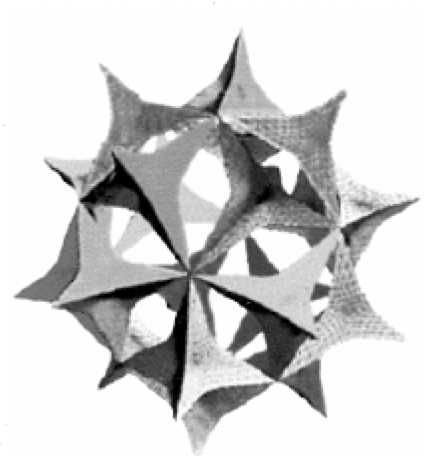
蛙　　鸣

第48期



中国科学技术大学
《蛙　鸣》编委会　合办
数学系　学生会学习部
一九九三年六月

目　　录

（总第 48 期）

一题一议

蛙鸣 第48期

〔研究简报〕

一个Möbius函数与Artin诱导特征标定理的理解

891 沈建红

偏序集上的Mobius函数是经典数论Mobius函数的推广，在组合数学中，它又是著名的容斥原理的本质所在。诱导特征标的Artin定理涉及到了经典Mobius函数，初一看这是十分奇怪的，Mobius函数怎么会来凑热闹呢？Artin定理言：“群G（有限）每个有理特征标φ有形状：$\varphi=\Sigma_C a_C I_C^G$，C遍取G的f群；而且

$$a_C=\frac{1}{[G:C]}\Sigma_{C^*\geq C}\mu[C^*:C]\varphi(Z^*)，$$ Z^*为C^*任一生成元。”（见《有限群表示论》，曹锡华P_{200}）它的深刻性是a_C的表达式，因为前半部分有更一般的结论。本文想用偏序集上Mobius函数的结果，在假定前半部分结成立的前提下，推出a_C的表达式。

设G为有限群，令$\mathcal{C}_G$＝{C｜C为G的循环子群}，则$\mathcal{C}_G$在“包含于”关系下形成偏序集，令其Mobius函数为$\bar{\mu}_G$，我们证明：

$C_1，C_2\in\mathcal{C}_G\ C_1\ \ C_2$ 则 $\bar{\mu}_G(C_1，C_2)=\mu(\frac{|C_2|}{|C_1|})=\mu[C_2:C_1]$，

μ为经典Mobis函数。证明是常规的：首先由群和商群的基本定理知有偏序集同构：$[C_1，C_2]\cong\mathcal{C}_{C_2/C_1}$（$[C_1\ C_2]$为$\mathcal{C}_G$中所

有的 C: $C_1 \sqsubseteq C_2$ 构成的“线段”）其次当G为n阶循环群时，$\mathcal{L}_\varphi$与$K=\{1, 2, \cdots n\}$关于整除形成的偏序集自然同构，而K的Mobius函数为经典Mobius函数于是我们有：

$$\overline{u}_G(C_1, C_2) = \overline{\mu}_{C_1/G}(1, C_2/C_1) = \mu(1, |C_2/C_1|)$$

$$= u\left(\left|\frac{C_2}{C_1}\right|\right) = \mu[C_2 : C_1].$$

引用“曹”书中引理“设（p v）为G的以θ为特征标的有理表示，并设〈x〉与〈y〉在G中共轭，则$\theta(x) = \theta(y)$”，我们可得如下“提升”引理：设θ如上，则通过如下方式可定义$\mathcal{L}_\varphi$上的一个函数T_θ：$T_\theta(\langle x\rangle) = \theta(x)$。

下面来理解a_C：在假设$\varphi = a_C 1_C^G$前提下，由1_C^G的定义可得

$\varphi(x) = \sum_{x \in C \in \mathcal{L}_\varphi} [G:C] a_C$（详见“曹”书$P_{101}$）。令$F_\varphi(C) = [G:C] a_C$

由刚才T_φ的定义可得：$T_\varphi(\langle x\rangle) = \sum_{\langle x\rangle \sqsubseteq C \in \mathcal{L}_\varphi} F_\varphi(C)$，由偏序集$\mathcal{L}_\varphi$上的Mobius反演公式即得 $F_\varphi(C) = \sum_{C \sqsubseteq C^*} \overline{u}_G(C, C^*) T_\varphi(C^*)$

$$= \sum_{C \sqsubseteq C^*} \overline{u}[C^* : C]\varphi(z^*)$$

其中 $T_\varphi(C^*) = \varphi(z^*)$，$z^*$为$C^*$任一生成元。于是我们得到$a_C$的Artin定理中表达式。不仅如此我们还证明了$a_C$的唯一性。这一点并非显然。

本文作者感谢 章璞 老师的启发。

今天我们是虔诚的解释者，明天我们当为一发而不可收的创造者。

* * * * *
* 一题一议 *
* * * * *

* * * * * * * *
* 蛙 鸣 *
* 第 48 期 *
* * * * * * * *

〔研究简报〕

周期3蕴含混沌吗?

宁波大学数学系90级 丁义明

摘要：本文讨论了一个不连续线段自映射：

$$\psi_\lambda:\begin{cases} X_{n+1}=\lambda X_n & X_n\in[a,a^2) \\ X_{n+1}=\sqrt{X_n} & X_n\in[a^2,\lambda a^2) \\ X_{n+1}=0 & \text{其它} \end{cases}$$

证明如下定理：

定理 1）若$0\leq\lambda<1$，则存在$N>0$，$n>N$，$X_n=0$。

2）给定$\lambda\geq1$，ψ_λ有一条稳定的周期轨，周期点的个数由λ决定。

3）$n\in N$，存在λ，使ψ_λ有n－周期轨。

4）随着λ的变化，ψ_λ不是混沌的。

对一维迭代动力系统ψ：$I\to I$（即：ψ为线段自映射）的研究，在ψ为连续的情况下已经得到了激动人心的结果。[1] [2] [3]

但不连续线段自映射具有较连续情况更复杂的动力性态。一些属于连续线段自映射的著明结果，如Sarkvskii定理等，在不连续情性不再成立，因此，Li—Yorke的“Periodthreeimplieschoas”有一定的局限性。本文给出一个简单的不连续线段自映射的例子，讨论了它的动力性态。

定义0（Devaney）设（V，d）为紧度量空间，f：V→V，如果f满足以下条件，称f在V上混沌：

1）存在$\delta>0$，使对$x\in V$的任意邻域$M\subset V$，存在$y\in M$及$n\geq 0$，适合$d(f^n(x),f^n(y))>\delta$；

2）任意开集P，$Q\subset V$，存在$k\geq 0$，使$f^k(p)\cap Q\neq\varnothing$；

3）f的周期点在V中稠密

定义1　在映射　$\psi:\begin{cases}X_{n+1}=f(X_n) & X_n\in[a,b)\\ X_{n+1}=g(X_n) & X_n\in[b,c)\\ X_{n+1}=0 & \text{其它}\end{cases}$

中，b称为ψ的基本临界点，所有能被ψ映成b的点，都称为ψ的临界点。

引理一　$(x_1x_2)\subset[a,\lambda a)$，则$(x_1,x_2)$中无ψ的临界点中充要条件是：任意$k\in N$，$\psi(x_1)<\psi(x_2)$；

证明简单略。

定义2　ψ：I→I，如果任意$x\in I$，有$\psi(x)\in I$且存在唯一的$y\in I$使$\psi(y)=x$，称I为ψ的域。

定义3　ψ的域为I，映射F称为ψ的左逆映射，如果任意$x\in I$，有$F\circ\psi(x)=x$。

显然有：

引理二　F为ψ的左逆映射，则$\{F^k(b)\}$给出ψ的所有

临界点。其中b为ψ的基本临界点。

定义4　设f：A→A及g：B→B为两个映射。如果存在一同胚h同胚h：A→B使得h o f＝g o h，则称r和g是拓扑共扼的，h被称为拓扑共扼。

对于拓扑共扼的映射，其动力性态是完全等价的。

引理三　1）λ＞a，ψ与T是拓扑共扼的，其中

$$T:\quad \begin{cases} t_{n+1}=1+t_n & t_n\in\left(\dfrac{\ln a}{\ln\lambda},\ \dfrac{2\ln a}{\ln\lambda}\right) \\ t_{n+1}=1/2\times t_n & t_n\in\left(\dfrac{2\ln a}{\ln\lambda},\ 1+\dfrac{2\ln a}{\ln\lambda}\right) \\ t_{n+1}=0 & \text{其它} \end{cases}$$

2）1＜λ＜a，ψ与P是拓扑共扼的，其中

$$P:\quad \begin{cases} P_{n+1}=\dfrac{\ln\lambda}{\ln a}+P_n & P_n\in(1,\ 2) \\ P_{n+1}=1/2\times P_n & P_n\in\left(2,\ 2+\dfrac{\ln\lambda}{\ln a}\right) \\ P_{n+1}=0 & \text{其它} \end{cases}$$

证　1）取h：$(a,\ \lambda_a)\to\left(\dfrac{\ln\lambda}{\ln a},\ 1+\dfrac{2\ln\lambda}{\ln a}\right)$，

$h(x)=\dfrac{\ln x}{\ln\lambda}$ 即得

2）取h：$(a,\ \lambda a)\to\left(1,\ 2+\dfrac{\ln\lambda}{\ln a}\right)$，

$h(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$ 即得

引理四

$$F:\begin{cases} X_{n+1}=2\times X_n & X_n\in(t,\ 1+t) \\ X_{n+1}=X_n^{-1} & X_n\in(1+t,\ 2+2t) \\ X_{n+1}=0 & \text{其 它} \end{cases}$$

1）若初值 X_0 使 X_0/t 为有理数，则 $\{X_n\}$ 从某个 n 起为周期序列。

2）若初值 X_0 使 X_0/t 为无理数，则 $\{X_n\}$ 在 $(t,\ 2+2t)$ 中稠秘。

证明把 X_0，X_n，t 表示成二进制数，F 所形成的动力系统（子系统）与符号动力系统拓扑共轭。

引理五 1）F_1 是 T 的左逆映射，而且 T 仅有有限个临界点，其中

$$F_1:\begin{cases} X_{n+1}=2X_n & X_n\in\left(\dfrac{\ln a}{\ln\lambda},\ 1\right) \\ X_{n+1}=X_{n-1} & X_n\in\left(1,\ 1+\dfrac{\ln a}{\ln\lambda}\right) \\ X_{n+1}=0 & \text{其 它} \end{cases}$$

2）Q 是 P 的左逆映射，而且 P 仅有有限个临界点，其中

$$Q:\begin{cases} X_{n+1}=2X_n & X_n\in\left(1,\ 1+\dfrac{\ln\lambda}{\ln a}\right) \\ X_{n+1}=X_n- & X_n\in\left(1+\dfrac{\ln\lambda}{\ln a},\ 2+\dfrac{\ln\lambda}{\ln a}\right) \\ X_{n+1}=0 & \text{其 它} \end{cases}$$

证明左逆映射不难验证，考虑 $\left\{\left(F_1^k\left(\dfrac{2\ln a}{\ln a}\right)\right\}\right.$，$\{Q^k(2)\}$ 由引理二，引理四即可推出。

定理的证明：

1）这是平凡的；

2）分三种情况：

a）$a \leq \lambda \leq a^2$，考虑映射 $g = \psi_\lambda \circ \psi_\lambda$，则 g：$(a, a^2) \to (a, a^2)$，$g(x) = \sqrt{\lambda x}$ 在 (a, a^2) 中唯一的稳定不动点，于是 λ^3，λ^2 为 ψ_λ 的稳定的 2－周期轨；

b）若 $\lambda > a^2$，先讨论 T 的动力性态，由引理二及引理四，假设 T 的 k+1 个临界点为：

$b_m = F^m\left(\frac{2\ln a}{\ln\lambda}\right)$，$m = 0, 1, \cdots, k$ 则 $b_k < \frac{\ln a}{\ln\lambda}$，$1 < b_{k-1} < \dfrac{}{1+\frac{\ln a}{\ln\lambda}}$

