Tema#7:Corrente contínua e resistência eléctrica[1]

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências - Departamento de Física

(Aulas preparadas para estudantes da Engenharia Informática- UEM)

09/05/2022

[1]Alguns exemplos usados neste material foram usados pelo Prof. Luis Chea nas aulas leccionadas na FENG-UEM no período de 2019 a 2021.

Conteúdos

Corrente eléctrica contínua

✓Corrente eléctrica é a quantidade de cargas que passam (movimento ordenado) por uma secção transversal de um condutor por unidade de tempo.
✓Quando o movimento ordenado de portadores de carga é invariante com o decorrer do tempo, a corrente eléctrica é contínua (dc ou cc)

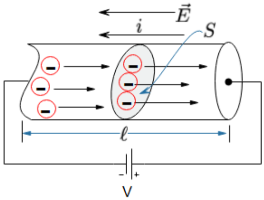


Figura 1: fio condutor

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{1}$$

A unidade da corrente eléctrica no SI é Ampere (A)

- O movimento de deriva dos portadores de cargas lívres é devido a existência de força eléctrica ($q\vec{E}$).

Para o caso em que se pretende estudar o fluxo de cargas eléctricas através de uma secção recta de um condutor em certo ponto do circuíto, usa-se o conceito de densidade de corrente eléctrica ($\vec{j}$). Para cada elemento de secção recta

$$J = \frac{I}{A} \tag{2}$$

onde I é a corrente eléctrica em Amperes e A é a área da secção tranversal do condutor em m^2.

Assim, a corrente é:

$$I = \int_A \vec{j} d\vec{A} \tag{3}$$

Admitindo-se que em um segmento do comprimento ℓ do conductor de secção A, a quantidade de portadores de cargas (electrões em caso de condutores) é

$$N = n\ell A \tag{4}$$

onde n é a quantidade de electrões por unidade de volume.

A carga total contida nesse volume $(A\ell)$ é:

$$Q = Ne \Rightarrow Q = n\ell Ae \tag{5}$$

onde e é a carga elementar

O tempo que as cargas levam para percorrer o segmento é

$$t = \frac{\ell}{v_d} \tag{6}$$

onde, v_d é a velocidade de deriva devido ao movimento dos portadores na presença de campo. Assim, a corrente elécrica é

$$I = jA \Rightarrow I = nev_d A \tag{7}$$

Assim, a densidade de corrente fica:

$$\boxed{\vec{j} = ne\vec{v}_d} \tag{8}$$

Em caso de existência de múltiplos portadores de cargas, a densidade de corrente eléctrica é

$$\vec{j} = \sum_{k=1} n_k q_k \vec{v}_{d_k} \tag{9}$$

Introduzindo-se o conceito de mobilidade (μ), isto é, a velocidade de uma particula no seio de um campo

$$\mu = \frac{\vec{v}_d}{\vec{E}} \tag{10}$$

a densidade de corrente fica:

$$\vec{j} = ne\mu\vec{E} \tag{11}$$

O produto $ne\mu$ é o coeficiente de condutibilidade eléctrica (σ) do material, pelo que,

$$\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}} \tag{12}$$

A Eq.12 refere-se à lei de Ohm na forma diferencial.

Sendo $\sigma = \dfrac{1}{\rho} \rightsquigarrow \vec{j} = \dfrac{1}{\rho}\vec{E}$, onde ρ é a resistividade do material

Corrente eléctrica contínua

Equação de continuidade

A lei de conservação de carga é expressa sob forma da equação de continuidade.

Se flui uma corrente através da superfície A para fora, então a carga no interior do volume cercado pela superfície A deve dimimuir em uma razão igual à corrente (i). Assim:

$$i = -\frac{dq}{dt} \Rightarrow \oint_A \vec{j} d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \qquad (13)$$

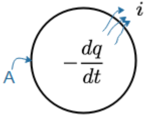


Figura 2:

Usando-se o teorema de Gauss ($\oint_A \vec{a} dA = \int_V div \vec{a} dV$), temos:

$$\boxed{div \vec{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0} \qquad (13a)$$

Para o regime estacionário ($\rho =$ const), não há acumulação de cargas no interior da superfície A, então: $\boxed{div \vec{j} = 0}$

Resistência eléctrica

✓Resistência eléctrica é a oposição que um material oferece quanto à passagem da corrente eléctrica.
✓Em alguns materiais, mesmo variando-se a ddp nos seus terminais, a resistência mantém-se constante $\rightsquigarrow$ Resistores óhmicos !

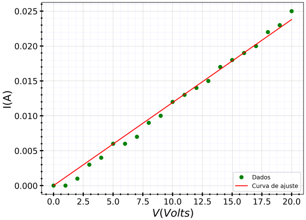


Figura 3: Resistência óhmica

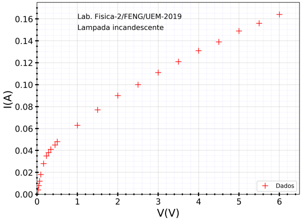


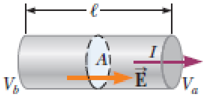
Figura 4: Resistência não óhmica

Resístores óhmicos obedecem a lei de Ohm:

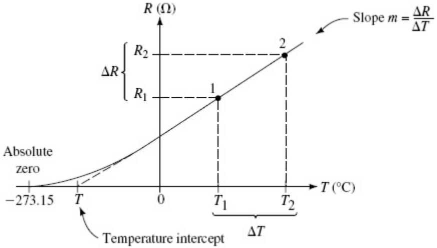
$$V = Ri \qquad (\Omega) \tag{14}$$

Resistência eléctrica

A resistência de um resístor depende do tipo de material de outros factores externos: $R = R(\rho, l, S, T)$



$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{15}$$



$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta R}{\Delta T} \\ \alpha &= \frac{m}{R_0} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} R(T) &= R_0 \left[1 + \alpha \left(T - T_0\right)\right] \\ \rho(T) &= \rho_0 \left[1 + \alpha \left(T - T_0\right)\right] \end{aligned} \tag{17}$$

ρ - resistividade em Ωm; l – comprimento do fio e S - secção do fio condutor; T_0 - Temperatura de referência em ^oC; R_0 - resistência a temperatura de referência e α - coeficiente térmico da resistência eléctrica

Resistência eléctrica

Tabela 1: Resistividade, condutibilidade e coeficiente de temperatura de alguns materiais a $20^{o}\mathrm{C}$ (Graça, 2012)

Material	Resistividade ρ_o (Ωm)	Condutividade σ_o $(\Omega m)^{-1}$	α Coeficiente de Temp. (K^{-1})
Condutores			
prata	$1,59 \times 10^{-8}$	$6,29 \times 10^{7}$	$0,0038$
cobre	$1,72 \times 10^{-8}$	$5,81 \times 10^{7}$	$0,0039$
alumínio	$2,82 \times 10^{-8}$	$3,55 \times 10^{7}$	$0,0039$
tungstênio	$5,6 \times 10^{-8}$	$1,8 \times 10^{7}$	$0,0045$
ferro	$9,6 \times 10^{-8}$	$1,042 \times 10^{7}$	$0,0050$
platina	$10,6 \times 10^{-8}$	$0,9434 \times 10^{7}$	$0,0039$
mercúrio	96×10^{-8}	$0,1 \times 10^{7}$	$0,0009$
Ligas Metálicas			
Ni-Cr	100×10^{-8}	$0,1 \times 10^{7}$	$0,0004$
Manganina	44×10^{-8}	$0,23 \times 10^{7}$	$0,00001$
Semicondutores			
Ge	$0,46$	$2,2$	$-0,048$
Si	640	$1,6 \times 10^{3}$	$-0,075$
Isolantes			
Vidro	10^{10} *a* 10^{14}	10^{-14} *a* 10^{-10}	-
Borracha	10^{9}	10^{-9}	-
Teflon	10^{14}	10^{-14}	-

Cor	Algarísmo	precisão (%)
Preto	0	
Castanho	1	1
Vermelho	2	2
Laranja	3	
Amarelo	4	
Verde	5	0.5
Azul	6	0.25
Roxo	7	0.1
Cinza	8	0.05
Branco	9	
Dourado		5
Prateado		10
Sem cor		20

Como interpretar ?

