Санкт-Петербургский Политехнический Унивеситет
Петра Великого.
Физико-Механический институт
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики.

Отчет по лабораторной работе №2 по дисциплине
"Интервальный анализ"

Выполнил студент:

Романчук Е.В

группа:

5030102/10201

Проверил:

доцент

Баженов Александр Николаевич

Дата: ноябрь 2024

г. Санкт-Петербург

Содержание

1 Постановка задачи

Имеем набор ИСЛАУ 1:

$$\mathbf{A} * x = \mathbf{b}, x = (x_1, x_2) \tag{1}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.9, 3.3] \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.9, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix} \tag{4}$$

Необходимо найти решения ЛЗД. Для этого нужно

- исследовать разрешимость ЛЗД (найти максимум распознающего функционала). В случае, если допусковое множество - пусто, необходимо провести коррекцию.
- Коррекция ЛЗД
  - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части (b - коррекция).
  - достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы (A - коррекция).
  - комбинация предыдущих методов коррекции (Ab - коррекция).

Для всех видов коррекции построить график функционала $\mathrm{Tol}(x)$, допускового множества, отобразить $argmax\mathrm{Tol}$. Кроме того, построить допусковое множество для исходной и скорректированной задачи.

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Разпознающим функционалом называется функция

$$\mathrm{Tol}(x) = \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ \mathrm{rad}(\mathbf{b}_i) - \left| \mathrm{mid}(\mathbf{b}_i) - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j \right| \right\} \tag{5}$$

Пусть

$$T = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) \tag{6}$$

и это значение достигается распознающим функционалом в некоторой точке $\tau \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- если $T \ge 0$, то $\tau \in \Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ совместна и точка τ лежит в допусковом множестве решений.
- если $T > 0$ то $\tau \in int\ \Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, и принадлежность τ допусковому множеству решений устойчива к малым возмущениям данных - матрицы и правой части.
- если $T < 0$ то $\Xi_{\mathrm{tol}}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \emptyset$, т.е. линейная задача о допусках для интервальной линейной системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ несовместна. Допусковое множество - пусто.

2.2 Образующая распознающего функционала

Образующими распознающего функционала $\mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ называются значения:

$$v_i = \mathrm{Tol}_i(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}), i \in \overline{1, m}$$

Положим $\tau = \mathrm{argmax}_{\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(\mathrm{Tol}(x, A, b))$.

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения правой части (b - коррекция)

Равномерное уширение правой части ИСЛАУ

Расширение вектора $\mathbf{b}$ происходит путем его замены на вектор:

$$\mathbf{b} + K\mathbf{e}, \quad K \ge 0, \quad \mathbf{e} = ([-1, 1], ..., [-1, 1])^T \tag{7}$$

Тогда
$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b} + K\mathbf{e}) = T + K \tag{8}$$
Но $\mathrm{Arg}\max \mathrm{Tol}$ - не изменится(положение точки T)

2.4 Достижение разрешимости ИСЛАУ путём изменения матрицы. A - коррекция.

Общая схема равномерного метода заключается в том, что необходимо модифицировать матрицу $\mathbf{A}$ за счёт её замены на $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ состоит из интервалов $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$.

При этом значения точечных величин e_{ij} удовлетворяют следующим условиям:
$$0 \le e_{ij} \le rad\,\mathbf{a}_{ij}, \tag{9}$$
$$\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\tau = K, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad K > 0. \tag{10}$$

Значение K связано с параметром допуска $T = Tol(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ как $K \ge |T|$. Если это условие выполнено, то линейная задача о допусках с модифицированной матрицей
$$\mathbf{A} \ominus \mathbf{E} = \left[[\underline{\mathbf{a}}_{ij} - e_{ij}, \overline{\mathbf{a}}_{ij} + e_{ij}]\right]$$
и правой частью $\mathbf{b}$ становится разрешимой.

