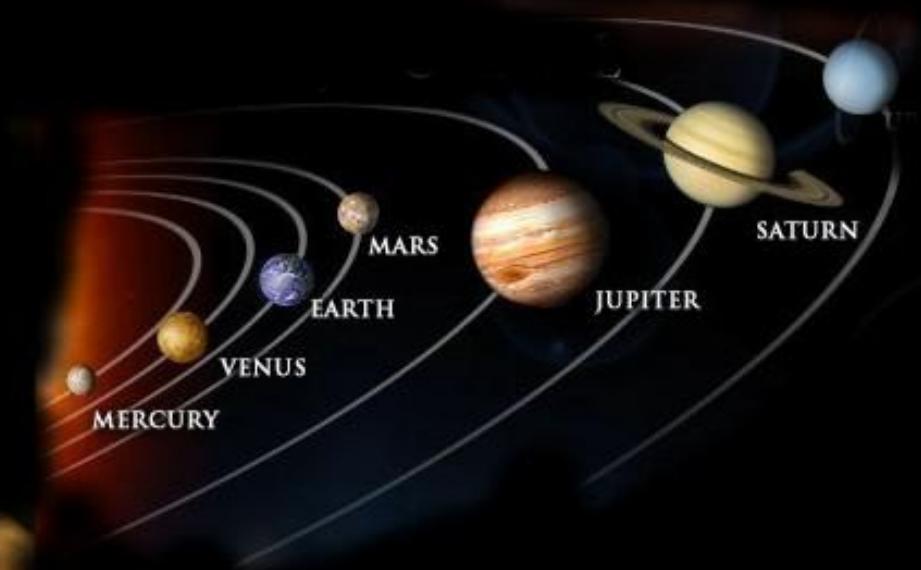
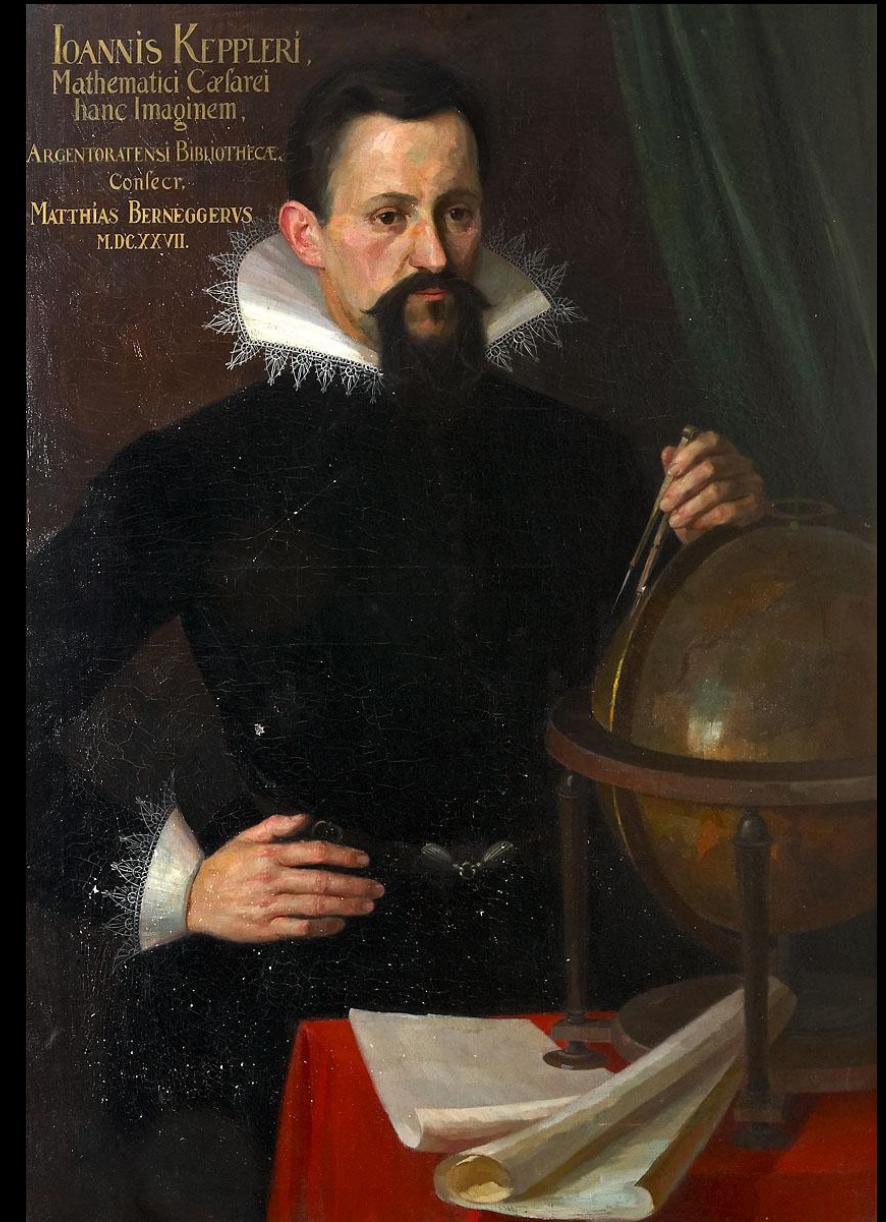