取 $b_i = \min\{b_0, b_1, \cdots, b_{k-1}\}$ 则 (b_k, b_i) 中无 T 的临界点，由引理一，用 F_1 作用 (b_k, b_i)，有 $(b_k, b_i) \to (b_{k-1}, b_{i-1}) \to (b_{k-2}, b_{i-2}) \to (b_{k-i+1}, b_1) \to (b_{k-i}, b_0) \to (b_{k-i-1}, 1+b_0) \to (b_{k-i-2}, (1+b_0)/2) \subset (b_{k-i-2}, b_{k-1}) \to (b_{k-i-3}, b_{k-2}) \to \cdots (b_1, b_{i+2}) \to (b_0, b_{i+1}) \to (b_0/2, b_i) \subset (b_k, b_i)$。

即 $T^K(b_k, b_i) \subset (b_k, b_i)$，由于 T 作用 (b_k, b_i) 是平移或压缩的一半的过程，从而在 (b_k, b_i) 中有唯一的不动点，由 ψ_λ 与 T 的拓扑共轭关系知 ψ_λ 在 $(a, \lambda a^2)$ 上有一条稳定的 k－周期轨。

欲求 ψ_λ 的周期点的个数，只需用 F_1 作用 $\frac{2\ln a}{\ln\lambda}$ 使 $F_1^n\left(\frac{2\ln a}{\ln\lambda}\right) < \frac{\ln a}{\ln\lambda}$

成立的最小自然数k即为所求。

c）$1<\lambda<a$，考虑P类似b）设P的k+1个临界点为 $b_m=Q^m(2)$ $m=0,1,\cdots,k$ 取 $b_i=\max\{b_0,b_1,\cdots\cdots,b_{k-1}\}$。则 ψ_λ 在 $(a,\lambda\cdot a^2)$ 中有一条稳定的k－周期轨。

3）取 $\lambda=a^{2^n+1}$，令 $g=\psi_\lambda^{n+1}$ 则 $g:(a,a^2)\to(a,a^2)$

$g(x)=(a^{2^n+1}x)^{2^n}$，当 $n>1$ 时，它有唯一的稳定不动点——

$x=\dfrac{2^n+1}{a^{2^n-1}}$，于是，$\psi$ 有稳定的 $n+1$－周期轨。当 $\lambda=1$ 时，

ψ_λ 有稳定的不动点。

4）根据前面的讨论，ψ 仅有有限个临界点，因此，存在 (X_1,X_2) 使 (X_1,X_2) 中无 ψ_λ 的临界点，由引理一及 ii）知 $\lim\limits_{n\to\infty}(\psi^n(X_1)-\psi^n(x_2))=0$，不满足定义0中的1），从而不是混沌的。

参考文献

〔1〕 张景中，熊金城，《函数迭代与一唯动力系统》，成都：四川教育出版社，1992。

〔2〕 熊金城，线段自映射的动力体系：非游荡集，拓扑熵和混乱。《数学进展》1998年第1期，1－11。

〔3〕 周作领，一维动力系统，《数学季刊》，1988年第3期，42－64。

〔4〕 卢侃、孙建华等编译，《混沌动力学》，上海翻译出版公司，1990。

* * * * *
一题一议
* * * * *

* * * * * *
蛙　　鸣
第48期
* * * * * *

〔研究简报〕

$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 渐近直线的一些讨论

911　张　林

本文主要讨论方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$………（*）的渐近线问题。在此之前，先总的考虑其积分曲线的几何性质，这有助于以后命题的推想。

一、总体的任意性

这里的任意性指对于一般的方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$，其积分曲线的几何性质可以是很任意的，这体现于下述命题。

（A）区间上上⊂互不相交的n个曲线族$y=f_1(x_1c_1)$，…$y=f_n(x_1c_n)$……（1），其中c_i变化范围为$(\alpha_{2i-1},\alpha_{2i}]$，$f_i$对X连续可微$f_i$及$f_{ix}$对$c_i$连续单调 $i=1,\cdots n$ 则于连续函数$F(x,y)$，使（1）中每条曲线皆是$\frac{dy}{dx}=F(x,y)$的积分曲线。

证明：由各族互不相交及f_i 对 c_i的连续单调，不防设

$f_1(x, \alpha_1) > f_1(x, \alpha_2) > f_2(x, \alpha_3) > f_2(x, \alpha_4) > \cdots > f_n(x, \alpha_{2n})$

适当变换 c_i，不防设 $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_{2n}$。

$$
令P(x, c)=\begin{cases}
f_i(x, c) & C\in[\alpha_{2i-1}, \alpha_{2i}]时 \\
\dfrac{C-\alpha_{2i+1}}{\alpha_{2i}-\alpha_{2i+1}} f_i(x, \alpha_{2i}) + \dfrac{C-\alpha_{2i}}{\alpha_{2i+1}-\alpha_{2i}} f_{i+1}(x, \alpha_{2i+1}) & C\in(\alpha_{2i+1}, \alpha_{2i+1})时 \\
f_1(x, \alpha_1)+C-\alpha_1 & C>\alpha_1 \\
f_n(x, \alpha_{2n})+\alpha_{2n}-C, & C<\alpha_{2n}
\end{cases}
$$

则不难证明 $P(x, c)$ 对 x 连续可微．P 及 P_x 对 C 连续．单调，且过 $I\times R$ 上 任一点 (x_1, y_1) 于唯一的 c_0 满足 $y_1=P(x_1, c_0)$。

定义 $F(x, y)$ 如 F：$\forall (x_1, y_1)\in I\times R$，设 c_0 由上述决定 令 $F(x_1, y_1)=(P(x, c_0))'_x|_{x=x_1}$ 则 $y=p(x, c)$ 是方程 $\dfrac{dy}{dx}=F(x, y)$ 的通解，只须再证 F 的连续性。

$\because |F(x, y)-F(x_1, y_1)|=|P'_x(x, C(x, y))-P'_x(x_1, y_1)|$
$\leq |P'_x(x, C(x, y))-P'_x(x_1, C(x, y))|+|P'_x(x_1, C(x, y))-P'_x(x_1, C(x_1, y_1))|$，$(x, y)\to(x_1, y_1)$ 时，$\because P$ 对 x 连续可微，$\therefore$ 上式第一项 $\to 0$。又 $\because P'_x$ 对 C 连续，$\therefore$ 第二项 $\to 0$

$\therefore \lim\limits_{(x, y)\to(x_1, y_1)} F(x, y)=F(x_1, y_1)$ 得证

（A）说明了一般的连续方程内，其积分曲线没有特定的几何性质，但有些特殊的方程则在几何在表现出明显的特性，例如：非平凡的 $\dfrac{dy}{dx}=F\left(\dfrac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ 的所有积分曲线互为相似。实际上，熟知原方程可通过坐标平移，令 $\begin{cases}x=\xi+\alpha \\ y=\eta+\beta\end{cases}$（$\alpha$, β 为适当实数），

而化为零次齐次型 $\frac{d\eta}{d\xi}=F\left(\frac{a\xi+b\eta}{d\xi+e\eta}\right)$ 这在极坐标上看（令 $\xi=r\cos\theta$，$\eta=\gamma\sin\theta$）为：

$$\frac{d\gamma}{d\theta}=\frac{\gamma\left(F\left(\frac{a\cos\theta+b\sin\theta}{d\cos\theta+e\sin\theta}\right)\sin\theta+\cos\theta\right)}{F\left(\frac{a\cos\theta+b\sin\theta}{d\cos\theta+e\sin\theta}\right)\cos\theta-\sin\theta}=\gamma F_1(\theta)$$

其通解便具有形式 $\gamma=CG(\theta)$。C为任意常数。这是一族同心曲线，在几何上相似。

给出了方程（*）其单调性和凸凹性等一些形状很容易判断，如令 $f(x,y)>0$ 便得其积分曲线单增的区域，等等。下面对其渐近线加以讨论。

二、渐近线的寻找

$y=kx+b$ 称为（*）的一条渐近线，若于（*）的解 $y=\varphi(x)$ $x\to\infty$ 时 $|\varphi(x)-kx-b|\searrow 0$ 而 $x=a$ 称为其渐近线，若 解 $y=\varphi(x)$，$x\to\infty$ 时 $\varphi(x)$ 单调趋于∞。

下面命题提供了寻找渐近线的一个方法

（B）$f(x,y)$ 在充分远处对 y Lipschitz 连续，i）若 $y=kx+b$ 是(*)的一条渐近线，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x,kx+b)$ 若收敛必敛于K，ii）若 $x=a$ 是(*)的渐近线，则 $\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{f(a,y)}$ 若收敛必敛于0。

证明 i）∵ $y=kx+b$ 是渐近线，∴ 解 $y=\varphi(x)$，$\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-kx-b)=0$，．

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\varphi(x)-kx-b}{x}+\frac{kx+b}{x}\right)=0+k=k$$

$\because \forall\varepsilon>0$ X 足够大时有 $|\varphi(x)-kx-b|<\frac{\varepsilon}{L}$，L 为 Lipschitz 常数此时有 $|f(x,kx+b)-f(x,\varphi)|<L|\varphi-kx-b|<\varepsilon$。

$\therefore \lim_{x\to\infty}\varphi'(x)=\lim_{x\to\infty}f(x,\varphi)=\lim_{x\to\infty}f(x,kx+b)$ 存在，此时必有 $\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\varphi'(x)$，$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x,kx+b)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x}=k$$

对于 ii 将（*）写成 $\frac{dx}{f(x,y)}=\frac{1}{f(x,y)}$，由 i）的结论便得 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(a,y)}=0$ 得证

因此，只要满足极限的存在性，解方程 $\lim_{x\to\infty}f(x,kx+b)=k$ 及 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(a,y)}=0$ 可以求出所有可能的渐近线及趋近方向（$+\infty$ 或 $-\infty$）来。但其解并不一定都是渐近线。反例如 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$。

三、渐近线的检验

对于直线 $y=kx+b$，在坐标旋转 $\begin{cases}x=u\cos\theta-v\sin\theta\\ y=u\sin\theta+v\cos\theta\end{cases}$ $(\theta=\operatorname{arctg}k)$

下（*）变为 $$\frac{dv}{du}=\frac{F(u\cos\theta-v\sin\theta,\ u\sin\theta+v\cos\theta)-k}{KF(u\cos\theta-v\sin\theta,\ u\sin\theta+v\cos\theta)+1}$$。

而$y=kx+b$ 成为水平线$v=b\cos\theta$，因此，为了检验（B）的解，面仅讨论$y=b$型。首先有：

（C）若（*）的Cauchy问题解存在唯一f连续则其有相同趋近方向的所有水平渐近线组成的点集G是闭集。

证明 $g\in \bar{G}$，有G的点集$(g_i)\to g$。设$l, l_1 l_2\cdots$ 分别是过$g, g_1, g_2,\cdots$ 的水平线。$\because g_i\in G$，$\therefore$有(*)的解 $\varphi_i(x)\to l_i$。由Cauchy解的存在唯一条件可知所有$\varphi_i(x)$互不相交且位置关系对应于各l_i的位置关系，$\because l_i\to l$ $\therefore$有$\varphi_i(x)\to\varphi(x)$，不难证明$\varphi(x)$以$l$为渐近线，再设$y=\psi(x)$是过$(x_0, \varphi(x_0))$的积分曲线，若$\psi\neq\varphi$，考虑$\psi$与$\varphi$之间的一点$t$，由延拓定理及$\varphi_i\to\varphi$便得矛盾，$\therefore\varphi(x)=\psi(x)$，$y=\varphi(x)$是积分曲线，从而$l$是(*)的渐近线，$g\in G$。 $\therefore G$是闭集。

