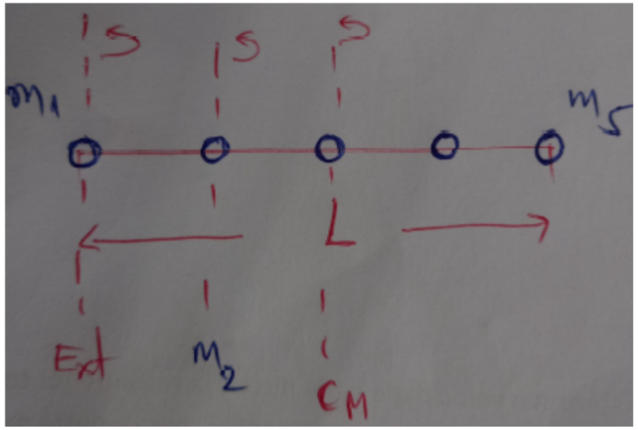
Aula Prática

Ficha # 6- Dinamica de um corpo rígido

Prob: 1;2;3;4;6;13;14;15;17 &19

Prob.1: Neste caso a distribuição de massa é discreta, e todas as massas são iguais:



a.

$$I_{extr} = \sum_{i=1}^{N} m_i (r_i)^2$$

$$I_{ext} = m_1(r_1)^2 + m_2(r_2)^2 + \cdots . + m_5(r_5)^2 =$$

$$I_{ext} = m[0^2 + r^2 + (2r)^2 + (3r)^2 + (4r)^2] =$$

$$I_{ext} = m(0 + r^2 + 4r^2 + 9r^2 + 16r^2) =$$

$$I_{ext} = 30mr^2$$

$$I_{ext} = 30 \times 1 \times (1/4)^2 = \frac{30}{16} = \frac{15}{8} = 1.875\ kg.m^2$$

b. $I_2 = m_1(r_1)^2 + m_2(r_2)^2 + \cdots . + m_5(r_5)^2 =$

$$I_2 = m[(-r)^2 + 0 + (r)^2 + (2r)^2 + (3r)^2] =$$

$$I_2 = m(r^2 + 0 + r^2 + 4r^2 + 9r^2) = 15mr^2$$

$$I_2 = \frac{I_{ext}}{2} = 0.9375\ kg.m^2$$

c. $I_{CM} = m_1(r_1)^2 + m_2(r_2)^2 + \cdots . + m_5(r_5)^2 =$

$$I_{CM} = m[(-2r)^2 + (-r)^2 + 0 + (r)^2 + (2r)^2] =$$

$$I_{CM} = 10mr^2$$

$$I_{CM} = \frac{I_{ext}}{3} = 0.625\ \ kg.m^2$$

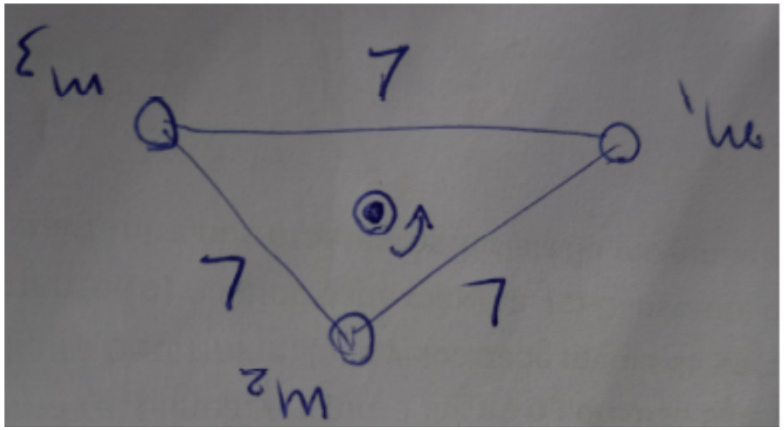
d. Verificação do Teorema de Steiner:

$$I_{extr} = I_{CM} + Md^2$$

$$I_{extr} = 10mr^2 + 5m(2r)^2 = 10mr^2 + 20mr^2$$

$$I_{extr} = 30mr^2$$

Prob. 2: Em cada vértice de triângulo equilátero localiza-se massa m.



