

蛙鸣

第 55 期

中国科学技术大学

《蛙鸣》编委会

主办

数学系学生会学习部

二〇〇〇年六月

目 录

治学篇

- 数学及其在中国的发展 丘成桐 1

数学探幽

- 幻方(二) 尹治军 10

- 修道士, 斑点和常识 Ian Stewart 13

研究与讨论

- 旋转曲面上曲线测地曲率的线积分 吕金翅 17

- 一道分析题的推广与运用 吕金翅 23

- 极小曲面的 Weierstrass 表示及其 Gauss 映射 孙 强 屠海瑞 27

- 用 Cauchy 积分公式证明 Cayley-Hamilton 定理 方 明 30

数学史话

- 费马的最后抵抗 Simon Singh, Kenneth A. Ribet 32

试题选登

第五十六届 William Lowell Putnam 数学竞赛解答

- L. F. Klosinski, G. L. Alexanderson, L. C. Larson 42

本期主编 何晨旭

责任编辑 方 明 何晨旭

数学及其在中国的发展

丘成桐

大家知道，在解放前，清华大学在数学方面是有非常优秀的传统的。后来，这个大学决定重点发展技术和应用数学，学习数学只是为了服务于技术和其他科学分支。然而，这种途径并不很有效，结果反而影响了应用数学的发展。如果考察一下中国的应用数学家就会了解这一点。我发现很难找到 40 岁以下的真正一流的应用数学家。过去的 20 年里，我和许多人讨论过这种现象的原因。发现原因是应用数学家在纯数学的基本技巧方面没有得到很好的训练。青年数学家有很大的学习潜能，他们应该学习纯数学的基本技巧，这不仅是我们中国也是全世界都应该吸取的一个教训。

应用科学需要数学，但同时，数学本身也是一门艺术。非数学家是很难理解这一点的。我们的确欣赏其他基础科学领域，特别是基础物理的进展。例如，当物理中发现一个新定律时，我们相应地改变我们的观念。但是，我们有自己的价值观，我们应该牢记这一点。

我会谈谈我对数学的看法，但请注意，许多人并不同意我的观点。我将从全局的观点来谈谈什么是数学以及如何发展数学。数学的基本特性来源于许多不同的科学部门。我们知道，科学，尤其是基础科学，象物理学，是自然的一部分，但表述物理学的基本语言是纯数学。对此已经不再有任何争议。然而应用科学，比如工程、甚至社会科学的基本工具也来自于数学。例如，当今金融市场就聘请大批的数学家，然而数学的审美观和数学的发展是相互影响着的。我们一方面要欣赏我们自身的价值，一方面要了解外界对数学的推动作用。我们必须了解数学自身的发展规律，否则数学就无法发展，相信可以把数学当作一个服务性学科来发展的想法是错误的，反过来说，应用科学提供很多重要的素材，对数学有很大的推动作用。

数学的基本内容是很复杂的。例如，数学的非常基本的部分涉及数。与科学家讨论数是否是自然界的一部分总是很有趣的。许多科学家认为自然数不是自然的一部分。数相加， $1 + 1 = 2$ ，是再自然不过的了，但许多物理学家不同意这个观点。

让我们谈谈几何图形，球面和直线的概念对我们来说是自然的一部分。你觉得球面的概念没有粒子的概念来得那么自然吗？但物理学家确实这么认为。这不会影响数学家们的看法，因为我们知道我们关心什么。

当我们研究几何图形和数时，我们必须研究函数关系以及许多不同类型的方程，包括代数方程，微分方程，积分方程以及差分方程。研究这些方程可以帮助理解几何图形，也是为了理解物理和工程中出现的问题。

为了理解所有这些对象，我们常常需要对称的概念。在许多情形，这些对称性以有限群，离散群或者连续群的形式出现。为了探索对称性，数学家们发展了群表示论。

数学中也包括概念论，统计学和复杂性理论，这些学科来源于社会科学，计算机科学和自然科学。来源于自然的一些对象使我们困惑，例如 Dirac 方程，它对数学影响很大，我们必须把它当作数学的一部分。

数学中的基本对象必须这样来选择：数学对象除了来自于自然和技术外，我们也研究为试图理解自然而构造的对象（这包括算子代数，四元数等）。当这些对象的理论很丰富时，我们认为它本身是自然的一部分。这都是数学的基本研究对象。

空间或几何的概念就是这样一个例子。我们认为球面和 Riemann 面是自然的一部分，这些对象实际上是我们为了理解自然而造出来的，而我们认为它们是自然的一部分，我将回顾过去几百年来空间的概念是如何演化的，以论证这一观点。

当然我们知道空间是物理中的一个基本概念，数学家也是这样认为的，但空间的引进方式不同，很自然我们从直线，圆周，三角形和多边形的研究开始。因为这些对象很直观。它们是 Euclid 几何中的基本对象经过一段很长的时间后，数学家们终于能够理解这些对象。后来又发明了微积分来理解像曲线和曲面这样更复杂的对象。它们的发展也花了很多时间，之后这方面的研究开始迅速进展。

为了理解 3 维空间的曲面，Gauss 引入了曲面的内蕴性质，曲面未必要落在 R^3 中，它们有自己内蕴的意义。这一点是由 Gauss 本人和 Riemann 注意到的，由于 Gauss 的这个伟大发现，我们命名了 Gauss 曲率这个术语，这正是现代几何的开始，现在我们可以把 3 维空间中的曲面看作一个抽象的弯曲曲面，为了理解复解析函数以及它们的定义域，Riemann 引进了 Riemann 面，这两个概念之间的关系比它们乍一看起来要密切得多，不久关于抽象流形的许多重要思想由许多几何学家在本世纪和上世纪之交发展起来了，Einstein 需要这些思想用于他的重力理论。

大约在 19 世纪后期，著名的法国数学家 Poincaré 引进了拓扑学。他研究高维流形的拓扑是为了理解动力系统的相空间。我记得，仅仅是 20 年或 30 年前还有人问我，既然人类见到的只有 2 维或 3 维空间，数学家为什么还要研究高维空间，事实上高维流形对于理解低维空间很重要，同时对任意维数的空间分类所引起的数学工具在二十一世纪的数学起着很重要的功用，二维曲面由环柄的个数来分类。如果我们知道曲面环柄的个数，我们就知道这个曲面是什么样的。很自然，我们希望高维空间也能用代数不变量来描述，这样便立即引进了同调和同伦的概念。群论和环论也被引进拓扑的研究中，而拓扑方法又反过来也影响了群论和代数的发展，我们看到不同的数学分支在这里聚汇，这发生在本世纪早期，而由此引发的数学进展则数不胜数。

Morse 理论是用来研究函数的临界点的。在本世纪初，在 Poincaré, Birkhoff, Morse 的带领下，许多人试图用拓扑来证明临界点的存在。拓扑的丰富结构制约着许多临界点的存在性，很长时间里，人们利用这种手段研究临界点。Bott 和 Smale 把这个过程反了过来，用函数的临界点来理解流形的拓扑。Smale 用这个想法解决了维数大于 4 时的 Poincaré 猜想，虽然 Poincaré 猜想只是一个单独的问题，而这一套思想对高维流形的理论是至关重要的。Smale 引进的环柄理论已经成为拓扑中的基本工具，这里我们看见从函数论引进的想法成为理解空间的一个基本工具。

Bott 和 Smale 研究了可以相互连续形变的那些空间。但数学家也想了解光滑空间。为了理解空间的光滑结构，我们必须考虑丛，这最早是由 Whitney 引进的。为了理解抽象流形，Whitney 试图把流形嵌入到 R^n 中，为此引入了切丛的

概念。他研究了切丛，而这又自然地引出法丛的概念。有了这些，就要弄清丛的一般构造。Whitney 把这些当作研究浸入理论的工具，后来 Hopf 和其他人发现从纤维丛构造空间是很重要的。要理解所有这些概念，我们需要关键的一步：Stiefel 和 Whitney 引进了称为 Stiefel-Whitney 类的代数不变量。后来 Pontryagin 研究了实数域上的可定向丛。陈省身则对复丛发展了一套类似的理论。结果发现这些“示性类”是非常自然而又基本的对象。示性类被用来对丛进行分类，因此是用来分类空间的一部分数据。数学家们研究这些只因为他们想知道空间是什么。从同调结构，同伦结构，到光滑结构，最主要的工具就是代数。同时，Cartan 则研究了这些丛上的联络，并研究了这个理论的解析形式。

很早（1940 年前后）人们就认识到向量丛是代数几何中的基本工具。例如，对于 Riemann 面理论来说很基本的一个内容是 Riemann-Roch 定理。这是一个用来描述代数方程（组）解的个数的公式。在四十年代末，好几个人，例如 Serre 和 Kodaira，提出了一个高维 Riemann -Roch 公式。1954 年，Hirzebruch 用丛的陈类这一语言证明了被猜测的这个 Riemann-Roch 公式是正确的。后来，Grothendieck 引进了拟丛，K 理论得到了发展，这些对于用代数的方式来推广空间的概念有深远的影响。本世纪六十年代早期，Atiyah 和 Singer 把 Riemann-Roch 公式推广为椭圆算子的指标定理。这在分析和几何之间建立起一种至关重要的联系。

本世纪四十年代后期，Weil 认识到用几何的方式可以很好地理解数论中的许多重要问题。因此他试图研究定义在有限域上的空间。现在空间不再是连续的，但是具有代数结构。这种空间的概念来自于以下的基本概念：一个空间上所有函数作成的空间决定了这个空间本身。数学家们认识到空间是由它上面的函数所决定的这一点是数学发展史中的一个转折点。于是我们可以通过考察代数而不是空间本身来确定这个空间的结构，沿着这个方向，可以弄清许多与数论有关的问题。空间的概念在 Grothendieck 和一些人那里有了绝然不同的意义。他们这样做是为了解决 Weil 猜想，代数几何与数论中的许多重要问题在这个框架内得以解决，代数方法的一项伟大成就就是 Deligne 最终解决了 Weil 猜想。

从 19 世纪初开始直到本世纪六十年代，空间概念的演化主要发生在数学的内部。唯一的例外的是广义相对论和 Hodge 理论给我们带来的观念。后者是流形上的 Maxwell 理论。Hodge 理论是几何中最有威力的工具之一。这个理论是这

样自然以至于我们都忘记了它也来自于物理学、广义相对论告诉我们，时空可以由几何来描述，奇点在空间中会自然出现，因此我们就得研究它们。

尽管我们对维数大于 4 的光滑空间的了解已经比较清楚，但对我们对奇点的了解仍然不多。我们首先发展了光滑空间的概念是因为我们对它的了解比较清楚。但是奇点的出现非常自然，因此我们必须理解它们。奇点已经成为一个十分重要的课题而且或许会成为下世纪最重要的研究课题之一。

我们对由一组多项式定义的奇点的概念了解得比较好。你可以考虑一组多项式的零点集。有时这个集合的奇点很容易理解。例如，曲线 $x^2 = y^3$ 这一情形，它在原点有奇点。但是对高维奇点的理解就极其困难了，对这类奇异性，Hironaka 证明了一个定理，它使我们能用光滑代数流形来把握奇点。奇点与焦散面，振荡积分，超弦论中的空间密切相关。在许多基本领域都出现了代数奇点，但要理解它们仍很困难。

奇异空间也自然地出现在图及单纯复形的理论中，它们都具有许多类似于光滑空间的性质并且正在得到研究，它们来自于组合问题，数论和群论。

我们所遇到的最难于理解的奇点来自于自然科学，特别来自于非线性方程或者由动力学变化模式所定义的奇异性。这是因为我们对非线性方程的理解不够，多项式我们可以写下来，用手算或用计算机来研究它，但要求解非线性方程则是非常困难的。因此，我认为，奇点是怎样产生的，如果产生了，它们的性质如何，这将是下个世纪的基本问题。

这里大量的问题是受 Einstein 方程启发而来的。有几个基本问题，从一个非奇异空间演化而得的空间有什么样的性质？黑洞是怎样产生的。空间中除了黑洞外还有没有其它奇点？遵从 Einstein 方程的空间中奇点是从哪里来的？它们与数学中奇点的一般结构有何关系？

到目前为止，我们还没有讨论过 3 维或 4 维空间，过去十年里这是一个最重要的课题。从本世纪 70 年代开始，我们研究了流形上的函数和非线性方程，我们要用这些对象来理解 3 维或 4 维空间。（拓扑学家早就知道高维空间拓扑中的经典方法不足以解决这两个维数的问题）。当维数为 3 时，考虑 Einstein 方程

$$R_{ij} - \frac{R}{2}g_{ij} = T_{ij}$$

数学家们感兴趣的是 $g_{ij} > 0$ 的情形，这比 Lorentz 的情形要容易掌握，更简单一

些，取 $T_{ij} = 0$ ，这种空间称为是 Einstein 空间，这时

$$R_{ij} = Cg_{ij},$$

其中 C 是常数，相对论学家研究这个方程已有很长时间了。数学家们立刻要问的是下面的问题：给了一个空间，什么时候它是 Einstein 空间？假如答案是肯定的，如何把它们参数化？一个非常重要的特例是 $C = 0$ 的情形，当 M 是复流形时，相应问题已经得到解决。 M 没有特殊结构（没有自然的方式固定规范）的情形将是 21 世纪的主要问题。当维数是 2 时，问题已得到彻底解决。对 3 维情形，这是我们要问的最令人兴奋的问题之一。我的朋友 Hamilton 将动力学引进了这个方程。它对应于物理中的重整化流。他引入重整化流只是因为它看起来很美妙。然而，他后来能证明一些漂亮的定理并应用于几何的研究。考虑定义在有度量的空间上的演化方程

$$\frac{dg_{ij}}{dt} = -2R_{ij}$$

十年前，我建议 Hamilton 设法证明能把 3 维流形上的任何度量适当地形变为具有“Einstein 结构”的流形之和，这就要求我们能彻底地掌握演化过程中奇点的结构，在 3 维情形，Einstein 结构与常曲率流形结构相同。而常曲率流形的分类是知道的。假如我们对每一小块理解透了，我们就能完全掌握 3 维空间的拓扑。这可能是第一次有机会弄清楚非线性演化方程组的奇点结构，在这方面我们正在取得进展。