# KEPLERO E IL MOTO DEI PIANETI

Prof. Messinò Domenico



*“Lo scopo primario di tutte le investigazioni del mondo esterno dovrebbe essere scoprire l'ordine razionale e l'armonia che sono state imposte ad esso da Dio, e che Lui ci ha rivelato nel linguaggio della matematica.”*



# COSA AVEVA SCOPERTO

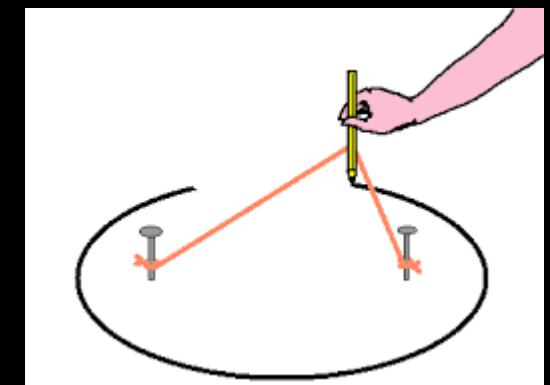
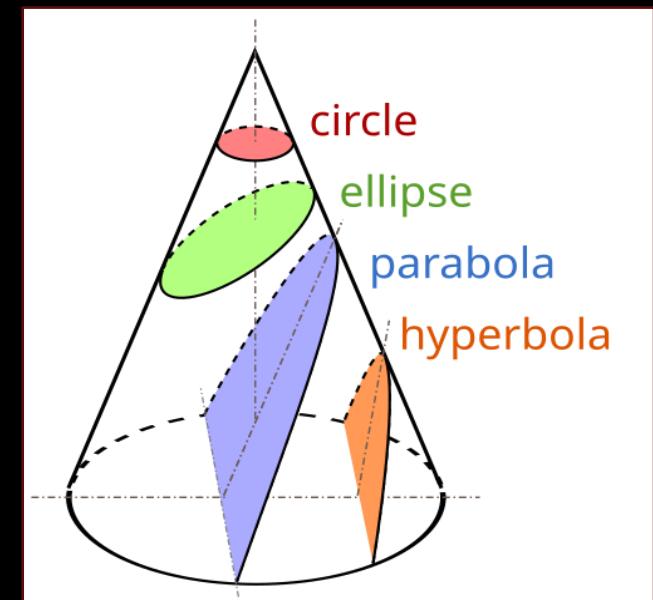
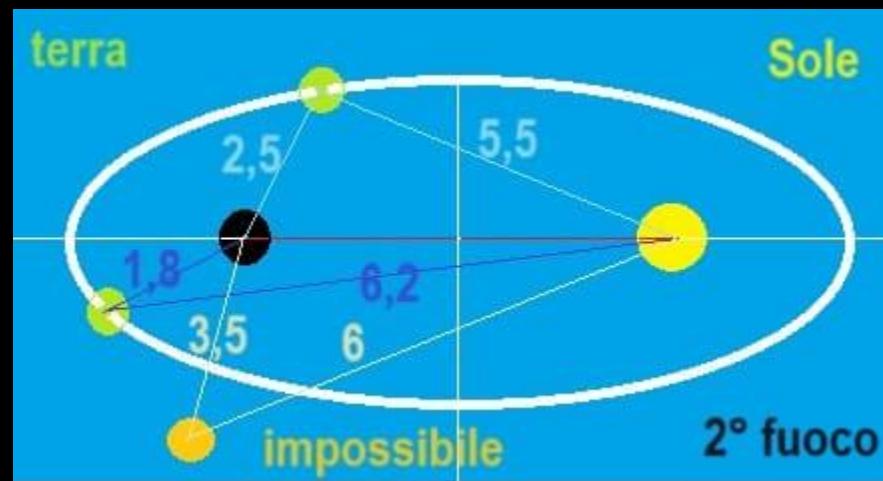
Le prime due leggi furono pubblicate nel 1609, “*Astronomia nova*”, la terza nel 1619, “*Harmonices Mundi*”. La prima e la seconda legge superavano delle concezioni “arcaiche” dell’Astronomia, cioè le assunzioni che, poiché i moti celesti sono “perfetti”, le orbite dei pianeti devono essere circolari e percorse con velocità uniforme.

