中 国 科 学 技 术 大 学

2019—2020学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计(B) 得分 ________

所在系 ______ 姓名 ________ 学号 ________

考试时间: 2020年1月13日上午8:30–10:30; 使用简单计算器

一、 (30分, 每小题3分) **填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.**

(1) 设 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=0.4$, 且 $\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(\overline{B}|\overline{A})=1$, 则 $\mathrm{P}(AB)=$ ______.

(2) 甲乙二人抛掷一枚均匀的硬币, 甲抛了101 次, 乙抛了100 次, 则甲抛出的正面次数比乙多的概率是______.

(3) 设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}$, $x\in(-1,1)$. 对任意 $x\in(-1,1)$, 若在条件$X=x$下, 随机变量 Y 的条件分布律为

$$\mathrm{P}(Y=-\sqrt{1-x^2})=\mathrm{P}(Y=\sqrt{1-x^2})=1/2,$$

则 Y __ 连续型随机变量, (X,Y) __ 连续型随机向量. ( )

(A) 是, 是 (B) 是, 不是 (C) 不是, 是 (D) 不是, 不是

(4) 在单位圆盘 $\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$ 上随机取两个点, 以随机变量 X 表示它们之间的距离, 则 $\mathrm{E}(X^2)=$ ______.

(5) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为一列独立同分布的随机变量, 且均服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布. 记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 且 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则对任意 $x\in\mathbb{R}$, 有( )

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}(\overline{X}-\lambda)\le x\right)=\Phi(x)$ (B) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\sqrt{\frac{n}{\lambda}}(\overline{X}-\lambda)\le x\right)=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\sqrt{n}(\lambda\overline{X}-1)\le x\right)=\Phi(x)$ (D) $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\left(\sqrt{n\lambda}(\overline{X}-\frac{1}{\lambda})\le x\right)=\Phi(x)$

(6) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自标准正态总体的简单随机样本, 且 $1\le m<n$, 则当常数 $c=$ ______ 时, 统计量 $c\left(\sum_{i=1}^m X_i\right)^2/\sum_{i=m+1}^n X_i^2$ 服从 F 分布.

(7) 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 其中 μ 为已知常数, 记 $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差, 则下列统计量中与 $\overline{X}$ 不独立的是( )

(A) 样本标准差 S (B) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$ (C) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$ (D) X_1-X_2

(8) 设 X_1,X_2,X_3 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本, 则下列统计量中, ( )为 μ 的无偏估计且方差最小.

(A) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{6}X_3$ (B) $\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{3}X_3$

(C) $\frac{1}{5}X_1+\frac{2}{5}X_2+\frac{2}{5}X_3$ (D) $\frac{1}{7}X_1+\frac{2}{7}X_2+\frac{3}{7}X_3$

(9) 对一正态总体 $N(\mu,100)$ 的均值 μ 求置信水平为 95% 的置信区间, 若要求其区间长度不大于 4, 则样本容量 n 至少应取_____.

(10) 假设检验中, 在显著性水平$\alpha=0.05$ 下若原假设 H_0 被接受, 这说明( )

(A) 有充分的理由表明 H_0 是正确的 (B) 没有充分的理由表明 H_0 是错误的

(C) 有充分的理由表明 H_1 是错误的 (D) 没有充分的理由表明 H_1 是正确的

装 订 线

二、 (20分)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一列独立的随机变量, 且均服从 $U(0,1)$ 分布. 记

$$Y = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, \quad Z = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

(1) 试证明: 对任意常数 $0 < y, z < 1$, 有

$$\mathrm{P}(Y \le y, Z \le z) = \begin{cases} z^n - (z-y)^n, & y < z; \\ z^n, & y \ge z. \end{cases}$$

(2) 利用上述结果, 试求随机变量 Y 和 Z 的联合密度函数 $f(y,z)$.

(3) 在 $Y = y$ 条件下 $(0 < y < 1)$, 试求 Z 的条件密度函数 $f_{Z|Y}(z|y)$.

(4) 若 $n = 2$, 试求 Y 和 Z 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y, Z)$.

三、 (15分)设随机变量 X, Y 和 Z 相互独立, 且均服从参数为 1 的指数分布. 记

$$U = \frac{X}{X+Y}, \quad V = \frac{X+Y}{X+Y+Z}, \quad W = X+Y+Z.$$

(1) 计算随机向量 (U, V, W) 的联合密度函数.

(2) 随机变量 U, V 和 W 是否相互独立? 请证明你的结论.

四、 (15分)设某种元件的使用寿命 T 的分布函数为 $F(t) = \begin{cases} 1 - \exp\{-(\frac{t}{\theta})^m\}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ 其中 $m > 0$ 为已知参数, 而 $\theta > 0$ 为未知参数. 随机取 n 个这种元件, 测得它们的寿命分别为 $T_1, T_2, \cdots, T_n$. 记 $g(\theta) = \theta^m$.

(1) 试求 $g(\theta)$ 的极大似然估计 $\hat{g}(T_1, T_2, \cdots, T_n)$.

(2) 上述估计是否为无偏估计? 请证明你的结论.

五、 (12分) 经大量调查, 已知一般健康成年男子每分钟脉搏的次数服从正态分布 $N(72, 6^2)$. 现测得 16 例成年男子慢性铅中毒患者的脉搏平均 67 次/分钟, 标准差为 7 次/分钟. 问在显著性水平 0.05 下, 这群患者每分钟脉搏的次数(假设也服从正态分布)和正常人有无显著性差异? (要求对均值和方差都进行检验.)

~~六、 (8分) 中国科学技术大学 2019 级本科新生入学考试中, 某学院两个班级的英语科目各档成绩(从低到高)人数如下表所示:~~

~~档次~~	~~I~~	~~II~~	~~III~~	~~IV~~	~~V~~	~~VI~~	~~合计~~
~~一班~~	~~8~~	~~27~~	~~10~~	~~6~~	~~8~~	~~6~~	~~65~~
~~二班~~	~~15~~	~~25~~	~~8~~	~~7~~	~~6~~	~~4~~	~~65~~

~~我们能否认为这两个班级的英语水平大致相当? 显著性水平设为 $\alpha = 0.05$.~~

附录:

$\Phi(1.645) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$;

$t_{15}(0.025) = 2.131$, $t_{15}(0.05) = 1.753$, $t_{16}(0.025) = 2.12$, $t_{16}(0.05) = 1.746$;

$\chi^2_5(0.95) = 1.145$, $\chi^2_5(0.05) = 11.071$, $\chi^2_{15}(0.975) = 6.262$, $\chi^2_{15}(0.025) = 27.488$.