蛙　　鸣

1—10

（合订本）

中国科技大学数学系学生会主办

一九八三年五月

第一期　　1981年6月20日

目　　录

大自然永恒的运动向人们展示着无穷的奥密。为着征服自然，勇于探索的人们经历了无数次失败与成功，把人类对自然的理解提到今天这样的高度，各种专门知识的高度发展与各门科学的综合使知识面狭窄的现象越来越不符合历史的要求，联合与交流成为科学发展的决定性因素。提倡学术自由，平等讨论的哥本哈根学派、布尔巴基学派以他们的显赫成就有力地推动着科学的发展………

然而，在目前我们周围缺乏这种生气的勃勃的学术气氛的情况下，我们是多么希望有一个共同探讨、自由交流的圆地啊！你现在手里拿着的《蛙鸣》，正是这样一份有你在内，每人都是编辑的小报，这是一份希望沟通我们思想，消除隔阂，让大家充分发表哪怕不成熟的看法的小报。它缘以哲学、自然科学，尤其是

同学们熟悉的数学和物理为主要内容，也将包括某些自然科学与社会科学相联系的问题。稿件不拘形式，希望同学们都来关心《蛙鸣》，勇跃投稿。可以是学派、流派、问题和观点的介绍，自己解决的具体问题，也可以是富有启发性的诗稿。更希望能把自己探索过程中获得的观点、体会、方法提供出来，让不同的观点在讨论中得到发展。

学习体会点滴

·左康·

通过几年的学习，自己有点学习上的体会下面谈谈如何看书：

数学书一般可以分为两大类：一类属于硬数学，一类属于软数学。比如说：复变函数论可以说是属于前一类，复变函数论中定理的证明一般都有一、两个技巧。我们注意力应放在定理的证明上。要彻底领会证明中的技巧的用法，在以后的解题中尽可能地把所知道的技巧结合用一用，只有这样才能真正掌握它们。

代数拓扑学可以说是后一类，观点比较高，比较抽象。这时对定义的理解和对定理结论的理解显得格外重要。这类定理往往是论证很重要，而定理的证明是通过几个引理的证明来完成。而这些引理的证明往往只是简单验证，谁都会验证。我们应该想清楚定理中阐述的事实，定理之间的关系以及代数结构与空间几何结构的对应。另外，代数拓扑学的组合味道很浓。记住了几个典型的结论，对解决一般问题是大有好处的。

拓扑学中的一些重要问题

（根据项武忠教授讲课整理而成）

1. 基本群和同伦群

要了解问题的实质，往往从简单情况开始，然后用简单的东西去描绘复杂的事物。代数拓扑要研究空间的分类与拓扑空间之间的关系，这种关系通常由它们之间的映射来体现。这样，我们可以考虑 S^1 到一个拓扑空间的全部映射，为了使问题不至于太复杂，突出要点，利用同伦可将这些映射分成一系列等价类，从而导致基本群的概念。基于同样想法，考虑 S^n 到一个拓扑空间 X 的映射，便给出了高维同伦群 $\pi_n(X)$。$\pi_n(S^K)$ 的计算是代数拓扑目前最重要的问题之一。因为 S^K 是一类最简单最重要的高维空间，很大一类空间可由它们在某种意义下拼合而成。然而尽管做了大量的工作，$\pi_n(S^K)$ 的计算问题还没有一般地解决，它就象素数一样变化多端，令人眼花缭乱。

2. 流形的同伦与同胚

一般地说，同胚与同伦相差很远。可是对于二维紧致流形它们是等价的。因此便有理由去研究 n 维流形的同伦究竟在多大程度上表达了同胚。在微分拓扑中也有类似的问题：一个同伦等价是否同伦中一个微分同胚，假如不是，不同的个数有多少？为了微分拓扑与代数拓扑交替使用。一般研究的是紧致流形。对这个问题，$n=1$，2 时已彻底解决了，$n=3$ 的情况几乎没有解决，$n=4$ 的情况是一片空白，$n \geq 5$ 时问题完全肯定的解决了。

关于这个问题的最初对 S^3 研究，首先有以下结果：f：$M^3 \to S^3$ 是同伦等价 $\Longleftrightarrow \pi_1(M^3)=\{0\}$。我们也许

会设想 M^3 与 S^3 同胚，这就是著名的 Poincare 猜想。它的提出由于其困难的程度，几乎使真正的代数拓扑停顿了，到了五十年代，问题 $n=4$ 的情况仍是毫无进展。奇怪的是 59—60 年，S. Small 和 J. Stallings 证明了 $n\geq 5$ 时广义 Poincaré 猜想成立。他们的证明方法至今在拓扑上占有重要地位。

由于 $n\geq 5$ 时对 S^n 有较好的定理。人们想到更一般的情形，比如对 $f: M_1^n \to M_0^n$ 是否有上面类似的定理？但事实上有如下反例，存在无穷多个 M^3，它与 $S^1\times S^4$ 同伦等价，但不同胚。于是就要对 M_0^n 加上一些限制，首先是用曲率来限制，当截面曲率为 0 或 −1 时，把问题提升到 覆盖空间去。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M}_1^n & \xrightarrow{\tilde{f}} & \widetilde{M}_0^n \\ \downarrow{\scriptstyle P_1} & & \\ M_1^n & \xrightarrow{f} & M_0^n \end{array}$$

我们知道 $\pi_1(M_0^n)\cong\pi_1(M_1^n)$，它们可分别看作 $\widetilde{M}_0$，$\widetilde{M}_1$ 上的变换群，且 $M_i^n=\widetilde{M}_i^n/\Gamma_i$，$\Gamma_i=\pi_1(M_i^n)$ $(i=0,\ 1)$。当截面曲率为 −1 时，$\widetilde{M}_i^n=H^n$，在这种条件下的研究成果是：$n=2$ 不成立，$n\geq 3$ 成立，这就是著名的 Mostor 定理。当截面曲率为 0 时，此为 Hilbert 第四问题的一部分。上面问题实际上就是下面问题：截面曲率为 −1 时，Γ_1 与 Γ_2 在什么条件下共轭。截面曲率为 0 时，应将 M_n 改为 E^n，即 $M_i^n=E_n/\Gamma_i$，Γ_i $I_{s0}(E^n)$，$i=0,\ 1$。已经证明若 $\Gamma_1\cong\Gamma_2$，Γ_1 与 Γ_2 在某个比 $I_{s0}(E^n)$ 更大的群（仿射群）中共轭。

关于存在性问题，Princesen 大学的 W. Thurston 教授

正在做 $n=3$ 的情形，用的是二维的手法。$n=4$ 的情形还完全不知道。对于 $n\geq 5$，F. T. Farell，W. C. Hsiang（项武忠）完全肯定地解决了些问题。

项武忠教授还证明了：如果 $f: M_1^n \to H^n/\Gamma_0$ 是同伦等价，则

$$f\times id: M_1^n\times R^3 \longrightarrow H^n/\Gamma_0 \times R^n$$

同伦于一个微分同胚。这里没有对 n 限制。这个证明用到了许多代数K理论。

Lebesgue 测度定理的一个简单证明

—— 王翎

设 S 是集 X 的子集所成的 σ 代数。$\mu: S\to R'$ 叫一个广义测度，如果：（Ⅰ）∞ 和 $-\infty$ 至多有一个属于 μ 的值域。（Ⅱ）S 中任何一串互不相交的集 E_j，$j=1,\cdots$，有 $\mu(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu(E_j)$。

再引进两个重要的概念：设 μ 和 ν 都是（X，S）上广义测度，$\mu \ll \nu$ 定义为：若 $E\in S$ 使 $\nu(E)=0$，$\Longrightarrow \mu(E)=0$，$\mu\perp\nu$，定义为：存在不相交的 A，$B\in S$，使 $X=A\cup B$，且对 $\forall E\in S$，均有 $\mu(E\cap A)=\nu(E\cap B)=0$。

Lebesgue 定理：（X，S）为测度空间，其中 S 为 σ 一代数，设 μ，ν 为（X，S）上两个 σ 一有限的广义测度，那么存在 ν 的一个唯一分解 $\nu=\nu_1+\nu_2$，使得 $\nu_1\ll\mu$，$\nu_2\perp\mu$。

（本定理可在 Halmos "测度论" 中找到，那儿的证明用到了 Radon-Nikodym 定理。）

〔证明〕：由 Hahn 分解定理（见上书中），我们可以假定

μ，V 均为测度。由 σ－有限性，我们又可假设 μ，V 为全有限测度。

令 $M=\{F \mid F\in S,\ \mu(F)=0\}$，$\alpha=\sup\limits_{F\in S} V(F)$，设 $E_n\in M$，便到 $V(E_n)=\alpha_n\to\alpha$，令 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E^n$，那么，$\mu(A)\leq\Sigma\mu(E_n)=0$，因而 $A\in M$，令 $B=X-A$，定义 $V_1(E)V(E\cap B)$，$V_2(E)=V(E\cap A)$，故 $V=V_1+V_2$，（Ⅰ）$V_1\ll u$，不然的话，存在 E，$\mu(E)=0$，使得 $0\neq B=V_1(E)V(E\ B)$，虽然，$\mu(E\cap B)=0$。故令 $A'=(E\cup B)\cup A$，那么 $V(A')>V(A)$，但 $A\in M$，与 A 定义矛盾。（Ⅱ）显然由定义知 $V_2\perp\mu$，唯一性易证，略。

关于有限环论

——罗铁

本世纪三十至四十年代是环论发展的黄金时代。E. Sitin，N. Gacobson（The Stuetuae of Ring），N. H. Uc Coy（The Theory of Ring）等人所建立的极小条件，根基理论，将环的结构（特别是无穷环）大体上讨论清楚。五十年代以后，很少有人再问津环论。

1963年一位印度数学家Ganesan用独特的方法研究了具有多于0个零因子的有限环（即环的元素个数有限）的结构。我们知道，如果一个有限环仅有0作零因子，则一定是Galois域。而G域的结构我们已经知得很清楚，不需再作讨论。

如果我们记环R的零因子个数为n，特征为P，正则元个数为K（正则元即非零因子），|R|记R的元素个数。Ganesan

证明了$|R|\le n^2$，同时给出例子指出当n为素数时可使$|R|=n^2$是最好的估计。并提出当n是合数时，是否也存在R，使得$|R|=n^2$。我们解决了这一问题。对$n=4$，构造了一个环R，使$|R|=n^2$。显然n，p，k之间是有关系的。Ganesan指出，$\varphi(p)\le k\le n^2-r$，同时$p\mid k+n$，Ganesan似乎认为这已经穷尽了n、p、k之间的关系，并提出是否给定了n，p，$k\in N$满足以上关系，就有对应的环存在，使得以n为零因子个数，P为特征数，k为正则元个数。我们证明了虽然P，k，n满足上述关系，但对应的环并不存在，从而在某种意义上解决了Ganesan提出的两个问题。但实际上这里还有许多问题待解决，例如：是否可以考虑有限环按n，p，k分类？对于怎样的n，p，k是空的？怎样的n，p，k类非空？非空类具有怎样的结构？这也是讨论有限环的一种方法。这样的问题一旦解决，有限环论可以说是一马平川。

虽然我们在这方面做了一些工作，但对前景并不乐观。因为工作不是本质性的，很难看出头绪。希望在以后的工作中能将 这一问题解决。

· 简论 ·

携起手来，共同复习，共同提高

—— 791

数学的发展，使得大学毕业后进入专业研究这种方式越来越不合适。许多数学问题的研究，需要愈来愈多的预备知识，涉及了很多分支。单凭大学里学的知识是不够的。虽然也有一些比较难的题目，不要很多知识就可以了解它，但是大多数是古老的遗

产，看不出什么来。因此有志于现代数学研究的人，大学毕业后应继续研究生课程。

七八级为准备明年的研究生考试，借鉴七七级的复习经验，在个人复习数学和英语的同时，有组织地搞一些复习活动。主要是分析，代数和英语。如果大家对某课程或其中某几节有比较 ，比较深刻的总结和看法，可以提出来，这样大家都可受益。我们准备打破年级的限制，因为七八级同学 这些课程，大家在一起讨论，即使是不考研究生的同学，也可以复习一下，这不是没有好处的。关于具体计划，即将安排。

1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，…，$\sqrt{p}$，…在有理数域上线性无关的一个

简单证明

（反证） 设$\{1, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{p}, \cdots\}$在$Q$上线性相关，那么可设$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \subseteq \{\sqrt{P}, \sqrt{2}, \cdots, \sqrt{p}, \cdots\}$是一组使相关的元素个数最少的线性相关元素。设

$k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n = 0$，$K_i \in Q$全不为$0$。否则去掉为$0$数剩下的仍相关。这与$n$的最小性矛盾。显然$n > 2$。

取 $K = Q(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 则K为Q的扩域。令Q为它的Galois群。

$\forall \sigma \in G$，$\sigma(u_i) = \pm u_i = \delta_i u_i$ 其中 $\delta_i = \pm 1$

$0 = \sigma(K_1 u_1 + K_2 u_2 + \cdots + K_n u_n) = K_1 \sigma(u_1) + \cdots + K_n \sigma(u_n)$

$= K_1 \delta_1 u_1 + \cdots + K_n \delta_n u_n = 0$

$\therefore K_1 \delta_1 u_1 + K_2 \delta_2 + \cdots + K_n \delta_n u_n = K_1 \delta_1 u_1 + \cdots + K_n \delta_1 u_n = 0$

$\therefore K_1 \; 0 + K_2(\delta_2 - \delta_1) u_1 + \cdots + K_n(\delta_n - \delta_1) u_n = 0$

如上同理，$K_2(\delta_2 - \delta_1) = \cdots = K_n(\delta_n - \delta_1) = 0$

$\because K_1 \neq 0, \cdots, K_n \neq 0$；　$\therefore \delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_m = \pm 1$

$\therefore \sigma(u_i) = \delta_1 u_i$，固之 $|G| \leq 2$

而 K 就由 Q 添加 $(x^2 - u_1^2) \cdots (x^2 - u_n^2)$ 所有的根得到，是而是正规扩域。故有 $|G| = [K : Q] = [Q(u_1, \cdots, u_n) : Q]$

现在 $n \geq 2$，固之无妨 $u_1 \neq 1$，则有

$[Q(u_1, \cdots, u_n) : Q] = [Q(u_1) : Q] \cdot [Q(u_1)(u_2, \cdots, u_n) : Q(u_1)]$

$\therefore Q(u_1)(u_2, \cdots, u_n) = Q(u_1)$ $\therefore u_1 \in Q(u_1)$

$\therefore u_2 = Q u_1 + b$　$a, b \in Q$，　这是不可能的。

$\therefore 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{p}, \cdots$ 在 Q 上线性无关。

注：

↓

分析以上证明过程，知下述命题成立：

命题：设 $P_1, \cdots, P_n \cdots$ 为一列非零整数，且 $\forall i, j$，$[P_i, P_j$ 无公因子，则 $\sqrt{P_1}, \cdots, \sqrt{P_n} \cdots$ 线性无关。（若 $P_i < 0$，取 $\sqrt{P_i} =$ 　　，其中 P_i 两两不同。

• 小题大作 •

1、对实对称矩阵 A，有

$$x' A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} - c_i) x_i^2 + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| (x_i$$

其中　$c_i = (\Sigma |a_{ij}|) - |a_{ij}|$。

$$b_{ij} = \operatorname{sign} a_{ij},$$

因此，若 $a_{ij} - c_i > 0$，即 A 为对角占优阵，则 $A > 0$。

2. 若 A 为实方阵，$\frac{1}{2}(A + A') > 0$，则 $\det A > 0$。

3. (Stieltjes' Lemma) 正定矩阵A的元素除对角元以外都是非正的，那么A^{+}的元全是正的。

4. $A = B + iC$为半正定Hermite，B、C为实方阵，则
$$\operatorname{rank} B \geq \max\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} C\}$$

5. B半正定，$A^2 = B$，$\frac{1}{2}(A+\bar{A}') \geq 0$，则A由B唯一确定

首先，A无负特征根。

再则，B与$A + A'$可交换。因$[B(A + A') - (A+A')B]' = 0$

因此有酉阵U，使
$$UBU' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad U(A+A')U' = 2\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}.$$

这里$\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$，$i = 1, 2, \cdots, n$。令$D = UAU'$，则有
$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad D + D' -$$

命$D - \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = K$，则$K + K' = 0$。
$$K^2 + K\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} K = 0$$

考虑后一式左端的迹，可得$J = 0$，即
$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}, \quad A = U'\begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}U$$

再证唯一性。

6. 证明Gauss 2－环 $R=\{a+b\sqrt{2}\ ;a,\ b\in Z\}$ 是唯一分解环，那么 $a+b\sqrt{-2}$ 在其中为不可约元的充要条件为：

（Ⅰ）$b\neq 0$，a^2+2b^2 为素数。

（Ⅱ）$b=0$，$|a|$ 为 $8K+7$ 形或 $8K+3$ 形素数。

一般的情形如何？

一个习题的讨论

——叶如钢

夏道行先生等新编《实变函数论与泛函分析》下册P. 108习题叙述了这样一个命题：

命题A。完备的度量空间中每个可析集必是至多 $\aleph$ 个致密集的和集。

此命题本身是平凡的。事实上，按照该书下册P. 61习题2，任何度量空间中可析集的势不超过 $\aleph$（易证），而独点集自然是致密的。我们试图将原题理解成下面的两个命题：

命题B。完备的度量空间中每个可析集至多可以表成 $\aleph$ 个不同致密集的并。

命题C也是平凡的。因对任何集合E，其两两不交的子集构成的子集族，势当然不能大于E的 。命题B则是错误的。如［0，1］完备，可析，其每个子集都致密。于是［0，1］可以表成 2 （> ）个不同致密集的并。

人们自然要猜想提出下一面题，而这命题是否成立并不是很显然的：

命题D．完备度量空间中可析集必可表成有限或可列个致密集的并。

我们要证明命题不真。为此，先证 定理．完备赋范性空间E可以表成有限个或可列个致密集之并$\Longleftrightarrow$ E中每个有界集致密（即E是有限维的）。

证：$\Longrightarrow$设$E=\bigcup_{1}^{\infty}A_k$，$A_k$致密（当$E=\bigcup_{1}^{n}A_k$，取$A_m=A_n$，$m>n$）。由于E完备，据贝尔范畴定理，必有一个$A_k$，非疏集，即$\bar{A}_{k_0}^{0}\neq\phi$，取$x\in\bar{A}_{k_0}^{0}$，有 $B(x, r)\subset\bar{A}_{k_0}$，$r>0$，$B(x, r)$显然是致密的。设$\{x_n\}\subset E$是有界点列，$\|x_n\|<M$。易见$x+\frac{x_n}{M}\cdot r\in B(x, r)$。故$\{x+\frac{x_n}{M}r\}$有收敛子列$\{x+\frac{x_{n_k}}{M}r\}$，$\lim\limits_{k\to+\infty}(x+\frac{x_{n_k}}{M}r)=\eta\in E$

从而$\{x_{n_k}\}$收敛：

$$\lim x_{n_k}=\frac{\eta-x}{r}M$$

于是，E之每一有界集致密。

$\Longleftarrow$ $E=\bigcup_{1}^{\infty}B(0, K)$。

$C[a, b]$是完备可析空间，但却是无维的，故不能表成有限或可列个致密集的并。因此命题D是错误的。

第　二　期

目　录　　　　　　　　　　　　　　　　　1981年9月20日

管理科学的形成和发展

陈　友　谊

编者按：人类改造自然和社会的需要是数学发展最丰富的源泉。可是数学系的许多学生以至当今的许多数学家忽视了这一点，消除数学与自然隔阂的唯一办法就是去了解其它学科，我们希望更多类似的文章问世。

管理科学是十九世纪末萌芽并于本世纪中叶形成的一门崭新的学科，所谓“管理”，就是应用组织、计划、平衡、指导、管制等基本行为，以及有效利用人员、物料、机器、方法、金钱市场、士气等基本要素，促进其相互密切配合，发挥最高效率，以达成机构的理想目标。

管理思想的起源或许要追溯到人类建立家庭的时候，由于这些原始的管理思想对现代的管理科学影响是微不足道的，所以研究管理思想的演变过程人们一般是从十八世纪末开始的。

1．“传统管理时期”，十八世纪末，蒸气机和机器引起的资产阶级工业革命以后，工厂成为资本主义生产的主要方式，于是产生了工厂管理的需要，以这时开始并延续一个多世纪的工厂管理基本特点是：管理人就是企业的所有者，他们凭个人经验进行生产和

管理，工厂也是凭经验进行操作，这种作法，还没有完全摆脱小生产的传统，因此人们把它称作传统管理（或经验管理）。由于传统管理不能适合社会大生产的需要，到了十九世纪末，开始从传统的经验管理走向"科学管理"时期。

2. 科学管理时期，十九世纪末至本世纪三十年代初，美国的泰罗、吉尔勃斯夫妇、甘特等以及法国的约尔主张以科学的方法以代替经验的法则，同时倡导例外管理，这种管理重视工作方法的科学化与工作程序的标准化，从而产生了"动作和时间的研究"，"工作衡量"、"工作评价"、"工作程序 "、"报表分析"、"厅所布置"、"人机配合"等专门技术研究，这一时期的代表人物是美国的泰罗，他从十九世纪末就在一些工厂里进行科学管理的试验研究，在他的推动下，当时美国掀起了一场声势浩大的"革命"，使美国的生产率大大超过了欧州各工业发达的国家，他的那套测定时间研究动作的管理方法被称为"泰罗制"，他集当代的管理研究之大成，结合自己的试验，于一九一一年发表了著名的《科学管理原理》，在管理学史上泰罗被称为是"科学管理之父"。

3. "人际关系"时期，然而，由于泰罗以及同时代的并列者，把人类有机体当成一种特殊的机器，从工作者的"能量限制"、"速率"、"耐久性"寻求增进工作效率，所以，"泰罗制"以及稍后的福特的"传送带系统"引起工人的严重不满。因此二十年代初就有人开始寻求新的理论和方法来平息工人日益增长的不满情绪，本世纪二十年代末至四十年代在美国兴起了"人际关系"、"行为科学"的研究，从而管理进入"人际关系"时期，这一时期的典型代表人物是美国哈佛大学教授迈约，一九三二年迈约进行完第二次著名的霍桑思试验，翌年，他发表了《工业文明中人的问题》，

建立了“人际关系”学说。他认为生产不仅受物理的，生理的因素影响，而且受社会学的、社会心理学的影响，因此他强调在生产中尊重人性和人格。以他的这些观点为以后发展成为一门新的科学“行为科学”。

4．“管理科学”时期。第二次世界大战后至今管理进入了新的时代。由于许多欧美学者在战后进行的大量研究，许多著作相继问世，形成了生产最优化的一系列新的科学方法，如控制论、现代论，排队论、对策论等等。从而“管理”形成了一门成熟的科学——管理科学。数学方法的引入，是管理形成一门科学的重要原因。苏联数学家康托洛进维奇教授于四十年代首先发表了《生产组织与计划中的数学方法》，有人认为他是应用数学方法进行生产管理最优化决策的先驱。同时，电子计算机的使用，使得一些数学方法在企业管理中的应用得到了迅速的发展。通过电子计算机的模拟计算可以更有效地选择出例如工艺和组织等的最优化方案。

5．“现代管理”时期。近年来蓬勃发展起来的现在管理，其主要标志是系统工程（包括系统分析）的建立和推广。系统工程，是以“统筹法”为核心，以电子计算机为工具，从管理对象的整体出发，成面地使用数学方法，系统地进行管理各方面的工作的分析，使计划决策，设计方案，生产方法等得以全面的最优化，因而使得企业生产中的人力，物力，财力和时间的利用达到最大的效率。美国华盛顿大学教授卡斯特和卢森威在一九七0年合写的《组织与管理——从系统出发的研究》是这方面理论较早的代表作。系统有大有小，整个国民经济可以作为一个系统，一个企业可以作为一个系统，企业内部又可以分为若干个小系统。

总之，象其它学科一样，管理科学也是由人们原始的，直接的、

基本的、外在的想法开始，经过不断的探讨，研究以及自然系统对理论的"反馈"作用，逐步形成的，但是，作为一门与社会、政治、经济关系如此密切的学科，还有其典型的特性，一般来说，由于管理科学对象的广泛性，它没有固定的系统性的一套工具与技术内容，研究者要应用一切它认为是合适的工具，并不断地引用新的科学技术工具和数学理论，目前，在国外管理科学正在飞速发展，很遗憾，我们国家在这方面的工作基本上还是刚开始，基于目前人们对它的重视程度，前景并不值得乐观。

曲线积分与曲面积分的换元

791　沈忠民

在大学基础微积分的课程中，我们已经知道了二三重积分的换元公式，它使我们在解决一些问题中能够使问题简化，从而很快地得到结果。有时，我们在解决曲线或面积分的问题时，如果不进行正交变换问题就无法解出，那么自然要问有没有更一般的变元公式呢？本着这种想法，我们推出下面两个变元公式，实践证明，在某些实际问题中发挥了一定的效力。

一、曲线积分中的换元。

【公式】：在 R^3 中，曲线 l_1、l_2 有长度，l_2 有参数表示，并且有一可逆映射 $f: R^3 \to R^3$，使 $\vec{f}(l_1) = l_2$，则

$$\int_{l_2} P(u, v, \omega)\, ds = \int_{l_1} P(\vec{f}(x, y, z)) \| J_f \vec{n} \|\, ds$$

此处，n 为 l_1 单位切向量，J_f 为 f 的 Jacobi

证明：设 l_1 的参数方程 $g(t)=(x, y, z)$

$t\in[\alpha, \beta]$ 则 l_2 的参数方程 $f(g(t))=(u, v, \omega)$

$$\int_{l_2} P(u, v, \omega)\,ds=\int_\alpha^\beta P(f(g(t)))\sqrt{u_t'^2+v_t'^2+\omega_t'^2}\,dt$$

$$=\int_\alpha^\beta P(f(g(t)))\left\|\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial \omega}{\partial x} & \frac{\partial \omega}{\partial y} & \frac{\partial \omega}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_t'\\ y_t'\\ z_t'\end{pmatrix}\right\|dt$$

即 $$\int_{l_2} P(u, v, \omega)\,dt=\int_{l_1} P(\vec{f}(x, y, z))\|$$

$$J_f\vec{n}\|\,dt$$

二、曲面积分中的换元，

定义矩阵 A

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \qquad A=(x, y, z)$$

$$S(A)=(y\times z, z\times x, x\times y)$$

公式2，在 R^3 中，曲面 Σ_1，Σ_2 有面积，Σ_1 有参数表示，

存在 $f: R^3\to R^3$，可逆，$f\in C^1$ 使 $f(\Sigma_1)=\Sigma_2$

则 $$\int_{\Sigma_2} P(u, v, \omega)\,ds=\iint_{\Sigma_1} P(\vec{f}(x, y, z))\|$$

$s(J_f)\vec{n}\|\,ds$　这里，n 为 Σ_1 的单位法向量。

证明：设 $(x, y, z)=g(\alpha, \beta)\ (\alpha, \beta)\in D$ 为 Σ_1 参数表示，则 $(u, v, \omega)=f(g(\alpha, \beta))$ 为 Σ_2 参数表示，则

$$\int_{\Sigma_2} P(u, v, \omega)\,ds=\iint_D P(f(x, y, z))\left\|J_f\frac{\partial g}{\partial\alpha}\times J_f\frac{\partial g}{\partial\beta}\right\|d\alpha\,d\beta$$

即 $$\int_{\Sigma_2} P(u, v, \omega)\,ds=\iint_{\Sigma_1} P(f(x, y, z))\|s(J_f)n\|\,ds\ \ \#$$

推论：当 J_f 为正交方阵时，$s(J_f)$ 也为正交方阵

$\therefore \|s(J_f)n\|=1$　为我们平时所用的正交变换。

例：（数学分析习题集 4003）求用平面 $x+y+z=b$ 与曲面 $x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz=a^2$ 相截所得截面之面积。

解：作变换 $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u\\ v\\ \omega\end{pmatrix}$$

$$S=\iint_{S_1} ds=\iint\left\|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\right\|ds=\sqrt{3}\iint_{u^2+v^2+vw=\frac{1}{3}(a^2-b^2)} d\cdots$$

$u^2+v^2+vw-bv-bw=\frac{1}{3}(a^2-b^2)$

作变换 $\begin{cases} v = x + y \\ \omega = x - y \end{cases}$

$$s = \iint 2\sqrt{3}\, dx\, dy = 2\sqrt{3}\iint dx\, dy = \frac{2}{3}\pi a^2$$

$$3x^2 - y^2 - 2bx = \frac{1}{3}(a^2 - b^2) \quad 3\left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{3}a^2$$

关于$\sqrt{d}$的连分数

791 施皖雄

设d为自然且非完全平方数，则$\sqrt{d}$的连分数展开式有如下形式：

$$\sqrt{d} = [m, \dot{a}_1\ a_2 \cdots\cdots a_n\ 2\dot{m}] \qquad m = [\sqrt{d}]$$

$$m \geq 0$$

这性质在这里我们不能证明，我们要讲下面性质：

命题 1：$a_s = a_{n-s+1} \quad s = 1, 2, \cdots, n$

证明：设 $\beta = [0, \dot{a}_1\ a_2 \cdots a_n\ 2\dot{m}]$

$$\frac{P_s}{q_s} = [0, a_1\ a_2 \cdots a_s] \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

则由连分数的基本性质：

$$\beta = \frac{P_n(2m+\beta)+P_{n-1}}{q_n(2m+\beta)+q_{n-1}} = \frac{2mP_n+\beta P_n+P_{n-1}}{2mq_n+\beta q_n+q_{n-1}}$$

解得：

$$\beta = -\frac{2mq+q_{n-1}-P_n}{2q_n} \pm \sqrt{\left(\frac{2mq+q_{n-1}-P_n}{2q_n}\right)^2 + \frac{4q_n(2mP_n+}{4q_n^2}}$$

但 $P_n \leq q_n \therefore 2mq_n+q_{n-1}-P_n > 0$　而　$\beta > 0$

故

$$\beta = -m - \frac{q_{n-1}-P_n}{2q_n} + \sqrt{\left(m + \frac{q_{n-1}-P_n}{2q_n}\right)^2 + \frac{2mP_n+P_n}{q_n}}$$

$$\sqrt{d} = \beta + m = -\frac{q_{n-1}-P_n}{2q_n} + \sqrt{\left(m + \frac{q_{n-1}-P_n}{2q_n}\right)^2 + \frac{2mP_n+P_n}{q_n}} \tag{1}$$

由(1)立即可以看出：$-\dfrac{q_{n-1}-P_n}{2q_n} = 0$

即　$P_n = q_{n-1}$　　所以：$\dfrac{q_{n-1}}{q_n} = \dfrac{P_n}{q_n}$

由连分数性质有：

$$[0, a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1] = \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{P_n}{q_n} = [0, a_1 \cdots\cdots a_n]$$

再由连分数展开的唯一性有：

$$a_n = a_1 \quad a_{n-1} = a_2 \quad \cdots\cdots$$

即　$a_s = a_{n-s+1}$　　$s = 1, 2, \cdots, n$　　(2)

反过来，给了一组自然数 $a_1\ a_2 \cdots a_n$ 满足(2)，我们问何时有自然数 m，使 $[\,m,\ \dot{a}_1\ \ a_2\ \cdots\ a_n,\ 2\dot{m}\,]$ 为$\sqrt{d}$ 的形式。对此，我们有下面的

命题 2：设 a_1，$a_2 \cdots a_n$ 是任给的一组自然数，且满足

$a_s = a_{n-s+1}$　　$s = 1,\ 2,\ \cdots$，

则 当 $2 \mid P_{n-1}$ 或 $2 \nmid q_n$ 时必有自然数 m 使

$[\,m,\ \dot{a}_1\ a_2\ \cdots\ a_n\ 2\dot{m}\,]$ 为$\sqrt{d}$ 的形式，而当 $2 \nmid P_{n-1}$，且 $2 \mid q_n$ 时，这种 m 一定不存在。

证明：设 m 是自然数，令 $\alpha = [\,m,\ a_1 \cdots a_n\ 2m\,]$ 则与上述之(1)式推导，有

$$\alpha = -\frac{q_{n-1} - P_n}{2q_n} + \sqrt{\left(m + \frac{q_{n-1} - P_n}{2q_n}\right)^2 + \frac{2mP_n + P_{n-1}}{2q_n}} \cdots\cdots (3)$$

由于 $a_s = a_{s-n+1}$　　$s = 1,\ 2,\ 3\ \cdots\ n$　故

$q_{n-1}/q_n = [\,0,\ a_n,\ a_{n-1} \cdots a_1\,] = [\,0,\ a_1\ \cdots\ a_n\,]$

$= P_n/q_n$

故 $P_n = q_{n-1}$　　(3)式变为 $\alpha = \sqrt{m^2 + \dfrac{2mP_n + P_{n-1}}{q_n}}$

故要使 α 为$\sqrt{d}$ 的形式的充要条件是 $(\,2mP_n + P_{n-1}\,)/q_n$ 是整数，即有整数 x 使

$$2mP_n + P_{n-1} = q_n x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4)$$

由于 $(\,P_n\ q_n) = 1$ 故 $2 \mid P_{n-1}$ 或 $2 \nmid q_n$ 时(4)有解，其解为 $(\,m,\ x\,)$，而 $2 \nmid P_{n-1}$ 且 $2 \mid q_n$ 时(4)无解，故命题得证。#

二 次 域 的 讨 论

781　　董瑞涛

这里给出“Basic Algebra I”上第二章 § 15，习题 9（Page 144）的一个直接推广以及一个简单的应用。

以下假定 D 为一个整数，非 0 和 1，无平方因为，且使得 $Z(\sqrt{D})=\{a+b\sqrt{D}\mid a,b\in Z\}$ 为唯一可析因整环（U. F. D）。

