蛙 鸣

第46期

中国科学技术大学数学系
《蛙鸣》编委会学生会学习部合办
一九九二年六月

目　　录

* * * * * * *
研究与讨论
* * * * * * *

赋范线性空间上的代数算子

891　沈建红

设X是一个复线性空间，A：X→X是一个线性算子，如果∃$p(z)\in\mathbb{C}[z]$，$p(z)\neq 0$，使$p(A)=0$，则称A是一个代数算子。本文讨论代数算子的一些性质。

由Cayley定理，$\dim X<\infty$时，任一线性算子是代数算子。而任意空间，零算子和纯量算子（αI：$\alpha\neq 0$）总是代数算子。因此可以认为代数算子是有限维线性空间上线性算子的一种近亲推广。

定理1：设X是复线性空间，A是代数算子，则$A[z]=\{p(z)\in\mathbb{C}[z]: p(A)=0\}$是$\mathbb{C}[z]$的一个理想。

证明：略。

由于$\mathbb{C}[z]$是PID，故可设$A[z]=(p_A(z))$，$p_A(z)$首1，则$p_A(z)$由A唯一确定，称为A的极小多项式。则$\deg p_A(z)\geq 1$，对$p_A(z)$我们有：

定理2：$\mathrm{Root}\,p_A(z)\subset\sigma_p(A)$

证明：$\forall z_0\in\mathrm{Root}\,p_A(z)$，设$p_A(z)=(z-z_0)q(z)$，如果$z_0\bar{\in}\sigma_p(z)$，则$A-z_0I$是单射，由此及$p_A(A)=0$不难知$q(A)=0$，但$q(z)\neq 0$，这就与$p_A(z)$的极小性矛盾。故$z_0\in\sigma_p(A)$。

定理3：条件如定理1，且$A\neq\alpha I$，$\alpha\in\mathbb{C}$。则A有非平凡不变子空间。

证明：∀取$z_0\in\mathrm{Root}\,p_A(z)$，设$p_A(z)=(z-z_0)q(z)$，今证$q(A)X$即合要求，这是因为：如果$q(A)X=0$，则

$q(A)=0$，矛盾；如果 $q(A)X=X$，则 $A-z_0I=0$，与条件矛盾；又显然 $q(A)X$ 是A不变的，故 $q(A)X$ 是 A 的非平凡不变子空间。

定理4： X是复赋范线性空间，$A\in B(X,X)$，且A是代数算子，则 $\mathrm{Root}\,p_A(z)=\sigma_p(A)=\sigma(A)$。

证明：由定理2，只要证 $\sigma(A)\subset\mathrm{Root}\,p_A(z)$

事实上由 $\sigma\circ p(A)=p\circ\sigma(A)$，$\forall p(z)\in\mathbb{C}[z]$，及 $p_A(A)=0$，$\sigma(0)=\{0\}$，立刻就可得到 $\sigma(A)\subset\mathrm{Root}\,p_A(z)$。

由此定理，说代数算子是有限维复空间上线性算子的"近亲"推广是名符其实的，这一点连全连续算子也望尘莫及（X是无限维时全连续算子B必成立 $0\in\sigma(B)$ 且 $\sigma(B)$ 可以是可数势的）。但这一点没有理由使我们乐观，因为它告诉我们，"代数"的条件是极强的。

定理5： X是复赋线性空间，$A\neq\alpha I$，$\alpha\in\mathbb{C}$ 是有界代数算子，则 A 有非平凡超不变闭子空间。

证明：如定理3，$\overline{q(A)X}$ 即满足要求（用到A的有界性）。

我想以线性代数的一个经典结果的移植来结束本文：

定理6，（空间分解定理）：

条件如定理1。设 $p_A(z)=\prod\limits_{1}^{t}(z-z_i)^{e_i}$ $z_i\neq z_j$，$i\neq j$ 记

$$W_i=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{Ker}(A-z_iI)^n，$$则我们有：

1：$\forall_i$ ： $1\leq i\leq t$

$$\mathrm{Ker}(A-z_iI)\subsetneqq\cdots\subsetneqq\mathrm{Ker}(A-z_iI)^{e_i}=\mathrm{Ker}(A-z_iI)^{e_i+1}=\cdots$$

2： $X=W_1\oplus W_2\oplus\cdots\oplus W_t$。$W_i$（$1\leq i\leq t$）是A不变子空间。

3：若X是赋范线性空间，A有界，则W_i（$1\leq i\leq t$）都是A超不变闭子空间。

证明：1与2是纯代数的，是有限维空间第一分解定理的直接推广，证明方法稍作改变即可（主要利用多项式环$\mathbb{C}[z]$的性质）。

由1、2自然可得3。

最后说明无限维赋范线性空间里非平凡有界代数算子是存在的（“非平凡”即非零算子与纯量算子）。比如l^2中定义A为：

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cdot&1&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\end{pmatrix}$$（无穷矩阵中未写明元素都是0）

易知$p_A(z)=z^2$，故A必然非平凡。而空间分解定理提供了构作非平凡有界代数算子的有效手段。空间分解定理还告诉我们，研究代数算子，本质上是研究幂零算子。

Riemann 球旋动的矩阵表示

901 吴耀琨

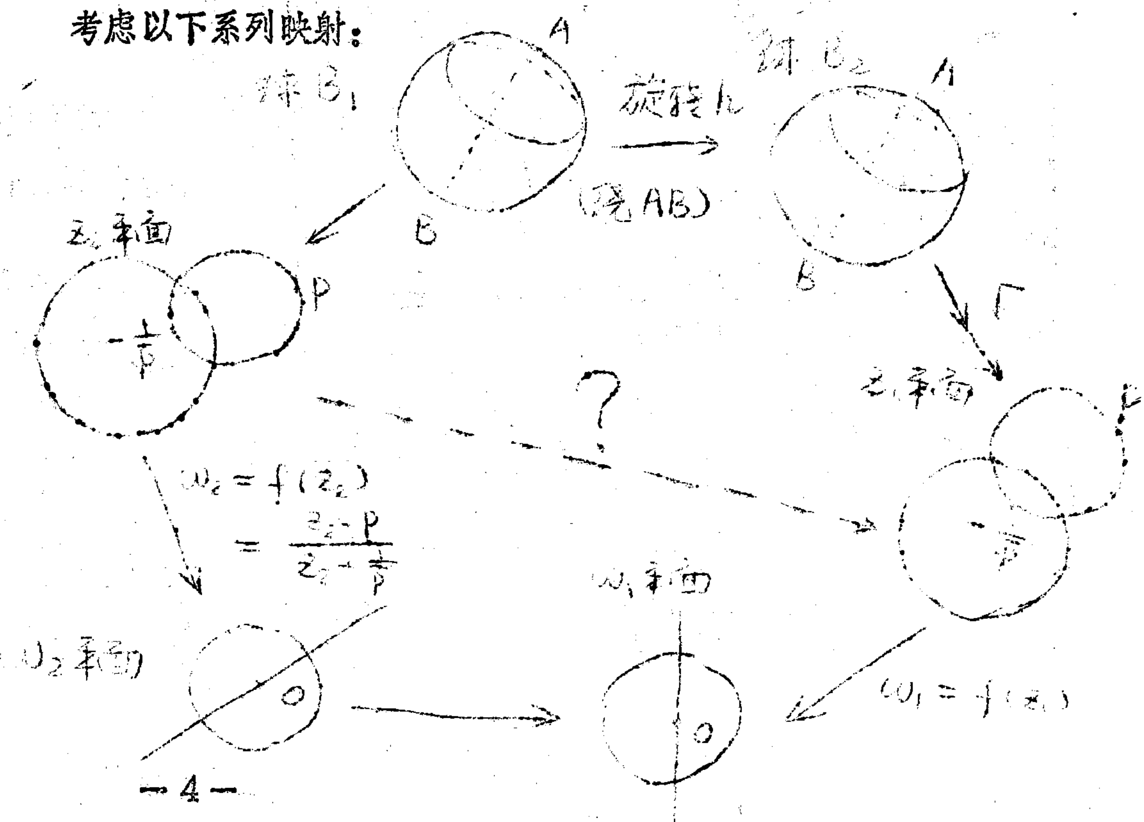
由球极投影T将Riemann球面与C_∞建立点对应，问C_∞上什么变换相应于球面旋转。

解：由Euler定理（见许以超《代数学引论》），可设球面绕直径AB旋转。仅考虑A、B非南、北极情形。

设 $A \xrightarrow{T} P$，$B \xrightarrow{T} -\frac{1}{\bar{P}}$，$\left\{P, -\frac{1}{\bar{P}}\right\} \cap \{0, \infty\} = \varnothing$

球面上有两族圆：经圆（过A、B的圆），纬圆（关于A、B对称的圆）。于Γ下，它们成为C_∞上关于坐标为P，$-\frac{1}{\bar{P}}$两点的Steiner圆网。仿上，圆网可分为经圆族与纬圆族。

