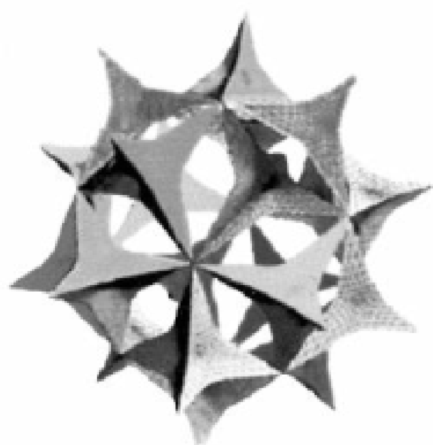
蛙鸣数学杂志

第 35 期



中国科学技术大学数学系学生会　主办

一九八八年六月

《蛙鸣》第35期目录　　　　　　　　1988年6月

〔数学新闻〕

仍是“最后定理”但可能为时不远

洛杉矶消息　最近，在数学家中掀起了一股激动人心的热潮，因为几个星期以来，人们认为，费尔玛最后定理—— 这颗悬在数论学家头上的“令人肃然起敬的栗子”—— 好象已被最后证明了！可惜官冈友一提供的利用代数几何方法的证明，已被专家们看出了漏洞。

已经和数学家们捉了350年迷藏的费尔玛最后定理，可能还要躲避他们一段时间—— 多久呢？每个人都在猜测。

由皮埃尔·费尔玛在大约1637年提出的这个“定理”是说：$n\in N$，$n\geq 3$，不定方程

$$x^n+y^n=z^n$$

没有满足$xyz\neq 0$的整数解。

费尔玛在一本他正在阅读的书的页边这样宣布了上述“定理”：“我已经找到了这个定理的一个真正绝妙的证明，但页边太窄，写不下。”E·E·克莱姆在《现代数学的现状及其成长》一文中写道：“可以说，这个论断在数学中正如法兰西革命在现代史一样著名。”

迄今为止，还没有人能证明或举出反例来否定费尔玛最后定理（之所以说“最后”，是因为他的其余猜想都已获证）。所以，当一位著名的、受人尊敬的数论学家提出一个似乎合理的证明时，人们都激动异常。但是审阅之后，专家们作出结论：官冈的努力或许会成功，但现在它还未奏效。

数学家在考虑，费尔玛最后定理的证明是否意谓着“数学的末

（下转第60页）

Dirichlet型积分极限定理的讨论

数学系八二级　刘启铭

Riemann引理和Dirichlet引理这两个积分极限定理是Fourier级数理论中的重要定理，对导出判定Fourier级数收敛性质的Dirichlet-Jordan判别法和Dini-Lipschitz判别法起着基本作用。在[1]下卷分册中被称为第一和第二基本预备定理。

文[2]详细研究了Riemann引理的下述推广形式。（参见[3]）

定理1　若(1) $f(x)$在$[a,b]$上可积且绝对可积，(2) $g(x)$是R^1上周期T的Rimann可积周期函数，则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)g(px)dx=\frac{1}{T}\int_a^b f(x)dx\cdot\int_0^T g(x)dx$$

这是Lebesgue定理（参见[4]、[5]）的一个特例。由此可见，Riemann引理主要基于正弦和余弦函数的周期性。

那么Dirichlet引理是否也与正弦函数的周期性有关？在通常数学分析教科书（如[1]）中的证明都利用了这一点，即用了Riemamn引理，但事实上不需如此。Dirichlet引理可只基于$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$的存在性而得到，这可在[6]中给出并经[7]改进的Dirichlet引理的下述推广形式

中看到：

定理2　若(1) $f(x)$ 在 $[0,h]$ 上单调；

(2) $\frac{g(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积，

则
$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}dx = f(+0)\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}dx.$$

文[6]加上条件 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{g(x)}{x}$ 存在证明了此定理，文[7]用不尽相同的方法去掉了此条件，我们在此沿用[6]的方法证明此定理。

证明：不妨设 $f(x)$ 单调增，由 Abel 判别法知

$$\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}dx \text{ 存在}.$$

$$\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}dx = f(+0)\int_0^h\frac{g(px)}{x}dx + \int_0^h (f(x)-f(+0))\frac{g(px)}{x}dx = I_1 + I_2,$$

$\because$ $I_1 = f(+0)\int_0^{ph}\frac{g(x)}{x}dx$

$\therefore$ $\lim\limits_{p\to+\infty} I_1 = f(+0)\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}dx,$

利用关于广义积分的 Bonnet 积分中值定理（参见[7]）知，

$$I_2 = \left(\int_0^{\frac{h}{\sqrt{p}}} + \int_{\frac{h}{\sqrt{p}}}^{h}\right)(f(x)-f(+0))\frac{g(px)}{x}dx$$

$$= \left(f\left(\frac{h}{\sqrt{p}}\right)-f(+0)\right)\int_{\xi_1}^{h/\sqrt{p}}\frac{g(px)}{x}dx + (f(h)-f(+0))\int_{\xi_2}^{h}\frac{g(px)}{x}dx$$

$$=\left(f\left(\frac{h}{\sqrt{p}}\right)-f(+0)\right)\int_{p\xi_1}^{\sqrt{p}h}\frac{g(x)}{x}dx+\left(f(h)-f(+0)\right)\int_{p\xi_2}^{ph}\frac{g(x)}{x}dx,$$

其中 $0\leq\xi_1\leq\frac{h}{\sqrt{p}}\leq\xi_2\leq h$

∵ $\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}dx$ 存在，

∴ $\exists\ M>0,\ \forall A>0\quad \left|\int_0^A\frac{g(x)}{x}dx\right|<M$

∴ $\left|\int_{p\xi_1}^{\sqrt{p}h}\frac{g(x)}{x}dx\right|<2M$

∵ $p\xi_2\geq\sqrt{p}h$

由 Cauchy 收敛准则知

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{p\xi_2}^{ph}\frac{g(x)}{x}dx=0$$

∴ $\lim\limits_{p\to+\infty}I_2=0$

∴ $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}dx=f(+0)\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}dx$.

例 1 ： $f(x)$ 在 $[0,h]$ 上单调，求 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^h\frac{f(x)}{x}\sin pax\sin pbx\,dx$

$(a>0,\ b>0)$

解：原式 $=\frac{1}{2}\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^h\frac{f(x)}{x}\left(\cos p(a-b)x-\cos p(a+b)x\right)dx$

$$=\frac{1}{2}f(+0)\int_0^{+\infty}\frac{\cos(a-b)x-\cos(a+b)x}{x}dx$$

$$=\frac{1}{2}f(+0)\log\frac{a+b}{a-b}$$

这里最后一式用了 Froullani 积分公式（参见[1]）

在[2] P319 有这样一个命题：

“$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则

$$\lim_{t\to 0^+}\int_0^1 \frac{t f(x)}{t^2+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}f(0)$$”

若令 $p=\frac{1}{t}$ 则结论等价于

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \frac{p f(x)}{1+p^2x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}f(0)$$

这个式子形式上与 Dirichlet 引理的结论有类似之处，而命题的条件决定了它无法包含在定理2中，我们得到了这个命题的一个推广形式，它的结论与定理2的结论相同，而条件互有强弱，具体地说，我们减弱了 $f(x)$ 的条件而加强了 $g(x)$ 的条件。

定理3　若 (1) $f(x)$ 在 $[0,h]$ 上 Riemann 可积，且 $f(+0)$ 存在；

(2) $\frac{g(x)}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上可积，且绝对可积，

则 $$\lim_{p\to+\infty}\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}\,dx=f(+0)\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}\,dx.$$

证明、由 Weierstrass 判别法知 $\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}\,dx$ 存在

$$\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}\,dx=f(+0)\int_0^h\frac{g(px)}{x}\,dx+\int_0^h(f(x)-f(+0))\frac{g(px)}{x}\,dx$$

$$=I_1+I_2$$

$\because$ $I_1=f(+0)\int_0^{ph}\frac{g(x)}{x}\,dx$，

$\therefore$ $\lim_{p\to+\infty}I_1=f(+0)\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}\,dx$；

$$\because |I_2| \le \sup_{0\le x\le \frac{h}{\sqrt{p}}} |f(x)-f(+0)|\cdot\int_0^{\frac{h}{\sqrt{p}}} \frac{|g(px)|}{x}dx$$

$$+\sup_{\frac{h}{\sqrt{p}}\le x\le h} |f(x)-f(+0)|\cdot\int_{h/\sqrt{p}}^{h} \frac{|g(px)|}{x}dx$$

$$\le \sup_{0\le x\le \frac{h}{\sqrt{p}}} |f(x)-f(+0)|\cdot\int_0^{\sqrt{p}h} \frac{|g(x)|}{x}dx$$

$$+\sup_{\frac{h}{\sqrt{p}}\le x\le h} |f(x)-f(+0)|\cdot\int_{\sqrt{p}h}^{ph} \frac{|g(x)|}{x}dx$$

$$\le \sup_{0\le x\le \frac{h}{\sqrt{p}}} |f(x)-f(+0)|\cdot\int_0^{+\infty} \frac{|g(x)|}{x}dx$$

$$+\sup_{0\le x\le h} |f(x)-f(+0)|\cdot\int_{\sqrt{p}h}^{+\infty} \frac{|g(x)|}{x}dx$$

$\because$ $f(x)$ Riemann可积，$\therefore$ $f(x)$有界

$$\therefore \lim_{p\to+\infty} I_2=0$$

$$\therefore \lim_{p\to+\infty}\int_0^h f(x)\frac{g(px)}{x}dx = f(+0)\int_0^{+\infty}\frac{g(x)}{x}dx$$

特别当 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 时就得到 [2]中上述的命题

例2：$f(x)$ 在 $[0,h]$ 上连续，求 $\lim\limits_{p\to+\infty} p\int_0^h f(x)e^{-p^2x^2}dx$

解：原式 $= \lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^h f(x)\frac{(px)e^{-(px)^2}}{x}dx$

$$= f(0)\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x^2}}{x}dx$$

$$= f(0)\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}f(0)$$

参考文献

[1] Г. М. 菲赫金哥尔茨，微积分教程，中译本，高等教育出版社，1955年版

[2] 孙本旺、汪浩，数学分析中的典型例题和解题方法，湖南科技出版社，1981年版

[3] 徐利治，数学分析的方法及例题选讲，商务印书馆，1955年版

[4] И. П. 那汤松，实变函数论，中译本（徐瑞云译），高等教育出版社，1955年版，311-313

[5] A. C Zaaman, Some examples in Weak Sequential Convergence, Amer. Math. Monthly 69 (1962), 85-93

[6] 谢民育，Dirichlet引理的推广，数学通报，1984.4，28-30

[7] 闫光杰，"Dirichlet引理的推广"一文的改进，数学通报，1985.4，40-41

关于 Minkowski 型不等式的注一

上海科大数学系　刘启铭
宁波大学数学系　陈计

1950年，California 大学教授 Edwin F. Beckenbach[1] 建立了如下的 Minkowski 型不等式：设 $(a) \equiv (a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)$ 和 $(b) \equiv (b_1, b_2, \cdots\cdots, b_n)$ 是正数组，则当 $1 \le t \le 2$ 时有

$$\frac{[M_t(a+b)]^t}{[M_{t-1}(a+b)]^{t-1}} \le \frac{[M_t(a)]^t}{[M_{t-1}(a)]^{t-1}} + \frac{[M_t(b)]^t}{[M_{t-1}(b)]^{t-1}} \qquad (1)$$

当 $0 \le t \le 1$ 时，不等号反向，等号成立当且仅当 $t=1$ 或 $(a) \sim (b)$ 成比例。（这里及以后的 M_t 均指 t 次幂平均）

1952年，Rand 公司研究员 Melvin Drosher[2] 用矩量空间理论（moment-space theory）得到了推广的积分形式。同年，他的同事 J. M. Danskin[3] 用 Minkowski 不等式以及 J. Radon[4] 的不等式给出了一个初等证法。

其实，用 Danskin 的方法可以得到更一般的结果：

定理　若 $t \ge 1$，$p \ge 1 \ge r$，则

$$\frac{[M_p(a+b)]^t}{[M_r(a+b)]^{t-1}} \leq \frac{[M_p(a)]^t}{[M_r(a)]^{t-1}} + \frac{[M_p(b)]^t}{[M_r(b)]^{t-1}}, \quad (2)$$

当 $0\leq t\leq 1$，$p\leq 1\geq r$ 时，由 Rodan 不等式得

$$\frac{[M_p(a)+M_p(b)]^t}{[M_r(a)+M_r(b)]^{t-1}} \leq \frac{[M_p(a)]^t}{[M_r(a)]^{t-1}} + \frac{[M_p(b)]^t}{[M_r(b)]^{t-1}} \quad (3)$$

再由 Minkowski 不等式

$$M_p(a)+M_p(b)\geq M_p(a+b), \quad p\geq 1 \quad (4)$$

$$M_r(a)+M_r(b)\leq M_r(a+b), \quad r\leq 1 \quad (5)$$

即知(2)成立。同理可得 $0\leq t\leq 1$，$p\leq 1\geq r$ 时，(2)的不等号反向。证毕

注记：特别地，在定理中，(i) 令 $t=p/(p-r)$，则得到 Dresher 积分不等式的有限和形式：当 $p\geq 1\geq r\geq 0$ 时有

$$\left[\frac{\sum(a_i+b_i)^p}{\sum(a_i+b_i)^r}\right]^{\frac{1}{p-r}} \leq \left[\frac{\sum a_i^p}{\sum a_i^r}\right]^{\frac{1}{p-r}} + \left[\frac{\sum b_i^p}{\sum b_i^r}\right]^{\frac{1}{p-r}}, \quad (6)$$

当 $1\geq p\geq 0\geq r$ 时，不等号反向；(ii) 令 $p=t/(t-1)$，$r=(t-1)/(t-2)$，就得到王挽澜和王鹏飞[3]的结果：当 $1\leq t\leq 2$ 时有

$$\frac{\left[\sum (a_i+b_i)^{\frac{t}{t-1}}\right]^{t-1}}{\left[\sum (a_i+b_i)^{\frac{t-1}{t-2}}\right]^{t-2}} \le \frac{\left[\sum a_i^{\frac{t}{t-1}}\right]^{t-1}}{\left[\sum a_i^{\frac{t-1}{t-2}}\right]^{t-2}} + \frac{\left[\sum b_i^{\frac{t}{t-1}}\right]^{t-1}}{\left[b_i^{\frac{t-1}{t-2}}\right]^{t-2}},$$

当 $0 \le t \le 1$ 时，不等号反向。

参考文献

[1] E. F Beckenbach, A class of mean-value functions, Amer Math. Monthly, 57(1950), 1-6.

