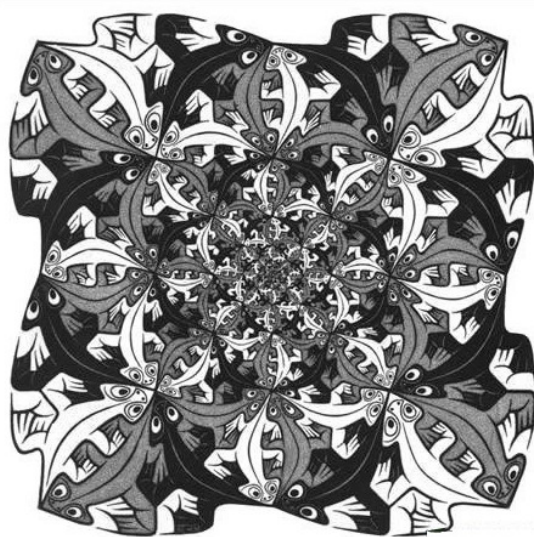


蛙鸣

第 58 期



中国科学技术大学数学系 编
2004年12月

刊首寄语

二十二载铅华洗尽，转眼之间，《蛙鸣》已和我们同样年纪了。

我们很普通，也很平凡，然而我们坚持有自己的品味，总能让喜欢我们的读者在开卷之际有所汲取，有所收获。在这里，我们的言语虽显稚嫩，但同样含苞着丰富的创造性和涌泉一样奔放的想象力，字里行间你定会觉察到我们的思维在熠熠闪光。

我们奉上本期《蛙鸣》，希望能为同学们带来夏日的一丝清凉，也希望和所有热爱数学的朋友们架起一座心灵的桥梁。也许今天只是信手涂鸦，但明日数学大国的梦想，每每诞生在那些敢于梦想的少年心中。

目 录

Preface	i
---------------	---

大师谈数学

数学是有很强活力的	陈省身 1
-----------------	-------

特邀稿

郜云教授访谈	0301 刘 阔5
--------------	-----------

蛙声一片

An introduction to Lattice-Boltzmann method	9901 毕 林 9
\mathbb{Z}^d 作用下的回复属性	0001 胡 泊 15
李群上的双不变度量	0101 沈明民 21
关于隐函数定理的一点讨论	0101 李 勤 29
关于Gauss和与二次互反律	0101 刘 杭 33
Reflection Groups	0101 黄宇发 36
An Introduction to Multifractals	0101 马宇超 40
对称、反对称张量中独立分量的计数	0104 张 扬 46
域的扩张在尺规作图中的一些应用	0101 罗振斌 49
态射的纤维维数定理	0101 沈明民 52
关于一个函数问题的讨论	0101 林诗游 57

数学是有很强活力的

陈省身

数学在19到20世纪有很大的发展，一般来讲，它是有连续性的，有一个主要的主题，然后由这个主题向各方面推展，有基础方面的澄清，有向各方面的应用。最近，数学和理论物理的关系、数论方面的重大发展、计算机的引进在数学上引出了新问题，等等，对老问题有很多帮助。种种迹象表明，数学是有很强活力的，所以21世纪有很多事情要留给大家做。

近些年来，中国的数学有很大进展，怎样根据这个进展，再向前推一步呢？20世纪20年代法国有很伟大的数学家，如皮卡、阿达马、蒙泰尔，那时他们都老了，他们的工作方向都是复变函数论，与近代数学，像抽象代数、拓扑都失掉了联络。那时候法国一些年轻的数学家觉得不一定要跟这些老先生学，决心自己念书，自己发展。这就是后来出现的有名的布尔巴基学派，他们在数学的发展史上起了很大作用。

在此，我还想讲个故事：有些人可能会想，数学家们一天到晚没有事情可做，无中生有，搞这些多面体有什么意思？我认为，现在化学里的钛化合物就跟正多面体有关系。这就是说，经过2000年之后，正多面体居然会在化学里有用，有些数学家正在研究正多面体和分子结构间的关系。我们现在知道，生物学上的病毒也具有正多面体的形状。这表明，当年数学家的一种“空想”，经历了这么长的时间之后，竟然是很“实用”的。

不做主流也无妨

现在谈谈主流数学与非主流数学的问题。大家知道，数学有很多特点。比如做数学不需要很多设备，现在有电子邮件，要的资料很容易拿到。做数学是个人的学问，不像别的学科必须依赖于设备，大家争分夺秒在一些最主要的方向上工作，在主流方向做出你自己的贡献。而数学则不同。由于数学的方向很多，又是个人的学问，不一定大家都集中做主流数学。1943年，我在西南联大教书，那年我应邀从昆明到普林斯顿高级研究所，该所靠近普林斯顿有一个小城叫新不伦瑞克，是新泽西州立大学所在地。我到普林斯顿不久，就在新不伦瑞克参加美国数学会的暑期年会。由于近，我也去听听演讲，会会朋友。有一次我和一位在美国非常

有地位的数学家聊天，他问我做什么，我说微分几何，他立刻说“It is dead(它已死了)”。这是1943年的事，但战后的情形是微分几何成了主流数学。

因此，我觉得做数学的人，有可能找到现在并非主流、但很有意义、将来很有希望的方向。主流方向上集中了世界上许多优秀人物，投入了大量的经费，你抢不过他们，赶不上，不如做其他同样很有意义的工作。我希望中国数学在某些方面能够生根，搞得特别好，具有自己的特色。这在历史上也有先例。例如第二次世界大战以前波兰就搞逻辑、点集拓扑。他们根据一些简单公设推出许多结论，成就不小。另外如芬兰，在复变函数论上取得成功，一直到现在。例如在拟共形映照上的推广一直在世界上领先。因为他们做的工作，别的国家不做，他们就拥有该领域内世界上最强的人物，我还可以举出更多的例子。

最近一个时期最热闹的数学即当前的主流数学是什么？刚才我说过我并不喜欢大家都去搞主流数学，不过主流数学毕竟是重要的。所谓主流数学，是指一个伟大的数学贡献，深刻的定理，含义很广，证明也很不简单。如果在当前选一个这样的贡献，我想那就是阿蒂亚—辛格指数定理。阿蒂亚是英国皇家学会会长。他来过北京，还作过报告。这个指数定理可看成是上面所谈问题的近代发展，即将代数方程、黎曼曲面、亏格理论等等从低维推广到高维和无穷维。

因此，我觉得数学研究不但是很深很难很强，而且做到一定的地步仍然维持一个整体，到现在为止，数学没有分裂为好几块，依旧是完整的。尽管现代数学的研究范围在不断扩大，有些观念看来比较次要，慢慢就被丢掉了，但基本的观念始终在维持着。

中国数学的根必须在中国现在我讲21世纪的数学，也就是要讲中国的数学该怎么发展，如何使中国数学在21世纪占有若干方面的优势。办法说来很简单，就是要培养人才，找有能力的人来做数学，找到优秀的年轻人在数学上获得发展。具体一些讲，就是要在国内办够世界水平的第一流的数学研究院。中国这么大，不仅北京要有，别的地方也应该办。

中国科学的根子必须在中国。中国科学技术在本土上生根，然后才能长上去。可是要请有能力的人来做数学很不容易。我从1984年开始组建南开数学所。开始想请有能力的人来工作就是了。可是由于种种原因，很难做到这一点。我们办第一流的研究所就是要有第一流的数学家。有了第一流的数学家，房子破一点，设备差一点，书也找不到，研究所仍是第一流。不然的话，房子造得很漂亮，书很多，也有很贵的计算机，如果没有人来做第一流的工作，又有什么用处？我看到这种情形，就改变想法，努力训练自己的年轻人，培养自己的数学家，送他们出国学习，到世界各地，请最好的数学家给予指导。我很高兴地告诉大家，这些措施已经开始出现成效。比方说贺正需，他到美国加州大学圣地亚哥分校跟弗里德曼学。弗里德曼得过费尔茨奖，是年轻的领袖人物。他亲自对我说，贺正需是他最好的学生。我还可以提到一些人，这里不一一列举了。

发展数学势必要办够水平的研究院，怎样才会够水平呢？

第一，应当开一些基本的先进课程。学生来了，要给他们基本训练，就要为他们开高水平的课。所谓的基本训练有两方面。一是培养推理能力，一个学生应该知道什么是正确的推理，什么是不正确的推理。你必须保证每步都正确。不能急于得结果就马马虎虎，最后一定出毛病。二是要知道一些数学，对整个数学有个判断。从前是与分析有关的学科较重要，20世纪以来是代数，后来是拓扑学等等。总之，好的研究中心应该能开这些基本课程。

第二，我想必须要有好的学生。我们每年派去参加国际奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错。虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学，不过希望有一部分人搞数学，而且能有成就。我和在北京的一些数学竞赛获奖学生见面，谈了话。我对他们说，搞数学的人将来会有大前途，十年、二十年之后，世界上一定会缺乏数学人才。现在的年轻人不愿念数学，势必造成人才短缺。学生不想念数学也难怪。因为数学很难，又没有把握。苦读多年之后，往往离成为数学家还很远。同时，又有许多因素在争夺数学家，例如计算机。做一个好的计算机软件，需要很高的才能，很不容易。不过它与数学相比，需要的准备知识很少。搞数学的人不知要念多少书，好像一直念不完。这样，有能力的人就转到计算机领域去了。也有一些数学博士，毕业后到股票市场做生意。例如预测股票市场的变化，写个计算机程序，以供决策。这样做，虽然还是别人的雇员，并非自己当老板，但这比大学教授的薪水高得多了。因此，数学人才的流失，是世界性的问题。

相比之下，中国的情况反而较为乐观，因为中国的人才多，流失一些还可以再培养。流失的人如真能赚钱，发财之后会回来帮助盖数学楼。总之，我们应取一个态度：中国变成一个输送数学家的工厂，希望出去的人能回来，如果不回来，建议我们仍然继续送。中国有的是人才，送出去一部分在世界上发挥影响也是值得的。

我们要做的事是花不多的钱，打好基础，开出好的课。基础搞得好了，至于出去的人回来不回来可以变得次要些。这是我的初步想法。比方说，参加国际奥林匹克数学竞赛的人，数学都是很好的，如果他们进大学数学系，我建议立刻给奖学金。这点钱恐怕很有限，但效果很大，对别人也是一种鼓励。中国的孩子比较听家长、老师的话。孩子有数学才能，经过家长、老师一劝，他就念数学了。

对好的数学系学生来说，到国外去只是时间问题。你只要在国内把数学做好，出国很容易。国内做得很好的话，到了国外不必做研究生，可以直接当教授。中国已有条件产生第一流的数学家，大家要有信心。

培养学生我主张流动。19世纪的德国数学当然是世界第一。德国的大学生可以到任何大学去注册。这学期在柏林听魏尔斯特拉斯的课，下学期到格丁根听施瓦兹的课，随便流动。教授也可以流动。例如柏林大学已有普朗克、爱因斯坦，一

个理论物理学家在柏林大学自然没有发展的希望，就不妨到别的学校去创业。

我希望中国的学生、教授都能流动。教授可以到别的学校去教课，教上半年。各个数学研究院的教授也能互相交换。



Alexander's Horned Sphere

郜云教授访谈纪实

0301 刘阔

郜云教授简介：

- 1985年本科毕业于中国科学技术大学
- 1988年硕士毕业于中国科学院数学所
- 1989年留学加拿大，获博士学位后，曾访问或任教于加拿大、德国、法国、美国、日本
- 2002年中国科学院“[引进国外杰出人才](#)”（[百人计划](#)）项目入选者。
- 现任中国科学技术大学教授，博士生导师，主要从事李代数，量子群及表示论的研究，在国外杂志上发表的论文有二十多篇，包括美国数学会专著两本。在科大讲授过本科课程线性代数、近世代数、研究生课程 *Kac-Moody* 代数、环与代数、交换代数。

郜云教授留着小平头，背着绿书包，是那种你可以看见他在校园里迎着合肥凛冽的寒风大步朝前走的人。而在听过郜教授线性代数课的03级数学系同学们印象中，郜云老师身穿USTC白色T恤，运动式灰色中裤，脚着沙滩鞋；唰唰几下，一个复杂繁琐的问题，经他大笔一挥，有如庖丁解牛，顷刻之间忽然变得晶莹剔透、美不胜收起来。作为03级数学系的一员，带着上述印象，我们最近有幸采访了他。

郜教授是在他位于理化大楼16层的办公室中接受我们采访的。冬日暖阳透过半拉起的百叶窗，让整个房间充满暖意。郜教授中午“眯瞪”刚起，正靠在他的大椅子上，舒适的伸长了腿。一个呵欠，随意转头，目光所及也许是桌上妻儿的照片。我们的采访就这样开始了。

记者（下简称“记”）：我们听说您是801（80级1系）的。你们那个时候情况大概是怎么样的呢？

郜云（下简称“郜”）：我们那个时候一个班40多个学生。当时刚恢复高考不久，学习气氛很好。那时教我们数分的是张景中老师，他现在已经是院士了。

我现在是搞代数，但其实我大学时喜欢分析，数学分析都是九十多分，读研究生也是分析方面的。中科院数学所王光寅、丁伟岳研究员是我的老师。我当时觉得代数太抽象了，都是些符号，觉得很难。我学代数是因为出国后，我研究生时的那个方向在我读的那个大学没人搞。有个老师让我跟他学李代数，他说：“我觉得你能学。”我还是担心，他又说“李代数和线性代数差不多”。我觉得我线性代数还是学得不错的，就跟他学了。

记：请问哪位老师对您影响最深呢？

郜：应该说是沈尧天老师吧。他教我们数理方程。我印象最深的是他上课从不拖堂。现在每节课还是45分钟是吧？我们那时，沈老师只讲40分钟，剩下的时间就跟我们讲一些数学趣闻啊什么的。他讲得很轻松，听起来一点都不困难。我觉得拖堂的老师未必是好老师。如果他对问题把握得很清楚，应该也能把时间把握得很好。我在读研究生时学微分方程应该说也是受他的影响。

记：那您原来的同学都怎么样呢？现在还有多少人还在搞数学？

郜：我们零零年还在美国 *Las Vegas* 聚过一次，来了20家人。

记：都以“家”为单位了？

郜：对，都以“家”为单位了。那是庆祝我们“相识20年”。现在还有五个人在大学里搞数学吧，大部分人都改行了。我那时在班上可能排五、六名左右。张少平学得最好，是郭沫若奖获得者，他现在在美国一家保险公司当精算师，挣大钱。我们那时还写过一些小论文，都很简单的，但作为一种训练是很有益处。记的况阳写得最多，他现在是美国亚利桑那州立大学数学系教授。其实不再搞数学原因是很多的。在国外，首先得要生存。大学教授的位子就只有那么多，竞争也是很激烈的。当然，数学教授挣钱少是一个原因。

记：那您为什么能坚持到现在，还在搞数学呢？

郜：因为除了数学，我也不会别的了（笑）。这也是我太太常取笑我的话。我对数学的看法可以概括成这样的四句（第三句也就是陈省身先生常讲的数学好玩）：

Math is simple (数学简单); Math is boring (数学枯燥);

Math is fun (数学有趣); Math is rich (数学富有)。

Math is simple—很好理解啊。搞数学不需要什么实验仪器，也不需要很大的投入，只要一根笔一把椅子就可以了，当然像我现在坐的这么大的椅子就更好了（笑）。我在数学所念书的时候见过陈景润的办公室，只有六平方米，这么小的地方仍然能搞出很好的数学出来。

Math is boring— 这个大家都知道。搞数学的人成天和符号打交道，是很枯燥的。如果不是真正喜欢数学，没有牺牲精神，也是很难搞下去的。陈省身先生以前就说过，如果你每天早上醒来第一件事想的就是数学，那你就成功一半了。

Math is fun— 的确是这样的。我不知道你们有没有这样的感受啊，我有时候做出来一道题，会高兴一个星期，觉得怎么这么巧啊，这么漂亮！要是你们想每天都很高兴就来做数学题吧，做4道题就可以高兴一个月。南开数学所所长张伟平就说：“数学美得无穷尽。”我认识一个人，他的老师是康维（Conway），一个很著名的数学家。康维有一次给他一道题，他还是做出来了，但方法很烦很笨；康维就给了他0分。康维说：“Math is beautiful. What you did is correct but not beautiful. So this is not math.”