考虑以下系列映射：



显然题意正是要求z_2平面到z_1平面之映射关系。

B_1旋转后，其上任一纬圆显然整体位置不变，再进行同样的映射T，f后还应位置一致，即W_1平面与W_2平面上半径相同的纬圆是B_1上同一个纬圆的映像。

记映射$g=f\circ T\circ h\circ T^{-1}\circ f^{-1}$，则$g$建立$W_2$平面的点对应，由各复合映射保角、保圆性，知，$g$将经圆映为经圆，且经圆间夹角不变。终合上段，得$W_1=g(W_2)=e^{i\theta}W_2$，$\theta$即为球面转角，具体转向不加讨论。

于是$\dfrac{z_1-P}{z_1+\dfrac{1}{P}}=e^{i\theta}\dfrac{z_2-P}{z_2+\dfrac{1}{P}}$ $\qquad z_1=\dfrac{az+b}{cz+d}$，其中

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -P \\ 1 & \dfrac{1}{P} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & \dfrac{1}{p} \end{pmatrix}=$$

$$\left[\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+|P|^2}} & \\ & \dfrac{1}{\sqrt{1+|\dfrac{1}{P^2}|}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -P \\ 1 & \dfrac{1}{P} \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+|P|^2}} & \\ & \dfrac{1}{\sqrt{1+|\dfrac{1}{P^2}|}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+|P|^2}} & \\ & \dfrac{1}{\sqrt{1+|\dfrac{1}{P^2}|}} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+|P|^2}} & \\ & \frac{1}{\sqrt{1+|\frac{1}{P^2}|}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -P \\ 1 & \frac{1}{\bar{P}}\end{pmatrix}\right] = U^{-1}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & \\ & 1\end{pmatrix}U$$

$$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+|P|^2}} & \\ & \frac{1}{\sqrt{1+|\frac{1}{P^2}|}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -P \\ 1 & \frac{1}{\bar{P}}\end{pmatrix}$$ 为酉阵

$\therefore\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 必为酉阵，$\{P, -\frac{1}{\bar{P}}\}\cap\{0, \infty\}=\varnothing$，知 $|c|=|b|\neq 0$，反之，任意二阶酉阵 U_1，$|U_1(1,2)|=|U_1(2,1)|\neq 0$ (1)

U_1 特征值 $e^{i(\theta+\varphi)}$，$e^{i\varphi}$，依常法，U_1 同 $U_2=e^{i(-\varphi)}U_1$ 对应于同一个分式线性变换，故只看 U_2。$\exists$ 酉阵 $U_3=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$

$U_2=U_3^{-1}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & \\ & 1\end{pmatrix}U_3$。由 (1)，$|U_3(1,2)|=|U_3(2,1)|\neq 0$

进一步有 $|U_3(1,1)|=|U_3(2,2)|\neq 0$ （反证即知）

$\therefore$ 可设 $U_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{|a|} & \\ & \frac{1}{|c|}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{b}{|a|}\\ 1 & \frac{d}{|c|}\end{pmatrix}$，$U_3$ 为酉阵，故 $(1 \ \ \frac{b}{|a|})$ 与 $(1 \ \ \frac{d}{|c|})$ 必正交。$\therefore$ 可设 $U_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+|P|^2}} & \\ & \frac{1}{\sqrt{1+|\frac{1}{P^2}|}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -P \\ 1 & \frac{1}{\bar{P}}\end{pmatrix}$

$$\therefore U_2=\begin{pmatrix}1 & -p\\ 1 & \frac{1}{\bar{p}}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & \\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -p\\ 1 & \frac{1}{\bar{p}}\end{pmatrix}$$ 立知U_2对应分式线性变换相当于Riemann球上绕直径$T^{-1}(p)T^{-1}(\frac{-1}{\bar{p}})$转过$\theta$角的变换，具体方向易于看清，只是表述较繁。

以上顺便建立了二阶酉阵群到Riemann球旋转群的同态。

感谢王建伟同学指出了原文的错误。

如果没有一些数学知识，那么就是对最简单的自然现象也很难理解什么，而要对自然的奥秘做更深入的探索，就必须要同时地发展数学。

J·W·A·Young

从矩阵的最大无关元组造出最小线覆盖的一种方法

901　吴耀琨

不妨设 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} x & y \\ z & o \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \rho(A) \\ m-\rho(A) \end{array} \\ \begin{array}{cc} \rho(A) & n-\rho(A) \end{array} & \end{array}$，且 A 的某 $\rho(A)$ 个无关元分布于 x 对角线上。

若 z 或 y 无非零元，则取前 $\rho(A)$ 列或前 $\rho(A)$ 行即为一最小线覆盖。

否则过 y 中每个非零元 y_1 作横线，过 z 中每个非零元 z_1 作竖线。设有 x 主对角线上元素 x_1 同时被上述横线、竖线穿过，则以 y_1、z_1 代替 x_1 加入上述无关元组，成一更大无关元组，矛盾。故可令 A 有如下结构

$$A=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & y_1 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & 0 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} m_1 \\ n_1 \\ \rho(A)-n_1-m_1 \\ m-\rho_A \end{array} \\ \begin{array}{cccc} m_1 & n_1 & \rho_A-n_1-m_1 & n-\rho_A \end{array} & \end{array}$$

y_1 每行，z_1 每列均含非零元。

由此先造部分线覆盖：前 m_1 行，第 m_1+1，列到第 m_1+n_1 列。

x_{21} 必为零矩阵。否则取其非零的 (i,j) 元，y_1 的第 j 行某非零元，z_1 的第 i 列某非零元取代元素 $x_{11}(j,j)$，$x_{22}(i,i)$，补入上述无关组，最大无关组得到扩大，矛盾。

将覆盖部分抹去，我们看到$B=\begin{pmatrix}0 & x_{23}\\ x_{31} & x_{33}\end{pmatrix}$，若$B=0$，则上述覆盖已为全覆盖。足则，我们要证明$x_{33}$之对角元为B最大无关组。

反证法。设B有更大无关组，$\Sigma=\{p_1, p_2, \cdots, p_s, q_1, q_2, \cdots, q_t, l_1, l_2, \cdots l_r\}$，$p_i\in x_{31}$，$q_i\in x_{33}$，$l_i\in x_{23}$。过每个$p_i$作横线交于$x_{33}$对角元a，过a作竖线交于Σ中某元b，过b作横线交于x_{33}另一对角c，……，直至此路不通停止。（若遇见已走过的元素亦算道路不通）若停于x_{23}中元q_i，回到A中考虑，过q_i作横线交于x_{22}对角元m，过m作竖线到z_1中某非零元R。对起点同样扩展道路，过p_i作竖线交于x_{11}对角元n，过n作横线交于y_1中非零元T。这样得到一条路$\overset{1}{T}\to\overset{2}{n}\to\overset{3}{p_i}\to\overset{4}{a}\to\overset{5}{b}\to\cdots\to\overset{2\alpha-1}{q_i}\to\overset{2\alpha}{m}\to\overset{2\alpha+1}{R}$。它含奇数个元素，每个标号为偶数的元素在x对角线上，奇数的则否。以标号奇的取代标号偶的加入原无关组组，必成一更大无关组，矛盾。

∴从p_i始的路必停于x_{33}，而于x_{33}停只能是停于对角线，且这样的路含Σ中元素与含x_{33}对角元数一样多（注意，这里出现的对角元不能属于Σ）。同理从q_i作路，有相仿结论。若还有l_i不出现于上述路径，则从l_i作路，易知最终必停于不属于Σ的对角元。综上，Σ中元素必不多于x_{33}的对角元数。矛盾。

于是，我们可在B中就着x_{33}继续进行上述处理。有限步后得出A的最小全覆盖。

上述方法可作为König定理一个过于繁琐的证明，由此，也似能对置换相抵标准形作些讨论。

参考书：李乔《矩阵论八讲》

数学想象力的宏大视野，数学所达到的无止境的高度以及创造者的紧迫感，这些全部表明数学这一人类最大胆的成就是一份真正辉煌的世袭财产。

W·L·Shaaf

学习札记

901 吴耀琨

一、线代课本P441／例2为：n阶实正交方阵O的r阶子式$N_1=O\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_r \\ j_1 j_2 \cdots j_r \end{pmatrix}$，$1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n$，$1\leq j_1<j_2<\cdots<j_r\leq n$，$N_1$的代数余子式为$M_1$、则$N_1=M_1\det O$。我们给出一新证明如下：记从O的$i_1, i_2\cdots, i_r$行中取出的所有r阶子式为$N_1, N_2, \cdots, N_k$，相应的代数余子式为$M_1, M_2\cdots, M_k$，则$\left(\sum_{i=1}^{k} N_i M_i\right)^2=(\det O)^2=1$，又$|OO'|=|I_n|=1$，故依Binet—Cauchy公式$\left(\sum_{i=1}^{k} N_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} M_i^2\right)=$

$|I_r||I_{n-r}|=1$，即$\left(\sum_{i=1}^{k} N_i M_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{k} N_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} M_i^2\right)$

$\therefore N_i$与M_i成比例，设$N_i=xM_i$，$x\neq 0$，则$1=\sum_{i=1}^{k} N_i^2=$

$x\sum_{i=1}^{k} N_i M_i = x\det O$ $\therefore x=\det O$，证毕。

二、Sylow定理之推广

引理1：群G，素数$P\,\big|\,|G|$，则G中P阶子群数$N\equiv 1\ (P)$

证：由冯克勤译《代数学》（简称“代”）P441 Cauchy定理之证明，得G中满足$g^P=1$之元素个数$\equiv 0\ (P)$，$\therefore$ P阶元素个数$\equiv -1\ (P)$，而其中每$P-1$个元素连同e组成一P阶群，$\therefore N(P-1)\equiv -1(p)$ $\therefore N\equiv 1\ (p)$。

