纪念《蛙鸣》创刊五周年

# 获奖论文选集

中国科学技术大学数学系学生会

# 前　言

获第一、二届《蛙鸣》奖的优秀学生论文编印成集与大家见面了。这是《蛙鸣》编辑部献给大家的一份心意，也是对《蛙鸣》五年来的历程的一次巡视。

这个专辑中登载的论文都是从《蛙鸣》上发表的学生习作中评选出来的，为了使评选具有代表性和全面性，《蛙鸣》编辑部曾进行过认真的讨论，并向老师们征求了意见，力求做到不偏不颇。但是，由于我们水平有限以及其它种种原因，难免使一些论文漏选了，请同学们原谅，并欢迎同学们给编辑部提出宝贵意见

评奖并不是我们的目的，我们只是通过这个活动活跃本系学生中的学术气氛，鼓励同学们在学习中对各种问题进行思考，并提出独特、深入的见解，从而成为大家今后成功的阶梯。

我们欣喜地看到《蛙鸣》正如它的名字——就象一只顽强的小蛙，不倦地歌唱了五年，并取得一些成绩，这和广大同学的支持，努力分不开，编辑部向大家致以衷心的感谢。

编辑部还向校学生会团委和科研处致谢，这两届《蛙鸣》的评奖活动，都得到了他们的大力支持。

衷心感谢参加学生论文评比的老师们。

《蛙鸣》编辑部

# 第一届评奖结果

一等奖

二阶齐线性方程的零点分布……………………………………沈阳　沈寅

实正定方阵的一个性质……………………………………窦昌柱　李冰

关于优美图……………………………………………………沈阳

二等奖

关于测度延拓的进一步讨论…………………………………王鸣强

等宽卵形面的构造……………………………………………杜强

球面闭曲线的四顶点定理……………………………………沈寅

多项式不可约性的判定………………………………………窦昌柱

三等奖

线性变换之某种应用…………………………………………黄加武

Kruskal 算法的另一证明……………………………………许秋平

有关典型二元树的几个命题…………………………………张忠良

一个不等式……………………………………………………陈贵忠

♺函数的一种等价定义………………………………………梁泓

关于置换的对分解中对换的最小个数………………………黎红年

一个问题………………………………………………………李冰

Massey 趣题巧解……………………………………………邵云、王鸣强

略谈（1・－1）矩阵的行列式的极值问题…………………姜献峰

# 第二届评奖结果

一等：Hermite方阵在复正交复相似下的标准形……黄渝

ON a problem of suryanarayana……刘弘泉

二等：环上矩阵相似的初步想法……严峰生

图中的边圈关系……李冰

实正定对称方阵的一个有趣性质……马援 李广兴

三等：GLn(C)中的换位子群……陈贵忠

An Integral characterization of

$E^4$ spherial Curves……沙虎云

一个问题的进一步讨论……欧军

一个关于Frobenius同构的问题……窦昌柱

KY Fan不等式的推广及应用……陈计

关于Eisenstein定理的推广……刘启铭

拓扑中的一个反例……刘竟欧 张玉才

一个命题的获得与证明……黄小平

一个问题的探讨……任金江李广兴

优秀编委 窦昌柱 严峰生 陈计

# 二阶齐线性方程解的零点分布

况　阳　　　沈　寅

（中国科学技术大学数学系　80级）

我们知道，齐线性二阶方程可化为法式方程，而且经过这种变换，对解的零点分布没有实质性影响，故以下只就方程

$$\frac{d^2u}{dt^2}+Q(t)u=0 \qquad (*)$$

进行讨论，并假定 $Q(t)$ 是某开区间 $a<t<b$ 上連续的实值函数，本文只讨论实值解。

若 $Q(t)\geq m>0$（$m$ 为常数），由 sturm 比较定理，我们可得到有关方程（$*$）的解的零点分布的一些结果，但当 $Q(t)\leq 0$ 时，我们将得到（$*$）的任一非零解在（$a$，$b$）上至多有一零点，这样，sturm 比较定理就显得无能为力了，本文就这种情况作了较系统的讨论并得到了定理2，3，4，其中定理3是本文的中心定理，定理4是本文的主要结果。

本文在写作过程中，得到了王树禾老师的热情指导，王树禾老师还详细地审阅、修改了本文，使本文增色不少，在此深表谢意。

定理1：如果在区间 $a<t<b$ 上恒有 $Q(t)\leq 0$ 则（$*$）之任一非平凡解 $u(t)$ 在 $a<t<b$ 上最多有一个零点。

这是〔1〕中的一条定理，在此我们作了一点改进，使条件 $Q(t)<0$ 放宽到 $Q(t)\leq 0$，为了方便起见，我们给出本定理的证明。

证明：设对 $a<t<b$ 上某点 $t_0$，$u(t_0)=0$，于是 $u'(t_0)$

$\neq 0$，否则按唯一定理将有 $u(t)\equiv 0$ 若 $u'(t_0)>0$，则首先 $u(t)$ 至少在 $t_0$ 之某右邻域 $t_0<t\leq t_0+\delta$ 上为正，从而 $u''(t)=-Q(t)u(t)\geq 0$，因之 $u'(t)$，$u(t)$ 当 $t_0<t\leq t_0+\delta$ 时都单调增加，由此可见，在整个区间 $t_0<t<b$ 上 $u'(t)$ 和 $u(t)$ 都必定是单调增加的；因为上面的推理表明，当 $u(t)$ 在此区间上由正变为零以前 $u'(t)$ 总在增加因之总保持为正，而这又反过来说明了 $u(t)$ 也总在增加。故若 $u'(t_0)>0$，则 $u(t)$ 在 $t_0$ 之右（同理在其左）必定不会有零点。若 $u'(t)<0$，则只须将刚才的结论应用于 $-u(t)$（显然 $-u(t)$ 也是解）。这样就证明了本定理1。

定理2：设在区间 $a<t<b$ 上恒有 $Q(t)\leq 0$，则对 $t_0\in(a,b)$，恒有（*）之非零解 $u_{t_0}(t)$ 存在，使 $t_0$ 是 $u_{t_0}(t)$ 的唯一零点。

证明：设 $\{u_1(t),u_2(t)\}$ 为方程（*）之基本解组，则 $u_1(t)$，$u_2(t)$ 皆非零解，且

$$u_1^2(t_0)+u_2(t_0)^2\neq 0 \qquad \forall t_0\in(a,b)$$

故存在 $C_1$，$C_2$，$C_1^2+C_2^2\neq 0$ 使得 $C_1u_1(t_0)+C_2u_2(t_0)=0$ 令 $u_{t_0}(t)=C_1u_1(t)+C_2u_2(t)$，则 $u_{t_0}(t)$ 为（*）之非零解，且 $u_{t_0}(t_0)=0$，由定理1知，$u_{t_0}(t)$ 有唯一零点解，且 $u_{t_0}(t_0)=0$，由定理1知，$u_{t_0}(t)$ 有唯一零点 $t=t_0$ 证毕。

我们V为（*）之解空间，易知V是二维线性空间，记 $V_{t_0}=\{u(t)\,|\,u(t)\in V,u(t_0)=0\}$，$t_0\in(a,b)$。由定理2知 $V_{t_0}$（$V_{t_0}\in(a,b)$）非空，且易知 $V_{t_0}$ 是V的一维子空间，

$V_{t_1}$，$t_2\in(a,b)$ $t_1\neq t_2$，则 $V_{t_1}\cap V_{t_2}=0$，自然要问，是否有 $V=\bigcup\limits_{t\in(a_2,b)}V_t$ 呢？也就是说，是不是满足定理1条件的方程（*）之每一非零解都有唯一的零点呢？下面的定理3回答了这一问题，结论是 $\bigcup\limits_{t\in(a,b)}V_t\neq V$

定理3：定理1的条件下，方程（*）至少有一非零解在a $a<t<b$ 上无零点。

证明：设 $\{u_1(t),u_2(t)\}$ 为方程（*）之基本解组，则 $u_1(t)$，$u_2(t)$ 皆非零解，由定理2知，$\forall t_0\in(a,b)$，存在 $C_1$，$C_2$，$C_1^2+C_2^2\neq0$ 使得

$$C_1u_1(t_0)+C_2u_2(t_0)=0$$

而 $(u_1(t_0),u_2(t_0))\neq(0,0)$

从而 $\forall(C_1',C_2')\in R^2$，

若 $C_1'u_1(t_0)+C_2'u_2(t_0)=0$，则必存在 $K\in R$，使

$$(C_1',C_2')=K(C_1,C_2)$$

考虑满足条件 $C_1^2+C_2^2=1$ 且满足 $C_1u_1(t_0)+C_2u_2(t_0)=0$ 的解 $(C_1,C_2)$，易知 $\forall t\in(a,b)$ 对应地存在 $\pm(C_1(t)$，$C_2(t))$ 满足以上条件，且 $(C_1(t),C_2(t))$ 在不考虑符号的意义下是唯一的。取定 $t_0\in(a,b)$，不妨设 $C_1(t_0)>0$，

$$\forall t\in(a,b),\ C_1(t)u_1(t)+C_2(t)u_2(t)=0$$

从而 $C_1^2(t)u_1^2(t)=C_2^2(t)u_2^2(t)=(1-C_1^2(t))u_2^2(t)$

$$\therefore\quad C_1^2(t)[u_1^2(t)+u_2^2(t)]=u_2^2(t)$$

而 $u_1^2(t)+u_2^2(t)\neq0$，在 $t_0$ 附近，令

$$C_1(t)=\sqrt{\frac{u_2^2(t)}{u_1^2(t)+u_2^2(t)}}$$ 易知 $C_1(t_0)>0$，由

$u_1(t)$、$u_2(t)$的连续性，便有$C_1(t)$在$t_0$附近连续，考虑到，当$C_1(t_0^*)=0$时，$C_2^2(t_0^*)=1\neq0$，因此，我们可按上面的方法证得$C_2(t)$连续，从而$C_1(t)$连续，由$t^*$的任意性，我们便得到与$C_1(t_0)>0$相应的连续函数$(C_1(t)$、$C_2(t))$，$t\in(a,b)$，且$C_1(t_0)>0$，这一连续函数在oxy平面上的图象即是一段圆弧M，而关于原点对称的另一段圆弧M'即为$(-C_1(t),-C_2(t))$的图象，显然M'上的点也满足要求由于$t\in(a,b)$，故M，M'是两条开弧，且必不相交，否则若交点为$t^*$，则必有另一点$t^{**}$，$t^*\neq t^{**}$，使

$$-(C_1(t^*),C_2(t^*))=(C_1(t^{**}),C_2(t^{**}))$$

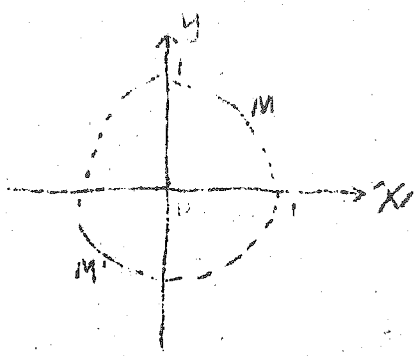


图1

但因

$$\begin{cases}C_1(t^*)u_1(t^*)+C_2(t^*)u_2(t^*)=0\\ C_1(t^{**})u_1(t^{**})+C_2(t^{**})u_2(t^{**})=0\end{cases}$$

