

# LECCIONES DE METEOROLOGÍA DINÁMICA Y MODELAMIENTO ATMOSFÉRICO

notas  
notas  
notas  
notas  
notas  
notas  
notas

Gerardo de Jesús Montoya



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

SEDE BOGOTÁ  
FACULTAD DE CIENCIAS

Facultad de Ciencias  
Saberes más y pensar mejor

LECCIONES  
DE METEOROLOGÍA DINÁMICA  
Y MODELAMIENTO ATMOSFÉRICO



LECCIONES  
DE METEOROLOGÍA DINÁMICA  
Y MODELAMIENTO ATMOSFÉRICO

Gerardo de Jesús Montoya Gaviria

Departamento de Geociencias  
Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Colombia  
Sede Bogotá

LECCIONES DE METEOROLOGÍA DINÁMICA Y MODELAMIENTO ATMOSFÉRICO

© Gerardo de Jesús Montoya Gaviria

Departamento de Geociencias  
Facultad de Ciencias  
Universidad Nacional de Colombia

© Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Geociencias

Primera edición, 2008  
Bogotá, Colombia

ISBN 978-958-701-966-7

Impresión: xxxxxxxx  
xxxxx@xxxxxxx  
Bogotá, Colombia

Diagramación en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X : Margoth Hernández Quitián  
Diseño de carátula: Andrea Kratzer

*“No sé si hay algo irreverente en la mente de aquel que intenta reducir la atmósfera a una fórmula. Creo que no hay nada en la creación que pueda carcajearse tanto de una fórmula como la atmósfera”.*

*Napier Shaw*

*A Mis hijas*



# Índice general

<b>I</b>	<b>LECCIONES DE METEOROLOGÍA DINÁMICA</b>	<b>1</b>
<b>1.</b>	<b>La meteorología dinámica y características de la circulación atmosférica en la región tropical occidental</b>	<b>3</b>
1.1.	La meteorología dinámica y la predicción meteorológica . .	4
1.2.	Qué es la meteorología dinámica . . . . .	6
1.3.	La circulación atmosférica . . . . .	6
1.3.1.	La conservación del momento angular para el sistema tierra-atmósfera . . . . .	7
1.4.	Perturbaciones tropicales . . . . .	10
1.5.	Otros sistemas productores de lluvia en la región tropical occidental . . . . .	12
1.5.1.	La Zona de Convergencia Intertropical, ZCIT . . . .	12
1.5.2.	Complejos convectivos de mesoescala . . . . .	12
1.5.3.	Influencia de sistemas de latitudes medias . . . . .	13
1.6.	Circulaciones locales . . . . .	15
1.7.	Los sistemas de precipitación y la variabilidad climática . .	15
1.7.1.	El fenómeno El Niño y la Oscilación del Sur . . . . .	15
1.7.2.	Las oscilaciones Madden Julian . . . . .	16
<b>2.</b>	<b>Nociones básicas sobre vectores, análisis vectorial e hidrodinámica</b>	<b>17</b>
2.1.	Vectores . . . . .	18
2.1.1.	Escalar, vector . . . . .	18



---

2.1.2.	Suma (resta) de vectores . . . . .	18
2.1.3.	Producto escalar . . . . .	19
2.1.4.	Producto vectorial . . . . .	20
2.1.5.	Productos que envuelven más de dos vectores . . . . .	21
2.2.	Análisis vectorial . . . . .	21
2.2.1.	Diferenciación de vectores . . . . .	21
2.2.2.	Operador nabla ( $\nabla$ ) . . . . .	23
2.2.3.	Gradiente . . . . .	24
2.2.4.	Divergencia de un vector . . . . .	24
2.2.4.1.	No divergencia y función de corriente ( $\psi$ ) . . . . .	26
2.2.4.2.	Líneas de corriente . . . . .	26
2.2.5.	Vorticidad . . . . .	27
2.2.6.	Diferencial total, cambio local . . . . .	28
2.3.	Principios de Hidrodinámica . . . . .	30
2.3.1.	Segunda ley de Newton . . . . .	30
2.3.2.	Circulación . . . . .	30
2.3.2.1.	Teorema de la circulación . . . . .	32
2.3.2.2.	Aplicación del teorema de circulación: brisa marina . . . . .	33
2.3.3.	Atmósfera barotrópica y atmósfera baroclínica . . . . .	34
2.3.4.	Circulación absoluta y circulación relativa . . . . .	35
2.3.5.	Circulación y vorticidad . . . . .	37
2.3.5.1.	Vorticidad por cisallamiento y vorticidad por curvatura . . . . .	38
<b>3.</b>	<b>Fuerzas consideradas en los movimientos atmosféricos</b> . . . . .	<b>44</b>
3.1.	Fuerzas fundamentales . . . . .	45
3.1.1.	Fuerza del gradiente de presión . . . . .	45
3.1.2.	Fuerza de gravedad . . . . .	46
3.1.3.	Fuerza de fricción o de tensión viscosa . . . . .	47
3.2.	Fuerzas aparentes . . . . .	49
3.2.1.	Fuerza centrípeta . . . . .	49

---

3.2.1.1. Gravedad efectiva . . . . .	50
3.2.1.2. Equilibrio hidrostático . . . . .	51
3.2.2. La fuerza de Coriolis . . . . .	53
3.2.2.1. Fuerza de Coriolis en el movimiento zonal . . . . .	54
3.2.3. Dirección del Gradiente de Presión . . . . .	55
<b>4. Ecuaciones de balance que gobiernan los movimientos atmosféricos</b>	<b>57</b>
4.1. Las ecuaciones del movimiento . . . . .	58
4.1.1. Ecuación de conservación del momento en forma vectorial . . . . .	58
4.1.2. Ecuaciones del movimiento en coordenadas rectangulares locales . . . . .	60
4.2. Ecuación de conservación de la masa . . . . .	62
4.3. Ecuación de balance de energía . . . . .	64
4.3.1. Temperatura potencial . . . . .	64
4.3.2. Variación de la temperatura de una parcela que se desplaza verticalmente . . . . .	65
4.3.3. Variación de la temperatura potencial con la altura . . . . .	66
4.4. Sistema de ecuaciones de la dinámica de la atmósfera en coordenadas $x, y, z, t$ . . . . .	66
4.5. Ecuaciones en coordenadas isobáricas . . . . .	67
4.5.1. Gradiente de presión en coordenadas isobáricas . . . . .	68
4.5.2. Ecuaciones del movimiento en coordenadas isobáricas . . . . .	69
4.5.3. Ecuación de continuidad en coordenadas isobáricas . . . . .	70
4.5.4. Ecuaciones de la termodinámica y estática en coordenadas isobáricas . . . . .	71
<b>5. Análisis de escala y nociones básicas sobre modelos atmosféricos</b>	<b>73</b>
5.1. Escalas de los movimientos atmosféricos . . . . .	74
5.1.1. Algunas definiciones preliminares . . . . .	74

---

5.2. Análisis de escala para latitudes medias . . . . .	77
5.2.1. Aproximación geostrófica . . . . .	78
5.2.2. El número de Rossby . . . . .	79
5.2.3. Análisis de la divergencia horizontal . . . . .	81
5.2.4. Análisis de la vorticidad geostrófica . . . . .	82
5.2.5. La aproximación hidrostática . . . . .	82
5.3. Análisis de escala para latitudes tropicales . . . . .	82
5.4. La predicción numérica . . . . .	83
5.4.1. Las ecuaciones del modelo . . . . .	84
5.4.2. Las parametrizaciones físicas . . . . .	84
5.4.3. La solución numérica . . . . .	85
5.4.4. Las condiciones iniciales . . . . .	87
<b>6. Soluciones particulares de las ecuaciones del movimiento horizontal</b>	<b>88</b>
6.1. Coordenadas naturales . . . . .	89
6.1.1. Viento geostrófico ( $v^2/r = 0$ , $vf \neq 0$ , $\partial p/\partial n \neq 0$ ) . .	92
6.1.2. Viento de gradiente ( $v^2/r \neq 0$ , $vf \neq 0$ , $\partial p/\partial n \neq 0$ ) .	92
6.1.2.1. Aplicación del viento de gradiente en latitudes cercanas al ecuador . . . . .	93
6.1.3. Flujo inercial ( $\partial p/\partial n = 0$ , $v^2/r \neq 0$ , $vf \neq 0$ ) . . . .	94
6.1.4. Flujo ciclostrófico ( $vf = 0$ , $v^2/r \neq 0$ , $\partial p/\partial n \neq 0$ ) . .	94
6.2. Variación del viento geostrófico con la altura. Viento térmico	95
<b>7. Movimientos verticales y estabilidad estática</b>	<b>102</b>
7.1. Movimiento vertical . . . . .	103
7.1.1. Método cinemático para el cálculo de la velocidad vertical . . . . .	103
7.1.2. Método adiabático . . . . .	106
7.2. Estabilidad estática en la atmósfera . . . . .	106
7.2.1. Método de la parcela para una atmósfera sub-saturada	107

---

7.2.2. Método de la parcela para una atmósfera saturada . . . . .	110
7.2.2.1. Temperatura potencial equivalente . . . . .	110
7.3. Gradiente pseudo-adiabático . . . . .	111
7.3.1. Estabilidad condicional . . . . .	113
7.4. Energía de inestabilidad . . . . .	113
7.5. Modelo de chorro estacionario . . . . .	115
<b>8. La ecuación de vorticidad, sistema cuasi geostrófico y primeros modelos de predicción meteorológica</b>	<b>119</b>
8.1. La ecuación de la vorticidad . . . . .	120
8.1.1. Análisis de escala para la ecuación de vorticidad . . . . .	122
8.2. El sistema cuasi geostrófico . . . . .	123
8.2.1. Primeros modelos de predicción meteorológica . . . . .	125
8.2.1.1. Modelo geostrófico barotrópico y no divergente . . . . .	125
8.2.1.2. Modelo baroclínico . . . . .	125
8.3. Aplicaciones de la ecuación de la vorticidad . . . . .	127
8.3.1. Conservación de la vorticidad potencial . . . . .	127
8.3.1.1. Ciclogénesis al lado este de las Montañas Rocosas . . . . .	127
8.3.1.2. Costas Semiaridas en Venezuela y lluviosas en Nicaragua . . . . .	128
<b>9. Ecuaciones de la hidrodinámica para una atmósfera turbulenta</b>	<b>130</b>
9.1. Caracterización de la turbulencia . . . . .	131
9.2. Formulación general de la ecuación de balance . . . . .	133
9.2.1. Método de Reynolds . . . . .	135
9.2.2. Relación entre el flujo turbulento y el campo medio . . . . .	137
<b>10. Capa límite planetaria</b>	<b>141</b>
10.1. Características generales . . . . .	142
10.1.1. Estructura de la CPL . . . . .	142
10.2. La solución de Ekman para la capa residual . . . . .	144

10.3. La capa superficial . . . . .	147
10.3.1. Transferencia turbulenta en una atmósfera neutral . . . . .	148
10.3.2. Transferencia de turbulencia en una atmósfera no neutral . . . . .	150
10.3.2.1. La escala de Monin–Obukhov . . . . .	153
10.4. Aplicaciones de la teoría de similaridad . . . . .	157
10.4.1. Determinación de los perfiles en la capa superficial . . . . .	157
10.4.1.1. Determinación del perfil del viento . . . . .	157
10.4.1.2. Determinación del perfil de la temperatura . . . . .	158
 <b>II MODELAMIENTO ATMOSFÉRICO</b>	 <b>163</b>
 <b>11. Conceptos básicos usados en la segunda parte</b>	 <b>165</b>
11.1. Vorticidad en coordenadas esféricas . . . . .	166
11.1.1. Ecuación de la vorticidad barotrópica en coordenadas esféricas . . . . .	167
11.2. Método de las perturbaciones . . . . .	168
11.3. Descomposición de una función en serie de Fourier . . . . .	169
11.3.1. Otra forma de escribir la serie de Fourier . . . . .	171
11.3.2. Forma compleja de la serie de Fourier . . . . .	172
11.3.3. La integral de Fourier . . . . .	173
11.3.4. Integral de Fourier en forma compleja . . . . .	174
11.3.5. Transformada de Fourier . . . . .	175
11.4. Funciones esféricas y polinomios de Legendre . . . . .	175
11.4.1. Polinomios de Legendre . . . . .	176
11.4.2. Funciones esféricas (o tesseractales) . . . . .	177
 <b>12. Ondas en la atmósfera</b>	 <b>180</b>
12.1. Características del movimiento ondulatorio . . . . .	181
12.1.1. Velocidad de grupo . . . . .	182
12.2. Ondas de Rossby . . . . .	183

---

12.3. Ondas acústicas . . . . .	185
12.4. Ondas de gravedad . . . . .	189
12.4.1. Modelo de aguas someras . . . . .	189
12.4.2. Ondas de gravedad en aguas someras . . . . .	191
<b>13. Métodos numéricos I: Método de las diferencias finitas</b>	<b>193</b>
13.1. Introducción al método de las diferencias finitas . . . . .	194
13.1.1. Aproximación de las derivadas en diferencias finitas	195
13.1.2. Onda límite representada por diferencias finitas . . .	197
13.1.3. Integración numérica en el tiempo . . . . .	198
13.1.4. Estabilidad computacional y error de amortiguación	200
13.2. La ecuación lineal de advección . . . . .	208
13.2.1. Dispersión numérica . . . . .	209
13.3. Esquema semi-implícito y ondas gravitacionales . . . . .	210
13.4. Aplicación del método de diferencias finitas al modelo ba- rotrópico . . . . .	212
13.4.1. Solución de la ecuación de Poisson por el método de iteración . . . . .	216
<b>14. Métodos numéricos II: Método espectral</b>	<b>219</b>
14.1. Aplicación del método espectral en la predicción meteorológi- ca numérica . . . . .	220
14.1.1. Tipos de truncación . . . . .	220
14.2. Solución del modelo barotrópico por el método espectral . .	221
14.2.1. Transformación de la ecuación a la forma espectral .	222
14.2.2. El método de los coeficientes de interacción . . . . .	224
14.2.3. El método de las transformaciones . . . . .	225
<b>15. Modelos atmosféricos</b>	<b>228</b>
15.1. Revisión histórica . . . . .	229
15.2. Aspectos básicos de los modelos atmosféricos . . . . .	231
15.2.1. La resolución del modelo . . . . .	231

---

15.2.2. Tipos de coordenada vertical . . . . .	231
15.2.3. El modelo dinámico . . . . .	238
15.2.4. La parametrización de los procesos físicos . . . . .	239
15.2.5. La solución numérica . . . . .	240
15.2.6. Los datos iniciales y de contorno . . . . .	241
15.3. Tipos de modelos atmosféricos . . . . .	242
15.3.1. Modelos de área limitada: regionales y de mesoescala	242
15.3.2. Modelo de mesoescala . . . . .	249
15.3.3. Modelos climáticos . . . . .	250
<b>16. Parametrización de la convección y la precipitación</b>	<b>254</b>
16.1. La parametrización cúmulus . . . . .	255
16.1.1. Ecuación de pronóstico para el contenido de vapor de agua . . . . .	257
16.2. El método de kuo . . . . .	258
16.2.1. Determinación del parámetro $b$ . . . . .	260
16.2.2. cálculo de las funciones de distribución vertical de calentamiento y humedad . . . . .	260
16.2.3. Cálculo del flujo turbulento de vapor de agua . . . . .	260
16.3. Parametrización de Arakawa & Schubert . . . . .	261
16.3.1. Descripción general . . . . .	261
16.3.2. Control estático . . . . .	262
16.3.3. La ecuación para la energía de inestabilidad . . . . .	265
16.3.4. Control dinámico . . . . .	266
16.3.5. Retroalimentación . . . . .	269
<b>17. Parametrización de la capa límite planetaria</b>	<b>271</b>
17.1. Generalidades . . . . .	272
17.2. Cálculo de los flujos en la capa superficial . . . . .	272
17.2.1. El método de la aerodinámica de volumen . . . . .	273

17.2.2. Determinación de los flujos por el método de la aerodinámica de volumen . . . . .	274
17.2.3. Determinación de los flujos por el método de similaridad	275
17.3. Determinación de la temperatura de superficie . . . . .	276
17.4. Difusión turbulenta vertical . . . . .	277
17.4.1. Difusión turbulenta vertical por encima de la capa límite . . . . .	277
17.4.2. Difusión turbulenta vertical dentro de la capa límite	278
17.4.3. Determinación de la altura de la capa de mezcla . .	279
<b>18. Elementos básicos de transferencia radiativa y su parametrización en modelos atmosféricos</b>	<b>281</b>
18.1. Generalidades . . . . .	282
18.2. Elementos básicos de la teoría de radiación . . . . .	284
18.2.1. Magnitudes radiométricas básicas . . . . .	284
18.2.2. Conceptos de esparcimiento y absorción . . . . .	286
18.2.3. Cuerpo negro y equilibrio termodinámico . . . . .	288
18.2.4. Leyes para un cuerpo negro . . . . .	288
18.3. Ecuaciones de la transferencia radiativa . . . . .	290
18.3.1. Ecuación general de transferencia . . . . .	290
18.3.2. Ley de Lambert-Bouguer . . . . .	290
18.3.3. Ecuación de Schwarzschild . . . . .	291
18.3.4. La ecuación de transferencia para atmósferas planas y paralelas . . . . .	293
18.3.5. Absorción (emisión) y forma de líneas espectrales .	295
18.3.6. Dependencia de la presión y la temperatura . . . . .	297
18.3.7. Transferencia de radiación infrarroja . . . . .	297
18.3.8. Transferencia de radiación solar . . . . .	301
18.4. Parametrización de la radiación . . . . .	308
18.4.1. Parametrización de la radiación infrarroja . . . . .	308



18.4.2. Cálculo de la tasa de enfriamiento radiativo	
infrarrojo . . . . .	310
18.4.3. Parametrización de la radiación solar . . . . .	311

# Prólogo

Los últimos años del siglo XX y los primeros del XXI han sido caracterizados por acentuadas variaciones en el estado del tiempo y del clima del planeta, y cada vez son más las evidencias de que en el futuro las variaciones serán aún más fuertes. Así mismo, la contaminación atmosférica ha alcanzado niveles tan altos que, en momentos críticos, ya afecta el desarrollo normal de las actividades en algunas grandes ciudades. Por estos y otros ejemplos que podrían ser citados, las disciplinas encaminadas a conocer el tiempo y el clima y la conservación del medio ambiente, revisten cada día mayor interés. Tal es el caso de la meteorología dinámica, ciencia cuyo objetivo principal es aplicar los principios de la física, y en particular; las leyes de la dinámica de fluidos, la termodinámica, etc., al estudio de los movimientos atmosféricos. Esta disciplina es de interés no solamente para los estudiosos del tiempo y el clima, sino también para un sinnúmero de estudios interdisciplinarios en los cuales intervienen físicos, geofísicos, meteorólogos, químicos, biólogos, etc. Los principios de la meteorología dinámica se han venido enriqueciendo a través del tiempo en una estrecha relación con el avance científico tecnológico, en especial, de los últimos cincuenta años.

Existen varios textos sobre meteorología dinámica y modelamiento o simulación atmosférica la mayoría en lengua inglesa. Muchos de ellos se mencionan en las referencias citadas en esta obra. Sin embargo, en la mayoría de los casos, estos dos temas han sido tratados por separado.

Con la creación del posgrado en meteorología en la Universidad Nacional de Colombia, se tuvo la idea de abarcar estas dos disciplinas en un solo texto dirigido sobre todo a aquellas personas que, no obstante poseer un bagaje suficiente de conocimientos en física y matemáticas, apenas comienzan a tener el primer contacto con la meteorología.

El autor se preocupó por escribir de la manera más simple posible teniendo en cuenta una relación racional entre la fundamentación teórica y la aplicación práctica de los temas más relevantes para nuestros estudiantes.

El curso está dividido en dos partes. En la primera se presentan los principios básicos de la meteorología dinámica: como son las leyes de conservación de momento calor y masa, análisis de escala, soluciones particulares del movimiento horizontal, convección atmosférica, la ecuación de vorticidad, el sistema cuasi geostrófico, turbulencia y capa límite planetaria, haciendo énfasis en conceptos tales como divergencia, elicidad, circulación, vorticidad potencial, estabilidad estática, etc. El énfasis se hace con el fin de utilizar estos conceptos para diagnosticar diferentes situaciones sinópticas en la atmósfera tropical. En la segunda parte se presentan los elementos básicos necesarios para entender el modelamiento de un medio tan complejo como el atmosférico. Así pues, esta parte contiene temas como ondas atmosféricas, métodos numéricos, modelos atmosféricos y parametrización de los procesos físicos.

Para lograr mayor claridad en los conceptos y demostraciones matemáticas dentro del texto principal, se incluyen anotaciones entre paréntesis y con letra de menor tamaño. Estas anotaciones bien pueden empezar a continuación de un punto seguido o como un nuevo párrafo. Estas anotaciones son comentarios que regularmente se escriben a pie de página y pueden ser omitidas por el lector si así lo desea.

Esta obra, que por su contenido y organización es la primera vez que se presenta en lengua hispana, será de gran utilidad para estudiantes de pregrado en meteorología y de postgrado. El texto puede servir también como libro de consulta en actividades interdisciplinarias.

Muchas personas y entidades contribuyeron en la aparición de esta obra. Entre ellas la Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá, la Facultad de ciencias, el Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología, COLCIENCIAS, el Centro de Estudios Interdisciplinarios Básicos y Aplicados en Complejidad, CEIBA, el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales IDEAM, profesores y directivos del postgrado en meteorología del departamento de Geociencias y los estudiantes del posgrado.

Gerardo de Jesús Montoya Gaviria  
Profesor Titular  
Universidad Nacional de Colombia

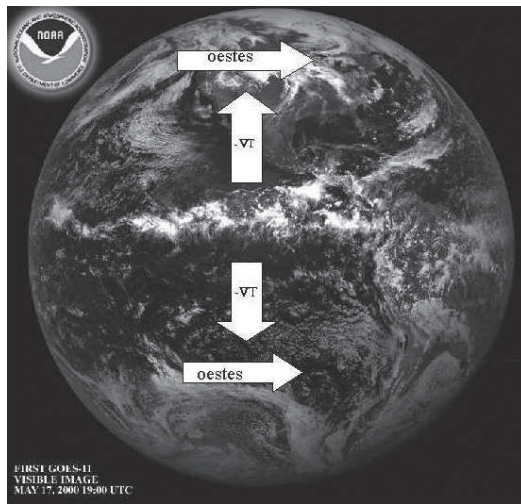
# Parte I

## LECCIONES DE METEOROLOGÍA DINÁMICA



1

# La meteorología dinámica y características de la circulación atmosférica en la región tropical occidental



Algunos rasgos de la circulación atmosférica. Imagen satelital cortesía de la NOAA.

Una de las aplicaciones fundamentales de la meteorología dinámica es la predicción meteorológica. Con el objeto de estimular el estudio y la aplicación de esta disciplina, se presentan algunos rasgos de la circulación tropical, de las perturbaciones tropicales y de la variabilidad climática. También se mencionan algunos de los problemas aún no resueltos por la meteorología dinámica en esta región. Algunos de los temas tratados en este capítulo pueden ser consultados en: Riehl (1979), Holton (1992), Hastenrath (1996).

## 1.1. La meteorología dinámica y la predicción meteorológica

El desarrollo de la meteorología dinámica está estrechamente ligado con los avances de su principal (pero no el único) usuario: la predicción meteorológica. Estos avances se resumen en la figura 1.1.

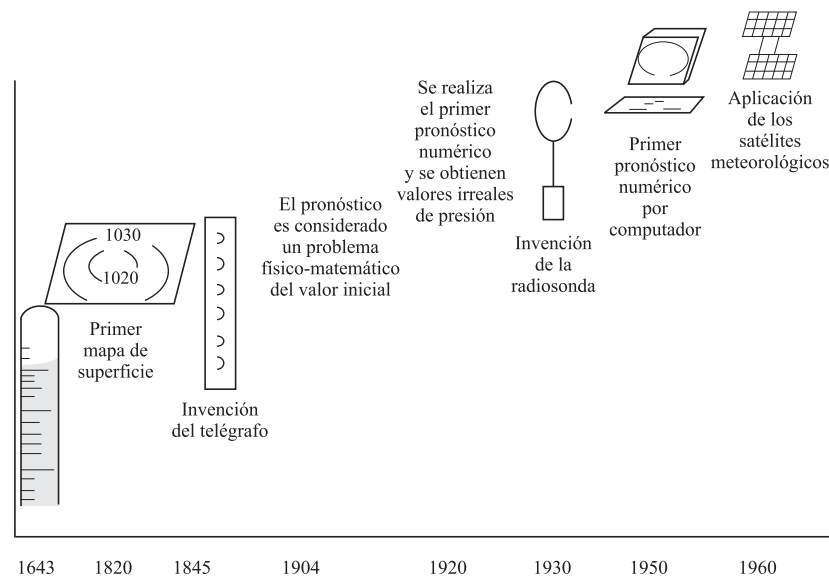


Figura 1.1. Representación esquemática de los avances en el tiempo de la predicción meteorológica.

La predicción del tiempo ha sido una labor milenaria que, como actividad científica, ha tenido tanto defensores como detractores. Aunque a comienzo del siglo XIX el astrónomo francés Francois Arago escribía que “nadie que tuviera prestigio científico que perder, se debería arriesgar a profetizar el tiempo”, muchos notables hombres de ciencia incluyeron en sus obras

aportes para la predicción del tiempo: Aristóteles en “Meteorológica”, 340 a.C.; Virgilio, Plinio y Tolomeo; René Descartes en el apéndice “Les meteo-res” a su obra, “Discours de la methode”; Vitus Bering, Mikhail Lomonosov, Benjamin Franklin, Antoine Lavoisier y muchos otros, algunos de los cuales serán mencionados en la siguiente exposición.

La práctica de las observaciones meteorológicas y de la predicción del tiempo se impulsa a partir de la invención del termómetro por Galileo Galilei en los últimos años del siglo XVI y del barómetro por Evangelista Torricelli, su discípulo, en 1643. El uso de este último instrumento sirvió a Otto von Guericke para predecir en 1660, por la caída de la presión, una tormenta con pocas horas de antelación y también fue de gran utilidad en la época de las navegaciones y los grandes descubrimientos geográficos.

La implementación de la cartografía meteorológica sinóptica mediante la comparación de las observaciones meteorológicas realizadas simultáneamente en una amplia zona, impulsada por Alexander von Humbolt (1817), H.W. Brandes (1920), Urbain Le Terrier, y en especial la invención del telégrafo por Claude Chappe, sir Charles Wheatstone y Samuel Morse (1840-1870), contribuyó significativamente a la fundamentación y difusión de la predicción meteorológica en el siglo XIX.

El análisis de las masas de aire y de los sistemas frontales de baja presión, iniciado por Tor Bergeron y W. Bjerkness, constituyó un gran aporte a comienzos del siglo XX. Bjerkness fue el primero en considerar la predicción del tiempo como un problema físico matemático de valor inicial.

Influenciado por el trabajo de Bjerkness y sus colaboradores, el matemático británico L. F. Richardson intentó en 1920 con resultados infructuosos, realizar la predicción del tiempo por métodos numéricos. A las experiencias de Richardson, siguieron las aproximaciones a las ecuaciones de la dinámica de fluidos derivadas por el meteorólogo-dinamicista sueco, Karl Gustaf Rossby en 1940.

A finales de la década de los treinta fue posible por primera vez la utilización de radiosondas con fines meteorológicos y el establecimiento de una red de mediciones de aire superior. Esta invención, junto con el adelanto en la electrónica y de los ordenadores digitales, permitieron en 1950 a John von Neumann, Jule Charney y Ragnar Fjortoft, realizar con éxito la predicción numérica del tiempo a corto plazo.

En 1960 la naturaleza caótica de la atmósfera fue comprendida inicialmente por Edward Lorenz. Con sus estudios sobre la teoría del caos, Lorentz señaló sobre las limitaciones en la predictabilidad inherente en modelos atmosféricos.



En la década de los sesenta el desarrollo de los satélites meteorológicos, como el Tiros, el Sputnik y más recientemente el GOES, marcó el comienzo de la era en que se obtienen las predicciones meteorológicas y se difunden mundialmente.

## 1.2. Qué es la meteorología dinámica

La meteorología dinámica es un área privilegiada para la aplicación de las técnicas matemáticas. Es considerada una disciplina de la mecánica y dinámica de fluidos, y en consecuencia como una rama de la hidrodinámica teórica. Los conocimientos sobre meteorología dinámica constituyen una herramienta útil para muchos usuarios. Por ejemplo, ella le sirve al meteorólogo para construir modelos físico- matemáticos del tiempo o del clima; al climatólogo para entender los rasgos principales de la circulación atmosférica; al constructor de instrumentos meteorológicos para conocer las características del flujo alrededor del instrumento. También sirve al observador, al pronosticador, al astrónomo y al piloto para interpretar las observaciones meteorológicas.

Uno de los objetivos de la meteorología dinámica es entender y predecir el tiempo y el clima. En la actualidad existe la teoría cuasi-geostrófica, que en una forma razonablemente coherente explica el desarrollo de perturbaciones atmosféricas de escala sinóptica en latitudes medias. De acuerdo con esta teoría (ver Holton,1992), las perturbaciones de latitudes medias se forman debido a un proceso de inestabilidad baroclínica, asociada al gradiente meridional de temperatura.

En latitudes tropicales, el gradiente meridional de temperatura y la componente horizontal de la fuerza de Coriolis son débiles; por tanto, la teoría cuasi geostrófica no es aplicable. Para las latitudes tropicales, falta por desarrollar una teoría similar que explique la formación de perturbaciones y su relación con la circulación en latitudes medias. Esta problemática la podemos intuir en un examen rápido de la teoría de circulación atmosférica.

## 1.3. La circulación atmosférica

Algunos rasgos principales de la circulación atmosférica están representados en la ilustración presentada al inicio de este capítulo. Debido a que la radiación neta es abundante en los trópicos y deficitaria en las regiones polares, existe un gradiente de temperatura dirigido desde el ecuador hacia

las regiones polares (ver ilustración al inicio de este capítulo). La existencia de este gradiente crea un flujo medio u oestes, de aproximadamente 10 m/s en término medio y orientado de oeste para este. La existencia de este flujo medio es la característica más importante de la circulación general de la atmósfera en esas latitudes. Además, dentro de ese flujo medio, a través de un proceso llamado inestabilidad baroclínica, se desarrollan perturbaciones u ondas, ciclones extratropicales, etc.

El desarrollo y la propagación de estas ondas determinan el estado del tiempo en esas latitudes, y además, al igual que las corrientes marinas, sirven de mecanismo para transportar energía desde los trópicos hasta latitudes más altas. Estas perturbaciones se deben intensificar hasta tanto el transporte de calor no sea suficiente para balancear el déficit de radiación en latitudes polares. La intensificación de la actividad ciclónica en Norte América registrada durante los episodios del fenómeno El Niño, cuando el Pacífico ecuatorial oriental sufre un significativo calentamiento por encima de la norma, es una interesante confirmación de esta teoría.

En latitudes bajas o tropicales, la situación es diferente. Aquí no existe un gradiente meridional de temperatura suficientemente grande para mantener un flujo semejante al observado en latitudes medias. En los niveles bajos de la troposfera tropical y en la dirección horizontal, predomina un flujo de naturaleza un tanto diferente, los vientos alisios del nordeste y del sudeste, los cuales se originan en las altas subtropicales de los hemisferios norte y sur, respectivamente. Estos vientos se pueden apreciar en las cartas medias circunglobales, como las mostradas en la figura 1.2.

El predominio de presiones más bajas en enero, con relación a julio, en la región ecuatorial, está estrechamente ligado al posicionamiento estacional de los vientos alisios en ambos hemisferios.

La aparición de los oestes en latitudes medias y la de los alisios en latitudes bajas, puede ser explicada como una consecuencia de la conservación del momento angular para el sistema tierra-atmósfera.

### **1.3.1. La conservación del momento angular para el sistema tierra-atmósfera**

Debido a la trascendencia de la conservación del momento angular en la circulación atmosférica, es importante mostrar aquí una aplicación sencilla de este concepto.

Es conocido que, para la unidad de masa, el momento de inercia es el

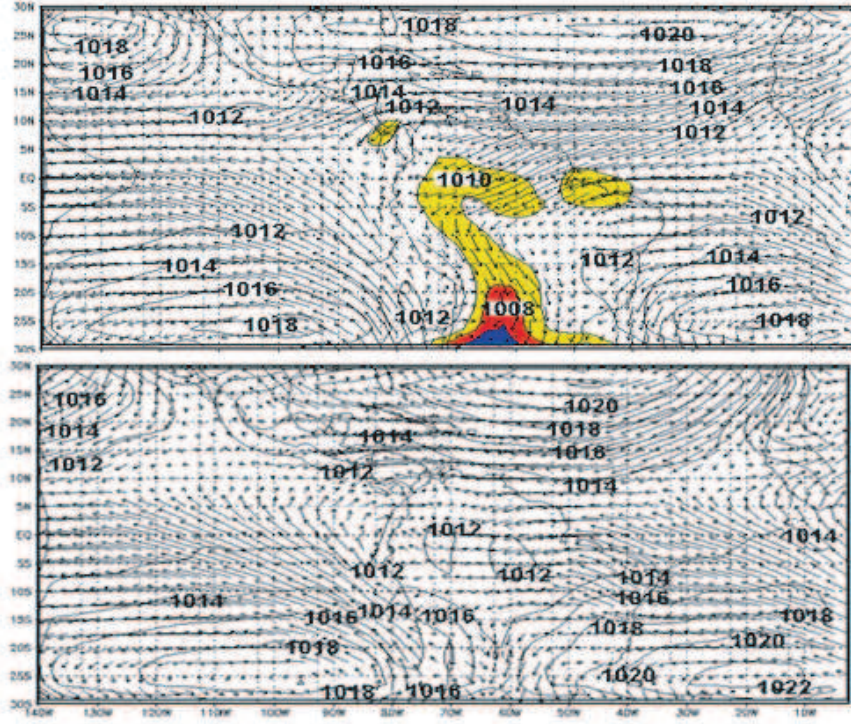


Figura 1.2. Mapas medios de líneas de corriente e isobaras en superficie, diseñados con la información del Reanálisis. Arriba: enero, abajo: julio; El área sombreada en la parte superior indica campos de isobaras cada 1hPa.

producto de la velocidad por la distancia al centro de rotación. Al sustituir la velocidad tangencial por la velocidad angular se obtiene el momento angular. El momento angular debido a la rotación de la Tierra, que actúa sobre una partícula en reposo y en la latitud  $\phi$ , es  $\Omega r^2$ , donde  $r$  es el radio del círculo de latitud y  $\Omega$  es la velocidad angular de la tierra.

De acuerdo con la figura 1.3, este momento angular disminuye hacia los polos, como  $\cos^2 \phi$ . Si la partícula de aire se desplaza, el momento adicional que actúa sobre ella (llamado momento angular de la atmósfera) es  $ur$ , donde  $u$  es el viento zonal.

Del curso de física sabemos que para el sistema tierra-atmósfera, el momento angular se conserva. Esto puede escribirse como

$$\frac{d(ur + \Omega r^2)}{dt} = 0$$

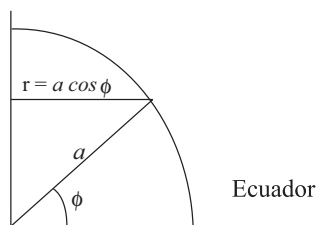


Figura 1.3. Ángulos y arcos coordinables para mostrar la conservación del momento angular.

Esta ecuación muestra que la suma entre paréntesis es un valor constante. Por eso podemos escribir esta ecuación como

$$ua \cos \phi + \Omega a^2 \cos^2 \phi = \text{const} \quad (1.1)$$

donde  $a$  es el radio de la Tierra. Veamos que significa esto. Teniendo en cuenta que la componente  $u$  es positiva del oeste hacia el este, una partícula de aire, que se mueve hacia latitudes medias y altas debe ser impulsada por vientos del oeste para compensar el decrecimiento de  $\cos^2 \phi$ . Recíprocamente, el aire que se dirige hacia el ecuador debe adquirir componente este. Este raciocinio coincide con lo que, en término medio, muestran las cartas de viento en superficie, o sea, vientos del oeste en latitudes medias y de componente este en la región tropical. A estos últimos vientos se les conoce como vientos alisios.

En la región tropical y en la dirección vertical predomina una circulación llamada celda de Hadley, con movimientos ascendentes en la zona donde convergen los alisios o Zona de Convergencia Intertropical, ZCIT, y subsidencia en las altas subtropicales. La circulación de Hadley se representa esquemáticamente en la figura 1.4. Esta celda de circulación sirve como mecanismo de intercambio en la dirección meridional. Otra circulación de gran escala e importante en los trópicos es la celda de circulación de Walter, orientada en dirección zonal y asociada con el calentamiento diferencial de la superficie en esta dirección. El transporte vertical es una de las características más importantes de la circulación atmosférica en las latitudes tropicales.

Esta visión resumida de la circulación muestra con claridad la diferencia entre los tipos de circulación en latitudes medias y tropicales. Si la formación y el desarrollo de las ondas baroclínicas o perturbaciones de latitudes medias se puede entender con ayuda de la teoría cuasi-geostrófica mencionada, no sucede lo mismo para latitudes tropicales donde hasta el momento

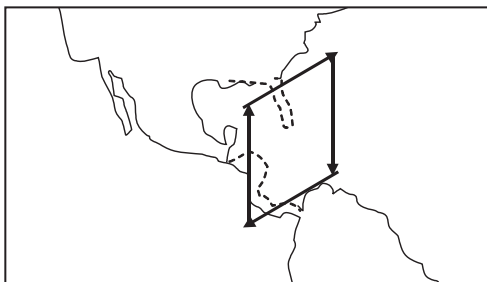


Figura 1.4. Representación esquemática de la celda de Hadley, resaltada en negrita y perpendicular al plano de la página.

no existe una teoría que sirva para explicar en forma unificada el desarrollo de perturbaciones tropicales y su conexión con los movimientos de latitudes medias.

Energéticamente hablando, esta situación podemos representarla como sigue: fuera de los trópicos, la fuente primaria de energía para las perturbaciones de escala sinóptica es la energía potencial disponible, asociada al gradiente latitudinal de temperatura. (La energía potencial total es la suma de la energía interna más la energía potencial gravitacional; sin embargo, solo está disponible el 0.5 % de esta energía). En este caso las contribuciones por calor latente y calentamiento radiativo son secundarias. En el trópico, por el contrario, el almacenamiento de energía potencial disponible es pequeño debido a los relativamente débiles gradientes de temperatura en la atmósfera tropical. En este caso, la realización de calor latente aparece como la fuente primaria de energía, por lo menos para las perturbaciones originadas en la región ecuatorial.

## 1.4. Perturbaciones tropicales

De manera similar a lo que sucede dentro del flujo de latitudes medias, en el de los alisios también se desarrollan perturbaciones. Entre ellas; las ondas del este, las tormentas y los huracanes tropicales. Algunas pueden comenzar como una simple depresión en el flujo, llamada onda del este, continuar desarrollándose hasta alcanzar el siguiente estado de tormenta tropical y, finalmente, si las condiciones son favorables, convertirse en un huracán tropical. En la figura 1.5 se muestra una imagen del huracán Katrina.

Las ondas del este, las tormentas tropicales y los huracanes están directamente asociados a la formación y el desarrollo de la convección atmosférica. En los mapas sinópticos, las tormentas tropicales se reconocen por isobaras cerradas y vientos superficiales sostenidos de hasta 17 m/s. En los huracanes tropicales, los vientos superficiales alcanzan hasta 32 m/s y más. Las tormentas y los huracanes tropicales son considerados detalladamente en textos de meteorología tropical. Sin embargo, mencionaremos aquí seis parámetros esenciales en la génesis de un huracán, sugeridos por Gray (1979), (ver también Hastenrath, 1996: página 226): Ellos son: 1. La temperatura de la superficie del mar. 2. El gradiente vertical de la temperatura potencial equivalente. 3. La humedad relativa en la troposfera media. 4. La vorticidad relativa en niveles bajos. 5. El parámetro de Coriolis. 6. El cizallamiento vertical del viento horizontal. Los tres primeros son de tipo termodinámico y están estrechamente relacionados con la formación y el desarrollo de la convección profunda en la atmósfera; y los cuatro últimos son de carácter dinámico.

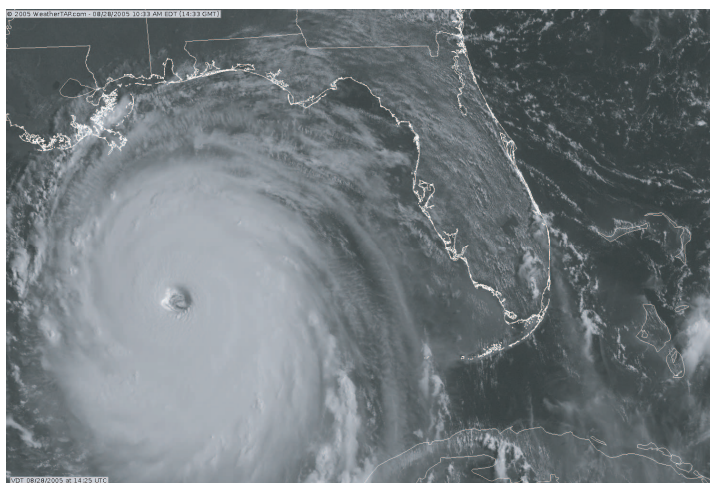


Figura 1.5. Imagen de satélite del huracán Katrina, 28/08/2005. Tomada de [http://jrscience.wcp.muohio.edu/coriolis/katrina/08\\_28\\_VIS\\_1425.gif](http://jrscience.wcp.muohio.edu/coriolis/katrina/08_28_VIS_1425.gif)

Además de estas perturbaciones, existen otros sistemas productores de lluvias, las cuales modifican el estado del tiempo en la región tropical.



## **1.5. Otros sistemas productores de lluvia en la región tropical occidental**

Otros sistemas pluvigénéticos en la región tropical, en particular en Colombia, son la ZCIT, los complejos convectivos de mesoescala, las vaguadas asociadas con el paso de frentes fríos de latitudes medias y otros. A continuación se hace una breve discusión sobre estos sistemas productores de lluvia.

### **1.5.1. La Zona de Convergencia Intertropical, ZCIT**

En las imágenes de satélites, la ZCIT se reconoce como una banda nubosa cercana al ecuador (ver ilustración al comienzo de este capítulo), aunque algunos autores prefieren reconocerla por la discontinuidad presentada en el encuentro de los alisios de ambos hemisferios. La ZCIT es probablemente el mecanismo productor de lluvia de mayor influencia sobre la región norte de Suramérica. Sin embargo, es materia de controversia en la actualidad; su ubicación en una zona donde se presentan simultáneamente valores extremos en otros campos, como máximo de nubosidad, mínimo de presión y máximo de temperatura de la superficie del mar. No existe una manera coherente de explicar la coexistencia simultánea de estas bandas.

No es fácil concebir, por ejemplo, como el máximo de temperatura en la superficie del mar, obtenida por calentamiento debido a la radiación solar, pueda coexistir simultáneamente con máximo en nubosidad.

En un intento por explicar esta situación, usando estudios de alta resolución, Hastenrath & Lamb (1977, 1978) sugieren que la zona de máxima convergencia, nubosidad y precipitación se encuentra distante del eje de discontinuidad del viento (definido como mínimo en velocidad y persistencia) hasta 350 km en el mar y hasta 1000 km en el continente africano. Sin embargo, aún no es claro el mecanismo físico causante de esta separación.

### **1.5.2. Complejos convectivos de mesoescala**

La costa pacífica colombiana, una de las regiones más lluviosas del globo, a menudo es afectada por Complejos Convectivos de Mesoescala, CCM, como el que se muestra en la figura 1.6.

Los CCM también se presentan en la Amazonia y se detectan en las imágenes de satélite como largas agrupaciones de nubes cúmulus. Estas formaciones a menudo son asociadas a líneas de inestabilidad.

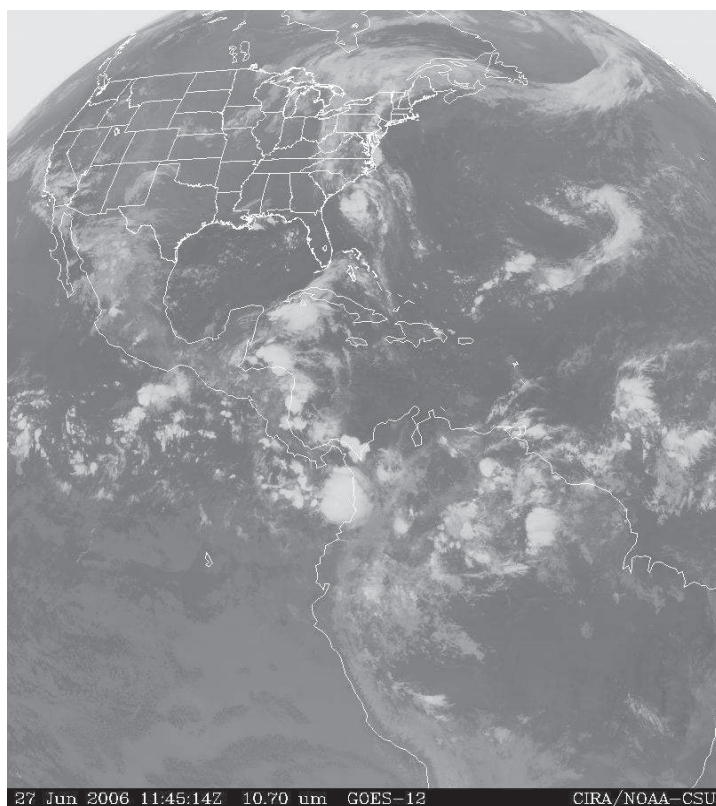


Figura 1.6. Complejo convectivo de mesoescala actuando sobre la costa pacífica colombiana. Cortesía de NOAA-CSU. Tomado de <http://www1.cira.colostate.edu/Special/CurrWx/currwx.htm>.

Aún no existe una teoría suficiente para explicar el origen y desarrollo de estos complejos convectivos de mesoescala sobre el territorio colombiano.

### 1.5.3. Influencia de sistemas de latitudes medias

Para identificar la influencia de estos sistemas sinópticos de latitudes medias sobre la región tropical no existe una nomenclatura unificada. Por ejemplo, Riehl (1979), analizando la influencia de estos sistemas sobre Hawai los llama “ciclones tropicales”, en México y Centroamérica reciben el nombre de “temporales”, en El Salvador “nortes”. En Colombia, frecuentemente los señalan como vaguadas asociadas a frentes fríos de los hemisferios norte o sur. Sobre la dinámica de su formación y desarrollo, tampoco existe una-



nimidad de criterios. De acuerdo con Riehl (1979), aparecen como vórtices en altura que van descendiendo a través de la troposfera. Los temporales son caracterizados por una depresión en todos los niveles sin profundización significativa con la altura (ver Hastenrath, 1996, Pallman, 1968). Un papel importante representa aquí la transferencia de vorticidad ciclónica desde el nivel donde se presenta la cizalladura. Los nortes se producen como una rápida modificación del aire continental y frío sobre el mar Caribe y el Golfo de México. Kouski (1979) describe el pasaje de frentes fríos o sus remanentes del hemisferio sur sobre el norte de Brasil y la Amazonia. Estos sistemas se presentan acompañados de nubosidad y lluvias abundantes. Hasta el presente han sido poco estudiados. En la figura 1.7 se muestra la influencia de un sistema del hemisferio norte sobre la región norte de Suramérica. Ese día se registraron abundantes precipitaciones en varias regiones del territorio colombiano.

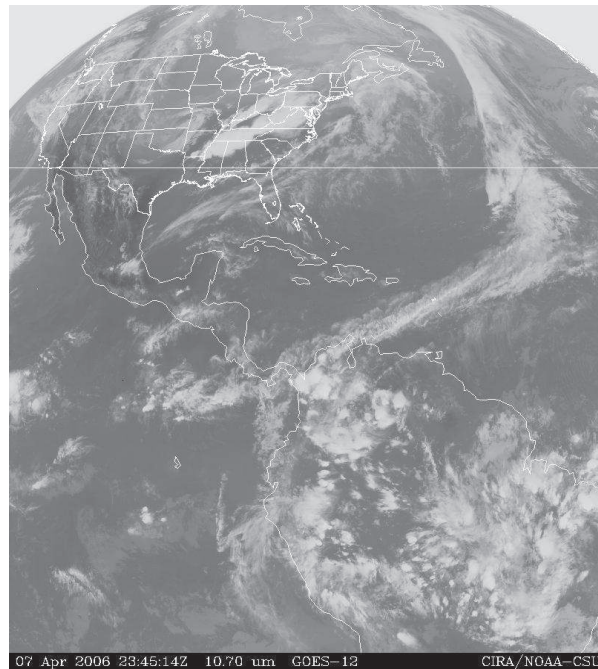


Figura 1.7. Influencia de un frente frío del hemisferio norte sobre el Caribe y norte de Suramérica. Cortesía de CIRA-NOAA-CSU. Tomado de <http://www1.cira.colostate.edu/Special/CurrWx/currwx.htm>.

## 1.6. Circulaciones locales

Además de los sistemas y perturbaciones mencionados, las lluvias de la región tropical son provocadas o disparadas a menudo por una interacción entre el flujo de larga escala y circulaciones locales. Estas circulaciones tienen un ciclo diurno bien definido que incluye el fenómeno de la brisa y la circulación Valle-Montaña. Por ejemplo, en latitudes no tropicales, la brisa marina afecta hasta 10 – 20 kms adentro del continente, mientras que en las regiones tropicales este efecto se puede extender hasta 100 km y más. Así mismo, la circulación valle-montaña puede provocar abundante nubosidad y precipitación en las laderas, y escasas en el centro del valle, lo que ejerce gran influencia en la cobertura vegetal de estas zonas. (La precipitación mayor en las laderas que en el centro del valle se debe a que durante el día, en especial durante las horas de la mañana y a una misma altura, el aire se calienta con más rapidez cerca de la ladera que en el centro del valle, provocando ascenso de aire cerca de la ladera con la consecuente formación de nubosidad y descenso o subsidencia en el centro del valle). La brisa, la circulación valle-montaña y el fenómeno Foehn ejercen gran influencia en el clima y estado del tiempo en las regiones tropicales, en especial, sobre el territorio colombiano.

## 1.7. Los sistemas de precipitación y la variabilidad climática

Los sistemas productores de lluvia son afectados por oscilaciones cuasi-periódicas como las asociadas al el fenómeno El Niño y la Oscilación del Sur, ENOS, el ciclo cuasi-bienal, las oscilaciones Madden Julian, etc.

### 1.7.1. El fenómeno El Niño y la Oscilación del Sur

Este es un fenómeno de variabilidad climática interanual que ocurre en ciertos años con componentes en la del Océano Pacífico surecuatorial occidental y en la atmósfera circundante. La componente oceánica incluye calentamiento anómalo en el Pacífico oriental, profundización de la termoclina y aparición de contracorrientes en la costa peruana. Como componente atmósfera se observa el desplazamiento de los centros de convección hacia el Pacífico oriental, el debilitamiento de los vientos alisios y de los centros de alta presión en esta zona.

### 1.7.2. Las oscilaciones Madden Julian

Además de a la variación interanual asociada al fenómeno El niño, la atmósfera tropical exhibe variabilidad en escalas menores a un año o variabilidad intra-anual. Es el caso de las oscilaciones Madden Julian las cuales se presentan en escalas temporales de 30 a 60 días.

La oscilación Madden Julian se caracteriza por una propagación hacia el este de anomalías de convección profunda desde el Océano Índico hacia el Pacífico occidental. Esta oscilación influye directamente en el régimen de precipitación en la región tropical y se presenta asociada a cambios en los regímenes de viento, temperatura de la superficie del mar y nubosidad.

Tanto el fenómeno El Niño, la oscilación del sur y otros procesos cuasi-cíclicos, ejercen fuerte influencia en los sistemas productores de lluvia mencionados. Sin embargo, poco se conoce sobre la dinámica de esta interacción, ni se poseen estimativos sobre la variabilidad climática de los sistemas pluviogénéticos en Colombia, asociada a estos fenómenos.

De esta breve excursión realizada por la circulación general de la atmósfera en latitudes medias y tropicales hemos aprendido, de manera general, a reconocer las diferencias en la circulación del viento predominante en cada uno de estos dos tipos de latitudes y algunas de las preguntas aún sin resolver para latitudes tropicales. Particularmente, se puede afirmar que en la región tropical prevalecen los movimientos verticales; y por tanto, es conveniente conocer métodos adecuados para detectar y predecir este tipo de movimientos. Estos métodos pueden ser análisis de la divergencia y velocidad vertical; vorticidad relativa y conservación de la vorticidad potencial; análisis termodinámico como el de la estabilidad estática y modelos de predicción numérica. Sobre la introducción e implementación de algunos de estos métodos mencionados se hará énfasis en los capítulos siguientes.

#### Ejercicio

Una parcela de aire de masa unitaria se encuentra en una latitud de 30 grados sur. Calcule la velocidad zonal que debe obtener esa parcela de aire para que se cumpla la ley de conservación del momento angular para el sistema Tierra-atmósfera de acuerdo con la fórmula (1.1). Tómese la velocidad angular de la tierra,  $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ 1/s}$  y el radio de la Tierra,  $a = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ . Repítase el ejercicio para una latitud de 5 grados sur.

## 2

# Nociones básicas sobre vectores, análisis vectorial e hidrodinámica

### *Vilhelm Bjerknes (1862-1951)*

Matemático y físico noruego, considerado por muchos como uno de los fundadores de la meteorología moderna. Es célebre por haber sido uno de los primeros en considerar la predicción del tiempo como un problema físico-matemático de valor inicial.

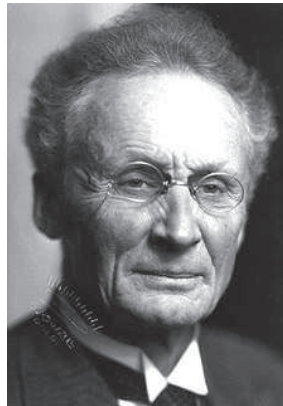


Imagen tomada con permiso de  
<http://earthobservatory.nasa.gov/Library/Giants/Bjerknes/>  
Cortesía de la NASA.

En este capítulo se hace una revisión de vectores, análisis vectorial y algunos elementos de hidrodinámica. Esta revisión, la cual se ilustra con ejemplos de meteorología, se considera un ejercicio introductorio de gran utilidad previo a la fundamentación de los principios teóricos de la meteorología dinámica. Algunos de los libros de consulta recomendados son Haltiner & Martin (1956), Holton (1992), Riegel(1992).

## 2.1. Vectores

### 2.1.1. Escalar, vector

En física encontramos cantidades que tienen solamente magnitud. A ellas las llamamos escalares. Por ejemplo la temperatura, la presión, etc. A otras cantidades que, además de magnitud tienen dirección, las llamamos vectores. Por ejemplo la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc. A un vector lo representamos con una letra en negrita o con una flecha encima. La representación vectorial simplifica el tratamiento matemático y también suministra una interpretación física simple a ciertos resultados matemáticos.

### 2.1.2. Suma (resta) de vectores

En la figura 2.1 se ilustra la suma de dos vectores **A** y **B**. El vector  $-\mathbf{B}$  se define como un vector tiene la misma magnitud de **B**, pero de dirección opuesta. Por tanto, la diferencia de dos vectores es  $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ .

Un vector puede ser representado por sus componentes cartesianas o haciendo uso de la noción de vectores unitarios:

Sean **i**, **j**, **k**, vectores ortogonales unitarios en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ , respectivamente. Según la figura 2.2 y la definición de suma de vectores, un vector **A** se puede representar como

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}, \quad (2.1)$$

Donde  $A_x$ ,  $A_y$  y  $A_z$  son las componentes del vector **A** sobre los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$  respectivamente. Por ejemplo, el vector posición que será repetidamente usado en este texto, se denota como

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}. \quad (2.1a)$$

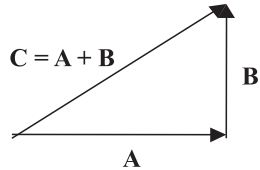


Figura 2.1. Suma de vectores

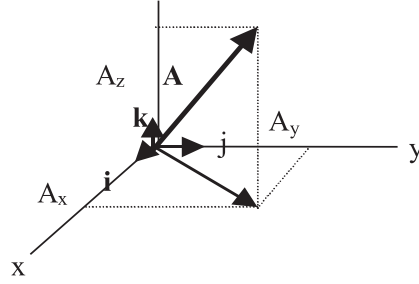


Figura 2.2. Representación de un vector por componentes.

La magnitud del vector  $|\mathbf{A}|$  se expresa

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

La magnitud del vector unitario es 1. Dos vectores son iguales si son iguales sus componentes. Es decir,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \text{si} \quad A_x = B_x, \quad A_y = B_y \quad \text{y} \quad A_z = B_z.$$

La suma de dos vectores expresados por sus componentes está dada por

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}.$$

La diferencia entre dos vectores se escribe en forma similar.

### 2.1.3. Producto escalar

En la fórmula (2.1) tuvimos un primer encuentro con el producto de un escalar por un vector (el producto de un escalar por un vector da como resultado un vector). El producto escalar, o producto punto de dos vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , se designa por  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  y se define como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta. \quad (2.2)$$

Donde,  $\theta(\leq 180^\circ)$  es el ángulo entre los vectores. Nótese que el producto escalar de dos vectores es un escalar. Además,

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1(\theta = 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0(\theta = 90).$$

#### 2.1.4. Producto vectorial

El producto vectorial se designa por  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  y el resultado es otro vector. La magnitud de ese vector es

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\sin \theta. \quad (2.3)$$

La dirección del vector  $\mathbf{C}$  es perpendicular al plano formado por los vectores  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$ , y su sentido es determinado por la regla de la mano derecha (también comúnmente conocida como regla de “avance del tornillo”). El producto vectorial tiene una representación matricial cuando los dos vectores están dados por sus componentes:

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.4)$$

El vector resultante del producto vectorial, de acuerdo con la representación matricial se escribe

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \times (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}. \end{aligned} \quad (2.4a)$$

##### 2.1.4.1. Aplicación del producto vectorial - velocidad zonal del viento

Considere el movimiento de la Tierra representado en la figura 2.3 donde  $\vec{\Omega}$  es la velocidad angular de la tierra, dirigida a lo largo del eje de rotación;  $\vec{r}$  es el vector posición de un punto sobre el círculo de latitud, con respecto al centro de la Tierra; y  $\vec{R}$  es el vector posición del mismo punto, pero con relación al centro del círculo de latitud por donde pasa el eje de rotación.

El movimiento de una partícula que se desplaza solidaria con la Tierra, paralela a un círculo de latitud, se denomina velocidad zonal del viento. Esta velocidad puede expresarse mediante el siguiente producto vectorial (recuerde que en el movimiento circular uniforme la velocidad tangencial puede expresarse como el producto de la velocidad angular multiplicada por el radio)

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}. \quad (2.5)$$

La equivalencia de estos dos productos vectoriales resulta evidente teniendo en cuenta que, de acuerdo con la figura 2.3

$$\vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_z + \vec{R}) = \vec{\Omega} \times \vec{R}$$

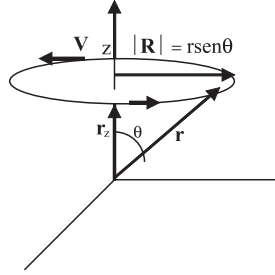


Figura 2.3. Representación de la velocidad zonal como el resultado de un producto vectorial.

en donde  $\mathbf{r}_z$  es la proyección del vector  $\vec{r}$  sobre el eje  $z$  y que los vectores  $\mathbf{r}_z$  y  $\Omega$  son colineales.

### 2.1.5. Productos que envuelven más de dos vectores

El resultado del triple producto  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$  es un escalar y se puede escribir sin paréntesis, o sea,  $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C}$ , ya que la operación  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \times \vec{C}$  carece de sentido.

El resultado del producto  $(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C}$  es un vector, y es diferente del resultado  $\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{C})$ .

Algunos productos de vectores que serán utilizados más adelante se presentan a continuación:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (2.6)$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} \quad (2.7)$$

## 2.2. Análisis vectorial

### 2.2.1. Diferenciación de vectores

En la figura 2.4,  $\vec{r}$  es el vector posición de una partícula. La velocidad  $\vec{V}$  de esta partícula está dada por

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \mathbf{V} \quad (2.8)$$

y la aceleración  $\vec{a}$  por

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{a}. \quad (2.9)$$



Para continuar ilustrando la diferenciación de vectores, considere el vector

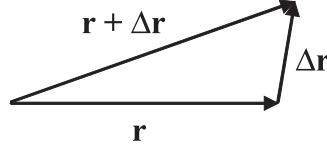


Figura 2.4. Diferenciación de vectores.

$\mathbf{A}$  representado por la fórmula (2.1) y dos sistemas de coordenadas, uno fijo de componentes  $xyz$  y otro móvil de componentes  $x'y'z'$ , el cual gira con velocidad angular constante (ver figura 2.5). Entonces, para el sistema fijo, el cambio del vector  $\mathbf{A}$  con el tiempo es

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \vec{i} \frac{dA_x}{dt} + \vec{j} \frac{dA_y}{dt} + \vec{k} \frac{dA_z}{dt} \quad (2.10)$$

donde el subíndice  $a$  indica que derivamos con relación a un sistema fijo o absoluto. Ese mismo vector  $\mathbf{A}$ , en el sistema que gira, se representa como

$$\mathbf{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} = A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}' + A'_z \vec{k}'.$$

Diferenciando este vector con relación a un sistema absoluto de coordenadas, se obtiene

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt} = \frac{dA'_x}{dt} \vec{i}' + \frac{dA'_y}{dt} \vec{j}' + \frac{dA'_z}{dt} \vec{k}' + A'_x \frac{d\vec{i}'}{dt} + A'_y \frac{d\vec{j}'}{dt} + A'_z \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad (2.11)$$

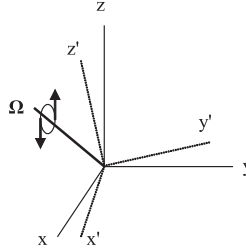


Figura 2.5. Sistema de coordenadas en rotación (línea punteada), superpuesto a un sistema fijo (línea continua).

En esta expresión, los términos de la derivada de los vectores unitarios con respecto al tiempo existen y no son constantes. (A pesar de que el módulo permanece constante, la dirección del vector unitario cambia permanentemente en el sistema que gira). De acuerdo con las definiciones (2.8) y (2.5),

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{i}', \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{j}', \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{k}'.$$

Sustituyendo estos valores en la parte derecha de (2.11) y teniendo en cuenta que los tres primeros términos en la parte derecha de esta expresión representan el cambio del vector  $\vec{A}$  en el sistema que gira,

$$\begin{aligned} \frac{d_a \vec{A}}{dt} &= \frac{d\vec{A}}{dt}(\text{sistema que gira}) + A_x(\vec{\Omega} \times \vec{i}) + A_y(\vec{\Omega} \times \vec{j}) + A_z(\vec{\Omega} \times \vec{k}) = \\ &= \frac{d\vec{A}}{dt}(\text{sistema que gira}) + \vec{\Omega} \times (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}), \end{aligned}$$

y puesto que el término en el lado izquierdo representa el cambio del vector en el sistema fijo, se escribe

$$\frac{d_a \vec{A}}{dt}(\text{sistema fijo}) = \frac{d\vec{A}}{dt}(\text{sistema que gira}) + \vec{\Omega} \times \vec{A}. \quad (2.12)$$

así se llega a un importante resultado. La tasa de cambio de un vector arbitrario  $\vec{A}$  con respecto a un sistema fijo de coordenadas (una estrella por ejemplo) es igual a la tasa de cambio observada en el sistema en rotación (lo que es igual, por un observador situado en el sistema que gira) más el término  $\vec{\Omega} \times \vec{A}$  (Ver ejercicio 2).

### 2.2.2. Operador nabla ( $\nabla$ )

Existen algunas combinaciones de derivadas parciales que ocurren con frecuencia en aplicaciones físicas. Una de ellas es el operador diferencial vectorial llamado nabla, el cual se designa con el símbolo  $\nabla$  y se define como

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.13)$$

Se debe tener en cuenta que nabla es apenas un operador y que solo tiene sentido físico cuando se multiplica por un escalar o por un vector. Si el operador nabla es multiplicado por una magnitud escalar, se obtiene un gradiente. Si el operador nabla es multiplicado por un vector, se consideran dos casos: el de un producto punto y el de un producto cruz. En el primer caso, se obtiene una divergencia; en el segundo, un rotacional.

### 2.2.3. Gradiente

S

Se obtiene al multiplicar el operador nabla por un escalar, por ejemplo, la presión, la temperatura, etc.

$$\vec{\nabla}p = \vec{i}\frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.14)$$

El gradiente es una característica del campo vectorial. En matemáticas, se define orientado en el sentido de crecimiento de la función. En meteorología, el gradiente se entiende orientado en sentido de decrecimiento de la función, razón por la cual a menudo se usa la cantidad  $-\nabla p$  para indicar el gradiente en meteorología. De esta forma no se entra en confusión con la orientación dada en matemáticas. Esta orientación está de acuerdo con la práctica meteorológica y es más lógica desde el punto de vista de aplicaciones físicas que, en el caso de la presión, indica el sentido hacia donde el aire fluye o sea, desde las altas hacia las bajas presiones.

En el ejercicio 1 se muestra que el gradiente de presión es perpendicular a las isobaras.

En el ejercicio 3 se muestra que el vector posición  $\mathbf{r}$  es igual al producto de su módulo  $r$  por el gradiente de  $r$ . O sea,

$$\vec{r} = r\vec{\nabla}r \quad (2.15)$$

### 2.2.4. Divergencia de un vector

Es una cantidad escalar que se obtiene al multiplicar el operador  $\nabla$  por un vector; el vector posición  $\mathbf{r}$  por ejemplo. En este caso, el resultado es

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right) (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = 3 \quad (2.16)$$

Otro ejemplo es el producto del operador nabla por la velocidad,  $\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$ . En este caso, se obtiene la divergencia del campo de la velocidad:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (2.17)$$

Gráficamente, la divergencia se identifica como el esparcimiento o acercamiento de las líneas de flujo, como se muestra en la parte derecha de la figura 2.6.

Matemáticamente, la divergencia de un vector en un punto  $P$  es el flujo por unidad de volumen en las vecindades de  $P$ . Veamos que significa esto.

Considere una superficie imaginaria cerrada, un cubo como el de la figura 2.6, donde  $\vec{n}$  es la normal a un elemento infinitesimal  $da$  de esa superficie. El *flujo* de masa que atraviesa una superficie se define como la cantidad de masa que pasa en la unidad de tiempo y se representa por la siguiente integral de superficie:

$$\Phi_s = \oiint_s \rho \vec{v} \cdot \vec{n} da$$

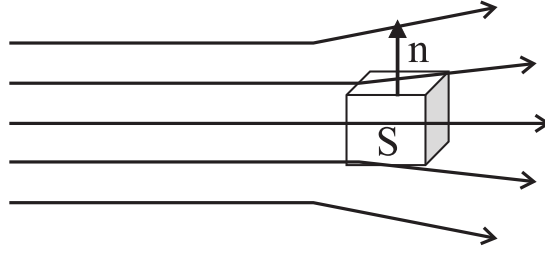


Figura 2.6. Representación de un fluido por sus líneas de flujo. En la parte izquierda de la figura, el fluido es no divergente, mientras que en el extremo derecho, el fluido es divergente.

donde  $\vec{v}$  es la velocidad que en principio puede ser cualquier vector, y  $\rho$  es la densidad del fluido. De acuerdo con la definición anterior, la divergencia se escribe

$$\text{div } \rho \vec{v} = \frac{1}{V} \oiint_s \rho \vec{v} \cdot \vec{n} da \quad (2.17a)$$

en donde  $V$  es volumen.

(Estrictamente hablando, la divergencia es el límite de la relación entre el flujo y el volumen cuando el volumen tiende a cero). Es importante anotar que el flujo por la superficie cerrada es diferente de cero solo cuando dentro de ella existen fuentes o sumideros. La divergencia es entonces una medida específica de la deformación del campo asociada a la existencia de fuentes o sumideros dentro del mismo. La asociación entre las fórmulas (2.17) y (2.17a) la da el teorema de Gauss, según el cual, el flujo de un vector por una superficie es igual a la integral por volumen de la divergencia de ese mismo vector. O sea,

$$\oiint_s \vec{v} \cdot \vec{n} da = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dV.$$

**2.2.4.1. No divergencia y función de corriente ( $\psi$ )**

Si la divergencia horizontal del viento es nula, es decir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

el flujo es no divergente y decimos que existe una función escalar  $\psi$  por medio de la cual se pueden expresar las componentes del viento horizontal  $u$  y  $v$ ,

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (2.18)$$

En efecto, derivando la primera de estas ecuaciones por  $x$  y la segunda por  $y$ , y sumando los resultados,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

En esta forma, se demuestra la validez de la afirmación (2.18) para el caso de un flujo no divergente.

Las dos componentes (2.18) pueden reunirse en una sola ecuación vectorial:

$$\vec{V} = \vec{K} \times \vec{\nabla} \psi, \quad (2.19)$$

en donde  $\mathbf{V}$  es un vector plano.

**2.2.4.2. Líneas de corriente**

Por definición, una línea de corriente es una línea tangente al vector velocidad en cada punto (dicho de otra forma, el vector velocidad es tangente a la línea de corriente en cada punto). En la figura 2.7 se muestra una línea de corriente. En un punto  $P$ , asociado a un vector posición  $\mathbf{r}$ , la velocidad  $\mathbf{V}_H$  es tangente a la línea de corriente. Centrando la atención en el vector  $\delta \mathbf{r}$ , notamos que a medida que tiende a cero,  $\delta \mathbf{r}$  también se vuelve tangente a la línea de corriente en el punto  $P$ , o sea paralelo a  $\mathbf{V}_H$ . Matemáticamente, esta condición de paralelismo puede expresarse como

$$\vec{V}_H \times \delta \vec{r} = 0.$$

Teniendo en cuenta que en el plano el vector  $\delta \mathbf{r}$  se expresa como  $\delta \mathbf{r} = i\delta x + j\delta y$ , se efectúa el anterior producto vectorial y se obtiene

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ u & v & w \\ \delta x & \delta y & \delta z \end{vmatrix} = (u\delta y - v\delta x)\vec{k} = 0.$$

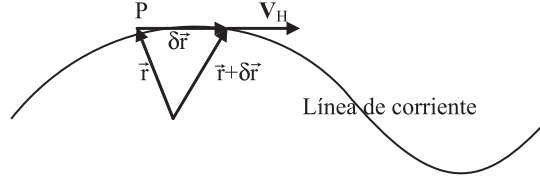


Figura 2.7. Línea de corriente.

o sea

$$u\delta y = v\delta x. \quad (2.20)$$

En el límite, se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, t_0)}{u(x, y, t_0)}. \quad (2.20a)$$

Si el flujo es *no divergente*, situación que se puede asumir válida en la región tropical y en ausencia de perturbaciones, puede representarse por la función de corriente solamente. En efecto, sustituyendo  $u$  y  $v$  por sus valores en (2.18) y trasponiendo términos se obtiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0$$

o también

$$\psi = \text{const.} \quad (2.21)$$

Las igualdades (2.20) y (2.21) revelan que, en el flujo no divergente, las líneas de corriente pueden ser representadas por las líneas de  $\psi = \text{const.}$  En esto se fundamenta la utilización de las líneas de corriente en la región tropical como líneas de  $\psi = \text{const.}$  (Obviamente, las líneas de corriente son válidas para representar el flujo no perturbado. Sin embargo, la aparición de curvatura de las líneas de corriente en algunas áreas del flujo puede servir como indicativo de la formación de una perturbación tropical)

### 2.2.5. Vorticidad

El concepto de vorticidad en dinámica de fluidos está asociado al concepto de velocidad angular de una partícula o de un sólido. La vorticidad se define físicamente como la tendencia de rotación de una parcela de aire alrededor de un eje que pasa por su centro de masa.

La expresión para la vorticidad se obtiene a partir del producto cruz entre el operador nabla y el vector velocidad  $\mathbf{V}$ :

$$\nabla \times = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{k}. \quad (2.22)$$

En meteorología, es particularmente importante la componente vertical de la vorticidad, la cual se designa por  $\zeta$  y se escribe

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.23)$$

Utilizando notación vectorial, la componente vertical de la vorticidad se escribe

$$\zeta = \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V}. \quad (2.24)$$

Sustituyendo a  $V$  en esta expresión por su valor en (2.18) es fácil llegar a una ecuación, la cual relaciona la vorticidad con la función de corriente.

$$\zeta = \vec{k} \cdot \vec{\nabla}^2 \psi. \quad (2.25)$$

Evidentemente, esta relación es válida solo para una atmósfera no divergente.

### 2.2.6. Diferencial total, cambio local

Varias de las leyes de la física, como la segunda ley de la termodinámica, la segunda ley de Newton, etc., están escritas para una partícula, lo cual se puede asociar en la atmósfera a una parcela de aire en particular. La descripción del movimiento que acompaña la partícula se llama tratamiento de Lagrange. Cuando en vez de acompañar la partícula, queremos saber qué sucede en un punto fijo como consecuencia del movimiento del aire, debemos utilizar el tratamiento de Euler. La equivalencia entre estas dos maneras de abordar la descripción del movimiento se logra a través de los conceptos de derivada total o sustancial y lo equivalente: derivada local más la advección.

El diferencial total de una variable  $T$  (temperatura por ejemplo) se escribe

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \quad (2.25a)$$

Dividiendo entre  $dt$ , la expresión anterior se escribe,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.26)$$

El término de la izquierda se llama derivada total o derivada sustancial, el primer término de la derecha se llama derivada local y los últimos tres términos juntos reciben el nombre de advección. De la expresión anterior se desprende que la derivada local puede expresarse como

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{dT}{dt} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T, \quad (2.27)$$

en donde el primer término en la derecha es la derivada sustancial y el segundo representa la advención. El término advección representa la contribución al cambio local de la temperatura debida al movimiento del aire. La derivada total puede ser definida siguiendo otro campo diferente al viento. Físicamente, los tratamientos de Euler y Lagrange se pueden intuir con ayuda del siguiente ejemplo.

### Ejemplo.

*La presión atmosférica en superficie decrece unos 3 mb/180 km en la dirección este. Un barco que navega a 10 km/hora detecta una caída de presión de 1mb cada 3 horas. ¿Cual será el descenso de la presión observada en una isla frente a la cual pasa el barco?*

### Solución

En este ejemplo se quiere encontrar la derivada local  $\partial p / \partial t$ . La derivada sustancial es la medida tomada en el barco ( $dp/dt = -1\text{mb}/3$  horas). La advección en este caso es

$$V \partial p / \partial x = \left(10 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right) \left(\frac{-3\text{mb}}{180\text{km}}\right) = -\frac{1}{6} \frac{\text{mb}}{\text{h}}.$$

Aplicando la fórmula (2.27),

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{3} \frac{\text{mb}}{\text{h}} + \frac{1}{6} \frac{\text{mb}}{\text{h}} = \frac{1}{6} \frac{\text{mb}}{\text{h}}.$$

Note que la tasa de decrecimiento de la presión en la isla es solo la mitad de la medida en el barco.



## 2.3. Principios de Hidrodinámica

### 2.3.1. Segunda ley de Newton

Para un cuerpo rígido, la segunda ley de Newton establece que la aceleración por unidad de masa es equilibrada por las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. En un fluido, el cual está constituido por un conjunto de partículas, este principio se aplica a un volumen infinitesimal o elemental. Sin embargo, para que el principio continúe siendo válido, se debe cumplir la hipótesis del continuo. O sea, suponer que las magnitudes físicas como masa, momento, temperatura, etc., asociadas con la materia en el pequeño volumen dado, se consideran uniformemente distribuidas en ese volumen. En la práctica, para hacer cumplir la hipótesis del continuo es suficiente suponer que la dimensión lineal del volumen elemental considerado es grande en comparación con la longitud del recorrido libre de las moléculas (con esta condición aseguramos que el volumen contenga suficiente número de moléculas) y pequeño en comparación con la escala del movimiento considerado (con esta condición aseguramos que las magnitudes sean constantes dentro del volumen elemental). En la atmósfera terrestre, hasta una altura de 100 km, estas condiciones se satisfacen plenamente. Por eso, es posible considerar la atmósfera como un medio continuo y aplicar en ella las leyes de la mecánica. Cuando el efecto de rotación de la tierra no se tiene en cuenta o cuando se toma una parcela de aire sin fricción, las fuerzas atmosféricas que actúan sobre el volumen elemental son la fuerza (por unidad de masa) del gradiente de presión y la fuerza de gravedad. (*Estas fuerzas serán analizadas en detalle en el capítulo siguiente*). La ley de Newton para esta parcela puede escribirse

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - \vec{g}, \quad (2.28)$$

donde el subíndice  $a$  hace referencia a un sistema absoluto de coordenadas.

### 2.3.2. Circulación

Para un cuerpo rígido, la rotación a menudo se caracteriza por el principio de conservación del momento angular. En un fluido se utilizan dos conceptos: *circulación y vorticidad*. La primera de ellas es una medida macroscópica de la rotación en un fluido, mientras que la segunda es una medida microscópica. A este punto regresaremos más adelante.

Considere un contorno  $L$  y una partícula en el punto  $P$  con velocidad  $\mathbf{V}$  (figura 2.8(a)). La circulación de esta partícula a través de todo el contorno  $L$  se define como

$$C = \oint \vec{V} \cdot d\vec{l}. \quad (2.29)$$

(En problemas atmosféricos, la circulación se define no para una partícula, sino para una cadena de partículas que se mueven con una velocidad media  $\vec{V}$ , como la representada en la figura 2.9. En este caso, la velocidad puede ser sacada de la integral (2.29) y obtener como resultado,  $C = \vec{V}L$ )

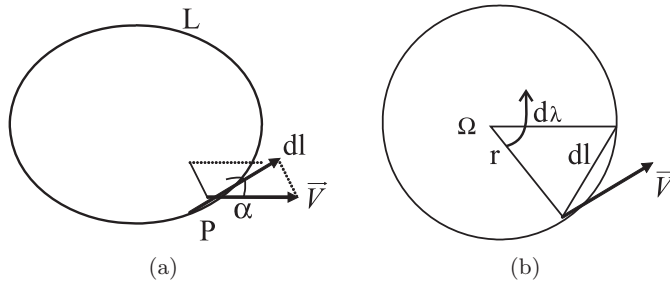


Figura 2.8. Circulación: a) por un contorno arbitrario, b) por un disco circular.

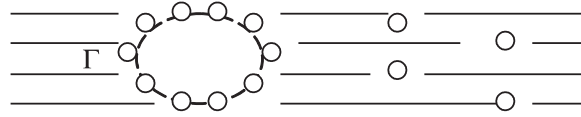


Figura 2.9. Representación esquemática de una cadena de parcelas.

Por definición, la circulación  $C$  se toma positiva cuando se integra en sentido anti horario (Ejercicio 5).

En el caso de un disco circular (figura 2.8(b)), la circulación es

$$C = \oint V dl = \oint \Omega r r d\lambda = \oint \Omega r^2 d\lambda = \Omega r^2 2\pi$$

o también

$$\frac{C}{\pi r^2} = 2\Omega. \quad (2.30)$$

Este último resultado muestra que la circulación  $C$ , por unidad de área, es dos veces la velocidad angular. O sea, efectivamente una medida de la rotación.

### 2.3.2.1. Teorema de la circulación

El teorema de la circulación se plantea al tomar la integral de línea de la segunda ley de Newton.

$$\oint \frac{d_a \vec{V}_a}{dt} d\vec{I} = - \oint \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} d\vec{I} - \oint \vec{g} d\vec{I}. \quad (2.31)$$

Esta ecuación puede ser simplificada con ayuda de las siguientes consideraciones:

1. El término en el lado izquierdo de (2.31) se puede escribir

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} d\vec{I} = \frac{d_a}{dt} (\vec{V}_a d\vec{I}) - \vec{V}_a \frac{d}{dt} (\vec{V}_a d\vec{I}) = \frac{d}{dt} (\vec{V}_a \cdot d\vec{I}) - \vec{V}_a d\vec{V}_a.$$

2. La gravedad puede escribirse como el gradiente del geopotencial  $\mathbf{g} = -\nabla\Phi$ .
3. La definición de diferencial total dado en (2.25a).

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la ecuación (2.31) se escribe

$$\frac{d}{dt} \oint \vec{V}_a d\vec{I} - \oint d\left(\frac{V^2}{2}\right) = - \oint \frac{1}{\rho} - \oint d\Phi.$$

Dado que la integral de línea de un diferencial perfecto por un conjunto cerrado es cero, los términos segundo en el lado izquierdo y segundo en el lado derecho desaparecen, y el resultado es

$$\frac{dC_a}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \vec{V}_a d\vec{I} = - \oint \frac{1}{\rho} dp. \quad (2.32)$$

La expresión (2.32) se conoce con el nombre de *teorema de circulación*.

Un caso particular de este teorema, conocido como teorema de circulación de Kelvin, se consigue para un fluido barotrópico donde la densidad es únicamente función de la presión. En este caso, el último término de la derecha también se convierte en un diferencial perfecto y, por tanto, se hace cero. Entonces, en un fluido barotrópico la circulación absoluta se conserva.

### 2.3.2.2. Aplicación del teorema de circulación: brisa marina

Podemos usar el teorema de circulación para calcular la aceleración del viento en el fenómeno de la brisa marina. Para simplificar, no tendremos en cuenta la presencia de fuerzas viscosas.

La brisa marina se produce cuando el viento sopla desde el mar hacia la playa al comienzo de la tarde, debido a que la tierra se encuentra más caliente que el mar. En este caso, sobre el continente contiguo al mar se forma un sistema de baja presión en el suelo y otro de alta a cierta altura  $h$ . A esa misma altura y sobre el mar se forma una baja mientras que en la superficie marina se forma una alta presión, como se muestra en la figura 2.10 (izquierda). En consecuencia, las superficies isobáricas se inclinan y el viento comienza a circular desde el mar hacia la playa, en la superficie y en altura desde la playa hacia el mar.

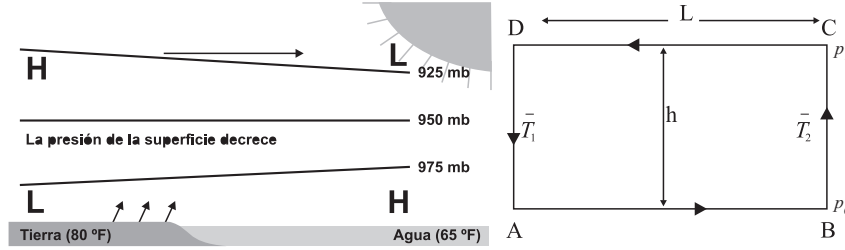


Figura 2.10. Izquierda: circulación en brisa marina. Derecha: esquema para calcular la circulación.

