参考答案

一. (每小题3分)

3/8;　$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}$;　1/3;　A;　18;　3;　A;　B;　$\frac{n}{2(n-2)}$;　D.

二. (1) (6分) 由边缘密度和联合密度的关系可知,

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{2}{5}x + \frac{1}{10}, \quad 0 \le x \le 2; \\ f_Y(y) &= \int_0^2 f(x,y)dx = \frac{2}{5}y + \frac{4}{5}, \quad 0 \le y \le 1. \end{aligned}$$

(2) (6分) 由边缘密度、条件密度和联合密度的关系可知,

$$f_{Y|X}(0.5\,|\,1) = \frac{f(0.5,1)}{f_X(1)} = 1.$$

(3) (6分) 由

$$\mathrm{E}[XY] = \int_0^1\int_0^2 xyf(x,y)dxdy = \frac{2}{3},$$

及 $\mathrm{E}X = \frac{19}{15}$ 和 $\mathrm{E}Y = \frac{8}{15}$, 可知 $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}[XY] - \mathrm{E}X\mathrm{E}Y = -\frac{2}{225}$.

(4) (6分) 由

$$F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \le z) = \iint_{x,y\le z} f(x,y)dxdy$$

可知,

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0; \\ \frac{3}{10}z^3, & 0 \le z < 1; \\ \frac{1}{5}z^2 + \frac{1}{10}z, & 1 \le z < 2; \\ 1, & z \ge 2. \end{cases}$$

从而, 所求密度函数为

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{9}{10}z^2, & 0 \le z < 1; \\ \frac{2}{5}z + \frac{1}{10}, & 1 \le z < 2. \end{cases}$$

三. (1) (6分) 所求概率为 $\Phi(\sqrt{2}) = 0.9214$.

(2) (6分) 不公平. 对药厂而言, 在治疗有效率达到80%的情况下被批准的概率大约为 $\Phi(0) = 0.5$, 这相当于用掷硬币的方式来决定是否得到批准.

四. (1) (6分) 矩估计量 $\widehat{\theta} = \exp\{-\frac{1}{\overline{X}}\}$, 其中 $\overline{X}$ 为样本均值;

(2) (6分) 参数 θ 的极大似然估计量同样为 $\exp\{-\frac{1}{\overline{X}}\}$, 从而 $h(\theta)$ 的极大似然估计量为 $\widehat{h}_\theta = -\overline{X}$;

(3) (6分) 由弱大数律可知, 所求的实数 $a = -\mathrm{E}X = \frac{1}{\ln\theta}$.

五. (8分) 两样本 t 检验, 其检验统计量为

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_0}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}.$$

代入数据计算可知, $s_w = 1.169, t = -2.209$. 由于 $|t| > t_{28}(0.025) = 2.0484$, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$下我们应该拒绝原假设 H_0.

六. (8分) 拟合优度联列表检验. 原假设为鼻咽癌与血型无关, 而其检验统计量为

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4} \frac{(nn_{ij} - n_{i\cdot}n_{\cdot j})^2}{nn_{i\cdot}n_{\cdot j}}.$$

代入数据计算可知, $\chi^2 = 1.921 < \chi_3^2(0.05) = 7.8147$. 故在显著性水平 $\alpha = 0.05$下我们不能拒绝原假设, 即可以认为鼻咽癌与血型无关.