下面考虑有解$\varphi(x)\nearrow b(x\to+\infty)$的可能性（其它情形类似）

（D）设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x, b)=0$且$f(x, b)$不恒为0，则：

i）若$y\in(b', b)$时$f(x, y)\geq T(x)>0$对足够大的x均成立且$\int_{x_0}^{+\infty}T(x)dx$发散，则不存在解$\varphi(x)\nearrow b$，特别，若$y\in[b', b]$ x很大时$f(x, y)>0$，$\int_{x_0}^{+\infty}f(x, y)dx$发散，且f对y单调，则没有解$\varphi(x)\nearrow b$

ii）若$y\in(b', b)$时 $T(x)\geq f(x, y)>0$ 对足够大的x均成立且$\int_{x_0}^{+\infty}T(x)dx$收敛，则(*)有渐近线$y=c$，$c\in(b', b)$，特别，若(*)又满足（c）中条件，则$\forall c\in[b', b]$，$y=c$ 是渐近线。

证明：i）若有$\varphi(x)\nearrow b$，则x很大时$b'<\varphi(x)<b$，此时

$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))\geq T(x)>0$积分得$\varphi(x)\geq\varphi(x_0)+\int_{x_0}^{x}T(x)dx$，

令$x\to+\infty$便得矛盾

ii）取x_0充分大使$\int_{x_0}^{+\infty}T(x)dx=b_1<b-b'$，再取

$b'<y_0<b-b_1$，设$\varphi(x)$为（*）之过(x_0,y_0)的解 ∵在x_0附近$\varphi'(x)=f(x,\varphi)>0$，$\varphi$单增。若有$x_1$，使$\varphi(x_1)=y_0+b_1$，则$x\in[x_0,x_1]$时$\varphi(x)\in[y_0,y_0+b_1]\subset(b',b)$，有$T(x)\geq f(x,\varphi)=\varphi'\to\varphi(x)\leq y_0+\int_{x_0}^{x}T(x)dx<y_0+\int_{x_0}^{+\infty}T(x)dx=y_0+b_1$，与$\varphi(x_1)=y_0+b_1$矛盾。∴恒有$\varphi(x)<y_0+b_1$即单调有界。设$\varphi(x)\nearrow c$，由上述得$b'<y_0<c\leq y_0+b_1<b$。另外ii）显然有与i）同样的特殊情形。

若（*）又满足（c）中条件，由上面结论知∀区间$I\subseteq(b',b)$内都有c使$y=c$为渐近线。再由闭集性质便得所证。

* * * * *
* 一题一议 *
* * * * *

* * * * * *
* 蛙　鸣 *
* 第48期 *
* * * * * *

〔翻译报告〕

Hilbert矩阵的处理技巧和结论

901　王钧源　编译

本文试图总结无穷Hilbert矩阵A及其n阶顺序主子式A_n的

一些结论，或许这都是你希望了解的。其中：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \quad A_n=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ & \cdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}$$

很自然地问：从自然数的（倒数）的如此自然的排列中能得到哪些自然的结论呢？本文提出了十个具体的问题（而不是定理），试图在较广的意义上展示“数学的核心”，所有的解答都是初等的（仅需基本的线性代数和算子理论而不用谱定理），但其中的处理技巧或许让人震惊。

Hilbert 矩阵在数学的几个分支的结构理论中都扮演着重要的角色，的确，它是算子理论中许多不凡结果的最生动的例子之一，（参〔1〕，〔4〕，〔7〕，本文的十个问题就展示了它各方面的具体的，个别的性质。这些问题大部分看起来较新，但它们的变形或加强已散见于文献中。本文主要致力于问题的初等解答而不是最简解答。感兴趣的读者或许会发现非初等解答并能得到更多的结论。

首先作几点说明。“矩阵”是指复有限维或无限维方阵（或实的）。I 表单位矩阵。$T=(t_{ij})_{i,j}$ 是正定的（译者注：如我们所言的半正定），记为 $T\geq 0$ $\|T\|$ 表示 Hilbert 空间算子范数。即算子 $T: l^2\to l^2$ 有矩阵表示 (t_{ij})，则 $\|T\|=\sup\{$

$(\sum_i |\sum_j t_{ij}\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}} | \Sigma|\alpha_j|^2 \leq 1\}$ 并且有一基本事实：如果 $T=(t_{ij})$ 和 $S=(s_{ij})$ 满足 $0\leq s_{ij}\leq t_{ij}$（ i,j），则 $\|S\|\leq\|T\|$

I，可逆性　通过计算，$A_1^{-1}=1$

$$A_2^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -6\\ -6 & 12\end{bmatrix} \qquad A_3^{-1}=\begin{bmatrix}9 & -36 & 30\\ -36 & 192 & -180\\ 30 & -180 & 180\end{bmatrix}$$

由此可见，一般情况似乎不可解决。

〔问题〕写出 A_n^{-1} 的明确表达式。

可能写出你害怕被问到的具有提示作用：（a）A_n 的每个元素都是自然数的倒数，相应 A_n^{-1} 为整数元素的矩阵吗？（b）特别地，为什么 $\det A_n$ 是自然数的倒数？（c）由于 A_n 的每个元是正实数，能否推出 A_n^{-1} 是形如（β_{ij}），其中 $(-1)^{i+j}\beta_{ij}\geq 0$ 对任意 i，j 成立。（d）由于 A_n 为 Hankel 矩阵（即 $\alpha_{ij}=\alpha_{pq}$ 当 $i+j=p+q$ 时），A_n^{-1} 从总体上应有什么形式？

〔Ⅱ 形式逆〕

此处，$\sum_i$ 表序列和（不要求绝对收敛）。有关无穷矩阵 $T=(t_{ij})$ 有三个本质的性质：T 是形式一对一的，如果 $\sum_j t_{ij}\alpha_j=0$（$\forall i$）$\Longleftrightarrow \alpha_j=0$（$\forall j$）；如果 $\forall(\beta_i)\ \exists\ (\alpha_j)$ 使得 $\sum_j t_{ij}\alpha_j=\beta_i$（$\forall i$）；称 T 是形式在上的 $S=(s_{ij})$ 称为 T 的形式逆，如果

$$\sum_k t_{ik}s_{kj}=\sum_k s_{ik}t_{kj}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

由于无穷矩阵的形式乘积是不满足结合律故这三个性质间无必然关系。

〔问题〕(1) A是形式一对一的吗?

(2) A是形式在上的吗?

(3) A有形式逆吗?

〔Ⅲ强正定性〕如果$T=[t_{ij}]$为满足$t_{ij}\geq 0$的实矩阵。用$T^{(\gamma)}$表示矩阵$[t_{ij}^{\gamma}]$。

〔问题〕证明:$A_n^{(\gamma)}\geq 0 \quad \gamma\in(0,\infty)$。

注意:一般地"$T\geq 0$"不能推出"$T^{(\gamma)}\geq 0$"例如:

$$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}\geq 0 \quad 但 T^{(\frac{1}{2})}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&\sqrt{2}&1\\0&1&1\end{bmatrix}\ngeq 0$$

Ⅳ因子分解

〔问题〕 写出$A=BB^*$中B的具体形式。B是下三角阵。(注意这样的B是唯一的。并且B的对角元是正实数)。

三角分解有几个好处:

(a)记B_n为B的n阶顺序主子式、则$A_n=B_nB_n^*$这样用归纳法寻找B是允许的。

(b)另外,$\det A_n=|\det B_n|^2$完全被B的对角元所决定(参Ⅰ(b))

(c)由于结构易于处理。每个无零对角元的下三角无穷矩阵通常都有下三角的形式逆。令C为B的形式逆则表达式$C^*C=A^{-1}$在下述情形下有意义:如果$Av=\omega$,则 $C^*(c\omega)=v$ 即使形式矩阵乘积C^*C没有定义。形式矩阵乘积$C\omega$和$C^*(c\omega)$仍可算出。

〔Ⅴ友阵〕 Hilbert矩阵的"忠实"友阵是指.

$$L=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \qquad L_n=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

其元素中$\frac{1}{K}$呈反L形排列。

注意到L和L_n也是正整数倒数的一种排列。除了外表相似，L（或L_n）具有A（或A_n）前述的各种精彩性质。注意，L有三角分解CC^* C是无穷Cesa'ro矩阵

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

〔问题〕（1）$I-(I-C)(I-C)^* \geq 0$

（2）证明：$\| A \| \leq \| L \| \leq 4$

此问题提供了证明A为有界算子的最简洁初等的方法。

〔VI 遗传性〕离A"最近的子阵"是指：

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & & \\ \frac{1}{4} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

在文献中A'同样称作Hilbert 矩阵。因为A'是有所有的遗传性。所以A'是无愧于这个称呼的。

〔问题〕证明：A与A'酉等价（即 酉算子U，$A = U^* A' U$）。

这的确让人感到吃惊：(a) A'每一元对应严格小于A的每一元；(b) A'是A划掉第一行（或列）后余下的部分，但A'仍与A酉等价。

〔VII 紧摄动〕

删去A的前p_1行和p_2列后，就得到无穷Hankel矩阵：

$$A(q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{q+1} & \frac{1}{q+2} & \frac{1}{q+3} & \cdots \\ \frac{1}{q+2} & \frac{1}{q+3} & & \\ \frac{1}{q+3} & & & \\ \vdots & & & \end{bmatrix} \quad q = p_1 + p_2$$

特别，$A(0) = A$，$A(1) = A'$。

设$T = (t_{ij})_{1 \le i, j < \infty}$，$T_n = (\alpha_{ij})_{1 \le i, j < \infty}$ 其中

$$a_{ij}=\begin{cases} t_{ij} & i\leq n \text{ 且 } j\leq n \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

作为等价定义之一。T是紧的，如果 $\lim_{n\to\infty}\|T-T_n\|=0$ T是迹类算子，如果 $T_\gamma((T^*T)^{\frac{1}{2}})<\infty$。

{迹类算子}⊂{紧算子}⊂{有界算子}是熟知的结论。

〔问题〕(1)证明：A不是紧算子

(2)证明：A－A(q)是迹类算子。

由此说明这些子阵是本质相同的（即彼此间差一紧算子）

〔Ⅶ Euler公式〕 $\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$（Euler公式）

一个可列有序集Γ称作Euler向量是指：Γ作为无序集时与{0}∪{$\frac{1}{k}$ | k∈Z→{0}}相同，并且每个非零元$\frac{1}{k}$在Γ中恰出现三次。由Euler公式立即知，每个Euler向量的l^2—范数为π。其次，矩阵T_1称为T_0的延拓，如果T_1能写成$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T_0 \end{bmatrix}$的形式。换句话说，如果$X_0$是Hilbert空间$X_1$子空间，P是$X_1$到$X_0$上的正交投影，如果$T_1: X_1\to X_1$，$T_0: X_0\to X_0$满足 $PT_1|_{X_0}=T_0$，则T_1称作T_0的延拓。

〔问题〕延拓A（或A'）到实对称阵Γ使得T的每一列向量是Euler向量，并且任意两列向量正交。

由此，$T^2=\pi^2 I$，并且$\|T\|=\pi$，故$\|A\|\leq\|T\|=\pi$。

〔Ⅸ 还是π〕A_n的一个"近亲"是：

$$Z_n=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & 0 \\ \frac{1}{3} & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ \frac{1}{n} & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

类似，Z_∞应是A吗？（还是有争议的呢？）不管怎么说，它们[illegible]之间有关系 $\|A\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|Z_n\|$

〔问题〕（1）证明：$\pi = \lim\limits_{k\to\infty}\{(1k)^{-\frac{1}{2}} + (2(k-1))^{-\frac{1}{2}} + \cdots$

$$+ (k\cdot 1)^{-\frac{1}{2}}\}$$

（2）用（1）或其它证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Z_n\| \geq \pi$

由Ⅷ、Ⅸ立即得到一个令人兴奋的事实：$\|A\|=\pi$。

〔X 两个自然的延拓〕A是"单向无限Hankel矩阵"，对应，还有一族"双向无限Hankel矩阵"，形式如下：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \\ \hline a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \\ & & \vdots & \end{array}\right]$$