引理2：H是有限群G的P－子群，则 $(N_G(H):H)\equiv(G:H)\ (P)$

证：见“代”P 142。

定理：$H\leq G$，$|H|=P^{\alpha}$，$P^{\alpha}|P^{\beta}||G|$，则G中包含H的P^{β}阶子群个数$N\equiv 1\ (P)$　　　（$\beta>\alpha$）

证：由引理2，若$P|(G:H)$，则$N_G(H)\neq H$，故$P||N_G(H)/H|$。

由引理1，知$\exists P^{\alpha+1}$阶群$H_1\rhd H$，且这种H_1之个数$\equiv 1\ (P)$
又$\forall H'\rhd H$，$|H'|=P^{\alpha+1}$，有$H'\leq N_G(H)$，故依上法造出的H_1，穷尽了所有这种H'。同理对每个H_1可造H_2，$H_1\lhd H_2$，$|H_2|=P^{\alpha+2}$，……，最终得一子群列$H\lhd H_1\lhd H_2\lhd\cdots\lhd H_{\beta-\alpha}$，前面$\beta-\alpha$个位置中，任一位上子群选定后，后续子群选法为$kP+1$种，故这样的子群列总共可得$\prod_{i=1}^{\beta-\alpha}(k_iP+1)\equiv 1\ (P)$个。$\forall H'\geq H$，$|H'|=P^{\beta}$，在$H'$内可造子群列$H\lhd H'_1\lhd\cdots\lhd H'$，该子群列显然已出现于上述系列子群列中。$\therefore P^{\beta}$阶群$H'\geq H\Leftrightarrow H'$出现于某子群列结尾。注意到下述事实：{G中所造以$H'$结尾的子群列}={群$H'$中同法从H发出而终止于$H'$的子群列}。依上述分析，后者含元素（子群列）个数$\equiv 1\ (P)$。$\therefore N\cdot 1\equiv 1\ (P)$　$\therefore N\equiv 1\ (P)$。证毕。

令$\alpha=0$，β满足$P^{\beta}||\ |G|$，则得Sylow第三定理。

本结果系在学习“代”Sylow定理一节时发现。但此后即见到张远达《有限群构造》P370载有此定理，证明大意虽同，却也还有小异，故敢发表。

Solution to the Regular Pentagon Problem

Li Wenzhi and Cheng Yiping

A6642 Proposed by the editors of American Mathematical Monthly.

Let λ be the maximum possible inradius of an arbitrary triangle lying in the closed set bounded by a regular pentagon of side-lenth one.

(a)* Determine λ up to an error of at most 10^{-3}.

(b)* Determine λ exactly.

Solution by Li Wenzhi and Cheng Yiping (both students), University of Science and Technology of China. We will prove λ is the greater root of the equation

$$\sqrt{5+2\sqrt{5}}\ (6+2\sqrt{5})r^4-(58+20\sqrt{5})r^3-2\sqrt{5+2\sqrt{5}}(2\sqrt{5}-1)r^2-6(5+2\sqrt{5})r+(5+2\sqrt{5})\sqrt{5+2\sqrt{5}}=0$$

approximately, λ is 0.376.

First, we may assume the three vertices of the triangle lie on different sides of the pentagon. (If two vertices are the two ends of the same side, then we can consider one of them to be on another side.) Hence there are two remaining cases according to the relations between the sides on which the vertices of the triangle lie.

1 The sides are adjacent.

2 They are one separated side and two adjacent sides.

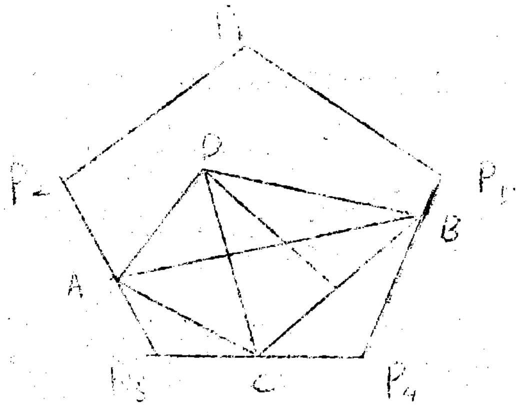


Figure 1

Let's consider case 1 first. See figure 1, if $A \neq P_2$, then draw a line passing A and parallel to BC which intersects the perpendicular bisector of BC at a point D inside the pentagon. Triangle ABC and DBC have equal areas, but triangle DBC has a saller circumference, this implies $r(ABC)<Kr(DBC)$. Hence we may assume $A=P_2$, and $B=P_5$ likewise. Obviously when C is the midpoint of P_3P_4, $r(P_2P_5C)$ reaches its maximum of

$$(\sqrt{250+90\sqrt{5}}-2\sqrt{25+10\sqrt{5}})/20<0.374.$$

Now consider case 2, set up a cartesian coordinate system as shown by figure 2, let $m=tg\pi/5$, $h=tg(2\pi/5)/2$, a, b, c be the side-lengths of the triangle. Then

$$a=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(h-mx_2)^2}$$

$$b=\sqrt{(x_1+x_3)^2+(h-mx_1)^2}$$

$$c=\sqrt{(x_1+x_2)^2+m^2(x_1-x_2)^2}$$

let $s=(a+b+c)/2$, then the inradius of the triangle.

$$r=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)/s}=\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)/(a+b+c)}/2$$

Consider r as a function of x_1, x_2, x_3. r has a maximum point in the open set $(0,h/m)\times(0,h/m)\times(-h/m, h/m)$ only when

$$(1)\qquad \frac{\partial r}{\partial x_i}=\frac{\partial r}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_i}+\frac{\partial r}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x_i}+\frac{\partial r}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_i}=0,\ i=1,2,3$$

We assume $a\leqq b\leqq c$, hence

$$\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{-a^3-a^2(b+c)+a(b+c)^2+(b+c)(b-c)^2}{16rs^2}\geqq\frac{abc}{16rs^2}>0$$

This implies $\frac{\partial r}{\partial a}\ \frac{\partial r}{\partial b}\ \frac{\partial r}{\partial c}$ cannot be zero simultaneously.

Hence from (1) we have

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial a}{\partial x_1} & \frac{\partial b}{\partial x_1} & \frac{\partial c}{\partial x_1}\\ \frac{\partial a}{\partial x_2} & \frac{\partial b}{\partial x_2} & \frac{\partial c}{\partial x_2}\\ \frac{\partial a}{\partial x_3} & \frac{\partial b}{\partial x_3} & \frac{\partial c}{\partial x_3}\end{pmatrix}$$

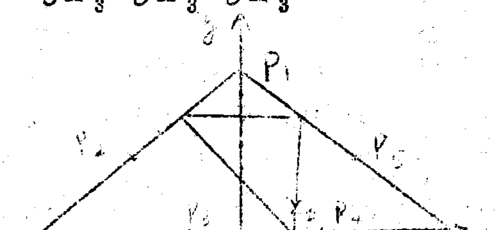


Figure 2

$$=\det\begin{pmatrix}0 & \frac{x_1+x_3-m(h-mx_1)}{} & \frac{x_1+x_2+m^2(x_1-x_2)}{c}\\ \frac{x_2-x_3-m(h-mx_2)}{a} & 0 & \frac{x_1+x_2+m^2(x_2-x_1)}{c}\\ \frac{x_3-x_2}{a} & \frac{x_3+x_1}{b} & 0\end{pmatrix}$$

This yields $= 0$

(2) $2m(x_2-x_1)x_3^2-[(x_1+x_2)(2h-mx_1-mx_2)+m(2+m^2)(x_1-x_2)^2]x_3+(1+m^2)(x_2-x_1)[h(x_1+x_2)-2mx_1x_2]$
$= 0$

If (1) has a solution (x_1, x_2, x_3) which satisfies $x_1 \neq x_2$, we will show this cause r not to reach its maximum at (x_1, x_2, x_3). Consider (2) as a quadratic equation of x_3, if it has no real roots, then (1) has no solution; If (2) has, let them be u,v and $u \leq v$. Let x_0 be the abscissa of the intersection of x-axis and the perpendicular bisector of AB. Hence $x_0=(x_2-x_1)/2-m(x_2-x_1)(2h-mx_1-mx_2)/(2x_1+2x_2)$. Substitute x_0 for x_3 in the left side of equatiom (2)

$$2m(x_2-x_1)x_0^2-[(x_1+x_2)(2h-mx_1-mx_2)+m(2+m^2)(x_1-x_2)^2]x_0+(1+m^2)(x_2-x_1)[hx_1+hx_2-2mx_1x_2]$$
$$=mh(x_2-x_1)(2h-mx_1-mx_2)[m^2(x_2-x_1)^2+(x_1+x_2)^2]/(x_1+x_2)^2>0$$

Note that $2m(x_2-x_1) > 0$, which implies $x_0 < u \leq v$ or $u \leq v < x_0$, but $x_0 < (x_2-x_1)/2 < (u+v)/2$, hence $x_0 < u \leq v$. See figure 3, AB has a negative slope, this implies triangle ABC can be contained in a triangle with equal base and height with ABD. But ABD is isosceles, hence $r(ABC) < r(ABD)$. thus we proved the initial statement of this paragraph.

