Tema#8:Campo Magnético [1]

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências - Departamento de Física

(Aulas preparadas para estudantes da Engenharia Informática- UEM)

03/06/2022

[1] Alguns exemplos usados neste material foram usados pelo Prof. Luis Chea nas aulas leccionadas na FENG-UEM no período de 2019 a 2021.

Conteúdos

Figura 1: Magnetita (Fe_3O_4)

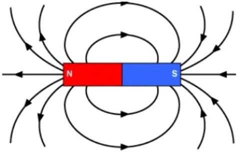


Figura 2:

- Magnetita é um imã permanente que atrai pequenos fragmentos de ferro.

Qual é o ente físico responsável por essa interação e como é que surge?

- $(\vec{B})$ do imã permanente é devido às correntes micoscópicas de electrões que orbitam os núcleos e ao magnetismo intrínsico das partículas fundamentais do material.

Podemos ter polos magnéticos (S e N) separados?

- Monopolos magnéticos aínda não foram descobertos! $\rightsquigarrow div\vec{B} = 0$ ($\vec{B}$ tem carácter rotacional!)

A primeira uilização dos fenómenos de magnetismo refere à bússola inventada pelos Chineses, durante a dinastia Qin (200 AC).

Em 1820, Hans Christian Oersted verificou que quando a corrente eléctrica passa pelo condutor, a sua volta cria-se um campo magnético.

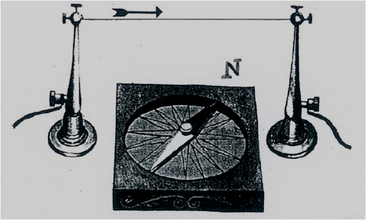


Figura 3: Experiência de Øersted

Campo magnético não interage com cargas eléctrica em repouso. Este facto já tinha sido demonstrado por Gilbert em 1600. Gilbert constantou que varetas metálicas electricamente carregadas não interagem com bússolas, desde que não haja movimento das cargas.

Força Magnética

Campo magnético só age sobre materiais também com propriedades magnéticas ou sobre condutores com cargas em movimento. Assim, considerando cargas em movimento, a força magnéctica que age sobre elas é:

$$\vec{F}_B = q(\vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

Onde, $\vec{F}_B$ é força magnéctica em Newton (N); q é a carga eléctrica, $\vec{v}$ é vector velocidade em m/s e $\vec{B}$ é o vector indução magnética em Tesla (T).

$$1T = \frac{N}{Am}$$

Dado que Tesla é relativamente grande em relação aos campos magnéticos usuais, o Gauss é ainda muito utilizado.

$$1T = 10^{-4}G$$

Tabela 1: Alguns campos magnéticos típicos (Graça, 2012)

local	B(T)
Local magneticamente blindando	10^{-14}
Na superfície terrestre	$\sim 50 \times 10^{-6}$
De uma pequena barra de imã	0.01
Necessário para saturar o ferro	2

De notar-se que pelo facto de existir carga eléctrica, existe um campo eléctrico. Assim, a força total que age sobre a carga em movimento é:

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B \Rightarrow \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{2}$$

Esta força (Eq.2), denomina-se força de Lorentz.

Qual é o efeito do campo magnético sobre uma carga em movimento ?

Primeiro podemos analizar se a força magnética realiza ou não trabalho sobre a carga eléctrica. Para tal, consideremos que a carga tem um deslocamento $d\vec{\ell}$ durante um tempo dt, tal que, $d\vec{\ell} = \vec{v}dt$. Assim:

$$dW = \vec{F}_B \times d\vec{\ell} \Rightarrow dW = q(\vec{v} \times \vec{B})\vec{v}dt = q\vec{B}(\vec{v} \times \vec{v})dt = 0$$

Deste modo, concluimos que:

- A força magnética não relaiza trabalho sobre cargas em movimento;
- A força magnética só muda a direção do vector velocidade das cargas em movimento

Quando uma carga eléctrica entra num campo magnético constante com velocidade perpendicular ao vector indução magnética ($\vec{v} \perp \vec{B}$), a carga descreve uma trajectória circular (Fig.4). Assim, o raio da trajectória , a velocidade angular e o período são respectivamente dados por:

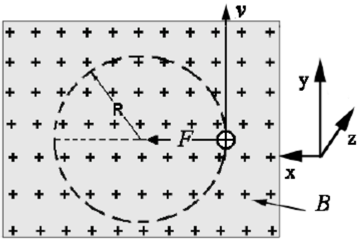


Figura 4:

$$F_B = F_c$$
$$qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B} \tag{3}$$

Sabendo que $v = \omega R$, tem-se:

$$R = \frac{m\omega R}{|q|B} \Rightarrow \omega = \frac{|q|}{m}B \tag{4}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = \frac{2\pi m}{|q|B} \tag{5}$$

Se a velocidade de uma partícula carregada tem uma componente paralela ao campo magnético uniforme, a partícula em causa descreve uma trajetória helicoidal cujo eixo é a direcção do campo Neste caso, para além de se determinar o raio, será também necessário determinar-se o passo.

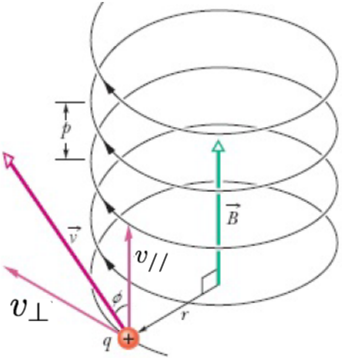


Figura 5:

O passo é determinado pela componente paralela:

$$p = v_{//}T \Rightarrow p = v cos\phi \frac{2\pi m}{|q|B} \qquad (6)$$

O raio é determinada pela componente perpendicular

$$R = \frac{mv_\perp}{|q|B} \Rightarrow R = \frac{mv sin\phi}{|q|B} \qquad (7)$$

Já abordamos que quando a corrente passa através de um condutor, a volta cria-se um campo magnético. O sentido desse campo pode ser determinado com base na regra da mão direita ou regra de sacarrolha de parafuso direito.

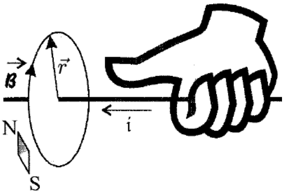


Figura 6: Determinação do sentido de $\vec{B}$ usando a regra da mão direita

Os físicos franceses, Jean Baptiste Biot e Félix Savart, baseando-se nas observações de Oersted, desenvolveram uma expressão matemática para determinar a magnitude do campo magnético (*a lei de Biot-Savart*)

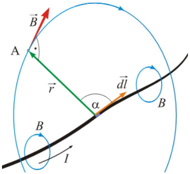


Figura 7:

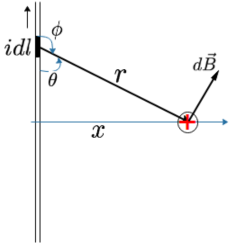
- Lei de Biot-Savart

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (8)$$

Onde, μ_o é a permeabilidade magnética no vácuo ($\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$H/m), e $\hat{r}$ é o vector unitário do Idl até ao ponto de medição do $\vec{B}$. (1H/m = 1N/A^2)

Exemplo 1

Determine a indução magnética a uma distância x de um fio condutor infinito que através dele passa uma corrente eléctrica I.



$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \Rightarrow B_z = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{I dy sin\phi}{r^2}$$

$$B_z = \frac{\mu_o I}{2\pi x} \frac{\ell}{\sqrt{4x^2 + \ell^2}}$$

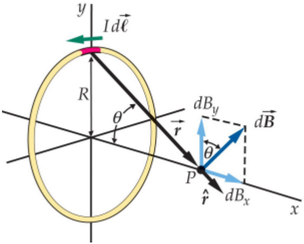
Para um fio muito longo ($\ell \longrightarrow \infty$):

$$B_z = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$$

Sabe-se que $sin(180 - \gamma) = sin\gamma$ e $\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\xi}{a^2\sqrt{\xi^2 + a^2}}$

Exemplo 2

Determine a indução magnética no cento de uma espira circular que através dela passa uma corrente eléctrica I.



$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{I d\ell sin\theta}{r^2} \vec{i}$$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{R I d\ell}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_o}{2} \frac{R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

No centro da espira ($x = 0$):

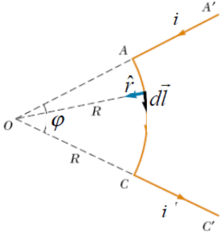
$$B = \frac{\mu_o}{2} \frac{I}{R}$$

Com base no resultado do Exemplo 2 para $x = 0$ (centro da espira), a magnitude do campo criado por muitas espiras (N espiras) é:

$$B = \frac{\mu_o}{2}\frac{NI}{R} \tag{9}$$

Exemplo 3

Determine o campo magnético no centro de um arco de uma circunferência de raio R



- Os segmentos AA' e CC' não contribuem para o campo no ponto O, visto que $d\vec{\ell} \times \vec{r} = 0$ $(d\vec{\ell} // \vec{r})$

$$B = \frac{\mu_o i}{4\pi}\int_c \frac{d\ell}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_o i}{4\pi}\int_0^{\phi}\frac{Rd\phi}{R^2} \Rightarrow B = \frac{\mu_o i}{4\pi R}\phi$$

