蛙　　鸣

18

中国科学技术大学数学系

目　　录

Generalization of an Inegualitу

831 Chen Ji

In Zhu [1] the following inegualitу is givn:

Let $xi>1$ for $i=1,2,\dots,n$. Then

$$\left(\prod_{i=1}^{n} xi\right)/\left(\sum_{i=1}^{n} xi\right)^n \geq$$

$$\geq \left(\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right)/\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-1)\right)^n$$

With egualitу only if all xi are egual.

Here this result will be extended as follows.

Theorem. Let $\phi(u)$ have a third dervative for $u>b>0$ with $\phi'''(u)\geq 0$. If $xi>b$ and $Pi>0$ for $1\leq i\leq n$ and all sums are for $1\leq i\leq n$ then

$$\frac{\sum Pi\ \phi(xi)}{\sum Pi}-\phi\left(\frac{\sum Pixi}{\sum Pi}\right)\geq$$

$$\geq \frac{\sum Pi\phi(xi-b)}{\sum Pi}-\phi\left(\frac{\sum Pi(xi-b)}{\sum Pi}\right) \qquad (1)$$

Moreover if $\phi'''>0$ on $(b,+\infty)$ then egualitу occurs above only if all xi are egual.

The result of zhu yao-Chen is the case $\phi(u)=\ln u$, $Pi=1$ and $b=1$.

Proof of Theorem. Let a be a constant,

$a>b$, to be chosen later. Let

$$F(u)=\phi(u)-\phi(u-b) \tag{2}$$

Then for $u>b$ and some θ, $0<\theta<1$.

$$F(u)=F(a)+(u-a)F'(a)+\tfrac{1}{2}(u-a)^2F''(a+\theta(u-a)) \tag{3}$$

Clearly

$$F''[a+\theta(u-a)]=\phi''[a+\theta(u-a)]-\phi''[a+\theta(u-a)-b]$$

or

$$F''[a+\theta(u-a)]=b\ \phi'''(u_1) \tag{4}$$

Where $a+\theta(u-a)-b<u_1<a+\theta(u-a)$. Hence since $b>0$ and $\phi'''\geq 0$

$$F''[a+\theta(u-a)]\geq 0.$$

Thus by (2) and (3)

$$\phi(u)-\phi(u-b)\geq\phi(a)-\phi(a-b)+(u-a)F'(a) \tag{5}$$

In (5) set $u=xi$ multiply by pi and sum. set

$$a=\sum pi\,xi/pi$$

This yield (1) and $xi>b$ it follows that $a>b$.

Suppose now that $\phi'''(u)>0$ on $(b,+\infty)$. Then by (4)

$$F''[a+\theta(u-a)]>0 \tag{6}$$

using (6) in (3) proves (5) with inequality unless $u=a$. Hence unless all $xi=a$ the equality sign cannot occour in (1). Tlis proves the theorem.

Lastly, I would like to thank Zhu Guang-Jiau for lis help.

Reference

1. 朱尧辰：一个不等式，《数学通报》1982年第11期。

An Integral Characterization Of E^4-Spherical Curves

821 Sha Hu-yun

Abstract. In this Paper, an integral characterization of E^4-Spherical curves will be given. It may be Considered as an extension of Wong's result [1]. At the end, two Open questions will be raised.

1. Introduction. It is well-known that a differential equation Characterizing an E^3-Spherical curve is (1)

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{\tau(s)}\frac{d\rho}{ds}\right\}+\rho(s)\tau(s)=0,$$ where s is the arc Length, $\rho(s)=\frac{1}{k(s)}$ is the radius of Curvature and $\tau(s)$ is the torsion of the curve. In [1], Wong proved that no matter whether τ vanishes or not, an integral Characterization of E^3-spherical Curves is (2) $\left(A\cos\int_0^s \tau ds + B\sin\int_0^s \tau ds\right)k(s)=1$ where A, B are Constants and a Curve satisfying (2) Lies on a sphere of radius $(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}$.

In [2], Wictor Dannon gave the Connection between a spherical Curve and its Frenet equations. In this paper, we'll present an integral characterization of E^4-Spherical curves which is partly analogous to (2)

Theorem 1. Suppose that $\alpha(s)$ is an E^4-unit speed C^5-Frenet curve with curvature functions $k(s)$, $\tau(s)$, $\mu(s)$. let $\theta(s) = \int_0^s \mu\, ds$, $x(s) = \int_0^s \tau\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{4})\, ds$, $y(s) = -\int_0^s \tau\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4})\, ds$ where s is the arc length and $\rho(s) = \frac{1}{k(s)}$, then $\alpha(s)$ is an E^4-spherical curve iff (3) $\left\{\int_0^s \tau[(y+B)\sin(\theta+\frac{\pi}{4}) - (x+A)\cos(\theta+\frac{\pi}{4})]\,ds + C\right\}k(s) = 1$, where A, B, C are constants. Moreover an E^4-curve satisfying (3) lies on a sphere of radius (4) $[\rho^2 + (x+A)^2 + (y+B)^2]^{\frac{1}{2}}$.

To show Theorem 1, we need the proposition 1 of [2] as a Lemma.

Lemma. Let $\alpha(s)$ be an E^4-unit speed C^5-Frenet curve with curvature functions $k(s)$, $\tau(s)$ and $\mu(s)$. Then the following are equivalent.

(I) $\alpha(s)$ lies on an E^4-sphere.

(II) $k(s) \neq 0$ and there are two C^2-functions $f(s)$ and $g(s)$ so that (5) $\rho' = f$ $(\rho = \frac{1}{k})$, $f' = -\tau\rho + \mu g$, $g' = -\mu f$.

We note that an E^4-curve satisfying (5) must lie on a sphere of radius $(\rho^2 + f^2 + g^2)^{\frac{1}{2}}$ which is of course a constant.).

2. Proof of Theorem 1.

Sufficiency It Suffices to show that if the con-dition(3) is satisfied, then the curve is an E^4-spherical curve. We define $f(s)= (y+B)\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-(x+A)\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$ and $g(s)=(x+A)\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+(y+B)\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$. It's clear that $f(s)$ and $g(s)$ are two C^2-functions and easy to check that(II) of the Lemma does hold. Therefore, the curve Lies on an E^4-Sphere, and this Completes the proof of the Sufficincy of Condition (3).

