



## Universidade Eduardo Mondlane

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

FÍSICA - I: (*Cursos de Licenciatura em Engenharia Mecânica, Eléctrica, Electrónica, Química, Ambiente, Civil e Informática*)

**Regente:** Luís Consolo Chea

**Assistentes:** Marcelino Macome; Bartolomeu Ubisse; Belarmino Matsinhe; Graça Massimbe & Valdemiro Sultane

2021-AP # 01-Vectores e Noções básicas de integrais

---

- As coordenadas de três pontos são dadas por A(-2,2,3), B(1,0,-3) e C(1,3,-1). Considerando os vectores  $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$  e  $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$ , represente estes vectores no sistema cartesiano de coordenadas.
- Dê as propriedades dos vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , tal que sejam válidas as seguintes condições:
  - $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$  e  $|\vec{a}| + |\vec{b}| = |\vec{c}|$
  - $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
  - $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$
  - $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$  e  $a^2 + b^2 = c^2$
- No sistema dextrogiro de coordenadas cartesianas ortogonais, encontrar os seguintes produtos vectoriais:  $\vec{i} \times \vec{i}$ ;  $\vec{i} \times \vec{j}$ ;  $\vec{i} \times \vec{k}$ ;  $\vec{k} \times \vec{j}$  e  $\vec{k} \times \vec{i}$ .
- Sejam dados dois vectores  $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$  e  $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ .
  - Desenhe os referidos vectores num sistema tridimensional (dextrógiro);
  - Aplicando o produto escalar, determine o ângulo entre estes dois vectores;
  - Aplicando o produto vectorial, determine o ângulo entre estes dois vectores e compare com o resultado da alínea anterior;
  - Represente o vector  $\vec{c}$  no gráfico em a), sendo  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .
  - Determine os versores dos vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .

5. Demonstrar que quando dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  tem o mesmo módulo e entre eles formam um ângulo  $\theta$ , o módulo da soma expressa-se por  $S = 2|\vec{a}|\cos(\theta/2)$  e o módulo da diferença por  $D = 2|\vec{a}|\sin(\theta/2)$
6. Sejam dados três vectores  $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$  e  $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ .
- (a) Comprove a seguinte identidade:  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- (b) Determine por cálculo directo se há alguma diferença entre os produtos  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  e  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ;
- (c) Determine os produtos  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ,  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ ,  $(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$  e verifique se há alguma diferença.

7. Demonstre que o ângulo  $\theta_{12}$  entre os vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  da Fig.1 pode -se determinar com base da seguinte expressão:  $\cos(\theta_{12}) = \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)$ .

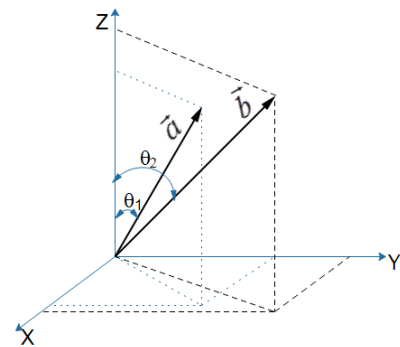


Figura 1:

8. Três vectores com magnitudes  $|\vec{a}| = 22$ ,  $|\vec{b}| = 35$  e  $|\vec{c}| = 15$  encontram-se no plano  $xy$ . O vector  $\vec{a}$  forma ângulo de  $80^\circ$  com o vector  $\vec{b}$  e este por sua vez forma  $130^\circ$  com o vector  $\vec{c}$ . Determine:
- (a) A magnitude e a direcção (em relação ao menor vector) do vector  $\vec{d}$  sendo este o dobro da resultante ( $\vec{r}$ ) dos três vectores.
- (b) A magnitude do vector  $\vec{f}$  sendo que  $\vec{f} = -2\vec{a} + 3\vec{r}$

9. Na Fig.2 estão representados três vectores. Sendo  $|\vec{a}| = 30$ ,  $|\vec{c}| = 60$ ,  $\theta = 70^\circ$  e  $\gamma = 20^\circ$ , determine o ângulo  $\beta$  e o módulo do vector  $\vec{b}$  de modo que o vector resultante seja nulo.

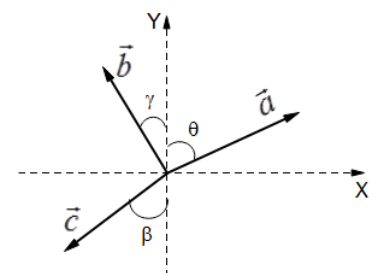


Figura 2:

10. Quando o vector  $\vec{a}$  é adicionado ao vector  $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  resulta num vector orientado ao longo da direcção positiva do eixo  $y$  e com magnitude igual à do vector  $\vec{b}$ . Determine a magnitude do vector  $\vec{a}$ .
11. Três vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  e  $\vec{c}$  que se encontram no plano  $XY$  tem módulos iguais de 50 m e formam ângulos em relação com o eixo  $Y$ , de  $30^\circ$ ,  $195^\circ$  e  $315^\circ$  respectivamente. Determine:

- (a) As magnitudes e a direcções dos vectores  $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  e  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
- (b) A magnitude e a direcção do vector  $\vec{f}$  tal que,  $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{f}) = 0$
12. Determine o versor do vector  $\vec{a}$  de módulo  $a = 20$  que é perpendicular ao vector  $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$  e que forma um ângulo de  $30^\circ$  com o vector  $\vec{c} = 4\vec{k}$ .
13. Se a superfície de um terreno tem a forma de um paralelepípedo e é definido por dois vectores  $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$  e  $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$  em unidades no SI:
- (a) Represente graficamente o terreno
- (b) Determine a área do terreno
- (c) Determine os ângulos internos do terreno
14. Achar o volume do paralelepípedo cujas arestas são representadas por  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ;  $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$  e  $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ .
15. Dois vectores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  tendo módulos iguais a 10 unidades cada e ângulos  $\theta_1 = 30^\circ$  e  $\theta_2 = 105^\circ$  são orientados conforme se ilustra na Fig.3. Sendo a sua soma representada por  $\vec{r}$ , determine:
- (a) Os componentes de  $\vec{r}$  nos eixos  $OX$  e  $OY$ ;
- (b) O módulo de  $\vec{r}$ ;
- (c) O ângulo que  $\vec{r}$  forma com o eixo  $OY$ .
16. Determine as primitivas das seguintes funções:
- (a)  $f(\theta) = \sin\theta \cos\theta$
- (b)  $f(x) = e^{-x} + 3$
- (c)  $f(t) = t^2$  sabendo que  $F(0) = 3$

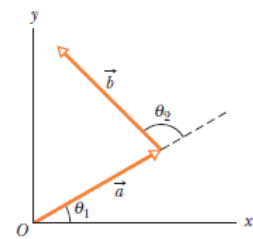


Figura 3:

17. Obtenha  $\vec{r}(t)$ , isto é, um vector  $\vec{r}$  dependente da variável  $t$ , resolvendo a seguinte expressão:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t) dt$$

sendo que:  $\frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0$  e  $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$ ;

18. Seja dada a equação  $\frac{d\xi}{dt} = b + ct$ , onde  $b$  e  $c$  são constantes arbitrárias. Sabendo que  $\xi(t=0) = \xi_0$ , determine a função  $\xi(t)$  para qualquer valor de  $t$ .
19. Obtenha a energia potencial gravitacional resolvendo a seguinte expressão:

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_{\infty}^r \gamma \frac{mM}{r^2} dr$$