

中国科学技术大学

2018—2019学年第二学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2019年6月19日下午14:30—16:30; 使用简单计算器

一. 简答(写出简要步骤, 40分)

1. (6分) 设一批电子产品由甲和乙两工厂共同生产, 其中甲, 乙两工厂生产的份额分别为60%和40%。根据经验可知甲, 乙两工厂生产该产品的次品率分别为1%和2%, 现从这批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该次品是甲厂生产的概率是多少?
2. (6分) 设某保险公司每个月受理的索赔事件个数服从参数为 λ 的Poisson分布, 而每个索赔成功的概率为 p , 且各个索赔彼此之间没有关系。二月份该公司有 k 个索赔成功的概率是多少? 若该月份有 k 个索赔成功, 则它受理了 m ($m \geq k$)个索赔事件的概率是多少?
3. (6分) 设 X 的概率密度函数为 $f(x) = (1 + \theta)x^\theta$, $0 < x < 1$. 现考虑假设检验问题 $H_0: \theta = 5 \leftrightarrow H_1: \theta = 3$. 该检验的否定域为 $X > 1/2$, 则犯第一类错误的概率和第二类错误的概率分别为多少?
4. (6分) 已知一批零件的长度 X (单位: cm)服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机抽取16个零件, 得到长度的平均值为40cm, 试求 μ 的置信水平为0.95的置信区间?
5. (8分) 设 X_1, \dots, X_n 是来自总体 X 的独立同分布样本, 且都只取正值, 试求数学期望:

$$E\left(\frac{X_1}{\sum_{i=1}^n X_i}\right).$$

6. (8分) 某工厂为了保证设备正常工作, 需配备适量的维修工人(工人配备多了就浪费, 配备少了又要影响生产), 现有同类型设备300台, 各台工作是相互独立的, 发生故障的概率都是0.01. 在通常情况下一台设备的故障可由一个人来处理(我们也只考虑这种情况), 问至少需配备多少工人, 才能保证设备发生故障但不能及时维修的概率小于0.01?

二. (20分) 设随机向量 (ξ, η) 服从区域 D 上的均匀分布, 其中 D 是由直线 $y = x$, $x = 0$, $y = 1$ 所围成的区域. 试求:

- (1) (ξ, η) 的联合密度 $p(x, y)$;
- (2) (ξ, η) 的边缘密度 $p_1(x)$ 和 $p_2(y)$;
- (3) 条件密度 $p(x|\eta = y)$;
- (4) $E(\xi|\eta = y)$.

三. (15分) 设总体 X 的概率分布如下表, 其中 $0 < \theta < 1$ 为未知参数. 现从此总体中随机抽取100个样本, 发现有17个样本取值为0, 33个样本取值为1, 50个样本取值为2.

X	0	1	2
P	$\frac{\theta}{4}$	$1 - \theta$	$\frac{3\theta}{4}$

- (1) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_2$; 并分别计算相应的估计值。
- (2) $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否是无偏的? 若否, 请修正。
- (3) 请问修正后的估计那个更有效?

四. (10分) 简· 奥斯汀(1775 - 1817), 英国女作家, 作品有: 《理智与情感》, 《傲慢与偏见》, 《爱玛》等, 在其身后, 她的哥哥亨利主持了遗作《劝导》和《诺桑觉寺》两部作品出版。下面表格收集了代表作《理智与情感》, 《爱玛》以及《劝导》前两章中常用代表词的出现频数,

单词	理智与情感	爱玛	劝导
a	147	186	184
an	25	26	40
this	32	39	30
that	94	105	59

请问作品《理智与情感》, 《爱玛》以及《劝导》之间在选择常用词比例是否存在差异? ($\alpha = 0.05$)

五. (15分) 为比较甲和乙两处矿石的含灰率(%), 分别从甲、乙两处随机抽取矿石6块, 甲处矿石含灰率数据是: 17, 14, 18, 13, 19 和15; 而乙处矿石含灰率数据为: 16, 19, 20, 22, 18 和19. 假设两处矿石含灰率分别服从正态分布, 且总体独立, 均值和方差未知. 试根据以上数据判断:

- (1)(6 分) 在显著水平0.05下, 甲、乙两处矿石含灰率的方差是否相等?
- (2)(9 分) 在显著水平0.05下, 乙处矿石含灰率的平均量是否显著地高于甲处矿石含灰率的平均量?

附录 分位数: $u_{0.025} = 1.960$, $u_{0.05} = 1.645$, $t_{0.025}(10) = 2.228$, $t_{0.05}(10) = 1.812$, $t_{0.025}(11) = 2.201$, $t_{0.05}(11) = 1.796$, $t_{0.025}(12) = 2.178$, $t_{0.05}(12) = 1.782$, $\chi_{0.05}^2(1) = 3.841$, $\chi_{0.05}^2(2) = 5.991$, $\chi_{0.05}^2(6) = 12.591$, $F_{0.05}(5, 5) = 5.050$, $F_{0.025}(5, 5) = 7.146$, $F_{0.05}(6, 6) = 4.284$, $F_{0.025}(6, 6) = 5.820$.