蛙　　　　鸣

第 28 期

中国科技大学数学系

一九八七年六月

目　录

第28期　1987年6月

学术是一种召唤，一种献身，而不是一种职业。
——维纳

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

关于面积的一个最值问题*

861　　王振

本文将证明如下定理：

定理：凸四边形内任一点及四个顶点组成的诸三角形中，必有一个三角形的面积不超过四边形面积的$\frac{1}{2+2\sqrt{2}}$倍，并且常数是最好的。

（反证）若不然，则存在某个四边形ABCD，使形内某点P与四个顶点组成的诸三角形面积都大于$\frac{1}{2+2\sqrt{2}}\cdot S_{ABCD}$。

设O为对角线交点。为方便，不妨设P在△AOB中，$AC \perp BD$，且$|OC|=|OD|=1$。并记$k=2+2\sqrt{2}$。

如图：建立直角坐标系，设A（0，b）；B（a，0）C（0，-1）；D（-1，0），（其中$0<a\leq b$）。

作三条直线l_1，l_2，l_3，使$l_1 \parallel y$轴，$l_2 \parallel x$轴，$l_3 \parallel AB$且其直线方程分别为：

$$l_1: x=\frac{a+1}{k}$$

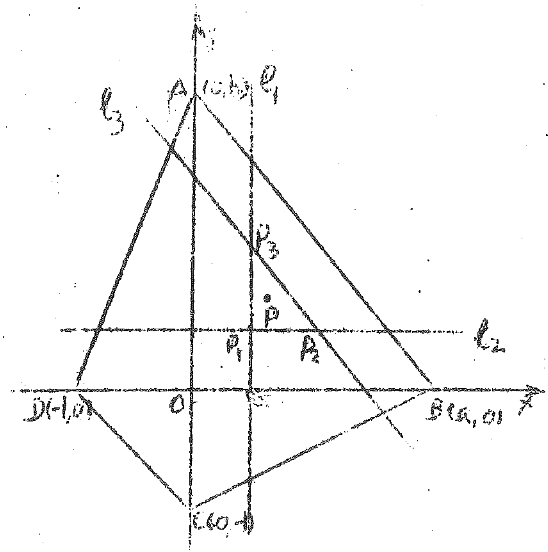
$$l_2: y=\frac{b+1}{k}$$

$$l_3: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{(a+1)(b+1)}{kab}$$

则l_1上点与顶点A、C组成三角形面积$=\frac{S}{k}$。l_2、l_3上的也

分别与△ABC顶点组成的三角形面积$=\dfrac{s}{k}$。

由假设，P必在l_1右方，l_2上方，l_3下方。因此l_1，l_2，l_3必须围成一个三角形$P_1P_2P_3$（如图），且P点落在$\Delta P_1P_2P_3$中。所以P_3必在l_3下方：



$$\frac{a+1}{ka}+\frac{b+1}{kb}<1-\frac{(a+1)(b+1)}{kab} \qquad (1)$$

同时，由于$b\geq a$，所以在$\Delta P_1P_2P_3$中，P_3到边DC的距离最大：即有 $S_{\Delta P_3DC}\geq S_{\Delta POC}>\dfrac{s}{k}$。

将$S_{\Delta P_3DC}$用P_3坐标表示，得：

$$\frac{a+1}{k}+\left(b-\frac{(a+1)(b+1)}{ka}-\frac{b(a+1)}{ha}\right)+1<\frac{(a+1)(b+1)}{k} \qquad (2)$$

化简后将$k=2+2\sqrt{2}$代入得：

$$2+2\sqrt{2}>\left(2+\frac{1}{a}\right)\left(2+\frac{1}{b}\right)-1 \qquad (3)$$

$$(0<a\leq b)$$

$$2+2\sqrt{2}>\frac{b(a+1)^2}{a(b+1)}+\frac{a+1}{a} \qquad (4)$$

记（3）式右边为F，（4）式右边为G。下面证明（4）式与（3）式矛盾。即当$F<2+2\sqrt{2}$时，$G\geq 2+2\sqrt{2}$。

令 $1+\frac{1}{a}=\alpha$， $1+\frac{1}{b}=\beta$

若 $F<2+2\sqrt{2}$

则 $\beta<\frac{3+2\sqrt{2}}{1+\alpha}-1$

$\Longrightarrow$ $G>\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\cdot\frac{1+\alpha}{2+2\sqrt{2}-\alpha}+\alpha$

要证 $G\geq 2+2\sqrt{2}$

只须 $\frac{\alpha^3+\alpha^2}{-\alpha^2+(3+2\sqrt{2})\alpha-(2+2\sqrt{2})}+\alpha\geq 2+2\sqrt{2}$

$\Longleftrightarrow$ $(6+4\sqrt{2})\alpha^2-(4+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\alpha+(2+2\sqrt{2})^2\geq 0$

$\Longleftrightarrow$ $(\alpha-\sqrt{2})^2\geq 0$

因此（3）、（4）不能同时成立。

下证常数 $\frac{1}{2+2\sqrt{2}}$ 是最好的数。这只需要将（3）、式和（4）式同时变为等式（即取 $a=b=1+\sqrt{2}$），并取 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 这时四边形面积 $S=\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})^2$

$$S_{\Delta PAB}=S_{\Delta PAC}=S_{\Delta PCD}=S_{\Delta PBD}=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})=\frac{1}{2+2\sqrt{2}}S$$

$$S_{\Delta PBC}=S_{\Delta PAD}=\frac{1}{2}(2+\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}S$$

上述证明中引用了马援同学提供的简化证法，在此表示感谢。

* 此文对本刊第27期问题11给出了一个否定的回答。——编者注。

〔新闻〕

机器证明传捷报

数学系　凌云飞

设C是一封闭凸曲线，从C上某点开始，取其周长的所有三等分点。顺次用直线段连结诸点得一三角形。则该三角形的周长大于或等于C周长的一半。我们很多人早就知道前述几何不等式，它曾难住了许多有才智的头脑，然而，就在最近，计算机帮助人们越过了障碍。

新方法的基本思想是：设法取目标几何函数定义域的某一可行（指计算机上的可行性）有限覆盖，然后在这覆盖的每一开集中任取一点代入检验函数即可得到结果。其中检验函数由洪加威先生两年前发明的"几何定理例证法"来确定。寻找关键的可行有限覆盖的方法被（暂时）称为"追踪法"，根据问题的复杂度来决定选用不同次数的追踪法。问题的复杂度由目标函数泰勒展式中"可约项"前面的所有各项来确定，"可约项"则决定于洪先生"几何定理证法"。追踪法的优点是，它能给被追踪点找到覆盖该点的允许最大开集。这就是说，追踪法是实现洪加威先生"几何定理例证法"的最优方案。

吴文俊先生十余年来一直在使几何定理机械化，他说"我们的机械化证明定理的方法……在处理多项式不等式关系的那种几何定理时则要复杂困难得多（这里指计算上的复杂度与可行性）"从这个角度看来，新方法给机器证明几何定理带来了鼓舞人心的新气象。

应该指出，文首的问题是被征服的一系列问题中富有代表意义的一个。

进步的实践者，就是我们大家熟知的张景中，陶懋颀先生。

·蛙鸣·第28期·
1987年5月

凸图形内n点问题（Ⅱ）

831　何明秋

《蛙鸣》第27期本人证明了单位面积凸图形内任意给定n点组成的诸三角形中至少存在一个三角形面积$\leq\begin{cases}\frac{1}{n-1}（n\geq 6\text{时}）\\ \frac{1}{n}（n\geq 10\text{时}）\end{cases}$

本文进一步推广上述结果，得到

定理：单位面积凸图形内任意给定n（≥7）点组成诸三角形中，至少存在一个三角形面积不大于$\frac{1}{n}$。

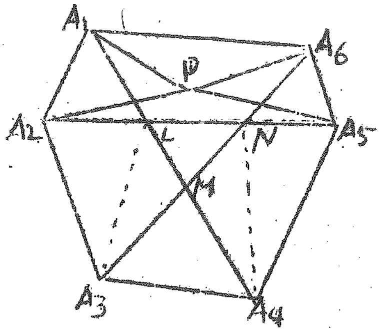
为此，先给出几个引理：

引理1：单位面积凸图形内n点，若其闭包为n－m边形，则至少存在一个三角形的面积$\leq\frac{1}{n+m-2}$

证明：先将凸n－m边形的所有顶点与其内某一点连线，得到n－m个不相交三角形，再将凸n－m边形内另外一点（若还有的话）与它所在三角形顶点连线，则不相交三角形总数将增加两个，依此类推便可得到$n-m+2(m-1)=n+m-2$个不相交的三角形，于是至少存在一个三角形面积$\leq\frac{1}{n+m-2}\times$凸n－m边形面积$\leq\frac{1}{n+m-2}$。

引理2：单位面积凸六边形内任给一点，则此7点所成诸三角形中至少存在一个三角形面积$\leq\frac{1}{7}$。

证明：若给定点P不在凸六边形的主对角线所围成的三角形内，不妨设它与M点在A_2A_5异侧，若这些所求三角形最小面积为m，则



（图一）

$S_{\triangle PA_1A_2} \geq m$，$S_{\triangle PA_2A_3} \geq m$，$S_{\triangle PA_1A_6} \geq m$，$S_{\triangle PA_5A_6} \geq m$。

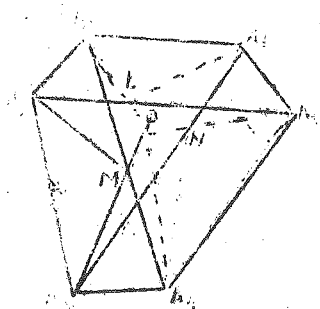
$$S_{\triangle LA_2A_3} \geq \min\{S_{\triangle A_1A_2A_3}, S_{\triangle A_4A_2A_3}\} \geq m,$$

同理 $S_{\triangle LA_3A_4} \geq m$，$S_{\triangle NA_4A_5} \geq m$。

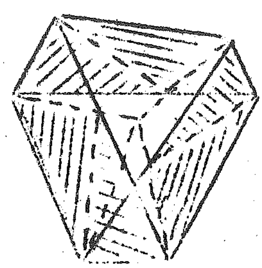
相加得：$1 - S_{\triangle LNA_4} \geq 7m$

于是 $m \leq \frac{1}{7}$

若给定的P点在凸六边形主对角线所围成三角形内。如图二连接，不妨设 $S_{\triangle A_3MQ} \geq S_{\triangle A_4OQ}$，（否则我们用图三的方式来划分六边形也可得到同样的结果）



（图二）



（图三）

假定最小三角形面积为m，则与上述方法类似可得

$S_{\triangle A_1A_2M} \geq m$，$S_{\triangle A_2A_3M} \geq m$，

$S_{\Delta A_1A_6L} \geq m$, $S_{\Delta A_3A_6L} \geq m$,

$S_{\Delta A_3A_4N} \geq m$ $S_{\Delta A_4A_5N} \geq m$,

此外 $S_{\Delta PA_1M} + S_{\Delta POA_2} \geq S_{\Delta A_1PA_2} \geq m$

将上述不等式相加即得

$$1 - S_{\Delta PLA_5} \geq 7m$$

于是 $m \leq \dfrac{1}{7}$ （证毕）

（定理的证明）：

若这n点所成闭包为≤n－2边形，则由引理1即知得证

若这n点所成闭包为n－1边形 $A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}$，不妨设内部那点P不在$\Delta A_1A_2A_3$内，则P点在凸n－2边形 $A_1A_3\cdots A_{n-1}$ 内，当n＞7时对n用归纳法，由归纳假设可知

$$(n-1)m \leq A_1A_3\cdots A_{n-1}\text{的面积}$$

又 $m \leq S_{\Delta A_1A_2A_3}$

相加得 $n \cdot m \leq n-1$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{n-1}$ 的面积≤1

$$\therefore m \leq \frac{1}{n}$$

若这n点所成闭包为凸n边形，其证明是由杨路教授首先给出的，在（1）中，单墫老师有一个简单的证明。

推论：单位面积凸图形内任给n（≥12）个点，则至少存在一个三角形面积$\leq \dfrac{1}{n+2}$。

证明：由归纳法可知只须证明n＝12的情形即可，当n＝12时，过其中任一点作直线将此凸图形面积一分为二，则包括直线上点在内至少有一边含有七个点，由定理这七点中至少有一个三角形

$$\text{面积} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{14} = \frac{1}{n+2}$$ （证毕）

〔注〕：由上面各条证明均不难看出“引理2”，“定理”，“推论”中的不等号均可改为严格不等号。

参考文献

〔1〕单墫，《几何不等式》，上海教育出版社，1980年版，第77页，第17题（1）。

参与开发一般智力——不是为了今后某一职业的特定需要，应看成是数学教学教育的基本目标。

—— F. Reidt.

·蛙鸣·第28期·
1987年5月

研究与讨论

一个积分式的极限及其应用

841　潘国华　袁进勇

为研究二维傅里叶级数的收敛性考虑下式积分

$$I_n=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x,y)\cdot y\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x\sin(n+\frac{1}{2})y}{2\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{y}{2}}dxdy,$$

与此相联系有

$$I_n^1=\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi(x,y)}{x}\sin(n+\frac{1}{2})x\sin(n+\frac{1}{2})ydxdy$$

我们有

定理：若 $\varphi(x,y)\in C^*$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n^1=0$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

$C^*=\{\varphi(x,y)\mid\varphi(x,y)\in C(0,\pi)^2$，且 $\exists M>0,\alpha>0,$
$\beta>0,\gamma>1,\tau>1$

使 $(t,u)\in(0,\beta)\times(0,\pi)$，$|\Delta t|<\alpha$，$|\Delta u|<\alpha$ 时

$|\varphi(x+\Delta x,y+\Delta y)-\varphi(x,y)|<M(|\ln|\Delta x||^{-\gamma}+|\ln|\Delta y||^{-\tau})$

先给出 C^* 的简单性质

1°：$\varphi(x,y)\in C^1$，则 $\varphi(x,y)\in C^*$

3°：$\varphi_1(x,y)\in C^*$，$\varphi_2(x,y)\in C^*$，则 $\varphi_1(x,y)\varphi_2(x,y)\in C^*$

