Tema#1: Ferramentas matemáticas para o estudo de Física

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências - Departamento de Física

(Aulas preparadas para estudantes da Faculdade de Engenharia - UEM)

21/03/2022

Conteúdos

1. Noção de integral de uma função
   - Integral como operação inversa da diferenciação
   - Relação diferencial entre primitiva e sua função
   - Integral como soma especial
   - Propriedades de integração
   - Tabela de integrais básicas
2. Grandezas físicas (escalares e vectoriais)
   - Grandezas vectoriais
   - Operações sobre vectores
3. Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

Noção de integral de uma função

Definidas as funções $f(x)$ e $F(x)$ no intevalo $x \in [a, b]$ e $F(x)$ diferenciável em todos os pontos $[ab]$, se para $\forall x \in [a, b]$, $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$, diz-se que $F(x)$ é primitiva de $f(x)$.

Para a função f dependente de x, define-se diferencial de f, a expressão:

$$df = \frac{df}{dx} dx \tag{1}$$

Para $\forall$ duas funções $f = f(x)$ e $y = y(x)$ diferenciáveis, é válida a seguinte relação:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

Noção de integral de uma função - Cont.

Exemplo 1

velocidade $v = v(t)$ *e a posição* $x = x(t)$. *Entre as duas variáveis podemos escrever:*

$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}$

Por definição, $\frac{dv}{dt} =$ *aceleração e* $\frac{dx}{dt} =$ *velocidade*

Integral como operação inversa da diferenciação

Integrar uma função f(x) é realizar a operação inversa da diferenciação (derivada) de F(x), ou seja, procurar uma função F(x), tal que a sua derivada é igual a função a integrar.

Procuremos as primitivas das seguintes funções: $f(x) = cos(x)$ e $f(x) = x^2$

$$\frac{dF(x)}{dx} = cos(x) \Rightarrow F(x) = sen(x)$$
$$\frac{dF(x)}{dx} = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3$$

Relação diferencial entre primitiva e sua função

Para a função F(x), primitiva de f(x) é válida a seguinte relação diferencial:

$$dF(x) = f(x)dx \tag{3}$$

Se F(x) é primitiva da função f(x), para $\forall$ constante C, a soma desta constante com F(x), é também primitiva de f(x);

$\forall$ primitiva de f(x), chama-se de integral indefinida de f(x), e representa-se por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \tag{4}$$

Integral como soma especial

Espectro discreto (Ai) : Existindo várias entidades semelhantes, para calcular o número total dessas entidades (por exemplo áreas), procede-se a soma $\sum A_i$ ou $\sum_{i=0}^{N} A_i$;

Espectro contínuo (dA): para função contínua f(x)num determinado segmento [a,b], $dA = f(x)dx$ e $A = \int f(x)dx$.

Integral definida

Nalguns casos são colocadas as condições iniciais do problema de tal maneira que a constante **C** fica conhecida. Nestes casos, utiliza-se a integral definida (fórmula Newton-Leibniz):

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b \tag{5}$$

`Nota: Veja exemplos adiante (Exs: 5,6 e 7)!`

Propriedades de integração

1. $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$; k = constante

2. $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$

3. $dx^n = nx^{n-1}dx$

4. $d(x \pm k) = dx$; $k =$ const.

5. $d(kx) = kdx \Rightarrow dx = \frac{1}{k}d(kx)$

Tabela de integrais básicas

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C;\ n \neq -1$
2. $\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{lna} + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C;$
5. $\int sinxdx = -cosx + C;$
6. $\int cosxdx = sinx + C;$
7. $\int \dfrac{1}{cos^2 x} dx = tanx + C;$
8. $\int \dfrac{1}{sin^2 x} dx = -cotanx + C;$
9. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = arctanx + C;$
10. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsinx + 1 + C;$
11. $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+q}} dx = ln|x + \sqrt{x^2+q}| + C$, q=const.

Exemplos de cálculos de integrais

Exemplo 2

$\int (3x^2 + x)dx = 3\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

Exemplo 3

$$\int \frac{1}{x+5}dx = \int \frac{d(x+5)}{x+5}dx = ln|x+5| + C$$

Exemplo 4

$\int cos(3x)dx = \int cos(3x)\frac{1}{3}d(3x) = \frac{1}{3}sin3x + C$

Exemplo 5

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = ln|x^2+1| + C$$

Exemplos de aplicação de integrais

Exemplo 6

Uma partícula move-se ao longo de uma linha recta com aceleração que varia com o tempo de acordo com a expressão $a = 4 - t^2$, onde a é a aceleração expressa em m/s^2 e t, o tempo expresso em segundos. Obtenha as expressões para a velocidade e a posição, sabendo que no instante t = 3s, a velocidade é v = 2 m/s e x = 9 m.