Necessity. Suppose $\alpha(s)$ is an E^4-spherical Curve, then by the Lemma we know that $k(s)\neq 0$ and there exist two C^2-functions $f(s)$ and $g(s)$ Sothat $\rho'=\tau f$ $(\rho=\frac{1}{k})$, $f'=-\tau\rho+\mu g$, $g'=-\mu f$. Let us define two C^2-func-tions P and q by

(6) $P(s)=(f+g)\sin\theta-(f-g)\cos\theta$ and $q(s)=(f-g)\sin\theta+(f+g)\cos\theta$. If we differentiate (6) With respect to s and con-Cern (5), we'll get (7)

$P'(s)=\tau\rho(\cos\theta-\sin\theta)=\sqrt{2}\tau\rho\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$, and

$q'(s)=-\tau\rho(\cos\theta+\sin\theta)=-\sqrt{2}\tau\rho\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$. Hence, we have (8) $(f+g)\sin\theta-(f-g)\cos\theta=\sqrt{2}x+\sqrt{2}A=\sqrt{2}(x+A)$ and $(f-g)\sin\theta+(f+g)\cos\theta=\sqrt{2}y+\sqrt{2}B=\sqrt{2}(y+B)$ where A, B are constants. Solving (8) [illegible] f and g, we obtain (9) $f(s)=$

$(y+B)\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-(x+A)\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$ and $g(s)=(x+A)\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+(y+B)\cdot\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$. Since $\rho'=f$, we have $\rho=\frac{1}{k(s)}=\int_0^s Cf\,ds+C$ which is (3) and where A. B. C are Constants. This proves the necessity of Condition (3).

Finally, by the Lemma, this curve must lie on an E^4-sphere which radius $[\rho^2+(x+A)^2+(\ldots)+(y+B)^2]^{\frac{1}{2}}$ which is (4).

Without any difficulties, we can generalize the Lemma to higher dimentions.

Theorem 2. Let $\alpha(s)$ be an E^{n+1} unit Speed C^{n+2} Frenet Curve With Curvature functions $k_1(s), k_2(s), \ldots, k_n(s)$. Then the following are equivalent.

(I) $\alpha(s)$ lies on an E^{n+1}-Sphere.

(II) $k_1(s)\neq 0$ and there are $n-1$ C^{n-1} functions $f_1(s), f_2(s), \ldots f_{n-1}(s)$ so that

$$\begin{pmatrix} \rho \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & k_2 & 0 & \cdots & & 0 \\ -k_2 & 0 & k_3 & \cdots & & 0 \\ \vdots & -k_3 & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & \cdots & & -k_{n-1} & 0 & k_n \\ 0 & \cdots & & & -k_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}$$

where $\rho=\frac{1}{k_1}$.

Moreover, an E^{n+1}-Curve satisfying (10) must lie on a sphere of radius $(\rho^2 + f_1^2 + \cdots + f^2_{n-1})^{\frac{1}{2}}$ (which is of Course a cons-tant.)

At last, we raise two in-teres-ting open questions 1. Is there an analogous in-tegral Characteri-zation of E^{n+1}-Spherical Curves which on-ly Con-Cerns the Curva-tures of the Curve?

Question 2. For E^3-Spherical Close Curves, we have the well-known Geppert's theorem which states that the total torsion of the Curve is zero. Does it still hold for E^{n+1}-Spherical Close Curves? i.e. $\int_0^L k_n ds = 0$?

References

[1]. Yung Chow Wong. On an explicit characterization of SPherical Curves, Pros. Amer. Math. Sco. 34 (1972) 239-242.

[2]. Victor Dannon, Integral Characterizations and the theory of curves, Proc. Amer. Math. Soc. 81 (1981), 600-602.

[3]. W. klingenberg. A Course in Differential Geometry, translated by D. Hoffman, Springer, New York-Heidelberg-Ber-lin, 1978.

[4]. Spivak. M. A Compre-hensive Introduction to Differ-ential Geometry, Vol III.
[5]. Heinrich. B. Differential geometrie, Wiesbaden Vieweg, 1981.

关于一个问题的进一步讨论

中国科大 821 欧 军

关于Abel群中元素的阶有下面基本定理：

定理1. 在群G中，$ab=ba$，$O(a)=m$，$O(b)=n$，$(m,n)=1$，则$O(ab)=mn$

定理1中$ab=ba$不能减弱，但$(m,n)=1$可以减弱。我们进一步讨论ab的阶。

定理2. 在群G中，$ab=ba$，$O(a)=m$，$O(b)=n$。则$O(ab)$满足方程。

$$x=\frac{mn}{(m,n)^2}(x,m,n)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

证明：由$O(a)=m$得$O(a^{(m,n)})=\frac{m}{(m,n)}$，同理

$O(b^{(m,n)})=\frac{n}{(m,n)}$，又$ab=ba$，$\left(\frac{m}{(m,n)},\frac{n}{(m,n)}\right)=1$，

则$O((ab)^{(m,n)})=\frac{mn}{(m,n)^2}$（定理1）。令$O(ab)=x$，

则$\frac{x}{(x,(m,n))}=\frac{mn}{(m,n)^2}$，整理即得(1)。 #

由定理2不难得到下面几个推论：

推论1. 在群G中，$ab=ba$，$O(a)=m$，$O(b)=n$，则

i) $\frac{mn}{(m,n)^2}\Big|O(ab)\Big|\frac{mn}{(m,n)}$

ii) 若$(m,n)^3 \mid mn$，则$O(ab)=[m,n]$

iii) 若m和n的相同素因子方幂不同，则$O(ab)=[m,n]$

iV）设$m=\prod P_i^{\alpha_i}$，$n=\prod P_i^{\beta_i}$，则$O(ab)=$

$=d\prod\limits_{\alpha_i\neq\beta_i} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$，其中$d\mid r=\prod\limits_{\alpha_i=\beta_i} P_i^{\alpha_i}$（m和n的相同方方幂素因子乘积）

证明：由定理2可直接得到i）和ii）。iii)是iV特例。iV）由(1)式

$x=\frac{mn}{(m,n)^2}(x,(m,n))$，$\frac{x(m,n)}{(x,(m,n))}=\frac{mn}{(m,n)}$，即

$[x,(m,n)]=[m,n]$。设$x=O(ab)=\prod p_i^{x_i}$，

则$\max[x_i,\min(\alpha_i,\beta_i)]=\max(\alpha_i,\beta_i)$，又由i)知

$x_i\leq\max(\alpha_i,\beta_i)$。故当$\alpha_i\neq\beta_i$时，$x_i=\max(\alpha_i,\beta_i)$，

当$\alpha_i=\beta_i$时，$x_i\leq\alpha_i$，即$d\mid r$。 #

推论1中iV）的d可取r的任一因子。记$m'=m/r$，

$n'=n/r$，则$(m',r)=1$，$(n',r)=1$。又

$m_2=r+d+m'$，$n_2=m_2+d+n'$。取$a=(1,2\cdots r)\overbrace{(r+1,r+2\cdots r+d)}^{d}$

