

中国科学技术大学

2017—2018学年第一学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计(B) 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2018年1月10日上午8:30-10:30; 使用简单计算器

一. (30分, 每小题3分) 填空题或单选题, 答案可以直接写在试卷上.

- (1) 设随机事件 A 和 B 相互独立, A 和 C 相互独立, 且 B 和 C 互斥. 若 $P(A) = P(B) = 1/2$, $P(AC|AB \cup C) = 1/4$, 则 $P(C) =$ _____.
- (2) 一只蚂蚁从等边三角形 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发开始沿着边爬行, 设它每次爬行到一个顶点后, 会休憩片刻再随机选择一条边继续爬行, 则第 n 次爬行是往 A 爬的概率为 _____.
- (3) 设连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) = f(1-x)$, 且 $\int_0^2 f(x)dx = 0.4$, 则 $P(X < 0) = ()$
(A) 0.2 (B) 0.3 (C) 0.4 (D) 0.5
- (4) 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 X 的数学期望 $EX =$ _____.
- (5) 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为 $P(X=1) = P(X=-1) = 1/2$, Y 服从参数为 $\lambda > 0$ 的Poisson分布. 若记 $Z = XY$, 则 $\text{Cov}(X, Z) =$ _____.
- (6) 设将1米长的木棒随机截成两段, 其中一段的长度记为 X , 另一段长度的 $1/3$ 记为 Y , 则 X 与 Y 的相关系数为()
(A) 1 (B) -1 (C) -1/3 (D) 1/3
- (7) 设 X_1, X_2, \dots, X_9 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的一组简单随机样本, 则下列统计量中服从 F 分布的是()
(A) $\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2}$ (B) $\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}{X_6^2 + X_7^2 + X_8^2 + X_9^2}$ (C) $\frac{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}{2(X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2)}$ (D) $\frac{2(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}{X_4^2 + X_5^2 + \dots + X_9^2}$
- (8) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的一组简单随机样本, 以 \bar{X} 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差. 若记 $\text{Var}(X) = \sigma^2$, 则()
(A) S 是 σ 的无偏估计量 (B) S 是 σ 的极大似然估计量
(C) S 与 \bar{X} 相互独立 (D) 以上均不对
- (9) 设来自总体 $X \sim N(\mu, 0.9^2)$ 一组容量为9的简单随机样本, 其样本均值 $\bar{X} = 5$, 则未知参数 μ 的置信度为0.95的置信区间为 _____ (保留到小数点后三位).
- (10) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一组简单随机样本, 据此样本做假设检验 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$, 其中 μ_0 是给定的已知常数, 则()
(A) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0
(B) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必接受 H_0
(C) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下接受 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0
(D) 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0 , 那么在检验水平 $\alpha = 0.01$ 下必拒绝 H_0

二. (16分) 设二维随机向量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = Ce^{-2x^2+2xy-y^2}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

(1) 求常数 C 的值;

(2) 在 $X = x$ 的条件下, 求 Y 的条件密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

三. (16分) 设二维随机向量 (X, Y) 服从二元正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$, 其中 $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0.5$, $\rho = 0.5$. 记

$$Z = |X - Y|, \quad U = \max(X, Y), \quad V = \min(X, Y).$$

(1) 求 Z 的密度函数 $f_Z(z)$;

(2) 求数学期望 $E(U + V)$;

(3) 分别求数学期望 EU 和 EV .

四. (18分) 设总体 X 的密度函数为

$$f(x) = \frac{2x}{a^2}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

其中 $a > 0$ 为未知参数, 而 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自该总体的一组简单随机样本.

(1) 求 a 的矩估计量 \hat{a}_1 和极大似然估计量 \hat{a}_2 ;

(2) 求 $p = P(0 < X < \sqrt{a})$ 的极大似然估计量 \hat{p} ;

(3) 问 \hat{a}_1 和 \hat{a}_2 是否为无偏估计? 若是, 请证明你的结论; 若不是, 请修正之.

