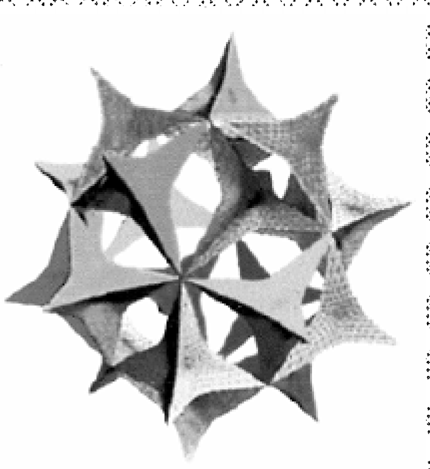
蛙鸣

第 50—51 期

特 刊



中国科学技术大学

《蛙鸣》编委会 主办

数学系学生会学习部

一九九四年十一月

其形虽小
其声也宏
充实基础
奏出强音

谷超豪

卷 首 寄 语

“其形虽小,其声也宏.”说的是可爱的青蛙. 谷超豪教授用这句话来赞美我们的《蛙鸣》.

确实,《蛙鸣》只是一份小小的刊物. 从十三年前的《蛙鸣》创刊号到今天的《蛙鸣》第5 0 期,她每期都只有几百个读者.

但是,《蛙鸣》却哺育了科大一代又一代的数学骄子. 数学系同学自己读《蛙鸣》、写《蛙鸣》,为它的数学问题冥思苦想,为她的兴盛衰落欢乐悲伤;许多许多的作者、编者和读者在《蛙鸣》中经受了锤炼,在《蛙鸣》中汲取了营养,成长为数学界和其他领域的实干家.《蛙鸣》和“蛙鸣”人一起走向了辉煌!

《蛙鸣》是大家的. 十三年来,学校和系里的老师一直关心着她,爱护着她. 校内外的数学界前辈和数学爱好者也关注着她. 尤其是现在,程艺教授代表数学研究所承诺向《蛙鸣》提供财力支持,并亲自给《蛙鸣》写稿;系机房向《蛙鸣》大开绿灯,提供一切方便;李尚志、单墫、张景中、王树禾、余红兵等老师也给《蛙鸣》提供了不少的问题、论文和各种好建议.

十三年了!《蛙鸣》走过了一段坎坷曲折的路. 但无论世事如何变迁,《蛙鸣》都会继续面向大家、面向基础,一往无前地走下去!《蛙鸣》永远是数学系同学和一切数学爱好者的朋友!

来吧,朋友,这是你我共有的天地!

主编: 何斯迈

责任编辑: 王凌峰　何斯迈　喻甫祥　高　云

本期编委会其他成员: 黄华君　马　翔　吕林军

目　录

浅谈物理对数学的促进

****
*　　　　　　　　　*
*　　治学谈　　　*
*　　　　　　　　　*
****

程 艺

这个话题说白了，实在是没什么好谈的. 因为谁都认识到，物理学对数学发展的促进是巨大的.

我之所以仍要谈论这个话题，是基于下面的考虑: 自从我念大学以来，就一直有一个印象，数学系的学生 (包括大学时代的我) 不大重视物理，认为物理没有数学"优美"、"严谨". 人们往往谈论数学在物理学中的作用较多，而谈论物理学对数学发展的影响较少. 对涉及到物理学的一些数学研究，甚至是那些来自物理学的概念和名词，都或多或少地有一种抵触情绪.

我想在此通过一些实实在在的例子，和年轻的读者们共同探讨一下物理学究竟对我们所热衷的数学产生了多大的影响.

最熟悉的例子莫过于微积分学了. 大家都知道，微积分学的创立与一位伟大的物理学家 I.Newton 是分不开的. 在他那个年代的前后，还不曾有明确的极限、无穷小等概念，但在物理学上，人们已开始研究速度和加速度时刻都在变化着的物理运动的规律. 比如求瞬时速度，就不能象求平均速度那样用距离除以时间，因为在任一瞬时，距离和时间都是 0，0/0 是没有意义的. 但运动物体在每一个瞬时的速度是一定存在的. 这是一个客观现象，因此，就必须建立一种能用来解决类似问题的数学方法，这就是我们今天所知道的微积分，说的直接一点，微积分的产生动因之一是来自物理的客观现象和物理研究的需求.

与微积分的发展几乎分不开的有关变分问题的早期工作和思想同样受到同时代物理观念的促进.

变分问题，用现在的语言说，就是要求从 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的函数 $y = y(x)$，$y_1 = y(x_1)$，$y_2 = y(x_2)$ 使得形如下面的积分

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \tag{1}$$

取到极大或极小. 在 Newton 所处的那个时代，人们对一些具体问题作了具体研究，如 Newton 研究了在轴向以常速运动而使运动阻力最小的旋转曲面必须具有什么样的形状等问题，还有测地线问题等等. 与此同时，物理学的一种新的概念给关于变分问题的研究提供了一个新的推动力. 这一概念就是最小作用原理. 其含义简单的说就是人们认识到大自然一定以最短捷的可能途径行动. 这种认识的起源可追溯到 Euclid 时代对光学的研究. 光线从 A 点经镜面反射到 B 点，其入射角与折射角相等. 这是因为光线沿这样一个途径从 A 点经镜面反射到 B 点所走过的距离比任何一个能够想象的路径都要短，对于一个物体. 直线或最短距离运动是它的自然运动. 种种现象表明，自然界的欲望是要求经济化. 这种物理的观念暗示着变分问题可能存在着更一般的原理. 在经典力学中，类

似(1)的积分如下

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)dt \tag{2}$$

其中 $\vec{q}=(q_1,\cdots,q_n)$, $\dot{\vec{q}}=\frac{d\vec{q}}{dt}$. L 称为 Lagrange 函数, 这是力学中的基本量, 用今天的数学语言, $L(\vec{q},\dot{\vec{q}},t)$ 是一个黎曼流形切丛上的函数. 不用多说, 变分原理已在今天的数学研究领域里具有巨大作用. 而它的产生与发展却受到物理学中最小作用原理强有力的推动. 这是物理观念影响数学的例子之一.

下面一个例子是我们大学课本上一定要学到的 Fourier 分析. 这个例子具有另一种特点. 让我们考察一下 Fourier 本人是如何开始这项研究的.

Fourier(1768-1830) 是一位十分出色的数学家, 象他同时代的其他科学家一样, Fourier 对其它一些实际问题也非常感兴趣. 他当时导出了一种用来刻划热传导过程的方程, 在一维情况下, 这个方程的形式是

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}=k^2\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \tag{3}$$

其中 k^2 是一个常数. 附以边界条件

$$T(0,t)=0,\qquad T(l,t)=0,\quad t>0 \tag{4}$$

和给定的初值条件

$$T(x,0)=f(x),\qquad 0<x<l. \tag{5}$$

为了求解方程(3), Fourier用到了变量分离法, 他令 $T(x,t)=\phi(x)\psi(t)$, 则 ϕ 和 ψ 分别满足

$$\phi''(x)+\lambda k^2\phi(x)=0 \tag{6}$$

$$\psi'(t)+\lambda\psi(t)=0 \tag{7}$$

边界条件转化为 $\phi(0)=0$, $\phi(l)=0$. 方程(6)的通解是 $\phi(x)=b\sin(\sqrt{\lambda}kx+C)$, 由 $\phi(0)=0$ 定出 $C=0$, 由 $\phi(l)=0$ 给出 λ 的限制, 即 $\sqrt{\lambda}$ 必须是 $\frac{\pi}{kl}$ 的整数倍, $\lambda_n=\left(\frac{n\pi}{kl}\right)^2$. 对应 λ_n, 方程(7)的解是一指数函数. 因此就得到无穷多个满足边界条件(4)的解

$$T_n(x,t)=b_n\exp\left(-\left(\frac{n\pi}{kl}\right)^2 t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{8}$$

由于热传导方程(3)是线性的, 因此诸解之和

$$T(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(x,t) \tag{9}$$

也是解并满足边界条件(4). 为了满足初值条件(5), 则必须有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{10}$$

于是, Fourier 面临着这样的问题: 对于一个给定的函数 $f(x)$, 能表示成三角级数吗? (当然还有别的问题.)

随后的发展, 也就形成了今天的 Fourier 分析. 这个例子告诉我们, 即使是一个简单的、基本的物理模型, 所蕴含的数学也是丰富的.

用我们今天的眼光去看二百年前的数学和数学家, 大家都会有种感觉, 那时的数学和其它学科, 特别是物理学的关系是极其密切的, 也只有到了近代, 才经常使用什么"基础数学", "应用数学" 等分类性名词. 尽管如此, 当今的数学与物理学的交叉与渗透, 仍然十分频繁.

举这样的例子, 不能不提到与著名物理学家杨振宁先生有关的两项研究.

第一项是杨-Mills(YM) 规范场及相关理论.

YM 规范场以及 YM 方程(由于需要过多地解释, 就不写出任何具体的公式了)的产生是基于物理学的考虑. 杨和 Mills 将 Maxwell 理论中决定电磁相互作用的 Abel 规范不变性推广到非 Abel 的规范理论. 这一理论对物理学的推动是巨大的, 然而从六十年代开始, 数学家们渐渐认识到 YM 规范场理论与数学的联系和在数学上的重要性同样不可估量. 1977 年, Atiyah, Hinchin 和 Singer 应用 Atiyah-Singer 指数定理去解决自对偶的规范场问题, 从而引起了许多数学家对 YM 场的兴趣. 随后不久, Atiyah 又写了一篇名为 "Yang-Mills 场中的几何" 的文章. 这位当代最著名的数学家之一以他敏锐的眼光注意到 YM 场在数学中的重要性. 1986年, Simon Donaldson 获得了 Fields 奖, 他所取得的许多重要结果是从 YM 场理论中导出的. 今天, "Yang-Mills Field" 这个名称不断地出现在数学研究的不同领域, 可以说已经完全 "数学化" 了.

杨振宁先生对数学的另一项伟大贡献是 "Yang-Baxter方程", 这是 "从物理的具体模型, 得到一种基本关系, 从而导致出丰富的数学结果" 这一过程最精彩的例子之一.

早在 1967 年, 杨先生在解决一种具有 δ 相互作用的一维量子多体问题时, 给出了一个十分简洁和基本的代数关系式. 简单地说就是一种形如

$$ABA=BAB$$

的矩阵方程. 这个方程是一维多体问题解决过程中的一个自恰条件. 几年后, R.J.Baxter 从另外一种物理模型给出了同样的关系式. 因此现在人们称之为 Yang-Baxter(YB) 方程. 八十年代, 数学家们开始研究这个方程. 前苏联年轻的数学家 Drinfeld 通过 YB 方程引进了 "量子群" 的理论. "量子群" 是一种非交换非余交换的 Hopf 代数. 它的名字非常具有物理色彩, 这是因为它与李代数的通用包络代数的 "量子化" (数学家习惯说是形变)有密切联系. Drinfeld 因为这项

工作以及其它一些工作获得了1990年的 Fields 奖. 同年获奖的另外两个人 Jones 和 Witten (物理学家)的工作也与 YB 方程有某种联系.

现在人们已越来越清楚地认识到, YB 方程可以与代数学中的 Jacobi 恒等式相当, 而后者正是李群李代数中的一个基本关系式. 从另一个角度看, 杨振宁先生所给出的 YB 方程的解就是普通的置换算子的"量子化". 而对应的结构可看成是"经典"数学结构的"量子化". "量子化"已不再是物理学的专有名词, 数学上也掀起了一股"量子化"的热潮, 代数量子化, 几何量子化, 等等. YB 方程的出现也使得一些相当有些年头的数学问题重新出现生机, 如辫子群、纽结理论、Hopf 代数等等. 本人曾于 89-90 年度在杨先生领导的在美国长岛的理论物理研究所从事过 YB 方程与辫子群的参数化的研究. 体会到一点该方程在数学中的奥妙.

如果说 YM 场和 YB 方程是物理中的基本关系对数学产生了巨大促进, 那么下面我将要提到的是一种物理现象对数学的影响, 这就是我目前主要从事的一项研究: 关于"孤立子"的数学理论.

"孤立子"起源于一种物理现象. 这种现象首次由一位英国的工程师 Russell 在一百多年前观察并记载下来. 简单地说就是一种不耗散的水波. 一百年前, 两位德国学者 Kerteweg 和 de Vries 给出了描述这种水波传播的方程

$$u_t = u_{xxx} + 6uu_x, \quad u = u(x,t)$$

这就是今天的 KdV 方程. 1967 年, 美国两个数学家用计算机模拟出 KdV 方程解的"粒子性", 即与普通波不一样的性质, 当两波相撞后, 各自仍保留其原有的形状, 并取名叫 Soliton (孤立子), 这个英文单词是他们自造的, 现在已被收入新版的韦氏大字典. 1974 年, 两位苏联学者将 KdV 方程推广到空间二维, 给出了被称为 KP 方程

$$u_{tx} = u_{xxxx} + 6(uu_x)_x + u_{yy}, \quad u = u(x,y,t)$$

且不谈具体的细节, 如果仅仅从表面上看, 无论是 KdV 还是 KP 方程, 其数学上的美感丝毫谈不上, 然而所蕴含的数学却是十分深刻的. 这两个方程解的变换群所对应的是一种无穷维的李代数. 所谓的"孤立子"解是常数 1 在这种代数下无穷小对称变换的轨道. 而周期解却与著名的 Schottky 猜想有关. 这个猜想是这样的: 通常给定一个亏格N 的 Riemann 面, 可以通过积分等手段构造出一个 Riemann-theta 函数. 但反过来如何, 至今人们还不知道. 而 KP 方程的周期解可用 Riemann-theta 函数表示. 令人惊讶的是, 当 theta 函数能表示 KP 的周期解就一定对应一个 Riemann 面. KP 方程成为"识别" Riemann-theta 函数的机器! 虽然离 Schottky 猜想的解决还有一定的距离, 但毕竟是前进了一大步. 令人不可想象的是, 如果没有物理学家提供物理上有意义的 KdV 或 KP 方程, 如果没有数学家认真研究这些具体的问题, 有哪位数学家会自己造这么个方程去"识别" theta 函数? 有关"孤立子"的数学还有很多很多, 如孤立子与微分几何

等, 但它们大多来源于形如 KdV 和 KP 这样一些刻划自然现象的物理模型. 它们表面上不具有常人所理解的数学美, 但真正的美与数学内涵却藏在深处.

这样的例子还有很多, 而且都说明一个道理: "任何物理中的基本规律、关系和现象一定蕴含着深刻的数学". 这一点也不奇怪, 因为数学也是一门研究自然规律的学问.

也许会有人问我: 如此说来数学家是不是要学很多物理? 我想借用杨振宁先生的话来回答. 当有人问及既然物理与数学有如此多的联系, 是不是物理学家应学更多的数学? 杨先生的回答是: "不! 如果物理学家学过多的数学, 他就会因数学的影响而丧失物理直觉. 物理学与数学象同一根茎上的两片叶子, 它们有一小部分共同的地方, 大多数是分开的." 我想对数学家也是如此, 数学家如学了太多的物理, 就会失去自己的目标、特点.

以我个人的体会, 我感到, 作为一名数学工作者, 重要的不是去学多少物理, 而是要能接受物理的观念, 能从物理学的结果中(特别是从那些简单、深刻和具有代表性的结果中)发现其数学问题并加以解决, 挖掘出其深刻的数学理论. 当然同等重要的是能将数学的结果反馈到物理中去(这大部分是理论物理学家做的事). 任何对涉及物理的知识的排斥情绪, 无疑都会限制自己的发展空间, 使自己失去一个大有可为的研究领域.

我们在学习数学的过程中, 对一些细节的仔细研究, 掌握高深的技巧和思想是十分重要的, 同时我们还应注意分析所学知识的起源, 掌握最原始的资料, 才能使我们在真正的研究中善于发现和解决一些具有深刻意义的数学问题.

我祝愿能有更多的未来的数学家, 在物理或其它学科为数学提供的广阔天地里发掘出更多、更好、更新的数学成果.

数学小品

关于抽象代数学中的一个约定

9201 何斯迈

在大多数抽象代数资料上均作了下述约定:

(1) 若 A 为含么环, 么元为 1_A . B 为 A 的子环, 且 B 也为含么环, 则 $1_B = 1_A$;

或: (2) 若 A 为含么交换环, 么元为 1_A , B 为 A 的含么子环, 则 $1_B = 1_A$.

很多同学均误以为这是一个显然的事实, 甚至当作定理使用. 下面给出一则反例, 说明在一般情形下这两个约定并不成立. 从而我们不可盲目地把这两个约定当作定理使用. 反例如下:

取 $A = Z[X]/(X^2 - X)$, $B = (X)/(X^2 - X)$, 则 B 是 A 的理想, 所以 B 是 A 的子环 (A 是含么交换环, 么元为 $\bar{1}$). 而 $\bar{x} \in B$, 且 $\forall \bar{f} \in B$, 因为 $f \in (x)$, 所以 $\overline{xf} - \bar{x} = \overline{(x-1)f} = 0$. 所以 $\bar{x}\bar{f} = \bar{x}$. 所以 $\bar{x} = 1_B$, B 为 A 的含么子环.

****
*   校外来稿   *
****

Z_n中的D.F集

单墫

摘要

若对集 $S \subset Z_n$ 中的每个元素 x, 均有 $2x \notin S$, 则称 S 为 $D.F(double-free)$ 集. 设 $f(n)=\max|S|$. 本文给出了计算 $f(n)$ 的公式.

关键词 $Z_n, D.F$ 集, 最大元数.

0 引言

设 G 为一加法群. 集 $S \subset G$, 如果对 S 中每个元素 x, 均有 $2x \notin S$, 则称 S 为 $D.F$ 集 (double-free set). 文[1]研究了 G 为自然数集 N 时, $N_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 中最大的 $D.F$ 集 S 的元数 $f(n)$, 给出了递推公式 $f(n)=\lceil\frac{n}{2}\rceil+f\lfloor\frac{n}{4}\rfloor$, 其中 $\lceil x\rceil$、$\lfloor x\rfloor$ 分别为天花板函数和地板函数.

本文讨论 G 是以自然数 n 为模的剩余类加群 Z_n 的情况, 研究了它的 $D.F$ 集的最大元数(记为 $f(n)$).

令 $f(n)=f(Z_n)=\max\{|S|: S$ 为 Z_n 中的 $D.F$ 集 $\}$.

1 计算 $f(n)$ 的公式

定理1 若 $n=2^\alpha$, α 为自然数, 则

$$f(n)=\lfloor\frac{2n}{3}\rfloor \tag{1}$$

即在 α 为奇数时,

$$f(n)=2^{\alpha-1}+2^{\alpha-3}+\cdots+1=\frac{1}{3}(2^{\alpha+1}-1) \tag{2}$$

在 α 为偶数时,

$$f(n)=2^{\alpha-1}+2^{\alpha-3}+\cdots+2=\frac{1}{3}(2^{\alpha+1}-2) \tag{3}$$

定理2 若 $n=2m$, m 为奇数, 则

$$f(n)=m \tag{4}$$

定理3 若 $n=4m$, 则

$$f(n)=2m+f(m) \tag{5}$$

定理4 若 $n=2^{2\alpha+1}m$, α 为自然数, m 为奇数, 则

$$f(n)=\frac{1}{3}(2^{2\alpha+2}-1)m \tag{6}$$

定理5 若 $n = 2^{2\alpha}m$, α 为自然数, m 为奇数, 则

$$f(n) = \frac{1}{3}(2^{2\alpha+1} - 2)m + f(m) \tag{7}$$

定理6 若 n 为奇数, 则

$$f(n) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{f_d} \lfloor \frac{f_d}{2} \rfloor \tag{8}$$

即
$$f(n) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{f_d}\lambda_d \tag{9}$$

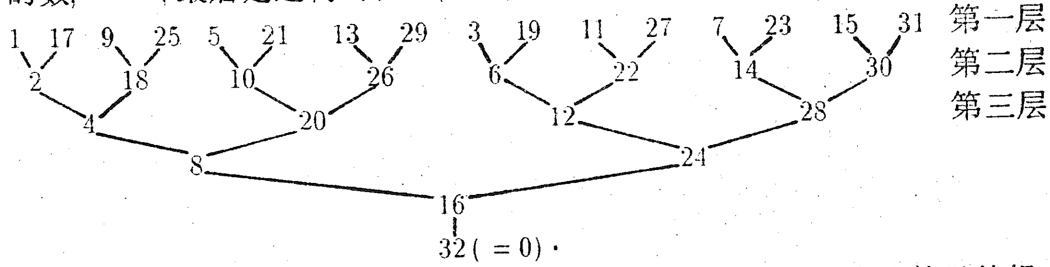
其中 φ 为 Euler 函数, f_d 为 2 在 Z_d^* 中的次数(即使 $2^f = 1$ 的最小正数), 而

$$\lambda_d = \begin{cases} 1, & 若 f_d 为奇数 \\ 0, & 若 f_d 为偶数 \end{cases} \tag{10}$$

2 定理 1 —— 5 的证明

将 Z_n 中的数用点表示, 如果点(数) x 与 y 满足 $y = 2x$, 则在 x, y 之间连一条线, 这样获得一个由 n 个点组成的图.

定理1 的证明 这时 2 的幂不会为 1, 所得的图是树, 最上面一层是奇数 $1, 3, \cdots, n-1$; 然后是 "半偶数", 即奇数的两倍; ……; 第 j 层是形如 $2^{j-1}(2k+1)$ 的数; ……; 最后是这树的根 0 (即 n). 如下图表示 $n = 32$ 情况:



取第 1,3,5,…… 层(注意根是不可取的. 因为 $0 = 2 \times 0$), 这些数显然组成 $D.F$ 集. 这集的元数即为 (1)、(2) 或 (3).

另一方面, 元数最大的 $D.F$ 集总是存在的 ($D.F$ 集仅有有限多个). 任一 $D.F$ 集, 若有第二层的数, 均可将它们换成两个第一层的、与它相连的数. 这时所得的集仍为 $D.F$ 集, 但元数增多, 因而可以认为这个 $D.F$ 集不含第二层的数. 类似地, 可以处理第 4,6,…… 诸层. 所以上面的 $D.F$ 集的元数 $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ 确为最大.

定理2 的证明 全部奇数的集 $\{1, 3, 5, \cdots, 2m-1\}$ 即是 Z_n 中的 $D.F$ 集 (因为 $2x$ 不再是奇数), 它的元数为 m.

另一方面, 若 x, y 为奇数并且 $2x = 2y$, 则 $x = y$ 或 $x = y + m$, 由于 $y + m$ 是偶数, 后一种情况不可能发生, 所以必有 $x = y$. 即由 $\{1, 3, 5, \cdots, 2m-1\}$ 到 Z_n 的映射 $x \to 2x$ 是单射. 形如 $(x, 2x)$, x 为奇数的数组共 m 个. 每个 $D.F$ 集在每一对 $(x, 2x)$ 中至多取一个, 从而 $f(n) \leqslant m$. 综合以上两个方面即得定理 2.

定理 3 的证明 这时 $\{x, x$ 为奇数 $\} \cup (\{y, 4|y\}$ 中的最大 $D.F$ 集) 是 Z_n 的 $D.F$ 集, 它的元数为 $2m + f(m)$.

另一方面, 最大的 $D.F$ 集一定不含半偶数, 含有全部奇数 (理由与定理 1 证明相同, 虽然这时的图未必是树), 所以 (5) 式成立.

由定理 3 及定理 1 立即得出定理 4、5.

3 定理 6 的证明

现在设 n 为奇数, n 的质因数分解为

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} \tag{11}$$

其中 p_i 为不同的奇素数, $\alpha_i \in N, i = 1, 2, \cdots, k$. 用 Z_n^* 表示 Z_n 中与 n 互素的数所成的集(缩系). 则有集的分拆

$$Z_n = \bigcup_{\beta_i} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \; Z^*_{p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}} \tag{12}$$

其中 $0 \leqslant \beta_i \leqslant \alpha_i,\ i = 1, 2, \cdots, k$.

(12) 中的各个集 $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} Z^*_{p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}}$ 互不相交, 并且由于 2 和 n 互素, x 和 $2x$ 必属于同一个集 $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} \; Z^*_{p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}}$ 中,

显然 $$p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k} Z^*_{p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}} \cong Z^*_{p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}}$$

$$\text{所以} f(n) = \sum f(Z^*_{p_1^{\alpha_1-\beta_1} p_2^{\alpha_2-\beta_2} \cdots\cdots p_k^{\alpha_k-\beta_k}}) \tag{13}$$

从而问题化为计算 $f(Z_n^*)$.

现在讨论 Z_n^* 中的 $D.F$ 集, 仍将 x 与 $2x$ 用线相连构成图.

