leq \mu(\{x \mid f(x) \neq f(Tx)\}) = 0$$

由命题 2.1,  $\mu(f^{-1}(k, n))=0$  或 1.

固定  $n$ ,  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} f^{-1}(k, n) = X$ , 因此恰有一个  $k_n \in \mathbb{Z}$  使得  $\mu(f^{-1}(k_n, n)) = 1$ , 对其它所有的  $k$ ,  $\mu(f^{-1}(k, n)) = 0$ , 也即  $\frac{k_n}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{k_n+1}{2^n}$ , a.e.  $x \in X$ .

令  $n \rightarrow +\infty$ , 即得  $f = c$  a.e.

“ $\Leftarrow$ ”: 对任意可测集  $B$ , 考虑其对应的特征函数  $\chi_B$ , 有  $\chi_B \in L^2$ .

若  $\mu(T^{-1}B \Delta B)=0$ , 则  $|\chi_B - \chi_B \circ T| = \chi_{T^{-1}B \Delta B} = 0$  a.e., 那么  $\chi_B$  几乎处处等于一个常数, 只能是  $\chi_B = 1$  a.e. 或  $\chi_B = 0$  a.e., 也即  $\mu(B)=0$  或 1.  $\square$

**例 2.3.** 考虑保测系统  $(S^1, \mathcal{L}, m, R_\alpha)$ (例 2.1),  $R_\alpha$  遍历  $\Leftrightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$ .

证明. 若  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , 设  $\alpha = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ . 取  $f(t) = e^{2q\pi it}$ , 则  $f \circ R_\alpha(t) = e^{2q\pi i(t+\frac{p}{q})} = f(t)$ . 但  $f$  不可能几乎处处为常数, 由定理 2.1,  $T$  不是遍历的.

若  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ , 设  $f \in L^2(S^1)$  且  $f = f \circ T$  a.e. 对  $f$  做 Fourier 级数展开, 设

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2n\pi i t}$$

(在  $L^2$  意义下的收敛、相等), 则

$$f \circ R_\alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2n\pi i \alpha} e^{2n\pi i t}$$

由于  $f = f \circ R_\alpha$ , 由 Fourier 系数的唯一性,  $c_n = c_n e^{2n\pi i \alpha}, \forall n \in \mathbb{Z}$ . 故对  $\forall n \neq 0$ ,  $c_n = 0$ . 因此  $f = c_0$  in  $L^2$ , 则  $f = c_0$  a.e., 故  $R_\alpha$  遍历.  $\square$

### 3 平均遍历定理

**定义 3.1.** 给定保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ , 定义算子  $U_T$ ,

$$U_T : L^2 \rightarrow L^2, U_T f = f \circ T.$$

$$N_T := N(I - U_T) = \{f \in L^2 \mid U_T f = f \text{ in } L^2\}$$

$$R_T := R(I - U_T) = \{f - U_T f \mid f \in L^2\}$$

利用如上记号, 定理 2.1 可重新表述如下:

**定理 3.2.** 对于保测系统  $(X, \mathcal{B}, \mu, T), T$  遍历  $\Leftrightarrow N_T = \mathbb{R} \Leftrightarrow \dim N_T = 1$ .

在平均遍历定理的证明中, 我们会反复用到  $U_T$  的等距性.

**命题 3.3.**  $U_T$  为等距算子, 即对  $\forall f, g \in L^2, (U_T f, U_T g) = (f, g)$ .

**证明.**  $\forall f, g \in L^2$ ,

$$(U_T f, U_T g) = \int_X f \circ T \cdot \overline{g \circ T} d\mu = \int_X f \overline{g} d\mu \circ T^{-1} = \int_X f \overline{g} d\mu = (f, g).$$

□

**定理 3.4** (平均遍历定理).  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 令  $P_T$  为向  $L^2$  的子空间  $N_T$  做投影的正交投影算子. 对  $\forall f \in L^2$ ,

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n f \xrightarrow{L^2} P_T f \quad (\text{当 } N \rightarrow +\infty).$$

**证明.** 1. 先证明一个断言:  $N_T = R_T^\perp$ .

任取  $g \in N_T$ , 对  $\forall f \in L^2$ ,

$$(g, f - U_T f) = (g, f) - (g, U_T f) = (g, f) - (U_T g, U_T f) = 0.$$

故  $g \in R_T^\perp$ . 此即  $N_T \subset R_T^\perp$ .

任取  $g \in R_T^\perp$ ,

$$\begin{aligned} (g - U_T g, g - U_T g) &= (g, g - U_T g) - (U_T g, g) + (U_T g, U_T g) \\ &= -(U_T g, g) + (g, g) \\ &= (g - U_T g, g) \\ &= 0. \end{aligned}$$

即  $g = U_T g$ , 也即  $g \in N_T$ , 故  $R_T^\perp \subset N_T$ . 故断言成立.

2. 由断言知  $L^2 = N_T \oplus \overline{R_T}$ .

对  $\forall f \in L^2, f = P_T f + h$ , 其中  $h \in \overline{R_T}$ , 也即  $\exists \{h_m\}, \{g_m\} \subset L^2$ ,

$$h_m = g_m - U_T g_m, \lim_{m \rightarrow \infty} \|h_m - h\|_{L^2} = 0.$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n (P_T f) + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h = P_T f + \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h.$$

故

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n f - P_T f \right\|_{L^2} = \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h \right\|_{L^2} \\
& \leq \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (U_T^n h - U_T^n h_m) \right\|_{L^2} + \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n h_m \right\|_{L^2} \\
& \leq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|U_T^n h - U_T^n h_m\|_{L^2} + \left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n (g_m - U_T g_m) \right\|_{L^2} \\
& = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \|h - h_m\|_{L^2} + \frac{1}{N} \|g - U_T^N g\|_{L^2} \\
& \leq \|h - h_m\|_{L^2} + \frac{1}{N} \|g\|_{L^2} + \frac{1}{N} \|U_T^N g\|_{L^2} \\
& = \|h - h_m\|_{L^2} + \frac{2}{N} \|g\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

令  $m \rightarrow \infty$ ,

$$\left\| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n f - P_T f \right\|_{L^2} \leq \frac{2}{N} \|g\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

当  $N \rightarrow \infty$ .

□

注 . (1) 若  $T$  为遍历的, 那么由定理 3.1 可知  $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n f$  在  $L^2$  意义下收敛到一个常数.

(2)Von Neumann 证明了这个定理的推广形式: 设  $1 \leq p < \infty, (X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 对  $\forall f \in L^p, \exists f^* \in L^p$ , 使得

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} U_T^n f \xrightarrow{L^p} f^*,$$

并且  $f^* \in N_T$ .

(3) 上述极限落在  $N_T$  中的意义在于,  $N_T$  中的函数  $f$  满足所谓的  $T$ - 不变性. 比如  $x$  代表一个粒子,  $f(x)$  反映其某个物理性质 (动量, 能量等),  $f$  的  $T$ - 不变性能够保证  $x$  在  $T$  的作用下保持该性质不变 ( $f(Tx) = f(x)$ ).

## 4 逐点遍历定理

### 4.1 逐点遍历定理

在证明逐点遍历定理的过程中, 我们需要如下引理:

**引理 4.1** (极大遍历引理).  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统,  $f \in L^1$ .

记  $S_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} f(T^j x)$ ,  $M_k(x) = \max\{0, S_1(x), S_2(x), \dots, S_k(x)\}$ . 有

$$\int_{\{M_k>0\}} f d\mu \geq 0$$

关于这个引理的证明, 读者可查阅 [1, Lemma 7.2.2], 此处篇幅有限, 将其略去.

**定理 4.2** (逐点遍历定理).  $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$  为保测系统, 对  $\forall f \in L^1$ , 令  $S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)$ . 必  $\exists f^* \in L^1$ ,

使得  $\frac{1}{n}S_n$  在  $L^1$  意义下及逐点意义下收敛到  $f^*$ , 并且  $f^*$  满足:

$$f^* = f^* \circ T, \int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$$

若  $T$  是遍历的, 则

$$f^*(x) = \int f d\mu, \quad \text{a.e. } x \in X$$

证明. (构造性证明)

1. 构造  $f^* = E(f | \mathcal{I})$ .

令

$$\mathcal{I} = \{B \in \mathcal{B} \mid T^{-1}(B) = B\},$$

则  $\mathcal{I}$  为  $\sigma$  代数,  $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ .

定义  $\mathcal{I}$  上测度  $\nu$ :

$$\forall A \in \mathcal{I}, \nu(A) = \int_A f d\mu$$

将  $\mu$  和  $\nu$  都看作  $\mathcal{I}$  上的测度,  $\nu \ll \mu$ . 取  $f^*$  为 Radon-Nikodym 导数  $\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(X, \mathcal{I}, d\mu)$ .

注. 这个 Radon-Nikodym 导数正是概率论中的条件期望  $E(f | \mathcal{I})$ .

2. 验证  $f^*$  满足上述性质.

(1)  $T$ -不变性.

$\forall x \in X$ , 设  $f^*(x) = c$ , 那么  $x \in (f^*)^{-1}(c) \in \mathcal{I}$ . 由  $\mathcal{I}$  的定义,  $T^{-1}((f^*)^{-1}(c)) = (f^*)^{-1}(c)$ , 故  $x \in T^{-1}((f^*)^{-1}(c))$ . 也即  $Tx \in (f^*)^{-1}(c)$ ,  $f^*(Tx) = c = f^*(x)$ .

(2)  $\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$ .

这是因为

$$\int_X f^* d\nu = \nu(X) = \int_X f d\mu$$

(3) 若  $T$  是遍历的, 则  $f^*(x) = \int f d\mu$  a.e.  $x \in X$ .

若  $T$  是遍历的, 则  $\forall B \in \mathcal{I}, \mu(B) = 0$  或 1. 对  $\forall c \in \mathbb{R}, (f^*)^{-1}(c) \in \mathcal{I}$ , 即  $\mu((f^*)^{-1}(c)) = 0$  或 1. 因此  $\exists c_0 \in \mathbb{R}, f^* = c_0$  a.e. 由 (2) 知  $c_0 = \int_X f d\mu$ .

3. 验证  $f^*$  是左侧在逐点意义下的极限.

对  $\forall \varepsilon > 0$ , 令  $D = \{x \in X \mid \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} - f^* > \varepsilon\}$ . 我们的目标是证明  $\mu(D) = 0$ .

令  $\tilde{f} = (f - f^* - \varepsilon)\chi_D$ ,  $\tilde{S}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \tilde{f} \circ T^j$ ,  $\tilde{M}_n = \max\{0, S_1, \dots, S_n\}$ ,

$F_n = \{x \in X \mid \tilde{M}_n(x) > 0\}$ ,  $F = \cup_{n>0} F_n = \{\sup_{k \geq 1} \frac{\tilde{S}_k}{k} > 0\}$ .

那么

$$F = \left\{ \sup_{k \geq 1} \frac{S_k}{k} > 0 \right\} \cap D = D$$

由引理 4.1(极大遍历引理),

$$\int_{F_n} \tilde{f} d\mu \geq 0$$

由于  $\|\tilde{f}\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|f^*\|_{L^1} + \varepsilon < \infty$ , 由控制收敛定理,

$$\int_{F_n} \tilde{f} d\mu \rightarrow \int_F \tilde{f} d\mu$$

故  $\int_F \tilde{f} d\mu \geq 0$ . 由于

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}(x) - f^*(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}(Tx) - f^*(Tx),$$

故  $F = D \in \mathcal{I}$ .

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_F \tilde{f} d\mu \\ &= \int_D f d\mu - \int_D f^* d\mu - \varepsilon \mu(D) \\ &= \nu(D) - \nu(D) - \varepsilon \mu(D) \\ &= -\varepsilon \mu(D) \end{aligned}$$

故  $\mu(D) = 0$ .

我们得到了

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq f^* + \varepsilon \text{ a.e. } x \in X$$

由  $\varepsilon$  的任意性,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \leq f^* \text{ a.e. } x \in X.$$

对  $-f$  重复上面的过程, 可得

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \geq f^* \text{ a.e. } x \in X.$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = f^*, \quad \text{a.e. } x \in X.$$

4. 验证  $f^*$  是左侧在  $L^1$  意义下的极限.

(1) 对  $L^\infty$  函数验证.

对于  $f \in L^\infty \subset L^1$ , 令  $A_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ T^j$ . 由 3,  $\exists f^*$  使得  $A_n(f) \rightarrow f^*$  a.e., 故  $f^* \in L^\infty \subset L^1$ . 由有界收敛定理,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n(f) - f^*\|_{L^1} = \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n(f) - f^*| d\mu = 0.$$

即  $A_n(f)$  也在  $L^1$  意义下收敛到  $f^*$ .

(2) 对一般的  $L^1$  函数验证.

$C_0^\infty \subset L^\infty \subset L^1$ , 且  $C_0^\infty$  在  $L^1$  中稠密, 故  $L^\infty$  也在  $L^1$  中稠密. 对  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists g \in L^\infty$ , 使得

$$\|f - g\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}$$

由 (1),  $A_n(g)$  为 Cauchy 列, 故  $\exists N > 0$ , 对任意  $n > N, k > 0$ ,

$$\|A_{n+k}(g) - A_n(g)\|_{L^1} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

那么

$$\begin{aligned}
 & \|A_n(f) - A_{n+k}(f)\|_{L^1} \\
 & \leq \|A_n(f) - A_n(g)\|_{L^1} + \|A_n(g) - A_{n+k}(g)\|_{L^1} + \|A_{n+k}(g) - A_{n+k}(f)\|_{L^1} \\
 & \leq \|f - g\|_{L^1} + \|A_n(g) - A_{n+k}(g)\|_{L^1} + \|f - g\|_{L^1} \\
 & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
 & = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

因此  $\{A_n(f)\}$  也是  $L^1$  中的 Cauchy 列, 故存在  $\bar{f} \in L^1$ , 使得  $A_n(f) \xrightarrow{L^1} \bar{f}$ . 那么存在子列  $\{A_{n_k}(f)\}, A_{n_k}(f) \rightarrow \bar{f}$  a.e.

由 3 知  $\bar{f} = f^*$  a.e., 故  $A_n(f) \xrightarrow{L^1} f^*$ .  $\square$

**注 .** (1) 完全照搬第 4 部分的证明, 即可证得 Von Neumann 的  $L^p$  遍历定理 (见定理 3.2 后面的注 2).

(2) 这里给出的证明, 前三部分是参考 [1, p. 334, 定理 7.2.1] 的证明, 第四部分是参考 [3, p. 36, 定理 1.4.1]. 此外可参见 [2, p. 44, 定理 2.30], 那里给出了另外两种证明.

(3) 若  $T$  是遍历的, 对于可测集  $A$ , 取  $f = \chi_A$ , 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_A(T^j x) \equiv \mu_A$$

这就是本文开头提到的 Boltzmann 提出的遍历性假设, 左侧为时间平均, 右侧为空间平均. 最初人们将此式作为遍历性的定义, 但后来被更加简洁方便的定义方法 (定义 2.2) 取代.

(4) 两个遍历定理 (平均遍历定理和逐点遍历定理) 是在不同意义下对  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x)$  这一极限的刻画. 两种极限有一个共同性质, 即  $T$ -不变性. 若极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(T^n x)$  存在, 则此极限必定等于 Césaro 求和的极限, 即  $Pf, f^*$ . 比如在一个物理系统中,  $x$  代表一个粒子,  $f$  是粒子的某些性质 (位置, 动量等). 上述定理蕴含着, 随着时间的推移, 如果粒子趋于一个确定的状态, 则必是稳态.

## 4.2 遍历定理的应用

**定理 4.3** (Weyl 等分布定理). 设  $\alpha$  为无理数,  $(a, b) \subset [0, 1]$ , 有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{0 \leq n \leq N-1 \mid \{n\alpha\} \in (a, b)\}| = b - a.$$

其中  $|A|$  表示集合  $A$  中元素的个数,  $\{n\alpha\}$  表示  $n\alpha$  的小数部分.

这个定理意味着,  $\alpha, 2\alpha, \dots, N\alpha, \dots$  这一列数的小数部分落在  $(a, b)$  中的概率为  $b - a$ , 也即它们在  $[0, 1]$  上服从平均分布.

**证明.** 考虑例 2.1 中的保测系统  $(S^1, \mathcal{L}, m, R_\alpha)$ .  $\alpha$  为无理数意味着  $R_\alpha$  遍历.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} |\{0 \leq n \leq N-1 \mid \{n\alpha\} \in (a, b)\}| \\
 & = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \chi_{(a,b)} \circ R_\alpha^n(0) \\
 & = \int_{S^1} \chi_{(a,b)} dm = b - a.
 \end{aligned}$$

□

**例 4.1.**  $2^n$  首位数是  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) 的概率是多少? 是否等概率?

$$\begin{aligned} 2^n \text{ 首位数是 } k &\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{N}, k \times 10^l \leq 2^n < k \times 10^{l+1} \Leftrightarrow l + \lg k \leq n \lg 2 < l + 1 + \lg k \\ &\Leftrightarrow \lg k \leq \{n \lg 2\} < \lg(k+1). \end{aligned}$$

$\lg 2$  是无理数, 故由 Weyl 等分布定理,

$$P(2^n \text{ 首位数是 } k) = \lg(k+1) - \lg k.$$

## 参考文献

- [1] Rick Durrett. *Probability, Theory and Examples*. Cambridge University Press, New York, 4th edition, 2010.
- [2] M.Einsiedler and T.Ward. *Ergodic Theory with a view towards Number Theory*. Number 259 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, London, 2011.
- [3] Peter Walters. *An Introduction to Ergodic Theory*. Number 79 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] 叶向东, 黄文, 邵松. 《拓扑动力系统概论》. 北京: 科学出版社, 2008.

# 内接正方形问题和内接矩形问题

宋晨楷

## 摘要

1911 年 Toeplitz 提出了内接正方形问题, 到今年恰好是 110 年, 但是该问题还没有得到解决。内接正方形问题还衍生出了内接矩形问题等猜想, 仍有不少数学家不懈地在探索。本文将简要介绍内接正方形问题和内接矩形问题的发展历史, 罗列已经得到的重要成果, 并重点介绍 Terence Tao 于 2017 年发表的关于内接正方形问题的论文, Vaughan 于 1977 年证明的关于内接矩形存在性的定理以及 Joshua Evan Greene 与 Andrew Lobb 去年得出的重要结论。

## 1 预备定义与定理

本节将简要介绍文中用到的部分概念与定理。

**定义 1.1.** 一条平面内的连续曲线是指一个连续映射  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . 如果还有  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , 则称  $\gamma$  是一条连续闭曲线。我们称一条连续曲线是简单的, 如果它不与自身相交。即如果  $\gamma$  不是闭曲线, 它是简单的当且仅当对任意的  $s, t \in [a, b]$  且  $s \neq t$ , 有  $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ ; 如果  $\gamma$  是闭曲线, 它是简单的当且仅当对任意的  $s, t \in [a, b]$  且  $s \neq t$ , 有  $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ 。我们也称平面上的一条简单连续曲线为 Jordan 曲线。

**定理 1.2 (Jordan 曲线定理).** 对于  $\mathbb{R}^2$  的任意一条 Jordan 闭曲线  $\gamma$ ,  $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$  恰有两个连通分支, 且任一连通分支都以  $\gamma$  为其边界。

**定义 1.3 (实射影空间).** 定义  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  上的等价关系  $\sim$ :

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{存在 } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ 使得 } x = \lambda y.$$

我们称  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  关于  $\sim$  的商为  $n$  维实射影空间, 记作  $\mathbb{RP}^n$ .

本文定理3.3的证明过程用到了辛几何中辛流形, Lagrange 子流形, 辛同胚等概念, 要完整介绍这些定义所需篇幅较长, 这里就不再叙述, 有兴趣的读者可以寻找辛几何相关书籍阅读。

## 2 内接正方形问题

### 2.1 内接正方形问题简介

先给出内接正方形问题。

**猜想 2.1 (The Square Peg Problem).** 任意一条平面内的 Jordan 闭曲线上一定有四个点恰好是一个正方形的四个顶点。

尽管并不十分恰当, 但为了便于表述, 我们给出下面的定义。

作者: 宋晨楷, 2018 级数学科学学院, 邮箱: songchenkai@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 3 月 31 日来稿, 4 月 24 日修改, 5 月 5 日接受。稿件编辑: 章俊彦。

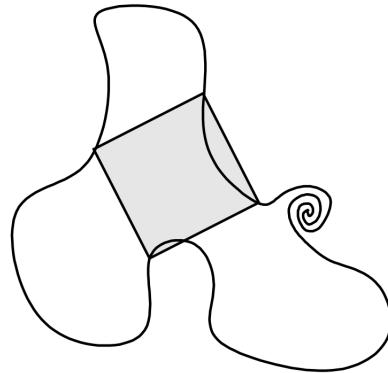


图 2.1: 内接正方形

**定义 2.2.** 我们说  $\mathbb{R}^2$  的一个子集  $\Gamma$  有内接正方形, 若  $\Gamma$  中有四个点恰好是一个非退化正方形的四个顶点.

内接正方形从提出到至今已经过去了 110 年, 仍没有得到解决. 一个有趣的问题是为什么曲线的内接正方形这么难以寻找, 能引起数学家们这么大的兴趣, 而内接正三角形或者是内接正五边形却没有. 关于五边形, 因为椭圆是平面上的二次曲线, 两个不同的椭圆至多只有四个交点, 故不可能存在两个形状相同的五边形内接于两个不相似的椭圆中. 关于三角形, Nielson 在 1992 年证明了对于平面内任意三角形  $ABC$ (不妨顶点  $A$  处的内角最小) 和任意 Jordan 闭曲线  $\gamma$ , 集合

$$\{x \in \gamma \mid \text{存在与 } ABC \text{ 相似的 } \gamma \text{ 的内接三角形, 使得 } x \text{ 与 } A \text{ 是对应点}\}$$

在  $\gamma$  上是稠密的 [9], 也即  $\gamma$  内接的与  $ABC$  相似的三角形非常多. 因此内接正方形就成为了主要关注点.