Для нахождения матрицы $\mathbf{E}$ используется следующий подход:

1. Определяется радиус интервалов матрицы $\mathbf{A}$:
$$rad\,\mathbf{A} = [rad\,\mathbf{a}_{ij}]\,, \quad rad\,\mathbf{a}_{ij} = \frac{\overline{\mathbf{a}}_{ij} - \underline{\mathbf{a}}_{ij}}{2}.$$

2. Выбираются значения e_{ij} так, чтобы выполнялись условия 9 и 10, и строится матрица $\mathbf{E}$.

3. Для просты в дальнешем для определения коррекции, будем считать, что $e_{ij} = e$. Причем, e должна удовлетворять получившейся системе из условий 9, 10.

3 Реализация

3.1 Описание

Данная лабораторная работа была выполнена с использованием языка программирования Python 3.10 в среде разработки Pycharm Отчёт подготовлен с помощью языка LaTEX в редакторе TexStudio.

3.2 Ссылка на репозиторий

`https://github.com/UUyy-Geniy/Interval_analysis` - GitHub репозиторий

4 Результаты

4.1 Максимум распознающего функционала

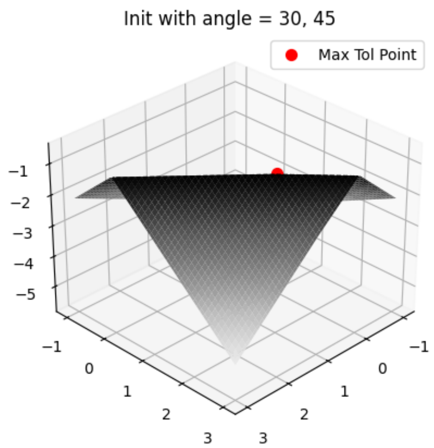

Рис. 1: Расположение максимума распознающего функционала в формулировке выр. 2

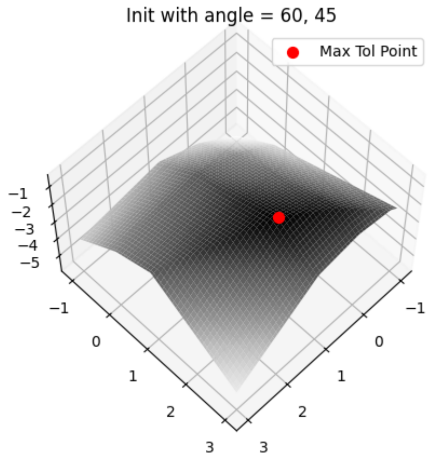

Рис. 2: Расположение максимума распознающего функционала в формулировке выр. 4

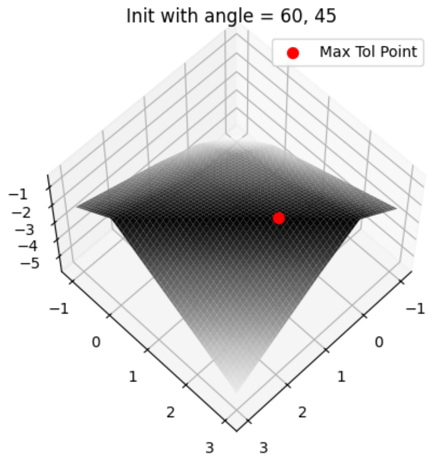

Рис. 3: Расположение максимума распознающего функционала в формулировке выр. 3

Максимум со значением $T = -0.7$ расположен в точке $\tau = (1.0, 2.0)$, для всех формулировок. Образующая функционала в начальном случае для 4:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \\ -0.7 \end{pmatrix} \tag{11}$$

4.2 Достижение разрешимости за счёт коррекции правой части (А-коррекция)

При решении системы ограничений $e \in [0.2333, 0.3]$ Положим $e = 0.267$. Тогда:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.917, 0.983] & [0.967, 1.033] \\ [1.017, 1.083] & [0.967, 1.033] \\ [1.067, 1.133] & [0.967, 1.033] \\ [-0.033, 0.033] & [0.967, 1.033] \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.75, 3.15] \\ [2.85, 3.25] \\ [2.9, 3.3] \\ [1.8, 2.2] \end{pmatrix} \tag{12}$$

Ясно, что для формулировок выр. 3 и выр. 2 матрицы коррекций содержатся в представленной матрицы для случая выр. 4 в силу исходных постановок ИСЛАУ.

