Санкт-Петербургский Политехнический Унивеситет
Петра Великого.
Физико-Механический институт
Высшая школа прикладной математики и
вычислительной физики.

**Отчет по лабораторной работе №3 по дисциплине
"Интервальный анализ"**

Выполнил студент:

Романчук Е.В

группа:

5030102/10201

Проверил:

доцент

Баженов Александр Николаевич

Дата: январь 2025
г. Санкт-Петербург

Содержание

1 Постановка задачи

Даны 2 интервальных выборки

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}, \tag{1}$$

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}. \tag{2}$$

Взять $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ из файлов данных, задав $\mathrm{rad}\mathbf{x} = \mathrm{rad}\mathbf{y} = \frac{1}{2^N}$В, $N = 14$.
Файлы данных:

- *-0.205_lvl_side_a_fast_data.bin*
- *0.225_lvl_side_a_fast_data.bin*

Связь кодов данных и В:

$$V = N/16384 - 0.5$$

Сделать оценки констант a, t в уравнениях:

$$a + \mathbf{X} = \mathbf{Y}, \tag{3}$$

$$t\mathbf{X} = \mathbf{Y}, \tag{4}$$

Метод решения:

$$\hat{a} = \mathrm{argmax} F(a, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tag{5}$$

где F — функционал.
В качестве функционала взять варианты:

$$\mathrm{Ji}(a, \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tag{6}$$

$$\mathrm{Ji}(a, \mathrm{mode}\mathbf{X}, \mathrm{mode}\mathbf{Y}), \tag{7}$$

$$\mathrm{Ji}(a, \mathrm{med}_K\mathbf{X}, \mathrm{med}_K\mathbf{Y}), \tag{8}$$

$$\mathrm{Ji}(a, \mathrm{med}_P\mathbf{X}, \mathrm{med}_P\mathbf{Y}), \tag{9}$$

где Ji — коэффициент Жаккара, mode — интервальная мода, med_K, med_P — интервальные медианы Крейновича и Пролубникова.
Сделать точечные и интервальные оценки, задавшись уровнем α.

2 Необходимая теория

2.1 Интервальная мода

Пусть имеется интервальная выборка

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}.$$

Сформируем массив интервалов $\mathbf{z}$ из концов интервалов $\mathbf{X}$.

Для каждого интервала $\mathbf{z}_i$ подсчитываем число μ_i интервалов из выборки $\mathbf{X}_i$, включающих $\mathbf{z}_i$. Максимальные $\mu_i = \max \mu$ достигаются для индексного множества K. Тогда можно найти интервальную моду как мультиинтервал

$$\mathrm{mode}\mathbf{X} = \bigcup_{k \in K} \mathbf{z}_k. \tag{10}$$

2.2 Интервальная медиана Крейновича

Пусть дана выборка $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_i\}$. Пусть $\underline{c} = \{\underline{\mathbf{x}_i}\}$, $\overline{c} = \{\overline{\mathbf{x}_i}\}$ — конфигурация точек, составленные, соответственно, из левых и правых концов интервалов из $\mathbf{X}$.

Тогда медианой Крейновича $\mathrm{med}_K\mathbf{X}$ интервальной выборки $\mathbf{X}$ — это интервал

$$\mathrm{med}_K = [\mathrm{med}\underline{c}, \mathrm{med}\overline{c}]. \tag{11}$$

2.3 Интервальная медиана Пролубникова

Зададим отношение порядка на алгебре $\mathbb{IR}$. Говорят, что неравенство $\mathbf{a} \leqslant \mathbf{b}$ выполняется

1. в сильном смысле, если $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{IR}\ \forall \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \overline{\mathbf{a}} \leqslant \underline{\mathbf{b}}$,
2. в слабом смысле, если $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{IR}\ \exists \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \underline{\mathbf{a}} \leqslant \overline{\mathbf{b}}$,
3. в $\forall\exists$-смысле, если $\forall \mathbf{a} \in \mathbb{IR}\ \exists \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \overline{\mathbf{a}} \leqslant \overline{\mathbf{b}}$,
4. в $\exists\forall$-смысле, если $\exists \mathbf{a} \in \mathbb{IR}\ \forall \mathbf{b} \in \mathbb{IR} : \underline{\mathbf{a}} \leqslant \underline{\mathbf{b}}$,
5. в центральном смысле, если $(\overline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{a}})/2 \leqslant (\overline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{b}})/2$

Для элементов выборки $\mathbf{X}$ можно определить линейный порядок, используя любое из пяти вышеуказанных отношений порядка на $\mathbb{IR}$. То есть, если $i \neq j$, то либо $x_i \leqslant x_j$, либо $x_i \geqslant x_j$ для любого из этих отношений порядка.