令 $u^*(t)=C_1(t^*)u_1(t)+C_2(t^*)u_2(t)$

则 $u^*(t^*)u^*(t^{**})=0$，而$t^*\neq t^{**}$，这与定理1矛盾，因此存在$(a^*,b^*)$，

$$a^{*2}+b^{*2}=1 \text{ 但 } (a^*,b^*)\bar{\in} M\cup M'$$

令 $u(t)=a^*u_1(t)+b^*u_2(t)$

则$u(t)$即为方程(*)的一非零解，显然$u(t)$在$(a,b)$上无零点，至此定理得证。

定理4：定理1的条件下，若a，b两数中至少有一为有限数。不妨设a就是，且$\lim\limits_{t \to a} Q(t) = m$，m为有限数，则方程（$*$）在（a，b）上必有一组无零点的基本解组。

证明：定义

$$Q^*(t) = \begin{cases} m & t \in (a-1, a) \\ Q(t) & t \in (a, b) \end{cases}$$

显然$m \leq 0$，$Q^*(t) \leq 0$，$t \in (a-1, b)$

易知以上的一些结论（定理1，2，3）对方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Q^*(t)u = 0 \qquad (**) \qquad a-1 < t < b$$

同样成立，设$\{u_1^*(t), u_2^*(t)\}$是（$**$）的基本解组，则显然$u_1^*(t), u_2^*(t)$在（a，b）上的限制构成（$*$）的基本解组，对方程（$*$）和方程（$**$），作出相应的$\pm(C_1(t), C_2(t))$的图象，记前者为M，M'，后者为$M^*$，$M^{*\prime}$易知$M \quad M^*$，$M' \quad M^{*\prime}$，否则$M^*$内部有重点，这将与定理1矛盾，因此必存在$(a^* b^*)(c^*, d^*) \in M^*$但$(a^*, b^*)$，$(c^*, d^*) \in M$ $(a^*, b^*) \neq (c^*, d^*)$

显然 $a^{*2} + b^{*2} = C^{*2} + d^{*2} = 1$

$$(a^*, b^*) \neq -(c^*, d^*)$$

令 $u'(t) = a^* u_1(t) + b^* u_2(t)$

$u''(t) = c^* u_1(t) + d^* u_2(t)$

易知$\{u'(t), u''(t)\}$构成方程（$*$）的一组无零点的基本解组，至此定理[illegible]证[illegible]

设$\{u_1(t), u_2(t)\}$为（$*$）的一组无零点的基本解组，不妨设$u_1(t), u_2(t)$在$a<t<b$上同号，则对$\forall C_1, C_2 \in R$，若$C_1 C_2>0$（也就是说点（$C_1, C_2$）是Ⅰ，Ⅲ象限的点），则（$*$）之非零解，$C_1 u_1(t)+C_2 u_2(t)$在$a<t<b$上必无零点，这样我们就得到了一大批的无零点非零解。

定理4是存在性定理，特别地，对形如（$a, b$）的区间（$a>-\infty, b\leq+\infty$），我们能具体地构造出方程（$*$）的一组无零点的基本解组。显然Q有限，且$\lim\limits_{t\to a}Q(t)=Q(a)$，故这是定理4的一种变形特例。

考虑两组Cauchy初值问题

$$
(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2}+Q(t)u=0\\ u'(a)=0\\ u(a)=1\end{cases}
\qquad
(\mathrm{II})\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2}+Q(t)u=0\\ u'(a)=1\\ u(a)=1\end{cases}
$$

设$u_1(t), u_2(t)$分别为（Ⅰ），（Ⅱ）的解，显然$\{u_1(t), u_2(t)\}$构成（$*$）的基本解组，类似于定理1的证明，可证$u_1(t), u_2(t)$在（$a, b$）上皆无零点。故$\{u_1(t), u_2(t)\}$也是（$*$）的一组无零点的基本解组。

对区间（$a, b$）上方程（$*$）之解之零点的进一步的定量分析，有兴趣的读者可参考〔2〕，限于篇幅，本文不拟讨论。

## 参考文献

〔1〕王柔怀，伍卓群，常微分方程讲义
人民教育出版社，1979

〔2〕M.Roseau Equations Differentielles
Masson 1976

## 实正定方阵的一个性质

811 窦昌柱、李冰

任给n阶实正定方阵$S=(s_{ij})$，则对任一个二阶主子式$S\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}$为正数，即$s_{ii}s_{jj}>s^2_{ij}$，故有断言：S的元素绝对值的最大者只能在主对角线上取得，把此命题深入一步，得到：

定理1：实正定方阵S的r阶子式的绝对值的最大值只能在某个主子式上取得$(1\leq r\leq n)$

证明中用到两个引理，列举如下：

引理1：设$S_1>0$，$S_2>0$，则有

$$\det(S_1+S_2)>\max(\det S_1,\det S_2)$$

证明见许以超《代数引论》第九章习题。

引理2：令$T=\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ B & I_{n-k} \end{pmatrix}$，$\bar{S}=TST'$，

$1 \leq k \leq n$ 则 $\tilde{S}\begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots i_l \\ 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots i_l \end{pmatrix}$

$$= S\begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots i_l \\ 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots i_l \end{pmatrix}$$

$$n \geq i_1, \cdots, i_l > K$$

证：由 Cauchy 公式，$\tilde{S}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & K & i_1 & \cdots i_l \\ 1 & \cdots & K & i_1 & \cdots i_l \end{pmatrix} = \sum\limits_{\substack{1 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{K+l} \leq n \\ 1 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_{K+l} \leq n}}$

$$T\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k & i_1 & \cdots & i \\ S_1 & \cdots & S_K & S_{K+1} & \cdots & S_{K+l} \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} S_1 & \cdots & S_{K+l} \\ t_1 & \cdots & t_{K+l} \end{pmatrix}$$

$$T'\begin{pmatrix} t_1 & \cdots & t_t & \cdots & t_{u+l} \\ 1 & \cdots & R & i_1 & \cdots i_l \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} 1 \cdots & K & i_1 & \cdots\cdots i_l \\ 1 \cdots & K & i_1 & \cdots\cdots i_l \end{pmatrix}$$

现在证明定理，分两步：

$1^\circ$，任给子式 $S\begin{pmatrix} i_1, & \cdots, & i_r \\ j_1, & \cdots, & j_r \end{pmatrix}$，其中 $i_l \neq j_k$，$\forall k$，

$l = 1, \cdots, r$（因此 $2r \leq n$）。则总可经过若干步同步置换，将所给子式能移至 S 的右上角，同时容易知道同步置换后得到的主子式必和中某个主子式值相同。故可假设 $i_1, \cdots, i_r$ 为 1，

$\cdots, r, j_1, \cdots, j_r$ 为 $n-r+1\cdots, n$ 而不失一般性。

考虑 S 之 2r 阶子矩阵 $\begin{pmatrix} 1\cdots r & n+1-v\cdots n \\ 1\cdots r & n+1-r\cdots n \end{pmatrix}$，

记为 $S_0=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{22} \\ S'_{12} & S_{22} \end{pmatrix}>0$，则 $\det S_{12}=s\begin{pmatrix} 1 & \cdots & r \\ n+1-r & & n \end{pmatrix}$

$S_{12}-S_{11}\ S_{22}>0$，若 $\det S_{12}=0$，则不用证了。设

$\det S_{12}\neq 0$，则：$S_{22}\ S'_{12}\ S^{+}_{11}\ S_{12}>0$，由引理1，$\det S_{22}>\det S'_{12}\ S_{11}^{-1}\ s_{12}$ $\therefore \det s_{11}\ \det s_{22}>\det^2 s_{12}$，命题成立。

2°，设 $i_1, \cdots, i_r$ 和 $j_1, \cdots, j_r$ 中有 k 对值相等，类似 1° 中说明可以假设：$i_1, \cdots, i_r=1, \cdots, k, k+1, \cdots, r$ $j_1, \cdots, j_r=1, \cdots, k, n-(r-k)+1, \cdots, n$。考察 s 之子矩阵：

$\begin{pmatrix} 1\cdots k, k+1, & \cdots r \\ 1\cdots k, n-(r-k)+1\cdots n \end{pmatrix}$ 记为 $s_0=\begin{pmatrix} S_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{pmatrix}$

则 $\det S_0=s\begin{pmatrix} i_1\cdots i_r \\ j_1\cdots j_r \end{pmatrix}$ 对应地分 s 为 $s=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S'_{12} & S_{22} \end{pmatrix}$

$\tilde{S}_{12}$ 是 $S_{22}$ 之子矩阵，令 $\tilde{P}=\tilde{S}_{22}-\tilde{S}_{21}\ S_{11}^{-1}\ \tilde{S}_{12}$，$P=S_{22}-S'_{12}\ S_{11}^{-1}\ S_{12}$，则 $P>0$，$\det S_0=\det S_{11}\times\det\tilde{P}$，经验证：$\tilde{P}$ 是 P 之子矩阵且不含 P 之对角元素，由 1° 的结果：存在 P 的一个 r-k 阶主子式 $P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots i_{v-k} \\ i_1 & \cdots i_{v-k} \end{pmatrix}>|\det\tilde{P}|$ 又

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -S_{12}' S_{11}' & I \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -S_{12}' S_{11}' & I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

由引理2，知：

$$S\begin{pmatrix} 1 \cdots K & k+1_1 & \cdots K+1r-k \\ 1 \cdots K_1 & 1_1+k & \cdots 1_{r-k}+k \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \cdots K & k+1_1 \cdots & k+1r-k \\ 1 \cdots K & k+1_1 \cdots & k+1_{r-k} \end{pmatrix}$$

$$=\det s_{11}\; P\begin{pmatrix} 1_1 \cdots 1_{r-k} \\ 1_1 \cdots x_{r-k} \end{pmatrix} > |\det s_{11}\; \det P| = |\det s_0|$$

〔证毕〕

作为一个运用，我们有下列：

定理2：任给n阶半正定实方阵$s \geq 0$，则S的任一个r阶主子式之绝对值不超过s的某一主子式。

证明：用微小摄动法，给定r阶子式$S\begin{pmatrix} i_1 & \cdots i_r \\ j_1 & \cdots j_r \end{pmatrix}$

$\because S \geq 0$，$\therefore s_m = s + \frac{1}{m} I > 0$　（$m=1$，$2$，$\cdots$）由定理

1，$\left|s_m\begin{pmatrix} i_1 \cdots j_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix}\right| < s_m\begin{pmatrix} k_1^{(m)} \cdots & k_r^{(m)} \\ k_1 \cdots & k_r \end{pmatrix}$，

