AP#02: Noções de electromagnetismo

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Instituto Superior de Ciências de Saúde (ISCISA)

`(Aulas preparadas para estudantes de Radiologia)`

10 de Janeiro de 2022

Conteúdos

Carga e força eléctrica

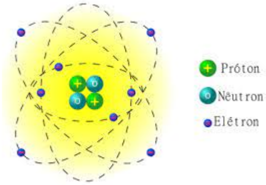


Figura 1: Modelo atómico

- Carga eléctrica é medida quantitativa de interação electromagnética.
- protão $(+e)$
- electrão $(-e)$
  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ (e- carga elementar)
- A unidade de carga eléctrica é Coulomb (C)

Lei de conservação da carga eléctrica

A carga eléctrica total em um sistema isolado, i.é., a soma algébrica de cargas negativas e positivas existente em certo instante, nunca varia.

Quantização da carga eléctrica

As carga eléctricas que temos na natureza são somente múltiplos inteiros da carga elementar.

$$Q = Ne \tag{1}$$

$N = 1, 2, 3, ...$

Densidade de carga eléctrica

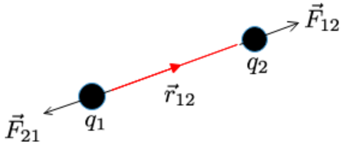
Embora a carga seja quantizada e associada a partículas discretas, ela é frequentimente considerada como estando distribuida de uma forma contínua no espaço (principalmente quando existem muitas cargas).

Existem três tipos de densidades:

1. Densidade linear:
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad \text{ou} \quad \lambda = \frac{Q}{l} \qquad [C/m] \tag{2a}$$
2. Densidade superficial:
$$\sigma = \frac{dq}{dA} \qquad \text{ou} \quad \sigma = \frac{Q}{A} \qquad [C/m^2] \tag{2b}$$
3. Densidade Volumétrica:
$$\rho = \frac{dq}{dV} \qquad \text{ou} \quad \rho = \frac{Q}{V} \qquad [C/m^3] \tag{2c}$$

Carga e força eléctrica

Lei de Coulomb



$\vec{F}_{12}$ - força que q_1 exerce sobre q_2

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{\vec{r}}_{12} \qquad (3)$$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ - permissividade eléctrica do vácuo

ε_r - permissividade relativa do meio

Tabela 1: Permissividades relativas

Material	Água	Lípidos	Proteinas	ar	vácuo
ε_r	80	2.5	10	1,00059	1.0

A força eléctrica pode ser atrativa (para cargas de $\neq$ sinais) ou repulsiva (para cargas de $=$ sinais)!

Exemplo 1

No átomo de hidrogênio, a distância média entre o elétron e o próton é de aproximadamente $0.5\mathring{A}$. *Calcule a razão entre as atrações columbiana e gravitacional das duas partículas no átomo.*

Dados:

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27} kg$$
$$m_e = 9.12 \times 10^{-31} kg$$
$$q_p = +e$$
$$q_e = -e$$
$$r_{ep} = 0.5\mathring{A}$$
$$G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$$
$$\frac{F_e}{F_g} - ?$$

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{|q_p||q_e|}{r_{ep}^2}$$

$$F_g = G \frac{m_p \times m_e}{r_{ep}^2}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.27 \times 10^{37}$$

Repare que $F_e \gg F_g$

Princípio de superposição

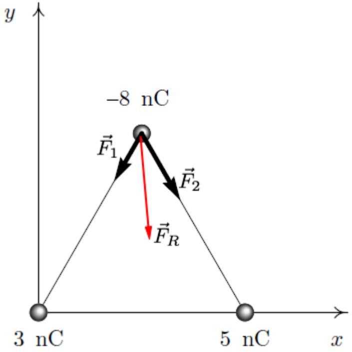
A força electrostática é a força entre duas partículas carregadas. Porém, uma partícula carregada pode estar no seio de muitas outras cargas, pelo que, é necessário saber-se como determinar a força que a mesma sente pela presença dessas cargas.

Se existem N cargas $(q_1, q_2, q_3, ..., q_N)$, entao a força resultante que a carga j sente pela presença de outras é:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{\vec{r}}_{ij} \tag{4}$$

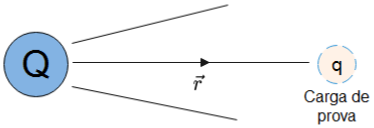
Exemplo 2

Três partículas com cargas de $3nC$, $5nC$ e $8nC$ encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de $4mm$ de lado. Determine a força que atua sobre a partícula de carga negativa.



