蛙　　　鸣

14

中国科技大学数学系学生会主办

一 九 八 三 年 十 二 月

简　　讯

首届《蛙鸣》奖于12月18号　发。出席的有系里老师及有关同学。

这次评奖是在校学生会学习部大力支持下，由编辑部而产生的特别，李大械和沈阳同学起了重要作用。

获奖名单如下

一等奖

二阶齐线性方程的零点分布……………………………沈阳　沈寅

实正定方阵的一个性质………………………………窦昌柱、李冰

关于优美图……………………………………………沈阳

二等奖

关于测度延拓的进一步讨论…………………………王鸣强

等宽卵形面的构造……………………………………杜　强

球面闭曲线的四顶点定理……………………………沈　寅

多项式不可约性的判定………………………………窦昌柱

三等奖

线性变换之某种应用…………………………………黄加武

Kruskal 算法的另一证明………………………………许秋平

有关典型二元树的几个命题…………………………张忠良

一个不等式……………………………………………陈贵忠

凸函数的一种等价定义………………………………梁　泓

关于置换的对分解中对换的最小个数………………黎红年

一个问题………………………………………………李　冰

Massey 趣题巧解……………………………………郜云、王鸣强

评奖会上，气氛热烈。大家回顾了《蛙鸣》成长的历程，并为其今后的发展提出了意见。

成重庚老师讲了话，并表示后后，《蛙鸣》将继续评奖，同时希望八二级、八三级踊跃地向《蛙鸣》投稿。

李大树同学作为校学生会的代表也发了言。

最后，王鸣强同学代表编辑部将有《蛙鸣》徽志的奖品发给大家。

目 录

艾尔脱斯—莫迪尔不等式的推广

831　　陈计

《几何不等式》一书（单 著，上海教育出版社，1980年版）§6中介绍了著名的Erdos Mordell不等式，即三角角形内任意一点到各顶点的距离之和至少为到各边距离之和的两倍”。

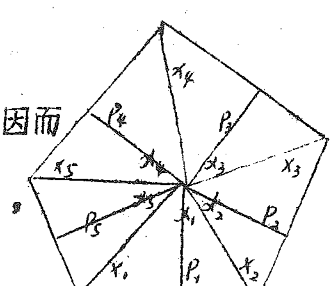
在上海市第二届青少年科学讨论会上，上海复兴中学李伟同学提出了把这个不等式从三角形推广到任意凸多边形的测，即“凸n边形内任意一点到各顶点的距离之和至少为到各边距离之和的 $\sec\frac{\pi}{n}$ 倍”。他用配方法证明了：1。这个测对凸四边形是成立的；2。若猜测对凸m边形成立，则对凸2m边形也成立。

本文引入适当的记号和关系后，再用配方法证明李伟的猜测对凸五边形、凸九边形和凸十七边形是成立的。为此首先证明

引理。在 ΔABC 中，$h_a \le \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$

证　$h_a \le t_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \le \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$　□

不等式1。凸五边形内任意一点到各顶点的距离之和至少为到各边距离之和的 $\sqrt{5}-1\ (=\sec\frac{\pi}{5})$ 倍。



证。记 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} = \rho$，显然有 $1-\rho-\rho^2=0$，因而

$$1-3\rho^2+\rho^4=(1-\rho-\rho^2)(1+\rho-\rho^2)=0,$$

$$1-2\rho^2-\rho^3=(1-\rho-\rho^2)(1+\rho)=0$$

如图，由引理及利用上面两式

$$\sum_{i=1}^{5} x_i-(\sqrt{5}-1)\sum_{i=1}^{5} P_i$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^{5} X_i-2\rho\sum_{i=1}^{5}\sqrt{X_iX_{i+1}}\cos\frac{X_i}{2}\quad(记X_0=X_i)$$

$$=(\sqrt{X_1}-\rho\sqrt{X_1}\cos\frac{\alpha_1}{2}-\rho\sqrt{X_3}\cos\frac{\alpha_2}{2})^2+(\sqrt{X_4}-\rho\sqrt{X_3}\cos\frac{\alpha_3}{2}-$$

$$\rho\sqrt{X_5}\cos\frac{\alpha_4}{2})^2+\rho^2(\sqrt{X_1}\sin\frac{\alpha_1}{2}-\sqrt{X_2}\sin\frac{\alpha_2}{2})^2+$$

$$\rho^2(\sqrt{X_3}\sin\frac{\alpha_3}{2}-\sqrt{X_5}\sin\frac{\alpha_4}{2})^2+(1-2\rho^2)(\sqrt{X_3}-$$

$$\frac{\rho^2}{1-2\rho^2}\sqrt{X_1}\cos\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\frac{\rho^2}{1-2\rho^2}\sqrt{X_5}\cos\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2})^2+\frac{\rho^4}{1-2\rho^2}$$

$$(\sqrt{X_1}\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}-\sqrt{X_5}\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2})^2$$

由于 $1-2\rho^2=\sqrt{5}-2>0$，所以上式$\geqq 0$；即有

$$\sum_{i=1}^{5} x_i\geqq(\sqrt{5}-1)\sum_{i=1}^{5} P_i$$

□

不等式 2　凸九边形内任意一点到各顶点的距离之和至少为到各边距离之和的 $\sec\frac{\pi}{9}$ 倍

证　记 $\sec\frac{\pi}{9}=2\rho$。下面先来导出

$$1-\rho-3\rho^2+2\rho^3+\rho^4=0$$

令 $z=\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$，则 $z^9+1=0$，所以

$$z^8-z^7+z^6-z^5+z^4-z^3+z^2-z+1=0$$

$$(z^4+z^{-4})-(z^3+z^{-3})+(z^2+z^{-2})-(z+z^{-1})+1=0$$

将上式表示 $2\cos\frac{\pi}{9}$ 至 γ 的关系

$$(\gamma^4-4\gamma^2+2)-(\gamma^3-3\gamma)+(\gamma^2-2)-\gamma+1=0$$

即 $$\gamma^4-\gamma^3-3\gamma^2+2\gamma+1=0$$

又 $\gamma=2\cos\frac{\pi}{9}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}\sec\frac{\pi}{9}}=\dfrac{1}{\rho}$ 于是上式可改写成

$$1-\rho-3\rho^2+2\rho^3+\rho^4=0$$

记上式左边的量为 b ，再记 $a_1=1-2\rho^2$ ， $a_2=1-2\rho^2+2\rho^4$

则 $$a_1a_2-(\rho^2a_1a_2+\rho^4a_2+\rho^8)=b(1+\rho-3\rho^2-2\rho^2+\rho^4)$$
$$=0$$

$$a_1a_2-\rho^7=b(1+\rho-2\rho^2-\rho^3)=0$$

下面采用符号的意义类似于五边形，利用引理及上面两式，逐步配方得

$$\sum_{i=1}^{9}x_i-\sec\frac{\pi}{9}\sum_{i=1}^{9}P_i\geq\sum_{i=1}^{9}-2\rho\sum_{i=1}^{9}(\sqrt{x_ix_{i+1}}\cos\frac{\alpha_i}{2})=\sum_{k=1}^{4}\{(\sqrt{x_{2k}}-\rho\sqrt{x_{2k-1}}\cos\frac{\alpha_{2k-1}}{2}$$
$$-\rho\sqrt{x_{2k+1}}\cos\frac{\alpha_{2k}}{2})^2+\rho^2(x_{2k-1}\sin\frac{\alpha_{2k-1}}{2}-$$
$$x_{2k+1}\sin\frac{\alpha_{2k}}{2})^2\}+\sum_{k=1}^{2}\Big[a_1(\sqrt{x_{4k-3}}-\frac{\rho^2}{a_1}\sqrt{x_{4k-3}}$$

$$\cos\frac{\alpha_{4k-3}+\alpha_{4k-2}}{2}-\frac{\rho^2}{a_1}\sqrt{x_{4k+1}}\cos\frac{\alpha_{4k-1}+\alpha_{4k}}{2})^2$$

$$+\frac{\rho^4}{a_1}(\sqrt{x_{4k-3}}\sin\frac{\alpha_{4k-3}+\alpha_{4k-2}}{2}-\sqrt{x_{4k+1}}$$

$$\sin\frac{\alpha_{4k-1}+\alpha_{4k}}{2})^2]+\sum_{k=1}^{1}(\frac{a_2}{a_1}((\sqrt{x_{8k-7}}\cos\sum_{i=1}^{4}\frac{\alpha_{8k-8+i}}{2}$$

$$-\frac{\rho^4}{a_2}\sqrt{x_{8k+1}}\sum_{i=5}^{8}\frac{\alpha_{8k-8+i}}{2})^2+\frac{\rho^8}{a_1a_2}(\sqrt{x_{8k-7}}$$

$$\sin\sum\frac{\alpha_{8k-8+i}}{2})^2]$$

由于 $a_1=\frac{1}{2}\sec^2\frac{\pi}{9}\cos a\frac{2\pi}{9}>0$，$a_2=\frac{1}{8}\sec^4\frac{\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}>0$，

