蛙　　鸣

15

成立庚老师

《蛙鸣》编辑部赠阅

中国科技大学数学系学生会主办

一九八四年三月

目　　录

反向Cauchy不等式的加强及其推广

831 陈 计

《数学分析中的问题和定理》第一卷第Ⅱ篇问题92是：

设 a，A，b，B 是正数，$a<A$，$b<B$，若 $a\leqq a_1$，a_2 …，$a_n\leqq A$。$b\leqq b_1$，b_2，…，$b_n\leqq B$，则

$$1\leqq\frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\right)\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}b_\nu^2\right)}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\right)^2}\leqq\left(\frac{\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

第一个不等式是Cauchy不等式。第二个不等式即所谓的反向Cauchy不等式。

下面来加强反向Cauchy不等式。为此先证明

引理，设 $0<a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$，

$$b_1\geqq b_2\geqq\cdots\geqq b_n>0，则$$

$$\frac{b_1 b_n}{a_1 a_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\right)+\frac{a_1 a_n}{b_1 b_n}\left(\sum_{\nu=1}^{n}b_\nu^2\right)$$

$$\leqq\left(\sqrt{\frac{a_n b_1}{a_1 b_n}}+\sqrt{\frac{a_1 b_n}{a_n b_1}}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu b_\nu\right) \qquad (2)$$

等号当且仅当 $a_\nu : b_\nu = a_1 : b_1$ 求 $a_n = b_n$（$\nu=1, 2, \cdots, n$）时成立。

证明：由题设，有

$$\frac{a_1}{b_1}\leqq\frac{a_2}{b_2}\leqq\cdots\leqq\frac{a_n}{b_n}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2-\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_n}{b_n}\right)\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu+\left(\frac{a_1 a_n}{b_1 b_n}\right)\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\left[a_\nu^2-\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_n}{b_n}\right)a_\nu b_\nu+\left(\frac{a_1 a_n}{b_1 b_n}\right)b_\nu^2\right]$$

$$=\sum b_\nu^2\left(\frac{a_\nu}{b_\nu}-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(\frac{a_\nu}{b_\nu}-\frac{a_n}{b_n}\right)\leq 0。$$

$$\therefore\ \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2+\frac{a_1 a_n}{b_1 b_n}\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\leq\left(\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_n}\right)\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu$$

两边除以$\sqrt{\frac{a_1 a_n}{b_1 b_n}}$即得不等式(3)。

定理 设$0<a\leq a_1, a_2, \cdots, a_n\leq A$,

$0<b\leq b_1, b_2, \cdots, b_n\leq B$,则

$$\sqrt{\frac{Bb}{Aa}}\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2+\sqrt{\frac{Aa}{Bb}}\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\leq\left(\sqrt{\frac{AB}{ab}}+\sqrt{\frac{ab}{AB}}\right)\sum_{\nu=1}^{1} a_\nu b_\nu \qquad (3)$$

证明 不难利用 π, π, y_e bI Ⅱ eB不等式归纳为引理的形式。□

用定理的结论,令$a_\nu^2=x_\nu$, $b_\nu^2=\frac{1}{x_\nu}$,($\nu=1, 2, \cdots, n$)

即得Schweiter不等式的加强;用定理的证明,不等得到Kantorrovich不等式的加强。

推广 设$0<a_u\leq a_{u1}, a_{u2}, \cdots, a_{un}\leq A_u$

($u=1, 2, \cdots, m$),则

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{u=1}^{m}\sqrt{\frac{A_u a_u}{A_i a_i}}-1\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}^{2}\right)\right)$$

$$\leqq \sum_{\substack{i,\ j=1,\ 2,\ \cdots m\\ i\neq j}}\left(\left(\sqrt{\frac{A_i A_j}{a_j a_i}}+\sqrt{\frac{a_i a_j}{A_i A_j}}\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} a_{j\nu}\right)\right)$$

证明　对$a_{u\nu}$的 m 组正数，两两利用定理结论，然后相加即得。

习作者感谢单　老师的关怀和指导。

一个级数敛散问题

821 刘弘泉

如果一开始就问$\sum\limits_{P}\dfrac{1}{P^{\alpha}(\ln P)^{\beta}(\ln\ \ln P)^{r}}$的敛散范围（这里$\alpha$，$\beta$，$r$为实数，$P$过一切$\geq 3$的素数），你可能会摸不到头脑，但只要清楚$\sum\limits_{P}\dfrac{1}{P^{\alpha}}$和$\sum\limits_{P}\dfrac{1}{P(\ln\ \ln P)}$的敛散范围，这个问题的解是十分显然的。

结论1。 $\sum\limits_{P}\dfrac{1}{P^{\alpha}}$在$\alpha>1$时收敛，$\alpha\leq 1$的发散（证明略）

结论2。 $\sum\limits_{P}\dfrac{1}{P(\ln\ \ln P)^{h}}$ 在$h>1$时收敛，$h\leq 1$时发散。

证明：在$h=1$时，利用（1）中估计$\sum\limits_{P\leq\xi}\dfrac{1}{P}$的类似方法，可得$\sum\limits_{P\leq\xi}\dfrac{1}{P\ln\ln P}=\ln\ln\ln\xi+C_0+O\left(\dfrac{1}{\ln\ln\ \xi}\right)$。故$h\leq 1$时，$\sum\limits_{P}\dfrac{1}{P(\ln\ln P)^{h}}$发散。

在$h>1$时，也可用差不多的方法估计$\sum\limits_{P\leq\xi}\dfrac{1}{P(\ln\ln P)^{h}}$。

下面叙述这个步骤。

令 $S(n)=\sum\limits_{P\leqq n}\frac{\log P}{P}$，则 $S(n)=\log n+0(1)=\log n+r_n$

（见〔1〕）

故 $\sum\limits_{3\leqq P\leqq \xi}\frac{1}{P(\log\log p)^h}=\sum\limits_{3\leqq n\leqq\xi}\frac{S(n)-S(n)}{\log n\cdot(\log\log)^h}$

$$=\sum_{3\leqq n\leqq\xi}\frac{\log\left(\frac{n}{n-1}\right)}{\log n\cdot(\log\log n)^h}+\sum_{3\leqq n\leqq\xi}\frac{r_n-r_{n-1}}{\log n(\log\log)^h}$$

$\Sigma_1+\Sigma_2$

令 $f(x)=-\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\log x\cdot(\log\log x)^h}$，则 $f(x)$ 单调减且 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to 0$。

所以存在 α（常数）使 $\left|\sum\limits_{3\leqq n\leqq\xi}f(n)-\int_3^\xi f(x)dx-\alpha\right|$

$\leqq f(\xi-1)$。（此定理见〔1〕）。

所以有 $\Sigma=\sum\limits_{3\leqq n\leqq\xi}f(n)=-\int_3^\xi\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\log x(\log\log x)^h}dx+\alpha$

$+0\left(f(\xi-1)\right)$

因为 $-\int_3^\xi\frac{\log\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\log x\cdot(\log\log x)^h}dx=\int_3^\xi\frac{-\log\left(1-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}}{\log x\cdot(\log\log)^h}dx$

$+\int_3^\xi\frac{dx}{x\log x(\log\log x)^h}$

$$=\int_3^{\infty}\frac{-\log(1-\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\log x(\log\log)^h}dx+\int_{\xi}^{\infty}\frac{-\log(1-\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\log x(\log\log x)^h}dx$$

$$+\frac{(\log\log x)^{1-h}}{1-h}\Bigg|_3^{\xi}$$

又，因为 $\dfrac{-\log(1-\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\log x(\log\log x)^h}\sim\dfrac{1}{x^2\log x(\log\log x)^h}$

$(x\to\infty)$

故 $\displaystyle\int_3^{\infty}\frac{-\log(1-\frac{1}{x})-\frac{1}{x}}{\log x\cdot(\log\log x)^h}dx$ 收敛，设值为 C_1