## 2.2 内接正方形问题的提出与发展

内接正方形问题最早由 Otto Toeplitz 提出. 1911 年, 他在一个报告中介绍了拓扑学中的一些问题, 其中就有内接正方形问题. 当时 Toeplitz 称自己证明了凸曲线的情形, 但是他一直没有将证明发表.

之后的几年, Arnold Emch 做了非常多的工作. 他在 1913 年证明了充分光滑的凸曲线有内接正方形 [2], 两年后他对光滑性条件进行了一定的减弱 [3]. 在 1916 年, Emch 发表了他关于内接正方形问题的第三篇论文 [4], 其中他证明了分段解析曲线有内接正方形.

1929 年, 苏联数学家 Schnirelman 得到了另一个重要结果. 他证明了对于有分段连续曲率的 Jordan 闭曲线猜想 2.1 成立. 这是一类比  $C^2$  曲线范围略广的曲线. 他的论文第一次发表时有一些小错误. 修正后的版本于 1944 年在他去世后发表 [12]. Schnirelman 的另一个贡献是他证明了一类曲线内接正方形个数的奇偶性在曲线发生一定的形变时是不变的. 这提供了证明曲线内接正方形存在的一种新方法, 即去证明某几条特殊曲线有奇数个内接正方形.

Walter Stromquist 在他 1989 年发表的论文 [14] 中定义了曲线的“局部单调”性:

**定义 2.3.** 对一条 Jordan 闭曲线  $\vec{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 将其周期延拓为  $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . 我们称  $\gamma$  是局部单调的, 如果对任意的  $t_0 \in \mathbb{R}$ , 存在  $\delta > 0$  和向量  $\vec{d}(t_0)$ , 使得函数  $\vec{\gamma} \cdot \vec{d}(t_0)$  在区间  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  上严格单调递增.

并且证明了所有局部单调的 Jordan 闭曲线都有内接正方形. 可以证明局部单调曲线包

括了凸曲线, 多边形曲线(由有限条线段组成的闭曲线),  $C^1$  曲线等. 这是内接正方形问题到目前为止最重要的结果之一.

之后几十年间的结果有: 1995 年 Nielsen 和 Wright 证明了关于一个点或者一条直线对称的 Jordan 闭曲线有内接正方形 [10]; 2008 年 Igor Pak 证明了多边形曲线有内接正方形 [11]; 2014 年 Jason Cantarella, Elizabeth Denne 和 John McCleary 证明了  $C^1$  曲线有内接正方形 [1] 等. 但是他们的结论与 Stromquist 的相比都没有非常明显的进展.

2017 年, Terence Tao 发表了一篇论文 [15], 其中他证明了由两条  $(1 - \varepsilon) - Lipschitz$  函数图像拼成的 Jordan 闭曲线有内接正方形. 这个结果在某些方面比 Stromquist 在 1989 年得到的更近了一步. 2.3 节将会简要介绍 Tao 的论文的部分内容.

我们可以看到, 数学家们已经证明了满足一定光滑性条件的曲线是有内接正方形的, 因此我们可以考虑用光滑闭曲线去逼近一般的 Jordan 闭曲线, 得到其内接正方形列的一个子列收敛到 Jordan 闭曲线的内接正方形. 但是这并不能解决内接正方形问题, 因为收敛得到的正方形可能会退化成一个点. 这也是目前解决内接正方形问题的一大难点.

### 2.3 Tao 论文中的主要结论以及推广

Terence Tao 在 2017 年发表了论文 An Integration Approach To The Toeplitz Square Peg Problem[1], 论文中他提出了内接正方形问题的周期版本, 证明了一般版本和周期版本在曲线由两条  $(1 - \varepsilon) - Lipschitz$  函数图像拼成的特殊情形下成立, 同时他也对周期版本的猜想进行了一定的探索.

为了介绍周期版本, 我们先给出平面  $\mathbb{R}^2$  内的周期曲线的定义.

**定义 2.4.** 设  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$  是  $\mathbb{R}^2$  内的一条曲线. 若存在某个  $L > 0$ , 使得

$$x(t + L) = x(t) + L, \quad y(t + L) = y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

则称  $\gamma$  是周期曲线, 其周期为  $L$ .

Tao 根据上面的定义提出了内接正方形问题的周期版本.

**猜想 2.5 (Tao).** 设  $\sigma_1, \sigma_2$  是  $\mathbb{R}^2$  中两条不相交的简单周期曲线, 且它们的周期相等, 则  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  有内接正方形.

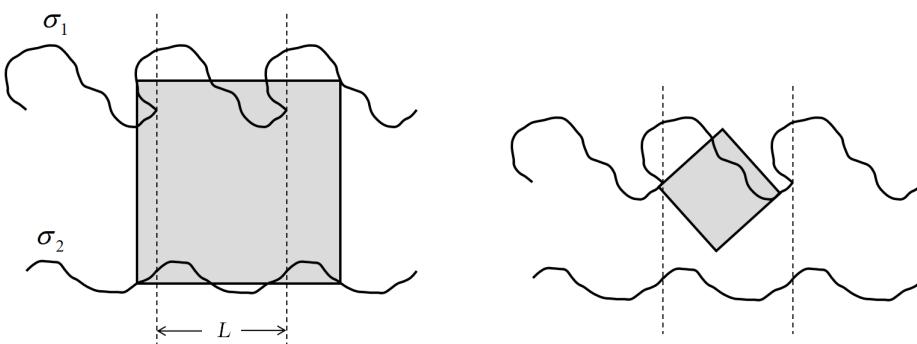


图 2.2: 周期版本的内接正方形问题

图 2.3: 难以内接的正方形

通过作图我们不难发现, 当一个正方形某条对角线的两个端点同时落在  $\sigma_1$  或  $\sigma_2$  上时, 该正方形很难成为  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  的内接正方形, 如图 2.3.

因此我们考虑将猜想 2.5 加强为下面的猜想.

**猜想 2.6** (Tao). 设  $\sigma_1, \sigma_2$  是  $\mathbb{R}^2$  中两条不相交的简单周期曲线, 且它们的周期相等, 则  $\sigma_1 \cup \sigma_2$  有内接正方形, 且该正方形某一条边的两个顶点在  $\sigma_1$  上, 这条边对边上的两个顶点在  $\sigma_2$  上, 如图 2.2.

猜想2.5和猜想2.6目前也均未得到证明.

为了介绍  $(1 - \varepsilon) - Lipschitz$  函数图像拼成的特殊情形, 我们引入如下定义.

**定义 2.7** (Lipschitz 函数). 已知函数  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , 其中  $D \subseteq \mathbb{R}$ . 若存在常数  $L > 0$ , 使得  $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$  对任意的  $x, y \in D$  成立, 则称  $f$  是  $L - Lipschitz$  函数.

**定义 2.8** (函数的图像). 对于函数  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , 集合  $\text{Graph}_f = \{(x, f(x)) | x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$  称为  $f$  的图像. 有时我们只需要  $f$  在  $D$  的一个子集  $E$  上的图像, 将其记为  $\text{Graph}_f(E) = \{(x, f(x)) | x \in E\}$ .

下面我们可以给出 Tao 证明的两个定理.

**定理 2.9** (Tao). 设  $[t_0, t_1]$  是一个区间, 同时  $f, g : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  是两个  $(1 - \varepsilon) - Lipschitz$  函数, 其中  $\varepsilon \in (0, 1)$ . 假设  $f(t_0) = g(t_0)$ ,  $f(t_1) = g(t_1)$ , 且  $f(t) < g(t)$  对任意  $t \in (t_0, t_1)$  成立. 则集合  $\text{Graph}_f \cup \text{Graph}_g$  有内接正方形.

这个定理的证明较为复杂, 这里只给出大致思路.

**证明.** 先将  $f$  和  $g$  延拓到  $\mathbb{R}$  上, 记

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(t_0), & x < t_0, \\ f(x), & t_0 \leq x \leq t_1, \\ f(t_1), & x > t_1. \end{cases}$$

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(t_0), & x < t_0, \\ g(x), & t_0 \leq x \leq t_1, \\ g(t_1), & x > t_1. \end{cases}$$

则可以证明  $\tilde{f}$  和  $\tilde{g}$  仍是  $(1 - \varepsilon) - Lipschitz$  的.

之后通过压缩映射定理和一些积分的手段证明了  $\text{Graph}_{\tilde{f}} \cup \text{Graph}_{\tilde{g}}$  有内接正方形.

最后证明这个内接正方形的四个顶点一定在  $\text{Graph}_f \cup \text{Graph}_g$  内. 否则不妨假设其中一个顶点  $B$  在  $\text{Graph}_{\tilde{f}}(-\infty, t_0] = \text{Graph}_{\tilde{g}}(-\infty, t_0]$  中, 设与其相邻的两个顶点为  $A$  和  $C$ . 因为  $\tilde{f}$  和  $\tilde{g}$  都是  $(1 - \varepsilon) - Lipschitz$  函数, 可得  $AB$  与  $BC$  与  $x$  轴的夹角均小于  $\frac{\pi}{4}$ , 因此, 角  $ABC$  不可能为直角, 矛盾!  $\square$

**定理 2.10** (Tao). 当存在  $(1 - \varepsilon) - Lipschitz$  函数  $f, g$  使得猜想2.6中  $\sigma_1 = \text{Graph}_f$ ,  $\sigma_2 = \text{Graph}_g$  时, 该猜想成立. 其中  $\varepsilon \in (0, 1)$ .

定理2.10与定理2.9的证明是类似的, 只需将  $\tilde{f}$  与  $\tilde{g}$  替换成  $f$  和  $g$  即可. 这里方法的相似性也是 Tao 提出周期版本内接正方形问题的初衷, 即希望能通过对周期版本的研究给一般版本的证明提供思路.

在 2.3 节中我们曾提到过 Tao 的结果相比 Stromquist 的有一定的突破, 这个突破主要表现在定理2.9中对曲线上  $(t_0, f(t_0))$  和  $(t_1, f(t_1))$  两个点是几乎没有限制条件的, 而 Stromquist 的结论要求曲线上每一点附近都有他定义的局部单调性质.

论文中 Tao 还对猜想2.6进行了一定的探索, 他运用了一些积分的工具将其加强为一个他称为面积不等式 (area inequality) 的猜想. 但是面积不等式也并不好证, Tao 最终对其的一种特殊情况做了一些研究, 也未能完整地解决. 阅读 Tao 的论文之后, 我发现将他处理面积不等式的一些方法进行推广之后可以得到下面的定理.

**定理 2.11.** 当存在连续函数  $f, g$  使得猜想2.6中  $\sigma_1 = \text{Graph}_f, \sigma_2 = \text{Graph}_g$  时, 该猜想成立.

因为 Lipschitz 函数都是连续的, 故实际上定理2.11包含了定理2.10的结果.

这一节的最后我们借鉴 [11] 中的思路, 给出猜想2.6在  $\sigma_2$  为 x 轴时的证明. 也即如下定理:

**定理 2.12.** 设  $\sigma$  是  $\mathbb{R}^2$  中的简单周期曲线, 且与 x 轴不交, 则  $\sigma \cup \{(x, 0) | x \in \mathbb{R}\}$  有内接正方形, 且该正方形某一条边的两个顶点在 x 轴上, 这条边对边上的两个顶点在  $\sigma$  上.

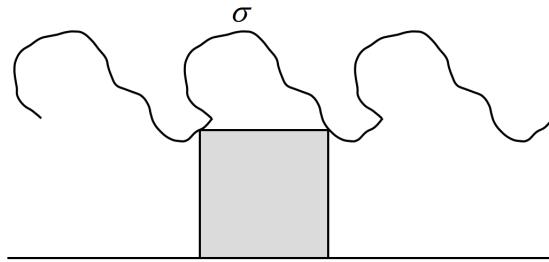


图 2.4: 定理2.12

**证明.** 设  $\sigma$  的周期为  $L$ , 记  $\sigma(t) = (x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}$ . 则有:

$$x(t + L) = x(t) + L, \quad y(t + L) = y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

因为  $\sigma$  与 x 轴不交, 我们可以不妨  $y(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , 否则将  $\sigma$  关于 x 轴做轴对称即可.

记:

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= (x(t), y(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ \sigma_2(t) &= (x(t) - y(t), y(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

则  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  都是以  $L$  为周期的简单周期曲线. 我们断言: 若  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ , 则满足定理要求的内接正方形存在.

先来证明这个断言. 设  $(u_0, v_0) \in \sigma_1 \cap \sigma_2$ , 则存在  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , 使得:

$$(x(t_1), y(t_1)) = (u_0, v_0) = (x(t_2) - y(t_2), y(t_2)).$$

由此得到  $(x(t_1), y(t_1))$  和  $(x(t_1) + y(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$  这两个点均在  $\sigma$  中, 于是  $(x(t_1), 0), (x(t_1) + y(t_1), 0), (x(t_1), y(t_1)), (x(t_1) + y(t_1), y(t_1))$  即为满足要求的内接正方形的四个顶点. 如图 2.5.

由断言, 现在我们只需证明  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ . 注意到  $y$  是一个周期为  $L$  的连续函数, 故它是有界的. 我们记

$$a = \inf_{t \in \mathbb{R}} y(t), \quad b = \sup_{t \in \mathbb{R}} y(t),$$

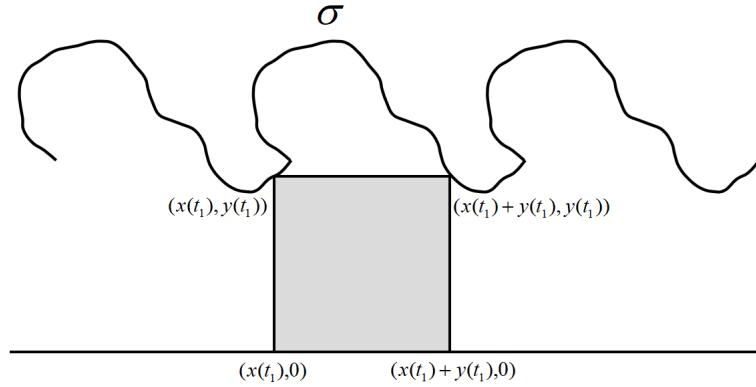


图 2.5: 满足要求的内接正方形

则  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  都被包含在带状域  $\mathbb{R} \times [a, b]$  中. 由  $x(t+L) = x(t) + L$  可知,  $\sigma_1, \sigma_2$  这两条简单曲线向左或者向右均可以延伸到无穷远处. 同时我们还可以发现在任意一个周期中,  $\sigma_i$  与水平线  $\mathbb{R} \times \{a\}$  和  $\mathbb{R} \times \{b\}$  都各至少相交一次 (这里  $i \in \{1, 2\}$ ). 直观上, 当  $\sigma_2$  从左向右前进时, 总会穿过  $\sigma_1$  连接两条水平线的那一小段 (参考图 6). 为了更加严谨地说明这一点, 我们把这一段  $\sigma_1$  补成一条 Jordan 闭曲线  $\gamma$ , 并借助 Jordan 曲线定理.

先取  $t_m \in [0, L)$  和  $t_M > t_m$ , 使得:

$$y(t_m) = a, \quad y(t_M) = b.$$

再取充分大的  $t_1 \in \mathbb{R}$  和充分小的  $t_2 \in \mathbb{R}$  (不妨  $t_2 < t_1$ ) 使得:

$$\begin{aligned} x(t_1) - y(t_1) &> \sup \{x \mid \exists t \in [t_m, t_M], y \in \mathbb{R}, \text{使得 } (x, y) = \sigma_1(t)\}, \\ x(t_2) - y(t_2) &< \inf \{x \mid \exists t \in [t_m, t_M], y \in \mathbb{R}, \text{使得 } (x, y) = \sigma_1(t)\}. \end{aligned}$$

其中用到了集合  $\{\sigma_1(t) \mid t \in [t_m, t_M]\}$  是紧集. 最后取充分大的  $k \in \mathbb{N}$ , 使得:

$$\sup \{x \mid \exists t \in [t_m - kL, t_M - kL], y \in \mathbb{R}, \text{使得 } (x, y) = \sigma_1(t)\} < x(t_2) - y(t_2).$$

考察闭曲线  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma = & \{\sigma_1(t) \mid t \in [t_m - kL, t_M - kL] \cup [t_m, t_M]\} \\ & \cup \{(x(t), y) \mid y \in [b, b + \varepsilon], t = t_M - kL \text{ 或 } t_M\} \cup \{(x(t), y) \mid y \in [a - \varepsilon, a], t = t_m - kL \text{ 或 } t_m\} \\ & \cup \{(x, b + \varepsilon) \mid x \in [x(t_M - kL), x(t_M)]\} \cup \{(x, a - \varepsilon) \mid x \in [x(t_m - kL), x(t_m)]\}, \end{aligned}$$

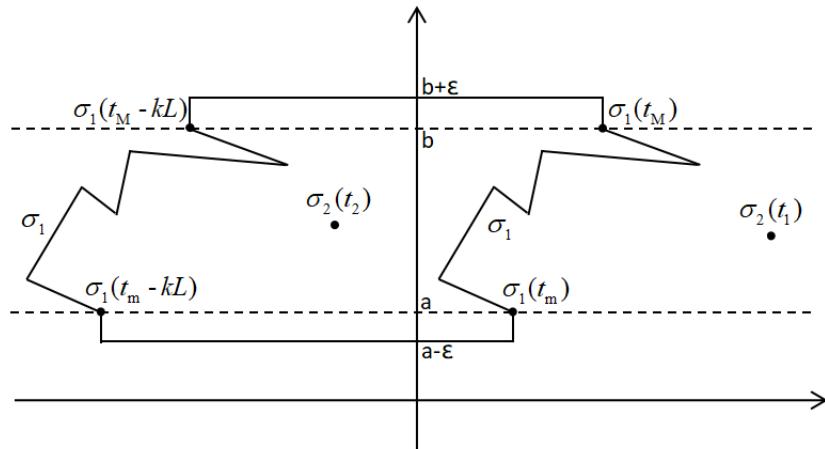
如图 2.6 所示 (这里我们为了作图方便将  $\sigma_1$  画成折线).

由 Jordan 曲线定理,  $\gamma$  将平面分为了两部分, 记曲线内部为  $A$ , 曲线外部为  $B$ . 由前面的定义易得  $\sigma_2(t_2) \in A$ ,  $\sigma_2(t_1) \in B$ . 故必有:

$$\{\sigma_2(t) \mid t \in [t_2, t_1]\} \cap \gamma \neq \emptyset.$$

而  $\{\sigma_2(t) \mid t \in [t_2, t_1]\} \subset \mathbb{R} \times [a, b]$ , 故:

$$\{\sigma_2(t) \mid t \in [t_2, t_1]\} \cap \{\sigma_1(t) \mid t \in [t_m - kL, t_M - kL] \cup [t_m, t_M]\} \neq \emptyset.$$

图 2.6: 曲线  $\gamma$ .

由此可得  $\sigma_1 \cap \sigma_2 \neq \emptyset$ .

□

从上面两个定理可以看出, 我们能解决猜想2.6的一些特殊情况. 但是这距离解决最一般的连续曲线情形还有很长的距离.

### 3 内接矩形问题简介

#### 3.1 Vaughan 证明的内接矩形定理

在意识到内接正方形很难寻找之后, 数学家们转而放低要求, 去寻找内接矩形. 数学家 Vaughan 于 1977 年证明了如下定理.

**定理 3.1 (Vaughan).** 任意一条平面内的 Jordan 闭曲线上都存在四个点恰为一个矩形的四个顶点.

Vaughan 巧妙地运用了 Möbius 带给出了一个非常简洁漂亮的证明 [8], 下面我们将简单介绍.

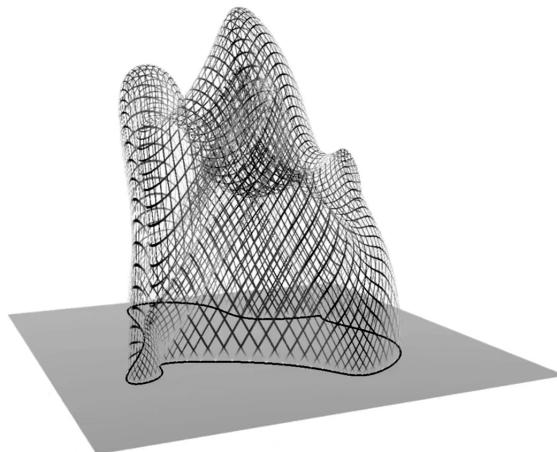
**证明.** 对任意一条平面内的 Jordan 闭曲线  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1)$ , 要证明其有内接矩形, 只需证  $\gamma$  上存在四个点  $A, B, C, D$  满足线段  $AB$  与线段  $CD$  长度相等且它们的中点重合.