[2] M. Dersher, Moment spaces and inequalities. Duke Math. J, 20(1953), 261-271.

[3] J. M. Danskin, Dresher's inequality, Amer. Math. Monthly 49(1952), 687-688

[4] J. Radon, Ueber die absolut additiven Mengenfunktionen, Wiener Sitzungsber, (IIa), 122(1913), 1295-1438.

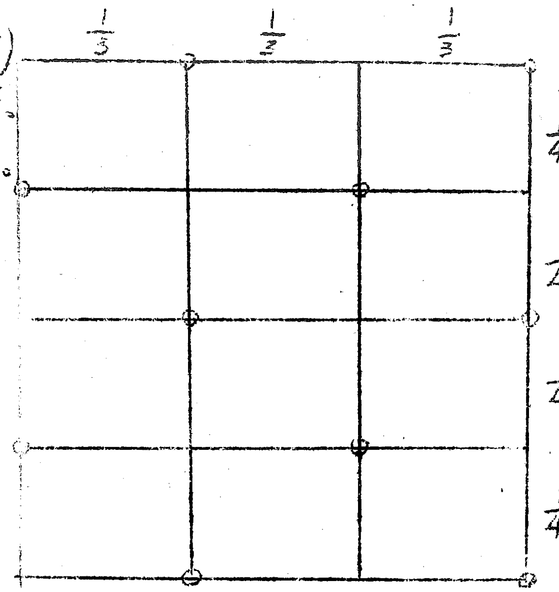
[5] 王挽澜，王鹏飞. Beckenbach 不等式引出的新不等式，成都科技大学学报，1987年第4期，121-124.

[6] 王挽澜，王鹏飞，陈计，一些新不等式的注，成都大学学报（自然科学版），1988年第1期，15-17

[蛙鸣问题解答]

1988年6月20日

问题69*(第34期，陈计) 证明或否定：单位正方形内十点中必有两点的距离小于五分之二。



解答(沈健)：右面的图形否定了陈计的推测，其最短距离是 $\frac{5}{12}>\frac{2}{5}$。

我们猜想，十二分之五取代五分之二，则上述命题成立。

问题70*(第34期，周民主) 设一个分数的十进制小数的循环节是 $a_1a_2\cdots a_n\cdots a_{2n}$，而且 $a_n+a_{2n}=8$，证明或否定：该分数的分母不是素数。

解答(陈计)：事实上，成立如下定理：设素数 p 与10互素，$\frac{1}{p}$ 之最小循环位数 k 为偶数，如 $k=2n$，则当既约真分数 $\frac{a}{p}$ 化为循环小数时，其循环节之前半部每个数字与后半部相应数字之和等于9[参见张远达，循环小数(再续)，数学通讯，1983年第5期，1-3]。

所以问题的回答是肯定的。

编者注：解决本问题的还有提问者。

广义Heron平均和幂平均的不等式

宁波大学数学系　陈计
中国科大数学系　王振

记两个正数 a 和 b 的广义Heron平均为[1]:

$$I_r(a,b)=\frac{a+a^{\frac{r-1}{r}}b^{\frac{1}{r}}+a^{\frac{r-2}{r}}b^{\frac{2}{r}}+\cdots+a^{\frac{1}{r}}b^{\frac{r-1}{r}}+b}{r+1} \quad (1)$$

其中 r 是自然数。特别地，当 $r=2$ 时，得到Heron平均：

$$He(a,b)=\frac{a+\sqrt{ab}+b}{3} \quad (2)$$

1988年，我们建立了Heron平均和幂平均之间的不等式[2]：

定理1　设 $b_1\geq b_2>0$，$a_1/b_1\geq a_2/b_2>0$ 则有

$$\frac{M_{1/2}(a_1,a_2)}{M_{1/2}(b_1,b_2)}\leq\frac{He(a_1,a_2)}{He(b_1,b_2)}\leq\frac{M_{2/3}(a_1,a_2)}{M_{2/3}(b_1,b_2)}, \quad (3)$$

式中等号成立均当且仅当 $a_1/b_1=a_2/b_2$ 时，并且 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{3}$ 是最好的。

本文中，我们将对广义Heron平均建立类似(3)的不等式；作为极限形式，我们将导出林同坡在1974年所建立的对数平均对幂平均分隔的不等式[3]。

定理2　设 $b_1\geq b_2>0$，$a_1/b_1\geq a_2/b_2>0$，则有

$$\frac{M_{1/r}(a_1,a_2)}{M_{1/r}(b_1,b_2)} \le \frac{I_r(a_1,a_2)}{I_r(b_1,b_2)} \le \frac{M_{(r+2)/(3r)}(a_1,a_2)}{M_{(r+2)/(3r)}(b_1,b_2)} \quad (4)$$

式中等号成立当且仅当 $a_1/b_1 = a_2/b_2$ 时，并且 $\frac{1}{r}$ 和 $\frac{r+2}{3r}$ 是最好的。

证明　若 $a_1/b_1 = a_2/b_2$ 或 $r=1$，则(4)显然是恒等式。下面我们假设 $a_1/b_1 > a_2/b_2$ 且 $r \geq 2$。

1° 将(4)右边的不等式改写成

$$\frac{(s+1)^r}{s^r+s^{r-1}+\cdots+1} < \frac{(s_*+1)^r}{s_*^r+s_*^{r-1}+\cdots+1} \quad (5)$$

其中 $s=(a_1/a_2)^{1/r}$　$s_*=(b_1/b_2)^{\frac{1}{r}}$。不难验证 $s>s_*>1$　因此，下面我们只须证明函数

$$g(s)=\frac{(s+1)^r(s-1)}{s^{r+1}-1} \quad (6)$$

在 $(1,+\infty)$ 中是严格单调下降的。对 $g(s)$ 求导得

$$g'(s)=\frac{(s+1)^{r-1}\left[(r-1)s^{r+1}-(r+1)s^r+(r+1)s-(r-1)\right]}{(s^{r+1}-1)^2} \quad (7)$$

令 $f(s)=(r-1)s^{r+1}-(r+1)s^r+(r+1)s-(r-1)$　则

$f''(s)=r(r^2-1)\left[s^{r-1}-s^{r-2}\right]>0$

且 $f(1)=f'(1)=0$　所以 $f(s)>0$，即 $g'(s)>0$　从而(5)成立。

2°. 把(4)右边的不等式改写为

$$\frac{(t^{3r}+t^{3r-3}+\cdots+1)^{r+2}}{(t^{r+2}+1)^{3r}} < \frac{(t_*^{3r}+t_*^{3r-3}+\cdots+1)^{r+2}}{(t_*^{r+2}+1)^{3r}} \quad (8)$$

其中 $t=(a_1/a_2)^{1/(3r)}$，$t_*=(b_1/b_2)^{1/(3r)}$ 易知 $t>t_*>1$.

下面我们只须证明函数：

$$h(t)=\frac{(t^{3r+3}-1)^{r+2}}{(t^{r+2}+1)^{3r}(t^3-1)^{r+2}} \quad (9)$$

在 $(1,+\infty)$ 中是严格单调下降的。通过求导得，

$$h'(t) = -\frac{3(r+2)t^2(t^{3r+3}-1)^{r+1}}{(t^{r+2}+1)^{3r+1}(t^3-1)^{r+3}}$$

$$\times\left[(r+1)t^{4r+2}-rt^{4r-2}-rt^{3r+3}+(r+1)t^{3r}-(r+1)t^{r+2}+rt^{r-1}-1\right] \quad \cdots\cdots(10)$$

运用加权的算术—几何平均不等式，得

$$(r-2)t^{4r+2}+2t^{3r} > rt^{(4r^2-4)/r} \geq rt^{4r-2}$$

$$3t^{4r+2}+(r-3)t^{3r} > rt^{(3r^2+3r+6)/r} > rt^{3r+3},$$

$$2t^{3r}+(r-1)t^{r-1} > (r+1)t^{(r^2+4r+1)/(r+1)} > (r+1)t^{r+2}$$

$$t^{r-1}>1$$

将上述四式相加得：

$$(r+1)t^{4r+2}-rt^{4r-2}-rt^{3r+3}+(r+1)t^{3r}-(r+1)t^{r+2}+rt^{r-1}-1>0 \quad (11)$$

所以 $h'(t)<0$，即 $h(t)$ 是严格单调降的。因此立知(8)成立。

3° 用类似于[2]的方法，易证当 $\frac{1}{r}<p<\frac{r+2}{3r}$ 时

$$\frac{M_p(a_1,a_2)}{M_p(b_1,b_2)} \text{ 和 } \frac{I_r(a_1,a_2)}{I_r(b_1,b_2)}$$ 是不可比较大小的。

证毕 □

在文[1]中，我们曾指示：

$$\lim_{r\to 0} I_r(a,b)=\frac{a-b}{\ln a-\ln b}=L(a,b) \qquad (13)$$

其中 $L(a,b)$ 称为 a 和 b 的对数平均，由定理2可得：

定理3，设 $b_1\geq b_2>0$，$a_1/b_1\geq a_2/b_2>0$ 则有

$$\frac{M_0(a_1,a_2)}{M_0(b_1,b_2)}\leq\frac{L(a_1,a_2)}{L(b_1,b_2)}\leq\frac{M_{1/3}(a_1,a_2)}{M_{1/3}(b_1,b_2)} \qquad (14)$$

式中等号成立均当且仅当 $a_1/b_1=a_2/b_2$ 时。

特别地，在(14)中令 $b_1=b_2=1$ 时有林同坡不等式[3]：

$$M_0(a_1,a_2)\leq L(a_1,a_2)\leq M_{1/3}(a_1,a_2) \qquad (15)$$

参考文献

[1] 陈计、舒海斌，Ostle-Terwilliger 不等式加细，数学通讯，1988年第3期，7-8

[2] 陈计，王振，Heron 平均和幂平均的不等式，湖南数学通讯，1988年第2期，15-16

[3] Tung-Po Lin, The power mean and the logarithmic mean, Amer. Math Monthly Vol. 81 (1974) 879-883

广义奇异值分解定理的新

数学系83级　陈向东　李广兴

在文[1]中给出了下面所谓广义奇异值分解定理（GSVD定理）：

广义奇异值分解定理：设A和B分别是$m\times n$阶及$p\times n$阶复方阵，且$k=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$，则存在$m$阶酉方阵$U$，$p$阶酉方阵$V$及$n$阶可逆复方阵$X$，使：

$$U^HAX=(\Sigma_A,\ 0),\quad V^HBX=(\Sigma_B,\ 0) \tag{1}$$

$$\underset{m\times k}{\Sigma_A}=\begin{pmatrix}I_A & & \\ & S_A & \\ & & O_A\end{pmatrix},\quad \underset{p\times k}{\Sigma_B}=\begin{pmatrix}O_B & & \\ & S_B & \\ & & I_B\end{pmatrix} \tag{2}$$

其中I_A和I_B分别为r阶和$k-r-s$阶单位方阵，O_A和O_B分别是$(m-r-s)\times(k-r-s)$和$(p-k+r)\times r$零子矩阵，$S_A=\mathrm{diag}(\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_{r+s})$，$S_B=\mathrm{diag}(\beta_{r+1},\cdots,\beta_{r+s})$，且$1>\alpha_{r+1}\geq\alpha_{r+2}\geq\cdots\geq\alpha_{r+s}>0$，$0<\beta_{r+1}\leq\cdots\leq\beta_{r+s}<1$，$\alpha_i^2+\beta_i^2=1$，$i=r+1,\cdots,r+s$，$U^H$表示复方阵$U$的共轭转置。

广义奇异值分解在解矩阵方程时有许多重要的应用，（见[2]），本文证明GSVD与两个半正定Hermite方阵同时相合于对角形这个经典结论是等价的，从而给出了GSVD的一个新证明。

引理1：若S_1，S_2为两个半正定Hermite阵，则存在一个非奇异方阵P，使：

$$P^HS_1P=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\quad P^HS_2P=\mathrm{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

