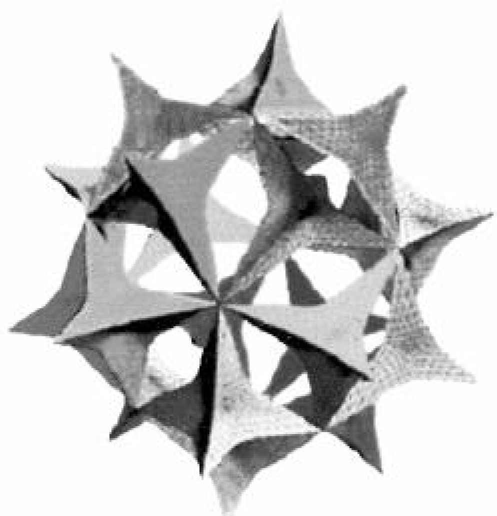
蛙鸣

第 61 期



中国科学技术大学数学系　编

刊首寄语

稻花香里，蛙声一片。其形虽小，其声也宏。

我们是数学的后生，虽然还未曾拥有先生的博学，大师的睿智，但心中的那份执着，早已化作满腔热忱，一路相伴踏寻梦想的足迹。

没有气馁和沮丧，亦不求荣耀与高贵，只有热情与智慧相撞的瞬间，才能够真真打动每一个数学人的心弦。这是来自美丽世界的声音，纯净不染纤尘，又如我们沉醉其间的香醇，悠远而绵长。

清心聆韵，蛙鸣如诉，因其真实而感动。怀抱一份数学的心境，就是怀抱一份淡泊明志，一份宁静致远，一份励精，一份冶性。

山不厌高，海不厌深。就让年轻的我们从这里出发栉风沐雨，海阔凭跃，天高任飞。

目　录

什么是好的数学

Terence Tao
卢昌海【译】

1 数学品质的诸多方面

我们都认为数学家应该努力创造好数学。但"好数学"该如何定义？甚至是否该斗胆试图加以定义呢？让我们先考虑前一个问题。我们几乎立刻能够意识到有许多不同种类的数学都可以被称为是"好"的。比方说，"好数学"可以指（不分先后顺序）：

i 好的数学题解（比如在一个重要数学问题上的重大突破）；

ii 好的数学技巧（比如对现有方法的精湛运用，或发展新的工具）；

iii 好的数学理论（比如系统性地统一或推广一系列现有结果的概念框架或符号选择）；

iv 好的数学洞察（比如一个重要的概念简化，或对一个统一的原理、启示、类比或主题的实现）；

v 好的数学发现（比如对一个出人意料、引人入胜的新的数学现象、关联或反例的揭示）；

vi 好的数学应用（比如应用于物理、工程、计算机科学、统计等领域的重要问题，或将一个数学领域的结果应用于另一个数学领域）；

vii 好的数学展示（比如对新近数学课题的详尽而广博的概览，或一个清晰而动机合理的论证）；

viii 好的数学教学（比如能让他人更有效地学习及研究数学的讲义或写作风格，或对数学教育的贡献）；

ix 好的数学远见（比如富有成效的长远计划或猜想）；

x 好的数学品味（比如自身有趣且对重要课题、主题或问题有影响的研究目标）；

xi 好的数学公关（比如向非数学家或另一个领域的数学家有效地展示数学成就）；

xii 好的元数学（比如数学基础、哲学、历史、学识或实践方面的进展）；严密的数学（所有细节都正确、细致而完整地给出）；

xiii 美丽的数学（比如 Ramanujan 的令人惊奇的恒等式；陈述简单漂亮，证明却很困难的结果）；

xiv 优美的数学（比如 Paul Erdös 的"来自天书的证明"观念；通过最少的努力得到困难的结果）；创造性的数学（比如本质上新颖的原创技巧、观点或各类结果）；

xv 有用的数学（比如会在某个领域的未来工作中被反复用到的引理或方法）；

xvi 强有力的数学（比如与一个已知反例相匹配的敏锐的结果，或从一个看起来很弱的假设推出一个强得出乎意料的结论）；

xvii 深刻的数学 (比如一个明显非平凡的结果，比如理解一个无法用更初等的方法接近的微妙现象)；

xviii 直观的数学 (比如一个自然的、容易形象化的论证)；

xix 明确的数学 (比如对某一类型的所有客体的分类；对一个数学课题的结论)；

xx 其它 [注一]。

如上所述，数学品质这一概念是一个高维的 (high-dimensional) 概念，并且不存在显而易见的标准排序 [注二]。我相信这是由于数学本身就是复杂和高维的，并且会以一种自我调整及难以预料的方式而演化；上述每种品质都代表了我们作为一个群体增进对数学的理解及运用的不同方式。至于上述品质的相对重要性或权重，看来并无普遍的共识。这部分地是由于技术上的考虑：一个特定时期的某个数学领域的发展也许更易于接纳一种特殊的方法；部分地也是由于文化上的考虑：任何一个特定的数学领域或学派都倾向于吸引具有相似思维、喜爱相似方法的数学家。它同时也反映了数学能力的多样性：不同的数学家往往擅长不同的风格，因而适应不同类型的数学挑战。

我相 "好数学" 的这种多样性和差异性对于整个数学来说是非常健康的，因为它允许我们在追求更多的数学进展及更好的理解数学这一共同目标上采取许多不同的方法，并开发许多不同的数学天赋。虽然上述每种品质都被普遍接受为是数学所需要的品质，但牺牲其它所有品质为代价来单独追求其中一两种却有可能变成对一个领域的危害。考虑下列假想的 (有点夸张的) 情形：

- 一个领域变得越来越华丽怪异，在其中各种单独的结果为推广而推广，为精致而精致，而整个领域却在毫无明确目标和前进感地随意漂流。
- 一个领域变得被令人惊骇的猜想所充斥，却毫无希望在其中任何一个猜想上取得严格进展。
- 一个领域变得主要通过特殊方法来解决一群互不关联的问题，却没有统一的主题、联系或目的。
- 一个领域变得过于枯燥和理论化，不断用技术上越来越形式化的框架来重铸和统一以前的结果，后果却是不产生任何令人激动的新突破。
- 一个领域崇尚经典结果，不断给出这些结果的更短、更简单及更优美的证明，但却不产生任何经典著作以外的真正原创的新结果。

在上述每种情形下，有关领域会在短期内出现大量的工作和进展，但从长远看却有边缘化和无法吸引更年轻的数学家的危险。幸运的是，当一个领域不断接受挑战，并因其与其它数学领域 (或相关学科) 的关联而获得新生，或受到并尊重多种 "好数学" 的文化熏陶时，它不太可能会以这种方式而衰落。这些自我纠错机制有助于使数学保持平衡、统一、多产和活跃。

现在让我们转而考虑前面提出的另一个问题，即我们到底该不该试图对 "好数学" 下定义。下定义有让我们变得傲慢自大的危险，特别是，我们有可能因为一个真正数学进展的奇异个例不满足主流定义 [注三] 而忽视它。另一方面，相反的观点 – 即在任何数学研究领域中所

有方法都同样适用并该得到同样资源 [注四]，或所有数学贡献都同样重要 – 也是有风险的。那样的观点就其理想主义而言也许是令人钦佩的，但它侵蚀了数学的方向感和目的感，并且还可能导致数学资源的不合理分配 [注五]。真实的情形处于两者之间，对于每个数学领域，现存的结果、传统、直觉和经验 (或它们的缺失) 预示着哪种方法可能会富有成效，从而应当得到大多数的资源；那种方法更具试探性，从而或许只要少数有独立头脑的数学家去进行探究以避免遗漏。比方说，在已经发展成熟的领域，比较合理的做法也许是追求系统方案，以严格的方式发展普遍理论，稳妥地延用卓有成效的方法及业已确立的直觉；而在较新的、不太稳定的领域，更应该强调的也许是提出和解决猜想，尝试不同的方法，以及在一定程度上依赖不严格的启示和类比。因此，从策略上讲比较合理的做法是，在每个领域内就数学进展中什么品质最应该受到鼓励做一个起码是部分的 (但与时俱进的) 调查，以便在该领域的每个发展阶段都能最有效地发展和推进该领域。比方说，某个领域也许急需解决一些紧迫的问题；另一个领域也许在翘首以待一个可以理顺大量已有成果的理论框架，或一个宏大的方案或一系列猜想来激发新的结果；其它领域则也许会从对关键定理的新的、更简单及更概念化的证明中获益匪浅；而更多的领域也许需要更大的公开性，以及关于其课题的透彻介绍，以吸引更多的兴趣和参与。因此，对什么是好数学的确定会并且也应当高度依赖一个领域自身的状况。这种确定还应当不断地更新与争论，无论是在领域内还是从通过旁观者。如前所述，有关一个领域应当如何发展的调查，若不及时检验和更正，很有可能会导致该领域内的不平衡。

上面的讨论似乎表明评价数学品质虽然重要，却是一件复杂得毫无希望的事情，特别是由于许多好的数学成就在上述某些品质上或许得分很高，在其它品质上却不然；同时，这些品质中有许多是主观而难以精确度量的 (除非是事后诸葛)。然而，一个令人瞩目的现象是 [注六]：上述一种意义上的好数学往往倾向于引致许多其它意义上的好数学，由此产生了一个试探性的猜测，即有关高品质数学的普遍观念也许毕竟还是存在的，上述所有特定衡量标准都代表了发现新数学的不同途径，或一个数学故事发展过程中的不同阶段或方面。

2 个例研究：Szemerédi 定理

现在我们从一般转向特殊，通过考察 Szemerédi 定理 — 那个声称任何具有正 (上) 密度的整数子集必定包含任意长度算术序列的漂亮而著名的结果 — 的内容及历史来说明上段所述的现象。这里我将避免所有的技术细节。

这个故事有许多个自然的切入点。我将从 Ramsey 定理 — 任何有限着色的足够大的完全图必定包含大的单色完全子图 (比如任意六人中必有三人要么彼此相识，要么彼此陌生，假定 “相识” 是一个有良好定义的对称关系) — 开始。这个很容易证明 (无需用到比迭代鸽笼原理更多的东西) 的结果代表了一种新现象的发现，并且开辟了一系列新的数学结果：Ramsey 型定理。这些定理中的每一个都是数学上一个新近洞察的观点 “完全无序是不可能的” 的不同表述。最早的 Ramsey 型定理之一 (事实上比 Ramsey 定理还早了几年) 是 van der Waerden 定理：给定整数集的一个有限着色，其中必有一个单色类包含任意长度算术序列。van der Waerden 的高度递归的证明非常优美，但有一个缺点，那就是它给出的出现第一个给定长度算术序列的定量下界弱得出奇。事实上，这个下界含有序列长度和着色种数的 Ackermann 函数。Erdös 和 Turán 所具有的良好数学品位，以及希望在 (当时还是猜想

的) 素数是否包含任意长度算术序列这一问题上获取进展的企图，使他们对这一定量问题做了进一步的探究 [注七]。他们推进了一些很强的猜想，其中一个成为了 Szemerédi 定理；另一个则是一个漂亮 (但尚未证明) 的更强的命题，它声称任何一个倒数和非绝对可和的正整数集都包含任意长度算术序列。在这些猜想上的第一个进展是一系列反例，最终汇集为 Behrend 对不存在长度 3 算术序列的适度稀疏集 (对于任意给定的 ε, 这个集合在 $\{1,\cdots,N\}$ 中的密度渐近地大于 $N^{-\varepsilon}$) 的优美构造。这一构造排除了 Erdös-Turán 猜想中最具野心的部分 (它猜测多项稀疏集包含大量的序列)，而且还排除了很大一类解决这些问题的方法 (比如那些基于 Cauchy-Schwarz 或 Hölder 之类不等式的方法)。这些例子虽不能完全解决问题，但它们表明 Erdös-Turán 猜想若成立，将需要一个非平凡的 (从而想必是有趣的) 证明。

下一个主要进展来自于 Roth，他以一种优美的方式运用 Hardy-Littlewood 的圆法 [注八] 及一种新的方法 (密度增量论证)，确立了 Roth 定理：每一个密度为正的整数集都包含无穷多个长度 3 序列。接下去很自然的就是试图将 Roth 的方法推广到更长的序列。Roth 和许多其他人在这方面花费了好几年的时间，却没能取得完全的成功。困难的起因直到很久之后才由于 Gowers 的工作而得到显现。问题的解决则依靠了 Endré Szemerédi 的惊人才华，他重新回到了纯粹的组合方法上 (特别是，把密度增量论证推进到了一个令人瞩目的技术复杂度上)，将 Roth 的结果首先推广到长度 4 [注九]，然后到任意长度，从而确立了他的著名定理。Szemerédi 的证明是一项技术绝活，它引进了许多新想法和新技巧，其中最重要的一个是引进了看待极端复杂图的新方法，即通过有界复杂模型来取近似。这一结果，即著名的 Szemerédi 正规性引理 (Szemerédi regularity lemma)，在很多方面都引人注目。如上所述，它给出了有关复杂图结构的全新洞察 (在现代术语中，这被视为那些图的结构定理和紧致定理)；它提供了一种将在本故事后面部分变得至关重要的新的证明方法 [能量增量方法 (energy increment method)]；它还导致了从图论到性质检验到加性组合学的数量多得难以置信的意外应用。可惜的是，正规性引理的完整故事太过冗长，无法在这里加以叙述。Szemerédi 的成就无疑是本故事的一个重点，但它绝不是故事的终结。Szemerédi 对其定理的证明虽然初等，却极为复杂、不易理解。并且它也没能完全解决启发 Erdös 和 Turán 进行研究的原始问题，因为这一证明本身在两个关键地方用到了 van der Waerden 定理，从而无法改进该定理中的定量下界。接下来是 Furstenberg，他的数学品位使他试图寻找一种本质上不同的 (高度非初等的 [注十]) 证明，他所依据的是组合数论与各态历经理论之间富有远见的类比，这一类比很快被他表述为很有用的 Furstenberg 对应原理。从这个原理 [注十一] 人们可以很容易地得出结论：Szemerédi 定理等价于保测体系中的多重回归定理，由此可以很自然地直接运用各态历经理论中的方法，特别是通过考察这种体系中各种可能的分类及结构分解 (比如各态历经分解)，来证明这一定理 (现在被称为 Furstenberg 回归定理)。事实上，Furstenberg 很快建立了 Furstenberg 结构定理，这一定理把所有保测体系都描述为一个平凡体系的一系列紧致拓展 (compact extension) 的弱混合拓展 (weakly mixing extension)。在这一定理及几个附加论证 (包括 van der Waerden 论证的一个变种) 的基础上可以确立多重回归定理，从而给出 Szemerédi 定理的一个新的证明。同样值得一提的是 Furstenberg 还撰写了有关这一领域及相关课题的优秀著作，在对这一领域的成长及发展做出重大贡献的同时对基础理论作了系统的形式化。

Furstenberg 与其合作者随后意识到这一新方法所具有的强劲潜力可以用来确立许多类型的回归定理，后者 (通过对应原理) 又可以产生一些高度非平凡的组合定理。顺着这一思路，Furstenberg、Katznelson 及其他人获得了 Szemerédi 定理的许多变种和推广，比如高维空

间的变种，他们甚至确立了 Hales-Jewett 定理的密度版本 (这是 van der Waerden 定理的一个非常有力及抽象的推广)。这些通过无穷各态历经理论技巧所获得的结果中的许多，人们至今也不知道是否存在 "初等" 证明，这证实了这种方法的力量。不仅如此，作为这些努力的一个有价值的副产品，人们还获得了对保测体系结构分类的深刻得多的理解。特别是，人们意识到对于许多类型的回归问题，一个任意体系的渐进回归性质几乎完全由该体系的一个特殊因子所控制，这个因子被称为该体系的 (最小) 特征因子 [注十二]。确定各类回归中这一特征因子的精确性质于是便成为了研究的焦点，因为这将导致有关极限行为的更精确的信息 (特别是，它将显示与多重回归有关的某些渐进表达式实际上收敛于一个极限，这在 Furstenberg 的原始论证中是悬而未决的)。Furstenberg 和 Weiss 的反例，及 Conze 和 Lesigne 的结果，逐渐导致一个结论，即这些特征因子应该由一个非常特殊的 (代数型的) 保测体系，即与幂零群 (nilpotent group) 相联系的零系统 (nilsystem)，来描述。这些结论的集大成者是对这些因子给予精确及严格描述的技术上引人注目的 Host 和 Kra 的论文 (及随后的 Ziegler 的论文)，它在得到其它一些结果的同时解决了刚才提到的渐进多重回归平均的收敛性问题。这些特征因子所扮演的核心角色相当充分地表明了存在于 (由零系统所表示的) 结构与 (由某些技术型的 "混合" 性质所刻划的) 随机性之间的二向性 (dichotomy)，以及一种深刻的见解，即 Szemerédi 定理的力量实际上是源于这一二向性。Host-Kra 分析的另一个值得一提的特点是平均概念在 "立方体" 或 "超平行体" 中令人瞩目的出现，出于一些原因，它比与算术序列有关的多重回归平均更易于分析。

与这些各态历经理论的进展相平行，其他数学家则在寻找用别的方式来理解、重新证明及改进 Szemerédi 定理。Ruzsa 和 Szemerédi 取得了一个重要的概念突破，他们用上面提到的 Szemerédi 正规性引理确立了一些图论中的结果，包括现在被称为三角消除引理 (triangle removal lemma) 的引理，其大致内容是说一个包含少数三角形的图中的三角形可以通过删除数目少得令人惊讶的边而消除。他们随后发现前面提到的 Behrend 例子对这一引理的定量下界给出了某种极限，特别是它排除了许多类型的初等方法 (因为那些方法通常给出多项式型的下界)，事实上迄今所知消除引理的所有证明都是通过正规性引理的某些变种。将这一联系反过来应用，人们发现其实三角消除引理蕴含了 Roth 关于长度 3 序列的定理。这一发现首次开启了通过纯图论技巧证明 Szemerédi 型定理的可能性，从而抛弃了问题中几乎所有的加性结构 (注意各态历经方法仍然保留了这一结构，以作用在系统上的移位算符的面目而出现；Szemerédi 的原始证明也只是部分是图论的，因为它在许多不同环节用到了序列的加性结构)。不过，一段时间之后人们才意识到图论方法与先于它出现的 Fourier 分析方法在很大程度上局限于检测象三角形或长度 3 序列那样的" 低复杂度" 结构，检测更长的序列将需要复杂得多的超图理论。特别是，这启示了 (由 Frankl 和 Rödl 率先提出的) 一个计划，意在寻找超图理论中正规性引理的类比，这将足以产生象 Szemerédi 定理 (及其变种和推广) 那样的推论。这被证明是一项复杂得令人吃惊的工作，尤其是要仔细安排这种正规化中参数的等级 [注十三]，使之以正确的顺序相互主导。事实上，能够从中推出 Szemerédi 定理的正规性引理及与之相伴的记数引理 (counting lemma) 的最终证明直到最近才出现。Gowers 的很有教益的反例也是值得一提的，它表明原始的正规性引理中的定量下界必须至少是塔状指数形式 (tower-exponential)，从而再次显示这一引理非同寻常的性质 (和力量)。