所以上式≧0 ，即有

$$\Sigma_i\geqq\sec\frac{\pi}{9}\sum^{9}P_i$$

不等式3　凸十七边形内任意一点到各顶点距离之和至少为到各边距离之和的 $\sec\frac{\pi}{17}$ 倍。

证。　记 $\sec\frac{\pi}{17}=2\rho$ ，下面先来导出

$$1-\rho-7\rho^2+6\rho^3+15\rho^4-10\rho^5-10\rho^6+4\rho^2+\rho^8=0$$

令　$z=\cos\frac{\pi}{17}+i\sin\frac{\pi}{17}$，则 $z^{17}+1=0$　　所以

$$\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k}(z^{k}+z^{-k})+1=0,$$

$$\sum_{k=1}^{8}(-1)^{k}\cdot 2\cos\frac{k\pi}{17}+1=0$$

利用切比晓夫多项式的展开式将上式表成 $2\cos\frac{\pi}{9}=\gamma$ 的关系

$$\gamma^{8}-8\gamma^{6}+20\gamma^{4}-16\gamma^{2}+2)-(\gamma^{7}-7\gamma^{5}+14\gamma^{3}-7\gamma)+$$
$$(\gamma^{6}-6\gamma^{4}+9\gamma^{2}-2)-(\gamma^{5}-5\gamma^{3}+5\gamma)+(\gamma^{4}-4\gamma^{2}+2)-(\gamma$$
$$(\gamma^{3}-3\gamma)+(\gamma^{2}-2)-\gamma+1=0$$

即 $\gamma^{8}-\gamma^{7}-7\gamma^{6}+6\gamma^{5}+15\gamma^{4}-10\gamma^{3}-10\gamma^{2}+4\gamma+1=0$

又 $\gamma=\frac{1}{\rho}$，于是上式可改写成

$$1-\rho-7\rho^{2}+6\rho^{3}+15\rho^{4}-10\rho^{5}-10\rho^{6}+4\rho^{7}+\rho^{8}=0$$

记上式的左边的量为 b。再记

$$a_{1}=1-2\rho^{2},\ a_{2}=1-4\rho^{2}+2\rho^{4},$$

$$a_{3}=1-8\rho^{2}+20\rho^{4}-16\rho^{6}+2\rho^{8}\ \left(=8\sum_{k=1}^{4}\frac{(-)^{k}(7-k)!}{k!\,(8-2k)!}\rho^{2k}\right)$$

则 $a_{1}a_{2}a_{3}-(\rho^{2}a_{1}a_{2}a_{3}+\rho^{4}a_{2}a_{3}+\rho^{8}a_{3}+\rho^{16})$

$$=b(1+\rho-7\rho^{2}-6\rho^{3}+15\rho^{4}+10\rho^{5}-10\rho^{6}-4\rho^{7}+\rho^{8})=0$$

$$a_{1}a_{2}a_{3}-\rho^{15}$$

$$=b(1+\rho-6\rho^{2}-5\rho^{3}+10\rho^{4}+6\rho^{5}-4\rho^{6}-\rho^{7})=0$$

下面采用符号的意义类似于五边形。利用引理及上面两式，逐步配方得

$$\sum_{i=1}^{17}x_{i}-\sec\frac{\pi}{17}\sum_{i=1}^{17}P_{i}\geq\sum_{i=1}^{17}x_{i}-2\rho\sum_{i=1}^{17}\sqrt{x_{i}x_{i+1}}\cos\frac{\alpha_{i}}{2}$$

$$=\sum_{m=1}^{4}\sum_{k=1}^{2^{4-m}}\left[\frac{a_{m-1}}{a_{1}\cdots a_{m-3}}\left(\sqrt{x_{2^{m}k+2^{m-1}+1}}-\frac{\rho^{2m-1}}{a_{m-1}}\sqrt{x_{2^{m}(k-1)+1}}\right.\right.$$

$$\cos\sum_{i=1}^{2^{m-1}}\frac{\alpha_{2^m(k-1)+i}}{2}-\frac{\rho^{2m-1}}{a_{m-1}}\sqrt{x_{2^m k+1}}\cos\sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{\alpha_{2^m(k-1)+i}}{2}-\frac{\rho^{2^{m-1}}}{a_{m-1}}\sqrt{x_{2^m k+1}}\cos\sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{\alpha_{2^m(k-1)+i}}{2}\Bigg)^2$$

$$+\frac{\rho^{2^m}}{a_1\cdots a_{m-2}}\Bigg(\sqrt{x_{2^m(k-1)+1}}\sin\sum_{i=1}^{2^{m-1}}\frac{\alpha_{2^m(k-1)+i}}{2}-\sqrt{x_{2^m k+1}}\sin\sum_{i=1}^{2^{m-1}}\frac{\alpha_{2^m(k-1)+i}}{2}-\sqrt{x_{2^m k+1}}\sin\sum_{i=2^{m-1}+1}^{2^m}\frac{\alpha_{2^m(k-1)+i}}{2}\Bigg)^2\Bigg]$$

由于 $a_i=\frac{1}{2^{2^{i-1}}}\sec^{2^i}\frac{\pi}{17}\cos\frac{2^i\pi}{17}>0$ $(i=1,2,3)$，所以上式 ≥ 0，即有

$$\sum_{i=1}^{17}x_i\geq\sec\frac{\pi}{17}\sum_{i=1}^{17}P_i \qquad \square$$

在上式一个不等式的证明中可以看出：不难将它们作加权推广即

$$\sum_{i=a}^{n}\lambda_i x_i\geq\sec\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_i\lambda_{i+1}}\,P_i\right)$$

其中 $n=5$、9、17；$\lambda_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$。

下面给出Erdos - Mordell 不等式的加权推广：

λ、u、ν为正数，P为△ABC内部一点，P到三边距离为PD、PE、PF，证明：

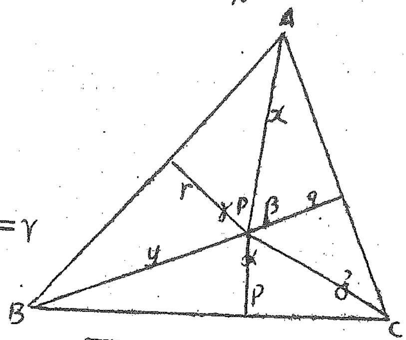
$\lambda PA+uPB+PPC\geqq 2(\sqrt{u\nu}\ PD+\sqrt{\nu\lambda}\ PE+\sqrt{\lambda u}\ PF)$

证　如图，记

$PA=x$，$PB=y$，$PC=z$；

$PD=p$，$PE=q$，$PF=\gamma$；

$\angle BPC=\alpha$，$\angle CPA=\beta$，$\angle APB=\gamma$



由引理，并配方得

$$\lambda\chi+uy+\nu z-2(\sqrt{\mu\nu}\ P+\sqrt{\pi}q+\sqrt{\lambda\mu}\ \gamma)$$

$$\geqq\lambda\chi+\mu y+\nu z-2\left(\sqrt{\mu\nu yz}\ \cos\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\nu\lambda zx}\ \cos\frac{\beta}{2}+\sqrt{\lambda\mu xy}\ \cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$=\left(\sqrt{\lambda x}-\sqrt{\mu y}\cos\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\nu z}\cos\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\mu y}\ \sin\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\nu z}\sin\frac{\beta}{2}\right)^2$$

$\geqq 0$

$\therefore\quad \lambda x+\mu y+\nu z\geqq 2(\sqrt{\mu\nu}\ p+\sqrt{\nu\lambda}\ q+\sqrt{\lambda\mu}\ \gamma)$

符号在且仅在P为△ABC的外心，且$a:b:c=\frac{1}{\sqrt{\mu\nu}}:\frac{1}{\sqrt{\nu\lambda}}:\frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}}$时成立。

