Tema 2: Cinemática

Movimento mecânico, sistema de referência, trajectória;

Posição, deslocamento, velocidade média, velocidade instantânea, aceleração média e aceleração instantânea;

Movimento curvilíneo

Movimento relativo

Movimento mecânico

- Na natureza os objectos ocupam uma determinada posição no espaço e as interacções entre o objecto e o ambiente que o rodeia ocorrem sempre no tempo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$É impossível separar o espaço do tempo.

Em mecânica, chama-se movimento à mudança de posição de uma partícula (ponto material) relativamente a um refererencial centrado num determinado sistema de coordenadas (sistema de referência);

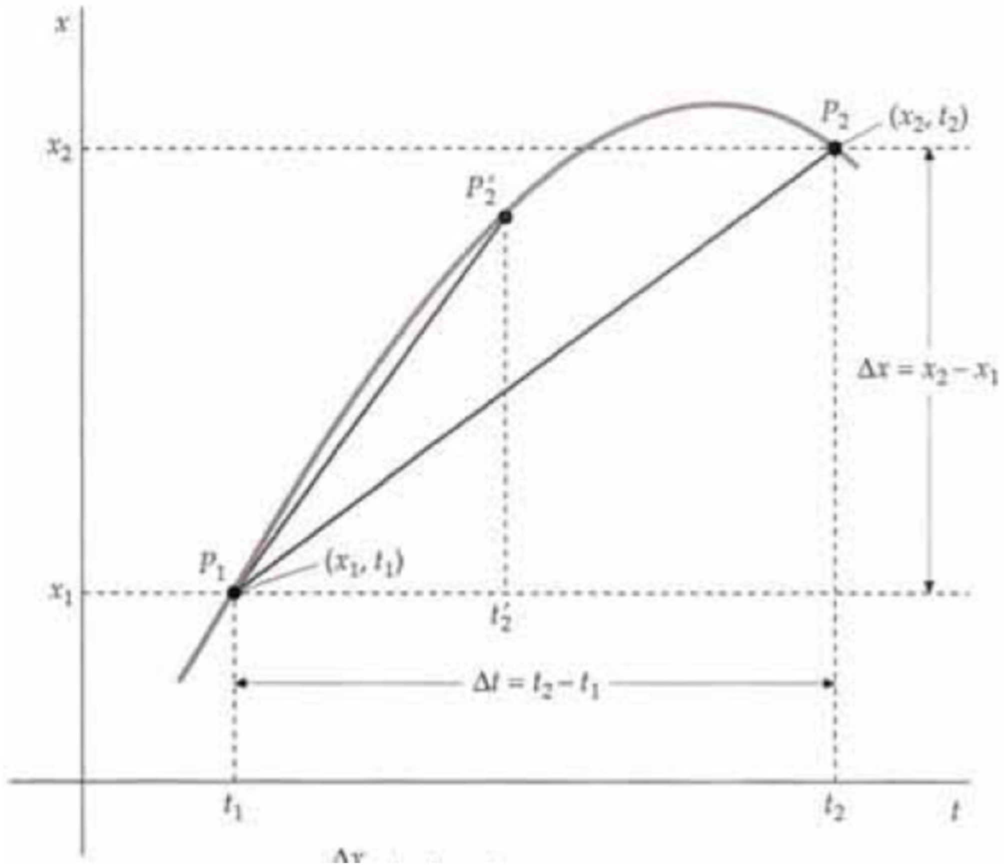
Quando a posição não varia, diz-se que o objecto está em repouso.

- Qual é a importância do sistema de referência?
  - O repouso e o movimento são noções relativas; um mesmo objecto pode estar simultaneamente em repouso e em movimento para diferentes sistemas de referência (ex: o você tem estado em repouso relativamente ao carro que o leva à Faculdade, mas em movimento relativamente a estrada, as árvores e outros objectos que você vê moverem-se enquanto o carro está em movimento).
  - Sistema de referência é o conjunto de objectos em relação aos quais um determinado objecto move-se e um relógio para medição do tempo.

Trajectória_rectilínea

- Trajectória- linha imaginária descrita pelo móvel (partícula) durante o seu movimento.

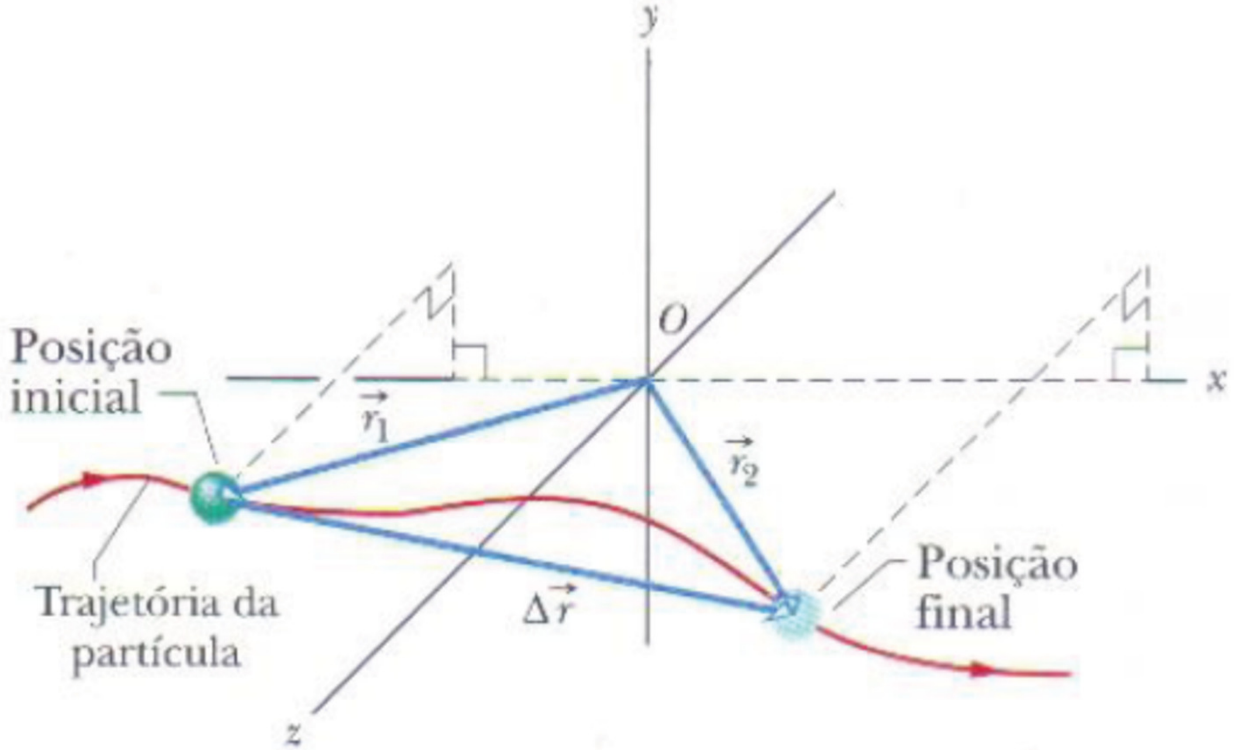
❖ Trajectória rectilínea (mov. rectilíneo)