Let $x_1=x_2$ in (2), we have $x_3=0$. It's easy to find the only stationary point which satisfies $x_1 \in (0, \cos(\pi/5))$ When $x_1=0.970\cos(\pi/5)$ approximately, $r=0.374$ approximately.

Consider the boundary case of case 2. If $C=P_3$ (or P_4), then it is reduced to case 1. If $A=P_1$, then we may assume $B=P_5$, this is also reduced to case 1. let's consider the case of $A=P_2$. (We may treat B similarly.)

See figure 4. Let M, N be the midpoints of P_3P_4 and P_1P_5 respectively. If B is on segment P_1N (not coincide with N), then the perpendicular bisecter of P_2C interseets the line passing A and parallel to

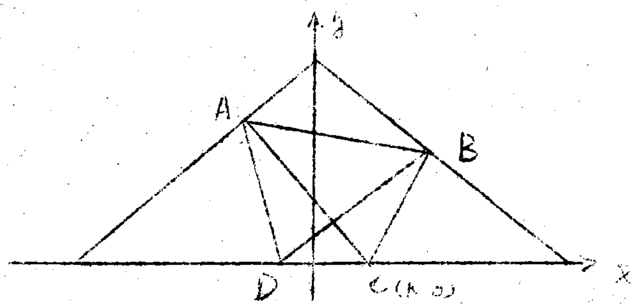


Figure 3

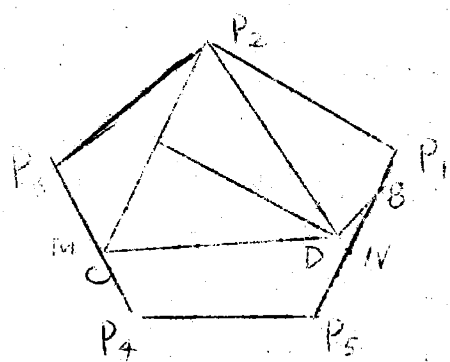


Figure 4

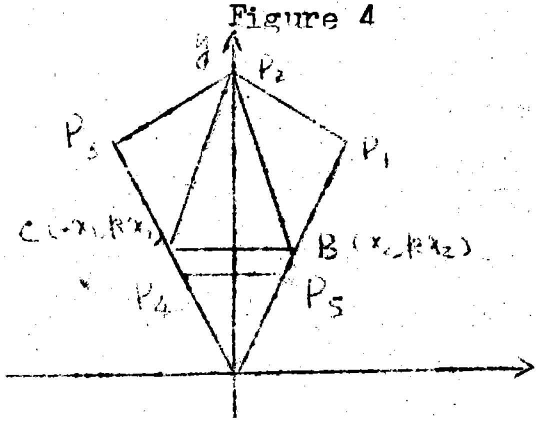


Figure 5

P_2C at a point D inside the pentagon. Hence $r(P_2BC) < r(P_2CD)$. So we may assume B is on segment NP_5, C is on segment MP_4.

Set up a cartesian coordinate system shown by figure 5. Let $k=h=tg(2\pi/5)$, $m=1/k^2$ and

$$a = BC/k = \sqrt{m(x_1+x_2)^2+(x_1-x_2)^2}$$

$$b = P_2C/k = \sqrt{(1+m)x_1^2-2x_1+1}$$

$$c = P_2B/k = \sqrt{(1+m)x_1^2-2x_2+1}$$

where $1/2 \le x_1,\ x_2 \le (3+\sqrt{5})/8$. The area of triangle P_2BC $S=(hx_1+hx_2-2kx_1x_2)/2=k(x_1+x_2-2x_1x_2)/2$. Hence the inradius $r=2S/(k(a+b+c))=(x_1+x_2-2x_1x_2)/(a+b+c)$. r has a maximum point in the open set. $(1/2,(3+5)/8)\times(1/2,(3+5)/8)$ only when $\frac{\partial r}{\partial x_i}=0$, $i=1,2$, i.e.

$$(3)\quad \frac{1-2x_2}{a+b+c}-\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{(a+b+c)^2}\left(\frac{m(x_1+x_2)+x_1-x_2}{a}+\frac{(1+m)x_1-1}{b}\right)=0$$

$$\frac{1-2x_1}{a+b+c}-\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{(a+b+c)^2}\left(\frac{m(x_1+x_2)+x_2-x_1}{a}+\frac{(1+m)x_2-1}{c}\right)=0$$

subtract (4) from (3), and note that

$$\frac{(1+m)x_1-1}{b}-\frac{(1+m)x_2-1}{c}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)((1+m)(x_1+x_2)-2)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(1+m)(x_1-x_2)$$

$$=-\frac{x_1-x_2}{2bc(b+c)}[(1+m)(x_1+x_2)-2]^2+\frac{b+c}{2bc}(1+m)(x_1-x_2)$$

We have

$$\frac{2(x_1-x_2)}{a+b+c}-\frac{x_1+x_2-2x_1x_2}{(a+b+c)^2}(x_1-x_2)$$

$$\left[\frac{2}{a}-\frac{[(1+m)(x_1+x_2)-2]^2}{2bc(b+c)}+\frac{(b+c)(1+m)}{2bc}\right]=0$$

We will prove the joint equations (3) and (4) has no solutions satisfying $x_1 \neq x_2$. If not so, since $x_1 \neq x_2$, we can multiply both sides of the above equation by $2bc(a+b+c)^2/(x_1-x_2)$

$$(5)\quad 4bc(a+b+c)-(x_1+x_2-2x_1x_2)\left[\frac{4bc}{a}-\frac{[(1+m)(x_1+x_2)-2]^2}{b+c}+(1+m)(b+c)\right]=0$$

Let T be left side of (5) and

$$t=\frac{4bc}{a}-\frac{[(1+m)(x_1+x_2)-2]^2}{b+c}+(1+m)(b+c)$$

Note that $1/2 \leq x_1, x_2 \leq (3+\sqrt{5})/8$, $1 \leq ak \leq (3+\sqrt{5})/8$, $\sqrt{4+\sqrt{5}}/2 \leq kb$, $kc \leq (1+\sqrt{5})/2$, it's easy to find $t>0$, and

$$\frac{\partial t}{\partial x_1}=\left(\frac{4c}{a}+\frac{[(1+m)(x_1+x_2)-2]^2}{(b+c)^2}+1+m\right)\frac{(1+m)x_1-1}{b}$$

$$-\frac{4bc}{a^3}[(1+m)x_1-(1-m)x_2]-\frac{2(1+m)}{b+c}[(1+m)(x_1-x_2)-2]^2$$

$$<-2\cdot 73+1\cdot 06+2\cdot 44 = 0\cdot 77$$

Hence

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=\frac{4bc}{a}((1+m)x_1-(1-m)x_2)+4c(2+\frac{a+c}{b}((1+m)x_1-1)$$

$$-(x_1+x_2-2x_1x_2)\frac{\partial t}{\partial x_1}+(2x_2-1)t$$

$$>-0\cdot12-4\cdot09-0\cdot39=-4\cdot6$$

Similarly, we have $\frac{\partial T}{\partial x_2}>-4\cdot6$

Cut the interval $[1/2,(3+\sqrt{5})/2)$ into 12 equal parts. Let $w_i=1/2+i(\sqrt{5}-1)/96$. Through computation we can determine the maximum value of $T(w_i, w_j), 0\leqq i,j\leqq 12$, which is less than -0.12. For arbitrary $x_1, x_2 \in [1/2,(3+\sqrt{5})/8]$, we can always choose a pair (w_i, w_j), $0\leqq i,j\leqq 12$, which satisfies $0\leqq w_i-x_1\leqq(\sqrt{5}-1)/96$, $0\leqq w_j-x_2\leqq(\sqrt{5}-1)/96$. It follows that

$$T(x_1,x_2)-T(w_i,w_j)=T(x_1,x_2)-T(w_i,x_2)+$$

$$T(w_i,x_2)-T(w_i,w_j)=(x_1-w_i)\frac{\partial T}{\partial x_1}(\xi,x_2)+$$

$$(x_2-w_j)\frac{\partial T}{\partial x_2}(w_i,\eta)<4\cdot6(\sqrt{5}-1)/48<0\cdot12$$

Hence $T(x_1,x_2)<T(w_i, w_j)+0.12<0$ for arbitrary $x_1, x_2 \in [1/2,(3+\sqrt{5})/8]$. This contradicts with (5), so the joint equations (3) and (4) has no solutions with $x_1\neq x_2$.