自 Roth 之后未曾有实质进展的 Fourier 分析方法最终由 Gowers 做了重新考察。和其它方法一样，Fourier 分析方法首先确立了整数集中的二向性，即他们在某种意义上要么是有结

构的，要么是伪随机的。这里的结构这一概念是由 Roth 提出的：有结构的集合在中等长度算术序列上有一个密度增量，但有关伪随机或“均匀性”的正确概念却没那么清楚。Gowers 提出了一个反例 (事实上这一反例与前面提到的 Host 与 Kra 的例子有着密切的关系)，表明以 Fourier 分析为基础的伪随机概念对于控制长度 4 或更长的序列是不够的，他随后引进了一个满足需要的不同的均匀性概念 (与 Host 和 Kra 的立方体平均有很密切的关系，与某些超图正规性的概念也有关系)。剩下的工作就是为二向性确立一个定量且严格的形式。这却是一项困难得出人意料的工作 (主要是由于这一方法中 Fourier 变换的效用有限)，并且在许多方面与 Host-Kra 及 Ziegler 试图将特征因子赋予零系统代数结构的努力相类似。但是，通过将 Fourier 分析工具与诸如 Freiman 定理和 Balog-Szemerédi 定理等加性组合学的主要结果，及一些新的组合与概率方法结合在一起，Gowers 用令人瞩目的高超技巧成功地完成了这一工作，他并且得到了有关 Szemerédi 定理和 van der Waerden 定理的非常强的定量下界[注十四]。总结起来，人们给出了 Szemerédi 定理的四种平行的证明；一种是通过直接的组合方法，一种是通过各态历经理论，一种是通过超图理论，还有一种是通过 Fourier 分析及加性组合学。即便有了这么多的证明，我们依然觉得有关自已对这一结果的理解还不完全。比方说，这些方法中没有一种强到能够检测素数中的序列，这主要是由于素数序列的稀疏性 (不过，Fourier 方法，或更确切地说 Hardy-Littlewood-Vinogradov 圆法，可以用来证明素数中存在无穷多长度 3 序列，并且在付出很大努力后可以部分地描述长度 4 序列)。但是通过调和分析中的限制理论 (这是另一个我们将不在这里讨论的引人入胜的故事)，Green 能够将素数“当成”稠密来处理，由此得到了一个有关素数稠密子集的类似于 Roth 定理的结果。这为相对 Szemerédi 定理 (relative Szemerédi theorem) 开启了可能性，使人们能检测整数集以外的其它集合，比如素数，的稠密子集中的算术序列。事实上，一个与相当稀疏的随机集合的稠密子集有关的相对 Roth 定理 (relative Roth theorem) 的原型已经出现在了图论文献中。

在与 Ben Green 的合作[注十五]中，我们开始试图将 Gowers 的 Fourier 分析及组合论证方法相对化到诸如稀疏随机集合或伪随机集合的稠密子集这样的情形中。经过许多努力 (部分地受到超图理论的启示，它已被很好地用来计算稀疏集合中的结构；也部分地受到 Green 正规性引理的启示，它将图论中的“算术正规性引理”转用到了加性理论中)，我们逐渐能够 (在一项尚未发表的工作中) 检测这类集合中的长度 4 序列。这时候，我们意识到了我们所用的正规性引理与 Host-kra 有关特征因子的构造之间的相似性。通过对这些构造的置换[注十六] (特别依赖于立方体平均)，我们可以确立一个令人满意的相对 Szemerédi 定理，它依赖于一个特定的转化原理 (transference principle)，粗略地说，该原理断言稀疏伪随机集合的稠密子集的行为“就好比”它们在初始集合中就是稠密的。为了将这一定理应用于素数，我们需要将素数包裹在一个适当的伪随机集合 (或者更确切地说，伪随机测度) 中。对我们来说很偶然的是，Goldston 和 Yildirim 最近有关素数隙的突破[注十七][注十八]几乎恰好构造了我们所需要的东西，使我们最终确立了早年的猜想，即素数集包含任意长度的算术序列。

故事到这里仍未结束，而是继续沿几个方向发展着。一方面转化原理现在已经有了一些进一步的应用，比如获得高斯素数中的组团 (constellation) 或有理素数中的多项序列。另一个很有前途的研究方向是 Fourier 分析、超图理论及各态历经方法的彼此汇聚，比如发展图论与超图理论的无穷版本 (它在其它数学领域，如性质检验，中也有应用)，或各态历经理论的有限版本。第三个方向是使控制各态历经情形下的回归的零系统也能控制算术序列的各种有限平均。特别是，Green 和我正在积极地计算素数及由零系统 (通过 Vinogradov 方法)

产生的序列之间的关联，以便确立能够在素数中找到的各种结构的精确渐进形式。最后，但并非最不重要的是最初的 Erdös-Turán 猜想，它在所有这些进展之后仍未得到解决，不过现在 Bourgain 已经取得了一些非常有希望的进展，这应该能引导出进一步的发展。

3 结论

如我们在上述个例研究中可以看到的，好数学的最佳例子不仅满足本文开头所列举的数学品质判据中的一项或多项，更重要的，它是一个更宏大的数学故事的一部分，那个故事的展开将产生许多不同类型的进一步的好数学。实际上，人们可以将整个数学领域的历史看成是主要由少数几个这类好故事随时间的演化及相互影响所产生的。因此我的结论是，好数学不仅仅是用前面列举的一个或几个" 局部" 品质来衡量的 (尽管那些品质无疑是重要且值得追求与争论的)，还要依赖于它如何通过继承以前的成果或鼓励后续发展来与其它好数学相匹配这样更" 全局" 的问题。当然，如果不凭借后见之利，要确切地预言什么样的数学会具有这种品质是困难的。不过实际上似乎存在某种无法定义的感觉，使我们能感觉到某项数学成果" 触及了什么东西"，是一个有待进一步探索的更大谜团的一部分。在我看来，追求这种对发展潜力的难以言状的保障，对数学进展来说起码是与前面列举的更具体更显然的数学品质同等重要的。因此我相信，好数学并不是单纯的解题、构筑理论、对论证进行简化、强化、明晰化、使论证更优美、更严格，尽管这些无疑都是很好的目标。在完成所有这些任务 (及争论一个给定领域中哪一个应该有较高的优先权) 的同时，我们应该关注我们的结果所可能从属的任何更大的范围，因为那很可能会对我们的结果、相应的领域，乃至整个数学产生最大的长期利益。

4 鸣谢

感谢 Laura Kim 阅读并评论本文的早期文稿，以及 Gil Kalai 的许多深思熟虑的评论与建议。

原文注释

[注一] 上述列举无意以完备自居。尤其是，它主要着眼于研究性数学文献中的数学，而非课堂、教材或自然科学等接近数学的学科中的数学。

[注二] 特别值得指出的是数学严格性虽然非常重要，却只是界定高品质数学的因素之一。

[注三] 一个相关的困难是，除了数学严格性这一引人注目的例外，上述品质大都有点主观，因而含有某种不精确性与不确定性。我们感谢 Gil Kalai 强调了这一点。

[注四] 稀缺资源的例子包括钱、时间、注意力、才能及顶尖刊物的版面。

[注五] 这一问题的另一个解决方法是利用数学资源也是多维这一事实。比如人们可以为展示、创造性等等设立奖项，或为不同类型的成果设立不同的杂志。我感谢 Gil Kalai 对这一点的洞察。

[注六] 这一现象与 Wigner 所发现的 "数学的不合理有效性" (unreasonable effectiveness of mathematics) 有一定的关联。

[注七] Erdös 也研究了 Ramsey 原始定理中的定量下界，由此导致的结果中包括了对在组合学中极其重要的概率方法的确立，不过这本身就是一个很长的故事，我们没有足够的篇幅在这里讨论。

[注八] 同样，圆法的历史也是一段我们无法细述的精彩故事。不过只要提这样一点就足够了，那便是用现代语言来说，这一方法是 "Fourier 分析是解决加性组合学问题的重要工具" 这一现代标准见解的一部分。

[注九] 在这之后，Roth 很快就将 Szemerédi 的想法与他自己的 Fourier 分析方法组合在一起，给出了针对长度 4 序列的 Szemerédi 定理的混合证明。

[注十] 比方说，某些版本的 Furstenberg 论证严重依赖于选择公理，尽管将之修改为不依赖选择公理也是可能的。

[注十一] 对拓扑动力系统也存在类似的对应原理将 van der Waerden 定理与多重回归定理等价起来。这引出了有关拓扑动力学的迷人故事。

[注十二] 这方面的早期例子是 von Neumann 的平均各态历经定理，在其中移位不变函数 (shift-invariant function) 的因子控制了移位简单平均的极限行为。

[注十三] 这一等级看来与 Furstenberg 在其使保测体系 "正规化" 的类似探索中所遇到的一系列拓展有关，尽管我们现在对其确切关联还了解得很少。

[注十四] 同样值得一提的是 Shelah 有关 van der Waerden 定理的杰出的创造性证明，它曾经保持着有关这一定理的最佳常数的纪录。

[注十五] 顺便说一下，我最初被这些问题所吸引是因为它们与另一个重大的数学故事，我们在此处没有篇幅讨论的 Kakeya 猜想，之间的联系。它们与前面提到的有关限制理论的故事之间的关系则是多少有点出人意料的。

[注十六] 出于几个原因，这里有一点技巧性。最明显的是各态历经构造本质上是无穷的，但为了处理素数却必须在有限的情况下使用。幸运的是，我曾经尝试过将各态历经方法有限化以便应用于 Szemerédi 定理。虽然那一尝试在当时并不完全，但后来发现它足以对我们研究素数提供帮助。

[注十七] 在我们写论文的时候，我们所采用的构造来自于 Goldston 和 Yildirim 的一篇文章，那篇文章曾因为一个与我们工作无关的缺陷而被他们收回，后来他们通过一些聪明的新想法弥补了缺陷。这对我们前面提到的一个观点，即一项数学工作不一定要在所有细节上都绝对正确才能对未来的 (严密) 工作有所助益，是一种支持。

[注十八] 有关素数隙的故事也是一个我们无法在这里讲述的有趣的故事。

作者简介：

Terence Tao(陶哲轩):1975 年 7 月 15 日出生于澳大利亚阿得雷德的一个华裔家庭，陶是公认的天才数学家，被誉为 "数学界的莫扎特"。陶 13 岁便获得国际数学奥林匹克竞赛金牌。1996 年陶 21 岁时获得普林斯顿大学博士学位。2006 年，年仅 31 岁的他因在调和分析领域的杰出贡献获得菲尔茨奖。

Adèles 和 Idèles

0301　　李晓冰

Adéle 和 Idéle 的概念植根于"局部一整体哲学"的沃土，它提供了基本的语言和技术，用以集中代数数域的局部信息从而把握其整体算术性质。本文讨论 Adéle 和 Idéle 的几何，并阐述怎样从中导出数域的一些整体算术信息。

1　背景综述

代数数论研究的一个基本对象是数域 K 的结构：包括理想类群 $\mathrm{Cl}(K)$，单位群 $O_K^\times$，Dedekind Zeta 函数 $\zeta_K(s)$ 等. 基本结果有：

- Minkowski 类数定理: 理想类数 $h_K := \#\mathrm{Cl}(K)$ 有限;
- Dirichlet 单位定理: $O_K^\times$ 是一个有限生成的交换群. 设 r_1 是 K 的实嵌入个数，$2r_2$ 是复嵌入的个数, $r = r_1 + r_2 - 1$:
$$O_K^\times \simeq W \oplus \mathbb{Z}^r,$$
这儿 W 为 K 中单位根形成的有限循环群;
- Dedekind 类数公式: 设 D_K 是 K 的判别式, $w = \#W$, R_K 是由单位群 $O_K^\times$ 定义出的导子, 则
$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w|D_K|^{1/2}} \cdot R_K h_K,$$
或 (由函数方程) 等价地
$$\lim_{s\to 0}\frac{\zeta(s)}{s^r} = -\frac{R_K h_K}{w}.$$

Adéle 和 Idéle 提供了统一的观点来推导这些数域 K 的整体算术结果。我们现在来定义 Adéles 和 Idéles. 令 ν 是 K 的一个位, 其对应的局部域 K_ν 上的标准赋值 $|\cdot|_\nu$ 和 Haar- 测度定义如下：

$$\begin{cases} |\cdot|_\nu = |\cdot|_{\mathbb{R}}, & d\mu_\nu(x) = dx, & \text{如果 } \nu \text{ 是实的;} \\ |\cdot|_\nu = |\cdot|_{\mathbb{C}}^2, & d\mu_\nu(z) = |dz \wedge d\bar{z}|, & \text{如果 } \nu \text{ 是复的;} \\ |p|_\nu = p^{-[K_\nu:\mathbb{Q}_p]}, & \mu_\nu(O_\nu) = 1, & \text{如果 } \nu|p \text{ 是有限的;} \end{cases}$$

相应地 $K_\nu^\times$ 上的 Haar 测度定义为:

$$\begin{cases} d\mu_\nu^\times(x) = \dfrac{1}{|x|}dx, & \text{如果 } \nu \text{ 是实的;} \\ d\mu_\nu^\times(z) = \dfrac{1}{|z|^2}|dz \wedge d\bar{z}| & \text{如果 } \nu \text{ 是复的;} \\ \mu_\nu^\times(O_\nu^\times) = 1, & \text{如果 } \nu|p \text{ 是有限的;} \end{cases}$$

K 的 Adéle 环 $\mathbb{A}_K$ 定义为:

- 环结构: $\mathbb{A}_K=\{\alpha=(\alpha_\nu)\in\prod\limits_\nu K_\nu:|\alpha_\nu|_\nu\leqslant 1\quad$ 对几乎所有 ν 成立$\}$
- 拓扑: K_ν 关于 O_ν 的 限制直积.

$\mathbb{A}_K$ 上存在 Haar 测度 $\mu=\prod\limits_\nu \mu_\nu$。

Adéle 主定理. *令 K 是一个代数数域, $\mathbb{A}_K$ 其 Adéle 环. 则*

(1) K 在 $\mathbb{A}_K$ 中是离散的, 且 $\mathbb{A}_K/K$ 紧致;

(2) Pontrayajin 对偶 $\hat{\mathbb{A}}_K\simeq\mathbb{A}_K$。详言之, 任意非零 $x\in K^\perp\subset\hat{\mathbb{A}}_K$ 诱导同构

$$\theta_x:\mathbb{A}_K\xrightarrow{\sim}\hat{\mathbb{A}}_K,\qquad \alpha\longmapsto(\beta\longmapsto x(\alpha\beta)),$$

且 $K^\perp=Kx$。

注记: 其中 (2) 是 J.Tate 在其博士论文 ([1]) 中推导 Zeta-functions 的函数方程的出发点之一。

推论 1(Artin 乘积公式): 对任意 $\xi\in K^\times$, $\prod_\nu|\xi|_\nu=1$。

证明: 由 $\xi(\mathbb{A}_K/K)=\mathbb{A}_K/K\Longrightarrow\prod_\nu|\xi|_\nu\mu(\mathbb{A}_K/K)=\mu(\mathbb{A}_K/K)$. 因 $\mathbb{A}_K/K$ 紧致即得结论。□

推论 2(强逼近定理): $K+K_\nu$ 在 $\mathbb{A}_K$ 中处处稠密。

证明: 反设 $\overline{K+K_\nu}\neq\mathbb{A}_K$, $\exists 0\neq x_0\in\overline{K+K_\nu}^\perp$, 在 (2) 中取 $x=x_0$, 则 $\theta_{x_0}(K_0)=x_0$ 这与 θ_{x_0} 是同构矛盾。□

K 的 Idéle 群 $\mathbb{J}_K$ 定义为:

- 群结构: $\mathbb{J}_K=\mathbb{A}_K^\times$;
- 拓扑: $K_\nu^\times$ 关于 $O_\nu^\times$ 的限制直积.

$\mathbb{J}_K$ 上的 Haar 测度由 $\mu^\times=\prod\limits_\nu\mu_\nu^\times$ 给出. 考虑如下的同态:

$$|\ |:\mathbb{J}_K\longrightarrow\mathbb{R}_+^\times,\qquad(\alpha_\nu)\longmapsto\prod_\nu|\alpha_\nu|_\nu$$

记 $\mathbb{J}_K^1=\mathrm{Ker}|\ |$, 则 $K^\times\subset\mathbb{J}_K^1$, 且 $\mathbb{J}_K=\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{J}_K^1\overset{log}{=}\mathbb{R}\times\mathbb{J}_K^1$, 存在唯一 $\mathbb{J}_K^1$ 上的 Haar 测度 $\mu_0^\times$ 使 $\mu^\times=\mu_L\times\mu_0^\times$, μ_L 表示 $\mathbb{R}$ 上的 Lebesgue 测度。由 $|\ |$ 是连续满射知 $\mathbb{J}_K/K^\times$ 非紧, 但有:

Idéle 主定理. *$K^\times$ 在 $\mathbb{J}_K^1$ 中离散且 $\mathbb{J}_K^1/K^\times$ 紧致。*

下文将看到, 这是经典代数数论的基石。令 I_K 为 K 的非零分式理想形成的群, 则存在自然的连续同态

$$\varphi:\mathbb{J}_K\longrightarrow I_K,\qquad\alpha=(\alpha_\nu)\longmapsto\sum_{\nu\nmid\infty}(\mathrm{ord}_\nu\alpha_\nu)\cdot\nu$$

注意到: 改动 $\{\alpha_\nu:\nu|\infty\}$ 的取值不影响 $\varphi(\alpha)$, 故 $\varphi|_{\mathbb{J}_K^1}$ 也是满射.