Pretende-se calcular o momento de inércia do sistema relativamente ao eixo perpendicular ao plano e que em cada vértice do triângulo equilátero localiza-se massa m:

$a.\ \ I_{CM}$? & b. I_{vert} ?

a. $I_{CM} = m_1(r_1)^2 + m_2(r_2)^2 + m_3(r_3)^2$

Onde $r_1 = r_2 = r_3 = r = \frac{L}{2\cos 30°} = \frac{L}{\sqrt{3}}$

Logo,

$$I_{CM} = m\left[\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2\right] = 3m\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2$$

Ou

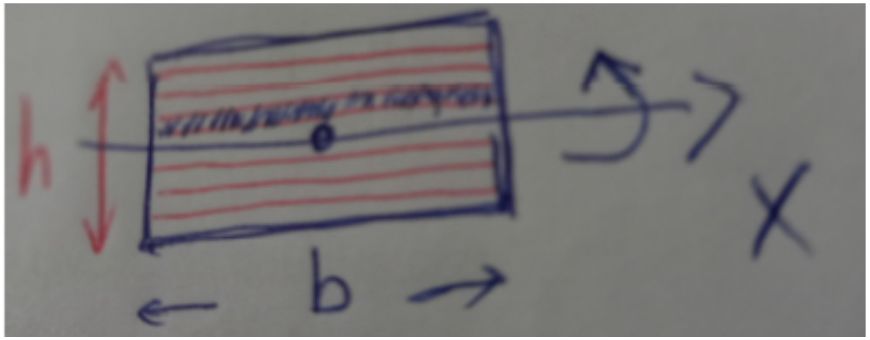
$$I_{CM} = mL^2$$

b. $I_{vert} = I_{CM} + Md^2 = I_{CM} + 3mr^2$

Ou

$$I_{vert} = mL^2 + 3m\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 = 2mL^2$$

Prob. 3: Notemos que relativamente ao eixo indicado, a rotação ocorre em torno de x e a grandeza que varia é o y:



Dividimos a placa em hastes finas, cada uma de massa dm e largura dy, localizada a distância y em relação ao eixo de rotação. Ou seja, relativamente ao eixo indicado, a rotação ocorre em torno de x e a grandeza que varia é y:

Logo, o momento de inércia da haste aleatoriamente escolhida será:

$$dI = y^2 dm$$

Para toda a placa, o momento de inércia calcula-se pela integração em função a y de todos os elementos de massa:

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dm = 2\int_{0}^{h/2} y^2 dm$$

$$I = 2\int_0^{h/2} y^2 \sigma dS = 2\int_0^{h/2} y^2 \sigma b dy$$

$$I = 2\sigma b \int_0^{h/2} y^2 dy = 2\sigma b \frac{y^3}{3} \Big/_{0}^{h/2} =$$

$$I = \frac{2\sigma b}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{2\sigma b}{3}\frac{h^3}{8} = \frac{\sigma b h^3}{12} = Mh^2/12$$

Onde M $= \sigma b h = \sigma \cdot S$

Prob. 4: O disco de baixo está sob a acção de força de força tangencial $\vec{F}$, a qual provoca um torque τ_1. Girando a determinada velocidade angular, o disco terá determinado momento angular relativamente ao eixo de simetria:

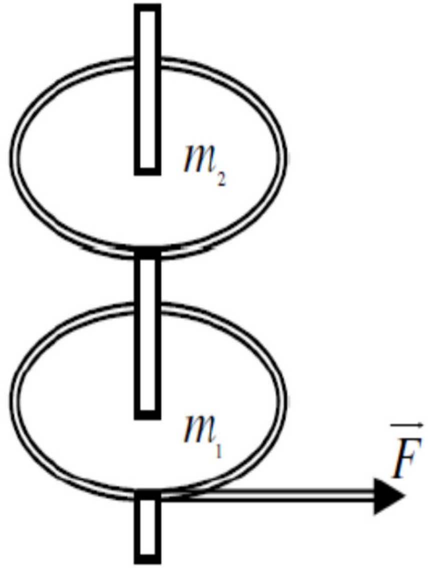
$$\tau_1 = FR_1 = \frac{dL_1}{dt}$$

Ou (para eixo principal de inércia: $L_1 = I_1\omega_1$)

$$FR_1 = I_1\frac{d\omega_1}{dt} \Rightarrow d\omega_1 = F\frac{R_1}{I_1}dt$$

$$d\omega_1 = F\frac{R_1}{I_1}dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{\omega_1} d\omega_1 = \frac{FR_1}{I_1}\int_0^t dt = \frac{FR_1}{I_1}t$$



$$\omega_1(t) = \frac{FR_1}{I_1}t$$

Ao sobrepor-se odisco 2, haverá variação do momento de inércia do sistema por causa do aumento da massa, mas a distribuição da massa continua simétrica:

$$L_{sist} = I_{sist}\omega$$

Entretanto, o momento angular total do sistema deverá ser igual ao momento angular inicial:

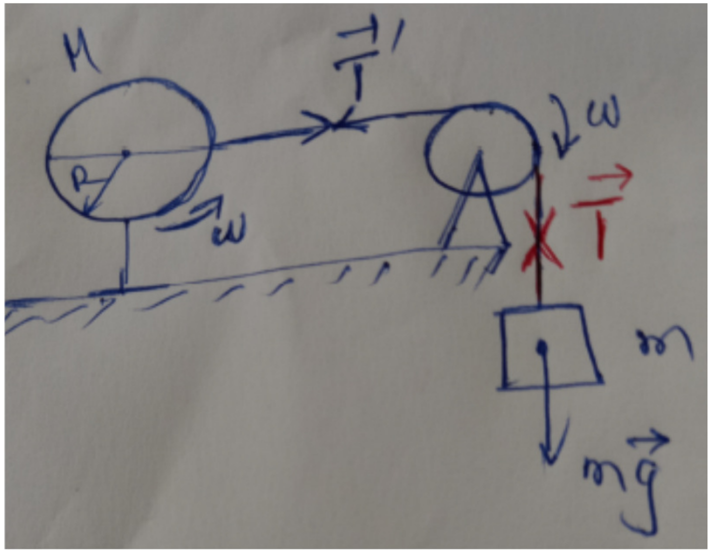
$I_{sist}\omega = I_1\omega_1 \Rightarrow$

$$\omega(t) = \frac{I_1}{I_{sist}}\omega_1 = \frac{I_1}{I_{sist}} \cdot \frac{FR_1}{I_1}t$$

$$\omega(t) = \frac{FR_1}{I_{sist}}t = \frac{2FR_1 t}{m_1(R_1)^2 + m_2(R_2)^2} = \frac{2Ft}{R(m_1+m_2)}$$

$$\omega = \frac{2 \times 28 \times 3}{0.4(7+21)} = \frac{6}{0.4} = 15\ rad/s$$

Prob.6: A esfera de massa M realiza rotação em relação ao eixo principal. O mesmo ocorre com a roldana de momento de inércia $I = I_{CM}$:



b. $$\begin{cases} m: mg - T = ma \\ rold: TR - T'R = I_{CM}\beta \Rightarrow \\ esf: T'R = I_{esf}\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} m: mg - T = ma \\ rold: T - T' = I_{CM}a/R^2 \\ esf: T' = I_{esf}a/R^2 \end{cases}$$

