习题答案补充

Haijiao Liu

2020 年 5 月 22 日

2019-2020

1.1
Solution

$$P(B|A)+P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{P(AB)}{P(A)}+\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}$$

又

$$P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)$$
$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

所以

$$\frac{P(AB)}{P(A)}+\frac{1-P(A)-P(B)+P(AB)}{1-P(A)}=1$$

易解得 $P(AB)=0.16$

1.2
Solution
由甲、乙抛掷次数易知：

$$P(\text{甲正} > \text{乙正})=P(101\text{-甲负} >100\text{-乙负})=P(\text{甲负} < \text{乙负}+1)=P(\text{甲负}\leq\text{乙负})$$

又

$$P(\text{甲负}\leq k)=\sum_{i=0}^{k}C_{101}^{i}(\frac{1}{2})^{101}=P(\text{甲正}\leq k)$$

由全概率公式及独立性易得：

$$\begin{aligned}P(\text{甲负}\leq\text{乙负})&=\sum_{k=0}^{100}P(\text{甲负}\leq\text{乙负}|\text{乙负 =k})*P(\text{乙负}=k)\\&=\sum_{k=0}^{100}P(\text{甲负}\leq k)*P(\text{乙负}=k)\\&=\sum_{k=0}^{100}P(\text{甲正}\leq k)*P(\text{乙负}=k)\\&=P(\text{甲正}\leq\text{乙负})\end{aligned}$$

同理可证：

$$P(\text{甲正} \le \text{乙负}) = P(\text{乙正} \ge \text{甲正})$$

又

$$P(\text{甲正} > \text{乙正}) + P(\text{乙正} \ge \text{甲正}) = 1$$

即有

$$P(\text{甲正} > \text{乙正}) = P(\text{乙正} \ge \text{甲正}) = 1/2$$

1.4
Solution
记该单位圆中任意两点为 X, Y，且此两点之间的距离为 a。
此外，设这两点到圆心 O 的距离分别为 b c, $\theta := \angle XOY$

易知

$$P(b^2 \le t) = \frac{\pi t^2}{\pi 1^2} = t^2$$

故可得

$$Eb^2 = \int_0^1 2t * t^2 dt = 1/2$$

又

$$\because \theta \sim U(0, 2\pi)$$
$$\therefore E\cos\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos\theta d\theta$$

由余弦公式：

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\theta$$

显然 b, c $i.i.d$
故有

$$Ea^2 = 2 * Eb^2 - 2 * (Eb)^2 E\cos\theta = 1$$

1.6
Solution
易知

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim N(0, m) \to (\sum_{i=1}^{m} X_i)^2/m \sim \chi_1^2$$

显然分母服从自由度为 $n-m$ 的卡方分布，故 $c = \frac{n-m}{m}$ 时，该统计量服从 F 分布

1.7
Solution
$X_1 + X_2$ 与 $X_1 - X_2$ 独立

1.9
Solution
方差已知，枢轴量 $\frac{\bar{x}-\mu}{10/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ 所以

$$P(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{\bar{x}-\mu}{10/\sqrt{n}} < Z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

区间长度为

$$2 * Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 4$$

由此可解得 n