1. **Orbite ellittiche e posizione del Sole:** Keplero per far coincidere i suoi calcoli con le osservazioni di Brahe, prese in considerazione l’ellisse, che descrisse come un “cerchio allungato”; e immaginò il Sole su uno dei due “fuochi”.
2. **Velocità non uniforme lungo l’orbita:** Comprese che il moto di rivoluzione non avviene a velocità costante, ma che i pianeti si muovono più rapidamente quando sono più vicini al Sole.
3. **L’armonia universale:** Keplero scoprì una regolarità matematica che lega le dimensioni delle orbite (il semiasse maggiore) ai tempi impiegati dai pianeti per compierle (il periodo di rivoluzione).

# I LEGGE

I l'orbita di ciascun pianeta è un ellisse e il Sole occupa uno dei due fuochi.

- L'ellisse è una **sezione conica** e può essere definita come il luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissi, detti fuochi, rimane costante.
- La Terra percorre una orbita ellittica, perché la somma delle distanze dei due fuochi della Terra è sempre uguale. La Terra viene a trovarsi a distanze diverse dal Sole, ma la somma delle distanze tra un qualsiasi suo punto e i suoi due fuochi è costante.



# PERCHÉ UN ELLISSE E NON UNA CIRCONFERENZA?

- Oggi sappiamo che gli oggetti celesti vivono sotto l'influsso di due forze: la **forza centripeta** della gravità, dovuta alla massa del Sole e dei singoli pianeti, e la **forza centrifuga**, quella forza dovuta all'energia oscura che esiste dal big bang e per cui l'Universo continua ad allargarsi.
- La modulazione delle due opposte forze genera orbite diverse. Infatti Dall'intensità della forza centripeta e della forza centrifuga si possono ottenere quattro possibili Orbite:
  1. **Spirale:** quando la forza centripeta è maggiore della forza centrifuga, per cui un giorno che verrà i due corpi celesti si fonderanno. L'esempio di orbita spirale è il meteorite che cade sulla terra.
  2. **Circolare ed ellittica:** quando la forza centripeta e la forza centrifuga si pareggiano, per cui un corpo girerà attorno all'altro formando un cerchio o un ellisse. Un cerchio è geometricamente un'ellisse con eccentricità ( $e$ ) pari a zero. In meccanica celeste, un'orbita perfettamente circolare richiederebbe condizioni iniziali estremamente precise che sono molto improbabili in natura, quindi è un tipo di orbita solo teorica ma che in natura non si è mai osservata. Nei fatti le Orbite planetarie sono tutte ellittiche, perché prima di tutto Sole e pianeti non sono sfere perfette e poi i pianeti si attraggono fra loro, e sono attratti anche dalle loro lune.
  3. **Iperbolica:** L'Orbita è iperbolica quando la forza centripeta è nettamente inferiore alla forza centrifuga, per cui i due corpi si allontaneranno l'uno dall'altro. Un esempio di iperbole è il passaggio dell'asteroide Oumuamua attraverso il sistema solare.

