UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

FACULTAD DE INGENIERÍA

CC2017 MODELACIÓN Y SIMULACIÓN

Laboratorio 6

Programación Lineal

Samuel A. Chamalé 21881
Adrian Rodriguez 21691
Daniel Gomez 21429

Fecha de entrega: 19/09/2024

Índice

1. Modelo de Producción, Período Único

En preparación para la temporada invernal, una compañía fabricante de ropa está manufacturando abrigos de piel con capucha, chamarras con relleno de plumas de ganso, pantalones con aislamiento y guantes. Todos los productos se elaboran en cuatro departamentos diferentes: corte, aislamiento, costura y empaque. La compañía recibió pedidos en firme de sus productos. El contrato estipula una penalización por los artículos no surtidos. En este informe, se busca elaborar un plan de producción óptimo para la compañía.

1.1. a) Modelación Matemática del Problema de Programación Lineal

Definimos las variables de decisión como:

- x_1: Número de chamarras a producir.
- x_2: Número de prendas con relleno de plumas a producir.
- x_3: Número de pantalones a producir.
- x_4: Número de guantes a producir.
- s_1: Cantidad de chamarras no producidas (faltantes).
- s_2: Cantidad de prendas con relleno de plumas no producidas (faltantes).
- s_3: Cantidad de pantalones no producidos (faltantes).
- s_4: Cantidad de guantes no producidos (faltantes).
- s_5, s_6, s_7, s_8: Cantidad de capacidad no utilizada en los departamentos de corte, aislamiento, costura y empaque, respectivamente.

La función objetivo, que busca maximizar la utilidad, está dada por:

$$\text{Maximizar } Z = 30x_1 + 40x_2 + 20x_3 + 10x_4 - 15s_1 - 20s_2 - 10s_3 - 8s_4$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- Restricciones de demanda:

$$x_1 + s_1 = 800$$
$$x_2 + s_2 = 750$$
$$x_3 + s_3 = 600$$
$$x_4 + s_4 = 500$$

- Restricciones de capacidad:

$$0{,}30x_1 + 0{,}30x_2 + 0{,}25x_3 + 0{,}15x_4 + s_5 = 1000 \quad \text{(Corte)}$$
$$0{,}25x_1 + 0{,}35x_2 + 0{,}30x_3 + 0{,}10x_4 + s_6 = 1000 \quad \text{(Aislamiento)}$$
$$0{,}45x_1 + 0{,}50x_2 + 0{,}40x_3 + 0{,}22x_4 + s_7 = 1000 \quad \text{(Costura)}$$
$$0{,}15x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}05x_4 + s_8 = 1000 \quad \text{(Empaque)}$$

- No negatividad:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8 \geq 0$$

1.2. b) Resolución del Problema mediante el Método Simplex

El problema fue resuelto usando el método Simplex. La tabla final del Simplex es la siguiente:

Ejercicio 1															
		x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8		
Base	CB	45	60	30	18	0	0	0	0	0	0	0	0	RHS	Ratio
s1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	800	#DIV/0!
s2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	750	750
s3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	600	#DIV/0!
s4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	500	#DIV/0!
s5	0	0.3	0.3	0.25	0.15	0	0	0	0	1	0	0	0	1000	3333.333
s6	0	0.25	0.35	0.3	0.1	0	0	0	0	0	1	0	0	1000	2857.143
s7	0	0.45	0.5	0.4	0.22	0	0	0	0	0	0	1	0	1000	2000
s8	0	0.15	0.15	0.1	0.05	0	0	0	0	0	0	0	1	1000	6666.667
	Zj	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	Cj-Zj	45	60	30	18	0	0	0	0	0	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8		
Base	CB	45	60	30	18	0	0	0	0	0	0	0	0	RHS	Ratio
s1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	800	800
x2	60	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	750	#DIV/0!
s3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	600	#DIV/0!
s4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	500	#DIV/0!
s5	0	0.3	0	0.25	0.15	0	-0.3	0	0	1	0	0	0	775	2583.333
s6	0	0.25	0	0.3	0.1	0	-0.35	0	0	0	1	0	0	737.5	2950
s7	0	0.45	0	0.4	0.22	0	-0.5	0	0	0	0	1	0	625	1388.889
s8	0	0.15	0	0.1	0.05	0	-0.15	0	0	0	0	0	1	887.5	5916.667
	Zj	0	60	0	0	0	60	0	0	0	0	0	0	45000	
	Cj-Zj	45	0	30	18	0	-60	0	0	0	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8		
Base	CB	45	60	30	18	0	0	0	0	0	0	0	0	RHS	Ratio
x1	45	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	800	#DIV/0!
x2	60	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	750	#DIV/0!
s3	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	600	600
s4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	500	#DIV/0!
s5	0	0	0	0.25	0.15	-0.3	-0.3	0	0	1	0	0	0	535	2140
s6	0	0	0	0.3	0.1	-0.25	-0.35	0	0	0	1	0	0	537.5	1791.667
s7	0	0	0	0.4	0.22	-0.45	-0.5	0	0	0	0	1	0	265	662.5
s8	0	0	0	0.1	0.05	-0.15	-0.15	0	0	0	0	0	1	767.5	7675
	Zj	45	60	0	0	45	60	0	0	0	0	0	0	81000	
	Cj-Zj	0	0	30	18	-45	-60	0	0	0	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8		
Base	CB	45	60	30	18	0	0	0	0	0	0	0	0	RHS	Ratio
x1	45	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	800	#DIV/0!
x2	60	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	750	#DIV/0!
x3	30	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	600	#DIV/0!
s4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	500	500
s5	0	0	0	0	0.15	-0.3	-0.3	-0.25	0	1	0	0	0	385	2566.667
s6	0	0	0	0	0.1	-0.25	-0.35	-0.3	0	0	1	0	0	357.5	2383.333
s7	0	0	0	0	0.22	-0.45	-0.5	-0.4	0	0	0	1	0	25	113.6364
s8	0	0	0	0	0.05	-0.15	-0.15	-0.1	0	0	0	0	1	707.5	3215.909
	Zj	45	60	30	0	45	60	30	0	0	0	0	0	99000	
	Cj-Zj	0	0	0	18	-45	-60	-30	0	0	0	0	0		
		x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8		
Base	CB	45	60	30	18	0	0	0	0	0	0	0	0	RHS	Ratio
x1	45	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	800	#DIV/0!
x2	60	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	750	#DIV/0!
x3	30	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	600	600
s4	0	0	0	0	0	2.045455	2.272727	1.818182	1	0	0	-4.54545	0	386.3636	212.5
s5	0	0	0	0	0	0.006818	0.040909	0.022727	0	1	0	-0.68182	0	367.9545	16190
s6	0	0	0	0	0	-0.04545	-0.12273	-0.11818	0	0	1	-0.45455	0	346.1364	-2928.85
x4	18	0	0	0	1	-2.04545	-2.27273	-1.81818	0	0	0	4.545455	0	113.6364	-62.5
s8	0	0	0	0	0	-0.04773	-0.03636	-0.00909	0	0	0	-0.22727	1	701.8182	-77200
	Zj	45	60	30	18	8.181818	19.09091	-2.72727	0	0	0	81.81818	0	101045.5	
	Cj-Zj	0	0	0	0	-8.18182	-19.0909	2.727273	0	0	0	-81.8182	0		
		x1	x2	x3	x4	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8		
Base	CB	45	60	30	18	0	0	0	0	0	0	0	0	RHS	
x1	45	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	800	
x2	60	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	750	
x3	30	0	0	1	0	-1.125	-1.25	0	-0.55	0	0	2.500003	0	387.4998	
s3	0	0	0	0	0	1.125001	1.250001	1	0.550001	0	0	-2.5	0	212.5002	
s5	0	0	0	0	0	-0.01875	0.012497	0	-0.0125	1	0	-0.62499	0	363.1244	
s6	0	0	0	0	0	0.087498	0.024998	0	0.064999	0	1	-0.75	0	371.2496	
x4	18	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	500	
s8	0	0	0	0	0	-0.0375	-0.025	0	0.005	0	0	-0.25	1	703.7498	
	Zj	45	60	30	18	11.24997	22.49996	0	1.499983	0	0	75.00008	0	101625	
	Cj-Zj	0	0	0	0	-11.25	-22.5	0	-1.49998	0	0	-75.0001	0		
Se terminó, ahora solo falta quitar el 37000.										Z=	101625	-37000	=	64625	