我们考虑如下的映射:

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1]^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\mapsto \left( \frac{x(s) + x(t)}{2}, \frac{y(s) + y(t)}{2}, \sqrt{(x(s) - x(t))^2 + (y(s) - y(t))^2} \right), \end{aligned}$$

其中  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [0, 1]$ .

易知  $\varphi(s, t)$  的前两个坐标表示曲线上点  $\gamma(s), \gamma(t)$  的中点, 第三个坐标表示这两个点之间的距离. 我们发现  $\varphi$  的像是在  $\{(x, y, z) | z \geq 0\}$  中的曲面, 记为  $\Sigma$ , 且其边界恰好为  $\gamma$  (这里我们将  $\gamma$  看成  $xy$  平面内的曲线). 现在我们只需证明, 存在曲线上两个不同的无序点对  $(\gamma(s_1), \gamma(t_1))$  和  $(\gamma(s_2), \gamma(t_2))$ , 使得  $\varphi(s_1, t_1) = \varphi(s_2, t_2)$ .

图 3.1: 曲面  $\Sigma$ 

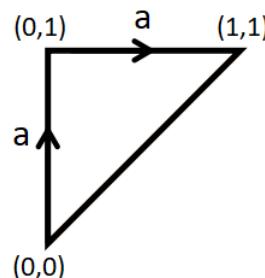
用反证法, 假设对于不同的无序点对  $(\gamma(s_1), \gamma(t_1))$  和  $(\gamma(s_2), \gamma(t_2))$  有  $\varphi(s_1, t_1) \neq \varphi(s_2, t_2)$ . 我们考虑  $[0, 1]^2$  中如下的等价关系  $\sim$ :

$$(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2) \Leftrightarrow (\gamma(s_1), \gamma(t_1)) \text{ 和 } (\gamma(s_2), \gamma(t_2)) \text{ 表示同一个无序点对.}$$

易得对于  $0 \leq s_1 \leq t_1 \leq 1$  和  $0 \leq s_2 \leq t_2 \leq 1$ :

$$(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2) \Leftrightarrow s_1 = s_2, t_1 = t_2 \text{ 或 } s_1 = 0, t_1 = s_2, t_2 = 1 \text{ 或 } s_2 = 0, t_2 = s_1, t_1 = 1.$$

因此我们可以将  $[0, 1]^2 / \sim$  表示为如图 3.2 的图形, 其中两条标着箭头  $a$  的线段表示这两条线段沿着箭头方向的对应点其实是同一个点.

图 3.2:  $[0, 1]^2 / \sim$ 

通过拓扑学的知识可以知道图 3.1 中的曲面是同胚于 Möbius 带的, 因此  $\varphi$  诱导了一个从 Möbius 带到  $\Sigma$  的同胚. 利用 Jordan 曲线定理, 将  $\gamma$  在平面  $\{(x, y, z) | z = 0\}$  中围住的区域记为  $D$ , 我们可以将  $\Sigma$  与  $D$  沿着  $\gamma$  粘起来, 这相当于将一条 Möbius 带与一个圆盘沿着边界粘起来, 会得到一个二维实射影平面  $\mathbb{RP}^2$ . 由此我们事实上得到了一个从  $\mathbb{RP}^2$  到  $\mathbb{R}^3$  的嵌入. 但由代数拓扑的知识,  $\mathbb{RP}^2$  是不能嵌入到  $\mathbb{R}^3$  中的, 矛盾!

□

### 3.2 内接矩形问题的发展

在 1977 年 Vaughan 证明了定理 3.1 之后, 数学家们开始关注下面的猜想. 这个猜想包含了内接正方形问题, 也还未得到证明.

**猜想 3.2** (The Rectangular Peg Problem). 任给一条平面内的 Jordan 闭曲线  $\gamma$  和一个矩形  $R$ , 在  $\gamma$  上一定存在四个点恰好是一个与  $R$  相似的矩形的四个顶点.

在 1991 年曾有人发表了猜想3.2的证明, 但是在 2008 年被发现这个证明是错误的. 近几年对于该猜想的研究才取得了一定的突破.

我们称一个矩形对角线交出的较小角为其方位角, 则矩形的方位角在区间  $(0, \frac{\pi}{2}]$  中. 2018 年 Cole Hugelmeyer 证明了对任意自然数  $n \geq 3$  和  $k \in \{1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ , 任意一条平面内的光滑 Jordan 闭曲线有方位角为  $\frac{k}{n}\pi$  的内接矩形 [6]. 一年后他又证明了平面内任意一条光滑 Jordan 闭曲线所有内接矩形的方位角组成的集合的勒贝格测度大于等于  $\frac{\pi}{6}$ , 形象地说, 他解决了  $\frac{1}{3}$  的光滑曲线的内接矩形问题 [7]. 内接矩形问题最重要的结果来自于数学家 Joshua Evan Greene 和 Andrew Lobb, 他们于去年证明了下面的定理:

**定理 3.3.** 任给一条平面内的光滑 Jordan 闭曲线  $\gamma$  和一个长方形  $R$ , 在  $\gamma$  上一定存在四个点恰好是一个与  $R$  相似的矩形的四个顶点 [5].

他们证明这个定理的思路与 Vaughan 证明定理3.1的思路有一定的相似性, 其中用到了一些辛几何中的概念以及下面的引理:

**引理 3.4.** Klein 瓶不能光滑地嵌入到  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  中成为一个 Lagrange 子流形.

**证明.** 因为引理的证明相对较为复杂, 这里略去. 详细证明可以参看 [13]. □

下面介绍一下定理3.3的证明思路.

**证明.** 设  $\gamma$  是复平面  $\mathbb{C}$  上的光滑 Jordan 闭曲线. 我们赋予  $\mathbb{C}$  和  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  标准辛形式, 则有  $\gamma$  是  $\mathbb{C}$  的 Lagrange 子流形, 由此可得  $\gamma \times \gamma$  是  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  的 Lagrange 子流形.

对任意的  $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}]$ , 我们考虑如下三个映射  $l, g, R_\phi : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ :

$$\begin{aligned} l : (z, w) &\mapsto \left(\frac{z+w}{2}, \frac{z-w}{2}\right), \\ g : (z, re^{i\theta}) &\mapsto \left(z, \frac{r}{\sqrt{2}}e^{i2\theta}\right), \\ R_\phi : (z, re^{i\theta}) &\mapsto (z, re^{i(\theta+\phi)}). \end{aligned}$$

记  $L = l(\gamma \times \gamma)$ ,  $L_\phi = R_\phi(L)$ , 可以证明  $L, L_\phi$  都是  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  的 Lagrange 子流形, 且有:

$$L \cap (\mathbb{C} \times \{0\}) = L_\phi \cap (\mathbb{C} \times \{0\}) = \gamma \times \{0\} \subseteq L \cap L_\phi.$$

若存在  $r > 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  使得  $(z, re^{i\theta}) \in L \cap L_\phi$ , 则有  $z \pm re^{i\theta}, z \pm re^{i(\theta+\phi)} \in \gamma$ , 这四个点即为某个方位角为  $\phi$  的矩形的四个顶点. 故我们现在只需证  $\gamma \times \{0\} \subsetneq L \cap L_\phi$ .

用反证法. 若  $L \cap L_\phi = \gamma \times \{0\}$ . 记  $M = g(L)$ ,  $M_\phi = g(L_\phi)$ , 则  $M$  和  $M_\phi$  在除去  $\gamma \times \{0\}$  的任意一个邻域之后都是 Lagrange 子流形, 且有  $M \cap M_\phi = \gamma \times \{0\}$ . 与定理3.1的证明类似可得  $M$  和  $M_\phi$  都同胚于 Möbius 带, 且  $\gamma \times \{0\}$  是它们共同的边界. 两条 Möbius 带沿边界粘起来会得到一个 Klein 瓶, 因此  $M \cup M_\phi$  同胚于一个 Klein 瓶, 但是它不一定是一个光滑的曲面. 我们再对  $M \cup M_\phi$  在  $\gamma \times \{0\}$  的一个小邻域中的部分做一个小“手术”, 使改动过后的曲面变成  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$  的一个光滑 Lagrange 子流形并且仍同胚于 Klein 瓶, 这就与我们的引理3.4矛盾!

□

虽然定理3.3是目前关于内接矩形问题最深刻的结论,但是仍然无法去掉曲线的光滑性这个条件.

## 4 总结

如2.2节最后一段所言,无法用逼近这个手段是目前内接正方形问题和内接矩形问题的最大难点,导致很多分析的方法在处理这两个猜想时作用有限.目前已知结论的证明中用到的方法虽然多种多样,但是大多都给人一种“绕远路”的观感.想要完全解决这两个猜想可能需要对正方形或者矩形边长的某种估计以防止出现收敛过程中正方形或矩形退化的情况,或者需要某种工具上的创新,也可能某位数学家灵光一现就以一种非常巧妙的方法将其证明.文中定理3.1和定理3.3的证明就是新颖而巧妙的.

## 参考文献

- [1] Jason Cantarella, Elizabeth Denne, and John McCleary. Transversality for configuration spaces and the "square-peg" theorem. 2014.
- [2] Arnold Emch. Some properties of closed convex curves in a plane. *Amer. J. Math.*, 35:407–412, 1913.
- [3] Arnold Emch. On the medians of a closed convex polygon. *Amer. J. Math.*, 37:19–28, 1915.
- [4] Arnold Emch. On some properties of the medians of closed continuous curves formed by analytic arcs. *Amer. J. Math.*, 38:6–18, 1916.
- [5] J. Greene and A. Lobb. The rectangular peg problem. *arXiv: Geometric Topology*, 2020.
- [6] Cole Hugelmeyer. Every smooth jordan curve has an inscribed rectangle with aspect ratio equal to  $\sqrt{3}$ . 2018.
- [7] Cole Hugelmeyer. Inscribed rectangles in a smooth jordan curve attain at least one third of all aspect ratios. 2019.
- [8] Mark D. Meyerson. Balancing acts. *Topology Proceedings*, 6(1):59–75, 1982.
- [9] M. J. Nielsen. Triangles inscribed in simple closed curves. *Geometriae Dedicata*, 43(3):291–297, 1992.
- [10] M. J. Nielsen and S. E. Wright. Rectangles inscribed in symmetric continua. *Geometriae Dedicata*, 56(3):285–297, 1995.
- [11] Igor Pak. The discrete square peg problem. 2008.
- [12] L. G. Schnirelman. On certain geometrical properties of closed curves. *Uspekhi Mat Nauk*, page 34–44, 1944.
- [13] Vsevolod Shevchishin. Lagrangian embeddings of the klein bottle and combinatorial properties of mapping class groups. *Izvestiya: Mathematics*, 73, 2007.
- [14] Walter Stromquist. Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves. *Mathematika*, 36:187 – 197, 1989.
- [15] Terence Tao. An integration approach to the toeplitz square peg problem. *Forum of Mathematics, Sigma*, 5, 2016.

# 非线性对流扩散方程的间断有限元方法

金晨浩

## 摘要

本文介绍间断有限元方法用于求解非线性对流扩散方程的基本原理, 分析格式的稳定性与估计误差精度, 并给出若干一维模型问题的测试结果.

## 1 绪论

### 1.1 背景介绍

在科学计算方向的本科生必修课《偏微分方程数值解》与本研贯通课《有限元方法》中, 我们学习了**有限差分方法、有限体积方法与有限元方法**三类常用的数值求解偏微分方程的数值计算方法. 在本文中, 我们将介绍一种高效的有限元方法: 间断有限元方法 (Discontinuous Galerkin Method, 以下简称 DG).

我们首先简要介绍经典有限元 (FE) 方法的思想. FE 方法是一种基于 PDE 变分形式的 (参考有限元方法数学理论). 考虑一维 Poisson 的齐次 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases}, \quad f \in L^2(a, b) \quad (1.1)$$

根据微分方程 II 的预备知识可知, 其变分形式如下:

$$\text{求解 } u \in V := H_0^1(a, b), \text{ 使得 } \int_a^b u' v' dx = \int_a^b f v dx, \forall v \in V \quad (1.2)$$

有限元方法的基本思想是构造测试函数空间  $V$  的有限维子空间  $V_h$ , 并以此给出有限元弱形式:

$$\text{求解 } u_h \in V_h \subset V, \text{ 使得 } \int_a^b u'_h v' dx = \int_a^b f v dx, \forall v \in V_h \quad (1.3)$$

这里的  $V_h$  一般取为多项式函数空间, 例如对模型问题 (1.1), 我们构造区间  $(a, b)$  的一个剖分<sup>1</sup>:  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ , 记区间  $I_j := (x_{j-1}, x_j)$ , 定义有限元空间  $V_h^k$  如下:

$$\{v \in V : v|_{I_j} \in P^k(I_j), v(a) = v(b) = 0\} \quad (1.4)$$

即  $V_h^k$  中的成员在每个子区间  $I_j$  上的限制均为次数不超过  $k$  的多项式, 且在全局上必须是连续的 (注意到  $k$  不能为 0). 通常, 我们在每个区间  $I_j$  再额外取  $(k-1)$  个分点:

作者: 金晨浩, 2017 级数学科学学院, 邮箱: kanit@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 本稿件于 5 月 14 日来稿, 5 月 23 日修改, 5 月 27 日接受. 稿件编辑: 黄欣祺。

<sup>1</sup>在实际编程中通常采用非等距结点,  $\Delta x_j = x_{j+\frac{1}{2}} - x_{j-\frac{1}{2}}$ ,  $h = \max_j \Delta x_j$ . 要求网格是正则的, 即  $\Delta x_j \geq Ch$ ,  $C > 0$  固定. 本文不会介绍非等距结点.

$x_{j-1} = x_{j,0} < \dots < x_{j,k-1} < x_{j+1,0} = x_j$ , 并构造 Lagrange 基函数作为  $V_h^k$  的基:

$$l_{j,s}(x) = \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (1.5)$$

当问题 (1.1) 的精确解正则性足够好时, 经典有限元方法满足误差估计:

$$\|u - u_h\|_{H^s} \leq Ch^{k+1-s}, \quad s = 0, 1, \quad C \text{ 依赖于 } \|u\|_{H^{k+1}}. \quad (1.6)$$

本文介绍的 DG 方法也是一种有限元方法, 其最早于 1973 年由 Reed 和 Hill 在研究中子传输问题时提出, 用于离散双曲守恒律方程的一阶空间导数项; 80、90 年代逐渐发展出 Interior Penalty DG(IPDG)、Local DG(LDG) 等用于求解诸如扩散方程、KdV 方程、薛定谔方程等模型问题的 DG 格式.

相比经典有限元方法及其他 PDE 数值求解方法, DG 方法具有以下优势:

- 能够很容易的编写出任意精度的格式. 可在每个空间单元内局部定义精度.
- 能够很容易的处理各种复杂的边界条件, 且在任何三角网格 (包括非规则相处的三角剖分) 上使用.
- 具有出色的数值稳定性. 对于任意的标量方程、任意的空间维数和任意的三角剖分, 即便不使用限制器也能满足单元熵不等式和  $L^2$ -模稳定性.
- 具有极高的并行计算效率. 解在每个单元上仅仅依赖邻居单元的解的信息.
- 具有极高的数值精度. 多项式空间的阶取  $k$ , 在  $L^2$ -模下, 对于光滑函数至少具有  $(k + \frac{1}{2})$  阶精度, 通常能有  $(k + 1)$  阶精度.

## 1.2 模型问题

本文研究的模型问题如下:

- 双曲守恒律方程  $u_t + f(u)_x = 0, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (下同);
- 对流扩散方程  $u_t + f(u)_x - u_{xx} = 0$ ;
- 多孔介质传输方程  $u_t + f(u)_x - (a(u)u_x)_x = 0, a(u) \geq 0$ .

## 1.3 时间离散

DG 格式离散了 PDE 的空间导数, 将时间依赖问题离散为一个常微分方程组. 精确求解 ODEs 的代价是昂贵的, 为此我们还需要离散时间导数.

对常微分方程  $u_t = L(u)$ , 下面给出了 3 阶显式 RK 离散格式

$$u^n(x) := u(x, t_n), \text{ 时间步长 } \Delta t, t_0 = 0.$$

$$\text{3 阶 RK 离散: } \begin{cases} u^{(1)} = u^n + \Delta t \cdot L(u^n), \\ u^{(2)} = \frac{1}{4}[3u^n + u^{(1)} + \Delta t \cdot L(u^{(1)})], \\ u^{(n+1)} = \frac{1}{3}[u^n + 2u^{(2)} + 2\Delta t \cdot L(u^{(2)})]. \end{cases} \quad (1.7)$$

高阶的隐式 Runge-Kutta 格式可以是 L-稳定 (绝对稳定域包含 x 轴左半段) 的, 在本文

的程序实现中我们主要使用下面的 [4]4 阶隐式 Runge-Kutta 离散.

$$\text{Norsett(4 阶): } \begin{cases} u^{n+1} = u^n + \Delta t(\delta k_1 + (1 - 2\delta)k_2 + \delta k_3), \\ k_1 = L(u^n + \Delta t\gamma k_1), \\ k_2 = L(u^n + \Delta t((\frac{1}{2} - \gamma)k_1 + \gamma k_2)), \\ k_3 = L(u^n + \Delta t(2\gamma k_1 + (1 - 4\gamma)k_2 + \gamma k_3)). \end{cases}, \text{ 其中 } \begin{cases} \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos(\frac{\pi}{18}) \\ \delta = \frac{1}{6(2\gamma - 1)^2} \end{cases} \quad (1.8)$$

当偏微分方程包含非线性项, 例如扩散项是  $(\frac{1}{2}u^2)_x$ , 而对流项是线性的非线性对流扩散方程, 此时若使用隐式格式则每一步迭代都要求解一个非线性代数方程组, 代价很昂贵. 尽管非线性 ODEs 数值求解方向也有相关工作的进展, 例如 Boscarino[1] 给出过一个能达到三阶精度的非线性 ODEs 求解器, 但我们下面介绍的半隐格式应用范围更广泛.

为避免求解非线性方程组, 一个平凡的想法是取非线性项的时间层为已知层, 线性项为位置层. 例如求解第  $n + 1$  个时间层, 取非线性项为第  $n$  层信息, 线性项为  $n + 1$  层信息. 我们称这种想法为"线性化"处理. 如此设计的时间离散格式确实是收敛的, 但只有一阶的整体精度.

我们希望能设计一种格式, 既可以避免求解非线性方程, 也可以获得数值上的高精度. 这便是我们将在第六章中介绍的谱延迟校正 (Spectral Deferred Correction, SDC) 方法. SDC 方法最早由 Dutt[3], Greengard 和 Rokhlin 设计, 作为一种高阶稳定的时间离散格式来求解刚性、非刚性问题. 我们将分别详细叙述经典 SDC 方法与推广 SDC 方法的原理与算法, 并给出局部截断误差估计及其证明.

1.  $\begin{cases} u_t = F_S(t, u) + F_N(t, u), \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases}$ ,  $F_S, F_N$  分别为线性、非线性算子  $\rightarrow$  经典 SDC;
2.  $\begin{cases} u_t = F(t, u), \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases}$ ,  $F$  无法拆分为线性、非线性算子组合  $\rightarrow$  推广 SDC.

SDC 方法是基于数值积分的半隐时间离散格式, 其基本思想是将每个时间层继续剖分为更小的时间区间, 区间端点为 Gauss-Labotto 积分结点. 首先使用线性化处理, 得到一阶收敛的数值解, 再对这个数值解进行反复修正, 得到高阶收敛的数值解. 格式的具体算法将在后文给出.

SDC 方法不是唯一的半隐时间离散格式, 其他常用的半隐格式还有 Additive Runge-Kutta(ARK) 格式和指数差分时间 (Exponential Differencing Time) 方法, 特别是针对高维问题. 本文仅针对一维非线性时间依赖问题设计 SDC 格式.

