Introdução à Física I
Tema 1: Ferramentas matemáticas para o estudo de Física

Noção de integral de uma função

Propriedades de integração

Tabela de integrais (Exemplos de cálculo)

Grandezas físicas escalares e vectorias)

1.1 Noção de integral de uma função

- Definidas as funções f(x) e F(x) no intevalo x $\in$ [a, b] e F(x) diferenciável em todos os pontos [a b], se para $\forall$ x $\in$ [a, b],

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, diz-se que F(x) é primitiva de f(x).

Para a função f dependente de x, define-se diferencial de f a expressão:

$$df = \frac{df}{dx}dx$$

- Para $\forall$ duas funções $f = f(x)$ e $y = y(x)$ diferenciais é válida a seguinte relação:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Exemplo: No movimento unidimensional, a velocidade $v = v(t)$ e a posição $x = x(t)$. Entre as duas variáveis podemos escrever:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \; a = v\frac{dv}{dx}$$

Por definição, $\frac{dv}{dt} = aceleração$ e $\frac{dx}{dt} = velocidade$

Integral como operação inversa da diferenciação

- Integrar uma função f(x) é realizar a operação inversa da diferenciação (derivada) de F(x), ou seja, procurar uma função F(x), tal que a sua derivada é igual a função a integrar.

Procuremos as primitivas das seguintes funções:

$f(x) = \cos x$ e $f(x) = x^2$

$$\frac{dF(x)}{dx} = \cos x \quad \Rightarrow F(x) = \sin x$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$$

Relação diferencial entre primitiva e sua função

- Para a função F(x), primitiva de f(x) é válida a relação diferencial:

$$dF(x) = f(x)dx$$

Se F(x) é primitiva da função f(x), para ∀ constante C, a soma desta constante com F(x), é também primitiva de f(x);

∀ Primitiva de f(x), chama-se de integral indefinida de f(x), e representa-se por

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Integral como soma especial

- Espectro discreto (A_i) : Existindo várias entiadades semelhantes, para calcular o número total dessas entidades (por exemplo áreas), procede-se a soma $\mathrm{A} = \sum A_i$ ou $\mathrm{A} = \sum_{i=0}^{N} A_i$;

A_i- área infinitesimal

- Espectro contínuo (*dA*): para função contínua *f(x)*num determinado segmento [a,b], $dA = f(x)dx$ e $A = \int f(x)dx$
- dA- área elementar

Integral definida

- Nalguns casos são colocadas as condições inicias do problema de tal maneira que a const C fica conhecida. Nestes casos utiliza-se a integral definida (fórmula Newton-Leibz):

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)/{}_a^b$$

Nota: veja exemplos adiante (exemplos 5, 6 e 7)!

Propriedades de integração

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \; ; k = const$

2. $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

3. $dx^n = nx^{n-1}dx$

4. $d(x \pm k) = dx \; ; k = const$

5. $d(kx) = kdx \qquad \Rightarrow dx = \frac{1}{k}d(kx)$

Tabela de integrais básicas

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C;$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

Tabela de integrais básicas_cont

7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{Ctan}|x| + C$

9. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arc\tan x + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc \sin x + C$

11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+q}} dx = ln\left|x + \sqrt{x^2 + q}\right| + C, q = const$

Exemplos de cálculo de integrais

Ex1: $\int (x^2 + 3x)dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + C$

Ex2: $\int \frac{1}{x+5} dx = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = ln|x + 5| + C$

Ex3: $\int \cos 3x \, dx = \int \cos(3x) \frac{1}{3} d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x + C$

Ex4: $\int \frac{2x}{x^2+4} dx = \int \frac{1}{x^2+4} d(x^2) = ln|x^2 + 4| + C$

Exemplos de aplicação de integrais

- Ex5: Uma partícula move-se ao longo de uma linha recta com aceleração que varia com o tempo de acordo com a expressão $a = 4 - t^2$, onde *a* é a aceleração expressa em *m/s*^{2} e *t*, o tempo expresso em *segundos*. Obtenha as expressões para a velocidade e a posição, sabendo que no instante *t = 3*, a velocidade é *v = 2 m/s* e *x = 9 m*.

Resp: $v(t) = -\frac{x^3}{3} + 4t - 1\, m/s$ e

$$x(t) = -\frac{t^4}{12} + 2t^2 - t + \frac{3}{4} \;\; m$$

- Verificação: $a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4 - t^2$

Análise da equação: Existem 2 variáveis; então podemos fazer a separação dessas variáveis:

$$dv = (4 - t^2)dt$$

Integramos a equação ambos os lados (integral definida):

$$\int_2^v dv = \int_3^t (4 - t^2)dt$$

$$v - 2 = \left(4t - \frac{t^3}{3}\right) - \left(4 \times 3 - \frac{27}{3}\right) =$$

$v(t) = 4t - \frac{t^3}{3} - 1$ (m/s)

- A posição $x(t)$, calcula-sea partir da definição da velocidade:

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = \left(4t - \frac{t^3}{3} - 1\right) dt$ ou integrando,

$x - 9 = \int_3^t \left(4t - \frac{t^3}{3} - 1\right) dt \Rightarrow x(t) = 9 + \left(4\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} - t\right) - \left(2 \times 9 - \frac{81}{12} - 3\right)$

- Poderiamos ter usado integral indefinida:

$$dv = (4 - t^2)dt \Rightarrow$$

$$\int dv = \int (4 - t^2)dt$$

ou

$$v(t) = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

Calcula-se C substituído o valor de v no instante inicial:

$$2 = 4 \times 3 - \frac{27}{3} + C \Rightarrow C = -1$$

Finalmente substitui-se C na equação:

$$v(t) = 4t - \frac{t^3}{3} - 1$$

Mesmo procedimento pode ser feito para a posição.

- Ex 6: A aceleração de um corpo em movimento rectilíneo é dada por $a = -kv$, onde $k = constante$. Para o instante $t = 0$ s, $v = v_0$. Obtenha a expressão da velocidade em função do tempo.

Resp: $v(t) = v_0 e^{-kt}$

Ex 7: Um corpo move-se ao longo de uma recta. A sua aceleração é dada no S.I. por $a = -2x$, onde x está em metros e a em m/s^2.Obter a relação entre a velocidade e distância sabendo que para $x = 0$, a velocidade é $v = 4\ m/s$.

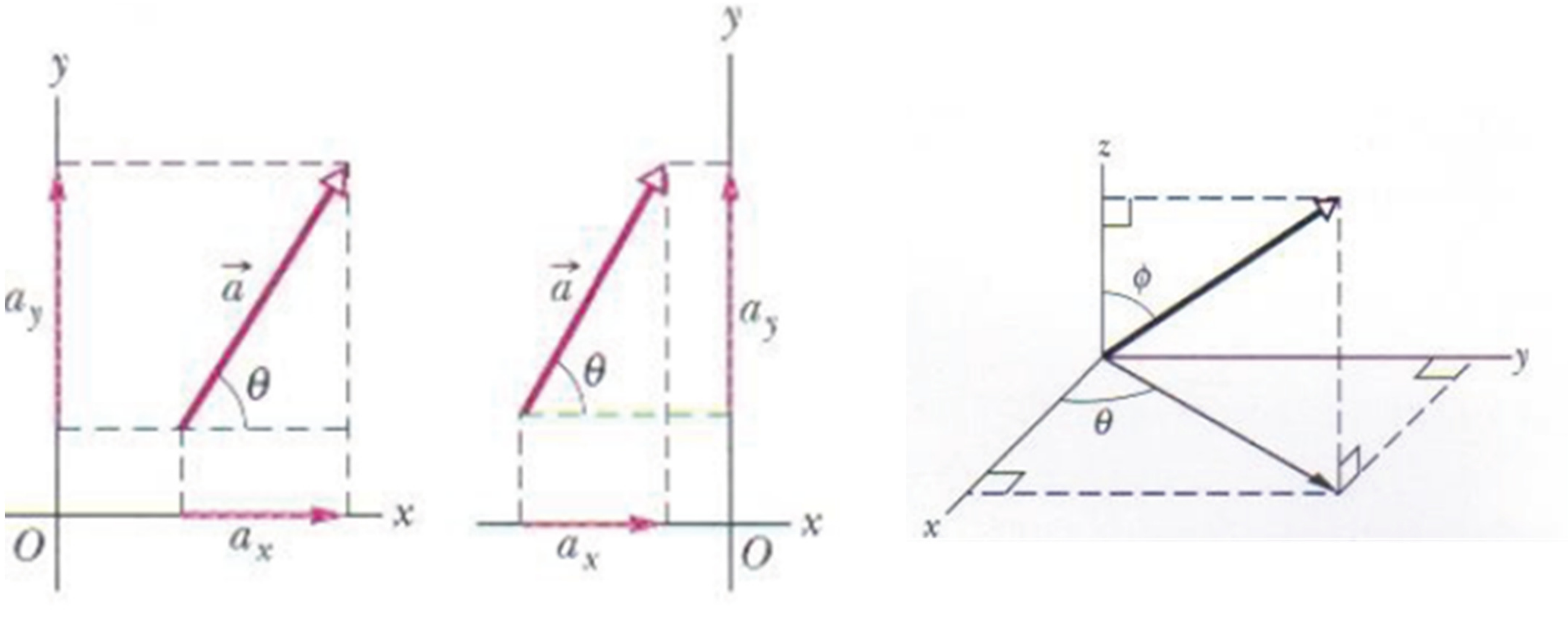
Resp: $v(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$

1.2 Grandezas físicas escalares e vectoriais

- Escalares: grandezas cuja informação fica completa quando dado o valor numérico e a respectiva unidade (massa, tempo, distância percorrida, área, volume, pressão, etc).
- Vectoriais: grandezas cuja informação fica completa, quando para além do valor numérico e unidade, é indicada a direcção e sentido (velocidade, força, quantidade de movimento, etc). Vectores caracterizam-se por ter origem e extremidade, módulo, direcção e sentido.

Componentes de um vector

- Todo o vector pode ser projectado nos eixos de coordenadas de modo a encontrar as suas componentes x, y e z [no plano (X,Y)ou no espaço tri-dimensional(X,Y,Z)].



(a) (b)

- As componentes do vector são expressas, respectivamente, no plano e no espaço do seguinte modo:

$a_x = |\vec{a}| \cos \vartheta$; $a_y = |\vec{a}| \sin \vartheta$

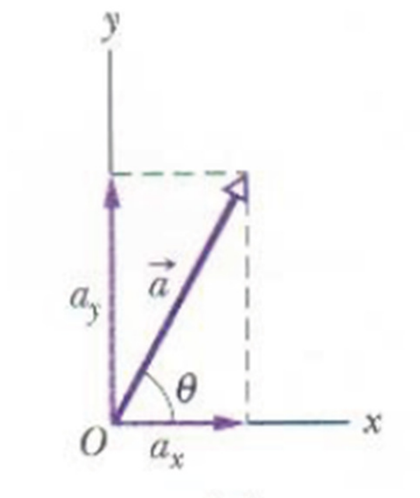
Ou

$$\begin{cases} a_x = |\vec{a}| \cos \vartheta \sin \varphi \\ a_y = |\vec{a}| \sin \vartheta \sin \varphi \\ a_z = \cos \varphi \end{cases}$$

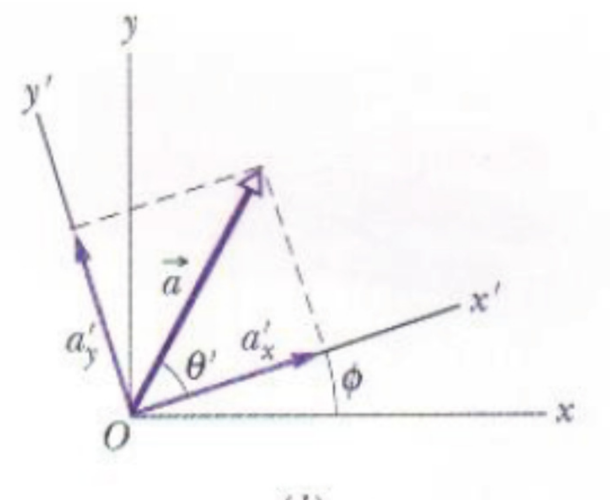
Conhecidas as componentes, o módulo determina-se por $|\vec{a}| = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y + a^2{}_z}$; $a_z = 0$ no plano

- Importa referir que para um mesmo vector, mudando o sistema de referência, variam os valores das componntes, mas o módulo do vector mantêm-se igual em ambos os sistemas (veja o caso do plano, para simplificar a complexidade):

- $|\vec{a}| = \sqrt{a^2{}_x + a^2{}_y} = \sqrt{a^{2\prime}{}_x + a^{2\prime}{}_y}.$



(a)

