

AP#02: Noções de electromagnetismo

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Instituto Superior de Ciências de Saúde (ISCISA)

(Aulas preparadas para estudantes de Radiologia)

27 de Janeiro de 2022

Conteúdos

- 1 Carga e força eléctrica
- 2 Campo eléctrico
- 3 Energia e potencial eléctrico
- 4 Resistência e corrente eléctrica
- 5 Magnetismo
 - Imã permanente - Fontes de campo magnético
 - Lei de Biot-Savart
 - Força magnética sobre uma carga puntiforme: Força de Lorentz

Carga e força eléctrica

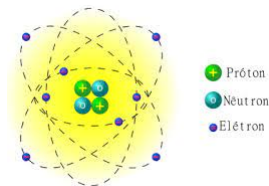


Figura 1: Modelo atómico

- Carga eléctrica é medida quantitativa de interação electromagnética.
- protão ($+e$)
- electrão ($-e$)
 $e = 1.6 \times 10^{-19}C$ (e^- - carga elementar)
- A unidade de carga eléctrica é Coulomb (C)

Lei de conservação da carga eléctrica

A carga eléctrica total em um sistema isolado, i.é., a soma algébrica de cargas negativas e positivas existente em certo instante, nunca varia.

Quantização da carga eléctrica

As carga eléctricas que temos na natureza são somente múltiplos inteiros da carga elementar.

$$Q = Ne \quad (1)$$

$$N = 1, 2, 3, \dots$$

Carga e força eléctrica

Densidade de carga eléctrica

Embora a carga seja quantizada e associada a partículas discretas, ela é frequentemente considerada como estando distribuída de uma forma contínua no espaço (principalmente quando existem muitas cargas).

Existem três tipos de densidades:

- ① Densidade linear:

$$\lambda = \frac{dq}{dl} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{Q}{l} \quad [C/m] \quad (2a)$$

- ② Densidade superficial:

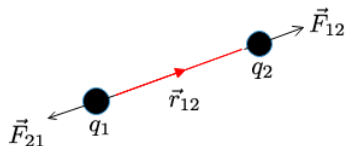
$$\sigma = \frac{dq}{dA} \quad \text{ou} \quad \sigma = \frac{Q}{A} \quad [C/m^2] \quad (2b)$$

- ③ Densidade Volumétrica:

$$\rho = \frac{dq}{dV} \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{Q}{V} \quad [C/m^3] \quad (2c)$$

Carga e força eléctrica

Lei de Coulomb



\vec{F}_{12} - força que q_1 exerce sobre q_2

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (3)$$

$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ - permissividade eléctrica do vácuo

ϵ_r - permissividade relativa do meio

Tabela 1: Permissividades relativas

| Material | Água | Lípidos | Proteínas | ar | vácuo |
|--------------|------|---------|-----------|---------|-------|
| ϵ_r | 80 | 2.5 | 10 | 1,00059 | 1.0 |

A força eléctrica pode ser atrativa (para cargas de \neq sinais) ou repulsiva (para cargas de $=$ sinais)!

Carga e força eléctrica

Exemplo 1

No átomo de hidrogênio, a distância média entre o elétron e o próton é de aproximadamente 0.5\AA . Calcule a razão entre as atrações columbiana e gravitacional das duas partículas no átomo.

Dados:

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$m_e = 9.12 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$q_p = +e$$

$$q_e = -e$$

$$r_{ep} = 0.5\text{\AA}$$

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$$

$$\frac{F_e}{F_g} - ?$$

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{|q_p||q_e|}{r_{ep}^2}$$

$$F_g = G \frac{m_p \times m_e}{r_{ep}^2}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.27 \times 10^{37}$$

Repare que $F_e \gg F_g$

Princípio de superposição

A força electrostática é a força entre duas partículas carregadas. Porém, uma partícula carregada pode estar no seio de muitas outras cargas, pelo que, é necessário saber-se como determinar a força que a mesma sente pela presença dessas cargas.

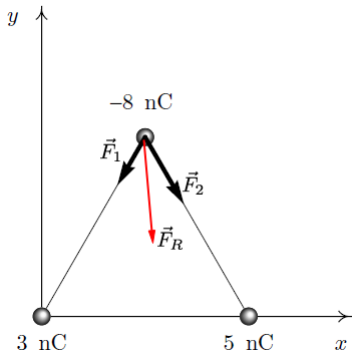
Se existem N cargas $(q_1, q_2, q_3, \dots, q_N)$, então a força resultante que a carga j sente pela presença de outras é:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j}^{N-1} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{r}_{ij} \quad (4)$$

Carga e força eléctrica

Exemplo 2

Três partículas com cargas de 3nC , 5nC e -8nC encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de 4mm de lado. Determine a força que atua sobre a partícula de carga negativa.