$\overbrace{(r+d+1,r+d+2,\cdots r+d+m')}^{m'}$为互不相交轮换乘积，

$O(a)=[r,d,m']=[r,m']=rm'=m$。同理取 (m_2)

$b=(1,2\cdots r)^{-1}\overbrace{(m_2+1,\cdots m_2+d)}^{d}$

$(\underbrace{m_1+d+1,\ m_1+d+2,\cdots\cdots m_1+dn'}_{d\qquad m'})$，$O(b)=n$．$ab=$

$(\underbrace{r+1, r+2\cdots r+d}_{d})(\underbrace{r+d+1, r+d+2\cdots\cdots m_1}_{n'})$

$(m_1+1, m_1+2,\cdots m_1+d)(m_1+d+1, m_1+d+2,\cdots\cdots n_1)$为互不相交轮换积，$O(ab)=[d, m', n']=d[m', n']$

$d \,\|\, \prod\limits_{\alpha_i\neq\beta_i} P_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}$，且a，b可交换。

由上面例子知，只给出$O(a)$与$O(b)$，ab阶一般不能确定，还与a、b本身性质有关。设$G=\langle a,b\rangle$，则$|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle| = \frac{|\langle a\rangle|\cdot|\langle b\rangle|}{|G|} = \frac{mn}{|G|}$ $\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$为G的$\frac{mn}{|G|}$阶子群

于是$\langle a\rangle\cap\langle b\rangle = \langle a^{\frac{|G|}{n}}\rangle = \langle b^{\frac{|G|}{m}}\rangle$，所以一定存在正整数φ，使得$a^{\frac{|G|}{n}}=b^{\varphi\frac{|G|}{m}}$成立。易知$(\varphi, \frac{mn}{|G|})=1$。

定理3．G=$\langle a,b\rangle$为Abel群，$O(a)=m$，$O(b)=n$，

则$O(ab)=\frac{[m,n]}{K}$，其中$K=(\frac{mn}{|G|}, \varphi\frac{n}{(m,n)}+\frac{m}{(m,n)})$

证明：$(ab)^{O(ab)}=1$，$a^{O(ab)}\in\langle a\rangle\cap\langle b\rangle$，故

$a^{O(ab)\cdot\frac{mn}{|G|}}=1$，$O(a)=m\mid O(ab)\cdot\frac{mn}{|G|}$，即$\frac{|G|}{n}\mid O(ab)$

又 $a^{\frac{|G|}{n}}=b^{\varphi\frac{|G|}{m}+\frac{|G|}{n}}$，

所以$O(ab)=O((ab)^{\frac{|G|}{n}})(\frac{|G|}{n}, O(ab))=O(b^{\varphi\frac{|G|}{m}\cancel{+\frac{|G|}{n}}})\frac{|G|}{n}$

$$=\frac{n}{\left(n,\varphi\frac{|G|}{m}+\frac{|G|}{n}\right)}\cdot\frac{|G|}{n}$$

$$=\frac{|G|}{\left(n,\varphi\frac{|G|}{m}+\frac{|G|}{n}\right)}=\frac{|G|}{\frac{|G|}{[m,n]}\left(\frac{n(m,n)}{|G|},\varphi\frac{[m,n]}{m}+\frac{[m,n]}{n}\right)}$$

$$=\frac{[m,n]}{\left(\frac{n[m,n]}{|G|},\varphi\frac{[m,n]}{m}+\frac{[m,n]}{n}\right)}$$

$$=\frac{[m,n]}{\left(\frac{n[m,n]}{|G|},\varphi\frac{n}{(m,n)}+\frac{m}{(m,n)}\right)}$$

下面只须证

$$\left(\frac{n[m,n]}{|G|},\varphi\frac{n}{(m,n)}+\frac{m}{(m,n)}\right)=\left(\frac{mn}{|G|},\varphi\frac{n}{(m,n)}+\frac{m}{(m,n)}\right)$$

因为 $\left(\frac{n}{(m,n)},\varphi\frac{n}{(m,n)}+\frac{m}{(m,n)}\right)=\left(\frac{n}{(m,n)},\frac{m}{(m,n)}\right)=1$，

所以 $\left(\frac{n[m,n]}{|G|},\varphi\frac{n}{(m,n)}+\frac{m}{(m,n)}\right)=\left(\frac{mn}{|G|}\cdot\frac{n}{(m,n)},\varphi\frac{n}{(m,n)}\right.$

$\left.+\frac{m}{(m,n)}\right)=\left(\frac{mn}{|G|},\varphi\frac{n}{(m,n)}+\frac{m}{(m,n)}\right)$。 #

定理3给出了一般情况下ab的阶，即在任何情况下，定理2中条件再加上给出 $|G|$ 和 φ，ab阶可完全定出。特别地，$(m,n)=1$，$|G|=mn$，则 $O(ab)=mn$ 就是定理1的结果。

致谢：感谢查老师及同学们的热心帮助！

Pedoe 不等式的推广

844 王坚

1．记$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的边长分别是a、b、c和a'、b'、c'，面积是$\triangle$和$\triangle'$，则$a'^2(-a^2+b^2+c^2)+b'^2(a^2-b^2+c^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)\geq 16\triangle\triangle'$，式中等号当且仅当$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$时成立。

这就是Pedoe 不等式。

2．推广的主要结果是：

若两个n边形边长分别是a_1、a_2、…、a_n和a_1'、a_2'、…a_n'，面积是S和S'，且满足$a_1\geq a_2\cdots\geq a_n$且$a_1'\leq a_2'\leq\cdots\leq a_n'$或$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$且$a_1'\geq a_2'\geq\cdots\geq a_n'$，$P_1$、$P_2\geq 1$，$P=P_1+P_2$，则：

$$a_1'^{P_1}(-a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2})+a_2'^{P_1}(a_1^{P_2}-a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2})+\cdots+a_n'^{P_1}(a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_{n-1}^{P_2}-a_n^{P_2})\geq n(n-2)\left[\frac{4tg(\frac{\pi}{n})}{n}\right]^{\frac{p}{2}} S'^{\frac{P_1}{2}} S^{\frac{P_2}{2}} \quad (1)$$

为了证明(1)式，有必要对有关预备知识提及一下。 1．首先我们知道切贝雪夫不等式：

数组a_i、$b_i(i=1,2,\cdots,n)$，若$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$，且$b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_n$或$a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n$且$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_n$，则

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\geq\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right). \quad (2)$$