## 2 双曲守恒律方程的 RKDG 格式

### 2.1 DG 空间半离散格式

考虑一般的一维双曲守恒律方程:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . 将区间  $[0, 1]$   $N$  等分:  $0 = x_{\frac{1}{2}} < x_{\frac{3}{2}} < \dots < x_{N+\frac{1}{2}} = 1$ ,

$$h = 1/N, \quad x_{j+\frac{1}{2}} = jh, \quad I_j := (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}).$$

构造有限元空间:

$$V_h^k(I_j) := \{v \in C^\infty(I_j) : v|_{I_j} \in P^k\} \quad (2.2)$$

模型问题 (2.1) 的 DG 半离散格式由下面给出:

求解  $u_h(\cdot, t) \in V_h$ , 使得  $\forall v \in V_h$ ,  $j = 1 : N$  成立

$$\int_{I_j} (u_h)_t v \, dx - \int_{I_j} f(u_h) v' \, dx + \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}^- - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0. \quad (2.3)$$

因为  $u_h$  在格点处是间断的, 因此  $f(u_{j+\frac{1}{2}})$  是没有意义的. 这里的  $\hat{f}$  是数值流通量, 它是关于  $u_h$  在格点  $x_{j+\frac{1}{2}}$  处左右极限的函数,

$$\hat{f}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{f}(u_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t), u_h(x_{j+\frac{1}{2}}^+, t)). \quad (2.4)$$

有限差分方法、有限体积法中的结论表明, 当  $\hat{f}$  为单调流通量时, 半离散格式才可能是稳定的. 我们称数值流通量  $\hat{f}$  是单调的, 若  $\hat{f}$  满足以下 3 条性质:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a). 相容性: } \hat{f}(u, u) = f(u); \\ \text{(b). 连续性: } \hat{f}(u^-, u^+) \text{ 关于两个变量均 Lipschitz 连续;} \\ \text{(c). 单调性: } \hat{f} \text{ 关于第一个变量非降, 关于第二个变量非增.} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

注意到, 当  $f(u) = cu$ ,  $c > 0$  时, 取  $\hat{f}(u^-, u^+) = u^-$  即满足单调性. 类似  $c < 0$  时取  $\hat{f}(u^-, u^+) = u^+$  也满足条件. 这种取法的  $\hat{f}$  称为迎风流通量. 但是对一般的非线性情况, 迎风流通量是不工作的. 以下为一些常用的单调流通量:

$$\text{Lax-Friedrichs: } \hat{f}^{LF}(u^-, u^+) = \frac{1}{2}(f(u^-) + f(u^+) - \alpha(u^+ - u^-)), \quad \alpha = \max_u |f'(u)|;$$

$$\text{Godunov: } \hat{f}^{God}(u^-, u^+) = \begin{cases} \min_{u^- \leq u \leq u^+} f(u), & u^- < u^+ \\ \max_{u^+ \leq u \leq u^-} f(u), & u^- \geq u^+ \end{cases};$$

$$\text{Engquist-Osher: } \hat{f}^{EO} = \int_0^{u^-} \max(f'(u), 0) \, du + \int_0^{u^+} \min(f'(u), 0) \, du + f(0).$$

## 2.2 稳定性与误差估计

根据双曲守恒律方程的相关知识, 我们知道 (2.1) 的弱解未必唯一, 有的弱解是没有物理意义的. 具有物理意义的, 或者说满足熵条件的弱解被称为熵解. 我们首先引入熵函数 (Entropy function) 和熵通量 (Entropy flux) 的定义.

**定义 2.1** (熵函数与熵通量). 若函数  $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  二阶可微且  $U'' \geq 0$  则称  $U$  为熵函数. 针对双曲守恒律方程  $u_t + f(u)_x = 0$ ,  $U$  对应的熵通量定义为  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F'(u) = U'(u)f'(u)$ . 称  $(U, F)$  为一组熵配对 (Entropy pair).

**定义 2.2** (熵解). 函数  $u(x, t)$  是方程  $u_t + f(u)_x = 0$  的弱解, 称  $u(x, t)$  为熵解若  $u(x, t)$  对任意

的熵配对  $(U, F)$  均满足熵不等式  $U(u)_t + F(u)_x \leq 0$  (分布意义下), 即  $\forall \phi \in C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [\phi_t U(u) + \phi_x F(u)] dx dt \geq - \int_{-\infty}^{+\infty} U(u(x, 0)) \phi(x, 0) dx \quad (2.6)$$

下面的命题表明数值解  $u_h(\cdot, t)$  的  $L^2$  模随时间推进是不增的, 因此 DG 半离散格式具有  $L^2$  模稳定性.

**命题 2.3** (DG 格式的  $L^2$  模稳定性). DG 格式 (5) 的解  $u_h$  在每个单元  $I_j$  上满足下面的单元熵不等式 (cell entropy inequality)

$$\frac{d}{dt} \int_{I_j} U(u_h) dx + \hat{F}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}} \leq 0 \quad (2.7)$$

这里取  $U(u) = \frac{1}{2}u^2$ ,  $\hat{F}$  满足相容性  $\hat{F}(u, u) = u$ . 特别的, 当边界条件是周期边值时 (如问题 (4)), 我们有

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 (u_h)^2 dx \leq 0, \text{ 即 } \|u_h(\cdot, t)\|_{L^2(0,1)} \leq \|u_h(\cdot, 0)\|_{L^2(0,1)}, L^2 \text{ 模非增.} \quad (2.8)$$

**证明.** 定义  $B_j(u_h; v) = \int_{I_j} (u_h)_t v dx - \int_{I_j} f(u_h) v_x dx + \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}^- - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}^+$ ,  
 $\tilde{F}(u) := \int^u f(v) dv$ . 取  $v = u_h$  代入得到:

$$B_j(u_h; u_h) = \int_{I_j} U(u_h)_t dx + \hat{F}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}} + \Theta_{j-\frac{1}{2}} \quad (2.9)$$

其中

$$\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = -\tilde{F}(u_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-)) + \hat{f}_{j+\frac{1}{2}} u_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-) \quad (2.10)$$

$$\Theta_{j-\frac{1}{2}} = -\tilde{F}(u_h(x_{j-\frac{1}{2}}^-)) + \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} u_h(x_{j-\frac{1}{2}}^-) + \tilde{F}(u_h(x_{j-\frac{1}{2}}^+)) - \hat{f}_{j-\frac{1}{2}} u_h(x_{j-\frac{1}{2}}^+) \quad (2.11)$$

因为  $F(u) = \int^u U'(v) f'(v) dv = u f(u) - \tilde{F}(u) = \hat{F}(u, u)$ ,  $\hat{F}$  是相容的. 此外, 利用中值定理和  $\hat{f}$  的单调性

$$\Theta_{j-\frac{1}{2}} = (u_h(x_{j-\frac{1}{2}}^+) - u_h(x_{j-\frac{1}{2}}^-))(\tilde{F}'(\xi) - \hat{f}) \geq 0, \quad \xi \text{ 介于 } u^+, u^- \text{ 之间} \quad (2.12)$$

从而我们证明了单元熵不等式.  $\square$

对于时间层的离散, 当选用显式格式时, 时空间的步长需满足 CFL 条件:

$$\max_u |f'(u)| \frac{\Delta t}{h} \leq \frac{1}{2k+1}. \quad (2.13)$$

文献 [7] 证明了线性对流方程初值光滑的情况下, DG 半离散格式 (2.3) 给出的数值解  $u_h$  关于精确解  $u$  满足误差估计

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^{k+1}, \quad C \text{ 依赖于 } u \text{ 的导数但与 } h \text{ 无关} \quad (2.14)$$

因此要使全离散格式达到  $O(h^{k+1})$  的精度, 时间层离散的阶不得低于  $k+1$ .

误差估计的证明. 沿用命题 1 中双线性型  $B_j(\cdot, \cdot)$  的定义, 可将格式 (2.3) 改写为

$$B_j(u_h; v) = 0, \forall j, v \in V_h^k(I_j). \quad (2.15)$$

记  $e := u - u_h$ . 因为事实上精确解  $u$  也满足  $B_j(u; v) = 0$ , 于是  $B_j(e; v) = 0$ .

定义投影算子  $P : C^\infty(I_j) \rightarrow V_h^k(I_j)$ ,  $w \mapsto Pw$  满足

$$\int_{I_j} (Pw(x) - w(x))v(x) dx = 0 \quad \forall v \in P^{k-1}(I_j); \quad Pw(x_{j+\frac{1}{2}}^-) = w(x_{j+\frac{1}{2}}). \quad (2.16)$$

由泛函分析的相关知识可知  $P$  是良定的且满足  $\|Pw - w\|_{L^2} \leq Ch^{k+1}$ ,  $C$  仅依赖  $\|w\|_{H^{k+1}}$ , 与  $h$  无关. 记  $e_h := Pu - u_h$ ,  $\varepsilon_h := u - Pu$ ,

取  $B_j(e; v) = 0$  中的  $v = e_h \Rightarrow B_j(e_h; e_h) = -B_j(\varepsilon_h; e_h)$ . 单元熵不等式给出:

$$B_j(e_h; e_h) \geq \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_j} (e_h)^2 dx + \hat{F}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}} \geq 0.$$

另一边, 根据定义  $(\varepsilon_h)_{j+\frac{1}{2}}^- = 0$ , 因此

$$-B_j(\varepsilon_h; e_h) = - \int_{I_j} (\varepsilon_h)_t e_h dx \leq \frac{1}{2} \left( \int_{I_j} ((\varepsilon_h)_t)^2 dx + \int_{I_j} (e_h)^2 dx \right). \quad (2.17)$$

两边联立并对  $j$  求和, 可得  $\frac{d}{dt} \int_0^1 (e_h)^2 dx \leq \int_0^1 (e_h)^2 dx + Ch^{2k+2}$ , 又因为初值离散满足

$$\|u(\cdot, 0) - u_h(\cdot, 0)\|_{L^2} \leq Ch^{k+1}. \quad (2.18)$$

由 Gronwall 不等式即可得到  $\|e_h\|_{L^2} \leq Ch^{k+1}$ .  $\varepsilon_h$  的估计可由  $P$  的定义给出, 因此最终有  $\|u - u_h\|_{L^2} \leq \|e_h\|_{L^2} + \|\varepsilon_h\|_{L^2} \leq Ch^{k+1}$ .  $\square$

### 2.3 TVB 限制器

当精确解间断时, 误差估计是不成立的. 此时数值解在间断处会产生数值振荡, 且振荡现象不会随着网格加密消失. 为此, 我们引入 TVB 限制器来处理数值振荡现象. TVB 是 TVD 限制器的改进. 首先需要引入一些相关定义.

**定义 2.4** (全变差, TVD, TVB). 设  $u$  是定义在一维网格  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  上的网格函数,  $u_j = u(x_j)$ . 定义  $u$  的全变差为  $TV(u) = \sum_{j=0}^{N-1} |u_{j+1} - u_j|$ . 若某时间依赖问题的数值解  $u^n$  满足  $TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  则称  $u$  是全变差衰减 (Total Variation Diminishing, TVD) 的, 对应数值格式是 TVD 的. 若全变差有界, 即存在  $M > 0$  固定,  $TV(u^n) \leq M$ , 则称数值解是全变差有界 (Total Variation Bounded) 的, 数值格式是 TVB 的.

限制器的思想是在时间离散的基础上对每一层的数值解进行“限制”, 以控制解的全变差. 假定我们已求解了第  $n$  个时间层的数值解  $u_h^n$ , 利用时间离散格式我们可以求得第  $n+1$  层的信息, 记为  $u_h^{n+1,\text{pre}}$ . 那么第  $n+1$  层的数值解即为  $u_h^{n+1} := \Lambda\Pi_h(u_h^{n+1,\text{pre}})$ , 这里的  $\Lambda\Pi_h$  是限制器算子. 第零层的信息  $u_h^{0,\text{pre}}$  由最小二乘拟合给出,  $u_h^0 = \Lambda\Pi_h(u_h^{0,\text{pre}})$ .

记  $u_h^{(\text{mod})} := \Lambda\Pi_h(u_h)$ , 下面我们首先介绍 TVD 限制器.

记  $u_h$  在每个单元上的积分平均为

$$\bar{u}_j = \frac{1}{h} \int_{I_j} u_h dx, \quad (2.19)$$

以及

$$\tilde{u}_j = (u_h)_{j+\frac{1}{2}}^- - \bar{u}_j, \quad \tilde{\tilde{u}}_j = \bar{u}_j - (u_h)_{j-\frac{1}{2}}^+. \quad (2.20)$$

限制器不能改变  $u_h$  在每个单元  $I_j$  上的积分平均, 但是可以改变  $\tilde{u}_j$  和  $\tilde{\tilde{u}}_j$  的值. 特别的, 我们引入最小模限制器 (minmod limiter), 分别将  $\tilde{u}_j$  和  $\tilde{\tilde{u}}_j$  的值更改为

$$\tilde{u}_j^{(\text{mod})} = m(\tilde{u}_j, \bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j, \bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}), \quad \tilde{\tilde{u}}_j^{(\text{mod})} = m(\tilde{\tilde{u}}_j, \bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j, \bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}), \quad (2.21)$$

$$m(a_1, \dots, a_l) = \begin{cases} s \min(|a_1|, \dots, |a_n|), & s = \text{sign}(a_1) = \dots = \text{sign}(a_n) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (2.22)$$

$u_h^{(\text{mod})}$  在结点处的值由下面给出

$$u_h^{(\text{mod})}(x_{j+\frac{1}{2}}^-) = \bar{u}_j + \tilde{u}_j^{(\text{mod})}, \quad u_h^{(\text{mod})}(x_{j-\frac{1}{2}}^+) = \bar{u}_j - \tilde{\tilde{u}}_j^{(\text{mod})}. \quad (2.23)$$

在每个单元  $I_j$  上, 若  $u_h^{(\text{mod})}(x_{j+\frac{1}{2}}^-) = (u_h)_{j+\frac{1}{2}}^-$  且  $u_h^{(\text{mod})}(x_{j-\frac{1}{2}}^+) = (u_h)_{j-\frac{1}{2}}^+$  则无需改动  $u_h$  在  $I_j$  上的取值. 否则, 若  $k=1$  则将  $u_h$  在  $I_j$  上的取值改为以  $u_h^{(\text{mod})}(x_{j+\frac{1}{2}}^-)$  和  $u_h^{(\text{mod})}(x_{j-\frac{1}{2}}^+)$  的线性插值; 若  $k \geq 2$  则改为根据  $u_h^{(\text{mod})}(x_{j+\frac{1}{2}}^-)$ ,  $u_h^{(\text{mod})}(x_{j-\frac{1}{2}}^+)$  和积分平均的值求出区间上的二次插值系数.

可以证明上面的格式是 TVD 的. 这里我们省略具体的证明过程, 详见参考文献 [7] 和 [2].

另一方面, TVD 限制器会损失精度, 在极值附近只能达到一阶精度, 在全局则至多二阶. 实际编程中更为常用的是 TVB 限制器. TVB 与 TVD 的唯一区别在于最小模函数选取:

$$\tilde{m}(a_1, \dots, a_l) = \begin{cases} a_1, & \text{if } |a_1| \leq Mh^2 \\ m(a_1, \dots, a_l), & \text{otherwise} \end{cases}. \quad (2.24)$$

根据 [2] 的结论, 当  $M \geq \frac{2}{3} \sup |u_{xx}|$  时, TVB 格式对  $k \leq 2$  不会影响精度.

## 2.4 一维双曲守恒律方程测试样例

**例 2.1.** 考虑初值光滑的线性对流方程:

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in (0, 1) \end{cases}, \quad \text{周期边界条件} \quad (2.25)$$

初值取  $u^0(x) = \sin(2\pi x)$ , 精确解为  $u(x, t) = \sin(2\pi(x-t))$ . 空间的网格剖分取为均匀剖分, 终止时间  $T = 1$ , 多项式次数  $k = 0, 1, 2, 3$ . 时间离散使用高阶的隐式 Runge-Kutta 格式, CFL 条件数  $\frac{\Delta t}{h}$  取为  $\frac{1}{2k+3}$ .

输出误差表格如下: (表格中的  $L^2, L^\infty$  指范数, err 即对应范数下误差  $u - u_h$  的大小, ord 表示收敛阶)

误差表格的收敛阶与上面的结论是符合的.

k	Norm	N = 64		N = 128		N = 256		N = 512	
		err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
0	$L^2$	2.08e-01	0	1.10e-01	0.9237	5.58e-02	0.974	2.80e-02	0.9953
	$L^\infty$	2.96e-01	0	1.56e-01	0.9267	7.94e-02	0.9729	3.99e-02	0.9938
1	$L^2$	4.22e-04	0	1.04e-04	2.018	2.60e-05	2.005	6.48e-06	2.001
	$L^\infty$	9.35e-04	0	2.43e-04	1.943	6.19e-05	1.974	1.56e-05	1.986
2	$L^2$	2.50e-06	0	3.12e-07	3.003	3.90e-08	3	4.87e-09	3
	$L^\infty$	5.69e-06	0	7.10e-07	3.002	8.87e-08	3	1.11e-08	3
3	$L^2$	2.10e-08	0	8.59e-10	4.613	5.15e-11	4.061	3.20e-12	4.005
	$L^\infty$	4.70e-08	0	2.67e-09	4.138	1.66e-10	4.009	1.08e-11	3.944

表 17.1:  $T = 1, k = 0, 1, 2, 3$ , 线性对流方程

例 2.2. 考虑初值间断的线性对流方程, 取例 1 中的初值为激波

$$u^0(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \\ 0, & x \in [0, \frac{1}{4}) \cup (\frac{3}{4}, 1] \end{cases}, \quad u^0(x) \text{ 周期为 } 1 \quad (2.26)$$

仍取周期边界条件、均匀网格剖分. 时间离散取 Euler 向前差分, CFL 条件数取  $\frac{1}{2k+3}$ . 多项式空间次数  $k=2$ . 引入 TVB 限制器 [6][7], 将带有限制器和不带限制器的 RKDG 格式进行对比, 如下图所示.

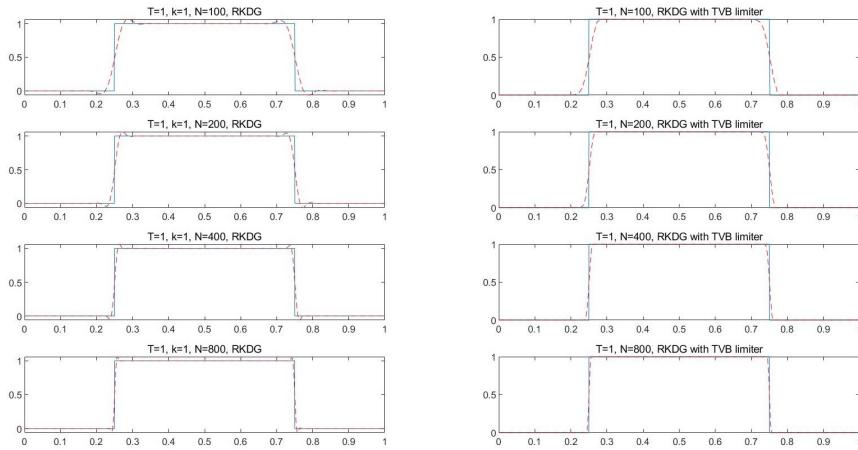


图 2.1: 左: 无 TVB 限制器; 右: 带 TVB 限制器

可以看出 DG 格式在间断点处的数值振荡得到了很好的控制.

例 2.3. 考虑 Burgers 方程的初值问题

$$\begin{cases} u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0, & (x, t) \in (0, 1) \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in (0, 1) \end{cases}, \quad \text{周期边界条件} \quad (2.27)$$

初值取为  $u^0(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}x$ . 由双曲守恒律方程的理论 [6] 可知当时间  $T \geq T_b = 1$  时, 解函数是一个激波. 使用 Godunov 通量.

取均匀网格剖分、CFL 条件数  $\frac{1}{4k+3}$ .

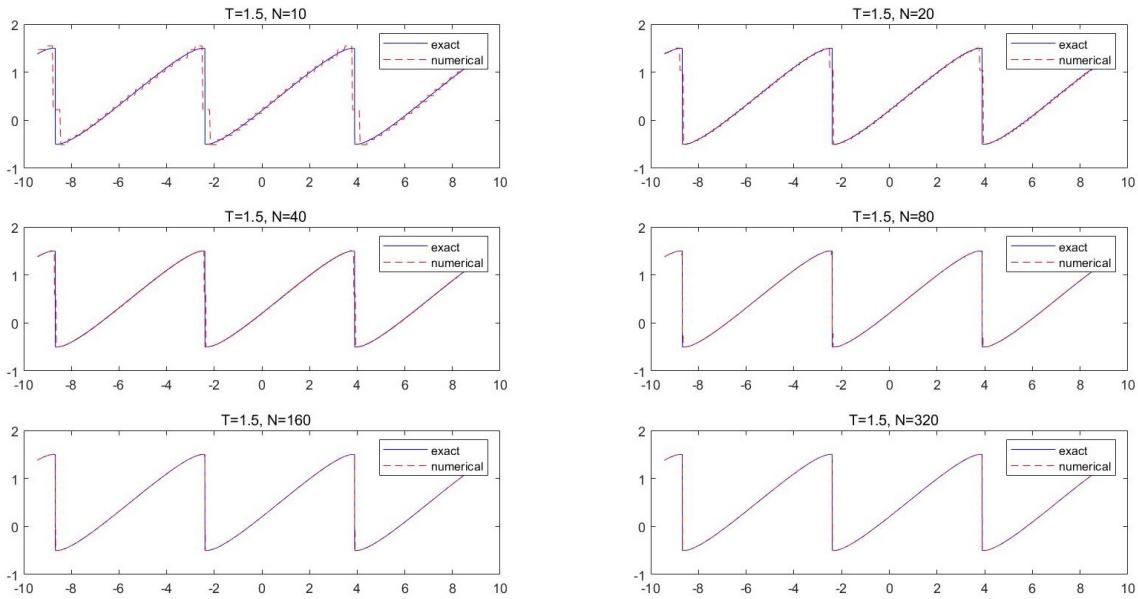
首先取终止时间  $T = 0.5$ . 此时解仍是光滑的, 当多项式次数  $k$  取 0, 1, 2 时, TVB 限制器不会影响精度, 仍然可以达到前面误差估计的精度.