4°：$\dfrac{xy}{4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}}\in C^*$

证明：$\text{II}_n = \int_0^\beta\int_0^\pi \frac{\varphi(x,y)}{x}\sin(n+\frac{1}{2})x\sin(n+\frac{1}{2})y\,dxdy$

$$=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\beta}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\varphi(\frac{t}{n+\frac{1}{2}},\frac{u}{n+\frac{1}{2}})}{t}$$

$$\cdot\sin t\sin u\,dtdu$$

则

$$\left|\text{II}_n^{(1)}\right| = \left|\int_{2k\pi}^{(n+\frac{1}{2})\beta}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}+\int_0^{2k\pi}\int_{2m\pi}^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\varphi(\frac{t}{n+\frac{1}{2}},\frac{u}{n+\frac{1}{2}})}{t}\sin t\sin u\right.$$

$$\leq \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{1}\int_{(2k+j)\pi}^{(2k+j+1)\pi}dt\left|\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi}\frac{\varphi(\frac{(2k+j)\pi}{n+\frac{1}{2}},\frac{(2i+1)\pi}{n+\frac{1}{2}})}{t}\sin t\sin u\right.$$

$$+\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{1}\int_{(2m+j)\pi}^{(2m+j+1)\pi}du\left|\int_{2i\pi}^{2(i+1)\pi}\frac{\varphi(\frac{(2i+1)\pi}{n+\frac{1}{2}},\frac{(2m+j)\pi}{n+\frac{1}{2}})}{t}\sin t\sin u\right.$$

$$+M\left(\left|\ln\left|\frac{\pi}{n}\right|\right|^{-\gamma}+\left|\ln\left|\frac{\pi}{n}\right|\right|^{-\tau}\right)\left(\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\int_0^{2(m+1)\pi}+\int_0^{2k\pi}\int_{2m\pi}^{2(m+1)\pi}\right)\left|\frac{\sin t\sin u}{t}\right|$$

$$\leq 2\|\varphi(t,u)\|\left(\sum_{j=1}^{k-1}\int_{2j\pi}^{(2j+1)\pi}\frac{\pi}{t(t+\pi)}dt+\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}dt\right)$$

$$+M\left(\left|\ln\left|\frac{\pi}{n}\right|\right|^{-\gamma}+\left|\ln\left|\frac{\pi}{n}\right|\right|^{-\tau}\right)\left(\frac{2(m+1)}{2k\pi}\cdot 2\pi+2\int_\pi^{2k\pi}\frac{1}{t}dt+2\int_0^\pi\frac{\sin t}{t}\right)$$

$$\leq K_1+K_2\left(\left|\ln\left|\frac{\pi}{n}\right|\right|^{-\gamma}+\left|\ln\left|\frac{\pi}{n}\right|\right|^{-\tau}\right)(K_3+\ln n)\quad (K_i\text{ 为正常数})$$

$$\therefore \text{II}_n^{(1)} = o(n+\frac{1}{2})$$

用同样方法，并注意积分区域的选取可证

$$I_n^{(2)}=\int_0^{2k\pi}\int_0^{2m\pi}\frac{\varphi\left(\frac{t}{m+\frac{1}{2}},\frac{u}{n+\frac{1}{2}}\right)}{t}\sin t\sin u\,dt\,du$$

$$=o\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to+\infty}I_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{2}}\left(I_n^{(1)}+I_n^{(2)}\right)=0$$

由Riemann引理， $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n'=0$

由3°，4° $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

注：当 $|\varphi(x+\Delta x,y+\Delta y)-\varphi(x,y)|\leq M(|\Delta x|^{a}+|\Delta y|^{b})$

$(a>0,b>0)$

时定理可以Riemann引理较简单证得

下面给出定理1的应用：

先给出二维傅里叶级数的一些结果（和一维完全类似）：

定义：称 $(a_{mn},b_{mn},C_{mn},d_{mn})=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dxdy\,f(x,y)$

$(\cos mx\cos ny,\cos mx\sin ny,\sin mx\cos ny,\sin mx\sin ny)$

为 $[-\pi,\pi]^2$ 上可积函数 $f(x,y)$ 的傅里叶系数。

（1）令 $S_N(x,y)=\frac{a_{00}}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n}(a_{0n}\cos ny+b_{0n}\sin ny)$

$$+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k}(a_{m0}\cos mx+C_{m0}\sin mx)$$

$$+\sum_{m,n=1}^{N}(a_{mn}\cos mx\cos ny+b_{mn}\cos mx\sin ny+c_{mn}\sin mx\cos ny+d_{mn}\sin mx\sin ny)$$，则

$$S_N(x_0,y_0)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\sum_{m,n=1}^{2}f(x_0+(-1)^m x,\ y_0+(-1)^n y)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x\sin(N+\frac{1}{2})y}{4\sin x/2\sin y/2}$$

(2) 记 $\varphi(x,y)=\sum_{m,n=1}^{2}f(x_0+(-1)^m x,\ y_0+(-1)^n y)-4s$

则 $S_N(x_0,y_0)\to s \Leftrightarrow \int_0^\pi\int_0^\pi\varphi(x,y)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x\sin(N+\frac{1}{2}y)}{4\sin x/2\sin y/2}dxd$

定理2：若 $\varphi(x,y)=\varphi_1(x,y)x+\varphi_2(x,y)y$

$\varphi_i(x,y)\in C^*$　则 $S_N(x_0,y_0)\to s$.

证：由 C^* 的性质 3° 4° 及定理1即得。

推论1：若 $f(x,y)\in C^1[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$

则 $S_N(x_0,y_0)\to f(x_0,y_0)$.

证：令 $\varphi_1(x,y)=\dfrac{f(x_0+x,\ y_0+y)-f(x_0,y_0+y)}{x}$

$\varphi_2(x,y)=\dfrac{f(x_0,\ y_0+y)-f(x_0,y_0)}{y}$

则 $\varphi_1(x,y)x+\varphi_2(x,y)y$

$=f(x_0+x,y_0+y)-f(x_0,y_0)$

由Taylor展开知 $\varphi_i(x,y)\in C^1\subset C^*$，推论成立。

显见推论1只用到 $a=b=1$ 的情形。

别把数学想象得那么困难和艰涩；并认为它排斥常识；数学仅仅是常识一种微妙的形式。

—— Lord Kelvin

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

研究与讨论

关于Hardy不等式

831 陈计

Hardy不等式：若$P>1$，$a_n>0$，且$A_n=a_1+\cdots+a_n$，则

$$(1)\quad \sum_1^N\left(\frac{A_n}{n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_1^N a_n^p$$

1920年，G·H·Hardy首次证明了（1），1927，E·T·copson对此作了加权推广（参见〔1〕，pp.239～247）：

若$p>1$，$a_n>0$，$\lambda_n>0$，且$\Lambda_n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$，$A_n=\lambda_1a_1+\cdots+\lambda_na_n$，则

$$(2)\quad \sum_1^N\lambda_n\left(\frac{A_n}{\Lambda_n}\right)^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_1^N\lambda_na_n^p$$

本文证明了：当$p<0$时，（2）也成立。

引理1 设$a>0$，$b>0$，$pq<0$，且$p+q\neq0$，则

$$(3)\quad \frac{pa+qb}{p+q}\leq\left(a^pb^q\right)^{1/(p+q)}$$

证：不妨设$p/(p+q)<0$，则用加权的算术平均—几何平均不等式

$$\frac{-p}{p+q}a+a^{\frac{p}{p+q}}b^{\frac{q}{p+q}}\geq\left(\frac{-p}{p+q}+1\right)\left(a^{\frac{-p}{p+q}+\frac{p}{p+q}}b^{\frac{q}{p+q}}\right)^{1/\frac{q}{p+q}}$$

$$=\frac{q}{p+q}b。$$

移项即得不等式（3）。证毕。

引理2　若$a_n>0$，$b_n>0$，$1\le n\le N$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，

且$p<0$，则

$$(4)\qquad \left(\sum_{1}^{N} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{1}^{N} b_n^q\right)^{\frac{1}{q}}\le\sum_{1}^{N} a_n b_n$$

证：参见（2），第66页定理2。

下面我们在$p<0$时证明不等式（2）：现设$\alpha_n=A_n/\Lambda_n$，

则当$p<0$时

$$\lambda_n\alpha_n^p-\frac{p}{p-1}\lambda_n\alpha_n^{p-1}a_n$$

$$=\lambda_n\alpha_n^p-\frac{p}{p-1}(\ {}_n\alpha_n-\ {}_{n-1}\alpha_{n-1})\alpha_n^{p-1}$$

$$=\alpha_n^p(\lambda_n-\frac{\Lambda_n p}{p-1})+\frac{\Lambda_{n-1}p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1}$$

$$\ge\alpha_n^p(\lambda_n-\frac{\Lambda_n p}{p-1})+\frac{\Lambda_{n-1}}{p-1}((p-1)\alpha_n^p+\alpha_{n-1}^p)\ (\text{引理1})$$

$$=\frac{1}{p-1}(\Lambda_{n-1}\alpha_{n-1}^p-\Lambda_n\alpha_n^p)$$

因此

$$\sum_{1}^{N}\lambda_n\alpha_n^p-\frac{p}{p-1}\sum_{1}^{N}\lambda_n\alpha_n^{p-1}a_n$$

$$\ge-\frac{\Lambda_N\alpha_N^p}{p-1}>0$$

再用引理2

$$\sum_{1}^{N}\lambda_n\alpha_n^p>\frac{p}{p-1}\sum_{1}^{N}\lambda_n\alpha_n^{p-1}a_n$$

$$\ge\frac{p}{p-1}\left(\sum_{1}^{N}a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{1}^{N}\lambda_n\alpha_n^p\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

除以右边最末的因子，并乘p次幂，得

$$\sum_{1}^{N}\lambda_n\alpha_n^p<\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{1}^{N}\lambda_n a_n^p$$

对上式，我们先将p写成$1/P$，再把a_n写成a_n^p，就得到

定理　若$p<1$，$a_n>0$，$\lambda_n>0$，且$\Lambda_n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$，则

$$(5)\quad \sum_{1}^{N}\lambda_n\left(\frac{\lambda_1 a_1^p+\cdots+\lambda_n a_n^p}{\Lambda_n}\right)^{1/p}<\left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/p}\sum_{1}^{N}\lambda_n a_n$$

式中的常数是最佳的。

事实上，取$\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\cdots$，$a_n=1/n$，由极限

$$(6)\quad \lim\frac{\sum\limits_{1}^{N}\left(\frac{1+1/2^p+\cdots+1/n^p}{n}\right)^{1/p}}{\sum\limits_{1}^{N}(1+1/2+\cdots+1/n)}=\left(\frac{1}{1-p}\right)^{1/p}$$

即知常数是不可改进的。

在上述定理中，我们令$p\to 0$得

推论1　（Hardy，1925年）　条件同定理

$$(7)\quad \sum\lambda_n\left(a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\cdots a_n^{\lambda_n}\right)^{1/\Lambda_n}<e\sum_{1}^{N}\lambda_n a_n$$

特别地，取$\lambda_1=\cdots=\lambda_N$，得Carleman不等式

$$(8)\quad \sum(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}<e\sum_{1}^{N}a_n$$

（参见〔1〕，P.256，PP.249～250）。

在（1）中，置$p=-1$得

推论2　设$a_k>0$，$1\leq k\leq n$，则

$$(9)\quad \frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}<2\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$$

（参见本刊第27期问题5及〔3〕第二十五届（1964年）Putnam数学竞赛试题A－5

推论3（K.Knopp，1929年）设$a_n>0$，$1\le n\le N$，则

$$(10)\quad \sum_1^N\left(\log\frac{e^{1/a_1}+e^{1/a_2}+\cdots+e^{1/a_n}}{n}\right)^{-1}<2\sum_1^N a_n$$

（参见〔1〕，p.259）

证：用e^x的凸性得

$$\frac{e^{1/a_1}+e^{1/a_2}+\cdots+e^{1/a_n}}{n}\ge\exp\left(\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}\right)$$

取自然对数得

$$\log\frac{e^{1/a_1}+e^{1/a_2}+\cdots+e^{1/a_n}}{n}\ge\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}.$$

取倒数并求和得

$$(11)\quad \sum_1^N\left(\log\frac{e^{1/a_1}+e^{1/a_2}+\cdots+e^{1/a_n}}{n}\right)^{-1}\le\sum_1^N\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

再用定理在$p=-1$的情形，即得Knopp不等式。

推论4　记$\sigma_k=1/k^2+\cdots+1/n^2$，则

$$(12)\ \det\begin{pmatrix}4-\sigma_1 & -\sigma_2 & \cdots & -\sigma_n\\ -\sigma_2 & 4-\sigma_2 & \cdots & -\sigma_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -\sigma_n & -\sigma_n & \cdots & 4-\sigma_n\end{pmatrix}>0$$

证：在（1）中，置$p=2$，得

(13) $a_1^2+\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2$

$$<4\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\right)$$

或

$$(4-\sigma_1)a_1^2+(4-\sigma_2)a_2^2+\cdots+(4-\sigma_n)a_n^2$$

由此即知矩阵正定，所以其顺序主子式为正。

参考文献

〔1〕 G.H.Hardy, J.E.Littewood, G.polya, Inequalities. Second Edition 1952, 324pp.

〔2〕 D.S.密特利诺维奇著，解析不等式，张小萍，王龙译，科学出版社，1987年版，539页。

〔3〕 刘裔宏，许康，吴茂贵，魏力仁译，普特南数学竞赛，湖南科学技术出版社，1983年版，第354页。

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

域上有限维线性空间的一个特征性质

841 袁进勇 潘国华

本文给出有限维线性空间的一个特征性质，证明要用到下述引理

引理：V为域F上n（$n\geq3$）维线性空间，F不可数，V_1为其（n−1）维子空间，则∃不可数个不同的1维空间，作为V_1的直交补。

证明：取V_1的基为$\{e_1,\cdots,e_{n-1}\}$，扩为V的基：

$\{e_1,\cdots,e_{n-1},e_n\}$ 做向量：

$a_\lambda=e_1+\cdots+e_{n-1}+\lambda e_n$，$\lambda\in F$

则易知：$\lambda\neq\mu$时，$e_1+\cdots+e_{n-1}+\lambda e_n$与$e_1+\cdots+e_{n-1}+\mu e_n$线性无关$\forall\lambda\neq0\in F$：$\{e_1,\cdots,e_{n-1},e_1+\cdots+e_{n-1}+\lambda e_n\}$构成V的基，事实上：若 $t_1e_1+\cdots+t_{n-1}e_{n-1}+t_n(e_1+\cdots+e_{n-1}+\lambda e_n)=0$，则：$t_1=\cdots=t_{n-1}=-t_n$

$t_n\lambda e_n=0$ ∴ $t_n=0$ ∴ $t_1=\cdots=t_{n-1}=0$。

现在：令 $\mathrm{span}\{a_\lambda\}=V_\lambda$为$a_\lambda$生成的子空间。

则$\lambda\neq\mu$时$V_\lambda\neq V_\mu$，但$V_1\oplus V_\lambda=V_1\oplus V_\mu=V$ #

推论：对域F上n维（$n\geq3$）线性空间V，存在不可数个不同的（n−1）维子空间。

证：取$\{e_1,\cdots,e_n\}$为V的基，令$V_1=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_{n-2}\}$

$V_2=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_{n-2},e_{n-1}\}$，由引理存在不可数个不同的。

1维子空间 V_λ： $V_2 \oplus V_\lambda = V$

作 $\widetilde{V_\lambda} = V_1 \oplus V_\lambda$，易知 $\dim \widetilde{V_\lambda} = n-1$，且互不同。 #

定理1： 域F上有限维线性空间V，如果F不可数，则V不可表为一列真子空间的并，数域F上无限维线性空间V必可表为一列真子空间的并。

证明：1° 对 $\dim V$ 作归纳。

（1）$\dim V = 1$：显然

（2）$\dim V = 2$：如果存在V的真子空间序列 $V_1, V_2 \cdots$

使 $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ 取V的基 $\{\alpha, \beta\}$，对V的不可数子集

