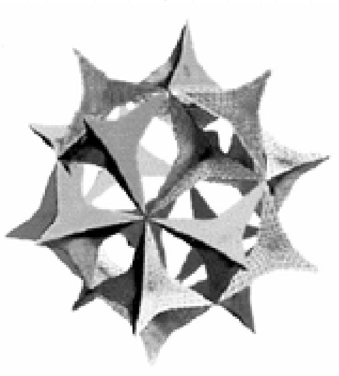
蛙　　鸣

第47期



蛙鸣编辑部赠阅

中国科学技术大学
《蛙鸣》编委会　　合办
数学系 学生会学习部

一九九二年十一月

目　　录

* * * * * *
蛙　　鸣
*　　　　*
第47期
* * * * * *

Harnack不等式和Poincare度量

891　沈建红

【内容提要】本文力图将Harnack不等式变成"等式"，建立了三条泛性质（定理1，2，3），并在n=2时在相当广泛的一类域上（Ω单连通，Ω≠C）彻底实现了这一目标（定理4及注）。发现：n=2时它和单位圆上的Poincare度量密切相关。最后通过引入调和自同构的概念指出了解决n≥3的可能途径。

【关键词】Harnack不等式，Poincare度量，调和自同构

【记号表】$\Omega\subset R^n$ 为域，$F\subset\Omega$ 为紧集；

B^n：n维单位球；

$H(\Omega)$：Ω上调和函数全体组成的集合；

$H_+(\Omega)=\{U\in H(\Omega)\,:\,U>0\}$；

$H_+^F(\Omega)=\{U\in H_+(\Omega),\ \min\limits_F U=1\}$；

$\{U\}_F=\max\limits_F U\,/\,\min\limits_F U,\quad U\in H_+(\Omega)$；

$$|F|_\Omega=\sup_{U\in H_+(\Omega)}\{U\}_F$$

【正文】Harnack不等式言（见[1]）：

HR1：$U\in H_+(B^n)$，则 $\forall x\in B^n$，

$$\frac{1-|x|}{(1+|x|)^{n-1}}U(0)\le U(x)\le\frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}U(0)；$$

HR2：存在常数$C(F,\Omega)$：使得：$\max\limits_{F} U \leqq C(F,\Omega)\min\limits_{F} U$，对任意$U\in H_+(\Omega)$；换言之$|F|_\Omega$为一个数。

特别要指出的是HR2，在〔1〕、〔2〕、〔3〕中要么约定F为Ω子域的闭包（如〔1〕），或者F连通（如〔2〕），要么证明过程本质上依赖于F的连通性（如〔3〕）。在此给出HR2的严格证明。

（反证）不然，存在$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H_+(\Omega)$，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，$\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset F$，使得：$\dfrac{U_n(x_n)}{U_n(y_n)}\to+\infty$，$n\to\infty$，利用F之序列紧性，我们无妨设存在$\bar{x}\in F$，$\bar{y}\in F$，使$x_n\to\bar{x}$，$\bar{y}\to\bar{y}$，设$x(t)$（$0\leqq t\leqq 1$）是Ω中连$\bar{x}_0$，$\bar{y}$的道路（$r(0)=\bar{x}$，$r(1)=\bar{y}$）。令$d=\mathrm{dist}(r[01],\partial\Omega)>0$，则可用k个中心在$r^0[01]$上，半径为$\dfrac{d}{4}$的开球$B_i$（$1\leqq i\leqq k$）盖住$r^0[01]$，且无妨设$\bar{x}\in B_1$，$\bar{y}\in B_k$。以下利用〔1〕的方法（F $\{B_i\}$和r^0）可知：存在常数$C>0$，使得：$\forall x\in B_1$，$y\in B_k$，$\forall U\in H_+(\Omega)$，$\dfrac{U(x)}{U(y)}\leqq C$。而n充分大$x_n\in B_1$，$y_n\in B_k$，故：$\dfrac{U_n(x_n)}{U_n(y_n)}\leqq C$与$\dfrac{U_n(x_n)}{U_n(y_n)}\to\infty$，矛盾。

关于$|F|_\Omega$我们有以下4条简单性质：

1·1)：$F=\{x_0\}$则$|F|_\Omega=1$；$\Omega=R^n$则$|F|_\Omega=1$。

1·2): $F_1 \subset F_2 \subset\subset \Omega$，则 $|F_1|_\Omega \leq |F_2|_\Omega$

1·3): $F \subset \Omega_1 \subset\subset \Omega_2$，则 $|F|_{\Omega_1} \geq |F|_{\Omega_2}$

1·4): $|F|_\Omega = \sup\limits_{U \in H_+^F(\Omega)} (U)_F$（事实上 $f: U \mapsto \dfrac{U}{\min\limits_F U}$

$H_+(\Omega) \to H_+^F(\Omega)$ 的满射，且 $(U)_F = (f(U))_F$）

而且我们有：

〔定理1〕 存在 $U \in H_+(\Omega)$，$(U)_F = |F|_\Omega$。

为证之，先证：

〔引理1〕 $S \subset H(\Omega)$，若 S 内闭一致有界，则 S 致密；即 S 中任意序列 $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ 有子列 $\{U_{n_k}\}_{k=1}^\infty$，$\{U_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ 在 Ω 上内闭一致收敛到某 $U \in H(\Omega)$。

〔简证〕它的证明类似于复变函数论中著名的Montel正规族定理（见〔4〕）。因为poisson公式完全胜任Cauchy公式的任务，即从“内闭一致有界”推出“内闭等度连续”，而Arzela－Ascoli定理是泛函性质（见〔5〕）。

易知存在 Ω 的一列子域 $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ 满足：$\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$，$\overline{\Omega}_n$ 紧且含于 Ω，$\lim \Omega_n = \Omega$。

那么：$\forall \Omega$ 的紧集 F，$\exists n_0$，$n \geq n_0$ 时 $\Omega_{n_0} \supset F$。

先从 $\{U_n\}_{n=1}^\infty$ 中抽出子列 $\{U_{1n}\}_{n=1}^\infty$ 在 $\overline{\Omega}_1$ 上一致收敛，再从 $\{U_{1n}\}_{n=1}^\infty$ 中抽出子列 $\{U_{2n}\}_{n=1}^\infty$ 在 $\overline{\Omega}_2$ 上一致收敛……，验证 $\{U_{nn}\}_{n=1}^\infty$ 即为所求内闭一致收敛的子列。

〔注〕引理1中条件$H(\Omega)$换成$H_+(\Omega)$。结论换成"$U\in H(\Omega)$，$U\geq 0$"显然也成立。

〔定理1的证明〕：由1·4）$\exists\{U_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H_+^F(\Omega)$，$(U_n)_F\to|F|_\Omega$。我们说明$\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$内闭一致有界。事实上：$\Omega$的任意紧集$F_1\supset F$，$\forall U_n$ $\max\limits_{F_1}U_n\leq|F_1|_\Omega\min\limits_{F_1}U_n\leq|F_1|_\Omega\min U_n=|F_1|\Omega$。于是由引理1的注存在$\{U_n\}_{k=1}^{\infty}$的子列$\{U_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$使得$\{U_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$内闭一致收敛于条$U\in H(\Omega)$，$U\geq 0$。从而$\min\limits_F U=\lim\limits_n\min\limits_F U_n=1$。即$U\in H_+(\Omega)$，且$(U)_F=\max\limits_F U=\lim\limits_n\max\limits_F U_n=\lim\limits_n(U_n)_F=|F|\Omega$。证毕。

〔定理2〕 $x\in B^n$则：$|\{0,x\}|_{B^n}=\dfrac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}$

为证之先证：

〔简证〕〔引理2〕$\sup\limits_{U\in H_+(B^n)}\dfrac{U(x)}{U(0)}=\dfrac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}$，

$\sup\limits_{U\in H_+(B^n)}\dfrac{U(0)}{U(x)}=\dfrac{(1+|x|)^{n-1}}{1-|x|}$ $(n\geq 2)$。由HR1，我们只要造一列$U_n\in H_+(B^n)$使$\dfrac{U_n(x)}{U_n(0)}\to\dfrac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}$（后一式类似可证）。

以$V_\varepsilon\left(\dfrac{x}{|x|}\right)$表$\dfrac{x}{|x|}$在$\partial B^n$上的$\varepsilon$邻域。于是$\exists\,\partial B^n$上的非负

连续函数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足以下条件：

3·1)：$\mathrm{SUPP}\,\varphi_n \subset V_{\frac{1}{n}}\left(\frac{x}{|x|}\right)$；

3·2)：$\frac{1}{n\omega_n}\int_{\partial B_n} \varphi_n(z)\,dS_z = 1$（$\omega_n$ 为 B_n 体积）。

令 $U_n(y) = \frac{1-|y|^2}{n\omega_n}\int_{\partial B_n} \frac{\varphi(z)}{|z-y|^n}\,dS_z$ 易验证

$U_n \in H_+(B^n)$ 且 $\frac{U_n(x)}{U_n(0)} \to \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}}$ 。

〔定理2的证明〕：

$$|\{0\ \ x\}|_{B^n} = \sup_{U\in H_+(B^n)} (U)_{\{0\ \ x\}} = \sup_{U\in H_+(B^n)} \max\left\{\frac{U(x)}{U(0)},\ \frac{U(0)}{U(x)}\right\}$$

$$= \max\left\{\sup_{U\in H_+(B^n)}\frac{U(x)}{U(0)},\ \sup_{U\in H_+(B^n)}\frac{U(0)}{U(x)}\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}},\ \frac{(1+|x|)^{n-1}}{1-|x|}\right\}$$

$$= \frac{1+|x|}{(1-|x|)^{n-1}} 。$$

证毕。

下面给出 $|F|_\Omega$ 的计算公式：

$n=1$ 时：由 1·1) 无妨设 $\Omega = (0,\ t)$ $t=+\infty$ 或 $0<t<$

$+\infty$，$F\subseteq\Omega$ 设 a，b 分别为 F 的左，右端，那么我们有：

$$|F|_{\Omega}=\max\left(\frac{t-a}{t-b},\ \frac{b}{a}\right)$$

证明略（请注意一维调和函数是线性函数）。

当 $n\geqq 2$ 时，我们再建立一条泛性质：

〔定理3〕$|F|_{\Omega}=\sup\limits_{x,\,y\in F}|\{x,\ y\}|_{\Omega}$

〔证明〕定义 $f:\ \Omega\times\Omega\to(1\ \ \infty):\ (x,\ y)\to|\{x,y\}|_{\Omega}$。

利用以下事实："若 $F\to x_0\in\Omega$，则 $|F|_{\Omega}\to 1$"可以证明 f 的连续性。

我们要证 $|F|_{\Omega}=\max\limits_{F\times F}f(x\ \ y)$。显然 $\max\limits_{F\times F}f(x,y)\leq |F|_{\Omega}$（1·2）。又由定理1 $\exists U\in H_+(\Omega)$，$[U]_F=|F|_{\Omega}$。即 $\exists\bar{x},\bar{y}\in F$，$\dfrac{U(\bar{x})}{U(\bar{y})}=|F|_{\Omega}$，于是 $|F|_{\Omega}\leq f(\bar{x},\bar{y})\leq\max\limits_{F\times F}f(x,y)$，故而 $|F|_{\Omega}=\max\limits_{F\times F}f(x,y)$。

由定理3我们将给出 $|F|_{B^2}$ 的完整结果。首先指出 $n=2$ 时数 $\Omega=B^2$ 并不失一般性。所谓的Riemann映照定理告诉我们，复平面上的单连通区域类在共形映照下分类仅有两类。它们的代表元为 $\mathbb{C}$ 和 B^2。而调和性是解析映照不变性（即 $f:\ \Omega_1\to\Omega_2$ 解析，则 $\forall U\in H(\Omega_2)$，$f^*U=U\circ f\in H(\Omega_1)$），又由1·1）我们便知道选取 $\Omega=B^2$，实质上包容了一切单连通区域的非平凡情形。

定义 $B^2\times B^2$ 上连续函数 $\bar{f}$ 如下（照传统，以 z 表 $\mathbb{C}$ 上的点）：

$$\bar{f}(z_1, z_2) = \frac{|1-\bar{z}_1 z_2| + |z_1 - z_2|}{|1-\bar{z}_1 z_2| - |z_1 - z_2|}$$ 。我们有：