在上个不等式中，取$\lambda=\frac{yz}{x}$，$\mu=\frac{zx}{y}$，$\nu=\frac{xy}{z}$得出

$$yz+zx+xy\geqq 2(px+qy+\gamma z)$$

这是《几何不等式》一书§7例题9。。

圆锥曲线光学性质的平几证明

821　　严冬

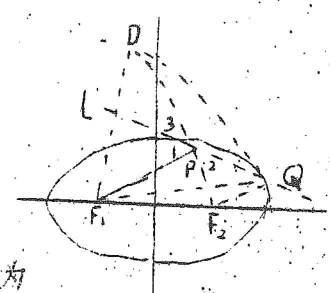
用求导的方法，我们很容易得到二次曲线光学性质的证明，但这种证明就完全失却了平面几何的直观弹与技巧性。而当我们回顾平面几何，并给出那些表面看来似乎很难用平几方法证明的问题的较为简洁的证明时，我们可以重新体味家中学时研究平几何问题所得到的美感，并获得收益。

本文给出圆锥曲线光学性质的一个简单的证明。

定理一　椭圆的光学性质：

从椭圆一焦点射出的光线，经椭圆反射至另一焦点。

证明：如图一



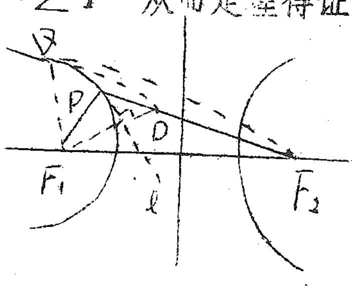
设两焦点 F_1，F_2，椭圆上任一点 P，连 F_1P，F_2P，延长 F_2P 至 D，使 $PD=PF_1$，则 $\overline{DF_2}=\overline{PF_2}+\overline{PF_1}=2a$（a 为长半轴）连 DF_1，过 P 作 DF_1 的垂线 l，则由 $\overline{PD}=\overline{PF_1}$，有 l 垂直平出 DF_1。

现证 l 为椭圆的切线。如若不然，那么 l 与椭圆至少还有一个异于 P 的公共点 Q，连 QF_2，QF_1，QD，∵ m 垂直平分 DF_1

∴ $QD=QF_1$　∴ $QF_2+QD=QF_2+QF_1=2a$　∵ $Q\neq P$

∴ $QF_2+QD>F_2D$　即 $2a>2a$　矛盾。

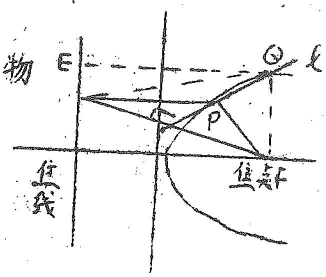
∴ l 为椭圆的切线。又 $\angle 2=\angle 3=\angle 1$　从而定理得证。



定理 2。从双曲线上一焦点发出的光线经双曲线反射至另一焦点。

证明：辅助线如图 2 ，证法与定理 1 几乎完全相同，只不过这里将两线相加改为相减。

定理 3　从抛物线焦点发出的光线经抛物线的反射变成与 X 轴平行的直线。



证明：辅助线如图 3

其中 l_1 为准线，P 为抛物线上任一点

$PD \perp l_1$　PD=PF　过 P 作 $l \perp DF$ ，则 l 垂直平分 DF　只须证 l 为抛物线的切线，用类似的方法，设 Q 为 l 与抛物线的另一公共点由 QF=QD>QE=QF 矛盾，从而得到证明。

由定理 1，2，3 我们得到了整个圆锥曲线光学性质的几何证明

821　严冬

杂　　谈

周刚译

年轻时我曾杂乱地读过许多书。记得其中有一本欧洲当代史，书的末尾是对艺术、科学、文学发展的一番概论，及　为悲观的预言。据我判断，这部书的写作年代大约是 Euler 时代。关于数学，作者认为富有成就的研究似乎已经做完，将来很难指望出现重大的突破。一个世纪后的今天，我们从这里可以看出预言未来是有一定风险的，因为该预言会使我们产生这样的想法：这个预言者想必很武断。但是我认为，在仔细　虑之后，你兴许就会感到作者的观点并不是象　看起来那样地轻率。

Simon Newcomb，address，tp the New York Mathematical Society，Bull N. Y. Math Soc 3(1894) 95-107

$GLn(\mathbb{C})$的换位子群

811　　陈贵忠

我们记$GLn(\mathbb{C})$为复数域上$n\times n$阶非奇异方阵构成的乘法群。记$GLn(\mathbb{C})$的子集Q：

$$Q=\{A\in GLn(\mathbb{C});\ \det A=1\}$$

显然，Q是$GLn(\mathbb{C})$的正规子群；并且$GLn(\mathbb{C})$的换位子群包含在Q中。下面的命题指出：Q就是$GLn(\mathbb{C})$的换位子群。

命题1：若$A\in GLn(\mathbb{C})$且$\det A=1$，则$\exists$ C，$D\in GLn(\mathbb{C})$ $A=CDC^{-1}D^{-1}$　(Shoda)。

证明：我们的想法是找一个特征根互不相同的方阵$D\in GLn(\mathbb{C})$使AD与D有相同的特征根。此时AD与D相似，故$\exists$ $C\in GLn(\mathbb{C})$使　$AD=CDC^{-1}$，则$A=CDC^{-1}D^{-1}$

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为A的特征根。则$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=1$

我们将$\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n\}$的子集$\{\lambda_{k_1},\cdots,\lambda_{k_t}\}$ $(q\leq k_1<k_2<\cdots k_t\leq n)$为相关的，当且仅当$\lambda_{k_1}\cdots\lambda_{k_t}=1$。t称为相关子集的长度。

平方设$\{\lambda_1\cdots\lambda_{t_1}\}$为$\{\lambda_1,\cdots\lambda_n\}$的具有最小长度的相关子集，$\{\lambda_{t_1+1},\cdots,\lambda_{t_1+t_2}\}$为$\{\lambda_{t_1+1},\cdots,\lambda_n\}$的具有最小长度的相关子集，……最后有$\{\lambda_{t_1+\ +t_r+1},\cdots,\lambda_n\}$不含有比自己更小的相关子集。显然$1\leq t_1\leq t_2\leq\cdot\leq t_r$

而$\exists$ $P\in GLn(\mathbb{C})$使

$$A=P\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_{t_1} & & & & \\ & & & \lambda_{t_1+1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_{t_1+t_2} & \\ & & & & & & \ddots \\ & 0 & & & & & & \lambda_{t_1+t_2+\cdots+t_r+1} \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$a=\min_{1\le i\le n}|\lambda_i| \qquad b=\max_{1\le i\le n}|\lambda_i|$$

取 $D\in GL_n(\mathbb{C})$

$D=P\,\mathrm{diag}(m_1, \lambda_1 m, \cdots, \lambda_1\cdots\lambda_{t_1-1}m_1; m_2, \lambda_{t_1+1}m_2, \cdots, \lambda_{t+1}\cdots\lambda_{t_1+t_2-1}m_2, \cdots, m_{r+1}, \lambda_{t_1+t_2+\cdots t_{r+1}}m_{r+1}, \cdots, \lambda_{t_1+t_2+t_{r+1}+1}\cdots\lambda_{n-1}m_{r+1})P^{-1}$

这里 $m_1\neq 0$，$a^n|m_2|>|m_1|b^n$，…，$a^n|m_{r+1}|$

$$a^n|m_{r+1}|>|m_r|b^{n_3}$$

可以验证D的特征根互不相同，且AD的特征根为A($\lambda_1 m_1; \cdots, \lambda_1\cdots\lambda_{t_1-1}m_1, m_2; \lambda_{t_1+1}m_2; \cdots, \lambda_{t_1+1}\cdots\lambda_{t_1 t_2-1}m_2, m_{2_3}\cdots; \lambda_{t_1+t_2+\cdots+t_r+1}m_{r+1}; \cdots, \lambda_{t_1+\cdots+t_{r+1}+1}\cdots\lambda_{n-1}m_{r+1}, m_{r+1}$)与D的特征根相同。

命题 1 证完。

命题 1 有一个看起来很自然的推论：

命题 2：设 A、$B\in GLn(\mathbb{C})$，$\det A=\det B\neq 0$ 则 $\exists C$，$D\in GLn(\mathbb{C})$，使 $A=CDBC^{-1}D^{-1}$ （O. Taussky）

为证命题 2，要引理：

引理：设 $A\in GLn(\mathbb{C})$ 则 $\exists$ $B\in GLn(\mathbb{C})$，使 $A=B^2$

这里略去了引理的证明，请大家参考〔1〕。

命题 2 的证明：由引理，$\exists M\in GLn(\mathbb{C})$ 使 $B=M^2$ 则显然 $\det(M^{-1}AM^{-1})=1$ 由命题 1 存在 E、$F\in GLn(\mathbb{C})$ 使

$$M^{-1}AM^{-1}=EFE^{-1}F^{-1}$$

则 $A=MEFE^{-1}F^{-1}M$

$$=(MEM)(M^{-1}FM^{-1})M^2(M^{-1}E^{-1}M^{-1})(MF^{-1}M)$$

令 $MEM=C$ $M^{-1}FM^{-1}=D$

则 $A=CDBC^{-1}D^{-1}$

参考书目：

〔1〕 许以超：《代数学引论》 P563

〔2〕 Richard Bellman：《Introduction to Matrix Analysis》 P219 习题 11、12

Cantor - Lebesque 定理的简单证明

811 窦昌柱

在〔1〕中，郑汤松介绍了如下的定理：

定理（Cantor - Lebesque）：

设 $f_n(x)=a_n\cos nx+b_n\sin nx$

如果 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0，在一个正测度集E上成立，则必有 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0

