Tema#4:Electrostática[1]

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Universidade Eduardo Mondlane
Faculdade de Ciências - Departamento de Física

(Aulas preparadas para estudantes da Engenharia Informática- UEM)

18/04/2022

[1] Alguns exemplos usados neste material foram usados pelo Prof. Luis Chea nas aulas leccionadas na FENG-UEM no período de 2019 a 2021.

Conteúdos

Carga e Força eléctrica

Fenómenos de electricidade e magnetísmo são conhecidos desde a antiguidade.

600 AC	Thales de Mileto descobre que quando o âmbar é atritado com seda atrai pequenos pedaços. Descobre-se a carga estática.
1733	Descobre a existência de dois tipos de interações eléctricas (atractiva e repulsiva) Observou a diferença entre condutores e isoladores quanto à electrização.
1750	Benjamin Franklin convencionou sinais de cargas eléctricas (positiva e negativa)
$1736 - 1806$	Charles Augustin de Coulomb descreveu a interação electrostática entre dois corpos carregados; Inventou a balança de torção.
1800	Alessandro Volta inventa a pilha voltáica

Carga e Força eléctrica

A carga eléctrica é uma propriedade fundamental associada às partículas que constituem a matéria. Ela é uma medida quantitativa da interação electromagnética.

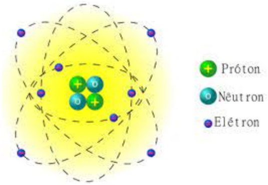


Figura 1:

- protão $(+e)$
- electrão $(-e)$
  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ $\quad$ (e- carga elementar)
- A unidade de carga eléctrica é Coulomb (C)

Lei de conservação de carga eléctrica

A carga eléctrica total em um sistema isolado, i.é., a soma algébrica de cargas negativas e positivas existente em certo instante, nunca varia.

$$-\frac{dQ}{dt} = I \tag{1}$$

Quantização da carga eléctrica

A carga de qualquer objecto/corpo carregado é um múltiplo inteiro de carga elementar (e).

$$Q = Ne \tag{2}$$

onde, $N = 1, 2, 3, ...$

Quando a carga líquida de um corpo é nula $(\mathrm{Q} = 0)$, diz-se que o referido corpo é electricamente neutro.

$$Q = N_p e - N_e e = (N_p - N_e)e \tag{2a}$$

então, o corpo só é electroneutro se $N_p = N_e$,

Distribuição de carga eléctrica

Embora a carga seja quantizada e associada a partículas discretas, ela é frequentimente considerada como estando distribuida de uma forma contínua no espaço (principalmente quando existem muitas cargas)

Existem três tipos de densidades:

1. Densidade linear:
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad \text{ou} \quad \lambda = \frac{Q}{l} \qquad [C/m] \tag{3a}$$
2. Densidade superficial:
$$\sigma = \frac{dq}{dA} \qquad \text{ou} \quad \sigma = \frac{Q}{A} \qquad [C/m^2] \tag{3b}$$
3. Densidade Volumétrica:
$$\rho = \frac{dq}{dV} \qquad \text{ou} \quad \rho = \frac{Q}{V} \qquad [C/m^3] \tag{3c}$$

Tipos de electrização dos corpos

1. Atrito ou triboelectrização:
   - Ocorre entre materiais diferentes e no final
   - No fim todos os corpos tem a mesma quantidade de carga mas de sinais opostos.

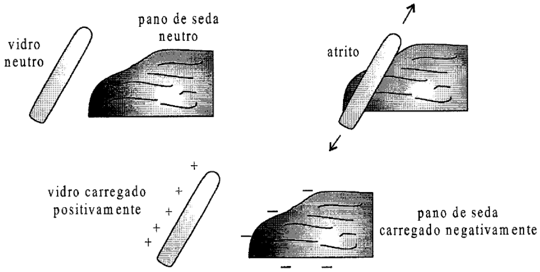


Figura 2: Electrização por atrito

Figura 3: Aterramento em camiões

2. Electrização por contacto:
   - Material inicialmente carregado é posto em contacto com um neutro;
   - No fim todos os corpos tem o mesmo tipo de carga $(+ \vee -)$, porém, a magnitude depende do tamanho e natureza dos corpos.
   - Se inicialmente os corpos tinham cargas q_1 e q_2, após o contacto cada um tem $Q_1 = Q_2 = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$