〔定理4〕$|F|_{B^2} = \max\limits_{F\times F} \bar{f}(z_1, z_2)$。

〔证明〕由定理3，只要证明 $\bar{f}(z_1, z_2) = f(z_1, z_2)$。首先我们指出函数 $f(z_1, z_2)$ 的一个特性——莫比乌斯变换不变性。所谓的莫比乌斯变换M，就是 B^2 到 B^2 上的共形映照。所谓的不变性即：$M^*f=f$ 或者：$f(z_1, z_2) = f[M(z_1), M(z_2)]$。实际上易知 M^* 是 $H_0(B^2)$ 的一个自同构（作为线性空间），且 $M^*H_+(B^2) = H_+(B^2)$。于是：$f(z_1, z_2) = \mathop{SUP}\limits_{U\in H_+(B^2)} [U]\{z_1, z_2\}$

$$= \mathop{SUP}\limits_{U\in M^*H_+(B^2)} [U]\{z_1, z_2\} = \mathop{SUP}\limits_{V\in H_+(B^2)} [V\circ M]\{z_1, z_2\}$$

$$= \mathop{SUP}\limits_{V\in H_+(B^2)} [V]\{M(z_1), M(z_2)\} = f[M(z_1), M(z_2)]。$$

$\forall z_1, z_2 \in B^2$，令 $M_{z_1}(z) = \dfrac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}$ 这是个莫比乌斯变换。

于是：$f(z_1, z_2) = f[M_{z_1}(z_1), M_{z_1}(z_2)] = f[0,$

$$M_{z_1}(z_2)] = \frac{1+|M_{z_1}(z_2)|}{1-|M_{z_1}(z_2)|} = \bar{f}(z_1, z_2)$$ 。证毕。

〔注〕由证明可知 $|F|_{B^2}$ 是莫比乌斯变换群下的不变量即 $|M(F)|_{B^2} = |F|_{B^2}$ 对任意莫比乌斯变换M都成立。我们知道Poincare度量是这个变换群下的不变度量。它的线素是 $(dS_z)^2=$

$\dfrac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}$，$\forall z_1, z_2 \in B^2$，以$d_p(z_1, z_2)$表$z_1$，$z_2$间Poncare距离（即$dS_z$下测地线间距离）。

那么：

$$d_p(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|}{1-\left|\dfrac{z_2-z_1}{1-\bar{z}_1 z_2}\right|} = \frac{1}{2} \ln \bar{f}(z_1, z_2)$$

于是：$\bar{f}(z_1, z_2) = e^{2d_p(z_1, z_2)}$

$$|F|_{B^2} = \max_{z_1, z_2 \in F} e^{2d_p(z_1, z_2)} = e^{2\,\mathrm{diam}_p F},$$

$\mathrm{diam}_p F$为F的Poincare度量F的直径。结果是出人意外的整洁！

$n \geq 3$时，我们惯性地　$\Omega = B^3$。$n = 2$时，在莫比乌斯变换群的协助下，我们一手拿定理2，一手拿定理3，即敲开了山门。$n \geq 3$时我们能足不放下手中的武器，找个变换群来帮助一下，就将“山顶千门次第开”呢？虽然目前我千呼万唤，他仍不出来，但我依然力图在想象中把他的容貌构画出来：

m：$\Omega_1 \to \Omega_2$是一个C^2－映射，称之为从Ω_1到Ω_2的一个调和同态。如果它诱导了一个$H(\Omega_2)$到$H(\Omega_1)$的映射m^*：$U \to m^* U = U \circ m$；m是Ω_1到Ω_2的一个调和同态，称之为调和同胚。如果（i）m是C^2—同胚；（ii）m^{-1}也为调和同态（(ii)是否多余呢）。以$\mathrm{Aut}(\Omega)$表域Ω的调和自同胚全体构成的集合，显

然它构成一个群。假设（仅仅是一厢情愿，但蛮有信心）$Aut(B^n)$在B^n上的作用可迁，即$\forall x$，$y\in B^n$，$m\in Aut(B^n)$，$y=m(x)$；以m_x表示$m_x(x)=0$的某个$Aut(B^n)$元素，由定理2

$$f(x,y)=f(0,m_x(y))=\frac{1+|m_x(y)|}{(1-|m_x(y)|)^{n-1}}$$注意到

$\dfrac{1+x}{(1-x)^{n-1}}$（$0\leq x<1$）的严格单调性，$|m_x(y)|$与m_x的选取无关，而且$|m_y(x)|=|m_x(y)|$。定义$S_n(x,y)=|m_x(y)|$，由f的连续性可知S的连续性，于是我们有类似定理4的结果：

$$|F|_{B^n}=\max\frac{1+S_n(x,y)}{[1-S_n(x,y)]^{n-1}}。$$

这里矿藏丰富。

（全文完）

［文献］

〔1〕《偏微分方程》 陈祖墀 P148，P159

〔2〕《数学物理方程》吉大出版 严子谦等编 P127

〔3〕《微分方程中的最大值原理》Haruack不等式一节

〔4〕《复变函数》 北大 庄圻泰等 P326

〔5〕《实变函数论和泛函分析》下册 夏道行等 P104

定理6及其一般紧集上的推广

* * * * * *
蛙　鸣
*　　*
第47期
* * * * * *

Bernstein算子的广义总变差减缩性质

891 冯 频

设f为定义在[0，1]上的实函数。则与f相联系的Bernstein多项式定义为：

$$B_n(f,x) \triangleq \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot J_i^{\,n}(x)$$

其中，$J_i^{\,n}(x)=\binom{n}{i}x^i(1-x)^{ni}$为Bernstein基函数。

记$t_i=\frac{i}{n}$，$f_i=f(t_i)$，$i=0,\cdots,n$，顺次连结点(t_i,f_i)所或折线记为$\hat{f}_n$。

对[0，1]中的任意点列$\{x_i\}_{i=0}^{m}$，$0\leq x_0<\cdots<x_m\leq 1$，函数f在[0，1]中的总变差为$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=\sup\limits_{\{x_i\},m}\sum\limits_{i=0}^{m-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$　　(1)

且易知　$\overset{1}{\underset{0}{V}}(\hat{f}_n)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}|f_{i+1}-f_i|$　　(2)

若$f\in C'[0,1]$由中值定理，有$\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)=\int_0^1\left|\frac{df}{dt}\right|dt$　(3)

从(1)，(2)，(3)不难得到$\overset{1}{\underset{0}{V}}[B_n(f)]\leq\overset{1}{\underset{0}{V}}(\hat{f}_n)\leq\overset{1}{\underset{0}{V}}(f)$。

即 $B_n(f)$ 的总变差不超过 f 的总变差。后来，I·J·Schoenberg 证明了如下结果：

定理 1：$\overset{1}{\underset{0}{V}}(B_n(f)) \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}(f)$ 且等号成立 $\Leftrightarrow$ f 为 $[0, 1]$ 区间上的单调函数，本文将推广上述结果。

首先定义 $\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f) \overset{\Delta}{=} \sup\limits_{\{x_i\}, m} \sum\limits_{i=0}^{m-2} |[x_{i+1}, x_{i+2}]f - [x_i, x_{i+1}]f|$ 为 f 在 $[0, 1]$ 上的广义总变差。这儿 $[s_1, s_2]f \overset{\Delta}{=} \dfrac{f(s_2)-f(s_1)}{s_2-s_1}$ 为 f 过 $(s_1, f(s_1))$，$(s_2, f(s_2))$ 的斜率。

折线 $\hat{f}_n$ 的广义总变差为 $\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(\hat{f}_n) = \sum\limits_{i=0}^{n-2} |[t_{i+1}, t_{i+2}]f - [t_i, t_{i+2}]f|$。若 $f \in C^2[0, 1]$，则广义总变差为：

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f) = \int_0^1 \left|\frac{d^2 f}{dt^2}\right| dt$$

在引入关于广义总变差的定理之前，先做一些准备工作。

Δ 为差分算子，对一数列 $\{a_i\}$，定义为 $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$。$\Delta^2 = \Delta(\Delta)$ 为二阶差分算子，即 $\Delta^2 a_i = a_{i+2} - 2a_{i+1} + a_i$。

引理 1：$\displaystyle\int_0^1 J_i^n(t)\,dt = \frac{1}{n+1}$

证明：$\int_0^1 J_i^n(t)dt = \binom{n}{i}B(i+1, n-i+1)$

$$= \binom{n}{i}\frac{\Gamma(i+1)\Gamma(n-i+1)}{\Gamma(n+2)}$$

$$= \binom{n}{i}\cdot\frac{i!\,(n-i)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$$

引理2： $\frac{d}{dt}B_n(f, t) = n\sum_{i=0}^{n-1}\Delta f_i J_i^{n-1}(t)$

证明： $\frac{d}{dt}B_n(f, t) = \frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n} f_i\cdot\binom{n}{i}t^i(1-t)^{n-i}$

$$= \sum_{i=0}^{n} f_i\cdot\binom{n}{i}\left[i\,t^{i-1}(1-t)^{n-i}-(n-i)t^i(1-t)^{n-i-1}\right]$$

$$= n\sum_{i=0}^{n-1}(f_{i+1} - f_i)\binom{n-1}{i}t^i(1-t)^{n-1-i}$$

$$= n\sum_{i=0}^{n-1}\Delta f_i J_i^{n-1}(t)$$

引理3： $\frac{d^2}{dt^2}B_n(f, t) = n(n-1)\sum_{i=0}^{n-2}\Delta^2 f_i J_i^{n-2}(t)$

证明：直接由引理2可得。

引理4：f在区间I上凸（凹） $\Leftrightarrow$ 对 $\forall\, x_1<x_2<x_3,\ x_i\in I$

$[x_1, x_2]f \leq (\geq)\ [x_1, x_3]f \leq (\geq)\ [x_2, x_3]f$

（这三个不等式是等价的）

定理2：a） $\overset{1}{\underset{0}{V}}'[B_n(f)] \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}'(f)$

b）上式等号成立当且仅当f为［0，1］上的凸（凹）

函数。且在$[0,t_1]$和$[t_{n-1},1]$中为线性函数。

证明：a) $\overset{1}{\underset{0}{V}}'[B_n(f)]=\int_0^1\left|\frac{d^2}{dt^2}B_n(f,t)\right|dt$

$$=n(n-1)\cdot\int_0^1\left|\sum_{i=0}^{n-2}\Delta^2 f_i\cdot J_i^{n-2}(t)\right|dt$$

$$\leq n(n-1)\int_0^1\sum_{i=0}^{n-2}|\Delta^2 f_i|\cdot J_i^{n-2}(t)dt \qquad (4)$$

$$=n\cdot\sum_{i=0}^{n-2}|\Delta^2 f_i|=\sum_{i=0}^{n-2}|[t_{i+1},t_{i+2}]f-$$

$$[t_i,t_{i+1}]f|=\overset{1}{\underset{0}{V}}'(\hat{f}_n)\leq\overset{1}{\underset{0}{V}}'(f) \qquad (5)$$

$$\therefore\ \overset{1}{\underset{0}{V}}'[B_n(f)]\leq\overset{1}{\underset{0}{V}}'(\hat{f}_n)\leq\overset{1}{\underset{0}{V}}'(f)$$

b) 充分性：若f为凸(凹)函数，则对$[0,1]$中任意点列$0\leq x_0<\cdots<x_m\leq 1$，有

$$\sum_{i=0}^{m-2}|[x_{i+1},x_{i+2}]f-[x_2,x_1]f|=|[x_{m-1},x_m]f-[x_0,x_1]f|$$

又f为$[0,t_1]$，$[t_{n-1},1]$中为线性函数，

从而有

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}'(f)=|[t_{n-1},1]f-[0,t_1]f|$$

另一方面，从(4)(5)知$\overset{1}{\underset{0}{V}}'(B_n(f))=\overset{1}{\underset{0}{V}}'(\hat{f}_n)$充要条件为$\Delta^2 f_i$同号，$i=0,\cdots,n-2$。当$f$为

凸（凹）函数时，$\Delta^2 f_i$ 的符号与之无关。这时有

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}'(\hat{f}_n) = |[t_{n-1}, 1]f - [0, t_1]f|$$

$$\therefore \quad \overset{1}{\underset{0}{V}}'[B_n(f)] = \overset{1}{\underset{0}{V}}'(f)$$ 充分性证毕。