〔1〕中的证明，利用了较为深刻的勒贝格积分理论。事实上，这个定理内容本身并不十分深奥，也没有涉及到积分的问题，而是似乎有点显然的命题。理应有一个初等的证明。在这里，我们利用R上正测度集的一个有趣然而深刻的性质，以及叶果洛夫定理，给出上述定理的一个简单证明。先引述二个定理：

引理1：设E为R上具有正测度的集合则存在数 $a>0$ 使：

$$(-a,a)\subset\{x-y : x\in E, y\in E\}$$

证明：见〔2〕第二章

引理2：（叶果洛夫）：设 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在E上几乎处处收敛于 $f(x)$，则对任何 $\delta>0$ 存在可测子集 E_δ 使：$m(E-E_\delta)<\delta$ 而 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f(x)$

证明：见〔1〕第四章。

下面给出定理的证明：

由引理2，存在E之可测子集F，使 $m(E-F)<\delta$ 而：$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在F上一致收敛于0。令 $\delta=\frac{1}{2}mE>0$ 则有 $mF>\frac{1}{2}mE>0$；又由引理1，知：存在 $x_n, y_n\in F$ 使

$x_n - y_n = \frac{\pi}{2n}$ 当n充分大时成立

易得 $f_n(x_n) = a_n \cos nx_n + b_n \sin nx_n$

$f_n(y_n) = a_n \sin nx_n - b_n \cos nx_n$

故有： $a_n^2 + b_n^2 = f_n^2(x_n) + f_n^2(y_n)$

又由 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在F上收敛的一致性 $\forall \varepsilon > 0$

存在N，$n > N$ 时：$|f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in F$

故：$a_n^2 + b_n^2 < 2\varepsilon^2$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 + b_n^2 = 0$ 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

于是定理证完 。

参考文献：

〔1〕：那汤松：《实变函数论》下册：高等教育出版社

〔2〕：郑维行等《实变函数和泛函分析概要》第一册 人民教育出版社

Jensen不等式的概率意义

游光荣

（中国科技大学8010）

我们知道，定义在区间I（有限的或无限的）上的实值函数 $f(x)$ 称为凸函数，如果 $f(x)$ 满足：

$\forall X_1, X_2 \in I, 0<\lambda<1$，有

$$f(\lambda X_1+(1-\lambda)X_2)\leq\lambda f(X_1)+(1-\lambda)f(X_2) \quad (1)$$

根据凸函数的定义，可以证明：

引理1[1]：设 $f(x)$ 是区间I上的凸函数，则 (1) f在I内部（除去端点）处处存在左、右导数 f'_- 和 f'_+，它们都是增函数，且 $f'_-(X)\leq f'_+(X)$ 在I内部成立；

(2) f在I上连续。

引理2[2]：设 $f(x)$ 是区间I上凸函数，则 $\forall x, X_0 \in I$ $\exists\lambda(X_0)$，使下式成立：

$$\lambda(X_0)(X-X_0)\leq f(X)-f(X_0)$$

根据引理1，只需取 $\lambda(X_0)=\frac{1}{2}[f'_-(X_0)+f'_+(X_0)]$ 即可。

定理1[2]：设 ξ 是一随机变量，$E\xi$ 有限，$\xi(\omega)\in I$ 对 ω 几乎处处成立，f是I上凸函数，则

$$f(E\xi)\leq Ef(\xi) \quad (3)$$

证明：在(2)中令 $X_0=E\xi$，$X=\xi$，然后两边取数学期望即得 (3)

证毕。

推论1.1（Jensen 不等式[3]）设 $f(X)$ 是区间I上的凸函数，$P_i>0$，$\sum_{i=1}^{n} P_i=1$，则 $\forall X_1, X_2, \cdots, X_n \in I$，

有 $$f\left(\sum_{i=1}^{n} P_i X_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P_i f(X_i) \tag{4}$$

证明是很简单的：令(3)中ξ是以概率P_i取X_i $(i=1,2,\cdots,n)$为值的随机变量即得。

推论1.2[4]：设$f(X)$是$[c,d]$上的凸函数，$g(x)\in(c,d)$ $g(x)$在$[a,b]$上的积，$P(x)\geq 0$，$\int_a^b P(x)dx=1$，则

$$f\left(\int_a^b P(x)g(x)dx\right) \leq \int_a^b p(x)f(g(x))dx \tag{5}$$

证明：

令ξ是以$\tilde{P}(x)=\begin{cases} P(x) & x\in[a,b] \\ 0 & x\in[a,b] \end{cases}$为分布密度函数的连续型随机变量，根据定理1，

$$f[E(\xi)]\leq Ef(g(\xi)),$$

具体代入，即得5)

证毕。

推论1.2表明，Jensen不等式对积分同样成立。

至此，定理1揭示了Jensen不等式的概率意义。随机变量ξ和和凸函数f的具体取法，可以得到许多著名的(初等)不等式。

另外，对条件数学期望，也有类似5)的不等式。

参 考 资 料

[1] 微积分讲义第一册习题集(数学系用)，中国科学技术大学(1980)，PP. 45

[2] 严士健，王秀媛、刘秀芳，概率论基础，科学出版社(1982 PP. 234

[3] G. Klambauer，数学分析，庶亚东译，上海科学技术出版社(1981)，PP. 30

[4] 同上，PP. 208。

二维二阶线性方程化简的一充要条件

801　姜献峰

在〔1〕中第四章有一个习题，是这样的：两个自变量的二阶常系数双曲型方程或椭园型方程一定可以经过自变量的变换及函数变换

$$u = e^{\lambda\xi + \mu\eta} v$$

将它化成

$$V_{\xi\xi} \pm V_{\xi\xi} + C V = f \qquad (1)$$

的形式。

对于两个自变量的二阶方程

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + du = f_1 \qquad (2)$$

如经某一系列变换到(1)的形式，那将为我们讨论(2)的一系列性质带来了巨大的方便。可惜并不是所有的方程(2)都可化成(1)的形式，〔1〕或〔2〕中只是告诉我们当(2)的所有系数为常数时，能设法变换到(1)的形式，这总使人感到美中不足。本文将给出一个条件，使得当且仅当方程(2)的系数满足此条件时它能在一自变量的变换及函数$u = \varphi(\xi, \eta) v$下，化成(1)的形式。

首先声明，我们这里的所有讨论，是在$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \neq 0$的前提下进行的，即已假定了方程(2)不为抛物型方程。

为了更自然地过渡到最终结果，我们采取如下方式：先进行一系列的讨论，最后才给出定理及性质。

在可逆变换$\xi = \xi(x, y)$，$\eta = \eta(x, y)$下，有：

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \quad ,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$$

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} \xi^2{}_x + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta^2{}_x + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{yy}$$

将此代入(2)后，可得

$$\bar{a}_{11} u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12} u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22} u_{\eta\eta} + \bar{b}_1 u_\xi + \bar{b}_2 u_\eta + du = f_1$$

其中

$$\bar{a}_{11} = a_{11} \xi^2{}_x + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi^2{}_y$$

$$\bar{a}_{12} = a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y$$

$$\bar{a}_{22} = a_{11} \eta^2{}_x + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta^2{}_y$$

$$\bar{b}_1 = a_{11} \xi_{xx} + 2a_{12} \xi_{xy} + a_{22} \xi_{yy} + b_1 \xi_x + b_2 \xi_y \tag{3}$$

$$\bar{b}_2 = a_{11} \eta_{xx} + 2a_{12} \eta_{xy} + a_{22} \eta_{yy} + b_1 \eta_x + b_2 \eta_y \tag{4}$$

并由直接计算可知：

$$a^2_{12} - a_{11} a_{12} = (a^2{}_{12} - a_{11} a_{22}) |J|^2 \tag{5}$$

其中

$$|J| = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \eta_x \xi_y$$

我们知道，对椭圆型和曲型方程，经一自变量变换后，可以化

简成

$$u_{\xi\xi} \pm u_{\eta\eta} = A u_{\xi} + B u_{\eta} + C u + D \qquad (6)$$

的形式。其中椭圆型时，(6)式左边取正号，自变量变换由

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_x &= -a_{12}\xi_y + \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\,\eta_y \\ a_{11}\eta_x &= -a_{12}\eta_y - \sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\,\xi_y \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