对 4 维情形，遵循同样的途径仍然会是很有趣的，但在现阶段可能有点力不从心。根据 Taubes 关于自对偶 Yang-Mills 方程的存在性定理，Donaldson 引进了 4 维流形上的一个新不变量。我们已经从物理学那里知道研究 Yang-Mills 方程的自对偶解是有意义的。Donaldson 成功地把问题反了过来，他用自对偶方程的模空间来帮助理解拓扑。Seiberg 和 Witten 最近的工作是物理和几何之间又一次成功的统一。它提供了研究 4 维拓扑的一个新工具。

空间的概念现在又遭到弦论专家的挑战，弦论中的对偶性可能要求有新的空间的概念才能解释。我们不知道这样的概念究竟该是什么样的，许多人都在研究这个问题。同时，它涉及到研究时空的奇异结构。

从上面的历史中我们可以吸取很多教训。首先，中国数学家会发现要想涉足不同的研究领域似乎特别困难，历史告诉我们，数学上的伟大成就大部分是得

益于理解某一特殊的课题，所用工具则来自于不同的领域，比如力学，广义相对论，数论以及非线性方程。当它们被结合起来解决特别的自然问题时，它们就变得更重要了。第二，在上述过程中，产生了许多新概念。其中有些概念变得非常重要甚至导致新学科的诞生，而另一些就消失了，因为它们对我们理解自然没有任何贡献。第三，在许多方面，数学的发展与物理学类似，我们要做实验。我们向物理学和技术科学学习。我们用手或计算机做许多计算，我们也会做许多现象学的研究，我们会提出许多猜想。许多猜想的提出是试图知道正确的方向是什么样的。我很少见到中国数学家提出比较有意义的猜想，数学的一般理论需要大量的现象学研究，我们不能只解决别人提出的问题。我们必须创设我们自己的问题，只有这样我们才能发展出一般理论。我们应该明白什么是有用的理论，有用的理论必须能用于理解现象学的研究。当我们发展一个一般理论时，我们不是为了服务于其它学科，而是基于它自身的美以及达到和谐统一的愿望。

下面我用中文就中国数学家的问题说几句。

我们要谈中国数学的未来发展，先看一下我们的过去，我们中国人习惯上讲自己很了不起。事实上，中国古代数学主要贡献在计算及其实用化，我们算圆周率算得位数很高，但是对数学理论没有系统化的研究，基本上抗拒几何学的逻辑结构和发展抽象代数。在我看来，它们在中国从来没有生过根，我们对传统的科学有不合理的热爱，结果不能接受新的观念，也不能对应用数学作出贡献。虽然我们对应用数学有极高的热情，由于我们不愿意学习基本的，系统化的数学理论，结果对应用数学也不能做出伟大的贡献。

中国近代数学能超越西方或与之并驾齐驱的主要有三个，当然我不是说其他重要工作不存在，主要是讲能够在数学历史上留名的有三个：一个是陈省身教授在示性类 (characteristic class) 方面的工作；一个是华罗庚在多复变函数方面的工作；一个是冯康在有限元计算方面的工作。我为什么单讲华先生在多复变函数方面的工作，这是我个人的偏见。华先生在数论方面的贡献是大的，可是华先生在数论方面的工作不能左右全世界在数论方面的发展，他在这方面的工作基本上是从外面引进来的观点和方法。可是他在多复变函数方面的贡献比西方至少早了 10 年，海外的数学家都很尊重华先生在这方面的成就。所以，我们一定要找到自己的方向，我想这是一个很重要的看法。我们要从数学的根本上找研究方向，

我们近 20 年来基本上跟随外国的潮流。我们没有把基本的想法搞清楚，所以始终达不到当年陈先生、华先生或冯先生他们的工作。我想我们一定要找自己的方向，可是我们在很多方面的知识还很缺乏。我们一定要在了解了其他方面的发展后才能发展自己的方向。所以一方面要发展自己的方向，一方面要了解其他方面的发展，我们下面举个例子讲。

分析方面我以为非线性微分方程是主要方向，可是为研究非线性方程，线性方程和古典的调和分析基础一定要打好，当然特殊函数、傅立叶分析 (special function, Fourier analysis) 都是主要工具。可是非线性方程不宜作太一般的研究，一定要与微分几何、物理学以及其他自然科学相结合，由大自然指导我们研究。双曲型方程无论线性、非线性都值得发展，我们要发展自己的特色。中国这 10 多年在守恒定律 (conservation law)，空气动力学 (gas dynamics) 方面有一定成就，可是在高维空间 [即空间维数 (space dim) > 2] 没有贡献。这方面我觉得是重要的，不仅中国没有贡献，而且全世界也没有贡献。从数学分析上讲，高维空间的动力系统很明显与几何有密切联系，因为维数大了的话，几何的意义特别重要，张量分析是研究高维空间的重要工具，因此会在高维流体中起重要作用，椭圆型方程的奇异点问题也值得深入研究。

离散化的动力系统和离散组合数学在应用科学方面起着很大的作用，它们的发展应该与上述的非线性方程理论平行发展，近代自动化系统的研究所和金融数学都有很值得研究的随机性方程。

从基本粒子方程推导流体力学方程是很有意义的一门学问，流体力学中的奇异点问题和湍流的研究将是未来一个很具挑战性的数学问题。

几何方面我们其实有很多方面可以做研究的，如“爱因斯坦方程的深入研究，极小化流形、规范场等。几何研究方面的重要突破需要深入的存在性定理。三维空间和四维空间的深入理论和方程的存在性理论有密切的关系。同时古典几何中的刚性问题、嵌入问题、曲面的构造问题都与工程学息息相关，很值得研究。

代数方面以代数几何、数论为主。Hodge 猜测是主要的研究对象，其对向量丛 (Vector bundle) 的关系也值得研究。另外，由弦 (string) 理论引起的代数和数论问题也值得研究，统一场论将会作成数学的大一统，很值得注意。

数论方面以 Langlands 理论和算术几何 (arithmatic geometry) 为主要方向。

最后，我再讲几句话，我前面所讲的主要与物理有关。其实，实际工作中很多问题跟我们纯数学有很大关系。举个例子讲，我最近遇见几个曾是清华大学的学生，他们现在在哈佛念工程专业。他们跑来和我谈计算几何方面的问题，如把图像运动表示出来等。我发现这些学生由于念工程的缘故，在微分几何方面完全没有得到培训，其实主要的问题都是古典的几何问题。念工程的学生没有得到基本的训练，他们对很多问题没有办法了解，这是一个不幸的情况。在本科时应该让他们把一些基本课程练好，很明显这和以后有关。作一个图形表示问题很明显和古典微分几何有关，可是没有学好。所以，我希望学工程的人花一点时间在纯数学上去，我想打破门户之见是目前最重要的问题。

在这次演讲会中，Esaki 教授说到，做基础研究的人愿意做“没有预见到的研究”。因此，预言会发生什么事是不明智的。相反我回顾了我们曾有过的过失，我希望我们能从历史中吸取教训。我确信许多中国数学家将在未来的十年里成为一流的数学家。

幻 方 (二)

9601 尹治军

在上一期的《蛙鸣》杂志中, 《数学奇葩——幻方》一文曾介绍过关于幻方的一组理论结果: 2 阶幻方不存在, 3 阶幻方存在且唯一, 而 4 阶以上的幻方存在且不唯一。当然唯一性是在同构意义下而言的。同时提出了两类幻方的简单解决办法: 即阶数为 $2n+1$ 和 $4n$ 的两类幻方。本文将着重讨论 $4n+2$ 阶的幻方, 通过构造性的方法解决存在性命题, 同时顺带指出此类幻方不能保证唯一性的缘由。

首先, $4n+2$ 必可分解为 2 和奇数 $2n+1$ 的乘积。引入三个 2 阶的基元方阵, 其保持行和相等的性质: $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 并记其表示符号依次为 L, U 和 X 。用《数学奇葩——幻方》一文引述的奇数阶幻方构造法, 可简易的得到一个 $2n+1$ 阶的幻方。准备工作到此已经就绪, 为便于读者理解, 下面以 10 阶幻方为例阐述该构造过程。

第一步, 将已构造出的 5 阶幻方中各数均减一后再乘以 4, 得到一个新的 5 阶方阵。

11	24	7	20	3		40	72	24	76	8
4	12	25	8	16	→	12	44	95	28	60
17	5	13	21	9		64	16	48	80	36
10	18	1	14	22		36	68	0	52	34
23	6	19	2	15		88	20	72	4	56

第二步, 考察基元方阵的性质。(1) 三个基元方阵都满足行和相等。(2) 列和: L 构型左列之和比右列之和大 2, 记为 $L(+2)$; U 构型左列之和比右列之和小 4, 记为 $L(-4)$; X 构型左列之和比右列之和小 2, 记为 $L(-2)$ 。(3) 对角线和: L 构型主对角线之和比副对角线之和大 4, 记为 $D(+4)$; U 构型主对角线之和比副对角线之和小 4, 记为 $D(-4)$ 。

副对角线之和小 2, 记为 $D(-2)$; X 构型主对角线之和比副对角线之和小 4, 记为 $D(-4)$.

第三步, 要保证 L 构型, U 构型和 X 构型作单元的五阶符号方阵(实质已是一个十阶整数方阵)保证代入数字后所形成的各列之和相等, 故得方程 $2x - 4y - 2z = 0$, 其中 x, y, z 依次为某列中 L 构型, U 构型和 X 构型出现的次数. (同时有约束方程 $x + y + z = 5$) 该不定方程的非负整解可构成一个容许集合 M . 此处 $M = \{(3, 1, 1)\}$.

第四步, 要保证该十阶整数方阵的主对角线之和与副对角线之和相等, 故得方程 $4p - 2q + 4r = 0$, 其中 p, q, r 依次为主对角线或副对角线中 L 构型, U 构型和 X 构型出现的次数. (同时有约束方程 $p + q + r = 5$) 则该不定方程的非负整解可构成另一个容许集合 N , 此处, $N = \{(2, 2, 1)\}$.

第五步, 借助第三, 第四步的结论, 排出一个 5 阶符号方阵, 其中每列各构型出现次数由容许集合 M 中选取, 主对角线和副对角线上各构型出现次数由容许集合 N 中选取. 具体排出一个如下:

L	L	L	L	L
L	L	L	L	L
L	L	U	L	L
U	U	L	U	U
X	X	X	X	X

第六步, 将第一步得出的基础矩阵扩张成为一个十阶方阵后与第五步结果相加, 即得出十阶幻方. 其扩张的办法为每个数位变为一个 2×2 的子方阵, 其各位上的数字均与原数位上的数字相同.

44	41	95	93	38	25	80	77	112	9
42	43	94	95	26	27	18	79	10	11
16	13	48	45	1100	97	32	29	64	61
14	15	46	47	98	99	130	31	62	63
55	65	20	17	49	52	184	81	42	37
66	67	18	19	52	51	62	83	38	39
37	40	59	72	4	1	53	56	85	88
38	39	70	71	2	3	54	55	86	87
89	92	21	24	73	76	5	8	57	60
91	90	23	22	75	74	7	6	59	58

构造的过程中, 绝大部分都是平凡的. 容易引起注意的主要集中于以下几

点： 1. 基元 2 阶方阵的选用上， $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ 也是可选的。这可通过限制数字 1 和数字 4 在第一行而由简单的排列组合而自然地得出。 2. 不定方程非负整数解的存在性问题。若基元矩阵如前文方式选取，将约束方程代入消元得

任选其中一组方程，因其未知元系数均互素，故在不考虑约束方程时，其必有非负整数解，而随着 n 的增大，其约束力减小，无解情形越发不会出现，对较小的几个 n 值，不难验证其都有解。

对 $4n+2$ 阶幻方的不唯一性，可由第五步所排出的 5 阶方阵其第 1,5 两行可对换，其 2,4 两行可对换上直接看出，对换其中一组后所得出的幻方必然与原幻方是不同构的。而随着 n 值的增大，这种可调整的可能性进一步增大，故对所有的 $4n+2$ 阶的幻方，都有其不唯一的结论。

细心的读者恐怕注意到, 其构造的思想根源于整数的因式分解 故其是可推广的. 具体的说, 若一个大于 2 的整数 n 有分解式 $n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_k^{s_k}$, 其中 p_1, p_2, \dots, p_k 是互不相同的素数, 只要其不是 2^a 型的, 都可用此种方法由低阶幻方面而分步构造出来.