$M = \{\alpha + \lambda\beta \mid \lambda \in F\}$，必存在 V_i，V_i 含M中两个互异元素

$\alpha + \lambda_1\beta$，$\alpha + \lambda_2\beta$。则 $\alpha + \lambda_1\beta$，$\alpha + \lambda_2\beta$ 线性无关：

事实上，设 $t_1(\alpha + \lambda_1\beta) + t_2(\alpha + \lambda_2\beta) = 0$ ∵ $\{\alpha, \beta\}$ 为V的基

$$\therefore \begin{cases} t_1 + t_2 = 0 \\ t_1\lambda_1 + t_2\lambda_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 = -t_2 \\ t_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \end{cases} \qquad \because \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$\therefore t_1 = 0$，$t_2 = 0$

$\therefore V = \operatorname{span}\{\alpha + \lambda_1\beta, \alpha + \lambda_2\beta\} < V_i$ 这与 V_i 为真子空间矛盾。

设 $\dim V \leq K$ 时，结论成立，$K \geq 2$ 对 $\dim V = K+1$，假设 $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$，$V_n$ 为V的真子空间，现任取V的K维子空间

u：$u = u \cap V = \bigcup_{n=1}^{\infty}(V_n \cap u)$，如果 $V_n \cap u$ 均为u的真子空间则与归纳假设矛盾∴ $\exists n_0$：$V_{n_0} \cap u = u$ ∴ $V_{n_0} = u$ 但由推论：V的不同K维子空间个数不可数，这矛盾。

∴整个结论成立。

2°：$\dim V=\infty$：由选择公理，可取$\{\alpha_\nu \mid \nu\in I\}$为V的Haml基，I不有限，取其中可列个$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\cdots$剩下的记作$\{\alpha_\nu \mid \nu\in I'\}$，记$V_0=\mathrm{span}\{\alpha_\nu \mid \nu\in I'\}$

$V_1=V_0+\mathrm{span}\{\alpha_1\},\cdots,V_n=V_0\oplus\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\},\cdots$

易知：$V_0,V_1,\cdots$为V的真子空间，且$V=\bigcup_{i=0}^{\infty}V_i$ #

名人语录

有才能的人看到旁人做的事总是自信也能做，这其实不然，他总有一天会追悔浪费精力。

——歌德

最好的职业是专为那些只做他们的教授年轻时适合的工作的学生保留的。

——维纳

你现在应该做的事是积累取之不尽的资本。

——歌德

只有范围十分狭小的问题才能在方法上得到应有的透彻的研究。……但这对整个工作做来无益，因而又使能够胜在这项任务的人弃而不顾。

——伽罗瓦

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

广义Asgeirsson中量公式

数学系83级葛南祥

§1、引言

对于超双曲型方程的研究，由于方程本身的原因所做的工作都较零散而难以系统化。在本世纪三十年代，Asgeirsson对下型方程：

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}=0 \qquad (1)$$

得出了Asgeirsson中量公式，并用所得结果讨论了（1）型方程的cauchy问题及特征问题。后来，对（1）型的非齐次方程把推广了Asgeirsson公式，但这个推广形式的证明很难见到。本文，对（1）形非齐次方程证明Asgeirsson中量定理及中量公式的推广形式，对于下形方程：

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}-c^2u=f(x,y) \qquad (2)$$

的研究，目前尚无实质性的进展。最近，刘家沛在〔2〕中，证明m=3时（2）形方程的有关结论。下面先说明记号。

§2、记号及定理的证明

记：（V）：$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2\leq r^2 \quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leq s^2$

（s_1）：$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2 \quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2\leq s^2$

(S_2)：$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2<r^2$　$\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2$

（V）为2m维空间中的有界闭子集，s_1，s_2 为其边界。记：

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}=f(x,y) \qquad (3)$$

取u为（3）在（V）上的正规解，记：

$$M(r,s)=\int_{\Omega\beta}\cdots\int\int_{\Omega\alpha}\cdots\int u(x_i^0+r\alpha_i;y_i^0+s\beta_i)\,d\Omega\alpha\,d\Omega\beta \qquad (4)$$

称M(r,s)为（3）的解u的广义Asgeirsson中量，令

$$f_1(r,s)=\int_{\Omega\beta}\cdots\int\int_{\Omega\alpha}\cdots\int f(x_i+r\alpha_i;y_i^0+s\beta_i)\,d\Omega\alpha\,d\Omega\beta \qquad (5)$$

在（4）（5）中，$x_i-x_i^0=r\alpha_i$，$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2=1$

$$y_i-y_i^0=s\beta_i,\quad \sum_{i=1}^{m}\beta_i^2=1$$

$\Omega\alpha$，$\Omega\beta$ 为m维空间中的单位超球面

下面，我们简单导出M(r,s)所满足的偏微分方程。

记：$$Lu=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2} \qquad (6)$$

$$\tilde{L}v=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} \qquad (7)$$

由于：

$$vLu-u\tilde{L}v=\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\right) \qquad (8)$$

（8）式在（V）上积分，并用stokes公式，有：

$$\int_V\cdots\int(v\tilde{L}u-u\tilde{L}v)\,dx=\int_{(s)}\cdots\int\left(\Sigma\left(v\frac{\partial u}{\partial x_i}-u\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)\alpha i-\Sigma\left(v\frac{\partial u}{\partial y_i}-u\frac{\partial v}{\partial y_i}\right)\beta i\right)ds \quad (9)$$

在（9）式中，我们取u为（3）在（V）上的正规解，并取$v=1$，

则（9）式成为

$$\int_V\cdots\int f\,dx=\int_{S_1}\cdots\int\left(\Sigma\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha i-\frac{\partial u}{\partial y_i}\beta i\right)ds$$

$$+\int_{S_2}\cdots\int\left(\Sigma\frac{\partial u}{\partial x_i}\alpha i-\frac{\partial u}{\partial y_i}\beta i\right)ds \quad (10)$$

考虑到 $\alpha i=\dfrac{x_i-x_i^0}{r}$，$\beta i=\dfrac{y_i-y_i^0}{s}$，$i=1,2\cdots m$，

对（10）作适当的变换，即可推出：

$$\frac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\frac{m-1}{r}\frac{\partial M}{\partial r}-\frac{m-1}{s}\frac{\partial M}{\partial s}=f_1(r,s) \quad (11)$$

下面，我们考虑（11）的两个奇型cauchy问题的解：

$$\mathrm{I}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=f_1(r,s) & s>r>0\\ M|_{r=0}=g(s) \qquad s>r\geq 0 \quad g\in C^2 & \\ \dfrac{\partial M}{\partial r}\Big|_{r=0}=0 & \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases}\dfrac{\partial^2 M}{\partial r^2}-\dfrac{\partial^2 M}{\partial s^2}+\dfrac{m-1}{r}\dfrac{\partial M}{\partial r}-\dfrac{m-1}{s}\dfrac{\partial M}{\partial s}=f_1(r,s) & r>s>0\\ \dfrac{\partial M}{\partial s}\Big|_{s=0}=0 & \end{cases}$$

$$\left\{ M|_{s=0} = h(r),\quad r > s \geq 0,\ h\in C^2,\ h(0) = g(0) \right.$$

对于(11)式，我们作如下变换：

$$\xi = \frac{r+s}{2},\quad \eta = \frac{r-s}{2}$$，得到：

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta} + (m-1)\left(\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\eta} - \frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\xi}\right) = f_1(\xi+\eta,\xi-\eta) \tag{12}$$

我们用Riemann方法解Ⅰ，Ⅱ。先求出方程：

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta} + (m-1)\left(\frac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\eta} - \frac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\frac{\partial M}{\partial\xi}\right) = 0 \tag{13}$$

的Riemann函数，即解下述问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta} + (m-1)\left(\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi} - \dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\eta}\right) - (m-1)\dfrac{4\xi\eta}{(\xi^2-\eta^2)^2}M = 0 \\[2ex] M(\xi,\eta_0;\xi_0,\eta_0) = \left(\dfrac{\xi - \eta_0^2}{\xi_0^2-\eta_0^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \\[2ex] M(\xi_0,\eta;\xi_0,\eta_0) = \left(\dfrac{\xi_0^2 - \eta^2}{\xi_0^2-\eta_0^2}\right)^{\frac{m-1}{2}} \end{cases}$$

记上述问题解为$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)$．则：

$$R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \frac{(\xi_0^2-\eta^2)^{\frac{m-3}{2}}(\xi^2-\eta_0^2)^{\frac{m-3}{2}}(\xi^2-\eta^2)}{(\xi_0^2-\eta_0^2)^{m-2}} F\left(\frac{3-m}{2},\frac{3-m}{2},1,\sigma\right)$$

式中：F为超几何函数：

$$\sigma = \frac{(\xi_0^2-\xi^2)(\eta^2-\eta_0^2)}{(\xi^2-\eta_0^2)(\xi_0^2-\eta^2)}$$

利用迭加原理，Ⅰ可分解为：

$$
\mathrm{I}_a \begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1(\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\eta}-\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi})=0 \\ M(-\eta,\eta)=g(-2\eta),\ (\dfrac{\partial M}{\partial s}+\dfrac{\partial M}{\partial\eta})|_{\xi=\eta}=0 \end{cases}
$$

$$
\mathrm{I}_b \begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)(\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\eta}-\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi})=f_1(\xi+\eta,\xi-\eta) \\ M(-\eta,\eta)=0 \\ \dfrac{\partial M}{\partial\xi}+\dfrac{\partial M}{\partial\eta})|_{\xi^2-\eta}=0 \end{cases}
$$

对于 I_a ，我们考虑下述辅助cauchy问题来解之。此时，我们取 $\varepsilon>0$

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial^2 M}{\partial\xi\partial\eta}+(m-1)(\dfrac{\xi}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\eta}-\dfrac{\eta}{\xi^2-\eta^2}\dfrac{\partial M}{\partial\xi})=0 \\ M(-\eta+\varepsilon,\eta)=g(-2\eta+\varepsilon) \\ \dfrac{\partial M}{\partial\xi}+\dfrac{\partial M}{\partial\eta})|_{\xi=-\eta+\varepsilon}=0 \end{cases}
$$

此时，我们可用Riemann方法解 。积分区域如图一。

$$
M(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\{(MR)_{\substack{\xi=-\eta_0+\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+(MR)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=-\xi_0+\varepsilon}}\}
$$

$$
-\int_{-\xi_0+\varepsilon}^{\eta_0}\{(\frac{1}{2}(R\frac{\partial M}{\partial\eta}-M\frac{\partial R}{\partial\eta})+aMR)d\eta-
$$

$$
-(\frac{1}{2}(R\frac{\partial M}{\partial\xi}-M\frac{\partial R}{\partial\xi})+bMR)d\xi\}_{\xi=-\eta+\varepsilon}
$$

式中：$a=\perp\dfrac{(m-1)\eta}{\xi^2-\eta^2}$ ， $b=\dfrac{(m-1)\xi}{\xi^2-\eta^2}$

作变换：$\eta^2=\eta_0^2+\{(-\xi_0+\varepsilon)^2-\eta_0^2\}x$，（$\eta<0$），有

$$M(\xi_0,\eta_0)=\frac{1}{2}\{(MR)_{\substack{\xi=-\eta_0+\varepsilon\\ \eta=\eta_0}}+(MR)_{\substack{\xi=\xi_0\\ \eta=-\xi_0+\xi}}\}$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1\{M(-\frac{1}{2}(\frac{\partial R}{\partial\xi}+\frac{\partial R}{\partial\eta})+(a+b)R)\}\frac{(\xi_0-\varepsilon)^2-\eta_0^2}{\sqrt{\eta_0^2+((\xi_0-\varepsilon)^2-\eta_0^2)x}}dx$$

上式中，令 $\varepsilon\to 0^+$ ，即得 I_a 的解：

$$M_{Ia}(\xi_0,\eta_0)=\frac{p(m-1)}{p^2(\frac{m-1}{2})}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}g(2\sqrt{\eta_0^2+(\xi_0^2-\eta_0^2)x})dx$$

从而：

$$M_{Ia}(r,s)=\frac{p(m-1)}{p^2(\frac{m-1}{2})}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}g(\sqrt{(r-s)^2+4rsx})dx$$

对于 I_b，直接用Riemann方法，即可得解为：

$$M_{Ib}(\xi_0,\eta_0)=\iint_{D_2'} f_1(\xi+\eta,\xi-\eta)R(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0)d\xi d\eta$$

D_2' 如图2

从而：$$M_{Ib}(r,s)=\frac{1}{2}\iint_{D_3} f_1(x,y)R(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2};\frac{r+s}{2},\frac{r-s}{2})dxdy$$

D_3 如图3

从而：$$M_I(r,s)=\frac{p(m-1)}{p^2(\frac{m-1}{2})}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}g((r-s)^2+4rsx)dx$$

$$+\frac{1}{2}\iint_{D_3} f_1(xy)R(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2};\frac{r+s}{2},\frac{r-s}{2})dxdy \quad (14)$$

对于Ⅱ，作如下变换：

$r_1=s$，$s_1=r$，则问题Ⅱ成为Ⅰ形问题，但此时 f_1 符号改

变，从I的解，得：

$$M_{II}(r,s)=\frac{p(m-1)}{p^2(\frac{m-1}{2})}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}h(\sqrt{(r-s)^2+4rsx})\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\iint_{D_4} f_1(x,y)R(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2};\frac{r+s}{2},\frac{r-s}{2})\,dxdy \quad (15)$$

D_4 如图4

下面，我们建立（3）的中量公式：

$r=s$ 时，要求 $M_I(r,s)=M_{II}(r,s)$，此即：

$$\frac{p(m-1)}{p^2(\frac{m-1}{2})}\int_0^1 x^{\frac{m-3}{2}}(1-x)^{\frac{m-3}{2}}(h(2r\sqrt{x})-g(2r\sqrt{x}))\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{\substack{x=0\\ y=0\\ x+y\leq 2r}} R(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2};r,0)f_1(x,y)\,dxdy \quad (16)$$

从而，我们得到如下推广的Asgeirsson定理：

定理：设（V）为 R^{2m} 中 $X=(x_1,\cdots,x_m)$，$y=(y_1,\cdots,y_m)$ 的积空间中的闭单连通区域。$u(x,y)$ 为（3）在（V）内的正规解，$(x_1^0,\cdots,x_m^0;y_1^0,\cdots,y_m^0)$ 为（V）内任一点，t_0 为使区域。

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2}\leq t_0$$

整个含在（V）内的正数，则，r，s为适合 $r+s\leq t_0$ 的任一对正数时，u在：

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i-x_i^0)^2=r^2,\quad \sum_{i=1}^{m}(y_i-y_i^0)^2=s^2$$