设 2 在 Z_n^* 中的次数为 f, 即 $2^f = 1$, 并且 f 是这种等式成立的最小正整数, 则这时图由 $e = \dfrac{\varphi(n)}{f}$ 个圈组成 (熟知 $f|\varphi(n)$), 每个圈的长为 f, 在每个圈中可以而且至多可以取 $\lfloor \dfrac{f}{2} \rfloor$ 个数组成 $D.F$ 集, 于是

$$f(Z_n^*) = \frac{\varphi(n)}{f} \lfloor \frac{f}{2} \rfloor = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi(n), & \text{若} f \text{为偶数} \\ \dfrac{1}{2}(\varphi(n) - e), & \text{若} f \text{为奇数} \end{cases} \tag{14}$$

回到 $f(n)$, 由 (13)、(14) 得

$$f(n) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(n)}{f_d} \lfloor \frac{f_d}{2} \rfloor \tag{8}$$

其中 f_d 为 2 在 Z_d^* 中的次数

由于 $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$, 所以 (8) 可化为

$$f(n) = \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{f_d} (\frac{f_d}{2} - \frac{\lambda_d}{2}) = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{d|n} \frac{\varphi(d)}{f_d} \lambda_d \tag{9}$$

定理 6 证毕。

注 在利用定理 6 (公式 (8) 或 (9)) 计算 $f(n)$ 时, 需先定出 f_d. 熟知

$$f_{p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}}=[f_{p_1^{r_1}},f_{p_2^{r_2}},\cdots,f_{p_k^{r_k}}] \tag{15}$$

$$f_{p_1^{r_1+1}}=f_{p_1^{r_1}} \text{ 或 } p_1 f_{p_1^{r_1}} \tag{16}$$

所以可以先算出 f_{p_1} 再逐步算出 f_d. 这一过程可利用下面的推理而大大简化.

设 2 对于模 $p_1,p_2,\cdots,p_s$的次数 $f_{p_1},f_{p_2},\cdots,f_{p_s}$ 为奇数, 对于模 $p_{s+1},p_{s+2},\cdots,p_k$ 的次数 $f_{p_{\alpha+1}},f_{p_{\alpha+2}},\cdots,f_{p_k}$ 为偶数, 则由于 (15)、(16), 在 $(d,p_{s+1}\cdots p_k)>1$ 时, f_d 为偶数, $\lambda_d=0$, 在 $(d,p_{s+1},p_{s+2},\cdots,p_k)=1$ 时, f_d 为奇数, $\lambda_d=1$, 从而 (9) 可化为

$$f(n)=\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{d|n\\ d>1}}\frac{\varphi(d)}{f_d}\lambda_d=\frac{n-1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{\substack{1<d=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}\\ 0\leqslant r_1\leqslant\alpha_i\\ (i=1,2,\cdots,s)}}\frac{\varphi(d)}{f_d} \tag{9'}$$

定出 $f_{p_1},f_{p_2},\cdots,f_{p_s}$ 后, 可定出

$$f_{p_i^2}=\begin{cases} f_{p_i}, & \text{若} p_i^2\,|\,2^{f_{p_i}}-1\\ p_i f_{p_i}, & \text{若} p_i^2\nmid 2^{f_{p_i}}-1\end{cases} \tag{17}$$

然后利用定理: 若 $p_i^{r_i}\|2^{f_{p_i^2}}-1$, 则

$$f_{p_i^{r_i}}=\begin{cases} f_{p_i^2}, & \text{若} 2\leqslant r_i\leqslant i\\ p_i^{r_i-1}f_i^{p_2}, & \text{若} r_i>i\end{cases} \tag{18}$$

便可定出一切 $f_{p_i^{r_i}},(i=1,2,3,\cdots,s)$ 及 $f_d=f_{p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots p_s^{r_s}}$.

参考文献

1 Edward T.H.Wanh.On Double-Free Sets of Integers.discrete math.(to appear)

2 Wallis W.D. Anne Penfold Street. Jennifeer Seberry Wallis, Combinatorics: Room-Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices; Lecture Notes in Mathematics, Vol.292, Spinger-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York(1972).

转载自《南京师大学报》(自然科学版) Vol.14 No.2 1991.

研究与讨论

关于一簇曲线渐进性质的细致分析

9201 何斯迈

《常微分方程》第三章习题 8 (P134) 是这样的:

指出方程

$$\frac{dy}{dx} = (1-y^2)e^{xy^2} \tag{*}$$

的每一个解的最大存在区间及 x 趋于区间端点时的性状.

原有的解答 (即(一)) 只作了比较粗糙的估计, 得出了原题的解, 但对曲线簇进一步的性状未能进行很好的描述. 本文试图通过 (二) 中的整体性方法给出此曲线簇的分类并描述出每一类的渐近性质.

(一) 容易看出 φ_0: $y \equiv 1$ 和 φ_0': $y \equiv -1$ 为 (*) 的平凡解, 又易验证 (*) 满足解的唯一性条件, 所以可将曲线分成:

$$A = \{l:\ y = \varphi(x) | \forall x \in \varphi^{-1}(R),\ \varphi(x) > 1\}$$
$$B = \{l:\ y = \varphi(x) | \forall x \in \varphi^{-1}(R),\ \varphi(x) < -1\}$$
$$C = \{l:\ y = \varphi(x) | \forall x \in \varphi^{-1}(R),\ -1 < \varphi(x) < 1\}$$

及 $\{\varphi_0'\}$, $\{\varphi_0\}$.

(见附图)

设 $C_1 \in \varphi^{-1}(R)$, 一般性地得到 (*) 等价于 (*1):

$$y = \frac{\exp\left(2\int_{C_1}^{x} e^{xy^2}dx + \ln\frac{|C_1+1|}{|C_1-1|}\right) - \mathrm{sgn}(1-C_1^2)}{\exp\left(2\int_{C_1}^{x} e^{xy^2}dx + \ln\frac{|C_1+1|}{|C_1-1|}\right) + \mathrm{sgn}(1-C_1^2)}. \tag{*1}$$

具体证明请读者自证.

(A) $\because \dfrac{dy}{dx} = (1-y^2)e^{xy^2} < 0$, $\quad\therefore \varphi(x)$ 严格降.

又 $\forall x \in \varphi^{-1}(R)$, $\varphi(x) > 1$, $\quad\therefore \varphi(x)$ 的定义区间右侧无界.

在 (*1) 中令 $x \to +\infty$ 知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x) = 1$.

将 A 分拆为 $A_1 = \{l:\ y = \varphi(x) | \varphi^{-1}(R) = \mathrm{R}\}$ 及 $A - A_1 = A_2$.

若 $\varphi \in A_1$, 假设 $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x) = +\infty$,

则 $\exists\, t_0 \in R$, $\forall\, t \leqslant t_0$, $y \in R$, 有 $y^2e^{ty^2} < \dfrac{1}{2}$.

则 $\forall\, x \leqslant t_0$, $\left|\dfrac{dy}{dx}\right| \leqslant y^2e^{xy^2} < \dfrac{1}{2}$.

$\therefore y \leqslant -\dfrac{x}{2} + \varphi(0) + \dfrac{t_0}{2}$,

$\therefore \left|\dfrac{dy}{dx}\right| \leqslant \dfrac{1}{4}(x-K_0)^2e^x$, $K_0 = 2\varphi(0) + t_0$.

$\therefore \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$
$= \int_{t_0}^{-\infty}\frac{dy}{dx}dx+\varphi(t_0)$
$\leqslant \varphi(t_0)+\int_{t_0}^{-\infty}(x-K_0)^2e^x dx$
$< +\infty$

$\therefore$ $\varphi(x)$ 在存在区间左侧有水平渐近线 $l_\varphi^{A_1}$.

$\therefore$ A_1 中解最大存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

$x\to+\infty$ 时, $\varphi(x)\to1$;

$x\to-\infty$ 时, $\varphi(x)\to a_\varphi$, 其中 $1<a_\varphi<+\infty$, φ 严格降.

若 $\varphi\in A_2$, 设 $\varphi^{-1}(R)=(a_\varphi,+\infty)$.

若 $a_\varphi<0$, 则 $\exists C\in R^+$, $\forall y\in R$, $t\leqslant a_\varphi$ 有 $y^2e^{ty^2}\leqslant C$, 则 $y\leqslant -Cx+Ct_0+\varphi(t_0)$.

$\therefore \left|\frac{dy}{dx}\right|\leqslant(-Cx+Ct_0+\varphi(t_0))^2e^x$,

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)\leqslant\varphi(t_0)+\int_{t_0}^{-\infty}(-Cx+Ct_0+\varphi(t_0))^2e^x<+\infty$.

由《常微分方程》定理 3.2 知, φ 的存在区间负向无界, 矛盾.

(否则 φ 的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$, 则 $\varphi\in A_1$)

$\therefore$ $a_\varphi\geqslant0$.

即 A_2 中解存在区间为 $(a'_\varphi,+\infty)$, 其中 $a'_\varphi\geqslant0$.

$x\to+\infty$ 时, $y\to1$;

$x\to a'_\varphi$ 时, $y\to+\infty$.

(B) $\because \frac{dy}{dx}<0$. $\therefore$ φ 严格减.

又 $\forall x\in\varphi^{-1}(R)$, $\varphi(x)<-1$,

$\therefore$ $\varphi^{-1}(R)$ 负向无界.

又 $\int_{-\infty}^0 e^{xy^2}dx<\int_{-\infty}^0 e^x dx<+\infty$.

$\therefore \lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)<-1$.

记 $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=b_\varphi$, 设 $\varphi^{-1}(R)=(-\infty,b'_\varphi)$.

则 $\forall y<b_\varphi$, $\left|\frac12\ln\frac{-(1+y)}{1-y}\right|<\frac12\left|\ln\frac{-(1+b_\varphi)}{1-b_\varphi}\right|$.

$\therefore \int_{x_0}^{+\infty}e^{xy^2}dx$ 有界.

$\therefore$ $b'_\varphi<+\infty$.

$\therefore$ B 中的解 φ 的存在区间为 $(-\infty,b'_\varphi)$, $b'_\varphi<+\infty$.

$x\to-\infty$ 时, $y\to b_\varphi$. 其中 $-\infty<b_\varphi<-1$.

$x\to b'_\varphi$ 时, $y\to-\infty$.

(C) 易知此时 $\forall\varphi\in C$. φ 的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$.

又 $\frac{dy}{dx}=(1-y^2)e^{xy^2}>0$, $\therefore$ φ 严格增.

$\because \int_0^{+\infty}e^{xy^2}dx\geqslant\int_0^{+\infty}dx=+\infty$,

$\therefore \frac12\ln\frac{1+y}{1-y}\Big|_0^{+\infty}=\int_0^{+\infty}e^{xy^2}dx=+\infty$.

$\therefore x \to +\infty$ 时, $y \to 1^-$.

若记 $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = c_\varphi$, 则 $-1 \leqslant c_\varphi < 1$.

若 $c_\varphi = -1$, 则 $\exists x_0 < 0$, $\varphi(x_0) \leqslant \frac{1}{2}$.

$\because \left|\int_{x_0}^{-\infty} e^{xy^2} dx\right| \leqslant \int_{-\infty}^{x_0} e^{\frac{1}{4}x} dx = 4e^{\frac{1}{4}x_0} < +\infty$.

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\ln\frac{1+c_\varphi}{1-c_\varphi} = -\int_{-\infty}^{x_0} e^{xy^2} dx + \frac{1}{2}\ln\frac{1+y_0}{1-y_0} > -\infty \qquad (y_0 = \varphi(x_0)).$$

$\therefore c_\varphi > -1$.

$\therefore C$ 中的解 φ 的存在区间为 $(-\infty,+\infty)$,

$x \to -\infty$ 时, $y \to c_\varphi$, 其中 $-1 < c_\varphi < 1$;

$x \to -\infty$ 时, $y \to 1^-$.

注 1: A_2 非空.

证明: $\exists y_0 > 0$, $\forall y \geqslant y_0$, $y^2 < (y^2-1)e^y$, 取 $y_0' = \max\{y_0, 2\}$.

考虑从 $(1, y_0')$ 点延拓出的解 φ_0.

若 φ_0 与 $X_1 = \{(x,y) \in R^2 \mid xy = 1,\ 1 \geqslant x > 0\}$ 交于点集 X_0,

记 $x_0 = \sup X_0$, 则 $\varphi_0(x_0) = \frac{1}{x_0}$,

$\therefore \varphi_0'(x_0) > -\frac{1}{x^2}$, (否则 $(x_0, 1)$ 中仍有交点.)

即 $(1-y_1^2)e^{x_0y_1^2} > -y_1^2$, $y_1 = \frac{1}{x_0}$,

$\therefore y_1^2 > (y_1^2-1)e^{x_0y_1^2} = (y_1^2-1)e^{y_1}$.

而$\because x_0 < 1$, $\therefore y_1 > y_0'$ $(\varphi_0(x_0) > \varphi_0(1))$, 矛盾.

$\therefore \varphi_0$ 与 $\{(x,y) \in R^2 | xy = 1,\ x > 0\}$ 无交点 (在 $x \leqslant 1$ 处).

$\therefore \{(x, \varphi_0(x))\}$ 在第一象限, 即 φ_0 在第一象限.

$\therefore \varphi \in A_2$, 即 A_2 非空.

(二):

(A_2): $\forall\ 0 \leqslant a < b < +\infty$, 取 $y_0'' = \max\{y_0,\ 1/b\}$.

记 $t(c) = \int_c^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y^2-1} dy$, 则 $t(y_0'') < +\infty$.

$\therefore \exists\ c_0 \geqslant y_0''$, $t(c_0) < b - a$.

取从 (b, c_0) 延拓出的解 $\varphi_{(b,c_0)}$,

则类似注 1 知 $\varphi_{(b,c_0)} \in A_2$, 且有: 若记 $x = \alpha_0$ 为 $\varphi_{(b,c_0)}$ 的竖直渐近线,

$$\text{则} \qquad b - \alpha_0 = \int_{c_0}^{\infty} \frac{e^{-xy^2}}{y^2-1} dy < \int_{c_0}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y^2-1} dy < b - a$$

$\therefore \alpha_0 > a$,

$\therefore \exists \varphi_0 \in A_2$, φ_0 的竖直渐近线为 $x = \alpha_0 \in (a, b)$.

由文 [1] 中的定理 C 知 A_2 中解的竖直渐近线集是 R^2 中的闭集.

$\therefore \{\alpha_\varphi | \varphi \in A_2,\ x = \alpha_\varphi$ 为 φ 的竖直渐近线$\} = [0, \infty)$.

又若 $\varphi_1, \varphi_2 \in A_2$, 且存在 $x_1 < x_2$, $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2)$.

则 $\forall y > \varphi_1(x_1)$, 有 $\varphi_1^{-1}(y) < \varphi_2^{-1}(y)$.

$\therefore \varphi_1'(\varphi_1^{-1}(y)) > \varphi_2'(\varphi_2^{-1}(y))$.

$\therefore \forall y > \varphi_1(x_1)$, $\varphi_2^{-1}(y) - \varphi_1^{-1}(y) > x_2 - x_1$.

$\therefore \alpha_{\varphi_2} - \alpha_{\varphi_1} > x_2 - x_1 > 0$.

$\therefore \alpha_\varphi$ 与 φ 一一对应 ($\forall \varphi \in A_2$, $\alpha_\varphi \geqslant 0$).

由此给出映射 Ψ_{A_2}: $D_{A_2} \to R$, $(x, y) \to a_{\varphi(x,y)}$.

其中 $\varphi_{(x,y)}$ 为由 (x, y) 延拓出的解, Γ 为使 $a_\Gamma = 0$ 的解, D 为 Γ 的上方部分 (含Γ) .

$$\therefore \left.\frac{\partial \Psi_{A_2}}{\partial x}\right|_{(x_0,y_1)} = \lim_{y\to+\infty} \left.\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi^*(y, x_0, y_0)\right|_{(x_0,y_0)=(x_1,y_1)} = \exp\left(\int_{y_1}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-X(t)t^2}}{t^2-1}dt\right)$$

$\therefore$ 其中 $x = \varphi^*(y, x_0, y_0)$ 为从 (x_0, y_0) 延拓出的解, $X(t) = \varphi^*(t, x_0, y_0)$.

$\forall (x, y) \in D - \Gamma$, $\exists c > 0$, 使得 $\forall t \in R$, $t^2 e^{-a_{\varphi(x,y)} t^2} < c$.

$$\therefore \int_{y_1}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-X(t)t^2}}{t^2-1}dt < c\int_{y_1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} < +\infty.$$

$\therefore \dfrac{\partial \Psi_{A_2}}{\partial x}$ 在 $(x_1, y_1) \in D - \Gamma$ 处存在且对 x, y 连续.

$\therefore \dfrac{\partial \Psi_{A_2}}{\partial y}$ 在 $(x_1, y_1) \in D - \Gamma$ 处存在且对 x, y 连续.

$\therefore \dfrac{\partial \Psi_{A_2}}{\partial x}, \dfrac{\partial \Psi_{A_2}}{\partial y}$ 在 D 上存在且对 x, y 连续.

注 2:

对曲线簇 B, A_1, C 也可作类似的推导得到如下的结论:

Ψ_{A_1}, Ψ_B, Ψ_C^1, Ψ_C^2, D_{A_1}, D_B, D_C 的定义类似 Ψ_{A_2} 及 D_{A_2}, (见附图)

则有 Ψ_{A_1}, Ψ_B, Ψ_C^1, Ψ_C^2 对不同的解曲线上的点得到不同的值,

且有 $\Psi_{A_1} \in C^1(D_{A_1})$, $\Psi_B \in C^1(D_B)$, $\Psi_C^1 \in C^1(D_C)$, $\Psi_C^2 \in C^1(D_C)$,

$\Psi_{A_1}(D_{A_1}) = R^+$, $\Psi_B(D_B) = (-1, +1)$, $\Psi_C^1(D_C) = R^-$, $\Psi_C^2(D_C) = R$.

(Ψ_C^1 为水平渐近线位置, Ψ_C^2 为竖直渐近线位置.)

另外还可以得到这些函数其它的一些良好性质并可用来描述曲线簇的渐近行为, 这里仅对 Ψ_{A_1} 的唯一性 (相对于解曲线的唯一性) 给出证明.

证: 首先用类似 Ψ_{A_2} 的方法得到 $\Psi_{A_1}(D_{A_1}) = R^+$.

若 $\exists c_0 > 0$, $\varphi_1 \neq \varphi_2 \in A_1$, $\Psi_{A_1}(\varphi_1) = \Psi_{A_1}(\varphi_2) = \{c_0\}$. 不妨设 $\varphi_1 < \varphi_2$,

则 $\forall x_0 \in R$, $\varphi_1(x_0) \geqslant y_0 \geqslant 2\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)$, 记 φ_3 为从 (x_0, y_0) 延拓出的解, $(y_0 \geqslant 0)$

则 $\forall x < x_0$, $2\varphi_1'(x) - \varphi_2'(x) \geqslant \varphi_3'(x) \geqslant \varphi_1'(x)$,

$\therefore 2\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \geqslant \varphi_3(x) \geqslant \varphi_1(x)$,

$\therefore \Psi_{A_1}(\varphi_3) = \Psi_{A_1}(\varphi_1) = \{c_0\}$.

依次递降知 $\forall 0 < y_0 < \varphi_2(x_0)$, φ 为从 (x_0, y_0) 延拓出的解,

有 $\Psi_{A_1}(\varphi)=\{c_0\}$.

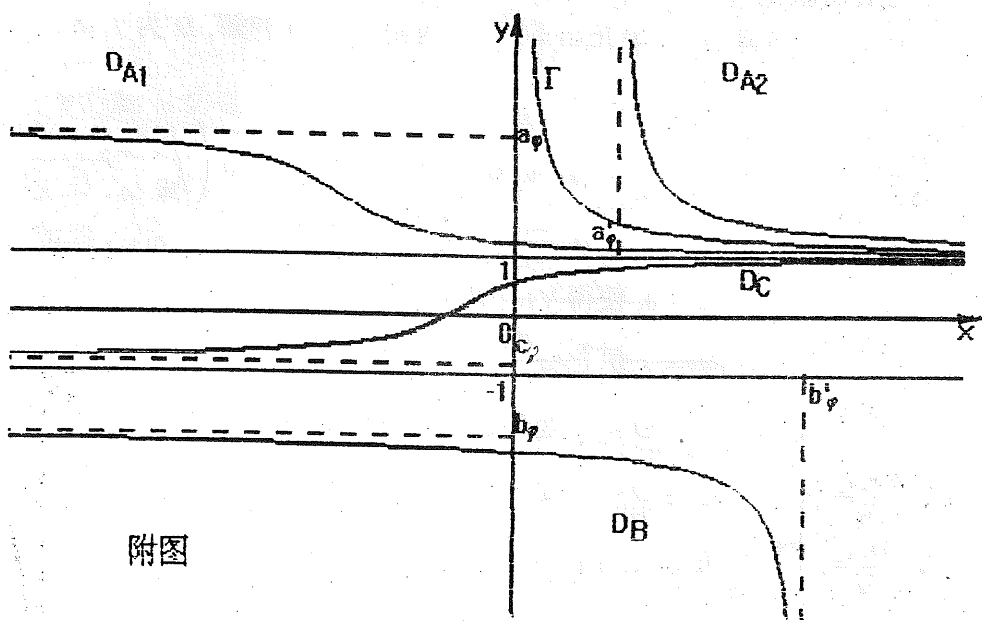
$\therefore \frac{c_0}{2}\notin\Psi_{A_1}(D_{A_1})$, 矛盾.

$\therefore \Psi_{A_1}$ 对不同的解曲线得出不同的值.

参考文献:

[1] 张林,《$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 渐近线的一些讨论》,《蛙鸣》48 期.

[2] 张林,《一阶方程渐近线的补充讨论》, 见下页.



附图

(接右页)

例: 王树禾编《常微分方程》讲义上册 121 页题 8: $\frac{dy}{dx}=(1-y^2)e^{xy^2}$ 利用 48 期的结果首先得知: 全体渐近线为: $y=\pm1(x\to+\infty)$; $y=b(x\to-\infty), b\in R$; $x=a(y\to\pm\infty), a\geqslant 0$. 现在问对第二族渐近线, 积分曲线是否与其一一对应?

解: 令 $x=g(x_1)=A\ln x_1$, 方程化为 $\frac{dy}{dx_1}=A(1-y^2)x_1^{Ay^2-1}=F(x_1,y)$. 所以 $|y|>\frac{1}{\sqrt{A}}$ 时, $F(0,y)=0$. 而 F 与 F'_y 的连续性易验证, 因此便得 $|b|>\frac{1}{\sqrt{A}}$ 的渐近线 $y=b$ 皆为 1 型. 令 $A\to\infty$ 就得: 平面左侧连续分布的渐近线都各自只作为一条积分曲线的渐近线.

但是, 上述命题中的 g 并不总是存在的. 例如对 $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ 有渐近线 $y=0$, 因为通解为 $y=cx^2$, 知这是 1 型的. 但若有 $g:(0,a_1)\to(-\infty,a_2)$ 使对某个 $b'\neq 0$ 成立 $\frac{2b'}{g(x)}g'(x)\to 0(x\to 0)$, 则 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{g'(x)}{g(x)}=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$. 令 $u(x)=\ln(-\frac{1}{g(x)})$ 便得: $\lim\limits_{x\to0^+}u'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to0^+}u(x)=-\infty$. 这显然不可能.

最后指出, 对平面上任意取定的可列条直线, 总可以作出一个积分曲线族使这些直线都成为它的 $\aleph$ 型渐近线. 证明可用构造的方法, 此处略去.

一阶方程渐近线的补充讨论

研究与讨论

9101 张林

接着 48 期关于 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 渐近线的讨论. 本文的问题是对某一渐近线, 有多少条积分曲线渐近之. 不失一般性, 我们只考虑沿 $x\to-\infty$ 而渐近于直线 $y=b$ 的情形.

假定 f 在"点" $(-\infty,b)$ 附近处处有定义且仅取有限值, 则问题的答案仅有两种可能:

(1) 只有一条;

(2) 有连续分布的 $\aleph$ 条, 且后一情形的 (不妨称 $\aleph$ 型的) 渐近线在平面上至多有可列条.

简证: 若积分曲线 l_1、l_2 皆以 $y=b$ 渐近, 则易见 l_1、l_2 之间的任一积分曲线也渐近于 $y=b$, 从而使 $y=b$ 成为 $\aleph$ 型. 又对每一 $\aleph$ 型的渐近线, 其相应的积分曲线全体组成了平面上一个闭域, 从而使这种渐近线数目不超过可列.

于是本文的问题成了如何判别这二者.

想法: 我们构造单增的 $g:(0,a_1)\to(-\infty,a_2)$, 其中 $a_1\in R^+$, $a_2\in R$, 且 $\lim_{x\to0}g(x)=-\infty$ 使得通过变换 $x=g(x_1)$ 将 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 变成

$$\frac{dy}{dx_1}=f(g(x_1),y)g'(x_1)=F(x_1,y)$$

然后判断 $\frac{dy}{dx_1}=F(x_1,y)$ 在 $(0,b)$ 点的解是否有唯一性, 由此就可以区分以上两型.