Медиана Пролубникова $\mathrm{med}_P\mathbf{X}$ выборки $\mathbf{X}$ — это интервал $\mathbf{x}_m$, для которого половина интервалов из $\mathbf{X}$ лежит слева, а половина — справа.

В ситуации, когда имеются два элемента подинтервала $\mathbf{x}_m$ и $\mathbf{x}_{m+1}$, расположенных посередине вариационного ряда, $\mathbf{x}_m \neq \mathbf{x}_{m+1}$ медиана может быть определена естественным обобщением взятия полусуммы точечных значений, расположенных посередине ряда из точечных значений, в случае интервальной выборки взятие полусуммы интервалов $\mathbf{x}_m$ и $\mathbf{x}_{m+1}$:

$$\mathrm{med}_P\mathbf{X} = (\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_{m+1})/2. \tag{12}$$

2.4 Коэффициент Жаккара

Коэффициент Жаккара для двух интервалов $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$ и $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}$:

$$\mathrm{Ji}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathrm{wid}(x \wedge y)}{\mathrm{wid}(x \vee y)} = \frac{\min\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\} - \max\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}}{\max\{\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{y}}\} - \min\{\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}\}}. \tag{13}$$

Коэффициент Жаккара для множества интервалов $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$:

$$\mathrm{Ji}(\mathbf{X}) = \frac{\min \overline{\mathbf{x}_i} - \max \underline{\mathbf{x}_i}}{\max \overline{\mathbf{x}_i} - \min \underline{\mathbf{x}_i}}. \tag{14}$$

Коэффициент Жаккара для двух равномощных множеств интервалов $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$ и $\mathbf{Y} \in \mathbb{IR}^n$:

$$\mathrm{Ji}_k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\min\{\overline{\mathbf{x}_k}, \overline{\mathbf{y}_k}\} - \max\{\underline{\mathbf{x}_k}, \underline{\mathbf{y}_k}\}}{\max\{\overline{\mathbf{x}_k}, \overline{\mathbf{y}_k}\} - \min\{\underline{\mathbf{x}_k}, \underline{\mathbf{y}_k}\}},\ k \in 1, 2, \ldots, |\mathbf{X}|. \tag{15}$$

3 Описание работы

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python в среде разработки PyCharm. В ходе работы были использованы следующие библиотеки `numpy`, `scipy`, `intervalpy` и `matplotlib`.

GitHub репозиторий: https://github.com/UUyy-Geniy/Interval$_analysis$

3.1 Определение диапазона исследования

Для проведения исследования зададим диапазон, на котором будут вычисляться значения функционалов.

- Для уравнения 3 диапазон задается следующим образом:

$$\mathrm{bound}_a = [\min \mathrm{med}(Y) - \max \mathrm{med}(X), \max \mathrm{med}(Y) - \min \mathrm{med}(X)]. \quad (16)$$

- Для уравнения 4 диапазон определяется как:

$$\mathrm{bound}_t = \left[\frac{\min \mathrm{med}(Y)}{\max \mathrm{med}(X)}, \frac{\max \mathrm{med}(Y)}{\min \mathrm{med}(X)}\right]. \quad (17)$$

Зададим количество разбиений выбранного диапазона: $\mathrm{number} = 100$.

Сетка значений с постоянным шагом строится по заданному диапазону, и на этой сетке вычисляются значения функционалов. Итоговое решение определяется как $\arg\max$ для сеточной интерполяции. Таким образом, точность найденного результата определяется разбиением сетки. Погрешность, связанная с использованием сеточной интерполяции, рассчитывается как половина шага сетки:

$$\epsilon = \frac{\mathrm{rad}(\mathrm{bound})}{\mathrm{number}}, \quad (18)$$

где $\mathrm{rad}(\mathrm{bound})$ — длина диапазона.