而对充分大的 ξ，又有 $\log(1-\frac{1}{x})+\frac{1}{x}=0(\frac{1}{x^2})$ $(x\leq\xi$

$$\therefore\int_{\xi}^{\infty}\frac{\log(1-\frac{1}{x})+\frac{1}{x}}{\log x\cdot(\log\log x)^h}dx=\int_{\xi}^{\infty}\frac{0(\frac{1}{x_2})}{\log x\cdot(\log\log x)}dx$$

$$=0\left(\int_{\xi}^{\infty}\frac{dx}{x^2\log x(\log\log x)^h}\right.$$

$$=0\left(\frac{1}{\log\xi(\log\log\xi)^h}\int_{\xi}^{\infty}\frac{dx}{x_2}\right)=0\left(\frac{1}{\xi\log\xi(\log\log)}\right)$$

又 $\quad 0(f(\xi-1))=0\left(-\dfrac{\log(1-\frac{1}{\xi-1})}{\log(\xi-1)(\log\log(\xi-1))^h}\right.$

$$=0\left(\frac{1}{\xi\log\xi(\log\log\ )^h}\right)\quad\left(\because\log(1-\frac{1}{\xi-1})\sim\frac{1}{\xi-1}\right.$$

从而 $\Sigma_1 = \dfrac{(\log\log\xi)^{1-h}}{1-h} + C_2 + O\left(\dfrac{1}{\xi\log\xi(\log\log\xi)^h}\right)$

$\left(C^2 = \alpha + C_1 + \dfrac{(\log\log 3)^{1-h}}{h-1}\right)$

$\because \sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(\dfrac{1}{\log n\cdot(\log\log n)^h} - \dfrac{1}{\log(n+1)(\log\log(n+1))^h}\right)$

为正项收敛级数，$r_n = O(1)$

$\therefore \sum\limits_{n=3}^{\infty} r_n\left(\dfrac{1}{\log n(\log\log n)^h} - \dfrac{1}{\log(n+1)(\log\log(n+1))^h}\right)$

收敛，设其值为 C_3

又 $\sum\limits_{n>\xi} r_n\left(\dfrac{1}{\log(\log\log n)^h} - \dfrac{1}{\log(n+1)(\log\log(n+1))^h}\right)$

$= O\left(\sum\limits_{n>\xi}\left(\dfrac{1}{\log n(\log\log n)^h}\right.\right.$

$\left.\left. - \dfrac{1}{\log(n+1)(\log\log(n+1))^h}\right)\right) = O\left(\dfrac{1}{\log\xi(\log\log\xi)^h}\right)$

故 $\Sigma_2 = \sum\limits_{3\le n\le\xi}\dfrac{r_n - r_{n-1}}{\log n(\log\log n)^h}$

$= \sum\limits_{3\le n\le\xi} r_n\left(\dfrac{1}{\log n(\log\log n)^h}\right.$

$\left. - \dfrac{1}{\log(n+1)(\log\log(n+1))^h}\right)$

$$+O\left(\frac{1}{\log\xi(\log\log\xi)^h}\right)=\sum_{n=3}^{\infty}-\sum_{n>\xi}$$

$$+O\left(\frac{1}{\log\xi(\log\log\xi)^h}\right)$$

$$=C_3+O\left(\frac{1}{\log\xi(\log\log\xi)^h}\right)$$

最后得到估计 $\sum_{3\leq P\leq\xi}\frac{1}{P(\log\log P)^h}=C+\frac{(\log\log\xi)^{1-h}}{1-h}$

$$+O\left(\frac{1}{\log\xi(\log\log\xi)^h}\right)$$

其中 $C=C_2+C_3$ 为常数。

在 $h>1$ 时，令 $\xi\to\infty$，即知 $\sum_P\frac{1}{P(\log\log P)^h}$ 收敛于 C，结论已证完。

根据这两个结论，可以有

定理 $\sum_P\frac{1}{P^{\alpha}(\ln P)^{\beta}(\ln\ln P)^{r}}$，在且仅在（i）$\alpha>1$ 或（ii）$\alpha=1$，$\beta>0$。或（iii）$\alpha=1$，$\beta=0$，$r>1$ 时才收敛，并且在 $\alpha>1$ 时，β，r 可取任正实数，$\alpha=1$，$\beta>0$ 时，r 可取任正实数。

证明：（i）$\alpha>1$ ∵对充分大的 P 成立

$$\frac{1}{P^{\alpha}(\ln P)^{\beta}(\ln\ln P)^{r}}<\frac{1}{P^{\frac{\alpha+1}{2}}}$$ 而 $\frac{\alpha+1}{2}>1$ 所以

$$\sum_P \frac{1}{P^{\frac{\alpha+1}{2}}}\text{收敛。}$$

∴原级数收敛。

(ii) $\alpha=1$，$\beta>0$ 对充分大的 P，成立 $\dfrac{1}{P(\ln P)^{\beta}(\ln\ln P)^{r}}$

$<\dfrac{1}{P(\ln\ln P)^2}$ 又由结论 2，$\displaystyle\sum_P \frac{1}{P(\ln P)^{\beta}(\ln\ln P)^{r}}$

收敛。

(iii) $\alpha=1$，$\beta=0$，$r>1$，此即结证 2。

不难看出除此之外原级数 发散。

顺便提一下，Euler 恒等式：

设 $f(n)$ 为一积性函数，则在（i）$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|f(n)|$ 收敛，

或（ii）$\displaystyle\prod_P(1+|f(P)|+|f(P^2)|+\cdots)$ 收敛时，有

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\prod_P(1+f(P)+f(P^2)+\cdots)$ 对判别个别通项为积性函数的级数是否收敛亦有用，结论 1 就可作为 Euler 恒等式直接推证。

又例如，问 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\varphi(n)}$ 收敛否？（$\varphi(n)$ 为欧拉函数）

取 $f(n)=\dfrac{1}{n\varphi(n)}$，因为 $1+f(P)+f(P^2)+\cdots$

$$=1+\frac{1}{P(P-1)}+\frac{1}{P^2P(P-1)}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{P-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{P^2}}=1+\frac{P}{(P-1)^2\,(P+1)}$$

而 $\sum\limits_{P}\frac{P}{(P-1)^2\,(P+1)}$ 收敛。

故 $\prod\limits_{P}\left(1+\frac{P}{(P-1)^2\,(P+1)}\right)$ 收敛。

故由上面恒等式，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\varphi(n)}=\prod\limits_{P}\left(1+\frac{P}{(P-1)^2(P+1)}\right)$

亦收敛。

〔1〕《数证导引》第五章

刘弘泉

$A>0$，$B>0$，AB特征根界的粗略估计

8 2 1　沙虎云

设A，B都是$n\times n$阶的正定方阵。本文中，我们粗略地估计了A、B特征根的上、下界，其界分别是由A，B的特征根给出的。

我们有如下结果：

定理：设A，B，A、B的特征根分别为μ_1，…，μ_n，ν_1，…，ν_n，λ_1，…，λ_n。则有不等式：

$$\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{(\min\limits_i \mu_i)^2}+\dfrac{1}{(\min\limits_i \nu_i)^2}} < \lambda_i < \frac{n}{2}\left((\max_i \mu_i)^2 + (\max_i \nu_i)^2\right) \qquad 1\leq i\leq n$$

为了证明此定理，我们需要四个引理。

引理1：设P为非异复方阵，其特征根分别为x_1，…，x_n，则P^{-1}的n个特征根分别为$\dfrac{1}{x_1}$，…，$\dfrac{1}{x_n}$。

引理2：若P的n特征根为y_1，…，y_n，则$trP=y_1+\cdots+y_n$

引理3：设$A>0$，$B>0$，则A、B的特征根$\lambda>0$。

引理4：设C、D为任两$n\times n$阶复方阵，则

$$Re\,tr\,CD\leq\frac{1}{2}\left(trC\bar{C}'+trD\bar{D}'\right)$$

引理1，2很显然，下面给出引理3、4的证明。

〔证明〕3：设λ是AB的任一特征根，x为其一行特征向量，则$xAB=\lambda x$　$\therefore xA=\lambda xB^{-1}$

$x A \bar{x}' = \lambda x B^{-1} \bar{x}'$　$\because A>0$，$B^{-1}>0$，$\therefore$

