Tema#13:Ondas electromagnéticas no Vazio [1]

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências - Departamento de Física

(Aulas preparadas para estudantes da Engenharia Informática- UEM)

03/06/2022

[1] Alguns exemplos usados neste material foram usados pelo Prof. Luis Chea nas aulas leccionadas na FENG-UEM no período de 2019 a 2021.

Conteúdos

Ondas electromagnéticas no vazio

Embora a teoria ondulatória da luz já tinha sido proposta pelo Christiaan Huygens (1629-1695) e ainda coraborada por outros como Thomas Young, Augustin Fresnel e Jean Foucault, nenhum desses tinha evidenciado o carácter electromagnético quanto o fez o James Clerk Maxwell, em 1864.

Maxwell, com base em cálculos electroagnéticos, provou que a luz é uma onda electromagnética que se propaga a uma velocidade $c = (1/(\epsilon_0 \mu_0))^{0.5} \approx 3 \times 10^8 m/s$.

Os resultados de Maxwell foram confirmados e postos em prática pela primeira vez por Heinrich Hertz[2] em 1888.

Hoje em dia, usamos as ondas electromagneticas para vários fins, por exemplo, comunicação, diagnósticos de doenças, investigação e muito mais. Assim, o estudo das ondas electromagneticas é de grande interesse, pelo que, vamos inciar nesta aula.

[2] Hertz desenvolveu experimentos que confirmaram a existência das ondas eletromagnéticas no espectro do RF

Consideremos no vácuo, onde não temos cargas eléctrica e ném correntes ($\rho = 0$ e $j = 0$). Deste modo, as eqs de Maxwell na forma diferencial ficam:

$$div\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

$$div\vec{B} = 0 \qquad (2)$$

$$rot\vec{B} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (3)$$

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

Achando o rotacional (rot) da Eq.4, obtém-se:

$$rotrot\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}rot\vec{B} \qquad (5)$$

Dado que $rotrot\vec{a} = grad(div\vec{a}) - \nabla^2\vec{a}$ ($\nabla^2 \equiv \Delta$ - Operador laplaciano) e tendo em consideração as Eqs.(1 e 3), obtém-se:

$$graddiv\vec{E} - \nabla^2\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \boxed{\nabla^2\vec{E} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0} \qquad (6)$$

Ondas electromagnéticas no vazio

Aplicando o mesmo procedimento para a Eq.3 e tendo em consideração as Eqs.(4 e 2) obtém-se:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0} \tag{7}$$

As Eqs.(6 e 7) são equações de onda para os campos eléctrico e magnético, respecivamente. De notar-se que os respectivos vectores de campo não são independentes uma da outra, vista a sua dedução.

Assim, mesmo admitindo a ausência de cargas e correntes eléctricas, consiguimos ter vectores de campo dependentes do espaço e do tempo.

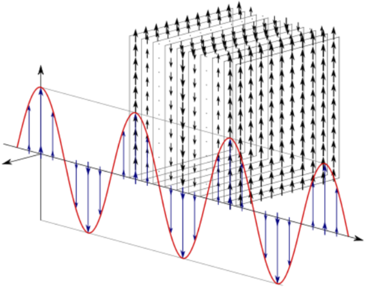
O vectores do campo existem sob forma de onda electromagnética que se propaga no espaço com velocidade igual à velocidade da luz $(c = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}})$

Ondas electromagnéticas no vazio

Onda plana e propriedades das ondas electromagnéticas

A solução da equação de onda electromagnética é uma onda electromagnética.

Dependendo da fonte e das propriedades do meio de propagação, uma onda electromagntíca pode assumir várias formas, como por exemplo, esférica, cilíndrica, plana, e mais. Porém, para esta sessão vamos considerar a onda plana.



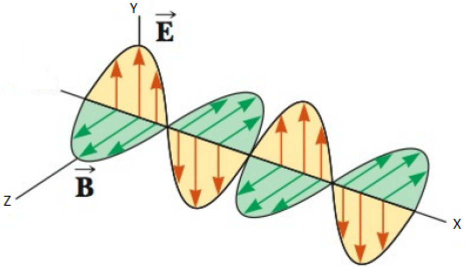


Figura 1: Onda plana

Ondas electromagnéticas no vazio

Consideremos uma onda harmonica que se propaga no sentido do vector número de onda $\vec{k}$. A função da onda para o campo eléctrico é:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \tag{8}$$

onde $\vec{E}_0$ é amplitude do campo eléctrico (um vector real e contante).

Considerando a lei de Gauss para $div\vec{E} = 0$, sucede:

$$\begin{aligned} div\vec{E} &= i\left[k_x E_{0,x} + k_y E_{0,y} + k_z E_{0,z}\right] e^{i[(k_x x + k_y y + k_z z)-\omega t]} = 0 \\ div\vec{E} &= i\vec{k}\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} = 0 \\ div\vec{E} &= i\vec{k}\vec{E} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Deste modo, verifica-se que $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$

O campo eléctrico oscila num plano perpendicular à direcção de propagação da onda

Ondas electromagnéticas no vazio

Quando ao campo magnético, visto que $div\vec{B} = 0$, sucede que este também por sua vez fica

$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k}$

pelo que, o campo magnético também oscila num plano perpendicular à direcção de propagação da onda.