形如这样的两个矩阵都是A的自然延拓：第一个用$A^{\#}$表示，其中

$$a_k=\begin{cases} 0 & k=0 \\ \frac{1}{k} & k\neq 0 \end{cases}$$

另一个用 A^+ 表示其中 $a_k=\begin{cases}0 & k\le 0\\ \frac{1}{k} & k>0\end{cases}$

〔问题〕:(1) 证明: $\|A^\#\|=\pi$

:(2) 证明: $\|A^+\|=\infty$

由(1)再次得到 $\|A\|\le\|A^\#\|=\pi$ 或许这是证明 $\|A\|\le\pi$ (参V, VII 中的问题)

(1)和(2)的联系展示了一个相当惊奇的事实: 虽然 A^+ 是 $A^\#$ 的右下角部分。但 A^+ 无界而 $A^\#$ 是有界的。等价地, 重写 $A^\#$, A^+ 如下:

$$A^\#=\begin{bmatrix}-A & B^* \\ B & A\end{bmatrix} \qquad A^+=\begin{bmatrix}0 & B_0^* \\ B_0 & A\end{bmatrix}$$

其中 B 和 B_0 是单向无限 Toeplitz 矩阵:

$$B=\begin{bmatrix}0 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix} \qquad B_0=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}$$

由此推出 $\|B\|\le\|A^\#\|<\infty$ 且 $\|B_0\|=\|A^+\|=\infty$ 且 B_0 是 B 的右下角部分。

解答和注释

〔I 解答〕令 $\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}(i+j-1)\binom{n+i-1}{n-j}\binom{n+j-1}{n-i}\binom{i+j-2}{i-1}^2$

用数字归纳法（对 i，对 j 或对 n），通过繁重的计算可证明

$A_n^{-1}= \alpha_{ij}$

利用事实：

$$\det\left(\left[\frac{1}{x_i+y_j}\right]_{1\leq i,\, j\leq n}\right)=\frac{\pi_{j>i}\left((x_j-x_i)(y_j-y_i)\right)}{\pi_{i,\, j}(x_i+y_j)}$$

（参〔6，p92 问题3〕）会容易一些。令 $x_i=i-1$，$y_j=j$。

立即得：$\det A_n=\dfrac{\{1!\ 2!\cdots(n-1)!\}^4}{1!\ 2!\cdots(2n-1)!}$ 类似。所有 A_n 的余子式都可明确写出来。由此推出 $A_n^{-1}= a_{ij}$。

注：此问题的解答已求出了很多年，上述解答已在〔9〕中出现，其他有关的计算参〔13〕。

〔Ⅱ解答〕（1）一些观察可以减轻冗长的计算：

（a）如 A 零化一个级数（0，…，0，1，ν_1，ν_2，…），则 $1<|\nu_1|+|\nu_2|+\cdots$

（b）如 $\bar{A}$ 零化一个级数（α_1，α_1，α_3，…），则 A 也零化（0，α_1，$\dfrac{\alpha_2}{2}$，$\dfrac{\alpha_3}{3}$，…）

（c）如 A 零化一非平凡级数，则 A 也零化一非平凡 $1'$ 一级数。

（d）如 A 零化一个级数（0，…，0，1，β_1，β_2，…）其中为第一个非零元在第 P 个位置，则 A 也零化一级数（0，…，0，1，ν_1，ν_2，…），1 是第一个非零元，在第 p+1 个位置，并且 $|\nu_j|\leq p|\beta_i|/_{p+1}$（$\forall j$）

（a）显然，（b）是由于 $0=\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j/(i+j-1)$（$\forall i\in N$）

$$\Rightarrow 0=\frac{1}{i}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j/j-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j/(i+j)\right]=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j/(j(i+j))$$

$=\sum_{j=2}^{\infty}\alpha_{j-1}/((j-1)(i+j-1))$ 为得到（c）。运用（b）三次，即A如零化（α_1，α_2，α_3，…）则A也零化（0，0，0，$\alpha_1/(1,2,3)$，…，$\alpha_j/(j(j+1)(j+2))$，…）是l^1一级数。（d）是（b）的推论。

现在假设A不是形式一对一的。可设A零化级数（0，…，0，1，β_1，β_2，…），$|\beta_1|+|\beta_2|+\cdots<\infty$，用（b）n次，则由$|\nu_j|\le p|\beta_j|/(p+n)$当n足够大时有：

$$|\nu_1|+|\nu_2|+\cdots\le\frac{p}{n+p}(|\beta_1|+|\beta_2|+\cdots)\le 1$$

这与（a）矛盾，因此A是形式一对一的。

（2）和（3）注意到只要A映级数（α_1，α_2，α_3，…）到（1，0，0，…），则A自然零化（0，α_1，α_2，α_3，…），由于A是形式一对一的，因此级数（1，0，0，…）不在A的形式值域中。这样A当然不会有形式逆。

注：A：$l^1\to l^2$是一对一的是熟知的结论，（参〔5，定理1，pp，703—4〕通常的证明），另外，M. Rosenblum〔8〕已证明$\forall\lambda$，$\mathrm{Re}\,\lambda>0$，则$\exists$级数 $v=(\alpha_n)$ $\sum|\alpha_n|^2=\infty$满足形式等式$Av=\lambda v$

〔Ⅱ解答〕x，γ为实数，$\gamma>0$，$|x|<1$，则由

$(1-x)^{-\gamma}=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots$，其中$\alpha_0=1$，$\alpha_1=\gamma$，每一$\alpha_k$为正实数。则$(i+j-1)=ij(1-x)$，其中$x=(i-1)(j-1)/ij<1$和$(i+j-1)^{-\gamma}=i^{-\gamma}j^{-\gamma}(1-x)^{-\gamma}=\sum_k\alpha_k(i-1)^k(j-1)^k/(ij)^{\gamma+k}$

注意$\{\alpha_k(i-1)^k(j-1)^k/(ij)^{\gamma+k}\}_{i,j}$是秩为一的正定矩阵。

因此，$A_n^{(\gamma)}=[((i+j-1)^{-\gamma}]_{i,j}$ 作为正定矩阵的和也是正定的

注：特别，令 $\gamma=1$，则 $\alpha_k=1(\forall k)$，这样上述提供了 $A_n\geq 0$ 这一有名的事实的"离散"的证明。（参〔1，Section（3）〕通常的证明）。

〔Ⅳ解答〕记 $B=[\beta_{ij}]$ $\beta_{ij}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2j-1}\,((i-1)!)^2}{(i+j-1)!\,(i-j)!} & 如\ i\geq j\\ 0 & i<j\end{cases}$

用数学归纳法可知 $A=BB^*$。（理由如正文Ⅳ（a））

注：（1）B也可按如下构造，视 l^2 为有取定正交基 $\{f_1, f_2\cdots\}$ 的 $L^2[0,1]$，其中 $f_n(x)$ 是 x^{n-1} 项有正系数的 $n-1$ 次多项式。令 $T: L^2[0,1]\to L^2[0,1]$ 为连续线性映射，$T(f_n)=x^{n-1}$。然后，可以验证 B^* 恰好是 T 的矩阵表示。

（2）或许把A写作 $EXDX^*E$ 更优美。此处：

$$E=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & \frac{1}{3} & \\ & & & \ddots\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 3 & & \\ & & 5 & \\ & & & 7\end{bmatrix}\quad X=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ 1 & \frac{2}{4} & \frac{1\cdot 2}{4\cdot 5} & 0 & \\ 1 & \frac{3}{5} & \frac{2\cdot 3}{5\cdot 6} & \frac{1\cdot 2\cdot 3}{5\cdot 6\cdot 7} & \end{bmatrix}$$

虽然X，D，：$l^2\to l^2$ 是无界算子，但不难进行形式矩阵计算

$B=EXD^{\frac{1}{2}}$，$A=BB^*$

(3) B有形式逆 $[\nu_{ij}]$，$\nu_{ij}=\begin{cases}(-1)^{i+j}\sqrt{2i-1}\binom{i+j-2}{j-1}\binom{i-1}{j-1} & i\geq j;\\ 0 & i<j\end{cases}$

此结果已被J．Todd〔12〕所注意到。

〔V解答〕(1)由于 $I-(I-C)(I-C)^*$ 是具有正对角元1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…的对角算子。

(2) $\|I-C\|^2=\|(I-C)(I-C)^*\|\leq 1$，即 $\|I-C\|\leq 1$

$\|C\|\leq 2$ 其次 $\|L\|=\|CC^*\|=\|C\|^2\leq 4$

由于A的每一元为小于等于L的对应元的正实数，故 $\|A\|\leq\|L\|\leq 4$

〔VI解答〕C定义同V定义。易见C和 C^*：$l^2\to l^2$ 都是一对一的。这样，C有稠密的值域。其次，直接计算得 $CA=A'C$ 余下的证明引用下引理即可。

引理：T，S，C是满足 $CT=SC$ 的紧算子。如果T，S都是厄尔米特且C是一对一和有稠密值域的，则T与S酉等价。

证明：由极分解，有酉阵U及正定阵P使得 $C=UP$，且P是~~一对一和~~值域稠密的（参〔3，P，169〕），这样

$$P^2T=PU^*UPT=C^*CT=C^*SC=(SC)^*C=(CT)^*C=TC^*C$$

$$=TPU^*UP=TP^2$$ 由此得 $PT=TP$。

因此 $UTP=UPT=CT=SC=SUP$

由于P是一对一的且值域稠密，推出 $UT=SU$ 即 $T=U^*SU$

〔VII解答〕(1)显然，$A-A_n$ 包含一 $n\times n$ 子阵，

$$Y=\begin{bmatrix}\frac{1}{2n+1} & \frac{1}{2n+2} & \cdots & \frac{1}{3n}\\ \frac{1}{2n+2} & & & \\ \frac{1}{3n} & & \cdots & \frac{1}{4n-1}\end{bmatrix}$$

令Q为每一元都是$\frac{1}{n}$的$n\times n$矩阵。则Q是范数为1的正交投射（即$Q=Q^*=Q^2$）。由于Y的每一元都大于$\frac{Q}{4}$的对应元所以

$\|A-A_n\|\geq\|Y\|\geq\|\frac{Q}{4}\|=\frac{1}{4}$，由此得A非紧。

（2）首先注意到$A(q)\geq 0$，这是A（或A^1）是$A(q)$，q为奇（或偶）数时的延拓的推论。其次，利用Schur乘积的概念：$T=(t_{ij})$ $S=(s_{ij})$ 则Schur乘积$T*C=(t_{ij}s_{ij})$，如$T\geq 0$，$S\geq 0$，则$T*S\geq 0$是熟知的事实。

因此，$A-A(q)=\left[\frac{1}{i+j-1}-\frac{1}{q+i+j-1}\right]_{ij}=\frac{q}{(i+j-1)(q+i+j-1)}_{ij}$

$$=qA*A(q)$$

由于$A\geq 0$且$A(q)\geq 0$，因此$A-A(q)\geq 0$。

最后，注意到$T_r(A-A(q)=\sum_j\frac{q}{(2j-1)(q+2j-1)}<\infty$

从而$A-A(q)$为迹类算子

注：$A-A(q)$非紧是熟知的结论。甚至易知$A-A(q)$是Hilbert-Schmidt算子（即其每元的平方之和有限）（参〔1，Section 8〕）。

〔Ⅶ解答〕首先定义辅助函数Φ：$Z^2\to R^2$

$$\Phi(k,l)=\begin{cases}\frac{1}{k} & k\neq 0,\ l=0\\ \frac{1}{l} & k=0,\ l\neq 0\\ -\frac{1}{k} & k=l\neq 0\\ 0 & \text{其余}\end{cases}$$