$\because k_1(m),\cdots,k_r(m)$ 的组合数有限，故必存在一个 $k_1,\cdots$

$k_r$ 及一个子列 $\{\frac{1}{m_k}\}_{k=1}^{k=\infty}$，$\frac{1}{m_k}\to 0\ (k\to+\infty)$ 使

$$\left|S_{mk}\begin{pmatrix} i_1 \cdots j_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix}\right| < S_{mk}\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_r \\ k_1 \cdots k_r \end{pmatrix}$$，二边取极限

则得：

$$\left| S\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_r \\ j_1 \cdots j_r \end{pmatrix}\right| \leq S\begin{pmatrix} k_1 \cdots k_r \\ k_1 \cdots k_r \end{pmatrix}$$

〔证毕〕

注：上述两个定理分别 正定 Hermite 和半正定 Hermite 方阵也成立。

* * * *

## On Graceful Graphs

## 关 于 优 美 图

801　况　阳

“优美图”这个名词是直到本世纪七十年代初才由 S·W·Colomb〔1〕引进的，不过对它的研究早得多，但是有关优美图理论的富有成果的研究还是近些年的事，总之这是一个很新的图论课题。

下面给出优美图的定义：

定义1：图$G=(V,E)$被称为是标定的(numbered)，如果对$\forall v\in V$，赋以标值$\phi(v)$，$\phi(v)$为非负整数，而对$\forall v\omega\in E$，标以$|\phi(v)-\phi(\omega)|$，$\phi$称为G的一种标法。

定义2：若具有e条边的图$G=(V,E)$有标法满足下述条件，则称图G为优美图(graceful graph)：

(a) $v,\omega\in V$，$v\neq\omega \Longleftrightarrow \phi(v)\neq\phi(\omega)$

(b) $\max\limits_{v\in V}\phi(v)=|E|=e$

(c) $\forall uv,\omega x\in E$，$uv\neq\omega x$

$\Longleftrightarrow |\phi(u)-\phi(v)|\neq|\phi(\omega)-\phi(x)|$

本文分两部分：第一部分列举一些有的关于优美图的研究成果和某些有名的猜想，并给出一类优美图（见定理5），对其中的某些结论作了简要说明或证明，其中未标明出处的定理（除定理5·20外）均摘译自〔1〕。第二部分提出一些问题和猜想。

## 一、定理

定理1：(Rosa)设G是具有e条边的优美欧拉图，那么$e\equiv0$或3 (mod4)。

证明：由于G是欧拉图，故$\Sigma|\phi(v)-\phi(\omega)|$ ($v\omega\in E$)是偶数，由定义2知：

$$\sum_{1}^{e} i=\frac{1}{2}(e(e+1)) \quad 为偶数$$

∴ $e \equiv 0$ 或 3 ( mod4 )

由后面的定理17，知本定理之逆不成立。(但对于圈来说定理的条件是充要的。

定理2 ( Rosa ) 若 $n \equiv 0$ 或 3 (mod4)，则圈 $C_n$ 是优美图

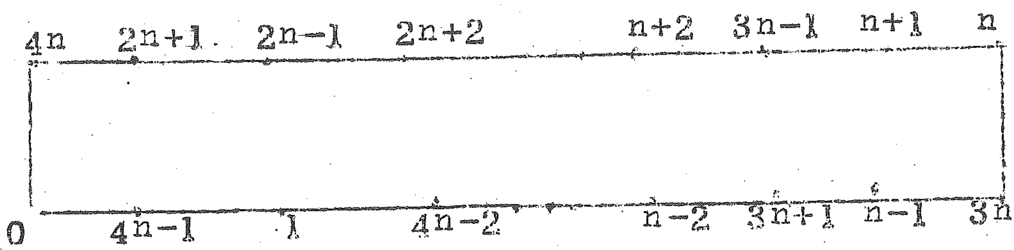



图1：Cm(m=4n≡0 (mod4)) 的优美标法示图

n ≠ 1

图1 给出了Cm(m=4 n≡0(mod4)) 的优美标法，具体验

n ≠ 1

证留给读者。圈 $C_{4n+3}$ 的优美标法示图也可类似作出，读者不妨一试。

定理3 ( Rosa ) 完全二分图是优美图。

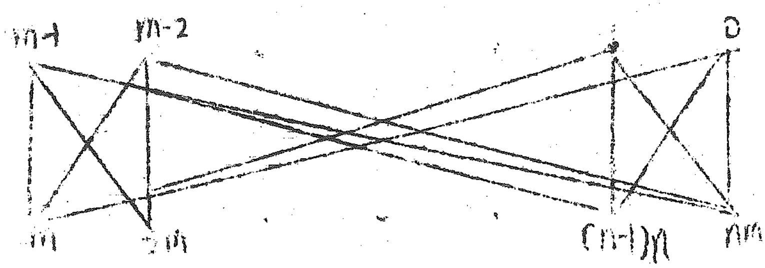



图2 定理3的构造证明图 ( Rosa〔1〕 )

定理4 ( 冯成述〔 2 〕) ∀m，n ≥ 3，由圈 $C_m$ 和 $C_n$ 有且

有一个公共点组成的图是优美的充要条件是m+n ≡ 0 或 3 (mod4)。

定理5　方链是优美图

形如图3的图我们称之为方链，在图3中我们已给出了方链的一种优美标法。

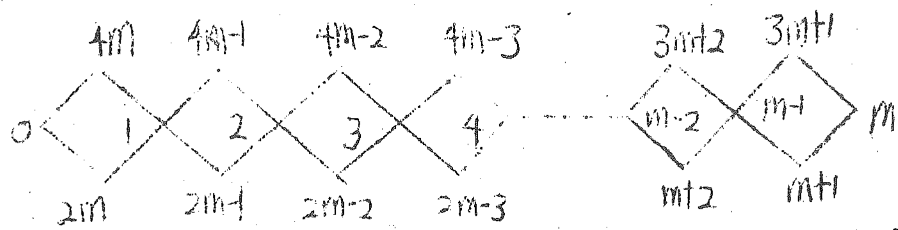



图3　方链及其优美标法

定理6 (Hoede) 轮子是优美图

所谓n阶轮子是指正n边形的边加上其中心与各顶点的连线构成的图。下图给出了阶和4阶轮子及其优美标法。

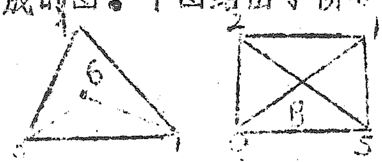


图4　3阶4阶轮子及其优美标法

*24* 由两个圈 ($V_1$ $V_2$ …$V_k$)、($V_1'$ $V_2'$ …$V_k$) 加上边 $V_iV_i'$ (i=1，2，…，k) 构成的图，称为k阶棱柱，记为Pk

定理7：(Frucht) Pk 是优美图，(k=1，2，3，…)

称由圈 ($V_1$ $V_2$ …V k) 加上边 $V_iV_i'$，i=1，2，…k ($V_i \neq V_j'$，i，j=1，2，…k) 构成的(图)为k阶王冠，记为 $O_k$。

定理8：(Frucht) $O_k$ 是优美图。

定理9：(Bermond) k维立方体是优美图。

定理10：(Sheppard)具有e条边的优美图共有e！个。

两个优美图被认为是不同的，如果Ⅰ）不同构，Ⅱ）虽同构，但有不同的优美标法。

定理10可以这样理解：记(u，v)为图的一条边的两顶点标值，$0\leq u\neq v\leq e$，为得到标值为1的边，数组(u，v)有e种取法。即(0，1)，(1，2)，…(e－1，e)，同样的道理，为得到标值为2的边，数组有e－1种取法，…为得到标值为e的边，只能取(0，e)任取一组数组$(u_i，V_i)$ $i=1，\cdots e$ $0\leq U_i\neq V_i\leq e$。$|u_i-V_i|=i$，将$u_i$，$V_i$分别视为顶点$u_i$，$V_i$，$(u_i，V_i)$视为连结顶点$u_i$，$V_i$的一边，这样，以上取出的一组数组对应着一个图，显然该图为优美图，易知以上数组的取法恰有e！种。

定理11(Rosa)设G是一个具有e条边的优美图，那么$K_{2e+1}$可以分解成(2e+1)个与G同构的图。($K_n$系指n阶完全图)

实事上，只要将G绕$K_{2e+1}$的中心旋转，每次绕过一顶点，共可绕2e+1次，最后一次回到原地，每次绕动所得的图即为一个与G同构的图。

定理12(Rosa)道路是优美的

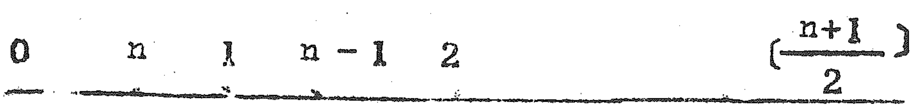



图5　道路的优美标法

如果我们把树G的端点（度数为1的顶点）去掉后得到一条道路，则称G是一条毛毛虫。

定理13(Rosa)毛毛虫是优美的。

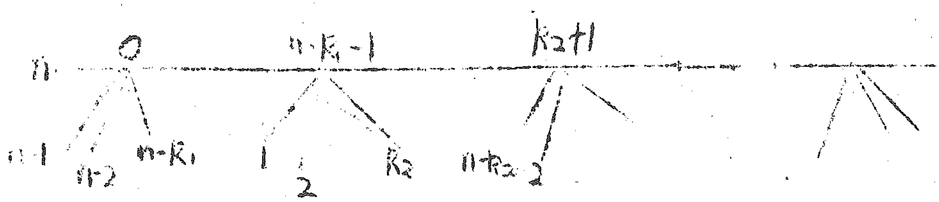


图6　　毛毛虫及其优美标法

如果我们把树G的端点去掉后得到一条毛毛虫，则称原来的树G是一只龙虾。

猜想1（Bermond）龙虾是优美的。

有关这个猜想的部分结果可参阅〔3〕。

猜想2（Kotzig）树是优美的。

这是一个大胆优美的猜想，可惜的是这毕竟是猜想。

猜想3（Bodendiek）　$\forall m, n \geq 3$，圈 $C_m$，$C_n$ 有且仅有一条公共边所组成的图是优美的。

冯成致声称已证实此猜想〔2〕。

一棵有根的并且同级（Level）上的顶点的度数相等的树称为是对称树。

定理14(Lehel)　对称树是优美图

图7给出了一棵对称树的优美标法，我们称顶点12 13的第一下级，顶点14为其第二下级，其余类推。

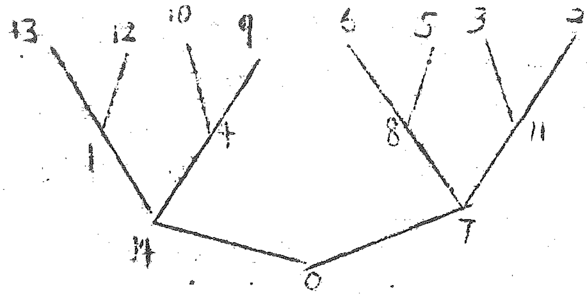



图 7

我们称某顶点及其上级顶点的生成子图为该顶点的级子图。对于树的优美标法可以这样来描述：根标以0，最左的一条边道路依次标以0，n，1，n－1，……（假设边数为n），依此第2 1＋1级的第一个顶点的标值为1（对第2 1级的讨论类似），设顶点1的级子图的顶点数为I，则同级的相邻顶点（假设具有共同的第一下级）赋以标值1＋I，易知，同级顶点的级子图具有相同的顶点数（由对称性）。若同级的两相邻顶点具有相同的第m下级而无相同的第m－1下级，则这两顶点的标值差为该级顶点的级子图顶点数加上（m－1），依此法，可得到对称树的优美标法。具体验证留给读者。