Resp: $v(t) = -\dfrac{x^3}{3} + 4t - 1$ m/s e $x(t) = -\dfrac{t^4}{12} + 2t^2 - t + \frac{3}{4}$ m

Exemplo 7

A aceleração de um corpo em movimento rectilíneo é dada por $a = -kv$, onde k = constante. Para o instante t = 0 s, $v = v_0$. Obtenha a expressão da velocidade em função do tempo.

Resp: $v(t) = v_0 e^{-kt}$

Exemplos de aplicação de integrais - Cont.

Exemplo 8

Um corpo move-se ao longo de uma recta. A sua aceleração é dada no S.I. por $a = -2x$ *, onde* x *está em metros e* a *em* m/s^2*. Obter a relação entre a velocidade e a distância sabendo que para* $x = 0$ *m , a velocidade é* $v = 4$ *m/s.*

Resp: $v(x) = \sqrt{16 - 2x^2}$

GRANDEZAS FÍSICAS. OPERAÇÕES SOBRE VECTORES

Grandezas físicas escalares e vectoriais

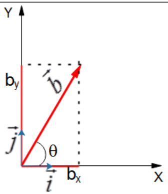
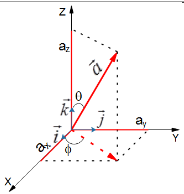
Escalares: grandezas cuja informação fica completa quando dado o valor numérico e a respectiva unidade (massa, tempo, distância percorrida, área, volume, pressão, etc).

Vectoriais: grandezas cuja informação fica completa, quando para além do valor numérico e unidade, é indicada a direcção e sentido (velocidade, força, quantidade de movimento, etc). Vectores caracterizam-se por ter origem e extremidade, módulo, direcção e sentido.

Grandezas vectoriais

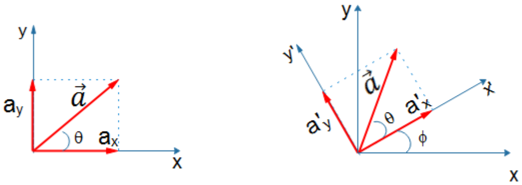
Componentes de um vector

As componentes de vector são as suas projecções ao longo dos eixos do sistema de coordenadas.

2D	3D
	
$b_x = \lvert\vec{b}\rvert cos\theta$ $b_y = \lvert\vec{b}\rvert sin\theta$ $\lvert\vec{b}\rvert = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$	$a_x = \lvert\vec{a}\rvert sin\theta cos\phi$ $a_y = \lvert\vec{a}\rvert sin\theta sin\phi$ $a_z = \lvert\vec{a}\rvert cos\theta$ $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$
$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$	$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são vectores unitários e $|\vec{a}|$ chama-se módulo do $\vec{a}$.

Importa referir que para um mesmo vector, mudando o sistema de referência, variam os valores das componentes, mas o módulo do vector mantêm-se igual em ambos os sistemas (veja o caso do plano, para simplificar a complexidade):



$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

Para qualquer vector podemos expressar o vector unitário (versor) relacionado com aquele vector:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \tag{6}$$

Exemplo 9

Determine o versor do vector $\vec{a}$*;* $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

Resp: $\vec{u} = \frac{\sqrt{14}}{14}\left(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}\right)$

1. Soma de vectores (método analítico e geométrico)
2. Multiplicação de vector por escalar
3. Multiplição de vector por vector (produto escalar e produto vectorial)

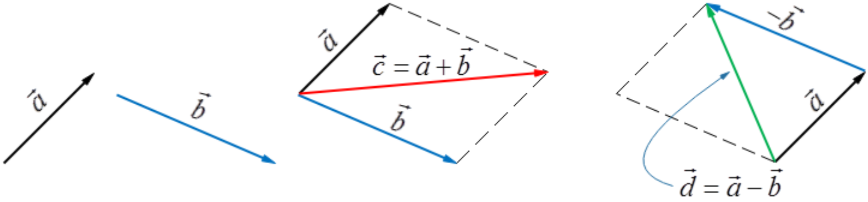
A soma ou a diferença de dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é um terceiro vector $\vec{c}$ expressa, respectivamente por:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} \pm \vec{b} \\ \vec{c} &= (a_x \pm b_x)\vec{i} \pm (a_y + b_y)\vec{j} \pm (a_z + b_z)\vec{k} \end{aligned} \tag{7}$$

O módulo do vector resultante ($\vec{c}$) é:

$$|\vec{c}| = \sqrt{(a_x \pm b_x)^2 + (a_y \pm b_y)^2 + (a_z \pm b_z)^2} \tag{8}$$

Sejam dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o vector soma $\vec{c}$ e o vector diferença $\vec{d}$ são expressos conforme se ilustra nos diagramas ii) e iii) respectivamente.



i) Dois vectores
ii) Soma
iii) Diferença

Multiplicando vector com escalar ($\vec{a}Z$), obtém-se um vector ($\vec{b}$) paralelo ao vector originário e que obedece as seguintes condições:

$$|\vec{b}| > |\vec{a}| \quad se \quad |Z| > 1$$
$$|\vec{b}| < |\vec{a}| \quad se \quad |Z| < 1$$

$\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem sentidos opostos se $Z < 0$.

$$\vec{a}Z = (Za_x)\vec{i} + (Za_y)\vec{j} + (Za_z)\vec{k} \tag{9}$$

Produto escalar

O produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})$, é um número definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| cos\theta \tag{10a}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{10b}$$

$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$

$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ - **condição de perpendicularidade**

Grandezas vectoriais

Operações sobre vectores: Multiplicação (Produto vectorial)

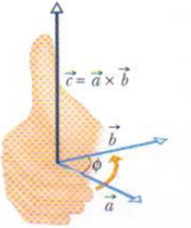
Produto vectorial

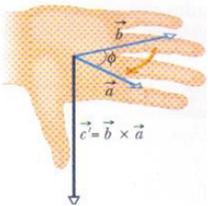
O produto vectorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b})$, é um terceiro vector $\vec{c}$ definido por:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| sin\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{11}$$

Onde, $\hat{\mathbf{n}}$- vector unitário $\perp$ ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$; ϕ– é o menor ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ - **condição de paralelismo**





$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

Grandezas vectoriais

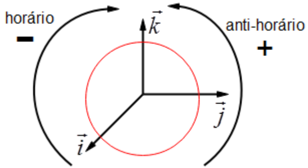
Operações sobre vectores: Multiplicação (Produto vectorial)

Analiticamente, o produto vectorial corresponde à:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \tag{12}$$

ou

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= \vec{k} \quad ; \quad & \vec{j} \times \vec{i} &= -\vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} &= \vec{i} \quad ; \quad & \vec{k} \times \vec{j} &= -\vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} &= \vec{j} \quad ; \quad & \vec{i} \times \vec{k} &= -\vec{j} \end{aligned}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Geometricamente, o módulo do produto vectorial equivale à área do paralelogramo formado na base dos dois vectores.

Escalar-vectorial

O produto misto (escalar-vectorial) é um escalar cujo módulo equivale ao volume do paralelepípedo formado na base dos três vectores:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{13}$$

Vectorial duplo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{14}$$

OPERADOR DIFERENCIAL VECTORIAL (OPERADOR NABLA)

Operador diferencial vectorial (Operador nabla)

Suponhamos que temos uma função escalar dependente de três variáveis, isto é, $f = f(x, y, z)$. A sua derivada total é:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \tag{15}$$

Sabe-se que o vector posição de uma partícula no espaço é: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, pelo que:

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \tag{16}$$

Conjugando as Eqs. 16 e 15, e tendo em consideração a expressão do produto escalar (Eq.10b), a derivada total da função f é:

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r} \tag{17}$$

onde

$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ é operador nabla em coordenadas rectangulares

$$\nabla f \rightsquigarrow \text{gradiente de f } (\mathrm{grad} f) \tag{18a}$$

$$\nabla \cdot \vec{a} \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \rightsquigarrow \text{divergência de } \vec{a} \ (div\vec{a}) \tag{18b}$$

$$\nabla \times \vec{a} \rightsquigarrow \text{rotacional de } \vec{a} \ (rot\vec{a}) \tag{18c}$$

Fim do Tema#1