Universidade Eduardo Mondlane

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

FÍSICA - II: (*Cursos de Licenciatura em Engenharia Mecânica, Eléctrica, Electrónica, Química, Ambiente, Civil e G. Industrial*)

Regente: Luís Consolo Chea

Assistentes: Marcelino Macome; Bartolomeu Ubisse; Belarmino Matsinhe; Graça Massimbe & Valdemiro Sultane

2021 (Modo COVID) - AP # 3 - Potencial eléctrico e sua relação com o campo eléctrico

1. Como sabe, aa expressão $\int_S \vec{E}\vec{n}dS$ chama-se fluxo do vector campo eléctrico $\vec{E}$. Qual é o significado da circulação do vector $\int_l \vec{E}d\vec{l}$?

   Nas aulas teóricas você deduziu as seguintes expressões:

   $\vec{E} = -\nabla\varphi$ na forma diferencial ou, $\varphi = -\int_r \vec{E}d\vec{r}$ na forma integral

   Recorde que:

$$\nabla \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cartesianas} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cilindricas} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{r sen\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi & \text{Coordenadas esféricas} \end{cases}$$

2. Duas cargas eléctricas $Q_1 = -5\mu C$ e $Q_2 = 2\mu C$, estão colocadas nos vértices opostos de um rectângulo de $15m$ de comprimento e $5m$ de largura. Determinar o potencial eléctrico nos outros dois vértices opostos. Qual será o trabalho realizado para mover uma carga $Q_3 = 3\mu C$ ao longo da diagonal definida pelo mesmo par de vértices ?

   Neste Exercicio primeiro temos que calcular os potenciais nos vértices A e B usando a fórmula $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q}{r}$.
   Tendo φ_A e φ_B, determinamos a diferença de potencial $(\varphi_A - \varphi_B)$ pois é essa diferença que faz com

que a carga (q_3) se mova ao longo da diagonal AB, conforme a fig.1. Já no cálculo do trabalho realizado ao deslocar-se a carga, partimos do conhecimento de que o campo é conservativo e assim sendo, $W_{AB} = U_A - U_B$.

Recorrendo-se ao conceito do potencial eléctrico, $\varphi = \frac{U}{q}$, chegamos à expressão do trabalho que é:

$W_{AB} = q_3(\varphi_A - \varphi_B)$

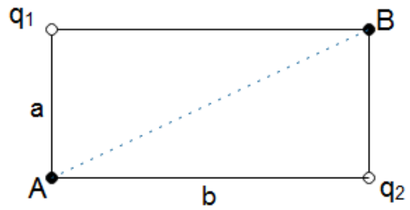

Figura 1:

3. A fig.2 mostra um arranjo rectangular de partículas carregadas no lugar com $a = 39,0cm$ e as cargas indicadas como múltiplos inteiros de $q_1 = 3.4pC$ e $q_2 = 6pC$. Sendo o potencial $\phi = 0$ no infinito, determine o potencial eléctrico no centro do rectângulo. (Sugestão: examine cuidadosamente o problema de modo a reduzir os cálculos.)

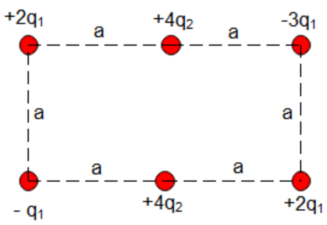

Figura 2:

Para calcularmos o potencial no centro do rectângulo usamos o princípio de superposição. Sendo η a distância entre qualquer carga que está em um dos quatro vertices até ao ponto P no centro e γ a distância entre as cargas do meio até ao ponto P, o potencial fica:

$$\varphi_P = k\left(2\frac{+2q_1}{\eta} + 2\frac{+4q_2}{\gamma} + \frac{-3q_1}{\eta} + \frac{-q_1}{\eta}\right)$$

4. Uma Esfera dieléctrica de raio R possui uma distribuição volumétrica de carga constante dada por ρ. Determine a distribuição do potencial eléctrico em função do raio r. Esboce o gráfico da variação do potencial eléctrico em função do raio r.