事实上, 若该解不唯一, 则 $\exists\varphi_1\neq\varphi_2$ 使 $\frac{d\varphi_i}{dx_1}=F(x_1,y)$ 成立 $(i=1,2)$, 且 $x_1\to0^+$ 时, $\varphi_1,\varphi_2\to b$. 所以 $\varphi_1(g^{-1}(x))$, $\varphi_2(g^{-1}(x))$ 是原方程的解且 $x\to-\infty$ 时皆 $\to b$. 所以渐近线 $y=b$ 为 $\aleph$ 型. 反之, 若 $y=b$ 为 $\aleph$ 型, 设 $\psi_1\neq\psi_2$ 是原方程的解且 $\lim_{x\to-\infty}\psi_i=b, i=1,2$. 则 $\psi_1(g(x_1)),\psi_2(g(x_1))$ 都是 $\frac{dy}{dx_1}=F(x_1,y)$ 在 $(0,b)$ 的解. 所以解不唯一. 由此, 结合 Picard 存在唯一性定理可得:

命题: 若存在上述的 g 使 $F(x_1,y)=f(g(x_1),y)g'(x_1)$ 满足: $\exists\varepsilon,\delta>0$, 对一切 $b-\varepsilon<b'<b+\varepsilon, F(0,b')=0$, 且在 $[0,\delta]\times[b-\varepsilon,b+\varepsilon]$ 内 $F(x,y)$ 连续, 对 y Lipschitz 连续, 则渐近线 $y=b$ 是 1 型的. (事实上, 由 $F(0,b')=0$ 可得:

$$F_0(x,y)=\begin{cases}F(x,y) & x\geqslant0;\\ F(-x,y) & x<0.\end{cases}$$

在 $[-\delta,0]\times[b-\varepsilon,b+\varepsilon]$ 内满足 Picard 定理条件. 所以解唯一) (下接左页)

新生园地

一类不等式的讨论与推广

9301 黄华君

Cauchy 不等式说: $\left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{m} a_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{m} b_i^2\right)$,

等号成立当且仅当 $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

而 Aczél 不等式即当 $b_1^2 - b_2^2 - \cdots - b_n^2 \geqslant 0$ 时,

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \cdots - a_m b_m)^2 \geqslant (a_1^2 - \cdots - a_m^2)(b_1^2 - \cdots - b_m^2)$$

等号成立当且仅当 $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

下面把它们推广为如下形式:

推广1: (Cauchy 不等式的推广)

$$\left(\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^n \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}^n\right), \qquad (a_{ij} \geqslant 0)$$

等号成立当且仅当 $\operatorname{rank}(a_{ij})_{m\times n} \leqslant 1$.

推广 2: (Aczél 不等式的推广) $a_{ij} \geqslant 0,\ a_{1j}^n - \sum\limits_{i=2}^{m} a_{ij}^n \geqslant 0$, 则

$$\left(\prod_{j=1}^{n} a_{1j} - \sum_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^n \geqslant \prod_{j=1}^{n}\left(a_{1j}^n - \sum_{i=2}^{m} a_{ij}^n\right)$$

等号成立当且仅当 $\operatorname{rank}(a_{ij})_{m\times n} \leqslant 1$.

证明: 先证推广 2, 设 $b_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{1j}}$, 则

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1 - \sum_{i=2}^{m} b_{ij}^n\right) \leqslant \left(1 - \sum_{i=2}^{m}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^n\right)\right)^n \leqslant \left(1 - \sum_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{n} b_{ij}\right)^n$$

故推广 2 成立.

又令 $b_{1j} = \sqrt[n]{\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}^n}$, 则 $\prod\limits_{j=1}^{n}\left(b_{1j}^n - \sum\limits_{i=2}^{m} a_{ij}^n\right) \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{n} b_{1j} - \sum\limits_{i=2}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^n$

即 $\left(\prod\limits_{j=1}^{n} a_{1j}\right)^n \leqslant \left(\prod\limits_{j=1}^{n} b_{1j} - \sum\limits_{i=2}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^n$,

$\therefore \quad \sum\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant \prod\limits_{j=1}^{n} b_{1j} = \sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}^n}$,

推广 1 得证. 等号成立条件不难从证明中得到. □

推广 1 与推广 2 实质上是等价的, 证明中我们用推广 2 来证推广 1, 其实也可以由推广 1 推出推广 2. 另外, 它们也等价于平均不等式.

推广 1 还可以用 Hölder 不等式来证. 从而得到它的加权形式.

Hölder 不等式: $p, q > 0$, $1/p + 1/q = 1$, 则

$$\int_a^b |fg| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{1/q}$$

等号成立当且仅当 $|f| = k|g|$, $k \in \mathbf{R}$ 为常数.

首先, 我们把 Hölder 不等式推广为:

推广 3: $p_1, \cdots, p_n > 0$, $\sum\limits_{j=1}^n \dfrac{1}{p_j} = 1$, 则

$$\int_a^b |\prod_{j=1}^n f_j| \leqslant \prod_{j=1}^n \left(\int_a^b |f_j|^{p_j}\right)^{1/p_j}$$

等号成立当且仅当 $|f_1| : |f_2| : \cdots : |f_n| = k_1 : k_2 : \cdots : k_n$, k_i 为常数.

证明不难, 只须反复用 Hölder 不等式即可.

在推广 3 中, 令 $a = 1$, $b = m + 1$, $f_j(x) = a_{[x]j} \geqslant 0$, 则有

$$\sum_{i=1}^m \prod_{j=1}^n a_{ij} \leqslant \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}{}^{p_j}\right)^{1/p_j} \tag{1}$$

(1) 式即推广 1 的加权形式. 显然可导出推广 1.

注意推广 1 与推广 2 的等价性. 同样的我们也可推出 Hölder 不等式的等价形式.

推广4: 1° $p, q > 0$. $1/p + 1/q = 1$. $m^p \geqslant \int_a^b |f|^p$, $n^q \geqslant \int_a^b |g|^q$, $m, n \geqslant 0$, 则

$$mn - \int_a^b |fg| \geqslant \left(m^p - \int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(n^q - \int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

2° $p_j > 0$, $\sum\limits_{j=1}^n \dfrac{1}{p_j} = 1$, $m_j^{p_j} \geqslant \int_a^b |f_j|^{p_j}$, $m_j \geqslant 0$, 则

$$\prod_{j=1}^n m_j - \int_a^b |\prod_{j=1}^n f_j| \geqslant \prod_{j=1}^n \left(m_j^{p_j} - \int_a^b |f_j|^{p_j}\right)^{1/p_j}$$

等号成立当且仅当 $|f_p| : |f_q| = m_p : m_q$.

同样的, 证明可用 Hölder 不等式或仿照推广 2 之证明.

推广 4 的离散形式即推广 2 之加权形式:

$$p_j > 0, \ \sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j} = 1, \ a_{1j}^{p_j} \geqslant \sum_{i=2}^m a_{ij}^{p_j}, \ a_{ij} \geqslant 0.$$

则

$$\prod_{j=1}^{n} a_{1j} - \sum_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{n} a_{ij} \geqslant \prod_{i=1}^{n}\left(a_{1j}^{p_j} - \sum_{i=2}^{m} a_{ij}^{p_j}\right)^{1/p_j} \tag{2}$$

上述的一系列推广, 实质上都是 Hölder 不等式的一系列变形. 由这些推广我们可得到很多优美的结果.

例1: 1) $x_i \geqslant 0$, 则 $\left(1+\prod\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^n \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i^n) \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^n\right)^n$

2) $x_i \geqslant 0$, $p_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$, 则 $1+\prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{1/p_i} \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)^{1/p_i} \leqslant 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{p_i}$.

证: 只须证明(2), 由推广3 令

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & x\in[0,1] \\ x_i^{1/p_i}, & x\in(1,2] \end{cases}$$

则立刻证明左边不等号成立, 至于右边, 可由平均不等式得出.

例2: 1) $x_i \geqslant 0$, $\overline{x'} = \sqrt[n]{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}$, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, 则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\sqrt{x_i\overline{x'}}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1+x_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{x_i+\overline{x}}{2}\right)$$

2) $a_{ij} \geqslant 0$, $t_j \in [0,1]$, $p_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$, 令 $\overline{a'_j} = \prod\limits_{i=1}^{n} a_{ij}^{1/p_i}$, $\overline{a_j} = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_{ij}}{p_i}$,
则

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{t_j}\overline{a'_j}^{(1-t_j)}\right)^{\frac{1}{p_i}} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{m}[t_j a_{ij}+(1-t_j)\overline{a_j}]\right) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}[t_j a_{ij}+(1-t_j)\overline{a}_j]}{\prod\limits_{i=1}^{n} p_i}$$

证: 2) 可参考1) 的证明思路, 这里只给出1) 的证明. 由例 1, 有

$$\prod_{i=1}^{n}[(1+\overline{x'})(1+x_i)] \leqslant \prod_{i=1}^{n}(1+x_i)^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}[(1+\overline{x})(1+x_i)]$$

由推广1 , $(1+\overline{x'})(1+x_i) \geqslant (1+\sqrt{x_i\overline{x'}})^2$, 又 $(1+\overline{x})(1+x_i) \leqslant \left(1+\frac{\overline{x}+x_i}{2}\right)^2$

∴ $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\sqrt{x_i\overline{x'}})^2 \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)^2 \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{\overline{x}+x_i}{2})^2$,

即 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\sqrt{x_i\overline{x'}}) \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n}(1+x_i) \leqslant \prod\limits_{i=1}^{n}(1+\frac{\overline{x}+x_i}{2})$

有兴趣的同学, 可以试着证明2).

一个有趣的数论问题

新生园地

9300 吕林军

92年湖南有这么一道训练题:

b_n 和 a_n 分别是 $\{C_n^i\}(0 \leqslant i \leqslant n)$ 中关于模 3 余 1 和 2 的数的个数, 则 $b_n > a_n$.

事实上, 有关系 $b_n - a_n = 2^t$, t 为 n 的 3 进制中 1 的个数. 证明如下: (为了方便, 以下自然数均指 3 进制中的自然数)

Th1. 令 $f(n)$ 为 n 的各位数之和, 则 $f(m+n) \leqslant f(m) + f(n)$. 等号成立当且仅当 $(m)+(n)=(m+n)$ 加法中无进位现象. (证略)

Th2. $n!$ 的标准分解式中, 3 的指数为 $[\frac{n}{3}] + [\frac{n}{3^2}] + \cdots = \frac{n - f(n)}{2}$; (证略)

Th3. 设 $3^k \| n!$, $n! = 3^k p$, 则 $p \equiv (-1)^{\tau_n} (\bmod 3)$, $\tau_n = [\frac{n+1}{3}] + [\frac{n+3}{9}] + \cdots$

证: 将 $1\,2 \cdots n$ 中分类为 $M_i = \{m | 3^i \| m\}$, 把 M_i 中所有元素相乘得 $3^{i|M_i|} p_i$, 其中 $p_i \equiv (-1)^{S_i} (\bmod 3)$, $S_i = [\frac{n+3^i}{3^{i+1}}]$, 于是 $p \equiv (-1)^{\Sigma p_i} \equiv (-1)^{\Sigma_{i=0}^{\infty} [\frac{n+3^i}{3^i+1}]} (\bmod 3)$

Th4. $\tau_n = \frac{n - g(n)}{2}$, $g(n)$ 为 n 的 3 进制表示中 1 的个数.

证: 只需把 n 按 3 进制展开即得.

现回证原题: 令 $3 \nmid C_n^m$, 由 Th1 及 Th2 即有 $f(n) = f(n-m) + f(m)$, 设 $3^k \| n!$, 则由 Th3 及 Th4 知: $\frac{n!}{3^k} = \frac{m!(n-m)!}{3^k} C_n^m \equiv (-1)^{\frac{n-g(n-m)-g(m)}{2}} C_n^m (\bmod 3)$

又由: $\frac{n!}{3^k} \equiv (-1)^{\frac{n-g(n)}{2}} (\bmod 3)$ $\quad\therefore\quad C_n^m \equiv (-1)^{\frac{(g(n-m)+g(m)-g(n))}{2}} (\bmod 3)$

$\because\quad f(n-m) + f(m) = f(n) \quad\therefore\quad g(n-m) + g(m) - g(n) = 2k$

其中 k 为 $n-m$ 和 m 中在同一数位上同时为 1 的数位个数.

设 n 的 3 进制中 2 的个数为 S 个. 则由注 1:

$b_n = 2^t (2^S C_S^0 + 2^{S-2} C_S^2 + 2^{S-4} C_S^4 + \cdots) \qquad a_n = 2^t (2^{S-1} C_S^1 + 2^{S-3} C_S^3 + \cdots)$

$\therefore\ b_n - a_n = 2^t (\sum_{i=0}^{S} 2^{S-k} (-1)^k C_S^k) = 2^t$

注 1: 这里用到一些组合知识, 首先 t 个 1 分配到 m 及 $n-m$ 的各相应位上有 2^t 种方法; 然后每个 2 的分配有两种情况: 分拆成两个 1 后分配到 m 及 $n-m$ 的相应位上; 把 2 和 0 分配到 m 及 $n-m$ 的相应位上. 因此, S 个 2 中有 k 个被分拆成 1 后分配的情形有 $2^{S-k} C_S^k$ 种, 所以:

$$b_n = 2^t (\sum_{2|k} 2^{S-k} C_S^k), \quad a_n = 2^t (\sum_{2\nmid k} 2^{S-k} C_S^k)$$

注2: 一个更为浅显的命题是: $\{C_N^i\}(0 \leqslant i \leqslant n)$ 中的奇数有 $2^{S(n)}$ 个. $S(n)$ 是 n 的二进制表示中各位数之和.

在F_σ型集上间断的函数

研究与讨论

9201 喻甫祥

我们知道, 在有理点上连续, 无理点上间断的函数是不存在的; 相反, 确实存在函数 (例如 *Riemann* 函数) 在无理点上连续, 有理点上间断. 林强[1] 提出了更进一步的问题 (蛙鸣问题 66): 请构造一个区间 I 上的函数 φ, φ 的所有连续点集和所有间断点构成的集都在 I 上稠密, 且不可数. 杨庆解决了这个问题[2].

笔者将证明一个定理, 顺便给出问题 66 的另一个解法.

先介绍一些背景知识: 若 $A \subset \mathrm{R}$ 是可数个闭集的并集, 则称 A 为 F_σ 型集. 可以从关于实变函数论的许多书上找到这个定理: R 内任意函数 f 的间断点集是 F_σ 型集. 文首提到的三个问题都不违背这个定理.

我们的定理是: 若 A 是 F_σ 型集, 则存在 R 上的函数 f, 使得 f 的间断点集恰为 A. (*)

证明分两步. 首先, 考虑 A 是一个闭集的简单情况. 容易验证下面的函数 f 符合要求:

$$f(x)=\begin{cases} D(x), & \text{若}\exists\delta>0,[x,x+\delta](\text{或}[x-\delta,x])\subset A;\\ 1, & x\in A\text{时的其余情况;}\\ 0, & x\notin A. \qquad\qquad (\text{其中}D(x)\text{是}Dirichlet\text{函数.})\end{cases}$$

我们指出一点: 对 $\forall x\neq y$, $|f(x)-f(y)|$ 的值为 0 或 1.

其次, 考虑 A 为可数个闭集 $\{A_n\}$ 之并的情形. 对每一个 A_n, 都相应的有一个函数 f_n, 使得 f_n 的间断点集是 A_n. 定义函数 f:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}f_n(x)$$

由于 $|f_n(x)|\leqslant 1$, 上面的级数一致收敛.

1) f 在 $\mathrm{R}\sim A$ 上连续. 这是因为级数的每一项都在 $\mathrm{R}\sim A$ 上连续. (注意, 我们实际用了这样的定理: 如果 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在数集 S 上一致收敛到函数 $f(x)$, 每个 $u_n(x)$ 都在 S 内一点 x_0 处连续, 那么 $f(x)$ 在 x_0 连续. 定理的证明与科大编《数学分析》第八章类似的命题一模一样.)

2) f 在 A 上间断. 设 $x\in A$, 则 $\exists n\in\mathrm{N}$, 使得 $x\in A_n$. f_n 在 x 间断, 则在 x 的任一邻域都有一个点 y, 使得 $f_n(x)\neq f_n(y)$. 设 m 是使 $f_k(x)\neq f_k(y)$ 成立的最小整数, 则 $m\leqslant n$. 于是有:

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\geqslant \frac{1}{3^m}|f_m(x)-f_m(y)|-\sum_{k=m+1}^{\infty}|f_k(x)-f_k(y)|\\ &\geqslant \frac{1}{3^m}-\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{2\times 3^m}\geqslant\frac{1}{2\times 3^n},\end{aligned}$$

****

问题征解

****

总113. (李尚志 提供) (*) 设 K 是域, 则我们知道由 K 上 n 个未知数 $x_1, \cdots, x_n$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

当 $n > m$ 时一定有非零解 $(x_1, \cdots, x_n)$.

试研究: 如果 K 为非交换体, 当未知数的个数 n 大于方程的个数 m 时, 齐次线性方程组是否仍有非零解? 如果没有, 试加强关于 m, n 的限制使它有非零解. 注意此时方程

$$a_1x_1b_1 + a_2x_1b_2 + \cdots + a_kx_1b_k + \cdots = 0$$

中含同一个未知数 x_1 的项一般不能合并成一项 ax_1b.

总114. (李尚志 提供) 设 K 是域, K 上 $n \times n$ 可逆矩阵 A 如果满足 $(A-I)^n = 0$, 则称 A 是么幂方阵.

试证明: 当 $\mathrm{char}K = p > 0$ 时, A 么幂 $\Longleftrightarrow A^{pk} = I$, 对某个 $k > 0$.

当 $\mathrm{char}K = 0$ 时, A 么幂, 且 $A \neq I$

$\Longleftrightarrow$ 对任意自然数 m, $A^m \neq I$ 且与 A 在 K 上相似.

(*) 上述结论能否推广到 K 为非交换体的情形.

总115. (张景中 提供) 能不能找到 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)$, 满足

i) f 在 $[0,1]$ 上有唯一反函数 $g: [0,1] \longrightarrow [0,1]$;

ii) $f'(\frac{1}{2})$ 存在, 不为 0, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$;

iii) g 在 $\frac{1}{2}$ 处不连续.

总116. (马翔 提供)见本期马翔文章《向魔方高手挑战》.

注: (*)表示尚无解答.

(接上页) 故 f 在 x 间断. □

定理(*)怪有意思的(它不大可能是新的), 用它可以轻易地解决问题 66. 我们只要找到一个特殊的 F_σ 型集 A, 使得 A 及 $I \sim A$ 都在 I 上稠密且不可数即可. 不妨设 I 就是 $\mathbf{R}$, A_0 是 Cantor 三分集, $A_n = A_0 + r_n = \{x + r_n : x \in A_0\}$, 其中 n 是自然数, $\{r_n\}$ 是有理数集. $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. A 在 $\mathbf{R}$ 上稠密, 不可数. 又 $m(A_0) = 0$, $m(A) = 0$, 推得 $\mathbf{R} \sim A$ 在 $\mathbf{R}$ 上稠密, 不可数. 显然 A 是我们要的那种 F_σ 型集.

参考文献:

[1] 林强, 问题 66 , 《蛙鸣》 34 期.

[2] 杨庆, 一个函数的构造, 《蛙鸣》 37 期.

****
*　　　　　　　　　*
*　研究与讨论　*
*　　　　　　　　　*
****

三题一解

9201 喻甫祥

用一种方法解不同的题目,有时蛮有趣但通常都没有意思. 尤其是当你发现它们本来就该用同一种方法的时候.

笔者用同一种方法解出了下面三个不同的题目,起初非常兴奋;后来发现它们内在联系紧密,因此异题同解就不令人奇怪了.

第一题是一个实变题目,它实际上不是笔者用文中方法解出的第一个题目,但它是最简单的一个.

例 1　有理数集不能为可列个开集之交.

从反面来考虑. 如果让开集 $O_n(n=1,2,\cdots)$ 都包含有理数全体 Q,那么 $Q\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 是显然的,如果 $Q\neq\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$,那么必然有无理数在 $\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$ 中,我们的工作是找出这样的一个无理数. 方法很多,笔者用的是"由有理闭区间列套出一个无理数来".

设 $Q=\{r_n\}$, $n<m$ 时我们称 r_n "小" 于 r_m. $r_1\in O_1$,必有包含 r_1 的一个开区间 $A_1\subset O_1$,设 A_1 中最 "小" 的两个有理数是 α_1,β_1,取 B_1 为以 α_1 和 β_1 为端点的闭区间, $B_r\subset O_1$.

设 B_n 已作出($n\in\mathbf{N}$). r_k 是 B_n 内的一个有理数, $r_k\in B_n^{\circ}\bigcap O_{n+1}$,必有一个包含 r_k 的开区间 $A_{n+1}\subset B_n^{\circ}\bigcap O_{n+1}$;设 A_{n+1} 中最 "小" 的两个有理数是 α_{n+1} 和 β_{n+1},取 B_{n+1} 为以 α_{n+1} 和 β_{n+1} 为端点的闭区间. 如此作出闭区间列 $\{B_n\}$, $B_n\subset O_n$, $B_{n+1}\subset B_n$. 故 $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$.

我们证明非空集 B 中没有有理数. 如果有某个 $r_m\in B$,按照我们的取法, r_m 应该是某个 B_t 的端点 $(2t\leqslant m+1)$,而 B 不包含 B_t 的端点,矛盾! B 中只有无理数,故有 $Q\neq\bigcap_{n=1}^{\infty}O_n$.

例 2　证明不存在函数 f 在无理数上间断,在有理数上连续.

例 2 的一种证法是依据例 1,另一种是考察 $f(x)$ 与 $f(x+c)$, c 是无理数,设法找出它们的公共连续点,导出矛盾. 本文仍用"有理闭区间列"法. 由于与例 1 大同小异,只简略叙述之.

仍记 $Q=\{r_n\}$. 假设存在这样的函数 f, f 在 r_1 处连续,振幅为 0,因此存在包含 r_1 的一个开区间, f 在这个开区间上振幅小于 1,取 B_1 为以该区间内最小的两个有理数为端点的闭区间. 类似地作下去,使得有理闭区间列是单调减的,并且 f 在 B_n 上的振幅小于 $1/n$. 类似例 1 可证, $\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$ 是一个独点集 $\{b\}$, b 是无理数. f 在 b 的振幅为 0, f 在 b 连续,矛盾!

下面的例 3 是第八届大学生数学夏令营的题目.

例 3　是否存在函数列 $\{f_n\}$ 收敛于 *Dirichlet* 函数 $D(x)$? 证明你的结论.

这个题目的背景是 Baire 的一个定理: 如果 $f(x)$ 是连续函数族 $\{f_n(x)\}$ 的

极限函数, 那么 $f(x)$ 的间断点集是第一范畴集. 由于 *Dirichlet* 函数 $D(x)$ 的间断点集是全直线(第二范畴集), 知结论是不存在的. 直接用这个定理来做该题当然可以, 不过这个定理并不为低年级同学所熟知, 何况在本题的特殊情况下我们还有简单的方法.

结论是不存在. 证明与前相似, 仍用反证法. 只是这里作出的闭区间列 $\{B_k\}$ 上的条件不同: 存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, f_{n_k} 在 B_k 上的取值大于 1/2. b 是有理闭区间列套出的无理数, $f_{n_k}(b) > 1/2$. 故应有 $D(b) \geqslant 1/2$, 但 $D(b) = 0$, 矛盾. (请读者自己写出证明过程.)

上面三个题目表面相异, 实际上联系紧密, 如果要用一句话来说明其本质联系, 那就是 "无理数集是第二范畴集". 这实际上是例 1 的推论. 因涉及较深的有关范畴集的知识, 笔者不准备详细讨论. 不过, 检查一下我们前面所用的知识是有益的: 我们反复使用的是 *Cantor* 区间套定理和 Q 的可数性及稠密性.

最后指出, 上面三题有许多解法. 有的非常巧妙.

向魔方高手挑战

数学小品

9301 马翔

小小魔方, 见过的人不少, 会玩的人不多. 玩得转的洋洋自得, 玩不转的羡慕之余更觉其神秘. 不过我想, 他们中无论是谁, 大概都并不会正而八经把它当一回事, 更普遍的只不过觉得游戏而已, 只需从哪位高人那里学来一套点石成金的秘诀就够了. 我是自学成材, 对这种小聪明不敢恭维, 但也不打算在此讨论魔方转法, 与众位高手过招, 只有一个问题想请教一下.

我有一个魔方, 如图 1 所示, 六个面几乎已经转好, 唯独一边上有一块, 它的两面被弄反了. 怎样将它转正呢? 这最后一着, 就看您的了.

当然了, 高手有经验, 知道到这种最后关头, 剩下的常有两个边上的 "块" 都是这么弄反的, 他也知道这时用什么样的招法. 但他的确没见过我这样的魔方, 满怀疑惑地转了许久之后, 他大概才会从失败中猛醒过来, 嚷嚷道: "这是不可能的! 你的魔方有鬼!"

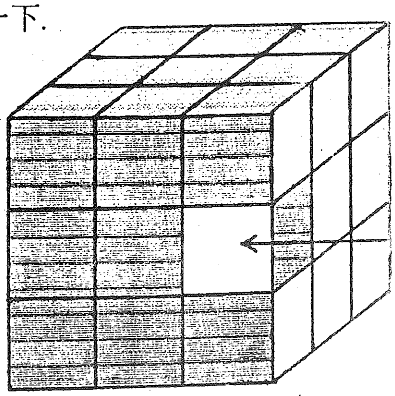


图 1

可我会微笑着说: "你凭什么这么肯定? 不就是你那点可怜的经验吗? 而它并不能保证 '一招鲜, 吃遍天'. 如果大家都试过, 我也不敢贬低你们的经验的意义. 可是, 你看, 我是一个数学家, 我们有自己的原则和说话方式: 如果这是可能的, 就请做给我们看; 如果不能, 就只能说明你的无能, 并且还要为无知辩护!"

