# 概率论与数理统计往年试题总结

（仅供参考，请勿外传）

## 第一章 随机事件与概率

1. 1. 设 $A,B,C$ 是三个随机事件，则在下列不正确的是________.

   (A)$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

   (B)$(A\cup B)\cap C=A\cup(B\cap C)$

   (C)$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

   (D)$A\cap(\overline{B\cap C})=(A\cap\bar{B})\cup(A\cap\bar{C})$

2. **1** 掷3个骰子，恰好有两枚点数相同的概率为________________.

3. （1）设 A,B,C 是三个相互独立的随机事件，且$0<P(C)<1$，则在下列给定的四对事件中，不相互独立的是____

   (A)$\overline{A+B}$和 C (B)$\overline{AC}$和 C (C)$\overline{A-B}$和$\bar{C}$ (D)$\overline{AB}$和$\bar{C}$

4. （3） 设 $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ 相互独立，且 $P(A_i)=1/3$，$(i=1,2,3,4)$ 则

   $P(\bigcup_{i=1}^{4}A_i)=$ (          );

5. 一、有 12 个新的兵乓球，每次比赛时取出 3 个，用完之后再放回去。

（1）设第二次比赛时取到 X 个新球，试求 X 的分布律；

（2）若第三次比赛时取到 3 个新球，问第二次比赛时取出的 3 个球都是新球的概率是多少？

6. 一、（15 分）一串 0,1 数字（独立同分布）组成的序列中 1 的概率 $p$ 代表了某种有用的信息，由于某种原因需要对其保密。现对该串数字进行随机加密，对序列中的每一个数字抛一枚硬币（每次正面出现的概率为 $\pi$ ），若抛出的为正面，则原序列的数字不变，若抛出的为反面，则原序列中相应的数字由 $x$ 变成 $1-x$ （即 0 变成 1， 1 变成 0 ）。加密后的序列可以公布，其中 1 的概率 $p^*$ 可以估计出来。若知道 $\pi$ 的值，就可以从加密后的序列中的 1 的频率为 $p^*$ 计算出原序列的 $p$ ，所以 $\pi$ 称为“密钥”。

（1） 现已知 $p^* = 0.7$ ，如果“密钥” $\pi = 0.4$ ，试求 $p$ ；

（2） 试说明为什么均匀硬币（ $\pi = 0.5$ ）不适合用来加密。

7. 二、某工厂的第一、第二、第三号车间生产同一种产品，产量分别占总产量的 1/2，1/3 和 1/6，次品率分别为 1%、1%和 2%。现从该厂某批产品中随机抽取一件，则：

（1）求取的产品为次品的概率；

（2）若取出的产品为次品，求其是第二个车间生产的概率。

8. **二.** (15分) 假定某种病菌在群体中的带菌率为1%. 在检测时, 带菌者和不带菌者被检测出阳性的概率分别为0.98和0.02.

(1) 现有某人被测出呈阳性反应, 则他是带菌者的概率是多少?

(2) 为了进一步确认, 这个人决定再独立的做一次测试,检测结果依然是阳性, 问在两次检测结果都呈阳性反应的情况下, 他确实为带菌者的概率是多少?

9. 二、(10 分)有 100 个零件,其中 90 个为一等品,10 个为二等品。从中随机取出 2 个,安装在一台设备上。若 2 个零件中恰有 $k$ 个二等品 $(k=0,1,2)$,则该设备的使用寿命服从参数为 $\lambda=k+1$ 的指数分布。若已知该设备寿命超过 1,试求安装的 2 个零件均为一等品的概率。

10 三、设 Y 服从参数为μ 与$\sigma^2$的对数正态分布(即 Y 满足:$\ln Y \sim N(\mu,\sigma^2)$),试求 Y 的分布密度$f_Y(y)$及 E(Y)与 Var(Y)。

第二章　随机变量及其分布

1. 3. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为两个概率密度函数,则下述还是密度函数的是________.