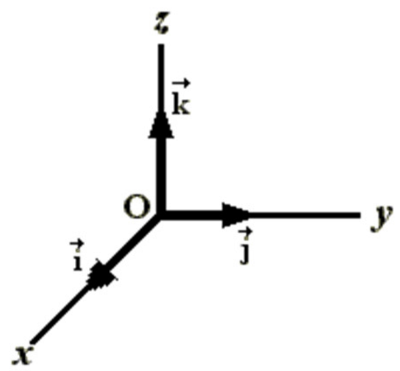


(b)

Vectores unitários (versores)

- Qualquer vector pode ser expresso através de suas componentes e vectores unitários ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ e $\vec{k}$):

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\overrightarrow{k}$$



Para qualquer vector podemos expressar o vector unitário (versor) relacionado com aquele vector:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Operações sobre vectores

- Soma de vectores (método analítico e geométrico)
- Multiplicação de vector por escalar
- Multiplição de vector por vector (produto escalar e produto vectorial)

Soma de vectores: dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, chama-se soma a um terceiro vector $\vec{c}$ tal que,

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

Método analítico

- Dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de forma analítica, o vector soma $\vec{c}$ será dado por:

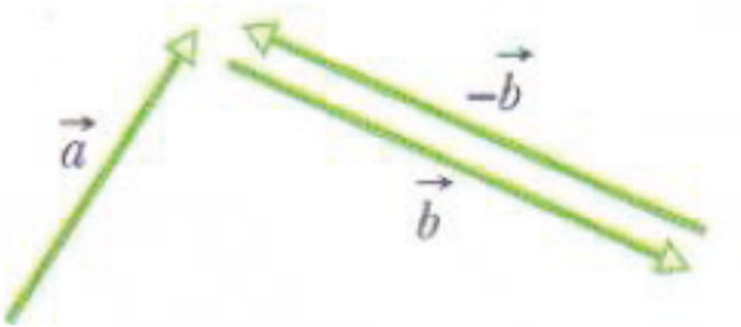
$$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{\imath} + \left(a_y + b_y\right)\vec{\jmath} + (a_z + b_z)\vec{k}$$

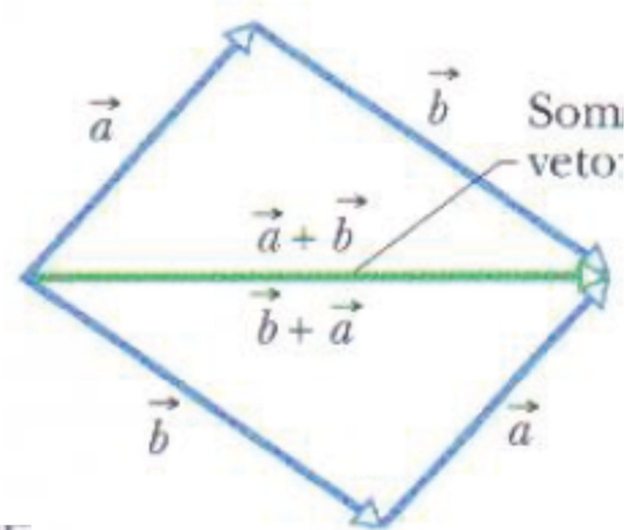
Sendo a diferença de vectores a soma de um vector com o oposto do segundo, o vector $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\vec{\imath} + \left(a_y - b_y\right)\vec{\jmath} + (a_z - b_z)\vec{k}$

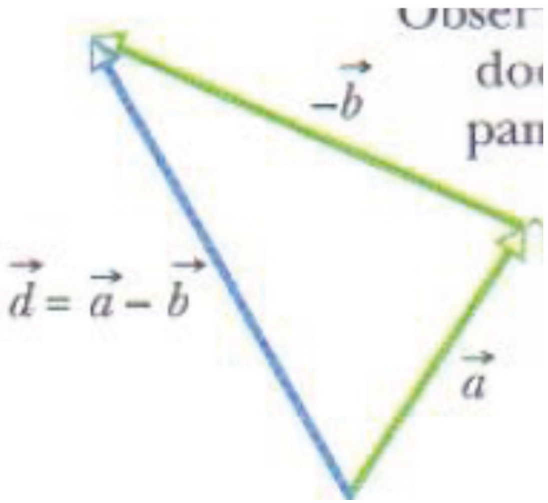
O módulo do vector resultante é:

$$|\vec{r}| = \sqrt{(a_x \pm b_x)^2 + \left(a_y \pm b_y\right)^2 + (a_z \pm b_z)^2}$$