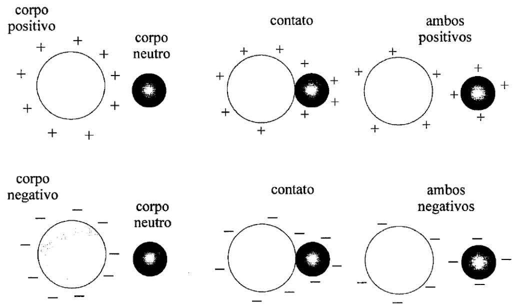


Figura 4: Electrização por contacto

3. Electrização por indução:
   - Ocorre quando um corpo carregado é colocado próximo de um outro corpo electroneutro;
   - Ocorre reorganização das cargas dando origem a duas zonas cada com um único tipo de cargas;
   - Logo que se retira o indutor, o outro corpo retorna ao seu estado de electroneutro.

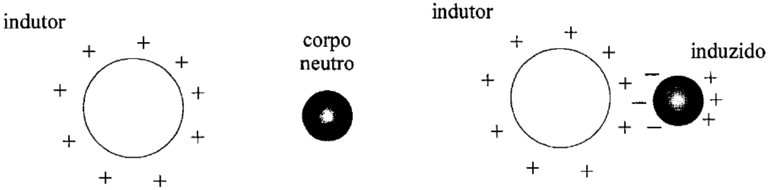


Figura 5: Electrização por indução

3. Electrização por indução:
   - Ocorre quando um corpo carregado é colocado próximo de um outro corpo electroneutro;
   - Ocorre reorganização das cargas dando origem a duas zonas cada com um único tipo de cargas;
   - Logo que se retira o indutor, o outro corpo retorna ao seu estado de electroneutro.

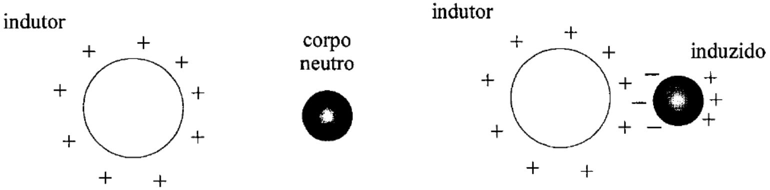


Figura 6: Electrização por indução

Carga e Força eléctrica

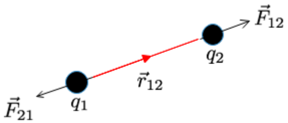
Condutores e Isoladores

1. Condutores (Ex. Metais):
   - São materiais que possuem electrões lívres
   - Não conservam excesso de carga por muito tempo, sendo que, muito rapidamente tendem a atingir o equilíbrio electrostático.
   - A carga redistribui-se na superfície do condutor, pelo que, interior a carga líquida é nula $(\vec{E} = 0)$
   - Não são favoráveis a electrização por frição.

1. Isoladores (dieléctricos) (Ex. boracha, madeira,etc.):
   - Não possuem electrões lívres.
   - Tem uma banda de valência parcial ou completamente preenchida, pelo que, necessitam de energia muito elevada para serem arrancados e movidos até à banda de condução.
   - Quando electrizados, levam muito tempo para atingir equilíbrio electrostático e a carga em excesso ou em falta é localizada

Existe outro tipo de materiais denominado de semi-condutor.(Ex. Si e Ge)

Carga e Força eléctrica
Lei de Coulomb



$\vec{F}_{12}$ - força que q_1 exerce sobre q_2

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{\vec{r}}_{12} \tag{4}$$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}$ - permissividade eléctrica do vácuo

ε_r - permissividade relativa do meio

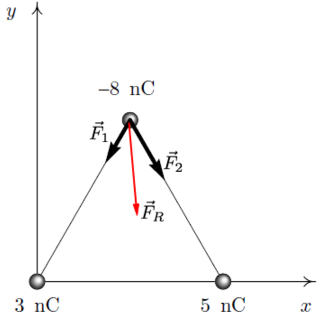
A força electrostática é a força entre duas partículas carregadas.