这对同样条件的任几组数组也是成立的。

2．其次，我们知道n边形周长一定时认正n边形面积最大．换言之，以a_1、a_2、…a_n为边的n边形，面积S，有：

$$S\le\frac{n}{4}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{n}\right)\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \quad 或$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_n\ge 2\left[n\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)S\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (3)$$

3．熟知幂平均不等式：若$\alpha\ge\beta>0$，$a_i>0$，有：

$$\left(\frac{a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}+\cdots+a_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\ge\left(\frac{a_1^{\beta}+a_2^{\beta}+\cdots+a_n^{\beta}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

现在我们来证明(1)式，不妨假定$a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n$且$a_1'\le a_2'\le\cdots\le a_n'$．因为$a_i$、$a_i'>0$，故有$a_1'^{P_1}\le a_2'^{P_1}\le\cdots\le a_n'^{P_1}$，$a_1^{P_2}\ge a_2^{P_2}\ge\cdots\ge a_n^{P_2}$，因而$-a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}\le a_1^{P_2}-a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}\le\cdots\le a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots a_{n-1}^{P_2}-a_n^{P_2}$，

由切贝雪夫不等式有：

$$\frac{1}{n}\left[a_1'^{P_1}(-a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2})+a_2'^{P_1}(a_1^{P_2}-a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2})+\cdots+a_n'^{P_1}(a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_{n-1}^{P_2}-a_n^{P_2})\right]$$

$$\ge\left[\frac{1}{n}(a_1'^{P_1}+a_2'^{P_1}+\cdots+a_n'^{P_1})\right]\left[\frac{1}{n}(-a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}+a_1^{P_2}-a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}+\cdots+a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_{n-1}^{P_2}-a_n^{P_2})\right]$$

$$=(n-2)\left(\frac{a_1'^{P_1}+a_2'^{P_1}+\cdots+a_n'^{P_1}}{n}\right)\left(\frac{a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}}{n}\right)$$

由于P_1、$P_2 \geq 1$，α取P_1、P_2，β取1，有：

$$\left(\frac{a_1'^{P_1}+a_2'^{P_1}+\cdots+a_n'^{P_1}}{n}\right) \geq \left(\frac{a_1'+a_2'+\cdots+a_n'}{n}\right)^{P_1}$$

$$\geq \left\{\frac{2\left[n\,tg\left(\frac{\pi}{n}\right)S\right]^{\frac{1}{2}}}{n}\right\}^{P_1} = \left[\frac{4tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}\right]^{\frac{P_1}{2}} S^{\frac{P_1}{2}}$$

$$\left(\frac{a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}}{n}\right) \geq \left[\frac{4tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}\right]^{\frac{P_2}{2}} S^{\frac{P_2}{2}}$$

$$\therefore a_1'^{P_1}\left(-a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}\right)+a_2'^{P_1}\left(a_1^{P_2}-a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}\right)+\cdots+a_n'^{P_1}\left(a_1^{P_2}+a_2^{P_2}+\cdots+a_n^{P_2}\right) \geq$$

$$\geq n(n-2)\left[\frac{4tg\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}\right]^{\frac{P}{2}} S'^{\frac{P_1}{2}} S^{\frac{P_2}{2}}$$ 证毕，

3．在(3)式中n取3，得三角形中有$a+b+c \geq 2\cdot 3^{\frac{3}{4}}\triangle^{\frac{1}{2}}$这个式子可推广为：对任意正实数$r$，有：

$$a^r+b^r+c^r \geq 2^r\cdot 3^{1-\frac{r}{4}}\triangle^{\frac{r}{2}} \qquad (4)$$

证明如下：$a^r+b^r+c^r \geq (ab)^{\frac{r}{2}}+(bc)^{\frac{r}{2}}+(ac)^{\frac{r}{2}}$

$$=\left(\frac{2\triangle}{\operatorname{Sin}A}\right)^{\frac{r}{2}}+\left(\frac{2\triangle}{\operatorname{Sin}B}\right)^{\frac{r}{2}}+\left(\frac{2\triangle}{\operatorname{Sin}C}\right)^{\frac{r}{2}}$$

$$=(2\triangle)^{\frac{r}{2}}\left[\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}A}\right)^{\frac{r}{2}}+\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}B}\right)^{\frac{r}{2}}+\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}C}\right)\right]^{\frac{r}{2}}$$

$$\geq 3(2\triangle)^{\frac{r}{2}}\left(\frac{1}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C}\right)^{\frac{r}{2}}$$

而$\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B\operatorname{Sin}C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$。

$$\therefore\ a^r+b^r+c^r \geq 3\cdot 2^{\frac{r}{2}} 2^{\frac{r}{2}} 3^{\frac{r}{4}} \triangle^{\frac{r}{2}} = 2^r 2^{1-\frac{r}{4}} \triangle^{\frac{r}{2}}$$

应用这个不等式，对(1)中n取3的情况，加强为：

若两个△三角形边长a、b、c与a′、b′、c′面积△，△′且$a \geq b \geq c$且$a' \leq b' \leq c'$，或$a \leq b \leq c$且$a' \geq b' \geq c'$，P_1、$P_2>0$，$P=P_1+P_2$则

$$a'^{P_1}(-a^{P_2}+b^{P_2}+c^{P_2})+b'^{P_1}(a^{P_2}-b^{P_2}+c^{P_2})$$
$$+c'^{P_1}(a^{P_2}+b^{P_2}-c^{P_2})\geq$$

$$\geq 2^P\cdot 3^{1-\frac{P}{4}} S'^{\frac{P_1}{2}} S^{\frac{P_2}{2}}$$。证明中不必再用幂平均不等式。

4．上面的方法可以用来解决一些类似问题。例如另一个涉及两个三角形边与面积关系的不等式

$a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2 \geq 16\triangle\triangle'$ 可推广至：

m个n边形是a_{ij}，$(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$面积是是$S_i$，$P_i \geq 1$，（当$n=3$时，$P_i>0$即可），其中$a_{i_1} \geq a_{i_2} \geq\cdots\geq a_{i_n}$，或$a_{i_1} \leq a_{i_2} \leq\cdots\leq a_{i_n}$。

$$则\ \sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m} a_{ij}^{P_i} \geq \left[\frac{4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}\right]^{\frac{P}{2}} \prod_{i=1}^{m} S_i^{\frac{P_i}{2}}$$

我们还可以给出一些形式相似的对称的不等式，例如：

3个三角形第i个的边是a_i、b_i、c_i，面积是$\triangle_i$，并满足$a_1 \geq b_1 \geq c_1$，且$b_2 \geq c_2 \geq a_2$且$c_3 \geq a_3 \geq b_3$

