概率论与数理统计往年试题总结（第三章到第七章）

（仅供参考，请勿外传）

第三章 随机变量的数字特征

三、设 Y 服从参数为μ 与σ^2的对数正态分布（即 Y 满足：lnY~N(μ,σ^2)），试求 Y 的分布密度$f_Y(y)$及 E(Y)与 Var(Y)。

二、（15 分）设随机变量 X 满足：$|X|\le 1$，$P(X=-1)=1/8$，$P(X=1)=1/4$，而且，X 在$(-1,\ 1)$内任一子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比。试求：

（1）X 的概率分布函数$F(x)=P(X\le x)$；

（2）X 取负值的概率；　（3）X 的数学期望$E(X)$。

三、（20 分）二维随机变量(X,Y)的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & (x>0,y>0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（1）试求系数$A=?$；（2）X 与Y是否独立？

（3）试求$Z=X+Y$的密度函数$f_Z(z)$；

（4）试求$Var\left(X\mid X+Y=1\right)$。

（6）将一枚硬币连掷 n 次，以 X 与 Y 表示出现正面和反面的次数，则$\rho_{X,Y}$=(　)。

4. 随机变量 X 和 Y 独立，Y 和 Z 独立，且都有期望方差，则必有________.

(A)X 和 Z 独立　　　　(B)X 和 Z 不相关

(C)X 和 Z 相关　　　　(D)$\text{Cov}(X, Y)=0$

三.(15 分) 设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 服从均匀分布 $U(-1,1)$，Y 服从均值为 1/2 的指数分布，则

(1) 求随机变量 $Z=(X+1)Y$ 和 X 的相关系数.

(2) 求条件概率 $P(Z>1|X=0)$.

（4）随机变量 X 与 Y 不相关，则必有_____

(A) Var(XY)=Var(X)Var(Y)　　　　(B) F(x,y)=$F_X(x)F_Y(y)$

(C) X 与 Y 相互独立　　　　(D) EXY=EX*EY

4 设 $Var(X)=4Var(Y)=1$, $Cov(X,Y)=0.25$, 则$X-Y$与$X+Y$的相关系数 $\rho_{X-Y,X+Y}=$ ________________________.

（4）设 Var(X)=Var(Z), Var(Y)=4Var(X), 相关系数$\rho_{X,Y}=-1$, $\rho_{X,Z}=1/2$, 则$\rho_{X,Y+Z}=$_

（4）设随机变量 X 与 Y 独立，且 $E(X)=E(Y)=0, Var(X)=Var(Y)=1$ 。若命 $W=X-Y$，则Y与W的相关系数是（　　　　　）;

第四章 大数律与中心极限定理

1. （6）在实验次数无穷大时，某个事件发生的频率就等于其发生的概率，该说法____

   (A)正确　　（B）错误

2. 四、某种疾病的发病率为 0.005，现随机调查 1000 人，考虑事件 A=“在调查的人中发病人数在 3 至 7 个人”，试：

   （1）使用 Possion 逼近方法求 P(A)；

   （2）使用中心极限定理求 P(A)。

3. 四、(利用中心极限定理求解）某灯泡厂生产的灯泡的平均寿命原为 2000 小时，标准差为 250 小时，经过工艺改革，使平均寿命提高到 2250 小时，标准差不变。为了确认这一改革成果，主管部门派人来检查，办法是：任意挑选若干只灯泡来检测，若其平均寿命值超过 2200 小时，则认可这一成果。问：

   （1）若挑选 160 只灯泡来检查，则其平均寿命值超过 2200 小时的概率约为多少？

   （2）为了使检查通过的概率超过 0.997，问至少应检查多少只灯泡？

第五章 数理统计的基本概念与抽样分布

1. 6. 设 $X_1,...,X_n$ 为来自均匀分布 $U(-\theta,\theta)$ 的一组样本，θ 为未知参数，则下述量为统计量的是________.

   (A) $\bar{X}-\theta$　　(B) $\max\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)-\min\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)$

   (C) $\max\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)$　　(D) $\min\limits_{1\le i\le n}(X_i-\theta)$

2. （7）设 $X_1,\cdots,X_n$ 为正态总体 $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$ 中抽取的样本，μ,σ^2 为未知参数，则下面的量为（　　）统计量。

   (A) $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_1^n X_i$ (B) $\bar{X}-\mu$ (C) $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_1^n(X_i-\bar{X})^2$ (D) $\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)/S$

3. 7. 假设从两个独立的正态总体中各得到样本量为 10 的两组样本,若两个总体的方差相同,则使用两样本 t 检验时 t 分布的自由度为________.