必要性：$\overset{1}{\underset{0}{V}}'[B_n(f)] = \overset{1}{\underset{0}{V}}'(f) \Rightarrow \overset{1}{\underset{0}{V}}'[B_n(f)]$

$$= \overset{1}{\underset{0}{V}}'(\hat{f}_n)$$

$\therefore$ $\Delta^2 f_i$ 同号，不妨设 $\Delta^2 f_i \geq 0$，$i=0, 1, \cdots, n-2$

这时有 $\overset{1}{\underset{0}{V}}'[B_n(f)] = \overset{1}{\underset{0}{V}}'(f_n) = \overset{1}{\underset{0}{V}}'(f)$

$$= [t_{n-1}, 1]f - [0, t_1]f$$

若 $f(x)$ 在 $[0, t_1]$，$[t_{n-1}, 1]$ 中不是线性函数。则存在 $S \in (t_{n-1}, 1)$ 使

$$|[s, 1]f - [t_{n-1}, s]f| > 0$$

而
$$\frac{f(1)-f(t_{n-1})}{1-t_{n-1}} = \frac{1-s}{1-t_{n-1}} \cdot \frac{f(1)-f(s)}{1-s} + \frac{s-t_{n-1}}{1-t_{n-1}} \cdot \frac{f(s)-f(t_{n-1})}{s-t_{n-1}}$$

$$< \max\left(\frac{f(1)-f(s)}{1-s}, \frac{f(s)-f(t_{n-1})}{s-t_{n-1}}\right)$$

即 $[t_{n-1}, 1]f < \max\{[s, 1]f, [t_{n-1}, s]f\}$

但 $T \overset{1}{\underset{0}{V}}'(f) \geq [t_{n-1}, s]f - [0, t_1]f +$

$\cdot \quad |[s, 1]f - [t_{n-1}, s]f|$

$\geq \max\{[s, 1]f, [t_{n-1}, s]f\}$

$> [t_{n-1}, 1]f - [0, t_1]f$ 　　矛盾！

$\therefore f$ 在 $[t_{n-1}, 1]$ 中必为线性函数。同理 f 在 $[0, t_1]$ 中也为线性函数。

若 $f(x)$ 在 $[t_1, t_{n-1}]$ 中不为凸函数。则存在

$t_1 \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq t_{n-1}$。使

$$[x_1, x_2]f > [x_2, x_3]f$$

从而 $\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f) \geq |[t_1, x_1]f - [0, t_1]f| +$

$|[x_1, x_2]f - [t_1, x_1]f| +$

$|[x_2, x_3]f - [x_1, x_2]f| +$

$|[x_3, t_{n-1}]f - [x_2, x_3]f| +$

$|[t_{n-1}, 1]f - [x_3, t_{n-1}]f|$

$\geq |[t_{n-1}, 1]f - [x_2, x_3]f +$

$[x_1, x_2]f - [0, t_1]f| + |[x_2, x_3]f - [x_1, x_2]f|$

$> [t_{n-1}, 1]f - [0, t_1]f$ 　　矛盾！

$\therefore f(x)$ 在 $[t_1, t_{n-1}]$ 中为凸函数。又 f 在 $[0, t_2]$，$[t_{n-1}, 1]$ 中线性且 $\Delta^2 f_i \geq 0$。

要证 f 在 $[0, 1]$ 上凸。先证 f 在 $[0, t_2]$ 上凸。

否则 $x \in (t_1, t_2)$ 使 $[t_0, t_1]f > [t_1, x]f$

则 $\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f) \geq |[t_1, x]f - [t_0, t_1]f| +$

$[t_{n-1}, 1]f - [t_1, x]f$

$= [t_0, t_1]f - [t_1, x]f + [t_{n-1},$

$1]f - [t_1, x]f$

$= \{[t_{n-1}, 1]f - [t_0, t_1]f\} +$

$2\{[t_0, t_1]f - [t_1, x]f\}$

$> [t_{n-1}, 1]f - [t_0, t_1]f = \overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f)$

矛盾！

同理，可证f在$[t_{n-2}, 1]$上凸，从而f在$[0, 1]$上凸。

综上，定理获证。

推论1：f为$[0, 1]$上的凸（凹）函数，则对任意自然数n，有

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'[B_n(f)] \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}{}'[B_{n+1}(f)] \leq \overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f)$$

证明：设f凸，则$\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'[B_n(f)] = \overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(\hat{f}_n)$

$\therefore \overset{1}{\underset{0}{V}}{}'[B_n(f)]$是f关于分点$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1-\frac{1}{n},$ 1的变差；$\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'[B_{n+1}(f)]$是f关于分点$0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \cdots, 1-\frac{1}{n+1}$，1的变差。

由凸性，它和 f 关于分点 0，$\frac{1}{n+1}$，$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，$1-\frac{1}{n}$，$1-\frac{1}{n+1}$，1 的变差相等。

$$\therefore \quad \overset{1}{\underset{0}{V}}\left(B_{n+1}(f)\right) \geq \overset{1}{\underset{0}{V}}\left(B_n(f)\right)$$

推论2： 若对某个自然数 n，成立 $\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'\left(B_n(f)\right) = \overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f)$，

则对任意 $m>n$ 也成立 $\overset{1}{\underset{0}{V}}{}'\left(B_m(f)\right) = \overset{1}{\underset{0}{V}}{}'(f)$

证明：由定理2及推论1易得。

本文承王建伟同学补充其中部分证明。

问题征解：

问题110：

平面上九个点，每两点距离 ≤ 1。

求证：两点最小距离 $<\frac{\sqrt{2}}{3}$。

尚　强

******
蛙　　鸣
*　　　　*
第47期
******

范数理论与奇异值分解

911　张远声

由于$R^{m\times n}$和R^{mn}是同态的。我们亦可类似定义矩阵的范数。

我们可以考察F－范数（Frobenius范数）$\|A\|_F = (\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}}$ 它满足(i) $\|A\|_F \geq 0$ 当且仅当$A=0$时等号成立，(ii) $\|\alpha A\|_F = |\alpha|\,\|A\|$。∴这样定义是合理的。

可以看出F－范数对正交变换是不变的，即$\|QAZ\| = \|A\|_F$。若Q和Z是维数合适的正交矩阵。

还有一种更有用的Holder范数，其定义为：

若$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，令$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$，则矩阵A的Holder范数定义为

$$\|A\|_p = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|A\|_p}$$，则亦有$\|QAZ\|_2 = \|A\|_2$

用矩阵范数理论和向量范数理论可以证明在矩阵中最重要的一个分解——奇异值分解。

若$A\in R^{m\times n}$，则存在正交矩阵$u=(u_1, u_2, \cdots, u_m)\in R^{m\times m}$，和$V=(V_1, V_2, \cdots, V_m)\in R^{n\times n}$，使$U^TAV = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2$

$\cdots, \sigma_p)$ 或 $[\mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_p), 0]$ 或 $[\mathrm{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_p), 0)'$，$p=\min\{m, n\}$，其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$。

证明：设 $x \in R^n$，$y \in R^m$ 和 $||x||_2 = ||y_1||_2 = 1$，$Ax = \sigma y$ 并且 $\sigma = ||A||_2$。令 $U = [x, V_1] \in R^{n \times n}$ 和 $U = [y, U_1] \in R^{m \times m}$ 是正交的（因为由一个向量的标准正交基总可扩充为整个空间的标准正交基），于是 $U'AV$ 具有以下结构：

$$A_1 = U^T AV = \begin{bmatrix} \sigma & \omega^T \\ 0 & B \end{bmatrix}'_{m-1}$$

因为 $\left|\left|A_1\begin{pmatrix}\sigma \\ \omega\end{pmatrix}\right|\right|_2^2 \geq (\sigma^2 + \omega^T\omega)^2$

于是 $||A_1||_2^2 \geq \sigma^2 + \omega^T\omega$，由于 $\sigma^2 = ||A||_2^2$

$\therefore \quad \omega^T\omega = 0, \qquad \omega = 0$

用数学归纳法即可完成证明。

由上题我们看出一道需要较高技巧的定理证明在用范数理论后便迎刃而解，几乎不费吹灰之力。或许，我们在平常的学习中，如果多考虑考虑范数的一些性质，善于引申的话，就会变难题为不难。

参考书目：《MATRIX COMPUTATIONS》 Gene·H·Golub 著

* * * * * *
* 蛙　鸣 *
*　　　 *
* 第47期 *
* * * * * *

$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ 的估值（续）

901　李立雄

记 $S_0=1$，$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ $(n\geq 1)$，笔者在前文〔1〕中证明了：1) $\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{3})}}<S_n<\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})}}$

2) 记 $S_n=\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+\alpha_n})}}$，则

$$12>\alpha_n\downarrow 8$$

（承蒙王建伟同学指出，原证明是不完全的），并提出了如下的猜想（原猜想有错，应更正为：）

$$S_n^2\cdot\pi/4=\cfrac{1}{4n+1+\cfrac{1^2}{8n+2+\cfrac{3^2}{8n+2+\cdots+\cfrac{(2k+1)^2}{8n+2+\cdots}}}}\qquad(n\geq 0)$$

或简写为：

$$S_n^2\cdot\pi/4=\frac{1}{4n+1}+\frac{1^2}{8n+2}+\frac{3^2}{8n+2}+\cdots+\frac{(2k-3)^2}{8n+2}$$

$$+\cdots \quad (k \geq 2) \tag{1}$$

本文主要任务是证明这个猜想并进一步给出余项估计。

命题1：(1)式成立，$n \geq 0$

证：1）连分式 $\dfrac{a_1}{b_1}+\dfrac{a_2}{b_2}+\cdots+\dfrac{a_k}{b_k}+\cdots$

第k个部分商 $\dfrac{U_k}{V_k}$ 满足：
$$U_0=0,\ U_1=a_1,\ \cdots,\ U_k=b_kU_{k-1}+a_kU_{k-2}$$
$$V_0=1,\ V_1=b_1,\ \cdots,\ V_k=b_kV_{k-1}+a_kV_{k-2}$$

特别地，对猜想(1)，部分商 $\dfrac{U_k}{V_k}$ 应满足

$$U_0=0,\ U_1=1,\ U_2=8n+2,\ \cdots,\ U_k,\ \cdots$$
$$V_0=1,\ V_1=4n+1,\ V_2=(8n+2)(4n+1)+1,\ \cdots,\ V_k,\ \cdots$$

其中 $U_k=(8n+2)U_{k-1}+(2k-3)^2U_{k-2}$，
$$V_k=(8n+2)V_{k-1}+(2k-3)^2V_{k-2} \quad (k \geq 2)$$

2）令
$$D_k=\frac{U_k(n)}{V_k(n)}\Big/\frac{U_k(n+1)}{V_k(n+1)}-\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2,$$
$$=A_k/\left[V_k(n)V_k(n+1)(4n^2+4n+1)\right]$$

其中 $A_k=U_k(n)V_k(n+1)(4n^2+4n+1)-V_k(n)U_k(n+1)(4n^2+8n+4)$
$$=(8n+2)(8n+10)A_{k-1}+(2k-3)^2(8n+2)B_{k-1}$$
$$+(2k-3)^2(8n+10)C_{k-1}+(2k-3)^4A_{k-2}$$

$B_k=U_k(n)V_{k-1}(n+1)(4n^2+4n+1)-V_k(n)U_{k-1}(n+1)(4n^2+8n+4)$

$$= (8n+2)A_{k-1} + (2k-3)^2 C_{k-1}$$

$$C_k = U_{k-1}(n)V_k(n+1)(4n^2+4n+1) - V_{k-1}(n)U_k(n+1)$$
$$(4n^2+8n+4)$$

$$= (8n+10)A_{k-1} + (2k-3)^2 B_{k-1}$$

3）再由数学归纳法并经过若干代数运算有下述结果：

i　U_k是关于n的$k-1$次正项多项式，首项系数为8^{k-1}；U_k是n的k次正项多项式，首项系数为$4\cdot 8^{k-1}$。

ii　$A_k = (-1)^{k+1}\cdot k\cdot 1^2\cdot 3^2\cdots(2k-1)^2$，$B_k=(-1)^{k+1} 1^2\cdot 3^2\cdots(2k-3)^2(4n^2-4(k-2)n+b_k)$，$C_k=(-1)^k 1^2\cdot 3^2\cdots(2k-3)^2(4n^2+4(k+1)n+c_k)$，$b_k=2k^2-5k+4$，$c_k=2k^2+k+1$。

4）由3）知k为奇数时$D_k=\frac{U_k(n)}{V_k(n)}\quad\frac{U_{k+1}(n+1)}{V_{k+1}(n+1)} - \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^2 > 0$；k为偶数时，$D_k<0$。命$S_n^2\cdot\pi/4 = G_k(n)\frac{U_k(n)}{V_k(n)}$，于是，当k固定时，对n而言，$G_k(n)\downarrow 1$，k为奇数。$G_k(n)\uparrow 1$，k为偶数（此结果相当于文〔1〕引理1）。

5）总上述，有（$k\geq 2$）

k为奇数时，$S_n^2\cdot\pi/4 < \frac{1}{4n+1} \cdot \frac{1^2}{+\,8n+2} \frac{3^2}{+\,8n+2} + \cdots$

$$+\frac{(2k-3)^2}{8n+2}$$

k为偶数时，$S_n^2\cdot\pi/4 > \frac{1}{4n+1}+\frac{1^2}{8n+2}+\frac{3^2}{8n+2}+\cdots$

$$+\frac{(2k-3)^2}{8n+2}$$

6）令k→+∞。并根据连分式(1)收敛即明所证。

由于 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}+\cfrac{1}{32n+8+\cfrac{36}{8n+2+\cdots}}\right)}}$