上的广义 Asgeirsson 中值为：

$$M_{I}(r,s)=M_{Ia}(r,s)+M_{Ib}(r,s) \qquad (s\geq r\geq 0)$$

$$M_{II}(r,s)=M_{IIa}(r,s)+M_{IIb}(r,s) \qquad (r\geq s\geq 0)$$

且关于（3）在（V）内的正规解u，有公式（16）成立。

§3 公式（16）的应用

在公式（16）中，我们做如下变换：

$$2r\sqrt{x}=\sqrt{t},\quad 2r=\sqrt{\rho}$$，则：

$$\int_0^{\rho} t^{\frac{m-3}{2}}(\rho-t)^{\frac{m-3}{2}}\left[f(\sqrt{t})-g(\sqrt{t})\right]dt$$

$$=\frac{p^2(\frac{m-1}{2})}{\partial p(\frac{m-1}{2})}\rho^{m-2}\iint\limits_{\substack{x=0\\ y=0\\ x+y\leq\sqrt{\rho}}} R\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2},\frac{\sqrt{\rho}}{2},0\right)f_1(x,y)\,dx\,dy \qquad (17)$$

我们记（17）式右端的函数为 $F(\rho)$（$m\geq 3$）

a、m 为奇数时，（17）式两边对ρ求导$\frac{m-3}{2}$次：

$$f(\sqrt{\rho})-g(\sqrt{\rho})=\frac{1}{(\frac{m-1}{2})!}\rho^{\frac{3-m}{2}}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{d^{\frac{m-3}{2}}F(\rho)}{d\rho^{\frac{m-3}{2}}}\right) \qquad (18)$$

b、m 为偶数时，（17）式两边对ρ求$\frac{m-3}{2}$次导：

$$\int_0^{\rho}\frac{t^{\frac{m-3}{2}}\left[f(\sqrt{t})-g(\sqrt{t})\right]}{(\rho-t)^{\frac{1}{2}}}dt=\frac{1}{(\frac{m-2}{2})}\frac{d^{\frac{m-2}{2}}F(\rho)}{d\rho^{\frac{m-2}{2}}} \qquad (19)$$

（19）式为－AbCl 型积分方程，记右端函数为 $F_1(\rho)$，则由（3），得：

$$f(\sqrt{\rho})-g(\sqrt{\rho})=\frac{\rho^{\frac{3-m}{2}}}{\pi}\left(\int\frac{F_1'(t)}{\rho-t}\,dt+F_1(0)\rho^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (20)$$

在(18),(20)中,令f=0,则得到通常Asgeirsson中量公式,因而,(16)、(18)、(19)均为Asgeis-son中量公式的推广。

有意义的是m=3,且u、f均与x_2,x_3无关时,由以上公式出发,我们能够得到通常波动方程的poisson公式。更一般地,对于下述方程:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}-\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}=f(x,y) \quad (n<m) \qquad (21)$$

我们只需对u取上m-1个虚拟自变量$x_{n+1},\cdots x_m$,从而可用所得到的公式来得出(21)型方程的广义Asgeirsson中量公式。

更进一步的问题即是:对于(2)形的方程,讨论c≠0时的广义Asgeirsson中量公式。同时,若能用本文的几个公式构造出(3)型泛定方程的一般形式的解,也很值得注意。关于这方面的材料,〔1〕中比较详细。关于超双曲型方程的研究现状,魏岭在(4)中讲得较为详细,有兴趣的不妨找来一看。下面是本文中出现的几个积分区域。

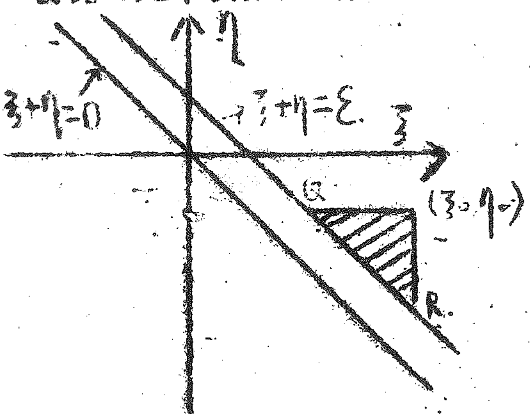


图1

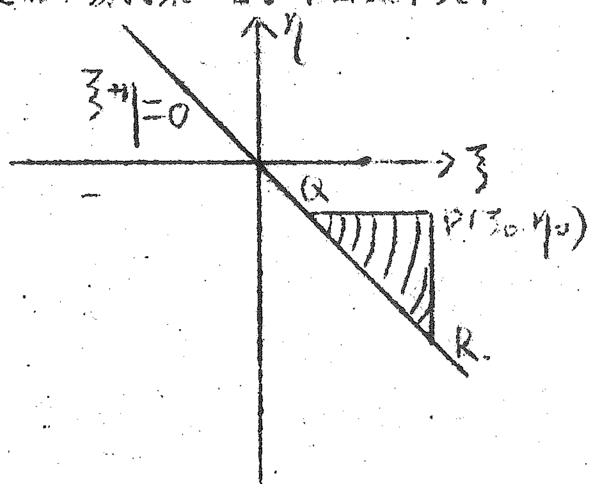


图2

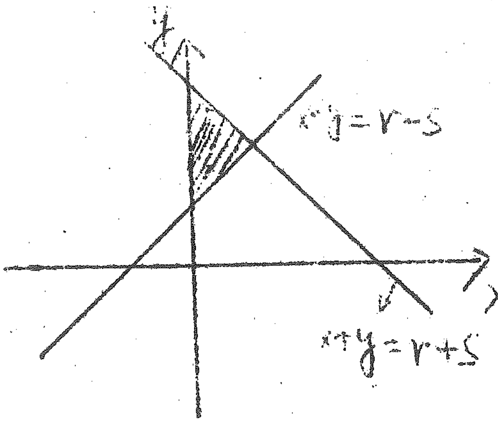


图8

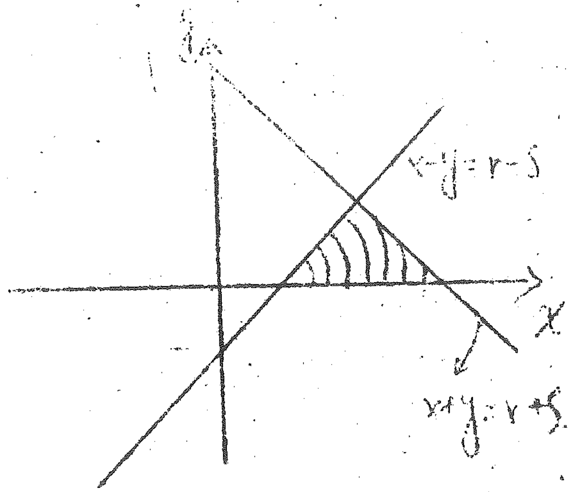


图9

作者衷心感谢陈祖墀老师的热情指导。

参考文献

〔1〕、courant-Hilbert，数学物理方法，II、科学出版社，1977年版。

〔2〕、刘家琦 Huyghens原理在超双曲型方程的推广，数学年刊，8A(1)，1987。

〔3〕、陈传璋等，积分方程论及应用，上海科学技术出版社，1987年版。

〔4〕、凌岭，超双曲型方程，西北大学学报，1 (1979)

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

从一道数学竞赛题谈起

——用推广的方法解题

851 钟晓

1980年，芬兰、英国、 牙利和瑞典四国联合举行的数学竞赛中，有这样一道试题：

例1、设数列a_0、a_1，…，a_n满足$a_0=\frac{1}{2}$及$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$（$k=0$，1，2，…），其中n是一个给定的正整数，试证$1-\frac{1}{n}<a_n<1$。

本题是该次竞赛中得分最低的一道试题，命题人所给的解法也相当繁锁，前后共用了四项数学归纳法，译成中文后有四千多字，长达七页之多。让我们看看下面的证明。

证：由于$a_1=a_0+\frac{1}{n}a_0^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}=\frac{2n+1}{4n}$，

所以有$\frac{n+1}{2n+1}<a_1<\frac{n}{2n-1}$。我们用数学归纳法证明：

对一切$1\leq K\leq n$，都有：

$$\frac{n+1}{2n-K+2}<a_K<\frac{n}{2n-K} \qquad (*)$$

假设（*）对$K<n$成立，则：

$$a_{K+1}=a_K(1+\frac{1}{n}a_K)<\frac{n}{2n-K}(1+\frac{1}{2n-K})=\frac{n(2n-K+1)}{(2n-K)^2}$$

$$<\frac{n}{2n-(K+1)}$$

$$a_{K+1}=a_K+\frac{1}{n}a_K^2>\frac{n+1}{2n-K+2}+\frac{(n+1)^2}{n(2n-K+2)^2}$$

$$=\frac{n+1}{2n-K+1}-\frac{n+1}{(2n-K+2)(2n-K+1)}+\frac{(n+1)^2}{n(2n-K+2)}$$

$$=\frac{n+1}{2n-(K+1)+2}+\frac{n+1}{2n-K+2}\left(\frac{n+1}{n(2n-K+2)}-\frac{1}{2n-K+1}\right)$$

$$>\frac{n+1}{2n-(K+1)+2}$$

由上面二式知（ * ）对 $K+1\leq n$ 仍成立，所以（ * ）对一切 $K=1, 2, \cdots, n$ 成立。

在（ * ）式中取 $K=n$，即得：

$$1-\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n+2}<a_n<\frac{n}{n}=1 \qquad \#$$

从上可知，我们的证明主要是把要证的结论"$1-\frac{1}{n}<a_n<1$"推广为"$\frac{n+1}{2n-K+2}<a_k<\frac{n}{2n-K}$"，从而用数学归纳法很容易给出了此题的证明，这种常用的，巧妙的解题方法就是所谓的推广，亦即加强命题，——证明一个比原命题更强的命题，看来似乎荒谬，可事实上，当把一个问题推广后，它常会变得更简单，更易处理和更好理解。实际上，抽象和推广正是现代数学的基本特征。我们再看看下面几个例子。

例2、$\sqrt[3]{60}$ 与 $2+\sqrt[3]{7}$ 哪个大？

解：如果把每个数求立方，得到的结果会很复杂，不易解决。我们推广命题，考虑一个更一般的问题：$\sqrt[3]{4(x+y)}$ 与 $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}$ 哪个大？$x>0$，$y>0$。

$$f(x,y)=\left(\sqrt[3]{4(x+y)}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3$$

$$=3(x+y)-3\sqrt[3]{xy}\,(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$$

$$=3(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2})>0$$

$$\therefore \sqrt[3]{4(x+y)}>\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y} \qquad (x, y>0)$$

令 $x=8$ ， $y=7$ 即得：

$$\sqrt[3]{60}>2+\sqrt[3]{7}$$

例3（1978年普特兰数学竞赛试题）

计算 $\displaystyle\int_0^{\infty}(\mathrm{arctg}(\pi x)-\mathrm{arctg}x)/x\,dx$

解：若直接计算，会很复杂，读者不妨试试，现在我们考虑更一般的积分：

$$F(a)=\int_0^{\infty}(\mathrm{arctg}(ax)-\mathrm{arctg}x)/x\,dx \qquad a\geq 0$$

在上面等号二边对a求导数，得

$$F'(a)=\int_0^{\infty}\frac{1}{1+(ax)^2}dx=\frac{\pi}{2a}$$

二边对a积分：

$$F(a)=\frac{\pi}{2}\ln a+c$$

由于 $F(1)=0$ ，得 $c=0$ ，于是 $F(a)=\dfrac{\pi}{2}\ln a$

（$a\geq 0$），令 $a=\pi$ 即得

$$F(\pi)=\int_0^{\infty}(\mathrm{arctg}(\pi x)-\mathrm{arctg}x)/x\,dx=\frac{\pi}{2}\ln\pi 。$$

一题一议

一道普特南数学竞赛题的初等解法

861 叶晖

美国第二十五界普特南数学竞赛中的B－3题（附后）。〔1〕中转载了美国数学协会1980年出版的单行本中的一种解法，由于该解法要用到“贝尔·范畴定理”，大学低年级学生不易看懂，本文给出了一种纯微积分的解法，供读者参考。

原题：设$f(x)$是定义在全体实数上的连续函数，且对于$\forall\varepsilon>0$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(n\varepsilon)=0$ $(n\in N)$

求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

证明：（反证法）

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\neq0$，则$\exists\delta>0$，及$x_n\to+\infty$，使$|f(x)|>\delta$对$n\in N$成立。因$f$连续，故对每个$x_n$，$\exists$一个闭区间$I_n$，$x_n\in I_n^{\circ}$，且当$x\in I_n$时，有$|f(x)|>\delta$，$(n\in N)$

不妨设$x_n>0$，$I_1=[a_0,b_0]$，且$a_0>0$

现考虑区间族$\{[na_0,nb_0]:n\in N\}$，$\because$当n充分大时，有$nb_0>(n+1)a_0$，所以存在一个$c_1>0$，使得$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[na_0,nb_0]\supseteq[c_1,+\infty)$。

$\because x_n\to+\infty$，$\therefore\exists x_k$，必与$\{[na,nb]:n\in N\}$中的某个$[N_1a_0,N_1b_0]$相交，令$[a_1,b_1]=[N_1a_0,N_1b_0]\cap I_{k_1}$，

于是$\left(\frac{a_1}{N_1},\frac{b_1}{N_1}\right)\subseteq(a_0,b_0)$，且对于$x\in\left(\frac{a_1}{N_1},\frac{b_1}{N_1}\right)$，有

$|f(x)|>\delta$，及$|f(N_1x)|>\delta$；

下面考虑另一个区间族$\{(na_1,nb_1):n\in N\}$

又n充分大时，$\bigcup_{n=1}^{\infty}(na_1,nb_1)\supseteq(c_2,+\infty)$，$(c_2>c_1)$

$\therefore\exists x_{k_2}>c_2$，$\therefore I_{k_2}$必与某一个$(N_2a_1,N_2b_1)$相交。$(N_2\geq 2)$

令$(a_2,b_2)=(N_2a_1,N_2b_1)\cap I_{k_2}$，于是$\left(\frac{a_2}{N_2},\frac{b_2}{N_2}\right)\subseteq(a_1,b_1)$

即$\left(\frac{a_2}{N_1N_2},\frac{b_2}{N_1N_2}\right)\subseteq\left(\frac{a_1}{N_1},\frac{b_1}{N_1}\right)\subseteq(a_0,b_0)$，当$x\in\left(\frac{a_2}{N_1N_2},\frac{b_2}{N_1N_2}\right)$时，有$|f(x)|>\delta$，$|f(N_1x)|>\delta$，$|f(N_1N_2x)|>\delta$

如此进行下去，得$\{(a_e,b_e):e=1,2\cdots\}$，且

$(a,b)\supseteq\left(\frac{a_1}{N_1},\frac{b_1}{N_1}\right)\supseteq\cdots\supseteq\left(\frac{a_{e-1}}{N_1\cdot N_2\cdots N_{e-1}},\frac{b_{e-1}}{N_1\cdot N_2\cdots N_{e-1}}\right)\supseteq$

