# Tema#3:Trabalho e Energia de uma partícula[1]

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências - Departamento de Física

(Aulas preparadas para estudantes da Engenharia Informática- UEM)

21/03/2022

[1] Alguns exemplos usados neste material foram usados pelo Prof. Luis Chea nas aulas leccionadas na FENG-UEM no período de 2019 a 2021.

# Conteúdos

# Trabalho e Energia de uma partícula

Quase todos os processos da vida, envolvem **energia**. Ex: *respiração, movimento, circulação sanguínea, digestão de alimentos, absorção de nutrientes e muito mais*.

✓Energia é uma medida da habilidade que um sistema e/ou corpo tem de realizar trabalho.

Existem vários tipos de energia:

- Energia cinética - associada ao movimento (translação, rotação e vibração)
- Enegia potencial - associada à configuração do sistema ou à distância de separação entre corpos em interação mútua (atração ou repulsão)
- Energia térmica - associada ao movimento aleatório das partículas de um sistema (átomos, moléculas, etc); é estritamente ligada à temperatura.
- etc.

# Trabalho e Energia de uma partícula

A energia transforma-se de uma forma para outra, pelo que, ela não pode ser criada ném destruída do nada. $\rightsquigarrow$ A energia conserva-se.

## Unidades de energia

No SI é expressa em Joule (J). Porém, dependendo da área do estudo e/ou aplicação, ainda é comum expressar-se em outras unidades como BTU, kWh, calorias, eV e mais.

$$\boxed{1\text{cal} = 4.186\text{J}; \quad 1\text{BTU} = 256\text{cal}; \quad 1\text{Wh} = 3600\text{J} \quad 1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{J}}$$

A energia transfere-se de um sistema para o outro de duas maneiras:

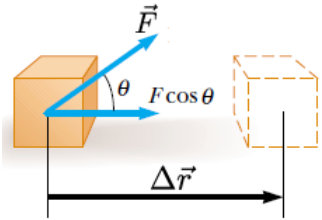
1. Realização de trabalho;
2. Transferência de calor

Na nossa consideração focar-nos-emos na realização do trabalho !

Trabalho tem vários significados na nossa vida quotidiana, porém, em Física, refere-se ao que acontece quando uma força é aplicada em um corpo e, este por sua vez se mova. Assim, diz-se que a tal força realizou um trabalho que é expresso por:

$$dW = \vec{F} d\vec{r} \tag{1}$$

## Trabalho de uma força constante




$$W_{r_1 \longrightarrow r_2} = F \Delta r cos\theta \tag{1a}$$

onde $\Delta$r - é o deslocamento efectuado pelo corpo pela aplicação da força $\vec{F}$ constante. Se sobre o corpo actuarem muitas forças, então o trabalho total é:

$$W_t = W_1 + W_2 + ... + W_N$$

## Trabalho de uma força variável

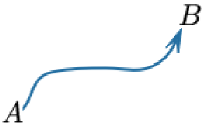



Figura 1:

$$W_{A \longrightarrow B} = \int\limits_{C} \vec{F} d\vec{r} \tag{2}$$

A Eq.2 pode ser rescrita:

$$\begin{aligned} W_{A \longrightarrow B} = & \int F_x(x, y(x), z(x))dx + \int F_y(x(y), y, z(y))dy \\ & + \int F_z(x(z), y(z), z)dz \end{aligned} \tag{2a}$$

## Exemplo 1

*Determine o trabalho realizado pela força* $\vec{F} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$ *ao deslocar uma partícula do ponto* $\mathrm{A}$ *até ao ponto* $\mathrm{B}$ *seguindo a trajectória: i)-* $\mathrm{C}_1$ *e ii) -* $\mathrm{C}_2$*, conforme a Fig.*

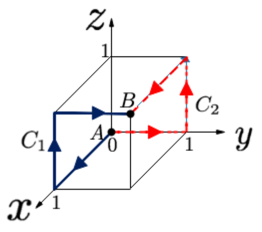



Figura 2:

Os contornos são:

$$C_1 : (0;0;0) \longrightarrow (1;0;0) \longrightarrow (1;0;1) \longrightarrow (1;1;1)$$

e

$$C_2 : (0;0;0) \longrightarrow (0;1;0) \longrightarrow (0;1;1) \longrightarrow (1;1;1)$$

Assim:

$$W_{A\longrightarrow B}(C_1) = \int_0^1 F_x(x,0,0)dx + \int_0^1 F_z(1,0,z)dz + \int_0^1 F_y(1,y,1)dy$$

$$W_{A\longrightarrow B}(C_1) = \int_0^1 0dx + \int_0^1 0dz + \int_0^1 dy = 1$$

---

$$W_{A\longrightarrow B}(C_2) = \int_0^1 F_y(0,y,0)dy + \int_0^1 F_z(0,1,z)dz + \int_0^1 F_x(x,1,1)dx$$

$$W_{A\longrightarrow B}(C_2) = \int_0^1 0dy + \int_0^1 1dz + \int_0^1 1dx = 2$$

Repare que $\boxed{W_{A\longrightarrow B}(C_1) \neq W_{A\longrightarrow B}(C_2)}$ $\rightsquigarrow$Forção não conservativa !

Para os mesmos contornos, se a força aplicada for $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, então:

$$W_{A\longrightarrow B}(C_1) = W_{A\longrightarrow B}(C_2) = \int_0^1 xdx + \int_0^1 ydy + \int_0^1 zdz = \frac{3}{2}$$

$\boxed{W_{A\longrightarrow B}(C_1) = W_{A\longrightarrow B}(C_2)}$ $\rightsquigarrow$Forção conservativa !

✓Uma força é conservativa quando o seu trabalho não depende da trajectória seguida, mas sim, da posição inicial e final ($\oint_c \vec{F}d\vec{\ell} = 0$). Caso contrário, a força é não conservativa.

- Força conservativa : Ex. Força de gravidade, elástica
- Força não conservativa : Ex. Força de atrito

Se $\vec{F}$ é conservativa, então: $\nabla \times \vec{F} = 0$

## Trabalho realizado por força de gravidade

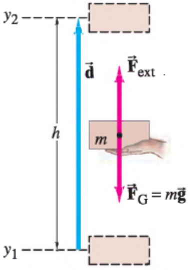



Figura 3:

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}g} &= \vec{F}_g \cdot \vec{d} = mgdcos(180^o) = -mgd \\ &= -mg(y_2 - y_1) \end{aligned} \tag{3}$$

A magnitude $\boxed{mgy}$ chama-se **energia potencial gravitacional** (U).
Assim:

$$\boxed{W_{\vec{F}g} = -(U_2 - U_1) = -\Delta U} \tag{3a}$$

Deste modo, dado que $\vec{F}_g$ é uma força conservativa, pode-se concluir que o trabalho de uma força conservativa é igual a menos variação da energia potencial.

Ainda mais, sendo a força conservativa, sucede:

$$
\begin{aligned}
dW = \vec{F}d\vec{r} &= -dU \\
\vec{F}d\vec{r} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) \\
\vec{F}d\vec{r} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) \\
\vec{F}d\vec{r} &= -\nabla U d\vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = -\nabla U}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

---

$$
\nabla \equiv \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cartesianas} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cilindricas} \\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{rsen\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi & \text{Coordenadas esféricas}
\end{cases}
$$

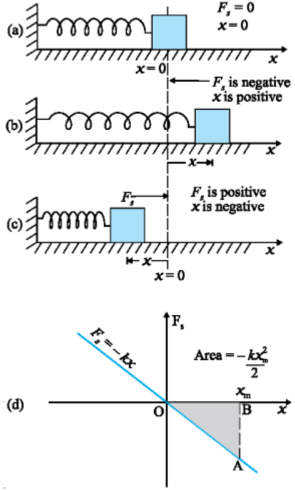



Figura 4:

$$W_{F_e} = \int_{xi}^{x_f} F_e dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad (5)$$

A quantidade $\boxed{\frac{1}{2}kx^2}$ **denomina-se energia potencial elástica**