- As duas primeiras cores indicam os dígitos
- A terceira indica o factor de multiplicação por 10 ;
- A quarta indica a precisão

Exemplo 1

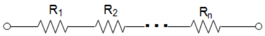
Figura 5:

$$R = 30 \times 10^6 \Omega (10\%)$$

Resistência eléctrica

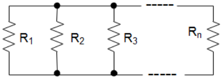
Associação de resistores

Série



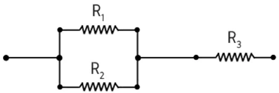
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Paralelo

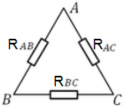


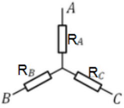
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Mista



$$R_{eq} = R1//R_2 + R_3$$





$$\triangle \longrightarrow Y : R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$Y \longrightarrow \triangle : R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C}$$

$\triangle \longrightarrow Y$: altera só no numerador $\rightsquigarrow$ produto de resistências adjacentes;
$Y \longrightarrow \triangle$: altera só no denominador $\rightsquigarrow$ fica a resistência oposta

Semicondutores e supercondutores

Semicondutores

Quanto à condutibilidade eléctrica, os materiais podem ser classificados em condutores, isoladores e semicondutores. O entendimento da distinção destes materiais pode ser feita com base na concepção de bandas energéticas, conforme se ilustra na Fig.6.

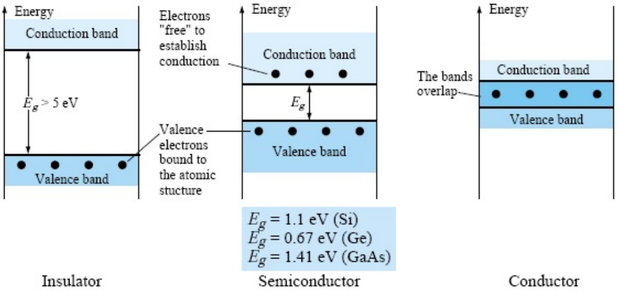


Figura 6: Bandas de valência e de condução de materiais (T=300k)

Semicondutores e supercondutores

Contrariamente aos condutores (metais sobretudo), a resistividade dos semicondutores diminui com o aumento de temperatura. A razão disso é que quando a temperatura aumenta electrões na banda de valência passam a ter uma energia suficiente para passar a banda de condução, tornando desse modo em electrões livres.

Tabela 2: Materiais Semicondutores.

Classificação geral	Exemplos específicos
Elementar	Si e Ge
Compostos (III-IV)	AlP, AlAs, GaN, GaP, GaAs, GaSb, InP,InAs, InSb, SiC
Composto (II-IV)	ZnO, ZnS, ZnSe, ZnTe, CdSe, CdTe,HgS, CdS
Ligas	$\mathrm{Al_xGa_{1-x}As}$, $\mathrm{GaAs_{1-x}P_x}$, $\mathrm{Ga_xIn_{1-x}As_{1-y}P_y}$, $\mathrm{Hg_{1-x}Cd_xTe}$

Supercondutores

A temperatura muito baixas, na ordem de alguns Kelvins, alguns materiais apresentam uma resistência eléctrica muito baixa (quase nula). Esta propriedade é denominada de supercondutividade, e foi descoberta em 1911 por *Krammerling Onnes* e a sua explicação foi estabelecida em 1957 pela teoria de *Barden, Cooper e Schrieffer*.

Na teoria de BCS, há uma interação de electrões e a rede cristalina por meio de fonões e como consequência, a baixas temperaturas, surge pares electrões (pares de Cooper). Durante a interação entre os electrões e os iões positivos da rede cristalina, ocorre uma deformação local que se propaga em todo o cristal. Assim, o par de electrões mantém-se unida por energia de ligação que, caso esta seja maior que a energia por impulsos das oscilações dos átomos da rede cristalina do material condutor (facto que se verifica a baixas temperaturas), os pares de cooper movem-se juntos sem experimentar nenhuma resistência.