当终止时间  $T = 1.5$  时, 解是一个激波. 取多项式空间次数  $k=2$ , 此时 TVB 限制器可以

k	Norm	$N = 64$		$N = 128$		$N = 256$		$N = 512$	
		err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
0	$L^2$	7.33e-02	0	3.77e-02	0.9596	1.91e-02	0.9795	9.63e-03	0.9898
	$L^\infty$	1.55e-01	0	8.15e-02	0.9293	4.13e-02	0.979	2.08e-02	0.9944
1	$L^2$	1.65e-03	0	4.27e-04	1.954	1.09e-04	1.974	2.74e-05	1.986
	$L^\infty$	4.05e-03	0	1.07e-03	1.926	2.73e-04	1.963	6.92e-05	1.983
2	$L^2$	1.78e-05	0	2.73e-06	2.708	3.88e-07	2.813	5.28e-08	2.878
	$L^\infty$	1.19e-04	0	1.98e-05	2.587	2.91e-06	2.771	4.06e-07	2.84

表 17.2:  $T = 0.5, k = 0, 1, 2$ , Burgers 方程 (带 TVB 限制器)

很好的处理间断点处的数值振荡.

图 2.2: Burgers 方程: RKDG 格式带 TVB 限制器,  $T = 1.5$ ,  $k = 2$ 

### 3 线性扩散方程的 LDG 格式

#### 3.1 LDG 空间半离散格式

对一般的对流扩散方程:  $u_t + f(u)_x = (a(u)u_x)_x$ ,  $a(u) \geq 0$ , LDG 格式如下:

将方程重写为:  $u_t + f(u)_x = (b(u)q)_x$ ,  $q - B(u)_x = 0$ ,

其中  $b(u) = \sqrt{a(u)}$ ,  $B(u) = \int^u b(u) du$ .

求解  $u_h, q_h \in V_h$  使得  $\forall v, p \in V_h$ ,

$$\int_{I_j} (u_h)_t v dx - \int_{I_j} (f(u_h) - b(u_h)q_h)v_x dx + (\hat{f} - \hat{b}\hat{q})_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}^- - (\hat{f} - \hat{b}\hat{q})_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0, \quad (3.1)$$

$$\int_{I_j} q_h p dx + \int_{I_j} B(u_h)p_x dx - \hat{B}_{j+\frac{1}{2}} p_{j+\frac{1}{2}}^- + \hat{B}_{j-\frac{1}{2}} p_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0. \quad (3.2)$$

这里的  $\hat{f}, \hat{B}, \hat{b}, \hat{q}$  均为数值流通量.  $\hat{f}$  可取任意的单调流通量. 下面给出的交替数值流通

量是一种常用的取法.

$$\hat{b} = \frac{B(u_h^+) - B(u_h^-)}{u_h^+ - u_h^-}, \quad \hat{q} = q_h^+, \quad \hat{B} = B(u_h^-) \quad \text{或:} \quad (3.3)$$

$$\hat{b} = \frac{B(u_h^+) - B(u_h^-)}{u_h^+ - u_h^-}, \quad \hat{q} = q_h^-, \quad \hat{B} = B(u_h^+) \quad (3.4)$$

对问题 (3.1) 的方程  $u_t = u_{xx}$ , 对应  $q = u_x$ ,  $u_t - q_x = 0$ , LDG 格式如下:

求解  $u_h, q_h \in V_h$  使得  $\forall v, p \in V_h$ ,

$$\int_{I_j} (u_h)_t v \, dx + \int_{I_j} q_h v_x \, dx - (q_h)_{j+\frac{1}{2}}^+ v_{j+\frac{1}{2}}^- + (q_h)_{j-\frac{1}{2}}^+ v_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0, \quad (3.5)$$

$$\int_{I_j} q_h p \, dx + \int_{I_j} u_h p_x \, dx - (u_h)_{j+\frac{1}{2}}^- p_{j+\frac{1}{2}}^- + (u_h)_{j-\frac{1}{2}}^- p_{j-\frac{1}{2}}^+ = 0. \quad (3.6)$$

### 3.2 稳定性与误差估计

**命题 3.1.** 数值解  $u_h, q_h$  满足

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{I_j} (u_h)^2 \, dx + \int_{I_j} (q_h)^2 \, dx + \hat{F}_{j+\frac{1}{2}} - \hat{F}_{j-\frac{1}{2}} \leq 0 \quad (3.7)$$

这里的数值流通量  $\hat{F}_{j+\frac{1}{2}} = \hat{F}(u_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t), q_h(x_{j+\frac{1}{2}}^-, t); u_h(x_{j+\frac{1}{2}}^+, t), q_h(x_{j+\frac{1}{2}}^+, t))$  满足

$$\hat{F}(u, q; u, q) = F(u) - ub(u)q, \quad F(u) = \int^u v f'(v) \, dv. \quad (3.8)$$

类似的守恒律方程的 DG 格式, 当多项式阶取为  $k$  时, 数值解在  $L^2$  模下的精度能达到  $k+1$  阶. 我们有以下命题.

**命题 3.2.** 初值  $u^0$  光滑时, (3.7),(3.8) 的解  $u_h, q_h$  满足

$$\int_0^1 (u(x, t) - u_h(x, t))^2 \, dx + \int_0^t \int_0^1 (u_x(x, \tau) - q_h(x, \tau))^2 \, dx \, d\tau \leq Ch^{2k+2}, \quad (3.9)$$

这里的  $C$  是一个不依赖  $h$ , 仅依赖  $u$  的导数的常数.

以上两个命题的证明可以参考 [7]. 事实上, 对高阶空间导数也设计对应的 LDG 格式. 同样, 对应的数值解也满足无条件稳定性与误差估计. 该部分内容可参考 [9][10].

### 3.3 测试样例

**例 3.1.** 取问题 (3.1) 中的初值为  $u^0(x) = \sin(2\pi x)$ , 此时精确解为  $u(x, t) = e^{-4\pi^2 t} \sin(2\pi x)$ . 采用 4 阶隐式 RK 格式求解. 终点时间  $T = 0.1$ , 多项式次数  $k = 0, 1, 2, 3$ :

输出结果与误差分析理论相符.

k	Norm	N = 64		N = 128		N = 256		N = 512	
		err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
0	$L^2$	1.73e-02	0	8.87e-03	0.9638	4.28e-03	1.053	2.09e-03	1.031
	$L^\infty$	2.45e-02	0	1.26e-02	0.9644	6.05e-03	1.053	2.96e-03	1.031
1	$L^2$	1.46e-03	0	4.22e-04	1.79	1.05e-04	2.001	2.63e-05	2
	$L^\infty$	2.80e-03	0	7.83e-04	1.839	1.85e-04	2.083	4.62e-05	2
2	$L^2$	1.65e-04	0	2.81e-05	2.559	3.70e-06	2.921	4.77e-07	2.958
	$L^\infty$	2.34e-04	0	3.97e-05	2.559	5.24e-06	2.921	6.74e-07	2.958
3	$L^2$	2.85e-04	0	3.75e-05	2.923	3.22e-06	3.54	2.41e-07	3.74
	$L^\infty$	4.02e-04	0	5.30e-05	2.923	4.56e-06	3.54	3.41e-07	3.74

表 17.3:  $T = 0.1$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , 线性扩散问题

## 4 非线性对流扩散方程的 LDG 格式

本节我们以多孔介质方程为例介绍当扩散项完全非线性时, 如何设计高精度的 DG 格式. 考虑模型问题:

$$\begin{cases} u_t = (a(u)u_x)_x, & x \in (a, b) \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad a(u) \geq 0, \text{ 周期边界条件.} \quad (4.1)$$

### 4.1 线性化处理技术

以多孔介质方程  $a(u) = mu^{m-1}$ , ( $m > 1$ ) 为例, 此时 LDG 格式中的辅助函数:

$$b(u) = \sqrt{mu^{m-1}}, \quad B(u) = \frac{2}{m+1} \sqrt{mu^{m+1}}. \quad (4.2)$$

记  $B_2(u) = B(u)/u = \frac{2}{m+1} \sqrt{mu^{m-1}}$ , 若解出第  $n$  层的数值解, 第  $n+1$  层由以下给出:

求解  $u_h, q_h \in V_h$  使得  $\forall v, p \in V_h$ ,

$$\int_{I_j} \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t_n} v \, dx = - \int_{I_j} b(u_h^n) q_h v_x \, dx + (\hat{b}\hat{q})_{j+\frac{1}{2}} v_{j+\frac{1}{2}}^- - (\hat{b}\hat{q})_{j-\frac{1}{2}} v_{j-\frac{1}{2}}^+, \quad (4.3)$$

$$\int_{I_j} q_h p \, dx = - \int_{I_j} B_2(u_h^n) u_h^{n+1} p_x \, dx + \hat{B}_{j+\frac{1}{2}} p_{j+\frac{1}{2}}^- - \hat{B}_{j-\frac{1}{2}} p_{j-\frac{1}{2}}^+. \quad (4.4)$$

这里  $\hat{q}_{j+\frac{1}{2}} = q_{j+\frac{1}{2}}^+$ ,  $\hat{B}_{j+\frac{1}{2}} = B_2((u_{j+\frac{1}{2}}^n)^-)(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^-$ ,  $\hat{b}_{j+\frac{1}{2}} = \frac{B((u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^+) - B((u_{j+\frac{1}{2}}^n)^-)}{(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1})^+ - (u_{j+\frac{1}{2}}^n)^-}$

上式可以简写为

$$u_h^{n+1} = u_h^n + \Delta t_n K(u_h^n) u_h^{n+1}, \quad K(u_h^n) \text{ 是依赖于第 } n \text{ 层信息的刚度矩阵.} \quad (4.5)$$

以上的格式体现了科学计算方向中处理非线性问题的一种常用的思想: 线性化处理. 在该格式下, 每个时间层推进都需要重新生成刚度矩阵并求解线性方程组, 相比线性问题而言代价更昂贵, 但确是稳定的, 且时间效率比显式格式高很多.

该算法只能达到 1 阶精度, 为此我们希望推广本章第一节介绍的 SDC 方法, 使得对扩散项非线性的问题也能有稳定的高阶收敛的时间离散格式.

## 4.2 推广的 SDC 方法

SDC 方法是一种半隐格式. 经典的 SDC 方法 [8] 能高精度数值求解空间算子可以拆分为线性与非线性项的 ODEs, 但对于高度非线性的 ODEs, 经典 SDC 是不工作的. 为此, 我们介绍一种推广的 SDC 方法.

一般情况下, 当非线性扩散方程包含源项时, 空间算子是依赖于时间的, 即一阶半隐格式可以写为如下:

$$u_h^{n+1} = u_h^n + \Delta t_n F(t_{n+1}, u_h^n, u_h^{n+1}). \quad (4.6)$$

这里的  $F$  关于第二、第三个分量均非线性. 下面我们介绍基于一阶格式给出改进的 SDC 方法 [5].

计算初始逼近:

$u_{n,0}^1 = u_n$ . 利用一阶半隐格式求出结点  $\{t_{n,m}\}_{m=1}^P$  上的一阶逼近解  $u^1$ , 即

For  $m = 0 \rightarrow P - 1$

$$u_{n,m+1}^1 = u_{n,m}^1 + \Delta t_{n,m} (F(t_{n,m+1}, u_{n,m}^1, u_{n,m+1}^1)).$$

End

在一阶格式的基础上迭代修正:

For  $k = 1 \rightarrow K$

$$u_{n,0}^{k+1} = u_n.$$

For  $m = 0 \rightarrow P - 1$

$$\begin{aligned} u_{n,m+1}^{k+1} &= u_{n,m}^{k+1} + \Delta t_{n,m} (F(t_{n,m+1}, u_{n,m}^k, u_{n,m+1}^{k+1}) - F(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, u_{n,m+1}^k)) \\ &\quad + I_m^{m+1}(F(t, u^k, u^k)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

End

End

这里的  $I_m^{m+1}(F(t, u^k, u^k))$  是基于  $(t_{n,m}, F(t_{n,m}, u_{n,m}^k, u_{n,m}^k))_{m=0}^P$  的  $P$  阶 Lagrange 插值多项式在  $[t_{n,m}, t_{n,m+1}]$  上的数值积分.

最后取  $u_{n+1} = u_{n,P}^{K+1}$ .

我们有以下的截断误差估计的结论.

**命题 4.1.** (局部截断误差) 上述 SDC 格式的局部截断误差为  $O(\Delta t^{\min(K+1, P+1)})$ , 这里  $\Delta t = \max_{n,m} \Delta t_{n,m}$ .

证明. 不妨设  $u_{n,0}^k = u(t_n)$ ,  $k = 1, \dots, K+1$ ,

利用  $u(t_{n,m+1}) = u(t_{n,m}) + \int_{t_{n,m}}^{t_{n,m+1}} F(\tau, u(\tau), u(\tau)) d\tau$  以及式 (6.11):

$$u(t_{n,m+1}) - u_{n,m+1}^{k+1} = u(t_{n,m}) - u_{n,m}^{k+1} - \theta \Delta t_{n,m} (F(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, u_{n,m+1}^{k+1}) - F(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, u_{n,m+1}^k))$$

$$+ \int_{t_{n,m}}^{t_{n,m+1}} F(\tau, u(\tau), u(\tau)) d\tau - \int_m^{m+1} (F(t, u^k, u^k)). \quad (4.8)$$

下面, 我们归纳证明  $u(t_{n,m+1}) - u_{n,m+1}^{k+1} = O(h^{\min(k+2,P+2)})$ .

当  $k = 1, m = 0$  时,

$$\begin{aligned} u(t_{n,1}) - u_{n,1}^2 &= u(t_{n,0}) - u_{n,0}^2 - \theta \Delta t_{n,0} (F(t_{n,1}, u_{n,1}^1, u_{n,1}^2) - F(t_{n,1}, u_{n,1}^{n,1}, u_{n,1}^1)) \\ &\quad + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} F(\tau, u(\tau), u(\tau)) d\tau - I_0^1(F(t, u^1, u^1)). \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} F(t_{n,1}, u_{n,1}^1, u_{n,1}^2) - F(t_{n,1}, u_{n,1}^{n,1}, u_{n,1}^1) &= F'_3(t_{n,1}, u_{n,1}^1, \xi)(u_{n,1}^2 - u_{n,1}^1) \\ &= F'_3(t_{n,1}, u_{n,1}^1, \xi)(u_{n,1}^2 - u(t_{n,1}) + u(t_{n,1}) - u_{n,1}^1) \\ &= F'_3(t_{n,1}, u_{n,1}^1, \xi)(u_{n,1}^2 - u(t_{n,1}) + O(h^2)), \\ \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} F(\tau, u(\tau), u(\tau)) - I_0^1(F(t, u^1, u^1)) &= \int_{t_{n,0}}^{t_{n,1}} F(\tau, u(\tau), u(\tau)) d\tau - I_0^1(F(t, u, u)) \\ &\quad + I_0^1(F(t, u, u)) - I_0^1(F(t, u^1, u^1)) = O(h^3). \end{aligned} \quad (4.9)$$

(6.13) 是由于 Lagrange 插值的误差为  $O(h^{P+2})$ . 因此我们可以得到:

$$u(t_{n,1}) - u_{n,1}^2 = O(h^3). \quad (4.10)$$

假设当  $k \leq P$  时,

$$u(t_{n,l}) - u_{n,l}^k = O(h^{k+1}), \quad u(t_{n,l}) - u_{n,l}^{k+1} = O(h^{k+2}), \quad (4.11)$$

那么有  $u(t_{n,m}) - u_{n,m}^{k+1} = O(h^{k+2})$  且

$$\begin{aligned} F(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, u_{n,m+1}^{k+1}) - F(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, u_{n,m+1}^k) &= F'_3(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, \xi)(u_{n,m+1}^{k+1} - u_{n,m+1}^k) \\ &= F'_3(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, \xi)(u_{n,m+1}^{k+1} - u(t_{n,m+1}) + u(t_{n,m+1}) - u_{n,m+1}^k) \\ &= F'_3(t_{n,m+1}, u_{n,m+1}^k, \xi)(u_{n,m+1}^{k+1} - u(t_{n,m+1}) + O(h^{k+1})) \\ &\quad \int_{t_{n,m}}^{t_{n,m+1}} F(\tau, u(\tau), u(\tau)) d\tau - I_m^{m+1}(F(t, u^k, u^k)) \\ &= \int_{t_{n,m}}^{t_{n,m+1}} F(\tau, u(\tau), u(\tau)) d\tau - I_m^{m+1}(F(t, u, u)) + I_m^{m+1}(F(t, u, u)) - I_m^{m+1}(F(t, u^k, u^k)) \\ &= O(h^{P+2}) + O(h^{k+2}). \end{aligned}$$

综上由归纳假设, 我们证明了  $u(t_{n,m+1}) - u_{n,m+1}^{k+1} = O(h^{\min(k+2,P+2)})$ .  $\square$

### 4.3 多孔介质方程测试结果

在本节的测试样例中, 我们取 SDC 方法中时间区间的剖分结点为 4 点 Gauss 结点, 此时  $P = 5$ , 可以保证时间离散不会掉阶.

**例 4.1.** 考虑带源项的多孔介质方程:

$$\begin{cases} u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = (u^m)_{xx} + g, & x \in (0, 2\pi) \\ u(x, 0) = \sin(x) \end{cases}, \quad (4.12)$$

取  $m = 3$ , 精确解为  $u(x, t) = \sin(x + t)$ . 终止时间取为  $T = 0.1$ , 时空间步长等设置同前. 首先测试一阶半隐格式, 得到以下误差表格:

N	$L^2$ -error	$L^2$ -order	$L^\infty$ -error	$L^\infty$ -order
16	0.201377	0	0.203017	0
32	0.100521	1.0024	0.0996298	1.02695
64	0.0502397	1.0006	0.0495447	1.00785
128	0.0251173	1.00015	0.0246812	1.00532

表 17.4:  $T = 0.1$ , 多孔介质方程的一阶半隐格式

接着使用推广的 SDC 方法进行时间离散, 得到以下误差表格:

k	Norm	$N = 16$		$N = 32$		$N = 64$		$N = 128$	
		err	ord	err	ord	err	ord	err	ord
0	$L^2$	2.18e-01	0	1.29e-01	0.7552	6.00e-02	1.104	3.28e-02	0.8701
	$L^\infty$	2.05e-01	0	1.25e-01	0.7112	6.01e-02	1.056	3.24e-02	0.8935
1	$L^2$	8.45e-02	0	2.22e-02	1.931	5.92e-03	1.905	1.50e-03	1.978
	$L^\infty$	6.85e-02	0	1.61e-02	2.089	4.29e-03	1.909	1.03e-03	2.06
2	$L^2$	3.28e-02	0	4.48e-03	2.876	5.91e-04	2.921	7.40e-05	2.997
	$L^\infty$	2.18e-02	0	3.00e-03	2.863	3.98e-04	2.912	4.99e-05	2.996
3	$L^2$	1.26e-02	0	9.21e-04	3.772	5.81e-05	3.985	3.64e-06	3.999
	$L^\infty$	8.44e-03	0	6.29e-04	3.745	3.87e-05	4.023	2.42e-06	3.999

表 17.5:  $T = 0.1$ , 多孔介质方程的 SDC 格式

## 5 总结

在本文中, 我们首先针对一维双曲守恒律方程引入了 DG 半离散格式, 给出了相关的稳定性分析、误差估计结论, 并介绍了 TVB 限制器的基本思想. 随后我们针对扩散方程引入了 LDG 半离散格式, 并测试了一维热方程的算例. 最后, 当扩散项非线性时, 我们介绍了线性化处理技巧, 给出一阶精度的格式; 接着利用推广的 SDC 时间离散方法, 在一阶格式的基础上给出了非线性扩散方程的高阶的时间离散格式, 并以多孔介质方程为例验证了算法精度.

## 参考文献

- [1] Sebastiano Boscarino, Francis Filbet, and Giovanni Russo. High order semi-implicit schemes for time dependent partial differential equations. *Journal of Scientific Computing*, 68(3):975–1001, 2016.
- [2] Bernardo Cockburn. An introduction to the discontinuous galerkin method for convection-dominated problems. In *Advanced numerical approximation of nonlinear hyperbolic equations*, pages 150–268. Springer, 1998.
- [3] Alok Dutt, Leslie Greengard, and Vladimir Rokhlin. Spectral deferred correction methods for ordinary differential equations. *BIT Numerical Mathematics*, 40(2):241–266, 2000.
- [4] Gerhard Wanner Ernst Hairer. Solving ordinary differential equations ii stiff and differential-algebraic problems.

- [5] Ruihan Guo, Yinhua Xia, and Yan Xu. Semi-implicit spectral deferred correction methods for highly nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 338:269–284, 2017.
- [6] Randall J. Leveque. Numerical methods for conservation laws.
- [7] Chi-Wang Shu. Discontinuous galerkin methods: general approach and stability. *Numerical solutions of partial differential equations*, 201, 2009.
- [8] Yan Xu and Chi-Wang Shu. Local discontinuous galerkin methods for high-order time-dependent partial differential equations. *Communications in Computational Physics*, 7:1–46, 2010.
- [9] Jue Yan and Chi-Wang Shu. A local discontinuous galerkin method for kdv type equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 40(2):769–791, 2002.
- [10] Jue Yan and Chi-Wang Shu. Local discontinuous galerkin methods for partial differential equations with higher order derivatives. *Journal of Scientific Computing*, 17(1):27–47, 2002.