_+____________________

$$mg = a\left(m + \frac{I_{CM}}{R^2} + \frac{I_{esf}}{R^2}\right) \Rightarrow a = \frac{mg}{\left(m + \frac{I_{CM}}{R^2} + \frac{I_{esf}}{R^2}\right)}$$

$$a = \frac{mg}{\left(m + \frac{I_{CM}}{R^2} + \frac{2MR^2}{5R^2}\right)} =$$

$$a = \frac{mg}{\left(m + \frac{0.003}{R^2} + \frac{2M}{5}\right)} =$$

$$\frac{5}{\left(0.5 + \frac{0.003}{(10^{-1})^2} + \frac{2 \times 5}{5}\right)} = \frac{5}{0.5 + 0.3 + 2} = 1.79$$

$$a = 1.79\ m/s^2$$

Prob. 13: Tem-se $I; m; I = I_{CM}$ & $F = 2t + t^2$.

a. Modulo do torque τ?

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \sin \vartheta = r \cdot F$$

Porque $\vec{r} \perp \vec{F}$. Logo, $\tau(t) = r \cdot (2t + t^2)$

$$\tau(5) = 1.5 \times 10^{-1} \cdot (2 \cdot 5 + 5^2) = 0.15 \times 35$$

$\tau(5) = 5.25\, N.m$

b. $\tau(t) = I_{CM}\beta(t) \qquad \Rightarrow \beta(t) = \frac{r \cdot (2t+t^2)}{I_{CM}}$

$$\beta(5) = \frac{\tau(5)}{I_{CM}} = \frac{5.25}{10^{-2}} = 525\, rad/s^2$$

$c\&d.\, \tau = \frac{dL}{dt} = I_{CM}\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow d\omega = \frac{\tau}{I_{CM}} dt$

$$\omega = \frac{1}{I_{CM}} \int_0^t r \cdot (2t + t^2) dt$$

ou

$$\omega(t) = \frac{r}{I_{CM}} \int_0^t (2t + t^2)dt = \frac{r}{I_{CM}}\left(t^2 + \frac{t^3}{3}\right)$$

$$\omega(5) = \frac{1.5 \times 10^{-1}}{10^5 \times 10^{-7}}\left(25 + \frac{125}{3}\right) =$$

$$\omega(5) = 1.5 \times 10^1 \times 66.67 \approx 1000\ rad/s$$

e. $E_{c,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-2} \times (10^3)^2 = 0.5 \times 10^4$

$$E_{c,rot} = 5000\ J$$

Prob. 14: Tem-se r; m & ω.

a. Calculo de $E_{c,tot}$?

$$E_{c,tot} = E_{c,trans} + E_{c,rot}$$

$$E_{c,tot} = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Para moeda (disco): $I_{CM} = \frac{1}{2}mR^2$

Logo,

$$E_{c,tot} = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2 + \frac{1}{4}m(v_{CM}/\omega)^2 = \frac{m(v_{CM})^2}{2}(1 + 1/2)$$

$$E_{c,tot} = \frac{3m(v_{CM})^2}{4} = \frac{3 \times 5 \times 10^{-3}}{4}(6 \times 10^{-2})^2 =$$

$$E_{c,tot} = \frac{15}{4} \times 36 \times 10^{-7} = 135 \times 10^{-7} = 1.35 \times 10^{-5}\, J$$

b. Cálculo de h?

$$U = mgh = E_{c,tot} \Rightarrow h = E_{c,tot}/mg$$

$$h = \frac{1.35 \times 10^{-5}}{5 \times 10^{-3} \times 10} = 0.27 \times 10^{-3} = 2.7 \times 10^{-4}\ m$$

Prob. 15:

a.

