

VR を用いた結び目の描画と変形

東京大学大学院数理科学研究科修士課程 名取雅生

2021 年 2 月 10 日

素朴な動機

現実の世界で**紐**や**ゴム膜**を手で自由に変形するような感覚で、VR の空間内で**曲線**や**曲面**を取り扱える枠組みを作りたい。

結び目の可視化

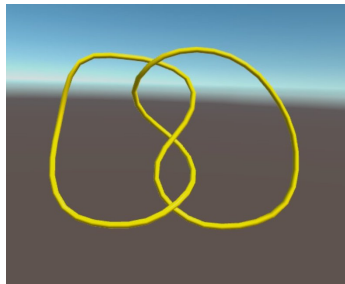
従来の方法: 射影図, 動画, 工作, etc...

⇔ VR:

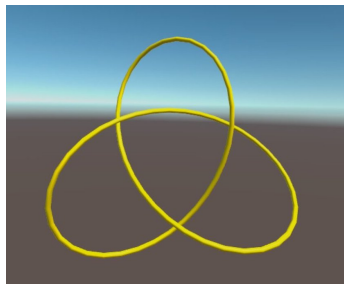
- 3 次元的で直感的な操作
- リアルタイムで操作可能
- 物理的な制約がない (空中に固定, 材質の制限がない)

⇒ **曲面結び目**の VR による可視化 (4 次元の可視化)(未実装)

三葉結び目の変形



\approx



開発について

共同開発者

- 後藤祐輝 (東京大学 D1)
- 鶴崎修功 (東京大学 D1)
- 中村伸一郎 (東京大学卒)
- 若月駿 (信州大学 学振 PD)

東京大学バーチャルリアリティ教育研究センター

「数学における「概念の可視化」とその教育支援への応用」
VR 機器の提供等の支援を受けています。

同センターの青山一真様には開発環境の整備にご協力いただき、
明治大学の阿原一志様に実装に関してアドバイスをいただきました。

開発環境

- 言語 : C#
- 3DCG ソフトウェア : Unity
- VR ヘッドマウントディスプレイ : Oculus Quest



開発したアプリ

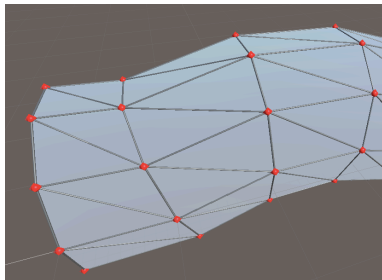
3次元空間内の曲線を取り扱うツールを作成した.

具体的な機能

- 曲線の描画・平行移動・回転
- 曲線の切断・結合
- Möbius エネルギーによる結び目の整形
- 手動による結び目の変形

曲線の描画・平行移動・回転・切断・結合

曲線 = 各線分の長さが (殆ど) 一定な折れ線



Möbius エネルギーによる結び目の整形

定義 (大原 1988)

$h: S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$: 弧長でパラメトライズされた結び目
 h の Möbius エネルギーを以下で定める:

$$E(h) = \iint_{S^1 \times S^1} \left(\frac{1}{\|h(x) - h(y)\|^2} - \frac{1}{\delta(x, y)^2} \right) dx dy$$

$\delta(x, y)$: $h(x), h(y)$ の間の短い方の弧長

例

正円 $h(x) = ((\cos 2\pi x)/2\pi, (\sin 2\pi x)/2\pi, 0)$ のエネルギーは
 $E(h) = 4$.

この定義を次のように離散化する.

Möbius エネルギーによる結び目の整形

定義

$(v_i)_{i=0}^{N-1} \in (\mathbb{R}^3)^N$: 隣接する 2 点の間隔が一定な点列

$$\begin{aligned} E((v_i)_i) &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i \neq j} \frac{1}{\|v_i - v_j\|^2} \right) \left(\sum_i \|v_i - v_{i+1}\| \right)^2 - \frac{\pi^2 N}{3} + 4 \\ &= (\text{静電エネルギー}) \times (\text{弧長})^2 + (\text{定数}) \end{aligned}$$

事実 (大原)

$h: S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$: 弧長でパラメトライズされた結び目

$(v_i^{(N)})_i$: h を弧長で計って N 等分した点列

このとき,

$$E(h) = \lim_{N \rightarrow \infty} E((v_i^{(N)})_i).$$

Möbius エネルギーによる結び目の整形

整形のアルゴリズム (阿原 1992)

$(v_i)_i$: 結び目を表す点列, s : 隣接する 2 点の間隔

$(v_i)_i$ に対して毎フレーム次の操作を行う.

- ① 離散化された Möbius エネルギーの $(v_i)_i$ における勾配を $G((v_i)_i)$ とし, $(v_i)_i$ を $(v_i)_i - c \cdot G((v_i)_i)$ に置き換える.
- ② 弾性エネルギー

$$\frac{1}{2} \sum_i (\|v_{i+1} - v_i\| - s)^2$$

の勾配に沿って $(v_i)_i$ を変化させ, 点の間隔を s に近づける.

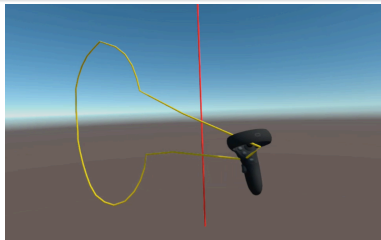
加えて, 収束を速くするために慣性を加えるなどの工夫を行った.

手動による結び目の変形

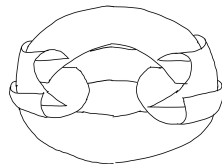
結び目上可動域を定めて、手で引っ張るようにして変形させる。

自己交叉しないための工夫

- 折れ線の各 2 線分間の距離の最小値が一定値を下回る場合は変形しない。
- 各フレームにおける変化量を一定値以下にする。



- ① Möbius エネルギーによる整形に関して
 - 高速化する (現状:4-10fps)
 - 変形の途中で交叉が起きない保証をする
- ② 結び目に対する数学的操作の実装
 - Seifert 膜の生成
 - Jones 多項式等の不変量の計算, Kirby 計算
- ③ 曲面結び目に関して
 - 曲面を取り扱う機能の実装
 - 与えられた結び目から曲面結び目を生成する (twist-spun knots, motion pictures)



[Chen, Cai, Zheng, 2008]