给出。而当是双曲型时，(6)式左边取负号，且自变量变换由

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_x &= -a_{12}\xi_y - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\,\eta_y \\ a_{11}\eta_x &= -a_{12}\eta_y - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}\,\xi_y \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

给出。并且 $A = \bar{b}_1$，$B = \bar{b}_2$，$C = d$，$D = f_1$。

如在函数变换 $u = \varphi(\xi, \eta)V$ 下，(6)式可化成(1)的形式。因为：

$$u_{\xi} = \varphi V_{\xi} + \varphi_{\xi} V, \quad u_{\xi\xi} = \varphi V_{\xi\xi} + 2\varphi_{\xi} V_{\xi} + \varphi_{\xi\xi} V$$

$$u_{\eta} = \varphi V_{\eta} + \varphi_{\eta} V, \quad u_{\eta\eta} = \varphi V_{\eta\eta} + 2\varphi_{\eta} V_{\eta} + \varphi_{\eta\eta} V$$

从而，就有

$$\left.\begin{aligned} &2\varphi_{\xi} = A\varphi, \quad \mp 2\varphi_{\eta} = B\varphi, \quad f = \frac{1}{\varphi}D \\ &C = \frac{1}{\varphi}\{(\varphi_{\xi\xi} \pm \varphi_{\eta\eta}) - (B\varphi_{\eta} + A\varphi_{\xi}) - C\} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

因为，我们已经假定 $\varphi(\xi, \eta)$ 是存在的，所以(9)中各式必须相容，因而 $A_{\eta} = \pm B_{\xi}$。但是，当 $A_{\eta} = \pm B_{\xi}$ 成立时，我们又可以从以从(9)式中的前两式，解出 $\varphi(\xi, \eta)$，于是函数变换存在的充要条件为：

$$A_{\eta} = \pm B_{\xi} \qquad (10)$$

其中当方程(2)为椭圆型时，(10)式右边取正号；当方程(2)为双曲型时，(10)式右边取负号。

为了使讨论方便起见，我们对方程(2)椭圆型和双曲型分开考虑。先考虑双曲型的情形。

将 $A=\overline{b}_1$ ，$B=\overline{b}_2$ 代入(10)中，即得

$$\overline{b}_{1x}x_\xi+\overline{b}_{1y}y_\xi+\overline{b}_{2x}x_\eta+\overline{b}_{2y}y_\eta=0$$

又因为

$$x_\xi=\frac{1}{|J|}\eta_y\ ,\quad y_\eta=\frac{1}{|J|}\xi_x$$

$$x_\eta=\frac{-1}{|J|}\xi_y\ ,\quad y_\xi=\frac{-1}{|J|}\xi_y$$

并令

$$\alpha=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}$$

$$\beta=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}$$

则有

$$(\alpha+b_1\xi_x+b_2\xi_y)_x\eta_y-(\alpha+b_1\xi_x+b_2\xi_y)_y\eta_x$$
$$-(\beta+b_1\eta_x+b_2\eta_y)_x\xi_y+(\beta+b_1\eta_x+b_2\eta_y)_y\xi_x=0$$

$$(\alpha\eta_y+b_1\xi_x\eta_y+b_2\xi_y\eta_y)_x-(\alpha+b_1\xi_x+b_2\xi_y)\eta_{xy}$$
$$-(\alpha\eta_x+b_1\xi_x\eta_x+b_2\xi_y\eta_x)_y+(\alpha+b_1\xi_x+b_2\xi_y)\eta_{xy}$$
$$-(\beta\xi_y+b_1\eta_x\xi_y+b_2\eta_y\xi_y)_x+(\beta+b_1\eta_x+b_2\eta_y)\xi_{xy}$$
$$+(\beta\xi_x+b_1\eta_x\xi_x+b_2\eta_y\xi_x)_y-(\beta+b_1\eta_x+b_2\eta_y)\xi_{xy}=0$$

合并同类项后，重新归类，则得

$$(\alpha\eta_y-\beta\xi_y+b_1|J|)_x+(\beta\xi_x-\alpha\eta_x+b_2|J|)_y=0 \quad (11)$$

下面，我们将$\alpha\eta_y-\beta\xi_y$与$\beta\xi_x-\alpha\eta_x$化成更方便的形式。

因为$a^2_{12}-a_{11}a_{22}>0$，$\bar{a}_{12}=0$，$\bar{a}_{11}=\bar{a}_{22}=1$，由(5)即知$|J|^2=\frac{1}{\triangle}$，其中$\triangle=a^2_{12}-a_{11}a_{22}$我们取$|J|=\frac{1}{\sqrt{\triangle}}$。

由(8)知：

$$-\sqrt{\triangle}\eta_y=a_{11}\xi_x+a_{12}\xi_y \quad (12)$$

$$-\sqrt{\triangle}\xi_y=a_{11}\eta_x+a_{12}\eta_y \quad (13)$$

利用（12）与（13），我们还可以得到

$$\sqrt{\triangle}\xi_x=a_{12}\eta_x+a_{22}\eta_y \quad (14)$$

$$\sqrt{\triangle}\eta_x=a_{12}\xi_x+a_{22}\xi_y \quad (15)$$

由（12），（13），（14），（15）经直接计算可知：

$$(\xi^2_x-\eta^2_x)=a_{22}\frac{|J|}{\sqrt{\triangle}}=\frac{a_{22}}{\triangle} \quad (16)$$

$$(\xi^2_y-\eta^2_y)=a_{11}\frac{|J|}{\sqrt{\triangle}}=\frac{a_{11}}{\triangle} \quad (17)$$

$$(\eta_x\eta_y-\xi_x\xi_y)=a_{12}\frac{|J|}{\sqrt{\triangle}}=\frac{a_{12}}{\triangle} \quad (18)$$

再则，由$(12)_x$，$(13)_x$，$(14)_y$，$(15)_y$可得：

$$-\triangle\eta_{xy}-(\triangle)_x\eta_y=a_{11}\xi_{xx}+a_{12}\xi_{xy}+a_{11\,x}\xi_x+a_{12\,x}\xi_y \quad (19)$$

$$-\sqrt{\Delta}\xi_{xy}-(\sqrt{\Delta})_x\xi_y=a_{11}\eta_{xx}+a_{12}\eta_{xy}+a_{11x}\eta_x+a_{12x}\xi_y \tag{20}$$

$$\sqrt{\Delta}\xi_{xy}+(\sqrt{\Delta})_y\xi_x=a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+a_{12y}\eta_x+a_{22y}\eta_y \tag{21}$$

$$\sqrt{\Delta}\eta_{xy}+(\sqrt{\Delta})_y\eta_x=a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+a_{12y}\xi_x+a_{22y}\xi_y \tag{22}$$

再由(19)+(22)，(20)+(21)，得：

$$\alpha=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}$$
$$=(\sqrt{\Delta})_y\eta_x-(\sqrt{\Delta})_x\eta_y-(a_{11x}+a_{12x}+a_{22y})\xi_y \tag{23}$$

$$\beta=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}$$
$$=(\sqrt{\Delta})_y\xi_x-(\sqrt{\Delta})_x\xi_y-(a_{12y}+a_{11x})\eta_x$$
$$-(a_{12x}+a_{22y})\eta_y \tag{24}$$

于是：

$$\alpha\eta_y-\beta\xi_y=(\sqrt{\Delta})_y\eta_x\eta_y-(\sqrt{\Delta})_x\eta^2_y$$
$$-(a_{11x}+a_{12y})\xi_x\eta_y-(a_{12x}+a_{22y})\xi_y\eta_y$$
$$-(\sqrt{\Delta})_y\xi_x\xi_y+(\sqrt{\Delta})_x\xi^2_y+(a_{11x}+a_{12y})\eta_x\xi_y$$
$$+(a_{12x}+a_{22y})\eta_y\xi_y$$
$$=(\sqrt{\Delta})_y(\eta_x\eta_y-\xi_x\xi_y)+(\sqrt{\Delta})_x$$
$$\times(\xi^2_y-\eta^2_y)-(a_{11x}+a_{12y})(\xi_x\eta_y-\eta_x\xi_y)$$

$$=\frac{1}{\triangle}\left(a_{12}(\sqrt{\triangle})_y+a_{11}(\sqrt{\triangle})_x-(a_{11\,x}+a_{12\,y})\sqrt{\triangle}\right)$$

(25)

同理可得

$$\beta\xi_x-\alpha\eta_x=\frac{1}{\triangle}\left(a_{12}(\sqrt{\triangle})_x+a_{22}(\sqrt{\triangle})_y\right.$$
$$\left.-(a_{12\,x}+a_{22\,y})\sqrt{\triangle}\right)\qquad(26)$$

最后，将（25）与（26）代入（11）之中去，就是

$$\left(\frac{1}{\triangle}\left(a_{11}(\sqrt{\triangle})_x+a_{12}(\sqrt{\triangle})_y+(b_1-a_{11\,x}-a_{12\,y})\right.\right.$$
$$\left.\left.\sqrt{\triangle}\right)\right)_x+\left(\frac{1}{\triangle}\left(a_{12}(\sqrt{\triangle})_x+a_{22}(\sqrt{\triangle})_y\right.\right.$$
$$\left.\left.+(b_2-a_{12\,x}-a_{22\,y})\sqrt{\triangle}\right)\right)_y=0\qquad(27)$$

于是有：

$$\left(a_{11}\left(\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)_x+a_{12}\left(\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)_y+(a_{11\,x}+a_{12\,y}-b_1)\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)_x$$

$$+\left(a_{12}\left(\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)_x+a_{22}\left(\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)_y+(a_{12\,x}+a_{22\,y}-b_2)\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)_y=0\qquad(28)$$

记微分算子L^*为

$$L^*V=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a_{11}V)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(a_{12}V)$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(a_{22}V)-\frac{\partial}{\partial x}(b_1V)-\frac{\partial}{\partial y}(b_2V)\qquad(29)$$

;

则由直接计算可知，

$$((27)\text{的左边})=L^*\left(\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)$$

于是，就有

$$L^{*}\left(\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)=0 \qquad (30)$$

事实上，微分算子L^{*}即为微分算子L：

$$L=a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}$$

的共轭算子。

因为以上的推导过程皆为可逆，于是就有如下定理：

定理1　两个自变量的双曲型二阶方程(2)定可经过自变量变换(3)某一函数变换。

$u=\varphi(\xi,\eta)V$，将它化成(1)的形式的充要条件是$L\left(\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\right)=0$。其中，微分算子$L^{*}$为（29）所定义，$\triangle=a^2_{12}-a_{11}a_{22}$。

下面，我们再考虑椭圆型的情形。

对于椭圆型的情况下，我们也可用上面的同样方法加以讨论与化简，事实上最后得到的条件仍为（30）。然而，如真的这样去做，不仅费时间费笔墨，而且是没有必要的。我们可以利用在双曲型的情形下所得的一系列结果，来推出椭圆型情形下的结论。

对于自变量变换(7)，令$\xi=\xi^{*}$，$i\eta=\eta^{*}$（其中$i=\sqrt{-1}$），代入(7)后就得到

$$a_{11}\xi^{*}_x=-a_{12}\xi^{*}_y-\sqrt{a^2_{12}-a_{11}a_{22}}\ \eta^{*}_y,$$

$$a_{11}\eta^{*}_x=-a_{12}\eta^{*}_y-\sqrt{a^2_{12}-a_{11}a_{22}}\ \xi^{*}_y$$

这与(3)具有相同的形式，但在这里，η^{*}为虚数，$a^2_{12}-a_{11}a_{22}<0$。再由(3)与(4)，则有

$$\bar{b}_1^* = a_{11}\xi^*_{xx}+2a_{12}\xi^*_{xy}+a_{22}\xi^*_{yy}+b_1\xi^*_x+b_2\xi^*_y$$

$$=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y=\bar{b}_1$$

$$\bar{b}_2^* =a_{11}\eta^*_{xx}+2a_{12}\eta^*_{xy}+a_{22}\eta^*_{yy}+b_1\eta^*_x+b_2\eta^*_y$$

$$=i(a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y)=i\bar{b}_2$$

再由（１０）可得 $\bar{b}_1\cdot\eta=\bar{b}_2\ \xi$，于是 $\bar{b}_1^*\eta^*+\bar{b}_2^*\xi^*=0$。因为 $A^*=\bar{b}_1^*$，$B^*=\bar{b}_2^*$，于是条件（１０）就成为 $A^*=-B^*$。这与双曲型的形式一样。

仔细观察双曲型下的所有讨论可知，所出现的等式与性质对系数与自变量复数时，依然成立。于是将双曲型下的讨论中的 η、ξ、$\bar{b}_1$ 与 $\bar{b}_2$ 分别用 η^*、ξ^*、$\bar{b}_1^*$ 与 $\bar{b}_2^*$ 替代后，即得（１０）式成立的充要条件为 $L^*\left(\frac{1}{\sqrt{a^2_{12}-a_{11}a_{22}}}\right)=0$。又因为有

$\sqrt{a^2_{12}-a_{11}a_{22}}=i\sqrt{-\triangle}$，于是有定理：

定理２　　两个自变量的椭圆型二阶方程(2)定可经过自变量变换(7)及某一函数变换 $u=\varphi(\xi,\eta)V$，将它化成(1)的形式的充要条件为 $L^*\left(\frac{1}{\sqrt{-\triangle}}\right)=0$。其中微分算子 L^* 为（２９）所定义，

$\triangle=a^2_{12}-a_{11}a_{22}$。

将定理１与定理２合写在一起，就有：

定理　　两个自变量的二阶非抛物型方程

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+du=f_1$$

定可经过自变量变换及某一函数变换 $u=\varphi(\xi,\eta)V$，将它化成

$$V_{\xi\xi}\pm V_{\eta\eta}+CV=f$$

的形式的充要条件为

$$L^{*}\left(\frac{1}{\sqrt{\mp\Delta}}\right)=0 \qquad (31)$$

其中 $\Delta=a^{2}_{12}-a_{11}a_{22}$，微分算子定义为

$$L^{*}V=\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}(a_{11}V)+2\frac{\partial^{2}}{\partial x\partial y}(a_{12}V)+\frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}}(a_{22}V)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(b_{1}V)-\frac{\partial}{\partial y}(b_{2}V)。$$

最先所提到的那个习题，就成很自然的一个推论。然而，值得指出的是，能化成(1)这种形式的方程少得可怜。为完备起见，我们还是举一个非常系数的，满足（31）的方程。

例1　对于方程

$$(1+x^{2})u_{xx}\pm(1+y^{2})u_{yy}+xu_{x}\pm yu_{y}=0$$

续者不妨可验证一下，它是满足（31）的。

顺便指出，对于方程(1)，其解当C为常数时，已有公式给出。当方程为椭圆型时，〔2〕的第7章化了近一章篇幅，用Green函数的方法，予以解决。而当方程为双曲型时，用球平均法，也给出其解的表达式。而当C不为常数时，无完全结果。

王鸣强同学认真查阅了全稿，并提出了宝贵意见，花了不少心血，谨以表示感谢。

参考书目

〔1〕 数学物理方程 复旦大学数学系主编 1979．5第1版
〔2〕 数学物理方程 A、H吉洪诺夫，A、A萨马尔斯基编。

《习题征解之解答》

——姜献峰

一、计算积分 $\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$，$\alpha \geqq 0$

解：$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$

$+\int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$

$=\int_\infty^1 \frac{d(\frac{1}{x})}{(1+(\frac{1}{x})^2)(1+(\frac{1}{x})^\alpha)} + \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}dx$

$=\int_1^\infty \frac{1+x^\alpha}{(1+x_2)(1+x^\alpha)}dx = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

$=\mathrm{aretg}\,x\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

事实上，$\alpha \geqq 0$ 这个条件是没必要的。

二、设G为一个有限复数集：$G=\{a_1, \cdots, a_p\}$ P为一个素数，$aG=\{aa_1, \cdots, aa_P\}$。试定出所有的a和G，使$aG=G$。

解：可得G分成t个互不相交的子集

G_1，G_2，…，G_t。$G_i=\{b_1^i, b_2^i, \cdots, b_{s_i}^i\}$，

并使$ab_{s_i}^i=b_1^i$，$ab_j^i=b_{j+1}^i$　$j=1, 2, \cdots, s_i-1$。(1)

$(P \geqq S_1 \geqq S_2 \geqq \cdots \geqq S_t \geqq 1)$

$\because a \neq 0$，$a_i \neq 0$ $(1 \leqq i \leqq P)$；于是由(1)，$\forall 1 \leqq i \leqq t$，

$a^{S_i}=1$。而$P=\sum_{i=1}^{t} S_i$，$\therefore a^P=1$。从而

$a=e^{\frac{2\pi k}{P}i}$　$K=0, 1, \cdots, P-1$。又$1=a^{S_1}=e^{S_1\frac{2\pi k}{P}i}$

$\therefore S_1 K=0 \pmod{p}$。$\because p$为素数，$p \geqq S_1 \geqq 1$，

$p-1 \geqq K \geqq 0$，$\therefore S_1=P$或$K=0$。

当$K=0$时，$a=1$。G为任一非零复数所成之集

当$S_1=P$时，$t=1$。令$b_1^1=a_0$，则$b_j^1=a_0 a^{j-1}$

$(j=1, 2, \cdots, P)$。$\therefore$当$a \neq 1$，$|a|=1$时，有

$G=a_0\{e^{\frac{2\pi K}{P}i}: K=0, 1, \cdots P-1\}$其中$a_0$为任一非零复数。

当$|a| \neq 1$，$a \neq 0$时，不存在由非零复数所成的集合，使$aG=G$。

三、设$f(Z)$在$D: |Z|<1$上解析，且$|f(Z)|<1$，$(\forall |Z|<1)$。试证：

$$\left|\frac{f(Z_1)-f(Z_2)}{1-\overline{f(Z_1)}f(Z_2)}\right| \leqq \left|\frac{Z_1-Z_2}{1-\overline{Z_1}Z_2}\right|$$

$(Z_1, Z_2 \in D)$，并找出等号成立之条件。

解：

$$\eta=\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}\ (1)。\because z_1\in D，从而\ \eta\in D\Longleftrightarrow z\in D$$

令

$$g(\eta)=\frac{f\left(\dfrac{\eta+z_1}{1+\bar{z}_1\eta}\right)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\,f\left(\dfrac{\eta+z_1}{1+\bar{z}_1\eta}\right)}$$

则 $g(0)=0$，且 $\because \forall|z|<1$，$|f(z)|<1$，

$f(z)$ 在 D 中解析，从而 $\forall|\eta|<1$，$|g(\eta)|<1$，且

$g(\eta)$ 在 D 中为解析。于是由 Schwartz 引理，即知：

$|g(\eta)|\leqq|\eta|$ $(\forall\eta\in D)$，且如 $\exists\eta_0\in D$，$\eta_0\neq0$，

使 $|g(\eta_0)|=|\eta_0|$，则存在常数 θ，使对 $\forall\eta\in D$ 皆有

$g(\eta)=e^{i\theta}\eta$ (2)。由此，将 η 用(1)代入后，即得

$$\left|\frac{f(z)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\,f(z)}\right|\leqq\left|\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}\right|;$$

特别取 $z=z_2$ 时，命题得证。

又由(2)知，存在 z_1，$z_2\in D$，$z_1\neq z_2$，使等号成立的充要条件为

$$\frac{f(z)-f(z_1)}{1-\overline{f(z_1)}\,f(z)}=e^{i\theta}\frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}\quad(\theta\ 为常数)$$

对一切已知 $z\in D$ 成立。此时，我们还可不妨取 $z_1=0$，于是

$$f(z)=\frac{f(0)+e^{i\theta}z}{1+e^{i\theta}\overline{f(0)}z}$$ 所以，等号成立的充要条件为

$$f(z)=\frac{re^{i\varphi}+e^{i\theta}z}{1+re^{i(\theta-\varphi)}z}$$

其中$0 \leqq r < 1$，θ与φ皆为常数。

（完）

一个通用的整函数

定理　设复平面C上的全体整函数所成的集为F，使得f的全体导函数所成的集$\{f^{(n)}: n=0, 1, 2, \cdots\}$在一致收敛的意义下，在C的任一紧子集上稠密于F。

这个定理是说，对任意紧集$K \subseteq C$，任意$\varepsilon > 0$及任意$g \in F$，都可找到f的导函数$f^{(N)}$使得$|f^{(N)}(z)-g(z)| < \varepsilon$对一切$z \in K$成立。我们称这样的f为“通用的”（universal）。

定理的证明　设$P_1, P_2, P_3, \cdots$是全体有理系数多项式（指系数的实数和虚部是有理数，它们是一可列集），I为F上的积分算子$I(h)(z)=\int_0^z h(w)\,dw$。$I^N$表示算子I重复作用N次。我们要找的函数f具有如下的形式

$$(*) \qquad f=\sum I^{k_n}(P_n)$$

这里自然数列$\{K_n\}$选取得充分大，使满足以下条件：

(1)　$K_n > K_j + \deg P_j$，$j=1, 2, \cdots, n-1$

(2)　$H_n = I^{k_n}(P_n)$，我们要求

$$|H_n^{(j)}(z)| \leqq \frac{1}{2^n}, \quad j=0, 1, 2, \cdots, K_n-1,$$

$|z| \leqq n$。

如果以上条件满足，则（*）右边的级数在任一紧集上一致收敛，故f有定义，且可逐项求任意阶导数，所以

$$f^{(k_n)}(z)=P_n(z)+E_n(z)$$

这里$|E_n(z)|\leq 2^{-(n-1)}$，$|z|\leq n$。

因为对$\forall g\in F$，$\forall$紧集$K\subseteq C$，都可找到一多项式序列，在K上一致收敛于g（例如取它的Taylor级数的部分和序列即可），从而也可找到一列有理系数多项式，在K上一致收敛于g，定理的结论即得证。

为全成证明，我们只须说明K_n能够选取得使(2)成立。

因 $I(z^r)=\dfrac{z^{r+1}}{r+1}$，所以

$$|I^k(z^r)|=\left|\frac{z^{r+1}}{(r+1)\cdots(r+K)}\right|\leq|z^r|\frac{|z|^k}{K!}$$

在任意固定的闭圆盘$\{|z|\leq R\}$上，$|z^r|\leq R^r$，而$|z^K|/K!$一致收敛于0（$K\to\infty$）而P_n是有限个项z^r的线性组合，故可取K_n充分大，使(2)成立。得证。

——黄加武编译自

Amer Math Monthly，

90(1983)，331

Hermite 方阵在复正交复相似下的标准形

811 黄渝

1955年，许宝騄教授把方阵相似推广为方阵复相似，即如果存在可逆方阵P，使得$B=PAP^{-1}$，则方阵A和B称为复相似的，并得到方阵在复相似下的准标形和全系不变量。把可逆方阵限定为复正方阵，即果如存在复正交方阵O，使得$B=OA\bar{O}^{-1}$，则方阵A和B称为复正交复相似的。本文的目的是给出Hermite 方阵在复正交复相似下的标准形和全系不变量。

首先，利用复正交方阵在复正交相似下的标准形和全系不变量，证明了

引理1 设H和O分别是Hermite 方阵和复正交方阵，并且$OH=H\bar{O}^{-1}$，则当方阵O的特征根全是正数，或全是摸为1的虚部不为零的复数时，存在复正交方阵O^*，使得$OH=O^*H\overline{O^*}^{-1}$；当方阵O的特征根全是负数，或者全是摸不为1的虚部不为零的复数时，存在复正交方阵O^*，使得$OH=O^*(-H)\overline{O^*}^{-1}$。

引理2 设Hermite 方阵H_1和H_2复相似，则在存复正方阵O_1和O_2，使得

$$H_2=O_2\ O_1\ H\bar{O}_1^{-1}$$

基本引理 设Hermite 方阵H_1和H_2复相似，则存在复正方阵O_1和O_2，Hermite 方阵H_{11}和H^{22}，使得

$$H_1=O_1\operatorname{diag}(H_{11},H_{22})\bar{O}_1^{-1},$$

$$H_2=O_2\operatorname{diag}(H_{11}-H_{22})\bar{O}_2^{-1},$$

记

$$N(n)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n},\quad V(n)=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}_{n\times n},$$

且 $M(n)=I(n)+N(n)$，$T(n)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}I(n)+e^{-i\frac{\pi}{4}}V(n)\right)$，其中 $I(n)$ 为单位方阵。利用基本引理和许宝𫘧教授关于方阵在复相似下的标准形的结论，我们证明了

定理 1　设方阵 $\begin{pmatrix} O & H \\ \bar{H} & O \end{pmatrix}$ 的初等因子组为

$$\left.\begin{array}{l}
(\lambda-a_r)^{h_r},\ (\lambda+a_r)^{h_r},\ 1\leqq r\leqq u;\\
(\lambda+ib_s)^{k_s},\ (\lambda+ib_s)^{k_s},\ (\lambda-ib_s)^{k_s},\ (\lambda-ib_s)^{k_s}\\
\qquad\qquad\qquad 1\leqq s\leqq v;\\
(\lambda+\alpha_t)^{\ell_t},\ (\lambda-\alpha_t)^{\ell_t},\ (\lambda+\alpha_t)^{\ell_t},\ (\lambda-\bar{\alpha}_t)^{\ell_t}\\
\qquad\qquad\qquad 1\leqq t\leqq f;\\
\lambda^{m_q},\ \lambda^{m_q},\ 1\leqq q\leqq g;\\
\lambda^{n_j},\ \lambda^{n_j},\ 1\leqq j\leqq e,
\end{array}\right\}\ *$$