$x A \bar{x}' > 0$，$x B^{-1} \bar{x}' > 0$　$\therefore \lambda > 0$　□

〔证明〕4：不妨设$P=(c_{ij})_{n\times n}$，$D=(d_{ij})_{n\times n}$，

则 $R_e \operatorname{tr} CD = R_e \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} d_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} (c_{ik} d_{ki} + \overline{c_{ik}}\, \overline{d_{ki}})$

$$\frac{1}{2}(\operatorname{tr} CC' + \operatorname{tr} DD') = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n}(c_{ik}\overline{c_{ik}} + d_{ki}\overline{d_{ki}})$$

$\because$　$c_{ik}d_{ki} + \overline{c_{ik}}\,\overline{d_{ki}} \leqq c_{ik}\overline{c_{ik}} + d_{ki}\overline{d_{ki}}$　$1 \leqq i,\ K \leqq n.$

$$\therefore \sum_{i,k=1}^{n}(c_{ik}d_{ki} + \overline{c_{ik}}\,\overline{d_{ki}}) \leqq \sum_{i,k}^{n}(c_{ik}\overline{c_{ik}} + d_{ki}\overline{d_{ki}})$$

$$k_e \operatorname{tr} C\cdot D \leqq \frac{1}{2}(\operatorname{tr} C\bar{C}' + \operatorname{tr} D\bar{D}')$$　□

下面，我们给出定理的证明

〔证明〕，由引理4，$\operatorname{tr} AB \leqq \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A\bar{A}' + \operatorname{tr} B\bar{B}')$

又由引理2，知，$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leqq \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \cdots + \mu_n^2 + \nu_1^2 + \cdots + \nu_n^2)$

而 $\lambda_i > 0$ ，$\therefore \lambda_i < \frac{n}{2}\left((\max \mu_\lambda)^2 + (\max \nu_i)^2\right)$

$$1 \leqq i \leqq n \qquad (1)$$

同样：$tr(AB)^{-1} = trB^{-1}A^{-1} \leq \frac{1}{2}\left(trB^{-1}\overline{(B^{-1})'} + trA^{-1}\overline{(A^{-1})'}\right)$

又由引理 1，得 $\frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n} \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu_1^2} + \cdots + \frac{1}{\mu_n^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \cdots + \frac{1}{\gamma_n^2}\right)$

$$\therefore \quad \frac{1}{\lambda_i} < \frac{n}{2}\left(\frac{1}{(\min\limits_i \mu_i)^2} + \frac{1}{(\min\limits_i \gamma_i)^2}\right)$$

即 $$\lambda_i > \frac{2}{n} \frac{1}{\frac{1}{(\min\limits_i \mu_i)^2} + \frac{1}{(\min\limits_i \gamma_i)^2}} \qquad 1 \leqq i \leqq n \qquad (2)。$$

由(1)、(2)得 $$\frac{2}{n} \frac{1}{\frac{1}{(\min\limits_i \mu_\lambda)^2} + \frac{1}{(\min\limits_i \gamma_i)^2}} < \lambda_i < \frac{n}{2}\left((\max\limits_i \mu_i)^2 + (\max\limits_i \gamma_i)^2\right) \qquad 1 \leqq i \leqq n \quad \square.$$

Kemark：这儿的估计是非常粗略的，主要是应用了引理 4，且得到的不等式是严格的，这就减少了 A B 的特征根和 A， B 特征根之间的联系，然而我们得到的 A B 特征根的下界比起通常的“0”无疑有了进步。

8 2 1 沙虎云。

分球入箱问题

821　张庆龙

我们知道，将不同的n球分别到不同的r箱，共r^n种。如果假定n球相同，〔1〕中回答共$\binom{n+r-1}{n}$种（记号$\binom{n}{m}=\frac{n!}{(n-m)!\,m!}$）。本文拟再予讨论。

先给出计数基本原理及两个命题。

计数基本原理：设有r个试验，第一试验有n_1个可能结果，对于前$i-1$个试验的每一可能结果，第i实验有n_i个可能结果，$i=1,2,\cdots r$，那么，这r个实验总共有$n_1\ n_2\cdots n_r$个可能结果。

可用数学归纳法证明，略去。

命题1。满足$x_1+x_2+\cdots+x_r=0$ ……(1)的非负整值向量$(x_1,x_2,\cdots x_r)$共有$\binom{n+r-1}{n}$个。

证明：（〔1〕给了此证明）考虑由n个1与$r-1$个0组成的每个排列与方程(1)的一解$(x_1,x_2,\cdots x_r)$按如下对应，使x_1等于排列中第一个0左边1的个数，x_2等于第一个0与第二个0之间的个数，如此继续直到x_r，它等于最后一个0右边1的个数。显然这种对应是一一对应。由于n个1与$r-1$个0组成的排列共有$(n+r-1)!/n!(r-1)!$，就证明了命题。

命题2。满足$y_1+y_2+\cdots+y_r=n$ ……(2)的正整值

向量（y_1，y_2，$\cdots y_r$）共$\binom{n-1}{n-r}$个。

证明：考虑方程(2)的每一正整值向量（y_1，y_2，$\cdots y_r$）与方程$x_1+x_2+\cdots+x_r=n-r$的一个非负整值向量（x_1，x_2，$\cdots$，x_r）按如下对应：$x_i=y_i-1$（$i=1$，2，$\cdots r$）。显然这种对应是一一对应，利用命题1即证。

定理1。将相同的n球分到不同的r箱共$\binom{n+r-1}{n}$种。

证明：将分相同的n球到r箱这一实验看作一向量（x_1，x_2，$\cdots$，x_r），其中i表被分到第i箱的球数。因此，转为求满足$x_1+x_2+\cdots+x_r=n$的各非负整值向量（x_1，x_2，$\cdots$，x_r）的个数，由命题1得。

定理2。将定理1条件补充一条“且每箱至少有一球（$r\leq n$）”，则共有$\binom{n-1}{n-r}$种。

证法与证定理1类似，应用命题2，略去。

定理3。设n球，某n_1个相同，另某n_2个相同，某n_s个相同，把这n球分到不同的r箱，共$\prod_{j=1}^{s}\binom{n_j+r-1}{n_j}$种。

证：将相同的n_i球分到不同的r箱看作第i试验（$i=1$，2，$\cdots$，s），共s个。由定理1，第i试验有$\binom{n_i+r-1}{n_i}$种可能结果。根据计数基本原理，共$\prod_{j=1}^{s}\binom{n_j+r-1}{n_j}$种可能结果。

显然，在定理3中令$n=1$，$n_1=n$，即定理1。

定理4。设n球，某n－1球相同，唯一球与众不同，将n球分到不同的r箱，每箱至少一球，共$r\binom{n-1}{n-r}$种。

证：假定n球相同，由定理2，共$\binom{n-1}{n-r}$种中任一种，唯一球可在r箱中任一箱出现，共对应r种。因此，总共$\binom{n-1}{n-r}$种。

如果我们将条件“不同的r箱”换为“相同的r箱”，此时上述几定理又怎样呢？

先引入记号，$S_r(n)\left(D_r(n)\right)$表示将n个相同（不同）球分到r个相同箱的所有可能，$S_r^m(n)\left(D_r^m(n)\right)$表示$S_r(n)\left(T_r(n)\right)$中某箱子的最多球数恰为m的所有可能，则

$$S_r(n)\left(D_r(n)\right)=\sum_{k=1}^{n}S_r^k(n)\ \left(=\sum_{k=1}^{n}D_r^k(n)\right)$$

规定 $\left\{\left(\frac{n}{m}\right)\right\}=\begin{cases}0, & m\nmid n\text{时}\\ 1, & m\mid n\text{时。}\end{cases}$