Semicondutores e supercondutores

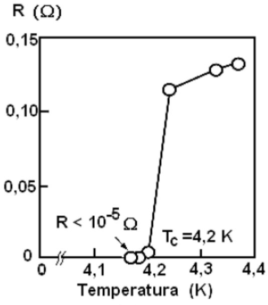


Figura 7: Resistência do Mercurio em função da temperatura (Graça, 2012)

Em 1986, Muller e Bednorz descobriram materias que mantém propriedades supercondutoras a temperaturas de 120K, isto é, acima da temperatura crítica (4K). Porém, o desafio ainda é maior no sentido de se densenvolver estes materiais que operem a temperaturas do ambiente ($\approx 300K$)

Força Electromotriz

Força Electromotriz (fem)

Força electromotriz (fem) é a quantidade de trabalho que uma fonte de energia eléctrica (gerador eléctrico ou bateria) realiza ao transportar uma unidade de carga do terminal do menor para o de maior potencial.

Se a fonte (bateria por exemplo) não é ligado a um consumidor externo (resistência de carga), a fem é igual à diferença de potencial nos seus terminais, i.é., $\mathscr{E} = V_{AB}$. Assim, a **fem é a máxima tensão produzida por um gerador real**.

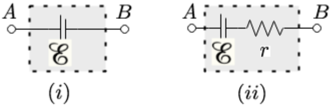


Figura 8: Fontes de tensão: (i) - Fonte ideal e, (ii) - Fonte real

Quando o gerador é ligado a um circuito externo, ele não é capaz de fornecer 100% da sua fem, dado que parte da sua energia é internamente dessipada sob forma de calor (efeito joule).

Força Electromotriz (fem)

A energia dessipada por forma de calor na resistência determina-se baseando-se no conceito da potência

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P = V\frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{P = VI} \tag{18}$$

A expressão (Eq.18) não depende do tipo do material que compõe a resistência, do tipo de portadores de cargas e ném se o tal resístor é óhmico ou não.

Em caso do resístor óhmico, $V = RI$ e para determinarmos a potência dessipada, podemos considerar o circuito da Fig.9

Figura 9:

$$P = VI = RI^2$$
$$P = \frac{R\mathscr{E}^2}{(r+R)^2} \tag{19}$$

Força Electromotriz (fem)

Para determinar-se em que condições ocorre a máxima dessipação de energia, procede:

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow R = r \tag{20}$$

Assim, a máxima dessipação ocorre quando $\mathrm{R} = \mathrm{r}$, conforme a Fig.10

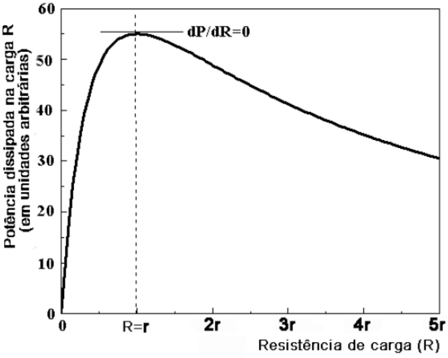


Figura 10: Potência dessipada em função de R

Circuitos eléctricos & Técnicas de análise de circuitos de corrente eléctrica contínua

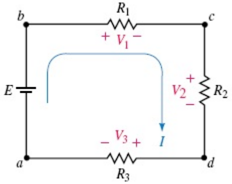
Leis de Kirchhoff[2]

Lei de conservação de energia(mais conhecida por lei de voltage -KVL ou lei das malhas)

O somatório de todas as elevações e quedas de tensão numa malha fechada é igual a zero.

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = 0 \tag{21}$$

Ex:



$$E - V_1 - V_2 - V_3 = 0 \tag{22}$$

[2]Gustav Robert Kirchhoff - Físico alemão (1824 - 1887)

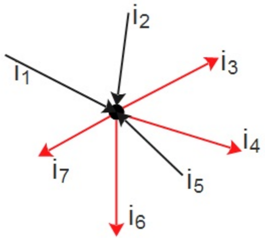
Leis de Kirchhoff

Lei de conservação de carga(mais conhecida por lei de corrente -KCL ou lei dos nós)

O somatório de todas correntes que entram num nó é igual ao somatório de todas as correntes que saem.

$$\sum_{i=1} I_i^{entra} = \sum_{j=1} I_j^{sai} \tag{23}$$

Ex:



$$i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4 + i_6 + i_6 \tag{24}$$

Divisor de tensão e de corrente

Divisor de Tensão

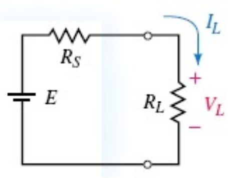


Figura 11: Divisor de tensão

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_S} E \qquad (25)$$

Divisor de corrente

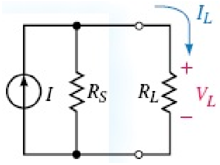


Figura 12: Divisor de corrente

$$I_L = \frac{R_S}{R_L + R_S} I \qquad (26)$$

Consegue deduzir estas relações?