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$F_1 = 13.5\text{mN}$$

$$F_2 = 22.5\text{mN}$$

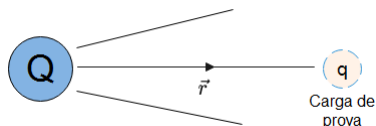
$$\begin{aligned} F_x &= (-13.5\cos(60) + 22.5\cos(60)) \times 10^{-3} \\ &= 4.5 \times 10^{-3}\text{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_y &= (-13.5\sin(60) - 22.5\sin(60)) \times 10^{-3} \\ &= -18\sqrt{3} \times 10^{-3}\text{N} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_R = (4.5\vec{i} - 18\sqrt{3}\vec{j}) \times 10^{-3}\text{N}$$

CAMPO ELÉCTRICO (ELECTROSTÁTICA)

Campo eléctrico



- Definição:

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} \quad (5a)$$

- Campo devido a carga pontual:

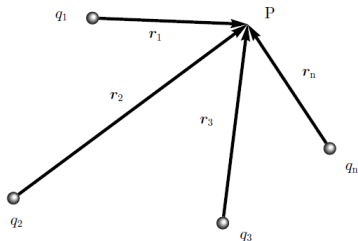
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r \quad [N/C] \quad (5b)$$

- A carga q ao ser colocada a uma distância \vec{r} sofre acção da força \vec{F}_{Qq} ;
- \rightsquigarrow A carga de prova é usada para testar a existência de campo eléctrico (\vec{E}) daí que deve ser menor ($q \rightarrow 0$)

Campo eléctrico é um formalismo usado para descrever a interação entre partículas carregadas distantes uma das outras (força de acção a distância).

Campo eléctrico

Em caso de muitas cargas discretas usa-se o **princípio de superposição**:



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (6)$$

Quando a distribuição das cargas é contínua, o campo é determinado tendo-se em consideração o tipo de distribuição da referida carga (λ, σ, ρ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{n} \quad (7)$$

Campo eléctrico

Qual é o sentido do campo eléctrico ?

Campo eléctrico é um vector polar que aponta radialmente para fora ou directamente para a carga quando a carga é positiva ou negativa, respectivamente.

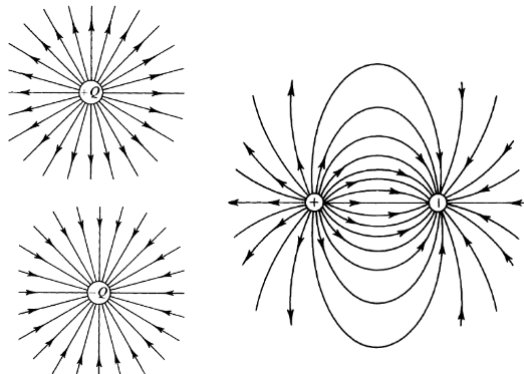
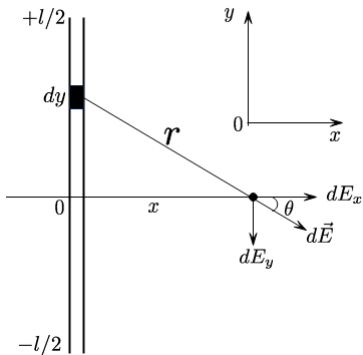


Figura 2: linhas de campo eléctrico

Lei de Gauss para o campo eléctrico

Exemplo 3

Determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ .



$$dE_x = dE \cos \theta \Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda dy}{r^2} \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}; \quad dE_x = \frac{k\lambda x dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = k\lambda x \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{2k\lambda l}{x \sqrt{l^2 + \frac{1}{4}x^2}}$$

$$l \rightarrow \infty \rightsquigarrow \boxed{E_x = \frac{2k\lambda}{x}}$$

Devido a simetria, $E_y = 0!$

Lei de Gauss para o campo eléctrico

A determinação do campo eléctrico usando a lei de Coulomb é em alguns casos difícil e/ou trabalhoso (conforme se vê no [Exemplo 3](#))

Quando a distribuição das cargas apresenta uma simetria, é mais fácil determinar-se o campo eléctrico usando-se a [lei de Gauss](#).

A lei de Gauss estabelece uma relação entre o fluxo de campo eléctrico (ϕ_E) através de uma superfície fechada e as cargas que estão no interior dessa superfície.