故有推论：1）$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{3})}} < S_n < \dfrac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})}}$　　$n\geqq 1$

2）$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+8}\right)}} < S_n <$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+12}\right)}}\qquad n\geqq 1$$

并当 $n\geqq 5$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+8}\right)}} < S_n <$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+9}\right)}}\qquad (n\geqq 5)$$

又命 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{32n+\alpha_n}\right)}}$，$\alpha_n=8+\dfrac{36}{8n+2}+$

$\dfrac{25}{8n+2}+\cdots$

$\therefore\quad 8+\dfrac{36}{8n+5}<\alpha_n<8+\dfrac{36}{8n+2}$ （$n\geq 1$时）

$\therefore\quad 12>\alpha_n\downarrow 8$

对于固定的a，记 $f(m)=\dfrac{m^2}{a+\dfrac{(m+2)^2}{a+\dfrac{(m+4)^2}{a+\cdots}}}$，称之为余项。下面简述f(m)的性质：

1）$\sqrt{m^2+b^2}-b<f(m)<\sqrt{m^2+c^2}-c$，其中 $b=\dfrac{a+2}{2}$，$c=\dfrac{a}{2}$。此处 $a\geq 5$。这可先对 $m=1$。2作出证明然后运用数学归纳法。

2）记 $f(m)=\sqrt{m^2+\alpha^2}-\alpha$，则有 $m\ll a$ 时，$\alpha\to a/2$。$m\gg a$ 时，$\alpha\to a+2/2$。

3）又令 $\alpha=a/2+\delta$，则 $\delta\in(0,1)$ 进一步可定出（具体计算从略）。当a、m同阶，$a=km$，k一定，$m\to+\infty$ 时，有结果 $\delta\to 2/\sqrt{4+k^2}$，特别地，$k=2$ 时，$\delta=\sqrt{2}/2$，$k=3/2$，$\delta\approx 0.8$。数字实验表明，即使m并不很大，δ仍是非常精密的。美中不足的是，此处未能界定δ的范围。

举例：1。 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{32n+\alpha_n}\right)}}$，$8+\dfrac{36}{8n+5}$

$< a_n < 8+\frac{36}{8n+2}$，于是 $S_{50}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{99}{100}$，

$0.07958923738685 < S_{50} < 0.07958923738694$

$\therefore S_{50}$ 的前十二位是 $0.079589237386\cdots$

2. 由 $\pi/16=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{10+\cfrac{9}{10+\gamma_5}}}$

$$\gamma_5=\sqrt{5^2+(5+\sqrt{2}/2)^2}-(5+\sqrt{2}/2)$$

$U_0=0\quad U_1=1\quad U_2=10\quad U_3=(10+\gamma_5)10+9$

$V_0=1\quad V_1=5\quad V_2=51\quad V_3=(10+\gamma_5)51+45$

$$U_3/V_3=0.196349547\cdots$$

$$\pi=3.141592766\cdots\cdots$$

（1）《蛙鸣》第46期。《$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ 的估值》

附注：这里补充证明(1)式收敛

显然。只须证 $\frac{1^2}{8n+2}+\frac{3^2}{8n+2}+\cdots+\frac{(2k-1)^2}{8n+2}+\cdots$ 收敛

$$此式=\frac{1}{8n+2}+\frac{1}{1^2/3^2(8n+2)}+\frac{5^2/3^2}{8n+2}+\frac{7^2}{8n+2}+\cdots$$

$$=\frac{1}{8n+2}+\frac{1}{\frac{1^2}{3^2}(8n+2)}+\frac{1}{\frac{3^2}{5^2}(8n+2)}+\frac{3^2\cdot 7^2}{5^2(8n+2)}+\cdots$$

$$=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_k}+\cdots$$

其中 $b_1=8n+2$，$b_2=\frac{1}{3^2}(8n+2)$，…，

$$b_k=\frac{(2k-3)^2(2k-7)^2(2k-11)^2\cdots}{(2k-1)^2(2k-5)^2(2k-9)^2\cdots}(8n+2)$$

欲使 $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_k}+\cdots$ $(b_k>0)$ 收敛只需 $\Sigma b_k\to+\infty$ (*)，$b_{2k+1}=\frac{3^2}{5^2}\frac{7^2}{9^2}\cdots\frac{(4k-1)^2}{(4k+1)^2}(8n+2)>$

$$\frac{3^2}{5^2}\frac{5\cdot7}{7\cdot9}\frac{9\cdot11}{11\cdot13}\cdots\frac{(4k-3)(4k-1)}{(4k-1)(4k+1)}=\frac{3^2}{5}\frac{8n+2}{4k+1}$$

∴ $\sum_k b_{2k+1}\to+\infty$ $(n\geq0)$，$\sum_k b_k\to+\infty$

∴ (1)收敛

（(*) 参看辛钦《连分数》）

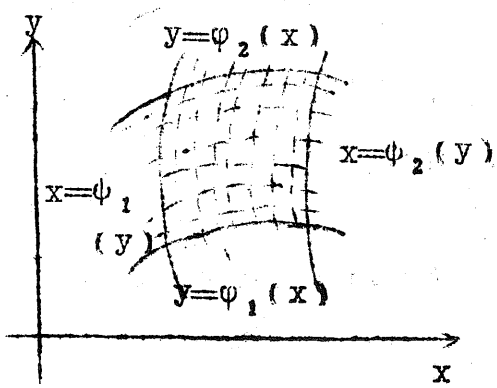
* * * * * *
* 蛙　　鸣 *
* 　　　　 *
* 第47期 *
* * * * * *

重积分的区域变换及其应用

891 冯 颖

计算二重积分 $\iint_\Omega f(x, y)\,dxdy$ 时，若 Ω 为矩形或曲边梯形区域，常常将其化为累次积分来解决；如果 Ω 比较复杂，则希望通过区域变换，使积分区域变得简单。本文给出了利用边界曲线的线性组合来简化区域的办法，对某一类区域具有普遍性，在计算积分的近似值方面有很重要的作用（利用计算机）。

如图，Ω 是由光滑边界曲线 $x=\psi_i(y)$，$y=\varphi_i(x)$，$i=1, 2$ 的区域。



作变换

$$\begin{cases} x=(1-u)\psi_1(y)+u\psi_2(y) & 0\leq u\leq 1 \\ \quad =\psi_u(y) & \\ y=(1-v)\varphi_1(x)+v\varphi_2(x) & 0\leq v\leq 1 \\ \quad =\varphi_v(x) & \end{cases} \tag{*}$$

该变换将 uv 平面上的单位正方形D映到 xy 平面上的区域 Ω，其几何意义是 Ω 是由两方关曲线：$x=\psi_u(y)$，$y=\varphi_v(x)$“编织”而成的。

命题：Ω如图所示，且变换能表示成 $x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$，并满足二重积分换元条件，则有

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{[0,1]^2} f[\varphi(u,v),\psi(u,v)] \left|\frac{cd}{1-ab}\right| dudv$$

其中：$a=(1-u)\psi_1'(y)+u\psi_2'(y)$

$b=(1-v)\varphi_1'(x)+v\varphi_2'(x)$

$c=\psi_2(y)-\psi_1(y)$

$d=\varphi_2(x)-\varphi_1(x)$

证明：（简证）利用二重积分换元公式，只须证 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{cd}{1-ab}\right|$，对变换式（＊）对u，v求偏导数，可得四个方程，由之可解得 $\frac{\partial x}{\partial u}$ $\frac{\partial y}{\partial u}$ $\frac{\partial x}{\partial v}$ $\frac{\partial y}{\partial v}$，经整理得 $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\frac{cd}{1-ab}\right|$

注意：$a=(1-u)\psi_1'[\psi(u,v)]+u\psi_2'[\psi(u,v)]$

$=a(u,v)$ 等等。

应用：

例1：Ω由 $y^2=px$，$y^2=qx$，$x^2=ay$，$x^2=by$ 围成，$0<a<b$，$0<p<q$，求 $\iint_{\Omega}dxdy$、$\iint_{D}xydxdy$

例2：Ω由 $2x-5y=0$，$5x-2y=0$，$x+y=14$ 围成，求：$\iint_{\Omega}dxdy$。

例3：Ω由直线 $x-4y=0$，$2x-y=0$，$4x+3y-7b=0$，$2x-3y+16=0$ 围成，求：$\iint_{\Omega}dxdy$。　　等等。

（解答是平凡的，略）

* * * * * *
蛙　鸣
第47期
* * * * * *

关于无理数小数部分一定理及应用

911　张　林

对∀实数a，记$[a]$为不超过它的最大整数，记$(a)=a-[a]$称为a的小数部分。

本文要证的是下面的命题。

定理：任一无理数的正整数倍之小数部分可以任意接近于给定的任意数的小数部分。

证明：α是无理数。

①$\forall\varepsilon>0$，$\exists m\in z$，$m\neq0$，使$(m\alpha)<\varepsilon$。这是因为：

取自然数$n\geq\frac{1}{\varepsilon}+1$，则$(\alpha)$，$(2\alpha)$，…$(n\alpha)$中，必有两个$(i\alpha)$、$(j\alpha)$（$i\neq j$）落在同一小区间$[\frac{i-1}{n-1},\frac{i}{n-1})$中（事实上，将$(\alpha)$，$(2\alpha)$，…$(n\alpha)$这几个数置于$n-1$个小区间$[\frac{i-1}{n-1},\frac{i}{n-1})$中，$i=1$，…，$n-1$，至少有一小区间中含有两个或两个以上$(i\alpha)$）。从而$0<(i\alpha)-(j\alpha)<\frac{1}{n-1}\leq\varepsilon$

即$[(i-j)]<\varepsilon$，取$m=i-j$即可。

②任取$0<A<1$，则对$\forall\varepsilon>0$，由①知

$$\exists m_\varepsilon\in z\quad(m_\varepsilon\alpha)<\min(\varepsilon,A)$$

又∵　$\exists k\in N$，使$k(m_\varepsilon\alpha)<A\leq(k+1)(m_\varepsilon\alpha)$

即 $0 < A - k(m_\varepsilon \alpha) \leqq (m_\varepsilon) < \varepsilon \cdots (1)$

而 $k(m_\varepsilon \alpha) < A < 1 \Rightarrow k(m_\varepsilon \alpha) = [k(m_\varepsilon \alpha)]$

$$= (km_\varepsilon \alpha)$$

∴ (1)式就是 $0 < A - (km_\varepsilon \alpha) < \varepsilon$

③在②中取 $A = 1$，则结论成为 $0 < 1 - (km_\varepsilon x) < \varepsilon$，即 $0 < (-km_\varepsilon x) < \varepsilon$。结合式子 $(m_\varepsilon x) < \varepsilon$，可知：$\exists m \in IN$，使 $(m\alpha) < \varepsilon$，即①的结论对正整数倍成立。从而，重复②的过程得定理对正整数倍成立。证毕。

下面举出一个应用，它实际上是证明此定理的最初目的。

《数学分析》1第二册153页题6：作一点集 $B \subset [0, 1]^2$，它与坐标轴的每一条平行线相交最多一个点，且 $B^- = [0, 1]^2$。

本题可通过无限部分正方形得出，这里用函数方法具体给出一个解析式。

解：对 $\forall$ 有理数 $\frac{p}{q} \in [0, 1]$（$p\ q \in z^+$ 且互素）

令 $f(\frac{p}{q}) = \sin(p + \frac{1}{q})$，再作点集 $O = \{(\frac{p}{q}, f(\frac{p}{q})) \mid \frac{p}{q} \in Q\}$

①显然 $\forall x = \frac{p}{q}$，有唯一的 $y = f(\frac{p}{q})$ 与之对应

又对 $\forall y = f(\frac{p}{q}) = \sin(p + \frac{1}{q})$，若有 $\frac{m}{n}$ 使 $\sin(m + \frac{1}{n}) = \sin(p + \frac{1}{q})$，则 $m + \frac{1}{n} = p + \frac{1}{q} + 2k\pi$ 或 $2k\pi + \pi - (p +$

$\frac{1}{q}$)（$k\in z^{+}$）。由此式及 $\pi\overline{\in}Q$，而 p、q、m、n $\in z$，不难得到 $m=p$，$n=q$。

②对 $\forall$ 点（x，y）$\in$（0，1）^{2}，作任意小的邻域 $I=[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \times [y-\varepsilon, y+\varepsilon] \in [0, 1]^2$，下面证 I 内必有 B 中的点，即证存在互质正整数 p、q 满足

$$\begin{cases} x-\varepsilon \leqq \dfrac{p}{q} \leqq \varepsilon + x \\ y-\varepsilon \leqq \sin\left(p+\dfrac{1}{q}\right) \leqq y+\varepsilon \end{cases} \qquad (2)$$

