Universidade Eduardo Mondlane

Faculdade de Ciências

Departamento de Física

FÍSICA - I: (*Cursos de Licenciatura em Engenharia Mecânica, Eléctrica, Electrônica, Química, Ambiente, Civil e Informática*)

**Regente:** Luís Consolo Chea
**Assistentes:** Marcelino Macome; Bartolomeu Ubisse; Belarmino Matsinhe; Graça Massimbe & Valdemiro Sultane

`2021-AP # 01-Vectores e Noções básicas de integrais`

---

1. As coordenadas de três pontos são dadas por A(-2,2,3), B(1,0,-3) e C(1,3,-1). Considerando os vectores $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ e $\vec{b} = \overrightarrow{BA}$, represente estes vectores no sistema cartesiano de coordenadas.

2. Dê as propriedades dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, tal que sejam válidas as seguintes condições:

   (a) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = |\vec{c}|$ e $|\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| = |\vec{c}|$
   (b) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$
   (c) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$
   (d) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$

3. No sistema dextrogiro de coordenadas cartesianas ortogonais, encontrar os seguintes produtos vectoriais: $\vec{i} \times \vec{i}$; $\vec{i} \times \vec{j}$; $\vec{i} \times \vec{k}$; $\vec{k} \times \vec{j}$ e $\vec{k} \times \vec{i}$ .

4. Sejam dados dois vectores $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ e $\vec{b} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

   (a) Desenhe os referidos vectores num sistema tridimensional (dextrógiro);
   (b) Aplicando o produto escalar, determine o ângulo entre estes dois vectores;
   (c) Aplicando o produto vectorial, determine o ângulo entre estes dois vectores e compare com o resultado da alínea anterior;
   (d) Represente o vector $\vec{c}$ no gráfico em a), sendo $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.
   (e) Determine os versores dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

5. Demonstrar que quando dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tem o mesmo módulo e entre eles formam um ângulo $\theta$ , o módulo da soma expressa-se por $S = 2|\vec{a}|cos(\theta/2)$ e o módulo da diferença por $D = 2|\vec{a}|sin(\theta/2)$

6. Sejam dados três vectores $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 8\vec{k}$ e $\vec{c} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

   (a) Comprove a seguinte indentidade: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$

   (b) Determine por cálculo directo se há alguma diferença entre os produtos $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$ e $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$;

   (c) Determine os produtos $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$,$(\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}$ e verifique se há alguma diferença.

7. Demonstre que o ângulo $\theta_{12}$ entre os vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig.1 pode -se determinar com base da seguinte expressão: $cos(\theta_{12}) = sin(\theta_1)sin(\theta_2)cos(\theta_1 - \theta_2) + cos(\theta_1)cos(\theta_2)$.

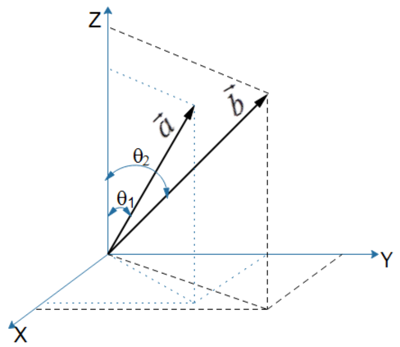


Figura 1:

8. Três vectores com magnitudes $|\vec{a}| = 22$, $\left|\vec{b}\right| = 35$ e $|\vec{c}| = 15$ encontram-se no plano $xy$. O vector $\vec{a}$ forma ângulo de $80^o$ com o vector $\vec{b}$ e este por sua vez forma $130^o$ com o vector $\vec{c}$. Determine:

   (a) A magnitude e a direcção (em relação ao menor vector) do vector $\vec{d}$ sendo este o doubro da resultante ($\vec{r}$) dos três vectores.

   (b) A magnitude do vector $\vec{f}$ sendo que $\vec{f} = -2\vec{a} + 3\vec{r}$

9. Na Fig.2 estão representados três vectores. Sendo $|\vec{a}| = 30$, $|\vec{c}| = 60$, $\theta = 70^o$ e $\gamma = 20^o$, determine o ângulo $\beta$ e o módulo do vector $\vec{b}$ de modo que o vector resultante seja nulo.

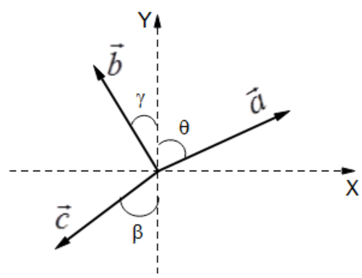


Figura 2:

10. Quando o vector $\vec{a}$ é adicionado ao vector $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ resulta num vector orientado ao longo da direcção positiva do eixo $y$ e com magnitude igual à do vector $\vec{b}$. Determine a magnitude do vector $\vec{a}$.

11. Três vectores $\vec{a}$,$\vec{b}$ e $\vec{c}$ que se encotram no plano XY tem módulos iguais de 50 m e formam ângulos em relação com o eixo Y, de $30^o$, $195^o$ e $315^o$ respectivamente. Determine:

(a) As magnitudes e a direcções dos vectores $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ e $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

(b) A magnitude e a direção do vector $\vec{f}$ tal que, $(\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{f}) = 0$

12. Determine o versor do vector $\vec{a}$ de módulo $a = 20$ que é perpendicular ao vector $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ e que forma um ângulo de $30^o$ com o vector $\vec{c} = 4\vec{k}$.

13. Se a superfície de um terreno tem a forma de um paralelopípedo e é definido por dois vectores $\vec{a} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ e $\vec{b} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ em unidades no SI:

    (a) Represente graficamente o terreno

    (b) Determine a área do terreno

    (c) Determine os ângulos internos do terreno

14. Achar o volume do paralelepípedo cujas arestas são representadas por $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

15. Dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tendo módulos iguais a 10 unidades cada e ângulos $\theta_1 = 30^o$ e $\theta_2 = 105^o$ são orientados conforme se ilustra na Fig.3. Sendo a sua soma representada por $\vec{r}$, determine:

    (a) As componentes de $\vec{r}$ nos eixos $OX$ e $OY$;

    (b) O módulo de $\vec{r}$;

    (c) O ângulo que $\vec{r}$ forma com o eixo $OY$.

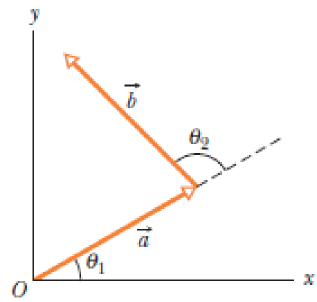

Figura 3:

16. Determine as primitivas das seguintes funções:

    (a) $f(\theta) = sen\theta cos\theta$

    (b) $f(x) = e^{-x} + 3$

    (c) $f(t) = t^2$ sabendo que $F(0) = 3$

17. Obtenha $\vec{r}(t)$, isto é, um vector $\vec{r}$ dependente da variável $t$, resolvendo a seguinte expressão:

$$\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{a}t)\, dt$$

sendo que: $\frac{d\vec{v}_0}{dt} = 0$ e $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$;

18. Seja dada a equação $\dfrac{d\xi}{dt} = b + ct$, onde $b$ e $c$ são constantes arbitrárias. Sabendo que $\xi(t = 0) = \xi_o$, determine a função $\xi(t)$ para qualquer valor de $t$.

19. Obtenha a energia potencial gravitacional resolvendo a seguinte expressão:

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_\infty^r \gamma \frac{mM}{r^2}\, dr$$