# TUTTA QUESTIONE DI ECCENTRICITÀ E VELOCITÀ

- L'eccentricità (e) quantifica quanto un'orbita si discosta dalla forma circolare ( $e=0$ ) verso una forma ellittica ( $e=1$ ). Nel Sistema Solare, l'eccentricità delle orbite planetarie è generalmente modesta, ad esempio, per la Terra la differenza tra distanza massima e minima dal Sole è solo il 3.3% (l'eccentricità vale 0,017) dunque è pressoché circolare e questo vale anche per gli altri pianeti ad eccezione di Mercurio e Plutone. Quindi tutti i disegni dell'orbita della Terra sono un'esagerazione utile a comprendere la prima legge di Keplero
- L'eccentricità delle orbite non è fissa, ma varia a causa delle forze gravitazionali esercitate soprattutto dai pianeti giganti, come Giove e Saturno. Queste modifiche avvengono su scale temporali molto lunghe, con cicli che durano circa 92.000 anni.
- Se un corpo in orbita ellittica (ad esempio, la Terra a 30km) riceve una spinta aggiuntiva che lo porta oltre una certa velocità critica (velocità di fuga, per la Terra circa 42km), l'orbita si trasforma in un'iperbole, vincendo così l'attrazione gravitazionale del Sole e si allontanerebbe indefinitamente dal Sistema Solare (La nostra Luna si allontana dalla Terra di circa 3.8cm all'anno).

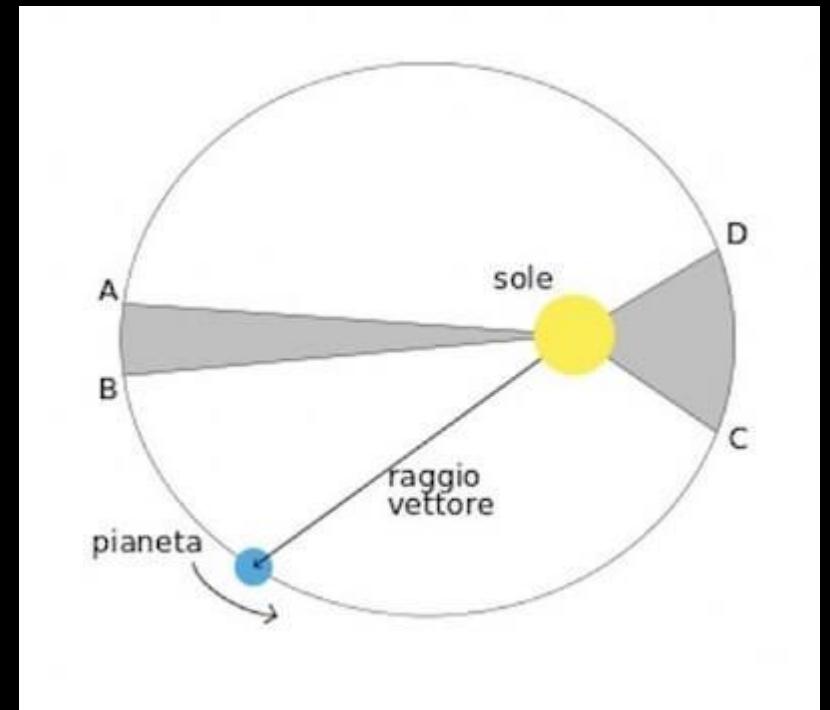
# II LEGGE O LEGGE DELLE AREE

- La seconda legge, conosciuta come la legge delle aree, si concentra sulla velocità di un pianeta lungo la sua orbita.
- Essa dimostra che la velocità orbitale di un pianeta non è costante ma varia a seconda della sua distanza dal Sole. Infatti un pianeta si muove più velocemente quando è più vicino al Sole e più lentamente quando è lontano. Tale legge può essere espressa con il concetto di momento angolare, L, che rimane costante:

$$L = r \times v = k$$

dove  $r$  è il raggio vettore dal Sole al pianeta e  $v$  è la velocità orbitale del pianeta. Ciò significa che l'area spazzata dal raggio vettore in un dato periodo di tempo è sempre la stessa.