第二式的成立只须 $\arcsin(y-\varepsilon)+2k\pi \leqq p+\frac{1}{q} \leqq \arcsin(y+\varepsilon)+2k\pi$ (3)，对某组正整数 p、q、k 且（p，q）＝1成立即可。

另外由第一式得 $\dfrac{x-\varepsilon}{p} \leqq \dfrac{1}{q} \leqq \dfrac{x+\varepsilon}{p}$ (4)

可见 $\frac{1}{q}$ 随 p 的增大而减小。

由定理，对无理数 2π，$k\in N$，使 $(2k\pi)=[1-\arcsin(y-\varepsilon)]-\delta$（$\delta$ 是一小正数）$\Rightarrow$ $2k\pi=[2k\pi]+1-\arcsin(y-\varepsilon)]-\delta$ $\Rightarrow$ $\arcsin(y-\varepsilon)+2k\pi=[2k\pi]+1-[1-\arcsin(y-\varepsilon)]-\delta=p_0-\delta$。其中 $p_0=[2k\pi]+1-[1-\arcsin(y-\varepsilon)]\in N$

若以 $p=p_0$ 代入(4)式能求得某个与 p_0 互质的 q_0，则 $\because$ 随 $\delta\downarrow$，$k\uparrow$，$p_0\downarrow$，$\frac{1}{q_0}\uparrow$，而只须

$$\delta+\frac{1}{q_0}<\arcsin(y+\varepsilon)-\arcsin(y-\varepsilon)$$

就有(3)成立，从而不等式

$$\underbrace{\arcsin(y-\varepsilon)+2k\pi \quad p_0}_{\varepsilon} \qquad \underbrace{p_0+\frac{1}{q_0}}_{\frac{1}{q_0}} \qquad \arcsin(y+\varepsilon)+2k\pi$$

组(2)就有所需的解了。现在的问题是能否由(4)式取到与 p_0 互素的 q_0。

由(4)式，需要 $q\in\left(\frac{p}{x+\varepsilon},\frac{p}{x-\varepsilon}\right)$，为此，将自然数 p_0 作素分解为 $p_0=t_1^{r_1}t_2^{r_2}\cdots t_n^{r_n}$，注意到随 δ 的减小，p_0 是无限增大的，而 p_0 足够大时，总能使某个 $t_i^{r_i}$ 满足 $t_i^{r_i}\left(\frac{1}{x-\varepsilon}-\frac{1}{x+\varepsilon}\right)>3$，不妨设就是最后一项 $t_n^{v_n}$，记 $m=\frac{p_0}{t_n^{r_n}}$，则∵此时

$\left(\frac{t_n^{r_n}}{x+\varepsilon},\frac{t_n^{r_n}}{x-\varepsilon}\right)$ 内必有三个连续自然数 a，$a+1$，$a+2$，

∴ $q_1=ma+1$，$q_2=m(a+1)+1$ 皆 $\in\left(\frac{mt_n^{r_n}}{x+\varepsilon},\frac{mt_n^{r_n}}{x-\varepsilon}\right)=$

$\left(\frac{p_0}{x+\varepsilon},\frac{p_0}{x-\varepsilon}\right)$，且 $(q_1,m)=(q_2,m)=1$，而由 t_n 为素数及 $t_n \times m$ 又易得 $(q_1,t_n)=1$ 或 $(q_2,t_n)=1$，故 $(q_1,t_n^{r_n}m)=1$ 或 $(q_2,t_n^{r_n}m)=1$，即 q_1，q_2 与 p_0 互素。

至此证明了 I 内必有 B 中的点，从而 $B^-=[0,1]^2$，

∴ B 为所求点集。

由上面的证明可以看出：实际上，对周期函数 f 由 $B=\left\{\left(\frac{p}{q_1}\right)\right.$，

$f(\frac{p}{q})\}$ 定义的点集B当f的周期是无理数时是“稠密”的。有理时则不然。

最后，将文 命题稍作推广得到下面的判别法似的命题，虽然似乎一点也不实用：

b为无理数的充要条件是：b的正整数倍元小数部分全体所成集在〔0，1〕上稠密。

******
一题一议
******

******
蛙　　鸣
*　　　　*
第47期
******

短 文 二 则

901　王钧源

一、Gauss均值逆定理的加强

Gauss定理指出：区域Ω上的调和函数h，$\forall a\in\Omega$，$r>0$，当$D(a,r)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-a|<r\}\subseteq\Omega$时，有：

$$h(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(a+re^{i\theta})d\theta \qquad (1)$$

大多数函数论书上还证明了相应逆定理：h在Ω中连续，并且(1)对$\overline{D}(a,r)\subseteq\Omega$的任意a，r成立（或对$r_n(a)\to 0$成立），则h在$\Omega$中调和。

但对Dirichlet域，我们可以得到：

〔定理〕 设U是复平面$\mathbb{C}$中一个Dirichlet问题有解的有界开集，$\overline{U}$上连续实函数h，$\exists r=r(a)>0$，$\overline{D}(a,r)\subseteq\Omega$，(1)式成立，则h在$\Omega$中调和。

〔引理〕 U是复平面上有界开集，$f:\overline{U}\to R$连续且$\forall a\in U$，$\exists r=r(a)>0$，$\overline{D}(a,r)\subseteq\Omega$，有(1)成立，则：

$$\max f(\overline{U})=\max f(\partial U)$$

证：设$M=\max f(\overline{U})$，假设$f^{-1}(M)\cap\partial U=\varnothing$，则由$f^{-1}(M)$为闭集，$\exists a\in f^{-1}(M)\subset U$，$\rho(a,\partial U)$最小，但

$M=f(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+r(a)e^{i\theta})d\theta$，由M的最大性

有 $f(a+re^{i\theta})=M(\forall\theta\in[0,2\pi])$，$\therefore$ $A=\{z\in\mathbb{C}\mid |z-a|=r(a)\}$，$A\subseteq f^{-1}(M)$，且 $\exists b\in A$ $\rho(b,\partial U)<\rho(a,\partial U)$ 矛盾。

下面证明定理：

$\because$ U 上 Dirichlet 问题有解，$\exists\overline{U}$ 上连续函数 g 在 $\overline{U}$ 上调和且 ∂U 上与 h 一致，函数 $f_1=h-g$，$f_2=g-h$，都满足引理假设，且在 ∂U 上 $f_1=f_2=0$，由引理在 U 上有 $f_1\leq 0$，$f_2\leq 0$，$\therefore h\equiv g$

即 h 在 Ω 上调和。

二、Van Der Warrden 处处不可微函数

Van Der Warrden 函数：$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U_k(x)$

$(-\infty<x<+\infty)$，我们可进一步证明 f 的左、右导数都不存在。

假设 $\exists x\in R$，$f'_+(x)=L$ $\forall n\in N$，$S_n=$

$$S_n=\frac{[2\cdot 4^n x]+1}{2\cdot 4^n}\qquad t_n=\frac{[2\cdot 4^n x]+2}{2\cdot 4^n}$$

定义 a_n，b_n 为：

$$f(S_n)-f(x)=(L+a_n)(S_n-x)$$

$$f(t_n)-f(x)=(L+b_n)(t_n-x)$$

$$f(t_n)-f(S_n)=L(t_n-S_n)+b_n(t_n-x)-a_n(S_n-x)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4^{-n}L+b_n(t_n-x)-a_n(S_n-x)$$

$\because \quad 0 \leqq S_n - x < 2^{-1} \cdot 4^{-n} \qquad 0 \leqq t_n - x < 4^{-n}$

$\therefore \quad |2 \cdot 4^n [f(t_n) - f(S_n)] - L| < |b_n| + 2|a_n| \to 0$

另一方面，由〔1〕P·97完全类似可知：

$$4^n [f(t_n) - f(S_n)] = \sum_{k=0}^{n} (\pm 1)$$

与 $\lim\limits_{n \to \infty} 4^n [f(t_n) - f(S_n)] = \dfrac{1}{2}$ 矛盾

完全类似于以上方法不难证明，$\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_x(x) = f(x)$，其中

$b_k(x) = 2^{-k} U_0(2^{3k} x)$ 是一个连续函数，且处处有无穷大的左右导数。

〔参考文献〕

《数学分析》第三册，P95－P97，何 琛等编，高等教育出版社，1985年版。

******
一题一议
******

******
蛙　鸣
*　　*
第47期
******

任意小周期函数

901　王钧源

（Burstin定理）　Lebesgue可测函数 $f: R\to R$ 有任意小的周期，则 $f\equiv c$　a.e.

R.Cigndi和J.Hounie在〔1〕中给出其一个新证明和应用，下面给出该定理一个更简洁的证明。

引理：如果一个集D与任何区间I成立：

$$m(D\cap I)=\alpha m(I)\qquad(\alpha\text{为常数})$$

则：$m(D)=0$ 或 $m(D^c)=0$ 之一成立。

证：　设 $\alpha=m(D\cap[0,1])$ 任意 $\varepsilon>0$

存在开区间 O_n，$(D\cap[0,1])\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}O_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}m(O_n)<\alpha+\varepsilon$$

$\because\ m(O_n\cap D)=\alpha m(O_n)$　　于是

$$\alpha=m(D\cap[0,1])\leq\sum_{n=1}^{\infty}m(D\cap O_n)\leq\alpha\sum_{n=1}^{\infty}m(O_n)$$

$<\alpha^2+\alpha\varepsilon$　令 $\varepsilon\to0$　则

$\alpha\leq\alpha^2$　$\therefore$　$\alpha=0$ 或 1

$\alpha=0$ 则 $m(D)=0$，如 $\alpha=1$ 则 $m(D^c)=0$

下面开始证明定理：

任意$I=[a, b)$，$D=f^{-1}(I)$，先证D交任何区间的测度正比于区间长度。

设$\alpha=m(D\cap[0, 1])$，任意$\varepsilon>0$，取f的周期p使满足

$p<\varepsilon$且$\left|\frac{m}{n}-(b-a)\right|<\varepsilon$

其中$n=[\frac{1}{p}]$，$m=[(b-a)/p]$。

由于p是f的一个周期，D交任何长度为p的区间测度相同，这样，如$d=m(D\cap[0, p])$

则　$\alpha=m(D\cap[0, 1])=nd+\varepsilon$ 及 $m(D\cap[a, b])=md+\varepsilon_2$

ε_1，$\varepsilon_2<\varepsilon$　于是有：

$$|m(D\cap[a, b])-\alpha(b-a)|=|nd(\frac{m}{n})+\varepsilon_2-(nd+\varepsilon_1)(b-a)|$$

$$=|nd(\frac{m}{n}-(b-a))+\varepsilon_2-\varepsilon_1(b-a)|<\alpha\varepsilon+\varepsilon_2+\varepsilon_1(b-a)$$

因此　$m(D\cap[a, b])=\alpha(b-a)$

任意$n\in IN$，取k_n，$I_n=[\frac{k_n}{n}, \frac{k_n+1}{n})$使得

$f^{-1}(I_n)$测度不为0，由引理

$m(f^{-1}(I_n)^c)=0$　由于

$$m(f^{-1}((\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n)^c))=m(f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n^c))=m(\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(I_n)^c)=0$$

又由于$\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$里不可能多于一点q

因此　$m(f^{-1}(\{q\})^c)=0$ 即 $f(x)=q$　a.e.

〔参考文献〕

The American Mathematical Monthly 85(1978) P582-584

R. Cignoli and J. Hounie, Functions with arbitrarily small periods

* * * * * * *
* 人物与传记 *
* * * * * * *

* * * * * *
* 蛙　　鸣 *
*　　　　　*
* 第47期 *
* * * * * *

菲尔兹奖获得者

Vaughan Jones 访问记*

竹崎正道

由物理转向数学，转向算子环理论

竹崎（以下简称竹）　您是1972年大学毕业于Auckland大学的吧！新西兰什么时候学年结束？与北半球不同吧！

Vaughan Jones（以上简为VJ）　圣诞节结束。

竹　有没有象毕业论文之类的？

VJ　是的，1973年12月得硕士称号。然后于翌年6月去日内瓦大学。不过先得学习三个月的法语课程。

竹　准备在日内瓦学习什么呢？

VJ　，这是个很有意思的问题……。我选择日内瓦有好几个理由。一是因为Jauch在那儿。我在新西兰已读过他写的关于量子力学基础的书，非常引人入胜。他在日内瓦，而且瑞士政府还向新西兰学生提供奖学金。要想出国除此之外到那儿去都没有钱。另外一般都到英国、美国去，所以到与众不同的国家去我想是很有意思的。理由虽然不止一条，但不管怎么说，钱是主要的理由。

竹　那么您是到瑞士去学习物理的了，怎么改变专业了呢？

VJ　一是因为我到达二三周后Janch去世了。

竹　那，您不还在学习法语期间吗？

VJ　是的。心脏病发作。不过在他生前曾经见过一面，大约

30分钟左右。

竹 那您不是成了学问上的孤儿了。

VJ 哎。某种意义上是那样。暂时还继续学习物理。不过又是经济原因转到了数学。这就是数学系给我工作干。

我选取了Haefliger的De Rham上同调课程。我为他对数学的看法所吸引。因此就问他有没有工作。正好他需要该课程的助教(他要外出)。这样我就很快从他的学生变成了助教。

竹 这一助教的工作与美国的助教工作相比怎么样。完全不一样吗?

