Universidade Eduardo Mondlane

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

FÍSICA - I: (*Cursos de Licenciatura em Engenharia Mecânica, Eléctrica, Electrônica, Química, Ambiente, Civil, G. Industrial e Informática*)

Regente: Félix Tomo

Assistentes: Bartolomeu Ubisse; Belarmino Matsinhe; Esménio Macassa; Fernando Mucomole; Graça Massimbe & Valdemiro Sultane

`2022-AP # 01-Vectores e Noções básicas de integrais`

---

1. As coordenadas de três pontos são dadas por A(-2,2,3), B(1,0,-3) e C(1,3,-1). Considerando os vectores $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, represente estes vectores no sistema cartesiano de coordenadas.

2. Dê as propriedades dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tal que sejam válidas as seguintes condições:

   (a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{c}|$ e $|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}|$

   (b) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

   (c) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$

   (d) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$

3. No sistema dextrogiro de coordenadas cartesianas ortogonais, encontrar os seguintes produtos vectoriais: $\vec{i} \times \vec{i}$; $\vec{i} \times \vec{j}$; $\vec{i} \times \vec{k}$; $\vec{k} \times \vec{j}$ e $\vec{k} \times \vec{i}$.

4. Sejam dados dois vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

   (a) Desenhe os referidos vectores num sistema tridimensional (dextrógiro);

   (b) Aplicando o produto escalar, determine o ângulo entre estes dois vectores;

   (c) Aplicando o produto vectorial, determine o ângulo entre estes dois vectores e compare com o resultado da alínea anterior;

   (d) Represente o vector $\vec{c}$ no gráfico em a), sendo $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

   (e) Determine os versores dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

5. Demonstrar que quando dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem o mesmo módulo e entre eles formam um ângulo θ , o módulo da soma expressa-se por $S = 2|\vec{a}|cos(\theta/2)$ e o módulo da diferença por $D = 2|\vec{a}|sin(\theta/2)$

6. Sejam dados três vectores $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$ e $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

   (a) Comprove a seguinte indentidade: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$

   (b) Determine por cálculo directo se há alguma diferença entre os produtos $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ e $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$;

   (c) Determine os produtos $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$,$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ e verifique se há alguma diferença.

7. Demonstre que o ângulo θ_{12} entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig.1 pode-se determinar com base na seguinte expressão: $cos(\theta_{12}) = sin(\theta_1)sin(\theta_2)cos\left(\phi_1 - \phi_2\right) + cos(\theta_1)cos(\theta_2)$.

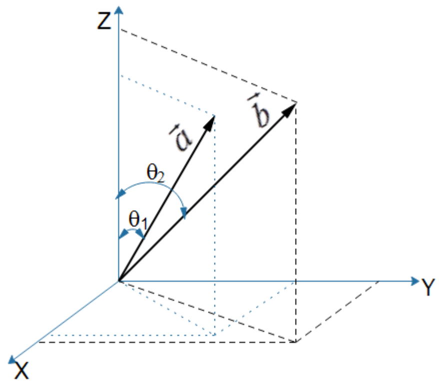

Figura 1:

8. Três vectores com magnitudes $|\vec{a}| = 22$, $\left|\vec{b}\right| = 35$ e $|\vec{c}| = 15$ encontram-se no plano xy. O vector $\vec{a}$ forma ângulo de 80^o com o vector $\vec{b}$ e este por sua vez forma 130^o com o vector $\vec{c}$. Determine:

   (a) A magnitude e a direcção (em relação ao menor vector) do vector $\vec{d}$ sendo este o doubro da resultante ($\vec{r}$) dos três vectores.

   (b) A magnitude do vector $\vec{f}$ sendo que $\vec{f} = -2\vec{a} + 3\vec{r}$

9. Na Fig.2 estão representados três vectores. Sendo $|\vec{a}| = 30$, $|\vec{c}| = 60$, $\theta = 70^o$ e $\gamma = 20^o$, determine o ângulo β e o módulo do vector $\vec{b}$ de modo que o vector resultante seja nulo.

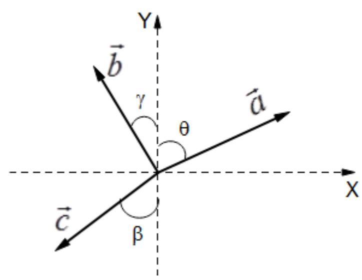

Figura 2:

10. Quando o vector $\vec{a}$ é adicionado ao vector $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ resulta num vector orientado ao longo da direcção positiva do eixo y e com magnitude igual à do vector $\vec{b}$. Determine a magnitude do vector $\vec{a}$.

11. Três vectores $\vec{a}$,$\vec{b}$ e $\vec{c}$ que se encotram no plano XY tem módulos iguais de 50 m e formam ângulos em relação com o eixo Y, de 30^o, 195^o e 315^o respectivamente. Determine:

(a) As magnitudes e a direcções dos vectores $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ e $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(b) A magnitude e a direção do vector $\vec{f}$ tal que, $(\vec{a}+\vec{b})-(\vec{c}+\vec{f})=0$

12. Determine o versor do vector $\vec{a}$ de módulo $a=20$ que é perpendicular ao vector $\vec{b}=2\vec{i}-4\vec{j}$ e que forma um ângulo de 30^o com o vector $\vec{c}=4\vec{k}$.

13. Se a superfície de um terreno tem a forma de um paralelopípedo e é definido por dois vectores $\vec{a}=5\vec{i}-3\vec{j}+3\vec{k}$ e $\vec{b}=6\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ em unidades no SI:

    (a) Represente graficamente o terreno

    (b) Determine a área do terreno

    (c) Determine os ângulos internos do terreno

14. Achar o volume do paralelepípedo cujas arestas são representadas por $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$; $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{c}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

15. Dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tendo módulos iguais a 10 unidades cada e ângulos $\theta_1=30^o$ e $\theta_2=105^o$ são orientados conforme se ilustra na Fig.3. Sendo a sua soma representada por $\vec{r}$, determine:

    (a) As componentes de $\vec{r}$ nos eixos OX e OY;

    (b) O módulo de $\vec{r}$;

    (c) O ângulo que $\vec{r}$ forma com o eixo OY.

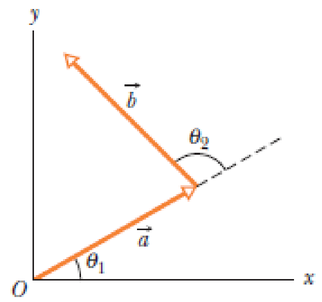

Figura 3:

16. Determine as primitivas das seguintes funções:

    (a) $f(\theta)=sen\theta cos\theta$

    (b) $f(x)=e^{-x}+3$

    (c) $f(t)=t^2$ sabendo que $F(0)=3$

17. Obtenha $\vec{r}(t)$, isto é, um vector $\vec{r}$ dependente da variável t, resolvendo a seguinte expressão:

$$\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} d\vec{r}=\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{a}t)\,dt$$

sendo que: $\frac{d\vec{v}_0}{dt}=0$ e $\frac{d\vec{a}}{dt}=0$;

18. Seja dada a equação $\dfrac{d\xi}{dt}=b+ct$, onde b e c são constantes arbitrárias. Sabendo que $\xi(t=0)=\xi_o$, determine a função $\xi(t)$ para qualquer valor de t.

19. Obtenha a energia potencial gravitacional resolvendo a seguinte expressão:

$$\int_0^{E_p} dE_p=\int_{\infty}^{r}\gamma\frac{mM}{r^2}\,dr$$