修道士、斑点和常识

Ian Stewart

帕勃勒会的那些极有礼貌的修道士们喜欢相互搞一些逻辑上的恶作剧。一天夜里，当修道士 Archibald 和 Benedict 正在酣睡时，修道士 Jonah 偷偷溜进了他们的房间，在他们每人的光头上各涂了一块蓝色的斑点。当他们醒来后，每个人都注意到对方的头上有一块斑点，但出于礼貌起见，他们都没有吭声。每个人都在隐隐约约地想，不知他自己头上是不是也被画了一个斑点，但同样出于礼貌起见而不好意思问对方。然后修道士 Zeno 走进了房间。他还没有学到处世圆滑的那一套本领，因此格格地笑了起来。当房间里的两位修道士问他为什么要笑时，他只是说：“你们中至少有一人的头上有一块蓝色的斑点。”

其实那两位修道士都已经知道了这一点。但是 Archibald 开始这样想：“我知道 Benedict 的头上有一块斑点，可他并不知道。我的头上是不是也有一块斑点？嗯，假定我头上没有斑点。那么 Benedict 应该能看到我头上没有斑点；根据 Zeno 所说的话，他立刻就能推断出他头上必定有一块斑。但他却没有表现出任何一点尴尬不安的样子——喔，这说明我头上肯定有斑点！”想到这里，他的脸涨得通红。差不多就在些时，Benedict 的脸色也变红了，其原因大致差不多，如果 Zeno 不说那句话，他们两人谁也不会产生那一连串想法。然而，从表面上看来，Zeno 并没有告诉他们任何他们还不知道的事情。

不过，当你开始仔细分析这件事中所发生的情况时，你就会明白。Zeno 所说的话——“你们中至少有一人的头上有一块蓝色的斑点”——的确包含了新的信息。这些修道士实际上知道些什么呢？嗯，Archibald 知道 Benedict 的头上有一块斑点，而 Benedict 则知道 Archibald 的头上有一块斑点。Zeno 的话不仅仅是告诉了 Archibald 有一个人的头上有斑点——它同时也告诉了 Archibald。Benedict 现在知道某个人的头上有斑点。

象这样类型的考人难题还有许多。有的讲的是脸上涂得又脏又乱的小孩，有的讲的是戴着滑稽帽子的社交聚会参与者。这些逻辑难题称为“众所周知”难题 (common knowledge puzzle)。因为它们全都依赖于某一群人中每个人都知道的一段陈述。该陈述的内容是什么并不重要，重要的是这一事实：每个人都知道其他每个人知道此陈述。一旦这个事实成为众所周知的，就可以根据其他人对此的反应进推断。

如果我们尝试对 3 个修道士解决这一难题，那么上述效果就会更加令人迷惑。些时假定是修道士 Archibald、Benedict 和 Cyril 在他们的房间里睡觉。而 Jonah 溜进去在他们每个人的头上涂了一块蓝色斑点。当他们醒来后，又是每个人都看到另外两个人的头上有斑点。但没有吭声。随后 Zeno 进来说出了那句令每个人都惴惴不安的话：“你们中至少一人的头上有一块斑点。”

于是这句话使得 Archibald 开始想道：“假定我头上没有斑点。那么 Benedict 就会看到 Cyril 头上有一斑点而我没有。这样他就可以思考他自己的头上有没有斑点。他可以这样推想：‘如果我 (Benedict) 头上没有斑点，那么 Cyril 就会看到 Archibald 和我头上都没有斑点。据此他立刻可以推断出他自己头上有一块斑点。由于 Cyril 有足够的时间来推想出这一点，但他却还是一副若无其事的样子，因此我 (Benedict) 的头上必定有一块斑点。’既然 Benedict 也有足够的时间来推想出上述结论，但他却还是泰然自若，毫无尴尬之色，那么就可以推断出我——Archibald ——必定有一块斑点。”想到这里，Archibald 的脸开始胀得通红——而 Benedict 和 Cyril 也是如此，因为他们的推理思路都是差不多的。

同样的逻辑也适用于 4 个、5 个或更多的修道士的情形，只是他们的推理过程将变得越来越复杂。假定有 100 个修道士，每个人的头上都有一块斑点，但每个人都不知道自己的头上有斑点，而且每个人都有具有奇快的逻辑推想能力。为了使他们的思考过程同步进行，假定修道院院长有一个摇铃。该院长对修道士们说：“每 10 秒钟我将摇一次铃。铃声响后，如果你们中有人能推想出自己头上有斑点，就把手举起来。你们中至少有一个头上有斑点。”他摇了 99 遍铃都无人反应，但他摇了第 100 次铃后，所有 100 个修道士都同时齐刷刷地举起了手。

这一逻辑推理的过程如下。如果只有一名修道士，他立刻可以推想出斑只能在他的头上，因此在院长摇第 1 次铃后他就举起了手。如果有两位修道士，则每

个人开始时都假定自己头上没有斑点，因此在院长摇第 1 遍铃后谁也没有举手。然后每位修道士都可以从对方的反应中推断出自己的假定是错误的：“如果我的头上没有斑点，那么我的同伴必定就会举手。既然他没有举手，那就说明我的头上肯定有斑点。”因此，在院长摇第 2 遍铃后，两个人同时举起了他们的手。这一推理方式对任意数目的修道士都是相同的，它是数学归纳法的一个例子。数学归纳法的原理是，如果数 n 的某一性质在 $n = 1$ 成立，并且当我们假定它对于 $n + 1$ 也成立，那么该性质必定对于所有的 n 均成立。如果有 100 位修道士，那么每位修道士都会假定他自己头上没有斑点，并期望在摇第 99 遍铃后其他 99 位修道士全都举起他们的手。出于这一期望落了空，每位修道士都有立刻意识到自己先前的假定是错的，因此在摇第 1 百次铃后就举起了自己的手。

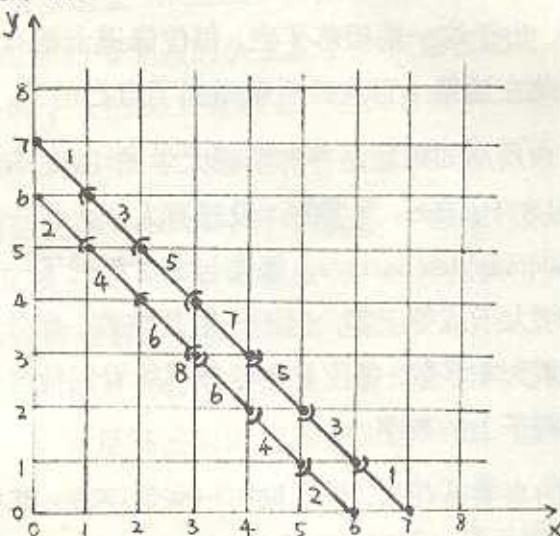
另外一个引人入胜的众所周知难题是普林斯顿大学的 John. H. Conway 和英国沃尔威克大学的 Michael S. Paterson 发明的。设想有人举办了一个“狂热数学家”茶会（Mad Mathematicians' tea party）。每位与会者都戴了一顶帽子，上面写有一个数字。该数字必须大于或等于零，但不一定是整数；此外，至少有一位与会者的帽子上的数字必须为非零数。每位与会者都不能看到他自己帽子上的数字，但能看到其它每个人帽子上的数字。

现在来看看众周所知的事实是什么。墙上贴有一张数字表，其中有一个数字是与会者帽子上所有数字之总和的正确答案。假定表上列出的数字的个数小于或等于与会者的人数。每隔 10 秒钟铃声响一次，铃声响后任何一个如果知道他帽子上的数字是多少——或者知道正确的总和数字是哪一个（这两者是一回事，因为这个人能够看见其它每个人帽子上的数字）就必须宣布这一事实。Conway 和 Paterson 证明，运用完美的逻辑推理，最终某位与会者将作出这样的宣布。

考虑只有两位与会者的情形。假定他们的帽子上的数字各为 x 和 y 。并假定贴在墙上的数字表有 6 和 7 这两个数。两位与会者都知道 $x + y = 6$ 和 $x + y = 7$ 这两个等式中必有一个成立。从几何学角度而言，满足这两个条件的数对 (x, y) 是平面的第一象限中的两条线段上的点的坐标（见图）。如果 X 大于 6，则与会者 Y 将在响第一道铃后结束游戏，因为他立刻就可以看出两数之和等于 6 是不可能的。类似地，如果 Y 大于 6，则与会者 X 将结束比赛。如果在响第一道铃后两位与会者都没有反应，那就排除了上述这些可能性。接下来，如果 X 或 Y 小

于是，则游戏将在响第二道铃之后结束。这是因为，两位与会者之一能够看到其数字小于 1 的那顶帽子，从而立刻知道他自己的那顶帽子上的数字必定为 6 或小于 6。这样，两数之和为 7 的情形就被排除了。

每响一道铃后被排除的数对 (x, y) 构成了两条原始线段上依次排列的一些对角线段。这样很快就能找到所有各种可能情况。如果 x 和 y 都等于 3，那么到响到第 8 道铃声时这一游戏必定结束。其它每一种可能的情况需要铃声响 7 次或 7 次以下。类似的论证也可以用于有 3 位或 3 位以上与会者的情形，只不过其证明在数学上更复杂罢了。



旋转曲面上曲线测地曲率的线积分

9701 吕金翅

凡是学过微分几何的同学，大概不会忘记 Gauss-Bonnet 公式吧，这个具有简单数学形式表达的等式却将曲面的拓扑不变量 $\chi(s)$ (曲面 s 的 Euler 示性数) 和微分几何的不变量(Gauss 曲率)和谐的统一在一起。我下面所要论述的就是涉及 Gauss-Bonnet 公式的实际应用。

对于旋转曲面 S ，我们自然会问 S 上任意一条简单闭曲线 c ，曲线 c 的测地曲率 kg 沿 c 的积分 $\oint_c kg ds$ 具有何种形式呢？当然这个问题并不容易回答。我们先考虑可展的旋转曲面。可展曲面上 Gauss 曲率恒为零。如果 S 为平面，则 c 包围的区域 D 是曲面 S 上的一个单连通域，因而由 Gauss-Bonnet 公式，

$$\oint_c kg ds = 2\pi - \iint_D kd\sigma = 2\pi - \iint_D od\sigma = 2\pi$$

如果 S 为圆柱面，不妨设为 $(a \cos u, a \sin u, v)$, $a > 0$, $\vec{r}_u = (-a \sin u, a \cos u, 0)$, $\vec{r}_v = (0, 0, 1)$, $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$, $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1$ ，因而 (u, v) 是正交系，由 Liouville 公式，

$$kg = \frac{d\theta}{ds} - \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \ln E}{\partial v} \cos \theta + \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \ln G}{\partial u} \sin \theta,$$

其中 $\theta(s)$ 表示曲线 c 与 u - 曲线在 s 处所成的方向角。由于 E, G 恒为常数，于是 $kg = \frac{d\theta}{ds}$, $\oint_c kg ds = \oint_c d\theta$ 是 $\theta(s)$ 在起、终点的值之差。如果 c 并不与所有的 v - 曲线相交，则 $\oint_c d\theta = 2\pi$ ；如果 c 与所有的 v - 曲线均相交，则 $\oint_c d\theta = 0$ ，此时 c 包围的区域不再是曲面 S 上的一个单连通域，因而无法运用 Gauss-Bonnet 公式进行求解，我们可以换一个角度看待这个问题，注意到半径为 $r(r > 0)$ 的球面上的 Gauss 曲率恒为 $1/r^2$ ，下面考虑将柱面与球面的一部分进行光滑粘接，这里不妨

可设 c 在 $v=0$ 曲线的下方. 令

$$S_1 : (a(1 - e^{-\frac{1}{\lambda v}}) \cos u, a(1 - e^{-\frac{1}{\lambda v}}) \sin u, v),$$

$$\vec{r}_u = (-a[1 - e^{-\frac{1}{\lambda v}}] \sin u, a[1 - e^{-\frac{1}{\lambda v}}] \cos u, 0)$$

$$\vec{r}_v = \left(-\frac{a}{\lambda v^2} e^{-\frac{1}{\lambda v}} \cos u, -\frac{a}{\lambda v^2} e^{-\frac{1}{\lambda v}} \sin u, 1 \right),$$

$$E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = a^2 [1 - e^{-\frac{1}{\lambda v}}]^2, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1 + \frac{a^2}{\lambda^2 v^4} e^{-\frac{2}{\lambda v}},$$

因而 (u, v) 是正交系, 于是

$$K_\lambda(v) = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(E)_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\} = \frac{\varphi'_\lambda(v)}{(1 - e^{-\frac{1}{\lambda v}})[1 + a^2 \varphi_\lambda^2(v)]^2}$$

其中 $\varphi_\lambda(v) = \frac{1}{\lambda v^2} e^{-\frac{1}{\lambda v}}$.

显然, $\varphi_\lambda(v), k_\lambda(v)$ 是 v 的 c^∞ 函数, $\varphi'_\lambda(v) = \left[\frac{1}{\lambda^2 v^4} - \frac{2}{\lambda v^2} \right] e^{-\frac{1}{\lambda v}}$, 令

$$v_{0,\lambda} = \inf \{v \in [0, +\infty) | \varphi_\lambda(v) = \frac{1}{\lambda}\}$$

则由 $\varphi_\lambda(0) = 0$ 及 φ_λ 的连续性, 可得

$$v_{0,\lambda} > 0, \quad \varphi_\lambda(v_{0,\lambda}, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{且 } 0 \leq \varphi_\lambda(v) < \frac{1}{\lambda}, \quad \forall v \in [0, v_{0,\lambda}]$$

由

$$\varphi_\lambda(v_{0,\lambda}, \lambda) = \frac{1}{\lambda v_{0,\lambda}^2} = \frac{1}{\lambda}, \quad e^{-\frac{1}{\lambda v_{0,\lambda}}} = \frac{1}{\lambda}, \quad e^{-\frac{1}{\lambda v_{0,\lambda}}} = v_{0,\lambda}^2 < 1,$$

$$K_\lambda(v_{0,\lambda}, \lambda) = \frac{\frac{1}{v_{0,\lambda}^2 \lambda^2} - \frac{2}{\lambda}}{(1 - v_{0,\lambda}^2)(1 + a^2/\lambda^2)^2}.$$

对每个 $\lambda = n \in N, n \geq 3$, 由

$$\varphi_\lambda \left(\frac{1}{n \log n} \right) = \frac{1}{\lambda} (n \log n)^2 e^{-\log n} = \frac{1}{\lambda} n (\log n)^2 > \frac{1}{\lambda},$$

因而

$$0 < v_{0,n} < \frac{1}{n \log n} < 1,$$

$$k_n(v_{0,n}) = \frac{\frac{1}{v_{0,n}^2 n^2} - \frac{2}{n}}{(1 - v_{0,n}^2) \left[1 + \frac{a^2}{n^2} \right]^2} > \frac{(\log n)^2 - \frac{2}{n}}{\left(1 + \frac{a^2}{n^2} \right)^2} \rightarrow +\infty (n \rightarrow +\infty).$$

令 $\bar{r}_n = a \left[1 - e^{-\frac{1}{nv_{0,n}}} \right] \sqrt{1 + \left(\frac{a}{n} \right)^2}$, 则

$$p_n = \frac{1}{\bar{r}_n^2} = \frac{1}{a^2} \frac{1}{\left(1 - e^{-\frac{1}{nv_{0,n}}} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{a}{n} \right)^2 \right]} \rightarrow \frac{1}{a^2}, \quad (n \rightarrow +\infty),$$

于是 $\exists N \in \mathbb{N}, s.t. \forall n > N$, 有 $k_n(v_{0,n}) > p_n$, 令

$$\psi_n(v) = k_n(v) \cdot \left[a \left(1 - e^{-\frac{1}{nv}} \right) \sqrt{1 + a^2 \varphi_n^2(v)} \right]^2$$

显然 $\psi_n(v)$ 是 v 的 c^∞ 函数, 由 $\psi_n(0) = 0$, $\psi_n(v_{0,n}) = \frac{k_n(v_{0,n})}{p_n} > 1$ 及 ψ_n 的连续性, 立得

$$\exists \tilde{v}_n \in (0, v_{0,n}), \quad s.t. \quad \psi_n(\tilde{v}_n) = 1$$