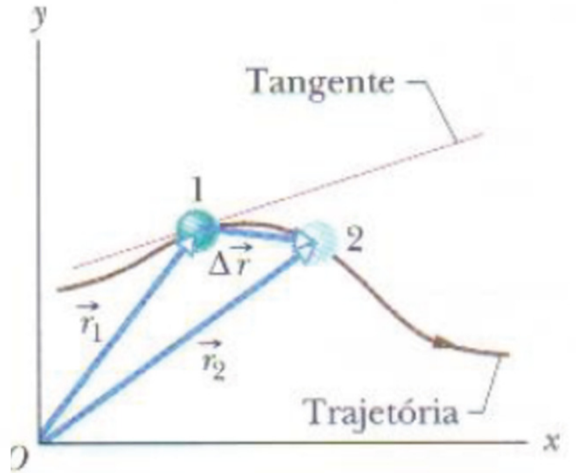


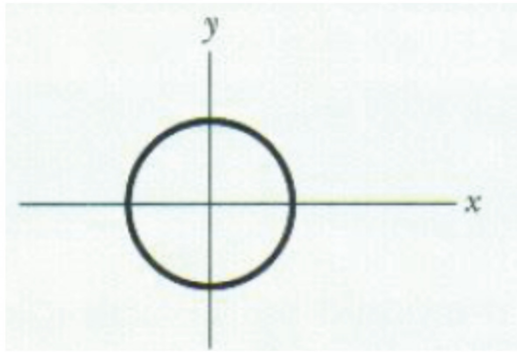
Trajectória_curvilínea

❖Trajectória curvilínea (mov. Curvilíneo)

❖Trajectória circular (mov. circular)







Posição

- No movimento rectilíneo, a posição, relativamente a um referencial, é indicada através de uma única variável (ex: *x* para um movimento horizontal ou *y* para movimento vertical):

$$x = x(t)$$

Nota: ao escrever as equações horárias é preciso considerar que dependendo da relação direcção do eixo *x* e a direcção da velocidade *v*, o sinal de *v* e da aceleração *a* pode ser positivo ou negativo.

Para o movimento curvilíneo a posição indica-se por meio de um raio vector:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$$

Ou

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$$

Posição_ equações paramétricas

- $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Exemplo 1: $\vec{r}(t) = 3\sin(2t)\,\vec{\imath} + 4\cos(2t)\,\vec{\jmath}$

$$\begin{cases} x = 3\sin(2t) \\ y = 4\cos(2t) \end{cases}$$

Trajectória do movimento:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$ –Elipse

Trajectória em termos matemáticos é a relação entre variáveis do espaço (sem o tempo)

Deslocamento_mov rectilíneo

- Deslocamento- variação da posição em função do tempo:

$\Delta x = x(t_2) - x(t_1); t_2 > t_1$

Δx $-$pode ser positivo (objecto afasta-se da origem), negativo (aproxima-se a origem) e nulo, se as posições inicial e final coincidirem.

O percurso (distância percorrida), *d*, é sempre positivo

Deslocamento_mov curvilíneo

- Sendo a posição um vector, o deslocamento também será um vector:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2(t) - \vec{r}_1(t) =$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

Exemplo 2: Achar o vector deslocamento de uma partícula que move-se de $\vec{r}(t_1) = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ para $\vec{r}(t_2) = 9\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$

Resp: $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = 12\vec{i} + 3\vec{k}$

Velocidade

- Velocidade média- é a razão entre o deslocamento e o intervalo de tempo correspondente:

$v_{med} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ - mov rectilíneo

Diferenciar da velocidade escalar média

$$v_{escalar,med} = \frac{d_{tot}}{t_{tot}}$$

Ou

$$v_{escalar,med} = \frac{d_1 + d_2 + \cdots + d_n}{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}$$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

Ou

$$\vec{v}_{med} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}\vec{i} + \frac{y(t_2) - y(t_1)}{t_2 - t_1}\vec{j} + \\ + \frac{z(t_2) - z(t_1)}{t_2 - t_1}\vec{k}$$

Velocidade_cont

- Velocidade instantânea: Quando se fala da velocidade de um corpo, em geral refere-se à velocidade num instante arbitrário, o valor para o qual tende a velocidade média quando Δt tende para zero:

$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ - mov rectilíneo

Ou $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ - no caso mais geral

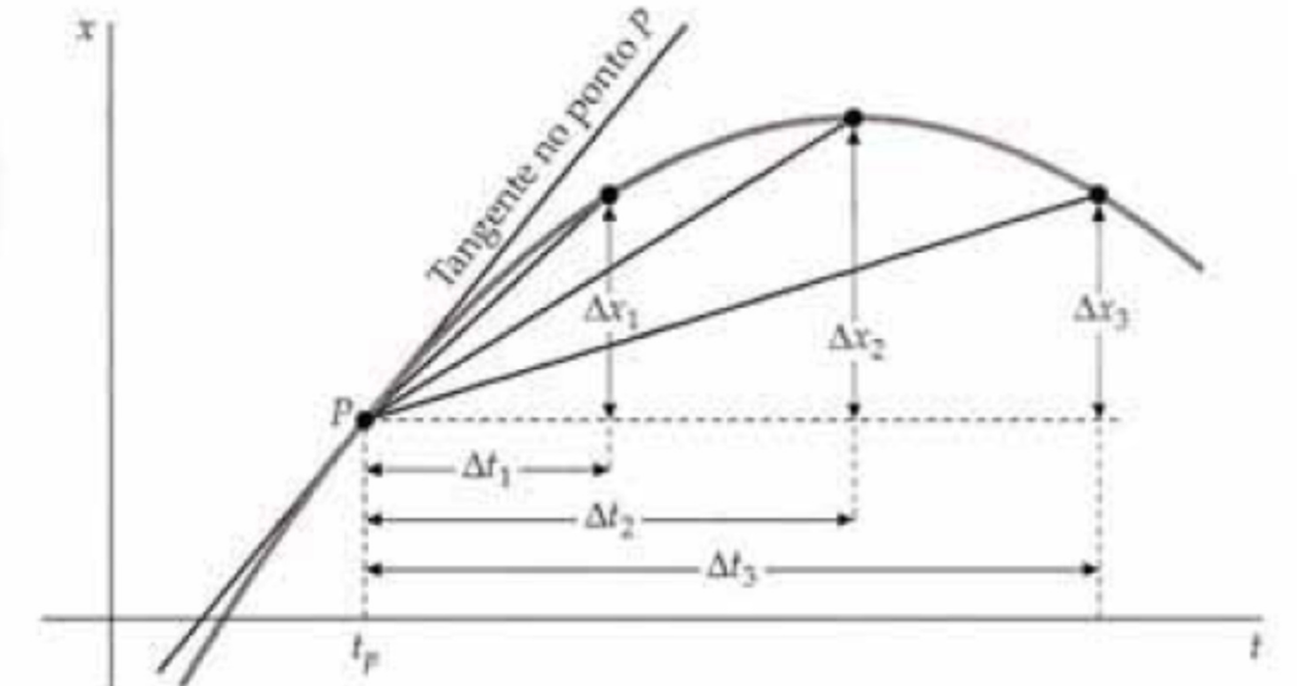
$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right)$$

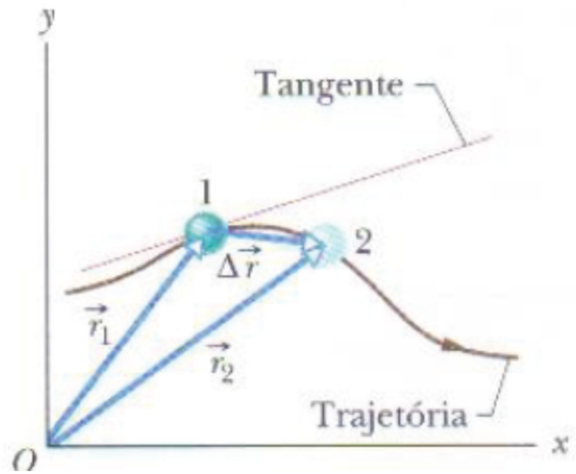
Ou,

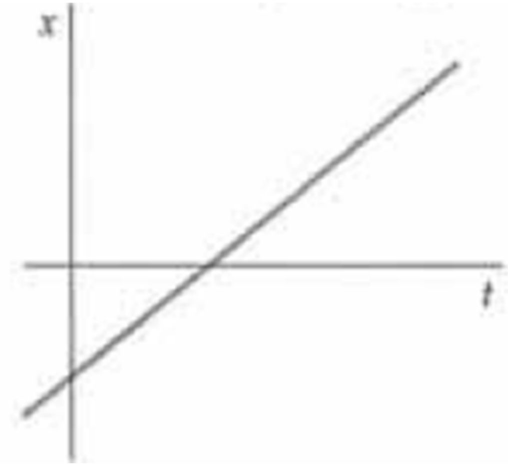
$$\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

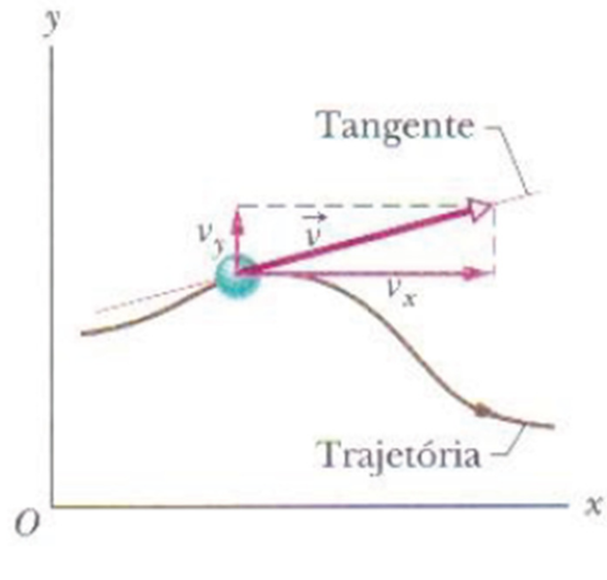
- Comparando estas últimas duas expressões conclui-se que as componentes (projecções nos eixos) do vector velocidade encontram-se derivando as componentes do vector posição.

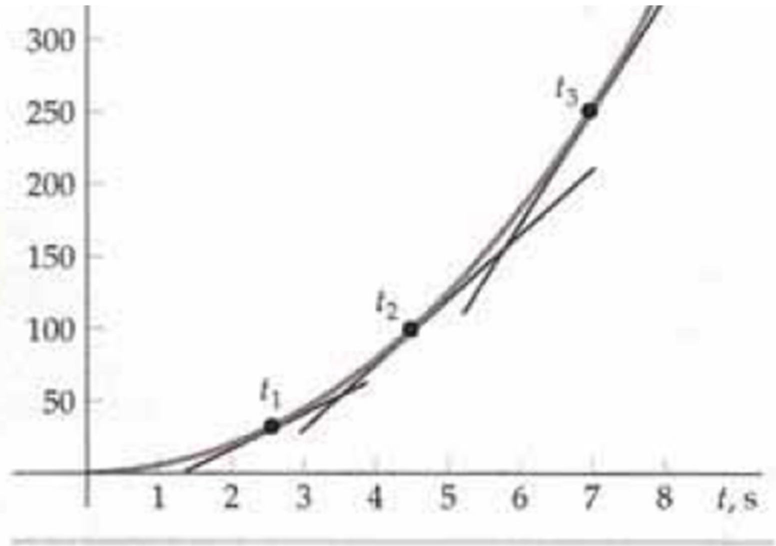
A direcção da velocidade instantânea $\vec{v}$ é sempre tangente à trajectória seguida pela partícula no ponto onde ela se encontra.