Let $x_1=x_2=x$ in (3), and simplify (3) into

(6) $$(x-1)^2(k^2(x-1)^3+x^3(x-2))=0$$

(6) has only one solution in $(1/2,(3+\sqrt{5})/8)$. Since $r=kx(1-x)/(x+\sqrt{(1+m)x^2-2x+1})$, we can obtain the final equation from (6)

$$(7)\quad k(k^2+1)r^4-(10k^2+8)r^3-2k(k^2-6)r^2-6k^2+k^3=0$$

(7) has two real roots, the greater one(approximately 0.376) is greater than 0.375. We can rule out other possible maximum points by considering the boundary cases of x_1 or x_2 being 1/2 or $(3+\sqrt{5})/8$ when $r\leq r(P_2P_4N)<0.375$.

给我五个系数，我将画出一头大象；给我六个系数，大象将会摇动尾巴。

A·Cunchy

* * * * * *
* 新生园地 *
* * * * * *

关于阶乘二项式定理的讨论

911 黄 正

阶乘二项式定理可以看成是普通Newton二项式定理的一个推广，它们引入，研究乃至应用都是十分引人入胜的。

设a，h ，n为某个自然数，记

$a^{n|h}=a(a-h)(a-2h)\cdots\cdots(a-(n-1)h)$，$n=0$时约定$a^{0|h}=1$，另约定$a^{n|0}=a^n$，$a^{1|h}=a$，$\binom{n}{0}=1$及

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\quad,\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

阶乘二项式定理：$(a+b)^{n|h}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(n-k)|h}\cdot b^{k|h}$

证明：（略）。

容易知道，它是牛顿二项式定理的推广。

阶乘二项式定理有很多优点，比如看：

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n^{k|1}}{k!}$$

这就为获得一些组合恒等式提供了一个有力的工具。

例1：求证：$\binom{m}{0}\binom{n}{j}-\binom{m+1}{1}\binom{n}{j-1}+\binom{m+2}{2}\binom{n}{j-2}$

$$-\cdots+(-1)^j\binom{m+j}{j}\binom{n}{0}=\binom{n-m-1}{j}$$

证明：左边和式的通项可以写为 $\sum\limits_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{m+k}{k}\binom{n}{j-k}$

那么 $\binom{n}{j-k}=\dfrac{n^{(j-k)|1}}{(j-k)!}$

又有 $(-1)^k\binom{m+k}{k}=(-1)^k(m+k)(m+k-1)\cdots(m+1)/k!$

$$=(-m-1)(-m-2)\cdots(-m-k)/k!=(-m-1)^{k|1}/k!$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{m+k}{k}\binom{n}{j-k}=\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{j!}\binom{j}{k}(-m-1)^{k|1}\cdot n^{(j-k)|1}=\frac{1}{j!}(n-m-1)^{j/1}=\binom{n-m-1}{j}$$

从阶乘二项式出发可以得到一些有用的而有趣的结论：

结论1：$(-1)^m\cdot(a+m)^{m|1}=(-a-1)^{m|1}$

结论2：若 m，n　，对 x　有

$$x^m\cdot n^{m|1}=\sum_{k=m}^{n}n^{k|1}\cdot x^k(1-x)^{n-k}\cdot\frac{1}{(k-m)!}$$

$$=\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}k^{m|1}x^k(1-x)^{n-k}$$

它的证明可用数学归纳法来实现，这里不赘述了。利用结论2可以很容易地证明下面这个有名的组合恒等式：

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{m}x^k(1-x)^{n-k}=\binom{n}{m}x^m$$

结论3：$(a_1+a_2+\cdots+a_s)^{n|h}=\sum_{b_1+b_2+\cdots+b_s=n}$

$$\frac{n!}{b_1!\cdot b_2!\cdots b_s!}\cdot a_1^{b_1|h}\cdot a_2^{b_2|h}\cdots a_s^{b_s|h}$$

证明：应用阶乘二项式定理，对n实行数学归纳法可得结论3。

结论4：　$x^{n|h} = h^{n} \cdot n! \binom{\frac{x}{h}}{n}$

证明：（略）。

结论5：　$(1+hm)^{\frac{x}{h}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n|h}}{n!} \cdot m^{n}$

左式展开并利用~~结论4~~即可得到结论5。

结论5把阶乘二项式与无穷级数联系起来，一方面便于讨论无穷级数，另一方面又提供了一个研究阶乘二项式定理提供了一个有力的的工具。

由结论5，令$x=(a+b)$，则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^{n|h}}{n!} \cdot m^{n}$

$$= (1+mh)^{\frac{a+b}{n}}$$

又

$$(1+mh)^{\frac{a+b}{h}} = (1+mh)^{\frac{a}{h}} \cdot (1+mh)^{\frac{b}{h}}$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^{s|h}}{s!} \cdot m^{s} \right) \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{b^{t|h}}{t!} \cdot m^{t} \right)$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^{n|h}}{n!} m^{n} = \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^{s|h}}{s!} \cdot m^{s} \right) \left(\sum_{t=0}^{\infty} \frac{b^{t|h}}{t!} \cdot m^{t} \right)$$

显然，若 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}\cdot m^k \sum_{\iota=0}^{\infty}\frac{\beta_\iota}{\iota!}\cdot m^\iota=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu_n}{n!}m^n$

则有 $\nu_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_{n-k}\beta_k$

则：$(a+b)^{n|h}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{(n-k)|h}\cdot b^{k|h}$

参考书目：

〔1〕G·Klambauer，《Problems and Propositions in Analysis》，Marcel Dekker，INC，New York，1979

〔2〕G·Polya，G·Szegö，《Problems and Theorems in Analysis》，Vol·1· Springer-Verlag，1972

$S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}$ 的估值

901　李立雄

本文建立了关于 S_n 的几个估计，并由之得到了一个有趣的猜想。

命题1：$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<S_n<\frac{1}{\sqrt{2n}}$$

证明：（略）。

命题1是较粗糙的，下面的命题2却相当精确了。

命题2：$$\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{3})}}<S_n<\frac{1}{\sqrt{\pi(n+\frac{1}{4})}}$$

为了使证明更清楚，下面先证明若干引理。

引理1：对一切 $i\in N$，均有
$$\frac{i+\frac{1}{4}}{i+\frac{5}{4}}<\left(\frac{2i+1}{2i+2}\right)^2<\frac{i+\frac{1}{3}}{i+\frac{4}{3}}$$

证明：（略）。

引理2：令 $S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}=\frac{1}{\sqrt{C_n(n+\frac{1}{4})}}=\frac{1}{\sqrt{B_n(n+\frac{1}{3})}}$

则有：$C_n\downarrow\pi$，$B_n\uparrow\pi$

简证：利用引理1，易验证 $C_n\downarrow$，$B_n\uparrow$

利用Wallis公式，易有 $\lim\limits_{n\to\infty} B_n=\lim\limits_{n\to\infty} C_n=\pi$ 。

由引理2，立得命题2。

为了得到 S_n 的更精确的估计，自然的想法是令 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\dfrac{1}{4}+\dfrac{a_n}{n}\right)}}$，可得 $a_n\to\dfrac{1}{32}$，具体如下：

命题3：令 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{32n+a_n}\right)}}$，则 $12>a_n\searrow 8$

证明：经计算知有

$$\frac{\dfrac{2n+1}{2n+2}}{\sqrt{\dfrac{n+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{32n+8}}{n+\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{32n+40}}}}=1+O\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

$$\therefore \prod_{i=n}^{n^5}\frac{\dfrac{2i+1}{2i+2}}{\sqrt{\dfrac{i+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{32i+8}}{i+\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{32i+40}}}}=\prod_{i=n}^{n^5}\left(1+O\left(\frac{1}{i^6}\right)\right)=1+O\left(\frac{1}{n^5}\right) \qquad (1)$$

又由命题2知 $$\prod_{i=0}^{n^5}\frac{2i+1}{2i+2}=\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n^5+\dfrac{5}{4}+O(1)\right)}}$$

$$=\frac{1+0\left(\frac{1}{n^5}\right)}{\sqrt{\pi\left(n^5+\frac{5}{4}+\frac{1}{32n^5+40}\right)}}$$

又(1)式即为 $\prod_{i=n}^{n^5}\frac{2i+1}{2i+2}=\sqrt{\frac{n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+8}}{n^5+\frac{5}{4}+\frac{1}{32n+40}}}\left(1+0\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$

∴有 $\prod_{i=1}^{n}\frac{2i-1}{2i}=\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+8}\right)}}\left(1+0\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\left(n+\frac{1}{4}+\frac{1}{32n+8+0(1)}\right)}}$$

如考虑 $S_n^2\cdot\frac{\pi}{4}$，可得相应命题。

有趣的是，对 $S_n^2\cdot\frac{\pi}{4}$ 表成连分数有 $S_n^2\cdot\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{4n+1+\cfrac{\frac{1}{2}}{4n+1+\cdots}}$

据此，笔者猜测

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)^2\pi/4=\frac{1}{4n+1}+\frac{1/2}{4n+1}+\frac{9/2}{4n+1}+\cdots+\frac{(2n+1)^2/2}{4n+1}+\cdots$$

有兴趣的读者可与笔者共研。

* * * * * *
一题一议
* * * * * *

一个概率问题

891　霍晓明

92级研考有这样一个问题：

〔题〕：$x_1, x_2, \cdots\cdots$ 是独立的随机变量，$P(x_k=\pm x_k)=\dfrac{1}{2}$

问若 $\{B_n\}$ 常数列，使 $\dfrac{1}{Bn}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\xrightarrow{d}N(0,1)$　（＊）