2 Adéle 的几何

设 K 的次数为 $n=[K:\mathbb{Q}]$. 定义:

$$\lambda:\mathbb{R}^n\xrightarrow{\sim}K_\infty=\prod_{\nu|\infty}K_\nu,\qquad\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)\longmapsto\sum_{i=1}^n\mu_i\xi_i,$$

这里 $\{\xi_i\}$ 是 K 的一组整基。

性质 1：记 $I=[0,1)\subset\mathbb{R}$，则有：

(1) $Y:=\lambda(I^n)\times\prod\limits_{\nu\nmid\infty}O_K$ 是 $\mathbb{A}_K$ 关于 K 的基本域；

(2) $\mu(\mathbb{A}_K/K)=|D_K|^{\frac{1}{2}}$，这里 D_K 是 K 的判别式。

证明: (1) 只需证任意的 $\alpha\in\mathbb{A}_K$ 有唯一表示: $\alpha=y+\beta$, 其中 $y\in Y,\beta\in K$.

(i) 存在性: 由强逼近定理知 $K_\infty+K$ 在 $\mathbb{A}_K$ 中稠密，又 $K_\infty\times\prod\limits_{\nu\nmid\infty}O_\nu$ 是 $\mathbb{A}_K$ 的开集，故存在 $y'\in K_\infty\times\prod\limits_{\nu\nmid\infty}O_\nu,\beta'\in K$ 使得 $\alpha=y'+\beta'$。记 y' 到 K_∞ 的投影 $y'_\infty=\lambda(u),u=(u_i)$ 满足 $m_i\leqslant u_i<m_i+1,m_i\in\mathbb{Z}$。则 $y=y'-\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\xi_i\in Y,\beta=\beta'+\sum_{i=1}^{n}m_i\xi_i$ 满足条件。

(ii) 唯一性：若另有 $\alpha=y''+\beta''\in Y+K$，则 $\beta-\beta''\in K\cap(K_\infty\times\prod\limits_{\nu\nmid\infty}O_\nu)=O_K$，从而 $\beta_\infty-\beta''_\infty\in\lambda(\mathbb{Z}^n\cap(-1,1)^n)=\{0\}$，即 $\beta=\beta''$

(2) 只需证 $\mu_\infty(\lambda(I^n))=(D_K)^{\frac{1}{2}}$，这里 $\mu_\infty=\prod\limits_{\nu\mid\infty}\mu_\nu$ 是 K_∞ 的 Haar 测度。设 $\{\sigma_i:1\leqslant i\leqslant r_1\}$ 是 K 的所有实嵌入，$\{\tau_i:\overline{\tau}_i:1\leqslant i\leqslant r_2\}$ 是 K 的所有复嵌入.
记 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 分别为 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{r_1},\tau_1,\overline{\tau}_1,\cdots,\tau_{r_2},\overline{\tau}_{r_2}.(n=r_1+2r_2)$
则 $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\circ\lambda$ 定义了 $\mathbb{R}-$ 线性映射 $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^{r_1}\oplus\mathbb{C}^{r_2},u\longmapsto\nu=\Lambda\cdot u$
这儿矩阵 $\Lambda=(\lambda_i(\xi_j))$ 且 $\Lambda^t\Lambda=T=(Tr_{K/\mathbb{Q}}(\xi_i\xi_j))$。从而

$$d\nu_1\wedge\cdots\wedge d\nu_{r_1}\wedge(d\nu_{r_1+1}\wedge d\overline{\nu}_{r_1+1})\wedge\cdots\wedge(d\nu_{r_1+r_2}\wedge d\overline{\nu}_{r_1+r_2})=\pm(\det\Lambda)du_1\wedge\cdots\wedge du_n.$$

进而 $d\mu_\infty(\lambda(u))=\prod\limits_{i=1}^{r_1}d\nu_i\prod\limits_{j=1}^{r_2}|d\nu_{r_1+j}\wedge d\overline{\nu}_{r_1+j}|=|\det\Lambda|du_1\cdots du_n$, 即

$$d\mu_\infty(\lambda(u))=|D_K|^{\frac{1}{2}}du_1\cdots du_n,\qquad D_K=\det T=\det\Lambda^t\Lambda$$

□

推论：如果 $K\neq\mathbb{Q}$，则 $|D_K|>1$。从而 $\mathbb{Q}$ 没有非平凡的无分歧扩张.

证明: 记 $n=[K:\mathbb{Q}],\nu_0,\cdots,\nu_r$ 是 K 的所有无穷素除子，其中 $0\leq i<r_1$ 对应实素除子。对正实数 $C_0,\cdots.C_r$, 定义

$$C:=\prod_{\nu\nmid\infty}O_\nu\times\prod_{i=0}^{r}\left\{\alpha_{\nu_i}:\ |\alpha_{\nu_i}|_{\nu_i}\leqslant\frac{C_i}{2}\right\}.$$

则 $\mu(C)=\pi^{r_2}\prod\limits_{i=0}^{r}C_i$。当 $\mu(C)>\mu(\mathbb{A}_K/K)=|D_K|^{\frac{1}{2}}$ 时，存在 $\alpha,\alpha'\in C$ 使得 $\alpha-\alpha'=\beta\in K^\times$.
此时有

$$|\beta|_\nu\leqslant 1,\nu\nmid\infty;\quad |\beta|_{v_i}\leqslant C_i,i<r_1;\quad |\beta|_{\nu_i}\leqslant 2C_i,i\geqslant r_1.$$

则 $1=\prod\limits_{\nu}|\beta|_\nu\leq 2^{r_2}\prod\limits_{i}C_i$. 注意到素数 p 在 K 中无分歧当且仅当 $p\nmid D_K$。下面假设 $|D_K|=1$

- 当 $r_2>0$ 时，取 $\pi^{-r_2}<\prod_i C_i<2^{-r_2}$，得 $1=\prod_\nu|\beta|_\nu<1$，矛盾！
- 当 $r_2=0$ 时，注意到 $K\cap\left(\prod_{\nu\nmid\infty}O_\nu\times\prod_{\nu\mid\infty}\{\alpha_\nu:\ |\alpha_\nu|_\nu\leqslant 2\}\right)=\{\beta_i\}$ 是有限集。取 $1<C_0<2$ 使得不存在 β_i 使 $1<|\beta_i|_{\nu_0}\leqslant C_0$，再取 $C_1,\cdots,C_r<1$ 使 $\prod_{i=0}^{r}C_i>1$. 从而 $\exists\beta\in K^\times$ 使

  $$|\beta|_\nu\leqslant 1,\nu\nmid\infty;\quad |\beta|_{\nu_0}\leqslant 1;\quad |\beta|_{\nu_i}<1,\ i>0.$$

  若 $n>1$，则矛盾！

□

3 Idéle 的几何

记 $r=r_1+r_2-1$, 考虑 log 映射:

$$\ell:K_\infty^\times=\prod_{\nu\mid\infty}K_\nu^\times\longrightarrow\mathbb{R}^{r+1},\qquad \alpha=(\alpha_{\nu_i})\longmapsto(\log|\alpha_{\nu_0}|_{\nu_0},\cdots,\log|\alpha_{\nu_r}|_{\nu_r}).$$

这里 $\nu_0,\cdots,\nu_r$ 是 K 的所有 ∞ 素除子. 令 $P=\{x\in\mathbb{R}^{r+1}:\sum_{i=0}^{r}x_i=0\}$ 和 $H=\ell^{-1}(P)$.

引理 1: *对任意实数 a,b, $0<a<b$, 如下集合有限*

$$\{\xi\in O_K^\times:\quad a\leqslant|\xi|_\nu\leqslant b\ \text{对所有无穷素除子}\ v\}.$$

证明：事实上它是紧集 $\prod_{\nu\nmid\infty}O_\nu^\times\times\prod_{\nu\mid\infty}\{a\leqslant|\alpha_\nu|_\nu\leqslant b\}$ 与离散集 $K^\times$ 之交. □

推论 1: *K 的全体单位根形成的群 W 是有限的从而循环的。(取 $a=b=1$)*

推论 2: *$\ell(O_K^\times)$ 在 P 中离散。*

下面的性质表明，$\mathbb{J}_K^1/K^\times$ 的紧性有着深刻的算术内涵。

性质 2: *下述的命题等价：*

(1) *$\mathbb{J}_K'/K^\times$ 紧致;*

(2) *"Minkowski 类数定理" 和 "Dirichlet 单位定理" 成立。*

证明：考察正合列

$$1\longrightarrow K^\times(\prod_{\nu\nmid\infty}O_\nu^\times\times H)/K^\times\xrightarrow{i}\mathbb{J}_K^1/K^\times\xrightarrow{\varphi}\mathrm{Cl}(K)\longrightarrow 1\qquad(*)$$

注意到 $K^\times(\prod_{\nu\nmid\infty}O_\nu^\times\times H)/K^\times\simeq(\prod_{\nu\nmid\infty}O_\nu^\times\times H)/O_K^\times\xrightarrow{\ell}P/\ell(O_K^\times)$

$(2)\Longrightarrow(1)$: $\mathbb{J}_K^1/K^\times$ 是有限个紧集之并，从而紧。

$(1)\Longrightarrow(2)$: $\mathrm{Cl}(K)$ 是紧而离散的，从而有限。由于 $(\prod_{\nu\nmid\infty}O_\nu^\times\times H)$ 是 $\mathbb{J}_K^1$ 的闭子群，故 $P/\ell(O_K^\times)$ 是紧的，结合推论 2 及下面的引理 2 即得 $\ell(O_K^\times)\simeq\mathbb{Z}^r$，从而 $O_K^\times\simeq W\oplus\mathbb{Z}^r$ □

引理 2：若 Γ 是 $\mathbb{R}^n$ 的离散子群，且 $\mathbb{R}^n/\Gamma$ 紧致，则 $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$。

证明：由条件知 $0 < \mu_L(\mathbb{R}^n/\Gamma) < \infty$，$\mu_L$ 是 Lebesgue 测度。注意到 Γ 张成的子空间 $V = \mathbb{R}^n$，这是因为 $\mathbb{R}^n/T \simeq V/T \oplus V^{\perp}$ 紧致。
设 $B = \{u_i\} \subset \Gamma$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，则 $|\det B| = [\Gamma : \Gamma_1] \cdot \mu_L(\mathbb{R}^n/T), \Gamma_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}u_i$，取 B 使得 $|\det B|$ 最小，断言：$\Gamma = \Gamma_1 \simeq \mathbb{Z}^n$. 事实上，若 $\exists u \in \Gamma/\Gamma_1$，则 $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$ 其中至少一个 $a_i \notin \mathbb{Z}$，不妨设 $0 < a_i < 1$。则 $B' = \{u, u_2, \cdots, u_n\} = B \cdot \left\{\begin{matrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right\}$ 使 $|\det B'| < |\det B|$，矛盾！

□

综上有如下的交换图，其行、列均正合：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & W & \rightarrow & O_K^{\times} & \rightarrow & \ell(O_K^{\times}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & \prod\limits_{\nu} O_\nu^{\times} & \rightarrow & \prod\limits_{\nu \nmid \infty} O_\nu^{\times} \times H & \xrightarrow{\ell} & P & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \rightarrow & \prod\limits_{\nu} O_\nu^{\times}/W & \rightarrow & (\prod\limits_{\nu \nmid \infty} O_\nu^{\times} \times H)/O_K^{\times} & \rightarrow & P/\ell(O_K^{\times}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array} \qquad (**)$$

取 $\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r\} \subset O_K^{\times}$ 使 $\{\ell(\varepsilon_i)\}$ 生成 P，令 $\delta = (\delta_i) \in \mathbb{R}^{r+1}, \delta_i = [K_{\nu_i} : \mathbb{R}] = 1\ or\ 2, \sum_{i=0}^{r} \delta_i = n$，从而 $(\frac{\delta}{n}, l(\varepsilon_i))$ 是 $\mathbb{R}^{r+1}$ 的一组基，记方阵 $M = (\frac{\delta}{n}, l(\varepsilon_i)), R := |\det M|$；则 $\mu_L(P/\ell(O_K^{\times})) = R, \mu_0^{\times}(\prod\limits_{\nu} O_\nu^{\times}/W) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\omega}$. 结合正合列 $(*)$ 和 $(**)$ 即得：

性质 3：$\mu_0^{\times}(\mathbb{J}_K^1/K^{\times}) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}hR}{\omega}$.

注记：由性质 3 结合 $\zeta_K(s)$ 的函数方程即得 "Dedekind 类数公式"(详见 [1])：

$$\mathrm{Res}_{s=1}\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{\omega|D_K|^{\frac{1}{2}}} \cdot R_K h_K.$$

这个激动人心的公式把 K 的所有重要的不变量统一到一起，它在高维情形的某种类比是当代数学家关注的焦点之一.

参考文献

[1] J.Tate: Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions, Thesis, Princeton University, 1950.

[2] A.Weil: Basic Number Theory (3rd Ed.) New York: Springer-Verlag, 1974

21 世纪七大数学难题

美国麻州的克雷 (Clay) 数学研究所于 2000 年 5 月 24 日在巴黎法兰西学院宣布：对七个“千僖年数学难题”的每一个悬赏一百万美元，这七个难题是：

“千僖难题”之一：P (多项式算法) 问题对 NP (非多项式算法) 问题：有确定性多项式时间算法的问题类 P 是否等于有非确定性多项式时间算法的问题类 NP。

“千僖难题”之二：霍奇 (Hodge) 猜想：在非奇异复射影代数簇上，任一霍奇类是代数闭链类的有理线性组合。

“千僖难题”之三：庞加莱 (Poincare) 猜想：任意闭单连通 3- 流型同胚于 3- 球。

“千僖难题”之四：黎曼 (Riemann) 假设：黎曼 Zeta – 函数的非平凡零点的实部都是 1/2。

“千僖难题”之五：杨 – 米尔斯 (Yang-Mills) 存在性和质量缺口：证明量子 Yang-Mills 场存在并存在一个质量间隙。

“千僖难题”之六：纳维叶 – 斯托克斯 (Navier-Stokes) 方程的存在性与光滑性：证明或否定 3- 维奈维尔 – 斯托克斯方程解的存在性和光滑性 (在合理的边界和初始条件下)。

“千僖难题”之七：贝赫 (Birch) 和斯维讷通 – 戴尔 (Swinnerton-Dyer) 猜想：对有理数域上的任一椭圆曲线，其 L 函数在 1 的化零阶等于此曲线上有理点构成的 Abel 群的秩。

Three-Surfaces Theorem And Its Application

0301 Yuan Yuan

Definition The operator

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}$$

is said to be **parabolic** at $(x,t) \equiv (x_1, x_2, ..., x_n, t)$ if for fixed t the operator consisting of the first sum is elliptic at (x,t). That is, L is parabolic if there is a number $\mu > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{3.1}$$

for all n-tuples of real numbers $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$. The operator L is **uniformly parabolic** in a domain E in (x,t)-space if (1) holds with the same number $\mu > 0$ for all (x,t) in E.

Lemma 1 *Let u satify the differential inequality $L[u] \geq 0$ in a domain E of the (x,t)-space where a_{ij} and b_i are bounded and L is uniformly parabolic. Let K be a ball such that it and its boundary ∂K are contained in E. Suppose the maximum of u in E is M, that $u < M$ in the interior of K, and that $u = M$ at some point P on the boundary of K. Then the tangent to K at P is parallel to the x-space, i.e. ,P is either the point at the top or the point at the bottom of the ball K.*

Proof Let the ball K have its center at $(\overline{x}, \overline{t})$, and let R be the radius of K. We shall assume that the point P on ∂K is not at the top or bottom and reach a contradiction.

We may assume without loss of generality that P is the only boundary point where u=M. For, if not, we may replace K by a slightly smaller ball K' whose boundary is interior to K except at the one point P where $\partial K'$ and ∂K are tangent. Then K' has exactly one point P on its boundary where u=M and the argument maybe continued with K' , if necessary.

Suppose P has coordinates (x_0, t_0) with $x_0 \neq \overline{x}$. We construct a ball K_0 with center at P and radius R_0 so small that $R_0 <\| x_0 - \overline{x} \|$, and also such that K_0 lies completely in E. The boundary ∂K_0 consists of two parts: S'(which include its boundary) is the intersection of ∂K_0 with the closed ball $K \bigcup \partial K$, and S'' is the complement of S' with respect to ∂K_0. Since u is less than M on the closed part S' , a positive constant η can be found so that $u \leq M - \eta$ on S'. Moreover, since $u \leq M$ throughout E,we have $u \leq M$ on S''.

We define the auxiliary function

$$v(x,t) = e^{-\alpha[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_i)^2 + (t-\overline{t})^2]} - e^{-\alpha R^2}.$$

Then for positive values of α, v is positive in K , zero on ∂K , and negative in the exterior of

K. We compute

$$\begin{aligned}
L[v] &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial t} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)[4\alpha^2(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) - 2\alpha\delta_{ij}]e^{-\alpha[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_i)^2+(t-\overline{t})^2]} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)[-2\alpha(x_i-\overline{x}_i)]e^{-\alpha[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_i)^2+(t-\overline{t})^2]} \\
&\quad - [-2\alpha(t-\overline{t})]e^{-\alpha[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_i)^2+(t-\overline{t})^2]} \\
&= \{4\alpha^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) \\
&\quad -2\alpha\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}(x,t)+b_i(x,t)(x_i-\overline{x}_i)] + 2\alpha(t-\overline{t})\}e^{-\alpha[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_i)^2+(t-\overline{t})^2]}.
\end{aligned}$$

In the ball K_0 and on its boundary we have

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) \geq \mu\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x}_i)^2 = \mu \parallel x-\overline{x} \parallel \geq \parallel x_0-\overline{x} \parallel - R_0 > 0$$

and so it's possible to choose α so large that $L[v] > 0$ for (x,t) in $K_0 \bigcup \partial K_0$.
We now form the function

$$\omega(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$$

where ε is a positive constant to be chosen.We observe that

$$L[\omega] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0 \ in \ K_0. \tag{3.2}$$

Since $u \leq M - \eta$ on S', we can select ε so small that $\omega = u + \varepsilon v < M$ on S'.
Furthermore, since v is negtive on S'' and $u \leq M$, we have $\omega = u + \varepsilon v < M$ on S''.