第六章 参数估计

1. 参数估计量优良性的准则有____________________(写出至少两个).

2. （8）若总体密度函数为$\mathrm{f}(x)=\frac{1}{2}(x-\mu)^{-3/2}I(x>\mu+1)$，则可以使用矩估计法估计参数$\mu$，这种说法___。 （A）对 （B）错

3. （10）设$X_1,\cdots,X_n$为从均匀总体$\mathrm{U}(0,\theta),\theta>0$中抽取的样本，则$\theta$的估计量$X_{(n)}$为$\theta$的：
（A）无偏估计 （B）相合估计 （C）似然估计 （D）矩估计

4. （5）设$\hat{\theta}_n$为未知参数θ的一个估计量，如果设$\lim_{n\to\infty}E\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|=0$，则$\hat{\theta}_n$为θ的__
(A) 无偏估计 （B）有效估计 （C）相合估计 （D）渐进正态估计

5. （3）设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自正态总体$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$，σ^2未知，则μ的$(1-\alpha)$置信区间为（）

6. （7）$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$为$\theta$的无偏估计，且$\lim_{n\to\infty}Var(\hat{\theta})=0$，则$\frac{n+1}{n}\hat{\theta}$为$\theta$的：

(a)无偏估计 (b)最小方差无偏估计 (c)相合估计 (d)以上皆错

7. 总体参数的置信水平为95%的置信区间是指_________

(A)总体参数落在一个特定的样本所构造的区间内的概率为95%

(B)总体参数落在一个特定的样本所构造的区间内的概率为5%

(C)在用同样方法构造的总体参数的多个区间中，包含总体参数的区间比例为95%

(D)在用同样方法构造的总体参数的多个区间中，包含总体参数的区间比例为5%

8. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自于正态总体$N(\mu,1)$的简单随机样本, 若要求参数 μ 的置信系数为0.95的置信区间长度不超过1, 则至少需要抽取的样本量n 为_________.

(A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20

9. 设X~B(n,p),则当 n 趋于无穷时，$2\sqrt{n}\left(arcsin\sqrt{X/n}-arcsin\sqrt{p}\right)$的分布函数收敛到标准正态分布，据此作出在 X=90,n=150 情况下，参数 p 的置信系数为 0.95 的大样本区间估计________。

10. 9. 假设总体密度为 $f_\theta(x)$，其中 θ 为参数. 若 X 为来自该总体的样本，则下述不正确的是________.

(A) 固定 x 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数　(B) 固定 θ 时 $f_\theta(x)$ 为似然函数

(C) 固定 θ 时 $f_\theta(x)$ 为密度函数　(D) $f_\theta(x)$ 衡量了不同 θ 下观测到 x 的可能性大小

11. 四、(20 分) 设样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 抽自正态总体 $X \sim N(\mu, 1)$， μ 为未知参数

(1) 试求 $\theta = P(X \geq 2)$ 的极大似然估计 θ^*（结果可用 $\Phi(.)$ 的形式表示）;

(2) 写出 μ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间，并求 θ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间。

12. 四.(15 分) 当 PM2.5 值全天监测平均在 35 微克/立方米以内时，空气质量属于一级. 现观测到合肥市琥珀山庄过去 10 天的日平均 PM2.5 值分别为 28.24，31.48，33.85，39.34，37.78，30.21，29.92，31.21，30.17，37.84. 若假设琥珀山庄区域日均 PM2.5 值 X 服从正态分布，各天日均 PM2.5 值相互独立. 则

(1) 试给出日均 PM2.5 值的 95% 置信上限.

(2) 若感兴趣空气质量为一级的概率 $p = P(X \leq 35)$，试基于观测的日均数据给出 p 的极大似然估计.

13. (15分) 设总体X的分布律为

X	1	2	3
P	p	$2p$	$1-3p$

现从此总体中抽出一样本量为n的样本, 发现其中1出现了n_1次, 2出现了n_2次, 3出现了n_3次. 试

(1) 求p的极大似然估计量$\hat{p}$和矩估计量$\tilde{p}$.

(2) 证明所得的估计量均为无偏估计, 并说明两个估计量何者最优.