下面分开求$S_r(n)$与$D_r(n)$。

（i）求$S_r(n)$。当$\gamma\geq n$时：对$m=1$，$S_r^1(n)=1$。

对$m=2$，$S_r^2(n)=\sum_{i=1}^{\left(\frac{n}{2}\right)}S_{r-i}^1(n-2i)+\left\{\left(\frac{n}{2}\right)\right\}=\left(\frac{n}{2}\right)$。

对$m=k$，先有一箱有K球，剩下n－k球分到其余r－1箱有$\sum_{j=1}^{k-1}S_{r-1}^j(n-k)$种。有两箱各有K球，剩下n－2K球分到其余r－2箱有$\sum_{j=1}^{k-1}S_{r-2}^j(n-2K)$种；依此下去直到有$\left(\frac{n}{k}\right)$箱

各有K球，剩下$n-k[\frac{n}{k}]$球分到其余$r-[\frac{n}{k}]$箱有两种：当K|n，恰好$\{[\frac{n}{k}]\}=1$种，当$K\nmid n$，共$\sum_{j=1}^{k-1}S^{j}_{r-[\frac{n}{k}]}(n-k[\frac{n}{k}])$种，故总有$\sum_{j=1}^{k-1}S^{j}_{r-[\frac{n}{k}]}(n-K[\frac{n}{k}])+\{[\frac{n}{k}]\}$种因此

$$S^{k}_{r}(n)=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{k}]}\sum_{j=1}^{k-1}S^{j}_{r-i}(n-ki)+\{[\frac{n}{k}]\}，(k=2，3，\cdots n)。$$

当$r<n$时：类似讨论，略去。由此得到

定理5。将n个相同球分到r个相同箱，共$S_{r}(n)=\sum_{k=1}^{n}S^{k}_{r}(n)$种。其中：$r\geqq n$时，$S^{1}_{r}(n)=1$，$S^{2}_{r}(n)=[\frac{n}{2}]$，

$$S^{k}_{r}(n)=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{k}]}\sum_{j=1}^{k-1}S^{j}_{r-i}(n-ki)+\{[\frac{n}{k}]\}，(k=2，3，\cdots，n)；$$

$\gamma<n$时，$S^{1}_{r}(n)=\cdots=S_{r}^{[\frac{n}{\gamma}]-1}(n)=0$，$S_{\gamma}^{[\frac{n}{\gamma}]}(n)=\begin{cases}0, & \gamma|n\text{时，}\\ 1, & r\nmid n\text{时。}\end{cases}$

$$S^{k}_{r}(n)=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{k}]}\sum_{j=1}^{k-1}S^{j}_{r-i}(n-ki)+\{[\frac{n}{k}]\}，(K=[\frac{n}{\gamma}]+1，\cdots，n)$$

(ii)求$D_{r}(n)$。解决问题的方法大体与(i)相同，只不过要考虑球之間的次序。

当$n\leqq r$时：对m=1，$D^{1}_{r}(n)=1$。

对 $m=2$，$D^2_r(n)=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2i+2}{2}}{2!}$

$$D^1_{r-i}(n-2i)+\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2[\frac{n}{2}]+2}{2}}{[\frac{n}{2}]!}$$

$$\times\{_i[\frac{n}{2}]\}$$

$$=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}\cdots\binom{n-2i+2}{2}}{i!}$$

$$=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{n!}{i!\,(n-2i)!\,(2!)^i}$$

对 $m=k$，先有一箱有 K 球，对每一这种情况，剩下 $n-k$ 球分到其余 $r-1$ 箱有 $\sum_{j=1}^{k-1}D^j_{r-1}(n-k)$ 种，考虑球互不相同，从 n 球中选取 k 个放到一箱有 $\binom{n}{k}$ 种，因此共 $\binom{n}{k}\sum_{j=1}^{k-1}D^j_{r-1}(n-K)$ 种；其次有 K 球，对每一这种情况，剩下 $n-2K$ 球分到其余 $r-2$ 箱有 $\sum_{j=1}^{k-1}D^j_{r-2}(n-2K)$ 种，同时从 n 球中各取 K 个到两箱有 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}$ 种，但不考虑箱的次序，则只有 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}/2!$ 种，因此共 $\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}/2!\sum_{j=1}^{k-1}D^j_{r-2}(n-2k)$ 种；依此类推直至有 $[\frac{n}{k}]$ 箱各有 K 球，总共有

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdots\binom{n-k[\frac{n}{k}]+k}{k}}{[\frac{n}{k}]!}\left(\sum_{j=1}^{k-1} D^{j}_{r-[\frac{n}{k}]}\left(n-k[\tfrac{n}{k}]\right)\right.$$

$$\left.+\text{夺}[\tfrac{n}{k}]\}\right)$$ 种，所以

$$D_r^k(n)=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{k}]}\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdots\binom{n-ki+k}{k}}{i!}\sum_{j=1}^{k-1} D^{j}_{r-i}(n-ki)$$

$$+\frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}\cdots\binom{n-k[\frac{n}{k}]+k}{k}}{[\frac{n}{k}]!}\{[\tfrac{n}{k}]\}$$

$$=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{k}]}\frac{n!}{i!\,(n-ki)!\,(k!)^{i}}\sum_{j=1}^{k-1} D^{j}_{r-i}(n-ki)$$

$$+\frac{n!}{[\frac{n}{k}]!\,(n-k[\frac{n}{k}])!\,(k!)^{[\frac{n}{k}]}}\{[\tfrac{n}{k}]\}。$$

$(k=2,\ 3,\ \cdots,\ n)$。

当 $n>r$ 时，类似讨论，略去。由此得到

定理6。将不同的n球分到相同的r箱，共 $D_r(n)=\sum_{i=1}^{n} D_r^k(n)$

其中：$n\leq r$ 时，$D^1_r(n)=1$，$D^2_r(n)=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\frac{n!}{i!\,(n-2i)!\,(2!)^{i}}$，

$$D_r^k(n)=\sum_{i=1}^{[\frac{n}{k}]}\frac{n!}{i!\,(n-ki)!\,(k!)^{i}}\sum_{j=1}^{k-1} D^{j}_{r-i}(n-ki)$$

$$+\frac{n!}{\left[\frac{n}{k}\right]!\left(n-k\left[\frac{n}{k}\right]\right)!\left(k!\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]}}\left\{\left[\frac{n}{k}\right]\right\},$$

$$(K=2,\cdots,n);$$

$n>r$ 时，$D^1_r(n)=D^2_r(n)=\cdots=D_r^{\left[\frac{n}{r}\right]-1}(n)=0$。

$$D_\gamma^{\left[\frac{n}{\gamma}\right]}(n)=\begin{cases}0 & \gamma\nmid n\text{ 时}\\ \dfrac{n!}{\gamma!\left(n-\gamma\left[\frac{n}{\gamma}\right]\right)!\left(\left[\frac{n}{\gamma}\right]!\right)^\gamma}\left\{\left[\frac{n}{k}\right]\right\}, & \gamma\mid n\text{ 时,}\end{cases}$$

$$D^k_r(n)=\sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{k}\right]}\frac{n!}{i!\left(n-ki\right)!\left(k!\right)^i}\sum_{j=1}^{k-1}D^j_{r-i}(n-ki)$$

$$+\frac{n!}{\left[\frac{n}{k}\right]!\left(n-k\left[\frac{n}{k}\right]\right)!\left(k!\right)^{\left[\frac{n}{k}\right]}}\left\{\left[\frac{n}{k}\right]\right\},$$