VJ 非常不同。首先助教任期五年，有长期保证。而且工作负担则轻得多。我在年轻时没有碰到这种好运。这次遇到了这么好的环境真是受惠不浅。

竹 在谈话往下进行之前。先想听听您是什么时候决心成为物理学家或数学家的呢?

VJ 基本上是事情发展的结果。不过年轻时起就一直对物理与数学有兴趣。

竹 从高中时候起吗?

VJ 不，从5岁时起。

竹 原来如此。Haefliger是否对您的思考态度影响最大呢?

VJ ，受Haefliger非常强的影响。不过大概受Alain Connes的影响最大。

竹 是与Connes见面后吗?

VJ 。下断言有些困难。不过我与Haefliger总能见面，而与Connes每年只一二次而已。

竹 就是说研究数学的态度受到Haefliger的影响?

V J　从扑拓学到von Neumann代数。

竹　Haefliger并不是您选择的领域的专家呀。

V J　嗯，的确如此。我与Connes见面是1976年的下半年。幸运的是，瑞士政府对助教出席学会提供费用。因此我去听了Alain Connes在斯特拉斯堡学会上的报告。

竹　他们每年二次在斯特拉斯堡召开数学物理的学会。

V J　对于我，那犹如极大的神灵启示。记得是两小时左右（AFD因子环的）分类的报告。然后说到了叶状结构……。谁都希望他继续讲，所以老是他在讲，我几乎连插话都不能。

竹　是否您从那以后决心成为von Nenmann代数的专家呢？

V J　那时我已经有了强烈的兴趣，以前我已经见过他的论文。在杂志上看到他关于内射型代数的论文时，简直大吃一惊。后来听了他的讲演，是这样！这才恍然大悟。

指标定理的想法与间隙的发现

竹　怎么提出有限群作用的分类问题的呢？我对您的那项工作印象极深。那是1978年吧。这么说来，开始是在1977年左右了。

V J　不，我与Connes见面是1976年秋，大约11月左右吧。当时我问他我可以到巴黎去吗。当然他慷慨允诺了。

那时考虑过好几个想做的工作，包括有限交换群在内。Connes看了这一清单，说了些“这很好，这不好，这是有趣的思想……”等意见。在他说好的部分加进了有限群的内容。由于当时他关于循环群的论文印刷耽误了，所以就将手稿给了我。我拿着回来了。我靠的仅此而已。

交换群的情形马上就完成了，即便如此，也不是从循环群到有限交换群作简单归纳就行的。而且非交换群的场合有实质性困难。无论从技术方面还是概念方面而言，都需要新的观点。对此Ocneanu也考虑了同样的问题。

竹　怎样到达指标的想法的呢？

VJ　指标？是呀，我拿到巴黎去的有一篇就是《Comptes Rendus》上发表的论文。内容已经忘了，但是是关于子因子环的共轭类的，是与Connes见面前的事。他不喜欢这篇，叫我不要发表，但幸好我已经发表了，指标的定义就是这里给出的。

竹　那是1976年吧。

VJ　是的，出版是1977年。关于指标我很迷茫，到底就这孤立一篇完了呢，还是继续再干呢？很长时间除整数以外的例子也作不出来。因此，就是做学位论文时，心底里还一直想着这个。发现指标间有间隙是1979年末或1980年初，同时发现了间隙的存在以及从4到无限大全部都存在。

竹　由此到完成论文又是两年，是吧！这两年间关于指标您是如何感觉的呢？我看不到任何进展……。可突然，您与解答一起又回来了。

VJ　我始终想着指标，同时与您的共同研究也在进展。而关于指标，鼓励我的是您。您比Connes有更深刻的洞察力。Connes不予重视。非常感谢您那时的鼓励。

竹　没有进展的时刻是非常艰难的时刻，真象在绝路上挣扎……。尽管那样，您还是不断地向自己发问。

VJ　很艰难。特别是个人也很困难的时候，连温带①也很困难，来往于东西部之间，同时，Hedrick副教授（他在UCLA的

职位，比普通副教授待遇更为优厚）等种种事情，我强烈感受到可能期待些什么。

竹　所以感到了压力吧！

VJ　是的。不过没有什么效果……（笑）。幸好有我们（关于自同构群的）共同研究，进展非常顺利。

竹　是呀，所以并非处在黑暗的洞窟之中呀。

VJ　是这样。您也是知道的了，1980年的早些时候，注意到指标的1与2之间有间隙。这由基本构成法马上可得，然后考虑尝试塔的第2、第3层②，为了表示对指标有进一步的限制，就要使用 $\{e_i\}$。

竹　Wenzl（他后来的学生）仅仅看 $\{e_i\}$ 而推进了讨论。但您是想要使用迹。

VJ　是迹，我看到了迹。关于自然投影，就是考虑作为上限、下限而得到的投影。至于它们所生成的代数则一点也没有考虑到。然后1981年晚些时候，突然看到了为什么会是这样的。也就是考虑 $\{e_i\}$ 的全部，考虑由 $\{e_2, e_3\}$ 生成的子因子环的方案，后来清楚地看到了事态，感到特别的兴奋。

我最下功夫的问题是当指标比4更大时，表示 $\{e_i\}$ 代数具有平凡的相对交换子代数——因为我相信是对的。最终追到了计算问题。但是在那个时刻，$\{4\cos^2(\pi/n)\}$ 的情况变得更有意思了。很幸运，Wassermann 的研究也认为类似的评价是必要的，请教了他所得到的结果，大有帮助。我也做了我自己的计算。但是这个工作的大部分并不是进行计算，而是归结为计算。就是作 $\{e_i\}$ 一代数的Bratteri图，进一步与迹的荷重相联系。

我是个非常幸运的人。我能够实际感受到我已经获得了将我整

个生涯作为数学家而生活的正当理由。我毫不犹豫已经是数学家了。

竹　听到您的结果时，我自己也特别高兴，因为关于您的计划我抱有的信心是正确的。因为不然的话，您就会陷入绝境而毁掉。从开始起我就确信这是困难而正确的课题，而并不知道有多大的困难。

VJ　哎，谁也不知道答案是什么样的，正如刚才所说，有意义的是您具有比Connes更为清晰而正确的直观。因为connes对此是否定而消极的。该结果出来后，他才变得非常热情。

竹　因为他的热情完全体现在他认可了某种依据的瞬间，他马上发现了大路就在那儿，他就是小路也马上变成高速道路，羊肠小道也变成笔直的高速道路……

高速道路的出现　Jones多项式的发现

VJ　我指出与辫子群的关系想是1983年，虽说1982年就已考虑了，可还要教书，所以无法集中。可是，1983年夏天我们得到休假去了墨西哥。在墨西哥期间发现了作为辫子群的像可得出有限单群。它给了我坚强的信心，就在这时，决定了与von Neumann代数的研究诀别。

从那以后对于von Neumann代数就没有得到特别的结果。不过，指导Wenzl，还经常与Wassermann在一起，但……。我自己引人注目的工作并不是对于von Neumann代数做的，而且还发现了元素个数为155520的漂亮的群，但……

竹　哎，记得给我们讲过这个大数。

VJ　我无法相信有限群的发现，因此就向大家说了。深刻考虑辫子群则是在以后。最后与Birman（研究辫子理论的领袖之一，

在ICM（国际数学家大会）上介绍Jones获菲尔兹奖的业绩的人）会面讲述了。大约是5月左右，她给我讲了很多很多，现在已成了历史性的讨论。不过她抱否定态度。

竹　当时嘛！

VJ　不，她不相信我得到的表示有意义。由于我特别兴奋，因此有些失望了。稍微降降温。就这样一周左右拼命反复思考，简直不顾一切了。

竹　我接到您的电话想是1984年的6月……告诉我发现辫子的不变量与Jones多项式。

VJ　确切的应是5月。

竹　是吗。

VJ　因此我决定尝试的远不是野心勃勃的。在那以前使用附带迹的行列式，想了解与Alexander多项式的关系。由于迹特别复杂，有荷重以及许多别的。

但是我注意到事情变得太难了，比原先要来得复杂。这就试图取得组合处的一个迹。结果就完成了。接着为了确认我的想法是正确的，仅仅只是做很多计算。心情万分激动。

不过，在多项式的工作大约两周以前，D·Evans就向我指出，这与Baxter书中的potts model有关系。这应是1984年的4月或5月。

竹　与Jones多项式的发现完全是同一时期呀……。这1984年到1985年的一年（这一年Berkeley研究所有以算子代数为专门课题的计划）对您可有特别意义了？

VJ　嗯。首先是搬了家。搬家对我代价很高，错过了若干结果。如果能够工作，2变量多项式（HOMFLY 多项式）以及其他种

种。也许我能够得到。总之。搬家在数学上代价很高。

竹　您是这样认为的了。

ＶＪ　感到很着急。就是那样的。因为突然如您所说的出现了高速道路。当取出这些结果汇总的时刻。正好在那最要紧处。到了捆绑起来的程度。

竹　您必须横跨辽阔的美国大陆吧！

指标理论发现之后。是所有一切都爆发完了。还是开始爆发……。其中又是怎样来维持您自己的正确方向的呢？在这种爆发中如果不充分把握住自己。往往还可能失掉了自我。

ＶＪ　横跨那么大的美国。加上温蒂怀孕并生下伊恩（长子）。焦虑万分。另外在１９８４到１９８５一年间困难的是我突然变得有名了。要习惯这种事是需要时间的。谁都想知道我的结果。这使我无法平静。

竹　Ocneanu看来似乎是紧追您后呢！

ＶＪ　是啊。许多人都如此。然而我自己也作出了好的工作。最好的工作大概是逆转的结果。就是说我发现了Jones多项式。而他们发现了HOMFLY多项式。而一般人认为他们的工作更重要。我的多项式的确要被忘掉了。但我相信我的多项式是最重要的。所以并不怎么担心。

其最初的证据是关于这种逆转的结果。就是我的多项式并不怎么依赖于某一方向。对此我利用图形等等也得到了极其明快的证明。这也确认了只要知道得更多些。就能得到进一步的结果。这是依赖于组结理论的人无法想象的结果。是只看到事情本身而否定与其他事物联系的人发现不了的结果。这样我更应强调与统计力学的关系。

数学与数学物理学的接近

竹　现在稍微变换角度，您发现了数学与数学物理学的新关联。这对于数学家始终是个梦。不知物理学家是怎么想的呢……。最近的这种倾向，特别是这次会议您是怎么认为的？

V J　哎，我心情很激动。大致上这次会议上许多讲演表明与数学物理学有关系。我也知道其他许多数学家稍稍有些失望。但是参予这一领域的任何人都明白，数学物理学是数学的巨大领域，涉及数学与物理学的许多分支。所有一切成为一个伟大的领域。

例如关于辫子理论与统计力学之间关系的问题完全没有回答。谁也不知道究竟还有没有更深刻的东西存在，是否单单是偶然的事情呢。正如刚才所说的，这件事情强烈启示了深刻的联系。从可解模型取出辫子理论，进而考虑其极限，忘掉最初的模型所具有的许多东西。可以想到，同样的情况也出现在既取连续极限，又取标度极限的时候。

关于这会得出些什么，感觉到是否有什么关键存在。也就是辫子理论必须理解为什么可以观察连续极限，或者果真是那样的吗。

竹　连想都想不到的联系发现了，同时人们极力称赞并强调这深刻的联系，我对此有一点疑问。以您的情况为例考虑，作出那种发现的人，直到作出该发现为止，并不知道深刻的联系，对一件事与其他事有什么联系如堕五里雾中。也不知道其间有没有厚壁，当在该壁开孔、爆破，在那儿看到开放的世界时，连本人都大吃一惊，这就是现实。

