参考答案

一. (1) 0.16　(2) 0.5　(3) B　(4) 1　(5) C
(6) $\frac{n-m}{m}$　(7) C　(8) B　(9) 97 (若答 96 也算对)　(10) B.

二. (1) 当 $0<y,z<1$ 时, 由 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布可知

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y\le y, Z\le z) &= \mathrm{P}(Z\le z)-\mathrm{P}(Y>y,Z\le z)\\
&= \mathrm{P}(X_1\le z,\cdots,X_n\le z)-\mathrm{P}(y<X_1\le z,\cdots,y<X_n\le z)\\
&= [\mathrm{P}(X_1\le z)]^n-[\mathrm{P}(y<X_1\le z)]^n.
\end{aligned}$$

再由 $X_1\sim U(0,1)$ 即知

$$\mathrm{P}(Y\le y,Z\le z)=\begin{cases} z^n-(z-y)^n, & y<z;\\ z^n, & y\ge z.\end{cases}$$

(2) 注意到联合密度函数 $f(y,z)$ 的取值范围是 $0<y<z<1$, 将 (1) 中联合分布函数 $\mathrm{P}(Y\le y,Z\le z)$ 对变量 y 和 z 求一阶偏导数, 即得

$$f(y,z)=n(n-1)(z-y)^{n-2},\quad 0<y<z<1.$$

(如果上述表达式正确, 但没有说明取值范围为 $0<y<z<1$, 扣 1–2 分.)
(3) 由 (2) 可知, 随机变量 Y 的密度函数为

$$f_Y(y)=\int_y^1 f(y,z)\mathrm{d}z=n(1-y)^{n-1},\quad 0<y<1.$$

从而

$$f_{Z|Y}(z|y)=\frac{f(y,z)}{f_Y(y)}=\frac{(n-1)(z-y)^{n-2}}{(1-y)^{n-1}},\quad y<z<1.$$

(如果上述表达式正确, 但没有说明取值范围为 $y<z<1$, 扣 1–2 分.)
(4) 当 $n=2$ 时, 随机变量 Y 的密度函数为 $f_Y(y)=2(1-y)$, $0<y<1$, 故

$$\mathrm{E}Y=\int_0^1 2y(1-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

类似地, 可求得随机变量 Z 的密度函数为 $f_Z(z)=2z$, $0<z<1$, 及 $\mathrm{E}Z=\frac{2}{3}$. 此外, 由于此时联合密度函数退化为 $f(y,z)=2$, $0<y<z<1$, 我们有

$$\mathrm{E}[YZ]=\int_0^1\int_y^1 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}y=\frac{1}{4}.$$

所以,

$$\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{E}[YZ]-\mathrm{E}Y\cdot\mathrm{E}Z=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{36}.$$

三. (1) 由

$$u=\frac{x}{x+y},\quad v=\frac{x+y}{x+y+z},\quad w=x+y+z,$$

可得 $x=uvw$, $y=(1-u)vw$, $z=(1-v)w$, 从而Jacobi行列式

$$J=\begin{vmatrix} vw & uw & uv \\ -vw & (1-u)w & (1-u)w \\ 0 & -w & 1-v \end{vmatrix}=vw^2.$$

由 (X,Y,Z) 的联合密度函数 $f(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(x+y+z)}$, $x,y,z>0$, 及密度变换公式可得所求随机向量 (U,V,W) 的联合密度函数为

$$p(u,v,w)=vw^2\mathrm{e}^{-w},\quad 0<u,v<1,\ w>0.$$

(如果上述表达式正确, 但没有说明取值范围, 扣 1–2 分.)

(2) 随机变量 U,V 和 W 相互独立. 事实上, 由上述联合密度函数可以分解为

$$p(u,v,w)=p_U(u)p_V(v)p_W(w)$$

即知该结论成立, 其中

$$p_U(u)=1,\ 0<u<1;\quad p_V(v)=2v,\ 0<v<1;\quad p_W(w)=\frac{1}{2}w^2\mathrm{e}^{-w},\ w>0.$$

四. (1) 由总体 T 的概率密度函数为 $f(t)=\frac{mt^{m-1}}{\theta^m}\exp\{-(\frac{t}{\theta})^m\}$, $t\geq 0$, 故似然函数为

$$L(\theta)=\frac{m^n}{\theta^{mn}}\prod_{i=1}^{n}t_i^{m-1}\exp\Big\{-\Big(\frac{t_i}{\theta}\Big)^m\Big\}.$$

对其取对数, 得对数似然函数为

$$l(\theta)=\ln L(\theta)=C-n\ln(\theta^m)-\frac{1}{\theta^m}\sum_{i=1}^{n}t_i^m.$$

将上式对 θ^m 求导数, 并令其等于0, 可得(也可对 θ 求导, 结果相同)

$$\frac{\mathrm{d}l(\theta)}{\mathrm{d}(\theta^m)}=-\frac{n}{\theta^m}+\frac{1}{\theta^{2m}}\sum_{i=1}^{n}t_i^m=0.$$

解之即可得所求极大似然估计量为

$$\hat{g}(T_1,T_2,\cdots,T_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}T_i^m.$$

(2) 由

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\hat{g}(T_1,T_2,\cdots,T_n)]&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[T_i^m]=\mathrm{E}[T^m]\\ &=\int_0^\infty\frac{mt^{2m-1}}{\theta^m}\exp\Big\{-\Big(\frac{t}{\theta}\Big)^m\Big\}\mathrm{d}t=\theta^m\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\theta^m,\end{aligned}$$

可知, $\hat{g}(T_1,T_2,\cdots,T_n)$ 是 $g(\theta)$ 的一个无偏估计.

五. (1) 均值的检验. $H_0 : \mu = 72, \quad \longleftrightarrow \quad H_1 : \mu \neq 72$. 由 t 检验统计量

$$t = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \mu_0)}{S} = \frac{\sqrt{16}(67 - 72)}{7} = -2.857,$$

可知 $|t| > t_{15}(0.025) = 2.131$, 故应拒绝原假设, 即认为患者每分钟脉搏的平均次数与正常人有显著性差异.

(2) 方差的检验. $H_0 : \sigma^2 = 6^2, \quad \longleftrightarrow \quad H_1 : \sigma^2 \neq 6^2$. 由 χ^2 检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = \frac{15 \cdot 7^2}{6^2} = 20.417,$$

可知 $\chi^2_{15}(0.975) = 6.262 < \chi^2 < \chi^2_{15}(0.025) = 27.488$, 故应接受原假设, 即认为患者每分钟脉搏次数的方差与正常人相同. 结合均值和方差两个方面, 我们最终可认为患者每分钟脉搏的次数与正常人有显著性差异.

(注: 如果先进行方差的检验, 认定方差可以等于 6^2, 然后利用一样本 u 检验也算正确答案, 均值的检验结果与上面相同.)

六. 拟合优度联列表齐一性检验. 原假设为两个班级的英语水平相当, 而其检验统计量为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{6} \frac{(nn_{ij} - n_{i\cdot}n_{\cdot j})^2}{nn_{i\cdot}n_{\cdot j}}.$$

代入数据计算可知, $\chi^2 = 3.1922 < \chi^2_5(0.05) = 11.071$, 故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下我们不能拒绝原假设, 即可认为两个班级的英语水平相当.