$$\left(k=\left[\frac{n}{\gamma}\right]+1,\cdots,n\right)。$$

值得强调一点，定理5，6中的 $S^m_\gamma(n)$ 与 $D^m_r(n)$ 只有在 $n>\gamma$ 时才与 γ 有关。

上面的推导过程及定理5、6的递推公式提供了求 $S_\gamma(n)$ 与 $D_\gamma(n)$ 的方法。

参考文献

〔1〕：《概率论初级教程》〔美〕谢尔登·罗斯著

李漳南、杨振明　译

一个问题结论的加强

821 严冬

82级抽代习题有一道为："若群G的阶为素数P的倍数，那么$x^P=1$在G中解的个数为P的倍数"。

此结论可加强：设$|G|=n$，$n=KP$，$K<P$时，$x^P=1$在G中解的个数恰为P。

证：从上面的问题中知道，$\exists a\in G$，$a\neq 1$，$a^P=1$。作子群$g=\{1, a, a^2, \cdots, a^{(P-1)}\}$。则G可就g进行倍集分类，共K类，即有：

$$G=g\cup b_1 g\cup b_2 g\cup\cdots\cup b_{k-1} g,$$

$$b_i g\cap b_j g=\varnothing。$$

如果$\exists b\in G-g$，满足$b^P=1$，不妨设$b\in b_1 g$

则 $b_1 g=bg$。

考虑$b, b^2, b^3, \cdots b^{P-1}$，这$P-1$个两两不等式的元素，易知，其中必有一个属于g。这是因为，如果它们均不属于g，则必落在其余$k-1$个倍集中，但$K<P$，$\therefore k-1<P-1$。由抽屉原则知，至少有两个元素属于同一倍集。不妨设b^i，b^j同属于倍集$b^i g$，$(i\neq j)$，则$\exists a^K\in g$，使$b^j=b^i a^k$

不妨设$j>i$，则 $b^{j-i}=a^k\in g$矛盾。因此，至少有一个$b^t\in g$，$(1<t\leq P-1)$。设t_0是所有$b^t\in g$的t所可能取到的正整数数中的最小值。那么，可得，若$b^t\in g$，则$t_0\mid t$。这是因为从

$t=t_0 g+r$。$0\leqq r<t_0$。有 $b^t=(b^{t_0})^q \cdot b^r$

$\because b^t\in g$, $(b^{t_0})^q\in g$。$\therefore$ $b^r\in g$，$\therefore$ $r=0$。

显然 $t_0>1$，$\because b\bar{\in} g$。又 $b^P=1\in g$。$\therefore t_0 \mid P$。但 p 为素数，矛盾。∴这样的 b 不存在。

亦即满足 $x^P=1$ 的解的个数恰为 P 个。进一步地；

当 $K=P$ 时，易得 $x^P=1$ 的解的个数或为 P 个或为 P^2 个。这是因为：我们同样作 g，如果方程解的个数 $>P$ 个，那么 $\exists\, b\in G-g$ 有 b，b^2，b^3，…，b^{P-1} 都是 $x^P=1$ 的解。且

$g\cap\{b, b^2, b^3, \cdots, b^{P-1}\}=\varnothing$，否则，可以和前面相同的方法导致矛盾。

同理，如果另有 C 满足 $C^P=1$，而 $C\bar{\in} g\cup\{b, b^2, \cdots, b^{P-1}\}$，那么 $\{c, c^2, \cdots, c^{P-1}\}$ 也都是解，且与 a^i 和 b^j 均不同。

从而，可知，解的个数有 $S(P-1)+P$, $S\in N$,
但 $P\mid S(P-1)+P$ $\therefore P\mid S$, ∴个数 $=P(P-1)+P=P^2$。

一般地，对于任意 K，$K\in N$, $|G|=KP$。我们可得到结论：$x^P=1$ 的解的个数为：P 或 $P^{i+1}-P^i+P$ 个，其中

$$1\leqq i\leqq\left[\frac{\ln(K-1)}{\ln P}\right]。$$

证法与上类似。

Herda 猜想的证明

811 窦吕柱 编译

Hans Herda 1971年提出了如下的猜想：平面上一凸闭曲线C。任取 $x \in C$，则存在 $y \in C$，使：$xy = \frac{1}{2}P$，P为C之周长。由此定义了函数：$f: C \to R$，$f(x) = d(x, y)$（即xy的弦长），显然f连续。而C为有界闭集，故有 $x_0 \in C$，使：$f(x_0) = \min f(x)$ 记 $S = f(x_0)$ 则下列命题成立否：

$P \geq S\pi$，等号成立，当且仅当C为一个圆。

下面给出Herda猜想的证明，为此先证明几个命题和引理（注其中命题1，2，3的证明，原文没有给出，这里的证明是译者补上的）。

命题1：K为等宽凸闭曲线，且每一条直径弦（diametral chord）（即K的两条平行切线切点间的距离）平分其周长，则K为圆）。

证明：建立坐标系，图中P，$\bar{P}$ 为对经点 $P = \bar{P}(\theta)$ 为支撑函数，$\gamma|s|$ 曲方程，则 $\bar{P}$ 点坐标为 $\gamma(s + \frac{L}{2})$

$$x_1 = P\cos\theta - P' \sin\theta$$

$$x_2 = P' \cos\theta + P\sin\theta$$

$$\bar{x}_1 = -P(\theta+\pi)\cos\theta + P'(\theta+\pi)\sin\theta$$

$$\bar{x}_2 = -P(\theta+\pi)\cos\theta - P(\theta+\pi)\sin\theta$$

$$\underset{\sim}{\gamma}(s)=(x_1 \quad x_2) \quad \underset{\sim}{\gamma}\left(s+\frac{C}{2}\right)=(\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2)$$

又 $W=P(\theta+\pi)+P(\theta)=$常数

$$P'(\theta+\pi)+P(\theta)=0$$

故有：$\underset{\sim}{\gamma}(s)-\underset{\sim}{\gamma}\left(s+\frac{L}{2}\right)=(W\cos\theta, W\sin\theta)$ (1)

又 $\underset{\sim}{\gamma}(s) \parallel \underset{\sim}{\gamma}\left(s+\frac{L}{2}\right)$

若 $\underset{\sim}{\gamma}(s)=\underset{\sim}{\gamma}\left(s+\frac{L}{2}\right)$

则：由O旋转指标定理：二弧 $Pm\tilde{P}$ 和 $\tilde{P}nP$ 中至少一段为直线，从而另一段也必为直径（因为它们弧长相等）

$\therefore \underset{\sim}{\gamma}(s)=-\varphi\left(s+\frac{L}{2}\right) \quad \therefore \underset{\sim}{\gamma}(s)+\underset{\sim}{\gamma}\left(s+\frac{L}{2}\right)=0$

$\therefore \underset{\sim}{\gamma}(s)+\underset{\sim}{\gamma}\left(s+\frac{L}{2}\right)=\underset{\sim}{\gamma}_0$ =常向量 (2)

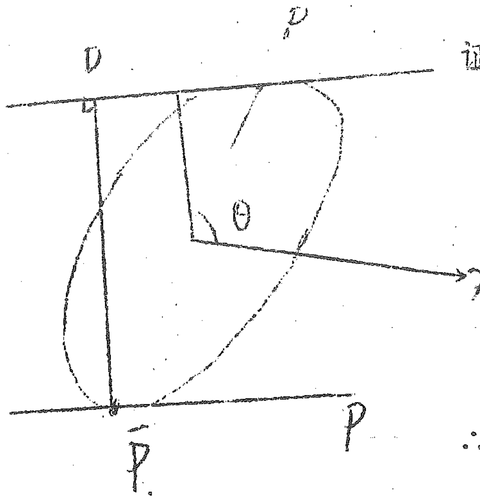
综合(1)，(2)有：

$$\underset{\sim}{\gamma}(s)=\left(\frac{\gamma_0}{2}+\frac{\omega}{2}\cos\theta,\ \frac{\gamma_0}{2}+\frac{\omega}{2}\sin\theta\right)$$

于是$\underset{\sim}{\gamma}(s)$为一个圆。

命题2：K为凸曲线，$\omega(\theta)$表示K之宽度，$g(\theta)$表示K之直径弦。

则有：$\min\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} g(\theta)=\min\limits_{0\leq\theta\leq 2\pi} \omega(\theta)$