4.2.1 Допусковые множества.

Хотя и e одинаковы для уширений, допусковые множества меняются.

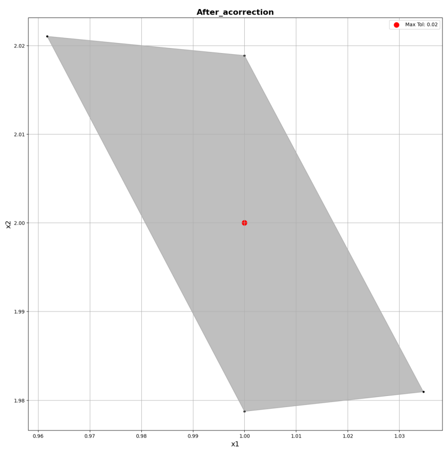

Рис. 4: Допусковое множество решений с равномерным уширением правой части в формулировке выр. 4.

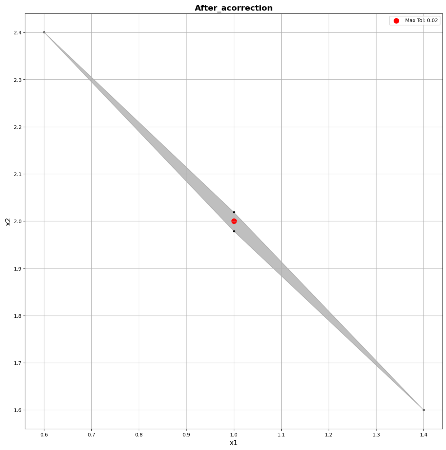

Рис. 5: Допусковое множество решений с равномерным уширением правой части в формулировке выр. 2.

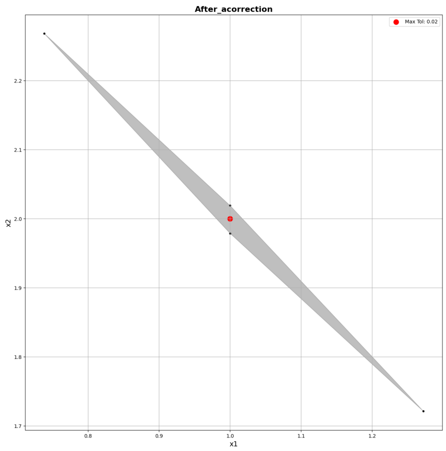

Рис. 6: Допусковое множество решений с равномерным уширением правой части в формулировке выр. 3.

4.2.2 Поверхности распознающих функционалов.