$\left(\frac{a_e}{N_1\cdot N_2\cdots N_e},\frac{b_e}{N_1\cdot N_2\cdots N_e}\right)\supseteq\cdots$，由区间套定理可知，

必有$\xi\in\left(\frac{a_e}{N_1N_2\cdots N_e},\frac{b_e}{N_1N_2\cdots N_e}\right)$，$e=1,2,\cdots$

根据(a_e,b_e)的定义，可知$|f(\xi)|>\delta$，$|f(N_1\xi)|>\delta$，$\cdots$，$|f(N_1N_2\cdots N_e\xi)|>\delta$，$(e=1,2,\cdots,)$，即

$|f(n\xi)|$有子列大于δ，这与$\lim\limits_{n\to\infty}f(n\xi)=0$矛盾。　证毕

从原命题，人们不禁会有如下猜想：

猜想：$f(x)$连续，$(x\in R)$，且对于$\forall\varepsilon>0$，有

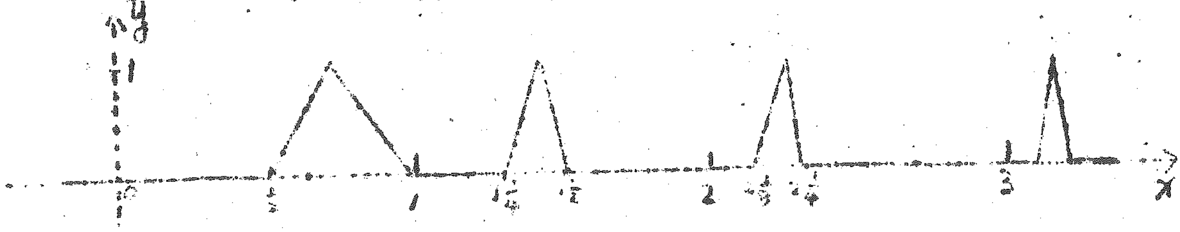
$\lim\limits_{n\to\infty}f(n+\varepsilon)=0$，$(n\in N)$，问是否有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$？

回答是否定的，下面给出反例：

某个f(x)有如下性质：i）在每个$\left(n+\frac{1}{2^{n+1}},\ n+\frac{1}{2n}\right)$上连续，端点取值为0，最大值达到1，n＝0，1，2，…；(ii)在其它地方，f取值均为0。

易知f满足猜想的条件，但$f(x)\nrightarrow 0$，$(x\to+\infty)$

f(x)的简图：(实线部分)



参考文献

〔1〕 普特南数学竞赛，(1938－1980)。湖南科学技术出版社(1983)。

一个整系数多项式习题的改进

831　祝光建

线性代数教科书〔1〕有这样一道习题：

习题：设整系数多项式f(x)在x的4个不同的整数上取值为+1，则f(x)在x的任何整数值上不能取值－1。

课本最初将“4个不同整数”误印为“3个不同整数”，这是错误的，如整系数多项式

$$f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)+1$$

在x＝－1，1，－2处取值＋1，在x＝0处取值－1。

我们指出，在“4个整数点取值+1”这个条件相当强，可以适当减弱，实际上，我们有如下改进命题：

命题1 设整系数多项式$f(x)$在两个距离不小于4的整数点上取值+1，则$f(x)$在x的任何整数值上不能取值−1。

证明：设$f(x)$在整数点a，b取值+1，$|a-b|\geq 4$，由欧氏除法算式知，存在整系数多项式$q(x)$使

$$f(x)=q(x)(x-a)(x-b)+1$$

和$f(x)$在整数点$x=c$上取值−1，则有

$$q(c)(c-a)(c-b)=-2$$

$|c-a|$，$|c-b|$只能取值1，2，且不可能同时取2，从而

$$|a-b|\leq|c-a|+|c-b|\leq 3$$

与已知条件

$$|a-b|\geq 4$$

矛盾。 证毕

最后，我们指出，“距离不小于4”不可再改小，参见前面所举例。

我们指出尽一步的推广

命题2 设整系数多项式$f(x)$在两个整数上取值c，则$f(x)$在某整数上取整数值d，$d\neq c$的必要条件是两个整数a、b的距离不大于$|d-c|+1$，即

$$|a-b|\leq|d-c|+1$$

证明类似。

命题3 设整系数多项式$f(x)$在n个连续整数上取值c，则$f(x)$在某整数上取整数值$d(\neq c)$的必要条件是$n!$为$|d-c|$的因子。

证明时，注意到n!为任意n个连续整数之积的因子即可。

利用命题1或命题2，以及命题3即得习题解答。

参考文献

〔1〕 李炯生编，《线性代数·上册》，P.44.

……我们对自己学习过的东西，归根到底只有能在实践中运用得上的那一部分才记得住。 ——歌德

仅仅坐下来死读，我可不行，虽尽了努力，我还是往往边读边忘。可是如果我为了做什么事而需学习的话，我就什么都能学懂，而且确实学会很好地应用它。

——Persi Diaconis

我从数学课中学到了一些东西，但更多的还是得力于所谓的延迟理解，即原来已听到一些概念，有了一些印象，但在当时还不能理解其意义，直到后来才豁然贯通。

——维纳

如果一个年青人感到他不适应这个世界，或者说他本能的工作方式十分异常，他无须过分担忧。

—— J.E.Littlewood

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

域上n次不可约多项式的存在性

831　任金江

学过有限域的人知道：有限域上任意次的不可约多项式都存在。又知：实数域上只有二次和一次的不可约多项式，反过来可以考虑这样的问题：设M是自然数集合的一个子集合，$1\in M$，问对什么样的M，存在一个域F，使得F上存在n次不可约多项式当且仅当$n\in M$。于是我们知道$M=N$和$M=\{1,2\}$时，答案是肯定的。

设W为全体素数的集合，L为W的一个子集，$K=\{P_1^{r_1}P_2^{r_2}\cdots P_n^{r_n}\mid P_i\in L\ \ r_i$非负整数$1\leq i\leq n\}$下面的定理表明，对于这样的集合K，答案肯定。

定理：对于上面的K，存在域F，使得F上存在n次不可约多项式当且仅当$n\in K$。

证明：只证$L=\{P\}$，P为素数的情形，此时$K=\{P^l\mid l$为非负整数$\}$。令$F=\bigcup_{P\nmid N,\underline{N\geq 1}} F_2N$；则易证F是一个域。设f为F上一个$mP^l$次不可约多项式。其中$P\nmid m$。若$m\neq 1$，设$F_2N$为包含f的全部系数的域，那么$F_2Nmpl$包含f的全部根。而$F_2Nmp^l$是$F_2Nm$的$P^l$次扩域，若存在一个根$\alpha\,\bar{\in}\,F_2Nm$，设g为$\alpha$在$F_2Nm$上的极小多项式，则g的次数不大于$P^l$，而$g\mid f$与f不可约矛盾。所以$m=1$。即f的次数为$P^l$。

又设f是F_2上一个P^l次不可约多项式，若f在F上可约，那存在一个N（$P\nmid N$）使得f在F_2N上可约因子g的次数一定有P^r

形式，其中r为0或正整数，设α为g的一个根，那么$F_{2}N(\alpha)=F_{2}Np^{r}$，$F_{2}(\alpha)=F_{2}p^{l}$，而$F_{2}N(\alpha)\supset F_{2}(\alpha)$，于是$p^{l}\mid Np^{r}$，但$p\nmid N$，故$l=r$。这说明$f=g$，于是f在F上是不可约的。

更进一步的对这个问题进行讨论，是一件较为困难的事情，即使对于$M=\{1,P\}$，P为素数的情形，也还是不知道满足问题条件的域存在与否。或许这与这样一个问题有关：给定一个域，问这域有什么性质时，存在这域的一个子域，使得它是它的子域的n次单广张。

参考文献

〔1〕Rudalf Lidl and Haiald Niede eiter 《Finite Fields》，1983，755 p

〔新闻〕

安徽省科协最近表彰了一批优秀学术论文，我系有两篇荣获1985、1986年度优秀学术论文一等奖：

1、陈登远，李翊神，曾云波，非线性发展方程的转换算子及其等价类。

2、张贤科，阿贝尔数域三种域的简单构作数域三种域方面的反例与改正。

蛙鸣问题和解答

编者按：本栏自第26期起对问题统一编号，未解的问题以（*）表示，每期问题数目暂不限定。欢迎广大师生提供一些自己想交流的问题。

问题12　设p，q都是自然数，证明：把排列（$q+1$，…，$p+q$，1，2，…，q）换成（1，2，…，$p+q$）所需的最少对换次数是$p+q-(p,q)$。这里(p,q)表示p和q的最大公约数。

（单墫　余红兵　提供）

问题13　设$a_1,\cdots,a_m,\cdots,b_1,\cdots,b_m$皆为正数，$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{i=1}^{m}b_i$，则

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\ln\frac{a_i}{b_i}\geq 0$$

等号当且仅当$a_i=b_i$，$i=1,2,\cdots,m$时成立。

（831　何明秋　提供）

问题14　取定数列$a_{n+2}=a\cdot a_{n+1}+b\cdot b_n$（$n\geq 1$）的初始项$a_1$，$a_2\in Z$，使得$a_2^2\neq a_1a_3$。若$a_n\in Z$，则$a$，$b\in Z$。

（851　罗承辉　提供）

问题15　设A是任意方阵。则与A可交换的所有矩阵只能是其多项式的充要条件是A的极小多项式就是其特征多项式。

（861研　印林生提供）

问题16　设$E_i\subset(0,1)$，E_i都是勒贝格可测集，且

$mE_i \geq \alpha$，$0 \leq \alpha \leq 1$。证明：

1）。任给 $\varepsilon > 0$，存在 E_i，E_j，$i \neq j$，使 $m(E_i \cap E_j) > \alpha^2 - \varepsilon$。

2）。存在 E_{i_1}，E_{i_2}，…，$i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots$ 使得 $m(E_{i_j} \cap E_{i_l}) > \alpha^2 - \varepsilon$，$l \neq j$。

（861研　余红兵　提供）

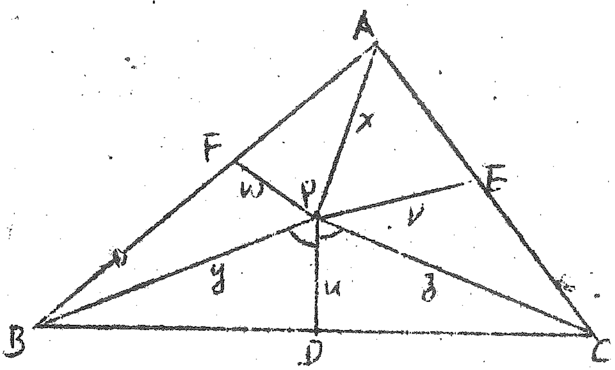
问题17* 在所有单位面积的凸五边形中，求

1）。五条对角线所围成小五边形面积的最大值。

2）。五角星面积的最小值。

（陈计　何明秋　提供）

问题18* 如图，ΔABC 内一点P到三顶点的距离为 x，y，z；$\angle BPC$，$\angle CPA$ 和 $\angle APB$ 的平分线长分别为 u，v，w，当 $0 < k < 1$ 时，证明或否定



$$x^k + y^k + z^k \geq 2^k (u^k + v^k + w^k)$$

（上海市敬业中学　沈刚　提供）

问题19　设 $0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_k \leq y_1 \leq \cdots \leq y_n \leq x_{k+1} \leq \cdots \leq x_m$，若 $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$，证明：

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}$$

（831　陈计　提供）

问题20* s_1，s_2 为n阶循环群 s_n 内两个子群，对 s_n 的

任一个子群 G 及 n 阶方阵 A，定义 $d_G(A)=\sum\limits_{\sigma\in G}\varepsilon(\sigma)\prod\limits_{j=1}^{n}a_{j\sigma(j)}$

（$\varepsilon(\sigma)$ 表示 σ 的置换符号），若 $\forall$ 正定Hermite方阵（n 阶）

A 均有 $d_{S_1}(A)\geq d_{S_2}(A)$，问是否必有 $S_1<S_2$（即 S_1 为 S_2

的子群）？

（831　李广兴　提供）

问题21* 球面上五个点，怎样分布时，诸点间所有（直线）距离之和最大？

（侯晓荣　老师　提供）

问题22* 设 $A\geq 0$，$B\geq 0$，证明或否定

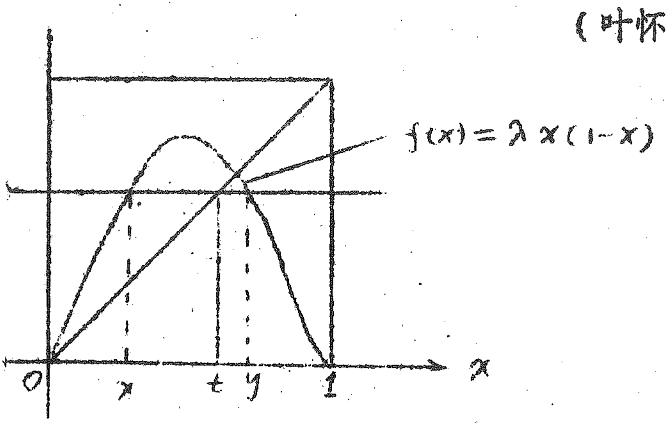
$$\mathrm{diag}(AB)\prec_{\omega}\lambda(A)\circ\mu(B)$$

式中，谱 $\lambda(A)=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$，$\mu(B)=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$，$\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_n$。

（李炯生　老师　提供）

问题23* 设 $f(x)=\lambda x(1-x)$，$0\leq x\leq 1$（如图）。问当参数值 $3.3\leq\lambda\leq 4$ 时，是否有 $[0,1]$ 上不减的连续函数 $g(t)$ 满足 $g(0)=0$，$g(1)=1$，$g(t)=g(x)+1-g(y)$。此处 $0\leq x\leq y\leq 1$ 是方程"$t=\lambda x(1-x)$"的两个根（$0\leq t\leq\frac{\lambda}{4}$）。

（叶怀安　老师　提供）



·解 答·

问题4（第26期）：k为域，定义R为：

$R=\{f(x)\in k[x]$：f为首一多项式，$(f,f')=1\}$，在R上定义$f\odot g=(f,g)$，$f\oplus g=[f,g]/(f,g)$，其中（ ）指最大公因子，[ ]指最小公差倍数，则$(R,\oplus,\odot)$为环。

证明：（841 王岚）：令$s=\{f(x)\in k$，$f(x)$不可约$\}$

每个$f\in R$可唯一分解为无重因子的s中元素之积

故可定义 $\phi: R\to P^*(s)$

$$f=f_1\cdots f_r\to\{f_1,f_2\cdots,f_r\}$$

$P^*(s)$是s的有限子集形成的集，则ϕ是双射

易验证 $f\odot g=\phi(f)\cap\phi(g)$ 集之交

$f\oplus g=\phi(f)\Delta\phi(g)$ 集之对称差

又$(P^*(s),\cap,\Delta)$成环，故$(R,\odot\ \oplus)$成环。 #

——详自美国《数学月刊》

（浙江省镇海石油化工总厂职工中等专业学校教师钱义光同志也给出了证明）。

问题5（第27期，余红兵提供）设$a_i>0$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+\cdots+a_n}<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$ 且常数2是最佳的。