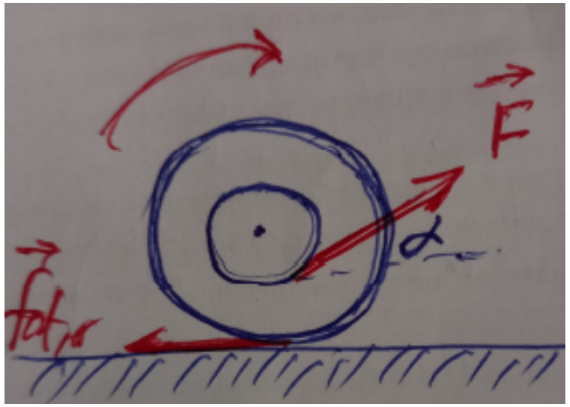
Eq. Translação em x:

$$F\cos\alpha - f_{at,rol} = ma_x$$

Eq. rotação (no sentido do movimento-horário):

$$f_{at,rol}\cdot R - F\cdot r = I_c\beta = \gamma m R^2\beta$$

$$\begin{cases} F\cos\alpha - f_{at,rol} = mR\beta \\ f_{at,rol} - F\dfrac{r}{R} = \gamma mR\beta \end{cases}$$



_+_______________________________

$$F\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right) = mR\beta(1+\gamma)$$

Ou

$$R\beta = a_x = \frac{F\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)}{m(1+\gamma)}$$

b. $W_{tot} = \Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2 =$

Onde $v_{CM} = \omega R$

$$W_{tot} = \frac{1}{2}m\omega^2(R^2 + \gamma R^2) =$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2(1 + \gamma)$$

Ou

$$W_{tot} = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2(1 + \gamma)$$

Para o mov uniformemente variado temos $v_{CM} = a_x t$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} m (a_x t)^2 (1+\gamma) =$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} m \left(\frac{F\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)}{m(1+\gamma)} t \right)^2 (1+\gamma) =$$

$$W_{tot} = \frac{1}{2} \frac{F^2 (\cos\alpha - r/R)^2 t^2}{m(1+\gamma)}$$

Prob.17: Vamos admitir que a esfera role (não esteja a escorregar)

(i)- Método de conservação da energia:

$E_{M,i} = U_p$ (para $v_i = v(0) = 0$)

$$E_{M,i} = mgh$$

Na base do plano, $E_{M,f} = E_c$(na base $U_{p,f} = 0$)

Onde

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2$$

Admitamos que a esfera seja maciça($I_{CM} = \frac{2}{5}mR^2$):

Logo, $E_c = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\left(\frac{v_{CM}}{R}\right)^2 =$

$$E_c = \frac{1}{2}m(v_{CM})^2\left[1 + \frac{2}{5}\right] = \frac{7}{10}m(v_{CM})^2$$

Comparemos as 2 energias:

$mgh = \frac{7}{10}m(v_{CM})^2 \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{10gh/7}$

Método puramente dinâmico (forças):

Sobre a esfera actuam a força de gravidade e a de atrito de rolamento (esta últma responsável pela rotação).

$$\begin{cases} transl: mg\sin\theta - F_{at,rol} = ma \\ rot: \ F_{at,rol}R = I_{CM}\beta = \frac{2}{5}mR^2\frac{a}{R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_{at,rol} = ma \\ F_{at,rol} = \frac{2}{5}ma \end{cases}$$

_+_________________________________

$$mg\sin\theta = ma\left(1+\frac{2}{5}\right) = 7ma/5$$

Ou

$$a = \frac{5}{7}g\sin\theta$$

$$a = \frac{5}{7} g \sin\theta = \frac{dv}{dt} \Rightarrow$$

$$dv = \frac{5}{7} g \sin\theta \, dt$$

Ou

$\int_0^v dv = \frac{5}{7} g \sin\theta \int_0^t dt \Rightarrow v(t) = \frac{5}{7} g \sin(\theta)\, t$

Mas no mov. unif/acelerado partindo do repouso o deslocamento é: $\mathrm{d} = \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow t = \sqrt{2d/a}$

Usando trigonometria, mostra-se que $\frac{h}{d} = \sin\theta$

$$v(t) = v(h) = at = a \cdot \sqrt{\frac{2d}{a}} = \sqrt{2ad} = \sqrt{2\frac{5}{7} g \sin\theta \, d} = \sqrt{\frac{10gh}{7}}$$

Prob. 19: