Instituto Superior de Ciências de Saúde

Biofísica para Cursos de Licenciatura em Anatomia Patológica e Tecnologia Biomédica Laboratoial

**Docentes:** Bartolomeu Joaquim Ubisse & Eduardo Machiana

`2021-AP # 01-Mecânica - Resolução`

---

1. Dê as propriedades dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tal que sejam válidas as seguintes condições:

   (a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{c}|$ e $|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}|$

   Resol.

   A questão é, quando é que $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$ ? Para respondermos esta questão temos que nos lembrar como é que se calcula o módulo de um vector, o conceito de produto escalar, as condições de perpendicularidade e paralelismo de vectores.

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| &= \left|\vec{a}+\vec{b}\right| \\
|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{(a_x+b_x)^2 + (a_y+b_y)^2 + (a_z+b_z)^2} \\
|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{(a_x^2+a_y^2+a_z^2) + (b_x^2+b_y^2+b_z^2) + 2(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)} \\
|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\theta} \\
|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| &= |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\theta
\end{aligned}
$$

   Para que isto seja possível é necessário que:

$$cos\theta = 1 \rightsquigarrow \theta = 0^o \rightsquigarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

   (b) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

$$\sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\theta} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right| cos\theta}$$

   Para que isto seja possível é necessário que:

$$cos\theta = 0 \rightsquigarrow \theta = \pi/2 \vee 3\pi/2 \rightsquigarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

2. No sistema dextrogiro de coordenadas cartesianas ortogonais, encontrar os seguintes produtos vectoriais: $\vec{i}\times\vec{i}$; $\vec{i}\times\vec{j}$; $\vec{i}\times\vec{k}$; $\vec{k}\times\vec{j}$ e $\vec{k}\times\vec{i}$ . Discutimos na aula teórica !

3. Demonstrar que quando dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem o mesmo módulo e entre eles formam um ângulo $\theta$, o módulo da soma expressa-se por $S = 2|\vec{a}|cos(\theta/2)$ e o módulo da diferença por $D = 2|\vec{a}|sin(\theta/2)$

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right| &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + 2|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|cos\theta} \\ &= \sqrt{2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|^2 cos\theta} \\ &= 2|\vec{a}|\sqrt{\frac{1}{2}(1+cos\theta)}\end{aligned}$$

Sabe-se ou pode-se consultar na Tabela de Matemática, Física e Química na parte referente às formulas de **metade de ângulos** que,

$$\begin{aligned}sin\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-cos\theta}{2}} \\ cos\left(\frac{\theta}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+cos\theta}{2}}\end{aligned}$$

logo,

$$S \equiv \left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 2|\vec{a}|cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

4. Na Fig.1 estão representados três vectores. Sendo $|\vec{a}| = 30$, $|\vec{c}| = 60$, $\theta = 70^o$ e $\gamma = 20^o$, determine o ângulo $\beta$ e o módulo do vector $\vec{b}$ de modo que o vector resultante seja nulo.

▷ Para resolvermos este exercício é preciso lembrarmos como é que se determina uma resultante. $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$.
Uma outra consideração a ter é que se um vector é nulo, isso significa que todos os seus componentes são nulos.

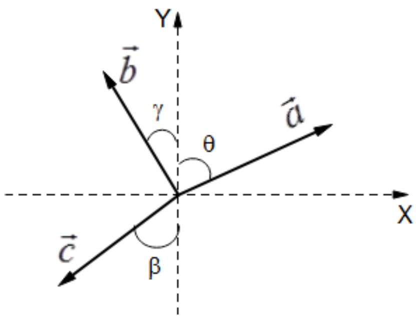



Figura 1:

$$\begin{aligned}R_x = 0 \rightsquigarrow |\vec{a}|sin\theta - |\vec{b}|sin\gamma - |\vec{c}|sin\beta &= 0 \\ R_y = 0 \rightsquigarrow |\vec{a}|cos\theta + |\vec{b}|cos\gamma - |\vec{c}|cos\beta &= 0\end{aligned}$$

Agora devemos lembrar das seguintes identidades:

- $cos^2\beta + sin^2\beta = 1$ e
- $cos\theta cos\gamma - sin\theta sin\gamma = cos(\theta+\gamma)$

Aplicando estas identidades ao nosso sistema de equações resulta:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|cos(\theta+\gamma) = |\vec{c}|^2 \rightsquigarrow |\vec{b}| \approx 52$$
$$\beta = arcos\left(\frac{1}{|\vec{c}|}\left(|\vec{a}|cos\theta + |\vec{b}|cos\gamma\right)\right) \rightsquigarrow \beta \approx 10^o$$

5. Dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tendo módulos iguais a 10 unidades cada e ângulos $\theta_1 = 30^o$ e $\theta_2 = 105^o$ são orientados conforme se ilustra na Fig.2. Sendo a sua soma representada por $\vec{r}$, determine:

   (a) As componentes de $\vec{r}$ nos eixos $OX$ e $OY$;

   (b) O módulo de $\vec{r}$;

   (c) O ângulo que $\vec{r}$ forma com o eixo $OY$.