证明：（提供者）第一步：论证的关键在于看出假如不等式已被证明，则右端的常数2是最佳的（即不能换成更小的数）

这只要取$a_i=\lambda_i$（$i=1,\cdots,n$，λ是正数），并注意$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sim\log n$即可。

第二步：由上面可知，$a_i=\lambda_i$ 是一种临界状况"，我们需要刻划这个临界状况，即给予 a_i 和 λ_i 的"离差"的描述。这可用 Cauchy 不等式实现如下：

由 Cauchy 不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i}{\sqrt{a_i}}\sqrt{a_i}\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right)\sum_{i=1}^{k}a_i$$

等号当且仅当 $\dfrac{i}{\sqrt{a_i}}\Big/\sqrt{a_i}=\lambda$ $(i=1\cdots k)$ 即 $a_i=i\lambda$ $(i=1\cdots k)$ 时成立。这里 $1\le k\le n$。

即 $$\sum_{i=1}^{k}a_i\ge\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right)^{-1}\frac{k^2(K+1)^2}{4}$$

至此，我们已看到了一个极好的征兆。

第三步：完成证明。这里需要一个很小的技术——即将左端细致地"放大"，（否则右端的常数将是4）

设左边的和为 s，则

$$2s<\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{a_1+\cdots+a_k}<4\sum_{k=1}^{k}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right)$$

$$=4\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\quad\text{（交换和号）}$$

$$=4\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{a_i}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)<4\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

从而 $$s<2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$ 证毕

（831的陈计同学给出了问题5的一个自然的拓广，参见本期《关于 Hardy 不等式》一文）

问题9（第27期，韩文[illegible]提供）设$A_1,\cdots A_n$为同阶的正定对称实方阵，则$tr(A_1A_2\cdots A_n)\le\frac{1}{n}(trA_1^n+trA_2^n+\cdots+trA_n^n)$

证明（提供者）：过程如下：

引理：若$\frac{1}{2n}tr\sum_{k=1}^{2n}(X_kX_k')^n\ge trX_1'X_2\cdots X_{2n}$对于任意实方阵$X_k(1\le k\le 2n)$成立，则$\frac{1}{4n}tr\sum_{k=1}^{4n}(Y_kY_k')^{2n}\ge Y_1'Y_2\cdots Y_{4n}$对于任意实方阵$Y_k(1\le k\le 4n)$也成立。

证：由已知，对于任意对称实方阵$x_i(1\le i\le 2n)$有

$$tr\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n}X_i^{2n}\ge trX_1\cdots X_{2n}.\ 取X_i=\begin{cases}A & 2\nmid i\\ B & 2\mid i\end{cases}$$

则$trA^{2n}+trB^{2n}\ge 2\,tr(AB)^n$

$$故\ \frac{1}{4n}tr\sum_{k=1}^{4n}(Y_kY_k')^{2n}=\frac{1}{4n}tr\sum_{i=1}^{2n}((Y_{2i-1}Y_{2i-1}')^{2n}+(Y_{2i}Y_{2i}')^{2n})$$

$$\ge\frac{1}{2n}tr\sum_{i=1}^{2n}(Y_{2i}Y_{2i-1}'Y_{2i}Y_{2i}')^n=$$

$$\frac{1}{2n}tr\sum_{i=1}^{2n}(Y_{2i-1}'Y_{2i}(Y_{2i-1}'Y_{2i})')^n$$

$\ge trY_1'Y_2Y_3'\cdots Y_{4n}$（注意$tr(XX')^n=tr(X'X)^n$）□

由于$(A-B)(A-B)'\ge 0$ ∴ $trAA'+trBB'\ge 2\,trA'B$

从而不难看出$\frac{1}{n}tr\sum_{i=1}^{n}A_i^n\ge trA_1A_2\cdots A_n$，当$n=2^m$，$A_i$实对称时成立（$m\in Z^+$）。

问题的证明：由$\frac{1}{2^m}+tr\sum_{k=1}^{2^m}X_k^{2^m}\ge trX_1X_2\cdots X_{2^m}$

取 $X_k=\begin{cases} B_i^{\frac{1}{2^m}}, (i-1)\left(\frac{2^m}{n}\right)<k\leq i\left(\frac{2^m}{n}\right) & (1\leq i\leq n-1) \\ B_n^{\frac{1}{2^m}}, (n-1)\left(\frac{2^m}{n}\right)<k\leq 2^m \end{cases}$

则 $\operatorname{tr}\Sigma\alpha_k B_k\geq \operatorname{tr}B_1^{\alpha_1}\cdots B_n^{\alpha_n}$，且 $\alpha_k=\begin{cases}\frac{1}{2^m}\left(\frac{2^m}{n}\right) & 1\leq k\leq n-1 \\ \left(1-(n-1)\left(\frac{2^m}{n}\right)\right)/2^m & k=n\end{cases}$

令 $m\to+\infty$ 则有 $\operatorname{tr}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}B_k\geq \operatorname{tr}B_1^{\frac{1}{n}}\cdots B_n^{\frac{1}{n}}$。取 $B_k=A_k^n$

则 $$\operatorname{tr}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}A_k^n\geq \operatorname{tr}A_1\cdots A_n$$

推论1：若 B_k $(1\leq k\leq n)$ 为正定对称实方阵，$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$，$\alpha_k\geq 0$

则 $$\operatorname{tr}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k B_k\geq \operatorname{tr}B_1^{\alpha_1}\cdots B_n^{\alpha_n}$$

推论2：若 B_k $(1\leq k\leq n)$ 为正定Hermite方阵，$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=1$，$\alpha_k\geq 0$

则 $$\operatorname{tr}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k B_k\geq R_e\operatorname{tr}B_1^{\alpha_1}\cdots B_n^{\alpha_n}$$

这只要注意 $\operatorname{tr}XX^*+\operatorname{tr}YY^*\geq 2R_e\operatorname{tr}X^*Y$ 即可

本栏重要更正：本刊第27期所载叶怀安老师所提的问题8系老师给一个同学的练习题，其中“圆”是指“圆片”，叶老师当时提供给本栏的是另一个问题（见本刊本期问题23）。由于编辑不慎，造成上述错误，特此更正，并请叶老师与读者原谅。

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

治学法与辩证法七题

张贤科 博士
（中国科学技术大学数学系）

第二部分

治学者的辩证方法：动眼，动脑，动手，动脚

§4、动脚：掌握资料，获取信息

关于具体的方法，我体会最深的四动：动眼、动脑、动手、动脚，其中最需要强调的是"动脚"

"迈动你的双脚，到图书馆去查阅资料！"

不熟悉资料，研究工作就是盲目的，人类认识真理的路线"实践——感性认识——理性认识"，在具体实现时是一个错综复杂的历史过程。恩格斯说：

"思维的至上性是在一系列非常不至上地思维着的人们中实现的；拥有无条件的真理权的那种认识是在一系列相对谬误中实现的；二者都只有通过人类生活的无限延续才能实现。"

就是说，每一个人对于科学的贡献，不过是人类认识链条上的一环，它只能在人类认识的已有基础上发展起来。牛顿说过，如果说他比别人站得高些，看得远些，那是因为他站在巨人肩上。其实每一个人科学家都是这样。

现在有"知识爆炸"，"信息时代"的说法，传递信息的手段

接研读海之中的一本一章一节，而不是抱一巨著从头慢慢细读。在这样坚韧不拔的直接攻下，一段时间后目标总可以达到学者也因而加固扩展了自己的基础，训练了方法，获得了成果，然后再转战于更高的目标，不断开拓前进，这样形成的知识结构，是有机结构，是在实践中自己发展起来的结构，它概念清晰，联系明确，轻重分明，"逻辑的和历史的是一致的"，这样工作的效率也是昏昏然无目的读死书所不能相比的。

如何选题是一个重要的问题，不但要考虑到要有一定的意义，而且要考虑到与自学识的关系，考虑"可行性"，可注意的有以下几点：

1、平时多动手，写一些心得、扎记、眉批等等。看书刊时，要多动脑筋，看是否有所启发。偶有所得，一定要及时记录下来，跟踪追击，放任大脑去"想"，说不定由此能捕捉到大小的课题。苏轼说：

"作诗火急追亡捕，情景一失永难摹"

对于理论研究尤其如此。平时要多动手，不可使线索从眼前闪过逝去，与此有关的是，理论研究者不可总使自己陷于事务的忙乱之中，要争取间或有"清静无为"之时，以发挥自己的想象，"无为"与"有为"是对立统一，往往在"无事可做"时发现大的研究课题。

"积土成山，风雨兴焉；
积水成渊，蛟龙潜焉。"

平时勤动手积累是很重要的，俗话有"拾到篮子里的都是菜"的说法，常被用来嘲笑那些粗制滥造者。从勤动手积累的角度讲，我们倒要倡导它：往篮子里多多拾吧，多多益善！——回家后再

仔细挑选加工就是了。

2、靠动脚去接触资料，看多了，自然就会发现：有可推广者，有需完备者，有待改正者，有另具启发者这些都是好的研究课题。

3、迁延扩展法，一旦做出一些成果后，不要轻意关门大吉，弃之不顾，而应想尽办法向深层，向四方扩展迁延。在迁延时要尽量"发散思维"，甚至于蛛丝马迹，似曾相识，可有可无，一厢情愿，望风捕影，意想天开，张冠李戴，以假乱真，触景生情，也不要放过，迁延法的好处，首先在于易发挥自己的优势，你已经在这块基地上作了许多工作，相关知识掌握较好，继续工作下去很有利。如果另换他题，一切都是新的，你与一个新手无异，其次，选一个合适的课题不容易，轻易弃之可惜，这有如找矿一样，你走马一望：青山绿水，阴阳和谐，很难说哪儿有矿。如果你正在开掘一个矿坑，继续向纵深开掘，向四周探索，实为上策：主矿脉很可能就在你脚下，那种朝秦暮楚，看哪儿热闹哪儿去的做法，往往难得到深刻的结果，难采得人所采不到的狗金块。

当然，事物都是辩证的，在一定的情况下也不要死钻牛角尖。转移阵地，另有开拓也是必须的。

§6 动脑：创造性思维的特点

在确定选题后，一般要先有一段廓清外围之战，而后才能真正接近目标。这种廓清外围包括熟悉相关理论，掌握有关资料，搞清有关的基本事实，有时还包括攻下几个次要的目标，这一过程相当于上节"直接线"所应完成的任务，这以后，就进入攻坚，攻坚是一个关键阶段，创造、发明、成果的有无和大小，就看这一阶段，这里一个飞跃阶段，是认识过程的一个飞跃；这是一个"否定"阶

是各种各样的。但是理论科学工作者获取信息的主要渠道还是书、刊，起码在我国目前是这样，所谓信息爆炸，也还没有传说的那样严重。因为每个学者都有自己的专业，最感兴趣的书刊就不是太多，再辅以各种文献索引，这样只要经常留意便可以掌握各自学科的动态。

有的人不常去资料馆是因为"怯"，这多半是由于没有选定专业方向的原因，没有一个明确的专业方向，面对一架又一架的外文资料，当然有茫然之感。由于现代科学的高度发展，"全才"已不太可能，有人说现在世界上并无"数学家"或"物理学家"，有的只是各具体学科的专家。这反映了现在的一种情况。因此"窄化专业"便是一个必需而且有效的对策，尤其对年青的学者是如此。

"窄化专业——突破一点——扩大战果"

看来这是一个好的治学途径，"如果你不是太阳，就不要企图普照大地；要象激光那样，就是钻石也要破壁"。

对查阅资料来说，另一重要的方面是要熟悉各种文摘评论的查阅方法，熟悉图书馆的各种资料的分布、排列、版制等等。这些看来琐细，其实对于掌握信息是必不可少的，也只有在实践中不断积累经验。清代王鸣盛的话是很有见地的：

"目录之学，学中第一要紧事，必以此向途，方得其门而入"。

此外，迈动双脚不光对获取信息动态是重要的，对于提高学者的基础水平也同样是重要的，学者的学业达到一定程度后，往往不再能靠读书本来提高纵向水平，因为最新的科学成果往往难以及时成书。这时，一期期定时汇到的学术期刊，无异是学者的"国际函授大学"。通过这一函授，学者不断复习加深着最重要的（在科研中应用频度高的）基础知识，学习着最新发展的专题分支，研究着

著名科学家解决著名问题的实例，寻求着自己用武的领域，构思着自己的蓝图。学者在这种函授中不断跟上时代的脚步，做出对时代的贡献。

最后，图书馆也提供一个诱人学习的极好环境，是治学者陶冶心灵的最佳场所。

§5 动手：直攻法与高难法

动手，指学者在有一定的基础后，要及时动手做研究工作，也指平时要勤动手写札记、眉批、摘记等。

历来的教育都强调基础要深厚，不宜早动手选题做研究工作。但究竟怎样才算深了厚了，是不易掌握的。一般来说，中老年人的“深厚”学识是长期积累起来的，青年人短期内不容易一下子全面达到，若一味嫌青年人不深不厚，不让其接触科研课题，往往会使青年人错过黄金时代，等闲白了少年头。另一方面，一味读书也不一定是真正好的学习法。

包括华罗庚在内的许多卓有成就的学者，都以自身的经历证明“直攻法”（或称直接法）是行之有效的治学方法。这一方法与“高难度学习法”密切相关。它们都是传统的“循序渐进”，“按步就班”治学方法的对立物，胸怀大志、智力较高，而又愿意刻苦勤奋的青年尤其适合采用“直攻法”和“高难法”，在当前“知识爆炸”的形势下更是如此。这种方法要求学者目标任务明确，这种目标一般是高难的，例如要求很快作出学术论文，很快写出一本专著，很快掌握一门外语等等。学者为达到一高难的目标，动员起全部的智力、精力，“直接”向目标进攻；缺少的个别基础知识，短时间集中学会；缺少的个别环节，短时间集中攻下；学者往往只直

段，新思想要在“扬弃”旧思想中诞生。

根据庞卡莱，阿达玛等科学家的论述，以及现代发明心理学的研究，也根据我在工作中的体会，这一飞跃有如下的各个分期和方法。

在扫清外围进入到问题的关键之时，由于几经反复，大脑对问题的各个方面、各个数据已相当清楚。往往非常复杂的数学公式也能在脑中清晰映出，对很深刻的定理已有直觉的把握，这时和象棋中的“盲棋”很类似，整个棋局全在脑中，在这时，积极开动大脑机器，全神贯注工作几个小时，便可掀起所谓“脑风暴”。这在心理学上称为“烘热期”，脑海迅猛涌现出种种现象、联想、猜测、假设，这种脑风暴有如龙卷风一般，围绕着中心课题急剧旋转。脑中原有的各种概念被风暴掀起，飞舞，形成各种可能的暂时联系，组合，即各种新想法。脑风暴初始，往往只有不太深刻的思想产生。让脑风暴持续下去，一、二小时后很可能会忽然跳出一些罕见的新奇思想，其中一些对解决问题可能非常有帮助。也往往有这种情况：脑风暴持续了数小时，并无太大收获，于是趋于平静。但就在这风暴平息后的无意识活动阶段，脑中往往会忽然有新想法，即所谓“顿悟”，于是打开了解决问题的大门，这种“顿悟”，只是一种设想或猜测，接下来还要动手设想，验证猜测，这也是一段有意识的甚至是艰巨的工作，这一工作形式上看是脑风暴前工作的（在新水平上的）继续，脑风暴表现为这一渐进过程的中断。