No caso de existirem muitas cargas $(q_1, q_2, q_3, ..., q_N)$, a força resultante que a j-ésima carga sente pela presença de outras, determina-se usando o princípio de superposição:

$$\vec{F}_j = \sum_{i\neq j}\vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i\neq j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}^2}\hat{\vec{r}}_{ij} \tag{5}$$

Exemplo 1

Três partículas com cargas de $3nC$, $5nC$ e $-8nC$ encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de $4mm$ de lado. Determine a força que actua sobre a partícula de carga negativa.

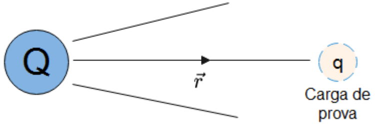


$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$F_1 = 13.5mN$ e $F_2 = 22.5mN$

$$F_x = [-13.5cos(60^o) + 22.5cos(60^o)] \times 10^{-3}$$
$$= 4.5 \times 10^{-3} N$$
$$F_y = [-13.5sin(60^o) - 22.5sin(60^o)] \times 10^{-3}$$
$$= -18\sqrt{3} \times 10^{-3} N$$
$$\vec{F}_R = (4.5\vec{i} - 18\sqrt{3}\vec{j}) \times 10^{-3} N$$

Campo eléctrico



- Definição:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad (6a)$$

- Campo devido a carga pontual:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r \qquad [N/C] \quad (6b)$$

- A carga q ao ser colocada a uma distância $\vec{r}$ sofre acção da força $\vec{F}_{Qq}$;
- $\leadsto$ A carga de prova é usada para testar a existência de campo eléctrico ($\vec{E}$) daí que deve ser menor $(q \longrightarrow 0)$[2]

Campo eléctrico é um formalismo usado para descrever a interação entre partículas carregadas distantes uma das outras (força de acção a distância).

[2] O limite é apenas formal, pois a carga é quantizada e não pode assumir valores menores, em módulo, que a carga elementar

O campo eléctrico criado por uma carga pontual tem uma simetria esférica radial.

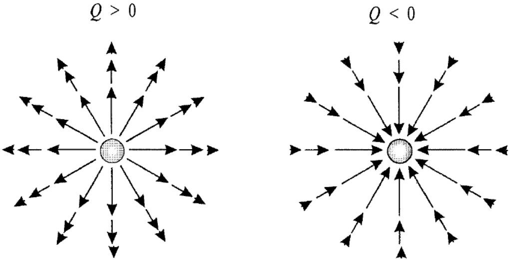
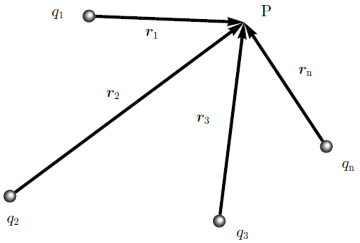


Figura 7:

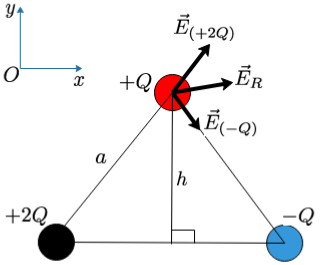
Em caso de muitas cargas discretas usa-se o princípio de superposição:



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\vec{r}}_i \tag{7}$$

Exemplo 2

Determine o campo eléctrico resultante sobre a carga de $+\mathrm{Q}$*, sabendo que as três cargas estão nos vértices de um triângulo equilátero de lado* a*.*



$$\vec{E}_R = \vec{E}_{(-Q)} + \vec{E}_{(+2Q)}$$

$$\vec{E}_{(+2Q)} = k\frac{2Q}{a^2}\left[cos(60^o)\vec{i} + sin(60^o)\vec{j}\right]$$

$$\vec{E}_{(-Q)} = k\frac{Q}{a^2}\left[cos(60^o)\vec{i} - sin(60^o)\vec{j}\right]$$

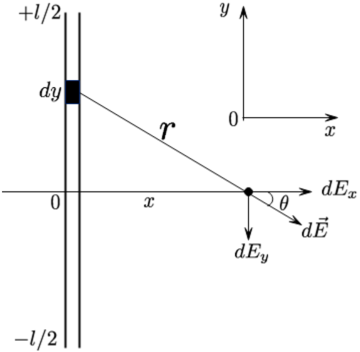
$$\vec{E}_R = \frac{kQ}{2a^2}\left(3\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}\right)\ \mathrm{N/C}$$

Quando a distribuição das cargas é contínua, o campo é determinado tendo-se em consideração o tipo de distribuição da referida carga (λ, σ, ρ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r^2}\hat{\vec{n}} \tag{8}$$

Exemplo 3

Determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ.



