中国科学技术大学

学生学报

数学专辑

第4卷　　第1期

中国科学技术大学学生会学习部
数学系《蛙鸣》杂志编辑委员会　合办

一九八八年一月

目　　录

研 究 与 讨 论

新 生 园 地

未 解 决 问 题

数 学 新 闻

研 究 简 报

北大数学系教授
马翔赠

治学谈

编译报告

新书评介

数学教育

数学争鸣

人物与传记

研究生入学试题

问题有奖征解

读者·作者·编者

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

Generalization of Ky Fan Inequality of the Complementary Type

Zhen Wang, Ji Chen and Guang-Xing Li

Departement of Mathematics

University of Science and Technology of China,
Hefei, Anhui, People's Republic of China

Abstract

Fan has proven an inequality relating the arithmetic mean and geometric mean of x and 1-x. An extension to power means is conjectured by D. Segaiman. We solve the conjecture for arbitary n.

1. Introduction

In E. F. Beckenbach and R. Bellman [1], the following unpublished inequality due to Ky Fan is recored:

$$(1)\qquad \left(\frac{\prod_1^n x_i}{\prod_1^n(1-x_i)}\right)^{1/n} < \frac{\sum_1^n x_i}{\sum_1^n(1-x_i)}, \qquad 0 < x_i \leqslant \frac{1}{2},$$

unless $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

With the notation

$$M_p(x) = \left(\frac{1}{n}\sum_1^n x_i^p\right)^{1/p}, \qquad x_i > 0;$$

and

$$M_0(x) = \lim_{p\to 0} M_p(x) = \left(\prod_1^n x_i\right)^{1/n},$$

(1) becomes

$$(2)\qquad \frac{M_0(x)}{M_0(1-x)} < \frac{M_1(x)}{M_1(1-x)}.$$

D. Segaiman [2] conjeture that

$$(3)\qquad \frac{M_p(x)}{M_p(1-x)}<\frac{M_q(x)}{M_q(1-x)},\qquad p<q.$$

F. Chan, D. Goldberg and S. Gonek [2] gave some counterexmples when $0<2^p/p<2^q/q$ or $p+q>9$. In addition, they proved that the conjecture (3) is true for $p+q=0>p$ or $0\leqslant p\leqslant 1\leqslant q\leqslant 2$.

Recently the conjecture (3) has been proved by Wan-Lan Wang and Peng-Fei Wang [3] when $p=-1$ and $q=0$.

In this paper, we decide all power exponents p and q such that (3) is true.

Theorem. For arbitary n, the inequality

$$(4)\qquad \left(\frac{\sum_1^n x_i^p}{\sum_1^n (1-x_i)^p}\right)^{1/p}<\left(\frac{\sum_1^n x_i^q}{\sum_1^n (1-x_i)^q}\right)^{1/q},\qquad 0<x_i\leqslant\frac{1}{2},$$

holds if and oniy if $p<q$, $|p+q|\leqslant 3$, $2^p/p\geqslant 2^q/q$ when $p>0$, $p2^p\leqslant q2^q$ when $q<0$, unless $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

In Section 2 we will prove the necessity of the theorem. The proof of the sufficiency will be given from Section 3 to 5. In the last Section, we will conclude with a conjecture about the condition of (4) holds for every n.

2. Proof of the Necessity

In the special case $n=2$, (4) and $p<q$ are equivalence ([2]). If (4) holds, then $2^p/p\geqslant 2^q/q$ for $p>0$ ([2]).

When $q<0$, we take $x_1=x_2=\cdots=x_n=\varepsilon\ (0<\varepsilon<\frac{1}{2})$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}$. Then (4) becomes

$$(5)\qquad \left[\frac{n\varepsilon^p+(\frac{1}{2})^p}{n(1-\varepsilon)^p+(\frac{1}{2})^p}\right]^{1/p}<\left[\frac{n\varepsilon^q+(\frac{1}{2})^q}{n(1-\varepsilon)^q+(\frac{1}{2})^q}\right]^{1/q},$$

or

$$(6)\qquad \frac{\left(\varepsilon^p+\dfrac{1}{2^p n}\right)^{1/p}}{\left(\varepsilon^q+\dfrac{1}{2^q n}\right)^{1/q}}<\frac{\left((1-\varepsilon)^p+\dfrac{1}{2^q n}\right)^{1/p}}{\left((1-\varepsilon)^q+\dfrac{1}{2^q n}\right)^{1/q}}.$$

Let $\varepsilon\to 0$, (6) yields

$$(7)\qquad 1\leqslant\frac{\left(1+\dfrac{1}{2^p n}\right)^{1/p}}{\left(1+\dfrac{1}{2^q n}\right)^{1/q}}$$

and hence

$$(8) \qquad \left(1+\frac{1}{2^p n}\right)^{1/p} \geqslant \left(1+\frac{1}{2^q n}\right)^{1/q} .$$

If (8) is expanded by the binomial theorem, one obtains

$$(9) \qquad 1+(p2^p n)^{-1}+o(1/n^2) \geqslant 1+(q2^q n)^{-1}+o(1/n^2) .$$

Thus for n sufficiently large. (4) holds provided $p2^p \leqslant q2^q$.

In the equivalent inequality of (4);

$$(10) \qquad \left(\frac{\sum_1^n (1-u_i)^p}{\sum_1^n (1+u_i)^p}\right)^{1/p} < \left(\frac{\sum_1^n (1-u_i)^q}{\sum_1^n (1+u_i)^q}\right)^{1/q}, \qquad 0 \leqslant u_i < 1 .$$

Let $u_1=u_2=\cdots=u_{n-1}=0$, and $u_n=u$ $(0<u<1)$. Then (10) becomes

$$(11) \qquad \left(\frac{(n-1)+(1-u)^p}{(n-1)+(1+u)^p}\right)^{1/p} < \left(\frac{(n-1)+(1-u)^q}{(n-1)+(1+u)^q}\right)^{1/q} .$$

The Maclaurin series expansion of (11) in u:

$$(12) \qquad 1-\frac{2}{n}u+\frac{2}{n^2}u^2-\frac{(n-1)[(n-2)p^2-3np]+2(n^2+2)}{3n^2}u^3+o(u^4)$$

$$< 1-\frac{2}{n}u+\frac{2}{n^2}u^2-\frac{(n-1)[(n-2)q^2-3nq]+2(n^2+2)}{3n^2}u^3+o(u^4) .$$

Thus for u sufficently small, (10) holds implies

$$(13) \qquad (n-2)p^2-3np \geqslant (n-2)q^2-3nq ,$$

or

$$(14) \qquad (p-q)[(n-2)(p+q)-3n] \geqslant 0.$$

Since (10) holds is equivalent to $p<q$ when $n=2$. For $n \geqslant 3$, by (14) we have

$$(15) \qquad p+q \leqslant \frac{3n}{n-2} .$$

Let $n \to +\infty$, (15) yields $p+q \leqslant 3$.

The expansion of (10) with $u_1=u_2=\cdots=u_{n-1}=u$ $(0<u<1)$, $u_n=0$, through cubic in u gives

$$(16) \qquad p+q \geqslant -\frac{3n}{n-2} ,$$

Let $n \to +\infty$, (16) yields $p+q \geqslant -3$.

3. An Equivalence Proposition

In this section, our aim is to establish an equivalence proposition.

Proposition. For $p<q$, the following inequalities are equivalent each other:

$$(\text{i}) \qquad \left(\frac{\sum_1^n \lambda_i x_i^p}{\sum_1^n \lambda_i (1-x_i)^p}\right)^{1/p} \leqslant \left(\frac{\sum_1^n \lambda_i x_i^q}{\sum_1^n \lambda_i (1-x_i)^q}\right)^{1/q} ,$$

where $\lambda_i > 0$, $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}$, $i = 1, 2, \cdots, n$;

(ii) $$\left[\frac{\lambda x^p + \mu y^p}{\lambda(1-x)^p + \mu(1-y)^p}\right]^{1/p} \leqslant \left[\frac{\lambda x^q + \mu y^q}{\lambda(1-x)^q + \mu(1-y)^q}\right]^{1/q},$$

where $\lambda, \mu > 0$, $0 < x, y \leqslant \frac{1}{2}$;

(iii) $$\left[\frac{\lambda + (1-u)^p}{\lambda + (1+u)^p}\right]^{1/p} \leqslant \left[\frac{\lambda + (1-u)^q}{\lambda + (1+u)^q}\right]^{1/q},$$

where $\lambda > 0$, $0 \leqslant u < 1$.

Proof. If (i) holds, one can easily get (iii).

Now suppose (iii) is true. We wish to establish (ii). Let $x \geqslant y$ and $y/x = 1-u$, then $0 < u \leqslant 1$ and

$$\frac{1-y}{1-x} = 1 + \frac{x}{1-x}u = 1 + ku,\quad 0 < k \leqslant 1.$$

So (ii) is equivalent to the following:

(17) $$f(k) = \frac{1}{q}\ln\frac{\lambda + \mu(1-u)^q}{\lambda + \mu(1+ku)^q} - \frac{1}{p}\ln\frac{\lambda + \mu(1-u)^p}{\lambda + \mu(1+ku)^p} \geqslant 0.$$

Derivate f and use the suppose, we have

(18) $$f'(k) = \frac{-\mu(1+ku)^{q-1}u}{\lambda + \mu(1+ku)^q} + \frac{\mu(1+ku)^{p-1}u}{\lambda + \mu(1+ku)^p}$$

$$= \frac{u}{1+ku}\left[\frac{\mu(1+ku)^p}{\lambda + \mu(1+ku)^p} - \frac{\mu(1+ku)^q}{\lambda + \mu(1+ku)^q}\right] < 0.$$

Hence,

(19) $$f(k) \geqslant f(1) = \frac{1}{q}\ln\frac{\lambda + (1-u)^q}{\lambda + (1+u)^q} - \frac{1}{p}\ln\frac{\lambda + (1-u)^p}{\lambda + (1+u)^p} \geqslant 0.$$

(ii) is established.

If (ii) is true, we shall use mathematical induction to show that (i) is ture also.

At first, when $n = 2$, (i) is just (ii).

Now assume inductivety that (i) is right for $n\ (n \geqslant 2)$, we wish to show the correctness of (i) for the case $n+1$.

Let $x_1^p \geqslant x_2^p \geqslant \cdots \geqslant x_n^p \geqslant x_{n+1}^p$ and denote

(20) $$\left(\frac{\sum_1^n \lambda_i x_i^p}{\sum_1^n \lambda_i}\right)^{1/p} = M_p(\lambda, x),$$

(21) $$\left(\frac{\sum_1^n \lambda_i x_i^q}{\sum_1^n \lambda_i}\right)^{1/q} = M_q(\lambda, x),$$

(22) $$\left(\frac{\sum_1^n \lambda_i (1-x_i)^p}{\sum_1^n \lambda_i}\right)^{1/p} = M_p(\lambda, 1-x),$$

$$\left(\frac{\sum_1^n \lambda_i (1 - x_i)^q}{\sum_1^n \lambda_i}\right)^{1/q} = M_q(\lambda, 1-x). \tag{23}$$

Using power means theorem and the assumption, we have

$$M_p(\lambda, x) \leqslant M_q(\lambda, x), \tag{24}$$

$$\frac{M_p(\lambda, x)}{M_p(\lambda, 1-x)} \leqslant \frac{M_q(\lambda, x)}{M_q(\lambda, 1-x)}, \tag{25}$$

$$\frac{x_{n+1}^p}{(1-x_{n+1})^p} \leqslant \frac{M_p^p(\lambda, x)}{M_p^p(\lambda, 1-x)}. \tag{26}$$

Taking account of the properties of ratios and (ii), one can see the following:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\lambda_{n+1} x_{n+1}^p + (\sum_1^n \lambda_i) M_p^p(\lambda, x)}{\lambda_{n+1}(1-x_{n+1})^p + (\sum_1^n \lambda_i) M_p^p(\lambda, 1-x)}\right]^{1/p} \\
&\leqslant \left[\frac{\lambda_{n+1} x_{n+1}^p + (\sum_1^n \lambda_i) M_p^p(\lambda, x)}{\lambda_{n+1}(1-x_{n+1})^p + (\sum_1^n \lambda_i) M_p^p(\lambda, 1-x) M_q^p(\lambda, x) / M_p^p(\lambda, x)}\right]^{1/p} \\
&\leqslant \left[\frac{\lambda_{n+1} x_{n+1}^p + (\sum_1^n \lambda_i) M_q^p(\lambda, x)}{\lambda_{n+1}(1-x_{n+1})^p + (\sum_1^n \lambda_i) M_q^p(\lambda, 1-x)}\right]^{1/p} \\
&\leqslant \left[\frac{\lambda_{n+1} x_{n+1}^q + (\sum_1^n \lambda_i) M_q^q(\lambda, x)}{\lambda_{n+1}(1-x_{n+1})^p + (\sum_1^n \lambda_i) M_q^q(\lambda, 1-x)}\right]^{1/q}.
\end{aligned} \tag{27}$$

So (i) is true for the case $n+1$.

4. Three Lammas

Lemma 1. For $\alpha \leqslant 0$, $\alpha < \beta \leqslant 1-\alpha$, $0 \leqslant u < 1$,

$$(1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha \geqslant (1+u)^\beta + (1-u)^\beta, \tag{28}$$

with equality if and only if $u = 0$ or $(\alpha, \beta) = (0, 1)$.

Proof. Let $\varphi(x) = (1+u)^x + (1-u)^x \quad (0 < u < 1)$, then

$$\varphi''(x) = (1+u)^x[\ln(1+u)]^2 + (1-u)^x[\ln(1-u)]^2 > 0. \tag{29}$$

So we have only to establish (28) for $\beta = 1-\alpha$. i. e.

$$\Phi(u) = (1+u)^\alpha + (1-u)^\alpha - [(1+u)^{1-\alpha} + (1-u)^{1-\alpha}] > 0, \tag{30}$$

where $\alpha < 0$, $0 < u < 1$.

$$\Phi'(u) = \alpha[(1+u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}] + (\alpha-1)[(1+u)^{-\alpha} - (1-u)^{-\alpha}], \tag{31}$$

$$\Phi''(u) = \alpha(\alpha-1)[(1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2} - (1+u)^{-\alpha-1} - (1-u)^{-\alpha-1}]. \tag{32}$$

Let

$$\Psi(\alpha) = (1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2} - (1+u)^{-\alpha-1} - (1-u)^{-\alpha-1}, \tag{33}$$

then

$$\Psi'(\alpha) = [(1+u)^{\alpha-2} + (1+u)^{-\alpha-1}]\ln(1+u) + [(1-u)^{\alpha-2} + (1-u)^{-\alpha-1}] \times \ln(1-u), \tag{34}$$

$$\Psi''(\alpha) = [(1+u)^{\alpha-2} + (1+u)^{-\alpha-1}][\ln(1+u)]^2 + \tag{35}$$

$$+[(1-u)^{\alpha-2} + (1-u)^{-\alpha-1}][\ln(1-u)]^2 > 0 .$$

But

$$\Psi'(0) = [(1+u)^{-2} + (1+u)^{-1}]\ln(1+u) + [(1-u)^{-2} + (1-u)^{-1}]\ln(1-u) \tag{36}$$

$$< [(1+u)^{-2} - (1-u)^{-2} + (1+u)^{-1} - (1-u)^{-1}]\ln(1-u) < 0 .$$

So

$$\Psi'(\alpha) < \Psi'(0) < 0 , \tag{37}$$

and hence

$$\Psi(\alpha) > \Psi(0) = \frac{4u^2}{(1-u^2)^2} > 0 . \tag{38}$$

i.e. $\Phi''(u) > 0$. Because $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$, we have $\Phi(u) > 0$. This proves the lemma.

Lemma 2. If $0 < \alpha < \beta < 1 - \alpha$, the function given below has a unique zero u_0:

$$G(u) = (1+u)^{\alpha} + (1-u)^{\alpha} - (1+u)^{\beta} - (1-u)^{\beta} , \tag{39}$$

where $0 < u \leqslant 1$, and

(i) when $0 < u < u_0$, $G(u) > 0$;

(ii) when $u_0 < u \leqslant 1$, $G(u) < 0$.

Proof. It is easy to check that

$$G'(u) = \alpha[(1+u)^{\alpha-1} - (1-u)^{\alpha-1}] - \beta[(1+u)^{\beta-1} - (1-u)^{\beta-1}] , \tag{40}$$

$$G''(u) = \alpha(\alpha-1)[(1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2}] - \beta(\beta-1)[(1+u)^{\beta-2} + (1-u)^{\beta-2}] \tag{41}$$

$$= -\beta(\beta-1)[(1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2}]$$

$$\times \left(\frac{(1+u)^{\beta-2} + (1-u)^{\beta-2}}{(1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2}} - \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta(\beta-1)} \right)$$

But $0 < \alpha < \beta < 1 - \alpha < 1$, so $\beta(\beta-1) < \alpha(\alpha-1) < 0$, and hence

$$0 < \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta(\beta-1)} < 1 . \tag{42}$$

Define

$$g(u) = \frac{(1+u)^{\beta-2} + (1-u)^{\beta-2}}{(1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2}} , \tag{43}$$

where $0 < u < 1$.

$$g'(u) = \frac{(\beta-2)[(1+u)^{\beta-3} - (1-u^{\beta-3}]}{(1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2}} - \tag{44}$$

$$\frac{(\alpha-2)[(1+u)^{\alpha-3} - (1-u)^{\alpha-3}][(1+u)^{\beta-2} + (1-u)^{\beta-2}]}{[(1+u)^{\alpha-2} + (1-u)^{\alpha-2}]^2}$$

$$<\frac{\alpha-2}{[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}]^2}\Big\{[(1+u)^{\beta-3}-(1-u)^{\beta-3}]$$

$$\times[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}]$$

$$-[(1+u)^{\alpha-3}-(1-u)^{\alpha-3}][(1+u)^{\beta-2}+(1-u)^{\beta-2}]\Big\}$$

$$=\frac{2(\alpha-2)(1+u)^{\alpha+\beta-6}}{[(1+u)^{\alpha-2}+(1-u)^{\alpha-2}]^2}\left[\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\alpha-3}-\left(\frac{1-u}{1+u}\right)^{\beta-3}\right]<0.$$

So $g(u)$ is strictiy monotone decreasing function with $g(0)=1$ and $g(1)=0$. Hence there exists a unique $u_1\in(0,1)$ such that

$$g(u_1)=\frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta(\beta-1)}, \tag{45}$$

and $G''(u)>0$ for $u\in(0,u_1)$; $G''(u)<0$ for $u\in(u_1,1)$.

Because $G(0)=G'(0)=0$, we have $G'(u)>0$, $G(u)>0$ for $u\in[0,u_1]$.

For $G'(u_1)>0$, $G'(1)=-\infty$ and $G''(u)<0$ in $(u_1,1)$, $G'(u)$ has a unique zero point u_2 in $(u_1,1)$, such that $G'(u)>0$ in (u_1,u_2); $G'(u)<0$ in $(u_2,1)$.

From the above, we can conclude that $G(u)$ strictly increases in $(0,u_2)$ and it strictly decreases in $(u_2,1)$.

Since $G(1)=2^\alpha-2^\beta<0$, there exists a unique $u_0\in(u_2,1)$ such that $G(u_0)=0$, and it's easy to see that $G(u)>0$ in $(0,u_0)$ and $G(u)<0$ in $(u_0,1)$. This completes the proof.

Lemma 3. If $p<q$, $p+q\leqslant 3$ and $2^p/p\geqslant 2^q/q$ for $p>0$, then

$$\frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{p}\geqslant\frac{(1+u)^q-(1-u)^q}{q}, \quad 0\leqslant u<1, \tag{46}$$

with equality if and only if $u=0$ or $(p,q)=(1,2)$.

Proof. Let

$$H(u)=\frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{p}-\frac{(1+u)^q-(1-u)^q}{q} \tag{47}$$

, where $0\leqslant u<1$, then

$$H'(u)=[(1+u)^{p-1}+(1-u)^{p-1}]-[(1+u)^{q-1}+(1-u)^{q-1}]. \tag{48}$$

When $p\leqslant 1$, $p-1<q-1\leqslant 1-(p-1)$, by Lemma 1 we obtain $H'(u)\geqslant 0$. Thus $H(u)\geqslant H(0)=0$ with equality if and only if $u=0$ or $(p,q)=(1,2)$.

When $p>1$, then $q<3-p$. Otherwise $q-1=1-(p-1)$,

$$\frac{(p-1)(p-2)}{(q-1)(q-2)}=1. \tag{49}$$

Repeat the steps in the proof of Lemma 2, it should have $H'(u)<0$.

So $H(0)>H(1)$, i.e. $2^p/p<2^q/q$. It's a contradiction!

Thus $0<p-1<q-1<1-(p-1)$. By Lemma 2, $H'(u)$ has its unique zero point u_0 in $(0, 1)$, such that the following is true:

for any $0<u<u_0$, $H'(u)>0$, hence $H(u)>H(0)=0$;

for any $u_0<u<1$, $H'(u)<0$, hence $H(u)>H(1)=2^p/p-2^q/q\geq 0$; and it is easy to see that $H(u_0)>0$.

These two cases establish the lemma.

5. Proof of the Sufficiency of the Theorem

From the equivalence proposition in Section 3, we only need to prove the following inequality:

(50) $$\left(\frac{\lambda+(1-u)^p}{\lambda+(1+u)^p}\right)^{1/p}<\left(\frac{\lambda+(1-u)^q}{\lambda+(1+u)^q}\right)^{1/q}$$

where $\lambda>0$, $0<u<1$, $p<q$, $|p+q|\leq 3$, $2^p/p\geq 2^q/q$ in the case of $p>0$, $p2^p\leq q2^q$ in the case of $q<0$.

The above inequality is equivalent to

(51) $$F(\lambda)=\frac{1}{q}\ln\frac{\lambda+(1-u)^q}{\lambda+(1+u)^q}-\frac{1}{p}\ln\frac{\lambda+(1-u)^p}{\lambda+(1+u)^q}>0.$$

(52) $$F'(\lambda)=\frac{1}{q}\left(\frac{1}{\lambda+(1-u)^q}-\frac{1}{\lambda+(1+u)^q}\right)$$

$$-\frac{1}{p}\left(\frac{1}{\lambda+(1-u)^p}-\frac{1}{\lambda+(1+u)^p}\right)$$

$$=(A\lambda^2+B\lambda+C)/Q(\lambda),$$

which

(53) $$Q(\lambda)=[\lambda+(1-u)^q][\lambda+(1+u)^q][\lambda+(1-u)^p][\lambda+(1+u)^p],$$

(54) $$A=\frac{(1+u)^q-(1-u)^q}{q}-\frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{p},$$

(55) $$B=[(1+u)^p+(1-u)^p]\frac{(1+u)^q-(1-u)^q}{q}-$$

$$-[(1+u)^q+(1-u)^q]\frac{(1+u)^p-(1-u)^p}{p},$$

(56) $$C=(1-u)^{p+q}\left(\frac{(1+u)^{-q}-(1-u)^{-q}}{-q}-\frac{(1+u)^{-p}-(1-u)^{-p}}{-p}\right).$$

By Lemma 3, when $(p,q)\neq(1, 2)$ and $(p,q)\neq(-2, -1)$, we have

$$A<0 \quad\text{and}\quad C>0;$$

if $(p,q)=(1, 2)$, then $A=0$, $B=-4u^3<0$, $C=2u^3(1-u^2)>0$;

if $(p,q)=(-2,\ -1)$, then $A=-\dfrac{2u^3}{(1-u^2)^2}<0$, $B=\dfrac{4u^3}{(1-u^2)^3}>0$, $C=0$.

Thus for all these cases, $F'(\lambda)$ has a unique positive root λ_0 such that

(57) $$F'(\lambda)>0 \quad \text{for} \quad 0<\lambda<\lambda_0 \ ;$$

(58) $$F'(\lambda)<0 \quad \text{for} \quad \lambda>\lambda_0 \ .$$

Thus

(59) $$F(\lambda)>F(0)=F(+\infty)=0, \quad \text{for} \quad \lambda>0.$$

Now we establish the theorem in Section 1.

6. A Conjecture

When $n=2$, the ecnjecture (3) is true ([2]). For every $n\geqslant 3$, we have a conjecture about the condition of (4) holds.

Conjecture. If $p<q$, $|p+q|\leqslant 3n/(n-2)$,

$$[1+2^p/(n-1)]^{1/p}\geqslant[1+2^q/(n-1)]^{1/q} \quad \text{for} \quad p>0 \ ,$$

$$\{1+1/[2^p(n-1)]\}^{1/p}\geqslant\{1+1/[2^q(n-1)]\}^{1/q} \quad \text{for} \quad q<0 \ , \quad \text{then}$$

(60) $$\left(\frac{\sum_1^n x_i^{\,p}}{\sum_1^n(1-x_i)^p}\right)^{1/p}<\left(\frac{\sum_1^n x_i^q}{\sum_1^n(1-x_i)^q}\right)^{1/q}, \quad 0<x_i\leqslant\frac{1}{2} \ ,$$

unless $x_1=x_2=\cdots=x_n$.

References

1. E.F.Beckenbach & R.Bellman, Inequalities, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1965, p.5.

2. F.Chan, D.Goldberg & S.Gonek, On extensions of an inequality among means, Proc. Amer. Math. Soc. 42 (1974), 202—207.

3. Wan-Lan Wang & Peng-Fei Wang, Aclass of inequalities for the symmetric function (Chinese), Acta Math. Sinica 27 (1984), no.4: 485-497.

美国华裔数学家樊𰻞简介

樊𰻞（1915—）于1936年在北京大学毕业，1941年在法国著名数学家Fréchet指导下获博士学位。1945—1947年曾在普林斯顿高级研究所担任过Von Neumann的助手，深受其影响。以后在美国诸大学任教，1965年转到加州大学（圣他巴巴拉分校）任教授，在那里工作20年直至退休。

樊𰻞对算子与矩阵理论、凸分析与不等式、线性与非线性规划、拓扑与不动点理论以及拓扑群理论都有根本性的贡献。他的工作看上去很平常，却都是最基本的东西，因而获得高度评价。

1985年6月举行退休盛会时，北京大学教授张恭庆到会祝贺。加州大学（圣他巴巴拉分校）宣布设立樊𰻞助理教授职位（Ky Fan Assistant Professorship），以便持久地表彰樊𰻞的贡献。

樊𰻞曾兼任台湾中央研究院数学研究所所长。据他的一位学生说，樊教授曾希望台湾的数学有较快的发展，但结果使他失望。

樊𰻞原定于1983年来北京大学讲学，后因故未能成行。后来又表示愿将藏书捐赠母校北京大学，这些反映了他的爱国怀乡之情。

（陈计摘自《中国现代数学史话》）

最大的已知素数

1985年9月在美国的一家地球科学公司（Chevron Geoscience Co.）验收新安装的CRAY XMP超级计算机时，偶然发现第30个Mersene素数。这个数是$2^{216091}-1$。它共有65050位，印出来将近10页。要超级机寻找素数，是一举两得的考验办法。

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

Mitrinović–Djoković不等式的推广

数学系　余红兵　陈计　季文

南斯拉夫的D. S. Mitrinović教授和加拿大的D. Z. Djoković教授在书[1]中发表了如下结果：

若 $x_k>0$ $(k=1,\cdots,n)$，$x_1+\cdots+x_n=1$，且 $a>0$，则

$$\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^a\geqslant\frac{(n^2+1)^a}{n^{a-1}}. \tag{1}$$

本文中，我们推广了上述结果，建立了下列

定理　若 $x_k>0$，$k=1,2,\cdots,n$，$n\geqslant2$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=s\leqslant2\sqrt{3}$，且 $a\geqslant-1$，则

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^a\right]^{\frac{1}{a}}\geqslant\frac{s}{n}+\frac{n}{s}, \tag{2}$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$，并且 $2\sqrt{3}$ 是使上式成立的最大常数。

证明　我们先证 $a=-1$，$n=2$ 的情形：

$$\left[\frac{\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^{-1}+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^{-1}}{2}\right]^{-1}\geqslant\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}. \tag{3}$$

注意到恒等式：

$$\begin{aligned}&2\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{2}{x_1+x_2}\right)^{-1}-\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)^{-1}-\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^{-1}\\
&=\frac{4(x_1+x_2)}{(x_1+x_2)^2+4}-\frac{x_1}{x_1^2+1}-\frac{x_2}{x_2^2+1}\\
&=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2(3-x_1x_2)}{[(x_1+x_2)^2+4](x_1^2+1)(x_2^2+1)}\\
&=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)^4+(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2[12-(x_1+x_2)^2]}{4(x_1^2+1)(x_2^2+1)[(x_1+x_2)^2+4]}\end{aligned} \tag{4}$$

在 $(x_1+x_2)^2\leqslant12$ 或 $x_1+x_2\leqslant2\sqrt{3}$ 时，(4)式 $\geqslant0$，等号当且仅当 $x_1=x_2$ 时取。

现对 $\delta>0$ 来考虑 $(x_1+x_2)^2=12+\delta$，代入上式分子得

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2[(x_1-x_2)^2-\delta]. \tag{5}$$

显然，当 $x_1 \neq x_2$ 但两者足够接近时，(5) 式为负，从而 (4) 式为负。即 $2\sqrt{3}$ 具有最佳性。

下面我们指出 $a=-1$ 时 (2) 对自然数 $n \geqslant 3$ 也成立，即

(6) $$\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k+\frac{1}{x_k}\right)^{-1}\right]^{-1} \geqslant \frac{s}{n}+\frac{n}{s} \quad .$$

若 x_1，x_2，…，x_n 中有两个 x_i，x_j，$x_i \neq x_j$，则 $x_i+x_j<2\sqrt{3}$。我们用 $\frac{1}{2}(x_i+x_j)$ 取代 x_i 与 x_j，其和式不变，但由 (3) 知 (6) 左边的值变小。所以 $x_i \neq x_j$ 时，(6) 式左边不能取到最小值，等价地说，(6) 式左边取最小值时 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{s}{n}$。

再用幂平均定理据 (6) 式即知 (2) 式成立。

证毕。

参 考 文 献

[1] D. S. Mitrinović and P. M. Vasić, Analytic Inequalities, Springer-Verlag, 1970.

(上接第26页)

也就是要证 $\Delta_{\eta_1} \geqslant \Delta_0^{1-\frac{\eta_1}{\eta_2}} \Delta_{\eta_2}^{\frac{\eta_1}{\eta_2}}$

这只要在定理中取 $\theta_1=\eta_2$ $\theta_2=0$ ． $\lambda=\frac{\eta_1}{\eta_2}$ 即得。在 $\eta_1<0<\eta_2$ 及 $\eta_1<\eta_2<0$ 这两种情形下，同理可证。

推论 2 [1] 设 a_1, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，$\triangle$ 表示其面积，则当 $\theta \in [0,1]$ 时，

$$\Delta_\theta \geqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{1-\theta} \Delta^\theta$$

参 考 文 献

[1] 马援，Pedoe 不等式的推广，数学通讯，1987年第7期

[2] 陈计，Heron 公式的指数推广及其应用，数学通讯，1987年第12期

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

Heron平均对幂平均的分隔

数学系 王振 陈计

§1 记号和引言

本文中，我们以 a 和 b 表示正数，并恒假定 $b_1 \geqslant b_2 > 0$，$a_1/b_1 \geqslant a_2/b_2 > 0$ 。

两个正数 a 和 b 的Heron平均和幂平均分别定义如下：

$$He(a,\ b)=\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}, \tag{1}$$

$$Mr(a,\ b)=\left(\frac{a^r+b^r}{2}\right)^{\frac{1}{r}}, \tag{2}$$

由函数

$$s(r)=\frac{M_r(a_1,\ a_2)}{M_r(b_1,b_2)}=\left(\frac{a_1^r+a_2^r}{b_1^r+b_2^r}\right)^{\frac{1}{r}} \tag{3}$$

的单调性[1]，自然的问题是：

问题 1　如果 p 和 q 满足

$$\frac{Mp(a_1,a_2)}{Mp(b_1,b_2)}\leqslant\frac{He(a_1,a_2)}{He(b_1,b_2)}\leqslant\frac{Mq(a_1,a_2)}{Mq(b_1,b_2)}, \tag{4}$$

则 p 的最大值和 q 的最小值是多少？

问题 2　如果 p，q 满足

$$Mp(a,b)\leqslant He(a,b)\leqslant Mq(a,b), \tag{5}$$

求 p 和 q 的最佳值。

在第二节和第三节中，我们分别证明了：问题 1 中 p 的最大值是 $\frac{1}{2}$，q 的最小值是 $\frac{2}{3}$；问题 2 中 p 和 q 的最佳值分别是 $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ 和 $\frac{2}{3}$。

§2 问题1的解答

定理 1　设 $b_1 \geqslant b_2 > 0$，$a_1/b_1 > a_2/b_2 > 0$，则有

$$\frac{M_{\frac{1}{2}}(a_1,a_2)}{M_{\frac{1}{2}}(b_1,b_2)}<\frac{He(a_1,a_2)}{He(b_1,b_2)}<\frac{M_{\frac{2}{3}}(a_1,a_2)}{M_{\frac{2}{3}}(b_1,b_2)}. \tag{6}$$

证明　首先将（6）左边的不等式改写

$$\frac{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2})^2}{a_1+\sqrt{a_1a_2}+a_3}<\frac{(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2})^2}{b_1+\sqrt{b_1b_2}+b_2}, \tag{7}$$

即

$$\frac{\left(\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}}+1\right)^2}{\dfrac{a_1}{a_2}+\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}}+1}<\frac{\left(\sqrt{\dfrac{b_1}{b_2}}+1\right)^2}{\dfrac{b_1}{b_2}+\sqrt{\dfrac{b_1}{b_2}}+1}. \tag{8}$$

令 $s=(a_1/a_2)^{1/2}$，$s_*=(b_1/b_2)^{1/2}$，上式又可改写成

$$\frac{(s+1)^2}{s^2+s+1}<\frac{(s_*+1)^2}{s_*^2+s+1} \tag{9}$$

不难验证 $s>s_*\geqslant 1$．因为函数

$$g(s)\frac{(s+1)^2}{s^2+s+1} \tag{10}$$

在 $(1,+\infty)$ 上

$$g'(s)=\frac{1-s^2}{(1+s+s^2)^2}<0, \tag{11}$$

即 $g(s)$ 是严格单调下降，从而（9）成立，即有定理 1 中的第一个不等式得证。

其次把（6）右边的不等式改写

$$\frac{a_1+\sqrt{a_1a_2}+a_2}{(a_1^{2/3}+a_2^{2/3})^{3/2}}<\frac{b_1+\sqrt{b_1b_2}+b_2}{(b_1^{2/3}+b_2^{2/3})^{3/2}} \tag{12}$$

就是

$$\frac{\left(\dfrac{a_1}{a_2}+\sqrt{\dfrac{a_1}{a_2}}+1\right)^2}{\left[\left(\dfrac{a_1}{a_2}\right)^{2/3}+1\right]^3}<\frac{\left(\dfrac{b_1}{b_2}+\sqrt{\dfrac{b_1}{b_2}}+1\right)^2}{\left[\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)^{2/3}+1\right]^3} \tag{13}$$

令 $t=(a_1/a_2)^{1/6}$，$t_*=(b_1/b_2)^{1/6}$，上式又可改写为

$$\frac{(t^6+t^3+1)^2}{(t^4+1)^3}<\frac{(t_*^6+t_*^3+1)^2}{(t_*^4+1)^3} \tag{14}$$

易知 $t>t_*\geqslant 1$．由于函数

$$h(t)=\frac{(t^6+t^3+1)^2}{(t^4+1)^3} \tag{15}$$

在 $(1,+\infty)$ 上

$$h'(t)=\frac{6t^2(1+t^3+t^6)(1+t)(1-t^3)}{(1+t^4)^4}<0, \tag{16}$$

即 $h(t)$ 是严格单调下降的。因此立知（14）成立，从而定理 1 中的第二个不等式也成立。

证毕。

定理 2　设 a_1, a_2, b_1, b_2 意义同定理 1，则当 $\frac{1}{2}<r<\frac{2}{3}$ 时，

$$\frac{Mr(a_1,a_2)}{Mr(b_1,b_2)} \quad 和 \quad \frac{He(a_1,a_2)}{He(b_1,b_2)} \tag{17}$$

是不可比较的。

证明　首先，当 $p>\frac{1}{2}$ 时，令 $a_1=(n+1)^2$，$a_2=1$；$b_1=n^2$，$b_2=1$，则（4）的左边不等式为

$$\left(\frac{(n+1)^{2p}+1}{n^{2p}+1}\right)^{1/p} \leqslant \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{n^2+n+1} \quad . \tag{18}$$

将上式展开

$$1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)<1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad , \tag{19}$$

矛盾！所以 $p<\frac{1}{2}$，即定理 1 中常数 $\frac{1}{2}$ 是不可改进的。

其次，令 $a_1=1+x$，$a_2=b_1=b_2=1$，将

$$He(1+x,\ 1) \leqslant Mq(1+x,\ 1) \tag{20}$$

作 *Tayler* 展开得

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+\cdots \leqslant 1+\frac{x}{2}-\frac{1-q}{8}x^2+\cdots \quad , \tag{21}$$

故必有

$$\frac{1}{24} \geqslant \frac{1-q}{8} \quad 或 \quad q \geqslant \frac{2}{3} \quad 。$$

定理 2 证毕。

§ 3　问题 2 的解答

定理 3　设 a，$b>0$，则

$$M_{(\ln 2)/(\ln 3)}(a,\ b) < He(a,\ b) \text{ ，} \tag{22}$$

并且 $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ 是最大的，式中等号成立当且仅当 $a=b$ 。

证明　首先证当 $a \neq b$ 时

$$\left(\frac{a^{(\ln 2)/(\ln 3)}+b^{(\ln 2)/(\ln 3)}}{2}\right)^{(\ln 3)/(\ln 2)} < \frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} 。 \tag{23}$$

不妨设 $a>b$，并置 $\frac{a}{b}=e^{2t\ln 3}$ ，则 $t>0$；原不等式（23）变为

$$\left(\frac{e^{2t\ln 2}+1}{2}\right)^{\ln 3} < \left(\frac{e^{2t\ln 3}+e^{t\ln 3}+1}{3}\right)^{\ln 2} \tag{24}$$

或
$$\left(\frac{2^t+2^{-t}}{2}\right)^{\ln 3}<\left(\frac{3^t+1+3^{-t}}{3}\right)^{\ln 2}。\tag{25}$$

因此我们只须证明：

$$F(t)=\ln 2\cdot\ln\frac{3^t+3^{-t}+1}{3}-\ln 3\cdot\ln\frac{2^t+2^{-t}}{2}>0\quad。\tag{26}$$

对$F(t)$ 求导计算

$$F'(t)=\ln 2\cdot\ln 3\left[\frac{3(3^t-3^{-t})}{3^t+3^{-t}+1}-\frac{2(2^t-2^{-t})}{2^t+2^{-t}}\right]$$

$$=\ln 2\ln 3\cdot\frac{2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^t-\left(\frac{3}{2}\right)^{-t}\right]-(2^t-2^{-t})}{(3^t+3^{-t}+1)(2^t+2^{-t})}。\tag{27}$$

定义函数

$$d(t)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^t-\left(\frac{3}{2}\right)^{-t}}{2^t-2^{-t}}，\qquad (t>0)。\tag{28}$$

取对数后求导得

$$\frac{d'(t)}{d(t)}=\left(\ln\frac{3}{2}\right)\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(\frac{3}{2}\right)^{-t}}{\left(\frac{3}{2}\right)^t-\left(\frac{3}{2}\right)^{-t}}-(\ln 2)\frac{2^t+2^{-t}}{2^t-2^{-t}}\quad。\tag{29}$$

再引入函数

$$f(x)=(\ln x)\frac{x+x^{-1}}{x-x^{-1}}，\qquad x>1。\tag{30}$$

则

$$f'(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{(x^2-x^{-2})-4\ln x}{(x-x^{-1})^2}\tag{31}$$

又函数

$$g(x)=x^2-x^{-2}-4\ln x，\qquad x>1。\tag{32}$$

的导数

$$g'(x)=\frac{2}{x}(x^2+x^{-2}-2)>0\tag{33}$$

且 $g(1)=0$ ，所以$g(x)>0$ ，即 $f'(x)>0$ ．因此

$$\left[\ln\left(\frac{3}{2}\right)^t\right]\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^t+\left(\frac{3}{2}\right)^{-t}}{\left(\frac{3}{2}\right)^t-\left(\frac{3}{2}\right)^{-t}}<[\ln 2^t]\cdot\frac{2^t+2^{-t}}{2^t-2^{-t}}\quad，\tag{34}$$

其中 $t>0$ 。故而 $d'(t)<0$ 。

又已知 $d(0)=\left(\ln\frac{3}{2}\right)\Big/(\ln 2)>\frac{1}{2}$，$d(+\infty)=0$ 。所以存在唯一的 t_0 使 $d(t_0)=\frac{1}{2}$，并且有

（i） 当 $0<t<t_0$ 时，$d(t)>\frac{1}{2}$，$F'(t)>0$；

（ii） 当 $t>t_0$ 时，$d(t)<\frac{1}{2}$，$F'(t)<0$ 。

因此 $F(t)$ 必在两端点处取得最小值。然而 $F(0)=F(+\infty)=0$，故 $F(t)>0$ 。

现在证明 $(\ln 2)/(\ln 3)$ 是最大的。在不等式

$$\left(\frac{a^p+b^p}{2}\right)^{1/p}<\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3}. \tag{35}$$

中，令 $a=1$，$b\to 0$，有

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}\leqslant\frac{1}{3}, \quad \text{或} \quad p\leqslant\frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

证毕。

定理 4　设 a，$b>0$，则

$$He(a,\ b)\leqslant M_{\frac{2}{3}}(a,\ b), \tag{36}$$

并且 $\frac{2}{3}$ 是最小的，式中等号成立当且仅当 $a=b$。

证明　由定理 1 及定理 2 的证明得证。

参　考　文　献

[1] A. W. Marshall, I. Olkin and F. Proschan, Monotonicity of ratios of means and other applications of majorization. In: Inequalities, edited by O. Shasha. New York—London 1967, pp177—190.

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

关于对数平均的下界

数学系　陈计　王振

设 x 和 y 是两个不相等的正数。对于任意实数 p，我们定义 x 与 y 的幂平均 M_p 如下：

$$M_p = M_p(x, y) = \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (p \neq 0) \tag{1}$$

$$M_0 = \lim_{p \to 0} M_p = \sqrt{xy} \ . \tag{2}$$

再引入对数平均 L 如下：

$$L = L(x, y) = \frac{x - y}{\ln x - \ln y} \ . \tag{3}$$

1966年，B. C. Carlson [1] 指出：对数平均大于几何平均，即

$$M_0 < L \ . \tag{4}$$

1972年，他 [2] 又把（4）精密化成

$$M_0^{\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} < L \ . \tag{5}$$

1981年，王中烈和王兴华 [3] 用带余项的求积公式建立了：

$$M_0^p M_p^{1-p} < L \ , \tag{6}$$

其中 $p = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 。

本文中，我们将证明（6）对任意实数 p 都是成立的。

引理　设 $|t| < 1$，α 是任意实数，则

$$(1+t)^\alpha + (1-t)^\alpha \geqslant 2\sqrt{1-t^2} \ , \tag{7}$$

等号成立当且仅当 $t = 0$ 。

证明　下设 $t \neq 0$ 。

当 $0 \leqslant \alpha < 1$ 时，

$$(1+t)^\alpha + (1-t)^\alpha \geqslant 2(\sqrt{1-t^2})^\alpha > 2\sqrt{1-t^2} \ . \tag{8}$$

当 $\alpha \geqslant 1$ 或 $\alpha < 0$ 时，

(9) $$(1+t)^{\alpha}+(1-t)^{\alpha}\geqslant 2\left[\frac{(1+t)+(1-t)}{2}\right]^{\alpha}=2>2\sqrt{1-t^2}\ .$$

证毕。

定理 设 x 和 y 是两个正数，p 是任意实数，则

(10) $$\frac{x-y}{\ln x-\ln y}\geqslant (xy)^{\frac{p}{2}}\left(\frac{x^p+y^p}{2}\right)^{\frac{1-p}{p}},$$

等号成立当且仅当 $x=y$ 。

证明 不妨设 $x^p=1+t$，$y^p=1-t$，$t\geqslant 0$. 则（10）化为

(11) $$\frac{p\left[(1+t)^{\frac{1}{p}}-(1-t)^{\frac{1}{p}}\right]}{\ln(1+t)-\ln(1-t)}\geqslant\sqrt{1-t^2}\ .$$

作函数

(12) $$f(t)=p\left[(1+t)^{\frac{1}{p}}-(1-t)^{\frac{1}{p}}\right]-\sqrt{1-t^2}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]\ .$$

则

(13) $$\begin{aligned}f'(t)&=(1+t)^{\frac{1}{p}-1}+(1-t)^{\frac{1}{p}-1}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]\\&\quad-\sqrt{1-t^2}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)\\&\geqslant 2\sqrt{1-t^2}+\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]-\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\ ,\end{aligned}$$

从而

(14) $$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}\,f'(t)&\geqslant\frac{t}{2}\left[\ln(1+t)-\ln(1-t)\right]-t^2\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{2n}}{2n-1}\geqslant 0\ .\end{aligned}$$

所以 $f(t)\geqslant f(0)=0$，即（11）成立。

证毕.

作者们感谢上海科技大学刘启铭老师的指导和帮助！

参 考 文 献

[1] B. C. Carlson, Some Inequalities for Hypergeometric Functions, Proc. Amer. Math. Soc., 17 (1966), 32—39.

[2] B. C. Carlson, The Logarithmic Mean, Amer. Math. Monthly, 79 (1972), 615—618.

[3] 王中烈，王兴华，求积公式与分析不等式——关于对数平均对幂平均的分隔，杭州大学学报，第 9 卷，第 2 期，156—159 .

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

Refining the Ostle–Terwilliger Inequality

Ji Chen and Hai–Bin Shu

Let the logarithnic mean of the positive number x and y be defined by

(1) $$L(x,\ y)=\frac{x-y}{\ln x-\ln y},\qquad x\neq y,$$
$$L(x,\ x)=x\ .$$

It is not widely known that the inequality due to B. Ostle and H. L. Terwilliger[1]:

(2) $$L(x,\ y)<\frac{x+y}{2},\quad \text{for any}\quad x,y>0\ .$$

We define the new mean of two positive numbers x and y:

(3) $$\begin{aligned} I_r&=I_r(x,y)\\ &=\frac{x+x^{\frac{r-1}{r}}y^{\frac{1}{r}}+x^{\frac{r-2}{r}}y^{\frac{2}{r}}+\cdots+x^{\frac{1}{r}}y^{\frac{r-1}{r}}+y}{r+1}, \end{aligned}$$

for any natural number r. I_r is a generalization of the so-called "Heron average". Thus

$$I_2=\frac{x+\sqrt{xy}+y}{3}\quad \text{is the Heron mean}$$

$$I_1=\frac{x+y}{2}\quad \text{is the arithmetic mean}$$

In this note, we shall prove $I_r\rightarrow L(x,y)$ as $r\rightarrow\infty$ and establish the following:

(4) $$I_1\geqslant I_2\geqslant I_3\geqslant\cdots\geqslant I_{r-1}\geqslant I_r\geqslant\cdots\geqslant L(x,y)$$

Theorem 1. $\lim\limits_{r\to+\infty} I_r=L(x,y)$, for all $x,y>0$

Proof: Because

(5) $$I_r(x,y)=\frac{x+x^{\frac{r-1}{r}}y^{\frac{1}{r}}+\cdots+y}{r+1}$$

$$= \frac{x^{\frac{r+1}{r}} - y^{\frac{r+1}{r}}}{(r+1)(x^{\frac{1}{r}} - y^{\frac{1}{r}})}$$

$$= \frac{x\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{r+1}{r}}\right]}{(r+1)\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{r}}\right]},$$

when $x \neq y$, we have

(6) $$\lim_{r\to+\infty} I^r(x, y) = \frac{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}{-\ln\frac{y}{x}}$$

$$= \frac{x-y}{\ln x - \ln y} = L(x,y).$$

Since $I_r(x,x) = x = L(x,x)$, the theorem is proved.

Theorem 2. $I_{r-1} > I_r$;

for any natural number $r>1$ and distinct positive number x and y.

proof: For any $r>1$, we have

(7) $$I_{r-1} - I_r$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{l=1}^{r} x^{\frac{r-l}{r-1}} y^{\frac{l-1}{r-1}} - \frac{1}{r+1}\sum_{m=0}^{r} x^{\frac{r-m}{r}} y^{\frac{m}{r}}$$

$$= \frac{1}{r+1}\sum_{k=1}^{r-1}\left[\frac{k}{r}x^{\frac{r-k}{r-1}} y^{\frac{k-1}{r-1}} + \frac{r-k}{r} x^{\frac{r-k-1}{r-1}} y^{\frac{k}{r-1}} - x^{\frac{r-1}{r}} y^{\frac{k}{r}}\right]$$

unsing the arithmetic-geometric means inequality, we have

(8) $$\frac{k}{r}x^{\frac{r-k}{r-1}} y^{\frac{k-1}{r-1}} + \frac{r-k}{r} x^{\frac{r-k-1}{r-1}} y^{\frac{k}{r-1}}$$

$$> \left(x^{\frac{r-k}{r-1}} y^{\frac{k-1}{r-1}}\right)^{\frac{k}{r}} \left(x^{\frac{r-k-1}{r-1}} y^{\frac{k}{r-1}}\right)^{\frac{r-k}{r}} = x^{\frac{r-k}{r}} y^{\frac{k}{r}}.$$

So $I_{r-1} > I_r$.

Thus from Theorem 1 and 2, we get a refinement of the Ostle-Terwilliger inequality:

(9) $$I_1 > I_2 > I_3 > \cdots > I_r > L(x,y),$$

for any natural number r and distinct x, $y>0$

References

1. B. Ostle and H.L. Terwilliger, Acomparison of two means, Proc, Mortana Acad. Sci., 17 (1957), 69—70.

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988年1月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

Heron公式的指数推广及其应用

数学系83级　陈　计

公元一世纪，机械工程师 Heron 在《测地术》中采用了古代最伟大的数学家 Archimedes（公元前287—212年）的三角形的面积公式

$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

这里a，b，c 是三边，s 是半周长[1]。

Heron 公式等价于

$$16\Delta^2=2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4 \tag{2}$$

1974年，A. Oppenheim 给出了 Heron 公式的一个实质性的推广[2]：对于 $0<\theta<1$，有不等式

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^\theta\leqslant\frac{16}{3}\Delta^2(a^\theta,b^\theta,c^\theta) \tag{3}$$

其中 $\Delta(a^\theta,b^\theta,c^\theta)$ 表示以 a^θ，b^θ，c^θ 为三边组成的三角形的面积．或者将（3）写成

$$3^{1-\theta}(16\Delta^2)^\theta\leqslant 2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta} \tag{4}$$

式中等号当且只当 $a=b=c$ 时成立．

我们指出：当 $\theta<0$或$\theta>1$ 时，（4）的不等号反向．

证明　若以 a^θ，b^θ，c^θ 为边长不能构成三角形，则

$$（4）的右边=(a^\theta+b^\theta+c^\theta)(b^\theta+c^\theta-a^\theta)(c^\theta+a^\theta-b^\theta)(a^\theta-b^\theta-c^\theta)\leqslant 0.$$

不等号显然反向．

下设 $a^\theta,b^\theta,c^\theta$ 为边长可构成三角形，当 $\theta>1$ 时，$0<\frac{1}{\theta}<1$，用(4)得

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a^\theta,b^\theta,c^\theta)\right]^{1/\theta}\leqslant\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\qquad 或$$

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^\theta\geqslant\frac{16}{3}\Delta^2(a^\theta,b^\theta,c^\theta) \tag{5}$$

式中等号成立当且仅当 $a^\theta=b^\theta=c^\theta$，即$a=b=c$ 时。

下面考虑 $\theta<0$，我们在$(-\infty,+\infty)$上定义连续函数

$$f(\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{b^{2\theta}c^{2\theta}+c^{2\theta}a^{2\theta}+a^{2\theta}b^{2\theta}}{3}\right)^{1/\theta}-\left[\dfrac{a^{4\theta}+b^{4\theta}+c^{4\theta}+3\left(\dfrac{16\Delta^2}{3}\right)^\theta}{6}\right]^{1/\theta}, & 当\theta\neq 0时;\\ (abc)^{4/3}-(abc)^{2/3}\left(\dfrac{16}{3}\Delta^2\right)^{1/2}, & 当\theta=0时.\end{cases}$$

若 $a=b=c$ 时，$f(\theta)=0$；下设 a,b,c 不全相等．由 Polya—Szegö 不等式[3]

$$\Delta<\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{2/3} \tag{6}$$

知 $f(0)>0$ ．

由函数 $f(\theta)$ 的连续性，存在绝对值充分小的 $\delta<0$ ，使对于 $\theta\in[\delta,0)$，$f(\theta)>0$，即有

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^{\theta}>\frac{16}{3}\Delta^2(a^{\theta},b^{\theta},c^{\theta}) \tag{7}$$

对于 $\theta<\delta<0$ ，有 $\theta/\delta>1$，用（5）得

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a^{\delta},b^{\delta},c^{\delta})\right]^{\theta/\delta}>\frac{16}{3}\Delta^2(a^{\theta},b^{\theta},c^{\theta}) \tag{8}$$

再在（7）中取 $\theta=\delta$ ，得

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^{\delta}>\frac{16}{3}\Delta^2(a^{\delta},b^{\delta},c^{\delta})$$

两边乘 θ/δ 次方得

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^{\theta}>\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a^{\delta},b^{\delta},c^{\delta})\right]^{\theta/\delta} \tag{9}$$

联系（8）和（9），得 $\theta<\delta$ 时

$$\left[\frac{16}{3}\Delta^2(a,b,c)\right]^{\theta}\geqslant\frac{16}{3}\Delta^2(a^{\theta},b^{\theta},c^{\theta}) \tag{10}$$

于是，上式对 $\theta<0$ 都成立，取等号当且仅当 $a=b=c$ 时．

这样，我们就对任意实数 θ 对 Heron 公式的等价形式（2）作了幂指数的推广。

特别地，取 $\theta=-\frac{1}{2}$ 时，有

$$\frac{3\sqrt{3}}{4\Delta}\leqslant\frac{2}{bc}+\frac{2}{ca}+\frac{2}{ab}-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}$$

或
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4\Delta}+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\right)^2 \tag{11}$$

这个新的不等式与 Finsler－Hadwiger 不等式（1938年）[4] 对偶．

作为应用，我们来推广 Beatty 不等式[5]

$$\frac{(K-H)^2}{12}\geqslant\Delta^2\geqslant\frac{(K-H)(3K-5H)}{12} \tag{12}$$

其中 $H=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$，$K=bc+ca+ab$．

第一个不等式等价于 Finsler－Hadwiger 不等式，下面我们把第二个不等式推广为：当 $\theta\geqslant1$ 或 $\theta\leqslant0$ 时

$$\Delta^{2\theta}\geqslant2^{2-4\theta}3^{\theta-2}(K_*-H_*)(3K_*-5H_*) \tag{13}$$

其中，$H_*=\frac{1}{2}(a^{2\theta}+b^{2\theta}+c^{2\theta})$，$K_*=b^{\theta}c^{\theta}+c^{\theta}a^{\theta}+a^{\theta}b^{\theta}$．

特别地，取 $\theta=-1$，有

$$\frac{1}{\Delta^2}\geqslant\frac{64}{27}\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}-\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{2b^2}-\frac{1}{2c^2}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{3}{bc}+\frac{3}{ca}+\frac{3}{ab}-\frac{5}{2a^2}-\frac{5}{2b^2}-\frac{1}{2c^2}\right) \tag{14}$$

另外，三角形中通常的一些三边函数也可以进行指数推广．例如 $s=\frac{a+b+c}{2}$，$r=\frac{\Delta}{s}$，$R=\frac{abc}{4\Delta}$ 等等．当 $0<\theta<1$ 时，

$$\begin{aligned}s(a^\theta,b^\theta,c^\theta)&=\frac{1}{2}(a^\theta+b^\theta+c^\theta)\\&=\frac{3}{2}\times\frac{a^\theta+b^\theta+c^\theta}{3}\leqslant\frac{3}{2}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^\theta\\&=\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\theta}[s(a,b,c)]^\theta,\end{aligned}$$

或

$$\left[\frac{2}{3}s(a,b,c)\right]^\theta\geqslant\frac{2}{3}s(a^\theta,b^\theta,c^\theta)\ . \tag{15}$$

$$r(a^\theta,b^\theta,c^\theta)=\frac{\Delta(a^\theta,b^\theta,c^\theta)}{s(a^\theta,b^\theta,c^\theta)}$$

$$\geqslant\frac{\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^{\theta-1}\left[\Delta(a,b,c)\right]^\theta}{\left(\frac{3}{2}\right)^{1-\theta}[s(a,b,c)]^\theta}=(2\sqrt{3})^{\theta-1}[r(a,b,c)]^\theta$$

或

$$[2\sqrt{3}\,r(a,b,c)]^\theta\leqslant2\sqrt{3}\,r(a^\theta,b^\theta,c^\theta) \tag{16}$$

$$R(a^\theta,b^\theta,c^\theta)=\frac{a^\theta b^\theta c^\theta}{4\Delta(a^\theta,b^\theta,c^\theta)}$$

$$\leqslant\frac{a^\theta b^\theta c^\theta}{4\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right)^{\theta-1}[\Delta(a,b,c)]^\theta}=(\sqrt{3})^{\theta-1}[R(a,b,c)]^\theta\ .$$

或

$$[\sqrt{3}\,R(a,b,c)]^\theta\geqslant\sqrt{3}\,R(a^\theta,b^\theta,c^\theta)\ . \tag{17}$$

参 考 文 献

[1] M. Kline，《古今数学思想》，第一册，上海科学技术出版社，1979年版．

[2] A. Oppenheim, Inequalities involving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedra. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 496 (1974)，257—263．

[3] G. 波利亚，G. 舍贵，《数学分析中的问题和定理》，第二卷，上海科学技术出版社，1985年

[4] 王玉怀，费恩斯列尔一哈德维格尔不等式，《数学通迅》，1983年第11期．

[5] S. Beatty, Upper and lower estimates for the area of a triangle, Trans Roy. Soc. Canada Ⅲ(3)，48 (1954)，1—5

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988年1月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVEPSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

三角形面积Δ_θ的对数凸性

数学系86级 钱黎文 王 振

设三个正数 a,b,c，若 $a^\theta,b^\theta,c^\theta\ (\theta\in R)$ 可构成一个三角形，记其面积为 Δ_θ。本文揭示了 Δ_θ的一个基本性质——对数凸性。

定理 当 $0<\lambda<1$ 时，有

$$\Delta_{\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2}\geqslant\Delta_{\theta_1}^{\lambda}\,\Delta_{\theta_2}^{1-\lambda}$$

其中等号当且仅当 $a=b=c$ 时成立。

证明 因 Heron 公式

$$\Delta_\theta=\frac{1}{4}\sqrt{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)(a^\theta+b^\theta-c^\theta)(a^\theta-b^\theta+c^\theta)(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)}$$

记 $f(\theta)=\ln\Delta_\theta$， 则

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\Big[\ln(a^\theta+b^\theta+c^\theta)+\ln(a^\theta+b^\theta-c^\theta)+\ln(a^\theta-b^\theta+c^\theta)+\ln(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)\Big]-\ln4\ .$$

因此，

$$f'(\theta)=\frac{a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c}{a^\theta+b^\theta+c^\theta}+\frac{a^\theta\ln a+b^\theta\ln b-c^\theta\ln c}{a^\theta+b^\theta-c^\theta}+\frac{a^\theta\ln a-b^\theta\ln b+c^\theta\ln c}{a^\theta-b^\theta+c^\theta}+\frac{-a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c}{-a^\theta+b^\theta+c^\theta}\ ;$$

$$\begin{aligned}f''(\theta)=&\frac{(a^\theta\ln^2a+b^\theta\ln^2b+c^\theta\ln^2c)(a^\theta+b^\theta+c^\theta)-(a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c)^2}{(a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}\\&+\frac{(a^\theta\ln^2a+b^\theta\ln^2b-c^\theta\ln^2c)(a^\theta+b^\theta-c^\theta)-(a^\theta\ln a+b^\theta\ln b-c^\theta\ln c)^2}{(a^\theta+b^\theta-c^\theta)^2}\\&+\frac{(a^\theta\ln^2a-b^\theta\ln^2b+c^\theta\ln^2c)(a^\theta-b^\theta+c^\theta)-(a^\theta\ln a-b^\theta\ln b+c^\theta\ln c)^2}{(a^\theta-b^\theta+c^\theta)^2}\\&+\frac{(-a^\theta\ln^2a+b^\theta\ln^2b+c^\theta\ln^2c)(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)-(-a^\theta\ln a+b^\theta\ln b+c^\theta\ln c)^2}{(-a^\theta+b^\theta+c^\theta)^2}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^{\theta}b^{\theta}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2+b^{\theta}c^{\theta}\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2+c^{\theta}a^{\theta}\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta})^2}\right.$$

$$+\frac{a^{\theta}b^{\theta}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2-b^{\theta}c^{\theta}\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2-c^{\theta}a^{\theta}\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(a^{\theta}+b^{\theta}-c^{\theta})^2}$$

$$+\frac{-a^{\theta}b^{\theta}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2-b^{\theta}c^{\theta}\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2+c^{\theta}a^{\theta}\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(a^{\theta}-b^{\theta}+c^{\theta})^2}$$

$$\left.+\frac{-a^{\theta}b^{\theta}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2+b^{\theta}c^{\theta}\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2-c^{\theta}a^{\theta}\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2}{(-a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta})^2}\right\}\text{。}$$

不妨设$a^{\theta}\geqslant b^{\theta}\geqslant c^{\theta}$，并记

$$A=1/(a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta})^2,\quad B=1/(a^{\theta}+b^{\theta}-c^{\theta})^2,$$
$$C=1/(a^{\theta}-b^{\theta}+c^{\theta})^2,\quad D=1/(-a^{\theta}+b^{\theta}+c^{\theta})^2\text{。}$$

显然有 $A<B\leqslant C\leqslant D$。　则

$$f''(\theta)=\frac{1}{2}\left\{a^{\theta}b^{\theta}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2(A+B-C-D)\right.$$
$$+b^{\theta}c^{\theta}\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2(A-B-C+D)$$
$$\left.+c^{\theta}a^{\theta}\left(\ln\frac{a}{c}\right)^2(A-B+C-D)\right\}.$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a^{\theta}b^{\theta}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2(A+B-C-D)+2b^{\theta}c^{\theta}\left(\ln\frac{b}{c}\right)^2(A-B)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\theta^2}\left(c^{\theta}a^{\theta}\left(\ln\frac{a^{\theta}}{c^{\theta}}\right)^2-b^{\theta}c^{\theta}\left(\ln\frac{b^{\theta}}{c^{\theta}}\right)^2\right)(A-B+C-D)\right\}\leqslant 0\text{ .}$$

因此 $f(\theta)$ 为上凹函数，从而

$$\ln\Delta_{\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2}\geqslant\lambda\ln\Delta_{\theta_1}+(1-\lambda)\Delta_{\theta_2}\quad.$$

即 $\Delta_{\lambda\theta_1+(1-\lambda)\theta_2}\geqslant\Delta_{\theta_1}^{\lambda}\Delta_{\theta_2}^{1-\lambda}$ 。 证毕

推论 1：函数 $g(\eta)=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\Delta_{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}}$ 关于 η 单调减。

证明　显然 $\frac{\sqrt{3}}{4}=\Delta_0$ 。当 $0<\eta_1<\eta_2$ 时，即只要证

$$\left(\frac{\Delta_{\eta_1}}{\Delta_0}\right)^{\frac{1}{\eta_1}}\geqslant\left(\frac{\Delta_{\eta_2}}{\Delta_0}\right)^{\frac{1}{\eta_2}}\quad.$$

（下转第12页）

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988年1月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

Inequalities on Positive Semidefinite Hermitian Matrix

Guang-Xing Li

Department of Mathematics

University of Science and Technology of China
Hefei, Anhui, China

Abstract We prove two inequlities on positive semidefinite matrix $A=(a_{ij})$ of order n.

$$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|$$

$$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} + \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|$$

σ is an arbitray permutation except the identity of S_n

1. Introduction. We use $A \geq O$ to denote that A is a positive Semidefinite hermitian matrix, S_n denotes the symmetric group of order n, e is the identity of S_n. Two inequalities are given in the following theorem.

Theorem. If $A=(a_{ij}) \geq O$, A is of order n, we have

(1) $$\det A \leq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|$$

(2) $$\operatorname{per} A \geq \prod_{i=1}^{n} a_{ii} + \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|$$

Where $\sigma \neq e$, $\sigma \in S_n$, and det, per denote determinant and permanent respectively.

2. Proof

Lemma 1. If $A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \geq O$, A_{11} is a square submatrix, we have

(a) $$\det A \leq \det A_{11} \quad \det A_{22}$$

(b) $\quad \operatorname{per}A \geq \operatorname{per}A_{11} \cdot \operatorname{per}A_{22}$

This lemma is prove in [1] and [2].

Lemma 2. If $A=(a_{ij})\geq 0$, A is of order n, for any σ in S_n, we have

$$(3) \qquad \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geq \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|$$

Proof. Because $A \geq 0$,

$$a_{ii}\, a_{\sigma(i)\sigma(i)} \geq \left| a_{i\sigma(i)} \right|^2 \qquad i=1,2,\cdots\cdots n.$$

multiply from 1 to n, we get

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^2 \geq \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|^2$$

hence

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geq \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|$$

Now we begin to prove the theorem.

Proof of the theorem. at first, we try to show that for arbitrary σ $\sigma \neq e$ in S_n, there exists $i_1 \neq i_2 = \sigma(i_1)$ such that

$$(4) \qquad \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right| \leq \left| a_{i_1 i_2} \right|^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i_2}}^{n} a_{ii}$$

otherwise, for any pair i_1, i_2 satisfying $\sigma(i_1)=i_2 \neq i_1$.

$$(5) \qquad \left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right| > \left| a_{i_1 i_2} \right|^2 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i_2}}^{n} a_{ii}$$

Let $S=\{1\leq i\leq n \mid \sigma(i)=i\}$ and $T=\{1\leq i\leq n \mid \sigma(i)\neq i\}$, then $S \cup T=\{1,2,\cdots\cdots n\}$, $S\cap T=\phi$, multiply the two side of (4) for all $i \in T$

$$\left| \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right|^{|T|} > \left| \prod_{i_1\in T} a_{i_1\sigma(i_1)} \right|^2 \left(\prod_{i=1}^{n} a_{ii}\right)^{|T|} \Big/ \left(\prod_{i\in T} a_{ii}\right)^2$$

equivalently

$$\left| \prod_{i\in T} a_{i\sigma(i)} \right|^{|T|} \left(\prod_{i\in S} a_{ii}\right)^{|T|} > \left| \prod_{i\in T} a_{i\sigma(i)} \right|^2 \left(\prod_{i\in S} a_{ii}\right)^{|T|} \left(\prod_{i\in T} a_{ii}\right)^{|T|-2}$$

cancel the same part of the two side

$$\left| \prod_{i\in T} a_{i\sigma(i)} \right|^{|T|-2} > \left(\prod_{i\in T} a_{ii}\right)^{|T|-2}$$

i.e

$$(6) \qquad \left| \prod_{i\in T} a_{i\sigma(i)} \right| > \prod_{i\in T} a_{ii}$$

We cancel the columns and rows which have index belonging to S, the left square matrix has diagonal elements a_{ii}, $i \in T$, hence (6) contradicts to lemma 2.

From lemma 1, we have

$$(7)\qquad \det A \leqslant \Big(\prod_{\substack{i\neq i_1,i_2\\ \sigma(i_1)=i_2\neq i_1}} a_{ii}\Big)\det\begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2}\\ \overline{a}_{i_1i_2} & a_{i_2i_2}\end{vmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}-\Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_1,i_2}}^{n} a_{ii}\Big)\,|a_{i_1i_2}|^2$$

$$(8)\qquad \operatorname{par}A \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}+\Big(\prod_{i\neq i_1,i_2} a_{ii}\Big)|a_{i_1i_2}|^2$$

We choose i_1, i_2 such that (4) holds, then (7) and (8) yield (1) and (2) respectively.

3. Remarks

1. The inequalities (1) and (2) are best in the following sense, for every n, there exist matrices $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ of order n, and σ, $\tau\in S_n$, σ, $\tau\neq e$, $\sigma\neq\tau$ such that

$$\det A \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii} - \Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\Big| - \Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\tau(i)}\Big|$$

$$\operatorname{per}A \leqslant \prod_{i=1}^{n} b_{ii} + \Big|\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)}\Big| + \Big|\prod_{i=1}^{n} b_{i\tau(i)}\Big|$$

for example, let $\sigma=(23)$, $\tau=(12)$ and

$$A=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix} & 0\\ 0 & I_{(n-3)}\end{vmatrix}\qquad B=\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix} & 0\\ 0 & I_{(n-3)}\end{vmatrix}$$

2. For $A=(a_{ij})>0$ of order n, define $\widetilde{A}=(a_{\sigma\tau})$ of order $n!$, σ, $\tau\in S_n$, $a_{\sigma\tau}=\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)\tau(i)}$, then (1) can be deduced from a result due to Schur which says that $\det A$ is the smallest eigenvalue of $\widetilde{A}$[3].

Because

$$\widetilde{A}-(\det A)\,I\geqslant 0$$

we have

$$\prod_{i=1}^{n} a_{ii}-\det A\geqslant \Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\Big|,\quad \sigma\neq e,$$

equivalently

$$\det A\leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}-\Big|\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\Big|$$

Acknowledgements. I am grateful to Professor Jiong-Sheng Li for his helpful advice.

Reference

1 Beckenbach. B. F and R. Bellman, Inequalities, Berlin -Heidelbe Heidelberg -New York. 1961

2 H. Minc, Permanents, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Vol 6, Addison - Wesley, Reading Mass, 1978.

3 I. Schur, Uber endliche Gruppen und Hermitesche Formen, Math, Z, 1: 184 -207 .

第3卷第1期数学问题有奖征解解答

数学问题：将 [0,1] 区间上所有有理点排成一列，r_1，r_2，……。以每个有理点r_n为中心，作直径为$\frac{1}{\pi^n}$的闭区间I_n，则所有闭区间之并$\bigcup I_n$应覆盖 [0,1] 区间，故 $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n)>1$，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{\pi-1}>1$，为什么会出现矛盾？请叙述理由，并给出严格的证明。

解答（李广兴）：实际上，这些闭区间之并$\bigcup I_n$并不是 [0,1] 的覆盖。取ε使

(i) $\varepsilon<1$，

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\varepsilon\pi)^n}=\frac{1}{\varepsilon\pi-1}<1$.

以r_n为中心，作直径为$(\varepsilon\pi)^{-n}$的开区间J_n，则$J_n\supset I_n$。如果$\bigcup I_n$为 [0,1] 的覆盖，那么$\bigcup J_n$也是。

由于$O_n=\bigcup_{i=1}^{n} J_i$的测度$l(O_n)<(\varepsilon\pi-1)^{-1}<1$，因此存在$x_n\in c_n=[0,1]-O_n$。

由实数的连续性命题，实数列$\{x_n\}$有一个收敛子列收敛于$x_0\in[0,1]$，显然$x_0\in c_n$，故

$$x_0\in[0,1]-\bigcap c_n,$$

从而x_0不为$\bigcup I_n$所覆盖。

第4卷 第1期
1988年 1月

中国科学技术大学学生学报
JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA
UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Vol 4, No. 1
January, 1988

Szász不等式的简单证明

数学系 余红兵

Szász证明了下面的有趣结果[1]

如果A是n阶正定矩阵，P_k表示其所有k阶主子式的乘积，则有

$$P_1^{\frac{1}{\binom{n-1}{0}}} \geqslant P_2^{\frac{1}{\binom{n-1}{1}}} \geqslant \cdots \geqslant P_k^{\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}} \geqslant \cdots \geqslant P_n^{\frac{1}{\binom{n-1}{n-1}}}$$

这篇注记将给予Szasz不等式的非常简单的证明。

证明 1° 设$A_{i,k+1}$是A的任一k+1阶主子式，（k=0,…，n−1），则$A_{i,k+1}$对应的矩阵$B_{i,k+1}$是k+1阶正定阵。

考虑$B_{i,k+1}$的k次复合矩阵$B^{(k)}_{i,k+1}$，熟知[2]，$B^{(k)}_{i,k+1}$仍然正定，且主对角线元素恰好是$B_{i,k+1}$的所有k阶主子式，以及

$$\det B^{(k)}_{i,k+1} = (\det B_{i,k+1})^{\binom{k+1-1}{k-1}} = A_{i,k+1}^{\binom{k}{k-1}}$$

由熟知的Hadamard不等式，得

$$\det B^{(k)}_{i,k+1} \leqslant B^{(k)}_{i,k+1}\text{的阶有主对角线元素之积}$$

$$= B_{i,k+1}\text{的所有}k\text{阶主子式之积}$$

从而 $A_{i,k+1} \leqslant (B_{i,k+1}\text{的所有}k\text{阶主子式的积})^{\frac{1}{\binom{k}{k-1}}}$ （*）

2° 另一方面，将A的每一个k+1阶主子式都取出其k阶主子式相乘，则A的每个k阶主子式都重复n−k次，这是因为对某个k阶主子式，从其余的n−k行中取出一行增补成k+1阶主子式当然是n−k种。

3° P_{k+1} = A的所有k+1阶主子式的积

$$= \prod_i A_{i,k+1} \quad (\text{设})$$

应用（*）及2°，得到

$$P_{k+1} \leqslant \left(\prod_i (B_{i,k+1}\text{的所有}k\text{阶主子式的积})\right)^{\frac{1}{\binom{k}{k-1}}}$$

$$= \left(P_k^{n-k}\right)^{\frac{1}{\binom{k}{k-1}}} = P_k^{\frac{n-k}{\binom{k}{k-1}}}$$

故

$$P_{k+1}^{\frac{1}{\binom{n-1}{k}}} \leqslant P_k^{\left(\frac{n-k}{\binom{k}{k-1}}\right) \times \frac{1}{\binom{n-1}{k}}} = P_k^{\frac{1}{\binom{n-1}{k-1}}} \qquad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

这就证明了结果

参　考　文　献

[1] E. F. Beckenbach 和R. Bellman. 《Inequalities》,Springer -Verlag, 1961. P64.

[2] 张远达，《线性代数原理》，1980年，PP 447 -457.

机器证明传捷报

数学系　凌云飞

设C是一封闭凸曲线，从C上某点开始，取其周长的所有三等分点。顺次用直线段连结诸点得一三角形，则该三角形的周长大于或等于C周长的一半。我们很多人早就知道前述几何不等式，它曾难住了许多有才智的头脑，然而，就在最近，计算机帮助人们越过了障碍。

新方法的基本思想是：设法取目标几何函数定义域的某一可行（指计算机上的可行性）有限覆盖，然后在这覆盖的每一开集中任取一点代入检验即可得到结果。其中检验函数由洪加威先生两年前发明的“几何定理例证法”来确定。寻找关键的可行有限覆盖的方法被（暂时）称为“追踪法”，根据问题的复杂度来决定选用不同次数的追踪法。问题的复杂度由目标函数泰勒展式中“可约项”前面的所有各项来确定，“可约项”则决定于洪先生“几何定理证法”。追踪法的优点是，它能给被追踪点找到覆盖该点的允许最大开集。这就是说，追踪法是实现洪加威先生“几何定理例证法”的最优方案。

吴文俊先生十余年来一直在使几何定理机械化，他说：“我们的机械化证明定理的方法……在处理多项式不等式关系的那种几何定理时则要复杂困难得多（这里指计算上的复杂度与可行性）”从这个角度看来，新方法给机器证明几何定理带来了鼓舞人心的新气象。

应该指出，文首的问题是被征服的一系列问题中富有代表意义的一个。

进步的实践者，就是我们大家熟知的张景中，陶懋颀先生。

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

关于单位分数的一个定理的初等证明

数学系83级 陈 计

在文献[1]中冯克勤教授等应用Hardy -Karamata不等式（参见书[2]，第220～226页）证明了下列定理：

定理(Fn) 设$r\in N$，

$$m_1=r+1,\ m_t=rm_1\cdots m_{t-1}+1\ (t\geqslant 2) \qquad (1)$$

则（m_1, …, m_n）是如下的非线性整规划问题

$$Pn\left(\frac{1}{r}\right):\begin{cases}\min\left\{\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}\right\}\\ \frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n}<\frac{1}{r},\\ m_i\in N\ (1\leqslant i\leqslant n).\end{cases}$$

的唯一解，并且最小值

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}=\frac{1}{m_{n+1}-1}=\frac{1}{rm_1\cdots m_n} \qquad (2)$$

本文将用完全初等的方法给出定理的一个简化证法。(F_1) 显然成立，现在设(F_1), (F_2),…,(F_{n-1}) 均成立，即(m_1, …, m_t) 是$P_t\left(\frac{1}{r}\right)$ 的唯一解。从而 $\mu_t\left(\frac{1}{r}\right)=$ $=\frac{1}{m_{t+1}-1}=\frac{1}{rm_1\cdots m_t}$ ($1\leqslant t\leqslant n$)，其中m_i由（1）定义。假定 (e_1, …, e_n) 是$Pn\left(\frac{1}{r}\right)$ 的解。$e_1\leqslant\cdots\leqslant e_n$，由于$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}>0$，而$r$，$e_1$，…$e_n$均为自然数，从而

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}\geqslant\frac{1}{re_1\cdots e_n} \qquad (3)$$

如果

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)<\frac{1}{m_{n+1}-1}\left(=\frac{1}{rm_1\cdots m_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}\right), \qquad (4)$$

从（3）和（4）可知$\frac{1}{re_1\cdots e_n}<\frac{1}{rm_1\cdots m_n}$，因此

$$m_1 \cdots m_n < e_1 \cdots e_n \tag{5}$$

另一方面，由归纳假设可知

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_i} > \mu_i\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_i} \quad (1 \leqslant i < n)$$

因此

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{m_1} \geqslant \dfrac{1}{e_1} \\[2ex]
\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2} \geqslant \dfrac{1}{e_1}+\dfrac{1}{e_2} \\[2ex]
\cdots \\[1ex]
\dfrac{1}{m_1}+\cdots+\dfrac{1}{m_{n-1}} \geqslant \dfrac{1}{e_1}+\cdots+\dfrac{1}{e_{n-1}}
\end{array}\right\} \tag{6}$$

由假设条件（4）又有

$$\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n} < \frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_n} \tag{7}$$

又由假设 $e_1 \leqslant e \leqslant \cdots \leqslant e_n$ 可得

$$(e_1-e_2)\frac{1}{m_1} \leqslant (e_1-e_2)\frac{1}{e_1}$$

$$(e_2-e_3)\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) \leqslant (e_2-e_3)\left(\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}\right)$$

$$\cdots$$

$$(e_{n-1}-e_n)\left(\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_{n-1}}\right) \leqslant (e_{n-1}-e_n)\left(\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_{n-1}}\right)$$

$$e_n\left(\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n}\right) < e_n\left(\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_n}\right)$$

将上述n个不等式两边分别相加得

$$\frac{e_1}{m_1}+\frac{e_2}{m_2}+\cdots+\frac{e_n}{m_n} < n \tag{8}$$

对（8）左边用一下几何平均—算术平均不等式可得

$$e_1 \cdots e_n < m_1 \cdots m_n \tag{9}$$

而这与（5）矛盾，从而必然有

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right) \geqslant \frac{1}{m_{n+1}-1}$$

而由

$$\mu_n\left(\frac{1}{r}\right) \leqslant \frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}=\frac{1}{m_{n+1}-1}$$

便知 $\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{m_{n+1}-1}$，并且 $(m_1, \cdots, m_n)$ 是 $P_n\left(\frac{1}{r}\right)$ 的一组解。

现在证明解的唯一性。设 $(e_1, \cdots, e_n)$ 是 $P_n\left(\frac{1}{r}\right)$ 的另一组解，即

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}=\mu_n\left(\frac{1}{r}\right),\quad e_1\leqslant\cdots\leqslant e_n,$$

我们要证明 $(e_1, \cdots, e_n)=(m_1, \cdots, m_n)$。首先我们有

$$\frac{1}{e_1}+\cdots+\frac{1}{e_n}=\frac{1}{r}-\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}-\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}\right)$$

$$=\frac{1}{m_1}+\cdots+\frac{1}{m_n} \tag{10}$$

$$\frac{1}{re_1\cdots e_n}\leqslant\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\cdots-\frac{1}{e_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}$$

$$=\frac{1}{rm_1\cdots m_n}$$

从而

$$m_1\cdots m_n\leqslant e_1\cdots e_n \tag{11}$$

另一方面，由归纳假设可知

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{m_i}=\frac{1}{r}-\mu_t\left(\frac{1}{r}\right)\geqslant\frac{1}{r}-\left(\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{e_i}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{e_i}\quad(1\leqslant t<n) \tag{12}$$

根据（10）和（12），象前面导出（9）一样得到 $m_1\cdots m_n\geqslant e_1\cdots e_n$。再由（11）即知

$$m_1\cdots m_n=e_1\cdots e_n \tag{13}$$

进而，如果对某个 t_0（$1\leqslant t_0<n$）使得

$$\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{m_i}=\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{e_i},$$

则

$$\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{e_i}=\frac{1}{r}-\sum_{i=1}^{t_0}\frac{1}{m_i}=\mu_0\left(\frac{1}{r}\right)。$$

由归纳假设 (F_{t_0}) 成立，知 $(e_1, \cdots, e_{t_0})=(m_1, \cdots, m_{t_0})$，特别地，$e_1=m_1=r+1$，于是

$$\frac{1}{r(r+1)}-\frac{1}{e_2}-\cdots-\frac{1}{e_n}$$

$$=\frac{1}{r}-\frac{1}{e_1}-\frac{1}{e_2}-\cdots-\frac{1}{e_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{m_1}-\cdots-\frac{1}{m_n}$$

$$=\mu_n\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r(r+1)m_2\cdots m_n}=\mu_{n-1}\left(\frac{1}{r(r+1)}\right)$$

注意$m_2=r(r+1)+1$，$m_t=r(r+1)m_2\cdots m_{t-1}+1$（$3\leqslant t<n$）从而由归纳假设（$F_{n-1}$）成立可知（$e_2,\cdots,e_n$）=（$m_2,\cdots,m_n$）又有$e_1=m_1$，便知（$e_1,\cdots,e_n$）=（$m_1,\cdots,m_n$）。于是由（12）我们今后假定

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{m_i}>\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{e_i},\quad(1\leqslant t<n)\tag{14}$$

根据（10）和（14），注意到（$e_1,\cdots,e_n$）与（$m_1,\cdots,m_n$）不成比例。象前面导出（9）一样得到$e_1\cdots e_n<m_1\cdots m_n$，而这与（13）相矛盾，这就完成了定理（Fn）的证明

推论 设$r\in N$，

$$M_1=r+1,M_t=rM_1M_2\cdots M_{t-1}+1\ (t\geqslant 2),\tag{16}$$

如果$\frac{1}{r}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}$，$x_i\in N$，$x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$，则$x_n$的最大值是

$$M_n-1=rM_1M_2\cdots M_{n-1}。$$

证明 由假设

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{r}-\frac{1}{x_1}-\cdots-\frac{1}{x_{n-1}}\geqslant\mu_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{rM_1\cdots M_{n-1}},$$

于是$x_n\leqslant M_1\cdots M_{n-1}$。但是

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}+\cdots+\frac{1}{M_{n-1}}+\frac{1}{rM_1\cdots M_{n-1}},$$

因此$rM_1M_2\cdots M_{n-1}$是x_n的最大取值。

问题 设$r\in N$，如果

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{r},\tag{13}$$

其中$x_i\in N$，$x_i<x_2<\cdots<x_n$。问x_n的极小值是多少？（参见书［3］，第32页）

参　考　文　献

［1］冯克勤，魏权龄，刘木兰，关于Kulkarni 问题和Erdös一个猜想，科学通报，32（1987），3：164—168

［2］D．S．Mitrinovic，P．M．Vasic 著，赵汉宾译，分析不等式，广西人民出版社，1986年版

［3］柯召，孙琦，单位分数，人民教育出版社，1981年版

［4］Curtiss，on Kellog's Diophantine equation．Amer．Math．Monthly．29（1922），PP．380—387

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January. 1988

一个覆盖问题

数学系87级　冯　磊

问题：一条宽为 l 的无限长的带子覆盖面积为1的正方形，问如何何使覆盖面积最大积最大，并求最大面积。

解：这个问题要分几步来考虑。

（一）首先，因为正方形面积为1，所以正方形边长为1，如果 $l\geqslant 1$，那么带子可以把正方形全部覆盖住（如图1）。

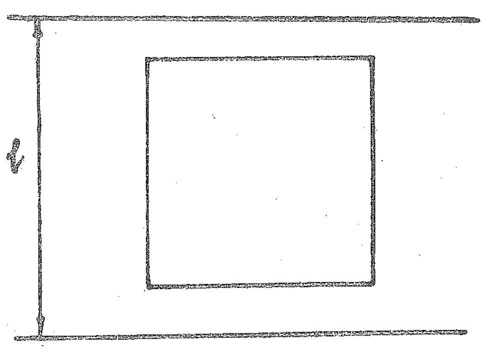


图　1

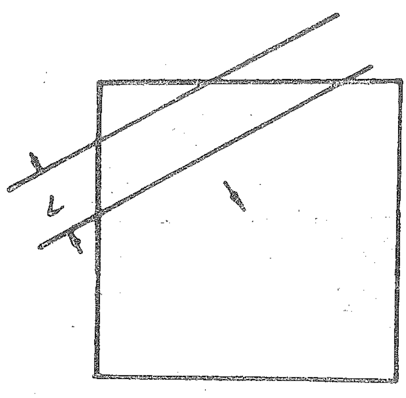


图　2

（二）如果 $l<1$。

（1）这条带子一定覆盖住正方形的一条对角线，因为如果带子不盖住正方形的一条对角线，那么有以下三种情况：

（i）带子在正方形上的位置（如图2），把带子向箭头的方向移动，覆盖面积会增大。

（ii）位置如图3。如果把带子向箭头方向移动，使带子边缘过正方形的一个顶点。则移动后增加的四边形面积比减少的四边形面积多了带阴影的三角形面积，所以移动后覆盖面积增大了。

（iii）位置如图4。设 $\angle FAD\geqslant 90°$。取 $BC=AD$，取法如图。连结 CE，DF。$\because \angle FAD\geqslant 90°$，$\therefore$ 在 $\triangle FDA$ 中，$FD>FA$，而 $ECDF$ 和 $EBAF$ 面积相等，$\therefore FA\cdot l=FD\cdot h$ $\therefore l>h$。所以移动后带子的宽度比原来小，如果把带子宽度放大成 l，那么 $FA\cdot l$，$<FD.l$ $\therefore$ 覆盖面积增大。

由此可得，如果带子不覆盖正方形的一条对角线，那么覆盖面积就不是最大的。因

此带子覆盖住正方形的一条对角线。

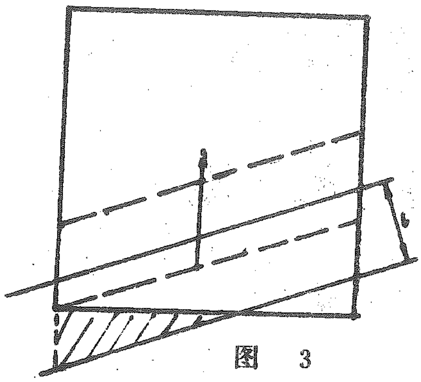


图 3

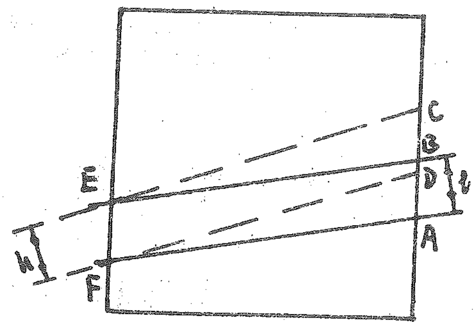


图 4

（2）带子两边在正方形内的截长一定相等。即图 5 中$a=b$，假设 $b>a$，把带子从 a向 b的方向（如图 5 箭头所示）移动一个非常小的距离，使移动后的截长$a'<b'$，由于$a' \parallel a, b' \parallel b$，移动后覆盖面积增大的梯形面积比减小的梯形面积要大。∴覆盖面积增大。

从而得出带子两边在正方形的截长相等，这时带子的中心线一定通过正方形两对角线的交点。

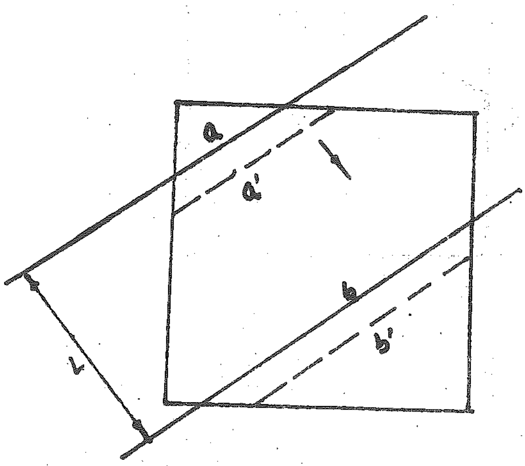


图 5

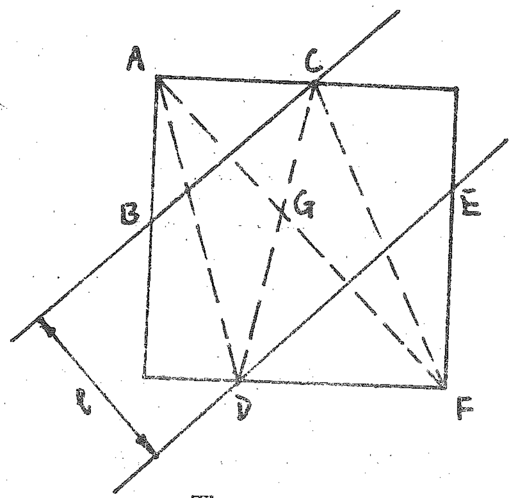


图 6

证：如图 6。连结CD，AF。∵$BC=DE$。$\angle ABC=\angle FED$，∵$\triangle ABC\cong\triangle FED$ ∴$AC=DF$。连AD，CF。则$ADFC$是▱。∴CD与AF的交点G是AF的中点，即G是正方形对角线的中点。G又是CD的中点，即G是带子 l的中心线上的点。∴带子的中心线一定通过正方形两对角线的交点。

（3）求出阴影三三角形的面积。设 $h=OC$，$x=DC$，$OB=m$，$OA=n$ 及$\angle\ \alpha$如图 7 所示。则

$$h = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha,$$

$$x = h - \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha - \frac{l}{2},$$

$$m = \sin 45^\circ \frac{\sqrt{2}/2}{\sin(45^\circ+\alpha)} = \frac{\frac{1}{2}}{\sin(45^\circ+\alpha)}。$$

$$n = [2\sin(45^\circ-\alpha)]^{-1}$$

$$\therefore\quad m+n = \frac{\frac{1}{2}[\sin(45^\circ+\alpha)+\sin(45^\circ-\alpha)]}{\sin(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}。$$

$$\therefore\quad S_{阴影三角形} = \frac{\frac{1}{2}(m+n)\cdot h\cdot x^2}{h^2}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{1}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha-l}{2}\right)^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha-\frac{l}{2}\right)^2}{2\cos^2\alpha-1}。$$

（4）当 $\alpha=0^\circ$ 时，$S_{阴影三角形}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{l}{2}\right)^2$。

在符合前（1）和（2）所确定的带子在正方形内的位置情况下，$\angle\alpha$ 的最大度数如图8。这时：

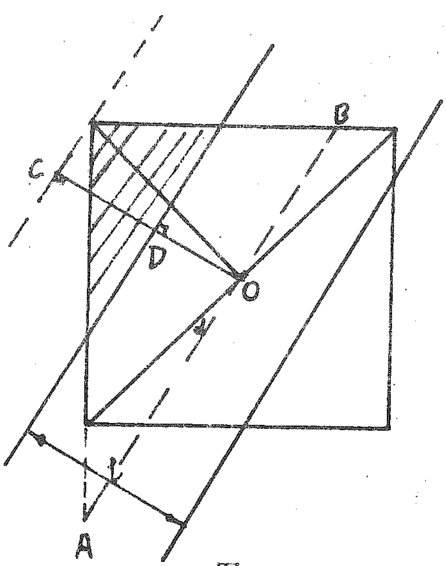


图 7

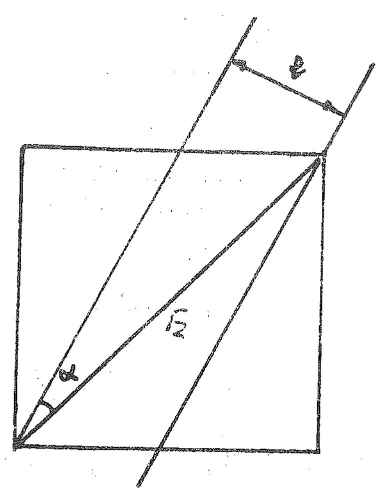


图 8

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{l^2}{2}}=\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}$$

而 $\alpha\geqslant 0$　　$\therefore\ \sqrt{\frac{2-l^2}{2}}\leqslant\cos\alpha\leqslant 1$。

（5）当$l\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$时，在$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}l}$时，阴影三角形面积最小，覆盖面积最大。

证：要证当$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}l}$（因为$l\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时$\frac{1}{\sqrt{2}l}<1$）时阴影三角形面积一定小于$\cos\alpha$为任何其他值时的面积，设$\cos\alpha=t$，即要证：

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}>\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}l}-\frac{l}{2}\right)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}l}\right)^2-1}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2l}-\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{l^2}-1}=\frac{1-l^2}{4}$$

移项后：

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}-\frac{1-l^2}{4}$$

$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}tl+\frac{l}{4}\right)^2-(2t^2-1)(1-t^2)}{4(2t^2-1)}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}tl-1)^2}{4(2t^2-1)}$$

由于$l<1, t\geqslant\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}$，从而

$$4(2t^2-1)\geqslant 4(2-l^2-1)>0 \qquad (\cdot)$$

而$t\neq\frac{1}{\sqrt{2}l}$时，$\sqrt{2}tl-1\neq 0$，于是$\frac{(\sqrt{2}tl-1)^2}{4(2t^2-1)}>0$。

即当$\cos\alpha\neq\frac{1}{\sqrt{2}\,l}$时，$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{12}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}>\frac{1-l^2}{4}$ ∴原 命题得证。这时覆盖面积最大为

$1-2\ \frac{1-l^2}{4}=\frac{1+l^2}{2}$。

(6) 当$l<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，在$\cos\alpha=1$（即 $\alpha=0°$）时，阴影三角形面积最小。

证：设$\cos\alpha=t$（取值为$\sqrt{\frac{2-l^2}{2}}\leqslant t<1$）于是

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t-\frac{l}{2}\right)^2}{2t^2-1}-\frac{(\sqrt{2}-l)^2}{4}$$

$$=\frac{4\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{\sqrt{2}}{2}tl+\frac{l^2}{4}\right)-(2t^2-1)(2tl^2-2\sqrt{2}\,t)}{4(2t^2-1)}$$

$$=\frac{(-2-2l^2+4\sqrt{2}\,l)t^2-2\sqrt{2}\,tl+2l^2+2-2\sqrt{2}\,l}{2(2t^2-1)},$$

要证此式>0，由(5) 的·处得$4(2t^2-1)>0$。

而$(-2-2l^2+2\sqrt{2}\,l)t^2-2\sqrt{2}\,tl+2l^2+2-2\sqrt{2}\,l$

$=(t-1)[(-2-2l^2+4\sqrt{2}\,l)t+(2\sqrt{2}\,l-2-2l^2)]$

$=(1-t)[(2-4\sqrt{2}\,l+2l^2)t+(2l^2-2\sqrt{2}\,l+2)]$

由于$1-t>0$，只需证

$(t^2-4\sqrt{2}\,t+2)t+(2t^2-2\sqrt{2}\,t+2)>0$。 (△)

(i) 若$2l^2-4\sqrt{2}\,l+2\geqslant0$，那么$2l^2-2\sqrt{2}\,l+2\geqslant2\sqrt{2}\,l>0$。于是（△）式成立。

(ii) 若$2l^2-4\sqrt{2}\,l+2<0$，那么（△）式左边$>(2l^2-4\sqrt{2}\,l+2)$

$+(2l^2-2\sqrt{2}\,l+2)=(4l^2-6\sqrt{2}\,l+4)=(4l-\sqrt{2})\left(l-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$。

而由题设得$l<\frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴$4(l-\sqrt{2})\left(l-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$，从而(△) 式也成立。∴原命题得证，这时最大覆盖面积为

$$1-2\frac{(\sqrt{2}-l)^2}{2}=\frac{2\sqrt{2}\,l-l^2}{2}。$$

到此，本题全部解完。本题整个答案为(以$f(l)$ 表示问题最大覆盖面积)：

$l\geqslant1$时，$f(l)=1$，覆盖方式如图 1。

当$\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant l\leqslant1$时，$f(l)=\frac{1+l^2}{2}$，覆盖方式如图7，其中，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}\,l}$。

当 $0 < l < \frac{\sqrt{2}}{2}$时，$f(l) = \frac{2\sqrt{2}\ l - l^2}{2}$，覆盖方式如图9,其中带子边与带子盖住的的正方形的那条对角线平行。

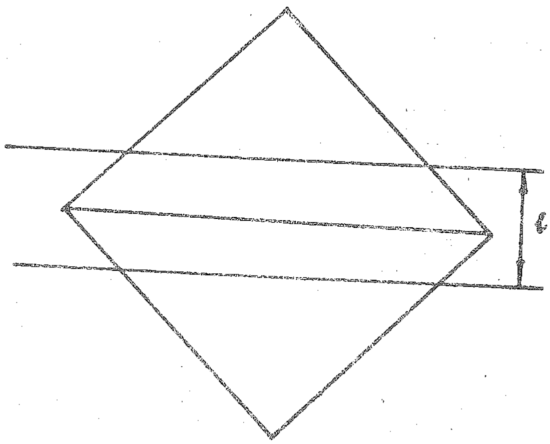


图　9

函数 $f(l)$ 如图10所示，它由三段组成，第一段 $\left(0 < l < \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为朝下的抛物线，第二段 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} < l < 1\right)$ 为朝上的抛物线，第三段（$l \geq 1$）为直线。

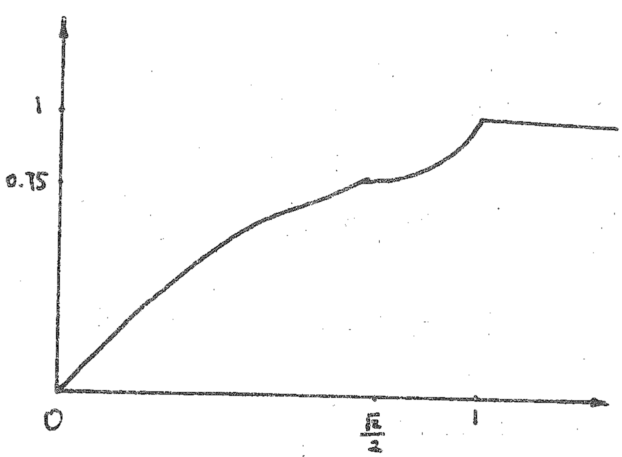


图　10

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1

1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

凸图形内 n 点问题

数学系83级　何明秋

定理：单位面积凸图形内任意给定n点 当$n \geq 7$时，这些点组成诸三角形中至少存在一个三角形面积不大于$\frac{1}{n}$。

为证此定理，先给出几个引理：

引理 1：单位面积凸图形内 n 点，若其闭包为$n-m$边形，则由这些点组成诸三角形形中至少存在一个三角形面积$\leq \frac{1}{n+m-2}$。

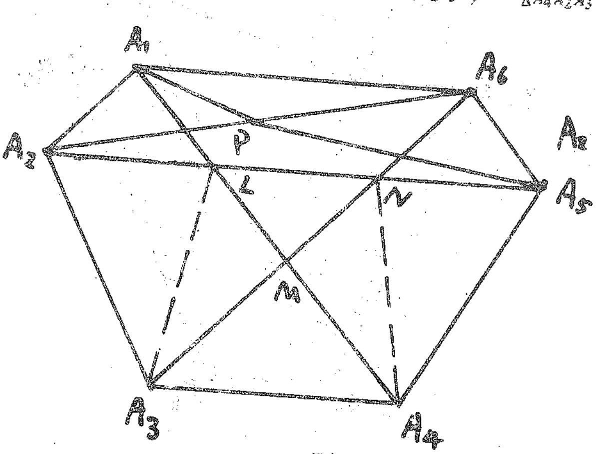
证明：先将凸$n-m$边形的所有顶点与其内某一点连线，得到$n-m$个不相交的三角形，再将凸$n-m$边形内另外一点（若还有的话）与它所在三角形三顶点连线，则不相交三角形总数将增加两个，依此类推便可得到$n-m+2(m-1)$亦即$m+n-2$个不相交的三角形，于是至少存在一个三角形面积$\leq \frac{1}{n+m-2} \times$凸$n-m$边形面积$\leq \frac{1}{n+m-2}$。

引理 2：单位面积凸六边形内任给一点，则此 7 点所成诸三角形中至少存在一个三角形面积$< 1/7$。

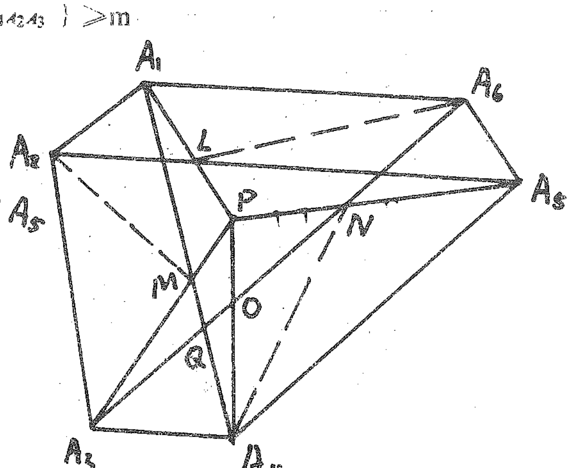
证明：若给定点P不在凸六边形的主对角线所围成的三角形内，不妨没它与M点在A_2A_5异侧（如图一），若这些所求三角形最小面积为m，则

$$S_{A_1A_2A_5A_6} \geq S_{\Delta PA_1A_2}+S_{\Delta PA_2A_5}+S_{\Delta PA_5A_6}+S_{\Delta PA_6A_1} \geq 4m$$

$$S_{\Delta LA_2A_3} \geq min\ \{S_{\Delta A_1A_2A_3},\ S_{\Delta A_4A_2A_3}\} \geq m$$



图一



图二

同理　$S_{\Delta LA_3A_4}\geqslant m$，　$S_{\Delta NA_4A_5}\geqslant m$

相加得　$1-S_{\Delta LNA_4}\geqslant 7m$

于是　$m\leqslant\frac{1}{7}$

若给定P点在凸六边形主对角线所围成三角形内，如图二连线，不妨设$S_{\Delta A_3MQ}\geqslant S_{\Delta A_4OQ}$，（否则我们用图三的方式来划分六边形也可得到同样的结果）

假定所求最小三角形面积为m，则与上述类似方法可得

$S_{\Delta A_1A_2M}\geqslant m$，　$S_{\Delta A_2A_3M}\geqslant m$

$S_{\Delta A_1A_6L}\geqslant m$，　$S_{\Delta A_5A_6L}\geqslant m$

$S_{\Delta A_3A_4N}\geqslant m$，　$S_{\Delta A_4A_5N}\geqslant m$

此外　$S_{\Delta PA_1M}+S_{\Delta POA_3}\geqslant S_{\Delta PA_1A_4}\geqslant m$

将上述不等式相加得　$1-S_{\Delta PLA_5}\geqslant 7m$

于是　$m\leqslant\frac{1}{7}$

定理的证明　：

若这n点所成闭包为$\leqslant n-2$边形，则由引理1即知命题为真。

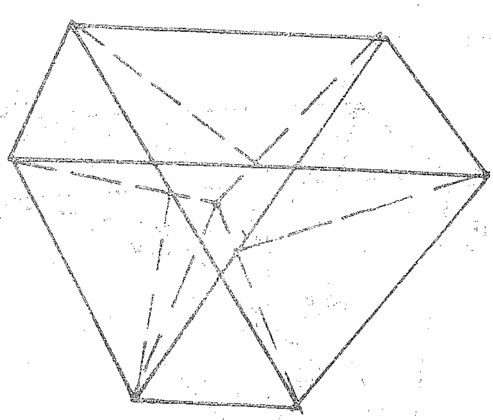
若这n点所成闭包为$n-1$边形$A_1A_2A_3\cdots\cdots A_{n-1}$，对n用归纳法，由引理2知$n=7$时命题成立，假定$n-1$时成立，当n时不妨设内部点P不在$\Delta A_1A_2A_3$内，则P在凸$n-2$边形$A_1A_3\cdots A_{n-1}$内，于是由归纳假设知

$(n-1)m\leqslant A_1A_3\cdots\cdots A_{n-1}$的面积

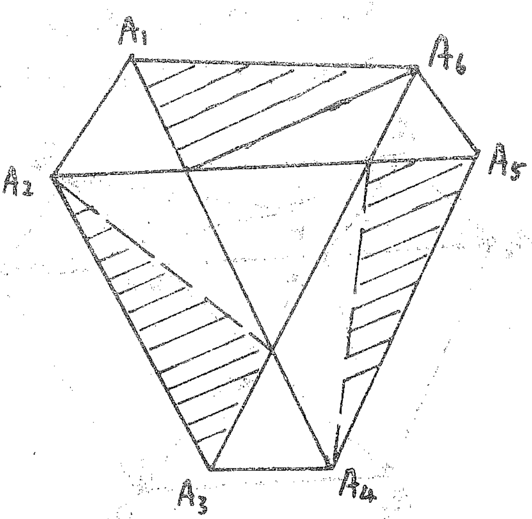
又　$m\leqslant\Delta A_1A_2A_3$的面积

相加得　$n\cdot m\leqslant n-1$边形$A_1A_2\cdots A_{n-1}$的面积$\leqslant 1$

$\therefore m\leqslant\frac{1}{n}$



图三



图四

若这n 点所成闭包为凸n 边形，其证明是由扬路教教授首先给出的，在[1] 中，单墫老师有一个简单的证明。其方法也是用归纳法，而当n = 6 时作如图四的划分。

推论：单位面积凸图形内任给n （≥12）个点，则至少存在一个三角形面积$\leqslant \frac{1}{n+2}$。

证明：n = 12时，过其中任一点作直线将此凸图形面积一分为二，则包括直线上点在内至少有一边含有7个点，于是存在三角形面积$\leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{14}=\frac{1}{n+2}$。当n ＞12时用归纳法即可证明。

注记：从证明中不难看出上述不等号均可改为严格不等号。

问题：当n = 6 时，定理的结论是否还成立？

参　考　文　献

[1] 单墫，《几何不等式》，上海教育出版社，1980年版，第77页17题（1）。

[2] 王振，陈计，凸图形内五点问题，中国科学技术大学学生学报，Vol.3(1987)，No.2

（上接第54页）

问题21　设n 个正定对称实方阵A_1，A_2，…，A_n，对于自然数k，证明或否定：

$$tr(A_1^kA_2^k\cdots A_n^k)\geqslant tr(A_1A_2\cdots A_n)^k.$$

问题2　设A，B 为半正定的非负方阵，证明或否定：

(i) $[su(A+B)^k]^{1/k}\geqslant(suA^k)^{1/k}+(suB^k)^{1/k}$，$k\leqslant 1$；

(ii) $[su(A+B)^k]^{1/k}\leqslant(suA^k)^{1/k}+(suB^k)^{1/k}$，$k\geqslant 1$。

问题23　方阵A的特征值的最大模称为谱半径r（A）。设A =（a_{ij}）为n 阶非负方阵。证明或否定：

$$r(A)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right)^a\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}\right)^{1-a},\quad 0\leqslant a\leqslant 1$$

问题24　两个同阶矩阵A =（a_{ik}）和B =（b_{ik}）的Sckur 积定义为A * B =（$a_{ik}b_{ik}$）设A和B 都是n 阶正定的 Hermite 方阵，证明或否定：

$$\prod_{i=k}^n\lambda_i(A*B)\geqslant\prod_{i=k}^n\lambda_i(AB^T)$$

其中特征值 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$。

问题25　设f(x) = λx（1－x），0＜x＜1。问当3.3＜λ＜4时，是否有[0，1] 上不减的连续函数g（t），满足

$$g(0)=0,\quad g(1)=1,\quad g(t)=g(x)+1-g(y)$$

此处0＜x＜y＜1是方程“t = λx（1－x）”的两个根。

问题26　记p_n是第n 个素数，证明或否定

$$f(n)=p_n\prod_{p<p_1\cdots p_n}\left(1-\frac{1}{p}\right),\quad (p\text{ 是素数})$$

是严格单调下降的数列。

（下转第99页）

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988年1月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

涉及两个三角形的不等式的简单证明

数学系83级 何明秋 陈 计

安振平在1987年第6期《数学通讯》上提出并证明了如下不等式：设 $\Delta A_1A_2A_3$ 和 $\Delta B_1B_2B_3$ 的边长，半周长和面积分别为a_1, a_2, a_3, p_1， Δ_1 和b_1, b_2, b_3, p_2， Δ_2 则：

$$b_1(p_2-b_1)(p_1-a_2)(p_1-a_3)+b_2(p_2-b_2)(p_1-a_3)(p_1-a_1)+b_3(p_2-b_3)(p_1-a_1)(p_1-a_2)\geqslant 2\Delta_1\Delta_2 \quad (1)$$

等号成立当且仅当 $\Delta A_1A_2A_3\backsim\Delta B_1B_2B_3$ 时。

证明：按下列方式引入六个正数

$$\begin{cases} x=a_2+a_3-a_1, \\ y=a_3+a_1-a_2, \\ z=a_1+a_2-a_3. \end{cases} \qquad \begin{cases} p=b_2+b_3-b_1, \\ q=b_3+b_1-b_2, \\ r=b_1+b_2-b_3. \end{cases}$$

这样不等式(1)与下列代数不等式等价

$$[yzp(q+r)+zxq(r+p)+xyr(p+q)]^2 \geqslant 4xyz(x+y+z)pqr(p+q+r) \quad (2)$$

不妨设$x/p\geqslant y/q\geqslant z/r$,则不难验证

(2)的左边-(2)的右边

$$=[yzp(q+r)-zxq(r+p)+xyr(p-q)]^2+4xypq(xr-zp)(yr-zq)\geqslant 0 \quad (3)$$

并且式中等号当且仅当$x:p=y:q=z:r$,即 $\Delta A_1A_2A_3\backsim\Delta B_1B_2B_3$时成立。

注记：将不等式（1）变形得

$$a_1^2(b_2^2+b_3^2-b_1^2)+a_2^2(b_3^2+b_1^2-b_2^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)-16\Delta_1\Delta_2$$

$$\geqslant b_1b_2b_3\left((b_2+b_3-b_1)\left(\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_3}{b_3}\right)^2+(b_3+b_1-b_2)\left(\frac{a_3}{b_3}-\frac{a_1}{b_1}\right)^2\right.$$

$$\left.+(b_1+b_2-b_3)\left(\frac{a_1}{b_1}-\frac{a_2}{b_2}\right)^2\right) \quad (4)$$

所以安振平的不等式（1）较著名的Pedoe不等式强。

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988年1月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

Neuberg—Pedoe不等式的四边形推广

数学系83级　陈　计　马　援

1891年，J. Neuberg 提出了一个涉及到两个三角形的边长和面积的不等式：

设 $\Delta A_1A_2A_3$ 和 $\Delta B_1B_2B_3$ 的边长分别是 a_1, a_2, a_3 和 b_1, b_2, b_3，它们的面积记为 Δ_1 和 Δ_2，则

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)\geqslant 16\Delta_1\Delta_2 \qquad (1)$$

式中等号当且只当 $\Delta A_1A_2A_3\sim\Delta B_1B_2B_3$ 时成立。

美国知名的几何学家D. Pedoe在1942年证明了这个不等式[1]。1963年，他又在名声显赫的《美国数学月刊》的问题栏中给出了另一种证法[2]。从此这个不等式受到人们的广泛注意，并被Pedoe 本人称为Neuberg－Pedoe不等式[3]。

本文中，我们将提出Neuberg－Pedoe 不等式的四边形推广的两种形式。

定理1　设 $a_i, b_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 分别表示四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 的四边长，F_1 和 F_2 分别表示它们的面积，则有不等式

$$\begin{aligned}&a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\&\quad+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2) \qquad (2)\\&+4\left(\frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}a_1a_2a_3a_4+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2}b_1b_2b_3b_4\right)\\&\geqslant 16F_1F_2,\end{aligned}$$

式中等号当且只当 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 为相似的圆内接四边形时成立。

证明　由Steiner 定理，对给定边长的四边形以有外接圆者的面积为最大。若以 a, b, c, d 表示四边长，S表示它的半周长，则最大面积可由Brahmagupta 公式表为

$$F=[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{1/2} \qquad (3)$$

从而可得

$$16F^2=8abcd+(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(a^4+b^4+c^4+d^4)。\qquad (4)$$

再用Cauchy－Schwartz 不等式和算术一几何平均不等式

$$2\sum a_i^2b_i^2+16F_1F_2$$

$$\leqslant\sqrt{(2\sum a_i^4+16F_1^2)(2\sum b_i^4+16F_2^2)}$$

$$\leqslant\sqrt{[(\sum a_i^2)^2+8\Pi a_i][(\sum b_i^2)^2+8\Pi b_i]}$$

$$=(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)\sqrt{1+\frac{8\Pi a_i}{\sum a_i^2}}\cdot\sqrt{1+\frac{8\Pi b_i}{\sum b_i^2}}$$

$$\leqslant(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)\left(1+\frac{4\Pi a_i}{\sum a_i^2}+\frac{4\Pi b_i}{\sum b_i^2}\right) \tag{5}$$

由此可知

$$(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)-2\sum a_i^2b_i^2+4\left(\frac{\sum b_i^2}{\sum a_i^2}\Pi a_i+\frac{\sum a_i^2}{\sum b_i^2}\Pi b_i\right)\geqslant 16F_1F_2。 \tag{6}$$

这可化为不等式（2）。等号成立条件是$a_1^2:a_2^2:a_3^2:a_4^2:F=b_1^2:b_2^2:b_3^2:b_4^2:F_2$，并且这两个四边形均有外接圆，这表明$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$为相似的圆内接四边形。

证毕。

引理（A·Oppenheim[4]）设两个圆内接四边形的边长分别为a_1,a_2,a_3,a_4和b_1,b_2,b_3,b_4，面积分别是A_1，和A_2，则

$$C_i=\sqrt{a_i^2+b_i^2}\qquad i=1,2,3,4,$$

可以构成四边形，这个四边形的最大面积F_3满足不等式

$$F_3\geqslant F_1+F_2$$

等号成立当且仅当a_1,a_2,a_3,a_4和b_1,b_2,b_3,b_4成比例。

定理2：设a_1,a_2,a_3,a_4与b_1,b_2,b_3,b_4分别表示四边形$A_1A_2A_3A_4$与$B_1B_2B_3B_4$的四边长，F_1与F_2分别表示它们的面积，则有不等式

$$\begin{aligned}&a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\&+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)\\&+4[(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2)(a_3^2+b_3^2)(a_4^2+b_4^2)]^{1/2}\\&-4a_1a_2a_3a_4-4b_1b_2b_3b_4\geqslant 16F_1F_2,\end{aligned}$$

式中等号当且只当四边形$A_1A_2A_3A_4$与$B_1B_2B_3B_4$为相似的圆内接四边形。

证明：不妨设$A_1A_2A_3A_4$与$B_1B_2B_3B_4$均有外接圆。如引理中构造第三个四边形，使之有外接圆，用（4）式计算

$$\begin{aligned}&16F_3^2-16(F_1+F_2)^2\\=&16F_3^2-16F_1^2-16F_2^2-32F_1F_2\\=&8\Pi\sqrt{a_i^2+b_i^2}+(\sum a_i^2+\sum b_i^2)^2-2\sum(a_i^2+b_i^2)^2\\&-[8\Pi a_i+(\sum a_i^2)^2-2\sum a_i^4]-[8\Pi b_i+(\sum b_i^2)^2-2\sum b_i^4]-32F_1F_2\end{aligned}$$

$$=2(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)-4\sum a_i^2 b_i^2+8\Pi\sqrt{a_i^2+b_i^2}-8\Pi a_i-8\Pi b_i-32F_1F_2$$

由引理$F_3 \geqslant F_1+F_2$知（8）成立，并从（7）等号成立的条件即知（8）取等号当且仅当$A_1A_2A_3A_4$与$B_1B_2B_3B_4$为相似的圆内接四边形。

注记：在定理1和2中，当$A_4=A_3$，$B_4=B_3$，四边形蜕化为三角形，不等式（2）和（8）均化为Neuberg－Pedoe不等式。

参考文献

[1] D. Pedoe, An inequality for two triangles, Proceedings of the Cambridge Philosoplical Society, Vol.38(1943), Part 4:397－398.

[2] D. Pedoe. A two－triangle inequality, American Mathematical Monthly, Vol.70(1963), 1012, Problem E1562.

[3] D. Pedoe, Inside－outside the Neuberg－Pedoe inequality. Univ. Beograd. Publ. Eloktrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. No. 544－576 (1976), 95—97.

[4] A. Oppenheim, Inequalities involving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedra. Univ. Beograd. Publ. Elekrotehn, Fak. Ser. Mat. Fiz, No. 496(1974), 257—262.

[5] 彭家贵，常庚哲，再谈匹多不等式，初等数学论丛，第6辑，上海教育出版社编，1983年版，17—25。

（上接第93页）

问题6 所有单位面积的凸五边边形中，求五条对角线所围成的小凸五边形的面积最大者。

问题7 平面任意6点组成的20个三角形中，其最大面积与最小面积的比为u，试求u的最小值。

问题8 单位正方形内的任意一条简单闭曲线，其周长为C，面积为A，试求C/A的最小值。

问题9 球面上五个点，怎样分布时，诸点间所有（直线）距离之积最大？

问题10 证明或否定：单位面积凸五边形内一点及五顶点组成的20个三角形中必有一个面积小于七分之一。

问题11 单位圆内任置七点，必存在三点构成三角形的面积小于三分之一。试给出独立的证明。

问题12 证明或否定：单位面积的三角形内任置七点，必存在三点构成三角形的面积小于十分之一。

问题13 设平面上$3n$($n\geqslant 2$)个圆片中的任意三个不两两相交（切），则是否可从中选出n个圆片，使它们是彼此相离的？

（下转第54页）

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

Pedoe不等式的加强

数学系83级　马　援

本文约定：用a, b, c, △, R和r分别代表$\triangle ABC$的三边边长，面积，外接圆半径和内切圆半径；用a', b', c', $\triangle'$, R'和r'分别代表$\triangle A'B'C'$的三边边长，面积，外接圆半径和内切圆半径。记$H=a'^2(-a^2+b^2+c^2)+b'^2(a^2-b^2+c^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)$。

著名的Pedoe不等式断言：

$$H\geqslant 16\,\Delta\,\Delta' \tag{1}$$

式中等号当且只当$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$时成立。

几十年来，围绕着这个著名不等式，人们进行着广泛的探讨，得出了许多有趣的结论[1]·[8]。特别地，美国杜克大学的L. Carlitz 教授在1973年讨论了将（1）加强成：

$$H\geqslant 8(\Delta^2+\Delta'^2) \tag{2}$$

的可能性，得到了（2）式成立的充要条件。[3]不难看出，保持ΔABC不动，令$\Delta A'B'C'$的三边都趋于0，则H趋于0，而（2）式右边趋于正数$8\Delta^2$因此（2）式不能普遍成立。那么怎样给出（1）式的适当加强呢？中国科学技术大学的彭家贵教授在1984年证明了：[7]

$$H\geqslant 8\left(\frac{a'^2+b'^2+c'^2}{a^2+b^2+c^2}\Delta^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{a'^2+b'^2+c'^2}\Delta'^2\right) \tag{3}$$

式中等号当且只当$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$时成立。

本文将用不同于[7]的方法给出（1）式的更多加强形式。

定理：当（1）$\lambda=(a'^2+b'^2+c'^2)/(a^2+b^2+c^2)$,
（2）$\lambda=(a'+b'+c')^2/(a+b+c)^2$,（3）$\lambda=(a'b'+b'c'+c'a')/(ab+bc+ca)$,
（4）$\lambda=r'^2/r^2$（5）$\lambda=R'r'/Rr$时，

$$H\geqslant 8\left(\lambda\Delta^2+\frac{1}{\lambda}\Delta'^2\right) \tag{4}$$

式中等号当且只当$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$时成立。

为了证明这个定理，我们需要一个引理，它的一部分包含在L. Carlitz的结果之中。

引理：记$A=a^2-a'^2$，$B=b^2-b'^2$，$C=c^2-c'^2$ 若$A\leqslant 0$，$B\geqslant 0$，$C\geqslant 0$则

$$H\geqslant 8(\Delta^2+\Delta'^2) \tag{2}$$

式中等号当且只当$A=0$，$B=C$时成立。

证明：利用海伦公式不难验证

$$2H-16(\Delta^2+\Delta'^2)=-2A(B+C)+A^2+(B-C)^2\geqslant 0$$

式中等号当且只当$A=0$，$B=C$时成立。

定理的证明：

（1）不难看出，（4）式成立与否在对$\Delta A'B'C'$（或ΔABC）进行相似变换时保持不变。因此为证（4）式成立不妨设$\lambda=1$，即$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$此时$A, B, C$不能同时为正或同时为负。不妨设$A, B, C$中有两个非负一个非正（若$A, B, C$中有两个非正一个非负，则交换$\Delta ABC$与$\Delta A'B'C'$）进一步不妨设$A\leqslant 0$，$B\geqslant 0$，$C\geqslant 0$，利用引理（注意$\lambda=1$）即得。

$$\begin{aligned}H&\geqslant 8(\Delta^2+\Delta'^2)\\&=8\left(\lambda\Delta^2+\frac{1}{\lambda}\Delta'^2\right)\end{aligned}$$

进而，当$\lambda=1$时，等号成立的充要条件是：$A=0$，$B=C$，即$a=a'$，$b^2-b'^2=c^2-c'^2$。再利用$a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2$与以上二式联立可解出$a=a'$，$b=b'$，$c=c'$。即在$\lambda=1$的假设下，（4）式等号成立的充要条件是$\Delta ABC\cong\Delta A'B'C'$。而（4）中等号成立与否在对$\Delta ABC$（或$\Delta A'B'C'$）进行相似变换时也是保持不变的。因此（4）式中等号成立的充要条件是$\Delta A'B'C'$和ΔABC在相似变换下能够全等，即$\Delta ABC\backsim\Delta A'B'C'$。

（2）用（1）中的方法可证（4）式成立，分析（1）中的方法可知，为讨论等号成立条件只须证明由

$$\begin{cases}a=a' & (A_1)\\ a+b+c=a'+b'+c' & (A_2)\\ b^2-b'^2=c^2-c'^2 & (A_3)\end{cases}$$

能推导出$b=b'$，$c=c'$

由（A_3）若$b>b'$则$c>c'$从而联合（A_1）可知$a+b+c>a'+b'+c'$与（A_2）矛盾。同理，$b<b'$亦不能成立，故$b=b'$。进而可知$c=c'$。至此情况（2）全部证完。

（3）如（2）只须由

$$\begin{cases}a=a' & (B_1)\\ ab+bc+ca=a'b'+b'c'+c'a' & (B_2)\\ b^2-b'^2=c^2-c'^2 & (B_3)\end{cases}$$

推出$b=b'$，$c=c'$。

由（B_3）若$b>b'$则$c>c'$。结合（B_1）可知$ab+bc+ca>a'b'+b'c'+c'a'$。与（B_2）矛盾，如（2）所示这表明$b=b'$，$c=c'$成立。

（4）利用公式$r=2\Delta/(a+b+c)$可知（4）等价于（2）。

（5）利用$r=2\Delta/(a+b+c)$和$R=abc/4\Delta$可知这相当于$\lambda=(a+b+c)a'b'c'/(a'+b'+c')abc$如（2）只须再证由

$$
\begin{cases}
a=a' & (C_1)\\
(a'+b'+c')/a'b'c'=(a+b+c)/abc & (C_2)\\
b^2-b'^2=c^2-c'^2 & (C_3)
\end{cases}
$$

可推出$b=b'$，$c=c'$

由(C_3) 若$b>b'$，则$c>c'$故$1/b'>1/b$，$1/c'>1/c$，$1/b'c'>1/bc$结合(C_1) 可知$(a'+b'+c')/a'b'c'>(a+b+c)/abc$ 与(C_2) 矛盾，如(2) 这表明$b=b'$，$c=c'$成立。

至此，定理全部证完。

利用本文方法，还可给出其它一些λ值，使得(4) 式成立。但它们或者外形过于复杂（如取 $\lambda=(a'b'c'/abc)^{2/3}$ ）或者等号成立的条件不够简明（如 $\lambda=a'^2/a^2$）本文就不再一一列举了，值得指出的是，取 $\lambda=R'^2/R^2$时(4) 式不能成立，只须取ΔABC为单位圆的内接正三角形， $\Delta A'B'C'$ 为单位圆的内接三角形，且令a'，b'，c'趋于0。这时 H趋于 0，而(4) 式右边趋于正数$8\Delta^2$，故(4) 式不成立。

参　考　文　献

[1] D.Pedoe, An inequality for two triangles, Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 38(1942)397—398.

[2] D.Pedoe, Thinking geometrically, American Mathematical Monthly, 77(1970)711—721.

[3] L.Carlitz, Inequalities for the area of two triangles, American Mathematical Monthly, 80(1973) 910—911.

[4] 常庚哲，Pedoe 定理的复数证明，中学理科教学，1979，2.

[5] 杨路，张景中，Neuberg-Pedoe 不等式的高维推广及应用，数学学报，1981，3.

[6] 高灵，Mathematics Magazine，55(1982) P299.

[7] 彭家贵，Sharpening the Neuberg—Pedoe inequality: I, Crux Mathematicorum, 10(1984) 68—69.

[8] 马援，Pedoe不等式的推广，数学通讯，1987，7。

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

Garfunkel—Bankoff不等式的一个证明

陈计　王振

在 ΔABC 中的两个不等式：

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 1, \qquad (1)$$

及

$$2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant 1, \qquad (2)$$

第（1）式是熟知的，第二个也等价于著名的不等式

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8} \qquad (2')$$

1983年，Jack Garfunkel 曾在《Crux Mathematicorum》上问[1]，是否有较强的不等式：

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}\geqslant 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \qquad (3)$$

1984年，Leon Bankoff 指出上述不等式等价于O. Kooi 早年的一个不等式[2]：

$$R(4R+r)^2\geqslant 2s^2(2R-r) \qquad (4)$$

其中R,r,s 即为通常的意义。

我们在这里给出Garfunfel－Bankoff 不等式的一个代数证法。

证明：根据三角形中的恒等式

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)},\ \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

再引入三个正数

$$\begin{cases} b+c-a=x, \\ c+a-b=y, \\ a+b-c=z; \end{cases} \text{或} \begin{cases} a=(x+y)/2, \\ b=(z+x)/2, \\ c=(x+y)/2, \end{cases}$$

将不等式（3）等价变形成

$$\frac{yz}{(x+y+z)x}+\frac{zy}{(x+y+z)y}+\frac{xy}{(x+y+z)z}$$

$$\geqslant 2-\frac{8xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}\text{。} \qquad (5)$$

不妨设$x\geqslant y\geqslant z$，将上式移项，通分并配方得：

$$\frac{x^2(y-z)^2[(x^2-yz)(y+z)+x(y^2+z^2)]+y^2z^2(y+z)(x-y)(x-z)}{(x+y+z)xyz(y+z)(z+x)(x+y)}\geqslant 0 \qquad (6)$$

上式是显然成立的，取等号当且仅当$x=y=z$或$x>y=z\to 0$即$a=b=c$或$c=b>a\to 0$也即$A=B=C=60^\circ$或$B=C\to 90^\circ$，$A\to 0^\circ$时。

作者们对常庚哲老师提供资料表示感谢!

参　考　文　献

[1] Problem 825(Propesed by J. Garfunkel, Solution by L. Bankoff), Crux Mathematicorum, Vol. 10(1984), No. 5: P. 168.

[2] O. Bottema et al., Geometric Inequalities, Wolter-Noordhoff, Groningen, 1969, P. 50。

(上接第49页)

问题14 三角形ABC周界三等分点P，Q，R构成一个三角形，证明或否定：

$$3r_{\triangle PQR}>r_{\triangle ABC},$$ 其中r表示内切圆半径。

问题15 设a,b,c为三角形ABC的三边长，r和R分别表示它的内切圆和外接圆的半径。求使下式成立的所有实数k：

$$2\sqrt{3}\,r\leqslant\left(\frac{a^k+b^k+c^k}{3}\right)^{1/k}\leqslant\sqrt{3}\,R$$

问题16已知三角形ABC的三边长，设其内一点到各顶点和各边的距离分别为x,y,z和p,q,r，试求$(x+y+z)/(p+q+r)$的最小值。

问题17 三角形ABC内的点P到各顶点的距离分别为x,y,z，$\angle BPC$，$\angle CPA$，$\angle APB$的角平分线长分别为μ，ν，ω，证明或否定：

$$x^k+y^k+z^k\geqslant 2^k(\mu^k+\nu^k+\omega^k),\ 0\leqslant k\leqslant 1\text{。}$$

问题18 设凸六边形的边长为$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_6$，其面积为A，证明或否定：

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 6}a_ia_j\geqslant\frac{10}{\sqrt{3}}A$$

问题19 证明或否定：面体内的任意一点到各顶点的距离之和大于该点到各棱的距离之和。

问题20 设圆外切凸n边形的边长为$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$，证明或否定：：

$$a_1^2a_2(a_1-a_2)+a_2^2a_3(a_2-a_3)+\cdots+a_{n-1}^2a_n(a_{n-1}-a_n)+a_n^2a_1(a_n-a_1)\geqslant 0\text{。}$$

(下转第45页)

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

AN INEQUALITY INVOLNG AREAS OF TRIANGLES

JI CHEN AND CHENG-HUI LUO

Departement of Mathematics,

University of Science and Technology of China,
Hefei, Anhui, The People's Republic of China.

The perimeter of ΔABC is divided into three equal parts by the three points P, Q and R. We will show that.

$$S_{\triangle PQR} > \frac{2}{9} S_{\triangle ABC} \quad , \qquad (1)$$

and the constant $\frac{2}{9}$ is best possible.

If two points of P, Q and R lie on the same edge, Situating as in figure 1 without loss of generality, we know the minimum of $S_{\triangle R_1Q_1R_1}$ is obtained in figure 2.

$$P_2Q_2 = \frac{1}{3}(a+b+c), \quad AP_2 = \frac{2}{3}(2c-a-b), \quad AR_2 = \frac{1}{3}(2a+2b+c).$$

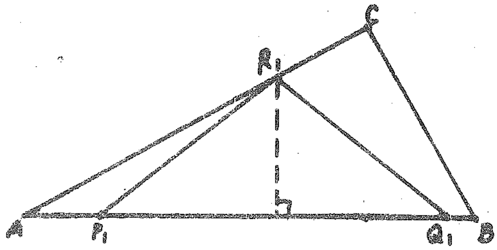


Fig 1

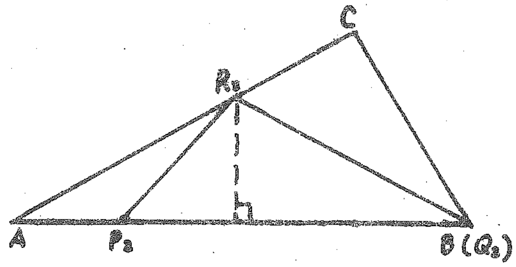


Fig 2

$$\frac{S_{\triangle P_2Q_2R_2}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{P_2Q_2}{AB} \cdot \frac{AR_2}{AC} = \frac{a+b+c}{3c} \cdot \frac{2a+2b-c}{3b} > \frac{2b}{3c} \cdot \frac{c}{3b} = \frac{2}{9}$$

If P, Q and R lie on three edges situating as in figure 3, we denote

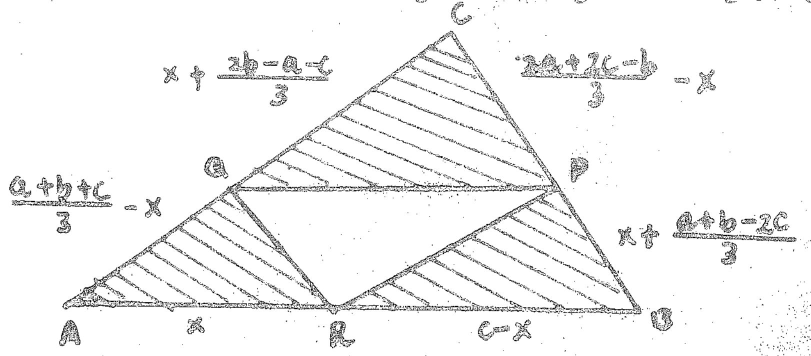


Fig 3

$x = AR$, $S_1 =$ *the area of the shadow*.

Using $\sin A = \frac{a}{2R}$ *and* $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$, *we obtain*

$$\frac{S_1}{S_{\triangle ABC}} = \frac{a.AQ.AR + b.BR.BP + c.CP.CQ}{abc}$$

(3) $= \frac{S(x)}{abc}$. *After simplifying* $S(x)$, *we get*

(4) $S(x) = -(a+b+c)x^2 + \frac{1}{3}(a+b+c)(a-b+3c)x + \frac{1}{9}c[(2b-a-c)(2a+$

$+2c-b) + 3b(a+b-2c)] < (a+b+c)[\frac{1}{6}(a-b+3c)]^2$

$+\frac{1}{9}c[(2b-a-c)(2a+2c-b) + 3b(a+b-2c)]$

$= \frac{7}{9}abc - \frac{1}{36}(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) < \frac{7}{9}abc.$

Hence

$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}} = 1 - \frac{S_1}{S_{\triangle ABC}} > 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9} \qquad (5)$$

At last, from (2) or (4), we know that the constant $\frac{2}{9}$ *can* be got iff ΔABC degenerates to a straight line.

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

Neuberg—Pedoe不等式的多边形推广

中国科学技术大学　陈计　王振

1881年，J. Neuberg 提出了一个涉及到两个三角形的边长和面积的不等式：

设$\triangle A_1A_2A_3$和$\triangle B_1B_2B_3$的边长分别是a_1，a_2，a_3和b_1，b_2，b_3，它们的面积记为$\triangle_1$和$\triangle_2$，则

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2)\geqslant 16\triangle_1\triangle_2, \qquad (1)$$

式中等号当且仅当$\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$时成立。

美国几何学家D. Pedoe 在1942年证明了这个不等式[1]。1963年，他又在《美国数学月刊》的问题栏中给出了另一种证法[2]。从此这个不等式为人们注意，并被Pedoe 本人称为Neuberg－Pedoe不等式[3]。几十年来，人们围绕着这个不等式的证法、加强和推广进行了细致的讨论，但如何将它推广到多边形，至今仍是一个没有解决好了的问题。

本文中，我们将提出Neuberg－Pedoe不等式的多边形推广的两种形式，并对四边形都作了解决。

猜想1　设两个圆外切n边形的边长分别是a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n，面积分别是S_1和S_2，则

$$\begin{aligned}&a_1^2(-b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+\cdots+b_n^2)\\&+\cdots\cdots+a_n^2(b_1^2++b_2^2+\cdots-b_n^2)\\&\geqslant\frac{16(n-2)}{n}tg^2\frac{\pi}{n}S_1S_2. \qquad (2)\end{aligned}$$

猜想2　设任意两个面积是S_1和S_2，边长是a_1，a_2，…，a_n；b_1，b_2，…，b_n的n边形，则

$$\begin{aligned}&a_1^2\left(-\frac{2n-3}{n^2-3n+3}b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2\right)+a_2^2\left(b_1^2-\frac{2n-3}{n^2-3n+3}b_2^2+\cdots+b_n^2\right)\\&+\cdots\cdots+a_n^2\left(b_1^2+b_2^2+\cdots-\frac{2n-3}{n^2-3n+3}b_n^2\right)\\&\geqslant\frac{16(n-2)^2}{n^2-3n+3}tg^2\frac{\pi}{n}S_1S_2. \qquad (3)\end{aligned}$$

下面，我们对$n=4$证明猜想1和2。

定理 1　设a_i，b_i（$1\leqslant i\leqslant 4$）分别表示两个圆外切四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$的四边长，F_1和F_2分别表示它们的面积，则有不等式：

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2-b_3^2+b_4^2)$$
$$+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-b_4^2)\geqslant 8F_1F_2, \qquad (4)$$

式中等号当且只当$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$为相似的圆内接四边形时成立。

证明　由Steiner定理，对给定边长的四边形，以有外接圆者面积为最大。因此，不妨设$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$均有外接圆。

若以a，b，c，d表示$ABCD$的四边长，s表示它的半周长，则最大面积可表为

$$F=[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]^{\frac{1}{2}} \qquad (5)$$

从而可得

$$16F^2=8abcd+(a^2+b^2+c^2+d^2)$$
$$-2(a^4+b^4+c^4+d^4) \qquad (6)$$

又当四边形$ABCD$内切于圆时，$a+b=c+d$，所以由（5）可知它的最大面积F为四边长乘积的平方根。再由（6）得

$$8F^2=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-2(a^4+b^4+c^4+d^4) \qquad (7)$$

用Cauchy－Schwartz不等式可得

$$2\sum a_i^2b_i^2+8F_1F_2$$
$$\leqslant\sqrt{(2\sum a_i^4+8F_1^2)(2\sum b_i^4+8F_2)}$$
$$=(\sum a_i^2)(\sum b_i^2) \qquad (8)$$

由此可知

$$(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)-2\sum a_i^2b_i^2\geqslant 8F_1F_2 \qquad (9)$$

这可化为不等式(4)。等号成立的条件是$a_1^2:a_2^2:a_3^2:a_4^2:F_1=b_1^2:b_2^2:b_3^2:b_4^2:F_2$，并且两个四边形均有外接圆；这表明四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$为相似的圆的内接四边形。

证毕。

引理　若a，b，c，d为四边形$ABCD$的四边长，则

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-4(a^4+b^4+c^4+d^4)\geqslant 32abcd, \qquad (10)$$

式中等号当且只当四边形$ABCD$为菱形时成立。

证明　不妨设$a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$，定义函数

$$f(d)=3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2-4(a^4+b^4+c^4+d^4)-32abcd \qquad (11)$$

则

$$f'(d)=12(a^2+b^2+c^2)d-4d^3-32abc,\tag{12}$$

$$f''(d)=12(a^2+b^2+c^2-d^2).\tag{13}$$

显然，当$\sqrt{a^2+b^2+c^2}<d<a+b+c$时，$f''(d)<0$；当$c\leqslant d\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$时，$f''(d)\geqslant 0$．又由于

$$f'(c)=12(a-b)^2c+8(c^2-ab)c\geqslant 0,\tag{14}$$

因此，当$d\in[c,\sqrt{a^2+b^2+c^2}]$时，$f'(d)\geqslant 0$。

所以，函数$f(d)$在$[c,\sqrt{a^2+b^2+c^2}]$上单调上升；在$(\sqrt{a^2+b^2+c^2},a+b+c)$上严格下凸。又

$$\begin{aligned}f(a+b+c)&=3[a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2]-4[a^4+b^4+c^4+(a+b+c)^4]\\&\quad-32abcd(a+b+c)\\&=4(a^4+b^4+c^4)+8(a^3b+a^3c+b^3c+b^3a+c^3a+c^3b)\\&\quad+12(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-32abc(a+b+c)\\&=2[(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(a^2-b^2)^2]\\&\quad+8[bc(b-c)^2+ca(c-a)^2+ab(a-b)^2]\\&\quad+16[a^2(b-c)^2+b^2(c-a)^2+c^2(a-b)^2]\\&\geqslant 0,\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}f(c)&=3(a^2+b^2+2c^2)^2-4(a^4+b^4+2c^4)-32abc^2\\&=-a^4-b^4+4c^4+12b^2c^2+12c^2a^2+6a^2b^2-32abc^2\\&=4(c^2-a^2)(c^2-b^2)+2(8c^2-a^2-b^2)(a-b)^2+(a-b)^4\\&\geqslant 0.\end{aligned}\tag{16}$$

因此，$f(d)\geqslant 0$。并且从上述过程容易看出（10）式中取等号当且仅当$a=b=c=d$。

证毕。

定理 2 设a_i，b_i（$1\leqslant i\leqslant 4$）分别表示四边形$A_1A_2A_3A_4$和$B_1B_2B_3B_4$的四边长，F_1和F_2分别表示它们的面积，则有不等式

$$\begin{aligned}&a_1^2(-\frac{5}{7}b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)+a_2^2(b_1^2-\frac{5}{7}b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\&+a_3^2(b_1^2+b_2^2-\frac{5}{7}b_3^2+b_4^2)+a_4^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2-\frac{5}{7}b_4^2)\\&\geqslant\frac{64}{7}F_1F_2.\end{aligned}\tag{17}$$

式中等号成立当且仅当四边形$A_1A_2A_3A_4$和四边形$B_1B_2B_3B_4$均为正方形。

证明　将（6）与（10）联立，消去$abcd$项，得到

$$12(a^4+b^4+c^4+d^4)+64F^2\leqslant 7(a^2+b^2+c^2+d^2)^2, \tag{18}$$

再用Cauchy－Schwartz不等式

$$\begin{aligned}&12\sum a_i^2b_i^2+64F_1F_2\\ &\leqslant\sqrt{(12\sum a_i^4+64F_1^2)(12\sum b_i^4+64F_2^2)}\\ &\leqslant 7(\sum a_i^2)(\sum b_i^2),\end{aligned} \tag{19}$$

因此

$$\sum a_i^2b_i^2-\frac{12}{7}\sum a_i^2b_i^2\geqslant\frac{64}{7}F_1F_2 \tag{20}$$

这可化为不等式（17）。

由（10）式取等号的条件$a=b=c=d$，可知（17）式等号成立当且只当两个四边形同时为正方形。

证毕。

参　考　文　献

[1] D. Pedoe, An inequality for two triangles, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 38(1943), Part 4; 397－398.

[2] D. Pedoe, A two-triangle inequality, Amer. Math. Monthly, Vol. 70 (1963), 1012, Problem E 1562.

[3] D. Pedoe, Inside-outside, the Neuberg-Pedoe inequality, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 544－576(1976), 95－97.

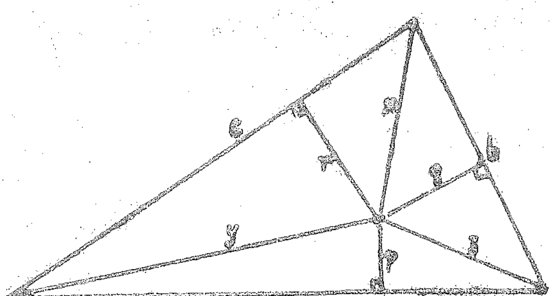
第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988年1月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

关于Erdös—Mordell不等式的指数推广

数学系83级 李广兴 陈 计

设O是三角形T内的任意一点。如图所示，x,y,z和p,q,r是从O到顶点和和边的距离，则

$$x+y+z\geqslant 2(p+q+r) \quad (1)$$



式中等号成立当且仅当T为正三角形，O是它的中心。

这是*P. Erdös*在1935年猜测的一个几何不等式。1937年，*L. J. Mordell*[1]给出了这个不等式的一个证明。

1958年，*A. Florian*[2]证明了：当$0<k<1$时，

$$x^k+y^k+z^k\geqslant 2^k(p^k+q^k+r^k)。\quad (2)$$

等号成立条件同上。当$k>1$时，

$$x^k+y^k+z^k>2(p^k+q^k+r^k) \quad (3)$$

1961年，*A. Oppenheim*[3]指出：当$-1\leqslant k<0$时，

$$x^k+y^k+z^k\leqslant 2^k(p^k+q^k+r^k), \quad (4)$$

当$k<-1$时，

$$p^k+q^k+r^k>2(x^k+y^k+z^k)。\quad (5)$$

事实上，*Oppenheim*证明了如下的原理：包含x,y,z,p,q,r的齐次不等式（或等式），经置换

$$R:\quad (x,y,z,p,q,r)\longrightarrow(p^{-1},q^{-1},r^{-1},x^{-1},y^{-1},z^{-1})$$

后，仍然成立。

从而可知：(2)与(4)，(3)与(5)是互相等价的。

1987年，田隆岗[4]对自然数k加强了不等式(3)：

$$(6)\qquad x^k+y^k+z^k \geqslant 2(p^k+q^k+r^k)+6(2^{k-1}-1)(\sqrt[3]{pqr})^k$$

当 $k=1$ 时，上式即为(1)；进一步，对于任意大于1的实数 k，(6)是否成立？

本文中，我们证明了(6)对实数 $k\geqslant 2$ 是成立的。

引理　设 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$k\geqslant 2$，则

$$(x+y)^k \geqslant x^k+y^k+(2^k-2)(\sqrt{xy})^k, \tag{7}$$

等号成立当且仅当 $k=2$ 或 $x=y$ 时。

证明，显然当 $k=2$ 或 $x=y$ 时，(7)为等式，下设 $k>2$, $x<y$，并令 $x/(x+y)=t$，则 $y/(x+y)=1-t$。于是(7)等价于

$$1>t^k+(1-t)^k+(2^k-2)\left[\sqrt{t(1-t)}\right]^k。 \tag{8}$$

其中 $0<t<\frac{1}{2}$。令

$$f(t)=\frac{1-t^k-(1-t)^k}{(t-t^2)^{k-2}}$$

$$f(t)=\frac{k}{2}(t-t^2)^{-\frac{k}{2}-1}[(1-t)^k-t^k+(2t-1)]。$$

再令

$$g(t)=(1-t)^k-t^k+(2t-1)$$

则

$$g''(t)=k(k-1)[(1-t)^{k-2}-t^{k-2}]>0。$$

又因为 $g(0)=g(\frac{1}{2})=0$，所以 $g(t)<0$，即有 $f'(t)<0$；

再因为 $f(\frac{1}{2})=2^k-2$，所以 $f(t)>2^k-2$，即有(8)成立，于是(7)成立。

证毕。

现在我们在 $k\geqslant 2$ 时证明(6)：利用已知的结果[4]

$$ax\geqslant cq+br,\quad by\geqslant ar+cp,\quad cz\geqslant bp+aq \tag{9}$$

以及引理和算术—几何平均不等式

$$\begin{aligned}
&x^k+y^k+z^k\\
\geqslant&\left(\frac{c}{a}q+\frac{b}{a}r\right)^k+\left(\frac{a}{b}r+\frac{c}{b}p\right)^k+\left(\frac{b}{c}p+\frac{a}{c}q\right)^k\\
\geqslant&\left(\frac{c}{a}q\right)^k+\left(\frac{b}{a}r\right)^k+(2^k-2)\left(\frac{bc}{a^2}qr\right)^{k/2}\\
&+\left(\frac{a}{b}r\right)^k+\left(\frac{c}{b}p\right)^k+(2^k-2)\left(\frac{ca}{b^2}rp\right)^{k/2}\\
&+\left(\frac{b}{c}p\right)^k+\left(\frac{a}{c}p\right)^k+(2^k-2)\left(\frac{ab}{c^2}pq\right)^{k/2}
\end{aligned}$$

$$=\left[\left(\frac{b}{c}\right)^k+\left(\frac{c}{b}\right)^k\right]p^k+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^k+\left(\frac{a}{c}\right)^k\right]q^k+\left[\left(\frac{a}{b}\right)^k+\left(\frac{b}{a}\right)^k\right]r^k$$

$$+(2^k-2)\left[\left(\frac{bc}{a^2}qr\right)^{k/2}+\left(\frac{ca}{b^2}rp\right)^{k/2}+\left(\frac{ab}{c^2}pq\right)^{k/2}\right]$$

$$\geqslant 2(p^k+q^k+r^k)+6(2^{k-1}-1)(pqr)^{k/3}$$

证毕。

用置换 R 于(6)，得：当 $k\leqslant -2$ 时，

$$p^k+q^k+r^k\geqslant 2(x^k+y^k+z^k)+6(2^{k-1}-1)(\sqrt[3]{xyz})^k \text{。} \tag{10}$$

综上所述，*Erdös—Mordell* 不等式的幂指数推广的形式似乎应为如下形式：

在 $0<|k|\leqslant 1$ 时，

$$(x^k+y^k+z^k)^{1/k}\geqslant 2(p^k+q^k+r^k)^{1/k}\text{；} \tag{11}$$

当 $k\to 0$ 时，得

$$xyz\geqslant 8pqr \tag{12}$$

在 $k>1$ 时，

$$x^k+y^k+z^k\geqslant 2(p^k+q^k+r^k)+6(2^{k-1}-1)(pqr)^{k/3} \tag{13}$$

在 $k<-1$ 时，

$$p^k+q^k+r^k\geqslant 2(x^k+y^k+z^k)+6(2^{-k-1}-1)(xyz)^{k/3} \tag{14}$$

其中，当 $1<|k|<2$ 时仍为猜想。

参 考 文 献

[1] Advanced Problem 3740, Amer. Math. Monthly, 44 (1937), 252—254

[2] A. Florian, Zu einen Satz von P. Erdös, Elem. Math, 13(1958), 55—58

[3] A. Oppenheim, The Erdös inequality and other inequalities for a triangle, Amer. Math Monthly, 68 (1961), 226—230

[4] 田隆岗，对一个不等式的推广，湖南数学通讯，1987年第4期，第42—43页

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol 4, No. 1
1988 年 1 月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

石钟慈教授对非协调有限元研究获重大进展

彭 德 建

我校石钟慈教授所做的非协调元的收敛性研究成果，受到了国际工程学及计算数学界的普遍重视与高度评价。西方工程界有限元方法的创始人阿吉利斯认为，石教授的成果发展了有限元法，处在国际最前列。学部委员、著名数学家冯康说，这是一项有深刻理论价值、紧密联系实际的优秀成果。石钟慈的这项成果和其它一系列的工作已使我国非协调元研究跃居国际领先地位，这一成果已荣获中科院1987年科技进步一等奖，石钟慈教授被国家科委授予国家级有突出贡献的科技专家。

有限元法是60年代发展起来的一种求解偏微分方程的系统化高效率的数值计算方法。它特别适用于物理上、几何上复杂的结构，普遍用来设计水坝、桥梁、飞机、汽车、船舶、电机等。

常用的有限元法分协调元和非协调元两大类。后者在实际应用中方法结构简单、计算量少、精度高、而且使用传统的位移法框架，可直接纳入各种大型有限元计算程序包系统，因而一直受到工程界的重视和应用。但是，它在理论上不成熟，可靠性不能确保，担任中国科大数学系主任、中国科大计算中心主任、中国科学院计算中心主任的石钟慈教授从80年代起致力于这一领域的研究，先后在世界第一流的计算数学以及科学与工程计算的学术刊物上发表了10余篇论文，系统地阐述了他取得的重要成果，引起了国际工程界和计算数学界的高度重视。其主要贡献是：

一、否定了判别非协调元收敛性的“小片检验”准则的必要性。

二、首次发现了非协调元的一种奇特的收敛现象，即近似解有极限，但极限不是问题的真解。

三、证明了著名的ZienKiewicz 板元对种网格的不收敛性。

四、证明了边界惩罚非协调元最优阶的误差估计。

此外，石钟慈还根据数学原理并结合工程人员使用习惯，提出一个简单而实用的判断非协调元收敛性的F－E－M检查。并用高深的数学方法严密论证了西德阿吉利斯提出的一种效率很高的非协调元模型的合理性和有效性，使之建立于牢固的理论基础之上。理论和实践的结合产生了巨大的物质力量，这一研究成果使这种高效的有限元法投入了通用的程序系统被广大用户使用。

石钟慈的研究成果，曾在世界上30多所大学作了学术讲演。

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

涉及两个单形的一类不等式

数学系83级　陈计　马援

本文中，我们证明了下列主要结果：

定理　设$\sum_A$和$\sum_B$为n维Euclid 空间$E^n(n>2)$中两个单形，它们的棱长分别是a_i, b_i, $i=1,2,\cdots,C_{n+1}^2$，它们的体积分别是V_1和V_2，则当$\theta\in(0,1]$时有不等式：

$$\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}(n+1)} a_i^{2\theta}\left(\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}(n+1)} b_j^{2\theta}-nb_i^{2\theta}\right)$$

$$\geqslant 2^{2\theta-2}n^2(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{\frac{2\theta}{n}}V_1^{\frac{2\theta}{n}}V_2^{\frac{2\theta}{n}},\qquad(1)$$

当$n>2$或$\theta\neq1$时，式中等号当且仅当$\sum_A$和$\sum_B$为正则单形时成立；当$n=2$，$\theta=1$时，上式是Neuberg-Pedoe不等式，等号成立的条件是两个三角形相似。

为此，我们需要如下几个引理。

引理1　设a，b，c和$\triangle$分别表示$\triangle ABC$的三边和面积，则当$0<\theta<1$时，有不等式

$$3\left(\frac{16\triangle^2}{3}\right)^\theta\leqslant 2b^{2\theta}c^{2\theta}+2c^{2\theta}a^{2\theta}+2a^{2\theta}b^{2\theta}-a^{4\theta}-b^{4\theta}-c^{4\theta}\qquad(2)$$

等号成立当且只当$\triangle ABC$为正三角形。

引理2　在n维单形的体积V及其诸$n-1$维单形边界的体积V_i，$i=1,2,\cdots,n+1$之间有不等式：

$$V\leqslant\sqrt{n+1}\left[\frac{(n-1)!^2}{n^{3n-2}}\right]^{\frac{1}{2(n-2)}}\left(\prod_{i=1}^{n+1}V_i\right)^{\frac{n}{n^2-1}},\qquad(3)$$

且当该单形为正则时等号成立。

引理3　在$n(>2)$维单形的体积V及其诸三角形侧面积$\triangle_i$，$i=1,2,\cdots,C_{n+1}^3$之间有不等式：

$$\prod_{i=1}^{\frac{n}{6}(n^2-1)} \triangle_i \geqslant \left[\frac{3^{\frac{n}{2}}(n!)^2}{(n+1)2^n}\right]^{\frac{n^2-1}{6}} V^{\frac{n^2-1}{3}}, \tag{4}$$

且当该单形为正则时等号成立。

引理4　在 $n\ (>2)$ 维单形的体积和它诸棱长 a_i，$i=1,2,\cdots,C_{n+1}^2$ 之间，当 $0<\theta\leqslant 1$ 时有不等式：

$$2\sum_{1<i<j<\frac{n}{2}(n+1)} a_i^{2\theta} a_j^{2\theta} - \frac{(n+2)(n-1)}{4}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}(n+1)} a_i^{4\theta}$$

$$\geqslant 2^{2\theta-3} n(n+2)(n^2-1)\left[\frac{(n!)^2}{n+1}\right]^{\frac{2\theta}{n}} V^{\frac{4\theta}{n}}, \tag{5}$$

等号成立当且只当该单形为正则。

参　考　文　献

[1] A. Oppenheim, Inequalities involving elements of triangles, quadrilaterals or tetrahedra, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz, 496(1974), 257-263.

[2] 张景中，杨路，关于质点组的一类几何不等式，中国科学技术大学学报，11 (1981)，2：1－8。

[3] 苏化明，关于单形的两个不等式，科学通报，1987年第1期，1－3。

[4] Yang Lu and Zhang Jing-Zhong, A generalization to several dimensions of the Neuberg-Pedoe inequality, with applications, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 27(1983), 203-214.

凸四边形内五点问题

数学系　王振　马援

本文中，我们建立了下列

定理　单位面积的凸四边形内五个点组成之诸三角形中，至少有一个三角形的面积不超过 $(2+2\sqrt{2})^{-1}$，并且这个上界是不可改进的。

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988年1月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

我的第一篇论文

中国科学技术大学理学博士　李尚志

“万事开头难”，这句话用来形容作论文，恐怕是很恰当的。至少我在刚开始念研究生的时候就是这样，觉得写论文很神秘，担心在毕业时写不出论文来怎么办？写论文就是要解决人家没能解决的问题，世上那么多人都没有能解决，我怎么能解决呢？

念研究生刚一年，1979年暑期，我参加了一次群论学术会议。在会上，我的指导教师曾肯成教授报告了他在有限单群子群格方面的研究成果。这个问题早就是群论专家们所关心的，1939年就由*R.Baer* 提出猜想：有限非交换单群的群论结构能够被它的子群之间的包含关系完全决定。许多人研究过这一问题，也有一些进展，但一直没有能够完全解决。一般来说，悬而未决的问题，很多人啃过而没有啃动的硬骨头，当然很难。但是，数学的发展不断提供新的更强有力的数学工具，又给解决这些问题带来新的希望。关键就在于你能否及时敏锐地看出这一转机，善于运用新的成果去解决难题。曾肯成教授正是注意到当时有限单群分类已趋于完成，决定对已知的有限单群逐一验证*Baer* 猜想。他成功地对两类典型群：线性群和辛群作出了验证，希望我在此基础上继续对另外两类典型群：酉群和正交群作出验证，如能对一般的李型单群作出验证就更好。在学习了有关的基础知识之后，我尝试着进攻这一问题。从小学到大学，作过多少习题，经过多少考试，但这是第一次作没有现成答案的题，能否成功，心中无数，但不管怎样，总得不遗余力地去拼一拼。首先是仔细研读曾肯成教授的文章，先把文章中每一步看懂，还要细细体会他的思路，掌握他的思想方法。我发现，他作线性群和辛群的子群格问题，是靠在子群体系上重建空间结构，或者说，是让线性空间在典型群的子群体系上“借尸还魂”，让子群来扮演“直线”，用包含关系来重新表演出向量空间的有关性质。我试图把这一套方法依样画葫芦地照搬到酉群上去，结果有一个关键地方怎么也搬不过去：曾老师作辛群，遇到的向量都是“迷向”的（或者说：“长度”为0），比较好处理，而我作酉群，遇到的向量可就五花八门了，既有“迷向”的，也有非迷向，难对付的就是那些由非迷向向量组成的直线。为了对付这些非迷向线，我真是冥思苦索。费尽心机，却仍无进展。当然，出现这样的困难也很正常的。要是老师的方法可以现成的照搬过来，他就已经把这个问题作出来了，还要我来作什么呢？找到难点，找到症结，就可以集中力量去对付，这也是走向成功的第一步。有一次，我又一次看了看曾老师的两篇文章，注意到他在作线性群时要讨论1维的和$n-1$维子空间的定驻子群而在作辛群时就只讨论

1维的，不讨论 $n-1$ 维的。为什么有这样的差别？我想了一下，这是因为，在辛空间中 $n-1$ 维子空间的正交补是一维的，二者的定驻子群是同一个，不需另外考虑。这个道理虽然简单，却促使我产生一个新的想法：既然在作酉群的时候非迷向线不好处理，那么什么不可以用它的正交补——$n-1$ 维子空间来代替它呢？要知道，$n-1$ 维子空间里的迷向向量可是不少呢！正是这一简单的想法使原来一筹莫展的局面一下子就根本改观了，难题迎刃而解了。当然，在具体细节上，还有很多小的难关，一些特殊情况还有待特殊处理，但这时我已是满怀信心，不再心中无数。经过一番苦战，我的第一篇《关于有限域上射影特殊酉群的子群格》终于胜利完成了。

在作这篇论文的过程中，为了处理3维酉群这一特殊情况，我也费了一些周折，最后是研究了3维酉群的一些极大子群才算过关。恰好在这时，我读到1979年美国一次群论会议上 *O'Nan*教授关于极大子群的一份报告，论述极大子群研究的重要性，并列举了在这方面一些悬而未决的问题。我觉得我在研究酉群的极大子群时所得到的方法在这里可以找到用处，试了试，居然大获成功，一下子就得到一批新的结果。我抓紧战机穷追猛打，扩大战果，典型群极大子群的文章一篇又一篇出来了，而原先关讨酉群的子群格的文章降格成了关于极大子群的文章中的一个小小的推论。随后，我在读《李型单群》一书时发现书中对J.Tits的 Building 理论作了一点简单的介绍，我马上觉察到这可以用来解决子群格问题。我让“Building”这种几何结构在李型单群的子群格上“借尸还魂”，成功地对李型单群验证了 *Baer* 猜想，后来又在有限单群分类定理的基础上导致了 Baer 猜想的完全获证。至此，原先对酉群所作的验证就失去单独存在的价值，而被完全“吃掉”了。

我的第一篇论文，既没有发表，也没有成为我的研究生毕业论文。和我以后的文章相比，它在内容上已失去存在的价值，在论证中也不乏笨拙、幼稚之处。但它不应因相形见绌而感到羞愧，因为，假如没有它，也就没有后来的一切。

（上接第70页）

弄清问题的发生、发展和演变过程，也才能弄清问题的现状和有待于进一步研究的方向同时，只有认真阅读前人的成果，才能吸取前人的智慧，学习前人的方法，使自己不至于“白手起家”，而是立足于“巨人的肩上”，“天才是99%的汗水和1%的灵感”，可以说没有辛劳就没有灵感，更谈不到创新！要想突破前人的成果，就应当拿出高于前人的“绝招”，但“绝招”不会从天而降，它只会产生在对前人工作的分析比较批判和提高的基础上，它只会成熟在辛劳的汗水之中。几年来，我们在导师的教导下，懂得了这些道理，对我们所要研讨的每一个专题，我们都查找了数个国家十数种杂志上的数十篇论文资料，进行了详细的摘录和分析整理工作，并且精读熟读了其中的关键部分，有些并读到能背诵的地步。正是这些努力，这些汗水，赋予了我们最终解决问题所需要的灵感，为我们赢得了一个个的研究成果，我们正是从这些不辞辛劳的勘踏中，尝到了“踏花归来香满蹄”的乐趣。

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988年1月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

几点体会

中国科技大学数学系理学博士　苏　淳

我的底子并不厚。十年动乱开始的时候，才刚刚读完大学二年级；以后长期从事中学教育，虽然也读点书，但时断时续，并无一定的目标，只是在1978年10月，进入中国科技大学读研究生之后，才先后在两位导师殷涌泉教授和陈希孺教授的指导下，获得了疾足长进的机会，跑步越过了积累知识的过程，到达了科研第一线，并在导师的指导与帮助下，初步学会了做科研工作，回顾自己的历程，我有这么几点体会：

一、要摆好学习基础知识与从事科学研究的关系

在没有接触科技文献，着手研究专题之前，自己总有个想法，认为自己的底子太薄，这也没学，那也不懂，应当好好读上一段时间基础课，把底子打厚实了再上科研，这种想法当然与导师的安排很不相符。导师的观点是：书要读好，关键的书还要读精读活；但不能样样基础课都去补，也不需要把时间过久地消耗在课堂讲授上，从一入学起，导师就指定了两本书要我们认真地阅读和系统地掌握：一本是Loeve的《概率论》，一本是Петров的《独立随机变量的和》，这是两本概率论极限理论中的经典著作，是架在大学本科概率论教程和当代极限理论前沿之间的两座桥梁，导师开玩笑地把它们叫做“饭碗”。一年中，我们把主要精力集中在读这两本书上，另外也适量选修了复变函数，泛函分析以及自学了点集拓扑等大学课程。事实证明，这种安排完全合乎科学道理。一年过后，我们几个师兄弟都较好地掌握了从事概率论极限理论和数理统计大样本理论研究所需的较为系统的知识，陆续抵达科研前沿，相继写出了各自的处女作，先后在《科学通报》上发表了。紧接着，导师就布置我们从事专题调研，让我们独立地阅读一个个的专题文献，并在第三学期为我们组织讨论班，报告前人成果，研讨未决课题，把我们推上了科研第一线。

回顾这段历程，我有一个突出的体会·就是在由学习前人成果到转入从事科研工作之间虽然有一条鸿沟，但并不是很难跨越，问题是要向识途者请教，在鸿沟之上架起桥梁。

二、选择方向、课题要扬长避短

近代科学技术经过几个世纪的发展，已经形成非常庞杂的体系，有着极为丰富的研

究内容，因此在研究方向的选择上应该有一番仔细的斟酌。一方面，应当根据需要，另一方面，也要量力而行，就是说，在选择方向时千万不要强己所难，尤其在开始阶段，尽量不要一头扎到一个自己丝毫不了解、所用的研究工具又是自己丝毫不熟悉的研究方向上去，对于初搞科研的人来说，首战告捷是很重要的。如果连续碰钉子，很容易使人灰心丧气，记得有一段时间，我曾向导师表示希望搞鞅的极限理论，导师说："今后如果你搞，我不反对，但现在，你如果抛开独立随机变量和的极限理论不搞，那就是弃长就短，是一种错误的决策。"他说："应该看到，你的长处在古典分析方面，现在你必须凭籍这一优势。"导师的话语使我豁然开朗，使我懂得，导师为我们指定的研究方向不是轻易选定的，它饱含着导师的深谋远虑，有利于我们扬长避短！

三、加强学术交流、切忌孤军作战

当今世界上的科学大国，都有首强大的学派，有着人数众多的"集团军"，我国在一些领域内虽较为落后，但应朝着这个方向努力，集团作战效率高、出成果快，容易使问题获得彻底解决，还有利于新生力量的成长。如果本单位有几个志同道合的同志协同作战，当然最好，但也应与外界取得联系。如果本单位没有一起搞课题的同志，就更应注意外部动态，应尽量使自己的研究与国内当前的动向协调一致。这样做，不仅有利于全局，也有利于自己，尤其有助于自己获得新的研究课题。当前，国内的学术活动还是比较活跃的，拿我们概率统计界来说，每年都有各种学术讨论会，每两年有一次全国性学术交流会，每四年有一次学术年会。这些活动，往往提供新的信息，提供新的研究专题，至少也有助于了解当前的研究动向，应当注意有选择的参加，在我攻读博士学位的过程中，就参加了成都举办的数理统计讨论会、在昆明召开的概率统计全国年会、并在北京香山听取了赵林城、白志东的博士论文答辩会，这些活动，开阔了我的眼界、活跃了我的思想、明确了我的选题方向，我的博士论文的前两个专题，就是得益于这些学术活动，我的第一个专题用以讨论正态逼近的最佳非一致界限，这是一个悬了二十多年未获解决的疑难问题。一开始，我并没有想到要去讨论这个问题，1982年以来，陈希孺教授和赵林城同志对两个重要的数理统计模型获得了渐近正态非一致估计的最新成果，这一成果完全吻合于六十年代苏联人对独立和获得的结果，应当说是很好的。但是，这一结果还能不能再改进？换句话说：非一致正态逼近到底可以逼近到什么地步？在当时引起了一番争议，从外表初一看来，这种估计似有改进的可能，有的同志并猜测了具体的改进途径，但问题的真象到底如何？正是渴望弄清这一奥秘的念头促使我付诸精力加以研究，经过一番努力，我终于证明出：现有的精确程度已经是最好的了，已经没有任何改进的余地了！从而填补了这一正态逼近理论中的空白，可以说，如果没有学术界的交流和争论，就没有我的博士学位论文中的这一专题！

四、踏花青山不辞辛，方得归来香满蹄

要搞课题研究，就要进行艰苦的收集和调研资料的工作。只有查阅大量资料，才能

（下转第68页）

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
1988年1月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

治学法与辩证法七题

张 贤 科

（中国科学技术大学数学系）

摘　　要

Ⅰ．治学者的心理素质：1.大志是成功的先声；2.自信是成功的钥匙；3.勤奋是成功的度量。Ⅱ．治学者的方法：4.动脚，掌握资料获取信息；5.动手，直攻法与高难法；6.动脑，创造性思维的特点；7.动眼，一本书主义与渗透学习法。

我们的国家正在振兴，我们的时代正是千载一时的科学的春天。大批青年学生和研究生正向科学高峰攀登。我愿以所知、所历、所见、所悟，与他们一起探讨治学方法问题。当然我的所知所悟是极其有限的，而这里讨论的“治学”主要是指理论科学研究。针对性是辩证唯物主义的方法的生命，所以我们着重强调矛盾二方的一方。比如我们强调自信，而对谦虚则较少提及，这并不是说可以不要谦虚等等。

第　一　部　分

治学者的心理素质：大志，自信，勤奋

治学者的心理素质对学业的影响，远较治学方法为大，离开了前者，后者就失去了依托，成为毫无意义之物。相反，有志于攀登科学高峰的学者，或迟或早总会在实践中摸索出他的方法的。华罗庚说：“熟能生出百巧来”。所以对心理素质的训练实为重要。

§1．大志是成功的先声

首先，治学者要有大志，即攀登到科学顶峰之志。人生贵在有志，志不立，则事无可成。所谓“有志者事竟成”，“精诚所至，金石为开”，是有其道理的。我未读过“圣经”，但知圣经中有这样的话：“敲门即开门”。圣经大多是古代民间传说记录，“敲门即开

门”这句话，应视为古代人民的经验之谈：只有去敲门，门才得以开；只要去敲门，门就可以开！让我们勇敢地不断地去叩击科学宫殿的大门吧！

强调“立志”，是否是哲学上的“唯心论”或“唯意志”论呢？唯物主义应当只强调客观物质世界的呀?!——让我们读一读马克思吧。马克思在“关于费尔巴哈的提纲”中对费尔巴哈这位“古典”唯物主义大师有十一条批评，其中赫然写在第一条的是：

“从前的一切唯物主义，包括费尔巴哈的在内，其主要缺点是：把事物、现实、感性，只从客体的形式或是从直观的形式去理解，而不是当作人的感性活动，当作实践去理解的，不是主观地去理解的。所以，结果竟是这样：那能动的方面是和唯物主义相反地由唯心主义加以发展了，——但只是由它抽象地加以发展了，因为唯心主义当然不知道现实的感性活动之为现实的感性活动的”。

马克思的话多好啊，再也不能把主观能动的方面让给唯心主义去发展了！此上述论断早一年，马克思还有过更为明确的，格言般的论断：

“光是思想力求体现为现实是不够的，
现实本身也应该力求趋向思想”。

光是思想去体现现实，那是机械唯物论。同时还要求现实趋向思想（真理），以思想改造现实，那才是辩证唯物主义。事实上，马克思本人在他博士论文序中就早已立下了“在自己的斗争和苦难中注定要成为普罗米修斯第二的誓言：

“不惧神威，不畏闪电，
也不怕天空的惊雷…”
——“普罗米修斯是哲学历史书上最高尚的圣者和殉道者！”

立志，也是一个过程，甚至是一个终生的过程。它不是一劳永逸的，更不是一朝一夕就能宣布完成了的。我想有以下几点可谈：

1. 大志者不愧于时代。现在的形势可谓

“千载一时，胡不立志?!”

试想有志于科学者数千年来，何时有现在的好时机。以前的自不待说，即便是新中国成立后，国家这样鼓励、需要科学工作者也是从未有过的。科学史表明，处于上升阶段的国家在达到它的顶峰以前，必然涌现出大批科学家。正如恩格斯热情地讴歌“文艺复兴”时代那样：“这是一次人类从来没有经历过的最伟大的、最进步的变革，是一个需要巨人——在思维能力、热情和性格方面，在多才多艺和学识渊博方面的巨人的时代”。现在的中国，正处于比“文艺复兴”更辉煌的阶段。人民、国家、时代在需要大批科学人才。马克思说：“人生来就是这样安排的：他只有为了社会进步和同时代人的幸福而努力，才能够使自己完善起来”。因此为振兴中华造福人类而树立大志，“誓凌绝顶”，才不愧这伟大的时代。

2. 大志者择书而读。从治学立志角度看，书可分为两类。一类是补志鼓气的，如历史（世界史，各类科学史，断代史），伟大传记，哲学，特别是各种学术著作。一类是夺志泄气的，如很大一部分文艺作品（包括许多优秀古典作品），一些通俗读物均属于此类。前者多是真实的，是成功者的记录，读来能激励人们的奋发向上精神。而后者多是失败者或闲暇者的哀叹、悲观、抱怨，虽然从作品当时的背景看，它政治上是好的，

艺术水平也是高的，但它总是给人某种心灰意懒的情绪，如不警觉，易被夺志。当然，休息时翻翻自己喜爱的文艺作品作为调剂也未尝不可。

3. 大志者崛起于受挫。从一定意义上讲，"挫折"甚至更有利于治学。司马迁在"报任少卿书"中讲到：

"文王拘而演周易；仲尼阪而作春秋；屈原放逐乃赋离骚；左丘之明厥有国语，孙子膑脚兵法修例；不韦迁蜀世传吕览；韩非囚秦说难孤愤；诗三百篇大抵贤圣发愤之所为作也"。

现代也有很多例子，郭沫若受挫流亡日本时，识译了甲骨文，奠定了他考古学和历史学的基础。

"学问积成于不必学之时，
成功奠基在大失意之日。"

事实常常就是这样，这是治学的辩证法。究其实，做学问需要安静、专心、时间，这些都在失意寂寞之时才有，在得意热烈之时所缺的。歌德说得好："追求伟大事物的人必须全力以赴，巨匠在限制中才能表现自己，而规律只能给我们以自由。"

所以在受到挫折时，且不可失掉志向，若在受挫之日，心灰意懒，自谓"学有何用？"，便是志不坚的表现。究竟学有何用，当时谁也无法回答，只是待要用之日，有用之时，学也晚了！

4. 大志者不止于所得。在取得一些胜利后，或者在条件好了的时候，也往往可以令人失去大志，纨绔子弟自不待言，"自古雄才多磨难，纨绔子弟少伟男"早为人所知。就是有志之人，也容易失去远大目标，所谓

"芳草有情皆碍马，好云无处不遮楼"。

"谁在争取一切，谁在争取全胜，谁就误入歧途，不要忘记目的地还很远"。我们要记住列宁的这些话。

5. 大志者善于调节。事物都有两个方面，所谓"立志"有时也需要调节，并不是一条大道跑到底。志向是一种长远的、总的抱负、目标。但在何时、何具体方向上，何种规模上实现志向，以及以何种方式为志向而奋斗，都要依客观情况而定。可以把人的志向比喻为植物的"向阳趋光性"，这是一种内心的趋向，一种主观的追求，如何实现，是要审时时度势"的，不可钻牛角尖。大志在胸，方式上有一定的灵活性。重要的是始终坚持这种"向阳趋光性"，那么终究"乘风破浪会有时，直挂云帆济沧海"。

§ 2. 自信是成功的钥匙

自信是一种自我肯定，即高度坚信而且不断证明自己是有能力的。

1. 自信是成功者的特点之一。美国加利福尼亚大学医学院查尔斯·加菲尔德教授分析了1500多名卓有成就者，总结出他们的共同点有六条：（1）过安排得当的生活，（2）热爱自己的职业，（3）做艰难事之前先在脑中思考，（4）讲求实效而不必顾虑十全十美，（5）甘愿担风险，（6）不低估自己的潜在能力。

这里我们看到，第5、6两条都是自信问题，足以见自信的重要性。许多卓有成就

者，包括马克思，都非常自信。以致于被一些人目为“自大”。在我国，由于长期封建社会的影响，人们往往容易低估自己的潜力，不愿担风险，失去一次又一次的机会。不可能想象，一个具有强大内在力的人，会是一个不自信的人。

2. 自信是创造力的表现。治学是一种主观对于客观的认识运动，自信是在这一斗争中的巨大的精神力量。科学研究有时会遇到巨大的障碍，无法估量的挫折，几乎毫无希望的一片黑暗，在这样的时候没有高度的自信，定会一事无成。要攀登前人未有攀上的高峰，解决前人未能解决的问题，没有一点气概是难以想象的。

关于创造性思维的现代理论认为，一个人的创造力可用如下公式衡量：

创造力＝基础知识×发散思维能力。

其实“自信”是对发散思维的最大解放和激励。这里发散思维是指对事物从最广泛的角度考虑各种可能，它的目的在于谋求“数量”，与之相对的是“收敛思维”，这是进行比较、选择的思维。目前国外的管理科学中有很成功的“智力激励法”，管理者邀集一组人对某一问题征求意见，会上严禁批评，发言完全自由，意在谋求意见的数量。这种会议往往能收得奇效，征求到大量的创造性意见。这实质上是一种集体的发散思维机会。由此可以得到启发：“批评”——这个向来很强调的武器，在这儿却是最忌讳的，它简直是悬在“创造性思维”头上方的尚方宝剑。那么个人的发散思维呢？当然就最忌讳“自我批评”，说得准确些就是忌讳拘谨、自卑、无自信心，忌讳“还没有诞生就已被扼杀”。因此“自信”，是发散思维的奶母，是创造翱翔的翅膀。

为什么创造力依赖于发散思维呢？事实上辩证唯物主义从原则上早就回答了这个问题，它要求人们要从最广泛的相互联系中，从各个方面全面的看问题。

3. 有自信才能有大志。凌云大志，因何而起？往往起于自信。爱因斯坦说过：“有一种人从事科学是因为这里给他提供了施展才能的机会，他喜欢科学，正如运动员喜欢运动一样。”马克思说过：“自暴自弃，这是一条永远腐蚀和啃啮着心灵的毒蛇，它吸吮着心灵的新鲜的血液，并在其中注入厌世和绝望的毒液”。

4. 自信与骄傲。自信与骄傲不是同一概念。但是却常有人以“骄傲”的罪名去扼杀人们仅存的一点点“自信”的情况。仿佛大家都失去了自信，于是天下太平。所以对所谓“骄傲”要分析。只要它不是在成绩面前固步自封，只要它不是看不起或伤害了其它人，就不要轻意给人家戴上骄傲的帽子。

“九州生气持风雷，万马齐瘖究可哀。

我劝天公重抖擞，不拘一格降人才”。

如果大家都唯唯喏喏，猥猥琐琐，我们的社会何以能进步？那种崇尚谦卑、自视渺小的传统美德，是否真为美德，怕要重新考虑了。实质上它是封建社会愚民政策的遗风，是“多事之秋”人们借以自我保护的“作茧自缚”。对于向科学顶峰进军的志士，则是最有害不过的。

“道德规范”是一个历史范畴，它要随时代不同，历史变迁而变。但是“时间的更替不过是空间的并存的逻辑补充”。因此“道德规范”也随空间不同，环境变迁而变。

不容讳言，由于矛盾的特殊性，自然科学工作与政治行政工作对人的特质要求是不同的。后者主要是与“人”打交道，处理的是人与人之间的关系，强调谦虚谨慎是重要

的：前者主要与自然界打交道，处理的是人与物之间的关系，强调自信和创造性是重要的。当然自然科学工作者也要处理人与人之间的关系，也要求他们谦虚谨慎；政治工作者也要处理人与物之间的关系，也要有自信和创造性。但绝不能说二者是没有区别的。

5．自信心的培养。少年时的环境对一个人有没有自信有很大的影响。有不少人在新环境下也容易对自己失去信心。我曾接触过一些大学生和研究生，他们自己承认比别人"笨"，对获得好的成绩缺乏信心。这样盲目自卑往往没多少根据，对自己要有正确分析。现代科学证明既使象爱因斯坦那样的科学家，大脑也只被动用了极少一部分，绝大部分未被开发。所以人的大脑要进一步"开发利用"罢了，另外，一些人的自卑可能源于对别人的盲目推崇。向别人学习是好的，但推崇别人到"自卑"的程度就不好了。其实，可以有一条定律叫做"远山恒青"。就是说，远处的山，看上去总是一片纯青无比。但其实，你若实地细察，也是乱石满地，荆棘丛生的，与脚下的山并无二致。人们对于不了解的东西常常理想化，如天堂、月宫，但岂知脚下的地球才真正是人类的伊甸园。

其次，争取经常不断取得成果，争取成果得以发表和应用，对培养自信心是很重要的。小成绩是大成功的基石与动力，这种早期的成果会在心底激起自信和胜利感。有一种说法：科学家之所以取得成就，根源于其早期的成绩得到社会鼓励。这是有道理的，这种"早期成绩"不一定是什么大成果，可以是做得很优美的习题，甚至可以是少年时期的一些"小聪明"。这也提出一个问题：对青少年的教育，要以表扬鼓励为主。那种旨在摧毁自尊心、自信心的教学法，纵然是教给了学生一些知识，实在只能算是"给了他一碗红豆汤，而夺去了他的长子权"。

但是治学者不能要求社会上每个人都能正确地来鼓励他，甚至社会上还有所谓"马太效应"存在：越是需要扶持的学者，社会对其成绩越趋向于拒绝。国外学者是根据《马太福音》的下面一段话给这种社会现象起的名字：

"凡是有的，还要加给他，叫他有余；
对没有的，连他所有的，也要剥取。"

青年治学者若面对这种情况，怨天尤人，那是弱者的表现；灰心丧气，那等于承认失败；唯有自强不息，不断"积累优势"。真金不怕土埋，"马太效应"只能淘汰那些假金罢了。因此，自信者在任何时候的口号都是：

"战斗！——这是口令，
胜利！——这是回响。"

§3．勤奋是成功的度量

勤奋是成功的度量，就是说，你付出多少劳动，你就会有多少成果。这可以看作是政治经济学中"价值"的定义，在学术问题上的引伸。在政治经济中，商品的价值是物化了的劳动，社会劳动量是商品价值的度量。在学术领域中，这几乎同样是对的。"勤能补拙是良训，一分辛劳一分才"，华罗庚的这句话，不是轻意说出的。由于关于勤奋的论述已经相当多，我们在此不宜多说，只重温马克思如下的话：

"我只有事先声明，请渴求真理的读者们注意。在科学上面是没有平坦的大道可走

的，只有那在崎岖小路的攀登上不畏劳苦的人，有希望到达光辉的顶点”。

“在科学的入口处，正象在地狱的入口处一样，必须提出这样的要求：

‘这里必须根绝一切犹豫，

这里任何怯懦都无济于事’。

第 二 部 分

治学者的辩证方法：动眼，动脑，动手，动脚

§ 4. 动脚：掌握资料，获取信息

关于具体的方法，我体会最深的是四动：动眼、动脑、动手、动脚，其中最需强调的是“动脚”：

“迈动你的双脚，到图书馆去查阅资料！”

不熟悉资料，研究工作是盲目的。人类认识真理的路线“实践——感性认识——理性认识”，在具体实现时是一个错综复杂的历史过程。恩格斯说：

“思维的至上性是在一系列非常不至上地思维着的人们中实现的；拥有无条件的真理权的那种认识是在一系列相对谬误中实现的；二者都只有通过人类生活的无限延续才能实现。”

就是说，每一个人对于科学的贡献，不过是人类认识链条上的一环，它只能在人类认识的已有基础上发展起来。牛顿说过，如果说他比别人站得高些，看得远些，那是因为他站在巨人肩上。其实每一个科学家都是这样。

现在有“知识爆炸”，“信息时代”的说法，传递信息的手段是各种各样的。但是理论科学工作者获取信息的主要渠道还是书、刊，起码在我国目前是这样。所谓信息爆炸也还没有传说的那样严重。因为每个学者都有自己的专业，最感兴趣的书刊就不是太多了，再辅以各种文摘索引，这样只要经常留意便可以掌握各自学科的动态。

有的人不常去资料馆是因为“怯”，这多半是由于没有选定专业方向的原因。没有一个明确的专业方向，面对一架又一架的外文资料，当然有茫然之感。由于现代科学的高度发展，“全才”已不太可能。有人说现在世界上并无“数学家”或“物理学家”，有的只是各具体学科的专家。这反映了现在的一种情况。因此“窄化专业”便是一个必需而且有效的对策，尤其对年青的学者是如此。

“窄化专业——突破一点——扩大战果”，

看来这是一个好的治学途径。“如果你不是太阳，就不要企图普照大地；要象激光那样，就是钻石也要破壁”。

对查阅资料来说，另一重要的方面是要熟悉各种文摘评论的查阅方法，熟悉图书馆的各种资料的分布、排列、版制等等。这些看来琐细，其实对于掌握信息是必不可少的，也只有在实践中不断积累经验。清代王鸣盛的话是很有见地的：

“目录之学，学中第一要紧事，必以此问途，方得其门而入”

此外，迈动双脚不光对获取信息动态是重要的，对于提高学者的基础水平也同样是重要的。学者的学业达到一定程度后，往往不再能靠读书本来提高纵向水平，因为最新的科学功果往往难以及时成书。这时，一期期定时汇到的学术期刊，无异是学者的“国际函授大学”。通过这一函授，学者不断复习加深着最重要的（在科研中应用频度高的）基础知识，学习着最新发展的专题分支，研究着著名科学家解决著名问题的实例，录求着自己用武的领域，构思着自己的兰图。学者在这种函授中不断跟上时代的脚步，做出对时代的贡献。

最后，图书馆也提供一个诱人学习的极妙环境，是治学者陶冶心灵的最佳场所。

§5．动手：直攻法与高难法

动手，指学者在有一定的基础后，要及时动手做研究工作，也指平时要勤动手写扎记、眉批、摘记等。

历来的教育都强调基础要深厚，不宜早动手选题做研究工作。但究竟怎样才算深了厚了，是不易掌握的。一般来说，中老年人的“深厚”学识是长期积累起来的，青年人短期内不容易一下子全面达到。若一味嫌青年人不深不厚，不让其接触科研课题，往往会使青年人错过黄金时代，等闲、白了少年头。另一方面，一味读书也不一定是真正好的学习法。

包括华罗庚在内的许多卓有成就的学者，都以自身的经历证明“直攻法”（或称直接法）是行之有效的治学方法。这一方法与“高难度学习法”密切相关。它们都是传统的“循序渐近”，“按步就斑”治学方法的对立物。胸怀大志、智力较高，而又愿意刻苦勤奋的青年尤其适合采用“直攻法”和“高难法”，在当前“知识爆炸”的形势下更是如此。这种方法要求学者目标任务明确，这种目标一般是高难的，例如要求很快作出学术论文，很快写出一本专著，很快掌握一门外语等等。学者为达到这一高难的目标，动员起全部的智力、精力，“直接”向目标进攻：缺少的个别基础知识，短时间集中学会；缺少的个别环节，短时间集中攻下；学者往往只直接研读书海之中的一本一章一节，而不是抱一巨著从头慢慢细读，在这样坚韧不拔的直接进攻下，一段时间后目标可以达到。学者也因而加固扩展了自己的基础，训练了方法，获得了成果。然后再转战于更高的目标，不断开拓前进，这样形成的知识结构，是有机结构，是在实践中自己发展起来的结构，它概念清晰，联系明确，轻重分明，“逻辑的和历史的是一致的”。这样工作的效率也是昏昏然无目的读死书所不能相比的。

如何选题是一个重要的问题。不但要考虑到要有一定的意义，而且要考虑到与自己学识的关系，考虑“可行性”。可注意的有以下几点：

1.平时多动手，写一些心得、扎记、眉批等等。看书刊时，要多动脑筋，看是否有所启发。偶有所得，一定要及时记录下来，跟踪追击，放任大脑去“幻想”，说不定由此能捕捉到不小的课题。苏轼说：

“作诗火急追亡捕，情景一失永难摹”，

对于理论研究尤其如此。平时要多动手，不可使线索从眼前闪过逝去。与此有关的是，理论研究者不可总使自己陷于事务的忙乱之中，要争取间或有“清静无为”之时，以发挥自己的想象。“无为”与“有为”是对立统一，往往在“无事可做”时发现大的研究课题。

“积土成山，风雨兴焉；
积水成渊，蛟龙潜焉，”

平时勤动手积累是很重要的。俗话有“捡到篮子里的都是菜”的说法，常被用来嘲笑那些粗制滥造者。从勤动手积累的角度讲，我们倒要倡导它：往篮子里多多捡吧，多多益善！——回家后再仔细挑选加工就是了。

2.勤动脚去接触资料。看多了，自然就会发现：有可推广者，有需完备者，有需改正者，有另具启发者。这些都是好的研究课题。

3.迁延扩展法。一旦做出一些成果后，不要轻意关门大吉，弃之不顾。而应想尽办法向深层、向四方扩展迁延。在迁延时要尽量“发散思维”，甚至于蛛丝马迹，似曾相识，可有可无，一厢情愿，望风捕影，意想天开，张冠李戴，以假乱真，触景生情，也不要放过。迁延法的好处，首先在于易发挥自己的优势。你已经在这块基地上作了许多工作，相关知识掌握较好，继续工作下去很有利。如果另换他题，一切都是新的，你与一个新手无异。其次，选一个合适的课题不容易，轻易弃之可惜。这有如找矿一样，你走马一望：青山绿水，阴阳和偕，很难说哪儿有矿。如果你正在掘一个矿坑，继续向纵深开掘，向四周探索，实为上策：主矿脉很可能就在你脚下。那种朝秦暮楚，看哪儿热闹哪儿去的做法，往往难得到深刻的结果，难采得人所采不到的大金块。

当然，事物都是辩证的。在一定的情况下也不要死钻牛角尖。转移阵地，另有开拓也是必须的。

§6. 动脑：创造性思维的特点

在确定选题后，一般要先有一段廓清外围之战，而后才能真正接近目标。这种廓清外围包括熟悉相关理论，掌握有关资料，搞清有关的基本事实，有时还包括攻下几个次要的目标。这一过程相当于上节“直接法”所应完成的任务。这以后，就进入攻坚。攻坚是一个关键阶段，创造、发明、成果的有无和大小，就看这一阶段。这是一个飞跃阶段，是认识过程的一个大飞跃；这是一个“否定”阶段，新思想要在“扬弃”旧思想中诞生。

根据庞卡莱，阿达玛等科学家的论述，以及现代发明心理学的研究，也根据我在工作中的体会，这一飞跃有如下的各个分期和方法。

在扫清外围进入到问题的关键之时，由于几经反复，大脑对问题的各个方面、各个数据已相当清楚。往往非常复杂的数学公式也能在脑中清晰映出，对很深刻的定理已有直觉的把握。这时和象棋中的“盲棋”很类似，整个棋局全在脑中。在这时，积极开动大脑机器，全神贯注工作几小时，便可掀起所谓“脑风暴”。这在心理学上称为“烘热期”，脑海中迅猛涌现出种种现象、联想、猜测、假设，这种脑风暴有如龙卷风一般，围

绕着中心课题急剧旋转、脑中原有的各种概念被风暴掀起，飞舞，形成各种可能的暂时联系、组合，即各种新想法。脑风暴初始，往往只有不太深刻的思想产生。让脑风暴持续下去，一、二小时后很可能会忽然跳出一些罕见的新奇思想，其中一些对解决问题可能非常有帮助。也往往有这种情况：脑风暴持续了数小时，并无太大收获，于是趋于平静。但就在这风暴平息后的无意识活动阶段，脑中往往会忽然有新想法，即所谓“顿悟”，于是打开了解决问题的大门。这种“顿悟”，只是一种设想或猜测，接下来还要动手实现这些设想、验证猜测，这也是一段有意识的甚至是艰巨的工作。这一工作形式上看是脑风暴前工作的（在新水平上的）继续，脑风暴表现为这一渐进过程的中断。 的

我自己所发表的所有论文，事实上都得之于“枕上”，每一篇都经历了上述过程，有的一篇论文要经几次“脑风暴”和“顿悟”才能完成。脑风暴和顿悟一般发生在晚上躺下后。由于整个晚上的紧张工作，躺下后脑中常常翻江倒海，如颠如狂，不能自已。每每深夜似醒非醒之时忽有所悟。要解决前人未能解决的问题，到人所未到之境，不动用思维的全部潜力，经过几个飞跃是不行的。常规的逻辑推导所得出的结果，必是未能惊人之物：

“笔底功夫犹恐浅，
枕上追索梦里寻。”

创造性思维往往很好地体现着以下各对矛盾的转化（尤其是数学上的发现每每如此）：

1.严格和不严格。“严格”似乎是科学尤其是数学的生命。但在创造性思维中，新思想的诞生往往是极不严格的。往往是先“猜出”定理，严格的证明是以后补出的。所以学者不但要善于严格，也要善于不严格。

2.逻辑和直觉。既然新思想不是由逻辑严格推导出的，那它是怎样得出的呢？“直觉”往往起很大作用。在一定程度上，这种直觉能力反映一个人的创造能力，它和一个人的知识虽然有关，但并不成正比，有的人知识很丰富但直觉能力差。数学家阿达玛认为直觉的本质是某种“美的意识”，“美感”。我自己切身体会，空间想象能力和这种直觉很有关系。

近来关于大脑两半球的实验成果对此很有启发。实验表明人的左半脑善于进行逻辑思维，熟练性思维，解决老问题有条有理；右半脑善于进行形象思维，创造性思维，平时右半脑受到左半脑的压制，当二者有不同意见时，整个大脑表现出来的是左半脑的意志。由这一成果对照上述脑风暴的过程，可以发现，脑风暴后期的“非逻辑”思维恰恰就是把右半脑从左半脑的抑制中解放出来。这也证明了“形象美感”、“空间想象力”等直觉作用对创造力有决定性的作用。象数学这样高度逻辑化的学科，却也不得不求助于他的对立物——直觉。

3.发散思维和收敛思维。大学教学，尤其是数学教学，一般都着重训练收敛思维。但脑风暴时，发散思维却是主要的思维方式。

4.个别式整体。如果说你战胜不了敌人的一个团，却能轻易把他们的一个军消灭，一定令人难以置信。但在科研攻坚中确实有这种情形：往往一个特殊问题解决不了，但把问题“一般化”，反而容易解决了、我有几次确实碰到了这种情形，正是问题的一般化、扩大化救我出维谷。在这里，一般与个别的关系似乎颠倒过来了。这可能是由于问题的

一般化更便于发现问题的本质，或更便于运用一般化的工具，而太执着于具体问题反而会“一叶障目”。

5.归纳与演绎。一般公认数学的方法主要是演绎法，数学书上的定理一般都是由演绎法证明的。不完全归纳法（即哲学上的归纳法，加上“不完全”以区别于“数学归纳法”。后者是一种具体的证明方法，主要还是用的演绎推理）太不严格，似乎粗俗难登大雅之堂。但事实上，数学上的许多重要结果都是由不完全归纳法发现的。著名数学家欧拉说过：“数学这门科学，需要观察、还需要实验。”“数学王子”高斯也提到过，他的许多定理都是靠归纳法发现的，证明只是补行的手续。但是数学家在写论文时，总是把定理写成是由演绎的上帝赐给的纯理性之物，绝没有诞生于归纳的凡俗之气。这正象马克思所嘲笑的，黑格尔把物质世界都放逐到注释中去了；也正象鲁迅所揭露的，雅士总是把算盘藏在抽屉里，虽然物质世界和算盘才真正对于他们是关重要的。

6.标新立异，出奇制胜。发展就是否定。所以一定要勇于标新立异、别出心裁，勇于向现有的权威挑战，才能直正有所创造。“不依古法但横行，自有风雷绕膝生”。要勇于另辟蹊径，要善于从新角度、新观点考虑问题，也就是要出奇。“善出奇者，无穷如天地，不竭如江河”，表现得很神、其实质不外是“对立统一规律”：要从正反两个方面考察问题；要小中见大，大中见小；旧以新视，新以旧衡；要繁中求简，简中求繁；要无中生有，有中化无。关于这种发展的辩证法，黑格尔有一段话最尖锐明确，读来很能启发人：

“凡有限之物不仅是受外面的限制，而乃为它自己的本性所扬弃，由于自身的活动自己过渡到自己的反面。所以当我们譬如说人是要死的，似乎以为人之所以要死是由于外在的环境，照这种看法，人具有两种特性：有生亦有死。但这事的真正看法应该是说，生命本身即具有死亡的种子。凡有限之物即是自相矛盾的，由于自相矛盾而自己扬弃自己。”

由此可知，比如说，为什么一定要“小中见大”。其实“小”本身即具有“大”的种子，而由于这种“自相矛盾”的本质，“小”扬弃自己过渡到自己的反面“大”。

§7. 动眼：一本书主义与渗透学习法

动眼读书学习是理科治学的根本，青年时需要，出成果后仍然是需要的。知识结构要不断完善，新理论要不断学习，才能不断前进。历来强调读书要循序渐进，踏实认真其实，走马观花，不求甚解，有时也同样重要。学习无非是从无知转变为有知，这从“无”到“有”的转变方式，可以是多样的：蚕吃桑叶。一点一点地啃，按步就班，是一种方法；霜染枫叶，由黄渐红，由微红再大红，也是一法；墨滋宣纸，从诸墨点辐射出去，逐渐浸润，又是一法。我们在读书中都可运用。这反映了从量变到质变各种不同转变方式。总的来说，我觉得有两点值得强调：

1.一本书主义。治学之路盘曲而上，由一个一个阶梯构成。在每个阶梯，要读“烂”一本书（精读、熟读），即所谓一本书主义。而不宜拿许多属于同一阶梯水平的书，反复对看。在每一个治学阶梯上，选择一本较合适的书（内容详实而又不繁琐，为学界所公认者），精读细研、日读夜思，直到切实理解掌握。待到对一个环节的基本理论真正

掌握后，再翻看其它同类的书，就会发现这些书多是大同小异，讲法、符号不同而已。当然也有部分章节内容是新的，逐渐补上就容易了。掌握一个环节后，更及时转入更高的环节，不要在原有环节上徘徊。

2.渗透学习法。读书可以似懂非懂地读，听起来与传统的教育颇不合、但这正是李政道教授所提倡的“渗透学习法”。博览群书，开始可能并不太懂，但就在这似懂非懂之中已经学到不少知识、天长日久，就会越学越深广。有的材料对于自己的学科不十分必要，那么有个印象也就可以了。在适当的时候，这模糊的印象可能因事对我们有所启发。如果到时需要细知，可以知道到何处去查找。有的材料与自己关系较大，经过反复学习就会由似懂非懂逐渐变得真懂。,就象秋天的枫叶由黄逐渐变红一样。许多学者的知识都是这样逐渐加深的，只不过没有注意罢了。俗话说“第五个烧饼”,事实上并不是单靠这第五个烧饼吃饱饭的啊。

既使对于应当精读的书，也不一定非要一页页从前往后读不可，也可以先前后翻翻，看看有几章，中心内容是什么，也可以挑自己最有兴趣的先看，也可以把一时难懂的细节留作后看。这个道理和打仗是一样的。解放战争在打了辽沈战役后，是先打淮海战役后扫平津战役，并不是按地理顺序相反地打。太原是留在后打的。而全国并未完全解放时，北京已宣布成立新中国了。甚至到现在台湾也还没有解放，但这并不影响我们做大文章。当然在适当的时候，象台湾这类问题还是要解决的，解决的方式可以是异样的。读书也有类似的道理。

华罗庚曾有著明的读书公式：薄——厚——薄，即开始读一遍，似懂非懂，只见其大概，这时书对于读者是薄的；接着详细研读，加注释，加纸条，加心得体会，着眼于细节，这时书的内容在读者心目中是厚的；再经努力，融汇贯通，切实掌握了书中的理论，似乎一目了然，书在读者心目中又薄的了。但这时的“薄”与开始时的“薄”已经很不一样了，是在更高水平上的仿佛向旧事物的“回复”。这真是否定之否定规律活生生的范例，也是综合——分析——综合过程的极妙注释。此外国外曾流行着SQ3R读书法，即概观（Survey）——提问（Question）——细读（Read）——探索（Research）——复习（Review）。还有人主张读书可以顺读、反读、专题读，说顺以致远，反以求源，专以攻坚，三种读法不可或缺。

总之这都反映了由“无知”到“有知”的转变方式，可以是多样的，要因时因地因人而异。不一定非要传统课堂强调的“蚕吃桑叶”式不可、可以如“晓来谁染霜林醉”，大片丛林由绿变黄，由浅红变深红。也可以如国画名家宣纸泼墨，浓浅浸染皆宜，“密处不使透风，疏处可以走马。”

一九八五年四月十五日

Joseph H. Silverman著《椭园曲线的算术理论》

J. W. S. Cassels

目前，关于亏格为0的曲线的算术性质已为人们理解得差不多了，而对亏格大于1的曲线，人们的研究还仍然处于初始阶段，令人很不满意。对于亏格为1的曲线，现在不仅已建立了庞大的理论，而且还具有许多相互联系的猜想，所有这些，目前都正处于蓬勃的发展之中。

我们的研究是在一个基域k上进行的，例如有理数域Q，整体域及局部域，域k上的一椭园曲线由在k上定义的亏格为1的曲线以及该曲线上的一个点0组成（我们常称“在域k上定义的”为“有理的”），在此，我们遇到了第一个麻烦，这就是我们还没有现成的算法来断定一个给定的亏格为1的曲线是否具有一个有理点，特别地，我们没有类似的Hasse原理（局部—整体原理），然而，对每个亏格为1的曲线，同一域上相应的椭园曲线却具有一个典型的处理方法，于是，亏格为1的曲线理论便主要归结于椭园曲线理论之中。

椭园曲线上的点有一个自然的结构，使之成为一个Abel群，给定的点0便为该群的零元。事实上，域k上的椭园曲线恰为k上的一维Abel簇，特别地，有理点的集合具有一个自然的Abel群结构。当$k=Q$时，著名的Mordell定理指出该群是有限生成的，这个结果后来为Weil及其它人所推广，通常便称这个群为Mordell—Weil群（对给定的椭园曲线及基域），然而，目前还没有决定Mordell—Weil群的算法，虽然对一些特殊情形是可以的。这里，缺少有效算法的原因与上述Hasse原理的失效密切相关。Hasse原理的“障碍”最后归结到由Tate和Shafarevich各自独立发现的一个群之中，这就是Tate—Shafarevich群，它具有许多有趣的性质，有的被证明了，有的却还只是猜想。不容置疑，评著者对该理论的最大贡献是引入罗马字母Ш来表示该群，这种记号目前已被普遍采用。

当$k=Q$时，早期的数学家认为Mordell—Weil群的秩（即有限生成元的个数）有界，然而现在却作出了相反的猜测。究竟是丁是卯，目前尚无定论，然而，关于Mordell—Weil群的扭群部分的可能结构，已为Mazur利用模形式的工具得到。

与整体域（例如Q）上的椭园曲线相关的L—函数，有许多仍作为猜想的性质。根据直观启发以及大量的数值计算，Birch和Swinnerton-Dyer提出了有关L—函数 性状，Mordell—Weil群以及Tate—Shafarevich群的一些非常精细的猜想，这些猜想后来都经受住了许多检验，但只是在近几年才有其中的一小部分得到了证明。

上述很不完全的叙述已足以表明椭圆曲线理论的中心位置以及由此而产生的大量课题。书的作者明确指出：“目前在这个领域有如此多的研究工作，而入门书竟如此的贫乏，这不能不令人感到吃惊！”就本人看来，他的书非常令人钦佩地填补了这个缺口，对于一个行家来说，这种类型的书也许不会得到赞赏，但研究生们却是一致地对该书作了高度的评价。

（数学系83级张新发译）

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988年 1 月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

矩阵的 Trace 与 Sum

数学系85级 罗承辉

§1 引 言

我们采用下列记号：

$n\in Z_+$；　　　　μ^n：实 $n\times n$ 矩阵全体；

μ^n：非负实 $n\times n$ 矩阵全体；

（注：此处非负是指矩阵的所有元素非负。）

$\mathscr{S}^n$：实 $n\times n$ 对称矩阵全体；

$\mathscr{T}^n$：实对称、半定正的 $n\times n$ 矩阵全体；

$A=(a_{ik})\in\mu^n$；　　　　$suA=\sum_i\sum_k a_{ik}$；

$t_rA=\sum_i a_{ii}$；　　　　$\rho(A)=A$ 的谱半径；

$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}=A$ 的谱；$\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$（如果特征根均为实数），

$\{U_1,\cdots,U_n\}$ = 对应于特征向量的标准正交基。

$E=(1,\cdots,1)^T\in R^n$；　　　　$E=c_1U_1+\cdots+c_nU_n$。

令 $m\in Z_+$，则 $suA^m=E^TA^mE=c_1^2\lambda_1^m+\cdots+c_n^2\lambda_n^m$　　（1）

$$trA^m=\lambda_1^m+\cdots+\lambda_n^m \qquad (2)$$

这种形式的相似促使我们去研究 su 和 tr 的性质能相似到何种程度。我们特别对 tr 是否具有[1],[6],[7],[8],[9]中 su 的性质感兴趣。

§2 初等性质

下列性质是熟知的或易证的。

命题1：(S_1) $su(A+B)=suA+suB$，$su(cA)=csuA$，$\forall A、B\in\mu^n, c\in R$；

(T_1) $tr(A+B)=trA+trB$，$tr(cA)=ctrA$，$\forall A, B\in\mu^n, c\in R$。

命题2：(S_2) $suA\geqslant 0\wedge(suA=0\Longleftrightarrow A=0)$，$\forall A\in\mu_+^n$；

(T_2) $trA\geqslant 0 \wedge(trA=0\Longleftrightarrow A=0)$，$\forall A\in\mathscr{T}^n$。

因而 su 是 μ_+^n 中，tr 是 $\mathscr{F}^n$ 中的范数。

命题 3：$(S_3)<A,B>=suA^TB$ 是 μ^n 中的半内积，μ_+^n 中的内积；

(T_3) $<A,B>=trA^TB$ 是 μ^n 中的内积

因而 $su(A^TA)^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_i\left(\sum_k a_{ik}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ 是 μ^n 中的半范数(seminorm)，μ_+^n 中的范数，$(trA^TA)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_i\sum_k a_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}$ 是熟知的 Frobenius范数。

命题 4：(S_4) $|suA^TB|\leqslant(suA^TA)^{\frac{1}{2}}(suB^TB)^{\frac{1}{2}}$，$\forall A, B\in\mu^n$；

(T_4) $|trA^TB|\leqslant(trA^TA)^{\frac{1}{2}}(trB^TB)^{\frac{1}{2}}$，$\forall A, B\in\mu^n$。

命题 5：(S_5) $suAB\leqslant suAsuB$，$\forall A, B\in\mu_+^n$；

(T_5) $trAB\leqslant trAtrB$，$\forall A, B\in\mathscr{F}^n$ 。

§2．幂 的 su 和 tr

令 μ 是 μ^n 中的范数，下列是熟知的见（［10］，［11］）。
若 μ 是次积性范数（submultiplicative)，则

$(N_1)\rho(A)\leqslant\mu(A)$，$\forall A\in\mu^n$；而对任何 μ

(N_2) $\lim\limits_{m\to\infty}\mu(A^m)^{\frac{1}{m}}=\rho(A)$，$\forall A\in\mu^n$。从 (N_2) 易得

(N_3) $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{\mu(A^{m+1})}{\mu(A^m)}=\rho(A)$（若极限存在）。

我们现在研究 su 和 tr 是否具有与 (N_1)，(N_2)，(N_3) 相关的性质。

命题 6：$(S_6)\rho(A)\leqslant suA$，$\forall A\in\mu_+^n$；

$(T_6)\rho(A)\leqslant trA$，$\forall A\in\mathscr{F}^n$。

命题 7：(S_7) $\lim\limits_{m\to\infty}(suA^m)^{\frac{1}{m}}=\begin{cases}\rho(A), & \forall A\in\mu_+^n\\ \lambda_p, & \forall\in\mathscr{F}^n\end{cases}$ 其中 $c_1=\cdots=c_{p-1}=0$

$c_p\neq 0$ （3）

(T_7) $\lim\limits_{m\to\infty}(trA^m)^{\frac{1}{m}}=\rho(A)$，$\forall A\in\mu^n$，其中 $\lambda_1>|\lambda_n|$ （4）

命题 8：(S_8) $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{suA^{m+1}}{suA^m}=\lambda_p$，$\forall A\in\mathscr{F}^n/\{0\}$，满足（3）。（参考［8］定理3.）

(T_8) $\lim\limits_{m\to\infty}\dfrac{trA^{m+1}}{trA^m}=\rho(A)$，$\forall A\in\mu^n/\{0\}$ 满足（4）

命题 9：关于数列 (X_m)：

$(S_9)(a)$ $X_m=(suA^m)^{\frac{1}{m}}$ 递减，$\forall A\in\mu_+^n\cap\mathscr{F}^n$；

(b) $X_m=\left(\dfrac{suA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$ 递增，$\forall A\in\mathscr{F}^n$（见［6］，518页）

(c) $X_m=\dfrac{suA^{m+1}}{suA^m}$ 递增，$\forall A\in\mathscr{F}^n/\{0\}$（参考［8］，定理3）

$(T_9)(a)$ $X_m=(trA^m)^{\frac{1}{m}}$ 递减，$\forall A\in\mathscr{F}^n$；

(b) $X_m=\left(\dfrac{trA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$ 递增，$\forall A\in\mathscr{T}^n$；

(c) $X_m=\dfrac{trA^{m+1}}{trA^m}$递增，$\forall A\in\mathscr{T}^n/\{0\}$。

证明：由(1) 和(2) 知，$(T_9)(a)$和$(S_9)(b)$就是Jensen和Schlömich不等等式的直接形式。对于$(S_9)(c)$和$(T_9)(c)$由$X_m\leqslant X_{m+1}$可以直接推导出来。

对于$(S_9)(a)$，我们采用证Jensen不等式的同样方法。不妨设$A\neq 0$且$\lambda_1=1$，由Perron—Frobenius理论，存在$U_1\geqslant 0$，所以$c_1=E^TU_1\geqslant E^T(1,0,\cdots,0)^T=1$，现在 $X_m=(c_1^2+c_2^2\lambda_2^m+\cdots+c_n^2\lambda_n^m)^{\frac{1}{m}}=K_m^{\frac{1}{m}}$

因$1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$，$K_m\geqslant 1$，$m$增时，$\lambda_2^m$，$\cdots$，$\lambda_n^m$减，故$K_m$减且$\geqslant 1$，因而$X_m$递减。

$A\in\mathscr{S}^n$时，非负性或半定正性均不能单独保证$(S_9)(a)$。例如：$A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

$suA=1<\sqrt{5}=(suA^2)^{\frac{1}{2}}$。

第二个反例是

$$A=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mu_+^n, \tag{5}$$

$A^3=(n-1)A$，$A^4=(n-1)A^2$。故$(suA^3)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}(n-1)^{\frac{2}{3}}$，

$(suA^4)^{\frac{1}{4}}=n^{\frac{1}{4}}(n-1)^{\frac{1}{2}}$，但前者比后者小当$n\geqslant 14$时。对于$n<14$，在$\mathscr{S}^n\cap\mu_+^n$中找一个反例还悬而未决。

容易明白

$$(suA^3)^{\frac{1}{3}}\leqslant(suA^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant suA,\quad A\in\mu_+^n。$$

$A\in\mathscr{S}^n\cap\mu_+^n$也不能保证命题9中的性质，对$(S_9)(b)$，(5)即为一个反例。对$(S_9)(c)$见下面的12S，找$(T_9)$的反例很容易。

下面我们提供一些在更弱条件下与命题9对应的结论。

命题10：(S_{10}) $(suA^m)^{\frac{1}{m}}\leqslant suA$，$\forall A\in\mu_+^n$；

(T_{10}) $(trA^m)^{\frac{1}{m}}\leqslant trA$，$\forall A\in\mu_+^n$ 满足$\sum_{i\neq k}\sum_k\lambda_i\lambda_k\geqslant 0$。

证明：(S_5)可推出(S_{10})。对(T_{10})，令$m\geqslant 2$，由Jensen不等式

$$(\lambda_1^m+\cdots+\lambda_n^m)^{\frac{1}{m}}\leqslant(|\lambda_1|^m+\cdots+|\lambda_n|^m)^{\frac{1}{m}}\leqslant(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

由假设，$\lambda_1+\cdots+\lambda_n\geqslant 0$ 且$\sum_{i\neq k}\lambda_i\lambda_k\geqslant 0$，故

$$(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant\lambda_1+\cdots+\lambda_n \tag{7}$$

由(6)和(7)即推出(T_{10})

命题11：(*Mulholland and Smith* [9]，*Loewy and London* [5]，*Johnson* [3])

$(S_{11})\quad \dfrac{suA}{n}\leqslant\left(\dfrac{suA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}\quad \forall A\in\mathscr{S}^n\cap\mu_+^n;$

$(T_{11})\quad \dfrac{trA}{n}\leqslant\left(\dfrac{trA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}},\qquad \forall A\in\mu_+^n$。

(T_{11})的证明：设 $A=(a_{ik})$，$a_{ik}\geqslant 0$，则

$$\left(\frac{trA^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}\geqslant\left(\frac{a_{11}^m+\cdots+a_{nn}^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}$$

$$\geqslant\frac{a_{11}+\cdots+a_{nn}}{n}=\frac{trA}{n}。$$

此外还可参见[5]定理1，[3]定理4。

(S_{11})的证明：事实上，Mulholland和Smith[9]证得了更一般的结论：令 α，A分别为$n\times 1$，$n\times n$的非负矩阵，又$A^T=A$，则

(i) $$\frac{\alpha^TA^m\alpha}{\alpha^T\alpha}\geqslant\left(\frac{\alpha^TA\alpha}{\alpha^T\alpha}\right)^m。\qquad(\alpha\neq 0)$$

等号成立当且仅当 α 为A的特征向量。

记 $s_m=\alpha^TA^m\alpha$，则证（i）就是证

(ii) $$f(\alpha)=\frac{s_m}{s_0}-\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^m>0,$$