x
t


y
Tangente
v_y
$\vec{v}$
v_x
Trajetória
O
x


300
250
200
150
100
50
t_1
t_2
t_3
1
2
3
4
5
6
7
8
t, s

- Exemplo 2: Para no instante t = 15 s, Calcule a velocidade de um coelho que desloca-se de acordo com as seguintes equações paramétricas (expressas no SI):

$x(t) = -0.31t^2 + 7.2t + 28$ e

$$y(t) = 0.22t^2 - 9.1t + 30$$

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -0.62t + 7.2\,;\ v_x(15) = -2.1 \text{ (m/s)}$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = 0.44t - 9.1;\ \ v_y(15) = -2.5 \text{ (m/s)}$$

$$v(t) = \sqrt{{v_x}^2(t) + {v_y}^2(t)};$$

$$v(15) = \sqrt{(-2.1)^2 + (-2.5)^2} = 3.3\ m/s$$

$$\vartheta = arctang\left(\frac{-2.5}{-2.1}\right) = arctang(1.19) = 49.96° \approx 50°$$

Relativamente ao eixo x, o ângulo é $\beta = \pi + 50° = 130°$

Aceleração

- A aceleração é a taxa de variação temporal da velocidade. Resulta da variação da velocidade (pisando no acelerador ou no travão de um carro por exemplo).
- Aceleração média define-se como sendo a razão entre a variação da velocidade e o intervalo de tempo correspondente a essa variação:

$$a_{med} = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{caso unidimensional}$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{caso geral}$$

Aceleração instantânea: quando o intervalo de tempo tende para zero, a aceleração média tende para a aceleração instantânea.

$$a \equiv a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Ou

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} =$$

ou

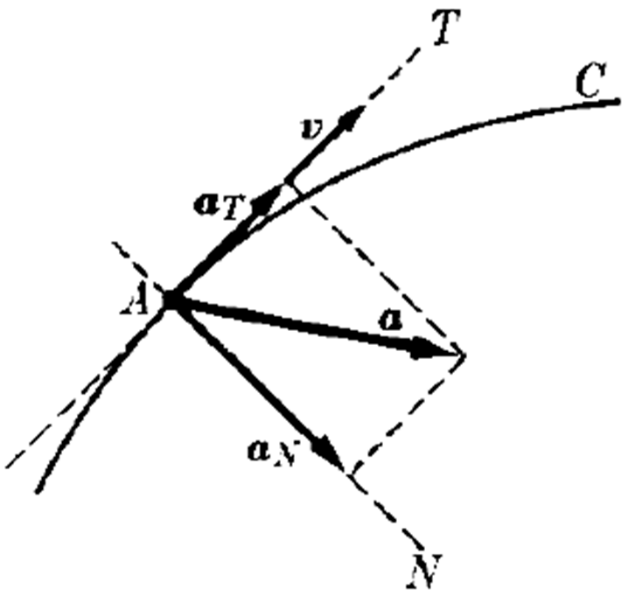
$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

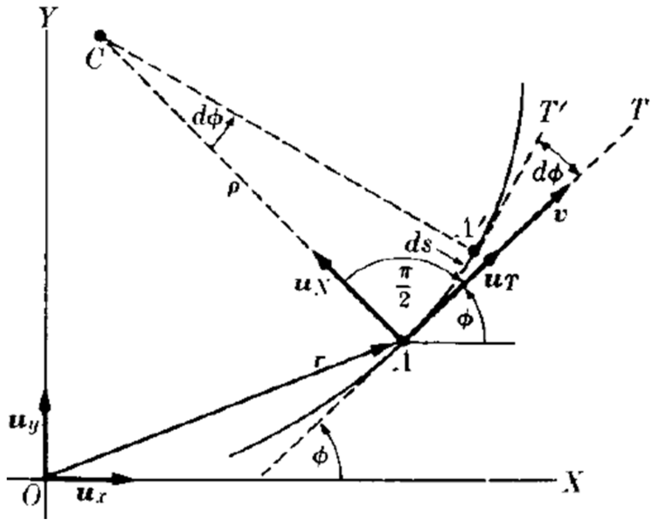
- No movimento curvilíneo a aceleração total é a soma vectorial das componentes tangencial(a_τ) e normal (a_n):

$$\vec{a} = a_\tau \vec{u}_\tau + a_n \vec{u}_n$$

Onde $\vec{u}_\tau$ e $\vec{u}_n$- vectores unitários ortogonais entre sí.