定理 1 是给出 3 Z（D）中元素 α 是不可约元的充要条件，本文沿用华罗庚《数论导引》对二次域讨论所用符号，元素间的等价关系（结合）以～记之。

定理 1．元素 $\alpha\in Z(\sqrt{D})$

Ⅰ）α 不与任何整数等价，则 α 不可约

$\Longleftrightarrow N_1(\alpha)=P$（素数）

Ⅱ）$\alpha\sim n\in Z$，则 $|n|=P$（素数），且 $\left(\frac{D}{P}\right)=1$

证明：见附

系：$Z(\sqrt{-1})$ 中的不可约 为 $\pm P$，$\pm iP$，$P\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ $a+bi$，$a^2+b^2=P\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)$ 这就是上述习题的结论。作为定理 1 的应用，我们来考虑方程

$$|x^2-y^2D|=m\cdots\cdots(1)\qquad m,x,y\in Z$$

$m\geq 1$ 的解的个数（对确定的 m）

$m=1$ 若 $D>0$ 则由 Pell 方程理论，知方程（Ⅰ）有无穷多解，这些解就是 $Z(\sqrt{D})$ 中的单位圆。

若 $D<0$ 容易证明。

命题 1　Z〔D〕为 U. F. D 当且仅当 $D=-1, -2$

$D=-1$，（I）有解 ± 1，$\pm i$，共四个，

$D=-2$，（I）有解 ± 1，共二个。

"～"将 Z〔D〕划分为等价类，若某类中有一元素 α 满足 $N(\alpha)=m$，则此类中所有元素皆满足方程，我们称这个类满足此方程。

下面来计算满足方程 $N(\alpha)=m$ 的类数 $\psi(m)$。

记 $x(p)=\left(\frac{D}{p}\right)$，其中 p 为素数，将它的定义域延拓到全体自然数上，成为完全积性函数，仍记为 $x(n)$。

定理 2.

$$\psi(m)=\sum_{\alpha\mid m} x(\alpha)=\prod_{j=1}^{n}\left[\sum_{l=0}^{\alpha_j}(x(p_j))^l\right]$$

其中 $m=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_t^{\alpha_t}q_1^{r_1}\cdots q_r^{r_r}$

$p_i \mid D\quad(1\le i\le s)\qquad p_j\nmid D\quad(s<j\le t)$

$\left(\frac{D}{p_j}\right)=1\quad s<j\le t)\qquad \left(\frac{D}{q_i}\right)=-1\quad(1\le i\le r)$

注：定理 2 表明（I）有解 $\Longleftrightarrow r_1\ \cdots\ r_r$ 全为偶数

且　$\psi(m)=(\alpha_{s+1}+1)\cdots(\alpha_t+1)$

系 1. 取 $D=-1$　Z〔$\sqrt{D}$〕有 4 个单位元

∴ 方程 $x^2+y^2=m$ 的解数为 $4\psi(m)$

见《数论导引》第六章§7　定理 2（P 343）

系 2 $P=-2$　Z　〔2〕有二个单位元

∴方程 $x^2+y^2=m$ 的种数为 $2\psi(m)$

见《数论导引》第十二章§4 习题 1（P 343）

定理 1 之证明：

（Ⅰ）$\Longleftarrow\!\!\Longrightarrow$。设 $N(\alpha)=P$ 素数，又设 $\alpha=\beta r$，β，$r\in Z[\sqrt{D}]$。则

$P=N(\alpha)=N(\beta)\cdot N(r)\Longrightarrow N(\beta)$ 或 $N(r)=1$。即 β 或 r 为单位元，α 不可约。

"$\Longrightarrow$"若 $N(\alpha)=n$ 非素数，

Ⅰ）。$n=1$，α 为单位圆。

Ⅱ）。$n\neq 1$，$n=n_1 n_2$。则 $N(\alpha)=\alpha\cdot\bar{\alpha}=n=n_1\cdot n_2$ α 不可约，$\bar{\alpha}$ 亦不可约，由唯一分解性，$\alpha\sim n_1$，$\alpha\sim n_2$，或 $\bar{\alpha}\sim n_1$。这与 α 不与任何整数等价矛盾，故 $N(\alpha)$ 必为素数。

Ⅲ）"$\Longrightarrow$"设 $\alpha\sim n\sim|n|$ α 不可约，故 $|n|$ 也不可约所以 $|n|$ 为素数， $\therefore\alpha=\varepsilon P$ ε 为单位元素。

若 $\left(\frac{D}{P}\right)\neq -1$，则 $\exists X\in Z$，$x^2\equiv D(\bmod P)$

$\therefore$ $P\mid x^2-D=(x+\sqrt{D})(x-\sqrt{D})$ $\because$ P 不可约

$\therefore$ $P\mid x+\sqrt{D}$ 或 $P\mid x-\sqrt{D}$ 不可能

$\therefore\left(\frac{D}{P}\right)=-1$

$\Longleftarrow$） 反证

设 α 可约，（$\because|n|$ 为素数，故 α 不可能是单位元），取它的一个不可约因子 β，$\alpha=\beta\cdot r$ $\alpha=\varepsilon P$。$\therefore P=\beta\varepsilon^{-1}r=\beta r'$

取 $\beta=a+b\sqrt{D}$ $r'=x+y\sqrt{D}$

$\therefore P=ax+byD+(ay+bx)\sqrt{D}$

$\therefore$ $ay+bx=0$ $(a,b)=1$ （否则 β 可约）

$\therefore \exists\, t \in Z \quad x = at,\ y = -bt$。即 $\gamma' = t\beta$

$\therefore \quad p = t\beta\bar{\beta} \quad t \mid p$ （在 Z 内）$\Longrightarrow t = \pm 1$

$p = \pm \beta \cdot \bar{\beta} = \pm(a^2 - b^2 D) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Longrightarrow b \not\equiv 0 \pmod{p}$ （否则 $p \mid a^2 \Longrightarrow p \mid a$

$\Longrightarrow p^2 \mid (a^2 - b^2 D) = \pm p$ 不可能）

$\therefore \quad D \equiv (ab^{-1})^2 \pmod{p} \quad \therefore \left(\frac{D}{p}\right) \neq -1$ 矛盾，

$\therefore \alpha$ 不可约 证毕

定理 2 之证明：

现在证明存在 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_s$，使 $\theta_0^2 \sim 2$

$$\theta_1^2 \sim P_1 \quad \cdots \quad \theta_s^2 \sim P_s$$

$\because \quad \left(\frac{P}{2}\right) \neq -1 \qquad \therefore 2$ 可约

又据定理 1 "$\Longleftarrow$" 之证明

$\exists\, \theta \in Z[D]$ 使 $\theta \cdot \theta_0 = 2$ 设 $\theta_0 = a_0 + b_0\sqrt{D}$

则 $\quad \theta_0 = \pm \frac{1}{2}(a_0^2 + b_0^2 D + 2a_0 b_0 \sqrt{D})$

即 $\quad \theta_0 = \frac{1}{2}(a_0^2 - b_0^2 D) + b_0^2 D + a_0 b_0 \sqrt{D} \in Z[\sqrt{D}]$

又 $\quad N(\theta_0) = N(\tilde{\theta}_0) \quad \theta_0 = \varepsilon\theta \Longrightarrow N(\delta) = 1 \quad \therefore \theta_0 \sim \tilde{\theta}_0$

$\therefore \quad 2 = \pm \theta_0 \cdot \tilde{\theta}_0 \sim \theta_0^2$

同样，$\left(\frac{D}{p}\right) = 0 \qquad 1 \leq i \leq s$

$\therefore \quad P_i$ 可约，$\qquad \therefore \exists\, \theta_i \in Z[\sqrt{D}]$ 使

$\theta_i \cdot \bar{\theta}_i = \pm P_i \qquad \therefore \theta_i = \pm \frac{1}{P_i}\theta_i \cdot \bar{\theta}_i$

$\theta_i=a_i+b_i\sqrt{D}$

取 $\delta_i=\frac{1}{p_i}\theta_i^2=\frac{1}{p_i}2a_i^2-\frac{1}{p_i}(a_i^2-b_i^2D)+\frac{1}{p_i}2a_ib_i\sqrt{D}$

$\because \pm p_i=a_i^2-b_i^2D$ 又 $p_i|D$ $\therefore p_i|a_i^2$

$\Longrightarrow p_i|a_i \Longrightarrow \delta_i\in Z[\sqrt{D}]$

且 $N(\delta_i)=1$ $\therefore \theta_i\sim\bar{\theta}_i$ $(1\leq i\leq s)$

$(\frac{D}{P})=1$. $\exists\theta_i$使$\theta_i\theta_i\sim P_i$ $s\leq i\leq t$ 且

$\theta_i\nsim\bar{\theta}_i$

$\therefore m=2^{\alpha_0}p_1^{\alpha_1}\cdots p_s^{\alpha_s}p_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\cdots p_t^{\alpha_t}q_1^{r_1}\cdots q_t^{r_t}$

$\sim\theta_0^{2\alpha_0}\theta_1^{2\alpha_1}\cdots\theta_s^{2\alpha_s}\theta_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\bar{\theta}_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\cdots\theta_t^{\alpha_t}$

$\bar{\theta}_t^{\alpha_t}q_1^{r_1}\cdots q_t^{r_t}$

这就是m的标准分解，容易验证各项互素。

设 α为$N(\alpha)=m$的解，则 $\alpha\cdot\bar{\alpha}\sim m\Longrightarrow\alpha|m$

$\therefore\alpha\sim\theta_0^{\beta_0}\theta_1^{\beta_1}\cdots\theta_s^{\beta_s}\theta_{s+1}^{\beta_{s+1}}\bar{\theta}_{s+1}^{\beta_{s+1}}\cdots\theta_t^{\beta_t}\bar{\theta}_t^{\beta_t}q_1^{\mu_1}$

$\cdots q_t^{\mu_t}$

$\alpha\cdot\bar{\alpha}\sim\theta_0^{2\beta_0}\theta_1^{2\beta_1}\cdots\theta_s^{2\beta_s}\theta_{s+1}^{\beta_{s+1}+\beta'_{s+1}}\cdots\theta_t^{\beta_t+\beta'_t}$

$\bar{\theta}_t^{\beta_t+\beta'_t}\cdot q_1^{2\mu_1}\cdots q_t^{2\mu_t}$

即$\alpha\cdot\bar{\alpha}\sim m\sim\theta_0^{2\alpha_1}\theta_1^{2\alpha_2}\cdots\theta_s^{2\alpha_s}\theta_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\bar{\theta}_{s+1}^{\alpha_{s+1}}\cdots\theta_t^{\alpha_t}$

$\theta_t^{-\alpha t} q_1^{r_1} \cdots q_t^{r_t} \Longrightarrow$

$r_i = 2\mu_i \quad (1 \leq i \leq r) \qquad \alpha_i = \beta_i \ (1 \leq i \leq s)$

$$\beta_j + \beta'_j = \alpha_i \quad (s < i \leq t)$$

$$\therefore \alpha \sim \theta_0^{\alpha_0} \theta_1^{\alpha_1} \cdots \theta_s^{\alpha_s} \theta_{s+1}^{\alpha_{s+1}} \theta_{s+1}^{-\alpha_{s+1}} {}^{\beta_{s+1}} \cdots \theta_t^{\alpha_t}$$

$$\theta_t^{-\alpha_t - \beta_t} q_1^{\mu_1} \cdots q_r^{\mu_r}$$

$\therefore$有解当且仅当 r_i 全为偶数，$\beta_i = 0$，$1 \cdots \alpha_i$

共$\alpha_i + 1$个值　$\therefore$不等价关系共有

$(\alpha_{s+1} + 1) \cdots\cdots (\alpha_t + 1)$个，就是定理 2 的结论。

简报　关于有限环中的零因子个数

——— 罗铁、汗洋

上期文章《关于有限环论》提及的有限环中零因子的个数问题，我们初步地进行了研究，得到一些新的结果，简报如下：

定理 1。设 c 是有限交换环 R 的特征，c 是合数，n 表示 R 中零因子个数，k 表 R 中正则元个数，则有

$$k < \frac{n^2 - n}{d(c) - 2} + 1$$

其中 d (c) 是 c 的因子个数。此定理显然是 Ganesan 定理的推广

引理：c，R 同上，$c = P_1^{\alpha_1} \cdots P_s^{\alpha_s}$ 为 c 的素因子分解，则 $|R| = P_1^{\beta_1} \cdots P_s^{\beta_s} \qquad \beta_i \geq \alpha_i$

证明：对于R的加法群应用Sylow定理立得

定理2。存在如上的环R，使 $|R| = n^2$ 的充要条件是 $n = p^e$　$e \geq 1$　且此时R的特征C只能是p或 p^2。

证明：应用定理1和引理。

我们还构造了两类环，特征分别是p，p^2 满足 $|R| = n^2$

李从明证明了，在同构意义下，这两类环由特征唯一确定。因此Ganesen提出的第一个问题就被解决了。

我们在做这个问题时，得到冯克勤老教的帮助，在此表示感谢。

参 考 文 献

[1]. Ganesan, Properties of rings with a tinite mumber of ~zero dirisor, Math Ann 157 (1964) 161(1965).

[2]. 熊金淹 近世代数

[3]. 罗铁。关于有限环论 蛙鸣 1

关于对数学的一点看法（一）

文小芒、胡 森、王 翎

数学是一种思维艺术，其方法丰富多采，千变万化。本文是笔者看到的这个广阔无际的海洋中的几片浪花。

1. 数学是人们对世界认识的一种抽象，漫长的生活使我们建立了数与形这两个有基本重要性的概念，建立数学模型，是数学工作的开始，关于这一点，我们想引用著名数学家S. Maclane

的名言："代数中的许多发展，依赖于定义恰当的概念"。

2。数学的一个鲜明特征在于比较和推广，比较一些看来似乎无关的事物的基本要素及其作用时，就会令人感叹世界的和谐，泛函分析就是其中杰出一例，其中共鸣定理便来源于三个领域，这种比较是数学家揭开问题本质的基本手法，对一个命题外延加以延拓，在包含一个核即保持结论成立的最小内函的情况下尽可能地减少内函，这是一利用思维技巧剥去非本质性东西的过程，推广包含两个方面，一是对象的推广，以使许多类似的问题在新的基础上统一。二十世纪的抽象数学的出现和发展就代表了这个趋势。还如，以抽述物理空间的三维欧氏空间抽象出了n维欧氏空间的概念。后又有了Hilbert空间，习知的勾股定理，正交分解等都在新的模型中取得了地位，它们的作用已被矩阵和函数的研究所证实。推广的另一面是把命题的结论加强，如H.H. Lagrange中值定理导出Taylor公式全是形式上的技巧，而Taylor公式不论在理论上还是在计算上作用都是巨大的。

3。数学家区别于常人的思维方式之一在于他们那种高度的简捷性，把一个问题分划成一串简单问题，以简御繁，用已知了解未知是数学家的绝技，我们在分析中常用连续函数，阶梯函数或多项式来逼近一般的函数便是如此。

4。依靠人们长期的感性直观来思考和提出问题，即利用直觉来创造新的天地，新的方法，这是必然的，因为数学本质上是从实际中来的，一个简单的例子便是Schmidt正交化程序在R^3中它的想法非常清楚。另一个著名的例子要算Cauchy收敛准则，它是渔夫打鱼，网逐渐收缩这一事实启发了我们天才的Cauchy。

5. 类比法。 我们在这不厌其烦地再次提出：数学家在做问题的时候，往往从一些类似而又简单的问题研究中得到启发，通常所谓灵感的激发，可能很多便是由其它研究的启发，而成的突然醒悟，例如Peron研究调和函数从一维的凸函数与线性凸函数的关系得到启发。建立了上（次）调和函数的概念及其理论。

6. 从自身中发展，今天数学发展到如此辉煌的时代，它长期积累的基本思想，使很多哲学家不需要再到实践的"原野"中去拾零了。出于本身体系的完美，或出于对传统思想的发挥，延生了许多灿烂的数学之花，非欧几何的创 ，宣告了认为数学只能直接源于实践的看法只是一种偏见。

7. 数学也影响着哲学，数学中很多基本的思想，其深刻，基本的程度达到了可以称为人们对自然的最基本的哲学观了，例如，伟大的几何学家Riemnn 对几何学作出了高度精炼的概括。几何学就是研究空间的不变量，他所创立的Riemann几何对相对论以至自然观的影响是根本性的。再如微分对无限，有限这对概念的处理，把无限作为一个过程，而从有限的（被出割的或离散的），去预言一个连续过程的极限，总之，自然这个上帝使数学家们所选的这座女神对哲学家，物理学家以及一切探求知识的人们有着普遍的、巨大的魅力。

习 题 汇 编

1. f为实系数多项式，其零点皆为实数则f′的重零点是f的重零点。

2. $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sin x>0 \qquad x\in(0,\pi)$

3. 设 $f:[a, b]\to R$, f' Riemam 可积, $f(a)=f(b)=0$, 求出最好的系数 $c>0$, 使得对任何 f 有:

$$\int_a^b f^2\,dx = c\int_a^b f'^2\,dx$$

4. f 在 $[a, b]$ 上可微, $f'\in L[a, b]$ 则

$$\int_a^b f'\,dx = f(b)-f(a)$$

5. 设 $q>0$, $a_0=0$, $a_{n+1}=q^{a_n}$, $n=0, 1\ 2\cdots$ 问何时 $\{a_n\}$ 收敛。

6. $f\in C^{\infty}[0, r)$, $f^{(n)}(x)\geq 0$ $x\in[0, r)$ 则 f 在 0 处的 Taylor 展开式在 $[0, r)$ 上收敛 f。

7. 设 c 为一实数, 对任何自然数 n, n^c 均为整数, 则 c 为自然数。

第　　三　　期

目　　录　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　1982 年 11月 20 日

彻底的批判和革命精神在科学发展中的作用

——英晓康

在人类认识自然的初始时期，科学和哲学是一体的。人们用思辨和假设作一些定性的描述，企图揭示出万变的现象中不变的本质。毕达哥拉斯派明确地认识到事物之间的数量关系的重要性，认为只有用数学才能理解自然，他们还提出宇宙和谐一致的观点，这已成为科学追求的一贯目标之一。阿基米德第一次使实验成为科学的重要组成部分。欧几里德用公理化方法写成《几何原本》，两千多年来一直是严密逻辑思维的典范。科学渐渐从哲学中分化出来。

在漫长而黑暗的中世纪，西方的科学几乎没有进展，它成了教会的装饰品。哥白尼坚信宇宙应当时是简明和谐的，为简化托勒密复杂的天文学体系提出了日心说，1543年发表的《天体运行》公布了他的研究成果，第一次向宗教神权提出了有力的挑战，近代自然科学在反宗教的斗争中形成。

伽利略以实验和数学相结合的方法奠定了近代科学的基础。他本人用斜面证明了下落过程与质量无关等结果，提出了相对性原理，即对于力学规律任何惯性参考系等价。

牛顿在前人研究的基础上完成了以力学为中心的第一次科学知识大综合，1687年出版《自然哲学的数学原理》，系统地论述了他的绝对时空观、力学、引力理论、微积分等。牛顿理论在实践上的成功使很多人都相信自然界的一切运动是由力学规律支配的，而这些规律又被牛顿找出来了，剩下的只是进行数学演算，把他们应用于具体问题。

欧拉、拉格朗日，高斯、哈密顿等又进一步发展了力学理论，得到了最小作用量原理，它的各种推广和变形现在已成与力学和理论物理的任何领域的统一理论，常常作为展开理论的发点和新发展的指导原则。

1862年，麦克斯韦以远超过同时代人的洞察力，用场的观念揭示了电磁运动的一般规律和光的电磁本质。这些结果由一组偏微分程概括。这个理论否定了超距作用，它将从根本上动摇牛顿理论的基础，而他自己一直在企图把电磁运动理解为某种机械运动。

牛顿理论满足相对论原理，但麦克斯韦系的理论却不满足，为此，洛仑兹、庞卡勒等人提出种种修正，但始终没有摆脱旧时空观的束缚，得到了正确的方程而并不能深刻理解其物理意义。

爱因斯坦以他独特地批判精神仔细考查了时空和空间的含义，把伽利略相对论原理发展为爱因斯坦相对性原理，一切物理定律对所有惯性系等价，将它用于麦克斯韦尔理论就得到光速不变原理，因此建立了狭义相对论（1905），把时间和空间不可分割地统一起来，并得到质能关系 $E = mc^2$ 。牛顿的万有引力定律意味着信

号的瞬时传播，与狭义相对论矛盾，为此，有不少人企图修正牛顿的万有引力定律，但未获成功。爱因斯坦假定引力和惯性力等价（即惯性质量＝引力质量），并把相对性原理推广到一切复考系（即不限于惯性系），以黎曼的弯曲空间理论为数学基础表达了广义相对论（1916），把时间、空间、物质都不可分割地统一在一起。高斯、黎曼，罗巴契夫斯基等发展非欧几何时曾想到过它的物理意义，他们的思想在广义相对论里得到了明确的实现。爱因斯坦几乎没有借助于新的实验，但基本思想朴素、自然，在某些方面续承了康德、马赫等在哲学、物理方面的思想。在1905年，爱因斯坦还提出了当时物理学家们认 走得太远的光量子假说，而后来由玻尔、德布罗意、薛定 ，海森伯建立的量子力学已走得更远，甚至向因果律提出了挑战，相对论和量子论的建立形成了本世纪初的一场物理学革命，他们在观念上超出了人们日常的经济，例如不同考虑系中度量不同，引力场中的时钟变换，粒子的位置和动量不能同时具有确定值等。这场革命使人类对时间、空间、物质的认识发生了极深刻的变化，而这些新的理论只有用数学的语言才能确切地表出，许多第一流的科学家在新理论形成的过程中总是要把它纳入旧的框架，这显然是徒劳的。

本世纪四十年，以维纳为代表的一些数学家和自然科学家、工程师共同探讨了导弹制导，通讯、脑神经等各种不同问题中的一些普遍的要素，创立了控制论，它往往忽略各种问题中的物理，化学、生物机理，只注重于信息的传递和系统总体的一般特点。在这里一个弹簧振子和电阻电容形成的振荡器可以看成是等效的。现在控制论的思想已经渗透到自然科学、社会科学、工程技术各领域。维纳在总结科学研究方法时指明了各门科学之间相互作用的重要性，

提倡开　边缘科学中的无人区。

计算机理论和技术的发展使数学对各种复杂的具体问题的应用成为可能，它对数学理论研究。

人们对无机界的现象往往有深刻的了解，能做精确的预言，但对生命现象的认识就差得多了，尽管局部性的研究已进入分子水平，但仍能理解许多整体现象。例如，中医　没有很好的理论，气功、人体特导功能才刚刚被摘去迷信的帽子，不少人仍对此无理指责，对比一下科学史上新发现的前前后后，我们有理由充满信心。近代科学的基本方法即实验与数科的方法与生　　的结合将在科学史上写下最光辉的一页，科学对于和谐统一的美的追求将在这里再次实现。

而对自然界的各种新奇现象，以彻底的批判和革命的精神对待一切成熟的理论。突破各种成见的　，以丰富的创造性思想力图去……在最广泛的基础上把人类的认识统一起来是时代对科学未来创造者们的要求。

数学被一再证明是人类思维的最有力的杠杆之一。

请您消闲：1）$A>0 \Longleftrightarrow \forall B>0$，有 $\operatorname{tr}AB>0$。

2）对 $\forall\, m>1$，$q>1$，$r>1$，$r<1$，$\exists$ 唯一的 α 使对可积函数 u，$\lim\limits_{x\to\infty} u=0$ 有

$$\|u\|_q \leq \beta\left(\|u'\|_m\right)^{\alpha}\cdot\left(\int |u|^{r}dx\right)^{\frac{1-\alpha}{r}}$$

么正交矩阵的旋转表示

——— 刘西锁 C. M. L.

若 A 为 $n\times n$ 么正交矩阵，那么 A 可表为 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个旋转阵的积。且此数为最小。

证。1）可表性：　写 $A=(A_1, A_2, \cdots, A_n)$

$$
T_{ij}(\theta)=
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} & i\text{列} & & j\text{列} & \end{array}\\
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & & \\
 & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\
 & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

据 $AT_{1i}(\theta)=(A_1\cos\theta+A_i\sin\theta, \cdots, A_{i-1}, -A_1\sin\theta+A_i\cos\theta, A_{i+1}, \cdots, A_n)$ ………………… (1)

知 $T_{1i}(A_i)$ 使

$$
A\prod_{i=2}^{n}T_{1i}(\theta_i)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \times & & & \\ \vdots & & A_{11} & \\ \times & & & \end{pmatrix}=B
$$

由于 T_{1i} 为么正交矩阵，故 $a_{11}=\pm 1$，若为 -1，取 $\tilde{\theta}_{1n}=\theta_{1n}+\pi$，则此时的 $\tilde{a}_{11}$ 为 1，故不妨设 $a_{11}=1$，从而据 B 的么正交性，知 A_{11} 么正交，且 $\tilde{a}_{j1}=0$（$j=2, \cdots, n$）。利用归纳法知可表性命题成立。

从(1)我们可以看出旋转的几何意义。使 $a_{i1}=0$ ($i=1, \cdots, n$) 恰是使新基与固有基 ($e_1, \cdots, e_n$) 的第一基重合。

2) 最小性。(直观上，么正交矩阵的"连续"或本质的限制条件是 $A_i A_j' = \delta_{ij}$，共 $\frac{1}{2}n(n+1)$，故其自由变量是

$$n^2 - \frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1)$$ 。从而得)

(反证) 若总可以表成 m 个乘积 (小于 m 个的表示可以看成 m 个的表示) $m < \frac{1}{2}n(n-1)$。我们知道旋转矩阵共有

$\frac{n(n+1)}{2}$ 个，抽出 m 个 (可以相同) 做乘积的可能共有

$\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^m$ 个，我们做这种乘积的映射：

$$\prod_{w=1}^{m} T_{i_k j_k}: R^m \to O^+ \quad \left(\prod_{K=1}^{m} T_{i_k j_k}\right)(\theta_1, \cdots, \theta_m)$$

$$= \prod_{K=1}^{m} T_{i_k j_k}(\theta)$$

则这些映射将所有可能的 m 个旋转乘积都包含了，也就是说这些象的并为 O^+。把 $M = \bigcup\limits_{\substack{1 \le i_1 < j_1 \le n \\ 1 \le i_n < j_n \le n}} R^m_{\substack{i_1 \cdots i_m \\ j_1 \cdots j_m}}$ 看成 R^{m+1} 的

n 维子空间 $\left(R^m_{\substack{i_1 \cdots i_m \\ j_1 \cdots j_m}} = R^m \right)$ 则可定义映射 $f: M \to O^+$

$$f \mid R^{m}_{\substack{i_1 \cdots i_m \\ j_1 \cdots j_m}} = \prod_{k=1}^{m} T_{i_k j_k}$$ 。但是 f 将低维流形 M 映

到高维流形 O^+ 的可微映射，因而 f 不可能是 的，矛盾。证毕

范 畴 函 子 与 泛 元

朗 森

一、例 *1*。（ hom 函子 ）G 是一群，N＜1 G，对∀一群 B。记

$hom_N(GB) = \{\ t \mid t: G \to B$ 是群同态，

$N \quad Ker t\ \}$

记 G／N 为商群，P：G→G／N 为自然同态，那么

$\forall t \in hom_N\ (G,\ B)$ 有唯一的同态，有 φ：G／N→B

使得 $\varphi \cdot P = t$。那么

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\varphi"'] & G/N \arrow[d, dotted, "\varphi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

它建议我们用同态表示 G／N·P

例 *2*。（ 同伦群 ） 设 X。Y 是两个拓扑空间。

$hom(AB) = \{\ f \mid f: A \to B$ 为连续映射 $\}$ 命 $x_0 \in S^n$。

S^n 为 n 维球面，对∀一拓扑空间 X。$y_0 \in X$。考虑

$hom_{x_0}\ (S^n X) = \{\ f \mid f: S^n \to X$ 连续。$f(x_0) = y_0\ \}$

若在 $hom_{x_0}\ (S^n X)$ 引入某种等价关系，进而引进运算可成为一个群，即 n 维同伦群。而若 f：X→Y 是连续映射， f 可诱导映射

$f_*: \hom_{x_0}(S'', X) \to \hom_{x_0}(S'', Y)$，另外 $1_{x_0} = 1_{\hom_{x_0}(S'' X)}$ $(g\circ f)_X = g_X \circ f_X$。**

群．环与拓扑空间，以及同态与连续的相似不是偶然的，数学作为一种关于方法的学问，就要抓住他们的共同本质，范畴论也就应运而走了。

二．范畴．函子与流元

1．范畴：引入范畴的目的是描述所有的群，所有的拓扑空间等概念，"具体"范畴C中同态的定义依赖于集合：

（Ⅰ）C是一簇元素P的集合，P称为C的对象。

（Ⅱ）每一P对应一集合u（P）—— P的underlying 集

（Ⅲ）任两个对象P．Q．对应一一集合 $\hom(PQ) \subset \{f: f\ U(P) \to u(\theta)$ 为映射$\}$ hom（P．Q）的元素称为同态（或射）

（Ⅲ）$1_{u(P)} \in \hom(P\ P)$

（Ⅴ）$f: P \to Q$．$g: Q \to R$ 是同态，则 $g\circ f: P \to R$ 也是同态。*

例3．所有群的全体 hom(PQ) 中元为群同态。

例4．所有拓扑空间全体 hom(XY) 为X到Y的所有连续映射。

2．函子　　C_1，C_2 是两个范畴，函子 $F\ C_1 \to C_2$ 由两部分组成，其一是对象函数将 C_1 中每一对象P映为F（P），另一是射函数将 $f: R \to S$ 映到 $F(f): F(R) \to F(S)$ 具有性质：

$$F(1_R) = 1_{F(R)} \qquad F(g\circ f) = F(g)\circ F(f) \text{ 即}$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & S \arrow[d, "g"] \arrow[d, bend left, "1_S"] \\ & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(R) \arrow[r, "F(t)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(S) \arrow[d, "F(g)"] \arrow[d, bend left, "F(1_S)"] \\ & F(T) \end{tikzcd}$$

例 5．（hom —函子）在例 1 中定义 $F(P)=\hom_N(G,P)$ 对同态 $f: P\to Q$ 定义 $F(f): \hom_N(G,P)\longrightarrow \hom_N(G,Q)$

$$F(f)(t)=f\circ t \quad t\in \hom_N(G,P)$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "f\circ t"'] & P \arrow[d, "f"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

这就定义了一个群的范畴到集合的范畴的函子 F #

3．泛元　设 g 是范畴 C 到集的范畴 S 的函子．（u，R）叫做关于 g 的泛元。若 R 是 C 的对象 $u\in g(R)$ 具使对 C 中任一对象 T，$s\in g(T)$．有唯一的同态 $h: R\to S$ 满足 $g(h)u=s$。

例 7．综合例 1．例 5 知（P．G／N）即为关于 F 的泛元。#

由泛元的定义，显有 hom(R，T) 与 F（T）是等势的，此即为表示定理。

例 8．关于例 6 中的函子 F 无泛元 $u\in K[X]$ 存在，因 hom(K，T) 与 T（X）不等势。

例 9．Z 是整数加群，$1\in$．$X=\{1\}$．将任一群 G 与 $\hom(X,G)=\{f\mid f: X\to G$ 为映射$\}$．对应．与例 5 类似可定义—— hom — 函子 F．

（1．Z）即为关于 F 的泛元（i 为嵌入映射），

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & Z \arrow[d, "i_1"] \\ & G \end{tikzcd}$$ #

若将 X 换为任一集，利用泛元可得以 X 为基底的　由群概念。一个显然的问题便是泛元唯一呢？

唯一性定理：F是C到S的函数。$u \in F(R)$。$u' \in F(R')$（与（u，R）是一回事）是关于F的两个泛元的$\Longleftrightarrow$有同构$h: R \to R'$（即有同态$f: R' \to R$。使$g \circ h = 1_R$，$h \circ f = 1_{R'}$）使$F(h)u = u'$。

由泛元的定义结合下面图表证明便一目了然。对hom—函子

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[d, "h"] \\
L \arrow[ur, "n"] \arrow[r, "n'"] \arrow[dr, "n"'] & R' \arrow[d, "f"] \\
 & R
\end{tikzcd}$$

我们看到泛元的概念使代数系统向同构的非实质性差别消失了。Z象在代数数论中一样，理想的概念消除了元素之间整除可能令相差单位引起的麻烦。

第　四　期

****

目　录　　　　　　　　　　　　　　　　1982年1月10日

一个模论定理的矩阵证明

七八一　　周东航

问题：A是数域F上的 $n\times n$ 阵，则与A可交换的方阵全体构成线性空间K，那么 $\dim K=?$

此问题的解答是（在模论中有一般的结果）：如果 $\varphi_1,\cdots,\varphi_k$ 为A的非平凡不变因子，$n_i=\deg\varphi_i$ 则

$$\dim K=\sum_{i=1}^{k}(2k-2i+1)n_i$$

首先做一点准备

$A_{n\times n}$，如果只有一个非平凡不变因子，记为

$\varphi_1(\lambda)=\lambda^n+\alpha_1\lambda^{n-1}+\cdots+\alpha_n$，则明显的

$$A\sim C=\begin{pmatrix} 0 & & & & -\alpha_n \\ 1 & 0 & & & -\alpha_{n-1} \\ & 1 & & & \vdots \\ & & & 0 & -\alpha_2 \\ & & & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

这里～表示矩阵的相似

而 $A_{n\times n}$ 的非平凡不变因子是 $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 时，有

$$A \sim \begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & C_k \end{pmatrix}$$

其中 C_i 为与 C 同型的方阵，对应于 φ_i，

引理 1，$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ 如上定义，则有向量 $a_1, \cdots, a_k$，使得对任何向量 X，有多项式 $f_1, \cdots, f_k$，满足

$$X = f_1(A)a_1 + \cdots + f_k(A)a_k$$

证明：$K = 1$ 时，有 P 可逆，$P^{-1}AP = C$

记

$$a = P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

设 $f(\lambda) = b_1\lambda^{n-1} + \cdots + b_n$，

如果 $f(A)a = 0$，则 $f(C)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

但 $f(C)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，故 $f \equiv 0$，即 $a, Aa, \cdots, A^{n-1}a$

线性无关，成为K空间的一组基，$k=1$的情况证完。

对一般的k，有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{pmatrix}$$

记

$$P^{-1}a_1=\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\qquad P^{-1}a_2=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} n_1\\ \\ \\ \\ \end{matrix},$$

$$P^{-1}a_k=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}\right\} n_1+\cdots+n_{k-1}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

同样可以证明

$$\left.\begin{matrix} a_1,\ Aa_1,\cdots,\ A^{n_1-1}\cdot a_1\\ a_k,\ Aa_k,\cdots,\ A^{n_k-1}\ a_k\end{matrix}\right\}\text{共}n\text{个是K空间的基，}$$

我们可以证明，对$\forall i$，若$\varphi_i(A)a_i=0$，与引理1证法同；则对$\forall$多项式f：$f(A)a_i=0$，必有$\varphi_i(\lambda)\mid f(\lambda)$

对于每个$B\in K$，可以定义一个线性变换B：$X\mapsto B_X$，

$\forall X=f_1(A)a_1+\cdots+f_k(A)a_k$，

$B_X=f_1(A)Ba_1+\cdots+f_k(A)Ba_k=f_1(A)b_1+\cdots+f_k(A)b_k$ ……（※※※）

可见B由$Ba_i=b_i$，$i=1,\cdots,K$唯一确定，设

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & b_{ij}(A) & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix},$$ $b_{ij}(\lambda)$ 为多项式