Figura 1: Tabla final del método Simplex.

Los resultados obtenidos son:

- Producción óptima:

- Chamarras: 800 unidades
- Relleno de plumas: 750 unidades
- Pantalones: 387.5 unidades
- Guantes: 500 unidades

- Faltantes en la producción:
  - Pantalones faltantes: 212.5 unidades
- Capacidad no utilizada:
  - Corte: 363.125 horas
  - Aislamiento: 371.25 horas
  - Costura: 0 horas
  - Empaque: 703.75 horas
- Utilidad total: $64,625.0

1.3. c) Resolución usando JuMP

El problema se resolvió también utilizando la librería JuMP en Julia. El código está disponible en el notebook entregado. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- Producción óptima:
  - Chamarras: 800 unidades
  - Relleno de plumas: 750 unidades
  - Pantalones: 387.5 unidades
  - Guantes: 500 unidades
- Faltantes en la producción:
  - Pantalones faltantes: 212.5 unidades
- Capacidad no utilizada:
  - Corte: 363.125 horas
  - Aislamiento: 371.25 horas
  - Costura: 0 horas
  - Empaque: 703.75 horas
- Utilidad total: $64,625.0

La solución obtenida usando JuMP coincide exactamente con la obtenida mediante el método Simplex manual. Esto confirma que el modelo se ha implementado correctamente en JuMP.

1.4. d) Resolución con Restricciones Enteras

El problema fue resuelto nuevamente, esta vez imponiendo restricciones enteras en las variables de producción. Los resultados obtenidos fueron:

- Producción óptima:
    - Chamarras: 800 unidades
    - Relleno de plumas: 750 unidades
    - Pantalones: 388 unidades
    - Guantes: 499 unidades
- Faltantes en la producción:
    - Pantalones faltantes: 212 unidades
    - Guantes faltantes: 1 unidad
- Capacidad no utilizada:
    - Corte: 363.15 horas
    - Aislamiento: 371.2 horas
    - Costura: 0.02 horas
    - Empaque: 703.75 horas
- Utilidad total: $64,622.0

Comparando con la solución obtenida en la parte (b) y (c), se observa una ligera disminución en la utilidad total ($64,622.0 vs. $64,625.0). Esta diferencia se debe a las restricciones de integralidad que obligan a ajustar las cantidades de producción a números enteros. Sin embargo, la diferencia en la utilidad es mínima, lo que indica que el modelo con variables continuas proporciona una buena aproximación al problema real.

2. Modelo de Producción: Períodos múltiples

2.1. a) Formulación del Problema de Programación Lineal

La empresa Acme Manufacturing Company ha firmado un contrato para entregar las siguientes cantidades de ventanas para casas durante los próximos seis meses:

- Demanda mensual: $D = [180, 250, 190, 140, 220, 250]$ ventanas.
- Costo de producción por ventana: $C_p = [\$50, \$45, \$55, \$52, \$48, \$50]$ para los meses 1 a 6 respectivamente.
- Costo de inventario por ventana al final de mes: $C_i = [\$8, \$10, \$10, \$10, \$8, \$8]$ para los meses 1, 5, 6 y 2, 3, 4 respectivamente.
- Capacidad máxima de producción mensual: 225 ventanas.