有以下结论：（a）把$\Phi(Z^2)$看作有序集是一个Euler向量

(b) 如 $(k_0, l_0) \neq (0, 0)$ 固定，则 $\sum\limits_{k,l} \Phi(k, l)\Phi(k+k_0, l+l_0) = 0$

其次，令 x_0 为有正交基 $\{f_1, f_2 \cdots\}$ 的 Hilbert 空间 l^2，令 x_1 为有正交基 $\{e_\mu \mid \mu \in Z^2\}$ 的 $l^2(Z^2)$，按 f 与 e_μ（其中 $\mu = (j, 0)$）对应的方式将 x_0 嵌入 x_1，这样 A（或 A'）表示 $x_0 \to x_0$ 的算子，而 T，S 可按下列方式构造为 $x_1 \to x_1$ 的算子，定义。

$$t_{\mu\nu} = \Phi(k-1, l) \quad s_{\mu\nu} = \Phi(k, l) \quad (\mu+\nu = (k, l) \in Z^2)$$

如果 i，j 是自然数且 $\mu = (i, 0)$，$\nu = (j, 0)$ 则 $t_{\mu\nu} = \dfrac{1}{i+j-1}$，$s_{\mu\nu} = \dfrac{1}{i+j}$，即 T 为 A 的延拓，S 为 A' 的延拓，由 (a)(b) 知 T 的每一列向量是 Euler 向量且任两列向量正交（S 有类似结论）。

〔IX 解答〕(1) 注意 $\sum\limits_{j=0}^{k-1} (j(k-j))^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{k} \sum\limits_{j=0}^{k-1} (1-\dfrac{j}{k})^{-\frac{1}{2}}$

是 $(x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$ 在 $(0, 1)$ 上的 Riemann 和

$$\therefore \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} (j(k-j))^{\frac{1}{2}} = \int_0^1 (X(1-x))^{-\frac{1}{2}} dx = 2\operatorname{Arcin} 1 = \pi$$

(2) 令 v 为列向量 $(1, 2^{-\frac{1}{2}}, \cdots n^{-\frac{1}{2}})$ 则

$$\|Z_n\| \geq (Z_n v, v) / \|v\|^2 = (\sum_{k=1}^{n} \frac{an}{k}) / (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k})$$

其中 $a_k = \sum\limits_{j=0}^{k-1} (j(k-j))^{\frac{1}{2}}$，由于 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \pi$（由 (1)），因此，

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}) / (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} a_n = \pi$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} \|Z_n\| \geq \pi$。

注：此证明的主要部分已在〔11〕中出现，还有其他证明 $\|A\| = \pi$

的方法（参〔4，第九章及附录〔1〕〕〔10，第九章P，101〕）

〔X解答〕

〔引理〕设T，H是如下形式的双向无穷矩阵

$$T=\left[\begin{array}{cc|cc}
\ddots & & & \\
a_0 & a_1 & a_2 & \\
a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\
\hline
a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \\
 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \\
 & \ddots & \vdots & \ddots
\end{array}\right].\qquad
H=\left[\begin{array}{cc|cc}
 & a_{-2} & a_{-1} & a_0 \\
a_{-2} & a_{-1} & a_0 & a_1 \\
\hline
a_{-1} & a_0 & a_1 & a_2 \\
a_0 & a_1 & a_2 & \\
\iddots & & \vdots &
\end{array}\right]$$

如果$a_k\geq 0\quad\forall k\in Z$，则$\|T\|=\|H\|=\sum\limits_{-\infty}^{\infty}a_k$

证明：令s_k为与T具有同一形式且第k条对角线为1，其余为0的矩阵，显然$\|s_k\|=1$，且$\|T\|=\|\Sigma a_k s_k\|\leq\Sigma a_k$，另一方面，考虑$n\times n$ Toeplitz矩阵（T的子矩阵）

$$X=\begin{array}{lllll}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
a_{-1} & a_0 & a_1 & & \\
a_{-2} & a_{-1} & a_0 & & \\
\vdots & & & & \\
a_{-n} & & & & a_0
\end{array}$$

取$v=(1,1,\cdots,1)\in C^n$，则$\|T\|\geq(Xv,v)/\|v\|^2=a_0+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$

$$(a_1+a_{-1})+\left(1-\frac{2}{n}\right)(a_2+a_{-2})+\cdots+\frac{1}{n}(a_n+a_{-n})\to$$

$$\Sigma a_k\quad(n\to\infty)$$

因此$\|T\|\geq\Sigma a_k$，得证

类似可证H，或者令U为与H具有同一形式仅主对角元为1的酉阵。则$T=TU$，这样$\|T\|=\|H\|$

（1）$(A^{\#})^2$与引理中T具有同一形式，且$a_0=\frac{\pi^2}{3}$，

$a_k=\frac{2}{k^2}$ $(k\neq 0)$由于$A^{\#}$是厄尔米特的，因此，

$$\|A^{\#}\|^2=\|A^{\#2}\|=\sum_{-\infty}^{\infty} a_k=\pi^2$$，即$\|A^{\#}\|=\pi$

（2）由引理。

注：$\|B\|\leqslant\pi$ 且 $\|B_0\|<\infty$是相当有名的事实（参〔4，§9·6〕）。

〔本文作者〕：Man-Duen Choi（加拿大）生于香港，在多伦多大学Chandler Davis指导下获博士学位，从1973年到1976年执教于加利福利亚大学伯克利分校。此后到多伦多大学工作。其工作主要为算子代数，算子理论和多项式环。

〔参考书目〕

1. J. Barria and P.R.Halmos, Asymptotic Toep—litz operators, Trans. Amer·Math. Soc, 273(1982)—621—630。

2、A. Brawn, P. R. Halmos, and A. L. Shields, Cesaro operators, Acta Szeged, 26(1965)125-137。

3、P. R. Halmos, A Hilbert Sproblem Book, Van Nostrand, Princeton, 1967。

4、G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, Inequalities, Cambridge University press, Cambridge, 1964。

5、W. Magnus, On the spectrum of Hilbert smatrix, Amer. J. Math. 72(1950)699-704。

6, G. Polya and G. Szego, Problems and Theorems in Analysis, vol. 2, Springer-Verlag, Heidelberg, 1976.

7, S. Power, The essential spectrum of a Hankel operator with piecewise continuous symbol, Michigan Math. J. 25(1978)117-121.

8, M. Rosenblum, On the Hilbert matrix, I, Proc. Amer. Math. Soc. 9(1958)137-140.

9, I. R. Savage and E. Lukacs, Tables of inverses of finite segments of the Hilbert matrix, in Contributions to the Solutions of Systems of Linear Equations and the Determination of Eigenvalues, edited by O. Taussky, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 39, 1954, 105-108.

10, D. Sarason, Function Theory on the Unit Circle, Lecture notes for a conference at Virginia Polytechnic and State University, 1978.

11, O. Taussky, A remark concerning the characteristic roots of the finite segments of the Hilbert matrix, Quart. J. Math Oxford Ser. (2). (1949)80-83.

12, J. Todd, The Conditions of the finite Sehments of the Hilkert matrix, in Contributions to the Solutions of Systems of Linear Equations and the Determination of Eigenvalues, edited by O. Taussky, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 39, 1954, 109-116.

13、J. Todd, Computaional Pvoblems Concerning the Hilbert matrix, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B. Math. and Math. Physics, 65(1961)19-22.

* * * * *
一题一议
* *
* * * * *

* * * * * *
* 蛙　鸣 *
* 第48期 *
* * * * * *

〔新生园地〕

Hardy 不等式的一个推广

921　何斯迈

全苏奥林匹克中有这样一道题：

求证：$\sum_{i=1}^{n} i/S_i < 4\sum_{i=1}^{n} 1/a_i$

其中：$a_i>0$，$i\in N$，$S_i=a_1+a_2+\cdots+a_i$

用添项法可很方便地将不等号右端系数改进为2。再用类似方法又可作推广：

$$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+1}/S_i<(\alpha+2)\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha}/a_i$$

其中$\alpha\geq0$，a_i，S_i定义同上，以下皆同（证明略）

注意到Hardy不等式：

$$\sum_{i=1}^{n}(S_i/i)^p<\sum_{i=1}^{n}a_i^p\,[p/(p-1)]^p$$

其中$P>1$或$P<0$

与原不等式相似之处得到如下猜想：

$$\sum_{i=1}^{n}i^{\alpha+\beta}/S_i^{\beta}<f(\alpha,\beta)\sum_{i=1}^{n}i^{\alpha}/a_i^{\beta}$$

其中$f(\alpha,\beta)$待定

定理1：$\alpha\geq0$，$\beta>0$或$\alpha+\beta+1<0$时

$$f(\alpha,\beta)=\left(\frac{\alpha+\beta+1}{\beta}\right)^{\beta}$$为最佳结果

证明：取$t=\dfrac{\alpha+\beta+1}{\beta}$，$k=t^{\beta}$（易证$t>0$）

若$\beta>0$则：

$$1+\frac{t}{n(\beta+1)}\leq\left[\frac{(kt)^{\frac{1}{\beta+1}}}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha+\beta+1}{\beta+1}}\right]$$

$$\therefore\ 1+\frac{t}{n}\leq\left[\frac{(tk)^{\frac{1}{\beta+1}}}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha+\beta+1}{\beta+1}}\right]^{\beta+1}$$

$$\text{即}\ tn^{\alpha+\beta}+n^{\alpha+\beta+1}<\left[(tkn^2)^{\frac{1}{\beta+1}}+(n-1)^{\frac{\alpha+\beta+1}{\beta+1}}\right]^{\beta+1}$$

若$\alpha+\beta+1<0$，则

$$1+\frac{t}{n(\beta+1)}\geq\left[\frac{(tk)^{\frac{1}{\beta+1}}}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha+\beta+1}{\beta+1}}\right]$$

$$\therefore\ 1+\frac{t}{n}\le\left[\frac{(tk)^{\frac{1}{\beta+1}}}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{\alpha+\beta+1}{\beta+1}}\right]^{\beta+1}$$

综上所述：$tn^{\alpha+\beta}+n^{\alpha+\beta+1}<\left[(tkn^{\alpha})^{\frac{1}{\beta+1}}+(n-1)^{\frac{\alpha+\beta+1}{\beta+1}}\right]^{\beta+1}$

定义 $f(x)$ 为：

$$f(x)=\frac{S_n{}^{\beta}}{x^{\beta}}kn^{\alpha}+\frac{n(n-1)^{\alpha+\beta+1}}{(S_n-x)^{\beta}t}S_n^{\beta}-n^{\alpha+\beta}-n^{\alpha+\beta+1}/t$$

其中 $X\in(0,\ S_n)$，$n\geq 2$，$n\in N$

则上面的不等式即 $f'(x)=0$ 时 $f(x)>0$

而 $f(0)$ 及 $f(S_n)$ 显然大于 0

所以 $\forall X,\ \in(0,\ S_n)$，$f(x)>0$

即 $\dfrac{n^{\alpha+\beta}}{S_n{}^{\beta}}+\dfrac{n^{\alpha+\beta+1}}{S_n{}^{\beta}t}<K\dfrac{n^{\alpha}}{a_n{}^{\beta}}+\dfrac{(n-1)^{\alpha+\beta+1}}{S_{n-1}^{\beta}\ t}$ $(\forall n\geq 2,n\in N)$

又：$\because\ \beta+1>1$ 或 $\beta+1<0$

$$\therefore\ t^{\beta+1}>1+(\beta+1)\ (t-1)$$

$$=1+\alpha+t$$

$$\geq 1+t$$

$$\therefore\ K=t^{\beta}>1+1/t$$

即 $K/a_1^{\beta}>\dfrac{1}{S_1^{\beta}}+\dfrac{1}{tS_1^{\beta}}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta}/S_i^{\beta} < \left(\frac{\alpha+\beta+1}{\beta}\right)^{\beta} \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha}/a_1^{\beta} \quad (\forall n\in N)$$