Il raggio vettore che unisce il Sole a un pianeta percorre aree uguali in intervalli di tempo uguali



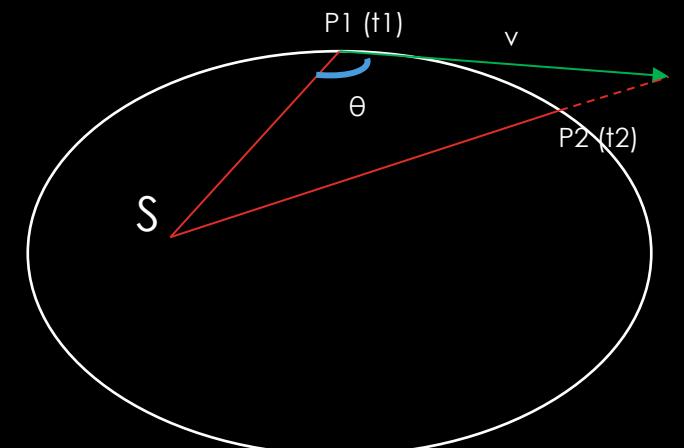
# DIMOSTRAZIONE DELLA II LEGGE: L'AREA DEL TRIANGOLO

- La dimostrazione avviene attraverso il principio della conservazione del momento angolare, dalla figura s'intuisce che affinché la legge sia vera  $dA \propto dt$  oppure che  $dA / dt = K$
- L'area spazzata ( $dA$ ) è approssimativamente quella di un triangolo sottile con base  $r$  e altezza  $P1P2$ . Pertanto, l'area può essere calcolata come

$$dA=1/2 (r P1P2)$$

- La distanza  $P1P2$ , ovvero  $h$ , percorsa dal pianeta è data dalla velocità per il tempo:  $P1P2 = v dt$
- Indichiamo con  $h$  l'altezza relativa alla base  $r$ ;  $h$ , quindi, è la componente della distanza  $P1P2$  perpendicolare al raggio vettore  $r$ . Se  $\theta$  è l'angolo tra il raggio vettore  $r$  e la velocità  $v$  (che è tangente all'orbita, quindi approssimativamente parallela a  $P1P2$ ), si ha che l'altezza  $h$  è data da:

$$h= v dt \sin \theta \Rightarrow \Delta A=1/2 (r v dt \sin \theta)$$



# DIMOSTRAZIONE DELLA II LEGGE: VELOCITÀ AREOLARE E MOMENTO ANGOLARE

- La velocità a cui si riferisce la legge di Keplero non è tanto quella orbitale quanto quella areolare ovvero la velocità data dal rapporto tra area e tempo anziché tra lunghezza e tempo, quindi è l'area spazzata dal raggio vettore nel moto orbitale in un unità di tempo. Secondo la II legge tale velocità è costante  $dA / dt = K$ , quindi

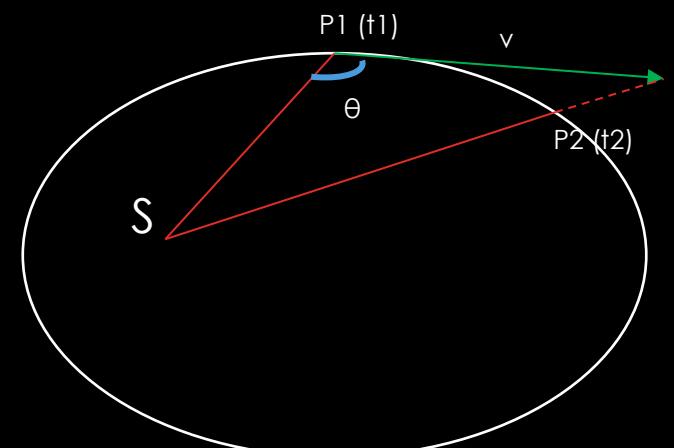
$$dA / dt = 1/2 (r v \Delta t \sin \theta)$$