2.1.1. Variables de Decisión

$$
\begin{aligned}
x_m &= \text{Cantidad de ventanas producidas en el mes } m, \quad m = 1, 2, \ldots, 6 \\
I_m &= \text{Inventario al final del mes } m, \quad m = 1, 2, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

2.1.2. Función Objetivo

Minimizar el costo total de producción e inventario:

$$\min Z = \sum_{m=1}^{6} (C_{p,m} \cdot x_m + C_{i,m} \cdot I_m)$$

2.1.3. Restricciones

1. **Capacidad de Producción:** La producción en cada mes no puede exceder la capacidad máxima.

$$x_m \leq 225, \quad \forall m = 1, 2, \ldots, 6$$

2. **Balance de Inventarios:** El inventario al final de cada mes debe cumplir con la demanda y la producción.

   - Para el mes 1:

$$I_1 = x_1 - D_1$$

   - Para los meses 2 a 6:

$$I_m = I_{m-1} + x_m - D_m, \quad \forall m = 2, 3, \ldots, 6$$

3. **No Negatividad:** Tanto la producción como el inventario deben ser no negativos.

$$x_m \geq 0, \quad I_m \geq 0, \quad \forall m = 1, 2, \ldots, 6$$

2.2. b) Resolución del Problema usando JuMP con Variables Continuas

Se utilizó la librería JuMP en Julia para resolver el modelo de programación lineal planteado. A continuación, se presentan los resultados obtenidos:

2.2.1. Resultados de la Producción Óptima

Cuadro 1: Resultados de la Producción Óptima vs Producción No Óptima

Mes	Producción Óptima	Inventario Óptimo	Costo Producción Óptimo ($)	Costo Producción No Óptimo ($)	Diferencia ($)
1	205.0	25.0	10,250.0	9,000	1,250.0
2	225.0	0.0	10,125.0	11,250	-1,125.0
3	190.0	0.0	10,450.0	10,450	0.0
4	160.0	20.0	8,320.0	7,280	1,040.0
5	225.0	25.0	10,800.0	10,560	240.0
6	225.0	0.0	11,250.0	12,500	-1,250.0
Total			**61,795.0**	**61,040**	**155.0**

2.2.2. Análisis de los Resultados

- Producción Óptima: Se logró un costo total de \$61,795.0, comparado con la producción no óptima que generó un costo total de \$61,040.0. La diferencia es de \$155.0.
- Inventarios: Se mantiene un inventario positivo en los meses 1, 4 y 5, lo que permite reducir costos en algunos meses compensando el aumento en otros.
- Comparación con Producción No Óptima: Aunque la producción no óptima genera un costo total ligeramente menor, la solución óptima proporciona una mejor gestión de inventarios que podría ser beneficiosa en escenarios futuros o con cambios en la demanda y costos.

2.2.3. Diagrama de Producción Óptima

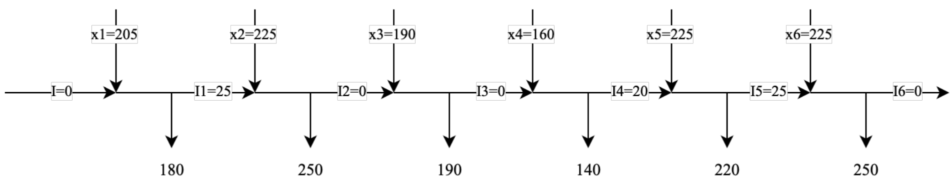

Figura 2: Esquema de la Producción Óptima y los Inventarios por Mes

2.3. c) Comparación con Restricciones Enteras

Al introducir restricciones de enteros en las variables de decisión (x_m e I_m), no se obtuvo ninguna diferencia en la solución óptima. Esto indica que, para este problema específico, la solución óptima en el caso continuo también cumple con las restricciones enteras, lo que simplifica la implementación sin perder la optimalidad (ambos resultados se encuentran en el Jupyter Notebook).