证：如图：$\overline{P\bar{P}}=g(\theta)$，$\overline{PD}=\omega(\theta)$

显然：$g(\theta)\geq\omega(\theta)$

设：$\omega(\theta_0)=\min\omega(\theta)$

和结论中类似，有：

$\underset{\sim}{\gamma}(\theta_0)-\underset{\sim}{\gamma}(\theta_0+\pi)=(\omega(\theta_0)\cos\theta,\ \omega(\theta_0)\sin\theta)$

$\therefore g(\theta_0)=|\underset{\sim}{\gamma}(\theta_0)-\underset{\sim}{\gamma}(\theta_0+\pi)|$

$=\omega(\theta_0)$

（完毕）

命题3：K为凸闭曲线，则：$P(K)\geq\pi\triangle(k)$，其中$\triangle(k)=\min\omega(\theta)$

证明：由Cauchy公式：

$$P(k)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\omega(\theta)d\theta\geq\frac{1}{2}2\pi\triangle(k)=\pi\triangle(k)$$

（证完）。

引理1：C为平面闭曲线，K为包含C的最小凸集的边界，则有$P(c)\geq P(k)$等号成立当且仅当 $C=K$

证明：由Crobten公式

$$P(c)=\iint n_c(P\ \varphi)d_Pd_\varphi \qquad P(k)=\iint n_k(P,\varphi)d_Pd_\varphi$$

设G为K的内部。若直线（P，φ）交K于两点，而与C至多交于一点则可做凸集，$G_1\subsetneq G$，使$C\subset G_1$ 此矛盾。故必与C至少交于两点。$\therefore n_c(P,\varphi)\geq n_k(P,\varphi)$，而使这不等式不成立的（P，φ）点集在P－φ平面上的勒贝格测度为零，故仍有

$$P(c) \geqq P(k)$$

设 $C \neq K$，则 $\exists(P_0 \quad \varphi_0)$，使：$n_c(P_0 \ \rho_0) \geqq 3$。于是 $\exists(P_0 \ \rho_0)$ 的一个邻域 使 $n_c(P \ \varphi) \geqq 3$，在这个邻域内成立，而 $n_k(P \ \varphi) \leqq 2$ 故：

$$P(c) > P(k)$$

（证完）

引理2：设 f 为 C 上的一个连续对合映射（即：$f: C \to C$。且 $f(f(x)) = x$）若 f 没有不动点，则对任何非零向量 $\underset{\sim}{a}$，$\exists x_0 \in C$，使 $f(x_0) - x_0 \parallel \underset{\sim}{a}$。

证明：令：$V(x) = f(x) - x \quad x \quad C$。

任取 $x_1 \quad C$，$V(f(x_1)) = f(f(_1)) - f(x_1)$

$= -V(x_1)$

又 $V(x) \neq 0$ ∴由连续性知，$\exists x_0 \quad V(x_0) \parallel \underset{\sim}{a}$

下面证明

定理：C 为平面曲线，f 为 C 上的连续对合映射，无不动点。$S = \min\limits_{x \quad c} |f(x) - x|$ 则有 $P(C) \geqq \pi s$，等号成立，当且仅当(1) C 为闭等宽曲线。(2)。连接 $f(x)$ 与 x 的弦恒为直径弦。

证明：设 k 为引理1所设，则：

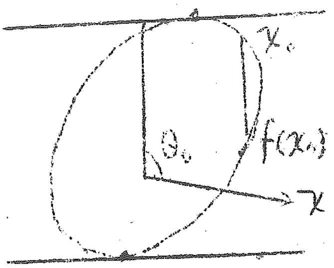
$$P(c) \geqq P(k) \geqq \pi\triangle(k)$$

设 $\triangle(K) = \omega(\theta_0)$，由引理2，$\exists x_0$ 使：

$f(x_0) - x_0$ 垂直于 θ_0 方向的切线（如图）

$\therefore \omega(\theta_0) \geqq |f(x_0) - x_0| \geqq S$

$\therefore P(c) \geqq P(k) \geqq \pi\triangle(k) \geqq \pi s$



答：P（c）＝πs。有

P（c）＝P（k） 故

K＝C，C为凸曲线。P

P（k）＝π△（k），知：C为等宽曲线。△（k）＝S，知：f（x），x为对径点

（证完）

有了这个定理，Herda猜想就迎刃而解了，猜想中的f（x）显然为一个对合映射，无不动点，故由定理P≧πs成立，等号成立，则当且仅当C为闭等曲线。f（x），x为直径弦，而f（x），x等分了周长。故由命题1，此时C为一个圆。

Cauchy-Schwarz不等式的增补

8010 游光荣

〔1〕论证了如下不等式：设 $0<m_1\leqq a_i\leqq M_1$，$0<m_2\leqq b_i\leqq M_2$，$i=1,2,\cdots,n$。则

$$\frac{4m_1m_2M_1M_2}{(m_1m_2+M_1M_2)^2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum b_i^2\leqq\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqq\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2 \qquad (1)$$

它给出了关于级数的Cauchy-schwarz不等式的一个增补。

本文将考虑概率中常用的Cauchy-schwarz不等式〔2〕的一个增补。论证方法源于〔3〕。

以下 ξ，η，ζ 皆表实随机变量。

定理1。设 $0<m_1\leqq\xi\leqq M_1$，$0<m_2\leqq\eta\leqq M_2$，

$$\frac{m_1M_1E\eta^2\zeta^2+m_2M_2E\xi^2\zeta^2}{m_1m_2+M_1M_2}\leqq E\xi\eta\zeta^2\leqq\left(E\xi^2\zeta^2\cdot E\eta^2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

证明：右端不等式显然成立。

由已知，$M_2\xi-m_1\eta\geqq0$，$M_1\eta-m_2\xi\geqq0$，

$\therefore(M_2\xi-m_1\eta)(M_1\eta-m_2\xi)\zeta^2\geqq0$

即 $(m_1m_2+M_1M_2)\xi\eta\zeta^2\geqq m_1M_1\eta^2\zeta^2+m_2M_2\xi^2\zeta^2$，

上式两边取数学期望，就得到(2)的左端。（证毕）

推论1。假设同定理1，则

$$\frac{4m_1 m_2 M_1 M_2}{(m_1 m_2 + M_1 M_2)^2} E\xi^2\zeta^2 \cdot E\eta^2\zeta^2 \leqq (E\xi\eta\zeta^2)^2$$

$$\leqq E\xi^2\zeta^2 \cdot E\eta^2\zeta^2 \qquad (3)$$

证明：$\because [(m_1 M_1 E\eta^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}} - (m_2 M_2 E\xi^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}]^2 \geqq 0$

$$\therefore 4m_1 M_1 E\xi^2\zeta^2 \cdot m_2 M_2 E\eta^2\zeta^2 \leqq (m_1 M_1 E\eta^2\zeta^2$$

$$+ m_2 M_2 E\xi^2\zeta^2)^2,$$

利用定理1的结论，即得(3)式。　　（证毕）

令$\zeta = 1$，由(2)，有：

推论2：设$0 < m_1 \leqq \xi \leqq M_1$，$0 < m_2 \leqq \eta \leqq M_2$，则

$$\frac{m_1 M_1 E\eta^2 + m_2 M_2 E\xi^2}{m_1 m_2 + M_1 M_2} \leqq E\xi\eta \leqq (E\xi^2 \cdot E\eta^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (4)$$

同样，由(3)可得：

推理3：假设同推论2，则

$$\frac{4m_1 m_2 M_1 M_2}{(m_1 m_2 + M_1 M_2)^2} E\xi^2 \cdot E\eta^2 \leqq (E\xi\eta)^2$$

$$\leqq E\xi^2 \cdot E\eta^2 \qquad (5)$$

不等式(4)、(5)分别以和、积的形式表示了$E\xi\eta$的下界，它们可以看作 Cauchy-schwarz 不等式的增补。当然，(4)较(5)强。

参考资料

〔1〕G. Polya，G. Szegö，数学分析中的问题和定理，第一卷，PP. 74，上海科技出版社（1981）。

〔2〕复旦大学，概率论，第一册，PP. 176，人民教育出版社（1979）。

〔3〕Diaz. J. B, Metcalf. F. T, Complementary Inequalities I: Inequalities Complementary to Cauchy's inequalities for Sums of Real Numbers, J. Math. Anal. APPL., 9（1964），PP. 59-74

