

中国科学技术大学

2016—2017学年第二学期考试试卷

考试科目 概率论与数理统计 得分 _____

所在系 _____ 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2017年6月12日下午08:30—10:30; 使用简单计算器

一. 填空题(40分, 每空4分)

1. 从1, 2, 3, 4四个数中任取一个数, 记为 X , 再从 $1, \dots, X$ 中任取一个数, 记为 Y , 则 $\{Y = 2\}$ 这个事件发生的概率是_____。
2. 设 X 的概率密度函数为 $f(x) = (1 + \theta)x^\theta, 0 < x < 1$. 现考虑假设检验问题 $H_0: \theta = 5 \leftrightarrow H_1: \theta = 3$. 该检验的否定域为 $X > 1/2$, 则犯第一类错误的概率是_____和第二类错误的概率是_____。
3. 设随机变量 X 和 Y 满足: 对任给的 x 和 y , $E(Y|X = x) = -x + 5$, $E(X|Y = y) = \frac{1}{2}y + 3$, 则 $E(X) =$ _____, $E(Y) =$ _____。
4. 设 X 服从指数分布 $f(x) = \exp(-x)I(x > 0)$, 则 X 的中位数 $m =$ _____; $E|X - m| =$ _____。
5. 已知一批零件的长度 X (单位: cm)服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机抽取16个零件, 得到长度的平均值为40cm, 那么 μ 的置信水平为0.95的置信区间是_____。
6. 设某保险公司每个月受理的索赔事件个数服从参数为 λ 的Poisson分布, 而每个索赔成功的概率为 p , 且各个索赔彼此之间没有关系。二月份该公司有 k 个索赔成功的概率是_____; 若该月份有 k 个索赔成功, 则它受理了 m ($m \geq k$)个索赔事件的概率是_____。

二. (20分) 设随机向量 (ξ, η) 服从区域 D 上的均匀分布, 其中 D 是由直线 $y = x, x = 0, y = 1$ 所围成的区域. 试求:

- (1) (ξ, η) 的联合密度 $p(x, y)$;
- (2) (ξ, η) 的边缘密度 $p_1(x)$ 和 $p_2(y)$;
- (3) 条件密度 $p(x|\eta = y)$;
- (4) $E(\xi|\eta = y)$.

三. (15分) 设样本 X_1, X_2, \dots, X_n 抽自总体 X , 其中 X 的密度函数为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \exp\{-(x - \theta)\}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases} \quad (1)$$

- (1) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$ 和极大似然估计 $\hat{\theta}_2$ 。

(2) $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 是否是无偏的? 若否, 请修正。

(3) 请问修正后的估计那个更有效?

四. (15分) 为比较甲设备和乙设备生产螺丝钉质量的差异, 分别从甲设备和乙设备生产的螺丝钉中随机抽取6个. 甲设备样本螺丝钉长度数据(mm)是: 17, 14, 18, 13, 19 和15; 而乙设备样本螺丝钉长度数据(mm)是为: 16, 19, 20, 22, 18 和19. 假设两设备生产的螺丝钉长度分别服从正态分布, 且总体独立, 均值和方差未知. 试根据以上数据判断:

(1) 两种设备生产的螺丝钉长度的方差是否相等($\alpha = 0.05$)?

(2) 乙设备生产的螺丝钉长度的平均长度是否显著地高于甲设备($\alpha = 0.05$)?

五. (10分) 简· 奥斯汀(1775 - 1817), 英国女作家, 作品有: 《理智与情感》, 《傲慢与偏见》, 《爱玛》等, 在其身后, 她的哥哥亨利主持了遗作《劝导》和《诺桑觉寺》两部作品出版. 下面表格收集了代表作《理智与情感》, 《爱玛》以及《劝导》前两章中常用代表词的出现频数,

单词	理智与情感	爱玛	劝导
a	147	186	184
an	25	26	40
this	32	39	30
that	94	105	59

请问作品《理智与情感》, 《爱玛》以及《劝导》之间在选择常用词比例是否存在差异? ($\alpha = 0.05$)

附录 分位数: $u_{0.025} = 1.960$, $u_{0.05} = 1.645$, $t_{0.025}(10) = 2.228$, $t_{0.05}(10) = 1.812$, $t_{0.025}(11) = 2.201$, $t_{0.05}(11) = 1.796$, $t_{0.025}(12) = 2.178$, $t_{0.05}(12) = 1.782$, $\chi_{0.05}^2(1) = 3.841$, $\chi_{0.05}^2(2) = 5.991$, $\chi_{0.05}^2(6) = 12.591$, $F_{0.05}(5, 5) = 5.050$, $F_{0.025}(5, 5) = 7.146$, $F_{0.05}(6, 6) = 4.284$, $F_{0.025}(6, 6) = 5.820$.