Despreciando la inclinación de las isobaras, aplicando el teorema de la circulación a un camino cerrado como el indicado en la figura. 2.10 (derecha) y haciendo uso de la ecuación de estado se escribe

$$\frac{dC_a}{dt} = - \oint RT d \ln p.$$

Al tomar esta integral por el camino  $ABCD$ , nótese que en los trayectos  $AB$  y  $CD$  la presión es constante y la integral es cero, o sea que solo contribuyen los segmentos verticales. Por eso,

$$\frac{dC_a}{dt} = -R \left( \bar{T}_2 \int_{p_0}^{p_1} d \ln p + \bar{T}_1 \int_{p_1}^{p_0} d \ln p \right) = R \bar{T}_2 \ln \frac{p_0}{p_1} - R \bar{T}_1 \ln \frac{p_0}{p_1}.$$

Aplicando la igualdad (2.32) y suponiendo una velocidad media  $\bar{V}$ , la expresión anterior puede escribirse

$$\frac{d\bar{v}}{dt} \int dl = R \ln \left( \frac{p_0}{p_1} \right) (\bar{T}_2 - \bar{T}_1),$$

de donde

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = R \ln\left(\frac{P_0}{P_1}\right) (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) \frac{1}{2(h+L)}$$

A manera de ejemplo, para  $p_0 = 1000$  mb,  $p_1 = 900$  mb,  $\bar{T}_2 - \bar{T}_1 = 10^\circ$  C,  $L = 20$  km,  $h = 1$  km, la aceleración es

$$\frac{d\bar{v}}{dt} \approx 0.685 \text{ cm/s}^2.$$

O sea que, en ausencia de fricción, el viento alcanza una velocidad cercana a 20 m/s en más o menos una hora. En la realidad, la fuerza de fricción retarda esta aceleración llegándose a conseguir un balance entre la generación de energía cinética y la disipación de esta energía debido a la fricción.

### 2.3.3. Atmósfera barotrópica y atmósfera baroclínica

Con ayuda del teorema de circulación de Kelvin puede introducirse un concepto de mucha trascendencia en futuros capítulos; la barotropicidad y baroclinicidad. En efecto, notemos que la parte derecha de la ecuación (2.32), correspondiente al teorema de circulación, se puede escribir

$$-\oint \frac{1}{\rho} dp = -\oint \alpha dp = -\oint d(p\alpha) + \oint p d\alpha,$$

donde  $\alpha$  es el volumen específico. Puesto que el primer término en la parte derecha de la última expresión es igual a cero por ser la integral de un diferencial exacto, entonces

$$-\oint \frac{1}{\rho} dp = \oint p d\alpha \quad (2.33)$$

Veamos cómo puede calcularse gráficamente esta integral.

Las intersecciones de las superficies de igual presión (superficies isobáricas) con las superficies de igual volumen específico (superficies isósteras) forman figuras geométricas llamadas *solenoides*. En la figura 2.11, las proyecciones con el plano de la figura de las superficies isobáricas  $p_0$ ,  $p_{0-1}$ ,  $p_{0-2}$ , etc., han sido representadas con líneas paralelas horizontales y las proyecciones de las isósteras con las líneas verticales,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_{0+1}$ ,  $\alpha_{0+2}$ , etc. En esta figura, un solenoide, está representado por la intersección de dos líneas paralelas horizontales con dos líneas paralelas verticales.

En una situación real, las superficies isobáricas y las isósteras se pueden cortar formando ángulos no necesariamente rectos, como en el diagrama de la figura 2.11.

La circulación por el contorno  $\Gamma$ , es decir la integral (2.33), puede calcularse como la suma de las áreas encerradas por los solenoides contenidos en este contorno. Se dice que una atmósfera es *baroclínica* (de la palabra clinos,

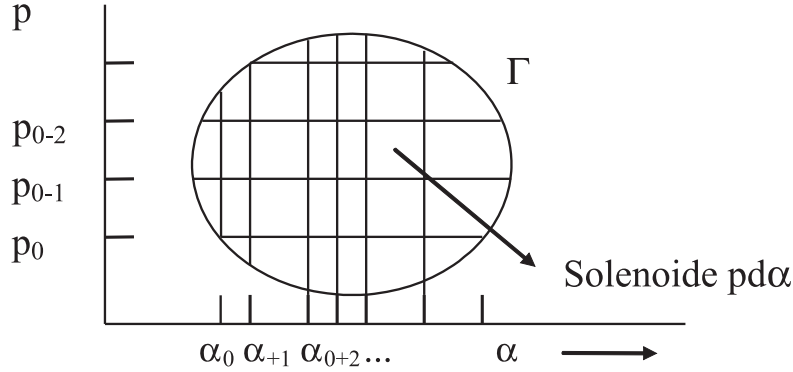


Figura 2.11. Diagrama  $p\alpha$ . En esta figura,  $\Gamma$  es la circulación sobre la proyección de los solenoides formados por el corte de las superficies isobáricas con las superficies isósteras en el diagrama  $p\alpha$ .

inclinación) cuando se cortan las superficies isobáricas y las isósteras, o en su lugar las isotermas. En este caso, la integral (2.33) es diferente de cero.

Se dice que una atmósfera es *barotrópica* cuando las isobaras y las isotermas son paralelas entre sí. En este caso, la integral (2.33) es cero y, por tanto, no puede existir una circulación vertical.

En una atmósfera barotrópica, la densidad puede ser considerada función de la presión solamente. En cambio, en una atmósfera baroclínica la densidad es función de la presión y de la temperatura.

#### 2.3.4. Circulación absoluta y circulación relativa

Hasta el momento hemos introducido el concepto de circulación sin tener en cuenta el efecto de rotación de la Tierra. En meteorología, es conveniente trabajar con la circulación teniendo en cuenta este efecto, o sea considerándola como la suma de la circulación relativa más la circulación debida a la rotación de la tierra. Veamos cómo se calcula esta circulación. Aplicando el teorema de Stock (ver por ejemplo, Piskunov, 1977) a la definición (2.29),

$$C_r = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_A (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} dA$$

En esta fórmula  $\mathbf{n}$  es la normal, o sea, es un vector unitario perpendicular a la superficie sobre la cual se calcula la circulación y dirigido hacia fuera de la superficie. Es fácil mostrar que la cantidad entre paréntesis se puede escribir

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = 2\vec{\Omega}.$$

(Este resultado se consigue de la siguiente manera: de acuerdo a (2.5) y (2.6)  $\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) - \vec{R}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega})$ . Puesto que el último es cero por ser la derivada de un vector constante y teniendo en cuenta que las componentes del vector  $\mathbf{R}$  son  $x\mathbf{i}$  y  $y\mathbf{j}$ , se obtiene finalmente  $\vec{\Omega}(\vec{\nabla} \cdot \vec{R}) = 2\vec{\Omega}$ )

de manera que (figura 2.12),

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{n} = 2\Omega \cos \theta = 2\Omega \overline{\sin \phi},$$

donde la barra horizontal indica un valor medio y  $\phi$  es la latitud del lugar. El producto

$$f = 2\Omega \sin \phi, \quad (2.34)$$

se conoce con el nombre de *parámetro de Coriolis*. Entonces, la circulación en un plano horizontal debida a la rotación de la Tierra es

$$C_r = 2\Omega \overline{\sin \phi} A,$$

y la circulación absoluta es

$$C_a = C + 2\Omega \sin \phi, \quad (2.35)$$

Donde  $C$  es la circulación relativa o sea de una partícula sujeta a la Tierra.

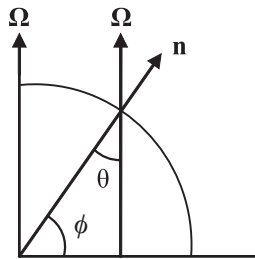


Figura 2.12. Esquema para representar la normal en un punto localizado sobre un meridiano.

### 2.3.5. Circulación y vorticidad

En meteorología dinámica nos interesa principalmente la componente vertical de la vorticidad, la cual se calcula con la fórmula (2.24). El camino determinado por el grupo de partículas que conforman la circulación comprende un área. Si esta área se va reduciendo sucesivamente, hasta que sea infinitamente pequeña, se llega al concepto de rotación en un fluido alrededor de un eje normal al área, es decir al concepto de vorticidad. Por esta razón afirmamos que la vorticidad es una característica microscópica de la rotación en un fluido. Entonces, alternativamente la componente vertical de la vorticidad se puede definir como la circulación a lo largo de un circuito de un plano horizontal dividida entre el área encerrada, o sea,

$$\varsigma = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{V} d\vec{l}}{A} \quad (2.36)$$

El siguiente ejemplo muestra que estas dos definiciones de vorticidad son equivalentes.

#### Ejemplo.

*Calcular la circulación a lo largo del elemento rectangular de área mostrado en la figura 2.13.*

#### Solución

Escogiendo un recorrido en sentido contrario de las manecillas del reloj se tiene:

$$\begin{aligned} C &= u\delta x + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\right)\delta y - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\right)\delta x - v\delta y \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}\delta x\delta y - \frac{\partial u}{\partial y}\delta y\delta x \end{aligned}$$

Dividiendo entre  $\delta x\delta y$  y simplificando términos semejantes

$$\frac{C}{\delta x\delta y} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.37)$$

Este resultado muestra el vínculo entre la circulación y la vorticidad. (Observe que la parcela de la figura 2.13 gira en forma ciclónica cuando  $\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| > \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ ).



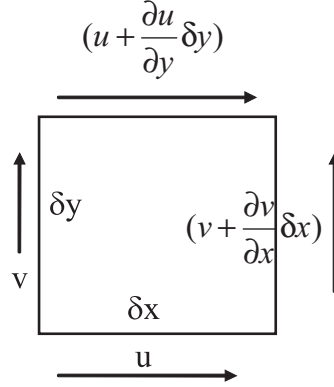


Figura 2.13. Circulación y vorticidad sobre un contorno elemental.

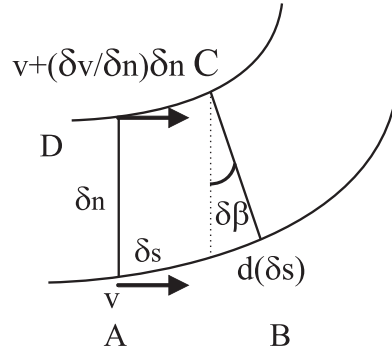


Figura 2.14. Circulación y vorticidad sobre un contorno en coordenadas naturales.

### 2.3.5.1. Vorticidad por cisallamiento y vorticidad por curvatura

Considere el movimiento por trayectorias curvadas, como se muestra en la figura 2.14. En este caso solo existe componente  $V$  del movimiento y esta es tangente a la trayectoria (*el movimiento en coordenadas naturales se explica en más detalle en el capítulo 6*). La circulación por el contorno ABCD (*nótese que en los costados laterales el movimiento es cero; y en el costado CD,  $V$  y  $\delta_s$  tiene direcciones opuestas*) es

$$\delta C = V[\delta s + d(\delta s)] - \left(V + \frac{\partial V}{\partial n} \delta n\right) \delta s = V d(\delta s) - \frac{\partial V}{\partial n} \delta n \delta s.$$

En la figura 2.14  $d(\delta s) = \delta \beta \delta n$ . Por eso,

$$\delta C = V \delta \beta \delta n - \frac{\partial V}{\partial n} \delta n \delta s.$$

Sacando factor común,  $\delta n \delta s$ , en el lado derecho,

$$\delta C = \left( \frac{\partial V}{\partial s} \delta \beta - \frac{\partial V}{\partial n} \right) \delta n \delta s.$$

Teniendo en cuenta que  $\delta s / \delta \beta = R_s$ , donde  $R_s$  es el radio de curvatura (para demostrar esto, considere un arco  $s$  subtendido por un ángulo  $\delta \beta$  y un radio  $R$ ), la expresión anterior se escribe

$$\partial C = \left( \frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n} \right) \delta n \delta s.$$

Dividiendo entre el área  $\delta n \delta s$  y llevando al límite cuando  $\delta n, \delta s \rightarrow 0$ ,

$$\varsigma = \lim_{\delta n, \delta s \rightarrow 0} \frac{C}{(\delta n \delta s)} = -\frac{\partial V}{\partial n} + \frac{V}{R_s}. \quad (2.38)$$

De acuerdo con la fórmula (2.38), la componente vertical de la vorticidad es la suma de dos partes: 1. La tasa de cambio de la velocidad del viento normal a la dirección del flujo,  $\partial V / \partial n$ , llamada *vorticidad por cizallamiento* y 2. El giro del viento a lo largo de la línea de corriente  $V / R_s$ , llamada *vorticidad de curvatura*. Por ejemplo, en un flujo en línea recta puede haber vorticidad si la velocidad del viento cambia en la dirección normal al flujo. Esta situación se muestra en la figura 2.15, donde, para ilustrar la aparición de rotación por cizallamiento dentro del fluido, ha sido colocada una pequeña figura en forma de aspas en medio del flujo.

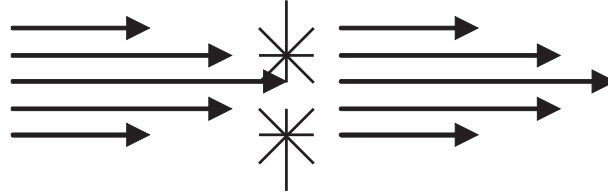


Figura 2.15. Vorticidad por cizallamiento.

### Ejercicios

1. Muestre que el gradiente de presión es perpendicular a las isobaras. Sugerencia: Considere dos isobaras paralelas entre sí. Considere un pequeño desplazamiento  $\delta r$  sobre una de ellas y efectúe el producto escalar,  $\delta r \cdot \nabla p$ .
2. Un cohete es lanzado desde una latitud de  $60^\circ$  N, en dirección meridional con una velocidad de 1000 m/s durante 1000 s. Calcule el recorrido del cohete en un sistema absoluto de coordenadas.

3. Pruebe que  $\vec{r} = r\vec{\nabla}r$ .
4. Pruebe que la velocidad puede representarse por la suma de una componente no divergente  $\mathbf{v}_{nd}$  más una componente irrotacional  $\mathbf{v}_{ir}$ . O sea,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{nd} + \mathbf{v}_{ir},$$

donde  $\mathbf{v}_r$  es un vector no divergente,  $\mathbf{v}_e$  es un vector irrotacional, es decir

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}_{ir} = 0 \quad \text{y} \quad \vec{\nabla} \times \vec{v}_{nd} = 0.$$

(Teorema de Helmholtz).

5. Calcule la circulación por el camino cerrado de la figura 2.16, donde solo existe flujo en la dirección horizontal, pero aumenta en dirección del eje. Aplique la fórmula  $u = u_0 + by$ , En donde  $b$  es una constante. Las flechas dentro del camino indican el sentido de la integración.

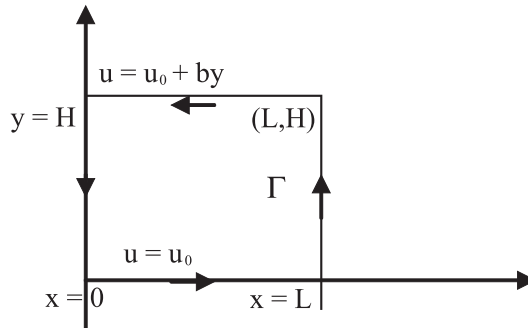


Figura 2.16. Camino cerrado para la solución del ejercicio 5.

6. Halle el producto  $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ . ¿El resultado es un escalar?, ¿un vector?
7. pruebe que

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \times \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\mathbf{C} \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} &= (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A}. \end{aligned}$$

8. Para el cálculo de las derivadas se usan las relaciones aproximadas llamadas diferencias finitas (figura 2.17).

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0 \approx \frac{\Delta \phi}{\Delta x} \approx \frac{\phi_1 - \phi_3}{2r}, \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)_0 \approx \frac{\Delta \phi}{\Delta y} \approx \frac{\phi_2 - \phi_4}{2r}$$

La presión en los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$  figura 2.18) es 1008.3, 1005.9, 1004.0 y 1006.5 mb respectivamente. La distancia  $r = 400$  km. Encontrar

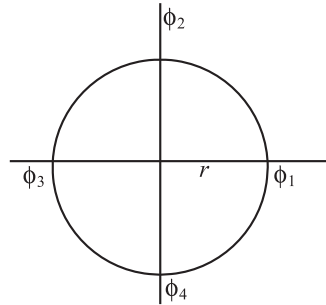


Figura 2.17.

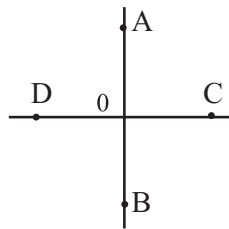


Figura 2.18.

el valor del gradiente de presión en el punto  $O$  y la dirección que forma con la dirección  $OA$ .

9. Una masa de aire desciende adiabáticamente con velocidad de  $0.5 \text{ cm/s}$ . En cuántos grados y cómo cambia, en función de esto, la temperatura potencial en un punto fijo en 12 horas, si el gradiente vertical de temperatura es  $0.5 \text{ grados/100 m}$ ?. La temperatura baja con la altura. Respuesta: aumenta en  $1.04$ .
10. ¿En cuántos grados y cómo cambia la temperatura potencial en un nivel dado, durante un día, como resultado del descenso adiabático de una masa de aire con velocidad media de  $0.3 \text{ cm/s}$ ?. El gradiente vertical de temperatura en la atmósfera es igual a  $0.65 \text{ grados/100 m}$ . Respuesta: aumenta en  $0.86^\circ$ .
11. ¿En cuánto tiempo la temperatura potencial en un nivel dado aumenta en 2 grados como resultado del ascenso adiabático de una masa de aire con velocidad de  $3 \text{ cm/s}$ , si la temperatura en la atmósfera cae  $6^\circ$  cada  $1 \text{ km}$  de altura?.

Respuesta:  $3.1 \text{ hora}$

(Para resolver los ejercicios 8 y 9, la fórmula de la derivada completa se escribe

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + V \frac{\partial\phi}{\partial n} \cos \theta + w \frac{\partial\phi}{\partial z},$$

donde  $n$  es la distancia entre las isotermas y  $\theta$  es el ángulo entre el gradiente y la dirección del viento)

12. Calcule la distancia entre las isotermas unitarias (separadas  $1^\circ \text{ C}$ ), en la horizontal y a la altura de vuelo de un aerostato que se desplaza libremente en el aire, si los instrumentos instalados en este último registran un aumento de temperatura de  $0.8$  grados/hora y los instrumentos instalados en un aerostato fijo registran en esa misma altura un aumento de temperatura de  $0.4$  grados/hora. La velocidad del viento es  $8 \text{ m/s}$  y su dirección forma un ángulo de  $60$  grados con la dirección del gradiente de temperatura. Respuesta:  $36 \text{ km}$ .
13. En las figuras 2.19(a) y 2.19(b) se observan tres isotermas. Las de  $20^\circ \text{ C}$  y  $18^\circ \text{ C}$  están separadas por una distancia de  $200 \text{ km}$ , mientras que las de  $18^\circ \text{ C}$  y  $16^\circ \text{ C}$  por una distancia de  $100 \text{ km}$ . La velocidad horizontal del viento en el punto  $M$  es  $V = 10 \text{ m/s}$ , la cual forma con el gradiente de temperatura un ángulo de  $60^\circ$  (figura 2.19(a)) y  $120^\circ$  (figura 2.19(b)). Calcule el aumento de la temperatura en el punto  $m$  para ambas figuras.

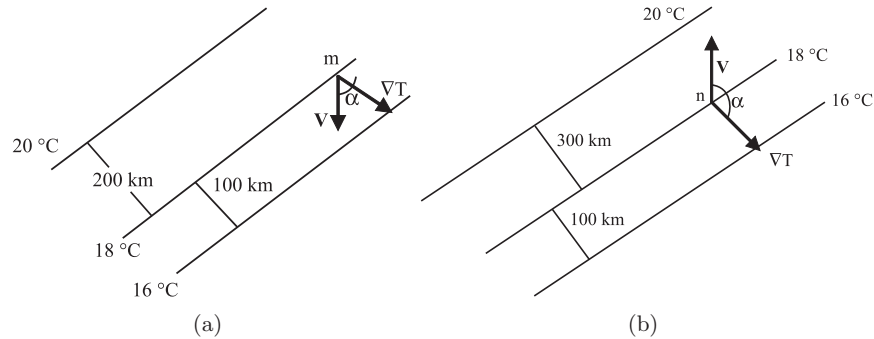


Figura 2.19.

14. Calcule la circulación por un cuadrado de  $1000 \text{ km}$  de lado para una corriente del este, la cual disminuye en magnitud en dirección norte a una tasa de  $10 \text{ m s}^{-1}/500 \text{ km}$ . ¿Cual será la vorticidad relativa media en el cuadrado?

- 
15. Halle el rotacional medio dentro de un anillo circular de radio interno de 200 km y radio externo de 400 km, si la velocidad tangencial está distribuida según la fórmula  $V = 106/r$  m seg<sup>-1</sup>, donde  $r$  está dado en metros. ¿Cual es el rotacional medio dentro del círculo interno de radio igual a 200 km?
  16. Compute la tasa de cambio de la circulación sobre un cuadrado en el plano  $x, y$  con lados de  $L = 1000$  km, si la temperatura aumenta hacia el este, a una tasa de  $1^\circ$  C/200 km y la presión aumenta hacia el norte a una tasa de 1mb/200 km. La presión en el origen es 100 mb.

### 3

## Fuerzas consideradas en los movimientos atmosféricos



Tornado. Imagen Tomada de <http://www.photolib.noaa.gov/nssl/nssl0158.htm>  
Fotógrafo: Harald Richter. Cortesía de NOAA Photo Library, NOAA Central Library; OAR/ERL/National Severe Storms Laboratory (NSSL).

En este capítulo se introducen las fuerzas consideradas en los movimientos atmosféricos. Además, se hace una división de ellas entre fuerzas fundamentales y fuerzas aparentes. Ver por ejemplo Holton, (1992).

Cuando la segunda ley de Newton se aplica a una partícula ligada a un sistema fijo de coordenadas, las fuerzas que intervienen se llaman *fuerzas fundamentales*. En la atmósfera, estas fuerzan son la *fuerza del gradiente de presión*, la de *gravedad* y la *fuerza de fricción o fuerza viscosa*. Otras fuerzas consideradas en física, como la electromagnética, atómicas y nucleares, no son importantes para los movimientos atmosféricos.

Cuando la partícula está en movimiento relativo (en rotación, como en el caso de la atmósfera), es necesario considerar algunas fuerzas adicionales para que la ley de Newton continúe siendo válida. Estas reciben el nombre de aparentes para diferenciar su naturaleza de la de las anteriores. Para los movimientos atmosféricos son la *fuerza centrífuga* y la de *Coriolis*. La primera actúa sobre una parcela de aire en reposo o en movimiento; la segunda, solo cuando la partícula está en movimiento relativo con relación a la Tierra. Veamos inicialmente las fuerzas fundamentales.

### 3.1. Fuerzas fundamentales

#### 3.1.1. Fuerza del gradiente de presión

La fuerza del gradiente de presión, o simplemente fuerza de presión, tal vez sea la que determina en mayor parte el movimiento del aire en la atmósfera. Para derivar una expresión para el gradiente de presión se considera un volumen elemental  $\delta v = \delta x \delta y \delta z$  de densidad  $\rho$  como el dibujado en la figura 3.1

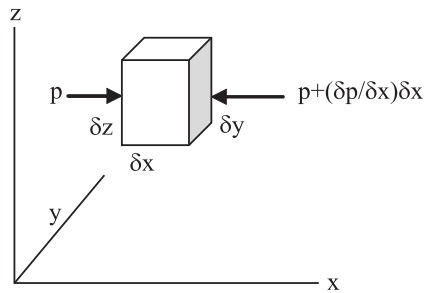


Figura 3.1. Volumen elemental de aire, usado para derivar el gradiente de presión.

Debido al movimiento aleatorio de las moléculas de aire, cierta cantidad



de movimiento es comunicada a las paredes del volumen por el aire que lo rodea. Esta transferencia de cantidad de movimiento por unidad de tiempo y por unidad de área es exactamente la presión ejercida en las paredes del citado volumen. (Hasta aquí hemos visto el sentido físico de la presión. Derivaremos a continuación el término gradiente de presión).

Sea  $p$  la presión (o fuerza por unidad de área) en la cara izquierda  $\delta y \delta z$  del volumen y  $\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right)$  en la cara derecha. (O sea que en la cara derecha, la presión resultante es la presión en la cara izquierda + el incremento de esta por unidad de intervalo  $\partial x$  multiplicada por el intervalo  $\delta x$ ). Esto significa que la fuerza de presión neta que actúa sobre el volumen elemental en la dirección positiva  $x$  será

$$p \delta y \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x\right) \delta y \delta z = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \longrightarrow \text{Fuerza neta ejercida en la dirección } x$$

(observe que como la presión es fuerza por unidad de área, al multiplicar  $p$  por  $\delta y \delta z$  obtenemos la fuerza total sobre toda la pared). De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z \longrightarrow \text{Fuerza neta ejercida en la dirección } x, \\ F_y &= -\frac{\partial p}{\partial y} \delta y \delta x \delta z \longrightarrow \text{Fuerza neta ejercida en la dirección } y, \\ F_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} \delta z \delta x \delta y \longrightarrow \text{Fuerza neta ejercida en la dirección } z. \end{aligned}$$

Multiplicando cada una de estas ecuaciones por los índices **i**, **j**, **k**, respectivamente, y sumando miembro a miembro,

$$F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k}\right) \delta x \delta y \delta z.$$

Dividiendo entre la masa,  $m = \rho \delta x \delta y \delta z$ , se halla la fuerza total por unidad de masa ejercida sobre el volumen elemental. Este resultado puede escribirse en forma vectorial como

$$\frac{F}{m} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p. \quad (3.1)$$

(Observe que las unidades en estos términos son realmente fuerza/masa).

### 3.1.2. Fuerza de gravedad

De acuerdo con la ley de gravitación universal de Newton, la fuerza de atracción entre dos masas,  $M$  y  $m$ , se expresa como

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \left(\frac{\vec{r}}{r}\right),$$

donde  $M$  es la masa de la Tierra,  $m$  es la masa de una partícula o de una parcela de aire y  $G$  es la constante gravitacional. El término entre paréntesis se ha introducido para corresponder a la escritura vectorial del lado izquierdo de la ecuación. El vector  $\mathbf{r}$  se mide entre los centros de las dos esferas y está dirigido de  $M$  hacia  $m$ , mientras que la fuerza está dirigida en sentido contrario. (Por esta razón aparece un signo menos en la parte derecha de la ecuación). Dividiendo entre la masa  $m$ , se obtiene la expresión para la fuerza por unidad de masa o aceleración de la gravedad,

$$\vec{g}^* = -\frac{\vec{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \quad (3.2)$$

En esta fórmula,  $\mathbf{g}^*$  se ha escrito con un superíndice asterisco para diferenciarla de la gravedad efectiva  $g$ , sobre la cual se hablará más adelante. Teniendo en cuenta que  $\vec{r} = r \vec{\nabla} r$  (ejercicio 3 del capítulo 2), la fuerza de gravedad a través del gradiente de un escalar puede escribirse

$$\vec{g}^* = -\frac{GM}{r^2} \vec{\nabla} r.$$

En meteorología dinámica se toma la coordenada vertical  $z$  a partir del nivel del mar. En este caso, la ecuación (3.2) se escribe

$$\vec{g}^* = -\frac{GM}{(a+z)^2} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right), \quad (3.3)$$

donde  $a$  es el radio de la Tierra. Sin embargo, ya que  $z \ll a$ , la aproximación aceptada con suficiente exactitud es

$$|\vec{g}^*| = \frac{GM}{a^2}.$$

Tomando  $G = 6.6710^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ,  $r \rightarrow$  radio medio de la Tierra = 6378.4 km y  $M = 5.988 \times 10^{24} \text{ kg}$ , masa de la Tierra, el valor de la aceleración de la gravedad (o también de la fuerza por unidad de masa) es  $g^* = 9.814 \text{ m/s}^2$ . Este resultado es una buena aproximación del dato observado para el ecuador. Sin embargo, hay que tener en cuenta que este valor varía ligeramente con la latitud y la altitud. También depende del efecto que las masas de la Luna y Sol ejercen sobre el planeta.

### 3.1.3. Fuerza de fricción o de tensión viscosa

La naturaleza de las fuerzas viscosas en un fluido se entiende como la resistencia, debido a la fricción, que una capa de fluido presenta al desplazamiento de otra sobre ella. Estas fuerzas tienen gran influencia en la atmósfera

sobre todo en la capa de los primeros 1000 a 2000 metros de la troposfera, también llamada *capa límite*. Más adelante se hará un estudio detallado de esta capa. Por el momento, se introducen estas fuerzas de manera sencilla.

La formulación detallada de las fuerzas viscosas es complicada; a menudo se utiliza para ello la notación tensorial. Sin embargo, podemos intuir con facilidad la naturaleza de estas fuerzas con ayuda de la figura 3.2.

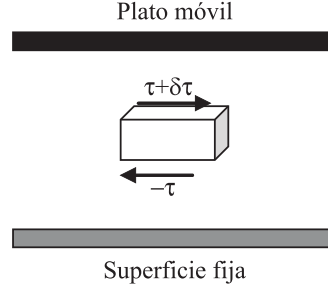


Figura 3.2. Fuerzas viscosas que actúan sobre un líquido encerrado entre una superficie fija y un plato móvil.

Consideremos un líquido encerrado entre una superficie fija de área unitaria y un plato móvil como en la figura 3.2, dentro de las cuales existe un líquido en reposo. Al ponerse en movimiento el plato superior, las moléculas situadas inmediatamente debajo también se ponen en movimiento, mientras que las moléculas adyacentes a la superficie fija permanecen estacionarias en ese momento. Con el transcurrir del tiempo, el movimiento se va transmitiendo a las capas subsiguientes. Se puede decir entonces que sobre un volumen arbitrario de líquido situado en cercanías al plato móvil actúan dos tensiones (recuerde que tensión es fuerza por unidad de área): una,  $\tau + \delta\tau$ , sobre la cara superior y otra,  $-\tau$ , sobre la cara inferior del volumen. Además, experimentalmente se ha establecido que la tensión viscosa o fuerza por unidad de área ( $\text{dyn}/\text{cm}^2$ ) es proporcional al gradiente de velocidad perpendicular al movimiento. O sea,

$$\tau = \mu \frac{\delta u}{\delta z}$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad dinámica o absoluta. (En el sistema MKS las unidades de  $\mu$  son  $\text{N}\cdot\text{s}/\text{m}^2$ ). La tensión resultante sobre el volumen considerado en la figura 3.2 es

$$\tau = \delta\tau - \tau = \delta\left(\mu \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Multiplicando y dividiendo la parte derecha entre  $\delta z$ , se puede escribir

$$\delta\tau = \frac{\delta}{\delta z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \delta z$$

Dividiendo ambos términos de la igualdad entre la masa por unidad de área,  $m = \rho \delta z$ , se halla la fuerza por unidad de masa. Llevando el resultado al límite cuando  $\delta z \rightarrow 0$ , se obtiene

$$F_{Fric} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right),$$

donde  $F_{Fric}$  es la fuerza por unidad de masa. Cuando  $\mu$  es constante, la expresión para la fuerza de viscosidad por unidad de masa se escribe

$$F_{Fric} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (3.4)$$

donde  $v = \mu/\rho$  es el coeficiente de viscosidad cinemática y está dado en  $\text{m}^2/\text{s}$ .

## 3.2. Fuerzas aparentes

### 3.2.1. Fuerza centrípeta

La fuerza centrífuga, debida al movimiento rotacional de la tierra, afecta a los movimientos atmosféricos. Por esta razón el calificativo de aparente.

A continuación se presenta una derivación para la fuerza centrípeta. La expresión para la fuerza centrífuga, donde este término se utilice, es la misma utilizada para la fuerza centrípeta, pero con signo contrario. La derivación de una expresión para la fuerza centrípeta se puede obtener en un libro de física elemental. Sin embargo, debido a su importancia, repetiremos esta derivación aquí. Considere un cuerpo que gira atado a una cuerda, como en la figura 3.3(a).

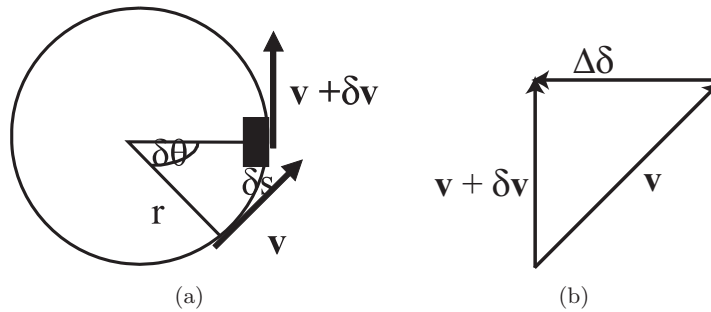


Figura 3.3. Fuerza centrípeta

En primer lugar recuerde que para pequeños ángulos  $\theta$ , el arco subtendido por el ángulo se expresa como  $\delta s = \delta\theta r$ , donde  $r$  es el radio. Dividiendo entre  $\delta t$  y llevando al límite se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \longrightarrow \mathbf{v} = \Omega \mathbf{r}.$$

O sea, en el movimiento circular la velocidad tangencial es igual al producto de la velocidad angular por el radio. En el movimiento circular el módulo de la velocidad no cambia, pero la dirección sí. Por tanto, existe aceleración.

Considere una partícula sobre un punto de la circunferencia, inicialmente con velocidad  $\mathbf{v}$ . Después de un intervalo de tiempo  $dt$ , la partícula ocupa una nueva posición con una velocidad  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$  (figura 3.3(a)).

Para mayor claridad, esos dos vectores, se han desplazado paralelamente a sí mismos (figura 3.3(b)) sin cambiar su módulo. En la figura 3.3(b) se observa que el vector  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$  puede obtenerse como la suma del vector  $\mathbf{v}$  más el vector  $\Delta\mathbf{v}$ . Este vector  $\Delta\mathbf{v}$  está orientado aproximadamente hacia el centro de rotación (figura 3.3(a)). De la orientación de este vector se deriva el calificativo de fuerza centrípeta.

Es fácil observar (comparando los triángulos que se forman en las figuras 3.3(a) y 3.3(b)) que el ángulo formado por los vectores  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$  (en la figura 3.3(b)) es igual al ángulo  $\delta\theta$  de la figura 3.3(a), porque tienen los lados perpendiculares entre sí. Además, para pequeños  $\delta\mathbf{v}$ , se cumple que,

$$-\delta\vec{v} = \vec{v}\delta\theta \quad (3.5)$$

El signo menos en la parte izquierda se debe a la orientación del vector  $\delta\vec{v}$ . De nuevo, dividiendo entre  $\delta t$  y llevando al límite se obtiene

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{v}\frac{d\theta}{dt},$$

pero  $\vec{v} = \Omega\vec{r}$  y  $\frac{d\theta}{dt} = \Omega$ , entonces,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\Omega^2\vec{r} \quad (3.6)$$

Esta aceleración, o fuerza por unidad de masa, puede interpretarse como la fuerza que la cuerda ejerce sobre el cuerpo.

### 3.2.1.1. Gravedad efectiva

En de un planeta en rotación como la Tierra, la gravedad efectiva  $g$  es la suma vectorial de la gravedad  $g^*$  más la aceleración centrífuga (o sea la centrípeta pero con signo contrario), como se indica en la figura 3.4. O sea,

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R}. \quad (3.7)$$

Si la Tierra fuese totalmente esférica, la gravedad efectiva estaría exacta-

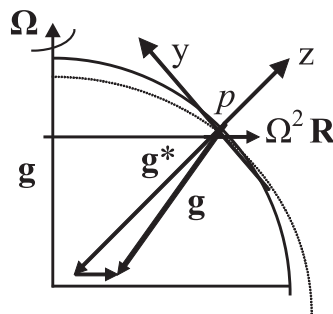


Figura 3.4. Gravedad efectiva.

mente orientada hacia el centro de la misma, lo cual no es cierto. Consideremos un sistema de coordenadas locales centrado en el punto  $p$  con el eje  $Oy$  positivo orientado hacia el polo norte, el eje  $Ox$  perpendicular al primero y dirigido por el círculo de latitud hacia el oeste, (no mostrado en la figura), y el eje  $Oz$  saliendo del centro de la tierra y orientado por la vertical del lugar. Se puede notar con facilidad que en este sistema de coordenadas, la fuerza centrífuga tiene una componente orientada en sentido contrario a la gravedad  $g^*$ . Por eso, la gravedad efectiva  $g$  siempre es menor que la atracción gravitacional neta  $g^*$ . La otra componente de la fuerza centrífuga, la orientada por el eje  $Oy$  hacia el ecuador, ha originado a través de los años un desplazamiento de masas hacia el ecuador. En consecuencia, los polos quedan achatados y el ecuador “abultado”. Por esta misma razón, el radio de la Tierra en el ecuador es 21 km más largo que en los polos. La Tierra obtiene entonces la forma de un esferoide; en consecuencia, la fuerza de gravedad efectiva siempre es perpendicular a la superficie de nivel del lugar.

### 3.2.1.2. Equilibrio hidrostático

Las fuerzas de gravedad y del gradiente de presión establecen una relación muy importante en la atmósfera, llamada equilibrio hidrostático. Estas dos

fuerzas, actuando en la dirección vertical y en ausencia de perturbaciones, permanecen en equilibrio. Si por algún motivo este equilibrio se rompe, una vez desaparecida la perturbación, la atmósfera vuelve a su estado equilibrio. El equilibrio entre estas dos fuerzas se llama *equilibrio hidrostático* y determina la *ecuación de la hidrostática* o simplemente *ecuación de estática*. Debido a su importancia, se derivará esta ecuación a continuación.

Asuma que la atmósfera se encuentra en equilibrio estático con la fuerza de presión siendo equilibrada por la fuerza de gravedad. Considere una columna de aire de  $1 \text{ cm}^2$ , como se muestra en la figura 3.5. Sea  $\rho$  la densidad de una pequeña rebanada de altura  $\delta z$ . Las presiones en la base y en el tope son, respectivamente,  $p$  y  $p + \delta p$ . además, la presión ejercida por el peso de la rebanada es  $-g\rho\delta z$ . (Note las unidades:  $\text{kg}/\text{m}^3 \cdot \text{m}/\text{s}^2 \cdot \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2}{\text{m}^2}$ . O sea, unidades de fuerza por unidad de área). La resultante entre las presiones aplicadas a la pequeña rebanada debe ser igual a cero. Entonces,  $p - (p + \delta p) - g\rho\delta z = 0$ . Esta igualdad se puede escribir como

$$\frac{\delta p}{\delta z} = g\rho$$

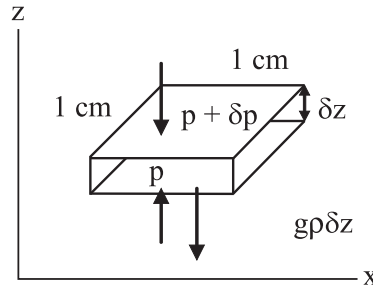


Figura 3.5. Equilibrio hidrostático.

Llevando al límite cuando  $\delta z \rightarrow 0$ , se obtiene

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \quad (3.8)$$

o

$$\partial p = -\rho g \partial z$$

Esta expresión indica que, en masas de aire de diferente densidad (más frías o más calientes) para un mismo incremento de altura  $\partial z$ , el incremento de presión es directamente proporcional al incremento de densidad.

La ecuación de estática también puede expresarse mediante la ecuación de estado e integrando

$$\frac{1}{p} \partial p = -g \frac{1}{R_d T_v} \partial z,$$

donde  $R_d$  es la constante de los gases para el aire seco y  $T_v$  es la temperatura virtual. Integrando esta expresión para el caso en que  $p$  solo depende de  $z$ , obtenemos

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = - \int_{z_0}^z g \frac{dz}{R_d T_v}, \Rightarrow \ln \frac{p}{p_0} = - \frac{g}{R_d T_v} (z - z_0)$$

o

$$p = p_0 e^{-\frac{g}{R_d T_v} (z - z_0)}. \quad (3.9)$$

De acuerdo con la ecuación (3.9) se puede concluir que la presión desciende más rápido en una masa de aire frío que en una de aire caliente.

### 3.2.2. La fuerza de Coriolis

Considere una partícula en movimiento rectilíneo uniforme en un referencial inercial. Este mismo movimiento, realizado en un referencial no inercial, por ejemplo en un disco que gira, describe una línea curva, orientada en sentido opuesto a la rotación del sistema (figura 3.6).

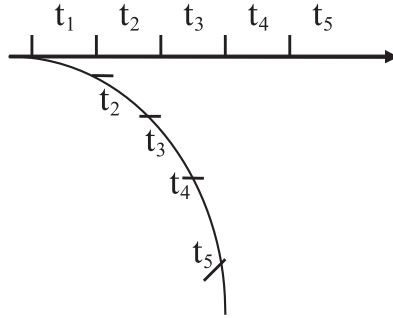


Figura 3.6. Trayectorias trazadas por una partícula que realiza un movimiento rectilíneo en un sistema fijo (línea horizontal) y sobre un disco que gira (línea curva).

En el sistema que gira aparecen en realidad dos aceleraciones; la centrífuga la cual actúa en el sentido del movimiento, y la fuerza de Coriolis que hace desviar el movimiento hacia la derecha.



### 3.2.2.1. Fuerza de Coriolis en el movimiento zonal

Considere una parcela de aire que se desplaza en dirección zonal, o sea, sobre un círculo de latitud como en la figura 3.7(a). Sea  $\mathbf{R}$  el vector posición perpendicular al eje de rotación de una partícula que se desplaza a lo largo de un círculo de latitud y sea  $u$  su velocidad zonal dirigida de oeste a este. Cuando la partícula está en reposo, sobre ella actúa solo la fuerza centrífuga,  $\Omega^2 \mathbf{R}$ , donde  $\Omega$  es el módulo de la velocidad angular. Cuando la partícula comienza a moverse en sentido este y con relación a un sistema fijo, gira más rápido que la Tierra. En otras palabras, aparece un incremento en su velocidad angular y, por tanto se incrementa la fuerza centrífuga.

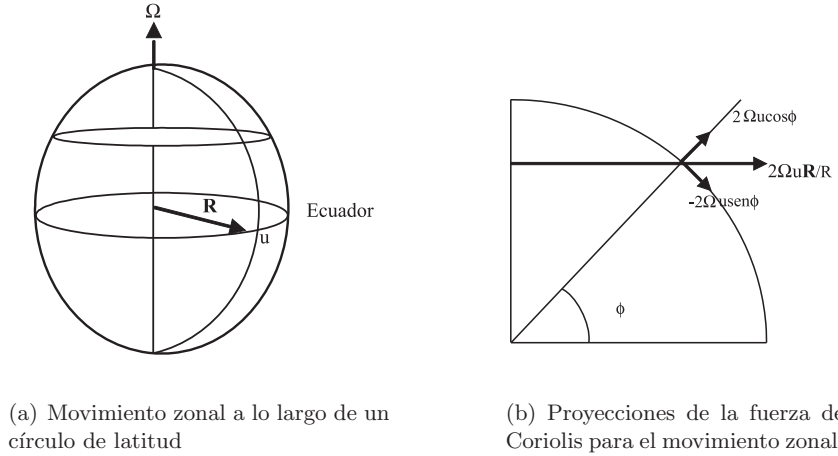


Figura 3.7.

Denotando este incremento como  $u/R$ , la nueva fuerza centrífuga es  $(\Omega + u/R)^2 \mathbf{R}$ . Expandiendo esta expresión se obtiene:

$$\left(\Omega + \frac{u}{R}\right)^2 \vec{R} + 2\Omega u \frac{\vec{R}}{R} + u^2 \frac{\vec{R}}{R^2}. \quad (3.10)$$

En la parte derecha de esta expresión el último término es relativamente inferior a los dos anteriores; por tanto, se puede despreciar. El primero es la aceleración centrífuga, que como se mencionó, esta incluida en gravedad efectiva. El segundo representa la aceleración de Coriolis. En consecuencia, la fuerza de Coriolis por unidad de masa para el movimiento zonal se puede escribir como

$$\vec{F}_{zonal} = 2\Omega u \frac{\vec{R}}{R}$$

Esta fuerza está orientada en la dirección del vector posición  $\mathbf{R}$ , en la misma dirección que la fuerza centrífuga. Las componentes de esta fuerza se muestran en la figura 3.7(b). En el capítulo siguiente se derivará una expresión más general para esta fuerza.

### 3.2.3. Dirección del Gradiente de Presión

Considere un desplazamiento arbitrario  $\delta \mathbf{r} = i\delta x + j\delta y + k\delta z$ , formando un ángulo  $\theta$  con el gradiente de presión, como se muestra en la figura 3.8(b). Efectúe ahora el producto escalar;

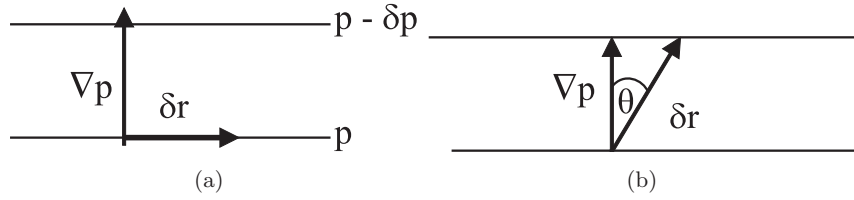


Figura 3.8. Dirección del gradiente de presión y posicionamiento de un pequeño desplazamiento  $r$ . (a) por una isobara, (b) arbitrario.

$$\begin{aligned}\nabla p \cdot \delta \vec{r} &= \left( i \frac{\partial p}{\partial x} + j \frac{\partial p}{\partial y} + k \frac{\partial p}{\partial z} \right) (i \delta x + j \delta y + k \delta z) \\ &= \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \frac{\partial p}{\partial y} \delta y + \frac{\partial p}{\partial z} \delta z = \delta p \longrightarrow \text{diferencial total.}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Observe que este producto escalar es máximo cuando el ángulo es cero, o sea, cuando la partícula se desplaza paralela al gradiente de presión. (Esta situación puede presentarse en regiones cercanas al ecuador donde la acción de la fuerza de Coriolis es casi nula).

En latitudes medias y en la atmósfera libre, el viento sopla en una dirección que resulta ser el equilibrio entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presión; esta dirección coincide con la dirección de las isobaras, como se muestra en la figura 3.8(a). La discusión sobre el equilibrio de estas fuerzas se retomará en el capítulo 6. En general, El gradiente de presión es perpendicular a las isobaras y esta dirigido en el sentido de mayor decrecimiento de la presión.

### Ejercicios

1. Suponga que la tierra sea esférica. Calcule el ángulo entre la fuerza gravitacional y la fuerza de gravedad efectiva en función de la latitud en la superficie de la Tierra.
2. Calcule la altura sobre el ecuador en la cual la gravedad efectiva se reduce a cero. ¿Cual sería el período de rotación de un satélite colocado en órbita a esa altura?
3. Un balón lanzado por un jugador de fútbol en una latitud de  $30^\circ$  recorre una distancia horizontal de 100 m en 4 s en dirección oeste-este. ¿Que distancia horizontal se desvía el balón como resultado de la rotación de la Tierra?
4. Suponga que un cohete balístico es lanzado en una latitud de  $43^\circ$  norte en dirección este. Si el misil se desplaza 1000 km con una velocidad horizontal de  $u_0 = 1000$  m/s, ¿qué distancia horizontal se desvía de su camino el misil por la fuerza de Coriolis? Respuesta: 50 km.
5. Una locomotora de 200 toneladas avanza a razón de 50 m/s por una carrilera horizontal en  $43^\circ$  de latitud norte. ¿Cual es la fuerza lateral ejercida sobre los rieles?

## 4

# Ecuaciones de balance que gobiernan los movimientos atmosféricos



Imagen tomada de <http://www.photolib.noaa.gov/historic/nws/wea02190.htm>

Fotografo: Ralph F Kresge. Cortesía de National Oceanic & Atmospheric  
Administration (NOAA) NOAA Central Library .

Consideramos la atmósfera como un medio continuo y describimos sus propiedades con variables también continuas, como la densidad, la temperatura, la presión, la velocidad del viento, etc. A las variables que son continuas en espacio y tiempo, las llamamos variables de campo o simplemente campos. Para el estudio de la dinámica de los procesos atmosféricos, nos interesan los campos de la presión, temperatura, viento y otras características. Para investigar los cambios en el tiempo y el espacio de estas características es necesario formular las ecuaciones correspondientes. Estas a su vez, están basadas en tres leyes fundamentales de conservación: la conservación de la masa, la ley de conservación de la energía y la ley de conservación de la cantidad de movimiento. Algunos textos recomendados son Holton (1992), Haltiner & Martin (1957), Laitxman (1976).

## 4.1. Las ecuaciones del movimiento

### 4.1.1. Ecuación de conservación del momento en forma vectorial

Cuando se introdujo por primera vez la segunda ley de Newton en el capítulo 2, no se consideró el efecto de rotación de la tierra. Esto en general es válido para circulaciones de pequeña escala, como en el caso de la brisa analizada en aquella ocasión. Para circulaciones de escala mayor, es necesario considerar este efecto, que será analizado en la siguiente discusión.

En un sistema inercial de coordenadas, la segunda ley de Newton se puede escribir simbólicamente como

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{\sum \vec{F}_i}{m}, \quad (4.1)$$

donde la parte izquierda representa la tasa de cambio de la velocidad absoluta o aceleración vista desde un referencial inercial. En la parte derecha está escrita la sumatoria de fuerzas fundamentales. Para que esta ley continúe siendo válida en un referencial en rotación como la Tierra, en la parte derecha de (4.1) se debe escribir las fuerzas fundamentales y las aparentes, vistas en el capítulo 3. Como se verá a continuación, las fuerzas aparentes pueden ser deducidas a partir de una transformación formal de coordenadas.

En primer lugar se debe hallar una relación entre la velocidad absoluta  $\mathbf{V}_a$  y la velocidad relativa  $\mathbf{V}$  en el sistema que gira (la Tierra). Considere el vector posición  $\mathbf{r}$  apuntando a una partícula que se desplaza desde el punto  $P$  hasta el punto  $P'$ , como se representa en la figura 4.1.

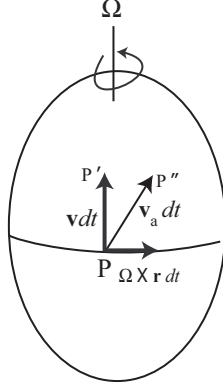


Figura 4.1. Desplazamiento resultante de una partícula cuando se tiene en cuenta el efecto de rotación de la tierra.

Aplicando la fórmula 2.12 al vector  $\mathbf{r}$ , formalmente se obtiene

$$\frac{d_a \vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Por definición, esta ecuación puede escribirse como,

$$\vec{V}_a = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}. \quad (4.2)$$

(Nótese que a este mismo resultado podemos llegar observando detenidamente la figura 4.1. En efecto, debido a la rotación de la tierra, después de un tiempo  $dt$  una partícula no ocupará la posición  $P'$  sino la posición  $P''$  la suma vectorial representada para este caso en la figura 4.1 se escribe como  $\vec{V} dt + \vec{\Omega} \times \vec{r} dt = \vec{V}_a dt$ . Dividiendo entre  $dt$  obtenemos la ecuación (4.2)).

Por otro lado si se aplica la fórmula (2.12) al vector velocidad  $V_a$ , se obtiene

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d_r \vec{V}_a}{dt} + \vec{\Omega} \times \vec{V}_a. \quad (4.3)$$

Sustituyendo (4.2) en la parte derecha de (4.3),

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d_r}{dt} (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) + \vec{\Omega} \times (\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}).$$

Desarrollando la parte derecha de esta ecuación,

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d_r \vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (4.4)$$

El segundo término en la parte derecha de esta ecuación representa la aceleración de Coriolis; el término  $\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$  ( Expresión. 2.5) como se verá a continuación, es la aceleración centrípeta. Entonces, usando la propiedad (2.6), este triple producto vectorial se escribe como

$$\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\Omega^2 \vec{R}.$$

Sustituyendo este valor en lugar del último término de la expresión (4.4), se obtiene

$$\frac{d_a \vec{V}_a}{dt} = \frac{d_r \vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{R}.$$

El lado derecho de esta ecuación representa el término aceleración en la segunda ley de Newton (4.1) en el que se ha tenido en cuenta el efecto de la rotación de la Tierra. Igualando esta aceleración a las fuerzas fundamentales analizadas en el capítulo 2, se obtiene la ecuación del movimiento en forma vectorial:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \Omega^2 \vec{R} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}^\bullet + \vec{F}_r,$$

Trasponiendo términos e incluyendo la fuerza centrífuga en la gravedad efectiva  $\vec{g}$ ,

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = 2\vec{\Omega} \times \vec{V} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \vec{F}_r. \quad (4.5)$$

En la parte derecha de esta ecuación, el segundo término representa el gradiente de presión, el tercero la gravedad efectiva y el último la fuerza de fricción. Haciendo uso de la fórmula (2.27) para expandir la derivada total esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{g} + \vec{F}_r. \quad (4.5a)$$

#### 4.1.2. Ecuaciones del movimiento en coordenadas rectangulares locales

La forma vectorial de la ecuación del movimiento, (4.5) o (4.5a), es compacta y útil en especial para visualizar situaciones asociadas a la dirección del movimiento. Para otras aplicaciones, es más conveniente tener las ecuaciones del movimiento en componentes por coordenadas. Por ejemplo, utilizando coordenadas cartesianas. Este sistema de coordenadas locales ya fue usado en el capítulo 3. Para introducir este sistema, se elige un punto en el globo terrestre y un plano tangente en este punto. El eje positivo de las ordenadas se elige, como se mencionó, sobre un meridiano orientado

hacia el polo norte, el eje de la  $ox$  a lo largo del círculo de latitud hacia el este y el eje  $oz$  por la vertical del lugar. Este sistema de coordenadas es cómodo desde el punto de vista de manipulaciones matemáticas, pero tiene el inconveniente de que rápidamente se ve afectado por la curvatura de la Tierra. Para obviar este problema, los modelos atmosféricos basados en este sistema de coordenadas usan *proyecciones cartográficas*.

Puesto que la velocidad  $\mathbf{V}$  tiene tres componentes  $u, v$  y  $w$ , la ecuación vectorial (4.5a) se descompone en tres ecuaciones para estas tres variables, las cuales están asociadas a los ejes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. Las componentes del término de Coriolis se obtienen descomponiendo el vector  $\Omega$  de acuerdo a la figura 4.2. Observando esta figura se concluye que

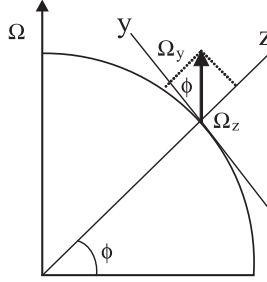


Figura 4.2. Descomposición del vector  $\Omega$  por componentes en un sistema de Coordenadas rectangulares locales.

$\Omega_x = 0$ ,  $\Omega_y = \Omega \cos \phi$ ,  $\Omega_z = \Omega \sin \phi$ . Entonces, de acuerdo a la fórmula (2.4) se puede escribir

$$\begin{aligned} \vec{C} &= -2\vec{\Omega} \times \vec{V} = -2\Omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = \\ &= -2\Omega \left[ (w \cos \phi - v \sin \phi) \vec{i} - (0 - u \sin \phi) \vec{j} + (0 - u \cos \phi) \vec{k} \right], \end{aligned}$$

donde  $\phi$  es la latitud, y  $u, v, w$  son las componentes de la velocidad en las direcciones  $x, y, z$ , respectivamente.

Para obtener las componentes del movimiento por coordenadas, se sustituye la última expresión en (4.5a) y se tiene en cuenta la definición (2.1) para el vector  $\mathbf{V}$  y la definición (2.13) para el operador nabla. Entonces, igualando términos para un mismo vector unitario, se obtienen tres ecuaciones:



$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2v\Omega \sin \phi - 2w\Omega \cos \phi + F_{F_{rx}} \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\Omega \sin \phi + F_{F_{ry}} \\
\frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2u\Omega \cos \phi + F_{F_{rz}}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

## 4.2. Ecuación de conservación de la masa

La ley de conservación de la masa es uno de los principios fundamentales de la dinámica de fluidos. Exactamente, este principio establece que *el flujo neto de masa por la superficie de un volumen fijo en el espacio durante un intervalo de tiempo dado es igual al cambio de masa dentro del volumen en el mismo intervalo de tiempo*.

Vamos a derivar la ecuación para el balance de masa, también llamada *ecuación de continuidad*. Considere el volumen elemental  $\delta x \delta y \delta z$ , como el de la figura 4.3.

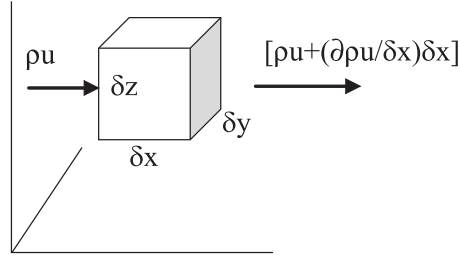


Figura 4.3. Flujo de masa a través de un volumen elemental.

El flujo de masa  $\rho u$  por unidad de área (en algunos textos en lugar de flujo por unidad de masa se habla de flujo de densidad) se define como la cantidad de masa que pasa por la unidad de área por unidad de tiempo. El flujo que entra por toda la cara  $\delta y \delta z$  es  $\rho u \delta y \delta z$ . El flujo que sale por la cara opuesta será  $[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x] \delta y \delta z$  (la expresión dentro del corchete indica que lo que sale por la cara derecha es lo que entra por la izquierda más la variación de esa cantidad durante el trayecto  $\delta x$ ). Entonces el flujo neto en la dirección  $ox$  es

$$\rho u \delta y \delta z - [\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x] \delta y \delta z = -\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta x \delta y \delta z.$$

Resultados semejantes se obtienen en las direcciones  $y$  y  $z$ , donde las componentes de la velocidad son  $v$  y  $w$ , respectivamente. Por eso, la tasa neta de flujo de masa a través del volumen elemental es

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] \delta x \delta y \delta z.$$

Esta expresión nos indica el cambio de flujo por todo el volumen elemental en la unidad de tiempo. Al dividir esta expresión entre  $\delta x \delta y \delta z$ , se obtiene el cambio de flujo por unidad de volumen por unidad de tiempo. De acuerdo con la ley enunciada arriba, este decremento en el flujo se debe igualar al cambio de masa dentro del volumen o, lo que es igual al cambio local de la densidad,  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ . En esta forma se obtiene la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) \quad (4.7)$$

La parte izquierda de esta ecuación expresa el cambio local de la densidad; el lado derecho, la *divergencia del flujo*. Escribiendo todos los términos en el lado izquierdo, esta igualdad también se expresa como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (4.8)$$

La ecuación (4.7) o la ecuación (4.8) indica que existe un balance entre el cambio local de la densidad y la *divergencia* del flujo de masa sobre el volumen elemental. Otra forma útil que se puede dar a la ecuación de continuidad se obtiene expandiendo la ecuación (4.8):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

la cual, reagrupando términos, se puede escribir

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.9)$$

La ecuación (4.9) establece que El incremento fraccional de la densidad, siguiendo el movimiento de la parcela, es igual a menos la divergencia de la velocidad. En el caso de una atmósfera incompresible, el primer término en el lado izquierdo es cero y la ecuación (4.9) se escribe como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.10)$$

### 4.3. Ecuación de balance de energía

La ley de la conservación de la energía, o ecuación de la termodinámica como frecuentemente la llamaremos en lo sucesivo, está representada por el primer principio de la termodinámica, el cual se escribe

$$dQ = c_v dT + p d\alpha. \quad (4.11)$$

donde,  $c_v$  es el calor específico a volumen constante,  $\alpha$  es el volumen específico,  $p$  es presión y  $T$  es temperatura. Al aplicar esta fórmula en la atmósfera solo se debe tener en cuenta que la mezcla de gases que componen el aire se comporta como un gas ideal y que el cambio en energía interna  $c_v dt$  depende de la temperatura. En cuanto a los otros dos términos de esta ecuación,  $dQ$  es el incremento de calor adicionado al sistema y  $p d\alpha$  es el trabajo realizado por el sistema.

En meteorología se utilizan otras dos formas de escritura del primer principio (4.11). La primera se consigue derivando la ecuación de estado,  $p\alpha = RT$ , o sea  $p d\alpha + \alpha dp = R dT$ , y sustituyendo el valor de  $p d\alpha$  en (4.11). Entonces,  $dQ = c_v dT + R dT - \alpha dp = (c_v + R) dT - \alpha dp$ , o también

$$dQ = c_p dT - \alpha dp, \quad (4.12)$$

donde  $c_p = c_v + R$ . La segunda forma se obtiene dividiendo (4.12) entre  $T$  y utilizando la ecuación de estado. Entonces,

$$\frac{dQ}{T} = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}. \quad (4.13)$$

Esta ecuación se puede escribir

$$\frac{1}{c_p} \frac{dQ}{T} = d \ln T - \frac{R}{c_p} d \ln p. \quad (4.14)$$

La ecuación (4.13) representa el primer principio escrito en forma de la entropía. La ecuación de la termodinámica se puede escribir dividiendo la expresión (4.12) entre  $c_p dt$  y trasponiendo términos, entonces

$$\frac{dT}{dt} - \frac{1}{c_p} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}. \quad (4.15)$$

#### 4.3.1. Temperatura potencial

Un concepto frecuentemente utilizado en meteorología es la *temperatura potencial*, parámetro que se define para un proceso adiabático, es decir, cuando la parte izquierda de (4.14) se hace igual a cero. O sea,

$$d \ln T - \frac{R}{c_p} d \ln p = 0.$$

Integrando esta ecuación desde un estado  $p$  y  $T$  hasta otro definido por  $p_s = 1000hPa$  y  $\theta$ , en donde  $\theta$  se denomina *temperatura potencial*, se obtiene

$$c_p \ln \frac{\theta}{T} = R \ln \frac{1000}{p}, \text{ ó también, } \frac{\theta}{T} = \left( \frac{1000}{p} \right)^{R/c_p},$$

de donde

$$\theta = T \left( \frac{1000}{p} \right)^{R/c_p}. \quad (4.16)$$

#### 4.3.2. Variación de la temperatura de una parcela que se desplaza verticalmente

La manera como cambia la temperatura en una parcela de aire que asciende en la atmósfera, se obtiene dividiendo el primer principio (4.12) entre  $c_p dz$  y reorganizando términos. Entonces,

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dz} + \frac{1}{\rho c_p} \frac{dp}{dz}.$$

El último término de esta ecuación se puede transformar con ayuda de la ecuación de estática:

$$\frac{1}{\rho c_p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{\rho c_p} (-g\rho) = -\frac{g}{c_p} = -\gamma_a. \quad (4.17)$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior,

$$\frac{dT}{dz} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dz} - \gamma_a \quad (4.18)$$

Cuando la expansión (o compresión) del aire es adiabática, es decir, sin intercambio de calor con el medio ambiente, la fórmula (4.18) se transforma en

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma_a \quad (4.19)$$

Al parámetro  $\gamma_a$  se le conoce con el nombre de gradiente adiabático seco. Entonces, en una capa limitada de la atmósfera, en ciertas condiciones se puede establecer, un gradiente vertical de temperatura de tipo adiabático seco igual a  $\gamma_a$ . Cuando el proceso no es adiabático, se debe usar la fórmula (4.18).

### 4.3.3. Variación de la temperatura potencial con la altura

Con ayuda de la fórmula (4.18) y de la definición (4.16), se puede definir la variación de la temperatura potencial con la altura. En efecto, tomando el logaritmo de la definición (4.16) y derivando el resultado,

$$d \ln \theta = d \ln T - \frac{R}{c_p} d \ln p.$$

Comparando esta expresión con (4.14) se concluye que

$$\frac{1}{c_p} dQ = T d \ln \theta. \quad (4.20)$$

Dividiendo entre  $dz$  y colocando el resultado en (4.18),

$$\frac{dT}{dz} = T \frac{d \ln \theta}{dz} - \gamma_a$$

Trasponiendo términos y expandiendo la derivada del logaritmo,

$$\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \frac{dT}{dz} + \gamma_a. \quad (4.21)$$

Definiendo el gradiente que se establece en la atmósfera durante un proceso no adiabático,

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma, \quad (4.22)$$

la expresión (4.21) se escribe,

$$\frac{T}{\theta} \frac{d\theta}{dz} = \gamma_a - \gamma. \quad (4.23)$$

A partir de (4.20) se puede obtener una nueva forma de escribir la ecuación de la termodinámica. En efecto, dividiendo esta expresión entre  $dt$  y trasponiendo términos, se obtiene

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = \frac{1}{T c_p} \frac{dQ}{dt}. \quad (4.24)$$

## 4.4. Sistema de ecuaciones de la dinámica de la atmósfera en coordenadas $x, y, z, t$

Las ecuaciones (4.6), (4.8) y (4.15) forman el sistema de ecuaciones que gobiernan los movimientos atmosféricos, están escritas en el sistema de

coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  y serán repetidas aquí. Para escribir de nuevo las ecuaciones del movimiento (4.6) la derivada sustancial se expandirá de manera similar a (2.26).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2v\Omega \sin \phi - 2w\Omega \cos \phi + F_{F_{rx}} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\Omega \sin \phi + F_{F_{ry}} \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2u\Omega \cos \phi + F_{F_{rz}} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + v \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + w \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{1}{c_p \rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}. \quad (4.27)$$

Este sistema contiene cinco ecuaciones para seis incógnitas:  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$ , y  $T$ . Para cerrarlo se requiere la ecuación de estado

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (4.28)$$

El sistema de ecuaciones (4.25) - (4.28) es cerrado y constituye el sistema de ecuaciones de la hidrotérmodinámica en coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$ .

## 4.5. Ecuaciones en coordenadas isobáricas

Las ecuaciones de la dinámica y la termodinámica de la atmósfera escritas en el sistema  $x$ ,  $y$ ,  $z$  usando  $z$  como coordenada vertical, no son muy útiles para aplicaciones meteorológicas por razones que serán evidentes más adelante. En los modelos meteorológicos se emplean otras variables en calidad de tercera coordenada: presión, presión normalizada, etc. Alternativamente a la altura  $z$ , como coordenada vertical, se puede usar una función: la presión por ejemplo, siempre y cuando exista una relación simple que ligue estas dos variables  $z$  y  $p$ . En este caso, para relacionarlas se utiliza la ecuación de estática. A este nuevo sistema de coordenadas  $x$ ,  $y$ ,  $p$ ,  $t$ , se le llama *sistema de coordenadas isobáricas*.

Ahora es necesario convertir las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera (4.25) a (4.28), al nuevo sistema de coordenadas isobáricas. Esta vez, se emplearán argumentos sencillos. Más adelante en la segunda parte, se introducirá el concepto de *variable vertical generalizada* para resolver este

mismo problema. Sin embargo, es necesario hacer aquí algunas observaciones.

En el antiguo sistema de coordenadas las variables independientes eran  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  y las variables dependientes o funciones eran  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\rho$ ,  $T$  y  $p$ . En el nuevo sistema, la presión  $p$  ya no es una función, sino que se convierte en una variable independiente. Además, en el nuevo sistema,  $z$  es una función, más exactamente, una variable estrechamente relacionada con ella, el geopotencial  $\Phi$ . Otra observación importante es que mientras en el antiguo sistema de coordenadas la coordenada vertical aumenta en valor absoluto a medida que se aleja del origen de coordenadas, en el nuevo sistema de coordenadas isobáricas,  $p$  hace lo contrario, o sea, disminuye a medida que se aleja del origen. Comencemos por definir la función geopotencial.

El *geopotencial*  $\Phi$  se define como el trabajo necesario para levantar la unidad de masa desde el suelo hasta la altura  $z$ . O sea,

$$\Phi = \int_0^z g dz. \quad (4.29)$$

Suponiendo  $g = \text{constante}$ , esta relación se escribe, de manera más simple

$$\Phi = gz. \quad (4.30)$$

#### 4.5.1. Gradiente de presión en coordenadas isobáricas

Ahora se deriva la expresión para el gradiente de presión. Dividiendo y multiplicando por  $\partial z$  El primer término del lado derecho de la primera ecuación de (4.25), este gradiente se escribe como

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{-\partial p}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

El signo menos que aparece antes de  $\partial p$  en la parte derecha se debe a que en la atmósfera la presión cae a medida que la altura  $z$  aumenta. Sustituyendo en la parte derecha de esta expresión la ecuación de estática,  $\partial p / \partial z = -\rho g$ , se obtiene

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} (\rho g) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Por tanto,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Sustituyendo en esta expresión la definición (4.30),

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (4.31)$$

De manera similar,

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (4.31a)$$

Una observación final sobre el gradiente de presión es que mientras en el sistema  $x, y, z, t$ , este se calcula en una superficie de nivel  $z = \text{constante}$ , en el sistema de coordenadas isobáricas se calcula en una superficie isobárica,  $p = \text{constante}$ . Algunos autores acostumbran enfatizar esta expresión con ayuda de la siguiente escritura:

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_z = -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_p. \quad (4.32)$$

$$-\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_z = -\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_p. \quad (4.32a)$$

#### 4.5.2. Ecuaciones del movimiento en coordenadas isobáricas

De las ecuaciones (4.25) solo se deben transformar las dos primeras, ya que en lugar de la tercera ecuación del movimiento se utiliza la aproximación de estática (sobre la justificación de esta suposición se hablará en el capítulo siguiente). El último término del lado izquierdo de la primera de las ecuaciones (4.25), el que está asociado a la coordenada vertical, puede escribirse como

$$w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{dz}{dt} \frac{\partial u}{\partial z}.$$

No es difícil intuir que, en coordenadas isobáricas, este término puede expresarse como

$$\omega \frac{\partial u}{\partial p} = \frac{dp}{dt} \frac{\partial u}{\partial p}, \quad (4.33)$$

donde  $\omega = dp/dt$ , es llamado *homólogo de la velocidad vertical* en coordenadas isobáricas. De manera similar, se puede escribir el último término del lado izquierdo de la segunda ecuación de (4.28),

$$w \frac{\partial v}{\partial z} = \omega \frac{dv}{dp}. \quad (4.34)$$



Utilizando las igualdades (4.31a) y (4.32a), las ecuaciones del movimiento (4.25) en coordenadas isobáricas pueden escribirse

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_p + fv \quad (4.35)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_p - fu, \quad (4.36)$$

donde, las fuerzas de fricción  $F_{Frx}$ ,  $F_{Fry}$ , el término  $-2w\Omega \cos \varphi$  han sido despreciados,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p}. \quad (4.37)$$

es el operador de la derivada sustancial en coordenadas isobáricas y  $f$  es el parámetro de coriolis definido en 2.34. En forma vectorial, las ecuaciones (4.35), (4.36) pueden escribirse

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{v} = -\vec{\nabla}\Phi. \quad (4.38)$$

Ahora se halla una relación entre el homólogo de la velocidad vertical  $\omega$  y la velocidad vertical  $w$ , expandiendo la derivada sustancial  $dp/dt$ ,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Es fácil mostrar, con ayuda del análisis de escala (capítulo 5) que el último término del lado derecho de esta expresión es de un orden mayor que el de los demás. Expresando este término con ayuda de la ecuación de estática, se puede escribir en forma aproximada:

$$\frac{dp}{dt} = \omega \cong -wg\rho. \quad (4.39)$$

Nóte que en las ecuaciones (4.35) y (4.36) no aparece el parámetro densidad, como sucede en el sistema de ecuaciones (4.25). Esto, como se verá más adelante es un valioso resultado.

#### 4.5.3. Ecuación de continuidad en coordenadas isobáricas

Considere una masa elemental de aire,  $\delta M = \rho \delta x \delta y \delta z$ , confinada entre dos superficies isobáricas. Sustituyendo la ecuación de estática en la parte derecha, esta expresión se transforma en

$$\delta M = \delta x \delta y \left( -\frac{(-\delta p)}{g} \right).$$

(El signo menos, asociado al elemento infinitesimal  $\delta p$ , se debe a que la presión cae con la altura). Tomando el logaritmo en ambos lados de esta expresión y diferenciando, se obtiene

$$\frac{1}{\delta M} dM = \frac{1}{\delta x} d(\delta x) + \frac{1}{\delta y} d(\delta y) + \frac{1}{\delta p} d(\delta p).$$

Puesto que la derivada sustancial de la masa no debe cambiar, la expresión anterior debe ser igual a cero. Además, dividiendo entre  $dt$  y cambiando el orden de los diferenciales,

$$\frac{1}{\delta x} \delta \frac{dx}{dt} + \frac{1}{\delta y} \delta \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\delta p} \delta \frac{dp}{dt} = 0.$$

Sustituyendo  $dx/dt$ ,  $dy/dt$ ,  $dp/dt$  por  $u$ ,  $v$  y  $\omega$ , respectivamente, en el límite esta expresión puede escribirse

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (4.40)$$

O como,

$$\frac{1}{\partial p} d \frac{dp}{dt} = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p = \vec{\nabla}_p \vec{V}. \quad (4.41)$$

En la ecuación de continuidad, en coordenadas isobáricas (4.40), se destaca el hecho de que no aparece el parámetro densidad. Esta expresión, derivada sin utilizar la restricción de incompresibilidad de aire, es válida sólo para una atmósfera en equilibrio hidrostático.

#### 4.5.4. Ecuaciones de la termodinámica y estática en coordenadas isobáricas

La escritura de la ecuación de la termodinámica es simple a partir de la ecuación (4.27). Basta con sustituir en ella el término  $dp/dt$  por el homólogo de la velocidad vertical. O sea,

$$\frac{dT}{dt} - \frac{1}{c_p \rho} \omega = \frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt}. \quad (4.42)$$

Para escribir la ecuación de estática en coordenadas isobáricas se sustituye la definición (4.30) en la ecuación de (3.8), derivada en el capítulo 3:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}. \quad (4.43)$$

Las ecuaciones (4.35), (4.36), (4.40), (4.42) y (4.43) constituyen un modelo atmosférico y puede emplearse para predecir el tiempo. El modelo

atmosférico que utiliza la ecuación de estática en calidad de tercera ecuación del movimiento y la ecuación de continuidad en la forma de una atmósfera incompresible se llama *modelo de ecuaciones primitivas o modelo hidrostático*.

### Ejercicios.

1. Muestre que la fuerza (por unidad de masa) de Coriolis tiende a desviar el movimiento hacia la derecha en el hemisferio norte, y hacia la izquierda en el hemisferio sur.
2. Calcule  $\partial p / \partial z$  usando los siguientes datos: Presión en superficie (altura  $z = 0$ ),  $p_0 = 1000$  hPa, Presión a la altura  $z = 5000$  m,  $p_0 = 500$  hPa. Compare esta magnitud con el valor que se obtiene en el lado derecho de la ecuación de estática. Densidad del aire  $\rho = 1$  kg/m<sup>3</sup>.
3. Evalúe cada uno de los términos en la tercera ecuación del movimiento, escrita en la forma de la derivada substancial, usando los siguientes datos:  $dw = 2$  cm/seg<sup>2</sup>,  $dt = 1$  día,  $\partial p = 500$  Hpa,  $\partial z = 5000$  m,  $u = 10$  m/s,  $\phi = 45^\circ$ ,  $\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$  1/s. Desprecie la fuerza de fricción. Compare, además, la magnitud de cada término.

## 5

# Análisis de escala y nociones básicas sobre modelos atmosféricos

### *Carl Gustav Rossby (1898-1957)*

Meteorólogo teórico sueco. Realizó grandes avances en la descripción físico-matemática de los movimientos atmosféricos. Las ondas que llevan su nombre, el número de Rossby, se cuentan entre algunos de sus aportes.



Imagen tomada con permiso de  
<http://www.smhi.se/sgn0106/if/rc/CG.htm>  
Cortesía del Servicio Meteorológico Sueco.

El análisis de escala es uno de los procedimientos usados para simplificar las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera. En este capítulo se realizará un análisis de escala para movimientos de escala sinóptica que usualmente ocurren en latitudes medias y también se presentarán algunas consideraciones para los movimientos de latitudes tropicales. Ampliación de estos temas puede consultarse en Holton (1995), Belov, Gandin & Dubov (1968), Laixtman (1976).

## 5.1. Escalas de los movimientos atmosféricos

Los sistemas atmosféricos o sistemas del tiempo suceden en diferentes escalas de espacio y de tiempo como se puede apreciar en el cuadro 5.1. Las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera vistas en el capítulo anterior sirven para describir estos tipos de movimientos. El análisis de escala es una técnica útil para determinar la magnitud de los términos en las ecuaciones (4.25) (4.27), asociadas a un tipo de movimiento dado. Una vez determinada la magnitud de cada término, se puede optar por despreciar los de menor valor y de esta manera simplificar la ecuación diferencial.

Cuadro 5.1. Escalas de espacio y tiempo de los diferentes sistemas atmosféricos. Adaptado de Haltiner & Williams (1979).

ESCALA HORIZONTAL					
	10 <sup>4</sup> km	10 <sup>3</sup> km	10 <sup>2</sup> km	10 km	1 km
	Planetaria	Sinóptica	Mesoescala	Convectiva o pequeña	Micro escala
	←				→
LATITUDES MEDIAS	Ondas largas	Depresiones extra-tropicales	Frentes	Chubascos Cúmulo Nimbus	Torbellinos en la capa límite
	Anticiclones sub-tropicales	Anticiclones	Ondas de montaña Líneas de inestabilidad	Tornados	
LATITUDES TROPICALES	Zona de Convergencia Intertropical ZCIT	Ciclones tropicales	Complejos convectivos de mesoescala		Torbellinos en la capa límite
	Ondas del este		Tormentas tropicales		
		10 <sup>2</sup> horas	10 horas	1 hora	10 <sup>-1</sup> hora
ESCALA TEMPORAL					

### 5.1.1. Algunas definiciones preliminares

Por valor característico de un elemento se entiende su valor medio o cuadrático medio. Por *orden de magnitud* de un elemento se entiende el valor característico redondeado hasta la potencia de 10 más cercana; y se expresa como  $0(E)$ , donde  $E$  es el elemento considerado. Por ejemplo, la presión

de superficie en latitudes medias fluctúa entre 940 y 1070 hPa. Su valor característico sería 1005 hPa. El orden de magnitud de la presión en este caso es:  $O(p) = 10^3$ . Otro ejemplo: el viento horizontal característico en latitudes medias es 10 m/s. Por eso, su orden de magnitud, o escala, es  $O(u) = O(v) = U = 10^1$ .

En el análisis de escala, lo primero que se hace es definir las escalas del movimiento que se desea analizar. Para movimientos de tipo sinóptico, la escala espacial  $L$  es del orden de 1000 km. Esta escala corresponde a la distancia horizontal que ocupa una perturbación de tipo sinóptico. La escala de velocidad es, como se mencionó,  $U = 10^1$ . Una vez definidas las escalas espacial  $L$  y de velocidad horizontal  $U$ , la escala temporal  $L_t$  se puede definir como

$$O(t) = L_t = \frac{L}{U} = \frac{10^6 \text{m}}{10^1 \text{m/s}} = 10^5 \text{s}.$$

Aquí se deduce que la escala temporal,  $L_t$ , de las perturbaciones sinópticas es un día, lo que está de acuerdo con las observaciones, es decir, el tiempo que demora en pasar una perturbación de tipo sinóptico por un punto dado en latitudes medias.

En el análisis de escala, el orden de las derivadas se sustituye por el orden de sus incrementos respectivos. Por ejemplo, para una función cualquiera  $f$ ,

$$O\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{O(\delta f)}{O(\delta x)}.$$

Además se asume que el orden de los incrementos de las variables independientes es igual al de sus escalas. O sea,

$$\delta x = \delta y = L, \quad \delta z = H, \quad \delta t = L_t.$$

donde  $H$  es la escala vertical del movimiento. Sobre el valor característico, u orden de magnitud de los parámetros meteorológicos y sus derivadas, se puede juzgar a través de un procesamiento estadístico de la información meteorológica. Un procesamiento de este tipo (cuadro 5.2) fue realizado por M. I. Iudin en 1957 (Bielov 1975) y se muestra en el cuadro 5.2. Esta tabla es válida para movimientos de escala sinóptica en latitudes medias.

Los siguientes postulados (Gandin & Dubov, 1968), válidos para movimientos de escala sinóptica en latitudes medias, son útiles en el análisis de escala que se introduce más adelante.

1. La escala de tiempo,  $L_t$ , es mucho mayor que la magnitud  $\frac{1}{f_0}$  donde  $f_0$  es el parámetro de Coriolis,  $(L_t \gg \frac{1}{f})$

ELEMENTO	$0(e)$	$0(\partial/\partial x), 0(\partial/\partial y)$	$0(\partial/\partial z)$	$0(\partial/\partial t)$
Escala horizontal	$L \ 10^6 \text{ m}$			
Escala vertical	$H \ 10^4 \text{ m}$			
Tiempo	$L_t \ 10^5 \text{ s}$			
Velocidad zonal	$u \ 10^1 \text{ m/s}$	$10^{-5}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
Velocidad Meridional	$v \ 10^1 \text{ m/s}$	$10^{-5}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
Velocidad Vertical	$w \ 10^{-2} \text{ m/s}$	$10^{-8}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$
Presión	$P_0 \ 10^5 \text{ kg/(m.c}^2)$	$10^{-3}$	$10^1$	$10^{-2}$
Densidad	$\rho \ 10^0 \text{ kg/m}^3$	$10^{-8}$	$10^{-4}$	$10^{-7}$
Temperatura	$T \ 3.10^2 \text{ K}$	$10^{-5}$	$10^{-2}$	$10^{-4}$
P. Coriolis	$f \ 10^{-4} \text{ s}^{-1}$	$10^{-11}$		
Vorticidad	$\Omega_z \ 10^{-5} \ 1/\text{s}$	$10^{-11}$	$10^{-9}$	$10^{-10}$

Cuadro 5.2. Orden de magnitud de los principales elementos meteorológicos y su primeras derivadas. Adaptada de Bielow (1975)

En otras palabras, decimos que el parámetro  $K$ , definido como

$$K = \frac{1}{L_t f} \ll 1,$$

es pequeño en comparación con la unidad. A este parámetro se le conoce con el nombre de número de Kivel. Por ejemplo, si se toma  $L_t$  igual a un día, se obtiene

$$K = \frac{1}{2\Omega \sin \phi} \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{4\pi \sin \phi},$$

Para una latitud  $\phi$  de  $50^\circ$ , se obtiene  $K = 0.104$ . Por supuesto, cerca al ecuador no tiene sentido el número de Kivel.

2. El parámetro  $B$ ,

$$B = \frac{\beta L}{f},$$

es pequeño con relación a la unidad. Aquí  $\beta$ , llamado parámetro de Rossby, se define como la derivada del parámetro de Coriolis con la latitud,

$$\beta = \frac{df}{dy} \quad (5.1)$$

Derivando el valor  $f = 2\Omega \sin \phi$ , ( fórmula 2.34) y sustituyendo el resultado en (5.1),

$$B = \frac{L}{a} \cot \phi. \quad (5.2)$$

Aquí  $a$  es el radio de la Tierra (para obtener esta fórmula se tomó  $dy/d\phi = a$ , lo que no es difícil representar gráficamente). Utilizando los valores del cuadro 5.2 y tomando  $\phi = 50^\circ$  y  $a = 6.4 \times 10^5$  m, se obtiene  $B = 0,114$ . de la fórmula (5.2) se puede concluir que la pequeñez del parámetro  $B$  equivale a decir que la escala horizontal es pequeña en relación con el radio de la Tierra.