Método geométrico







Multiplicação de vector por escalar

- Multiplicando vector com escalar ($\vec{a}$Z) , obtem-se um vector ($\vec{b}$)paralelo ao vector originário e que obedece as seguintes condições:

$|\vec{b}| > |\vec{a}|$ se $|Z| > 1$;

$|\vec{b}| < |\vec{a}|$ se $|Z| < 1$;

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem sentidos opostos se Z < 0

$$\vec{a}Z = (\mathrm{Z}a_x)\vec{i} + (\mathrm{Z}a_y)\vec{j} + (\mathrm{Z}a_z)\vec{k}$$

Multiplicação de vector por vector_produto escalar

- O produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})$, é um número definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos\vartheta; \qquad \vartheta = \angle\left(\vec{a}\ \&\vec{b}\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z;$$

Comparando as duas expressões, conclui-se que:

$$\cos\vartheta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

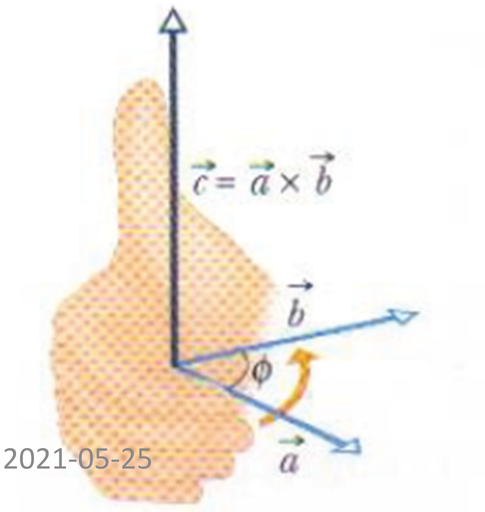
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, condição de perpendicularidade

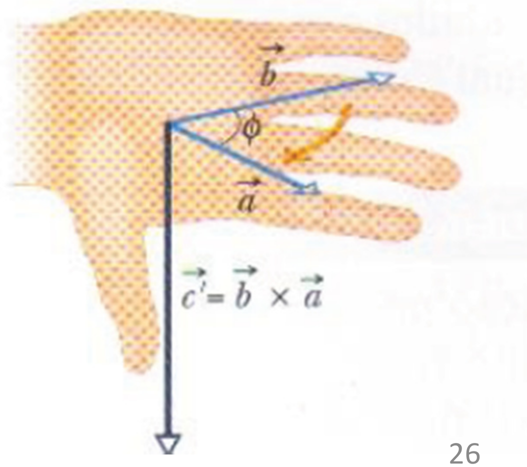
Multiplicação de vector por vector_produto escalar

- O produto vectorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b})$, é um terceiro vector $\vec{c}$ definido por:

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\vartheta \cdot \vec{n}$; onde $\vec{n}$ -vector unitário $\perp$ ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$; ϑ – é o menor ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$



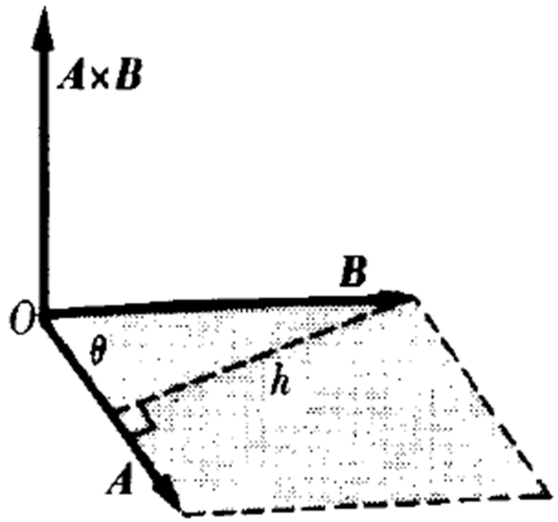


$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ – condição de paralelismo

Analiticamente, o produto vectorial corresponde à:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$$ ou

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



Geometricamente, o módulo do produto vectorial equivale à área do paralelogramo formado na base dos dois vectores.

Produto misto

- O produto misto (escalar-vectorial) é um escalar cujo módulo equivale ao volume do paralelepípedo formado na base dos três vectores:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$$

$\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$- o módulo representa a área da base S;

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b} \times \vec{c}\right| \cdot \cos\gamma;$$

$$|\vec{a}| \cdot \cos\gamma = h \quad \Rightarrow \left|\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right| = h.S = V$$

Produto vectorial duplo

- $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$