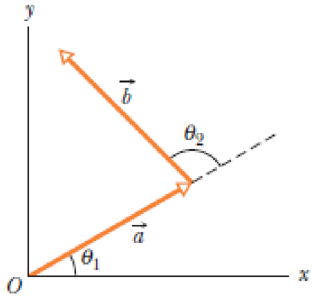
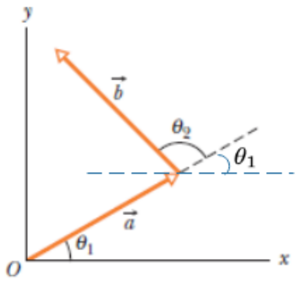



Figura 2:




$$\begin{matrix} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} r_x = |\vec{a}|cos\theta_1 + |\vec{b}|cos(\theta_1 + \theta_2) \\ r_y = |\vec{a}|sin\theta_1 + |\vec{b}|sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

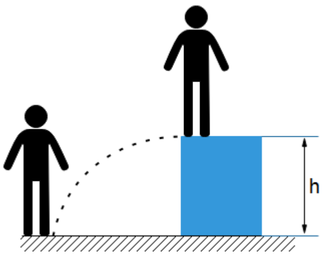
$$\vec{r} = 1.59\vec{i} + 12.07\vec{j} \rightsquigarrow |\vec{r}| = 12.17$$

$$\gamma = 90^o - arctg\left(\frac{r_y}{r_x}\right) \rightsquigarrow \gamma \approx 7.5^o$$

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{r} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j}$$

6. A tíbia é um osso mais vulnerável da perna do ser humano e sofre fractura para esforços de compressão da ordem de $5 \times 10^4$N. Suponha que um homem de 75 kg salte de uma altura H e, ao cair no chão, não dobre os seus joelhos. Qual é a altura máxima a partir do qual o homem deve saltar de modo que não fracture a sua tíbia, sabendo que a sua deformação máxima é de 1 cm ($\Delta\ell = 1.0$ cm) ?



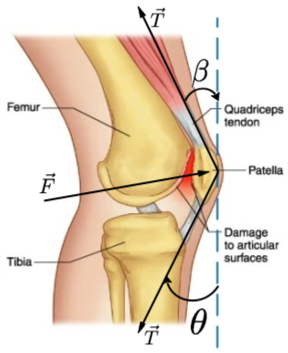

Se desprezarmos a acção muscular, o homem parte com $v_o = 0m/s$ e chega no chão com a seguinte velocidade: $v^2 = v_o^2 + 2gh \rightsquigarrow v^2 = 2gh$

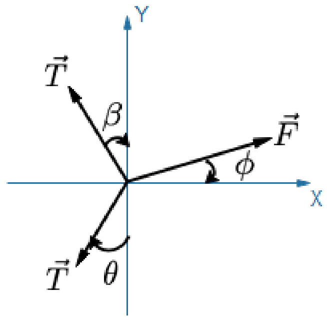
Quando o homem chega no chão a tíbia é comprimida pela força de compressão $F_y$ e por essa razão, comprime-se $1.0cm$

$$v^2 = 2gh = 2a\Delta\ell \rightsquigarrow a = g\frac{h}{\Delta\ell}$$

$$F_y = ma \rightsquigarrow h = \frac{F_y\Delta\ell}{mg} \rightsquigarrow h \approx 70.0cm$$

7. O músculo quadríceps se encontra na coxa e seu tendão chega até a perna. Considere a perna ligeiramente dobrada de modo que atensão $T$ no tendão seja 1400N. Determine a direção e amagnitude da força F, exercida pelo fêmur sobre a patela.




$$OX: -Tsin(\beta) - Tsin(\theta) + Fcos(\phi) = 0$$

$$OY: Tcos(\beta) - Tcos(\theta) + Fsin(\phi) = 0$$

---

$$cos(\phi) = \frac{T}{F}(sin\beta + sin\theta)$$

$$sin(\phi) = \frac{T}{F}(cos\theta - cos\beta)$$

$$\phi = arctg\left(\frac{cos\theta - cos\beta}{sin\beta + sin\theta}\right) \quad \mathbf{e} \quad F = T\left(\frac{sin\beta + sin\theta}{cos\phi}\right) \quad \left(\beta = 55^o, \theta = 20^o \rightsquigarrow \phi = 17.5^o; F = 1704N\right)$$

8. Considere um paciente de 70 kg de massa submetido a um tratamento de tracção conforme se ilustra na Fig. Qual é o valor máximo da massa $M$ de modo que o paciente não deslize ao longo da cama sabendo que o coeficiente de atrito entre a cama e o paciente é de 0.2 ($\mu = 0.20$)

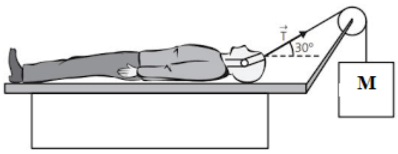
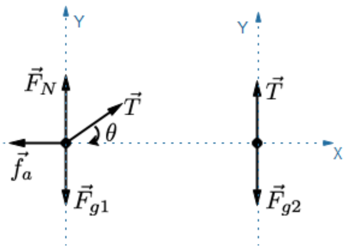



Figura 3:

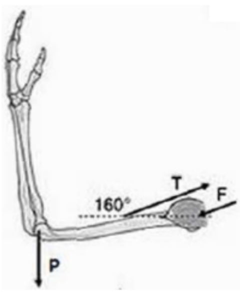


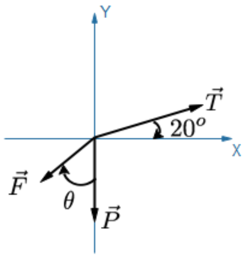

$$T = F_{g2} \qquad F_{g1} = F_N + Tsin\theta \Rightarrow \qquad f_a = Tcos\theta$$

$$\begin{cases} T = Mg \\ mg = F_N + Tsin\theta \\ \mu F_N = Tcos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} ------- \\ Tsin\theta = mg - F_n \\ Tcos\theta = \mu F_N \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_N = \dfrac{mg}{\mu tg\theta + 1} \\ T = F_N \dfrac{\mu}{cos\theta} \\ M = \dfrac{T}{g} = \left(\dfrac{\mu}{gcos\theta}\right) F_N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_N \approx 627.54N \\ M \approx 14.50kg \end{cases}$$

9. Considere que, em um braço esticado, o músculo deltoide exerce uma força de tração T, que forma um ângulo de 20° com o úmero. Entre esse osso e o ombro existe uma força de contato F. Se o peso P do membro superior completo é 35N e T=300N. Determine F, para que o úmero se mantenha em equilíbrio.




A resolução é análoga ao execicio anterior!

10. A perna de uma pessoa mantém-se em equilibrio graças à acção de ligamento patelar. Determine a tensão de ligamento, a direcção e o módulo da força $R$ sabendo que $\alpha = 40^0$, as massas da pessoa e da perna são respectivamente 90 e 9.0 kg.

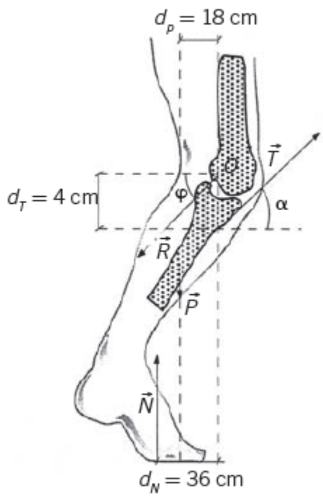



Figura 4:

---

$N$ é metade do peso da pessõa $N = 45kg \times 10m/s^2 = 450N$

$P$ é o peso da perna $P = 9kg \times 10m/s^2 = 90N$

---

Anulando-se a resultante das forças fica:

$$\begin{aligned} Tcos\alpha - Rcos\varphi &= 0 \\ Tsin\alpha + N - Rsin\varphi - P &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

O torque de todas as forças em relação ao ponto $O$ é zero:

$$\begin{aligned} &Tcos\alpha d_T + Pd_P - Nd_N = 0 \\ &\Rightarrow T = \frac{Nd_N - Pd_P}{d_T cos\alpha} = 4758.21N \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo Eqs.1 e tendo em consideração o resultado da Eq.2 tem:

$$\varphi = arctg\left(tg\alpha + \frac{N-P}{Tcos\alpha}\right) \tag{3}$$

$$R = T\frac{cos\alpha}{cos\varphi} \tag{4}$$

11. A Fig.5 representa a cabeça de um estudante inclinado sobre o seu livro. A cabeça tem 5.0 kg de massa e é sustentada pela força muscular do pescoço ($F_m$) e pela força de contacto ($F_v$) exercida na articulação atlantooccipital. Sabendo que a força muscular faz um ângulo de $33^o$ com a horizontal e a sua magnitude é de 50N, determine a magnitude e a direcção da força de contacto ($F_v$)

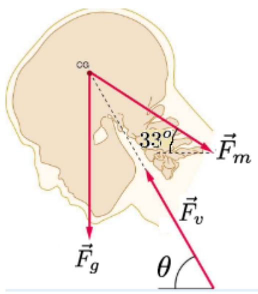
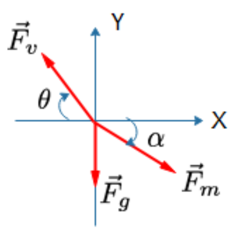