Já sabemos qua trabalho é um dos mecanismos de transferência de energia de um sistema e, um dos resultados de se realizar trabalho sobre o sistema é a variação da sua velocidade. Assim, tendo em consideração a lei fundamental da dinâmica segue:

$$\begin{aligned} W_{A\longrightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = \int_A^B m\frac{d\vec{v}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_A^B m\vec{v}d\vec{v} \\ W_{A\longrightarrow B} &= \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \end{aligned} \tag{6}$$

A quantidade $\boxed{\frac{1}{2}mv^2}$ denomina-se **energia cinética** (de translação) $\mathrm{E_c}$, pelo que :

$$\boxed{W_{A\longrightarrow B} = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c} \quad \text{Teorema Trabalho-Energia cinética} \tag{6a}$$

Para qualquer natureza da força, o trabalho é igual a variação da energia cinética.

Define-se energia mecânica à soma das energias cinética e potencial, i.é.,

$$E_M = E_c + U(x, y, z) \tag{7}$$

Para um sistema em qua não há forças dessipativas (sistema isolado), a energia mecânica é invariante. Deste modo, se no instante inicial $\mathrm{t}$ o sistema está no estado $\mathrm{A}$ e, a energia é $\mathrm{E_{MA}}$, num outro instante $\mathrm{t} + \Delta\mathrm{t}$, o sistema estará no estado $\mathrm{B}$ com energia $\mathrm{E_{MB}}$, tal que:

$$E_{MA} = E_{MB} \tag{7a}$$

Assim,

$$\boxed{E_{CA} + U_A = E_{CB} + U_B} \tag{7b}$$

Esta expressão representa o princípio de conservação de energia mecânica

Em caso de existir forças dessipativas, o princípio de conservação de energia fica:

$$E_{CA} + U_A = E_{CB} + U_B + Q \tag{8}$$

onde Q é a energia dessipada. Se a causa dessa dessipação for a presença da força de atrito, então:

$$Q = |W_{F_a}| \tag{9}$$

A potência é uma medida da rapidez com que se realiza o trabalho. A sua unidade no SI é Watt (W), porém, é também comum encontrar expressa em **hp**[2] (hp - *horsepower*).

$$P = \lim_{\Delta t \longrightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \tag{10}$$

Como $dW = \vec{F} d\vec{r}$, então:

$$P = \vec{F}\vec{v} \tag{10a}$$

[2] $1\mathrm{hp} = 746\mathrm{W}$

## Exemplo 2

*Determine a velocidade de um carro de massa* $\mathrm{m}$ *que se move com uma potência constante* $\mathrm{P}$.

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fvcos\theta = m\frac{dv}{dt}v = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}v = mv^2\frac{dv}{dx}$$

$$\int_0^v v^2 dv = \frac{P}{m}\int_0^x dx \Rightarrow v = \left(\frac{3xP}{m}\right)^{1/3}$$

## Momento angular ($\vec{L}$)

Chama-se de momento angular de uma partícula $\vec{L}$ em relação a um ponto fixo O, localizado no eixo de rotação, ao produto vectorial entre o vector posição $\vec{r}$ e a quantidade de movimento $\vec{p}$ da mesma partícula.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{11}$$

A unidade do momento angular é $(kgm^2s^{-1})$

Sabendo que $\vec{p} = m\vec{v}$ e, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ e tendo em consideração ao produto duplo de vectores, $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$, tem-se:

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} \tag{12}$$

A magnitude $\boxed{mr^2}$ denomina-se momento de inercia (I). Assim:

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{13}$$

# Torque e Momento angular de uma partícula

Torque (momento de uma força) é o efeito rotacional que uma força pode causar sobre o corpo no qual é aplicada. Para tal, é preciso que a linha de acção dessa força não passe pelo ponto de rotação do corpo.

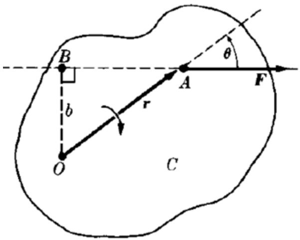



Figura 5:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{14}$$

Em caso de se aplicar várias forças sobre o corpo, o torque obedecerá o princípio de superposição.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + ... + \vec{r} \times \vec{F}_N \tag{15}$$