Nós conhecemos a relação entre potencial e campo eléctrico para a electrostática, isto é, $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Assim, para este exercício, vamos primeiro calcular o campo eléctrico dentro ($r < R$) e fora ($r > R$) da esfera usando a lei de Gauss $\oint_S \vec{E}d\vec{S} = Q/\epsilon_o$. Os elementos de área e volume para a esfera são respectivamente:

$$dS = 8\pi r dr \quad \text{e} \quad dV = 4\pi r^2 dr$$

Os resultados que obtivemos na ficha#1 para o campo eléctrico são:

$$E(r) \equiv \begin{cases} \dfrac{\rho}{3\epsilon\epsilon_o} r & r < R \\ \\ \dfrac{\rho}{3\epsilon\epsilon_o} \dfrac{R^3}{r^2} & r > R \end{cases}$$

Tendo a distribuição do campo eléctrico calcula-se já os potenciais.

$r < R$

$$\int_{\varphi(r)}^{\varphi(R)} d\varphi = -\int_r^R E dr$$

$$\varphi(r) = \varphi(R) + \frac{\rho}{6\epsilon\epsilon_o}\left(R^2 - r^2\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon\epsilon_o} - \frac{\rho r^2}{6\epsilon\epsilon_o}$$

$r > R$

$$\int_{\varphi(r)}^{\varphi(\infty)} d\varphi = -\int_r^\infty E dr$$

$$\varphi(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon\epsilon_o}\frac{1}{r}$$

Repare que é necessário determinar $\varphi(R)$. Para tal, deve-se usar o potencial fora da esfera ($r > R$).

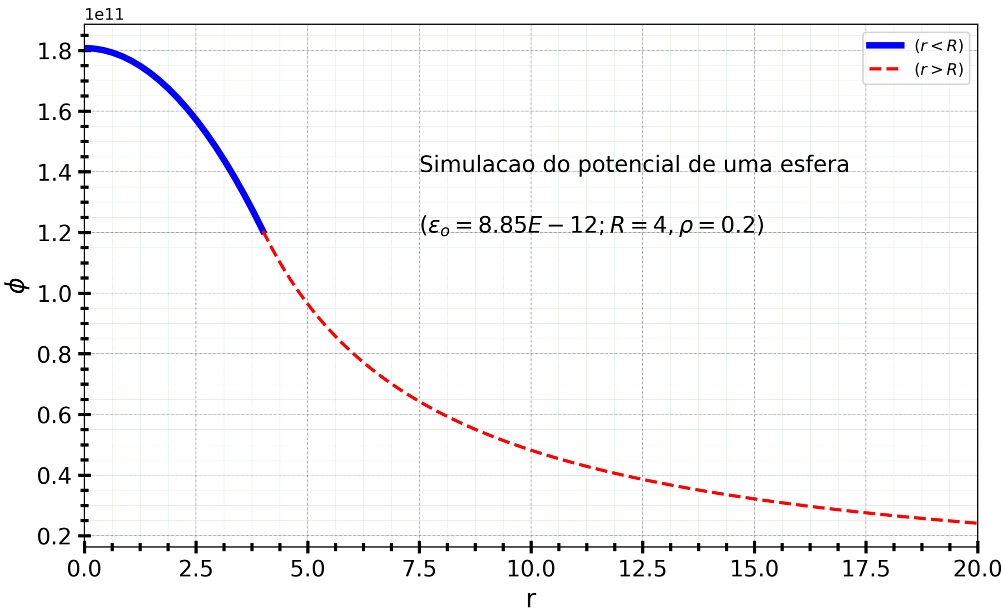

Figura 3:

5. Um cilindro dieléctrico de raio R e comprimento infinito, possui uma densidade volumétrica de carga ρ constante. Determinar a diferença de potencial entre um ponto da superfície do cilíndro e um ponto situado a uma distância d da superfície e localizado (a) no exterior do cilíndro e (b) no interior do cilíndro.