Sabe-se que $\vec{B}$ a volta de um fio condutor recto atraves do qual passa uma corrente i é:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\vec{e}_\theta \tag{10}$$

Considerando o elemento da curva que envolve um condutor com corrente que sai do papel (Fig.8), tem-se:

$$d\vec{l} = Rd\theta\vec{e}_\theta \tag{11}$$

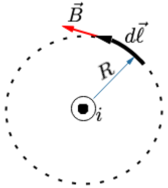


Figura 8:

Multiplicando-se as Eqs.10 e 11, tem-se:

$$\vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}Rd\theta\vec{e}_\theta\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{B}d\vec{l} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}Rd\theta \tag{12}$$

Integrando a expressão (Eq.12)por toda a curva circular, obtém-se:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \oint_C \frac{\mu_0 i}{2\pi R} R d\theta \Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_o i} \tag{13}$$

Esta expressão refere-se à circulação do $\vec{B}$ por toda a curva fechada que envolve uma corrente e, é a chamada lei de Ampere para o campo magnético .

✓A corrente (i) é total envolvida pela curva fechada (também chamada de amperiana)
✓Havendo muitas correntes envolvidas pela amperiana, deve-se determinar a corrente total, sendo positivas as que saem do plano e negativas as que entram.

Exemplo 4

Considerando as seguintes duas correntes envolvidas pela amperiana, determine a corrente total

$$i = i_1 - i_2$$

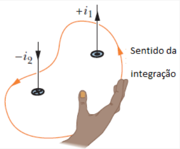


Figura 9:

✓A lei de Ampere desenpenha o mesmo papel que a lei de Gauss na electrostática. Ela (a lei de Ampere) facilita o cálculo de $\vec{B}$ quando a distribuição das correntes obedece uma simentria.

Lei de Ampere na forma diferencial

A curva fechada C que envolve a corrente total define uma superfície aberta S no espaço pelo qual passa a corrente. Assim, pode-se exprimir a lei de Ampere em termos da densidade superficial da corrente $\vec{j}$.

$$i = \int_S \vec{j} d\vec{S} \tag{14}$$

Conjugando a Eq.9 com a Eq.14, tem-se:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} d\vec{S} \tag{15}$$

Recorrendo-se ao teorema de Stokes $\boxed{\oint_C \vec{a} d\vec{l} = \int_S rot \vec{a} d\vec{S}}$, a Eq.15 fica:

$$\int_S rot\vec{B}d\vec{S} = \mu_0 \int_S \vec{j}d\vec{S} \Rightarrow \boxed{rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}} \tag{16}$$

Esta expressão (Eq.16) refere-se à lei de Ampere na forma diferencial para o campo magnético.

Note que até agora vimos três equações qua fazem parte das equações de Maxwell, a saber:

Lei	Forma integral	Forma diferencial
Lei da Gauss para $\vec{E}$	$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0}Q$	$div\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho$
Lei de Gauss para $\vec{B}$	$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$	$div\vec{B} = 0$
Lei de Ampere	$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_o i$	$rot\vec{B} = \mu_0\vec{j}$

Exemplo 5

Determine a distribuição do campo magnético pelo cilindro condutor muito longo de raio R e percorrido por uma corrente i.

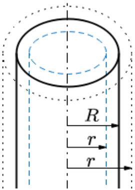


Figura 10:

$\underline{r < R}$

$$\int_0^{2\pi r} Bdl = \mu_0 \int_0^{r} \frac{i}{\pi R^2} 2\pi r dr$$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r}{R^2}$$

$\underline{r > R}$

$$\int_0^{2\pi r} Bdl = \mu_0 i \Rightarrow B = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{r}$$

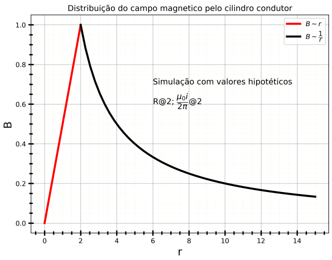


Figura 11:

✓**Soleinode** ⇝ bobina helicoidal formada por espiras circulares e muito próximas.
✓**Toroide** ⇝ solenoide cilíndrico encurvado até fechar um anel (as extremidades estão conectadas).