另外：取 $S_n=n^t$ $(\forall n\in N)$

$$\because \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \Big/ \frac{n^{\alpha}}{(S_n-S_{n-1})^{\beta}} = K$$

且 $\sum_{i=1}^{n} 1/i$ 单增发散

所以有：$\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta}/S_i^{\beta}\right) \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha}/a_1^{\beta}\right) = K$

综上所述知 $f(\alpha,\beta)=K$ 为最佳结果

定理2：（1）$\beta=0$ 时，　$f(\alpha,\beta)>1$

（2）$\beta>0$ 时，　$f(\alpha,\beta)$ 存在充分条件为

$$\alpha+\beta+1<0$$

（3）$\beta<0$ 时，　$f(\alpha,\beta)$ 存在的必要条件为

$$\alpha+\beta+1<0$$

证明：（1）证明略

（2）$\sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta}/S_1^{\beta}$

$$\le \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta}/a_1^{\beta}$$

$$< \left(\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta}\right) \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha}/a_1^{\beta}$$

所以 $\beta>0$，$\alpha+\beta+1<0$ 时

取 $f(\alpha,\beta) \ge \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta}$ 即可

(3)取 $S_i=i^m$， $m>0$，则若 $\alpha+\beta-m\beta>-1$

有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta}/S_i^{\beta}\right)/\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i^{\alpha}/a_i^{\beta}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i^{\alpha+\beta-m\beta}\right)/\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i^{\alpha}/a_i^{\beta}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty} i^{\alpha+\beta-m\beta}/(i^{\alpha}/a_i^{\beta})$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_i}{i^{m-1}}\right)^{\beta}$

$=m^{\beta}$

若 $\alpha+\beta+1\geq 0$，

则可使 $m\to 0^+$，因而 $m^{\beta}\to+\infty$

所以 $f(\alpha,\beta)\geq m^{\beta}\to+\infty$

所以 $f(\alpha,\beta)$ 不存在

综上所述，$\beta<0$ 时 $f(\alpha,\beta)$ 存在的充要条件为 $\alpha+\beta+1<0$

由此可推得 $\alpha\geq 0$ 时 $f(\alpha,\beta)$ 都已确定

****
一题 一议
****

〔习题妙解〕

****
蛙 鸣
第 48 期
****

编者按：本栏目发表之题目将统一编号。

习题 1—3

911 张远声 沈维孝

1、设$(-\infty, +\infty)$上二次可微函数$f(x)$满足$f(0)=f'(0)=0$且$|f''(x)| \leq C|f(x)f'(x)|$ 其中C为正常数试证$f(x)\equiv 0$

证明：$\because f(x)$和$f'(x)$都在$x=0$点连续$\therefore$当$0<\delta_1< 1/c$足够小时，$|f(x)|\leq 1$及$|f'(x)|\leq 1$ 对 $|X|\leq \delta_1$恒成立

这样当$|X|\leq\delta_1$ 时 $|f(x)|=\left|f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi_1)}{2}X^2\right|$

$$(|\xi_1|\leq |X|)$$

$$=\frac{|f''(\xi_1)|}{2}X^2\leq \frac{C}{2}|f(\xi_1)f'(\xi_1)|X^2$$

$$\leq\frac{C}{2}\cdot\frac{1}{C}|f'(\xi_1)|=\frac{1}{2}|f(\xi_1)|$$

同理$\because |\xi_1|\leq\delta_1 \therefore \xi_2$满足$|\xi_2|\geq|\xi_1|$，$|f(\xi_1)|\leq\frac{1}{2}|f(\xi_2)|$

依次做下去，得到一实数列$\{\xi_n\}$满足

$$\delta_1\geq|X|\geq|\xi_1|\geq|\xi_2|\geq\cdots\geq|\xi_n|\geq\cdots$$

$$|f(\xi_n)|\leq\frac{1}{2}|f(\xi_{n+1})| \quad (n\in N)$$

$$\therefore |f(x)|\leq\frac{1}{2}|f(\xi_1)|\leq(\frac{1}{2})^n|f(\xi_n)|\leq(\frac{1}{2})^n$$

令$n\to+\infty$得$f(x)=0$ 对$\forall X\in[-\delta_1, \delta_1]$成立

记$a=\inf\{x_0: f(x)\equiv 0$当$X\in(-x_0, 0)\}$

$b=\sup\{x_0: f(x)\equiv 0$当$X\in(0, x_0)\}$

则显然$f(x)$在(a, b)上恒为零若a有限，令$g(x)=f(x+a)$，容易验证$g(x)$满足题设条件$\therefore$ $\delta>0$ $g(x)\equiv 0$当$|X|\leq\delta$

从而$f(x)\equiv 0$当$X\in[a-\delta, a+\delta]$ $a-\delta<a$ $f(x)$在$(a-\delta, 0)$

上恒为零与a的定义矛盾：$\therefore a=-\infty$ 同理 $b=+\infty$

即 $f(x)\equiv 0$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上成立。

证完

2、已知 $\Sigma \dfrac{1}{p_n}$ 收敛，其中 $p_n>0$ 求证 $\Sigma \dfrac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$ 收敛

证明：令 $S_n=p_1+p_2+\cdots+p_n$ $(n\in N)$，对 $\forall n\in N$，$p_1, p_2, \cdots p_n$ 按从小到大的顺序排列为 $p_{\nu_1}\leq p_{\nu_2}\leq\cdots\leq p_{\nu_n}$ 记

$$S'_{kn}=p_{\nu_1}+p_{\nu_2}+\cdots+p_{\nu_k}\ (k=1, 2, \cdots, n)$$

则 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{S_k}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{S'_{kn}}$ $(S'_{kn}\leq S_k$ 对 $\forall k=1, 2, \cdots n)$

而
$$\frac{k}{S'_{kn}}=\frac{k}{p_{\nu_1}+p_{\nu_2}+\cdots+p_{\nu_k}}\leq\frac{k}{p_{\nu_{\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)}}+\cdots+p_{\nu_k}}$$

$$\leq\frac{k}{\left(k-\left[\frac{k}{2}\right]\right)p_{\nu_{\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)}}}\leq\frac{2}{p_{\nu_{\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)}}}$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{S'_{kn}}\leq\frac{2}{p_1}+\sum_{k=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{4}{p_k}\leq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}\quad\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{S_k}\leq 4\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}$$

于是由 $\Sigma\dfrac{1}{p_n}$ 收敛即得 $\Sigma\dfrac{1}{S_k}$ 收敛

证完

3、在n维线性空间V中给定两组基$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$和$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 试证：1，2，…，n的一个排列 $i_1\ i_2\cdots i_n$ 使得 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \beta_{i_j}, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n\}$ 是V的基，对任何 $j=1, 2, \cdots, n$。

证：设基$\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$到基$\{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$的过渡矩阵为：

$A=(a_{ij})_{n\times n}$

则A是可逆的 $\therefore \det A\neq 0$

$$\sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\delta(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \neq 0$$

$\therefore \exists$ 1，2，…，n的一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 使得 $a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \neq 0$

从而 $a_{ji_j} \neq 0$（$j=1, 2, \cdots, n$）

$$\beta_{i_j} = a_{1i_1}\alpha_1 + a_{2i_2}\alpha_2 + \cdots + a_{ni_n}\alpha_n$$

$$= a_{1i_1}\alpha_1 + \cdots + a_{j-1\,i_{j-1}}\alpha_{j-1} + \cdots + a_{ni_n}\alpha_n + a_{ji_j}\alpha_{ij}$$

$\therefore$ 秩 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \beta_{i_j}, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n\}$

$=$ 秩 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n\} = n$

从而 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, \beta_{i_j}, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n\}$ 是V的基，对任何

$j = 1, 2, \cdots, n$.

* * * * * *
* 一题一议 *
* * * * * *

* * * * * *
* 蛙　鸣 *
* 第 48期 *
* * * * * *

〔问题与解答〕

编者按：本栏自第26期起对问题统一编号。对提问者和编者均未解决的问题以*表示。

〔问题111〕*

已知n边形的边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，求证：

$$\frac{n+1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^n + \frac{n(n-1)}{2} \prod_{i=1}^{n} a_i$$

（宁波大学 陈计提供）

【问题112】

设（X，ρ）为紧致度量空间，T：X→X连续。

$$\inf_{n\in N}\rho(T^n x, T^n y)>0 \qquad \forall x, y\in X, \quad x\neq y$$

求证： $T(X)=X$

（901 王钧源提供）

数学与诗答案

(1) Poetry (2) mathematician (3) poetry
(4) mathematical (5) A poem (6) mathematicians
(7) poetry (8) mathematics (9) poetry
(10) mathematician (11) Poetry (12) mathematics
(13) Poets (14) mathematician (15) Poetry
(16) mathematician (17) Poetry

问题24解答

武汉数理所 王振

问题24（第29—30期，刘启铭，陈计）定义正数$x_1, x_2, \cdots, x_n$的平均

$$I_r(x)=\binom{n+r-1}{r}^{-1}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=r\\ i_1\geq 0,\cdots,i_n\geq 0}}(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})^{\frac{1}{r}}, \quad r\in N$$

证明不等式链

$$I_1(x)\geq I_2(x)\geq\cdots\geq I_r(x)\geq\cdots\cdots,$$

诸等号成立当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$

证明对$r>1$，有

$$C_{n+r-1}^{r}(I_{r-1}-I_r)$$

$$=\frac{n+r-1}{r}\sum_{i_1+\cdots+i_n=r-1}(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})^{1/(r-1)}-\sum_{j_1+\cdots+j_n=r}(x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n})^{1/r}=\sum_{j_1+\cdots+j_n=r}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{j_k}{r}\left(\frac{x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}}{x_k}\right)^{\frac{1}{r-1}}-(x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n})^{1/r}\right]\geq 0.$$

其中，最后一个不等号用了算术平均——几何平均不等式；从而$I_{r-1}\geq I_r$。证毕。

注记　1° 当 $n=2$ 时，本题即为〔1〕中定理2。

2°　1992年，张志华[2]进一步考虑了平均：

$$Z_r(x)=\binom{n+r-2}{r-1}^{-1}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_n=n+r-1\\ i_1\geq 1,\cdots,i_n\geq 1}}(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})^{1/(n+r-1)}$$

证明了 $Z_1\leq Z_2\leq\cdots\leq Z_r\leq\cdots\cdots$；由于

$Z_{r+1}=G^{n/(n+r)}I_r^{n/(n+r)}$，（G是几何平均）。

所以它等价于

$$I_{r+1}\geq G^{\frac{n}{(r+1)(n+r)}}I_r^{\frac{r(n+r+1)}{(r+1)(n+r)}}.$$

由此引申问题：求使下式成立的最小 $\mu=\mu(r_1,r)$：

$$I_{r+1}\geq G^{\mu}I_r^{1-\mu}。$$

参　考　文　献

〔1〕陈计、舒海斌，Ostle-Terwilliger不等式的加细，《蛙鸣》第31～32期，57—59。

〔2〕张志华，n个正数的算术——指数——对数——几何平均不等式，《数学竞赛》第16辑，湖南教育出版社1992年12月第一版，85-97。

数学与诗

乔安妮·S格罗奈

茹可夫斯基说过，数学中有像诗画那样美丽的境界。那末我们来看看数学家和诗人是怎样各自描述他们自己和他们所钟爱的事业的。下面这一组英文填充题，要填的不外乎mathematics（数学）、mathematician（数学家）等，或Poetry（诗）、Poem（诗）、Poet（诗人）。原句均是著名数学家和著名诗人的名言。可能你会从这些人名判断出相应句子的空格中应填上什么。但建议你不妨换一个试试看，句子的意思是不是还很顺当。这能不能说明数学与诗之间有某种相似性呢？（填充答案在本期中找。）

(1) ________ is the art of uniting pleasure truth.