五. (10分) 为了检验某种体育锻炼对减肥的效果, 随机抽取了10名减肥者进行测试. 在进行体育锻炼前后这些减肥者的体重(单位: 千克)数据列表如下, 问该体育锻炼方法对降低体重是否具有显著性(设人的体重服从正态分布, 取显著性水平 $\alpha=0.05$)?

锻炼前体重	70	65	67	58	69	72	74	61	63	67
锻炼后体重	68	60	68	58	67	70	70	60	60	65

六. (10分) 上海证券综合指数简称“上证指数”, 反映了上海证券交易所上市股票价格的变动情况. 自上证指数诞生的二十七年(1991年1月至2017年12月)以来, 所有月份上涨或下跌的情况如下:

月份	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二
上涨月数	14	21	16	15	14	14	13	15	11	13	18	13
下跌月数	13	6	11	12	13	13	14	12	16	14	9	14

结合你所学的知识, 我们能否认为上证指数的涨跌与月份有关?

附录: 上分位数表

$$u_{0.025} = 1.96, \quad u_{0.05} = 1.645;$$

$$t_8(0.025) = 2.306, \quad t_8(0.05) = 1.86, \quad t_9(0.025) = 2.262, \quad t_9(0.05) = 1.833;$$

$$\chi_{11}^2(0.05) = 19.675.$$

参考答案

一. (每小题3分)

$\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}[1 - (-\frac{1}{2})^{n-1}]$; B; 2; λ ; B; D; C; [4.412, 5.588]; A.

二. (1) (8分) 由

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2+2xy-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} dy = \pi$$

可知 $C = \frac{1}{\pi}$;

(2) (8分) 由于 X 的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2},$$

从而,

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-y)^2}, \quad -\infty < y < \infty.$$

三. (1) (6分) 由 $E(X - Y) = 0$,

$$\begin{aligned} \text{Var}(X - Y) &= \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y) \\ &= 0.5 + 0.5 - 2 \times 0.25 = 0.5, \end{aligned}$$

及二元正态分布的性质可知 $X - Y \sim N(0, 0.5)$, 从而 $Z = |X - Y|$ 的密度函数为

$$f_Z(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2}, \quad z > 0.$$

(2) (4分) 易知, $E(U + V) = E(X + Y) = 2$.

(3) (6分) 由 $EU - EV = EZ = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, 可知 $EU = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $EV = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

四. (1) (6分) 矩估计量 $\hat{a}_1 = \frac{3}{2}\bar{X}$, 极大似然估计量 $\hat{a}_2 = X_{(n)}$;

(2) (4分) 由 $p = \frac{1}{a}$ 知其极大似然估计量为 $\hat{p} = 1/X_{(n)}$;

(3) (8分) 矩估计 \hat{a}_1 是无偏的, 因 $E(\hat{a}_1) = \frac{3}{2}E(\bar{X}) = \frac{3}{2}E(X) = a$; 而由 $X_{(n)}$ 的密度函数为

$$h(x) = n[F(x)]^{n-1}f(x) = \frac{2n}{a^{2n}}x^{2n-1}, \quad 0 < x < a,$$

知 $E(\hat{a}_2) = \frac{2n}{2n+1}a$. 故 \hat{a}_2 不是无偏估计, 可修正为 $\hat{a}_2^* = \frac{2n+1}{2n}X_{(n)}$.

五. (10分) 成对数据. 首先可算得相减之后, 有 $\bar{X} = 2$, $S^2 = 28/9$. 故由

$$t = \frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S} = 3.59 > t_9(0.05) = 1.833,$$

可拒绝原假设 (H_0 : 锻炼前后体重无显著变化), 即认为该体育锻炼方法对降低体重具有显著性.

六. (10分) 列联表齐性检验. 两行的和分别为177和147, 每列之和均为27. 由此可算得 χ^2 统计量的值为 $11.394 < \chi_{11}^2(0.05) = 19.675$, 故可认为“无充分证据表明上证指数的涨跌与月份有关”或“上证指数的涨跌与月份无关”.