也许这多少太具讽刺意味了，说是与研究数学及物理学有联系，空喊架桥，实际连开洞都不干，这是危险的。

V J　这是很重要之点。新的巨大领域的存在并不意味着最好

去忘记真正训练有素的领域。我认为，重要的是表示有各种各样的观点，因而大家都能分别作出贡献。

例如今天Feijgin的报告，他的观点极其明确，依据Lie代数上同调去理解所有一切。我的观点与Wassermann一样，是要通过von Neumann代数去加深理解。还有一个是拓扑学。这许多观点每个都是正确的。哪一个都是与整体形象接近的正确方法。每一个领域研究过来的人，不是要去通晓所有其他领域，而是首先应该尝试从他自己的观点出发去加以理解。那样才能使每个人对整体的理解作出贡献。这些人不应该突然喋喋不休……

竹　完全如此，那些人的叫喊声是最高的。

VJ　是的。我也见过有种论文，真应该觉得可耻。曾经作过优秀工作的数学家，突然会开始写这个……

竹　下面这个问题我自己虽然回答不了，但读者很有兴趣询问：对下一世纪的数学您是怎么看的？

现在先进的生活，没有Gauss，Maxwell，Newton就不能想象，您不这样认为吗？您不认为今天的数学就是那样影响到下一世纪甚至更以后的时代吗？

VJ　是的，的确我都敢打赌，尽管领取这个奖金时已没有了我……，我认为本世纪的数学真正是爆发性的。不过一直是这样的。那种事情是无法预料的。从von Neumann代数到分子生物学的“奇妙旅行”就完全不可能预见。这种不能预见的步子总是不断积累而前进的，所以简直无法想象一百年后成什么样子。

南与北、西与东的数学国情

——Berkeley、日内瓦、新西兰、日本——

竹　稍微换换话题，请谈谈Berkeley的加利福尼亚大学。包括气氛呀，数学与物理学的关系呀，还有学生与教员之间等等。

VJ　Berkeley的情况呀，嗯，很微妙，还纠缠着政治。我认为Berkeley的问题是太大了一些。研究生很多，大概三百名研究生。环境并不怎么平静。教员拥有太多的学生，因此很难有时间与一个学生一起思考，或者自己去思考。另一方面，因为学生很多，其中也有特别优秀的人材，那是非常好的。

竹　在西海岸，Berkeley把最优秀的学生集中在研究生院，但与入学学生的优秀程度相比较，出来的学生的优秀程度又如何呢?

VJ　关于研究生吗?

竹　确实也有超优秀的毕业生，象丘（成桐）和Thurston都是有名的。但是最优秀的学生全部集中起来也还有危险的一面。就是说超优秀的成功者与剩下的还没到那个程度的人们……。假如他或她到别的大学，也……许更加成功了。这一点您是怎么认为的。

VJ　是的。我自己如果到美国的研究生院恐怕就埋没了。所以日内瓦成了难以想象的好地方。我在那儿过的5年间，经济上没有问题，教研室很小，竞争那类事情也没有。我如果在Berkeley放到三百名研究生中，恐怕就消失了。也许当个木匠无声无息了。当然有些人是有始有终学完的。不过我很喜欢Berkeley，是居住的好地方。系里拥有很多东西。不论什么样的论题都有专家。

竹　在转入最后的话题前，您一定很清楚新西兰与美国的情况。法国、德国的情况也有相当的了解。但对日本也许了解得不深……关于数学的国情是怎样感觉的，请您谈谈印象。有什么特别的国家

数学等。

VJ　好象感到有些什么。但归根结底并不怎么重要。对法国印象深刻的是数学如何的受重视。并且把大量的资金投到数学中。我感到日本也有类似的印象。的确受到很大的尊敬。新西兰很遗憾。要想支持纯数学的正宗研究还嫌国家太小。对新西兰，重要的是把人员不断送到国外。乐观些说，其中有些人回来，构筑起什么来。

竹　还请谈谈美国。

VJ　美国吗？至今美国社会还根本无视菲尔兹奖。到这一届为止，纽约时报还没有登载过。诺贝尔奖到有很大的轰动……

竹　现在美国许多数学系开始谈论说数学家的生活并不怎么坏呀！这是不对的。因为有了好生活，就不是去选择数学，重要的是有意义的挑战！是吗？

VJ　完全如此。美国数学有许多深刻的问题。对于我，最大的问题不只是数学，还在予美国教育的整体水平下降了。由于水平下降，挑战这笔帐也就勾销了。什么事都是容易为好，学生感到困难，为什么就是老师的错误呢。

竹　完全是。我发现这一点时真是一个打击。这样伟大的国家仍然还进到了那个方向……

VJ　真正深刻的事态。对好学生挑战是必要的。他们连做梦也不应该去想这是很容易的事等等。他们应该懂得，只有花了力气的工作才能有所收获。

竹　对日本数学家有什么要说的吗？

VJ　是呀。我认为日本是在数学的最前沿的。对此没有怀疑的余地。大会在这里召开就是最好的证据。反映了世界对这一点的承认。而且连这次在内已经有3位得菲尔兹奖了。还有这次会议上

的许多特邀讲演者。

竹　的确。也还由于是主办国。不过与1974年温哥华大会相比算复甦了。令人高兴。那个会对日本是毁灭性的。

VJ　是日本吗？特邀报告的人数很少吗？

竹　一个人。45分钟的特邀报告一个人。那是因为在那以前闹了学潮……

VJ　啊。从1968年到1972年的……

竹　对。所以大学里一事无成。竭尽全力只求得生存，实际上我们这一代人都作了些牺牲。我是能够从学潮中逃出来的少数幸运者之一，就是说我没有回国。不过现在已经克服了困难。

VJ　但是，我希望您现在不要回去。

竹　谢谢。

（1990年8月27日）

结　束　采　访

由于本刊编辑部的强烈要求，在国际数学家会议期间（27日（星期一）的午休）在会场一角对Vaughan Jones进行了一小时多的采访。听听录音带，难道这是在国外生活22年的我所说的英语吗，自己都不好意思难以为情了。以后得用点心，再不上心，学生都会觉得可怜了。

Vaughan Jones与我10年来亲密交往。这次采访难免有些不好意思。只能赶鸭子上架，硬着头皮干。因为长期交往，谈话中间有些地方只有我们两个才懂。还有些地方不明白背景便难于理解。简单加以说明之。

他与我的交往追溯到1979年。我应美国数学会刊物的约请

审查他的学位论文“有限群对Ⅱ$_1$型AFD因子代数的作用”。从那时开始的（1977年马塞的学术会上接受过提问，问题的内容还清楚记得，但对他本人则没有留下印象）。看其论文，直感到出了一位很厉害的新手。因此我把由我审稿，以及我认为最好修改的地方都直接告诉了他本人。他也很快回信，于是开始了信件的来往。我欣赏他的伟才，劝他应聘UCLA（加州大学洛杉矶分校）的Hedrick副教授。他也高兴应聘。我强调他的才华，总算成功地向他提供了Hedrick副教授的位子。他后来告诉我，普林斯顿高等研究所也来了邀请，但他拒绝了那边而选择了UCLA。显然我的内心特别高兴。

与他的通信往来直到1980年秋等待就任Hedrick副教授为止，一直没有间断。4月一个月，邀请他来访UCLA，他很高兴来了。他从欧洲直飞洛杉矶，我去机场迎接时，在车中我知道了指标概念的说明，以及存在着值为离散的领域。那时的冲击至今还记忆犹新。

他在UCLA与正好在那里逗留的Bratteri见面。他以Bratteri图而出名。Jones是个大汉，Bratteri毫不逊色也是位大汉。两人并列蔚为壮观。这时，现在在九州大学教养部的③寺崎秀树君刚刚递上学位论文，年轻同事得以交往。在逗留期间反复讨论了他的有限群作用的分类与指标。这次访问UCLA以后，6月他出席罗马尼亚的学会，与新秀Oeneanu会面。令人吃惊的是Oeneanu正在做着柔顺群对AFD Ⅱ$_1$型因子环的作用的分类。我可以想象这对他不能不是一个打击……。他却无忧无虑回到了美国，说在罗马尼亚有位优秀的家伙。是年夏天，在Kingston，由Kadison组织举办了算子代数的夏季学习班。我有机会就他的工

作作了介绍。.但他在那里却不是讲自己的工作。而是全部介绍Ocneanu的工作。我钦佩他的胆识与度量。越发对他好感。

秋天到UCLA赴任。他的夫人温蒂稍有损失。她在普林斯顿大学学习国际金融的硕士课程。他一人生活很不适应。靠新西兰来的朋友的帮助住到了卡尔坦克附近的帕沙迪纳。他横穿街道骑摩托车上班。我真有些担心。不管怎样每天单程就30公里。在世界上交通最拥挤的高速公路上骑摩托车。令人焦虑不安。翌年。为与她一起生活转到了以算子代数闻名的宾夕法尼亚大学。这是1981年的事。那时他断然骑摩托车从西到东横跨大陆。

说起1981年。夏天在瓦立克（英国）实行算子代数的特别计划。由Evans与Schmidt为组织者。他与我都参加了。两个人的合作在这里有了眉目。其后半。英国数学会主办的算子代数学术会议在丢拉姆召开。但初出茅庐的他由于申请太迟而被拒绝参加。我想他内心是不愉快的。他就此留在瓦立克。在那儿却发生了一件大事。由于签证关系而姗姗来迟的Ocneanu说不回罗马尼亚了。Jones马上给我打电话。这是一件大事。我与Effros。Rieffel。Herman。Ringrose各位商量。决定把他带到伦敦的美国大使馆。但因为罗马尼亚与美国有最惠国待遇。如果把Ocneanu引渡到罗马尼亚可就不得了了。所以还决定与某个美国公民即Herman同行。这就是后来Ocneanu移居宾夕法尼亚州立大学的原因。也许可以说Jones与Ocneanu的友谊是这时候确立的。

这样1981年夏天也就结束了。深秋时刻在宾夕法尼亚大学他发他发现了子因子环的指标可能取的值只限于非连续的

$$\{4\cos^2(\frac{\pi}{n}), n\geqq 3\} \cup \{4, \infty\}$$

的离散部分与连续部分的值。

1982年夏天Jones是在欧洲渡过的。我也在马赛与奥地利的Tirol与Kastler一起渡过的。他来到马赛享受地中海沿岸夏天的乐趣。Wassermann也来了。我们原准备由此去参加预定的华沙会议。波兰的戒严令打碎了大家的梦。

那年秋Jones回到了UCLA。他在学术会上报告时写了辫子群的关系式。$\{e_i\}$一关系式。同事Steinberg指出那是Hecke代数的关系式。这样指标理论就扩张到辫子理论。Hecke代数及其周围领域。1983年正月，他带着新打开的世界回到了东部。

1983年日本的算子代数迎来了繁忙的夏天。日美学术会加上Connes来日。Jones也作为美国代表之一来了日本。这时Hecke代数、辫子群、统计力学的Potts model等巨大装置他已经处理得井井有条。日本专家也大受感动。Connes旋风与Jones台风令感兴趣的人们头晕目眩。这次访问日本后，Jones与家属到墨西哥去“休假”。这次他访日的旅费不是由宾夕法尼亚大学，而是由UCLA负担的。显然在其背后可见我们UCLA的同事们对他的期待之大，有着更深的考虑也是自然的。这件事也许对他成了压力……。

以后也还有很多可回忆的。采访也有重复。以上大致可作为采访的背景去理解。下面谈谈我的感想。

我惊叹他丰富的才华，同时还惊叹他的幸运。读者诸位也会有同感。21岁的年轻人怀抱雄心壮志远离故乡，到瑞士留学，遇到的是自己期望的导师之死。在束手无策的时刻，邂逅了足以为师的先生并伸出援助之手。就象上帝授予他开创命运新纪元的钥匙。他作为学生能够出席国外的学会。与Connes在斯特拉斯堡会面也是

幸运的。总之，新西兰把他培养成人，瑞士又援助他发挥才能。温文尔雅的他不喜欢生硬、细致和争夺优先权的数学，体质也不适合。Ocneanu满足于群作用的分类（他是稍无常性喜怒无常的人）。在探索下一课题时（1984年夏）邀请他加入从指标理论到辫子理论的也是Jones。Ocneanu不是一般人物，请进来一个月后就发现了例外的二变量辫子不变量多项式。这是Jones博大胸怀的证明。

Jones在1981年在英国的学会上被排斥在外，而1989年5月到6月则作为英国纪念Hardy的演讲者受到隆重的接待，且在今年（指1990年）4月被选为英国学士院会员。

