

## Subprojeto de Iniciação Científica

<b>Edital:</b>	Edital PIIC 2019/2020
<b>Título do Projeto:</b>	Métodos Computacionais em Otimização
<b>Título do Subprojeto:</b>	Métodos de solução para o problema de corte unidimensional com sobras aproveitáveis
<b>Candidato a Orientador:</b>	Oberlan Christo Romão
<b>Candidato a Bolsista:</b>	Uarlley do Nascimento Amorim
<b>Membros Equipe do Projeto:</b>	Oberlan Christo Romão

## 1 Resumo

Um dos principais desafios e objetivos das indústrias de manufatura é a minimização da quantidade de resíduos produzidos, uma vez que pequenas reduções de descartes podem resultar em grandes economias de matéria-prima e, com isso, reduzir o custo de produção. Um dos problemas comumente encontrados nessas indústrias é o de como cortar peças maiores (objetos) visando a produção de peças menores (itens demandados) com tamanhos específicos, otimizando um determinado objetivo. Esse problema é conhecido como problema de corte unidimensional. No entanto, muitos dos trabalhos encontrados na literatura não consideram os possíveis restos de objetos (chamadas sobras), gerados no processo de corte, na hora de definir uma solução para o problema. Algumas dessas sobras têm tamanhos suficientes para serem usados no corte de itens futuros, gerando uma economia e reaproveitamento de matéria-prima. Nesse sentido, é apresentado um modelo exato para o problema de corte unidimensional multi-período com sobras aproveitáveis. Como esperado, a resolução do modelo exato demanda tempo e recursos computacionais elevados, principalmente para resolver instâncias grandes. Por isso, uma abordagem gulosa e um método heurístico também são propostos.

*Palavras chaves:* Problema de corte. Sobras aproveitáveis. Programação Linear. Otimização linear e inteira. Heurísticas.

## 2 Introdução

O setor industrial manufatureiro é considerado o setor que detém os maiores encadeamentos produtivos e capacidade de geração de empregos indiretos, além de gerar a maior parte do investimento mundial em pesquisa e desenvolvimento tecnológico. A competição nesse ramo é crescente e, para se manter no mercado, as empresas têm como principais objetivos a redução do custo de produção e a otimização do uso de matéria prima. A busca por novas estratégias e métodos para atingir esses objetivos é o que torna uma empresa mais competitiva no mercado e faz com que seus processos produtivos sejam mais eficientes.

Atualmente as companhias industriais lidam constantemente com problemas externos, tais como, a elevada carga tributária, demanda insuficiente, taxa de juros elevada, etc. Além disso, diversos problemas internos são compartilhados nesse setor, como a otimização do uso de máquinas, logística

e o problema de corte, que será o foco principal deste trabalho.

O problema de corte unidimensional se mostra presente em setores como o de metal, têxtil, papel e madeira. O problema nessas indústrias é definido de maneira geral como, cortar peças maiores *objetos* para obter peças menores *itens*, que são demandados em uma ordem e quantidade previamente definidas. Existem inúmeras possibilidades para que essa demanda seja satisfeita, onde a diferença entre elas é definida por uma ou mais funções objetivo. As funções objetivo tem o propósito de, a partir de um ou mais parâmetros, classificar uma dessas possibilidades como ruim, boa ou ótima. Estes parâmetros podem ser, por exemplo, minimizar os custos de produção, minimizar o custo dos objetos utilizados, minimizar a perda de material gerada durante o corte, etc.

Um problema similar é a alocação de itens, de forma econômica, dentro de um determinado objeto, o qual é conhecido como o *problema de empacotamento*. Tais problemas formam a base de qualquer ambiente produtivo e têm sido estudados por um número crescente de pesquisadores nas últimas quatro décadas, gerando avanços importantes em diversas áreas, bem como na modelagem matemática, desenvolvimento e análise de métodos de solução. Apesar de ser aparentemente simples de serem entendidos e possuírem uma vasta aplicabilidade, de forma geral, o problema de corte é NP-Difícil (Garey & Johnson, 1990).

Para obter uma solução ótima para esses tipos de problema são necessários algoritmos exatos. Entretanto, sabe-se que, na prática, é possível resolver de forma exata apenas pequenas instâncias desses problemas. Por isso, é natural o estudo e desenvolvimento de métodos heurísticos. Métodos heurísticos não garantem soluções ótimas, porém, garantem soluções viáveis, normalmente, de boa qualidade e utilizando de um tempo computacional consideravelmente menor. Todos lidamos com métodos heurísticos no cotidiano como, por exemplo, ao chutar uma bola de futebol temos como objetivo acertar o gol, e, para obter a solução exata, seria necessário calcular a trajetória da bola, dimensão das traves, angulação do pé, etc. Como isso leva tempo, apenas chutamos e esperamos que nossa memória muscular marque o gol. Nessa, e em diversas outras situações, a melhor solução imediata é encontrada e utilizada, em detrimento de soluções ou experiências comprovadamente melhores, ótimas e precisas.

Como exemplo ilustrativo, considere uma instância que possui três objetos idênticos de tamanho 20 e que se deseja cortar 4 itens com diferentes tamanhos: 10, 10, 6 e 8. A Figura 1a ilustra os dados dessa instância. Já que a soma dos tamanhos dos itens é maior que o tamanho de qualquer objeto, ao menos dois objetos são necessários para cortar os itens e, portanto, a solução apresentada na Figura 1b é ótima em relação a quantidade e custo dos objetos utilizados.

Uma característica do processo de corte de itens é que dificilmente encontraremos padrões de corte que utilizem todo o espaço do objeto, como mostrado na Figura 1b. Dessa forma, ao realizar o processo de corte, sempre há a possibilidade de gerar restos de objetos (chamadas sobras) que podem ter dimensões suficientes para serem usados futuramente no corte de itens (Abuabara & Morabito, 2009).

Este problema se intensifica quando o volume de sucata (restos) é significativo para a empresa. A maioria das empresas não tem uma demanda pré definida e constante para que um planejamento seguro e exato seja feito. Assim, as sobras (retalhos e/ou sucatas) tendem a ser cada vez mais expressivas (Silva, 2008).

As sobras, dependendo de seus tamanhos, podem ser consideradas como resíduos (que serão des-

cartadas) ou sobras aproveitáveis. Uma sobra aproveitável, de um objeto cortado, pode ser definida como uma parte do objeto que possui tamanho igual ou superior a um tamanho de referência. Tais sobras são consideradas aproveitáveis pois podem ser utilizadas futuramente como objetos. Toda sobra que não é aproveitável é considerada descarte (Andrade et al., 2014).

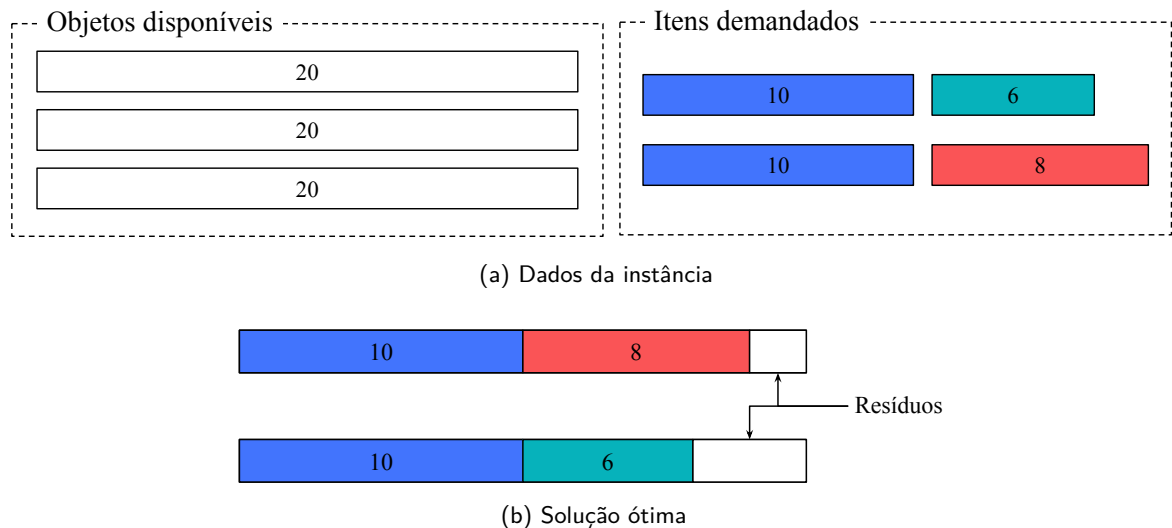


Figura 1: Ilustração de uma pequena instância e uma possível solução ótima. O número de objetos disponíveis é 3 (todos de mesmo tamanho) e o número de itens demandados é 4, dois de tamanho 10, um de tamanho 6 e um de tamanho 8. Considerando que o custo de cada objeto seja de 20 unidades monetárias (u.m.), a solução ótima apresentada tem um custo total de 40 u.m.

Nesse contexto, o problema de corte unidimensional multi-período, tratado neste trabalho, busca solucionar, a cada período de um horizonte de planejamento finito, um problema de corte unidimensional, para atender a ordem de trabalho dos itens solicitados em todos os períodos do horizonte de planejamento. As sobras de um objeto utilizado em um período ficam disponíveis no próximo período, tornando-se novos objetos, juntamente com os objetos disponíveis desse período.

Considerando a instância da Figura 1a, se no primeiro objeto fosse cortado os dois itens de tamanho 10 e no segundo objeto o item de tamanho 6 e o de tamanho 8, o primeiro objeto seria totalmente utilizado (não gerando sobra) e no segundo objeto teríamos uma sobra de tamanho 6, veja a Figura 2. Em um contexto multi-período, tal sobra pode ser potencialmente usada no corte de um item de tamanho 6, enquanto a solução da Figura 1b não possui essa característica. Dessa forma, se as sobras aproveitáveis for um critério de desempate na classificação de uma solução ótima, a solução apresentada na Figura 1b não seria considerada ótima.

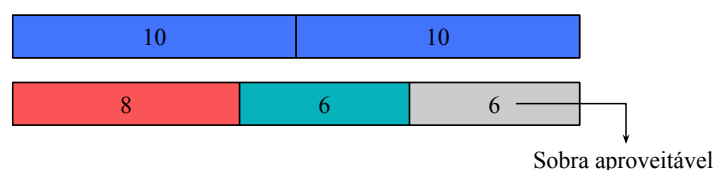


Figura 2: Uma segunda possível solução ótima para os dados da Figura 1a.

Mesmo sendo uma prática comum na indústria, poucos trabalhos na literatura consideram o problema

de corte levando em conta as sobras geradas. Nesse contexto soluções que geram sobras que podem ser utilizadas futuramente são descartadas ou não são consideradas. Entre esses trabalhos, podem ser citados Cherri et al. (2009); Poldi & Arenales (2010); Andrade et al. (2014); Birgin et al. (2019). No entanto, muito ainda pode ser estudado e explorado, principalmente em relação a métodos heurísticos, para que seja possível encontrar soluções (ótimas ou aproximadas) para o problema de corte unidimensional com sobras aproveitáveis em um tempo hábil, principalmente, quando são consideradas instâncias de grande porte (comumente encontradas na indústria) para o problema.