3. Modelo de asignación de horarios

La ciudad de Guatemala estudia la factibilidad de utilizar un sistema de autobuses de transporte masivo para reducir el trafico urbano. El estudio busca la cantidad mınima de autobuses que satisfaga las necesidades de transporte. Después de reunir la información necesaria, el ingeniero de transito observo que la cantidad mínima de autobuses que se requerıa fluctuaba según la hora del día, y dicha cantidad se podıa representar de forma aproximada por valores constantes durante intervalos de 4 horas sucesivos. La siguiente figura resume los hallazgos del ingeniero.

Para realizar el mantenimiento diario requerido, cada autobús puede operar solo 8 horas continuas al día. Aquí, xi es la cantidad de autobuses que inician en el turno i En este problema, se desea minimizar el n´umero de total de buses circulantes diarios, de modo que en cada tramo de tiempo, satisfaga la distribución de la demanda requerida (ver figura).

3.1. a) Formular el problema de programático lineal.

Para formular este problema como un modelo de programación lineal, definimos las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones.

Variables de decisión:

$$x_i = \text{Número de autobuses que comienzan su turno en el período } i, \text{ donde } i = 1, 2, ..., 6$$

Función objetivo: Minimizar el número total de autobuses en circulación:

$$\text{Min } Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

Restricciones:

1. Demanda mínima de autobuses en cada período de 4 horas:

$$\begin{aligned}
\text{12:00 AM - 4:00 AM:} &\quad x_1 + x_6 \geq 4 \\
\text{4:00 AM - 8:00 AM:} &\quad x_1 + x_2 \geq 8 \\
\text{8:00 AM - 12:00 PM:} &\quad x_2 + x_3 \geq 10 \\
\text{12:00 PM - 4:00 PM:} &\quad x_3 + x_4 \geq 7 \\
\text{4:00 PM - 8:00 PM:} &\quad x_4 + x_5 \geq 12 \\
\text{8:00 PM - 12:00 AM:} &\quad x_5 + x_6 \geq 4
\end{aligned}$$

2. No negatividad:
$$x_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, ..., 6$$

Nuestro modelo busca minimizar el número total de autobuses necesarios mientras se asegura de que se satisfaga la demanda en cada período de 4 horas. Las restricciones de demanda se basan en la superposición de los turnos de 8 horas, garantizando que haya suficientes autobuses disponibles en cada período.

3.2. b) Resolver el problema usando la librería JuMP, en variables continuas, y determinar la distribución óptima.

Para resolver el problema, se utilizó la librería JuMP en Julia. El código implementado en el notebook define las variables de decisión, la función objetivo, y las restricciones según el modelo de programación lineal formulado en la parte (a). Al ejecutarlo con variables continuas, se obtuvieron los siguientes resultados:

Resultados:

- Número óptimo de autobuses para cada turno:
  - Turno 1 (12:00 AM - 4:00 AM): 4.0 autobuses
  - Turno 2 (4:00 AM - 8:00 AM): 4.0 autobuses
  - Turno 3 (8:00 AM - 12:00 PM): 6.0 autobuses
  - Turno 4 (12:00 PM - 4:00 PM): 8.0 autobuses
  - Turno 5 (4:00 PM - 8:00 PM): 4.0 autobuses
  - Turno 6 (8:00 PM - 12:00 AM): 0.0 autobuses
- Número total mínimo de autobuses necesarios: 26.0 autobuses

La solución encontrada minimiza el número total de autobuses necesarios para cubrir la demanda en los distintos períodos de 4 horas, cumpliendo con todas las restricciones impuestas por el problema. El uso de variables continuas permite encontrar una aproximación óptima para la cantidad de autobuses necesarios en cada turno.