14. 设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自均匀分布$R(\theta,0),(\theta<0)$:

（1）试求θ的矩估计$\hat{\theta}$和极大似然估计θ^*;

（2）$\hat{\theta}$和θ^*是否为θ的无偏估计？若是请加以证明，若不是请加以修正。

（3）问(2)中所得的无偏估计，哪个更有效？

15. 设样本$X_1,\cdots,X_n$抽自总体 X，其中：

$$X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x-\theta}{2}}, & x\geq\theta\\ 0, & x<\theta\end{cases}$$

(1) 试求θ的矩估计$\hat{\theta}$和极大似然估计θ^*;

(2) 验证$\hat{\theta}$和θ^*是否为θ的无偏估计；若否，试将其修正为无偏估计。

16. 设样本$Y_1,\cdots,Y_n$相互独立，$Y_i \sim N(a_i\mu,\sigma^2), i=1,\cdots,n$，其中$a_1,\cdots,a_n$为已知不全为零的常数。

（1）求μ和σ^2的极大似然估计$\hat{\mu}$和$\widehat{\sigma^2}$；

（2）$\hat{\mu}$是否为μ的无偏估计？

（3）$\widehat{\sigma^2}$是否为σ^2的无偏估计？若是请加以证明，若不是请加以修正。

第七章 假设检验

六、假设某台精盐包装机生产的袋装盐的净重服从正态分布，按照要求每袋盐的标准重量为 500g，标准差不得超过 10g。某天开工后，从装好的盐中随机抽取 10 袋，测得其净重（单位：g）为：510，495，478，487，501，493，528，504，503，504。试据此判断这时机器的工作是否正常。（$\alpha=0.05$）

七、某一作业中可能发生两类事故：A（起火）和 B（爆炸），而该作业有三种不同的原料可供选择：L、M 和 N。下面给出的是事故记录：

	L	M	N	和
A	42	17	29	88
B	20	4	29	53
和	62	21	58	141

试据此判断事故类型是否与原料的种类有关？（$\alpha=0.05$）

五、（15 分）为考查 A, B 两种制鞋材料的耐磨性，用它们制作了 10 双鞋，其中每双鞋的两只鞋分别用 A 和 B 两种材料制作(左、右脚两只鞋随机地采用 A 或 B)。10 个男孩试穿这 10 双鞋之后的磨损情况如下表所示（数字代表磨损程度），假定 A, B 两组数据的差服从正态分布，问是否可以认为这两种材料的耐磨性无显著差异？（$\alpha = 0.05$）

男孩	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	13.2	8.2	10.9	14.3	10.7	6.6	9.5	10.8	8.8	13.3
B	14.0	8.8	11.2	14.2	11.8	6.4	9.8	11.3	9.3	13.6
差	-0.8	-0.6	-0.3	0.1	-1.1	0.2	-0.3	-0.5	-0.5	-0.3

六、（15 分）投资者感兴趣的一个问题，是上市公司股票价格的变化与其公司总部所在地是否有关。下表给出的是美国两个不同地区（公司总部所在地）的上市公司在 1998 年第三季度内股价变化情况。表格内的数字是相应的上市公司的个数。问股票价格的变化是否存在地区间的差异？（$\alpha = 0.05$）

股价变化 / 总部所在地	上升	不变	下降
新英格兰地区	100	7	561
西北地区	88	10	370

（完）

（参考数值：$\chi^2_{0.025}(2) = 7.3778$；$\chi^2_{0.05}(2) = 5.9915$；

$\chi^2_{0.025}(6) = 14.4494$；$\chi^2_{0.05}(6) = 12.5916$；$t_{0.025}(9) = 2.2622$；

$t_{0.05}(9) = 1.8331$；$t_{0.025}(10) = 2.2281$；$t_{0.05}(10) = 1.8125$。）

8. 当原假设 H_0 为真时，检验 ϕ 有可能________.

(A) 犯一类错误　　　　　　(B) 犯第二类错误

(C) 犯第一类或者第二类错误　　(D) 同时犯第一类和第二类错误

10. 假设总体 X 为取值 0,1,2 的离散型随机变量，且取各值的概率分别为 $P(X=0)=0.5, P(X=1)=p, P(X=2)=0.5-p$，其中 $0<p<0.5$ 为参数. 则当使用拟合优度检验时，检验统计量的渐近卡方分布的自由度为________.

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

五.(15 分) 设甲乙两家食用盐工厂生产的食盐每袋重量均服从正态分布 (忽略重量不可取负值). 现从这两家工厂产品中各随机抽出 10 件标称为 500 克的袋装食盐，分别测得抽出各袋食盐的重量 (单位为克) 为

甲厂: 495, 494, 500, 502, 501, 492, 495, 495, 499, 503;

乙厂: 494, 506, 496, 505, 500, 508, 502, 504, 502, 499.

试问甲乙两家工厂生产这种标称为 500 克的袋装盐重量上有无差异 ($\alpha = 0.05$).

六.(10 分) 为研究人们每天阅读电子书的时间 (T) 长短与购买实体书 (Y) 两者之间的关系，随机调查了 210 个人，结果如下

	$t<1$	$1<t<3$	$t>3$
购买	12	70	20
不购买	40	28	40

试在水平 $\alpha = 0.05$ 下判断每天阅读电子书的时间长短和购买实体书两者之间是否有关? 阅读电子书的时间长短和购买实体书之间呈现何种特点?