Neste trabalho, é considerado um horizonte de planejamento finito, ou seja, tem-se uma quantidade finita de períodos entre os tempos 1 e  $P$ , onde  $P$  é o período final. Além disso, os dados do problema (objetos disponíveis para o corte e demanda dos itens) são conhecidos a priori e custos de estoque e transporte não são levados em conta.

## 2.1 Objetivos

O objetivo geral deste projeto é propor um modelo matemático e métodos para resolver o problema de corte unidimensional multiperíodo com sobras aproveitáveis, que consiste em cortar os itens demandados de todos os períodos de um horizonte de planejamento finito, usando um conjunto de objetos de custo mínimo e, entre todas as possíveis soluções de custo mínimo, escolher aquela que maximize o valor das sobras aproveitáveis finais. Nesse cenário, é necessário escolher quais objetos utilizar, levando em conta as sobras que o mesmo pode gerar para períodos posteriores.

Os objetivos, de maneira específica, são:

- Realizar um levantamento bibliográfico das técnicas utilizadas para a resolução do problema;
- Estudar e propor um modelo matemático específico para o problema;
- Propor, implementar e aplicar heurísticas ao problema;
- Comparar o desempenho da abordagem heurística com o modelo matemático;
- Apresentar resultados que comprovem a viabilidade da utilização dos métodos heurísticos.

## 2.2 Organização da pesquisa

O presente trabalho está organizado como segue. Na Seção 3 é apresentado o modelo exato proposto para o problema de corte unidimensional multi-período com sobras aproveitáveis. Na Seção 4 é feita uma descrição de uma abordagem gulosa e um método heurístico para resolver o problema. Na Seção 5 é apresentado alguns experimentos numéricos onde o modelo matemático e as heurísticas são comparadas. Finalmente, é apresentado as conclusões na Seção 6.

## 3 Problema de corte unidimensional com sobras aproveitáveis

---

Nesta seção, é apresentado um método de resolução do problema de corte unidimensional com sobras aproveitáveis em um contexto multi-período, que consiste, basicamente, em resolver o problema de corte unidimensional em um horizonte de planejamento, de tal forma que a demanda global de itens seja satisfeita, podendo usar como objetos as sobras geradas nos cortes de itens de períodos anteriores.

Para demonstrar o problema abordado neste trabalho, suponha uma instância com os dados apresentados na Figura 3. Considere que o custo de cada objeto seja equivalente ao seu respectivo comprimento, a demanda por cada tipo de item é de apenas uma unidade e que, para uma sobra ser considerada aproveitável, seu comprimento deve ser superior ou equivalente a 20 unidades de comprimento (comprimento do menor item).

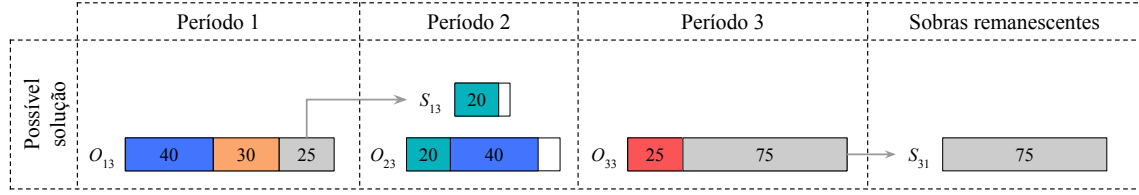
	Período 1	Período 2	Período 3
Objetos disponíveis	$O_{11}$ 100 $O_{12}$ 100 $O_{13}$ 95	$O_{21}$ 120 $O_{22}$ 100 $O_{23}$ 70	$O_{31}$ 150 $O_{32}$ 120 $O_{33}$ 100
Itens demandados	30 40	20 20 40	25

Figura 3: Dados de uma instância para o problema de corte unidimensional multi-período. Considere que o custo de cada objeto seja equivalente ao seu comprimento.

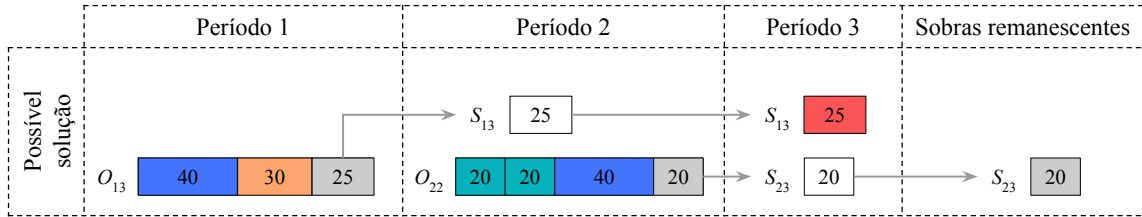
A Figura 4 ilustra duas possíveis soluções. Resolvendo o problema para cada período de forma separada, ou seja, sem levar em conta a demanda de itens futuros, é obtida a Solução 1 (mostrada na Figura 4a), a qual utiliza três objetos (gerando um custo na compra dos objetos de 265) e gera uma sobra final de tamanho 75. Como demandas futuras não são levadas em conta, no primeiro período é utilizado o objeto  $O_{13}$  por ser o objeto de menor custo. Como o objeto  $O_{13}$  não foi utilizado em sua totalidade, uma sobra ( $S_{13}$ ) de tamanho 25 fica disponível para o segundo período como um objeto, mas com custo 0. No segundo período, são utilizados o objeto de entrada  $O_{23}$  e a sobra  $S_{13}$ . Nesse período, nenhuma sobra é gerada. Por fim, no terceiro período, o objeto  $O_{33}$  é utilizado para atender a demanda do período e uma sobra de tamanho 75 é gerada. Em resumo, essa solução (considerada gulosa) utiliza os objetos  $O_{13}$ ,  $O_{23}$  e  $O_{33}$  (cujo custo é  $95 + 70 + 100 = 265$ ) e gera uma sobra remanescente de valor 75.

Analisando melhor essa solução gulosa, note que se fosse comprado, no primeiro ou segundo período, um objeto maior, poderia ser gerada uma sobra que estaria disponível no terceiro período e não seria necessário utilizar o objeto  $O_{33}$ . Essa estratégia de minimizar o custo global do custo dos objetos é mostrada na Solução 2 (Figura 4b), cujo custo dos objetos é 195 (uma economia de aproximadamente 30%) e o valor da sobras finais é igual a 20. Como ilustrado nessa solução, considerar todos os períodos de forma simultânea e as sobras geradas por cada objeto, torna-se possível otimizar o uso dos objetos e, assim, diminuir o custo global dos objetos necessários para cortar todos os itens demandados do horizonte de planejamento.

Observe que as sobras que não foram utilizadas em um período ficam disponíveis nos períodos posteriores, como é mostrado na Figura 4b na qual a sobra  $S_{13}$  não é utilizada no segundo período, mas sim no terceiro. Já a sobra  $S_{23}$  não é utilizada em nenhum período, tornando-se uma sobra remanescente. Além disso, é importante mencionar que uma sobra também pode gerar outra sobra aproveitável que pode ser utilizada futuramente ou ser considerada sobra remanescente. Por fim, os objetos disponíveis em um determinado período, e que não foram utilizados, não ficam disponíveis nos próximos períodos.



(a) Solução 1 – solução gulosa obtida por um método míope que, a cada período, minimiza o custo dos objetos necessários para cortar os itens demandados do período. Custo dos objetos utilizados igual a 265 e o valor das sobras remanescentes igual a 100.



(b) Solução 2 – com custo total mínimo dos objetos necessários para os itens demandados de todos os períodos. Custo dos objetos utilizados igual a 195 e o valor das sobras remanescentes igual a 20.

Figura 4: Ilustração de duas soluções considerando os dados apresentados na Figura 3.

Dado um número de períodos  $P$ , um conjunto de tipos de itens  $n_p, p = 1, \dots, P$  com tamanhos  $w_{pj} \in \mathbb{Z}^+, p = 1, \dots, P, j = 1, \dots, n_p$  e uma demanda  $d_{pj}, p = 1, \dots, P, j = 1, \dots, n_p$ , designando quantos itens do tipo  $j$  deverão ser cortados no período  $p$  e, por fim, um conjunto  $m_p, p = 1, \dots, P$  de objetos disponíveis com tamanhos  $w_{pi} \in \mathbb{Z}^+, p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p$  e custo  $c_{pi} \in \mathbb{Z}^+, p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p$  por unidade de comprimento, o problema de corte unidimensional multi-período com sobras aproveitáveis tem por objetivo cortar os itens demandados, utilizando os objetos disponíveis, minimizando o custo dos objetos usados.

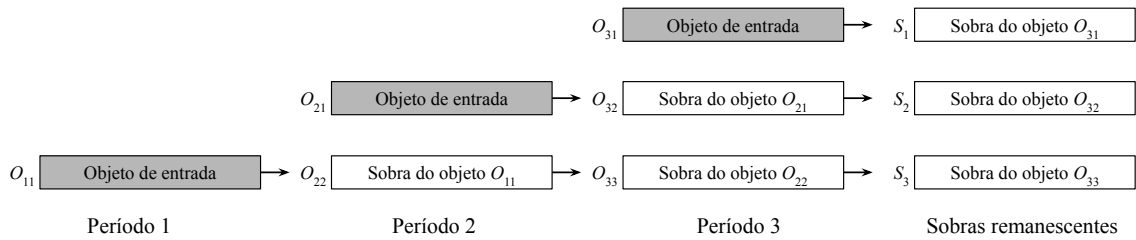


Figura 5: Posicionamento, adotado pelo modelo do problema proposto, dos objetos de entrada (em cinza) e dos objetos originados de sobras para uma instância com três períodos. Observe que, após o último período, todas as sobras, caso sejam aproveitáveis e que não foram utilizadas, serão definidas como sobras remanescentes. Baseada em Romão (2017)

Seja  $\bar{m}_p$ , para  $p = 1, \dots, P + 1$ , o número de objetos disponíveis no período  $p$  mais o número de sobras do período  $p - 1$ . Definindo  $m_{P+1} = 0$ , tem-se que:

$$\bar{m}_p = \begin{cases} m_p, & p = 1, \\ m_p + \bar{m}_{p-1}, & p = 2, \dots, P + 1. \end{cases}$$

Considerando que, os  $m_p$  primeiros objetos de  $\bar{m}_p$  referem-se aos objetos de entrada do período  $p$  e os seguintes  $\bar{m}_{p-1}$  objetos são associados as sobras que podem ser geradas pelo corte de objetos do período  $p-1$ , e  $\bar{m}_{P+1}$  está associado à quantidade máxima de sobras remanescentes. Vale lembrar que sobras também podem gerar sobras. A Figura 5 ilustra esse esquema de posicionamento para uma instância de três períodos. Na figura, é observável que  $m_1 = m_2 = m_3 = 1$ , portanto,  $\bar{m}_1 = m_1$ ,  $\bar{m}_2 = m_2 + \bar{m}_1 = 2$ ,  $\bar{m}_3 = m_3 + \bar{m}_2 = 3$  e  $\bar{m}_4 = \bar{m}_3$ .