Math is rich— 怎么理解呢？数学包含的东西是很丰富的，可以说无处不在。浙大光彪教授刘克峰说上帝通过数学创造了世界。我们以前念书的时候就知道马克思写过《数学手稿》，数学里面包涵了很多哲学上的东西。当然rich也可以理解为财富了。现在数学要是搞得很好也是可以给自己带来财富的，在美国华尔街有很多科大数学系毕业的校友，显然他们的成就得益于他们的数学功底。

记：郜老师觉得现在国内愿意搞基础数学的人多吗？

郜：我觉得，现在比以前要多。前段时间我去黄山开全国代数会议，总共来了360，还是390多个人，而且有不少女数学家。一个方向有这么多人研究就已经很多了。

记：现在高考填数理化这些基础学科的人很多，但有一种说法是，这种情况也是看出国的风向标，学基础学科好出国。您对此怎么看？

郜：这种情况也有吧。我们当年成绩好的也基本上去学数理化了。当时流传的是：“学好数理化，走遍天下都不怕。”这也不对，应该各个方面都有人来学才对。国外很多人的确不愿意学数学。好的都去学法律，医学，新闻什么的。我觉得在国外，一个班百分之七八十的人数学是学得不好的；国外的小孩乘法口诀都不会背的。但是学的好的往往就学得很好，那是真正喜欢数学。

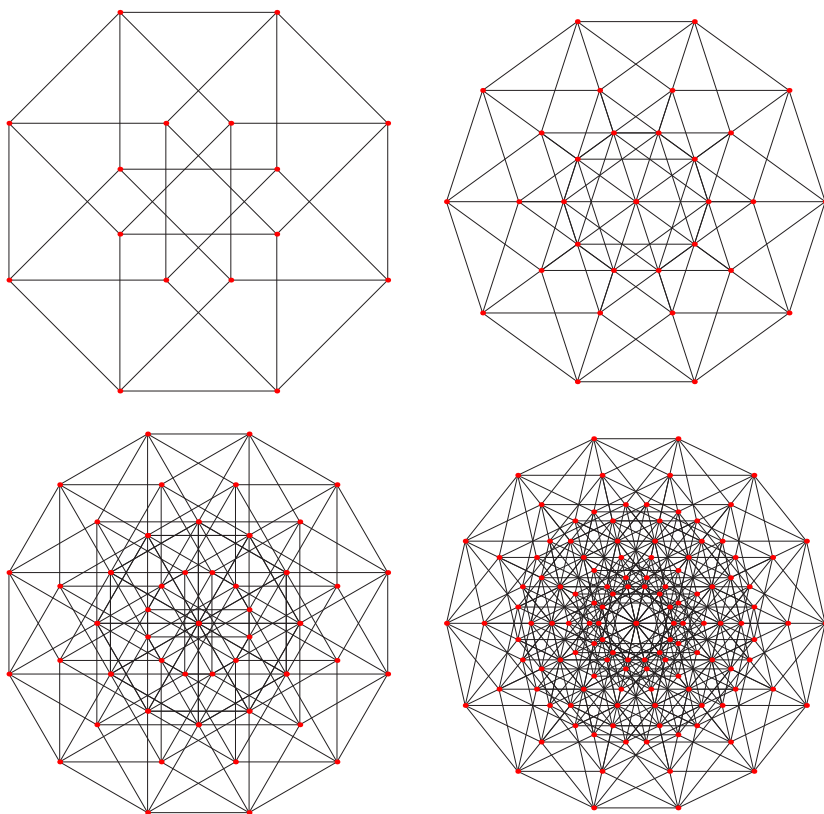
记：请问郜教授您现在研究的方向是什么？可不可以给我们简单介绍一下？

郜：我研究的主要是李代数。

谈到这个话题，郜云老师一下兴奋起来，给我们简要介绍了一下什么是李代数。说着说着，他又拿起粉笔，在黑板上写了起来。遗憾的是我们现在学的数学还太少，只能大概了解一下了。

采访了一个多小时后，我们与郜教授挥手告别。相信在将来，科大的同学会越来越的在校园看到郜云教授身背绿书包，大步朝前走的身影...

Hypercube



An introduction to Lattice-Boltzmann method

9901 毕林

1 引言

自1988年美国Los Alamos实验室首次提出并应用于流体力学的数值模拟以来的二十年里, **格子-波尔兹曼方法(Lattice Boltzmann Method)**以其于一般的方法迥然相异而颇有成效的新方法得到了充分的发展和广泛的运用, 解决了不少以往的方法处理困难甚至难以解决的问题, 尤其是在复杂边界和复杂流场的模拟中取得了巨大的成功, 可以说格子-波尔兹曼方法的提出为在计算流体力学领域中开辟了一条革命性的道路[1]。

格子玻尔兹曼方法(以下简称**LBM**) 从分子动力学方程出发, 但只是关心分子运动的宏观平均行为, 认为物质的宏观性质由微观的粒子运动所决定, 但是如果只想知道流体的宏观行为的话, 具体的微观运动无关紧要, 它并不影响宏观流体的质量、动量和能量守恒。因此LBM中把时间和空间完全离散, 将流场划分为网格, 让Boltzmann方程中的粒子分布函数沿网格线运动, 并在网格点上按一定的规则相互碰撞, 然后在每个时间步上将分布函数的演化转化为宏观物理场上的密度、速度、压力等的变化。相对于其他的数值方法**LBM**有以下几个突出的优点:

1. 流动过程在相空间(速度空间)是线性的, 用**流动(stream)**和**碰撞(collision)**两个过程就完全可以模拟整个流场的运动。
2. **LBM**中流体的压力不需要解Poisson方程直接通过流体密度和声速的状态方程便可得到。
3. **LBM**采用一个简单的离散速度集合来描述整个速度场的平均表象。
4. **LBM**能够很好的体现模型的相互作用关系, 便于模拟多相流和多孔介质流。
5. **LBM**中的流动和碰撞过程是在流体的局部发生, 因此便于并行处理。
6. 便于处理复杂边界。

下面就格子玻尔兹曼方法做简单介绍。

2 格子玻尔兹曼方法简介[2]

考虑Boltzmann方程的**BGK**(Bhatnagar, Gross, Krook 1954年)逼近模型[3]:

$$\partial_t f + \xi \cdot \nabla f = -\frac{1}{\lambda}(f - f^{eq}) \quad (1)$$

其中 $f = f(x, \xi, t)$ 是单粒子分布函数, λ 是松弛时间, f^{eq} 为**Maxwell-Boltzmann**平衡分布函数:

$$f^{eq} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{D/2}} \exp \left\{ -\frac{(\xi - u)^2}{2RT} \right\} \quad (2)$$

R 是理想气体常数, D 是空间维数, ρ, u, T 分别是宏观密度、速度和温度。将(1)式改写为常微分形式:

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\lambda} f = \frac{1}{\lambda} f^{eq} \quad (3)$$

其中 $\frac{d}{dt} = \partial_t + \xi \cdot \nabla$ 是沿特征线 ξ 的时间微分。

对(3)式在 $[0, \delta t]$ 上积分, 假定 δt 充分小且 f^{eq} 足够光滑, 通过Taylor展开, 并做逼近处理, 便可得到**BGK**模型下的格子Boltzmann方程(**LBE**):

$$f(x + \xi \delta t, \xi, t + \delta t) = f(x, \xi, t) - \frac{1}{\tau}(f(x, \xi, t) - f^{eq}(x, \xi, t)) + O(\delta t^2) \quad (4)$$

写成全离散(时间、空间、速度全离散)形式:

$$f_\alpha(x + e_\alpha \delta t, t + \delta t) - f_\alpha(x, t) = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \quad (5)$$

其中 $\tau = \lambda/\delta t$ 是无量纲化的松弛时间。 α 是离散速度指标, e_α 是 α 方向的速度。方程(5)式左边反映了粒子的流动过程, 而右边通过松弛模拟碰撞过程, 将**LBM**方法写成以下两个计算步:

碰撞步:

$$\bar{f}_\alpha(x, t) - f_\alpha(x, t) = -\frac{1}{\tau}(f_\alpha - f_\alpha^{eq}) \quad (6)$$

流动步:

$$f(x + e_\alpha \delta t, t + \delta t) = \bar{f}_\alpha(x, t) \quad (7)$$

f_α 与 \bar{f}_α 分别代表碰撞前和碰撞后的分布函数, 宏观密度和速度定义如下:

$$\rho = \sum_{\alpha} f_\alpha = \sum_{\alpha} f_\alpha^{eq} \quad (8)$$

$$\rho u = \sum_{\alpha} \xi_\alpha \cdot f_\alpha = \sum_{\alpha} \xi_\alpha \cdot f_\alpha^{eq} \quad (9)$$

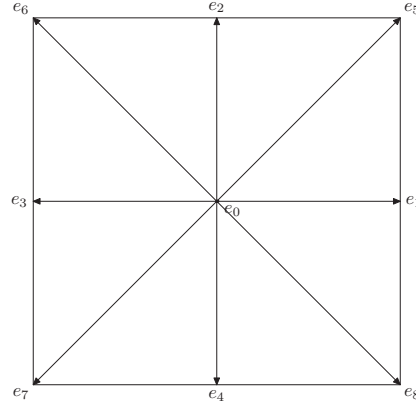


图 1: D2Q9模型离散速度空间

LBM方法对速度空间的离散一般采用 $DnQm$ 结构, 其中 Dn 表示空间维数为 n , Qm 表示离散速度个数为 m , 以D2Q9为例, 其离散速度及结构图如下:

$$e_{\alpha} = \begin{cases} (0, 0) & \alpha = 0 \\ (\cos \theta_{\alpha}, \sin \theta_{\alpha})c & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ (\cos \theta_{\alpha}, \sin \theta_{\alpha})\sqrt{2}c & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$\theta_{\alpha} = \begin{cases} (\alpha - 1)\pi/2 & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ (\alpha - 1)\pi/2 + \pi/4 & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (11)$$

LBM方法关键是平衡分布函数的确定, 只要知道了给定离散速度模型下的平衡分布函数 f^{eq} 的形式, 便可以在任何编程环境下按(6)、(7)、(8)、(9)四式模拟流场的演化过程。下面就以溃坝波模拟来简单介绍**LBM**方法的操作过程。

3 浅水波方程——溃坝波模拟

考虑一维浅水波方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = gh(s_0 - s_f) \end{cases} \quad (12)$$

其中 h 为水深, u 为流速, g 为重力加速度, s_0 为河道底面斜率, s_f 为河道底面粗糙

性引起的对流体摩擦阻力强度。经过**Chapman-Enskog**展开和多尺度分析[4]有：

$$O(\varepsilon) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_0} + e_\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(1)} \\ e_\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_0} + e_\alpha e_\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial x} = -\frac{e_\alpha}{\tau} f_\alpha^{(1)} \end{cases} \quad (13)$$

$$O(\varepsilon^2) \quad \begin{cases} \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_1} + \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_\alpha^{(1)} = -\frac{1}{\tau} f_\alpha^{(2)} \\ e_\alpha \frac{\partial f_\alpha^{(0)}}{\partial t_1} + e_\alpha \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t_0} + e_\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 f_\alpha^{(1)} = -\frac{e_\alpha}{\tau} f_\alpha^{(2)} \end{cases} \quad (14)$$

采用D1Q3模型，即 $\{e_1, e_2, e_3\} = \{-1, 0, 1\}$ ，设：

$$\begin{cases} h = \sum_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha^{(0)} \\ hu = \sum_\alpha e_\alpha f_\alpha = \sum_\alpha e_\alpha f_\alpha^{(0)} \\ \sum_\alpha e_\alpha e_\alpha f_\alpha^{(0)} = hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{cases} \quad (15)$$

对(13)与(14)式进行尺度粘合有：

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} = 0 + O(\varepsilon^2) \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (16)$$

上式与(12)仅差源项 $gh(s_0 - s_f)$ 和一个截断误差，为了使得**LBM**方法得到的方程和(12)式一致，可将**LBE**改写成：

$$f_\alpha(x + e_\alpha \delta t, t + \delta t) - f_\alpha(x, t) = -\frac{1}{\tau} (f_\alpha - f_\alpha^{eq}) + R_\alpha \quad (17)$$

其中 $\{R_1, R_2, R_3\} = \{-gh(s_0 - s_f)/2, 0, gh(s_0 - s_f)/2\}$ 。以(15)式为约束便可得到平衡分布函数为：

$$\begin{cases} f_1^{(0)} = \frac{h}{4}(gh - 2u + 2u^2) \\ f_2^{(0)} = \frac{h}{2}(2 - gh - 2u^2) \\ f_3^{(0)} = \frac{h}{4}(gh + 2u + 2u^2) \end{cases} \quad (18)$$

设溃坝位于 $x = 49.5m$ 处，初始上游水位 $h_1 = 8.0m$ ，下游水位 $h_1 = 4.0m$ ， $s_0 = s_f = 0$ ，并取 $\delta t = 0.1s$ ，计算范围为 $100m$ ， $\delta x = 1.0m$ ，试验结果如图2所示：

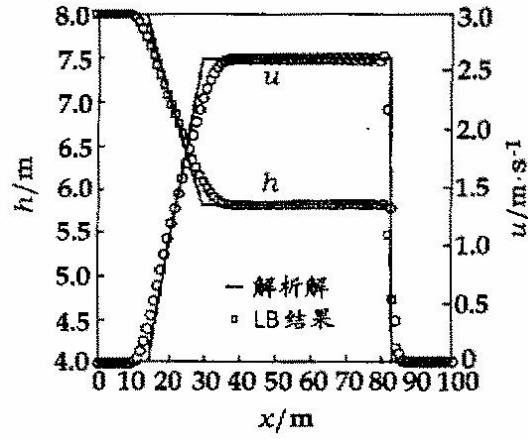


图 2: LMB方法的数值与解析解的比较

对于二维溃坝问题，采用D2Q9离散速度模型，同上分析最后得到的平衡分布函数[5]为：

$$f_{\alpha}^{eq} = \begin{cases} h - \frac{5gh^2}{6c^2} - \frac{2hu^2}{3c^2} & \alpha = 0 \\ \frac{gh^2}{6c^2} + \frac{h(e_{\alpha} \cdot u)}{3c^2} + \frac{h(e_{\alpha} \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{hu^2}{6c^2} & \alpha = 1, 2, 3, 4 \\ \frac{gh^2}{24c^2} + \frac{h(e_{\alpha} \cdot u)}{12c^2} + \frac{h(e_{\alpha} \cdot u)^2}{8c^4} - \frac{hu^2}{24c^2} & \alpha = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (19)$$

采用模拟区域如图3

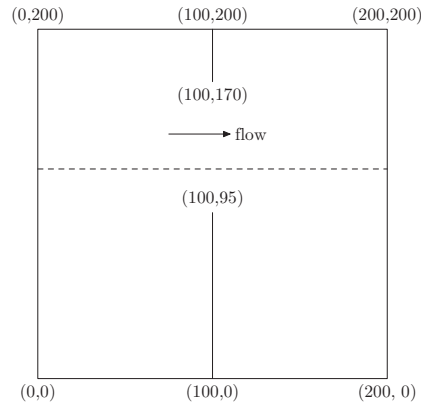


图 3: 二维溃坝问题控制区域

选取 $\tau = 0.6$, 在发生溃坝之后 $7.2s$, 水面变化情况如图4。

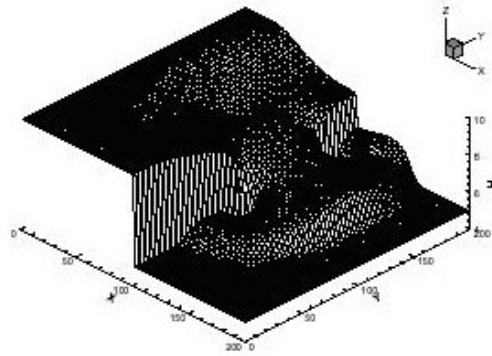


图 4: 二维溃坝水面变化图

参考文献:

- [1] Qian Y, Succi S, Orszag S, *Recent Advances in Lattice Boltzmann Computing*, Annu Rev Comp Phys III (1995) 195-342.
- [2] 毕林, 刘儒勋, 格子-Boltzmann方法及其边界条件处理.
- [3] Sauro Succi, *The Lattice-Boltzmann Equation for fluid dynamics and beyond* Oxford Clarendon Press, 2001.
- [4] 程永光, *Lattice Boltzmann方法应用实例——一维溃坝波模拟*, 力学与实践22(2000)
- [5] Lei Zhang, Ruxun Liu, *Numerical simulation of two-dimension dam breaking by lattice Boltzmann method*.

\mathbb{Z}^d 作用下的回复属性

0001 胡泊

1 预备知识

从最广泛的角度来说, 动力系统研究群在空间作用的定性性质. 设 X 为紧致度量空间, G 为一个拓扑群. $\varphi: G \times X \rightarrow X$ 为连续映射, 并且满足

1. $\varphi(e, x) = x \quad \forall x \in X$,
2. $\varphi(g_1, \varphi(g_2, x)) = \varphi(g_1 g_2, x) \quad \forall x \in X, g_1, g_2 \in G$.

则称 (X, G, φ) 为一个拓扑动力系统 (TDS), 有时简记为 (X, G) . 当 $G = \mathbb{R}$ 时, 一般称 (X, \mathbb{R}) 为一个流 (flow); 如果 $G = \mathbb{Z}$ 为整数加法群, 称 (X, G) 为离散动力系统. 如果 $T: X \rightarrow X$ 为同胚, 我们可以定义 $\varphi: G \times X \rightarrow X, (n, x) \mapsto T^n x$ 则 (X, \mathbb{Z}, φ) 为一个离散动力系统; 反之, 如果 (X, \mathbb{Z}, φ) 为一个离散动力系统, 则 $T: X \rightarrow X, x \mapsto \varphi(1, x)$ 为同胚.

考虑 $G = \mathbb{Z}^2$, 定义 $f: X \rightarrow X, x \mapsto \varphi((1, 0), x)$;

$$g: X \rightarrow X, x \mapsto \varphi((0, 1), x).$$

令 $T = (f, g), N = (n_1, n_2), T^N x = f^{n_1} g^{n_2} x. fg = gf$.

以下我们把集合 U 的闭包记为 \bar{U} , 内部记为 U° . 全体非负整数组成的集合记为 $\mathbb{N}, \mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. 设 $N = (n_1, n_2), M = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$, 定

义 $N + M = (n_1 + m_1, n_2 + m_2); N < M \Leftrightarrow n_1 < m_1, n_2 < m_2$.

定义 1 $x \in X$ 称为回复点, 如果对 x 的任意邻域 $U, \exists N \in \mathbb{N}^2$ s.t. $T^N x \in U$. 回复点全体组成的集合记为 $R(T)$.

定义 2 称 $A \subset X$ 为不变的, 如果 $TA \subset A$; 称 $TDS(X, T)$ 是极小的, 如果 X 不存在闭的不变真子集. 若子系统 (Y, T) 极小, 称 Y 是 X 的一个极小集. 极小集中每个点称极小点.

定理 3 设 (X, T) 为 TDS, 则以下等价:

- (1) (X, T) 极小;
- (2) $\forall x \in X, \{T^N x\}_{N \in \mathbb{N}^2}$ 在 X 中稠密;
- (3) 对任意非空开集 U, \exists 有限集 $A \subset \mathbb{N}^2$ s.t. $\bigcup_{n \in A} T^{-n} U = X$.

证明. 留作习题. □

定理 4 任意TDS包含极小集.

证明. 设 (X, T) 为TDS, $\{U_i\}$ 为 X 的一组拓扑基, 令 $X_0 = X$. 对 $i = 1, 2, \dots$, 若 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} T^{-n}U_i \supset X_{i-1}$, 令 $X_i = X_{i-1}$; 否则 $X_i = X_{i-1} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} T^{-n}U_i$. 注意到 $X_i \neq \emptyset$ 闭、不变. 令 $X_\infty = \bigcap_{i=1}^\infty X_i$, 则 X_∞ 非空、闭、不变, 且对 $\forall U_i$ s.t. $U_i \cap X_\infty \neq \emptyset$ 有 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^2} T^{-n}(U_i \cap X_\infty) = X_\infty$. 由定理3, X_∞ 为极小集. \square

不难看出, 极小点一定是回复点, 因此上面的定理给出了一个Birkhoff 定理的证明. 我们有:

定理 5 (Birkhoff) 任意TDS含有回复点.

2 回复性与极小性

上一节我们介绍了回复点和极小点的定义, 下面我们继续探讨回复点与极小点的一些性质.

定义 6 $A \subset \mathbb{N}^2$ 称为一个IP-集, 如果存在 $\{p_1, p_2, \dots\} \subset \mathbb{N}^2$ 使得

$$A = \{p_{i_1} + \dots + p_{i_k} : i_1 < \dots < i_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

此时我们称 A 由 p_1, p_2, \dots 生成. 用 \mathcal{F}_{ip} 表示集合 $\{A \subset \mathbb{N}^2 : A \text{ 包含IP-集}\}$. 如果 $A \in \mathbb{N}^2$ 与任意IP-集的交不空, 称 A 为IP*集.

注意在IP-集定义中, 我们不要求 p_i 不同, 但要求在有限和中下标不同. 对TDS $(X, T), x \in X, U \subset X$ 令

$$N(x, U) = \{N \in \mathbb{N}^2 : T^N x \in U\}.$$

首先我们有:

定理 7 设 (X, T) 为TDS, $x_0 \in R(T)$, 那么 $\forall \delta > 0, N(x_0, B_\delta(x_0))$ 包含一个IP-集.

证明. 由归纳法以及 X 的紧致性不难得到, 留作习题. \square

对集族 \mathcal{P} , 如果 $S \in \mathcal{P}$ 且 $S = \bigcup_{i=1}^r C_i$, 那么存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ 使得 $C_i \in \mathcal{P}$, 我们就称 \mathcal{P} 具有Ramsey性质. 下面我们给出一个组合数论中非常著名的定理:

定理 8 (Hindman) [5] \mathcal{F}_{ip} 具有Ramsey性质.

定义 9 称 $F \subseteq \mathbb{N}^2$ 是syndetic的, 如果 $\exists g = (g_1, g_2) \in \mathbb{N}$, s.t. $\forall m = (m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$

$$([m_1, m_1 + g_1] \times [m_2, m_2 + g_2]) \cap F \neq \emptyset.$$

称 $A \subseteq \mathbb{N}^2$ 是thick的, 如果 A 包含 \mathbb{N}^2 中任意长的连续块,

即 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n, b_n \in \mathbb{N}$, s.t. $[a_n, a_n + n] \times [b_n, b_n + n] \subset A$.

我们已经知道, 如果 $x \in X$ 是回复点, U 是它的邻域, 那么 $N(x, U)$ 包含一个 IP -集. 自然地, 我们猜测极小点的回复时间集可能会有一些特别的性质. 实际上, 我们有:

定理 10 设 (T, X) 为 TDS , 则 $x \in X$ 为极小点 \Leftrightarrow : 对 x 的任意邻域 U , $N(x, U)$ 为 *syndetic* 集.

证明. 留作习题. □

3 主要定理

由上节, 我们已经知道拓扑空间中的性质与数论中的集族有很大关系. 为了得到更深入的结果, 我们有必要进一步考察 \mathbb{N}^2 中序列.

定义 11 设 \mathcal{F} 为族, 定

$\mathcal{p}\mathcal{F} = \{A : (\exists F \in \mathcal{F}) (\forall N \in \mathbb{N}) (\exists a_N \in \mathbb{N}^2) \text{ s.t. } a_N + (F \cap [0, N] \times [0, N]) \subseteq A\}$.
称 $\mathcal{p}\mathcal{F}$ 中元素为分段 \mathcal{F} 集.

引理 12 $\mathcal{p}\mathcal{F}_{ip}$ 具有 *Ramsey* 性质.

证明. 设 $F \in \mathcal{p}\mathcal{F}_{ip}$, $F = \bigcup_{i=1}^r C_i$. 不妨设 C_i 无交, 此时有映

射 $C : F \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$, $C(n) = i \Leftrightarrow n \in C_i$. 对每个 $L \in \mathbb{N}$,

取 $a_L \in \mathbb{N}^2$, $F' \in \mathcal{F}_{ip}$ s.t. $a_L + (F' \cap [0, L] \times [0, L]) \subset F$. 定义 $C^L : F' \rightarrow \{1, \dots, r\}$

$$C^L(k) = \begin{cases} C(a_L + k), & \text{for } k \in F' \cap [0, L] \times [0, L] \\ 1, & \text{for else} \end{cases}$$

设 $\bar{C} : F' \rightarrow \{1, \dots, r\}$ 为 $\{C^L\}_{L=1}^\infty$ 的一个极限点, 由 *Hindman* 定理, 对某个 $i \in \{1, \dots, r\}$, $\bar{C}^{-1}(i)$ 含 IP -集. 不妨设为 $IP\{d_n\}_{n=1}^\infty$, 则 $\bar{C}^{-1}(i)$ 含有分段 $IP\{d_n\}_{n=1}^\infty$ 集. □

引理 13 设 $F \in \mathcal{p}\mathcal{F}_{ip}$, 则 $\exists m \in \mathbb{N}^2$ s.t. $(F - m) \cap F \in \mathcal{p}\mathcal{F}_{ip}$.

证明. 事实上, 设 $F' = IP\{b_n\}_{n=1}^\infty$, $a_N + (F' \cap [0, N] \times [0, N]) \subset F$, 则对所有的 $M \in \mathbb{N}^*$, $(F - b_M) \cap F$ 包含分段 $IP\{b_n\}_{n=1, n \neq M}^\infty$ 集. 固定 $M \in \mathbb{N}$, 对每个 $L \in \mathbb{N}$ ($L > \sum_{i=1}^M b_i$), 取 a_L s.t. $a_L + (F' \cap [0, L] \times [0, L]) \subset F$, 则

$$\begin{aligned} (F - b_M) \cap F &\supset (a_L + (F' \cap [0, L] \times [0, L]) - b_M) \cap (a_L + (F' \cap [0, L] \times [0, L])) \\ &= a_L + [(F' \cap [0, L] \times [0, L]) - b_M] \cap (F' \cap [0, L] \times [0, L]) \\ &\supset a_L + (IP\{b_n\}_{n=1, n \neq M}^\infty \cap [0, L] \times [0, L]) \end{aligned}$$

由定义, $(F - m) \cap F$ 为分段 IP -集. □

定理 14 F 为分段 IP -集 \Leftrightarrow : $\forall TDS(X, T)$ 及 $x \in X$, 在 $\overline{T^F x}$ 中存在回复点.

证明. “ \Rightarrow ” 令 $F_1 = F, K_1 = \overline{T^F x}$ 紧. 由引理13,

取 $m_1 \in \mathbb{N}^2$ s.t. $(F_1 - m_1) \cap F_1 \subset p\mathcal{F}_{ip}$ 对 $\forall N \in (F_1 - m_1) \cap F_1$.

点 $T^N x, T^{N+m_1} x \in K_1 \therefore K_1 \cap T^{-m_1} K_1$ 为非空紧集. 令

$$K_1 \cap T^{-m_1} K_1 = \bigcup_{i=1}^{r_1} K_{1,i}$$

其中 $K_{1,i}$ 紧, $\text{diam}(K_{1,i}) < \frac{1}{2}$. 取

$$C_{1,i} = \{N \in (F_1 - m_1) \cap F_1 \mid T^N x \in K_{1,i}\}$$

我们有 $(F_1 - m_1) \cap F_1 = \bigcup_{i=1}^{r_1} C_{1,i}$. 由引理12, 可取 i_1 s.t. $C_{1,i_1} \in p\mathcal{F}_{ip}$. 令

$$F_2 = C_{1,i_1} \quad K_2 = K_{1,i_1}$$

显然 $K_2 \subset K_1$, $\text{diam}(K_2) < \frac{1}{2}$, $T^{m_1}(K_2) \subset K_1$. 归纳地, 构造 S_i, K_i, m_i , 注意 $K_i \cap T^{-m_i} K_i$ 被半径小于 $\frac{1}{i+1}$ 的紧集覆盖. 我们有非空紧序列

$K_1 \subset K_2 \subset \dots$, $\{m_i\}_{i=1}^\infty \subset \mathbb{N}^2$ s.t. $\forall i$, $\text{diam}(K_i) < \frac{1}{i}$, $T^{m_i} K_{i+1} \subset K_i$. 这样 $\bigcap_{i=1}^\infty K_i$ 只含一个点 y , 且对所有 $j < k \in \mathbb{N}$

$$T^{m_j+m_{j+1}+\dots+m_k}(y) \in K_j$$

$\therefore y \in K_1$ 为回复点.

“ \Leftarrow ” 设 F 的示性函数为 $\chi_F \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2}$.

$f: \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2} \Rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2}$, $t \mapsto t'$, $t(m+1, n) = t'(m, n) \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$.

$g: \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2} \Rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2}$, $s \mapsto s'$, $s(m, n+1) = s'(m, n) \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$.

其中 $T = (f, g)$, $X = \overline{T^{\mathbb{N}^2} \chi_F} = \{y \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^2} \mid \forall m \in \mathbb{N} \exists a_m \in \mathbb{N}^2 \text{ s.t. } \forall n \in [0, m] \times [0, m] \chi_F(a_m + n) = y(n)\}$.

考虑动力系统 (X, T) , $K = \{y \in X \mid y(0, 0) = 1\}$ 非空、紧, 则

$$T^n(\chi_F) \in K \Leftarrow n \in F,$$

$$\Rightarrow \exists y \in K \cap R(T). \text{ 又由于 } K \text{ 开, } y \in R(T),$$

$$\Rightarrow \exists IP\text{-集, 不妨设为 } IP\{b_n\}_{n=1}^\infty \text{ s.t. } T^{IP\{b_n\}_{n=1}^\infty} \subset K.$$

$$\Rightarrow \forall m \in IP\{b_n\}_{n=1}^\infty, y(m) = 1,$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, \exists a_m \in \mathbb{N}^2 \text{ s.t. } \forall n \in (IP\{b_n\}_{n=1}^\infty \cap [0, m] \times [0, m]) \chi_F(a_m + n) = y(n) = 1,$$

$$\Rightarrow F \text{ 包含分段 } IP\text{-集.}$$

□

定义 15 集合 $A \subseteq \mathbb{N}^2$ 称为 *piecewise syndetic* 集, 如果 A 为一个 *syndetic* 集和一个 *thick* 集的交. *piecewise syndetic* 集全体组成的集合记为 \mathcal{F}_{pws} .

不难看出, 任意 *syndetic* 集与 *thick* 集的非空. 下面我们给出 *piecewise syndetic* 集与分段 *syndetic*-集的关系.

引理 16 集合 $F \subset \mathbb{N}^2$ 为 *piecewise syndetic* 集当且仅当它为分段 *syndetic*-集.

证明. 设 F 为分段 *syndetic*-集, 则 $\exists F' \text{ syndetic}, \forall N \in \mathbb{N} \exists a_N \in \mathbb{N}^2 \text{ s.t. } a_N + (F' \cap [0, N] \times [0, N]) \subseteq F$. 令 $A = a_N + ([0, N] \times [0, N])$, 则 A 为 *thick* 集; 令 $B = (a_N + (F' \cap [0, N] \times [0, N])) \cup (\mathbb{N}^2 - A)$, 则 B 为 *syndetic* 集, 且 $F = A \cap B$, 因而 F 为 *piecewise syndetic* 集.

反之, 若 F 为 *piecewise syndetic* 集, 则存在集合 A *thick*, B *syndetic*, $F = A \cap B$. 由于 A *thick*, $\therefore \forall N \in \mathbb{N}, \exists a_N, b_N \in \mathbb{N}$, s.t. $[a_N, a_N + N] \times [b_N, b_N + N] \subset A$. 令 $B' = \bigcup_{N=1}^{\infty} ((B - a_N) \cap [0, N] \times [0, N])$, 则 B' *syndetic*, 且

$$\begin{aligned} B \cap S &\supset \bigcup_{N=1}^{\infty} B \cap [a_N, a_N + N] \times [b_N, b_N + N] \\ &\supset (a_N, b_N) + (B - (a_N, b_N)) \cap [0, N] \times [0, N] \\ &\supset (a_N, b_N) + B' \cap [0, N] \times [0, N]. \end{aligned}$$

$\therefore F$ 为分段 *syndetic*-集. □

类似回复性, 我们有关于极小点的刻画.

定理 17 F 为 *piecewise syndetic* 集 $\Leftrightarrow \forall TDS(X, T)$ 及 $x \in X$, 在 $\overline{T^F x}$ 中存在极小点.

证明. 由于 *piecewise syndetic* 集与分段 *syndetic*-集等价, 我们只需对分段 *syndetic*-集证明即可.

定理的必要性与定理14中必要性的证明完全类似, 下面证明充分性. 设 F 为分段 *syndetic*-集. 取 $F' \text{ syndetic}, a_L \in \mathbb{N}^2 (L \in \mathbb{N}) \text{ s.t. } a_L + (F' \cap [0, L] \times [0, L]) \subset F$. 令 (X, T) 为拓扑动力系统, $x \in X$, $K = \overline{T^F x}$ 紧. 取 F' 中极小元 r , 考虑 $z_L = T^{a_L+r}(x) \in K$. 取子列 z_{L_i} s.t. $z = \lim_{i \rightarrow \infty} z_{L_i}$. 由连续性, $\forall s \in F' T^{s-r}(z) \in K$. 设 h 为 F' 的间隔 (*gap*), 注意到

$$\overline{T^{\mathbb{N}^2} z} \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}^2, i < h} T^i K$$

$(T^n z \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}^2, i < h} T^i K (\forall n \in \mathbb{N}^2) \text{ 且 } T^i K \text{ 闭})$ 因此 $\overline{T^{\mathbb{N}^2} z}$ 为紧、不变子集, 因而含有非空极小集 Y , 只需证 $Y \cap K \neq \emptyset$. 令 $y \in Y$, 若 y 不属于 K , 取 $\{n_i\} \subset \mathbb{N}^2 \text{ s.t. } T^{n_i} z \rightarrow y$. 对每个 i 存在 $m_i \leq h \text{ s.t. } T^{n_i+m_i} z \in K$. 不妨设 $m_i = m$, 则 $T^{n_i+m} z \rightarrow T^m y \in K \therefore T^m y \in Y$ 为极小点. □

到现在, 我们在 \mathbb{Z}^2 中证明了这节的两个主要定理. 类似的, 我们可以把本文的定义和结论毫无困难地推广到 \mathbb{Z}^d 中, 即:

定理 18 (1) $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ 为分段IP-集 $\Leftrightarrow \forall TDS(X, T)$ 及 $x \in X$, 在 $\overline{T^F x}$ 中存在回复点.

(2) $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ 为 *piecewise syndetic* 集 $\Leftrightarrow \forall TDS(X, T)$ 及 $x \in X$, 在 $\overline{T^F x}$ 中存在极小点.

参考文献:

- [1] E. Akin, *Recurrence in topological dynamics*. Furstenberg families and Ellis actions, The University Series in Mathematics, Plenum Press, New York, 1997.
- [2] V. Bergelson, *Ergodic Ramsey theory—an update*. *Ergodic theory of \mathbb{Z}^d actions*, (Warwick, 1993-1994), 1-61, London Math.Soc.Lecture Note Ser., 228, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996.
- [3] A. Blokh and A. Fieldsteel, *Sets that force recurrence*, Proc. Amer. Math. Soc., 130 (2002), no.12, P.3571-3578.
- [4] D. Ellis, R. Ellis and M. Nerurkar, *The topological dynamics of semigroup actions*, Trans. Amer. Math. Soc. 353(2001), no.4, P.1279-1320.
- [5] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, M.B.Porter Lectures.Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [6] X.D. Ye, W. Huang and S. Shao, *topological dynamical systems*, preprint, 2004.

李群上的双不变度量

0101 沈明民

李群上的左移运算和右移运算是李群上的自同胚(指微分同胚),使得这两种运算成为等距变换的度量称为双不变度量.本文将讨论李群上存在双不变度量的充要条件并证明双不变度量所定义的指数映射和群结构定义的指数映射是一致的.

一、李群上的一些基本构造

首先指出,李群上的如下五个概念是一致的:

- 左不变向量场
- 左不变流
- 单位元的切空间 $T_e G$
- 单参数子群
- 李代数 \mathcal{J}

设 $X_e \in T_e G$,通过左移令 $X_g = (L_g)_* X_e$ 就得到左不变向量场 X ;由 X 就决定一个左不变流 $\varphi_x(t, g) = X_t(g)$;过 e 点的 X 的积分曲线就是单参数子群记为 $\gamma_X(t)$;若 X, Y 为左不变向量场,则 $[X, Y]$ 也是左不变向量场,故根据 $T_e G$ 与左不变向量场,则 $[X, Y]$ 也是左不变向量场,故根据 $T_e G$ 与左不变向量场之间的一一对应关系,我们可以得 $T_e G$ 上的运算 $[\cdot, \cdot]$,赋予李括号运算后的 $\langle T_e G, [\cdot, \cdot] \rangle$ 称为 G 的李代数,记作 \mathcal{J} .

定义 1 $\exp : \mathcal{J} \rightarrow G$ by $\exp(X) = \gamma_X(1)$,称为指数映射.

性质: $\gamma_X(t) = \exp(tX)$.

注: 以后用 X, Y, Z, \dots 表示 \mathcal{J} 中元素同时也表示相应的左不变向量场.

前面所述的对应关系可以用如下的式子来表示:

- 左不变向量场: $X, X_g = (L_g)_* X_e = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g \cdot \exp(tX)$

- 左不变流: $\varphi(t, g) = X_t(g) = g \cdot \exp(tX)$
- 单位元的切空间: X_e
- 单参数子群: $\exp(tX)$
- 李代数 $\mathcal{J} : X$

取 \mathcal{J} 的组类 $\{X_1, \dots, X_n\}$, 则有 $[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^n C_{ij}^k X_k$, $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ 称为结构常数;

设 $\{\omega^1, \dots, \omega^n\}$ 为相应的对偶 1-形式, 则有

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} C_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j.$$

设 $\varphi : G \rightarrow H$ 是李群同态则 $d\varphi : \mathcal{J} \rightarrow \mathfrak{h}$ 是李代数同态, 且有交换图:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{d\varphi} & \mathfrak{h} \end{array}$$

即 $\varphi(\exp(tX)) = \exp(t d\varphi(X))$.
同构,

设 G 是李群, 任意 $g \in G$, 定义 $\sigma_g : G \xrightarrow{\sim} G$ 为内自

$$\sigma_g(x) = gxg^{-1}$$

定义 2 $ad(g) = (\sigma_g)_* = d\sigma_g : \mathcal{J} \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}$, 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\sigma_g} & G \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{ad(g)} & \mathcal{J} \end{array}$$

则有 $ad : G \longrightarrow GL(\mathcal{J})$, 由 $\sigma_g \cdot \sigma_h = \sigma_{gh}$ 知

$$ad(gh) = ad(g) \circ ad(h)$$

故 $ad : G \longrightarrow GL(\mathcal{J})$ 是李群 G 的线性表示 (ad 是同态).

记 $Ad = (ad)_* : \mathcal{J} \longrightarrow gl(\mathcal{J})$ 是李代数的一个表示.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{ad} & GL(\mathcal{J}) \\ \uparrow \exp & & \uparrow \exp \\ \mathcal{J} & \xrightarrow{Ad} & gl(\mathcal{J}) \end{array}$$

定理 1 (1) $ad(g)(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g \cdot \exp(tX) \cdot g^{-1}$.

(2) $Ad(X)(Y) = [X, Y]$.

证明: (1) 这是定义.

(2) 根据定义

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Ad}(X)(Y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \operatorname{ad}(\exp(tx))(Y) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \cdot \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (L_{\exp(tx)})_* (R_{\exp(-tx)})_*(Y) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(-tx)})_* (L_{\exp(tx)})_x(Y) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{\exp(-tx)})_*(Y) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (X_{-t})_X(Y) = L_X(Y) \\
 &= [X, Y]
 \end{aligned}$$

一个例子: $GL_n(\mathbb{R})$.

$GL_n(\mathbb{R})$ 是 \mathbb{R}^{n^2} 的一个开子流形, 具有自然的微分结构使之成为一个李群.

$e = I_{n \times n}$, $T_e G \simeq \mathbb{R}^{n^2} = M^{n \times n}$, $\forall A \in M^{n \times n}$, 考虑如下的 $\gamma_A: \mathbb{R} \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$

$$\gamma_A(t) = e^{tA} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

则 $\gamma_A(t)$ 为单参数子群, 且 $\gamma'_A(0) = A$. 故得 $\exp(tA) = e^{tA}$

$$\begin{aligned}
 [A, B] &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} e^{tA} e^{sB} e^{-tA} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} e^{tA} B e^{-tA} \\
 &= AB - BA.
 \end{aligned}$$

$M^{n \times n}$ 上赋予如上的李括号就成为 $GL_n(\mathbb{R})$ 的李代数, 记为 $gl_n(\mathbb{R})$.

二、李群上双不变度量的刻划

定义 3 设 G 是一个李群, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 G 上的一个黎曼度量. 若对 $\forall g \in G$, $L_g(R_g)$ 都是等距变换则称该度量是左(右)不变的; 如一个度量同时左不变又右不变, 就称之为双不变的.

设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 \mathcal{J} 上的一个内积, 如果

$$\langle \operatorname{ad}(g)X, \operatorname{ad}(g)Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathcal{J}, \quad \forall g \in G$$

就称这个内积是 $\operatorname{ad}(G)$ 不变的.

设 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 \mathcal{J} 上的一个内积,如果

$$\langle Ad(X)Y, Z \rangle + \langle Y, Ad(X)Z \rangle = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{J}$$

就称该内积 $Ad(\mathcal{J})$ 相容的.

下面的一个定理将说明:双不变性、 $ad(G)$ 不变性、 $Ad(\mathcal{J})$ 相容性是同一个概念在不同层面上的表达.

定理 2 设 G 是连通李群, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 G 上的一个左不变Riemann度量,则以下三条等价:

- (1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是双不变的.
- (2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 \mathcal{J} 上是 $ad(G)$ 不变的.
- (3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 \mathcal{J} 是 $Ad(\mathcal{J})$ 相容的.

证明: (1) \Rightarrow (2)

$\sigma_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$ 为等距变换,故 $ad(g) : T_e G \Rightarrow T_e G$ 是保内积的,这就是(2).

(2) \Rightarrow (3) 由 $ad(\exp(tX)) = \exp(tAd(X))$,故

$$\langle \exp(tAd(X))Y, \exp(tAd(x))z \rangle = \langle Y, Z \rangle$$

两边对 t 求导两令 $t = 0$ 得

$$\langle Ad(X)Y, Z \rangle + \langle Y, Ad(X)Z \rangle = 0.$$

(3) \Rightarrow (2) $ad(\exp(X)) = e^{Ad(X)}$

$$\begin{aligned} & \langle ad(\exp(X))Y, ad(\exp(X))Z \rangle \\ &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} Ad(X)^n Y, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} Ad(X)^m Z \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \langle Ad(X)^n Y, Ad(X)^m Z \rangle \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!m!} \langle Y, Ad(X)^{n+m} Z \rangle \\ &= \langle Y \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{Ad(X)^k}{k!} \sum_{n=0}^k (-1)^n \binom{k}{n} \right) Z \rangle \\ &= \langle Y, Z \rangle \end{aligned}$$

由于 $\exp : \mathcal{J} \rightarrow G$,在原点的局部是同胚,故存在 e 在 G 中的邻域 V 使 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $ad(V)$ 不变的.由于 G 是连通的,故 V 生成 G ,于

是 $\forall g \in G$,有 $g = g_1 g_2 \cdots g_r, g_i \in V$,又由于 $ad : G \rightarrow GL(\mathcal{J})$ 是同态.

故 $ad(g) = ad(g_1) \cdots ad(g_r)$, $ad(g_i)$ 都保内积,故 $ad(g)$ 也是保内积的.

(2) \Rightarrow (1) 设 $T_e G$ 上的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $ad(G)$ 不变的,通过左平移就得到 G 上的左不变内积,下面证明它是右不变的.

$\forall g \in G, x \in G, X_x, Y_x \in T_x G, (R_g)_* X_x, (R_g)_* Y_x \in T_{xg} G.$

$$\begin{aligned}
 \langle (R_g)_* X_x, (R_g)_* Y_x \rangle &= \langle (L_{(xg)^{-1}})_* (R_g)_* X_x, (L_{(xg)^{-1}})_* (R_g)_* Y_x \rangle \\
 &= \langle (R_g)_* (L_{g^{-1}})_* (L_{x^{-1}})_* X_x, (R_g)_* (L_{g^{-1}})_* (L_{x^{-1}})_* Y_x \rangle \\
 &= \langle (\sigma_{g^{-1}})_* (L_{x^{-1}})_* X_x, (\sigma_{g^{-1}})_* (L_{x^{-1}})_* Y_x \rangle \\
 &= \langle (L_{x^{-1}})_* X_x, (L_{x^{-1}})_* Y_x \rangle \\
 &= \langle X_x, Y_x \rangle
 \end{aligned}$$

□

讨论: (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)的过程是不断求导的过程.

(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)则是求积分的过程.

这个定理说明双不变度量的存在性是局部的性质,它是由李群的李代数所决定的.

定理 3 若 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 G 上的双不变度量,则由该度量所确定的联络为双不变联络且

$$\nabla_x = \frac{1}{2} L_x \quad (X \text{ 为左不变向量场})$$

证明: 取 \mathcal{J} 的一组正交标架 X_i ,只须证明 $\nabla_{X_i} = \frac{1}{2} L_{X_i}$.由 ∇ 的唯一性,只须说明 $\frac{1}{2} L_{X_i}$ 与度量相容且无扰.

设 $X = f^i X_i, Y = g^k X_k$.

$$\begin{aligned}
 L_{X_i} \langle X, Y \rangle &= X_i \langle f^k X_k, g^l X_l \rangle \\
 &= X_i \sum_{k=1}^n f^k g^k \\
 &= \sum_{k=1}^n X_i f^k \cdot g^k + \sum_{k=1}^n f^k \cdot X_i g^k \\
 \langle L_{X_i} X, Y \rangle + \langle X, L_{X_i} Y \rangle &= \langle X_i f^k X_k, g^l X_l \rangle + \langle f^k L_{X_i} X_k, g^l X_l \rangle \\
 &\quad + \langle f^k X_k, X_i g^l \cdot X_l \rangle + \langle f^k X_k, g^l L_{X_i} X_l \rangle \\
 &= \sum_{k=1}^n (X_i f^k \cdot g^k + f^k \cdot X_i g^k) \\
 &\quad + \sum_{k,l=1}^n f^k g^l (\langle Ad(X_i) X_k, X_l \rangle + \langle X_k, Ad(X_i) X_l \rangle) \\
 &= \sum_{k=1}^n (X_i f^k \cdot g^k + f^k \cdot X_i g^k) \\
 &= L_{X_i} \langle X, Y \rangle
 \end{aligned}$$

$$L_x Y - L_y X = 2[X, Y]$$

$$\text{故 } \nabla_x = \frac{1}{2} L_x.$$

□

推论 1 连通李群 G 上存在双不变度量 $\Leftrightarrow \mathcal{J}$ 中有一组基 $\{X_i\}$ 使得结构常数 C_{ij}^k 关于任何两个指标都是反对称的.

证明: 取标准正交基即可. □

现设 G 上取定了一个双不变度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\{X_i\}$ 为 \mathcal{J} 的一组标准正交基.
 $[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k$, $\{\omega^i\}$ 为对偶标架, 考虑 ∇ 的联络形式 ω_i^j :

$$DX_i = \omega_i^j \otimes X_j, \quad \omega_i^j = \Gamma_{ki}^j \omega^k$$

$$\nabla_{X_i} X_j = \omega_j^k(X_i) X_k = \Gamma_{ij}^k X_k$$

又

$$\nabla_{X_i} X_j = \frac{1}{2} [X_i, X_j] = \frac{1}{2} C_{ij}^k X_k$$

所以

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} C_{ij}^k$$

$$d\omega_i^j = \Gamma_{ki}^j d\omega^k = -\frac{1}{4} C_{ki}^j C_{lm}^k \omega^l \wedge \omega^m$$

$$\omega_i^k \wedge \omega_k^j = \frac{1}{4} C_{li}^k C_{mk}^j \omega^l \wedge \omega^m$$

故

$$\begin{aligned} \Omega_i^j &= \frac{1}{4} (C_{ik}^j C_{lm}^k - C_{il}^k C_{km}^j) \omega^l \wedge \omega^m \\ &= \frac{1}{4} C_{lk}^j C_{im}^k \omega^l \wedge \omega^m = \omega_i^k \wedge \omega_k^j \end{aligned}$$

故

$$\Omega = \omega \wedge \omega, \quad d\omega = 2\omega \wedge \omega$$

求截面曲率, 设 X, Y 为相互垂直的单位向量.

$$\begin{aligned} R(X, Y)X &= (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})X \\ &= \frac{1}{4} [X, [Y, X]] - \frac{1}{4} [Y, [X, X]] - \frac{1}{2} [[X, Y], X] \\ &= \frac{1}{4} [X, [X, Y]] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle R(X, Y)X, Y \rangle &= \frac{1}{4} \langle \text{Ad}(X)([X, Y]), Y \rangle \\
&= -\frac{1}{4} \langle [X, Y], [X, Y] \rangle \\
&= -\frac{1}{4} \| [X, Y] \|^2
\end{aligned}$$

故截曲率

$$R(\sigma) = -\frac{\langle R(X, Y)X, Y \rangle}{\|X \wedge Y\|} = \frac{1}{4} \| [X, Y] \|^2$$

定理 4 令

$$\tau: G \rightarrow G \quad \tau(g) = g^{-1}$$

若 G 上有双不变度量, 则 τ 是等距变换.

证明: $d\tau|_e = -Id: T_e G \rightarrow T_e G$ 保内积, 又 $\tau = R_{a^{-1}} \circ \tau \circ L_{a^{-1}}$
故 $d\tau|_a = dR_{a^{-1}}|_e \circ d\tau|_e \circ dL_{a^{-1}}|_a$ 保内积. 从而 τ 是等距变换. \square

定理 5 设 G 上存在双不变度量 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 则过 e 的测地线是单参数子群.

证明: 令 $I_a: G \rightarrow G$, $I_a(g) = ag^{-1}a$, 则 $I_a(a) = a$. 由于 $I_a = L_a \circ R_a \circ \tau$ 故是等距. 由于 $d\tau|_e = -Id$ 又 τ 是等距, 故 τ 将过原点的测地线反向. 设 $\gamma(t)$ 是过 e 的测地线, 则 $(\gamma(t))^{-1} = \gamma(-t)$. 现设 $\tilde{\gamma}(t)$ 为过 a 点的测地线, 则 $\tilde{\gamma}(t) = a \cdot \gamma(t)$. 其中 $\gamma(t)$ 为过 e 的测地线 (即 $\gamma(0) = e$). 则

$$I_a \circ \tilde{\gamma}(t) = a(a\gamma(t))^{-1}a = a\gamma(-t) = \tilde{\gamma}(-t)$$

故 I_a 将过 a 点的测地线反向.

现设 $\gamma(t)$ 为过 e 的测地线, $\gamma(0) = e$. 故定一个 t , 令 $\bar{\gamma}(u) = \gamma(u+t)$ 则 $\bar{\gamma}$ 是过 $\gamma(t)$ 的测地线

$$\begin{aligned}
I_{\gamma(t)} I_e(\gamma(u)) &= I_{\gamma(t)}(\gamma(-u)) = I_{\gamma(t)}(\bar{\gamma}(-u-t)) \\
&= \bar{\gamma}(u+t) = \gamma(u+2t)
\end{aligned}$$

另一方面

$$I_{\gamma(t)} I_e(\gamma(u)) = I_{\gamma(t)}(\gamma(u))^{-1} = \gamma(t)\gamma(u)\gamma(t)$$

故

$$\gamma(u+2t) = \gamma(t)\gamma(u)\gamma(t)$$

令 $u=0$ 得

$$\gamma(2t) = \gamma(t)^2$$

令 $u = t$ 得

$$\gamma(3t) = \gamma(t)^3$$

归纳得

$$\gamma(nt) = \gamma(t)^n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (\text{这里 } g^\circ \triangleq e)$$

设 $x, y \in \mathbb{Q}$, 则有 $t \in \mathbb{Q}$, s.t. $x = nt, y = mt$, $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \gamma(x+y) &= \gamma((m+n)t) = \gamma(t)^{m+n} = \gamma(t)^m \gamma(t)^n \\ &= \gamma(mt) \gamma(nt) = \gamma(x) \gamma(y) \end{aligned}$$

故 $\gamma|_{\mathbb{Q}}$ 是群同态, 由于 \mathbb{Q} 在 \mathbb{R} 中稠, γ 连续, 故 $\gamma(t)$ 是单参数子群. \square

并不是所有的李群都有双不变度量, 例如 $GL_n(\mathbb{R})$ ($n \geq 2$) 上不存在双不变度量. 否则, $gl_n(\mathbb{R})$ 上将有 $Ad(gl_n(\mathbb{R}))$ 相容的内积, 则

$$\begin{aligned} |E_{ij}|^2 &= \langle E_{ij}, E_{ij} \rangle \\ &= \langle [E_{ik}, E_{kj}], E_{ij} \rangle = -\langle E_{kj}, [E_{ik}, E_{ij}] \rangle \\ &= -\langle E_{kj}, 0 \rangle = 0, \quad i \neq j, k \end{aligned}$$

但是紧李群上必然存在双不变度量。这是因为紧致拓扑群上存在唯一的不变积分, 这使得紧群的任何线性表示都可以约化到酉表示 (Herman Weyl 的 “unitary trick”)。具体地说若 $\rho: G \rightarrow GL(V)$ 为一表示, 则 V 上存在 G -不变内积。由于 $ad: G \rightarrow GL(\mathcal{J})$ 为一表示, 故当 G 紧致时, \mathcal{J} 上存在 $ad(G)$ 不变内积, 从而 G 上有双不变度量。

Reference

- [1] M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, volume 1.
- [2] Frank W. Warner, *Foundations of differential and Lie groups* Springer-Verlag.
- [3] M.P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser.

关于隐函数定理的一点讨论

0101 李勤

隐函数定理在多变量微积分中是一个很重要的定理,它在微分方程,微分几何等数学分支中也有很重要的应用.从我自己的学习经验来看,这也是多元微分学中一个比较难的地方.在本文中,首先来讨论一下这个定理的意义,然后用它来证明几个微分流形中的定理.

隐函数定理的表述是这样的:设开集 $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$, 映射 $F: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ 满足条件:

- (1) $F \in C^{(1)}(D)$;
- (2) 有一点 $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$ 使得 $F(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = 0$;
- (3) 行列式 $\det J_y F(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$,

则存在 (\vec{x}_0, \vec{y}_0) 的一个邻域 $G \times H$, 使得 1° 对每个 $\vec{x} \in G$, 方程 $F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ 在 H 中有唯一解 $f(x)$; 2° $y_0 = f(x_0)$; 3° $f \in C^{(1)}(G)$. 这个陈述中符号很多, 不容易看出其中意义.

首先以两个最简单的例子来看一下这个定理的意义.

- (1) 令 $m = n = 1$, 取 $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 的解就是单位圆.

首先从图可以看出一般来说定理只是局部成立的. 因为对固定的 $|x_0| < 1$, 方程的解有两个. 只有在局部看时, 解才是唯一的. 其次来看两个点 A, B .

在 B 点附近可以找到这样的邻域, 但是在 A 点附近找不到题所说的邻域. 其原因就是 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在 A 点为 0. 当然也并非说 $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ 是必要的, 例如令 $F(x, y) = x - y^3$ 时就可看出.

- (2) 令 F 为一线性映射, 则可写成矩阵的形式

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, \vec{y}) &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x}^T \\ \vec{y}^T \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \vec{x}^T + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix} \vec{y}^T \end{aligned}$$

则固定 \vec{x}_0 后, 方程 $F(\vec{x}_0, \vec{y}) = 0$ 成为一线性方程组, 此方程组有唯一解的充要条件

是 $\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$ 非退化. 而此矩阵恰恰就是 $J_y F$.

从例(2)可以看出, 把 $F(\vec{x}, \vec{y})$ 看成线性映射时, 隐函数定理的条件, 结论就比较容易理解了. 事实上, 微分学的基本想法就是用比较简单的函数去逼近所要考察的性质. 当作一阶展开时就是用线性映射去逼近.

下面用隐函数定理来证明一些流形上的结论. 首先来介绍映射秩的定义. 设 $f: M \rightarrow N$ 为可微映射, M, N 分别为 m 维和 n 维流形. $\forall x \in M$, 考虑 x 附近的一个坐标表示, 在局部坐标下可写出 f 的 Jacobi 矩阵, 当 M, N 上的坐标变换时, 新的 Jacobi 阵是原来的矩阵做了一个相抵变换, 故其秩在坐标变换下不变. 将 Jacobi 矩阵的秩就定义为 f 在点 x 处的秩.

定理 1 $f: M \rightarrow N$ 为可微映射, M, N 分别为 m, n 维流形, $x^\circ \in M$, f 在 x° 的一个邻域内 U 的秩均为 k , 则 $f(U)$ 为 N 的 k 维子流形.

证明: 在 x° 和 $f(x^\circ)$ 的附近用坐标来表示 f , 其矩阵为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

不妨设其左上角的 k 阶子方阵为非退化的. 令

$$x^\circ = (x_1^\circ, \cdots, x_k^\circ, x_{k+1}^\circ, \cdots, x_m^\circ),$$

取

$$F(x_1, \cdots, x_k, y_1, \cdots, y_k) = f(x_1, \cdots, x_k, x_{k+1}^\circ, \cdots, x_m^\circ) - (y_1, \cdots, y_k),$$

则

$$F(x_1^\circ, \cdots, x_k^\circ, f_1(x^\circ), \cdots, f_k(x^\circ)) = 0, \quad J_x f \neq 0,$$

故由隐函数定理 $(x_1, \cdots, x_k) = g(y_1, \cdots, y_k)$, 在 $f(x^\circ)$ 附近可作坐标变换

$$\begin{aligned} (y_1, \cdots, y_k, y_{k+1}, \cdots, y_n) &\longrightarrow (g(y_1, \cdots, y_k), y_{k+1}, \cdots, y_n) \\ &= (x_1, \cdots, x_k, y_{k+1}, \cdots, y_n) \end{aligned}$$

此时映射 f 的 Jacobi 形如 $\begin{pmatrix} I_k & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$, 说明 f_{k+1}, \cdots, f_n 与 x_{k+1}, \cdots, x_m 无关,

再次做坐标变换

$$(x_1, \cdots, x_k, y_{k+1}, \cdots, y_n) \longrightarrow (x_1, \cdots, x_k, y_{k+1} - f_{k+1}(x_{k+1}), \cdots, y_n - f_n(x_n))$$

其变换的Jacobi阵为 $\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ * & I_{n-k} \end{pmatrix}$, 当某点属于 $f(U)$ 中时必有坐标形如

$(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, 由此易看出 $f(U)$ 是 k 维的. 用类似的方法可以证明结论:

设 $y \in N$, 且 y 在 $I_m f$ 中, 则 $f^{-1}(y)$ 为 M 的 $m-k$ 维子流形. 我们可以把这些结论和线性代数中的结论作一些比较: 若 M, N 分别为 m, n 维线性空间, f 为线性映射, f 的秩为 k , 则 $f(M)$

为 N 中的 k 维子空间, 若 $y \in f(M)$, $f^{-1}(y)$ 为 M 中线性子流形, 其维数为 $\ker f$ 的维数为 $m-k$.

可以发现结论是极其相似的, 实际上这就是说明微分流形之间的可微映射当在局部秩不变时是可以局部线性化的.

下面我们来考虑一下复的情况下的隐函数定理. 此时可微函数变成全纯函数.

定理 2 设开集 $D \subset \mathbb{C}^{n+m}$, 映射 $F: D \rightarrow \mathbb{C}^m$ 满足条件 F 为全纯映射. (2) 有一点 $(\vec{z}_0, \vec{w}_0) \in D$, 使 $F(\vec{z}_0, \vec{w}_0) = 0$. (3) 行列式 $\det J_w F(\vec{z}_0, \vec{w}_0) \neq 0$, 则存在 (\vec{z}_0, \vec{w}_0) 的一个邻域 $G \times H$ 使得 1° 对每个 $z \in G$, 方程 $F(\vec{z}, \vec{w}) = 0$ 在 H 中有唯一解 $f(z)$; $2^\circ w_0 = f(z_0)$; $3^\circ f$ 为全纯的.

证明: 证明的基本想法是利用实的隐函数定理, 再证明其为全纯的. 易知可以把 F 看成是从 \mathbb{R}^{2n+2m} 中的一个开集到 \mathbb{R}^{2m} 中的映射, 由于 F 是全纯的, 故在实的意义下当然是 $C^{(1)}$ 的. 由于 F 全纯, 故由Cauchy-Riemann方程可知, 在实的意义

下 $J_w F$ 形如 $\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ 而在复的意义下其Jacobi阵为

$A + Bi$, 我们有

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A - Bi) & 0 \\ 0 & (A + Bi) \end{pmatrix} 1$$

由于 $\det(A + Bi) \neq 0$, 易知 $\det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} \neq 0$, 故由实的隐函数定理, 存在一个

$C^{(1)}$ 的隐函数 f , 为证明其在复的意义下全纯, 只需看其Jacobi矩阵. 其Jacobi矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix},$$

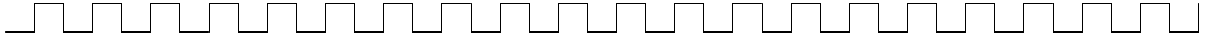
其中 $\begin{pmatrix} C & -D \\ D & C \end{pmatrix}$ 为 $J_z F$ 在实的意义下的矩阵, 设 $(A - Bi)^{-1} = E - Fi$, 则由(1)式可

知

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & -F \\ F & E \end{pmatrix},$$

易由 f 的Jacobi矩阵知 f 是全纯的.

□



图灵奖中的数学家

数学是所有工科的基础,要想在工程科学上真正严谨的作学问,必须有一个扎实的数学功底。比如计算机科学中,离散数学就是它的精髓。下面向大家介绍几位学数学出身或者本身就是数学家的计算机图灵奖得主以及他们的主要成就。

●1986年获奖的Robert E.Tarjan,在加州理工获数学学士学位,后来在Stanford取得计算机和数学博士学位。是Princeton计算机系教授,主要研究图论,算法和数据结构设计。他发现了判断一个图是否为平面图的时间复杂度为 $O(n^3)$ 的算法,在数据库软件,电路设计,航空线路图优化等领域有广泛应用。Tarjan也是1982年首届Nevanlinna奖得主。

●1972年获奖的Edsger W.Dijkstra,在祖国荷兰获数学和物理学学士学位,理论物理博士学位。在他2000年退休前一直是美国Texas大学的计算机科学和数学教授。发现了以他名字命名的图论中的最短路径算法。但他获得图灵奖的主要原因却是发明了ALGOL这一第二代编程语言。

●1985年获奖的Richard M.Karp,在Harvard大学获应用数学博士学位。现在是Berkeley大学计算机系教授。最重要的论文是1972年发表的“Reducibility Among Combinatorial Problems”。他在并行算法,组合优化问题的概率分析方面颇有建树。现在研究方向是人类基因测序和基因数据表达。他也是美国国家科学院院士,获得过美国国家科学奖。

●1974年获奖的Donald E. Knuth,在加州理工获数学博士,退休前是Stanford大学计算机系教授。发明数学排版软件 \TeX ,现在正在撰写巨著*The Art of Computer Programming*,已出版3卷。

●1983年获奖的Dennis M.Ritchie,在Harvard大学获应用数学博士学位。毕业后加入Bell实验室,参与发明了Unix操作系统,发明了C编程语言。

●1989年获奖的William V.Kahan是加州Berkeley分校的数学教授。他因为在数值计算,特别是浮点运算方面的贡献而获奖,有人评价他是“dedicated himself to make the world safe for numerical computations.”

●1987年获奖的John Cocke,在Duke大学获数学博士学位。毕业后进入IBM公司工作,同时也MIT和NYU的Courant研究所做过客座教授。主要贡献是发明了RISC (Reduced Instruction Set Computers),大大改善了芯片的性能。

●1969年获奖的Marvin Minsky,在Harvard获数学学士,在Princeton获数学硕士,后在MIT任数学和计算机教授。主要贡献是人工智能。

●1971年获奖的John McCarthy,在加州理工获数学学士,在Princeton获数学博士学位。人工智能大师,Lisp语言发明人。

●1970年获奖的John Hardy Wilkinson,16岁入Rochester大学数学系学习,后在剑桥大学获博士学位。主要贡献是数值计算和“backward”误差分析。

●1968年获奖的Richard Hamming,在UIUC获数学博士学位,博士论文题目是“线性微分方程中的边值问题”。在数值分析,概率统计,编码理论上有卓越建树。

关于Gauss和与二次互反律

0101 刘杭

这是我见到的漂亮的数学证明，希望与大家分享。

设 p 是素数， r 为模 p 的原根。

❶若 $p = 3n + 1$, 令 $x \equiv r^n \pmod{p}$, 则 $(x - x^2)^2 \equiv -3 \pmod{p}$

❷若 $p = 5n + 1$, 令 $x \equiv r^n \pmod{p}$, 则 $(x - x^2 - x^3 + x^4)^2 \equiv 5 \pmod{p}$

❸若 $p = 7n + 1$, 令 $x \equiv r^n \pmod{p}$, 则 $(x - x^2 - x^3 + x^4 - x^5 - x^6)^2 \equiv -7 \pmod{p}$

这是Euler和Lagrange的发现。

更一般的，若 q 为素数， $p = qn + 1, x \equiv r^n$, 令

$$f_q(x) = \left(\frac{1}{q}\right)x + \left(\frac{2}{q}\right)x^2 + \cdots + \left(\frac{q-1}{q}\right)x^{q-1}$$

则

$$f_q^2 \equiv \left(\frac{-1}{q}\right)q \pmod{p}$$

其中， $\left(\frac{p}{q}\right)$ 为Legendre符号。这是Gauss的发现。

$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{\left(\frac{-1}{q}\right)}{p}\right) = 1$$

这是二次互反律的特殊情况。

事实上，在 $F_p[x]/(1 + x + \cdots + x^{q-1})$ 中，有 $f_q^2 = \left(\frac{-1}{q}\right)q$ (其中 q 为任意素数, $p \neq q$)。

证明:

$$\begin{aligned} f_q^2 &= \sum_{a,b \equiv 0 \pmod{q}} \left(\frac{a}{q}\right) \left(\frac{b}{q}\right) x^{a+b} \\ &= \sum_{a+b \equiv 0 \pmod{q}} \left(\frac{a}{q}\right) \left(\frac{-a}{q}\right) + \sum_{a+b \equiv c \not\equiv 0 \pmod{q}} \left(\frac{a}{q}\right) \left(\frac{c-a}{q}\right) x^c \end{aligned}$$

因为 $a^{-1}c$ 过模 q 的缩系

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{a=1 \\ c \neq 0}}^{q-1} \left(\frac{a}{q}\right) \left(\frac{c-a}{q}\right) &= \sum_{\substack{a=1 \\ c \neq 0}}^{q-1} \left(\frac{a^{-1}}{q}\right) \left(\frac{c-a}{q}\right) \\ &= \sum_{\substack{a=1 \\ c \neq 0}}^{q-1} \left(\frac{a^{-1}c-1}{q}\right) \\ &= \sum_{b \neq -1 \pmod{p}} \left(\frac{b}{q}\right) = -\left(\frac{-1}{q}\right),\end{aligned}$$

所以

$$f_q^2 = (q-1) \left(\frac{-1}{q}\right) + \sum_{c=1}^{q-1} \left(-\left(\frac{-1}{q}\right)\right) x^c = (q-1) \left(\frac{-1}{q}\right) + \left(\frac{-1}{q}\right) = q \left(\frac{-q}{q}\right). \quad \text{☞}$$

这是令 $a+b=c$ 对此命题的证明, 令 $a^{-1}b=c$ 同样可证此命题。

于是在 $F_p[x]/(1+x+\cdots+x^{q-1})$ 中

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{-1}{q}\right)q\right)^{\frac{p-1}{2}} f_q &= f_q^p \\ &= \left(\frac{1}{q}\right)x^p + \left(\frac{2}{q}\right)x^{2p} + \cdots + \left(\frac{q-1}{q}\right)x^{(q-1)p} \\ &= \left(\left(\frac{p}{q}\right)x^p + \left(\frac{2p}{q}\right)x^{2p} + \cdots + \left(\frac{(q-1)p}{q}\right)x^{(q-1)p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) \\ &= f_q \left(\frac{p}{q}\right)\end{aligned}$$

而

$$q^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{q}{p}\right), \quad \left(\frac{-1}{q}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}}$$

所以

$$f_q \left(\frac{q}{p}\right) (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} = \left(\frac{p}{q}\right) f_q$$

两边同乘以 f_q 得

$$\left(\frac{-1}{q}\right) q \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} \left(\frac{-1}{q}\right) q$$

而 q 在 $F_p[x]$ 中可逆, 所以在 $F_p[x]/(1+x+\cdots+x^{q-1})$ 中

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}},$$

而

$$(-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}} = \pm 1, \quad \left(\frac{q}{p}\right) \left(\frac{p}{q}\right) = \pm 1, \quad p \geq 3.$$

所以在 \mathbb{Z} 中同样有

$$\binom{q}{p} \binom{p}{q} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}. \quad \text{✌}$$

这在本质上就是 *Gauss* 对二次互反律的第二个证明，只不过把 f_q 换成经典的 *Gauss* 和

$$S = \sum_{a=1}^{p-1} \binom{a}{p} e^{\frac{2\pi a}{p}}.$$

注意到在证明 $f_q^2 = \left(\frac{-1}{q}\right)q$ 时只用了 $\sum_{a=0}^{q-1} x^a = 0$, 而 $\sum_{a=0}^{p-1} e^{\frac{2\pi a}{p}} = 0$, 所以同样可

证 $S^2 = \left(\frac{-1}{p}\right)p$, 用 S 同样可证明二次互反律。对 S 符号的确定要困难得多, Gauss花了四年的时间。在Serge Lang的*Algebraic Number Theory*、华罗庚的《数论导引》和柯召的《数论讲义》中有三种不同的方法解决这一问题。关于Gauss和或许从正十七边形的作图中也可得到一些启示。

[illegible]

欧几里德留下了几何原本，传抄在雪白的羊皮纸上，

距今已有两千三百多年;

阿波罗尼生于帕加，凝视着永恒的圆锥曲线：

丢番图却在静静的欣赏不定方程的解，

微分、级数、离散、收敛是谁的发现？

喜欢你在连续之中逼近我的极限。

经过剑桥三一学院，我以牛顿之名许愿，

思念就像傅利叶级数一样蔓延，

当空间只剩下拓扑的语言，映射就成了永垂不朽的诗篇，

我给你的爱写在Banach空间，深埋在康托尔集合里面，

用超越数去超越永远，那一绝对收敛的数列，一万年都不变！

Reflection Groups

0101 Huang Yufa

We have learned that *Euclidean transformation* consists of motion, rotation and reflection. Since we are so familiar with the former two ones, we will pay our attention to reflection in this article.

1 Reflection in a Euclidean Space

Assume that \mathbf{E} is a *Euclidean Space*, i.e. a finite dimensional vector space over \mathbb{R} endowed with a positive definite symmetric bilinear form (α, β) . Geometrically a reflection in \mathbf{E} is an invertible linear transformation leaving pointwise fixed some hyperplane and sending any vector orthogonal to that hyperplane into its negative. Any nonzero vector α determines a reflection σ_α with reflecting hyperplane $P_\alpha = \{ \beta \in \mathbf{E} \mid (\beta, \alpha) = 0 \}$. It's easy to write down an explicit formula:

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha.$$

Let $\langle \beta, \alpha \rangle = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$, then $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$.

The following properties are easily obtained:

- ❧ ❶. σ_α is orthogonal i.e. $(\sigma_\alpha(\beta), \sigma_\alpha(\gamma)) = (\beta, \gamma)$;
- ❧ ❷. $\det \sigma_\alpha = -1$;
- ❧ ❸. $\sigma \sigma_\alpha \sigma^{-1} = \sigma_{\sigma(\alpha)}$.

2 Root System

a subset \mathcal{A} of the Euclidean Space \mathbf{E} is called a *root system* in \mathbf{E} if the following axioms are satisfied:

- (R1) \mathcal{A} is finite, Spans \mathbf{E} and doesnot contain 0;
- (R2) If $\alpha \in \mathcal{A}$, the only multiples of α in \mathcal{A} are $\pm \alpha$;
- (R3) If $\alpha \in \mathcal{A}$, the reflection σ_α leaves \mathcal{A} invariant;
- (R4) If $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, then $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$.

Let \mathcal{A} be a root system in \mathbf{E} . Denote by ω the subgroup of $GL(\mathbf{E})$, generated by the reflection $\sigma_\alpha (\alpha \in \mathcal{A})$. By (R3) ω permutes the set \mathcal{A} , which is finite and spans \mathbf{E} . This allows us to identify ω with a subgroup of the symmetric group on \mathcal{A} , in particular, ω is finite. ω is called the *Weyl Group of \mathcal{A}* .

3 Examples

Call $l = \dim \mathbf{E}$ the *rank* of the root systems \mathcal{A} . There is only one possibility of \mathcal{A} in case $l = 1$.



the case $l = 2$ offers more possibilities of \mathcal{A} , all of which we can get using the following proposition.

Proposition: Let α, β be nonproportional roots. If $(\alpha, \beta) > 0$, then $\alpha - \beta$ is a root; If $(\alpha, \beta) < 0$, then $\alpha + \beta$ is a root.

Proof: The second assertion follows from the first.

Notice

$$\left. \begin{aligned} \langle \beta, \alpha \rangle &= \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2\|\beta\|}{\|\alpha\|} \cos \theta \\ \langle \alpha, \beta \rangle &= \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \frac{2\|\alpha\|}{\|\beta\|} \cos \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \langle \beta, \alpha \rangle \langle \alpha, \beta \rangle = 4 \cos^2 \theta.$$

(θ is the angle between vectors $\alpha, \beta \in \mathbf{E}$)

The following possibilities are the only ones when $\alpha \neq \pm\beta$ and $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$.

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ
0	0	$\pi/2$
1	1	$\pi/3$
-1	-1	$2\pi/3$
1	2	$\pi/4$
-1	-2	$3\pi/4$
1	3	$\pi/6$
1	-3	$5\pi/6$

Now we can give the proof of the first assertion. The table above shows that one or the other of $\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, \alpha \rangle$ equals 1. If $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, then $\sigma_\beta(\alpha) = \alpha - \beta \in \mathcal{A}$.

If $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ then $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \mathcal{A}$, hence $\alpha - \beta \in \mathcal{A}$. \square

Now we can get all the possibilities of \mathcal{A} in case $l = 2$:

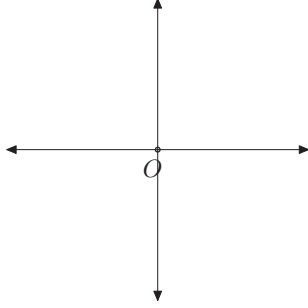


fig1.01

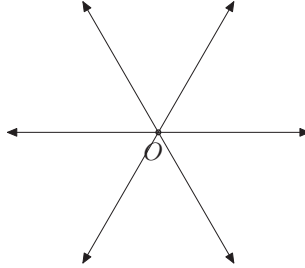


fig1.02

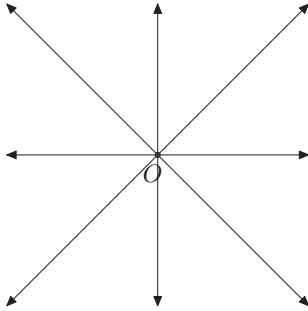


fig1.03

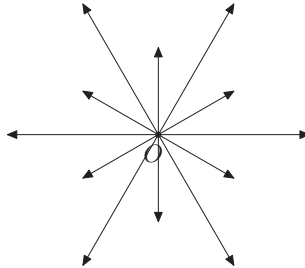


fig1.04

As an application, Consider a pair of nonproportional roots α, β . Look at all roots of $\beta + i\alpha$ ($i \in \mathbb{Z}$), let $r, q \in \mathbb{Z}^+$, be the largest integers for which $\beta - r\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta + q\alpha \in \mathcal{A}$. If some $\beta + i\alpha \notin \mathcal{A}$ ($-r < i < q$), we can find $p < s$ in this interval such that $\beta + p\alpha \in \mathcal{A}$, $\beta + (p+1)\alpha \notin \mathcal{A}$, $\beta + (s-1)\alpha \notin \mathcal{A}$, $\beta + s\alpha \in \mathcal{A}$. But the proposition implies both $(\alpha, \beta + p\alpha) \geq 0$, $(\alpha, \beta + s\alpha) \leq 0$, since $p < s$, $(\alpha, \alpha) > 0$, this is absurd. We conclude that the α -string through β is unbroken from $\beta - r\alpha$ to $\beta - q\alpha$. Now σ_α just adds or subtracts a multiples of α to any root, so this string is invariants under σ_α . Geometrically, it is obvious that σ_α just reverses the string. In particular, $\sigma_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$, i.e. $\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha - q\alpha = \beta - r\alpha$, so $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$.

Problem: Let α -string through β be $\beta - r\alpha, \dots, \beta + q\alpha$, and let the β -string through α be $\alpha - r'\beta, \dots, \alpha + q'\beta$. Prove that $\frac{q(r+1)}{(\beta, \beta)} = \frac{q'(r'+1)}{(\alpha, \alpha)}$.

Solution: Let θ be the angle between α and β .

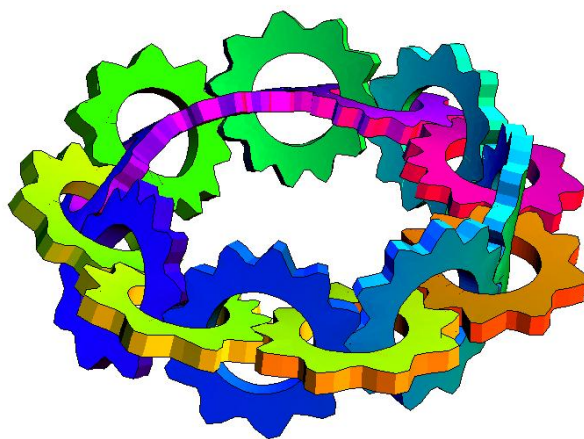
when $\theta = 30^\circ$ or 45° , $q = q' = 0$, the equation is satisfied.

when $\theta = 60^\circ$, the equation is also right for symmetries.

when $\theta = 90^\circ$, the equation is OK by simple commutation.

when $\theta > 90^\circ$, let θ' be the angle between α and β , then

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r(q+1)}{(\beta, \beta)} = \frac{r'(q'+1)}{(\alpha, \alpha)} \\ \left. \begin{array}{l} r - q = \langle \beta, \alpha \rangle \\ r' - q' = \langle \alpha, \beta \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{r - q}{(\beta, \beta)} = \frac{r' - q'}{(\alpha, \alpha)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{q(r+1)}{(\beta, \beta)} = \frac{q'(r'+1)}{(\alpha, \alpha)}. \quad \square$$



An Introduction to Multifractals

0101 Yuchao Ma

abstract

Multifractal theory is essentially rooted in probability theory, though draws on complex ideas from each of physics, mathematics, probability theory and statistics. It has also been used in a wide range of application areas: dynamical systems, turbulence, rainfall modeling, spatial distribution of earthquakes and insect populations, financial time series modeling and internet traffic modeling.

1 Motivation and Background

The books by Mandelbrot(1977,1983) have attracted considerable interest in describing objects. With an extremely irregular shape. His examples include galaxies, lengths of coastlines, snowflakes, and the Cantor Set. Characteristics of a set at a given level of magnification are essentially the same, as those at other level of magnification apart from a scale factor, have irregularity is repeated on finer and finer levels and infinitum. These sets are referred to as being *self – similar*.

One way to describe the size of these sets is to calculate its 'fractal' dimension. Note that the dimension of a line is one, and the dimension of a plane is 2. For example, the dimension of an irregular coastline may be greater than one but less than two, indicating that it is not like a simple line and has space filling characteristics in the plane. Likewise, the surface area of a snowflake may be greater than two but three, indicating that its surface is more complex and regular geometrical shapes, and is partially volume filling.

Examples of fractal sets with an associated probability measure can be easily constructed. One of the most simple examples is the Cantor measure.

2 Example

The Cantor set is constructed by removing the middle third from the unit interval, then the remaining two subintervals have their middle thirds removed, and continues,

$$\mathcal{K}_0 = [0, 1]$$

$$\mathcal{K}_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$\mathcal{K}_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

The Cantor set is then defined as $\mathcal{K} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{K}_n$

$$\mathcal{K}_n = (\frac{\mathcal{K}_{n-1}}{3}) \bigcup (\frac{2}{3} + \frac{\mathcal{K}_{n-1}}{3}) \quad n = 0, 1, \dots$$

Now extend the sample further by allocating a mass or probability to each subinterval at each division. IN this example, we will allocate $\frac{2}{3}$ of the existing probability in an interval being divided to the right-hand subinterval, and $\frac{1}{3}$ to the left as in Figure 1.1. By contraction, the Cantor set is closed and is there fore the support of this measure.

How do we describe the size of the Cantor set?It can be seen that the Lebesgue measure of \mathcal{K}_n is $(\frac{2}{3})^n \rightarrow 0$.Another way is to calculate its dimension. The basic idea of a dimension, d_0 ,is that it relates to the number of covers that are required to cover the set of interest. For example, 2 boxes of width $\frac{1}{3}$ are required to cover \mathcal{K}_1 , 4 boxes of width $\frac{1}{9}$ are required to cover \mathcal{K}_2 . That is let $N_\delta(k)$ be the number of boxes of width δ that are required to cove the set \mathcal{K} .then

$$\frac{\log N_\delta(k)}{-\log \delta_n} = \frac{\log 2^n}{-\log(3^{-n})} = \log_3 2$$

where $\delta_n = 3^{-n}$. The number $\log_3 2$ is the dimension(both box and Housdorff) of Cantor set.

3 Properties and Dimensions of Sets

3.1 self-similar sets

3.1.1 Definitions

1. Let E be a closed subset of \mathbb{R}^d . A mapping $S : E \rightarrow E$ is called a *contraction* on E if $\exists t : 0 < t < 1 : |S(x) - S(y)| \leq t|x - y|, \forall x, y \in E$.
2. Let E be a closed subset of \mathbb{R}^d . A mapping $S : E \rightarrow E$ is called a *similarity* on E if $\exists t : 0 < t < 1 : |S(x) - S(y)| = t|x - y|, \forall x, y \in E$.That is, S transforms sets to geometrically similar ones.
3. Let S_1, \dots, S_m be contractions. A subset F of E is called *invariant* for the transformations S_i if

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F)$$

4. A set that is invariant under a collection of similarities is called a *self-similar set*, that is, it is the union of a number of smaller copies of itself.
5. The contractions S_i are said to satisfy the *open set condition* if there exists a non-empty open bounded set V such that

$$V \supseteq \bigcup_{i=1}^m S_i(V)$$

with the union being disjoint.

Note the distinction between the open set condition and the disjoint set condition. In some papers, the open set condition may be described as *non-overlapping*; i.e., the only meet on the boundary points.

3.1.1 Example

Let F be the middle third Cantor set on $[0, 1]$, Let $S_1(x) = x/3$ and $S_2(x) = x/3 + 2/3$. Then $F = S_1(F) \cup S_2(F)$, and so is self-similar. Further, let $V = (0, 1)$, then $S_1(V) = (0, \frac{1}{3})$ and $S_2(V) = (\frac{2}{3}, 1)$, and so S_1 and S_2 satisfy the open set condition.

3.2 Hausdorff Dimension

Let U be a non-empty subset of \mathbb{R}^d . The diameter of U is defined as

$$|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$$

If $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ with $0 < |U_i| \leq \delta$ for each i , U_i is called a δ -cove of F .

3.2.1 Hausdorff Measure Definition

Suppose that F is a subset of \mathbb{R}^d and s is a non-negative number. For any $\delta > 0$, define $\mathcal{H}_\delta^s(F)$ as

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : U_i \text{ is a } \delta\text{-cover of } F\right\}$$

, where the infimum is over all countable δ -covers U_i of F . The *s-dimensional Hausdorff measure* of F is defined as

$$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$$

.

The limit, $\mathcal{H}^s(F)$, exists for any $F \subset \mathbb{R}^d$, though the limiting value can often be zero or infinity.

3.2.2 Housdorff Measure Properties

We list below various properties of the Housdorff measure.

1. (a). $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$.
- (b). If $E \subseteq F$, then $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$
- (c). If F_i is any countable collection of disjoint Borel sets, then

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i)$$

2. If F is a Borel subset of \mathbb{R}^d , then

$$(H)^d(F) = c_d \text{Vol}^d(F)$$

where $c_d = \pi^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{d}{2}} (\frac{d}{2})!$. For example, if F is a smooth surface, then

$$\mathcal{H}^2(F) = \frac{\pi}{4} \text{Area}(F)$$

3.2.3 Hausdorff Dimension

The Hausdorff dimension of a set F , denoted by $\dim_H(F)$, is

$$\dim_H(F) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}$$

or alternatively satisfies

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{if } s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{if } s > \dim_H(F) \end{cases}$$

If $s = \dim_H(F)$, then $\mathcal{H}^s(F)$ may be zero, infinite, or may satisfy $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$. A Borel set satisfying this last condition is called an s -set.

4 Application: Forecasting the Earthquake

Earthquake occurrence may also have fractal like characteristics. It is thought that earthquakes occur on faults which are essentially a fracture in the earth's crust. A simple clean cut in a three-dimensional object would have a dimension of two. However, consider the situation where small faults branch off large faults, and from these smaller faults, even smaller faults are found. And the replication is repeated many times to a finer and finer level. If this hypothesis were true, one would expect the dimension to be greater than two but less than three.

From the analysis above, example of fractal sets with an associated probability measure can be easily constructed, one of which is Cantor Measure.

Mathematical models that describe the fracturing process are relatively primitive compared to models that describe the evolution and behavior of weather systems. Some models postulate that there are 'elementary dislocations' occurring all of the time. Periodically, the occurrence of a number of these dislocations will cause a cascade of further elementary dislocations. If the cascade is sufficiently large, an earthquake will be detected by a sufficiently sensitive seismic network.