$$a = \sqrt{a_\tau{}^2 + a_n{}^2}$$



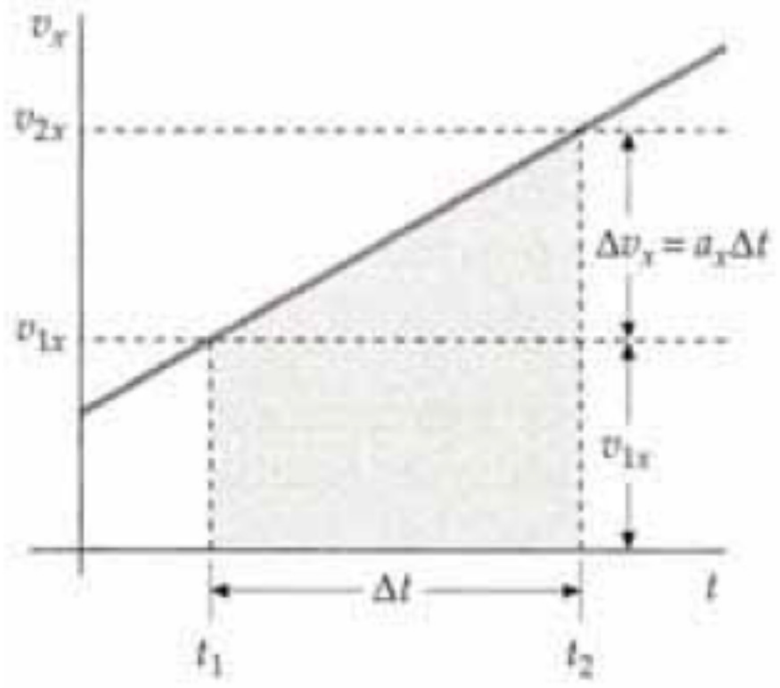


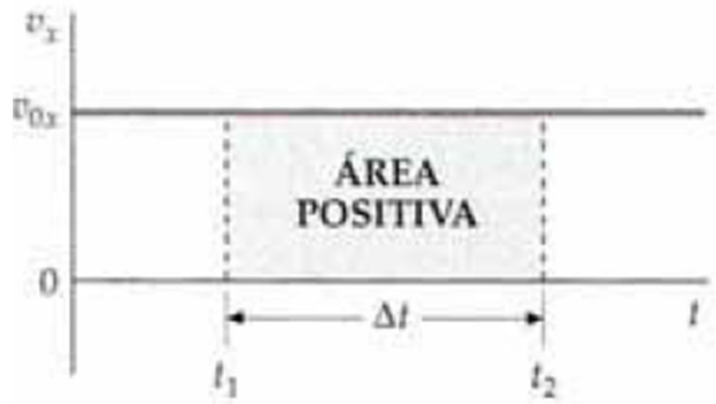
$$a_\tau = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

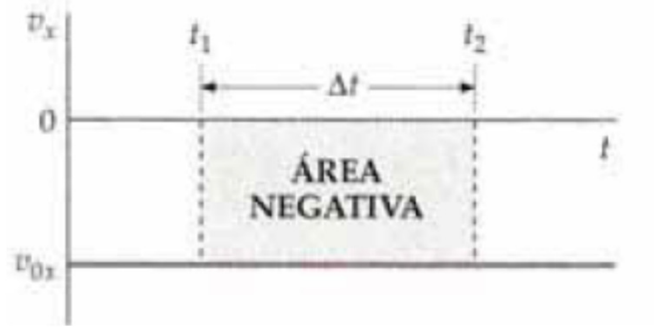
ρ– raio de curvatura da trajectória ($\rho = R$ para movimento circular)

Nota: veja suplemento sobre componentes normal e tangencial e componentes radial e transversal.

- Interpretação geométrica: Num gráfico $v = f(t)$, a aceleração é sempre tangente à curva no ponto considerado. E a área sob o gráfico representa o deslocamento.







- O movimento considera-se acelerado quando os vectores $\vec{v}$ e $\vec{a}$ têm o mesmo sentido; caso contrário o movimento será retardado.

Exemplo: Lançamento vertical para cima com eixo *y* dirigido para cima ($v > 0$ e $a < 0$).

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Para o mesmo lançamento mas com eixo dirigido para baixo ($v < 0$ e $a > 0$).

$$y(t) = y_0 - v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Lançamento vertical para baixo e eixo dirigido para baixo ($v > 0$ e $a > 0$):

$$y(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Lançamento vertical para baixo e eixo dirigido para cima ($v < 0$ e $a < 0$):

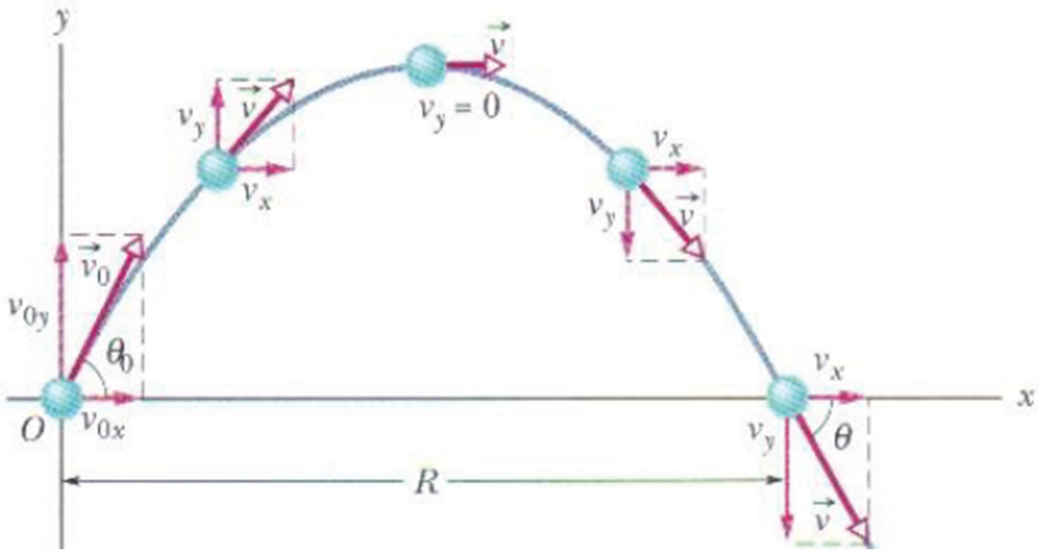
$$y(t) = y_0 - v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Composição de movimentos_mov em duas dimensões

- Quando a partícula movimenta-se num plano ou no espaço tridimensional, o movimento pode ser analisado separadamente pelos eixos de coordenada(equações paramétricas).
- Movimento de projéteis (oblíquo e Lançamento horizontal-trabalho em grupos)

Lançamento oblíquo_caso especial 1

- Caso especial do movimento bi-dimensional em que a partícula move-se no plano vertical com velocidade inicial $\vec{v}_0$ e aceleração constante e igual à da queda livre $\vec{g}$. Para lançamento centrado em $x_0 = y_0 = 0$, teremos:



Lançamento oblíquo_trajectória

- $\begin{cases} v_x = v_0 \cos\vartheta \\ v_y = v_0 \sin\vartheta - gt \end{cases} \Rightarrow$ integrando em função de t obtem-se as coordenadas x e t do vector posição:
- $\begin{cases} x(t) = v_0(\cos\vartheta)t \\ y(t) = v_0(\sin\vartheta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow$ isolando t em x e substituíndo em y obtem-se a trajectória do movimento:
- $y(x) = x\tan\vartheta - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{(v_0\cos\vartheta)^2}$ -parábola