令 $v_n = \inf\{v \in [0, +\infty) | \psi_n(v) = 1\}$, 则由 $\psi_n(0) = 0$ 及 ψ_n 的连续性, 立得

$$0 < v_n \leq \tilde{v}_n, \quad \psi_n(\tilde{v}_n) = 1, \quad \text{且} \quad 0 \leq \psi_n(v) < 1, \quad \forall v \in [0, v_n].$$

令

$$a_n = a \left(1 - e^{-\frac{1}{nv_n}} \right), \quad b_n = \frac{a}{nv_n^2} e^{-\frac{1}{nv_n}}, \quad r_n = a_n \sqrt{1 + b_n^2}$$

令

$$S_2 : \begin{cases} (r_n \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}(v + (a_n b_n - v_n))^2} \cos u, \\ r_n \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}(v + (a_n b_n - v_n))^2} \sin u, v), \quad v_n \leq v \leq v_n + a - a_n b_n, \end{cases}$$

容易验证 S 与 S_2 经 S_1 拼接成光滑曲面 \hat{S} , 由于 Gauss 曲率在 S 、 S_1 及 S_2 上连续, 并且在 S 与 S_1, S_1 与 S_2 的交界处相等, 因而 Gauss 曲率在曲面 \hat{S} 上连续, 此时显然 c 包围的区域 D 是曲面 \hat{S} 上的一个单连通域, 于是可用 Gauss-Bonnet 公式, 可得

$$\oint_c k g ds = 2\pi - \iint_D k d\sigma,$$

记 D 在 S 中的部分为 \tilde{D} , 在 S_i 中的部分为 $D_i, i = 1, 2$, 又 k 在 \tilde{D} 中恒为 0, 在 D_2

中恒为 $\frac{1}{r_n^2}$, 于是

$$\begin{aligned}\iint_D k d\sigma &= \iint_{\tilde{D}} k d\sigma + \iint_{D_1} k d\sigma + \iint_{D_2} k d\sigma \\&= \iint_{D_1} k dv + \frac{1}{r_n^2} |D_2| \\&= \iint_{D_1} k d\sigma + \frac{2\pi(r_n - a_n b_n)}{r_n},\end{aligned}$$

由于

$$0 < v_n \leq \bar{v}_n < v_{0,n} < \frac{1}{n \log n},$$

因而

$$a_n = a(1 - e^{-\frac{1}{nv_n}}) \rightarrow a(n \rightarrow \infty),$$

又由 $V_{0,\lambda}$ 的定义立得 $b_n = a\varphi_n(v_n) < \frac{a}{n}$, 又 $b_n > 0$, 因而 $b_n \rightarrow 0(n \rightarrow \infty)$, 于是 $r_n = a_n \sqrt{1 + b_n^2} \rightarrow a(n \rightarrow \infty)$.

又由 V_n 的定义可得

$$\begin{aligned}\psi_n(v) &= k_n(v) \left[a(1 - e^{-\frac{1}{nv}}) \sqrt{1 + a^2 \varphi_n^2(v)} \right]^2 < 1, \quad \forall v \in [0, v_n] \\k_n(v) &< \frac{1}{a^2(1 - e^{-\frac{1}{nv}})^2(1 + a^2 \varphi_n^2(v))} \leq \frac{1}{a^2(1 - e^{-\frac{1}{nv}})^2} < \frac{1}{a^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2},\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\varphi'_n(v) &= \left(\frac{1}{n^2 v^4} - \frac{2}{nv^2} \right) e^{-\frac{1}{nv}} = \frac{e^{-\frac{1}{nv}}}{n^2 v^2} \left(\frac{1}{v^2} - 2n \right) \\&\geq \frac{e^{-\frac{1}{nv}}}{n^2 v^2} (n^2 (\log n)^2 - 2n) \geq 0,\end{aligned}$$

因而

$$k_n(v) \frac{\varphi'_n(v)}{(1 - e^{-\frac{1}{nv}})[1 + a^2 \varphi_n^2(v)]^2} \geq 0, \quad 0 \leq \iint_{D_1} k d\sigma \leq \frac{1}{a^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} |D_1|$$

由

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= (-a(1 - e^{-\frac{1}{nv}}) \sin u, a(1 - e^{-\frac{1}{nv}}) \cos u, 0), \\ \vec{r}_v &= \left(-\frac{a}{nv^2} e^{-\frac{1}{nv}} \cos u, -\frac{a}{nv^2} e^{-\frac{1}{nv}} \sin u, 1 \right), \\ \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= (a(1 - e^{-\frac{1}{nv}}) \cos u, a(1 - e^{-\frac{1}{nv}}) \sin u, \frac{a^2}{nv^2} (1 - e^{-\frac{1}{nv}}) e^{-\frac{1}{nv}})\end{aligned}$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{a^2(1 - e^{-\frac{1}{nv}})^2 + a^4 e^{-\frac{2}{nv}} \varphi_n^2(v)} < \sqrt{a^2 + a^4 \frac{1}{n^2}}$$

因而

$$\begin{aligned}|D_1| &= \iint_{[0,2\pi] \times [0, v_n]} |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv \leq \sqrt{a^2 + a^4 \frac{1}{n^2}} \cdot 2\pi v_n \\ &< \sqrt{a^2 + a^4 \frac{1}{n^2}} 2\pi \frac{1}{n \log n} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow +\infty),\end{aligned}$$

于是令 $n \rightarrow +\infty$, 即得 $\iint_D k d\sigma = 2\pi$, 从而 $\oint_c kg ds = 0$, 这与前面的结果是一致的.

谈到这里, 也许有人会想这不是多此一举吗? 但是下面你会发现在作一般化推广过程中, 这个思想会大放异彩. 如果 S 为圆锥面, 不妨设为 $((a - bv) \cos u, (a - bv) \sin u, v)$, $a, b > 0$, $\vec{r}_u = (-(a - bv) \sin u, (a - bv) \cos u, 0)$, $\vec{r}_v = (-b \cos u, -b \sin u, 1)$. $E = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = (a - bv)^2$, $F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0$, $G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1 + b^2$.

由 Liouville 公式

$$kg = \frac{d\theta}{ds} + \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \frac{1}{a-bv} \cos s,$$

直接求解 $\oint_c kg ds$ 并不简单, 这时自然会有人想到用 Green 公式简化线积分为面积分, 尽管 c 包围的区域是曲面 S 上的一个单连通域, 但可惜的是曲面 S 在顶点, $(0, 0, \frac{a}{b})$ 处不光滑, 而这一点却又落在 c 包围的区域中, 因而此时无法运用 Green 公式. 正是由于这个奇点的出现, 方使结果并不平凡. 这里不妨可设 c 在 $v = 0$ 曲线的下方. 令

$$\begin{aligned}S: \quad &((a - bv(1 + e^{-\frac{1}{\lambda v}})) \cos u, (a - bv(1 + e^{-\frac{1}{\lambda v}})) \sin u, v) \\ \vec{r}_u &= (-(a - bv(1 + e^{-\frac{1}{\lambda v}})) \sin u, (a - bv(1 + e^{-\frac{1}{\lambda v}})) \cos u, 1), \\ \vec{r}_v &= (-b[(1 + \frac{1}{\lambda v})e^{-\frac{1}{\lambda v}} + 1] \cos u, -b[(1 + \frac{1}{\lambda v})e^{-\frac{1}{\lambda v}} + 1] \sin u, 1) \\ E &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = [a - bv(1 + e^{-\frac{1}{\lambda v}})]^2, \quad F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \\ G &= \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = 1 + b^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\lambda v}\right) e^{-\frac{1}{\lambda v}} + 1 \right]^2,\end{aligned}$$

因而 (u, v) 是正交系, 于是

$$\begin{aligned} k_\lambda(v) &= -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_v}{\sqrt{E}} \right)_u \right\} \\ &= \frac{\varphi_\lambda(v)}{[a - bv(1 - e^{-\frac{1}{\lambda v}})][1 + \varphi_\lambda^2(v)]^2}, \end{aligned}$$

其中 $\varphi_\lambda(v) = b \left[1 + \left(1 + \frac{1}{\lambda v} \right) e^{-\frac{1}{\lambda v}} \right]$, 作与前面相类似的推导, 最后令 $n \rightarrow +\infty$, 可得 $\iint_D k d\sigma = 2\pi \left(1 - \frac{b}{\sqrt{1+b^2}} \right)$, 从而

$$\oint_c kg ds = 2\pi - \iint_D k d\sigma = 2\pi \frac{b}{1+b^2},$$

特别地, 取 $b = 0$, 即圆柱面时的情形, 取 $b \rightarrow +\infty$, S 逐渐逼近平面, 这些都与前面的结果是一致的.

最后来考虑最为一般的旋转面 S , 不妨设为 $(f(v) \cos u, f(v) \sin u, g(v))$, $f(v) > 0$,

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (-f(v) \sin u, f(v) \cos u, 0), \quad \vec{r}_v = (f'(v) \cos u, f'(v) \sin u, g'(v)), \\ E &= \vec{r}_u \cdot \vec{r}_u = f^2(v), F = \vec{r}_u \cdot \vec{r}_v = 0, \quad G = \vec{r}_v \cdot \vec{r}_v = [f'(v)]^2 + [g'(v)]^2, \\ k &= -\frac{1}{\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{(\sqrt{E})_v}{\sqrt{G}} \right)_v + \left(\frac{(\sqrt{G})_u}{\sqrt{E}} \right)_u \right\} = \frac{g'(v)[f'(v)g''(v) - f''(v)g'(v)]}{(\sqrt{[f'(v)]^2 + [g'(v)]^2})^3}. \end{aligned}$$

如果 c 为纬线, 则由上面圆锥面的结论可得

$$\oint_c kg ds = 2\pi \left(1 + \frac{f'(v)/g'(v)}{\sqrt{1 + [f'(v)/g'(v)]^2}} \right),$$

一般情形下, 设 c 以 u 为参数, 令 $v = h(u)$, $v \in [0, 2\pi]$, 并令 $v_0 = \max_{u \in [0, 2\pi]} h(u)$, 同上有

$$\oint_c kg ds = 2\pi \left(1 + \frac{f'(v_0)/g'(v_0)}{\sqrt{1 + [f'(v_0)/g'(v_0)]^2}} \right) - \int_0^{2\pi} du \int_{h(u)}^{v_0} k dv,$$

同时, 我们可以得到一个很有趣的结论: 如果 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$, $\frac{f'(v_1)}{g'(v_1)} = \frac{f'(v_2)}{g'(v_2)}$, 则

$$\iint_{[0, 2\pi] \times [v_1, v_2]} k du dv = 0.$$

一道分析题的推广与运用

9701 吕金超

下面一道分析题大家也许并不陌生:

problem 1: 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f''(x)$ 在 (a, b) 内存在, 则对 $\forall c: a < c < b, \exists \xi \in (ab)$, 使得

$$\frac{1}{2}f''(\zeta) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}.$$

证明 令 $g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ (g 在 c 点通过极限来定义, 即为 $f'(c)$, 以下相同), 则 g 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 于是由 Lagrange 中值定理, $\exists \xi_1 \in (a, b)$,

$$\frac{g(b) - g(a)}{b-a} = g'(\xi_1),$$

因而

$$\begin{aligned} & \frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-c)(b-a)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{g(b) - g(a)}{b-a} = g'(\xi_1) = \frac{f(c) - f(\xi_1) - f'(\xi_1)(c-\xi_1)}{(c-\xi_1)^2} \end{aligned}$$

用带 Lagrange 余项的 Taylor 展开可得

$$f(c) = f(\xi_1) + f'(\xi_1)(c-\xi_1) + \frac{1}{2}f''(\xi)(c-\xi_1)^2,$$

ξ 介于 c 与 ξ_1 之间, $g'(\xi_1) = \frac{1}{2}f''(\xi)$, $\xi \in (a, b)$, 从而命题得证.

problem 2: 设 f 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内有 n 阶导数, x_0, x_1, \dots, x_n 满足 $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{u'(x_i)}, \quad \text{其中 } u(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).$$

原命题的证明实质上就是将 problem 1 的证明作一般化处理. 为此先证明两个引理:

引理 1 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}, a_i \neq a_j$, 则有

$$\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{1}{a_i - a_j} = - \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_{n+1} - a_j}$$

证明 令 $g(x) = \left(\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x-a_j}{a_i-a_j} \right) - 1$, 它是一个次数至多为 $n-1$ 项的多项式,

但有 $g(a_1) = g(a_2) = \dots = g(a_n) = 0$, 从而 $g(x)$ 为常数, i.e. $g \equiv 0$. 于是

$$\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{a_{n+1}-a_j}{a_i-a_j} = 1, i.e. \quad \sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} \frac{1}{a_i-a_j} = - \prod_{j=1}^n \frac{1}{a_{n+1}-a_j}.$$

引理 2 设 $f(x) \in C[a, b]$, 在 (a, b) 内有 $n+1$ 阶导数, $x_0 \in (a, b), g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, 则对于 $\forall x \in (a, b), \exists \xi \in (a, b), s.t. g^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)$.