--Samuel Johnson

(2) To think is thinkable that is the ______'s aim.

--Cassius J. Keyser

(3) All ________(is) putting the infinite within the finite.

--Robert Browning

(4) The moving power of ______ invention is not reasoning but imagination.

--A. DeMorgan

(5) When you read and understand ________ comprehending its reach and formal meanings, then you master

chaos a little. --Stephen Spender

(6) _______ practice absolute freedom. --Henry Adams

(7) I think that one possible definition of our modern culture is that it is one in which nine--tenths of our intellectuals can't read any _____.
--Randall Jarrell

(8) Do not imagine that _____ is hard and crabbed, and repulsive to common sense. It is merely the etherealization of common sense.--Lord Kelvin

(9) The merit of _____ in its wildest forms, still consists in its truth; truth conveyed to the understanding, not directly by words, but circuitously by means of imaginative associations, which serve as conductors. --T.B.Macaulay

(10) It is a safe rule to apply that, when a _________ or philosophical author writes with a misty profundity, he is talking nonsense. --A.N.Whitehead

(11) _________ is a habit. --C.Day-Lewis

(12) ...in ______ you don't understand things, you just get used to them. --John von Neumann

(13) _______ are all who love--who feel great truths
And tell them. --P.J.Bailey

(14) The _______ is perfect only in so far as he is a perfect being, in so far as he perceives the beauty of truth;only then will his work be thorough, transparent, comprehensive, pure, clear, attractive, and even elegant. --Goethe

(15) ...(In these days)the function of _______ as a game...(looms)larger than its function as a search for truth... --C.Day-Lewis

(16) A thorough advocate in a just cause, a penetrating _______ facing the starry heavens, both alike bear the semblance of divinity. --Goethe

(17) _______ is getting something right in language.
--Howard Nemerov

******
蛙　　鸣
*　　　　*
第48期
******

代数学家A·I·莫特色夫

9101　黄　正

1989年8月21日至26日，由国际数学会和新西伯利亚系统研究所发起，在阿克德姆格罗多克市由新西伯利亚州大学、苏联科学院数学研究所西伯利亚分部和西伯利亚数学会组织了一次代数学的国际会议，这也是为了纪念苏联（原）伟大的数学家阿·伊·莫特色夫（A·I·Maultsev）。

这次会议的组织委员会主席是莫特色夫在新西伯利亚的学生和继承人Y·L·Ershov教授，他也是州大学的现任校长。会议吸引了750至800名数学家参加，其中大约有300名外国数学家，他们中的许多均是著名代数学家。不论他们的工作是否与莫特色夫的工作有关系，这次会议体现了当前全苏和全世界的代数学前沿研究。主要的领域有模型论及其代数结构、群论、代数几何，几何学的代数方法，分析学与理论物理，应用代数与计算机数学、环论及模论。

A·I·莫特色夫1909年11月27日生于莫斯科附近的米舍隆斯基地区。父亲是一名玻璃吹制工，并曾任一家玻璃厂的技术指导。1927年他进入莫期科大学攻读数学，1931年毕业。他的第一篇论文是对于逻辑学和模型论的新颖的独立的贡献。在这篇论文中他推广了获得局部定理的综合方法，尤其是对狭谓词演算

语言。下边的紧性定理是非常有名的：

“若令Φ是符号差Ω的闭一阶公式的一个无穷集，如果Φ的每个有限子集是无矛盾的（如：存在符号差Ω的代数系统，其中集成体的每个公式都是真的），那么Φ也是无矛盾的。”

值得注意的是对有限或可数的符号差，该定理源于哥德尔（Godel）完备性定理。莫特色夫还证明了模拟定理包含了下边的无限模型：

“如果一个代数系 $U=\langle A, \Omega\rangle$ 的每个有限子模型 $\langle A\alpha, \Omega\rangle$ 的每个有限归约 $\langle A\alpha, \Omega\rangle$ 可嵌入一些系 $M\alpha, \beta=\langle M\alpha, \beta, \Omega\rangle$ 中，那么U可嵌入系 $M\alpha, \beta$ 的一些超积中。”

这种局部方法被称为莫特色夫紧性定理，它把无限系与有限子联系起来，是代数和模型论的强有力的方法。稍后A·鲁滨逊用类似的想法把他的结果具体应用于非标准分析之中。该法在群论中的应用包括有中心或可解系群分类的局部定理。

莫特色夫的一生受苏联数学领袖A·N·柯尔莫哥洛夫影响极深，他一直认为自己是科尔莫果洛夫的学生，他们之间的友谊远远超出了老师与大学生之间的关系。莫特色夫、柯尔莫哥洛夫，亚历山大罗夫（Alexandrov）和尼科尔斯基（Nikolskii）常在一起讨论数学思想。

莫特色夫的关于把环嵌入域中的论文是1939年科尔莫果洛夫给他一个课题的解答，在文中他第一次给出了嵌半群入群的充分必要条件。这个充分必要条件的集实际上是可数的，他进一步证明了不存在这些条件的集的有限子集满足把半群嵌入群的可能性。

1937年在柯尔莫哥洛夫指导下，因在“自由挠率的有限秩阿贝尔群”领域的杰出工作，莫特色夫通过数理硕士候选人答辩。

１９４１年通过博士论文“无限代数与无限群同构表示的结构”。１９４４年晋升为教授。

值得一提的是莫特色夫一直注意紧随数学当前潮流。这可在他出版的著作中得到体现。例如他是苏联最先应用分类理论的人。

莫特色夫在无限线性群的矩阵表示方面得到了重要的结果。其中包括有自由群的有限近似性和有限秩的局部自由群的结果。莫特色夫－科尔金（Ｋｏｌｃｈｉｎ）定理表明。每个代数闭域上的可解线性群都有一个指数有限的可三角剖分的正规子群。这个有限指数不超过一个仅依赖于矩阵形式的整数。该领域内他的另一定理则指出任一整矩阵的可解群均是多循环群。这个定理的逆定理在１９６７年由斯万（Ｓｗａｎ）和沃斯兰德（Ａｕｓｌａｎｄｅｒ）独立地用两种不同的方法就证明了。

莫特色夫代数上最重要的工作是李群和李代数方面的。他证明了嘉当（Ｃａｒｔａｎ）的把任意嵌入一个完备李群的著名定理不能推广到局部拓扑群类去。１９４３年他证明了一个李群有忠实线性表示的充分必要条件是其因子群模型有这样一个表示。

众所周知并非每个连续李群都可以唯一地从其李代数重建。莫特色夫引入的一个合理的李代数子模概念给出了一个李群唯一被有限覆盖的特征。他描述了所有无穷及例外分类的单李群的所有半单子群。

五十年代以来。他的论文都与拓扑代数系的一般理论有关。最重要的是自由拓扑代数的一般理论。他建立了一种称为莫特色夫代数的结构。互斥代数，约当（Ｊｏｒｄａｎ）代表。莫特色夫代数以及李代数是最基础最广阔的非相伴代数分类。

１９５８年，莫特色夫当选为苏联科学院院士。次年成为《西

伯利亚数学杂志》主编。1960年被聘为新西伯利亚数学研究所研究员和新西伯利亚州大学代数与逻辑学系主任。1963年成为西伯利亚数学会主席。在这期间他更多地注意模型理论在代数上的应用。

代数系理论——尤其是簇与拟簇系以及它们之间的运算性质——是莫特色夫首创的。他计划编一套两卷的书讲述代数与逻辑的相互作用。只有第一卷《代数系》在1970年得以出版。其中包括了基本结构、谓词演算和拟簇理论。莫特色夫还建立了构造代数学理论的基础，构造代数学是代数系理论与算法理论的综合。

在生命的最后几年，莫特色夫花了大量时间考虑数学的应用和数学哲学问题。他的一个未竟的心愿就是在新西伯利亚建立一个国际数学的研究机构。但他很快就改变了这样一个机构应在的地点。的确，西伯利亚的冬天太寒冷了。莫特色夫获得了几乎所有的苏联科学奖，包括列宁奖。1967年7月6日在新西伯利亚召开的国际拓扑学会议期间，作为这次会议的组织委员会主席的莫特色夫因病逝世。被葬在阿克德姆格罗多克公墓，这里还葬着几位著名的数学家。

莫特色夫爱好远足和远距离游泳，还会拉小提琴和弹钢琴。在他的私人图书馆里珍藏着许多卷的历史书籍，包括数学史。他住的街在他逝世两年后以莫特色夫命名。他的两个儿子均是数学家。

译自：The Mathematical Intelligencer Vol.14. No.2.1992

作者：Radoslav Dimitric

＊＊＊＊＊＊
＊蛙　　鸣＊
＊　　　　＊
＊第48期＊
＊＊＊＊＊＊

Vladimir Drinfeld的工作介绍*

Yuri Ivanovich Manin

I、当Drinfeld还是一个中学生时他已发表了他第一篇论文。在这篇论文中他以Hardy经典论文“不等式”的风格证明了一个漂亮的结果而且还解决一个R.A.Rankin为此写了两篇短文的问题。这篇论文现在读起来仍使人感兴趣。由此Drinfeld开始了他的一系列的工作，这些工作从他总的数学工作来看有些孤立，但也包括这样一些有价值的结果：

——证明了模曲线上尖点的零次闭链（cuspidal degree zero cycles）生成一个Jacobi的挠子群；

——瞬子的分类（ADHM构造，与Atiyah，Hitchin和Manin合作）；

——Kdv类型完全可积系统的约化理论（与Sokollov合作）；

——定义在p^{2n}阶有限域上的曲线上点的个数的一个精确渐近上界（与Vladut合作）；

——证明了S^n上SO(n+1)—不变的有限可加测度当n＝2和3时是Lebesgue测度（n＝1和n≧4的情形早先由Banach，Margulis和Sullivan讨论过）。

由于篇幅和时间的限制使得我不可能对已提及的Drinfeld的贡献一一评述，我将集中在Drinfeld在过去十年里全力以赴的两个主要问题。这两个问题是Langlands纲领和量子群，在这

两个领域中，Drinfeld 的工作做出了决定性的突破并促进一大批的研究。

I、Langlands纲领是一系列猜想、定理和见解，其目的在于了解一维局部和整体域（即，Q，Fp(t)）的Galois群，它们的扩张和完备化。

人们可以有说服力地说：这些Galois群构成了数论中比整数本身更基本的主要对象。不管怎样，数论中的大多数经典论题，如素数，L－函数和模形式揭示了许多从Galois理论的角度来看是隐藏着的结构。

经典时期的最高成就是类域论，它根据k的算术给了Gal(k^{ab}/k)一个描述，如果k是局部的，则Gal(k^{ab}/k)是（标准同构于）k^*的前有限完备化（profinite completion），如果k是整体的，则Gal(k^{ab}/k)是群A_k^*/k^*的前有限完备化，这里A_k表示k的adele环。当然，描述Gal(k^{ab}/k)与描述Gal($\bar{k}/k$)的一维表示是一样的。Langlands建议下一步应是描述Gal($\bar{k}/k$)的某个n维表示。他的猜想的主要内容，以一种非常简化和不精确的形式来说可以概括为两句话。首先，Gal($\bar{k}/k$)的n维表示与在局部（或整体）情形GL(n, k)（或GL(n, A_k)）的自守不可约的无穷维表示之间有一个自然的双射。其次，这种对应（非交换互反律）是通过L函数的确定来描述的，而对Galois表示和adelic一般线性群表示来说L函数能以一种自

*原题：On the Mathematical Work of Vladimir Drinfeld．译自：Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Kyoto, Japan, 1990, 3—7．