Como mostra a Figura 5 os valores de  $\bar{m}_p$  crescem linearmente, ou seja, expressar esses valores não será um grande problema. Dessa forma não será necessário nenhuma limitação quanto à quantidade de objetos disponíveis no horizonte de planejamento.

Seja  $u_{pi} \in \{0, 1\}$ ,  $p = 1, \dots, P$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}_p$ , indicando se o objeto  $i$  do período  $p$  foi usado para cortar algum item da ordem de trabalho ( $u_{pi} = 1$ ) ou não ( $u_{pi} = 0$ ). Seja  $x_{pij}$ ,  $p = 1, \dots, P$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ,  $j = 1, \dots, n_p$  uma variável inteira indicando quantos itens do tipo  $j$  foram cortados no objeto  $i$  no período  $p$ . Assim, tem-se as seguintes restrições:

$$u_{pi}\hat{n} \geq x_{pij}, \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p, j = 1, \dots, n_p, \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}_p} x_{pij} = d_{pj}, \quad p = 1, \dots, P, j = 1, \dots, n_p, \quad (2)$$

$$u_{pi} \leq \sum_{j=1}^{n_p} x_{pij} \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p, \quad (3)$$

onde  $\hat{n}$  é expresso por  $\hat{n} = \max\{n_p | p = 1, \dots, P\}$ .

As restrições (1) garantem que itens só possam ser atribuídos à objetos comprados, onde  $\hat{n}$  é o limitante superior da quantidade de tipos de itens que podem ser cortados em qualquer objeto. As restrições (2) asseguram que a demanda dos itens do tipo  $j$  sejam atendida. Já o conjunto de restrições (3) garantem que um objeto só será utilizado caso haja a atribuição de pelo menos um item a ele.

Em seguida, são definidas as dimensões dos objetos de cada período  $p > 1$  originados de sobras de objetos de algum período anterior a  $p$ . Deste modo, seja  $r_{pi}$ ,  $p = 1, \dots, P$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}_p$  uma variável inteira associada à dimensão da sobra do objeto  $O_{pi}$ . Como o objetivo é considerar as sobras aproveitáveis de um período como objetos no período seguinte, é necessário definir as dimensões desses novos objetos como sendo as dimensões das sobras do período antecedente. Assim, as medidas associadas a  $r_{pi}$ , serão as dimensões dos novos objetos do período  $p+1$  ou sobras remanescentes.

Seja  $\bar{W}_{pi}$  ( $p = 1, \dots, P+1$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ) uma variável inteira positiva associada à dimensão do objeto  $O_{pi}$ . Para os objetos de entrada, ou seja, quando  $p = 1, \dots, P$ ,  $i = 1, \dots, m_p$ , tem-se que  $\bar{W}_{pi}$  deve ser igual a  $W_{pi}$  caso o objeto  $i$  no período  $p$  seja utilizado ( $u_{pi} = 1$ ) ou nulo caso contrário. Assim,

$$\bar{W}_{pi} = W_{pi}u_{pi}, \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p. \quad (4)$$

O próximo passo é fazer com que o valor de  $\bar{W}_{pi}$ , para  $p = 2, \dots, P+1$ ,  $i = m_p + 1, \dots, \bar{m}_p$ , corresponda com a dimensão da sobra do objeto do período anterior. Para isso, são necessárias as seguintes restrições:

$$\bar{W}_{p+1,\ell} \leq \hat{W}u_{pi}, \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, \quad (5)$$

$$r_{pi} - (1 - u_{pi})\hat{W} \leq \bar{W}_{p+1,\ell} \leq r_{pi} + (1 - u_{pi})\hat{W}, \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, \quad (6)$$

$$\bar{W}_{pi} - \hat{W}u_{pi} \leq \bar{W}_{p+1,\ell} \leq \bar{W}_{pi} + \hat{W}u_{pi}, \quad p = 2, \dots, P+1, i = m_p + 1, \dots, \bar{m}_p, \quad (7)$$

$$r_{pi} - (1 - u_{pi})\hat{W} \leq \bar{W}_{p+1,\ell} \leq r_{pi} + (1 - u_{pi})\hat{W}, \quad p = 2, \dots, P+1, i = m_p + 1, \dots, \bar{m}_p, \quad (8)$$

onde,  $\hat{W} = \max\{W_{pj} | p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p\}$  e  $\ell = m_{p+1} + i$ .

As restrições (5) e (6) garantem que se o objeto de entrada  $O_{pi}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p$ ) for utilizado ( $u_{pi} = 1$ ), o tamanho do objeto  $O_{p+1,\ell}$  será exatamente igual ao tamanho da sobra do objeto  $O_{pi}$ . Por outro lado, caso objeto  $O_{pi}$  não seja utilizado ( $u_{pi} = 0$ ), o tamanho do novo objeto  $O_{p+1,\ell}$  será zero. Como mostrado na Figura 4b, caso um objeto originado de sobra não seja utilizado no período  $p$ , o mesmo deve estar disponível no período  $p+1$  com o mesmo tamanho do período  $p$ , o que é garantido pelas restrições (7). Por outro lado, as restrições (8) definem o tamanho da sobra do objeto originado de uma sobra, caso o mesmo seja utilizado.

Definidos os tamanhos dos objetos, deve-se assegurar que a soma dos tamanhos dos itens atribuídos ao objeto  $O_{pi}$  não exceda o seu tamanho. Além disso, o tamanho da sobra do objeto  $O_{pi}$  deve ser exatamente o tamanho do objeto menos a soma dos tamanhos os itens cortados em  $O_{pi}$ , o que pode ser dado por:

$$\sum_{j=1}^{n_p} w_{pj}x_{pij} \leq \bar{W}_{pi}, \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p, j = 1, \dots, n_p, \quad (9)$$

$$\bar{W}_{pi} - \sum_{j=1}^{n_p} w_{pj}x_{pij} = r_{pi}, \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p, j = 1, \dots, n_p. \quad (10)$$

Além disso, deve-se garantir que o tamanho da sobra de cada objeto seja menor que o tamanho do próprio objeto ao qual a sobra está associada. Dessa forma,

$$r_{pi} \leq \bar{W}_{pi}, \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p. \quad (11)$$

Seja  $\hat{w}$  um dado de entrada representando um tamanho de referência e uma sobra é considerada aproveitável se possuir tamanho maior ou igual a  $\hat{w}$ . Seja  $\alpha_{pi} \in \{0, 1\}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ) uma variável auxiliar para definir se a sobra de um objeto  $O_{pi}$  é considerada aproveitável ( $\alpha_{pi} = 1$ ) ou não ( $\alpha_{pi} = 0$ ), o que pode ser modelado da seguinte forma:

$$\hat{w}\alpha_{pi} \leq r_{pi} \leq \hat{W}\alpha_{pi} \quad p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p. \quad (12)$$

O conjunto de restrições (12), juntamente com as restrições (11), garantem que se  $r_{pi}$  for menor que  $\hat{w}$ , então será forçado a ser zero ( $\alpha_{pi} = 0$ ). Caso contrário, ele pode ser, no máximo o tamanho do objeto, mas as restrições (10) limitam o seu tamanho máximo.

Como já mencionado, o problema aqui tratado consiste em minimizar o custo dos objetos utilizados para o corte de itens demandados, e entre todas as soluções de custo mínimo, escolher a que maximize o valor das sobras remanescentes. O custo os objetos utilizados é dados por:



$$\sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{m_p} c_{pi} W_{pi} u_{pi} \quad (13)$$

Por definição, o valor por unidade de comprimento de uma sobra é exatamente o custo por unidade de comprimento do objeto ao qual a sobra foi originada. Assim, o valor das sobras aproveitáveis remanescentes, pode ser obtido da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}_{P+1}} \bar{c}_{P+1,i} \bar{W}_{P+1,i}, \quad (14)$$

onde  $\bar{c}_{P+1,i}$  é dado pelo do calculo abaixo.

$$\bar{c}_{pi} = \begin{cases} c_{pi}, & p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, \\ \bar{c}_{p-1,i-m_p}, & p = 2, \dots, P+1, i = m_p + 1, \dots, \bar{m}_p. \end{cases}$$

No problema, o valor das sobras deve ser o critério de desempate entre todas as soluções de custo mínimo. Note que (14) assume valores inteiros maiores ou iguais a zero e estritamente menores que:

$$\lambda = \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{m_p} c_{pi} W_{pi}$$

Dessa forma, a combinação adequada de (13) e (14) é dada por:

$$\lambda \left( \sum_{p=1}^P \sum_{i=1}^{m_p} c_{pi} W_{pi} u_{pi} \right) - \sum_{i=1}^{\bar{m}_{P+1}} \bar{c}_{P+1,i} \bar{W}_{P+1,i}. \quad (15)$$

Como o termo relacionado à (13) é multiplicado por um limitante superior de (14), cada unidade de (13) é mais importante que todo o valor de (14). Assim, ao minimizar (15), o termo relacionado à (14) participa no desempate das soluções que minimizam (13), escolhendo aquela com maior valor das sobras aproveitáveis remanescentes (Romão, 2017).

Em resumo, problema de corte unidimensional multi-período com sobras aproveitáveis pode ser modelado minimizando a função objetivo (15) nas variáveis  $u_{pi} \in \{0, 1\}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ),  $\alpha_{pi} \in \{0, 1\}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ),  $x_{pij} \in \mathbb{Z}^+$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p, j = 1, \dots, n_p$ ),  $r_{pi} \in \mathbb{Z}^+$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ),  $\bar{W}_{pi} \in \mathbb{Z}^+$  ( $p = 1, \dots, P+1, i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ) sujeito à (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12). Esse modelo será chamado de  $\mathbb{E}$ .

## 4 Métodos de solução para o problema

Como mencionado anteriormente, resolver instâncias utilizando o modelo  $\mathbb{E}$  nos retorna uma solução ótima para o problema, mas a utilização deste modelo possui alguns pontos negativos, onde o principal deles é o tempo de execução, por isso, o desenvolvimento de métodos heurísticos se faz muito importante quando se trata de obter uma solução de boa qualidade (próxima da ótima) em um tempo de execução viável. Deste modo, nesta seção, serão apresentados alguns modelos que podem ser utilizados para resolver instâncias de médio e grande porte em um período de tempo viável.

## 4.1 Método Guloso

Os métodos gulosos são algoritmos que buscam soluções ótimas para o problema de forma local, isto é, ele toma decisões baseadas nas iterações correntes sem se preocupar com o resultado dessas decisões no futuro. Uma decisão tomada por um algoritmo guloso jamais é revista ou revogada. Mesmo não sendo garantido a obtenção da solução ótima, métodos gulosos são, em geral, eficientes e bem simples de serem implementados.