- Для уравнения 3:
  - Погрешность решения: $\epsilon = 0.008$.
  - Исследуемый диапазон: $[0.3233, 0.3701]$.
- Для уравнения 4:
  - Погрешность решения: $\epsilon = 0.003$.
  - Исследуемый диапазон: $[-1.047, -1.0015]$.

4 Результаты

Для функционала 6:

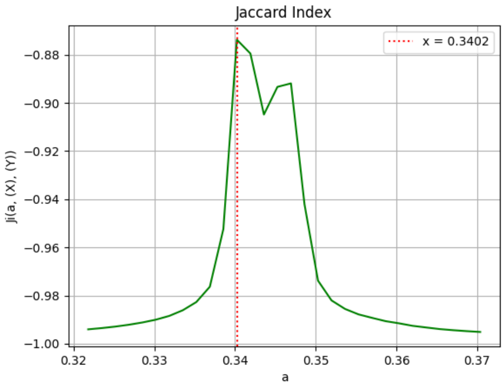

Рис. 1: Зависимость функционала 6 от параметра a.

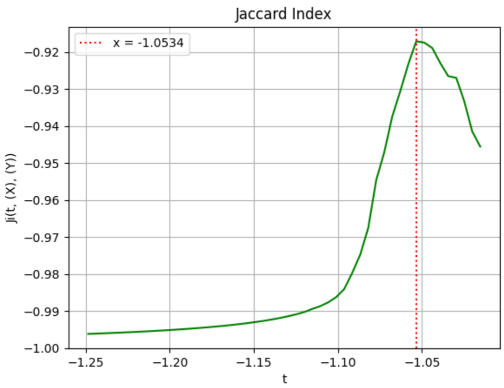

Рис. 2: Зависимость функционала 6 от параметра t.

Таблица 1: Результаты для функционала 6.

Параметр	Значение
$\hat{a}$	$[0.3322, 0.3482]$
$F_1(\hat{a})$	-0.874
$\hat{t}$	$[-1.056, -1.051]$
$F_1(\hat{t})$	-0.917

Для функционала 7:

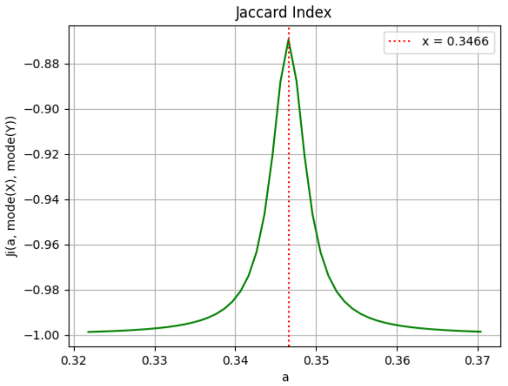

Рис. 3: Зависимость функционала 7 от параметра a.

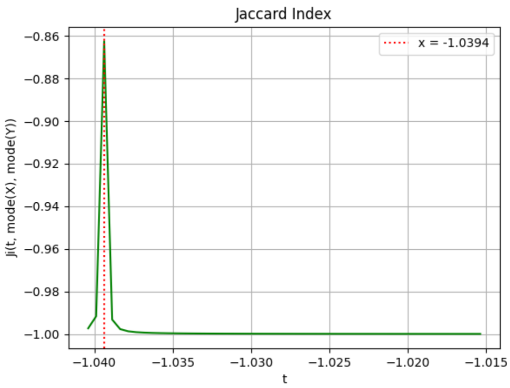

Рис. 4: Зависимость функционала 7 от параметра t.

Для функционала 7:

Таблица 2: Результаты для функционала 7.

Параметр	Значение
$\hat{a}$	$[0.338, 0.355]$
$F_2(\hat{a})$	-0.869
$\hat{t}$	$[-1.043, -1.037]$
$F_2(\hat{t})$	-0.862

Для функционала 8:

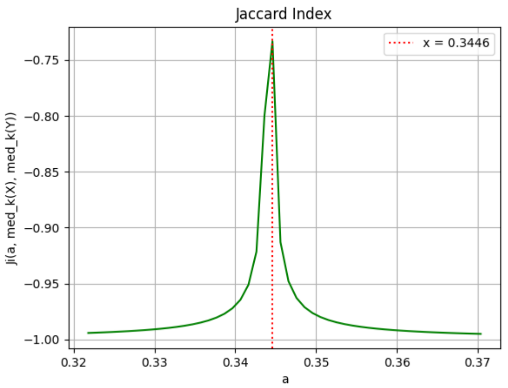

Рис. 5: Зависимость функционала 8 от параметра a.