III. 形式说来，量子群组成了Hopf代数的一个定义不明确的子类。量子群的第一批例子是由列宁格勒学派的L.D.Faddeev的学生和同事这些数学的物理学家们发现的。Drinfeld首先概括了此理论的基本定义和结果，其中大部分在他本人的工作、在他4年前Berkeley国际数学家大会上的报告中已构思好并加以系统化。这篇报告以及M.Jimbo的几篇文章在使此新领域明确定型中起着决定性的作用，因而吸引了许多数学家的注意。

提纲挈领地讲，可以将此理论以下面的方式叙述为几个主题：

a）几十年来，有一种共识，认为单李群和李代数是不变的对象：它们用离散的资料（data）（Dynkin图）来分类，它们在连续族中不变。一个引人注目的发现：如果在非交换和余交换（co-commutative）的Hopf代数中考虑形变（deformation），此共识则不再正确。（此发现一般认为属于Drinfeld和Jimbo。）更确切地说，对于任意的单李代数g（更一般地说，对于由Cartan根定义的代数）存在万有包络代数U（g）的单参数形变U_q（g），具有余乘法和对映体（comultiplication and antipode）。不仅如此，整个结构和表示理论，以这种方式形变并带有许多使人预想不到的、不平常的变化。

b）量子群的性质与某些定义所谓Yang-Baxter算子的，引人注意的非线性代数方程紧密相关。最简单的Yang-Baxter方程是对一个线性算子$R \in \mathrm{End}(V \otimes V)$的限定条件，这里V是一个线性空间，这个条件是R满足编辫关系：$R_{12}R_{23}R_{12}=R_{23}R_{12}R_{23}$，$R_{12}$，$R_{23}$，$R_{12}$为$V^{\otimes 3}$上的算子。更一般的Yang-Baxter方程涉及到依赖于谱参数的算子，Yang-Baxter方程的许多解由研究二维统计物理学的专家发现，因为这些解恰好

产生了生成有名的Ising模型的可解的格模型。

Drinfeld引入了万有Yang—Baxter算子的概念。这个算子是一个Hopf代数的（完全）张量平方中的可逆元。他证明了此可逆元在$U_q(g)^{\otimes 2}$中的存在性，并给出了一个一般的“双重”构造，从而使得我们在不同的Hopf代数的表示范畴中能生成Yang—Baxter算子。

c）直到最近，量子群理论还缺乏一个分类定理来精确描述我们想要考虑的是怎样一类的对象以及这个类的结构是怎样的。Drinfeld不久前在两篇重要的文章提出了这样的定理并加以了证明。这个定理可以和Lie建立Lie代数和局部李群的关系的首批定理相提并论。

的确，这个定理就性质来说是局部的，甚至是形式的。因为Drinfeld考虑的是形式群的形式形变（用对偶语言说，就是形式群的万有包络代数的形式形变）。他也是从一开始，就加上一个Yang—Baxter类型的条件（“拟三角性”），然后他证明整个形变是由最低阶的非平凡资料定义。

在证明过程中，他引入了一种拟Hopf代数的新概念，以一种适当的方式减弱了对余乘法的余结合性条件。他将拟Hopf代数同Knizhnik—Zamolodchikov微分方程联系在一起，这种微分方程已由Kohno证明其单值性与Drinfeld—Jimbo R算子有关。最后，他证明了在形式的情况下，拟Hopf代数能由一种规范变换约化成通常的Hopf代数。证明涉及到消除复摄动概型（complex perturbative scheme）中产生的许多上同调障碍。

d）我们还应该提及Drinfeld在有关Yang—Baxter方程的工作的早期阶段中引入Poisson—Lie群和Poisson—Lie作

然的方式构造出来。在经典（整体）情形，当这些L函数的结构得到了解时，这些L函数是模形式的Mellin变换，大体说来这些变换代表着某些模空间的上同调的de Rham观点（aspect），而Galois表示则具体表达它们的平稳上同调（etale cohomology），这样一来Langlands纲领就与Grothendieck想法有关，这个想法是大部分为猜想性的代数簇的万有上同调理论。

Drinfeld证明了Langlands有关有限特征的整体域上的GL(2)猜想，他的决定性的贡献是发现了一类新的模空间并对它们进行了详细的研究。当经典模空间是将椭圆曲线，可交换簇或Hodge构造参数化，于是Drinfeld有了一个使人吃惊的想法：为了处理有理特征的情形人们应对新的一类对象参数化。现在称初步近似叫Drinfeld模（其早先的例子由Garlitz引入）。对于完备理论必不可少的一个更一般的概念被称以两个同样无味的名字："mtyka"（大概意思是"一块东西"）和"F层"（F-sheaf）（Drinfeld使用它是因为缺乏更适当的，作为一种温和批评我必须说在专业术语方面他的想象力就不如他在定理证明方面来得更精彩）。

为完整起见，下面我将给出F层的正式定义并叙述Drinfeld理论的主要定理。

设X是一个具有基础域$k = F_q(X)$的光滑完全模型，在一个概型（scheme）S上的秩为d的（左）F层是一个图（见右图），其中$\mathcal{L}$和$\mathcal{F}$是X×S上的秩为d的局部自由层，i和j是内射，Coker(i)是某个S－点（S-point），$a: S\to X$的图Γ_a上的可逆层。Coker(j)是类

$$\begin{array}{ccl} & & \mathcal{L} \\ & \overset{i}{\nearrow} & \\ \mathcal{F} & & \\ & \underset{j}{\searrow} & \\ & & (id_X\times Fr_S)^*\mathcal{L} \end{array}$$

似的图 $\Gamma\beta$ 上的可逆层。

F层可以加上一个水平结构使其刚化。有非平凡水平结构的F层具有粗模概型（coarsemoduli scheme）。这种粗模概型紧化起来很方便。对于 $d=2$，$GL(2, A_k)$ 作用在紧化模空间上的方式，大体上与 $GL(2, A_Q, f)$ 通过Hecke算子作用在椭圆曲线的模空间的方式一样。这种对上同调的作用对其进行Galois理论分析就可得到以下结果。

设 W_k $Gal(k^s/k)$ 是由所有那些在 $\overline{F}_q$ 上导出的是Frobenius射的某个整数幂次的自同构作成的群。取一素数 $l \neq char(k)$，用 Σ^1_l 代表具有下列性质的连续表示 ρ：$W_k \to GL(n, \overline{Q}_l)$ 的集合：i）$Im(\rho)$ $GL(n, F)$，F为 Q_l 的一个有限扩张；ii）k的几乎所有的点的惯性子群包括于 $Ker(\rho)$。

现设E为一特征为0的代数闭域。由定义 $GL(2, A_k)$ 的尖点表示（cuspidal representation）是一个E上的属于取值E中的尖点形式组成的空间的一个不可约表示。用 Σ^1_2 代表 Q_l 上的尖点表示的集合。

Drinfeld的主要定理说 Σ^1_l 和 Σ^1_2 之间相对于一个保持L函数的映射存在着一个双射关系。

Drinfeld的证明从技巧和逻辑上来说既长又复杂。虽然它包含在一系列的已发表论文中，但整个理论最广泛的研究还是在他两本未发表的手稿中（打字机打出来共约800页）。人们希望经过最后修改后会将这两本手稿交出版商出版。至今还未出版的原因看来是Drinfeld又在全力以赴地忙于另一个新的、令人着迷的专题——量子群。

用的概念。它们组成了一个与Hamilton力学有关的最基本的微分几何结构。而且它们的作用在未来肯定还会加强。

Ⅳ、我希望我已让你们对Drinfeld工作的广度、概念的丰富、技巧的力度以及工作的优美有所了解。现在我们就要因此而授与他Fields奖。对我来说，在近旁观察到这样一位教给我许多东西的卓越人才的迅速成长真是一种快乐和荣幸。

（熊剑飞译　李培信校）

* * * * * * *
数学文摘
* * * * * * *

* * * * * *
蛙　鸣
*　　*
第48期
* * * * * *

Mathematica计算机数学系统简介

Mathematica是一个真正的、名符其实的计算机数学系统。它以最新的程序设计理论和软件技术、计算机科学的最新成果为基础，把数值计算、符号计算、二维三维图形显示以及友好的人机交互界面等各种成分有机地结合起来，为数学和其他理论学科工作者，以及工程技术的工作者们提供了一个功能强大而又使用方便的综合性的“做数学”的工具。

Mathematica是一个怎么样的系统？（一）它首先可以看作是一个“超级计算器”，它能对输入的表达式（数值的或符号的）做各种数学运算或是图形显示。计算方面的功能包括：数值计算——任意精度的实数与复数算术和函数计算，任意位整数与有理数的精

确计算；代数—多元多项式展开，因式分解，分式运算，三角化简，求线性和非线性方程或方程组的符号解和数值解，各种矩阵向量运算；微积分—求极限、微商、积分、级数展开和求和；还可以做数值分析、曲线拟合、求解常微分方程、某些偏微分方程等；可以画各种符号形式表示的函数的二维、三维图形，各种参数形式表示的函数的图形（曲线、曲面等）。其功能覆盖了数学的许多方面，可以用作科学研究的工具，用于描述数学和其他学科的知识结构，解决研究或工程领域中的问题。（二）它提供了一个使用方便、功能强大的编程语言，支持各种风格的程序设计方法。这个语言特别适宜于描述形式变换，如各种结构表示的变换（数学表达式的演算就是典型的形式变换）。这个语言可用于书写各种专门的数学软件包和其他软件包，以扩充Mathematica 系统的功能。现有的系统已提供了一批标准包，供使用者调入使用。（三）Mathematica 是标准环境中的一个工具，它有与其他语言、系统通讯的接口。（四）有的Mathematica 版本包含一个叫作Notebook的子系统，它是一种活教材的编辑器，用它编出的教材可以包括内容讲解、演示（图形等），还可以包括各种类型的题目，通过使用Mathematica系统做演算练习，解决这些题目以加深对课程内容的理解。

Mathematica 系统是1985年开始开发的，由现任伊里诺依（Illinois）大学复杂系统研究中心主任Stephen Wolfam教授牵头，组织了七、八位取得了博士学位的年轻人，花了三年多时间，于８８年底完成。系统推出后马上引起了各界人士的注意。之后，Mathematica 被迅速移植到高档微机和几乎所有的工作站上，这些系统的核心是一致的，只是针对不同机器实现了不同的前端（前台，front end）。今天，Mathematica系统已经有

了它专门的公司，有了专门的用户群。它已经广泛使用于美国及其他国家的许多大学和研究机构中。美国许多正在进行的数学教学改革的试验以Mathematica为工具，有的数学系甚至用这种符号演算语言作为计算机入门训练的语言。许多数学界的知名教授（包括哈佛、普林斯顿等大学的一流学者）对此评价说它的出现“将宣告数学家仅靠一张纸、一支笔进行研究的时代的结束”。1991年在日本召开的国际符号代数会议和计算机用于数学的高级会议上都展示和介绍了这个系统。这样的软件系统已成为强有力的“做数学”（doing mathematica）的工具，有了它们，数学作为其他科学和技术的基础的一面必将得到更好的发挥。

在我国大力推广Mathematica系统，将会大大促进数学和其他自然科学，以及工程技术领域的科学工作者们、研究生、大学生加深对计算机能做什么和数学如何机械化的理解，使他们进一步了解和掌握这一类新的计算工具。另一方面，这类系统的推广普及也会促进学术和教育工作者学习掌握计算机兴趣的提高，并由此考虑如何在新的计算工具的基础上改革数学与其他学科的教学方法和内容，培养出新一代的科学工作者。在这个基础上，我们也可能在不久的将来开发出各种作为专门领域研究工具的计算环境。

目前国内已有了Mathematica系统的许多出本，分别运行在IBM—PC/386，Macintosh－Ⅱ，Sun，SGI等各种机器上，有的系统版本（如Macintosh版）带有Notebook。这些系统都需要4M以上的内存，对386机器还需要配有30387协处理器。现在国内满足这些条件的机器已经相当多了，推广使用Mathematica系统的条件已经成熟。