设树T是有根的，并有K条枝，而且第1条枝是长为1的道路（1＝1，…k），则T叫做橄榄树。

定理15（Pastol）橄榄树是优美的。

定理16（Simmon）Kn优美　　　n≤4。

定理16的证明是很简单的，今证明如下。

Kn的边数为$\frac{1}{2}$n（n－1），为得到标值为$\frac{1}{2}$n（n－1）的边必有顶点的标值为0和$\frac{1}{2}$n（n－1），为得到标值为$\frac{1}{2}$n（n－1）－1的边，有两条途径I）某顶点的标值为$\frac{1}{2}$n（n－1）－1的边，有两条途径I）某顶点的标值为1。

Ⅱ）某顶点的标值为$\frac{1}{2}n(n-1)-1$，不妨先考虑Ⅰ），即某顶点的标值为1，若这样，为得到标值为$\frac{1}{2}n(n-1)-2$的边必须有某顶点的标值为$\frac{1}{2}n(n-1)-2$，若$n\geq4$，不难知为得到标值为$\frac{1}{2}n(n-1)-4$的边，必有某顶点的标值为4，但这样一来，得不到标值为$\frac{1}{2}n(n-1)-5$的边了。故$n\geq4$时$K_n$非优美图（对于情况Ⅱ图的讨论完全类似。）

定理17（Kotzig）由m个互不相交的$K_n$组成的图是优美的$m=1$，$n\leq4$。

许多人对优美图定义的条件作了各种加强或减弱，在这些意义下进行了一系列的研究。得到了一些很好的结果，但进一步的研究同样存在着很多困难，这方面的工作可参看〔1〕中第四节。

由于优美图的子图不一定是优美图，反之，优美图的各种并（非交并，边不重开，边重并）也不一定是优美图，而且很难找到规律性的结论，已知的判定准则又少得可怜，所有这些都增加了研究优美图的困难。

定理18（Bermond）由具有一个公共顶点的m个$K_3$组成的图（荷兰风车）是优美的当且仅当$m\equiv0$或$1\pmod 4$）

由具有一个公共顶点的m个$K_4$组成的图称为m叶法国风车。

猜想4（Bermond）若$m\geq4$，那么m叶法国风车是优美的。

图8给出了4叶法风车的优点标法，Bermond证明了2叶和3叶法国风车不是优美图〔1〕。

问题：对哪些正整数m，n和P，使得以某$K_P$为公共部分的由m个$K_n$组成的图是优美的？

定理19（MeYniel）由任意m个以某$K_3$为公共部分的$K_4$

组成的图是优美的。

图9给出了定理19的构造性证明〔1〕。

定理20　由任意奇数个以某$K_4$为公共部分的$K_5$组成的图不是优美的。

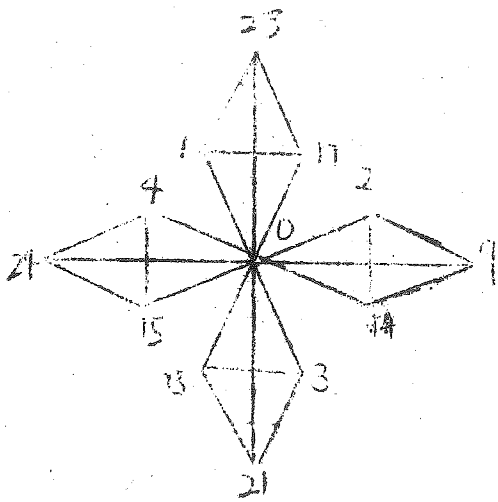



图　8

定理20的证明：易知该图各顶点的度数为偶数，故为欧拉图，但边数模4等于2，由定理1即知定理20成立。

另外，已经得到以下两个结果〔4〕

1：顶点数不超过16的树是优美的。

2：叶数少于5的树是优美的。

自然，关于优美图的结果远不止这些，我们把它们列出来，是希望能因此免去某些结论被多次发现的情况产生。限于篇幅，大部分的定理未给出证明，对于有多个发现者的定理后的署名只择其中之一。

最后，我们指出，优美标法并不是唯一的，这点不难明白，（这样的例子很容易举出）

## 二、问　题　与　猜　想

一　猜想　正多面体是优美的

我们知道，三维空间的正多面体共有五个，它们是正四面体、

正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体，这五个正多面体有着许多优美的几何性质，它们构成三维空间不可多得的五个宝贝。

下面给出这五个正多面体的平面展开图，对前面三个正多面体，我们已经给出了其优美标法。

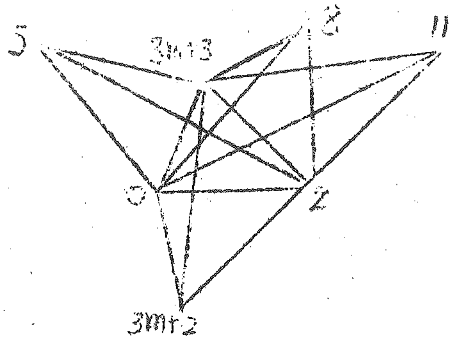



图 9

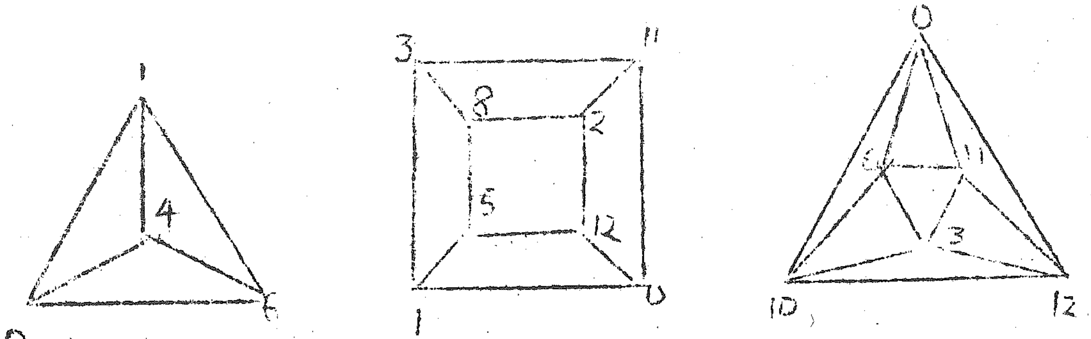
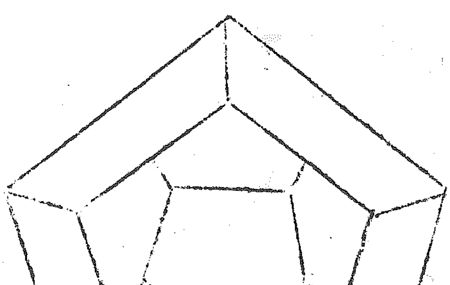
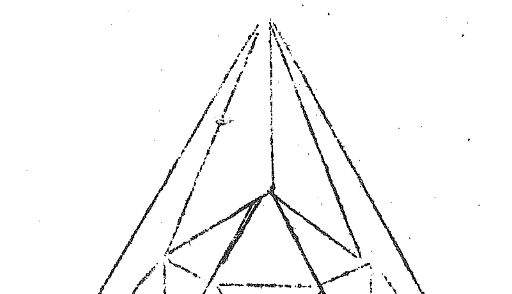



图 10



正十二面体平展图
二十个顶点，三十条边

图 11



正二十面体平展图
十二个顶点、三十条边

正十二面体和正二十面体皆非欧拉图。

问题1　哪些网络是优美图？形如右图的图称为网络，并记右图为$W_{m,n}$。

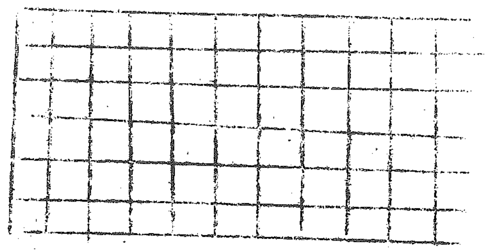


图12

问题2　哪些群山是优美图？形如右图的图称为群山，依三角形（孤山）出现的次数m而记为$M_m$。图13即$M_4$，它是优美图。

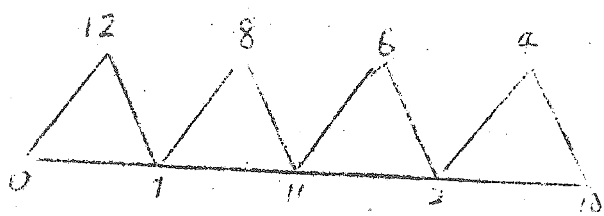



图　13

群山是欧拉图，由定理1容易得到下面的必要条件。

$m \equiv 0$　或　1（mod4）

问题3　哪些花形图是优美图？

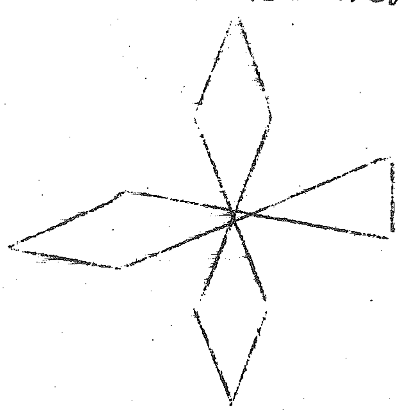


图14

形如图14的图称为花，它是由一些仅有一个共公顶点的圈组成的，14的花有4个花瓣显然花也是欧拉图。由定理1容易得到花为优美图的一个必要条件（留给读者）。

类似的问题还可提出很多，以上列出的三个问题只是笔者认为最有可能得到完全解决的，其它的问题就不再详述了。

作为中国人，就优美图的研究有一类有趣的对象，这就是汉字，如笔者的名字经过适当调整笔划，构成下面的优美图。

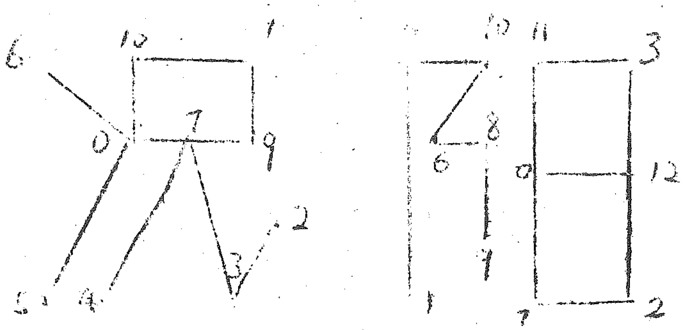



图 15

可以相信，绝大部分的汉字经过适当调整笔划都能构成优美图。汉字的确很“优美”。读者不妨将自己的名字试试看。

致谢：本文系由笔者在图论讨论班上所作四次报告的讲稿改写而成，在讨论班上，与老师、同学们进行了有益的讨论，受到不少启发，这里特别要提到的是陶懋颀、李乔两位老师的指导和帮助，黎红年、杜强等同学还提供了本文几个定理的证明。
此致谢。

## 参 考 文 献

(1) J. C. Bormond, Graceful graphs, radio antennao and French windmills, Graph Theory and Combinationics, (ed, R. J. Wilson in Research Notes in Math 34 (1979) 18-37.