. 由于 $\varphi_i(A)a_i = 0$，故可使 $\deg b_{ij} < n_i$（条件(*)）。由 A．B 的交换性又知 $\varphi_i(A)b_i = 0$，（条件(* *)）

记 $F=\{(b_{ij}(\lambda))_{K\times K}$，使得用 a_i 产生的 b_i 满足条件（ * ）及（ * * ）}

它是一线性空间

引理 2：如上建立的 $K\to F$ 的对应 σ：$B\to(b_{ij}(\lambda))$ 是一一对应

证明：(1) 若 B_1，B_2 相应的阵（$b_{ij}(\lambda)$）相同，则在诸 a_i 上相同，故 $B_1=B_2$

(2)对（$b_{ij}(\lambda)$），定义了 $a_i\to b_i$，用（ * * * ）式定义了一个变换 B，易见 $B\in K$。 #

引理 3.

$$F=\left\{\begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & & & \\ \vdots & \ddots & & c_{ij}(\lambda)\dfrac{\varphi_j(\lambda)}{\varphi_i(\lambda)} \\ \vdots & & \ddots & \\ b_{K1}(\lambda) & \cdots\cdots & & b_{KK}(\lambda) \end{pmatrix}, \deg b_{ij} < n_j\ (i\geq j),\ \deg c_{ij} < n_i\ (i<j)\right\}$$

证明：设 $(b_{ij})\in F$ $\quad b_i = \sum_{j=1}^{K} b_{ij}(A)a_j$

$$\varphi_i(b_i) = \sum_{j=1}^{K}\varphi_i(A)b_{ij}(A)a_j$$

故有　$\varphi_i(\lambda) | \varphi_i(\lambda) b_{ij}(\lambda)$，$i \geq j$ 此式自然成立，

$i < j$ 时，记 $c_{ij} = \dfrac{\varphi_i}{\varphi_j} b_{ij}$ 故 $b_{ij} = c_{ij} \dfrac{\varphi_j}{\varphi_i}$，由此

考虑出发，易见此引理成立，#

由引理 2，$\dim K = \dim F$，

$$\dim F \text{ 应为 } \begin{pmatrix} b_{11}(\lambda) & & & \\ \vdots & \ddots & c_{ij}(\lambda)\dfrac{\varphi_j(\lambda)}{\varphi_i(\lambda)} & \\ b_{ij}(\lambda) & & \ddots & \\ & & & b_{KK}(\lambda) \end{pmatrix} \text{ 中}$$

未定元个数

而未定元正是该阵之多项式的系数，共有

$$\sum_{i=1}^{K} (2k - 2i + 1) n_i \text{ 个。}$$

一个行列式不等式

791　沈忠民

我们对实数域上几阶矩阵的行列式有这样一个不等式：

（Hadmard 不等式）

设 $A = (a_{ij})$　$a_{ij} \in R$　则

$$(\det A)^2 \leq \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{t=1}^{n} a_{jt}^2 \right)$$

下面我们对此做一些推广，为了叙述方便，引进一些记号：

$x_i = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$.　　$i = 1, 2, \cdots m \leq n$

$$A_m = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \delta(x_1, \cdots x_m) = \det A_m A_m'$$

我们有：

不等式 *1* ：$x_1, \cdots x_m$ $m \leq n$ 线性无关，则

$$\delta(x_1 \cdots x_m) \leq \frac{1}{\delta(x_1 \cdots x_{m-2})} \delta(x_1 \cdots x_{m-1})(\delta(x_1 \cdots x_{m-2}\ x_m)$$

证明：首先，由线性代数知识易证

$\delta(x_1 \cdots x_j) \neq 0 \qquad j = 1, \cdots, m$

令： $A_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-1} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-2} \end{pmatrix}$

$$A_4 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m-2} \\ x \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \alpha_1 &= [x_{m-1} x_1', \cdots, x_{m-1} x_{m-2}'] \\ \alpha_2 &= [x_m x_1', \cdots x_m x_{m-2}'] \end{aligned}$$

则

$$A_1 A_1' = \begin{pmatrix} A_3 A_3' & \alpha_1' & \alpha_2' \\ \alpha_1 & x_{m-1} x_{m-1}' & x_{m-1} x_m' \\ \alpha_2 & x_{m-1} x_m' & x_m x_m' \end{pmatrix}$$

$$A_2 A_2' = \begin{pmatrix} A_3 A_3' & \alpha_1' \\ \alpha_1 & x_{m-1} x_{m-1}' \end{pmatrix} \qquad A_4 A_4' = \begin{pmatrix} A_3 A_3' & \alpha_2' \\ \alpha_2 & x_m x_m' \end{pmatrix}$$

$$\therefore \det A_1 A_1' = \det A_3 A_3' \det\left(\begin{bmatrix} x_{m-1} x_{m-1}' & x_{m-1} x_m' \\ x_m x_{m-1}' & x_m x_m' \end{bmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \alpha_2\end{pmatrix} (A_3 A_3')^{-1} [\alpha_1' \ \alpha_2']\right)$$

$$= [\det A_3 A_3'] [(x_{m-1} x_{m-1}' - \alpha_1 (A_3 A_3')^{-1}$$

$$\alpha_1' (x_m x_m' - \alpha_2 (A_3 Z_3')^{-1} \alpha_2 - (x_m x_{m-1}'$$

$$- \alpha_1 (A_3 A_3')^{-1} \alpha_1')^2]$$

$$\leq [\det A_3 A_3'] [(x_{m-1} x_{m-1}' - \alpha_1 (A_3 A_3')^{-1})$$

$$(x_m x_m' - \alpha_2 (A_3 A_3')^{-1} \alpha_2]$$

$$= \frac{1}{\det A_3 A_3'} \det A_2 A_2' \cdot \det A_4 A_4'$$

即：

$$\delta(x_1 \cdots x_m) \leq \frac{1}{\delta(x_1 \cdots, x_{m-2})} \delta(x_1 \cdots x_{m-2} x_m) \delta$$

$$(x_1 \cdots x_{m-1})$$

不等式 *2*：$A = (a_{ij})$ 是方阵，$\forall \quad i \leq n$ 都有不等式：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2{}^{\,n-2} [\det A]^2 \leq \prod_{\substack{t \neq i \\ 1 \leq t \leq n}} [(\sum a_{is}^2)(\sum a_{tj}^2) - (\sum_{s=1}^{n} a_{is} a_{ts})^2] \qquad (1)$$

证明：在不等式 1 中，取 $x_i=(a_{i1},\cdots a_{in})$ $i=1, 2, \cdots n$

① $\det A=0$，不等式 2 显然成立

② $\det A\neq 0$，则：$x_1\cdots x_n$ 线性无关

多次运用不等式 1 可得

$$(\det A)^2=\delta(x_1\cdots x_n)\leq\frac{\delta(x_1\cdots x_{n-2}\,x_n)}{\delta(x_1\cdots x_{n-2})}\cdot\delta(x_1\cdots x_{n-1})$$

$$\leq\frac{\delta(x_1\cdots x_{n-3}\,x_n)}{\delta(x_1\cdots x_{n-3})}\delta(x_1\cdots x_{n-1})\leq\cdots$$

$$\leq\frac{\delta(x_1\,x_n)}{\delta(x_1)}\delta(x_1\cdots x_{n-1})$$

再多次运用不等式 1 得到

$$\delta(x_1\cdots x_n)\leq\frac{\delta(x_1\,x_n)}{\delta(x_1)}\cdot\frac{\delta(x_1\,x_{n-1})}{\delta(x_1)}\cdot\delta(x_1\cdots x_{n-2})$$

$$\leq\cdots\leq\frac{1}{\delta(x_1)^{n-2}}\delta(x_1\,x_n)\cdots\delta(x_1\,x_2)$$

即得 $$\left(\sum a_{ij}^2\right)^{n-2}(\det A)^2\leq\prod_{t=2}^{n}\left((\sum a_{1s}^2)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n}a_{tj}^2\right)-\left(\sum_{s=1}^{n}a_{1s}a_{ts}\right)^2\right)$$

因为 $\delta(x_1, \cdots, x_n) = \delta(x_i, x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_n)$

这样便立即得到我们所要证明的结果，容易验证上不等式只要两行不正交，就比 Hadamard 不等式精确。

编者注：如果将不等式(1)对 $i = 1, 2, \cdots n$ 乘起来可得如下不等式：

$$(\det A)^2 \le \left(\prod_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)\left(\prod_{i \neq j} \sin^2(x_i x_j)\right) \tag{2}$$

它在形式上更完美些，因为和 i 无关。

另外，也可以给出(1)的几何证明，为此将(1)写成下面形式（$i = 1$）

$$(\det A)^2 \le \left(\prod_{i=1}^{n} |x_j|^2\right)\left(\prod_{t=2}^{h} \sin^2(x_1 x_t)\right)$$

我们用替换的方法证 无妨设 $\det\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$

将 x_2 用 $y_2 = \dfrac{1}{\sin(x_1 x_2)}\left(x_2 - \dfrac{(x_1\ x_2)}{(x_1\ x_1)} x_1\right)$ 替换

则有：$\det\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ x_3 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sin(x_1 x_2)} \det\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sin(x_1 x_2)}$。

$\det A$

用类似的 y_i ($|x_i|=|x_i|$, $(y_i x_1)=0$ 替换 x_i 可得

$$\det\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{\det A}{\sin(x_1\ x_2)\cdots\sin(x_1\ x_n)}$$

故：

$$\det A=\left(\prod_{t=2}^{n}\sin(x_1\ x_t)\right)\det\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$ 利用 Hadmord

不等式，有：

$$\det^2 A=\prod_{t=2}^{n}\sin^2(x_1\ x_t)\det^2\begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\leq\prod_{t=2}^{n}\sin^2(x_1\ x_t)\prod_{i=1}^{n}|y_i| \qquad (y_1=x_1)$$

$$=\prod_{t=2}^{n}\sin^2(x_1\ x_t)\prod_{i=1}^{n}|x_i|$$

此即(2)

对 $n=3$ 我们来看，y_2 的几何意义。y_2 就是 x_1 x_2 张成平面上的向量，使 $|y_2|=|x_2|$ $\langle y_2\ x_1\rangle=0$

从几何上看，x_1．y_2．x_3 形成的平行六面体的体积，应比 x_1 x_2 x_3 的大（就绝对值而言）而我们在前面已将倍数算出来了。

一个简单的级数求和公式

781　陈家骅

如果我一开始就要你求级数

$$\cos^3 x-\frac{1}{3}\cos^3 3x+\frac{1}{3^2}\cos^3(3^2 x)-\frac{1}{3^3}\cos^3(3^3 x)$$
$$+\cdots$$

的和，也许你的脑袋要发胀了吧！

且看下面一个一般的方法：

设 f，g 是 x 的函数，且 $f(x)=af(bx)+cg(x)$，a，b，c 是常数，则 $a^{k-1}f(b^{k-1}x)=a^k f(b^k x)+a^{k-1}cg(b^{k-1}x)$ 对任何 k 成立，于是，不难用数学归纳法证明

$$f(x)=a^n f(b^n x)+c[g(x)+ag(bx)+\cdots+a^{n-1}g(b^{n-1}x)]$$

如果 $\lim a^n f(b^n x)$ 存在且等于 L 的话，（当然，我们假定 $c\neq 0$，否则将毫无意义）那么就应有

$$g(x)+ag(bx)+\cdots+a^n g(b^n x)+\cdots=(f(x)-L)/c$$

类似地，对于非负整数 k

$$\frac{1}{a^k}f\left(\frac{x}{b^k}\right)=\frac{1}{a^{k-1}}f(b^{1-k}x)+\frac{c}{a^k}g\left(\frac{x}{b^k}\right)$$

在 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 时成立。

则

$$af(bx)=\frac{1}{a^n}f\left(\frac{x}{b^n}\right)-c\left[g(x)+\frac{1}{a}g\left(\frac{x}{a}\right)+\cdots+\frac{1}{a^n}g\left(\frac{x}{a^n}\right)\right]$$

如果有 $\lim\frac{1}{a^n}f\left(\frac{x}{b^n}\right)=M$，则显然有

$$g(x)+\frac{1}{a}g(\frac{x}{b})+\cdots+\frac{1}{a^n}g$$

$$\because \quad \cos x=-3\cos\frac{x}{3}+4\cos^3\frac{x}{3}$$

令 $f(x)=\cos x$, $g(x)=\cos^3\frac{x}{3}$, $a=-3$, $b=\frac{1}{3}$, $c=4$

使得 $\cos^3 x-\frac{1}{3}\cos^3 3x+\frac{1}{3^2}\cos^3 3^2 x-\frac{1}{3^3}\cos^3 3^3 x+$

$$\cdots=\frac{3}{4}\cos\frac{x}{3}$$

一个有趣的几何问题

七八一　　汪　洋

用一张平面去截一个三条轴不等的椭球面得到一个椭圆。这个椭圆能否是一个圆呢？下面我们便讨论这个问题：

首先，我们从直观上来说明，即使平面不过原点，这也是可能的。设椭球面方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad a<b<c$$

在 $Oxy(yz)$ 平面作一平行于 y 轴的弦一平面绕着这条弦旋转，当平面平行于 $xy(yz)$ 平面时，长短轴分别是 $b>a$（$c>b$）转动平面时，原来的长轴逐渐变短，当平面垂着于 $xy(yz)$ 平面时，即平行于 $yz(xy)$ 时，原来的长轴变得比短轴还短由连续函数的性质，当平面转来一时刻必截出一个圆来。

以下我们来证明这件事，并指出上面情形实际上穷尽了所有可

能的情况，设椭球方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad （并不假定\ a< b< c）$$

显然，当在面平行于坐标平面时是不可能截出圆的，因此，我们分下面两种情况来说明：

I）平面平行于坐标轴，不妨设平行于 y 轴，平面方程为：

$$x=\mathrm{tg}\theta\, z+d$$

平面的法向量为（$\cos\theta$, 0, $-\sin\theta$）作刚体变换

$$\begin{cases} x=\cos\theta\cdot\tilde{x}+\sin\tilde{z}+d\\ y=\tilde{y}\\ z=-\sin\tilde{x}+\cos\tilde{z}\end{cases}$$

这样平面被变为 $\tilde{x}=0$，椭球面变为

$$\frac{(\cos\tilde{x}+\sin\tilde{z}+d)^2}{a^2}+\frac{\tilde{y}^2}{b^2}+\frac{(-\sin\tilde{x}+\cos\theta\,\tilde{z})^2}{c^2}=1$$

令 $x=0$，即得

$$\frac{(\sin\theta\, z+d)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{\cos^2\theta\, z^2}{c^2}=1$$

要使其成为一个圆，必须有

$$\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}=\frac{1}{b^2} \qquad (1)$$

以及

$$0<\frac{\sin^2\theta\, d^2\, b^4}{a^4}<\left(1-\frac{d^2}{a^2}\right)b^2 \qquad (2)$$

而 $\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}=\frac{1}{b^2}$，只有当 $a< b< c$（或 $c< b< a$）时才有解，值得注意的是，θ 与 d 无关，即这些平面是两族平行

的平面

由 $\sin^2\theta\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}$，$\sin^2\theta=\frac{(c^2-b^2)a^2}{(c^2-a^2)b^2}$

代入(2)可得

$$d^2<\frac{a^2(c^2-a^2)}{2c^2-b^2-a^2}$$

Ⅱ）平面不与任何坐标轴平行，平面方程为

$$Ax+By+Cz=Bd$$

$\because$ A，B，C $\neq 0$，$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=1$，令 $r=\sqrt{A^2+C^2}$，

$$\cos\theta=\frac{A}{r}\quad \sin\theta=\frac{C}{r}$$，作变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\cos\theta & \sin\theta & -B\cos\theta\\ B & 0 & r\\ r\sin\theta & -\cos\theta & -B\sin\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\\tilde{y}\\\tilde{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\d\\0\end{pmatrix}$$

平面变为 $\tilde{x}=0$，截线在平面 $\tilde{x}=0$ 上的方程为

$$\frac{(\sin\theta\tilde{y}-B\cos\theta\tilde{z})^2}{a^2}+\frac{(r\tilde{z}+d)^2}{b^2}+\frac{(-\cos\theta\tilde{y}-B\sin\theta\tilde{z})^2}{c^2}$$

$$=1$$

因为是圆，故 $\frac{-B\sin\theta\cos\theta}{a^2}+\frac{B\sin\theta\cos\theta}{c^2}=0\Rightarrow a=c$，

矛盾！

编者注：若仅用过原点的平面截，也可用下面方式处理

设椭球面方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$　$(a<b<c)$

平面方程为 $Ax + By + Cz = 0 \qquad (A^2 + B^2 + C^2) = 1)$

(4)

若用(4)截出一个圆来，则圆心必在原点，这样圆的

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{常数} \\ \dfrac{x}{a^2}dx + \dfrac{y^2}{b^2}dy + \dfrac{z}{c^2}dz = 0 \\ Adx + Bdy + Cdz = 0 \\ xdx + ydy + cdz = 0 \end{cases}$$

$(dx, dy, cz) \neq 0$，因之
$$\begin{vmatrix} \dfrac{x}{a^2} & \dfrac{y}{b^2} & \dfrac{z}{c^2} \\ A & B & C \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

但 $(A, B, C) \perp (x, y, z)$，故 $\left(\dfrac{x}{a^2}, \dfrac{y}{b^2}, \dfrac{z}{c^2}\right) =$

$\lambda(A, B, C)^{1}\mu(x, y, z)$ ………… ………… (6)

将(6)两端用 (x, y, z) 点乘，得
$$\mu = \frac{1}{r^2} = \text{常数}$$

而(6)又为 $\left(\dfrac{1}{a^2} - \mu\right)x = \lambda A$，$\left(\dfrac{1}{b^2} - \mu\right)y = \lambda B \quad \left(\dfrac{1}{c^2} - \mu\right) = \lambda C$

若 $\dfrac{1}{a^2} - \mu$，$\dfrac{1}{b^2} - \mu$，$\dfrac{1}{c^2} - \mu$ 均不为零，将 x. y. z 前面系数逆过去，利用(5)易知入为常数，将(6)两端用 (A, B, C) 点乘，得

$$\frac{A}{a^2}x + \frac{B}{b^2}y + \frac{C}{c^2}z = \lambda,$$

这样，圆落在(4)，(7)这两个平面上。易得出矛盾。由于

这样 $B=0$，对某些 A，C 确实可以截出圆来。详细情况留给读者讨论。

1982年3月20日

极小曲面的一个注记

曲面（即 C^k阶曲面，$k\geq 2$）是极小曲面是指平均曲率H在曲面上处处为零。显然，此时总曲率$K\leq 0$，那么，若曲面有平点（即$K=0$的点，则K在这些点取到极大值0。除了平点以外，K能否在其他的点取到极大值？下面的定理告诉我们这是不可能的。

引理：极小曲面上任一非平点P，存在P点的一个坐标邻域（u，v）使得：

$$\mathrm{I}=\lambda\,(du^2+dv^2)\qquad(\lambda>0)$$

$$\mathrm{II}=du^2-dv^2$$

证明：上面的结论是苏步青等人著的《微分几何》一书中的一个习题。下面我们给出一种证明。

在P点附近取曲率线网，则 $\mathrm{I}=Edu^2+Gdv^2$，$\mathrm{II}=Ldu^2+Ndv^2$；由Codazzi方程得

$$\begin{cases} L_v=\Gamma_{12}^1L-\Gamma_{11}^2N \\ -N_u=\Gamma_{22}^1L-\Gamma_{12}^2N \end{cases}$$

$$\because\ \Gamma_{12}^1=\frac{GE_v}{2FG}\qquad \Gamma_{11}^2=-\frac{EE_v}{2EG}\qquad \Gamma_{22}^1=\frac{-GG_u}{2EG}$$

$$\Gamma_{12}^2=\frac{G_uE}{2EG}\quad \text{代入上方程组得}\quad \begin{cases} L_v=HE_v=0 \\ N_u=HG_u=0 \end{cases}$$

$$\therefore\ L=L(u)\qquad N=N(v)$$

又因为 $H=\dfrac{1}{2}\dfrac{EN+GL}{EG}=0\quad \therefore \dfrac{L}{E}+\dfrac{N}{G}=0$

由假定在 P 点附近 $K=\frac{LN}{EG}<0$ $\therefore E=-\frac{L}{N}G$

$$\therefore I=Edu^2+Gdv^2=-\frac{G}{N}Ldu^2+Gdv^2$$

$$=-\frac{G}{N}(Ldu^2-Ndv^2)$$

$$II=Ldu^2+Ndv^2$$

不妨设 $N<0$，作参数变换 $\begin{cases}\bar{u}=\int\sqrt{L}\,du\\ \bar{v}=\int\sqrt{-L}\,dv\end{cases}$ 显然满足参数变换

的条件，在新的参数坐标系下 $I=\lambda(\bar{u}\bar{v})(d\bar{u}^2+d\bar{v}^2)$，

$$II=d\bar{u}^2-d\bar{v}^2$$

定理。极小曲面上某 P 点为平点充要条件是曲率在这一点达到极大值。

证明：必要性显然，下面证充分性（反证）：若 K 在非平点达到极大值。由引理，存在在 P 点的一个坐标邻域（ u, u ）使得

$$I=\lambda(du^2+dv^2)\quad(\lambda>0)\qquad II=du^2-dv^2$$

则

$$K=-\frac{1}{2\lambda}[(\ln\ )_{uu}+(\ln\lambda)_{vv}=-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\therefore \lambda_{uu}+\lambda_{vv}=\frac{\lambda_u^2+\lambda_v^2}{\lambda}+2 \qquad (*)$$

$K=-\frac{1}{\lambda^2}$ 在 P 点（ u_0 v_0 ）达到极大值。$\therefore\lambda$ 在（ u_0 v_0 ）达到极大值，从而有

$\lambda_u(u_0\ v_0)=\lambda_v(u_0\ v_0)=0$; $\lambda_{uu}(u_0\ v_0)\leq 0$
$\lambda_{vv}(u_0\ v_0)\leq 0$。代入方程（*） 得 $2\leq 0$ 矛盾。

几何解释：一张有平点的极小曲面，中间一定是很"曲"。

循环数列中的方幂数问题

781 施皖雄

设 u_0 u_1 为自然数 则由 $u_n=au_{n-1}+bu_{n-2}$(1)(a, b 自然数，$n\geq 2$）定义的数列便是所谓二级循环数列。若 x 为自然数，$m\geq 2$ 为自然数，则 x^m就称为方幂数。循环数列中方幂的分布问题，是一个重要的问题，它与不定方程的联系极为密切。而且所用的工具基本上也是不定方程的结果。

在这里，我们要讨论的是，给定自然数 $m\geq 2$ 或 u_0，u_1，a，$b>0$，使得(1)中 $u_n=x^m$ 的 n 是有限，还是无限个的问题。当 $b\neq 1$，这种 n 可以有无限多个，比如：$u_0=1$，$u_1=3$，$a=2$，$b=3$，则用归纳法不难推得 $u_n=3^n$，$\therefore u_{nm}=(3^n)^m$ 因此只要 $n\equiv 0\ (\bmod m)$ 即可。但是，若 $b=1$，我们却能证明，这种 n 只有有限多个。

定理：设 m，u_0 u_1 a 为自然数 $m\geq 2$，$u_n=au_{n-1}+u_{n-2}$ ($n\geq 2$)

则最多只有有限个 n 使 u_n 为 x^m 的形式。

证明：$\because u_n=au_{n-1}+u_{n-2}$ 故写成矩阵形式有：

$$\begin{pmatrix}u_{n+1}\\ u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\ u_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \qquad n=0, 1, 2, \cdots, n \cdots \tag{8}$$

方阵$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$的特征根为 $\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2+4}\right)$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2+4}\right)$

故有二阶可逆方阵 P．使：

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \\ & \lambda_2^n \end{pmatrix} P$$

代入(8)有：

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_1^n \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

故： $u_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ c_1 c_2 为待定常数

令： $n = 0$ $c_1 + c_2 = u_0$

$n = 1$ $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 = u_1$

联立解之：

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \left(u_1 - \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} u_0 \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+4}} \left(u_1 - u_0 \lambda_2 \right)$$

$$c_2=\frac{1}{\sqrt{a^2+4}}\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}-u_0-u_1\right)$$

$$=\frac{1}{a^2+4}\quad(u_0\lambda_1-u_1)$$

$\therefore\ \sqrt{a^2+4}\ u_n=(u_1-u_0\lambda_2)\lambda_1^n+(u_0\lambda_1-u_1)\lambda_2^n$

$$=(\lambda_1^n-\lambda_2^n)u_1+\lambda_1\lambda_2 u_0(\lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1})$$

但：$\lambda_1\lambda_2=-1$

$\therefore\ \sqrt{a^2+4}u_n=(\lambda_1^n-\lambda_2^n)u_1+(\lambda_1^{n-1}-\lambda_2^{n-1})u_0$

令：$V_n=(\lambda_1^n+\lambda_2^n)u_1+(\lambda_1^{n-1}+\lambda_2^{n-1})u_0 \qquad n\geq 1$

不难看出：V_n为整数，且

$$\frac{V_n+\sqrt{a^2+4}\ u_n}{2}=u_1\lambda_1^n+u_0\lambda_1^{n-1}=(u_1\lambda_1+u_0)\lambda_1^{n-1}$$

$$\frac{V_n-\sqrt{a^2+4}\ u_n}{2}=u_1\lambda_2^{n}+u_0\lambda_2^{n-1}=(u_1\lambda_2+u_0)\lambda_2^{n-1}$$

故：

$$\frac{1}{4}(V_n^2-(a^2+4)u_n^2]=[u_1^2\lambda_1\lambda_2+u_0u_1(\lambda_1+\lambda_2)+u_0^2]$$

$$(\lambda_1\lambda_2)^{n-1}$$

$\because\ \lambda_1\lambda_2=-1 \quad \lambda_1+\lambda_2=a \qquad$ 故有

$$V_n^2-(a^2+4)u_n^2=4(-1)^{n+1}(u_0^2-u_1^2+au_1u_0) \tag{5}$$

令：　$h=4(u_0^2-u_1^2+au_1u_0)$　则为整数　(5)改写为

$$V_n^2-(a^2+4)u_n^2=(-1)^{n+1}h \tag{6}$$

若：$h=0$，则：$u_0^2-u_1^2+au_1u_0=0$　$(au_1+u_0)u_0=u_1^2$

设：$p^s|u_1$，$p^{s+1}\nmid u_1$，若：$p^{s+1}|u_0$ 则：

$p^{2s+1}|(au_1+u_0)u_0$

但：$p^{2s+1}\nmid u_1^2$ 矛盾，故 $p^{s+1}|u_1$ 这表明 $u_0|u_1$

设：$u_1=u_0u$ 则：$(au_0u+u_0)u_0=u_0^2u$　$au+1=u^2$

$\therefore$ $1=u(u-a)$ $\therefore$ $u=1$　$u-a=1$　$\therefore a=$　矛盾

$\therefore h\neq 0$

若 $u_n=w_n^m$　w 为自然数　由(6)知

$V_n^2+(-1)^nh=(a^2+4)w_n^{2m}$　(7)

$\because$ $m\geq 2$ $\therefore$ $2m\geq 3$　$a^2+4\neq 0$ 故由不定方程中的 Landau－Ostrousk-Thue 定理（见《数论导引》第十七章§5）

得知：不定方程 $x^2+h=(a^2+4)y^{2m}$ 与 $x^2-h=(a^2+4)y^{2m}$ 都只有有限组解，所以只有有限个 n 使 $u_n=x^m$（x 为自然数）的形式，命题成立。

若取 $u_0=1$，u_1，$a=1$ 则 $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$ 就成为 Fibonacci 数列，因此我们证明了给定 $m\geq 2$．Fibonacci 数列中只有有限多项为 x^m 的形式。$m=2$ 时，柯召、孙琦和 Wyle 于 1964 证明了除 $u_0=1^2$ $u_1=1^2$　$u_{11}=12^2$　以外，没有其它 n 使 u_n 为平方数，但当 $n\geq 3$ 时，没有得到进一步的结果。

单值定理的另一证明

791　荣用武

复变函数论中单值性定理，一般是用 Riemann 映照定理证明的。（比如：殷慰萍老师编的《复变函数论讲义》）在这里，给出一个利用拓扑的证明

单值性定理：设 D 为单连通区域，$a\in D$

$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ 为解析元素，若沿着任意一条属于D的由 a 出发的连续曲线，$P(z)$ 可以解析延拓，则存在一个在D解析的单值函数 $f(z)$，它在 a 的邻域内和 $P(z)$ 相等。

先引进一些记号，任给D中由 a 出发的连续曲线 l，记 P_l 是 P 沿 l 开拓得到的函数，则存在开圆 $B_1 \cdots B_n$　$B_l=\bigcup_{i=1}^{n} B_i \supset l$

P_l 在 B_l 内解析

引理：　$\forall\ b\in D$　$\forall L_0$　$Z_0=Z_0(t)$　$t\in I=[0,1]$

$l_1: Z=Z_1(t)$　$t\in I$ 连接 a，b，则：

$P_{l_0}(b)=P_{l_1}(b)$

证明：由代数拓扑知识，l_0 l_1 同伦，即

$\exists H: I\times I\to D$ 连续　$H(0,t)=Z_0(t)$

$H(1,t)=Z_1(t)$　$H(\lambda,0)=a$，$H(\lambda,1)=b$

记：l_λ 是曲线　$Z=H(\lambda,t)$　$t\in I$ 则：l_λ 连接 a，b

令：$\alpha=\sup\{\lambda: P_{l_\lambda}(b)=P_{l_0}(b)\}$

以下证明 $\alpha=1$

因为 $l_\alpha\subset B_{l_\alpha}$，$l_\alpha$ 紧，$B^c_{l_\alpha}$ 闭，所以 $d=d(l_\alpha,B^c_{l_\alpha})>0$

假定 $\alpha<1$ 则由H关于t对 λ 一致连续性可知 $\exists\ \beta>\alpha$，使 $\forall t\in I$，$|H(\beta,t)-H(\alpha,t)|<d \Longrightarrow H(\beta,t)\in B_{l_\alpha}$

$\therefore l_\beta\subset B_{l_\alpha}$　$\therefore$ $l_\beta\subset B_{l_\alpha}$　见图

又：　$l_\beta\subset B_{l_\beta}$

$\therefore r=\min\{d(l_\beta, B^c_{l\alpha}), d(l_\beta, B^c_{l\beta})\}>0$

$\therefore A=\{z: d(z, l_\beta)<r\}\subset B_{l\alpha}\cap B_{l\beta}$ A是域

$P_{l\alpha}$ $P_{l\beta}$ 都在域A内解析，又 $a\in A$，在a的邻域，

$P_{l\alpha}=P_{l\beta}=P$

$\therefore P_{l\alpha}|_A = P_{l\beta}|_A$ $\because b\in A$

$\therefore P_{l\beta}(b)= P_{l_\alpha}(b) = P_{l_0}(b)$ 矛盾

$\therefore \alpha=1$，因此引理成立

现在 $\forall z\in D$，$\exists$ l连接a，z令 $f(z)=P_l(z)$ 则 f 单值，在z解析，且在a的邻域与 $P_{(z)}$ 相等，因此定理得证。

有零因子环的个数的一个刻划

791 陆雅

关于有零因子环，《蛙鸣》第一、二期已有过讨论。本文从另一角度来考虑有零因子交换环阶数最大时的条件。

总假定：交换环R，有非0的零因子，z_1 z_2 … z_n 两两不等，记⑪ $=\{0, z_1\cdots z_n\}$

引理1：对每个 $x\in R$，$x\notin$⑪，则必定有

$0\ne z_l\in$⑪ $1\le l\le n$ 使：$z_1x=z_l$ 成立

证明：z_1 为零因子，故存在某个零因子 z_k，$z_kz_1=0$

则对 $x\in R$ $x\notin$⑪ 有：$(z_kz_1)x=z_k(z_1x)=0$

$z_1x\ne0$（否则，$x\in$⑪）。从而，$z_1x\in$⑪ 因此 $\exists$ z_l $l\le l\le n$

使 $z_1x=z_l$

引理2。如对每个 j $1\leq j\leq n$ $x_j \bar{\in}$ ⑪ 使

$z_1 x_j=z_j$ 即方程 $z_1 x=z_j$ 在 R 中有非零因子解，则

$$z_1 z_1=z_1 z_2=\cdots=z_1 z_n=0$$

证明：z_1 为零因子，故 $\exists z_k$ $z_k z_1=z_1 z_k=0$

由 $z_1 x_k=z_k$ 有：$z_1(z_1 x_k)=(z_1 z_1)x_1=$

$z_1 z_k=0$

$\because$ $x_k \bar{\in}$⑪ $\Longrightarrow$ $z_1 z_1=0$ 所以由 $z_1 x_2=z_2$

$z_1 x_n=z_n$

得：$z_1(z_1 x_2)=z_1 z_2=0$ $z_1(z_1 x_n)=(z_1 z_1)x_n$

$=z_1 z_n=0$

由 $x_1 \bar{\in}$⑪ $\Longrightarrow z_1 z_1=z_1 z_2=\cdots=z_1 z_n=0$

定理：R 的阶 $=(n+1)^2 \Longleftrightarrow$ 对每个 j $1\leq j\leq n$ 方程

$z_1 x=z_j$ 在 R 中有非 0 因子的解

说明：这里 $z_1 x=z_j$ 之解要求不是零因子，如果只要求有解，

就必须要求：$z_1 z_j=0$ $1\leq j\leq n$，

证明：$\Longrightarrow$ 反证：

假定 $n-1$ 个方程 $z_1 x=z_j$ $1\leq j\leq n$ 都有非 0 因子解

但：$z_1 x=z_n$ 在 R 中没有非零因子的解，那么由引理 1，$\forall$

$x\in R$ $x \bar{\in}$⑪ $\exists z_1$ 为 0 因子

$z_1 x=z_1$ 由上假定 $\forall x\in R$ $x \bar{\in}$⑪ $z_1 x\neq z_n$

因此对任固定 x，$z_1 x=z_1$ 于是 $\exists x_1$ $z_1 x_1=z_1$

（由上设 $z_1 x=z_1$ 有非 0 因子解）且 $x_l \bar{\in}$ ⑪

于是：$z_1 x_1=z_1 x=z_1$ $z_1(x-x_1)=0$

$\therefore$ $x-x_1\in$⑪ $\therefore x\in\{x_1+y \mid y\in$⑪$\}$

于是：若 $x\in ⑾$ 就有 $x\in\{x_j+y \mid 1\le j\le n-1 \quad y\in ⑾\}$

$\therefore R\subset ⑾\cup\{x_j+y \mid 1\le j\le n-1 \quad y\in ⑾\}$

$\therefore |R|\le(n-1)(n+1)+n+1=n(n+1)<(n+1)^2$

因此矛盾，如果还有一些方程无非零因子解，同法可证。

$\Longleftarrow$ 由引理一，$x\in R \quad x\notin ⑾$ 必有 $x=x_1$ 或 x_1+z_t （x_j 为 $z_1x=z_j$ 的非零因子解）

记：$R_1=⑾\cup\{x_j+y \mid 1\le j\le n \quad y\in ⑾\}$

有 $R\subset R_1$ 但：$⑾\subset R \quad x_1\cdots x_n\in R$ R 为环，因而有：$x_1+z_t\in R \Longrightarrow R=R_1$ 现在来证明 R_1 之元两两不等。

Ⅰ：每个 $x_1+z_t\neq 0$ 如 $x_1+z_t=0$，则用 z_1 两边乘，及引理二，$z_1z_t=0$ 可得：$z_1=0$ 矛盾。

Ⅱ：每个 $x_1+z_t\notin ⑾$ 若：$z_t+x_1=z_s$ 用 z_1 乘，同样可证。

Ⅲ：如果 $x_1+z_t=x_s$ 用 z_1 两边乘，$z_1=z_s$ 矛盾

Ⅳ：如果 $x_1+z_t=x_m+z_s \quad (1,t)\neq(m,s)$

用 z_1 乘：$z_1x_1=z_1x_m \Longrightarrow z_1=z_m \Longrightarrow z_t=z_s$

$\Longrightarrow (1,t)=(m,s)$

由此可见 $R=R_1$ 其元素各不相同，因此 R 之阶 $=(n+1)^2$ 这就证完了定理。

常系数线性微分方程组的一些解法

791 沈忠民

关于常系数线性方程组的解法很多，有难有易，但一般是采用求特征向量的方法来解。下面介绍两种一般之方法，当然不可能对每个特殊的方程都容易，但方法较死，只要认真算就能得到答案。

一：算子解法

设 f (t) 是列向量函数，A 为常数矩阵，我们有下列常系数微分方程组：

$$X(t)=AX(t)+f(t) \qquad (*)$$

公式：微分方程组〔*〕的通解为

$$X(t)=\sum_{j=0}^{n-1} A^{j}\Big(\sum_{t=j+1}^{n} a_{t}D^{t-j-1}\Big)\frac{1}{P(D)}f$$

其中 $P(\lambda)=\sum_{j=0}^{n} a_{1}\lambda^{t}$ 为 A 的特征多项式

证明：$x'(t)-AX(t)=(DI-A)\Big(\sum_{j=0}^{n-1} A^{j}\Big(\sum_{t=j+1}^{n} a_{t}D^{t-j-1}\Big)$

$$\frac{1}{P(D)}f$$

$$=\Big\{\Big[\sum_{j=0}^{n-1} A^{j}\Big(\sum_{t=j+1}^{n} a_{t}D^{t-j}\Big)\Big]-$$

$$\Big[\sum_{j=0}^{n-1} A^{j+1}\Big(\sum_{t=j+1}^{n} a_{t}D^{t-j-1}\Big)\Big]\Big\}\frac{1}{P(D)}$$

$$=\Big[-\sum_{j=0}^{n-1} A^{j}a_{j}+\sum_{t=0}^{n} a_{t}D^{t}-A^{n}a_{n}\Big]\frac{}{P(D)}f$$

$$=P(D)\frac{1}{P(D)}f=f$$

二：下面通过线性代数知识给出 e^{At}的具体表达式从而可以通过计算 e^{At} 来求〔 * 〕的解。

设：$\varphi(\lambda)$ 是 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}\cdots\cdots(\lambda-\lambda_s)^{m_s}$ $\quad \varphi_k(\lambda)=\varphi(\lambda)/(\lambda-\lambda_k)^{m_k}$

$(\lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j)$

由拉格朗日插值多项式

$$r(\lambda)=\sum_{k=1}^{s}\Big[\sum_{j=0}^{m_k-1}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\Big(\frac{f(\lambda)}{\varphi_k(\lambda)}\Big)_{\lambda=\lambda_k}(\lambda-\lambda_k)^j\Big]\varphi_k(x)$$

满足：$r^{(j)}(\lambda_k)=f^{(j)}(\lambda_k)$

所以：

$$f(A)=\sum_{k=1}^{s}\Big[\Big(\sum_{j=0}^{m_k-1}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\Big(\frac{f(\lambda)}{\varphi_k(\lambda)}\Big)_{\lambda=\lambda_k}(A-\lambda_k I)^j\Big]\varphi_k(A)$$

特别当 $f(\lambda)=e^{\lambda t}$时，由于 $f(A)=e^{At}$

所以

$$e^{At}=\sum_{k=1}^{s}\Big[\sum_{j=0}^{m_k-1}\frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\lambda^j}\Big(\frac{e^{\lambda t}}{\varphi_k(\lambda)}\Big)_{\lambda=\lambda_k}(A-\lambda_k I)^j\Big]\varphi_k(A)$$

注：一般地说前一法较为简单，e^{At} 的表达式只不过是关于《矩阵论》一书中有关矩阵多项式理论和《代数学引论》一书有关理论的一个小小引用

问 题 征 解

（第五期）

从本期开始，本刊每期提供五个相当难度的习题，征求读者解答。

(1) $f(x)$ 定义于 $[0, +\infty)$ 非负连续，又 $f(x)$ 满足

$$f(x+y) \leq f(x)+f(y)$$

试证：$\lim \frac{f(x)}{x}$ 存在

(2)若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二次连续可微且

$$\lim_{x\to+\infty}(f''(x)+xf'(x)+f(x)) = A$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$

(3)设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内二级可微，

$\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)$ 存在且

$|f''(x)| \leq x$ 试证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(4)令：$A_1 \cdots A_n$ 为域 F 上的 $K\times K$ 矩阵使：$A=A_1+\cdots A_n$ 可逆，试证

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_1 & \cdots & A_{n-1} & A_n & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$ 满秩

(5)在什么环中，下命题成立

$$x=y \Longleftrightarrow (1-x+xy)(1-y+yx)=1$$

第　六　期

目　　录　　　　　　　　　　　　　　1982年5月20日

曲线整体性质的一点研究

——　791　沈忠民

引理〔Wirtinger引理〕设 $f'(t)$ 连续，$f(t)$ 以 L 为周期，且 $\int_0^L f\,dt=0$ 则 $\int_0^L f'^2\,dt \geq \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \int_0^L f^2\,dt$，等号成立，当且仅当 $f(t)=a\cos\frac{2\pi}{L}t + b\sin\frac{2\pi}{L}+$

〔此证明可见苏步青著的《微分几何五讲》第一讲〕

〔定理1〕平面上闭曲线（不一定简单闭曲线）有下列不等式。

$$\int_0^L K^2\,ds \geq \frac{4\pi^2}{L}$$ 等号成立当且仅当为平面圆。

证明：设 $r(s)$ 是平面上的光滑闭曲线以弧长 L 为周期，则有：

$$\begin{cases} \alpha_1' = K_r n \\ n' = -K_r \alpha_1 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \alpha_1(s)=\cos\int_0^s K_r ds\,\alpha_1(0)+\sin\int_0^s K_r ds\ \ n(0) \\ n(s)=-\sin\int_0^s K_r ds\ \ \alpha_1(0)+\cos\int_0^s K_r ds\ \ n(0) \end{cases}$$

则：$$\int_0^L \alpha_1(s)ds = r(L)-r(0) = 0$$

$$\int_0^L \left[\cos\int_0^s K_r ds\right]ds\ \alpha_1(0)+\int_0^L\left[\sin\int_0^s K_r ds\right] ds\ \ n(0)$$

得：
$$\begin{cases} \int_0^L \left[\cos\int_0^s K_r\ ds\right]ds = 0 \\ \int_0^L \left[\sin\int_0^s K_r ds\right]ds = 0 \end{cases}$$

由引理：
$$L = \int_0^L \left(\left[\cos\int_0^s K_r ds\right]^2+\left[\sin\int_0^s K_r ds\right]^2\right)ds$$

$$\leq\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\int_0^L K_r^2\left[\left(\sin\int_0^s K_r ds\right)^2+\left(\cos\int_0^s K_r ds\right)^2\right] ds$$

$$=\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2\int_0^L K^2\ ds$$

$$\therefore \int_0^L K^2 \, ds \geq \frac{4\pi^2}{L}$$ 等号成立 当且仅当：

$$\begin{cases} \cos\int_0^s K_r ds = a_1 \cos\frac{2\pi}{L}s + b_1 \sin\frac{2\pi}{L}s \\ \sin\int_0^s K_r ds = a_2 \cos\frac{2\pi}{L}s + b_2 \sin\frac{2\pi}{L}s \end{cases}$$

显然易证当且仅当为平面圆。

〔定理 2〕曲面上任意不过抛物点的光滑闭曲线 n_s，有下列等式

$\oint \tau \, ds = -\oint s \cdot dn$ （其中 $s = n \times \alpha_1$ ）

〔证明〕显然有下列方程组

$$\begin{cases} \alpha_1' = k_n n + k_g s \\ s' = -k_g n + k_s n \quad (*) \\ n' = -k_n \alpha_1 - k_s s' \quad (\text{其中 } k_s = s' \cdot n) \end{cases}$$

$$\tau = \frac{(\alpha_1 \alpha_1' \alpha_1'')}{|\alpha_1 \times \alpha_1'|^2} = \frac{k_g k_n' - k_n k_g'}{k_n^2 + k_g^2} = + k_s$$

$$= k_s - \left(tg^{-1}\frac{k_g}{k_n}\right)'$$

（由于不过抛物点，$k_n \neq 0$ 所以上式分母非零）

$$\therefore \oint \tau \, ds = \oint k_s \, ds = -\oint s \cdot dn$$

（推论）曲面上任意不过抛物点的闭曲率线有：

$$\oint \tau\, ds=0$$

〔证明〕利用定理 2 的证明过程，且注意到两点：1）$k_n \neq 0$ 1）$k_s=0$ 所以，立即得 $\oint\ ds=0$。特别，因为球面上任意闭曲线是不过抛物点的曲率线，所以总 率为零。这个证明简化了 Richards. Millmen 著的《Elements of Differential Geometry》一书中的证明过程，并且作者对结论作了推广。

〔定理 3〕曲面上任意不过抛物点的闭曲率线，成立着下列等式：

$$\oint \tau f\left(\frac{k_n}{k}\right) ds = 0$$ 其中 f 是任意连续函数。

〔证明〕利用定理 2 中方程组（*），并且注意到沿曲线 $k_s=0$ 和 $k_n \neq 0$，所以：

$$\tau=\frac{k_g k_n' - k_n k_g}{k_n^2+k_g^2}=-\left(tg^{-1}\frac{k_g}{k_n}\right)'$$

不妨设 $k_n>0$，于是

$$\left[-\left(\frac{k_g}{k_n}\right)^{2k+1}\right]=(2k+1)\left[\frac{k_g}{k_n}\right]^{2k}\frac{k_n' k_g-k_g' k_n}{k_n^2}$$

$$(k=0,\ 1,\ \cdots)$$

$$=(2k+1)\frac{(K^2-K_n^2)^k}{k_n^{2k+2}}\tau K^2$$

$$\therefore \oint\left[-\left(\frac{k_g}{k_n}\right)^{2k+1}\right]' ds = 0=(2k+1)\oint\frac{(K^2-K_n^2)^k}{k_n^{2k+2}}K^2\tau\, ds$$

利用定理 2 中的推论 $\oint \tau\, ds=0$ 和类推法，得下列等式

$$\oint \left[\frac{K}{k_n}\right]^{2k} ds = 0 \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

显然，对任意多项 P（X），有

$$\oint P\left(\frac{K^2}{K_K^2}\right) \tau\, ds = 0$$

任意连续函数 f，g(x)=f(　　　) 于(0，λ)上连续。

令：

$$M = \sup\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 + 1, \quad N = \inf\left(\frac{K}{K_n}\right)^2 > 0$$

$$J = \oint |\tau|\, ds + 1$$

$\forall \varepsilon > 0$ 由 Weierstrass 定理，存在多项式 $P_\varepsilon(x)$

使：

$$\sup_{N \le s \le M} |g(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon / J$$

$$\therefore \left|\oint \tau f\left(\frac{K}{K_n}\right) ds\right| = \left|\oint g\left(\frac{K^2}{K_n^2}\right) ds\right|$$

$$= \left|\oint \tau \left[g\left(\frac{K^2}{K_n^2}\right) - P_\varepsilon\left(\frac{K^2}{K_n^2}\right)\right] ds\right| \le \oint |\tau| \frac{\varepsilon}{J}\, ds \le \varepsilon$$

由于 ε 的任意性，$\oint \tau\, f\left(\frac{K}{K_n}\right) ds = 0$

〔推论〕球面上任意闭曲线，对任意〔　　　　　　　上的连续函数 f，有：$\oint \tau\, f(K)\, ds = 0$

〔注〕：这是定理的直接推论，因为球面曲线为曲率线，且 k_n = 常数，于是，我们有很多有趣的结果，如：

$$\oint \frac{\tau}{K} ds = 0, \quad \oint \tau \sin K ds = 0, \quad \oint \tau \ln K ds = 0 \quad \text{等等}$$

〔更正〕定理 2 中的条件应改为沿曲线 $k_n \neq 0$

下面我们给出一个非整体性的有关曲线性质定理。

Y－C Wong 在 1972 年曾得这样的结论，$r(s)$ 是单位球面曲线的充要条件为：存在两个常数 A，B 使：

$$K\left[A\cos\int_0^s \tau\, ds + B\sin\int_0^s \tau\, ds\right] \equiv 1$$

下面给出必要性命题的推广：

〔定理 4〕曲面上一条曲线 $r(s)$（$k \neq 0$）是曲率线的充要条件是存在常数 φ_0 使

$$\begin{cases} k_n(s) = k\sin\left(\int_0^s \tau\, ds + \varphi_0\right) \\ k_g(s) = k\cos\left(\int_0^s \tau\, ds + \varphi_0\right) \end{cases}$$

〔证明〕（$\Longleftarrow$）

令 $n(s) = x(s)\alpha_2(s) + y(s)\alpha_2(s)$

显然 $n(s) = \frac{K_n}{K}\alpha_2(s) + k_g/k\ \alpha_3(s)$

$$= \sin\left(\int_0^s \tau + \varphi_0\right)\alpha_3 + \tau\left(\sin\int_0^s \tau + \varphi_1\right)\alpha_3$$

$$- \cos\left(\int_0^s \tau + \varphi_0\right)\alpha_2$$

$$= -k\sin\left(\int_0^s \tau + \varphi_0\right)\alpha_2 = -k_n(s)\alpha_2$$

∴是曲率线

($\Longleftarrow$)设曲线 $r(s)$ ($k \neq 0$)是曲面上曲率线

令 $x(s) = (n(s), \alpha_2) = \dfrac{k_n}{k}$，$y(n) = (n(s), \alpha_3)$

$$= \frac{k_g}{k}$$

则

$$\begin{cases} x' = (n', \alpha_2) + \tau(n, \alpha_3) = \tau y \\ y' = (n', \alpha_3) - \tau(n, \alpha_2) = -\tau x \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} x = \cos\int_0^s \tau ds A + \sin\int_0^s \tau B \\ y = -\sin\int_0^s \tau ds A + \cos\int_0^s \tau B \end{cases}$$

∵ $x^2 + y^2 = \dfrac{k_g^2 + k_n^2}{k^2} = 1$　　∴ $A^2 + B^2 = 1$

∴存在 φ_0 使：

$$\begin{cases} x = \sin\left(\int_0^s \tau + \varphi_0\right) \\ y = \cos\left(\int_0^s \tau + \varphi_0\right) \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} k_n = k\sin \\ k_g = k\cos\left(\int_0^s \tau ds + \varphi_0\right) \end{cases}$$

有关奇解的结论

——801 沈□

本文从定义出发，得到了一些有关奇解的结论

定理 1：设 Γ：$y=\varphi(x)$ 是方程 $y'=f(x,y)_{(1)}$（或 $F(x,y,y')=0_{(1)'}$）的解，如果在它的每一点上，都至少有(1)((1)')的两条积分曲线经过（相切），则称 $y=\varphi(x)$ 是方程(1)((1)')的奇解。

定义 2．设微分方程 $F(x,y,y')=0$ 的定义域为 G，若它在 G 上不能表成 $\varphi(x,y)\phi(x,y',y)=0$ 的形式，这里假设 $\varphi(x,y)$ 在 G 上有零点，则此微分方程称为不可分的。

〔结论 1〕．设 $F(x,y,y')=0$ 在其定义域 G 中连续可微，并且在 G 中每一点 (x,y) 能解出有限个或可列个 $y'=P_i(x,y)$，$i\in I$ $P_i(x,y)$ 于 G 上有定义的闭区域上连续，则在求其通解的过程中，可得到一些不包含于通解内的且定义了通解定义域 G' 的特解，则这些解必都是奇解（并假定 $G'\subseteq G$，以下同）

〔证明〕设 Γ：$y=\varphi(x)$ 是满足以上条件的某一解，通解为 $\phi(x,y,c)=0$

$\because \Gamma$ G'：对 $\forall(x_0\ y_0)\in\Gamma$，可知存在 C_i $i\in I$

$\phi(x_0,y_0\ Ci)=0$，而 $y'_{x_0}=\varphi'_{x_0}$ 亦满足方程

$F(x_0\ y_0\ y'_{x_0})=0$ 考虑到在 $(x_0\ y_0)$ 这点解出

$y'=P_i(x,y)$ $i\in I$

$\therefore$ $j\in I$ $P_j(x_0,y_0)=\varphi'_x$

又$y'=P_i(x, y)$的通解依假定含于$\phi(x, y, c)=0$之中，设G_j为$y'=P_j(x, y)$有定义的区域。存在点列$\{(x_i, y_i)\}$ $G_j \cap G$ 它们以(x_0, y_0)为极限。通过每一点(x_i, y_i)，有$\phi(x, y, c)=0$中的一条曲线，满足$y'=P_j(x_i, y_i)$ 由 $y'=P_i(x, y)$的连续性和通解$\phi(x, y, c)$的连续性，知 $k \in L^*$ $\phi(x_0, y_0, C_k)=0$且在这点$y'=\varphi' x_0$，即与Γ在此点相切，依定义，Γ：$y=\varphi(x)$的奇解。

（注）通解的连续性可由方程的连续可微性看出。上面指的不含于通解内是说不由常数的选取得到。

〔结论2〕$F(x, y, y')=0$，条件同结论1，并设通解于G ∂G上连续，则若特解Γ：$y=\varphi(x)$定义在∂G上且不含于通解之内，那么Γ必为奇解（设G非整个平面）

〔证明〕设$(x_0, y_0) \in \Gamma$，点列$\{(x_i, y_i)\}$ G且以(x_0, y_0)为极限点，同时，在每点(x_i, y_i)，对应有积分曲线$\phi(x, y, C_i)=0$ $(i \in I)$通过，因此得一函数序数，由$\phi(x, y, C)$的连续性，至少存在一个子叙列有极限，设此极限函数为$\phi(x, y, C)=0$则由于(x_i, y_i)以(x_0, y_0)为极限 $\phi(x_0, y_0, C)=0$，即(x_0, y_0)在此解上，我们肯定，它们必在此相切，论$y'_\phi \neq y'_\varphi$，那么我们将这两个函数在这点进行台劳展开，易知这个函数定义域超过G，这是条件所不允许的，因此Γ为奇解。

〔注1〕本结论之证明也可采用与结论1相同的方法。

〔注2〕若Γ：$y=\varphi(x)$是由$P(C)$——— 判别曲线得到的积分曲线，其它条件同结论1及结论2，则由上可知Γ必为奇

解。

〔结论3〕$F(x,y,y')=0$ 条件同结论1，且仅对点$(x,y)\in G$可解出不同的$P_i(x,y)$ $i\in I$（有限可列）G_i是相应于$P_i(x,y)$无零点的区域。设$P_i(x,y)$在G_i上满足Lipschitz条件，并连续，则奇解必处在这些G_i或G的边界上。

〔证明〕（反证）设奇解Γ：$y=\varphi(x)$上有点(x_0,y_0)不在G_i或G的边界上。即$(x_0,y_0)\in G_i$ $i\in I$由存在唯一定理在这点各个$y'=P_i(x,y)$ $i\in I$仅在一条积分曲线通过，且假定$P_j(x,y)\neq P_i(x,y)\Longleftrightarrow i\neq j$故$\Gamma$必属于这些积分曲线中，故$\Gamma$必为非奇解。矛盾!

〔注1〕这个结论刻划出了这样一条性质，即奇解存在的背景是以上所定义的区域G_i和G的边界。

〔注2〕 限于篇幅，本文未举例子。

有理数不能为可列个开集之交的一个证明

—— 791 陆雅言

我们证明［0，1］上有理数全体不能为可列个开集之交。

［证明］：设Q_1为（0，1）上有理数全体，Q_1如能表为开集之交。

即：$Q_1=\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$　O_n为开集，［0，1）中一切实数可以用二进制表为$0.a_1a_2\cdots\cdots a_n\cdots$　$a_n=0$或1

取b_1为［0，1）中有理数（$b\neq 0$）　$b_1=0.a_1'\cdots a_m'|0\ 0\cdots\cdots$

$a_i'=0$或1　$b_1\in Q_1 \Longrightarrow b_1\in O_1$　于是∃闭区间

$I_1=[b_1-\delta_1,\ b_1+\delta_1]$ 使 I_1　O_1 在闭区间

$[b_1-\frac{\delta_1}{2},\ b_1+\frac{\delta_2}{2}]$中，可以取$b_2$，$b_2$有以形式，$b_2=0.a_1'\cdots a_m'\ |\ \underbrace{0\cdots0}_{\text{至少两个}0}1\ 0\ 0\ \cdots$　这里显然能办到，又b_2为有理数。

$b_2\in Q_1$　O_2，因此 $I_2=[b_2-\delta_2,\ b_2+\delta_2]$使

I_2　O_2　I_1 又在$[b_2-\frac{\delta_2}{2},\ b_2+\frac{\delta_2}{2}]$中，取一个$b_3$，

b_3有以下形式（前面部分同b_2）$b_3=0.a_1'\cdots a_m'\ 10\cdots\cdots 1\ \underbrace{0\ \cdots\ 0}_{\text{至少}3\text{个}0}\ 1\ \ 0\ 0\ \cdots$，又因$b_3\in Q_1$　O_3　不∃$I_3\subset O_3\cap I_2$

等等。

如已有 b_n，又 $\exists I_n=[b_n-\delta_n, b_n+\delta_n]\subset O_n\cap I_{n-1}$ 可取出 b_{n+1}（在 b_n 后至少出现 $n+1$ 个 0 后出现一个 1，以后全是 0），$b_{n+1}\in Q_1$，我们说

$$O_n\supset I_n \Longrightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n\supset\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n,$$

$$b_1=\lim_{n\to\infty} b_n\in\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$$ 是无限不循环小数。∴

$$b_0\notin Q_1=\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$ 矛盾。

球 面 曲 线 平 点 的 条 件

——— 791 陆雅言

首先，如果一球面曲线 $\tau=0$，则必为一段圆弧，因此 $K'\equiv 0$，反过来也是对的，具体地说，我们设曲线为 $r(s)$ 球心为 $\underline{m}$，则 $\underline{r}-\underline{m}=\lambda(s)\underline{N}+\mu(s)\underline{B}$（在 T 方向上的分量为 ，两边微商得：$\underline{T}=-K\lambda\underline{T}+(\lambda'-\mu\tau)\underline{N}+(\lambda\tau+\mu')\underline{B}$

因此有：$\begin{cases}1+K\lambda=0\\ \lambda'-\mu\tau=0\\ \lambda\tau+\mu'=0\end{cases}$ 又注意到 $\lambda^2+\mu^2=a^2$，a 为球半径。

如 $\tau=0\Longrightarrow\lambda'\equiv 0$ 由 $\lambda=-\dfrac{1}{K}\Longrightarrow K'\equiv 0$ 反之，如 $K'\equiv 0$ 则 $\lambda'\equiv 0$ $\mu\tau\equiv 0\Longrightarrow\tau\equiv 0$

以下，我们将讨论一点 $\tau=0$ 的情况，先证明。

引理：设 $r(s)$，M，λ，μ 同上，则：

$$\tau(s_0)=0 \Longleftrightarrow \lambda(s_0)\lambda''(s_0)+\mu(s_0)\mu''(s_0)=0$$

〔证明〕"$\Longrightarrow$" 由 $\lambda^2+\mu^2=a^2$ 对 s（弧长）微商

$\lambda\lambda'+\mu\mu'=0$

再微商得 $\lambda'^2+\lambda\lambda''+\mu\mu''+\mu'^2=0$

由 $\tau(s_0)=0$，$\lambda'=\mu\tau$，$\mu'=-\lambda\tau \Longrightarrow$

$\lambda'(s_0)=\mu'(s_0)=0 \Longrightarrow \lambda(s_0)\lambda''(s_0)+\mu(s_0)$

$=0$

"$\Longleftarrow$"同样有 $\lambda'^2+\lambda\lambda''+\mu\mu''+\mu'^2=0$

因此 $(\lambda'(s_0))^2+(\mu'(s_0))^2=0$

$\Longrightarrow \lambda'(s_0)=\mu'(s_0)=0 \Longrightarrow \mu(s_0)\tau(s_0)$

$=\lambda(s_0)\tau(s_0)=0$

由 $\lambda^2+\mu^2=a^2\pm0 \Longrightarrow \tau(s_0)=0$

因此，我们证明了引理

〔定理〕设 $r(s)$ 为球面曲线，$\tau(s)\neq0$ 当 $s\neq s_0$ 时，

则 $\tau(s_0)=0 \Longleftrightarrow K'(s_0)=0$ 且 $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{K'(s)}{\tau(s)}$

存在有限且有 $K''(s_0)=\left[\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{K'(s)}{\tau(s)}\right]\tau'(s_0)$ 成立。

〔证明〕我们仍采用上面的 m，λ，μ 等。

"$\Longrightarrow$" 由 $-K\lambda=1$　$K'\lambda+\lambda'K=0$，$\tau(s_0)=0$ 所以

$\lambda'(s_0)=\mu(s_0)\tau(s_0)=0 \Longrightarrow K'(s_0)\lambda(s_0)=0$

而 $\lambda\neq0$ 因此 $K'(s_0)=0$

注意　μ 是连续的 $s\neq s_0$ 时 $\mu=\dfrac{\lambda'}{\tau}=\dfrac{K'}{\tau K^2}$

$$\mu(s_0)=\lim_{s\to s_0}\frac{K'(s)}{\tau(s)K^2(s)}=\frac{1}{K^2(s_0)}\lim_{s\to s_0}\frac{K'(s)}{\tau(s)}$$

因此 $\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{K'(s)}{\tau(s)}=K^2(s_0)\mu(s_0)$ 存在有限，我们要证

$K''(s_0)=K^2(s_0)\mu(s_0)\tau'(s_0)$，由 $\lambda=-\dfrac{1}{K}$ 有

$\lambda''=\dfrac{K''K-2K'^2}{K^3}$ 因此 $\lambda''(s_0)=\dfrac{K''(s_0)}{K^2(s_0)}$，由 $\mu'=-\lambda\tau$

有 $\mu''=-\lambda'\tau-\lambda\tau'$ 因此：$\mu''(s_0)=-\lambda(s_0)\tau'(s_0)$，由引理：$\lambda(s_0)\lambda''(s_0)+\mu(s_0)\mu''(s_0)=0$ 代入得：$K''(s_0)=\mu(s_0)K^2(s_0)\tau'(s_0)$ $(\lambda(s_0)\neq 0)$ 因此得证。

"$\Longleftarrow$" 由 $K''(s_0)=\left(\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{K'(s)}{\tau(s)}\right)\tau'(s_0)$ 一样地有：

$K''(s_0)=\mu(s_0)K^2(s_0)\tau'(s_0)$

$\lambda''=\dfrac{K''K-2K'^2}{K^3}$ $\qquad\lambda(s_0)=\dfrac{K''(s_0)}{K^2(s_0)}$，

$\mu''=-\lambda'\tau-\lambda\tau'$ 而 $\lambda=-\dfrac{1}{K}$，$K'(s_0)=0$，

$\lambda'(s_0)=0$ 有 $\mu''(s_0)=-\lambda(s_0)\tau'(s_0)$

因此由 $K''(s_0)=\mu(s_0)K^2(s_0)\tau'(s_0)$ 有

$\lambda(s_0)\lambda''(s_0)+\mu(s_0)\mu''(s_0)=0$，由引理 $\tau(s_0)=0$ 因此得证。

Remarks：1^0 如 $\tau(s_0)=0$，但 s_0 不是弧 的零点。

不存在一个邻域 $\tau \equiv 0$ 则本定理可以类似地给出。只不过

$\lim\limits_{s\to s_0}\dfrac{K'(s)}{\tau(s)}$ 要求改写成取 $s_n\to s_0$ $\tau(s_n)$ 时的

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{K'(s_n)}{\tau(s_n)}$$

2^0 定理中 号右边改成 $K'(s_0)=0$ 证明就无法进行，但反例还不易给出。

关于上期问题征解的说明

上期第一题经同学共同努力，已将条件减为在某点附近有界。这个条件能否去掉？也即定在 $[0,+\infty)$ 上非负函数，又合 $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ 在每一点附近都无界是否可能？

注意：第五题解还不完全。

上期《问题征解》解答

<1> $f(x)$ 定义于 $[0,+\infty)$ 上非负，在某点附近有界（原来是连续）且满足 $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$ 试证：

$\lim\dfrac{f(x)}{x}$ 存在。

证明：（邹志明，丁以山、郜 云等）可取 $x_0\neq 0$，$f(x)$ 在 $[x_0-\delta, x_0+\delta)$ 上有界，设 $x_0-\delta_0>0$ $\max\limits_{x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta}\dfrac{f(x)}{x}=$

$M<\infty$，当 $y\in[n(x_0-\delta), n(x_0+\delta)]$ 时，$y=nx$

$x\in[x_0-\delta, x_0+\delta]$，$f(y)=f(nx)<nf(x)$ 因此

$$\frac{f(y)}{y}\leq\frac{f(x)}{x}\leq A_0$$，由于n充分大时，$n(x_0+\delta_0)\geq(n+1)(x_0-\delta_0)$，因此y充分大时必在某个$[m(x_0-\delta_0),m(x_0+\delta_0)]$中，∴ $y>y_0$ 时$\frac{f(y)}{y}$有界，设$\alpha=\lim\limits_{\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ 可取一串

$x_n\to\infty$ $(n\to+\infty)$使得$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{x_n}=\alpha$（设$x_{n+1}>x_n$）

对于$x_N>y_0$ $f(x)$在$[x_N, 2x_N]$上有界，记为M_N，$\forall y>x_N$

$$y=kx_N+\delta y \qquad 0\leq\delta y<x_N$$

$$\frac{f(y)}{y}\leq\frac{(k-1)f(x_N)+f(x_N+\delta y)}{y}\leq$$

$$\leq\frac{(k-1)f(x_N)+M_N}{y}$$

因此 $\overline{\lim\limits_{y\to-\infty}}\frac{f(y)}{y}\leq\frac{f(x_N)}{x_N}$ 因此 $\overline{\lim}\frac{f(y)}{y}\leq\lim\frac{f(x_N)}{x_N}$

$$=\alpha=\underline{\lim}\frac{f(x)}{x}$$

＜2＞若$f(x)$在$(0, +\infty)$二次可微，且$\lim(f''(x)+xf'(x)+f(x))=A$（A有限）则$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

证明：（高文云、部　云等），令$y=f(x)-A$

$(y'+xy)'=y''+xy'+y\to 0$ $(x\to+\infty)$故可令$y'+xy=Q(x)$，解出微分方程得：

$$y=e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(C+\int_0^x Q(x)e^{\frac{1}{2}x^2}dx\right)$$ $\forall\varepsilon>0$ 由

$\exists\Delta$ 当 $x\geq\Delta$ 时 $|Q'(x)|<\varepsilon$，故 $|Q(x)|\leq|Q(\Delta)|+|Q(x)-Q(\Delta)|\leq|Q(\Delta)|+\varepsilon(x-\Delta)=\varepsilon x+C_1$
$\leq 2\varepsilon x$　（x 充分大时）于是

$$|y|\leq|C_2|e^{-\frac{1}{2}x^2}+2\varepsilon\left(e^{-\frac{1}{V}x^2}\int_{\Delta}^{x}V e^{\frac{1}{2}x^2}dx<1\right)$$

（C_1　C_1　C_2　常数）

故 $\lim|y(V)|\leq\lim\limits_{x\to\infty}(|C_2|e^{-\frac{1}{2}x^2}+2\varepsilon)<2\varepsilon$

$\therefore$ $\lim|y(x)|=0$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

<3>设 $f(x)$ 在（0，$+\infty$）内二阶可导，$\lim xf(x)$，且 $|f''(x)|\leq x$，

试证 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=A$

证明：（邹志明、高文云，郜　云等）　$f(x)-f(x-\frac{\varepsilon}{x})$

$=f'(\xi_{x\varepsilon})\frac{\varepsilon}{x}$　因此 $xf(x)-xf(x-\frac{\varepsilon}{x})=f'(\xi_{x\varepsilon})\varepsilon$，

ε 固定，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(\xi_{x\xi})=0$　x_0 当 $x>x_0$ 时 $|f'(\xi_{x\xi})|$
$<\varepsilon$，于是，$\forall x$ 有 $|f'(x)|\leq|f'(x)-f'(\xi_{x\xi})|+|f'(\xi_{x\xi})|=|f''(b_{x\xi})|(x-\xi_{x\varepsilon})+|f'(\xi_{x\varepsilon})|\leq x\cdot\frac{\varepsilon}{x}$
$+\varepsilon=2\varepsilon$ #

<4>设 $A=A_1+\cdots+A_n$ 可逆，试证：$B=\begin{pmatrix}A_1 & \cdots & A_n \\ & \ddots & \ddots \\ & A_1 & \cdots & A_n\end{pmatrix}$

满秩。

证明：（邹志明等）把第二三……列加到第一列（整个A_1列），把第三四……列加到第二列等等，再把每行减去上面一行。
可得：

$$\begin{pmatrix} A_1 & A-A_1 & \cdots\cdots & A_n & \\ & A_1 & & & \ddots \\ & & \ddots & & \\ & & & A_1 & \cdots\cdots & A_n \end{pmatrix}$$