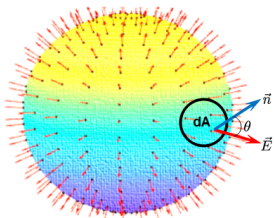


Figura 3: Fluxo do campo eléctrico em uma superfície esférica fechada

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad (8a)$$

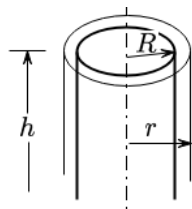
Na forma diferencial, a lei de Gauss para o campo eléctrico fica:

$$\nabla \times \vec{E} \equiv \text{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (8b)$$

Lei de Gauss para o campo eléctrico

Exemplo 4

Recorrendo-se a lei de Gauss, determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ .



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

Condutor: $E|_{r < R} = 0$

$r > R$

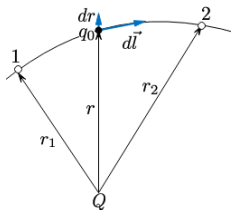
$$\int_0^r E 2\pi h dr = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^h \lambda dl$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{\epsilon_0 2\pi} \frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{2k\lambda}{r}}$$

ENERGIA E POTENCIAL ELÉCTRICO

Energia e potencial eléctrico

- ✓ A carga Q cria \vec{E} a sua volta
- ✓ Quando a carga q_0 é colocada no seio do campo, sente acção da força $\vec{F} = q_0\vec{E}$ e desloca-se de um ponto para outro ($1 \rightarrow 2$).
- ✓ Há realização de trabalho sobre q_0 !



- ✓ W_{12} da eq.9 não depende da trajectória;
- ✓ \vec{F} e \vec{E} são conservativos!

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 F dr$$

$$W_{12} = q_0 \int_1^2 E dr \Rightarrow W_{12} = q_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_1^2 \frac{Q}{r^2} dr$$

$$W_{12} = \frac{Qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (9)$$

Energia e potencial eléctrico

Para campos conservativos :

$$W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U \quad (U - \text{energia potencial}) \quad (10)$$

Assim,

$$\frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \quad (11a)$$

$$\underbrace{\Delta \left(\frac{U}{q} \right)}_{\varphi} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \implies \Delta \varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \quad (11b)$$

Deste modo, **potencial eléctrico** (φ) é a energia por unidade de carga. Esta, expressa a capacidade que um corpo energizado tem de realizar trabalho, i.é., atrair ou repelir cargas.

Escolhe - se ($\varphi|_{r \rightarrow \infty} = 0$)

$$\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{r} \quad [\text{Volt}] \quad (11c)$$

Energia e potencial eléctrico

Na prática o que se mede é a diferença de potencial ($\Delta\varphi \equiv V \equiv ddp$)

Quando se conhece o potencial eléctrico em um dado ponto pode-se determinar a magnitude do campo eléctrico com base na seguinte expressão:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \equiv -grad\varphi \quad (12)$$

$$\nabla \equiv \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cartesianas} \\ \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{u}_\phi + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cilíndricas} \\ \frac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\vec{u}_\phi & \text{Coordenadas esféricas} \end{cases}$$

Exemplo 5

Determine o potencial eléctrico criado por uma carga pontual q em um dado ponto r do espaço.

$$\begin{aligned}\int_{\infty}^r d\varphi &= - \int_{\infty}^r E dr \Rightarrow \int_{\infty}^r d\varphi = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} \\ \varphi(r) - \varphi(\infty) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) \\ \varphi(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}\end{aligned}\tag{13}$$

Em caso de várias cargas distribuídas, usa-se o princípio de superposição:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (\text{dist. discreta}) \quad (14a)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\ell} \frac{\lambda}{r_i} d\ell \quad (\text{dist. linear}) \quad (14b)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma}{r_i} ds \quad (\text{dist. superficial}) \quad (14c)$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r_i} dV \quad (\text{dist. volumétrica}) \quad (14d)$$

Superfícies equipotenciais

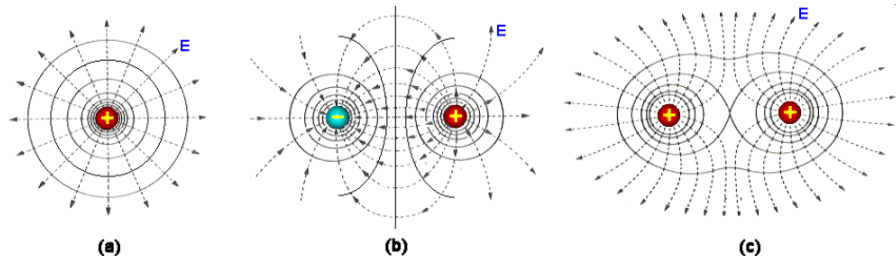


Figura 4: Superfícies equipotenciais e linhas de campo para diferentes distribuições de carga; (a) carga pontual; (b) dipolo eléctrico; (c) monopolo de duas cargas positivas

RESISTÊNCIA E CORRENTE ELÉCTRICA

Resistência e corrente eléctrica

Quando acendemos a luz, conectamos o filamento de uma lâmpada a uma ddp , ocorre o fluxo de cargas eléctricas pelos fios condutores.