Thus $\omega < M$ on the entire boundary $\partial K_0 = S' \bigcup S''$. On the other hand, since v vanishes on ∂K, we find $\omega(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) + \varepsilon v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M$. Hence the maximum of ω in K_0 must occur at an interior point. This fact contradicts (2) and the lemma is established. Notice that the argument fails if P is at the top or the bottom of K. For if $x_0 = \overline{x}$, we cannot choose $R_0 < \parallel x_0 - \overline{x} \parallel$.

Lemma 2 *Suppose that in a domain E of the (x,t)-space, u satisfies the inequality $L[u] \geq 0$ with L as in Lemma 1. Suppose that $u < M$ at some interior point (x_0,t_0) of E and that $u \leq M$ throughout E. If h is any horizontal super-plane segment in the interior of E which contains (x_0,t_0), then $u < M$ on h.*

Proof We suppose that $u = M$ at some interior point (x^*,t_0) on h, and that $u < M$ at (x_0,t_0).We shall reach a contradiction. We may assume without loss of generality as Lemma 1 that x^* is the only boundary point of n-dimension Ball $B(x_0, \parallel x_0 - x^* \parallel)$ in h where u=M. Let d_0 be either $\parallel x_0 - x^* \parallel$ or the minimum of the distances from any point $(x,t_0), x \in B(x_0, \parallel x_0 - x^* \parallel)$, to ∂E, whichever is smaller.

For $x \in B(x^*, d_0) \bigcap B(x_0, \| x_0 - x^* \|)$ we define d(x) to be the distance from (x, t_0) to the nearest point in E where u=M. Since $u(x^*, t_0) = M, d(x) \leq \| x - x^* \|$. By Lemma 1, the nearest point is either $(x, t_0 + d(x))$ or $(x, t_0 - d(x)), u(x, t_0 \pm d(x)) = M$. Since the distance from a point $(x + \delta\nu, t_0)$(ν is an n-dimension unit vector) to $(x, t_0 \pm d(x))$ is $\sqrt{d(x)^2 + \delta^2}$, we see that

$$d(x + \delta\nu) \leq \sqrt{d(x)^2 + \delta^2} < \sqrt{d(x)^2 + \delta^2 + \frac{\delta^4}{4d(x)^2}} = d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)} \tag{3.3}$$

Replacing x by $x + \delta\nu$ and δ by $-\delta$, we see that

$$d(x + \delta\nu) \geq \sqrt{d(x)^2 - \delta^2} \tag{3.4}$$

Suppose now that (x, t_0) is on the line segment whose end points are (x^*, t_0) and (x_0, t_0) , $d(x) > 0$, and choose $0 < \delta < d(x)$. Fix the unit vector $\nu = \frac{x_0 - x^*}{\|x_0 - x^*\|}$. We subdivide the line segment of $(x, t_0) - (x + \delta\nu, t_0)$ into n equal parts and apply the inequalities (3) and (4) to find

$$d(x + \frac{j+1}{n}\delta\nu) - d(x + \frac{j}{n}\delta\nu) \leq \frac{\delta^2}{2n^2 d(x + \frac{j}{n}\delta\nu)} \leq \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2 - (\frac{j}{n}\delta)^2}} \leq \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}}$$

Summing from $j = 0$ to $n - 1$ gives

$$d(x + \delta\nu) - d(x) \leq \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}}$$

for any integer n. Letting $n \to \infty$, we see that $d(x + \delta\nu) \leq d(x)$ for $0 < \delta < d(x)$. In other words, $d(x^* + \tau\nu)$ is a nonincreasing function of τ. Since $d(x^* + \tau\nu) \leq \tau$, which is arbitrarily small for τ sufficiently close to 0, we see that $d(x^* + \tau\nu) \equiv 0$ for $0 < \tau < d_0$. In other words, $u(x, t_0) \equiv M$ on the line segment $x = x^* + \tau\nu, 0 < \tau < d_0$, contray to our hypothesis that $u < M$ for $x \in B(x^*, d_0) \bigcap B(x_0, \| x_0 - x^* \|)$. Thus the Lemma 2 have been established.

Lemma 3 *Suppose that in a domain E of the x,t-space, u satisfies the inequality $L[u] \geq 0$ with L as in the Lemma 1 . Suppose that $u < M$ in the portion of E lying in the strip $t^* < t < t^{**}$ for some fixed number t^* and t^{**}.Then $u < M$ on the portion of the line $t = t^{**}$ contained in E.*

Proof Let $P(x^{**}, t^{**})$ be a point on the line $t = t^{**}$ where $u = M$. We shall reach a contradiction.

We construct a ball K with center at P and radius so small that the lower half($t < t^{**}$) of K is entirely in the portion of E where $t > t^*$.

We now define the function

$$v(x, t) = e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{**})^2 - \alpha(t - t^{**})} - 1.$$

A simple computation show that

$$\begin{aligned}
L[v] &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial v}{\partial x_i} - \frac{\partial v}{\partial t} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)[4(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) - 2\delta_{ij}]e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{**})^2-\alpha(t-t^{**})} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)[-2(x_i-\overline{x}_i)]e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{**})^2-\alpha(t-t^{**})} \\
&\quad -(-\alpha)e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{**})^2-\alpha(t-t^{**})} \\
&= \{4\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j) \\
&\quad -2\sum_{i=1}^{n}[a_{ii}(x,t)+b_i(x,t)(x_i-\overline{x}_i)]+\alpha\}e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{**})^2-\alpha(t-t^{**})}.
\end{aligned}$$

We choose α positive and so large that $L[v] > 0$ in K for $t \leq t^{**}$.
The hyperparaboloid

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^{**})^2 + \alpha(t - t^{**}) = 0 \tag{3.5}$$

is tangent to the hyperplane $t = t^{**}$ at the point P. We denote by S' the portion (including the endpoints) of ∂K wihch is below the hyperparaboloid (5), and we denote by S" the portion of the hyperparaboloid located within the ball K. The region enclosed in S' and S" is designated D. By hypothesis,$u < M$ on the closed portion S', and so there is an $\eta > 0$ such that

$$u \leq M - \eta \ on\ S'.$$

We form the function

$$\omega(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$$

where ε is a positive constant to be chosen.We observe that $v = 0$ on S". Therefore , we may choose ε so small that ω has the properties:

(1).$L[\omega] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0\ in\ D,$

(2).$\omega(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t) < M\ on\ S',$

(3).$\omega(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t) \leq M\ on\ S"$.

Condition (1) show that ω cannot attain its maximum in D; therefore the maximum of ω is M, and it occurs at the point P. We conclude that

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} \geq 0\ at\ P. \tag{3.6}$$

A simple computation shows that at P

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\alpha e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i^{**})^2-\alpha(t-t^{**})} \doteq -\alpha < 0. \tag{3.7}$$

Thus, we find from (6) and (7) that

$$\frac{\partial u}{\partial t} \geq -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t} > 0\ at\ P. \tag{3.8}$$

On the other hand, since the maximum of u on $t = t^{**}$ occurs at P,$Du = 0$, $D^2u \leq 0$ at P. Then

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} < \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

Since the matrix $A = ((a_{ij}(x^{**}, t^{**})))$ is symmetric and positive definite, there exists an orthogonal matrix $O = ((o_{ij}))$ so that

$$OAO^T = diag(d_1, d_2, ..., d_n), OO^T = I,$$

with $d_k > 0, (k = 1, ..., n)$. Write $y = x^{**} + O(x - x^{**})$. Then $x - x^{**} = O^T(y - x^{**})$, and so $u_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} u_{y_k} o_{ik}, u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} u_{y_k y_l} o_{ik} o_{jl}, (i, j = 1, 2, ..., n)$ Hence at the point x^{**},

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{y_k y_l} o_{ik} o_{jl} = \sum_{i=1}^{n} d_k u_{y_k y_k} \leq 0$$

Thus, $L[u] < 0$. These equalities contradict the hypothesis $L[u] \geq 0$, and the Lemma is proved.

On the basis of the preceding lemmas, we can now establish the genaral maximum theorem for parabolic equations.

Theorem 1 *Suppose that in a domain E of the x,t-space, the inequality*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

holds, that the coefficients of L a and b are bounded, and that L is uniformly parabolic in E. If the maximum M of u is attained at any interior point (x^{**}, t^{**}) of E, then $u \equiv M$ on each plane segment $t = t^*$ which lies in E and contains the point (x^{**}, t^*), and has the property that the segment $x = x^{**}, t^* \leq t \leq t^{**}$ lies in E.

Proof Suppose there is a value of t, say $t^* < t^{**}$ such that $u(x^{**}, t^*) < M$. Let τ be the least upper bound of values of $t < t^{**}$ for which $u(x^{**}, t) < M$. By continuity, $u(x^{**}, \tau) = M$ while $u(x^{**}, t) < M$ for some interval $\tau_1 < t < \tau$. Applying Lemma 2, we have $u(x, t) < M$ on each plane segment which lies in E with fixed t. Since $\tau_1 < t < \tau$, applying Lemma 3, we get a contradiction.

Let t_0 be a fixed positive constant, and consider the one-parameter family of hyperparaboloid

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{t_0 - t} = \rho$$

where the constant ρ takes on all positive values and $n \geq 2$. Suppose that D is bounded from below by the line $t = 0$ and from above by the line $t = \bar{t}$,where $\bar{t} < t_0$;D is bounded on its sides by the suefaces of the hyperparaboloids $\rho = \rho_1$ and $\rho = \rho_2$. For $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, we define

$$M_1(\rho) = \max_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \rho(t_0 - t), 0 \leq t \leq \bar{t}} u(x,t), M_2 = \max_{\rho_1 t_0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \rho_2 t_0} u(x, 0),$$

$$and\ M(\rho) = \max(M_1(\rho), M_2)$$

Here, we need $n \geq 2$ because the definition of the region D is different from $n = 1$. We know that $\{(x_1, x_2, ..., x_n), \rho_1 t_0 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \rho_2 t_0\}$ and $\{t, 0 \leq t \leq \bar{t}\}$ are both connected. According to the productivity of connectivity, the region D is connected. Thus, the definition of D is reasonable.

We define that

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

We will use the same method as [1]$P134$ to extend the three-curves theorem.

Theorem 2 *Suppose $L[u] \geq 0$ in a domain D assumed above. We can find a function $\psi(\rho)$ such that $L[\psi] \leq 0$, $\psi(\rho)$ and $M(\rho)$ both increase or both decrease, and $M(\rho)$ is a convex function of $\psi(\rho)$.*

Proof 1. Find a function $\psi_+(\rho)$ which is increasing and satisfies $L[\psi] \leq 0$. Similarly, find a function $\psi_-(\rho)$ which is decreasing and satisfies $L[\psi] \leq 0$.
Let $g(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{t_0 - t}$. g is a twice continuously differentiable function whose gradient never vanishes in the region D. We also have a_{ij}, b_i are uniformly bounded in D . Thus

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} \geq \mu \sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial g}{\partial x_i})^2 > 0$$

Therefore, we can find functions $d_1(\rho)$ and $d_2(\rho)$ such that

$$d_1(\rho) \leq \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial t}}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}} \leq d_2(\rho), g(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \rho,$$

That is

$$d_1(\rho) \leq \frac{L[g]}{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}} \leq d_2(\rho), g(x_1, x_2, ..., x_n, t) = \rho. \tag{3.9}$$

Define the increasing function

$$\psi_+(\rho) = \int_a^\rho e^{-\int_b^s d_2(\sigma)d\sigma} ds$$

and the decreasing function

$$\psi_-(\rho) = \int_\rho^a e^{-\int_b^s d_1(\sigma)d\sigma} ds$$

where a and b are constant to be prescribed.
A computation shows that

$$\begin{aligned} L[\psi(\rho)] &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}(\psi_\rho(\rho)\frac{\partial g}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b_i \psi_\rho(\rho)\frac{\partial g}{\partial x_i} - \psi_\rho(\rho)\frac{\partial g}{\partial t} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\psi_{\rho\rho}(\rho)\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j} + \psi_\rho(\rho)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}) + \sum_{i=1}^{n} b_i \psi_\rho(\rho)\frac{\partial g}{\partial x_i} - \psi_\rho(\rho)\frac{\partial g}{\partial t} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}\psi_{\rho\rho} + L[g]\psi_\rho \end{aligned}$$

We also have

$$\begin{aligned} \psi_{+\rho} &= e^{-\int_b^\rho d_2(\sigma)d\sigma} > 0 \\ \psi_{+\rho\rho} &= -d_2(\rho)e^{-\int_b^\rho d_2(\sigma)d\sigma} = -d_2(\rho)\psi_{+\rho}. \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned}\psi_{+\rho} &= -e^{-\int_b^\rho [d_1(\rho)/\rho]d\rho} < 0\\ \psi_{+\rho\rho} &= d_1(\rho)e^{-\int_b^\rho d_1(\sigma)d\sigma} = d_1(\rho)\psi_{+\rho}.\end{aligned}$$

Using (9), we find $L[\psi_+] \leq 0, L[\psi_-] \leq 0$.

2. Assume that $M(\rho)$ and $\psi(\rho)$ both increase or both decrease for $\rho_1 < \rho < \rho_2$. We define the function $\varphi(\rho)$

$$\varphi(\rho) = \frac{\psi(\rho_2)M(\rho_1) - \psi(\rho_1)M(\rho_2)}{\psi(\rho_2) - \psi(\rho_1)} + \frac{M(\rho_2) - M(\rho_1)}{\psi(\rho_2) - \psi(\rho_1)}\psi(\rho), \rho_1 < \rho < \rho_2,$$

and note that $\varphi(\rho_1) = M(\rho_1), \varphi(\rho_2) = M(\rho_2)$. Let $v = u - \varphi$. Since

$$\begin{aligned}u(x,0) &\leq M_2\\ u(x,t) &\leq M(\rho_1)\ for\ \rho = \rho_1\\ u(x,t) &\leq M(\rho_2)\ for\ \rho = \rho_2\end{aligned}$$

we find that $v \leq 0$ on the entire boundary of D below the line $t = \bar{t}$ and $L[u - \varphi] \geq 0$ in D. Applying the maximum principle (Theorem 1) to v, we have $v \leq 0$ in the region D, that is

$$u \leq \varphi(\rho) \text{ in } D,$$

then $M_1(\rho) \leq \varphi(\rho)$.

On the other hand, since $\psi(\rho)$ is monotonic and $M_2 \leq M(\rho)$when $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, we also have $M_2 \leq \varphi(\rho)$. Thus,

$$M(\rho) \leq \varphi(\rho) = \frac{M(\rho_1)[\psi(\rho_2) - \psi(\rho)] + M(\rho_2)[\psi(\rho) - \psi(\rho_1)]}{[\psi(\rho_2) - \psi(\rho_1)]}. \tag{3.10}$$

3. If u is any nonconstant solution of $L[u] \geq 0$, it follows from the maximum principle that $M(\rho)$ cannot have an interior maximum in any interval where $M(\rho)$ is not a constant. Furthermore, it cannot have a local maximum, and so may have at most one minimum. We can regard constant as increasing or decreasing. Therefore $M(\rho)$ may first decrease and then increase , or it may always increase, or it may always decrease. On an interval where $M(\rho)$ is increasing, it is a convex function of ψ_+; On an interval where $M(\rho)$ is decreasing, it is a convex function of ψ_-.

Remark It's different from Hadamard three-circle theorem that $M(\rho)$ can be a constant in some interval when u is any nonconstant solution of $L[u] \geq 0$. For example, $\frac{x_1^2+x_2^2}{1-t} = \rho, \frac{1}{2} \leq \rho \leq 1, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u = t\log\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, u(x,0) = 0, u(x,t) < 0$ in D, thus $M(\rho) = M_2 = 0$, $M(\rho)$ is a constant and the equality of (10) occurs.$u \neq \varphi = M_2$.

Theorem 3 *Let $u(x,t)$ and $v(x,t)$ be solutions of $L[u] = f(x,t)$ in the strip D:$\{-\infty < x_i < \infty, i = 1,2,...,n, 0 < t < T\}$, and suppose that u and v are continuous on $D\bigcup\partial D$. If $u(x,0) = v(x,0) = g(x)$, where g is a prescribed function, and if there are constants A and c(>0) such that*

$$| u(x,t) |, | v(x,t) | \leq Ae^{c\sum_{i=1}^n x_i^2} \tag{3.11}$$

uniformly in t for $0 \le t \le T$, then $u(x,t) \equiv v(x,t)$ in D.

Proof We employ the convexity inequqlity (10). Select $t_0 > 0$ which is small enough and consider the fuction $\omega(x,t) \equiv u(x,t) - v(x,t)$ in the domain $D_1 : \{-\infty < x_i < \infty, i = 1,2,...,n, 0 \le t \le \frac{1}{2}t_0\}$. Then ω satisfies $L[\omega] = 0$ and $\omega(x,0) \equiv 0$.
A simple computation shows that(Here we use some characters to represent some constant.)