于是对B的行数作归纳法即得证。

＜5＞在什么环中，下命题成立：

$$x=y \Longleftrightarrow (1-x+xy)(1-y+yx)=1?$$

解：（况　阳）

令$x=y=-1$应用命题有　　，容易验证在$Z/(4)$，$Z/(8)$及环$R=\{0,\ 1,\ x,\ 1+x \mid x^2=1$　　$\}$都使命题成立。如果环R为Boole环（$\forall x \in R,\ x^2=x$），则命题也成立，由Boole 环的以下性质易验证：Ⅰ）$\forall x \in R$　$\partial x=0$ Ⅱ）$xy=yx$如果R交换环$x^3=x$且　　（这类环比Boole 更广泛）那么在R中命题也成立，事实上在R中且$x^2y+y^2x=0$于是容易验证命题成立。但是是否还有更多更少广泛的环使命题成立呢？因此这个问题还没有完全解决。

*** 问题征解 ***

<1>（达布定理之反问题）若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上定义，且满足：$\forall s_1, s_2 \in [a, b]$，$s_1 < s_2$，$f(x)$ 在 $[s_1, s_2]$ 上取到 $f(s_1)$、$f(s_2)$ 间一切中间值。问 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是否必为某函数之导函数。

<2>设 $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$ 则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{K^2} \geq \frac{a_n}{n} \ln n$$

<3>对任意一整数 a，$a \neq 0, 1, -1$，则 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{a^n}\right) \notin Q$（有理数域）。

<4>m 正整数，则 $\phi(abK)\phi(K) = m^2$

$\phi(n)$ 为同 n 互素不大于 n 的正整数之个数。

<5>狼在岸上，兔子在圆形水池里，已知兔子到岸上后速度大于狼。狼，兔子游泳速度为狼在岸上跑动速度的 a 倍，此估计使得兔子可由某种方式逃走的 a 的下界。

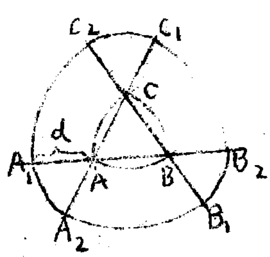
第七期

等宽曲线介绍

陆雅言

一、平面上一条闭曲线，用任意两条平行线去一夹，会出现一个宽度。如果无论哪个方向的平行线夹出的宽度都是一个常数，这闭曲线就称为等宽曲线。

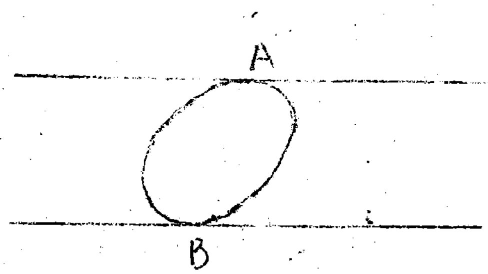
二、圆是最简单的等宽曲线。其它的例子却并不是可以信手拈来的，所谓的Wcmlcel引进的活塞形状却是一个令人吃惊的等宽曲线，它叫做Reuleanx"等边三角形"，是以等边三角形三顶点为圆心，以边长为半径画弧交得的图形（见图）这个图形的一对平行支撑线中，不管方向如何，总是有一条通过一角点，而另一条则与角点所对之弧相切。但是这个Renleanx三角形在三顶点不可微。为了得到一个可微的等宽曲线，可以把Renleanx三角形等距地向外推出一个固定距离。



如图，$\widehat{C_1C_2}$ 是以C为圆心，d为半径所作弧，$\widehat{A_1B_1}$ 是以原等边三角形之边长加上d为半径、C为圆心

之弧。这图形就是一等宽曲线，是一阶可微的，不过仍不是二阶可微的。为了得到更多的等宽曲线，可以用渐伸线的方法，是体可见《Elemonts of Diffruential Geometry》但即使如此，对于等宽曲线到底有多少，并要有较好的可微性，还没有搞清楚。丁以山、陆维言对一般的情如作了讨论，得出了较为广泛的结论。

我们也讨论一下等宽曲线的基本性质。首先要引进相对点的概念。对于光滑的 形线（即凸闭曲线），某个方向的两条切线（互相平行）的两个切点（严格凸）即为相对点。如图A，B为相对点。对于光滑的凸的等宽曲线，任两个相对点的联线一定要两条切线垂直。这不难证明。反过来如卵形线任方向的两个相对点的联线同两条切线垂直，则一定是等宽曲线。还有一个性质：任一对相对点的两个曲率半径之和等于常数，即为等宽曲线之宽度。而且这个条件也是充要的。



等宽曲线有惊人的性质，那就是：等宽曲线的周长恒πd，d为其宽度。因此，周长同具体的等宽曲线无关，只同宽度有关。这个结果是Benlies 1860年证明的。

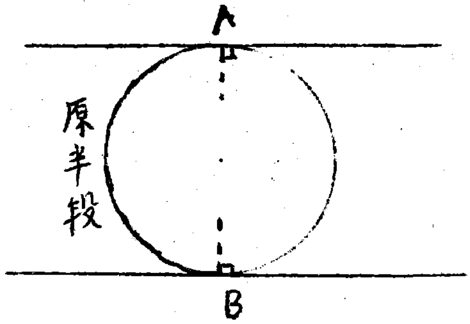
有了这些以后，我们来说明我们的结果：给出一段曲线，端点A，B，设：

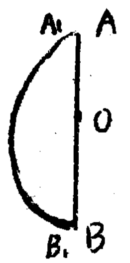
1^0：A，B两处切线平行，且AB联线同两切线垂直。

2^0：A，B两处曲率半径之和等于AB之距离d

3^0：在整个半段曲线上，曲率都大于$1/d$。那么我们一定可以唯一地把这条曲线延拓成等宽曲线（见图）：

注意：在 A，B 两处符合 1^0，2^0 两个条件是非常自然的。而在整个曲线上要求曲率大于 $1/d$ 也不算苛刻，这相当于曲径＜d，是很容易满足的。因此，这样一来我们把等宽曲线的结构基本上搞清楚了。而且事实上，只要原半段曲线是二阶可微，则延拓成的等宽曲线一定也是也是二阶可微的。我们再说明 1^0，2^0 两个条件也是容易满足的。我们任取两点 A，B，在 A B 联线上任取一点为 0，为 0 为圆心分别以 O A，O B 为半径，可以作出两小段弧 $\widehat{AA_1}$ 和 $\widehat{BB_1}$，只要这两段弧充分小，我们一定可以将它们光滑地适合 $K > \frac{1}{AB}$ 地将之联起来。从而我们就作出了一条等宽曲线。





所有这一切，我们都已用数学语言严格地写出。在这个过程中我们得到了田畴老师热情的指导，在此表示感谢。

最后，我们以提出几个问题来结束本文。

Ⅰ：任一段曲线在什么条件下可以扩成如结论中的“半径”曲线，从而可以扩成一条等宽曲线。

Ⅱ：对分段光滑的情况有什么推广？

Ⅲ：在宽为 d 的等宽曲线中（周长 2π）面积的下确界为多长。

两 个 猜 想

——— 陆雅言

$r(s)$）为平面上简单闭凸曲线，s 为弧长参数全长为 L。

（Ⅰ）：$r(s)$曲率 $C>0\leq K_0$ 则$r(s)$所围面积 $\geq \dfrac{L}{2K_0}$

（Ⅱ）：$r(s)$曲率$\geq K_0=\dfrac{1}{\rho_0}>0$，则$r(s)$所围面积

$$\geq \frac{1}{2}\rho_0 L-\rho_0^2\sin\frac{L}{2\rho_0}$$

算子的存在性与保范映射

沈忠民

设X是赋范空间，有自然映射：$\pi: X\to X^{**}$ 其中 $x^{**}(f)=f(x)$，$\forall f\in X^*$。

Hahn-Banach定理成立，证实了π是保范线性映射。对一般的任意两个赋范线性空间X Y，$Z: X\longrightarrow B(B(X,Y),Y)$，$x\longrightarrow x^{**}$

其中$x^{**}(T)=T(x)$ $\forall x\in B(X,5)$是否也是保范映射呢？回答是肯定的。关键在于证明这样一个事实。$\forall x\in X$，总存在$J\in B(X,Y)$，使$\|T(x)\|=\|x\|$且$\|T\|=1$。但是，这时由于Hahn-Banach定理一般不成立。因此我们不能类似于泛函的情形进行证论。（角各静夫在1939年解决了这样一个问题：E C Banach空间）中任意闭子空间G到另一个Banach空间E_1（也任意）中的任意有界线性算子J可以保范地延拓成由E到E_1中的有界线性算子必须且只须E是内积空间）。

下面，我们通过泛函的一些结果，得到赋范空间的一个性质，从而解决了上述问题。

引理1：设f是有界赋范线性空间X上的有界非零泛函。则$|f(x)|=\|f\|d(N(f),x)$，对$\forall x\in Z$成立。其中$N(f)=\{x: f(x)=0\}$。

〔证明〕：不妨设 $x \notin N(f)$，$\forall y \in Z$，$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$，使 $\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f(y)=0$ $\therefore f(\lambda_1 x+\lambda_2 y)=0$

$\therefore z=\lambda_1 x+\lambda_2 y \in N(f)$ 不妨设 $\lambda_1 \neq 0$　　$\lambda_2 \neq 0$，因此

$y=-\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}x+\dfrac{1}{\lambda_2}z$，于是设 $L(x)$ 表示由 x 生成的线性子空间。则 $Z=N(f) \oplus L(x)$

$$|f(y)|=\left|-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right||f(x)|=\frac{\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right||f(x)|}{d(N(f), x)} d(N(f), x)$$

$$\leq \frac{|f(x)|}{d(N(f), x)}\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right|\left\|x-\frac{\lambda}{\lambda_2}z\right\|=\frac{|f(x)|}{d(N(f), x)}\|y\|$$

$$\therefore \|f\| \leq \frac{|f(x)|}{d(N(f), x)}$$

$\forall \dfrac{1}{n}$　　$\exists x_n \in N(f)$，$d(N(f), x)\dfrac{1}{n} \geq \|x_n-x\|$ 所以

$$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)| \leq \|f\|.\|x_n-x\|$$

$$\leq \|f\| d(N(f)-\frac{1}{n})$$

$$\therefore \|f\| \geq \frac{|f(x)|}{d(N(f), x)} \quad \therefore \|f\|=\frac{|f(x)|}{d(N(f), x)}$$

$\therefore |f(x)|=\|f\| d(N(f), x)$ 当 $x \in N(f)$ 时前式自然成立。

引理 2：设 X 是赋范线性空间，$\forall x \neq 0$，则必有线性子空间

U，使 $X=U\oplus L(x)$ 且 $\|x\|\le\|x+y\|\ \forall y\in U$。

〔证明〕：定义 $L(x)$ 上的泛函 $f:\lambda x\mapsto\lambda\|x\|$，则 $\|f\|=1$ 由 Hahn-Banach 定理存在 X 上的线性有界泛函 g，使：1)：$\|g\|=1$，2)：$g(x)=f(x)\quad x\in L(x)$。于是 $x\notin N(g)$，由引理 1，$X=L(x)\oplus N(g)$，且 $|g(y)|=\|g\|\,d(N(g),y)\quad\forall y\in X$，令 $y=x$，$|g(x)|=|f(x)|=\|x\|=d(N(g),x)\le\|y+x\|\qquad\forall y\in N(g)$

定理 1：（E 定理），X Y 是任意非零的赋范空间，$\forall x\in X$，总存在有界线性算子 $J:X\to Y$，使：

① $\|T(x)\|=\|x\|$　　② $\|T\|=1$

〔证明〕：由引理 2，存在闭线性子空间 U，使 $X=U\oplus L(x)$，且 $\|x\|=\|x+y\|$，$\forall y\in U$，令 $y_0\in Y$，使 $\|y_0\|=\|x\|$，$T:X\to Y$，$\forall z=\lambda x+y$，$y\in U$，$T(z)=\lambda y_0$

$\therefore\ \|T(z)\|=\|\lambda\|\,\|y_0\|=\|x\|\,|\lambda|\le\|x+\dfrac{y}{\lambda}\|$，

$|\lambda|=\|\lambda x+y\|=\|z\|$ $\therefore\ \|T\|\le 1$，又 $\|T(x)\|=\|x\|\le\|T\|\,\|x\|$ $\therefore\|T\|\ge 1\Longrightarrow\|T\|=1$ 且 $\|T(x)\|=\|x\|$ #

定理 2：X，Y 是任意赋范空间，$\pi:X\to B(B(X,Y),Y)$

$x\mapsto x^{**}$

其中 $x^{**}(T)=T(x)$，$\forall T\in B(X,Y)$，则不是保范线性映射。

证明：1^0：$x^{**}\in B(B(X,Y),Y)$。

2^0：π 是线性的。

3^0：$\forall J\in B(X,Y)$，$\|x^{**}(T)\|=\|T(x)\|$

$\le\|T\|\,\|x\|$

$\therefore\ \|x^{**}\|\le\|T\|$，$\because\ J\in B(X,Y)$ 使 $\|T(x)\|=\|x$

且 $\|T\|=1$，因此 $\|x^{**}(T)\|=\|x\|=\|T\|\ \|x\|$
$\leq\|x^{**}\|\ \|T\|$ $\quad\therefore \|x^{**}\|\geq\|x\|\Longrightarrow\|x^{**}\|=\|x\|$

(*)

可逆线性变换一个性质的充要条件

——801　许秋平

〔×〕文指出：在有限维线性空间中，可逆线性变换的不变子空间在其逆变换下也一定不变，而对无限维线性空间，此论断未必成立，它仅举了一个反例，大意如下：

设 $V=\{\xi=(\cdots\cdots a,\ a_{+3},\ a_{+1},\ a_0,\ a_2,\ a_4,\ a_6\ \cdots\cdots)\ |\ a_i\in Q\}$ 圈定分量 a_0 为起点，按通常对应分量相加定义向量加法，按通常方法定义数乘，则 V 便是 Q 上的线性空间。定义映射 $\sigma: V\to V$ 为 $\xi\to\sigma(\xi)=(\cdots\cdots a_7,\ a_5,\ a_3,\ a_1,\ a_0,\ a_2,\ a_4,\ a_6\cdots\cdots)$，$\sigma$ 是 V 的线性变换。令 $\omega=\xi(0\cdots\cdots0\ a_0\ \ a_2\ \ a_4\ \ a_6)\}$ 是 V 的子空间，则 ω 是 σ 的不变子空间，但不是 σ^{-1} 的不变子空间。

实际上这个问题并不复杂，我们可以给出一个充要条件。

命题 1：设 V 是有限维线性空间，J 是 V 上可逆线性变换，ω 是 J 的不变子空间，则 ω 也是 J^{-1} 的不变子空间。

证：设 $\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r$ 是 ω 的一组基，$\varepsilon_1\cdots\varepsilon_r\varepsilon_{r+1}\ \varepsilon_n$ 是 U 的一组基，J 在此组基下的矩阵为：

$$[J]=\begin{pmatrix} A^{(r,\ r)} & B^{(r,\ n-r)} \\ 0^{(n-r,\ r)} & C^{(n-r,\ n-r)} \end{pmatrix}$$

由 $\det[J] \neq 0$ 可得 $\det A \neq 0$，$\det C \neq 0$，即 A^{-1} C^{-1} 存在故 $[J^{-1}] = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ 由此即知 ω 是 J^{-1} 的不变子空间。对于无限维线性空间有如下反例。

设 V 是〔 1， 2 〕上一切连续函数之集，则 V 是 R 上的线性空间，ω 是〔 1， 2 〕上的一切多项式之集，则 ω 是 V 的子空间（这里按通常定义加法，数乘法）J 是 V 上的线性变换，$\forall f(x) \in V$，$T(f(x)) = xf(x)$ 则 $J^{-1}(f(x)) = \frac{1}{x}f(x)$，$\forall f(x) \in V$，显然 ω 是 J 的不变子空间，但不是 J^{-1} 的不变子空间。

命题 2：设 V 是线性空间，T 是 U 上的可逆线性变换，ω 是 J 的不变子空间，则 ω 是 T^{-1} 的不变子空间的充要条件 J 在 ω 上是满的。

证：$\Longleftrightarrow$ ($\Longrightarrow$) $\forall x \in \omega$ 存在 $y \in T^{-1}(x) \in \omega$，$\Longrightarrow T(y) = x$ ，故 J 在 ω 上是满的。

($\Longleftarrow$)：$\forall x \in \omega$，存在 $y \in \omega \rightarrow T(y) = x \Longrightarrow J^{-1}(x) = y \in \omega$ 故 ω 是 T^{-1} 的不变子空间

命题 1 的另一证明：$\because$ T 在 V 上可逆，$\therefore$ J 是单的，故 $T(\xi_1)$ ……$T(\xi_r)$ 是 ω 的一组基，故 J 在 ω 上是满的，由命题α知，ω 是 J^{-1} 的不变子空间。

由这个证明，我们还可得到结论：设 V 是线性空间，J 是 U 上的可逆线性变换，ω 是 J 的不变子空间，若 ω 是有限维的，则 ω 是 J^{-1} 的不变子空间。

参考资料：〔 ※ 〕：昆明师范学院学报（ 1981年 ）

《可逆线性变换的一个性质》。

从阿达马不等式到等式

——— 荣用武

本文用行列式的几何意义（体积）出发，得到一个等式，从而对〔1〕文的推广的阿达马不等式作了进一步的完善。

本文符号 $\delta(x_1, \cdots x_n)$ 意义同〔1〕，即 $\delta(x_1, \cdots, x_n) = |(x_1, \cdots, x_n)|$ 且假定在内积空间 H 中讨论。

定义：$x \in H$，S 是 H 的子空间，定义 $\langle x, s\rangle$ 表示 $\sin\langle x, s\rangle = \frac{d(s)}{|x|}$ 在〔0，$\frac{\pi}{2}$〕中的角。

引理 1：$x_1 \cdots x_n \in H$ 且 $x_1 \cdots x_n$ 线性无关，s 是 $x_1 \cdots x_n$ 张成的子空间，则 $d^2(x, s) = \frac{\delta(x, x_1 \cdots x_n)}{\delta(x_1 \cdots x_n)}$

证：这是〔2〕P 133 习题 6 用一些矩阵方法，略去。

引理 2：S 是 H 的子空间，$x \in H$，$y \in S$ Y 表示 y 生成的子空间，则 $|\sin\langle x, y\rangle| = \sin\langle x, Y\rangle \geq \sin(x, s\rangle$

证明：$\sin^2\langle x, y\rangle = 1 - \cos^2\langle x, y\rangle = 1 - \frac{(x, y)^2}{|x|^2 |y|^2}$

$$= \frac{\delta(x, y)}{|x|^2 |y|^2} = \left(\frac{d(x, y)}{|x|}\right)^2 = \sin^2\langle x, Y)$$

$$\sin\langle x, Y) = \frac{d(x, Y)}{|x|} \geq \frac{d(x, s)}{|x|} = \sin\langle x, s\rangle$$

定理：A 是行列式，行向量 $x_1 \cdots x_n$ 线性无关则：$|\det A| = |x_1| \cdots\cdots |x_n| \sin\langle s_1, x_2\rangle \sin\langle s_2, x_3\rangle \cdots\cdots \sin\langle s_{n-1}, x_n\rangle$ 其中 s_i 表示由 $x_1, \cdots x_i$ 生成的子空间。

证明：$\det^2 A=\delta(x_1,\cdots x_n)=|x_1|^2\cdots|x_n|^2$

$$\frac{\delta(x_1,x_2)}{\delta(x_1)|x_2|^2}\cdot\frac{\delta(x_1,x_2,x_3)}{\delta(x_1,x_2)|x_3|^2}\cdots\cdots\frac{\delta(x_1,\cdots x_n)}{\delta(x_1\cdots x_{n-1})|x_n|^2}$$

$$=|x_1|^2\cdots|x_n|^2\sin^2\langle s_1,x_2\rangle\cdots\cdots\sin^2\langle s_{n-1},x_n\rangle$$

推论（由引理2）$|\det A|\leq|x_1|\cdots|x_n|\ |\sin\langle x_{i_1},x_2\rangle|\ |\sin\langle x_{i_2},x_3\rangle|\cdots|\sin\langle x_{i_{n-1}},x_\omega\rangle|$ 其中 $i_j\leq j$ 取 $i_j=1$ 即为(1)之结果。

参考文献：〔1〕沈忠民：一个行列式不等式。（蛙鸣第4期）

〔2〕关肇直　泛函分析讲义

问题征解

编者按：这次一道题，是由华罗庚教授摘自“环球杂志”82年第3期，给同学们作的，希望同学们做一做，数字可能有错（杂志上就有错）但主要的是提出一个切实可行的方法）。

试说明以下201位数的23次方根为546，372，891.

916，748，679，200，391，580，986，609，275，853，

801，624，831，066，801 443 086 224 071 265

164 279 346 570 408 670 965 932 792 057

674 808 067 900 227 830 163 549 248 523

803 357 453 169 351 119 835 965 775 473

400 756 816 883 056 208 210 161 291 328

455 648 057 801 588 067 711 — end

二阶齐线性方程解的零点分布

沈阳　　　　沈寅

（中国科学技术大学数学系80级）

我们知道，齐线性二阶方程可化为法式方程，而且经过这种变换，对解的零点分布没有实质性影响，故以下只就方程

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Q(t)u = 0 \qquad (*)$$

进行讨论，并假定Q(t)是某开区间 $a<t<b$ 上连续的实值函数，本文只讨论实值解。

若 $Q(t) \geq m > 0$（m为常数），由Sturm比较定理，我们可得到有关方程（*）的解的零点分布的一些结果，但当 $Q(t) \leq 0$ 时，我们将看到（*）的任一非零解在（a，b）上至多有一零点，这样，Sturm比较定理就显得无能为力了，本文就这种情况作了较系统的讨论并得到了定理2，3，4，其中定理3是本文的中心定理，定理4是本文的主要结果。

本文在写作过程中，得到了王树禾老师的热情指导，王树禾老师还详细地审阅、修改了本文，使本文增色不少，在此深表谢意。

定理1：如果在区间 $a<t<b$ 上恒有 $Q(t) \leq 0$ 则（*）之任一平凡解 u(t) 在 $a<t<b$ 上最多有一个零点。

这是〔1〕中的一条定理，在此我们作了一点改进，使条件 $Q(t)<0$ 放宽到 $Q(t) \leq 0$，为了方便起见，我们给出本定理的

证明。

证明：设对 $a<t<b$ 上某点 t_0 $u(t_0)=0$，于是 $u'(t_0)\neq 0$，否则按唯一定理将有 $u(t)\equiv 0$ 若 $u'(t_0)>0$，则首先 $u(t)$ 至少在 t_0 之某右邻域 $t_0<t\leq t_0+\delta$ 上为正，从而 $u''(t)=-Q(t)u(t)\geq 0$，因之 $u'(t)$，$u(t)$ 当 $t_0<t\leq t_0+\delta$ 时都单调增加，由此可见，在整个区间 $t_0<t<b$ 上 $u'(t)$ 和 $u(t)$ 都必定是单调增加的；因为上面的推理表明，当 $u(t)$ 在此区间上由正变为零以前 $u'(t)$ 总在增加，因之总保持为正，而这又反过来说明了 $u(t)$ 也总在增加。故若 $u'(t_0)>0$，则 $u(t)$ 在 t_0 之右（同理在其左）必定不会有零点。若 $u'(t)<0$，则只须将刚才的结论应用于 $-u(t)$（显然 $-u(t)$ 也是解）。这样就证明了本定理 1。

定理 2：设在区间 $a<t<b$ 上恒有 $Q(t)\leq 0$，则对 $\forall t_0\in(a,b)$，恒有（*）之非零解 $u_{t_0}(t)$ 存在，使 t_0 是 $u_{t_0}(t)$ 的唯一零点。

证明：设 $\{u_1(t),u_2(t)\}$ 为方程（*）之基本解组，则 $u_1(t)$，$u_2(t)$ 皆非零解，且

$$u_1^2(t_0)+u_2(t_0)^2\neq 0 \quad \forall t_0\in(a,b)$$

故 $\exists C_1.C_2.\ C_1^2+C_2^2\neq 0$ 使得 $C_1u_1(t_0)+C_2u_2(t_0)=0$

令 $u_{t_0}(t)=C_1u_1(t)+C_2u_2(t)$ 则 $u_{t_0}(t)$ 为（*）之非零解，且 $u_{t_0}(t_0)=0$，由定理 1 知，$u_{t_0}(t)$ 有唯一零点 $t=t_0$ ▮

我们记 V 为（*）之解空间，易知 V 是二维线性空间，记 $V_{t_0}=\{u(t)\mid u(t)\in V,\ u(t_0)=0\}$，$t_0\in(a,b)$。由定理 2 知 V_{t_0}（$\forall t_0\in(a,b)$）非空，且易知 V_{t_0} 是 V 的一维子空间，

$\forall t_1, t_2 \in (a, b)$ $t_1 \neq t_2$，则 $V_{t_1} \cap V_{t_2} = 0$，自然要问，是否有 $V = \bigcup\limits_{t \in (a, b)} V_t$ 呢？也就是说，是不是满足定理 1 条件的方程（*）之每一非零解都有唯一的零点呢？下面的定理 3 回答了这一问题，结论是 $\bigcup\limits_{t \in (a, b)} V_t \subsetneq V$

定理 3：在定理 1 的条件下，方程（*）至少有一非零解在 $a < t < b$ 上无零点。

证明：设 $\{u_1(t), u_2(t)\}$ 为方程（*）之基本解组，则 $u_1(t)$，$u_2(t)$ 皆非零解，由定理 2 知，$\forall t_0 \in (a, b)$ $\exists C_1, C_2$，$C_1^2 + C_2^2 \neq 0$ 使得

$$C_1 u_1(t_0) + C_2 u_2(t_0) = 0$$

而 $(u_1(t_0), u_2(t_0)) \neq (0, 0)$

从而 $\forall (C_1', C_2') \in R^2$

若 $C_1' u_1(t_0) + C_2' u_2(t_0) = 0$ 则必存在 $K \in R$，使

$$(C_1', C_2') = K(C_1, C_2)$$

考虑满足条件 $C_1^2 + C_2^2 = 1$ 且满足 $C_1 u_1(t_0) + C_2 u_2(t_0) = 0$ 的解 (C_1, C_2)，易知 $\forall t \in (a, b)$ 对应地存在 $\pm(C_1(t), C_2(t))$ 满足以上条件，且 $(C_1(t), C_2(t))$ 在不考虑符号的意义下是唯一的。取定 $t_0 \in (a, b)$，不妨设 $C_1(t_0) > 0$

$$\forall t \in (a, b) \qquad C_1(t) u_1(t) + C_2(t) u_2(t) = 0$$

从而 $C_1^2(t) u_1^2(t) = C_2^2(t) u_2^2(t) = (1 - C_1^2(t)) u_2^2(t)$

$$\therefore \quad C_1^2(t)[u_1^2(t) + u_2^2(t)] = u_2^2(t)$$

而 $u_1^2(t) + u_2^2(t) \neq 0$，在 t_0 附近，令

$C_1(t)=\sqrt{\dfrac{u_2^2(t)}{u_1^2(t)+u_2^2(t)}}$ 易知 $C_1(t_0)>0$，由

$u_1(t)$、$u_2(t)$ 的连续性，便有 $C_1(t)$ 在 t_0 附近连续，考虑到，当 $C_1(t_0^*)=0$ 时，$C_2^2(t_0^*)=1\neq 0$，因此，我们可按上面的方法证得 $C_2(t)$ 连续，从而 $C_1(t)$ 连续，由 t^* 的任意性，我们便得到与 $C_1(t_0)>0$ 相应的连续函数 $(C_1(t), C_2(t))$，$t\in(a, b)$，且 $C_1(t_0)>0$，这一连续函数在 oxy 平面上的图象即是一段圆弧 M，而关于原点对称的另一段圆弧 M′ 即为 $(-C_1(t), -C_2(t))$ 的图象，显然 M′ 上的点也满足要求。由于 $t\in(a, b)$，故 M、M′ 是两条开弧，且必不相交，否则，若交点为 t^*，则必有另一点 t^{**}，$t^*\neq t^{**}$，使 $-(C_1(t^*), C_2(t^*))=(C_1(t^{**}), C_2(t^{**}))$

但因 （图 1）

$$\begin{cases} C_1(t^*)u_1(t^*)+C_2(t^*)u_2(t^*)=0 \\ C_1(t^{**})u_1(t^{**})+C_2(t^{**})u_2(t^{**})=0 \end{cases}$$

令 $u^*(t)=C_1(t^*)u_1(t)+C_2(t^*)u_2(t)$

则 $u^*(t^*)=u^*(t^{**})=0$，而 $t^*\neq t^{**}$，这与定理 1 矛盾，因此存在 (a^*, b^*)，

$a^{*2}+b^{*2}=1$ 但 $(a^*, b^*)\bar{\in} M\cup M'$

令 $u(t)=a^{*}u_1(t)+b^{*}u_2(t)$

则 $u(t)$ 即为方程（$*$）的一非零解，显然 $u(t)$ 在（a，b）上无零点，至此定理得证 ▮

定理 4：在定理 1 的条件下，若 a，b 两数中至少有一为有理数，不妨设 a 就是，且 $\lim\limits_{t\to a} Q(t)=m$，$m$ 为有限数，则方程（$*$）在（a，b）上必有一组无零点的基本解组。

证明：定义

$$Q^{*}(t)=\begin{cases} m & t\in(a-1, a] \\ Q(t) & t\in(a, b) \end{cases}$$

显然 $m\leq 0$，$Q^{*}(t)\leq 0$，$t\in(a-1, b)$

易知以上的一些结论（定理 1、2、3）对方程

$$\frac{d^2 u}{dt^2}+Q^{*}(t)u=0 \quad (**) \quad a-1<t<b$$

同样成立，设 $\{u_1^{*}(t), u_2^{*}(t)\}$ 是（$**$）的基本解组，则显然 $u_1^{*}(t)$、$u_2^{*}(t)$ 在（a，b）上的限制构成（$*$）的基本解组，对方程（$*$）和方程（$**$），作出相应的 $\pm(C_1(t), C_2(t))$ 的图象，记前者为 M、M'，后者为 M^{*}，$M^{*'}$ 易知 $M\subsetneq M^{*}$，M' $M^{*'}$，否则 M^{*} 内部有重点，这将与定理 1 矛盾，因此必存在（a^{*}，b^{*}）（c^{*}，d^{*}）$\in M^{*}$ 但（a^{*}，b^{*}），（c^{*}，d^{*}）$\notin M$

$(a^{*}, b^{*})\neq(c^{*}, d^{*})$

显然 $a^{*2}+b^{*2}=c^{*2}+d^{*2}=1$

$$(a^{*}, b^{*})\neq-(c^{*}, d^{*})$$

令 $u'(t)=a^{*}u_1(t)+b^{*}u_2(t)$

$$u''(t)=c^*u_1(t)+d^*u_2(t)$$

易知$\{u'(t), u''(t)\}$构成方程(*)的一组无零点的基本解组，至此定理获证∎

设$\{u_1(t), u_2(t)\}$为(*)的一组无零点的基本解组，不妨设$u_1(t)$，$u_2(t)$在$a<t<b$上同号，则对$\forall C_1, C_2 \in R$，若$C_1 C_2>0$（也就是说点(C_1, C_2)是Ⅰ，Ⅲ象限的点），则(*)之非零解，$C_1u_1(t)+C_2u_2(t)$在$a<t<b$上必无零点，这样我们就得到了一大批的无零点非零解。

定理4是存在性定理，特别地，对形如$[a, b)$的区间$(a>-\infty, b\leq+\infty)$，我们能具体地构造出方程(*)的一组无零点的基本解组。显然Q有限，且$\lim\limits_{t\to a}Q(t)=Q(a)$，故 这是定理4的一种变形特例。

考虑两组Cauchy 初值问题

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2}+Q(t)u=0\\ u'(a)=0\\ u(a)=1\end{cases}\qquad (\mathrm{II})\begin{cases}\dfrac{d^2u}{dt^2}+Q(t)u=0\\ u'(a)=1\\ u(a)=1\end{cases}$$

设$u_1(t)$，$u_2(t)$分别为(Ⅰ)，(Ⅱ)的解，显然$\{u_1(t), u_2(t)\}$构成(*)的基本解组，类似乎定理1的证明，可证$u_1(t)$，$u_2(t)$在$[a, b)$上皆无零点。故$\{u_1(t), u_2(t)\}$也是(*)的一组无零点的基本解组。

对区间[a, b]上方程(W)之解之零点的进一步的定量分析，有兴趣的读者可参考[2]，限于篇幅，本文不拟讨论。

参　考　文　献

[1]王柔怀　任卓群　常微分方程讲义

人民教育出版社 1979

[2] M. Roseau　Equations Differentielles

Masson 1976

第　八　期

目　录　　　　1982年9月20日

线性变换在证明某些恒等式中的应用

八一一　　黄加武

问题：设 n 是自然数，则成立着：

$$n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (n+1-k)^n$$

这是许以超的《代数学引论》中的一习题，要求用归纳法证明。在《数学通讯》杂志上有一用归纳法给出的证明，过程繁琐冗长。事实上，用一些线性变换的知识可以得出一简洁的证明，而且可以得到更一般的结果。具体地，我们有：

定理：

$$n! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x-k)^n$$

首先，介绍几个显然的命题：

命题1：数域P上的多项式全体组成一线性空间（通常意义下的运算），记为P[X]。

命题2：设 $f(x) \in P[X]$，变换 $If(x)=f(x)$ 及变换 $\sigma f(x)=f(x+1)$ 是线性的，I叫做恒同变换，σ 叫做平移变换。

命题3：$\triangle f(x)=f(x+1)-f(x)$ 叫做差分变换，$\triangle$ 也是线性的，且 $\triangle=\sigma-I$。

命题4：设A、B是同一线性空间上的线性变换，$AB=BA$，则

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k A^{n-k}B^k$$

命题5：

$$\triangle^k x^n=\begin{cases} n! & k=n \\ 0 & k>n \end{cases}$$

定理证明：由 $\triangle=\sigma-I$，$\sigma I=I\sigma=\sigma$，因此

$$\triangle^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sigma^{n-k}$$

因此 $$\triangle^n(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k \sigma^{n-k}(x^n)$$

即：$$n!=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k (x+n-k)^n$$

即：$n! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (x-k)^n$

注：上面的证法具有普遍性。用类似的方法能得到其它更多的恒等式。

问　题　征　题

1. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则 $\forall n \geq 1$，存在常数 $a_1, \cdots, a_n$，以及以 T 为周期的函数 $\varphi(x)$，使

$$\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt = a_n x^n + \cdots + a_1 x + \varphi(x)$$

2. 设 $a_k > 0$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

证明：

$$\left(\sum_{1\leq k\leq n} a_k^2 \right)^{1/2} \sim S_n (n \to +\infty) \Longleftrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^m \right)^{\frac{1}{m}} \sim S_n (n \to +\infty) \ \forall \text{自然数 } m \geq 2$$