则 $\{x_k\}$ 应满足什么条件？

本文说明当且仅当 $\{x_n\}$ 满足Feller条件和Lindeberg条件时，$\{B_n\}$ 常数列才存在，且满足（＊）。

〔证〕：先说明一个事实：

记　$h(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}\cos t$，

$\because$　$h'(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}(t-tgt)\cos t$，

$\therefore$　$0<t<1$ 时，$h'(t)<0$，

$\therefore$　$h(t)<h(0)=1$

易知 $N(0,1)$ 的特征函数为 $e^{-\frac{1}{2}t^2}$，x_k 的特征函数为 $\cos tx_k$，假设 $\{B_n\}$ 满足 $\dfrac{1}{Bn}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\xrightarrow{d}N(0,1)$

易得 $Bn^2=D(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

$$=Dx_1+Dx_2+\cdots+Dx_n=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

$\therefore$　$\dfrac{1}{Bn}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$ 的特征函数为

$$\prod_{k=1}^{n}\cos t\frac{x_k}{Bn},$$

显然$\{Bn\}$是不减的，若$\{Bn\}$有界，设上界为$M>0$，

必然$\exists n'$，$\frac{x_{n'}}{Bn}>0$，又$\because \frac{x_{n'}}{Bn}>\frac{x_{n'}}{M}$，

$\therefore$由一开始所述的事实，$\exists \delta>0$，

$$1-\delta>e^{\frac{1}{2}\left(t\frac{x_{n'}}{Bn}\right)^2}\cos\left(t\frac{x_{n'}}{Bn}\right)$$

取 $n>n'$

则 $$\prod_{k=1}^{n}\cos t\frac{x_k}{Bn}<(1-\delta)\prod_{k=1}^{n}e^{-\frac{1}{2}t^2\frac{x_k^2}{Bn^2}}$$

$$=(1-\delta)\,e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

$\therefore$此时$\frac{1}{Bn}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\xrightarrow{d}N(0,1)$不可能成立；

若$\{Bn\}$无上界，但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{Bn}\neq 0$，

则 $\exists\varepsilon$，$\forall N>0$，$\exists n>N$，使得$\frac{x_n}{Bn}>\varepsilon$

类似上面使用的方法，对充分大的n，都有

$$\prod_{k=1}^{n}\cos t\frac{xk}{Bn}\nrightarrow e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$\therefore$此时 $\frac{1}{Bn}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\xrightarrow{d}N(0,1)$也不会成立；

只剩$\{x_k\}$满足Feller 条件时的情况，

$\therefore$当且仅当$\{x_k\}$满足Lindebery 条件时，$\exists\{Bn\}$常数

列，使 $\frac{1}{Bn}(x_1+x_2+\cdots+x_n)\xrightarrow{d} N(0,1)$。

问题征解：

107、(1)必存在n！个非负整数 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{n!}$，对 $\forall S\in N$

$S<n$，成立 $(S+1)n!=\sum_{i=1}^{n!}a_i\cdot a_i\cdot(a_i-1)\cdots$

(a_i-S+1)。

(2)证明或否定上述问题仅有唯一的解。

901　吴耀琨

108、若 $i_1+j_1\equiv i_2+j_2 \pmod n$，则称n阶方阵A中二元素

$A(i_1,j_1)$，$A(i_2,j_2)$等高，A满足其中二元素相同当且

仅当该二元等高。证明或否定：1）n偶，则存在B置换相似

于A，且B之任一主对角元都与其所在等高线上其余元相异；

2）n奇，则上述B不存在。

901　吴耀琨

109、证明：n＞30时，存在3个素数，满足：

$\sqrt{n}<p_1, p_2, p_3<n$，且 $p_1\mid(p_2-p_3)$

891　刘　清

关于M_0，M_1，M_2与l的几个不等式

871　李文志

设函数f在区间I上二次可微，区间长度记为l，$M_k=\sup\limits_{x\in I}|f^{(k)}(x)|<+\infty$，$k=0$，1，2，本文给出并讨论关于$M_0$，$M_1$，$M_2$与$l$的几个不等式。

数学分析第一册第四章习题中给出，若$I=(-\infty,+\infty)$，则有

$$M_1^2\leqq 2M_0M_2 \qquad (1)$$

（原题误为$2M_1^2\leqq M_0M_2$，易举反例说明其不真，例如$f(x)=\sin x$）。不等式中常数2是最佳的，等号成立的充要条件是f为常数。

若I为半直线，比如$I=(0,+\infty)$，(1)是否仍成立呢？这时(1)不再成立，成立的不等式是

$$M_1^2\leqq 4M_0M_2 \qquad (2)$$

这个不等式的证明类似于(1)，从略。等号成立的充要条件亦为f为常数。我们举例说明常数4是最佳的，从而说明了此时(1)不再成立。

设$0<\varepsilon<1$，我们取f为分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}, & 0\leqq x\leqq 1-\varepsilon\\ \frac{1}{12\varepsilon}(x-1-\varepsilon)^3+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\varepsilon^2, & |x-1|<\varepsilon\\ \frac{1}{4}+\frac{1}{6}\varepsilon^2 & x>1+\varepsilon\end{cases}$$

则易见f二次可微，且有

$$M_0=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\varepsilon^2,\ M_1=M_2=1$$

ε可任意小，可见（2）中常数4不可改进。

若I＝〔a，b〕为有限区间，这时有不等式

$$M_1\leqq\frac{2}{l}M_0+\frac{l}{2}M_2 \qquad (3)$$

等号成立的必要条件是f为不高于二次的多项式。

证明证明如下：由M_1的定义知，要么存在一列$x_n\in(a,b)$使$f'(x_n)\to M_1$，要么存在一列$x_n\in(a,b)$使$f'(x_n)\to -M_1$，不妨设为前者，则有

$$2M_0\geqq f(b)-f(a)$$

$$=\int_{x_n}^{b}f'(x)dx+\int_{a}^{x_n}f'(x)dx$$

$$=\int_{x_n}^{b}[f'(x_n)+(x-x_n)f''(\xi)]dx+\int_{a}^{x_n}[f'(x_n)+$$

$$(x-x_n)f''(\xi)]dx\geqq(b-a)f'(x_n)-\int_{x_n}^{b}M_2(x-x_n)dx$$

$$+\int_{a}^{x_n}M_2(x-x_n)dx$$

$$=lf'(x_n)-\frac{1}{2}M_2(b-x_n)^2-\frac{1}{2}M_2(x_n-a)^2$$

$$\geqq lf'(x_n)-\frac{1}{2}M_2l^2$$

令n→＋∞即得

$$2M_0 \geq \iota M_1 - \frac{1}{2}\iota^2 M_2$$

从而得（３）式。等号成立的条件不难得到。

特别地，在（３）式中令$\iota=2$，即得

$$M_1 \leq M_0 + M_2 \qquad (4)$$

这是中科院计算中心９１年硕士研究生入学试题。

数学是科学中最古老的分支，它也是最活跃的学科，因为它的力量就在于它的永葆青春的活力。

A·R·Forsyth

* * * * * *
* 数学小品 *
* * * * * *

若当标准形的一个算法推导

R·Fletcher D·C·Sorensen

§1·引言

在讲授线性代数导引时，介绍一下若当标准形看来是值得的，但是，若当标准形的推导过程所需要的准备知识与这样一门课程的总份量相比较不太成比例。在这篇短文里我们给出了若当标准形的一个算法推导。除Schur分解和线性方程组求解外，不再要求其它预备知识。正因如此，可以不太费力地将这一课题安排在一门导引性的课程中。

已经有了其它一些初等证明。Strang叙述了Filippov的一个证明，最近的一个证明是由Galperin和Waksman给出的。这里所给出的论证比所有这些更具有矩阵分解的特色。特别有趣的是若当标准形是通过Schur分解的不断加细而得出的。全部证明基于归纳法，从而，可以认为，整个证明接近于将Schur分解转换为若当分解的一个算法程序。这里给出的证明完全是自封的，并且在我们看来是非常简单的。

我们将使用小写的希腊字母表示标量，小写的拉丁字母表示列向量，大写的拉丁字母表示矩阵。并假定所有的矩阵和向量都以复数为元素。我们用 $C^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 的复矩阵全体所成的集合。矩阵（向量）的转置用T表示，共轭转置，用 * 表示。方阵A的本征值集合用 $\lambda(A)$ 表示。

§2·若当标准形

我们的目的是要给出下述定理的一个简单证明。

定理(2·1)·对任一给定矩阵 $A\in C^{m\times n}$，存在一个非奇异矩阵 $X\in C^{m\times n}$，使得

$$X^{-1}AX = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \cdots, J_m),$$

这里 $J_i = \lambda_i I + E_i$ 是阶为 k_i 的方阵，$E_i = \begin{pmatrix} 0 & I_{k_i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，

且 $\lambda_i\in C$，而 $i=1, 2, \cdots, m$。

我们对这熟知结果的证明从Schur的一个有关的矩阵析因方法入手，并将这一分解逐步转换为矩阵的若当标准形。对于任何熟悉数值线性代数技巧的人来说，这的确是一种很自然的途径。Schur分解对于理解矩阵本征值和本征向量计算的著名的Q－R迭代技巧来说是基本的，而且看来凡是需要利用若当标准形的场合，Schur分解的方法可能都是适用的。