Uma estratégia gulosa para resolver o problema apresentado, é de encontrar uma solução ótima para cada período, na qual as possíveis sobras aproveitáveis do período  $p$  são adicionadas a lista de objetos disponíveis do período  $p+1$ , repetindo esse procedimento para  $p = 1, \dots, P$ . O Algoritmo 1 ilustra o pseudocódigo do método guloso proposto para o problema proposto. O algoritmo recebe os mesmos dados de entrada do modelo  $\mathbb{E}$ , que são:

- $P \in \mathbb{Z}^+$  : quantidade de períodos em que o método será utilizado;
- $m_p \in \mathbb{Z}^+$ : número de objetos disponíveis no período  $p$ ;
- $W_{pi} \in \mathbb{Z}^+$ : tamanho do objeto  $O_{pi}$ ;
- $c_{pi} \in \mathbb{Z}^+$ : custo do objeto  $O_{pi}$ ;
- $n_p \in \mathbb{Z}^+$ : quantidade de tipos de itens do período  $p$ ;
- $w_{pj} \in \mathbb{Z}^+$ : tamanho do item do tipo  $j$  no período  $p$ ;
- $d_{pj} \in \mathbb{Z}^+$ : demanda do item de tipo  $j$  no período  $p$ ;
- $\hat{w}$ : tamanho de referência utilizado para definir se uma sobra é ou não aproveitável.

Após a execução, o algoritmo deverá retornar as seguintes saídas:

- $u_{pi} \in \{0, 1\}$ : indicando se o objeto  $O_{pi}$  foi utilizado ( $u_{pi} = 1$ ) ou não ( $u_{pi} = 0$ );
- $r_{pi} \in \mathbb{Z}^+$ : comprimento da sobra do objeto  $O_{pi}$ , se o comprimento for maior que  $\hat{w}$ ;
- $x_{pij} \in \mathbb{Z}^+$ : número de itens do tipo  $I_{pj}$  cortados no objeto  $O_{pi}$ ;
- $m_p \in \mathbb{Z}^+$ : quantidade de objetos/sobras aproveitáveis disponíveis no período  $p$ ;
- $CustoTotal \in \mathbb{Z}^+$ : custo global dos objetos utilizados em todo horizonte de planejamento;
- $ValorSobras \in \mathbb{Z}^+$ : valor das sobras remanescentes,

onde  $p = 1, \dots, P$ ,  $i = 1, \dots, m_p$ ,  $j = 1, \dots, n_p$ .

O modelo guloso, nomeado como  $\mathbb{G}_p$ , é, resumidamente, o modelo  $\mathbb{E}$  sem a parte multi-período, não sendo necessária a criação das variáveis  $\bar{m}_p$  e  $\bar{W}_{pi}$  ( $p = 1, \dots, P+1$ ,  $i = 1, \dots, \bar{m}_p$ ), uma vez que, uma sobra aproveitável do período  $p$ , se  $p < P$ , será adicionada diretamente à  $W_{p+1, m_p+1}$ , incrementando o valor de  $m_{p+1}$  em uma unidade à cada novo objeto adicionado. Esse processo ocorrerá no fim de cada execução do modelo  $\mathbb{G}_p$  para  $p = 1, \dots, P$ .

O modelo  $\mathbb{G}_p$  ( $p = 1, \dots, P$ ) pode ser definido como:

Minimizar

$$\lambda \left( \sum_{i=1}^{m_p} c_{pi} W_{pi} u_{pi} \right) - \sum_{i=1}^{m_p} c_{pi} r_{pi}$$

sujeito à:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_p} w_{pj} x_{pij} &\leq W_{pi}, & i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p, \\ \sum_{i=1}^{m_p} x_{pij} &= d_{pj}, & j = 1, \dots, n_p, \\ W_{pi} u_{pi} - \sum_{j=1}^{n_p} w_{pj} x_{pij} &= r_{pi}, & i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p, \\ r_{pi} &\leq W_{pi} u_{pi} & i = 1, \dots, m_p, \\ \hat{w} \alpha_i &\leq r_{pi} \leq W_{pi} \alpha_i & i = 1, \dots, m_p. \end{aligned}$$

---

**Algoritmo 1** Resolve o problema proposto usando uma abordagem gulosa

---

**Entrada:**  $P, m_p, W_{pi}, c_{pi}, n_p, w_{pj}, d_{pj}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p$ ),  $\hat{w}$ .

**Saída:**  $u_{pi}, m_p, r_{pi}, x_{pij}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p$ ),  $CustoTotal$ ,  $ValorSobras$ .

---

```

1: Defina  $CustoTotal = 0$  e  $ValorSobras = 0$ 
2: Defina  $\bar{c}_{pi} = c_{pi}$  para  $i = 1, \dots, m_p, p = 1, \dots, P$ 
3: for  $p \leftarrow 1$  to  $P$  do
4:   Encontre  $u_{pi}, x_{pij}$  e  $r_{pi}$  resolvendo  $\mathbb{G}_p$ .
5:   if  $\mathbb{G}_p$  para  $p$  é inviável then
6:     return "Não conseguiu resolver".
7:   end if
8:    $CustoTotal \leftarrow CustoTotal + \bar{c}_{pi} W_{pi} u_{pi}$  para  $i = 1, \dots, m_p$ 
9:   Defina  $\ell = m_{p+1} + 1$ .
10:  for  $i \leftarrow 1$  to  $m_p$  do
11:    if  $p < P$  and  $r_i \geq \hat{w}$  then ▷ Calcula a dimensão das sobras que serão novos objetos no período  $p + 1$ 
12:       $m_{p+1, \ell} \leftarrow m_{p+1} + 1$ .
13:       $W_{p+1, \ell} \leftarrow r_{pi}$ 
14:       $c_{p+1, \ell} \leftarrow c_{pi}$ 
15:       $\bar{c}_{p+1, \ell} \leftarrow 0$ 
16:       $\ell \leftarrow \ell + 1$ 
17:    end if
18:  end for
19: end for
20: for  $i \leftarrow 1$  to  $m_p$  do
21:    $ValorSobras \leftarrow ValorSobras + c_{Pi} r_{Pi}$ 
22: end for
23: return  $u_{pi}, r_{pi}, x_{pij}, m_p$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p$ ),  $CustoTotal$ ,  $ValorSobras$ .

```

---

A partir das saídas do Algoritmo 1, a função objetivo obtida pode ser determinado como:

$$\lambda \times CustoFinal - ValorSobras.$$

## 4.2 Heurística Proposta

A heurística proposta é baseada nas heurísticas de empacotamento (*Bin Packing*) *First-Fit* (Ullman, 1971). A heurística proposta começa ordenando os itens em ordem decrescente de cada período  $p$ , e, então, escolhe o primeiro tipo de item demandado e tenta corta-lo no primeiro objeto de uma lista ordenada, a ordenação é explicada a seguir. O processo se repete até que o comprimento do objeto seja menor que o tipo de item escolhido, fazendo com que outro objeto seja escolhido. A lista de objetos é ordenada utilizando o seguinte critério: dado dois objetos  $O_{pi}$  e  $O_{pk}$  com custos por unidade de comprimento  $c_{pi}$  e  $c_{pk}$ , respectivamente, o objeto  $O_{pi}$  estará na frente do objeto  $O_{pk}$  se e somente se:

$$\left(\beta - \frac{2p}{P}\right)^{[c_{pi} - (P-p)]} \leq \left(\beta - \frac{2p}{P}\right)^{[c_{pk} - (P-p)]},$$

onde  $\beta > 3$ .

A escolha da constante foi feita com base em diversos testes empíricos, e inicialmente a ideia foi fazer uma função que desse um peso maior para o custo, e nos períodos finais, um peso maior para a dimensão de um objeto, isto é, invertendo o processo de forma bem acentuada. Porém, isso não funcionou muito bem e os resultados obtidos foram piores do que o esperado. Então, foi considerado apenas fornecer um peso maior para o custo, diminuindo no decorrer dos períodos. Além disso, o motivo da condição  $\beta > 3$  é que, caso  $p = P$ , então  $(3 - 2)^{[c - (P-p)]} = 1$ , isto é, resultando em uma função constante em 1 no último período.

Esta estratégia de ordenação visa pesar o custo de cada objeto avaliando o período atual e o horizonte de planejamento inteiro. Dessa forma, é possível expressá-lo através da função de custo artificial do objeto, dada por:

$$f(c) = \left(\beta - \frac{2p}{P}\right)^{[c_{pi} - (P-p)]}, \quad i = 1, \dots, P. \quad (16)$$

O Algoritmo 2 apresenta o pseudocódigo da heurística proposta para resolver o problema proposto. As entradas e saídas do algoritmo são as mesmas do Algoritmo 1. Novamente, a partir das saídas do Algoritmo 2, a função objetivo obtida pode ser calculada por:

$$\lambda \times \text{CustoFinal} - \text{ValorSobras}.$$

---

**Algoritmo 2** Resolve o problema usando a heurística proposta

---

**Entrada:**  $P, m_p, W_{pi}, c_{pi}, n_p, w_{pj}, d_{pj}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p$ ),  $\hat{w}$ .

**Saída:**  $u_{pi}, m_p, r_{pi}, x_{pij}$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p$ ),  $CustoTotal, ValorSobras$ .

---

```

1: Faça  $u_{pi} = 0$  para  $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p$ ;
2: Faça  $x_{pij} = 0$  para  $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p$ ;
3: Faça  $r_{pi} = 0$  para  $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p$ ;
4: Defina  $\tilde{c}_{pi} = c_{pi}$  para  $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p$ ;
5: Defina  $\ell = m_{p+1} + 1$ ;
6: Defina  $CustoTotal = 0$ . e  $ValorSobras = 0$ .
7: for  $p \leftarrow 1$  to  $P$  do
8:    $k \leftarrow 1$ .
9:   Ordene os objeto do período  $p$  utilizando  $f(c)$ , definida em (16).
10:  Ordene os itens do período  $p$  de forma decrescente.
11:  for  $i \leftarrow 1$  to  $n_p$  do
12:    for  $j \leftarrow 1$  to  $d_p$  do
13:      while ( $w_{pi} > W_{pk}$ ) do
14:         $k \leftarrow k + 1$ .
15:        if  $k > m_p$  then
16:          return "Não conseguiu resolver".
17:        end if
18:      end while
19:      if  $u_{pk} = 0$  then
20:         $u_{pk} \leftarrow 1$ 
21:         $CustoTotal \leftarrow CustoTotal + W_{pk}\tilde{c}_{pk}$ 
22:      end if
23:       $W_{pk} \leftarrow W_{pk} - w_{pi}$ .
24:       $x_{pki} \leftarrow x_{pki} + 1$ .
25:       $k \leftarrow 1$ .
26:    end for
27:  end for
28:  if  $p < P$  then ▷ Calcula a dimensão das sobras que serão novos objetos no período  $p + 1$ 
29:    for  $k \leftarrow 1$  to  $m_p$  do
30:      if ( $W_{pk} \geq \hat{w}$  and ( $r_{pk} = 1$  or  $u_{pk} = 1$ )) then
31:         $W_{p+1,\ell} \leftarrow W_{pk}$ .
32:         $m_{p+1} \leftarrow m_{p+1} + 1$ .
33:         $r_{p+1,\ell} \leftarrow 1$ .
34:         $c_{p+1,\ell} \leftarrow c_{pk}$ .
35:         $\tilde{c}_{p+1,\ell} \leftarrow 0$ .
36:      end if
37:    end for
38:  end if
39: end for
40: for  $i \leftarrow 1$  to  $m_p$  do
41:   if ( $r_{Pi} = 1$  or ( $u_{Pi} = 1$  and  $W_{Pi} > 0$ )) then
42:      $ValorSobras \leftarrow ValorSobras + W_{Pi} c_{Pi}$ 
43:   end if
44: end for
45: return  $u_{pi}, r_{pi}, x_{pij}, m_p$  ( $p = 1, \dots, P, i = 1, \dots, m_p, j = 1, \dots, n_p$ ),  $ValorSobras, CustoTotal$ .