过渡矩阵的矩阵求法

沈　阳

通常，我们求一个矩阵的过渡矩阵都是通过求矩阵的特征向量及广义特征向量来作到的。这就需要解线性方程组。本文介绍一种矩阵求法。先看几条引理。

引理 1：如有 $n\times n$ 数字矩阵 P_0。Q_0，使 $\lambda E-A=P_0(\lambda E-B)Q_0$，则 A，B 相似即必有 $P_0=Q_0^{-1}$

引理 2：对任何不为 0 的 $n\times n$ 矩阵 A 和 λ—矩阵 $U_{(\lambda)}$ 与 $V_{(\lambda)}$，一定 $\exists$（唯一的）λ—矩阵 $Q_{(\lambda)}$，$R_{(\lambda)}$ 及数字矩阵 U_0 和 V_0 使

$$U(\lambda)=(\lambda E-A)Q_{(\lambda)}+U_0$$

$$\bar{V}(\lambda)=R(\lambda)(\lambda E-A)+V_0$$

引理 3：设 A，B 是数域 P 上的两个 $n\times n$ 矩阵，A 与 B 相似的充要条件是 $\lambda E-A$ 和 $\lambda E-B$ 等价。

Remark：以上三引理见北大《高等代数》$P_{322-325}$，以下只证明引理 3 之充分性：

设 $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 等价，$\exists$ 可逆 λ－矩阵 $U_{(\lambda)}$，$U_{(\lambda)}$ 使得，$\lambda E-A=U_{(\lambda)}(\lambda E-B)V_{(\lambda)}$ ………… (1)

由引理 2，$\exists Q_{(\lambda)}$，$R_{(\lambda)}$ 及 U_0，V_0 使得：

$$U(\lambda)=(\lambda E-A)Q_{(\lambda)}+U_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

$$V(\lambda)=R_{(\lambda)}(\lambda E-B)V_{(\lambda)}+V_0 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$成立，把(1)改写成

$U^{-1}_{(\lambda)}(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_{(\lambda)}$，式中 $V_{(\lambda)}$ 用(3)代入，再移项得：$[U^{-1}_{(\lambda)}-(\lambda E-B)R_{(\lambda)}](\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0$，右端的次数 ≤ 1，因此 $U^{-1}_{(\lambda)}-(\lambda E-B)R_{(\lambda)}$ 是一个数字矩阵，记作 T。因此 $T(\lambda E-A)=(\lambda E-B)V_0$ ………… (4)　我们证明 T 可逆。由 $T=U^{-1}_{(\lambda)}-(\lambda E-B)R_{(\lambda)}$

$E=U(\lambda)T+U(\lambda)(\lambda E-B)R(\lambda)=U(\lambda)T+(\lambda E$

$)V^{-1}(\lambda)$ $R(\lambda)=[(\lambda E-A)Q(\lambda)+U_0]T+(\lambda E-A)$

$\lambda)R(\lambda)=U_0T+(\lambda E-A)[Q(\lambda)T+V^{-1}(\lambda)$

$\lambda)]$

等式右端第二项必为零，否则其次数至少为一，同 E 及 U_0T

数字矩阵矛盾。因此 $E=U_0T$，T 可逆。

由(4)，$(\lambda E-A)=T^{-1}(\lambda E-B)V_0$，由引理 1，$V_0=T$

且 A 与 B 相似。因此充分性获证。

现在，我们导出过渡矩阵的矩阵求法：

第一步：代 $\lambda E-A$ 为标准积，在此过程中求得 $V(\lambda)$

$\lambda E-A)=U(\lambda)J(\lambda)V(\lambda)$，$J(\lambda)$ 为标准 ……………(5)

第二步：求过渡矩阵 T，也即 V_0，由于 $V(\lambda)=R(\lambda)$

$E-A)+V_0$，设 $V(\lambda)=D_0\lambda^m+D_1\lambda^{m-1}+\cdots+D_{m-1}$

$+D_m$ $R(\lambda)=R_0\lambda^{m-1}+R_1\lambda^{m-2}+\cdots+R_{m-2}\lambda+R_{m-1}$

要使(5)成立，只要 $R_0=D_0$，$R_1=D_1+R_0A$，$R_2=D_2+R_1A$，

，$R_{m-1}=D_{m-1}+R_{m-2}A$，$V_0=D_m+R_{m-1}A$ ………………(6)

(6)式所得到的 V_0，即为我们所要求的过渡矩阵，显然以上过

都是矩阵运算的过程。

Remark：此方程计算量仍很大，但却是死的。

$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)$ 不是有理数的证明

荣 用 武

对任一整数 a，$a \neq 0, 1, -1$，则

$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{a^n}\right) \notin Q$ 为本刊第六期问题征解一题，现证如下：

设 $A=\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{a^n}\right)$ 展开，$A=\sum_{n=\infty}^{\infty}(-1)^n a^{-\frac{3n^2+n}{2}}$

设 $A=p/q$（p，q 整），则 $p/q-\sum_{|n|\le N}=\sum_{|n|>N} \Longrightarrow$

$A_N=pqa^{\frac{3N^2+N}{2}}-qa^{\frac{3N^2+N}{2}}\sum_{|n|<N}=qa^{\frac{3N^2+N}{2}}\sum_{|n|>N}$ 是整数

从右边 $|A|\le 2q\sum_{n=N+1}^{\infty}a^{-\frac{3n^2+n}{2}+\frac{3N^2+N}{2}}<2q\sum_{n=N+1}^{\infty}a^{-n}$

$=2q\frac{a^{-N}}{1-\frac{1}{a}}$，取 N_0 充分大，使 $|B_N|<1/2$，（$N\ge N_0$），所以 $|A_n|\le 1/2 \Longrightarrow A_N=0 \Longrightarrow \sum_{|n|>N}=0$

$\Longrightarrow a^{-\frac{3n^2+n}{2}}+a^{-\frac{3N^2+N}{2}}=0 \Longrightarrow a^{\frac{N_0}{2}}+a^{\frac{N_0}{2}}=0$ 即 $1+a^{N_0}=0$ $|a|>1$ 矛盾。

Cauchy 中值定理的一般形式

沈 忠 民

关于Cauchy中值定理的各种推广形式在《数学通报》中曾陆续见到，但主要是对多个函数情形的推广。本文通过另一途径，假设函数个数仍为两个，而已知若干个点的值的情形下获得了Cauchy中值定理的一般形式。并且得到了若干推论。

定理 1：设一组数 $c_0<\cdots<c_n$ ($n\geq 1$) 假设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[c_0, c_n]$ 上有 $n-1$ 阶连续的导数，且在 (c_0, c_n) 中 n 阶可导，则 $\exists\ \eta\in[c_0, c_n]$，使得：

$$\left(\sum_{j=0}^{n} g(c_j)\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq j}}^{n}[c_s-c_j]}\right) f^{(n)}(\eta)$$

$$=\left(\sum_{j=0}^{n} f(c_j)\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq j}}^{n}(c_s-c_j)}\right) g^{(n)}(\eta)$$

证明：令矩阵：

$$A=\begin{pmatrix} f(c_0) & g(c_0) & c_0^{n-1} & \cdots\cdots & c_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(c_n) & g(c_n) & c_n^{n-1} & \cdots\cdots & c_n \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

作新函数 $F(x)=$

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} A_{i1}\right)f(x)+\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_{i_2}\right)g(x)+\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_{is}\right)X^{n-1}+$$

$$\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_{in+1}\right)X-\det A$$

其中 A_{ij} $(1\leq i\leq n+1,\ 1\leq j\leq 1+n)$ 是矩阵A中第i行广列元素的代数余子式。

则 $F(C_s)=0$ $(s=0,\cdots,n)$

反复利用Rolle定理，$\exists\ \eta\in[C_0, C_n]$使

$$F^{(n)}(\eta)=0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i}\right)f^{(n)}(\eta)+\left(\sum_{i=1}^{n} A_{i_2}\right)g^{(n)}(\eta)=0$$

即
$$\begin{vmatrix} 1 & g(C_0) & C_0^{n-1} & \cdots & C_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & g(C_n) & C_n^{n-1} & & C_n \end{vmatrix} f^{(n)}(\eta)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & f(C_0) & C_0^{n-1} & \cdots & C_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & f(C_n) & C_n^{n-1} & & C_n \end{vmatrix} g^{(n)}(\eta)$$

整理得：$$\left(\sum_{j=0}^{n} g(c_j)\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq j}}^{n}(c_s-c_j)}\right) f^{(n)}(\eta)$$

$$\left(\sum_{j=0}^{n} f(c_j)\frac{1}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq j}}^{n}(c_s-c_j)}\right) g^{(n)}(\eta)$$

推论：设 $c_0<\cdots<c_n$，$f(x)$ 在 $[c_0, c_n]$ 上有 $n-1$ 阶连续导函数，且在 (c_0, c_n) 中 n 阶可导。则 $\exists\eta\in(c_0, c_n)$，

$$f^{(n)}(\eta)/n! = (-1)^n\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{f(j)}{\prod\limits_{\substack{s=0\\ s\neq j}}^{n}(c_s-c_j)}\right)$$

定理 2：在区间 $[a, b]$ 上，f，g 有 $n-1$ 阶连续的导函数，在 (a, b) 上有 n 阶导数。则 $\exists\eta\in(a, b)$ 使：

$$\left[g(b)-\sum_{j=0}^{n}\frac{g^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j\right]f^{(n)}(\eta)$$

$$=\left[f(b)-\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j\right]g^{(n)}(\eta)$$

证明：令矩阵

$$
A=\begin{vmatrix}
f(b) & g(b) & V_{n-1}(b) & \cdots & V_1(b) \\
f^{(0)}(a) & g^{(0)}(a) & V_{n-1}^{(0)}(a) & \cdots & V_2^{(0)}(a) \\
\vdots & & & & \\
f^{(k)}(a) & g^{(k)}(a) & V_{n-1}^{(k)}(a) & \cdots & V_1^{(k)}(a) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
f^{(n-1)}(a) & g^{(n-1)}(a) & V_{n-1}^{(n-1)}(a) & \cdots & V_1^{(n-1)}(a)
\end{vmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}
$$

其中 $V_l(x)=x^l\ (l=1,\ \cdots,\ n-1)$

作新函数 $F(x)=(A_{11}+A_{21})f(x)+(A_{12}+A_{22})g(x)+(A_{13}+A_{23})x^{n-1}+\cdots+(A_{1n+1}+A_{2\,n+1})x-\det A$。

其中 $A_{ij}\ (1\le i,\ j\le n+1)$ 是矩阵 A 的第 i 行列元素的代数余子式。

则易证 $F(b)=F(a)=\cdots=F^{(n-1)}(a)=0$

反复利用 Rolle 定理，得：$\exists\eta\in[a,\ b]$，

$$F^{(n)}(\eta)=0$$

$$(A_{11}+A_{21})f^{(n)}(\eta)+\left(\sum_{i=1}^{2}A_{i2}\right)g^{(n)}(\eta)=0 \text{ 即}$$

$$
\begin{vmatrix}
1 & g(b) & V_{n-1}(b) & \cdots & V_1(b) \\
1 & g^{(0)}(a) & V_{n-1}^{(0)}(a) & \cdots & V_1^{(0)}(a) \\
0 & g^{(1)}(a) & V_{n-1}^{(1)}(a) & \cdots & V_1^{(1)}(a) \\
0 & g^{(n-1)}(a) & V_{n-1}^{(n-1)}(a) & \cdots & V_1^{(n-1)}(a)
\end{vmatrix} f^{(n)}(\eta)
$$

$$
=\begin{vmatrix}
1 & f(b) & V_{n-1}(b) & \cdots & V_1(b) \\
1 & f^{(0)}(a) & V_{n-1}^{(0)}(a) & \cdots & V_1^{(0)}(a) \\
0 & f^{(1)}(a) & V_{n-1}^{(1)}(a) & \cdots & V_1^{(0)}(a) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & f^{(n-1)}(a) & V_{n-1}^{(n-1)}(a) & \cdots & V_1^{(n-1)}(a)
\end{vmatrix} g^{(n)}(\eta)
$$

整理得：

$$
\left[g(b)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{g^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j\right]f^{(n)}(\eta)
$$

$$
=\left[f(b)-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j\right]g^{(n)}(\eta)
$$

后记：限于篇幅，对具体的行列式没给出具体的验算。

201位数的23次方根如何算？

陆 雅 言

题目是这样的：

试说明以下201位数的23次方根为546372891，

9167486792003915809866092758538016248310

680144308622407126516427934657040867096593

2792057674808067900227830163549248523803357

531693511190359657754734007568168830562082

$1016129132845564805780158806777 1$

这是华罗庚教授摘自"环球"杂志82年第3期，给我们做的。

对于这个题目，我们必须假定这个201位数的23次方根是整数才行。

用六位对数表可以确定前五位数：

设 $916\cdots771 = 9.16\cdots\times10^{200} = a^{23}$

$\lg 9.16748\cdots\times10^{200} \doteq 200.962250$

$$\lg a \doteq \frac{200.962250}{23} \doteq 8.737489$$

因此 $a = 5.46372$（或3）$\cdots\times10^{8}$

再用数论方法可以确定最后四位：

设 $a = 54637wzyx$，$a = 10n+x$

$x^{23} \equiv 1 \pmod{10}$，a必为奇数，且具体 验算 $x=1$，

又 $a = 100m + 10y + 1$，用二项式展开有：$3y \equiv 7 \pmod{10}$，因而 $y = 9$

又 $(1000l + 100z + 91)^{23} = a^{23} = 771 \pmod{10^3}$

从而展开有：$3z \equiv 4 \pmod{10}$ $z = 8$

再 $(10000K + 1000W + 891)^{23} \equiv 7771 \pmod{10^4}$

从而展开有：$3W \equiv 6 \pmod{10}$ $W = 2$

故 $a = 546372891$

Remark：(1)用后面的方法实际上只要利用201位数的最末9个数字就可以把这9位数全定出来。但9位数的前几位数计算量太大，因此用对数计算。

(2)关键在于设201位数之23次方根是整数，从而所用同余的方法。而实际这201位数在数字上是可能存在一些错误的。

斗智斗勇同 $\pi+\theta=\operatorname{tg}\theta$ 之根

陆 雅 言

"狼在岸上，兔子在圆形水池中，兔子到岸上后速度大于狼。兔子游泳速度是狼在岸上跑动速度的 1／4，试给出一种方法，让在水池中心的兔子逃出去"——这是对策论中一道名题，但是 1／4 这个数能再小吗？——能！

我们让兔子游泳的速度是狼在岸上跑动速度之 a 倍。要求使得兔子可以逃走的 a 的下界。

我们假定兔子和狼是绝对聪明，无论何时总是使用最佳方案。而且改变方向根本不要花时间。再设水池半径为 1，池心在 0 点。V_1 为狼速，V_2 为兔速，$V_2/V_1=a$。

首先，我们可以认为兔子在 $(a,\ 0)$ 点，而狼在 $(-1,\ 0)$ 点。事实上，在以 0 为圆心，$a-\varepsilon\ (\forall\varepsilon>0,\ a>\varepsilon)$ 为半径的圆上，兔子游一圈的时间比狼在岸上跑一圈所花的时间来得少。因此，兔子可以先游到 $a-\varepsilon$ 为半径的那个圆周上，然后沿着这个圆周游，狼同时在岸上追，总有时刻，狼与兔子在过 0 的一直线上，且在 0 的两侧。由于 ε 可以任意小，因此我们近似地认为狼在 $(-1,\ 0)$，兔子在 $(a,\ 0)$ 点来考虑（尽管这达不到）。

狼所遵循的原则，明显是：过狼和池心 O 作一直线，兔子在哪边就向哪一边追。

如兔子沿一曲线到达岸上一点 A，途中经过⊙$(0,\ a)$表 O

为圆心，a为半径之圆）上之点那么，不管狼追到什么地方，最远不过是B点同O连续上一点A_1（如图）。因此对兔子来说是无聊的。因为假定狼在（-1，0）点，兔子在B点，那么兔子无论如何也不可能使狼向下跑。因此只有在兔子处于（a，0），而狼在（-1，0）时兔子才最有

由于连结（a，0）与点A的直线为距离最短。因此只要狼不改变追的方向，兔子应该走直线。

设$\angle AOX=\theta$，由于A同（a，0）联结不同⊙（0，a）相交，使$|\theta|\leq \arccos a$，设狼一直向下追（下面说明这并不是由于狼的愚蠢）则$f(\theta)$为狼到A点时间与兔子到A点时间之差。

$$f(\theta)=\frac{\pi+\theta}{V_1}-\frac{\sqrt{\sin^2\theta+(\cos\theta-a)^2}}{V_2},\quad f'(\theta)\geq 0,$$

$f(\theta)\nearrow$，$\theta=\pi/2$时达到极大。

如果狼在（-1，0），而兔子在（a，0）的瞬时，狼马上选择了向下方追，则兔子马上取相反方向（即向上）沿⊙（0，a）之切线方向游出去。如果狼在这一瞬时不追，那么兔子可以沿x轴向岸游去，设游到（b，0）处，狼开始追，（设向下）则兔子再向相反的方向游（即向上），这时设$f(b)$为狼从（-1，0）追到C所花时间与兔子从（b，0）游到C所花时间之差。

$$f(b)=\frac{\pi+\arccos b}{V_1}-\frac{\sqrt{1-b^2}}{V_2}\quad(a\le b\le 1)$$

$f'(b)\ge 0$，故 $f(b)$ 单调下降，

$b=a$ 时最小，因此狼在前一瞬时不追是愚蠢行为。

那么，狼会不会在追的过程中回过头来呢？不会！因为在某一时刻，狼在K点，过O点直线上⊙$(0,a)$上对应一点为K_1，而兔子在L点记$(a,0)=P$，则有：$\overset{\frown}{K_1P}=\overset{\frown}{LP}$，从而显显在K点按照狼追的原则不应改变方向。因此，兔子在这个过程中已经取到了最佳方案。

设 $\dfrac{\pi+\arccos a}{V_1}-\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{V_2}=0$，即 $\pi+\arccos a=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$.

令 $\theta=\arccos a$，则 $a=\cos\theta$，而 θ 是 $\pi+\theta=\operatorname{tg}\theta$ 之根，因此当 V_2/V_1 大于上面之 a 时，上面过程可以实现，而 V_2/V_1 小于或等于上面 a 时，上面过程无法实现。近似地

$$a\doteq 0.22<1/4$$

Remark：本文采取了文字叙述的形式，但是这个过程完全可以用严格的数学语言来描述。

数　列　一　题

——宋用武

《蛙鸣》第六期问题征解第二题：

设 $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$，现证明如下：

由已知推出：$a_m \leq a_{m-k} + a_k$，$K = 1, \cdots, m-1$

各式相加：

$$a_m \leq \frac{2}{m-1} \sum_{1}^{m-1} a_k \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

我们在条件(1)下推出：

$$\frac{a_n}{n} \sum_{1}^{n} \frac{1}{K} \leq \sum_{1}^{n} \frac{a_k}{K^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

固定 n（$n > 2$），定义：

$$\begin{cases} y_m = \dfrac{2}{m(m-1)} \sum\limits_{1}^{m-1} \dfrac{1}{K}, \quad m = 2, \cdots, n \\ y_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = y_m - y_{m+1}, \quad m = 1, 2, \cdots, n-1, n \\ x_1 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

易验证 $x_m = \frac{2}{m-1}\left(y_{m+1} - \frac{1}{m^2}\right)$ 及

$$\sum_{m+1}^{n} x_i = y_{m+1} \quad (4)$$

令 $A(m)=\sum_{K=1}^{m}\left(\sum_{m+1}^{n}x_i-\frac{1}{K^2}\right)a_K$

$m=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$

首先，$A(m-1)=\sum_{K=1}^{m-1}\left(\sum x_i-\frac{1}{K^2}\right)a_k$

$$=\sum_{K=1}^{m-1}\left(\sum_{m+1}^{n}x_i-\frac{1}{K^2}\right)a_n+\sum_{K=1}^{m-1}x_m a_k$$

$$\overset{(1)\text{式}}{\geq}\sum_{K=1}^{m-1}\left(\sum_{m+1}^{n}x_i-\frac{1}{K^2}\right)a_k+(m-1)x_m a_m/2$$

$$\overset{(3)(4)\text{式}}{=\!=}\sum_{K=1}^{m}\left(\sum_{m+1}^{n}x_i-\frac{1}{K^2}\right)a_k=A(m)$$

所以 $A(1)\geq A(2)\geq\cdots\geq A(m+1)$ (5)

再证：

$$A(n)\geq\frac{a_n}{n}\sum_{1}^{n}\frac{1}{K}-\sum_{1}^{n}\frac{a_k}{K^2} \qquad (6)$$

事实上，它等价于 $\frac{a_n}{n}\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{K}-\frac{1}{n}\right)\leq x_n\sum_{1}^{n-1}a_k$

因为 $\frac{a_n}{n}\left(\sum_{1}^{n}\frac{1}{K}-\frac{1}{n}\right)=\frac{a_n}{n}\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{K}\overset{(1)\text{式}}{\leq}\frac{1}{n}\frac{2}{n-1}\left(\sum_{1}^{n-1}a_k\right)$

$\cdot\left(\sum_{1}^{n-1}\frac{1}{K}\right)=y_n\sum_{1}^{n-1}a_k=x_n\sum_{1}^{n-1}a_k$，故(6)成立

由(5)、

$$A(1) \geq \frac{a_n}{n}\sum_{1}^{n} \frac{1}{K} - \sum_{1}^{n} \frac{a_k}{K^2},\quad A(1) = 0$$

故(2)成立，得证。

第　九　期

目　录　　　　　　　　　　　　　　　　1982年11月20日

* * * * * * * * * * * * * * *

一个点集拓扑反例

——— 791　顾晓坪

熊金城老师的《点集拓扑讲义》P 73有这样一个习题：

证明当X可数时，定理7.5, 7.6的逆命题成立。

这就是要证明：

〔A〕：设拓扑空间X为可数集，则：x为X的聚点仅当X～{x}中有序列收敛于x，x∈X。

〔B〕：X同上，若X中序列< x_i >收敛于x蕴含象空间中序列< f（x_i）>收敛于f（x），则映射f：X→Y在x∈X处连续。

本文试图说明命题〔A〕，〔B〕都是不成立的。

(1)令X＝Q为R^1　中的有理数全体，B＝{O＝{0}U（A∩Q）；A是R^1　的稠密开集}U{φ}。我们证（X，B）是拓扑

空间。

（Ⅰ）：令 $A=R^1$，则 $X=\{0\}\cup(R\cap Q)$，$\therefore X=Q\in B$，$\phi\in B$

（Ⅱ）：令 $O_1=\{0\}\cup(A_1\cap Q)\in B$，

$O_2=\{0\}\cup(A_2\cap Q)\in B$

$O_1\cap O_2$ 均有 $\in B$

则 $O_1\cap O_2=\{0\}\cup((A_1\cap A_2)\cap Q)$，由于 A_1 A_2 是 R^1 的稠密开集，故 $A_1\cap A_2$ 是开集，且 $\forall(a,b)\subset R^1$ $(a<b)$，(a,b) A_1 是开集，非空，所以存在 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)\cap A_1$ $(\alpha<\beta)$，又 A_2 稠密，故 $(\alpha,\beta)\cap A_2$ 非空。这样 $(a,b)\cap A_1\cap A_2$ 非空，故 $A_1\cap A_2$ 仍为 R' 中的稠密开集 $\Longrightarrow O_1\cap O_2\in B$。

如果 O_1 O_2 中有一个是空集，则 $O_1\cap O_2=\phi\in B$

Ⅲ）：设 $O_\alpha=\{0\}\cup(A_\alpha\cap Q)\in B$，则 $\cup A_\alpha$ 仍为 R' 的稠密开集 $\Longrightarrow \cup O_\alpha=\{0\}\cup((\cup A_\alpha)\cap Q)\in B$。

(2)：$X\sim\{0\}$ 中任意一个点列 $\{x_n\}$ 都不收领于点 0，由于 $\{0\}$ 不是一个开集，从而 0 是 X 的聚点这与〔 〕矛盾。

设有 $\{x_n\}\subset X\sim\{0\}$，在 R' 中点列 $\{x_1\}$ 必有子列 $\{x_{n_k}\}$，使得：$x_{n_k}\to x$（x 可以是 ∞），取：$A=R'\sim(\{x\}\cup\{x_{n_k}\})$ $(A\ \ Q)\cup O\in B$，但是，$\forall N$，总有 $n_k>N$，使 $x_{n_k}\in A$，但 $x_{n_k}\in X\sim\{0\}$，故 $x_{n_k}\bar{\in}O$，而 O 是点 0 在 X 中的邻域，所以 $x_n\not\to 0$

(3)：取 $Y=Q$，B_Y 为通常的拓扑，$f:X\to Y$，使 $f(x)=x$ 则 X 中序列 $\{x_n\}$ 收领于 0（实际上不存在），显然蕴含着 $<f(x_n)>$ 收领到 $f(0)=0$，但由于 $f^{-1}((a,b)\cap Q)=$

$=(a, b)\ Q\in B$

Ⅲ)：设 $O_\alpha=\{0\}\cup\{A_\alpha\ Q)\in B$，则 $\cup A_\alpha$ 仍为 R^1 的稠密开集 $\Longrightarrow \cup O_\alpha=\{0\}\cup((\cup A_\alpha)\ Q)\in B$

(2)：$X\sim\{0\}$ 中的任意一个点列 $\{x_n\}$ 都不收领于点 O，由于 $\{0\}$ 不是一个开集，从而 O 是 X 的聚点，这与〔A〕矛盾。

设有 $\{x_n\}\ X\sim\{0\}$，在 R' 中点的列 $\{x_n\}$ 必有子例 $\{x_{n_k}\}$，使得：$x_{n_k}\to x$（x 可以是 ∞），取：$A=R'\sim($ $\{x_{n_k}\}$ 〔A Q〕则 $O\in B$，但是，$\forall N$，总有 $n_k>N$，使 $x_{n_k}\in A$，但 $x_{n_k}\in X\sim\{0\}$，故 $x_{n_k}\in O$，而 O 是点 O 在 X 中的邻域。所以 $x_n\not\to 0$

(3)：取 $Y=Q$，B_Y 为通常的拓扑，$f: X\to Y$ 使 $f(x)=x$ 则 X 中序列 $\{x_n\}$ 收领于 O（实际上不存在），显然蕴含着 $\langle f(x_n)\rangle$ 收敛到 $f(0)=0$，但由于 $f^{-1}((a, b)\ Q)=(a, b\ Q\in B$，知 f 不连续，从而命题（B）亦不真。

(4) 显然，（X，B）是一个有可数个点但不满足 A_1，从而不满足 A_2 的拓扑空间。

一个极限定理

—— 811 窦昌柱

$\triangle A_nB_nC_n$ 是平面上三角形序列，A_{n+1}，B_{n+1}，C_{n+1} 分别是 A_nB_n，B_nC_n，C_nA_n 的中点，我们知道，点到 A_n，B_nC_n 都收敛于 $\triangle ABC$ 的中心。仅用数列和极限的知识把命题加以推广是很复杂的，这儿用一些矩阵的知识，得到更一般的结果，先给出两个熟知的事实。

引理 1：令 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$　　$P = (\omega^{(i-1)(j-1)})$

$1 \le i, \ j \le n$。S 是 n 级循环方阵，则

$$P^{-1} = \frac{1}{n}(\omega^{-(i-1)(j-1)}) \text{ 且}$$

$P^{-1}SP$ 为对角阵。

引理 2：若 S 的特征根 1 的重根为 1，其余特征根的模均小于 1，则 $\lim_{k\to\infty} S^k$ 存在。

据此可以得到：

定理：$A_1(0)\cdots A_n(0)$ 是 K^m 中的点，$m \ge 1$。$A_i^{(k+1)}$ 是分 $A_i^{(k)}\ A_{i+1}^{(k)}$ 为定比 λ_i 的分点，$\lambda_i > 0$ $A_n^{(k+1)}$ 分 $A_n^{(k)}A_1^{(k)}$ 为正比 λ_n。$K = 0, \ 1, \cdots$ 由此得几个点列，$\{A_1(k)\}, \{A_2(k)\}\cdots\{A_n(k)\}$。它们收敛

证明：事实上仅就 $m = 1$ 证明即可。

设 $A_i(k)$ 的坐标 $x_i(k)$ $C_k = [x_1(k)\cdots x_n(k)]$

$$x_i = \frac{1}{1+\lambda_i}$$

$$S = \begin{pmatrix} x_1 & \lambda_1\lambda_1 x & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ & & & x_{n-1}\lambda_{n-1} \\ \lambda_n x_n x_n & 0 & \cdots\cdots & x_n \end{pmatrix}$$

$\mu_1 \cdots \mu_n$ 为 S 之特征根，依定理此分点公式有 $C_{k+1} = SC_k$。

$\therefore C_k = S^k C_0$。又 $f(x) = \det(xI - S) = (x - x_1)\cdots(x - x_n)$

$(-)^{n+1}(1 - x_1)\cdots\cdots(1 - x_n)$

若 $|x|>1$，则 $|(x-x_1)\cdots(x-x_n)|\geq(|x|-x_1)$
$\cdots\cdots(|x|-x_n)>(1-x_1)\cdots(1-x_n)$

$\therefore f(x)\neq 0\quad\therefore\quad|\mu_1|\leq 1$

不妨设 $|\mu_1|=1\quad\because\ |\mu_1-x_i|\geq(1-x_i)$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots\ n)$$

$\therefore\quad f(\mu_1)=0\Longrightarrow|\mu_1\ x_i|=1-x_i\Longrightarrow\mu_1=1$

但 $f'(\mu_1)>0$ $\therefore$此特根 1 的重数为 1

由引理 2。$\lim\limits_{k\to+\infty}s^k\ \exists\quad\therefore\ \lim\limits_{k\to\infty}c_k\ \exists$

即 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_i^{(k)}\ \exists\quad\therefore\{A_i^{(k)}\}$收敛

对一般的 m，可以分别考虑 m 的坐标，结论同样成立。

如果 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda$，还可以把极限点求出来，方法如下：

由引理 1，容易得出

$$s=P\,\mathrm{diag}\left(1,\ \frac{\lambda+\omega}{1+\lambda}\ \cdots\cdots\ \frac{\lambda+\omega^{n-1}}{1+\lambda}\right)P^{-1}$$

$$\therefore\ \lim_{k\to\infty}s^k=P\,\mathrm{diag}\,(1,\ 0\ \cdots\ 0)\,P^{-1}$$

$$=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}1&1&\cdots\cdots&1\\1&1&\cdots\cdots&1\\ \cdot&\cdot&&\cdot\\ \cdot&\cdot&&\cdot\\ \cdot&\cdot&&\cdot\\1&1&\cdots\cdots&1\end{pmatrix}$$

故知$\{A_1(k)\}\cdots\cdots\{A_n(k)\}$收敛于同一点，此点坐标为$A_1(0)\cdots A_n(0)$对应坐标的算术平均，这就是开头提到的命题的推广。

对一般的情形，只要求出方阵P，使PSP^{-1}为Jordan标准形，同上可求出极限点。

一个不等式的证明

——811 陈贵宽

定理：设A，B是n阶复方阵，且$I-\bar{A}'A>0$，$I-\bar{B}'B>0$ 则：$|\det(I-\bar{A}'B)^2|\geq\det(I-\bar{A}'A)\cdot\det(I-\bar{B}'B)$

这是华老教在五十年代得到的一个结果，本来的证明具有高度的技巧性，本文则给出一个简洁的证明，为方便起见，把所要用到的结论以引理的形式写在下面：

引理1：设A，B，C，D 都是n阶方阵，A可逆，则：

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C, & D\end{pmatrix}=\det A\det(D-CA^{-1}B)$$

引理2：设A，B都是n阶的Hermite半定正方阵，则：

$$\det(A+B)\geq\det B\geq 0$$

定理的证明：

$$\det(I-\bar{A}'B)^2=\det(I-\bar{A}'B)\cdot\det\overline{(I-\bar{A}'B)'}$$

$$=\det(I-\bar{A}'B)\det(I-\bar{B}'A)$$

$$=\det\begin{pmatrix} I^{(n)} & B \\ \bar{A}' & I^{(n)} \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} I^{(n)} & A \\ -\bar{B}' & I^{(n)} \end{pmatrix}$$

$$=\det\begin{pmatrix} I^{(n)}-B\bar{B}' & B-A \\ -(\overline{B-A})' & I^{(n)}-\bar{A}'A \end{pmatrix}$$

$$=\det(I-B\bar{B}')\det[(I-\bar{A}'A)+(\overline{B-A})'(I^{(n)}-B\bar{B}')^{-1}(B-A)]$$

$$\geq\det(I-\bar{B}'B)\det(I-\bar{A}'A) \qquad \#$$

本定理有一个有兴的推论：

设$A>0$，$I-A>0$，u是两方阵，则$|\det(I-uA)|>\det(I-A)$

Kruskal算法的另一证明

—— 801 许秋平

定义：设G是连通图，$e\in E(G)$，$\omega(e)$是e的权记$\omega(G)=\sum_{e\in E(G)}\omega(e)$ 称$\omega(G)$是G的权. G中权最小的生成树叫最优树。

Kruskal算法是求最优树的基本方法，它的具体程序如下。

1：Q选 $e_1 \in E$，使 $\omega(e_1) = \min\limits_{e \in E(G)} \{\omega(e)\}$

2：如果 $e_1 \cdots e_i$ 已选出，在 $E(G)/\{e_1 \cdots e_i\}$ 中选 e_{i+1}，使：

（Ⅰ）：$G[\{e_1 \cdots e_i, e_{i+1}\}]$ 中不含圈

（Ⅱ）：在（Ⅰ）的条件下使 $\omega(e_{i+1})$ 最小。

*（Ⅲ）直至取出（$r-1$）条边时，停

本文给出Kraskal算法的另一证明，从而得出最优树的一个不很显然的性质。

* *

引理：设G是一图，$E_i(i=1, 2) \subset E(G)$，$|E_1| < |E_2|$ 若 $G(E_i)$ 中不含圈（$i=1, 2$），则至少存在一边 $e \in E_2$，使 $G[E_1 \cup \{e_i\}]$ 中也不含圈。（记 $\varepsilon_i = \varepsilon_i |E_i|$ $\nu_i = |\nu(G(E_i))|$

【证明】：不妨设 $G(E_1)$ 连通（否则可分成若干连通片讨论），则 $G(E_1)$ 是树，故有 $\varepsilon_1 = \nu_1 - 1$

假设 $\forall e \in E_2$，$G[E_1 \cup \{e\}]$ 中均含圈，则 $\nu(G[E_2]) \supset \nu(G(E_1))$ 即 $\nu_2 \le \nu_1$，又 $\varepsilon_2 = \nu_2 - \omega$（$\omega$ 是 $G(E_2)$ 中连通片的个数），且 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$，故 $\nu_1 - 1 < \nu_2 - \omega \Longrightarrow$ $\nu_2 > V_1 + \omega - 1 \ge V_1$ 即 $\nu_2 > V_1$，矛盾#