# Kakeya 问题的简单介绍

吴澍坤

## 摘要

Kakeya 问题是数学分析里的一个核心问题。我们将简单介绍 Kakeya 问题和一些与其相关的问题。

## 1 简介

一个  $\mathbb{R}^n$  中的紧集  $E$  被称作是一个 **Kakeya 集**, 是指它包含所有指向不同方向的单位线段。换句话说, 对任意  $\mathbb{R}^n$  中的单位向量  $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ , 我们可以找到一个点  $x \in E$  和由此生成的单位线段

$$l_{e,x} := \{x + te : t \in [-1/2, 1/2]\}, \quad (1.1)$$

使得  $l_{e,x} \subset E$ .

关于 Kakeya 集, 我们可以问许多有意思的问题, 比如: Kakeya 集是什么形状的? Kakeya 集有多大? 第一个问题的答案有很多, 比如说  $\mathbb{R}^n$  中的半径足够大的球。由此可见, 如果一个集合足够的“大”, 那它就很有可能是一个 Kakeya 集。为此, 我们稍微改一下第二个问题: Kakeya 集合能有多小? 这是一个非常模糊的问题, 因为我们没有给出集合的大小的标准。一个自然的标准是 Lebesgue 测度, 这也是最初的 Kakeya 问题:

**问题 1.1.** 如果  $E$  是一个 Kakeya 集, 那么  $E$  的 Lebesgue 测度是否一定是正的?

这个问题在 1920 年左右被 Besicovitch 回答了。具体来说, Besicovitch 举出了一个例子, 说明了 Kakeya 集可以是零测集。<sup>1</sup>

Besicovitch 的回答部分说明了, 想要刻画 Kakeya 集的大小, Lebesgue 测度不算是一个好的标准。那么, 我们能不能换一个标准呢? 比如说, 我们可以考虑用相同大小的球去覆盖一个集合。这个集合的大小就由用的球的个数来决定——要用的球越多, 这个集合就越大, 反之这个集合就越小。上述的标准和一个集合的 Hausdorff 维数或者 Minkowski 维数, 是密切相关的。在这里我们避免给出详细的定义, 有兴趣的读者可参考 [11]。

换了标准以后, 我们问如下的问题。这也是大多时候人们说的 Kakeya 问题。

**问题 1.2 (Kakeya 猜想).** 一个  $\mathbb{R}^n$  中的 Kakeya 集的 Hausdorff 维数是否一定(至少)是  $n$ ?

简单来说, 我们问: 给定任意一个 Kakeya 集  $E$  和任意一个远小于 1 的数  $\delta$ 。如果我们用半径为  $\delta$  的球(以下称作“ $\delta$ -球”)去覆盖这个集合  $E$ , 那么, 用的球的个数是否一定要多? 这里“多”, 我们大约指的是  $\delta^{-n}$ , 也就是用来覆盖一个单位正方体所需要的  $\delta$ -球的个数<sup>2</sup>。

问题 1.2 在二维已经被 Davies [2] 解决了。在三维的时候有如下(不完全)的结果: [1, 7, 8, 13]。关于这个问题更多的描述和介绍, 可参考 [14] 的第十一章, 以及 [9]。

我们举几个例子, 来看看覆盖一个  $\mathbb{R}^n$  中的几何体需要多少  $\delta$ -球。

作者: 吴澍坤, 2013 级数学科学学院, 邮箱: wsk28@mail.ustc.edu.cn.

稿件信息: 5 月 21 日来稿, 6 月 1 日接受。稿件编辑: 邵锋。

<sup>1</sup> 关于 Besicovitch 的构造, 可参考 [10] 第十章。

<sup>2</sup> 这里我们不关心常数的影响。比如我们会认为  $\delta^{-n}$  和  $(100n^{100})\delta^{-n}$  是一回事。

**例 1.1.** 覆盖一个  $\mathbb{R}^n$  中的单位线段需要至少  $\delta^{-1}$  个  $\delta$ -球.

**例 1.2.** 覆盖一个  $\mathbb{R}^n$  中的超平面, 也即  $n - 1$  维子空间, 需要至少  $\delta^{-(n-1)}$  个  $\delta$ -球.

**例 1.3.** 假设  $P = P(x_1, \dots, x_n)$  是一个  $n$  元多项式, 其中  $\deg(P) = d$ . 如果  $P$  的零点集合  $Z := \{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}$  满足对任意  $x \in Z, \nabla P(x) \neq 0$ , 我们考虑  $Z_1 = Z \cap B^n(0, 1)$ , 即  $Z_1$  是  $Z$  在单位球内的那一部分. 那么, 由 Wongkew 的结果 [15] (也可参见 [4, Theorem 4.7]) 得知, 覆盖  $Z_1$  (至少) 需要  $d\delta^{-(n-1)}$  个  $\delta$ -球.

为了简化问题, 我们转而考虑单位线段的一个  $\delta$ -邻域而不是直接考虑单位线段. 即对一个单位线段  $l_{e,a}$ , 我们考虑一个“圆柱体”  $T_e^\delta(a)$ , 其中  $T_e^\delta(a) := N_\delta(l_{e,a})$  为  $l_{e,a}$  的  $\delta$ -邻域. 因此,  $T_e^\delta(a)$  是一个指向  $e$  的, 中心在  $a$  的, 半径是  $\delta$  的圆柱体. 接着, 对任意  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们定义它的 Kakeya 极大函数  $f_\delta^* : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  为:

$$f_\delta^*(e) := \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \int_{T_e^\delta(a)} |f|. \quad (1.2)$$

**注.** Kakeya 极大函数是 Bourgain 在 [1] 中引入的. 它有一个“孪生兄弟”, 叫做 Nikodym 极大函数. 更多关于他们之间的讨论可见 [12].

**注.** 对于两个单位向量  $e, e' \in \mathbb{S}^{n-1}$ , 当  $\angle(e, e') < C\delta$  时, 我们可以验证: 存在另一个依赖于  $C$  的绝对常数  $C'$ , 使得  $(C')^{-1} f_\delta^*(e') \leq f_\delta^*(e) \leq C' f_\delta^*(e)$ . 换句话来说, Kakeya 极大函数  $f_\delta^*(e)$  在任一个  $\delta$ -邻域内, 表现得差不多像是常数.

与 Kakeya 极大函数相关的是如下的 Kakeya 极大函数问题:

**问题 1.3** (Kakeya 极大函数猜想). 对任意的紧支撑函数  $f$  和任意  $\varepsilon > 0$ , 是否有

$$\|f_\delta^*\|_p \leq C_\varepsilon \delta^{-(n/p)+1-\varepsilon} \|f\|_p? \quad (1.3)$$

其中  $C_\varepsilon$  是一个仅依赖于  $\varepsilon$  和维数  $n$  的绝对常数.

问题 1.3 和问题 1.2 之间的联系可参考 [14, Lemma 11.9]. 简单来说, 如果问题 1.3 是正确的, 那么问题 1.2 也是正确的.

与问题 1.2 类似, 问题 1.3 在二维的时候已经被肯定回答了. 在下一节, 我们将给出这个问题在二维的时候一个通过傅里叶变换的证明.

## 2 问题 1.3 在二维情况下的证明

下面的傅里叶变换的证明来自 Bourgain [1]. 除此之外, 还有一个源自 Córdoba 的几何的证明, 参见 [14, Theorem 10.3, Proof 2].

**定理 2.1.** 当  $n = 2$  时, 存在一个绝对常数  $C$ , 使得以下不等式成立:

$$\|f_\theta^*\|_2 \leq C \left( \log \frac{1}{\delta} \right)^{1/2} \|f\|_2. \quad (2.1)$$

**证明.** 不妨假设  $f \geq 0$ . 我们简单回忆一下二维傅里叶变换的定义: 对于一个可积函数  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , 我们定义

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \quad (2.2)$$

为函数  $f$  的傅里叶变换。考虑一个满足以下两个条件的光滑函数  $\varphi$ :

1. 对任意  $x \in [-1, 1]$ ,  $\varphi(x) \geq 1$ .
2.  $10 \geq \widehat{\varphi} \geq 0$ ;  $\widehat{\varphi}$  是紧支撑的, 比如,  $\widehat{\varphi}$  支撑在区间  $[-10, 10]$  上.

光滑函数  $\varphi$  的构造可参见 [6, Theorem 1.3.5]. 通过函数  $\varphi$ , 我们可以构造如下关于水平圆柱体  $T_e^\delta(0)$  的一个光滑截断函数  $\psi$ :

$$\psi_e(x) := \varphi(x_1)\delta^{-1}\varphi(\delta^{-1}x_2), \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.3)$$

其中  $(x_1, x_2)$  是  $x$  在垂直坐标系  $\{e, e^\perp\}$  下的坐标. 简单的计算可以得出

$$f_\delta^*(e) = \sup_{a \in \mathbb{R}^2} \left( \frac{1}{|T_e^\delta(a)|} \mathbf{1}_{T_e^\delta(a)} \right) * f \leq \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\psi_e * f)(a). \quad (2.4)$$

因此, 应用 Hausdorff-Young 不等式, 我们有

$$f_\delta^*(e) \leq \|\psi_e * f\|_\infty \leq \|\widehat{\psi}_e \widehat{f}\|_1 = \int \widehat{\psi}_e(\xi) \cdot |\widehat{f}(\xi)| d\xi. \quad (2.5)$$

紧接着, 由 Hölder 不等式, 我们进而可以得到

$$\int \widehat{\psi}_e(\xi) \cdot |\widehat{f}(\xi)| d\xi \leq \left( \int \widehat{\psi}_e(\xi) (1 + |\xi|) \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left( \int \frac{\widehat{\psi}_e(\xi)}{1 + |\xi|} d\xi \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

注意到  $\widehat{\psi}_e(\xi)$  支撑在一个长  $20\delta^{-1}$ , 宽  $20$ , 方向是  $e^\perp$  的一个圆柱体内. 因此, 存在一个绝对常数  $C$  (比如  $C = 1000$ ), 使得

$$\int \frac{\widehat{\psi}_e(\xi)}{1 + |\xi|} d\xi \leq C \log \frac{1}{\delta}. \quad (2.7)$$

综合以上三式, 我们可以得到

$$\|f_\delta^*\|_2^2 \leq C \log \frac{1}{\delta} \int |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + |\xi|) \left( \int_{\mathbb{S}^1} \widehat{\psi}_e(\xi) d\theta \right) d\xi. \quad (2.8)$$

注意到  $\widehat{\psi}_e \leq 10$ , 且满足  $\widehat{\psi}_e \neq 0$  的单位向量  $e$  构成的集合的 Lebesgues 测度有上界  $C(1 + |\xi|)$ . 也即存在一个绝对常数  $C$ , 使得  $|S_\xi| \leq C(1 + |\xi|)$ , 其中

$$S_\xi := \{e \in \mathbb{S}^1 : \widehat{\psi}_e(\xi) \neq 0\}. \quad (2.9)$$

因此, 由 Plancherel 恒等式, 我们可以得出

$$\|f_\delta^*\|_2^2 \leq C \log \frac{1}{\delta} \int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = C \left( \log \frac{1}{\delta} \right) \|f\|_2^2. \quad (2.10)$$

这就是我们想要的估计. □

**注.** 在忽略常数的意义下, (2.1)是我们能得到的最好的估计. 一个简单的例子是: 取测试函数  $f = \mathbf{1}_{B_\delta}$ , 其中  $B_\delta$  是  $\mathbb{R}^2$  中的任意一个  $\delta$ -球.

**注.** 最近通过傅里叶分析来研究 Kakeya 类型的问题的研究可参见 [5].

### 3 其他 Kakeya 类型的问题

让我们回到最开始的 Kakeya 问题. 问题1.1可以用另一种方式来叙述:

**问题 3.1.** 给定一族线段  $\{l_{e,x}\}_{(e,x)}$  和他们的并  $E := \cup_{(e,x)} l_{e,x}$ , 则  $E$  的 Lebesgue 测度是否一定是正的?

Besicovitch 的回答告诉我们, 对一般的线段族  $\{l_{e,x}\}_{(e,x)}$ , 它所形成的集合  $E$  的 Lebesgue 测度是没有下界的. 注意到线段  $l_{e,x}$  也可以看成是“(方向, 位置)”的一个二元函数:  $e$  决定了线段的方向,  $x$  决定了线段的位置. 要是我们对二元组  $(e, x)$  加上一些“光滑性”限制, 使得 Besicovitch 构造的例子不构成反例, 那么问题3.1的答案就有可能是肯定的. 事实上, 在 [3] 中, Fu 和 Gan 证明了如下的结论:

**定理 3.1.** 给定一个映射  $c : \overline{B^{n-1}(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ , 考虑如下的“Kakeya 映射” $\phi_c$ ,

$$\phi_c : \overline{B^{n-1}(0, 1)} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (v, t) \mapsto (c(v) + tv, t). \quad (3.1)$$

如果对于某个  $\alpha > (n - 2)n/(n - 1)^2$ , 映射  $c$  是  $\alpha$ -Hölder 连续的, 那么 Kakeya 映射  $\phi_c$  的像集,  $\text{Image}(\phi_c)$ , 有正的 Lebesgue 测度.

定理3.1中提到的映射  $c$  可以看成是一个“方向  $\rightarrow$  位置”的映射; 而 Kakeya 映射  $\phi_c$  可以看成是由映射  $c$  生成的直线族. 简单来说, 如果我们假定了位置随方向变换的一些正则性条件, 那么其生成的 Kakeya 集就有正的 Lebesgue 测度. 注意到  $(n - 2)n/(n - 1)^2 < 1$ . 因此, 一个简单的推论是: 当位置随方向变换满足 Lipschitz 连续性时, 其生成的 Kakeya 集有正的 Lebesgue 测度.

### 4 总结

Kakeya 猜想、以及 Kakeya 极大函数猜想, 和分析、数论的其他核心问题有着紧密的联系. 读者可参见 [12], [13] 的第十一章. 最后留下一个作者感兴趣的问题:

**问题 4.1.** 能否降低定理3.1中正则性  $\alpha$  的下界? 现在的下界是  $(n - 2)n/(n - 1)^2$ ,  $\alpha$  最好的下界是否是 0?

## 参考文献

- [1] Jean Bourgain. Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis. *Geom. Funct. Anal.*, 1(2):147–187, 1991.
- [2] Roy O. Davies. Some remarks on the Kakeya problem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 69:417–421, 1971.
- [3] Yuqiu Fu and Shengwen Gan. On kakeya maps with regularity assumptions. *preprint*, arXiv:2009.09108, 2020.
- [4] Larry Guth. A restriction estimate using polynomial partitioning. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(2):371–413, 2016.
- [5] Larry Guth, Noam Solomon, and Hong Wang. Incidence estimates for well spaced tubes. *Geom. Funct. Anal.*, 29(6):1844–1863, 2019.
- [6] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Distribution theory and Fourier analysis, Reprint of the second (1990) edition [Springer, Berlin; MR1065993 (91m:35001a)].

- [7] Nets Katz, Izabella Łaba, and Terence Tao. An improved bound on the Minkowski dimension of Besicovitch sets in  $\mathbb{R}^3$ . *Ann. of Math.* (2), 152(2):383–446, 2000.
- [8] Nets Katz and Joshua Zahl. An improved bound on the Hausdorff dimension of Besicovitch sets in  $\mathbb{R}^3$ . *J. Amer. Math. Soc.*, 32(1):195–259, 2019.
- [9] Izabella Łaba. The kakeya problem, and connections to harmonic analysis. <http://www.math.ubc.ca/~ilaba/kakeya.html#harmonic>.
- [10] Elias M. Stein. *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of Timothy S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.
- [11] Terence Tao. 245c, notes 5: Hausdorff dimension (optional). <https://terrytao.wordpress.com/2009/05/19/245c-notes-5-hausdorff-dimension-optional>.
- [12] Terence Tao. The Bochner-Riesz conjecture implies the restriction conjecture. *Duke Math. J.*, 96(2):363–375, 1999.
- [13] Thomas Wolff. An improved bound for Kakeya type maximal functions. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 11(3):651–674, 1995.
- [14] Thomas Wolff. *Lectures on harmonic analysis*, volume 29 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. With a foreword by Charles Fefferman and a preface by Izabella Łaba, Edited by Łaba and Carol Shubin.
- [15] Richard Wongkew. Volumes of tubular neighbourhoods of real algebraic varieties. *Pacific J. Math.*, 159(1):177–184, 1993.



稻花香里说丰年，听取蛙声一片。

——《西江月·夜行黄沙道中》



# 筆墨詩篇

肆 · 筆墨詩篇

# 现代诗四首

2018 级数学科学学院 陈凡

## 小船

小船 停泊在一隅枯滩  
在这里 大地龟裂的坐标上  
没有一根羁绊可以  
穿透命运的铁环  
在这里 一切语言变得厚实  
晨风将背影留下  
带走了眼泪

小船 遗弃在荒芜的后院  
被遗弃的还有船头飘散的歌谣  
和木桨舞动的甜酒的芳香  
斑驳的线条 勾勒出你的掌纹  
一直蔓延着 直到你的眼角  
在经受风雨和荣耀的船体上  
杂草在肆意生长

小船 依洄在我的旧梦里  
时间是你的帆帆啊  
满天星辰里的一颗  
曾是你整个世界的主题  
而今在萧瑟的笛声里  
静静地驶向落日的余晖  
黄昏景亦佳 是你最后的皈依

小船 印在我书上的扉页里  
泛黄的枫叶聆听着  
一声若有若无的哭泣  
在眼泪落下的那一页  
合上书  
可曾听到当年的叹息

## 一年之晨

一

她静悄悄地来  
风窥探着发梢的清香  
在一刹那，拂面的温柔  
是她慵懒的裙裾  
每一片褶皱里蕴含着光辉  
她曾梳洗过，绾上崭新的发髻  
她曾离开过，走过天上的街市  
当她重临之晨，舞动着裙摆  
于是天地的一切闪烁着新生的愉悦

二

仿佛有人替我挪动被角  
于这一年之晨轻轻扰醒  
曾多次回响在梦里的断章  
续写已成一番徒劳  
如枫叶泛黄，片片覆盖着身后的羊肠  
随意地拾落，时时品味着甘凉的纹理

被丢弃的枫叶依旧沉默着  
只是在不起眼的一处  
被指甲划上一个句号

三

她静悄悄地来  
在草叶垂露中折射的世界里  
在荒野上朦胧的寥寥炊烟里  
在酒肆上玛吉阿米的轻笑里  
在彻夜难眠的人们的瞳孔里  
她静悄悄地走出

向前勇敢踏出一步吧，朋友  
你会发现溪水不再冰凉刺骨  
于这一年之晨，朋友  
你会发现已不再是同一条河流

## 游记——滇池的雾

是缥缈的雾的召唤  
我来到了滇池  
雾中的滇池静静地平凡着  
是颗无价的珍珠  
被大雾爱怜地缠抱着

滇池的名字起得真好啊  
它应当是一个灵秀的池  
它比湖多一份小巧  
比河多一份端庄  
它比潭多一份活泼  
比溪多一份大方  
如一个素颜的江南女子  
温柔地拨动了我的心弦

那天空中飞跃的  
不是白鸽 是天空的精灵  
又是一段被遗落的音符  
错落地点缀着滇池  
在房顶上 在草坪上  
在那单纯的孩子的唇边流响

站在岸上 和滇池面对面  
大雾慷慨地将我接待  
灵动的波浪 圈圈的涟漪  
是不言弃的孩子  
突然觉得自己身处一叶竹筏  
随波流浪 抵达未知的方向

滇池的水绿得生动  
也许是水中的绿藻  
也许是西山的倒影  
也许是两瓶绿墨水被打翻  
彼此相聚 融为一体

将足迹留给滇池  
便心满意足地离开  
不知在滇池的眼中  
我是一个如何平凡的过客

## 章台柳

1

章台柳 章台柳  
是谁在梦中呢喃  
比远方的风更远  
比黄澄的叶更黄

窈窕地走向你  
并伸出手发出邀请的时候  
那微弱而柔和的月光下  
迷蒙的是你最真切的容颜

3

你骄傲地伫立在  
线装的中国  
安静地和着  
嘈杂而不安分的梦  
风带走了美人斜倚的舒倦  
却难以带走那纸熟宣中的  
一声绵绵无尽的哀怜  
是游子日夜的低诉  
是明月下的一场别离

章台柳 章台柳  
是谁在梦中长叹  
比远方的风更远  
比黄澄的叶更黄  
  
你将最美的身影  
投影在永恒的波心  
你隐没在夕阳的背后  
忍受着夕阳拙劣的装订  
等待余晖洒尽  
将最后一叶帆淹没  
等待是一切结束的开始  
开始是一切等待的结束

你的身影时远时近  
一声亘古不变的长叹  
像石子落在湖心  
缓缓地依洄着历史的歌谣  
像来自一幅画外的弦音  
仿若穿越了整个时空  
穹顶之上 深渊之下  
怎么传来了一声  
你的万古常新的太息

那时候夕阳咽咽  
是你最苦的一滴泪  
三千柳丝难改一纸春秋  
那史册上刻画的你  
仍始终如一

2

章台柳 章台柳  
是谁在梦中呼唤  
比远方的风更远  
比黄澄的叶更黄

千年前的一滴血泪  
染红了你的根须  
那纷纷扰扰的飞絮  
在无人安家处安家  
闪电交织着细雨  
是自然最激昂的和音  
但换不来你的惊鸿一瞥  
那诗情画意汇聚的湖泊  
你已陶醉沉沦其间吗？

当夜掀开你的面纱

4

章台柳 章台柳  
是谁在梦中告别  
比远方的风更远  
比黄澄的叶更黄

我们不说告别  
因为我们从未遇见  
你的影子依偎在  
我的影子的臂弯里  
紧紧相拥  
交换着呼吸的热度

千年后  
我在湖面窥探  
在那波心铭记的  
唯自己扭曲的虬干

# 皇榜第 1 期第 1 题解答

## 1 问题

设  $\omega$  是  $\mathbb{R}^n$  上非负、光滑紧支函数，而且  $\int_{\mathbb{R}^n} \omega(x)dx = 1$ . 用  $L$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的一个  $k$  维仿射子空间（未必过原点）. 所有这样的  $L$  的全体记作  $X(k : n)$ , 或者  $X$ . 用  $d(X, L)$  表示点  $x$  到  $L$  的距离. 定义  $F : X \mapsto \mathbb{R}$ ,

$$F(L) = \int_{\mathbb{R}^n} d^2(x, L) \omega(x)dx$$

1 设  $X_1 = \mathbb{R}^n \times (S^{n-1})^k$ , 其中  $S^{n-1}$  表示  $\mathbb{R}^n$  中的单位球, 共计  $k$  个. 令

$$X_2 = \{(p, e_1, \dots, e_k) \in X_1 \mid e_1, \dots, e_k \text{ 两两正交}\}$$

定义  $\Psi : X_2 \mapsto X$  如下:

$$\Psi((p, e_1, \dots, e_k)) = \left\{ p + \sum_{i=1}^k t_i e_i \mid t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} \right\}$$

求证:  $F \circ \Psi$  是连续函数。

2 令

$$X_3 = \{(p, e_1, \dots, e_k) \in X_2 \mid p \perp e_1, \dots, p \perp e_k\}$$

证明:

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} F \circ \Psi|_{X_3} = \infty$$

进而存在  $L \in X$  使得  $F(L) = \inf_{\bar{L} \in X} F(\bar{L})$ .