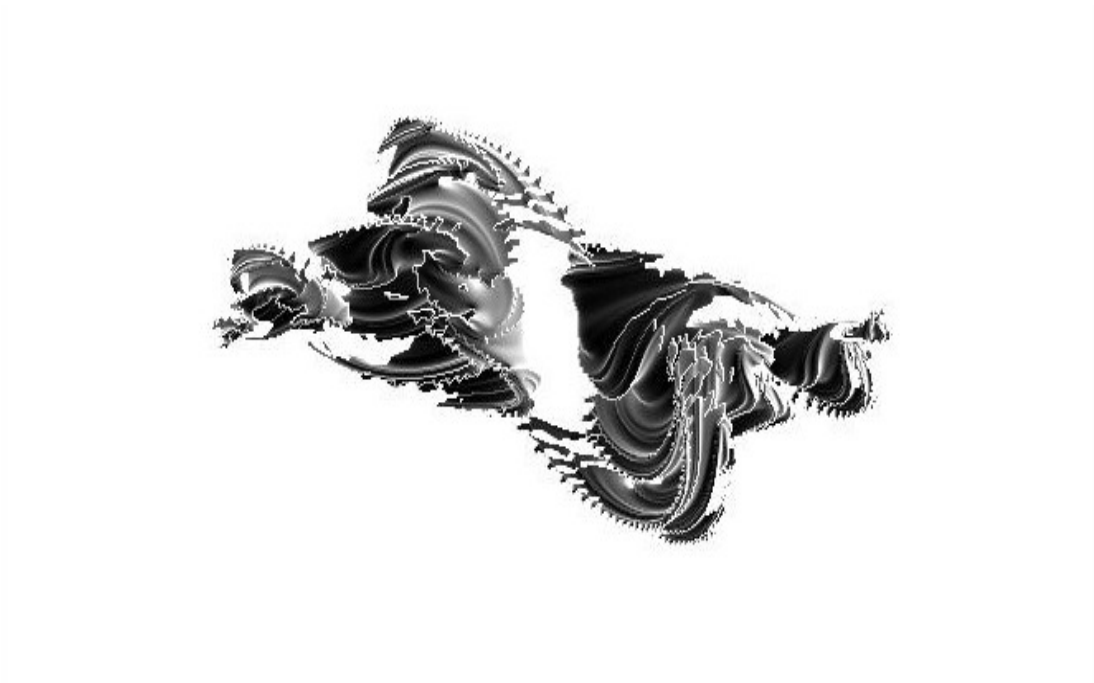
Dimension estimates in the earthquake context are primarily descriptive in nature. If the earthquake process really did display fractal like characteristics, then it would be desirable for one's models of the fracture process and those for forecasting of event probabilities also to display similar fractal characteristics.

However, there is an inherent contradiction in calculating dimensions of point patterns. A finite set of point locations theoretically has dimension zero. Hence, what characteristics are the dimension estimates describing? This question depends on the underlying model that one has in mind.

There are many problems in estimating fractal dimensions using 'real' data. For example, the earthquake locations contain location errors which may not even be homogeneous over the analyzed region. There are also boundary effects caused by the inability of the seismic network to accurately detect events that are too distant. These problems are discussed more fully in the references books.

Reference

- [1] *David Harte*, Multifractals: Theory and Application, CHAPMAN and HALL/CRC, 2001.
- [2] *Falconer, K.J.* The Geometry of Fractal Sets, Cambridge University Press, 1985.



对称、反对称张量中独立分量的计数

0104 张扬

数学物理中的张量往往具有一定对称性，对称性与独立分量个数密切相关。当对称性多时，计算独立分量的个数将十分繁琐。若从群作用下映射等价的观点出发(Pólya计数定理)，问题便容易得多。但由于反对称性的存在，必须将Pólya定理做适当推广，方可解决这一问题。

1 问题及其抽象化

设 $\mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 为一 m 重 n 维张量 ($1 \leq i_k \leq n, 1 \leq k \leq m$)，若其有某种对称性（反对称性）。所有必然相等的分量只计为一个独立分量，所有必然归 0 的分量不算独立分量，问 $\mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 有多少独立分量？例： \mathbf{R}_{abcd} 为 4 重 n 维张量。有以下对称性：

$$\mathbf{R}_{abcd} = \mathbf{R}_{cbad} \quad (\text{对称})$$

$$\mathbf{R}_{abcd} = -\mathbf{R}_{bacd} = -\mathbf{R}_{badc} \quad (\text{反对称})$$

问： \mathbf{R}_{abcd} 有多少独立分量？

现将问题抽象化。 $\mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ 中的每一分量视为由 m 元集 \mathbf{A} 到 n 元集 C 的映射（故共有 n^m 个分量）。的一个子群 G 作用于 \mathbf{A} 上。构造 G 到 $\{+1, -1\}$ 的群同态如下，若 $g \in G$ 为对称操作，令其像为 $+1$ ，若反对称操作，像为 -1 ，易见确为同态（除非有 $\mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_m} = -\mathbf{R}_{i_1 i_2 \dots i_m}$ ，但这是平凡的）。此映射的核为子群 H ，令集合。令

$$C^A = \{f \mid f: A \rightarrow C\},$$

G 诱导地作用于 C^A 上：（以下 $Stab$, fix 等记号皆指对于此作用）

$$g \cdot f = f \circ g^{-1}$$

C^A 在此作用下分为轨道，亦即分量划分为等价类。但轨道的个数并非独立分量数，因为可能某等价类中的分量由于反对称性质而一定为 0（即该类中所有分量皆被消灭）。现定义 C^A 上的函数

$$\omega: \begin{cases} \omega(f) = 0, & \exists k \in K, k \cdot f = f \\ \omega(f) = 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

ω 可看作轨道的函数: 因为若 $\omega(f) = 0$, 即有 $k \in K, kf = f$, 则

$$(g^{-1}Kg)gf = gf, \quad \forall g \in G$$

若 C^A 在作用下的轨道为 $\theta_1, \dots, \theta_N$, 则独立分量数为 $\sum_{i=1}^N \omega(\theta_i)$ 。

2 主要结论

引理:

$$\sum_{i=1}^N \omega(\theta_i) = \frac{1}{|G|} \left(\sum_{g \in H} |Fix(g)| - \sum_{k \in K} |Fix(k)| \right)$$

证明: 利用推广了的Burnside引理

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \omega(\theta_i) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f \in Fix(g)} \omega(f) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} \sum_{f \in Fix(g)} \omega(f) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} |Fix(h)| - \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} |\{f \mid hf = f, Stab(f) \cap K \neq \emptyset\}| \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} |Fix(h)| - \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{f \in C^A \\ Stab(f) \cap K \neq \emptyset}} |Stab(f) \cap H \neq \emptyset| \end{aligned}$$

$\because K \neq \emptyset$ 时, $|G:H| = 2$, 即有 $|Stab(f) \cap H| = |Stab(f) \cap K|$ $K = \emptyset$ 时, 平凡情形

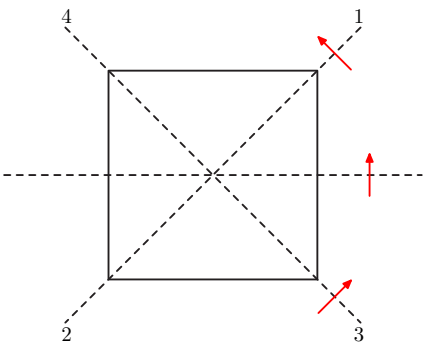
$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \omega(\theta_i) &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} |Fix(h)| - \frac{1}{|G|} \sum_{\substack{f \in C^A \\ Stab(f) \cap K \neq \emptyset}} |Stab(f) \cap H \neq \emptyset| \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in H} |Fix(h)| - \frac{1}{|G|} \sum_{k \in K} |Fix(k)| \end{aligned}$$

定理:

$$\sum_{i=1}^N \omega(\theta_i) = \frac{1}{|G|} \left(\sum_{h \in H} n^{\sum_{i=1}^m b_i(h)} - \sum_{k \in K} n^{\sum_{i=1}^m b_i(k)} \right)$$

(其中 $b_i(g)$ 指 g 的轮换型中长为 i 的轮换个数)。

证明: 由上述引理及Pólya定理即得。



3 例题之解

解： 由条件可知 G 的生成元为 $(13)(24)$, (12) , (34) 。由下面的图可知, G 恰为 D_4 群, $|G| = 8$ 。写出群元素

		b_1, b_2, b_3, b_4	$\sum_{i=1}^4 b_i(g)$
1	+1	4, 0, 0, 0	4
$(12), (34)$	-1	2, 1, 0, 0	3
$(13)(24), (14)(23), (12)(34)$	+1	0, 2, 0, 0	2
$(1324), (1423)$	-1	0, 0, 0, 1	1

独立分量个数为 $\frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n)$ 。

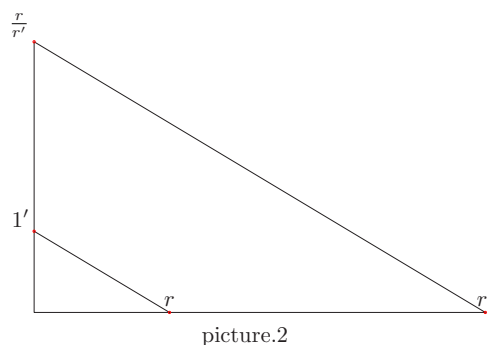
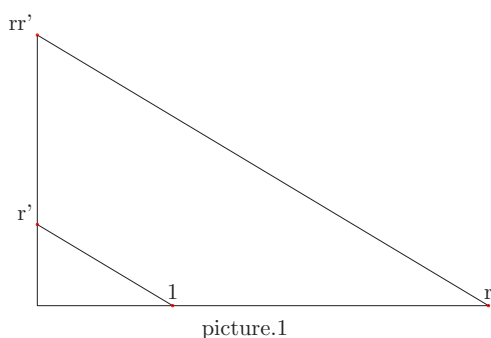
域的扩张在尺规作图中的一些应用

0101 罗振斌

一个尺规作图问题总是给定了一些几何对象(如点, 直线, 圆, 角), 求作一些几何对象。但由于直线可由两点决定; 圆可由一点(圆心)及另两点之间的距离(半径)决定; 角可由它的顶点及角的两边上各点决定。所以尺规作图问题总可归结为给定一些点 z_1, \dots, z_n , 求由它们所生成的一些点。记所有给定 z_1, \dots, z_n , 后用尺规所能作出的点的集合为 $C(z_1, \dots, z_n)$ 。由尺规作图的限制 $C(z_1, \dots, z_n)$ 可以表示为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$, 其中 S_i 的定义为: $S_1 = \{z_1, \dots, z_n\}$, S_{r+1} 为 S_r 并上以下集合:

1. 任两条由 S_r 中点所决定的直线的交点;
2. 任两个由 S_r 中点决定的圆心的交点;
3. 任一由 S_r 中点所决定的直线与由 S_r 中点所决定圆的交点。

以下设 $z_0 = 0, z_1 = 1$ 。首先, 如果实数 r 和 $r' \in C(z_1, \dots, z_n)$, 则 $rr', r'/r \in C(z_1, \dots, z_n)$ 且 $\sqrt{r} \in C(z_1, \dots, z_n)$ 。这由以下作图方法即可看出:

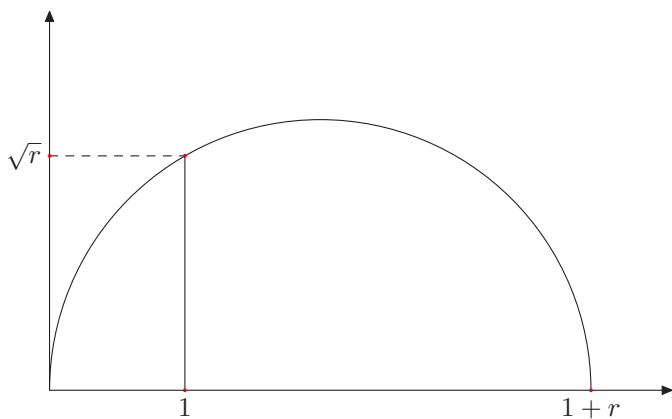


有了这些后很容易就可以证明 $C(z_1, \dots, z_n)$ 是包含 $\{z_1, \dots, z_n\}$ 的, 对 $\sqrt{}$ 和共轭封闭的 \mathbb{C} 的最小子域。我们不加证明的引用一点是否在 $C(z_1, \dots, z_n)$ 中的一个判别标准。

判别标准: 若 $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, 则复数 z 可在给定 z_1, \dots, z_n 后由尺规作出, 当且仅当 z 在 \mathbb{C} 的一个形为 $F(u_1, \dots, u_r)$ 的子域中, 其

中 $F = \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, $u_1^2 \in F$ 且 $u_1^2 \in F(u_1, \dots, u_r)$ 。

由此我们得到:



picture.3

推论： 记 $F = \mathbb{Q}(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, 若 z 可由 $\{z_1, \dots, z_n\}$ 用尺规作出, 则 z 为在 F 中代数且 $[F(z) : F] = 2^n, n \geq 0$.

有了以上判别标准及推论后, 就可以讨论一些尺规作图的可行性问题:

(1) 倍方问题。

例： 给定 0 和 1 (即 \mathbb{Q}), 问 $\sqrt[3]{2}$ 是否能由它们生成?

解答： $\because x^3 - 2$ 在 $\mathbb{Q}(x)$ 中不可约, $\therefore [\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3 \neq 2^n, \therefore \sqrt[3]{2}$ 不能由尺规作图。

(2) 三等分角问题: 三等分任意角是不可能的。特别, 60° 角不可三等分。

证明： 已知点 $z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$, 若可三等分 60° 角, 则可以得到 $x = \cos 20^\circ$. $\because \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta, \therefore 4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$.

记 $F = \mathbb{Q}(z_1, \bar{z}_1) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. 则由推论:

$$[F(x) : F] = 2^n, n \geq 0, [F(x) : \mathbb{Q}] = [F(x) : F] \cdot [F : \mathbb{Q}] = 2^{n+1}.$$

又 $\because 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$ 在 $\mathbb{Q}(x)$ 中不可约, $\therefore [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = 3$ 与 $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ 整除 $[F(x) : \mathbb{Q}]$ 矛盾。故用尺规作图无法三等分 60° 角。

(3) p 为素数时正 p 边形的尺规作图。

解答： 如果可以作出正 p 边形, 那么可以得到 $z = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$.

$\because z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + 1 = 0$ 且 $z^{p-1} + z^{p-2} + \dots + 1$ 在 $\mathbb{Q}(z)$ 中不可

约, $\therefore [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = p - 1$. 由推论: $p - 1 = 2^n, n \geq 0 \Rightarrow p = 2^n + 1$. 实际上, 因为 p 是素数, n 还必须是 2 的方幂。否则, 若 $n = k \cdot m, m$ 是奇数, 则 $2^k + 1$ 整除 $2^n + 1$. 所以 $p = 2^{2^k} + 1, k \geq 0$. $k = 0$ 时, 正 3 边形显然可作出。下面证

明 $k = 1$ 时, 正 5 边形可由尺规作出。记 $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$,

则 $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$. 记 $x_1 = z + z^4 = z + z^{-1}, x_2 = z^2 + z^3 = z^2 + z^{-2}$. 因

为 $x_1 + x_2 = -1, x_1 x_2 = z^3 + z + z^{-1} = -1$, 所以 $x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, x_1, x_2 可被作出。又因为 $z + z^{-1} = x_1$, 所以 $z = \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4}}{2}$ 可被作出。于是正5边形可被作出。有了以上结论后, 可以得到所有可用尺规作出的度数为整数的角。首先, 1° 和 2° 不可被作出, 否则, 20° 即可被作出, 与不可等分 60° 角矛盾。 3° 角可被作出, 因为: 正5边形都可由尺规作出, 其顶角可被作出。所以, $108^\circ - 60^\circ = 48^\circ$ 可被作出, 所以, 3° 可被作出。所以任一度数为3的整数倍的角可被作出, 而且只有这种角可由尺规作出, 否则, 1° 或 2° 角可被作出, 矛盾。综上, 我们得到结论: 度数为整数的所有角中有且只有度数为3的整数倍的角可被作出。

参考文献

- [1]《近世代数引论》, 冯克勤等编, 中国科学技术大学出版社
- [2]《Basic Algebra I》, Nathan Jacobson, W. H. Fressman and Company



态射的纤维维数定理

0101 沈明民

设 $f: X \rightarrow Y$ 是 k 上有限型的整概型之间的支配态射, 对任给的 $y \in Y$, 本文的主要目的是研究 $f^{-1}(y)$ 的维数. 这可以看成是经典代数几何中“纤维维数定理” (见文献[1]) 的概型版本. 本文将主要用代数的观点来处理问题.

1 背景介绍

交换代数中维数论的最基本定理是“诺德正规化定理”, “going-up定理”及“going-down定理”. 见文献[2][3]. 这里只叙述:

诺德正规化 设整环 A 是 k 上的有限生成代数, 其中 k 是任给的一个域. 则存在 $x_1, \dots, x_r \in A$, 使 $k[x_1, \dots, x_r]$ 是多项式环而且 A 起整于 $k[x_1, \dots, x_r]$. 由这些定理出发, 很容易得到关于有限生成 k -代数的.

维数基本定理 设整环 A 是 k 上的有限生成代数, 其中 k 是任给的一个域. 则如下结论成立:

- a) $\dim A = \text{tr.deg.} A$.
- b) 若 $p \subset q$ 是 A 中的两个素理想, 则始于 p 而终止于 q 的饱和素理想链的长度为定值 $\text{ht}(q) - \text{ht}(p)$. 而且 A 中每个饱和素理想链的长度都是 $\dim A$.
- c) 若 p 是 A 的素理想, 则

$$\text{ht}(p) + \dim(A/p) = \dim A$$

由此定理, 我们可以得到一些最基本的几何事实:

- ① 若 X 是 k 上有限型的整概型则 X 的闭点的全体是稠密的. 这个性质一方面是经典代数几何的一个支柱, 另一方面又可以导出维数这个概念的局部性.
- ② 设 x 是 k 上有限型的整概型, 则
 - (a) 若 $p \in X$ 是闭点, 则 $\dim X = \dim \mathcal{O}_p$
 - (b) $\dim x = \text{tr.deg} K(x)/k$, 其中 $K(x)$ 是 x 的函数域.
 - (c) 若 Y 是 X 的一个闭集, 则 $\dim Y + \text{codim}(Y, X) = \dim X$.

2 几个引理

首先我们把诺德正规化定理写成一种更“一般”的形式.

引理1. (诺德正规化) 设 A, B 都是整环, 且 $A \hookrightarrow B$ 使 B 成为有限生成 A -代数. 则有 $x_1, \dots, x_r \in B$ 及 $f \in A$, 使得 B_f 为多项式环且整于 $A_f[x_1, \dots, x_r]$.