Lançamento oblíquo_altura maxima e alcance

- Para encontrar a altura máxima, consideremos que nesse instante $v_y = 0 = v_0 \sin \vartheta - g t_1 \Rightarrow$

$t_1 = \frac{v_0 \sin \vartheta}{g}$. Substituíndo este tempo em *y*, obtem-se:

$$y(t_1) \equiv H = \frac{(v_0 \sin \vartheta)^2}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \vartheta}{g} \right)^2 =$$

$$H = \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \vartheta}{g} \right)^2$$

- Para achar o alcance, precisamos de encontrar o tempo de trânsito (tempo total de observação) e depois substituímos em *x*:

Atingido o alcance, nesse instante *y* = 0. Logo,

$y(t_t) = v_0(\sin\vartheta)t_t - \frac{1}{2}g{t_t}^2 = 0$. Ou,

$\frac{2v_0(\sin\vartheta)}{g}t_t - {t_t}^2 = 0$, cuja solução é:

$$t_t\left(\frac{2v_0\sin\vartheta}{g} - t_t\right) = 0 \Rightarrow t_t = 0 \vee t_t = \frac{2v_0\sin\vartheta}{g}$$

Logo,

$$x(t_t) \equiv R = v_0(\cos\vartheta)\frac{2v_0\sin\vartheta}{g} = \frac{{v_0}^2}{g}\sin(2\vartheta)$$

Conclui-se que o máximo valor de R atinge-se para $2\vartheta = 90°$.

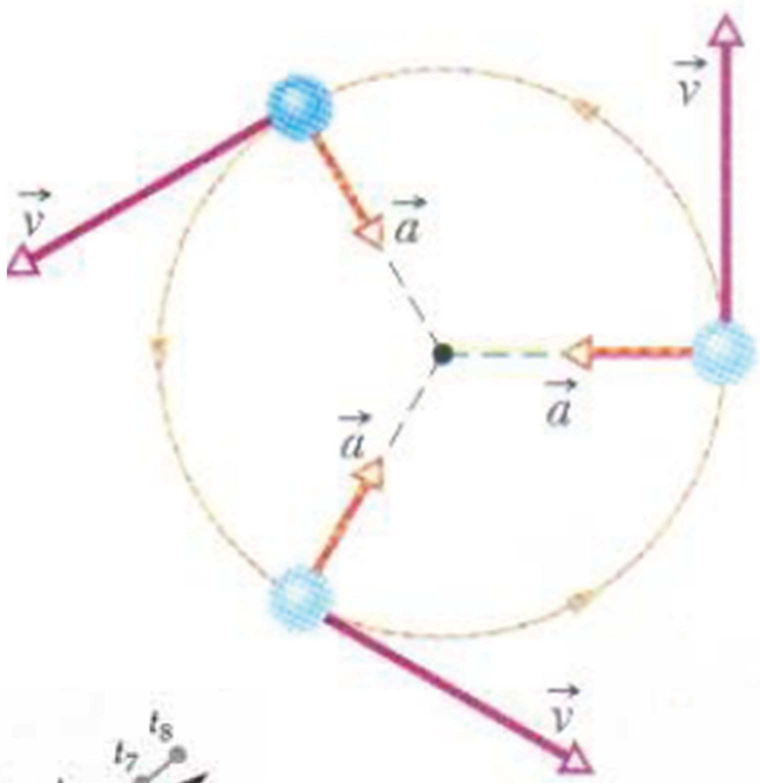
Discutir efeito do ar sobre o movimento do projéctil!

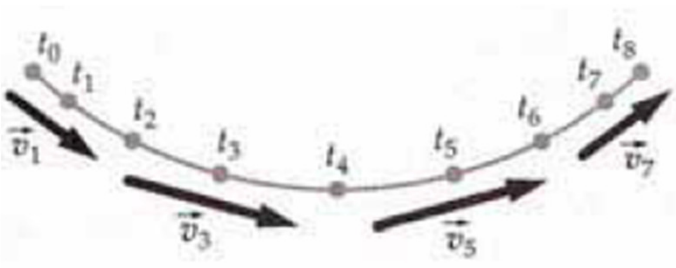
Lançamento horizontal

- TPC #1(grupos de 2-3 estudantes no máximo)

Movimento circular_caso especial 2

- Quando uma partícula está em movimento circular, ela descreve uma circunferência ou um arco de cincunferência.





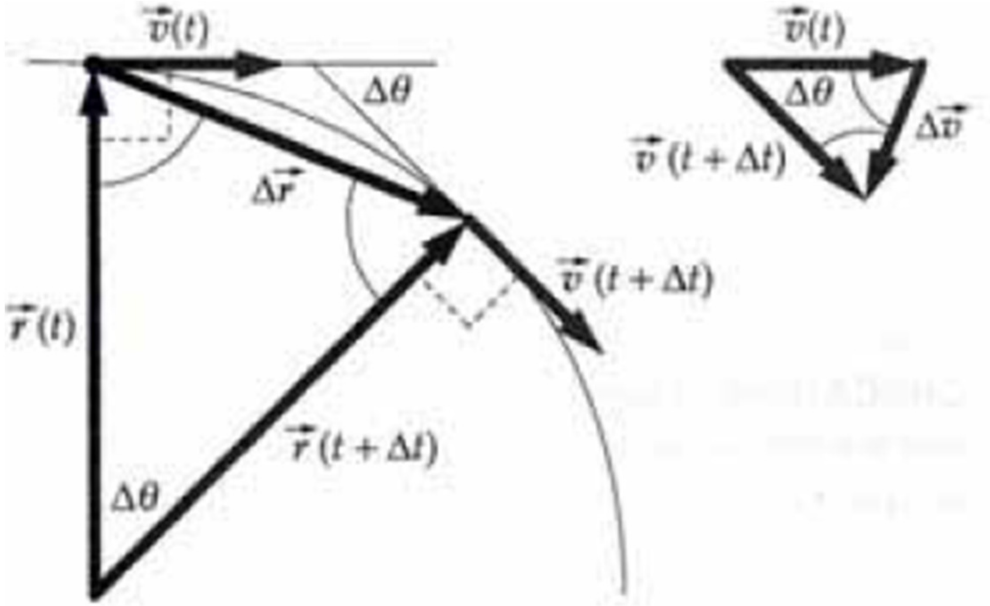
- Mesmo que a velocidade escalar seja constante, num movimento circular sempre há aceleração devido à variação do vector velocidade.
- Suponhamos que a velocidade escalar (o módulo do vector velocidade) é constante. Num dado instante t a posição e a velocidade da partícula , relativamente ao referencial localizado no centro de circunferência, representa-se por $\vec{r}\ (t)$ e velocidade $\vec{v}\ (t)$, respectivamente. Num outro instante $t' = t + \Delta t$, a posição e a velocidade serão $\vec{v}\ (t + \Delta t)$ e $\vec{v}'(t + \Delta t)$, tal como indica a figura abaixo.