- Questa espressione è strettamente legata al **momento angolare (L)**. Il modulo del momento angolare è definito come:  $L = m r v \sin \theta$  ( $m=\text{massa del pianeta}$ )  
 $\Rightarrow L/m = r v \sin \theta$  da cui  $dA / dt = L/2m$

- Come stabilito dalla fisica, la forza gravitazionale è una forza centrale, il che implica che il momento angolare ( $L$ ) è costante (si conserva), per cui:

$$dA / dt = K$$

- Questo dimostra che, se  $\Delta t$  è lo stesso in due punti diversi dell'orbita, anche l'area spazzata  $dA$  sarà la stessa: aree uguali in tempi uguali.



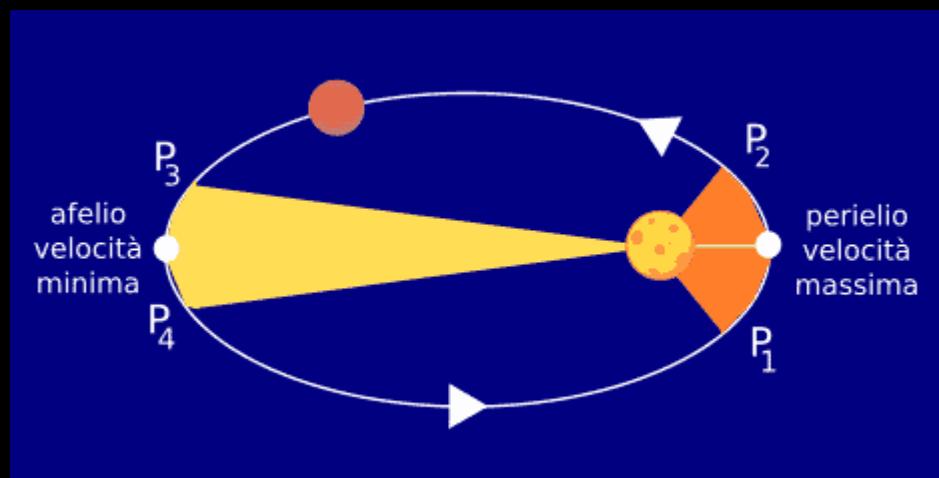
# CONSEGUENZE DELLA II LEGGE

- Dalla seconda legge di Keplero si deduce che **la forza gravitazionale è una forza centrale**. Per spiegare la II legge è necessario che il momento angolare sia costante ( $L=k$ ) affinché questo sia costante il momento torcente dev'essere nullo; a sua volta il momento torcente è nullo se la forza agente sul corpo in rotazione è centrale ovvero parallela al vettore  $r$ . Questo significa che la forza  $F$  è diretta lungo la congiungente i due corpi, cioè è una forza centrale.
- **La velocità del pianeta lungo l'orbita cambia**. Nella dimostrazione della legge si è ragionato attraverso triangoli, dunque, quando il pianeta si trova più vicino al Sole (perielio) l'altezza del triangolo è minore e per fare in modo che l'area rimanga costante la base dovrà essere più larga; situazione diametralmente opposta in afelio. Questo vuol dire che il pianeta nello stesso tempo deve percorrere un tratto di maggiore lunghezza, ossia deve essere più veloce; al contrario quando il pianeta è in afelio si muoverà più lentamente perché il tratto è breve.

**Il momento angolare (L) e il momento torcente (M)** sono concetti usati per descrivere il moto rotatorio:

1. L è la misura della quantità di rotazione di un corpo (quanto il corpo sta ruotando). È una misura di quanto intensamente l'oggetto sta ruotando in un dato momento e di quanto è difficile fermarlo.
2. M è la causa della variazione del momento angolare; è l'equivalente della "Forza" che fa ruotare un oggetto, ovvero la spinta o la torsione che si applica per far partire, accelerare o fermare una rotazione.