一类常系数线性微分方程组的解的存在性

801 马翎

一、问题与结论

设 $P(D)$，$Q(D)$ 是关于微分算子 $D=\dfrac{d}{dt}$ 的两个多项式（次数不小于1）。以 Z_P 记 $P(D)z(t)=0$ 的解集，则 Z_P 是 ∂P 的线性空间。任给 $z\in Z_P$，$z\neq 0$，现在考虑方程组

$$\begin{cases} Q(D)z(t)=z \\ P(D)z(t)=0 \end{cases} \qquad \cdots (1)$$

的解的存在性问题。本文的目的是要证明以下的结论：

定理1：方程组(1)有解的充要条件是 $P(D)$，$Q(D)$ 互素，而且当解存在时，必唯一。

二、推论

以 $R(D)$ 记 $P(D)$ 与 $Q(D)$ 最大公因式，并设 $P(D)=P_1(D)R(D)$，$Q(D)=Q_1(D)R(D)$。则 P_1，Q_1 互素，易见 $Q(D)$ 是 Z_P 上的线性变换，利用定理1可证如下推论

$$Q(D)Z_P=Z_{P_1}$$

证明：首先对 $z(t)$ Z_P，$0=P(D)z(t)$

$$=P_1(D)R(D)z(t);$$

从而 $P_1(D)(Q(D)z(t))=Q_1(D)(P_1(D)R(D)$

$$z(t))=0$$

即 $Q(D)Z_P \subseteq Z_{P_1}$

反之，$\forall Z_0 \in Z_{P_1}$。当 $Z_0=0$ 时，取 $Z(t)=0 \in Z_P$，有

$Q(D)Z(t)=Z_0$。若 $Z_0 \neq 0$，由定理1知 $\exists Z_1(t)$ 使

$$\begin{cases} Q_1(D)Z_1(t)=Z_0 \\ P_1(D)Z_1(t)=0. \end{cases}$$

而方程 $R(D)Z(t)=Z_1(t)$ 总有解 $Z(t)$，从而

$P_1(D)R(D)Z(t)=P_1(D)Z(t)=0$，即 $Z(t) \in Z_P$，

$Q(D)Z(t)=Z_0$，从而 $Q(D)Z_P \supseteq Z_{P_1}$

综上可知 $Q(D)Z_P=Z_{P_1}$ $\square$

三、定理1证明

设 $P(\lambda)=0$ 的根为 λ_i，$i=1,2\cdots K$，λ_i 为 $1+K_i$ 重根，$(K_i \geq 0)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{k}(1+K_i)=\partial P$。则

$$\bigcup_{i=1}^{k}\{(e^{\lambda_i t}, te^{\lambda_i t}, \cdots t^{k_i}e^{\lambda_i t})\}$$

是 Z_P 的组基。记 Z_i 为由 $\{e^{\lambda_i t}, \cdots t^{k_i}e^{\lambda_i t}\}$ 生成的线性空间，Z_i 为 Z_P 的 $1+K_i$ 维子空间，且

$$Z_P=Z_1 \oplus Z_2 \oplus \cdots \oplus Z_K$$

显然每个 Z_i 是 $Q(D)$ 的不变子空间，只需证

$Z_P=Z_1$ 的情形，即 $P(D)=(D-\lambda_i)^{1+K_i}$ 的情形。

为简单起见，以下讨论中去掉下标 i。

$Z_0(t)$，$Z(t) \in Z_1$ 可分别表示成

$$Z_0(t)=C\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ t^k e^{\lambda t}\end{pmatrix},\qquad Z(t)=\tilde{C}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ t^k e^{\lambda t}\end{pmatrix}$$

其中 $\tilde{C}$，C，为（$1+K$）维行向量，$\tilde{C} \neq 0$，$\tilde{C}=(\tilde{C}_0, \cdots \tilde{C}_k)$

［1］中（1·7）写成矩阵形式，为

$$Q(D)\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ \\ t^k e^{\lambda t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t^2 & \binom{2}{1}t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ t^k & \binom{k}{1}t^{k-1} & & \cdots & \binom{k}{k} & t^{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q(x) \\ Q'(\lambda) \\ Q^{(k)}(\lambda)\end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

从而由 $Q(D)Z(t)=CQ(D)\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ t^k e^{\lambda t}\end{pmatrix}=\hat{C}\begin{pmatrix} e^{\lambda t} \\ t^k e^{\lambda t}\end{pmatrix}$ 及上式得

$$C\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ t^2 & \binom{2}{1}t & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots \\ t^k & \binom{k}{1}t^{k-1} & \cdots & \binom{k}{k}t^{k-k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q(\lambda) \\ Q'(\lambda) \\ \vdots \\ Q^{(k)}(\lambda)\end{pmatrix}=\tilde{C}\begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^k\end{pmatrix}$$

上式两边对 t 求 0，1，…k 负导数，并令 $t=0$，得到下面关于 C 的线性方程组（经重新排列后）

$$BC^T=\begin{pmatrix} \tilde{C}_0 \\ \\ k!\,\hat{C}_k\end{pmatrix}$$

其中系数矩阵 $B=\begin{pmatrix} Q(\lambda) & Q'(\lambda) & \cdots & Q^{(k)}(\lambda) \\ 0 & Q(\lambda) & \cdots\cdots & (k-1)Q^{(k-1)}(\lambda) \\ \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & \binom{k}{0}k!\,Q(\lambda)\end{pmatrix}$

$\det B=\binom{1}{0}\cdots\binom{k}{0}\,1!\,2!\cdots k!\,(Q(\lambda))^{k+1}$ 从而 C^T 唯一存在 $\Longleftrightarrow$ $Q(\lambda)\neq 0$，此时 $Q(D)$ 与 $P(D)=(D-\lambda)^{1+k}$ 互素。（这就证完了定理）

参考文献：〔1〕王柔怀 伍卓群 ①，常微分方程讲义 P. 11。

中国科学技术大学

1984年硕士学位研究生入学考试试题

线性代数

一、（20分）。设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是n阶对称方阵，其中

$$a_{ji}=a_{ij}, \quad 1\leq i, j\leq n,$$

并且当$1\leq i\leq j\leq n$ 时，

$$a_{ij}=\begin{cases} i-1, & \text{当 } i \text{ 为偶数}, \\ i, & \text{当 } i \text{ 为奇数}, \end{cases}$$

求矩阵A的秩。

二、（20分）。设$A=(a_{ij})_{n\times n}$为n阶方阵，其中

$$a_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{当 } i+j=n+1 \text{ 时}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$1\leq i, j\leq n$。求方阵A的Jordan标准形。

三、（20分）。设V和W是有限维复线性空间，$\alpha\in V$，$\beta\in W$，$f(\alpha,\beta)$是定义在V和W上的复值函数。如果对任意$\alpha_1,\alpha_2\in V$，$\beta_1,\beta_2\in W$，

$$f(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2,\beta)=\lambda_1 f(\alpha_1,\beta)+\lambda_2 f(\alpha_2,\beta),$$

$$f(\alpha,\mu_1\beta_1+\mu_2\beta_2)=\mu_1 f(\alpha,\beta_1)+\mu_2 f(\alpha,\beta_2),$$