证明 因

$$\begin{aligned} g(x) &= [f(x) - f(x_0)] \frac{1}{x - x_0}, \\ g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\frac{1}{x - x_0} \right)^{(k)} [f(x) - f(x_0)]^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k k! (-1)^k \frac{1}{(x - x_0)^{k+1}} [f(x) - f(x_0)]^{(n-k)} \\ &= n! (-1)^n \frac{1}{(x - x_0)^{n+1}} [f(x) - f(x_0)] \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k k! (-1)^k \frac{1}{(x - x_0)^{k+1}} f^{(n-k)}(x) \end{aligned}$$

由带 Lagrange 余项的 Taylor 展开, 对 $\forall x \in (a, b), \exists \xi \in (a, b), s.t.$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x) + f'(x)(x_0 - x) + \frac{1}{2!} f''(x)(x_0 - x)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(x_0 - x)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x_0 - x)^{n+1}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= -n!(-1)^n \frac{1}{(x-x_0)^{n+1}} [f'(x)(x_0-x) + \frac{1}{2!} f''(x)(x_0-x)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(x_0-x)^n + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x_0-x)^{n+1}] \\ &\quad + \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!} (-1)^k \frac{1}{(x-x_0)^{k+1}} f^{(n-k)}(x) \\ &= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(\xi). \end{aligned}$$

problem 2 的证明：令

$$\begin{aligned} g_0(x) &= f(x), g_1(x) = \frac{g_0(x) - g_0(x_1)}{x - x_1}, g_2(x) = \frac{g_1(x) - g_1(x_2)}{x - x_2}, \dots, \\ g_{n-1}(x) &= \frac{g_{n-2}(x) - g_{n-2}(x_{n-1})}{x - x_{n-1}}. \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} &\frac{g_{n-1}(x_0) - g_{n-1}(x_n)}{x_0 - x_n} \\ &= \frac{g_{n-(k+1)}(x_0) - g_{n-(k+1)}(x_{n-k})}{(x_0 - x_{n-k})(x_0 - x_{n-k+1}) \cdots (x_0 - x_n)} + \frac{g_{n-(k+1)}(x_n) - g_{n-(k+1)}(x_{n-k})}{(x_n - x_0)(x_n - x_{n-k}) \cdots (x_n - x_{n-1})} + \dots \\ &\quad + \frac{g_{n-(k+1)}(x_{n-k+1}) - g_{n-(k+1)}(x_{n-k})}{(x_{n-k+1} - x_0)(x_{n-k+1} - x_{n-k})(x_{n-k+1} - x_{n-k+2}) \cdots (x_{n-k+1} - x_n)} \end{aligned}$$

由 lemma 1

$$\begin{aligned} &\frac{g_{n-(k+1)}(x_0)}{(x_0 - x_{n-k})(x_0 - x_{n-k+1}) \cdots (x_0 - x_n)} + \frac{g_{n-(k+1)}(x_{n-k})}{(x_{n-k} - x_0)(x_{n-k} - x_{n-k+1}) \cdots (x_{n-k} - x_n)} \\ &+ \dots + \frac{g_{n-(k+1)}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_{n-k}) \cdots (x_n - x_{n-1})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

于是

$$\frac{g_{n-1}(x_0) - g_{n-1}(x_n)}{x_0 - x_n} = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}.$$

由 Lagrange 中值定理， $\exists \xi_{n-1} \in (x_0, x_n)$, 使得

$$\frac{g_{n-1}(x_0) - g_{n-1}(x_n)}{x_0 - x_n} = g'_{n-1}(\xi_{n-1}),$$

再反复利用 lemma 2 可得 $\exists \xi_{n-(k+1)} \in (a, b)$, 使得

$$g_{n-k}^{(k)}(\xi_{n-k}) = \frac{1}{k+1} g_{n-(k+1)}^{(k+1)}(\xi_{n-(k+1)}), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

令 $\xi = \xi_0 \in (a, b)$, 则

$$\frac{g_{n-1}(x_0) - g_{n-1}(x_n)}{x_0 - x_n} = \frac{1}{n!} g_0^{(n)}(\xi) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi),$$

从而命题得证.

运用 problem 2, 我们可以证明下述命题:

problem 3: 设 $f(x) \in C^n(-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $n \in N$, 则

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k f((n-2k)h)}{(2h)^n} = f^{(n)}(0)$$

证明 令 $x_i = [n-2(n-i)]h = (2i-n)h$, $i = 0, 1, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{w'(x_i)} &= \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_0 - x_j)} \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} \frac{(-1)^{n-i} f((2i-n)h)}{(2h)^n} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n C_n^{n-i} \frac{(-1)^{n-i} f((2i-n)h)}{(2h)^n} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k f((n-2k)h)}{(2h)^n} \end{aligned}$$

由 problem 2, $\exists \xi_h \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 使得

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{f((n-2k)h)}{(2h)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi_h),$$

令 $h \rightarrow 0$, 由 $f \in C^n(-\varepsilon, \varepsilon)$ 知 $f^{(n)}$ 在 $x=0$ 处连续及 $\xi_h \rightarrow 0$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k f((n-2k)h)}{(2h)^n} = f^{(n)}(0).$$

其实 problem 3 中的条件还可以减弱为 $f^{(n)}(0)$ 存在 (有限), 由于本文篇幅所限, 在此不再给出证明. 有兴趣的同学可以自己证明.

参考文献: 裴礼文著《数学分析中的典型问题和方法》, 高等教育出版社.

极小曲面的 Weierstrass 表示及其 Gauss 映射

9701 孙 强 9701 屠海瑞

极小曲面的研究始于 Lagrange 问题:

已知给定的空间闭曲线 C , 确定一个曲面, 使它经过 C , 且被 C 围成的面积最小.

利用变分法可以证明使得给定封闭空间曲线为边界的面积最小的曲面是 R^3 中平均曲率 H 为零的曲面(即称为极小曲面)Meusnier, Monge, Scherk 等人对极小曲面做了许多工作, 但研究进展缓慢, 以至在相当长的时期内, 只发现了悬链面正螺面这两个极小曲面. 以后, 人们从 O.Bonet 的研究中发现极小曲面与球面构成保角对应, 依其方法可导出无穷多个实极小曲面和代数极小曲面. 直至 Weierstrass 根据 Monge 的思想, 完全决定了极小曲面的一般方程. 下面就介绍一下极小曲面的 Weierstrass 表示及其 Gauss 映射.

考虑参数定义于 $D(D \subset x-y$ 平面) 的 R^3 的曲面 $F: D \rightarrow R^3$, 取等温参数系 (x, y) 则有

$$I = e^{2\lambda}(dx^2 + dy^2) \text{ 其中 } \lambda = \lambda(x, y) \quad I \text{ 为第一基本形式}$$

不难看出

$$\langle F_x, F_x \rangle = \langle F_y, F_y \rangle = e^{2\lambda}, \quad \langle F_x, F_y \rangle = 0$$

令 $z = x + iy, \bar{z} = x - iy$, 并将 F 做复线性扩充, 即 C^3 中向量作内积满足双线性而非共轭双线性性即由 $F_z = \frac{1}{2}(F_x - iF_y), F_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(F_x + iF_y)$ 可得

$$\langle F_z, F_z \rangle = \langle F_{\bar{z}}, F_{\bar{z}} \rangle = 0 \tag{1}$$

$$\langle F_z, F_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{2}e^{2\lambda} \tag{2}$$

亦即

$$I = e^{2\lambda}(dx^2 + dy^2) = e^{2\lambda}dzd\bar{z} \tag{3}$$

对(1)做微分得 $\langle F_{z\bar{z}}, F_z \rangle = \langle F_{z\bar{z}}, F_{\bar{z}} \rangle = 0$ 即可知 $F_{z\bar{z}} // \vec{n}$, 其中 $\vec{n} = \frac{F_z \times F_{\bar{z}}}{|F_z \times F_{\bar{z}}|}$, 所以可令 $F_{z\bar{z}} = \mu \vec{n}$, 由

$$H = \frac{1}{2} \frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2} = \frac{L + N}{2e^{2\lambda}} = 2 \frac{\mu}{e^{2\lambda}} \Rightarrow \mu = \frac{1}{2} H e^{2\lambda}$$

即有

$$F_{xx} + F_{yy} = 4F_{z\bar{z}} = 2e^{2\lambda} H \vec{n} \quad (4)$$

对于极小曲面来说 $H \equiv 0$ 即由(4)式可得

$$H \equiv 0 \iff F_{z\bar{z}} \equiv 0 \iff F_z \text{ 解析}$$

故令 $F_z = \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, 则 $F = \int_{\gamma} F_z dz = \int_{\gamma} \phi dz$ (γ 为任意路径). 由(1)式可得 $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$, 在 $\phi_3 \neq 0$ 时做如下变换

$$(\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2 \quad \text{即} \quad \frac{\phi_1 + i\phi_2}{-\phi_3} = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$$

令上式为 u 可得

$$\begin{cases} \phi_1 + i\phi_2 + u\phi_3 = 0 \\ \phi_1 - i\phi_2 - \frac{1}{u}\phi_3 = 0 \end{cases}$$

即可化为

$$\frac{\phi_1}{1-u^2} = \frac{\phi_2}{i(1+u^2)} = \frac{\phi_3}{2u}$$

设为 $\mathcal{F}(u)$ 积分可得

$$\begin{cases} f_1 = z_1 + \int_{\gamma} \mathcal{F}(u)(1-u^2)du \\ f_2 = z_2 + \int_{\gamma} i\mathcal{F}(u)(1+u^2)du \\ f_3 = z_3 + \int_{\gamma} 2u\mathcal{F}(u)du \end{cases} \quad \text{其中 } F = (f_1, f_2, f_3) \quad (5)$$

令 $\mathcal{F}(u) = f'''(u)$ 并取实部, 则(5)化为

$$\begin{cases} x_1 = x_{10} + \operatorname{Re}\{(1-u^2)f''(u) + 2uf'(u) - 2f(u)\} \\ x_2 = x_{20} + \operatorname{Re}\{i(1+u^2)f''(u) - 2uif'(u) + 2if(u)\} \\ x_3 = x_{30} + \operatorname{Re}\{2uf''(u) - 2f'(u)\} \end{cases} \quad (6)$$

(6)式称为极小曲面的 Weierstrass 表示.

在上述过程中, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 为全纯函数, 则不难看出 $\mathcal{F}(u)$ 是全纯函数.

下面再来看一下 u 的几何含义, 令 $\mathcal{F}(u) = v$ 即有

$$F: D \rightarrow C^3$$

$$\begin{aligned} F_z &= F_u - iF_v = \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) = ((1-u)^2v, i(1+u^2)v, 2uv) \\ \wedge &\stackrel{\Delta}{=} |x_u|^2 = \frac{1}{2}|\nabla F|^2 = \frac{1}{2}|\phi|^2 \end{aligned}$$

即

$$\wedge = |v^2|\{1 + |u|^2\}$$

可知

$$\begin{aligned} ds^2 &= \wedge \cdot \{du^2 + dv^2\} \\ x_u \times x_v &= |v^2|\{1 + |u|^2\}\{2Reu, 2Imu, |u|^2 - 1\} \end{aligned}$$

则

$$N = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|} = \frac{1}{1 + |u|^2}(2Reu, 2Imu, |u|^2 - 1) \quad (7)$$

令

$$u = \alpha + i\beta \implies N = \frac{1}{1 + \alpha^2 + \beta^2}(2\alpha, 2\beta, \alpha^2 + \beta^2 - 1)$$

N 为域 D 在 Riemann 球面的球极投影, 及此我们可以由单连通域 D 上的全纯函数出发, 用 (5) 或 (6) 来定义 R^3 中的极小曲面, 并由 D 给出的球极投影确定极小曲面的 Gauss 映射, 即有

定理 $\mathcal{F}(u)$ 为任意定义于单连通域 D 上的全纯函数 $\mathcal{F}(u) \neq 0$ 令 $\phi(u) = ((1-u^2)\mathcal{F}(u), i(1+u^2)\mathcal{F}(u), 2u\mathcal{F}(u))$, 则 $X(u) = X_0 + \operatorname{Re} \int \phi(u) du$ $u \in D$ 为非常值的 $D \rightarrow R^3$ 的极小曲面, 且有法向量

$$N(u) = \frac{1}{1 + |u|^2}(2Reu, 2Imu, |u|^2 - 1)$$

注: $\mathcal{F}(u) \neq 0$ 保证不为平面.

由 (5) 或 (6) 及上述定理可以看出极小曲面与其 Gauss 映射得到曲面 S 在 $x-y$ 平面投影区域 D 上的全纯函数有着对应关系, 因此可知 Weierstrass 表示给出了极小曲面的最一般的表达.

用 Cauchy 积分公式证明 Cayley-Hamilton 定理

9701 方明

设 A 是 \mathbb{C} 上 $n \times n$ 矩阵, 设 $f(z) = \det(zI - A)$ 是 A 的特征多项式, 则 $F(A) \equiv 0$. 在证明 Cayley-Hamilton 定理之前先作一些约定:

1. 在 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 中引入范数: $\|A\| = \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ 其中 $A = (a_{ij})$.

完全类似于微积分中的做法可知当 $\|A\| < 1$ 时, 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛. (这可将 A 看作 $n \times n$ 维向量而后利用多元微分学知识得知)

2. 又完全类似于微积分中做法: 设 Γ 是 \mathbb{C} 上一条简单闭曲线 (可求长), 则当 $\|A(z)\| < 1 (z \in \Gamma)$ 有

$$\int_{\Gamma} \sum_{k=0}^{\infty} A^k(z) dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\Gamma} A^k(z) dz.$$

3. 定义矩阵的积分: 设 $A(z) \in \mathbb{C}^{n \times n}, A(z) = (a_{ij}(z)), \Gamma$ 是 \mathbb{C} 上一条简单闭曲线 (可求长), 则定义

$$\int_{\Gamma} A(z) dz = \left(\int_{\gamma} a_{ij}(z) dz \right).$$

有了第三条约定, 立刻得知: 当 A 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上常数矩阵时,

$$\int_{\Gamma} f(z) Adz = \int_{\Gamma} f(z) dz A.$$

下面着手证明 Cayley-Hamilton 定理:

证明 设 w_1, w_2, \dots, w_n 是 A 的 n 个复根, $A = (a_{ij})$. 令 $M = \max\{|w_i| : 1 \leq i \leq n\}$, 取 $R = 2 \max\{a_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\} + M$ 则易知 $\|\frac{1}{R} A\| < 1$.

由 $f(z)$ 是关于 z 的一个 n 次多项式, 不妨设 $f(z) = \sum_{k=0}^n C_k z^k$, 而

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{C_k z^k}{zI - A} dz \triangleq \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} C_k z^k (zI - A)^{-1} dz$$

由 R 的选取知 $zI - A$ 在 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 中可逆 (当 $|z| = R$)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{C_k z^k}{z} \frac{1}{(I - \frac{A}{z})} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} C_k z^{k-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z} A\right)^j dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{|z|=R} C_k z^{k-j-1} A^j dz \end{aligned}$$

(交换次序的合理性由上面的约定及 R 的选取易得)

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\int_{|z|=R} C_k z^{k-j-1} dz \right) A^j = C_k A^k.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zI - A} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{\sum_{k=0}^n C_k z^k}{zI - A} dz \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{C_k z^k}{zI - A} dz \\ &= \sum_{k=0}^n C_k A^k = f(A). \end{aligned} \quad (1)$$

另一方面, 由 $zI - A$ 可逆 ($|z| = R$). 从而 $(zI - A) \cdot (zI - A)^* = \det(zI - A) = f(z)$. 其中 $(zI - A)^*$ 是 $zI - A$ 的附属矩阵.