Devido a simetria, $E_y = 0$!

$$dE_x = dE cos\theta \Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda dy}{r^2} cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}; \quad dE_x = \frac{k\lambda x dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = k\lambda x \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{2k\lambda l}{x\sqrt{l^2 + \frac{1}{4}x^2}}$$

$$l \to \infty \rightsquigarrow \boxed{E_x = \frac{2k\lambda}{x}}$$

Dipolo é um sistema de duas cargas de mesma magnitude mas de sinais opostos separados por uma distância relativamente menor.

Na natureza existe dois tipos de dipolos:

- Dipolo permanente
  - Aparece nas moléculas polares (ex. àgua) nas quais não há coincidência entre os centros geométricos das cargas positivas e das cargas negativas.
- Dipolo induzido
  - Surge durante o processo de polarização induzida

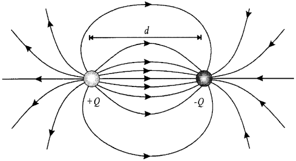
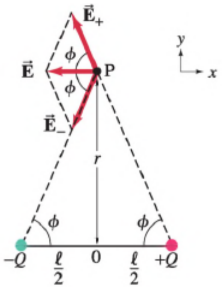


Figura 8: Linhas de campo de um dipolo



$$\begin{aligned}
\vec{E}_R &= \vec{E}_{(+Q)} + \vec{E}_{(-Q)} \wedge |Q_+| = |Q_-| \\
\vec{E}_R &= -2k\frac{Q}{(r^2+\ell^2/4)}cos(\phi)\vec{i} \\
\vec{E}_R &= -2k\frac{Q}{(r^2+\ell^2/4)} \cdot \frac{\ell}{2\sqrt{r^2+\ell^2/4}}\vec{i} \\
\vec{E}_R &= -k\frac{Q\ell}{(r^2+\ell^2/4)^{3/2}}\vec{i}
\end{aligned} \tag{9}$$

A magnitude $\boxed{Q\ell = p}$ denomina-se momento dipolar. Para grandes distâncias, $r \gg \ell$, o campo criado pelo dipolo eléctrico no plano perpendicular é:

$$\vec{E}_{\text{dipolo}} \equiv \vec{E}_R = -k\frac{\vec{p}}{r^3} \tag{9a}$$

Ao longo do eixo do dipolo tem-se:

$$\vec{E}_{\text{dipolo}} = 2k\frac{\vec{p}}{r^3} \tag{10}$$

Dipolo no seio de um campo eléctrico externo

Quando o dipolo eléctrico é colocado no seio de um campo não uniforme, as forças que actuam nas cargas não são as mesmas. Assim, o dipolo será sujeito a um torque.

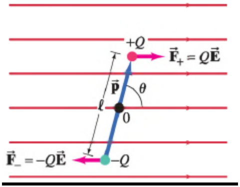


Figura 9: Dipolo no seio de campo $\vec{E}$

$$\tau = QE\frac{\ell}{2}sin\theta + QE\frac{\ell}{2}sin\theta = pEsin\theta \tag{11a}$$

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} \tag{11b}$$

Você já imaginou como é que aquecemos alimentos usando microondas?

1. Aceleração das partículas

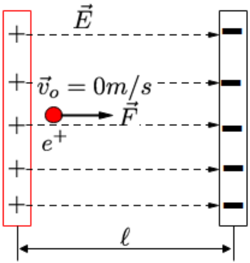


Figura 10:

Aceleração:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \qquad (12a)$$

$$\ell = \frac{1}{2}at^2$$
$$v_f = at \qquad (12b)$$
$$v_f^2 = 2a\ell = 2\frac{qE}{m}\ell$$

Aqui conseguimos determinar a velocidade final da partícula após ter sido acelerado pelo campo electrico uniforme. A força de gravidade é tão menor que o seu impacto é praticamente desprezível.