La relazione fondamentale è che il Momento Torcente cambia il Momento Angolare: se  $M \neq 0$  allora cambia il momento angolare, se  $M=0$  allora L è costante

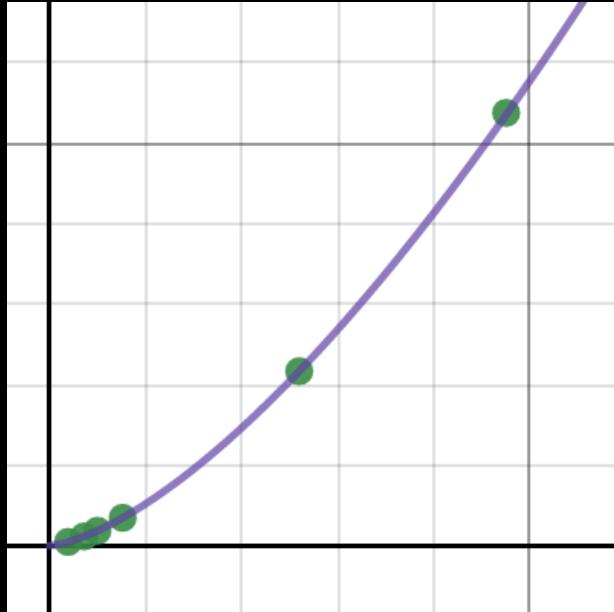


# LA II LEGGE E LA DURATA DELLE STAGIONI

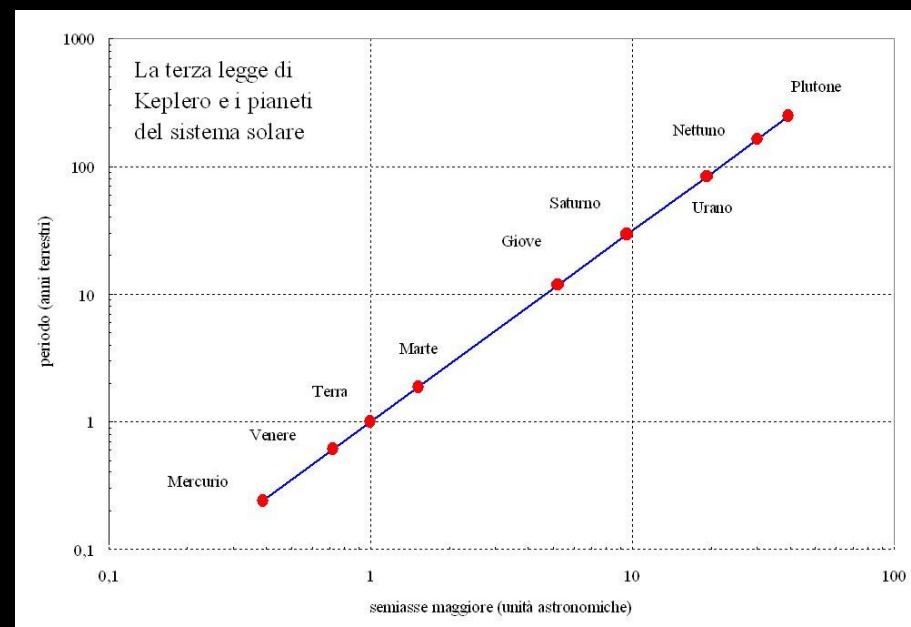
- La più importante conseguenza riguarda il fatto che ognuno dei pianeti del sistema solare, nel corso del proprio moto di rivoluzione, si troverà vicino al sole (**perielio**: La Terra è alla minima distanza, circa 147.1 milioni di km, intorno al 3 gennaio) in alcuni punti, mentre in altri sarà più lontano (**afelio**: La Terra è alla massima distanza, circa 152.1 milioni di km, intorno al 4 luglio ), stabilendo un legame diretto tra la velocità orbitale della Terra e la durata delle stagioni astronomiche.
- La differenza di velocità orbitale dovuta alla Seconda Legge di Keplero comporta che la Terra impieghi più tempo a percorrere metà orbita (dall'equinozio di primavera all'equinozio d'autunno, 186 giorni) rispetto all'altra metà (179 giorni), e questo influenza direttamente la durata delle stagioni astronomiche nell'emisfero boreale, che non hanno esattamente la stessa durata.