证明分三步进行。Schur分解告诉我们矩阵 $B\in C^{m\times n}$ 都可以写成 $B=QRQ^*$，其中R是上三角阵，Q是酉阵。下一步是构造一个非奇异阵X，使

$$X^{-1}RX = \mathrm{diag}(R_1, R_2 \cdots, R_m),$$

这里每个 R_j 是上三角阵，它的主对角线形如 $\lambda_j I$。最后一步是说明如何将一个三角阵 R_j 变为若当标准形。这几个主要步骤由下述引理(2·2)，(2·8)，(2·12)详细给出。

我们对Schur分解的证明完全遵从〔6，279页〕中的讨论，

但证明思想本质上与Schur给出的原始证明相同。为了完整起见，这里我们证明

引理2·2（Schur）设$B\in C^{k\times k}$是任意的$k\times k$复矩阵。那么存在一个酉阵$Q\in C^{k\times k}$和一个上三角矩阵$R\ \ C^{k\times k}$，使得

$$Q^*BQ = R$$

R的对角线上的元素是B的本征值λ(B)。

证明：对矩阵的阶k归纳。显然对阶为1的矩阵结果成立。假设对阶为k的矩阵，结果对，今设$B\in C^{(k+1)\times(k+1)}$。令λ是B的一个本征值，q是相应的本征向量，使得$q^*q=1$。先取$U\in C^{(k+1)\times k}$，使得（q U）是酉阵。那么

$$\begin{pmatrix} q^* \\ U^* \end{pmatrix} B(qU) = \begin{pmatrix} q^*Bq & q^*BU \\ U^*Bq & U^*BU \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & z^* \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}$$

由归纳假设，存在一个酉阵$Q_1\ \ C^{k\times k}$，使得$Q_1{}^*B_1Q_1 = R_1$是上三角阵。置

$$Q = (q\ U)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix}$$

那么Q是酉阵，而且

$$Q^*BQ = R,\quad R = \begin{pmatrix} \lambda & r^* \\ 0 & R_1 \end{pmatrix},$$

这就完成了证明。

为了后文值得指出的是，不失一般性可以假设这些本征值按指定的次序出现在R的对角线上。

在我们对定理（2·1）的证明中，要求了解矩阵方程

$$A_1B - BA_2 = S$$

的解的存在性和唯一性。直接使用Schur分解$Q_j^*A_jQ_j = R_j$，$j=1，2$，可以将上述方程变为一个等价的方程，其中用上三角阵R_1，R_2作为系数矩阵代替A_1，A_2。于是下述结果是完全一般的。

引理(2·3) 令R_1，R_2是上三角阵，分别属于$C^{k_1\times k_1}$和$C^{k_2\times k_2}$，令$S\in C^{k_1\times k_2}$，那么矩阵方程

$$(2\cdot4)\qquad R_1B - BR_2 = S$$

有唯一的解$B\in C^{k_1\times k_2}$当且仅当

$$(2\cdot5)\qquad \lambda(R_1)\cap\lambda(R_2) = \varnothing\text{。}$$

证明：对R_1的阶k_1直接归纳。令k_2是任一固定的正整数。显然，对$R_1=1$，引理真。假设对阶小于k_1的上三角阵$\hat{R}_1$，引理成立，考虑方程(2·4)的下述分块形式：

$$(2\cdot6)\quad \begin{pmatrix}\lambda_1 & r_1^T\\ 0 & \hat{R}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & b^T\\ w & \hat{B}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta & b^T\\ w & \hat{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_2 & r_2^T\\ 0 & \hat{R}_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_1 & s_1^T\\ s_2 & \hat{S}\end{pmatrix}\text{。}$$

将(2·6)的左端乘出来，得到方程

$$(2\cdot7)\quad \begin{pmatrix}\lambda_1\beta+r_1^Tw & \lambda_1b^T+r_1^T\hat{B}\\ \hat{R}_1w & \hat{R}_1\hat{B}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\beta\lambda_2 & \beta r_2^T+b^T\hat{R}_2\\ w\lambda_2 & wr_2^T+\hat{B}\hat{R}_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & s_1^T \\ s_2 & \hat{S} \end{pmatrix}$$

将归纳假设应用到（2·7），易见方程得按下述次序

(a) $\qquad (\hat{R}_1 - \lambda_2 I)w = s_2$

(b) $\qquad (\lambda_1 - \lambda_2)\beta = \sigma_1 - r_1^T w$

(c) $\qquad \hat{R}_1 \hat{B} - \hat{B}\hat{R}_2 = \hat{S} + w r_2^T$

(d) $\qquad b^T(\lambda_1 I - R_2) = s_1^T - r_1^T \hat{B}$

求出解当且仅当矩阵 R_1 和 R_2 满足（2·5）。这就完成了归纳。证毕。

下面的引理将 Schur 分解加细成非常接近若当标准形的形式。

引理（2·8） 令 $R \in C^{n \times n}$ 是上三角阵。那么存在一个非奇异的阵 $X \in C^{n \times n}$，使得

(2·9) $\qquad X^{-1}RX = \mathrm{diag}(R_1, R_2, \cdots, R_m),$

这里

$$R_j = \lambda_j I + U_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

U_j 是严格上三角阵，且 λ_j 两两相异。

证明：对 n 归纳。当 $n = 1$ 时，结果显然对。假设对阶小于 n 的上三角阵，结果对。令 $R \in C^{n \times n}$ 是上三角阵，对任一矩阵，可以得到它的一个 Schur 分解，其本征值位于任意给定的次序。于是，不失一般性，我们可设

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & S \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

这是R_1和R_2没有相同的本征值，且$R_1=\lambda_1 I+U_1$，U_1是严格上三角阵，存在一个适当维数的矩阵B，适合

$$\begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_1 & S \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -B \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}$$

当且仅当

(2·10) $$S=R_1B-BR_2 。$$

因$\lambda(R_1)\cap\lambda(R_2)=\emptyset$，矩阵方程（2·10）确有唯一的解。而且由归纳假设，可知R_2可以化为形如（2·9）的分块对角阵。这就完成了证明。

引理（2·11） 令E $C^{k\times k}$形如

$$E=\begin{pmatrix} 0 & I_{k-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} 。$$

那么

$$E^TE=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{k-1} \end{pmatrix}，E^k=0，Ee_{i+1}=e_i$$

$$(I-E^TE)r=\delta e_1，$$

这里e_i是第i个坐标向量，$\delta=e_1^Tr$。

引理（2·11）的证明是直接的。下面的引理将说明怎样将引理（2·8）中的那个分块对角阵中的严格上三角阵化为定理（2·1）所要求的形式。在引理的证明中，我们用e_i表示第i个单位向量，而不再指出它的维数。在所有情况下都假定这个维数与矩阵分块所应有的维数一致。

引理(2·12) 令$U\in C^{n\times n}$是严格上三角阵。那末存在一个非奇异矩阵X，使得

$$X^{-1}UX = J,$$

这里$J=\mathrm{diag}(E_1, E_2, \cdots, E_m)$，每个$E_j=\begin{pmatrix}0 & I_{kj}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，

$\mathrm{order}(E_{j+1})\leq \mathrm{order}(E_j) = k_j+1$，$(j=1, 2, \cdots m-1)$。

证明：对n归纳。显然，结果对$n=1$成立。假设对阶小于n的严格上三角阵，结果成立，令$U=C^{n\times n}$是严格上三角阵。将U分块为$U=\begin{pmatrix}0 & u^T\\ 0 & U_1\end{pmatrix}$。由归纳假设，存在非奇异阵$X_1$，使得

$$(2\cdot 13)\quad X_1^{-1}U_1X_1=\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & J_1\end{pmatrix},\ J_1=\mathrm{diag}(E_2, E_3, \cdots E_m)$$

这里$\mathrm{order}(E_1)\geq \mathrm{order}(E_j)$，$j\geq 2$。那么

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & X_1^{-1}\end{pmatrix}U\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & X_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & u^TX_1\\ 0 & X_1^{-1}U_1X_1\end{pmatrix}$$

按(2·13)中的分块法，将u^TX_1分块成$(u^TX_1)=u^TX_1$。借助引理(2·11)，我们得到

$$(2\cdot 14)\ \begin{pmatrix}1 & -u_1^TE_1^T & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & u_1^T & u_2^T\\ 0 & E_1 & 0\\ 0 & 0 & J_1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & u_1^TE_1^T & 0\\ 0 & I & 0\\ 0 & 0 & I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sigma e_1^T & s^T\\ 0 & E_1 & 0\\ 0 & 0 & J_1\end{pmatrix}$$

如果$\sigma\neq 0$，那么(2·14)右边的矩阵相似于

(2·15) $$\begin{pmatrix} E & e_1 s^T \\ 0 & J_1 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 0 & e_1^T \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}。$$

为此，只须用 $\mathrm{diag}(\sigma^{-1}, I, \sigma^{-1}I)$，从左边，用 $\mathrm{diag}(\sigma, I, \sigma I)$ 从右边去乘（2·14）式中的矩阵。注意 E 的阶 k 严格大于 J_1 的任何对角块的阶，所以 $J_1^{k-1}=0$。