下面我将会告诉你,这个魔方真是转不成六面的.我们考虑的问题,更一般的提法是:魔方的某两种状态,可否通过正常的转法互相转换?为了回答它,需要好好分析两个要素:“状态”和“转法”.首先,我们有

定义:魔方的某一个侧面绕垂直于它的中轴转动(顺,逆时针均可)$90°$,称为一个“基本操作”.

不妨设魔方整体固定,不可翻转,那么大家仔细思考一下,就一定会赞同下面的:

命题:魔方的任意一种转法,都是若干基本操作及其复合.

其次,魔方共有 12 个边块,各有两面在外,任意标上一个“$+1$”,一个“-1”,最后共标上了 12 对“± 1”.位于各面中心及顶点的各块则均不考虑.这称为一个“基本状态”.

显然,基本状态经过转动后变为另一个基本状态.我们赋予基本状态一个状态参数 S.对于初始状态,定义 $S=1$;对于其它状态,考虑它的 12 个位置上的边块与初始状态比较,若第 i 个位置的“± 1”保持不变,则记 $S_i=1$;若两个面的“± 1”互换,则 $S_i'=-1$.此状态的参数 $S'=\prod_{i=1}^{12} S_i'$.我们然后有:

引理:在一次基本操作下,S 不变.

证明:如图 2,不妨设基本操作 A 是将侧面 a 逆时针转动 $90°$,a 靠边的 4 个位置记为 1, 2, 3, 4,位于 a 面的四个格子上标的数字记为 a_i ($a_i=\pm 1$).原状态和末状态分别具有参数 S'、S'',则易知

$$S_i''=\frac{a_i}{a_{i-1}}S_i' \quad (i=1,2,3,4,\text{记}a_0=a_4.)$$

$$S_i''=S_i' \qquad (i=5,6,\cdots,12)$$

$$\therefore \quad S_i''=\prod_{i=1}^{12} S_i''=\prod_{i=1}^{12} S_i'=S'. \qquad \square$$

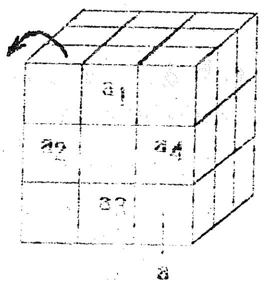


图 2

由此引理可见 S 是基本状态在基本操作下的不变量.而对于本文开头的问题(图 1),若以它为初始状态,$S=1$,则完整六面状态下的 $S'=-1$,由引理可知:

定理:图 1 中的魔方是不可能通过正常转法变为完整六面的.

“戏法人人会变,巧妙各有不同.”但不停留在“戏法”层次上,深入发掘其中内涵,获得启示,却非需要科学的头脑和追根究底的精神不可.未来的科学家们,又是否考虑得到更一般的问题呢?

—— 若魔方的两个状态可在正常转法下相互转换,则称它们等价.显然,最平常的一个等价类的标准形就是六面完整的状态.试问:

(1) 等价的魔方状态,其全系不变量是什么?

(2) 有哪些等价类?各自的标准形是什么?

关于方阵与其附属方阵间的一个重要关系

9300 吕林军

研究与讨论

若 $A\in F^{n\times n}$, $a_{i,j}$ 的代数余子式为 $A_{i,j}$, 则有

$$\begin{vmatrix} A_{i_1,j_1} & A_{i_2,j_1} & \cdots & A_{i_r,j_1} \\ A_{i_1,j_2} & A_{i_2,j_2} & \cdots & A_{i_r,j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,j_r} & A_{i_2,j_r} & \cdots & A_{i_r,j_r} \end{vmatrix} \tag{1.1}$$
$$=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_r)+(j_1+j_2+\cdots+j_r)}(\det A)^{r-1}A\begin{pmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}$$

其中 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ 均为 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 为 $(1,2,\cdots,n)$ 的排列, 而 $i_1<i_2<\cdots<i_r, i_{r+1}<i_{r+2}<\cdots<i_n, j_1<j_2<\cdots<j_r, j_{r+1}<j_{r+2}<\cdots<j_n$.

证明: $r=1$ 时显然. 设 $r\geqslant 2$.

(i) 当 $\det A=0$ 时, 由 [1] 中 13 题(2)、(3)推知(1.1)左边也为 0.

(ii) 当 $\det A\neq 0$ 时, 在

$$A^*A=\det A\cdot I_{(n)} \tag{1.2}$$

中运用 Binet-Cauchy 公式, 知:

$$\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant n} A^*\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix} \tag{1.3}$$
$$=\begin{cases} (\det A)^r, & i_k=j_k(1\leqslant k\leqslant r) \\ 0, & \exists 1\leqslant k\leqslant r,\ i_k\neq j_k \end{cases}$$

又 $$\sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_r\leqslant n}(-1)^{(k_1+k_2+\cdots+k_r)+(j_1+j_2+\cdots+j_r)}A\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-r} \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-r} \end{pmatrix}A\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$
$$=\begin{cases} \det A, & \text{和式中}A\left(\begin{smallmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-r} \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-r} \end{smallmatrix}\right)\text{均是}A\left(\begin{smallmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{smallmatrix}\right)\text{的代数余子式;} \\ 0 & \text{其它情形.} \end{cases} \tag{1.4}$$

令 $$C_{(1)}=\left(A^*\left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{smallmatrix}\right)\right)\quad\in F^{C_n^r\times C_n^r},$$
$$C_{(2)}=\left(A\left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{smallmatrix}\right)\right)\quad\in F^{C_n^r\times C_n^r},$$
$$C_{(3)}=\left(A\left(\begin{smallmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{smallmatrix}\right)(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_r)+(j_1+j_2+\cdots+j_r)}\right)'\quad\in F^{C_n^r\times C_n^r}.$$

则 $$C_{(1)}\cdot C_{(2)}=(\det A)^rI_{(C_n^r\times C_n^r)}=(\det A)^{r-1}C_{(3)}C_{(2)}.$$

$\therefore$ $$C_{(1)}=(\det A)^{r-1}C_{(3)}.$$

展开有 $\begin{vmatrix} A_{i_1,j_1} & A_{i_2,j_1} & \cdots & A_{i_r,j_1} \\ A_{i_1,j_2} & A_{i_2,j_2} & \cdots & A_{i_r,j_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i_1,j_r} & A_{i_2,j_r} & \cdots & A_{i_r,j_r} \end{vmatrix}$

$$= A^*\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r \end{pmatrix}$$

$$= (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_r)+(j_1+j_2+\cdots+j_r)}(\det A)^{r-1}A\begin{pmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix}. \qquad \square$$

推论 1: 若 $\det A \neq 0$, 则 $\mathcal{C}_{(1)}$ 和 $\mathcal{C}_{(3)}$ 可逆.

推论 2: A 正交.

当 $\det A = 1$ 时, 有 $A\binom{i_1\ i_2\ \cdots\ i_r}{i_1\ i_2\ \cdots\ i_r} = A\binom{i_{r+1}\ i_{r+2}\ \cdots\ i_n}{j_{r+1}\ j_{r+2}\ \cdots\ j_n}$;

当 $\det A = -1$ 时, 有 $A\binom{i_1\ i_2\ \cdots\ i_r}{i_1\ i_2\ \cdots\ i_r} = -A\binom{i_{r+1}\ i_{r+2}\ \cdots\ i_n}{j_{r+1}\ j_{r+2}\ \cdots\ j_n}$.

现运用该结论证明.

例 1　$A_{3\times3}$ 正交, 且 $\det A = 1$, 则 $(\mathrm{Tr}A-1)^2 + \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_{i,j}-a_{j,i})^2 = 4$.

证明: $$(\mathrm{Tr}A-1)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}(a_{i,j}-a_{j,i})^2$$

$$=1-2\mathrm{Tr}A+\sum_{1\leqslant i\leqslant 3}a_{i,i}^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}a_{i,i}a_{j,j}+\sum_{i\neq j}a_{i,j}^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}a_{i,j}a_{j,i} \tag{1}$$

由推论2, 有 $(a_{1,1} = a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,3}a_{3,2}$ 等)

$$\therefore \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant 3}a_{i,i} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}a_{i,i}a_{j,j} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}a_{i,j}a_{j,i} \tag{2}$$

又 $A'A = I_{(3\times3)}$　$\therefore \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}a_{i,k}^2 = 1, \quad 1\leqslant k\leqslant 3$

$$\text{即有} \quad \sum_{1\leqslant i\leqslant 3}\sum_{1\leqslant j\leqslant 3}a_{i,j}^2 = 3 \tag{3}$$

将 (2) 和 (3) 代入 (1) 即证.

例 2　A, B 均正交, 且 $\det A + \det B = 0$, 证明 $\det(A+B) = 0$.

证明: 设　$\det A = 1$, $\det B = -1$,

则　$\det(A+B) = \det[(A+B)A^{-1}] = \det(I+BA^{-1})$,

易知　$C = BA^{-1}$ 也正交, 且 $\det C = -1$,

$\therefore$　$\det(I+C)$

$$=\sum_{r=0}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\left[C\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \end{pmatrix}\right].$$

由推论 2 知该式为 0, 证毕.

类似地, 可证:

2.1′ 设 O 为奇数阶实正交方阵, 且 $\det O = 1$, 则 O 具有特征值 1.

2.2′ 行列式为 -1 的实正交方阵具有特征值 -1.

参考文献:

[1]《线性代数》P 171, 李炯生, 查建国, 中国科学技术大学出版社.

编者按: 本文命题是对一个习题的有益推广. 另有一种证法, 先做两次处理: 施行行与列的交换后, 可以认为 $i_k = j_k = k (1 \leqslant k \leqslant n)$. (这步只是为了好看). 如果 $\det A = 0$, 可用 $A - \lambda I_{(n)}$ 代替 A, 即作微小摄动, 使 $\det(A - \lambda I_{(n)}) \neq 0$. 命题若成立, 则对 $\det A = 0$ 时也成立. 现在只需证:

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{r1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{r2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1r} & A_{2r} & \cdots & A_{rr} \end{vmatrix} = (\det A)^{r-1} A\begin{pmatrix} i_{r+1} & i_{r+2} & \cdots & i_n \\ j_{r+1} & j_{r+2} & \cdots & j_n \end{pmatrix} \qquad (\det A \neq 0)$$

而由

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{r1} & A_{r+1,1} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{r2} & A_{r+1,2} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1r} & A_{2r} & \cdots & A_{rr} & A_{r+1,r} & \cdots & A_{nr} \\ \hline & & & & I_{(n-r)} & & \end{array}\right) A$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|ccc} |A| & & & & & & \\ & |A| & & & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & & |A| & & & \\ \hline & & & & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ & & & & a_{r+2,r+1} & \cdots & a_{r+2,n} \\ & & & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{n,r+1} & \cdots & a_{n,n} \end{array}\right)$$

取 det 并除去一个 $\det A (\neq 0)$ 即得命题. 此证法和文中证法本质上无区别.

数学小品

历史上最有影响的四位数学家

9201　喻甫祥　　编录

美国历史学家迈克尔·H·哈特在其名著《历史上最有影响的一百人》中，一共收录了四位数学家，他们依次是：牛顿、欧几里得、笛卡尔和欧拉。一定有人认为哈特有欠公允，因为人们都认为阿基米德、牛顿和高斯才是有史以来最伟大的数学家。

但是哈特说，他没有错。哈特强调指出，他的收录及排序标准是看其对人类历史发展及人们日常生活的影响程度，而不是知名度。——对科学家来说，其是否在自己的科学领域内硕果累累、赫赫有名并不特别重要，关键得看他的成就对人类文明的影响大小。在收于书中的37位科学家及发明家中，毫无名气的造纸术发明者蔡伦排在仅次于牛顿的第2位（全书第7位），而赫赫有名的爱迪生却远远落在后面，因为无论怎么看来，造纸术这项发明都比爱迪生那一千多项发明重要得多。获得提名的阿基米德和高斯最终落选，也是基于相似的理由。阿基米德虽然被认为是古代最出色的数学家——他几乎走到了系统提出积分学的地步——但他的成果没有得到很好的继承和发展，他的直接后继者中没有卓越的数学家，——也就是说，他的实际影响并不够大。作者没有提到高斯落选的原因，但不难设想，这位数学王子，最突出的数学天才，其杰出的数学成就对历史的影响——就目前看来——还没大到使他在该书中位居前100人之列的地步，尽管高斯在“纯粹数学”各个领域的成就无与伦比。

从另一方面说，入选书中的四位数学家对数学的贡献和历史的影响确实极大，名列一百人之中应是当之无愧。

牛顿是有史以来最伟大的天才，仅次于阿拉伯世界的圣人穆罕默德排在全书第二位。排名可说非常之高。但是我想，不会有多少人有意见。不过，人们往往是把牛顿当作一个空前乃至绝后的物理学家和光明使者来接受的，而对牛顿数学上的成就知之甚少。其实，牛顿对数学的贡献很大，仅凭微积分学的发明就可排在相当靠前的位置，因为微积分学已成了现代数学的发展之源和现代科学的基本工具。理论力学被认为是牛顿最重要的成就，但和光学等一起，都极大的倚重了微积分。不仅如此，牛顿还发现了二项式定理，第一个解决了约翰·伯努利向全欧挑战的“最速降线”问题，并积极的把他的敏锐的数学思想应用到自然科学的各个方面。同时代的以及后世的数学家莱布尼茨、拉格朗日、欧拉等都对牛顿推崇倍至。而牛顿本人则相当谦逊，他说：“如果我所见的比笛卡尔远一点，那是因为我站在巨人们的肩膀上。”我想，下面这句科学界的名言用在牛顿身上最为恰当：“一位杰出的物理学家首先是一位杰出的数学家!”

欧几里得这位古希腊几何学家，位列全书的第22位。欧几里得很可能不是阿基米德这样伟大的天才，他之所以拥有持久不衰的声望，几乎仅仅是因为他

写了一本几何教科书——《几何原本》. 这本书还包括其它数学内容, 书中的绝大部分结果已很早就被发现和证明, 欧几里得所做的只是把它们整理成书. 但是这本书非常精彩, 它的系统, 它的严密 (近两千年来 "无懈可击"), 称得上是绝无仅有. 《几何原本》用作教科书已达两千年之久, 风行全世界, 对数学知识的传播和发展、对人类文明的进步作出了伟大的贡献. 牛顿、爱因斯坦都深受其影响, 相对论的假设就受到了欧氏几何五个公设的启发. 哈特还提出了一个有意思的论断: 现代科学没出现在伟大的中国, 主要是因为中国没有一个欧几里得.

笛卡尔是牛顿之前的法国哲学家、科学家和数学家, 位居全书第 64 位. 作为哲学家, 笛卡尔提出了著名的观点 "怀疑一切", 鼓励人们去观察和思考. 笛卡尔发表了《沉思》、《方法谈》等一系列哲学著作, 《方法谈》尤其有名. 《方法谈》有三篇附录, 其中之一是《几何学》, 提出了用坐标思想解决数学问题的新方法, 这是解析几何学的起点. 解析几何学引入了新的思想, 坐标法把几何和代数等不同的分支联系了起来. 解析几何学引入了变量, 随后就自然地出现了函数概念. 解析几何学是笛卡尔最重要的成就, 为牛顿发明微积分铺平了道路. 恩格斯曾如是说: "数学中的转折点是笛卡尔的变数." 解析几何学的发明称得上是数学发展进程中的一次革命.

欧拉排在第 87 位, 是有史以来最勤奋和最多产的数学家. 欧拉一生坎坷: 两眼先后失明, 结过两次婚, 子女多半夭折 …… 但是欧拉以超人的意志克服了这一切困难, 在科学上作出了一系列卓越的贡献. 从他十六岁时发表第一篇论文算起, 他一共写出了近千篇论文, 出版的论文集达 70 卷. 在他第二只眼睛失明后生命的最后 17 年里, 欧拉还通过口述写出了 400 多篇重要论文. 欧拉是许多数学分支的主要奠基人, 他对数学的贡献是如此之多, 以致我们无法把他的数学成就一一列举出来. 许多数学概念、定理、公式都以欧拉的名字命名, 一个职业数学家不小心也会搞混淆: 例如欧拉定理、欧拉方程、欧拉公式都有好几个, 如果不加上定语, 我们很难明白到底指的是哪一个. 不过, 欧拉能够入选《历史上最有影响的100人》一书中, 并不是因为他在数学上的成就巨大, —— 虽然确实如此, —— 而是因为他的数学成就对其它科学如物理具有重要意义. 欧拉留下的丰富的科学遗产中, 约有一半是关于力学、光学、天文学、航海科学、建筑学、弹道学等科学领域的; 欧拉给出了许多解决物理问题的数学方法. 欧拉的风格很高, 他扶持了包括拉格朗日在内的一大批数学家; 欧拉总是大力提倡新思想、新方法、新符号, 他为科学的进步和普及作出了巨大贡献. 我们相信, 欧拉永远也不会被遗忘, 因为 "欧拉是一切人的老师".

现在我们来看看高斯吧. 高斯是近代数学伟大的奠基者之一, 他虽然不及欧拉那样多产, 但是由于他的许多数学发现都是革命性的, 人们一般认为高斯是比欧拉更伟大的数学家. 高斯常常被看作天才(他的童年因此被神化), 在某种意义上他确实是的, 他在 19 岁时证明了二次互反律—— 后来又用了七种方法去证明它, 24 岁时发表了划时代的著作《算术研究》. 高斯在一些自然科学领

域如天文学、大地测量、电磁学、光学等也有贡献, 帮助天文学家发现了谷神星等星体. 所以高斯在科学上的成就也很巨大. 但是高斯过于拘谨, 知多言少, 不轻易发表数学论文和真知灼见, 减弱了对后辈的启发和影响; 同时由于他的作品常常只有完美无瑕的结果, 省略了分析和思考的过程, 一般学者很难掌握他的思想方法. 高斯也独立发现了非欧几何, 但他缺少勇气发表, 他怕 "Boeotians (意为愚人) 的叫喊". 他在赞赏另一个发现者鲍耶的同时, 又实际上给这个年轻人泼了冷水—— 高斯没有欧拉那样能够发现和引导人才, 他告诉鲍耶, 他很早就得到了这些结果; 而欧拉在收到拉格朗日的关于等周问题的论文时, 是压下自己在这方面的作品暂不发表, 积极去介绍拉格朗日的工作.

实际上, 数学家的成就, 很多还没有一致公认的评价, 哈特的排名方案只代表了一部分历史学家的观点. 其他历史学家也许会给出另外的方案, 但是大致的顺序不会有变化. 不过, 也许这些都不重要, 重要的是人类认识到 "数学家为人类文明的发展作出了巨大贡献, 而且将不断作出新的贡献".

****
*　　　　　　　　　　*
*　　数学小品　　　　*
*　　　　　　　　　　*
****

一则反例的构造

9201 何斯迈

高等数学的各个分支联系十分紧密, 下面以抽象代数中的方法举出一则分析中的反例.

问题 1: 是否 $\exists f: R^+ \to R$, 使得 $\forall x, y \in R^+$, $f(x) \leqslant f(x+y) \leqslant f(y)$ 或 $f(y) \leqslant f(x+y) \leqslant f(x)$, f 不为常数.

此题笔者曾经考虑了很久, 一直未能很好地解决, 后来在考虑如下问题时 (问题 2) 时终于得出了一则十分简洁的反例. 此题用分析方法久攻不下, 但用抽象代数方法却迎刃而解. 充分说明了高等数学各分支联系的紧密.

问题 2: 是否存在 $f: R \to R$, 使得 $\forall x, y \in R$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$, f, 且不存在 $c \in R$, 使得 $f(x) \equiv cx$.

反例 1: 容易验证 R 为 Q–模(即 Q 上的向量空间), 取 R 的一组 Q–基 $\{\alpha_i\}_{i\in\Lambda}$, 任取 Λ 上的置换:

$$\sigma: \Lambda \to \Lambda \quad \sigma(i) = \begin{cases} 0, & i = 1; \\ 1, & i = 0; \\ i, & i \notin \{0, 1\}. \end{cases}$$

由 σ 诱导出 R 的加法群同态 f, 显然 f 不是线性函数且 f 不连续. 由此很容易构造出问题 1 的反例:

反例 2: 定义 $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $\forall x \in R^+$, 则显然 g 满足要求.

长直线的构造——蛙鸣征解题总第 92 题解答

何斯迈 林强

征解题解答

定义 1 一个全序集叫做良序的, 如其任一非空子集必有最小元.

1940 年, Zermelo 证明了任一集合上可定义一个序关系, 使之成为良序集, 着实让数学界大吃一惊. 显然, 这说明了不可数良序集的存在. 下面用此来证明存在一个具有良好性质的不可数良序集. 为此, 给出

定义 2 X 为良序集, $\forall\alpha\in X$, 令 $S_\alpha=\{x|x\in X,\ x<\alpha\}$, S_α 称为 X 在 α 处的节.

定理(S_Ω 集的构造) 存在不可数良序集, 其任一节为可数集.

证明: 任取一不可数良序集, 不妨设 Y 至少有一节不可数. (否则 Y 即可) 令 $Z=\{y|y\in Y$, 且 S_y 不可数 $\}$, 则 $Z\neq\phi$, 所以 Z 有最小元 z, 令 $S_\Omega=S_z$ 加上原来的序结构. 则 S_Ω 的任一节可数, 而 S_Ω 本身是不可数的.

以上摘自 [1]

下面构造反例:

反例 (长直线的构造)

$X=S_\Omega\times[0,1)$ 在字典序下取序拓扑所成的空间即为长直线.

注: 字典序即在 $S_\Omega\times[0,1)$ 中定义如下序关系:

$$(\alpha_1,\ x_2)\leqslant(\alpha_2,\ x_2)\Longleftrightarrow\alpha_1\leqslant\alpha_2\ \text{ 或 }\alpha_1=\alpha_2,\ x_1\leqslant x_2$$

再定义 $\Sigma=\{((\alpha_1,\ x_1),\ (\alpha_2,\ x_2))\,|\,(\alpha_1,\ x_1)\leqslant(\alpha_2,\ x_2)\}$,

其中 $((\alpha_1,\ x_1),\ (\alpha_2,\ x_2))=\{(\alpha,\ x)\in X\,|\,(\alpha_1,\ x_1)\leqslant(\alpha,\ x)\leqslant(\alpha_2,\ x_2)\}$.

则 Σ 为一个拓扑基, 由 Σ 生成的拓扑 Σ_0 即为序拓扑.

定理 长直线是连通的一维 T_2 流形而非 A_2 的.

证明: 显然 X 为 Hausdorff 空间.

若 $X=X_1\cup X_2$, X_1 和 X_2 为 X 的两个互不相交的非空开子集. 记 $\alpha_1=\min\{\alpha\in S_\Omega\,|\,\alpha\times[0,1)\cap X_1\neq\phi\}$. 则 $(\alpha_1,\ 0)\in X_1$. 因为 X_1 是开集, 所以若 $\alpha_1\neq\alpha_0$, (记 $\alpha_0=\min S_\Omega$) 则存在 $Y\in\Sigma$, $(\alpha_1,\ 0)\in Y$. 所以存在 $\alpha<\alpha_1$, $(\alpha,\ x)\in X_1$, 于 α_1 的最小性矛盾. 所以 $\alpha_1=\alpha_0$, 即 $(\alpha_0,\ 0)\in X_1$. 同理可证 $(\alpha_0,\ 0)\in X_2$. 即 $X_1\cap X_2$, 矛盾. 所以 X 是连通的.

下证 X 局部同胚于 R. (除去 $(\alpha_0,\ 0)$ 点.)

证明: $\forall(\alpha,\ x)\in X$. 若 $x\neq0$, 则命题显然. 若 $x\neq0$, 则 $S'=S_\alpha$ 为至多可数的非空集. (否则 $\alpha=\alpha_0$, 不予考虑.) 若 S' 为有限集, 显然 $X'=((\alpha_0,\ 0),\ (\alpha,\ 0))$ 同胚于 R. 若 S' 为可数集, 则设 $S'=\{\alpha_i\}_{i\in N}$ (不必保持序关系), 作映射 φ: $X'\longrightarrow(0,\ 1)$, $\varphi((\alpha_i,\ x))=\dfrac{x}{2^i}+\sum\limits_{\alpha_j<\alpha_i}\dfrac{1}{2^j}$. 则 φ 为两个序拓扑空间的保序的映射, 所以 φ 是单射. 又若 φ 不是满射, 记 $x_0=\inf\{x\in[0,\ 1)\,|\,x\notin\varphi(X')\}$, 记

$u_0 = \min\{u \in X' \mid \forall u' \in X',\ \varphi(u') \leqslant x_0,\ u' \leqslant u\}$. 则 $\varphi(u' \times [0,\ 1)) = [x_0,\ x_0 + \frac{1}{2^i})$, 其中 $\alpha_i = u_0$. 矛盾! 所以 φ 是满射. 又因为 φ 是两个序拓扑空间之间的保序的双射. 所以 φ 是同胚映射. 即 X 局部同胚于 R(除去 $(\alpha_0,\ 0)$ 点.

将 X 在最小点 $(\alpha_0,\ 0)$ 处接上一个开区间即得到一个连通的 Hausdorff 一维流形 X_0. 由于 Σ 中的每一元素均只能盖住有限个 $S_\Omega \times [0,\ 1)$ 中的元素, 而 $\S_\omega$ 是一个不可数集合, 由《点集拓扑讲义》知 X_0 不是 A_2 的.