3. Cuando se suman dos miembros de orden diferente, el orden del resultado corresponde al del miembro de mayor orden. La suma de dos (o más) miembros del mismo orden no necesariamente coincide con el orden de alguno de sus miembros componentes y puede ser menor. Ejemplo de esto se halla al considerar la divergencia horizontal. Más adelante se hablará de nuevo sobre esta afirmación.
4. En cualquier ecuación deben quedar mínimo dos miembros principales. En este caso, ambos miembros son del mismo orden. Por esta razón, no se puede simplificar la ecuación de estado o la ecuación de estática.

## 5.2. Análisis de escala para latitudes medias

Se aplicará el análisis de escala a las ecuaciones para sistemas sinópticos de latitudes medias. Para ello se escriben las ecuaciones (4.25), despreciando la fuerza de fricción y anotando debajo de cada miembro su orden de magnitud, calculado de acuerdo con el cuadro 5.2.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} & = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2v\Omega \sin \phi + 2w\Omega \cos \phi & (5.3) \\ 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-5} & 10^{-3} & 10^{-3} & 10^{-6} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} & = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2u\Omega \sin \phi & (5.4) \\ 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-4} & 10^{-5} & 10^{-3} & 10^{-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} & = & -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2u\Omega \cos \phi & (5.5) \\ 10^{-7} & 10^{-7} & 10^{-7} & 10^{-8} & 10^{-1} & 10^{-1} & 10^{-3} \end{array}$$

Veamos ahora algunas simplificaciones que se pueden hacer en las ecuaciones.



### 5.2.1. Aproximación geostrófica

En las ecuaciones del movimiento horizontal, o sea en las ecuaciones (5.3) a (5.4), se observa que los términos más sobresalientes son el gradiente de presión y la componente horizontal de la fuerza de Coriolis. Eliminando los términos restantes, queda una relación diagnóstica llamada *aproximación geostrófica o balance geostrófico*.

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.6a)$$

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.6b)$$

Despejando  $u$  y  $v$  en estas ecuaciones se obtiene las componentes del viento geostrófico:

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.7a)$$

$$v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.7b)$$

Haciendo uso del concepto de geopotencial (fórmulas (4.31), (4.31a)), las ecuaciones (5.7a) y (5.7b) se describen

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (5.8a)$$

$$v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (5.8b)$$

En lugar de las dos ecuaciones (5.7a) y (5.7b) el viento geostrófico puede representarse por una ecuación vectorial,

$$\vec{V}_g = \vec{k} \times \frac{1}{\rho f} \vec{\nabla}_H p \quad (5.9)$$

El viento geostrófico se produce como el resultado de un balance entre dos fuerzas: el gradiente de presión y la fuerza de Coriolis. Este balance es representado en la figura 5.1. La dirección del viento geostrófico, determinada por el producto vectorial (5.9), también está indicada en esta figura. La aproximación geostrófica es, en principio, válida para la atmósfera libre donde no es necesario considerar el efecto de la fricción superficial. El viento geostrófico sopla entonces por las isobaras dejando las bajas presiones a la izquierda en el hemisferio norte y a la derecha en el hemisferio sur.

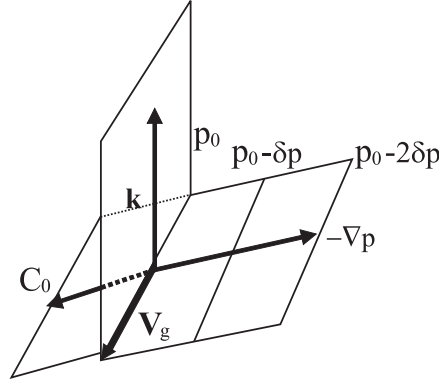


Figura 5.1. Balance entre las fuerzas de Coriolis,  $C_0$ , y de presión y dirección resultante del viento geostrófico en la atmósfera libre.

En la atmósfera libre, como quedará evidente en el capítulo 6, el viento geostrófico sopla por isobaras rectilíneas.

De acuerdo con las ecuaciones (5.3) y (5.4) el término aceleración es de un orden inferior a los términos que componen el viento geostrófico. Este último es solo una aproximación del viento real con un margen de error de 10 a 15 %, y no es más válida en regiones cercanas al ecuador.

Si en la ecuaciones (5.6a) y (5.6b), además de los términos presión y efecto de Coriolis, se considera el término aceleración, las ecuaciones pueden escribirse

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.10a)$$

$$\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{f\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.10b)$$

donde

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (5.11)$$

A estas ecuaciones se les conoce con el nombre de ecuaciones aproximadas de pronóstico.

### 5.2.2. El número de Rossby

Una manera de estimar la importancia relativa de los términos aceleración y fuerza de Coriolis en esta ecuación es a través del *número de Rossby*

definido como la relación entre estos dos términos mencionados.

$$\frac{du/dt}{fu} = \frac{\delta U/\delta t}{fU} \approx \frac{U^2/L}{fU} = \frac{U}{fL} \Rightarrow R_0 = \frac{U}{fL}. \quad (5.12)$$

Para valores pequeños del número de Rossby ( $R_0 \ll 1$ ), el efecto de la fuerza de Coriolis es ligeramente dominante. En este caso se puede decir que la aproximación geostrófica tiene mayor validez. De acuerdo con las escalas del cuadro 5.2, para movimientos de escala sinóptica,  $R_0 = 0.1$ . Para movimientos de mesoescala,  $L = 10^5$  m y  $R_0 = 1$ ; para movimientos de escala local,  $R_0 = 10$ .

Con ayuda del número de Rossby se puede valorar la magnitud del error cometido en la aproximación geostrófica. Para ello, se representa el viento real como la suma de una parte geostrófica,  $u_g$ , más una desviación o componente ageostrófica  $u'$ . O sea,

$$u = u_g + u', \quad v = v_g + v'. \quad (5.13)$$

donde  $u_g$ ,  $v_g$  son las componentes del viento geostrófico, y  $u'$ ,  $v'$  son las desviaciones del viento geostrófico del viento real, llamadas por algunos autores *desviaciones ageostróficas*.

Sustituyendo  $u_g$  y  $v_g$  en (5.13) por sus valores en (5.7a) y (5.7b) y llevando estos resultados a la parte derecha de (5.10a) y (5.10b), se obtienen las expresiones para las desviaciones ageostróficas:

$$u' = -\frac{1}{f} \frac{\partial v}{\partial t}, \quad v' = \frac{1}{f} \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Para estimar la importancia de la desviación ageostrófica en relación con el viento real, se establece la relación

$$\frac{u'}{u} = \frac{\frac{1}{f} \frac{\partial v}{\partial t}}{u} = \frac{\frac{U}{fL_t}}{U} = \frac{1}{fL_t} = \frac{U}{fL} = R_0. \quad (5.14)$$

Este resultado permite llegar a la conclusión que la relación entre la desviación ageostrófica y el viento real es igual al número de Rossby. Por tanto, la desviación ageostrófica en latitudes medias es de un orden de magnitud menor que el viento real.

### 5.2.3. Análisis de la divergencia horizontal

De acuerdo con la fórmula (2.17), la divergencia horizontal se define como

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.15)$$

Nótese que de acuerdo con el postulado 3, el orden de magnitud de la divergencia está asociado al orden de alguno de los dos sumandos en la parte derecha de (5.15). Sustituyendo el viento real por la suma del viento geostrófico más la desviación ageostrófica (5.13) y aplicando luego las fórmulas (5.8a) y (5.8b), se obtiene

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right).$$

Después de algunas manipulaciones y teniendo en cuenta que  $f$  no depende de  $x$  se llega a

$$D = D' - \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (5.16)$$

donde  $D'$  es la divergencia de la desviación ageostrófica y  $\beta$  es el parámetro de Rossby definido en (5.1).

De acuerdo con la conclusión (5.14),  $u'$  y  $v'$  son de un orden de magnitud inferior al de  $u$  y  $v$  respectivamente. Por tanto,  $\frac{\partial u'}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v'}{\partial y}$  también son de un orden de magnitud inferior al de  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . En consecuencia, según el postulado 3 mencionado,  $D'$  es de un orden de magnitud inferior al de cada uno de los miembros  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial v}{\partial y}$ .

En lo que respecta al último término de (5.16), es fácil cerciorarse de que su relación al término  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ó al término  $\frac{\partial v}{\partial y}$  es igual a  $B$ .

Esto nos conduce a la conclusión de que la *divergencia horizontal del viento*  $D$ , es de un orden inferior a cada uno de los términos en (5.15). Este hecho nos muestra el carácter no divergente de la atmósfera no perturbada en latitudes medias. Por esta misma razón, y como se verá más adelante, se dificulta el cálculo de este parámetro y también, el de la velocidad vertical.

#### 5.2.4. Análisis de la vorticidad geostrófica

Colocando las componentes del viento geostrófico (5.8) en la definición de vorticidad (2.23) obtenemos la vorticidad geostrófica o sea,

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{f} \vec{\nabla}^2 \Phi - \frac{\beta}{f^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y}.$$

Es fácil cerciorarse de que la relación entre el segundo término de la derecha y el primero es del orden  $B$ . De esta manera, la vorticidad geostrófica se puede considerar igual a,

$$\zeta_g = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{f} \vec{\nabla}^2 \Phi. \quad (5.17)$$

No obstante, es fácil probar que esta aproximación implica suponer la no divergencia del flujo.

#### 5.2.5. La aproximación hidrostática

Considere la componente vertical del movimiento, o sea, la ecuación (5.5). En esta ecuación, los términos más sobresalientes son el gradiente de presión y la fuerza de gravedad. Despreciando los demás términos,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g. \quad (5.18)$$

Esta ecuación representa el equilibrio hidrostático analizado en el capítulo 2. La ecuación (5.18), llamada ecuación de la hidrostática, cumple un papel central en la dinámica de la atmósfera.

### 5.3. Análisis de escala para latitudes tropicales

A medida que nos acercamos al ecuador, el seno de la latitud cae y el parámetro de Coriolis  $f$ , no es  $10^{-4}$  sino que se convierte en  $10^{-5}$ . En este caso, el número de Rossby está cercano a la unidad, lo cual implica que el gradiente de presión en estas latitudes no puede ser equilibrado por la fuerza de Coriolis. El análisis de escala para latitudes cercanas al ecuador puede ser realizado tomando por ejemplo la ecuación (5.10a) pero con el gradiente de presión escrito para el geopotencial (fórmula (4.31)).

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

En términos de escalas esta ecuación se escribe:

$$\frac{U^2}{L} - fU = -\frac{\delta\Phi}{L}.$$

Para latitudes medias, la escala o valor característico de  $\delta\Phi/L$  es  $fU = 10^{-4} \times 10 = 1000 \text{ m/s}^2$ . Para latitudes tropicales, no puede ser equilibrado por la fuerza de Coriolis; por tanto, será equilibrado por la aceleración inercial. Esto es,  $\delta\Phi = U^2 = 100 \text{ m/s}^2$ .

El hecho de que la variación horizontal del geopotencial sea de un orden de magnitud inferior al de latitudes medias, trae profundas consecuencias para la atmósfera tropical no perturbada.

## 5.4. La predicción numérica

Aunque los modelos atmosféricos se analizan en detalle en la segunda parte del texto, es conveniente introducir aquí la idea de la predicción numérica. La predicción numérica se realiza a través de un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales como (4.35), (4.36), (4.40), (4.42) y (4.43) más algunas relaciones de cerradura. Estas ecuaciones, que constituyen un modelo atmosférico, se escriben a continuación.

$$\frac{du}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)_p + fv \quad (5.19)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)_p - fu \quad (5.20)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial\omega}{\partial p} = 0 \quad (5.21)$$

$$\frac{dT}{dt} - \frac{1}{c_p\rho}\omega = \frac{1}{c_p}\frac{dQ}{dt} \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho}. \quad (5.23)$$

Las expresiones (5.19) a (5.23) constituyen un sistema de cinco ecuaciones para seis variables meteorológicas;  $u$ ,  $v$ ,  $\omega$ ,  $T$ ,  $\Phi$  y  $\rho$ . Este sistema no considera la fuerza de fricción y se cierra adicionando la ecuación de estado. Las variables que poseen derivada temporal deben ser conocidas inicialmente en todos los puntos del dominio.

Las ecuaciones se solucionan en el tiempo y el espacio con ayuda de un método numérico. Esta solución se realiza con el objeto de extrapolar (predecir) el estado futuro de la atmósfera a partir de un estado inicial.

Otra observación importante es que algunos términos (también conocidos con el nombre de fuentes y sumideros del sistema), como  $dQ/dt$  por ejemplo, aún no han sido determinados. Estos términos, los cuales describen procesos físicos como; calentamiento o enfriamiento por cambios de fase, por radiación, disipación turbulenta, etc., hay que expresarlos en función de las variables del modelo mencionadas arriba. A este proceso se le conoce con el nombre de parametrización de los procesos físicos o simplemente parametrizaciones del modelo.

Las consideraciones más importantes respecto a un modelo atmosférico son las ecuaciones del modelo, las parametrizaciones físicas, la solución numérica y las condiciones iniciales.

#### 5.4.1. Las ecuaciones del modelo

Al sistema particular de ecuaciones (5.19) a (5.23) se le conoce con el nombre de modelo de ecuaciones primitivas. Los modelos que se usan actualmente contienen, además, otros términos y ecuaciones que sirven para describir la turbulencia atmosférica, los cambios de fase, el estado del suelo, etc.

#### 5.4.2. Las parametrizaciones físicas

La parametrización de los procesos físicos consiste en: expresar algunas fuentes y sumideros del sistema de ecuaciones en términos de los parámetros y las variables del modelo. Con ayuda de un ejemplo se mostrará en qué consiste el proceso de parametrización asociado al cambio de fase del vapor de agua.

En primer lugar, se adiciona una ecuación más al sistema (5.19)-(5.23), la cual sirve para describir la variación espacio-temporal del vapor de agua  $q_v$ , en la atmósfera.

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} q_v = \frac{dC_l}{\rho dt}, \quad (5.24)$$

donde  $q_v$  es la relación de mezcla para el vapor de agua y  $dC_l/dt$  (el úni-

co sumidero considerado por simplicidad en esta ecuación) es la tasa de condensación. En esta ecuación,  $C_l$  es la cantidad de vapor transferida del estado de vapor al estado líquido.

Esta ecuación puede obtenerse con ayuda de un análisis infinitesimal similar al realizado para derivar la ecuación de continuidad (una derivación de la ecuación de pronóstico para el contenido de vapor de agua se presenta en el capítulo 16).

Supongamos que el término fuente  $dQ/dt$  en la ecuación de la termodinámica (5.22) solo tiene en cuenta el calentamiento provocado por la condensación del vapor de agua. En este caso, este término puede representarse como

$$\frac{1}{c_p} \frac{dQ}{dt} = \frac{L}{c_p} \frac{dC_l}{dt},$$

donde  $L$  es calor latente de condensación y  $dC_l/dt$  es la tasa de condensación mencionada arriba.  $C_l$  se calcula así:

$$C_l = q_v - q_s, \quad (5.25)$$

donde  $q_s$  es la relación de mezcla de saturación. De manera aproximada,  $q_s$  se calcula así:

$$q_s = 0.622e_s/p, \quad (5.26)$$

donde  $e_s$  representa la tensión de saturación. Este parámetro se calcula integrando la ecuación de Clausius Klappeyron:

$$\frac{de_s}{e_s} = \frac{LdT}{R_v T^2}, \quad (5.27)$$

donde  $R_v$  es la constante de los gases para el vapor de agua.

De esta manera, con ayuda de la ecuación (5.24) y de las relaciones (5.25)-(5.27) se expresa la fuente de calor  $dQ/dt$  en la ecuación de la termodinámica en función de variables del modelo como la temperatura  $T$  y la presión  $p$ . Con procedimientos similares se pueden expresar otras fuentes de calor, como la producida por la radiación solar y también otras fuentes y sumideros como los de fricción etc.

### 5.4.3. La solución numérica

Existen varios métodos numéricos para solucionar el sistema (5.19)-(5.23). Entre ellos, el método de las diferencias finitas, el método espectral, etc. Estos métodos se exponen en detalle en la segunda parte de esta obra.

En el método de las diferencias finitas, los términos que contienen derivadas se discretizan dentro de una grilla de puntos como la mostrada en la figura



5.2. Las derivadas espaciales y temporales a menudo se discretizan usando diferencias centradas:

Se fija un valor  $i$  sobre el eje  $oy$  y suponga que se quiere resolver la siguiente ecuación sobre el eje  $ox$  solamente.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Esta ecuación se escribe para el punto  $i, j$  usando diferencias centradas:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = -u_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta x},$$

donde  $n$  es un índice (no un exponente) que indica el nivel en el tiempo.

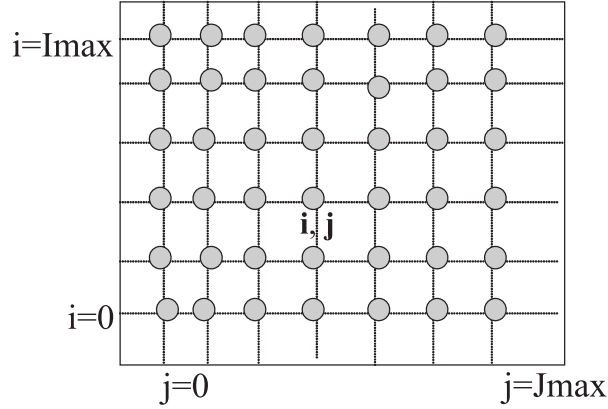


Figura 5.2. Grilla de puntos de un modelo en diferencias finitas.

Esta ecuación escrita en diferencias finitas se puede resolver con respecto a  $u_{i,j}^{n+1}$  como,

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^{n-1} - u_{i,j}^n \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \quad (5.28)$$

Esta ecuación indica que para conocer la componente zonal del viento en el nivel de tiempo  $n+1$  en el punto  $i, j$  es necesario conocer su valor en este mismo punto y en los niveles de tiempo  $n$  y  $n-1$ , y los valores de  $u$  en el nivel de tiempo  $n$  en los puntos  $(i, j+1)$  y  $(i, j-1)$ .

Una vez calculado el valor de  $u$  en el tiempo  $n+1$ , se procede a calcular el siguiente valor de  $u$  en el nivel de tiempo  $n+2$ , y así sucesivamente. En esto consiste la predicción numérica del tiempo.

Por ejemplo, haciendo  $n = 1$ , la ecuación anterior se escribe

$$u_{i,j}^2 = u_{i,j}^1 - u_{i,j}^0 \frac{u_{i,j+1}^1 - u_{i,j-1}^1}{2\Delta x} \quad (5.29)$$

Esto nos lleva a formular una exigencia para los modelos numéricos: es necesario conocer el campo inicial en el momento  $t=0$ .

Una desventaja del esquema de diferencias centradas, que se puede observar en (5.28) o (5.29), es que no puede ser utilizado ni para el nivel de tiempo  $n = 1$ , ni para los puntos fronterizos del dominio ( $i = imax$ ,  $j = jmax$ ).

#### 5.4.4. Las condiciones iniciales

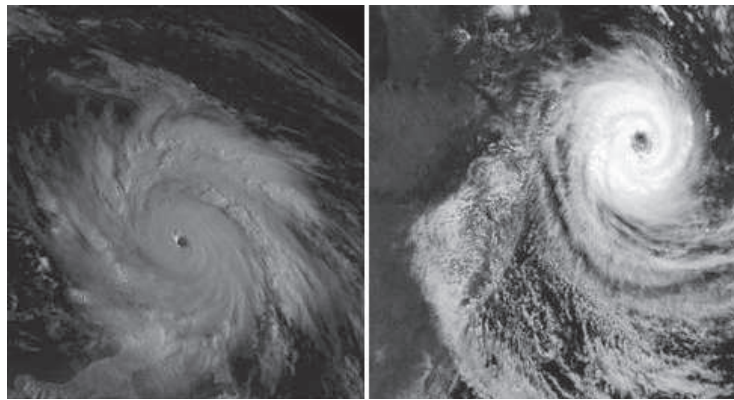
Las condiciones iniciales se obtienen a través de un proceso llamado análisis objetivo. En este proceso las observaciones de superficie y de altura (radiosondeos), medidos en diferentes puntos del globo terráqueo, son interpoladas en los puntos de grilla del dominio considerado.

#### Ejercicios.

1. ¿Cuál es la diferencia entre valor característico y orden de magnitud? Existe alguna diferencia entre orden de magnitud y escala?
2. Realice un análisis de escala para movimientos de mesoescala; por ejemplo, para una nube cumulonimbus.
3. Calcule el número de Rossby para el fenómeno de la brisa. Tome los siguientes datos:  $dv/dt = 5 \text{ m/s}$ ,  $L = 20 \text{ km}$ .
4. Muestre que la desviación ageostrófica y el viento geostrófico están en la relación del número de Rossby,  $R_0$ .
5. Estime las magnitudes de los términos en la ecuación del movimiento para un tornado típico. Use las siguientes escalas:  $U = 100 \text{ m/s}$ ,  $W \sim 10 \text{ m/s}$ ,  $L \sim 10 \text{ m}$ ,  $H \sim 10 \text{ km}$ ,  $\Delta P \sim 40 \text{ mb}$ . ¿Es la aproximación de la hidrostática válida en este caso?
6. Use el análisis de escala para determinar qué simplificaciones pueden hacerse en la ecuación del movimiento para perturbaciones de escala de un huracán. Sea  $U \sim 50 \text{ m/s}$ ,  $W \sim 1 \text{ m/s}$ ,  $L \sim 100 \text{ km}$ ,  $H \sim 10 \text{ km}$ ,  $p \sim 40 \text{ mb}$ . Diga si la aproximación hidrostática es válida o no en este caso.

## 6

# Soluciones particulares de las ecuaciones del movimiento horizontal



Ejemplos de circulación ciclónica: en el hemisferio norte, huracán Iván (izquierda) el 9 de septiembre de 2004 a las 1245Z, cortesía de la NOAA. En el hemisferio sur, huracán Catarina (derecha) el 27 de marzo de 2004. Cortesía de la NASA.

En el capítulo anterior analizamos un caso particular de las ecuaciones del movimiento horizontal: el viento geostrófico. Este tipo de viento se obtiene cuando en las ecuaciones del movimiento son retenidas apenas: la fuerza de gradiente de presión y la de Coriolis. Cuando en las ecuaciones del movimiento horizontal se tiene además la aceleración inercial, como en el caso de las ecuaciones (5.6a) y (5.6b), otras soluciones particulares pueden ser obtenidas. A pesar de que estas soluciones son apenas una idealización matemática, corresponden a ciertos tipos de vientos observados, como viento de gradiente, ciclostrófico, inercial y térmico. El análisis de estos tipos de movimientos es conveniente realizarlo en un nuevo sistema de coordenadas, el sistema de coordenadas naturales. Estos temas pueden ser consultados en Haltiner & Martin (1957), Holton (1993), Gordon (1965).

## 6.1. Coordenadas naturales

Un sistema de coordenadas naturales  $(s, n, z)$  es aquel que acompaña a la parcela de aire en su trayectoria. En la atmósfera libre, el viento fluye por las isobaras. (Esto ya fue demostrado para el viento geostrófico (figura 5.1). Más adelante veremos que esta afirmación continúa siendo válida para un viento más general, el viento de gradiente). En otras palabras, las isobaras y las líneas de corriente coinciden. Entonces, al describir el movimiento de las parcelas de aire por sus trayectorias, es necesario suponer que la trayectoria y la línea de corriente, conceptos matemáticamente diferentes, coinciden al menos por un espacio corto de tiempo. Por definición, la trayectoria de una partícula en el plano es descrita por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, t); \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, t). \quad (6.1)$$

Si se compara estas ecuaciones con la ecuación de la línea de corriente (2.20a), es fácil observar que la trayectoria y las líneas de corriente coinciden solo en el momento  $t_0$ , o en el caso de un flujo estacionario, donde las líneas de corriente no cambian con el tiempo. (Para mostrar la equivalencia entre (2.20a) y (6.1), bajo estas suposiciones, es suficiente dividir la segunda ecuación de 6.1 entre la primera e igualar  $t = t_0$ ).

Para escribir la ecuación del movimiento en coordenadas naturales primero se halla una expresión para la aceleración tangencial.

Considere inicialmente el caso de un referencial fijo. Sea  $s$  la trayectoria de una parcela, como la representada la figura 6.1.

En el sistema de coordenadas naturales se definen un vector unitario  $\mathbf{t}$ , tangente a la trayectoria en el punto  $P$  a lo largo de la coordenada  $s$ , otro  $\mathbf{n}$  perpendicular al primero, a lo largo de la coordenada  $n$ , un vector  $\mathbf{k}$ , a lo largo de la coordenada  $z$ , orientado por la vertical del lugar, y un radio de curvatura  $R$  (figura 6.1).

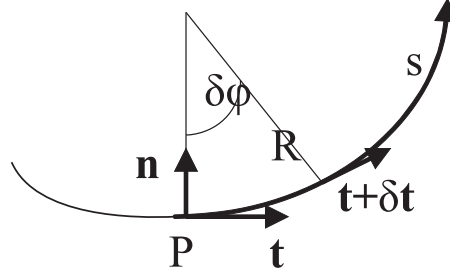


Figura 6.1. Vectores unitarios en el sistema natural de coordenadas.

Por convención se toma la normal  $\mathbf{n}$  y el radio de curvatura  $R$  positivos a la izquierda del movimiento.

El campo horizontal de la velocidad tiene una sola componente tangente a la trayectoria,

$$\vec{V} = V\vec{t}, \quad (6.2)$$

donde,

$$V = ds/dt, \quad (6.3)$$

(un escalar no negativo) es el módulo de la velocidad.

En el sistema  $(s, n, z)$ , la aceleración tangencial se encuentra derivando la expresión (6.2),

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{t} \frac{dV}{dt} + V \frac{d\vec{t}}{dt},$$

Que puede escribirse también como

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{t} \frac{dV}{dt} + V \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad (6.4)$$

Puesto que el vector unitario  $\mathbf{t}$  cambia constantemente de dirección, su derivada existe. Para una partícula que inicialmente se encuentra en el punto  $P$ , después de un tiempo dado, el vector posición  $\mathbf{t}$  cambia a  $\mathbf{t} + \delta\mathbf{t}$ , como se muestra en la figura 6.1

La expresión para el módulo de  $\delta\mathbf{t}$  ya fue encontrada en el capítulo 3 [Ec. (3.5)]. Para verificar esto es suficiente observar que en la figura 6.1,  $\delta\varphi$ ,  $\mathbf{t}$  y

$\mathbf{t} + \delta\mathbf{t}$ , juegan los papeles de  $\theta$ ,  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$  de la figura 3.3a respectivamente. Entonces, de acuerdo con las figuras 3.3a, 3.3b y la expresión (3.5), se puede escribir,

$$|\delta\vec{t}| = \delta\phi |\vec{t}|.$$

en donde,  $|\delta\vec{t}|$  y  $|\vec{t}|$ , son los módulos de  $\delta\mathbf{t}$  y  $\mathbf{t}$  respectivamente (Nótese que el signo menos en la parte izquierda de 3.5 aquí no aparece porque se está tomando el valor absoluto!). Teniendo en cuenta que el módulo de  $\mathbf{t}$  es 1, dividiendo por  $\delta s$ , y usando  $\delta\phi \cdot R = \delta s$  obtenemos,

$$\frac{\delta t}{\delta s} = \frac{\delta\phi}{\delta s} = \frac{1}{R}$$

Además, puesto que el vector  $\delta\mathbf{t}$  está orientado en el sentido de la normal  $\mathbf{n}$  y en el límite, la expresión anterior puede escribirse como

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}.$$

Substituyendo esta expresión y la definición (6.3) en (6.4), obtenemos finalmente

$$\frac{d\vec{V}_h}{dt} = \vec{t} \frac{dV}{dt} + \vec{n} \frac{V^2}{R}. \quad (6.5)$$

Esta expresión es vista en relación a un inercial fijo. Para el caso de un referencial no inercial como el de la tierra, hay que considerar además la fuerza de Coriolis la cual está orientada en el sentido de la normal. Por otro lado, el sistema de coordenadas naturales el gradiente de presión tiene dos componentes; uno en  $s$  y otro en  $n$ . Se puede escribir entonces la ecuación del movimiento en coordenadas naturales como,

$$\vec{t} \frac{dV}{dt} + \vec{n} \frac{V^2}{R} + fV\vec{n} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \vec{t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \vec{n}$$

En esta ecuación, el tercer término en el lado izquierdo representa el efecto de Coriolis y los del lado derecho corresponden a la fuerza del gradiente de presión.

Esta ecuación vectorial se puede dividir en dos ecuaciones por componentes

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (6.6)$$

$$\frac{V^2}{R} + fV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}. \quad (6.7)$$

Las ecuaciones (6.6) y (6.7) expresan el balance de fuerzas paralelo y normal a la dirección del flujo, respectivamente. Nótese que, de acuerdo con la ecuación (6.6), el aire que fluye hacia un centro de baja presión se acelera. Al contrario, el aire que fluye desde un centro de alta presión se desacelera. Para el aire que fluye a lo largo de las isobaras,  $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$  y el módulo de la velocidad no cambia. En este caso, el viento es equilibrado por los tres términos de la ecuación (6.7). Veamos algunos casos particulares de esta ecuación.

#### 6.1.1. Viento geostrófico ( $v^2/r = 0$ , $vf \neq 0$ $\partial p/\partial n \neq 0$ )

Cuando el radio de curvatura es muy grande,  $R \rightarrow \infty$ , el primer término de (6.7) desaparece quedando el balance entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presión analizado en el capítulo 2. El viento geostrófico es una buena aproximación del viento real observado en la atmósfera sobre todo en la circulación no perturbada a gran escala. Si el radio de curvatura es muy grande, el viento geostrófico fluye por trayectorias rectilíneas como acertadamente se mencionó en el capítulo 2.

#### 6.1.2. Viento de gradiente ( $v^2/r \neq 0$ , $vf \neq 0$ $\partial p/\partial n \neq 0$ )

Cerca a los centros de baja o alta presión, el viento gira por trayectorias curvadas. Una buena aproximación al viento real en este caso es el viento de gradiente. Este resulta de un equilibrio entre las fuerzas de gradiente de presión,  $-\nabla p$ , Coriolis,  $C_o$ , y centrífuga,  $C_e$ . Por eso en este caso se conservan los tres términos de la ecuación (6.7).

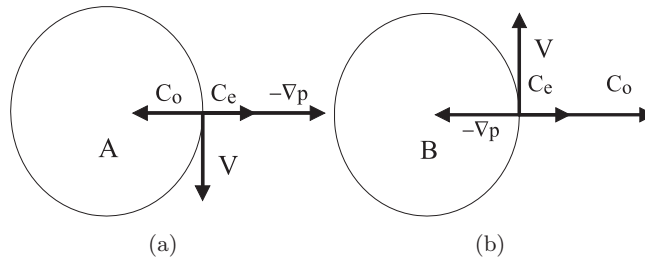


Figura 6.2. Distribución de fuerzas en el viento de gradiente alrededor de a) alta presión, b) baja presión.

En la figura 6.2 se ha representado el equilibrio de estas tres fuerzas para

el caso de una alta presión (figura 6.2(a)) y alrededor de una baja presión (figura 6.2(b)). En el primer caso, el viento gira en el sentido de las manecillas del reloj, circulación anticiclónica; y en el segundo, en contra de las manecillas del reloj o circulación ciclónica. Ambos casos son válidos en el hemisferio norte. En el hemisferio sur, se invierte el sentido de la circulación ciclónica y anticiclónica.

La solución de (6.7) para  $V$  es

$$V = -\frac{fR}{2} \pm \left( \frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \right)^{1/2}. \quad (6.8)$$

No todas las raíces en (6.8) son posibles, ya que  $V$  debe ser un escalar no negativo. Por ejemplo, en el caso de una circulación ciclónica se debe retener solo la raíz negativa. (Esto se observa escribiendo a (6.8) como,

$$V = -\frac{fR}{2} \left\{ 1 \mp \left( 1 - \frac{4}{\rho R f^2} \frac{\partial p}{\partial n} \right)^{1/2} \right\}. \quad (6.8a)$$

y recordando que, en este caso;  $\partial p / \partial n < 0$  y  $R > 0$ ).

Una particularidad de (6.8a) es que, en el caso de un anticiclón ( $R < 0$ ,  $\partial p / \partial n < 0$ ), para que la expresión dentro del radical no sea negativa, debe cumplir la condición

$$\frac{\partial p}{\partial n} < \frac{\rho R f^2}{4} \quad (6.9)$$

En este caso, el gradiente de presión en un anticiclón no puede ser mayor que cierto valor crítico. Tal limitación no existe en el caso de un ciclón. Aquí se explica porqué el campo de la presión en un anticiclón es más suave que en el de un ciclón. El hecho de que el radio de curvatura en los anticiclones sea mayor que en los ciclones también es una consecuencia de la desigualdad (6.9).

#### 6.1.2.1. Aplicación del viento de gradiente en latitudes cercanas al ecuador

Resolviendo (6.9) con respecto al parámetro de Coriolis,

$$f > \sqrt{\frac{4}{\rho R} \frac{\partial p}{\partial n}}. \quad (6.9a)$$



Esto significa que en latitudes cercanas al ecuador no pueden existir anticiclones con gradientes significativos de presión. Esta restricción no existe para el caso de una depresión ciclónica. Esta conclusión está de acuerdo con lo que se observa en la práctica sinóptica en bajas latitudes. La desigualdad (6.9a) puede interpretarse también en el sentido de que para ciertos valores dados del gradiente de presión no pueda existir más flujo de gradiente en cercanías al ecuador y el viento fluya cruzando las isobaras directamente desde la alta presión hacia la baja.

### 6.1.3. Flujo inercial ( $\partial p/\partial n = 0$ , $v^2/r \neq 0$ , $vf \neq 0$ )

El flujo inercial no requiere la presencia de un gradiente de presión y es raramente observado en la atmósfera. En este caso,

$$\frac{V^2}{R} + fV = 0. \quad (6.10)$$

Solucionando esta ecuación con relación a  $R$ ,

$$R = -V/f. \quad (6.11)$$

La ecuación (6.11) indica que el flujo inercial es anticiclónico. En cercanías al ecuador,  $R \rightarrow \infty$ , esto significa que el flujo inercial no puede tener una trayectoria cerrada, aunque conserva su carácter anticiclónico a lado y lado del ecuador (Haltiner & Martin, 1957).

### 6.1.4. Flujo ciclostrofico ( $vf = 0$ , $v^2/r \neq 0$ , $\partial p/\partial n \neq 0$ )

Un flujo ciclostrofico es aquel determinado por el balance entre la fuerza centrífuga y el gradiente de presión. En este caso, de acuerdo con la ecuación (6.7),

$$\frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}$$

o también

$$V = \sqrt{-\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}}. \quad (6.12)$$

Note que, de acuerdo con la ecuación (6.12), el flujo ciclostrofico solo puede existir alrededor de una baja presión. En este caso, el viento puede girar

en contra o en el sentido de las manecillas del reloj, como se representa en las figuras 6.3a y 6.3b, respectivamente.

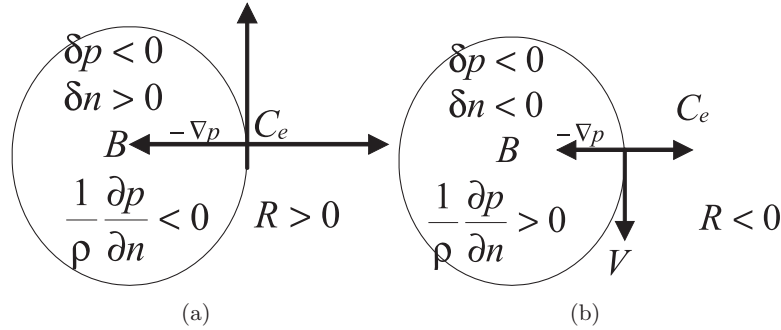


Figura 6.3. Flujo ciclostrofico girando: a) en contra de las manecillas del reloj; b) en el sentido de las manecillas del reloj.

Un ejemplo de viento ciclostrofico puede ser un tornado en estado maduro de desarrollo. En esta etapa el viento alcanza 30 m/s a una distancia de 300 m del centro. Para saber si la fuerza de Coriolis puede ser despreciada se establece la relación entre fuerzas:

$$\frac{V^2/R}{fV} = \frac{V}{fR} \cong 10^3 = R_0,$$

lo cual produjo un número de Rossby grande, por tanto la fuerza de Coriolis puede despreciarse al calcular el balance de fuerzas. La mayoría de los tornados observados en latitudes medias giran en contra de las manecillas del reloj. Sin embargo, en otros torbellinos menores, no se ha notado una preferencia por el sentido de la circulación, habiendo sido observados torbellinos que giran tanto en contra como en el sentido de las manecillas del reloj.

## 6.2. Variación del viento geostrofico con la altura. Viento térmico

Hasta el momento se ha analizado el comportamiento del viento geostrofico en un nivel dado; la superficie de 850hPa, por ejemplo. Tratemos ahora de entender cómo se comporta el viento geostrofico en los diferentes niveles de la atmósfera. ¿Puede el viento geostrofico permanecer constante en altura? La respuesta a este interrogante se dará al final de este capítulo. El cambio del viento con la altura está asociado, como es de esperar, al valor en cada

nivel del gradiente horizontal de presión. Sin embargo, el cambio del viento con la altura también está estrechamente ligado al cambio horizontal de la temperatura.

Considere dos puntos  $a$  y  $b$  sobre la superficie de la tierra a la misma presión  $P_a(z_1) = P_b(z_1)$  y con temperaturas  $T_a(z_1)$  y  $T_b(z_1)$ , respectivamente. Calcule la presión sobre esos puntos en diferentes niveles de la atmósfera usando la relación de estática (3.9):

$$p = \frac{p_o}{e^{gz/RT(z)}} \quad (6.13)$$

Inicialmente suponga que las temperaturas en la superficie de la Tierra son iguales,  $T_a(z_1) = T_b(z_1)$  como se representa en la figura 6.4(a). En este caso la fórmula (6.13) arroja el mismo resultado para ambos puntos en un mismo nivel. Esto significa que, a una altura  $z$ , la presión sobre los puntos  $a$  y  $b$  es igual y ambos puntos se encuentran sobre una misma superficie isobárica. A la altura  $z$ , los dos puntos  $P_a(z)$  y  $P_b(z)$  siempre se encontrarán sobre una misma superficie isobárica. Estas superficies, representadas en la figura 6.4(a) con líneas continuas, son paralelas al plano del horizonte y, como no existe gradiente de presión, el viento

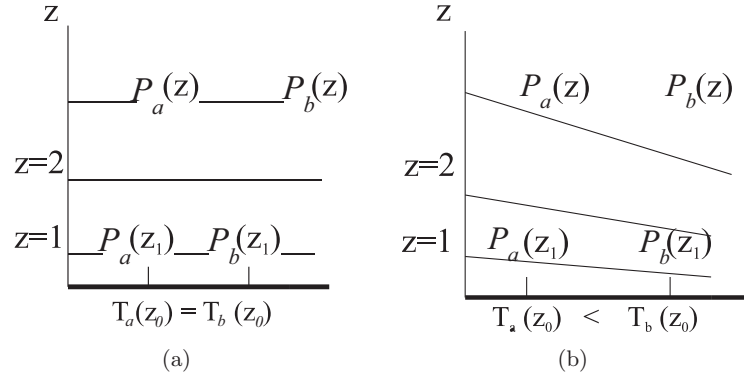


Figura 6.4. Cuando las temperaturas en superficie son iguales, las isobaras son paralelas al plano del horizonte y el viento geostrófico es cero en todos los niveles. b). Para temperaturas en superficie diferentes, las isobaras se inclinan respecto al plano del horizonte, el viento geostrófico es diferente de cero y aumenta con la altura.

geostrófico es cero. ¿Qué sucede cuando las temperaturas  $T_a$  y  $T_b$  son diferentes? (Por ejemplo  $T_a < T_b$ , como en el caso de la figura 6.4(b)). De acuerdo a la ecuación (6.13), la presión en el punto  $b$  (aire más caliente) es mayor que en el punto  $a$  (aire más frío). (En general, como se anotó en el capítulo

3, la presión sobre el aire frío cae más rápido que sobre el aire más caliente). De aquí se desprende que, a una misma altura  $z$ , la presión en el punto  $P_a(z_1)$  es menor que en el punto  $P_b(z_1)$ , y ambos puntos ya no pueden encontrarse más sobre una misma superficie isobárica. En este caso, existe un gradiente horizontal de presión y, como es lógico, el viento geostrófico es diferente de cero. A medida que ascendemos, la diferencia de presión entre los puntos  $a$  y  $b$  es cada vez mayor, en consecuencia, *la intensidad del viento geostrófico aumenta con la altura*. Las isobaras en este caso se inclinan con relación al plano del horizonte. Esto muestra que el cambio del viento geostrófico con la altura está estrechamente ligado al comportamiento del gradiente horizontal de temperatura. Esta discusión lleva a un concepto más amplio, llamado *viento térmico*, el cual se deriva a continuación.

Las expresiones básicas que se utilizarán son la ecuación de estática en coordenadas isobáricas (4.43) escrita en la forma

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad (6.14)$$

y las ecuaciones del viento geostrófico en coordenadas isobáricas, obtenidas al despreciar el término inercial en las ecuaciones (4.35) y (4.36):

$$v_g = \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (6.15)$$

$$u_g = -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (6.16)$$

Derivando la ecuación (6.15) con respecto a la presión y aplicando (6.14),

$$\frac{\partial v_g}{\partial p} = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{RT}{p} \right) = -\frac{R}{pf} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$$

o también

$$p \frac{\partial v_g}{\partial p} \equiv \frac{\partial v_g}{\partial \ln p} = -\frac{R}{f} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$$

Integrando esta ecuación,

$$v_g(p_1) - v_g(p_0) = -\frac{R}{f} \int_{p_0}^{p_1} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) d \ln p$$

Cambiando la temperatura  $T$  por la temperatura media de la capa, el gradiente de temperatura puede sacarse de la expresión dentro de la integral. Entonces,

$$v_g(p_1) - v_g(p_0) = \frac{R}{f} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \ln \frac{p_0}{p_1} = v_T. \quad (6.17)$$

Operando de manera similar sobre la expresión (6.16) se obtiene la ecuación

$$u_g(p_1) - u_g(p_0) = -\frac{R}{f} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \ln \frac{p_0}{p_1} = u_T. \quad (6.18)$$

En las expresiones (6.17) y (6.18),  $u_T$  y  $v_T$  se llaman las componentes zonal y meridional del *viento térmico*, respectivamente. Es fácil probar que, en lugar de estas dos últimas ecuaciones, se puede escribir una sola ecuación vectorial.

$$\vec{V}_T = \vec{V}_g(p_1) - \vec{V}_g(p_0) = \frac{R}{f} (\vec{k} \times \vec{\nabla} \bar{T}) \ln \frac{p_0}{p_1}. \quad (6.19)$$

A la ecuación (6.19) se le conoce con el nombre de viento térmico. De acuerdo con esta ecuación y la figura 6.5(a), el viento térmico sopla paralelo a las isothermas dejando las bajas temperaturas a la izquierda (en el hemisferio norte). En otras palabras, el viento térmico fluye de manera similar al viento geostrófico.

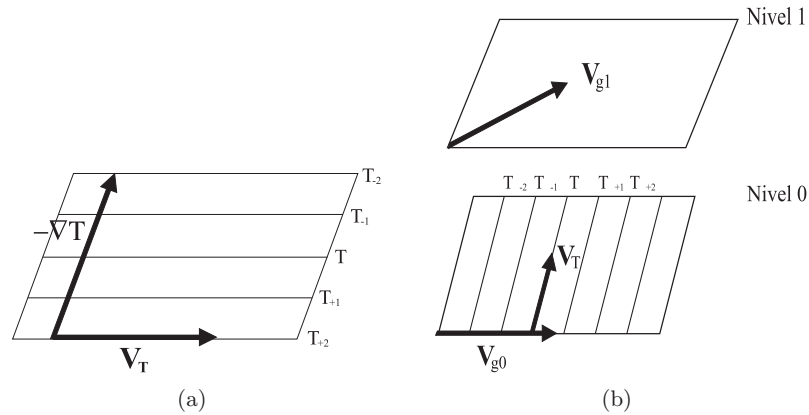


Figura 6.5. (a) Orientación del viento térmico dejando las bajas temperaturas a la izquierda en el hemisferio norte, (b) Giro del viento geostrófico con la altura, debido a la acción del viento térmico.

El viento térmico puede calcularse usando la diferencia de geopotencial en dos niveles. En efecto, integrando la ecuación (6.14), se obtiene

$$\int_{\Phi_1}^{\Phi_0} d\Phi = -R \int_{p_1}^{p_0} \frac{T}{p} dp; \Rightarrow \Phi_1 - \Phi_0 = R \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right) \bar{T},$$

donde  $T$  es la temperatura media de la capa. Aplicando el operador nabla a ambos lados de esta última expresión y multiplicando por  $\frac{1}{f}(\vec{k} \times)$ , es fácil verificar que se obtiene la expresión

$$\vec{V}_T = \frac{1}{f} \vec{k} \times \vec{\nabla}(\Phi_1 - \Phi_0). \quad (6.20)$$

Para regiones cercanas al ecuador, tanto la expresión (6.19) como la expresión (6.20) no son aplicables, ya que en ellas aparece la división por el parámetro de Coriolis  $f$ .

Otra conclusión importante puede obtenerse analizando la componente meridional del viento térmico (6.18). En latitudes medias, el flujo predominante es del oeste, quedando las bajas temperaturas a la izquierda (figura 6.5(a)). En consecuencia, a medida que se avanza desde el ecuador hacia el polo (en el sentido positivo del eje  $0y$ ),  $\partial T / \partial y$  es negativo y el término en el lado derecho de (6.18) se torna positivo. Esto significa que la diferencia entre los dos términos que componen el lado derecho de esta misma ecuación es positiva y, por tanto, el viento geostrófico aumenta con la altura.

Esta conclusión se apoya en por los mapas medios de viento zonal, como se observa en la figura 6.6, tomada de Krishnamurti (1979). En esta figura, el valor máximo observado a una altura de 200 hPa y en la latitud de  $30^\circ$  N coincide con la posición de la *corriente en chorro*.

En latitudes medias, el viento térmico puede aplicarse para intuir advección de frío o de calor en un punto dado de acuerdo con giro del viento en altura. Por ejemplo, si el viento gira con la altura en contra de las agujas del reloj, la advección es de frío. Esto puede deducirse observando la figura 6.5(b): el viento en el nivel 1,  $V_{g1}$ , es la suma del viento geostrófico en el nivel 0,  $v_{g0}$ , más el viento térmico medio de la capa comprendida entre los niveles cero y uno  $\vec{V}_T$ . Como resultado de esa suma, entre los niveles 0 y 1, el viento giró en contra de las manecillas del reloj (a la izquierda), que corresponde a advección de frío.

La ecuación del viento térmico, una herramienta de diagnóstico extremadamente útil, se emplea para *chequeos de consistencia* entre los campos

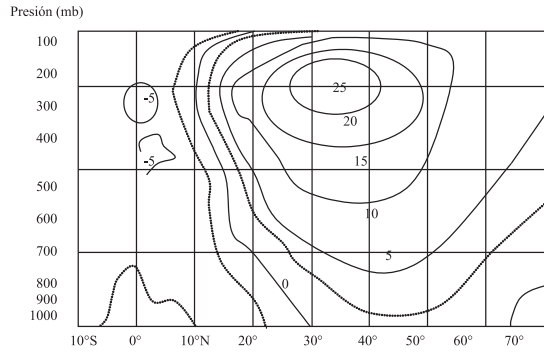


Figura 6.6. Componente zonal media del viento en el hemisferio norte. Tomado de Krishnamurti (1979).

observados de viento y temperatura. Esto se aplica al construir *análisis objetivo* de los campos meteorológicos

Ahora se puede responder al interrogante formulado al comienzo de esta sección. En el capítulo 2 se afirmó que, en una atmósfera barotrópica, las isobaras y las isotermas son paralelas, es decir, las isotermas son definidas por las isobaras. Esto significa que en una atmósfera barotrópica no pueden existir gradientes horizontales de temperatura. En consecuencia, la ecuación (6.19) produce

$$\vec{V}_g(p_1) = \vec{V}(p_0) = \text{const.}$$

Por tanto, en el caso particular de una atmósfera barotrópica, el viento geostrófico no cambia con la altura.

### Ejercicios.

1. Un tornado gira con una velocidad angular constante  $\omega$ . Muestre que la presión en superficie en el centro del tornado está dada por

$$P = P_0 e^{\frac{-\omega^2 r_0^2}{2RT}}$$

donde  $P_0$  es la presión de superficie a una distancia  $r_0$  del centro,  $T$  es la temperatura y  $R$  la constante de los gases. Siendo  $T = 288^\circ \text{K}$ , la presión = 1000 mb, a 100 m del centro, y la velocidad = 100 m/s también a 100 m del centro, ¿cual es la presión en el centro del tornado?

2. Calcule la velocidad del viento geostrófico en m/s para un gradiente de presión de 1 mb/100 km. y compare con todas las posibles velocidades de viento de gradiente para el mismo gradiente de presión y radio de curvatura =  $\pm 500$  km. Tome  $\rho = 10^{-3}$  gm cm<sup>3</sup> y  $f = 10^{-4}$  s<sup>-1</sup>.
3. Determine el cociente máximo posible entre la velocidad del viento de gradiente en el anticiclón y la velocidad del viento geostrófico para el mismo gradiente de presión.
4. Las líneas de espesor 1000 – 500 mb son dibujadas a intervalos de 60 m. ¿Cuál es el intervalo de temperatura media aproximada?
5. La temperatura media en el nivel entre 750 y 500 mb decrece hacia el este a 3° C/100 km. Si el viento geostrófico en 750 mb es 20 m/s de dirección sudeste ¿cual es la velocidad y la dirección del viento geostrófico en 500 mb?
6. ¿Cual es la advección de temperatura media en la capa 750 – 500 mb del problema 5?



## 7

# Movimientos verticales y estabilidad estática

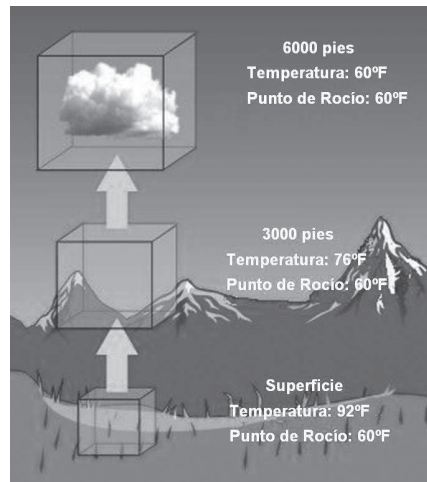


Imagen tomada de [http:// www.srh.noaa.gov/jetstream/synoptic/clouds.htm](http://www.srh.noaa.gov/jetstream/synoptic/clouds.htm)

Cortesía de la NOAA.

En el capítulo anterior se analizaron algunos casos en los cuales el movimiento en la atmósfera está confinado a un plano horizontal. Esta propiedad de "horizontalidad" del movimiento, como en el caso del viento geostrófico, está evidentemente marcada en latitudes extratropicales donde, como se señala en la introducción, los gradientes de temperatura son significativos. En latitudes

bajas, las diferencias horizontales de temperatura son débiles y el estado del tiempo frecuentemente está asociado a la formación de movimientos convectivos o verticales. Por este motivo, es conveniente analizar las relaciones que caracterizan el desarrollo de este tipo de movimiento. Las relaciones que sirven para diagnosticar el movimiento vertical y la convección pueden ser de tipo dinámico, como la velocidad vertical, la divergencia y la conservación de la vorticidad potencial, o que consideran la estructura térmica de la atmósfera, como la estabilidad estática y la energía de inestabilidad. Otros métodos más perfeccionados, dirigidos a determinar la convección atmosférica, son el modelo de chorro estacionario y los modelos de nubes. Algunos de estos métodos se examinarán en este capítulo. Los temas de este capítulo pueden ser consultados en Krishnamurti (1998), Holton (1992), Haltiner and Williams (1979).

## 7.1. Movimiento vertical

Al analizar el movimiento vertical es conveniente diferenciar la velocidad vertical asociada al levantamiento lento de masas de aire en mesoescala o escala mayor y la velocidad vertical desarrollada por movimientos convectivos relativamente rápidos. La primera es del orden de centímetros por segundo y será analizada en el presente capítulo; la segunda es de 4 a 8 m/s. En casos aislados de tormentas severas, puede alcanzar hasta 15, 18 m/s y más. Este tipo de movimiento será analizado más adelante. El cálculo de la velocidad vertical es una de las tareas más difíciles de realizar. Esto se debe a que, por un lado, como fue anotado en el capítulo 5, la divergencia horizontal es de un orden de magnitud inferior a cada uno de los demás términos y por el otro, debido a errores en las observaciones. Por este motivo, se ha sugerido diferentes métodos para el cálculo de la velocidad vertical. Básicamente existen cuatro métodos: el método cinemático, el adiabático, el de la ecuación de vorticidad y el de la ecuación omega. El primero es el más inexacto de los cuatro; los dos siguientes utilizan las ecuaciones de la termodinámica y la de vorticidad, respectivamente; y el último considera ambos factores.

### 7.1.1. Método cinemático para el cálculo de la velocidad vertical

En este método la velocidad vertical se obtiene integrando la ecuación de continuidad. En efecto, integrando la ecuación (4.40) desde un nivel de referencia  $p_s$  hasta un nivel  $p$ , se obtiene, (nótese que se eligió la ecuación de continuidad

escrita en coordenadas isobáricas por no contener el parámetro densidad. Esta aproximación solo es válida en el caso de equilibrio hidrostático)

$$\omega(p) = \omega(p_s) - \int_{p_s}^p (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})_p dp, \quad (7.1)$$

donde el subíndice  $p$  indica que la divergencia se toma sobre una superficie isobárica. La manera de aplicar esta fórmula es la siguiente: supongamos que existen  $n + 1$  niveles, como los representados en la figura 7.1(b), que en el primer nivel  $p_s$  la velocidad vertical es cero y que se conoce la divergencia media entre ese nivel y el nivel 1. Entonces, la velocidad vertical para el nivel 1 se calcula como

$$\omega(p_1) = 0 - \int_{p_1}^{p_s} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})_{1,s} dp,$$

De esta misma manera se calcula la velocidad en el nivel 2:

$$\omega(p_2) = \omega(p_1) - \int_{p_1}^{p_2} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})_{2,1} dp,$$

y así sucesivamente hasta llegar al nivel  $n$ . Veamos ahora como se calcula la divergencia

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Suponga que se conoce los valores de  $u$  y  $v$  en los puntos de una grilla, obtenidos por algún método de análisis objetivo. Entonces, para calcular la divergencia se puede utilizar la representación en diferencias finitas

De acuerdo con la figura 7.1(a), la divergencia en el punto  $(x_0, y_0)$  puede calcularse con ayuda de la siguiente fórmula, que utiliza diferencias finitas de forma centrada:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = & \frac{u[(x_0 + \delta x), y_0] - u[(x_0 - \delta x), y_0]}{2\delta x} \\ & + \frac{v[x_0, (y_0 + \delta y)] - v[x_0, (y_0 - \delta y)]}{2\delta y}, \end{aligned} \quad (7.2)$$

Esta fórmula se aplica en todas las superficies isobáricas consideradas. La divergencia media se consigue tomando el valor medio entre dos capas consecutivas. Por supuesto, cuanto más fina sea la capa considerada más exacto será el valor de la integral.

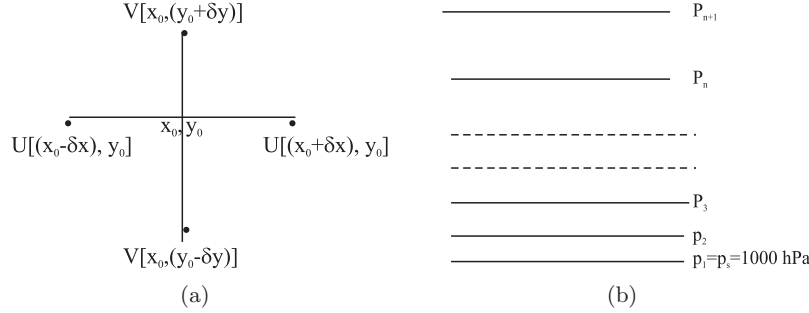


Figura 7.1. (a) Representación en diferencias finitas, para el cálculo de la divergencia en el punto  $x_0, y_0$ , (b) Representación esquemática para el cálculo de la velocidad vertical.

A pesar de que la divergencia en (7.1) se calcula por métodos aún más sofisticados que el expuesto por la fórmula (7.2) y que la integral en la parte derecha de (7.1) se toma por un método también suficientemente perfeccionado, el valor de la velocidad vertical calculado con ayuda de (7.1) no es muy exacto. Esto se puede probar integrando la divergencia por toda la profundidad de la capa (o sea la troposfera). Como es de esperar, de acuerdo con la ecuación de continuidad, el resultado obtenido debe ser cero.

$$\int_{p_s}^0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dp = 0 \quad (7.3)$$

Cuanto más se aparte de cero el valor obtenido en (7.3) mayor es el error cometido en el cálculo de la velocidad vertical. Una manera de mejorar el cálculo es suponer que el error cometido en (7.1) es proporcional al valor absoluto de la divergencia (Krisnhamurti, 1998) y calcular un valor ajustado de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} \vec{V} \Big|_a = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n + \epsilon \left| \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n \right|, \quad (7.4)$$

donde los subíndices  $a$  y  $n$  indican valores de la divergencia ajustado y no ajustado, respectivamente. El parámetro  $\epsilon$  se calcula teniendo en cuenta que

$$\int_{p_s}^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \Big|_a dp = 0 \quad (7.5)$$

Se obtiene el coeficiente de proporcionalidad  $\epsilon$  integrando (7.4) desde  $p_s$  hasta 0 y teniendo en cuenta (7.5),

$$\epsilon = - \frac{\int_{p_s}^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n dp}{\int_{p_s}^0 |\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n| dp} \quad (7.6)$$

Sustituyendo este valor en (7.1), se obtiene la suficiente expresión para el cálculo de la velocidad vertical en el nivel  $p$

$$\omega(p) = \omega(p_s) - \int_{p_s}^p \left\{ \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n - \frac{\int_{p_s}^0 \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n dp}{\int_{p_s}^0 |\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n| dp} |\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_n| \right\} dp \quad (7.7)$$

Un problema computacional que se presenta al hacer el cálculo por la fórmula (7.7) es que si en todos los niveles la divergencia es del mismo signo, la parte derecha de (7.7) da como resultado cero. Algo similar sucedería en el supuesto caso de que todos los valores de la divergencia fueran negativos. En este caso, el valor ajustado de la divergencia sería dos veces el valor no ajustado.

### 7.1.2. Método adiabático

Este método se basa en el uso de la ecuación (4.42). En efecto, para el caso adiabático y en el plano  $xy$ , esta ecuación se escribe

$$\omega = \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (7.8)$$

Al usar esta ecuación, la dificultad está en el cálculo del cambio local de la temperatura y en el cumplimiento de la hipótesis de adiabaticidad.

## 7.2. Estabilidad estática en la atmósfera

La estabilidad estática o método de la parcela es una de las relaciones que considera la estructura térmica de la atmósfera. La otra es el concepto de energía de inestabilidad. Ambas relaciones son muy útiles y se emplean para diagnosticar los movimientos verticales o convectivos con fines de predicción local y en los modelos atmosféricos. Sin embargo, como se verá más adelante, ambos métodos tienen limitaciones.

### 7.2.1. Método de la parcela para una atmósfera sub-saturada

Al introducir este método es conveniente diferenciar su aplicación para una atmósfera no saturada y para el caso de una atmósfera saturada. Imagine una parcela de aire, por ejemplo un sistema cerrado, que asciende adiabáticamente con densidad  $\rho$ , temperatura  $T$  y presión  $p$ , diferentes a las del medio circundante  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{T}$  y  $\bar{p}$ , el cual permanece no perturbado y en estado de equilibrio hidrostático. (Este modelo sirve para la demostración, aunque es muy restringido y en cierta forma representa una ficción al considerar la parcela como un sistema cerrado). La tercera ecuación del movimiento para una partícula que se desplaza verticalmente se escribe como,

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g.$$

El medio ambiente está representado por la ecuación de equilibrio hidrostático,

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\bar{\rho}g.$$

Suponiendo que la presión dentro de la parcela se adapta instantáneamente a la presión del medio ambiente, o sea  $\frac{\partial p}{\partial z} \cong \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$ , combinando las dos expresiones anteriores se obtiene

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} (-\bar{\rho}g) - g = g \left( \frac{\bar{p}}{\rho} - 1 \right).$$

Usando la ecuación de estado y utilizando de nuevo la aproximación cuasi-estática ( $p = \bar{p}$ ),

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{T}} (T - \bar{T}). \quad (7.9)$$

La ecuación (7.9) indica que cuando la partícula está más caliente que el medio ( $T > \bar{T}$ ), experimenta una aceleración positiva. En este caso la atmósfera es inestable porque posibilita el desarrollo de movimientos verticales. Al contrario, cuando la partícula está mas fría que el medio ( $T < \bar{T}$ ), la atmósfera es estable y no facilita el desarrollo de movimientos convectivos. Por último, para el caso en que  $T = \bar{T}$ ,  $\Rightarrow dw/dt = 0$ , la atmósfera es indiferente (neutra). La fórmula (7.9) sirve de fundamento de uno de los métodos más sencillos para el pronóstico de tormentas eléctricas y lluvias convectivas en el trópico. Este método, también llamado método del *índice de Showalter*, consiste en calcular la diferencia  $\bar{T} - T$ , en el nivel de 500 Mb. Cuanto más negativa sea esta diferencia mayor es la probabilidad de aparición de tormentas eléctricas y lluvias convectivas.

Para derivar el criterio de estabilidad estática suponga que, para pequeños desplazamientos, se puede representar la temperatura alrededor de un punto a través de una serie de Taylor.

$$T(z_0 + \Delta z) = T(z_0) + \frac{dT}{dz} \Delta z$$

$$\bar{T}(z_0 + \Delta z) = \bar{T}(z_0) + \frac{d\bar{T}}{dz} \Delta z.$$

Se supone además, que en el punto inicial las temperaturas del medio y de la partícula coinciden,  $\bar{T}(z_0) = T(z_0)$ . Entonces la ecuación (7.9) se escribe como

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{T}} \left( \frac{dT}{dz} - \frac{d\bar{T}}{dz} \right) \Delta z.$$

Para un proceso adiabático, recordando las definiciones (4.19) y (4.22), esta expresión puede escribirse

$$\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{T}} (\gamma - \gamma_a) \Delta z. \quad (7.10)$$

La ecuación (7.10) indica que la condición de estabilidad de la atmósfera también puede expresarse a través del gradiente de la temperatura absoluta. En otras palabras, si en la atmósfera se establece un gradiente de temperatura mayor que el gradiente adiabático seco (gradiente de la parcela), la atmósfera es inestable; para un gradiente de temperatura en la atmósfera menor que el adiabático seco, la atmósfera es estable. Combinando esta expresión con la ecuación (4.23), se obtiene

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz} \Delta z. \quad (7.11)$$

El parámetro  $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{d\bar{\theta}}{dz}$  es una medida de la *estabilidad estática* de la atmósfera y se llama frecuencia de *Brunt-Vaisala*. (El nombre de frecuencia se debe a que la ecuación (7.11) también puede ser escrita en forma de una ecuación oscilatoria,  $\frac{d^2 z}{dt^2} = -N^2 \Delta z$ . Holton, 1992). De la ecuación (7.11) puede escribirse el siguiente criterio de estabilidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &< 0 \quad \text{inestable} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &= 0 \quad \text{neutro} \\ \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} &> 0 \quad \text{estable} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Para mostrar el uso de este concepto, recuerde que según a la ecuación de la termodinámica (4.24) para un proceso adiabático; (o sea sin cambio de fase), la temperatura potencial se conserva. Considere por ejemplo una parcela que sube a partir del nivel 0 (figura 7.2) con la misma temperatura potencial  $\theta_0$ , de  $297.3^\circ\text{K}$ , hasta el nivel de 2000 m. Al comparar este valor con la temperatura potencial en este nivel,  $\theta_1 = 307^\circ\text{K}$ , notamos que la parcela está más fría que el medio circundante. En este caso se dice que la atmósfera está estratificada establemente en este trayecto. Así mismo, para este trayecto, el gradiente de la temperatura potencial es

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \cong \frac{\theta_1 - \theta_0}{2000 - 0} = \frac{307 - 297.3}{2000} > 0.$$

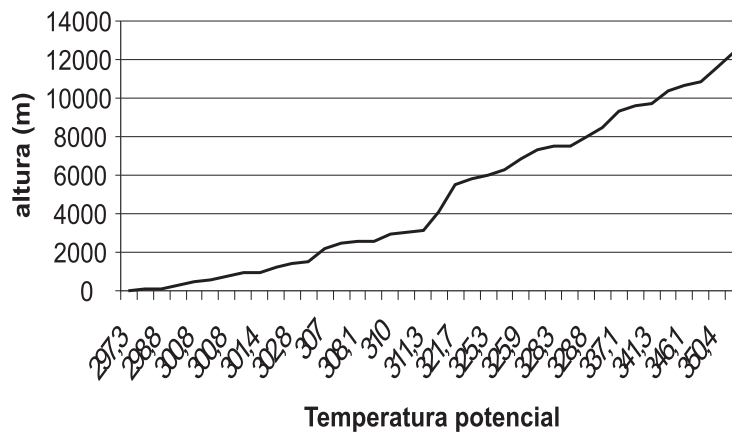


Figura 7.2. Perfil vertical de la temperatura potencial observada en Kingston el día 21 de abril de 2005.

De acuerdo con la fórmula (7.12) la estabilidad estática de una parcela de aire seco depende del gradiente vertical de la temperatura potencial. Esta fórmula también es válida para una parcela húmeda no saturada hasta el nivel de condensación. A partir de este nivel, el aire está saturado y comienza a liberarse calor latente; por tanto, la parcela se calienta. Para tener en cuenta este efecto, se puede considerar un nuevo concepto: la temperatura potencial equivalente, o construir el gradiente pseudo-adiabático. Este sirve para, más adelante, implementar el método de energía de inestabilidad.



### 7.2.2. Método de la parcela para una atmósfera saturada

Considere ahora la aplicación del método de la parcela arriba del nivel de condensación.

#### 7.2.2.1. Temperatura potencial equivalente

La temperatura potencial equivalente  $\theta_e$  es la temperatura potencial que una parcela de aire tendría si toda la humedad se condensara y el calor latente liberado se utilizase para calentar la parcela. En otras palabras, una parcela de aire alcanza su temperatura potencial equivalente si se eleva desde su origen hasta que todo el vapor de agua se condense y luego desciende comprimiéndose adiabáticamente hasta una presión de 1000 mb. Puesto que a partir del momento en el cual se inicia el descenso, la parcela no contiene humedad ni tampoco libera más calor latente, el descenso se hace por la adiabática seca; en consecuencia, la partícula llega a su nivel de origen con una temperatura más alta que la inicial. La expresión para la temperatura potencial equivalente se puede obtener a partir de la ecuación de conservación de la energía (4.24), suponiendo que la única fuente de calor es la debida al cambio de fase. En este caso,  $dQ = -L_e dq_s$ , donde  $dq_s$  es la relación de mezcla de agua condensada y  $L_e$  es el calor latente de evaporación. Haciendo estas sustituciones en (4.24), se obtiene

$$\frac{d \ln \theta}{dt} = -\frac{L_e}{c_p T_{sat}} \frac{dq_s}{dt} \quad (7.13)$$

donde  $T_{sat}$  es la temperatura de saturación de la parcela. esta ecuación puede escribirse en forma aproximada de la siguiente manera:

$$d \ln \theta = -d \left( \frac{L_e q_s}{c_p T_{sat}} \right). \quad (7.14)$$

En este caso se ha supuesto que la tasa de cambio de  $q_s$  es mucho mayor que la de  $T_{sat}$ . Integrando esta última expresión desde  $\theta$  hasta  $\theta_e$  y desde  $q_s$  hasta 0, se obtiene

$$\theta_e = \theta \cdot e^{\left( \frac{L_e q_s}{c_p T_{sat}} \right)}. \quad (7.15)$$

De acuerdo a la fórmula (7.15), la temperatura potencial equivalente es afectada por el calentamiento debido la liberación de calor latente, representada por el término  $L_e q_s / C_p$  por unidad de temperatura. Más exactamente, la temperatura potencial equivalente aumenta exponencialmente con este valor. La fórmula (7.15) también puede emplearse para el aire no saturado, teniendo en cuenta que en este caso la fórmula (7.15) se escribe como

$$\theta_e = \theta \cdot e^{\left(\frac{L_e q_v}{c_p T_{sat}}\right)}. \quad (7.15a)$$

donde  $q_v$  es la relación de mezcla actual de la parcela en su estado inicial y  $T_{sat}$  es la temperatura de la parcela si es expandida adiabáticamente hasta saturación. En consecuencia, la temperatura potencial equivalente puede emplearse para el aire saturado y para el no saturado. (Esto es importante. De lo contrario, la utilidad de la temperatura potencial sería limitada). Es preciso anotar que la temperatura potencial equivalente es conservativa. Esto significa que durante el tiempo de ascenso de una parcela desde su estado inicial hasta su estado final, su temperatura  $\theta_e$  permanece constante.

El criterio de estabilidad condicional<sup>1</sup> puede expresarse a través de la temperatura potencial equivalente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_e}{\partial z} &< 0 \quad \text{condicional inestable} \\ \frac{\partial \theta_e}{\partial z} &= 0 \quad \text{neutro} \\ \frac{\partial \theta_e}{\partial z} &> 0 \quad \text{absolutamente estable} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Se debe tener cuidado en la interpretación de este criterio de estabilidad, ya que como anota Holton (1992), si el aire está subsaturado, una diferencia en temperatura potencial equivalente entre dos niveles puede deberse a diferencia en contenido de humedad (fórmula (7.15a)) y no en temperatura, lo que realmente causa inestabilidad, o flotabilidad.

### 7.3. Gradiente pseudo-adiabático

Para derivar el gradiente pseudo-adiabático considere la relación de mezcla de saturación  $q_s$  definida como

$$q_s = 0.622 \frac{e_s}{p}$$

---

<sup>1</sup> Cuando la tasa de enfriamiento con la altura en la atmósfera es mayor que el gradiente adiabático seco, pero menor que el gradiente adiabático húmedo, el aire es condicionalmente estable o inestable, dependiendo del contenido de humedad. Si el aire está seco, entonces es condicionalmente estable; si está húmedo o saturado, el aire es condicionalmente inestable.

donde  $e_s$  es la tensión de saturación. Tomando el logaritmo de esta expresión y luego diferenciando con respecto a la altura  $z$ , se obtiene

$$\frac{1}{q_s} \frac{dq_s}{dz} = \frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dz} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

Así mismo, la ecuación de Clausius-Klappeyron se escribe como

$$\frac{1}{e_s} \frac{de_s}{dz} = \frac{L_e}{R_v T^2} \frac{dT}{dz},$$

donde  $L_e$  es el calor latente de evaporación y  $R_v$  es la constante de los gases para el vapor de agua. Sustituyendo esta última ecuación en la anterior, multiplicando por  $q_s$  y utilizando la ecuación de estado y la de hidrostática, se obtiene

$$\frac{dq_s}{dz} = \frac{q_s L_e}{R_v T^2} \frac{dT}{dz} + \frac{g q_s}{R_d T}, \quad (7.17)$$

donde,  $R_d$  es la constante de los gases para el aire seco, y  $R_v$  para el aire húmedo. Esta última ecuación indica que para conocer el cambio de la relación de mezcla con la altura es necesario definir cómo cambia la temperatura con la altura dentro de una parcela de aire húmedo saturado. Para ello, se utiliza el primer principio de la termodinámica, escrito en la forma (4.12). Suponiendo que la única fuente de calor se debe al cambio de fase, o sea,  $dQ = -e dq_s$ , donde,  $L_e$  es el calor latente de evaporación y  $-dq_s$  es el cambio de la relación de mezcla de saturación para el vapor de agua durante el cambio de fase, esta ecuación se escribe

$$-L_e dq_s = C_p dT + g \frac{T}{\bar{T}} dz,$$

donde, para escribir el último término en la parte derecha de la ecuación, se utilizan las ecuaciones de hidrostática y de estado. (Debido a que el incremento de masa de vapor de agua  $dq_s$  durante el proceso de condensación es negativo, el lado izquierdo de esta ecuación aparece con signo menos). Esta última ecuación también se puede escribir

$$-L_e \frac{dq_s}{dz} = C_p \frac{dT}{dz} + g \frac{T}{\bar{T}},$$

Multiplicando (7.17) por  $-L_e$  y colocando en ella la última expresión obtenida, resulta

$$C_p \frac{dT}{dz} + g \frac{T}{\bar{T}} = \frac{q_s L_e^2}{R_v T^2} \frac{dT}{dz} - \frac{g L_e q_s}{R_d T}.$$

Dividiendo entre  $C_p$ , reagrupando términos y recordando la definición de gradiente adiabático seco (4.19), se obtiene finalmente el gradiente pseudo-

adiabático  $\gamma_{psa}$ :

$$\frac{dT}{dz} = \gamma_a \frac{\left(1 + \frac{L_e q_s}{R_d T}\right)}{1 + \frac{L_e^2 q_s}{C_p R_v T^2}} = -\gamma_{psa} \quad (7.18)$$

### 7.3.1. Estabilidad condicional

De acuerdo con la fórmula (7.10), una atmósfera seca (también húmeda, pero no saturada) es estáticamente estable si el gradiente de la partícula  $\gamma_a$  es mayor que el gradiente del medio circundante  $\gamma$  (o, lo que es lo mismo, la temperatura potencial crece con la altura). Cuando el gradiente en la atmósfera se sitúa entre el gradiente pseudo-adiabático y el gradiente adiabático seco, o sea,  $\gamma_{psa} < \gamma < \gamma_a$ , la atmósfera está establemente estratificada con respecto a un desplazamiento adiabático seco, pero *condicionalmente inestable* con respecto a un desplazamiento pseudo-adiabático. En el emagrama, el ascenso de la partícula se construye con ayuda del gradiente adiabático seco hasta el nivel de condensación; a partir de allí con ayuda del gradiente pseudo-adiabático.

## 7.4. Energía de inestabilidad

Como se muestra para determinadas condiciones en la atmósfera, se pueden desarrollar movimientos convectivos de origen térmico. Los criterios de estabilidad contemplados, basados en la comparación de los gradientes de temperatura del medio y de la parcela, no son fáciles de aplicar en muchos casos para evaluar la intensidad de los movimientos verticales que se puedan desarrollar. En parte esto se debe a que, según la ecuación (7.10) o (7.17), tales criterios caracterizan el estado de la atmósfera en una capa delgada (exceptuando el caso en que los gradientes verticales son constantes), mientras que en la atmósfera se pueden desarrollar movimientos convectivos que alcanzan grandes alturas. Además, tales criterios no tienen en cuenta la diferencia inicial de temperatura entre la parcela y el medio ni son una medida cuantitativa de la energía cinética de los movimientos convectivos, la cual parece ser una caracterización más adecuada para la convección. Para explorar en este sentido, se analizará el método de la *energía de inestabilidad*. Una manera de derivar esta relación es la siguiente:

La energía de inestabilidad es el trabajo (por unidad de masa) realizado al transportar verticalmente la parcela de aire por acción de la fuerza de flotación. De acuerdo con esta definición y a la ecuación (7.9), se puede

escribir

$$dE = \frac{dw}{dt} dz = \frac{g}{\bar{T}} [T(z) - \bar{T}(z)] dz. \quad (7.19)$$

Es conveniente expresar el cambio  $dz$  en términos de cambio de la presión. Según la ecuación de hidrostática,

$$dz = -\frac{d\bar{p}}{\bar{\rho}g} = -\frac{R_d \bar{T}}{\bar{p}g} d\bar{p}.$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior, se obtiene

$$dE = -R_d [T(z) - \bar{T}(z)] d \ln \bar{p}.$$

Integrando esta ecuación,

$$E = -R_d \int_{p_0}^p [\bar{T}(p) - T(p)] d \ln \bar{p}. \quad (7.20)$$

La ventaja de usar esta característica de estabilidad es que la integral en (7.20) puede evaluarse en el emagrama como el área encerrada entre los perfiles de las temperaturas de la atmósfera y de la parcela, respectivamente. Otra manera de derivar el criterio de energía de inestabilidad es integrando directamente la ecuación 7.19) por la variable  $z$ . En este caso (recuerde que  $(dz/dt)dw = wdw$ ),

$$\frac{w_{\text{máx}}^2}{2} = \int_{p_0}^p g \left( \frac{T - \bar{T}}{\bar{T}} \right) dz \quad (7.21)$$

En esta ecuación, la parte izquierda es energía cinética máxima por unidad de masa, llamada con frecuencia energía potencial convectiva disponible, o CAPE, (de las palabras en inglés Convective Available Potential Energy). En las fórmulas (7.20) y (7.21) no se tiene en cuenta el efecto de flotabilidad debido al vapor de agua. (El efecto de flotabilidad debido al vapor de agua podría considerarse escribiendo la tercera ecuación de movimiento como  $\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - g0.605q_v$ , donde  $q_v$  es la relación de mezcla para el vapor de agua. Utilizando la aproximación de estática de manera similar, se obtiene  $\frac{dw}{dt} = \frac{g}{\bar{T}} (T - \bar{T} - 0.605q_v \bar{T})$ . Efectuando para esta fórmula el procedimiento (7.18)-(7.19), se llega a  $E = R_d \int_{p_0}^p (\bar{T} + 0.605q_v \bar{T} - T)$ . Note que, según esta ecuación, el efecto de flotabilidad del vapor de agua hace aumentar la energía de inestabilidad).

Una de las mayores limitaciones del método de la parcela es que esta se considera un sistema cerrado, el cual no permite que parte del material condensado se mezcle con el medio circundante, en especial el localizado cerca de los bordes de la parcela. Allí, la temperatura disminuye y el contenido de vapor aumenta debido a la evaporación parcial del aire saturado al

mezclarse con aire subsaturado proveniente de fuera de la nube. Este efecto, conocido con el nombre de *arrastre*, se nota sobre todo cerca de los bordes de la nube. Además, el ascenso de la parcela se frena un poco debido al enfriamiento evaporativo y el peso del agua líquida formada. Estas limitaciones también son inherentes al método de la energía de inestabilidad. La siguiente alternativa, en la jerarquía de métodos para diagnosticar la convección atmosférica y calcular sus efectos, es utilizar un modelo de nubes libre de esas restricciones mencionadas. El modelo más simple de nubes es el de *chorro estacionario*.

## 7.5. Modelo de chorro estacionario

El efecto de arrastre se puede mostrar considerando un modelo simple de nubes en forma de chorro estacionario. En los primeros modelos de nube (Pruppacher & Klett, 1997: 493), esta se simula en forma de una corriente ascendente, chorro o pluma, donde el aire saturado entra por la base y sale por el tope, y el aire subsaturado, o arrastre, entra por los costados (Figura 7.3)

Sea  $m$  masa (en gramos) de aire húmedo y sea  $X_n$  una sustancia arbitraria por unidad de masa. Con un subíndice  $n$  se indicará el valor de la variable dentro de la nube y con  $a$  el valor asociado al arrastre. El modelo de chorro estacionario se fundamenta en una relación simple de balance: si  $mX_n$  es la cantidad de sustancia que entra por la base del chorro,  $mX_a$  es la cantidad que entra por los costados por causa del arrastre y  $(m + \delta m)(X_n + \delta X_n)$  la cantidad de sustancia de nube que sale por el tope, entonces tiene lugar la siguiente relación de balance:

$$(m + \delta m)(X_n + \delta X_n) = mX_n + \delta mX_a + \left(\frac{dX_n}{dt}\right)_F m\delta t.$$

En esta ecuación, el último término de la derecha representa la existencia de una fuente o sumidero de la sustancia  $X_n$  dentro del chorro. Despreciando productos de cantidades infinitesimales y reagrupando términos,

$$m\delta X_n = \left(\frac{dX_n}{dt}\right)_F m\delta t + \delta m(X_a - X_n)$$

Dividiendo entre  $m\delta t$

$$\frac{\partial X_n}{\partial t} = \left(\frac{dX_n}{dt}\right)_F - \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial t}(X_n - X_a).$$

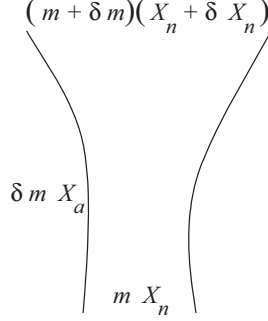


Figura 7.3. Modelo de chorro estacionario.

Teniendo en cuenta que  $\delta t = \delta z/w$ , el último término de la expresión anterior, se puede reescribir

$$\frac{\partial X_n}{\partial t} = \left( \frac{dX_n}{dt} \right)_F - w \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial z} (X_n - X_a).$$

Finalmente, definiendo el arrastre como

$$\lambda = \frac{1}{m} \frac{dm}{dz}, \quad (7.22)$$

la expresión anterior se escribe

$$\frac{\partial X_n}{\partial t} = \left( \frac{dX_n}{dt} \right)_F - \lambda w (X_n - X_a). \quad (7.23)$$

Suponiendo ahora que la sustancia considerada es la velocidad vertical, despreciando el valor de ella fuera de la nube y escribiendo el primer término en el lado derecho de (7.23) de acuerdo con la expresión (7.9), se obtiene

$$\frac{dw}{dt} = g \left( \frac{T - \bar{T}}{T} \right) - \lambda w^2, \quad (7.23a)$$

Es claro que cuando se tiene en cuenta el efecto del arrastre, la aceleración vertical disminuye. Sustituyendo la variable  $X_n$  por otras variables como temperatura, relación de mezcla, etc., se obtienen las ecuaciones para las demás variables consideradas en este modelo unidimensional de nubes. Algunas de las restricciones de este tipo de modelos es la dificultad en la representación del arrastre en función de las demás variables del modelo (procedimiento que se conoce con el nombre de parametrización) y la imposibilidad de representar, en este modelo simple, algunos efectos importantes como la turbulencia la estructura microfísica y otros. Sin embargo, debido

---

a su simplicidad, este tipo de modelos aún sirve de base para esquemas de parametrización de la convección en modelos globales y regionales, como es el caso del esquema de Arakawa y Schubert (1974), que se analizará en el capítulo 16.