这个结论在很多线性代数书中都可见到，这里证明从略。

引理2：若C是$m\times n$复　阵，且$C^HC=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)$则存在$m$阶酉方阵$U$，使得$C=U\Sigma_c$，$\Sigma_c$为每行及每列

都至多有一个非零元的矩阵。

证明：设 $C=(V_1,V_2,\cdots,V_n)$，其中 $V_i(1\le i\le n)$ 为 m 维复列向量，则由 $C^HC=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 得到 $V_i^HV_j=\delta_{ij}\lambda_i$ 从而 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 两两正交，设 $V_1,V_2,\cdots,V_n$ 中所有非零的向量为 $V_{i_1},V_{i_2},\cdots,V_{i_k}$ $(1\le i_1<\cdots<i_k\le n)$，则 $V_{i_j}/\sqrt{\lambda_{i_j}}$ $(j=1,\cdots,k)$ 是两两正交的单位向量，把它们扩充成 m 维复列向量空间 C^m 的一组单位正交基，并把它们排成一个 m 阶酉方阵 U，那么 $C=U\Sigma_C$，而知 Σ_C 的每行及每列都至多有一个非零元，而且 Σ_C 为非负方阵。

下面证明主要定理。

定理3：设 A 和 B 分别为 $m\times n$ 和 $p\times n$ 复矩阵，则下面两个结论等价。

(1) 存在 m 阶酉方阵 U，p 阶酉方阵 V 和 n 阶非奇异复方阵 X，使 (1)，(2) 成立。

(2) 存在 n 阶非奇异方阵 P，使得

$$P^HS_1P=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),\quad P^HS_2P=diag(\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

其中 $S_1=A^HA$，$S_2=B^HB$。

证明：设 (1) 成立，则易验证 (2) 成立。

现在设 (2) 成立，那么

$$(AP)^H(AP)=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n),\ (BP)^H(BP)=diag(\mu_1,\cdots,\mu_n)$$

由引理2，存在 m 阶酉方阵 U_1 和 p 阶酉方阵 V_1 使得：

$$AP=U_1\Sigma_{AP}\ ,\quad BP=V_1\Sigma_{BP}$$

其中 Σ_{AP}，Σ_{BP} 的每行每列都至多有一个非零元，显然

$$\{1,2,\cdots,n\}=I_1\cup I_2\cup I_1'\cup I_3$$

其中 I_1 为列指标集，Σ_{AP} 具有这些指标的列均为非零列，而 Σ_{BP} 对应的则为零列，I_1' 与 I_1 恰为相反。对应于 I_2 的 Σ_{AP} 与 Σ_{BP} 的列都是非零列，对应于 I_3 的 Σ_{AP} 及 Σ_{BP} 的列都是零列。存在置换方阵 P_1，使任给 $m\times n$ 矩阵 C，都有：

$$CP_1=(C[1,\cdots,m|I_1],C[1,\cdots,m|I_2],C[1,\cdots,m|I_1'],C[1,\cdots,m|I_3])$$

其中$C[1,\cdots,m|\alpha_1,\cdots,\alpha_k]$表示$C$的$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$列形成的子矩阵

则有

$$APP_1=U_1(\underset{r}{\Lambda_1},\underset{s}{\Lambda_2},\underset{t}{0}\ \vdots\ 0)$$

$$BPP_1=V_1(\underset{r}{0},\underset{s}{\Delta_2},\underset{t}{\Delta_1}\ \vdots\ 0)$$

其中$r=|I_1|$，$s=|I_2|$，$t=|I_1'|$

设Λ_1,Λ_2的非零元分别依次为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$及$a_1,a_2,\cdots,a_s$，$\Delta_1,\Delta_2$的非零元为$\mu_1,\cdots,\mu_t,b_1,\cdots,b_s$，令：

$$P_2=diag(\lambda_1^{-1},\cdots,\lambda_r^{-1},(a_1^2+b_1^2)^{-\frac{1}{2}},\cdots,(a_s^2+b_s^2)^{-\frac{1}{2}},\mu_1^{-1},\cdots,\mu_t^{-1},1,\cdots,1)$$

则APP_1P_2头r列上每列有一个1，其后s列每列有一个非零元，它是$a_i/(a_i^2+b_i^2)^{\frac{1}{2}}$之一，对$BPP_1P_2$有类似讨论，通过右乘一个$n$阶方阵$P_3$使$(\Lambda_1,\Lambda_2,0\ \vdots\ 0)P_3$前$r+s$列上非零元从左到右递减，则$(0,\Delta_2,\Delta_1\ \vdots\ 0)P_3$中间$s+t$列上的非零元从左到右递增，再分别调整行的次序有：

$$APP_1P_2P_3=U_1U_2\left(\begin{matrix}I_A & & \\ & S_A & \\ & & 0\end{matrix}\ \vdots\ 0\right)$$

$$BPP_1P_2P_3=V_1V_2\left(\begin{matrix}0 & & \\ & S_B & \\ & & I_B\end{matrix}\ \vdots\ 0\right)$$

I_A，S_A，I_B，S_B及诸零块如GSVD中所述，令$X=PP_1P_2P_3$，$U=U_1U_2$，$V=V_1V_2$，那么：

$$U^HAX=(\Sigma_A,0)\qquad V^HBX=(\Sigma_B,0)$$

至此定理得到证明。

本文是作者在作毕业论文期间所作，其中指导老师李炯生付教授给了很多帮助，在此表示感谢！

参考文献

1. G.C. PAIGE and M.A. SAUNDERS, Towards a Generalized Singular Value Decomposition SIAM. J. NUMBER. Vol 18. June, 1981
2. K.W.E. Chu, Singular Value and Gene❓alized Singular Value Decomposition and the Solution of Linear Matrix Equations. Linear Algebra and Its Applications 88/89 83-98 (1987)

[蛙鸣问题解答]

问题1*(第25期, 陈计) 设平面n边形的边长是$a_1, a_2, \cdots, a_n$, 其面积为A, 是否一定有

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j \ge \left[2(n-1)\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\right]A \ ?$$

解答(提问者): 当$n\ge 7$时, 问题的回答是否定的。令$a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1$, $a_n=0$, 原n边形蜕化为正$n-1$边形时, 不等式(?)反向.

编者注: 解决本问题的还有王振。

问题17*(第28期, 陈计, 何明秋) 在所有单位面积的凸五边形中, 求五角形面积的最小值。

解答(杨忠国): 让凸五边形蜕化成三角形: 使三个相邻顶点合成为一点。这样五角形面积是0。

问题28*(第29—30期, 李建明) 证明或否定: 四面体内任意一点到各顶点的距离之和至少为到各棱的距离之和的$\frac{2}{\sqrt{3}}$倍。

解答(王振, 陈计): 把正三棱锥内一点取在上顶点上, 并让上顶点趋于无穷远, 则该点到三棱锥各顶点距离和与到各棱距离之和的比趋近于1, 所以命题不真。

猜想: 设四面体内任意一点到各顶点的距离为$x_1, \cdots, x$, 到各棱的距离为$p_1, \cdots, p_6$, 则当$|t|\le 2-2\log_3 2 (=0.73814)$时有

$$M_t(x)\ge\sqrt{3}\,M_t(p).$$

关于Hamilton圈博奕的新结果

数学系八三级　李颖　刘光欧

一九八二年，英国图论学家，ALEXIE PAPAIOANNOU提出如下的，Bollobas意义下的博奕：在n个点上，α和β交替地分别用绿、红两色对边进行染色。设α绿先手。对一个给定的图P，在α和β分别经过$[\frac{1}{2}\binom{n}{2}]^*$和$[\frac{1}{2}\binom{n}{2}]^*$笔以后，如果在绿色子图中包含了一个图P，则称$\alpha$（绿）胜，反之如$\alpha$不能有一个图P　隐含于绿色圈子图中时，则称$\beta$（红）胜。

当P是Hamilton圈时，文[1]给出了如下结果：

1．在$n\le 5$时，后手红必胜

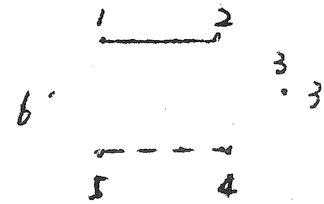
2．如对n、绿必胜则$n+2$必绿必胜

3　当n充分大时，如$n\ge 600$，则先手必胜。

本文证明了$n=6$时红方必胜。

下面我们规定各顶点的标号如下图，且

不妨假定前2笔是绿（今后用g，图上用实线——表示）12，红（今后用r，图上用虚线----表示）45



先给出一个定义：

定义　对某一顶点v，如果关于v红色度数$d_r(v)=m$，绿色度数是$d_g(v)=n$，则我们称有序数组(m,n)为顶点v的态。

引理1：不能有$(4,1)$态，$(3,0)$态，或同时有两个$(2,0)$态，不然红胜。

推论：不可有一条独立的r边与一孤立顶。

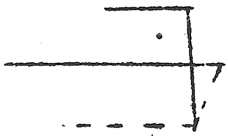
引理2：绿如成一个Hamilton圈（今后用H.C表示），则是对顶点的一个置换。

引理3：不能有一个r色K_4。

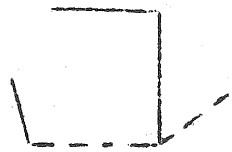
上述引理都显然。

定理：在六点上的H.C博奕，后手必胜。

证明：在1.2.3.4.5.6六个点上，g_{12}，r_{45}，如r不染一边与4、5相关，则必须是36（推论1）或情形1；不然g_{65}或情形2，如图：



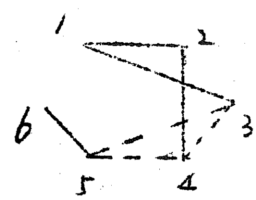
case 1



case 2

对于情形2，V_{34} 则 g_{42}(或41) 但不可 g_{46}.
不然 V_{35} 后，红色必可在3.4.5.1或2中成一 K_4 与引3相违.

对于情形1，同理不可46，设 g 为24，至此 case 1与2同构，所以如下图：



这时：V_{25}，g_{3x} $(x=1,6)$

(同引3) $V_{3\bar{x}}$ g_{32}

这样如成 H.C 必是 x_{32}；续下：

$V_{4\bar{x}}$ g_{4x}.

这样如成 H.C 必是 x_{42}；与引理2矛盾

∴不可能成 H.C　　证毕

参考文献

[1]. A papaioannou. A Hamilton game Graph Theory. Annals of Discrete Mathematics 13, 1982

·蛙鸣·第35期
1986年6月

度数的一些新应用

数学系84级　　周　坚

本文给出流形间光滑映射的拓扑度的四种定义及其等价性的应用。

首先说明了度数是多项式阶数的推广，用度数证明复变中的Liouville定理并给幅角原理一个度数的解释。

本文给出的较重要的应用是对古典微分几何中曲线曲面整体性质的研究。

首先，给出了平面简单闭曲线回转指标定理的一个极简洁的证明（在苏步青等编的〔1〕中给出的证明用了四五页纸，而用度数之证明不到300字）。

其次，给出了Gauss—Bonnet定理的度数解释，并用纯拓扑的方法给出了它的高维推广。这个问题在三、四十年代有过很好的讨论，但本文给出的证明有独到之处。他们的证明都用的微分几何的方法，没有显示出令曲率是拓扑不变量的特点，本文用的是度数和Euler示性类的性质，证明简洁且能反映拓扑不变性，且可望得到更好的结果，因而具有一定的独立性。

作者感谢徐森林老师的长期引导！

参考文献：

〔1〕苏步青等，微分几何，复旦大学出版社

组合中的一个几何问题

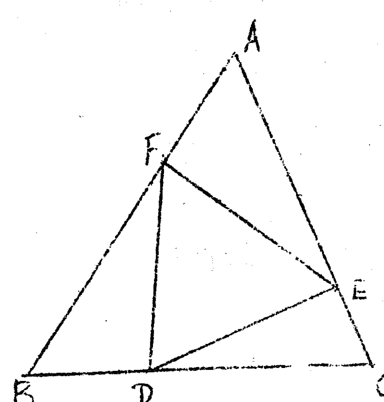
数学系87级　李文志

问题　平面任意n（$n\geq 3$）点组成的C_n^3个三角形中，其最大面积与最小面积之比为μ_n，试求μ_n的最小值。

显然，$n=3$、4时，μ_n的最小值为1。本文给出$n=5$，6时的解答，并对μ_7的最小值作了猜测。

引理　D、E、F分别为$\triangle ABC$的边BC，CA，AB上的点，且$BD\leq\frac{1}{2}BC$，$CE\leq\frac{1}{2}CA$，$AF\leq\frac{1}{2}AB$，则$S_{\triangle DEF}\geq\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

证明　取$\triangle ABC$的面积为单位面积，设$x=\frac{BD}{BC}$，$y=\frac{CE}{CA}$，$z=\frac{AF}{AB}$，则x，y，$z\in[0，\frac{1}{2}]$，于是：



(图1)

$$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BDF}-S_{\triangle CDE}-S_{\triangle AEF}$$

