Notas de Aula #05
Dinâmica de sistema de partículas

(Cursos de Engenharias)

Bartolomeu Joaquim Ubisse
Departamento de Física - Universidade Eduardo Mondlane
Moçambique

22 de Dezembro de 2020

---

1 Introdução

A natureza é composta por um sistema de partículas que, dependemdo da sua distância de separação, podem constituir um corpo sólido ou continuarem como um sistema de partículas distibuídas de uma forma discreta em que seja possível destinguir-se umas das outras. Em cada um dos casos, existe um ponto que se considera que seja o centro de massa de todas as partículas do sistema. Nesta aula, vamos considerar o caso em que a distância de separação entre as partículas é relativamente maior e, por via disso, a distribuição das mesmas é discreta. Assim, vamos aprender as técnicas que nos permitem determinar o centro de massa (CM), o momento linear ($\vec{P}$), o momento angular ($\vec{L}$), o torque ($\vec{\tau}$) e a energia cinética (E_c) de um sistema de partículas.

2 Centro de massa e vector de posição do centro de massa de um sistema de partículas

Consideremos um sistema de partículas representaddo pela Fig.1. Tal como fizemos para uma partícula pontual, a posição de centro de massa também determina-se conhecendo as suas coordenadas (x, y, z). Assim,

$$\begin{aligned} x_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{M} \\ y_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{M} \\ z_{CM} &= \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{M} \end{aligned} \tag{1}$$

onde, $M = \sum_{i=1}^{N} mi$

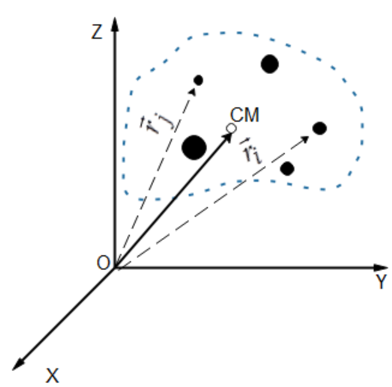

Figura 1: sistema de partículas

E, o vector de posição é[1].

$$\vec{r}_{CM} = x_{CM}\vec{i} + y_{CM}\vec{j} + z_{CM}\vec{k} \tag{2}$$

[1] É bom ter em conta que este vector refere-se ao inicial, i.,é.,quando $t = 0s$. Quando o sistema estiver em movimento, use as equações de movimento, porém todos os parámetros devem ser referente ao sistema de partículas, i.,é., $\vec{v}_{CM}$ e $\vec{a}_{CM}$

Repare-se que podemos reescrever a Eq.2 de uma forma compacta, i.é,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M} \tag{2a}$$

Derivando-se o vector de posição da Eq.2a, obtém-se o vector velocidade de centro de massa

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M} \tag{3}$$

Reparando-se para o numerador da Eq.3, depreende-se facilmente que se está perante uma quantidade de movimento (momento linear) total, i.é,

$$\vec{P}_{total} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{CM} \tag{4}$$

Assim, pode-se afirmar que, *o momento linear total de um sistema de partículas é o momento de uma partícula com massa total do sistema e com velocidade de centro de massa.*

3 Referencial do centro de massa

Consideremos um sistema de partículas em que a i-ésima partícula seja analisada apartir de um sistema de referência-S.

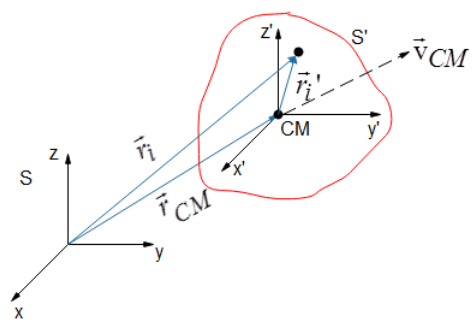

Figura 2: Referencial do centro de massa

Tal como já vimos a quando da discussão do movimento relativo, a posição e a velocidade da i-ésima patícula em relação ao referencial de centro de massa (referencial-S') são respectivamente:

$$\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{r}_{CM} \tag{5}$$

e

$$\vec{v}_i{}' = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM} \tag{6}$$

3.1 Momento angular em relação ao referencial centro de massa

O momento linear total do sistema no referencial do cento de massa é:

$$\begin{aligned} \vec{P}_i{}' &= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i{}' = \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{v}_i - \vec{v}_{CM}] \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_{CM} \\ &= \vec{P} - M\vec{v}_{CM} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Com este resultado (Eq.7), pode se afirma que o momento linear total de um sistema de partículas no referencial de centro de massa ($\vec{P}'_i$) é nulo.

3.2 Momento angular total do sistema de partículas

O momento angular total do sistema de partículas é:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i [\vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}] \times [\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}] \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}_{CM}) + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}'_i) + \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM})
\end{aligned} \tag{8}$$

Daqui observa-se que o 2^o e 3^o termos do segundo membro da Eq.8 são nulos. Assim, o momento angular total do sistema é composto por dois termos, isto é, o momento angular interno ($\vec{L}_{int}$)e o momento angular referente ao centro de massa ($\vec{L}_{CM}$)

$$\vec{L} = \vec{L}_{int} + \vec{L}_{CM} \tag{8a}$$

Onde, $\vec{L}_{int} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}'_i)$ e $\vec{L}_{CM} = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}) = \vec{r}_{CM} \times M \vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$

3.3 Energia Cinética de um sistema de partículas

$$E_c = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \tag{9}$$

Substituindo Eq.6 na Eq.9 resulta que:

$$\begin{aligned}
E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_i^{\,\prime} + \vec{v}_{CM} \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} M \vec{v}_{CM}^2 + \sum_{i=1} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\prime 2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Assim, reparando-se para a Eq.10 conclui-se que a energia cinética total de um sistema de partículas é a soma da energia cinética do sistema em relação ao referencial enercial e a a energia cinética em relação ao referencial de centro de massa.

Referências

[1] Alonso, M. e Finn, E.*Física*, Mecânica, Vol.1, Fondo Educativo Interamericano, S.A, 240-261 (1970)