其中$\lambda_1,\lambda_2,\mu_1,\mu_2$是复数，则$f(\alpha,\beta)$称为V、W上的双线性函数。记

$$V_0=\{\alpha\in V \mid f(\alpha,\beta)=0, \text{对一切}\beta\in W\},$$

$$W_0=\{\beta\in W \mid f(\alpha,\beta)=0, \text{对一切}\alpha\in V\}。$$

V_0 和 W_0 显然是V和W的子空间。证明，

$$\dim V - \dim V_0 = \dim W - \dim W_0,$$

其中 $\dim V$ 是线性空间的维数。

四、（20分）。适合 $A^2 = A$ 的方阵称为幂等方阵，方阵A的秩记为 $r(A)$。证明，

(1)设A是n阶幂等方阵，则

$$r(I_{(n)} - A) = n - r(A),$$

其中 $I_{(n)}$ 是n阶单位方阵；

(2)设 $A_1, \cdots, A_k$ 是K个n阶幂等方阵，则

$$r(I_{(n)} - A_1 \cdots A_k) \leq k(n - r(A_1 \cdots A_n))$$

五、（20分）。设 $A = (a_{ij})_{3\times3}$ 是3阶实正交方阵，并且方阵A的行列式为1，方阵A的迹记为 trA。证明，

$$(trA-1)^2 + \sum_{1\leq i<j\leq 3} (a_{ij} - a_{ji})^2 = 4$$

中国科学技术大学

1984年硕士学位研究生入学考试试题

数学分析试题

以下共6题。任选5题。每题20分。

1、求出下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ \mathrm{tg}^4 x}{\sin^3 x(1-\cos x)}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x+x^2}-1}{e^x-1}$

2、举出（不要证明）定义在（$-\infty$，$+\infty$）上的函数 $f(x)$，$g(x)$ 分别满足下面的条件(1)、(2)：

(1) $f(x)$ 仅在 $x=0$ 和 $x=1$ 处连续。

(2)在任一有穷区间（a，b）上，$g(x)$ 不可积而 $g^2(x)$ 为可积。

3、函数 $f(x)$ 在（0，1）上可微，且 $f'(x)$ 可积，$f(0)=0$，$f(1)=1$，求证

$$\int_0^1 |f(x)-f'(x)|\,dx \geqq e^{-1}$$

其中 $e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底。

4、设 $F(x,y,z)$ 为定义于 R^3 的连续可微三元函数，且 $F(0,0,0)=0$。求证：存在连续函数 $u(x,y,z)$、$v(x,y,z)$、$w(x,y,z)$ 使

$$F(x,y,z)=x\cdot u(x,y,z)+y\cdot v(x,y,z)+zw(x,y,z)$$

5。 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微，$|f'(0)|<1$ 且 $|f(x)|\leq|x|$，这里等式当且仅当 $x=0$ 时成立。又记 $f_1(x)=f(x)$，$f_{k+1}(x)=f(f_k(x))$，（k为正整数）

求证：

(1)在任一有限区间 $[a, b]$ 上，一致地有 $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)=0$

(2)无穷级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上可以逐项求导。

6、把地球看成质量均匀的球体，设地球表面重力加速度为g，利用万有引力公式

$$F=K\frac{m_1 \quad m_2}{P^2}$$

计算：

(1) 地球内部单位质量的质点所受地球引力。

(2) 若有一光滑的直线管道，通过地球内部连接地面上的A、B两点。一质点Q在重力作用下由A点滑到B点，求Q由A到B所用的时间。

1983年数理统计专业硕士研究生概率论试题

1、证明：

（a） $1+P(E\cap F)\geqq P(E)+P(F)$；

（b） E和F中恰好有一个发生的概率是

$$P(E)+P(F)-2P(E\cap F)；$$

（c） 设 $\{A_i, i\geqq 1\}$，$\{B_i, i\geqq 1\}$ 是两个事件的序列，并满足 $A_i \quad B_i$，$i\geqq 1$，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)-P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\leqq \sum_{i=1}^{\infty}\left[P(A_i)-P(B_i)\right]$$

（本题15分）

2、求n个人中至少有二人分别生在三月和四月的概率。

（本题10分）

3、设X，Y相互独立，都遵从二项分布b(n，P)，求

（a）在X+Y=m的条件下，X的条件分布；

（b） $E[X \mid X+Y=m]$。

（本题15分）

4、设 $X_1, \cdots, X_n$ 是相互独立相同分布，只取正值的随机变量。证明

$$E\left[\frac{X_1+\cdots+X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right]=\frac{k}{n} \qquad 1\leqq k\leqq n。$$

（本题10分）

5、设X，Y是两个随机变量，它们的分布分别是

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P_1 & 1-P_1\end{pmatrix}\quad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P_2 & 1-P_2\end{pmatrix}$$

证明：X，Y独立的充要条件是它们的相关系数等于0。

（本题10分）

6、设X为随机变量，$P\{|X|\leq 1\}=1$。证明：对任一$\varepsilon>0$有

$$P\{|X|\geq\varepsilon\}\geq E(X^2)-\varepsilon^2$$

（本题10分）

7、数m（X）称为随机变量X的中位数，如果满足：

$P\{X\geq m(X)\}\geq\frac{1}{2}$，$P\{X\leq m(X)\}\geq\frac{1}{2}$。证明：

（a）对任意随机变量X，中位数m（X）必存在；

（b）$|E(X)-m(X)|\leq\sqrt{2D(X)}$

（本题15分）

8、试验证具有如下给定概率分布的独立随机变量序列$\{X_k, k\geq 1\}$，是否服从中心极限定理：

（a）$P\{X_k=\pm k\}=\frac{1}{2}K^{-\frac{1}{2}}$，$P\{X_k=0\}=1-k^{-\frac{1}{2}}$，$K\geq 1$；

（b）$P\{X_k=\pm 2^k\}=2^{-(2k+1)}$，$P\{X_k=0\}=1-2^{-2k}$，$k\geq 1$。

（本题15分）

问题征解

（解答请送到152楼209 窦吕柱）

1、已知数列{P(n)}满足：

i　$P(1)=P(2)=1$

ii　$P(n+1)=P(1)P(n)+P(2)P(n-1)+\cdots+P(n)P(1)$

试求出P(n)的通项。

（贾立志　提供）

2、设f(x)、g(x)为有理系数多项式，其次数deg $f\geq 1$，deg $g\geq 1$。已知f(x)、g(x)共有一个公共根C（实的或者复的）证明：f、g必有次数大于1的有理系数公因式。

3、一条马路上有n个居民区，每个居民区各有m_n个小学生（$n\geq 2$，$m_n\geq 1$）今欲建一所小学，试问校址选于何处，才能使所有小学生上学所走路程最小。

（窦吕柱　提供）

第十四期《习题征解》解答：

1、由P正定知：$P=TT'$　令：$Q_1=T^{-1}QT^{-1'}$

$$S_1=T'ST$$

则由已知有：　$S_1>Q_1S_1Q_1$

又知，存在正交阵：0，　$Q_1=0\,\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)0'$

令：$S_2=0'S0$　代入上式又有：

$$S_2>\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)\,S_2\,\mathrm{diag}(\lambda_1\cdots\lambda_n)$$

比较上边等式两边主对角线上元素应有

$$\lambda_i^2<1\qquad(i=1,2,\cdots,n)$$

故 $\lambda_i<1$　　故 $Q_1<I$，由此 $Q<TT'=P$

2、提示：对充分大的 x，令：$f_m(x)=\ell nx\,\ell n\ell nx\cdots\underbrace{\ell n\ell n\cdots\ell nx}_{m\text{次}}$

则：$$a_k^{-1}\geqq\int_k^{k+1}\frac{dx}{f_1(x)\cdots f_m(x)}$$

$$\exp^{m-1}e<k<\exp^m e$$

故：$$\sum_{\exp^{m-1}e\leqq k\leqq\exp^{m-1}e}a_k^{-1}\geqq\int_{\exp^{m-1}e}^{\exp^m e}\frac{dx}{f_1(x)\cdots f_m(x)}$$

$$-\int_{\exp^{m-1}e}^{\exp^{m-1}e+1}\frac{dx}{f_1(x)\cdots f_m(x)}$$

令：$y=f_m(x)$ 得前一个积分为1，而后一个积趋于0（$m\to\infty$），

故：级数发散。