$= 1-x(1-z)-y(1-x)-z(1-y)$

$= 1-x(1-y-z)-y-z+yz$

$\geq 1-\frac{1}{2}(1-y-z)-y-z+yz$

$= \frac{1}{4}+(\frac{1}{2}-y)(\frac{1}{2}-z)$

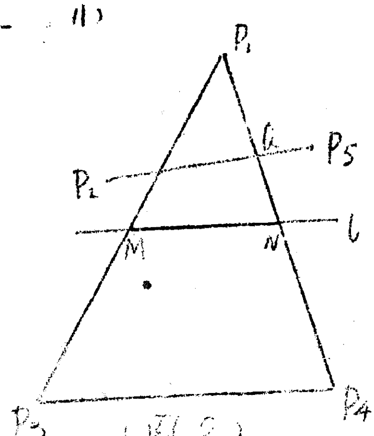
$\geq \frac{1}{4} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$

显然，等号成立的充要条件是 x，y，z 至少有两个等于 $\frac{1}{2}$，即 D、E、F 至少有两个为中点。

定理 1 $h_5 \geq \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

证明 只须考虑五点成一凸五边形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的情形，过 P_1P_3，P_1P_4 上靠近 P_1 的黄金分割点 M，N 作直线 l，若 P_2 在 l 下方，则

$$\frac{S_{\triangle P_1P_3P_4}}{S_{\triangle P_2P_3P_4}} \geq \frac{P_1P_3}{MP_3} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (1)$$



(图 2)

若 P_5 在 l 下方，同样可证得，若 P_2，P_5 均在 l 上方（或者 l 上），则 P_2P_5 交 P_1N 于 Q，于是有

$$\frac{S_{\triangle P_2P_4P_5}}{S_{\triangle P_1P_2P_5}} = \frac{P_4Q}{P_1Q} \geq \frac{P_4N}{P_1N} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad (2)$$

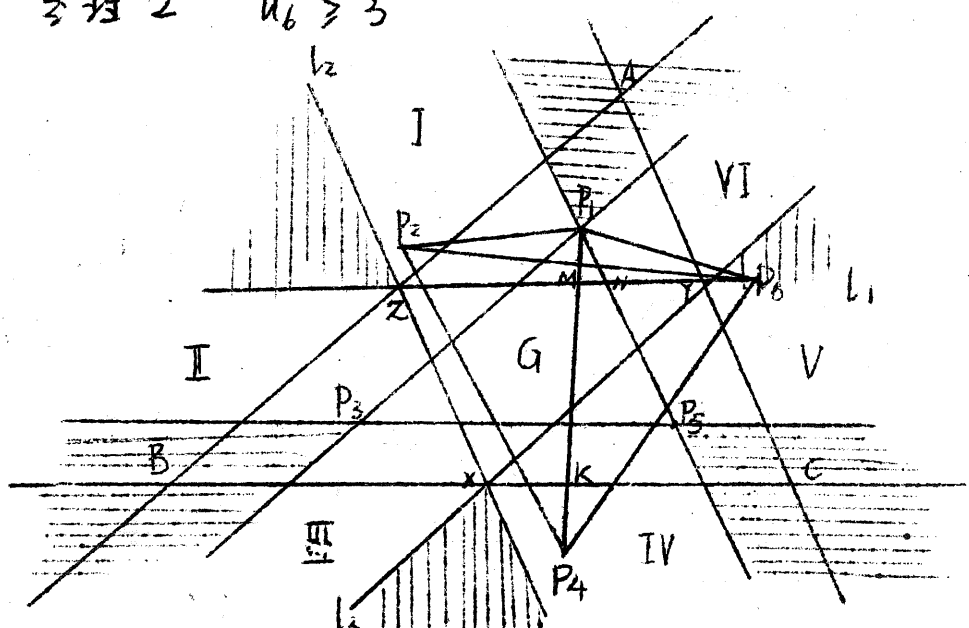
推论1　单位面积凸图形内任放5点，连成的十个三角形中的最小面积 $\leq \frac{5-\sqrt{5}}{10}$。

证明　不妨设五点为一凸五边形顶点。在定理1的证明中可设 $S_{\triangle P_1P_3P_4} \leq S_{\triangle P_2P_4P_5}$，则

$$\min(S_{\triangle P_1P_2P_5},\ S_{\triangle P_2P_3P_4}) \leq \left(1+1+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{-1} S_{\text{五边形}P_1P_2P_3P_4P_5}$$

$$\leq \frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

定理2　$u_6 \geq 3$



(图3)

证明　若有一点在其它点连成的三角形内，则显然有 $u_6 > 3$，故不妨设六点连成凸六边形 $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$。过 $\triangle P_1P_3P_5$ 的重心 G 关于各边的对称点，作相应边的平行线连成 $\triangle ABC$

（图3），连结各边中点X、Y、Z并延长为直线l_1、l_2、l_3，考虑点P_2的位置

(1)六点连成凸六边形，故P_2不在划横线的区域内；

(2)若P_2在$\triangle ABC$内（不含边界），则$S_{\triangle P_1P_2P_3}<$

$S_{\triangle P_1 P_2 P_3} \le \frac{1}{3} S_{\triangle P_1P_3P_5}$

(3)若P_2与P_6同在l_1上方，则P_2P_6交P_1P_4于l_1上方的点M，又设P_1P_4交l_1于N，交BC于K，易知$\frac{NK}{NP_1}=3$，于是：

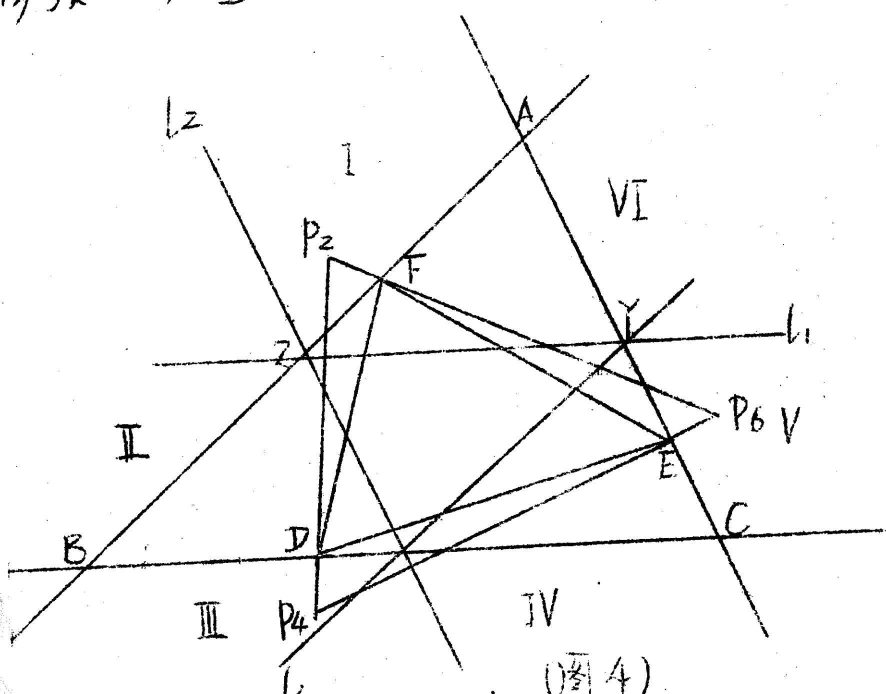
$$\frac{S_{\triangle P_2P_4P_6}}{S_{\triangle P_1P_2P_6}} = \frac{P_4M}{P_1M} > \frac{NK}{NP_1} = 3$$

若P_2在划竖线的区域内，则只须考虑P_6在l_1下方，P_4在l_2右边，但这时P_4与P_6同在l_3右边，故亦有$u_6 \ge 3$。

(4)Ⅰ、Ⅱ两部分是对称的，不妨设$P_2 \in$ Ⅰ，则只有$P_4 \in$ Ⅲ，$P_6 \in$ Ⅴ的情形待证（图4）。显然，P_2P_4交线段BX于D，P_4P_6交线段CY于E，P_6P_2交线段AZ于F，由引理得

$$S_{\triangle P_2P_4P_6} \ge S_{\triangle DEF} \ge \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} \ge S_{\triangle P_1P_3P_5}$$

但 $\triangle P_1P_3P_5$ 与 $\triangle P_2P_4P_6$ 是对称的，故可设 $S_{\triangle P_2P_4P_6} \le S_{\triangle P_1P_3P_5}$，从而 $S_{\triangle P_2P_4P_6} = S_{\triangle P_1P_3P_5}$，于是，$P_2$ 与 Z，P_4 与 X，P_6 与 Y 三对点中至少有两对重合，于是又归结到<iii>，顺便说明，当三对点均重合时，$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ 恰为一仿射正六边形顶点，这是 $u_6=3$ 成立的唯一情形，证毕



(图4)

推论2. 凸六边形的六个顶点连成的20个三角形中，最小面积不大于该六边形面积的1/6

证明：在定理2证明中易得

$$S=\min(S_{\triangle P_1P_2P_3},\ S_{\triangle P_3P_4P_5},\ S_{\triangle P_5P_6P_1})\le\frac{1}{3}S_{\triangle P_1P_3P_5}$$

$$t=\min(S_{\triangle P_2P_3P_4},\ S_{\triangle P_4P_5P_6},\ S_{\triangle P_6P_1P_2})\le\frac{1}{3}S_{\triangle P_2P_4P_6}$$

至少有一式成立，因而有

$$\min(S,t)\le\frac{1}{6}S_{\text{六边形}P_1P_2P_3P_4P_5P_6}$$

有趣的是，文首的问题，在 $n=3,4,5,6$ 时，u_n 的最小值都是在 n 点为一仿射正 n 边形顶点时取得，对任意 n $(n\ge3)$ 是否亦如此呢？笔者猜测，在 $n=7$ 时，这仍是成立的，即有

猜想．$u_7\ge(9+4\cos\frac{2\pi}{7})/(4\cos\frac{\pi}{7}+1-2\cos\frac{2\pi}{7})$，

值得注意的是，当8点为一正八边形顶点时，$u_8=3+2\sqrt{2}$，而当8点中有一点在其余七点所成的仿射正七边形的中心时，$u_8=3+4\cos\frac{2\pi}{7}<u_8$

我们认为，要想对一般的 n 找到 u_n 最小值的一个解析表达式至少在本世纪是没有希望的事，即使对 $n=7$ 和 8，解决文首的问题也有相当大的困难。不过对充分大的 n 估计 u_n 的最小值的非平凡的阶大概是一项值得尝试的工作。

关于圆形区域的Heilbronn数

数学系83级 陈计 刘竞欣

§1 引言

设K是一个平面凸体，用|K|表示它的面积，对于任意一个三角形$r_1r_2r_3$，用(r_1, r_2, r_3)表示其面积，再令

$$(r_1 r_2 \cdots r_n) = \min\{(r_i r_j r_k) \mid 1 \le i < j < k \le n\} \quad (1.1)$$

$$H_n(K) = \frac{1}{|K|} \max\{(r_1 r_2 \cdots r_n) \mid r_i \in K, 1 \le i \le n\} \quad (1.2)$$

这样定义的$H_n(K)$，$n = 3, 4, \cdots$ 叫做凸体K的Heilbronn数。设$\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$是K的某个确定的子集，如果正好有

$$(r_1 r_2 \cdots r_n) = H_n(K) \quad (1.3)$$

我们就说$\{r_1 r_2 \cdots r_n\}$或$r_1 r_2 \cdots r_n$实现$H_n(K)$，或者说它是关于K的一个Heilbronn分布，简称关于K的一个H分布。

不妨设K是一个圆盘或三角形区域，1950年Heilbronn猜想有常数c使得[2]

$$H_n(K) \le c/n^2 \quad (1.4)$$

但在1980年，J. Komlós, J. Pintz和E. Szemerédi借助

于组合工具给出一个概率构造，证明了存在常数C，使得[3]：

$$H_n(k) \geqslant C(\ln n)/n^2 \tag{1.5}$$

这就推翻了Heilbronn猜想，另一方面，他们同年还证明了存在常数C使得[4]

$$H_n(k) \leqslant \exp(C\sqrt{\ln n})/n^{\frac{8}{7}} \tag{1.6}$$

M. Goldberg考虑了圆形区域的最初几个Heilbronn数的准确值，他未加证明地断言当$n<12$时，H_n可以在圆内接正n角形上实现，并且他给出了

$$H_n = \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{n} \tag{1.7}$$

除掉：

$$H_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} = 0.413\cdots \tag{1.8}$$

$$H_4 = \frac{1}{\pi} = 0.318\cdots \tag{1.9}$$

是平凡的结果外，本文通过细致的分析，我们实际上证明了Goldberg关于H_5和H_6的猜想：

$$H_5 = \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{5} = 0.209\cdots \tag{1.10}$$

$$H_6 = \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.137 \tag{1.11}$$

§2. $H_5 = \frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$

1° 若$r_4, r_5 \in \Delta r_1r_2r_3$，则

$$(r_1r_2\cdots r_5) \leqslant \frac{1}{5}|r_1r_2r_3| \leqslant \frac{1}{5}\times\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

$$= 0.082\cdots < 0.209\cdots \tag{2.1}$$

2° 若 $r_5\in$ 凸四边形 $r_1r_2r_3r_4$，则：

$$(r_1r_2r_3r_4r_5)\le\frac{1}{4}|r_1r_2r_3r_4|\le\frac{1}{4}\times\frac{2}{\pi}$$

$$=0.159\cdots<0.209 \qquad (2.2)$$

3° 若 $r_1r_2,\cdots r_5$ 为凸五角形，则[5]

$$(r_1r_2\cdots r_5)\le\frac{2}{5+\sqrt5}|r_1r_2\cdots r_5|\le\frac{2}{5+\sqrt5}\times\frac{5\sin\frac{2\pi}{5}}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{2\pi}{5}\right)^2 tg\frac{\pi}{5}=0.209\cdots \qquad (2.3)$$

(2.3)等号成立当且仅当 $r_1r_2\cdots r_5$ 为园内接正五角形.