参考文献

[1] 《一个问题的证明和反例》 871杨庆 《蛙鸣》43 期

[2] 《蛙鸣》征解题总第 92 题

[3] J.W.Milnor Topology: From the Differentiable Viewpoint The University Press of Virginia Charlottestville U.S.A 1965

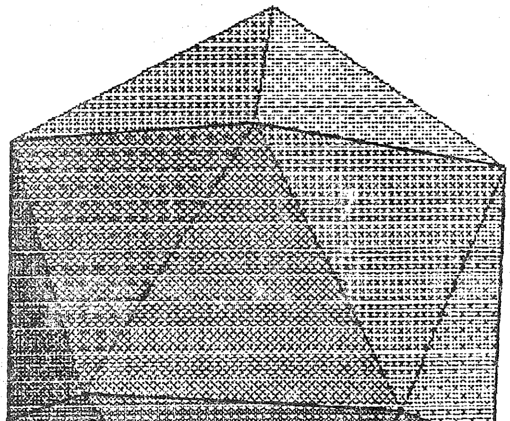
中译本: 《从微分观点看拓扑》 熊金城 译

[4] J.R.Munkres Topology: A First Course Prentice-Hall Inc 1975

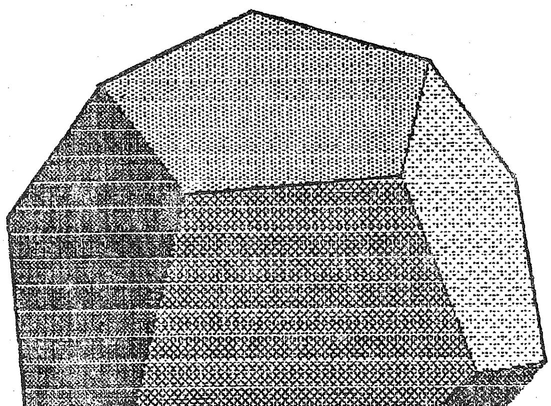
中译本: 《拓扑学基本教程》 罗嵩龄、多依群、保定宥、熊金城 译

[5] 徐森林: 《流形和 Stokes 定理》

[6] 熊金城: 《点集拓扑讲义》



Icosahedron 正二十面体



Dodecahedron 正十二面体

正多边形的空间实现及其它

9201 喻甫祥

一个平面多边形的顶点如果可以都在空间格点上,我们就称该多边形能够空间实现.类似地定义平面多边形的平面实现及空间多面体的空间实现.

一个熟知的结论是:能够平面实现的正多边形只有正方形这一种.本文将指出,能够空间实现的平面正多边形也只有3种:正三角形,正方形,正六边形.

显然正方体能够空间实现.而 $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$ 是正三角形的三个顶点;$(1,2,0)$, $(2,1,0)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$, $(2,0,1)$, $(1,0,2)$ 是正六边形的六个顶点.这说明上述三种正多边形确实能空间实现.

下面将证明,其余的正多边形都不能空间实现.

引理 1: $\cos\alpha\pi$(α 是小于 1 的非负有理数) 为有理数 $\Leftrightarrow \alpha\in\{0,1/3,1/2,2/3\}$.

略证:记 $\omega=\cos\alpha\pi+i\sin\alpha\pi$. $\alpha\in\mathbf{Q},\exists n\in\mathrm{N},2|n\alpha$,则 $\omega^n-1=0$, ω 是方程 $x^n-1=0$ 的根.如果 $\omega=\overline{\omega}$,即 $\sin\alpha\pi=0$,那么 $\alpha=0$;下设 $\omega\neq\overline{\omega}$,则 ω, $\overline{\omega}$ 均是 $x^n-1=0$ 的根.所以 $(x-\omega)(x-\overline{\omega})$ 是 $x^n-1=0$ 的因子,又若 $\cos\alpha\pi$ 为有理数,由于 $(x-\omega)(x-\overline{\omega})=x^2-2x\cos\alpha\pi+1$,所以 $(x-\omega)(x-\overline{\omega})$ 为有理系数方程,所以 $(x-\omega)(x-\overline{\omega})$ 为整系数方程,所以 $2\cos\alpha\pi$ 必为整数,只能是 $\alpha\in\{0,1/3,1/2,2/3\}$.

引理 2: 空间格点多边形的面积的平方是有理数.

这是因为 $S^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2$, S_x, S_y, S_z 为多边形向各坐标面的投影(平面上的格点多边形).面积均为有理数.

引理 3: 正 n 边形的面积为 $\dfrac{na^2}{4\tan\frac{\pi}{n}}$, ($a$ 是边长).

有了三个引理,问题就简单了.如果正 n 边形在空间实现,那么它的面积的平方 $(\dfrac{na^2}{4})^2\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{n}}$ 应为有理数,而 a^2 是正整数,故 $\tan^2\dfrac{\pi}{n}$ 为有理数,则

$\cos\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{1-\tan^2\frac{\pi}{n}}{1+\tan^2\frac{\pi}{n}}$ 为有理数.所以 $\dfrac{2}{n}\in\{0,1/3,1/2,2/3\}$,故 $n\in\{3,4,6\}$.

正多面体的空间实现:

五种正多面体中,正方体显然能空间实现,正四面体和正八面体也能.

正四面体空间实现时的四个顶点:$(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$.正八面体空间实现时的六个顶点:$(\pm1,0,0)$, $(0,\pm1,0)$, $(0,0,\pm1)$.

如左图,正十二面体和正二十面体上都有(平面)正五边形,而(平面)正五边形不能空间实现.故这两种正多面体不能空间实现.

****
*   *
*   数学模型   *
*   *
****

第十届美国大学生MC M赛题

MC M 9 4 问题A

HUD 公司正在考虑建造从单幢住宅到公寓楼大小不同的住宅. 公司主要关心的是房主定期去付的费用(特别是暖气和冷气的费用)最少. 建房地区位于全年温度变化不大的温带地区.

通过特殊的建筑技术 HUD 公司能不依靠对流, 即不需要依靠开门开窗来帮助调节住宅的温度. 这些住宅都是只有混凝土厚板地板为仅有基础的单层住宅. 你们被雇用为顾问来分析混凝土厚板地板中的温度变化, 由此决定地板表面的温度能否全年保持在指定的舒适范围内. 如果可能的话, 什么样的尺寸和形状能做到这点?

第一部分 地板温度

表 1 给出每天温度的变化范围, 试研究混凝土厚板中温度的变化. 假定最高温度在中午达到, 最低温度在午夜达到. 试决定能否在只考虑幅射的条件下设计厚板使其表面的平均温度保持在指定的舒适范围内. 一开始, 先假定热是通过暴露在外的有厚板的周边传入住宅的, 而厚板的上下表面是绝热的. 试就这些假设是否恰当、假设的敏感度作出评论. 如果你们不能找到满足表 1 条件的解, 你们能作出满足你们提出的表 1 的厚板的设计吗?

表 1

周围温度	舒适范围
最高85 °F	最高76 °F
最低60 °F	最低65 °F

第二部分 建筑物温度

试分析一开始所作假设的实用性, 并将其推广到分析单层住宅内温度的变化. 住宅内温度能否保持在舒适范围内.

第三部分 建筑费用

考虑到建筑的各种限制及费用, 试提出一种考虑 HUD 公司于降低甚至免去暖气和冷气费用这一目标的设计.

MC M 9 4 问题B

在你们的公司里, 各部门每天都要分享信息. 这些信息包括前一天的销售统计和当前的生产指南. 尽快公布这些信息是十分重要的.

假设一个通讯网络被用来从一台计算机向另一台计算机传输数据组(文件). 作为例子, 考虑下列图模型.

顶点 $V_1, V_2, \cdots, V_m$ 表示计算机, 边 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 表示(由边的端点表示的计算机之间)要传输的文件. $T(e_x)$ 表示传输文件 e_x 所需的时间, $c(v_y)=1$ 表示计算机 v_y 同时能传输多少个文件的容量. 文件传输包括占用有关计算机为传输该文件所需要的全部时间. $c(v_y)=1$ 表示计算机 v_y 一次只能传输一个文件.

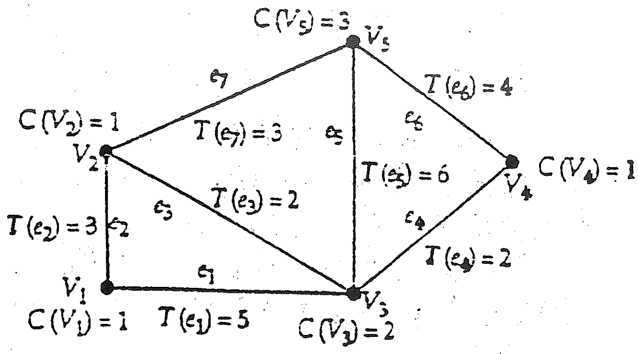


图 1

我们有兴趣的是以最优的方式安排传输即使得传输完所有的文件所用的总时间最少. 这个最小总时间称为接通时间(makespan). 请为你们的公司, 考虑以下三种情形:

情形A: 你们公司有 28 个部门. 每个部门有一台计算机, 在图 2 中每台计算机用顶点表示. 每天必须传输 27 个信息, 在图 2 中用边来表示. 对于这个网络, 对所有的 x, y, 有 $T(e_x)=1$, $c(v_y)=1$. 试找出该网络的最优安排以及接通时间. 你们能向你们的主管人员证明你们对网络求的接通时间是最小可能(最优)的吗? 叙述你们求解该问题的方法. 你们的方法适用于一般情形吗, 即是否适用于 $t(e_x)$、$c(v_y)$ 以及图结构都是任意的情形?

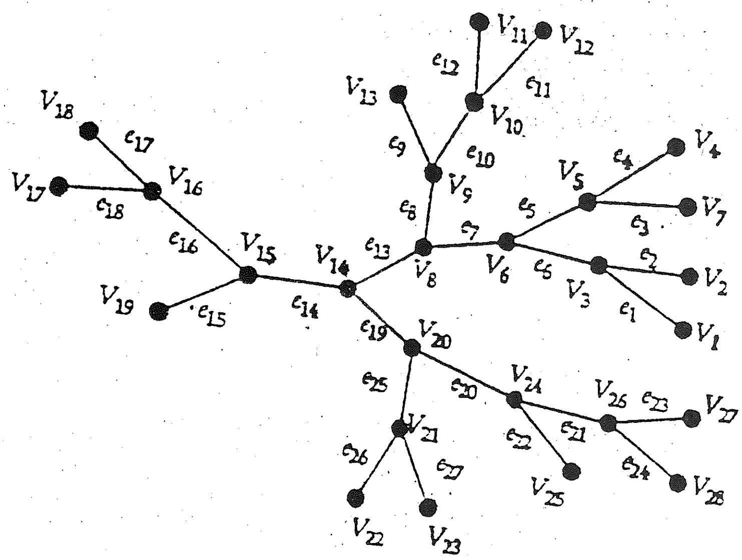


图 2

情形B: 假设你们公司改变了传输要求. 现在你必须在同样的基本网络结构(见图 2)上考虑不同类型和大小的文件. 传输这些文件所需时间由表 1 中每条边的 $T(e_x)$ 项表出. 对所有 y 仍有 $c(v_y)=1$. 试对新网络找出最优安排和接通时间. 你们能证明对于新网络而言你们求得的最小接通时间是最小可能的吗? 叙述你们求解该问题的方法. 你们的方法适用于一般情形吗? 试对任何特异的或出乎意料的结果发表评论.

表 1 情形 B 的文件传输时间数据

$x=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2
$x=$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	9.0	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.3	

情形C: 你们公司正在考虑扩展业务. 如果公司真的这样做的话, 每天有几个新文件(边)要传输. 这种业务扩展还包括计算机系统的升级换代. 28 个部门中的某部门将配备新的计算机使之每次能传输不止一个文件. 所有这些变化都在下面的图 3 以及表 2 中表明. 你们能找到的最优安排和接通时间是什么? 你们能证明对该网络而言这个接通时间是最小可能的吗?

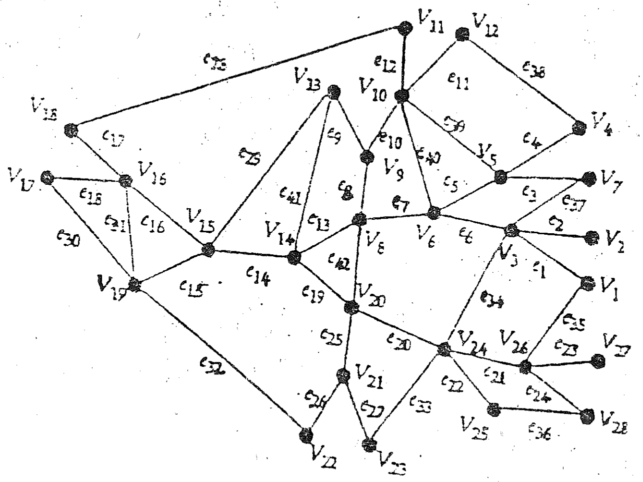


图 3

叙述你们求解该问题的方法. 试对任何特异的或者出乎意料的结果发表评论.

表 2 情形C的文件传输时间数据

$X=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$T(e_x)$	3.0	4.1	4.0	7.0	1.0	8.0	3.2	2.4	5.0	8.0	1.0	4.4	9.0	3.2
$x=$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$T(e_x)$	2.1	8.0	3.6	4.5	7.0	9.0	9.0	4.2	4.4	5.0	7.0	9.0	1.3	6.0
$x=$	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
$T(e_x)$	1.1	5.2	4.1	4.0	7.0	2.4	9.0	3.7	6.3	6.6	5.1	7.1	3.0	6.1
$y=$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$c(V_T)$	2	2	1	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	2
$y=$	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$c(V_T)$	1	2	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1

编者按:

在科大第一届数学模型竞赛举行前夕, 本刊曾要求数学模型队总教练王树禾老师在竞赛结束后推荐一些优秀答卷在《蛙鸣》发表. 后来王老师认为将答卷原原本本地发表是不适宜的, 应该去掉其中非数学的东西, 因为《蛙鸣》是数学刊物. 王老师责成入选校代表队的本刊编委喻甫祥同学修改自己的答卷, 使之更加数学化. 修改后的文章没有给出原题的答案, 但给出了方法.

特发表本次竞赛的试题(即 94 美国 MCM 试题) 及喻甫祥的文章(见下). 这是本刊抛出的引玉之砖. 欢迎大家向本刊投稿.

一种通讯网络的数学模型

9201 喻甫祥 指导老师 王树禾

一 前言

本文将给出一类通讯网络问题 (MCM94-B) 的算法并主要从数学的角度对算法的优劣进行评价. 用到的图论知识主要来自《图论及其算法》(王树禾著)及《图论及其应用》(加 Bondy 等著).

本文把问题转化为图的边着色问题, 后者是 NPC 问题, 目前尚无"好算法". 本文给出的一种边着色算法解决了一个实际的通讯网络的优化问题.

二 图的边着色问题及其算法

图 $G(V,E)$ 的一个 k 边着色是指从 G 的边集 E 到颜色集 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的一个映照 $C=\{E_1,E_2,\cdots,E_k\}$, 其中 $E_i=C^{-1}(i)$; 称 C 是正常的, 如果任意两条相邻的边所对应的颜色不同. 边色数 $\mathcal{X}'=\min\{k$: 存在 k 边正常着色 $C\}$. 一个图 G 的边着色问题包括两方面的内容: 确定边色数 $\mathcal{X}'$ 并给出着色方法. 但是这个工作很难, 目前数学家们能做到的只是给出 $\mathcal{X}'$ 的较好的界.

1 Vizing 定理和简单图的边色数

定理(Vizing,1964):

如果 G 是简单图, 那么 $\Delta\leqslant \mathcal{X}'\leqslant \Delta+1$.

下面将叙述 Vizing 定理的证明, 并提出一种算法, 给出用 $\Delta+1$ 种颜色对图 G 正常着色的方法.

若与顶点 v 关联的某边着颜色 i, 则称颜色 i 在 v 上表现. 设 $C=\{E_1,E_2,\cdots,E_{\Delta+1}\}$ 是 G 的 $\Delta+1$ 边着色, 并记 $f(C)=\sum\limits_{v\in G}c(v)$, 其中 $c(v)$ 是在(C 下的) v 上表现的不同颜色的数目. 显然 $c(v)\leqslant d(v)$, $f(C)\leqslant\sum\limits_{v\in G}d(v)=M(G)$. 证明 Vizing 的一种思路是: 如果 $f(C)<M(G)$, 那么可找到一种新的 $\Delta+1$ 边着色 C', 使得 $f(C)<f(C')$, (我们称 C' 是对 C 的改进, 不能改进的 k 边着色称为最优 k 边着色). 经过有限步改进, 使最后得到 $\Delta+1$ 边着色 C_0 满足 $f(C_0)=M(G)$, 那么 C_0 是 G 的 $\Delta+1$ 边正常着色, 因此 $\mathcal{X}'\leqslant\Delta+1$.

先给出一个引理, 略去证明.

引理: 设 H 是不为奇圈的连通图, 则 H 有一个 2 边着色, 它的两种颜色在度至少为 2 的每个顶点上表现.

我们指出, 对 H 2 边着色的过程中可能需要寻找一个 Euler 图的 Euler 回路. 这是为了方便以后对算法的评价.

下面证明 Vizing 定理.

定理: C 是 G 的 $\Delta+1$ 边着色, 如果存在 $u\in G$, $c(u)<d(u)$, 那么 C 可以被改进.

证明: 假设 C 不能被改进. 必然存在颜色 i_0 和 i_1, i_0 不在 u 上表现, i_1 至少在 u 上表现两次, 设 uv, uv_1 具有颜色 i_1, 如图1.1 (a).

由于 $d(v_1)<\Delta+1$, 有颜色 i_2 不在 v_1 上表现. 则 i_2 必定在 u 上表现 [若不然, 用 i_2 来给 uv_1 重新着色, 可得 C 的一个改进]. 故存在一条边 uv_3 具有颜色 i_3. 继续下去, 就构作了一个顶点序列 $v_1,v_2,\cdots$ 和一个颜色序列 $i_1,i_2,\cdots$, 使得:

(1) uv_j 有颜色 i_j ,且

(2) i_{j+1} 不在 v_j 上表现.

由于 u 的度数为有限数, 故存在一个最小整数 l, 使得对某个 $k<l$, 有 (3) $i_{l+1}=i_k$. 如图1.1 (a).

现在以如下方式给 G 重新着色. 对于 $1\leqslant j\leqslant k-1$, 用颜色 i_{j+1} 对 uv_j 重新着色, 产生一个新的 $(\Delta+1)$ 边着色 $C'=(E'_1,\cdots,E'_{\Delta+1})$ (图1.1 (b)). 显然

$$C'(v)\geqslant c(v),\qquad \forall v\in G$$

故 $f(C')\geqslant f(C)$. [如果 $G[E'_{i_0}\cup E'_{i_k}]$ 中含有 u 的分支 H' 不是奇圈, 可按引理 1 的方法给出 C' (因而也是 C) 的一个改进 J (因为 $C'_H(u)=2>C_{H'}(u)=1,\cdots$)] 故 H' 是奇圈.

现在对于 $k\leqslant j\leqslant l-1$ 用颜色 i_{j+1} 给 uv_j 重新着色, 用颜色 i_k 给 uv_l 重新着色, 得到一个 $(\Delta+1)$ 边着色 $C''=(E''_1,\cdots,E''_{\Delta+1})$ (图1.1 (c)). 如前所述, 有

$$C''(v)\geqslant c(v),\qquad \forall v\in V$$

现在来看 $G[E''_{i_0}\cup E''_{i_k}]$ 中包含 u 的分支 H''. 由于 v_k 在 H' 中度数为 2 , v_k 在 H'' 中度为 1. 所以 H'' 不是奇圈. [因而由引理, 可用 i_0 和 i_1 对 H'' 重新着色, 得到 C 的改进.] 这与假设矛盾.

上面 [ ] 中的文字指出了改进的方法, 由此得到一种算法, 可对 G 进行 $(\Delta+1)$ 边正常着色.

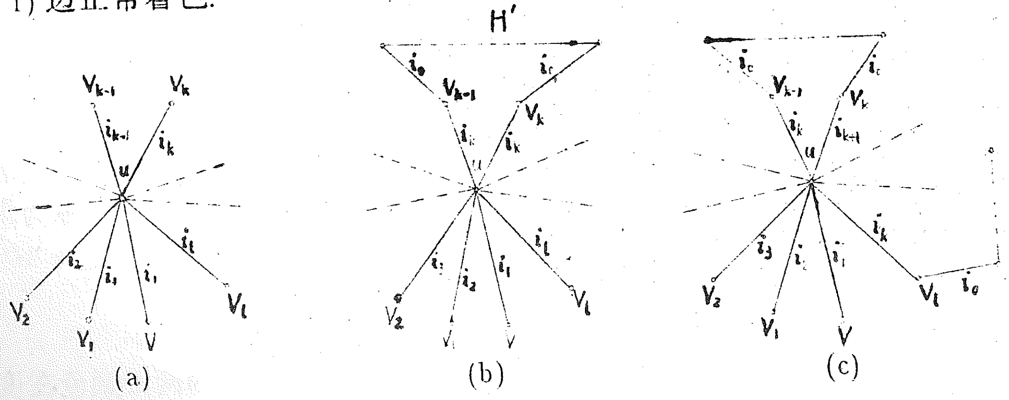


图 1.1

Vizing 实际上证明了更一般的定理: 对无环图 G, $\Delta\leqslant X'(G)\leqslant\Delta+u$, 其中 u 是 G 的最大重数. 考虑到算法的复杂性和可能带来的较大误差, 我们不去设计类似的算法.

另一个问题是: 哪些简单图适合 $X' = \Delta$ 呢? 这个问题尚未解决, 尽管已有一些好的结论.

2. Shannon 定理和无环图的边色数

若 G 是(无环)图, 则 $X' \leqslant \frac{3}{2}\Delta$. 因为 Shannon 证明了 Δ 为奇时定理成立, 我们姑且称该定理为 Shannon 定理. Δ 为偶数时定理的证明非常简单, 而且我们也只用这一情形, 故只叙述 Δ 为偶数时的证明过程.

证明: 不妨设 G 是连通的. $\Delta = 2k$.

(1) G 有正则母图. 例如可如下构造该母图 G^*:

G 中度数为奇的顶点数为偶数, 可把它们分成若干对, 每对顶点之间连上一条边, 得到的图每个顶点度数都是不超过 Δ 的偶数; 再在每个顶点 v 上加 $\frac{\Delta - d'(v)}{2}$ 条环 (其中 $d'(v)$ 是在前面操作下得到的顶点度数). G^* 是 Δ 正则图.

(2) G^* 的顶点集 $V = \{V_1, V_2, \cdots, V_v\}$. G^* 有 Euler 回路 C. 根据下述规则构作二分类 (X, Y) 的偶图 G', 这里 $X = \{x_1, \cdots, x_v\}$, $Y = \{y_1, \cdots, y_v\}$, 即: 在 C 上每当 V_j 直接居于 V_i 之前, 就把 x_i 和 y_j 连接起来.

(3) G' 是 k 正则偶图, 1 可因子分解. (我们可用匈牙利算法来实现).

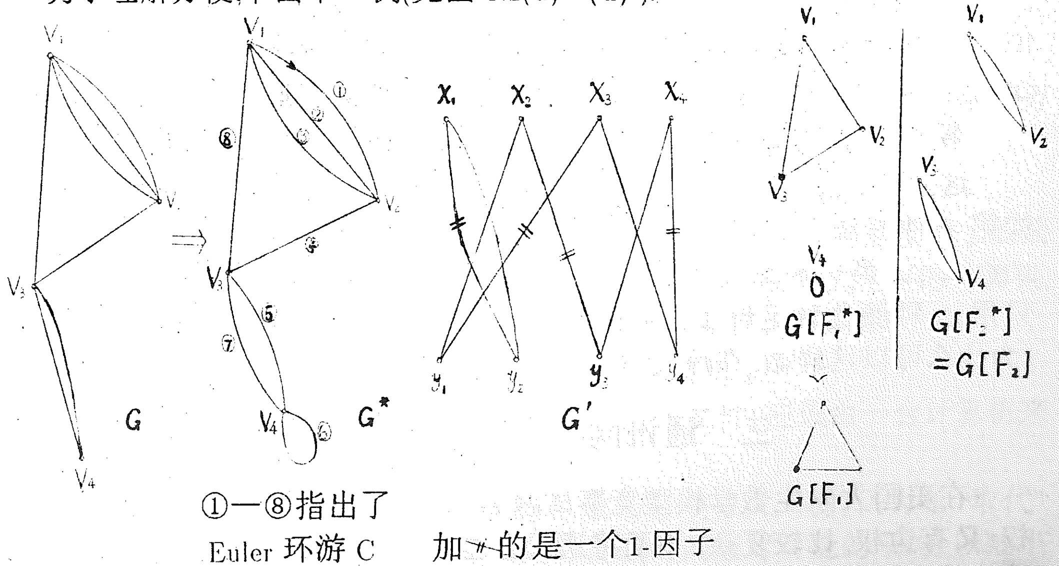
(4) 回到 G^*, G^* 是 2 可分因子分解的, 设 $F_1^*, \cdots, F_k^*$ 是 G^* 的两两不交的边集, $G[F_i^*]$ 是 2 正则图.