故 $\frac{f(z)}{zI - A} = (zI - A)^*$ 易知 $(zI - A)^*$ 是关于 z 的矩阵系数的多项式. 记 $(zI - A)^* = (b_{ij}(z))$. 则 $b_{ij}(z)$ 是关于 z 的多项式. 从而由上面关于矩阵积分的约定:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{zI - A} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} (zI - A)^* dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} (b_{ij}(z)) dz \quad (2) \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} (b_{ij}(z) dz) \right) \\ &= 0 \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad (\text{由 Cauchy 积分定理}) \end{aligned}$$

综合上两式即得 $f(A) \equiv 0$.

费马的最后抵抗

Simon Singh, Kenneth A. Ribet

费马的最难证明的一个定理在长达三个多世纪的时期中使最杰出的数学家们绞尽脑汁而不得其解。但是，经过 10 年的努力，一位数学家终于攻克了这个难题。

1997 年 6 月，500 名数学家在德国哥廷根大学的大会堂聚会，目睹普林斯顿大学的 Andrew J. Wiles 领取声名卓著的 Wolfskele 奖金，这项奖金设立于 1908 年，获奖者将是能证明彼埃尔·德·费马著名的最后定理的任何一位数学家。该奖金的数额最初为 2 百万美元（按美元的现值计），但到 1997 年夏，极度的通货膨胀和德国马克的贬值已使它的价值减少到不过区区 5 万美元。不过没有人对此介意。对于 Wiles 来说，证明费马十七世纪时提出的这个难题圆了他的一个童年之梦，并给他的十年艰苦努力画上了一个圆满的句号。对于与会的贵宾们来说，Wiles 的证明可望使数学家的未来发生革命性的变化。

事实上，为了完成他那长达 100 页的计算，Wiles 需要利用并进一步发展许多现代数学概念。特别是他必须解决 Shimura-Taniyama 猜想——这是二十世纪中人们对代数几何学和复变函数论取得的一项深刻认识。Wiles 通过这项工作把这些重要的数学分支相互联系了起来。今后，其中一个领域所取得的进展肯定将启发另外一个领域取得新的成果。此外，既然已经建立了沟通这两个数学分支的桥梁，人们也可能发现相差很远的数学领域间存在的其它联系。

业余数学家的王子

费马于 1601 年 8 月 20 日出生于法国西南部的一个小镇博蒙-德洛马涅。他曾在地方政府和法院中任职。为了确保审判的公正，不鼓励法官参加社交活动，

这样每个晚上费马就躲进他的书房，专心致志地研究他业余爱好的数学问题。虽然费马只是一个业余数学家，但却取得了很高的成就，对于概率论和微积分学的基础做出了极大的贡献。现代微积分学之父伊萨克·牛顿曾说过，他的研究成果是建立在“费马先生的切线方法”基础之上的。

费马首先是一个数论大师（数论就是研究整数及其相互关系的学科）。他常常写信给其他数学家，介绍他对某个问题的研究情况，并问他们是否有与他的解法相当的独创设想。这些挑战——以及费马从来不透露他自己的计算这一事实——使其它数学家们感到极度的失望。René Descartes（他最为人知的成就就是发明了解析几何）称费马是一个好吹牛的家伙，而英国数学家 John Wallis 有一次曾称费马为“那个该死的法国佬”。

费马在研究古希腊数学家、亚历山大的丢番图的数学著作《算术》时，写下了他那最有名的挑战，即所谓的费马最后定理。《算术》这本著作讨论了方程 $a^2 + b^2 = c^2$ 的正整数解（此方程就是描述直角三角形三条边之间相互关系的毕达哥拉斯定理）。这个方程有无穷多组整数解，如 $a = 3, b = 4, c = 5$ 等，它们称为毕达哥拉斯三元数组。费马把这个方程向前推进一步，认为对整整一族类似的方程 $a^n + b^n = c^n$ （其中 n 为大于 2 的任意整数），不存在非平凡解。

虽然毕达哥拉斯三元数组有无穷多个，但费马三元数组却连一个也没有，这似乎是颇出人意外的。即使如此，费马仍然相信他能通过严格的证明为他的论断提供依据。在《算术》一书的页边空白上，这位爱捉弄人的数学天才草草写下了一段令多少代数学家深感受嘲弄的话：“我已发现了此命题的一个真正奇妙的证明，然而这页边空白太小了，写不下这个证明。”费马写下了许多这类使人恼怒的话，在他逝世之后，他的儿子公布的《算术》的一个版本把这些逗弄人的话都收罗了进去。所有的定理一个接一个地都得到了证明，直到只剩下费马的最后定理。

许多数学家都想攻克这个最后定理，但都以失败告终。1742 年，十八世纪最杰出的数论专家 Leonhard Euler 因为无法证明费马的最后定理而感到极度失望，以至请求他的一位朋友去查看费马的住宅，希望能有些记载关键资料的废纸会留下来。在十九世纪，Sophie Germain 取得了第一项重大的突破。（由于当时社会对女数学家存在偏见，她是以 Leblanc 先生的化名进行数学研究的）。Germain 证明

了一个一般性的定理，此定理向着解决当 n 为大于 2 的素数、且 $2n+1$ 也是素数时的费马最后定理这一目标迈进了一大步。（读者应当记得，素数是仅能被 1 和它自身整除的整数。）但 Germain 一直未能得出当 n 为这些值（或其它任何值）时的费马最后定理的完整证明。

二十世纪初，德国的一位实业家 Paul Wolfskehl 留下遗嘱，赠送 10 万马克给任何一位能解决费马的这个挑战的人。据某些历史学家说，Wolfskehl 曾一度到了几乎要自杀的地步，多亏他迷上了费马的最后定理并力图要证明它，才使其打消了死亡的念头。由于发生了这种情况，Wolfskehl 改写了他的遗嘱。他觉得自己对这个曾经挽救了他的生命的难题欠下了一笔债，设立这项奖金就是他偿还此债务的方法。

富有讽刺意义的是，当业余数学家们在 Wolfskehl 的重赏的鼓励下向费马最后定理的证明发起猛攻之时，专业数学家们却因气馁而退避三舍。当有人问杰出的德国逻辑学家 David Hilbert 为什么从不去尝试一下证明费马的最后定理时，他回答道：“在着手证明之前我得先投入三年时间进行紧张研究，而我没有那样多时间来浪费在一项极有可能徒劳无益的工作上。”这个定理在数论专家们的心目中仍然占有一个特殊的地位，但他们看待费马的最后定理犹如化学家们看待炼金术一样。费马最后定理是一个过去时代遗留下来的愚弄人的荒诞梦想。

童 年 之 梦

儿童们当然喜欢浪费荒诞的梦想。1963 年，当 Wiles 10 岁时，他开始迷上了费马的最后定理。他在英国剑桥当地的图书馆里阅读有关费马最后定理的著作，并希望有朝一日会找到一个证明。他的中学教师们向他泼冷水，叫他不要把时间浪费在这类不可能解决的问题上。他的大学讲师们也试图劝说他知难而退。最终他在剑桥大学的研究生导师使他转到更为正统的数学研究上，也就是以所谓椭圆曲线为对象的易于出成果的研究领域上。对椭圆曲线的研究源自古希腊数学家，《算术》一书中就曾出现过椭圆曲线。Wiles 当时并不知道他在这方面所受的训练将使他重新回到费马最后定理的研究。

椭圆曲线并不是椭圆。它们之所以叫作椭圆曲线，是因为他是类似于计算

椭圆周长时所用的三次方程描述的。一般说来，椭圆中线的三次方程具有 $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的形式，其中 a 、 b 、 c 为满足某些简单条件的整数，我们说这类方程的次数为 3，因为它们含有的最高次项为立方项。

数论专家们常常试图确定某些方程的所谓有理解的数目（有理解就是整数解或分数解）。线性方程或二次方程——其次数分别为 1 次和 2 次方——要么没有有理解，要么有无穷多个有理解，而且要确定这类方程属于其中哪种情形是比较容易的。对于比较复杂的方程——其次数通常为 4 次或更高——解的数目总是有限的。德国数学家 Gerd Faltings 在 1983 年证明了这个被称为 Mordell 猜想的事实。然而椭圆曲线则提出了一个相当独特的挑战。椭圆曲线可能有有限多个解，也可能有无穷多个解，而且没有什么办法可以轻而易举地确定究竟属于其中哪一种情况。

为了简化与椭圆曲线有关的问题，数学家们常常借助模算术来重新审查它们。他们把三次方程中的 x 与 y 除以一个素数 p ，并只保留其余数。这个修正后的方程是原方程的“模 p ”等价形式。接着他们对另一个素数重复上述除法，然后是又一个素数。在这一过程中，他们记下每一个素数模的解的个数。最终这些计算产生出一系列与原先的方程类似但比较简单的方程。

模算术的显著的优点在于， x 和 y 的最大值实际上被限定为 p ，因此问题就被简化为一个有限的对象。为了获得对原先那个无限的问题的某些认识，数学家们观察解的数目如何随 p 的值而变。借助于此项数据，数学家们可以生成椭圆曲线的一个所谓 L 级数。实质上 L 级数就是一个无穷幂级数，其中每一 p 次幂项的系数的值由模 p 的解的个数确定。

事实上，称为模形式的其它某些数学对象也有 L 级数。不应把模形式同模算术混淆起来。模形式是处理复数的某种类型的函数，所谓复数是形如 $(x + iy)$ 的数，其中 x 与 y 是实数， i 是虚数单位（等于 -1 的平方根）。

模形式的与众不同之处在于人们可以通过多种方式变换复数，但该函数得出的值实际上是相同的。在这方面，模形式是非常引人注目的。三角函数也具有类似的性质，因为一个角 q 可以通过加上 π 进行变换，而答案仍保持不变： $\sin q = \sin(q + \pi)$ 。这一性质称为对称性。三角函数所显示的对称性是比较有限的。相反，模形式则显示了极大的对称性。模形式的对称性是如此之强，以致法

国博学多才的学者 Henri Poincaré 在十九世纪后期发现了第一批模形式后，曾不得不竭尽全力迫使自己接受这一事实。他向他的同事们讲述说，在整整两个星期中他每天一觉醒来就忙于寻找自己的计算中是否有错误。到第 15 天他终于屈服了，承认模形式确实是极端对称的。

在 Wiles 知道费马之前约 10 年，两位年轻的日本数学家 Goro Shimura 和 Yutaka Taniyama 提出了一个有关模形式的设想，此设想最终成了 Wiles 证明费马的最后定理的基础。他们认为，模形式和椭圆曲线从根本上是互相关联的，尽管表面上看起来椭圆曲线属于另一个完全不同的数学领域。特别是，由于模形式具有一种 L 级数——虽然是通过与椭圆曲线不同的一种方法推导出来的——因此这两位数学家提出，每条椭圆曲线可以同一个模形式配对，使得两个 L 级数相同。

Shimura 和 Taniyama 明白，如果他们的想法是正确的，那么其影响将非同寻常。首先，数学家们对于模形式的 L 级数的了解一般比对椭圆曲线的 L 级数的了解要多。因此，设法拼凑出一条椭圆曲线的 L 级数是有必要的，因为此 L 级数与对应的模形式的 L 级数相同。更一般地说，建立起一座沟通到当时为止互不关联的两个数学分支的桥梁可能对双方都有利：每个分支都可以利用另外一个分支中已经取得的知识来充实自己。

由 Shimura 在六十年代初期表述的这个 Shimura-Taniyama 猜想是说，每条椭圆曲线都可以同一个模形式配对；换言之，所有椭圆曲线都是模的。即使没有任何人能找到证明这一个猜想的途径，随着数十年光阴的消逝，此假设的影响却变得越来越大。例如，到七十年代，数学家们常常假定 Shimura-Taniyama 猜想是正确的，然后从这一猜想中推导出某个新的结果。逐渐地许多重大的成果都开始依赖于这个猜想，尽管几乎没有几个学者期望该猜想会在本世纪内得到证明，不幸的是，提出此猜想的数学家中有一位没有能活着看到它的极端重要的作用，Yutaka Taniyama 于 1958 年 11 月 17 日自杀身亡。

缺失的环节

1984 年秋，在德国奥贝尔沃尔法赫市举行的一次研讨会上，萨兰德大学的

Gerhard Frey 发表演说，提出了证明费马最后定理的一种新策略。费马最后定理是说，费马方程不存在正整数解。为了检验这样的一种陈述是否正确，数学家们常常假定该陈述不正确，然后考察这一假定会导出什么的结果。如果假定费马最后定理不正确，那就是说存在着两个完全 n 次幂，它们的和等于第三个完全 n 次幂。

Frey 的设想如下。假定 A 和 B 是两个数的完全 n 次幂——也就是说它们构成费马方程的一个解。然后可以用 A 和 B 作为系数构造一条特殊的椭圆曲线 $y^2 = x(x - A)(x + B)$ 。人们在研究椭圆曲线时经常计算的一个量是椭圆曲线的“判别式” $A^2B^2(A + B)^2$ 。由于 A 和 B 是费马方程的解，因此判别式也是一个完全 n 次幂。

Frey 的策略中最关键的一点是，如果费马的最后定理不成立，那么象 A 和 B 这样的整数解就可以用来构造一条椭圆曲线，它的判别式是一个完全 n 次幂。这样，如果能证明一条椭圆曲线的判别式不可能为完全 n 次幂，实际上也就是包含了对费马定理的证明。Frey 没有发现建立这样一种证明的途径，但是他猜想判别式为完全 n 次幂的一个椭圆曲线——如果存在这样的椭圆曲线的话——不可能是模的。换之言，这样一条椭圆曲线将推翻 Shimura-Taniyama 猜想。Frey 把这一论证过程倒过来，指出，如果有人能证明 Shimura-Taniyama 猜想正确，且椭圆方程 $y^2 = x(x - A)(x + B)$ 不是模的，则他们实际上就证明了该椭圆方程不可能存在。在这种情况下，费马方程的解也就不可能存在，因而费马最后定理也就被证明是正确的。