或$a_1 \leq b_1 \leq c_1$且$b_2 \leq c_2 \leq a_2$且$c_3 \leq a_3 \leq b_3$，$P_i>0$，$P=P_1+P_2+P_3$。

则：$(-a_1^{P_1}+b_1^{P_1}+c_1^{P_1})(a_2^{P_2}-b_2^{P_2}+c_2^{P_2})(a_3^{P_3}+b_3^{P_3}-c_3^{P_3})+(a_1^{P_1}-b_1^{P_1}+c_1^{P_1})(a_2^{P_2}+b_2^{P_2}-c_2^{P_2})(-a_3^{P_3}+b_3^{P_3}+c_3^{P_3})+(a_1^{P_1}+b_1^{P_1}-c_1^{P_1})(-a_2^{P_2}+b_2^{P_2}+c_2^{P_2})(a_3^{P_3}-b_3^{P_3}+c_3^{P_3})\geq$

$$2^{P}3^{1-\frac{p}{4}}\triangle_1^{\frac{P_1}{2}}\triangle_2^{\frac{P_2}{2}}\triangle_3^{\frac{P_3}{2}}$$

对于n个n边形也有这样的不等式。

编者按：

我们非常欢迎外系同学踊跃投稿更希望本系同学积极投稿，让《蛙鸣》鸣得更响更亮。

第十七期　问题征解

1．设m，K为正整数$m \geq R$，则：$4^{m-R} \mid \sum_{L=k}^{m} C_{2m+1}^{2L} C_{L}^{k}$试据此用初等方法证明：当$(p,q)=1$，$q>1$　$p=60r$或$90r$时，$\omega \frac{p^{o}}{q}$为无理数其中p、q、r均为整数。

（821　刘弘泉提供）

2．设$M_n(C)$表C上n阶方阵全体．它们形成一个C上的n^2维向量空间，令A表示$M_n(C)$的一个子集，其中元素矩阵乘法定义两两可换，试求由A张成的子空间的维数最大值。

（811　窦昌柱提供）

3．设G为一个群，定义：$G^{(m)}=\{a^m \mid \quad a \quad G\}$，试证：G为循环群，当且反当G的每一个子群具有$G^{(m)}$的形成。

（811陈贵忠提供）

4．a）设N为一自然数，非10的方幂，令S_n为N^n在十进制中的数字和，证明或反驳$S_n \to \infty$．$(n \to \infty)$。

b）对任意P进制．讨论上述问题。

（单墫老师提供）

一个类似多项式插值的问题

811　　窦昌柱

首先提出这样一个问题，找一个微分同胚 $f: B_n \to B_n$ 使 $f(P_0)=0$，这里 $B_n=\{x \in R^n, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1\}$　$P_0=(a_1 \cdots a_n)$ $P_0 \in B_n$ 分析一下，我们发现，如果 $n=1$ 解决了，则 f_n 很容易构造出来：

令：$P_i=(0,\cdots 0, a_i \cdots a_n)$　$i=1,\cdots\cdots n$。

g_i 为 $B_1 \to B_1$ 的微分同胚，且 $g_i\left(\dfrac{a_i}{\sqrt{1-\sum\limits_{j \neq i}^{n} a_j^2}}\right)=0$

$h_i: B_n \to B_n$

$(x_1 \cdots x_n) \to \left(x_1 \cdots x_{i-1}, g_i\left(\dfrac{x_i}{\sqrt{1-\sum\limits_{j \neq i} x_j^2}}\right)\sqrt{1-\sum\limits_{j \neq i} x_j^2}\right.$

$\left., x_{i+1}, \cdots x_n\right)$

则 $h = h_n \circ h_{n-1} \cdots \circ h_1$ 为所求。

下面来求 $n=1$ 时解。此时问题等价于求满足下面条件的一元函数 $f(x)$

i) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 内严格单调，$f(x)$ 可微 $f(\pm 1)=\pm 1$。

ii) $f(0)=d$　$|d|<1$

画一个图看，你也许会觉得显然，但是要具体地写出一个函数，却不是很容易的。在这里，我们提出一个更强的命题如下：

命题1：一定存在一个多项式 $f(x)$，满足条件 i）且 $f(\alpha_0)=d$　$|\alpha_0|<1$，$|d|<1$，

证明：我们把求命题中的多项式问题记为 (α_0, d)。

不妨设 $d>\alpha_0$ 其它情形的证明完全类似。

首先考虑抛物线：$f_0(x)=ax^2+bx+c$ 得：$b=1$，

$$a=-c=\frac{d-\alpha_0}{1-\alpha_0^2}$$

如若：$\left|\frac{1}{2a}\right|\geq 1$，即：$\alpha_0<d\leq\alpha_0+\frac{1-\alpha_0^2}{2}$ 则 f_1 为所求

否则，令 $\alpha_1=\alpha_0+\frac{1-\alpha_0^2}{2}$ 考虑问题（α_1 d）

同前若 $\alpha_1<d\leq\alpha_1+\frac{1-\alpha_1^2}{2}$ 则：（α_1 d）有解，于是：

（α_0 α_1），（α_1 d） 之解一复合一下即得解（α_0 d）

如此我们构造一个序列 $\{\alpha_n\}$ $\alpha_{n+1}=\alpha_n+\frac{1-\alpha_n^2}{2}$，同上面的讨论记知 问题（$\alpha_n$ α_{n+1}）均可解决，如能证明：$\exists m$，使 $\alpha_m<d\leq\alpha_{m+1}$，则（$\alpha_0$ d）的解可由诸（α_i α_{i+1}），（α_m d）的解复合得到。下面的问题就是要考察 $\{x_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的状态如何，我们猜测有 $\alpha_n\uparrow 1$。令：$\triangle_n=1-\alpha_n$

于是有：

$$\triangle_n=\tfrac{1}{2}\triangle_{n-1}^2 \quad 故：\alpha_n<1 \quad \triangle_n\leq\triangle_{n-1}$$

$$0\leq\triangle_n/\triangle_{n-1}\leq\tfrac{1}{2}\triangle_{n-1}\leq\tfrac{1}{2}\triangle_0<1$$

故：$\triangle_n\downarrow 0$。

故一定有 m，使 $\alpha_m<d\leq\alpha_{m+1}$。证完。

设平面上三点 $P_i=(x_i\ y_i)$ 满足 $x_1<x_2<x_3$ $y_1<y_2<y_3$，则：Lagrange 插值公式说有一个多项式 $f(x)$ 满足 $f(x_i)=y_i$ $i=1,2,3$，但是不一定能保证 f 在 $[x_1\ x_3]$ 上是