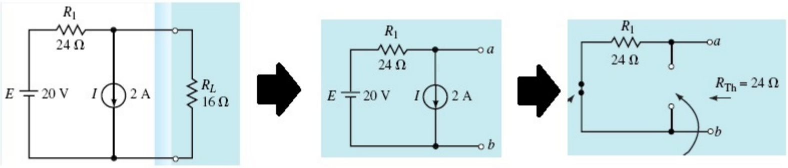
Teoremas de Thévenin e de Norton

Teorema de Thévenin

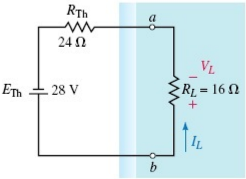
Qualquer circuito linear de dois terminais pode ser reduzido a um circuíto com a penas uma fonte de tensão associada em série a uma resistência.

Passos:

1. Remover a resistência de carga;
2. Identificar os dois terminais de circuíto, por exemplo, "a"e "b";
3. Anular todas as fontes de tensão e de corrente;
4. Reparando do lado dos terminais, eg."a"e "b"determinar a resitência thévenin (R_{Th});
5. Recolocar as fontes a quando da determinação da resitência Thévenin e determinar a voltagem de circuíto aberto, i.é, a tensão Thévenin (V_{Th}). Se as fontes forem mais que uma pode-se usar o teorema de superposição;
6. Esboçar o equivalente thévenin e ligra nos terminais a resistência de carga.



R_1
24 Ω
E
20 V
I
2 A
R_L
16 Ω
R_1
24 Ω
a
E
20 V
I
2 A
b
R_1
24 Ω
a
R_{Th} = 24 Ω
b



R_{Th}
24 Ω
a
E_{Th}
28 V
–
V_L
R_L = 16 Ω
+
I_L
b

Ok!

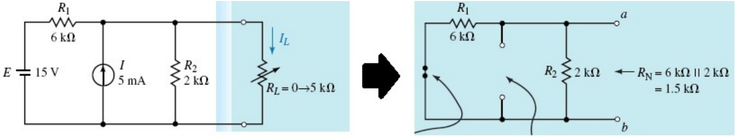
Entendeu?

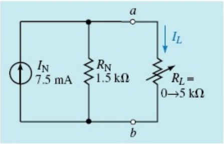
Teoremas de Thévenin e de Norton

Teorema de Norton

Qualquer circuito linear de dois terminais pode ser reduzido a um circuíto com a penas uma fonte de corrente associada em paralelo a uma resistência.

Passos: Repetir todos os passos anteriores alterando somente a tensão Thévenin por corrente Norton (I_N) no item $n^o 5$.

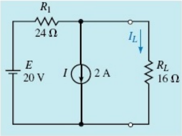




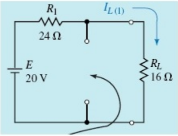
Okey !!!

Teorema de superposição

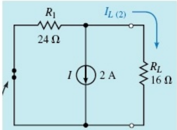
A corrente ou a queda de tensão num resistor ou ramal pode ser determinada pela soma dos efeitos individuais de cada fonte de corrente ou tensão.



1



2



$$I_L = I_{L1} + I_{L2}$$

Cuidado com o sentido da corrente!

Circuito RC: Carga e Descarregamento do capacitor

Carregamento do capacitor

Consideremos um capacitor inicialmente descarregado ($q|_{t=0} = 0$ C). Quando o mesmo capacitor é ligado a uma fonte de força electromotriz $\mathscr{E}$, ele começa a carregar até, quando não for desligado da fonte de fem, atingir a sua máxima carga.