# LA III LEGGE O LEGGE DEI PERIODI

- Formulata nel 1619 è la legge che esprime la relazione matematica tra periodo  $T$  di rivoluzione e la distanza media tra i pianeti e il Sole  $r$  (cioè i semiassi maggiori delle ellissi).
- Per la formulazione della III legge Keplero raccolse i dati relativi ad  $r$  e  $T$  per ogni pianeta a lui noto del sistema solare e tracciò dei grafici (distanza sull'asse X e periodo sull'asse Y) ottenendo una curva. La curva dunque non è una retta, tuttavia in fisica e matematica, per verificare una proporzionalità tra grandezze è più utile una figura geometrica semplice e chiara come una retta, per cui si usano grandezze che sono direttamente proporzionali tra loro:  $T^2$  sull'asse Y e  $r^3$  sull'asse X.



*I quadrati dei tempi impegnati dai vari pianeti a percorrere le loro orbite, sono proporzionali ai cubi delle loro distanze medie dal Sole (= i pianeti più lontani impiegano più tempo a girare attorno al Sole rispetto a quelli più vicini).*



# DA KEPLERO A NEWTON

- Le Leggi di Keplero sono puramente empiriche, cioè esse codificano efficacemente le osservazioni sperimentali ma non le inquadranlo in una teoria. Keplero non ha dimostrato che le orbite sono delle ellissi: egli ha scoperto che le osservazioni sperimentali si possono spiegare facendo tale ipotesi. Per dare giustificazione teorica alle tre leggi di Keplero bisogna aspettare Isaac Newton.
- La relazione tra le Leggi di Keplero e le Leggi di Newton è di causa-effetto: Le Leggi di Keplero (basate sull'osservazione dei dati di Tycho Brahe) descrivono come i pianeti si muovono (orbite ellittiche, velocità variabile, relazione tra periodo e distanza). Sono leggi cinematiche. Le Leggi di Newton (in particolare la Legge di Gravitazione Universale e la Seconda Legge del Moto) spiegano perché i pianeti si muovono in quel modo. Sono leggi dinamiche.
- Isaac Newton dimostrò che le tre leggi di Keplero non sono principi fondamentali a sé stanti, ma sono la conseguenza matematica diretta di due suoi principi fondamentali: le Leggi del Moto e la Legge di Gravitazione Universale.

# DIMOSTRAZIONE DELLA III LEGGE ATTRaverso NEWTON

- La forza di attrazione del Sole (forza di gravità) sugli altri pianeti è una forza centripeta per cui  $F_G = F_C$  da cui sostituendo le formule per intero si ha che:

$$G(mM/r^2) = m\omega^2 r$$

( $M$ =massa solare;  $m$ =massa del pianeta)

- Scrivendo la velocità angolare  $\omega = 2\pi/T$  e semplificando  $m$  che appare in entrambi i membri si ottiene:

$$G(M/r^2) = (2\pi/T)^2 r$$

- Risolvendo il quadrato ed esplicitando la  $T^2$ :

$$G(M/r^2) = (4\pi^2/T^2)r \Rightarrow T^2 = (4\pi^2/GM)r^3$$

- Si pone  $4\pi^2/GM = K$  ed ecco ottenuta la legge di Keplero:

$$T^2 = kr^3 \text{ ovvero } \mathbf{T^2/r^3 = k}$$

*“Non si dovrebbe scartare come incredibile la possibilità che una ricerca sufficientemente lunga possa rivelare un dorato grano di verità nella superstizione astrologica.”*

