Tema#4:Electrostática[1]

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências - Departamento de Física

(Aulas preparadas para estudantes da Engenharia Informática- UEM)

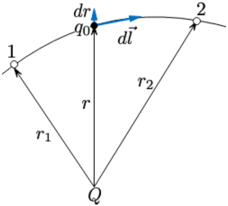
18/04/2022

[1] Alguns exemplos usados neste material foram usados pelo Prof. Luis Chea nas aulas leccionadas na FENG-UEM no período de 2019 a 2021.

Conteúdos

Energia e potencial eléctrico

✓A carga Q cria $\vec{E}$ a sua volta
✓Quando a carga q_0 é colocada no seio do campo, sente acção da força $\vec{F} = q_0\vec{E}$ e desloca-se de um ponto para outro $(1 \longrightarrow 2)$.
✓Há realização de trabalho sobre q_0!



✓W_{12} da eq.1 não depende da trajectória;
✓$\vec{F}$ e $\vec{E}$ são conservativos!

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 F dr$$

$$W_{12} = q_0 \int_1^2 E dr \Rightarrow W_{12} = q_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_1^2 \frac{Q}{r^2} dr$$

$$W_{12} = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \tag{1}$$

Energia e potencial eléctrico

Para campos conservativos :

$$W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U \qquad (U \text{ - energia potencial}) \tag{2}$$

Assim,

$$\frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \tag{3a}$$

$$\Delta \underbrace{\left(\frac{U}{q}\right)}_{\varphi} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \Longrightarrow \Delta\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \tag{3b}$$

Deste modo, potencial eléctrico (φ) é a energia por unidade de carga. Esta, expressa a capacidade que um corpo energizado tem de realizar trabalho, i.é., atrair ou repelir cargas.

Escolhe - se $(\varphi|_{r \longrightarrow \infty} = 0)$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{r}} \qquad [\text{Volt}] \tag{3c}$$

Energia e potencial eléctrico

Na prática o que se mede é a diferença de potencial ($\Delta\varphi \equiv V \equiv ddp$)

Qundo se conhece o potencial eléctrico em um dado ponto pode-se determinar a magnitude do campo eléctrico com base na seguinte expressão:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi \equiv -grad\varphi} \tag{4}$$

$$\nabla \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cartesianas} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cilindricas} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{rsen\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi & \text{Coordenadas esféricas} \end{cases}$$

Exemplo 1

Determine o potencial eléctrico criado por uma carga pontual q em um dado ponto r do espaço.

$$\int_{\infty}^{r} d\varphi = -\int_{\infty}^{r} E dr \Longrightarrow \int_{\infty}^{r} d\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right)$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}} \tag{5}$$

Em caso de várias cargas distribuidas, usa-se o princípio de superposição:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \text{(dist. discreta)} \tag{6a}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\ell \frac{\lambda}{r_i} d\ell \qquad \text{(dist. linear)} \tag{6b}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma}{r_i} ds \qquad \text{(dist. superficial)} \tag{6c}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho}{r_i} dV \qquad \text{(dist. volumétrica)} \tag{6d}$$

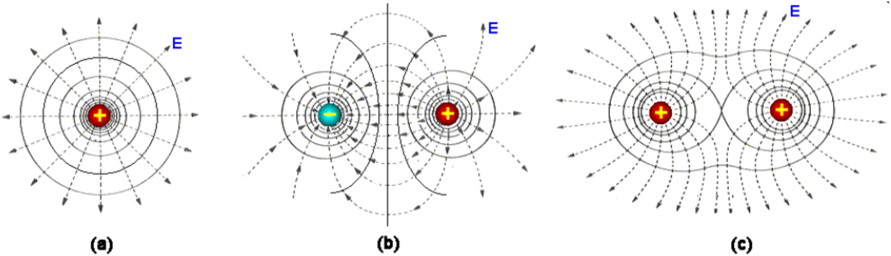
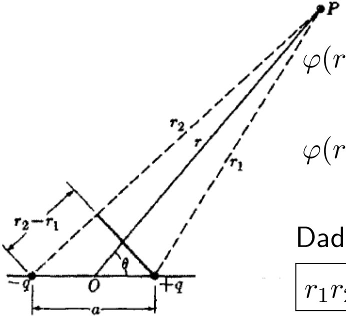


Figura 1: Superfícies equipotenciais e linhas de campo para diferentes distribuições de carga; (a) carga pontual; (b) dipolo eléctrico; (c) monopolo de duas cargas positivas

O potencial no ponto **P** é:



$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i} \Rightarrow \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right)$$

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}\right)$$

Dado que $a << r$, então: $\boxed{r_2 - r_1 \approx acos\theta}$ e $\boxed{r_1 r_2 = r^2}$

Figura 2:

$$\varphi(r) = \frac{qacos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \text{ ou } \varphi(r) = \frac{pcos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (7)$$

Exemplo 2

Determine o potencial no ponto P*, criado por uma barra fina e não condutora, de comprimento ℓ e com uma densidade de carga λ*

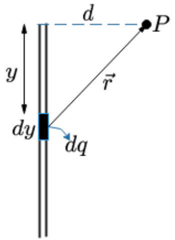


Figura 3:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{\lambda dy}{r}$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{d^2+y^2}}$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left(y+\sqrt{y^2+d^2}\right)|_0^l$$

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2+d^2}}{d}\right)$$

Exemplo 3

Calcule o potencial criado, no ponto P, por um disco de raio R, carregado com densidade de carga σ

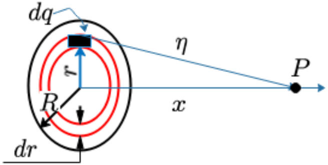


Figura 4:

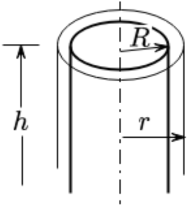
$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{\eta} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\sigma dS}{\eta}$$

$$\varphi = \frac{\sigma 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

Exemplo 4

Determine o potencial eléctrico a uma distância r *de um fio infinito com densidade de cargas* λ



$$\int_{r_{ref}}^{r} d\varphi = -\int_{r_{ref}}^{r} \vec{E} d\vec{r}$$

$$\varphi(r) - \varphi(r_{ref}) = -\int_{r_{ref}}^{r} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}dr$$

$$\varphi(r) = \varphi(r_{ref}) - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{r}{r_{ref}}\right)$$

Sabe-se que:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r < R \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r} & \text{se } r > R \end{cases}$$

Consideremos $r_{ref} = R$

$$\varphi(r) = \varphi(R) - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\left(\frac{r}{R}\right)$$

Potencial eléctrico

Potencial de um condutor carregado

Num condutor carregado a carga fica distribuída na sua superfície e o campo eléctrico no interior é nulo.

O campo continua nulo mesmo na presença de cavidade que contenha carga.