我自己所发表的所有论文，事实上都得之于“枕上”，每一篇都经历了上述过程，有的一篇论文要经几次“脑风暴”和“顿悟”才能完成，脑风暴和顿悟一般发生在晚上躺下后。由于整个晚上的紧张工作，躺下后脑中常常翻龙倒海，如颠如狂，不能自已。每每

深夜似醒非醒之时忽有所悟。要解决前人未能解决的问题，到人所未到之境，不动用思维的全部潜力，经过几个飞跃是不行的。常规的逻辑推导所得出的结果，必是未能惊人之物：

"笔底功夫犹恐浅，

枕上追索梦里寻。"

创造性思维往往很好地体现着以下各对矛盾的转化（尤其是数学上发展为如此）：

1、严格和不严格："严格"似乎是科学尤其是数学的生命。但在创造性思维中，新思想的诞生往往是极不严格的。往往是先"猜出"定理，严格的证明是以后补出的，所以学者不但善于严格，也要善于不严格。

2、逻辑和直觉，既然新思想不是由逻辑严格推导出的，那它是怎样得出的呢？"直觉"往往起很大作用。在一定程度上，这种直觉能力反映一个人的创造能力，它和一个人的知识虽然有关，但并不成正比，有的人知识很丰富但直觉能力差。数学家阿达玛认为直觉本质是某种"美的意识"，"美感"。我自己切身体会，空间想象能力和这种直觉很有关系。

近来关于大脑两半球的实验成果对此很有启发。实验表明人的左半脑善于进行逻辑思维，熟练性思维，解决老问题有条有理；右半脑善于进行形象思维，创造性思维，平时右半脑受到的左半脑的压制，当二者有不同意见时，整个大脑表现出来的是左半脑的意志。由这一成果上述脑风暴的过程，可以发现，脑风暴后期的"非逻辑"思维恰恰就是把右半脑从左半脑的抑制中解放出来。这也证明了"形象美感"、"空间想象力"等直觉作用对创造力有决定性的作用。象数学这样高度逻辑化的学科，却也不得不求助于他的对立物——

直觉。

3、发散思维和收敛思维，大学教学，尤其是数学教学，一般都着重训练收敛思维，但脑风暴时，发散思维却是主要的思维方式。

4、个别式整体，如果说你战胜不了敌人的一个团，却能轻易把他们的一个军消灭，一定令人难以置信。但在科研攻坚中确实有这种情形：往往一个特殊问题解决不了，但把问题“一般化”，反而容易解决了，我有几次确实碰到了这种情形，正是问题的一般化、扩大化救我出维谷，在这里，一般与个别的关系似乎颠倒过来了。这可能是由于问题的一般化更便于发现问题的本质，或更便于运用一般化的工具，而太执着于具体问题反而令“一叶障目”。

5、归纳与演绎，一般公认数学的方法主要是演绎法，数学书上的定理一般都是由演绎法证明的，不完全归纳法（即哲学上的归纳法，加上“不完全”以区别于“数学归纳法”。后者是一种具体的证明方法，主要还是用的演绎推理）太不严格，似乎粗俗难登大雅之堂，但事实上，数学上的许多重要结果都是由不完全归纳法发现的。著名数学家欧拉说过：“数学这门科学，需要观察，还需要实验。”“数学王子”高斯也提到过，他的许多定理都是靠归纳法发现的，证明只是补行的手续，但是数学家在写论文时，总是把定理写成是由演绎的上帝赐给的纯理性之物，绝没有诞生于归纳的凡俗之气。这正象马克思所嘲笑的，黑格尔把物质世界都放逐到注释中去了；也正象鲁迅所揭露的，雅士总是把算盘藏在抽屉里，虽然物质世界和算盘才真正对于他们是至关重要的。

6、标新立异，出奇致胜，发展就是否定，所以一定要勇于标新立异、别出心裁，勇于向现有的权威挑战，才能真正有所创造。“不依古法但横行，自有风雷绕膝生”。要勇于另辟蹊径，要善于从

新角度、新观点考虑问题，也就是要出奇。“善出奇者，无穷如天地，不竭如江河，”表现得很神，其实质不外是“对一统一规律”：要从正反两个方面考察问题；要小中见大，大中见小；旧以新视，新以旧衡；要繁中求简，简中求繁；要无中生有，有终化无。关于这种发展的辩证法，黑格尔有一段话最尖锐明确，读来很能启发人：

“凡有限之物不仅是受外面的限制，而乃为它自己的本性所扬弃，由自身的活动自己过渡到自己的反面。所以当我们譬如说人是要死的，似乎以为人之所以要死是由于外在的环境，照这种看法，人具有两种特性：有生亦有死。但这事的真正看法应该是说，生命本身即具有死亡的种子。凡有限之物即是自相矛盾的，由于自相矛盾而自己扬弃自己。”

由此可知，比如说，为什么一定要“小中见大”。其实“小”本身即具有“大”的种子，而由于这种“自相矛盾”的本质，“小”扬弃自己过渡到自己的反面“大”。

§7　动眼：一本书主义与渗透学习法

动眼读书学习是迷科治学的根本，青年时需要，出成果后仍然是需要的。知识结构要不断完善，新理论要不断学习，才能不断前进。历来强调读书要循序渐进，踏实认真。其实，走马观花，不求甚解，有时也同样重要。学习无非是从无知转变为有知，这从“无”到“有”的转变方式，可以是多样的：蚕吃桑叶，一点一点地啃，按步就班，是一种方法；霜染枫叶，由黄渐红，由微红再大红，也是一法；墨滋宣纸，从诸墨点辐射出去，逐渐浸润，又是一法。我们在读书中都可运用。这反映了从量变到质变各种不同转变方式。总的来说，我觉得有两点值得强调：

1、一本书主义，治学之路盘曲而上，由一个一个阶梯，要读“烂”一本书（精读、熟读），即所谓一本书主义。而不宜拿许多属于同一阶梯水平的书，反复对看。在每一个治学阶梯上，选择一本较合适的书（内容详实而又不繁琐，为学界所公认者），精读细研，日读夜思，直到切实理解掌握。待到对一个环节的基本理论真正掌握后，再翻看其它同类的书，就会发现这些书多是大同小异，讲法、符号不同而已。当然也有部分章节内容是新的，逐渐补上就容易了。掌握了一个环节后，要及时转入更高的环节，不要在原有环节上徘徊。

2、渗透学习法，读书可以似懂非懂地读，听起来与传统的教育颇不合，但这正是李政道教授所提倡的“渗透学习法”。博览群书，开始可能并不太懂，但就在这似懂非懂之中已经学到不少知识，天长日久，就会越学越深广。有的材料对于自己的学科不十分必要，那么有个印象也就可以了。在适当的时候，这模糊的印象可能會對我们有所启发。如果到时需要细知，可以知道到何处去查找。有的材料与自己关系较大，经过反复学习就会由似懂非懂逐渐变得真懂，就象秋天的枫叶由黄逐渐变红一样。许多学者的知识都是这样逐渐加深的，只不过没有注意罢了。俗话“第五个烧饼”，事实上并不是单靠这第五个烧饼吃饱饭的啊。

既使对于应当精读的书，也不一定非要一页页从前往后读不可，也可以先前后翻翻，看看有几章，中心内容是什么，也可以挑自己最有兴趣的先看，也可以把一时难懂的细节留作后看。这个道理和打仗是一样的。解放战争在打了辽沈战役后，是先打淮海战役后打平津战役，并不是按地理顺序相反地打。太原是留在后打的。而全国并未完全解放时，北京已宣布成立新中国了。甚至到现在台湾也

还没解放，但这并不影响我们做大文章。当然在适当的时候，象台湾这类问题还是要解决的，解决的方式可以是异样的。读书也有类似的道理。

华罗庚曾有著名的读书公式：薄——厚——薄，即开始读一遍，似懂非懂，只见其大概，这时书对于读者是薄的；按着详细研读，加注释，加纸条，加心得体会，着眼于细节，这时书的内容在读者心目中是厚的；再经努力，融汇贯通，切实掌握了书中的理论，似乎一目了然，书在读者心目中又是薄的了。但这时的"薄"与开始时的"薄"已经很不一样了，是在更高水平上的仿佛向旧事物的"回复"。这真是否之否定规律活生生的范例，也是综合——分析——综合过程的极 注释。此外国外曾流行着 SQ3R 读书法，即概观（Survey）——提问（Question）——细读（Read）——探索（Research）——复习（Review）。还有人主张读书可以顺读、反读、专题读，说顺以致远，反以求源，专以攻坚，三种读法不可或缺。

总之这都反映了由"无知"到"有知"的转变方式，可以是多样的，要因时因地因人而异。不一定非要传统课堂强调的"蚕吃桑叶"式不可，可以如"晓来谁染霜林醉"，大片丛林由绿变黄，由浅红变深红。也可以如国画名家宣纸泼墨，浓浅浸染皆宜，"密处不使透风，疏处可以走马。"

一九八五年四月十五日

·全 文 完·

研究通讯

·蛙鸣·第28期·
1987年6月

关于，Hausdorff空间拓扑熵的一些附注

数学系82级 杨忠国

§1 记号

$|E|$ 表示集合E的基数

设Z为拓扑空间，$f: Z\to Z$ 为Z的连续自映射，α、β 为Z的开覆盖。

记 $\alpha\vee\beta=\{A\cap B \mid A\in\alpha, B\in\beta\}$

$f^{-1}\alpha=\{f^{-1}(A) \mid A\in\alpha\}$

$\alpha(n)=\alpha\vee f^{-1}\alpha\vee\cdots\vee f^{-n+1}\alpha$

$\alpha<\beta$ 表示 β 是 α 的加细

$\forall M\subset Z$，记 $B(M,\alpha)=\bigcup\limits_{\substack{A\in\alpha \\ A\cap M\neq\phi}} A$

§2 紧致，Hausdorff空间的两个引理

引理1．对于紧致，Hausdorff空间Z的任一开覆盖 α，存在Z的开覆盖 α' 为 α 的加细，进一步，有：

$$\alpha<\{B(A',\alpha') \mid A'\in\alpha'\}$$

引理2．设f是紧致，Hausdorff空间Z的连续自映射，则任给Z的开覆盖 α，存在 α 的加细 α'，使得

$$\alpha<\{B(f(A'),\alpha') \mid A'\in\alpha'\}$$

§3．拓扑熵的一种等价定义

设Z为紧致，Hausdorff空间，$f: Z\to Z$ 连续，α 为Z的

开覆盖。

定义：称Z的子集F为Z的（n，α）生成集，如果F满足$B(F,\alpha(n))=Z$

称Z的子集E为Z的（n，α）分离集，如果$\forall x\in E$，$x\notin B(E-\{x\},\alpha(n))$

记$r_n(\alpha)=\min\limits_{F}|F|$，$S_n(\alpha)=\max\limits_{E}|E|$

其中F取遍Z的所有（n，α）生成集

E取遍Z的所有（n，α）分离集。

根据§2中的引理，可以得到：

定理：设f为紧致，Hausdorff空间Z的连续自映射，则有

$$
\begin{aligned}
h(f) &= \sup_{\alpha}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\lg N(\alpha(n)) \\
&= \sup_{\alpha}\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{n}\lg r_n(\alpha) \\
&= \sup_{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg S_n(\alpha) \\
&= \sup_{\alpha}\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg r_n(\alpha) \\
&= \sup_{\alpha}\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{1}{n}\lg S_n(\alpha)
\end{aligned}
$$

其中α取遍Z的一切开覆盖。

由上定理，我们可以利用（n，α）生成集或（n，α）分离集的概念，在紧致，Hausdorff空间中给出拓扑熵的等价定义。

§4 局部单共轭映射的拓扑熵

根据§2中的引理，我们还可以得到如下结论。

定理：论Z，Z'是紧致，Hausdorff空间，$f: Z \to Z$，$f': Z' \to Z'$，$P: Z \to Z'$均连续，并且$Pf = f'P$同时P是局部单的满射，则

$$h(f) = h(f')$$

《蛙鸣》征稿启示

一、《蛙鸣》是构通我系年级之间，本科生与研究生之间，师生之间的学术交流刊物，主要面向本科三年级以下的同学。设有以下栏目：研究与讨论、报告、解题方法与技巧，一题一议、未解决的问题、蛙鸣问题和解答，治学谈、介绍与评论，从数学到应用，远方的信，研究生入学试题等。欢迎踊跃投稿。

二、凡投稿者，可到152楼207室领取100页稿纸；稿件一经选用，付2.00元科研指标为酬，并赠送该期《蛙鸣》两本，抽印本10份；作者可指定两处交流地点，由编辑部代为邮寄。

·书 评·

编者按：南斯拉夫贝尔格莱德大学D.S.Mitinovic教授的名著《Analytic inequalities》(与P.M.Vasic副教授合作；Springer-verlag，New york--Berlin，1970；MR43#448)的两个中译本最近分别由广西人民出版社和科学出版社先后出版，前者由赵汉宾将书译为《分析不等式》，后者由张小萍和王龙合译为《解析不等式》。威斯康星大学的R.A.Askey教授和伊利诺斯大学的R.P.Boas教授在1972年的美国《数学评论》上评价了这本书。这里我们请钱黎文同学编译出来，供对此课题感兴趣者参考。

《Analytic inequalities》是根据作者以前的《Inequalities》((serbo-Croatian)，12dav preduz G-radev Knjiga，Belgrade，1965；MR33#1411)的思想和轮廓，但它是在更高的水平之上，而且很少包含相同的题材。现在论述不等式的主要著作有三本：这本书由H.G.Hardy，J.E.Littewood和G.Polya合著的经典之作《Inequalies》(second edition，Cambridgeuniv，Press，Cambridge，1952；MR，13，727；有越民义的中译本，科学出版社1965年版)，由E.F.Beckenbach和R.Bellman合作的名著《Inequalities》(second printing，Ergeb.Math.Grenzgeb.(N.F.)，Band 30，Springer，New

York，1965；MR 33#236）。对此课题感兴趣者应具备这三本著作：G.H.Hardy，J.E.Littewood 和 G.Polya 合著的特点是把不等式领域从孤立公式的汇集改造成分系统的学科，而且对一些不出现在其它书籍上的前沿课题进行了深入的讨论（尽管其中一些内容现在可以表现为更简明或更一般的形式）；Beckenbach—Bellman 著作的特色是它的方法和论题的范围的扩大；而Mitrinović 的很多论题在上述著作中还没有出现过，这本书的书目相对完备，对特殊不等式进行了广泛的收集，其中很多在别处是难以查到的，有些则是在本书中第一次发表。通过查阅文献，作者收集了不少本来易被遗忘的生动有趣的不等式。虽然"仁者见仁，智者见智"，但是我们相信每个读者都会在此书中发现自己感兴趣的内容。