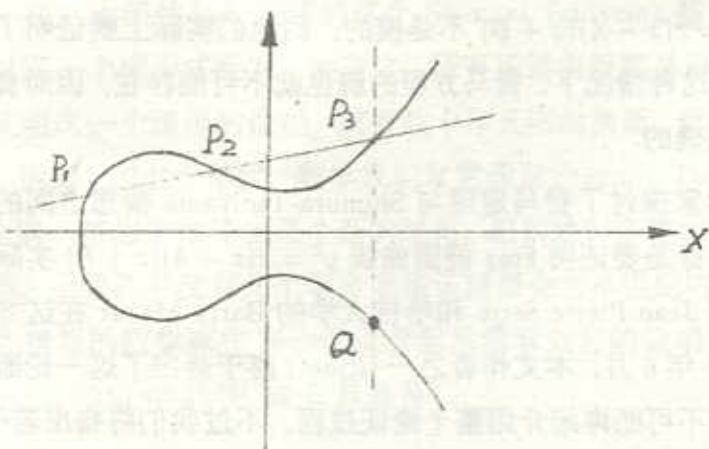
许多数学家探讨了费马定理与 Shimura-Taniyama 猜想之间的这种联系。他们的第一个目标是要证明 Frey 椭圆曲线 $y^2 = x(x - A)(x + B)$ 实际上是非模的。法兰西学院的 Jean-Pierre Serre 和哈佛大学的 Barry Mazur 在这方面作出了重要的贡献。1986 年 6 月，本文作者之一 (Ribet) 终于得出了这一论断的一个完整的证明。本文中不可能详细介绍整个论证过程，不过我们将指出若干线索。

首先，Ribet 的证明依赖于一种把椭圆曲线上的两点“相加”的几何方法 (见图)。从直观上看，曲线上两点相加的概念就是，如果画一条直线穿过椭圆曲线的两个不同的解 (即 P_1 和 P_2) 那么此直线与椭圆曲线交于第三点，我们可以暂且称此点为 P_1 与 P_2 之和。这种加法还有一个更复杂一些但也更有用的变种，就是

首先把两个点按上面所述的方法相加，得出一个新的点 P_3 ，然后再找到此点关于 x 轴的对称点 Q ， Q 就是最后的和。

这种特殊形式的加法可以适用于一条椭圆曲线上所有的点这一无穷集合内的任意两点。然而，此运算之所以特别令人感兴趣，是因为存在着这样一种有限点集，该点集具有下面这个极端重要的性质：点集内任意两点之和仍然属于该点集。这类有限点集组成一群，也就是服从若干条简单公理的一个点集合。业已证明，如果椭圆曲线是模的，那么椭圆曲线的每个有限群中的点也是模的。Ribet 所证明的就是 Frey 曲线的某个有限群不可能是模的，从而排除了整条曲线的模曲线的可能性。

三个半世纪以来，费马最后定理一直是一个孤立的问题，是数学前沿上的一个奇异而无法解决之谜。1986 年，Ribet 依据 Frey 的研究成果，把这个问题推到了数学的中央舞台上。现在有可能通过证明 Shimura-Taniyama 猜想来证明费马的最后定理了。Wiles——当时是普林斯顿大学的一名教授——抓紧分分秒秒来干这件事。在七年的时间里，他一直在完全保密的情况下从事其研究。这不仅是因为他希望避免因引起公众注目而给自己造成压力，也是因为他希望不让其他人抄袭他的思路。在这段时期中，只有他的夫人知道他是如何废寝忘食地沉迷于费马最后定理——甚至在度蜜月时也是如此。



7 年 保 密

Wiles 必须把二十世纪数论研究的许多主要成果汇集在一起，当这些成果不够用时，他就不得不自己动手创立其它的工具和方法。他把自己搞数学研究的经

历形容为穿过一个一片漆黑没有人走过的大楼：“当你进入大楼的第一个房间时，那里完全是黑得伸手不见五指。你跌跌撞撞地四处摸索着，不时地碰到家具上，但是渐渐地你开始弄清楚每件家具的位置。最终，经过 6 个月左右后，你找到了灯的开关。打开灯后，一下子到处一片明亮。你可以看清楚你身居何处。然后你走进下一个房间，又在一团漆黑中摸索 6 个月。这样，所有这些突破——有的是在一瞬间取得的，有的要花一两天的时间——都是取得突破前在黑暗中跌跌撞撞摸索许多个月的最后成果，而且不经过这样长时间的摸索，是不可能取得这些突破的。”

结果表明，Wiles 不需要证明整个 Shimura-Taniyama 猜想。他只需要证明椭圆曲线的一个特殊的子集——即包含 Frey 所提出的那条假想椭圆曲线（如果该曲线存在的话）的一个子集——是模的就行了。这其实算不上把问题简化了。该子集仍然是一个无穷集合，包括了大多数令人感兴趣的情况。Wiles 的策略运用了 Ribet 所使用过的同一批方法，以及其他许多种方法。而且，正如 Ribet 的证明一样，我们这里也只能给出有关要点的一点提示。

最棘手的地方在于要证明 Wiles 的子集中的每条椭圆曲线都是模的。为证明这一点，Wiles 利用了椭圆曲线上点的群性质，并利用了新泽西州普林斯顿高级研究所的 Robert P. Langlands 和卢特格斯大学的 Jerryold Tunnell 的一个定理。对于 Wiles 的椭圆曲线集中的每一条曲线，该定理证明了曲线内的某一特殊的点集是模的。但是，对于证明椭圆曲线整个都是模的，这只是一个必要条件而非充分条件。

所讨论的那个群只有 9 个元素，因此人们可以想象得到，即使它是模的，也仅仅代表了向整条曲线都是模的这一方向迈出的极小的一步。为了弥补这个差距，Wiles 希望考察越来越大的群，即从 9 个元素的群发展到 9^2 个（即 81）元素的群，再发展到 $9^3(729)$ 个元素的群，依此类推。如果他能由此而达到一个无穷大的群并证明它也是模的，那就等于是证明了整条曲线都是模的。

Wiles 通过一种不严格的归纳过程完成了这一任务。他必须证明，如果一个群是模的，那么比它大的下一个群必定也是模的。这一方法有点象多米诺骨牌的倒塌：为了使无穷多个多米诺骨牌倒下，只需要确保任何一块多米诺骨牌倒下后肯定也将推倒下一块多米诺骨牌就行了。最后，Wiles 确信他的证明已经完成，

并于 1993 年 6 月 23 日在剑桥大学伊萨克·牛顿数学研究所的一次会议上宣布了他的结果。他的保密研究颇为成功，数学界和全球新闻界都对他的证明感到惊喜交加。《纽约时报》在头版报导这一消息时惊呼，“在古老而神秘的数学界里终于发出了‘我发现了！’的喊声”。

就在媒体大肆炒热这一消息的同时，正式的同行评议过程也开始了。普林斯顿大学的 Nicholas M. Katz 几乎是马上就发现了 Wiles 的证明中有一页上存在一个根本的、致命的错误。Wiles 在他的归纳过程中借用了约翰·霍普金斯大学的 Victor A. Kolyvagin 和加利福尼亚理工学院的 Matthias Flach 的一种方法来证明该群是模的。但是现在看来，在这个特殊的例子中似乎不能够依靠这一方法。Wiles 的童年梦想瞬间变成了一场恶梦。

找出解决办法

在接下来的 14 个月中，Wiles 又销声匿迹，只同他以前的学生 Richard Taylor 潜心探讨这一错误。他们一起绞尽脑汁地对付这个问题，试图修补 Wiles 已经用过的方法并利用他先前抛弃了的其它一些方法。1994 年 9 月 19 日，正当他们将要承认失败，并把这个有毛病的证明丢出去以便让其它数学家能设法纠正它时，他们发现了关键的补救方法。许多年以前，Wiles 曾考虑过使用一种以所谓 Iwasawa 理论为基础的替代方法，但此方法效果并不好，因此 Wiles 放弃了。现在他意识到，那使得 Kolyvagin-Flach 方法失效的东西，正好将使以 Iwasawa 理论为基础的方法能获得成功。

Wiles 在回忆他对于此发现的反应时说：“这个发现简直漂亮得无法形容，它既简洁又精美。头一个晚上我回到家里倒头便睡，等第二天再说。次早早晨我又仔细检查了一遍，然后走下楼去告诉我的妻子：‘成了。我想我已经找到它了。’他毫无思想准备，以为我说的是孩子的玩具或其它什么东西，于是问我，‘什么成了？’我说，‘我纠正了我的证明，大功告成了。’”

对于 Wiles 来说，Wofskohl 奖金的颁发标志着持续三十多年的一项执着追求的结果：“解决这个问题之后，我肯定获得了一种自由自在的感觉。8 年来我是如此沉迷于这个问题，以致无时无刻不在想它——从早晨一觉醒来到夜晚上床

入睡，这个问题始终萦绕在我的心头。现在这一非凡的历程终告结束。我的头脑得以休息了。”然而，对于其它数学家，还有一些重大问题依然存在。特别是，所有数学家一致认为，Wiles 的证明太复杂，太现代化了，不可能是费马当年在页边空白写下那一段话时脑中所想到的证明。二者必居其一——要么是费马自己弄错了，他的证明（如果的确有一个证明的话）实际上是有问题的；要么就真的是还有一个简单而巧妙的证明等待着数学家们去发现。

第五十六届 William Lowell Putnam 数学竞赛解答

Leonard F. Klosinski, Gerald L. Alexanderson, Loren C. Larson

A-1

解答: 假设 T 对乘法是不封闭的, 那么存在 $t_1, t_2 \in T$ 且 $t_1 t_2 \notin T$. 又因为 S 对乘法是封闭的, 所以 $t_1 t_2 \in U$. 现考虑 U 中任何两个元素 u_1 和 u_2 , 我们要证明 $u_1 u_2 \in U$ (这样的话 U 对乘法就是封闭的). 假设 $u_1 u_2 \notin U$, 那么 $u_1 u_2 \in T$, 所以 $t_1 \cdot t_2 \cdot u_1 u_2 \in T$ (因为它是 T 中三个元素之积), 但是 $t_1 \cdot t_2 \cdot u_1 u_2 = (t_1 t_2) \cdot u_1 \cdot u_2 \in U$ (作为 U 中三个元素之积), 这与已知的 T 与 U 不相交矛盾, 所以 $u_1 u_2 \in U$. 证毕.

评注: T, U 不必都是封闭的. 例如取 T 为模 4 后余 1 的所有正整数之集, 而 U 为模 4 后余为 3 的所有正整数之集, 那么 $S = T \cup U, T$ 是封闭的, U 则不是.

A-2

解答: 积分收敛当且仅当 $a = b$.

注意到对所有的 $x \geq b$, 被积函数是有定义且连续的, 所以唯一的问题是讨论 ∞ 处的收敛性问题.

因为 $(\sqrt{x+a} - \sqrt{x})(\sqrt{x+a} + \sqrt{x}) = a$ 且 $(\sqrt{x} - \sqrt{x-b})(\sqrt{x} + \sqrt{x-b}) = b$, 所以被积函数可写为

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{x-b}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \left[\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{a}{x}} + 1}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{1 + \sqrt{1-\frac{b}{x}}}} \right]$$

如果 $a \neq b$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 括号里的值就趋向于一个非零数 $\sqrt{a}/2 - \sqrt{b}/2$. 对足够大的 x , 被积函数的绝对值至少为 $c/2\sqrt[4]{x}$, 其中 $c = |\sqrt{a}/2 - \sqrt{b}/2|$. 此时通过与发散积分 $\int_1^\infty (1/\sqrt[4]{x})dx$ 比较可知原积分发散.

另一方面, 如果 $a = b$, 则被积函数为:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}} \left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}}} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}} - \sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}}} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}} - (\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1)}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}} + \sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1}} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \left(\sqrt{1 - \frac{a}{x}} - \sqrt{1 + \frac{a}{x}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{\varphi(x)} \cdot \frac{1 - \frac{a}{x} - (1 + \frac{a}{x})}{\sqrt{1 - \frac{a}{x}} + \sqrt{1 + \frac{a}{x}}} = \frac{-2a\sqrt{a}}{x\sqrt[3]{x}\varphi(x) \left(\sqrt{1 - \frac{a}{x}} + \sqrt{1 + \frac{a}{x}} \right)} \end{aligned}$$

其中

$$\varphi(x) = \sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}} \left(\sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}} + \sqrt{\sqrt{1 + \frac{a}{x}} + 1} \right).$$

因为 $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(x) \rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$, 被积函数的绝对值小于 $a\sqrt{a}/x^{5/4}$, 所以与积分 $\int_1^\infty (1/x^{5/4})dx$ 比较可得原积分收敛.

A-3

解答: 假设 $d_1d_2 \cdots d_9 \equiv a \pmod{7}$, 那么对每个 $i, 1 \leq i \leq 9$,

$$\begin{aligned} a &\equiv a - 0 \equiv (d_1 \cdots d_i \cdots d_9) - (d_1 \cdots e_i \cdots d_9) \pmod{7} \\ &= 10^{9-i}d_i - 10^{9-i}e_i \pmod{7}. \end{aligned}$$

把这些同余式加起来就有: $9a \equiv (d_1d_2 \cdots d_9) - (e_1e_2 \cdots e_9) \pmod{7}$, 所以 $e_1e_2 \cdots e_9 \equiv a \pmod{7}$.

利用同样的办法, 从 $e_1e_2 \cdots e_9 \equiv -a \pmod{7}$ 开始, 我们有

$$-a \equiv 10^{9-i}e_i - 10^{9-i}f_i \pmod{7},$$

所以

$$-a \equiv (10^{9-i}d_i - a) - 10^{9-i}f_i \pmod{7}$$

等价于

$$10^{9-i} d_i \equiv 10^{9-i} f_i \pmod{7}.$$

因为 7 与 10 是互素的，所以 $d_i \equiv f_i \pmod{7}$.

A-4

解答：我们将证明只有两个地方可以剪断项链，使其达到我们的要求。

首先任意选取一个起始点，和一个旋转方向，并依次用整数 y_1, y_2, \dots, y_n 作标号，其中 $\sum_{i=1}^n y_i = n - 1$.