**Ejercicios.**

*Un radio sondeo en San Andrés arrojó los siguientes valores de presión, altitud, temperatura y temperatura del punto de rocío respectivamente:*

P(hPa)	ALT(m)	T(°C)	T.P.Roc.
1013	1	26.6	23.3
984	254	22.8	21.8
891	1108	18.0	16.8
871	1301	16.6	10.6
850	1523	16.4	10.4
823	1796	15.4	9.4
794	2097	12.4	10.5
775	2299	11.0	9.2
747	2605	10.4	4.4

1. *Calcule la temperatura potencial y la temperatura potencial equivalente.*
2. *Calcule el índice de estabilidad estática usando el gradiente de la temperatura potencial y el de la temperatura potencial equivalente entre los niveles de 984 y 700 hPa.*

## 8

# La ecuación de vorticidad, sistema cuasi geostrófico y primeros modelos de predicción meteorológica



Grupo de científicos que implementó el primer modelo de predicción meteorológica, frente al ordenador ENIAC. De izquierda a derecha: H. Wexler, J. von Neumann, M. H. Frankel, J. Namias, J. C. Freeman, R. Fjortoft, F. W. Reichelderfer, y J. G. Charney. Imagen tomada con autorización del Centro

Experimental para la Predicción del Clima:  
<http://ecpc.ucsd.edu/general/pics/eniac-50.html>

Como se mencionó en el capítulo 2, los movimientos atmosféricos se pueden explicar a través de tres leyes fundamentales: la ley de conservación de la cantidad de movimiento, la ley de conservación de la masa y la ley de conservación de la energía. En aquella ocasión se introdujeron las ecuaciones correspondientes a estas tres leyes básicas y desde entonces se han venido utilizando para explicar algunos movimientos simples como el viento geostrófico, de gradiente, la estabilidad estática, etc. Realizando algunas manipulaciones y simplificaciones en la relaciones básicas, es posible obtener algunas ecuaciones transformadas como la ecuación de vorticidad, el sistema cuasi geostrófico, la ecuación omega etc.

Algunas de estas nuevas ecuaciones, como por ejemplo el sistema cuasi geostrófico pueden utilizarse para explicar la circulación en latitudes medias (Holton, 1992). En el pasado, estas ecuaciones sirvieron de base para la construcción de los primeros modelos atmosféricos: el modelo barotrópico no divergente y el modelo baroclínico. En este capítulo se discute la ecuación de vorticidad, se intenta dar una breve introducción a los modelos mencionados y finalmente se presentan algunos ejemplos de aplicación de la vorticidad. Algunos textos recomendados para consulta son Holton (1992), Bielov (1975), Gandin & otros (1975), Hastenrath (1996).

## 8.1. La ecuación de la vorticidad

En el segundo capítulo se examinó el concepto de vorticidad y su sentido físico. De acuerdo con la fórmula (2.23), la componente vertical de la vorticidad,  $\zeta$ , se escribe

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (8.1)$$

Para derivar la ecuación de la vorticidad, se utilizarán las ecuaciones del movimiento en el sistema de coordenadas  $x, y, z$ , (4.25) y se despreciará inicialmente el efecto de las fuerzas de viscosidad turbulenta y la componente vertical de la fuerza de Coriolis. Derivando la primera de ellas con relación a  $y$  y la segunda con relación a  $x$ , se escribe

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u \right] &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

En detalle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - v \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \\ w \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + f \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned}$$

Ahora se resta la primera ecuación de la segunda, teniendo en cuenta la definición (8.1).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \zeta \frac{\partial u}{\partial x} + \zeta \frac{\partial v}{\partial y} + \\ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} + f \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

Reagrupando términos se obtiene la ecuación de vorticidad:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \zeta + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} = \\ - \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (8.2) \end{aligned}$$

En el lado izquierdo, el primer término representa la tasa de cambio o derivada sustancial de la vorticidad; el segundo término está asociado a la divergencia. En el lado derecho, los dos primeros términos representan la producción de vorticidad vertical asociados al efecto de inclinación; los dos últimos se llaman *términos solenoidales*.

La producción de vorticidad vertical y el efecto de inclinación se puede observar con ayuda de la figura 8.1.

En esta figura, la componente de la velocidad por el eje  $y$ , la cual aumenta con la altura,  $\partial v / \partial z > 0$ , genera vorticidad por cizalladura alrededor de un eje horizontal paralelo al eje  $x$  en el sentido de las agujas del reloj, o sea, vorticidad anticiclónica. Por definición, a la vorticidad anticiclónica se le llama *vorticidad negativa* y, a la ciclónica, *vorticidad positiva*. Así mismo, la componente de la velocidad vertical  $w$ , la cual disminuye en el sentido positivo de  $x$  ( $\partial w / \partial x < 0$ ), también genera vorticidad alrededor de un eje paralelo a  $y$ . Es evidente que la vorticidad generada inicialmente alrededor

del eje paralelo a  $x$  es inclinada por la acción de la vorticidad generada posteriormente alrededor del eje paralelo a  $y$ . (Otra manera de explicar el efecto de inclinación es la siguiente: la advección vertical de diferente magnitud de la vorticidad alrededor del eje  $ox$  hace inclinar el solenode o tubo vorticial). Además, de las dos desigualdades anteriores se obtiene que  $(\partial v / \partial z)(\partial w / \partial x) < 0$ , lo cual indica que los dos primeros términos del lado derecho de (8.2) generan vorticidad positiva.

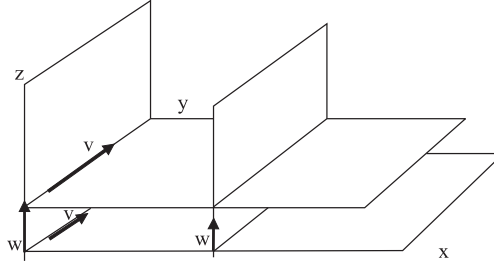


Figura 8.1. Producción de vorticidad por cizalladura y efecto de inclinación.

### 8.1.1. Análisis de escala para la ecuación de vorticidad

Teniendo en cuenta el cuadro 5.2 y, en algunos casos, los postulados 3-4 del capítulo 5 colocamos debajo de cada término de la ecuación anterior su correspondiente orden de magnitud:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{\partial}{\partial t} \zeta + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + w \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} - & & & & & & & & & & \\ 10^{-10} & 10^{-10} & 10^{-10} & 10^{-11} & 10^{-9} & & & 10^{-10} & 10^{-11} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) & & & & & & \\ 10^{-11} & & & & & 10^{-11} & \end{array}$$

Conservando solo los términos de orden  $10^{-10}$  y mayores, la ecuación anterior se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta) + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + v \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (8.2a)$$

Teniendo en cuenta que el parámetro de Coriolis depende solo de  $y$ , y por eso

$$\frac{df}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (8.3)$$

esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} = u \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x} + v \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y} = (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad (8.4)$$

o, en forma resumida

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) + (\zeta + f) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0. \quad (8.4a)$$

El término  $\zeta + f$  recibe el nombre de vorticidad absoluta ( la vorticidad absoluta es la suma de la vorticidad relativa más la vorticidad planetaria  $f$  ).

## 8.2. El sistema cuasi geostrófico

El sistema cuasi geostrófico es un conjunto simplificado de las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera. En este sistema, el movimiento horizontal está caracterizado por la ecuación de vorticidad, pero la velocidad del viento se representa como la suma de una componente geostrófica más una desviación ageostrófica, de acuerdo con la fórmula (5.13). La tercera componente del movimiento es sustituida por la aproximación hidrostática y la ecuación de la termodinámica se toma en su forma adiabática. Además, puesto que no se tienen en cuenta los efectos de la superficie terrestre, el conjunto de ecuaciones solo es válido para la atmósfera libre . Veamos como se obtiene este sistema.

Sustituyendo en la ecuación (8.4) la vorticidad relativa  $\zeta$  por la vorticidad geostrófica  $\zeta_g$  y la velocidad por sus componentes geostróficas, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\zeta_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\zeta_g + f)}{\partial y} = -(f) \left( \frac{\partial u_a}{\partial x} + \frac{\partial v_a}{\partial y} \right), \quad (8.5)$$

en donde  $u_g$ ,  $v_g$  y  $\zeta_g$  son determinados por las fórmulas (5.8a), (5.8b) y (5.17) respectivamente. El subíndice  $a$  en la parte derecha de la ecuación indica que la divergencia solo puede ser debida a la componente ageostrófica del modelo, ya que como se discutió en el capítulo 5, el flujo ageostrófico es no divergente. Combinando la ecuación (8.5) con la ecuación de continuidad (4.40) se obtiene

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\zeta_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\zeta_g + f)}{\partial y} = f \frac{\partial \omega}{\partial p}, \quad (8.6)$$

ecuación que puede escribirse también como

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}_H (\zeta_g + f) + f \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (8.6a)$$

Considere ahora la ecuación de la termodinámica. Tomando por simplicidad la forma adiabática de la ecuación (4.42) y usando la hipótesis cuasi-geostrófica, se escribe

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}_H \right) T + \omega \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{1}{c_p \rho} \omega = 0. \quad (8.7)$$

Teniendo en cuenta la definición del gradiente adiabático seco (4.19), la ecuación de estado y la aproximación hidrostática, los dos últimos términos se expresan como

$$\begin{aligned} \omega \left( \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{1}{c_p \rho} \right) &= \omega \left( -\frac{1}{\rho g} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\gamma_a}{g \rho} \right) = \frac{1}{\rho g} (\gamma_a - \gamma) \omega = \frac{RT}{pg} (\gamma_a - \gamma) \omega = \\ &= \frac{R^2 T}{Rp g} (\gamma_a - \gamma) \omega = -\frac{c^2}{Rp} (\gamma_a - \gamma) \omega, \end{aligned}$$

donde

$$c^2 = \frac{R^2 T}{p} (\gamma_a - \gamma),$$

es un parámetro de estabilidad estática el cual puede ser considerado aproximadamente constante (Bielov, 1975). Entonces la ecuación (8.7) se escribe

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}_H \right) T = -\frac{c^2}{Rp} \omega. \quad (8.8)$$

Al escribir la parte izquierda de esta ecuación, se ha despreciado la componente ageostrófica del viento en comparación con la geostrófica. La tercera ecuación por considerar es la ecuación de estática (4.43), la cual repetimos a continuación.

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \quad (8.9)$$

Puesto que  $u_g$ ,  $v_g$  y  $\zeta_g$  se expresan a través del geopotencial  $\Phi$  con ayuda de las fórmulas (5.8a), (5.8b) y (5.17), no es difícil notar que el sistema de ecuaciones (8.6a), (8.8) y (8.9) es cerrado. Efectivamente, el sistema contiene tres ecuaciones para determinar tres incógnitas:  $\Phi$ ,  $\omega$  y  $T$ . Estas ecuaciones constituyen el sistema cuasigeostrófico en la suposición de adiabaticidad, válido para la atmósfera libre.

### 8.2.1. Primeros modelos de predicción meteorológica

#### 8.2.1.1. Modelo geostrófico barotrópico y no divergente

El primero y más simple modelo de predicción meteorológica se basa en el uso de una sola ecuación para la predicción de una variable en un solo nivel. La manera más simple de fundamentar este modelo es la siguiente: tome la ecuación de vorticidad (8.6). Para solucionar esta ecuación en una capa de la atmósfera, se deben considerar condiciones de frontera para las variables dependientes  $\Phi$  y  $\omega$  en los límites inferior (la superficie de la Tierra) y superior (el tope de la atmósfera, por ejemplo). En el caso de  $\omega$ , se puede suponer que el homólogo de la velocidad vertical en coordenadas isobáricas sea igual a cero tanto en el límite superior de la capa como en el inferior. Esta suposición es razonable y equivalente a decir que no hay penetración del flujo hacia afuera de la capa. Si en los límites la variable  $\omega$  es cero, entonces en algún nivel de la capa esta variable alcanza su valor extremo,  $\partial\omega/\partial p = 0$ . Para este nivel, llamado *nivel no divergente*, la ecuación (8.6) se simplifica en

$$\frac{\partial\zeta_g}{\partial t} + u_g \frac{\partial(\zeta_g + f)}{\partial x} + v_g \frac{\partial(\zeta_g + f)}{\partial y} = 0, \quad (8.10)$$

o también,

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = 0. \quad (8.11)$$

Esta es la ecuación del modelo barotrópico no divergente. Además de las restricciones impuestas al sistema cuasigeostrófico, este modelo solo es válido para una atmósfera barotrópica (parágrafo 2.3.3 del capítulo 2) ya que en la derivación de la ecuación (8.6) no fue tenido en cuenta la variación horizontal de la densidad o de la temperatura.

#### 8.2.1.2. Modelo baroclínico

La segunda generación de modelos de predicción meteorológica fue liberada de la restricción de barotropicidad. Es decir, son válidos para una atmósfera baroclínica, involucran la ecuación de vorticidad (8.6a), la ecuación de la termodinámica (8.9) y la ecuación de estática (8.10). Este modelo también se puede expresar a través de una única ecuación, mucho más compleja que la ecuación (8.10).



Para derivar esta ecuación se sustituye en (8.8) la variable  $T$  con ayuda de la ecuación de estática (8.9):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}_H\right) \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{c^2}{p^2} \omega.$$

O también,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = -v_g \cdot \vec{\nabla}_H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \frac{c^2}{p^2} \omega.$$

Cambiando el orden de la diferenciación en la parte izquierda e introduciendo la denotación  $q = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ , esta expresión se escribe

$$\frac{\partial q}{\partial p} = -\vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}_H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) - \frac{c^2}{p^2} \omega. \quad (8.12)$$

Expresando la vorticidad geostrófica de acuerdo con (5.17) y utilizando de nuevo la denotación anterior, la ecuación (8.6a) se escribe

$$\nabla^2 q = -f \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}_H \left( \frac{1}{f} \vec{\nabla}^2 \Phi + f \right) + f^2 \frac{\partial \omega}{\partial p}. \quad (8.13)$$

Ahora se elimina  $\omega$  de las ecuaciones (8.12) y (8.13), multiplicando la ecuación (8.12) por  $f^2 p^2 / c^2$ , diferenciado con respecto a  $p$  y añadiendo el resultado a (8.13). Entonces,

$$\begin{aligned} \left( \vec{\nabla}^2 + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2 p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial p} \right) \right) q = \\ -f \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{1}{f} \vec{\nabla}^2 \Phi + f \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{f^2 p^2}{c^2} \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}_H \left( \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) \right) \end{aligned} \quad (8.14)$$

Esta ecuación se conoce con el nombre de *tendencia del geopotencial* y puede solucionarse numéricamente. Además, es posible obtener este modelo para el caso diabático, cuando la parte derecha de la ecuación de la termodinámica (4.27) es diferente de cero. Nótese que, una vez obtenido numéricamente el valor de la variable  $q$ , el movimiento vertical puede diagnosticarse con ayuda de la expresión (8.12). No obstante, se puede obtener una ecuación diagnóstica para el movimiento vertical con ayuda de las ecuaciones (8.12) y (8.13), excluyendo esta vez no la variable  $\omega$ , sino la variable  $q$ . A la ecuación que se obtiene en este caso se conoce como *ecuación de balance no lineal o ecuación omega*.

## 8.3. Aplicaciones de la ecuación de la vorticidad

### 8.3.1. Conservación de la vorticidad potencial

La ecuación (8.4a) sirve de base para deducir una ecuación de gran utilidad práctica; la ecuación de *conservación de la vorticidad potencial*. Sustituyendo la divergencia de acuerdo con la expresión (4.41), la fórmula (8.4a) se escribe

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) - (\zeta + f) \frac{1}{\delta p} \frac{d\delta p}{dt} = 0.$$

Esta ecuación también puede escribirse,

$$\frac{\delta p}{(\zeta_p + f)} \frac{d}{dt} \frac{(\zeta_p + f)}{\delta p} = 0.$$

(Para probarlo es suficiente aplicar a esta expresión la regla de derivación en cadena  $\left(\frac{U}{V}\right)^t = \frac{VU' - UV'}{V^2}$ ).

Finalmente, la expresión anterior se escribe

$$\frac{d}{dt} \frac{(\zeta + f)}{\delta p} = 0. \quad (8.15)$$

Esta ecuación representa la conservación de la vorticidad potencial.

#### 8.3.1.1. Ciclogénesis al lado este de las Montañas Rocosas

La ecuación de conservación de la vorticidad potencial puede utilizarse para explicar en parte el desarrollo de ciclogénesis al lado este de las Montañas Rocosas. Considere un flujo del oeste, como se muestra en la figura 8.2, sobre una montaña orientada norte-sur, como las Montañas Rocosas en Estados Unidos, inicialmente con vorticidad cero.

El aire cercano a la ladera es obligado a fluir paralelo a la superficie, mientras que, a cierta altura, el flujo es más horizontal. Por eso cuando una columna de aire de masa  $M$  e incremento de presión  $|\delta p|$  asciende la montaña,  $|\delta p|$  cae mientras que  $\delta M$  permanece constante. (La columna de aire  $|\delta p|$  se achata verticalmente y se expande horizontalmente). Ahora examine la ecuación (8.15), que se puede escribir como

$$\frac{\zeta_p + f}{\delta p} = \text{const} \Rightarrow \zeta_p + f = \delta p \cdot \text{const}.$$

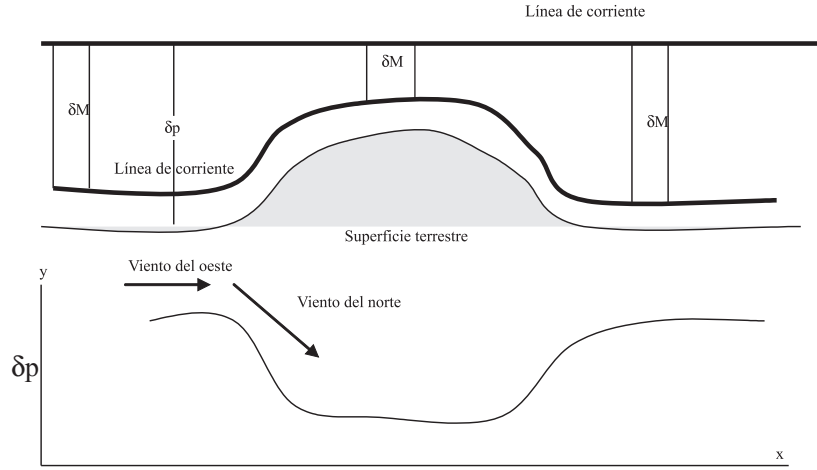


Figura 8.2. Representación esquemática para explicar la ciclogénesis al lado este de las montañas rocosas, (Estados Unidos).

Cuando  $\delta p$  decrece,  $\zeta_p$  también decrece ya que  $f$  permanece constante. Esto significa que la vorticidad toma un carácter anticiclónico (si inicialmente es cero y después decrece, entonces se torna negativa) y el flujo comienza a aparecer de la dirección norte a medida que se avanza hacia la cresta de la montaña. Al otro lado de la cresta (lado este),  $\delta p$  aumenta y  $f$  disminuye ya que el viento, como se dijo antes, se tornó del norte. Estos dos efectos llevan a que la vorticidad adquiera un carácter positivo y la columna se curve en sentido ciclónico. Los análisis muestran que los ciclones se forman a menudo en la vaguada localizada en la pendiente oriental de estas montañas.

#### 8.3.1.2. Costas Semiaridas en Venezuela y lluviosas en Nicaragua

Si en las ecuaciones originales (4.25) se incluye la fuerza de fricción, la ecuación de vorticidad resultante sin términos solenoidales es

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) + (\zeta + f)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right), \quad (8.16)$$

donde  $F_x, F_y$ , las componentes de la fuerza de fricción por los ejes  $0x$  y  $0y$ , respectivamente, pueden expresarse, de acuerdo con la fórmula (3.4), como

$$F_x = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad F_y = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

En estas expresiones  $\nu$  representa el coeficiente de viscosidad cinemática. La ecuación (8.16) puede utilizarse para analizar procesos en la capa límite de la atmósfera. En los siguientes ejemplos se considera además un flujo barotrópico, que posibilita eliminar el primer término en el lado izquierdo y considerar solo un balance entre el segundo término de la izquierda y el término de la derecha de (8.16). Suponga la existencia de un flujo del este a lo largo de una zona costera orientada zonalmente en el hemisferio norte. La componente de la fuerza de fricción dirigida de oeste a este disminuye en dirección norte (esto se debe a que el flujo del este disminuye en dirección de los polos) y la componente meridional  $F_y$  de esta fuerza se hace cero (debido a la orientación del flujo). Teniendo en cuenta que la vorticidad absoluta es esencialmente positiva en el hemisferio norte y negativa en el hemisferio sur, resulta un signo positivo para la divergencia o sea subsidencia en los niveles bajos. Esto permite explicar la árida costa norte venezolana. Consideremos ahora un flujo orientado sobre una costa meridional, por ejemplo sobre la costa este de Nicaragua, durante la época invernal con predominio de vorticidad absoluta positiva. En este caso  $F_x$  es cero y  $F_y$  disminuye hacia el este. Esto da como resultado signo negativo en el lado derecho de (8.16), y en consecuencia, signo también negativo para la divergencia en el lado izquierdo, o sea, convergencia en los niveles bajos. Esto explica las abundantes lluvias durante el invierno del hemisferio norte en la costa este nicaragüense.

## 9

# Ecuaciones de la hidrodinámica para una atmósfera turbulenta



Fluido laminar (izquierda). Foto tomada sobre el río Bogotá el 20 de agosto de 2005. Fluido turbulento (derecha) sobre la quebrada La Marinilla, Antioquia (6 de agosto de 2005). Fotos tomadas por el autor de esta obra.

El fenómeno de la turbulencia es uno de los temas más excitantes, pero también una de las mayores dificultades de la meteorología dinámica y de la hidrodinámica en general. En este capítulo se introduce esta teoría. Las ecuaciones para un fluido turbulento, también llamadas de Reynolds, se derivan a partir de la ecuación general de balance. Las hipótesis de Prandtl para modelos de cerradura de primer orden se consideran en detalle. Como ejemplos de aplicación de esta teoría se ilustran la capa límite planetaria y, dentro de ella, la subcapa superficial, temas examinados en el siguiente capítulo.

Sobre este tema existe abundante literatura. Algunos de los textos para consulta son Laixtman (1976), Stull (1991), Feagle and Bussinger (1980), Panofski & Dutton (1984), Blackadar (1997).

## 9.1. Caracterización de la turbulencia

Aunque para la turbulencia no existe una definición suficientemente universal, se puede intentar caracterizarla de varias maneras. Imagine un fluido dentro de un canal, como el representado en la figura 9.1.

En la parte central del fluido (parte izquierda de la figura 9.1) no existe gradiente de velocidad en dirección perpendicular al movimiento (*las líneas de corriente son iguales*) y las partículas del fluido realizan movimientos más o menos ordenados. En este caso el fluido es susceptible de ser descrito en todos sus detalles y es llamado *laminar*. En el fluido turbulento, por ejemplo cerca de las orillas del canal, las partículas o remolinos turbulentos realizan movimientos desordenados (caóticos) debido a la existencia de un gradiente de velocidad en la dirección  $y$ . (parte derecha de la figura 9.1). En este caso no se conocen las características individuales de las partículas (velocidades, posiciones etc.), y solo se puede obtener información estadística sobre ellas. Entonces se puede considerar que el fluido está como compuesto por un *flujo medio*, susceptible de ser descrito en su totalidad, y unas *fluctuaciones* que solo pueden tratarse estadísticamente.

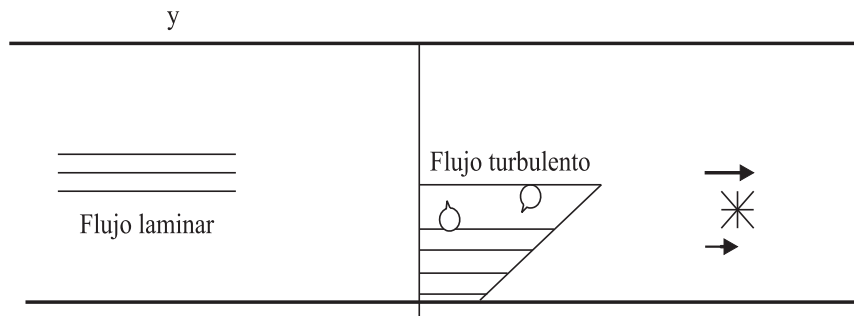


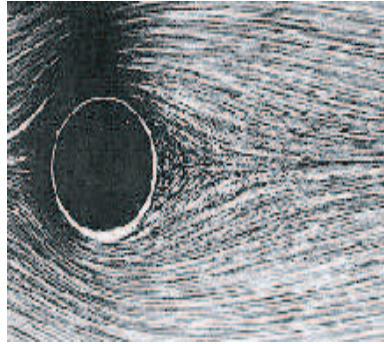
Figura 9.1. Flujo laminar (parte izquierda) y flujo turbulento (parte derecha).

La transformación de un fluido laminar en turbulento, caracterizada por O. Reynolds en 1883, puede observarse en la figura 9.2. En esta figura, la turbulencia es generada por un disco circular insertado dentro del flujo.

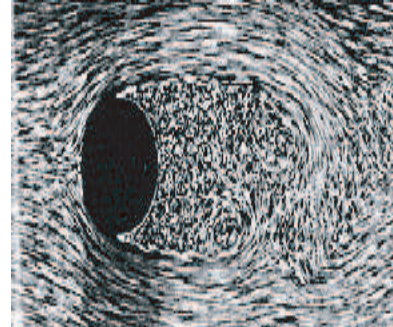
Reynolds estableció el umbral de transición del régimen laminar al turbulento como la relación entre las fuerzas inerciales y las viscosas, y lo

verificó experimentalmente. A este valor se le conoce como número de Reynolds

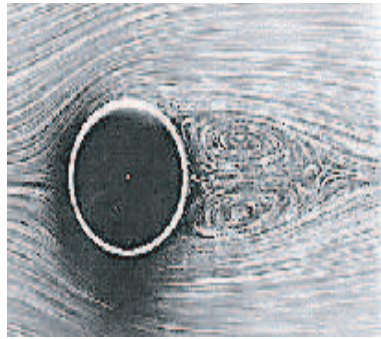
$$\frac{u^2/L}{\nu \frac{u}{L^2}} = \frac{uL}{\nu} = Re$$



R 9.6



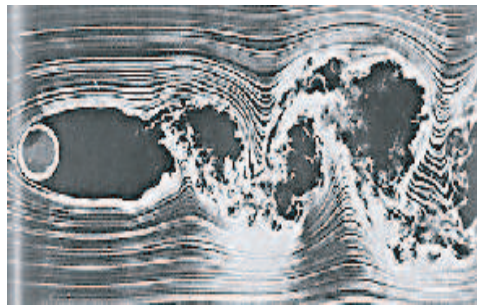
R 13.1



R 26



R 2000



R 10000

Figura 9.2. Transición de un fluido laminar a turbulento para diferentes números de Reynolds. Tomado de: <http://www.chbmeng.ohio-state.edu/classes/81508/rsb/flupict.html>

Para valores grandes de  $R_e$ , cuando predominan las fuerzas de inercia, aparecen en el flujo fuertes heterogeneidades que dan origen a la turbulencia. Por el contrario, para pequeños valores del número de Reynolds, las fuerzas de viscosidad consiguen contrarrestar las heterogeneidades que aparecen, debidas a la acción de las fuerzas inerciales.

Sobre la naturaleza estadística de la turbulencia se puede juzgar en la figura 9.1, donde se muestra un registro temporal de la velocidad del viento.

Si se observa en detalle la figura 9.3 se pueden sacar las siguientes conclusiones respecto a la velocidad el viento: 1. El viento varía en forma irregular, lo cual lo diferencia de otros movimientos; por ejemplo, las ondas. 2. Se puede visualizar un valor medio (20 nudos entre las 11 y las 11:30 horas y 30 nudos aproximadamente entre las 14:30 y las 17:30 horas. 3. El viento varía dentro de un rango más o menos limitado (por ejemplo, cerca del medio día el rango es 7 nudos a lado y lado de la media y a las 15 horas el mismo prácticamente se duplica). El rango de variación caracteriza la intensidad de la turbulencia. Se puede usar la varianza o desviación estándar para caracterizar la *intensidad de la turbulencia*. 4. Parece haber una variedad de escalas de tiempo superpuestas entre sí. Esto se puede deducir observando el tiempo transcurrido entre los picos pequeños, por ejemplo, o entre los picos más grandes, etc. Según la hipótesis de Taylor, cada una de estas variaciones está asociada a torbellinos de diferentes tamaños, que pueden tener escalas que van desde 30 hasta 3000 m en tamaño. En otras palabras, se tiene aquí una evidencia sobre la existencia del *espectro de la turbulencia*. (espectro por tamaño de torbellinos). A continuación se deduce las ecuaciones para la atmósfera turbulenta.

## 9.2. Formulación general de la ecuación de balance

Las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera pueden derivarse a partir de una única ecuación, la *ecuación de balance*, cuya formulación general, se expone enseguida.

Considere una masa de aire en movimiento de densidad  $\rho$ . Sea  $a$  una magnitud específica por unidad de masa. Entonces, en la unidad de volumen, la cantidad de sustancia será  $\rho a$ .

(observe las unidades  $\rightarrow \text{kg/m}^3 \cdot \text{a/kg} = \text{a/m}^3$ , o sea, efectivamente sustancia por unidad de volumen). El cambio en un punto fijo de esta sustancia por unidad de tiempo será  $\frac{\partial \rho a}{\partial t}$ . En el volumen elemental  $dv$ , el cambio será  $\frac{\partial \rho a}{\partial t} dv$  y, en todo el



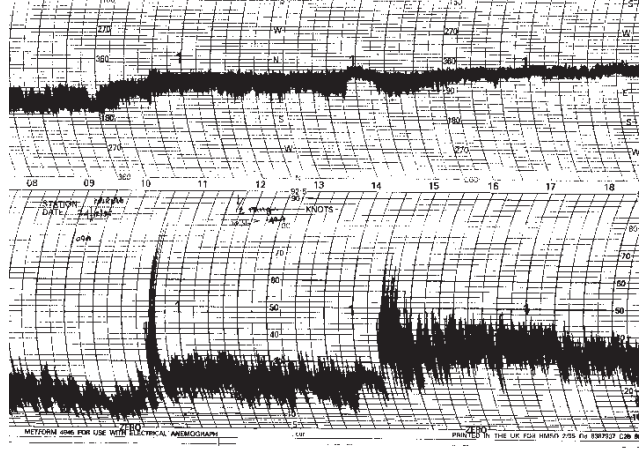


Figura 9.3. Naturaleza estadística de la turbulencia. Adaptado de Stull (1988).  
<http://www.zetnet.co.uk/sigs/weather/1995/dec95.htm>

volumen  $v$ , será  $\iiint_V \frac{\partial \rho a}{\partial t} dV$ .

Este cambio se debe: al flujo de sustancia  $\iint_S \rho a \vec{v} \cdot \vec{n} ds$ , (capítulo 2, párrafo 2.24) a través de la superficie  $S$  que encierra el volumen  $V$ . (observe que para  $a = v$ , las unidades son  $\frac{kg}{m^3} \frac{m}{s} \frac{m}{kg} = \frac{1}{kg} [\frac{kgm}{sm^2}]$  o sea, flujo de momento por unidad de masa, lo que es concordante con el concepto de flujo y de la definición de la sustancia  $a$  dada arriba) y a la existencia de fuentes o sumideros dentro del volumen,  $\iiint_V I dV$ , en donde  $I$  es la potencia de la fuente, o sea, sustancia por unidad de masa que aparece en la unidad de tiempo en la unidad de volumen,  $(a/m^3s)$ . Por tanto, la condición de balance para cualquier sustancia se puede escribir como

$$\iiint_V \frac{\partial \rho a}{\partial t} dV = - \iint_S \rho a \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \iiint_V I dV.$$

El signo menos en la parte derecha indica que a un cambio temporal positivo corresponde un flujo en la dirección opuesta a la normal (la normal está orientada por definición hacia fuera de la superficie). Utilizando ahora el teorema de Gauss (capítulo 2), la expresión anterior se puede escribir

$$\iiint_V \frac{\partial \rho a}{\partial t} dV = - \iint_S \rho a \vec{v} \cdot \vec{n} ds + \iiint_V I dv$$

Si la función dentro de la integral es continua y diferenciable, para un

volumen arbitrario, también puede escribirse

$$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \text{div} \rho a \vec{v} - I = 0$$

(En el caso en que interesan campos discontinuos, como frentes, etc, se debe conservar la representación integral). Esta última ecuación se puede escribir

$$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \text{div} \rho a \vec{v} = I \quad (9.1)$$

A menudo se escribe esta fórmula usando la notación introducida por Einstein, o sea,

$$\frac{\partial \rho a}{\partial t} + \frac{\partial \rho a v_j}{\partial x_j} = I_j \quad (9.2)$$

donde el segundo término de la parte izquierda involucra implícitamente una sumatoria por el subíndice  $j$ .

### 9.2.1. Método de Reynolds

Para derivar las ecuaciones de la dinámica para la atmósfera turbulenta, el valor instantáneo de una variable  $a$  se representa como la suma de su valor medio más una desviación  $a'$ , llamada también parte turbulenta:

$$a = \bar{a} + a'.$$

Para obtener las ecuaciones promediadas, se emplearán las siguientes reglas sugeridas por Osborne Reynolds:

$$\begin{aligned} \overline{a + b} &= \bar{a} + \bar{b} \\ \overline{\frac{\partial a}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_i} \\ \overline{a'} &= \overline{a - \bar{a}} = \bar{a} - \bar{\bar{a}} = \bar{a} - \bar{a} = 0 \\ \overline{\bar{a} - b} &= \overline{\bar{a}(\bar{b} + b')} = \bar{\bar{a}\bar{b}} + \bar{\bar{a}b'} = \bar{\bar{a}\bar{b}} \\ \overline{ab} &= \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \bar{\bar{a}\bar{b}} + \bar{\bar{a}b'} + \bar{a'\bar{b}} + \bar{a'b'} \end{aligned} \quad (9.3)$$

Estas expresiones son fácilmente demostrables definiendo el valor medio como

$$\bar{a}(s) = \frac{1}{T} \int_{t=0}^{\bar{T}} a(s, t) dt \quad (9.4)$$

donde  $T$  es el período de promediación. Es fácil mostrar que el término  $\overline{a'^2}$  se puede interpretar como *varianza*.

En efecto, por definición  $\sigma_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (a_i - \bar{a})^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} a_i'^2 = \overline{a'^2}$ . Además, el término  $\overline{a'b'}$  se puede interpretar como *covarianza*. En efecto,

$$\text{covar}(a, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} (a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} a_i' b_i' = \overline{a'b'}.$$

Considerando incompresible el aire para despreciar la fluctuación de la densidad, la ecuación general de balance (9.2) se puede escribir

$$\frac{\partial[\rho(\bar{a} + a')]}{\partial t} = \frac{\partial[\bar{\rho}(\bar{v}_j + v'_j)(\bar{a} + a')]}{\partial x_j} + (I + I').$$

Utilizando las propiedades (9.3), se efectúa el proceso de promediación y se obtiene

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{a}}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{\rho} \bar{a} v'_j}{x_j} - \frac{\partial \bar{\rho} \overline{a' v'_j}}{\partial x_j} + \bar{I}, \quad (9.5)$$

donde se ha supuesto  $I' = 0$ . En la ecuación (9.5) aparece un término adicional, que puede llamarse *divergencia del flujo turbulento*. Este término describe el transporte de sustancia por torbellinos turbulentos. La ecuación (9.5) puede expandirse así:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} + \bar{a} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \bar{a} \frac{\partial \bar{\rho} v_j}{\partial x_j} + \bar{\rho} \bar{v}_j \frac{\partial \bar{a}}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{\rho} \overline{a' v'_j}}{\partial x_j} + \bar{I}.$$

De acuerdo con la ecuación de continuidad, la suma de los términos segundo y tercero en la parte izquierda es igual a cero. Usando el concepto de derivada total, esta última expresión se escribe

$$\bar{\rho} \frac{d\bar{a}}{dt} = -\frac{\partial \bar{\rho} \overline{a' v'_j}}{\partial x_j} + \bar{I}. \quad (9.6)$$

Esta ecuación indica que el cambio sustancial de la magnitud escalar  $a$  es equilibrado por la divergencia del flujo turbulento y las fuentes o sumideros. Es fácil verificar que el triple producto

$$E_a = \overline{\bar{\rho} a' v'_j}, \quad (9.7)$$

tiene dimensiones de flujo. Para el caso del flujo de calor  $a = c_p T$ ;

$$[\overline{\bar{\rho} a' v'_j}] = [\bar{\rho} c_p \overline{T' v'_j}] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \frac{\text{Joule}}{\text{kg} \circ \text{K}} \circ K \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{\text{Joule}}{\text{m}^2 \text{s}}.$$

La expresión (9.7s) tiene tres componentes cuando  $a$  representa una magnitud escalar como la temperatura, la humedad, etc., y nueve para el caso  $a = v_j$ , lo que la convierte en un tensor. Sin embargo, en la capa límite atmosférica el transporte turbulento en la dirección  $z$  es mucho mayor que en la dirección horizontal. Por eso se puede simplificar a (9.7) y re-escribirla como

$$E_a = \overline{\rho a' w'}. \quad (9.7a)$$

El flujo de calor para la temperatura potencial se define como

$$E_k = C_p \overline{\rho w' \theta}. \quad (9.8)$$

De manera similar se define el flujo de humedad. Para escribir el flujo de momento se hace una simplificación adicional que consiste en orientar el flujo en la dirección del eje  $0x$ . En este caso no hay componente del flujo por el eje  $0y$  y se tiene una sola componente del flujo horizontal, la cual se escribe

$$E_m = \tau_{xz} = \overline{\rho u' w'}. \quad (9.9)$$

El paso siguiente consiste en tratar de expresar el término turbulento en función de las características medias del flujo.

### 9.2.2. Relación entre el flujo turbulento y el campo medio

Considere el caso particular cuando el campo medio es homogéneo en el plano horizontal, por lo tanto, solo existe el gradiente vertical del campo medio. Para relacionar el flujo turbulento con el campo medio se utilizan algunas posiciones de la *teoría de Prandtl*: 1. Los torbellinos turbulentos se desprenden del flujo medio y recorren un camino  $l_a$  antes de mezclarse completamente con el medio y desaparecer. 2. Las características del torbellino, el cual designamos por  $a'$ , coinciden con las del campo medio al comienzo y al final del recorrido. Por eso el cambio en la característica del torbellino se puede escribir como

$$a' = \bar{a}(t, z - l_a) - \bar{a}(t, z),$$

donde  $z - l_a$  y  $z$  son las posiciones del torbellino al comienzo y al final del recorrido respectivamente. Expandiendo la función  $\bar{a}(t, z - l_a)$  en serie de Taylor en el intervalo  $z - l_a$  y limitando la serie hasta términos en primer grado, se obtiene

$$\bar{a}(t, z - l_a) = \bar{a}(t, z) - l_a \frac{d\bar{a}}{dz}.$$

Utilizando la definición anterior se puede escribir

$$a' = -l_a \frac{d\bar{a}}{dz}. \quad (9.10)$$

Sustituyendo este valor en la definición de flujo turbulento (9.7a), obtenemos,

$$\overline{\rho a' w'} = -\overline{\rho l_a w'} \frac{d\bar{a}}{dz}. \quad (9.11)$$

Denotando

$$k(t, z) = \overline{l_a w'}, \quad (9.12)$$

la expresión anterior se escribe como

$$\overline{\rho a' w'} = -\overline{\rho K(t, z)} \frac{d\bar{a}}{dz}. \quad (9.13)$$

Entonces la ecuación general de balance (9.6), se puede escribir como

$$\rho \frac{da}{dt} = + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho K \frac{\partial a}{\partial z} \right) + I. \quad (9.14)$$

Para comodidad, aquí y en adelante todas las variables dependientes, conteniendo o no barra horizontal, indican valores medios.

Si quitamos la restricción de que el flujo medio es horizontalmente homogéneo, en la parte derecha de estas dos últimas ecuaciones deben aparecer otros términos que describen la propagación de la turbulencia en la dirección horizontal.

A partir de la ecuación (9.14) es fácil derivar las ecuaciones de la hidrotermodinámica para la atmósfera turbulenta en el supuesto de que los flujos turbulentos verticales son mucho mayores que los horizontales. Por ejemplo, sustituyendo  $a = c_p \theta$ , se obtiene la ecuación de la termodinámica,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{I}{c_p} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho K_h \frac{\partial \theta}{\partial z} \right). \quad (9.15)$$

Substituyendo en (9.14)  $a = v_i$ , se obtiene la ecuación de conservación del momento escrita como

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho K_m \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) + I, \quad (9.16)$$

donde el último término representa las fuentes, como gradiente de presión, fuerza de Coriolis y fuerza de gravedad. Definiendo,

$$I = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g \delta_{ij} + 2\rho(\Omega_j v_k - \Omega_k v_j).$$

Sustituyendo  $I$  en la expresión anterior y dividiendo la expresión entre  $\rho$ ,

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - g\delta_{ij} - 2(\Omega_j v_k - \Omega_k v_j) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho K_m \frac{\partial v_i}{\partial z} \right), \quad (9.17)$$

donde  $\delta_{ij}$  es el símbolo de Kronecker ( $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$  y  $\delta_{ij}$  para  $i = j$ ).

Los subíndices  $i, j, k$  son variables y toman valores desde 1 hasta 3. Además, para la escritura del término de Coriolis se supone una trasposición derecha de índices. Esto significa que, por ejemplo, para escribir la primera ecuación de movimiento,  $i = 1, j = 2, k = 3, v_i = u$  y  $x_i = x$ ; Para la segunda ecuación  $i = 2, j = 3, k = 1, v_i = v$  y  $x_i = y$ . Finalmente, para escribir la tercera ecuación del movimiento,  $i = 3, j = 1, k = 2, v_i = w$  y  $x_i = z$ . Además, de acuerdo al capítulo 4,  $\Omega = 0, \Omega \cos \phi, \Omega_z = \Omega \sin \phi$ .

A partir de (9.14) se puede obtener también la ecuación para el cambio con el tiempo de la concentración de un contaminante. Haciendo  $a = C_i$  y colocando  $\rho$  dentro del diferencial,

$$\frac{d\rho C_i}{dt} = -\frac{\partial \rho v' C'_i}{\partial x_j} + I_i.$$

Esta ecuación es de mucha utilidad en estudios de dispersión de contaminantes. Por último, la ecuación de continuidad se obtiene haciendo  $a = C_i$  en (9.14), realizando una sumatoria por todos los gases del sistema, teniendo en cuenta que  $\sum_i C_i = 1$  y  $\sum_i I_i = 0$ , y después de algunas manipulaciones, es fácil llegar a la expresión

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (9.18)$$

Como era de esperar, la ecuación de continuidad no cambia debido a la turbulencia. En las ecuaciones (9.15) y (9.17),  $K_h$  y  $K_m$  se llaman coeficiente de difusión térmica y de viscosidad turbulenta, respectivamente. En forma genérica, estos coeficientes reciben el nombre de *coeficientes de transferencia turbulenta*.

Las expresiones (9.15), (9.17) y (9.18) constituyen las ecuaciones promediadas de la *hidrotermodinámica para la atmósfera turbulenta*, en el supuesto de que la transferencia turbulenta vertical es mucho mayor que la horizontal. Son en total cinco ecuaciones: tres ecuaciones del movimiento, la ecuación de continuidad y la ecuación de balance de energía. Incluyendo la ecuación de estado y la ecuación para la temperatura potencial, se completa un total de siete; ecuaciones para determinar ocho incógnitas:  $u, v, w, P, \rho, T, \theta$ , y  $k$ . En consecuencia, el sistema de ecuaciones no es cerrado.

Recordando la derivación de la ecuación de balance (9.5), se observa que el doble producto o covarianza apareció como un resultado de la promediación. Si se promedia de nuevo la ecuación (9.5), aparecerán triples productos, y así sucesivamente. Esto significa que aplicando repetidamente el método de Reynolds nunca se cerrará el sistema de ecuaciones. Esto constituye una de las principales dificultades en el tratamiento de la turbulencia. Para cerrar el sistema se debe recurrir a otras relaciones, o utilizar observaciones empíricas. Un ejemplo de este procedimiento se mostrará más adelante en el estudio de la capa límite.

## Capa límite planetaria

*Andrei Nikolaevich Kolmogorov  
(1903-1987)*

Notable matemático ruso del siglo XX. Sus trabajos sobre la turbulencia sirvieron de base para el modelamiento de la capa límite atmosférica ó planetaria.



Imagen tomada de  
<http://www.opu2003.narod.ru/kolm.jpg>  
<http://www.kolmogorov.com/Kolmogorov.html>

En este capítulo se considera la solución de Ekman para la capa límite planetaria y la subcapa llamada capa superficial. Especial énfasis se da a la aplicación de la teoría de similaridad de Monin-Obukhov para el cálculo de los perfiles de viento y temperatura, elementos básicos para la parametrización de los flujos superficiales en los modelos atmosféricos. Entre los libros de consulta están Stull (1991), Feagle and Bussinger (1980), Panofski and Dutton (1984), Garrat (1992), Aria (1988), Holton (1992).



## 10.1. Características generales

La capa límite planetaria, CLP, es la parte turbulenta de la troposfera contigua al suelo. Es la capa donde la superficie terrestre influye en la atmósfera a través del intercambio turbulento de momento, calor sensible, calor latente y humedad.

Dentro de la CLP los contaminantes atmosféricos originados en la superficie se encuentran bien mezclados. Al volar durante el día, se puede observar una capa homogéneamente sucia, la cual reduce la visibilidad a unos cuantos kilómetros. Volando por encima de la CLP, la visibilidad aumenta ostensiblemente dejando observar montañas o nubes aisladas. Por esta razón a la CLP también se le conoce con el nombre de *capa de mezcla*.

Una de las características de la CLP es la profundidad o altura de la capa de mezcla. En general, es mayor durante el día dependiendo de la situación meteorológica, de la rugosidad del suelo y de otros factores. Los remolinos turbulentos (parcelas de aire que poseen dimensión y tiempo de duración características y se mueven en forma coherente y con identidad propia) se generan principalmente en una subregión de la CLP: la *capa superficial*. Esta subcapa ocupa aproximadamente el 10 % de la CLP y se caracteriza porque en ella los flujos turbulentos son más fuertes que en el resto de la capa límite, y allí se pueden considerar cuasiconstantes. Torbellinos turbulentos de diferentes tamaños, que van desde unos pocos milímetros hasta 2.000 metros y más durante un día soleado, son generados por los flujos turbulentos y por la interacción entre el viento y la rugosidad de la superficie.

### 10.1.1. Estructura de la CPL

La estructura de la capa límite puede analizarse observando, por ejemplo, los perfiles de la temperatura potencial y del campo del viento. El perfil de la temperatura potencial se muestra en la figura 10.1(a) para una situación diurna y, en la figura 10.1(b), para una situación nocturna.

Durante el día predomina la generación de turbulencia convectiva. En la capa cercana al suelo (la capa superficial), la temperatura potencial decrece con la altura. Esta situación de inestabilidad favorece la formación de remolinos turbulentos que luego se propagan por inercia en la siguiente capa, donde la temperatura potencial es más o menos constante. A esta subcapa también se le llama *capa residual* o *capa de mezcla*. A diferencia de la capa superficial, en esta capa es importante el efecto de Coriolis para la generación de *cizalladura* del viento. Al final de esta capa comienza una

tercera zona donde la temperatura crece con la altura. A esta zona se le conoce con el nombre de *capa de inversión* o *de arrastre*. En esta última, el aire de la CLP se mezcla con el aire inmediatamente superior enfriándose y favoreciendo con esto el movimiento descendente de vórtices turbulentos.

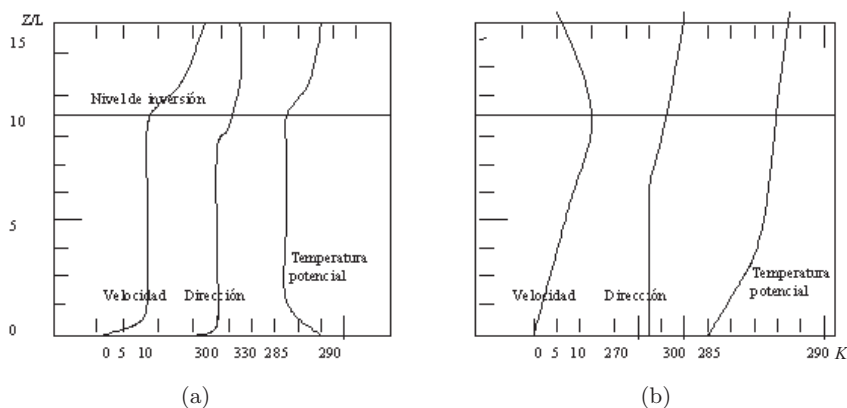


Figura 10.1. Perfiles diurno a) y nocturno b) de la temperatura potencial y del viento. Tomado de Kaimal & Finnigan (1994).

En el perfil nocturno, la temperatura potencial aumenta con la altura en la capa superficial. Este comportamiento, debido al enfriamiento radiativo, no impide de manera alguna la formación de turbulencia mecánica. Durante la noche predomina la turbulencia mecánica generada principalmente por la interacción entre el viento y la rugosidad del suelo.

En el campo del viento, cerca al suelo, se observa un perfil logarítmico. En la parte superior de la CLP se nota un crecimiento máximo conocido con el nombre de corriente en chorro de bajo nivel. En el tope de la capa límite, el viento tiende a su valor geostrófico.

Para toda la CLP, pero válida principalmente para la capa residual, existe una solución para el campo de la velocidad conocida como espiral de Ekman. En la capa superficial lo que realmente interesa es el cálculo de los flujos (y perfiles) turbulentos, por dos razones básicas: 1. En los modelos atmosféricos, estos flujos sirven para simular la interacción entre la atmósfera y la superficie terrestre o el océano, y 2. Estos flujos determinan la dispersión de los contaminantes y la calidad del aire en la biosfera.

## 10.2. La solución de Ekman para la capa residual

Para las componentes  $u$  y  $v$  la ecuación (9.17) se reduce a expresiones similares a (4.6).

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + \frac{\partial}{\partial z} K_m \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fv + \frac{\partial}{\partial z} K_m \frac{\partial v}{\partial z},\end{aligned}$$

donde  $f$  es el parámetro de Coriolis.

En el análisis de escala realizado en el capítulo 5 se observa que para la atmósfera libre, en las ecuaciones el movimiento, los términos gradiente de presión y fuerza de Coriolis sobresalen por su magnitud formando la aproximación llamada *balance geostrófico*. En la capa límite es necesario incluir el término fricción dentro de este balance. Despreciando entonces la aceleración inercial y haciendo uso de la aproximación geostrófica, las ecuaciones anteriores se pueden escribir como

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) = 0 \quad (10.1)$$

$$k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) = 0. \quad (10.2)$$

Este sistema de ecuaciones se resuelve para las siguientes condiciones de contorno:

Para  $z = 0$ ,  $u = v = 0$

Para  $z = H$ ,  $u \rightarrow u_g$ ,  $v \rightarrow v_g$ .

Para resolver el sistema de ecuaciones (10.1) (10.2) se multiplica (10.2) por  $i = \sqrt{-1}$  y el resultado se suma a (10.1). En esta forma obtenemos,

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} - 2a^2 i \Phi = 0, \quad (10.3)$$

donde

$$\Phi = u + iv - u_g - iv_g, \quad (10.4)$$

$$a = \sqrt{\frac{f}{2k}}.$$

[En forma detallada, (10.3) se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} k \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) + fv - fv_g - f i u + f i u_g &= 0. \text{ Sacando factor común, if,} \\ k \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) + i f (v/i - v_g/i - u + u_g) &= 0. \text{ Multiplicando y dividiendo} \\ \text{por } i \text{ los dos primeros términos dentro del paréntesis, se obtiene} \\ k \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) + i f (-iv + i v_g - u + u_g) &= 0, \text{ lo cual se puede escribir} \\ k \frac{\partial^2}{\partial z^2} (u + iv) - i f (u + v i - i v_g - u_g) &= 0 \end{aligned}$$

Para el caso de la función (10.4), las condiciones de contorno se redefinen así:

$$\text{Para } z = 0, \Phi = -u_g - i v_g : \text{ Para } z = H, \Phi = 0. \quad (10.5)$$

La solución de la ecuación (10.3) es de la forma

$$\Phi = C_1 e^{a(i+1)z} + C_2 e^{(i+1)z}$$

Con ayuda de esta expresión y las condiciones de contorno (10.5) hallamos  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = -u_g - i v_g$ . Entonces la solución del problema es

$$u + v i = (u_g + i v_g) [1 - e^{-(i+1)az}]$$

Utilizando la fórmula de Euler, separando las partes real e imaginaria y colocando el eje  $0x$  en la dirección de la componente geostrófica  $u_g$ , la solución se escribe

$$\begin{aligned} u &= u_g - e^{-az} (u_g \cos az + v_g \sin az) \\ v &= v_g - e^{-az} (v_g \cos az + u_g \sin az). \end{aligned}$$

Haciendo coincidir el eje  $0x$  con la dirección del viento geostrófico,  $v_g = 0$ . En este caso se obtiene una versión simplificada de las dos ecuaciones anteriores:

$$\begin{aligned} u &= u_g (1 - e^{-az} \cos az) \\ v &= u_g e^{-az} \sin az. \end{aligned} \quad (10.6)$$

o también,

$$v/u_g = e^{-az} \sin az. \quad (10.6a)$$

La estructura de la solución de (10.6a) se muestra en la figura 10.2.

En esta figura, las divisiones sobre el eje  $0x$  corresponden a los valores  $u/u_g$  y las divisiones sobre el eje  $0y$ , a los valores  $v/v_g$ . Los puntos sobre la curva corresponden a los pares de valores obtenidos al calcular las partes

derechas de (10.6a), respectivamente, y para valores crecientes de  $az$ . Al unir los puntos sobre la curva con el origen de coordenadas se obtiene el vector posición, lo que también se conoce como *hodógrafo* del viento. Entonces, en la *capa límite*, el viento gira con la altura hacia la derecha en el hemisferio norte.

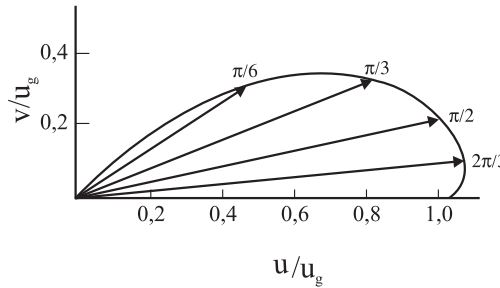


Figura 10.2. Espiral de Ekman. Adaptado de Holton (1992).

Para  $z = \pi/a = H$  (fórmula 10.6), el viento es paralelo al viento geostrófico, aunque un poco mayor en magnitud. A este nivel se le llama altura de la capa de mezcla. Sustituyendo el valor de  $a$  definido arriba, la altura de la capa de mezcla se expresa como,

$$H = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{f}{2k}}}$$

En la práctica, este valor difiere del observado realmente, debido a que se asumió  $k = \text{const.}$  Además, este valor es más válido en situaciones en que predomina la generación de turbulencia mecánica que en situaciones de predominio de turbulencia convectiva.

La estructura del viento observado realmente difiere un poco de la presentada en la figura 10.2 debido a la suposición del coeficiente de turbulencia constante (Holton, 1992). Por último, en la figura 10.3, se muestra el balance de fuerzas en la capa límite. En el hemisferio norte la fuerza de Coriolis, situada a la derecha del viento, más la fuerza de fricción deben equilibrar el gradiente de presión. En consecuencia, en la capa límite, el viento no sopla por las isobaras, como se afirmó en el capítulo 6, sino que forma un ángulo con la dirección de las isobaras. Este ángulo aumenta con el incremento de la turbulencia.

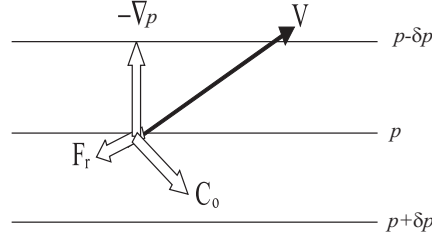


Figura 10.3. Balance de fuerzas dentro de la capa límite y orientación del viento.

### 10.3. La capa superficial

Como se afirmó, la capa adyacente se caracteriza porque en ella los flujos se consideran cuasiconstantes, lo que se puede intuir con ayuda de conclusiones derivadas del capítulo 5 y del análisis de escala para la capa límite (Holton, 1992). De acuerdo con este análisis, la divergencia del flujo turbulento debe ser del mismo orden de magnitud que el gradiente de presión o la fuerza de Coriolis ( $10^{-3} \text{ m/s}^2$ ). Esto se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} \leq 10^{-3}$$

Para una altura de  $\delta z = 10 \text{ m}$ ,  $\delta \overline{u'w'} \leq (10^{-3} \delta z) \leq 10^{-2}$ . Además, mediciones realizadas en latitudes medias muestran que el flujo turbulento cercano al suelo es del orden de  $\overline{u'w'} \approx 0.1 \text{ m}^2/\text{s}^2$ . Esto significa que la variación del flujo cerca al suelo es de un orden de magnitud inferior al flujo mismo.

La extensión de la capa superficial puede fluctuar entre 10 m durante la noche y 100 m durante el día. En esta capa tiene lugar el desarrollo de los seres vivos y la actividad humana en general. Para derivar las relaciones que gobiernan la capa superficial, se utiliza el método energético (Feagle and Businger, 1980). Con ayuda de este método se deducirán las principales relaciones de la teoría de similitud de Monin-Obukhov.

Se supone como se mencionó, que existe un campo horizontalmente homogéneo. Entonces, aplicando el resultado (9.13) de la teoría de Prandtl, los flujos de calor (9.8) y de momento (9.9) se reescriben de la siguiente manera,

$$E_k = -\rho C_p K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}, \quad (10.7)$$

$$E_m = -\rho K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (10.8)$$

De acuerdo con la escritura de esta ecuación y la ecuación (9.13), el flujo de momento está dirigido hacia abajo (observe el signo menos). En superficie, este

flujo descendente origina una tensión o fuerza por unidad de área  $\tau$  que actúa sobre el volumen unitario de aire en la dirección positiva  $0x$ . Por eso, sustituyendo en la parte izquierda de (10.8) el flujo  $E_m$  por la tensión en superficie  $\tau_s$  y eliminando el signo menos en la parte derecha, esta expresión se escribe

$$\tau_s = \rho K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \quad (10.8a)$$

la cual llevará más adelante al concepto de *velocidad de fricción*. Así mismo, se introduce un cuarto flujo llamado *flujo de flotación*:

$$E_b = -\rho C_p K_b \left( \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} \right), \quad (10.9)$$

En donde  $\bar{\theta}_v$  es la temperatura potencial virtual.

### 10.3.1. Transferencia turbulenta en una atmósfera neutral

En el caso de una atmósfera estratificada neutralmente, solo existe turbulencia mecánica originada por el gradiente de la velocidad perpendicular al flujo.

Considere un flujo horizontal de aire cuya velocidad aumenta con la altura, como el representado en la figura 9.1, pero donde el eje  $0y$  ha sido sustituido por el eje  $0z$ . Además, imagine una superficie horizontal dentro de ese flujo.

La turbulencia es igualmente suficiente para transportar vórtices turbulentos en cualquier dirección. Suponiendo que la energía de turbulencia es suficiente para contrarrestar la fuerza gravitacional, los torbellinos turbulentos pueden traspasar con igual probabilidad la superficie en ambos sentidos, hacia arriba o hacia abajo, y produciendo un desplazamiento vertical medio igual a cero.

De acuerdo con el método energético, la energía necesaria para transportar un torbellino por un camino  $l$  es

$$\overline{w'}^2 = l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2.$$

Multiplicando esta expresión por  $l^2$  y recordando la definición (9.12),

$$K_m^2 = l^2 \overline{w'}^2 = l^4 \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2,$$

o también,

$$K_m = l^2 \frac{d\bar{u}}{dz}. \quad (10.10)$$

De acuerdo con la expresión (10.8a), la tensión en superficie se puede escribir

$$\frac{\tau_s}{\rho} = K_m \frac{d\bar{u}}{dz} = l^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 = u_*^2. \quad (10.11)$$

donde  $u_*$  es la velocidad de fricción. Esta expresión indica que la velocidad de fricción por un lado es igual a

$$u_* = \left( \frac{\tau}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (10.12a)$$

y por el otro es igual a

$$u_* = l \frac{du}{dz}. \quad (10.12b)$$

El camino de mezcla  $l$ , de acuerdo con Prandtl, es proporcional a  $z$ :

$$l = kz, \quad (10.13)$$

donde  $k$  es llamada constante de Von Karman. Esta constante se mide en túneles de viento y varía de 0.35 a 0.4. Utilizando (10.13) e integrando (10.12b) en los intervalos  $0, u$ , y entre  $z_0, z$ , se obtiene el perfil de la velocidad del viento en la capa superficial para el caso de una atmósfera neutral:

$$\begin{aligned} \int_0^u du &= \frac{u_*}{k} \int_{z_0}^z \frac{dz}{z} \Rightarrow \\ u &= \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

El coeficiente de turbulencia en una atmósfera adiabática se obtiene de (10.10), (10.12b) y (10.14):

$$K_m = l^2 \frac{d\bar{u}}{dz} = l \left( l \frac{d\bar{u}}{dz} \right) = l u_*. \quad (10.15)$$

Sustituyendo  $l$  y  $u_*$ , de acuerdo con (10.13) y (10.14),

$$K_m = \frac{k^2 z u}{\ln(z/z_0)}. \quad (10.15a)$$

Para el caso de dos mediciones de viento diferentes de cero, la fórmula anterior se debe escribir

$$K_m = \frac{k^2 z (u - u_1)}{\ln(z/z_1)}. \quad (10.15b)$$



El nivel  $z = z_0$ , es la altura donde se iguala a cero la velocidad del viento calculada por la fórmula (10.14). (observe que en (10.14), para  $z = z_0$ , tenemos  $\ln z_0/z_0 = \ln 1 = 0$ ). A la constante  $z_0$  se le conoce como *nivel de rugosidad* y no puede ser igual a cero, porque en este caso la velocidad resulta indeterminada de acuerdo con la fórmula (10.14).

El nivel de rugosidad se asocia a las irregularidades del terreno. Si la superficie es rugosa, dentro de la rugosidades hay transferencia de momento debido a la diferencia de presión entre ambos lados de la rugosidad. Lo más conveniente en este caso es tomar el nivel  $z = 0$  no donde termina la rugosidad, sino donde comienza, y calcular el viento a partir de  $z_0$ .

El nivel  $z_0$ , longitud de rugosidad, se determina experimentalmente. Para una superficie de hielo, su valor es 0.0004 m; para una cobertura vegetal de hierba no muy alta es 0.01; para bosques y ciudades puede ser del orden de 1 a 5 m.

El coeficiente de rugosidad también representa la dimensión del torbellino en superficie (suposición (10.13)). Es claro que si las rugosidades se representaran por cubos de un metro de lado, estos torbellinos serían más grandes cuanto más alejados estén los cubos entre sí.

En la figura 10.4 se muestran perfiles del viento medio tomadas sobre terreno plano, y para diferentes estratificaciones de la atmósfera. En esta figura, el perfil observado para cada estratificación: inversión, neutral y ligeramente inestable, ha sido aproximado con una línea recta (línea punteada). Como se observa, la distribución de la velocidad en los tres casos se aproxima bien por el perfil logarítmico.

Con ayuda de esta gráfica, el nivel de rugosidad  $z_0$  se puede determinar como el lugar donde las prolongaciones de estos perfiles cortan el eje  $z$ .

Si el nivel de rugosidad es conocido, entonces con ayuda de mediciones similares se puede determinar la velocidad de fricción  $u_*$ .

En resumen, para una atmósfera neutral, condición que se puede lograr cuando existen vientos fuertes en superficie, la capa adyacente se caracteriza por los parámetros,  $z_0$ ,  $u_*$ ,  $k_m$  y  $u$ , los cuales pueden determinarse directamente con ayuda de mediciones de viento en varios niveles.

### 10.3.2. Transferencia de turbulencia en una atmósfera no neutral

Para el caso de una atmósfera *diabática* (o sea, estratificada estable o inestablemente), además de la energía de turbulencia mecánica se debe considerar

la generada por las fuerzas de flotación, asociada a la fluctuación local de la densidad. De acuerdo con la fórmula (7.9), la fuerza de flotación (por unidad de masa) que actúa sobre un torbellino se puede expresar

$$\frac{g}{T}(T - \bar{T}) = \frac{g}{\bar{\theta}_v}(\theta_v - \bar{\theta}_v) = g \frac{\theta'_v}{\bar{\theta}_v}$$

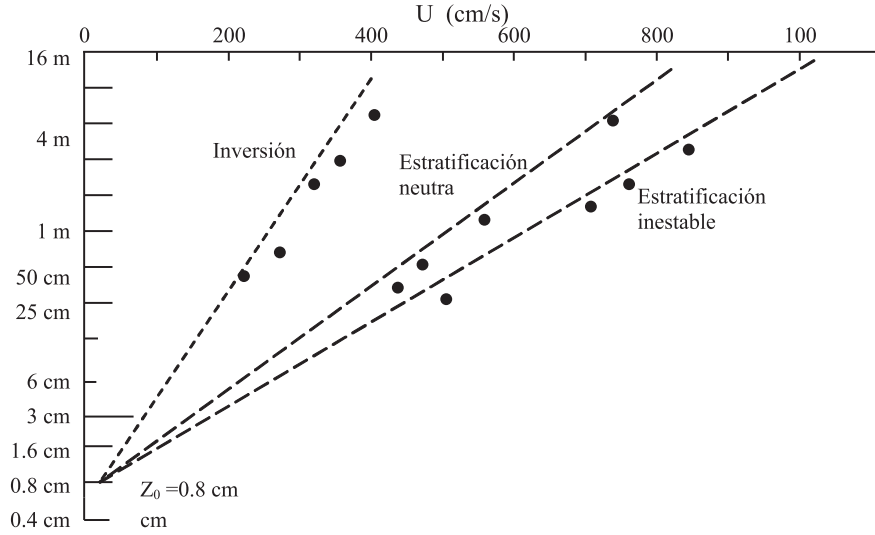


Figura 10.4. Perfil vertical del viento. Tomado de Blackadar (1997).

donde  $\bar{\theta}_v$  es la temperatura potencial virtual. El trabajo específico realizado por el torbellino en una distancia  $l$  será

$$\frac{g}{\bar{\theta}_v} l \theta'_v = -\frac{g}{\bar{\theta}_v} l^2 \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}, \quad (10.16)$$

donde, para escribir la parte derecha, se utilizó la expresión (9.10). La energía de turbulencia total generada será la suma de la energía mecánica más la energía convectiva o por flotabilidad (10.16). Por eso la expresión de la velocidad de fricción (10.11), para el caso de una atmósfera no neutral, se escribe

$$u_*^2 = l^2 \left( \frac{du}{dz} \right)^2 - \alpha \frac{g}{\bar{\theta}_v} l^2 \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z},$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente empírico de proporcionalidad que se interpreta como la relación entre el trabajo realizado por la fuerza de flotación y el

realizado por la de cizallamiento (observe que si estos dos trabajos fueran iguales, entonces  $\alpha$  sería igual a 1).

Multiplicando la expresión anterior por  $l^2(\partial u/\partial z)^2$ ,

$$u_*^4 = l^4 \left( \frac{du}{dz} \right)^4 - \alpha \frac{g}{\theta_v} l^4 \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \left( \frac{du}{dz} \right)^2. \quad (10.17)$$

Sacando factor común

$$u_*^4 = \left[ l^4 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 \right] \left[ 1 - \alpha \frac{g}{\theta_v} \frac{\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{(\partial u/\partial z)^2} \right]$$

Sustituyendo  $l$  por su equivalente  $kz$ , trasponiendo términos y sacando raíz cuadrada,

$$\frac{u_*^2}{k^2 z^2 (\partial u/\partial z)^2} = \left[ 1 - \alpha \frac{g}{\theta_v} \frac{\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{(\partial u/\partial z)^2} \right]^{1/2} \quad (10.18)$$

Esta expresión también puede escribirse

$$\frac{u_*^2}{k^2 z^2 (\partial u/\partial z)^2} = [1 - \alpha R_i]^{1/2}, \quad (10.18a)$$

donde

$$R_i = \frac{g \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{\theta_v (\partial u/\partial z)^2}. \quad (10.19)$$

De acuerdo con esta expresión, el *número de Richardson*  $R_i$  es la relación entre las energías de flotación y de cizallamiento. Este número se calcula a través de mediciones de los perfiles del viento y la temperatura. Ahora se define una función universal,

$$\phi_m = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (10.20)$$

la expresión (10.18a) se escribe

$$\frac{1}{\phi_m^2} = [1 - \alpha R_i]^{1/2},$$

o también

$$\phi_m = [1 - \alpha R_i]^{-1/4}. \quad (10.21)$$

La función universal  $\phi_m$  se determina a partir de datos experimentales. Además, cuando  $R_i = 0 \Rightarrow \phi_m = 1$ , la fórmula (10.20) se reduce a la fórmula (10.12b), que corresponde al caso neutral. Estableciendo la relación entre las expresiones (10.8a) y (10.9),

$$\frac{\tau_s}{E_b} = \frac{K_m \frac{\partial u}{\partial z}}{-C_p K_b \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}$$

se obtiene la relación entre los coeficientes de turbulencia:

$$\frac{K_m}{K_b} = -\frac{\tau_s C_p \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{E_b \frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{\frac{\tau_s}{\rho} C_p \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{\frac{E_b}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z}}$$

Sustituyendo  $\tau_s/\rho$  en esta expresión de acuerdo con la velocidad dinámica (10.12a) obtenemos,

$$\frac{K_m}{K_b} = -\frac{u_*^2 \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{\frac{E_b}{\rho C_p} \frac{\partial u}{\partial z}} \quad (10.22)$$

### 10.3.2.1. La escala de Monin–Obukhov

Como se mostró anteriormente, el número de Richardson  $R_i$  es la relación entre la producción de turbulencia por flotación y la producción por cizallamiento. Este último predomina cerca a la superficie y decrece con la altura más rápidamente que el término de flotación. En consecuencia, debe existir cierta altura donde estos términos sean iguales. A esta altura se le llama *escala de Monin–Obukhov*. Para determinarla se asume que a esta altura; 1. Los coeficientes de transferencia son iguales,  $K_m = K_b$ , y 2. El perfil del viento es logarítmico.

De acuerdo con la primera hipótesis y las expresiones (10.13), (10.15),  $K_h = K_m = u_* k z$ .

Sustituyendo este valor para el coeficiente de turbulencia en (10.9) y resolviendo esta ecuación con respecto al gradiente de la temperatura potencia virtual,

$$\frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} = -\frac{\bar{\theta}_v}{\bar{T}_v} \frac{E_b}{u_* k z C_p \rho}.$$

En la parte derecha de esta expresión se introdujo el coeficiente  $\bar{T}_v/\bar{\theta}_v \cong 1$ . Además, de la segunda hipótesis y la expresión (10.12b) se deduce que

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u_*}{kz}$$

Sustituyendo la penúltima de estas dos expresiones en el numerador del número de Richardson (10.19) y la última en el denominador,

$$R_i = -\frac{-g \frac{\bar{\theta}_v E_b}{\bar{T}_v u_* k z C_p \rho}}{\bar{\theta}_v \left(\frac{u_*}{kz}\right)^2} = \frac{g}{\bar{T}_v} \frac{E_b}{u_* k z C_p \rho} \frac{k^2 z^2}{u_*^2} = \frac{g}{\bar{T}_v} \frac{E_b k z}{u_*^3 C_p \rho},$$

o también

$$R_i = -\frac{z}{\frac{\bar{T}_v C_p \rho u_*^3}{g k E_b}} = \frac{z}{L} = \zeta,$$

donde

$$L = -\frac{\bar{T}_v C_p \rho u_*^3}{g k E_b}, \quad (10.23)$$

llamada la *escala de Monin-Obukhov*, es la altura donde la energía turbulenta por cizallamiento y la generada por convección son iguales.

Retornando a la ecuación (10.22), una expresión importante para esta relación entre coeficientes de turbulencia se halla definiendo una magnitud no dimensional llamada temperatura de escala  $\theta_*$ .

$$\theta_* = -\frac{E_b}{u_* \rho C_p}$$

o también,

$$\theta_* u_* = -\frac{E_b}{\rho C_p}$$

Sustituyendo este valor en el denominador de (10.22) y la velocidad dinámica en el numerador, de acuerdo con (10.18a),

$$\frac{K_m}{K_b} = -\frac{k^2 z^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 [1 - \alpha R_i]^{1/2} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{-\theta_* u_* \frac{\partial u}{\partial z}},$$

o también

$$\frac{K_m}{K_b} = \frac{kz}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z} (1 - \alpha R_i)^{1/2} \frac{kz}{\theta_*} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z},$$

Ahora se define otra función universal,

$$\phi_n = \frac{kz}{\theta_*} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}, \quad (10.24)$$

Aplicando las definiciones (10.20) y (10.25), la expresión anterior se escribe

$$\begin{aligned} \frac{K_m}{K_h} &= -\phi_m \phi_m^{-2} \phi_h, \Rightarrow \\ \frac{K_m}{K_h} &= \frac{\phi_h}{\phi_m} \end{aligned} \quad (10.25)$$

donde  $K_b = K_h$ . De la expresión (10.25) se concluye que, para  $K_m = K_h$ , los perfiles de viento y temperatura son similares. En efecto, para este caso  $\phi_m = \phi_h$ ; por lo tanto las partes derechas de las expresiones (10.17) y (10.22) también son iguales. (Probablemente a esta particularidad se asocia el nombre de teoría de similitud).

Otra relación importante entre los coeficientes de transferencia se puede obtener multiplicando numerador y denominador de la parte derecha de (10.22) por la cantidad  $g \frac{du}{dz} u_* kz$ , teniendo en cuenta de nuevo que  $T_v/\bar{\theta}_v \cong 1$ . En efecto,

$$-\frac{u_*^2 \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z}}{E_b} \frac{\bar{T}_v}{\bar{\theta}_v} g \frac{\frac{du}{dz}}{\frac{du}{dz}} \frac{u_*}{u_*} \frac{kz}{kz} = -\frac{g \frac{d\bar{\theta}_v}{dz}}{\bar{\theta}_v (du/dz)^2} \frac{kz}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\bar{T}_v}{g} \frac{u_*^3}{kz} \frac{C_p \rho}{E_b}.$$

Aplicando las definiciones (10.19), (10.20) y (10.23),

$$\frac{K_m}{K_b} = Ri \phi_m \frac{L}{z}.$$

Definiendo  $\zeta = \frac{L}{z}$ , la expresión anterior se escribe

$$\frac{K_m}{K_h} = \frac{R_i \phi_m}{\zeta}.$$

o también

$$\zeta = \frac{K_h}{K_m} \phi_m Ri. \quad (10.26)$$

Las ecuaciones (10.21), (10.25) y (10.26) relacionan cinco variables:  $\phi_m$ ,  $\phi_h$ ,  $K_m/K_h$ ,  $R_i$  y  $\zeta$ . La idea es expresar las cuatro primeras variables en

función de  $\zeta$ . Entonces se necesita una relación más, que se obtuvo empíricamente.

En la figura 10.5, se muestra la relación obtenida entre el número de Richardson  $R_i$  y  $\zeta$ .

De acuerdo con esta figura, para una estratificación inestable ( $\zeta < 0$ ) la relación es

$$\zeta = R_i, \quad (10.27)$$

Combinando esta igualdad con la ecuación (10.21),

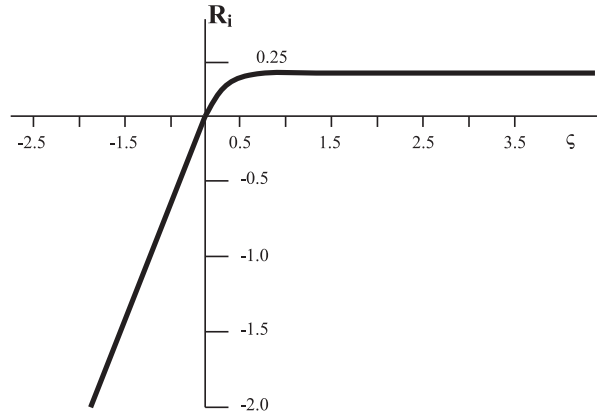


Figura 10.5. Relación entre el número de Richardson y el parámetro de altura dimensional  $\zeta$ . Adaptado de Feagle and Bussinger (1980).

$$\phi_h = \left(1 - \alpha \frac{z}{L}\right)^{-1/4} \quad (10.28)$$

Sustituyendo (10.27) en (10.26) y combinando el resultado con (10.25), para eliminar  $K_m/K_h$ , se obtiene

$$\phi_m = \phi_m^2 = \left(1 - \alpha \frac{z}{L}\right)^{-1/2} \quad (10.29)$$

Para el caso estable ( $\zeta > 0$ ) de la figura 10.5, se obtiene la relación siguiente:

$$R_i = \frac{\zeta}{1 + \beta\zeta}. \quad (10.30)$$

Además, se evidenció que para el caso estable los coeficientes de turbulencia son iguales,  $K_m = K_h$ ; entonces, de acuerdo con esta última expresión, (10.25) y (10.26), es fácil verificar que

$$\phi_m = \phi_h = 1 + \beta\zeta. \quad (10.31)$$

Los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  son aproximadamente  $\alpha = 16$ ;  $\beta = 5$ .

En resumen, con la ayuda de la relación empírica encontrada para el número de Richardson  $R_i$ , se tienen tres ecuaciones (10.21), (10.25) y (10.26) para tres incógnitas  $\phi_m, \phi_h, K_m/K_h$ . en este caso, el problema de la turbulencia es cerrado. Este tipo de solución para el problema de la turbulencia se conoce con el nombre de cerradura de primer grado. Veamos cómo se aplica esta teoría para determinar los perfiles en la capa superficial.

## 10.4. Aplicaciones de la teoría de similaridad

### 10.4.1. Determinación de los perfiles en la capa superficial

Como se mencionó, la determinación de los perfiles en la capa superficial por medio de la teoría de similaridad de Monin-Obukhov es de suma importancia porque a través de ellos se determinan los flujos de interacción suelo-atmósfera en los modelos atmosféricos.

#### 10.4.1.1. Determinación del perfil del viento

Para encontrar el perfil del viento, se supone  $\phi_m = \phi_m(\zeta)$  y la relación (10.20) se escribe

$$\frac{kz}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \phi\left(\frac{z}{L}\right).$$

Sumando y restando 1 en el lado derecho de esta ecuación e integrando entre  $z_0$  y  $z$  y entre 0 y  $u$ ,

$$\frac{k}{u_*} \int_0^u du = \int_{z_0}^z \frac{dz}{z} + \int_{z_0}^z \left[ \phi_m\left(\frac{z}{L}\right) - 1 \right] \frac{dz}{z},$$

Se obtiene

$$\frac{k}{u_*} u = \ln \frac{z}{z_0} - \int_{z_0}^z \left[ 1 - \phi_m\left(\frac{z}{L}\right) \right] \frac{dz}{z},$$

o también

$$u = \frac{u_*}{k} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \Psi_m\left(\frac{z}{L}\right) \right] \quad (10.32)$$



donde

$$\Psi_m\left(\frac{z}{L}\right) = \int_{z_0/L}^{z/L} [1 - \phi_m(\zeta)] \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (10.33)$$

Puesto que  $z_0/L$  es usualmente muy pequeño, el límite inferior de esta integral se puede tomar como siendo igual a cero.

Para el caso inestable, se escribe en (10.33) el valor de  $\phi_m$  dado por (10.28), con  $\alpha = 16$  y se integra. De esta forma, se obtiene

$$\Psi_m = \ln \left[ \left( \frac{1+x^2}{2} \right) \left( \frac{1+x}{2} \right)^2 \right] - 2 \arctan x + \frac{\pi}{2},$$

donde

$$x = \left( 1 - 16 \frac{z}{L} \right)^{1/4}. \quad (10.34)$$

Para el caso estable, se escribe en (10.33) el valor de  $\phi_m$  dado por (10.31) con  $\beta = 5$  y se integra. El resultado es

$$\Psi_m = -5 \frac{z}{L} \quad (10.35)$$

#### 10.4.1.2. Determinación del perfil de la temperatura

Para determinar el perfil de la temperatura, la expresión (10.24) se escribe

$$\frac{kz}{\theta_*} \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} = \phi_h(\zeta), \quad (10.36)$$

Integrando esta ecuación de manera similar a la del perfil del viento,

$$\theta - \theta_0 = \frac{\theta_*}{k} \left[ \ln \frac{z}{z_0} - \Psi_m\left(\frac{z}{L}\right) \right]. \quad (10.37)$$

donde  $\theta_0$  es la temperatura potencial definida en el nivel de rugosidad y

$$\Phi_h = \int_{z_0}^{z/L} (1 - \phi_h) \frac{d\zeta}{\zeta} \quad (10.38)$$

De nuevo, para el caso inestable, se escribe la aproximación empírica de  $\phi_h$  dada por (10.29) y el valor  $\alpha = 16$  y se integra. En este caso, para el aire inestable,

$$\Phi_h = 2 \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - 16 \frac{z}{L}} \right) \right]. \quad (10.39)$$

Para el caso estable se obtiene una expresión similar a (10.35):

$$\Phi_h = -5 \frac{z}{L}. \quad (10.40)$$

En resumen, se puede establecer el perfil de la velocidad del viento y de la temperatura en la capa superficial si se conoce, el nivel de rugosidad  $z_0$ , la velocidad de fricción  $u_*$ , la temperatura de escala  $\theta_*$  y la escala de Monin–Obukhov  $L$ .

### Determinación de las características de la turbulencia en la capa superficial

La determinación de las características de la turbulencia como el grado de inestabilidad atmosférica medido por la escala de Monin–Obukhov, la velocidad de fricción, el flujo de calor en el suelo, la temperatura de escala, etc., tiene aplicaciones en micrometeorología para diagnóstico de la contaminación atmosférica, en modelos atmosféricos para el cálculo de los flujos y en muchas otras aplicaciones.

El cálculo de estas características puede realizarse con la ayuda de una observación del viento y dos mediciones de temperatura. Además se utilizan las fórmulas (10.32) y (10.37)

Para realizar el cálculo por estas fórmulas se debe conocer el valor de las constantes  $k$  y  $z_0$  y determinar simultáneamente la velocidad de fricción, la temperatura de escala y la escala de Monin–Obukhov, y el flujo de calor en el suelo. Se puede entonces establecer un proceso de cálculo que consta de los siguientes pasos:

Paso 1 Se coloca  $1/L = 0$  (es decir, se considera una condición neutral para la cual las funciones  $\Phi_m$  y  $\Phi_h$  son nulas). Se estima la velocidad de fricción  $u_*$  y la temperatura de escala  $\theta_*$  por las fórmulas  $u_* = \frac{uk}{\ln \frac{z}{z_0}}$

y  $\theta_* = \frac{k(\theta - \theta_0)}{\ln \frac{z}{z_0}}$ , respectivamente.

Paso 2 Con estos valores preliminares de  $u_*$  y  $\theta_*$ , se realiza una primera estimación del flujo de calor en el suelo  $E_b = -\theta_* u_* \rho C_p$  y de la escala de Monin–Obukhov,  $L = -\frac{\bar{T}_v C_p \rho u_*^3}{kg E_b}$ .

Paso 3 El valor de  $L$  (y su signo) permite calcular las funciones universales  $\Phi_m(z/L)$  y  $\Phi_h(z/L)$ , lo que posibilita una nueva estimación de  $u_*$  y  $\theta_*$  por las fórmulas (10.32) y (10.37).

Paso 4 Se repite el procedimiento del paso 2 hasta que  $L$  se estabilice alrededor de un valor prácticamente constante.

**Ejercicio**

1. Derive las fórmulas correspondientes y calcule la velocidad dinámica  $u_*$  y el flujo de calor  $E_b = E_h$ , usando los siguientes datos observados sobre un terreno plano.

Altura (m)	velocidad Viento ( m/s)	Temperatura °C
2.00	4.49	33.64
4.00	5.13	32.94
5.66	5.38	
8.00	5.64	32.52
11.31	5.86	
16.00	6.08	32.14
22.63	6.21	31.94
32.00	6.45	31.83



## Parte II

### MODELAMIENTO ATMOSFÉRICO



## 11

# Conceptos básicos usados en la segunda parte

### *Edward Lorentz (1917-2008)*

Matemático y meteorólogo norteamericano, pionero de la teoría del caos, dio un vuelco radical en la concepción y las limitaciones de la predicción numérica del estado del tiempo y del clima. Es famoso por su concepción del efecto mariposa.



Imagen tomada de  
<http://www.answers.com/topic/edward-norton-lorenz?cat=technology>

En este capítulo se derivan los conceptos de vorticidad y vorticidad barotrópica en coordenadas esféricas, necesarios más adelante para la aplicación del método espectral. Además, se revisan otros elementos básicos como; análisis armónico, método de las perturbaciones, polinomios de Legendre y funciones esféricas. Algunas de las obras consultadas son Viin Nielsen (1974), Piskunov (1977), krishnamurti & otros (1998).



### 11.1. Vorticidad en coordenadas esféricas

Considere la figura 11.1(a). Puede observarse que la porción de meridiano comprendido entre dos latitudes es  $a\delta\phi$  y la porción de paralelo comprendido entre dos meridianos es  $a \cos \phi \delta\lambda$ . Considerando un área infinitesimal  $\delta A$ , como la dibujada en la 11.1(b). Es fácil notar que esta área es igual a

$$\delta A = a^2 \cos \phi \delta\lambda \delta\phi \quad (11.1)$$

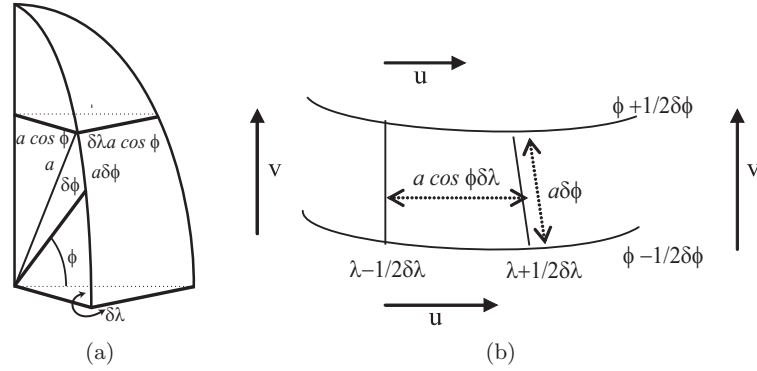


Figura 11.1. Ilustraciones esquemáticas para cálculos en coordenadas esféricas. a) Ángulos y arcos coordinables. b) Porción esférica.

La componente vertical de la vorticidad  $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$  puede obtenerse en coordenadas esféricas calculando la circulación por el contorno de la figura 11.1(b). En efecto, aplicando la fórmula (2.29),

$$\begin{aligned} \delta c = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = & v(\lambda + 1/2\delta\lambda, \phi) a\delta\phi - u(\lambda, \phi + 1/2\delta\phi) a \cos(\phi + 1/2\delta\phi) \delta\lambda - \\ & - v(\lambda - 1/2\delta\lambda, \phi) a\delta\phi + u(\lambda, \phi - 1/2\delta\phi) a \cos(\phi - 1/2\delta\phi) \delta\lambda, \end{aligned}$$

la cual después de algunas manipulaciones sencillas, usando expansión en series truncadas de Taylor hasta el segundo término, y fórmulas trigonométricas da:

$$\delta c = \frac{\delta v}{\delta\lambda} a\delta\lambda\delta\phi - \frac{\delta u}{\delta\phi} \cos\left(\frac{1}{2}\delta\phi\right) a \cos \phi \delta\phi \delta\lambda + 2u \sin\left(\frac{1}{2}\delta\phi\right) a \sin \phi \delta\lambda$$

(Se usan las fórmulas  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$  y  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{sen } b$ ,  $f(x+x_0) = f(x_0) + x_0 df/dx$ ,  $f(x-x_0) = f(x_0) - x_0 df/dx$ ).

Dividiendo entre el área  $dA$ , utilizando la expresión (11.1) y la fórmula (2.23) del capítulo 2, en el límite se obtiene

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\tan \phi}{a} u$$

(Para llegar a esta expresión se tiene en cuenta que para ángulos muy pequeños se cumple la aproximación;  $\cos \delta\phi/2 \cong 1$  y  $\text{sen } \delta\phi/2 \cong \delta\phi/2$ ). Por último, es fácil verificar que esta expresión puede escribirse en forma más compacta.

$$\zeta = \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{\partial u \cos \phi}{\partial \phi} \right). \quad (11.2)$$

(Recuerde que  $\cos' x = -\text{sen } x$ )

### 11.1.1. Ecuación de la vorticidad barotrópica en coordenadas esféricas

En coordenadas esféricas, la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente (8.11), deducida en el capítulo 8, se escribe

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = 0, \quad (11.3)$$

en donde,  $\zeta$  está determinado por la fórmula (11.2) derivada arriba. El operador diferencial plano para la derivada sustancial se escribe de acuerdo con la fórmula:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (11.4)$$

(Esta representación se evidencia observando la figura 11.1(a) y al considerar las expresiones para  $dx$  y  $dy$  en coordenadas esféricas. Holton 1992).

Otra manera de escribir la ecuación de conservación de la vorticidad barotrópica es a través del Jacobiano para la función de corriente y la vorticidad absoluta. Para derivar esta expresión, la igualdad (11.3) se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta + f) + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}(\zeta + f) = 0.$$

Despreciando  $f$  en el primer término y utilizando la fórmula (2.19), la última ecuación se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t} = \vec{k} \times \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla}(\zeta + f).$$

Es fácil mostrar que esta expresión también se puede escribir

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x} \quad (11.5)$$

(Para mostrar esto basta con verificar por simple sustitución el cumplimiento de la siguiente igualdad  $\vec{k} \times \psi \cdot \vec{\nabla} \eta = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}$ )

La parte derecha de la expresión (11.5) es, por definición, un Jacobiano. En coordenadas esféricas, la expresión (11.5) se escribe

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \mu} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial \lambda} - \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial \mu} \right), \quad (11.5a)$$

donde  $\mu = \text{sen } \phi$  y la parte derecha se ha escrito usando el concepto de Jacobiano.

## 11.2. Método de las perturbaciones

El método de las perturbaciones es una manera de derivar, bajo suposiciones dadas, una ecuación lineal (o sistema de ecuaciones). Esto permite obtener una solución analítica y una interpretación física de algunos tipos de movimientos en la atmósfera. Este método es útil en el análisis de ciertos tipos de movimientos ondulatorios expuestos en el siguiente capítulo. El método consiste en representar cada función como la suma de un valor medio más una desviación:

$$f(x, y, z, t) = \overline{f(z)} + f'(x, y, z, t). \quad (11.6)$$

La desviación  $f'(x, y, z, t)$  es función de las tres coordenadas y del tiempo, mientras que  $\overline{f(z)}$  es una función que depende solo de la altitud  $z$ , la cual caracteriza el *estado medio* o *estado básico*, y por tanto no depende del tiempo ni de la longitud. Además, se asumen las siguientes hipótesis: 1. El estado básico por si solo debe satisfacer el sistema de ecuaciones. 2. Las perturbaciones son demasiado pequeñas en comparación con el estado básico. O sea,

$$\frac{f'}{\overline{f}} \ll 1.$$

Esto permite despreciar los productos que envuelven perturbaciones. A manera de ejemplo, veamos como se aplica este método para linealizar un término en una de las ecuaciones del movimiento horizontal.

Sea  $\bar{u}$  la velocidad zonal conseguida a través de un promedio en el tiempo, y  $u'$  la desviación del valor medio. Entonces la velocidad zonal completa es

$$u(x, t) = \bar{u} + u'(x, t). \quad (11.7)$$

La aceleración inercial en este caso sería

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = (\bar{u} + u') \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial x} = \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (11.8)$$

En el extremo izquierdo de estas igualdades se halla un término no lineal, mientras que en el extremo derecho hay un término lineal, ya que el valor medio no depende de  $x$ . Note, que en esta expresión no aparece la derivada del valor medio ya que, como se anotó antes, este valor no es función del tiempo ni de la longitud. Además, se ha despreciado, el producto que envuelve perturbaciones.

### 11.3. Descomposición de una función en serie de Fourier

El concepto de serie de Fourier será usado con frecuencia en los capítulos siguientes. Una serie de Fourier es más fácilmente definida para una función periódica. Decimos que una función periódica con período  $2\pi$  se puede descomponer en serie de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \text{sen } nx), \quad (11.9)$$

donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  están por determinar. En otros términos, la parte izquierda de (11.9) converge y su sumatoria es igual a  $f(x)$ .

En forma similar se puede representar una función de varias variables. Por ejemplo, la función  $\Psi$  dependiendo de la longitud  $\lambda$  y de la latitud  $\phi$ , se representa en serie de Fourier de la siguiente manera:

$$\Psi(\lambda, \phi) = \frac{1}{2} \Psi_0(\phi) + \sum_{m=1}^{\infty} (\Psi_m(\phi) \cos m\lambda + \Psi_m(\phi) \text{sen } m\lambda).$$

Volviendo al caso de la fórmula (11.9), para encontrar el coeficiente  $a_0$ , se integra esta ecuación entre  $-\pi$  y  $\pi$ . Es fácil notar que en el lado derecho el resultado de la primera integral es  $\pi a_0$  y el de los dos últimos es 0. (Por

ejemplo  $\int_{-\pi}^{\pi} a \cos nx dx = \frac{a_0}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ . De manera similar sucede con la última integral).

En consecuencia, el coeficiente  $a_0$  resulta siendo igual a

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

Para encontrar los otros dos coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ , se multiplican ambos miembros de la ecuación (11.9) por  $\cos(kx)$  y  $\sin(kx)$ , respectivamente, y se integra en cada caso la expresión resultante, entre los límites señalados anteriormente. Es fácil notar que las integrales en la parte derecha, para  $n \neq k$ , desaparecen quedando apenas las dos integrales para las cuales  $n = k$ . En ambos casos, la integral es igual a  $\pi$ . Por eso, los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  resultan iguales a

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$$

Para probar que la integral para  $n \neq k$  es igual a cero, la ecuación (11.9) se escribe

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \\ \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx dx \right) \end{aligned}$$

Tome por ejemplo la segunda integral en el lado derecho. Teniendo en cuenta que, para  $n \neq k$ , se cumple la identidad trigonométrica  $\cos nx \cos kx = 1/2(\cos(n+k)x + \cos(n-k)x)$ , esta integral se escribe

$$\frac{a_n}{2} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+k)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-k)x dx \right] = \frac{a_n}{2} \left[ \frac{\sin(n+k)x}{n+k} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n-k)x}{n-k} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0$$

### Ejemplo

Sea  $f(x)$  una función periódica con período  $2\pi$  definida en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f(x) &= -x & \text{para } -\pi \leq x \leq 0 \\ f(x) &= x & \text{para } 0 < x \leq \pi \end{aligned}$$

En esta caso los coeficientes resultan iguales a

$$\begin{aligned} a_0 &= \pi, & a_k &= 0 & \text{para } k \text{ par, } b_k &= 0 \\ a_k &= -4/\pi k^2 & & \text{para } k \text{ impar} \end{aligned}$$

(El ejercicio 1 tiene como objetivo la obtención de los coeficientes  $a_0$  y  $a_k$ ).

Así se obtiene la siguiente serie:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left( \frac{\cos x}{1} + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \dots \right). \quad (11.9a)$$

(En el ejercicio 2 se muestra el uso de esta serie para el cálculo del número  $\pi$ ). Esta es una función monótona por trozos y se representa en la figura 11.2

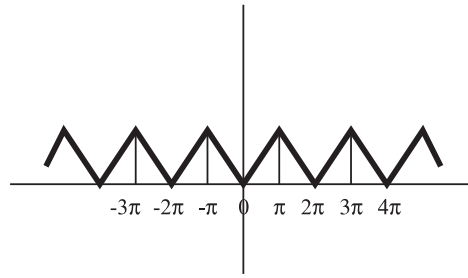


Figura 11.2. Representación de una función monótona por trozos.

### 11.3.1. Otra forma de escribir la serie de Fourier

Sea  $f(x)$  una función periódica con período  $2l$  (en general  $2l \neq 2\pi$ ). Además, definiendo  $n$  el número de onda, como

$$n = \frac{k\pi}{l}, \quad (11.10)$$

donde  $l$  es una medida de longitud, entonces la serie de Fourier (11.9) se escribe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \right), \quad (11.11)$$

En este caso, los coeficientes están dados por

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \operatorname{sen} \frac{k\pi x}{l} dx.$$

En meteorología el sentido físico del número de onda es fácil de representar. Si en lugar de la expresión (11.10) se elige el número de onda como  $n = k2\pi/l$  y suponiendo que  $l$  sea el perímetro del ecuador, entonces  $k$  es el número de ondas a lo largo del ecuador terrestre. Por ejemplo, para  $k = 1 \Rightarrow n = 1(2\pi/l) = 1$  onda. Para  $k = 2 \Rightarrow n = 2(2\pi/l) = 2$  ondas, etc.

Cuando la función no es periódica, pero en el intervalo  $(a, b)$  es monotónica por trozos, se complementa para formar una función periódica.

### 11.3.2. Forma compleja de la serie de Fourier

Usando las fórmulas de Euler,

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} = -i \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \quad (11.12)$$

La ecuación (11.9) se escribe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - ib_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right),$$

o también

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right).$$

Denotando

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2},$$

la expresión anterior se escribe

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}).$$

Esta expresión también puede escribirse

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}. \quad (11.13)$$

Para las funciones trigonométricas complejas, se cumple la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\frac{1}{2\pi} = \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{in'x} dx \begin{cases} 1 & \text{para } n' = -n \\ 0 & \text{para } n' \neq -n \end{cases}. \quad (11.14)$$

### 11.3.3. La integral de Fourier

La integral de Fourier es el elemento básico para llegar a la transformada de Fourier. Sea  $f(x)$  una función integrable en valor absoluto en el intervalo infinito  $(-\infty, +\infty)$ . Suponga que esta función se puede descomponer en cualquier intervalo  $(-l, l)$  en serie de Fourier, como la representada por la fórmula (11.11).

Cambiando de variable de integración, los coeficientes de (11.11) se escriben

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) dt, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \quad y \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \operatorname{sen} \frac{k\pi t}{l} dt.$$

Colocando estos coeficientes en la expansión (11.11),

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \right] \cos \frac{k\pi}{l} x + \\ + \left( \int_{-l}^l f(t) \operatorname{sen} k\pi t dt \right) \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \end{aligned}$$

o también

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \left( \cos \frac{k\pi}{l} t \cos \frac{k\pi}{l} x + \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} t \operatorname{sen} \frac{k\pi}{l} x \right) dt$$

Utilizando fórmulas trigonométricas para la diferencia de ángulos, esta expresión se escribe

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} dt$$



Designando

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \alpha_k = \frac{k\pi}{l} \quad \text{y} \quad \Delta\alpha_k = \frac{\pi}{l},$$

entonces,

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \int_{-l}^l f(t) \cos \alpha_k(t-x) dt \right] \Delta\alpha_k.$$

Para  $l \rightarrow \infty$ , el primer integral tiende a cero y la expresión anterior se escribe

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right) d\alpha$$

Esta expresión se conoce con el nombre de integral de Fourier.

#### 11.3.4. Integral de Fourier en forma compleja

Puesto que la función coseno es par, se puede escribir la primera integral de la expresión anterior desde  $-\infty$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \alpha(t-x) dt \right] d\alpha.$$

Además, se puede mostrar que (Piskunov, p. 360)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \alpha(t-x) dt \right] d\alpha = 0.$$

(Esto se debe a que la función seno es impar y su integral desde -M hasta M es cero). Multiplicando esta igualdad por  $i/2\pi$  y sumando el resultado con la expresión anterior,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[ \cos \alpha(t-x) + i \sin \alpha(t-x) \right] dt \right\} d\alpha.$$

ó

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt \right] d\alpha. \quad (11.15)$$

La parte derecha de esta igualdad se conoce con el nombre de *integral de Fourier en forma compleja*.

### 11.3.5. Transformada de Fourier

La expresión (11.15), puede escribirse también como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \right] e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

La integral del lado derecho puede separarse en dos integrales:

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha t} dt \quad (11.16)$$

y

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha \quad (11.17)$$

A la función  $F^*(\alpha)$ , determinada por (11.16), se le llama *transformación de Fourier* para la función  $f(x)$ . A la función  $f(x)$ , determinada por (11.17) se le llama *transformación inversa de Fourier*.

## 11.4. Funciones esféricas y polinomios de Legendre

Las funciones esféricas y los polinomios de Legendre tienen su origen en la solución de la ecuación de Laplace, que para el caso estacionario se escribe como:

$$\vec{\nabla}^2 u = 0,$$

en donde  $u$  es función de  $x$  y de  $y$ . En coordenadas esféricas y para una variable independiente, la ecuación de Laplace puede escribirse (Krishnamurti & otros, 1998)

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right] P = 0, \quad (11.18)$$

donde  $n$  es un entero,  $\mu = \sin \theta$ ,  $\theta$  es la latitud,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , y  $P$  es la solución de la ecuación.

Para el caso  $m = 0$ , la ecuación anterior se llama ecuación de Legendre;  $P_n(\mu)$ , *polinomio de Legendre*.

### 11.4.1. Polinomios de Legendre

Polinomio de Legendre de grado  $n$ ,  $P_n(\mu)$ , se define como:

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \dots, |\mu| \leq 1 \quad (11.18a)$$

Por ejemplo, para  $n=2$  tenemos;

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \frac{d^2}{d\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 &= \frac{1}{8} \frac{d}{d\mu} [2(\mu^2 - 1)2\mu] = \frac{1}{8} \frac{d}{d\mu} (4\mu^3 - 4\mu) = \frac{1}{8} (12\mu^2 - 4) \Rightarrow \\ P_2(\mu) &= \frac{3\mu^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

En la figura 11.3 se muestran los gráficos de los polinomios de Legendre para  $n = 1, 2, 3, 4$  y  $5$ .

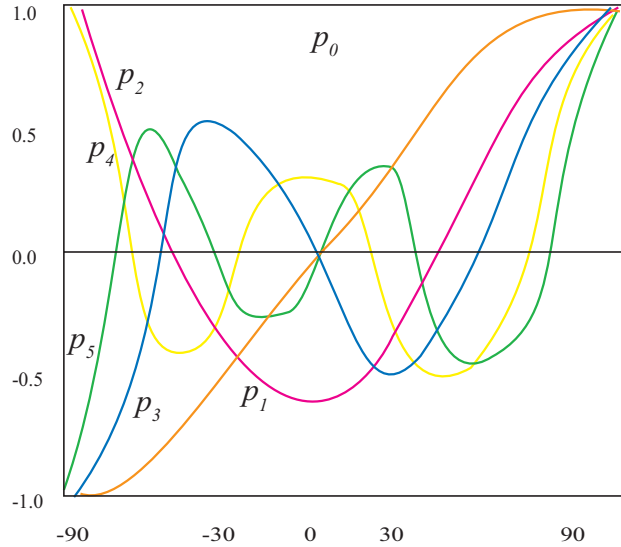


Figura 11.3. Representación de los polinomios de Legendre desde  $P_0(\mu)$  hasta  $P_5(\mu)$ . Adaptado de Krishnamurti & otros (1998), p.74.

Cuando el índice  $m$  no es igual a cero, la expresión (11.18) se llama ecuación asociada de Legendre y su solución es el polinomio asociado de Legendre. El polinomio asociado de Legendre de primer género de orden  $m$  y grado  $n$  se define como

$$P_n^m(x) = \frac{(1 - \mu^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{d\mu^{m+n}} (\mu^2 - 1)^n, \quad (11.19)$$

donde,  $m$  es un entero y  $n$  es un entero pero no negativo y modo que  $n \geq |m|$ .

Puesto que  $P_n^m(\mu)$  es un polinomio de grado  $n$ , entonces tiene  $n$  raíces que corresponden a la solución de la ecuación,  $P_n^m(\mu) = 0$ . Dos de ellas corresponden a los polos, ( $\mu = \pm 1$ ); las demás,  $n - m$ , se ubican entre los polos (por el meridiano). Las  $n - m$  raíces se llaman ceros del polinomio de Legendre.

Los polinomios de Legendre satisfacen la siguiente condición de ortogonalidad:

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_k(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } n = k \end{cases} \quad (11.20)$$

Además, existen algunas fórmulas que relacionan polinomios de Legendre de diferentes grados y órdenes. Estas relaciones sirven para calcular las funciones asociadas de Legendre y sus derivadas las cuales serán necesarias en el análisis espectral (capítulo 14). Algunas de estas relaciones son:

$$\mu P_n^m(\mu) = \varepsilon_{n+1}^m P_m^{n+1}(\mu) + \varepsilon_n^m P_{n-1}^m(\mu) \quad (11.21)$$

donde,  $\varepsilon_n^m = \left( \frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right)^{\frac{1}{2}}$

$$(1 - \mu^2) \frac{dP_n^m(\mu)}{d(\mu)} = n \varepsilon_{n+1}^m P_m^{n+1}(\mu) + (n+1) \varepsilon_n^m P_{n-1}^m(\mu) \quad (11.21a)$$

En el caso cuando se consideran dos variables independientes, la solución de la ecuación de Laplace es una función esférica y de manera similar a (11.18) esta ecuación puede escribirse (Krishnamurti & otros, 1998).

$$\frac{d}{d\mu} \left[ 1 - \mu^2 \right] \frac{dY}{d\mu} \frac{\partial^2 Y}{\partial \lambda^2} + n(n+1)Y = 0$$

donde  $Y$ , la solución de esta ecuación, es una función esférica o armónico esférico. Además,  $\lambda$  es longitud y  $\mu = \sin \theta$ , en donde  $\theta$  es latitud.

#### 11.4.2. Funciones esféricas (o tesseractales)

Las funciones esféricas  $Y_\alpha(\lambda, \mu)$  son del tipo

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = e^{im\lambda} P_n^m(\mu) \quad (11.22)$$

El armónico esférico es de orden  $m$  y grado  $n$ . El factor  $e^{im\lambda}$  describe la variación este-oeste y el factor  $P_n^m(\mu)$  describe la variación norte sur del armónico esférico. Por ejemplo, la función de corriente puede expresarse en funciones esféricas:

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_m \sum_n \tilde{\Psi}_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (11.23)$$

donde  $\tilde{\Psi}_n^m(t)$  son coeficientes complejos. Las funciones armónicas (11.22) están formadas por el producto de un armónico de Fourier y una función asociada de Legendre. En las funciones esféricas,  $m$  es el número ondas a través de un círculo de latitud;  $n - m$ , como ya fue anotado anteriormente, es el número de ceros a lo largo del meridiano sin contar los polos. Por ejemplo, en la figura 11.4 se ha representado la función  $P_5^1(\mu)$ .

Las funciones esféricas satisfacen la siguiente ecuación:

$$\vec{\nabla}^2 Y_n^m = \frac{-n(n+1)}{a^2} Y_n^m. \quad (11.24)$$

De manera similar a las funciones trigonométricas complejas, las funciones esféricas tienen un condición de ortogonalidad (llamada condición de normalización):

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n'}^{*m'}(\lambda, \mu) d\mu d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{para } (m, n) = (m', n') \\ 0 & \text{m, n} \neq (m', n') \end{cases}, \quad (11.25)$$

donde  $Y_{n'}^{*m'}$  es el conjugado de  $Y_n^m$ .

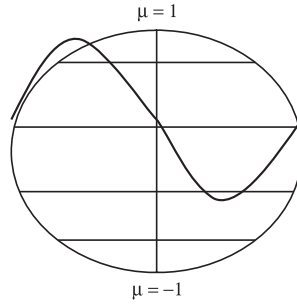


Figura 11.4. Representación esquemática de una función esférica para los siguientes valores:  $n = 5$ ,  $m = 1$ . A esta función corresponde solo una onda a lo largo del círculo de latitud ( $m = 1$ ) y cuatro nodos sobre el meridiano ( $n - m = 5 - 1 = 4$ ).

## Ejercicios

1. Dada la función

$$\begin{aligned} f(x) &= -x \text{ para } -\pi \leq x \leq 0 \\ f(x) &= x \text{ para } 0 < x \leq \pi \end{aligned}$$

obtenga los coeficientes de Fourier  $a_0$  y  $a_k$ .

2. Calcule el valor del número  $\pi$  usando la serie (11.9a). Compare y tabule los resultados parciales obtenidos al considerar 2, 3, 4 coeficientes de Fourier en el lado derecho de (11.9a).

## 12

# Ondas en la atmósfera



Ondas de tipo Kelvin-Helmholtz. Imagen tomada de <http://www.deanesmay.com/files/mary-lent-wave.jpg>

Los principios del movimiento ondulatorio en general se revisan al comienzo del capítulo. Posteriormente, estos principios se aplican en el análisis de tres tipos de ondas atmosféricas: las ondas de Rossby, las ondas acústicas y las ondas gravitacionales. Obviamente, el estudio de ondas atmosféricas es mucho más extenso. Sin embargo, este estudio puede ser complementado aplicando el enfoque general dado en este capítulo. Algunos de los textos consultados fueron Holton (1992), Krishnamurti & otros (1998).

## 12.1. Características del movimiento ondulatorio

Inicialmente es conveniente recordar las ideas principales del movimiento ondulatorio en el medio continuo. Por simplicidad, suponga que el movimiento se realiza solamente en la dirección  $x$ . En el movimiento ondulatorio, un grupo de partículas oscila, mientras que las restantes (las del medio no perturbado) permanecen en reposo. Con el tiempo, esta perturbación se va transmitiendo a las partículas vecinas y de esta manera la onda se propaga con una velocidad constante. El movimiento ondulatorio puede ser caracterizado por la ecuación ondulatoria,

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \quad (12.1)$$

donde  $c$  es una constante. Se puede mostrar, por simple sustitución, que la ecuación,

$$\theta = A \sin(kx - vt - \alpha) \quad (12.2)$$

representa la solución de la ecuación ondulatoria (12.1). En la ecuación (12.2),  $A$  es la amplitud de la onda,  $k$  es llamado número de onda y se define como  $2\pi$  dividido entre la *longitud de onda*  $L_x$ ,  $v$  es la *frecuencia angular* (número de oscilaciones en la unidad de tiempo) y  $\alpha$  es el desplazamiento inicial de la onda. El significado de la variable  $\theta$  en el lado izquierdo de (12.2) quedará claro con ayuda del análisis siguiente. Por simplicidad, suponga  $\alpha = 0$ .

La fórmula (12.1) relaciona tres variables:  $\theta$ ,  $x$  y  $t$ . Fijando una de ellas se puede analizar la relación existente entre las otras dos. Por ejemplo, si se fija el tiempo  $t$  podemos ver como  $\theta$  varía con  $x$ .

En la figura 12.1(a) se muestra la relación entre  $\theta$  (la ordenada) y  $x$ , para  $t = 0$ . En la figura 12.1(b) se muestra esta misma relación para  $vt = \pi/2$ .

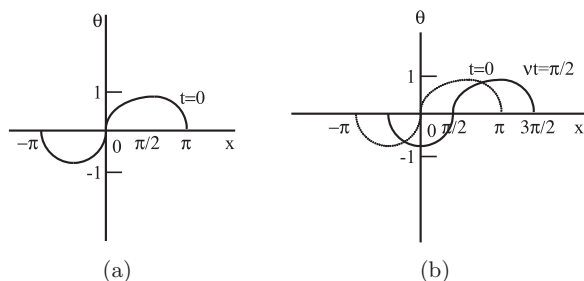


Figura 12.1. Relación entre los parámetros de una onda para: a)  $t = 0$  y b)  $vt = \pi/2$ .



Para acompañar una parte (o fase) determinada de la onda, (un punto en la curva de la figura 12.1) con el transcurrir del tiempo, se fija un valor particular de  $\theta$ . Es evidente que, las crestas de la onda corresponden a un valor máximo de  $\theta$  y los valles a un valor mínimo. Se quiere determinar, cómo varía  $x$  con el tiempo  $t$  cuando

$$kx - vt = \text{const.} \quad (12.3)$$

Si el tiempo aumenta,  $x$  también debe aumentar. Por tanto, la ecuación (12.2) representa una onda que se mueve en la dirección positiva de  $x$ . La velocidad de una fase particular se obtiene derivando (12.3) con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned} k \frac{dx}{dt} - v &= 0 \Rightarrow \\ \frac{dx}{dt} &= c = \frac{v}{k}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

En otras palabras, la velocidad de fase es la frecuencia dividida entre el número de onda. La representación de un proceso ondulatorio con ayuda de una sola onda no es muy aconsejable, ya que en la atmósfera las perturbaciones no son puramente sinusoidales. Por tanto, en la práctica, el proceso ondulatorio está representado por series de Fourier como (11.9) o (11.13). De acuerdo con la fórmula (11.13) del capítulo 11, la solución del problema (12.1) se puede representar de manera más general como,

$$\theta = Ae^{i(kx-vt-\alpha)}, \quad (12.5)$$

donde, de la expresión compleja, se debe tomar solo la parte real o la parte imaginaria.

### 12.1.1. Velocidad de grupo

Como norma, en los movimientos atmosféricos reales se observa no una, sino una serie de ondas o armónicos con diferentes parámetros. En este caso, en lugar de velocidad de fase se suele hablar de *velocidad de grupo*. (Observando con detenimiento las ondas en el mar, se pueden diferenciar grupos aislados de ondas que se propagan con velocidad muy diferente de la de las ondas por separado).

Deduzcamos la fórmula para el cálculo de la velocidad de grupo  $C_{gr}$ . La velocidad de grupo se puede deducir considerando la superposición de dos ondas que se propagan horizontalmente con números de onda y frecuencias que se diferencian en  $2\delta k$  y  $2\delta v$ , respectivamente. (Por simplicidad considere

que las dos ondas tienen igual amplitud). Entonces, la perturbación total es

$$\psi(x, t) = A \exp [i(k + \delta k)x - (v + \delta v)t] + A \exp [i(k - \delta k)x - (v - \delta v)t].$$

Sacando factor común,  $\exp [i(kx - vt)]$ ,

$$\psi(x, t) = A \{ \exp [i(\delta kx - \delta vt)] + \exp [-i(\delta kx - \delta vt)] \} e^{i(kx - vt)}.$$

Recordando la fórmula de Euler (11.12), escribimos esta expresión como,

$$\psi(x, t) = 2A \cos(\delta kx - \delta vt) e^{i(kx - vt)},$$

donde  $\cos(\delta kx - \delta vt)$  se puede reconocer (Holton, 1992) como un transportador del frente o paquete de ondas de baja frecuencia, y el último factor o función exponencial, como transportador de onda de alta frecuencia, ya que  $v \gg \delta v$ . La velocidad de grupo del frente de ondas se toma dividiendo la frecuencia del primer factor entre  $\delta k$  y llevando al límite cuando  $k$  tiende a cero:

$$C_{gr} = \lim_{\delta k \rightarrow 0} \frac{\delta v}{\delta k} = \frac{\partial v}{\partial k}, \quad (12.6)$$

(En otras palabras, la velocidad de grupo ya no está representada por la relación entre  $v$  y  $k$  sino por la derivada de  $v$  con respecto a  $k$ )

## 12.2. Ondas de Rossby

Una forma simple de aplicar las definiciones dadas en el párrafo anterior para el movimiento ondulatorio en la atmósfera se obtiene analizando las ondas largas, también llamadas *ondas de Rossby*. Considere un modelo idealizado de la atmósfera no divergente representado por la ecuación de vorticidad barotrópica no divergente (8.11), introducida en el capítulo 8. En forma euleriana, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \vec{V}_n \cdot \vec{\nabla}(\zeta + f) = 0,$$

donde se ha despreciado la variación temporal del parámetro de Coriolis y se ha usado un vector velocidad plano. Es fácil verificar que esta ecuación puede ser escrita como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v\beta = 0,$$

donde  $\beta = \partial f / \partial y$  (fórmula 5.1) es el parámetro de Rossby. Teniendo en cuenta que  $f = 2\Omega \sin \phi$  y que  $dy = a d\phi$ , donde  $a$  es el radio de la Tierra, se puede mostrar que  $\beta = 2\Omega \cos \phi / a$ .

Utilizando las igualdades (2.18) y (2.25) para expresar la velocidad y la vorticidad, respectivamente, en términos de la función de corriente, la ecuación anterior se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}^2 \psi + u \frac{\partial}{\partial x} \vec{\nabla}^2 \psi + v \frac{\partial}{\partial y} \vec{\nabla}^2 \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0.$$

Ahora se linealiza esta ecuación. Supongamos que solo existe flujo medio en la dirección zonal. Aplicando el método de las perturbaciones, la fórmula (11.8) y despreciando el tercer término del lado izquierdo, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}^2 \psi' + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \vec{\nabla}^2 \psi' + \beta \frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0. \quad (12.7)$$

La solución a esta ecuación se halla en la forma

$$\psi' = A e^{i(kx - vt) + ily}, \quad (12.8)$$

donde  $k$  y  $l$  son los números de onda en las direcciones zonal y meridional, respectivamente. Esta ecuación describe una onda periódica en  $x$  y  $y$ , y se mueve en la dirección  $x$  con velocidad  $c$ . Ahora se sustituye la solución (12.8) en (12.7). Para simplificar la escritura se utiliza la denotación

$$F = A \exp [i(kx - vt) + ily],$$

y colocamos las siguientes derivadas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= F(ik) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) &= F(ik^2 v) \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &= F(il^2 v) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) &= F(-ik^3) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) &= F(-il^2 k), \end{aligned}$$

en la ecuación (12.7). Como resultado se obtiene

$$(v - \bar{u}k)(k^2 + l^2) + \beta k = 0. \quad (12.9)$$

(Al escribir estas expresiones se deja a un lado el apóstrofe para simplificar la escritura).

La relación (12.9) se conoce con el nombre de *relación de dispersión*. Encontrar una relación de este tipo es uno de los objetivos principales en el estudio de ondas atmosféricas. La ecuación anterior se escribe, con relación a  $v$ ,

$$v = \bar{u}k - \frac{\beta k}{(k^2 + l^2)}.$$

Recordando la definición (12.4), la velocidad de fase zonal relativa al viento medio es

$$C_x = \bar{u} - \frac{\beta}{(k^2 + l^2)}. \quad (12.10)$$

Esta fórmula fue derivada por Rossby (1939) y se conoce con el nombre de ondas de Rossby-Haurwitz, aunque la solución en coordenadas esféricas fue obtenida mucho antes por Hough (1898). Para facilitar el análisis de esta ecuación, consideremos  $l = 0$ , es decir la onda se propaga solo en sentido zonal. Recordando la definición de número de onda, la expresión (12.10) se escribe

$$C_x = \bar{u} - \frac{\beta L^2}{(4\pi^2)}. \quad (12.10a)$$

Esta fórmula indica que las ondas de Rossby se desplazan con una velocidad de fase que depende de la longitud de onda. Para longitudes de onda pequeñas, el lado derecho de (12.10a) es positivo; entonces la onda se desplaza con una velocidad de fase un poco inferior a  $\bar{u}$ . Es decir, la onda de Rossby se rezaga un poco. Para longitudes largas, el lado derecho se torna negativo ( $C_x < 0$ ); entonces la onda de Rossby se propaga en sentido contrario al flujo zonal o sea de este a oeste. Puede ocurrir y, una onda estacionaria. (En el ejercicio 1 se solicita calcular la longitud de onda de una onda estacionaria). Para un flujo zonal de 20 m/s en la latitud de 45, la longitud de onda de estas ondas estacionarias resulta ser 7000 km. Por eso las ondas de Rossby son largas; a veces son de escala planetaria. Hace algún tiempo esta teoría era utilizada para realizar pronósticos en la troposfera media: por el campo inicial de la superficie de 500 hPa, se determinaban los parámetros necesarios como velocidad del flujo básico, amplitud y longitud de onda; después, con la ayuda de (12.10) y (12.9), se hallaba la posición de las crestas y los valles en los siguientes momentos de tiempo.

## 12.3. Ondas acústicas

Las ondas acústicas se originan por compresiones y enrarecimientos del aire, de manera similar a las compresiones y expansiones producidas por un émbolo como el mostrado en la figura (12.2).

Como se conoce por el curso de física, la velocidad del sonido en un gas está dada por la fórmula

$$C = \sqrt{\frac{c_p}{c_v} RT}, \quad (12.11)$$

y es, 330 m/s en el aire. La fórmula (12.11) se obtiene al aplicar la segunda ley de Newton a una porción de aire contenido en un tramo del tubo de la figura 12.2. Uno de los propósitos de la siguiente exposición es mostrar que las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera contienen implícitamente este tipo de ondas.



Figura 12.2. Ondas sonoras producidas por un pistón que oscila. Adaptado de Resnick & Halliday (1984).

Para mostrar las ondas acústicas se asume  $v = w = 0$ , excluyendo con esto las oscilaciones transversales (*perpendiculares a la propagación de la onda*). Considere la ecuación del movimiento en la dirección zonal,

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (12.12)$$

y la ecuación comprensible de continuidad,

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (12.13)$$

Transforme esta última ecuación escribiendo la definición de temperatura potencial como,

$$\theta = \left( \frac{p}{R\rho} \right) \left( \frac{p_s}{p} \right)^{R/c_p}, \quad \text{o también } \theta = \left( \frac{p^{1-R/c_p}}{R\rho} \right) p_s^{R/c_p}.$$

Tome el logaritmo de esta expresión y luego derive

$$d \ln \theta = (1 - R/c_p) d \ln p - d \ln \rho.$$

Dividiendo entre  $dt$  y recordando la ecuación (4.24), para el caso adiabático, esta expresión se escribe

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} - \frac{d \ln \rho}{dt} = 0,$$

donde,  $\gamma = c_p/c_v$ . Combinando esta expresión con la ecuación (12.13),

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (12.14)$$

Ahora se aplica el método de las perturbaciones a las ecuaciones (12.12) y (12.14). Para ello, las variables se expresan como la suma de un valor medio más una desviación:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u} + u'(x, t) \\ p(x, t) &= \bar{p} + p'(x, t) \\ \rho(x, t) &= \bar{\rho} + \rho'(x, t). \end{aligned} \quad (12.15)$$

Substituyendo estos valores en las ecuaciones (12.12) y (12.14),

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{u} + u') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') + \frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\bar{p} + p') + (\bar{u} + u') \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + p') + \gamma(\bar{p} + p') \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u') &= 0 \end{aligned}$$

Haciendo uso de la expansión binomial para el factor que contiene la densidad y recordando que  $|\rho'/\bar{\rho}| \ll 1$ ,

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 + \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)^{-1} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) \approx \frac{1}{\bar{\rho}}$$

Despreciando los productos de cantidades perturbadas y notando que el estado básico no es función ni del tiempo ni del espacio, se obtiene finalmente el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) u' + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (12.16)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x}\right) p' + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (12.17)$$

Se elimina  $u'$  operando en la última de estas dos ecuaciones con  $(\partial/\partial t + \bar{u}\partial/\partial x)$  y substituyendo de (12.16). En esta forma se obtiene una sola ecuación conocida en electromagnetismo como *la ecuación ondulatoria*,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' - \gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}} \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (12.18)$$

La solución de esta ecuación es una onda plana que se propaga en la dirección  $x$ :

$$p' = \text{Re}[Ae^{ik(x-ct)}]. \quad (12.19)$$

Puesto que solo la parte real tiene significado físico, en lo sucesivo se puede omitir la notación  $\text{Re}[]$ . Sustituyendo la solución (12.19) en (12.18), la velocidad de fase debe satisfacer la ecuación

$$(-ikc + ik\bar{u})^2 - (\gamma\bar{p}/\bar{\rho})(ik)^2 = 0$$

Para hallar esta relación, (12.18) se escribe

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)p' - \gamma\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$$

Resolviendo el segundo paréntesis y el último término,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{A \exp[ik(x-ct)](-ikc + ik\bar{u})\right\} - \frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\rho}}A \exp[ik(x-ct)](ik)^2 = 0.$$

Resolviendo ahora el primer paréntesis,

$$A \exp[ik(x-ct)](-ikc + ik\bar{u})^2 - \frac{\gamma\bar{p}}{\bar{\rho}}A \exp[ik(x-ct)](ik)^2 = 0.$$

Cancelando factor común, se obtiene la relación de dispersión anterior.

Resolviendo la relación de dispersión para  $c$ ,

$$c = \bar{u} \pm (\gamma\bar{p}/\bar{\rho})^{1/2} = \bar{u} \pm (\gamma R\bar{T})^{1/2}. \quad (12.20)$$

la ecuación (12.20) indica que, respecto al flujo zonal, la velocidad de la onda es

$$c_s = \pm(\gamma R\bar{T})^{1/2}, \quad (12.21)$$

la cual coincide con la fórmula (12.11) mencionada al comienzo de esta discusión y se conoce con el nombre de velocidad adiabática del sonido. Las ondas acústicas son muy rápidas en comparación con los movimientos atmosféricos. A veces estas son “invitados no deseables” en los modelos atmosféricos, ya que pueden llegar a ocasionar efectos catastróficos en la solución numérica de los modelos. Estas ondas se pueden filtrar en el sistema de ecuaciones despreciando el cambio sustancial de la densidad en la ecuación de continuidad (4.9).

## 12.4. Ondas de gravedad

Las ondas de gravedad son un ejemplo de ondas transversales. Este tipo de ondas puede observarse al lanzar un guijarro en un estanque de agua tranquila. La fuerza de gravedad que actúa en el agua que se desplaza hacia arriba crea un gradiente horizontal de presión que acelera el agua; en esta forma la perturbación continúa propagándose en sentido horizontal. Las ondas de gravedad aparecen en la interfaz de dos medios con diferente densidad. En el mar, estas ondas pueden ser provocadas por los tsunamis o terremotos marinos. En la atmósfera, son provocadas por las fuerzas de flotación y también pueden propagarse verticalmente. Estas últimas reciben el nombre de ondas internas de gravedad para diferenciarlas de las que se propagan horizontalmente a las cuales llamaremos ondas de gravedad. Veamos como se originan estas ondas.

### 12.4.1. Modelo de aguas someras

Este es uno de los modelos más simples de la atmósfera en el cual se considera un fluido incompresible y homogéneo, es decir, de densidad constante. Considere además que el fluido está limitado por una superficie libre a la altura  $h$ , como se observa en la figura 12.3. Se supone  $p(h) = 0$ , y que

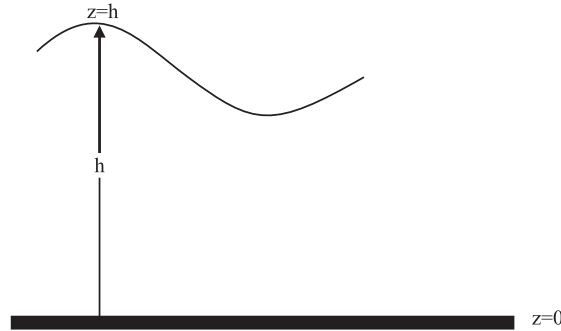


Figura 12.3. Modelo divergente de aguas someras.

se cumple la aproximación hidrostática. Por simplicidad, considere el caso de un fluido sin rotación, lo que permite despreciar el efecto de Coriolis. Integrando la ecuación de hidrostática (3.8), desde una altura arbitraria  $z$  hasta la superficie  $h$  se obtiene

$$p(h) - p(z) = -\rho g(h - z). \quad (12.22)$$



Se deriva esta expresión con respecto a  $x$  y  $y$ , respectivamente. Teniendo en cuenta que  $p(h) = 0$ , entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= g \frac{\partial h}{\partial y}.\end{aligned}$$

De estas expresiones se desprende que el gradiente horizontal de presión no depende de la altura. (Note que la presión si depende de  $z$ , mas no el gradiente horizontal, ya que en la expresión para el gradiente horizontal no aparece dependencia de  $z$ ). Por esta razón el viento, una consecuencia directa del gradiente de presión, tampoco debe depender de  $z$ . En este caso se puede despreciar el cizallamiento  $\partial u / \partial z = 0$  y  $\partial v / \partial z = 0$ . Esta posición es fundamental en el modelo de aguas someras. Con estas restricciones, las ecuaciones del movimiento se escriben

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (12.23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial h}{\partial y}. \quad (12.24)$$

Por otro lado, la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

puede integrarse desde  $z = 0$ , donde  $w(0) = 0$ , hasta  $z = h$ , donde la velocidad vertical es  $w(h)$ . En esta forma se llega a

$$w(h) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)h.$$

Para obtener esta expresión se aplica el hecho de que el viento horizontal no depende de la altura. Por otro lado, puesto que por definición

$$w(h) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y},$$

al combinar estas dos expresiones se obtiene

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0. \quad (12.25)$$

Esta ecuación junto con la ecuaciones (12.23) y (12.24), constituyen el modelo de aguas someras, de mucha utilidad en el futuro para analizar algunos tipos de movimiento ondulatorios en la atmósfera y para probar soluciones numéricas.

### 12.4.2. Ondas de gravedad en aguas someras

Para analizar las ondas de gravedad, que pueden desarrollarse en la interfaz  $h$  de la figura 12.3, no considere la variación por eje  $y$ , y aplique el método de las perturbaciones, asumiendo que

$$u = \bar{u} + u', \quad h = H + h',$$

donde  $H$  es la profundidad media de la capa. Entonces las ecuaciones perturbadas se escriben

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{h'}{\partial x} = 0 \quad (12.26)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h'}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0. \quad (12.27)$$

Eliminando  $u'$  entre estas dos ecuaciones,

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 h' - gH \frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} = 0,$$

la cual es la misma ecuación ondulatoria obtenida anteriormente. La solución de esta ecuación es

$$h' = A e^{ik(x-ct)}.$$

Sustituyendo esta solución en la expresión anterior, se obtiene la relación de dispersión,

$$c = \bar{u} \pm \sqrt{gH}$$

El último término de la derecha se llama velocidad de la onda en aguas someras. Esta aproximación solo es válida para longitudes de onda mucho mayores que la profundidad media  $H$  de la capa. Esta restricción se debe a que la velocidad vertical debe ser pequeña para que se cumpla la aproximación hidrostática. Para una profundidad de  $H = 2$  km, la velocidad de estas ondas es 140 m/s aproximadamente. Estas ondas, relativamente rápidas, cumplen un papel importante en los procesos de mesoescala y en las regiones montañosas donde también pueden ser generadas.

Las ondas gravitacionales que se propagan verticalmente pueden ser excitadas en la atmósfera cuando un flujo estratificado establemente pasa por una superficie irregular o por calentamiento y cizallamiento vertical. Estas ondas son capaces de transportar cantidades significativas de momento horizontal entre la región donde son originadas y la región donde son absorbidas y disipadas. Algunos resultados con modelos de circulación global

muestran que los sumideros de momento de larga escala, resultantes de la quiebra de ondas gravitacionales, representan un papel importante en el flujo de larga escala constituyendo lo que se conoce como gravity wave drag. Las ondas ecuatoriales en particular son las encargadas de transmitir el efecto de la convección tropical hacia otras latitudes.

**Ejercicios**

1. *Calcule la longitud de onda de una onda de Rossby estacionaria para un flujo zonal de 20 m/s en una latitud de  $45^\circ$ .*
2. *Calcule la velocidad de fase de una onda gravitacional para un flujo de 20 m/s y una profundidad de la capa de  $H = 3$  km.*

## 13

# Métodos numéricos I: Método de las diferencias finitas

*Lewis Fry Richardson (1881-1953)*

Físico y psicólogo inglés quien intentó por primera vez predecir el tiempo numéricamente usando el método de las diferencias finitas en el tiempo hacia delante (forward time finite differences ).



Imagen tomada de  
[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Lewis\\_Fry\\_Richardson.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Lewis_Fry_Richardson.png)

El sistema de ecuaciones simultáneas y no lineales que describen los movimientos atmosféricos, como el introducido en el capítulo 4, no puede ser solucionado analíticamente. Por eso es necesario utilizar métodos aproximados de solución llamados métodos numéricos.

Algunos de estos son: método de las diferencias finitas, métodos lagrangianos o semi-lagrangianos, métodos espectrales y semi-espectrales, método de elementos finitos, etc. Los métodos de diferencias finitas y espectrales han sido los más usados en los modelos atmosféricos. Sin embargo, el uso de los métodos semilagrangianos es cada vez más popular. Este capítulo tratará sobre el método de las diferencias finitas. Algunos de los trabajos consultados fueron Tatsumi (1984), Messinger & Arakawa (1976), Krishnamurti (1998), Riegel (1992) Haltiner & Williams (1980), Gamdin & Dubov (1968).

### 13.1. Introducción al método de las diferencias finitas

Las diferencias finitas representan una manera de evaluar las derivadas parciales en el tiempo y el espacio. Esta representación se consigue mediante la utilización de series truncadas de Taylor. La solución de las ecuaciones es discreta en puntos (nodos) de una *grilla o retícula*. Al hacer este tipo de aproximación, generalmente se formulan las siguientes preguntas: 1) cuando  $\delta x$  tiende a cero, ¿converge la forma aproximada a la ecuación diferencial original? 2. ¿La solución numérica es linealmente estable a la acción de pequeñas perturbaciones? 3. Si la condición de estabilidad se cumple, ¿con qué grado de exactitud las amplitudes y las fases de las ondas de la solución aproximada, representan la solución exacta? La búsqueda de la respuesta a estas preguntas ocupará gran parte de la siguiente exposición.

Para introducir el método de las *diferencias finitas*, considere una ecuación diferencial; por ejemplo,

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (13.1)$$

donde  $\psi(x, t)$ , una función de campo, representa la solución de la ecuación en el intervalo  $0 \leq x \leq L$ . Por simplicidad, considere solo la variación espacial. Ahora divida este intervalo en  $J$  subintervalos iguales de longitud  $\delta x$  (figura 13.1): Evidentemente,  $L = J\delta x$ , o también

$$\delta x = L/J. \quad (13.2)$$

Considere otra variable definida en los puntos de grilla (nodos): Así

$$\psi_j = \psi(j\delta x). \quad (13.3)$$

La solución de (13.1) está ahora representada por los  $J + 1$  valores de  $\psi_j$ . (observe que las funciones definidas en (13.1) y (13.3) difieren en que

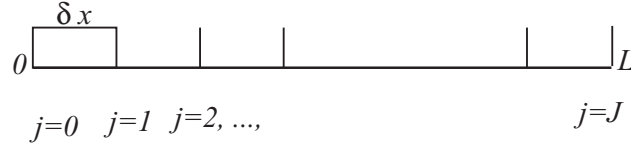


Figura 13.1. Representación del método de las diferencias finitas en el espacio de grilla unidimensional.

mientras la primera de ellas,  $\psi$  es una función definida en todo el espacio, la segunda  $\psi_j$ , está definida solo en los puntos de grilla).

### 13.1.1. Aproximación de las derivadas en diferencias finitas

Las fórmulas de las diferencias finitas pueden ser derivadas a través de expansiones en series de Taylor. Por ejemplo, a través de una serie de Taylor, la función  $u(x + \Delta x)$ , donde  $\Delta x$  es un incremento finito para el valor  $x$ , se puede expresar

$$u(x + \Delta x) = u(x_0) + \left. \frac{du}{dx} \right|_x \Delta x + \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_x \frac{\Delta x^2}{2!} + \left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_x \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots, \quad (13.4)$$

donde los puntos suspensivos indican otros términos que fueron despreciados. De igual manera se puede escribir

$$u(x - \Delta x) = u(x_0) - \left. \frac{du}{dx} \right|_x \Delta x + \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_x \frac{\Delta x^2}{2!} - \left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_x \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots \quad (13.4a)$$

Resolviendo estas ecuaciones con relación al segundo término en la derecha y dividiendo entre  $\Delta x$  se obtiene la expresión para la primera derivada. Por ejemplo, de (13.4), se obtiene

$$\frac{du}{dx} = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} x - \Delta x \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_x - \Delta x^2 \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_x + \cdots$$

denotando,

$$O(\Delta x) = -\Delta x \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_x - \Delta x^2 \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 u}{dx^3} \right|_x - \cdots$$

la expresión anterior se escribe

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} x + O(\Delta x).$$

Esta aproximación para la primera derivada es de orden  $O(\Delta x)$  o de primer orden de exactitud. El orden de exactitud lo indica la potencia a la que

está elevada ( $\Delta x$ ) en el primero de los términos despreciados. De manera aproximada, la expresión anterior se puede escribir

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x \cong \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}. \quad (13.5)$$

A la aproximación (13.5) se le conoce con el nombre de diferencia hacia adelante o esquema de Euler por haber sido este matemático el primero en introducirla.

De manera similar, a partir de (13.4a),

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x \cong \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (13.5a)$$

Esta aproximación también es de primer orden y se le conoce como diferencia hacia atrás.

Se pueden obtener aproximaciones de orden superior. cuanto más alto sea el orden mejor es la aproximación.

Por ejemplo, restando (13.4a) de (13.4), resolviendo con relación al segundo término en la derecha y dividiendo entre  $\Delta x$ , se obtiene

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{[u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)]}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

o, de manera aproximada,

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x \cong \frac{[u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)]}{2\Delta x}. \quad (13.6)$$

Esta aproximación es de segundo orden y se conoce con el nombre de *diferencias centradas*.

De manera similar se pueden seguir obteniendo aproximaciones de órdenes superiores. Por ejemplo, si además de las expresiones (13.4) y (13.4a) se involucran la descomposición en serie de Taylor de las funciones  $U(x + 2\Delta x)$  y  $U(x - 2\Delta x)$ , es fácil obtener la siguiente aproximación de cuarto orden:

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_x = \frac{4}{3} \frac{[u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)]}{2\Delta x} - \frac{1}{3} \frac{[u(x + 2\Delta x) - u(x - 2\Delta x)]}{4\Delta x} + O(\Delta x)^4. \quad (13.7)$$

(La derivación completa de esta fórmula se puede consultar por ejemplo en Krisnamurti & otros 1998.). Esta aproximación para la primera derivada es de cuarto orden de exactitud.

Si en lugar de restar, sumamos (13.4) y (13.4a) y se procede de manera similar a como se ha venido haciendo hasta ahora, se obtiene la expresión para la segunda derivada:

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_x = \frac{[u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)]}{\delta \Delta^2} + O(\Delta x^2).$$

El grado de exactitud también se llama *error de truncación* porque fue en este término donde fue truncada la serie. Una comparación entre aproximaciones de diferente grado de exactitud es el objetivo del ejercicio 1.

### 13.1.2. Onda límite representada por diferencias finitas

Se puede concluir que las diferencias finitas son solo una aproximación en mayor o menor grado de la ecuación diferencial exacta. La exactitud puede aumentarse disminuyendo el paso de grilla  $\delta x$  o usando esquemas de alto grado de exactitud. Ambos caminos presentan sus dificultades y serán discutidos más adelante. Sin embargo, existe un valor o longitud de onda límite por debajo del cual no pueden ser representadas las ondas reales con ayuda de las diferencias finitas. Para mostrar esta longitud de onda recuerde que una función puede ser representada por una serie de Fourier,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{J/2} (a_m \cos k_m x + b_m \sin k_m x). \quad (13.8)$$

La representación en puntos de grilla de la figura 13.1 supone una restricción en el límite superior de la serie (13.8), puesto que los  $J + 1$  puntos de la figura 13.1 deben ser suficientes para determinar el coeficiente  $a_0$ , los  $m$  coeficientes  $a_m$ , y los  $m$  coeficientes  $b_m$ . Por esta razón, el límite superior de la serie (13.8) se escribió  $J/2$ . Por otro lado, el número de onda

$$k_m = \frac{2\pi m}{L} = \frac{2\pi}{L/m}. \quad (13.9)$$

De acuerdo con esta escritura, la longitud de onda es  $L/m$ . Para  $m = J/2$ , esta longitud de onda (la longitud de onda más corta considerada en la serie) es  $L/(J/2) = 2L/J$ . Sustituyendo  $L$  por su valor de (13.2), la longitud de onda más corta representada por diferencias finitas es:

$$\frac{2\delta x J}{J} = 2\delta x. \quad (13.10)$$

En otras palabras con el método de diferencias finitas no se pueden representar correctamente ondas cuya longitud de onda sea inferior a dos pasos de grilla.



Lo que es más grave si esa onda corta existe, las diferencias finitas la representan equivocadamente como una onda de mayor longitud. En la figura (13.2) se observa una onda pequeña de longitud de onda  $2\Delta x/4$ , representada como una onda de  $2\Delta x$ , de manera equivocada por el esquema de diferencias finitas. A este tipo de error se le conoce como error de represen-

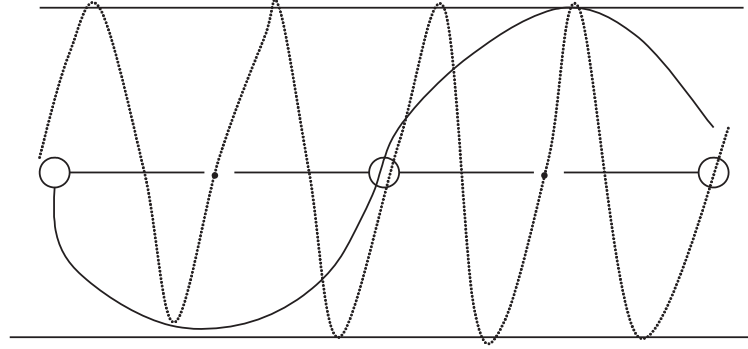


Figura 13.2. Onda pequeña de longitud de onda de  $2\Delta x/4$  (línea punteada), representada de manera equivocada por las diferencias finitas como una onda mayor de longitud  $2\Delta x$  (línea continua). (El paso de grilla  $\Delta x$  está comprendido entre dos círculos contiguos).

tación (aliasing error). Note, que en el caso representado en la figura (13.2) no hay error en la amplitud, sino en la fase de la onda.

En la práctica, una buena representación solo es posible para ondas mucho mayores de  $2\Delta x$ .

### 13.1.3. Integración numérica en el tiempo

Considere la ecuación (13.1) y coloquemos en ella la solución

$$U(x, t) = U(t) \exp(ikx). \quad (13.11)$$

Se obtiene como resultado,

$$\frac{dU}{dt} + ivU = 0. \quad (13.11a)$$

Puesto que  $U(t)$  depende solo del tiempo, esta ecuación puede escribirse

$$\frac{dU}{dt} = F, \quad (13.12)$$

donde  $F = ivU$  y  $v = -kc$  es la *frecuencia angular*. La ecuación (13.12) se conoce como ecuación oscilatoria, y será frecuentemente usada en los

análisis siguientes. Además, es conveniente anotar que con ayuda de la representación en series de Fourier (13.11) se ha logrado transformar una ecuación de derivadas parciales (la ecuación (13.1)) en una ecuación diferencial común (13.12). Veamos ahora como se construye la solución numérica para esta ecuación.

En general, el método de la integración numérica consiste en lo siguiente: sea,  $U^n$  el valor de  $U$  en el tiempo  $n\Delta t$ , donde  $\Delta t$  es el incremento en el tiempo ( $\Delta t$  es igual a 1 segundo, 1 hora, etc.). Suponga que ya conoce el valor de  $U$  en los niveles de tiempo anteriores  $n$ ,  $n-1, \dots$ , o sea los valores  $U^n, U^{n-1}, \dots$ . Nuestro propósito es determinar en el siguiente paso tiempo,  $(n+1)\Delta t$ , la función  $U^{n+1}$ . Tomando luego este valor como condición inicial, se repite el proceso para determinar la función en el siguiente paso tiempo, y así sucesivamente. En esto consiste, el método de integración de una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales en el tiempo, o sea, el método de *predicción numérica*. En el momento inicial se debe conocer el valor de la función usando datos observados, por ejemplo.

Veamos tres esquemas o formas de discretizar la derivada temporal (13.12), basados en las aproximaciones (13.5) y (13.6) derivadas arriba.

#### 13.1.3.1. Esquema de Euler

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F^n \quad (13.13)$$

En esta expresión,  $U^n = U(t = n\Delta t)$  y  $F^n = F(t = n\Delta t)$  son valores en el paso tiempo  $n$ , (supuestamente ya calculado); y  $U^{n+1}$  es el valor en el siguiente paso tiempo  $n+1$ , el cual se va a determinar. El esquema de Euler (13.13) es de dos niveles, ya que involucra dos niveles de tiempo:  $n$  y  $n+1$ .

#### 13.1.3.2. Esquema implícito

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t F^{n+1} \quad (13.13a)$$

Este esquema es similar al anterior, pero el término  $F$  no se calcula en el paso  $n$  sino en el paso tiempo  $n+1$ .

#### 13.1.3.3. Esquema centrado o de salto de rana

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t F^n. \quad (13.14)$$

Este esquema es de tres niveles ya que involucra tres niveles de tiempo:  $n = 1$ ,  $n$  y  $n + 1$ .

#### 13.1.3.4. Esquema del trapecio

$$U^{n+1} = U^n + \frac{1}{2} \Delta t (F^n + F^{n+1}). \quad (13.15)$$

Este esquema es de dos niveles. A diferencia del esquema de Euler, usa el valor medio de la función  $F$  en los tiempos  $n$  y  $n + 1$ . Solo que, de acuerdo con (13.12),  $F^{n+1}$  depende de  $U^{n+1}$  y este valor aún no se conoce. Por este motivo se dice que el esquema del trapecio (13.15) también es de tipo implícito.

#### 13.1.4. Estabilidad computacional y error de amortiguación

La estabilidad computacional se refiere al hecho de que el error de aproximación introducido por el esquema numérico crece con el tiempo y puede llegar a ser igual o mayor que la función verdadera, caso en el cual no tiene sentido seguir la integración. Un ejemplo de inestabilidad numérica está la representada por la figura 13.3.

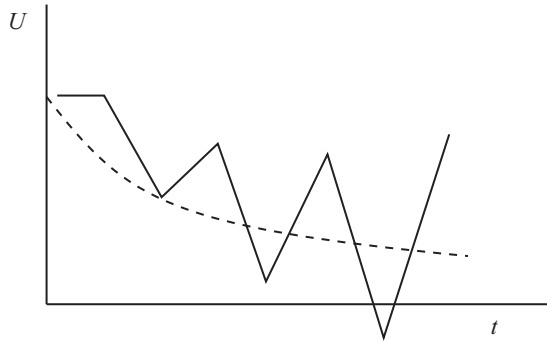


Figura 13.3. Inestabilidad numérica generada por el esquema de diferencias centradas en la solución de la ecuación de fricción. La línea punteada indica la solución analítica; la línea continua, la solución numérica. Tomado de Messinger & Arakawa (1976).

En esta figura se muestra la solución de la ecuación de fricción,  $dU/dt = kU$ , por el método de las diferencias centradas, donde  $k$  es coeficiente de fricción. Como se observa en esta figura, la diferencia entre dos soluciones numéricas

consecutivas aumenta con el tiempo (línea continua). La solución analítica representada por la línea discontinua se amortigua suavemente en el tiempo.

El error de amortiguación, o error de fase, acelera o desacelera la solución real. Existen varios métodos para investigar la estabilidad de un esquema numérico. Entre ellos, (Haltiner & Williams, 1980) están el *método matricial*, el *método energético* y el *método de Von Neumann*. Veamos como se aplica este último. Considere la ecuación oscilatoria (13.12). La solución de esta ecuación se puede expresar como

$$U(t) = U(0) \exp(ivt)$$

o, para los valores discretos de  $t = n\Delta t$ ,

$$U^n = U(0)e^{in\Omega}, \quad (13.16)$$

donde

$$\Omega = v\Delta t \quad (13.17)$$

es frecuencia por tiempo  $\Delta t$  y que en lo sucesivo se llamará fase. En el plano complejo, la solución (13.16) se interpreta como puntos rotantes que giran con un radio (amplitud)  $U^0$  y fase  $\Omega$  constantes. Ahora se aplica el método de análisis de estabilidad de Neumann. Suponga que la diferencia entre dos valores consecutivos de la solución numérica en el tiempo difieren en un factor de amplificación  $\lambda$ . O sea,

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad U^n = \lambda U^{n-1}, \dots \quad (13.18)$$

Entonces la solución numérica en el paso  $n$  se escribe

$$U^n = \lambda U^{n-1} = \lambda(\lambda U^{n-2}) = \lambda^3 U^{n-3} = \dots = \lambda^k U^{n-k}. \quad (13.18a)$$

Para  $n = k$ ,

$$U^n = \lambda^n U^0. \quad (13.18b)$$

Además, Neumann representa el factor de amplificación en forma compleja como

$$\lambda = |\lambda| \exp(i\Omega^*),$$

en donde,  $\Omega^*$  es la fase de la solución numérica. Entonces, la solución numérica puede escribirse

$$U^n = |\lambda|^n U^0 \exp(in\Omega^*). \quad (13.19)$$

Ahora bien, puesto que la amplitud de la solución analítica no cambia con el tiempo, para que exista *estabilidad computacional*, en la expresión

anterior, es necesario exigir  $|\lambda| \leq 1$ . De otra forma, la solución numérica se incrementará exponencialmente con el tiempo y en forma ficticia. En general, un esquema numérico es

$$\begin{cases} \text{inestable} & \text{si } |\lambda| > 1 \\ \text{estable (neutral)} & \text{si } |\lambda| = 1 \\ \text{estable (amortiguado)} & \text{si } |\lambda| < 1 \end{cases} \quad (13.20)$$

y puesto que  $\Omega$  representa la fase de la solución exacta, la diferencia entre  $\Omega$  y  $\Omega^*$  da el error de fase de la solución numérica. Entonces, el esquema numérico es

$$\begin{cases} \text{acelerado} & \text{si } \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Omega^* - \Omega}{\Omega} > 0 \\ \text{neutral} & \text{si } \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Omega^* - \Omega}{\Omega} = 0 \\ \text{desacelerado} & \text{si } \frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Omega^* - \Omega}{\Omega} < 0 \end{cases} \quad (13.21)$$

Analice ahora la estabilidad computacional y el error de fase para algunos de los esquemas ya estudiados.

#### 13.1.4.1. Estabilidad y error de fase del esquema de Euler hacia delante

De acuerdo con la fórmula (13.13), para la ecuación oscilatoria, este esquema se escribe

$$U^{n+1} = U^n + i\Omega U^n,$$

donde  $\Omega$  se define de acuerdo con la fórmula (13.17). Sustituyendo a  $U^{n+1}$ , de acuerdo con (13.18), se obtiene una ecuación para  $\lambda$ :

$$\lambda = 1 + i\Omega,$$

y, de acuerdo a (13.20) la condición de estabilidad para el esquema de Euler hacia delante, se escribe

$$|\lambda| = \sqrt{1 + \Omega^2} = 1 + \frac{1}{2}\Omega^2 + O(\Omega^4) \geq 1. \quad (13.22)$$

Por tanto, el esquema de Euler hacia delante siempre es inestable. A esto se debió el fracaso de los resultados del trabajo de Richardson en 1920 en el que las ecuaciones fueron integradas usando un esquema de este tipo. Para analizar el error de fase, el ángulo de fase de la solución numérica es

$$\Omega^* = \arctan(\lambda_i/\lambda_r), \quad (13.23)$$

o sea

$$\Omega^* = \arctan(\Omega) = \Omega - 1/3\Omega^3 + O(\Omega^4) \quad (13.23a)$$

(la expresión (13.23a) se obtuvo por descomposición en serie de Taylor:  $\arctan(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \dots$ ).

Aplicando la condición (13.21),

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = -\frac{1}{3}\Omega^2, \quad (13.24)$$

lo cual es siempre negativo. Por tanto, el esquema de Euler es desacelerativo.

#### 13.1.4.2. Inestabilidad en esquema de salto de rana: Moda física y moda computacional

Este esquema es de tres niveles, aplicado a la ecuación oscilatoria, se escribe

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2i\Omega U^n. \quad (13.25)$$

Sustituyendo en esta ecuación  $U^{n+1}$  y  $U^n$  de acuerdo con (13.18), se obtiene una ecuación de segundo grado para el factor de amplificación  $\lambda$ :

$$\lambda^2 - 2i\Omega\lambda - 1 = 0$$

la cual tiene dos soluciones:

$$\lambda_1 = \sqrt{1 - \Omega^2} + i\Omega \quad (13.26)$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{1 - \Omega^2} + i\Omega. \quad (13.26a)$$

A medida que  $\Omega \rightarrow 0$ , la primera de estas dos soluciones tiende a 1, lo que está más próximo a la solución analítica (13.16), mientras que la segunda tiende a  $-1$ . La primera de estas soluciones se llama *moda física*, mientras que la segunda se llama *moda computacional*.

Aplicando la condición de estabilidad (13.20),

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \quad \text{cuando } |\Omega| = |\omega\Delta t| \leq 1. \quad (13.27)$$

O sea que el esquema de salto de rana es condicionalmente neutral. Por el contrario, para el caso  $|\Omega| > 1$ , el esquema es inestable. Por ejemplo, para la moda física, la ecuación (13.26) se expresa

$$\lambda_1 = \sqrt{(-1)(\Omega^2 - 1)} + i\Omega = i\sqrt{\Omega^2 - 1} + i\Omega.$$

El modulo de este número complejo es

$$|\lambda_1| = \left( (\Omega^2 - 1) + 2\Omega\sqrt{\Omega^2 - 1} + \Omega^2 \right) = \left( 2\Omega^2 + 2\Omega\sqrt{\Omega^2 - 1} - 1 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|\lambda_1| = \sqrt{2\Omega(\Omega + \sqrt{\Omega^2 - 1}) - 1}$$

y bajo el supuesto,  $|\Omega| > 1$ , la expresión anterior es evidentemente  $> 1$ . Algo similar ocurre en la moda computacional.

Se prefiere el esquema centrado porque tiene un menor error de truncación (es de segundo orden de exactitud). Sin embargo, aquí surge un nuevo problema: solo una de las dos soluciones obtenidas tiene sentido físico, la solución (13.26). A esta solución se le llama *moda física*. La otra solución, la moda computacional (13.26a), es una solución extraña debida al esquema de integración en el tiempo particularmente usado.

En algunas situaciones, la moda computacional puede llegar a ser dominante y destruir por completo la solución numérica. Por eso, esta es otra forma de *inestabilidad numérica*. En el caso analizado, la moda física es dominante. En general se debe investigar en cada caso hasta dónde puede arruinar la solución la moda computacional.

Para reducir el efecto de la moda computacional en el caso de ecuaciones no lineales, se ha propuesto el uso del *filtro de Asselin*, (Haltiner & Williams, 1980). Este efecto depende del tipo de ecuación a solucionar como se verá en los siguientes dos ejemplos.

Otro problema del esquema centrado es que, al ser de tres niveles, el cálculo en el nivel  $(n + 1)$  necesita valores en los niveles anteriores  $n$  y  $n - 1$ . Esto implica que, para una ecuación diferencial de primer orden, el esquema numérico requiere al comienzo dos condiciones iniciales, mientras que la ecuación diferencial original requiere solo una. Este problema se puede solucionar calculando el primer paso tiempo por algún otro esquema de dos niveles, como el de Euler.

### Ejemplo 1.

Solucionar analítica y numéricamente la ecuación (Riegel, 1992)

$$y' = y, \quad (\text{e13.1.1*})$$

sujeta a la condición inicial,

$$y = y_0, \quad \text{para } t = 0. \quad (\text{e13.1.2}^*)$$

Esta ecuación posee una solución analítica que aumenta en el tiempo

$$y = y_0 e^t. \quad (\text{e13.1.3}^*)$$

Para verificarlo, basta con sustituir (e13.1.3\*) en el lado derecho de la ecuación diferencial original (e13.1.1\*) y la derivada de (e13.1.3\*) en su lado izquierdo.

Aproximando inicialmente la ecuación (e13.1.1\*) con ayuda del esquema de Euler (13.13) se obtiene

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t y^n$$

o también

$$y^{n+1} - y^n(1 + h) = 0 \quad (\text{e13.1.4}^*)$$

en donde  $h = \Delta t$ .

Esta es una ecuación en diferencias finitas, homogénea y de primer orden. Su solución general es:

$$y^n = A(1 + h)^n.$$

La solución particular de (e13.1.4\*) sujeta a la condición (e13.1.2\*) es:

$$y^n = y_0(1 + h)^n \quad (\text{e13.1.5}^*)$$

Trate de solucionar la ecuación diferencial (e13.1.1\*) con ayuda del esquema centrado. Para este caso, la ecuación en diferencias finitas se escribe

$$y^{n+1} = y^{n-1} + 2h y^n$$

o también

$$y^{n+1} - 2h y^n - y^{n-1} = 0.$$

Esta ecuación tiene dos soluciones  $(h + \sqrt{1 + h^2})$  y  $(h - \sqrt{1 + h^2})$  similares a (13.26) y (13.26a), respectivamente. La primera corresponde a la moda física y la segunda, a la moda computacional. La solución general se representa como una combinación lineal de estas dos soluciones:

$$y^n = A(\sqrt{1 + h^2} + h)^n + B(-1)^n(\sqrt{1 + h^2} - h)^n.$$

Para determinar la solución particular o sea determinar las constantes  $A$  y  $B$ , se necesitan dos condiciones iniciales. La primera es la condición



(e13.1.2\*), la segunda se toma a partir de la solución aportada por el esquema de Euler, o sea,  $y^1 = y_0(1+h)$ . Usando estas dos condiciones es fácil mostrar que la solución particular para este caso es

$$y^n = \frac{y_0}{2\sigma} [(\sigma+1)^n(\sigma+h)^n + (-1)^n(\sigma-1)(\sigma-h)^n], \quad (\text{e13.1.6*})$$

donde por conveniencia, ha sido denotado  $\sigma = \sqrt{1+h^2}$ . Nótese que escogiendo  $h^2 \ll 1$  entonces  $\sigma < 1$ ,  $(\sigma-h)^n < 1$  y la moda computacional (segundo término a la derecha) no crece con el tiempo.

### Ejemplo 2.

*Solucionar analítica y numéricamente la ecuación  $y' = -y$ , sujeta a la condición inicial;  $y = y_0$ , para  $t = 0$ .*

*Como en el caso anterior, la solución analítica es*

$$y = y_0 e^{-t} \quad (\text{e13.1.7*})$$

Observe que esta función se amortigua en el tiempo.

*Es fácil mostrar que al aplicar el esquema de Euler (13.13) se produce una solución similar a (e13.1.5\*):*

$$y^n = y_0(1-h)^n.$$

*Para que esta solución se amortigue con el tiempo, como (e13.1.7\*), es necesario tomar  $h < 1$ .*

*Al solucionar la ecuación por el esquema centrado, repitiendo los pasos dados para la ecuación  $y' = y$ , se llega a la siguiente solución:*

$$y^n = \frac{y_0}{2\sigma} [(\sigma+1)(\sigma-h)^n + (-1)^n(\sigma-1)(\sigma+h)^n].$$

*A diferencia del ejemplo 1, en este caso la moda computacional comienza a dominar con rapidez sobre la moda física y destruye la solución sin importar qué tan pequeño se elija a  $h$ . En cualquier caso, para  $h^2 \ll 1$ ,  $\sigma < 1$  y  $\sigma-1 < 1$ , mientras que  $\sigma+h > 1$ . Por tanto, la moda física disminuye, mientras que la computacional aumenta.*

#### 13.1.4.3. Estabilidad y error de fase del esquema del trapecio

Analicemos por último el método del trapecio, el cual, es un método implícito. Para la ecuación oscilatoria (13.12), este método se escribe

$$U^{n+1} = U^n + \frac{i\Omega}{2}(U^n + U^{n+1}).$$

Utilizando la fórmula (13.18), se obtiene una ecuación para  $\lambda$ . O sea,

$$\lambda = \frac{2 + i\Omega}{2 - i\Omega},$$

de donde  $|\lambda| = 1$ . (Observe que las expresiones en el numerador y denominador corresponden al mismo número complejo, pero conjugado; por tanto, tienen el mismo módulo). En consecuencia, de acuerdo con la condición (13.22), el esquema del trapecio es *neutral*. Es fácil mostrar que el error de fase para este esquema es

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} \cong -\frac{1}{12}\Omega^2,$$

Por tanto, este esquema también es desacelerativo, pero con una desaceleración  $1/4$  menor que la producida por el esquema de Euler hacia delante.

En lo que se refiere a esquemas de integración en el tiempo, la mayor preocupación debe ser la condición de estabilidad, ya que el error de fase se produce también por el esquema espacial, siendo este mayor que el primero.

En la figura 13.4 se muestra el factor de amplificación producido por el esquema de Euler.

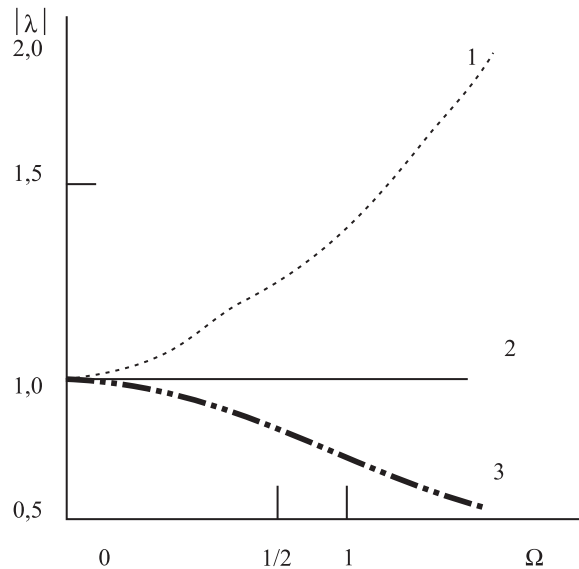


Figura 13.4. Dependencia del factor de amplificación  $\lambda$  de  $\omega$  para los esquemas de Euler 1, del trapecio y analítica 2, e implícito 3. Tomado de Messinger & Arakawa, 1976.

### 13.2. La ecuación lineal de advección

Ahora se analizarán las propiedades del esquema centrado aplicado a la ecuación de advección (13.1) escrita en la forma siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (13.28)$$

donde  $c = \text{const.}$  Por este motivo, la ecuación (13.28) se conoce como ecuación lineal de advección, que reviste especial interés en meteorología porque de su análisis se deriva el criterio de Courant–Friedrichs–Lewy (criterio de Courant o CFL). Para un espaciamiento dado en una grilla de cómputo, el criterio CFL impone una restricción sobre el tamaño del paso tiempo, que también depende de la velocidad de flujo. A este criterio, prácticamente se llegó al escribir la fórmula (13.27), solo que allí quedó expresado a través de la fase  $\Omega = w\Delta t$ . A continuación se derivará este criterio en función del paso de grilla  $\Delta x$ , del paso de tiempo  $\Delta t$  y de la velocidad de flujo  $c$ . Aplicando el método centrado, inicialmente para discretizar el término advección en la ecuación (13.28), se obtiene (Messinger & Arakawa, 1976)

$$\frac{\partial u_j^n}{\partial t} = -c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x}. \quad (13.29)$$

Aplicando este mismo esquema para discretizar la parte izquierda de (13.29),

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} = -c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}. \quad (13.30)$$

Se ha empleado el esquema centrado para discretizar la derivada espacial y la temporal. Para analizar las propiedades de este esquema, se partirá inicialmente de la ecuación (13.29) y se colocará allí la siguiente solución de prueba:

$$u_j^n = \text{Re}[U^n(t)e^{ikj\Delta x}] \quad (13.31)$$

Después de algunas transformaciones se obtiene

$$\frac{\partial u_j^n}{\partial t} = i \left( -\frac{c}{\Delta x} \sin k \Delta x \right) U^n, \quad (13.32)$$

o también

$$\frac{dU}{dt} = i(vU)$$

donde

$$v = -\frac{c}{\Delta x} \sin k \Delta x \quad (13.33)$$

Se ha llegado así a la ecuación oscilatoria (13.12). Utilizando el esquema centrado para discretizar la parte izquierda,

$$U^{n+1} = U^{n-1} + 2i \left( -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k \Delta x \right) U^n,$$

y designando,

$$\Omega = -c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin k \Delta x,$$

la ecuación anterior se reduce a la expresión (13.25), la cual ya fue analizada. Para que el esquema sea estable numéricamente, se debe cumplir  $|\Omega| \leq 1$  (fórmula (13.27)), o sea,

$$\left| c \frac{\Delta t}{\Delta x} \sin \Delta x \right| \leq 1,$$

y puesto que  $\sin k \Delta x$  tiene un máximo igual a 1, la condición de estabilidad toma la forma,

$$|c| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (13.34)$$

A esta relación se conoce con el nombre de criterio de estabilidad de Courant-Friedrichs-Lewy, (CFL). La relación (13.34) indica que para alcanzar la estabilidad no es suficiente disminuir el paso tiempo  $\Delta t$ , sino la relación  $\Delta t/\Delta x$ . De acuerdo con la expresión (13.34), en un modelo global, por ejemplo, con espaciamiento de  $300 \times 300$  km, se debe usar un intervalo de tiempo de aproximadamente 20 minutos para que las ondas gravitacionales ( $c \approx 300$  m/s), sean simuladas adecuadamente.

### 13.2.1. Dispersión numérica

Considere de nuevo la ecuación (13.11a). Recordando que  $v$  es la frecuencia y que la velocidad de fase es  $c = -v/k$  (fórmula 12.4), la ecuación (13.12) se escribe

$$\frac{dU}{dt} = -ikcU. \quad (13.35)$$

La ecuación (13.35) indica que en la ecuación oscilatoria original, todas las ondas se propagan con la misma velocidad de fase  $c$ . Además, la solución numérica (13.32) puede escribirse también

$$\frac{dU}{dt} = ik \left( -\frac{c}{k \Delta x} \sin k \Delta x \right) U. \quad (13.36)$$

En contraste con la ecuación (13.35), la velocidad de fase de la solución numérica se expresa

$$c^* = c \frac{\sin k \Delta x}{k \Delta x}, \quad (13.37)$$

la cual no es constante y depende, entre otros factores, del número de onda. En consecuencia, la discretización espacial en diferencias finitas provoca dispersión de las ondas. A este efecto se le conoce con el nombre de *dispersión numérica*.

### 13.3. Esquema semi-implícito y ondas gravitacionales

La velocidad de fase de las ondas meteorológicas que simulan los modelos de predicción numérica usuales es del orden de la velocidad del viento, 10 – 50 m/s. Al mismo tiempo, la velocidad máxima de las ondas gravitacionales, descritas por los términos responsables de este tipo de ondas en la respectivas ecuaciones, puede sobrepasar 300 m/s. Ahora bien, como el criterio de estabilidad (fórmula (13.27)) depende de la frecuencia, el paso tiempo que cumpla este criterio debe ser muy pequeño, lo cual hace que la solución numérica y el proceso de cómputo en general resulten engorrosos. Aunque las ondas gravitacionales de alta frecuencia representan un papel importante, el objetivo principal de los modelos numéricos es predecir la evolución temporal de las ondas meteorológicas lentas. La pregunta es entonces ¿como integrar los términos responsables por las ondas gravitacionales de alta frecuencia sin quebrantar el criterio de estabilidad? Una manera consiste en integrar estos términos con ayuda del método implícito, que es establemente neutro, y los demás términos por un método explícito (el centrado por ejemplo). Un ejemplo de este tipo de abordaje es el esquema semi-implícito, que se expone a continuación.

Se mostrará el uso del esquema semi-implícito aplicado al modelo de aguas someras (12.23), (12.24) y (12.25), introducidas en el capítulo 12. Teniendo en cuenta la definición de geopotencial (4.30), las ecuaciones (12.23) y (12.24) se escriben en forma vectorial

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}\Phi. \quad (13.38)$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad (12.25) por  $g$  y utilizando de nuevo la definición de geopotencial, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Phi \frac{\partial}{\partial y} u + \Phi \frac{\partial}{\partial y} v = 0.$$

o también, en forma vectorial

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\Phi - \Phi \vec{\nabla} \cdot \vec{v}. \quad (13.39)$$

Las ecuaciones (13.38) y (13.39) constituyen el modelo de aguas someras en dos dimensiones. Note que en la ecuación (13.39) el primer término al lado derecho es la advección del geopotencial y el último término corresponde el efecto de las ondas gravitacionales. La idea es utilizar el método explícito con los términos no lineales correspondientes a la advección, y el método implícito para los términos lineales. La ecuación (13.38) se discretizará en diferencia finitas (Tatsumi, 1984) en la forma siguiente:

$$\vec{v}^{n+1} = \vec{v}^{n-1} - 2\Delta t (\vec{v}^n \cdot \tilde{\nabla}) \vec{v}^n - \Delta t \tilde{\nabla} (\Phi^{n-1} \Phi^{n+1})$$

Para discretizar la ecuación (13.39), en el término responsable por las ondas gravitacionales, se descompone el geopotencial  $\Phi$  en un valor medio y una pulsación:

$$\Phi = \bar{\Phi} + \Phi'$$

Entonces, en diferencia finitas y utilizando el esquema semi-implícito, esta ecuación se escribe

$$\Phi^{n+1} = \Phi^{n-1} - 2\Delta t (\vec{v}^n \cdot \tilde{\nabla}) \Phi^n - \Delta t \bar{\Phi} \tilde{\nabla} (\vec{v}^{n-1} + \vec{v}^{n+1}) - 2\Delta t \Phi'^n \tilde{\nabla} \vec{v}^n \quad (13.40)$$

donde  $(\vec{v} \cdot \tilde{\nabla})$  y  $\tilde{\nabla}$  son los homólogos en diferencias finitas de los operadores horizontales  $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$  y  $\vec{\nabla}$  respectivamente. El esquema (13.40) es llamado semi-implícito porque los términos no lineales en la advección y la parte no lineal de las ondas gravitacionales, o sea, el último término en la segunda ecuación de (13.39), son tratados de manera explícita, mientras que los términos lineales son tratados implícitamente. Para disminuir las dificultades asociadas a la solución de la parte implícita, la parte no lineal de las ondas gravitacionales son removidas de la parte implícita. Para eso, la ecuación (13.40) puede bifurcarse formalmente en dos ecuaciones, así:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{n+1} + \Delta t \tilde{\nabla} \Phi^{n+1} &= \vec{v}_{n,l} \\ \Phi^{n+1} + \Delta t \bar{\Phi} \tilde{\nabla} \cdot \vec{v}^{n+1} &= \Phi_{n,l} \end{aligned} \quad (13.41)$$

En donde,  $\vec{v}_{n,l}$  y  $\Phi_{n,l}$  son

$$\begin{aligned} \vec{v}_{n,l} &= \vec{v}^{n-1} - 2\Delta t (\vec{v}^n \cdot \tilde{\nabla}) \vec{v}^n - \Delta t \tilde{\nabla} \Phi^{n-1} \\ \Phi_{n,l} &= \Phi^{n-1} - 2\Delta t (\vec{v}^n \cdot \tilde{\nabla}) \Phi^n - \Delta t \bar{\Phi} \tilde{\nabla} \cdot \vec{v}^{n-1} - 2\Delta t \Phi'^n \tilde{\nabla} \cdot \vec{v}^n, \end{aligned}$$

las cuales incluyen todos los términos tratados de manera explícita. Finalmente se puede eliminar  $\vec{v}^{n+1}$  de (13.41) operando con  $\tilde{\nabla}$  sobre la primera ecuación y sustituyendo por  $\tilde{\nabla} \cdot \vec{v}^{n+1}$  en la segunda ecuación. El resultado es

$$\Phi^{n+1} + \Delta t \Phi [-\Delta t (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla}) \Phi^{n+1} + \tilde{\nabla} \cdot \vec{v}_{n,l}] = \Phi_{n,l}.$$

Reagrupando términos y usando la definición,

$$(\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla}) = \tilde{\nabla}^2,$$

la cual es la aproximación en diferencias finitas de  $\nabla^2$ , la expresión anterior se transforma en

$$-\Delta t^2 \bar{\Phi} \tilde{\nabla}^2 \Phi^{n+1} + \phi^{n+1} = \Phi_{n,l} - \Delta t \bar{\Phi} \tilde{\nabla} \cdot \vec{v}_{n,l}$$

o también

$$\tilde{\nabla}^2 \Phi^{n+1} - \frac{1}{\Delta t^2 \bar{\Phi}} \Phi^{n+1} = -\frac{1}{\Delta t^2 \bar{\Phi}} (\Phi_{n,l} - \Delta t \bar{\Phi} \tilde{\nabla} \cdot \vec{v}_{n,l}).$$

Esta es una ecuación de tipo Helmholtz,

$$\tilde{\nabla}^2 \Phi^{n+1} - B \Phi^{n+1} = F(x, y),$$

donde  $F$  y  $B$  son conocidos. Entonces, puede solucionarse para una región determinada de pronóstico, conociendo los valores en la frontera. Existen varios métodos para solucionar esta ecuación. Uno de ellos es el llamado método de sobre-relajación sucesiva (successive over relaxation method) el que se mostrará al solucionar numéricamente el modelo barotrópico.

### 13.4. Aplicación del método de diferencias finitas al modelo barotrópico

La solución de la ecuación de vorticidad barotrópica para condiciones iniciales y de contorno dadas constituyó el primer modelo de predicción meteorológica realizado en un computador. El modelo barotrópico se aplica también en algunas regiones tropicales y hoy en día continúa empleándose en estudios teóricos. Además, este modelo es un buen ejercicio para practicar la aplicación de algunas técnicas numéricas; este es el motivo por el cual se considera aquí. Como se mencionó, el modelo barotrópico se fundamenta en la solución numérica de la ecuación de vorticidad barotrópica (8.10), la cual, teniendo en cuenta (8.3) y suponiendo que el flujo es no divergente, puede escribirse

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -F(x, y, t), \quad (13.42)$$

donde,

$$F(x, y, t) = \left( \frac{\partial}{\partial x} (u_\psi \zeta) + \frac{\partial}{\partial y} (v_\psi \zeta) \right) + \beta v_\psi. \quad (13.43)$$

La parte derecha de la ecuación (13.43) se ha escrito en forma de flujo, lo cual fue posible suponiendo que el movimiento es no divergente. Esta misma suposición nos permite escribir una relación entre la vorticidad y la función de corriente (fórmula (2.25)),

$$\zeta = \vec{\nabla}^2 \psi, \quad (13.44)$$

y entre esta misma función y las componentes de la velocidad  $u$  y  $v$  (expresión (2.18)),

$$u_\psi = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (13.45)$$

Las ecuaciones (13.42)–(13.45), junto con las condiciones de contorno para  $\psi$  y necesarias para solucionar la ecuación (13.44), constituyen el algoritmo de cómputo del modelo. Veamos cómo se construye la solución numérica del modelo. Se utilizará el método de las diferencias finitas. Considere la grilla de puntos dibujada en la figura 13.5. Para discretizar la ecuación

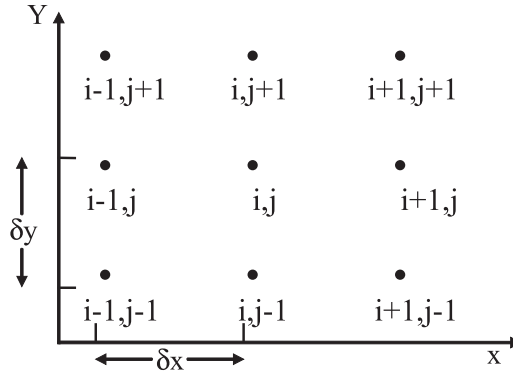


Figura 13.5. Retícula de seis puntos utilizada para ejemplarizar la solución numérica de la ecuación de vorticidad barotrópica.

temporal (13.42), se puede utilizar el esquema de Matsuno (Krishnamurti & otros, 1998) para el primer paso tiempo, y el de salto de rana para las demás iteraciones temporales. En este último caso, la ecuación (13.42) se escribe

$$\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^{n-1} = -2\Delta t F_{i,j}^n \psi. \quad (13.46)$$

En la ecuación (13.46),  $n$  indica el nivel temporal. Utilizando el esquema centrado para discretizar las ecuaciones (13.43), (13.44) y (13.45), estas se escriben



$$F_{i,j}^n = \frac{1}{2d} [(u_{i+1,j}^n \zeta_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n \zeta_{i-1,j}^n) + (v_{i,j+1}^n \zeta_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \zeta_{i,j-1}^n)] + \beta v_{i,j}^n \quad (13.47)$$

$$\zeta_{i,j}^n = \left( \frac{\psi_{i+1,j}^n + \psi_{i-1,j}^n + \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^n - 4\psi_{i,j}^n}{d^2} \right) \quad (13.48)$$

$$u_{i,j}^n = -(\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n)/2d$$

$$v_{i,j}^n = (\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n)/2d. \quad (13.49)$$

Note que a pesar de que la solución temporal (13.46) se escribió en forma explícita, la solución numérica de la ecuación de Poisson, (13.48) es implícita. Con la discretización en diferencias finitas se logra transformar la ecuación diferencial original, o sea, la ecuación (13.43), en un sistema de ecuaciones algebraicas (observe que la parte derecha de la ecuación (13.47) está escrita para el punto  $i, j$  y que entonces existirán tantas ecuaciones tipo (13.43) como puntos de grilla sean considerados).

Ocupémonos ahora de la integración en el tiempo. En primer lugar, se debe conocer el campo inicial de la velocidad  $u_\psi^0$ ,  $u_\psi^0$  y de la vorticidad  $\zeta_{i,j}^0$ . Esto se puede lograr con ayuda del análisis objetivo del campo del viento o del geopotencial. En el caso de utilizar esta última opción, la cual es la más conveniente debido a la incertidumbre con la cual se mide el viento, inicialmente se obtiene la función de corriente la ecuación de balance no lineal similar a (8.14); posteriormente se obtiene el campo de vorticidad inicial por la fórmula (13.48) y el campo del viento  $(u_\psi, v_\psi)$  con ayuda de las relaciones (13.49). Una vez obtenidos estos dos campos se resuelve la parte derecha de (13.47) y la ecuación (13.46) para obtener una primera estimación del campo de la vorticidad  $\zeta_{i,j}^1$ . Esta estimación se puede utilizar para calcular un nuevo valor de (13.47) y estimar otra vez la vorticidad a través de (13.46) y continuar en esta forma el proceso hasta realizar la previsión de  $\zeta$  al plazo deseado. Sin embargo, no se puede calcular (13.47) todavía puesto que se desconocen los nuevos valores de  $u_\psi^1$ ,  $u_\psi^1$ . Esta pregunta se responde con ayuda de las ecuaciones (13.48) y (13.49). En primer lugar se resuelve (13.48) para calcular un nuevo valor de la función de corriente y luego se utiliza el valor de esta última para estimar los nuevos valores de las componentes del viento por las fórmulas (13.49). Veamos cómo se resuelve numéricamente (13.47). La ecuación (13.48) es el análogo en diferencias finitas de la ecuación de Poisson (13.44). La solución de esta ecuación para la variable  $\psi$  se halla utilizando el proceso convencional de inversión de matrices. En primer lugar, note que la parte derecha y la parte izquierda de (13.48) están escritas para un mismo nivel de tiempo  $n$ . Esto

significa que para resolverla, se necesita de alguna manera, utilizar la técnica del método implícito. Para ver como se emplea este método, considere una grilla de cinco puntos para calcular  $\nabla^2 \psi_{i,j}$ , como la dibujada en la figura (13.6). En esta figura, con subíndice 0 se representan valores conocidos en

	$\psi_0$	$\psi_0$	$\psi_0$	$\psi_0$	$\psi_0$	
$\psi_0$	$\zeta_7$	$\psi_7$	$\zeta_8$	$\psi_8$	$\zeta_9$	$\psi_9$
$\psi_0$	$\zeta_4$	$\psi_4$	$\zeta_5$	$\psi_5$	$\zeta_6$	$\psi_6$
$\psi_0$	$\zeta_1$	$\psi_1$	$\zeta_5$	$\psi_5$	$\zeta_6$	$\psi_6$
	$\psi_0$	$\psi_0$	$\psi_0$	$\psi_0$		

Figura 13.6. Grilla para ilustrar el cálculo de  $\nabla^2 \psi_{i,j}$ .

la frontera del dominio. Entonces, de acuerdo con la fórmula (13.13a), se escribe el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \psi_2 + \psi_4 + \psi_0 + \psi_0 - 4\psi_1 &= \zeta_1 \\
 \psi_3 + \psi_5 + \psi_1 + \psi_0 - 4\psi_2 &= \zeta_2 \\
 \psi_0 + \psi_6 + \psi_2 + \psi_0 - 4\psi_3 &= \zeta_3 \\
 \psi_5 + \psi_7 + \psi_0 + \psi_1 - 4\psi_4 &= \zeta_4 \\
 \psi_6 + \psi_8 + \psi_4 + \psi_2 - 4\psi_5 &= \zeta_5 \\
 \psi_0 + \psi_9 + \psi_5 + \psi_3 - 4\psi_6 &= \zeta_6 \\
 \psi_8 + \psi_0 + \psi_0 + \psi_4 - 4\psi_7 &= \zeta_7 \\
 \psi_9 + \psi_0 + \psi_7 + \psi_5 - 4\psi_8 &= \zeta_8 \\
 \psi_0 + \psi_0 + \psi_8 + \psi_6 - 4\psi_9 &= \zeta_9
 \end{aligned}$$

Puesto que se conocen los valores en la frontera, el sistema se puede reescribir así

$$\begin{array}{cccccccccccl}
-4\psi_1 & +\psi_2 & & \psi_4 & & & & & & & = \zeta_1 - 2\psi_0 = G_1 \\
\psi_1 & -4\psi_2 & +\psi_3 & & +\psi_5 & & & & & & = \zeta_2 - \psi_0 = G_2 \\
& \psi_2 & -4\psi_3 & & & +\psi_6 & & & & & = \zeta_3 - 2\psi_0 = G_3 \\
\psi_1 & & & -4\psi_4 & +\psi_5 & & +\psi_7 & & & & = \zeta_4 - \psi_0 = G_4 \\
& \psi_2 & & +\psi_4 & -4\psi_5 & +\psi_6 & & +\psi_8 & & & = \zeta_5 = G_5 \\
& & \psi_3 & & +\psi_5 & -4\psi_6 & & & +\psi_9 & & = \zeta_6 - \psi_0 = G_6 \\
& & & \psi_4 & & & -4\psi_7 & +\psi_8 & & & = \zeta_7 - 2\psi_0 = G_7 \\
& & & & \psi_5 & & +\psi_7 & -4\psi_8 & +\psi_9 & & = \zeta_8 - \psi_0 = G_8 \\
& & & & & \psi_6 & & +\psi_8 & -4\psi_9 & & = \zeta_9 - 2\psi_0 = G_9
\end{array}$$

Esto es un sistema de 9 ecuaciones con 9 valores desconocidos de  $\psi$ . Este sistema puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 & G_1 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & G_2 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & G_3 \\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \psi_4 & G_4 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & \psi_5 & G_5 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & \psi_6 & G_6 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & \psi_7 & G_7 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & \psi_8 & G_8 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & \psi_9 & G_9
\end{bmatrix}$$

o en forma simbólica:

$$Q\psi = G.$$

donde  $Q$  es una matriz de  $9 \times 9$  coeficientes y  $\psi$  y  $G$  son vectores columna. El problema consiste entonces en encontrar la matriz inversa

$$\psi = Q^{-1}G.$$

La dificultad está en que  $Q$  es a menudo muy grande (en general, contiene  $(N-2)^2 \times (M-2)^2$  elementos. Un método usado con más frecuencia para resolver la ecuación de Poisson (13.44) es el método llamado de iteración.

### 13.4.1. Solución de la ecuación de Poisson por el método de iteración

Resolviendo la ecuación (13.48) con respecto a  $\psi_{i,j}$ , se obtiene

$$\psi_{i,j} = \frac{1}{d^2}(\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}) - \frac{d^2}{4}\zeta_{i,j}. \quad (13.50)$$

La idea del método iterativo de solución es el siguiente: dado un conjunto de valores iniciales y arbitrarios los cuales se llaman  $\psi_{i,j}^{(0)}$ , en donde, el superíndice entre paréntesis indica el número de la iteración, se colocan en la parte derecha de (13.50) y se obtiene un nuevo conjunto de valores en la parte izquierda los cuales denotados como  $\psi_{i,j}^{(1)}$ . (En este momento se acaba de realizar la iteración No 1) Colocando este nuevo conjunto de valores en el lado derecho, se obtiene otro

conjunto  $\psi_{i,j}^{(2)}$ . Operando sucesivamente en esta forma, para la iteración  $s + 1$ , se llega a

$$\psi_{i,j}^{(s+1)} = \frac{1}{d^2} (\psi_{i+1,j}^{(s)} + \psi_{i-1,j}^{(s)} + \psi_{i,j-1}^{(s)} + \psi_{i,j+1}^{(s)}) - \frac{d^2}{4} \zeta_{i,j}. \quad (13.51)$$

Se puede probar que la diferencia entre dos iteraciones consecutivas es tan pequeña como se desee y que después de muchas iteraciones el proceso iterativo converge en la solución de (13.50). Este método propuesto inicialmente por el matemático inglés L. Richardson, es convergente pero muy lento. Un método mejorado es el de relajación (“relaxation”) y sobre relajación (over relaxation).

Observe que si después de cierta iteración  $s$ , no se halla la solución exacta es porque existe una diferencia entre la parte derecha y la parte izquierda de (13.50), la cual se llamará residuo.

$$R_{i,j}^{(s)} = \frac{1}{d^2} (\psi_{i+1,j}^{(s)} + \psi_{i-1,j}^{(s)} + \psi_{i,j-1}^{(s)} + \psi_{i,j+1}^{(s)}) - \frac{d^2}{4} \zeta_{i,j} - \psi_{i,j}^{(s)} \quad (13.52)$$

El principio del método de relajación es escribir la solución como

$$\psi_{i,j}^{(s+1)} = \psi_{i,j}^{(s)} + \alpha R_{i,j}^{(s)} \quad (13.53)$$

Cuando se calcula la función (13.53) y se coloca en (13.52), en algunos puntos del campo se consigue la solución exacta ( $R_{i,j}^{(s)} = 0$ ) y en otros no. Para probar esto, considere el residuo intermedio que resulta al colocar la solución  $\psi_{i,j}^{(s+1)}$  en (13.52) para el punto  $i, j$

$$R'_{i,j}^{(s+1)} = \frac{1}{d^2} (\psi_{i+1,j}^{(s)} + \psi_{i-1,j}^{(s)} + \psi_{i,j-1}^{(s)} + \psi_{i,j+1}^{(s)}) - \frac{d^2}{4} \zeta_{i,j} - \psi_{i,j}^{(s+1)}, \quad (13.54)$$

y sustituya el último término de (13.54) por la expresión (13.53):

$$R'_{i,j}^{(s+1)} = \frac{1}{d^2} (\psi_{i+1,j}^{(s)} + \psi_{i-1,j}^{(s)} + \psi_{i,j-1}^{(s)} + \psi_{i,j+1}^{(s)}) - \frac{d^2}{4} \zeta_{i,j} - \psi_{i,j}^{(s)} - \alpha R_{i,j}^{(s)}$$

Remplazando los tres primeros términos en el lado derecho por la definición (13.52), esta última expresión se escribe

$$R'_{i,j}^{(s+1)} = R_{i,j}^{(s)} (1 - \alpha).$$

O sea que sabiendo elegir el valor del parámetro de relajación (por ejemplo para  $\alpha = 1$ ), el residuo intermedio en el punto  $i, j$  se hace cero. Sin embargo, debido a que en el cálculo de la función en los puntos vecinos, por ejemplo el punto  $i + 1, j$ , interviene la función calculada en el punto  $i, j$ , ya con residuo cero, es muy probable que en este punto  $i + 1, j$  el residuo no sea exactamente igual a cero. Por eso se necesita realizar nuevas iteraciones hasta que el residuo no se haga igual a 0 en todos los puntos considerados. Se puede probar que la convergencia del proceso iterativo del método de relajación es más rápido que la convergencia del proceso iterativo del método de Richardson.

**Ejercicios**

1. Suponga que la función  $u(x)$  está representada por  $\sin(x)$  y considere los valores que esta función toma en los puntos  $0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$  y  $\pi/2$ :
  - a) Con esta información calcule la primera derivada  $du/dx$  en el punto  $\pi/4$  usando para ello las aproximaciones (13.5) y (13.5a).
  - b) Compare los resultados con la solución analítica para la derivada en ese punto.
  - c) Represente gráficamente los resultados.
2. Determinar las constantes  $A$  y  $B$  en la ecuación  $y^n = A(\sqrt{1+h^2} + h)^n + B(-1)^n(\sqrt{1+h^2} - h)^n$ , usando las condiciones iniciales  $y^0 = y_0$  para todo  $t = 0$ , ( $n = 0$ ) y  $y^1 = y_0(1+h)$  para  $t = 1$  ( $n = 1$ ), y obtener la ecuación (e13.1.6\*)

# 14

## Métodos numéricos II: Método espectral



Imagen tomada de  
<http://www.science.org.au/primaryconnections/resourcesheets/weather/RainAndClouds.jpg>  
Cortesía de la academia australiana de ciencias

El método espectral tiene amplias aplicaciones en meteorología. En el capítulo 14, este método se aplicará en la predicción numérica. Entre algunos de los textos que ilustran la aplicación de esta técnica en meteorología se pueden mencionar Machenhauer (1979), Krishnamurti & otros (1998), Kiehl & otros (1996).

### 14.1. Aplicación del método espectral en la predicción meteorológica numérica

El método espectral fue sugerido inicialmente por Silverman (1954) y Platzman (1960) como una alternativa al método de diferencias finitas para solucionar la ecuación barotrópica no divergente. Sin embargo, su uso para la integración de modelos no adiabáticos y complejos solo se logró a partir de los años setenta (Eliassen & otros, 1970, Orsag, 1970) después de haber evolucionado de manera significativa.

Al aplicar el método espectral a la parte no lineal de la ecuación, aparecen unos coeficientes de interacción que es necesario conservar durante el paso tiempo, los cuales aumentan con el aumento de la resolución del modelo. Además, la inclusión de efectos no adiabáticos y otros procesos físicos no es fácil cuando se opera solo en el campo espectral.

El interés por la aplicación del método espectral en la predicción numérica se retomó a partir de los años setenta con la aparición de métodos que utilizaban la transformada de Fourier y permitían operar simultáneamente en el campo espectral y en el campo físico o de puntos de grilla.

El método espectral aplicado a la predicción numérica consiste en representar la solución de una ecuación diferencial a través de una expansión en series truncadas de funciones esféricas, como la presentada por la fórmula (11.23).

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = \sum_m \sum_n \Psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (14.1)$$

En esta expresión,  $\Psi(\lambda, \mu, t)$  es la variable que se desea expandir  $\Psi_n^m(t)$  son los coeficientes de la expansión y  $Y_n^m(\lambda, \mu)$ , las *funciones base*, son *funciones esféricas*. Note que la variable en la parte izquierda es una función del espacio y del tiempo, mientras que en la parte derecha, dependen del tiempo los coeficientes  $\Psi_n^m(t)$ . La dependencia espacial horizontal ha sido asignada a las funciones base (fórmula (11.22)). Al hacer esta representación es posible convertir una ecuación en derivadas parciales en un sistema de ecuaciones diferenciales comunes escritas para los coeficientes de la expansión.

En la práctica de la predicción numérica, se precisa operar con series que contengan un número finito de coeficientes. Por eso, inicialmente, es conveniente examinar el problema del truncamiento.

#### 14.1.1. Tipos de truncación

En principio la doble sumatoria en la expansión (14.1) es infinita. O sea,  $-\infty \leq m \leq \infty$ , y  $|m| \leq n \leq \infty$ . Sin embargo, el uso del método espectral requiere trabajar con una serie truncada en algún punto. En la práctica de la truncación espectral se tiende a truncar las ondas de pequeña escala.

En la mecánica de truncación se quiere establecer los límites de las sumatorias en (14.1). Antes de establecerlos, vale la pena anotar que, de manera similar a la representación gráfica de los números complejos, las funciones base  $Y_n^m(\lambda, \mu)$  pueden ser representadas por puntos en el plano de coordenadas  $n, m$  (figura 14.1). Puesto que  $n$ , el grado del polinomio de Legendre, debe ser positivo, se considera solo el semiplano superior. Además, se puede trazar la diagonal  $n = m$  para cumplir la condición  $n \geq |m|$ . Existen varios tipos de truncación. En la figura 14.1, se representa la truncación triangular. En esta figura  $N$  es el grado más alto en el polinomio de Legendre para  $m = 0$ ;  $M$  es el número de onda de Fourier más alto considerado. Teniendo en cuenta estas definiciones, en la truncación triangular

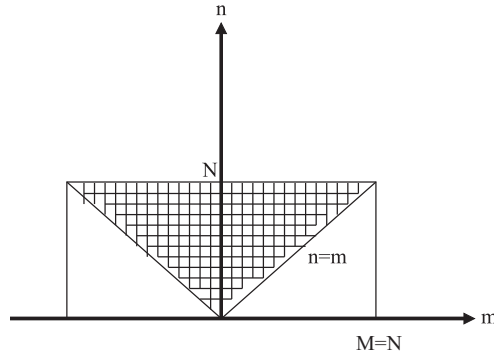


Figura 14.1. Representación de la truncación triangular. El área enmallada corresponde al dominio de la función base truncada.

el dominio de las funciones base para  $m > 0$  está representado por el triángulo limitado entre las rectas,  $n = m$ ,  $n = N$  y el eje de las ordenadas ( $m = 0$ ). Si a este dominio le agregamos el triángulo similar correspondiente a los valores negativos de  $m$ , entonces los límites de las sumatorias en (14.1) se pueden escribir

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (14.2)$$

Otro tipo de truncación es la llamada *truncación del paralelogramo*. Además, la serie truncada para la laplaciana de las funciones esféricas (fórmula 11.24) se escribe

$$\zeta = \nabla^2 \Psi = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=|m|}^N \frac{n(n+1)}{a^2} \Psi_n^m Y_n^m. \quad (14.3)$$

## 14.2. Solución del modelo barotrópico por el método espectral



### 14.2.1. Transformación de la ecuación a la forma espectral

Para mostrar la aplicación del método espectral en la predicción numérica, se utilizará la ecuación de vorticidad barotrópica (11.5a), la representación en funciones armónicas esféricas (14.2) y la condición de normalización (u ortogonalidad) (11.25).

Recordando (2.34) y teniendo en cuenta que  $\mu = \sin \phi$ ,

$$f = 2\Omega \sin \phi = 2\Omega \mu \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \mu} = 2\Omega$$

Con ayuda de esta expresión y teniendo en cuenta que  $\partial f / \partial \lambda = 0$ , (11.5a) se escribe

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right) - \frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}.$$

En esta expresión el último término en el lado derecho es lineal, mientras que el primero no lo es, por eso es conveniente reescribirla como

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} + F(\lambda, \mu) \quad (14.4)$$

donde

$$F(\lambda, \mu) = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right). \quad (14.5)$$

Para escribir la ecuación (14.4) en forma espectral, se utilizarán las siguientes expansiones en funciones esféricas de acuerdo a (14.2):

$$\Psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (14.6)$$

$$F(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N F_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \quad (14.7)$$

donde se ha asumido,  $M = N$  (fórmula (14.2)). Teniendo en cuenta (14.3), para la parte izquierda de (14.4), se tiene

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \vec{\nabla}^2 \hat{\Psi}}{\partial t} = - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{n(n+1)}{a^2} \frac{d\Psi_n^m(t)}{dt} Y_n^m(\lambda, \mu)$$

donde el acento circunflejo sobre la variable  $\Psi$  indica que, debido al truncamiento, la solución ( $\hat{\Psi}$ ) no satisface exactamente la ecuación diferencial (14.4).

Es fácil probar que,

$$\frac{\partial \Psi_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} = \text{im } Y_n^m(\lambda, \mu).$$

Teniendo en cuenta este resultado, para el término lineal de la parte derecha de (14.4),

$$-\frac{2\Omega}{a^2} \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \lambda} = -\frac{2\Omega}{a^2} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \text{im } \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu).$$

El término no lineal se escribe

$$F(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N F_n^m(\Psi) Y_n^m(\lambda, \mu)$$

Sustituyendo estas expresiones en (14.4),

$$\begin{aligned} & - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{n(n+1)}{a^2} \frac{d\Psi_n^m(t)}{dt} Y_n^m(\lambda, \mu) \\ & = -\frac{2\Omega}{a^2} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \text{im} \Psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu) + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N F_n^m Y_n^m(\lambda, \mu). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por  $-\frac{a^2}{n(n+1)}$  e igualando coeficientes para  $Y_n^m$ , este sistema de ecuaciones diferenciales se escribe

$$\frac{d\Psi_n^m(t)}{dt} = \frac{2\Omega \text{im}}{n(n+1)} \Psi_n^m(t) - \frac{a^2}{n(n+1)} F_n^m(t). \quad (14.8)$$

La expresión (14.8) representa la ecuación de vorticidad barotrópica en forma espectral. Esta ecuación permite conocer a través del tiempo los coeficientes  $\Psi_n^m(t)$ , siempre y cuando se determine su parte derecha, incluidos los coeficientes del término no lineal  $F_n^m(t)$ .

El cálculo de este término representa el momento crucial en la aplicación del método espectral en la predicción numérica.

La forma general para este término se puede obtener multiplicando ambos lados de la representación (14.7) por  $\frac{1}{4\pi} Y_{n'}^{*m'}(\lambda, \mu)$ , integrando de 0 a  $2\pi$  y de  $-1$  a  $1$ , y aplicando la condición de ortogonalidad (11.25). De esta forma se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{n'}^{*m'} F(\hat{\Psi}) d\mu d\lambda \\ & = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N F_n^m(t) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_n^m Y_{n'}^{*m'}(\lambda, \mu) d\mu d\lambda = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N F_n^m(t). \end{aligned}$$

donde se desprende el siguiente sistema de ecuaciones para determinar los coeficientes  $F_n^m(t)$ :

$$F_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 F_n^m(\hat{\Psi}) Y_n^{*m'}(\lambda, \mu) d\mu d\lambda. \quad (14.9)$$

La manera de solucionar la parte derecha de esta expresión da lugar a los dos métodos existentes para el tratamiento del término no lineal.

Si la función  $F_n^m(\hat{\Psi})$ , dentro de la integral, se representa expandiendo las derivadas de la parte derecha de (14.5) en series truncadas e integrando luego, entonces los coeficientes  $F_n^m$  se obtienen directamente dentro del campo espectral y el método se denomina *método de los coeficientes de interacción*. El otro camino es calcular las funciones  $F_n^m(\hat{\Psi})$  en el espacio físico de puntos de grilla  $j, k$  y luego tomar la integral usando el concepto de transformada de Fourier–Legendre. A este se le conoce con el nombre de método de las transformaciones o método pseudo-espectral.

### 14.2.2. El método de los coeficientes de interacción

Actualmente el método de los coeficientes de interacción no se usa en la predicción meteorológica numérica. Se ilustra aquí con fines didácticos.

Para mostrar el método de los coeficientes de interacción, inicialmente se coloca la serie truncada (14.2) dentro del término no lineal (14.5),

$$F(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \mu} \frac{\partial \nabla^2 \hat{\Psi}}{\partial \lambda} - \frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \lambda} \frac{\partial \nabla^2 \hat{\Psi}}{\partial \mu} \right).$$

Teniendo en cuenta (14.3) y las derivadas por  $\lambda$  y  $\mu$  de la función esférica,

$$F(\hat{\Psi}) = \frac{1}{a^2} \left[ \left( \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \Psi_{n_1}^{m_1} \frac{\partial}{\partial \mu} Y_{n_1}^{m_1} \right) \left( - \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N \text{im}_2 \varepsilon_{n_2} \Psi_{n_2}^{m_2} Y_{n_2}^{m_2} \right) - \left( \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \text{im}_1 \Psi_{n_1}^{m_1} Y_{n_1}^{m_1} \right) \left( - \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N \varepsilon_{n_2} \Psi_{n_2}^{m_2} \frac{\partial}{\partial \mu} Y_{n_2}^{m_2} \right) \right]$$

donde

$$\varepsilon_{n_2} = \frac{n_2(n_2 + 1)}{a^2}.$$

Ejecutando la multiplicación de las series, se obtiene

$$F(\hat{\Psi}) = \frac{1}{a^2} \left( \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N i \Psi_{n_1}^{m_1} \Psi_{n_2}^{m_2} I_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} \right)$$

donde

$$I_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} = \varepsilon_{n_2} \left( m_2 P_{n_2}^{m_2} \frac{dP_{n_1}^{m_1}}{d\mu} - m_1 P_{n_1}^{m_1} \frac{dP_{n_2}^{m_2}}{d\mu} \right) e^{i(m_1 + m_2)\lambda}.$$

De acuerdo con Machenhauer (1979), esta expresión se puede escribir en una forma más simétrica (se necesita sustituir en ella los índices  $m_1, n_1$  por  $m_2, n_2$ , sumar la expresión resultante con la expresión anterior y dividir la suma entre 2). Se obtiene

$$F(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{a^2} \left( \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N i \Psi_{n_1}^{m_1} \Psi_{n_2}^{m_2} L_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} \right),$$

donde

$$L_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{n_2} - \varepsilon_{n_1}) \left( m_1 P_{n_1}^{m_1} \frac{dP_{n_2}^{m_2}}{d\mu} - m_2 P_{n_2}^{m_2} \frac{dP_{n_1}^{m_1}}{d\mu} \right) e^{i(m_1 + m_2)\lambda}.$$

Colocando esta expresión dentro de la integral (14.9) e integrando se obtiene,

$$F_n^m = \frac{1}{a^2} \left( \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{m_2=-N}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N i \Psi_{n_1}^{m_1} \Psi_{n_2}^{m_2} L_{n, n_1, n_2}^{m, m_1, m_2} \right) \quad (n_2 > n_1), \quad (14.10)$$

donde los coeficientes de interacción  $L_{n, n_1, n_2}^{m, m_1, m_2}$  se escriben como,

$$L_{n, n_1, n_2}^{m, m_1, m_2} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\varepsilon_{n_2} - \varepsilon_{n_1}) \int_{-1}^1 \left[ P_n^m \left( m_1 P_{n_1}^{m_1} \frac{dP_{n_2}^{m_2}}{d\mu} - m_2 P_{n_2}^{m_2} \frac{dP_{n_1}^{m_1}}{d\mu} \right) \right] d\mu & \text{para } m = m_1 + m_2. \\ 0 & \text{para } m \neq m_1 + m_2. \end{cases} \quad (14.11)$$

Sustituyendo la expresión (14.10) en la ecuación diferencial común (14.8), se puede encontrar los coeficientes de esa ecuación a través de pasos en el tiempo y solucionar directamente el modelo barotrópico por el método espectral. Sin embargo, aun para series truncadas con poca cantidad de armónicos, el cálculo por las fórmulas (14.10) y (14.11) es muy laborioso debido a que hay que almacenar los coeficientes de interacción (14.11), los cuales aumentan en número con el aumento de la resolución.

Otro problema asociado a la aplicación del método espectral puro es cómo incluir los efectos no adiabáticos del modelo y otras parametrizaciones físicas.

Por estas razones, durante mucho el método espectral puro tiempo no se consideró una alternativa para la solución de ecuaciones diferenciales no lineales.

### 14.2.3. El método de las transformaciones

En el método de las transformaciones la idea es calcular, en el espacio físico o de puntos de grilla  $\mu_k, \lambda_j$ , la función  $F_n^m(\hat{\Psi}(\mu_k, \lambda_j))$ . Si esto es posible, entonces la integral (14.9) se puede tomar numéricamente.

La integral (14.9) se puede desdoblar en dos integrales:

$$F_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F_m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu \quad (14.12)$$

$$F_m(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda} d\lambda. \quad (14.13)$$

La segunda es una transformada de Fourier (compare esta fórmula con la fórmula (11.16)) y se toma a lo largo de una latitud Gaussiana  $k$ . Por tanto, puede describirse

$$F_m(\mu_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda} d\lambda. \quad (14.14)$$

La integral (14.12) acumula los resultados parciales obtenidos en cada latitud. Esto facilita de modo significativo el proceso de cálculo.

Para tomar estas integrales numéricamente, existen métodos bastante exactos. La integral (14.12) se toma por un método llamado cuadratura de Gauss, que la convierte en la siguiente sumatoria:

$$F_n^m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K G_k^K F_m(\mu_k) P_n^m(\mu_k). \quad (14.15)$$

La integral (14.13) se toma por la fórmula del trapecio a lo largo del círculo de latitud a través de la siguiente sumatoria:

$$F_m(\mu_k) = \frac{1}{K_1} \sum_{j=1}^{K_1} F(\lambda, \mu, t) e^{-im\lambda_j}. \quad (14.16)$$

Falta solo indicar cómo se calcula la función  $F(\lambda, \mu, t)$  en cada punto de grilla.

Esta función se expresa en términos de los coeficientes armónicos en cada punto de grilla  $\mu_k, \lambda_j$  de manera similar a la empleada para el método de los coeficientes de interacción. En consecuencia, el término no lineal en (14.4) se escribe

$$F(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{a^2(1-\mu^2)} \left[ (1-\mu^2) \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} - \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} (1-\mu^2) \frac{\partial \zeta}{\partial \mu} \right], \quad (14.17)$$

Ahora las derivadas de  $\Psi$  y de  $\zeta$  se expresan en términos de series truncadas. Por ejemplo, usando la serie (14.6) y sustituyendo en ella a  $Y_n^m(\mu, \lambda)$  por su valor en (11.22), expandimos la siguiente derivada:

$$(1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \Psi(\lambda_j, \mu_k, t) = \sum_m \sum_n \Psi_n^m(t) e^{im\lambda} (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} P_n^m(\mu).$$

Usando la propiedad de la derivada del polinomio de Legendre, esta expresión se escribe

$$\begin{aligned} (1-\mu^2) \frac{\partial}{\partial \mu} \Psi(\lambda_j, \mu_k, t) = \\ \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Psi_n^m(t) \frac{1}{(1-\mu^2)} (-n\varepsilon_{n+1}^m P_{n+1}^m(\mu) + (n+1)\varepsilon_{n-1}^m P_{n-1}^m(\mu)) e^{im\lambda} \end{aligned} \quad (14.18)$$

$$\varepsilon_n^m = \left( \frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1} \right)^{1/2}$$

El factor  $\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda}$  se obtiene derivando (14.6) por  $\lambda$ :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \text{im} \Psi_n^m(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (14.19)$$

De modo similar se deducen expresiones para las derivadas de la función  $\zeta$  y se obtiene su valor en los puntos de grilla. Una vez calculadas las derivadas en los puntos de grilla, los resultados se multiplican y se restan de acuerdo con la fórmula (14.9). De esta manera se obtiene el término no lineal  $F(\lambda, \mu, t)$ .

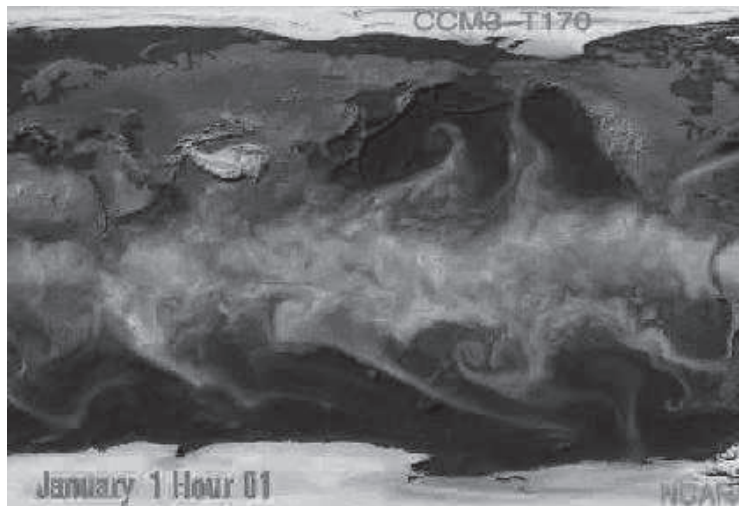
En resumen, la ecuación de vorticidad se soluciona en el tiempo a través del método de las transformaciones o semi-espectral, así:

- Paso 1. (o paso preliminar). A partir de un campo inicial de geopotencial o de viento, establezca el campo de la función de corriente  $\Psi(\mu, \lambda)$ . Esta operación se realiza en el campo físico o de puntos de grilla.
- Paso 2. Calcule los coeficientes espectrales  $\Psi_n^m$ , aplicando la propiedad de las funciones esféricas (11.23) y los coeficientes espectrales de la vorticidad  $\zeta_n^m$ . Esta operación se realiza en el campo espectral.
- Paso 3. Seleccione la primera latitud ( $\mu_k = \mu_l$ ) y calcule la función  $F(\lambda, \mu, t)$  para todos los  $\lambda_j$  de ese círculo de latitud. Calcule la función  $F_m(\mu_k)$  por la fórmula (14.16).
- Paso 4. Repita el paso anterior para todas las demás latitudes ( $\mu_k = \mu_2, \mu_3, \mu_4, \dots$ ). Los pasos 3 y 4 se efectúan en el campo físico o de puntos de grilla.
- Paso 5. Calcule los coeficientes espectrales  $F_n^m$  del término no lineal.
- Paso 6. Calcule la parte derecha de la ecuación espectral (14.8).
- Paso 7. Integre el sistema de ecuaciones (14.8) y obtenga los coeficientes espectrales en el nuevo paso tiempo. Los pasos 5, 6 y 7 se efectúan en el campo espectral.

El uso del método de las transformaciones tiene varias ventajas: Algunas de ellas son:

1. Facilitar la implementación del modelo en el ordenador ya que se reduce significativamente la información que hay que conservar en la memoria.
2. En la etapa de cálculo, cuando se opera en el espacio de puntos de grilla, se pueden incluir efectos no adiabáticos y otras parametrizaciones físicas.
3. Además, con el uso de los métodos espectrales y semi-espectrales, no se incurre en problemas propios del método de las diferencias finitas como la difusión numérica.

## Modelos atmosféricos



Simulación del campo de la nubosidad por el modelo climático CCSM.  
Imagen tomada de <http://www.cisl.ucar.edu/docs/asr2002/images/ccsm.jpg>  
Cortesía del NCAR.

Después de una corta revisión histórica, en este capítulo se introduce y se utiliza el concepto de coordenada vertical generalizada. Con ayuda de este concepto se discuten tres tipos de modelos: de ecuaciones primitivas, no hidrostático y de simulación climática. Algunas de las obras recomendadas para consulta son Haltiner & Williams (1980), Jacobson (1999), Pielke (1984) y las guías para el usuario de los modelos CAM y MM5.

## 15.1. Revisión histórica

Los modelos atmosféricos tienen su fundamento en las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera vistas en capítulos anteriores de esta obra. Como ejemplo se puede citar el sistema de ecuaciones primitivas (4.35), (4.36), (4.40), (4.42) y (4.43), derivadas en el capítulo 4. A este tipo de modelos se volverá más adelante.

La primera experiencia en modelos atmosféricos, con resultados poco realistas, estuvo asociada a la predicción del tiempo (Richardson, 1922). La predicción numérica del tiempo arrancó en forma a partir del año 1950 con la implantación de un modelo barotrópico de un solo nivel (Charney & otros, 1950) y analizado en los capítulos 8, 13 y 14 de esta obra. Con ayuda de este modelo se pronosticó la altura del geopotencial en la superficie de 500 hPa, mejorando el pronóstico del desplazamiento de las perturbaciones atmosféricas de escala sinóptica, que en esa época se hacía por métodos subjetivos (sinópticos).

Sin embargo, este modelo presentaba inexactitudes, como rápida retrogresión de las ondas ultralargas, problemas con las condiciones ficticias de contorno, imposibilidad de conversión de energía potencial en cinética debido a su naturaleza barotrópica (no baroclínica), etc.

De manera independiente, en la antigua Unión Soviética se desarrolló el modelo barotrópico y la subsiguiente generación de modelos atmosféricos; los modelos baroclínicos (Kivel, 1940). Estos modelos de 3 o más niveles se basan en la aproximación cuasi-geostrófica analizada en el capítulo 8.

En un modelo baroclínico se elimina la restricción según la cual el viento no puede variar libremente con la altura, se pueden diagnosticar los movimientos verticales y se permite el calentamiento diabático de la atmósfera. También se mejora la predicción del geopotencial, y en consecuencia, el desplazamiento de las perturbaciones sinópticas.

Estos modelos no contienen ondas gravitacionales ni acústicas, razón por la cual se llaman modelos filtrados. Por tanto no se presenta inestabilidad computacional y no se exige el uso de paso tiempo corto, limitante muy severa en la época de la infancia de los computadores.

Estos modelos y los subsiguientes de la misma generación, los modelos de balance lineal y no lineal, contienen ecuaciones diferenciales elípticas complejas de segundo y cuarto orden, de laboriosa solución numérica. Por esta razón, sucumbieron ante la arremetida de la siguiente generación de modelos atmosféricos: los modelos de ecuaciones primitivas. El desarrollo de métodos numéricos más avanzados como el método semi-implícito y el



método de separación temporal (time splitting), los cuales permiten integrar las ondas gravitacionales y acústicas, impulsaron el uso de este tipo de modelos.

La popularización de los modelos basados en las ecuaciones primitivas mencionadas arriba mejoró ostensiblemente la predicción del tiempo, es decir, la capacidad de extrapolar el tiempo atmosférico hacia el futuro, a partir de un estado inicial. Sin embargo, la predicción del tiempo es bastante sensible al estado inicial, que no siempre puede determinarse con suficiente precisión.

Casi simultáneamente con la predicción del estado del tiempo apareció la simulación climática (Phillips, 1956). El modelo de circulación general de la atmósfera de Phillips era baroclínico, cuasi geostrófico. La simulación climática arrancó en forma en los años 60 (Smagorinski, 1962), con un modelo de ecuaciones primitivas.

En estos modelos, también llamados de circulación global de la atmósfera, el propósito es simular las condiciones medias que, aunque también requieren de condiciones iniciales, caracterizan un estado medio o de equilibrio. Para aprovechar mejor algunas propiedades del método espectral, los modelos de circulación global después de Smagorinski (1962) y hasta el presente, emplean las ecuaciones para la vorticidad y la divergencia, pero conservando las ondas gravitacionales (mas no las acústicas). Como ejemplo de este tipo de modelos, se puede citar el CAM (Community Atmospheric Model), el ECHAM y otros. Sin embargo, con la popularización del método de integración numérica semilagrangiana, en los últimos años se viene retornando a los modelos globales basados en las ecuaciones primitivas.

Para la predicción del tiempo a escala regional y de mesoescala, se utilizan modelos combinados: de ecuaciones primitivas y no hidrostáticos. Ejemplos de estos modelos pueden ser el WRF (“Weather Research and Forecasting”) desarrollado por la Universidad de Pensilvania, el Instituto NCAR y otras instituciones y el modelo RAMS (Regional Atmospheric Modeling System). Un ejemplo de cada uno de estos tipos de modelos será analizado durante la siguiente exposición de este capítulo. La derivación de los modelos que se analizarán más adelante depende de la coordenada vertical usada, concepto que se analizará en detalle.

## 15.2. Aspectos básicos de los modelos atmosféricos

Como se mencionó inicialmente en el capítulo 5, en la construcción de un modelo meteorológico intervienen varias etapas:

1. La resolución del modelo 2. Elección de la coordenada vertical 3. El modelo dinámico ó ecuaciones fundamentales del modelo 4. La parametrización de los procesos físicos 5. La solución numérica 6. Los datos iniciales y de contorno

### 15.2.1. La resolución del modelo

La resolución del modelo está dada por la elección del paso de grilla. Por lo regular un paso de grilla de cientos de kilómetros corresponde a modelos climáticos y de varias decenas de kilómetros (90, 50, 30), a modelos regionales y de mesoescala.

### 15.2.2. Tipos de coordenada vertical

En el capítulo 4 se introdujo el sistema de coordenadas isobáricas, donde la presión representa el papel de coordenada vertical, el cual presenta algunas ventajas especialmente en la escritura del sistema de ecuaciones. Sin embargo este sistema, al igual que el sistema cartesiano original donde se usa  $z$  como coordenada vertical, no es adecuado para representar la orografía dentro del modelo, como se puede ver a continuación.

En la figura 15.1a, las líneas paralelas representan la intersección de las superficies de igual altura con el plano de la figura. El relleno representa una montaña. Se puede notar que las líneas de igual altura intersecan la montaña. Esto significa que en la grilla vertical del modelo atmosférico existen algunos puntos cuya localización queda ubicada “dentro de la montaña”. Esta situación es desconocida por el algoritmo del modelo, y seguramente, se presentan problemas en el cálculo. Dificultad similar presenta el sistema de coordenadas isobáricas.

La situación puede ser solucionada utilizando un sistema de coordenadas isobáricas normalizadas o superficies sigma, introducido por Phillips (1962).

Este sistema usa como coordenada vertical la relación

$$\sigma = \frac{p}{p_s}, \quad (15.1)$$

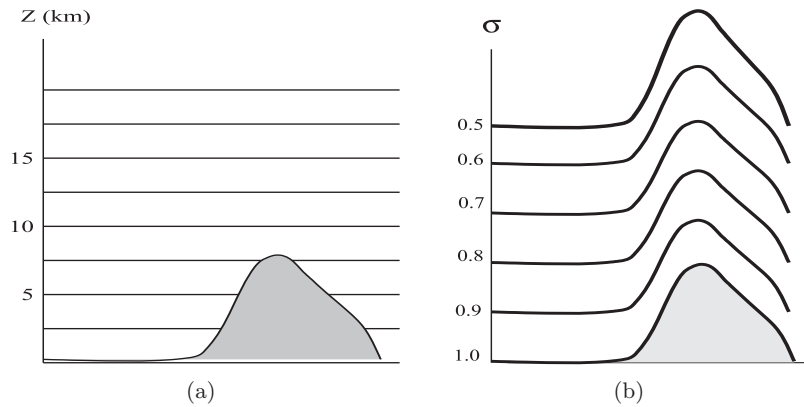


Figura 15.1. Representación de las superficies a) de igual altura  $Z$  y b) isobáricas normalizadas o superficies sigma.

donde  $p$  es presión y  $p_s$  es la presión en superficie. Para cualquier punto sobre la superficie de la montaña ( $p = p_s$ ), la fórmula (15.1) indica que  $\sigma = p/p_s = 1$ . Por eso, la superficie isobárica  $\sigma = 1$  estará adherida a la superficie de la montaña, como se observa en el la figura 15.1b. Hemos entonces encontrado un sistema de coordenadas que soluciona el problema de la no intersección de las superficies isobáricas por la orografía.

Además, en el tope de la atmósfera,  $p = 0$ . Esto significa que el dominio vertical en el sistema de coordenadas sigma va de 1.0 en la superficie terrestre a 0 en el límite superior de la atmósfera.

A pesar de que las coordenadas sigma son mejores que las de presión cerca de la superficie, son menos realistas en niveles altos de la atmósfera. Esto se debe a que la orografía tiene una fuerte influencia innecesaria sobre las superficies con valor de sigma constante. Esta influencia, un poco exagerada en la figura 15.1b, afecta incluso superficies no muy alejadas del suelo.

Para solucionar este problema, en la actualidad se usa un sistema híbrido de coordenadas como el implementado por el modelo MM5 (Mesoscale Model), esquematizado en la figura 15.6.

Antes de analizar el sistema de ecuaciones para una coordenada vertical específica, es conveniente introducir el concepto de coordenada vertical generalizada (para mayores detalles ver Haltiner & Williams, 1980).

### 15.2.2.1. Coordenada vertical generalizada

En el sistema cartesiano de coordenadas, cada variable es función de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$ , lo cual se escribe como  $A(x, y, z, t)$ . El uso de  $z$  como coordenada vertical no es muy viable por razones que serán evidentes más adelante. En un sistema de coordenada vertical generalizada  $\zeta$ , se quiere que  $z$  sea una función simple de  $\zeta$  y en general de  $x$ ,  $y$ , y  $t$ , o sea,  $z(x, y, \zeta, t)$ . Nuestras dos representaciones serán equivalentes siempre y cuando, para cualquier función  $A$ , se cumpla

$$A(x, y, \zeta, t) = A(x, y, z(x, y, \zeta, t), t) \quad (15.2)$$

(Ejemplo: para el caso trivial  $\zeta = z$  en (15.2) tenemos:  $A(x, y, z, t) = A(x, y, z(x, y, z, t), t) = A(x, y, z, t)$ ).

En el lado derecho de (15.2) existe una función de otra función, efecto que se debe tener en cuenta en las derivadas siguientes usando la regla de derivación en cadena. Para simplificar, con el símbolo  $s$  se representa cualquier variable independiente  $x$ ,  $y$ , o  $t$ . O sea que (15.2) se escribe

$$A(s, \zeta) = A(s, z(s, \zeta)) \quad (15.2a)$$

Por ejemplo, la derivada parcial por la variable  $s$  a lado y lado de esta igualdad se escribe

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{\zeta}, \quad (15.3)$$

donde el subíndice indica la variable que se deja constante en la derivación, en este caso, la coordenada vertical particular. De manera similar, derivando por la coordenada vertical ambos lados de (15.2a),

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{\partial A}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta},$$

de donde

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (15.4)$$

Sustituyendo este último valor en (15.3),

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_{\zeta} = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)_{\zeta}. \quad (15.5)$$

Esta expresión puede emplearse sucesivamente con  $s = x$ ,  $s = y$  para formar gradientes divergencias, etc. Por ejemplo, el gradiente horizontal de  $A$  se escribe

$$\vec{\nabla}_{\zeta} A = \vec{\nabla}_z A + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \vec{\nabla}_{\zeta} z. \quad (15.6)$$

La divergencia del vector  $\mathbf{B}$  se escribe

$$\vec{\nabla}_\zeta \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} z \cdot \vec{B} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \vec{\nabla}_\zeta z. \quad (15.7)$$

Haciendo en (15.5)  $s = t$ , se obtienen las relaciones entre las derivadas locales,

$$\left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_\zeta = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_\zeta. \quad (15.8)$$

La derivada total o sustancial, en coordenadas  $\zeta$ , se escribe

$$\frac{dA}{dt} = \left( \frac{\partial A}{\partial t} \right)_\zeta + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_\zeta A + \zeta \frac{\partial A}{\partial \zeta}. \quad (15.9)$$

Con ayuda de estas expresiones se transforman las ecuaciones de la dinámica de la atmósfera escritas en coordenadas  $(x, y, z, t)$  en coordenadas  $(x, y, s, t)$ . Se empieza por transformar el gradiente de presión. Sustituyendo  $A$  por  $p$  en (15.6), multiplicando por el volumen específico  $\alpha$  y reorganizando términos,

$$-\alpha \vec{\nabla}_z p = -\alpha \nabla_\zeta p + \alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} \vec{\nabla}_\zeta z.$$

Para escribir el último término de esta ecuación se ha optado por suprimir  $\partial \zeta$  en el numerador y denominador. Utilizando la ecuación de estática y la definición de geopotencial  $\Phi$ , y multiplicando por  $-1$ , la última expresión se escribe

$$\alpha \vec{\nabla}_z p = \alpha \nabla_\zeta p + \vec{\nabla}_\zeta \Phi. \quad (15.10)$$

La ecuación vectorial para el movimiento horizontal se escribe

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\alpha \vec{\nabla}_\zeta p - \vec{\nabla}_\zeta \Phi - f \vec{k} \times \vec{V} + \vec{F}, \quad (15.11)$$

donde, el lado izquierdo de esta expresión tiene el sentido de (15.9). La ecuación de estática se transforma con ayuda de (15.4), o sea,

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial z} + g = \alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + g = 0.$$

Dividiendo entre  $\partial \zeta / \partial z$  y utilizando la definición de geopotencial,

$$\alpha \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0. \quad (15.12)$$

La operación que representa más dificultad es obtener la ecuación de continuidad, la cual se reescribe continuación en coordenadas  $x, y, z$ :

$$\frac{d \ln \rho}{dt} + \vec{\nabla}_z \cdot \vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (15.13)$$

Ahora se aplican, a los dos últimos términos (los términos de la divergencia), las igualdades (15.7) y (15.4), o sea,

$$\vec{\nabla}_z \cdot \vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla}_\zeta \cdot \vec{V} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \zeta} \cdot \vec{\nabla}_\zeta z + \frac{\partial w}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (15.14)$$

Además, utilizando la definición de velocidad vertical y la de derivada total (15.9),

$$w = \frac{dz}{dt} = \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_\zeta + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_\zeta z + \dot{\zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta}.$$

Derivando con respecto a  $\zeta$  esta expresión,

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \zeta} \cdot \vec{\nabla}_\zeta z + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right).$$

Sustituyendo esta expresión en (15.14) y reuniendo términos semejantes,

$$\vec{\nabla}_z \cdot \vec{V} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla}_\zeta \cdot \vec{V} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla}_\zeta + \dot{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial z}{\partial \zeta} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta}$$

Puesto que el primer factor en el término central del lado derecho es el inverso del último, entonces el término central es  $d(\ln(\partial z/\partial \zeta))/dt$ . Teniendo en cuenta esta sustitución, se combina la última expresión con la ecuación (15.13),

$$\frac{d(\ln \rho)}{dt} + \vec{\nabla}_\zeta \cdot \vec{V} + \frac{d}{dt} \ln(\partial z/\partial \zeta) + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0.$$

Reuniendo derivadas sustanciales semejantes y aplicando la ecuación de estática (recuerde que la gravedad  $g$  es constante),

$$\frac{d}{dt} \left( \ln \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + \vec{\nabla}_\zeta \cdot \vec{V} + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \zeta} = 0. \quad (15.15)$$

La ecuación de balance de energía no cambia y se escribe como la derivada sustancial para la temperatura potencial o la temperatura  $T$ .

#### 15.2.2.2. Sistema de coordenadas isobáricas

Veamos cómo se deriva fácilmente este sistema a partir del sistema de coordenada vertical generalizada. Puesto que en este sistema  $\zeta = p$  (ecuación (15.11)),  $\nabla_p p = 0$ . (Esto se debe a que en este caso el gradiente de presión se calcularía

sobre una superficie isobárica). Además,  $\partial p / \partial p = 1$ ; entonces las ecuaciones del movimiento y estática se escriben

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla}_p \Phi - f\vec{k} \times \vec{v} + \vec{F} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial p} &= -\alpha \end{aligned}$$

(Note que el gradiente del geopotencial por la superficie isobárica si existe ya que a medida que uno se desplaza por la superficie, o sea por  $x$  y  $y$ , cambia el geopotencial  $\Phi$ ).

En la ecuación de continuidad (15.15), el primer término se hace cero ya que, para,  $\zeta = p$ ;  $\ln \partial p / \partial p = 0$ . Entonces,

$$\vec{\nabla}_p \cdot \vec{V} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (15.16)$$

### 15.2.2.3. Ecuación de pronóstico para la presión en superficie

En los modelos meteorológicos, por lo regular se construye una ecuación de pronóstico para la presión en superficie. La obtención de esta ecuación depende del tipo de coordenada vertical que se utilice. Por ejemplo, en el sistema de coordenadas isobáricas, se supone que la presión en superficie se conserva. O sea,

$$\omega_s = \frac{dp_s}{dt} = \frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{V}_s \cdot \vec{\nabla} p_s,$$

donde  $\vec{V}_s$  es el vector plano de la velocidad en superficie. (Esta propiedad conservativa se puede explicar físicamente diciendo que el peso de la columna de aire sobre la superficie total de la Tierra no varía). La velocidad vertical que aparece en el lado izquierdo de esta expresión puede ser sustituida con ayuda de la ecuación de continuidad. En efecto, integrando la ecuación (15.16) entre  $p = 0$  y  $p = p_s$ ,

$$\omega_s = - \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \vec{V} dp.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior,

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{V}_s \cdot \vec{\nabla} p_s = \int_0^{p_s} \nabla_p \cdot \vec{V} dp. \quad (15.17)$$

La dificultad del pronóstico a través del tiempo de la presión en superficie por la ecuación (15.17) está asociada a la imprecisión en el cálculo

del segundo término en el lado derecho, ya que la superficie irregular de la Tierra en general no coincide con un nivel estandar del modelo. Esta dificultad será superada en el sistema de coordenadas que se introduce a continuación.

#### 15.2.2.4. Sistema de coordenadas de presión normalizada

Para escribir el sistema de ecuaciones en el sistema de coordenadas sigma, se debe tener en cuenta que, en la fórmula (15.2),  $p_s = p_s(x, y, t)$ . O sea,  $p_s$  no es función de  $z$  ni de  $\sigma$ .

Sustituyendo  $p$  en (15.10) por su valor en (15.1), el gradiente de presión en el sistema de coordenadas sigma se escribe

$$-\alpha \vec{\nabla}_z p = -\alpha \nabla_\sigma(\sigma p_s) - \vec{\nabla}_\sigma \Phi.$$

Puesto que  $\alpha \vec{\nabla}_\sigma(\sigma p_s) = \alpha \sigma \vec{\nabla}_\sigma p_s$  (observe que la operación se toma para  $\sigma = \text{const.}$ ), la ecuación del movimiento en este sistema se escribe

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla}_\sigma \vec{V} + \dot{\sigma} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \sigma} = -\vec{\nabla}_\sigma \Phi - (\sigma/\rho) \vec{\nabla}_\sigma p_s - f \vec{k} \times \vec{v} + \vec{F}. \quad (15.18)$$

(Observe que como  $p_s$  depende de  $x$  y  $y$ , entonces aparece un término adicional en el lado derecho, que no aparece en el sistema de coordenadas isobáricas). Puesto que  $\partial p / \partial \sigma = \partial(\sigma p_s) / \partial \sigma = p_s$  (se tuvo en cuenta que  $p_s$  no depende de  $\sigma$ ), la ecuación de estática (15.12) se escribe

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} + \alpha p_s = 0. \quad (15.19)$$

Teniendo en cuenta que  $d(\partial \ln p / \partial \sigma) / dt = d(p^{-1} \partial p / \partial \sigma) / dt$ , y que  $\partial p / \partial \sigma = p_s$ , la ecuación de continuidad (15.15) es

$$\frac{d}{dt} \ln p_s + \vec{\nabla}_\sigma \cdot \vec{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0$$

Otra forma de esta ecuación, la cual sirve de base para construir la ecuación de pronóstico para la presión en superficie en este sistema de coordenadas, se obtiene expandiendo el primer término:

$$\frac{1}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{p_s} \vec{V} \vec{\nabla}_\sigma p_s + \frac{\dot{\sigma}}{p_s} \frac{\partial p_s}{\partial \sigma} + \vec{\nabla}_\sigma \vec{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0.$$

Multiplicando por  $p_s$ , teniendo en cuenta que  $\partial p_s / \partial \sigma = 0$  ( $p_s$  no depende de  $\sigma$ ) y reorganizando términos,

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{\nabla}(\vec{V} p_s) + \frac{\partial p_s \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0. \quad (15.20)$$



En este sistema de coordenadas se pueden escribir las siguientes condiciones de contorno;

En superficie:  $p = p_s, (\sigma = 1), \Rightarrow \dot{\sigma} = 0$ .

(Esta condición se debe a que la componente horizontal de la velocidad en superficie debe ser igual a cero).

En el tope del modelo,

$$p = 0, (\sigma = 0), \Rightarrow \dot{\sigma} = 0.$$

Teniendo en cuenta estas condiciones se integra la expresión anterior y se obtiene

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \vec{\nabla}(p_s \vec{V}) d\sigma. \quad (15.21)$$

La ecuación de pronóstico (15.21), para la presión en superficie en coordenadas  $\sigma$ , tiene una forma más simple que en el sistema de coordenadas isobáricas. Esto se debe a mayor simplicidad de las condiciones de contorno en este nuevo sistema. Además, en el sistema de coordenadas sigma, la superficie de la Tierra coincide con el primer nivel del modelo.

Si en lugar de integrar la ecuación (15.20) entre 0 y 1, se integra entre 0 y un nivel arbitrario  $p_s$ , se obtiene la expresión para calcular la velocidad vertical:

$$\sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_0^\sigma \vec{\nabla}(p_s \vec{V}) d\sigma' = -p_s \dot{\sigma}, \quad (15.22)$$

donde  $\sigma'$  es una variable de integración.

Una vez determinada la velocidad vertical  $\dot{\sigma}$ , esta se sustituye en la ecuación del movimiento para evaluar su último término en el lado izquierdo. También se sustituye  $\dot{\sigma}$  en la ecuación de la termodinámica.

### 15.2.3. El modelo dinámico

El modelo dinámico está determinado por las ecuaciones dinámicas. Aunque todos los modelos se basan en las mismas leyes fundamentales, el sistema de ecuaciones varía de un modelo a otro en la forma de presentación de las ecuaciones y en las simplificaciones adoptadas.

Por ejemplo, en algunos modelos climáticos, en lugar de describir el movimiento en forma de componentes horizontales  $u$  y  $v$ , se presenta en ecuaciones para la vorticidad y la divergencia. En modelos de ecuaciones primitivas (modelos hidrostáticos) se simplifica la tercera ecuación del movimiento reduciéndola a la aproximación hidrostática. Por el contrario, los modelos no hidrostáticos utilizan esta ecuación para simular los procesos de convección profunda en la atmósfera.

#### 15.2.4. La parametrización de los procesos físicos

En el capítulo 5 se definió la parametrización de los procesos físicos como la expresión de algunas fuentes y sumideros en términos de las variables y los parámetros del modelo.

Estos procesos (transferencia radiativa, convección local, la turbulencia etc.) suceden en tres medios básicos (aerosoles y gases atmosféricos, nubes y la superficie terrestre) tal como se esquematizan en la figura 15.2 y en escalas, por lo general, inferiores a la longitud del paso de grilla del modelo.

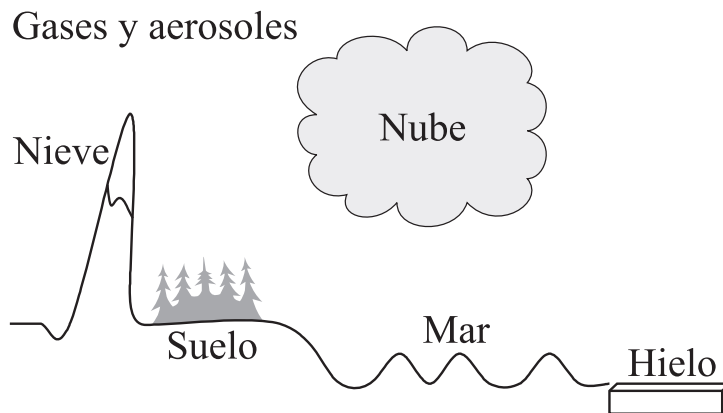


Figura 15.2. Medios en los cuales ocurre los procesos físicos

Las nubes pueden ser: de tipo cumulus o de gran desarrollo vertical, y estratiformes que ocupan una gran extensión horizontal. La superficie terrestre, por su parte incluye varios subsistemas como: el suelo la vegetación, la criosfera, la hidrosfera, el mar, etc.

La diferencia de temperatura entre diferentes tipos de suelo y entre la super-

ficie terrestre y la atmósfera, facilita el fenómeno de convección atmosférica, y el mecanismo para distribuir el calor a toda la atmósfera.

Los principales procesos físicos que se parametrizan en los modelos atmosféricos son:

1. Procesos asociados con cambios de fase como; evaporación, condensación, sublimación, formación de nubes y precipitación sólida y líquida.
2. Flujos turbulentos de cantidad de movimiento, calor y humedad, y transferencia turbulenta.
3. Procesos de absorción, reflexión y esparcimiento de radiación de onda corta y emisión de radiación de onda larga.

Algunos de estos procesos se presentan en la Figura 15.3

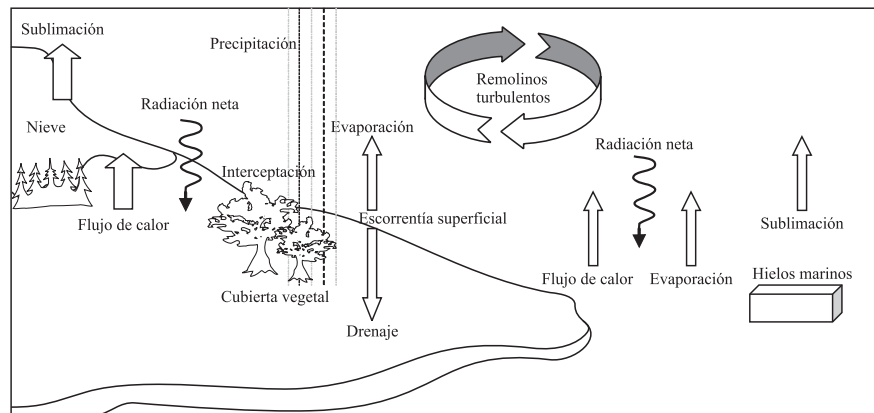


Figura 15.3. Procesos físicos que se parametrizan en los modelos atmosféricos.  
(Tomado de <http://euromet.meteo.fr/courses>)

### 15.2.5. La solución numérica

Como se mencionó en el capítulo 5, la solución numérica consiste en aplicar un método numérico (capítulos 13 y 14) al sistema de ecuaciones del modelo para obtener la solución en el tiempo y en los puntos de grilla.

### 15.2.6. Los datos iniciales y de contorno

Puesto que un modelo meteorológico está formado por un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales temporales o de pronóstico, se necesitan condiciones o un conjunto de datos iniciales para iniciar la predicción o corrida del modelo.

Para alimentar el modelo con datos iniciales se puede proceder de dos maneras: utilizar un pronóstico anterior o usar observaciones provenientes de diferentes fuentes, como estaciones meteorológicas, boyas marinas, satélites meteorológicos, barcos, aeronaves, etc. En la actualidad, para la predicción del tiempo, se usa una combinación de ambos procedimientos ya que el pronóstico agrega al análisis, información sobre la evolución dinámica del sistema que se quiere modelar.

Al proceso de realizar control de calidad sobre los datos meteorológicos provenientes de diferentes fuentes e interpolarlos a los puntos de grilla se le ha conocido tradicionalmente con el nombre de análisis objetivo. Al procedimiento de combinar datos de observaciones nuevas, “frescas” con el pronóstico de una corrida anterior, se le conoce como asimilación de datos.

La interpolación de los datos a los puntos de grilla se realiza a través de métodos de interpolación como aproximación polinomial (Cressman, 1959), interpolación óptima, (Gándin, 1963), análisis variacional, etc. La interpolación de datos sucede en un espacio de cuatro dimensiones;  $x$ ,  $y$ ,  $z$  y  $t$  por lo que se conoce con el nombre de análisis cuadi-dimensional de datos.

La idea básica de la asimilación de datos consiste en tomar un pronóstico como primera aproximación (first guess) y luego ajustarlo con las observaciones como se puede comprender en el siguiente ejemplo.

Suponga que se elabora predicciones cada 12 horas y que se va a realizar un análisis para las 00 horas, hora internacional. Entonces se llevan a cabo las siguientes operaciones:

1. Se toma el pronóstico a 00 horas obtenido de la corrida del modelo que se inició partiendo del estado previo, 12 horas atrás (o sea con el análisis de las 12 horas del día anterior) en calidad de primera aproximación.
2. Los valores en puntos de grilla de este pronóstico (por ejemplo de temperatura) se interpolan a la estación donde se origina la medición.
3. Se diferencia entre el valor interpolado, o valor de pronóstico, y el valor actual observado durante las tres últimas horas (observado entre las 21 y 24 horas del día anterior).

4. Esta diferencia se interpola de nuevo a los puntos de grilla y se usa como dato inicial.

En la práctica se busca minimizar la diferencia entre el valor de predicción y el valor observado, lo cual se puede conseguir aplicando teorías como de control, de estimación de probabilidades, análisis variacional, etc., aunque esto hace aún más complejo el proceso de asimilación de datos.

### 15.3. Tipos de modelos atmosféricos

#### 15.3.1. Modelos de área limitada: regionales y de mesoescala

Los modelos regionales y de mesoescala son operativos, con un dominio restringido, y se utilizan para la predicción del tiempo a corto (1 a 3 días) y mediano plazos (7 a 10 días). En general, tienen una resolución de 50 km aproximadamente, lo que permite una representación más detallada del comportamiento de sistemas meteorológicos de escala sinóptica que la que proporcionan los modelos globales de menor resolución. Estos modelos incorporan además parametrizaciones físicas avanzadas, lo que contribuye a una mejor representación de los procesos físicos en el modelo.

En la actualidad existen varios modelos de este tipo: el modelo del Centro Europeo ECMWF (European Centre for Medium Weather Forecast), el modelo canadiense MC2, el modelo ETA del servicio meteorológico de los Estados Unidos, el modelo RAMS (Regional Atmospheric modeling System), el modelo MM5 (Mesoscale Model), el modelo WRF (Weather Research and Forecasting) y el modelo UKMO (United Kingdom Model).

La mayoría de los modelos atmosféricos están habilitados para realizar *anidamiento*, lo que les permite suministrar condiciones de contorno para modelos con mayor resolución por ejemplo el modelo de mesoescala. Mediante esta técnica de anidamiento, el sistema UKMO es al mismo tiempo modelo global, regional y de mesoescala. La manera de anidar los modelos en el sistema UKMO se observa en la figura 15.4.

En esta figura, la grilla de mayor resolución (interna) corresponde al modelo de mesoescala, la intermedia al modelo regional y la de menor resolución (externa) al modelo global.

Los modelos regionales y de mesoescala son muy sensibles a los valores iniciales y además se les debe suministrar condiciones de contorno durante todo el tiempo de la integración. Las condiciones de contorno se toman por

interpolación desde el modelo global para el modelo regional y desde este para el modelo de mesoescala.

Para analizar los aspectos fundamentales de un modelo particular, se tomará como ejemplo el modelo MM5, desarrollado conjuntamente por la Universidad de Pensilvania y el NCAR (National Center For Atmospheric Research).

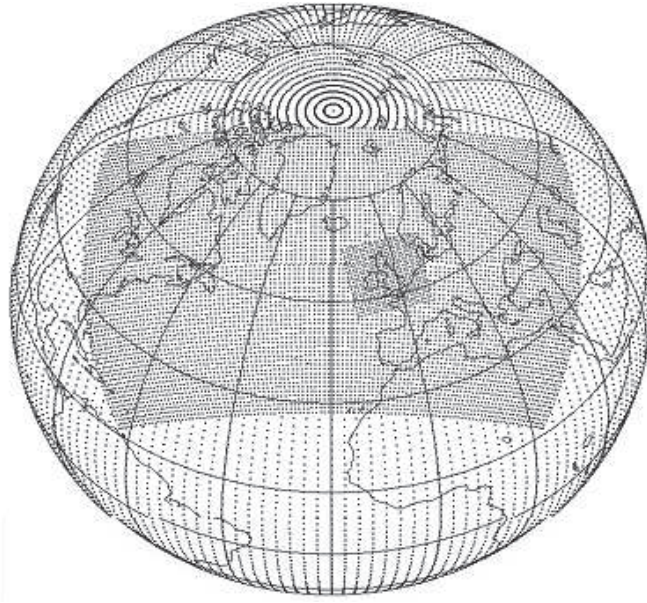


Figura 15.4. Anidamiento de grillas: global, regional y de mesoescala en el modelo UKMO.

#### 15.3.1.1. La coordenada vertical en los modelos regionales y de mesoescala

En el modelo MM5, se usa como coordenada vertical (figura 15.6) una expresión híbrida de tipo,

$$\sigma = \frac{p - p_t}{p_s - p_t},$$

donde  $p_s = p_s(x, y, t)$  es la presión en superficie, y  $p_t = \text{constante}$ , es la presión en el tope del modelo. Esta variante de la propuesta por Phillips (1956) se reduce a la coordenada vertical  $\sigma$  estándar haciendo  $p_t = 0$ . (De acuerdo con esta expresión, se puede decir que en la coordenada vertical usada en el MM5, la presión en el tope del modelo no es cero sino un valor finito;  $p_t = 10, 1, \text{hPa}$ , etc.). Denotando

$p^* = p_s - p_t$ , la definición anterior se escribe

$$\sigma = \frac{p - p_t}{p^*}. \quad (15.23)$$

### 15.3.1.2. Las ecuaciones del modelo MM5

Para la resolución regional, las ecuaciones del MM5 se derivan en la forma siguiente: escribiendo la ecuación vectorial (15.18) por componentes y multiplicando cada una de las ecuaciones por  $p^*$ ,

$$\begin{aligned} p^* \frac{\partial u}{\partial t} + p^* u \frac{\partial u}{\partial x} + p^* v \frac{\partial u}{\partial y} + p^* \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= -p^* \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + p^* f v + F(p^* u) \\ p^* \frac{\partial v}{\partial t} + p^* u \frac{\partial v}{\partial x} + p^* v \frac{\partial v}{\partial y} + p^* \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -p^* \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - p^* f u + F(p^* v) \end{aligned}$$

Los términos difusivos  $F(p^* u)$  y  $F(p^* v)$  se entienden como funciones de  $p^*$  y de la componente horizontal respectiva del movimiento. Es preciso escribir estas ecuaciones en forma de flujo. Es fácil verificar (recordando la derivada de un producto de variables) que la parte izquierda de la primera ecuación puede escribirse

$$\begin{aligned} p^* \frac{\partial u}{\partial t} + p^* u \frac{\partial u}{\partial x} + p^* v \frac{\partial u}{\partial y} + p^* \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} &= \frac{\partial(p^* u)}{\partial t} + \frac{\partial(p^* u u)}{\partial x} + \frac{\partial(p^* v u)}{\partial y} + \frac{\partial(p^* \sigma u)}{\partial \sigma} - \\ &\quad - u \left( \frac{\partial p^*}{\partial t} + \frac{\partial(p^* u)}{\partial x} + \frac{\partial(p^* v)}{\partial y} + \frac{\partial(p^* \sigma)}{\partial \sigma} \right). \end{aligned} \quad (15.24)$$

Los cuatro términos dentro del último paréntesis constituyen la ecuación de continuidad para una atmósfera compresible; por definición es igual a cero. Entonces, utilizando un factor de escala  $m$ , las ecuaciones del movimiento en el modelo MM5 se escriben

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* u}{\partial t} &= -m^2 \left( \frac{\partial(p^* u u)/m}{\partial x} + \frac{\partial(p^* v u)/m}{\partial y} \right) - \frac{\partial(p^* u \sigma)}{\partial \sigma} - \\ &\quad - m p^* \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + p^* f v + F(p^* u) \end{aligned} \quad (15.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* v}{\partial t} &= -m^2 \left( \frac{\partial(p^* u v)/m}{\partial x} + \frac{\partial(p^* v v)/m}{\partial y} \right) - \frac{\partial(p^* v \sigma)}{\partial \sigma} - \\ &\quad - m p^* \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) - p^* f u + F(p^* v). \end{aligned} \quad (15.26)$$

El factor de escala  $m$  se debe a que, para solucionar las ecuaciones de la atmósfera en un sistema de coordenadas cartesianas, es necesario proyectar

la superficie esférica de la Tierra sobre un mapa plano. Para hacer esto, en meteorología a menudo se usan *proyecciones cartográficas estereográficas polares*. En este caso (Haltiner y Williams, 1980),  $m(\varphi) = 2/(1 + \sin\varphi)$ , donde  $\varphi$  es la latitud del lugar. La ecuación de la termodinámica se escribe en la forma del primer principio para la temperatura en grados Kelvin, similar a (4.42):

$$\frac{\partial p^* T}{\partial t} = -m^2 \left( \frac{\partial p^* u T/m}{\partial x} + \frac{\partial p^* v T/m}{\partial y} \right) - \frac{\partial p^* T \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + p^* \frac{\omega}{\rho c_p} + p^* \frac{Q^*}{c_p} + D_T. \quad (15.27)$$

En esta ecuación,  $m(\varphi)$  es el factor cartográfico,  $\sigma$  es la coordenada vertical y  $\omega$  es el homólogo de la velocidad vertical. La ecuación para la presión en superficie se escribe en la forma (15.21), teniendo en cuenta la introducción del factor de escala  $m$  y el cambio de  $p_s$  por  $p^*$ :

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} = -m^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial p^* u/m}{\partial x} + \frac{\partial p^* v/m}{\partial y} \right) d\sigma. \quad (15.28)$$

La fórmula para el cálculo de la velocidad vertical se escribe, expandiendo en (15.22) el operador nabla e introduciendo el factor de escala  $m$

$$\dot{\sigma} = -\frac{1}{p^*} \int_0^\sigma \left( \frac{\partial p^*}{\partial t} + m^2 \left( \frac{\partial p^* u/m}{\partial x} + \frac{\partial p^* v/m}{\partial y} \right) \right) d\sigma'. \quad (15.29)$$

Una vez calculada la tendencia de la presión en superficie (15.28), se procede al cálculo de la velocidad vertical, la cual puede ser utilizarse en las ecuaciones de momento y de la termodinámica. Además, de acuerdo con la definición (15.23), el término  $\omega = dp/dt$  y se escribe

$$\omega = p^* \dot{\sigma} + \sigma \frac{dp^*}{dt},$$

en donde,

$$\frac{dp^*}{dt} = \frac{\partial p^*}{\partial t} + m \left( u \frac{\partial p^*}{\partial x} + v \frac{\partial p^*}{\partial y} \right).$$

Para cerrar el sistema (15.25) a (15.29) se debe determinar el geopotencial  $\Phi$  utilizando la ecuación de estática. Sustituyendo la ecuación de estado en la ecuación (4.43) y aplicando la definición (15.23) esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial \phi}{\partial \ln(\sigma + p_t/p^*)} = -RT_v, \quad (15.30)$$

donde  $T_v$  es la temperatura virtual.



### 15.3.1.3. La parametrización de los procesos físicos en el modelo regional

Los procesos físicos parametrizados en el modelo MM5 son la difusión horizontal, ajuste convectivo, la convección profunda, la convección somera, la capa límite planetaria y la radiación atmosférica. La parametrización de algunos de estos procesos se presenta en los siguientes capítulos.

### 15.3.1.4. La solución numérica

Tanto en la discretización horizontal como en la vertical se utilizan diferencias centradas o de salto de rana. En el plano horizontal, las variables se discretizan en una grilla escalonada, llamada grilla de Arakawa tipo *B* (staggered B grid), como la que se representa en la figura 15.5. De acuerdo

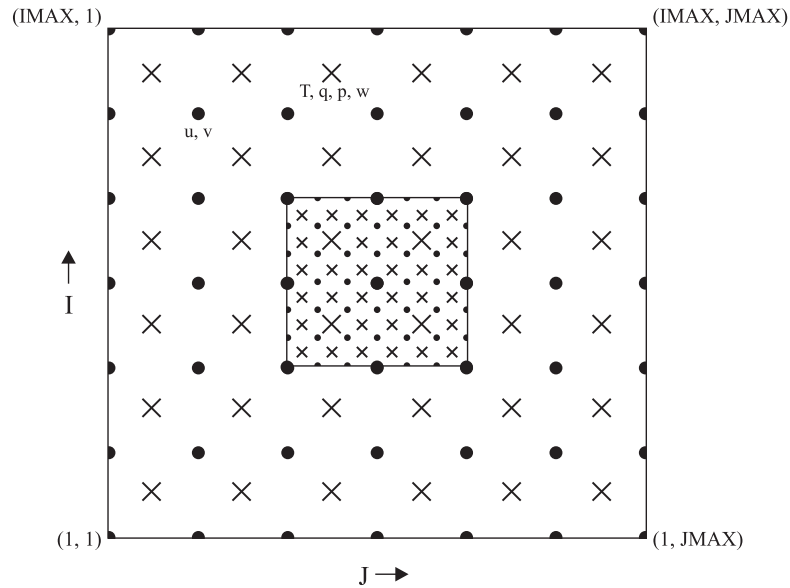


Figura 15.5. Discretización horizontal, en forma de grilla escalonada de Arakawa tipo *B*. La caja más pequeña interna representa una grilla anidada correspondiente a una relación 3 : 1 entre la grilla madre y grilla hija.

con esta grilla (Mesinger & Arakawa, 1976), las variables presión en superficie y temperatura se discretizan en los puntos de índices enteros  $i, j$  y las variables  $u, v$  en los puntos de índices medios  $i + 1/2, j + 1/2$ . Para hallar el valor en un punto donde no está definida, se utiliza un valor medio con

ayuda del operador

$$\bar{a}_{i,j}^x = \frac{1}{2}(a_{i,j+1/2} + a_{i,j-1/2}), \quad (15.31)$$

donde  $a$  es una variable cualquiera ( $p^*$ ,  $T$  u o  $v$ ). De manera similar se define el operador por el eje  $y$ ,  $\bar{a}^y$ . Además, de la misma forma como se define un promedio simple entre dos valores, se puede definir también promedios múltiples:

$$\bar{a}_{i,j}^{xy} = (\bar{a}^x)^y_{i,j}, \quad \bar{a}^{xyy} = \overline{\bar{a}^x}^y_{i,j}, \dots$$

Se define también un operador de diferencias finitas:

$$a_x = (a_{i,j+1/2} - a_{i,j-1/2})/\Delta x.$$

Con ayuda de estas definiciones, la primera ecuación del movimiento, por ejemplo, se discretiza de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_d^* u}{\partial t} = & -m^2 \left[ \left( \bar{u}^x \frac{\bar{p}_d^* u^{xyy}}{m} \right)_x + \left( \bar{u}^y \frac{\bar{p}_d^* v^{xyx}}{m} \right)_y \right] - \left( \bar{p}_d^* u \frac{\sigma \bar{\sigma}^{xy}}{\sigma} \right)_\sigma \\ & + u \overline{DIV}^{xy} - \frac{m p_d^*}{\bar{\rho}^{xy}} \left[ \bar{p}_x^y - (\sigma p^*)_x \frac{\bar{p}_\sigma^{xy\sigma}}{p^*} \right] \\ & + p_d^* f v + D(p_d^* u) \end{aligned}$$

El primer paréntesis en el primer corchete se deriva por  $x$  y el segundo por  $y$ . Estos dos términos constituyen la advección en  $x$  y  $y$ , respectivamente. En el primer término, la velocidad de advección  $\bar{u}^x$  se promedia en  $x$ . El producto  $\bar{p}_d^* u^{xyy}$  se promedia primero en  $x$ , después en  $y$  y luego de nuevo en  $y$ . Además,  $p_d^* = \bar{P}^*$  se ha promediado, en  $x$  y  $y$  previamente. De manera similar se escribe la ecuación para la segunda componente del movimiento. La justificación de la utilización de los triples promedios se discute en Anthes (1977).

El dominio vertical se divide en  $k + 1$  niveles desde  $\sigma = 0$  en la frontera superior ( $p = p_t$ ) hasta  $\sigma = 1$  en la superficie de la Tierra ( $p = p_s$ ), como se muestra en la figura 15.6. En la vertical, las variables también se calculan de forma escalonada. Para hallar valores medios de variables en puntos de  $k$  entero, se usa la fórmula

$$\bar{a}^\sigma = \frac{a_{k+1/2}(\sigma_k - \sigma_{k-1/2}) + a_{k-1/2}(\sigma_{k+1/2} - \sigma_k)}{(\sigma_{k+1/2} - \sigma_{k-1/2})},$$

mientras que para hallar valores de variables en niveles correspondientes a  $k + 1/2$ , se utilizan fórmulas semejantes a (15.31).

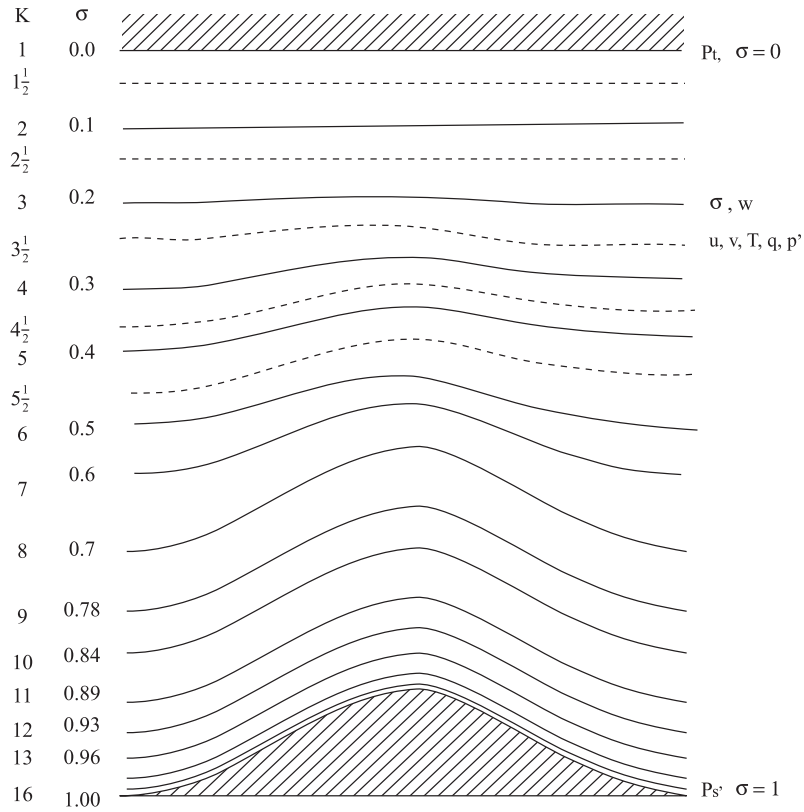


Figura 15.6. Discretización vertical. El ejemplo es para 15 niveles. Las líneas punteadas representan los niveles sigma medios; las líneas sólidas, los niveles sigma enteros. Tomado de Kiehl & otros (1996).

La tendencia de la presión en superficie se calcula integrando por todos los niveles (KMAX) de espesor  $\delta\sigma(k)$ .

Para la solución temporal, se combina el método de separación temporal (time splitting), con algunos métodos explícitos en el modelo hidrostático, y semi-implícitos en el modelo no hidrostático. La necesidad de utilizar el método de separación temporal se debe a que, en el modelo hidrostático, algunos términos describen ondas de gravedad externas, las cuales se desplazan con más rapidez que las demás. En consecuencia estos términos deben ser separados de los restantes y calculados con más frecuencia. Se escribe, entonces, un sistema de ecuaciones reducidas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p^* u}{\partial t} + mp^* \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) &= S_u \\
\frac{\partial p^* v}{\partial t} + mp^* \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) &= S_v \\
\frac{\partial p^*}{\partial t} &= -m^2 \int_0^1 \left( \frac{\partial p^* u/m}{\partial x} + \frac{\partial p^* v/m}{\partial y} \right) d\sigma,
\end{aligned}$$

donde las tendencias  $S_u$ ,  $S_v$ , las cuales se consideran constantes durante el paso tiempo  $\Delta t$ , contienen los demás términos de (15.25) a (15.28), despreciados en estas ecuaciones reducidas. Después de separar los términos, el método de separación temporal consiste en resolver las ecuaciones reducidas durante un intervalo que comprende varios subpasos de tiempo  $\delta\tau$ . Sin embargo, en el modelo hidrostático, el MM5 utiliza otra técnica más eficiente, propuesta por Madala (1981), la cual consiste en calcular, con pasos pequeños, unos términos de corrección con los cuales deberá ser ajustado, el resultado del cálculo de la advección, realizado con el paso tiempo grande  $\Delta t$ .

### 15.3.2. Modelo de mesoescala

El modelo de mesoescala constituye el siguiente grado de complejidad, después del modelo regional. Una de las diferencias más destacadas entre los modelos de mesoescala y los regionales es que los primeros incluyen la tercera ecuación del movimiento, lo que los convierte en modelos no hidrostáticos (capítulo 5). La consideración de una ecuación de pronóstico para la componente vertical (tercera ecuación del movimiento) permite una simulación más realista de la convección atmosférica de la formación de nubes y precipitación, y de los procesos de cambio de fase en general. En el principio, los modelos no hidrostáticos se desarrollaron con aplicación en problemas de física de nubes. El primer modelo tridimensional no hidrostático publicado es probablemente el trabajo de Steiner (1972). Importantes contribuciones en este campo se deben a Cotton (1972), Wilhelmson (1978). Una interesante monografía en este campo es la de Kiselnikova & otros (1987).

Como es usual en este tipo de modelos, en la versión no hidrostática del modelo MM5, las variables termodinámicas se descomponen en un valor medio más una fluctuación:

$$\begin{aligned}
 p(x, y, z, t) &= p_0(z) + p'(x, y, z, t) \\
 T(x, y, z, t) &= T_0(z) + T'(x, y, z, t) \\
 \rho(x, y, z, t) &= \rho_0(z) + \rho'(x, y, z, t).
 \end{aligned}$$

La fluctuación de la presión interviene en las ecuaciones del movimiento. La ecuación de pronóstico para la presión en superficie se escribe para la fluctuación de la presión. La fluctuación de la temperatura interviene en la componente vertical del movimiento y el valor medio de la densidad interviene en la tercera componente del movimiento, la ecuación de la presión, la temperatura y en el cálculo de la velocidad vertical. Para mayores detalles sobre la matemática del modelo, ver por ejemplo Grell & otros (1995)

#### 15.3.2.1. La parametrización de los procesos físicos en los modelos de mesoescala

A diferencia de los modelos hidrostáticos, como se mencionó anteriormente, en los modelos no hidrostáticos es posible considerar la estructura discreta de las partículas que componen las nubes y la precipitación a través de lo que se denomina *microfísica explícita*.

La parametrización de la microfísica explícita ha sido implementada con éxito en varios modelos como el RAMS, el MM5, el MC2 y otros. En esta parametrización los campos nuboso y de precipitación se consideran compuestos por varios tipos de hidrometeoros como agua de nube, hielo de nube, agua de lluvia, pedriscos de hielo, granizo etc.

En cada una de estas categorías las partículas se consideran distribuidas de acuerdo con una distribución prescrita. La evolución de estas categorías en el tiempo se simula con ayuda de ecuaciones de pronóstico escritas para uno o dos momentos de la distribución.

#### 15.3.3. Modelos climáticos

El modelo climático simula el comportamiento de la atmósfera para largos períodos: desde un mes hasta cientos de años. Los modelos climáticos son importantes porque permiten inferir desde ahora los cambios en el clima que se puedan presentar en un futuro cercano o relativamente lejano.

Debido a su importancia, existen varios organismos dedicados al estudio del cambio climático y la simulación climática. Entre ellos están el centro de

Hadley, el instituto NCAR, el ECMWF, el GFDL (General Fluid Dynamics Laboratory), el GLA (Goddard Laboratory for Atmospheres), el IRI (International Research Institute), el IPCC (International Panel for Climate Change).

Los modelos climáticos se diferencian de los modelos de predicción del tiempo en que al integrar para largos períodos, el modelo climático rápidamente “se olvida” de las condiciones iniciales, siendo el forzamiento de contorno (la temperatura de la superficie del mar por ejemplo) lo que influirá en la forma en que evolucionará el clima simulado.

La representación de la radiación solar, de los procesos en la superficie de la Tierra y la circulación oceánica son los factores que determinan la calidad de un modelo climático.

Incluso si sólo interesa el clima de una región particular del globo, la naturaleza del sistema climático requiere que un modelo de clima tenga un dominio global. Para períodos mayores, por ejemplo de unos pocos días, la circulación en un punto del globo se verá afectada por las variaciones acaecidas en otras regiones, incluso en el hemisferio opuesto. De hecho, los modelos climáticos son una herramienta fundamental en la comprensión de cómo las variaciones de la circulación en un sitio pueden afectar el clima de localizaciones remotas.

Los modelos climáticos pueden emplearse como

1. Herramienta de investigación. En este caso el modelo climáticos sirve para proporcionar información detallada de cómo varios procesos atmosféricos interactúan a la hora de generar una circulación observada y de cómo funciona el clima en general.
2. Predicción estacional de patrones y tendencias (en lugar de predicción de valores diarios). En este caso se busca responder con el modelo climático a preguntas como, ¿estará la precipitación por encima o por debajo de lo normal?
3. Predicción climática. Una de las principales aplicaciones de los Modelos de Circulación global, MCG, es intentar predecir cómo puede afectarse el clima de la Tierra en el futuro debido a cambios en la constitución química de la atmósfera (incremento de gases de invernadero, por ejemplo). Aunque aún existen muchas incertidumbres acerca de estas predicciones, ellas proporcionan las mejores estimaciones disponibles sobre el cambio climático. A medida que los MCG van siendo más sofisticados, también aumenta la confianza en las predicciones.

La resolución en los modelos climáticos es de unos cientos de kilómetros. Para la solución numérica, algunos modelos climáticos emplean diferencias finitas. Otros prefieren usar la técnica espectral. Algunos modelos, en lugar de las componentes  $u$  y  $v$  del movimiento, utilizan las ecuaciones para la vorticidad y la divergencia, con lo que aprovechan mejor las ventajas de la técnica espectral.

#### **15.3.3.1. Configuración del modelo climático**

Un modelo climático puede ser de solo atmósfera o puede estar acoplado con un modelo oceánico. En los modelos atmosféricos la temperatura de la superficie del mar es fija o puede variar en forma realista durante todo el período de la integración. En el caso de un modelo acoplado océano-atmósfera, el modelo oceánico predice cambios en la temperatura superficial del mar y puede reaccionar a cambios de la circulación atmosférica. Un modelo acoplado es vital para la predicción del cambio climático.

#### **15.3.3.2. Parametrización de los procesos físicos en los MCG**

Los MCG deben simular los procesos atmosféricos de la forma más detallada y realista posible.

Existen discrepancias acerca de la forma en la que las nubes, los gases y los aerosoles afectan el balance radiativo terrestre y por tanto el clima. La magnitud del efecto invernadero producido por el vapor de agua sigue siendo un tema de debate; así mismo aumenta el papel de las nubes en los modelos climáticos, debido quizá a la gran incertidumbre que existe en la predicción del cambio climático. En consecuencia, es esencial que un modelo climático tenga una parametrización adecuada de la radiación y que interactúe con las nubes, los gases atmosféricos y aerosoles modelizados.

Es muy importante hacer representaciones realistas de los procesos que ocurren cerca de la superficie terrestre en los modelos climáticos, debido al papel de la superficie al absorber la radiación y transferirla a la atmósfera. El ciclo terrestre del carbono es también una parte importante del sistema climático, porque la vegetación responde a cambios en el dióxido de carbono atmosférico. Por tanto, tiene el potencial de alterar sustancialmente el clima. En consecuencia, un modelo de vegetación interactivo debería ser parte del MCG para usarlo en la predicción del cambio climático. La re-

---

presentación de los océanos es otra componente importante de los modelos climáticos. La enorme capacidad calorífica de los océanos y la escala tan grande de redistribución de calor debido a su circulación, los convierte en una parte crucial del sistema climático. El creciente aumento de gases traza en la atmósfera conduce a un calentamiento radiativo de la superficie terrestre, la mayor parte del cual es absorbido por los océanos. Uno de los principales factores para la determinación de la magnitud y el tiempo de un cambio climático transitorio, también conocido como variabilidad climática, es la razón a la que se calienta la superficie del océano, determinada por la circulación detallada y los procesos de mezcla del océano. Los océanos son también un sumidero masivo de carbono y absorben una fracción significativa de las emisiones antropogénicas de dióxido de carbono, un importante gas invernadero. Este proceso también necesita ser modelizado para mejorar las predicciones del cambio climático mediante MCG.



## Parametrización de la convección y la precipitación



Imagen tomada de Imagen tomada de  
<http://www.photolib.noaa.gov/mvey/mvey0355.htm>  
Cortesía del NOAA.

La parametrización de la convección y la precipitación es uno de los temas más cambiantes en el modelamiento atmosférico. En este capítulo se describen dos métodos: el conocido inicialmente como método de Kuo y el método de parametrización de Arakawa & Schubert. Algunas de las obras que pueden ser consultadas son: Haltiner & Williams (1980), Kasahara (1996) y las guías para el usuario de los manuales de los modelos CAM y MM5.

## 16.1. La parametrización cúmulus

Si en puntos de grilla de un modelo atmosférico aparecen gradientes superadiabáticos, lo que indica que en la atmósfera está estableciéndose una estratificación inestable, se pueden desarrollar fuertes corrientes verticales (capítulo 7) lo cual arruinaría el pronóstico realizado a escala sinóptica.

Además, gradientes inestables no pueden permanecer por largo tiempo en la atmósfera. Por eso, esta inestabilidad atmosférica tiende a ser removida por la actividad cúmulus.

Desde el punto de vista numérico, las nubes cúmulus se desarrollan en escalas muchas veces inferiores a la escala del modelo (distancia entre dos puntos de grilla), lo que haría pensar que podría despreciarse el efecto de una nube aislada. Sin embargo, estas nubes a menudo se organizan en grupos de escala comparable con la escala sinóptica; por lo tanto, el modelo no puede despreciar su efecto.

La parametrización cúmulus es un problema multiescalar. Además, tiene que cuantificar en los puntos de grilla el efecto de la escala cúmulus y con la dificultad adicional de que la información requerida para esta cuantificación solo puede obtenerse en los puntos de grilla.

Desde el punto de vista teórico y de estudios experimentales, se confirma que la liberación de calor latente contribuye a fortalecer la dinámica; por ejemplo, la circulación de tipo ciclónico en un huracán tropical. El mecanismo que produce calor latente en la atmósfera es la convección atmosférica y el proceso de formación de nubes. Por esta razón, es conveniente mencionar algunas características de la formación de nubes en la atmósfera.

Desde el punto de vista dinámico, existen dos tipos de formación de nubes considerados en los modelos atmosféricos. Uno es la formación de una extensa capa horizontal de nubes estratocúmulus de pequeña extensión vertical, producido en general, por un enfriamiento radiativo nocturno, bajo una estratificación estable. Estas nubes ocupan grandes extensiones en las regiones orientales de los océanos, Atlántico, Pacífico e Índico, y durante el invierno en la región central ártica. Un conocimiento más detallado de este tipo de nubes puede ser consultado en Cotton & Anthes (1989). Las lluvias causadas por este tipo de nubes se conocen con el nombre de *precipitación de larga escala*.

Si la atmósfera es estable pero supersaturada en los modelos atmosféricos, el campo de la humedad se lleva a la saturación y el remanente de humedad se convierte en precipitación. Además, se ajusta el campo de la temperatura para reflejar el calentamiento por liberación de calor latente.

El segundo tipo son las *nubes convectivas*, debido al enfriamiento por *expansión adiabática o convectiva*. Las nubes convectivas son de gran extensión vertical; para desarrollarse necesitan una estratificación inestable o convectiva, llamada *inestabilidad condicional*, la cual es muy frecuente en la Zona de Convergencia Intertropical mencionada en el primer capítulo de esta obra.

En los esquemas de parametrización cúmulos como los de Kuo y Arakawa & Schubert, los cuales serán analizados más adelante, la nube se idealiza como un chorro estacionario similar al introducido en el capítulo 7. Dentro de este esquema, los fenómenos más relevantes, (figura 16.1) son condensación (C) dentro de la nube, evaporación (E), fuera de ella, arrastre de aire subsaturado hacia dentro de la nube (A), expulsión de aire saturado (E) y subsidencia (S).

Desde la perspectiva de un modelo dinámico, una nube tipo cúmulus puede ser caracterizada por corrientes ascendentes de aire saturado, donde tiene lugar *calentamiento* por liberación de calor latente producido por la condensación en el interior. En el espacio de aire no saturado, o sea fuera de la nube, puede tener lugar *enfriamiento* provocado por la evaporación. Este también sucede debajo de la nube debido a la evaporación parcial o total de gotas de precipitación y puede estar asociado al fenómeno de arrastre de aire subsaturado hacia dentro de la nube. El calentamiento interno puede ser utilizado para el desarrollo sucesivo de la nube; por eso tiene carácter desestabilizador, mientras que el enfriamiento externo o subsidencia tiene carácter estabilizador en la atmósfera. Como resultado de la Convección

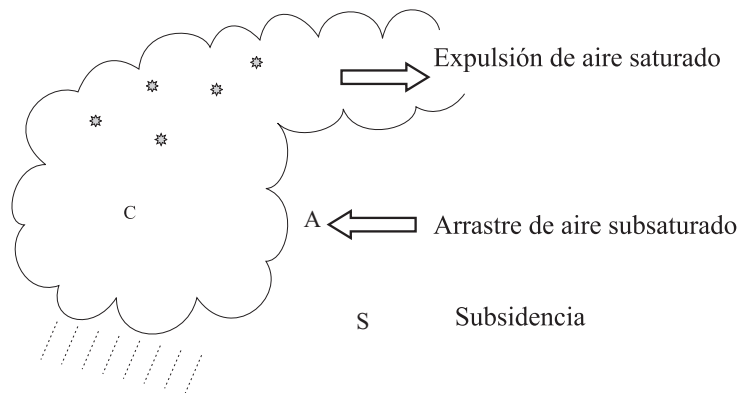


Figura 16.1. Esquematización de una nube de considerable desarrollo vertical.

se produce un calentamiento neto de la troposfera media donde prima la condensación y un enfriamiento de la troposfera baja, donde predomina la

evaporación. Aunque, la distribución del calor latente con la altura es importante, el calentamiento neto de la atmósfera depende solo de la cantidad de precipitación que alcanza el suelo. Esto, a grandes rasgos, son los efectos que los modelos de grande escala desean parametrizar.

### 16.1.1. Ecuación de pronóstico para el contenido de vapor de agua

En el capítulo 5 se presentó una forma de escribir la ecuación de transporte para el vapor de agua. Esta ecuación puede ser obtenida a partir de la ecuación de balance (9.6). En efecto, introduciendo la densidad en la derivada, en la parte izquierda de esta ecuación, teniendo en cuenta que, de acuerdo con la ecuación de continuidad, la derivada sustancial de la densidad es cero y escribiéndola en forma de flujo, se tiene

$$\frac{\partial \rho a}{\partial t} = -\frac{\partial \rho a v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho a' v_j'}}{\partial x_j} + \bar{I}.$$

Escribiendo el escalar  $a$  (capítulo 9), como la concentración de masa para el vapor de agua,  $a = \rho_v / \rho = q_v$ , donde  $q_v$  es la relación de mezcla, esta ecuación se escribe

$$\frac{\partial \rho q_v}{\partial t} = -\frac{\partial \rho q_v v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho q_v' v_j'}}{\partial x_j} + \bar{I},$$

Los donde  $I$ , representa las fuentes y sumideros para la relación de mezcla. Aplicando la regla de la derivada de un producto y reuniendo términos semejantes,

$$\rho \left( \frac{\partial q_v}{\partial t} + \frac{\partial q_v v_j}{\partial x_j} \right) + q_v \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_j \frac{\partial \rho}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \overline{\rho q_v' v_j'}}{\partial x_j} + \bar{I}.$$

Sustituyendo en el segundo paréntesis en el lado izquierdo a  $\partial \rho / \partial t$ , de acuerdo con la ley de continuidad (4.12),

$$\rho \left( \frac{\partial q_v}{\partial t} + \frac{\partial q_v v_j}{\partial x_j} \right) - q_v \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \overline{\rho q_v' v_j'}}{\partial x_j} + \bar{I}.$$

Finalmente, escribiendo esta ecuación en la forma tradicional por coordenadas  $x, y, z$  y dividiendo entre la densidad,

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + \frac{\partial q_v u}{\partial x} + \frac{\partial q_v v}{\partial y} + \frac{\partial q_v w}{\partial z} = q_v \text{div} \vec{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{\rho q_v' v_j'}}{\partial x_j} + S, \quad (16.1)$$

donde  $S = \bar{I} / \rho$ . La expresión (16.1) representa la ecuación de pronóstico para la relación de mezcla del vapor de agua en forma de flujo y su escritura es similar a la utilizada en el modelo MM5.

## 16.2. El método de kuo

Bajo el nombre de el método de Kuo se entiende tanto las versiones originales Kuo (1965), 1974) como las modificaciones posteriormente introducidas por Anthes (1977), Krishnamurti (1983), Molinari (1982), Cotton y Anthes (1989) y otros autores. El método de Kuo diseñado inicialmente para el modelo de un huracán, asume que la convección cúmulus ocurre en capas profundas de inestabilidad condicional, y donde tiene lugar abundante convergencia de humedad.

En este método, la nube o columna ascendente de base unitaria es alimentada en su base por convergencia de humedad de gran escala y evaporación desde la superficie del mar. Solo parte de esta humedad total se condensa y precipita; la restante, va a engrosar el contenido total de humedad dentro de la columna.

En términos matemáticos, el método de Kuo puede ser derivado a partir de la ecuación de balance (16.1). Considerando la atmósfera incompresible, con el objeto de eliminar el primer término en el lado derecho y en coordenadas isobáricas, esta ecuación puede escribirse

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + \nabla \cdot q_v \vec{V} + \frac{\partial q_v \omega}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho q'_v \overline{\omega'}}{\partial p} + (c - e),$$

En donde  $\mathbf{V}$  es la velocidad horizontal del viento,  $\omega$  es la velocidad vertical en coordenadas isobáricas,  $c$  es condensación por unidad de masa y  $e$  es evaporación. Multiplicando ambos lados de esta igualdad por la gravedad  $g$  e integrando desde la presión en superficie hasta el tope de la atmósfera ( $p = 0$ ) se puede escribir formalmente

$$S_{qv} + M_t + E = \frac{1}{g} \int_0^p (c - e) dp. \quad (16.2)$$

En esta ecuación el primer término en el lado derecho

$$S_{qv} = \frac{1}{g} \int_0^p \frac{\partial q_v}{\partial t} dp,$$

es el almacenamiento de vapor de agua en el punto de grilla. El segundo término

$$M_t = -\frac{1}{g} \int_0^p \nabla \cdot q_v \vec{V} dp, \quad (16.3)$$

Es la convergencia horizontal de humedad integrada verticalmente y  $E$  es la tasa de evaporación desde la superficie,

$$E = -\frac{1}{g}(\overline{q'_v \omega'})_{p_s}.$$

Un momento clave en la parametrización de Kuo es determinar la porción de humedad que se condensa y precipita, y la restante que va a engrosar el contenido de humedad de la columna de aire. Para hacer esto, Kuo (1974) asume que una fracción  $(1 - b)$  de la convergencia total de vapor  $M_t$ , o sea  $(1 - b)M_t$ , se condensa y precipita mientras que la fracción restante  $bM_t$  se almacena e incrementa el contenido de humedad de la columna.

Bajo esta suposición, sustituyendo  $c - e = C^*$  en el lado derecho de (16.2) e igualando este término a la fracción que se condensa y precipita mencionada arriba, se obtiene

$$\int_0^p C^* dp = (1 - b)gM_t \quad (16.4)$$

Sobre la determinación del parámetro  $b$  se ampliará mas adelante. Otro aspecto fundamental en la parametrización de Kuo es la introducción de una función de distribución vertical  $N(p)$  a través de la siguiente igualdad:

$$C^*(p) = \frac{(1 - b)gM_t}{(p_b - p_t)} N(p) \quad (16.5)$$

En donde  $N(p)$  es la función de distribución que debe satisfacer la condición

$$\int_0^p N(p) dp = \int_{p_t}^{p_b} N(p) dp = p_b - p_t \quad (16.6)$$

La ecuación (16.5) puede ser obtenida realizando la integración indicada en (16.4) y requiriendo el cumplimiento de la condición (16.6).

Si la condición (16.6) es satisfecha, entonces la tasa de calentamiento convectivo en la columna debe igualar a la energía de calor latente producida por condensación del vapor de agua y removido como precipitación, más el flujo de calor sensible producido por evaporación en superficie.

Según lo expuesto y de acuerdo al concepto de parametrización definido en el capítulo 5, el efecto de la convección en la ecuación de la termodinámica usada en el modelo MM5 se escribe

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^* T}{\partial t} = & -m^2 \left( \frac{\partial p^* u T / m}{\partial x} + \frac{\partial p^* v T / m}{\partial y} \right) - \frac{\partial p^* T \dot{\sigma}}{\partial \sigma} + \\ & p^* \frac{\omega}{\rho c_p} + p^* \frac{L_v}{c_p} N_h(\sigma) (1 - b) g M_t + D_T. \end{aligned} \quad (16.7)$$

La ecuación de transporte de vapor de agua en este mismo modelo se escribe

$$\frac{\partial p^* q_v}{\partial t} = -m^2 \left( \frac{\partial p^* u q_v / m}{\partial x} + \frac{\partial p^* v q_v / m}{\partial y} \right) + p^* b g M_t N_m(\sigma) + p^* \frac{\partial \overline{\sigma' q'_v}}{\partial \sigma} + D_{qv} \quad (16.8)$$

Falta solamente explicar como se determinan el parámetro  $b$ , la funciones de distribución vertical  $N_h(\sigma)$  y  $N_m(\sigma)$  y la divergencia del flujo turbulento vertical de vapor de agua (penúltimo término en el lado derecho de la ecuación anterior).

### 16.2.1. Determinación del parámetro $b$

De acuerdo a Anthes (1977), Grell (1995),  $b$  es una función de la humedad relativa media  $\overline{RH}$  en la columna

$$b = 2(1 - \overline{RH}), \text{ para } \overline{RH} \geq 0.5 \text{ y } b = 1 \text{ en los demás casos.} \quad (16.9)$$

### 16.2.2. cálculo de las funciones de distribución vertical de calentamiento y humedad

Para el calentamiento vertical se asume un perfil parabólico de tipo

$$N_h(\sigma) = a_1 \ln^2 \sigma + a_2 \ln \sigma + a_3, (N_h(\sigma) = 0, \text{ para } \sigma = \sigma_b \text{ y } \sigma = \sigma_t), \quad (16.10)$$

en donde  $a_1$ ,  $a_2$  y  $a_3$  son constantes y los subíndice  $b$  y  $t$  indican base y tope de la nube respectivamente.

La función de distribución de humedad se calcula como

$$N_m(\sigma) = \frac{(1 - RH(\sigma) q_{vs}(\sigma))}{\int_{\sigma_t}^1 [1 - RH(\sigma')] q_{vs}(\sigma') d\sigma'} \quad (16.11)$$

### 16.2.3. Cálculo del flujo turbulento de vapor de agua

Para el cálculo del perfil vertical del flujo turbulento de vapor de agua se asume que las nubes convectivas cubren un área pequeña y que la velocidad vertical dentro de la nube  $\dot{\sigma}_c$  es mucho mayor que la velocidad de larga escala. Bajo estas suposiciones, el flujo turbulento de vapor de agua se escribe

$$\frac{\partial \overline{\sigma' q'_v}}{\partial \sigma} = \frac{a}{1-a} \frac{\partial}{\partial \sigma} [\dot{\sigma}_c (q_{vc} - q_v)], \quad (16.12)$$

en donde  $q_{vc}$  es la relación de mezcla dentro de la nube). De acuerdo a Anthes (1977), el cubrimiento fraccional de nubes  $a$  se calcula como

$$a = \frac{(1-b)gM_t}{4.3 \times 10^{-3}}. \quad (16.13)$$

Para el cálculo de la velocidad vertical dentro de la nube  $\dot{\sigma}_c$  y la diferencia  $(q_{vc} - q_v)$ , también se asume perfiles parabólicos (Grell 1995).

En resumen, para aplicar el método de Kuo en el modelo MM5 se ejecutan los siguientes pasos:

1. Cálculo de  $M_t$  con ayuda de (16.3).
2. Cálculo del parámetro  $b$  por la fórmula (16.9).
3. Verificación a través del perfil vertical, en el punto de grilla, de la existencia de inestabilidad condicional.
4. Cálculo de los flujos verticales normalizados  $N_h(\sigma)$  y  $N_m(\sigma)$  a través de relaciones experimentales (Grell 1995) (16.10) y (16.11) respectivamente.
5. Cálculo de  $\dot{\sigma}$  y  $q_{vc} - q_v$  a través de perfiles parabólicos que obtenidos a través de relaciones experimentales.
6. Cálculo de  $\frac{\partial \dot{\sigma} q'_v}{\partial \sigma}$  con ayuda de (16.12).
7. Ajuste, con ayuda de estos valores obtenidos, de los campos de temperatura y humedad en las ecuaciones (16.7) y (16.8).

## 16.3. Parametrización de Arakawa & Schubert

### 16.3.1. Descripción general

El método de Arakawa y Schubert (AS) es una teoría de interacción de larga escala entre un conjunto de nubes y el medio ambiente.

Si la atmósfera se encuentra en equilibrio, se establece una condición de estabilidad. Sin embargo, debido por ejemplo al calentamiento diferencial del Sol, el medio genera inestabilidad condicional, Esta acción se puede denominar desestabilizadora. Por su parte, la convección resultante calienta el medio en su interior por liberación de calor latente y enfría el del exterior por evaporación, así como a través del fenómeno de la *subsistencia*. Por esta razón, la acción de la actividad convectiva sobre el medio es de tipo restauradora. La parametrización AS trata de acoplar la acción desestabilizadora del medio con la acción restauradora de la convección cumulus.



Desde el punto de vista operativo, la parametrización AS se realiza en tres etapas: *control estático*, el cual determina las propiedades termodinámicas de la nube; control dinámico, el cual determina el efecto del medio ambiente sobre las nubes cúmulos; y la *retroalimentación* (Feedback) o efecto de las nubes cúmulus sobre el medio ambiente.

El método de AS se fundamenta en el uso de dos conceptos importantes: la energía de inestabilidad y la pluma ó chorro estacionario, introducidos ambos en el capítulo 7. El primero se utiliza en el control estático; el segundo, en el control dinámico.

En la parametrización original de AS, se consideraban solo columnas ascendentes a partir del nivel de condensación. También contenía ecuaciones para el aire debajo de la nube. En las versiones actuales de esta parametrización, se consideran columnas ascendentes y descendentes. Por simplicidad, en esta exposición solo se considerarán columnas ascendentes por encima del nivel de condensación haciendo anotaciones en los puntos donde esta teoría se puede generalizar para columnas descendentes.

### 16.3.2. Control estático

En esta etapa se describe el modelo de nube utilizado en la parametrización de AS. Para desarrollar la parametrización, AS considera un conjunto (ensemble) de nubes formado por subconjuntos (sub-ensembles) o tipos de nubes (columnas ascendentes), caracterizadas por un parámetro  $\lambda$ , que a su vez se asocia al arrastre o al tope de la nube.

Las características termodinámicas de las nubes son simuladas en la parametrización AS con la ayuda de un modelo de pluma o ecuación de balance compuesta por arrastre de aire húmedo hacia dentro del chorro o columna ascendente y expulsión de aire saturado hacia fuera de la columna.

En el capítulo 7 se introdujo el concepto de arrastre, que para una columna ascendente se escribe

$$\mu_a = \frac{1}{m_a(z)} \frac{dm_a(z)}{dz},$$

donde  $m_a(z)$  representa el flujo de masa y  $\mu_a$  el arrastre fraccional. Esta fórmula puede generalizarse con facilidad cuando se considera arrastre de aire húmedo hacia dentro de la pluma y expulsión de aire saturado hacia fuera de ella. Para hacerlo; el arrastre total en la columna de aire ascendente se escribe

$$\mu_a = \frac{1}{m_a(z)} \frac{\partial m_a(z)}{\partial z} = \frac{1}{m_a(z)} \left( \frac{\partial m_a(z)}{\partial z} \right)_a - \frac{1}{m_a(z)} \left( \frac{\partial m_a(z)}{\partial z} \right)_s = \mu_{aa} - \mu_{as}, \quad (16.14)$$

donde

$$\mu_{aa} = \frac{1}{m_a(z)} \left( \frac{\partial m_a(z)}{\partial z} \right)_a \quad \text{y} \quad \mu_{as} = \frac{1}{m_a(z)} \left( \frac{\partial m_a(z)}{\partial z} \right)_s$$

son arrastre hacia dentro de la nube y expulsión hacia fuera de ella, respectivamente. De manera similar se define el arrastre total en una columna de aire descendente.

Considere un chorro estacionario con arrastre por la base y los costados, y expulsión por el tope, similar al de la figura 7.3. Para una variable arbitraria  $\alpha$  dentro de esta columna de ascenso, es válida la siguiente ecuación de balance:

$$\frac{\partial m_a \alpha_a}{\partial z} = \left( \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_a \bar{\alpha}_a - \left( \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_s \alpha_a + I,$$

donde el primer término en el lado derecho corresponde al arrastre de aire húmedo dentro de la columna; el segundo, a expulsión de aire saturado hacia fuera. Desarrollando la derivada en el lado izquierdo, dividiendo entre  $m_a$  y transponiendo términos,

$$\frac{\partial \alpha_a}{\partial z} = -\frac{\alpha_a}{m_a} \frac{\partial m_a}{\partial z} + \frac{1}{m_a} \left( \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_a \bar{\alpha}_a - \frac{1}{m_a} \left( \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_s \alpha_a + \frac{I}{m_a}.$$

Sustituyendo el primer término en el lado derecho, de acuerdo con (16.14), y reduciendo términos semejantes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_a}{\partial z} &= -\alpha_a \left[ \left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_a - \left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_s \right] + \left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_a \bar{\alpha}_a - \\ &\quad - \left( \frac{1}{m_a} \frac{\partial m_a}{\partial z} \right)_s \alpha_a + \frac{I}{m_a} \Rightarrow \\ \frac{\partial \alpha_a}{\partial z} &= \mu_{aa}(\bar{\alpha}_a - \alpha_a) + \frac{I}{m_a}. \end{aligned}$$

De manera similar se puede obtener la ecuación para una variable arbitraria dentro de una columna de aire descendente.

A partir de esta ecuación general se pueden obtener las ecuaciones de un modelo de pluma. Por ejemplo, sustituyendo  $\alpha_a$  por la energía estática húmeda,  $h_a$  donde

$$h_a = C_p T(z) + gz + Lq_a(z), \quad (16.15)$$

Se obtiene

$$\frac{\partial h_a(\lambda, z)}{\partial z} = \mu_{aa} [\bar{h}_a(z) - h_a(\lambda, z)], \quad (16.16)$$

donde, además de la dependencia en  $z$ , la variable dentro de la columna se ha escrito con una dependencia adicional en  $\lambda$ , parámetro que se definirá más adelante.

Para la humedad total,  $\alpha_a = q_a + q_l$ , donde,  $q_a$  y  $q_l$  son la relación de mezcla para el vapor de agua y el agua líquida, respectivamente. La ecuación de balance se escribe

$$\frac{\partial [q_a(\lambda, z) + q_l(\lambda, z)]}{\partial z} = \mu_{aa} [\bar{q}_a(z) - q_a(\lambda, z) - q_l(\lambda, z)] + I_a, \quad (16.17)$$

donde  $I_a$  es una fuente, por ejemplo evaporación de lluvia.

Asumiendo saturación en la columna ascendente, se puede emplear la siguiente aproximación (Grell & otros, 1995):

$$q_c(\lambda, z) = q_a^* + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \frac{1}{L} [h_c(\lambda, z) - \bar{h}^*(z)] \quad (16.18)$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{c_p} \left( \frac{\partial \bar{q}^*}{\partial T} \right)_p, \quad (16.19)$$

y el superíndice  $*$  indica un valor saturado.

Para cerrar el sistema, el flujo de masa es normalizado por el flujo en la base de la nube y se define una nueva variable:

$$\eta_a(\lambda, z) = \frac{m_a(\lambda, z)}{m_B(\lambda)}. \quad (16.20)$$

De acuerdo a (16.14), se escribe

$$\mu_a = \frac{1}{\eta_a(z)} \frac{\partial \eta_a(z)}{\partial z}. \quad (16.21)$$

Del problema expuesto hasta ahora, es necesario determinar cinco variables:  $h_a$ ,  $q_a$ ,  $\mu_a$ ,  $\eta_a$ , y  $m_B$ . Las ecuaciones (16.16), (16.17), (16.20) y (16.21), llamadas sistema de ecuaciones del control estático, sirven para determinar las primeras cuatro incógnitas. El flujo de masa  $m_B$  se halla en la etapa de control dinámico.

### 16.3.3. La ecuación para la energía de inestabilidad

La ecuación para la energía de inestabilidad se utiliza en AS para derivar el concepto de la función de trabajo de nube (cloud work function) y en el cálculo de la variación temporal de esta función.

Para derivar la ecuación de energía de inestabilidad, la ecuación (7.9) del capítulo 7 se escribe

$$\frac{1}{w} \frac{d(w^2/2)}{dt} = g \frac{(T_{vc} - \bar{T}_{ve})}{\bar{T}_{ev}} - F_r, \quad (16.22)$$

donde,  $F_r$  es una fuente asociada a rozamiento. Los subíndices  $v$ ,  $c$  y  $e$  indican, respectivamente, virtual, nube y medio (environment).

La energía estática seca (Haltiner & Williams, 1980, p. 311) se escribe

$$s = c_p T + gz \quad (16.23)$$

De acuerdo con esta expresión,  $T_{vc} = \frac{s_{vc} - gz}{c_p}$  y  $T_{ve} = \frac{s_{ve} - gz}{c_p}$ . Sustituyendo estos dos valores en la expresión (16.22),

$$\frac{1}{w} \frac{d(w^2/2)}{dt} = \frac{g}{c_p \bar{T}_{ve}} (s_{vc} - s_{ve}) - F_r. \quad (16.24)$$

Multiplicando ambos miembros de esta igualdad por  $\rho_c w$ , integrando entre  $z_T$  y  $z_B$  las alturas de la base y el tope de la nube,

$$\frac{d}{dt} \int_{p_t}^{p_B} \rho \frac{w^2}{2} dz = \int_{z_B}^{z_T} (g/c_p \bar{T}_v) (s_{vc} - \bar{s}_{ve}) \rho_c w dz - D,$$

donde  $D$  es disipación de la energía cinética en la columna ascendente. En la parte izquierda de esta expresión, se halla la tasa de generación de energía cinética  $EC$ , producida por las fuerzas de flotación; en la parte derecha, una integral proporcional a la diferencia entre la energía estática seca de la nube y el medio. Denotando el flujo de masa  $\rho_c w$  por  $m_a$  e introduciendo la función de arrastre (16.20), la expresión anterior se escribe

$$\frac{d(EC)}{dt} = \int_{z_B}^{z_T} (g/c_p \bar{T}_v) \eta(z, \lambda) (s_{vc} - \bar{s}_{ve}) m_b(\lambda) dz - D. \quad (16.25)$$

Esta expresión también puede ser escrita para la energía estática húmeda (16.10). De acuerdo con esa expresión,  $T_{vc} = \frac{h_{vc} - gz - Lq_c}{c_p}$  y  $T_{ve} = \frac{h_{ve} - gz - Lq_{ve}}{c_p}$ . Sustituyendo estas expresiones en (16.22),

$$\frac{1}{w} \frac{d(w^2/2)}{dt} = \frac{g}{c_p \bar{T}_{ve}} (h_{vc} - h_{ve} - Lq_{vc} - Lq_{ve}) - F_r.$$

Asumiendo que el aire dentro de la columna ascendente se encuentra saturado, o sea,  $h_{ve} = h^*$ ,  $q_{ve} = q_a^*$  y sustituyendo  $q_{vc}$  de acuerdo con la aproximación (16.18),

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \frac{d(w^2/2)}{dt} &= \frac{g}{c_p \bar{T}_{ve}} \left( h_{vc} - h^* - Lq_a^* - \frac{\gamma}{1+\gamma} h_{vc} + \frac{\gamma}{1+\gamma} h^* + Lq_a^* \right) - F_r \Rightarrow \\ \frac{1}{w} \frac{d(w^2/2)}{dt} &= \frac{g}{c_p \bar{T}_{ve}} (h_{vc} - h^*) - F_r. \end{aligned}$$

Denotando de nuevo el flujo de masa  $\rho_c w$  por  $m_a$  y continuando en la misma forma que para derivar (16.25),

$$\frac{d(EC)}{dt} = \int_{z_B}^{z_T} (g/c_p \bar{T}_v) \frac{\eta(z, \lambda)}{1+\gamma} \left[ h_a(\lambda, 0z) - \bar{h}^*(z) \right] m_b(\lambda) dz - D, \quad (16.26)$$

donde  $h_a(\lambda, z) = h_{vc}$  es la energía estática húmeda en la columna ascendente.

#### 16.3.4. Control dinámico

El control dinámico comprende una de las mayores innovaciones de la parametrización AS. En él se define la función de trabajo y una hipótesis de cuasi equilibrio con la cual se consigue cerrar el problema y redistribuir el calor y la humedad entre las nubes y el entorno.

Para definir la función de trabajo, se saca  $m_b$  de la integral (observe que  $m_b$  no depende de la variable de integración) en la expresión anterior, que se rescribe

$$\frac{d(EC)}{dt} = A(\lambda) m_b(\lambda) - D,$$

donde  $\lambda$  indica un tipo de nube particular y

$$A(z, \lambda) = \int_{z_B}^{z_T} \frac{g}{c_p T_e(z)} \frac{\eta(\lambda, z)}{1 + \gamma} \left[ h_a(\lambda, z) - \bar{h}^*(z) \right] m_b(\lambda) dz. \quad (16.27)$$

La función de trabajo  $A(z, \lambda)$  es una medida de la fuerza de flotabilidad que gobierna la tasa de generación de energía cinética en el subconjunto. La flotabilidad es afectada por el arrastre  $\eta$  que a su vez depende del tipo de nube  $\lambda$ . AS considera la variación temporal de  $A(z, \lambda)$  como

$$\frac{dA(\lambda)}{dt} = \left[ \frac{dA(\lambda)}{dt} \right]_c + \left[ \frac{dA(\lambda)}{dt} \right]_{LS}. \quad (16.28)$$

El primer término en el lado derecho de (16.28) es el cambio temporal en la generación de energía por las nubes, el cual representa la reducción de la inestabilidad condicional (o desarrollo de cúmulus) y por tanto estabilización del medio. Simbólicamente, este término puede representarse como

$$\left[ \frac{dA(\lambda)}{dt} \right]_c = \int_0^{\lambda_{\text{máx}}} K(\lambda, \lambda') m_B(\lambda') d\lambda'.$$

Aquí, el núcleo (Kernel)  $K(\lambda, \lambda')$  representa una interacción entre nubes (columnas ascendentes) de tipo  $\lambda$  y nubes de tipo  $\lambda'$  por unidad de flujo vertical,  $m_B(\lambda') d\lambda'$ . El propósito de esta interacción es destruir la inestabilidad condicional generada por el ambiente, por lo que se entiende como un efecto estabilizador.

El segundo término en el lado derecho de (16.28) representa la contribución de los procesos de larga escala en  $A(z, \lambda)$ . Digamos,

$$\left[ \frac{dA(\lambda)}{dt} \right]_{LS} = F(\lambda)$$

Esta contribución tiende a desestabilizar el ambiente contrarrestando el efecto estabilizador de los cúmulus. La condición de cuasi-equilibrio consiste en suponer que la variación total de la función de trabajo  $A(z, \lambda)$  debe ser cero.

$$\int_0^{\lambda_{\text{máx}}} K(\lambda, \lambda') m_B(\lambda') d\lambda' + F(\lambda) \approx 0, \quad \text{para } m_B > 0. \quad (16.29)$$

Con la suposición (16.24) se consigue que  $EC$  no crezca desmesuradamente.

Expresiones para el núcleo  $K(\lambda, \lambda')$  y para  $F(\lambda)$  pueden hallarse derivando por el tiempo la función de trabajo (16.27). Sin embargo, y como se verá a continuación, no hay necesidad de hacerlo siguiendo el procedimiento sugerido en primera instancia por Lord (1982) y seguido en la variante de este esquema, utilizado en el modelo MM5.

El procedimiento es el siguiente:

Paso 1.

Usando los campos de larga escala de temperatura y humedad,  $T_0$  y  $q_{v0}$ , obtenidos en el tiempo  $t_0$ , se aplican las ecuaciones del control estático para obtener  $h_a$ ,  $q_a$ ,  $\mu_a$  y  $\eta_a$  para un tipo de arrastre  $i$ . Estos valores son necesarios para calcular la función de trabajo  $A(i)$ . Por definición, el núcleo  $K(\lambda, \lambda')$  es cambio de la función de trabajo debido a otro subconjunto  $i'$ . Entonces, de acuerdo con Lord (1982),  $T_0$  y  $q_{v0}$  son modificados por una cantidad arbitraria de flujo de masa  $m'_b \Delta t'$ , asociado al subconjunto  $i'$ . Esto se lleva a cabo para cada posible subconjunto y puede escribirse

$$\begin{aligned}\bar{T}'_0(k, i) &= \bar{T}_0(k) + \delta_{i'}[\bar{T}_0(k)]m'_b \Delta t' \\ \bar{q}'_{v0}(k, i) &= \bar{q}_{v0}(k) + \delta_{i'}[\bar{q}_{v0}(k)]m'_b \Delta t'\end{aligned}$$

Los términos en  $\delta$ , los cuales representan cambios por unidad de  $m_b(i)$  se calculan a través de la siguiente ecuación de balance para la energía estática húmeda en el nivel  $k$ :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p(k)}{g} \delta'_i[\bar{h}_a(k, i)] &= \eta_a\left(k - \frac{1}{2}, i\right) \bar{h}_a\left(k - \frac{1}{2}\right) - \eta_a\left(k + \frac{1}{2}, i\right) \bar{h}_a\left(k + \frac{1}{2}\right) - \\ &\quad - e_a(k, i) \bar{h}(k) + d_a(k, i) \frac{\bar{h}_a(k + 0.5, i) + \bar{h}_a(k - 0.5, i)}{2}. \quad (16.30)\end{aligned}$$

De acuerdo con Grell & otros (1995), los dos primeros términos en el lado derecho de (16.30) representan subsidencia en la base y el tope de la columna, respectivamente. El tercero indica el arrastre hacia dentro de la columna; el cuarto expulsión hacia fuera. Para la relación de mezcla, una ecuación de balance similar se escribe

$$\begin{aligned}\frac{\Delta p(k)}{g} \delta'_i[\bar{q}_{va}(k, i)] &= \eta_a\left(k - \frac{1}{2}, i\right) \bar{q}_{va}\left(k - \frac{1}{2}\right) - \eta_a\left(k + \frac{1}{2}, i\right) \bar{q}_{va}\left(k + \frac{1}{2}\right) - \\ &\quad - e_a(k, i) \bar{q}_{va}(k) + d_a(k, i) \frac{\bar{q}_{va}(k + 0.5, i) + \bar{q}_{va}(k - 0.5, i)}{2}.\end{aligned}$$

Paso 2

Los nuevos campos  $T'_0(k, i')$  y  $q'_{v0}(k, i')$  se emplean en un nuevo control estático para calcular nuevas propiedades de la nube y nueva función de trabajo  $A'(i')$ . Note que ahora  $T'_0$  y  $q'_{v0}$  son funciones del subconjunto  $i'$ .

Por definición, se puede calcular el núcleo como

$$K(i, i') = \frac{A'(i') - A(i)}{m_b \Delta t}.$$

Paso 3

Regresando a los campos de gran escala, estos se modifican conjuntamente con la advección

$$\begin{aligned}\bar{T}''(k) &= \bar{T}'_0(k) + \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right)_{adv} \Delta t \\ \bar{q}_v''(k) &= \bar{q}'_{v0}(k) + \left( \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial t} \right)_{adv} \Delta t\end{aligned}$$

Paso 4

En un nuevo control estático se emplea las cantidades con doble prima para calcular nuevas propiedades de la nube y nueva función de trabajo  $A''(i)$ . A continuación, la forzante de gran escala (por definición, el cambio en la función de trabajo debido a los efectos de larga escala solamente) se calcula

$$F(i) = \frac{A''(i) - A(i)}{\Delta t}$$

Paso 5

La forzante de gran escala  $F(i)$  y el núcleo se emplean para calcular el flujo de masa en la base de la nube  $m_B$  utilizando una subrutina de programación lineal de IMSL.

Paso 6

Repetir este proceso para un nuevo subconjunto  $i$ . (Al parecer, el número de subconjuntos necesarios está determinado por la condición de cuasi-equilibrio a través de la rutina IMSL para resolver (16.24)).

### 16.3.5. Retroalimentación

La etapa de retroalimentación, o sea el cambio de las variables de gran escala debido a la actividad cúmulus, se lleva a cabo de manera sencilla:



$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T(k)}{\partial t}\right)_{CU} &= \sum_{i'=1}^{i' \text{ máx}} \delta' [T(k)] m_b(i') \\ \left(\frac{\partial q_v(k)}{\partial t}\right)_{CU} &= \sum_{i'=1}^{i' \text{ máx}} \delta' [q_v(k)] m_b(i') - P,\end{aligned}$$

donde la precipitación  $P$  puede calcularse a través de

$$P = \int_{\lambda} \eta_a(\lambda, z) c_0(\lambda) q_l(\lambda, z) m_b(\lambda) d\lambda.$$

Aquí,  $c_0$  es un factor de conversión para la lluvia y  $q_l$  es la relación de mezcla para el agua líquida, la cual se calcula con facilidad a través de la relación de mezcla para el vapor de agua y la temperatura.

## Parametrización de la capa límite planetaria

*Alexander M. Obukhov  
(1918-1989 (izquierda)  
y Andrei S. Monin  
(1921) (derecha).*

Físicos rusos que realizaron aportes fundamentales para la comprensión de la mezcla turbulenta en la capa cercana a la superficie terrestre.



Imagen tomada con permiso de  
<http://www.ocean.ru/content/view/247/>

Los efectos de la turbulencia de escala de subgrilla se tienen en cuenta hoy por hoy en modelos atmosféricos, usando esquemas de cerramiento de primer orden, como la teoría de Prandtl, y la de Similitud de Monin–Obukhov. En este capítulo se expone la utilización de estas teorías, ampliamente discutidas en los capítulos 9 y 10, para el cálculo de los flujos en superficie, de la temperatura superficial y de la difusión turbulenta vertical. Algunos libros de consulta son La guía para el usuario del modelo MM5, la descripción del modelo CCM3 y los textos indicados en el capítulo 10.

### 17.1. Generalidades

Los procesos físicos que tienen lugar en la Capa Límite Planetaria, CPL, regulan el intercambio de momento, calor y humedad entre la superficie terrestre y la atmósfera. Los flujos superficiales de estas sustancias son en últimas, los que mantienen la circulación atmosférica.

Los flujos turbulentos originan procesos de retroalimentación como el siguiente: los flujos de calor en superficie facilitan la convección y la formación de nubes, las que a su vez influyen en la intensidad de los flujos en niveles bajos. Un buen esquema de parametrización debe ser capaz de simular adecuadamente estos procesos.

Los flujos superficiales de momento, calor y humedad sirven de condiciones de contorno para el modelo; en particular determinan la temperatura en superficie. Por eso, otra de las tareas importantes vinculadas con la parametrización de la CPL es el cálculo de la temperatura en superficie.

Al calcular los flujos es necesario considerar los diferentes tipos de superficie (figura 15.2) y los diferentes tipos de suelo. En particular, los bosques naturales y selvas tropicales son sumideros de dióxido de carbono y juegan un papel importante en el equilibrio climático del planeta.

En la parametrización de la CPL se consideran tres tareas básicas: 1. Cálculo los flujos en la capa superficial; 2. Cálculo de la temperatura superficial y 3. Cálculo de la difusión vertical o ajuste de las variables de pronóstico a los efectos de la turbulencia dentro de la capa límite y en la atmósfera libre.

### 17.2. Cálculo de los flujos en la capa superficial

En la actualidad se utilizan básicamente dos métodos para el cálculo de los flujos en la capa superficial: el llamado Bulk aerodynamical, que al español podría ser traducido como el método de la aerodinámica de volumen, y el método de similaridad de Monin-Obukhov. En este capítulo se analizarán los fundamentos de estos dos métodos, basados en el material expuesto en los capítulos 9 y 10 de esta obra y se mostrará su aplicación en los modelos atmosféricos.

### 17.2.1. El método de la aerodinámica de volumen

La idea del método de la aerodinámica de volumen consiste en calcular de manera sencilla y explícita los flujos con ayuda de mediciones en uno o dos niveles. Veamos cómo se obtienen estas fórmulas.

La fórmula para el cálculo del flujo de momento puede obtenerse de la siguiente manera: sustituyendo la expresión para el coeficiente de turbulencia en una atmósfera neutral (10.15a), dentro de la tensión en superficie (10.8a),

$$\tau_s = \overline{\rho u' w'} = \rho K_m \frac{d\bar{u}}{dz} = \rho \frac{k^2 z (u - u_0)}{\ln \frac{z}{z_0}} \frac{d\bar{u}}{dz} = \rho \frac{k^2 z (u - u_0)}{\ln \frac{z}{z_0}} \frac{(u - u_0)}{(z - z_0)}.$$

Teniendo en cuenta que  $u_0$  en el nivel de rugosidad  $z_0$  es cero y aproximando  $z - z_0 = z$ , esta expresión se escribe

$$\tau_s = \rho C_D u^2.$$

En los modelos atmosféricos, el flujo de momento a menudo se escribe

$$E_m = \rho C_D V^2, \quad (17.1)$$

donde  $V$  es el viento en el nivel más bajo del modelo o en el nivel de instalación del anemómetro y

$$C_D = \frac{k^2}{\ln \frac{z}{z_0}},$$

es el coeficiente de *arrastre o de transferencia*, donde  $k$  es la constante de Kármán y  $z_0$  el nivel de rugosidad.

El coeficiente de transferencia de momento es función del nivel de rugosidad y de la estabilidad atmosférica y se puede evaluar por medio de la teoría de similaridad de Monin-Obukhov pero, con el fin de ahorrar tiempo de cálculo, en las parametrizaciones más simples, este coeficiente y los coeficientes de transferencia para el calor y la humedad se asumen constantes. Por ejemplo, para el coeficiente de transferencia de momento se asume  $C_D = 0.0014$ .

Este valor fue determinado por el programa GARP (Global Atmospheric Research Program) durante el experimento GATE (Global Atlantic Tropical Experiment).

Las fórmulas para el cálculo de los flujos de calor y humedad se obtienen de manera similar, partiendo de la definición (10.7) o (10.9) y representando

el coeficiente de turbulencia proporcional a la velocidad del viento. Estas fórmulas se escriben

$$H_s = \rho c_p C_H V (\theta_g - \theta_a) \quad (17.2)$$

$$E_s = \rho L C_q V [q_{vs}(T_g) - q_{va}], \quad (17.3)$$

donde  $C_H$  y  $C_q$  son los coeficientes de transferencia de calor y humedad respectivamente. Los subíndices g y a se refieren al suelo y al nivel más bajo del modelo, respectivamente.

En parametrizaciones más elaboradas, para el cálculo de estos coeficientes se han desarrollado funciones de estabilidad empíricas y sencillas en las que interviene el *número de Richardson*.

### 17.2.2. Determinación de los flujos por el método de la aerodinámica de volumen

El problema de determinar los flujos de calor y humedad superficiales por el método de la aerodinámica de volumen se resuelve hallando los coeficientes de transferencia mencionados arriba. En algunos modelos de mesoescala, para el cálculo de estos coeficientes se tiene en cuenta la estabilidad atmosférica. Además, los coeficientes de transferencia para el calor y la humedad se asumen iguales,

$$C_H = C_q = C_\theta C_u.$$

Por ejemplo, en el modelo MM5, en el caso de una estratificación estable, los coeficientes de arrastre y de transferencia para el calor se determinan de la siguiente manera:

$$C_D = C_u = C_{uN} \left( \frac{1 - R_{iB}}{R_{iC}} \right)$$

$$C_\theta = C_{\theta N} \left( \frac{1 - R_{iB}}{R_{iC}} \right),$$

donde,  $R_{iC}$  es un valor crítico del número de Richardson,  $R_{iC} = 3.05$ .  $R_{iB}$  es el número de Richardson de volumen,  $C_{uN}$  y  $C_{\theta N}$  son valores neutrales para  $C_u$  y  $C_\theta$ , respectivamente y dados por

$$C_{uN} = \left[ k^{-1} \ln \left( \frac{0.025 h}{z_0} \right) + 8.4 \right]^{-1}$$

$$C_{\theta N} = \left[ 0.74 k^{-1} \ln \left( \frac{0.025 h}{z_0} \right) + 7.3 \right]^{-1}$$

donde  $h$  es la altura del nivel más bajo.

Para el caso inestable, los coeficientes  $C_u$  y  $C_\theta$  se calculan como

$$C_u = \left[ \frac{1}{C_{uN}} - 25 \exp(0.26\Psi - 0.3\Psi^2) \right]^{-1}$$

$$C_\theta = \left[ \frac{1}{C_{\theta N}} \frac{1}{C_u} - \frac{1}{C_{uN}} \right]^{-1},$$

donde

$$\Psi = \log_{10}(-R_{iB}) - 3.5.$$

El flujo de humedad en superficie se calcula así:

$$E_s = \rho C_\theta C_u M [q_{vs}(T_g) - q_{va}] V,$$

donde  $M$  es un parámetro asociado a la disponibilidad de humedad en la superficie, el cual varía desde 1 para un suelo saturado hasta 0 para una superficie con evaporación no potencial.  $q_{va}$  es la relación de mezcla en el nivel más bajo y  $q_{vs}$  la relación de mezcla de saturación.

### 17.2.3. Determinación de los flujos por el método de similitud

Para determinar los flujos por el método de similitud, los flujos de momento, calor y humedad se escriben

$$\tau_s = \rho u_*^2 \quad (17.4)$$

$$H_s = -C_p \rho_a k u_* T_* \quad (17.5)$$

$$H_q = M \rho I^{-1} [q_{vs}(T_g) - q_{va}], \quad (17.6)$$

donde la velocidad de fricción  $u_*$  y la temperatura de escala  $T_*$  se determinan a través de las fórmulas

$$u_* = \max \left[ \frac{kV}{\ln(z_a/z_0) - \Psi_m}, u_{*0} \right]; \quad (u_{*0} = 0.1 \text{ m/s})$$

$$T_* = \frac{\theta_a - \theta_g}{\ln(z_a/z_0) - \Psi_h}$$

y el parámetro  $I$  se determina como

$$I^{-1} = k u_* \left[ \ln \left( \frac{k u_* z_a}{K_a} + \frac{z_a}{z_l} \right) - \Psi_h \right]^{-1}.$$

Note que las expresiones para  $u_*$  y  $T_*$  coinciden con las fórmulas (10.32) y (10.37) derivadas en el capítulo 10.

Para calcular los flujos (17.4) a (17.6) se deben determinar las variables  $u_*$ ,  $T_*$ ,  $H_s$ ,  $\Psi_m$  y  $\Psi_h$ . Las funciones universales  $\Psi_m$  y  $\Psi_h$  dependen del parámetro  $(z/L)$  (capítulo 10).

Se puede recurrir al algoritmo de cálculo implícito indicado al final del capítulo 10. Sin embargo, para ahorrar tiempo de cómputo y realizar el cálculo de manera explícita, las variables  $\Psi_m$ ,  $\Psi_h$  y  $(z/L)$  se expresan a través del número de Richardson de volumen:

$$R_{iB} = \frac{gz_a}{\theta_a} \frac{\theta_{va} - \theta_{vg}}{V^2}.$$

Dependiendo de un valor crítico para el número de Richardson  $R_{iC} = 0.2$ , se consideran tres casos:

1. Caso estable ( $R_{iB} > R_{iC}$ )

$$\Psi_h = \Psi_m = -10 \ln \frac{z_a}{z_0},$$

$u_* = u_{*0}$ . El flujo de calor no debe ser inferior a  $-250 \text{ Wm}^2$ .

2. Turbulencia mecánica únicamente ( $0 \leq R_{iB} \leq R_{iC}$ )

$$\Psi_h = \Psi_m = -5 \left( \frac{R_{iB}}{1.1 - 5R_{iB}} \right) \ln \frac{z_a}{z_0}$$

3. Inestable (convección libre,  $R_{iB} \leq 0$  y  $|h/L| \leq 1.5$ ).

En este caso,

$$\begin{aligned} \Psi_h &= -3.23 \left( \frac{z_a}{L} \right) - 1.99 \left( \frac{z_a}{L} \right)^2 - 0.474 \left( \frac{z_a}{L} \right)^3 \\ \Psi_m &= -1.86 \left( \frac{z_a}{L} \right) - 1.07 \left( \frac{z_a}{L} \right)^2 - 0.249 \left( \frac{z_a}{L} \right)^3, \end{aligned}$$

donde  $L$  es la escala de Monin–Obukhov, determinada por la fórmula (10.23) y  $z_a/L = R_{iB} \ln(z_a/z_0)$ .

### 17.3. Determinación de la temperatura de superficie

Una vez determinados los flujos, es posible establecer la temperatura superficial.

El cambio local de la temperatura de superficie  $T_g$  se calcula con ayuda de una ecuación de balance de energía para la superficie, la cual se puede escribir

$$C_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = R_n - H_m - H_s - L_v E_s, \quad (17.7)$$

donde  $C_g$  es la capacidad térmica de la capa activa del suelo por unidad de área,  $R_n$  es la radiación neta,  $H_m$  es el flujo molecular de transferencia de calor hacia (o desde) la capa activa. Los demás términos son conocidos.

El flujo de conducción de calor  $H_m$  se calcula por una fórmula similar a las expuestas anteriormente en este capítulo:

$$H_m = K_m C_g (T_g - T_m), \quad (17.8)$$

donde,  $K_m$  es el coeficiente de transferencia de calor, el cual se toma como constante;  $T_m$  es la temperatura de la capa activa y también se toma como constante. En el caso de predicción a corto plazo,  $T_m$  se toma como la temperatura media en superficie del día anterior. La capacidad térmica es función del uso de la Tierra (Grell & otros 1995: MM5 model description). El flujo de radiación neta será discutido en el próximo capítulo.

Una vez conocidos todos los flujos de la parte derecha, para calcular la temperatura por la ecuación (17.7) se necesita establecer una condición inicial para la temperatura. Esta condición inicial puede ser el valor de la temperatura calculada después del proceso de advección.

## 17.4. Difusión turbulenta vertical

### 17.4.1. Difusión turbulenta vertical por encima de la capa límite

Por encima de la capa límite, las ecuaciones de pronóstico del modelo se ajustan a la difusión turbulenta en la dirección vertical. La expresión que describe este fenómeno (último término en la ecuación (9.15) o (9.17)) se puede escribir en forma general como

$$F_\alpha = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \alpha}{\partial z}, \quad (17.9)$$

donde,  $\alpha$  representa cualquier variable de pronóstico,  $\{u, v, T, q\}$ . El coeficiente de difusividad turbulenta  $K_z$  por lo regular se toma como función del número de Richardson. Por ejemplo, en el modelo MM5, este coeficiente se escribe



$$\begin{aligned}
K_Z &= K_{z0} + l^2 S^{1/2} \frac{R_{iC} - R_i}{R_{iC}} && \text{para } R_i < R_{iC} \\
K_z &= K_{z0} && \text{para } R_i \geq R_{iC},
\end{aligned}$$

donde  $K_{z0} = 1 \text{ m}^2/\text{s}^{-1}$ ,  $l = 40 \text{ m}$  es el camino de mezcla, y  $R_{iC}$  es el número crítico de Richardson, el cual se da como función del incremento de la altura  $\Delta z$ .

El número de Richardson  $R_i$  está dado por

$$R_i = \frac{g}{\theta S} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

donde

$$S = \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2$$

#### 17.4.2. Difusión turbulenta vertical dentro de la capa límite

Existen varias parametrizaciones de la difusión turbulenta dentro de la capa límite. En el modelo MM5, por ejemplo, se realiza un doble paso y se diferencia un régimen nocturno, con predominio de turbulencia mecánica, y un régimen diurno, con fuerte calentamiento y gradientes superadiabáticos.

En este método, sugerido por Blackadar (1976), durante el primer paso se ajusta el nivel más bajo del modelo. En el régimen nocturno, las variables se ajustan con un término proporcional a la diferencia entre el flujo en el nivel más bajo y el flujo en el tope de la capa superficial. En el régimen diurno, el ajuste es proporcional a una función analítica que involucra los flujos en estos dos niveles

Durante el segundo paso, se ajustan los demás niveles dentro de la capa límite con un término proporcional a la diferencia entre el valor de la variable ajustada en el nivel más bajo y su valor en el nivel dado.

Otra interesante alternativa de parametrización de la difusión en la capa límite es el transporte “no local”, empleada en el modelo CCM3 (Climate Community Model), hoy CAM (Climate Atmospheric Model).

Los esquemas de difusión turbulenta aplicados hasta ahora se llaman esquemas de difusión local y se caracterizan porque son proporcionales al gradiente de la variable. En este tipo de procedimientos, la difusividad turbulenta depende de los gradientes locales del viento medio y de la temperatura potencial virtual media. Estas hipótesis son válidas para el caso en que la longitud de escala del mayor torbellino es muchas veces menor

que el tamaño del dominio sobre el cual se propaga el torbellino turbulento. Dentro del la CLP esto es típicamente verdadero en condiciones estables o neutrales. En condiciones inestables y convectivas, sin embargo, el remolino de mayor tamaño puede ser de dimensiones similares a la altura de la capa de mezcla misma; entonces puede suceder que el flujo se oriente contra el gradiente local. En tales condiciones, el procedimiento de difusión local no es el más apropiado, sino el que tiene en cuenta el transporte “no local”.

De acuerdo con Holtslag & Moeng (1991), para tener en cuenta el transporte turbulento no local, el término de difusión turbulenta para cada sustancia debe ser modificado como

$$\overline{w'\alpha'} = -K_\alpha \left( \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \gamma_\alpha \right) \quad (17.10)$$

donde  $K_\alpha$  es la difusividad turbulenta no local y  $\gamma_\alpha$  es el término de transporte no local, o contra gradiente, debido a la convección seca.

El contra gradiente en la ecuación (17.10) se aplica para la temperatura, la humedad y los escalares pasivos. El contra gradiente no es aplicado para las componentes del viento, ya que para condiciones neutrales y estables este término es irrelevante.

El coeficiente de difusividad turbulenta se escribe

$$K_\alpha = kw_t z \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^2, \quad (17.11)$$

donde  $w_t$  es una velocidad turbulenta de escala y  $h$  es la altura de la capa límite. El coeficiente de difusividad turbulenta para el momento también se define como (17.11), pero en lugar de  $w_t$ , se escribe otra velocidad de escala  $w_m$ .

En condiciones inestables,  $w_t$  y  $w_m$  son proporcionales a la llamada velocidad convectiva de escala  $w^*$ . En condiciones neutrales o estables estos coeficientes son proporcionales a la velocidad de fricción  $u^*$ .

### 17.4.3. Determinación de la altura de la capa de mezcla

En la parametrización de la difusión vertical es necesario conocer la altura de la capa de mezcla  $h$ . Este parámetro, de mucha importancia para estudios de contaminación atmosférica, puede ser determinado de manera iterativa mediante la siguiente fórmula (CCM3 model description):

$$h = \frac{R_{iC} [u(h)^2 + v(h)^2]}{(g/\theta_s) [\theta_v(h) - \theta_s]}, \quad (17.12)$$

donde  $R_{iC}$  es el valor crítico del número de Richardson para la CPL,  $u(h)$  y  $v(h)$  son las velocidades horizontales en el nivel  $h$  y el subíndice  $s$  indica un valor en superficie.

Otras formas más elaboradas para calcular la altura de la capa límite se pueden consultar en Vogelezang & Holtslag (1996).

18

## Elementos básicos de transferencia radiativa y su parametrización en modelos atmosféricos



Tornado. Imagen Tomada de <http://www.photolib.noaa.gov/corps/corp2272.htm>  
FCortesía de la NOAA.

Aunque un curso sobre radiación atmosférica es más apropiado en la disciplina de meteorología física, es necesario recopilar aquí algunos principios básicos para comprender el proceso de parametrización. Este capítulo presenta los elementos necesarios para comprender la teoría de transferencia radiativa. El cálculo de los flujos de onda larga se ejemplariza en la aproximación de banda ancha. A su vez, la solución para la ecuación de transferencia radiativa solar se muestra en la aproximación de Eddington. Una variante de este método, el esquema delta-Eddington, se emplea actualmente en modelos climáticos. La exposición se apoya en los textos de Liou (1980,1992) y las guías para el usuario de los modelos CCM3 y MM5, y deriva en detalle estas complejas ecuaciones. Para la asimilación exitosa de este capítulo, se recomienda la asistencia previa a un curso básico de radiación.

## 18.1. Generalidades

En meteorología, la *radiación* electromagnética se considera ondas electromagnéticas generadas por cargas eléctricas oscilantes (monopolos, dipolos, multipolos). Estas generan un campo eléctrico también oscilante, el que provoca la oscilación de un campo magnético perpendicular al primero, como se esquematiza en la figura 18.1.

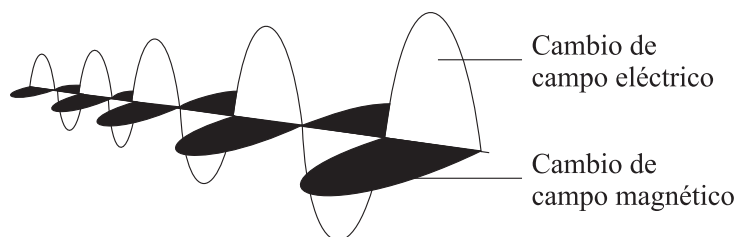


Figura 18.1. Composición y propagación de una onda electromagnética de acuerdo con la teoría de Maxwell. Imagen tomada de <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/2001184/Imagenes/campo.em.gif>

La longitud de onda de la onda electromagnética  $\lambda$  depende de la frecuencia de la carga eléctrica oscilante, a través de la relación  $c = \lambda\nu$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz.

La radiación electromagnética se emite en forma de un espectro de longitudes de onda o de frecuencias. En la figura 18.2, se observan las longitudes de onda y bandas de longitudes de onda, consideradas en el espectro electromagnético. En meteorología es importante considerar la radiación solar,

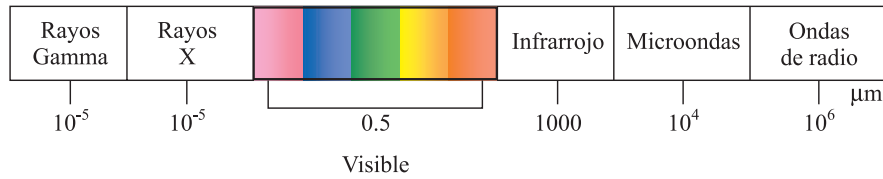


Figura 18.2. El espectro electromagnético.

o radiación de onda corta, la radiación de onda larga emitida por la superficie terrestre y los gases constituyentes de la atmósfera. Estos dos tipos de radiación son la fuente de calor que produce y mantiene los movimientos atmosféricos.

En la figura 18.3 se observa el espectro de radiación solar. En esta figura, el eje de las ordenadas representa la irradiancia, concepto que se introducirá más adelante. En la figura 18.3, la curva I corresponde a la irradiancia de un cuerpo negro con una temperatura de 6000 °K, la curva II corresponde a la irradiancia solar en el tope de la atmósfera y la curva III corresponde a la irradiancia solar que alcanza la superficie terrestre.

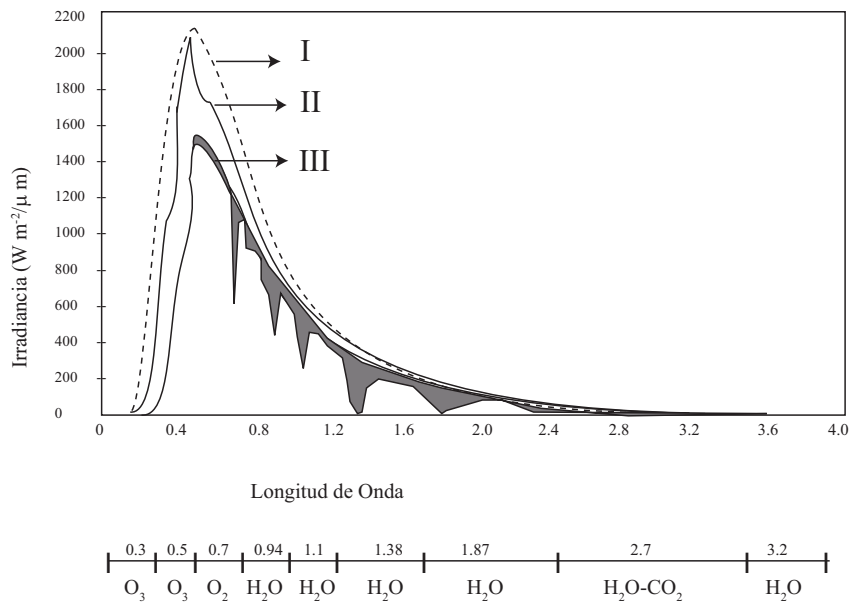


Figura 18.3. Irradiancia solar. Adaptada de Liou (1980)

Un aspecto interesante en la curva III es que las áreas sombreadas corresponden a la pérdida de radiación solar debido a la absorción por gases

atmosféricos. Algunas de estas áreas sombradas o ventanas de absorción son utilizadas por los satélites meteorológicos en la producción de imágenes de nubosidad tanto en los canales visibles como en los infrarrojos.

## 18.2. Elementos básicos de la teoría de radiación

### 18.2.1. Magnitudes radiométricas básicas

Las siguientes magnitudes son fundamentales en la teoría de la radiación:

- Intensidad monocromática
- Flujo de densidad monocromático
- Flujo de densidad total

*Ángulo sólido* (figura 18.4) es la relación entre el elemento de área  $\delta A$  y el cuadrado del radio, o sea,  $\delta\omega = A/r^2$ .

En la figura 18.4, considere la cantidad diferencial de energía radiante  $dE_\lambda$  con longitud de onda de  $\lambda$  a  $\lambda + d\lambda$ , que atraviesa el elemento de área  $d\sigma_n$  durante un tiempo  $dt$  en direcciones confinadas en un elemento de ángulo sólido  $d\omega$ , el cual está orientado formando un ángulo  $\theta$  con la normal a la superficie. Evidentemente, la energía  $dE_\lambda$  es proporcional a estas magnitudes y la intensidad del rayo  $I_\lambda$ . O sea,

$$dE_\lambda = I_\lambda d\sigma_n d\omega d\lambda dt.$$

Para el caso general de una superficie  $d\sigma$  no perpendicular al rayo ( $d\sigma_n = d\sigma \cos \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo zenital), expresando el ángulo sólido  $d\omega$  en coordenadas polares,  $d\omega = \frac{dA}{r^2} = \frac{r \sin \theta d\theta r d\varphi}{r^2} = \sin \theta d\theta d\varphi$ , (figura 18.4), la expresión anterior se escribe;

$$dE_\lambda = I_\lambda d\sigma \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi d\lambda dt.$$

Redefiniendo  $dE_\lambda$  como la cantidad de energía radiante por unidad de área y por unidad de tiempo, la expresión anterior se escribe

$$dE_\lambda = I_\lambda \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi d\lambda. \quad (18.1)$$

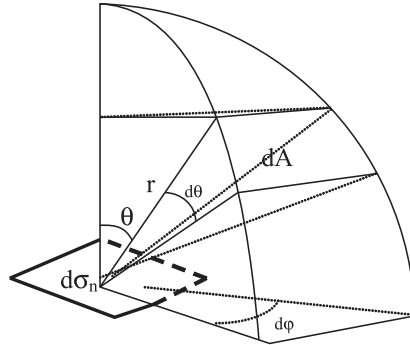


Figura 18.4. Geometría del ángulo sólido. Adaptado de Liou (1980).

A partir de (18.1) la intensidad monocromática  $I_\lambda$ , se define

$$I_\lambda = \frac{dE_\lambda}{\cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi d\lambda}. \quad (18.2)$$

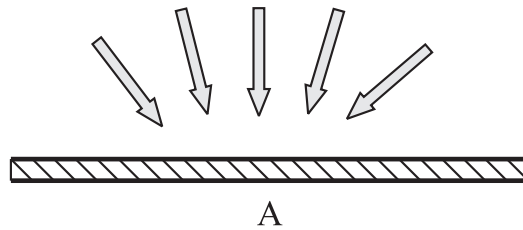
El *flujo de densidad monocromático o irradiancia monocromática* (vatios.m<sup>-2</sup>) se define integrando la expresión (18.1),

$$F_\lambda = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} I_\lambda(z, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (18.3)$$

Cuando se asume que el flujo no depende de la dirección azimutal y se define  $\mu = \cos \theta$  (además,  $d\mu = -\sin \theta d\theta$ ), la expresión anterior se escribe

$$F_\lambda = 2\pi \int_0^1 I_\lambda(z, \mu) \mu d\mu. \quad (18.3a)$$

La irradiancia sobre un elemento de superficie  $A$  (en este caso igual a  $-F_\lambda$ ) se esquematiza en la figura 18.5

Figura 18.5. Flujo de densidad ( $-F_\lambda$ ) o irradiancia sobre una superficie  $A$ .

Cuando la radiación es isotrópica ( $I_\lambda$  no depende de la dirección), evidentemente  $F_\lambda = \pi I_\lambda$ .



Por último, el *flujo total de densidad* de energía radiante se obtiene integrando por todo el espectro:

$$F = \int_0^\infty F_\lambda = \int_0^\infty d\lambda \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_\lambda(z, \theta, \varphi) \cos \theta \sin \theta d\theta \quad (18.4)$$

## 18.2.2. Conceptos de esparcimiento y absorción

### 18.2.2.1. Esparcimiento

El esparcimiento es un proceso físico en el que una partícula, que se encuentra en el camino de una onda electromagnética o rayo luminoso, resume continuamente energía de la onda y la irradia continuamente en todas direcciones. Durante el esparcimiento no hay conversión de energía radiante, solo cambia la dirección en la propagación.

El esparcimiento depende de la longitud de onda del rayo incidente y de la dimensión de la partícula. Cuando la dimensión de la partícula es muy pequeña, en comparación con la longitud de onda del rayo incidente, el esparcimiento se llama de Rayleigh. Cuando estas dos dimensiones son comparables, o sea para aerosoles en el rango 1-50  $\mu m$ , el esparcimiento es de Mie. Para tamaños de partículas mucho mayores que la longitud del rayo incidente, se aplican las leyes de la óptica geométrica, o sea, las leyes de la reflexión y la difracción.

El esparcimiento se produce en todas las direcciones. Además, existe esparcimiento singular y esparcimiento múltiple.

Para describir la distribución angular de la energía esparcida, se utiliza el concepto de *función de fase*  $P(\theta)$ , también conocida con el nombre de *indicatriz*. Para un rayo incidente polarizado horizontalmente, como la luz solar, la fracción de energía dispersa por unidad de ángulo sólido en una dirección  $\theta$  es proporcional a  $\cos^2 \theta$  de acuerdo con siguiente fórmula:

$$P(\theta) = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta)$$

En la figura 18.6(a) se muestra la función de fase en coordenadas polares y en la figura 18.6(b) esta misma función pero en coordenadas cartesianas.

En estas figuras se observa que a) el esparcimiento es idéntico en las direcciones hacia delante ( $0^\circ$ ) y hacia atrás ( $180^\circ$ ) del rayo; b) en la dirección perpendicular al rayo ( $90^\circ$  y  $270^\circ$ ) se halla un mínimo.

Para cuantificar la cantidad de energía removida del rayo incidente, se emplean los conceptos de *sección transversal de esparcimiento*  $\sigma_s$  y *coeficiente*

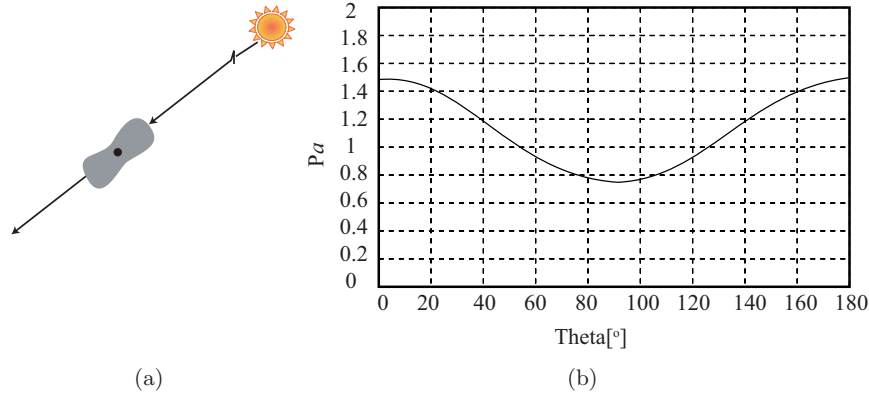


Figura 18.6. Función de fase. a) En coordenadas polares. b) En coordenadas cartesianas. Tomado de <http://kazan.inf.fu-berlin.de/euromet-zeam/courses/english/navig/begins.htm>

de esparcimiento  $\beta_s$ . La *sección transversal de esparcimiento*  $\sigma_s$  ( $\text{cm}^2$ ), o sea, la cantidad de energía removida del rayo original por las partículas dispersadoras se define como

$$\sigma_s = \frac{8\pi^3(m_r - 1)^3}{3\lambda^4 N^2} f(\delta).$$

En esta fórmula,  $N$  es el número de partículas por volumen,  $\lambda$  es la longitud de onda del rayo incidente,  $m_r$  es el índice complejo de refracción,  $f$  es un factor de corrección para el esparcimiento anisotrópico ( $f$  es cero para el esparcimiento de Rayleigh, 0.3 para el aire).

El coeficiente de esparcimiento  $\beta_s$  se define como

$$\beta_s = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_s(r) \frac{dn(r)}{dr} dr,$$

donde  $n(r)$  es la distribución por tamaños de las partículas y  $r$  es el tamaño (radio) de estas.

#### 18.2.2.2. Absorción

La energía absorbida deja de ser energía luminosa y se convierte en otro tipo de energía.

El esparcimiento y absorción remueven energía del rayo de luz incidente, que se atenúa. A esta atenuación se le llama extinción. La *extinción* es el

resultado del esparcimiento más la absorción. Para caracterizar la energía removida por la extinción, se utiliza el coeficiente de extinción  $\beta_e$ , el cual se define de manera similar al coeficiente de esparcimiento introducido arriba:

$$\beta_e = \int_{r_1}^{r_2} \sigma_e(r) \frac{dn(r)}{dr} dr,$$

donde  $\sigma_e$  es la sección transversal de extinción.

### 18.2.3. Cuerpo negro y equilibrio termodinámico

Un cuerpo cualquiera puede absorber, reflejar y transmitir energía radiante de acuerdo con la siguiente ecuación de balance:

$$I_{\lambda,i} = I_{\lambda,R} + I_{\lambda,T} + I_{\lambda,A},$$

donde  $I_{\lambda,i}$ ,  $I_{\lambda,R}$ ,  $I_{\lambda,T}$ ,  $I_{\lambda,A}$  indican radiación incidente, reflejada, transmitida y absorbida, respectivamente. Dividiendo ambos miembros de esta igualdad entre  $I_{\lambda,i}$ ,

$$1 = \varepsilon_\lambda + \tau_\lambda + a_\lambda, \quad (18.5)$$

donde  $\varepsilon_\lambda = I_{\lambda,R}/I_{\lambda,i}$  es emitancia,  $\tau_\lambda = I_{\lambda,T}/I_{\lambda,i}$  es transmitancia y  $a_\lambda = I_{\lambda,A}/I_{\lambda,i}$  es absorptancia o albedo.

Un cuerpo negro es aquel que absorbe toda la radiación incidente (no refleja ni transmite) y, además, se encuentra en equilibrio termodinámico (su temperatura de equilibrio no cambia). Por esta razón el cuerpo negro debe emitir la misma cantidad que recibe. La irradiación de energía, instaurada en equilibrio termodinámico se llama irradiación de equilibrio o de un cuerpo negro, y no depende de la dirección.

De acuerdo con esta definición y la fórmula (18.5) para un cuerpo negro, la absorptancia es igual a la unidad ( $\varepsilon_\lambda = 0$ ,  $\tau_\lambda = 0$ ,  $\Rightarrow a_\lambda = 1$ ).

### 18.2.4. Leyes para un cuerpo negro

Se han establecido algunas leyes fundamentales en la teoría de la radiación, válidas en el modelo de cuerpo negro.

#### 18.2.4.1. Ley de Planck

La ley de Planck relaciona la intensidad de emisión monocromática con la frecuencia y la temperatura de la sustancia que emite:

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1}. \quad (18.6)$$

(Aunque ya se denota intensidad con la letra  $I$ , por tratarse de la ley de Planck en este caso se usará la letra  $B$  para denotar intensidad). En la ecuación (18.6)  $h$  es la constante de Planck,  $c$  la velocidad de la luz,  $k$  la constante de Boltzman y  $T$  la temperatura absoluta.

#### 18.2.4.2. Ley de Stefan-Boltzman

La ley de Stefan-Boltzmann relaciona la intensidad del flujo radiante total con la temperatura del cuerpo negro; se obtiene al integrar la fórmula de Planck por todas las longitudes de onda. Como resultado final se obtiene,

$$I = \sigma T^4$$

donde  $\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15C^2 \lambda^3} = 5.67 \times 10^{-5} \text{ erg}/(\text{cm}^2 \cdot \text{seg} \cdot \text{K}^4)$  es la constante de Stefan-Boltzman. Esta ley es de fundamental aplicación en la transferencia radiativa en el infrarrojo.

#### 18.2.4.3. Ley de desplazamiento de Wien

La longitud de onda correspondiente a la intensidad máxima de emisión es inversamente proporcional a la temperatura.

#### 18.2.4.4. Ley de Kirchoff

La ley de Kirchoff establece que la relación entre la emitancia y la absorptancia no depende de las propiedades individuales de la materia, sino que es una función universal de la temperatura y longitud de onda. De acuerdo con este enunciado,

$$\frac{\varepsilon_{\lambda 1}}{a_{\lambda 1}} = \frac{\varepsilon_{\lambda 2}}{a_{\lambda 2}} = \dots = \frac{\varepsilon_{\lambda cn}}{1} = B_{\lambda}(T).$$

De esta fórmula se desprende que para un cuerpo cualquiera, la emitancia es igual a la absorptancia multiplicada por la intensidad de emisión del cuerpo negro, que es otra forma de enunciar la ley de Kirchoff.

## 18.3. Ecuaciones de la transferencia radiativa

### 18.3.1. Ecuación general de transferencia

Para un rayo luminoso que atraviesa un medio de espesor  $ds$ , la ecuación de transferencia, sin la imposición de un sistema particular de coordenadas, se puede escribir

$$dI_\lambda = -K_\lambda \rho I_\lambda ds + j_\lambda \rho ds,$$

donde el diferencial de la intensidad es igual a la atenuación, debida a la absorción y esparcimiento en el medio (primer término en la parte derecha), y el aumento de la intensidad (segundo término en la parte derecha), debido a la emisión del medio y el esparcimiento proveniente de otras direcciones distintas a la del rayo luminoso.

En la ecuación anterior  $K_\lambda$ , es el coeficiente de atenuación o sección transversal de extinción másica,  $\rho$  es la densidad del medio y  $j_\lambda$  es la intensificación del rayo, llamado función de fuente. Dividiendo la expresión anterior entre  $K_\lambda \rho ds$ ,

$$\frac{dI_\lambda}{\rho K_\lambda ds} = -I_\lambda + \frac{j_\lambda}{K_\lambda},$$

denotando como función fuente  $J_\lambda = j_\lambda / K_\lambda$ ,

$$\frac{dI_\lambda}{\rho K_\lambda ds} = -I_\lambda + J_\lambda. \quad (18.7)$$

La ecuación (18.7) representa la ecuación general de transferencia. Veamos algunos casos particulares.

### 18.3.2. Ley de Lambert-Bouguer

Cuando ambas contribuciones por emisión y esparcimiento son despreciables, la ecuación (18.7) se escribe

$$\frac{dI_\lambda}{\rho K_\lambda ds} = -I_\lambda,$$

donde  $K_\lambda$  involucra absorción más debilitamiento por esparcimiento. Integrando esta expresión entre  $s = 0$  y  $s = s_l$  y asumiendo que para  $s = 0$  la intensidad es  $I_\lambda(0)$ ,

$$I_\lambda(s_l) = I_\lambda(0) \exp \left( - \int_0^{s_l} K_\lambda \rho ds \right),$$

donde  $I_\lambda(s_l)$  es la radiación atenuada que se obtiene en el punto  $s_l$ . Asumiendo que el medio es homogéneo, es decir,  $K_\lambda$  no cambia con la distancia, y además, definiendo el camino  $u$  (de unidades, g/cm<sup>2</sup>) como

$$u = \int_0^{s_l} \rho ds, \quad (18.8)$$

la solución anterior se escribe

$$I_\lambda(s_l) = I_\lambda(0)e^{-K_\lambda u}.$$

Esta expresión es una simple atenuación exponencial de la radiación incidente y es proporcional al producto del coeficiente de atenuación por el camino  $u$ .

La ecuación anterior sirve para definir la transmisividad monocromática como

$$P_\lambda = \frac{I_\lambda(s_l)}{I_\lambda(0)} = e^{-K_\lambda u}. \quad (18.9)$$

Cuando no se considera atenuación por esparcimiento,  $K_\lambda$  representa el *coeficiente de absorción*. De la expresión (18.9) y de la definición (18.8) se deduce que las unidades del coeficiente de absorción son cm<sup>2</sup>/g. Como se verá más adelante, la absorción-radiación de onda larga está asociada con líneas de absorción en gases atmosféricos que más absorben radiación infrarroja, como el vapor de agua, el ozono y el CO<sub>2</sub>.

La absorptividad monocromática, o sea la parte de radiación absorbida por el medio, suponiendo que no hay esparcimiento, se define como

$$A_\lambda = 1 - P_\lambda = 1 - e^{-K_\lambda u} \quad (18.10)$$

Cuando hay esparcimiento, parte de la radiación  $R_\lambda$  es reflejada hacia atrás, en la dirección incidente. En este caso se aplica la igualdad (18.5).

### 18.3.3. Ecuación de Schwarzschild

Continúe sin considerar el esparcimiento, pero tenga en cuenta la emisión del medio como un cuerpo negro en equilibrio termodinámico para pensar en la función de Planck como la fuente en la ecuación no homogénea (18.7). Entonces esta ecuación se escribe

$$\frac{dI_\lambda}{\rho K_\lambda ds} = -I_\lambda + B_\lambda(T). \quad (18.11)$$

Para encontrar la solución a esta ecuación, la profundidad óptica entre los puntos  $s$  y  $s_l$  se define

$$\tau_\lambda(s_l, s) = \int_s^{s_l} K_\lambda \rho ds', \quad (18.12)$$

El concepto de profundidad óptica es de gran importancia en la teoría de transferencia radiativa. La profundidad óptica molecular para una atmósfera limpia decrece rápidamente con la longitud de onda tal como se puede apreciar en la figura (18.7).

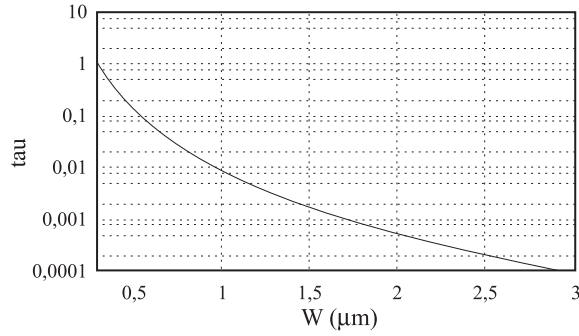


Figura 18.7. Decrecimiento de la profundidad óptica molecular con la longitud de onda para una atmósfera limpia. Tomado de <http://euromet.meteo.fr/>

Dado que,

$$d\tau_\lambda(s_l, s) = -K_\lambda \rho ds, \quad (18.12a)$$

(esto se debe a que  $\tau_\lambda(s_l, s)$  disminuye en la dirección de su propagación), la ecuación (18.11) se transforma en

$$-\frac{dI_\lambda(s_l, s)}{d\tau_\lambda(s_l, s)} = -I_\lambda(s_l, s) + B_\lambda(T_s).$$

Multiplicando esta igualdad por  $e^{-\tau_\lambda(s_l, s)}$ , trasponiendo términos e integrando

$$\begin{aligned} -e^{-\tau_\lambda(s_l, s)} dI_\lambda(s_l, s) + e^{-\tau_\lambda(s_l, s)} I_\lambda(s_l, s) d\tau_\lambda &= e^{-\tau_\lambda(s_l, s)} B_\lambda(T_s) \Rightarrow \\ -\int_0^{s_l} d[I_\lambda(s) e^{-\tau_\lambda(s_l, s)}] &= \int_0^{s_l} B_\lambda T(S) e^{-\tau_\lambda(s_l, s)} d\tau_\lambda(s_\lambda, s) \Rightarrow \\ I_\lambda(s_l) &= I_\lambda(0) e^{-\tau_\lambda(s_l, 0)} - \int_0^{s_l} B_\lambda T(S) e^{-\tau_\lambda(s_l, s)} d\tau_\lambda(s_\lambda, s) \end{aligned}$$

Utilizando la relación (18.12a), este resultado se escribe

$$I_\lambda(s_l) = I_\lambda(0)e^{-\tau_\lambda(s_l,0)} + \int_0^{s_l} B_\lambda T(S)e^{-\tau_\lambda(s_l,s)} K_\lambda \rho ds. \quad (18.13)$$

El primer término en el lado derecho de esta ecuación representa la atenuación por absorción. El segundo término representa la contribución por emisión del medio a lo largo del camino desde 0 hasta  $s_l$ . Si la temperatura, la densidad y el coeficiente de absorción son conocidos, la ecuación (18.13) puede ser integrada numéricamente para obtener la intensidad en el punto  $s_l$ . Esta ecuación puede aplicarse en la transferencia de radiación infrarroja y las mediciones desde satélite.

#### 18.3.4. La ecuación de transferencia para atmósferas planas y paralelas

En el modelo de atmósferas planas y paralelas, se desprecia el efecto de curvatura de la tierra y de la atmósfera (para ángulos zenitales muy grandes, esta consideración puede llevar a errores significativos). Considere un rayo luminoso que se propaga en la dirección  $\theta$ ,  $\varphi$ , donde  $\theta$  es el ángulo zenital y  $\varphi$  la azimut, como se representa en la figura (18.8(a)).

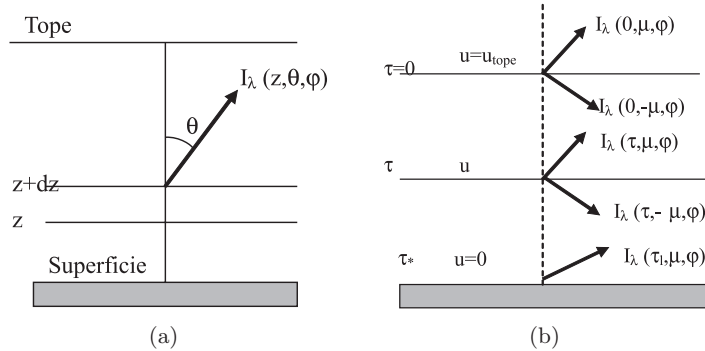


Figura 18.8. a) Propagación de un rayo de luz en la asunción de atmósfera plana y paralela. b) Intensidades a tener en cuenta para el cálculo en el nivel  $\tau$ .

Como se observa, el cambio en la intensidad del rayo en la dirección zenital es  $\cos dI(z, \theta, \varphi)$ . Por tanto, la ecuación de transferencia (18.7) en la asunción de atmósfera plana y paralela se escribe

$$\mu \frac{dI(z; \mu, \phi)}{K \rho dz} = -I(z; \mu, \phi) + J(z; \mu, \phi),$$



donde  $\mu = \cos \theta$ . Para valores positivos de  $\mu$ , esta ecuación sirve para calcular intensidades hacia arriba; para valores negativos de  $\mu$ , se calculan intensidades hacia abajo.

Se introduce la profundidad óptica de manera similar a como se hizo para deducir la ecuación de Schwarzschild,

$$\tau = \int_z^{\infty} K_{\lambda} \rho dz',$$

donde  $\tau$  se mide desde la frontera exterior hacia abajo. En este caso, la relación entre la profundidad óptica  $\tau$  y el camino  $u$ , de acuerdo con (18.8), es

$$\tau = \int_z^{\infty} K_{\lambda} du. \quad (18.14)$$

Teniendo en cuenta que

$$d\tau = -K_{\lambda} \rho dz,$$

esa expresión se escribe

$$\mu \frac{dI(\tau; \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau; \mu, \phi) - J(\tau; \mu, \phi). \quad (18.15)$$

Esta es la ecuación básica para problemas de transferencia radiativa en una atmósfera plana y paralela.

Siguiendo un procedimiento similar al expuesto para obtener (18.13), se puede integrar la ecuación (18.15) para encontrar las intensidades hacia arriba y hacia abajo para una atmósfera finita limitada en dos lados:  $\tau = 0$  y  $\tau = \tau^*$  (figura 18.8(b)).

Para obtener la intensidad hacia arriba ( $\mu > 0$ ) en el nivel  $\tau$ , se multiplica (18.15) por  $e^{-\tau/\mu}$  y se integra desde  $\tau$  hasta  $\tau_l$ . El resultado es el siguiente:

$$I^{\uparrow}(\tau; \mu, \phi) = I(\tau_l; \mu, \phi) e^{-(\tau_l - \tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau^*} J(\tau'; \mu, \phi) e^{-(\tau_l - \tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}, \quad (18.16)$$

(Esta ecuación se obtiene de manera similar a (18.13). Para ello, (18.15) se escribe  $dI(\tau_l; \mu, \phi) = \frac{I(\tau; \mu, \phi)}{\mu} d\tau - \frac{J(\tau_l; \mu, \phi)}{\mu} d\tau$ . Multiplicando por  $e^{-\tau/\mu}$  y trasponiendo términos,  $dI(\tau; \mu, \phi) e^{-\tau/\mu} - \frac{I(\tau; \mu, \phi)}{\mu} e^{-\tau/\mu} d\tau =$

$-\frac{J(\tau; \mu, \phi)}{\mu} e^{-\tau/\mu} d\tau$ . Es fácil verificar que la parte izquierda de esta ecuación se puede escribir  $d(I(\tau; \mu, \phi)e^{-\tau/\mu}) = -\frac{J(\tau; \mu, \phi)}{\mu} e^{-\tau/\mu} d\tau$ . Integrando esta expresión entre  $\tau$  y  $\tau_1$ ,  $-I(\tau; \mu, \phi)e^{-\tau/\mu} = -I(\tau_1; \mu, \phi)e^{-\tau_1/\mu} - \int_{\tau}^{\tau^*} J(\tau'; \mu, \phi)e^{-\tau'/\mu} d\tau'$ . En el último término de la derecha se cambió la variable de integración  $\tau$  por  $\tau'$ . Dividiendo entre  $e^{-\tau/\mu}$ , se obtiene la expresión (18.16)).

Para obtener el flujo hacia abajo ( $\mu < 0$ ) en el nivel  $\tau$ , se reemplaza  $\mu$  por  $-\mu$  y se multiplica por  $e^{\tau/\mu}$ . Después de integrar entre 0 y  $\tau$ , se obtiene

$$I^\downarrow(\tau; -\mu, \phi) = I(0; -\mu, \phi)e^{-\tau/\mu} + \int_0^{\tau} J(\tau'; -\mu, \phi)e^{-(\tau-\tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (18.16a)$$

En las ecuaciones (18.16) y (18.16a), los términos  $I(\tau^*; \mu, \phi)$ ,  $I(0; -\mu, \phi)$  representan las condiciones de frontera para la radiación hacia arriba (en la superficie) y hacia abajo (en el tope) de la atmósfera, respectivamente (ver figura 18.8(b)).

### 18.3.5. Absorción (emisión) y forma de líneas espectrales

Debido a la importancia de la absorción de la radiación infrarroja por los gases atmosféricos es necesario mencionar aquí algunas características de la absorción.

Los procesos de absorción y emisión de radiación tienen lugar cuando una molécula es sometida a una transición desde un estado de energía a otro. Durante el proceso de absorción, la molécula captura un fotón y es sometida a una transición desde un nivel de energía interna más bajo hasta otro más alto. Como resultado, el análisis espectroscópico muestra una línea espectral de absorción. En el proceso de emisión, la molécula emite un fotón y es sometida a una transición desde un nivel de energía más alto hasta otro más bajo. En este último caso el espectrómetro detecta una línea espectral de emisión.

El espectro de emisión de muchos gases está compuesto por un gran número de líneas espectrales individuales y de un ancho finito. Las líneas espectrales se ensanchan debido a tres factores: 1. Pérdida (o ganancia) de energía durante la transición. 2. Choques entre las moléculas (ensachamiento por presión), y 3. Efecto Doppler, debido a la diferencia de velocidades de los

átomos y las moléculas (ensanchamiento Doppler). El primer factor es casi despreciable en relación con los otros dos. El ensanchamiento por presión predomina en la atmósfera baja, mientras que en la atmósfera alta se observa ensanchamiento por presión y por efecto Doppler.

Conociendo la estructura de las moléculas de los gases absorbentes, en principio se pueden calcular algunas características de la línea, como forma, intensidad y ancho. Para gases simples como el hidrógeno, la forma de estas líneas es relativamente simple; sin embargo, para el vapor de agua, el  $\text{CO}_2$  y otros gases, la estructura del espectro de absorción es extremadamente compleja.

La absorción en los gases está relacionada con las características de la línea espectral de absorción. Por ejemplo, para el caso de ensanchamiento por presión, el coeficiente de absorción se expresa a través del llamado perfil de Lorentz:

$$K_v = \frac{s}{\pi} \frac{\alpha}{\pi(v - v_0)^2 + \alpha^2}, \quad (18.17)$$

donde  $K_v$  es el coeficiente de absorción a la frecuencia  $v$ , y  $v_0$  es la frecuencia correspondiente al centro de la línea.  $S$  representa la intensidad de la línea; numéricamente es el área encerrada dentro de la curva

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} K(v - v_0) d(v - v_0),$$

$\alpha$  es el semi-ancho medio de la línea. Este semi-ancho es mayor cuanto mayor sea la frecuencia de los choques entre las moléculas, es decir, cuanto mayor sea la presión

$$\alpha = \alpha_0 \frac{p}{p_0},$$

donde  $\alpha_0$ , es el semi-ancho de la línea a presión estándar. En la figura 18.9 se muestra el contorno de la línea para dos presiones diferentes (ensanchamiento por presión).

En la práctica no sucede absorción monocromática, sino absorción en todo un espectro de frecuencias. Grupos de líneas forman una banda, y también se forman grupos de bandas. En muchos gases estas líneas se distribuyen en forma caótica, lo que dificulta aún más el cálculo de la absorción en gases. Para calcular la intensidad en cada gas, a menudo se recurre a métodos estadísticos como el *método montecarlo*.

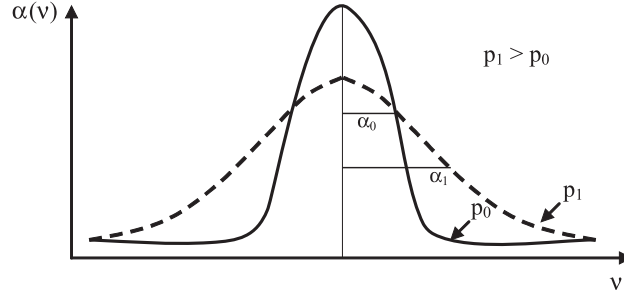


Figura 18.9. Representación esquemática del contorno de la línea de absorción para el caso de ensanchamiento por presión.

### 18.3.6. Dependencia de la presión y la temperatura

Con la caída de presión, la línea de absorción se vuelve más estrecha, y en general, el coeficiente de absorción cae con la disminución de la presión. El contorno de la línea también depende de la temperatura del gas que absorbe (o emite). La dependencia de estos dos factores se expresa por la fórmula

$$K_{\lambda}(p, \theta) = K_{\lambda 0}(p_0, \theta_0) \left( \frac{p}{p_0} \right)^n \left( \frac{\theta}{\theta_0} \right)^l \quad (18.18)$$

El coeficiente  $n$  es diferente en diferentes gases y para diferentes intervalos de onda. El coeficiente  $l$  es diferente en diferentes segmentos del espectro.

### 18.3.7. Transferencia de radiación infrarroja

Asumiendo una atmósfera en equilibrio termodinámico local sin esparcimiento y suponiendo, además, que la radiación infrarroja en la Tierra es independiente del ángulo azimutal, se puede usar la función de Planck en calidad de función de fuente y como condición de contorno. En este caso se asume  $I(\tau^*; \mu, \phi) = B(T_s)$  donde  $T_s$  es temperatura de superficie,  $I(0; \mu, \phi) = B(\text{tope})$ . Las ecuaciones (18.16) y (18.16a) se reescriben

$$I_v^{\uparrow}(\tau, \mu) = B_v(T_s) e^{-(\tau_l - \tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau^*} B_v(\tau') e^{-(\tau' - \tau)/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}, \quad (18.19)$$

$$I_v^\downarrow(\tau, -\mu) = B_v(\text{tope})e^{-\tau/\mu} + \int_0^\tau B_v(\tau')e^{-(\tau-\tau')/\mu} \frac{d\tau'}{\mu}, \quad (18.19a)$$

donde  $v$  es el número de onda. Por lo regular se toma  $B(\text{tope}) = 0$ . (En el tope de la atmósfera, la fuente de radiación infrarroja es igual a 0)

Definiendo la transmitancia o función de *transmisión* de manera similar que (18.9),

$$\mathfrak{J}_v(\tau/\mu) = e^{-\tau/\mu}, \quad (18.20)$$

teniendo en cuenta que su forma diferencial es

$$\frac{d\mathfrak{J}_v(\tau/\mu)}{d\tau} = -\frac{1}{\mu} e^{-\tau/\mu}. \quad (18.20a)$$

Las soluciones formales para las intensidades hacia arriba y hacia abajo, respectivamente, se escriben

$$I_v^\uparrow(\tau, \mu) = B_v(T_s)\mathfrak{J}_v[(\tau_l - \tau)/\mu] - \int_\tau^{\tau^*} B_v(\tau') \frac{d}{d\tau'} \mathfrak{J}_v[(\tau' - \tau)/\mu] d\tau', \quad (18.21)$$

$$I_v^\downarrow(\tau, -\mu) = B_v(\text{tope})\mathfrak{J}_v(\tau/\mu) + \int_0^\tau B_v(\tau') \frac{d}{d\tau'} \mathfrak{J}_v[(\tau - \tau')/\mu] d\tau'. \quad (18.21a)$$

### 18.3.7.1. Ecuaciones para los flujos de densidad

Las ecuaciones anteriores están escritas para la intensidad. Sin embargo, para efectos de parametrización, lo que interesa, como se verá más adelante, son los flujos. Entonces, multiplicando ambos lados de la igualdad (18.21) por  $\mu d\mu d\varphi$ , integrando y de acuerdo con la definición (18.3a),

$$F_v^\uparrow(\tau) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 B_v(T_s)\mathfrak{J}_v[(\tau_l - \tau)]\mu d\mu d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_\tau^{\tau^*} B_v(\tau') \frac{d}{d\tau'} \mathfrak{J}_v[(\tau' - \tau)/\mu] d\tau' d\mu d\varphi.$$

Puesto que la radiación infrarroja no depende de la azimut, la integración de esta expresión da como resultado

$$F_v^\uparrow(\tau) = 2\pi B_v(T_s) \int_0^1 \mathfrak{J}_v[(\tau_l - \tau)/\mu] \mu d\mu - 2 \int_0^1 \int_\tau^{\tau^*} \pi B_v(\tau') \frac{d}{d\tau'} \mathfrak{J}_v[(\tau' - \tau)/\mu] d\tau' \mu d\mu.$$

Para excluir la integración angular (por  $\mu$ ), se define la función de transmisión en flujo como

$$\mathfrak{J}_v^f = 2 \int_0^1 \mathfrak{J}_v(\tau/\mu) \mu d\mu. \quad (18.22)$$

Entonces, la expresión anterior se escribe

$$F_v^\uparrow(\tau) = \pi B_v \tau_s \mathfrak{J}_v^f(\tau_l - \tau) - \int_\tau^{\tau^*} \pi B_v(\tau') \frac{d}{d\tau'} \mathfrak{J}_v^f(\tau' - \tau) d\tau'. \quad (18.23)$$

Para el flujo hacia abajo obtenemos;

$$F_v^\downarrow(\tau) = \pi B_v(\text{tope}) \mathfrak{J}_v^f(\tau) + \int_0^\tau \pi B_v(\tau') \frac{d}{d\tau'} \mathfrak{J}_v^f(\tau - \tau') d\tau'. \quad (18.23a)$$

Así se expresan los flujos monocromáticos hacia arriba y hacia abajo en un nivel dado. Aplicando las funciones de Planck, de transmisión rasa y su derivada.

Para facilitar los cálculos, las ecuaciones (18.23) y (18.23a) se transforman a continuación. Realizando la integración por partes, estas ecuaciones se escriben

$$F_v^\uparrow(\tau) = \pi B_v(\tau) + \int_\tau^{\tau^*} \mathfrak{J}_v^f(\tau' - \tau) \frac{d\pi B_v(\tau')}{d\tau'} d\tau' \quad (18.24)$$

$$F_v^\downarrow(\tau) = \pi B_v(\tau) - \pi B_v(0) \mathfrak{J}_v^f(\tau) - \int_0^\tau \mathfrak{J}_v^f(\tau - \tau') \frac{d\pi B_v(\tau')}{d\tau'} d\tau' \quad (18.24a)$$

(El ejercicio 1 tiene por objeto obtener este resultado). Las ecuaciones (18.24) y (18.24a) se han escrito mediante la función de transmisión “slab” y la derivada de la función de Planck.

Asumiendo que la temperatura de superficie  $T_s$  y la temperatura del aire situado inmediatamente arriba de la superficie son iguales, la función de Planck puede expresarse como

$$\pi B_v(\tau) = \pi B_v(\tau^*) - \int_{\tau}^{\tau^*} \frac{d\pi B_v(\tau')}{d\tau'} d\tau'$$

Esto es fácil de verificar realizando la integración:

$$-\int_{\tau}^{\tau^*} \frac{d\pi B_v(\tau')}{d\tau'} d\tau' = -\int_{\tau}^{\tau^*} d\pi B_v(\tau') = -\pi B_v(\tau') \Big|_{\tau}^{\tau^*} = -\pi B_v(\tau^*) + \pi B_v(\tau)$$

Además, integrando en términos del camino  $u$  (figura 18.8(b)) y teniendo en cuenta que cuando  $\tau' \rightarrow \tau$ ,  $u' \rightarrow u$  y cuando  $\tau' \rightarrow \tau^*$ ,  $u \rightarrow 0$ , y después de algunas manipulaciones, las ecuaciones anteriores se escriben

$$\begin{aligned} F_v^{\uparrow}(\tau) &= \pi B_v(\tau^*) - \int_u^0 \frac{d\pi B_v(u')}{du'} du' + \int_u^0 \mathfrak{J}_v^f(u - u') \frac{d\pi B_v(u')}{du'} du' = \\ &= \pi B_v(\tau^*) + \int_0^u \frac{d\pi B_v(u')}{du'} du' - \int_0^u \mathfrak{J}_v^f(u - u') \frac{d\pi B_v(u')}{du'} du' \Rightarrow \\ F_v^{\uparrow}(u) &= \pi B_v(T_s) + \int_0^u [1 - \mathfrak{J}_v^f(u - u')] \frac{d\pi B_v(u')}{du'} du'. \end{aligned} \quad (18.25)$$

Para el flujo hacia abajo,

$$F_v^{\downarrow}(u) = \pi B_v(u_l) [1 - \mathfrak{J}_v^f(u - u')] + \int_{u_l}^u [1 - \mathfrak{J}_v^f(u - u')] \frac{d\pi B_v(u')}{du'} du'. \quad (18.25a)$$

Para calcular las integrales en el lado derecho, la función de transmisión rasa debe ser determinada teórica o experimentalmente. Además, para determinar los flujos totales y la tasa de calentamiento, es necesario integrar las ecuaciones (18.25) y (18.25a) por el número de onda en todo el espectro infrarrojo.

### 18.3.8. Transferencia de radiación solar

La ecuación básica que gobierna la transferencia radiativa de onda corta de acuerdo con la expresión (18.15) es

$$\mu \frac{dI(\tau; \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau; \mu, \phi) - J(\tau; \mu, \phi), \quad (18.26)$$

donde el primer término en el lado derecho representa el debilitamiento del rayo solar debido a los procesos de absorción y esparcimiento, y el segundo es la función fuente.

Hay tres factores que contribuyen a la función fuente: la emisión, el esparcimiento múltiple de luz difusa y el esparcimiento singular de la irradiancia solar directa en el tope de la atmósfera,  $F_{\odot}$ , la cual se atenúa en el nivel  $\tau$ . Puesto que la emisión de onda corta de la Tierra es despreciable, la función de fuente se escribe

$$J(\tau, \mu, \phi) = \frac{\bar{\omega}}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^1 I(\tau, \mu', \phi') P(\mu, \phi, \mu', \phi') d\mu' d\phi' + F_{\oplus} P(\mu, \phi, -\mu_0, \phi_0) e^{-\tau/\mu_0} \right], \quad (18.27)$$

donde el primer término en el lado derecho representa el esparcimiento múltiple (luz difusa). Aquí  $P$  es la función de fase y representa la distribución angular de la energía esparcida como una función de la dirección. El segundo término es el esparcimiento singular de la radiación directa y se expresa como la atenuación exponencial del flujo solar en el tope de la atmósfera  $F_{\oplus}$  multiplicada por la función de fase. Para intuir el significado de la función fuente (18.27), en la capa  $z, z+dz$  (figura 18.10) se representa la incidencia de un rayo solar y de otro de luz difusa originado en un punto cualquiera de la atmósfera, pero que al final toma la misma dirección (y sentido contrario) del rayo de luz directa.

La función de fase depende del ángulo de esparcimiento  $\theta$  (figura 18.6). Este ángulo depende de la dirección del rayo incidente  $(\mu', \phi')$  para el rayo difuso, de la dirección del rayo directo solar  $(-\mu_0, \phi_0)$  y de la dirección del rayo emergente o esparcido  $(\mu, \phi)$ .

Para efectos de cálculo, la función de fase debe ser expresada en términos de funciones matemáticas conocidas.

El albedo de esparcimiento singular  $\bar{\omega}$  es definido como el cociente entre la sección transversal de esparcimiento  $\sigma_s$  y la sección transversal de extinción



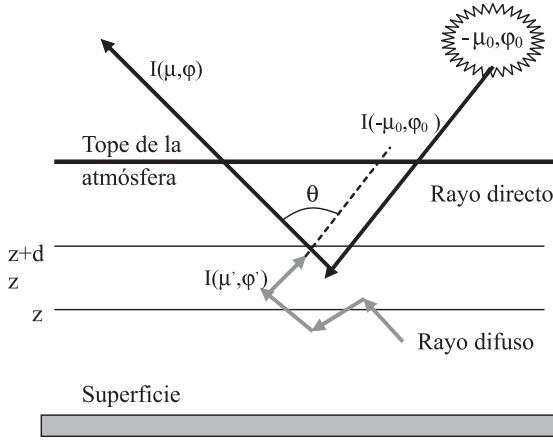


Figura 18.10. Representación de la función fuente en la transferencia de radiación solar. Adaptado de Liou (1992).

$\sigma_c$ . El albedo, la función de fase y la sección transversal de extinción son parámetros fundamentales en la transferencia radiativa de onda corta.

#### 18.3.8.1. Solución para la ecuación de transferencia de radiación solar

La expresión (18.26), junto con (18.27), es una ecuación diferencial integral de primer orden. Para solucionarla se recurre a expansiones en series por armónicos esféricos, similares a las analizadas en los capítulos 11 y 14. Esto permite transformar la ecuación original en un sistema de ecuaciones diferenciales comunes. Por ejemplo, la función de fase puede ser expresada como

$$P(\cos \theta) = \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l P_l \cos \theta,$$

donde  $P_l$  son polinomios de Legendre y  $\tilde{\omega}_l$  son los coeficientes de la expansión. Usando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, estos coeficientes se determinan como

$$\tilde{\omega}_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P(\cos \theta) P_l(\cos \theta) d(\cos \theta), \quad l = 0, 1, \dots, N \quad (18.28)$$

Usando una relación de geometría esférica y el teorema de adición de los polinomios de Legendre, la expansión para la función de fase puede ser

expresada en términos de las direcciones  $\mu, \varphi, \mu', \varphi'$ ,

$$P(\mu, \varphi, \mu', \varphi') = \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi' - \varphi), \quad (18.29)$$

donde  $P_l^m(\mu)$  son los polinomios asociados de Legendre,  $\tilde{\omega}_l^m$  son los coeficientes de la expansión, el índice  $m$  describe la variación azimutal y  $l$  la zenital. De manera similar a la función de fase, se expande la intensidad de la radiación dispersa,

$$I(\tau, \mu, \varphi) = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi_0 - \varphi).$$

Sustituyendo estas dos expansiones en la ecuación (18.26),

$$\begin{aligned} & \mu \frac{d \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi_0 - \varphi)}{d\tau} = \\ & = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi_0 - \varphi) - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu') \cos m(\varphi_0 - \varphi) \times \\ & \quad \times \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi' - \varphi) d\mu' d\varphi' - \\ & \quad - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi). \quad (18.30) \end{aligned}$$

Integrando por  $d\varphi'$  el segundo término en el lado derecho de esta expresión y aplicando la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre,

este término se escribe

$$\begin{aligned}
& -\frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu') \cos m(\varphi_0 - \varphi) \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \times \\
& \quad \times \cos m(\varphi' - \varphi) d\mu' d\varphi' \\
& = \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m \cos m(\varphi_0 - \varphi) P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \times \\
& \quad \times \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^N \cos m(\varphi' - \varphi) d\varphi' \\
& = -\frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m \cos m(\varphi_0 - \varphi) P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu'
\end{aligned}$$

Hemos utilizado la propiedad:  $\int_0^{2\pi} \cos m(\varphi' - \varphi) d\varphi' = \begin{cases} 0 & \text{para } m \neq 0 \\ 2\pi & \text{para } m = 0 \end{cases}$

Utilizando este resultado, la ecuación (18.30) se escribe

$$\begin{aligned}
\mu \frac{d \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi_0 - \varphi)}{d\tau} & = \sum_{m=0}^N I^m(\tau, \mu) \cos m(\varphi_0 - \varphi) \\
& - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m \cos m(\varphi_0 - \varphi) P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\
& - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0) \cos m(\varphi_0 - \varphi).
\end{aligned}$$

Esta expresión puede escribirse como un sistema de  $N + 1$  ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{dI^m(\tau, \mu)}{d\tau} & = I^m(\tau, \mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) \int_{-1}^1 P_l^m(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\
& - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{m=0}^N \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l^m P_l^m(\mu) P_l^m(-\mu_0).
\end{aligned}$$

Para el cálculo del flujo solar es suficiente considerar la ecuación de transferencia promediada azimutalmente. Haciendo  $m = 0$  y omitiendo por sim-

plicidad la escritura del superíndice 0, la ecuación anterior se escribe

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI^m(\tau, \mu)}{d\tau} = I^m(\tau, \mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=m}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') I^m(\tau, \mu') d\mu' \\ - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{m=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) P_l(-\mu_0) \end{aligned} \quad (18.31)$$

En este caso, la función de fase se obtiene de (18.29),

$$P(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\mu, \varphi; \mu', \varphi') d\varphi' = \begin{cases} \sum_{m=0}^N \tilde{\omega}_l P_l(\mu) P_l(\mu'), & m = 0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases} \quad (18.32)$$

Se puede entonces reescribir formalmente a (18.31) como,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') P(\mu, \mu') d\mu' \\ - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0} P(\mu, -\mu_0). \end{aligned} \quad (18.33)$$

Como resultado parcial, al usar la descomposición en serie, se simplificó la ecuación original para la transferencia de radiación de onda corta, eliminando de ella la dependencia en la dirección azimutal.

Las aproximaciones más sencillas y más popularmente usadas para resolver la complicada ecuación integro-diferencial para la transferencia radiativa solar son la de dos corrientes, la *aproximación de Eddington* y variantes de estos dos esquemas. La aproximación de Eddington examinada en lo sucesivo de este capítulo, utiliza la expansión en polinomios de Legendre (18.32) para la función de fase y una expansión similar para la intensidad de tipo

$$I(\tau, \mu) = \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu)$$

Colocando esta expresión y la función de fase (18.32) en (18.33),

$$\begin{aligned} \mu \frac{d \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu)}{d\tau} = \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu') \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\mu) \times \\ \times P_l(\mu') d\mu' - \frac{\bar{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{l=0}^N \bar{\omega}_l P_l(\mu) P_l(-\mu_0). \end{aligned} \quad (18.34)$$

El segundo término en el lado derecho se puede simplificar integrando por  $\mu'$  Teniendo en cuenta la condición de ortogonalidad de los polinomios de Legendre, el resultado de la integración de este término es

$$\begin{aligned} & \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 \sum I_l(\tau) P_l(\mu') \sum_{l=0}^N \omega_l P_l(\mu) P_l(\mu') d\mu' = \\ & = \frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu) \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l \int_{-1}^1 P_l(\mu') P_l(\mu') d\mu' = -\frac{\tilde{\omega}}{2} \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu) \tilde{\omega}_l \frac{2}{2l+1}, \end{aligned}$$

donde ha sido usada la propiedad (11.20):

$$\int_{-1}^1 P_l(\mu') P_k(\mu') d\mu' = \begin{cases} 0 & \text{para } l \neq k \\ \frac{2}{2l+1} & \text{para } l = k \end{cases}$$

Con este resultado, la expresión (18.34) se escribe

$$\begin{aligned} \mu \frac{d \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu)}{d\tau} &= \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2l+1} \sum_{l=0}^N \tilde{\omega}_l I_l(\tau) P_l(\mu) \\ &\quad - \frac{\bar{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0} \sum_{l=0}^N \bar{\omega}_l P_l(\mu) P_l(-\mu_0). \quad (18.34a) \end{aligned}$$

Note que la parte izquierda de (18.34a) también puede escribirse

$$\begin{aligned} & \mu \frac{d \sum_{l=0}^N I_l(\tau) P_l(\mu)}{d\tau} \\ &= \frac{d \sum_{l=0}^N \mu I_l(\tau) P_l(\mu)}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left[ I_1(\tau) \mu P_1(\mu) + I_2(\tau) \mu P_2(\mu) + \dots \right. \\ &\quad \left. + I_{l-1}(\tau) \mu P_{l-1}(\mu) + I_l(\tau) \mu P_l(\mu) + I_{l+1}(\tau) \mu P_{l+1}(\mu) + \dots \right] \end{aligned}$$

Para los tres últimos términos de la expresión anterior se aplicará una fórmula de recurrencia similar a (11.21) para los polinomios de Legendre de diferente grado,

$$\begin{aligned} I_{l-1} \mu P_{l-1} &= \frac{l}{2l-1} P_l + \frac{l-1}{2l-1} P_{l-2}, I_l \mu P_l = I_l \left( \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1} + \frac{l}{2l+1} P_{l-1} \right), \\ I_{l+1} \mu P_{l+1} &= \frac{l+2}{2l+3} P_{l+2} + \frac{l+1}{2l+3} P_l. \end{aligned}$$

Sustituyendo estos valores en la parte izquierda de (18.34a), multiplicando toda la expresión por  $P_k(\mu)$  y teniendo en cuenta la condición de ortogonalidad (11.20), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{l}{2l-1} \frac{dI_{l-1}}{d\tau} + \frac{l+1}{2l+3} \frac{dI_{l+1}}{d\tau} = I_l \left( 1 - \frac{\bar{\omega}\bar{\omega}_l}{2l+1} \right) - \frac{\bar{\omega}}{4\pi} \bar{\omega}_l P_l(-\mu_0) F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0};$$

$$l = 0, 1, 2, \dots, N.$$

donde  $P_0(\mu) = 1, P_1(-\mu_0) = -\mu_0$ . En la aproximación de Eddington,  $N = 1$ . Haciendo  $l = 0$  y  $l = 1$ , respectivamente, de la expresión anterior se obtienen dos ecuaciones:

$$0 + \frac{1}{3} \frac{dI_1}{d\tau} = I_0(1 - \tilde{\omega}\tilde{\omega}_0) - \frac{\bar{\omega}}{4\pi} \bar{\omega}_0 F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0}, \text{ para } l = 0,$$

$$\frac{dI_0}{d\tau} + 0 = I_1 \left( 1 - \frac{\bar{\omega}\bar{\omega}_1}{3} \right) + \frac{\bar{\omega}}{4\pi} \bar{\omega}_1 \mu_0 F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0}, \text{ para } l = 1,$$

Teniendo en cuenta que  $\bar{\omega}_0 = 1$  y denotando  $\bar{\omega}_1 = 3g$ , estas ecuaciones se escriben

$$\frac{1}{3} \frac{dI_1}{d\tau} = (1 - \tilde{\omega})I_0 - \frac{\bar{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0}$$

$$\frac{dI_0}{d\tau} = I_1(1 - \tilde{\omega}g) + \frac{\bar{\omega}3g}{4\pi} \mu_0 F_{\oplus} e^{-\tau/\mu_0}.$$

Aplicando un procedimiento matemático similar al usado para derivar la ecuación ondulatoria (12.18) o sea, diferenciando por  $\tau$  y sustituyendo, se puede obtener una ecuación de segundo grado para uno de los armónicos:

$$\frac{d^2 I_0}{d\tau^2} = K^2 I_0 - \mathcal{X} e^{-\tau/\mu_0},$$

donde

$$\mathcal{X} = 3\bar{\omega}F_{\oplus}(1 + g - \bar{\omega}g)/4\pi$$

y el valor propio es

$$K^2 = (1 - \bar{\omega})(1 - \bar{\omega}g).$$

La solución para el armónico  $I_0$  es

$$I_0 = K e^{k\tau} + H e^{-k\tau} + \Psi e^{-\tau/\mu_0}, \quad (18.35)$$

donde

$$\Psi = 3 \frac{\bar{\omega}}{4\pi} F_{\oplus} (1 + g(1 - \bar{\omega})) / (k^2 - 1/\mu_0^2).$$

De manera similar se obtiene la solución para el armónico  $I_1$ :

$$I_1 = aK e^{k\tau} - aH e^{-k\tau} - a\xi e^{-\tau/\mu_0}, \quad (18.36)$$

donde  $a = 3(1 - \tilde{\omega})/(1 - \tilde{\omega}g)$  y

$$\xi = \frac{3\tilde{\omega}}{4\pi} \frac{F_{\oplus}}{\mu_0} [1 + 3(1 - \tilde{\omega})\mu_0^2] / (k^2 - 1/\mu_0^2).$$

Las constantes de integración  $K$  y  $H$  se obtienen de condiciones de frontera apropiadas. Por último, los flujos hacia arriba y hacia abajo están dados por

$$F^{\uparrow}(\tau) = 2\pi \int_0^1 (I_0 + \mu I_1) \mu d\mu = \pi \left( I_0 + \frac{2}{3} I_1 \right) \quad (18.37)$$

$$F^{\downarrow}(\tau) = 2\pi \int_{-1}^0 (I_0 + \mu I_1) \mu d\mu = \pi \left( I_0 - \frac{2}{3} I_1 \right). \quad (18.37a)$$

## 18.4. Parametrización de la radiación

En los modelos atmosféricos, es importante parametrizar el efecto calorífico de la radiación en cada punto de grilla. Para ello, la atmósfera se divide en un número finito de niveles y el efecto calorífico se expresa a través del flujo neto de radiación en cada nivel.

### 18.4.1. Parametrización de la radiación infrarroja

Una de las mayores dificultades en la aplicación de las ecuaciones (18.25) y (18.25a) en la atmósfera es el cálculo de la función de transmisión debido a que el coeficiente de absorción cambia rápidamente con la longitud de onda. Para determinar esta función y calcular los flujos, se han propuesto varios métodos. Entre ellos, el modelo de banda ancha, Ramanathan (1976), permite tomar las integrales (18.25) y (18.25a) analíticamente. Este método se emplea en modelos climáticos como el CCM3 (CAM).

Para el cálculo de los flujos en el modelo CAM, se escriben las ecuaciones (18.25) y (18.25a) para la variable independiente  $p$  (presión). Además se les realiza la siguiente transformación:

Multiplicando y dividiendo el último término de la expresión (18.25) por  $\frac{dB_v(p')}{dT(p')}$  e integrando por la longitud de onda, esta ecuación se escribe

$$F^\uparrow(p) = B(T_s) - \int_p^{p_s} \alpha(p, p') dB(p'),$$

donde  $\alpha$  es absorptividad, igual a

$$\alpha(p, p') = \frac{\int_0^\infty (dB_v(p')/dT(p')) [1 - \mathfrak{J}_v(p, p')] dv}{dB(p')/dT(p')}.$$

$B(T_s) = \sigma T^4$  es la relación de Stefan Boltzmann.

Para transformar la ecuación (18.25a), el primer término del lado derecho se multiplica y se divide entre la función de Planck; al segundo término se le aplica la transformación anterior. Entonces la ecuación (18.25a) se escribe como,

$$F^\downarrow(p) = B(0)\varepsilon(0, p) + \int_0^p \alpha(p, p') dB(p'),$$

donde  $\varepsilon$  es emisividad,

$$\varepsilon(0, p) = \frac{\int_0^\infty B_v(\mathfrak{J}_\infty)(1 - \mathfrak{J}_v(0, p)) dv}{B(0)}.$$

De acuerdo con estas ecuaciones, para encontrar los flujos en cada nivel es necesario tener soluciones para la siguiente integral:

$$\int_0^\infty (1 - \mathfrak{J}_v^f) F(B_v) dv,$$

donde  $F(B_v)$  es la función de Planck para emisividad la derivada de esta función para absorbencia.

La aproximación de banda ancha asume que el rango espectral de absorción de un gas es limitado a un rango en número de onda  $v$  relativamente pequeño; por lo tanto, puede ser evaluado en el centro de la banda. O sea,

$$\int_{v_1}^{v_2} (1 - \mathfrak{J}_v^f) F(B_v) dv = F(B_{\bar{v}}) \int_{v_1}^{v_2} (1 - \mathfrak{J}_v^f) dv = F(B_{\bar{v}}) A,$$



donde  $A = \int_{v_1}^{v_2} (1 - \mathfrak{I}_v^f) dv$  se calcula analíticamente. En la práctica, la expresión se calcula para cada gas particular y luego se suma el efecto de todos los gases considerados en el infrarrojo.

#### 18.4.2. Cálculo de la tasa de enfriamiento radiativo infrarrojo

Para el cálculo de la tasa de enfriamiento en el infrarrojo, la atmósfera se divide en capas y se calcula el flujo neto en los límites inferior y superior de cada nivel. Luego se calcula la pérdida neta de energía radiante para cada capa. Finalmente, se calcula la tasa de enfriamiento a través de la divergencia del flujo.

Puesto que la radiación térmica infrarroja comienza en la superficie terrestre, entonces, para una altura  $p$ , el flujo neto de radiación (figura 18.11) es

$$F(p) = F^\uparrow(p) - F^\downarrow(p).$$

De manera semejante, para una altura  $p + \Delta p$ , el flujo neto es

$$F(p + \Delta p) = F^\uparrow(p + \Delta p) - F^\downarrow(p + \Delta p).$$

Entonces, la pérdida neta de radiación en cada capa es

$$\Delta F = F(p + \Delta p) - F(p)$$

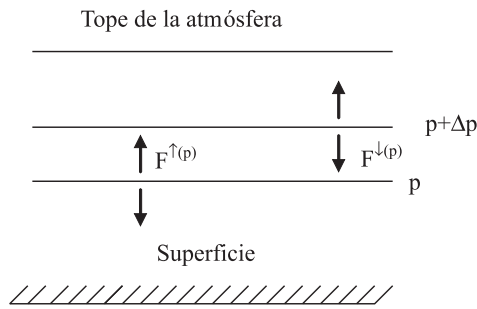


Figura 18.11. Esquema para el cálculo del flujo neto en los límites inferior y superior de cada capa de la atmósfera.

La tasa de calentamiento se calcula de acuerdo con el principio de conservación de la energía: la pérdida o ganancia de energía radiante debe

ser consumida para enfriar o calentar la capa dada. Entonces, la tasa de enfriamiento se escribe

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{\Delta F}{\Delta z}$$

(Nótese que si en una capa dada sale más energía que la que entra [ $F(p + \Delta p) > F(p)$ ], el nivel se enfría. Si la energía que sale es menos que la que entra [ $F(p + \Delta p) < F(p)$ ], el nivel se calienta).

### 18.4.3. Parametrización de la radiación solar

Las funciones de fase típicas de esparcimiento particulado son fuertemente asimétricas. Esta particularidad no es bien reflejada por la aproximación de Eddington analizada en el párrafo 18.3.8.1 (Joseph & otros, 1976). Una mejoría sustancial se puede lograr utilizando una función Delta Dirac para aproximar la función de fase. Por esta razón en algunos modelos, como el CCM3 se utiliza la aproximación delta-Eddington.

Para aplicar este esquema, la atmósfera se compone de un conjunto vertical discreto de niveles homogéneos horizontalmente. Para cada nivel y para cada intervalo espectral se especifica la irradiancia solar, la reflectividad de la superficie para la radiación directa y difusa, y el coseno del ángulo zenital.

El método evalúa la solución de delta-Eddington para la reflectividad y transmisividad en cada nivel. Además, Los niveles son combinados entre sí para obtener el esparcimiento múltiple entre ellos. Esto permite la evaluación de los flujos espectrales hacia arriba y hacia abajo en cada interfase de los niveles. Este procedimiento se repite para todos intervalos espectrales considerados en el modelo CCM3, 7 en el  $O_3$ , 7 en el  $H_2O$  y 3 en el  $CO_2$ . Finalmente, la tasa de calentamiento se calcula a partir de la diferencia entre flujos a través de los niveles.

El método de delta-Eddington permite la absorción gaseosa debida a  $O_3$ ,  $H_2O$ ,  $CO_2$  y  $O_2$ ; también se incluye el esparcimiento molecular y la absorción/esparcimiento debida a las gotas de nube. En este último caso, las propiedades ópticas son prescritas en términos del camino de agua de nube (cloud water path) en  $kg\ m^{-2}$  y radio efectivo del espectro  $re$  (Kiehl & otros, 1996).

Las soluciones de delta-Eddington para cada nivel y para el coseno del ángulo zenital 0 (en el caso de esparcimiento singular) se escriben de manera similar a las ecuaciones (18.35) y (18.36) (Coakley & otros, (1983); Joseph

& otros, 1976):

$$R(\mu_0) = (\alpha - \gamma)\bar{T}e^{-\tau^*/\mu_0} + (\alpha + \gamma)\bar{R} - (\alpha - \gamma) \quad (18.38)$$

$$T(\mu_0) = (\alpha + \gamma)\bar{T}(\alpha - \gamma)\bar{R}e^{-\tau^*/\mu_0} - (\alpha + \gamma - 1)e^{-\tau^*/\mu_0}, \quad (18.39)$$

donde,

$$\bar{R} = (u + 1)(u - 1)(e^{\lambda\tau^*} - e^{-\lambda\tau^*})N^{-1}$$

$$\bar{T} = 4uN^{-1}$$

$$\alpha = \frac{3}{4\pi}\omega^*\mu_0\left[\frac{1 + g^*(1 - \omega^*)}{1 - \lambda^2\mu_0^2}\right]$$

$$\gamma = \frac{1}{2}\omega^*\left[\frac{1 + 3g^*(1 - \omega^*)\mu_0^2}{1 - \lambda^2\mu_0^2}\right]$$

$$N = (u + 1)^2e^{\lambda\tau^*} - (u - 1)^2e^{-\lambda\tau^*}$$

$$u = \frac{3}{2}\frac{1 - \omega^*g^*}{\lambda}$$

$$\lambda = \sqrt{3(1 - \omega^*)(1 - \omega^*g^*)}$$

Los parámetros con superíndice asterisco indican variables no dimensionales. Seguidamente se escriben fórmulas para la combinación de niveles, lo cual permite determinar el esparcimiento múltiple. Luego, los flujos hacia arriba y hacia abajo se calculan mediante las fórmulas

$$F_{up} = \frac{e^{-\tau^*/\mu_0}R_{up}(\mu_0) + [T_{dn}(\mu_0) - e^{-\tau^*/\mu_0}]\bar{R}_{up}}{1 - \bar{R}_{dn}\bar{R}_{up}}$$

$$F_{dn} = \frac{e^{-\tau^*/\mu_0} + [T_{dn}(\mu_0) - e^{-\tau^*/\mu_0}] + e^{-\tau^*/\mu_0}\bar{R}_{up}(\mu_0)\bar{R}_{dn}}{1 - \bar{R}_{dn}\bar{R}_{up}}.$$

Los flujos espectrales hacia arriba y hacia abajo se suman para obtener el flujo integral por el espectro. Finalmente, estos flujos son diferenciados con el objeto de producir la tasa de calentamiento.

### Ejercicio

Halle la fórmula (18.24a) integrando por partes la expresión (18.23a).

# Bibliografía

- Anthes, R. A. 1977. "A cumulus parameterization scheme utilizing a one dimensional cloud model." *Mon. Wea. Rev.*, no. 105:270–286.
- Arakawa A., W. H. Schubert. 1974. "Interaction of cumulus cloud ensemble with the large scale environment. Part I." *J. Atmos. Sci.*, no. 31:674–701.
- Aria, S. P. 1988. *Introduction to micrometeorology*. San Diego, Cal: Acad. Press.
- Bates J.R., A. McDonald. 1982. "Multilpy stream, semi-Lagrangian advective schemes: Analysis and applications to a multilevel primitive equation model." *Mon. Wea. Rev.*, no. 110:1831–1842.
- Belov, P.Ñ. 1975. *Métodos numéricos para la predicción del tiempo (en ruso)*. Leningrad: Hydrometizdat.
- Blackadar, A. K. 1979. "High resolution models for the planetary boundary layer. Advances in Environmental sciences and engineering,1, No 1, Pfaffin and Ziegler Eds." *Gordon and Briech Sci.*, pp. 50–85. New York.
- . 1997. *Turbulence and diffusion in the atmosphere*. Berlin: Springer-Verlag.
- Chandrasekhar, S. 1950. *Radiative Transfer*. New York: Dover.
- Charney J. G., A. Eliassen. 1964. "On the growth of hurricane depression." *J. Atmos. Sci.*, no. 21:68–75.
- Charney J. G., R. Fjortoft, and J. von Neumann. 1950. "Numerical integration of the barotropic vorticity equation." *Tellus*, no. 2:237–254.
- Coakley J. A., R. D. Cess, and F. B. Yurevich. 1983. "The effect of tropospheric aerosol on the Earth's radiation budget: A parameterization for climate models." *J. Atmos. Sci.*, no. 40:116–138.

- Cotton, W. R. 1972. "Numerical simulation of precipitation development in supercooled cumuli. Part I." *Mon Wea Rev.*, no. 100:757–763.
- Cotton W., R. Anthes. 1989. "Storm and cloud dynamics." Technical Report, Acad. Press, London.
- Deardorff, J. W. 1972. "Parameterization of the planetary boundary layer for use in general circulation models." *Mon Wea Rev.*, no. 100:93–106.
- Eliassen E., B. Machenhauer, E. Rasmussen. 1970. "On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields." Technical Report 2, Institut for teoretiks meteorologi, University of Copenhagen.
- Emmanuel, K. A. 1994. "Atmospheric convection." Technical Report, Oxford University, New York.
- Feagle R. G., J.A. Bussinger. 1980. "An introduction to Atmospheric Physics." Technical Report, Acad. Press, Orlando Fla.
- Frank, N. L. 1969. "The "inverted V" pattern ¿an Easterly wave?" *Mon Wea Rev.*, no. 97:130–140.
- Gandin, L. S. 1963. "Objective analysis of meteorological fields." Technical Report, NTISTT-65-50007, Jerusalén. Translated from Russian, Israel program for scientific traslations.
- Gandin L., A. Dubov. 1968. *Métodos numéricos para la predicción del tiempo a corto plazo*. Leningrad: Hydrometizdat.
- Garrat, J. R. 1992. "The atmospheric boundary layer." Technical Report, Cambridge University Press, Great Britain.
- Gordon, A. H. 1965. *Elementos de meteorología dinámica*. México: Uteha.
- Gray, W. M. 1979. "Hurricanes, their formation, structure and likely role in the tropical circulation." Edited by O. B. In Shaw, "*Meteorology in the tropical Oceans, Conference*". Royal Met Soc. Bracknell. Aug. 1978.
- Grell G. A., J. Dudhia, and D. R. Stauferr. 1995. "A description of the Fifth Generation Penn State/NCAR Mesoscale model (MM5)." Technical Report, NCAR/TN-398+STR NCAR.
- Gressman, G. P. 1959. "An operational objective analysis system." *Mon Wea Rev.*, no. 87:367–374.
- Haltiner G. J., F. L. Martin. 1957. *Dynamical and physical meteorology*. New York: McGraw-Hill.
- Haltiner G. J., F. L. Martin, and R. T. Williams. 1980. *Numerical prediction and Dynamic meteorology*. New York: John Wiley & Sons.

- Hastenrath, S. 1996. *Climate Dynamics of the tropics*. Dordrecht, The Netherlands: Updated Ed. Kluwer Acad. Publishers.
- Hastenrath S., P. J. Lamb. 1977. "Climate Atlas of the tropical Atlantic and eastern Pacific Oceans." Technical Report, University of Wisconsin Press.
- . 1978. "On The dynamics and climatology of surface flow over the equatorial oceans." *Tellus*, no. 30:436–448.
- Holton. 1992. *An introduction to the dynamic meteorology*. Third. London: Acad. Press.
- Holtslag A. A., C. H. Moeng. 1991. "Eddy diffusivity and countergradient transport in the convective atmospheric layer." *J. Atmos. Sci.*, no. 48:1690–1698.
- Homann. 1936. "Einfluss grosser Zähigkeit bei strömung um Zylinder." *Forsch. Ing. Wes*, no. 7:1–10.
- Hough, S. S. 1898. "On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of Tides and the general integration of Laplace's dynamic equation." *Phil. Trans. Royal Soc.*, no. 191:139–185.
- Jacobson, M. Z. 1999. *Fundamentals of Atmospheric modeling*. Third Press. London: Cambridge University.
- Joseph J. H., W. J. Wiscombe, and J. A. Weinman. 1976. "The delta Eddington approximation for radiative flux transfer." *J. Atmos. Sci.*, no. 33:2452–2459.
- Kaimal J. C., J. J. Finnigan. 1994. *Atmospheric boundary layer flows*. New York: Oxford University.
- Kasahara, A. 1961. "A numerical experiment on the development of a tropical cyclone." *J. Meteor*, no. 18:259–282.
- . 1962. "The development of forced convection caused by the released latent heat of condensation in a hydrostatic atmosphere." Edited by O. B. In Shaw, *Int. Sum., Num. Weather prediction Tokyo*. Meteor. Soc Japan.
- . 1996. Chapter On the origin of cumulus parameterization for numerical prediction models of *General circulation model development*, 199–224. Acad. Press.
- Kessler, E. 1969. "On the distribution and continuity of the water substance in the atmosphere." *Amer. Met. Soc.* 10, no. 32.
- Kiehl J. T., J. J. Hack, G. B. Bonan B. A. Boville B. P. Briegleb D. L. Williamson, and P.J. Rasch. 1996. "Description of the NCAR

- Community climate model (CCM3).” Technical Report, NCAR/TN-420+STR NCAR.
- Kiselnikova V. Z., E. M. Pekelis, D. Ja. Pressman N. F. Veltishchev, and A. A. Zhelnin. 1987. “Development of mesoscale models for weather elements prediction.” Psm 23, World meteorological organization.
- Kivel, I. A. 1940. “Application to meteorology, the mechanics’ equation of a baroclinic liquid.” *Izvestia acad. Nauk, geographic and geofis*, no. 5:628. (en ruso).
- Kousky, V. E. 1979. “Frontal influences on northeast Brasil.” *Mon. Wea. Rev.*, no. 107:1140–1153.
- Krishnamurti, T.Ñ. 1979. “Compendium of meteorology, Part 4- Tropical meteorology.” *World Met.Org.*, no. 364.
- Krishnamurti T.Ñ., H. S. Bedi, and V.M. Hardiker. 1998. “An introduction to the global spectral modeling.” Technical Report, Oxford University, New York.
- Krishnamurti T.Ñ., S Low-Nam, and R. Pasch. 1983. “Cumulus parameterization and rain fall rates II.” *Mon. Wea. Rev.*, no. 111:816–828.
- Kuo, H. L. 1965. “On formation and intensification of tropical cyclones through latent heat release by cumulus convection.” *J. Atmos. Sci*, no. 22:40–63.
- Laixtman, D. L. 1976. *Meteorología dinámica (en ruso)*. Leningrad: Hydrometizdat.
- Liou, K.Ñ. 1980. *An introduction to atmospheric radiation*. Orlando, Fla.: Acad. Press Inc.
- . 1992. *Radiation and Cloud Processes in the atmosphere*. New York: Oxford University.
- Lord, S. 1982. “Interaction of a cumulus ensemble with the large scale environment. Part III: semi-prognostic test of the Arakawa-Schubert parameterization.” *J. Atmos. Sci*, no. 39:88–103.
- Machenhauer, B. 1979. *Método espectral. En “Numerical methods used in atmospheric models”*. Volume II. Edited by World Met. Org. Garp Publication series.
- Madala, R. V. 1981. *Finite difference techniques for vectorized fluid dynamics calculations*. Edited by D. L. New York: Springer-Verlag.
- Marshal J. S., W. M. Palmer. 1948. “The distribution of raindrop with size.” *J. Meteor.*, no. 5:165–166.

- Mesa S. O. J., G. Poveda J., and L. F. Carvajal S. 1997. *Introducción al clima de Colombia*. Edited by D. L. Medellín: Univeridad Nacional de Colombia.
- Messinger F., A. Arakawa. 1976. "Numerical methods used in atmospheric models." Technical Report 17, GARP, WMO/ICSU Joint organizing Committee.
- Orszag, S. A. 1970. "A transform method for calculation of vector coupled sums: application for the spectral form of the vorticity equation." *J. Atmos. Sci.*, no. 27:890–895.
- Pallman, A. 1968. "The sinoptics dynamics and energetics of the temporal using satellite radiation data." Technical Report, Saint L. Univ.
- Panofsky H. A., J. A. Dutton. 1984. *Atmospheric turbulence. Models and methods for engineering applications*. Edited by D. L. USA: John Wiley & Sons Inc.
- Philander, S. 1990. *El Niño, La Niña, and the Southern Oscillation*. Acad. Press.
- Phillips, N. A. 1956. "The general circulation of the atmosphere: A numerical experiment." *Quart. Journ. Roy. Met. Soc.*, no. 82:123–164.
- Pielke, R. A. 1984. *Mesoscale meteorological modeling*. Acad. Press.
- Piskunov, N. 1977. *Cálculo diferencial integral*. Sexta. Volume II. Moscú: Mir.
- Platzman, G. W. 1960. "The spectral form of the vorticity equation." *J. Meteor.*, no. 17:31–37.
- Pruppacher H. R., J. D. Klett. 1997. *Microphysics of cloud and Precipitation*. London: Kluber Acad. Publishers.
- Ramanathan V., P. Downey. 1986. "A non-isothermal emissivity and absorptivity formulation for water vapor." *J. Geosph.*, no. 91:8649–8666.
- Resnick R., D. Halliday. 1984. *Física 2*. cuarta. São Paulo: Livros Técnicos e Científicos Editora.
- Richardson, L. F. 1922. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge Univeersity Press. Reprinted Dover.
- Riegel, C.A. 1992. *Fundamentals of atmospheric dynamics and thermodynamics*. Co. Singapore: Word Scientific Publish.
- Riehl. 1979. *Climate and weather in the tropics*. London: Acad Press.



- Rossby, C. G. 1939. "Relation between variations in the intensity on the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi permanent centers of action. J. Marine." *J. Geosph.*, no. 2:38–55.
- Silberman, I. 1954. "Planetary waves in the atmosphere." *J. Meteor.*, no. 11:27–34.
- Smagorinsky, J. 1962. "A primitive equation model including condensation process." *On Numerical weather prediction*. Meteor. So. Japan., Tokyo.
- Smirnov, V. 1974. *Curso de matemática superior*. Volume II. Moscú: Nauka. (en ruso).
- Steiner, J. T. 1972. "A three dimensional model of cloud development." *J. Atmos. Sci.*, no. 30:414–435.
- Sunquist, H. 1978. "A parameterization for non convective condensation scheme Stull, R. B." In *Boundary layer meteorology*. Dordrecht: Kluwer Akad.
- Syono, S. 1962. "A numerical experiment of the formation of tropical cyclone." *Int. Sum., Num. Weather prediciton Tokyo*. Meteor. Soc Japan.
- Tatsumi, Y. 1984. *Time integration methods used in atmospheric models. Lectures presented on limited area numerical weather prediction models for computers of limited power*. Erice It. 1-14 oct. 1984. WMO, short and medium range prediction research publication series.
- Vogelezang D., A. Hlotslag. 1996. *Evaluations and model impacts of alternative boundary layer hight formulations*. Boundary Layer Meteorology.
- Wiin-Nielsen, A. 1974. "Compendio de meteorología Vol. I, Parte I, Meteorología Dinámica." Technical Report 364, OMMB.
- Wilhelmson R. B., J. Klemp. 1978. "A numerical study of storm splitting that leads to long lived storms." *J. Atmos. Sci.*, no. 39:1466–1483.
- Zhang D. L., R. A. Anthes. 1982. "A high resolution model of the planetary boundary layer: Sensitivity test and comparison with SESAME-79 data." Technical Report 21, J. Appl. Met.

# Índice

- Ángulo sólido, 284–286
- Índice de Showalter, 107
- Advección, 28, 29, 99, 101, 122, 208, 211, 277
- Análisis de escala, 73, 77, 82, 122
  - objetivo, 87
- Anticiclónica, 93, 121
- Aproximación geostrófica, 78, 80
  - hidrostática, 82, 87, 123, 124, 189, 191, 239
- Arrastre, 115, 116, 256, 262, 263, 265, 267, 268, 273, 274
- Atmósfera, 35, 255
  - baroclínica, 34, 35, 125
  - barotrópica, 34, 100, 125
- Atmósfera turbulenta, 130, 133, 135, 138, 139
- Calor latente, 10, 85, 109, 110, 112, 255–257, 261
- Capa superficial, 15, 141–143, 147, 149, 157, 159, 272, 278
  - límite, 48, 129, 130, 137, 140–144, 146, 147, 165, 246, 271, 272, 277–280
- Celda de circulación, 9
  - de Hadley, 9, 10
  - de Walter, 9
- Ciclónica, 7, 14, 37, 88, 93, 94, 121
  - y vorticidad, 38
- Circulación, 30, 31, 35, 37, 38, 251
  - atmosférica, 3, 6, 7, 9, 252, 272
- Cizallamiento, 11, 39, 152–154, 190, 191
- Complejos convectivos de mesoescala, 12
- Convección, 15, 103, 113, 117, 154, 192, 246, 254, 256, 261, 272, 276, 279
  - atmosférica, 11, 103, 115, 240, 249, 255
  - local, 239
  - profunda, 11, 16, 239, 246
- Coordenada vertical, 47, 67–69, 228, 230–233, 235, 236, 243, 245
  - generalizada, 232, 233
- Coordenadas, 58
  - de presión normalizada, 237
  - esféricas, 165–168, 185
  - isobáricas, 67–71, 97, 104, 125, 231, 235–238
  - naturales, 38, 89–91
  - rectangulares locales, 60
  - sigma, 232, 237, 238
  - x,y,z, 120
- Corriente
  - ascendente, 115
  - en chorro, 143
  - función de, 26, 27, 167, 178, 213, 214, 227
  - línea de, 26, 39, 89
- Covarianza, 136, 140
- Criterio de Courant Fridrix Levy, 208
- Criterio de Courant Friedrichs Lewy, 209

- 
- Cuerpo negro, 283, 288, 289, 291
  - Desviación, 80, 135, 168, 169, 187
    - ageostrófica, 80, 81, 87, 123
    - estándar, 133
  - Diferencial total, 28, 32
  - Diferencias
    - centradas, 86, 87, 196, 200, 246
    - finitas, 40, 85, 86, 104, 193–195, 197, 198, 205, 210–214, 220, 227, 247, 252
  - Dinámica de fluidos, 5, 6, 27, 62
  - Dispersión numérica, 209
  - Divergencia, 16, 23–26, 63, 77, 81, 82, 103–106, 121, 123, 127, 129, 136, 147, 166, 230, 234, 235, 239, 252, 310
  - Ecuación
    - barotrópica, 220
    - de advección, 208
    - de balance de energía, 139, 235, 277
    - de Clausius-Klappeyron, 85, 112
    - de continuidad, 62, 63, 71, 85, 103, 105, 123, 136, 139
    - de estática, 52, 53, 67, 68, 70–72, 77, 97, 124–126, 234, 235, 237, 245
    - de estado, 33, 53, 64, 67, 77, 83, 107, 112, 124, 139, 245
    - de fricción, 200
    - de Laplace, 175
    - de Legendre, 175
    - de Poisson, 214, 216
    - de termodinámica, 64, 66, 71, 85, 109, 123–126, 138, 238, 245
    - de vorticidad, 103, 119–123, 125, 128, 167, 183, 212, 213, 222, 223, 227
    - del movimiento, 60, 69, 72, 87, 89, 91, 107, 139, 186, 237–239, 247, 249
    - omega, 103, 120, 126
    - ondulatoria, 181, 188, 191, 307
  - Energía, 7, 10, 58, 64, 110
    - cinética, 34, 114, 265, 267
    - de cinética, 113
    - de inestabilidad, 103, 106, 109, 113–115, 265
    - estática seca, 265
    - potencial disponible, 10, 114
  - Entropía, 64
  - Equilibrio hidrostático, 51, 52, 71, 82, 104, 107
  - Escala de Monin-Obukhov, 153, 154, 159, 276
  - Esparcimiento, 24, 240, 286–288, 290, 291, 297, 301, 311, 312
  - Espiral de Ekman, 143
  - Esquema
    - centrado, 199, 204–206, 208, 209, 213
    - de Euler, 196, 199, 200, 202, 203, 205–207
    - del trapecio, 200, 207
  - Estabilidad, 202, 206
    - computacional, 200–202
    - condicional, 111, 113
    - estática, 16, 102, 103, 106, 108, 109, 118, 120, 124
  - Filtro de Asselin, 204
  - Flujo, 6, 147, 286, 289, 301, 308
    - calor, 137
    - ciclostrófico, 94
    - de calor, 159, 161
    - de densidad monocromático, 284
    - de flotación, 148
    - de humedad, 137, 275
    - de masa, 62, 63, 262, 264
    - inercial, 94
    - turbulento, 136–138
  - Frecuencia, 209
    - angular, 181, 198

- 
- de Brunt-Vaisala, 108
  - Frentes fríos, 12–14
  - Fuerza
    - centrífuga, 45, 49, 51, 54, 60, 94
    - de Coriolis, 6, 53–55, 78–80, 82, 91, 92, 95, 144, 146
    - de flotación, 113, 151
    - de fricción, 34, 45, 77, 128
    - de gravedad, 82, 138
    - de inercia, 133
    - del gradiente de presión, 45
    - viscosa, 45
  - Función
    - de trabajo de nube, 265
  - Geopotencial, 32, 68, 78, 82, 99, 124, 126, 210, 211, 234, 236, 245
  - Gradiente, 6, 24, 48, 51, 55, 92, 113, 190, 279
    - de presión, 144
    - adiabático seco, 65, 66, 108, 111, 112, 124
    - de presión, 24, 39, 45, 55, 60, 68, 69, 78, 82, 89, 91–93, 138, 146, 147, 234, 235, 237
    - de temperatura, 98, 108, 153
    - pseudo-adiabático, 111, 113
  - Gravedad efectiva, 50, 60
  - Hidrodinámica, 17, 130
  - Huracán, 255
  - Inestabilidad, 12, 111, 159
    - baroclínica, 6, 7
    - condicional, 256, 267
    - numérica, 200, 204
  - Jacobiano, 167, 168
  - Lagrange
    - tratamiento de, 28
  - Método
    - de Arakawa y Schubert, 261
    - de diferencias finitas, 212, 213
    - de Kuo, 254, 258
    - de las perturbaciones, 168
    - de Schubert, 221
    - espectral, 85
    - numérico, 84
  - Moda computacional, 203, 204
  - Modelo
    - atmosférico, 255
    - baroclínico, 125, 229
    - barotrópico, 125, 229
    - climático, 250, 252
    - de aguas someras, 190
    - de chorro estacionario, 103, 115
    - de ecuaciones primitivas, 84, 230
    - de mesoescala, 249
    - dinámico, 238
    - geostrófico, 125
    - hidrostático, 248, 249
  - Momento angular, 7
  - Número
    - de Kivel, 76
    - de Reynolds, 131, 135
    - de Richardson, 274, 276, 278
    - de Rossby, 73, 76, 79
  - Oestes, 7
  - Onda
    - Longitud de, 197
    - longitud de, 181
    - número de, 181, 221
    - número se puede escribir de, 197
  - Ondas
    - acústicas, 185, 188
    - de gravedad, 189, 191
    - de Rossby, 180, 183
    - del este, 10
    - gravitacionales, 210
  - Operador nabla, 23, 245
  - Orden de magnitud, 74, 75

- 
- Parámetro de Coriolis, 36, 76, 144, 183
  - Parametrización, 84, 254, 281, 308
    - de procesos físicos, 239
    - de procesos físicos, 246, 250, 252
  - Perturbaciones, 7, 9, 168
    - atmosféricas, 6
    - sinópticas, 75
    - tropicales, 10
  - Polinomios
    - de Legendre, 165, 175, 176
  - Predicción
    - meteorológica, 4, 119, 125
    - numérica, 83, 86
  - Radiación, 282, 284, 295, 297, 301, 302, 308, 311
  - Serie de Fourier, 169, 171, 172
  - Sistema cuasi geostrófico, 119, 120, 123
  - Subsidencia, 129, 261
  - Superficies isósteras, 34
  - Temperatura
    - de escala, 154, 275
    - potencial, 64, 66, 142
    - potencial equivalente, 109, 110
  - Tendencia del geopotencial, 126
  - Teoría
    - de Prandtl, 137, 147
    - de similitud de Monin-Obukhov, 141, 157
  - Teorema de circulación de Kelvin, 32
  - Tipos de truncación, 220
  - Tormenta tropical, 10
  - Tornado, 95, 100
  - Valor característico, 74, 75
  - valor característico, 83
  - Varianza, 133, 136
  - Velocidad
    - de grupo, 182
    - tangencial, 8, 20
    - tangencial1), 50
    - vertical, 69, 81
    - vertical, 121
    - zonal, 20, 169
  - Viento
    - ciclostrofico, 95
    - de gradiente, 89, 92, 101
    - geostrófico, 78, 95, 97
    - térmico, 95, 97, 98
  - Vientos alisios, 7, 9
  - Viscosidad
    - dinámica, 48
    - cinemática, 49, 129
  - Vorticidad, 16, 27, 37, 38
    - negativa, 121
    - positiva, 121
    - potencial, 103, 127
  - Zona de Convergencia Intertropical, 9