〔2〕冯成进 一类优美图的充要条件，[illegible] 师院学报

1983（23－29）

〔3〕单克云、庄肃钦，关于几种特殊龙虾树的优美标号[illegible]

师院学报1983（17－22）

〔4〕G.S. Bloom, A chronology of the Ringel-Kutzig cojecture and the continuing quest to call all trees graceful, Topics in Graph Theory (ed, F. Harary) Annals of the New York Academy of Sciences. V. 328 (June 20 1979) 32-51.

# Hermite方阵在复正交复相似下的标准形

81·1 黄瑜

1955年，许宝騄教授把方阵相似推广为方阵复相似，即如果存在可逆方阵P，使得$B=PAP^{-1}$，则方阵A和B称为复相似的，并得到方阵在复相似下的标准形和全系不变量。把可逆方阵限定为复正方阵，即果如存在复正交方阵O，使得$OAO^{-1}=B$则方阵A和B称为复正交复相似的。本文的目的是给出Hermite方阵在复正交复相似下的标准形和全系不变量。

首先，利用复正交方阵在复正交相似下的标准形和全系不变量，证明了

引理1 设H和O分别是Hermite方阵和复正交方阵，并且$OH=HO^{-1}$，则当方阵O的特征根全是正数，或[illegible]是模为1的虚部不为[illegible]，存在复正交方阵$O^*$，使得$OH=O^*HO^{*-1}$

当方阵O的特征根全是负数，或者全是模不为1的虚部不为零的复数时，存在复正交方阵$O^*$，使得$OH=O^*(-H)O^{*-1}$。

引理2 设Hermite方阵$H_1$和$H_2$复相似，则存在复正方阵$O_1$和$O_2$，使得

$$H_2 = O_2 O_1 H O^{-1}$$

基本引理 设Hermite方阵$H_1$和$H_2$复相似，则存在复正方阵$O_1$和$O_2$，Hermite方阵$H_{11}$和$H_{22}$，使得

$$H_1 = O_1 \operatorname{diag}(H_{11}, H_{22}) O_1^{-1}$$

$$H_2 = O_2 \operatorname{diag}(H_{11}, -H_{22}) O_2^{-1}$$

记

$$N_{(n)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n},\quad V_{(n)}=\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}_{n\times n},$$

且 $M_{(n)}=I_{(n)}+N_{(n)}$，$T_{(n)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\frac{\pi}{4}} I_{(n)} + e^{-i\frac{\pi}{4}} V_{(n)}\right)$，其中$I_{(n)}$为单位方阵。利用基本引理和许宝騄教授关于方阵在复相似下的标准形的结论，我们证明了

定理1 设方阵$\begin{pmatrix} O & H \\ H & O \end{pmatrix}$的初等因子组为

$$(\lambda-a_r)^{n_r},\ (\lambda+a_r)^{n_r},\quad 1\leq r\leq u;$$

$$(\lambda+ib_s)^{k_s},\ (\lambda+ib_s)^{k_s},\ (\lambda-ib_s),\ (\lambda-ib_s)^{k_s}$$

$$1\leq s\leq v;$$

$$(\lambda+a_t)^{l_t},\ (\lambda-a_t)^{l_t},\ (\lambda+a_t)^{l_t},\ (\lambda-a_t)^{l_t}$$

$$1\leq t\leq f;$$

$\lambda^{mq}, \bar{\lambda}^{mq}, 1 \leqq q \leqq g$；

$\lambda^{nj}, \bar{\lambda}^{nj}, 1 \leqq j \leqq e$，

其中$a_r > 0$，$1 \leqq r \leqq u$，$b_s > 0$，$1 \leqq S \leqq V$，$a_t$为实部，虚部都不为零的复数，$1 \leqq t \leqq f$，$m_q$为偶数，$1 \leqq q \leqq g$ $n_j$为奇数，$1 \leqq j \leqq e$，则Hermite方阵H复正交复相似于标准形

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_{h_1} a_1 T_{(h_1)} M_{(k_1)} T_{(h_1)}, \cdots,$$

$$\varepsilon_{hu} a_u T_{(hu)} M_{(hu)} T_{(hu)})$$

$$+\operatorname{diag}(i b_1 [-T_{(k_1)} \overset{O}{M} (k_1) T(k)], \cdots,$$

$$i b_r (-T_{(kv)} M^O (k_v) T_{(kv)}{}^T (kv) \underset{O}{M} (kv) T (kv)),$$

$$+\operatorname{diag}((a_1 T_{(l_1)} \overset{O}{M} (l_1) T_{(l_1)} {}^{a_1} T (l_1) \underset{O}{M} (l_1) T (l_1)),$$

$$+\operatorname{diag}(\varepsilon_{m_1} T_{(m_1)} N_{(m_1)} T_{(m_1)}, \cdots,$$

$$\varepsilon_{mg} T_{(m_g)} N_{(m_g)} T_{(n_1)} N_{(n_1)} T_{(n_1)}, \cdots,$$

$$T_{(n_e)} N_{(n_e)} T_{(n_e)}),$$

其中$\varepsilon_{hr}$，$1 \leqq r \leqq u$和$\varepsilon_{mq}$，$1 \leqq q \leqq g$为$\pm 1$。

定理1中的符号$\varepsilon_{h_r}$称为对于块$\varepsilon_{h_r} a_r T_{(h_r)} M_{(hr)} T_{(h_r)}$

的标鉴 $1 \leqq r \leqq u$，同样，符号 $\varepsilon_{m_q}$ 称为属于块 $\varepsilon_{m_q} T(m_q) N(m_q) T(m_q)$ 的标鉴，$1 \leqq q \leqq g$，所有属于方阵 $\begin{pmatrix} O & H \\ H & O \end{pmatrix}$ 非零特征根 $a$ 阶数 $h$ 的形如 $\varepsilon_h aT(h) M(h) T(h)$ 的块标鉴的集合，称为属于方阵 $\begin{pmatrix} O & H \\ H & O \end{pmatrix}$ 的初等因子 $(\lambda \pm a)^h$ 的标鉴组。所有属于阶数 $2K$ 的形如 $\varepsilon_{2h} T(2h) N(2h) T(2h)$ 的块的标鉴的集合，称为属于方阵 $\begin{pmatrix} O & H \\ H & O \end{pmatrix}$ 的初等因子 $\lambda^{2K}$ 的标鉴组。

定理2　Hermite 方阵H在复正交复相似下的全系不变量由下列三部分组成

(1)方阵 $\begin{pmatrix} O & H \\ H & O \end{pmatrix}$ 的初等因子组（*）；

(2)方阵 $\begin{pmatrix} O & H \\ H & O \end{pmatrix}$ 的初等因子 $(\lambda \pm a_r)^{h_r}$，$1 \leqq r \leqq u$，的标鉴组的符号差。

(3)、方阵 $\begin{pmatrix} O & H \\ H & O \end{pmatrix}$ 的初等因子 $\lambda^{m_q}$，$1 \leqq q \leqq g$，的标鉴组的符号差。

# On a Problem of S$^{u}$ryanarayana

821 Liu Hong-Quan

## I Introduction

In 1970, Professor Suryanarayana presented three problems in Number Theory in (1) One of them is: "Let $V(n)$ be the maximal square-free divisor of n, $\beta(x) = \sum_{n\leq x} \frac{v(n)}{n^2}$, then, find a Suitable Constant C such that the limit $\lim_{x\to\infty}$ $\left(\frac{\exp(x)}{Xc}\right)$ has a suitable value", In this paper, ;e use the principle of inclusion and exclusion to ıQduce the following:

THEOREM, $(x)=CoC_1 \log x+C_0(C_1 r-C_2-C_2)-2C_4$ $+O(x^{1/2}\log x)$ where $r$ is Euler's Constant

$$C_0 = \frac{6}{\pi^2}, \quad \text{and}$$

$$C_1 = \prod_{P\geq 2}\left(1+\frac{1}{(P-1)(P+1)^2}\right)$$

$$C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(n\cdot v(n))}{h^2\cdot v(h)} \prod_{p|n}\left(1+\frac{1}{P}\right)^{-1}$$

$$C_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\cdot v(n)} \prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} \quad d|n$$

$$\sum_{d|n} \frac{u(d)\log d}{d}$$

$$C_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{h^3 \cdot V(n)} \sum_{\substack{S=1 \\ (s,n)=1}}^{\infty} \frac{u(s)\log S}{S^2}$$

especially, we have $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\exp\beta(x)}{x^c}\right)=\lambda$

where $c=C_0 C_1$, $\lambda=\exp[C_0(C_1 r-C_2-C_3)-2C_4]$

Thus we Solve the above problem Completely

More over, we can obtain the following

Corollary $\sum_{d\leq x} \frac{|u(d)|}{d} \prod_{p|d} \left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1} =$

$C_0 C_1 \log x + O(1)$

## II Some Lemmas

The following two lemmas are the more stronger forms of lemma 3.3 and lemma 4.3 of [2] respectively.