- Sendo semelhantes os dois triângulos podemos estabelecer a relação:

- $\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{v}{r}$

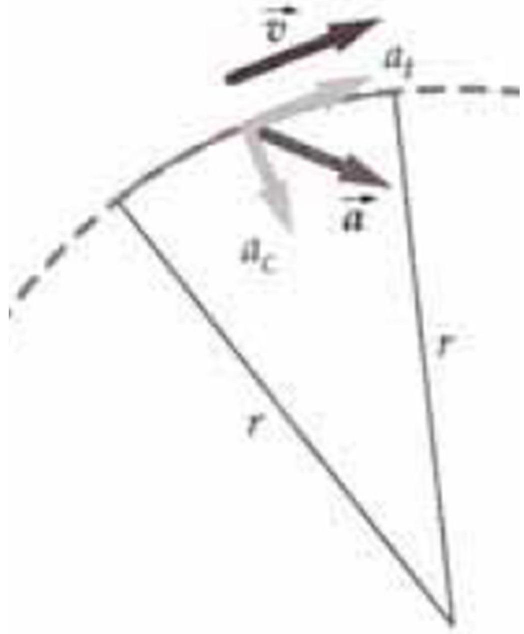
Ou

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\Delta t|} = \frac{v}{r} \cdot \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} \Rightarrow a_c = \frac{v^2}{r}$$



- Sendo a velocidade linear (escalar) o rácio entre o arco descrito *Δs e o intervalo de tempo Δt, v = Δs/Δt* , conclui-se que para *Δt = T , Δs = 2πr. Logo,*

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$



Se a velocidade linear for variável, a aceleração terá duas componetes perpendiculares entre sí, **tangencial** devido a variação do módulo e **normal** (centrípeta), devido a variação da direcção do vector velocidade:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_N$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_\tau = \frac{v^2}{r}$$

- Em geral no movemento circular avaliam-se as relações angulares,nomeadamente:

$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$ - velocidade angular $\Rightarrow$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

$\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0)$ para velocidade angular fixa

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

$\Rightarrow \omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt$

$\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)$ e

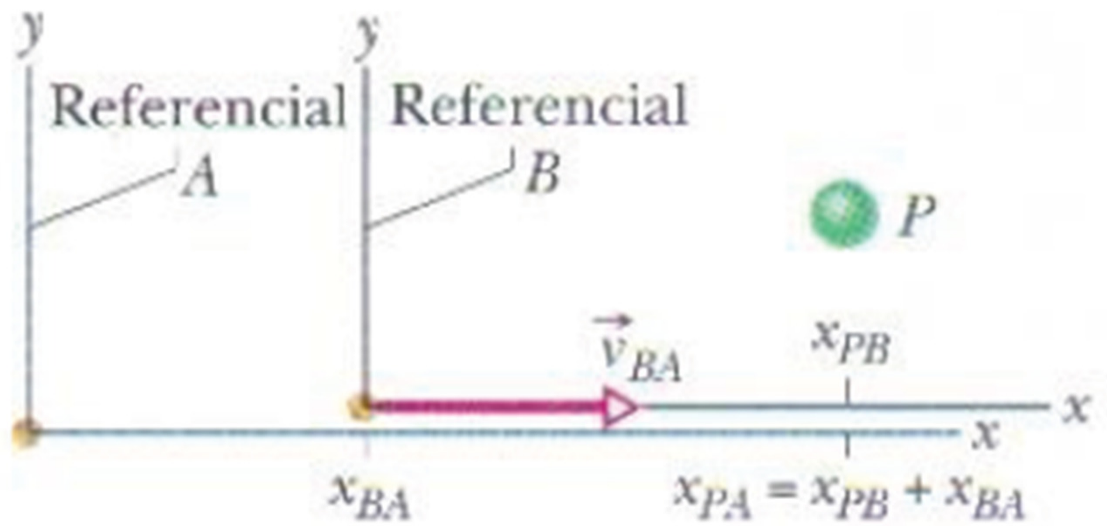
$\vartheta = \vartheta_0 + \omega(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2$

Movimento relativo

- A velocidade de uma partícula depende do referencial do observador (medidor de velocidade). Normalmente assumem-se como referencias, pontos fixos, como por exemplo uma árvore ou um poste de iluminação. Consequentemente, para um radar da polícia devidamente calibrado, medir correctamente a velocidade de um carro que se aproxima, é necessário que esteja em repouso relativamente ao solo.

Movimento relativo- unidimensional

- Suponhamos que dois observadores inerciais, O (A no desenho) e O´(B no desenho) situados nas origens dos sistemas de referência A e B respectivamente, observam o movimento de uma partícula P. O´ desloca-se à velocidade constante $u = v_{BA}$.



- v_P - velocidade da partícula medida pelo observador O e v'_P-velocidade da mesma partícula medida pelo observador móvel O´:

$$v_P = u + v'_P$$

A velocidade medida por O é a soma da velocidade medida por O´ mais a velocidade do observador O´mediada por O.

Para relacionar as aceleraçõs medidas pelos dois observadores inerciais, teremos que derivar a equação:

$$\frac{dv_P}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{dv'_P}{dt} \Rightarrow a_P = a'_P \, .$$

A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes refrerenciais inerciais é invariante (os dois medem a mesma aceleração).