(A)$f(x)/g(x)$　　(B)$f(x)-g(x)$

(C)$(f(x)+g(x))/2$　　(D)$(1+f(x))(1-g(x))$

2. （1）连续掷一枚不均匀硬币（掷出正面的概率为 p），直至正反面都掷出为止，设 X 为所掷的次数，则 X 的分布律为（）

（2）设 X 与 Y 独立，都服从 N(0,1)，则$(X+Y)^2/(X-Y)^2$的分布为（）

3. **7** 假设$X,Y$分别服从标准正态分布,则$X+Y$的分布仍为正态分布. 该说法__________.

(A) 正确　　(B) 错误

4. （5）判断正误：设 $X$ 与 $Y$ 都是正态随机变量，则 $X$ 与 $Y$ 的联合分布由 $X$ 与 $Y$ 的边缘分布唯一确定（　　　）;

5. （2）设$X_1,\cdots,X_4$为相互独立的 N(0,1)变量，$T=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3+4X_4)^2$服从卡方分布，则 a=___，b=___，此时 T 的自由度为___。

6. （3）设随机变量 X 与 Y 相互独立分别服从参数为μ 和 λ的 Possion 分布，则 P(X=k|X+Y=n)=___，即在给定 X+Y=n 的条件下，X 的条件分布为____。

7. 二、（15 分）设随机变量 $X$ 满足：$|X| \le 1$，$P(X=-1)=1/8$，$P(X=1)=1/4$，而且，$X$ 在 $(-1,\ 1)$ 内任一子区间上取值的概率与该子区间的长度成正比。试求：

（1） $X$ 的概率分布函数 $F(x)=P(X \le x)$；

（2） $X$ 取负值的概率；　（3） $X$ 的数学期望 $E(X)$。

8. 三、设二维随机变量(X,Y)的联合密度可以表示成$g(x^2+y^2)$，g 为连续函数。令极坐标变换 X=Rcos$\theta$，Y=RSin$\theta$，问 R 与$\theta$是否相互独立，并求出各自的密度。

9. 三、（20 分）二维随机变量 $(X,Y)$ 的密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & (x>0,y>0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（1）试求系数 $A=?$；（2）$X$ 与 $Y$ 是否独立？

（3）试求 $Z=X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

（4）试求 $Var\left(X \mid X+Y=1\right)$。

10. 二.(15 分) 设昆虫产卵数目服从参数为 1 的 Poisson 分布，而每个卵孵化为幼虫的概率为 $p$，各卵是否孵化相互独立，试求

(1) 一个昆虫产生 $m$ 个幼虫的概率。

(2) 若已知某个昆虫产生了 $m$ 个幼虫，求该昆虫产了 $n(n\geq m)$ 个卵的概率。

11. 三、（20 分）设 $r.v.X \sim f(x) = 6x(1-x), \quad (0 \le x \le 1)$

（1）验证 $f(x)$ 是概率密度函数并画出其图形；

（2）求出 $X$ 的概率分布函数；

（3）确定满足 $P(X < b) = P(X > 3b/2)$ 的数 $b$，（$0 < b < 1$）；

（4）计算 $P\{X \le \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3} < X < \frac{2}{3}\}$。

12. 三、设二维随机变量 X,Y 的联合概率密度函数为：

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, \quad others \end{cases}$$

(1)试求出 X,Y 的边际概率密度函数$f_X(x)$和$f_Y(y)$；

（2）试求出 Z=2X-Y 的概率密度函数$f_z(z)$；

（3）试求$P\left(Y \le \frac{1}{2} | X = \frac{1}{2}\right)$。

13. 三. (15分) 设随机变量 $(X, Y)$ 服从$A=\{(x, y):|x+y| \leq 1,|x-y| \leq 1\}$内的均匀分布, 则

(1) 试求出$X$和$Y$的边际分布;

(2) $X$和$Y$是否相互独立? 不相关?

(3) 求在$X=x$ $(0<x<1)$ 时$Y$的条件密度.

14. 四、(7 分) 设$(X,Y)$服从$D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$上的均匀分布，试求

$Z=\dfrac{Y}{3X}$的概率密度函数$f_Z(z)$。