Lemma1 Let $X\geq 1$ be integer and $N\geq 1$, then

$$\sum_{\substack{t\leq N \\ (t,x)=1}} \frac{1}{t} = \frac{\varphi(x)}{x}(\log N+r) - \sum_{d|x} \frac{u(d)\log d}{d}$$

$$+O(N^{-1}X^{\varepsilon})$$

where $\varepsilon$ is any pre-assigned positive number

Proof: Since $\sum_{1\le t\le \xi}\frac{1}{t}=\log\xi+r+O\left(\frac{1}{\xi}\right)$, We

have $\sum_{\substack{t\le N\\(t,x)=1}} = \sum_{t\le N}\frac{1}{t}\sum_{d|(t,x)}\mu(d)=\sum_{d|x}\mu(d)\sum_{\substack{d|t\\t\le n}}\frac{1}{t}$

$$=\sum_{d|x}\frac{\mu(d)}{d}\sum_{t\le\frac{N}{d}}\frac{1}{t}$$

$$=\sum_{d|x}\frac{\mu(d)}{d}\left\{\log\frac{N}{d}+r+O\left(\frac{d}{N}\right)\right\}$$

$$=\frac{\varphi(x)}{x}(\log N+r)-\sum_{d|x}\frac{\mu(d)\log d}{d}+O(N^{-1}x^{\varepsilon})$$

(Since $\sum_{d|x}|\mu(d)|=O(x^{\varepsilon})$)

Lemma 2 Let $X\ge 1$ be an integer and $N\ge 1$

then

$$\sum_{\substack{t\le N\\(t,x)=1}}\frac{|\mu(t)|}{t}=\frac{\varphi(x)}{x}E_1(X)(\log N+r)-E_1(X)\sum_{d|x}\frac{\mu(d)\log d}{d}-2\cdot\frac{\varphi(x)}{x}\cdot E_2(X)+O(N^{-1/2}\log N)$$

$$+O(N^{-1/2}X^{\varepsilon})$$

Where $E_1(X)=\sum_{\substack{S=1\\(S,X)=1}}^{\infty}\frac{\mu(S)}{S^2}$, $E_2(X)=\sum_{\substack{S=1\\(S,X)=1}}^{\infty}\frac{\mu(S)\log S}{S^2}$

Proof By the result of the above lemma

$$\sum_{\substack{t\leq n\\(t,x)=1}} \frac{|\mu(t)|}{t} = \sum_{\substack{t\leq N\\(t,x)=1}} \frac{1}{t} \sum_{S^2 | t} \mu(s) = \sum_{S\leq N^{\frac{1}{2}}} \mu(S)$$

$$\sum_{\substack{t\equiv 0(S^2)\\ t\leq N\\(t,x)=1}} \frac{1}{t} = \sum_{\substack{S\leq N^{\frac{1}{2}}\\(s,x)=1}} \frac{\mu(S)}{S^2} \sum_{\substack{(m,x)=1\\ m\leq N/S^2}} \frac{1}{m}$$

$$= \sum_{S\leq N^{1/2}} \frac{\mu(S)}{S^2}\left(\frac{\varphi(x)}{X}\log\frac{N}{S^2} + \frac{\varphi(x)}{X}\, r - \sum_{d|x} \frac{\mu(d)\log d}{d}\right.$$

$$\left. + O\left(\frac{S^2}{N}\cdot x^{\varepsilon}\right)\right]$$

$$= \frac{\varphi(x)}{X}(\log N + r)\sum_{\substack{S\leq N^{1/2}\\(s,x)=1}} \frac{\mu(S)}{S^2} - \sum_{\substack{S\leq N^{1/2}\\(s,x)=1}} \frac{\mu(S)}{S^2} \sum_{d|x}$$

$$\frac{\mu(d)\log d}{d} - 2\cdot\frac{\varphi(x)}{X} \sum_{\substack{S\leq N^{1/2}\\(s,x)=1}} \frac{\mu(s)\log s}{S^2}$$

$$+ O(N^{-1/2}x^{\varepsilon})$$

Since: $\displaystyle\sum_{\substack{S\leq N^{1/2}\\(s,x)=1}} \frac{\mu(S)}{S^2} = E_1(x) + O(N^{-1/2})$

$$\sum_{\substack{S\leq N^{1/2}\\(s,x)=1}} \frac{\mu(s)\log s}{S^2} = E_2(x)+O(N^{-1/2}\log N)$$

the lemma follows

THEOREM

By the defination of $v(n)$, we find that $v(n)=\max_{k|n}\{k\cdot|\mu(k)|\}$. Thus, by the principle of inclusion and exclusion, we can write

$$v(n)=\sum_{m|n}\mu(m)\sum_{\substack{d|n\\(d,m)=1}}|\mu(d)|\cdot d$$

So that
$$\beta(x)=\sum_{n\leq x}\frac{v(n)}{n^2}=\sum_{n\leq x}\frac{1}{n^2}\sum_{m|n}\mu(m)\sum_{\substack{d|n\\(d,m)=1}}|\mu(d)|d$$

$$=\sum_{d\leq x} d\cdot|\mu(d)|\sum_{\substack{n\leq x\\d|n}}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{m|n\\(d,m)=1}}\mu(m)$$

$$=\sum_{d\leq x}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{n\leq\frac{x}{d}}\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{m|n\\(d,m)=1}}\mu(m)$$

$$=\sum_{d\leq x}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{n\leq\frac{x}{d}}\frac{1}{n^2}\sum_{m\,\big|\,\frac{v(n)}{(v(n),d)}}\mu(m)$$

$$= \sum_{d \leq x} \frac{|\mu(d)|}{d} \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{d} \\ v(n) | d}} \frac{1}{n^2} = \sum_{n \cdot v(h) \leq x} \frac{1}{n^2} \sum_{d \leq \frac{x}{n}} \frac{|\mu(d)|}{d}$$

$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$= \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} \sum_{\substack{d \leq \frac{x}{n \cdot v(n)} \\ (d, n) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{d} \cdots\cdots (2)$$

Now put $x = n$ and $N = \dfrac{x}{n \cdot v(n)}$ in Lemma 2 Then

$$\sum_{\substack{d \leq \frac{x}{n \cdot v(n)} \\ (d, n) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{d} = \frac{\varphi(n)}{n} E_1(n)(\log \frac{x}{n \cdot v(n)} + r) - E_1(n)$$

$$\sum_{d | n} \frac{\mu(d) \log d}{d} - 2 \cdot \frac{\varphi(n)}{n} E_2(n) + O((\frac{x}{n \cdot v(n)})^{-\frac{1}{2}} (\log x$$
$$+ n^{\varepsilon}))$$

$$+ n^{\varepsilon}))$$

Thus, we have

$$\beta(x) = \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{n^2 \cdot v(n)} \cdot \frac{\varphi(n)}{n} E_1(n)(\log x + r -$$

$$\log(n \cdot v(n))) - \sum_{n \cdot v(n) \leq x} \frac{1}{h^2 \cdot v(n)} E_1(n) \sum_{d | n} \frac{\mu(d) \log d}{d}$$

$$\sum_{n\cdot u(n)\le x}\frac{1}{n^2+v(n)}E_2(n)\frac{\varphi(n)}{n}+O(X^{-1/2}\sum_{n\cdot v(n)\le x}\frac{1}{n^{3/2}\cdot(v(n))^{1/2}}(\log x+n^{\varepsilon}))$$

Obviously, $E_1(n)=C_0\prod_{p|n}(1-\frac{1}{p^2})^{-1}$, $E_2(n)=O(1)_2$

$\frac{\varphi(n)}{n}E_1(n)=C_0\prod_{p|n}(1+\frac{1}{p})^{-1}$, also,

$$\sum_{n\cdot v(n)\ge x}\frac{1}{n^2\cdot v(n)}\prod_{p|n}(1+\frac{1}{p})^{-1}=O(X^{-1/2})$$

$$\sum_{n\cdot v(n)\ge x}\frac{1}{n^2\cdot v(n)}E_1(n)\sum_{d|n}\frac{\mu(d)\log d}{d}=O(\sum_{n\ge x^{1/2}}\frac{\log h}{n^2})$$

$$=O(X^{-1/2}\log x)$$

$$\sum_{n\cdot v(n)\ge x}\frac{\varphi(n)E_2(n)}{n^3\cdot v(n)}=O(\sum_{n>x^{1/2}}\frac{1}{n^2})=O(X^{-1/2})$$

$$\sum_{n\cdot v(n)\le x}\frac{n}{n^{3/2}(v(n))^{1/2}}=O(1)$$

Thus, $\beta(x)=C_0C_1'\log x+C_0(C_1r-C_2-C_3)-2C_4+$

$$O(X^{-1/2}\log x)$$

Where $C_1'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2\cdot v(n)}\prod_{p|n}(1+\frac{1}{p})^{-1}$, The

Theorem follows from the fact $v(n)$ is a multiplicative function and $C_1$ :=

$$\prod_{p\geq 2}\left(1+\frac{1}{p^2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p+1}\cdot\frac{1}{p^4}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p+1}+\cdots\right)=$$

$$=\prod_{p\geq 2}\left(1+\frac{1}{p+1}\cdot\frac{\frac{1}{p^2}}{1+\frac{1}{p^2}}\right)=C_1$$ This completes the proof

Finally, from the equality (1) We find that

$$B(x)=\sum_{d\leq x}\frac{|\mu(d)|}{d}\sum_{\substack{n\leq \frac{x}{d}\\ v(n)|d}}\frac{1}{n^2}$$

$$=\sum_{d\leq x}\frac{|\mu(d)|}{d}\left(\sum_{\substack{n=1\\ v(n)|d}}^{\infty}\frac{1}{n^2}+O\left(\sum_{n>\frac{x}{d}}\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$=\sum_{d\leq x}\frac{|\mu(d)|}{d}\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}+O(1)\cdots\cdots \qquad (3)$$

form the above THEOREM we have also

$$B(x)=C_0\,C_1\log x+O(1)\cdots\cdots\cdots \qquad (4)$$

Thus the Corollary follows from (3) and (4)

References


[1] SuryanaraYana. D., Bull. Amer. Math Soc, 76(70) Page 976

[2] 闵嗣鹤，《数论的方法》，上册，科学出版社，1983。

# 环上矩阵相似的初步想法

821 严峰生

设R是一个带一交换环，它的n×n矩阵形成一个矩阵$Mn(R)$，其中可逆矩阵形成乘法群$GLn(R)$，A，B ε $Mn(R)$相似并记作$A\overset{R}{\sim}B$是指存在P ε $GLn(R)$，使得$A=P^{-1}BP$，有两个问题需要考虑。

第一，知道环R的性质，则在多大程度上能够决定相似标准形或相似的全系不变量。

第二，当我们知道相似的一些性质以后，又能多大程度地限定出环R的性质呢？这比第一类问题更困难。

更一般地在模论中也有类似的两种问题。

本文提出两个第二类问题，并举出例子，以作引玉之砖。

1°．设R是带一交换环，$\{I_i\}_{i\in\Lambda}$是它的全体极大理想所成集合，另有自然同态集合及一些直积：$\{\varphi_i \mid \varphi_i: R\to R/I_i\}$，

$F=\prod\limits_{i\in\Lambda} R/I_i$ 和 $\varphi=\prod\limits_{i\in\Lambda}\varphi_i : R\to F$

(X) A，B $Mn(R)$，如$\varphi(A)\overset{F}{\sim}\varphi(B)$，则$A\overset{R}{\sim}B$

命题：如R满足(X)，则R是半单环，即大根$I=\bigcap\limits_{i\in\Lambda} I_i=0$

证明：$\forall a\in I$，作$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & I(n-1)\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I(n-1)\end{pmatrix}$

则有$\varphi(A)=\varphi(B)$，设$P=(P_{ij})\varepsilon GLn(R)$，使得$AP=PB$

即
$$\begin{pmatrix} aP_{11} & aP_{12} & \cdots aP_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \cdots P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \cdots P_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & P_{12} & \cdots P_{1n} \\ 0 & P_{22} & \cdots P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & P_{n3} & \cdots P_{nn}\end{pmatrix}$$