```

---

## 5 Experimentos computacionais

Nesta seção, são apresentados alguns experimentos computacionais ilustrativos para avaliar e comparar os resultados obtidos pelo modelo  $\mathbb{E}$  e pelas abordagens heurísticas propostas para resolver o problema de corte unidimensional multi-período com sobras aproveitáveis. Todos os algoritmos e modelos foram implementados em C++ e compilados com GNU g++ versão 9.2.1 com a opção -O3 ativada. No caso dos modelos, foi utilizado o IBM ILOG CPLEX versão 12.10. Com relação aos parâmetros do CPLEX, o valor da variável EpGap foi definido como 0. O tempo de relógio, para resolução de uma instância pelo CPLEX, foi limitado em 2 horas (o parâmetro TiLim foi definido como 7200). Os experimentos foram realizados em uma máquina Intel Core i7-6500U 2.50GHz, com 8 GB de memória RAM e com Sistema Operacional Linux.

Para os experimentos numéricos dessa seção, foram geradas 30 instâncias, mostradas na Tabela 1. As instâncias são divididas em três grupos (cada um com 10 instâncias). Esses são definidos pelo número de períodos do horizonte de planejamento (4, 8 ou 12). Como tamanho de referência utilizado para definir se uma sobra é ou não aproveitável, foi usado a seguinte definição  $\hat{w} = \min\{w_{pj} | p = 1, \dots, P, j = 1, \dots, n_p\}$ , ou seja,  $\hat{w}$  é equivalente ao tamanho do menor item.

Na Tabela 1, para cada instância temos o número que a identifica, a quantidade de períodos, a quantidade de objetos disponíveis em cada período e suas medidas no formato  $(m_p \ c_{pi}(W_{pi}))$ , onde  $m_p$  é a quantidade de objetos disponíveis no período  $p$  e,  $c_{pi}$  e  $W_{pi}$  são, respectivamente, o custo por unidade de comprimento e o comprimento do objeto  $i$  no período  $p$ . Em seguida, temos as informações dos itens no formato  $(n_p \ d_{pj}(w_{pj}))$ , onde  $n_p$  refere-se a quantidade de tipos de itens presentes no período  $p$ ,  $d_{pj}$  diz respeito à demanda do item de tipo  $j$  no período  $p$ , e, por fim,  $w_{pj}$  refere-se ao comprimento do item de tipo  $j$  no período  $p$ .

Tabela 1: Dados das instâncias de testes

#Inst.	$P$	Objetos		Itens	
		$m_p$	$c_{pi}(W_{pi})$	$n_p$	$d_{pj}(w_{pj})$
1	4	1	5(572)	4	2(54)1(83)1(66)5(24)
		4	4(332)1(222)5(592)3(553)	3	2(97)4(85)4(32)
		7	5(430)1(100)5(524)4(574)4(166)2(109)4(100)	4	1(37)3(42)1(63)1(32)
		7	1(320)2(321)2(169)5(562)5(267)4(108)1(440)	6	2(91)4(45)1(68)2(23)5(66)5(92)
2	4	4	4(239)5(543)1(373)5(402)	4	1(29)5(85)3(26)2(119)
		6	1(564)2(214)4(357)3(393)4(527)3(252)	9	3(67)3(78)5(102)4(101)4(73)4(66)3(28)1(44)2(57)
		4	3(131)2(535)1(217)2(374)	4	2(113)5(27)5(39)5(37)
		7	3(491)5(401)1(220)1(380)4(338)5(330)2(399)	7	3(54)2(46)2(63)3(96)4(67)3(98)5(84)
3	4	6	5(340)3(186)2(219)3(187)5(380)5(318)	1	3(51)
		5	4(185)3(316)5(320)5(567)4(304)	6	4(119)4(81)2(84)3(53)3(73)2(108)
		6	5(390)2(530)4(233)5(308)3(476)4(367)	3	1(43)1(104)5(47)
		6	4(586)2(291)2(305)5(155)2(587)5(581)	4	2(26)2(99)1(79)5(47)
4	4	5	1(297)2(313)4(169)3(545)3(515)	7	4(55)3(111)1(74)2(81)1(83)2(92)4(57)
		7	2(481)3(309)5(266)2(121)4(594)3(480)4(122)	7	2(70)3(65)1(111)3(67)4(62)4(24)4(96)
		3	2(484)3(347)2(329)	2	2(119)3(53)
		5	4(291)1(174)1(320)5(218)5(476)	2	5(54)1(81)

Continua na próxima página

Universidade Federal do Espírito Santo  
Programa Institucional de Iniciação Científica

Tabela 1 – Continuação da página anterior

#Inst	P	Objetos		Itens	
		$m_p$	$c_{pi}(W_{pi})$	$n_p$	$d_{pj}(w_{pj})$
5	4	6	3(547)5(122)5(477)5(141)1(137)2(574)	6	5(61)3(55)4(67)4(82)5(100)2(81)
		4	1(178)1(462)4(373)4(423)	4	3(70)2(34)2(57)3(31)
		6	3(437)2(453)3(226)2(369)4(150)2(138)	2	5(69)1(103)
		5	2(312)4(222)5(469)1(144)1(561)	6	1(96)4(52)1(42)5(42)1(29)1(103)
6	4	6	1(584)4(478)1(220)3(467)4(291)1(266)	7	2(80)5(118)4(94)1(26)2(59)2(82)1(115)
		3	2(175)2(584)3(545)	5	3(60)4(28)2(113)1(72)3(81)
		6	5(588)3(187)1(437)3(401)4(494)3(145)	4	5(46)1(109)1(48)4(76)
		1	5(411)	1	1(69)
7	4	5	3(308)2(339)1(319)5(336)1(510)	8	1(68)1(39)3(84)3(68)3(29)5(41)1(46)1(79)
		4	1(506)5(255)1(382)1(348)	1	1(34)
		6	4(338)1(157)3(478)1(350)2(141)4(368)	3	3(114)4(74)4(24)
		1	2(443)	1	3(32)
8	4	7	2(594)2(280)4(341)5(202)4(507)2(489)2(348)	4	3(87)1(59)4(97)4(59)
		4	5(588)5(119)5(195)3(594)	1	3(116)
		7	2(164)5(216)3(314)2(594)1(391)3(489)3(181)	1	1(100)
		6	2(394)4(456)4(261)1(195)2(287)3(240)	6	4(103)3(91)3(111)5(81)3(61)2(55)
9	4	4	4(289)5(693)1(423)5(652)	4	1(49)5(45)3(66)2(119)
		6	1(614)2(264)4(407)3(643)4(577)3(402)	9	3(87)3(118)5(42)4(21)4(53)4(26)3(28)1(104)2(57)
		4	3(481)2(685)1(667)2(724)	4	2(93)5(27)5(79)5(57)
		7	3(241)5(151)1(270)1(430)4(588)5(680)2(449)	7	3(134)2(126)2(43)3(96)4(47)3(38)5(64)
10	4	3	2(410)2(257)5(269)	1	2(64)
		7	4(405)2(335)2(334)3(273)2(575)4(279)3(315)	1	3(83)
		2	2(496)4(510)	1	1(33)
		4	2(245)2(400)2(263)4(138)	7	2(44)2(50)5(29)3(106)1(96)1(81)2(69)
11	8	3	5(275)3(489)2(188)	3	3(117)1(46)1(31)
		4	1(219)2(134)1(410)2(557)	8	3(31)5(44)1(77)4(32)2(116)4(20)2(72)1(48)
		7	2(295)4(446)3(182)5(179)4(489)2(102)5(521)	5	4(74)5(113)5(115)1(75)3(53)
		3	4(323)5(273)5(547)	6	1(86)3(62)3(44)5(73)3(34)2(90)
		3	4(234)2(357)5(590)	5	4(58)5(66)5(27)1(93)3(31)
		4	2(253)2(430)4(323)1(239)	2	1(83)2(54)
		6	2(383)2(521)1(245)2(139)3(208)1(158)	1	3(34)
		6	3(453)2(383)1(399)1(394)4(355)4(434)	8	4(40)5(51)4(60)4(103)2(114)3(36)5(113)5(78)
12	8	6	1(219)2(373)1(217)4(491)3(350)3(454)	5	5(61)3(70)4(82)3(20)2(30)
		5	5(283)1(244)5(365)4(386)2(108)	1	1(39)
		7	4(319)2(558)2(458)5(112)3(489)1(388)4(509)	6	1(58)5(100)3(97)1(58)1(76)1(77)
		2	4(137)2(588)	1	1(93)
		2	2(483)5(554)	2	3(77)2(68)
		3	2(559)4(534)5(330)	6	3(69)2(60)2(55)2(75)1(38)2(28)
		6	3(564)1(428)1(309)5(450)5(209)2(455)	2	2(74)1(84)
		6	3(421)1(335)4(424)1(312)3(437)1(130)	3	4(44)2(74)4(61)

Continua na próxima página

Universidade Federal do Espírito Santo  
Programa Institucional de Iniciação Científica