Quanto à relação entre os dois vectores do campo ($\vec{E}$ e $\vec{B}$), podemos proceder partindo da lei de Faraday: $rot\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$rot\vec{E} = i\left[\left(k_y E_{0,z} - k_z E_{0,y}\right)\vec{i} + \left(k_z E_{0,x} - k_x E_{0,z}\right)\vec{j} + \left(k_x E_{0,y} - k_y E_{0,x}\right)\vec{k}\right] e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \tag{10}$$

Repare que,

$$\vec{k} \times \vec{E} = \left[\left(k_y E_{0,z} - k_z E_{0,y}\right)\vec{i} + \left(k_z E_{0,x} - k_x E_{0,z}\right)\vec{j} + \left(k_x E_{0,y} - k_y E_{0,x}\right)\vec{k}\right] e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \tag{11}$$

Assim: $\boxed{rot\vec{E} = i\vec{k} \times \vec{E}}$

Ondas electromagnéticas no vazio

Repare também que,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right)$$
$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} \tag{12}$$

Então:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{k}{\omega}\hat{k} \times \vec{E} \tag{13}$$

Dado que $k = \dfrac{\omega}{c}$, chegamos a conclusão que

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E}} \tag{13a}$$

Com este resultado (Eq.13a), confirmamos que os vectores do campoelectromagnético não só são perpendiculares à direcção de propagação da onda, como também são perpendiculares entre si ($\vec{E} \perp \vec{B}$).

Ondas electromagnéticas no vazio

Um outra observação que decorre da Eq.13a é

$$\vec{B} = \frac{1}{c}\hat{k} \times \vec{E} \Rightarrow B = \frac{E}{c}$$

Isto é, em uma onda electromagnética, o campo eléctrico é muito mais intenso do que o campo magnético.

Uma onda electromagnética para além de impulso, transporta consigo uma energia. Assim, faz todo o sentido sabermos como é que se determina tal energia.

Porém, dado que iremos usar as eqs. de Maxwell na forma diferencial, primeiro temos que estar em acordo que o produto $\vec{j} \cdot \vec{E}$ refere-se a energia por unidade de volume e por unidade de tempo, i.é, a potência por unidade de volume (W/m^3).

$$\vec{j}\vec{E} = \rho\vec{v}\vec{E} \Rightarrow \vec{j}\vec{E} = \frac{\vec{v}q\vec{E}}{V} \Rightarrow \vec{j}\vec{E} = \frac{\vec{F}\vec{v}}{V} \Rightarrow \vec{j}\vec{E} = \frac{P}{V} \left[\frac{W}{m^3}\right]$$

Assim, confirmado o facto de que $\vec{j}\vec{E} = P/V$, podemos multiplicar a equação relativa a lei de Ampere por $\vec{E}$

$$\vec{j}\vec{E} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}rot\vec{B} - \epsilon_0\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{14}$$

Recorrendo-se ao facto matemático de que

$$div\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)=\vec{B}rot\vec{E}-\vec{E}rot\vec{B}$$

e substituindo $\vec{E}rot\vec{B}$ na Eq.14 fica

$$\vec{j}\vec{E}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}rot\vec{E}-\frac{1}{\mu_0}div\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)-\epsilon_0\vec{E}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \tag{14a}$$

Sabendo que $rot\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ e o facto de que $\vec{a}\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\vec{a}^2}{\partial t}$, sucede

$$\begin{aligned}\vec{j}\vec{E}&=-\frac{1}{2\mu_0}\frac{\partial\vec{B}^2}{\partial t}-\frac{\epsilon_0}{2}\frac{\partial\vec{E}^2}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0}div\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\\ \vec{j}\vec{E}&=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}+\frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2\right)-\frac{1}{\mu_0}div\left(\vec{E}\times\vec{B}\right)\end{aligned} \tag{14b}$$

A Eq.14b pode ser reescrita como

$$\vec{j}\vec{E} = -\frac{\partial u_{el}}{\partial t} - div\vec{S} \tag{15}$$

onde, u_{el} é a densidade volumétrica de energia electromagnética e $\vec{S}$ é vector de Poynting e é a quantidade de energia que atravessa uma unidade de área por unidade de tempo.

$$u_{el} = \frac{\vec{B}^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2 \tag{16a}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) \tag{16b}$$

A potência total é

$$P = -\int_V \frac{\partial u_{el}}{\partial t}dV - \int_V div\vec{S}dV \tag{17}$$

Recorrendo-se ao teorema de Gauss, a Eq.17 fica:

$$P = -\int_V \frac{\partial u_{el}}{\partial t} dV - \oint_A \vec{S} d\vec{A} \tag{18}$$

As Eqs.15 e 18 referem-se ao teorema de Poynting.