满足条件：1）$\alpha_i\geqslant 0$，2）$a_{ij}=a_{ji}\geqslant 0$；3）α不是A的特征向量。

我们知道，存在正交矩阵O将A对角化，令$\beta=O^T\alpha$，则有：

(ii) $$s^m=\alpha^TA^m\alpha=\beta^TB^m\beta=\sum_{j=1}^n c_j^2\lambda_j^m$$

又由条件 3）α不是A的特征向量，则存在i，j使得

(iv) $c_i\neq 0$，$c_j\neq 0$，$\lambda_i\neq\lambda_j$

我们现在用反证法证(i)。假设(i)不成立，在条件1)，2)，3)下选择维数最低的n使得(i)不成立。显然$n>1$。由于维数最低，故可设 $\alpha_i>0$。此时$f(\alpha)$是仅依赖于α的连续函数。当α在满足(i)，有的$\alpha_i=0$的α集合的边界上时$f(\alpha)>0$，当α为此集合内且满足(iii)的一些点α^*时，$f(\alpha)\leqslant 0$。所以满足(i)的这些点中至少有一点$\widetilde{\alpha}$使得$f(\alpha)$取最小值$m\leqslant 0$并且是光滑的。

再记$f(\alpha)=g(\beta)$，其中$\beta=O^T\alpha$，记$\widetilde{\beta}=O^T\alpha$，则在$\widetilde{\beta}=\beta$时满足(iv)，$g(\beta)$是光滑的，故$\dfrac{\partial g(\beta)}{\partial c_i}=0$。又由(iii) $\dfrac{\partial g(\beta)}{\partial c_i}=2c_i\lambda_i^m$，对每个$i$，当$\widetilde{\beta}=\beta$时，不是$A_i=0$就是

$$s_0\lambda_i^m-s_m-m\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^{m-1}(s_0\lambda_i-s_1)=0$$

后一种情形中λ_i是方程

(v) $$\lambda^m-m\lambda\left(\frac{s_1}{s_0}\right)^{m-1}+(m-1)\left(\frac{M_1}{M_0}\right)^m-f(\alpha)=0$$

的根。把(v)的左端仅仅当作 λ 的函数，对非负的 λ 有唯一最小值。且当 $\lambda=\frac{s_1}{s_0}$ 时，其值为 $-f(\alpha)\geqslant 0$：这样唯一可能的非负根 $\lambda=\frac{s_1}{s_0}$，故无论何时 $c_i\neq 0$，都有 $\lambda_i\leqslant\frac{s_1}{s_0}$。但 $\frac{\widetilde{\beta}^T B\widetilde{\beta}}{\widetilde{\beta}^T\widetilde{\beta}}=\frac{s_1}{s_0}$。而 $\sum_{j=1}^{n}c_j^2 t_j=\frac{s_1}{s_0}\sum_{j=1}^{n}c_j^2$。仅当 $\lambda_i=\frac{s_1}{s_0}$，$c_i\neq 0$ 时成立。这与(iv)当 $\widetilde{\beta}=\beta$ 时相矛盾。于是(i)式获证。

此外，London还得到了(S_{11})的一个推广形式([6]，定理1)。

§4．进一步的性质

现在，我们考虑与命题9(c)有关的结果。

命题12S(London[7]，Kankaapää和Merikoski[4]，Kankaanpää．Merikoski和Virtanen[12])下列的条件是同样的($n\leqslant 3$)：

$$(S_{12})\quad \frac{suA^3}{suA^2}\geqslant\frac{suA}{n},\quad \forall A\in\mathscr{S}^n\cap\mu_+^n/\{0\};$$

$$(S_{12}')\quad \frac{suA^{m+1}}{suA^m}\geqslant\frac{suA}{n},\quad \forall A\in\mathscr{S}^n\cap\mu_+^n/\{0\},\ m\in Z_+。$$

而 tr 没有类似的结果，例如

$$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

我们却有

$$\frac{trA^3}{trA^2}=\frac{1}{9}<\frac{1}{3}=\frac{trA}{3}。$$

一个较弱的结果是：

命题12T：设 $A\in\mathscr{S}^3\cap\mu_+^3/\{0\}$，若 A 最大的对角元和非对角元位于同一行，则有

$$(T_{12})\quad \frac{trA^3}{trA^2}\geqslant\frac{trA}{3}。$$

(12T)的证明：令 $a，b，c，d，e，f\geqslant 0$，

$$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\b&d&e\\c&e&f\end{pmatrix},$$

则 $trA=a+d+f,\qquad trA^2=a^2+2b^2+2c^2+d^2+2e^2+f^2,$

$trA^3=a^3+d^3+f^3+3(ab^2+ac^2+b^2d+c^2f+de^2+e^2f)+6bce,$

则 $3trA^3-trAtrAtrA^2=(a^2-d^2)(a-d)+(a^2-f^2)(a-f)+(d^2-f^2)(d-f)+K$，$K=7(ab^2+ac^2+b^2d+c^2f+de^2+e^2f)+18bce-2(ae^2+b^2f+c^2d)$

$=$ 非负项 $+2a(b^2-e^2)+2(b^2-c^2)(d-f)$

$= \text{非负项} + 2d(b^2 - c^2) + 2(b^2 - e^2)(a - f)$。

不妨设 $b \geqslant c, e$; 由假设 $d \geqslant f$ 或 $a \geqslant f$，导出 $K \geqslant 0$，从而证明 (T_{12})

(S_{12}) 的证明：当 $n = 3$ 时，

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \geqslant 0 ,$$

并记

$$f(A) = 3\,suA^3 - suA\,suA^2 ,$$

$$\gamma_1 = a + b + c, \quad \gamma_2 = b + d + e, \quad \gamma_3 = c + e + f,$$

$$R = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T, \quad E = (1, 1, 1)^T ,$$

则

$$\begin{aligned} f(A) &= (E^T E)(E^T A^3 E) - (E^T AE)(E^T A^2 E) \\ &= E^T (EE^T A - AEE^T) A^2 E \\ &= E^T (ER^T - RE^T) AR = \cdots \\ &= (\gamma_1 - \gamma_2)^2 (\gamma_1 + \gamma_2 - 3b) + (\gamma_1 - \gamma_3)^2 (\gamma_1 + \gamma_3 - 3c) \\ &\quad + (\gamma_2 - \gamma_3)^2 (\gamma_2 + \gamma_3 - 3e) = \cdots \\ &= (\gamma_1 - \gamma_2)^2 (2a + d + 2e + f) + (\gamma_2 - \gamma_3)^2 (a + 2b + d + 2f) \\ &\quad + 2(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3)(a + b + e + f - c) \end{aligned}$$

不妨设 $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3$，有

$$\begin{aligned} f(A) &\geqslant (a + d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (a + d + f)(\gamma_2 - \gamma_3)^2 \\ &\quad + 2(a - d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3) \\ &\geqslant (a + d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)^2 + (a + d + f)(\gamma_2 - \gamma_3)^2 \\ &\quad - 2(a + d + f)(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 - \gamma_3) \\ &= (a + d + f)[(\gamma_1 - \gamma_2) - (\gamma_2 - \gamma_3)]^2 \\ &= trA(\gamma_1 + \gamma_3 - 2\gamma_2)^2 \geqslant 0 \quad 。\end{aligned}$$

等号成立的条件是 A 或 A^2 的行和相等。

关于 $(12S)$，London 指出当 $n \geqslant 4$ 时是不成立的，例如：

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$suA^n = 2(n-2) + \alpha ,$$

$$suA_n^2 = (n-1)(n-2) + \alpha^2 ,$$

$$suA_n^3 = 2(n-2)^2 + \alpha^3 \quad 。$$

于是

$$nsuA_n^3 - suA_n^2\,suA_n = [\alpha^2 - (n-2)][(n-1)\alpha - 2(n-2)] = f(\alpha)$$

所以当 $2(n-2)/(n-1)<\alpha<\sqrt{n-2}$ 时，$f(\alpha)<0$。而当 $n\geqslant 4$ 时，这样的 α 是存在的。

*London*还指出：(S_{12})对奇数 m 和自然数 n 均成立；而对偶数m 且当 $n\geqslant 4$ 时不成立；即使对偶数$m\geqslant 4$，$n=3$，(S_{12})成立与否尚无定论。

命题13（*Marcus*和 *Newman*[8]，定理5）

$$(S_{13})\quad \frac{su(A+B)^2}{su(A+B)}\leqslant\frac{suA^2}{suA}+\frac{suB^2}{suB},$$

$\forall A,\ B\in\mathscr{S}_n$ 且 $suA,\ suB>0$；

$$(T_{13})\quad \frac{tr(A+B)^2}{tr(A+B)}\leqslant\frac{trA^2}{trA}+\frac{trB^2}{trB},$$

$\forall A,\ B\in\mathscr{S}_n$ 且 $trA,\ trB>0$。

证明：(T_{13})等价于

$$2\,trAB\,trA\,trB\leqslant(trA)^2trB^2+(trB)^2trA^2$$

由(T_4)及算术—几何平均不等式：

$$\begin{aligned}2\,trAB\,trA\,trB&\leqslant 2(trA^2)^{\frac{1}{2}}(trB^2)^{\frac{1}{2}}trA\,trB\\&=2\,trA(trB^2)^{\frac{1}{2}}\cdot trB(trA^2)^{\frac{1}{2}}\\&\leqslant(trA)^2trB^2+(trB)^2trA^2\end{aligned}$$

同样我们得到(S_{13})的另一证法。

关于(S_{13}) *Marcus*和 *Newman*的证法是：

记 $f(t)=f(t_1,\cdots,t_n)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}t_it_j\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$，则

$$f(a+b)-f(a)-f(b)=\sum_{i=1}^{n}\Big(a_i\sum_{j=1}^{n}b_j-b_i\sum_{j=1}^{n}a_j\Big)^2\Big/2\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{j=1}^{n}b_j$$

显然$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i>0$时有 $f(a+b)\geqslant f(a)+f(b)$。

再记 $g(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}t_i$，则 $g(t)=\sum\limits_{i=1}^{n}t_i-2f(t)$。同时

若$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i,\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i>0$，则

$$\begin{aligned}g(a+b)&=\sum a_i+\sum b_i-2f(a+b)\\&\leqslant\sum a_i-2f(a)+\sum b_i-2f(b)\\&=g(a)+g(b)。\end{aligned}$$

再记 $r(A)=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$，$r_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}$。则

$\dfrac{suA^2}{suA}=\dfrac{\Sigma r_i^2}{\Sigma r_i}=g(r(A))$。　于是在题设条件下：

因 $g(r(A+B))=g(r(A)+r(B))\leqslant g(r(r(B)))$。即是：

$$\frac{su(A+B)^2}{su(A+B)} \leq \frac{suA^2}{suA} + \frac{suB^2}{suB}$$ 。

反例：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \qquad B = A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0.1 \end{pmatrix},$$

表明(S_{13})和(T_{13})中对称性是必不可少的，对称性在(S_{12})中也是必需的，反例是：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad suA = 10, \quad suA^2 = 32, \quad suA^3 = 100,$$

但(S_{12})式不成立。

参　考　文　献

[1] F. V. Atkinson, G. A. Watterson and P. A. Moran, A matrix inequality, Quart. J. Math, Oxford 11: 137－140(1960)

[2] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, 2nd ed. Cambrridge, U. P. New York, 1952

[3] C. R. Johnson, Row stochastic matrices similar to doubly stochastic matrices, Linear and Multilinear Algebra 10: 113—130(1981)

[4] H. Kankaanpää and J. K. Merikoski, Two inequalities for the sum of elements of a matrix, Linear and Multilinear Algebra 18: 9－22(1985)

[5] R. Loewy and D. London, Anote on an inverse problem for nonnegative matrices. Linear and Multilinear Algebra 6: 83－90(1978)

[6] D. London, Inequalities in quadratic forms, Duke Math. J. 33: 511－522 (1966)

[7] D. London, Two inequalities in nonnegative symmetric matrices, Pacific J. Math. 16: 515－536 (1966)

[8] M. Marcus and M. Newman, The sum of the elements of the powers of a matrix, Pacific J. Math. 12: 627－635(1962)

[9] H. P. Mulholland and C. A. B. Smith, An inequality arising in genetical theory, Amer. Math. Monthly 66: 673－683(1959)

[10] A. Ostrowski, Uber Normen von Matrizek. Math. Z. 63: 2－18(1955)

[11] T. Yamamoto, On the extreme values of the roots of matrices. J. Math. Soc. Japan 19: 173－178(1967)

[12] H. Kankaanpää, J. K. Merikoski and A. Virtanen, Improving an inequality for sums of elements of matrix powers, Linear Algebra and its Applications 92: 225－229(1987)

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol 4, No. 1
1988 年 1 月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

·翻译新书评介·

编者按：南斯拉夫贝尔格莱德大学D．S．Mitrinovic教授的名著《Analytic Inequalities》［与P．M．Vasić副教授合作；Springer -Verlag ,New York -Berlin, 1970MR 43#448］的两个中译本最近分别由广西人民出版社和科学出版社先后出版，前者由赵汉宾将书译为《分析不等式》，后者由张小萍和王龙合译为《解析不等式》。威斯康星大学的R．A．Askey 教授和伊利诺斯大学的R．P．Boas 教授在1972年的美国《数学评论》上评价了这本书。这里我们请钱黎文同学编译出来，供对此课题感兴趣者参考。

《Analytic Inequalities》是根据作者以前的《Inequalities》［(Serbc -Croatian)，12dav preduz Gradev Knjiga，Belgrade，1965; MR 33#1411］的思想和轮廓，但它是在更高的水平之上，而且很少包含相同的题材。现在论述不等式的主要著作有三本：这本书，由H．G．Hardy，J．E．Littewood 和G．Pólya 合著的经典之作《Inequalies》［second edition，Cambridgeuniv，Press，Cambridge，1952; MR，13，727；有越民义的中译本，科学出版社1965年版］，由E．F．Beckenbach和R．Bellman合作的名著《Inequalities》［second printing ,Ergeb .Math．Grenzgeb．(N．F．)，Band 30，Snringer，New York，1965; MR 33#236］。对此课题感兴趣者应具备这三本著作：G．H．Hardy ,J．E．Littlewood 和G．Pólya 合著的特点是把不等式领域从孤立公式的汇集改造成分系统的学科，而且对一些不出现在其它书籍上的前沿课题进行了深入的讨论（尽管其中一些内容现在可以表现为更简明或更一般的形式）；Beckenbach -Bellman 著作的特色是它的方法和论题的范围的扩大；而Mitrinović 的很多论题在上述著作中还没有出现过，这本书的书目相对完备，对特殊不等式进行了广泛的收集，其中很多在别处是难以查到的，有些则是在本书中第一次发表。通过查阅文献，作者收集了不少本来易被遗忘的生动有趣的不等式。虽然“仁者见仁，智者见智”，但是我们相信每个读者都会在此书中发现自己感兴趣的内容。

此书开始一小部分主要是关于凸函数及一些推广。诚然，这一论题已被挖掘的深度并没有完全体现在这一部分。举例来说，此书没有明确提出Jensen积分不等式(见Hardy -Littlewood -Polya，no．206］，即便Steffensen变式也没有出现，也没有利用Jensen不等式来获得Hölder 不等式。

第二部分（几乎占全书一半）为一般不等式。这部分首先论及经典内容：均值不等式，Cauchy 不等式，Čebyšev 不等式，Hölder 不等式及Minkowski 不等式，Young 不等式，作者也给出了Beesack 的一个不等式，它类似于Young 不等式，但比它更基本，只是忽略了指出从中可得到$r \leqslant p^{-1}+q^{-1}r^{q}$ 的更简单的证明，而Hölder不等式正是依赖

于此的。由于逻辑的严谨与中心的突出，在H．Hardy，J．E．Littlewood与G．Polya的合著在这些经典题材上的处理可能更适合于那些刚刚开始对不等式感兴趣的读者；另一方面，Mitrinovic概括了很多现代加细与变体，其中一些有过分精雕细琢的味道，也许对特殊课题有用。当然，该领域的研究者必须查此书以免重复别人的劳动。而且，第二部分还有一些似乎更适于放在第三部分的不等式：Jordan不等式（$2/\pi \leqslant \theta^{-1}\sin\theta \leqslant 1$），与Stirling公式，Mills比$e^{x^2/2}\int_0^{\infty} e^{t^2/2}dt$联系的不等式，有一节论述Steffensen不等式及其应用，尤其是具有交错变更符号的和式的不等式，是作者一篇综述文章的修改。还有些章节论述现代不等式，例如Aczél　不等式：若$b_1^2-b_2^2\cdots\cdots b_n^2>0$，则

$$(a_1^2-a_2^2\cdots\cdots a_n^2)(b_1^2-b_2^2\cdots\cdots b_n^2)\leqslant(a_1b_1-a_2b_2\cdots\cdots a_nb_n)^2$$

Redneffer递归不等式（2.20）则暗示着其它不等式的值得注意的变化。有一些节是Cauchy不等式的补充，因为这些不等式给出了$\Sigma a_n b_n$的更精确的下界，这些成果是与Schwart Gauss、Fan、Todd、Diaz、Metcalf及其它人的名字紧紧联系在一起的。对循环不等式

$$x_1/(x_2+x_3)+x_2/(x_3+x_4)+\cdots+x_n/(x_1+x_2)\geqslant\frac{1}{2}n$$

的结果也进行了全面的收集。很多节是论及各阶导数的不等式和包含函数及其导数的积分不等式。在半轴上导数的最值关系问题的彻底解决的成果由于这本书出版太早而没能被纳入。主要不等式是Wirtinger不等式，Opial不等式及其变式。表f为f′之间的积分不等式的Hardy不等式，在这里或本书其它地方都未予讨论，尽管在2.20与3.7.26中被提及。我们希望下一版中会发现它的一席之地，因为至少它已被证明在调和分析中运用广泛。

第三部分也是本书意义最为深远的部分，它是450个特殊不等式的汇集，按照主题进行了不太严格的划分。这部分是课题的很有价值的源泉，很多不等式可作为更一般性理论的出发点。这里将简要地列出附有评论的一般性分类，相信会对本书读者有所帮助。3.1：含有离散变量数的不等式，与数值级数的部分和，二项式系数有关的不等式，等等。3.1.3可补充更好的下界$2/(2n-1)-\frac{2}{3}/(2n-1)^2$。3.1.39十分有趣而鲜为人知。3.2.含代数函数的不等式。其中一些为一般性不等式的推论，但也有一些是独立的。3.3：含有多项式的不等式，联系根与系数的不等式，联系系数与不同函数的不等式（Čebyšev Bernstein．Markov等）。这部分内容的精神实质迥异于本书的其它部分。这样的文献摘要以浅显的深度出现是必要的。关于非负多项式这一古老课题的庞大工作在此涉及甚少，也没有提到E．V．Voronovskaja提供了很多经典与现代问题的解的一般性理论。3.4：含有三角函数的不等式，2.3节宜安排于此处。3.5.含有三角多项式的不等式，其中有些内容与3.3节有关函数那一部分紧密相联作者没有收入一些一般性的理论及关于三角积分的一些类似命题。注意3.5.7较3.5.6为弱，在有趣而鲜为人知的3.5.23中$0<t_1+\cdots+t_m<\pi$可以为$0<t_v<\pi$代替。3.6：含有指数函数，对数函数和Gamma函数的不等式。3.7：积分不等式。这是以某种形式含有积分的特殊与一般结论的汇集，3.7.10的右边可改为$\frac{1}{x}$。注意3.7.35与3.7.36为“第二中值定理”的两种情形，一个更强的结论由Ganelius给出，在Polya定理中也许已能发现它的存在及其二维情形：若f可导，且$f(a)=f(b)$

则存在 τ，使

$$|f^1(\tau)|>4(b-a)^{-2}\int_a^b f(t)dt$$

3.8：复域上的不等式，主要是关于复数，数值级数和特殊函数的不等式。3.9：其它不等式。这些不等式由于其所属种类的多样性而难以放在别的地方，它们的范围从关于数集的简单结论一直到Hilbert 不等式，Carlson 不等式与Gronuall 不等式。3.9.47中$R\geq 4$时不等式不成立的断言至今未获证明，3.9.71则可包含在2.22中。

（821　刘启铭　审校）

问 题 有 奖 征 解

本期问题选自数学系《蛙鸣》杂志，欢迎大家研讨。每个问题的第一个正确解答者得奖；第 x 个获解问题奖金 x 元；本刊将登出最佳解法，并酬以甲等稿费。来稿请寄：中国科技大学数学系83级陈计同学。

问题 1　设正数 a,b,c,d 满足 $a+b+c+d=2$，证明或否定：

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{c^2}{(c^2+1)^2}+\frac{d^2}{(d^2+1)^2}\leqslant\frac{16}{25}.$$

问题 2　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为正数，$n\geqslant 3$，$x_1+x_2+\cdots+x_n=s\leqslant n+3$．证明或否定：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{1}{x_i}\right)\geqslant\left(\frac{s}{n}+\frac{n}{s}\right)^n .$$

问题 3　设 $a_i\geqslant 0$，$1\leqslant i\leqslant n$，当 $r>n/(n-1)$ 时，证明或否定：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^r\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^r+(n^r-n)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{\frac{r}{n}}$$

问题 4　设 $b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n>0$，$a_1/b_1\geqslant a_2/b_2>\cdots\geqslant a_n/b_n\geqslant 0$．证明或否定：

$$\left(\frac{E_n(a)}{E_n(b)}\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\frac{E_{n-1}(a)}{E_{n-1}(b)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\cdots\leqslant\left(\frac{E_2(a)}{E_2(b)}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{E_1(a)}{E_1(b)},$$

式中 $E_r(x)=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}x_{i_1}\cdots x_{i_r}$，$1\leqslant r\leqslant n$．

问题 5　设$0<x_i\leqslant\frac{1}{2}$，$1\leqslant i\leqslant n$，证明或否定：

$$\frac{G_n(x)}{G_n(1-x)}\leqslant\frac{G_{n-1}(x)}{G_{n-1}(1-x)}\leqslant\cdots\leqslant\frac{G_2(x)}{G_2(1-x)}\leqslant\frac{G_1(x)}{G_1(1-x)},$$

其中 $G_r(x)=\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}(x_{i_1}\cdots x_{i_r})^{\frac{1}{r}}$，$1\leqslant r\leqslant n$．

（下转第49页）

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

·国外新书评介·

编者按：加拿大British Columbia 大学Albert W. Marshall 教授和美国的Stanford 大学Ingram Olbin 教授合著的《Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications》(Mathematics in Science and Engineering, Vol. 143. Academic Press, New York-London-Toronto, Ont. 1979. xx+569pp.) 已引起了越来越多的关注；1984 年《应用数学与计算数学》杂志上，中国科学院应用数学所方开泰副所长专文将该书的重要内容作了简单介绍，加拿大Regina 大学王中烈教授也向我校不等式研习小组极力推荐过这本书；这里我们请数学系83 级张新发同学编译M. O. Albertson 在1981 年的美国《数学评论》上的介绍文章，供参考。

《不等式——优超理论及其应用》

该书的作者在前言的开头写道："虽然不等式在数学的各个领域都充当一个十分重要的角色，它们却往往是用特别的方法得到，而并非由某个'不等式理论'推出。然而，对相当一类的不等式，由'优超'的想法却可引导出一个在产生不等式方面非常有效的理论。不仅如此，用优超方法得到不等式，不仅对于加深理解，而且对于引导自然推广都是十分有益的！"

该书分为五部分。第一部分是关于优超理论的，以引人入胜的介绍开头，随后一章论述双随机矩阵，包括Hardy，Littlewood，Pólya 以及Birkhoff 的定理，并附有大量的改进，第三章是讨论保优超次序的函数，即所谓的Schur 凸函数，第一部分的末尾包含一个足以蕴函优超以及等价的条件表示。第二部分是关于数学应用的，包含组合分析，几何不等式，矩阵论以及数值分析方面的章节。其中的典型定理是Gale-Ryser 定理以及Schur 的有关Hermite矩阵对角元以及特征值的最早工作，（书中对这个结果提出三个证明），第三部分是有关随机问题方面的应用，包含有大量的最新资料。第四部分是关于不等式的推广，由关于优超及多元优超的离散推广构成，写得比较简略。由于在这方面还有不少未被触及的领域，所以本人认为这部分的后一章似应多下一点笔墨。第五部分收集了一些补充论题，写这一部分的目的，按作者的话说，是为了"使本书更加自成一体"，在主要内容之后，是广泛的参考文献索引以及课题目录等等。

《不等式——优超理论及其应用》一书享有极高的评价。该书不落俗套，但是却又保留了不等式的原有内容，文笔也十分流畅，最为重要的是，读起该书会使人觉得是一种乐趣，该书的作者还联系了不等式方面的历史，体现了作者的丰富的洞察力，在某些重要的地方，该书还阐明了来龙去脉，由于该书具有大量的文献索引，从而使对某一特别的结果有兴趣的读者能从索引指定的书中开始探索，这本书真不失为一本很有价值的参考书。

第4卷 第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol 4, No. 1
1988年1月　　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　　January, 1988

数学课程

A.Weil 著　陈天权 译

译者的话

A. Weil 是著名法国数学家，在多元复变、代数几何、抽象调和分析等方面都有过出色工作。战后，他移居美国，长期在芝加哥大学执教。本文是他给芝加哥大学数学系学生写的关于数学课程的简短指导。文章写在二十八年前。这二十八年来，数学又有了新的发展。数学与其它科学分枝的关系，数学与社会发展的关系都呈现了许多新的特色，这些在 A. Weil 的文章中当然不会有所反映，但是 A. Weil 的文章仍然不失为对学习纯粹数学的大学生的一篇很有价值的指导文章，文中有些观点对于学数学以外学科的同志也有参考价值，为此，将它译出，供大家工作和学习时参考。

译文

和欧洲大学生相比，美国大学生为一些自身的严重的缺点所困扰。严肃地指出这些缺点，让大家及时地认识它们并作出努力去克服它们，是非常必要的。除了缺乏早期的数学（或者选择攻读的其它领域）训练外，美国学生还缺乏基本技巧——阅读、写作和口述——的训练，也就是说，他们由于不善运用书面和口头语言而苦恼，例如：

A．中等程度的学生不善于从书本中进行学习，除非该书已把内容分割成许多小块（如用调羹给婴儿喂食）。为了在数学（或其它科学）上能有所成绩，他必须认识到，多数课题只包含很少几个基本思想，一旦掌握了这几个基本思想，通向围绕着它们的课题内容的细节的大道便畅通无阻了，阅读一本书或者一篇或长或短的文章绝不是要绕着它的外部边缘爬行，而是要以最适合于自己的方法直插课题的核心，从这儿出发，我们可以最清晰地看到课题的全貌，这是任何指望成功的科学家必须学会的最重要的技巧。

B．中等程度的学生不善于机智地记笔记。这是因为：在听讲时，不能敏捷地区分什么是重要的，是必须记下的和什么可以省略的（或因这只是个评注或例题解释，或因它在以后很容易被补出），几乎无需说明，当大学学习向前进行时，学生在课堂上的

---

*本文译者是内蒙古大学数学教授，译文由本校余红兵老师提供，对他们的大力支持，我们深表感谢！

收益大小将越来越依赖于他记笔记的能力。

C．中等程度的学生不善于用确切而有说服力的语言作口头或书面的表述。考虑到现存考试制度的要求和毕业后可能担任教职这样的前景，他是必须学会不仅能用流畅的口语来表述（假若他在这方面尚有欠缺的话），而且，更主要的，在要他作简短报告时，善于组织题材，清晰地说出关于他的题目的全部材料，为了在书面表述中达到同样的目的，除了在英语作文的基本原理上下功夫外，别无它途，因为应用于科学题材的作文原理与一般的作文原理并无区别，遗憾的是，我们不得不提醒许多许多学生，即使在科学领域中，通常的英语拼写和语法规则仍然是须要遵守的，是不能忽略的。

无疑，学习和训练上述技巧是中学教育的任务，进入了大学而尚未掌握这些技巧的学生（这是现在大学生中的多数）必须学会它们，不然他就不可能达到硕士学位或哲学博士学位所要求的科学上成熟的程度。他应该明白，从他的大学老师那儿是不能指望得到很大帮助的。大学老师们首先是科学家，他们的主要兴趣是在他们的专题上，他们把自己的大部分时间和精力贡献在专题的教学和研究上，很少有人对教学过程中的问题有强烈兴趣，很少有人愿意直接去教这方面的问题。这是美国高等教育的最严重的几个问题之一，使它更为严重的是，假若学生不能认识自己在智力装备上的不足（这是常见的）便不自觉地将自己沉浸在日常作业和有时写得不怎样鼓舞人的教科书学习中去。这并不是说，要想在数学方面成为一个行家无须像在其它领域中那样掌握数学的细节，这只是说，在数学中也像在其它领域中那样，这样一种掌握只能通过对实质的深刻理解而获得。通过大量细节而达到实质的理解是需要一种技巧的，后者是必须和能够学会的。

上面说到的几点适用于任何学科，我们现在要专门对数学学习说几句，任何（初级阶段的）数学课学习都包含下列几方面：（a）掌握主要概念和定理。这些概念和定理在数量上是很少的，但它们构成了课题的核心，（b）日常的习题训练。通过训练，在与那些基本概念打交道的过程中获得必要的复习；（c）包含一些数学难点的问题。通过这些问题可以发展学生联系那些概念的创造和想像的能力。在初级阶段，这三方面的同样重要的。进入高级阶段后，（b）的重要性减弱，或者与（c）难以区别了，所以高级阶段的书或教科书将把很多东西留给学生自己去作，自己去思考，这时候，专门分设的问题已经变得不那样需要，但是学生在很大程度上变成了教师的积极的合作者，除非学生在初级阶段在解决（c）型问题方面已有足够训练，不然，他是不能指望成功的。

不言自明，假若没有机智地使用数学概念以解决具体问题的能力，真正理解这些基本概念是不可能的。反之，未能理解这些概念而想应用它们去解决具体问题更是不可想像的。因此，数学学习过程中的三方面（a）、（b）和（c）是不可分开的。也许是受了工程学院的影响，或者是由于所谓的数学的“实际”应用的错误概念作祟，美国学院的数学教学传统上包含或多或少的机械训练。这种训练对于“九九表”的教学是完全适合的，但对其它内容则很少有用了。在我系数学教程的新安排中，我们又把重点放回到原来的地方：主要概念的理解上。这也许会导致对学习过程中（b）和（c）这两部分的忽视，由于必修教材必须压缩在非常短的时间内教完，这种忽视便更易发生了。首先，美国学生进入大学时几乎没有什么值得说的数学知识；其次，美国还没有实行别的许多国家已经实行的方法：每一门数学课应配以由合格助手担任的经常性的习题课，这样，当

教授集中精力于他感兴趣的理论方面时，教学中的练习方面也能受到它应得的重视。由于（c）的重要性还只是刚刚受到应有的考虑和我们的大部分课程都是每周三小时的，重点放在（a）上的决策几乎不可避免地将以削弱（b）和（c）为代价，然而本系教师们正对所有这些问题给予应有的注意，正在许可的条件下，努力改进教学的各方面。当然改进将是逐步的。同学们，特别是决定以数学为职业的同学，必须力图保持（a）、（b）、（c）三方面的平衡。在即将到来的日子里，（c）是最容易被忽视的，他们不妨试用一些和他们所学的课题有关并有着不是常规方法能解的问题的习题集，美国或外国出版的均可，以补这方面之不足。

下面我们要讨论，构成目前教学计划中的各门课的内容及其相互关系。过去，传统课程的安排是简单的。在初级阶段，它包括：二维和三维（平面和立体）的解析几何，和所谓的"大学代数"，即初等方程式论，目的在于求实系数一元方程的数值解。解析几何表述的形式是18世纪 *Clairaut, Euler* 和 *Lagrange* 所达到的水平（虽然它的边缘由于此后的磨损而显得十分模糊了）。"代数"基本上是经牛顿改进后的笛卡儿的代数。紧接着便是微积分和它在曲面与曲线上的应用，这基本上仍是欧拉所定下的图式。后面便是所谓的应用数学，即沿着牛顿的线索被上一世纪的作者所发展了的初等理论力学。微积分又发展到单元复变函数，它是 *Cauchy, Riemann* 和 *Weirstrass* 工作的大大删节后的综述。最后，当学生已经学过椭园函数的定义及它的一些公式后，他便被认为是一个训练有素的数学家，适于从事他的课题的高级研究工作了。

不幸，今日数学系的教师和学生不再能过这样轻松的生活了：上述课题仍然不失为基本的，但已是远远不够了的。因此，必须以一切方法使学生在短期内学得更多的东西。还有，过去的将近半个世纪的抽象"数学"和"公理化"方法的发展已经使我们越来越清楚地认识到下列事实：从某些方面看，数学是一种语言，而且这个语言必须跟上它必须满足的需要，这个语言又有它自己的语法和词汇。我们还必须学会这个语法，掌握这些词汇。近代数学的语法与词汇首先是由抽象集合论，其次是由一般拓扑与抽象代数供给的：这些都是数学的辅助分枝，它们之间又有着如此显著的差别：抽象集合论建立不到100年以前，而一般拓扑则不到50年，两者都可被看作是已经成熟了的（至少从今日数学所关心的需要看是如此）；虽然代数起源于巴比仑人，但至今仍在茁壮地发展中，无论如何，这些分枝已经渗透到传统的课题（如微积分与几何）中去了。远在人们认识到在许多不同的课题中支离破碎地研究它们是一种浪费之前便如此了，例如，把二次型化为平方和的方法只不过是巴比仑人早知道的解二次方程的"配方"法，它对平面和立体解析几何中的二次曲线与曲面的研究和射影几何来说都是基本方法，它在高维情形的推广对于微积分中的极大极小的研究，**Hilbert** 空间中的"正交化方法"和在 **Hilbert** 空间被引入数学以前的许多具体情形来说也是有着根本的价值的。把所有这些课题中的概念，以它在各种应用中最合适的方式统一起来，毕其功以一役地加以处理是会带来明显的好处的。

同时，不能忘记，学习一种语言的语法是不能在实际使用这种语言之前进行的（也许对于语言学家是例外），它们是必须手拉手地一起前进的。同样，在数学中，抽象概念必须逐步地谨慎地引进，这对于初学者来说尤应如此、很幸运的是，由于下列事实这变

得比较容易了；一般拓扑中的大多数概念和代数（线代数与矩阵论中的较大部分）中的许多概念在很大程度有着强烈的几何背景而可以用几何语言来表达，这就容易被直观所接受。

以上所述，解释了当今的数学教程的安排，预科水平的课程是提供学生以弥补初等数学知识上的不足（如解析几何、三角学、复数等课题，这些都是今后的工作中常常用到的)。预科课程之后是微积分，它的主要目的是对满足适当的光滑性条件的一元和多元实变函数的局部性质的研究（“局部”是理解为“在变量的值的一个邻域内的”)在今日数学中（纯粹和应用）这种函数已不占有像一百年甚至五十年以前那样的重要地位了，但是对于培养有前途的数学家和专门应用数学于某个专业的科学家来说，研究这类函数的方法仍然是一般教育中的不可缺少的一部分，而且在初级阶段的学习中，学生的数学知识的实质部分（相对于形式部分而言）主要还是来自这方面的学习，微积分的学习被组织成连贯的四个部分，初学者可望逐个学习。这些课程中包括一些例解说明，但是，从长远观点看，更多的例解材料应放在初等微分几何与初等力学这样一些课程中，后者又为进一步学习这些题材铺平了道路。