§3 $H_6=\frac{\sqrt3}{4\pi}$

1° 若 $r_4,r_5,r_6\in\triangle r_1r_2r_3$，则

$$(r_1r_2\cdots r_6)\le\frac{1}{7}|r_1r_2r_3|\le\frac{1}{7}\times\frac{3\sqrt3}{4\pi}$$

$$=0.059\cdots<0.137\cdots \qquad (3.1)$$

2° 若 $r_5,r_6\in$ 凸四角形 $r_1r_2r_3r_4$，则

$$(r_1r_2\cdots r_6)\le\frac{1}{6}|r_1r_2r_3r_4|\le\frac{1}{6}\times\frac{2}{\pi}$$

$$=0.106\cdots<0.137 \qquad (3.2)$$

3° 若 $r_6\in$ 凸五角形 $r_1r_2\cdots r_5$，我们反设

$$(r_1r_2\cdots r_6)\ge\frac{1}{3+2\sqrt2}|r_1r_2\cdots r_5| \qquad (3.3)$$

不妨设 $r_6\in$ 凸四边形 $r_2r_3r_4r_5$，则[6]

$$(r_2r_3\cdots r_6)\le\frac{1}{2+2\sqrt2}|r_2r_3r_4r_5| \qquad (3.4)$$

由(3.3)得：

$$(r_2 r_3 r_4 r_5) \le \frac{2+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} |r_1 r_2 \cdots r_5| \tag{3.5}$$

从而：

$$(r_2 r_3 \cdots r_6) \le \frac{1}{3+2\sqrt{2}} |r_1 r_2 \cdots r_5| \tag{3.6}$$

所以

$$(r_1 r_2 \cdots r_6) \le (r_2 r_3 \cdots r_6) \le \frac{1}{3+2\sqrt{2}} \times \frac{5\sin\frac{2\pi}{5}}{2\pi}$$

$$= 0.129\cdots < 0.137\cdots \tag{3.7}$$

4° 若 $r_1 r_2 \cdots r_6$ 为凸六角形，则[7]

$$(r_1 r_2 \cdots r_6) \le \frac{1}{6} |r_1 r_2 \cdots r_6| \le \frac{1}{6} \times \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} = 0.137\cdots \tag{3.8}$$

(3.8)式等号成立当且仅当 $r_1 r_2 \cdots r_6$ 为圆内接正六角形。

参考文献

1. M. Goldberg, Mathematics Magazine, 45(1972), 135–144.
2. K. F. Roth, J. London Math. Soc. 26 (1951), 198–204
3. J. Komlós, J. Pintz and E. Szemerédi, J. London Math Soc. (2), 25(1982), 13–24
4. J. Komlós, J. Pintz and E. Szemerédi, J. London Math. Soc. (2) 24(1981) 385–396
5. 王振、陈计，数学教学，1988年第2期，问题155。
6. 王振，数学通讯，1988年第6期，问题11.
7. 单墫，几何不等式，上海教育出版社，1980年版。

[翻译报告]

Heilbronn三角问题的进展*（节选）

K. F. Roth 著

数学系83级 刘克欣 蒋海 译

译者的话

K. F. Roth是英国著名的数学家。本文是他对Heilbronn问题前25年发展历史的论述。文章写在十二年前。这十二年来，Heilbronn问题又有了新的进展：J. Komlós, J. Pintz和E. Szemrédi[7-8]细致地改进了Roth的方法，获得了Heilbronn数上界估计的进展，他们还借助于组合工具给出的一个概率构造否定了Heilbronn猜想，而这些组合公式是用超图的想法得到的；在国内，中科院成都分院两位研究员杨路、张景中同他们的研究生曾振柄[9-10]一起，确定了关于正方形和三角形区域的最初几个Heilbronn数。这些在K. F. Roth的文章中当然不会有所反映，但是K. F. Roth的文章所阐明的一些想法对继续研究Heilbronn问题仍然很有参考价值。为此，我们将它译出（限于篇幅，刊登时作了删节存目——编者注），希望对我系同学的研究起到推波助澜之作用。

---

* 原题：Developments in Heilbronn's Triangle Problem，译自Advances in Mathematics, 22 (1976), 364-385

1. 引言

设$P_1, P_2, \cdots, P_n$为n个点在一单位面积圆内的分布。二十五年前，Heilbronn猜测三角形$P_iP_jP_k$面积的最小值(从n个点中遍选所有的$P_i P_j P_k$)小于cn^{-2}，其中c是与分布无关的常数。

虽然人们已经知道许多不完全的结果，但这个猜想仍是悬而未决。本文将给出曾用于这个问题的方法的一个说明性的叙述，力图阐说形成这些方法的动机，并理清其中许多想法的条理。这里大概会有一些想法在经修改和重新组合后，将可能对今后的发展起到重要的作用。

2. 问题的改造

设K为平面上一个有限闭凸区域，有面积$A(K)$。令

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \quad (n \geq 3) \tag{2.1}$$

为一使三角形$P_iP_jP_k$的面积的最小值(遍取$k<i<j<k\le n$)达到其最大值$\Delta^*(K;n)$的分布。第一节中的Heilbronn问题就是(用n的阶)估计当K为圆形域时的表达式

$$\Delta(K;n) = \Delta^*(K;n)/A(K) \tag{2.2}$$

对于各种K所提的问题，本质上讲无任何不同。利用平面线性变换可知，当K为三角形区域时，(2.2)的值并不依赖于其形状。又因为任意有限凸区域K包含面积为$\frac{1}{4}A(K)$的三角形，也总能放入某个面积为$4A(K)$的三角形中。所以(2.2)的值至少是K为三角形时的$\frac{1}{4}$，至

多是其4倍。从而，对(2.2)的估计本质上(不论常数因子)是与K无关的。尽管也曾考虑过非圆形域的K，但这完全是为了技术上的便利。

我们将以

$$\Delta(D;n);\quad \Delta(S;n);\quad \Delta(T;n) \qquad (2.3)$$

分别记当K为圆形域，正方形域，及三角形域时(2.2)的值，这些量显然与其大小，形状无关。Heilbronn问题就是对充分大的n来估计这些量的任何一个。

今后，我们将以$\Delta(D;n)$简记成为$\Delta(n)$，并总假设n是充分大的

3 问题的文献(略)

4.(3.1)的证明(略)

5 记号

除了延用第二节的记号外，我们再引入一些进一步的记号。

以$X=(x,y)$记平面上一点，把$\iint g(x,y)dxdy$写成$\int g(X)dX$表示在全个平面上的积分。

若V是平面的子集，则以$V(X)$记其特征函数：当X在V中时$V(X)$为1，否则为0。(例如，凸区域k的面积$A(K)$可由$A(k)=\int k(X)dX$给出)。

λX，μV等是通常的含义，其中$\mu>0$，即$\lambda X=(\lambda x,\lambda y)$，$\mu V$是指以$V(\mu^{-1}X)$为其特征函数的点集。以$|X|$记X到原点的距离，所以$|X'-X''|$

是 X' 和 X'' 之间的距离。

下面我们引入关于极集(2.1)的一些记号。

以 τ 记从(2.1)点中选取的一个点对 $P_i, P_j\ (i<j)$ $d(\tau)=|P_i-P_j|$ 为构成 τ 的两点间的距离。如果

$$y\cos\theta - x\sin\theta = a \qquad (0\le\theta<\pi) \tag{5.1}$$

是 P_i, P_j 所决定的直线，则以 $\theta(\tau)$ 记直线(5.1)的倾角，进而，对 $\forall\ w>0$，我们以直线(5.1)为中心线，w 为宽的(开)带：

$$a-\frac{1}{2}w < y\cos\theta - x\sin\theta < a+\frac{1}{2}w \tag{5.2}$$

记为 $H_\tau(w)$。

我们扩充上述特征函数的记号，以 $H_\tau(w;X)$ 表示 $H_\tau(w)$ 的特征函数。定义集(2.1)在 $H_\tau(w)$ 中点的个数为 $N_\tau(w)$，所以

$$N_\tau(w)=\sum_{i=1}^{n} H_\tau(w;P_i) \tag{5.3}$$

我们定义 Σ_τ 为对所有 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个点对 τ 所求的和，并总以 C 表示一个充分大的绝对常数。

6 当 $n\Delta(k;n)$ 不"小"时极端分布(2.1)的性质

在本节中以 K 记一个圆，或正方形或等边三角形，总假设 K 的面积为 1，且 K 的中心在原点，简记 $\Delta(k;n)$ 为 Δ。

Heilbronn问题旨在说明"$n\Delta$"是小的。我们讨论在假设 $n\Delta$ 不"小"的前提下关于(2.1)可以得到的结果，目的是引入一些对得到反证法所需矛盾有用的结论，这在估计 Δ 的上界时是有价值的。

这节的大部分讨论是启发性的，或描述性的，而不具有细节上的精确性，特别地我们略去了对落在 K 的边界附近的 τ 的复杂讨

论。

(2.1)中任何三点构成面积不小于Δ的三角形等价于对任何τ，带

$$H_\tau(4\Delta/d(\tau)) \tag{6.2}$$

除组成τ的两点外不含其它点，换句话讲

$$N_\tau(4\Delta/d(\tau))=2 \quad \forall\tau \tag{6.3}$$

由于(2.1)是在单位面积的K中的分布，所以$N_\tau(4\Delta/d(\tau))$的统计期望应为：

$$n\int K(X)H_\tau(4\Delta/d(\tau);X)dX \tag{6.4}$$

即$H_\tau(4\Delta/d(\tau))$落在K中面积的n倍。而这个面积一般讲是在$\Delta/d(\tau)$的两个常数倍之间，于是我们粗略地把这个期望的阶取为：

$$n\Delta/d(\tau) \tag{6.5}$$

如果$n\Delta$不是很"小"(例如$n\Delta>n^{-0.001}$)而$d(\tau)$却很小，则$N_\tau(4\Delta/d(\tau))$的期望值就较大，另一方面其真实值又是有界的。这种现象我们称之为：当$d(\tau)$很小时带(6.2)对点P_i的分布讲是很"失效的"。换句话讲，当$d(\tau)$很小时，带(6.2)在K的面积中占了过大的比重(相对于它所含的P_j点的个数讲)。这与我们的目标显然有重大的联系。因为剩余的点P_i只能在一个较小面积中存在了。如果在K中有一个凸子集K_1，它包含了比其期望更多的点P_i，则我们显然只要考虑K_1中的点的分布就可以了。

在$n\Delta$不小的情况下，以下性质是上述讨论的总结。

性质A：对于组成其的点P_iP_j相距"较近"($d(\tau)$很小)的τ，带$H_\tau(4\Delta/d(\tau))$对点P_j来讲是非常

失效的(即这样的带在K中占了过大的面积)

通过前面的讨论，我们可以清楚地看到，对于$d(\tau)$很小的$H_\tau(\omega)$们，它们相互重合的面积是与我们的目的很相关的，这里我们又可以用$n\Delta$不小的假设，每个$H_\tau(\omega)$对应一个τ而设有τ_1, τ_2，依构成这两个对的四个点中的某三个之三角形面积小于Δ，由这一点可得

引理B_1：设$u>0$，且对τ_1, τ_2满足：$d(\tau_1)\le u$，$d(\tau_2)\le u$，$|\theta(\tau_1)-\theta(\tau_2)|<10^{-2}\Delta u^{-1}$，则带$H_{\tau_1}(10^{-2}\Delta u^{-1})$，$H_{\tau_2}(10^{-2}\Delta u^{-1})$在K内不相交。

引理B_1指出，在$n\Delta$不小的假设下，适当的一组带$H_\tau(\omega)$(具有大于某一界的定ω值)具有性质：K中的点X_1被给定一组φ覆盖的次数不超过相应的期望

$$\sum_{\tau;\,H_\tau\in\varphi}\int H_\tau(\omega;X)\,K(X)\,dX \qquad (6.6)$$

的某个倍数。

为避免在τ与K的边界很近时所产生的复杂情况，技术上常考虑从下的表达示：

$$\sum_{\tau;\,H_\tau\in\varphi}\int H_\tau(\omega;X)\,K(\tfrac{1}{2}X)\,dX \qquad (6.7)$$

以代替(6.6)，同样估计X_1被φ覆盖的次数时，也更多地考虑$\frac{1}{2}K$中的X_1

改变一下引理B_1，可以得到：

引理B_2：设$u>0$，$0\le\alpha<\pi$，$\omega\ge\frac{1}{2}\Delta u^{-1}$，则对适当的常数C，

$$K(\tfrac{1}{2}X)\sum_{\tau\,(6.9)}H_\tau(\omega;X)\le c\,\omega u\Delta^{-1} \qquad (6.8)$$

对平面上点X。这里的求和对所有满足下条件的τ进行：

$$d(\tau)\le u,\quad \alpha\le\theta(\tau)<\alpha+10^{-2}u^{-1}\Delta \qquad (6.9)$$