- Exemplo 3: a velocidade do referencial inecrial O´medida por O é *u = 52 km/h*. Determine a velocidade da partícula v medida por O´, se o observador O lê *v = -78 km/h*.

Resp:

$$x(t) = ut + x´(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(ut)}{dt} + \frac{dx´(t)}{dt} =$$

$v = u + v´$; onde $u > 0$ e $v < 0 \Rightarrow$

$$v´ = v - u = +(-78) - 52 = -130\ km/h$$

$v´ = 130\ km/h$; (-) significa que op sentido de movimento da partícula é no sentido contrário ao do eixo x.

Movimento relativo- bi-dimensional

- No caso bi-dimensional, a relação de eventos medidos pelos dois observadores O e O´é:

$\vec{r}_P = \vec{r}_{BA} + \vec{r}\,'_P$; $\vec{r}_{BA} = \overrightarrow{OO'}$

Derivando termo a termo

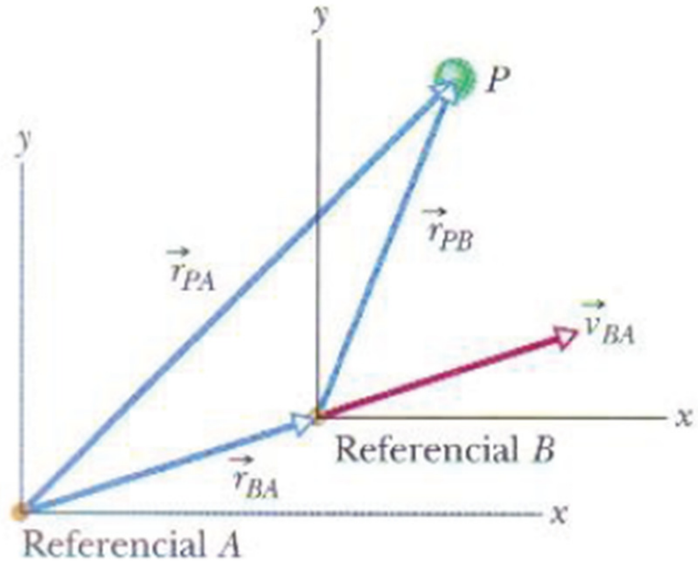
a equação, encontramos a

Relação de velocidades:

$\vec{v}_P = \vec{v}_{BA} + \vec{v}\,'_P$;

Analogamente,

$\vec{a}_P = +\vec{a}\,'_P$; $\frac{d(\vec{v}_{BA})}{dt} = 0$



Os dois observadores medem a mesma aceleração!

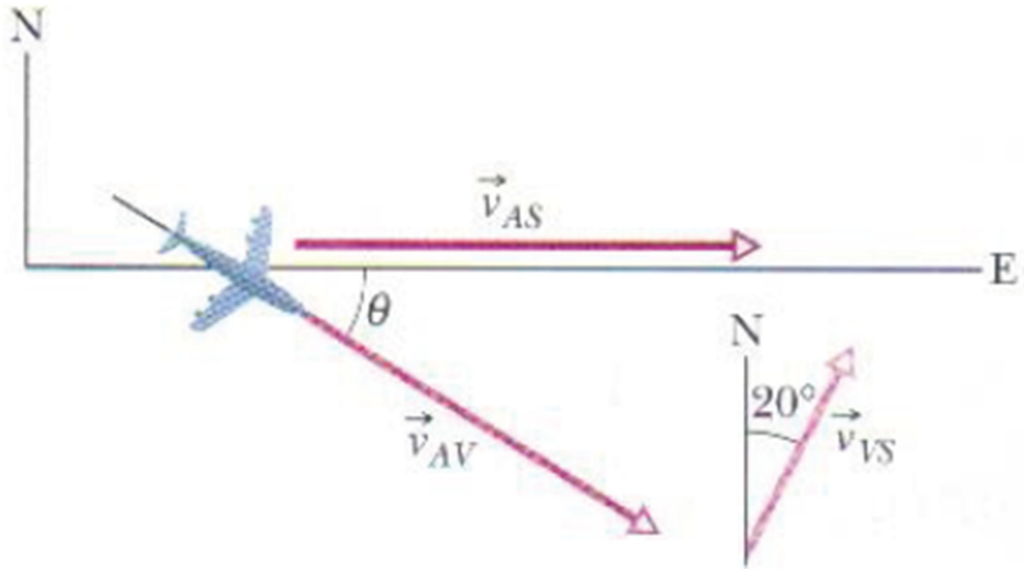
- Exemplo 4: Um avião move-se para o Leste enquanto o piloto direcciona o aparelho para o Sudeste de modo a compensar um vento constante que sopra para o Nordeste. A velocidade do avião relativamente ao vento é de 215 km/h, formando um ângulo θ com o Sudeste. A velocidade do vento u relativamente ao solo é de 65 km/h e forma um ângulo de 20° com o Nordeste. (a) Qual é a velocidade do avião em relação ao solo? (b) Qual é o valor de θ?

- (i) Desenhar um diagrama que ilustre a situação de modo a visualizar os vectores.
- (ii) a partir do diagrama, usar convenientemente as equações que relacionam eventos nos dois referenciais:

$v_{AS} = v$;

$v_{VS} = u$ e

$v_{AV} = v'$



- Analisando o diagrama conclui-se que:

OX ≡ Leste; OY ≡ Norte. ⇒

$$\vec{v} = \vec{u} + \overrightarrow{v'}$$

$$\begin{cases} v_x = v' \cos\theta + u \sin\varphi \\ v_y = -v' \sin\theta + u \cos\varphi \end{cases}$$ ou,

$$\begin{cases} v_x = 215 \cos\theta + 65 \sin(20°) \\ 0 = -215 \sin\theta + 65 \cos(20°) \end{cases}$$

Da segunda equação obtem-se:

$\sin\theta = \frac{65}{215}\cos(20°) \Rightarrow \theta = 16{,}5°$. Logo,

$$\begin{cases} v_x \equiv v = 215 \cos(16{,}5°) + 65 \sin(20°) = 228\ km/h \\ v_y = 0 \end{cases}$$