Tabela 1 – Continuação da página anterior

#Inst	$P$	Objetos		Itens	
		$m_p$	$c_{pi}(W_{pi})$	$n_p$	$d_{pj}(w_{pj})$
13	8	1	3(514)	2	2(43)2(87)
		7	2(156)2(412)3(571)3(548)3(530)5(195)3(579)	5	5(86)2(83)5(89)1(93)2(41)
		3	2(193)2(297)3(504)	3	1(52)4(30)1(46)
		7	4(349)3(317)4(510)5(404)1(124)3(423)2(156)	8	1(31)2(58)3(49)1(43)5(100)2(56)4(43)5(22)
		1	3(513)	4	2(27)1(45)1(97)5(61)
		2	5(374)5(567)	1	4(30)
		6	3(212)4(225)2(546)5(565)3(491)3(147)	1	5(118)
		7	4(580)1(262)1(103)2(437)3(528)3(511)4(101)	2	2(37)1(44)
14	8	4	2(239)5(345)5(447)2(538)	1	1(81)
		2	1(536)2(100)	5	2(45)4(52)3(20)2(102)2(23)
		3	3(588)1(245)5(203)	4	3(81)3(64)1(84)4(96)
		3	5(255)3(310)4(447)	3	4(85)4(28)3(32)
		6	3(446)2(251)5(470)1(552)5(538)1(154)	8	3(27)3(97)2(33)1(100)5(45)5(72)5(113)3(23)
		7	2(311)3(330)5(469)2(568)5(177)2(365)2(280)	1	5(42)
		3	2(275)5(338)3(439)	5	4(62)3(25)5(88)3(48)1(87)
		3	3(281)4(179)3(385)	3	3(95)5(70)1(53)
15	8	2	5(536)5(438)	4	5(116)5(36)1(49)2(23)
		3	1(403)1(215)2(464)	1	1(111)
		7	4(629)3(528)1(649)1(174)5(587)4(575)4(616)	5	2(84)5(99)2(138)4(125)4(120)
		4	2(333)2(534)1(214)4(574)	5	1(58)3(117)1(81)5(55)3(77)
		6	3(566)3(706)1(369)1(586)1(660)4(741)	7	1(37)3(72)4(60)1(57)1(82)3(135)1(51)
		7	3(678)4(612)4(277)2(570)3(705)5(196)5(359)	5	3(76)5(118)1(113)1(52)4(62)
		7	4(622)3(570)1(746)5(310)5(575)2(563)3(625)	7	2(79)5(66)2(40)4(53)1(42)2(48)1(74)
		6	4(206)4(693)4(276)4(583)5(531)2(701)	2	3(38)4(20)
16	8	2	5(586)5(288)	4	5(96)5(56)1(29)2(23)
		3	1(253)1(565)2(114)	1	1(71)
		7	4(479)3(578)1(299)1(324)5(437)4(525)4(266)	5	2(44)5(59)2(78)4(85)4(80)
		4	2(283)2(484)1(264)4(224)	5	1(118)3(77)1(101)5(75)3(57)
		6	3(416)3(156)1(219)1(336)1(410)4(591)	7	1(37)3(72)4(40)1(97)1(82)3(115)1(91)
		7	3(528)4(162)4(327)2(320)3(555)5(446)5(509)	5	3(96)5(58)1(33)1(92)4(42)
		7	4(572)3(120)1(496)5(260)5(125)2(313)3(275)	7	2(79)5(66)2(80)4(53)1(42)2(68)1(114)
		6	4(356)4(143)4(326)4(433)5(481)2(251)	2	3(98)4(20)
17	8	7	4(469)5(305)2(340)1(463)1(582)1(143)1(103)	7	1(52)2(45)2(76)2(22)1(34)2(77)5(66)
		7	2(466)3(537)2(483)3(236)3(296)1(368)1(160)	1	3(30)
		7	2(536)5(452)5(269)3(411)2(582)5(338)1(302)	4	1(73)1(56)2(44)2(94)
		6	3(193)3(339)1(442)2(483)4(520)4(513)	8	4(79)4(78)4(37)1(30)2(26)3(39)2(79)2(101)
		3	5(382)2(548)4(519)	2	5(28)1(24)
		7	5(544)5(269)4(224)3(137)2(132)4(558)5(180)	6	2(74)5(106)4(36)3(69)2(54)5(47)
		4	2(136)5(424)4(117)5(371)	2	5(45)4(107)
		5	4(561)1(166)5(491)1(473)2(454)	9	1(45)1(29)5(32)4(53)4(32)2(99)1(62)5(30)4(61)
Continua na próxima página					



Universidade Federal do Espírito Santo  
Programa Institucional de Iniciação Científica

Tabela 1 – Continuação da página anterior

#Inst	$P$	Objetos		Itens	
		$m_p$	$c_{pi}(W_{pi})$	$n_p$	$d_{pj}(w_{pj})$
18	8	2	1(442)3(544)	1	3(96)
		7	3(117)2(398)3(445)5(583)4(379)3(478)4(346)	9	2(35)3(113)1(95)4(67)3(106)5(70)2(103)5(67)3(118)
		5	1(524)3(374)3(473)2(267)1(199)	4	5(90)4(113)1(86)4(74)
		3	4(590)5(196)4(152)	1	4(81)
		5	3(535)3(377)1(144)2(410)5(211)	1	4(57)
		5	1(546)5(373)2(413)1(448)5(474)	7	1(85)4(115)5(56)5(97)2(46)3(102)5(63)
		7	4(544)3(575)1(503)5(216)5(269)5(299)3(585)	3	2(58)4(90)3(38)
		4	3(420)4(497)4(569)1(551)	7	1(88)1(103)2(114)4(50)4(99)1(90)5(118)
19	8	5	3(529)3(289)3(568)1(312)5(290)	6	3(111)1(74)5(50)1(105)3(50)3(26)
		7	2(377)4(513)5(568)5(372)3(548)5(413)2(467)	6	1(86)1(86)2(72)2(38)3(90)4(103)
		5	2(535)2(343)3(334)2(585)4(134)	1	3(98)
		7	2(158)3(316)2(582)2(469)1(360)1(273)4(121)	8	4(81)5(32)1(35)3(34)3(47)4(74)3(51)1(34)
		7	1(284)3(119)4(202)1(436)5(390)5(428)5(333)	2	3(56)5(59)
		4	4(319)2(469)4(153)2(383)	2	5(81)1(101)
		5	4(159)2(283)5(296)3(127)2(555)	3	4(29)2(38)2(44)
		6	4(597)4(293)5(423)2(532)1(536)2(509)	9	5(20)2(92)1(83)3(64)4(46)5(113)5(49)1(28)2(72)
20	8	2	3(573)5(444)	1	1(113)
		7	5(364)2(433)2(253)2(381)5(187)1(395)2(563)	7	1(22)1(98)3(66)4(79)5(108)2(26)2(116)
		6	3(524)1(160)4(277)2(370)3(185)5(257)	2	4(24)5(50)
		1	3(580)	2	3(109)3(68)
		4	4(296)3(216)2(355)5(381)	2	1(88)5(77)
		5	2(207)2(364)2(203)3(123)2(462)	2	2(34)4(92)
		5	5(374)4(523)4(266)2(480)5(467)	5	5(77)1(68)1(90)3(83)3(64)
		3	5(141)1(454)4(311)	6	1(46)3(28)3(25)5(92)1(99)1(48)
21	12	4	1(477)2(265)3(408)2(554)	2	4(73)4(115)
		7	1(551)3(154)3(169)3(320)4(499)3(497)3(535)	9	3(81)1(50)2(74)2(66)2(71)3(25)4(67)4(81)2(46)
		2	5(566)2(541)	1	5(74)
		7	1(344)3(288)2(353)5(583)2(173)3(563)2(480)	8	5(38)1(87)5(69)4(36)3(31)5(117)5(47)3(74)
		6	5(592)5(229)1(323)2(431)5(380)1(520)	8	5(86)1(48)5(111)3(63)1(107)4(21)5(20)5(89)
		7	2(453)3(502)5(297)1(166)3(340)2(174)4(183)	8	2(48)4(65)4(23)1(102)2(112)2(84)3(84)3(66)
		4	2(500)4(480)4(135)4(554)	8	3(82)4(87)3(23)1(29)2(48)1(101)5(35)1(118)
		7	1(550)1(355)5(305)5(447)1(290)4(123)3(388)	8	2(69)1(36)1(35)4(32)1(34)5(114)1(86)2(52)
		3	3(387)3(312)1(494)	3	2(94)5(29)5(47)
		4	2(222)2(237)4(309)5(454)	8	2(33)1(30)1(99)4(55)4(59)4(45)4(58)1(93)
		7	3(230)3(290)2(177)4(413)2(423)1(532)3(444)	4	2(89)5(74)3(109)5(88)
		3	2(597)2(118)2(325)	2	4(37)1(77)
Continua na próxima página					

Universidade Federal do Espírito Santo  
Programa Institucional de Iniciação Científica

Tabela 1 – Continuação da página anterior

#Inst	$P$	Objetos		Itens	
		$m_p$	$c_{pi}(W_{pi})$	$n_p$	$d_{pj}(w_{pj})$
22	12	7	2(473)2(443)4(212)1(419)3(248)1(543)2(508)	6	5(96)1(37)4(32)3(47)2(106)2(71)
		7	4(543)5(275)5(205)4(521)3(307)1(405)3(431)	9	3(93)3(49)3(98)1(76)3(81)3(36)5(105)3(25)5(98)
		4	4(109)1(363)4(560)5(587)	4	5(85)4(91)2(24)2(57)
		7	3(361)2(281)1(502)1(589)5(232)2(478)5(477)	2	4(86)3(64)
		6	2(580)4(225)3(436)2(339)3(387)4(573)	1	1(92)
		5	3(213)4(582)5(537)3(384)3(582)	9	2(67)3(94)5(30)4(100)4(55)2(58)4(119)3(111)1(83)
		2	5(394)1(144)	1	3(48)
		3	1(455)1(569)5(101)	2	4(80)4(48)
		5	1(229)3(277)3(258)4(560)4(286)	6	2(75)2(66)2(99)4(101)1(48)2(78)
		6	3(521)2(372)3(126)2(282)3(553)3(528)	10	2(57)4(109)4(46)1(94)3(66)3(25)5(60)1(89)4(81)3(49)
		7	2(272)4(538)1(259)1(501)1(518)4(236)5(337)	5	1(56)3(25)1(22)4(55)2(99)
		6	4(110)1(375)4(162)2(575)1(357)3(599)	4	5(84)5(87)3(87)1(74)
23	12	7	2(463)4(417)1(276)3(319)1(192)5(303)4(164)	7	4(87)3(80)3(72)3(66)3(116)2(72)5(53)
		2	4(495)1(363)	1	3(34)
		1	4(189)	1	2(49)
		6	2(403)3(311)5(444)1(299)4(171)5(401)	3	3(100)3(31)1(83)
		4	5(154)1(398)5(312)2(494)	3	3(35)3(108)3(65)
		3	1(207)1(347)5(301)	1	4(92)
		7	2(447)1(576)4(280)4(451)1(390)1(228)1(544)	5	4(115)3(42)4(113)3(61)4(34)
		5	1(243)3(443)5(213)3(272)2(514)	5	1(65)2(104)4(117)1(75)5(100)
		2	2(305)3(475)	1	2(33)
		1	1(579)	3	1(67)1(102)5(32)
		5	2(553)3(591)1(520)3(356)3(302)	10	2(55)1(21)2(44)5(59)3(68)2(92)3(111)5(101)1(107)2(92)
		4	2(364)1(407)1(225)2(518)	8	4(33)3(118)2(108)3(48)2(58)1(105)4(72)1(54)
24	12	7	1(206)3(270)4(559)1(383)3(147)1(287)5(133)	1	4(51)
		6	4(590)2(437)4(277)4(316)2(358)3(182)	4	5(110)5(64)3(47)3(22)
		4	4(271)5(405)2(322)3(586)	2	5(33)4(88)
		2	5(576)1(511)	2	3(99)5(21)
		5	3(141)3(444)1(568)4(303)3(227)	2	5(76)3(60)
		4	5(412)3(483)3(406)1(332)	9	2(71)3(50)1(92)4(29)3(22)3(75)4(20)2(113)3(77)
		5	5(303)4(438)2(545)3(409)2(460)	1	2(115)
		7	5(356)5(192)1(508)5(543)2(577)4(350)1(232)	5	1(65)3(70)5(57)1(35)1(111)
		7	2(254)2(567)3(490)5(336)3(590)4(295)3(558)	3	1(53)2(57)1(113)
		1	5(576)	1	2(43)
		6	5(123)5(321)3(117)2(467)1(141)3(172)	1	2(71)
		2	2(446)5(454)	5	5(96)1(34)1(68)2(23)3(88)