当X在$\frac{1}{2}K$中时，用$K(\varphi;X)$记(6.8)式的左端，即X被满足(6.9)的τ构成的$H_\tau(\omega)$的φ覆盖的次数，这个数的期

望粗讲有阶 $wW n^2 \Delta$，而(6.9)的右端在 $n\Delta$ 大的情况下，不超过此期望的一个较大的倍数，这正是我们期待的一个结果。

在描述性语言及 $n\Delta$ 不小的前提下，带 $H_\tau(w)$ 具有以下一般的性质：

性质 B：设 φ 为 $H_\tau(w)$ 们组成的一个适当的组，则对 $\forall X \in 2K$，$k(\varphi; X)$ 不大于其期望值的一个较大的倍数。

此处，"适当的"指 φ 满足仅对 w 作出的不非常小的限制，而不必要求其它条件。

到目前为止，所有对 Δ 的上界的估计都直接或间接地利用了性质(A)及(B)。

7. Roth 早期的方法（略）

8. Schmidt 的方法（略）

9 Roth 最近的方法：主要思想

本节中 K 取为单位圆，圆心在原点，记 $\Delta = \Delta(D; n)$

Roth 最近的方法中首次利用了两个带 $H_{\tau^*}(w)$，$H_{\tau^{**}}(w)$ 相交的面积的特性。给定 τ^*，τ^{**}，这个面积为：

$$wW \left| \operatorname{cosec}\left(\theta(\tau^*) - \theta(\tau^{**})\right) \right| \tag{9.1}$$

与 w 和 W 成正比。这一点使我们可以利用"加权"带建立正交函数系。对这个正交系的 Bessel 不等式（一个改进的形式）提供了比性质(A)及(B)更有效的工具。

用非正式语言，设 $n\Delta$ 不小（事实上这里假设 $n\Delta > n^{-\frac{1}{2}}$）则性质(A)说明具有较小的 $d(\tau)$ 的 τ 产生一些对 P_j 点讲很失效的带，例如考虑满足：

$$d(\tau) \le n^{-\frac{1}{3}} \tag{9.2}$$

的 τ，(6.7)说明对于这样的 τ，带

$$H_\tau(n^{\frac{1}{3}}\Delta) \tag{9.3}$$

仅含两个P_i点，而其相应的期望具有阶

$$n^{\frac{1}{3}}(n\Delta) \tag{9.4}$$

是较大的。

一般地讲，落在$H_\tau(\omega)$中P_i个数的阶近似为$n\omega$，因此：

$$n^{-1}\omega^{-1}N_\tau(\omega) \tag{9.5}$$

就是真实值与期望值的比的近似阶。

上面已指出，当$\omega=n^{\frac{1}{3}}\Delta$时，(9.5)对所有$\tau$都很小，从这里可以直接得到结论。因为当$\omega$近似为$n^{-\frac{2}{3}}$时，无法选取$\omega$使(9.5)式不小。但当$\omega=n^{-\frac{2}{3}}$时，上述推导就不能通过，事实上可举出例子，在这种情况下，对满足(9.2)的τ的一大部分(9.1)式均可成立(即大于一定常数)。这些技术细节我们都略去不讲，而仅描述一下证明的主要思想。

设S为任意具有形式$-\frac{1}{2}c^{-1}\omega<x\cos\alpha-y\sin\alpha-a\leq\frac{1}{2}c^{-1}\omega$的带形域，并设$S$含有的点数近似为其期望值$c^{-1}n\omega$，于是如果一个带$H_\tau(\omega)$复盖了$S\cap D$，则$H_\tau(\omega)$对$P_i$讲是不失效的。$H_\tau(\omega)$可复盖$S\cap D$的一个充分条件为对一适当大的$c$，下两式成立：

$$\tau\text{在}S\text{中(组成}\tau\text{的两点在}S\text{中)} \tag{9.6}$$

$$|\theta(\tau)-\alpha|<c^{-1}\omega \tag{9.7}$$

含近似为其期望值的P_i的S很容易从对平面的划分得到(或对已建好的宽为ω的倍数，对P_i点不失效的带进行划分)。划分的带具有相同的宽ω及相同的倾角α，并抛掉那些对P_i失效的带。假设ω不是很小，则可以说明有足够多的τ(在我们所考虑的类中，例如满足(9.2)的)，其每一个都落在一个S中，且满足(9.7)。

通过对α平均，可得到对适当的ω'的下性质：

(I)有相当一部分的τ，其$d(\tau)$满足一恰当的条件，而$H_\tau(\omega')$对P_i讲不是过分失效的。

另一方面，以前的步骤说明，对适当的 w'' 及 u，有下形式的一个结果。

(Ⅲ) 所有带 $H_\tau(w'')$ 其中

$$d(\tau) \le u \tag{9.8}$$

对 P_j 讲是很失效的。

上面结果只在某种恰当的前提下才成立，亦(Ⅰ)，(Ⅲ)直接相矛盾时，这条件是不可能满足的，如果(Ⅰ)，(Ⅲ)中对 $d(\tau)$ 的条件是一样的（即 $d(\tau)\le u$），上述前提要求 w' 比 w'' 有阶数上的大，这时对参数的一种可行的选择为：$u=n^{-\frac{1}{5}}$，$w'=n^{-\frac{1}{4}}$，$w''=n^{-\frac{3}{4}}$（当 $\Delta n > n^{-\frac{1}{12}}$ 时）

Roth 的方法的困难的核心在于，简单讲，一种由(Ⅲ)推导出与(Ⅰ)相矛盾的结论的技巧，也就是在选定了可以允许的参数后，由满足(9.8)的 $H_\tau(w'')$ 对 P_j 很失效推导出几乎所有的拓宽的带 $H_\tau(w')$，其中 τ 也满足(9.8)，对 P_j 讲也是失效的，当然这里后面的失效比前一个弱一些，但足够与(Ⅰ)矛盾起来。此推导基于 Bessel 不等式对正交函数系的应用，这在本节开始时提到过了。

设 $w'>w''>0$，考虑两个下形式的函数：

$$\frac{1}{w}H_{\tau^*}(w;X)\quad;\quad\frac{1}{W}H_{\tau^{**}}(W;X) \tag{9.9}$$

我们可把它们看成 $H_{\tau^*}(w;X)$，$H_{\tau^{**}}(W;X)$ 的特征函数对其宽度的加权。(9.9)两函数全部的权：

$$\int\frac{1}{wW}H_{\tau^*}(w;X)H_{\tau^{**}}(W;X)dX \tag{9.10}$$

是与 w，W 无关的，所以函数

$$\Phi_\tau(w';w'';X)=\frac{1}{w'}H_\tau(w';X)-\frac{1}{w''}H_\tau(w'';X) \tag{9.11}$$

具有性质：

正交性：如果 Φ^*，Φ^{**} 是(9.11)式的两个函数，分别对应着

τ^*, τ^{**}，则$\int \Phi^* \Phi^{**} dx$或为无穷或为0。

用Bessel不等式必须得到有限模的函数，并要求其模不很大，于是将(9.11)的函数改造：

$$\Phi_\tau(\omega', \omega''; x) = D(\tfrac{1}{2}x)\phi_\tau(\omega', \omega''; x) \tag{9.12}$$

即在2D外以0代ϕ的值(利用2D仍是为了避免τ邻近D的边界时的麻烦)。

新的函数不构成正交系，但具有以下拟正交性：

拟正交性：对给定$\omega' > \omega'' > 0$，Φ_{τ^*}，$\Phi_{\tau^{**}}$在平面上正交，除非$H_{\tau^*}(\omega')$与$H_{\tau^{**}}(\omega'')$交出的平行四边形与2D的边界有非空交集。

此处的拟正交性对我们的证明就足够了，因为如果固定τ^*，τ^{**}取自我们所考虑的τ的集合，Φ_{τ^*}与$\Phi_{\tau^{**}}$不直交的例外只发生在相当少的情况下，只要$\theta(\tau^{**})$不是很密集的分布在某处。然而我们仍需要Bessel不等式对于拟正交情形改进的形式，这可以在[6 Chap1]中找到，真正用到的推广的Bessel不等式归于A. Selberg([6, p7])：

Selberg不等式：设$f, \psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \cdots, \psi^{(n)}$为复数域上正交空间的元素，则：

$$\sum_{r=1}^{n} |(f, \psi^{(r)})|^2 \left(\sum_{s=1}^{n} |(\psi^{(r)}, \psi^{(s)})|\right)^{-1} \leq \|f\|^2 \tag{9.13}$$

在我们的应用中，内积采用：$(f, g) = \int f(x) g(x) dx$，$f, g$为实函数，$\|f\|^2 = (f, f)$

对$i = 1, 2, \cdots, n$，令g_i为以P_i为心，$\frac{1}{2}\omega''$为半径的圆$D^{(P_i)}$的特征函数，即

$$D^{(P_i)} = P_i + (\tfrac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}}\omega'')D; \quad g_i(x) = \mathring{D}^{(P_i)}(x) \tag{9.14}$$

对每个i，因$D^{(P_i)}$有面积$A = \pi(\frac{1}{2}\omega'')^2$，所以

$$A = \pi(\tfrac{1}{2}\omega'')^2 = \int g_i(x) dx \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{9.15}$$

令：

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x) \tag{9.16}$$

可以认为f是一个质量分布，它把质量A均匀分布到每个P_τ周围的圆上。这样作是为了得到f的模。

如果我们暂不考虑$D^{(P_\tau)}$可能与所考虑的带相交的情况，即认为P_τ为质量点，质量是A，则对每个τ：

$$\int \Phi_\tau(w', w''; x) f(x)\, dx \tag{9.17}$$

大致上应是（由(5.3)，(9.11)，(9.12)，(9.15)）

$$\pi\left(\tfrac{1}{2}w''\right)^2 \left\{\frac{1}{w'} N_\tau(w') - \frac{1}{w''} N_\tau(w'')\right\} \tag{9.18}$$

简记$\Phi_\tau = \Phi_\tau(w', w''; x)$，$f = f(x)$，利用Selberg不等式：

$$\sum_{\tau^*,\, d(\tau^*)\le u} \left|\int \Phi_{\tau^*} f\, dx\right|^2 \left(\sum_{\tau^{**},\, d(\tau^{**})\le u} \left|\int \Phi_{\tau^*}\Phi_{\tau^{**}}\, dx\right|\right)^{-1} \le \int f^2 dx \tag{9.19}$$

引理B_2可用来估计和式：

$$\sum_{\tau^{**},\, d(\tau^{**})\le u} \left|\int \Phi_{\tau^*}(x)\Phi_{\tau^{**}}(x)\, dx\right| \tag{9.20}$$

显然只有破坏了正交性的$\Phi_{\tau^{**}}$才能对和式有贡献，此时$H_{\tau^{**}}(w')$与$H_{\tau^*}(w')$在∂D边界上有一段公共的弧。利用引理B_2得到在$n\Delta$不小时(9.20)的一个很好的界。$\int f^2 dx$的估计没有什么困难。所以，如果我们可以用(9.18)代替(9.17)，则改进的Bessel不等式就给出

$$\sum_{\tau,\, d(\tau)\le u} \left\{\frac{1}{w'} N_\tau(w') - \frac{1}{w''} N_\tau(w'')\right\}^2 \tag{9.21}$$

的一个很好的上界。此处好是指上界比其期望值

$\sum_{\tau,\, d(\tau)\le u} n^2$ 对 $\sum_{\tau,\, d(\tau)\le u}\left\{\frac{1}{w'} N_\tau(w')\right\}^2$（前者为后者大致的期望）

来的小。这样的估计使我们得到：$\frac{1}{w'}N_\tau(w')$几乎总是比其期望值小$\Longrightarrow$ $\frac{1}{w'}N_\tau(w')$几乎总是比其期望值小（当然只对$d(\tau)\le u$的τ而言），这正是我们希望的。由(Ⅱ)推出的与(Ⅰ)的矛盾

但以上的讨论由于(9.18)不能代替(9.17)而失败了。事实上估计这种代替产生的误差是困难的，这个困难可由以下的稍加改进的论证避开。

设：

$$0 < w'' < \frac{1}{4} w' < c^{-1} \tag{9.22}$$

这个不等式是可以满足的，注意到 P_i 落在 $H_\tau(w'-w'')$ 中时，$D^{(P_i)}$ 完全落在 $H_\tau(w')$ 中，特别当 P_i 落于 $H_\tau(\frac{1}{2}w')$ 中时，$D^{(P_i)}$ 落于 $H_\tau(w')$ 中，于是由(9.15)及(5.3)

$$\int H_\tau(w', x) f(x)\, dx \geqslant A\, N_\tau(\tfrac{1}{2} w') \tag{9.23}$$

另一方面，仅当 P_i 落在 $H_\tau(2w'')$ 中时，$D^{(P_i)}$ 与 $H_\tau(w'')$ 有交，故：

$$\int H_\tau(w''; x) f(x) dx \leqslant A\, N_\tau(2w'') \tag{9.24}$$

结合这两式，得到：

$$\int \Phi_\tau(w', w''; x) f(x)\, dx \geqslant A\left\{\frac{1}{w'} N_\tau(\tfrac{1}{2}w') - \frac{1}{w''} N_\tau(2w'')\right\} \tag{9.25}$$

同样地利用(9.19)可得和式

$$\sum_{\tau,\, d(\tau) \leqslant u}^{*} \left\{\frac{1}{w'} N_\tau(\tfrac{1}{2}w') - \frac{1}{w''} N_\tau(2w'')\right\}^2$$