（8）设$X_1,\cdots,X_n$ iid~$\mathrm{N}(\mu,1)$，考虑假设检验问题$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu=1$，由$\mu$的极大似然估计可以得到一个水平$\alpha$检验法则为____；该检验法则犯第Ⅱ类错误的概率为_____

（9）设基于某组样本得到的总体均值μ的 95%置信区间为[0.234,1.03]，则我们可以在显著性水平____下_____（接受或拒绝）零假设$H_0:\mu=0$。

（10）设某种产品的质量等级可以划分为“优”、“合格”和“不合格”，则使用拟合优度检验方法在检验生产此产品的三家工厂的产品没有差异这一假设时，检验统计量服从渐进卡方分布的自由度为______

六、为了了解甲乙两企业的职工工资水平，分别从两个企业各随机抽取若干名职工调查，的如下数据（单位：元）：

甲企业	750	1060	750	1820	1140	1050	1000	
乙企业	1000	1900	900	1800	1200	1700	1950	1200

假设两个企业的工资分别服从正态分布，且总体独立而均值方差未知。试根据以上数据判断：

（1）两企业职工工资的方差是否相等（$\alpha=0.05$）

（2）甲企业职工平均工资是否低于乙企业职工平均工资（$\alpha=0.05$）

五. (15分) 某针灸减肥机构宣称疗程结束后可以使参加者平均减少体重5kg以上, 为检验该广告是否可信, 调查人员随机调查跟踪了10名参加者, 测得他们参加前和参加后的体重(kg)为

参加前	65.39	62.89	63.50	60.83	63.07	62.88	57.80	63.07	66.05	70.78
参加后	61.72	59.43	59.64	57.30	58.50	60.84	51.89	60.02	63.67	65.67

假设参加前和参加后的体重服从正态分布, 试

(1) 在显著性水平0.05下检验该机构的宣传是否可信.

(2) 给出平均减少体重的95%置信区间.

六. (10分) 为研究女性和男性在美国选举中的偏好差异，1991年美国普通社会调查随机调查了577名女性和403名男性，询问每人是倾向于“支持民主党”，“支持共和党”以及“中立”，得到的调查数据如下：

	所支持政党(Party)			
性别(Gender)	民主党(0)	中立(1)	共和党(2)	总计
女性(1)	279	73	225	577
男性(0)	165	47	191	403
总数	444	120	416	980

(1) 为了检验选民政治倾向是否与性别有关, 试写出此问题的原假设.

(2) 在显著性水平0.05下, 可否认为选民的政治倾向与性别无关?

附录 分位数: $u_{0.025} = 1.960$, $u_{0.05} = 1.645$, $t_{0.025}(10) = 2.228$, $t_{0.025}(9) = 2.262$, $t_{0.05}(10) = 1.812$, $t_{0.05}(9) = 1.833$, $\chi^2_{0.05}(1) = 3.841$, $\chi^2_{0.05}(2) = 5.991$.

（5）在假设检验中，第Ⅰ类错误是指____；第Ⅱ类错误是指______。

（6）设$X_1, \cdots, X_n$为正态总体$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$中抽取的样本，$\sigma^2$未知，记样本均值和样本方差分别为$\bar{X}$和$S^2$，则假设检验$H_0: \mu \le \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu > \mu_0$（$\mu_0$为已知数）的检验统计量为____。

（6）判断正误：在假设检验中，我们要检验两个正态总体均值差$\mu_1 - \mu_2 = \delta$是否为零，则$\overline{X} - \overline{Y} - \delta$是统计量（　　　）。

六、（15 分）为了解甲、乙二企业职工工资水平，分别从二企业各随机抽取若干名职工调查，得如下数据（单位：元）：

甲企业： 750，1060，750，1820，1140，1050，1000

乙企业：1000，1900，900，1800，1200，1700，1950，1200

设二企业职工工资分别服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$ 和 $N(\mu_2,\sigma^2)$，二总体独立且均值、方差皆未知。试根据以上数据判断：甲企业职工平均工资是否低于乙企业职工平均工资？（分别在 $\alpha=0.05$ 和 $\alpha=0.01$ 两种水平下检验）

（完）

（ 参考数据：t 分布上侧分位点 $t_\alpha(n)$

α \ n	13	14	15
0.005	3.0123	2.9769	2.9467
0.01	2.6503	2.6245	2.6025
0.025	2.1604	2.1448	2.1315
0.05	1.7709	1.7613	1.7531