3 令

$$x_{cm}^i = \int_{\mathbb{R}^n} x^i \omega(x)dx, \quad i = 1, \dots, n$$

称  $x_{cm}$  为  $\omega$  的重心. 求证: (2) 中的  $L$  经过点  $x_{cm}$ .

4 定义

$$\lambda_1 = \max_{v \in S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_{cm}, v \rangle|^2 \omega(x)dx$$

并且设  $v_1$  是上述定义中取最值的一个  $v$ . 归纳地定义  $\lambda_l$  和  $v_l$  如下: 令

$$\lambda_l = \max_{v \in S^{n-1}, v \perp v_1, \dots, v \perp v_{l-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x - x_{cm}, v \rangle|^2 \omega(x)dx$$

且  $v_l$  是上式中取到最值的点。

求证: (2) 中的  $L$  具有形式

$$L = \left\{ x_{cm} + \sum_{i=1}^k t_i e_i \mid t_i \in \mathbb{R} \right\}$$

5 验证  $v_k$  和  $\lambda_k$  满足方程：对于每个分量  $i = 1, \dots, n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{\text{cm}}, v_k \rangle \langle x^i - x_{\text{cm}}^i \rangle \omega(x) dx = \lambda_k v_k^i$$

## 2 解答

2019 级少年班学院 吴越

注。我们在下文中，不加说明地，将  $\{e_1, \dots, e_k\}$  扩充成  $\mathbb{R}^n$  的一组标准正交基  $\{e_1, \dots, e_n\}$ .

1 易见：当  $L = \Psi((p, e_1, \dots, e_k))$  时，

$$d(x, L) = \sqrt{\sum_{i=k+1}^n \langle x - p, e_i \rangle^2}$$

根据 Bessel 不等式，上式的值与  $e_i, i = k+1, \dots, n$  的选取无关，因此是良定义的。

设  $L_1 = \Psi((p_1, e_1^1, \dots, e_k^1))$ ,  $L_2 = \Psi((p_2, e_1^2, \dots, e_k^2))$ . 因为  $\omega \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ , 所以：

$$\left| F \circ \Psi((p_1, e_1^1, \dots, e_k^1)) - F \circ \Psi((p_2, e_1^2, \dots, e_k^2)) \right| \quad (2.1)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (d^2(x, L_1) - d^2(x, L_2)) \omega(x) dx \right| \quad (2.2)$$

$$= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=k+1}^n (\langle x - p_1, e_i^1 \rangle^2 - \langle x - p_2, e_i^2 \rangle^2) \omega(x) dx \right| \quad (2.3)$$

$$\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=k+1}^n (\langle x, e_i^1 \rangle - \langle x, e_i^2 \rangle) (\langle x, e_i^1 \rangle + \langle x, e_i^2 \rangle - 2\langle x, e_i^1 \rangle) \omega(x) dx \right| \quad (2.4)$$

$$+ \left| \sum_{i=k+1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\langle p_1, e_i^1 \rangle - \langle p_2, e_i^2 \rangle) (\langle p_1, e_i^1 \rangle + \langle p_2, e_i^2 \rangle - 2\langle x, e_i^2 \rangle) \omega(x) dx \right| \quad (2.5)$$

$$\leq \sum_{i=k+1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, e_i^1 - e_i^2 \rangle| |\langle x, e_i^1 + e_i^2 \rangle - 2\langle x, e_i^1 \rangle| \omega(x) dx \quad (2.6)$$

$$+ \sum_{i=k+1}^n \int_{\mathbb{R}^n} |\langle p_1, e_i^1 - p_2, e_i^2 \rangle| |\langle p_1, e_i^1 + p_2, e_i^2 \rangle - 2\langle x, e_i^2 \rangle| \omega(x) dx \quad (2.7)$$

$$< \infty \quad (2.8)$$

又因为：

$$|\langle x, e_i^1 + e_i^2 \rangle - 2\langle x, e_i^1 \rangle| \leq 2|x| + \max_{i=1,2} |p_i| \quad (2.9)$$

且积分收敛，所以对于任意  $L_1$ , 任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 只要  $|p_2 - p_1| < \delta$  且  $|e_i^1 - e_i^2| < \delta, \forall i = 1, 2, \dots, k$ , 就有  $|F(L_1) - F(L_2)| < \varepsilon$ . 因此  $F \circ \Psi$  连续。  $\square$

## 2

(1) 设  $X_3 = \Psi((p, e_1, \dots, e_k))$ , 我们有:

$$F \circ \Psi((p, e_1, \dots, e_k)) = \sum_{i=k+1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\langle x, e_i \rangle^2 - 2\langle x, e_i \rangle \langle p, e_i \rangle + \langle p, e_i \rangle^2) \omega(x) dx$$

因为  $p \in X_3$ , 所以

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=k+1}^n \langle p, e_i \rangle^2 \omega(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \langle p, e_i \rangle^2 \omega(x) dx = |p|^2$$

于是:

$$F \circ \Psi((p, e_1, \dots, e_k)) \geq |p|^2 - c|p|$$

其中  $c > 0$  为与  $p$  无关的常数. 那么显然有  $\lim_{|p| \rightarrow \infty} F \circ \Psi|_{X_3} = +\infty$ .  $\square$

(2) 因为对于  $L \in X$  有  $F(L) \geq 0$ , 所以  $\inf_{L \in X} F(L) \geq 0$ , 下面我们说明  $F \circ \Psi$  在  $X$  上的下确界可以取到。

我们有:

$$F(L) = \int_{\mathbb{R}^n} d^2(x, L) \omega(x) dx = \sum_{i=k+1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\langle x, e_i \rangle^2 - 2\langle x, e_i \rangle \langle p, e_i \rangle + \langle p, e_i \rangle^2) \omega(x) dx$$

因此对于任意的  $L \in X$ , 设  $L$  的一个表示为  $L = \Psi((p, e_1, \dots, e_k))$ , 存在唯一的  $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$ , 满足:

$$\begin{cases} \tilde{p} \perp e_i, & i = 1, \dots, k \\ p - \tilde{p} \perp e_i, & i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

且  $L = \Psi((\tilde{p}, e_1, \dots, e_k))$ .

因为  $\lim_{|p| \rightarrow \infty} F \circ \Psi|_{X_3} = +\infty$  且  $F \circ \Psi$  非负连续, 所以对于每一组固定的  $\{\widehat{e}_i | i = 1, 2, \dots, k\}$ , 存在  $\tilde{p} \in \mathbb{R}^n$  满足  $\tilde{p} \perp \widehat{e}_i, i = 1, \dots, k$ , 且使得:

$$F \circ \Psi((\tilde{p}, \widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k)) = \min_{p \in \mathbb{R}^n} F \circ \Psi((p, \widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k))$$

将  $\tilde{p}$  表示为  $\widehat{e}_i, i = 1, \dots, k$  的函数  $\tilde{p} = \mathcal{P}(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k)$ , 由上文构造的过程, 易见  $\mathcal{P} \in C((S^{n-1})^k)$ , 那么:

$$\inf_{L \in X} F(L) = \inf \left\{ F \circ \Psi(\mathcal{P}(e_1, \dots, e_k), e_1, \dots, e_k) \mid (e_1, \dots, e_k) \in (S^{n-1})^k \right\}$$

因为  $(S^{n-1})^k$  为紧集, 所以连续函数  $\mathcal{P}$  的下确界可以在  $(S^{n-1})^k$  中取到. 我们设下确界在  $(\mathcal{P}(e_1^0, \dots, e_k^0), e_1^0, \dots, e_k^0)$  处取到, 那么取

$$L = \Psi(\mathcal{P}(e_1^0, \dots, e_k^0), e_1^0, \dots, e_k^0)$$

即有  $F(L) = \inf_{L \in X} F(L)$ .  $\square$

3 我们任意固定一组单位正交向量  $e_i, i = 1, \dots, k$ . 因为:

$$F \circ \Psi(p, e_1, \dots, e_k) = \sum_{i=k+1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (x_i - p_i)^2 \omega(x) dx$$

所以  $F \circ \Psi$  取最小值的必要条件是:

$$\nabla_p (F \circ \Psi)(p, e_1, \dots, e_k) = 2 \sum_{i=k+1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (p_i - x_i) e_i \omega(x) dx = 0$$

也即  $\langle p, e_i \rangle = \langle x_{cm}, e_i \rangle, i = k+1, \dots, n$ .

又因为  $L$  是  $k$  维仿射子空间, 有基  $e_i, i = 1, \dots, k, p \in L$ , 所以当  $L$  使得  $F(L)$  取得最小值时, 必然有  $x_{cm} \in L$ .  $\square$

4 设取得最值时,  $L = \Psi(x_{cm}, \widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_k)$ . 因为 (2) 中的  $L$  经过  $x_{cm}$ , 所以由仿射空间的性质, 我们只需要证明:  $\text{Span}\{v_i | i = 1, \dots, k\} = \text{Span}\{\widehat{e}_i | i = 1, \dots, k\}$  即可。

注意到:

$$F(L) = \int_{\mathbb{R}^n} d^2(x, L) \omega(x) dx \quad (2.10)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=k+1}^n \langle x - x_{cm}, e_i \rangle^2 \omega(x) dx \quad (2.11)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} |x - x_{cm}|^2 \omega(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^k \langle x - x_{cm}, e_i \rangle^2 \omega(x) dx \quad (2.12)$$

取得最小值, 那么也即在全体两两标准正交的  $e_i \in S^{n-1}, i = 1, \dots, k$  中,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^k \langle x - x_{cm}, \widehat{e}_i \rangle^2 \omega(x) dx$$

取得了最大值.

记  $\|f\| = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} f^2(x) \omega(x) dx}$ , 我们只需说明: 原文中的  $\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$  是使得

$$\sum_{i=1}^k \|\langle x - x_{cm}, \widehat{e}_i \rangle\|^2$$

最大的  $m$  维子空间即可, 其中  $m$  依次取  $1, \dots, k$ .

事实上, 在全体两两标准正交的  $e_i \in S^{n-1}, i = 1, \dots, k$  中, 逐次取最大值即为全局最大值  $\sum_{i=1}^k \lambda_i$ . 因此  $\text{Span}\{v_i | i = 1, \dots, k\}$  是使  $\sum_{i=1}^k \|\langle x - x_{cm}, e_i \rangle\|^2$  最大的子空间, 那么  $L$  可以表示为  $\left\{ x_{cm} + \sum_{i=1}^k t_i v_i \mid (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{R}^k \right\}$ .  $\square$

5 我们只需证明:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k \rangle (x - x_{cm}) \omega(x) dx = \lambda_k v_k = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k \rangle^2 \omega(x) v_k dx$$

将  $\{v_i | i = 1, \dots, k\}$  扩充成标准正交基  $\{v_i | i = 1, \dots, n\}$ . 因为:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k \rangle (x - x_{cm}) \omega(x) dx \quad (2.13)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k \rangle \langle x - x_{cm}, v_i \rangle \omega(x) v_i dx \quad (2.14)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k \rangle^2 \omega(x) v_k dx + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k \rangle \langle x - x_{cm}, v_i \rangle \omega(x) v_i dx \quad (2.15)$$

所以只需证明, 任意  $1 \leq k < l \leq n$ :

$$m_{kl} = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, v_k \rangle \langle x - x_{cm}, v_l \rangle \omega(x) dx = 0$$

事实上, 假设  $1 \leq k < l \leq n$  且  $m_{kl} \neq 0$ , 那么对于任意参数  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $u = \cos \theta v_k + \sin \theta v_l$  是单位向量, 与  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, k-1$  正交, 且:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, u \rangle^2 \omega(x) dx \quad (2.16)$$

$$= \lambda_k \cos^2 \theta + \lambda_l \sin^2 \theta + 2m_{kl} \cos \theta \sin \theta \quad (2.17)$$

$$= \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} + \frac{\lambda_k - \lambda_l}{2} \cos(2\theta) + m_{kl} \sin(2\theta) \quad (2.18)$$

$$= \frac{\lambda_k + \lambda_l}{2} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_k - \lambda_l}{2}\right)^2 + m_{kl}^2} \sin(2\theta + \varphi) \quad (2.19)$$

那么, 只需取  $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$  即可使  $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x - x_{cm}, u \rangle^2 \omega(x) dx > \max\{\lambda_k, \lambda_l\}$ , 与定义矛盾!

因此, 命题成立。 □

### 3 教师点评

殷浩

这一题其实并不困难, 它是19级中法班《分析3》的期末考试题。这个题目的考查的是函数极值问题, 既包括如何利用紧性去证明极值的存在性, 也包括了条件极值的必要条件的研究。

如果一定要说这个题目的背景, 大家不难看出这个其实是个明显的优化问题。如果考虑题中对应的那个权函数的离散化, 那么几乎就是标准的最小二乘法问题。具体的说, 这题目取自 A. Naber 和 D. Valtorta 2017年发表在 Annals of Mathematics 上的论文《Rectifiable-Reifenberg and the regularity of stationary and minimizing harmonic maps》的第7.2节, 连记号都没有改。

我想通过这个题目让同学们理解课本上学的知识要活学活用, 记下公式到能够具体的应用于有实际意义的问题之间还需要一段努力。

# 皇榜第 1 期第 2 题解答

## 1 问题

设  $f$  是平面上的一个光滑函数. 若  $f$  在平面上只有唯一的临界点, 且其为严格极小值点, 试问该点是否一定为  $f$  的最小值点.

## 2 解答

2020 级数学科学学院 曾相如

解. 结论是否定的.

为尝试构造反例, 先做一些观察. 假设  $x_0$  是  $f$  的唯一临界点且是严格极小值点, 如果存在  $x$  使得我们任取一条从  $x_0$  到  $x$  的光滑路径  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ , 其中  $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x$ , 我们发现一定存在路径上的一个极大值点, 即:

$$\exists t_0 \in (0, 1), \text{使得 } \frac{\partial f(\gamma(t))}{\partial t} \Big|_{t=t_0} = 0$$

随着  $\gamma$  的变化, 我们应该可以发现  $\gamma(t_0)$  也随之变化, 构成一个“脊”形曲线. 示意图如下:

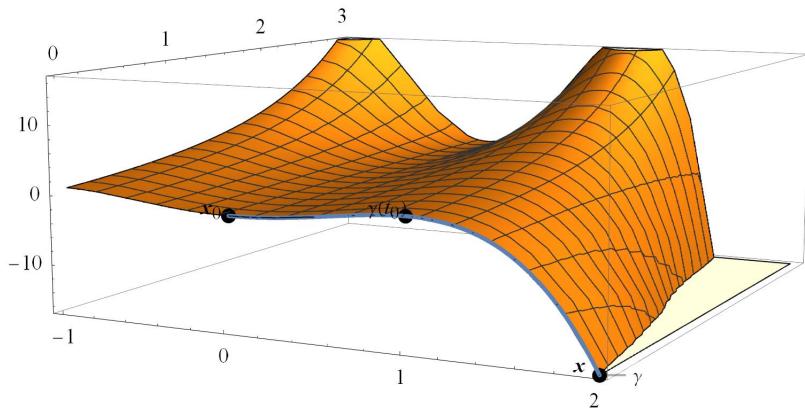


图 2.1:  $\gamma$  示意图

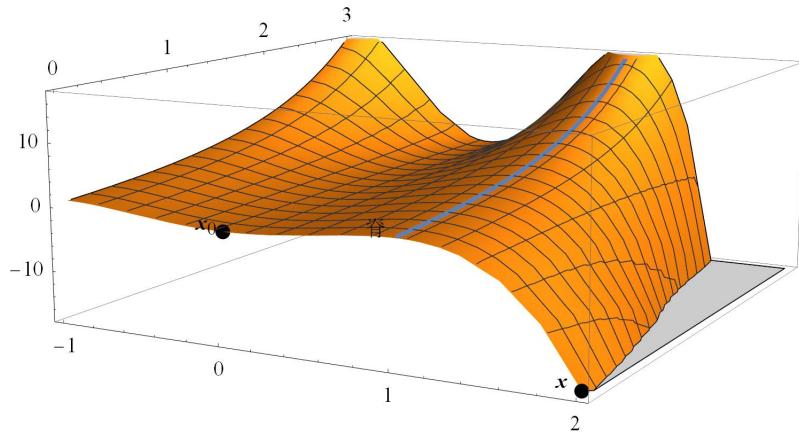


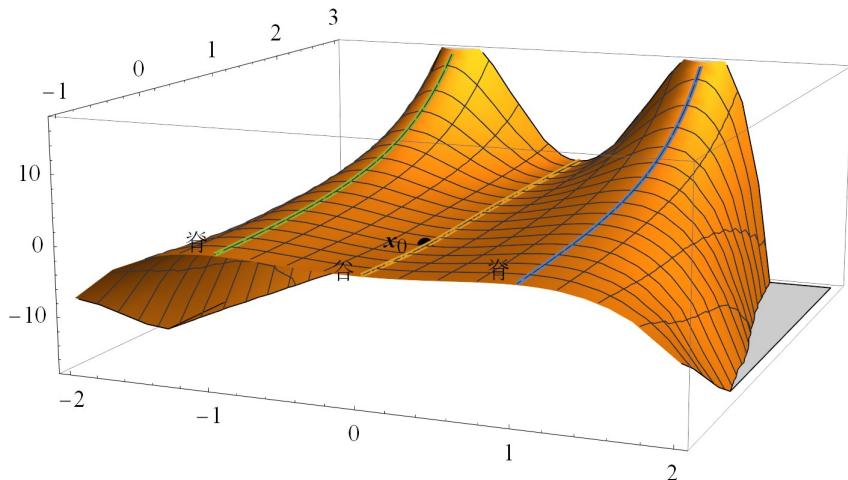
图 2.2: “脊”示意图

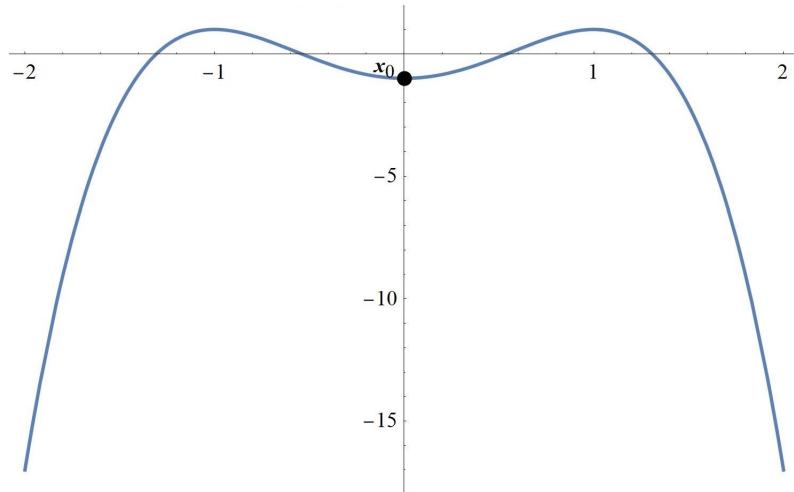
注意到,“脊”上的每一个点都存在一个值为零的方向导数(即 $\gamma$ 在 $t_0$ 处的切线方向),如果“脊”上没有临界点,那么“脊”上的函数值是单调的.同时由于“脊”没有端点,可以认为“脊”是一个无界的曲线,将 $x_0$ 和 $x$ 分隔开来.