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x_i} &= \frac{2x_i}{t_0 - t} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{2\delta_{ij}}{t_0 - t} \\ \frac{\partial g}{\partial t} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{(t_0 - t)^2} \end{aligned}$$

When $B + C\sqrt{\rho t_0} - \rho \le 0$, we have

$$\begin{aligned} \frac{L[g]}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}} &= \frac{2\sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_i x_i)(t_0 - t) - \sum_{i=1}^n x_i^2}{4\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j} \\ &\le \frac{(B + C\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2})(t_0 - t) - \sum_{i=1}^n x_i^2}{4\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j} \\ &\le \frac{(B + C\sqrt{\rho t_0} - \rho)(t_0 - t)}{4\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j} \\ &\le \frac{(B + C\sqrt{\rho t_0} - \rho)(t_0 - t)}{4M\sum_{i,j=1}^n x_i x_j} \\ &\le \frac{(B + C\sqrt{\rho t_0} - \rho)(t_0 - t)}{4Mn\sum_{i=1}^n x_i^2} \\ &= \frac{B + C\sqrt{\rho t_0} - \rho}{4Mn\rho} \end{aligned}$$

we choose $d_2(\rho) = \frac{B + C\sqrt{\rho t_0} - \rho}{4Mn\rho}$, and when ρ_2 is large enough we can choose α large enough to satisfy $B + C\sqrt{\rho t_0} - \rho \le 0$, then

$$\sigma_+(\rho) = \int_\beta^\rho e^{-\int_\alpha^{\rho_1} \frac{B + C\sqrt{\rho t_0} - s}{4Mns} ds} d\rho_1$$

Since ω is bounded by a multiple of $e^{c\sum_{i=1}^n x_i^2}$, we find that

$$\begin{aligned} \lim_{\rho_2 \to \infty} \left| \frac{M(\rho_2)}{\sigma_+(\rho_2)} \right| &\le \lim_{\rho_2 \to \infty} \frac{2Ae^{c\sum_{i=1}^n x_i^2}}{\int_\beta^{\rho_2} e^{-\int_\alpha^{\rho_1} \frac{B + C\sqrt{\rho t_0} - s}{4Mns} ds} d\rho_1} \\ &= \lim_{\rho_2 \to \infty} \frac{2Ae^{c(t_0 - t)\rho_2}}{\int_\beta^{\rho_2} e^{-\int_\alpha^{\rho_1} \frac{B + C\sqrt{\rho t_0} - s}{4Mns} ds} d\rho_1} \\ &\le \lim_{\rho_2 \to \infty} \frac{2Ae^{ct_0\rho_2}}{\int_\beta^{\rho_2} e^{-\int_\alpha^{\rho_1} \frac{B + C\sqrt{\rho t_0} - s}{4Mns} ds} d\rho_1} \\ &= \lim_{\rho_2 \to \infty} \frac{2Act_0 e^{ct_0\rho_2}}{E\rho_2^{-\frac{B}{4Mn}} e^{-\frac{C\sqrt{t_0}}{8Mn}\sqrt{\rho_2} + \frac{\rho_2}{4Mn}}} \\ &=^* 0. \end{aligned}$$

When ρ_2 is large enough we choose $t_0 \leq \frac{1}{8Mnc} \leq \frac{1}{4Mnc} - \frac{C\sqrt{t_0}}{8Mnc\sqrt{\rho_2}}$, then " $=^*$ " exists. On the other hand, since $d_1(\rho) \leq d_2(\rho)$, we have $|\ \sigma'_+(\rho_2)\ | \leq |\ \sigma'_-(\rho_2)\ |$. Thus

$$\lim_{\rho_2\to\infty} \left| \frac{M(\rho_2)}{\sigma_-(\rho_2)} \right| \leq \lim_{\rho_2\to\infty} \left| \frac{M(\rho_2)}{\sigma_+(\rho_2)} \right| = 0$$

We apply inequality (10) to ω and let $\rho_2 \to \infty$.

$$M(\rho) \leq M(\rho_1).$$

Letting $\rho_1 \to 0$, we see that ω takes its maximum in D_1 at $x = 0$. Then by Theorem 1 this maximum must be 0, and so $\omega \leq 0$ in the whole strip. Applying the same reasoning to $(-\omega)$, we find that $\omega = 0$ in D_1. We may repeat the entire process using the line $t = \frac{1}{2}t_0$ as initial line and find that $\omega = 0$ in $D_2 : -\infty < x < \infty, \frac{1}{2}t_0 \leq t \leq t_0$. After a finite number of steps, we conclude that $\omega = 0$ in D.

Let t_0 be a fixed positive constant, and consider the one-parameter family of surfaces

$$\frac{f(x)}{t_0 - t} = \rho$$

where the constant ρ takes on all positive values and $n \geq 2$. We suppose that a surface corresponding to a larger value of ρ contains in its interior that for a smaller ρ. D , $M(\rho)$ and L is defined as Theorem 2. Let $g(x,t) = \frac{f(x)}{t_0 - t}$, and we can use the same method as Theorem 2 to extend the three-paraboliod theorem more.

Reference

[1] Murray H.Protter and Hans F.Weinberger: Maximum Principles in Differential Equations, Prentice-Hall.Inc. Englewood Cliffs,N.J.1967.

[2] Lawrence C.Evans:Partial Differential Equations,AMS,Provindence,Rhode Island.

[3] Jay Kovats: A Three-curves Theorem For Viscosity Subsolutions of Parabolic Equations,Proceedings of the AMS Volume 131,Number 5, Pages 1509-1514.

The Solution of Certain Type of Differential Equations

0301 Zheng Gan
Director: Prof.Ping Li

Abstract

In [4], Li and Yang proved that the following following type of nonlinear differential equations:

$$f^n(z) + p_{n-3}(f) = p_1 e^{\alpha_1 z} + p_2 e^{\alpha_2 z}$$

has no nonconstant entire solutions, where n is an integer ≥ 4, p_1 and p_2 are two polynomials ($\not\equiv 0$), α_1, α_2 are two nonzero constants with $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \not\equiv$ rational number, and $P_{n-3}(f)$ denotes a differential polynomial in f and its derivatives (with polynomials in z as the coefficients) of degree no greater than $n-3$.

In this paper, by utilizing Nevanlinna's value distribution theory of meromorphic functions, we will completely discuss the solution distribution of the following type of equations:

$$f^n(z) + \sum_{i=0}^{m} a_i f^{(i)}(z) = p_1 e^{-\lambda z} + p_2 e^{\lambda z},$$

where $n \geq 3$, $m \in N^*$, a_i, p_1, p_2 and λ are no constants.

Keywords: Nevanlinna theory, meromorphic function, differential equation.

1 Introduction

Let $\mathbb{C}$ denote the complex plane and $f(z)$ a nonconstant function meromorphic on $\mathbb{C}$. The value distribution theory was derived and developed by R. Nevanlinna in 1925, with the well-known Jensen's formula as the starting point. The theory mainly consists of the so-called first and second fundamental theorems, expressed in term of the three quantities $T(r, f)$, $m(r, f)$ and $N(r, f)$ associated with a given function of f; they are called characteristic function, proximate function and counting function of f, respectively. Throughout the paper, $S(r, f)$ will be used to denote any quantity that satisfies $S(r, f) = o(1)T(r, f)$ as $r \to \infty$, outside possibly an exceptional set of r values of finite linear measure. We call $a(z)$ a small function of f provided that $T(r, a) = S(r, f)$. And "meromorphic" will always mean meromorphic in the complex plane $\mathbb{C}$. Let $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ be the set of all meromorphic functions. For $f(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$, we shall use Nevanlinna's value distribution theory of meromorphic functions. Note that a polynomial is a small function of an arbitrary transcendental meromorphic function. Also note that the estimation $m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = S(r, f)$ plays a very important role in the studies of the growth of property of meromorphic functions, especially on meromorphic solutions of differential equation in complex plane. An algebraic differential polynomial $P(f)$ in f is a polynomial in f and its derivatives with polynomials as the coefficients. We shall use $P_n(f)$ to denote an algebraic differential polynomial in f with a total degree (in f and its derivatives) at most n. We refer the reader to the book [3] for the details of the Nevanlinna theory and its standard notation.

Moreover, Nevanlinna's value ditribution theory of meromorphic functions has been used to study or tackle the growth, oscillation, solvability and existence of entire or meromorphic solutions of defferential equations in complex domains, and currently, for the solutions of a certain type of nonlinear differential equations. Specifically, we could find that the equation $4f^3+3f^{(2)} = -\sin 3z$ has exactly three nonconstant entire solutions, namely $f_1(z) = \sin z$, $f_2(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z$, and $f_3(z) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos z - \frac{1}{2}\sin z$.

2 Preliminary Lemmas

We need the following lemmas to prove our result.

Lemma 1 (Clunie's Lemma, [1],[2]). *Suppose that $f(z)$ is meromorphic and transcendental in the plane and that*

$$f^n(z)P(f) = Q(f),$$

where $P(f)$ and $Q(f)$ are differential polynomials in f with functions of small proximity related to f as the coefficients and the degree of $Q(f)$ is at most n. Then

$$m(r, P(f)) = S(r, f).$$

Lemma 2 ([5]). *Suppose that c is a nonzero constant and α is a nonconstant meromorphic function. Then the equation*

$$f^2 + (cf^{(n)})^2 = \alpha$$

has no transcendental meromorphic solution f satisfying $T(r, \alpha) = S(r, f)$.

3 Results

Theorem 1. *Let $n \geq 3$, $m \in N^*$, a_i, p_1, p_2 and λ are none zero constants. Then the equation*

$$f^n(z) + \sum_{i=0}^{m} a_i f^{(i)}(z) = p_1 e^{\lambda z} + p_2 e^{-\lambda z} \tag{4.1}$$

has transcendental entire solution if and only if $n = 3$ and

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{\lambda}{3}\right)^i = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(-\frac{\lambda}{3}\right)^i, \quad 27p_1p_2 = -\left(\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\frac{\lambda}{3}\right)^i\right)^3.$$

Moreover, if this condition holds, then the solution of the equation (4.1) must be

$$f(z) = \rho_j e^{\frac{\lambda z}{3}} - \frac{\sum_{i=0}^{m} a_i (\frac{\lambda}{3})^i}{3\rho_j} e^{-\frac{\lambda z}{3}}, \ j = 1, 2, 3$$

where ρ_j $(j = 1, 2, 3)$ are the cubic roots of p_1.

4 Proof of Theorem 1

Suppose that f is an entire solution of the equation (4.1) . By differentiating the equation (4.1) , we get the equation

$$nf^{n-1}f' + \sum_{i=0}^{m} a_i f^{(i+1)}(z) = \lambda(p_1e^{\lambda z} - p_2e^{-\lambda z}). \tag{4.2}$$

Let λ^2 times the square of the equation (4.2), and then minus the square of the equation (4.1) , we get

$$f^{2n-2}(\lambda^2 f^2 - n^2(f')^2) = Q(f)$$

where

$$\begin{aligned} Q(f) = {} & 2nf^{n-1}f'\left(\sum_{i=0}^{m} a_i f^{(i+1)}\right) + \left(\sum_{i=0}^{m} a_i f^{(i+1)}\right)^2 + 4\lambda^2 p_1 p_2 \\ & - 2\lambda^2 f^n \left(\sum_{i=0}^{m} a_i f^{(i)}\right) - \lambda^2 \left(\sum_{i=0}^{m} a_i f^{(i)}\right)^2 \end{aligned}$$

is a differential polynomial in f of degree $n+1$. Set

$$\alpha = \lambda^2 f^2 - n^2(f')^2, \tag{4.3}$$

then we have $f^{2n-2}\alpha = Q(f)$.

By Lemma 1, $T(r,\alpha) = S(r,f)$, and so α is a small function of f.

If $\alpha = 0$, then it follows from the equation (4.3) that $f = ce^{\frac{\lambda z}{n}}$ or $f = ce^{\frac{-\lambda z}{n}}$, where c is a constant. Substituting these two solutions into the equation (4.1) will yield a contradiction.

If $\alpha \neq 0$, then by Lemma 2, α is a nonzero constant. Taking the derivative on both sides of the equation (4.3) and noting that f is transcendental, we get

$$\lambda^2 f - n^2 f'' = 0. \tag{4.4}$$

Then we get $f(z) = d_1e^{\frac{\lambda z}{n}} + d_2e^{-\frac{\lambda z}{n}}$ from the equation (4.4), where d_1, d_2 are constants. Substituting it into the equation (4.1) gives

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k} d_1^k d_2^{n-k} e^{\frac{2k-n}{n}\lambda z} + (d_2^n - p_2)e^{-\lambda z} + (d_1^n - p_1)e^{\lambda z} \\ & + d_1\left(\sum_{i=0}^{m} a_i(\frac{\lambda}{n})^i\right) e^{\frac{\lambda}{n}z} + d_2\left(\sum_{i=0}^{m} a_i(-\frac{\lambda}{n})^i\right) e^{-\frac{\lambda}{n}z} = 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Case 1. *n is even.*

Since 1, $e^{\frac{2k-n}{n}\lambda z}$, $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$, $e^{-\lambda z}$, $e^{\lambda z}$, $e^{\frac{\lambda}{n}z}$, $e^{-\frac{\lambda}{n}z}$ are linearly independent over $\mathbb{C}$, we get from the equation (4.5) that

$$d_1^n = p_1, \quad d_2^n = p_2, \quad \binom{n}{k} d_1^k d_2^{n-k} = 0,\ k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

Obviously, it is contradictory. So in this case, the equation (4.1) has no entire solution.

Case 2. *n is odd.*

We get from the equation (4.5) that

$$\sum_{k=1,k\neq\frac{n-1}{2},k\neq\frac{n+1}{2}}^{n-1}\binom{n}{k}d_1^k d_2^{n-k}e^{\frac{2k-n}{n}\lambda z}+\left[d_1\sum_{i=0}^{m}a_i(\frac{\lambda}{n})^i+\binom{n}{\frac{n+1}{2}}d_1^{\frac{n+1}{2}}d_2^{\frac{n-1}{2}}\right]e^{\frac{\lambda}{n}z}+$$
$$(d_2^n-p_2)e^{-\lambda z}+(d_1^n-p_1)e^{\lambda z}+\left[d_2\sum_{i=0}^{m}a_i(-\frac{\lambda}{n})^i+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}d_1^{\frac{n-1}{2}}d_2^{\frac{n+1}{2}}\right]e^{-\frac{\lambda}{n}z}=0. \tag{4.6}$$

If $n\geq 4$, then we can easily get a contradiction from the the above equation.

If $n=3$, then the equation (4.6) is equivalent to

$$\begin{aligned}(d_1^3-p_1)e^{\lambda z}+\left[d_1\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{\lambda}{3}\right)^3+3d_1^2d_2\right]e^{\frac{\lambda}{3}z}\\ +(d_2^3-p_2)e^{-\lambda z}+\left[d_2\sum_{i=0}^{m}a_i\left(-\frac{\lambda}{3}\right)^3+3d_2^2d_1\right]e^{-\frac{\lambda}{3}z}=0.\end{aligned} \tag{4.7}$$

Since $e^{-\lambda z}$, $e^{\lambda z}$, $e^{\frac{\lambda}{3}z}$, $e^{\frac{-\lambda}{3}z}$ are linearly independent over $\mathbb{C}$, we get from the above equation that

$$d_2^3=p_2,\quad d_1^3=p_1,\quad 3d_1d_2=-\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{\lambda}{3}\right)^i,\quad 3d_1d_2=-\sum_{i=0}^{m}a_i\left(-\frac{\lambda}{3}\right)^i.$$

So we can conclude that $f(z)=d_1e^{\frac{\lambda}{3}z}+d_2e^{-\frac{\lambda}{3}z}$ is an entire solution of equation (4.1) if and only if $n=3$ and

$$\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{\lambda}{3}\right)^i=\sum_{i=0}^{m}a_i\left(-\frac{\lambda}{3}\right)^i,\quad 27p_1p_2=-\left(\sum_{i=0}^{m}a_i\left(\frac{\lambda}{3}\right)^i\right)^3.$$

Such entire solution can also be written as

$$f(z)=\rho_je^{\frac{\lambda z}{3}}-\frac{\sum_{i=0}^{m}a_i(\frac{\lambda}{3})^i}{3\rho_j}e^{-\frac{\lambda z}{3}},\ j=1,2,3$$

where ρ_j $(j=1,2,3)$ are the cubic roots of p_1.

5 Remarks

We think that it will be possible to generalize the above result. By the same methods, we could also discuss the entire solution of the equation

$$f^n(z)+P_{n-2}(f)=P_1e^{\lambda z}+P_2e^{-\lambda z},$$

where P_1,P_2 are two polynomials ($\not\equiv 0$) and $P_{n-2}(f)$ is an algebraic differential polynomial of degree equal to $n-2$.

Reference

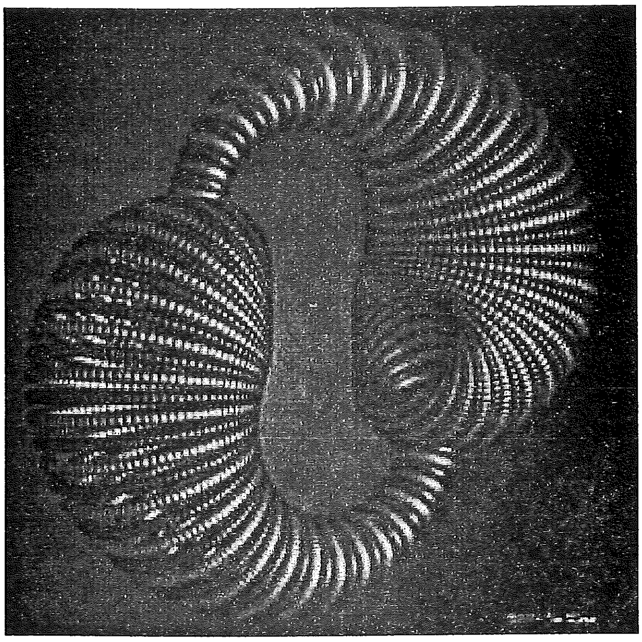
[1] J. Clunie, On integral and meromorphic functions, J. London Math.Soc. **37**(1962), 17–27.

[2] W. Doeringer, Exceptional value of differential polynomials, Pacific J. Math. **98**(1982), 55–62.

[3] W. Hayman, *Meromorphic Functions.* Oxford, 1964.

[4] P. Li and C.-C. Yang, On the noneexistence of entire solutions of certain type of nonlinear defferential equations, J.Math,Anal.appl. **320**(2006), 827–835.

[5] C.-C. Yang and P.Li, On the transcendental solutions of a certain type of nonlinear defferential equations, Arch.Math. **82**(2004), 442–448.



