中 国 科 学 技 术 大 学

2016—2017学年第二学期考试试卷答案

一. 填空题(40分，每空4分)

1. $\frac{13}{48}$

2. $\frac{63}{64}$, $\frac{1}{16}$

3. $\frac{11}{3}$, $\frac{4}{3}$

4. $\log(2)$, $\log(2)$

5. $40 \pm \frac{1.96}{4} = (39.51,\ 40.49)$

6. $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}$, $\frac{C_m^k p^k (1-p)^{m-k} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}}{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{(\lambda(1-p))^{m-k} e^{-(\lambda(1-p))}}{(m-k)!}$

二. (20分) 解：(1) (ξ, η)的联合密度为$p(x,y) = 2,\ 0 < x \le y < 1$; $p(x,y) = 0$, 其它.

(2) ξ的边缘密度$p_1(x) = \int_x^1 2dy = 2(1-x),\ 0 < x < 1$;

η的边缘密度$p_2(y) = \int_0^y 2dx = 2y,\ 0 < y < 1$.

(3)当$0 < y < 1$时, 条件密度$p(x|\eta = y) = \frac{p(x,y)}{p_2(y)} = \frac{1}{y}$, $0 < x \le y$.

(4) $E(\xi|\eta = y) = \int_0^y xp(x|\eta = y)dx = \int_0^y \frac{x}{y} dx = \frac{y}{2}$.

三. (15分) 解: (1) $\hat{\theta}_1 = \bar{x} - 1$, $\hat{\theta}_2 = x_{(1)}$

(2) $E(\hat{\theta}_1) = \theta$, $E(\hat{\theta}_2) = \theta + \frac{1}{n}$, 所以$\hat{\theta}_1$是无偏估计，而$\hat{\theta}_2$不是无偏估计，修正为无偏估计$\tilde{\theta}_2 = x_{(1)} - \frac{1}{n}$

(3) $Var(\hat{\theta}_1) = \frac{1}{n}$, $Var(\tilde{\theta}_2) = \frac{1}{n^2}$, 所以当$n > 1$时，$\tilde{\theta}_2$更有效。

四. (15分) 解: 分别用X和Y表示甲设备和乙设备生产螺丝钉的长度, 且由题意知$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 利用数据可得, $\hat{\mu}_1 = 16$, $\hat{\mu}_2 = 19$, $\hat{\sigma}_1^2 = 5.6$和$\hat{\sigma}_2^2 = 4$.

(1)假设检验问题为: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \ne \sigma_2^2$. F检验统计量为

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = 1.4,$$

自由度为$(5,5)$. 因为$F_{0.025}(5,5) = 7.146$ 和$F_{0.975}(5,5) = 1/F_{0.025}(5,5) = 0.140$, 所以$F_{0.975}(5,5) < F < F_{0.025}(5,5)$, 则接受原假设, 即两种设备质量的方差相等.

(2)假设检验问题为: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 \longleftrightarrow H_1 : \mu_1 < \mu_2$. 记$S_w^2 = (5\hat{\sigma}_1^2 + 5\hat{\sigma}_2^2)/10 = 4.8$, 两样本$t$检验统计量为

$$T = \frac{\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2}{S_w\sqrt{1/6 + 1/6}} = -2.3717,$$

自由度为10. 因为$t_{0.05}(10) = 1.812$, 所以$T < -t_{0.05}(10)$, 则拒绝原假设,即乙设备生产螺丝钉的平均长度显著地高于甲设备.

五. (10分) 解：设原假设为: 作品《理智与情感》,《爱玛》以及《劝导》之间在选择常用词比例没有差异. 在原假设下,《理智与情感》,《爱玛》以及《劝导》选择常用词比例的期望值为 那么, 检验统计量为,

单词	理智与情感	爱玛	劝导
a	159.32368	190.33299	167.34333
an	28.04343	33.50155	29.45502
this	31.12513	37.18304	32.69183
that	79.50776	94.98242	83.50982

$$T=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\frac{(n_{ij}-E(n_{ij}))^2}{E(n_{ij})}=19.722,$$

自由度为6. 由于$T>\chi^2_{0.05}(6)=12.591$,则拒绝原假设,即作品《理智与情感》,《爱玛》以及《劝导》之间在选择常用词比例有显著差异.

附录 分位数: $u_{0.025}=1.960$, $u_{0.05}=1.645$, $t_{0.025}(10)=2.228$, $t_{0.05}(10)=1.812$, $t_{0.025}(11)=2.201$, $t_{0.05}(11)=1.796$, $t_{0.025}(12)=2.178$, $t_{0.05}(12)=1.782$, $\chi^2_{0.05}(1)=3.841$, $\chi^2_{0.05}(2)=5.991$, $\chi^2_{0.05}(6)=12.591$, $F_{0.05}(5,5)=5.050$, $F_{0.025}(5,5)=7.146$, $F_{0.05}(6,6)=4.284$ $F_{0.025}(6,6)=5.820$.