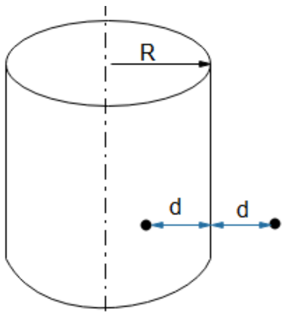

Figura 4:

$\underline{r < R}$

$$\int_0^r E2\pi h dr = \frac{1}{\epsilon\epsilon_o}\int_0^r \rho 2\pi h r dr$$

$$E(r) = \frac{\rho}{2\epsilon\epsilon_o} r$$

$$\int_R^{R-d} d\varphi = -\int_R^{R-d} E dr$$

$$\varphi(R) - \varphi(R-d) = \frac{\rho}{4\epsilon\epsilon_o}\left((R-d)^2 - R^2\right)$$

$\underline{r > R}$

$$\int_0^r E2\pi h dr = \frac{1}{\epsilon\epsilon_o}\int_0^R \rho 2\pi h r dr$$

$$E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon\epsilon_o}\frac{1}{r}$$

$$\int_R^{R+d} d\varphi = -\int_R^{R+d} E dr$$

$$\varphi(R) - \varphi(R+d) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon\epsilon_o} ln\left(\frac{R+d}{R}\right)$$

6. Duas cascas esféricas concêntricas (metálicas) de raio $R_1 < R_2$, possuem uma densidade superficial de carga σ_1 e σ_2 respectivamente. Determine a distribuição do potencial em todo o espaço do sistema.

Recordem-se que as soluções de campo eléctrico para este exercício tivemos na ficha #2.

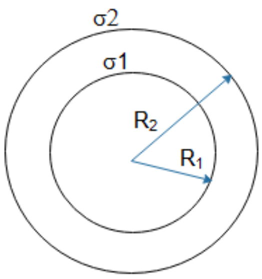

Figura 5:

$\underline{r < R1}$

$$q = 0 \quad \text{logo} \quad E = 0$$

$$\varphi(r) - \varphi(R_1) = 0 \Rightarrow \varphi = const.$$

$$\varphi(R_1) = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\epsilon\epsilon_o}$$

$\underline{R_1 < r < R_2}$

$$E(r) = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon\epsilon_o}\frac{1}{r^2}$$

$$\int_r^{R_2} d\varphi = -\int_r^{R_2} E dr$$

$$\varphi(r) = \varphi(R_2) + \frac{\sigma_1 R_2}{\epsilon\epsilon_o}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{\sigma_1 R_1^2}{\epsilon\epsilon_o}\frac{1}{r} + \frac{\sigma_2 R_2}{\epsilon\epsilon_o}$$

$\underline{r > R_2}$

$$E(r) = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon\epsilon_o}\frac{1}{r^2}$$

$$\int_r^{\infty} d\varphi = -\int_r^{\infty} E dr \Rightarrow \varphi(r) = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon\epsilon_o}\frac{1}{r}$$

Quando $r = R_2$,

$$\varphi(R_2) = \frac{\sigma_1 R_1^2 + \sigma_2 R_2^2}{\epsilon\epsilon_o}\frac{1}{R_2}$$

então volta-se a completar a solução da região $R_1 < r < R_2$.

7. Uma esfera dieléctrica possui uma carga total Q. No interior da esfera existe uma distribuição de cargas com densidade volumétrica variável dada por $\rho = Br$, onde B é uma constante e r a distância variável de cada elemento de carga até ao centro da esfera. Determine: (a) a carga Q em função de B e de R.(b) O potencial para os pontos $r < R$.(c) o potencial para os pontos $r > R$.

8. Determine as componentes do vector campo eléctrico $\vec{E}$, para os seguintes casos: (a) $\phi = r^2 cos\theta$; (b) $\phi = 3xy$.

   Usa-se $\vec{E} = \nabla\varphi$, primeiro em coordenadas cilíndricas e para alinea b) em coordenadas cartesianas.

9. O potencial eléctrico no plano xy é dado por $\phi = (2.0V/m^2)x^2 - (3.0V/m^2)y^2$.Determine o campo eléctrico no ponto P(3.0m;2.0m).

   Usa-se $\vec{E} = \nabla\varphi$, substitui-se as coordenadas do ponto em questão e depois determina-se o módulo do campo.

   Nota: `Rever os exemplos da aula teórica, especialmente os exercícios sobre o potencial criado por anel e disco carregados, num ponto ao longo do eixo de simetria.`