Bonan-Jeener's Klein Surface

活动标架法应用一例

0301　俞建青

微分几何中，选取“好”的标架往往可以使计算简化．

问题： 设 (M,g) 为 $n\geq 3$ 维光滑 Riemann 流形。若 g 为 M 上的另一个 Riemann 度量，满足 $\tilde{g}=e^{2\rho}g$, 其中 $\rho\in C^\infty(M)$。记 g 的数量曲率为 R, $\tilde{g}$ 的数量曲率为 $\tilde{R}$, 问 R 与 $\tilde{R}$ 满足的方程？(参见 [1] 第五章)　以下假设：$\{e_i\}_{i=1}^n$ 为相应于度量 g 的在 $U\subset M$ 上的局部幺正交标架场，$\{w^i\}_{i=1}^n$ 为其对偶（或说：余标架场）。D 为相应于 g 的 Riemann 联络，$\{w_i^j\}$ 为联络 1- 形式，联络系数为 $\{\Gamma_{ik}^j\}$,i.e. $De_i=w_i^je_j, w_i^j=\Gamma_{ik}^jw^k$。

1　相应于度量 g，算子 $grad, div, \triangle$ 的局部表达

(1) **梯度** $grad$

设 $f\in C^\infty(M)$, 则 $gradf\in C^\infty(M,TM)$。在 U 上,$<gradf,e_i>=e_i(f)=f_i\Rightarrow gradf|_U=f_ie_i$.

(2) **散度** div

设 $X\in C^\infty(M,TM), X|_U=X^ie_i, divX=C_1^1(DX)$

$$(DX)\,|_U=dX^i\otimes e_i+X^iDe_i=(e_j(X^i)+X^k\Gamma_{kj}^i)w^j\otimes e_i$$

$$C_1^1(DX)|_U=e_i(X^i)+X^k\Gamma_{ki}^i$$

.

(3) **Laplace 算子** Δ

$\Delta=div\circ grad$

$\Delta|_Uf=div(f_ie_i)=f_{ii}+f_k\Gamma_{ki}^i$, 其中 $f_{ii}=e_i(f_i)$.

2　结构方程

$g=g(e_i,e_j)w^i\otimes w^j=(w^i)^2$.

Riemann 联络无挠性 $dw^i=w^k\wedge w_k^i$.

Riemann 联络相容性 $w_j^i+w_i^j=0$.

曲率形式 $\Omega_i^j=dw_i^j-w_i^k\wedge w_k^j$.

Ω_i^j 反对称表示 $\Omega_i^j=\frac{1}{2}R_{ikl}^jw^k\wedge w^l=\frac{1}{2}R_{ijkl}w^k\wedge w^l$.

Riemann 联络存在唯一 $\Rightarrow w_i^j$ 由 w^i 唯一的决定，下面的 (5) 推导中将用到这一事实。

3　一些曲率算式

Ricci 曲率 $R_{ij}=R_{ikkj}$ ，数量曲率 $R=R_{ii}=R_{ikki}$.

4 引入正规标架场

U 上幺正交标架场 $\{x_1,\cdots,x_n\}$ 称为在 $p\in U$ 点是正规的，如果对任意 x_i,x_j，均有 $\nabla_{x_i}x_j(p):=<Dx_j,x_i>(p)=0$.

定理1 (正规标架场的存在性定理). 设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 为 $T_p(M)$ 的正交基，则可以延拓成在 P 点正规的标架场。

证明: 参看文献 [5] ,§1.6 正规标架场。

5 问题 1 的求解

任取 $p\in M$，取在 P 点正规的正规标架场 $\{e_i\}_{i=1}^n$，其对偶为 $\{w^i\}_{i=1}^n$

$$g=\sum_{i=1}^n(w^i)^2 \qquad \tilde{g}=e^{2\rho}g=\sum_{i=1}^n(e^\rho w^i)^2$$

相应于 $\tilde{g}$，幺正交标架场:

$$\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n,\tilde{e}_i=\frac{e_i}{e^\rho} \tag{5.1}$$

相应于 $\tilde{g}$，幺正交余标架场:

$$\{\tilde{w}^i\}_{i=1}^n,\tilde{w}^i=e^\rho w^i \tag{5.2}$$

结构方程:

$$\begin{cases} dw^i=w^j\wedge w_j^i \\ w_i^j+w_j^i=0 \end{cases} \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} d\tilde{w}^i=\tilde{w}^j\wedge \tilde{w}_j^i \\ \tilde{w}_i^j+\wedge\tilde{w}_j^i=0 \end{cases} \tag{5.4}$$

将 (5.2) 代入 (5.4) 的第一个等式:

$$\begin{aligned} & d(e^\rho w^i)=e^\rho w^j\wedge\tilde{w}_j^i \\ & \Rightarrow e^\rho dw^i+e^\rho d\rho\wedge w^i=e^\rho w^j\wedge\tilde{w}_j^i \\ & \Rightarrow dw^i=w^j\wedge\tilde{w}_j^i-\rho_j w^j\wedge w^i=w^j\wedge(\tilde{w}_j^i-\rho_j w^i+\rho_i w^j) \end{aligned}$$

其中记 $e_j(\rho)=\rho_j$.
由于 $\tilde{w}_j^i-\rho_j w^i+\rho_i w^j$ 关于 i, j 指标反对称，得到:

$$\tilde{w}_j^i-\rho_j w^i+\rho_i w^j=w_j^i$$

对于:

$$\tilde{w}_i^j=w_i^j-\rho_j w^i+\rho_i w^j \tag{5.5}$$

两边外微分, 得:

$$d\tilde{w}_i^j=dw_i^j+d\rho_i\wedge w^j+\rho_i dw^j-d\rho_j\wedge w^i-\rho_j dw^i$$

以下在 P 点计算：

$$
\begin{aligned}
dw^j &= w^i \wedge w_j^i = 0 \qquad (\text{因为} \quad w_i^j(P) = 0) \\
d\tilde{w}_i^j &= dw_i^j + d\rho_i \wedge w^j - d\rho_j \wedge w^i
\end{aligned} \tag{5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}_j^k \wedge \tilde{w}_k^j &= (\rho_i w^k - \rho_k w^i) \wedge (\rho_k w^j - \rho_j w^k) \\
&= \rho_i \rho_k w^k \wedge w^j - \rho_k \rho_k w^i \wedge w^j + \rho_k \rho_j w^i \wedge w^k
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

(5.6) − (5.7) 得到：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Omega}_i^j &= dw_i^j - \tilde{w}_i^k \wedge \tilde{w}_k^j \\
&= dw_i^j + d\rho_i \wedge w^j - d\rho_j \wedge w^i - \rho_i \rho_k w^k \wedge w^j \\
&\quad -\rho_k \rho_j w^i \wedge w^k + \rho_k \rho_k w^i \wedge w^j
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}_{ijst} &= \tilde{\Omega}_i^j\left(\frac{e_s}{e^\rho}, \frac{e_t}{e^\rho}\right) = e^{-2\rho}\tilde{\Omega}_i^j(e_s, e_t) \\
\tilde{\Omega}_i^j(e_s, e_t) &= \Omega_i^j(e_s, e_t) + (d\rho_i \wedge w^j - d\rho_j \wedge w^i)(e_s, e_t) \\
&\quad +(\rho_k \rho_k w^i \wedge w^j - \rho_i \rho_k w^k \wedge w^j - \rho_k \rho_j w^i \wedge w^k)(e_s, e_t) \\
&= R_{ijst} + (\rho_{is}\delta_{jt} - \rho_{it}\delta_{js}) - (\rho_{js}\delta_{it} - \rho_{js}\delta_{is}) \\
&\quad +\rho_k \rho_k (\delta_{is}\delta_{jt} - \delta_{it}\delta_{js}) - \rho_i \rho_k (\delta_{ks}\delta_{jt} - \delta_{kt}\delta_{js}) \\
&\quad -\rho_k \rho_j (\delta_{is}\delta_{kt} - \delta_{it}\delta_{ks})
\end{aligned}
$$

其中记 $e_j(\rho_i) = \rho_{ij}$.
固定 i,t 对 $j = s$ 求和得到：

$$
e^{2\rho}\tilde{R}_{ijjt} = R_{ijjt} + (2-n)(\rho_{it} + \rho_k \rho_k \delta_{it} - \rho_i \rho_t) - \rho_{jj}\delta_{it}
$$

对 $i = t$ 求和得到：

$$
\begin{aligned}
e^{2\rho}\tilde{R} &= R + (2-2n)\rho_{ii} + (2-n)(n-1)\rho_i \rho_i \\
&= R + 2(1-n)\triangle_g \rho + \rho_i \rho_i (2-n)(n-1)
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

下面的目标是：做适当的变换，消去梯度项.
令 $\rho = A \log \varphi$, 其中 A 是待定常数.

$$
\triangle_g \rho = A\left(\frac{\varphi_i}{\varphi}\right)_i = A\frac{\varphi_{ii}\varphi - \varphi_i \varphi_i}{\varphi^2} = A\frac{\triangle\varphi\varphi - \varphi_i \varphi_i}{\varphi^2} = A\frac{\triangle\varphi}{\varphi} - A^{-1}\rho_i \rho_i
$$

将上式代入 (5.9) 得到：

$$
e^{2\rho}\tilde{R} = R + 2(1-n)(A\frac{\triangle\varphi}{\varphi} - A^{-1}\rho_i \rho_i) + \rho_i \rho_i (2-n)(1-n)
$$

$$
\frac{2(1-n)}{A} = (2-n)(n-1)
$$

由此得到：$A=\frac{2}{2-n}$.
故:

$$
\begin{aligned}
\varphi^{\frac{4}{n-2}}\tilde{R} &= R+\frac{4(1-n)}{n-2}\frac{\triangle_g\varphi}{\varphi} \\
\Rightarrow \varphi^{\frac{n+2}{n-2}}\tilde{R} &= \varphi R+\frac{4(1-n)}{n-2}\triangle_g\varphi \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

(5.10) 在 $\forall P\in M$ 都成立。
故 $\tilde{R}$ 与 R 满足关系式 (5.10)。

参考文献

[1] 丘成桐，孙理察 著《微分几何讲义》，高等教育出版社

[2] 陈省身，陈维桓 著《微分几何讲义》，北京大学出版社

[3] 陈维桓，李兴校 著《黎曼几何引论（上）》，北京大学出版社

[4] 白正国，沈一兵 著《黎曼几何初步》，高等教育出版社

[5] 卢克平 著《流行的热核和热核形式》，河南大河出版社

✐Wolf 奖简介

1976 年 1 月，R.Wolf 及其家族捐献一千万美元成立了 Wolf 基金会，其宗旨是为了促进全世界科学. 艺术的发展。沃尔夫基金会设有：数学. 物理. 化学. 医学. 农业五个奖（1981 年又增设艺术奖）。1978 年开始颁发，通常是每年颁发一次，每个奖的奖金为 10 万美元，可以由几人分得。

由于 Wolf 数学奖具有终身成就奖的性质，所有获得该奖项的数学家都是享誉数坛、闻名遐迩的当代数学大师，他们的成就在相当程度上代表了当代数学的水平和进展。该奖的评奖标准不是单项成就而是终身贡献，获奖的数学大师不仅在某个数学分支上有极深的造诣和卓越贡献，而且都博学多能，涉足多个分支，且均有建树，形成了自己的著名学派，他们是当代不同凡响的数学家。美籍华人数学家陈省身先生于 1984 年 5 月或得 Wolf 数学奖，成为获得该数学奖的唯一华人。

R.Wolf1887 年生于德国，其父是汉诺威城的五金商人。Wolf 曾在德国研究化学，并获得博士学位，后移居古巴。他用了近 20 年的时间，经过大量试验. 历尽艰辛，成功地发明了一种从熔炼废渣中回收铁的方法，从而成为百万富翁。他是 Wolf 基金会的倡导者和主要捐献人。Wolf 于 1981 年逝世。

反演公式的矩阵形式

0401　　张伟哲

摘要

从几个反演公式与线性变换的联系指出反演公式可利用可逆下三角矩阵构造，用反演公式的矩阵形式得到了经典的反演公式，以及局部有限偏序集上的 Möbius 反演公式.

1　三个初等反演公式

我们先来看三个初等的反演公式及其证明，二项反演公式，Striling 反演公式，最后一个反演公式与 Abel 求和公式 [2] 相近，我们先称之为 Abel 反演公式，后面我们会看到它是一种极特殊的 Möbius 反演公式。

1.1　二项反演公式

$$a_n \equiv \sum_{k=0}^{n} C_n^k b_k \Leftrightarrow b_n \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k a_k \tag{1}$$

(1) 由一族等式组成，于是我们考虑的矩阵形式，令：

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)^T \tag{2}$$

$$\mathbf{b} = (b_0, b_1, \ldots, b_n)^T \tag{3}$$

$$\mathbf{A}_B = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ C_1^0 & C_1^1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & . & \vdots & . & \vdots \\ C_j^0 & C_j^1 & \cdots & C_j^j & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ C_k^0 & C_k^1 & \cdots & C_k^j & \cdots & C_k^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots & \ddots & . \\ C_n^0 & C_n^1 & \cdots & C_n^j & \cdots & C_n^k & \cdots & C_n^n \end{pmatrix} \tag{4}$$

而 $\mathbf{A}_B$ 是杨辉三角对应的矩阵, 把 $\mathbf{A}_B$ 当成 $\mathbf{F}_n[x]$ 上幂基 $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ 到平移后的幂基 $(1, x+1, (x+1)^2, \ldots, (x+1)^n)$ 的变换矩阵, 那么它的逆就是 $(1, x+1, (x+1)^2, \ldots, (x+1)^n)$ 到 $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ 的变换矩阵, 于是令 $x+1=t$, $\mathbf{A}_B$ 的逆就是 $(1, t, t^2, \ldots, t^n)$ 到 $(1, t-1, (t-1)^2, \ldots, (t-1)^n)$ 的变换矩阵, 同样由二项式定理有：

$$A_B^{-1}=\begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -C_1^0 & C_1^1 & \ddots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & . & \vdots & . & \vdots \\ (-1)^jC_j^0 & (-1)^{j-1}C_j^1 & \cdots & C_j^j & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \ddots & \ddots & . & \vdots \\ (-1)^kC_k^0 & (-1)^{k-1}C_k^1 & \cdots & (-1)^{k-j}C_k^j & \cdots & C_k^k & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots & \ddots & . \\ (-1)^nC_n^0 & (-1)^{n-1}C_n^1 & \cdots & (-1)^{n-j}C_n^j & \cdots & (-1)^{n-k}C_n^k & \cdots & C_m^m \end{pmatrix} \tag{5}$$

于是 (1) 写成：

$$\mathbf{a}=\mathbf{A}_B\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{b}=\mathbf{A}_B^{-1}\mathbf{a} \tag{6}$$

故 (1) 的成立是显然的。在 [1] 中的多个式子用 (6) 更紧凑，易用。

1.2 Striling 反演公式

上面我们考虑了幂基与其平移之间的过渡矩阵及其逆，得到二项式反演公式，如法炮制，我们可以考虑其他基之间的变换矩阵及逆，产生类似的反演公式。考虑幂基及 $\{0,1,\cdots n\}$ 的 Newton 插值基（亦被为 Newton 基）$(1,x,x(x-1),x(x-1)(x-2),\cdots,x(x-1)\ldots(x-n))$ 结合 Striling 数的定义，记：

$$\mathbf{A}_s=\begin{pmatrix} s(0,0) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ s(1,0) & s(1,1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ s(k,0) & s(k,1) & \cdots & s(k,k) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \ddots & . \\ s(n,0) & s(n,1) & \cdots & s(n,k) & \cdots & s(n,n) \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\mathbf{A}_s^{-1}=\begin{pmatrix} S(0,0) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ S(1,0) & S(1,1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & . & \vdots \\ S(k,0) & S(k,1) & \cdots & S(k,k) & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & . & \vdots & \ddots & . \\ S(n,0) & S(n,1) & \cdots & S(n,k) & \cdots & S(n,n) \end{pmatrix} \tag{7}$$

就得到 Striling 反演公式：

$$\mathbf{a}=\mathbf{A}_s\mathbf{b}\Leftrightarrow\mathbf{b}=\mathbf{A}_s^{-1}\mathbf{a} \tag{8}$$

[1]与之对应的形式：

$$a_n\equiv\sum_{k=0}^{n}s(n,k)b_k\Leftrightarrow b_n\equiv\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}S(n,k)a_k \tag{9}$$

1.3 Abel 反演公式

我们再考虑最简单的变换公式：

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \Leftrightarrow a_n \equiv S_n - S_{n-1} \tag{10}$$

可以写成与前面一样的反演公式的形式：

$$S_n \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \Leftrightarrow a_n \equiv \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} [\frac{k}{n-1}] S_k \tag{11}$$

记：

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由

$$\mathbf{A}_c = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{N}^i \tag{12}$$

$$\mathbf{A}_c^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

于是 (10) 写成：

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}_c \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \mathbf{A}_c^{-1} \mathbf{a} \tag{14}$$

Abel 求和公式的向量形式就是：

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}\mathbf{A}_c^{-1}, \mathbf{A}_c \mathbf{b}) \tag{15}$$

从这几个例子中不难发现构造一个形如 (1) 的反演公式等价于寻找一个下三角可逆矩阵以及其逆。可以采用的方法是寻找线性空间的两组基进行互相转化。

2 局部有限偏序集上的 Möbius 反演公式

2.1 局部有限偏序集上的 Möbius 反演公式矩阵形式

我们考虑局部偏序集上反演公式的矩阵形式及其应用。设局部有限偏序集 Ω，其上的序记为 $\preceq$ 考虑区间 $[a, b]$ 上的元素的一种排列 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 满足 $x_i \preceq x_j \Rightarrow i < j$，定义求和矩阵 $\mathbf{A}_\Omega = \{a(x_i, x_j)\}$，其中：

$$a(x_i,x_j)=\begin{cases}1, & x_j \preceq x_i\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{16}$$

这个矩阵对一个长度为 n 的列向量的作用是使其按照对应偏序集上的顺序求和，于是局部有限偏序集上的 Möbius 反演公式的矩阵形式：

$$\mathbf{a}=\mathbf{A}_{\Omega}\mathbf{b}\Leftrightarrow \mathbf{b}=\mathbf{A}_{\Omega}^{-1}\mathbf{a} \tag{17}$$

ab 可以看成 $[a,b]$ 上定义的函数按排列 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 写成的序列。进一步，偏序集的直积对应的求和矩阵对应各个偏序集对应求和矩阵的直积。记 $\mathbf{A_i}$ 为 Ω_i 的求和矩阵，也就是，

$$\Omega=\otimes_{i=1}^{k}\Omega_i\Rightarrow \mathbf{A}_{\Omega}=\otimes_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{\Omega_i} \tag{18}$$