考虑坐标平面上一条道路，从原点 $(0, 0)$ 出发，向右移动一个单位，然后竖直到达点 $(1, y_1)$ ，再向右移动一个单位，竖直到达点 $(2, y_1 + y_2)$ ，如此继续得到点 $(3, y_1 + y_2 + y_3), \dots, (k, \sum_{i=1}^k y_i), \dots, (n, \sum_{i=1}^n y_i = n - 1)$. 在项链上继续这种办法就得： $(n+1, n-1+y_1), (n+2, n-1+y_1+y_2), \dots$ 选取点 $(K, \sum_{i=1}^K y_i)$ ，它是直线 $y = ((n-1)/n)x$ 上方的最高点，即使 $\sum_{i=1}^k y_i - ((n-1)/n)k$ 取最大值。因为 $n+1$ 与 n 是互素的整数，模去 n, k 是唯一的。重标这些整数，下标按 k 递减。也就是，把原点移到所选取的点。因为从原点开始到其它点的直线的斜率最多为 $(n-1)/n$ （相等发生在每个周期的端点），于是我们达到了目的：如果 $\sum_{i=1}^k x_i \geq k$ ，斜率至少为 1.

例子：假设 $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = \{3, -2, -2, 3, 6, 0, 0, 1, -1\}$ ，相应的道路如下图：

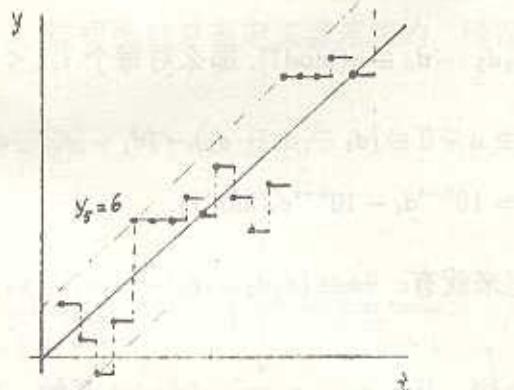


图 1

移位序列 $0, 0, 1, -1, 3, -2, -2, 3, 6$ 有部分和 $0, 0, 1, 0, 3, 1, -1, 2, 8 \leq k-1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

为了找到在相反意义下项链的剪断点的位置，不需要另画一个图，只需要在直

线下方选取最低点得到移位序列 $-2, -2, 3, -1, 1, 0, 0, 6, 3$, 其部分和 $-2, -4, -1, -2, -1, -1, -1, 5, 8 \leq 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

A-5

解答: 我们将证明函数 x_1, x_2, \dots, x_n 必是线性相关的. 令

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ 及 } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

则有 $dx/dt = Ax$. 考虑线性组合 $y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是待定常数, 可能是复数. 如果令 $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则有 $y = v \cdot x = v^T x$ (T 表示转置), 这样

$$\frac{dy}{dt} = v^T \frac{dx}{dt} = v^T Ax = (A^T v)^T x.$$

特别地, 如果 v 是 A^T 的关于特征值 λ 的一个特征向量, 则有

$$\frac{d}{dt} = (A^T v)^T x = (\lambda v)^T x = \lambda v \cdot x = \lambda y,$$

所以此时 y 有形式 $y = Ce^{\lambda t}$, C 为某个常数. 因为 $a_{ij} \geq 0$, 特别地 $\text{Trace}(A^T) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \geq 0$, 所以 A^T 至少有一个特征值. 其实部是非负的. 设 λ 为这样的特征值, 令 $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 为 A^T 的相应于 λ 的特征向量, 那么由上讨论可知 $y = Ce^{\lambda t}, \text{Re}(\lambda) \geq 0$. 另一方面, 因为 $t \rightarrow \infty$ 时, $x_i(t) \rightarrow 0$, y 是 x_i 的线性组合, 所以 $t \rightarrow \infty$ 时, $y(t) \rightarrow 0$. 但是当 $t \geq 0$ 时 $|e^{\lambda t}| = e^{\text{Re}(\lambda)t} \geq 1$, 所以由 $Ce^{\lambda t} \rightarrow 0$ 可得 $C = 0$, 所以 x_i 的非平凡线性组合为 0(注意到 $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 是非零的, 因为它是一个特征向量), 所以 x_i 是线性相关的. 得证.

A-6

解答: 对正整数 n , 令 $S(n)$ 表示命题“出现 $b = a + 1$ 及 $c = a + 2$ 的情形至少为出现 $a = b = c$ 情形的 4 倍”. 我们将证明如果命题 $S(n)$ 是假的, 则 $S(n+1)$ 就是真的. 特别地, $S(n)$ 对 $n = 1995$ 和 $n = 1996$ 至少有一个是真的.

对任何整数 n , 令 X_n 表示形成 $b = a + 1$ 和 $c = a + 2$ 的矩阵的方式的数目. (其中 a, b, c 是重排后矩阵每行之和, $a \leq b \leq c$, 附带地有 $a + b + c = 6n$). 令 Y_n

表示形成 $a = b = c$ 的矩阵的方式的数目，令 Z_n 表示形成 $a = b$ 和 $c = a + 3$ 的矩阵的方式的数目。

如果 $S(n)$ 是假的，则 $4Y_n > X_n$ 。现在注意到如果有一个 $n+1$ 列的矩阵，其每行之和相等，那么前面 n 列所形成的矩阵应归入 X_n 。相反地，对由以 X_n 中的方式形成的每个矩阵，恰有一种 Y_{n+1} 中的方式去“实现”它，所以 $Y_{n+1} = X_n$ 。类似的讨论可知 $Z_{n+1} \geq X_n$ （因为对行和 $a, a+1, a+2$ 可以分别加上 $2, 1, 3$ 得到 $a+2, a+2, a+5$ ），有 $X_{n+1} \geq 6Y_n + 2X_n + 2Z_n$ 。（因为 $a+2, a+3, a+4$ 可由 $1, 2, 3$ 按任意顺序加到 $a+1, a+1, a+1$ 上得到 [可以重排]，或者把 $2, 3, 1$ 或 $3, 1, 2$ （按同样的顺序）加到 $a, a+1, a+2$ 上得到 [可以重排]，也可以把 $3, 2, 1$ 或 $2, 3, 1$ 加到 $a, a, a+3$ 上得到 [可以重排]）。

所以，我们有

$$\begin{aligned}\frac{X_{n+1}}{Y_{n+1}} &= \frac{X_{n+1}}{X_n} \geq 6\frac{Y_n}{X_n} + 2 + 2\frac{Z_n}{X_n} \\ &\geq 6\frac{Y_n}{X_n} + 2 + 2\frac{X_{n-1}}{X_n} \\ &= 6\frac{Y_n}{X_n} + 2 + 2\frac{Y_n}{X_n} \\ &= 8\frac{Y_n}{X_n} + 2.\end{aligned}$$

由假设有 $Y_n/X_n > 1/4$ ，所以 $X_{n+1}/Y_{n+1} \geq 8/4 + 2 = 4$ ，所以 $X_{n+1} \geq 4Y_{n+1}$ 。证毕。

B-1

解答：假设 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 中没有所要求的两个数，那么 π 中同一部分的任何两个数必定包含在 π' 中数目不同的两部分之和，反之亦真。这说明 π 和 π' 中的最大部分的元素的个数多为 3（因为 $1+2+3+4 > 9$ ）。事实上， π 中元素个数相同的两个部分的任意两个数必定包含在 π' 中元素个数不同的两部分之和，所以 π 最多有一个部分的元素个数为 3；有一个部分的元素个数为 2，至多有三个部分的元素个数为 1。而这对于 9 个数的集合的划分是不可能的。

B-2

解答：我们将证明 $b^2 = a^2 + c^2$ 。

椭圆的参数形式为 $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta$ 。用熟知的关于弧长的公式，椭圆的

周长为:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

正弦曲线的一个周期的长度为:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \frac{c^2}{a^2} \cos^2 \left(\frac{x}{a} \right)} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 \theta} d\theta.$$

由等式 $a^2 + c^2 \cos^2 \theta = a^2 \sin^2 \theta + (a^2 + c^2) \cos^2 \theta$, 我们得到, 两个弧长相等当且仅当 $b^2 = a^2 + c^2$. 证毕.

B-3

解答: $n = 1$ 时, 和为 45; $n = 2$ 时, 和为 20250; $n \geq 3$ 时, 和为 0.

$n = 1$ 的情形是平凡的: $1 + 2 + \dots + 9 = 45$. 现设 $n \geq 2$. 那么对元素取自 $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 中的每个 $n \times n$ 矩阵, 总对应另外一个矩阵, 它由交换这个矩阵的最后两列所得 (如果这个矩阵与原来的矩阵相等, 则其行列式为 0), 因为交换两列改变行列式的符号, 所以取自 $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 的所有矩阵的行列式之和为 0. 然而, 我们不是取所有的矩阵, 而只取左上角不为 0 的那些. 如果 $n \geq 3$, 则交换最后两列不影响左上角, 所以所求的和为 0. 另一方面, 如果 $n = 2$, 则对和有贡献的只有形如 $(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix})$ 的矩阵的行列式. 这些行列式只依赖于对角线上的元素, 对对角线上的每对元素对应着 10 个矩阵, 所以它们的和为:

$$10 \sum_{i,j=1}^9 ij = 10 \left(\sum_{i=1}^9 i \right) \left(\sum_{j=1}^9 j \right) = 10 \cdot 45 \cdot 45 = 20250,$$

证毕.

B-4

解答: 答案为 $(3 + \sqrt{5})/2$.

令

$$F(n) = n - \frac{1}{n - \frac{1}{n - \dots}},$$

所以我们的问题是求 $\sqrt[3]{F(2207)}$. 注意到 $F(n) = n - 1/F(n)$, 对 $F(n)$ 解这个二次方程得到 $F(n) = (n \pm \sqrt{n^2 - 4})/2$.

对 $n > 2$, 有

$$\frac{n - \sqrt{n^2 - 4}}{2} = \frac{2}{n + \sqrt{n^2 - 4}} < \frac{2}{n} < 1 < F(n),$$

所以我们必须取加号的值: $F(n) = (n + \sqrt{n^2 - 4})/2$. 注意到对 $n > 2$,

$$\begin{aligned}(F(n))^2 &= \frac{n^2 + 2n\sqrt{n^2 - 4} + n^2 - 4}{4} = \frac{n^2 - 2 + n\sqrt{n^2 - 4}}{2} \\ &= \frac{n^2 - 2 + \sqrt{(n^2 - 2) - 4}}{2} = F(n^2 - 2).\end{aligned}$$

因为 $n > 2$ 可得 $n^2 - 2 > 2$.

相反地, 如果 $k > 2$, 我们有 $k = n^2 - 2, n = \sqrt{k+2} > 2$, 所以 $F(k) = (F(n))^2, \sqrt{F(k)} = F(n) = F(\sqrt{k+2})$. 特别地,

$$\begin{aligned}\sqrt{F(2207)} &= F(\sqrt{2209}) = F(47), \\ \sqrt[4]{F(2207)} &= \sqrt{F(47)} = F(\sqrt{49}) = F(7), \text{ 及} \\ &= \sqrt[8]{F(2207)} = \sqrt{F(7)} = F(\sqrt{9}) = F(3) = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

B-5

解答: 只有 1 粒豆子或没有豆子的那些堆不影响游戏. 实际上, 不会出现 1 粒的情况. 含有 2 粒的那堆就象只含 1 粒的一样, 可以去掉, 有 3 粒的堆是特殊的. 其它情况是每次只拿取 1 粒豆子, 其所得结果依赖于全部豆子总数的奇偶性 (把 2 粒的情况看作是 1 粒).

首先拿的人可以获胜, 他从 3 粒豆子的那一堆里拿取 1 粒, 留下 4 堆, 所含豆子数分别为 2, 4, 5, 6. 它们“和”为 $1 (= 2) + 4 + 5 + 6$, 偶数. 现在输赢已定. 因为另一个人必定使“和”为奇数. 不管如何拿取, 除非第一个人不在有 4 粒豆子的那一堆里拿取 (这没有必要, 因为和将总是奇数, 于是不会出现有 4 粒豆子的情况), 而且不管第二个人何时在 4 粒堆里拿取, 第一个将随后拿取该堆所有剩下的豆子.

B-6

解答: 设 $\alpha < \beta < \gamma$, 不相交的 $S(\alpha), S(\beta)$ 与 $S(\gamma)$ 覆盖 $\{1, 2, 3, \dots\}$, 因为 $[\alpha] = 1$, 我们有 $\alpha = 1 + \varepsilon, 0 \leq \varepsilon < 1$.

设 $r > 1$ 为不在 $S(\alpha)$ 中的第一个值, 则有

$$\lfloor (r-1)\alpha \rfloor = r-1, \lfloor \alpha \rfloor = r+1.$$

所以 $(r-1)\alpha < r, r\alpha \geq r+1$ 及

$$1 + \frac{1}{r} \leq \alpha < 1 + \frac{1}{r-1};$$

即

$$\frac{1}{r} \leq \varepsilon < \frac{1}{r-1};$$

事实 1: 如果 $u \notin S(\alpha)$, 那么不在 $S(\alpha)$ 中的第二个元素是 $u+r$ 或者 $u+r+1, (u+r, u+r+1)$ 中的另一个在 $S(\alpha)$ 中). 下一个不在 $S(\alpha)$ 中的元素为 $u+m$, 其中 m 是满足 $\delta + (m-1)\varepsilon \geq 1$ 的最小整数. 如果 $m \leq r-1$, 则

$$\delta + (m-1)\varepsilon < m\varepsilon \leq (r-1)\varepsilon < 1,$$

这是因为 $\delta < \varepsilon$. 对 $m=r+1$, 有

$$\delta + (m-1)\varepsilon = \delta + r\varepsilon \geq 1.$$

所以 $m=r$ 或 $r+1$.

注意到 $\lfloor \beta \rfloor = r$, 所以 $r \leq \beta < r+1$.

事实 2: 如果 $v \in S(\beta)$, 那么 $S(\beta)$ 中的第二个元素是 $v+r$ 或 $v+r+1$.

事实 2 的证明同事实 1.

根据事实 1 和事实 2, 又因为 $S(\alpha)$ 与 $S(\beta)$ 不相交, 所以 $S(\alpha)$ 与 $S(\beta)$ 的并集即为 $\{1, 2, 3, \dots\}$, 所以 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 不能表成三个不相交集合 $S(\alpha), S(\beta)$ 与 $S(\gamma)$ 的并集.

(邹建成 译 李培信 校)