学生开始学习微积分的同时或稍晚，便应该开始熟悉一些今后对他不可缺少的抽象概念，这就是一系列代数课的目的之一，以通常的整数和解析几何中的二维、三维向量空间为背景，一系列代数课将向学生介绍群、环、域，向量空间，线性变量等概念和关于这些概念的基本定理，这些概念已经渗入近代数学的大部分领域，包括微积分课程中的一些课题（如曲线和曲面积分，各种形式的 Stokes 定理需要 Grassmann 代数的知识，它是重线性代数的一个基本部分，又和行列式理论不可分割)，因此细心地弥合代数课与微积分课之间的隙缝是必要的，同时，代数课中的很多知识又和有紧密联系的仿射几何，射影几何，任意维空间的欧氏几何不可区分的，假若代数的学习不是形式地进行的，而是在每个可能的场合尽力发展和提高学生的几何直观，就使得专门开设这些几何课失去了必要。

学习代数与微积分时，学生便逐渐认识到集合的一般概念和记号（不论它是实数集合、函数集合、群的元素的集合等）及集合运算（并，交，积等）的必要性，在代数里他又熟悉了一些数学对象并非作为先天存在而接受的，却是由一些性质来描述的，这些性质又不是完全确定它们，换言之，学生已经接触了抽象集合的处理以及公理化方法，不到五十年以前，这些训练还被认为对逻辑学家比对数学家更适合，数学的发展已经产生了这样的影响，不仅这些训练对数学系学生是必要的，而且只要学生在才智上已有接受它的准备，它应该提前得越早越好，具体地说，经验似乎告诉我们，不要比两年微积分学完后还要晚，以上说明是针对集合论与一般拓扑学课程的。虽然这两门课的实质内容都很平凡，但是它们提供了一种语言，这种语言将使以后要学的大部分课题能方便地表述出来。

在关于课程的描述中，现在已经到达了这样的地步，越过这步专门化（或分科化）便可开始了。是的，不知道伽罗华理论可以成为一个好的分析学家，不知道勒贝格积分可以成为一个好的代数学家，不知道代数数论可以成为一个好的拓扑学家。虽然，这一切都是可能的，但并是非值得称道的。现在，全能的数学家比以前稀罕了，我们不准备

在这儿讨论这种过早的专门化可能带来的灾难性后果，但是愿意指出，本系不愿意鼓励这种过早的专门化，我们期望所有的学生获得纯粹数学主要分枝的基本知识，这将使他们能够考验自己的能力，并能在确定今后的工作领域时，作出理智的选择。这些基本知识至少应包括：（a）分析中的近代积分理论的某些知识，（最好不要限于一元或多元实变的勒贝格积分，而应扩展到紧和局部紧空间上的积分理论），希尔伯特空间的知识，常微与偏微分方程的知识，一元复变函数的知识；（b）代数中的域与域扩张（包括Galois理论）的知识。（c）某些数论的知识，至少应包含二次可逆定律和二次域中的理想理论。（d）几何中的几何与群论的关系，（在欧氏，射影，非欧几何中这就是 Erlanger 纲领）和黎曼几何中的活动标架方法。（e）拓扑中的基本群和纳覆空间的知识，一维同调群的知识，闭曲面分类的知识。在很大程度上，这些知识可以互相独立地学习，祇有在高级阶段，数学各分枝之间的相互作用才会变得重要起来。学习它们的顺序可以根据学生的爱好和方便去决定，这只是个选择和机会的事。

最后，学生必须认识到，数学是一门有着悠久历史的科学，假若对它的历史背景没有一些了解，要真正理解它是不可能的。首先，时间绘出了人们心目中的数学和数学分枝的图象的一个维数。另外，数学中主要概念是不多的，清晰地理解它们的最好途径是追寻它们相互渗透时逐步发展的线索，这对于各级的有远见的数学教师来说尤其重要。对于他们来说，课堂上必须教的课题的干巴巴的知识远不如明瞭隐藏在这些课题背后的主要思想来得重要。最后，数学研究是一种知识的探索，学生将会失去对它的兴趣，除非它给予学生接触到智慧的伟大的机会，这种机会在教科书的学习中是不会碰到的，也不大可能从学生为了成为哲学博士而必须攻读的那类文献中遇上。在眼前的情况下，不能指望学生能对数学史有一个全面的了解。除非他专攻数学史。而且即使专攻数学史也可能不会有此了解。然而，可以指望他对他特别感兴趣的几个方面的过去的数学家的原著有所熟悉。

（上接第45页）

问题27　设 n 是自然数，p 是素数．证明或否定：集合 $\{p \mid 1<p<4^n\}$ 元数个数是偶数。

问题28　a、b 是有理数，且 $a\neq 0$，是否存在有理数 λ，使关于 x、y 的方程

$$(ax^2+b)^2+y^4=\lambda$$

有无穷多组解？有至少5组正有理解？

问题29　任给9个正数，将它们排成的3阶正矩连中，是否存在一个方阵的所有特征值都为非负实数？

问题30　设 Ω 是 R^2 中的凸开集，$f:\Omega\to R^1$（可微）．若 $\forall\varepsilon>0$，$\delta>0$，当 (x,y)，$(x',y')\in\Omega$，且 $|x-x'|<\delta$，$|y-y'|<\delta$ 时，有

$$\frac{f(x,y)-f(x',y')-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)(x-x')-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}<\varepsilon,$$

则称 f 在 Ω 一致可微，问 f 在 Ω 一致可微是否可推出 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 Ω 一致连续？

第4卷第1期　　中国科学技术大学学生学报　　Vol. 4, No. 1
JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA
1988 年 1 月　UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　January 1988

为什么要研究不等式〔1〕

研究不等式有三个原因：实践的、理论的和有趣味的。

在许多实际问题的研究中，一个量需要用其它的一些量给出估计。对此，经典不等式很有用。

从理论上来看，很简单的问题会引出整套理论。例如：一个量的非负，何时可导致另一个量的非负，从这个简单的问题发展成正算子理论和微分不等式。而拟线性理论则是动态规划理论和正算子理论的融合。这在数学中是典型的：每一新的理论都要用到已有的一些理论。

另一个引起许多有趣研究的问题是寻找与不等式相联系的等式，我们往往使用这样的原则：每一个不等式应该由一个使它变得显然的等式得出〔2〕。

沿着这些途径，我们也可以寻求使不等式显然的表达式，这些表达式常常是某些量的极大值或极小值。

另外，许多不等式与几何性质有关。因此我们可从两个方向进行研究：或是找寻一个解析不等式的几何等价；或是寻求一个几何事实所对应的解析不等式，如凸性和对偶性。

最后，我们转向美学方面。常言道：情人眼里出西施。然而人们普遍认为音乐、艺术及数学中的一些作品是美妙的。不等式正是以其精致的美使她富于魅力。

（陈计译自《第二次国际一般不等式会议录》第449 页）

〔译注 1〕作者理查德·贝尔曼（1920～1984）是本世纪美国最伟大的数学家之一，也是极少数同时享有美国工程研究院和科学院会员资格之一。他生于纽约市；曾在洛斯亚拉摩斯（Los Alamos）原子弹实验室服役；1946年复员，回到普林斯顿大学，同年获得博士学位；1953年加入著名的“思想库”兰顿公司，在那里研年出动态规划技巧；1970年获得首届维纳（N. Wiener）国际应用数学奖。他与埃德温·F·贝肯巴克(Edwin F. Beckenbach) 教授在1961年写得《不等式理论》一书，是这个领域的第 2 本经典著作。

〔译注 2〕一个有趣的例子是1983年国际数学竞赛第 6 题“设a、b、c 是三角形的边长，求证：$I \equiv b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b)\geqslant 0$”。

这次竞赛的满分获得者，西德的中学生伯尔哈德·李将等式改写成

$$I=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

从而显然有 $I\geqslant 0$，他由于给出了这个题这样一个最简单的解决，获得了第二十四届国际数学竞赛“特别奖”。

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988年1月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

Oscar Zariski传*

David Mumford

Oscar Zariski于1899年4月24日生于波兰与苏联交界处的一个叫Kobryn的小镇。当时该镇属于苏联，在二次大战期间一度属于波兰，现在又成为苏联领土。Zariski的父亲叫Chana Zaristky，母亲叫Bezalel。他原名是Asher Zaristky，到意大利后才改为现在的名字。他的母亲在Kobryn经营一家杂货店，他在两岁时，他父亲便去世了。俄国革命战争的中期，Zariski进了基辅(Kiev)大学。在敌人的一次袭击中，处于众人之中的Zariski一条腿受了重伤，经两个月治疗后方康复。作为一名学生，他既对政治上的革命观点感兴趣，又对代数数域和数论心醉神迷。在此期间，为了支撑生活，他还不时地为一家地方报纸写稿。

由于当时苏联的教育条件有限，1921年Zariski进了意大利的比萨大学，后又转入罗马大学，该校的代数几何相当著名，Castelnuovo, Enriqus以及Severi都才华卓著，当时，意大利的大学对外国学生毫无限制，这对于身无分文的Zariski来说无疑是十分重要的，Castelnuovo立即意识到Zariski的天才，而Zariski也为他所吸引，有一次，Castelnuovo带着Zariski环罗马城步行了三个小时，过后Zariski才知道Castelnuovo已对他进行了一次涉及数学各个领域的口头考试，Castelnuovo意识到Zariski不仅会把他们的课题推向深入，而且会找出新的方法来克服他们现存的局限性。Zariski常喜欢引用Castelnuovo的话："Oscar，你虽然和我们在一起研究 但你是青出于兰而胜于兰。"这表明他的老师是多么的具有眼力。在罗马，他结识了Yole. Cagli，一个罗马大学的学生。他们于1924年9月11日在Kobryn举行了婚礼。

同年，Zariski获博士学位，在他的论文中，对于满足下述两个条件的有理函数$y=P(x)/Q(x)$全体进行了分类：(1) x可用上述的y的根式表示，(2)任给上述有理函数式的两个根x_1，x_2，所有其它根x都可表为x_1与x_2的有理函数，他的第一次研究工作便已充分显示了他把代数观点(Galois群)，拓扑观点（基本群）以及经典几何中的合成方法融于一体的能力，不同工具的交错使用成为他研究工作的一大特征。

1925－1927年之间，他依靠在罗马担任洛克菲勒基金会赞助的研究助手所获得的收

* 数学系83级张新发 同学译自Notices of the American Mathematical Soicety, Vol. 33 No. 6 (1986)

入继续对这些观点进行探索。1925年6月18日，他的儿子Raphael出生了，他在约翰·霍普金斯大学接受了一个职位。1928年，他全家移居美国。1932年9月14日，他的女儿Vera出生。

他在任职期间的一个决定性的论文是他的关于Severi的一个不完全证明的分析。Severi在文章中试图证明一个亏格为g的一般曲线没有非奇异的自同态（endomorphism），他的证明读起来似乎是完备的，但Zariski发现了问题，并且找出了一个非常巧妙的办法补救了该证明，但不论是发现的错误，还是证明的补救，都没有为Severi所接受，Severi后来也找到了正确的证明。

这个发现看来已使Zariski的兴趣转到研究代数簇的拓扑上去了，特别是簇上基本群的研究，这方面技术上的苛刻超出了问题的本身，工具利用起来干净利落且十分新颖．他常到普林斯顿与Lefschetz进行讨论，在大约1927到1935这段期间内，他通过射影n－空间除去一个除子(divisor)来研究一个代数簇上的基本群，这个工作以探险及发现为其特征，尽管现在许多人都感兴趣，但仍然还有很多未被触及的领域。下述的一个结果将会使人们对他所搞的新东西有一定的了解：根据Severi的另一篇不完备的论文，人们普遍认为具有确定个数的结(node，通常双重点）的固定次数的平面曲线属于唯一的一个代数族（Algebraic family)，而Zariski发现，有确定数目的歧点（cusp，另一个很复杂的双重点类型）的固定次数的平面曲线可以属于好几个代数族，他找出了6－歧点的6阶曲线C_1，C_2，它们的基本群不同构。

1935年，Zariski完成了他的著作《代数曲面》，一本集他在意大利学校期间的研究之大成的代表作。他的目的是想广泛地传播他们的想法与结果，但对他来说，该书的结果却是“曾经快乐地生活的几何乐园的丧失”。他十分清楚地看出，他的简略概述的不严格性，不是若干个互不相关的不足，而是一个遍布的灾难。他现在的目标变成了保证整个代数几何的健康发展，代数曾经是他早年的爱好，现在正处于青春期，在Noether和Krull手中充满了许多美丽的新思想，并且Van der Waerden已将代数应用于代数几何的许多方面。为此，Zariski投身于新的训练之中，1935－1936年，他在普林斯顿高等学术研究院与Noether作定期的聚会，然后又在Bryn Mawr，通过与导师的直接接触学习新的领域。

这样从1938－1951年，在这十三年间，他开始了平面曲线奇点理论的重建工作。他用的是赋值论的方法，以及在他的奠基性论文中他称之为“同态函数”（homomorphism function)的方法(关于层(sheaf)的章节是从I－adic拓扑中的环的完备性构成的)。如果你看一看他在这段期间的论文，你就会发现许许多多的令人难以置信的开创性的新想法如同潮水一般奔湧出来，在其中，通过将代数结果应用于阐明基本几何观念，发明了一个又一个代数工具。按照惯例，一般四十多岁的数学家往往都坐享他们早期开创性工作的成果，而Zariski在他的那个十年中，不容置疑是最敢于冒风险的。他与Andre Weil广泛地通信，Weil的兴趣也在于重建代数几何。并且他还把代数几何用到特征为p的域上，希望能在数论上有所应用，尽管他们之间很少同意对方的观点，但他们发现这对双方都具有极大的鼓励。weil后来说，Zariski是他唯一可以信赖的代数几何学家，1945年，当他们都访问巴西圣保罗时，他们设法见了面。

然而在同一时间里，Zariski却遇到了可怕的个人悲剧。在战争中，他的所有波兰亲戚都被纳粹所杀，只有他的家庭以及他的两个移居到以色列的亲族人幸免于难，他常告诉人们在波兰被侵占的日子里，他与Yole的焦急与痛苦。他们在横穿美国的半途中，驾车回到东海岸，一刻也不停地收听着广播——他们与另外半个悲惨世界的唯一联系，然而他们却无能为力。

这段期间，Zariski用他的代数想法解决了许多问题，他的论文有三篇尤其深刻优美，我们在此稍稍详细一点介绍一下：

第一篇论文是关于双有理映射的研究，该文证明了著名的“Zariski 主要定理（Zariski Main Theorem）”这是簇之间双有理映射的基础分析的最终结果，这里映射是定义域与值域的有限多个子簇集合的一一到上的映射，而“膨开”（blowup或 bl-blow down）一些特殊点。Zariski证明了如果定义域与值域中有孤立的相互对应的点P及Q，就是说，对应于P点的集合包含Q而没有曲线通过Q，并且对应于Q点的集合包含P而没有曲线通过P，更进一步，P与Q符合一个代数限制—它们为正则(Normal)点——那么实质上Q是对应于P的唯一点，反过来也成立（略强一点说，映射是P与Q双正规(biregular)的映射）。Zariski的证明尽管篇幅不长，但颇令人震惊。

这段时期的第二篇论文是关于代数簇的奇点的消除，在该文中，彻底地证明了所有维数最多为3（在零特征域）的代数簇存在“非奇异模型”（nonsingular model)，就是说，双有理等价于非奇异射影簇，过去对于3维的情形，即使是一帆风顺的意大利数学家也退避三舍，甚至在二维情形，尽管有些经典的证明实质上是正确的，但还是有许多发表出来的文章根本就不对。Zariski锲而不舍地研究这个问题，运用了各种各样的技巧，共写了不下于6篇200多页的有关论文。也许，最令人震惊的新工具是把一般的的赋值论应用于函数域(function field)，这样便可以用一个双有理不变的方式，对所有必须非奇异化的位点集合(set of places)进行描述，这个结果对数学界来说确实表明了新观念的巨大效力。许多年来，从事这个领域的人们都认为这项工作是全部代数几何中的最困难的证明，只有当Abhyankar证明了特征P的域上曲面，以及后来广中平佑证明了对特征0的任意维数簇的同样结果之后，人们长越过了这个关口。

第三篇论文中，他发展了抽象“全纯函数”(holomorphic function)理论。他的想法是利用先前的环的完备性中关于想理的幂的记号，来代替收敛幂级数的思想，并且把所得到的完备环的元素如同经典全纯函数一样使用。该方法的一个最惊人的应用是给予了“主要定理”的一个较强解释，这就是连通性定理。通性定理表明如果一个从X到Y的双有理映射是单值是，且Y中的点Q是正则的，那么Q在X中的逆像是连通的（我们假设X和Y是完备的，例如均为射影空间)，这个结果是导致Grothendieck的应用目前来说仍属新颖的工具来重建代数几何基础的庞大工作的起因之一。

这种论文表面上的惊人的庞大，引起了数学界的注意，Zariski于1944年获得了美国数学会的Cole奖，1945年，他转到伊利诺斯大学担任专职研究教授，在四十年代初，他的工作引起了G. D. Birkhoff的注意， Birkhoff认为他应当去哈佛大学，1947年他接受了邀请，在哈佛度过了他的余生。他对哈佛的数学环境有强烈的感染力，在那儿，

他享有尽可能吸引最优秀的人才到哈佛的机会，他引导他的学生们发挥自己的最大潜力，当他担任系主任时，教务长 Mcgeorge Bondy称他为“意大利强盗”。他不但在他熟悉的或是不熟悉的方面，他都能精明地应付自如。每当哈佛的古怪的指令规定，也就是 Graustein计划（以发起该计划的数学家命名）与他的计划相关时，他就利用这些规定，而当这些规定与他的无关时，他便对那些胡言乱语故作不知，并要求那些人按自己的意思去办。在他的后三十年中，他使哈佛成为代数几何的世界中心，他欢迎 Weil，Hodge，永田雅宜，小平邦彦，Serre，Grothendieck 以及许多其他人出席他的讨论会。他家里举行的那令人振奋的聚会，以及 Oscar 和 Yole 的热情款待令人终生难忘。

他的专著《代数曲面》（与前一个不同）标志着他的代数几何重建工作的开始。Zariski 感到他现在有了可靠的，有效的一般工具，自然他就想到是否可以将曲面理论的主要结果有序地整理出来，他以上同调(Cohomology）的对偶定理（在Serre 与 Grothendieck开始这个课题之前，他称之为 Enriques - Severi引理)，簇上每个双有理等价类的极小非奇异模型的存在性问题，以及由 Enriques 开创的簇的分类（即现在的根据小平邦彦维数分类）等问题作为他的现代工作的开端，在此领域的每个方面，他都向他的学生们展示了可能探索的领域以及激动人心的前景。

尽管他本人已发展了关于代数几何基础的大量理论，他仍然欢迎新的定义和技巧，因为这些东西将会使主题更加鲜明。他欣然接受了新颖的层理论和上同调论的语言尽管他对这些语言不适应，他还是于1953年在科罗拉多夏季学院(The Summer Institude in Colorado）研究了这些基本思想，当 Grothendieck 在该领域展露头角时，他立即邀请他前往哈佛。对于 Grothendieck本人来说，他欢迎与 Zariski 共事。由于 Grothendieck 的政治信仰，不允许他在那些不幸的日子里发誓效忠，他甚至要求 Zariski 去调查到坎布里奇的监狱去继续数学研究的可能性，言下之意是那里有许多的书和访问学者。

在 Zariski 的数学生涯的最后阶段，他又转向奇点问题。“退休”这个词对他来说是毫无意义的，他预想在他六十、七十甚至八十岁阶段，他便可以在一个更为泛的基础上对等价奇点(equisingularity）进行探讨。他的目标是对于任意簇X，找出一个自然的分解，使之分解为若干个 Yi，每个 Yi 成为X的一个子簇，而又从X移去有限个较低维数的簇，使得“沿着”每个子簇 Yi，大簇X本质上在每个点有同样的奇点类型。Zariski 向这个目标迈进了一大步，但这个问题却是非常之难，到现在仍没有解决。

在 Zariski 的最后一年，他因为听力障碍影响了他的研究工作。他过去在数学以及与朋友、同事的社会交际方面总是充满活力，而且善于洞察一切，而现在他得了耳鸣的毛病，耳中总有玲声在响，这使他受到了巨大的打击。他对噪音非常敏感，逐渐丧失了听力。他强迫自己保持镇静，闭门不出，潜心研究，只有家庭对他的无限的爱维持他度过了最后的时光。1986年7月4日，他在家中与世长辞。

Zariski 对代数几何作出了巨大的贡献，人们缅怀他的功绩，给予他极高的赞誉。他分别于1959，1965，1974，1981年分获 Holy Cross大学，Brandies大学，Purdue 大学和哈佛大学名誉学位，于1965年荣获国家科学奖章，1982年，以色列政府颁发给他 Wolf奖。他的朋友，学生和同事们，不仅会铭记他所建立的优美的定理，而且也会记得他们所爱戴的 Zariski 的顽强的毅力和满腔的热忱。

第4卷 第1期 中国科学技术大学学生学报 Vol. 4, No. 1
1988年1月 JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY January, 1988

埃德温·F·贝肯巴克教授

数学系85级 余忠

1982年的数学杰出贡献奖（Award for Distinguished Service to Mathematics）获得者是数学界一位大名鼎鼎的人物——几十年来一直活跃于科研、教学、写作和一些学术组织的开拓性工作的埃德温.F.贝肯巴克（Edwin.F. Beckenbach）教授。他受到嘉奖是因为他在如此众多的方面都做出了长期的杰出的贡献。他的巨大的影响已经广为人知并将经久不衰。

埃德温.F.贝肯巴克1906年出生于美国德州达拉斯（Dallas）城，他在那儿上了学并一直念完高中。1924年秋季，他进了休斯顿（Houston）的莱斯（Rice）大学并于1931年获得哲学博士学位。他的论文是在雷斯特.R.福特（Lester .R. Ford）、四十年前曾任《美国数学月刊》编辑的一位杰出数学家指导下完成的。除此以外，Tibor Rado也对他的学术研究起着重要的影响作用。

大萧条的1931年，寻找职业实非易事。但是埃德温在三十年代的这段艰难岁月里却干得相当出色。他在普林斯顿（Princeton）、俄亥俄州（Ohio State）和芝加哥（Chicago）做了两年的国立研究员，后来又在莱斯大学获得了一个职位。不久他又到了密歇根（Michigan）大学，后又去了德克萨斯大学（University of Texas）。自1945年起，他在加利福尼亚州立大学洛杉矶分校（UCLA）当了三十多年的数学教授。埃德温.F.贝肯巴克是使该校显赫如今的几个学者之一。至于其他的贡献，则当推他在数值分析学院（Institute for Numerical Analysis）的建立过程中所起的重要作用了。

埃德温著述甚广，其中涉及到不等式、几何复变量理论。并从次调和函数逐渐延伸到表面理论。例如，他曾和理查德·贝尔曼（Richard Bellman）合写了两本有关不等式的书：一本被收进美国数学会的新数学系列丛书中，另一本比较深奥的现已成为一本标准参考书。埃德温还编辑了《现代工程数学》（Modern Mathematics for the Engineer）第一和第二卷，《应用组合数学》（Applied Combinatorial Mathematics）和《通信概要》（Concepts of Communications），后者曾被译成八国文字广为留传。另外，他还是数学大字典的编辑之一。除了这些高级工作外，埃德温还是一个作家，他与别人合写了几本具有初等、中等和高等水平的读物。他还为中学数学研究会（School Mathematics Study Group）、国家数学教师协会（the National Council of Teachers of Mathematics）和非州教育计划（African Education Program）写过文章。在写作

和编辑之余，埃德温把时间和精力都倾注在一些学术机构上，这其中当然包括美国数学协会。

埃德温是美国数学会的成员，当《数学评论》（ Mathematical Reviews）一度处于不景气状态时，他曾担任过一个与此有关的特别委员会主席来负责此事。他还是工程和应用数学会的会员，并曾担任过一个专门机构的主席来组织数学理事会的选举工作。除了曾担任过高等学术研究院委员会的受托人和西部分会的领导者以外，他还是国际一般不等式会议的组织者之一，这个为期一周的讨论会在德国俄伯沃尔范奇（Oberwolfach）的黑森林中的数学所自1976年起每两年举行一次，他编辑了这些国际会议的会议录。

冗长的列举容易使人厌倦，因此本文只限于对埃德温因世界数学事业做出的不胜枚举的贡献给出一个范例。尽管如此，如果不提及他在《太平洋数学杂志》（Pacific Journal of Mathematics）中所起的巨大作用，那么任何一篇报道都将是不甚全面的。事实上，这家杂志的1982年第1期刊首语就是献给创办该杂志的最杰出的两位奠基人：埃德温.F.贝肯巴克和伯克利（Berkeley）大学的弗兰提塞克·沃尔夫（Frantisek Wolf）。对于常人来说，创办一种刊物已非易事，至于那些有足够的洞察力和精力，同时对两种刊物都做出重大贡献的人更是凤毛麟角，而埃德温就是这样一个出类拔萃的人。他长期的关于协会应该拥有自己的通讯刊物的呼吁终于导致了那本非常成功、内容精辟的《Focuse》的诞生。它的主编马歇.P.施瓦特（Mauia P. Sword）称埃德温是"Focus之父"。

现在看看谈谈埃德温对数学会的其他贡献。他曾当选为德克萨斯分会的主席，但未埃上任就迁到密歇根。他还做过MAA的访问学者，并且担任了五年的《美国数学月刊》的通讯编辑。1971年后，他一直担任出版协会的主席，并以极大的热情，充沛的信心和高超的技巧来指导这些杂志、丛书和论文的问世。

在所有活动中，埃德温以他出色的谈判技巧、一贯的彬彬有礼和对他人的诚挚的关心及渊博的学识和恰到好处的幽默赢得了许多同事的合作。但是在其他活动中，他在会议桌上所表现出的那种合作和通融精神却消失殆尽：在网球场上，他是一个凶悍的人物，一个从不给对方一点喘息之机的强硬对手。三十年代，他曾是莱斯大学的网球冠军，后来又当了教练。整整六十年间，他对这项最喜爱的运动总是爱不释手。就是在最近，他还和妻子爱丽斯参加了全国的超级大赛。在更多的闲余时候，他们更是沉醉于另外一项终身嗜好中：在他们山边的农场栽植杏树和兰花。作为一个前数学会主席的女儿，爱丽斯从十一岁起就对各种数学会议起到了无可比拟的巨大帮助作用。

显而易见，埃德温在数学会的工作很出色，他的杰出的领导使人们受益匪浅。埃德温.F.贝肯巴克不愧是数学杰出贡献奖的最佳人选。

埃德温.F.贝肯巴克卒于1982年9月5日。

中科院数学所一九八七年硕士研究生入学综合试题(一)

一、设 $f(Z)$ 是定义在复平面C上的解析（全纯）函数。证明：如果 $\forall a\in C$，$f(Z)-a$ 只有 n 个零点（零点的重数计在个数之内），n 是固定的自然数。则 $f(Z)$ 是一个 n 次多项式。

二、设 H 是实 Hilbert 空间，K 是 H 中的闭凸集，试证：

a）对每个 $x\in H$，存在唯一的点 $Px\in K$ 满足

$$\|x-Px\|=\underset{y\in k}{Min}\|x-y\|$$

b）算子 P 满足压缩性质

$$\|Px-Py\|\leqslant\|x-y\|,\qquad\forall x,\ y\in H。$$

三、在 $L^2=L^2(0,1)$ 上定义线性算子 A：

$$A\varphi(t)=\int_0^1 k(t,s)\varphi(s)ds\qquad\varphi\in L^2,$$

其中 K 是 $[0,1]\times[0,1]$ 上的有界可测函数。

试证：$\forall f\in L^2$，存在方程 $x=Ax+f$ 的唯一解 $x\in L^2$。

四、设 R 是一个环，G 为一个有限群，M 为 G 到 R 内的一切映射所构成的集合，在 M 中定义加法，乘法如下：

$$\forall f,g\in M,\ (f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad x\in G$$

$$(f\cdot g)(x)=\sum_{t\in G}f(t)g(t^{-1}x),\quad x\in G$$

试证 1）M 为一个环

2）当 $|R|\geqslant 2$，$|G|\geqslant 2$ 时，M 有零因子。

3）若 R 含有单位元，则 M 中必存在一个乘法子群，它与 G 同构。

五、设 $\Omega\subset R^n$ 是一有界区域，边界 $\partial\Omega$ 光滑。函数 $f: R\to R$ 满足，$f\in C^2(R)$，$f'(t)\leqslant 0$，$\forall t\in R$。

试证明：对任一函数 $\varphi\in C^2(\partial\Omega)$，以下问题的解唯一：

$$\begin{cases}\Delta u+f(u)=0 & \text{在}\Omega\text{中}\\ u=\varphi & \text{在}\partial\Omega\text{上}\end{cases}$$

其中 $\Delta u=\sum_1^n\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$。

六、试证以下问题没有解：

$$\begin{cases}v''(t)+g(t)v(t)+\lambda f(t)v(t)=0 & t>=0\\ \displaystyle\int_1^\infty\frac{v^2(t)}{t^2}dt<+\infty & ,\ \lambda>1/4,\ \lambda\text{是常数。}\\ v\neq 0\end{cases}$$

其中函数 $f(t)$，$g(t)$ 满足 $g(t)=\dfrac{2}{t}$，当 $t\geqslant 2$；$f(t)=\dfrac{1}{t^2}$，当 $t\geqslant 5$。

中科院数学所一九八七年硕士研究生入学综合试题(二)

一、设函数在区间(a,b)上连连续，且

$$l=\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \quad 及 \quad L=\overline{\lim}_{x\to a} f(x)$$

证明对于任意的数λ，此处$l\leqslant\lambda\leqslant L$，有数列 $x^n\to a$ $(n=1,2,\cdots$
使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda$ 。

二、在线段 $[0,1]$ 上给定n个可测集A_1，A_2，…，An满足条件

$$mA_1+\cdots+mA_n>n-1$$

证明：交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 有正测度。

三、设$f(z)$是定义在复平面C上的解析（全纯）函数，证明：如果$\forall a\in C$，$f(z)-a$只有n个零点（零点的重数计在个数之内），n是固定的自然数。则$f(z)$是一个n次多项式。

四、设H是实$Hilbert$空间，K是H中的闭凸集，试证：

a）对每个$x\in H$，存在唯一的点$Px\in K$满足

$$\| x-P_x \| = \min_{y\in k} \| x-y \|$$

b）算子P满足压缩性质

$$\| P_x-P_y \| \leqslant \| x-y \| \qquad \forall x,y\in H$$

五、设A为对角占优矩阵，且对角元素为负，证明

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t) \qquad (0<t<\infty) \\ \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

的解是稳定的。

六、设$f(x)\in C^2[0,\pi]$，且 $f(0)=f(\pi)=0$，如果

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

是$f(x)$的三角级数展开式的部分和。证明

$$\int_0^{\pi}[f(x)-S_n]^2dx\leqslant\frac{1}{3(n+1)^3}\int_0^{\pi}[f''(x)]^2dx$$

第4卷 第1期　中国科学技术大学学生学报　Vol. 4, No. 1
1988 年 1 月　JOURNAL OF STUDENTS OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY　January, 1988

编者按：王中烈博士系加拿大 Regina 大学华人教授。王教授在偏微分方程、逼近论、不等式与动态规划等领域进行了卓有成效的研究。

去年王中烈教授应邀在吉林工业大学举办《不等式与动态规划》讲习班，他在百忙之中给我们来过三封热情洋溢的信，且寄来他的二十余篇文章。他的信充满爱国热情，很想不等式在中华大地上开鲜花结硕果。这里摘登他给陈计及其他四位同学的信 ——

中国科大数学系《蛙鸣》编委

陈计、李广兴、王振、罗承辉、钱黎文诸同学——中科大不等式研习组王李陈罗钱五虎将如晤：

你们好！非常谢谢你们热诚的来信。你们在资料贫乏的环境下，做出Ky Fan 不等式推广等美妙的结果，可喜可贺之至！

Hardy，Littlewood 与Pólya 花了五年时间写出的名著《不等式》1934年问世以后，影响全世界；Beckenbach与Bellman 在1961年出版的《不等式》也振伏了美国数学界；Mitrinović 在1970年出版的《分析不等式》，使南斯拉夫的数学受到全世界的重视。

他们一个人，两个人，三个人的工作对他们的国家与世界有如此重大的影响。你们五个人同心协力地把不等式研习开来，不仅要振兴中国数学，而且将对世界有莫大的贡献的。

不等式的研习，经过了半个世纪全世界科研人员共同努力，不仅不等式的理论已自成一门学科，而且不等式的应用遍及理论数学、应用数学以及有关的科技、工程及管理科学等领域。数学家也好，科学家也好、工程师也好……谁不承认不等式的重要。可是世界上学术界专门研究不等式的毕竟是少数。理由似乎是这样：不等式的理论乃实数论的一点：任何实数平方的非负性，即$a^2 \geqslant 0$（a为实数），$a^2=0$当且仅当$a=0$。可是不等式的应用并不是一个轻松的工作，任何一个不等式的爱好者，如果没有在不等式园地里辛勤耕耘十年八载，很难说他（或她）对不等式了解的深度与广度，不等式的应用更难说了。一个不等式的研习者必须具备恒心、决心、毅力。

中华民族五千年的历史磨炼出来的中华儿女，大家都具备研究不等式的精神，我在吉工大的讲习班中，将会有二十余人继续不等式及有关数学规划的研习。我相信不等式的研习将在神州大地生根成长，开花结实，为中华民族在世界上赢得应有的荣誉！

五虎将：开始就不晚迟，可是路遥任重。

祝

健康，进步，"蛙鸣"震撼井外天！

王中烈敬上　87/6/18

《中国科学技术大学学生学报》

征稿启事

一、本刊是反映我校学生的自然科学研究的成果和经验的综合性刊物，主要刊登学术论文、科学实验报告、有关领域进展的综述、开展科学研究的体会和治学经验等方面的文章。希望本校同学踊跃投稿，同时也欢迎外校同学来稿。

二、来稿要求和注意事项如下：

1.每篇论文请勿超过一万字。外文稿须附中文题目和摘要。

2.中文稿件请用单面非红色的方格稿纸誊写清楚，每个数学公式后面必须加注标点符号。

3.对稿件中容易混淆的外文字母、符号，请在第一次出现时，用铅笔批清。

4.稿件中的一、二、三级标题用醒目地位写出。

5.插图请按1∶1制图。在文稿中，要在各图的相应位置画上草图，并写上附加图说。

6.文稿中的外文请用印刷体书写。

7.来稿请注明作者的单位和地点，以便联系。

8.为了缩短审稿时间，来稿请一式两份。

三、来稿一般由编辑部送请有关专家初审，作者可推荐审稿人并简述理由。编委会将在三个月内通知作者初审结果，六个月内审定是否刊登。

四、经领导同意，兹决定：实行稿费制度，按印刷页计酬。细则如下：每篇文章第x页酬$\frac{1}{2}(9-x)$元。来稿一经发表，本刊将赠送该期学报2至6本，抽印本40份；作者可指定2个交流地点，由编辑部代为邮寄。

五、来稿请寄送我校学生会学习部《中国科学技术大学学生学报》编辑室。

发行启事

《中国科学技术大学学生学报》从1985年起由上海图书馆和北京图书馆收藏，并列入《全国报刊索引》；今后还将通过全国高校资料室发行。

本学报暂为半年刊，印数500本，每期128页左右，定价1.20元。欲订阅者，请汇款给本刊编辑部罗承辉同学。每期另付邮挂费0.30元，个人订阅免收邮资。

JOURNAL OF UNDERGRADUATE OF CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

(*Halfyearly*)

Vol. 4, No. 1, Sum No. 7, 1988

Hefei, Anhui

The People's Republic of China

中国科学技术大学学生学报

第 4 卷　　第 1 期　（总第7期）

编辑：《蛙鸣数学杂志》编辑部

印刷：中国科学技术大学印刷厂

发行：中国科学技术大学学生会

1988 年 1 月出版　定价：1.20 元

中国科学技术大学学生学报（数学专辑）

4 卷 第 1 期

一九八八年一月