在前述基变换的观点下，这个操作就是将两组基的直积作为新的基。注意到这里的直积运算可以方便的用 Kröneker 积的形式写出，设 $\mathbf{A}=\{a_{ij}\}_{m\times n},\mathbf{B}=\{b_{ij}\}_{p\times q}$ 则：

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B}\\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B}\end{pmatrix} \tag{19}$$

容易验证直积的性质

$$(\otimes_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{\Omega_i})^{-1}=\otimes_{i=1}^{k}\mathbf{A}_{\Omega_i}^{-1} \tag{20}$$

2.2 经典 Möbius 反演公式的矩阵推导

考虑 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上以单调自然数函数按大小形成的偏序集，实际上是一个全序集，我们记为 Ω_n，对应求和矩阵为 (12) 中的 $\mathbf{N}$(这里重新记为 $\mathbf{N}_n$),(17) 就变成了前述的 Abel 反演公式 (11) 考虑 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上以整除关系形成的偏序集，我们记为 $\mathcal{N}_n$，即 $a|b\Leftrightarrow a\preceq b$，这个集合可以写成全序集直积的形式，设 n 的标准分解为 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 于是得到同构 $\mathcal{N}_n\cong\otimes_{i=1}^{k}\Omega_{p_i^{\alpha_i}}$ 于是由 (18) 得到求和矩阵为：$\mathbf{A}_n=\otimes_{i=1}^{k}\mathbf{N}_{p_i^{\alpha_i}}$，而 $\mathbf{A}_n^{-1}=\otimes_{i=1}^{k}\mathbf{N}_{p_i^{\alpha_i}}^{-1}$

考虑 $\mathbf{A}_n^{-1}=\{b(s,t)\}(s,t\in\mathcal{N})$ 的具体形式，下对 k 归纳证明：

$$b(s,t)=\mu(\frac{s}{t}) \tag{21}$$

k=1 时 $\mathbf{A}_n^{-1}=\mathbf{N}_n$，(21) 成立。如果 $k=k_0$ 时 (21) 成立，$k=k_0+1$ 时，

$$b(sp^{\alpha_1},tp^{\alpha_2})=\begin{cases}\mu(\frac{s}{t}), & \alpha_1=\alpha_2;\\ -\mu(\frac{s}{t}), & \alpha_1+1=\alpha_2;\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}=\mu(\frac{sp^{\alpha_1}}{tp^{\alpha_2}}) \tag{22}$$

于是 (21) 成立，由同构 $\mathcal{N}_n\cong\otimes_{i=1}^{k}\Omega_{p_i^{\alpha_i}}$，从而对于集合 $\mathcal{N}=\{1,2,\ldots,n\}$(17) 就成为经典的 *Möbius* 反演公式：

$$a_n\equiv\sum_{k|n}^{n}b_k\Leftrightarrow b_n\equiv\sum_{k|n}^{n}\mu(\frac{n}{k})a_k \tag{23}$$

2.3 容斥原理

取 2.2 中的 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k$，于是我们只对无平方因子的数，于是此处的偏序集 $\mathbf{X}$ 与此集中每个数的因子集合放在一起形成的集合 $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ 形成自然同构，$\mathcal{P}(\mathbf{X})$ 的包含关系对应 $\mathbf{X}$ 上的整除关系，$s,t\in\mathbf{X}$ 对应 $\mathbf{S},\mathbf{T}\in\mathcal{P}(\mathbf{X})$ 于是 (21) 变为：

$$b(s,t)=\mu(\frac{s}{t})\Rightarrow b(s,t)=\begin{cases}(-1)^{|\mathbf{T}|-|\mathbf{S}|}, & \mathbf{T}\in\mathbf{S};\\ 0, & \mathbf{T}\notin\mathbf{S}.\end{cases} \tag{24}$$

以下由 [1]p.78 得到容斥原理:

$$\omega(\mathbf{B}_X)=\sum_{X\subseteq T}(-1)^{|\mathbf{T}|-|\mathbf{X}|}\omega(\mathbf{A}_X) \tag{25}$$

这里仅对反演公式矩阵形式作了一些讨论，相关问题如如何将一个偏序集分解为小的偏序集的乘积，或者将一个偏序集嵌入一个直积形式的偏序集。前述 Abel 反演公式可以看作离散形式的 Newton-Lebnitz 公式那么把反演公式推广到一般的偏序集是什么样的。

感谢潘永亮老师的指导!

参考文献

[1] 潘永亮, 徐俊明, 组合数学, 科学出版社 2006.5 p.37, p.34,p.71,p78

[2] 常庚哲, 史济怀, 徐森林, 数学分析教程（上册）, 高等教育出版社,2003.5,p.365

图论的起源

图论起源很早，远在十八世纪就出现了图论问题，如著名的哥尼斯堡（Konigsberg）七桥问题就是当时很有名的图论问题。1736 年，瑞士数学家列昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）发表了图论的首篇论文，解决了哥尼斯堡七桥问题。由于欧拉的研究奠定了图论的基础，目前一般均公认欧拉为图论之父。

在 19 世纪和 20 世纪的前半期，图论中主要研究一些游戏问题，诸如迷宫问题、博弈问题和棋盘上马的行走路线等等。

1847 年，克希荷夫应用图论的方法来分析电网络，奠定了现代网络理论的基础，这就是电工原理中的克希荷夫电流定律和克希荷夫电压定律，这是第一次将图论应用于工程技术领域。

1857 年，凯莱在试算饱和碳化氢的同分异性体时，提出了“树”的概念。此后约有一个世纪研究图论的人不多，直到 1936 年哥尼格发表了第一本图论专著，从此图论成为一门独立的学科。

二维曲面曲率及其计算的朴素推广

0301　　林全惠

引言

二维曲面中平均曲率和 Gauss 曲率的定义为：设 k_1、k_2 为曲面的主曲率，则平均曲率 $H = (k_1 + k_1)/2$, Gauss 曲率 $K = k_1k_2$。n 维曲率有 n 个主曲率，记为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，则因 H 和 K 联系着 k_1, k_2 的对称多项式，不难推广为：n 维曲面的第 r 个曲率可定义为 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的第 r 个基本对称多项式 H_r。平均曲率 $H = H_1/n = (k_1 + k_2 + \cdots + k_n)$。下面将二维曲面中的正交标架计算曲面的方法推广到 n 曲面。

1　二维曲面的曲面计算

设 $\{r; e_1, e_2, e_3\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中曲面 S 的正交标架，则有

$$\mathrm{d}r = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 \qquad \mathrm{d}e_i = \sum_{i=1}^{3} \omega_{ij} e_j$$

用矩阵的形式表达则为

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}e_1 \\ \mathrm{d}e_2 \\ \mathrm{d}e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

其中 $(\omega_{i,j})_{3*3}$ 为反对称阵，ω_{13}, ω_{23} 为 ω_1, ω_2 的线性组合，即

$$\begin{pmatrix} \omega_{13} & \omega_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

记 $B = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$ 则 B 为对称阵，故上式可改写为 $\begin{pmatrix} \omega_{13} \\ \omega_{23} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$

[1] 中 Ch4，命题 5.3 指出：B 的特征值为曲面的主曲率，记为 k_1、k_2，则 $H = (k_1 + k_1)/2$, Gauss 曲率 $K = k_1k_2$。

2　n 维曲面的情形

上面的矩阵形式很容易推广到 n 维。

设 $\{r; e_1, e_2 ... e_k\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中 n 维曲面 S 的正交标架，$e_{n+1} = -\mathbf{N}$ 为外法向，则同样可记 $\mathrm{d}r = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \ldots + \omega_{n+1} e_{n+1}$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}e_1 \\ \mathrm{d}e_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1,n+1} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n+1,1} & \omega_{n+1,2} & \cdots & \omega_{n+1,n+1} \end{pmatrix}, (\omega_{ij})_{(n+1)\times(n+1)} \text{反对称}$$

$$\begin{pmatrix} \omega_{1,n+1} \\ \omega_{2,n+1} \\ \vdots \\ \omega_{n,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \cdots & h_{n,n+1} \end{pmatrix}, \text{记} B = (h_{ij})_{n\times n} \text{对称}$$

类似的，可知 B 的特征值为 S 的 n 个主曲率，记为 $k_1, k_2...k_n$，则 H_r 为 $k-1, k_2...k_n$ 的第 r 个基本对称多项式。则有

$$\det(\lambda I_n - B) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i H_i \lambda^{n-i}$$

3 一些推广

下面是本文的主要任务，就是将 [1] 中 Ch7, §7.4 中的关于曲率的积分公式推广到 n 维曲面。设 Σ 是 n 维紧致曲面，$\mathbf{r}(\mathbf{p})$ 是它的位置函数同样定义支撑函数 $\varphi(\mathbf{p}) =< \mathbf{R}(\mathbf{p}), \mathbf{N}(\mathbf{p}) >$，其中 N 为外法向.

3.1

考虑 $n-1$ 阶微分式 $(\mathbf{r}, \underbrace{\mathrm{d}\mathbf{r}, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{r}}_{n-2\text{个}}, \mathbf{N}, \mathrm{d}\mathbf{N})$，易知这个微分式是整体定义的。取微分得

$$\mathrm{d}(\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{r}, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{r}, \mathbf{N}, \mathrm{d}\mathbf{N}) = (\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{r}, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{r}, \mathbf{N}, \mathrm{d}\mathbf{N}) + (-1)^n (\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{r}, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{N}, \mathrm{d}\mathbf{N})$$

其中第一项为

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{d}\mathbf{r}, \mathrm{d}\mathbf{r}, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{r}, \mathbf{N}, \mathrm{d}\mathbf{N}) \\
&= (\sum \omega_i e_i, \cdots, \sum \omega_i e_i, \mathbf{N}, \sum \omega_{i,n+1} e_i) \\
&= (\sum \omega_i e_i, \cdots, \sum \omega_i e_i, \sum \omega_{i,n+1} e_i, e_{n+1}) \\
&= \sum \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{n-1}} \wedge \omega_{i_n,n+1} (e_{i_1}, \cdots, e_{i_n}, e_{n+1}) \\
&= (n-1)! \sum \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge \omega_{i,n+1} \wedge \cdots \wedge \omega_n (e_1, \cdots, e_{n+1}) \\
&= (n-1)! \sum h_{ii} (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n) \\
&= n! H (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)
\end{aligned}$$

第二项为

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{N},\mathrm{d}\mathbf{N})\\
&=(\mathbf{r},\sum\omega_i e_i,\cdots,\sum\omega_i e_i,\sum\omega_{i,n+1}e_i,\sum\omega_{i,n+1}e_i)\\
&=\sum\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_{n-2}}\wedge\omega_{i_{n-1},n+1}\wedge\omega_{i_n,n+1}(\mathbf{r},e_{i_1},\cdots,e_{i_n})\\
&=(n-2)!\sum\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_{i,n+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j,n+1}\wedge\cdots\wedge\omega_n(\mathbf{r},e_1,\cdots,e_n)\\
&=2(n-2)!\sum_{i<j}(h_{ii}h_{jj}-h_{ij}h_{ji})\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n(\mathbf{r},e_1,\cdots,e_n)\\
&=2(n-2)!H_2\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n(\mathbf{r},e_1,\cdots,e_n)\\
&=2(-1)^n(n-2)!H_2\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n(e_1,\cdots,e_n,\mathbf{r})\\
&=2(-1)^n(n-2)!H_2\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n<e_{n+1},\mathbf{r}>\\
&=2(-1)^{n+1}(n-2)!H_2\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n\varphi
\end{aligned}$$

于是有 $\mathrm{d}(\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{N},\mathrm{d}\mathbf{N})=(Hn!-2(n-2)!\varphi)\omega_1\wedge\cdots\omega_n$ 两边同时在 Σ 上积分得

$$n!\int_\Sigma HdA-2(n-2)!\int_\Sigma H_2\varphi dA=0$$

即

$$n(n-1)\int_\Sigma dA=2\int_\Sigma H_2dA=0$$

$n=2$ 时，与 [1] 中 §7.4 的 (4.4) 式一致。

3.2

考虑 $n-1$ 阶微分式 $(\mathbf{r},\underbrace{\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r}}_{n-m-1\text{个}},\mathbf{N},\underbrace{\mathrm{d}\mathbf{N},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{N}}_{m\text{个}}),(2\le m\le n-1)$，同样的计算得

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{N},\mathrm{d}\mathbf{N},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{N})\\
=\;&(\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{N},\mathrm{d}\mathbf{N},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{N})+(-1)^{n-m-1}(\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{N},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{N})\\
=\;&((-1)^{m+1}(n-m)!m!H_m+(-1)^m(n-m-1)!(m+1)!H_{m+1}\varphi)\,\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n
\end{aligned}$$

两边积分得

$$(n-m)\int_\Sigma H_m dA=(m+1)\int_\Sigma H_{m+1}\varphi dA\qquad(m=2,3,\cdots,n-1)$$

这就是 H_m 和 H_{m+1} 间的积分关系。

3.3

考虑微分式 $(\mathbf{r},\underbrace{\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r}}_{n-1\text{个}},\mathbf{N})$ 有同样计算得

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{N})&=(\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{N})+(-1)^{n-1}(\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{N})\\
&=(-n!+n!H\varphi)\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n
\end{aligned}$$

$n=2$ 时，与 [1] 中 §7.4 的 (4.5) 式一致。

3.4

设 $\mathbf{a}$ 为常向量，考虑 $(\underbrace{\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r}}_{n-m-1\text{个}},\mathbf{N},\underbrace{\mathrm{d}\mathbf{N},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{N}}_{m\text{个}},\mathbf{a})$ 同样计算得

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{N},\mathrm{d}\mathbf{N},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{N},\mathbf{a})\\
&\quad=(-1)^{n-m+1}(\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{N},\mathrm{d}\mathbf{N},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{N},\mathbf{a})\\
&\quad=(-1)^{n-m+1}(n-m+1)!(m+1)!H_{m+1}<\mathbf{N},\mathbf{a}>\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n
\end{aligned}
$$

两边积分得

$$\int_\Sigma H_{m+1}<\mathbf{N},\mathbf{a}>dA=0$$

由 $\mathbf{a}$ 的任意性，得

$$\int_\Sigma H_{m+1}\mathbf{N}dA=0\qquad(m=1,2,\cdots,n)$$

若考虑微分式 $(\mathbf{r},\underbrace{\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r}}_{n-1\text{个}},\mathbf{a})$ 同样计算得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathbf{r},\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{a}) &= (\mathrm{d}\mathbf{r},\cdots,\mathrm{d}\mathbf{r},\mathbf{a})\\
&= n!(e_1,e_2,\cdots,e_n,a)\omega_1\wedge\cdots\wedge\omega_n
\end{aligned}
$$

两边积分，得

$$\int_\Sigma<\mathbf{N},\mathbf{a}>dA=0$$

由 $\mathbf{a}$ 的任意性得

$$\int_\Sigma \mathbf{N}dA=0$$

以上对应 [1] 中 §7.4 的 (4.6)-(4.8) 式一致。

参考文献

[1] 彭家贵，陈卿《微分几何》，高等教育出版社

Sturm 比较定理的比较证明

0401　　管枫　薛航

摘要

在参考文献 [1] 中，利用纯数学分析的方法给出了 Sturm 比较定理的证明。本文中，我们将利用微分方程的比较定理给出一个完全不同的证明.

关键词： 定性分析，二阶齐次微分方程，相图.

Introduction: 本文通过比较两个二阶齐次微分方程的根的零点大小的方法及一阶微分方程的比较定理证明了 Sturm 比较定理。突出了用比较大小的方法对 Sturm 比较定理进行证明，更加直观。

Sturm 比较定理一般指下面的：

Theorem 1 在区间 J 上考虑两个齐次的二阶线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{1}$$

和

$$y'' + p(x)y' + R(x)y = 0, \tag{2}$$

这里的系数函数 $p(x), Q(x), R(x)$ 在区间 J 上是连续的，而且不等式 $R(x) \geq Q(x)$ 对任意的 $x \in J$ 成立。设 $y = \varphi(x)$ 是方程 (1) 的一个非零解，而且 x_1, x_2 是它的两个相邻的零点。则方程 (2) 的任何非零解 $y = \psi$ 在 $[x_1, x_2]$ 中至少有一个零点。

Theorem 1. 的证明基于下面一般的引理：

Lemma 考虑定义在 J 上的两个微分方程

$$y'' + p_1(x)y' + q_1(x)y = 0 \tag{3}$$

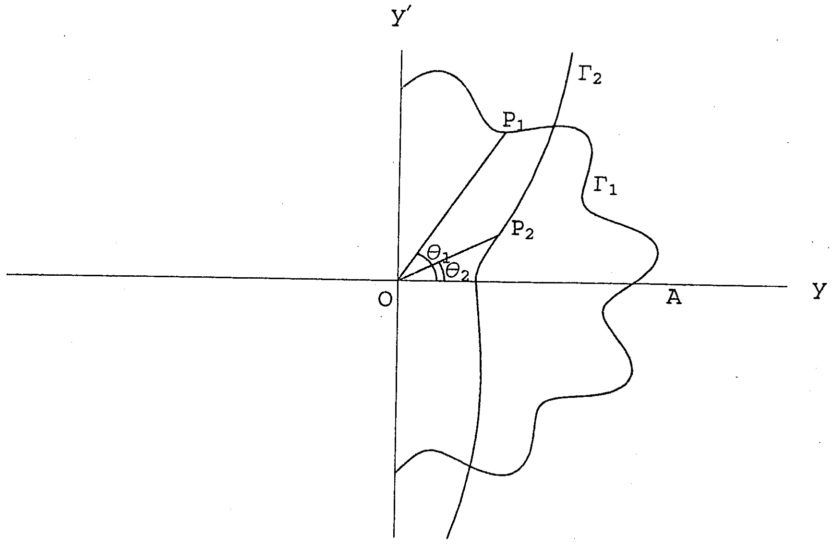
和

$$y'' + p_2(x)y' + q_2(x)y = 0, \tag{4}$$

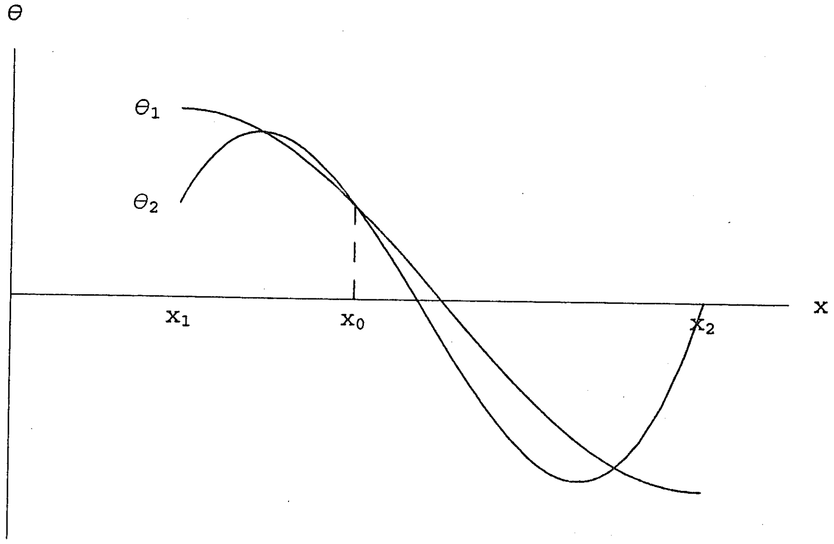
这里 $p_i(x)$ 与 $q_i(x)$ 在 J 上连续　$i = 1, 2$。