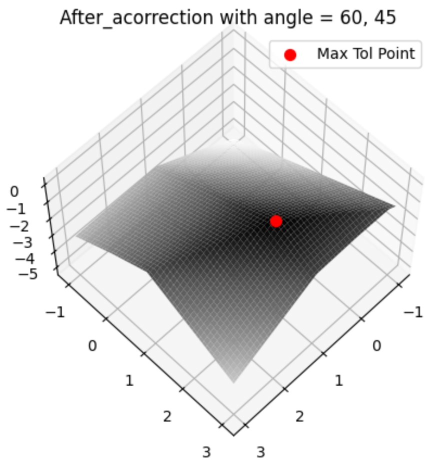

Рис. 7: Поверхность распознающего функционала для условия выр. 3

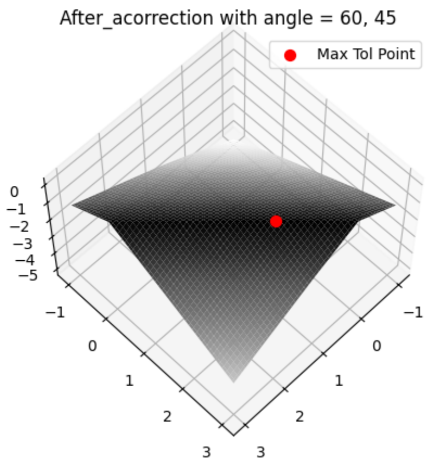

Рис. 8: Поверхность распознающего функционала для условия выр. 2

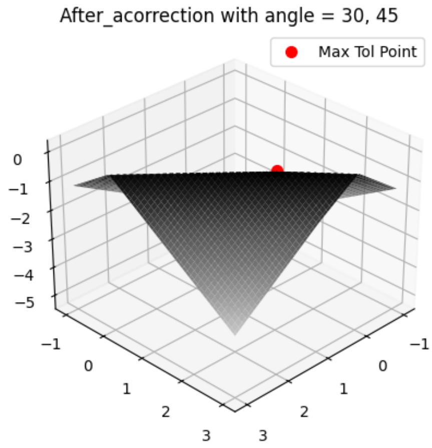

Рис. 9: Поверхность распознающего функционала для условия выр. 4

Максимум со значением $T = 0.1$ расположен в точке $\tau = (1.0, 2.0)$.

4.3 Достижение разрешимости за счёт коррекции левой части. b-коррекция

Для построения интервальной матрицы был взят $K = 0.703$ для всех ИСЛАУ. Итак, для примера, задача выр. 4, принимает вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.65, 1.25] & [0.7, 1.3] \\ [0.75, 1.35] & [0.7, 1.3] \\ [0.8, 1.4] & [0.7, 1.3] \\ [-0.3, 0.3] & [0.7, 1.3] \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.047, 3.853] \\ [2.147, 3.953] \\ [2.197, 4.003] \\ [1.097, 2.903] \end{pmatrix} \tag{13}$$

4.3.1 Допусковые множества.

Хотя как и в случае с A-коррекцией, вектор $\mathbf{b}$ для выр. 2, выр. 3 содержатся в выр. 13, допусковые множества различны:

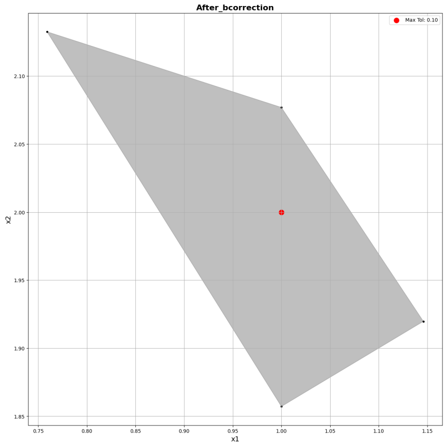

Рис. 10: Допусковое множество решений с равномерным уширением левой части для выр. 4.

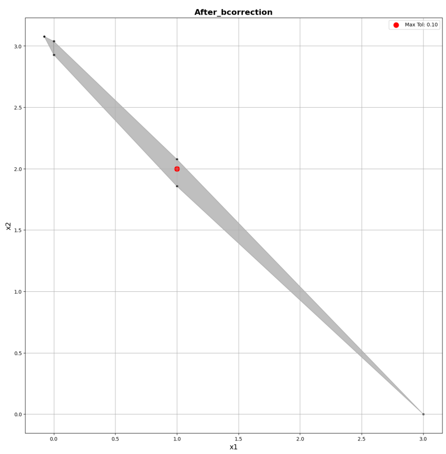

Рис. 11: Допусковое множество решений с равномерным уширением левой части для выр. 2.