(5) 把 F_i^* 在(1)中加上的边去掉, 成为F_i. $G[F_i]$ 的最大度数是 2, 它的每一分支是树、偶圈或奇圈. 前二者是 2 边可着色的, 后者是 3 边可着色. 因此至多需 3 种颜色就可对 $G[F_i]$ 正常着色; 如果 $G[F_i]$ 的分支中没有奇圈, 只需两种颜色.

(6) 一共需不超过 $3k$ 种颜色就可对 G 正常着色.

上面的证明过程就是算法的实现过程.

为了理解方便, 下面举一例(见图 1.2(a)—(d)).



①一⑧指出了 Euler 环游 C

加⫽的是一个1-因子

1.2 (a) 1.2 (b) 1.2 (c) 1.2 (d)

3．边着色与顶点着色的关系

L(G) 称为 G 的线图: L(G) 的顶点是 G 的边; L(G) 的两个顶点相邻当且仅当这两个顶点代表的 G 的边是相邻的. 显然, 有 $X'(G) = X(L(G))$, 只需考虑 $L(G)$ 的顶点着色.

不过, 图的色数问题是 NPC 问题,目前还没有多项式算法. 虽然我们有递归算法: 若 H 不是完全图 (不妨设 H 是简单图), e 不是 H 的边, $e = uv, u, v$ 是 H 的顶点, 那么 $X(H) = \min(X(H+e), X(H \cdot e))$, 但这种算法过于复杂.

《图论及其算法》(王树禾著)介绍了一种实用的算法, 但不能达到较高的精度.

4．三种算法的评价

我们不去确切地估计算法的时间阶, 只是指出它们都是多项式的.

第一种算法要分许多次改进: 如果起初着色都用颜色 1, 那么 $c(v) = 1$, 可能要用 $\sum(d(v)-1)$ 次改进. 每次改进都是两种情形之一: 一是对与 u 关联的边的着色的简单调整; 一是对包含 u 的一个连通子图重新着色. 后者更为复杂, 涉及到对奇圈的判断和对 Euler 回路的构造. 但 Euler 回路是能用 Fleury 算法在多项式时间内实现的.

第二种算法的时间主要来自 Euler 回路和 1-因子分解, 二者都能在多项式时间内实现. 第三种算法简单易行, 时间阶也许是最小的.

再来分析三种算法的误差.

由于 $\Delta \leqslant X' \leqslant \Delta + 1$ 对简单图成立, 误差 $\leqslant \dfrac{1}{\Delta}$, (当 $\Delta \to \infty$ 时, $\dfrac{1}{\Delta} \to 0$), 第一种算法的误差较小.

另两种算法带来的误差只能粗估, 第二种算法中, 我们用的颜色不超过 $\dfrac{3\Delta}{2}$, 但 $x' \geqslant \Delta$, 故相对误差 $\leqslant 50\%$; 第三种算法中, 用色不超过 $\Delta(L(G)) + 1 \leqslant 2(\Delta - 1) + 1 = 2\Delta - 1, x' \geqslant \Delta$, 故相对误差 $\leqslant 100\%$.

第一种算法精确; 第二、第三两种算法使用范围广, 各有优缺点.

这里必须提醒一句, 前面的误差分析是粗略的, 而且, 并不是所有的时候第一种算法都比前面的两种算法精确. 譬如对(简单)偶图 G, 易由引理知 $x'(G) = \Delta$: 第一种算法一般会用 $\Delta + 1$ 种颜色对 G 着色; 而第二种算法却总是只用 Δ 种颜色就足够了, 因为 G 没有子图为奇圈. 当然, 这里假定 Δ 是偶数. (为什么可以这样做, 在后文可以看到).

三 通讯网络问题化为边着色问题

在美国大学生数学模型竞赛试题 MCM94-B 中, 通讯网络的图模型既有点权, 又有边权, 比较复杂. 下面将通过合理的假设来对边权和点权进行处理, 以便利用图论工具.

1．对边权的处理

我们假定图模型的点权为 1, 即 $c(V)=1$, 对每个顶点 V. 后文将把点权不全为 1 的情形化成这一情形.

结合计算机的实际, 我们假定:

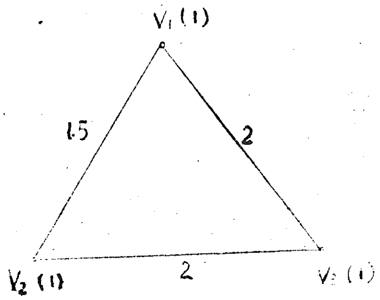
(a) 边权为正整数. 这只要取合适的时间单位.

(b) 一个文件可以分数次传输.

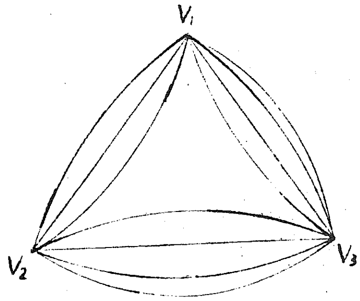
(c) 我们进而假设, 一个传输时间为 n 的文件可以看成是 n 个传输时间为 1 的子文件组成的. 表现在图上, 把一条边权为 n 的边化为无权(或说权为1)的 n 重边.

(d) 根据需要, 我们可取恰当的时间单位使得到的图的最大度数是偶数.

下面的图是一个例子. 括号中的数是点权(容量).



$\Longrightarrow$



(a) 原始图模型 (b) 改进的图模型

时间单位已缩小一半.

(b) 的边无权. 但有多重边. 看起来(b)并不比(a) 优越. 不过, 这只是表象, 改进后的图边无权, 可以利用边着色来解决: 给改进图的边正常着色, 染同一颜色的边不相邻.它们正好代表了单位时间内一次成功的传输; 用颜色总数即是花的总时间.

需要指出的是: 迄今为止, 我们的化归完全是等价化归. 通讯网络传输的方式取决于对图的边正常着色方式.

2．对点权的处理

点权代表了计算机的容量, 是表征计算机功能的量. 为了向点权为 1 的简单情形靠拢, 我们想用多台容量为 1 的计算机来取代一台容量大于 1 的计算机, 消除点权因素的困扰. 具体方法值得考虑. 下面两个条件必需满足:

(a) 应该用 $c(v)$ 台容量为 1 的计算机来取代计算机 v.

(b) 每一个完整的文件 (而非在 1 的假设下的子文件) 应该由一台计算机来实施传输.

考虑到在前面的图论算法中, Δ 对边色数的影响很大, 我们认为在 "取代" 后, 即 $c(v)$ 台容量为 1 的计算机分得的文件传输时间应尽可能的平均, 以减小 Δ (这里的 Δ 应该理解为点权为 1 的图中, 顶点边权之和的最大值). 因此, 我们

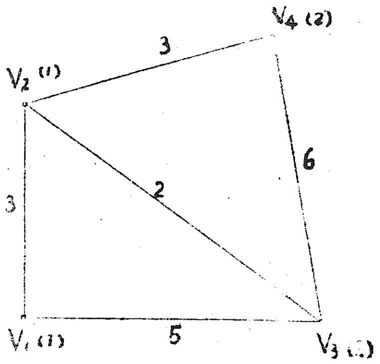
采用下面的方式:

设 $n = c(v)$. $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 是与 v 关联的边, $T(e_1) \geqslant T(e_2) \geqslant \cdots \geqslant T(e_m)$. 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是 n 个容量为 1 的点. 依次把 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 放到 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 中去, 当 $e_1, e_2, \cdots, e_j (j < m)$ 都放好后, 将 e_{j+1} 放到当时边权之和最小的那个顶点中去. 如此分配完毕.

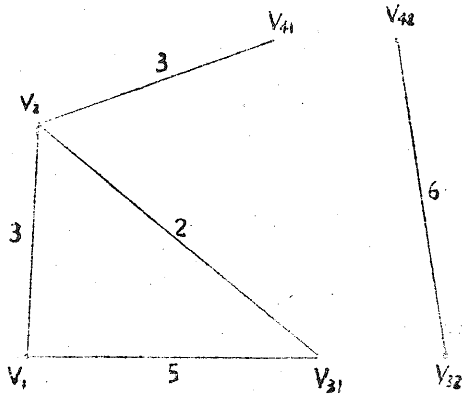
现在, 我们已消除了点权的影响, 可以化归到前面 1(对边权的处理) 的情形.

四 算法应用实例

我们考虑下面这个图模型(4.1(a))



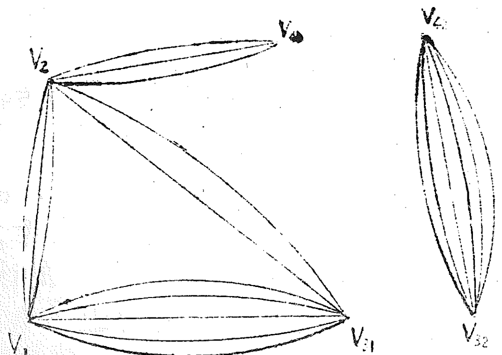
4.1 (a)



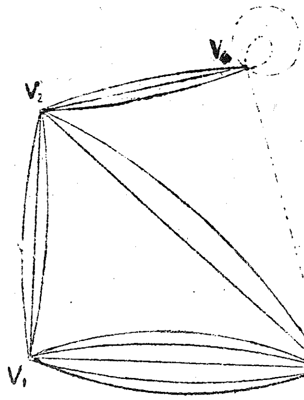
4.1 (b)

括号中的数是容量, 边上的数是文件传输时间.

我们现按三.2 来对点权进行处理. 4.1(b) 是结果图. 再对边权进行处理, 得 4.1(c).



4.1 (c)

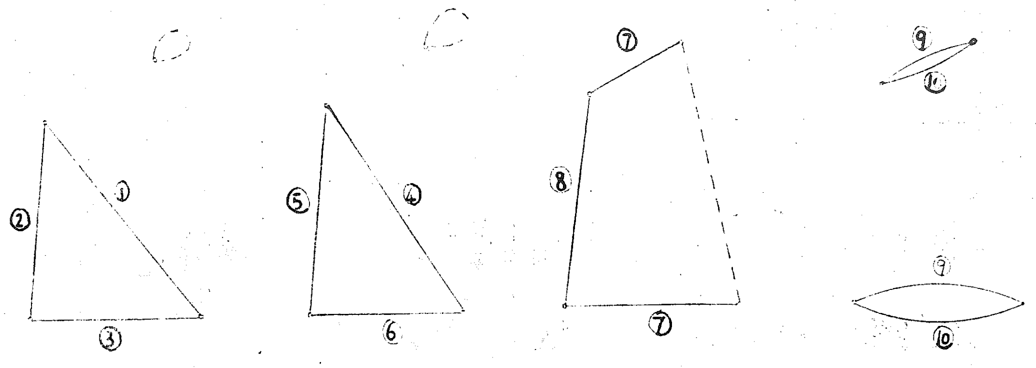


4.1 (d)

由于 4.1(c) 是非简单图, 我们用 Shannon 定理导出的算法来做. 先做左边那个分支. 4.1(d) 是该分支的 8 正则母图, 虚线是后加的边.

4.1(e) 是在施行寻找 Euler 回路操作后得到的母图的 2-因子, 下面标的颜色

数是各 2-因子去掉加上的边后需的颜色数, 边上的数字已标明了颜色.

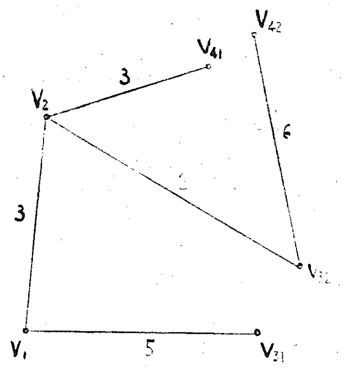


3 种颜色　　3 种颜色　　2 种颜色　　2 种颜色

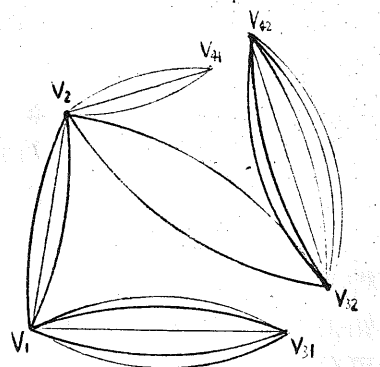
4.1 (e)

我们共用了 10 种颜色, 而且由于 V_1, V_2, V_{31} 的各边都相邻, 至少需 $(2+3+5=)10$ 种颜色; 右边的分支用①到⑥共 6 种颜色着在 6 条边上即可. 于是我们得知 4.1(c) 的边色数是 10, 可推得完成 4.1(a) 表示的传输 10 个单位时间是足够的.

不过, 实际上 8 单位时间就行了. 我们对点权进行另外的处理. 如下, 4.1(f) 由 4.1(a) 变化得来:



4.1 (f)



4.1 (g)

再对边权处理, 得到 4.1(g), 这是一个偶图, 因为它没有奇圈. 仍用第二种算法, 知 8 种颜色足够.

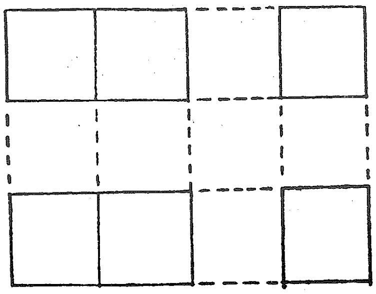
上面这个例子说明我们的算法是有效的, 同时也说明我们对点权的处理过于粗略, 并不能只考虑度数这一个因素.

再考虑几种常见的传输.(都设点权为 1)

方格传输. 如图 4.2. 在边权为 1 及不为 1 的情况下, 图的初级圈都是偶圈, 图是偶图, 由第二种算法知耗时总数为单个计算机完成传输的时间之最大值.

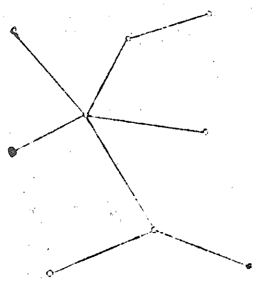
树形传输. 结论同方格传输. 图 4.3.

正六边形传输. 结论同方格传输. 图4.4.



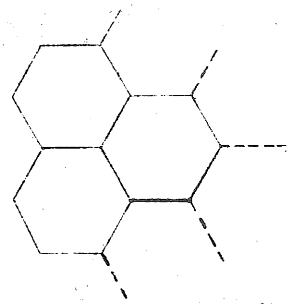
初级圈□及

4.2



初级圈

4.3



初级圈

4.4

完全图传输. 当边权为 1 时, 边色数为 $2[\frac{\Delta}{2}]+1$.

五　总结与评述

本文的三种算法较好地把某种通讯网络问题 (通过对点权和边权的处理) 转化为边着色问题, 顺利地得到了解决. 三种算法都是多项式算法, 容易在计算机上实现.

值得改进的主要有两点: 一是边着色方式的改进, 主要是把第一种算法推广到无环图, 减小第二种算法的随机性等; 二是对点权的更好处理, 不仅考虑到度数, 而且要尽量减少奇圈, 力图使得到的图"简单". 一些次要的改进主要是对边权的处理, 我们可以有意粗略处理, (如把 8.9 看作 9) 这样可以使得到的图简单一些.

需要提醒注意的是对于这个实际问题可能提炼出另外的好算法, 但我们不要期待发现一般地解决问题的有效算法, 因为这个问题是 NPC 的. 另外, 通过一次又一次地把图模型上的最大对集取下作为一此传输, 有时也能得到正确答案, 但这其实是边着色 (或化为点着色) 的一种低效算法, 至少得对最大对集作出某种限制.

如果一些文件要辗转传输, 问题就复杂了, 因为文件传输必须依次进行. 虽然仍可分成数次传输, 但总的次序不能变更. 怎么解决这类问题是值得我们继续研究的问题之一.

指导老师附言:

喻甫祥的文章《一种通讯网络的数学模型》写得生动严密, 把着色问题的理论和算法用他自己的方式讲得又正确又透彻, 恰如其分地与通讯网络这个实际问题相结合, 很值得一读.

图论是一门十分诱人的数学分支, 它让人机智、活泼、严密, 它讲的是关系, 是事理, 又能从方方面面联系自然与社会生活中的实际, 为非数学问题设计数学模型, 确为每个数学专业的学生都要学会的功课, 可惜我国数学与应用专业大多数未开设图论课程, 在此劝大家自学一些图论基本课程与方法, 且试着做一些研究工作, 说不定你会着迷于图论的魅力而有始无终地干下去.

第八届全国大学生数学夏令营竞赛试题及解答

9201 何斯迈　　9101 沈维孝

试题选登

第一试

1 求 $\left[\dfrac{10^{60}}{10^6+3}\right]$ 的个位数.

2. 在平面上给定 $n(\geqslant 2)$ 个点. 试证: 唯一存在一面积最小的闭圆盘, 将这 n 个点盖住.

3. $D_a=\{(x,y)\in R^2|a\leqslant x\leqslant a+4,\ y\geqslant b^2\}$
f 是上半平面内的解析函数, 且 $\forall \mathrm{Im}z>0, |f(z)|\leqslant b$.
求证: $f(D_a)$ 的面积 $\leqslant 1$.

4. A 是 Hilbert 空间 L^2 上的线性算子, $A: L^2\to L^2\,(x_1,x_2,\cdots)\to(a_1x_1,a_2x_2,\cdots)$.
求满足下述条件的算子 A 的集合 (记 $A=(a_1,a_2,\cdots)$).
(1) A 是紧算子.　　(2) A 有闭值域.

5. (R,δ) 是 Euclid 整环, 且有 $\forall a,b\in R,\ \delta(a+b)\leqslant\max\{\delta(a),\delta(b)\}$.
求证: R 是域或一个域上的多项式环.

第二试

1. 求所有的连续函数 $f: R^+\to R$. ($R^+=\{x\in R|x\geqslant 0\}$), 使得:

$$f^3(x)=\int_0^x f(x)dx,\ \forall x\in R^+$$

2. D为单位闭圆盘上的解析函数, 且有 $\forall|z|=1,\ |f(z)+g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$.
证明: $\forall\lambda\geqslant 0,\ f-\lambda g, f, g$ 在单位圆内有相同个数的零点 (记重数).

3. 是否存在 R 上的连续函数列 $\{f_n\}$, 使得

$$\forall x\in R,\ \lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\begin{cases}0, & x\in Q;\\ 1, & x\notin Q.\end{cases}$$

4. M 为一个实矩阵 $(n\times n)$ 集合, 且满足
(1) $I\in M$;
(2) $\forall A\in M-\{I\},\ \exists B\in M$, 使$AB\neq BA$;
(3) $\forall A,B\in M,\ AB=BA$或$AB=-BA$;
(4) $\forall A,B\in M,\ AB\in M$或$-AB\in M$;
求证: $|M|\leqslant n^3$.

第一试解答

1. $3^{10} < 10^6+3$, 又 $(10^{60}-3^{10})/(10^6+3)=\sum_{i=0}^{9}10^{6i}(-3)^{9-i}\equiv 7(\mod 10)$.

$\therefore\quad \left[\dfrac{10^{60}}{10^6+3}\right]=\dfrac{10^{60}-3^{10}}{10^6+3}\equiv 7(\mod 10)$.

$\therefore\quad \left[\dfrac{10^{60}}{10^6+3}\right]$ 的个位数是 7.

2. 显然存在闭圆 (O_0,r_0) 盖住这 n 个点 $\{a_i|1\leqslant i\leqslant n\}$.

$\therefore\quad \sum=\{$ 闭圆 $(O,r)|(O,r)$ 盖住这 n 个点, $r\leqslant r_0\}$ 非空.

取 $r_x=\inf\{r|(O,r)\in\sum\}$, 则

$\exists\,(O_n,r_n)\in\sum$, (对不同的 n 不必不同), $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=r_x$.

$\because\quad O_n\in(O_0,2r_0)$,

$\therefore\quad \exists\{n_k\}$ 为 N 的子序列, $\lim\limits_{k\to\infty}O_{n_k}=O_x$,

则对任意给定点 $a_i, 1\leqslant i\leqslant n$, 有 $\forall k\in N, |a_i-O_{n_k}|\leqslant r_{n_k}$.

$\therefore\quad |a_i-O_x|=\lim\limits_{k\to\infty}|a_i-O_{n_k}|\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}r_{n_k}=r_x$.

$\therefore\quad (O_x,r_x)\in\sum$.

又 $\forall(O,r)\in\sum$, $\because\ r\geqslant r_x$,

$\therefore\quad (O,r)$ 的面积不小于 (O_x,r_x) 的面积.

$\therefore\quad (O_x,r_x)$ 即为面积最小的闭圆盘将这 n 个点盖住.

若 (O_x,r_x) 和 $(O'_x,\ r'_x)$ 均为面积最小的, 则 $r_x=r'_x$,

则以二圆的公共弦为直径的圆 $(O''_x,\ r''_x)$, 有 $r''_x<r_x$.

$\therefore\quad \forall 1\leqslant i\leqslant n, a_i\in(O_x,r_x)\cap(O'_x,r'_x)\subseteq(O''_x,r''_x)$,

$\therefore\quad (O''_x,r''_x)\in\sum$. 而 $r''_x<r_x$, 矛盾.

3. $\forall\mathrm{Re}z_0>0$, 取 $h_{z_0}(z)=\dfrac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$, $\forall\ \mathrm{Re}z>0$.

则 $\dfrac{1}{b}f\circ h_{z_0}^{-1}$ 将单位圆映到单位圆内,

$\therefore\quad \|(\dfrac{1}{b}f\circ h_{z_0}^{-1})'(0)\|\leqslant 1$. (由 Schwarz 引理)

$\therefore\quad \dfrac{1}{b}\|f'(z_0)\|\leqslant\|h'_{z_0}(z_0)\|$,

$\therefore\quad \|f'(z_0)\|\leqslant\dfrac{b}{2\mathrm{Im}z_0}$,

$\therefore\quad f(D_a)$的面积

$$=\iint_{\substack{a\leqslant x\leqslant a+4\\ y\geqslant b^2}}\|f'(x+yi)\|^2dx\wedge dy$$

$$=\iint_{\substack{a\leqslant x\leqslant a+4\\ y\geqslant b^2}}\frac{b^2}{4y^2}dx\wedge dy$$

$$=\left(\int_a^{a+4}\frac{1}{4}dx\right)\left(\int_{b^2}^{+\infty}\frac{b^2}{y^2}dy\right)$$

$$=1.$$

4. (1) 充要条件为 $a_n \to 0$.

T 为紧算子 $\Longleftrightarrow \forall M \subset L^2$ 为有限集, TM 为致密集

$\Longleftrightarrow \forall M \subset L^2$ 有界, TM 完全有界.

充分性: $\forall M \subset L^2$ 有界, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in TM$,

$\exists x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in M, y = Tx$.

$$\therefore \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2 x_k^2 \leqslant \sup\{a_k^2 \mid n+1 \leqslant k\} \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \leqslant \|x\|^2 \sup\{a_k^2 \mid n+1 \leqslant k\}$$

$n \to \infty$ 时, $d_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} y_k^2$ 一致地趋于 0.

所以 TM 完全有解.

必要性: 取 $M = \{e_i | i \in N\}, e_i = \{0, 0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots\}, Te_i = a_i e_i$.

$$\sup\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 \mid y = (y_1, \cdots, y_n, \cdots) \in TM\right\} = \sup\{a_k^2 \mid n+1 \leqslant k\} \quad \forall n \in N$$

由于 TM 完全有界,

$\therefore \quad \sup\limits_{y \in TM} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} y_k^2 \to 0.$ 即 $\sup\{a_k^2 \mid n+1 \leqslant k\} \to 0$.

$\therefore \quad a_n \to 0$.

(2): 充要条件为 $\exists M > 0, \forall n \in N, a_n = 0$, 或 $\dfrac{1}{a_n} < M$.

充分性: 设 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为使 $a_n \neq 0$ 的 n 组成的序列.

则 $A(L^2) \subseteq R_{n_1} \times R_{n_2} \times \cdots \times R_{n_k} \times \cdots \doteq B$.

又 $\forall x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in B, x_i = 0, \forall i \notin \{n_k | k \in N\}$.

取 $y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in L^2, y_i = \begin{cases} 0 & i \notin \{n_k | k \in n\} \\ x_i / a_i & i = n_k \end{cases}$.

则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} M^2 x_i^2 < +\infty$.

而 $A(y) = x$, $\therefore \quad B = A(L^2)$.

而显然 B 为闭集, 所以 A 有闭值域.

必要性: 若这样的 M 不存在, 则存在 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为严格增的自然数序列,

使得 $\dfrac{1}{a_{n_k}} > k$.

则易知 $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}, \quad x_i = \begin{cases} 0 & i \notin \{n_k | k \in N\} \\ \dfrac{1}{k} & i = n_k \end{cases}$.

$\therefore$ 若$A(L^2)$为闭集, 则$\exists y = (y_i)_{i=1}^{\infty} \in \partial(A(L^2))$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2 < +\infty$.