单调的。例如对于过点（1，1），（-1，-1），（0，$\frac{1}{2}$）的抛物线就办不到。但是由命题1，我们很容易推出：

命题2：设：$x_1 < x_2 < x_3$，$y_1 < y_2 < y_3$，则至少有一个多项式（其次数可以估计出来）$f(x)$，$f(x_i)=y_i$。且在区间〔x_1，x_3〕上面严格单调。

《蛙鸣》十六期问题征解解答

1．设$a_1 \cdots a_n$为整数，d 为其最大公因子，则存在整数矩阵 A 第一行元素为 $a_1 \cdots a_n$且：$\det A = d$

证明：我们仅对 $n=2$ 给出解答：一般情形完全类似。

我们知道：求 a，b 最大公因子最机械的方法是碾转相除法。

下面对应于每一次除法，我们找出一个矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ * & * \end{pmatrix}$（＊未完元）的一个伴随可逆变换：不妨设 $a \geq b$ 于是。

$$a = q_1 b + r_1 \qquad (0 \leq r_1 < b)$$

对应的变换 L_1 为：将 A 的第二列元素乘上 $-q$，加至第一列，得：

$$L^1 A = \begin{pmatrix} r & b \\ * & * \end{pmatrix}$$

如此等等有：$L_n \cdots L_1 A = \begin{pmatrix} d & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ $d=(a, b)$

不妨取 $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $A = L_1^{-1} \cdots L_n^{-1} \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 满足题中一切条件。

（窦昌柱 解答）

2．(1)证明完备度量空间 Z 中可列个稠密开集的交稠密，

(2) 证明〔0，1〕中有理点的全体不能表示为可列开集的交。

证：(1)是复旦大学编的泛函分析上的一个习题。证略。

下面用反证法证明(2)。假设这种表示存在。

则 $(-\infty, +\infty)=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}[n, n+1]$ 中有理点的全体也可表为可列个开集的交。设 $A=\{r \mid r \quad R$ 为有理点$\}$

且 $A=\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} O_n$，$O_n \subset R$ 为开集，$n=1, 2, \cdots$

由于 $A \subset O_n$，故 $R=\overline{A} \subset \overline{O_n} \subset R$，

$\overline{O_n}=R$，O_n 为 R 中的稠密开集。

令 $O'_n=\{x+\sqrt{3} \mid x \in O_n\}$，$n=1, 2, \cdots$

则 O'_n 也为 R 中的稠密开集。

且 $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} O'_n= A+\sqrt{2}=\{r+\sqrt{2} \mid r+\sqrt{2}\}$

则 $\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} O_n'\right)\cap\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} O_n\right)=\varnothing$，

但由(1)左端应在 R 中稠密，矛盾！

（陈贵忠　　解答）

可分扩张的若干附注

811　　吴秀明

这里的结论其它一些书上可能有，但因方法不同，我还是把它写出来。

定理1．设　是M的可分扩张M是F的可分扩张则　E是F的可分扩张。

为证此定理先证下面引理：

引理：E／M　M／F都是有限可分扩张则E／F是有限可分扩张。

证：$[E:F]=[E:M][M:F]$故E／F是有限扩张。　设$a\in E$．a在M的极小多项式　为$f(x)$。

作M的正规闭包N．则$[N:F]<\infty$（∵M为F的单扩张）。

设$G=Gal(N/F)$　q_1　W，是f在N中的一个不可约因子且$q_1(\alpha)=0$

$\forall\sigma\in G$　　$q_\sigma(x)=\sigma(q_1(x))$

则$q_\sigma(x)$无重根　且不可约，且$q_{\sigma_1}(x)\neq q_{\sigma_2}(x)$时

有$(q_{\sigma_1}(x),q_{\sigma_2}(x))=1$

令$q_1(x),\cdots,q_n(x)$是$q_1(x)$在G作用下的全部互不相同的象　令$F(x)=q_1(x)\cdots q_n(x)$

则　$\forall\sigma\in G$　$\sigma F(x)=F(x)\Rightarrow F(x)\in F[x]$

且　$F(a)=0$　$F(x)$无重根

$\Rightarrow$　a在F上可分。

$\Rightarrow$E／F是可分扩张。

定理的证明：$\forall a$ E　$f(x)$ $M(x)$　$f(a)=0$

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

令$M'=F(a_0,\cdots,a_n)$

则M'是F的有限可分扩张。

$M'(\alpha)$是M'的有限可分扩张。

$\Rightarrow$ $M'(\alpha)$是F的有限可分扩张$\Rightarrow$ α是在F上的可分元。

$\therefore$ M是F的可分扩张。

定理2．E／F，M／F都是可分扩张则 EM/F是可分扩张。

证明：　$\forall a\in E$ a是F上的可分元。

$\Rightarrow$ a是在M上可分 $\Rightarrow$ M(a)是F的可分扩张而$\forall b\in EM$
必有$a_1,\cdots,a_n\in E$ 使$b\in M(a_1,\cdots,a_n)$

又 $M(a_1,\cdots,a_n)$是F的可分扩张。

故必有b在F上可分

$\Rightarrow$　EM/F　可分。

定理3．有限域的有限扩张必是Galois扩张。

证明：设F是有限域$[E:F]=n$　$|F|=q$　$ChF=P$

则　E是多项式$x^{q^n}-x$的分裂域

故E／F必为扩张。

又有限域的乘群必是循环群$\therefore E=\{0,1,\xi,\xi^2,\cdots,\xi^{q^n-2}\}$

$F=\{0,1,\xi^k,\cdots,\xi^{(q-2)k}\}$

$$k=\frac{q^n-1}{q-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+\cdots+q+1$$

$E=F(\xi)$，显然ξ满足多项式$x^k-\xi^k=f(x)$

又显然$(k,P)=1$　$\therefore (f(x),f'(x))=1$

故ξ在F上可分$\Rightarrow$　E是F的可分扩张。

关于 $L(k_{m,n})$

811 张航

在学习图论中，我们做过一些有关 $L(k_{m,n})$ 的习题，知道 $L(k_{m,n})$ 的一些零碎的结果，如 $L(k_{1,n})=1$，$L(1\ \ n)n2^{n-1}$ $L(k_{3,3})=81$。由此猜测 $L(k_{m,n})=m^{n-1}n^{m-1}$，本文就证明这一结果。

证明的思路类似于证明 $L(k_n)=n^{n-2}$ 的序列证法。

$V(k_{m,n})=\{a_1,a_2\cdots a_n\}U\{b_1,b_2,\cdots b_m\}$

为二分图 k_{mn} 的顶集。

a_i 与 b_j，b_k 与 b_l 不相邻 $1\leq i<j\leq n$，$1\leq l<k\leq m$。

下面证明 $k_{m,n}$ 的生成树集与序列集 $\{(x_1,x_2,\cdots x_{m-1},y_1\cdots y_{n-1})\cdot|x_i\in\{a_1,a_2,\cdots a_n\},y_i\in\{b_1\cdots b_m\}\}$ 之间存在一一对应。

设 T 为 $k_{m,n}$ 的一个生成树。

则 T 至少有二个度为 1 的顶点。

设 S_1 为 b_1，$b_2\cdots bn$ 中度为 1 的顶点中下算最小一个。

令 x_1 与 S_1 相邻的顶点，则 $x_1\in\{a_1,a_2\cdots a_n\}$。若 b_1，b_2，$\cdots b_n$ 的度全大于 1。

则 t_1 为 $\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$ 中度数为 1 的顶点中下标最小的一个，令 y_1 与 t_1 相邻的点。

$y_1\ \{b_1,b_2,\cdots b_m\}$。

然后对 $T_2=T-S_1$ 或 $T_2=T-\ _1$ 重复以上过程，这样到一个序列

$x_1\ x_2-x_{i1}\ y_1\cdots y_{j1}\ x_{i1+1}\cdots x_{i2}\cdots y_{jv}\cdots x_{m-1}\ y_{i_1+1}\cdots y_{n-}\cdots y_{n-1}$

该序列中 x 有 $m-1$ 个，y 有 $n-1$ 个这是因为从 T_i 到 T_{i+1} 可以看成是 T_i 中的一个度为 1 的顶点，到最后一步 T_{m+n-1} 为一个有两个顶点的树。由二分图的性质可知，一共删掉了 $n-1$ 个 a 和 $m-1$ 个 b，故应有 $m-1$ 个 x 与 $n-1$ 个 y。

那么 T 与序列 $(x_1\cdots x_{m-1}\ y_1\cdots y_{n-1})$ 对应。

这一对应是不含糊的。反之 $V(x_1\cdots x_{n-1},y_1\cdots y_{n-1})$

$x_i\in\{a,\cdots a_n)\ \ y_i\in\{b_1\cdots b_m\}$，

取 $\{b_1,\cdots b_n\}-\{y_1\cdots y_{n-1}\}$ 中下标最小的顶 S_1 与 y_1 相连。 若 $\{b_1,b_2\cdots b_m\}-\{y_2\cdots y_{n-1}\}=\varnothing$

则取 $\{a_1\cdots a_n\}-\{x_1\cdots x_{m-1}\}$ 中下标最小的顶 t_1 与 y_1 相连。

然后在 $(x_2,\cdots x_{m-1},y_1\cdots y_{n-1})$ 把 x_2 与 $\{b_1,\cdots b_n\}-$

$-\{S_1,y_2\cdots y_{n-1}\}$ 的下标最小的顶相邻，

若 $\{b_1\cdots b_n\}-\{s_1,y_1\cdots y_{n-1}\}=\varnothing$。

则把 y_2 与 $\{a_1\cdots a_n\}-\{x_2,\cdots x_{m-1}\}$ 的下标最小顶相连。

或者 $(x_1,\cdots x_{m-1},y_2\cdots y_{n-1})$ 把 x_2 与 $\{b_1,\cdots b_m\}-$

$-\{y_2,\cdots y_{n-1}\}$ 的下标最小的相连。

关 $\{b_1,\cdots b_n\}-\{y_2\cdots y_{n-1}\}=\varnothing$。

则把 y_2 与 $\{a_1,a_2,\cdots a_n)-\{t_1,x_2\cdots x_{m-1}\}$ 中下标最小的相连

这样到最后把 $\{a_1,a_2,\cdots a_n\}-\{t_1\cdots t_{n-1}\}$ 的唯一点。

与 $\{b_1,\cdots b_m\}-\{s_1\cdots s_{m-1}\}$ 的唯一一点相连得到

得到一生成树 T。显然这样一个对应是前面对应的逆对应。

这就证明 生成树集与 $\{\{(x_1,x_2,\cdots x_{m-1},y_1,\cdots y_{n-1})$

$|x_i\ \{a_1\cdots a_n\},y_i\ \{b_1,b_2,\cdots,b_m\}\}$ 存在一一对应。

$|\{(x_1\ x_2\cdots x_{m-1},y_1\cdots y_{n-1}\}|x_i\{a_1\cdots a_{n-1})$

$y_i\ \{b_1\cdots b_m\}\}|=m^{n-1}n^{m-1}$

故 $L(k_{m,n})=n^{m-1}m^{n-1}$

直接线性变换的一个特征

801 张少平

我们知道

命题1 · T：$\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$，且 $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ · $\forall x, y \in \mathbb{E}^3$ （I）

则：T · 是正交变换

是真的 · 那么，下面的两个命题呢？

命题2 · T：$\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$，且 $Tx \wedge Ty = x \wedge y$ $\forall x, y \in \mathbb{E}^3$ （II）

则T是正交变换 ·

命题3 · T：$\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$，且 $Tx \wedge Ty = T(x \wedge y)$ $\forall x \cdot y \in \mathbb{E}^3$ ·（III）

则 T是正交变换 ·

事实上，我们容易证得着T满足（II），则只能有$T = I$或$T = -I$（I是恒同变换）·（这里不准备给出证明）· 命题3却是假的，一个简单的反例是$Tx \equiv \theta$ · 幸运的是我们将看到，仅有此反例 · 这就是命题4 ·

命题4 · T：$\mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$，将满足（III）

则（a）当$T^{-1}\{\theta\} \neq \{\theta\}$时，$Tx \equiv \theta$

（b）当$T^{-1}\{\theta\} = \{\theta\}$时，T是直接正交变换 ·

而且 · 任意直接正交变换必满足（III）·

证明：首先，我们注意到

(1) · $T\theta = T(\theta \wedge \theta) = T\theta \wedge T\theta = \theta$ ·

(2) 若 $x \perp y$ · 则 $Tx \perp y$， 这是因为

不妨$y \neq \theta$，则 $\exists z \in \mathbb{E}^3$ · s·t· $x = y \wedge z$ ·

于是 · $Tx = Ty \wedge Tz \perp Ty$ ·

因此，若$T^{-1}\{\theta\} \neq \{\theta\}$ · 则 $\exists x_0 \in \mathbb{E}^3 - \{\theta\}$，s·t · $Tx_0 = \theta$

但$\forall x \in \mathbb{E}^3$ · $\exists y \in \mathbb{E}^3$ · s·t· $x = y \wedge x_0$ ·

于是，$Tx=Ty\wedge Tx_0=Ty\wedge\theta=\theta$ 即 $Tx=\theta$。

这就是情形（a）。

对于（b），我们有

(3) 若 $|x|=|y|\neq\theta$，则 $|Tx|=|Ty|\neq\theta$。

取 $Z\in\mathbb{E}^3$ 满足 $X\perp Z, Z\perp Y$，且 $|z|=|x|$（$=|y|$）

注意，这样的 Z 是存在的。

看 x、z，w 排成的正交标架。（$|W|=|x| \triangleq \lambda$）

有 $X=Z\wedge\dfrac{W}{\lambda}$，$Z=W\wedge\dfrac{X}{\lambda}$，$W=x\wedge\dfrac{Z}{\lambda}$，用 T 作用并取模，注意(2)，就有

$|Tx|=|Tz|\cdot|T(\dfrac{W}{\lambda})|$，$|Tz|=|Tw|\cdot|T(\dfrac{x}{\lambda})|$。

$|TW|=|Tx|\cdot|T(\dfrac{Z}{\lambda})|$　　　　（A）

特别，$\lambda=1$ 时，可解得 $|Tx|=1$（注意 $x\neq\theta\Longrightarrow Tx=\theta$）

即 $\forall\ x\in S^2(1)$，有 $Tx\in S^2(1)\triangleq\{x\in\mathbb{E}^3, |x|=1\}$

这样，从（A）式即得到 $|Tx|=|Tz|$。（$\because |\dfrac{W}{\lambda}|=1$）

类似地，可知 $|Ty|=|Tz|$，这就证得 $|Tx|=|Ty|$，

于是，我们可知存在函数 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$。

满足 $f(|x|)=|Tx|$。下面就来讨论这一函数。

（i） $f(xy)=f(x)f(y)$。 $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$。

取 $x,y\in\mathbb{E}^3$ s.t. $|x|=x$，$|y|=y$。 $X\perp Y$

则由 $T(x\wedge y)=Tx\wedge Ty$ 及(2)

知 $|T(x\wedge y)|=|Tx|\cdot|Ty|$ $\therefore f(xy)=f(x)\ f(y)$

（ii） $f(x+y)=f(x)+f(y)$。 $\forall x,y\in\mathbb{R}^+$

取 $x,y\in\mathbb{E}^3-\{\theta\}$ s.t. $x\perp y$，$|x|^2=x$，$|y|^2=y$

则 $\because (T(x+y)-Tx)\wedge Ty=T[(x+y)\wedge y]-T(x\wedge y)=\theta$

$(T(x+y)-Ty)\wedge Tx=T[(x+y)\wedge x]-T(y\wedge x)=\theta$

$\therefore\ T(x+y)-Tx=\lambda Ty$

$$(Tx, Ty\neq\theta)$$

$T(x+y)-Ty=\mu Tx$

$\therefore\ (1-\mu)Tx=(1-\lambda)Ty$

$\therefore (1-\mu)Tx\wedge Ty=\theta$，但 $Tx\wedge Ty=T(x\wedge y)\neq\theta$

$\therefore\ 1-\mu=0$ 同理 $1-\lambda=0$ 即 $T(x+y)=Tx+Ty$

再注意(2)，取模，即得 $|T(x+y)|^2=|Tx|^2+|Ty|^2$

$\therefore\ f(x+y)=f(|x+y|^2)=f^2(|x\ +\delta|)=|T(x+y)|^2$

$$=f(x)+f(y).$$

有了(i)与(ii)，我们就可得 $f(x)=X \quad \forall\ x\in\mathbb{R}^+$ 就是

说 $|Tx|=|x| \quad \forall\ x\in\mathbb{E}$ (α)

而且由(ii)的证明，我们实际上可得

若 $x\wedge y\neq\theta$，则 $T(x+y)=Tx+Ty$ (β)

最后，我们再证明 $T(\lambda x)=\lambda Tx$ (γ)

看$\begin{cases}\lambda\geq 0\text{ 时，由} \\ x\neq\theta\end{cases}$ $T(\sqrt{\lambda}x)\wedge Tx=T(\sqrt{\lambda}x\wedge x)=\theta$

得 $\exists\ \tilde{\lambda}\in\mathbb{R}$, s.t $T(\sqrt{\lambda}x)=\tilde{\lambda}Tx$

由(α)知 $|\tilde{\lambda}|=\sqrt{\lambda}$ 即 $\tilde{\lambda}^2=\lambda$

但又存在 $y, z\in\mathbb{E}$. s.t. $\lambda x=\sqrt{\lambda}(x\wedge y)\wedge z$

$\therefore T(\lambda x)=T[(\sqrt{\lambda}x\wedge y)\wedge z]=[T(\sqrt{\lambda}x)\wedge Ty]\wedge Tz$

$$=\tilde{\lambda}(Tx\wedge Ty)\wedge Tz=\tilde{\lambda}T[(x\wedge y)\wedge z]$$

$$=\tilde{\lambda}\ T(\sqrt{\lambda}\ x)=\tilde{\lambda}^2\ Tx=\lambda Tx$$

又$\because$ $Tx\wedge T(-x)=\theta$ $|Tx|=|T(-x)|$

$\therefore Tx = \pm T(-x)$。

若 $\exists x_0 \in \mathbb{E}^3$，s.t. $Tx_0 = T(-x_0)$

则 $\forall y \in \mathbb{E}^3$，$\exists z, w$，使得 $y = -(x_0 \wedge z) \wedge w$

$\therefore Ty = T[(-x_0 \wedge z) \wedge w] = (T(-x_0) \wedge Tz) \wedge Tw$

$(Tx_0 \wedge Tz) \wedge Tw = T[(x_0 \wedge z) \wedge w] = T(-y)$

但取 $y_0 \in \mathbb{E}^3$，s.t $\begin{cases} x_0 \wedge y_0 \neq \theta \\ x_0 \perp y_0 \end{cases}$ 由(β)，应有

$T(x_0 \pm y_0) = T_0 + T(\pm y_0) = Tx_0 + Ty_0$

$\therefore |x_0 + y_0| = |x_0 - y_0|$ 与 $x_0 \perp y_0$ 矛盾

于是，$\forall x \in \mathbb{E}^3$，有 $Tx = -T(-x)$

至此，即知 $\forall \lambda \in \mathbb{R}$，有 $T(\lambda x) = \lambda Tx$。

由(β)，(α)，知 T 是线性变换，再由(α)。

知 T 是正交变换

由于 T 保持右手系，故 T 是直接的。

反之，T 是直接线性变换时，不难验试满足(III)。