由此得$aP_{11}=P_{21}=\cdots=P_{n1}=0$，又$P=(P_{ij})\in GL_n(R)$，故知$P_{11}$是R的可逆元，$a=aP_{11}P_{11}^{-1}=0P_{11}^{-2}=0$

即使对半单环，(X)也不一定成立，Z是反例。

2°、更进一步，设R是整环，K是它的商域，这时R自然嵌入到K中。

$(Y)\ \forall A,B\ \ M_n(R)$，如$\varphi(A)\overset{F}{\sim}\varphi(B)$，则$A\overset{K}{\sim}B$

命题：如R满足(Y)，则R是半单环。

证明：由于$P_{11}\neq0$不是零因子，从$aP_{11}=0$推出$a=0$

在(X)和(Y)中，由于$I=0$，同态$\varphi$是单的，R嵌入到F中，因此讨论满足(X)、(Y)的环的性质很有可能通过讨论F的结构而得到。

3°、对整数环Z，它的极大理想集合是$\{PZ\}_{P\in\Lambda}$，$\Lambda$是全体素数的集合，易知$I=0$。

命题：Z不具有性质(X)

证明：(我们只要讨论$n=2$的情形)反之，我们取

$$A=\begin{pmatrix}1 & \alpha\beta\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ \beta & 1\end{pmatrix}$$，这里$\alpha$、$\beta$是不同奇素数。

但$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \beta-1\end{pmatrix}$ $B\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ \alpha^{-1} & 0\end{pmatrix}$

$B\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，故如不论素数P如何有$\varphi_p(A)\overset{Z_p}{\sim}\varphi_p(B)$($\beta$是除$Z\beta$外$Z_p$的可逆元，$\alpha$亦类似)。

如果 $\exists P\in GL_2(Z)$，使 $B=P^{-1}AP$，设 $P=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

则 $\det p=\pm 1$。

（1）$\det p=1$ 时，$P^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

得 $\begin{pmatrix} 1-ab+cd\alpha\beta & -b^2+d^2\alpha\beta \\ a^2-c^2\alpha\beta & 1+ab-cd\alpha\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$

（2）$\det p=-1$ 时，$P^{-1}=\begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$

得 $\begin{pmatrix} 1+ab-cd\alpha\beta & b^2-d^2\alpha\beta \\ -a^2+c^2\alpha\beta & 1-ab+cd\alpha\beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$

从(1)和(2)得两个同余式组

$1'\begin{cases} b^2\equiv-\alpha \bmod \beta \\ a^2\equiv\beta \bmod \alpha \end{cases}$ $2'\begin{cases} b^2\equiv\alpha \bmod \beta \\ a^2\equiv-\beta \bmod \alpha \end{cases}$

而取 $\begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=3 \end{cases}$，则 $\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)=1$，$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)$

$=-1$

这时 $1'$ 和 $2'$ 都不可能有解，因此A和B在Z上是不相似的。

4°．整环Z是满足（Y）的。

引理：$\forall a, b\in z(x)\subset Q(x)$，它们在 $Q[x]$ 上最大公因子

$(a, b)$

则P充分大后，$\varphi p(a,b)=(\varphi p(a),\varphi p(b))$这里$\varphi p$是指

$\varphi p: Z\to Zp$ 在$Z[x]\to Zp[x]$上自然诱导的满同态。

证明：注意到最大公因子是首一的，并是可以线性组合出来的。

$\exists s,t\in Q[x]$，使$(a,b)=sa+tb$，这时$s,t$的系数的最小公分母为$m=P_1^{e_1}P_2^{e_2}\cdots P_r^{e_r}$，$1<P_1<P_2\cdots<P_r$，则当我们取$P>P_r$后由于$(m,p)=1$，$\varphi p(s)$和$\varphi p(t)$是有定义的，这样$\varphi p(a,b)=\varphi p(s)\varphi p(a)+\varphi p(t)\varphi p(b)$，因此$(\varphi p(a),\varphi p(b))\mid\varphi p(a,b)$ (1)

又$\exists s,t\ Z(x)$，使$(\varphi p(a),\varphi p(b))=\varphi p(s)\varphi p(a)+\varphi p(t)\varphi p(b)$

即$(\varphi p(a),\varphi p(b))=\varphi p(sa+tb)$，因此$\varphi p((a,b))\mid(\varphi p(a),\varphi p(b))$， (2)

由(1)、(2)即知引理成立。

命题：$\forall A,B\in Mn(Z)$，如$\varphi(A)\overset{F}{\sim}\varphi(B)$，则$A\overset{Q}{\sim}B$

证明：在域上，方阵相似的一组全系不变量是它的$\lambda$矩阵的行列式因子。

如设$\lambda I-A$在Q上的K阶行列式因子为$dk(A)$，$k=1,2\cdots,n$(易证它们是整系数的)

$\varphi p(\lambda I-A)$在$Zp$上的k阶行列式因子为$dk(\varphi p(A))$，$k=1,2\cdots n$，则由$dk$的定义和引理，知当P充分大以后

$\varphi p\,dk(A)=dk(\varphi p(A))$，$k=1,2,\cdots,n$。因此，如$\varphi p(A)\overset{Z_P}{\sim}\varphi p(B)$则$dk(\varphi p(A))=dk(\varphi p(B))$，$k=1,2,n$，故当P充分

大（P＞某个正整数m）以后。

$\varphi_p(d_k(A))=\varphi_p(d_k(B))$，即在Z上，$P \mid d_k(A)-d_k(B)$，$k=1,2,\cdots,n$，易证 $\bigcap_{p>m} pZ[x]=0$，$\therefore d_kA=d_kB$，$k=1,2,\cdots,n$，即 $A \overset{Q}{\sim} B$。

本报告是作者在查建国老师指点下研究的部分心得，八一级黄渝同学的帮助也颇多，在此一并致谢。报告所写皆不成样，还请读者多提意见有以教我。

## 边圈问题的一些结论

811 李冰

J.A邦迪，U.S.R默蒂的《网论及其应用》指出这样一个命题

一个图中，若 $\varepsilon \geq V+4$，则图中必有二个不重边的圈。

这个命题的征明是极容易的。类似，我们可以提出若 $\varepsilon \geq V+10$ 图中则至少有三个不重边的圈。于是，我们想找出这样的数 $\tau_k$。当 $\varepsilon \geq V+\tau_k$，图中至少有R个不重边的圈，且 $\tau_k$ 具有最小性，显然 $\tau_1=0$，$\tau_2=4$，$\tau_3=10$

但是一般而言，$\tau_k$ 是极难找出的，但是，我们可以给出若干限定，使 $\tau_k$ 具有比较小的上界，本文便给出若干结果当然是极不完善的。

定义：若图 $G_1$，$G_2$，若图 $G_2$ 有R个不重边圈，推出 $G_1$ 也有R个不重边圈。且 $\varepsilon-V$ 为不变量则称 $G_2$ 是 $G_1$ 的C一转化。

显然 $C_2$ 一转化是可传送的。

定理1、正整数τ，若对有 $v=2\tau$ 的三正则图G中至少有R个

不重边的圈那么所有满足 $\varepsilon \geq V+\tau$ 的图中皆存R个不重边的圈。

定理2。$\tau k \leq (k-1)(k+2)$

定理3。$\tau k \leq 2\ln_2 \pi + 4\ln_2 (k+1) - 4\ln_2 e \cdot k + 4\ln_2 k \cdot k$

定理的证明逐步通过引理形式给出。

在证明过程中，由于出现独立顶点，及环的情形将会使问题简化，故不予讨论。

引理1．每个图G，皆可C－转化为 $\delta \geq 3$ 的图G'，

证：设存在 $V \varepsilon G$， $d(V) < 3$

若 $d(V) = 1$

令 $G_1 = G$。V 则 $G_1$ 显然是G的C一转化。

若 $d(V) = 2$ 令 $V_1$，$V_2$ 为与V相连的顶点。

则构作 $G_1$ 如下： $V(G_1) = V(G) - (V)$．

$E(G_1) = E(G) U\{V_1 V_2{}^*\} \{V_1 V_3, V_2 V\}$

显然 $G_1$ 是G的C一转化

继续对 $G_1$ 进行此过程，最后得一个图G'。$\forall V\ V(G')$

$d(V) \geq 3$。

由 C一转化的传递性。G'是G的C一转化

引理2．每个图G，皆可C一转化为 $\Delta = \min\{3, \Delta(G)\}$ 的图G'

证：

若 存在 $V \varepsilon V(G)$，$d(V) \geq 3$，则令 $G' = G$。

若存在 $V \varepsilon V(G)$，$d(V) > 3$。

令 $V_1$，$V_2$ 是与V有边相连的顶点，构作图 $G_1$

$V(G_1) = V(G) U\{V^*\}$

$E(G_2) = E(G) U\{V^* V_1, V^* V_2, V^* V\} \{V_1 V, V_2 V\}$

易证$G_1$是G的C—转化。

对$G_1$继续此过通，使得图G'，显然对G'，$\Delta=3$，

证毕：

(3)（5分）Q能否写成完全平方式（$a_1x_1+\cdots+a_nx_n$）$^2$，其中$a_1,\cdots,a_n$是复数）？为什么？

5．（20分）A是n维复线性空间V的线性变换，P是V的投影变换（即满足$P^2=P$的线性变换），证明：

(1)$V=\mathrm{Im}P+\mathrm{Ker}P$，这里$\mathrm{Im}P$、$\mathrm{Ker}P$分别是P的象和核。

(2)$\mathrm{Im}P$、$\mathrm{Ker}P$都是A的不变子空间的充分必要条件是A P可交换。

（上接$P_{35}$） 不要了

定理1的证明：

证：

不妨设此图中$\varepsilon=V+\tau$，由引理1，引理2，此图可以C—转化为一个三正则图，设为G

由。$\varepsilon-V$为不变量，得$\varepsilon_G=V_G+\tau$即$\frac{3}{2}V_G=V_G+\tau$　　$\therefore V_G=2\tau$

故G中有R个不重边的圈。推出，原圈中至少有R个不重边的圈。

证毕。

旧此定理看到。我们以后可以只考虑三正则图中的边圈问题。

引理3、三正则图G，及一正整数A，　若

$$v_G < Y(\alpha) = \begin{cases} 2^{m+2}-2 & \alpha=2m+1 \\ 3\times 2^{m}-2 & \alpha=2m \end{cases}$$