$\therefore \quad \forall z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in L^2, \|z - y\| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

设 $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为使 $a_m \neq 0$ 的 m 组成的序列. 记:

$$z_0 = (z_i')_{i=1}^{\infty}, z_i' = \begin{cases} 0 & i \notin \{m_k | k \in N\} \\ z_i/a_i & i = m_k \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \sum_{i=1}^{\infty}(z_i')^2 &= \sum_{i=1}^{\infty}(z_{n_i}/a_{n_i})^2 \\
&\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}\left\{(y_{n_k}/a_{n_k})^2 + [(y_{n_k} - z_{n_k})/a_{n_k}]^2\right\} \\
&\leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty}(y_{n_k}/a_{n_k})^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(y_{n_k} - z_{n_k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}^2\right) \\
&< +\infty .
\end{aligned}$$

$\therefore$ $z_0 \in L^2$, $\therefore$ $z = A(z_0) \in A(L^2)$,

$\therefore$ y 是 $A(L^2)$ 的内点, 矛盾.

所以必要性成立.

5. 显然 $\delta(1) = 1$. 记 $F = \{a \in R | \delta(a) = 1\} \cup \{0\}$.

则 $\forall a \in F - \{0\}, \exists b, r \in R$, 使$1 = ab + r$且$\delta(r) < \delta(a)$,

$\because$ $\delta(a) = 1$ $\therefore$ $\delta(r) = 0$ $\therefore$ $r = 0, b = a^{-1}$

$\therefore$ $1 = \delta(1) = \delta(ab) = \delta(a)\delta(b) = \delta(b)$.

故 $b \in F$.

又 $\forall a, b \in F$, $\delta(a+b) \leqslant \max\{\delta(a), \delta(b)\} \leqslant 1$ $\therefore$ $a + b \in F$.

$\because$ $\delta(-a) = \delta(-1)\delta(a) = \delta(a) \leqslant 1$

$\therefore$ $-a \in F$, $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b) \leqslant 1$

$\therefore$ $ab \in F$.

因此 F 是域.

若 $R \neq F$,则$\exists b \in R, \delta(b) > 1$.

记 $n_0 = \min\{\delta(b) | b \in R - F\}$, 设 $\delta(b_0) = n_0 \geqslant 2$.

则 $\forall a \in R, \delta(a) \in R$.若$\delta(a) < n_0$,有$a \in F[b_0]$,

若 $\forall a \in R, \delta(a) < k$,有$a \in F[b_0]$,

则 $\forall a \in R, \delta(a) < k + 1 (k \geqslant n_0)$,有$\delta(a) = k$,

$\therefore$ $\exists c, r \in R$, 使 $a = cb_0 + r$ 且 $\delta(r) < \delta(b_0)$

$\because$ $\delta(a) \leqslant \max(\delta(b_0), \delta(r))$,

$\therefore$ $\delta(a) \leqslant \delta(cb_0)$, $\therefore$ $\delta(cb_0) = \delta(a)$,

$\therefore$ $\delta(c) = \delta(a)/n_0 < k$, $\therefore$ $c \in K[b_0]$,

而已知 $r \in K[b_0]$, $\therefore$ $a = cb_0 + r \in K[b_0]$.

$\therefore$ $R \subseteq K[b_0]$ $\therefore$ $R = K[b_0]$.

又若 $\exists f \in F[x], f(b_0) = 0$,

设 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,

则 $n_0^n=\delta(a_n)\delta^n(b_0)=\delta(a_nb^0)=\delta(f(b_0)-(a_nx^n+\cdots+a_0))$

$=\delta(-a_{n-1}b_0^{n-1}+\cdots+a_0)\leqslant\max\{a_ib_0^i|0\leqslant i\leqslant n-1\}$

$\leqslant\max\{n_0^i|0\leqslant i\leqslant n-1\}<n_0^n$ 矛盾!

$\therefore$ b_0 为 F 上的超越元素. $\therefore$ $R=F[b_0]=F[x]$.

$\therefore$ R 或为域, 或为一个域上的多项式环.

第二试

1. 显然 $f(0)=0$, 且 $f=0$ 是解. 不妨设 $f\neq 0$, 则 $\exists x_1\in R^+, f(x_1)\neq 0$.
记 $x_0=\sup\{x|0\leqslant x\leqslant x_1, f(x)=0\}$. 不妨设 $f(x_1)>0$, (否则取 $-f$).
若 $\exists x_2>x_1, f(x_2)=0$, 记 $x_{2,0}=\inf\{x_1\leqslant x\leqslant x_2, f(x)=0\}$.
则 $\forall x\in(x_1,x_{2,0}), f(x)>0$,
$\therefore$ $f^3(x_{2,0})-f^3(x_1)=\int_{x_1}^{x_{2,0}}f(x)dx>0$. $\therefore$ $f(x_1)<0$, 矛盾.
$\therefore$ $\forall x>x_1. f(x)>0$. $\therefore$ $f'(x)=\frac{1}{3}(f^3(x))'_x(f^3(x))^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3f(x)}$.

$\therefore$ $\dfrac{d\left(\frac{2}{3}f^2(x)\right)}{dx}=1$.

$\therefore$ $\frac{2}{3}f^2(x)=x-x_1+\frac{2}{3}f^2(x_1), \forall x>x_1$.

由 x_1 的任意性知 $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,x_0]\\ \sqrt{\frac{2}{3}(x-x_0)} & x>x_0\end{cases}$,

或 $-f(x)=\begin{cases}0 & x\in[0,x_0]\\ \sqrt{\frac{2}{3}(x-x_0)} & x>x_0\end{cases}$, 或 0 解.

2. 显然 $\forall|z|=1, g(z)f(z)\neq 0$, 记 $h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}, \forall|z|\leqslant 1$.
则 $h(z)$ 为单位圆内的亚纯函数, 且在边界上无极点和零点.
$\because$ $|h(z)+1|=\dfrac{|f(z)+g(z)|}{|g(z)|}<\dfrac{|f(z)|+|g(z)|}{|g(z)|}=|h(z)|+1,\quad \forall|z|=1$.
$\therefore$ $h(z)\notin\overline{R^-}, \forall|z|=1$.
记 $\Gamma=h\{z\in C\,|\,|z|=1\}$, 则 Γ 为可求长简单闭曲线, 内部无零点 ($\Gamma\cap\overline{R^-}=\phi$).

$$\therefore\quad \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{h'(z)}{h(z)}dz=0$$

$\therefore$ $N_{h(z)}-P_{h(z)}=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma\frac{h'(z)}{h(z)}dz=0$

(N,P 分别为函数在 Γ 内部的零点和极点个数).
$\because$ $N_{h(z)}=P_{h(z)}$ $\therefore$ $N_{f(z)}=N_{g(z)}$,

$\therefore$ f 和 g 在单位圆内部有相同个数的零点和极点.

$$\therefore \quad |f(z)-\lambda g(z)+\lambda g(z)| = |f(z)| = |g(z)||h(z)|$$
$$\leqslant |g(z)|(|h(z)-\lambda|+\lambda) = |f(z)-\lambda g(z)| + |\lambda g(z)|$$

$\therefore$ $f(z)-\lambda g(z)$ 与 $g(z)$ 在单位圆内有相同个数的零点.
$\forall \lambda \geqslant 0, f-\lambda g, f, g$ 在单位圆内有相同个数的零点.

3. 若存在这样的函数序列 $\{f_n\}$, 则 $\exists n_1 \in N, f_{n_1}(0) < 1/4$,
$\exists m_1 \in N, f_{n_1}(y) < \frac{1}{2}, \forall y \in \left[0, \frac{1}{m_1^2}\right]$,
$\therefore$ $\exists x_1 \in \left(0, \frac{1}{m_1^2}\right) \cap Q$, $\therefore$ $\exists n_2 \in N, f_{n_2}(x_1) < \frac{1}{4}, n_2 > n_1$,
$\therefore$ $\exists m_2 \in N, f_{n_2}(y) < \frac{1}{2}, \forall y \in \left[\frac{m_2'}{m_2}, \frac{m_2'}{m_2} + \frac{1}{m_2^2}\right] \subset \left(0, \frac{1}{m_1^2}\right)$,
其中 $m_2' \in Z, m_2 > m_1$.
$\therefore$ $\exists x_2 \in \left(\frac{m_2'}{m_2}, \frac{m_2'}{m_2} + \frac{1}{m_2^2}\right) \cap Q$. $\therefore$ $\exists n_3 \in N, f_{n_3}(x_2) < \frac{1}{4}, n_3 > n_2$,
$\therefore$ $\exists m_3 \in N, f_{m_3}(y) < \frac{1}{2}$, $\forall y \in \left[\frac{m_3'}{m_3}, \frac{m_3'}{m_3} + \frac{1}{m_3^2}\right] \subset \left(\frac{m_2'}{m_2}, \frac{m_2'}{m_2} + \frac{1}{m_2^2}\right)$.
其中 $m_3' \in Z, m_3 > m_2$.
依次构造出序列 $\{m_k\}$, $\{n_k\}$, $\{m_k'\}$,
则有 $\left[0, \frac{1}{m_1^2}\right] \supset \left[\frac{m_2'}{m_2}, \frac{m_2'}{m_2} + \frac{1}{m_2^2}\right] \supset \cdots \left[\frac{m_k'}{m_k}, \frac{m_k'}{m_k} + \frac{1}{m_k^2}\right] \cdots$ 为单降闭集序列.
$\therefore$ $\exists x_0 \in R, x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{m_k'}{m_k}$, 则 $\forall k \in N, x_0 \in \left[\frac{m_k'}{m_k}, \frac{m_k'}{m_k} + \frac{1}{m_k^2}\right]$.
$\therefore$ $f_{n_k}(x_0) < \frac{1}{2}$. $\because$ $\{n_k\}$为单增自然数列.
$\therefore$ $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x_0) = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} f_{n_k}(x_0) \leqslant \frac{1}{2}$. $\therefore$ $x_0 \in Q$.
设 $x_0 = p/q, p \in Z, q \in N, (p,q) = 1$. 则 $\forall k > q, m_k > q$.
又显然 $\forall k \in N, \frac{m_k'}{m_k} \neq x_0$. $\therefore$ $|x_0 - \frac{m_k{}'}{m_k}| = \frac{|pm_k - qm_k'|}{qm_k} > \frac{1}{m_k^2}$.
$\therefore$ $x_0 \notin \left[\frac{m_k'}{m_k}, \frac{m_k'}{m_k} + \frac{1}{m_k^2}\right]$, 矛盾.
所以不存在这样的函数序列满足要求.

4. 将 M 的范围变为复矩阵集合, 验证 $|M| \leqslant \frac{5}{2}n^2$.
$n=1$ 时, $|M| \leqslant 1$, 命题显然成立.
若 $n < k (k \geqslant 2)$ 时命题均成立, 则当 $n = k$ 时, 有:
取 $M' = M \cup \{iA, -iA, -A | A \in M - \{I\}\}$,
则 M' 仍为满足要求的复矩阵集合.
$\because$ $\forall A, B \in M', A^2B = B^2A$, 且$A^2$或 $-A^2 \in M$. $\therefore$ $A^2 \in I$ 或 $-A^2 \in I$.
所以 A 的最小多项式为 λ^2+1 或 λ^2-1, 也即它的特征多项式.

$\therefore \quad \exists P \in GL_n(C), PAP^{-1} = \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$ 或 $i\begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$, 其中 $l+s=n$.

若 $PAP^{-1} = i\begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$,

则取 $A' = -iA$, 所以总存在 $A_0 \in M - \{I\}, PA_0P^{-1} = \begin{pmatrix} -I_t & O \\ O & I_s \end{pmatrix}$.

$\therefore \quad \exists B_0 \in M'', A_0B_0 = -B_0A_0$, (令 $M'' = \{PAP^{-1} | A \in M'\}$).

$\therefore \quad B_0 = \begin{pmatrix} O & B_{2,0} \\ B_{1,0} & O \end{pmatrix}$,

其中 $B_{1,0}$ 为 $s \times l$ 型矩阵, $B_{2,0}$ 为 $l \times s$ 型矩阵.

$\therefore \quad B_0^2 = I$ 或 $-I$, $\quad \therefore \quad B_{1,0}B_{2,0} \in \{I, -I\}, B_{2,0}B_{1,0} \in \{I, -I\}$,

$\therefore \quad l = s = n/2$.

再记 $M''' = M'' \cup M''B_0$, 则 $\forall A \in M''', AB = BA$.

$\therefore \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} O & B_1 \\ B_2 & O \end{pmatrix}, A_1, A_2, B_1, B_2 \in GL_{n/2}(C)$.

记 $\quad \sum_1 = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \middle| A_1, A_2 \in GL_{n/2}(C), \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in M''' \right\}$,

$\quad \sum_2 = \left\{ \begin{pmatrix} O & B_1 \\ B_2 & O \end{pmatrix} \middle| B_1, B_2 \in GL_{n/2}(C), \begin{pmatrix} O & B_1 \\ B_2 & O \end{pmatrix} \in M''' \right\}$,

则有 $\sum_1 + \sum_2 = M'''$.

若 $\exists A_1' \in \sum_1 - \{I\}, \forall A \in \sum_1, AA_1' = A_1'A$,

则由《线性代数》P_{107} 例10 知 $A = z_1A_1' + z_2, z_1, z_2 \in C$.

$\because \quad AB_0 = \pm B_0A, \therefore \quad z_1 = 0$ 或 $z_2 = 0$. $\quad \therefore \quad A \in \{A_1', iA_1', -iA_1', -A_1', I\}$.

$\therefore \quad \sum_1 \subseteq \{A_1', iA_1', -iA_1', -A_1', I\}$,

又 $\sum_2 B \subseteq \sum_1$. $\quad \therefore \quad |\sum_2| \leqslant |\sum_1| \leqslant 5$,

$\therefore \quad |M'''| \leqslant 10$. $\therefore |M| \leqslant 10 \leqslant \frac{5}{2}n^2$.

若否, 则 $\forall A_1' \in \sum_1 - \{I\}, \exists A \in \sum_1, AA_1' = A_1'A$.

$\therefore \quad M_x = \left\{ A_1 \mid \exists A_2 \in GL_{n/2}(C), \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \in \sum_1 \right\}$ 为满足要求的 $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ 的复矩阵集合.

$\because \quad |M_x| \leqslant \frac{5}{2}(n/2)^2$. $\quad \therefore \quad A_2 = \pm B_{1,0}A_1B_{2,0}$,

$\because \quad |\sum_1| \leqslant 2|M_x|, |\sum_2| \leqslant |\sum_1| \leqslant 2|M_x|$.

$\therefore \quad |M| \leqslant |M'''| \leqslant \frac{5}{2}(\frac{n}{2})^2 \times 4 = \frac{5}{2}n^2$.

即 $n = k$ 时, 命题也成立. $\quad \therefore \quad \forall n \in N$, 命题均成立.

所以当 $n \geqslant 3$ 时, 原题中的命题已成立, 又 $n = 1$ 时命题显然成立.

而 $n = 2$ 时, 从上面的证明过程知对满足条件的实矩阵集合 M 必有 $|M| \leqslant 8$.

```
*********************
*                   *
*    问题征解        *
*                   *
*********************
```

蛙鸣征解题汇编

代数、数论

52 (王挽澜 提供) 设 R 是有主单位元 e 的赋值环, 而 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in R$, 证明或否定:

$$\|x_1x_2\cdots x_n\| \bullet \|(e-x_1)^{-1}(e-x_2)^{-1}\cdots(e-x_n)^{-1}\|$$
$$\leqslant \frac{\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^n}{\|ne-x_1-x_2-\cdots-x_n\|}$$
$$\leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^n\|x_i\|}{\sum_{i=1}^n\|e-x_i\|}\right)^n.$$

62 (李尚志 提供) K 为非交换体, F 是 K 的中心, 多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$$

的系数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 取自 F. 问: 是否一定存在 $\theta\in K$, 使得 $f(\theta)\neq 0$?

36.22 (陈计 提供) A, B 为非负半正定方阵, 证明或否定:

(i) $[\mathrm{Su}(A+B)^k]^{\frac{1}{k}} \geqslant (\mathrm{Su}A^k)^{\frac{1}{k}}+(\mathrm{Su}B^k)^{\frac{1}{k}}$, $\quad k\leqslant 1$.

(ii) $[\mathrm{Su}(A+B)^k]^{\frac{1}{k}} \leqslant (\mathrm{Su}A^k)^{\frac{1}{k}}+(\mathrm{Su}B^k)^{\frac{1}{k}}$, $\quad k\geqslant 1$.

36.24 (陈计 提供) 两个同阶矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 的 Schur 积定义为 $A*B=(a_{ik}b_{ik})$. 设 A 和 B 都是 n 阶正定的 Hermite 方阵, 证明或否定:

$$\prod_{i=k}^n\lambda_i(A*B) \geqslant \prod_{i=k}^n\lambda_i(AB^T)$$

其中特征值 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n$.

20 (李广兴 提供) S_1、S_2 为 n 阶循环群 S_n 的两个子群, 对 S_n 的任一个子群 G 及 n 阶方阵 A, 定义 $d_G(A)=\sum\limits_{\sigma\in G}\varepsilon(\sigma)\prod\limits_{j=1}^n a_j\sigma(j)$ ($\varepsilon(\sigma)$ 表示 σ 的置换符号), 若对于任意的 n 阶正定 Hermite 方阵 A 均有 $d_{S_1}(A)\geqslant d_{S_2}(A)$, 问是否有 $S_1<S_2$ (即 S_1 为 S_2 的子群)?

36.29 (罗承辉 提供) 任给 9 个正数, 将它们排成的 3 阶方阵中, 是否存在一个方阵的所有特征值都为非负实数?

31 (罗承辉 提供) 任给 n^2 个正数, 将它们排成的 n 阶正方阵中, 是否存在一个方阵的所有特征值都为非负实数?

48 (张福振 提供) 设 $A\geqslant 0$, 且 A 的每个展开项都是 1, A 的构造如何?

* 可以只讨论主对角线元素均是 1 的情形, 如 $n=3$ 时,

$$A=\begin{pmatrix}1 & e^{i\theta_{12}} & e^{i(\theta_{12}+\theta_{23})}\\ e^{-i\theta_{12}} & 1 & e^{i\theta_{23}}\\ e^{-i(\theta_{12}+\theta_{23})} & e^{-i\theta_{23}} & 1\end{pmatrix}$$

55 (张福振 提供) 证明或否定: 若 $\operatorname{per}(A\otimes X)=\operatorname{per}A\cdot\operatorname{per}X$, $\forall x\in M_n(c)$, 则 A 具有 $r\times s$ 阶零子阵, $r+s=n+1$.

56 (单墫 提供) 求值:

$$\operatorname{per}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 \end{pmatrix}=?$$

其中上半三角元素都是 -1, 下半三角元素都是 1.

72 (陈计 提供) 两个同阶矩阵 $A=(a_{ik})$ 和 $B=(b_{ik})$ 的 Schur 积定义为 $A*B=(a_{ik}b_{ik})$. 设 A 和 B 都是 n 阶正定的 Hermite 方阵, 当 $P<0$ 时, 证明或否定: $\operatorname{tr}(A*B)^P\leqslant\operatorname{tr}(AB^T)^P$.

64 (李尚志 提供) a, b 是有理数, 且 $a\neq 0$, 是否存在有理数 λ, 使关于 x, y 的方程 $(ax^2+b)^2+y^2=\lambda$ 有无穷多组解? 有至少 5 组正有理解? 有至少两组正有理解?

71 (周民主 提供) 虽然不能用素数构成公差非零的无穷项等差数列, 但是这种等差数列的项数是无有限上界的.

83 设 m, $n\in N$, 记 $f=\dfrac{3^m}{2^m}\dfrac{3^n-1}{2^n-1}$.
证明或否定: 若 $f\in N$, 则 n 只能为 1, 2, 4, 6, 12.
(罗承辉 改自 April(1974) American Mathematical Monthly 中的问题 E2468*)

88 (余刚 提供) 如果 n 是正整数但不是一个平方数, 证明或否定: 存在正数 Δ(只与 n 有关), 使得对任意 $x>0$, 有 $\sum\limits_{p\leqslant x}\left(\dfrac{n}{p}\right)=O(x^{1-\Delta})$, 其中 p 为素数.

98 证明或否定: 若 p_i 为奇素数, 则 $\forall n\in N$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i}-\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i}$ 非自然数.
(宁高专、周晓东 提供并评注于《数学通讯》92-No.?)

105 素数 p_1, p_2, $\cdots$, p_n 是以 d 为公差的等差数列, $C=\prod\limits_{p\leqslant n}p=2\times 3\times\cdots\times p$.
则: [1] $C|d$. 当 $p_1>n$ 时; (已解决)
[2] 当 $d=C$ 时, 可找到 n 项等差素数列 p_1, p_2, $\cdots$, p_n 以 d 为公差.
(或否定此命题)

分析、杂题

23 (叶怀安 提供) 设 $f(x)=\lambda x(1-x)$, $0\leqslant x\leqslant 1$. 问当 $3.3\leqslant\lambda\leqslant 4$ 时, 是否有 $[0,1]$ 上不减的连续函数 $g(t)$ 满足 $g(0)=0$, $g(1)=1$, $g(t)=g(x_1)+1-g(x_2)$. 此处 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 1$ 是方程 $f(x)=t$ 的两个根 $(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\lambda}{4})$.

33 (苏淳 提供) 设 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为独立的随机变量序列, $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$, 又数列 $\{\Phi(n)\}$ 和 $\{H(n)\}$ 满足条件:

$$0<\Phi(n)\downarrow 0,\ 0<H(n)\uparrow\infty,\ (n\to+\infty)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(n)=\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(n)P\{|S_n|\geqslant \varepsilon H(n)\}<\infty$, $\forall\varepsilon>0$,
问: 是否有

$$P\{|S_n|\geqslant \varepsilon H(n)\}\to 0(n\to\infty)?$$

34 (印林生等 提供) 两个三角形相交, 在12个结点上分别放置 1, 2, $\cdots$, 12, 使其每边四个点上的数之和相等. 问:

[1] 共有多少组解?

[2] 试对两个 n 边形讨论上述问题.

49 (单墫 提供) 设 $A=(a_{ij})$ 为五阶随机方阵, 证明或否定: $\mathrm{per}(I-A)\leqslant 3$.

93 (杨庆 提供) 知道了线性赋范空间 X 的共轭空间 X^*, 则在多大程度上决定了 X(或更广地, X 的性质)?

94 (林强 提供) X 是实数列 $\{X_n\}$ 在自然的加法下的线性空间, 它能否被完备赋范?

21 (侯晓荣 提供)球面上五个点怎样分布时, 诸点间所有直线距离的和最大?

50 (陈计 提供) 三角形 ABC 的周界三等分点 P, Q, R 构成一个三角形. 证明或否定它们内切圆半径的不等式: $r_{\triangle ABC}<3r_{\triangle PQR}$

51 (王振 提供) 设凸 n 边形的边长为 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, 面积为 S, $p=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i$. 证明或否定:

$$\frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)^{-\frac{2}{n}}\frac{\pi}{n}\leqslant\frac{S}{p^2\prod_{i=1}^{n}\sqrt{1-\frac{a_i}{p}}}\leqslant 1$$

61 (陈计 提供) 已知三角形 ABC 的三边长, 设其内一点到各顶点和各边的距离分别为 x, y, z 和 p, q, r. 试求 $(x+y+z)/(p+q+r)$ 的最小值.

以上均为未获解答的题目.

36.7 (陈计 提供) 平面上任意六个点组成的二十个三角形中, 其最大面积和最小面积的比是 u. 求 u 的最小值.
(李文志解答于《数学通讯》94-No.11)

36.12 (陈计 提供) 证明或否定: 单位面积的三角形内任意放置七个点, 则必存在三点构成的三角形面积小于 1/9.
(已被否定)

36.23 (陈计 提供) 方阵 A 特征值的最大模称为谱半径, 记作 $r(A)$, 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶非负方阵, 证明或否定:

$$r(A)\geqslant\min\{(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})^{\alpha}(\sum_{j=1}^{n}a_{ij})^{1-\alpha},\quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

(已被否定)

1 (陈琦、陈计 提供) 在面积为 1 的三角形内, 任给九点, 则一定存在三点, 它们组成的三角形的面积小于 1/8.

(解答见 11 题注)

2 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数, $x_1+x_2+\cdots+x_n=S$, $S\leqslant n+3$, 则

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i})\geqslant(\frac{S}{n}+\frac{n}{S})^n$$

(陈计 提供并解答于 34 期)

3 (李广兴、陈计 提供) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数, $n\geqslant 3$, $r>1$, 则

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)^r\geqslant x_1^r+x_2^r+\cdots+x_n^r+(n^r-n)(x_1x_2\cdots x_n)^{r/n}$$

(陈计、王振解答于《宁波大学学报》92-No.2)

** $r>1$ 应为 $r\geqslant n/(n-1)$.

4 K 为域, 定义 R 为: $R=\{f(x)\in K[x]: f$ 为首一多项式, $(f, f')=1\}$, 在 R 上定义 $f\odot g=(f,g)$, $f\oplus g=[f,g]/(f,g)$, 其中 () 指最大公因子, [ ] 指最小公倍数, 则: $(R, \odot, \oplus)$ 为环.

(王岚 解答于 28 期)

5 (余红兵 提供) 设 $a_i>0$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\cdots+\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<2\,(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n})$$

且常数 2 是最好的.