As equações da carga, corretnte e diferença de potencial nos terminais do capacitor em função do tempo de carregamento podem ser obtidos analisando-se o circuito da Fig.13 com a chave (S) no terminal **a**.

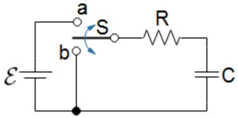


Figura 13: Circuito RC

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E} - V_R - V_C &= 0 \\
\mathscr{E} - iR - \frac{q}{C} &= 0 \\
\mathscr{E} - R\frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} &= 0
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Circuito RC: Carga e Descarregamento do capacitor

Para resolvermos a eq. $\mathscr{E} - R\dfrac{dq}{dt} - \dfrac{q}{C} = 0$, temos que ter em consideração a condição inicial: $q|_{t=0} = 0$ C. Assim, usando também o método de separação de variáveis, sucede:

$$\int_0^q \frac{dq}{C\mathscr{E} - q} = \frac{1}{RC}\int_0^t dt \Rightarrow \boxed{q(t) = C\mathscr{E}\left(1 - e^{-\dfrac{t}{RC}}\right)} \tag{28}$$

Derivando-se a carga em função de tempo, tem-se a corrente

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\mathscr{E}}{R}e^{-\dfrac{t}{RC}}} \tag{29}$$

Circuito RC: Carga e Descarregamento do capacitor

A ddp nos terminais do capacitor é:

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{V_C = \mathscr{E}\left(1 - e^{-\dfrac{t}{RC}}\right)} \tag{30}$$

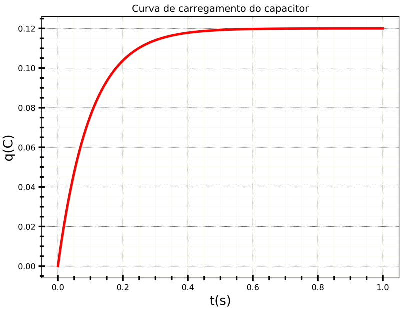


Figura 14: $\mathrm{q} \times \mathrm{t}$

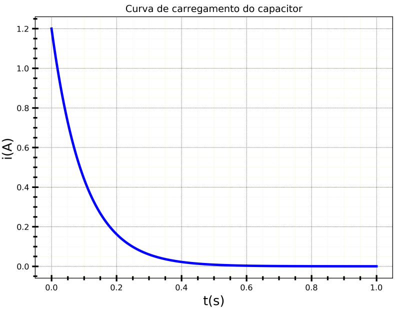


Figura 15: $\mathrm{i} \times \mathrm{t}$

Descarregamento do capacitor

Suponhamos que o capacitor já está cheio (com carga Q_0) e pretende-se que seja ele a fornecer carga ao resistor R. Assim, a chave "**S**"da Fig.13 é ligado ao terminal "**b**"

$$V_R + V_C = 0 \Rightarrow iR + \frac{q}{C} = 0 \Rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\int\limits_{Q_0}^{q} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int\limits_{0}^{t} dt \Rightarrow \boxed{q(t) = Q_0 e^{-\dfrac{t}{RC}}} \tag{31}$$

A ddp nos terminais do capacitor é a corrente instantânea são respectivamente:

$$\boxed{V(t) = V_0 e^{-\dfrac{t}{RC}}} \text{ e } \boxed{i(t) = I_0 e^{-\dfrac{t}{RC}}} \tag{32}$$

Circuito RC: Carga e Descarregamento do capacitor

Uma outra grandeza a ter em consideração tanto em carregamento quanto em descarregamento dos capacitores é a constante de tempo (τ).

Considerando o descarregamento, o τ é:

$$q(t) = Q_0 e^{-\dfrac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{Q_0}{e} = Q_0 e^{-\dfrac{\tau}{RC}} \Rightarrow \boxed{\tau = RC} \tag{33}$$

Assim, τ é o tempo necessário para que o capacitor descarregue a sua carga inicial em e- vezes, ou por outra, o tempo para que a carga no capacitor seja $q|_{t=\tau} = \dfrac{Q_0}{e}$

FIM

Resolva os exercícios da AP# 06 e apresente dúvidas nas aulas práticas e de consulta!