Figura 5:




$$F_v sin\theta = F_g + F_m sin\alpha$$

$$F_v cos\theta = F_m cos\alpha$$

---

$$\theta = arctg\left(\frac{F_g}{F_m cos\alpha} + tg\alpha\right) \rightsquigarrow \theta \approx 61.5^o$$

$$F_v = F_m\frac{cos\alpha}{sin\theta} \rightsquigarrow F_v \approx 88N$$

12. O maior tendão do corpo, o tendão de Aquiles, conecta o músculo da panturilha ao osso do calcanhar do pé. Esse tendão tem tipicamente 25.0 cm do comprimento, 5.0 mm de diâmetro e um módulo de Young de $1.47 \times 10^9 N/m^2$. Se um atleta alongou o tendão até um comprimento de 26.1 cm, qual é a

tracção no tendão?

$$F = E\frac{\Delta\ell}{\ell_o}\pi\frac{D^2}{4}$$

$$F \approx 2.54 \times 10^5 N$$

13. O fêmur em uma perna humana tem uma secção transversal mínima efectiva de $3.0cm^2$. Que força compressiva ele pode suportar antes de quebrar? Suponha que a tensão máxima admissível do osso seja de $1.7 \times 10^8 N/m^2$

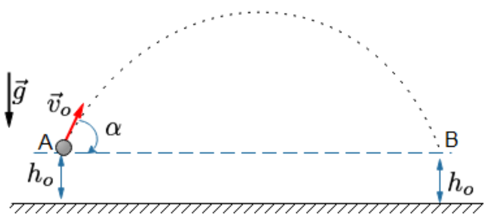
$$\sigma = \frac{F}{S} \Rightarrow F = \sigma S \rightsquigarrow F = 5.1 \times 10^4 N$$

14. O ligamento cruzado anterior no joelho de uma mulher tem $2.5cm$ de comprimento e uma área de secção transversal de $0.54cm^2$. Se uma força de 300 N é aplicada longitudinalmente, de quanto o ligamento irá se alongar? (O módulo de Young é de $10^8 N/m^2$)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \Rightarrow E = \frac{F\ell_o}{S\Delta\ell}$$

$$\Delta\ell = \frac{F\ell}{SE} \Rightarrow \Delta = 1.4mm$$

15. Uma bola de 0.65 kg é arremessada com velocidade inicial de $20m/s$ a um ângulo de $35^o$ a partir de uma altura de 1.5 m. Determine: a) A velocidade da bola a uma altura de 1.5 m. b) O trabalho mecânico necessário para se apanhar a bola nessa altura de 1.5 m; c) A energia mecânica da bola nessa altura.




$$h = h_o + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h_B = h_o \Rightarrow v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t_B = \frac{2v_{oy}}{g}$$

$$v_y = v_{oy} - gt \Rightarrow v_{yB} = v_o sin\alpha - gt_B$$

$$v_{yB} = v_{oy} - g\frac{2v_{oy}}{g} \Rightarrow v_{yB} = -v_{oy} = -11.47m/s$$

$$v_{xA} = v_{xB} = v_x$$

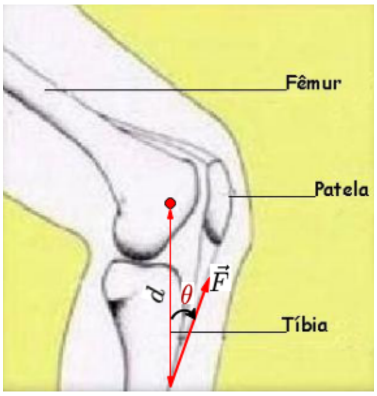
$$v_x = v_{ox} \Rightarrow v_x = v_o cos\alpha \Rightarrow v_x = 16.38m/s$$

$$v_B = \sqrt{v_{xB}^2 + v_{yB}^2} = 20m/s$$

$$W = \Delta E_c \Rightarrow W = \frac{1}{2}mv_b^2 = 130J$$

$$E_M = E_c + E_p \Rightarrow E_M = 139.75J$$

16. Os extensores do joelho se inserem na tíbia a um ângulo de 30° a uma distância de 3 cm do eixo de rotação do joelho. Que força os extensores do joelho precisam exercer para produzir uma aceleração angular no joelho de 1 $rad/s^2$, considerando a massa de perna e de pé de 4.5 kg e k = 23 cm?




$$\tau = rFsin\theta$$

$$\tau = I\alpha$$

$I = mk^2$ **(k - raio de giro)**

$$F = \frac{mk^2\alpha}{dsin\theta} \rightsquigarrow F = 15.9N$$

`O raio de giro representa a distribuição da massa em relação a um determinado eixo de rotação!`