(解答见 28 期陈计《关于 Hardy 不等式》及 48 期何斯迈《关于 Hardy 不等式的一个推广》)

6 (沈刚 提供) 三角形 ABC 的周界的三等分点 P, Q, R 构成一个三角形. 证明或否定 $S_{\Delta PQR}>\frac{2}{9}S_{\Delta ABC}$.

(罗承辉、陈计证明于 33 期)

** 常数 2/9 是最好的.

7 (单墫 提供) a) 设 N 为一自然数, 非 10 的方幂, 令 S_n 为 N^n 在十进制中的数位和, 证明或否定 $S_n\to\infty(n\to\infty)$.

b) 对任意 P 进制, 讨论上述问题.

(余红兵解答于《数学通讯》93-No.?)

8 (叶怀安 提供) 平面上 $2n(n\geqslant 2)$ 个圆片中任意三个不两两相交(切), 是否可以从中选取 n 个圆片, 使得它们彼此相离?

(吴昌玫、沈建否定于 33 期)

**猜测: 在同样条件下, 一定存在 $[\frac{4}{5}n]$ 个圆片相离.

36.13 (叶怀安 提供) 平面上 $3n(n\geqslant 2)$ 个圆片中任意三个不两两相交, 是否可以从中选取 n 个圆片, 使得它们彼此相离?

(王振解答于《数学通讯》92-No.10)

9 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为同阶的正定对称方阵, 则

$$\mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_m)\leqslant\frac{\mathrm{tr}(A_1^m)+\mathrm{tr}(A_2^m)+\cdots+\mathrm{tr}(A_m^m)}{m}$$

(韩文廷 提供并解答于 28 期)

10 (陈计 提供) 正多边形的模糊集合 E_n 的隶属函数如何定义?

(郭革解答于 29-30 期)

36.10 证明或否定: 单位面积的凸五边形内每一点及五个顶点组成的二十个三角形中必有一个面积小于 1/7. (否 *见(IV))

11 (何明秋 提供) 单位面积凸四边形内一点及四顶点组成的诸三角形中必有一个面积不大于五分之一. (否 *见(II)))

**已有结果:

(I) 单位面积的凸图形内 $n(\geqslant 6)$ 个点组成的诸三角形中, 至少有一个三角形的面积不超过 $\dfrac{1}{n-1}$, 当 $n \geqslant 7$ 时, 至少有一个三角形的面积不超过 $\dfrac{1}{n}$. (27、28 期 何明秋)

(II) 单位凸四边形及其内一点组成的三角形中必有一个面积不超过 $\dfrac{1}{2+2\sqrt{2}}$, 且这个常数是最好的. (28 期 王振)

(III) $n = 6$ 时, 至少有一个三角形的面积不超过 $\dfrac{1}{6}$. (37 期 何建勋、王振)

(IV) 单位凸五边形及其内一点组成的诸三角形中必有一个面积不超过 $0.1486\cdots$, 且这个常数可以达到. (38-39 期 王振)

54 (陈计 提供) 证明或否定: 单位面积的凸四边形内放置五个点, 必存在三点构成三角形的面积小于 $\dfrac{1}{4}$.

12 (单墫、余红兵 提供) 设 p, q 都是自然数, 证明: 把排列 $(q+1, \cdots, p+q, 1, 2, \cdots, q)$ 通过变换变成 $(1, 2, \cdots, p+q)$ 所需的最少次数是 $p+q-(p, q)$. 这里 (p, q) 表示 p 和 q 的最大公约数.

13 (何明秋 提供) 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 皆为正数, 且 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i$, 则

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \ln \frac{a_i}{b_i} \geqslant 0$$

等号成立当且仅当 $a_i = b_i$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant m$ 时成立.

(王振解答于 29-30 期)

** J.Aczél 证明了, 当 f 为可微函数, 且 $\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n$, $n \geqslant 2$, $a_i > 0$, $b_i > 0$, 而 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i = 1$, 时

$$\sum_{i=1}^{n} a_i f(a_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i f(b_i)$$

等价于 $f(a) = P \ln a + Q$, $P > 0$.

14 取定数列 $a_{n+2} = a a_{n+1} + b a_n (n \geqslant 1)$ 的初始项 a_1, $a_2 \in Z$, 使得 $a_2^2 \neq a_1 a_3$. 若 $a_n \in Z$, 则 a, $b \in Z$.

(罗承辉 提供并解答于 29-30 期)

15 (印林生 提供) 设 A 是任意方阵, 则与 A 可交换的所有方阵只能是其多项式的充要条件是 A 的极小多项式就是其特征多项式.

16 (余红兵 提供) 设 $E_i \subset (0, 1)$. E_i 都是勒贝格可测集, 且 $m(E_i) \geqslant \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. 证明:

(1) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 E_i, E_j, $i \neq j$, 使得 $m(E_i \cap E_j) > \alpha^2 - \varepsilon$.

(2) 存在 E_{i_1}, E_{i_2}, $\cdots$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots$ 使得 $m(E_{i_j} \cap E_{i_l}) > \alpha^2 - \varepsilon$, $l \neq j$.

(解答见 31-32 期余红兵《从平均到单独》)

**这是 Erdös 的未公开发表的一个非平凡的猜想.

17 (陈计 提供) 在所有单位面积的凸五边形中, 求

(1) 五条对角线所围成小五边形面积的最大值.

(2) 五角星面积的最大值.

(解答见《数学译林》93-No.1 (2)的解为平凡的, 即为 1.)

18 (沈刚 提供) ΔABC 内一点 P 到三顶点的距离为 x, y, z; $\angle BPC$, $\angle CPA$ 和 $\angle APB$ 的平分线长分别为 u, v, w, 当 $0 < k < 1$ 时, 证明或否定:

$$x^k + y^k + z^k \geqslant 2^k(u^k + v^k + w^k)$$

(陈计、王振解答于《数学通讯》88-No.12)

19 (陈计 提供) 设 $0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_k \leqslant y_1 \leqslant \cdots \leqslant y_n \leqslant x_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant x_m$, 若 $\frac{1}{m}\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, 证明或否定:

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sqrt{x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{y_i}$$

(钱黎文解答于 31-32 期)

22 (李炯生 提供) 设 $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$, 证明或否定:

$$\mathrm{diag}(AB) \prec_\omega \lambda(A) \circ u(B)$$

式中谱 $\lambda(A) = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, $u(B) = (u_1, u_2, \cdots, u_n)$, $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_n$.

(张振福、韩文廷证明于 33 期)

24 (刘启铭、陈计 提供) 定义正数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的平均

$$I_r(x) = \binom{n+r-1}{r}^{-1} \sum_{\substack{i_1+i_2+\cdots+i_n=r \\ i_k \geqslant 0,\ \forall 1 \leqslant k \leqslant n}} (x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n})^{\frac{1}{r}}, \ r \in N.$$

证明不等式链:

$$I_1(x) \geqslant I_2(x) \geqslant \cdots \geqslant I_r(x) \geqslant \cdots$$

诸等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时.

(王振解答于 48 期)

* 求使下式成立的最小 $u=u(r_1, r)$, 使得 $I_{r+1}\geqslant G^u I_r^{1-u}$. ($G$ 是几何平均)

25 (陈计 提供) 设两个同阶半正定 Hermite 矩阵

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ B_{n1} & B_{n2} & \cdots & B_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 A_{ij}, B_{ij} 均为 m 阶块.

证明:

$$\mathrm{Su}[\det(A_{ij}+B_{ij})]\geqslant \mathrm{Su}(\det A_{ij})+\mathrm{Su}(\det B_{ij})$$

(李广兴解答于 31-32 期)

26 (侯晓荣 提供) 在三角形 ABC 中, 证明:

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{B}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant 2$$

27 (罗承辉 提供) 设 n 个同阶实正定对称方阵 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 对于任意自然数 k, 证明或否定:

$$\mathrm{tr}(A_1^k A_2^k\cdots A_n^k)\geqslant \mathrm{tr}(A_1A_2\cdots A_n)^k$$

(林强 解答于 38 期 (否))

*猜想:上式当且仅当 $n=k=2$ 时对任意正定对称方阵成立.

28 (李建明 提供) 证明四面体内的每一点到各个顶点的距离之和至少是到各棱距离之和的 $2/\sqrt{3}$ 倍.

29 (陈计 提供) 平面上任意五个点组成的 10 个三角形中, 其最大面积与最小面积的比为 u, 试求 u 的最小值.

(李文志解答于《高中数学竞赛教程》(江苏教育出版社))

30 (侯晓荣 提供) 单位正方形内的任意一条简单闭曲线, 其周长为 C, 围成的面积为 A, 试求 C/A 的最小值. (解答见下期)

32 (叶怀安 提供) 设 Ω 是 R^2 中的凸开集, $f:\Omega\to R^1$ 为可微映射. 若 $\forall\varepsilon>0$、$\delta>0$, 则当 (x, y), $(x', y')\in\Omega$, 且 $|x-x'|<\delta$, $|y-y'|<\delta$ 时, 有

$$\frac{f(x, y)-f(x', y')-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)(x-x')-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)(y-y')}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}<\varepsilon$$

则称 f 在 Ω 一致可微,

问是否由 f 在 Ω 一致可微可推出 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 Ω 上一致连续?

(林强 解答于 42 期)

35 (单墫 提供) 把 $\{1, 2, \cdots, 3n\}$ (n 是自然数) 任意分成 n 组, 每组 3 个数. 证明: 有一个 n 元集 A, 使 A 和上述 n 个集中的每一个都有一个公共元, 且 A 中没有相邻数. (这里规定 1 和 3n 是相邻的)

36 (陈计 提供) 设 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\pi$, 记

$$A=\begin{pmatrix} 2\cos\frac{\pi}{n} & \cos\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 & \cos\alpha_n \\ \cos\alpha_1 & 2\cos\frac{\pi}{n} & \cos\alpha_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_2 & 2\cos\frac{\pi}{n} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\frac{\pi}{n} & \cos\alpha_{n-1} \\ \cos\alpha_n & 0 & 0 & \cdots & \cos\alpha_{n-1} & 2\cos\frac{\pi}{n} \end{pmatrix}$$

证明: [1] $\det A>0$;

[2] $\det A\leqslant(2\cos\frac{\pi}{n})^n-|\prod_{i=1}^{n}\cos\alpha_i|$;

[3] $\det A\leqslant(2\cos\frac{\pi}{n})^{n-2}(\prod_{i=1}^{n}\sin\alpha_i)^{\frac{2}{n}}$.

37 (李广兴 提供) 一个实方阵, 其一切主子式均非负, 则在它的每一个对角线位置上加上一个非负数之后得到的新方阵仍具有上面的性质.

38 (罗承辉 提供) 设 α, A 分别为 $n\times 1$, $n\times n$ 的非负矩阵, 又 $\alpha\neq 0, A^T=A$, $m\in N$.

证明:

$$\frac{\alpha^T A^n\alpha}{\alpha^T\alpha}\geqslant\left(\frac{\alpha^T A\alpha}{\alpha^T\alpha}\right)^m$$

特别地, 令 $\alpha=\{1,\ 1,\ \cdots,\ 1\}^T$, 即有

$$\left(\frac{\mathrm{Su}A^m}{n}\right)^{\frac{1}{m}}\geqslant\frac{\mathrm{Su}A}{n}$$

39 (赵培武 提供) 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶反对称正方阵, 即 $a_{ij}>0$, $a_{ij}a_{ji}=1$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$. 则谱半径 $r(A)\geqslant n$.

40 设圆外切四边形的边长为 a, b, c, d.

证明循环不等式:

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2d(c-d)+d^2a(d-a)\geqslant 0$$

(安振平 提供并解答于 33 期)

**对圆外切凸 n 边形考虑同样的问题.

41 (张景中 提供) 角间开度不能变的圆规称为 "锈规". 问下述作图能否仅用一副 "锈规" 来完成:

平面上任意给定三点 A, B, C, 作出点 C' 使得 C' 和 C 关于 AB 对称?

42 (单墫 提供) 设 A 是一个有限集, S 是 A 的一个子集族, S' 由 A 的包含于 S 中奇数个元素的子集组成, 证明: $(S')'=S$.

注意: S 中的元素是 A 的子集.

例子: 设 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $S=\{\Phi,\ \{1\},\ \{2,\ 3\}\}$, 则

$S' = \{\Phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}, (S')' = \{\Phi, \{1\}, \{2, 3\}\} = S$

43 (余红兵 提供) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$\lim_{n\to+\infty}\int\cdots\int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n})dx_1\cdots dx_n = f(\frac{1}{2}).$$

44 (罗承辉 提供) 函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) = f(b)$.
证明: $\forall k \in [0, \frac{b-a}{2}]$, $\exists x \in [a, b-k]$, 使得: $f(x) = f(x+k)$.

45 (王联勤 提供) 设 $f_i(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有二阶导数, 且

$$M_{ik} = \sup_{-\infty<x<+\infty} |f_i^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2; i = 1, 2, \cdots, n).$$

证明:

$$(\sum_{i=1}^{n} M_{i1})^2 \leqslant 2(\sum_{i=1}^{n} M_{i0})(\sum_{i=1}^{n} M_{i2})$$

(王振、王联勤、张新发 证明于 33 期)

46 (余红兵 提供) 设 P 是一个奇素数, 假设集合 $\{1, 2, \cdots, p-1\}$ 可表示成两个非空子集 S 和 T 的并, $S \neq T$, 使得同一个子集中元素的积在 S 中, 且 S 中元素的与 T 中元素的积在 T 中. (运算在 $\bmod p$ 意义下进行)
证明: S 由 $\bmod p$ 的二次剩余组成, T 由 $\bmod p$ 的二次非剩余组成.

47 (李广兴 提供) 设两个 mn 阶半正定矩阵 $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, A_{ij}, B_{ij} 均为 m 阶方阵. 令 $C = (C_{kl}) \in C^{n\times n}$, 其中 $C_{kl} = \det(A_{kl} + B_{kl}) - \det A_{kl} - \det B_{kl}$.
求证: $C \geqslant 0$.

57 (陈计 提供) 设 x, y, z 均为正数, $x + y + z = 6$, 证明:

$$(x + \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})(z + \frac{1}{z}) \geqslant \frac{125}{8}$$

58 (陈计 提供) 设正数 a, b, c, d 满足 $a + b + c + d = 2$, 证明:

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{b^2}{(b^2+1)^2} + \frac{c^2}{(c^2+1)^2} + \frac{d^2}{(d^2+1)^2} \leqslant \frac{16}{25}$$

59 (张在明 提供) 若 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^2 = 1$, $j = 1, 2, \cdots, n$, 则 $|\det(a_{ij})_{n\times n}| \leqslant 1$.

60 (陈计 提供) 试证明: 单位圆内任意置七点, 必存在三点构成三角形的面积小于三分之一.
(余刚否定于 40-41 期)

63 (陈计 提供) 记 p_n 是第 n 个素数, 则

$$f(n) = p_n \prod_{p<p_1p_2\cdots p_n} (1 - \frac{1}{p}), \ (p \text{ 是素数})$$

是严格单调下降的数列.

65 (祝光建 提供) 试研究序列 a_n/a_{n+1} 的收敛性, 其中 $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$. 如果收敛, 试确定其极限.

66 (林强 提供) 请构造一个区间 I 上的实值函数 φ, φ 的所有连续点构成的集和所有不连续点构成的集都在 I 上稠密, 且不可数.

(杨庆 解答于 37 期)

67 (周民主 提供) 设任意群 G 的两个可交换元 a 和 b 的阶分别是 m 和 n, 求证: ab 的阶能被 m 与 n 的素数幂分解式中幂次不同的素数的较大幂所整除.

68 (孟老师 提供) 设 $f(x) \in Z[x]$, 则 f 中素系数个数记为 $P(f)$, 又记 $Q_n(x) = (1+x)^n$, 则在 $1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ 时有

$$P(Q_{n_1} + Q_{n_2} + \cdots + Q_{n_k}) \geqslant P(Q_{n_1})$$

69 (陈计 提供) 证明或否定: 单位正方形内十个点中必有两点的距离小于五分之二.

70 (周民主 提供) 设一个分数的十进制小数的循环节是 $a_1a_2\cdots a_n\cdots a_{2n}$, 而且 $a_n + a_{2n} = 8$,

证明或否定: 该分数的分母不是素数.

73 (安振平 提供) 设 p, q, r 是三角形内一点到三边的距离, Δ 表示三角形的面积, 则

$$\Delta \geqslant \sqrt{3}(pq + qr + rp)$$

(陈计解答于《福建中学数学》92-No.5)

74 (周民主 提供) n 张卡片从 1 到 n 编号并从小到大排成一排. 现在使最左边的 1 跳过 2, 处在 2 与 3 之间, 再最左边的 2 跳过两张 (即 1 和 3) , 处于 3 和 4 之间, …… 使最左边的卡片向右跳过 $n-1$ 张, 至最左边; 然后又按 $1, 2, \cdots, n-1$ 的张数向右跳. 如此变换所得到的所有不同的排列数目是多少?

75 (林强 提供) 平面上一般位置的 n 条直线把平面分成的区域中至少有 $n-2$ 个三角形.

(钟金平证明于《数学通讯》92-No.7)

76 (李广兴 提供) 对于 n 阶半正定 Hermite 方阵 $A = (a_{ij})$. 证明下面的不等式

$$(n!)\det A + (n!-1)\operatorname{per} A \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

77 (查建国 提供) 令 $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^{n} Ze_i$ 是以 $e_1, e_2, \cdots e_n$ 为基的自由 Abel 群, $\Gamma^+ = \bigoplus_{i=1}^{n} Z^+e_i$, 其中 Z^+ 表示非负整数的集合. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶对称方阵, 满足 $a_{ii} = 2$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $a_{ij} \in Z$ 且 $a_{ij} \leqslant 0$, $\forall\, i \neq j$. 如下定义 Γ 上的反射 $\gamma_i : \gamma(e_j) = e_j - a_{ij}e_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 如果 $V = \sum_{i=1}^{n} b_ie_i \in \Gamma^+$ 且 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}k_j \leqslant 0$, $\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n$, 试证:

$$\gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\cdots\gamma_{i_j}(V) \in \Gamma^+$$

对任意 k 成立.

78 (梁泓 提供) 设 $1 < p < +\infty$, q 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $(\Omega,\ B,\ \mu)$ 为任一可测空间 (不必 σ 有限) , 证明:

$$(L^p(\Omega,\ B,\ \mu))^* = L^q(\Omega,\ B,\ \mu).$$

79 (叶怀安 提供) 设X 是 Banach 空间, 则X 有限维 $\Longleftrightarrow$ X 上的线性泛函是有界的.

80 (武河 提供) (i) 设 $I=[0,\ 1]$, $f\in C^0(I)$, 如果存在 $x\in I$ 满足 $f^n(x)=x$, 且 $f^l(x)\neq x(0<l<n)$, 则称 x 为 f 的一个周期为 n 的周期点. 试证: 如果 f 有一个周期为 3 的周期点, 则 f 有一切周期的周期点.

(ii) 设 $X=([-1,\ 1]\times\{0\})\cup(\{0\}\times[0,\ 1))$, $f\in C^0(X)$, 问除去绕原点的旋转外, 有无上述相似的结论?

82 (陈计 提供) 设 $\varphi_1+\varphi_2+\cdots+\varphi_9=\pi$, 则对任意实数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_9$, 是否有

$$(\cos\frac{\pi}{9})^2(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_9^2)$$
$$\geqslant x_1x_2(\cos\varphi_1)^2+x_2x_3(\cos\varphi_2)^2+\cdots+x_8x_9(\cos\varphi_8)^2+x_9x_1(\cos\varphi_9)^2$$

(王振 解答于 38 期 (否))

84 记 $T(u,v,m)$ 为数列 $\{F_n\}: F_1=u,\ F_2=v,\ F_{n+2}=aF_{n+1}+bF_n$ 在 $\bmod m$ 下的周期 (即 $\exists k\in N$, 使得 $\forall n\geqslant k,\ F_{n+2}=F_n(\bmod m)$) . 则 $\forall u,\ v\in Z$ 都有: $T(u,v,m)|T(1,a,m)$.

(罗承辉 提供并解答于 38 期)

85 (王启应 提供) 设 $n_k,\ k=1,2,3,\cdots$ 为自然数列 $\{n,\ n>1\}$ 的一个子列, 严格增加. 记 $M(k)=\sum\limits_{i=1}^{k}n_i$. 如果 $M(k)/n_k\uparrow\infty$,

[1]: 存在常数 $c>0$, 使得 $\sum\limits_{j=1}^{k}n_j^2/M(j)\leqslant cn_k$. 如不成立, 请举出反例.

[2]: 在上述条件下, 证明或否定:

$$n_k\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{M(j)}\leqslant c<\infty.$$

(何斯迈 解答于 49 期(否))

87 (李文志 提供) 求证: 使下述命题:

设 $x,\ y,\ z,\ w\ >0$, 且 $x+y+z+w=s$, 那么

$$(x+\frac{1}{x})(y+\frac{1}{y})(z+\frac{1}{z})(w+\frac{1}{w})\geqslant(\frac{s}{4}+\frac{4}{s})^4$$

成立的 S 的最大值为 $S_0=7.713435658\cdots$.

89 (陈计、朱旭升 提供) 平面上 n 条直线, 无三条交于一点. 记 $T(n)$ 为其中三角形区域的个数, 则:

$$T(n)\leqslant\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}-\dfrac{5}{4}, & n\text{为奇数};\\[2mm] \dfrac{n^2}{4}-2, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$

(已被否定)

90 (王振 提供) 如果 $G(V, E)$ 是一个平面无向图, 且每个顶点的度数大于或等于 3, 证明 G 中必有仅含三个顶点的圈.

(杨庆 解答于 42 期(否))

92 (林强 提供) 连通的 T_2 流形是否必是 A_2 的?

* J.W.Milnor 在 Topology: From the Differentiable Viewpoint 中给出一维连通流形或是圆周或是区间, 而 J.R.Munkres 在 Topology, A First Course 中给出了反例, 但二者均有错误. (详见《蛙鸣》43 期)

**正确的反例见本期《长直线的构造》.

95 (陈卿 提供) 方阵 A 的每一个元素均大于 0, 证明: $\exists\lambda > 0$, 和每一分量都大于 0 的 $\vec{X}$, (即: $\vec{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$) 使 $A\vec{X} = \lambda\vec{X}$.

(提示: 用 Brouwer 不动点定理)

96 (陈计 提供) 任给一组数, 其中有的可能相等, 将相等的两数一个加 p, 一个减 q, (p, q 给定, $p + q \neq 0$). 则:

[1]: 可进行一种调态方式, 使这组数中无相等的数;

[2]: 无论怎样进行调态, 最后得到的一组数的集合相同.

* 林强在 43 期对 $p \geqslant q > 0$ 进行了证明. 一般情况陈计给出了一个反例.

97 (李文志 提供) 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 若 $\forall n \in N$, 有 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-nx^2}dx$ 存在且为 0, 证明或否定: $f(x)$ 为奇函数.

(朱克久、何建勋 解答于 45 期)

104 (沈建红 提供) 设 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(nx-1)}$

证明: $m(E(f \geqslant A)) = \dfrac{\pi^2}{6A}$ (此处 m 为长度测度, $E = (-\infty, \infty)$, $A > 0$)

106 (吴耀琨 提供) 一 n 级正三角形网格的每个结点上均置 “+” 或 “–”, 使每个摆置方向与最大正三角形相同的小三角形的结点上有偶数个 “–” 号, 则 “–” 号最多有 $[\dfrac{n(n+1)}{3}]$ 个, 且此时最外三边中, 至少有一边为 “$--+--+--+\cdots$”.

107 (吴耀琨 提供) [1] 必存在 $n!$ 个非负整数 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{n!}$, $\forall S \in N$, $S < n$, 成立 $(S+1)n! = \sum\limits_{i=1}^{n!} a_i a_i(a_i - 1)\cdots(a_i - S + 1)$.

[2] 证明或否定上述问题仅有唯一的解.

108 (吴耀琨 提供) 若 $i_1 + j_1 \equiv i_2 + j_2 (\mathrm{mod}\ n)$, 则称 n 阶矩阵 A 中二阶元素 $A(i_1, j_1)$, $A(i_2, j_2)$ 等高, A 满足其中二元素相同当且仅当该二元素等高. 证明或否定:

[1] n 偶, 则存在 B 置换相似于 A, 且 B 之任一主对角元都与其所在等高线上其余元相异;

[2] n 奇. 则上述 B 不存在.

109 (刘清 提供) 证明: $n>30$ 时, 存在 3 个素数, 满足: $\sqrt{n}<p_1, p_2, p_3<n$, 且 $p_1|(p_2-p_3)$

110 (尚强 提供) 平面上九个点, 每两点距离小于或等于 1.

求证: 有两点距离小于 $\sqrt{2}/3$.

111 (陈计 提供) 已知 n 边形的边长为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 求证:

$$\frac{n+1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{n-1}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^n + \frac{n(n-1)}{2}\prod_{i=1}^{n} a_i$$

(何斯迈 解答于 49 期)

112 (王钧源 提供) 设 (X, ρ) 为紧致度量空间, $T: X \to X$ 连续. 且有:

$$\inf_{n\in N}\rho(T^n x, T^n y) > 0 \qquad \forall x, y \in X, x \neq y$$

求证 $T(x)=x$.