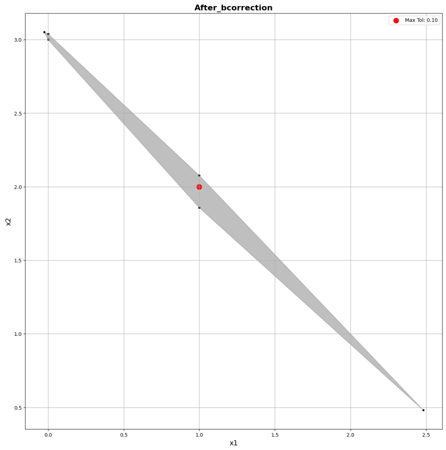

Рис. 12: Допусковое множество решений с равномерным уширением левой части выр. 3.

4.3.2 Поверхность распознающего функционала.

Ограничимся одной поверхностью для иллюстрации. Вместе с тем $T = 0.0031$, в точке $\tau = (1.0, 2.0)$.

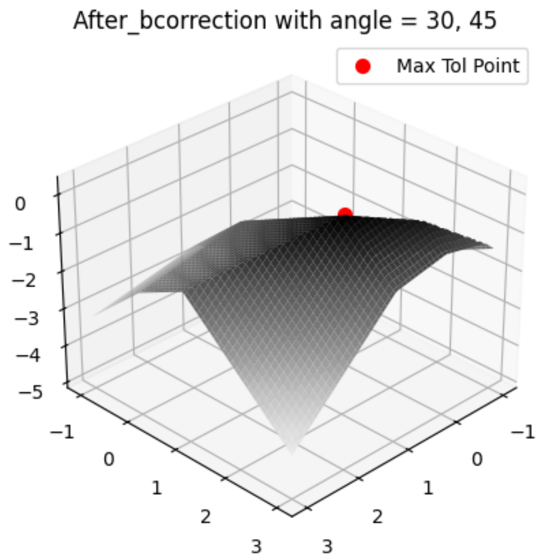

Рис. 13: Поверхность распознающего функционала для b-коррекции выр. 4.

4.4 Достижение разрешимости за счёт Ab-коррекции.

Проводились уширения с $e = 0.05$ 2 раза, $K = 0.3$ 2 раза.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [0.75, 1.15] & [0.8, 1.2] \\ [0.85, 1.25] & [0.8, 1.2] \\ [0.9, 1.3] & [0.8, 1.2] \\ [-0.2, 0.2] & [0.8, 1.2] \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [2.15, 3.75] \\ [2.25, 3.85] \\ [2.3, 3.9] \\ [1.2, 2.8] \end{pmatrix} \tag{14}$$

4.4.1 Допусковые множества.

Хотя как и в случае с A-коррекцией, вектор **b** для выр. 2, выр. 3 содержатся в выр. 13, допусковые множества различны:

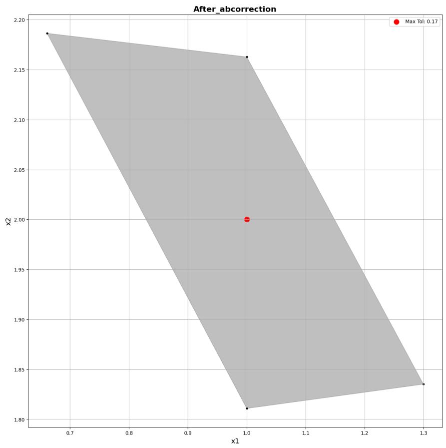

Рис. 14: Допусковое множество решений с равномерным уширением левой части для выр. 4.

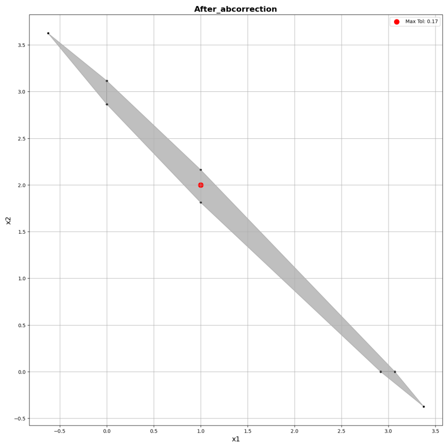

Рис. 15: Допусковое множество решений с равномерным уширением левой части для выр. 2.