证明: 令 $S = A \setminus \{0\}$, 则 S 是乘法封闭集. 令

$$\begin{aligned} B' &= S^{-1}B = S^{-1}(A[r_1, \dots, r_t]), \quad r_i \text{ 为 } B \text{ 在 } A \text{ 上的生成元} \\ &= K_1[r_1, \dots, r_t], \quad K_1 = Q(A) \text{ 是 } A \text{ 的分式域.} \end{aligned}$$

根据诺德正规化定理, 存在 $x_1, \dots, x_r, \xi_1, \dots, \xi_l \in B'$ 使 $K_1[x_1, \dots, x_r]$ 为多项式环, 且 $B' = K_1[x_1, \dots, x_r, \xi_1, \dots, \xi_l]$ 整于 $K_1[x_1, \dots, x_r]$. 而且这里可以选择使 $x_i, \xi_j \in B$, 否则取它们的分子就可以了. 令 f 为 $\{\xi_i\}$ 的整关系中所有 K_1 中系数的分母的乘积, 则 $B_f = A_f[x_1, \dots, x_r, \xi_1, \dots, \xi_l]$, 且 $A_f[x_1, \dots, x_r]$ 为多项式环, B_f 整于 $A_f[x_1, \dots, x_r]$. \square

引理2. 设整环 $A \subset B$ 都是有限生成 k -代数, $q = (0)$ 是 B 中唯一满足 $q \cap A = (0)$ 的素理想, 则

$$\dim A = \dim B$$

证明: B 是有限生成 A -代数, 故有 $f \in A; x_1, \dots, x_s \in B$ 使 $A_f[x_1, \dots, x_s]$ 为多项式环且 B_f 整于 $A_f[x_1, \dots, x_s]$, 这说明 $A[x_1, \dots, x_s]$ 中不包含 f 的素理想都可以提升到 B 中. 下面证明 $s = 0$, 反之若 $s = 1$, 则 $p_1 = (x_1)$ 是 $A_f[x_1, \dots, x_s]$ 中的素理想, 设 p_1 提升到 B 中为 $q_1 \neq (0)$, 因 $p_1 \cap A = (0)$, 故 $q_1 \cap A = (q_1 \cap A[x_1, \dots, x_s]) \cap A = p_1 \cap A = (0)$. 这与假设矛盾. 故 $s = 0$ 从而 B_f 整于 A_f : $\dim A = \dim A_f = \dim B_f = \dim B$. \square

引理3. 整环 $A \subset B$ 都是有限生成 k -代数, 设 $q_1 \subset q_2 \subset q_3$ 是 B 中的饱和素理想链, 令 $p_i = q_i \cap A$, 且 $p_1 = p_2 \subset p_3$, 则可以找到 B 的素理想 q'_2 使 $q_1 \subset q'_2 \subset q_3$ 是饱和链且 $p_1 \subset p'_2 \subseteq p_3$, 其中 $p'_2 = q'_2 \cap A$.

证明: 通过考虑 B/q_1 及 A/p_1 , 可以设 $q_1 = (0)$, 则 $p_1 = (0)$. 取 $f \in p_2, f \neq 0$, 取 q'_2 为 (f) 的一个极小素 $q'_2 \subseteq q_3$, 则据 Krull 主理想定理知 $\text{ht}(q'_2) = 1 < 2 = \text{ht}(q_3)$, 故 $q'_2 \subset q_3$. 而 $f \in p'_2 = q'_2 \cap A$ 从而 $p'_2 \neq (0)$ 故

$$(0) = p_1 \subset p'_2 \subseteq p_3. \quad \square$$

引理4. 整环 $A \subset B$ 都是有限生成 k -代数, p 为 A 的素理想, 则

a) 若 B 的素理想 q 是满足 $q \cap A = p$ 的极小元, 则

$$\text{ht}(q) \leq \text{ht}(p)$$

b) 若 q 是满足 $q \cap A = p$ 的极大元, 则

$$\dim(B/q) = \dim(A/p)$$

证明: a) 不断地用引理3, 可以找到饱和链

$$(0) = q_0 \subset q_1 \subset \cdots \subset q_d = q$$

使得 $(0) = p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_d = p$, 其中 $p_i = q_i \cap A$. 故 $\text{ht}(q) = d \leq \text{ht}(p)$

b) 对 $A/p \hookrightarrow B/q$ 用引理2得

$$\dim(A/p) = \dim(B/q). \quad \square$$

3 主要定理及证明

主定理: 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 k 上有限型的整概型 X 和 Y 之间的支配射, 则:

(a) 设 Y' 是 Y 中的一个闭不可约子集, Y' 的生成点 $\eta' \in f(X)$, 而 Z 是 $f^{-1}(Y')$ 的一个不可约分支, $\eta' \in f(Z)$, 则

$$\text{codim}(Z, X) \leq \text{codim}(Y', Y)$$

(b) 令 $e = \dim X - \dim Y$, 称为 X 关于 Y 的相对维数. 对任意的 $y \in f(X)$, 则 y 上的纤维 X_y 的每个分支的维数 $\geq e$.

(c) 存在 X 的稠密开集 U , 使得对每个 $y \in f(U)$, $\dim U_y = e$.

(d) 对每个整数 h , 定义 $E_h = \{x \in X \mid X_y \text{ 的一个包含 } x \text{ 的不可约分支的维数大于等于 } h, \text{ 其中 } y = f(x)\}$, 则:

$$(1) E_e = X; \quad (2) \text{ 若 } h \geq e \text{ 则 } E_h \text{ 在 } X \text{ 中不稠密}; \quad (3) E_h \text{ 是闭集}.$$

证明: (a) 由于维数概念的局限性, 可以

设 $X = \text{Spec } B, Y = \text{Spec } A$. 与 $f: X \rightarrow Y$ 相对应的是 $\varphi: A \hookrightarrow B$, 这里 A, B 都是整环而且是 k 上有限生成代数.

设 $Y' = V(p), Z = V(q)$,

根据提设知 q 是满足 $q \cap A = p$ 的一个极小素理想

$$\text{codim}(Z, X) = \text{ht}(q),$$

$$\operatorname{codim}(Y', Y) = \operatorname{ht}(p).$$

则结论源自引理4.

(b) 同样的,可以

设 $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, \varphi: A \hookrightarrow B, y = p \in f(X)$, 设 $q_0 \subset q_1 \subset \cdots \subset q_d$ 是满足 $q_i \cap A = p$ 的饱和素理想链, 而且是极长链, 则

$$\operatorname{ht}(q_0) \leq \operatorname{ht}(p), \dim B/q_d = \dim A/p$$

$$\dim B = \operatorname{ht}(q_0) + d + \dim B/q_d \leq \operatorname{ht}(p) + d + \dim A/p = \dim A + d$$

从而 $d \geq \dim B - \dim A = \dim X - \dim Y = e$.

(c) 由诺德正规化定理知存在 $f \in A, x_1, x_2, \dots, x_e \in B$. 使得 B_f 整

于 $A_f[x_1, \dots, x_e]$ 而后者是多项式环. 令 $U = D(f) \subseteq \operatorname{Spec} B$ 则

对 $\forall y \in f(U) = D(f) \subseteq \operatorname{Spec} A$ 有 $\dim U_y = e$.

(d) (1) 由(b)得到.

(2) 由(c)得到, 先承认 E_h 在 Specialization 下稳定. 设 E_h 是闭集, 欲证 E_{h+1} 是闭集. 设 $E_h = V(q_1) \cup \cdots \cup V(q_r)$. 若 $q_i \in E_{h+1}$ 则 $V(q_i) \subseteq E_{h+1}$, 因为 E_{h+1} 在 Specialization 下稳定. 故 $V(q_i) \cap E_{h+1}$ 是闭集.

(3) 当 $h = e$ 时, $E_e = X$ 是闭集, 先承认 E_h 在 Specialization 下稳定. 设 E_h 是闭集, 欲证 E_{h+1} 是闭集. 设 $E_h = V(q_1) \cup \cdots \cup V(q_r)$. 若 $q_i \in E_{h+1}$ 则 $V(q_i) \subseteq E_{h+1}$, 因为 E_{h+1} 在 Specialization 下稳定. 故 $V(q_i) \cap E_{h+1}$ 是闭集. 若 $q_i \in E_h \setminus E_{h+1}$, 要证 $V(q_i) \cap E_{h+1}$ 是闭的. 为了方便起见, 记 $q = q_i$, 令 $p = q \cap A$ 考虑 $A/p \hookrightarrow B/q$, 于是问题就归结为 E_e 闭: E_{e+1} 闭. 前面已经证明存在 $U \subseteq X$, 使 $E_{e+1} \subseteq X \setminus U$. 设 $X \setminus U = V(q_1) \cup \cdots \cup V(q_n)$, 面对每个 $V(q_i)$ 重复上述证明由诺德条件知上述过程在有限步内终结, 从而证明了结论 E_{e+1} 是闭集. \square

“断言: E_h 在 Specialization 下稳定” 的证明: 设 $q \in E_h, q' \supset q$, 欲证 $q' \in E_h$. 不妨假设 $q' \supset q$ 是饱和的. $q \in E_h$ 是说存在饱和素理想链

$$q_0 \subset q_1 \subset \cdots \subset q_r = q \subset \cdots \subset q_d, q_i \cap A = p = q \cap A$$

而且 $d \geq h$, 而且不妨设上述链是极长的.

若 $p' = q' \cap A = p$, 则可以调整使 q' 出现在上述链中 $q' = q_{r+1}$. 故 $q' \in E_h$

若 $p' \supset p$, 对饱和链 $q_0 \subset q_1 \subset \cdots \subset q_r = q \subset q'$ 不断地用引理3进行调整. 可得饱和链:

$$q'_0 \subset q'_1 \subset \cdots \subset q'_s = q' \text{ 其中 } q'_i \cap A = p', 0 \leq i \leq s.$$

而且 $r - s \leq \operatorname{ht}(p') - \operatorname{ht}(p) - 1$

而将上述链扩充为:

$$q'_0 \subset q'_1 \subset \cdots \subset q'_s = q' \subset q'_{s+1} \subset \cdots \subset q'_l, q'_i \cap A = p', 0 \leq i \leq l,$$

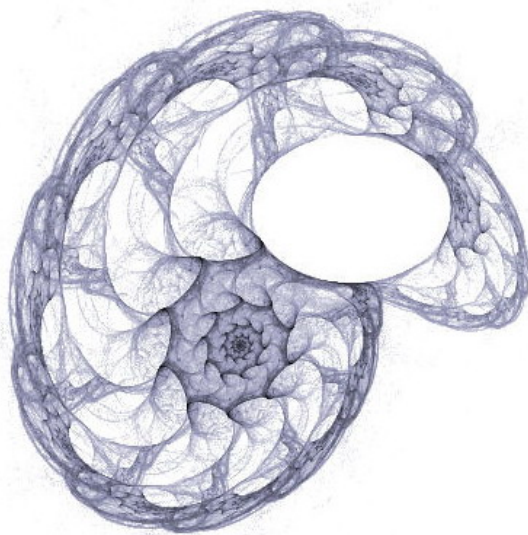
由维数关系知

$$\begin{aligned}\dim B &= \text{ht}(q) + d - r + \dim A/p \\ &= \text{ht}(q') + d - r + \dim A/p'\end{aligned}$$

故 $d - r - \text{ht}(p) = 1 + l - s - \text{ht}(p')$, $l = d + (s - r) + \text{ht}(p') - \text{ht}(p) - 1 \geq d \geq h$
故 $q' \in E_h$. \square

Reference

- [1] I.R. Shafaralich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag
- [2] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge Press
- [3] S. Iitaka, *Algebraic Geometry*, Spriger-Verlg
- [4] R. Wartshorne, *Algebraic Geometry*, Spriger-Verlg
- [5] M.F. Atiyah, I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley



关于一个函数问题的讨论

0101 林诗游

本文对下面一个问题进行讨论:

$f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无穷次可微, 若对每个 $x \in [0, 1]$, 存在自然数 $n = n_x$, 使得 $f^{(n)}(x) = 0$, 问: $f(x)$ 是否为一个多项式?

令 $E_n = \{x \in [0, 1] : f^{(n)}(x) = 0, n = 1, 2, \dots\}$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = [0, 1]$; 由Baire纲定理知 $E_{n_0} = \bar{E}_{n_0} \supset I$ (I 为某一开区间)。从而 $f(x)$ 在 I 为一个多项式, 再对 $[0, 1]/I$ 同样操作, \dots , 可得 $\{I_n\}$, 记 $F = [0, 1] / \bigcap_{n \geq 1} I_n$, 则 F 为完全集且无内点。

记 $f(x)$ 在 I_n 上为多项式 g_n 如果我们能证明出 $f(x)$ 在 $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ 上为同一多项式, 那么 f 在 $[0, 1]$ 上就是一个多项式了。但假如 $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ 在上不是同一多项式, 则必须

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\deg(g_n)\} = +\infty$$

下面是要用到的一系列定理:

引理 1. 设 $S = (S_1, S_2)$, 其中 S_1, S_2 为 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ 上的任意两个数, 则 $F \cap S$ 为完全集。

证明: $\because F' = F, F = A \cup B$, 其中 $A = F \cap S = F \cap [S_1, S_2]$ 为闭集, $B = F/A$,

$$\therefore F' = A' \cup B' = F = A \cup B$$

从而 $A' \supset A$ 。又因为 A 闭, $A' \subset A$, 因此 $A' = A$, 即 $F \cap S$ 为完全集。 \square

引理 2. 如果存在 $K \in \mathbb{N}$, 使得 $\forall x \in F \cap S$ (S 如引理1所定义的), $f^{(k)}(x) \equiv 0$ 。那么 $\forall x \in F \cap S, f^{(k+n)}(x) \equiv 0, n = 1, 2, \dots$ 。

证明: 任意取定 $x_0 \in F \cap S, f^{(k)}(x_0) \equiv 0$, 则 $\forall x \in F \cap S, f^{(k)}(x) \equiv 0$ (题设条件)

$$\Rightarrow \exists \{x_i, i \in \mathbb{N}\} \subset F \cap S, x_i \rightarrow x_0, i \rightarrow +\infty$$

$$\because \frac{f^{(k)}(x_i) - f^{(k)}(x_0)}{x_i - x_0} = 0, i \rightarrow +\infty$$

$$\Rightarrow f^{(k+1)}(x_0) = 0$$

从而归纳得 $f^{(k+n)}(x_0) = 0$ 。即 $\forall x \in F \cap S, f^{(k+n)}(x) \equiv 0, n = 1, 2, \dots$ 。 \square

引理 3. 如果 $f(x)$ 在 $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ 上不是同一多项式, 则不存在 S 及自然数 K , 使

$$f^{(k+1)}(x) \equiv 0$$

证明: 假如存在, 由引理 2, $\forall x \in F \cap S, f^{(k+n)}(x) \equiv 0, n = 1, 2, \dots$. 又因为在 S 中, $S \cup \left(\bigcap_{n \geq 1} I_n \right) \neq \emptyset$, 每一 I_n 端点 $\in F$. 由开头讨论的结果, 知 S 中包含多项式 g_{k_n} 必须满足

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\deg(g_{k_n})\} = +\infty$$

所以存在 $I_{k_n}, (k_n > k)$, 其端点 x' 满足 $f^{(k_n)}(x') = g^{(k_n)}(x') \neq 0$, 这与 $f^{(k_n)}(x') = 0$ 矛盾. \square

引理 4. (等价于引理 3) 如果 $f(x)$ 在 $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ 上不是同一多项式, 则对任意 S 和自然数 K , 存在 $x \in F \cap S$, 使得 $f^{(k)}(x) \neq 0$.

引理 5. $f(x)$ 在 $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ 是同一多项式.

证明: 如果 $f(x)$ 在 $\bigcap_{n \geq 1} I_n$ 上不是同一多项式, 由引理 4, $\exists x_0 \in F \cap (0, 1), f(x_0) \neq 0$,

所以存在闭区间 $d_0 = [x_0 - \delta_0, x_0 + \varepsilon_0]$, 使得 $\forall x \in d_0, f(x) \neq 0$, 存

在 $x_1 \in F \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \varepsilon_0)$,

$f'(x_1) \neq 0$; 所以存在闭区间 $d_1 = [x_1 - \delta_1, x_1 + \varepsilon_1] \subset d_0$, 使得 $\forall x \in d_1, f'(x) \neq 0$, 存在 $x_2 \in F \cap (x_1 - \delta_1, x_1 + \varepsilon_1), f''(x_2) \neq 0; \dots$

如此操作下去, 得到闭区间族 $\{d_n\}, d_0 \supset d_1 \supset d_2 \supset \dots, |d_0| \leq m([0, 1]) = 1, \forall x \in d_n, f^{(n)}(x) \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots$, 由闭区间套定理, $\exists y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} d_n$ 使得

$f^{(k)}(y_0) \neq 0, k = 0, 1, 2, \dots$, 这与题设条件矛盾. \square

从开头的讨论并引理 5 可以得出问题的答案是肯定的, 即得到如下的定理.

定理 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无穷次可微, 若对每个 $x \in [0, 1]$, 存在自然数 $n = n_x$, 使得 $f^{(n)}(x) = 0$, 则 $f(x)$ 是否为一个多项式.

参考文献:

[1] 常庚哲, 史济怀, 《数学分析(上册)》, 江苏教育出版社, 1998

[2] 周民强, 《实变函数论》, 北京大学出版社, 2001