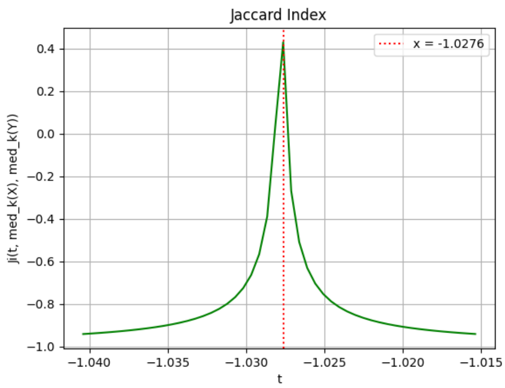

Рис. 6: Зависимость функционала 8 от параметра t.

Таблица 3: Результаты для функционала 8.

Параметр	Значение
$\hat{a}$	$[0.337, 0.353]$
$F_3(\hat{a})$	-0.733
$\hat{t}$	$[-1.031, -1.025]$
$F_3(\hat{t})$	0.431

Для функционала 9:

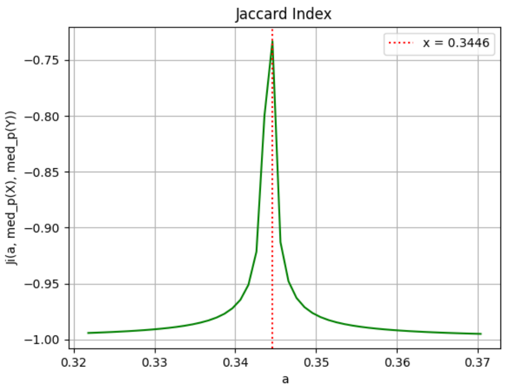

Рис. 7: Зависимость функционала 9 от параметра a.

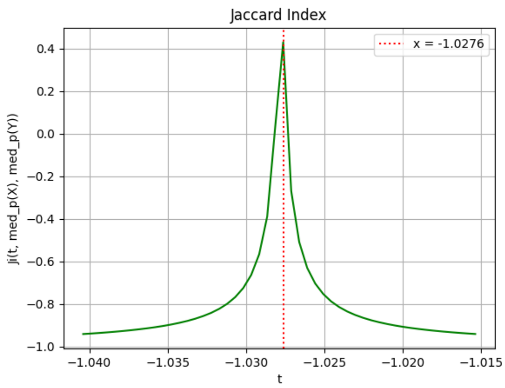

Рис. 8: Зависимость функционала 9 от параметра t.

Таблица 4: Результаты для функционала 9.

Параметр	Значение
$\hat{a}$	$[0.337, 0.352]$
$F_4(\hat{a})$	-0.733
$\hat{t}$	$[-1.031, -1.025]$
$F_4(\hat{t})$	0.431

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были исследованы методы оценки параметров в уравнениях с интервальными данными. Были использованы различные функционалы, включая коэффициент Жаккара, что позволило определить оптимальные значения параметров $\hat{a}$ и $\hat{t}$ для уравнений вида $a + \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ и $t\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

На основании анализа полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Значения параметров $\hat{a}$ и $\hat{t}$ существенно зависят от выбранного функционала. Это подчеркивает важность корректного выбора критерия оптимальности в задачах интервального анализа, так как разные функционалы обладают различной геометрией и устойчивостью.

2. Наиболее устойчивые результаты были достигнуты при использовании функционалов 8 и 9. Высокие значения коэффициента Жаккара для параметра $\hat{t}$ свидетельствуют о значительном уровне согласованности интервалов, что подчеркивает их надежность.

3. Применение интервальных медиан (Крейновича и Пролубникова) в качестве статистических характеристик продемонстрировало преимущества по сравнению с анализом полной выборки или моды. Эти подходы позволили получить более точные и устойчивые оценки параметров, снижая влияние выбросов и неустойчивости данных.

Таким образом, выполненная работа показала эффективность использования интервального анализа для оценки параметров. Полученные результаты подчеркивают значимость выбора подходящих методов и критериев для успешного анализа данных в условиях неопределенности.