✓ Corrente eléctrica é a quantidade de cargas que passam (movimento ordenado) por uma secção transversal de um condutor por unidade de tempo.

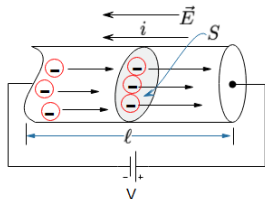


Figura 5: fio condutor

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad (15)$$

A unidade da corrente eléctrica no SI é Ampere (A)

- O movimento de deriva dos portadores de cargas livres é devido a existência de força eléctrica ($q\vec{E}$).
- Em equilíbrio electrostático, $\vec{E}_{r < R} = 0 \rightsquigarrow i = 0A$

Resistência e corrente eléctrica

- ✓ Resistência eléctrica é a oposição que um material oferece quanto à passagem da corrente eléctrica.
- ✓ Em alguns materiais, mesmo variando-se a ddp nos seus terminais, a resistência mantém-se constante \rightsquigarrow **Resistores óhmicos !**

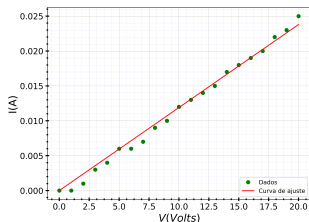


Figura 6: Resistência óhmica

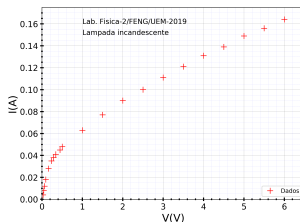


Figura 7: Resistência não óhmica

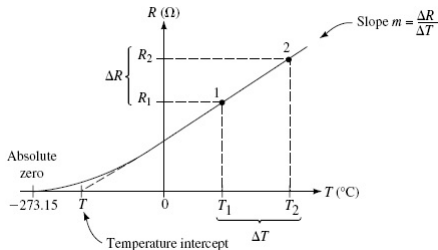
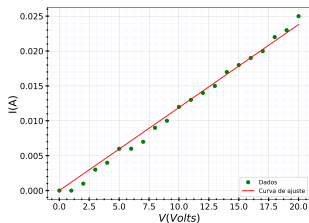
Resistores óhmicos obedecem a lei de Ohm:

$$V = Ri \quad (\Omega) \quad (16)$$

Resistência e corrente eléctrica

A resistência de um resistor não só depende do tipo de material que o constitui mas também depende de outros factores externos.

$$R = R(\rho, l, S, T)$$



$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (17)$$

$$R(T) = R_0 [1 + \alpha (T - T_0)] \quad (18)$$

ρ - resistividade em Ωm ; l - comprimento do fio e S - secção transversal do fio condutor; T_0 - Temperatura de referência em $^{\circ}\text{C}$; R_0 - resistência a temperatura de referência e α - coeficiente térmico da resistência eléctrica

Resistência e corrente eléctrica

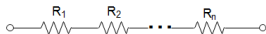


- Para que servem os resístores ?
- Tem resístores no corpo humano ?
- Há corrente eléctrica no corpo humano?



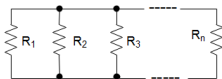
Resistência e corrente eléctrica - Associação de resistores

Série



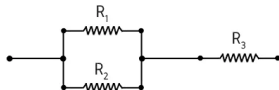
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

Paralelo

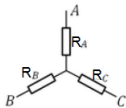
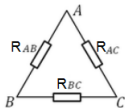


$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

Mista



$$R_{eq} = R1 // R2 + R3$$



$$\Delta \longrightarrow Y : R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$Y \longrightarrow \Delta : R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C}$$

$\Delta \longrightarrow Y$: altera só no numerador \rightsquigarrow produto de resistências adjacentes;

$Y \longrightarrow \Delta$: altera só no denominador \rightsquigarrow fica a resistência oposta

MAGNETISMO

Magnetismo: Ímã permanente - Fontes de campo magnético



Figura 8: Magnetita (Fe_3O_4)

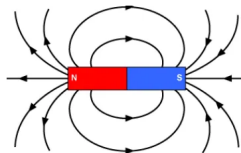


Figura 9: linhas de indução magnética do ímã

- **Magnetita** é um ímã permanente que atrai pequenos fragmentos de ferro.