定理：G是一连通图，由Kruskal 算法构造的子图是最优树。

【证明】：首先，由Kruskal算法构造的子图 T^* 是生成树乃显然。

设 $E(T^*) = \{e_1 \cdots e_{\nu-1}\}$，且有 $\omega(e_1) \le \cdots \le \omega(e_{\nu-1})$，（$V = |\nu(G)|$），又任对生成树T，

$E(T)=\{e_1 \cdots e_{\nu-1}\}$ 且 $\omega(\bar{e}_1)\leq\cdots\leq\omega(\bar{e}_{V-1})$

由算法的过程显然有 $\omega(e_1)\leq\omega(\bar{e}_1)$，$\omega(e_2)\leq\omega(\bar{e}_2)$

又因为 $G[\{e_1, e_2\}]$，$G[\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}]$ 中均不含圈，

若 $i=3$，则 $\omega(e_3)\leq\omega(\bar{e}_3)$，若 $1\leq i\leq 2$，则

$\omega(e_3)\leq\omega[\bar{e}_i]\leq\omega(\bar{e}_3)$，同理有，$\omega(e_4)\leq\omega(\bar{e}_4)$

$\cdots$ $\omega(e_{V-1})\leq\omega(\bar{e}_{V-1})$

故得 $\omega(T^*)\leq\omega(T)$，所以 T^* 是最优树 #

推论：G 是一连通图，任取 G 的二最优树 T_1，T_2，

$E(T_1)=\{\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_{V-1}\}$ $\omega(\bar{e}_1)\leq\cdots\cdots\leq\omega(\bar{e}_{V-1}$

$E(T_2)=\{e_1,\cdots e_{V-1}\}$，$\omega(e_1)\leq\cdots\cdots\leq\omega(e_{V-1})$，则

$\omega(e_i)=\omega(e_i)$ $i=1,\cdots \nu-1$

［证明］：设 T^* 是由 Kruskal 算法求得的最优树，

$E(T^*)=\{e_1^*,\cdots e_{V-1}^*\}$. $\omega(e_1^*)\leq\cdots\leq\omega(e_{V-1}^*)$

则 $\omega(e_i^*)\leq\omega(e_i)$，$i=1\cdots \nu-1$，又 $\omega(T^*)$

$=\omega(T_1)$，故 $\omega(e_i^*)=\omega(e_i)$，同理 $\omega(e_i^*)$

$=\omega(e_i)$，故 $\omega(e_i)=\omega(\bar{e}_i)$ #

王树禾老师，张少平同学认真审阅了此证明，并提出有益的意见，特此表示感谢。

*这一步改进了原算法的结果，可大大减少工作量。

**此结果引理可作为一般结果。

有关典型二元树的几个命题

—— 801 张忠良

图论研究领域中，有一个重要课题是Huffman树的问题，而Huffman树的存在性，鉴于篇幅，对命题2不给出证明，而是通过一系列极其显然的引理，来阐述命题2的证明思想。

命题1：n个叶的典型二元树，其边数为$2n-2$。

〔证明〕：由树的性质知 $\varepsilon = \nu - 1$ ……(1)

又由典型二元树中既非叶又非根的点（结点）的度数为3，而结点个数为$\nu-1-n$；根（一个）的度数为2，叶（n个）的度数为1。

由Euler定理 $\sum\limits_{\nu \in \nu(T)} d(\nu) = 2\varepsilon$ 知：

$$3(\nu-1-n)+2\times 1+1\times n = 2\varepsilon \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由(1)、(2)即得 $\varepsilon = 2n-2$

推论：典型二元树的边数为偶数，且如其边数为$2n-2$，则叶数必为n。

既然n个叶的典型二元树的边数有限，那么其变化种类就应是有限的，但到底有多少呢？命题2将给出准确的计算。

命题2：设具有n个叶的典型二元树的个数（同构的算一个）为S_n，则有下面的计算公式：

$$S_n = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k-1} S_i S_{n-i} + \dfrac{S_k(S_k+1)}{2}, & n = 2k \\ \sum\limits_{i=1}^{K} S_i\ S_{n-i} & n = 2k+1 \end{cases}$$

证明的思路是："降叶法"，而具体步 是"降叶"，因为由命题 *1*，及其推论可知典型二元树的边数和叶数之间有一个一一对应关系，通过"降边"，必能达到"降叶"之目的。

引理 *1*：设 ν_0 是典型二元树 T（ n个数的根在 T 中去掉 V_0 及其相关二边后得到圈 T^1，T^1 是由两个典型二元树构造，具其叶数之和为 n。

（注：如图为只一个点的平凡图，则认为其为一个叶的二元树）

引理 *2*：$\forall\ 1 \leq K \leq n-1$，总存在 n个叶的典型二元树 T，去掉 T 的根 ν_0 及其相关的两边后所得的两个典型二元树的叶数分别是 K 和 $n-k$。

定义：我们定义＜p。q＞是一个典型二元树族它满足 $\forall$ ＜p，q＞中典型二元树 T，去掉 T 的根及其及相关二边后所得的两个典型二元树的叶数分别为 p。q。

显然＜p。q＞和＜q。p＞表同一个族。

引理 *3*：设 $T_1 \in$ ＜p，q＞，$T_2 \in$ ＜p_2，q_2＞。如＜p_1，q_1＞＜p_2，q_2＞非同一个族，则 T_1 和 T_2 不同构。

引理 *4*：设典型二元树族＜p，q＞中不同构的典型二元树的个数为 $n_{p,q}$ 则

$$n_{p,q} = \begin{cases} \frac{1}{2} S_p(S_p+1) & p=q \\ S_pS_q & p \neq q \end{cases}$$

由引理 *1*～*4* 立得命题 *2*

有了命题 *2*，Huffmen树的存在性就极其显而可见了。

最后提一下求 S_n 的计算量，由公式可见，n相当大时，S_n是

比较难算的，事实上求 S_n 需进行加法和乘法动算各约 $n(n+1)/4$ 次。下面对一些 n 给出 S_n 的数值，可以看出 S_n 的数值随着 n 的增加而急剧增大：

$$S_1=1,\ S_2=1,\ S_3=1,\ S_4=2,\ S_5=3,$$
$$S_6=6,\ S_7=11,\ S_8=23,\ S_9=46,\ S_{10}=98$$

完

Rouche 定理的一点注记

801　　杜　强

在某些复变函数的著作里，曾就 Rouche 定理中 $|f(z)|>|g(z)|$

不能减弱为：$|f(z)|\geq|g(z)|$ 举例说明（[f[1]]）。经过细心观察，不难发现，这些反例成立的原因是在于

$|f(z)|=|g(z)|$ 时恰有：$4f(z)+g(z)=0$，而若当

$|f(z)|=|g(z)|$ 时，$f(z)+g(z)\neq 0$，则定理证明中构造的函数

$$\omega(z)=1+\frac{g(z)}{f(z)}$$

不经过原点，并且是在 $|\omega-1|\leq 1$ 内变动，因而仍可有幅角原理得到定理的结论。

[1] 中所举的例是取 P 为单位圆，$f(z)=$ [illegible] $(Z+z)$

$g(z)=Z$

在 P 上，显然 $|f(z)|\geq|g(z)|$ 而在 P 内部 f 有两个零点，

但 $f(z)+g(z)$ 在 P 内只有一个零点。以上结论，同学们不难自行验证。

利用上面的分析，我们还可定出象 $z^{8}-3z^{4}+z^{3}-1$ 这样的多项式在 $|Z|<1$ 内的零点个数，而它们通常不便于直接用 Rouche 定理解答。

参考文献：Jacob Seanensenein . and Siman Green 《Elements of Complex Analysis》

一个定理的推广

801 张 飞

在通常的实变函数教科书中，我们都可见到以下的定理。

定理：[a, b] 的连续函数全体 [a, b] 的势为 $\aleph$。

更一般地，我们有：

定理的推广：定义集合 $A=\{f(x)\mid f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且最多有可数个间断点，$\}$ 则 $\bar{\bar{A}}=\aleph$

证明：(Ⅰ)：$\forall f\in A$，$x\in[a,b]$，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积（Rieman）

(Ⅱ)：定义 $F_f(x)=\int_a^x f(t)dt$，$\forall f\in A$，易知 F_f 在 $[a,b]$ 上连续，记 $A_1=\{F\mid \exists f\in A$，使 $F=\int f d\}$ 易知

$A\le \aleph$

(Ⅲ)：定义 $A(F)=\{f\mid f\in A,\int_a^x f(t)dt=f(x),\ x\in[a,b]\}$

易知 $\bigcup\limits_{F\in A} A(F)=A$

（Ⅳ）：$\forall A(F)$，$\forall f_1\ f_2\in A(F)$，则 $\int_a^x f_1\,d = \int_a^x f_2\,d$ 易证 f_1，f_2 在共同连续点处相等。（证明略）

（Ⅴ）：S表示$[a, b]$上全体序列，令 $A(F)_I=\{f \mid f\in A(F)$，$f$在$I$上间断，$I\in S\}$。

显然 $A(F)=\bigcup\limits_{I\in S} A(F)_I$，$\bar{\bar{S}}=\diagdown_S^S$ 易知

$$\overline{\overline{A(F)_I}}\le \diagdown_S^S$$

$$\therefore\ \bar{\bar{A}}=\bigcup_{F\in A_1} A(F)=\bigcup_{F\in A_1}\ \bigcup_{I\in S} A(F)_I$$

$$\therefore\ \bar{\bar{A}}\le \diagdown_S^S\ \diagdown_S^S\ \diagdown_S^S=\diagdown_S^S$$

而 $\bar{\bar{A}}\ge \diagdown_S^S$ 显然（有） $\therefore\ \bar{\bar{A}}=\diagdown_S^S$

编者按：更一般地，我们有：记 $A=\{f \mid f$在R^1上至多有可数个间断点$\}$，则 $\bar{\bar{A}}=\diagdown_S^S$。

证明：记S为全体实数序列，$\forall I\in S$，A_I 定义为在I中点上间断的函数集合。则 $A=\bigcup\limits_{I\in S} A_I$ A_I 非空，而且易证

$$\bar{\bar{A}}_I\le \diagdown_S^S\qquad \bar{\bar{S}}=\diagdown_S^S\qquad \therefore\ \bar{\bar{A}}=\diagdown_S^S\ \#$$

对 $\forall -1\leq s_1 \leq s_2 \leq 1$，如果 $0 \in [s_1, s_2]$，则由 f 在此区间上的连续性知 f 在其上取到 $f(s_1)$，$f(s_2)$ 间的一切值。若 $0 \in [s_1, s_2]$ 由对称性，不妨设 $0 \in [s_1, s_2)$ 因为 $f(x)$ 在 $(0, s_2]$ 连续，且 $x \to 0^+$ 时，f 既无上界，又无下界，故 $\exists s_1' \in (0, s_2]$，使 $f(s_1') = f(s_1)$，从而问题化归前一情形。至此，我们证明了 f 在 $[-1, 1]$ 上满足条件，若 f 在 $[-1, 1]$ 有原函数 F，则

$$F(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}+C_1 & x\in[-1,0) \\ x\sin\frac{1}{x}+C_2 & x\in(0,1] \end{cases}$$

且 F 在 $[-1, 1]$ 上可导，由此 $C_1=C_2=C$，且

$$F(x)=x\sin\frac{1}{x}+C_1,\qquad x\in[-1,1]$$

《唐老鸭的问题》答案：

Rabbits because they multiply.

Cells beease they divide

Fish becase they always in schools

plants because they take roots

《参考文献：

Jacob seunensehein S.Simon Green.

《 Elements of complex Analysis 》

$$\therefore \frac{a_1^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1}}{S_n^{m+1}} \to 1$$

$$\therefore \left(a_1^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1}\right)^{\frac{1}{m+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n$$

故命题成立

$\Longleftarrow$ 令 $m=2$，显然

* * * * * * * * * *

本期问题征解问题

Ⅰ：设H半定正Hemite方阵 $S=\frac{1}{2}(H+\bar{H})$

$$K=-\frac{1}{2}(H-\bar{H})$$

则 $Ker\ S=KerH \quad KerK$，于是显然有：$rank\,s \geq rank\,k$

$rank\,S \geq rank\,H$（791 高文云）

Ⅱ：试求出所有满足下列条件的数域F上的n阶方阵A：

1^0：A不是幂等的

2^0：对任意的n阶可逆方程B，若 $B^{-1}AB=A^r$（r为正整数）则必有 $B^{-1}AB=A$（801 杜 强）

3^0：任取 $n(\geq 2)$ 个定义在区间[0，1]上的实函数 $f_1,f_2,\cdots f_n$，试证明存在 $x_i\in[0,1]$ $i=1,\cdots n$，使下列不等式成立

$$\left|\prod_{i=1}^{n} x_i-\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\right| \geq \frac{1}{2^n}$$（801 部 云）

（书评）：

读读《古今数学思想》如果我们要预见数学的将来，适当的途径是研究这门科学的历史和现状。

—— Aenri Poincarè

《古今数学思想》译自 Kline 著的《Mathematicel Tholght 》评 分四册 ，该书全面而简明地论述了一些重要数学思想的起源和发展，特别是近代数学大部分分支的历史和现状，并努力地说明数学的意义，各数学之间以及数学与其它自然科学的关系。该书对一些著名数学家的评论也很有独到之处。“就数学史而论，这是迄今为止最好的一本书”这种评价决非过份。

下面刊登的是第六期问题征解第一题的解答：

（由 801 王 鸣 强提供）

题目：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上定义，且满足：$\forall s_1, s_2 \in [a, b]$，$s_1 < s_2$，$f(x)$ 在 $[s_1, s_2]$ 上取到 $f(s_1)f(s_2)$ 一切中间值，问 $f(x)$ 是否有原函数。

解答：答案是否定的

反例：定义函数：

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

故方程组有唯一的解$\alpha_1\cdots\alpha_n$，令 $P(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$

$$\varphi(x)=\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt-P(x)$$

只须证$\varphi(x)$以T为周期，显然$\varphi(iT)=0$（$i=0, 1, \cdots, n$）

又∵ $g(x)\overset{P}{=\!=\!=} Q(x+T)-Q(x)$

$$=\int_0^{x+T}(x+T-t)^{n-1} f(t)dt-P(x+T)-$$

$$\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)dt+P(x)$$

（注意到f是周期为T的函数）

$$\int_0^T [x+(T-t)]^{n-1} f(t)-[P(x+T)-P(x)]$$

$$=\sum_{K=0}^{n-1} C_{n-1}^K x^K \int_0^T (T-t)^{M-K} f(t)dt-$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \sum_{K=0}^{\ell-1} C_e^K x^K T^{\ell-K}$$

∴ $g(x)$至多是（$n-1$）至多项式

而 $g(0)=g(T)=\cdots\cdots=g((n-1)T)=0$

$\therefore g(x)\equiv 0$　　即 $\varphi(x+T)=\varphi(x)$

$\therefore \varphi$ 以 T 为周期

（解答由张　飞提供）

2：〔证〕：$\Longrightarrow 1=\dfrac{S_n}{S_n}=\dfrac{a_1^2+\cdots\cdots+a_n^2}{S_n^2}+$

$$\frac{\sum\limits_{i\neq j} a_i a_j}{S_n^2} \quad (\because S_n \quad (a_1^2+\cdots+a \qquad) \quad n\to+\infty$$

$$\therefore \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{S_n^2}\to 1$$

$$\therefore \frac{\sum\limits_{i\neq j} a_i a_j}{S_n^2}\to 0 \qquad (n\to+\infty)$$

今　设　$(a_1^m+\cdots+a_n^m)^{\frac{1}{m}}\sim S_n \quad (m\geq 2)$

$$\therefore \frac{a_1^m+\cdots+a_n^m}{S_n^m}\to 1 \qquad (n\to\infty)$$

又：$\dfrac{a_1^m+\cdots+a_n^m}{S_n^m}=\dfrac{a_1^{m+1}+\cdots+a_n^{m+1}}{S_n^{m+1}}+\dfrac{\sum\limits_{i\neq j} a_i^m a_j}{S^{m+1}}$

$\because \quad a_k>0$

$\therefore \dfrac{a_i^m}{S_n^{m-1}}\leq a_i \qquad \therefore 0\leq\dfrac{\sum\limits_{i\neq j} a_i a_j}{S^2}\to 0$

$n\longrightarrow+\infty$

********* 问　题 ********

编者按：自本期起，开辟《问题》一栏，包括《问题研究》与《问题征解》问题研究主要刊登一些有一定难度的习题。（最好是自己编做的问题提供者可同时提供解答，欢迎同学们踊跃来稿。

问题研究：

R^1 上的函数 f 称为"开"的，如果对 R^1 上的任意开集 G，f(G)也为开集。f 称为满足达布性质，若对 R^1 中的任何连通集 A，f(A)也连通。

问：

1：开函数是否必连续?

2：是否存在开的但不满足达布性质的函数?

3：若 2 的答案肯定，又是否有开的并且在任何区间上不满足达布性质的函数?

4：是否存在开的处处不连续的 Borel 函数?

〔注〕问题 1 已被否定地解决。

上期问题征解解答

（由窦昌柱、张　飞、张　航等解答）

1：〔证〕：归纳法。

$$n=1,\ 令\ a_1=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)dt-a_1 x$$

则 $\varphi(x+T)-\varphi(x)=0$　　命题成立。

设命题对 $n(\geq 1)$ 成立，则对 $n+1$ 时有：

$$\int_0^x f(t)(x-t)dt=\int_0^x (x-t)^n d\left(\int_0^t f(s)ds\right)$$

$$=-n\int_0^x (x-t)^{n-1}\left(\int_0^t f(s)ds\right)dt$$

$$=n\alpha_1\int_0^x t(x-t)^{n-1}dt+n\int_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt$$

由归纳假设，上式为

$n_1\alpha_1\int_0^x t(x-t)^{n-1}dt+b_1x^n+\cdots+\psi(x)$　（其中 $\psi(x)$ 是周期为 T 的函数）

由归纳法，知命题成立

本题还有一巧妙的解法，从中可看出解答者之匠心。

考虑关于 d_1，d_2，… d_n 的几个方程组

$$\sum_{i=1}^{n} d_i(KT)^i=\int_0^{KT}(KT-t)^{n-1}dt$$

$(K=1,\cdots,n)$

易知系数行列式。$\triangle\ \dfrac{n(n+1)}{2}\ n!\ \nu_n(1,2,\cdots,n)\neq 0$

第 十 期

目 录

新年寄语

一九八二年最后一天的日历已经从指间滑落，新的一年在钟声的陪伴下迈步向我们走来。

空中弥漫着《祝愿歌》的旋律，每个人唇角挂着玫瑰色的微笑，脸上跳跃着喜悦和信心。微风中你是否嗅到春的气息？值此良晨，《蛙鸣》编辑委员会的同志们恭贺大家新年好！希望大家在新的一年能多多供稿，共同培育《蛙鸣》，使这只嫩蛙鸣得更响，更脆！

*　*　*

近期《安徽青年报》上有一道新年游艺题，题目是这样的：

“试将一正六边形分成五块，拼成一个等积的正方形”。

我们看到许多同学为此费尽脑汁，冥思苦想，现特约801的姜献峰同学，对此题作了一解，供大家参考：

新年游艺题解答

姜献峰

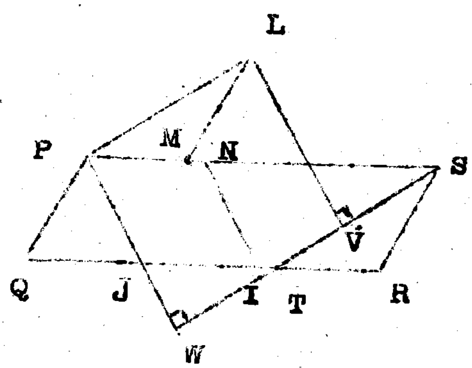
此题可用尺规作图法解出。

首先设正六边形边长为1，则易在直线上得线段ABC，其中$AB=3/2$，$BC=\sqrt{3}$，易求出AC之中点O，然后以O为圆心，以OA长为半径作圆，又过B作AC的垂线，交圆于D，由众所周知的相交弦定理即可知BD之长为$\sqrt{6\sqrt{3}}/2$。

通过面积相等的关系亦可知，欲作的正方形边长正是$\sqrt{6\sqrt{3}}/2$

另外，沿正六边形的对角线剪开，先拼成一个平行四边形（如附

图所示）给予标号P，Q，R，S，I，N如图上所示，然后以S为圆心，BD之长为半径作弧交QR于T，易知RT＜RI（亦即RT在RI内）。过P作ST之垂线，交ST延长线于W，PW交QI于J。



以PW为边长，易作一正方形口PWVL。

再在PN上取一点M，使PM＝RT，以下证明：

$\triangle PML \cong \triangle TRS$ ……………………… (1)

$\triangle LMG \cong \triangle PQL$ ……………………… (2)

$\triangle JWT \cong \triangle GVS$ ……………………… (3)

$PL = PW = PS\sin\alpha$　　又：$SR/\sin\alpha = ST/\sin 120^0$

故：

$$PL = PS \cdot \frac{SR}{ST}\sin 120^0 = \frac{3}{\sqrt{6\sqrt{3}/2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6\sqrt{3}}}{2}$$

$= ST$，又

$\angle LPM = \alpha = \angle STR$，$PM = TR$，$\therefore \triangle PML \cong \triangle TRS$成立。类似地可以证明(2)，(3)成立。

至此，就可以把六边形按图剪成五块，拼成了一等积的正方形。

（完）

实正定方阵的一个性质

811 窦自柱、李 冰

任给 n 阶实正定方阵 $S=(s_{ij})$，则对任一个二阶主子式 $S\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}$ 为正数，即 $s_{ii}s_{jj}>s^2_{ij}$，故有断言：S 的元素绝对值的最大者只能在主对角线上取得，把此命题深入一步，得到：

定理 1：实正定方阵 S 的 r 阶子式的绝对值的最大值只能在某个主子式上取到（$1\leq r\leq n$）

证明中用到两个引理，列举如下：

引理 1：设 $S_1>0$，$S_2>0$，则有

$$\det(S_1+S_2)>\max(\det S_1,\ \det S_2)$$

证明见许以超《代数学引论》第九章习题。

引理 2：令 $T=\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ B & I_{n-k} \end{pmatrix}$，$\tilde{S}=TST'$，

$1\leq k\leq n$ 则 $\tilde{S}\begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots & i_l \\ 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots & i_l \end{pmatrix}$

$$=\tilde{S}\begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots & i_l \\ 1 & \cdots\cdots & K & i_1 & \cdots\cdots & i_l \end{pmatrix}$$

$n\geq i_1,\ \cdots,\ i_l>k$

证：由Cauchy公式，$\tilde{S}\begin{pmatrix}1 & \cdots & K & i_1 & \cdots & i_l\\ 1 & \cdots & K & i_1 & \cdots & i_l\end{pmatrix}=\sum\limits_{\substack{1\leqslant s_1\leqslant\cdots\leqslant s_{K+l}\leqslant n\\ 1\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{K+l}\leqslant n}}$

$$T\begin{pmatrix}1 & \cdots & k & i_1 & \cdots & i\\ s_1 & \cdots & s_K & s_{K+1} & \cdots & s_{K+l}\end{pmatrix}\cdot S\begin{pmatrix}s_1 & \cdots & s_{K+l}\\ t_1 & \cdots & t_{K+l}\end{pmatrix}$$

$$T'\begin{pmatrix}t_1 & \cdots & t_t & \cdots & t_{u+l}\\ 1 & \cdots & R & i_1 & \cdots & il\end{pmatrix}=S\begin{pmatrix}1 & \cdots & K & i_1 & \cdots\cdots & i_l\\ 1 & \cdots & K & i_1 & \cdots\cdots & i_l\end{pmatrix}$$

现在证明定理，分两步：

1^0 . 任给子式 $S\begin{pmatrix}i_1 & \cdots, & i_r\\ j_1 & \cdots, & j_r\end{pmatrix}$ ，其中 $i_l \neq j_K$ ， $\forall k$ ，$l=1,\cdots,r$（因此 $2r\leq n$ ）。则总可经过若干步同步置换，将所给子式能移至S的右上角，同时容易知道同步置换后得到的主子式必和中某个主子式值相同。故可假设 $i_1,\cdots,i_r$ 为 $1,\cdots,r$，$j_1,\cdots,j_r$ 为 $n-r+1\cdots,n$ 而不失一般性。

考虑S之2r阶子矩阵 $\begin{pmatrix}1 & \cdots & r & n+1-v & \cdots & n\\ 1 & \cdots & r & n+1-r & \cdots & n\end{pmatrix}$，

记为 $S_0=\begin{pmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S'_{12} & S_{22}\end{pmatrix}>0$ ，则 $\det S_{12}=S\begin{pmatrix}1 & \cdots & r\\ n+1-r & & n\end{pmatrix}$

$S_{12}^2-S_{11}\ S_{22}>0$，若 $\det S_{12}=0$，则不用证了。设

……，则：$S_{22}-S_{12}' S_{11}^{-1} S_{12}>0$，由引理 1，$\det S_{22}>\det S_{12}' S_{11}^{-1} S_{12}$ ∴ $\det S_{11} \det S_{22}>\det^2 S_{12}$。命题成立。

2^0。设 $i_1, \cdots, i_r$ 和 $j_1, \cdots, j_r$ 中有 k 对值相等，类似 1^0 中说明可以假设：$i_1, \cdots, i_r=1, \cdots, k, k+1, \cdots, r$　$j_1, \cdots, j_r=1, \cdots, k, n-(r-k)+1, \cdots, n$。考察 S 之子矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & k, & k+1, & \cdots & r \\ 1 & \cdots & k, & n-(r-k)+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{记为 } S_0=\begin{pmatrix} S_{11} & \widetilde{S}_{12} \\ \widetilde{S}_{21} & \widetilde{S}_{22} \end{pmatrix}$$

则 $\det S_0=S\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$ 对应地分 S 为 $S=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}' & S_{22} \end{pmatrix}$

$\widetilde{S}_{12}$ 是 S_{22} 之子矩阵，令 $\widetilde{P}=\widetilde{S}_{22}-\widetilde{S}_{21} S_{11}^{-1} \widetilde{S}_{12}$，$P=S_{22}-S_{12}' S_{11}^{-1} S_{12}$，则 $P>0$，$\det S_0=\det S_{11} \times \det \widetilde{P}$，经验证：$\widetilde{P}$ 是 P 之子矩阵且不含 P 之对角元素，由 1^0 的结果：∃P 的一个 r－k 阶主子式

$$P\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{r-K} \\ i_1 & \cdots & i_{r-K} \end{pmatrix}>|\det \widetilde{P}|$$ 又

$$\begin{pmatrix} I_K & 0 \\ -S_{12}' S_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} I_K & 0 \\ -S_{12}' S_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$$

由引理 2，知：

$$S\begin{pmatrix}1 & \cdots & K & K+l_1 & \cdots & K+l_{r-K}\\ 1 & \cdots & K_1 & l_1+K & \cdots & l_{r-K}+k\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}S_{11} & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & K & K+l_1 & \cdots & k+l_{r-K}\\ 1 & \cdots & K & K+l_1 & \cdots & k+l_{r-K}\end{pmatrix}$$

$$=\det S_{11}\,P\begin{pmatrix}l_1 & \cdots & l_{r-K}\\ l_1 & \cdots & x_{r-K}\end{pmatrix}>|\det S_{11}\,\det\widetilde{P}|=|\det S_0|$$

〔证毕〕

作为一个运用，我们有下列：

定理 2：任给 n 阶半正定实方阵 $S\geq 0$，则 S 的任一个 r 阶主子式之绝对值不超过 S 的某一主子式。

证明：用微小摄动法，给定 r 阶子式 $S\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}$

$\because S\geq 0$，$\therefore S_m=S+\frac{1}{m}I>0$ $(m=1,2,\cdots)$ 由定理 1，$\left|S_m\begin{pmatrix}i_1 & \cdots & i_r\\ j_1 & \cdots & j_r\end{pmatrix}\right|<S_m\begin{pmatrix}K_1^{(m)} & \cdots & K_r^{(m)}\\ K_1^{(m)} & \cdots & K_r^{(m)}\end{pmatrix}$，

$\because$ $K_1^{(m)},\cdots,k_r^{(m)}$ 的组合数有限，故必存在一个 $k_1,\cdots,k_r$ 及一个子列 $\left\{\frac{1}{m_k}\right\}_{K=1}^{K=\infty}$，$\frac{1}{m_k}\to 0$ $(k\to+\infty)$ 使

$$|S_{mk}\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}| < S_{mk}\begin{pmatrix} K_1 & \cdots & K_r \\ K_1 & \cdots & K_r \end{pmatrix}$$，二边取极限

则得：

$$|S\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_r \\ j_1 & \cdots & j_r \end{pmatrix}| \leq S\begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_r \\ k_1 & \cdots & k_r \end{pmatrix}$$

〔证毕〕

注：上述两个定理分别对正定Hermite和半正定Hermite方阵也成立。

* * * *

两 个 猜 想

811　黄加武

先看下面两个命题：

命题 *1*。在平面上给定一个直径为 d 的圆，则若干个其宽度之和小于 d 的长方形纸带不能复盖住这个圆。

命题 *2*。在空间 R^3 中，把位于两个相距为 h 的平面之间的空间部分叫做一个厚度为 h 的层，则厚度之和小于 d 的若干个层不能复盖住直径为 d 的球。

下面给出证明，顺序是先证明命题 *2*，再证命题 *1*。

2。半径为 r 的球被平行平面相截，得一球面或球冠，如其高为 h，则其侧面积为 $2\pi rh$，这就是说，包含在厚度为 h 的层内

的球的球为部分面积$\le 2\pi r h$。因此包含在这若干个层内的球面部分的面积$S \le 2\pi r \sum h_i$（$\sum h_i$是所有层的厚度之和）已知$\sum h_i < 2r$，$\therefore S < 4\pi r^2$ = 球的表面积。

亦即我们能在球面上找到未被复盖住的点。

1、把圆看作是球在平面上投影，不妨设长方形长为$+\infty$，每个纸带可同一个层对应，层的厚度为纸带的宽度，由命题2而推知。

以上问题启发我们考虑下面两问题，本人猜测答案应是否定。

(1)平面上给定一有界域Ω，任意方向上用两平行线去夹Ω，得一宽度。设Ω的所有方向上的宽度之下确界为$d > 0$，问若干个宽度之和小于d的长方形纸条能否复盖Ω，特别地对等宽曲线所围区域又如何？

2、$\forall \alpha \in R^n$，$\alpha \neq 0$，α的正交补记为$\alpha^{\perp}$，它是$n-1$线线性空间。称$S = \{\alpha^{\perp} + x\alpha : a \le x \le a+h,\ a,\ h \in R,\ a > 0\}$为一厚度为$h$的层。问：若干个厚度之和小于$2r$的层能否复盖住球

$$O_n(r) = \{(x_1, \cdots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le r^2\}$$

* * *

Hall 定理及Menger 定理的新证明

许秋平

Hall 定理及Menger 定理是基础图论中的两个经典定理，Hall 定理的证明方法一般都是沿用Hall 当初发表此定理时

的证明方法。Menger 定理的证明一般需要最大流最小截定理，或者用 Whitney 定理及 Whitney 边图的概念加以证明。本文给出了此两定理不同于原有方法的证明。

Hall 定理　设 G 是可分图，顶集划分为 X，Y，G 中有把 X 的顶皆许配的匹配的充要条件是：任对 $S \subseteq X$，皆有 $|N(S)| \geq |S|$。

【证明】必要性：显然。

充分性：对 $|X|$ 行数学归纳：

$|X| = 1$ 时，结论显然成立。现假定 $|X| = n-1$ 时，结论已真，下面考虑 $|X| = n$ 时的情形：

$X = \{x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$

由归纳假设知，∃匹配 M 把 $X \setminus \{x_n\}$ 的顶皆许配，记 $N(x_n) = \{y_{1j} \mid j = 1, \cdots, k\}$

I）若 $\exists y_{1j}$（$1 \leq j \leq K$）未被 M 许配，则得证。

II）若 y_{1j}（$j = 1, \cdots, K$）皆已被 M 许配，设 y_{1j} 的对象是 x_{1j}，记 $N(\{x_{1j}\}) = \{y_{1jm_{1j}} \mid m_{1j} = 1, \cdots, k_{1j}\}$

a）若 $\exists y_{1jm_{1j}}$（$1 \leq m_{1j} \leq K_{1j}$，$1 \leq j \leq K$）未被 M 许配，则在 M 中用 $(x_n y_{1j})$，$(x_{1j} y_{1jm_{1j}})$ 代替 $(x_{1j} y_{1j})$ 即得证。

b）若所有 $y_{1jm_{1j}}$ 都已被 M 许配，设 $y_{1jm_{1j}}$ 的对象是 $x_{1jm_{1j}}$ 由条件：$\forall S \subseteq X$，$|N(S)| \geq |S|$ 知，至少存在一个 $x_{1j_0m_{1j_0}}$，（$1 \leq m_{1j_0} \leq K_{1j_0}$，$1 \leq j_0 \leq K$），使有 $y \in N(\{x_{1j_0 m_{1j_0}}\})$，但 $y \notin \{y_{1jm_{1j}} \mid 1 \leq j \leq K, 1 \leq m_{1j} \leq K_{1j}\}$

b_1）若 y 未被M许配，则在M中，用 $(x_n y_{ij})$，$(x_{1j_0}\ y_{1j_0}\ m_{j_0})$ $(x_{1j_0}\ \bar{m}_{j_0}\ \bar{y})$ 代替 $(x_{1j_0}\ y_{ij_0})$，$(x_{1j_0}\ m_{1j_0}\ y_{1jm1j_0})$ 即得证。

b_2）若 $\forall x_{1jm1j}$，$N(\{x_{1m1j}\})$ 中的项皆被M许配，则再施行b）之 b_2），由于 $|X|$ 是有限的，故一定存在某一步进行到 b_1）的情形，故得证

Menger 定理：G 2—边连通的充要条件是G之二项被边不相交的至少两轨连通.