（陈治中译　胡作玄校）

* * * * * *
* 蛙　　鸣 *
*　　　　 *
* 第47期 *
* * * * * *

数学建模及其数学的期刊及国际会议简介*

叶其孝

（北京理工大学）

由于科学技术特别是计算机的迅速发展，数学和计算机建模（有时简单地称为数学建模）在某种意义上正迅速发展成为一个独立的数学分支，越来越多的数学工作者、科学家、技术工作者直接或间接地从事数学建模的研究及数学，同时互相交流的要求愈来愈高，因而从七十年代开始逐渐出版了一些国际性的数学期刊、举办了一些国际会议。本文将根据笔者个人了解的情况作一初步的介绍，以供读者参考。

1、"数学和计算机建模一国际性期刊"（Mathematical and Computer Modelling—An Internation Journal 缩写为Mathl Comput·Modelling，该刊于1988年以前的刊名为"数学建模一国际性期刊"Mathematicnl Modelling—An International Journal）。1980年创刊，开始是季刊，很快改为月刊，每隔一年出一次国际数学建模会议的会议录（近1000页）作为增刊，因而这一年就出13期。1990年以前的主编为美国Washington大学（St·Louis）系统科学和数学系的Ervin Y·Rodin以及美国Missouri—Rolla大学工程力学系的Xavier J·R·Avula，1991年起X·J·R·Avula担任期刊"建模及科学计算"（Modelling and Scie—

ntific Computing)的唯一主编，从而不再任本刊的主编。

除了刊登涉及各领域的研究性学术论文外，本刊以下几方面内容是值得介绍的。

一、经常出一些专刊涉及某方面的专题研讨会的会议录，或由有关专家写的论文集等。例如v·9(1987)，no·3－5合订本是关于层次分析法的(The Analytical Hierarchy Process—Theoretical developments and some applications)；v·12(1989)，no·10－11合订本是专论多重判据决策中的模型和方法的(Models and Methods in Multiple Criteria Decision Making)；v·13(1990)，no·12是丛林失火：气象与动力学研讨会的会议录(Proceedings of the Workshop on Bushfires: Meterorology and Dynamics)；v·13(1990)，no·6是群体动力学国际研讨会的会议录(Proceedings of the International Workshop on the Population Dynamics)；v·13(1990)，no·3是专论调度研究的数学问题的(Mathematical Aspects of Scheduling Research)；等等。

二、出版两年召开一次的数学和计算机建模国际会议论文集(会议录)，这将在下一节中介绍。

三、"数学和计算机建模汇报"栏目(Mathematical and Computer Modelling Reports)，旨在向读者提供由该刊编辑部精心挑选的其它杂志上发表的数学模型的题目、摘要、重要的数据资料等信息。例如，v·15(1991)，no·1，91－100，就提供了29个模型。

四、从1988年起由主编E·Y·Rodin亲自负责开设了"供

教育用的数学建模课件”栏目（Educational Mathematical Modelling Modules），目的是提供在课堂上可用的数学建模的课件，由于数学建模涉及几乎一切领域，从艺术到动物学；数学上可以是初等的数学也可以是很深的现代数学。编辑部认为数学上虽简单但包含重要的建模思想的课件应刊登，而数学上虽高深但无真正应用的课件将不予刊登。同时，该栏目的设立也是为了鼓励教师和他们的学生们开发建立好的数学模型，它们虽不能作为研究论文发表，但可在本教育栏目中发表。从1988年以来已经发表了如下的教育课件。（绝大多数课件是由E·Y·Rodin在其它人的帮助下完成的，因而只写出课件名称、卷、期与页码）：

A monopoly trade index（“垄断”游戏的交易指标），v·10（1988），no·3，219－227；A species inter-action model（种群相互作用的模型），v·10（1988），no·3，229－234；A matrix model of popalation growth（群体增长的矩阵模型），v·10（1988），no·4，299－306；Matrix methods of approximating clas-sical predator-prey prolems（近似经典的捕食问题的矩阵方法），v·10（1988）no·9，no·4，307－313；Disc-rete model of an epidemic（流行病的离散模型），v·12（1989），no·1，121－128；Continuous model of an epidemic（流行病的连续模型），v·12（1989），no·2，247－252；Assessment of the quantal hypoth-esis of synaptic physiology（突触生理学的量子束假设的评估），v·12（1989），no·6，755－759；Yeast gro-wth modelling in a laboratory（实验室中酵母增长

建模)，v·10(1988)，no·1，67－73；A mathematical model of baseball applicable to managerial decisions(可用于管理决策的棒球运动的数学模型)，v·10 (1988)，no·1，139－144；Developing a strategy for “battleship”(“战列舰”游戏的战略研究)，v·10 (1988)，no·2，145－153；Optimal fishery manangemant(最优渔业管理)，v·12(1989)，no·3，383－388；Countercurrent oxygen exchange in the swim bladders of deep－sea fish：A mathematical model(深海鱼的鳔的反向氧气交换：一个数学模型)，v·12 (1989)，no·3，389－393；A tabular simplex－type algorithm as a teaching aid for general LP models(作为一种教学辅助的一般线性规划模型的表格式单纯形算法)，v·12(1989)，no·8，1051－1056；Molecular movement through a membrane(通过膜的分子运动)，v·12(1989)，no·9，1191－1199；Ca^{2+} diffusion in a nerve terminal(神经末端钙离子Ca^{2+}的扩散)，v·12(1989)，no·12，1689－1700；A study of pollution in Lake Pristine(pristine湖的污染研究)，v·12(1989)，no·12，1701－1706；Mathematical modelling of the rate of chemical reactions (化学反应率的数学建模)，v·12(1989)，no·12，1707－1713；Optimal nutrition through linear programming(经由线性规划确定的最佳营养)，v·13(1990)，no·2，93－103；Modelling depletion of nonrene－

wable resources（不能再次使用的资源的耗尽的数学建模）。v·15(1991)，no·6，91－95；Muscle fatigue（肌肉的疲劳）。v·12(1989)，no·7，913－918。

每个课件大致包括引言（问题的提出）、建模的假设、模型的建立与求解、模型优化、缺点及局限性讨论、参考文献、练习、练习的参考答案等。每个课件都可以作为某种意义下的小课题给学生使用。

五、Books received栏目列出编辑部收到的与数学建模有关的图书的简单信息。偶尔会有某个专题的文献或应邀写的书评。例如C·W·Hall，Bibliography of mathematicals models for drying（关于干旱的数学模型的文献）。v·9(1987)，no·9，713－720；R·M·Phatarfod，Riverflow and reservoir storage models（河流量与水库库存的模型）。v·12(1989)，no·9，1057－1078。

六、提供各种与数学和计算机建模有关的学术活动的信息。

2、数学与计算机建模国际会议（International Conference on Mathematical and Computer Modelling 缩写为ICMM）。由于数学建模的日益发展，国际性的交流已成必要，于是于1977年在美国密苏里州的圣路易斯召开了第一次数学与计算机建模国际会议。这是一类涉及主题十分广泛的大型会议，每隔两年召开。这里仅以1989年8月2日到5日在美国芝加哥召开的第七届ICMM为例作一介绍。由X·J·R·Avula主编的会议录已发表在Mathematical and Computer Modelling，v·14(1990)。现仅就会议分组主题及报告的论文篇数列出如下：大会报告，6；方法论，23；信息系统，12；最优化，9；神经

网络，12；电路、网络和电力系统，11；动力系统和控制，8；人工智能和机器人，15；生物医学系统和生物科学，37；流体力学，16；传热，11；结构和材料，18；结构动力学，10；工业问题，23；国防问题中的建模，5；经济、交通、资源，7；作者索引；共1191页，这恐怕是最重要的国际性数学建模会议之一了。

3、应用数学建模（Applied Mathematical Modelling缩写为Appl·Math·Modelling或AMMODL），也是一种国际性的数学建模杂志。1989年前为双月刊，1989年（第13卷）起改为月刊。1984年4月起由英国泰晤士理工学院数学统计和计算系的系主任Mark Cross任主编。该刊不仅强调数学建模，也强调用诸如边界有限元方法等有效算法来求解有关模型，也有书评、会议信息等栏目。

4、苏联数值分析与数学建模杂志（Soviet Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling）。主编为苏联科学院院长G·I·Marchuk，1986年创刊，为季刊。该刊为用俄文发表的模拟和建模的数学方法的应用和数值分析论文的英译本。数学建模方面的内容主要包括：地球物理流体动力学；免疫学与医学；电磁场；量子力学；弹性与塑料。

5、数学建模和应用的数学国际会议（International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications缩写为ICTMA）。正是由于人才培养的需要，数学建模的教学问题逐渐成为中学、大学以至研究生培养中的重要问题，也日益需要国际性的交流，于是于1983年在英国Exeter召开了第一次国际会议；1985年仍在英国

Exeter召开了ICTMA—2；1987年在西德Kassel召开了ICTMA—3；1989年在丹麦的Roskilde召开了ICTMA—4；1991年在荷兰的Noordwijkerhout召开ICTMA—5。会议的副题是“通过应用来教数学”，约有200人与会。ICTMA—6将于1993年8月于美国的Delaware大学举行。值得指出的一点是第一次会议的组织者曾担心是否会有很多非英国国家的代表与会，结果有来自许多国家的124位代表与会，38位代表作了讲演，使会议组织者相当高兴。对比一下第一次和第四次的ICTMA，可看出近十年来的一些重大变化。在ICTMA—1相当一部分报告还在论证要不要开设数学建模课，到了ICTMA—4的会议录的序言中说过“过去几十年在各教育层次上的数学教学的理论和实践中，数学应用、模型和建模日益引人注意。无论从教育、科学、社会、文化的观点来看，这些方面都已被广泛地认为是决定性地重要的。”会议录还指出应用、模型、建模和求解应用问题已成为近四届国际数学教育会议（ICME）的中心主题就是证据之一。会议录还指出这次会议录很少收入不符合当前实际的论文。ICTMA—4的会议录包括：大会报告（综述性的报告）4篇；一般性和理论性的论文8篇；在初中教授数学建模和应用4篇；在高中教授数学建模和应用13篇；中学后数学建模和应用的教学8篇；中学后水平的建模案例7篇。现把四次会议会议录的编者及书名等列出如下：

J.S.Berry et al eds., Teaching and applying mathematical modelling, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1984.

J.S.Berry et al eds., Mathematical modelling methodology, models and micros, Ellis Hor—

wood Limited, Chichester, 1986。

J·S·Belly et al eds., Mathematical modelling courses, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1987。

W·Blum et al eds., Applications and modelling in learning and teaching mathematics, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1989。

M·Niss et al eds., Teaching of mathematical modelling and applications, Ellis Horwood Limited, Chichester, 1991。

6、为大学应用数学和数学建模教学提供课件及丰富材料的还有两种数学杂志值得一提。一种是SIAM Review，每一期上都有Classroom Notes in Applied Mathematics包含了很好的材料。1975－1985的材料已经汇编成书正式出版了。即Murray S·Klamkin ed., Mathematical modelling: Classroom notes in applied mathematics, SIAM, 1987。另一种是The Journal of Undergraduate Mathematics and its Applications（缩写为UMAP）的UMAP Modules: Tools for Teaching。都是很好的教学课件。

当然，在International Journal of Mathematical Education in Science and Technology及其他一些杂志上也有不少好的数学建模教学材料。

文献〔1〕第18章（315－327）及〔2〕中还有1985年以前出版的数学建模及其数学有关的60多本图书的比较评估，

也是值得参考的。

（本文作者通讯地址：北京理工大学数学系　邮编100081）

参 考 文 献

〔1〕D·N·P·Murthy, N·W·Page & E·Y·Rodin, Mathematical Modeling —— A Tool for Problem Solving in Engineering, Physical, Biological, and Social Sciences, Ch·18, pp·315—327, Pergamon, 1990.

〔2〕D·N·P·Murthy and E·Y·Rodin, A Comparative Evaluation of Books on Mathematical Modelling, Mathl. Modeling, 9：1（1987），17—28.

〔3〕Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction, no.31, 1991.

*本文摘自《高校应用数学学报》Vol·7, No.2, Jun·1992

编　后　记

《蛙鸣》47期出刊了。作为编者，心情是很激动的。昔日，一群矢志攻读的学子为加强相互交流，增加学术气氛而创建了这份刊物。经过一届届同学的努力，《蛙鸣》已经出了47期。无论怎么说，《蛙鸣》都是一系同学的骄傲。《蛙鸣》是大家的，它需要更多热心的读者和作者的关心和支持！

或许很多同学初次写稿时都有一种茫然的感觉——不知该写什么才好。有鉴于此，经本期执行编委讨论，在保持原有专栏不变的情况下，决定从本期起开辟“习题妙解”一栏，发表对课本或参考书上难题作出的精妙解法，给更多的同学提供一个锻炼的机会和进步的台阶。欢迎同学们都进局笔谈！并希望大家能提出改进《蛙鸣》的好建议。

《蛙鸣》编委会