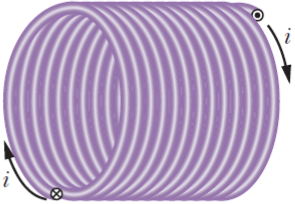


Figura 12: Soleinode

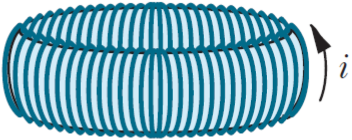


Figura 13: Toroide

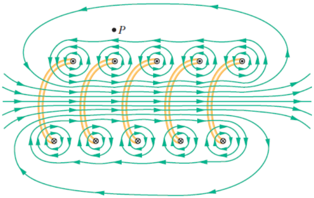


Figura 14:

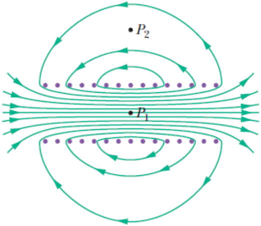


Figura 15:

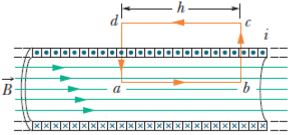


Figura 16:

O campo magnético do solenoide é a superposição dos campos das respectivas espiras.

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}d\vec{l} + \int_d^a \vec{B}d\vec{l}$$
$$= Bh + 0\ (\vec{B} \perp d\vec{l}) + 0\ (\text{B} = 0\ \bar{cd}\ \text{fora do solenoide}) + 0\ (\vec{B} \perp d\vec{l}) \tag{17}$$

Dado que em cada unidade de comprimento tem "n"espiras, a quantidade de espiras que existem no comprimento "h"é $n\mathrm{h}$. Assim, a corrente total é:

$$i_{total} = inh \tag{18}$$

Considerando a lei de ampere, o campo magnético de um solenoide é:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = Bh = \mu_0 nhi \Rightarrow \boxed{B = \mu_0 ni} \tag{19}$$

Visto que no interior do solenoide temos um campo uniforme, ele é também usado como fonte de um campo magnético uniforme.

Exemplo 6

Determine o campo magnético de um solenoide com 5 camadas de espiras, sendo cada camada com 850 espiras e o seu fio condutor tem 1.23 metros de comprimento. considere a corrente através do solenoide de 5.57 A.

$$B = \mu_0 n i \Rightarrow B = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T m/A} \times \frac{5 \times 850\ \text{espiras}}{1.23\text{m}} \times 5.57\ \text{A} = 24.2mT$$

Note que as vezes pode-se dar o diâmentro do solenoide mas, como deve-se perceber, o campo magnético não depende do diâmetro.

Campo magnético de uma bobina toroidal

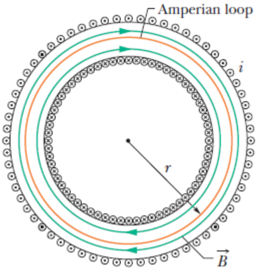


Figura 17:

$$\oint_C \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 i_{total}$$
$$\int_0^{2\pi r} Bdl = \mu_0 Ni \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 Ni}{2\pi}\frac{1}{r}} \tag{20}$$

Até agora a nossa consideração só se restringiu só à corrente de condução. Porém se associarmos em série um capacitor com um resistor a uma f.e.m. observamos que o amperimétro reigista uma certa corrente a passar. A questão a colocar é, visto que entre as placas do capacitor não há um condutor, como é que a corrente passa?

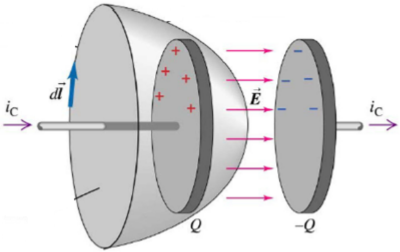


Figura 18:

A continuidade de corrente é garantida pela corrente de deslocamento, introduzido pelo Maxwell. A corrente de deslocamento (i_d) deve-se à variação do $\vec{E}$ com o tempo, isto é, sabe-se da lei de Gauss que

$$Q = \epsilon_0 \Phi_E \tag{21}$$

sendo $i = \dfrac{dQ}{dt}$ então:

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \tag{22}$$

Assim, tendo em consideração a existência da corrente deslocamento, a lei de Ampere fica:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (i_c + i_d) \tag{23}$$