证明：充分性：显然

必要性：$\forall u$，$v \in V(G)$，$\exists P_0(u,v)$：$uw_{01} \cdots w_{0n_0} V$，

$\because G-(uw_{01})$ 连通，故 $P_1(u,v)$：$uw_{11}\cdots w_{1n_1}V$

$uw_{11} \in E(P_0)$，设 $(w_{1ni_1}\ w_{1ni_1+1})$ 是 P_0，P_1 的第一条公共边。

$\because G-(w_1\ ni_1\ w_1\ ni_1+1)$ 连通，故存在 $P_2(w_1\ ni_1\ V)$：$w_1\ ni_1\ w_{21}\cdots w_2\ n_2\ V$，$(w_1\ ni_1\ w_{21}) \notin E(P_0)$，设 $(w_2\ ni_2\ w_2,\ ni_2+1)$ 是 P_0，P_2 的第一条公共边。$\because G-(w_2\ ni_2\ w_2,\ ni_2+1)$ 连通，故 $P_3(w_2\ ni_2,\ V)$：$w_2\ ni_2\ w_{31}\cdots w_3\ n_3\ V)$ $(w_2\ ni_2\ w_{31}) \notin E(P_0)$

如此下去，一定 $\exists m$，$\exists w_{m_1}=V$

则 $uw_{11}\cdots w_1\ ni_1\ w_{21}\cdots w_2\ ni_2 \cdots w_{(n+1),1}\cdots w_{(n+1),\ ni_{m-1}}$ V是连接 u，V且与 P_0 边相交的轨。

问题征解第一题解答

吴秀明

令 $H=H_1+iH_2$（H_1，H_2 皆为实方阵）

$\because H'=H$ $\therefore H_1'=H_1$，$H_2'=-H_2$，即 H_1 为实对称，H_2 为实斜对称，$\therefore \forall X\in R^n$，有 $X'H_2X=0$

$\because H$ 是半正定，可设 $H=P'P$

$\therefore X'H_1X=X'HX\geq 0$ $\therefore H_1$ 为半正定

若 $X'HX=0$，则 $(PX)'(PX)=0$，$\therefore PX=0\Longrightarrow$ $HX=0$，同样，如 $X'H_1X=0$，$\Longrightarrow H_1X=0$

设 $H_1X=0$，$X=X_1\ iX_2$；X_1，X_2 为实正向量，

$\therefore H_1X_1+iH\ X_2=0$，$\Longrightarrow H_1X_1=H_1X_2=0$

$\therefore X_i'HX_i=X_i'H_1X_i+iX_i'H_2X_i=0$（$i=1$，$2$）

$\therefore HX_1=HX_2=0$，$\therefore HX=0$

而 $HX=H_1X+iH_2X$，$\therefore H_2X=0$

$\therefore Ker\ H_1\subseteq Ker H\subseteq Ker\ H_2$

显然，如 $HX=0$，$H_2X=0$，必有 $H_1X=0$，$\therefore$

$Ker H\cap Ker\ H_2\subseteq Ker H_1$

$\therefore Ker H\cap Ker H_2=Ker H_1$

$$S=\frac{1}{2}(H+\bar{H})=H_1$$

$$K=-\frac{i}{2}(H-\bar{H})=H_2$$

$\therefore Ker S=Ker H\ \ Ker K\Longrightarrow rank\ H\leq rank S$

$rank K\leq rank S$

上期问题征解第二题解答

801　杜　强

事实上我们只需在复数域上考虑，可得到下列结论：

1^0 假定A可逆，则A满足条件当且仅当A的特征根至少有一个不是1的单位根。

2^0 A不可逆，设A相似于分块矩阵：

$$\begin{matrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad (A_1 \text{ 为可逆方阵})$$

则A满足条件 $\Longleftrightarrow$ A_1 的特征根至少有一个不是1的单位根。

证明：1^0 $\Longleftarrow$ 因若 $B^{-1}AB=A^r$，而A有特征根不是1的单位根，则 λ^{ri} ($i=0, 1, 2, \cdots$) 皆为A的特征根。∴ ∃ $i\neq j$，使 $\lambda^{ri}=\lambda^{rj}$，即得 $r^i=r^j$ ∴ $r=1$ 即

$B^{-1}AB=A$

$\Longrightarrow$ 设A满足条件且A之特征根皆为1的单位根，故存在正整数M，对A的所有特征根 λ_i 皆有 $\lambda_i^M=1$，因A非幂等阵，知A的Jordan标准形不是对角阵，设它有1个二阶以上Jordon子块：

$$J_i=\begin{bmatrix} a_i & 1 & & 0 \\ & a_i & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & a_i \end{bmatrix} m_i\times m_i \quad (i=1, 2, \cdots, l)$$

取 $r=M+1$，记 $J_i^r=\begin{pmatrix} a_i & G_2{}_i & \cdots & G_r{}_i \\ & a_i & \cdots & G_2{}_i \\ 0 & & \cdots & a_i \end{pmatrix}$ 定义：

$B_i=(b_{kj}^{(i)})_{M_i\times m_i}$ 使 $b_{11}^{(i)}\neq 0$，$b_{Kj}^{(i)}=0$

$(\forall k>j)$ $\quad b_{kj}^{(i)}=\sum\limits_{s=K-1}^{j-1} b_{K-1}^{(i)}\ G_{j+1-s}\ i \quad (\forall k\leq j)$

则 $B_i(J_i^r-a_iI_{m_i\times m_i})B_i^{-1}=(J_i-a_iI_{m_i\times m_i})$，即得 $B_i^{-1}J_iB_i=J_i^r$，于是 B，使 $B^{-1}AB=A^r\neq A$，这与 A 满足条件矛盾。

∴ 1^0 成立。

2^0 此可由同学们自行验证。

* * *

上期问题征解第三题解答

801 郜 云

先就 $n=2$ 的情形来证。

反证：若命题不成立，则 $|f_1(0)+f_2(0)|<1/4$

$|f_1(0)+f_2(1)|<1/4$，$|f_1(1)+f_2(0)|<1/4$，

$|1-f_1(1)-f_2(1)|<1/4$，而：

$|1-f_1(1)-f_2(1)|\geq 1-|f_1(1)+f_2(0)-f_2(0)-f_1(0)$

$+f_1(0)+f_2(1)| \geq 1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=1/4$，矛盾

故得证。

$n=3$ 时情况同理可证。

事实上，考虑 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 到 $\{0, 1\}$ 上的映射个数为 2^n，便知命题成立。

* * *

关于测度延拓的进一步讨论

801　王鸣嵩

引　言：给出一个环 $\mathbb{R}$ 上的测度 μ，我们可以利用补测度将它延拓到 σ－环 $\mathbb{R}^*$ 上使之成为完全测度。此过程详见夏道行等著的《实变函数论与泛函分析》（以下简称"课本"）。本文将围绕着 $\mathbb{R}^*$ 和 μ 的性质做些讨论。我们将沿用课本的记号，除非特别声明。

定理 1：设 $\mathbb{R}$ 是 σ－环，μ 是 $\mathbb{R}$ 上的完全测度，且 σ－有限，则 $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}$。

证明：只须证 $\mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$，$\forall E \in \mathbb{R}^*$，由课本中 105 页定理 3，知 $E=E_s-E_0$，其中 $E_s \in S(\mathbb{R})=\mathbb{R}$，$E_0 \in \mathbb{R}^*$，$\mu^*(E_0)=0$，由于 $\mathbb{R}$ 是 σ－环，故 $\mu^*(E_0)=\inf\{\mu(F) | E_0 \subset F \in \mathbb{R}\}$，于是任给自然数 n 有 $F_n \in \mathbb{R}$，使 $F_n \supset E_0$，$\mu(F_n)<\frac{1}{n}$，$\therefore E_0 \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathbb{R}$，$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)=\lim_{n\to\infty}\mu(F_n)=0$，但 μ 是完全测度，$\therefore E_0 \in \mathbb{R}$，$\therefore \mathbb{R}^*=\{F \cup E_0 \mid F \in \mathbb{R},$

$E_0 \in R^*, \mu^*(E_0)=0\} \subset \mathbb{R}$, □

定理1表明，外测度方法不能将完全测度延拓到更大的环上而使之仍为完全测度。

定理2：设μ_s是$\mathscr{S}(\mathbb{R})$上的测度，μ_s在环$\mathbb{R}$上的限制$\mu_s|\mathbb{R}=\mu_r$是σ－有限的，则$\bar{\mu}_s=\bar{\mu}_r$

证　显然，$\mathbb{H}(\mathbb{R})=\mathbb{H}(\mathscr{S}(\mathbb{R}))$，记之为$\mathbb{H}$，这样在$\mathbb{H}$上，$\mu_r^*$，$\mu_s^*$都有定义，且由课本105页定理3有：

$\mathbb{R}^*=\{F\cup E_0 \mid F\in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\ E_0\in \mathbb{H},\ \mu_r^*(E_0)=0\}$，

$\mathscr{S}^*(\mathbb{R})=\{F\cup E_0 \mid F\in \mathscr{S}(\mathbb{R}),\ E_0\in \mathbb{H},\ \mu_s^*(E_0)=0\}$。

我们要证的是$\mathbb{R}^*=\mathscr{S}^*(\mathbb{R})$及在其上，$\bar{\mu}_r=\bar{\mu}_s$。

$\because \mu_r$是σ－有限的，$\mu_r|R=\mu_r$，$\mathbb{R}^*\supset \mathscr{S}(\mathbb{R})$，故由课本91页定理3，$\bar{\mu}_r=\mu_s$在$\mathscr{S}(\mathbb{R})$上成立。

由课本104页引理2知，$E\in\mathbb{H}$，$\mu_s^*(E)=0 \Longrightarrow F\in \mathscr{S}(\mathbb{R})$，$F\supset E$，$\mu_s(F)=0$，$\Longrightarrow \mu_r^*(F)=\bar{\mu}_r(F)=\mu_s(F)=0$，$\Longrightarrow \mu_r^*(E)=0$，又$\mathscr{S}(\mathbb{R})\supset R$，$\Longrightarrow \mu_r^*\geq\mu_s^*$，$\therefore E\in\mathbb{H}$，$\mu_r^*(E)=0\Longrightarrow\mu_s^*(E)=0$　故$\mu_r^*(E)=0 \Longleftrightarrow \mu_s^*(E)=0$，由于知$\mathscr{S}^*(\mathbb{R})=\mathbb{R}^*$。

$\forall E_0\cup F\in\mathbb{R}^*$，$\bar{\mu}_r(E_0\cup F)=\bar{\mu}_r(F)=\mu_s(F)=\bar{\mu}_s(F\cup E_0)$，$\therefore$在$\mathbb{R}^*$上，$\bar{\mu}_s=\bar{\mu}_r$　#

定理2表明，通过外测度方法延拓得到的完全测度空间是由$\mathscr{S}(\mathbb{R})$及μ_s唯一确定的，即若$\mathscr{S}(\mathbb{R})=\mathscr{S}(\mathbb{R}_2)=\mathscr{S}$，$\mu_s|\mathbb{R}_1$，$\mu_s|\mathbb{R}_2$　σ－有限，则

$$(X,\ \mathbb{R}_1^*,\ \overline{\mu_s|\mathbb{R}_1})=(X,\ \mathbb{R}_2^*,\ \overline{\mu_s|\mathbb{R}_2})$$

定理3．设μ是$\mathbb{R}$上的σ－有限测度，R'　R为σ－环，

μ 是 $\mathbb{R}$ 上的完全测度，$\mu' \mid \mathbb{R}=\mu$，则有 $R^* \subset R'$ 且 $\mu' \mid R^*=\mu$。

证　由已知当然有 $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset R'$，$\mu' \mid \mathcal{S}(R)$ 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上测度。由课本 91 页定理 3 知 $\bar{M}=\mu'$ 在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上成立。

$\forall E_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R})$，$\mu^*(E_0)=0$，由课本 104 页引理 2 易得 $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，使 $\mu^*(F-E_0)=0$，且 $F \supset E_0$，根据外测度性质 $\mu^*(F) \leq \mu^*(F-E_0)+\mu^*(E_0)=0$，从而 $\mu'(F)=\bar{\mu}(F)=\mu^*(F)=0$，故 $E_0 \in R'$（$\because \mu'$ 是完全测度），从而 $\mathbb{R}^*=\{F \cup E_0 \mid F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ E_0 \in \mathbb{H}(\mathbb{R})\ \bar{\mu}^*(E_0)=0\} \subset R'$，而且 $\mu(F \cup E_0)=\bar{\mu}(F)=\mu'(F)=\mu'(F \cup E_0)$。

此定理表明，用外测度方法延拓得到"包含" $\mathbb{R}$ "最小"的完全测度空间。

下面这个例子说明可能通过其它延拓得到更"大"的完全测度空间。

设 X 为基本集，$|H|=n \geq 2$，令 $\mathbb{R}'=\{\phi, X\}$，$\mathbb{R}_2=2^X$ 为 X 之幂集，则 $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_1$，设 μ_2 是 $\mathbb{R}_2$ 上计数测度，$\mu_1=\mu_2 \mid R_1$，μ_2 可看作是 μ_1 的延拓。

注　叶怀安老师在为 801 讲授实变函数论时曾提到这个问题，并给出定理 1，2，本文中对定理 1 的证明沿用了老师的证法。

*　*　*

四顶点定理之逆

允　阳编译

本文编译自 Herman Gluck 的 The Conuerse to the Four Vertex Theorem〔1972〕，简记为 CFVT。

为叙述方便起见，我们谈到某映射有两极大和两极小时，还包含了极大值严格大于极小值的要求。

四顶点定理之逆，设 K 是从单位圆 S 到正实轴的连续映射，简记 S' 上的点为其参数 θ，$\theta \in [0, 2\pi]$，$K(\theta)$ 至少有两个极大值和极小值，则存在映射 $G: S' \longrightarrow R^2$，把 S' 映成一个单闭凸曲线 M'，使 M' 在 $G(\varphi)$ 处的曲率为 $K(\varphi)$，$\forall \varphi \in S'$。

证明的大体思路是：把这个问题化为一个有关单位圆上法向量场的一个拓扑问题。在具体的转化过程中，采用了阶梯函数逼近法。

引理：$K(s)$ 是周期为 L 的正函数，令 $\theta(s)=\int_0^s K(\sigma)\,d\sigma$，

则与 $K(s)$ 对应的曲线为单闭凸的 $\Longleftrightarrow \forall s_0 > 0$

$$\int_{s_0}^{s_0+L} \cos\theta(s)\,ds = 0 = \int_{s_0}^{s_0+L} \sin\theta(s)\,ds \tag{1}$$

证：（留给读者）。

因 $\dfrac{ds}{d\theta} = \dfrac{1}{K(s)} = \dfrac{1}{K(s)(\theta)}$，令 $\varphi = \theta - \pi/2$，

$N(\varphi) = (\sin\theta, \cos\theta)$，作变换 $ds = \dfrac{d\varphi}{K(s(\varphi+\pi/2))}$，

不妨仍记为 $\dfrac{d\varphi}{K(\varphi)}$，得到(1)的等价形式

$$\int_0^{2\pi} \frac{N(\varphi)}{K(\varphi)}\, d\varphi = 0 \qquad (1)$$

考虑 Gauss 映射 $\nu: M' \to S'$，即 $\forall P \in M'$ $\nu(P) = N(P)$，$N(P)$ 为 P 点处的单位外法向。

易知，若(1)成立，则令 $G = \nu^{-1}: S' \to M'$ 即为所求。若(1)不成立，则 ν^{-1} 不适合我们的要求，若设映射 G 为所求，考虑映射 $h = \nu G: S^1 \to S^1$ 这是一个同胚映射。注意到 M' 在 $\nu^{-1}(\varphi) = Gh^{-1}(\varphi)$ 处的曲率为 $Kh^{-1}(\varphi)$，从而应有

$$\int_0^{2\pi} \frac{N(\varphi)}{Kh^{-1}(\varphi)}\, d\varphi = 0 \qquad (2)$$

反之，如果我们能找到同胚映射 $h: S^1 \to S^1$ 使(2)成立，由引理知，存在一单闭凸曲线 M'，对高斯映射 ν 来说，M' 在 $\nu^{-1}(\varphi)$ 处的曲率为 $kh^{-1}(\varphi)$ 从而 $G = \nu^{-1}h$ 也是一个 S' 到 M' 的嵌入映射，使 M' 在 $G(\varphi)$ 处的曲率为 $K(\varphi)$，这样问题就化为寻找这样一个同胚映射 h。设 f 为一连续函数，我们称 $\{f(\varphi)N(\varphi): \varphi \in S'\}$ 为 S' 上的法向量场，令 $h: S' \to S'$ 为同胚映射，记 $f(\varphi)N(h(\varphi)) = fh^{-1}(h(\varphi))N(h(\varphi))$ 为 $f(\varphi)N(\varphi)$ 的形变，定义：

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)N(\varphi)\,d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos d\varphi,\ \int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin\varphi\, d\varphi\right)$$

为法向量场在 S' 上的积分。这样我们的问题又进一步化为 S' 上一个法向量场可否变形使其积分为零（ f 满足 C F V T 条件），即 C T V T 化成其等价形式：

定理：S' 上连续法向量场能变形使其变形后的积分值为零

$\Longleftrightarrow f: S' \to R^+$（正实轴）或为常值映射，或者至少有两个极大值及两个极小值。

记单位元上的同胚群的某子群为 D，考虑映射：$I: D \to R^2$

$$: I(h)(h \in D) = \int_{S'} f h^{-1}(\varphi) N(\varphi) d\varphi$$

由拓扑学知识知，若 D 构成紧开拓扑空间，则 I 连续，若 D 还是可缩的，且 D 的边界 Σ 在映射 I 下的象是围绕原点的一个闭曲线，那么由 D 的连续性和可缩性，知存在 $h \in D$，使 $I(h) = 0$，则 h 为我们所求。

定理的证明：

当 f 为常值映射时，由对称性即知：

$$\int_{S'} f(\varphi) N(\varphi) d\varphi = 0$$ 取 h 为恒同映射即可。以下设 f 有两个极大值和极小值。

由于极大值严格大于极小值，故在 S' 上沿逆时针方向上存在四点 φ_i^*，$i = 1, 2, 3, 4$．使 $f(\varphi_1^*) = f(\varphi_3^*) = n < m = f(\varphi_2^*) = f(\varphi_4^*)$（证明留给读者）令 $S' > 0$ 且充分小，先不妨假定小于 $\pi/2$，具体大小最后确定。记 E_1^*，E_3^* 分别为包含 φ_1^* 和 φ_3^* 的闭区间，使 $n - s < f(\varphi^*) < n + s$，$\forall \varphi^* \in E_1^*$ E_3^* 类似地，设 D_2^* 和 D_4^* 分别为包含 φ_2^* 和 φ_4^* 的闭区间使：$m - s < f(\varphi^*) < m + s$，$\forall \varphi^* \in D_2^*$ D_4^*

显然我们可使 E_1^*，E_3^*，D_2^*，D_4^* 互不相交。

令 $\varphi_i = \frac{\pi}{2}(i - 1)$，$i = 1, \cdots, 4$

我们选择包含这四个点的不相交的区间如下：

$E_1 = [13\pi/8 + S/4,\ 3\pi/8 + -S/4]$，$D_2 = [\frac{3\pi}{8},\ 2\pi/8]$

$D_4=[11\pi/8,\ 13\pi/8]$，$E_3=[5\pi/8+S/4,\ 1+\pi/8-S/4]$

令 $h^*: S' \to S'$ 为定向同胚映射，使 $h^*(\varphi_i)=\varphi_i^*$，$h^*(E_i)=E_i^*$，$h^*(D_i)=D_i$，从而我们有：

$$fh^*(\varphi_1)=fh^*(\varphi_3)=n<m=fh^*(\varphi_2)$$
$$=fh^*(\varphi_4) \quad \text{以及}$$

$$m-S<fh^*(\varphi)<m+S,\quad \varphi\in E_1 \cup E_3$$
$$m-S<fh^*(\varphi)<m+S,\quad \varphi\in D_2 \cup D_4$$

注意到 S' 除去 E_1，D_2，E_3 和 D_4 后，剩下的部分A为4个形区间的并，每个开区间的长度均为 $S/4$。

现在我们对 $fh^*: S'\to S'$ 来考虑它的阶梯函数 $g: S^1\to S^1$，g 定义为

$$g(\varphi)=\begin{cases} m, & \varphi\in D_2 \quad D_4 \\ m & \text{其它}\end{cases}$$

显然 g 是 fh^* 的 S－逼近，即 $|fh^*(\varphi)-g(\varphi)|<S$ 在 S^1 除去一测度为 S 的集成立。

现在我们将原问题中的 f 的 fh^* 代替，考虑映射，I_1：$D\to R^2$，$h\in D$，$I_1(h)=\int_{S'} fh^*h^{-1}(\varphi)N(\varphi)d\varphi$

因此问题化为寻找 $h\in D$，使 $I_1(h)=0$，$\forall(t,d)\in[-\pi/8,\ \pi/8]\times[1/2,\ 1]$，我们定义一个同胚 $h_{t,d}$ 记 $D=\{h_{t,d}|(t,d)\in[-\pi/8,\ \pi/8]\times[1/2,\ 1]\}$，我们只关心 $h_{t,}h$ 在 $D_2\cup D_4$ 上的作用

$$h_{x,d}(\varphi)=\begin{cases}\pi/2+d(\varphi-\pi/2)-t & \varphi\in D_2\\ 3\pi/2+(3/2-d)(\varphi-3\pi/2)+t, & \varphi\in D_4\end{cases}$$

容易证明可在 S' 的其它处作适当定义，使 D 是可缩的，并使 A 中各个区间的长度不增（证明留给读者）。显然 D 为紧开拓扑空间，从而 $I(h_t, d)$ 连续。

考虑 D 之边界 $\Sigma=\{h_t\ d \mid t=\pm\pi/8,\ 1/2\leq d\leq 1$ or $-\pi/2\leq t\leq\pi/8,\ d=1/2, 1\}$，易知 $I_1(\Sigma)$ 为 R^2 中一条闭曲线，我们希望原点能包含在这条闭曲线所围成的区域的内部。

考虑 $J_1\quad D\to R^2$，$J_1(h)=\int_{S'} gh^{-1}(\varphi)\bar{N}(\varphi)d(\varphi)$，

易知，$J_1(h)=\int_{S^1} mN(\varphi)d\varphi+\int_{h(D_2\cup D_4)}(m-n)\bar{N}(\varphi)d\varphi$

$$=\int_{h(D_2\quad D_4)}(m-n)\bar{N}(\varphi)d\varphi$$

由 D 的连续性，知 $J_1(h)$ 连续，$J_1(h)$ 与 S 选取无关。

我们看 $\int_{\lambda/2}^{\lambda/2}N(\varphi)d\varphi=\int_{\lambda/2}^{\lambda/2}(\cos\varphi,\ \sin\varphi)d\varphi$

$$=(2\sin\lambda/2,\ 0)=2\sin\lambda/2\bar{N}(o)$$

一般地，我们有 $\int_{\lambda/2+\varphi_0}^{\lambda/2+\varphi_0}\bar{N}(\varphi)d\varphi=2\sin\lambda/2\bar{N}(\varphi_0)$

从而知 $J_1(h_t,\ d)=(m-n)\times[2\sin\frac{d\pi}{8}\cdot N(\frac{\pi}{2}-t)$

$-2\sin(\frac{3}{2}-d)\frac{\pi}{8}N(\frac{3\pi}{2}-t)]$，令 $d'=(4d-3)\pi/32$，

则上式简化为

$$J_1(h_{t}, d)=4(m-n)\left(\sin\frac{3\pi}{32}\cos d' \sin t, \cos\frac{3\pi}{32}\sin d' \cos t\right)$$

易见 $J(h_{q}, 3/4)=0$，$h_{q}, 3/4 \in \Sigma$ $\min\{|J(h_{t}, d)|$

$h_{t}, d \in \Sigma\} = |J(h_{q}, 1)|=|J(h_{q}, 1/2)|=4(m-n)$

$\cos 3\pi/32 \sin \pi/32 = 0.375(m-n)$

现在我们来决定 s，我们的原则是使 $I_1(h_{t}, h)$ 和 $J_1(h_{t}, d)$ 的距离小于 $0.375(m-n)$，$\forall h_{t}, d \in \Sigma$

考虑 $|I_1(h_{t}, d)-J_1(h_{t}, d)| \leq \int_{S_1} | f h^{\times} h_{t}^{-1} d(\varphi)-$

$g h^{-1}_{t}, d(\varphi)| d\varphi$

容易证明：$f h^{\times} h_{t}^{-1} d$ 和 $g h_{t}^{-1} d$ 仍是 s 一逼近的，记 M $= \max|f(\varphi)|$，令

$$s = \frac{m-n}{3(2\pi+2M)},$$

则知 $|I_1(h_{t}, d)-J_1(h_{t}, d)| \leq s \cdot 2\pi+2M \cdot s \leq 2s(\pi+M)$

$\leq \frac{m-n}{3} < 0.375(m-n)$，显然 $0 < s < \pi/2$

从而知，对此 s，$I_1(\Sigma^1)$ 必为包含原点的一条封闭曲线（事实上，这条曲线与 $J_1(\Sigma)$ 同伦）。由 $f(D)$ 的连续可缩性，即知 $h \in D$，使

$$I_1(h)=\int_{S'} f h^{\times} h^{-1}(\varphi) N(\varphi) d\varphi = 0,$$ 即 $I(h h^{\times -1})=0$

$h h^{\times -1}$ 即为所求同胚映射。

【编者注】原文较长且繁，限于篇幅，在编译时不得不删去了许多细节。但仍尽力使证明意图清晰，直观，要想弄清楚这些

细节的读者，最好读读原文。

* * *

一个数论公式的补注

801 杜 强

文〔1〕中提到的行列式求值早为人所熟知，重新提出已失去意义，这里仅就〔1〕中提出的一个数论公式作一补注，通过下面的定理，给出二元可乘数论函数的一个性质。

定理：$f(i, j)$是二元数论函数，关于i，j对称，且对固定的i，它是j的可乘函数，则存在数论函数g，使$g[(i, j)] = f(i, j)$的充要条件是：$\forall i, m \in Z^+$，$i < m$，成立着 $\sum_{d|m} f(m/d, i)\mu(d) = 0$ 这里(i, j)是i，j的最大公约数。

【证明】：必要性即是〔1〕的引理

关于充分性，仅需证明：

$\forall$正整数对$\{i_1, j_1\}$与$\{i_2, j_2\}$，若$(i_1, j_1) = (i_2, j_2)$则$f(i_2, j_2)$。由

$$\sum_{d|p^l} f\left(\frac{p^l}{d}, p^m\right)\mu(d) = 0$$（这里p为素数，$m < l$）

即得：$f(p^l, p^m) = f(p^{l-1}, p^m)$，由此，即知，$\forall$素数$p$，$k$，$h \geq m$，有$f(p^h, p^m) = f(p^k, p^m)$ 又$f(i, j)$是关于i，j对称，对固定的i（或j），是j（或i）的可乘函数，若$(i_1, j_1) = (i_2, j_2)$，由前后结论便得$f(i_1, j_1) = f(i_2, j_2)$。因此，若$(i_1, j_1) = (i_2, j_2) = q$，则

$f(i_1, j_1) = f(d, j_1) = f(d, d)$, $f(i_2, j_2) = f(d, j_2) = f(d, d)$，亦即 $f(i_1, j_1) = f(i_2, j_2)$。充分性得证。

参考：

〔1〕《一类行列式的计算》，科大学报82。NO。4

* * *

本期问题征解

1。已知 $f(x)$ 是区间 I 上的二阶可微函数，记 $I_1 = \{x : f'(x) = 0, x \in I\}$ $I_2 = \{x : f'^2(x) = f(x) f''(x), x \in I\}$ 若 $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$，$I_1 \cup I_2 = I$，则 $f(x) = 0$ （部 云）

2。设 $A = \{x_1, \cdots, x_n\}$。$A_i \subseteq A$ $(i = 1, \cdots, n)$ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相同，试证明 $x \in A$，使 $A_1 \cup \{x\}$，$A_2 \cup \{x\}$，…，$A_n \cup \{x\}$ 仍不相同。

（许秋平）

3。试求同余方程组

$$\begin{cases} a_1 x \equiv a_2 & (\mathrm{mod}\ m) \\ a_2 x \equiv a_3 & (\mathrm{mod}\ m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_n x \equiv a_1 & (\mathrm{mod}\ m) \end{cases}$$

有解的充要条件。 （杜 强）

〔书评〕

读几遍《希尔伯特》

没有什么比真实更美好，唯有真实最可爱。

——Boileau

Constance Reid 所著《Hilbert》一书，为我们已展现了希尔伯特，好可夫斯基、克莱因等一大批第一流数学家的工作和生活。尤其可贵的是作者忠实地再现了他们的深刻思想、工作方法和风格，把我们带入了本世纪初的哥廷根。

几乎每一个近代数学研究领域，都有希尔伯特的足迹，在书中，我们可以体会到他的思想的精髓，可以了解问题的提出、解决、推广建立理论的过程，还可以了解应个数学学派之间的争论。

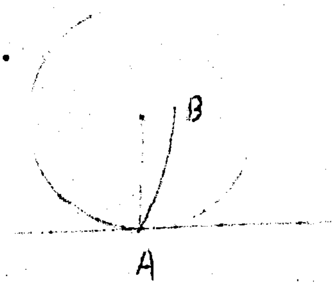
"这本书不仅将为数学家所神往，而且将以同样的魅力吸引对伟大科学家的经历感兴趣的每一个人"。

* * *

问 题 研 究

问题 1

如右图，$\overset{\frown}{AB}$ 是一般 C^2 类弧，A 的位置在原点，A 处的曲率圆已画出，且在 A 点的一个邻域内，曲率函数严格增，且弧 A B 上的曲率函数 A 点取最大值。（这里曲率指相对曲率）。若从 A 点算起到 B 点为止，切转角不超过 π，试证：弧 A B 含在 A 点处的曲率圆内。



问题 2：AB弧是 C^2 类的，曲率函数由A到B严格增。A点处曲率大于零，则弧AB必全部包含在A点处的曲率圆内。

问题 3．试确定 $\det(a_{ij})_{n\times n}$ 的最大值，这里 $a_{ij}=\pm 1$

[注 1]：目前已证的四项点定理的逆定理是在　　的线形线下得到的，并要求给的曲率函数至少具有四个值，极大值严格大于极小值。若问题1获证，则我们可以籍此证明：一非圆 C^2 类简单凸闭曲线，一定可按照逆时针方向以极大——极小——极大极小方式排列的四项点，且极大值严格大于极小值。从而可以改进已得的四项点定理之逆。

问题 1、2毕竟是猜想，直观上虽然似乎显然，但结论也许并不正确。若能从反反证明它，也是值得高兴的。

[注 2]：对问题3，就 n＝1，2，3，4得到的结果是，最大值分别为1，2，4，16。当 n＝5，6时，也得到了一些零碎的结果。

*　　*　　*

关于凸函数一种等价的定义

801　　杜　鸿

在这里，只讨论所谓连续的凸函数那一类。一般对凸函数有如下的定义。

定义（Ⅰ）　定义在区间 I 上的实值函数 f(x) 称为是指对 $\forall x_1\ x_2 \in I$，以及 $q_1>0$，$q_2>0$ $q_1+q_2=1$ 恒有：

$$f(q_1x_1+q_2x_2)\le q_1 f(x)+q_2 f(x_2)$$

不难证明上面所定义的函数 f(x) 在 I 内连续。

我们有下面的命题

命题（Ⅰ）：设$f(x)$在区间I上有定义，并在I内连续 $0<\lambda_0<1$，对$\forall x_1$，$x_2\in I$，有：$f(\lambda_0 x_1+(\lambda-\lambda_0)x_2)\leq\lambda_0 f(x_1)f(1-\lambda_0)f(x_2)$ 则$f(x)$是区间I上的凸函数。

证：先把问题转化：要证f为I上的凸函数，即证：对$\forall x_1$，$x_2\in I$，及$q_1>0$，$q_2>0$，$q_1+q_2=1$，成立着$f(q_1x_1+q_2x_2)\leq q_1f(x_1)+q_2f(x_2)$ 令

$x=q_1x_1+q_2x_2$。 $\therefore q_1=\dfrac{x_2+x}{x_2-x_1}$，$q_2=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$，

$x_1\leq x\leq x_2$，故问题转化为对$\forall x_1$ $x_2\in I$，及$\forall x\in[x_1\ x_2]$成立着

$$f(x)\leq\frac{x_2-x}{\lambda_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$$

令 $F(x)=f(x)-\dfrac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)-\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2)$ 即证对

$\forall x\in[x_1,x_2]$，$F(x)\leq 0$ 易证有事实：若x'，$x''\in[x_1,x_2]$，且$F(x')\leq 0$，$F(x'')\leq 0$ 则：$F(\lambda_0x'+(1-\lambda_0)x'')\leq 0$ 记$A=\{x\mid x\in[x_1,x_2]$ $F(x)\leq 0\}$ 由事实，以及$0<\lambda_0<1$ 可记A在$[x_1,x_2]$上也连续，由A在$[x_1,x_2]$上稠，又因$F(x)$为I上连续函数 $\therefore$在$[x_1,x_2]$上也连续，由A在$[x_1,x_2]$上稠，即可得$F(x)\leq 0$ 对$\forall x\in[x_1,x_2]$成立，由证明可知，x_1 x_2是I上任意两点，故$f(x)$为I上的 函数。

特别是令$\lambda_0=\dfrac{1}{2}$，则得一般课本内的结果，即如f在区间I上有定义，并在I内连续，且对$\forall x_1$ $x_2\in I$恒有

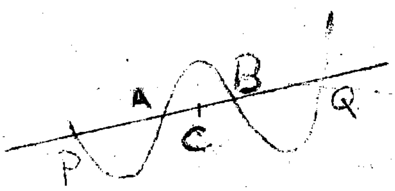
$f(\frac{x_1+x_2}{2}) \leq \frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$。则 f 是区间 I 上的凸函数。

由命题，得一凸函数等价的定义：定义（Ⅱ）：定义在区间 I 的实值函数 $f(x)$ 称为凸的，当 $f(x)$ 在 I 内连续，且 $0<\lambda_0<1$，对 $\forall x_1 \in I$ 有：

$$f(\lambda_0 x_1+(1-\lambda_0)x_2)\leq \lambda_0 f(x_1)+(1-\lambda_0)f(x_2)$$

有趣的是，命题(1)可用几何语言表述如下：命题(1)′ 若 $f(x)$ 在 I 上连续，又若曲线 $y=f(x)$ 的每一条弦除端点之外，至少有一点在曲线的上方或在曲线上，则每一条弦上的每一点皆在曲线的上方或曲线上。因而 $f(x)$ 为凸的。

证：假设 一弦 P Q，C 为弦上在曲线下的一点，设点 A 是 C P 与曲线最初相交的那一点，B 为 C Q 与曲线最初相交的那一点，由曲线的连续性知，弦 A B 除端点外全部在曲线之下，与假设矛盾，故每一条弦上的每一点皆在曲线的上方或曲线上。即 $f(x)$ 为凸的。



—