则图的围长不超过$\alpha$。

证明： 考虑一个根状树。

引理4：若$\tau_{k-1}\leq b$， $\Delta k$为满足于等式

$Y(\Delta k) > 2b+2\Delta k$的最小整数

则$\tau_k \leq b+\Delta k$

证：引定理1，及$L_k$的定义，只须证明$v_G=2b+2\Delta k$的三正

则图G至少有k个不重边的圈即可。

由定理3，知G中有一个圈C，$|C|\leq \Delta k$

在G中删去C中的边：得一个新图G'。

$$\varepsilon_{G'}=\varepsilon_G-\Delta k=\left(\frac{3}{2}\cdot(2b+2\Delta k)\right)-\Delta k=2b+2\Delta k+b$$

$$=v_{G'}+b$$

∵ $\tau_{k-1}\leq b$ 故G'一定存在k－1个重边的圈。

于是G中一定存在k个不重边的圈。

定理2，的证明：

归纳法：

当k＝1，2，3 时不等式成立

设k－1时成立， $k\geq 4$

由引理4，只须证$Y((k-1)(k+2)-(k-2)(k+1))$

$$>(k-1)(k+2)$$

即：$Y(2R)=3\times 2^{k}-2>(k-1)(k+2)$

当$R\geq 4$时，这个命题显然成立。

故 $\tau_k<(k-2)(k+1)+2k=(k-1)(k+2)$

定理3的证明：

其实，这是对 $\tau_k$ 作更精确的估计。

为此我们记 $b_k=(k-1)(k+2)$

另外，定义函数 $\Delta(m)$ 为满足：

$Y(\Delta(m))>2m+2\Delta(m)$ 的最小整数（m也为整数）

容易有：$a_k\le\sum_{n=2}^{k}\Delta(b_n)$

而 $\Delta(b_k)=\min(2\ln_2(2k^2+2k-2)-\ln_2^3),$

$$2\{\ln_2(2k^2+2k-2)-2\}$$

$$\le 2\{\ln_2(2k^2+2k-2)-2=2\ln_2(k^2+k-1)$$

$$\le 2\ln_2 k(k+1)$$

$$\therefore a_k\le\sum_{h=2}^{k}\Delta(b_n)\le\sum_{n=2}^{k}2\ln_2 n(n+1)$$

$$=2l(k+1)+1)+4\ln_2 k-2$$

当k充分大时有 $k!\sim\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k$

$$\therefore a_k\le 2\ln(k+1)+4\ln_2\sqrt{2\pi k}\left(\frac{k}{e}\right)^k-2$$

$$\le 4\ln_2(k+1)+2\ln_2\pi-4k\ln_2 e\cdot k+4\ln_2 k\cdot k$$

显然，更精确的估计仍然存在。比如。当 $k\ge 4$ 时，有 $a_k\le 14$

$+\dfrac{(k+3)(k+4)}{2}$ 同样，用逐步运算，便能得到比定理3更精确的界。

有趣的是，假若由引理4，从 $b_1=0$，$b_2=4$，得出一个无穷数列（$b_k$），显然有 $\tau_k \le b_k$，且比 $b_k$ 定理3的结论显然强得多。

而且 $\tau_k$ 是否等于 $b_k$？是一个值得探索的问题，这其实只要归纳证明：圈长为Δ的三正则图，其中 $T(4)\le 2\tau_{k-1}+2\Delta$，图中不存在k个圈即可。

## 实正定对方阵的一个有趣性质

831马 援 李广兴

本文揭示了实正定对称方阵的下述性质：

定理1：设S是r阶实正定对称方阵，则

$$T=\begin{pmatrix} S\begin{pmatrix} i_1^1 \cdots\cdots i_n^1 \\ i_1^1 \cdots\cdots i_n^1 \end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & S\begin{pmatrix} i_1^1 \cdots\cdots i_n^1 \\ i_1^m \cdots\cdots i_n^m \end{pmatrix} \\ \vdots & & \vdots \\ S\begin{pmatrix} i_1^m \cdots\cdots i_n^m \\ i_1^1 \cdots\cdots i_n^1 \end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots\cdots & S\begin{pmatrix} i_1^m \cdots\cdots i_n^m \\ i_1^m \cdots\cdots i_n^m \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

是正定对称的。

其中 $n\le r$，且 $\forall k$，$1\le k\le m$。当 $k\ne 1$ 时 $\{i_1^k\cdots\cdots i_n^k\}\ne\{i_1^1,\cdots,i_n^1\}$

为说明上述定理的意义，先看下述两种特殊情形：

(1) S是mn阶正定对称方阵，则S可分块成为

$$S=\begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1n} \\ S_{n1} & \cdots & S_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$S_{ij}$是m阶方阵，则当以$|S_{ij}|$表$S_{ij}$的行列式时

$$T=\begin{pmatrix} |S_{11}| & \cdots\cdots & |S_{1n}| \\ |S_{n1}| & \cdots\cdots & |S_{nn}| \end{pmatrix}$$

是正定对称的。

2) m=2时

$$T=\begin{pmatrix} S\begin{pmatrix} i_1 \cdots\cdots i_n \\ i_1 \cdots\cdots i_n \end{pmatrix} & S\begin{pmatrix} i_1 \cdots\cdots i_n \\ j_1 \cdots\cdots j_n \end{pmatrix} \\ S\begin{pmatrix} j_1 \cdots\cdots j_n \\ i_1 \cdots\cdots i_n \end{pmatrix} & S\begin{pmatrix} j_1 \cdots\cdots j_n \\ j_1 \cdots\cdots j_n \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

是正定对称的。故其行列式为正，从而有

$$S\begin{pmatrix} i_1 \cdots\cdots i_n \\ i_1 \cdots\cdots i_n \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} j_1 \cdots\cdots j_n \\ j_1 \cdots\cdots j_n \end{pmatrix} > S\begin{pmatrix} i_1 \cdots\cdots i_n \\ j_1 \cdots\cdots j_n \end{pmatrix} S\begin{pmatrix} j_1 \cdots\cdots j_n \\ i_1 \cdots\cdots i_n \end{pmatrix}$$

注意正定对称方阵的特点，可从上式导出

$$\left| S\begin{pmatrix} i_1 \cdots\cdots i_n \\ j_1 \cdots\cdots j_n \end{pmatrix} \right| < \max\left\{ S\begin{pmatrix} i_1 \cdots\cdots i_n \\ i_1 \cdots\cdots i_n \end{pmatrix}, S\begin{pmatrix} j_1 \cdots\cdots j_n \\ j_1 \cdots\cdots j_n \end{pmatrix} \right\}$$

其中符号“| |”表绝对值号。由此知有：

推论：实正定对称方阵 $S_{r\times r}$ 的 n 阶子式的绝对值的最大值只能在某个主子式上取到。

这就是〔2〕中的主要定理，类似地，〔2〕中的另一定理也可作为本文定理2的推论。

如下二条引理证明较易，本文从略：

引理1〔1〕：若S为实正定对称方阵，则存在非奇异的实下三角方阵Q，使得 $S=QQ'$。

引理2：设P是 $m\times n$ 矩阵，$m\leq n$，且P是行满秩的。则 $PP'$ 正定。

定理1的证明：

由引理1，有非奇异下三角方阵P使得 $S=PP'$ 由 Binet-Cauchy公式

$$S\begin{pmatrix} i_1^s & \cdots i_n^s \\ \\ i_1^t & \cdots i_n^t \end{pmatrix} = \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_n\leq r} P\begin{pmatrix} i_1^s & \cdots i_n^s \\ \\ k_1 & \cdots k_n \end{pmatrix} P'\begin{pmatrix} k_1 & \cdots k_n \\ \\ i_1^t & \cdots i_n^t \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{1\leq k_1<\cdots<k_n\leq r} P\begin{pmatrix} i_1^s & \cdots i_n^s \\ \\ k_1 & \cdots k_n \end{pmatrix} P\begin{pmatrix} i_1^t & \cdots i_n^t \\ \\ k_1 & \cdots k_n \end{pmatrix}$$

依次典排序法将向量 $(k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 排序（其中 $k_i\in\{1, 2, \cdots, r\}$ 且 $k_1<k_2<\cdots<k_n$）即有 $(k_1, \cdots, k_n)<(\tilde{k}_1, \cdots, \tilde{k}_n) \Longleftrightarrow$ 存在 $1\leq l\leq n$，使得 $k_i=\tilde{k}_i$ $(i=1, \cdots, l-1)$ 而

$k_j < k_l$，对 T 中元素 $S\begin{pmatrix} i_1^s \cdots i_n^s \\ i_1^t \cdots i_n^t \end{pmatrix}$ 我们不妨设

$i_1^s < \cdots < i_n^s$，$i_1^t < \cdots < i_n^t$。由于我们的目的是要证明 T 正定，因而不妨设 $(i_1^1, \cdots, i_n^1) < (i_1^2, \cdots, i_n^2) \cdots < (i_1^m, \cdots, i_n^m)$ 再将 $C_r^n$ 个向量 $(k_1, \cdots, k_n)$ 依上述排序法由小到大排成一列，排在第 l 位的标成 l，对任意 s 存在 $(k_1, \cdots, k_n) = (i_1^s, \cdots, i_n^s)$ 我们用 $(k_1, \cdots, k_n)$ 的标号 $l_s$ 来标记 $(i_1^s \cdots i_n^s)$，记

$P\begin{pmatrix} i_1^s \cdots i_n^s \\ k_1 \cdots k_n \end{pmatrix}$ 为 $P_l^{l_s}$ 其中 l，$l_s$ 分别为 $(k_1, \cdots, k_n)$ 与 $(i_1^s, \cdots, i_n^s)$ 的标号，这样 $T = QQ'$

$$Q = \begin{pmatrix} P_1^{l_1} & \cdots\cdots\cdots & P_{C_r^n}^{l_1} \\ P_1^{l_m} & \cdots\cdots\cdots & P_{C_r^n}^{l_m} \end{pmatrix}$$

由定理关于集合 $\{i_1^k, \cdots, i_n^k\}$ 的假设立知 $m \leq C_r^n$ 若能证 Q 是行满秩的，则有引理2即可推出定理。因 P 是非奇异下三角方阵故当 $(i_1, \cdots, i_n) < (j_1 \cdots j_n)$（即前者标号较小）时

$P\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{pmatrix} = 0$ 当 $(i_1, \cdots i_n) = (j_1 \cdots j_n)$（即二者标号相同）时，$P\begin{pmatrix} i_1 \cdots i_n \\ j_1 \cdots j_n \end{pmatrix} \neq 0$，从而方阵

$$R=\begin{pmatrix} P^{l_1}_{l_1} \cdots\cdots P^{l_1}_{l_m} \\ \\ P^{l_m}_{l_1} \cdots\cdots P^{l_m}_{l_m} \end{pmatrix}$$

是下三角方阵。（注意前面"不妨设"（$i_1^1,\cdots,i'_n$）<（$i_1^2,\cdots i^2_n$）<…<（$i_1^m,\cdots,i_n^m$）即 $l_1<\cdots<l_m$）其对角元素非0，故 $\det R\neq 0$ 从而Q是行满秩的。

以上过程完成了定理的证明

利用定理及微小摄动法，或者直接按定理1证法（并可稍加简化）可得下述结论。（证明从略）

定理2：设S是r阶实半正定对称方阵，T的意义同定理1，则T是半正定对称的。

类似结论对（半）正定Hermite方阵自然也是正确的。

## 参考文献


〔1〕《线性代数》（本系用教材）下册 $P_{22}$。

〔2〕奚昌柱。李冰《实正定方阵的一个性质》《蛙鸣》第十期。