2. A carga entra no seio de campo com $\vec{v}_o \neq 0$

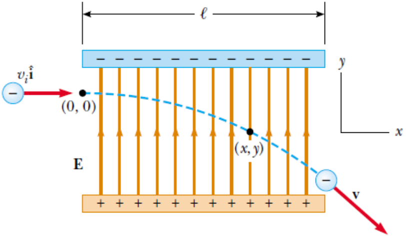


Figura 11:

$$
\begin{aligned}
v_x &= v_o x = const.\\
x_f &= v_{ox} t\\
v_{oy} &= 0\\
v_y &= a_y t = -\frac{qE}{m} t\\
y_f &= \frac{1}{2} a_y t^2 = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m} t^2
\end{aligned} \tag{13a}
$$

Você já pensou na aplicação disto?

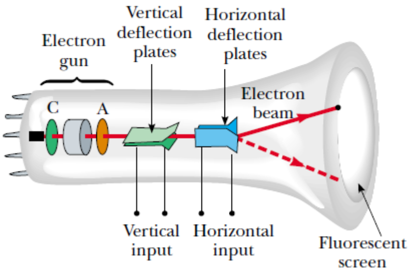


Figura 12: Tubos de raios catódicos

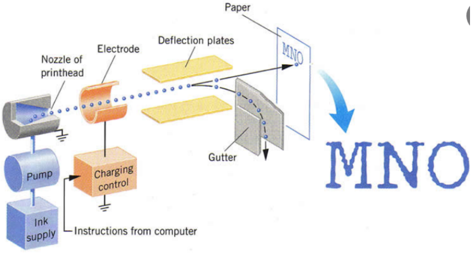


Figura 13: Impressora/Fotocopiadora

Voltaremos a tratar este assunto, adicionando o efeito do campo magnético!

A determinação do campo eléctrico usando a lei de Coulomb é em alguns casos difícil e/ou trabalhoso (conforme se vê no Exemplo 3)

Quando a distribuição das cargas apresenta uma simetria, é mais fácil determinar-se o campo eléctrico usando-se a lei de Gauss.

A lei de Gauss estabelece uma relação entre o fluxo de campo elétrico (ϕ_E) através de uma superfície fechada e as cargas que estão no interior dessa superfície.

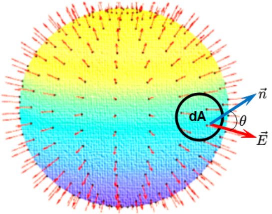


Figura 14: Fluxo do campo eléctrico em uma superfície esférica fechada

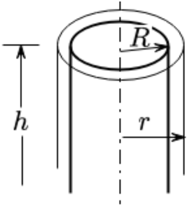
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \tag{14a}$$

Recorrendo-se ao teorema de Gauss $\boxed{\oint_S \vec{a} d\vec{S} = \int_V div \vec{a} dV}$, a lei de Gauss para o campo eléctrico fica:

$$div \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \tag{14b}$$

Exemplo 4

Recorrendo-se a lei de Gauss, determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ.



$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

Condutor: $E|_{r<R} = 0$

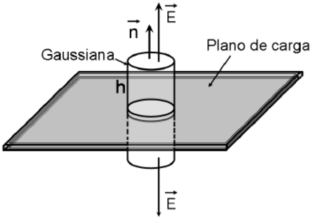
$\underline{r > R}$

$$\int_0^r E2\pi h dr = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^h \lambda dl$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi}\frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{2k\lambda}{r}}$$

Exemplo 5

Determine o campo eléctrico a uma altura h *de um plano com densidade superficial de carga* σ



$$\phi_E = \oint_S \vec{E}d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = \int_{S_{sup}} EdS + \int_{S_{inf}} EdS + \int_{S_{lat}} EdS$$

$$\oint_S \vec{E}d\vec{S} = 2ES + 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

O campo é constante e independente da distância até ao plano da carga!

Este resultado voltaremos a usar para os capacitores de placas paralelas.