的一个界。其中"*"表示求和仅对使 $\frac{1}{w'}N_\tau(\frac{1}{2}w') - \frac{1}{w''}N_\tau(2w'') > 0$ 的 τ 进行。

若令 $W' = \frac{1}{2}w'$，$W'' = 2w''$，则得到当 $0 < W'' < W' < c^{-1}$，就有

$$\sum_{\tau,\, d(\tau) \leqslant u}^{**} \left\{\frac{1}{W'} N_\tau(W') - \frac{4}{W''} N_\tau(W'')\right\}^2 \tag{9.26}$$

的一个界，此处"**"表示求和对使{ }中的表示式为正的 τ 进行。

在应用中，我们已描述了 $\frac{1}{w}N_\tau(w)$ 不会总是"很大"而同时 $\frac{1}{w''}N_\tau(w'')$ 很小，为此目的(9.26)的一个好的界就足够了，该有

任何必要去估计(9.21)，尽管(9.21)为我们的主要方法提供了启发。

10 Roth最近的方法：进一步的注记(略)

参考文献

1. K. F. Roth, On a problem of Heilbronn, J. London Math. Soc. 26 (1951), 198-204
2. W. M. Schmidt, On a problem of Heilbronn, J. London Math. Soc. (2), 4 (1971/1972), 545-550
3. K. F. Roth, On a problem of Heilbronn, II, Proc. London Math. Soc. 25 (1972), 193-212
4. K. F. Roth, On a problem of Heilbronn, III, Proc. London Math. Soc. 25 (1972), 543-549
5. K. F. Roth, Estimation of the area of the smallest triangle obtained by selecting three out of n points in a disc of unit area, AMS Proc. Sympos. Pure Math. 24 (1973), 251-262
6. H. L. Montgomery, Topics in Multiplicative Number Theory, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 227, Springer-Verlag, Berlin / New York, 1971.
7. J. Komlós, J. Pintz and E. Szemerédi, On Heilbronn's problem, J. London Math. Soc. (2), 24 (1981), 385-396
8. J. Komlós, J. Pintz and E. Szemerédi, A lower bound for Heilbronn's problem, J. London Math. Soc. (2), 25 (1982), 13-24

杨路，张景中，曾振柄，关于最初几个Heilbronn数的猜想和计算，预印本.
. 杨路，张景中，曾振柄，关于三角形区域的Heilbronn数，预印本

一个国际数学竞赛题的指数推广

数学系83级 陈计 刘竞欧

1983年，第24届国际奥林匹克数学竞赛的第6题是
设a, b, c是三角形三边长，求证：

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0 \quad (1)$$

本文中，我们试图给出循环不等式(1)的一种指数推广：求使下式成立的所有实数P：

$$I(p)\equiv a^pb(a-b)+b^pc(b-c)+c^pa(c-a)\geq 0 \quad (2)$$

不失一般性，我们设 $a\leq b\leq 1\leq c$ 或 $a\leq 1\leq c\leq b$。此时，对P求导得：

$$I'(p)=a^pb(a-b)\ln a+b^pc(b-c)\ln b+c^pa(c-a)\ln c\geq 0 \quad (3)$$

所以，当 $p\geq 2$ 时有：

$$I(p)\geq I(2)=a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)\geq 0$$

下设 $p<2$，令：

$$a=x+x^2,\ b=1,\ c=1+x \quad (4)$$

其中 $0<x<\frac{1}{2}$。则

$$\begin{aligned}I(p)&=(x+x^2)^p(x+x^2-1)+(1+x)(-x)+(1+x)^p(x+x^2)(1-x^2)\\&=-x^p+o(x^p)\end{aligned} \quad (5)$$

所以，当x充分小时，$I(p)<0$。

综上所述，循环不等式(2)当且仅当 $p\geq 2$ 时成立。

[蛙鸣第35期问题]

1988年6月

编者按：本栏自第26期起对问题统一编号；以*表示提问人和编者均未解决的问题。

问题73　设p, q, r为三角形内一点到三边的距离，Δ表示三角形的面积，则

$$\Delta \geq \sqrt{3}(pq+qr+rp)$$

（安振平　提供）

问题74　n张卡片从1至n编号并由小到大排成一排。现在使最左边的1跳过2，处在2与3之间，再使最左边的2跳过两张（即1和3），处于3和4之间……使最左边的卡片向右跳过$n-1$张，至最右边；然后又按$1, 2, \cdots, n-1$的张数向右跳。如此交替跳跃得到的所有不同的排列数目是多少？

（周民主　提供）

问题75* 平面上一般位置的n条直线把平面分成的区域中至少有$n-2$个是三角形。

（林　强　提供）

问题76　对于n阶半定正Hermite方阵$A=(a_{ij})$，证明下面的不等式：

$$(n!)\det A+(n!-1)\operatorname{per}A \leq a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

（李广兴　提供）

问题77　令$\Gamma=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}e_i$是以$e_1, e_2, \cdots e_n$为基的自由Abel群，$\Gamma^+=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}^+e_i$，其中$\mathbb{Z}^+$表示非负整数的集合，设$A=(a_{ij})$是一个$n$阶对称方阵，满足$a_{ii}=2$，$i=1, 2, \cdots, n$，$a_{ij}\in\mathbb{Z}$且$a_{ij}\leq 0$对任意$i\neq j$。如下定义$\Gamma$上的反射$r_i$：$r_i(e_j)=e_j-a_{ij}e_i$，$j=1, 2, \cdots, n$。如果$V=\sum_{i=1}^{n}k_ie_i\in\Gamma^+$且$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_j\leq 0$对任意$i=1, 2, \cdots, n$成立，试证：

$r_1, r_2, \cdots$ 与 $w \in \Gamma^+$

对任意 k 成立。

（查建国 提供）

问题78 设 $1 < p < +\infty$，q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，$(\Omega, \mathbb{B}, \mu)$ 为任一可测空间（不必 σ-有限），证明

$$(L^p(\Omega, \mathbb{B}, \mu))^* = L^q(\Omega, \mathbb{B}, \mu).$$

（梁 泓 提供）

问题79 设 X 是 Banach 空间，则 X 有限维 $\Longleftrightarrow$ X 上的线性泛函是有界的。

（叶怀安 提供）

问题80 (i) 设 $I = [0, 1]$，$f \in C^0(I)$，如果存在 $x \in I$ 满足 $f^n(x) = x$，且 $f^i(x) \neq x$ $(1 \leq i < n)$，则称 x 为 f 的一个周期为 n 的周期点。试证：如果 f 有一个周期为 3 的周期点，则 f 有一切周期的周期点。

(ii)* 设 $X = ([-1, 1] \times \{0\}) \cup (\{0\} \times [0, 1])$，$f \in C^0(X)$，问除去绕原点的旋转外，有无上述相似的结论？

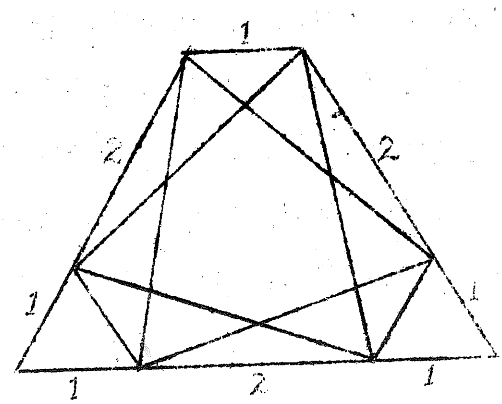
（武 河 提供）

******补 答******

问题1*（第23期，马援）在四边形中任给六点，则其中必存在三点，它们组成的三角形的面积不超过原四边形面积的八分之一。

补答（杨路）：

右边的梯形内六个点的分布否定了马援的推测，其最小三角形面积是梯形面积的十五分之二。



·蛙鸣·第35期
1988年6月

数学创造的心理学

Allan Muir

逻辑只认可直觉的征服

—— J.Hadamard

Hadamard 1945年发表的关于数学创造性心理学的讲稿[1]已被视作经典。它针对1902年4月给数学家们的创造性方法和经验的调查表展开内容，并讨论调查的结果。现在的调查表旨在用一种不同的，即现代数学的，但又能与前次结果相比较的方法，重返这一问题早期研究的目标。

自从最早的调查表〔2〕发出以来，除上述的Hadamard的工作和Poincaré的多种观点之外，数学创造性心理学的主要进展在于教育学及对儿童能力发展的研究，这些工作对数学教育意义重大。它是否与我们所关心的“高等”数学创造性有关，就要看数学领域各阶段学习和创造性程度是否有共同特点。

Hadamard 讨论的中心问题—— 也许是一切创造发明研究的中心—— 是产生于智力发现的新结构的来源。它们是不是深奥的复杂计算的结果，其发现者也不有意隐瞒？那么，存在一个隐而不露的创造机械了？或者是前人没有完全预料到的真正的新事物的出现？

如果是后者，我们仅能希望一种理解，它依赖于非机械过程的规则。一个可能的解释方法是“达尔文”式的，得出新结果要有两

方面的条件：新假设的产生。我们也许会试着给一个严格的分类描述；再就是从中找出有价值的东西。但是引进生物比喻来解释文化发展不可靠。严格地划分成物种和机械元素是不可能的。而且事实上，思想的不规则产生这个概念是社会学解释分类的疑点。创造和选择是社会范围内设计出的活动。

这些有目的性的问题已经摆在我们面前，研究人工智能，希望能产生定理证明机、规则推理法则，猜想提出机等等。这些试验的成功与失败显然是我们所关心的。相反的，Hadamard 的工作却主要在潜意识创造性，他依靠 Poincare〔3〕的证明，这个证明论述了看来似乎无目的，也许只是没有意识到的创造性经验的特点。

Hadamard 的另一主题是想象力的多种形式。例如：几何与代数的思维方法有何差别；为什么有些数学家偏爱其一？他认为十九世纪心理学家 Müler 得出的无语言的思想是不可能的这一结论不可信。他通过对自己的反省就知道这不对，幻想中的视觉、动觉形式对他的数学思维就极为重要。

当整个科学心理学的历史都证明这些是错误的，我们能对他的反省相信什么？值得注意的是，这个问题在人工智能的争论中又出现了。Pylyshyn〔4〕坚决否认想象力不同形式的存在。从非常受人工智能影响的角度来看，他认为这些不同只是在共同符号、过程水平上的重述现象。

但事实上，这些不同，不管多么细小，正是产生实际经验差别的不同点，因而需要解释。与 Hadamard 相似的，现在看来明显产生于人工智能的结果，能在数学及心理学 Birkhoff 的讨论中找到。〔5〕

从教育学的观点，有必要澄清这些问题，否则我们也许不能对

不同接受类型的人采取相应的教育方法。我们也许会问，计算机图象设备能否使我们扩大非语言想象力，达到以前不能接近的境界，如增强四维直觉。教育问题——想象力能否教授——与其相并列的问题创造力能否教授。推测起来，创造性教育的希望依赖于作为方法的有意识推广的机械论，在创造发现过程中所起作用的范围。

从原来调查表的发出到Hadamard的工作已四十年。尽管Hadamard认为那些调查表回答不是那时数学家的充分代表，并对之持否定态度，他们在最主要的问题上意见是一致的。这些作为十五篇文章系列发表的结果形成了信息矿，在与现在的调查表收回后相比较时会非常有用。

我想不必重复以前的工作。Hadamard的讨论及早期调查表的突出特点是他们关于心理学、数学方面的个人观点。这样做的缺陷在此文发表后四十年越来越明显。在工业、甚至在学院中，以数学为基础的科学的产生、发展趋势，要求数学家在一起集体工作，广泛交流。这就使我们不能假定，工作的问题和指导是任意选择的。社会性引出在集体性、变化性方面辨别真伪的讨论〔8〕。

参考资料

〔1〕 Hadamard, J. The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton, 1945

〔2〕 L'Enseignement Mathematique, 4(1902), 208—211, 6(1904), 376

〔3〕 Poincare, H: "Mathematical discovery" in science and method, Nelson(1914)

〔4〕 Pylyshyn, Z."What the mind's eye tells the mind's brain: a critique of mental imagery" psychol. Bull., 80(1973), 1—24

〔5〕 Birkhoff, G. "Mathematics and psychology" SIAMRev. 11(1969), 429—469

〔6〕 Pavis, P.J., and Hersh, K. "Four dimension al intuition" in the Mathematical Experienel, Birkhau ser (1981)

〔7〕 All in L'Enseignement Mathematique, Vol. 10(1908), index, p.172

〔8〕 Hersh, K., Advances in Math., 31(1979), 31—50

请指出与您进一步联系是否可以。回信请寄至：

Allan Muir

Department of Mathematics

City University

Northampton Square

London ECIV OHB England.