Continua na próxima página

Universidade Federal do Espírito Santo  
Programa Institucional de Iniciação Científica

Tabela 1 – Continuação da página anterior

#Inst	$P$	Objetos		Itens	
		$m_p$	$c_{pi}(W_{pi})$	$n_p$	$d_{pj}(w_{pj})$
25	12	7	5(388)5(394)1(274)1(351)5(173)2(414)3(350)	4	2(82)4(34)5(84)2(119)
		5	2(475)4(343)5(508)2(409)1(372)	5	3(28)4(92)1(27)2(26)3(87)
		4	2(436)1(301)5(550)4(570)	1	2(54)
		7	4(536)5(350)4(495)3(467)2(570)1(193)3(240)	2	5(92)4(92)
		4	2(299)3(184)3(466)3(535)	1	5(86)
		7	1(300)4(419)5(434)1(131)3(207)1(580)2(306)	4	2(87)2(109)4(31)2(60)
		7	5(310)2(505)5(120)4(560)5(380)3(215)3(320)	1	4(46)
		4	3(542)4(487)1(156)3(243)	4	3(116)3(93)1(42)2(79)
		6	3(289)4(126)2(180)2(540)4(373)1(547)	3	1(106)3(42)4(112)
		4	5(510)5(318)5(187)1(561)	5	3(68)4(67)3(27)5(32)5(49)
		2	4(403)3(406)	3	2(97)2(95)3(63)
		4	5(496)1(455)1(225)1(183)	1	3(61)
26	12	6	1(527)5(572)1(104)1(150)3(387)3(396)	7	3(53)4(22)4(68)1(52)2(81)1(99)2(119)
		2	5(541)1(299)	5	4(101)1(110)1(58)1(36)1(100)
		7	3(471)1(229)1(367)5(250)1(279)5(180)5(574)	5	3(68)1(50)3(79)1(21)2(40)
		6	2(122)3(593)2(516)2(389)4(360)5(160)	8	1(26)2(116)4(28)2(42)2(21)5(108)5(59)1(104)
		7	4(227)1(495)2(452)4(493)3(380)5(203)4(380)	6	1(60)1(102)4(62)5(94)5(115)5(92)
		2	3(245)2(312)	2	5(79)1(69)
		5	2(363)5(524)3(284)2(367)1(575)	3	3(40)2(111)2(30)
		6	5(571)5(515)2(368)3(270)4(386)2(498)	4	1(71)5(111)2(63)3(61)
		7	5(389)5(389)4(177)4(470)1(215)2(552)1(315)	6	5(49)2(32)5(93)4(50)5(114)4(53)
		7	2(131)3(341)2(575)1(543)1(321)2(470)5(395)	4	1(51)1(86)5(111)3(48)
		7	1(214)4(102)4(350)4(347)3(247)2(562)1(110)	2	1(94)3(34)
		2	3(172)4(598)	1	1(49)
27	12	7	1(536)5(178)1(519)3(168)1(438)5(523)1(575)	5	5(48)1(74)3(60)3(118)4(36)
		5	3(484)2(547)2(528)4(479)1(216)	7	4(32)4(52)4(118)5(41)1(113)5(92)4(107)
		4	1(211)1(580)1(164)3(412)	5	3(35)2(110)3(22)1(69)2(106)
		6	2(102)1(375)2(281)4(326)1(557)4(515)	3	4(113)4(105)5(30)
		5	2(345)2(223)3(364)4(429)3(423)	5	4(21)2(90)1(73)2(86)5(98)
		7	3(223)2(379)2(233)3(584)4(167)1(163)4(355)	9	4(33)3(38)2(36)3(55)1(21)5(47)3(35)3(75)2(87)
		7	2(235)4(501)5(278)4(210)1(385)1(225)5(491)	1	2(33)
		3	5(116)3(193)2(454)	3	1(43)2(51)2(66)
		5	2(596)5(258)1(266)3(599)3(385)	7	1(93)4(24)4(111)5(66)2(111)1(26)3(56)
		5	3(447)1(325)3(343)1(215)3(423)	2	5(65)4(75)
		2	4(318)1(479)	2	1(42)5(58)
		6	3(252)4(141)3(102)5(383)2(126)2(438)	1	4(112)
Continua na próxima página					

Universidade Federal do Espírito Santo  
Programa Institucional de Iniciação Científica

Tabela 1 – Continuação da página anterior

#Inst	$P$	Objetos		Itens	
		$m_p$	$c_{pi}(W_{pi})$	$n_p$	$d_{pj}(w_{pj})$
28	12	7	1(536)5(178)1(519)3(168)1(438)5(523)1(575)	5	5(48)1(74)3(60)3(118)4(36)
		5	3(484)2(547)2(528)4(479)1(216)	7	4(32)4(52)4(118)5(41)1(113)5(92)4(107)
		4	1(211)1(580)1(164)3(412)	5	3(35)2(110)3(22)1(69)2(106)
		6	2(102)1(375)2(281)4(326)1(557)4(515)	3	4(113)4(105)5(30)
		5	2(345)2(223)3(364)4(429)3(423)	5	4(21)2(90)1(73)2(86)5(98)
		7	3(223)2(379)2(233)3(584)4(167)1(163)4(355)	9	4(33)3(38)2(36)3(55)1(21)5(47)3(35)3(75)2(87)
		7	2(235)4(501)5(278)4(210)1(385)1(225)5(491)	1	2(33)
		3	5(116)3(193)2(454)	3	1(43)2(51)2(66)
		5	2(596)5(258)1(266)3(599)3(385)	7	1(93)4(24)4(111)5(66)2(111)1(26)3(56)
		5	3(447)1(325)3(343)1(215)3(423)	2	5(65)4(75)
		2	4(318)1(479)	2	1(42)5(58)
		6	3(252)4(141)3(102)5(383)2(126)2(438)	1	4(112)
29	12	5	4(570)2(351)2(347)5(480)4(552)	5	1(91)3(110)5(97)3(75)5(92)
		6	5(104)5(194)2(399)2(385)2(293)1(149)	3	1(83)4(86)5(43)
		4	5(340)4(543)5(206)5(364)	2	4(31)2(59)
		6	2(431)1(436)1(272)5(165)4(273)2(256)	6	3(81)4(94)4(35)2(94)3(23)3(23)
		5	2(228)5(404)3(273)1(598)4(517)	4	3(47)2(38)2(68)3(111)
		4	5(371)4(221)3(337)4(510)	7	2(50)2(81)3(78)1(105)2(108)2(51)2(88)
		6	4(286)1(159)1(261)5(533)2(539)4(565)	4	4(33)4(105)4(110)5(117)
		4	1(390)3(133)2(217)4(175)	4	5(76)2(52)2(46)2(84)
		7	4(327)5(266)4(267)2(122)4(224)5(383)1(305)	4	3(24)2(109)2(50)2(47)
		1	4(561)	2	5(73)4(41)
		6	2(556)2(371)2(234)3(564)3(351)3(390)	2	4(108)4(47)
		7	5(589)4(349)3(307)2(212)2(322)5(397)5(123)	5	4(109)5(34)1(102)2(112)4(61)
30	12	2	3(562)1(344)	1	2(24)
		6	3(558)5(305)4(364)4(318)5(145)4(147)	2	4(50)4(95)
		7	3(404)2(195)5(277)4(596)2(429)2(401)1(224)	10	4(20)2(59)4(102)2(111)3(72)3(61)3(119)4(34)4(51)2(86)
		2	2(390)3(592)	3	5(31)1(32)4(44)
		7	2(350)4(144)1(405)2(193)3(123)5(170)5(424)	4	3(20)3(42)4(66)1(82)
		7	3(263)1(349)2(373)5(122)5(112)2(126)1(538)	2	1(93)2(37)
		7	2(574)2(222)3(496)3(131)2(338)4(567)2(529)	1	1(116)
		7	1(237)1(371)1(124)2(414)1(220)2(453)5(215)	1	5(58)
		7	3(344)5(596)3(207)1(446)3(140)5(365)3(391)	3	2(108)4(116)3(98)
		5	5(515)1(287)4(568)5(178)2(536)	1	2(42)
		7	5(341)4(553)1(400)1(219)4(491)4(227)4(193)	3	4(28)3(22)1(115)
		2	4(388)1(258)	2	2(32)3(104)

A Tabela 2 resume os resultados obtidos ao se resolver o modelo  $\mathbb{E}$  usando o CPLEX. Na tabela, a primeira coluna indica a instância de teste; as próximas três colunas estão associadas à solução encontrada: valor da função objetivo, custo dos objetos utilizados e valor das sobras remanescentes; as colunas restantes estão associadas ao desempenho do *solver*: *gap* gerado pelo CPLEX, em porcentagem, e o tempo de execução, em segundos. As entradas marcadas com “-” indicam que a média vale 0.

Perceba que o CPLEX conseguiu encontrar uma solução ótima apenas em 8 instâncias (1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 e 10). Entretanto essas instâncias são de apenas 4 períodos. Em todas as outras 22 instâncias o tempo limite de 2 horas não foi suficiente para o CPLEX encontrar a solução ótima ou provar a otimalidade da solução inteira encontrada. O que comprova a necessidade do estudo e desenvolvimento de métodos heurísticos para resolver o problema, principalmente para instâncias de grande porte.

Para os experimentos numéricos da heurística proposta, é preciso definir o valor de  $\beta$  utilizado em (16). A Tabela 3 mostra o valor médio da função objetivo para diferentes valores de  $\beta$  ao se resolver as instâncias da Tabela 1. Note que  $\beta = 3.3$  foi o valor que obteve a menor média, por isso será adotado como valor de  $\beta$ . Além disso, no algoritmo guloso, o tempo limite para que o CPLEX consiga resolver o modelo  $\mathbb{G}_p$  foi definido como 10 minutos.

A Tabela 4 apresenta as soluções encontradas pelo método guloso e pela heurística proposta. Observe que as soluções encontradas pelos métodos se aproximam do método exato, como mostrado na Figura 6, mas gastando um tempo muito menor. Apesar do método guloso utilizar o CPLEX para resolver o modelo  $\mathbb{G}_p$ , o tempo médio gasto para resolver todas as instâncias da Tabela 1 foi de 0,40638 segundos. Já a heurística proposta, resolveu as instâncias quase que instantaneamente, em um tempo médio de 0,00018 segundos. Embora o método guloso apresente uma média melhor em relação à heurística proposta, é possível notar que, os resultados do método heurístico desenvolvido começam a se aproximar do método guloso a partir do aumento do tamanho das instâncias, podendo até ser mais eficiente em algumas instâncias de grande porte, além do tempo de execução ser menor.