设 $y = \varphi_1(x)$ 和 $y = \varphi_2(x)$ 分别是 (3) 和 (4) 的非零解。若 x_1, x_2 是 φ_1 的相邻零点，且在 $[x_1, x_2]$ 上 $\varphi_2 > 0$。则存在一点 $x_0 \in (x_1, x_2)$。使得 $\frac{\varphi'_1(x_0)}{\varphi_1(x_0)} = \frac{\varphi'_2(x_0)}{\varphi_2(x_0)}$

Proof: 不妨设 $\forall x \in (x_1, x_2), \varphi_1(x) > 0$。于是有 $\varphi_1'(x_1) > 0, \varphi_1'(x_2) < 0$。设 Γ_1 与 Γ_2 分别是 (3) 与 (4) 的解 $\varphi_1(x)$ 与 $\varphi_2(x)$ 在相图中对应的曲线在 $x \in [x_1, x_2]$ 中的部分，如图



(图一)



(图二)

对于每一个 $x \in (x_1, x_2)$，我们定义：

$$\Theta_1(x) = \arctan \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_1(x)}, \Theta_2(x) = \arctan \frac{\varphi_2'(x)}{\varphi_2(x)},$$

$$\Theta_1(x_1) = \lim_{x \to x_1+} \Theta_1(x), \Theta_1(x_2) = \lim_{x \to x_2-} \Theta_1(x)$$

显然，Θ_1, Θ_2 都是 x 的连续函数。

我们有 $\Theta_1(x_1) = \frac{\pi}{2}$，$\Theta_1(x_2) = -\frac{\pi}{2}$，$\Theta_2(x_1) < \frac{\pi}{2}$，$\Theta_2(x_2) > -\frac{\pi}{2}$，(见图 [1])。于是，由连续函数的介值定理，$\exists x \in (x_1, x_2)$，使得 $\Theta_1(x_0) = \Theta_2(x_0) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。

即

$$\frac{\varphi'_1(x_0)}{\varphi_1(x_0)} = \tan\Theta_1 = \tan\Theta_2 = \frac{\varphi'_2(x_0)}{\varphi_2(x_0)},$$

引理得证。 □

在证明 Theorem 1 之前，我们先给出 Lemma 的一个推论。即 [1] 中的 Theorem 9.1。

Corollary: 在 J 上考虑二阶齐次线性方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{5}$$

假设 $\varphi_1(x)$ 和 $\varphi_2(x)$ 是 (5) 的两个线性无关的解。则 φ_1 和 φ_2 的零点是相互交错的。

Proof: 设 $\varphi_1(x)$ 的两个相邻零点为 x_1, x_2，而 φ_2 在 (x_1, x_2) 上没有零点。不妨设 $\varphi_2(x) > 0, \forall x \in (x_1, x_2)$。由于 φ_1, φ_2 线性无关，从而 $\varphi_2(x_1) \neq 0, \varphi_2(x_2) \neq 0$。这样 φ_1, φ_2 满足 Lemma 的条件。于是 $\exists x \in (x_1, x_2)$ 使得 $\frac{\varphi'_1(x_0)}{\varphi_1(x_0)} = \frac{\varphi'_2(x_0)}{\varphi_2(x_0)}$ 这意味着 (5) 的 Wronsky $W(x) = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$ 在 x_0 处为零。由 Liouville's formula, $W(x_0)$ 在 (x_1, x_2) 上均为零。即 φ_1, φ_2 线性相关，这与假设矛盾。从而 φ_2 在 (x_1, x_2) 中有零点。

同理也可证明 φ_1 在 φ_2 的相邻零点之间也有零点。即它们的零点是交错的。 □

下面证明 Theorem 1:

假设 $y = \psi(x)$ 在 $[x_1, x_2]$ 上没有零点。不失一般性设 $\psi(x) > 0, \forall x \in [x_1, x_2]$。于是利用 Lemma 得到：$\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ 使得 $\frac{\varphi'_1(x_0)}{\varphi_1(x_0)} = \frac{\varphi'_2(x_0)}{\varphi_2(x_0)} \triangleq u_0$。

由于在 (x_1, x_2) 上，有 $\varphi(x), \psi(x) \neq 0$。

可记 $w(x) = \frac{\varphi'_1(x)}{\varphi_1(x)}, v(x) = \frac{\varphi'_2(x)}{\varphi_2(x)}, x \in (x_1, x_2)$

容易验证 $w(x), v(x)$ 分别满足方程（参考 [1] 中 P_{45}，习题 2.4.4）：

$$u' = -u^2 - p(x)u - Q(x). \tag{1'}$$

和

$$u' = -u^2 - p(x)u - R(x). \tag{2'}$$

注意到 $R(x) \geq Q(x)$ 及 $w(x_0) = v(x_0) = u_0$，利用一阶微分方程的第二比较定理 ([1].§3.4.Theorem 3.8)。

得到：

$$w(x) \geq v(x) \quad (x \in [x_0, x_2)) \tag{6}$$

又注意到当 $x_0 = x_2$ 时

$$\varphi'(x_2) < 0, \varphi(x_2) = 0, \psi(x_2) > 0$$

及当 $x \in (x_0, x_2)$ 时 $\varphi(x_2) > 0$

可得

$$\lim_{x\to x_2^-}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}=-\infty<\frac{\psi'(x_2)}{\psi(x_2)}=\lim_{x\to x_2^-}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}.$$

但另一方面由 (6) 即 $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\geq\frac{\psi(x)}{\psi(x)}$ 两边令 $x\to x_2^-$ 取极限即得矛盾。

$\therefore \psi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上至少有一个零点。Theorem 1 至此证完。 □

注记：在 Theorem 1 中取 $R(x)=Q(x)$ 立即可得前面的 Corollary。

致谢： 感谢朱梅俊老师阅读并指导和修改了本文以及李临江同学提出的富有启发性的建议。

参考文献

[1] 丁同仁，李承志，常微分方程教程（第二版），北京，高等教育出版社，2004。

吉米多维奇简介

鲍里斯. 帕夫罗维奇. 吉米多维奇，白俄罗斯籍数学家，生于 1906 年，1977 年去世，1927 年本科毕业于白俄罗斯国立大学数学物理系，1931 年博士毕业于莫斯科国立大学数学力学系，生前为莫斯科大学数学分析教研室教授，在微分方程的定性理论方面有重要贡献，因其学术贡献，曾荣获苏联最高苏维埃颁发的功勋科学家称号，其具体研究方向包括：

1、具有积分不变量的动力系统。

2、常微分方程的周期解。

3、适定与完全适定动力系统。

4、微分方程的极限解。

5、动力系统的稳定性理论。

在斯杰潘诺夫教授去世后，他和费林鲍姆教授、伊柳辛教授等一起领导了莫斯科国立大学数学力学系的微分方程定性理论的研究工作，其著作除了那本大名鼎鼎的习题集还有一本在俄罗斯被广泛用做相关科目参考书的《稳定性的数学理论》。

可积函数在无穷远处的性状

0401　　管枫　罗世森

摘要

本文讨论可积函数在其无穷远处的性状，证明了当且仅当 $r \geq 1$ 时，$\forall f(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n^r x) = 0 \quad a.e.\, x \in \mathbb{R}^1$，并且对更一般的情况得到结论 $\forall f(x) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n x) = 0 \quad a.e.\, x \in \mathbb{R}^m$，若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为递增的正数列且 $\exists M \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $a_{n+[Ma_n^m]} \geq 2a_n$。

1 引言：

本文取材于文献 [1] 中的一道例题：

设 $f(x) \in L(\mathbb{R}^1)$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} < +\infty \quad (a_n > 0, n = 1, 2, \cdots)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n x) = 0, \quad a.e.\, x \in \mathbb{R}^1$。

这个命题反映出 $\mathbb{R}^1$ 上的可积函数在无穷远点取值趋于 0 的特点，而且作为它的一个特例，对于如上所述的 $f(x)$ 及 $r > 1$ 成立 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n^r x) = 0, \quad a.e.\, x \in \mathbb{R}^1$。那么对于 $0 < r \leq 1$，情形又是如何呢？本文解决了这个问题。

2 $0 < r < 1$：

结论 "$\forall f(x) \in L^1(\mathbb{R}^1)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n^r x) = 0, \quad a.e.\, x > 0$" 不成立，我们举例如下：

令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & if x \in [m^k, m^k + \frac{1}{m^2}], \quad \forall m \in \mathbb{N}^*; \\ 0, & if else. \end{cases}$$

其中 $k = \frac{3r}{1-r}$

则 $f(x) \in L(\mathbb{R}^1)$

下面我们证明，$\forall x \in [\frac{1}{2}, 1]$，有无穷多个 n 使 $f(n^r x) = 1$ 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n^r x) = 0$ 不成立。

首先

$$f(n^r x) = 1 \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \quad m^k \leq n^r x \leq m^k + \frac{1}{m^2} \Longleftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \quad (\frac{m^k}{x})^{\frac{1}{r}} \leq n \leq (\frac{m^k + \frac{1}{m^2}}{x})^{\frac{1}{r}}$$

又 $\forall m \in \mathbb{N}^*$

$$(\frac{m^k + \frac{1}{m^2}}{x})^{\frac{1}{r}} - (\frac{m^k}{x})^{\frac{1}{r}} \geq (m^k + \frac{1}{m^2})^{\frac{1}{r}} - (m^k)^{\frac{1}{r}} = \int_{m^k}^{m^k + \frac{1}{m^2}} (x^{\frac{1}{r}})' dx = \int_{m^k}^{m^k + \frac{1}{m^2}} \frac{1}{r} x^{\frac{1}{r}-1} dx$$

$$\geq \frac{1}{m^2} \cdot \frac{1}{r} m^{k(\frac{1}{r}-1)} \geq m^{k(\frac{1}{r}-1)-2} \geq 1$$

故 $\exists n_m \in \mathbb{N}^*$ 使 $n_m^r x \in [m^k, m^k + \frac{1}{m^2}]$。

显然，若 $m_1 \neq m_2$ 有 $n_{m_1} \neq n_{m_2}$

于是存在无穷多个 n 使得 $f(n^r x) = 1$。 ■

3 $r = 1$：

我们在 $\mathbb{R}^m$ 中证明了下述更强的定理，$m = 1, r = 1$ 的情形显然是它的一个特例。

定理1. $\forall f(x) \in L^1(\mathbb{R}^m)$，若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为递增的正数列且 $\exists M \in \mathbb{N}^*$ 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$ 有 $a_{n+[Ma_n^m]} \geq 2a_n$ 则有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n x) = 0 \quad a.e. x \in \mathbb{R}^m. \tag{$\star$}$$

证明：

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |f(a_n x)| = 0$，所以只需考虑 $f(x) \geq 0$ 的情形。

又因为由 $\forall n \in \mathbb{N}$ 可知 $a_{n+[Ma_n]} \geq 2a_n$ 　有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，所以不妨设 $a_1 > 1$。

用反证法：假设“$\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n x) = 0 \quad a.e. x \in \mathbb{R}^m$”不成立。

(步骤 1) 符号的定义

记 $S = \{x \in \mathbb{R}^m | \limsup\limits_{n\to\infty} f(a_n x) > 0\}$

则由反证法假设知 $m(S) > 0$

记 $B_t = B_{2^{t+1}}(0) \backslash B_{2^t}(0) \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

则由 $S = \bigcup\limits_{u\in\mathbb{Z}} (S \bigcap B_u)$ 知

$\exists t \in \mathbb{Z}$ 使得 $m(S \bigcap B_t) > 0$

于是定义

$$
\begin{aligned}
g(x) = &\quad \limsup_{n\to\infty} f(a_n x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \\
E = &\quad S \bigcap B_l \\
\alpha \cdot E = &\quad \{\alpha \cdot x | x \in E\} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^m \\
E_k = &\quad \{x \in a_k \cdot E | f(x) > \frac{g(\frac{x}{a_k})}{2}\} \\
F_k = &\quad \frac{1}{a_k} \cdot E_k \subset E \\
k(x) = &\quad min\{k \in \mathbb{N}^* | \frac{x}{a_k} \in E\} \quad \forall x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} E_k \\
f_k(x) = &\quad \begin{cases} \frac{1}{a_{k(x)}^m} f(x), & if x \in E_k; \\ 0, & if x \in \mathbb{R}^m \backslash E_k. \end{cases} \\
g_k(x) = &\quad \begin{cases} g(x), & if x \in F_k; \\ 0, & if x \in E \backslash F_k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

(步骤 2) 证明

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x)dx \geq \int_{F_k} g(x)dx \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

由

$$\int_{E_k} f(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_{E_k} g(\frac{x}{a_k})dx = \frac{a_k^m}{2}\int_{E_k} g(\frac{x}{a_k})d\frac{x}{a_k} = \frac{a_k^m}{2}\int_{F_k} g(x)dx$$

有

$$\int_{E_k} \frac{1}{a_k^m} f(x)dx \geq \frac{1}{2}\int_{F_k} g(x)dx$$

又 $\forall x \in E_k$ 有 $k(x) \leq k$

于是有

$$\int_{E_k} \frac{1}{a_{k(x)}^m} f(x)dx \geq \int_{E_k} \frac{1}{a_k^m} f(x)dx$$

再由

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x)dx = \int_{E_k} \frac{1}{a_{k(x)}^m} f(x)dx$$

有

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x)dx \geq \int_{F_k} g(x)dx$$

(步骤 3) 证明

$$M\int_{\mathbb{R}^m} f(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x)dx \tag{2}$$

先证 $Mf(x) \geq \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$

$i)$ 若 $x \in \mathbb{R}^m \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$

则

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad f_k(x) = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = 0 \leq Mf(x)$$

$ii)$ 若 $x_0 \in E_k$

则 $x_0 \in E_{k(x_0)} \subset a_{k(x_0)} \cdot B_t$

$\therefore |x_0| < 2^{t+1}a_{k(x_0)}$

但 $\forall p \geq k(x_0) + [Ma^m_{k(x_0)}]$ 有 $|x_0| < 2^{t+1}a_k(x_0) \leq 2^t a_p$

$$\therefore x_0 \overline{\in} E_p$$

$$\therefore f_p(x_0) = 0$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x_0) = \sum_{k=k(x_0)}^{k(x_0)+[Ma^m_{k(x_0)}]-1} f_k(x_0) \leq [Ma^m_{k(x_0)}]\frac{1}{a^m_{k(x_0)}} f(x_0) \leq Mf(x_0)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \leq Mf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$$

由控制收敛定理：

$$\int_{\mathbb{R}^m} Mf(x)dx \geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x)dx.$$

(步骤 4) 证明

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k} \frac{1}{2}g(x)dx = +\infty.$$

由单调收敛定理：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k} \frac{1}{2}g(x)dx = \frac{1}{2}\int_E \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)dx.$$

$\forall x \in E$,

由 $\limsup\limits_{n\to\infty} f(a_n x) = g(x) > 0$, 有 $\exists\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ 使 $a_{k_n}x \in E_{k_n}$, 即 $x \in F_{k_n}$, 即 $g_{k_n}(x) = \frac{1}{2}g(x)$.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} g_{k_n}(x) = +\infty.$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x) = +\infty \quad \forall x \in E.$$

又由 $m(E) > 0$, 有:

$$\frac{1}{2}\int_E \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)dx = +\infty \tag{3}$$

(步骤 5) 得出矛盾

由 (1),(2),(3) 有:

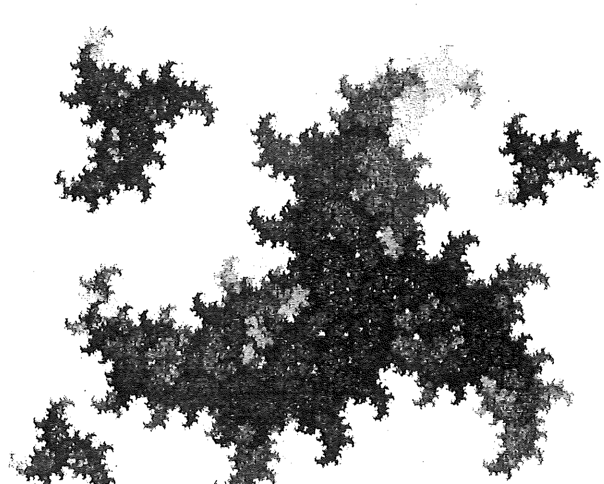
$$M\int_{\mathbb{R}^m} f(x)dx \geq \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^m} f_k(x)dx \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{F_k} g(x)dx = \frac{1}{2}\int_E \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)dx = +\infty,$$

与 $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^m)$ 矛盾. ■

特别地：由于数列 $a_n = n$ 满足 $a_{n+[a_n]} = 2a_n$, 所以当 $r = 1$ 时原结论成立。

参考文献

[1] 周民强，实变函数论，北京大学出版社，2001，190–191 页



Fractal