定义 $s_i^T=s^T J_1^{i-1}$，$i=1,2,\cdots,k$。那么

$$\begin{pmatrix} I & e_{i+1}s_i^T \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & e_i s_i^t \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -e_{i+1}s_i^T \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} E & e_{i+1}s_{i+1}^T \\ 0 & J_1 \end{pmatrix},\quad 1\leq i\leq k-1。$$

因 $J_1^{k-1}=0$，$s_k=0$，这就得到 U 相似于矩阵 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}$。另一方面，如果（2·14）中的 $\sigma=0$，那么对（2·14）右边的矩阵的行与列作一简单的置换，将说明 U 相似于

$$\begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^T \\ 0 & 0 & J_1 \end{pmatrix}$$

由归纳假设，有一个非奇异矩阵 X_2 使得

$$X_2^{-1}\begin{pmatrix} 0 & s^T \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}X_2 = J_2,$$

于是，U 相似于矩阵 $\begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{pmatrix}$，这里 J_2 有所要求的分块对角阵的形式。再对行与列作一简单的（块）置换，就可将这矩阵变为所

需的形式。这就完成了证明。

定理（2·1）容易从这些结果得出。Schur分解说明一个方阵相似于一个上三角矩阵。引理（2·8）说明这个三角阵相似于形如（2·9）的一个分块三角矩阵。引理（2·12）说明每个三角块阵相似于定理（2·1）中所示形状的一个矩阵，因为对每个对角块R_i，存在一个非奇异阵X_i，使

$$X_i^{-1}(\lambda_i I+U_i)X_i=\lambda_i I+\mathrm{diag}(E_1, E_2, \cdots, E_m)。$$

§3·结论

这里给出的证明从性质上是相当算法化的。但是，我们不想给人一个印象，似乎在任何意义下，这都是一个很强的数值算法。若当标准形的实际计算是很难的任务，对这种计算有兴趣的读者，如果想深入研究数值问题，可参考〔3〕，关于计算程序可参考〔4〕。不管怎么样，值得指出的是在这个证明仅有的非构造的一步是在证明Schur分解时出现的。正因如此，我们觉的，这一讨论放在跟应用或算法有关的课程中是很合适的。

（戴宗铎译　曾肯成校）

参 考 文 献

〔1〕A·F·Filippov, A short proof of the theorem on reduction of a matrix to Jordan form, Vestnik, Moscow University, no·2(1971), 18–19·

〔2〕A·Galperin and Z·Waksman, An elementary approach to Jordan theory, this MONTHLY, 87: 9(1981), 728–732.

〔3〕G·H·Golub and J·H·Wilkinson, Ill–conditioned eigensystems and the computation of the Jordan Canonical form, SIAM Review, 18: 4 (1976), 578–619。

〔4〕B·Kagstrom and A·Ruhe, An algorithm for numerical computation of the Jordan normal form of a complex matrix, ACM Transactions on Mathematical Softwere, 6: 3 (1980) 398–419·

〔5〕Schur, Uber die characteristchen wurzeln einer linearen substitution mit einer anwendung auf die theorie der integralgleichungen, Math, Ann·66(1909), 488–510

〔6〕G·W·Stewart, Introduction to Matrix Comp–

utations , Academic Press , New York , 1973.
(7) G. Strang , Linear Algebra and its Applications , Academic Press , New York , 1976

科学的历史表明，模型的使用已经加速了数学的发展。这样，几何图形已被作为代数关系的模型，赌博已被作为概率论的模型，而引力作用则被作为调和函数的模型。由于以下三个主要原因，这样的模型已经加速了数学的发展：（ a ）把注意力集中于有意义的问题，（ b ）模型是感觉复杂关系时的直觉，（ c ）提出了新的概念。

R·J·Duffin

******

问题解答

******

猜想3的解决

891 刘 清

命题：k（$2\leq k\leq 16$）个连续自然数中，至少有一个数与其它各数互素。

上期杨林先生的猜想在$k\leq 16$的情形下是成立的。87890→87906，87907…87910分别是长度为17，18…21的反例。

将长度为l的自然数段镶嵌在模30环中，环中±1，±7，±13，±11与30互素，记作30素数。则〔87890→87910〕相应于环中〔−10→10〕的长度为21的段。记最小素因子为P的自然数为P因数。有：87893为13因数，87899为7因数，87901为11因数，87907为17因数。以下令段长$l\leq 16$：

1°$l\leq 5$时命题成立。

2°$l\geq 6$时段内至少含一个30素数，且7因数至多两个（$l<15$时7因数至多一个），11因数至多一个，13因数至多一个。

3°若段中只含一个30素数m，则m与段中其它各数互素。

4°若段中只含两个30素数，且其最小素因子两两互异，则(i)$l\geq 12$，此类型段仅有〔−6→6〕及其子段。而段〔−8→8〕中含±1，由2°知两者之一必为P（≥11）因数，从而与段中其它各数互素。(ii)$l<12$，由2°知段中含P（≥11）因数存在，且与段中其它各数互素。

5°若段中只含三个30因数，且其最小素因子两两互异，则

(i) $l\geq14$，此类型段仅有±$(-10\to6)$，±$(2\to-14)$与它们相应的子段。考虑到以上各段中素数对最大间距为7，故由$16<17=11+13-7$知至少有一$P(\geq11)$因数与其它各数互素。(ii) $l<14$，推理类似4°(ii)。

6°若段中含$k(\geq4)$个30素数，且其最小素因子两两互异，则由2°知段中必有$P(\geq17)$因数m，m与其它各数互素。

7°若段中含两个7因数，相应于两种情形：(i)段中含±$(-13, 1)$30素数对，这时段内至少有5个30素数±$(-13, -11, -7, -1, 1)$，结合2°，知段内含$P(\geq17)$因数m，m与其它各数互素。(ii)段中含$(-7, 7)$30素数对推理同4°(i)。

综合1°—7°知命题成立。

事实上，任意长度的反例都是存在的，这只依赖于下述有待证实的论断：$n>30$，则存在3个素数，满足$\sqrt{n}<P_1, P_2, P_3<n$，且$P_1|(P_2-P_3)$。

纯数学是魔术家真正的魔杖。

Novalis

猜想4、5的解

901 王新茂 吴耀琨

本文对张承宇文中猜想4作出部分回答，即解决了m为素数幂次的情形。

设$f(x)=\sum_i a_i x^i$，定义$f(x)\equiv 0 \mod (m, x^{mk})$为$\forall j\in\{0,1,\cdots,m^k-1\}$，$\sum_{i\equiv j \mod (m^k)} a_i\equiv 0 \mod (m)$，猜想4可改述为$(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})^{mk}\equiv 0 \mod (m, x^{mk})$。若$m=P^l$，则$(1+x+\cdots+x^{m-1})^{mk}=\left(\frac{1-x^{P^l}}{1-x^{P^{l-1}}}\right)^{P^lk}$

$$\left(\frac{1-x^{P^{l-1}}}{1-x^{P^{l-2}}}\right)^{P^lk}\cdots\cdots\left(\frac{1-x^P}{1-x}\right)^{P^lk}=$$

$$\underbrace{(1+x^{P^{l-1}}+x^{2P^{l-1}}+\cdots+x^{(P-1)P^{l-1}})^{P^lk}(1+x^{P^{l-2}}+\cdots+x^{(P-1)P^{l-2}})^{P^lk}\cdots\cdots(1+x+\cdots+x^{P-1})^{P^lk}}_{l\text{个连乘}}$$

又$(1+x^{P^{l-1}}+\cdots+x^{(P-1)P^{l-1}})^{P^lk}\equiv(1+x^{P^lkP^{l-1}}+\cdots+x^{P^lk(P-1)P^{l-1}})\equiv 0 \mod (P, x^{P^lk})$，$\cdots\cdots(1+x+\cdots+x^{P-1})^{P^lk}\equiv 0 \mod (P, x^{P^lk})$ $\therefore \left(\frac{1-x^{P^l}}{1-x}\right)^{P^lk}\equiv 0 \mod (P^l, x^{P^lk})$。即素数幂情形猜想成真。

对$\begin{matrix} m=6 \\ k=2 \end{matrix}$时，我们耐心地进行了手算，发现$(1+x+\cdots+x^5)^{6^2}=(1+x)^{36}(1+x^2+x^4)^{36}\equiv(5+4x^{16}+3x^{20}+3x^{32})(2+3x^4+4x^9+4x^{27}+3x^{32})\equiv 1+\sum_{i=1}^{35} a_i x^i \mod(6, x^{36})$

猜想不真。

王新茂　吴耀琨

附：猜想5简证：

(i) 如图，z 通过 a 投到圆上另一点 z'，可表为

$$f(z)=\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

(ii) 有限次数射复合仍为分式线性变换，至多两个不动点，除非为 $f(z)=z$

(iii) ι 两端点关于 ι 上一组固定点（偶数个）相继投射均返回原地。

又有圆周上非 ι 二端点的一点亦关于该组点相继投射返回，故有三不动点。∴ $f(z)=z$ 即圆周上任意一点进行相同投射后均返回原处。叶氏猜想成立。