其中 $a_r>0$，$1\leqq r\leqq u$，$b_s>0$，$1\leqq s\leqq v$，α_t 为实部，虚部都不为零的复数，$1\leqq t\leqq f$，m_q 为偶数，$1\leqq q\leqq g$ n_j 为奇数，$1\leqq j\leqq e$，则Hermite 方阵H复正交复相似于标准形

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_{h_1}a_1\ T(h_1)\ M(k_1)\ T(h_1)\cdots,$$

$$\varepsilon_{h_u}a_u T(h_u)M(h_u)T(h_u))$$

$$\dot{+}\operatorname{diag}\left(ib_1\begin{pmatrix}-T(k_1) & M(k_1)T(k)\\ & O\end{pmatrix},\ldots,\right.$$

$$\left. ib_r\begin{pmatrix}-T(k_v)M(k_v)T(k_v) & T(k_v)M(k_v)T(k_v)\\ O & O\end{pmatrix}\right)$$

$$\dot{+}\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_1 T(\ell_1)M(\ell_1)T(\ell_1) & \alpha_1 T(\ell_1)M(\ell_1)T(\ell_1)\\ O & O\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\ldots,\begin{pmatrix}\bar{\alpha}_f T(e_f)M(\ell_f)T(\ell_f) & \alpha_f T(\ell_f)M(\ell_f)T(\ell_f)\\ O & O\end{pmatrix}\right)$$

$$\dot{+}\operatorname{diag}(\varepsilon_{m_1}T(m_1)N(m_1)T(m_1),\ldots,$$

$$\varepsilon_{mg}T(m_g)N(m_g)T(n_1)N(n_1)T(n_1),\ldots,$$

$$T(n_e)N(n_e)T(n_e)),$$

其中 ε_{h_r}，$1\leqq r\leqq u$ 和 ε_{m_q}，$1\leqq q\leqq g$ 为 ± 1。

定理1中的符号 ε_{h_r} 称为属于块 $\varepsilon_{h_r}a_rT(h_r)M(h_r)T(h_r)$ 的标签 $1\leqq r\leqq u$，同样，符号 ε_{m_q} 称为属于块 $\varepsilon_{m_q}T(m_q)N(m_q)T(m_q)$ 的标签，$1\leqq q\leqq g$，所有属于方阵 $\begin{pmatrix}O & H\\ \bar{H} & O\end{pmatrix}$ 非零特征根 a 阶数 h 的形如 $\varepsilon_h aT(h)M(h)T(h)$ 的块标签的集合，称为属于方阵 $\begin{pmatrix}O & H\\ \bar{H} & O\end{pmatrix}$ 的初等因子 $(\lambda\pm a)^h$ 的标签组。所有属于阶数 2K 的形如 $\varepsilon_{2h}T(2h)N(2h)T(2h)$ 的块的标签的集合，称为属于方阵 $\begin{pmatrix}O & H\\ \bar{H} & O\end{pmatrix}$ 的初等因子 λ^{2K} 的标签组。

定理2 Hermite 方阵H在复正交复相似下的全系不变量由下列三部分组成

(1)方阵$\begin{pmatrix} O & H \\ \bar{H} & O \end{pmatrix}$的初等因子组(*)；

(2)方阵$\begin{pmatrix} O & H \\ \bar{H} & O \end{pmatrix}$的初等因子$(\lambda \pm a_r)^{h_r}$，$1 \leqq r \leqq u$，的标签组的符号差。

(3)，方阵$\begin{pmatrix} O & H \\ \bar{H} & O \end{pmatrix}$的初等因子$\lambda^{m_q}$，$1 \leqq q \leqq g$，的标签组的符号差。

第十三期问题征解解答：（谷立振）

1、解：$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} dx + \int_0^1 \frac{y^{\alpha} dx}{(1+y^2)(1+y^{\alpha})}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

2解：(1) $\forall a = 1$，则$\forall$任一集合$G = \{a_1, \cdots, a_p\}$有：

$aG = G$

(2) $\forall a \neq 1$ ∵ $aG=G$。设 $G=\{a_1, \cdots, a_p\}$ $a_i \neq 0$ $i=1, \cdots, P$ 则 $\prod_{i=1}^{P} a a_i \Rightarrow \prod_{i=1}^{P} = a^P = 1$。

令 $K = \min\{n \in N: a^n = 1, n > 1\}$ 则 $K \leq P$

设 $P = Kq + r$ $0 \leq r \leq K$

由K的定义知 $r \leq 0 \Rightarrow r = 0$ $K \mid P$。

又P是素数 $K > 1$ $K = P$

∴ $G = \{ab, a^2 b, \cdots, a^{P-1} b\}$

由 $a^P = 1 \Rightarrow a = e^{\frac{2K\pi}{P} i}$ $K = 1, 2, \cdots, P-1$

G为某一圆周上，任意，P个P集合点的集合、综上述(1) $a=1$，任一P元集，有 $aG=G$

(2) $a = e^{\frac{2K\pi}{P} i}$ ($K = 1, 2, \cdots, P-1$) G为任一圆周上，任P个P等分点。

3、记分以下几步证明

(1) $\forall |z_1| < 1$、$|z_2| < 1$ 有 $\frac{|z_1 - z_2|}{|1 - \bar{z}_1 z_2|} < 1$

$$\because |1-\bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = 1 + |z_1 z_2|^2 - 2R(\bar{z}_1 z_2)$$

$$- |z_1|^2 - |z_2|^2 + 2R_e \bar{z}_1 z_2$$

$$= (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2) > 0$$

$$\therefore \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1 z_2|} < 1$$

(2) ∵ $|f(z)| < 1$ $\forall |z| < 1$，且 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析

令 $g(z)=\dfrac{f(z)-f(z)}{1-\overline{f}(z_1)f(z_2)}$ (1)

则在 $|z|<1$ 内 $g(z)$ 解析，$g(z)=0$，$|g(z)|<1$

令 $w=\varphi(z)=\dfrac{z-z_1}{1-\overline{z}_1 z}$ (2)

此对应是单位圆到自身的单值解析变换，

存在反函数 $z=\varphi^{-1}(w)$ $z_1=\varphi^{-1}(0)$

令 $h(w)=g(\varphi^{-1}(w))\cdots$ (3)

则 $h(0)=0$，$|h(w)|<1$ 且在 $|z|<1$ 中 $h(w)$ 解析

Fehwarye 引理 $|h(w)|\leq|w|\cdots$ (4)

由(3)、(4)式知 $|g(z)|\leq\left|\dfrac{z-z_1}{1-z_1 z}\right|\cdots$ (5)

令 $z=z_2\Rightarrow\left|\dfrac{f(z_1)-f(z_2)}{1-\overline{f}(z_1)f(z_2)}\right|\leq\left|\dfrac{z_1-z_2}{1-\overline{z}_1 z_2}\right|$

$\cdots$ (6)

(6)式中等号成立 $\Longleftrightarrow$ (5)式中等号成立

$\Longleftrightarrow$ (4)中等号成立·而 $|h(w)|=|w|$

$\because h(w)=e^{-1\theta}w$

$\therefore$ h 是 1－1 的。

又 $h=g\circ\varphi^{-1}$ φ^{-1} 是 1－1 的。

$\therefore$ h 是 1－1 的 $\Longleftrightarrow$ g 是 1－1 的 $\Longleftrightarrow$ f 是 1－1 的

(6)式中等号成立充要条件是 f 是 1－1的。

问 题 征 解

1：设P，Q，S为几阶实正定方阵，且有：

$PSP > QSQ$　证明：$P > Q$。

本题是F，T，Man 一篇论文中的一个结论。

（綦昌柱提供）

2：研究下列级数的收敛性 $\sum\limits_{K=1}^{\infty} a_k^{-1}$

其中 $a_K = \ln k \ln\ln k \ln\ln\ln k \cdots \underbrace{\ln\cdots\ln}_{m\text{次}} k$

$\exp^{m-1} e < K < \exp^{m} e$ ，$\exp x = e^{x}$

（王鸣强提供）

3. 设 $f(x) \in C^2(a\ b)$　$f(a)=f(b)=0$ 且当

$x \in (a,b)$ 时，$f(x) \neq 0$

试证：$\displaystyle\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geq \frac{\pi^2}{b-a}$ 少号成立

当且仅当

$$f(x) = A\sin\frac{x-a}{b-a}\quad A\text{ 为常数。}$$

（韩献峰提供）