此书开始一小部分主要是关于凸函数及一些推广。诚然，这一论题已被挖掘的深度并没有完全体现在这一部分。举例来说，此书没有明确提出 Jensen 积分不等式（见Hardy-Littlewood-polya，no.206），即使steffensen 变式也没有出现，也没有利用 Jensen 不等式来获得Hölder 不等式。

第二部分（几乎占全书一半）为一般不等式。这部分首先论及经典内容：均值不等式，Cauchy 不等式，Cebysev不等式，Holder不等式及Minkowski 不等式，Young 不等式，作者也给出了Beesack的一个不等式，它类似于Young不等式，但比它更基本，只是忽略了指出从中可得到 $r\leq p^{-1}+q^{-1}r^{q}$ 的更简单的证明，而Hölder 不等式正是依赖于此的。由于逻辑的严谨与中心的突出，在H.Hardy，J.E.littleood与q polya的合看在这些经典题材上的处理可能更适合于那些刚刚开始对不等

式感兴趣的读者；另一方面，Mitrinović概括了很多现代加细与变体，其中一些有过分精雕细琢的味道，也许对特殊课题有用。当然，该领域的研究者必须阅此书以免重复别人的劳动。而且，第二部分还有一些似乎更适于放在第三部分的不等式：Jordan不等式（$2/\pi\leq\theta^{-1}\sin\theta\leq1$），与stirling公式，Mills比 $e^{x^2}\int_0^{\infty}e^{t^2}dt$ 联系的不等式，有一节论述steffensen不等式及其应用，尤其是具有交错变更符号的和式的不等式，是作者一篇综述文章的修改。还有一些节论述现代不等式，例如Aczel'不等式：若 $b_1^2-b_2^2\cdots\cdots b_n^2>0$

$$则\ (a_1^2-a_2^2\cdots\cdots a_n^2)(b_1^2-b_2^2\cdots\cdots b_n^2)\leq(a_1b_1-a_2b_2\cdots\cdots a_nb_n)^2$$

Redneffer递归不等式（2.20）则暗示着其它不等式的值得注意的变化。有一些节是Cauchy不等式的补充，因为这些不等式给出了 $\Sigma anbn$ 的更精确的下界，这些成果是与Schwartz、Gauss、Fan、Todd、Diaz、Metcalf及其它人的名字紧紧联系在一起的。对循环不等式

$$x_1/(x_2+x_3)+x_2/(x_3+x_4)+\cdots+x_n/(x_1+x_2)\geq\frac{1}{2}n$$

的结果也进行了全面的收集。很多节是论及各阶导数的不等式和包含函数及其导数的积分不等式。在半轴上导数的最值关系问题的彻底解决的成果由于这本书出版太早而没能被纳入。主要不等式是Writinger不等式。Opial不等式及其变式。称为f为f'之间的积分不等式的Hardy不等式，在这里虑本书其它地方都未予讨论，尽管在2.20与下26中似被提及。我们希望下一版中会

发现它的一席之地，因为至少它已被证明在调和分析中运用广泛。

第三部分也是本书意义最为深远的部分，它是450个特殊不等式的汇集，按照主题进行了不太严格的划分。这部分是课题的很有价值的源泉，很多不等式可作为更一般性理论的出发点。这里将简要地列出附有评论的一般性分类，相信会对本书读者有所帮助。3.1：含有离散变量数的不等式，与数值级数的部分和，二项式系数有关的不等式，等等。3.1.3可补充更好的下界 $2/(2n-1)-\frac{2}{3}/(2n-1)^3$。3.1.39十分有趣而鲜为人知。3.2：含代数函数的不等式。其中一些为一般性不等式的推论，但也有一些是独立的。3.3：含有多项式的不等式，联系根与系数的不等式，联系系数与不同函数的不等式（Cebysev Bernstein，markov等）。这部分内容的精神实质迥异于本书的其它部分。这样的文献摘要以浅显的深度出现是必要的。关于非负多项式这一古老课题的庞大工作在此涉及甚少，也没有提到E.V.voronovska的提供了很多经典与现代问题的解的一般性理论。3.4：含有三角函数的不等式，2.3节宜于安排此处。3.5：含有三角多项式的不等式，其中有些内容与3.3节有关函数那一部分紧密联关。作者没有收入一些一般性的理论及关于三角积分的一些类似的命题。注意3.5.7较3.5.6为弱，在有趣而鲜为人知的3.5.23中 $0<t_1+\cdots\cdots+t_m<\pi$ 可以为 $0<t<\pi$ 代替。3.6：含有指数函数，对数函数和qamma函数的不等式。3.7：积分不等式。这是以某种形式含有积分的特殊与一般性结论的汇集，3.7.10的右边可改为 $\frac{1}{x}$。注意3.7.35与3.7.36为"第二中值定理"的两种情形，一个更强的结论已由qanelius给出，在Polya定理中也许已能发现它的存在及其

二维情形：若 f 可导，且 $f(a)=f(b)=0$

则 $\exists\tau$ 使 $|f'(\tau)|>4(b-a)^{-2}\left|\int_a^b f(t)dt\right|$

3.8：复域上的不等式，主要是关于复数，数值级数和特殊函数的不等式。3.9：其它不等式。这些不等式用于其所属种类的多样性而难以放在别的地方，它们的范围从关于数集的简单结论一直到 Hilbert不等式，Carlson不等式与 qronwau 不等式。3.9.47 中 $R\geq 4$ 时不等式不成立的断言至今未获证明 3.9.71 则可包含在 2.22 中。

（821 刘启铭 审校）

定理：设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正数，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geq \sqrt[n]{a_1 a_2\cdots a_n} \qquad (1)$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时等号成立。

证明：设 G 是（1）的右边，假定 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$ 和 $a_1<a_n$，则 $a_1<G<a_n$，故

$$0>(a_1-G)(a_n-G)=a_1a_n-(a_1+a_n-G)G \qquad (2)$$

对 $n=2$（1）是成立的。假定 $n-1$ 结果成立，从而

$$a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_1a_n}{G}$$

$$\geq(n-1)\left(a_2a_3\cdots a_{n-1}\cdot\frac{a_1a_n}{G}\right)^{\frac{1}{n-1}}=(n-1)G$$

再由（2）得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n>nG$$

#

中国科学技术大学1987年
攻读硕士学位研究生入学考试试题
微 分 几 何

一、填 空（20分）

1、曲线 $\underline{r}(t, \frac{a}{2}t^2, \frac{b}{6}t^3)$（$a$，$b$为常数，$a>0$）在 $t=0$ 处的曲率＝　　　　　　，挠率＝　　　　　　。

2、曲率和挠率都是常数的空间挠曲线是　　　　　　　　；曲率和挠率之比为常数的空间挠曲线是　　　　　　　　。

3、设 $\underline{r}(t)$ 是一条空间挠曲线，则它在任一点 $\underline{r}(t)$ 的切线方程是　　　　　　，密切平面的方程是　　　　　　。

4、设曲线 $\underline{r}(s)$（s 是弧长）是曲面S上的一条曲线，$\underline{n}(s)$ 是沿 $\underline{r}(s)$ 的曲面S的单位法向量，则 $\underline{r}(s)$ 在S上的法曲率 $K_n=$　　　　　　，测地曲率 $K_g=$　　　　　　。

二、选择正确的答案（20分）

1、若曲面S的沿任一曲线C的法线都交于一点，则C必为S的（A）曲率线，（B）渐近线，（C）测地线，（D）以上说法都不对。

（　　）

2、若一曲面的 $H^2=K$（K，H分别为总曲率和平均曲率），则此曲面必为（A）球面，（B）可展曲面，（C）平面或球面，（D）悬链面。

（　　）

3、设Ⅰ和Ⅱ分别为曲面的第一和第二基本形式，则（A）Ⅰ和Ⅱ无关，（B）Ⅰ由Ⅱ决定，（C）Ⅱ由Ⅰ决定，（D）以上说法都不对。

（　　）

4、极小曲面一定是（A）紧致的，（B）不紧致的，（C）直纹面，（D）旋转曲面。（　　）

5、过曲面上任意一点沿任意方向有唯一的

（A）曲率线，（B）渐近线，（C）平面曲线，（D）测地线（　　）

（20）三、1、已知曲线$\underline{r}(t)$上每一点的$\underline{r}''(t)$的方向与该点的切向一致，证明$\underline{r}(t)$是直线。

2、求常微分方程组$r'\times r''\cdot r'''=0$的通解$r(t)$，并由此证明$r(t)$是平面曲线必须且只须$r'\times r''\cdot r'''=0$

（20）四、证明：任意曲面的第一、二、三基本形式Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ之间存在关系

$$\mathrm{III}-2H\,\mathrm{II}+K\,\mathrm{I}=0,$$

其中K与H分别为曲面的总曲率和平均曲率。

（20分）五、给定空间挠曲线$\underline{r}(s)$（s为弧长），它的全体切线构成曲面S，S称为$\underline{r}(s)$的切线面。

1、给出S的一个参数表示。

2、计算S的第一、二基本形式。

3、证明：S是单参数平面族的包络。

4、证明：必可建立S到平面的等距对应。

中国科技大学

1987年攻读硕士学位研究生入学考试试题概率论

一、（本题20分）判断以下命题，认为对的在括弧中打“○”，认为错的括弧中打“×”

(1)、任一随机变量X，取区间($EX-3\sqrt{DX}$，$EX+3\sqrt{DX}$)中值的概率大于80%。( )

(2)、若随机变量X、Y的相关系数$\rho(X,Y)\neq 0$则X，Y不独立。( )

(3)、若随机向量(X，Y)有联合密度函数，则$|\rho(X,Y)|\neq 1$。( )

(4)、若随机变量X，Y分别有密度函数f，g，则随机变量Z=X+Y的密度函数为$h(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(z-u)du$。

( )

(5)、若随机变量X，Y有相同的密度函数，则X和Y恒等

( )

(6)、设A、B是独立事件，$C\subset A$，$D\subset B$，则事件C，D也独立。( )

(7)、若二元函数F(x,y)满足：(i)F关于每个变量非降、右连续；(ii)$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$，则F是二元分布函数。( )

(8)、设F(x)是随机变量X的分布函数，则F(x)在x_0连续的充要条件是$P(X=x_0)=0$。( )

(9)、对任一随机向量(X，Y)有$E(E(X|Y))=E(X)$。

( )

(10)、若$\sqrt{D(X)}>k>0$，则$P(|X|>k)>0$。( )

二、(本题20分)(1)、罐中有M个球，其中M_1个是白的。在罐中随机抽取n次，每次抽一个；设B_j是第j次抽到白球这一事件，A_k是抽到的n个球中恰有k个白球这一事件；试分别在(a)有放回抽取和(b)无放回抽取这两种情形下，求概率$P(B_j|A_k)$。

（2）、设 X_1 服从参数为 λ_1 的Poisson分布，X_2 服从参数为 λ_2 的Poisson分布。若 $\lambda_2 > \lambda_1$，证明：对任何正整数k有

$$P(X_1 \leq k) > P(X_2 \leq k)$$

三、（本题20分）证明以下的不等式：

（1）、对任一随机变量的序列 $X_1, \cdots, X_n$ 及常数 $A>0$ 有

$$P\left(\max_{1\leq i\leq n}|X_i| > A\right) \leq \frac{1}{A^2}\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2)$$

（2）、设 $EX = m_1$，$E(X^2) = m_2 > 0$，$0<\alpha<1$，则有

$$P(|X| \geq \alpha m_1) \geq \frac{(1-\alpha)^2 \cdot m_1^2}{m_2}$$

四、（本题20分）设有常数序列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 及随机变量序列 $\{X_n\}$。若 $a_n = 0(b_n)$ $(n\to\infty)$，并且 $\left\{\frac{X_n}{a_n}\right\}$ 依分布收敛

证明

$$\frac{X_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$$

五、（本题10分）设 $F(x)$ 是一分布函数，$c>0$ 是一常数。证明

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x+c) - F(x)\right)dx = c$$

六、（本题10分）设随机变量X，Y相互独立、相同分布，且均值为零，方差为1。若 $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ 与X有相同的分布。试证X服从 $N(0, 1)$ 分布。

（本试卷共六大题，总分100）

中国科技大学

1987年攻读硕士学位研究生入学考试试题

复变函数

1、设D是开复平面C中的域，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$是定义于D的函数。试叙述$f(z)$在域D解析的三种经典定义。判定$g(z)=z\mathrm{Re}\,z-\mathrm{Im}\,z$在C上的可微性与解析性，在可微处求出导数$g'(z)$。

2、利用Cauchy不等式证明Liouville定理：有界整函数必为常数。

3、试证关于可去奇点的Riemann定理：若函数$f(z)$在域$0<|z-a|<R$有界，则a是$f(z)$的可去奇点。

4、若$f(z)$在域D解析且不是一个常数，试证$f(D)$是开集。

5、(A)求出将单位圆域$|z|<1$映为单位圆域$|w|<1$的分式线性变换，并将点z_0（$|z_0|<1$）映为原点。

(B)求出将单位圆域$|z|<1$映为上半面$\mathrm{Im}\,w>0$的分式线性变换，并将原点映为w_0（$\mathrm{Im}\,w_0>0$）。

6、试验证单位圆域的Poisson核$P(z,\bar{\eta})=(1-|z|^2)/|1-\bar{\eta}z|^2$（其中$\eta=e^{i\theta}$，$|z|<1$）是单位圆内部的调和函数。

7、试叙述σ—环及Borel体的定义，并举出一个σ—环的例子。

1-6题每题各15分，第7题10分，满分100分

〔编后语〕

回顾与展望

陈计　　罗承辉

《蛙鸣》创刊于1981年6月20日，至今已有六年了。当年的刻印小报从第11期起成为一份打印期刊；当年的创办者大多已出国深造，但我们的《蛙鸣》仍不倦地歌唱，她充满着活力。

六年来，《蛙鸣》在各方面进行过探讨：这里创办者及后继者们畅谈选择数学的志向，交流自己的学习体会；这里他们发表了一篇篇习作，记载着他们科研的起步。在这里，汇聚着这样一批年青人，他们继承着前人的成果，同时又要"看一看自己能干些什么。"

如今，《蛙鸣》将继续她的探索：目前，国内的数学杂志，初等的太初级，高等的太高级，《蛙鸣》将从中级数学这大片空白中选择一块园地，力求体现大学生的特点，供同学们自由驰骋。

从第23期起，《蛙鸣》在系、校领导的支持下，给写稿人以少量的资助；鉴于目前稿件的迅速增加，编委会打算恢复两月一期的传统，快节奏地反映同学们的思想。

在数学的王国里，"我们是小孩，但我们精力充沛，勇往直前，请携起手来，让《蛙鸣》歌唱得更响亮！

"青蛙无友谊，也解共同鸣。"(伊势物语)