利用上面的观察,我们尝试构造一个“滑梯”函数 $f$ :有两个平行的“脊”,“脊”之间是“谷”,“谷”的中央是 $x_0$ ;在垂直于“脊”的横截面上, $f$ 是一个双峰函数,以保证只有两个“脊”;“脊”是一个单调函数,但要始终高于“谷”;“谷”包含 $x_0$ ,需要是一个单谷函数,但要始终低于“脊”.根据上述条件,我们选取四次函数为 $f$ 的横截面,令“脊”为 $e^y$ ,“谷”为 $-\frac{1}{1+y^2}$ ,得到的函数如下:

$$f(x, y) = -\frac{1}{1+y^2} + (2x^2 - x^4) \left( e^y + \frac{1}{1+y^2} \right)$$

该函数的示意图如下:

图 2.3:  $f$  的 3D 示意图

图 2.4:  $f$  在  $y = 0$  处的横截面

关于这个例子的论证是平凡的: 由  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$  得出  $x = \pm 1$  或  $x = 0$ , 而当  $x = \pm 1$  时  $f = e^y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ , 当  $x = 0$  时  $f = -\frac{1}{1+y^2}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  有唯一解  $y = 0$ . 因此, 其唯一临界点为  $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ . 同时:

$$Hf(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

为正定矩阵, 故  $\mathbf{x}_0$  是严格极小值点. 然而,  $f(\mathbf{x}_0) = -1$ , 但  $f(2, 0) = -17$ , 这说明  $\mathbf{x}_0$  并非最小值点.

**注.** 注: 思考这个问题的动机来自常庚哲、史济怀《数学分析教程(上册)》(第三版) 第 437 页. 书中该处写道“由定理 9.12.2 知,  $f$  在  $z_0$  处取严格的条件极大值, 再由  $z_0$  的唯一性知它为严格的最大值.” 这句话本身的正确性引发了我的思考, 于是我在 wikipedia 上找到了这个问题的一个反例 (Maxima and minima 词条), 从而尝试构造了这样一个函数  $f$ .

### 3 教师点评

殷浩

第二题是关于极值与最值的关系问题, 其实和我们数学分析教学中的内容联系很紧密. 该同学也是自己在学习中发现了这个问题, 并且自己找到了对应的答案. 这个问题还可以放在另外一个背景下去看: 当我们研究 Morse 理论的时候, 我们常说 Morse 函数的临界点信息可以用来描述定义流形的拓扑, 而 Morse 函数的(负)梯度向量场生成的流可以用来刻画定义流形的一个形变. 当我们在非紧的流形上讨论 Morse 函数临界点与流形拓扑关系的时候, 我们通常要假设这个函数是 proper 的(紧集的原像紧). 本题涉及到的例子, 就可以作为一个理解这个条件的反例. 因为这个函数不是 proper 的, 所以这个函数的负梯度流没有给出到这个唯一临界点的形变收缩.

具体反例的构造, 该同学的答案提供了一个很具体的思路. 我们这里还可以提供另外一个重要思路. 考虑这个函数其实还有几个临界点, 只不过它们都在平面的无穷远处. 具体的说, 我们可以考虑一个如图所示的球面(在三维欧氏空间中), 考虑高度函数在其上的限制.

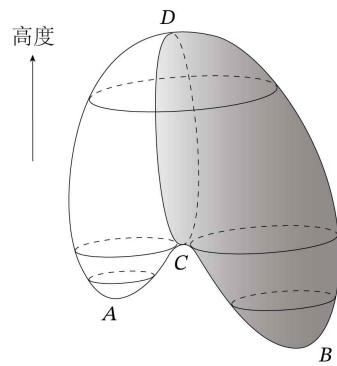


图 3.1: 另一思路的图示

不难看出共计有四个临界点, 其中两个严格极小 ( $A, B$ ), 一个严格极大 ( $C$ ), 一个鞍点 ( $D$ ). 但是如果我们考虑从曲面上挖掉一个闭三角形  $BCD$ , 所剩下的部分自然的微分同胚于平面. 这个微分同胚将高度函数拉回变成平面上的函数, 就是我们需要的反例. 这个构造明确的给出了所谓“无穷远处还有几个临界点”的直观意思.

# 皇榜第 1 期第 3 题解答

## 1 问题

设  $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{100}]$ , 形如  $\prod_{j=1}^{100} x_j^{\alpha_j}$  的元素称作单项式, 其中  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ .  $I$  是  $S$  中的 1958 个次数为 20 的不同的单项式  $f_1, \dots, f_{1958}$  生成的理想, 求  $I$  中次数为 21 的所有单项式张成的线性空间的维数的最小值.

## 2 解答

2015 级少年班学院 吴天

**证明.** 显然有引理: 两个  $n$  次单项式各自生成的理想有公共的  $(n+1)$  次单项式, 当且仅当这两个  $n$  次单项式的最大公因式是  $(n-1)$  次单项式. 先随意取出一个 20 次单项式  $f_1$ , 它使所求的线性空间的维度增加 100. 记  $\tilde{f}_1$  为  $f_1$  的一个 19 次单项式因式, 由引理可知, 取  $f_2, \dots, f_{100}$  为  $\tilde{f}_1$  生成的理想中所有除  $f_1$  之外其余 99 个 20 次单项式全体时, 由于它们生成的理想中公共的 21 次单项式重合度最高, 故维度增加的最少, 引入  $f_2$  维度增加 99, 再引入  $f_3$  维度增加 98,  $\dots$ , 引入  $f_{100}$  维度增加 1, 进而  $f_1, \dots, f_{100}$  最少可以使维度增加  $\sum_{i=1}^{100} i$ .

再考虑取出  $f_2$  的一个 19 次单项式因式  $\tilde{f}_2 \neq \tilde{f}_1$ , 同理应该取  $f_{101}, \dots, f_{199}$  为  $\tilde{f}_2$  生成的理想中所有除  $f_2$  之外其余 99 个 20 次单项式全体. 之所以考虑取出  $\{f_1, \dots, f_{100}\}$  中一个元素 (例如  $f_2$ ) 的 19 次单项式因式来生成 20 次单项式, 是因为该取法增加的 99 个单项式导致维度增加  $\sum_{i=1}^{99} i$ , 如果不这么取的话, 会新生成的 100 个 20 次单项式, 且它们与  $\{f_1, \dots, f_{100}\}$  中任意单项式的最大公因式均不超过 18 次, 进而它们生成的理想与  $\{f_1, \dots, f_{100}\}$  生成的理想不交, 增加的 100 个单项式导致维度增加  $\sum_{i=1}^{100} i$ , 这虽然多取了一个单项式, 但是维度比我们的取法多 100, 而随意增加一个单项式会使维度至多增加 100, 故我们的取法相较于随意取更优.

再考虑取出  $f_3$  的一个 19 次单项式因式  $\tilde{f}_3 \neq \tilde{f}_1$ , 显然有  $\deg \gcd(\tilde{f}_2, \tilde{f}_3) = 18$ , 因此由引理,  $\tilde{f}_3$  生成的理想中所有除  $f_3$  之外的 20 次单项式中有一个落在  $\{f_{101}, \dots, f_{199}\}$  中, 故新增 98 个 20 次单项式, 维度增加  $\sum_{i=1}^{98} i$ . 以此类推, 直到考察取  $f_{22}$  的一个 19 次单项式因式  $\tilde{f}_{22} \neq \tilde{f}_1$  之前, 累计得到了  $\sum_{k=1}^{21} (101 - k) = 1890$  个 20 次单项式, 它们产生的维度是  $\sum_{k=1}^{21} \sum_{i=1}^{101-k} i = 86380$ . 此时还需要 68 个单项式, 依旧按照上述算法, 取出后增加的维度为  $\sum_{i=12}^{79} i = 3094$ , 因此所求线性空间的最小值为  $86380 + 3094 = 89474$ .  $\square$

### 3 教师点评

申伊境

这道问题可以更为一般地表述如下. 若  $R$  是域  $\mathbb{K}$  上的一个齐次的代数 (我们默认  $R$  为有限生成的且交换的), 如何刻划它的 Hilbert 函数  $H(R, n) = \dim_{\mathbb{K}}(R_n)$ ?

英国的代数学家 Macaulay 于 1927 年前后给出了解答. 他的结果可以翻译成如下的事实, 即以下两条对于一个数值函数  $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  是等价的:

- 1 存在一个域  $\mathbb{K}$  上的一个齐次的代数  $R$  使得  $H(R, n) = h(n)$ ;
- 2 我们有  $h(0) = 1$ , 以及  $h(n+1) \leq h(n)^{\langle n \rangle}$ .

由于  $R$  为有限生成的且交换的, 于是存在  $\mathbb{K}$  上的多项式环  $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$  使得  $R = S/I$ , 其中  $I$  是  $S$  中的齐次理想. 可以进一步证明, 若  $h$  满足其中第二条的数值条件, 则我们总可以找到  $I$  为一个 lexsegment 理想 (这是一类特殊的单项式理想, 在相关的极值理论里经常出现), 使得  $R = S/I$  满足第一条的要求.

关于记号  $h(n)^{\langle n \rangle}$ , 我们稍作解释. 设  $a$  是一个自然数, 而  $d$  是一个正整数, 则存在唯一的一组自然数  $k(1), k(2), \dots, k(d)$ , 满足

$$a = \binom{k(d)}{d} + \binom{k(d-1)}{d-1} + \cdots + \binom{k(1)}{1},$$

且  $k(d) > k(d-1) > \cdots > k(1) \geq 0$ . 其中若  $k(i) = i-1 < i$ , 则二项式系数  $\binom{k(i)}{i} = 0$ . 此时, 我们定义

$$a^{\langle d \rangle} := \binom{k(d)+1}{d+1} + \binom{k(d-1)+1}{d} + \cdots + \binom{k(1)+1}{1+1}.$$

一般情况下, 我们也约定  $0^{\langle d \rangle} = 0$ .

回到我们的原题, 则  $S = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{100}]$ , 而  $R = S/I$ , 其中  $I = \langle f_1, \dots, f_{1958} \rangle$ . 由于

$$H(S, 20) = \binom{20+100-1}{100-1} = 24551856075980529765105,$$

从而

$$H(R, 20) = H(S, 20) - 1958 = 24551856075980529763147.$$

依照上面的结果,

$$H(R, 21) \leq H(R, 20)^{\langle 20 \rangle} = 140296320434174455711126,$$

并且等号可以取到. 由于

$$H(S, 21) = \binom{21+100-1}{100-1} = 140296320434174455800600,$$

这说明所求的线性空间的维数的最小值为

$$140296320434174455800600 - 140296320434174455711126 = 89474.$$

上面的问题可以延展开来, 作两方面思考. 其一为引入 Cohen–Macaulay 性质, 这是交换

代数、代数几何、组合论里所考虑的对象经常希望具有的良好性质. 其二是考虑类似的极值问题, 例如, 我们还可以问如下的问题.

- 1 若  $R$  为一个无限域  $\mathbb{K}$  上的齐次代数,  $n$  为给定的正整数, 问超平面所对应的代数  $R/hR$  的 Hilbert 函数的取值  $H(R/hR, n)$  的最大值为什么? 其中  $h \in R$  是一个一般线性形式 (general linear form).
- 2 若  $R$  是一个 0 维的 Cohen–Macaulay 代数, 其 Hilbert 函数可以如何刻划?
- 3 若  $R$  为一个域  $\mathbb{K}$  上的齐次代数, 是否对于充分大的  $n$ , 总有  $h(n+1) \leq h(n)^{\langle n \rangle}$ ?
- 4 若  $R$  为一个域  $\mathbb{K}$  上的齐次代数, 满足  $h(r+1) \leq h(r)^{\langle r \rangle}$  是否对于任意的  $n \geq r$ , 总有  $h(n+1) \leq h(n)^{\langle n \rangle}$ ?

与之相关的讨论, 可以参考 [1] 中第四章的相关论述.

## 4 审者思考

尽管该同学非常正确的解出了答案, 并且在操作的每一步都是最优的. 但是正如我们知道的贪心算法那样, 会不会出现尽管每一步都是最优, 但是整体上却不是最优的情况呢? 感兴趣的同学们可以思考一下, 或是给出整体最优的证明, 或是修改题目数据, 找到反例说明这类方法或许并不是一种通法。

## 参考文献

- [1] Winfried Bruns and Jürgen Herzog. *Cohen–Macaulay rings*, volume 39 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, rev. ed. edition, 1998.

# 皇榜 · 征解

## 1 思考题

1. 计算

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\{\cot(x)\}}{\cot(x)} dx$$

这里  $\{x\}$  表示  $x$  的分数部分.

2. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)16^n} \binom{2n}{n}^2 \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2^k}{k \binom{2k}{k}} \right) = 1 - \sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}).$$

第 1、2 题由刘聪文老师供题

3. 设  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  是连通开集 (区域),  $u(x, t) \in L^1_{loc}(\Omega \times (0, 1) \setminus \Gamma)$  是如下方程的非负解

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad \forall (x, t) \in (\Omega \times (0, 1)) \setminus \Gamma,$$

其中  $\Gamma = \{(\xi(t), t) | t \in (0, 1)\}$ ,  $\xi : [0, 1] \rightarrow \Omega$  是  $\alpha$  阶-Hölder 连续的曲线.

- (a) 若  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ , 证明  $u \in L^1_{loc}(\Omega \times (0, 1))$ .
- (b) 在  $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$  时, (a) 中的结论是否仍然成立?
- (c) 假设

$$\Gamma = \{(\xi_1(t), t) | t \in (0, 1)\} \cup \{(\xi_2(t), t) | t \in (0, 1)\},$$

其中  $\xi_i : [0, 1] \rightarrow \Omega (i = 1, 2)$  是  $\alpha$  阶-Hölder 连续的曲线且  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ . 此时 (a) 中的结论是否仍然成立?

4. 设  $n$  为给定的正整数,  $Q(x) (x \in \mathbb{R})$  为实系数多项式

$$Q(x) = x^n + 2x^{n-1} + \cdots + nx + (n+1),$$

求尽可能小的实数  $x_0$  的值, 使得  $Q(x)$  的任意阶导数在  $x_0$  处均非负.

第 3、4 题由李皓昭老师供题

## 2 投稿方式

请同学们将思考题的解答发送到数院学生会的官方邮箱 [mathsu01@ustc.edu.cn](mailto:mathsu01@ustc.edu.cn). 具体投稿要求, 参见杂志最后一页的《征稿启事》。

## 致谢

在科大数院的各位老师、校友、同学们的共同努力下，第 64 期《蛙鸣》如期成功创办。此次时隔 12 年之久的复刊实属来之不易。在此，编辑部全体成员非常感谢各位投稿人的踊跃来稿，感谢第七届数院学生会的同学参与排版设计和宣传工作。

编辑部在此感谢各位审稿人：刘泽蓬、黄新盟、李书亮、王麒翔、肖宇、林思锐、徐胜骏、陈恒宇、严大燊、付杰、孙天阳、邹广翼、范惟、员含章、杨笑东、闫顺兴、黄一轩、陈耀斌、王昌盛、邵锋、郑伟豪、姚钧夫、田珺昊、姚一晨、章俊彦、单逸、叶子恺、伍文超、龚禹霖。感谢他们在学习和科研的百忙之中抽出时间完成了谨慎、专业的审稿工作。

编辑部在此感谢中国科学技术大学数学科学学院对本期《蛙鸣》复刊给予的全方位支持。编辑部还特别致谢马杰老师、王作勤老师、张伟老师和郑芳老师对本期《蛙鸣》的编撰、筹备工作悉心指导，感谢李皓昭老师、刘聪文老师、殷浩老师和申伊璇老师为《皇榜》栏目供题并点评，感谢鄂维南老师、叶向东老师、程艺老师、李嘉禹老师、胡森老师、黄文老师、王莉老师、梁永祺老师、杨迪老师、刘党政老师、林开亮老师对创办本期《蛙鸣》的热情关切与鼓励，感谢中国科学技术大学出版社为我们提供有关《蛙鸣》的老照片。

最后，感谢各位读者阅读本期《蛙鸣》，期待与各位下期再见！

第 64 期《蛙鸣》编辑部

2021 年 6 月 8 日



# 第 65 期《蛙鸣》征稿启事

现在，我们正式开始为下一期《蛙鸣》征稿！

## 一、蛙鸣的创刊宗旨

《蛙鸣》是中科大数院的学生杂志。1981 年 6 月 20 日，首期《蛙鸣》由 78 级数学系的同学们自写、自编、自刻、自印而成。四十年来，《蛙鸣》一直是一个完全由学生主导，共同探讨、自由交流数学的开放平台，让同学们可以互相交流彼此的思想和发现，哪怕这些想法并不成熟。所以，我们欢迎各位科大的校友和同学们踊跃投稿！也欢迎外校师生投稿，以增进交流！

## 二、蛙鸣的栏目设置

目前，《蛙鸣》主要设置如下几个栏目。

- (1) 初阳 初起之阳，朝气蓬勃。“初阳”栏目收录大一、大二年级同学的投稿。
- (2) 星辰 我们的征途是星辰大海。“星辰”栏目主要收录人物采访或传记，讲座、报告、座谈实录，数学家的建议，以及数学史、数学科普等稿件。
- (3) 蛙声一片 蛙鸣者，其形虽小，其声也宏。“蛙声一片”栏目收录其它数学类稿件，主要包括小论文、综述报告、定理推广、知识应用、研究前沿讨论等。
- (4) 笔墨诗篇 饱蘸笔墨书诗篇。“笔墨诗篇”栏目主要收录诗篇、随笔等文学类作品。
- (5) 皇榜 大牛贴皇榜，学生揭皇榜。早在 2013-2014 年，科大就有“揭皇榜”擂台赛，由各院系老师出题，难度控制在全校只有极个别的同学能解出来，这正是“满腹经纶无人晓，一揭皇榜天下知”。现在，我们重新开启了“皇榜”栏目，欢迎各路高手接招！

## 三、投稿方向（包括但不仅限于如下所述）

- (1) 数学在科学中的应用
- (2) 小论文、综述报告
- (3) 研究讨论、前沿介绍
- (4) 对定理、习题的推广、理解、应用
- (5) 人物采访或传记
- (6) 讲座、报告、座谈实录
- (7) 数学史、数学科普
- (8) 读书分享、随笔等文学性作品

## 四、投稿流程与要求

请将稿件发送到数院学生会的官方邮箱: [mathsu01@ustc.edu.cn](mailto:mathsu01@ustc.edu.cn).

- (1) 邮件标题：蛙鸣\_投稿方向\_文章标题\_作者。邮件正文注明作者信息、联系方式。
- (2) 推荐中文投稿，但也支持英文投稿。稿件的篇幅应控制在 20 页以内。
- (3) 稿件若包含数学公式，则须使用 LaTeX 排版成 PDF（推荐使用官网的模板）。
- (4) 稿件中请隐去作者信息。
- (5) 稿件要求写摘要，即以通俗易懂的方式简要介绍文章的内容和主要想法。
- (6) 稿件需要注明参考文献。若为读书报告，请注明，并进一步提供阅读稿件可能需要的材料出处。
- (7) 数学类稿件尽量不要写成定理和证明的堆砌、罗列。作者最好用自己的语言叙述，

并写出自己的理解。可通过各种创意增加文章的可读性、趣味性（如插图，支持手绘来稿，由我们绘制电子版）。

(8) 稿件被录用后请提供 LaTeX 源代码和参考文献的文件 (.bib 文件或直接把 bibliography 部分的代码写在.tex 文件里)。

## 五、其它

编委会收到稿件后将回复，并在 2-4 周左右反馈审稿人的初审意见，3 个月内决定是否录用稿件。每篇稿件将至少有 2 位审稿人同时审稿，稿件若被采用则有稿费。

更多信息和 LaTeX 投稿模板下载，请扫描下方左侧的二维码访问数院学生会官方的《蛙鸣》投稿网页 <http://staff.ustc.edu.cn/~mathsu01/pu/submit.html>.

若有更多问题，请联系数院学生会的官方 QQ 号：蜗壳的书院（QQ: 2061453364）。

《蛙鸣》主页二维码



蜗壳的书院 QQ 二维码



## 下期预告

截止目前，第 65 期《蛙鸣》已经征得如下稿件：

《乐音和谐的数学原理》

东奕汐、艾璇、胡雨晗

《一个紧阿贝尔群上最小扩张集的稳定性定理的新证明》

荆一凡

《流体自由边界问题（二）——双曲方程的特征间断》

章俊彦

欢迎大家踊跃来稿！

其形虽小  
其声也宏

充实基础  
奏出弦音

谷穗