4. Modelo de Renovación Urbana

La ciudad de Erstville enfrenta un grave recorte de presupuesto. Buscando una solución a largo plazo para mejorar la base tributaria, el consejo de la ciudad propone la demolición de un área de viviendas dentro de la ciudad y su reemplazo con un moderno desarrollo. El proyecto implica dos fases: (1) demolición de casas populares para obtener el terreno para el nuevo desarrollo, y (2) construcción del nuevo desarrollo.

4.1. a) Formulación del Problema de Programación Lineal

Definimos las variables de decisión como:

- x_1: Cantidad de casas unifamiliares a construir.
- x_2: Cantidad de casas dobles a construir.
- x_3: Cantidad de casas triples a construir.
- x_4: Cantidad de casas cuádruples a construir.
- x_5: Cantidad de casas populares a demoler.

La función objetivo busca maximizar la recaudación de impuestos:

$$\text{Maximizar } Z = 1000x_1 + 1900x_2 + 2700x_3 + 3400x_4$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- Restricción de área disponible:

  $$0{,}18x_1 + 0{,}28x_2 + 0{,}4x_3 + 0{,}5x_4 \leq 0{,}2125x_5$$

  donde 0,2125 proviene de $(1 - 0{,}15) \times 0{,}25$.

- Restricción del número máximo de casas a demoler:

  $$x_5 \leq 300$$

- Restricciones de porcentajes mínimos:
  - Unidades sencillas ocupan al menos el 20 % del total:

    $$0{,}8x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3 - 0{,}2x_4 \geq 0$$

- Unidades dobles ocupan al menos el 10 % del total:

$$0{,}9x_2 - 0{,}1x_1 - 0{,}1x_3 - 0{,}1x_4 \geq 0$$

- Unidades triples y cuádruples ocupan al menos el 25 % del total:

$$-0{,}25x_1 - 0{,}25x_2 + 0{,}75x_3 + 0{,}75x_4 \geq 0$$

- Restricción de presupuesto:

$$50000x_1 + 70000x_2 + 130000x_3 + 160000x_4 + 2000x_5 \leq 15000000$$

- Restricciones de no negatividad:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

4.2. b) Resolución del Problema usando JuMP (Variables Continuas)

El problema fue resuelto usando la librería JuMP en Julia con variables continuas. El código se encuentra en el notebook entregado. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

- Producción óptima:
  - Casas unifamiliares (x_1): 35.83
  - Casas dobles (x_2): 98.53
  - Casas triples (x_3): 44.79
  - Casas cuádruples (x_4): 0.0
  - Casas a demoler (x_5): 244.49
- Recaudación de impuestos máxima: $343,965.15

4.3. c) Resolución del Problema con Variables Enteras y Comparación

Para obtener una solución más realista, se resolvió el problema imponiendo restricciones de enteridad sobre las variables. Los resultados fueron los siguientes:

- Producción óptima:
  - Casas unifamiliares (x_1): 36
  - Casas dobles (x_2): 98
  - Casas triples (x_3): 45
  - Casas cuádruples (x_4): 0
  - Casas a demoler (x_5): 245
- Recaudación de impuestos máxima: $343,700.00

4.4. Discusión de los Resultados

Al comparar la solución con variables continuas y la solución con variables enteras, se observa una ligera disminución en la recaudación de impuestos al imponer restricciones enteras ($343,965.15 vs. $343,700.00). Esta diferencia es mínima, lo que sugiere que el modelo continuo proporciona una buena aproximación a la solución óptima.

Sin embargo, la solución con variables enteras es más aplicable en la realidad, ya que se considera la construcción de un número entero de unidades habitacionales. Ambos modelos cumplen con las restricciones de área disponible, presupuesto y porcentajes mínimos de distribución de unidades, indicando que la planificación es factible y eficaz.

5. Repositorio

`https://github.com/UVG-Works-Hub/lp`

Índice de figuras