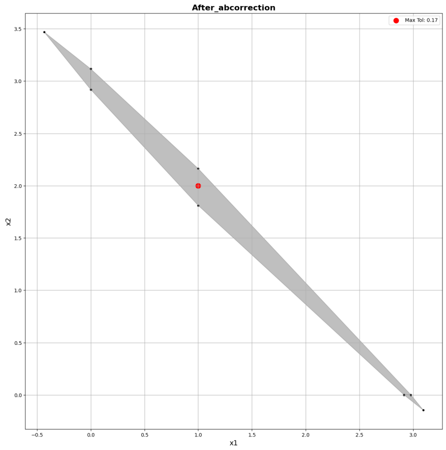

Рис. 16: Допусковое множество решений с равномерным уширением левой части выр. 3.

4.4.2 Поверхность распознающего функционала.

Аналогично b-коррекции, ограничимся одной поверхностью для иллюстрации. $T = 0.2$, в точке $\tau = (1.0, 2.0)$.

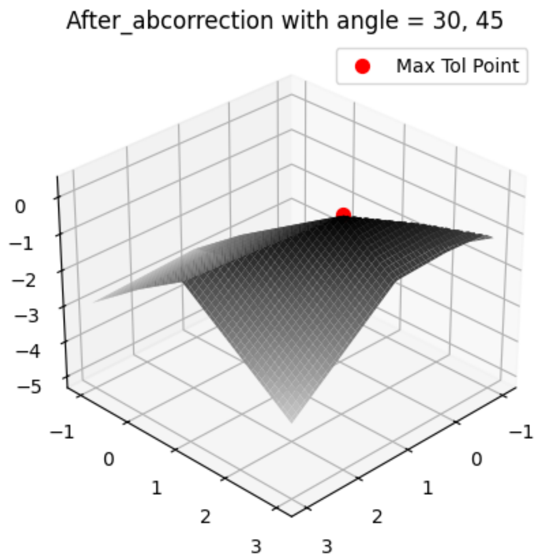

Рис. 17: Поверхность распознающего функционала для b-коррекции выр. 4.

5 Выводы

- Исследование показало, что исходная система линейных алгебраических уравнений в заданных интервалах не имеет допустимого множества решений, так как максимальное значение распознающего функционала $T = -0{,}7$ оказалось отрицательным. Это указывает на несовместимость системы.

- Для достижения совместимости системы были использованы методы коррекции правой части (b-коррекция) и матрицы коэффициентов (A-коррекция). Применение b-коррекции с коэффициентом $K = 0{,}7$ привело к положительному значению распознающего функционала $T = 0{,}031$, что свидетельствует о наличии допустимого множества решений в скорректированной системе.

- Метод A-коррекции также продемонстрировал свою эффективность. Скорректированная матрица коэффициентов позволила достичь положительного значения распознающего функционала и выявить допустимое множество решений.

- Графический анализ допустимых множеств и распознающего функционала показал, что коррекция изменила форму поверхности $\mathrm{Tol}(x)$, что свидетельствует о влиянии корректировок на свойства системы. Перемещение максимума распознающего функционала подтверждает улучшение согласованности системы.

- Сравнение результатов коррекции показало, что итоговый распознающий функционал существенно зависит от величины «шага» коррекции, что подчеркивает важность выбора параметров корректировки.

Список литературы

[1] Histogram. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Histogram

[2] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений.//Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.

[3] Box plot. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Box_plot

[4] Анатольев, Станислав (2009) «Непараметрическая регрессия», Квантиль, №7, стр. 37-52.