Qual é o ente físico responsável por essa interação e como é que surge?

- A interação ocorre por meio do campo \rightsquigarrow **Campo magnético** (\vec{B})
- (\vec{B}) do ímã permanente é devido às correntes microscópicas de elétrons que orbitam os núcleos e ao magnetismo intrínseco das partículas fundamentais do material.

Podemos ter polos magnéticos (S e N) separados?

- Monopolos magnéticos ainda não foram descobertos! $\rightsquigarrow \text{div} \vec{B} = 0$ (\vec{B} tem

Magnetismo: Lei de Biot-Savart

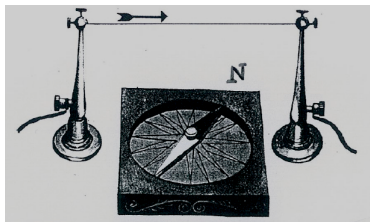


Figura 10: Experiência de Ørsted

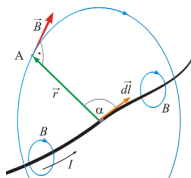


Figura 11:

- Sempre que se tem corrente eléctrica, a volta do respectivo fio tem-se um \vec{B} (Experiência de Ørsted);

Qual é o campo (\vec{B}) a volta do fio com corrente eléctrica?

- Lei de Biot-Savart

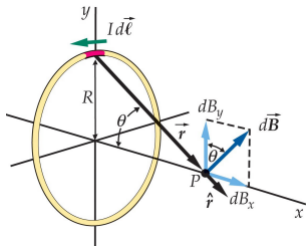
$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \quad (19)$$

Onde, μ_o é a permeabilidade magnética no vácuo ($\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$), e \hat{r} é o vector unitário do $Id\vec{\ell}$ até ao ponto de medição do \vec{B} . ($1\text{H/m} = 1\text{N/A}^2$)

Magnetismo: Lei de Biot-Savart

Exemplo 6

Determine a indução magnética no centro de uma espira circular que através dela passa uma corrente eléctrica I .



$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{Id\ell \sin\theta}{r^2}$$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^R \frac{RI d\ell}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

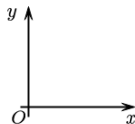
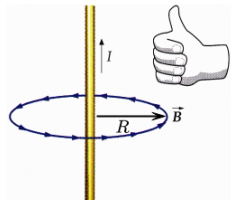
No centro da espira ($x = 0$):

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I}{R}$$

Magnetismo: Lei de Biot-Savart

Exemplo 7

Determine a indução magnética a uma distância x de um fio condutor infinito que através dele passa uma corrente eléctrica I .



$$B(x) = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\ell I}{x\sqrt{4x^2 + \ell^2}}$$

Para um fio muito longo ($\ell \rightarrow \infty$):

$$B(x) = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$$

Magnetismo- Força magnética sobre uma carga puntiforme: Força de Lorentz

Quando uma partícula carregada, com carga Q , e com uma velocidade v entra no seio de um campo magnético, ela sente acção de uma força magnética:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \quad (20)$$

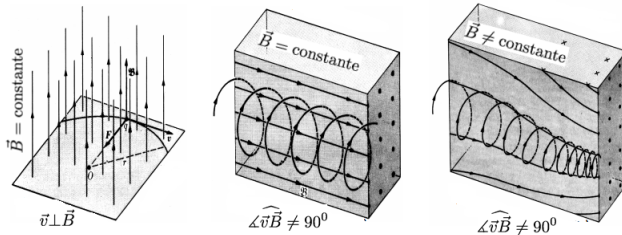


Figura 12:

Magnetismo- Força magnética sobre uma carga puntiforme: Força de Lorentz

- ✓ A força magnética modifica a direcção da velocidade, mas não o seu módulo. Não altera a energia cinética da partícula (não realiza trabalho).
- ✓ No caso de a velocidade ser perpendicular a um campo magnético uniforme, a partícula descreve uma órbita circular, caso contrário terá um movimento helicoidal.

Se para além de \vec{B} existe também um campo eléctrico \vec{E} , então a força que age sobre a partícula carregada é a combinação de eléctrica e magnética, e denomina-se *força de Lorentz*:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (22)$$

Usando-se os campos eléctricos e magnéticos consegue-se guiar partículas carregadas.

Fim da Aula!