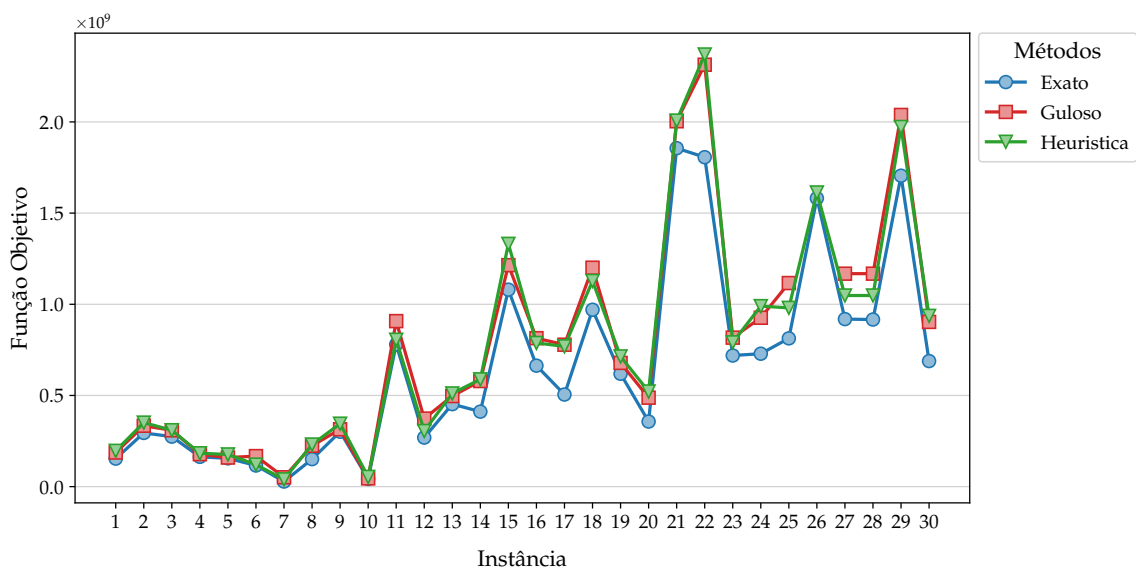


Figura 6: Função objetivo encontrada pelos três métodos, considerando as instâncias da Tabela 6

Tabela 2: Resultado numérico obtidos pelo CPLEX para as instâncias apresentada na Tabela 1

#Inst.	Função Objetivo	Custo dos Objetos	Valor das Sobras	gap (em %)	Tempo gasto (em seg.)
1	153.733.000	6.461	210	-	0,75
2	294.531.000	12.905	161	-	790,81
3	274.323.000	8.891	232	-	1.709,19
4	163.424.000	8.035	260	0,00	†
5	155.289.000	7.955	243	-	70,58
6	116.030.000	6.338	222	0,00	†
7	28.085.500	2.237	80	-	4,54
8	150.797.000	5.984	295	-	8,68
9	301.186.000	9.949	152	-	2.242,44
10	42.398.500	2.814	62	-	0,73
11	779.888.000	21.733	565	12,11	†
12	269.015.000	6.625	102	0,35	†
13	452.373.000	10.866	237	0,95	†
14	411.328.000	11.960	129	1,31	†
15	1.080.310.000	16.183	947	11,84	†
16	663.523.000	13.865	544	2,81	†
17	505.094.000	9.710	338	7,27	†
18	969.976.000	20.853	1.418	11,55	†
19	619.116.000	12.208	216	1,29	†
20	356.986.000	10.050	222	1,39	†
21	1.856.090.000	28.921	1.318	9,89	†
22	1.806.560.000	25.567	945	11,94	†
23	719.120.000	16.948	817	8,21	†
24	728.954.000	11.224	360	6,96	†
25	813.140.000	11.763	572	11,82	†
26	1.581.550.000	22.812	1.190	19,33	†
27	918.721.000	16.316	662	13,73	†
28	916.412.000	16.275	898	13,52	†
29	1.705.090.000	24.886	1.028	7,09	†
30	688.570.000	10.569	359	3,61	†

†: Tempo limite de 2h atingido

Tabela 3: Média da função objetivo para as instâncias da Tabela 1 para diferentes valores  $\beta$ .

$\beta$	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5
<b>Média</b>	897947325,00	783819729,00	<b>721488029,50</b>	737213495,50	737213465,50

Tabela 4: Resultados do Método Guloso e da Heurística proposta para as instâncias da Tabela 1. As entradas marcadas com “-” indicam que a solução não foi encontrada

#Inst.	Método Guloso				Heurística proposta ( $\beta = 3,3$ )			
	Função Objetivo	Custo dos Objetos	Valor das Sobras	Tempo (em seg.)	Função Objetivo	Custo dos Objetos	Valor das Sobras	Tempo (em seg.)
1	187.139.000	7.865	709	0,08659	196.251.694	8.248	1.218	0,00010
2	333.968.000	14.633	961	4,42359	351.084.962	15.383	1.247	0,00011
3	308.878.000	10.011	966	0,13606	309.434.071	10.029	695	0,00013
4	178.067.000	8.755	900	0,43909	182.928.557	8.994	409	0,00012
5	159.525.000	8.172	738	0,08186	176.625.750	9.048	258	0,00011
6	167.415.000	9.145	2.267	0,20794	120.569.533	6.586	369	0,00011
7	51.411.800	4.095	966	0,14396	39.949.286	3.182	724	0,00010
8	224.229.000	8.898	482	0,15996	230.855.790	9.161	1.410	0,00011
9	314.505.000	10.389	788	2,44956	345.172.503	11.402	243	0,00011
10	45.170.600	2.998	246	0,04879	53.487.326	3.550	524	0,00011
11	907.674.000	25.294	1.604	1,14111	805.510.058	22.447	537	0,00018
12	373.290.000	9.193	828	0,08892	305.072.507	7.513	371	0,00017
13	496.877.000	11.935	530	1,16841	511.073.657	12.276	775	0,00017
14	579.057.000	16.837	1.206	1,75791	588.377.201	17.108	1.135	0,00017
15	1.214.690.000	18.196	1.607	0,27977	1.331.314.063	19.943	845	0,00021
16	814.125.000	17.012	1.515	0,49574	787.900.092	16.464	1.092	0,00021
17	778.345.000	14.963	706	0,49252	769.189.960	14.787	206	0,00020
18	1.200.550.000	25.810	2.679	1,78603	1.127.754.842	24.245	1.333	0,00018
19	678.603.000	13.381	550	0,39971	713.900.369	14.077	609	0,00020
20	487.915.000	13.736	1.005	0,19318	521.624.127	14.685	1.758	0,00019
21	2.003.700.000	31.221	1.400	3,91961	2.007.359.165	31.278	319	0,00028
22	2.313.830.000	32.746	1.113	4,20422	2.369.722.867	33.537	1.553	0,00029
23	817.050.000	19.256	922	0,78051	791.210.448	18.647	409	0,00033
24	926.259.000	14.262	661	0,25237	989.841.227	15.241	759	0,00024
25	1.116.470.000	16.151	1.696	0,05042	980.358.158	14.182	956	0,00027
26	-	-	-	-	1.613.170.025	23.268	415	0,00037
27	1.167.880.000	20.741	1.136	0,46871	1.048.116.672	18.614	440	0,00034
28	1.167.880.000	20.741	1.136	0,47910	1.048.116.672	18.614	440	0,00030
29	2.038.350.000	29.750	1.730	0,40638	1.972.301.448	28.786	128	0,00035
30	903.304.000	13.865	775	0,17404	936.464.559	14.374	1.541	0,00028
<b>Média</b>	678.603.000,00	14.262,00	966,00	0,40638	741.545.165	14.736	652	0,00018

## 6 Conclusões

---

Neste trabalho, é estudado o problema de corte unidimensional multi-período com sobras aproveitáveis. Um modelo de programação linear inteira é proposto para o problema, este que tem como objetivo minimizar o custo dos objetos utilizados para cortar os itens demandados de todos os períodos do horizonte de planejamento e, entre todas as soluções de custo mínimo, escolher aquela que maximize o valor das sobras remanescentes. O modelo leva em conta que as sobras geradas durante o corte de itens de um período podem ser utilizadas como novos objetos nos períodos seguintes.

Considerando a dificuldade em resolver de forma exata instâncias grandes (comuns na prática), é proposto um algoritmo guloso e uma heurística para resolver o problema proposto. O algoritmo guloso se baseia em resolver uma simplificação do modelo multi-período, isto é, resolvendo cada período de forma separada. Já a heurística proposta usa uma estratégia de ordenação para selecionar os objetos que sejam usados para o corte dos itens demandados de cada período.

Para verificar a eficiência de cada método proposto, são realizados alguns experimentos numéricos. Tanto o algoritmo guloso quanto a heurística proposta conseguem resolver as instâncias testadas em segundos, enquanto o resolver o modelo exato pode levar horas. Entretanto, o método exato encontra soluções melhores que os dois métodos propostos.

Assim, a partir dos resultados dos métodos heurísticos apresentados neste trabalho, é possível identificar que muito ainda pode ser melhorado em relação à heurística proposta, na qual, um dos caminhos, é obter um melhor balanço entre a função objetivo e o tempo de execução, de forma que o algoritmo utilize de um tempo adicional, porém viável, para analisar ou até rever certas decisões.

### 6.1 Dificuldades enfrentadas

Devido a pandemia, que ocasionou a suspensão das aulas e atividades presenciais, foram encontradas algumas dificuldades para a realização e conclusão de forma satisfatória do projeto:

1. Escassez de recursos computacionais. Uma vez que as atividades presenciais foram suspensas, perdeu-se o acesso ao computador onde os experimentos estavam sendo feitos.
2. A suspensão das aulas também comprometeu o aprendizado de programação linear, uma vez que a disciplina de Pesquisa Operacional (essencial para o entendimento e aprofundamento em programação linear) foi suspensa.

## Referências

---

- Abuabara, A. & Morabito, R. (2009). Cutting optimization of structural tubes to build agricultural light aircrafts. *Annals of Operations Research*, 169(1):149–165.
- Andrade, R., Birgin, E., & Morabito, R. (2014). Two-stage two-dimensional guillotine cutting stock problems with usable leftover. *International Transactions in Operational Research*, 23(1-2):121–145.
- Birgin, E. G., Romão, O. C., & Ronconi, D. P. (2019). The multiperiod two-dimensional non-guillotine cutting stock problem with usable leftovers. *International Transactions in Operational Research*, 0(0).
- Cherri, A. C., Arenales, M. N., & Yanasse, H. H. (2009). The one-dimensional cutting stock problem



- with usable leftover – a heuristic approach. *European Journal of Operational Research*, 196:897–908.
- Garey, M. R. & Johnson, D. S. (1990). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA.
- Poldi, K. C. & Arenales, M. N. (2010). O problema de corte de estoque unidimensional multiperíodo. *Pesquisa Operacional*, 30:153 – 174.
- Romão, O. C. (2017). *O problema de corte não-guilhotinado multiperíodo com sobras aproveitáveis*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.
- Silva, S. E. C. (2008). Otimização no processo de corte unidimensional de barras de aço. *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Ullman, J. D. (1971). The performance of a memory allocation algorithm. *Technical Report 100 Princeton Univ.*