〔原题，The Psychology of Mathematical Creativity，数学系84级 王岚译自 The Mathematical Intelligencer, 10(1988), No.1.33—37.〕

填表规格

以下调查表是前面已讨论过的Hadamard的书The psychology of Invention in the Mathematical Field(《数学领域创造的心理学》)提出的。

许多问题已简练化。前述文章讨论了原练习内包含的一些东西。回答问题的人首先要读文章，再发挥其创造力来填写调查表。

不全面的回答也是可以的；每个问题都可以回答或不回答。可以简单的答，也可精心设计答案。对任一问题或整个调查活动的评论将非常受欢迎。

1．请简介您的工作单位——学院还是工业单位，教学还是研究，等等——还有您的职务。

2．您所处理的数学问题是由您的工作单位决定的，还是由您自己选择？

3、您工作、发表文章大多是以您个人名义还是作为小组的一个成员？

4、研究管理工作对您的创造性工作是起了积极作用，还是消极作用？

5．您严格地制定搞数学的时间吗？

6．在您的工作中，下列生理环境因素哪点最重要：(a)饮食；(b)睡眠；(c)健康；(d)气温；(e)光线；(f)时间，(g)安静；(h)刺激；(i)可以自由活动？

7、除了数学，您最喜欢的消遣是什么？

8、您能回想起直接的家庭影响、特别的老师、同事、教材，对您的数学发展起了重要作用吗？

9、您首先学习的（或自学的）专业是什么？现在工作专业是什么？如果不同，是什么原因使您改变专业？

10.您是否对与您主要兴趣无直接关系的数学知识也尽力获得广泛了解？

11.您能严格区别在学习和研究中思维过程的不同吗？

12.当要调查、研究一个新课题时，您愿意先吸收已经出来的成果，还是愿意自己处理问题？

13.在一般时期内，您愿意集中精力搞一个问题，还是愿意同时处理几个问题？

14.您最好的想法都是在您努力工作时产生的，还是有些想法是在做不相关的事时产生的？

15.在试图获得一个命题正确性的直观理解时，下列哪一项是最正确的指导？

(a) 对正式的证明反复检验；

(b) 多方集中不全面的证明；

(c) 与其它结果联系；　　(d) 应用。

16.在您的数学思考中，计算机起到何种作用？

17.在思考数学问题及证明时，您采取什么样的想象力；主要是画面性的、语言性的还是动觉形式？

18.您是通过阅读还是通过听讲对数学了解得更深刻？

19.您对数学中的哲学及基本问题感兴趣吗？如果是这样，哪个专科学院对您更有吸引力？

20.数学与您思想的其他方面——政治、艺术、宗教、哲学、个性——取得智力上的一致和谐是否重要？

·蛙鸣·第35期
1988年6月

几何观（续）

——私人笔记

Dan Pedoe

批评家很少受欢迎．我知道许多同事对我的评论不满。但是对那些炫耀着盔甲急于去攻打“几何之敌”的年轻勇士们，我却要告诫他们这样可能会碰壁，以期对他们发展有着良好的影响。当然，如果联系我的经历，我也许被指责为偏激，但我的话能得到证实。

我生长在意大利的代数几何取得惊人发展的后期，也许能回忆起墨索里尼在二十世纪三十年代入侵埃塞俄比亚以及所引起的世界其他国家的不满。但很少行动起来，从而使意大利法西斯更顽固地认为他们在世界历史上扮演着重要的角色。从1935年到1936年我在普林斯顿高级研究所，那里有一位年轻的意大利几何学家，以一种十足的山中无虎猴为王的方式，有一天他宣称他能证明四色问题，他高傲的陈述实际上在第一步就被发现是根本有毛病的。政治能对数学家产生影响，导致一些数学家认为能逃避政治丑事则数学证明几乎不算什么。当时意大利有统治地位的几何学家是弗朗塞斯柯·西维利（Francesco·Severi），他早期的论文是出色的，但后来的论文由于其中学识上的骄傲自大和谬误降低了意大利几何的发展水平。实际上把意大利的代数几何引向停滞不前。

我有他随便写的一论文中的一篇可用来评论，充满着连西维利

也几乎不能确切地说明白的所谓的定理，更不用说证明了。我还注意到他的参考书目相当奇怪；对自己的论文，他给出了确切的参考文献，很少提到

结果是令人可笑的，在一篇后期的论文中，西维利参考"一个新的未知量"（"un jeune inconnu"）给出我论文中的确切的参考文献，但只有一个空___我的名字本应打印上，他也写信给《数学周报》（Mathematical Reviews）表示不满，没有一个数学家象克劳达·切瓦（Claude Chevalley）那样维护我。在随后的一次国际会议上，西维利请贝奈米罗·塞格里（Benimimo Segre）介绍我。我们进行了谈话，他用意大利式法语，而我用邱吉尔式（Churchillian）法语。我说我不算"年轻"（jeune）了，他回答道（我值得这一讽刺吗？）："但你们在科学上还很幼稚"。这使我笑了起来，却使他感到惊奇。我以后和妻子路过罗马时，他邀请我们去赴宴，但由于种种原因，我们不能接受邀请，他在保护几何学家免遭墨索里尼统治时期迫害方面的记载是不完善的。我第一次遇到塞格里 在伦敦，他被法西斯政府驱逐出来。在大会上，我遇到一位年轻的意大利几何学家，他对我的书评表示感谢。他说当时在意大利没有人敢出来反对西维利，尽管他们知道他在损害几何学研究。

二次世界大战前在美国也有数学家称雄一方，甚至有些公开夸口认为所有宇宙中的工作在他们手中都能解决。在苏格兰的一次会议上我就遇到一位，他对我谈起他的职权，还建议我在美国找工作的话就告诉他。我不愿接受他的恩赐，在我访问美国及随后的停留期间我遇到一位美国数学家，他的数学方面的博识，很有修养，有人情味，不追求私利，有理解力，同情心，平易近人和有忍耐力给我

和其它人留下了深刻印象。这位数学家就是奥斯瓦尔特·凡勃伦（Oswall veblen）他是一位优秀的几何学家。是一位杰出人物。

我应该提一下迪尤达莱对我批评他的几何观念所作出的反应。首先我应该解释一下，鉴于容易证实，1940年和1960年间，只有少量关于代数几何基础的专著，且从意大利的学校中弄到的。范德瓦尔登（Van der waerden）首先作出努力写了一本书，接着是安德列·威尔（Andre·Weil）的一本书及我与霍季（Hodge）所著的三卷《代数几何的方法》（Methods of Algebraic Geometry）。这几卷书，从1942年那战争中黑暗的日子开始，先后于1947年，1952年和1954年出版。也许我还应提到它们被译成了俄文版，标志着获得世界的公认。

但是，在1972年迪尤达莱所著的一篇长长的关于代数几何历史的文章中却没有参考霍季一匹多的几本书，范德瓦尔登和安德利·威尔的书自然引用了。由于霍季是一位世界级的数学家，因而不得不提到，涉及他的参考文献是关于调和态数的，代数几何学家们比我年轻，精力充沛，也发现这一可笑的疏漏。

最后，再提一件轶事。几年前，道纳得·科克斯特（Donald Coxeter）的热情邀请我在多伦多（Toronto）大学作两次演讲。第一次是总的知识性的演讲，第二次是更加专业化的介绍。这些讲话后来写成《从几何方面思考》（Thinking Geometrically）在第二次演讲中， 我着重谈了迪尤达莱为了计算的方便，而轻视射影几何的作法是不足取的。在演讲之后，许多听众站起来维护迪尤达莱；我不否认迪尤达莱是一位杰出数学家。全场是一片“说得对！说得对！”的强烈讽刺声。这时，我的敌对者走到黑板前，在上面写了一些东西，然后傲然说到：“这才是几何！”。无论如何，

这是不可理解的，但敌意是明显的；我还发现，我对迪尤达莱理智而委婉的批评产生了其它效果，以一言蔽之，就是“你想批评谁”？要不是我轻率的行为，现在我可能还住在多伦多而不是明尼亚波利斯！

（唐作海 译， 周征校）

（上接第2页）

日”，即只有专家才能理解那些问题的一天的到来。

但情况并非如此。在有很多需要高等数学知识才能作答的问题的同时，数论中也有不少听起来容易的问题需要回答，如哥德巴赫猜想以及古希腊人就知道的孪生素数和完全数是否无穷的问题等等。

所以我们相信，数学家还有大量工作要做，费尔玛最后定理也还有待证明。官冈顽强的努力给数学界提出了官冈猜想（如果它正确，就能由它推出费尔玛最后定理）。离问题的解决也许很近了。也许，官冈的探讨将不声不响地结束—— 出现这种情况也不是第一次了。

本世纪初，大数学家戴维·希尔伯特曾宣称：“我们必须知道，我们能够知道。”几十年后，逻辑学家K·哥德尔指正道：“未必，未必！”完美的知识体系，甚至数学也达不到这一步，费尔玛最后定理或许就是这样一个不能证明的正确论断。

〔原题：It's Still the Last Theorem, But Perhaps Not for Long，罗承辉译自《纽约日报》 1988年4月19日〕

暑假班(Summer Institute)简介
——与熊金城老师的对话录

数学系85级 周 红

今年要在我校举办第五期暑期班。为了了解有关情况。笔者采访了系副主任熊金城老师。下面是笔者与熊老师的对话。摘录如下。以飨读者。

(T=熊老师, S=笔者)

S:熊老师，暑期班的全名是什么?

T:数学研究生暑期教学中心。英文是 Summer Institute。

S:暑期班是怎样创办起来的呢?

T:一九八四年。为了提高数学研究生的学术水平。国家教委决定利用暑假举办研究生教学中心。这个教学中心主要讲授一些新颖的课题。而这些课题目前在国内开设还很困难。教学中心创办以来。效果显著。当然。这个教学中心能办起来。与陈省身、项武忠等教授的积极倡导和国内一些数学工作者辛勤的努力是分不开的。

S:主办单位有哪些?

T:北大。南开、复旦、吉大和科大。这五所高校轮流承担东道主的工作。

S:学员的来源如何?

T:学员一般来自全国二十几所著名大学和研究所。学员名额是由国

这是不可理解的，但敌意是明显的；我还发现，我对迪尤达莱理智而委婉的批评产生了其它效果。以一言蔽之，就是“你想批评谁”？要不是我轻率的行为，现在我可能还住在多伦多而不是明尼亚波利斯！

（唐作海 译， 周征校）

（上接第2页）

日”，即只有专家才能理解那些问题的一天的到来。

好情况并非如此。在有很多需要高等数学知识才能作答的问题的同时，数论中也有不少听起来容易的问题需要回答，如哥德巴赫猜想以及古希腊人就知道的孪生素数和完全数是否无穷的问题等等。

所以我们相信，数学家还有大量工作要做，费尔玛最后定理也还有待证明。宫冈顽强的努力给数学界提出了宫冈猜想（如果它正确，就能由它推出费尔玛最后定理）。离问题的解决也许很近了。也许，宫冈的探讨将不声不响地结束—— 出现这种情况也不是第一次了。

本世纪初，大数学家戴维·希尔伯特曾宣称：“我们必须知道，我们能够知道。”几十年后，逻辑学家K·哥德尔指正道：“未必，未必！”完美的知识体系，甚至数学也达不到这一步，费尔玛最后定理或许就是这样一个不能证明的正确论断。

〔原题：It's Still the Last Theorem, But Perhaps Not for Long，罗承辉译自《纽约日报》 1988年4月19日〕

暑假班（Summer Institute）简介
——与熊金城老师的对话录

数学系85级　　周　红

今年要在我校举办第五期暑期班。为了了解有关情况。笔者采访了系副主任熊金城老师。下面是笔者与熊老师的对话。摘录如下。以飨读者。

（T＝熊老师，S＝笔者）

S：熊老师，暑期班的全名是什么？

T：数学研究生暑期教学中心。英文是 Summer Institute。

S：暑期班是怎样创办起来的呢？

T：一九八四年。为了提高数学研究生的学术水平。国家教委决定利用暑假举办研究生教学中心。这个教学中心主要讲授一些新颖的课题。而这些课题目前在国内开设还很困难。教学中心创办以来。效果显著。当然，这个教学中心能办起来。与陈省身、项武忠等教授的积极倡导和国内一些数学工作者辛勤的努力是分不开的。

S：主办单位有哪些？

T：北大、南开、复旦、吉大和科大。这五所高校轮流承担东道主的工作。

S：学员的来源如何？

T：学员一般来自全国二十几所著名大学和研究所。学员名额是由国

家教委统一分配的。我们这期只有150个左右的学员名额。其中科大只有8个名额。

S：第五期的时间安排如何？

T：计划6月21日至7月10日在合肥举办。7月11日至7月30日在屯溪举办。

S：这一期主要讲些什么？

T：主要讲函数论、多复变函数、拓扑等方面的一些内容。这次主讲函数论的C·Fitzgerald和主讲拓扑的A·Casson都是数学界的知名人物。

S：校方对这次活动很重视吧？

T：是的。学校成立了负责后勤、外事、学术等工作的领导小组。由龚升副校长任组长，石钟慈、姜丹任副组长。

S：好。今天的谈话就到这此为止吧。谢谢熊老师。

附：第五期全国数学研究生暑期数学中心主讲情况通报

姓名	单位	课程题目
C. Fitzgerald	San Diego	Function theory for Summer School
A. Koranyi	New York City Univ.	Symmetric cones and symmetric domains
A. Casson	Berkely	Topology
忻元龙	复旦大学	现代微分几何选讲
洪家兴	复旦大学	拟微分祘子
D. A. Hezhel	Minnesota	Selberg trace formula
王斯雷	杭州大学	卷积祘子

WAMING MATHEMATICAL JOURNAL

No.35, June,1988

蛙鸣数学杂志（双月刊）
第35期 1988年6月

定价：0.70元