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$F_1 = 13.3mN$$
$$F_2 = 22.5mN$$
$$F_x = (-13.5cos(60) + 22.5cos(60)) \times 10^{-3}$$
$$= 4.5 \times 10^{-3}N$$
$$F_y = (-13.5sin(60) - 22.5sin(60)) \times 10^{-3}$$
$$= -18\sqrt{3} \times 10^{-3}N$$
$$\vec{F}_R = (4.5\vec{i} - 8\sqrt{3}\vec{j}) \times 10^{-3}N$$

CAMPO ELÉCTRICO (ELECTROSTÁTICA)



- Definição:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad (5a)$$

- Campo devido a carga pontual:

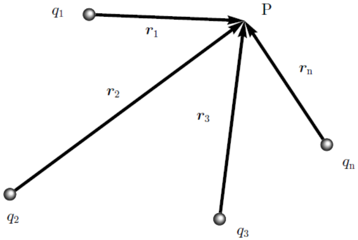
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{Q}{r^2} \hat{e}_r \qquad [N/C] \quad (5b)$$

- A carga q ao ser colocada a uma distância $\vec{r}$ sofre acção da força $\vec{F}_{Qq}$;
- $\rightsquigarrow$ A carga de prova é usada para testar a existência de campo eléctrico ($\vec{E}$) daí que deve ser menor ($q \longrightarrow 0$)

Campo eléctrico é um formalismo usado para descrever a interação entre partículas carregadas distantes uma das outras (força de acção a distânncia).

Campo eléctrico

Em caso de muitas cargas discretas usa-se o princípio de superposição:



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\vec{r}}_i \qquad (6)$$

Quando a distribuição das cargas é contínua, o campo é determinado tendo-se em consideração o tipo de distribuição da referida carga (λ, σ, ρ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\vec{n}} \qquad (7)$$

Qual é o sentido do campo eléctrico ?

Campo eléctrico é um vector polar que aponta radialmente para fora ou directamente para a carga quando a carga é positiva ou negativa, respectivamente.

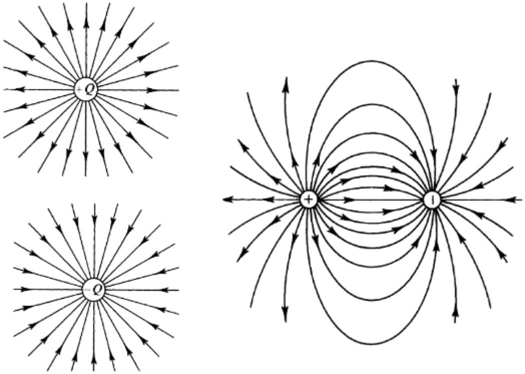
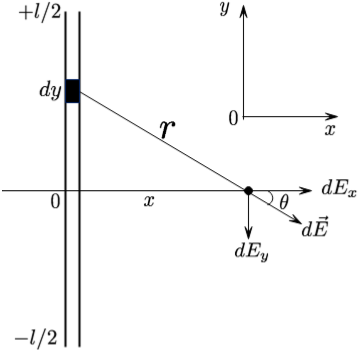


Figura 2: linhas de campo eléctrico

Exemplo 3

Determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ.



$$dE_x = dE cos\theta \Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda dy}{r^2} cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}; \quad dE_x = \frac{k\lambda x dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = k\lambda x \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{2k\lambda l}{x\sqrt{l^2 + \frac{1}{4}x^2}}$$

$$l \to \infty \rightsquigarrow \boxed{E_x = \frac{2k\lambda}{x}}$$

Devido a simetria, $E_y = 0$!

Lei de Gauss para o campo eléctrico

A determinação do campo eléctrico usando a lei de Coulomb é em alguns casos difícil e/ou trabalhoso (conforme se vê no Exemplo 3)

Quando a distribuição das cargas apresenta uma simetria, é mais fácil determinar-se o campo eléctrico usando-se a lei de Gauss.

A lei de Gauss estabelece uma relação entre o fluxo de campo elétrico (ϕ_E) através de uma superfície fechada e as cargas que estão no interior dessa superfície.

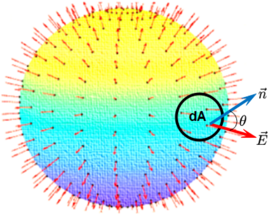


Figura 3: Fluxo do campo eléctrico em uma superfície esférica fechada

$$\phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \qquad (8a)$$

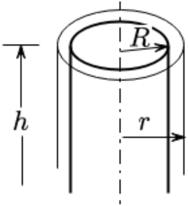
Na forma diferencial, a lei de Gauss para o campo eléctrico fica:

$$\nabla \times \vec{E} \equiv div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho \qquad (8b)$$

Lei de Gauss para o campo eléctrico

Exemplo 4

Recorrendo-se a lei de Gauss, determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ.



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Condutor: $E|_{r<R} = 0$

$\underline{r > R}$

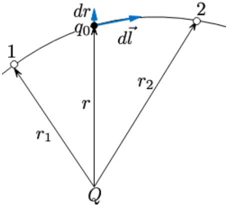
$$\int_0^r E 2\pi h dr = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^h \lambda dl$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi} \frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{2k\lambda}{r}}$$

ENERGIA E POTENCIAL ELÉCTRICO

Energia e potencial eléctrico

✓A carga Q cria $\vec{E}$ a sua volta
✓Quando a carga q_0 é colocada no seio do campo, sente acção da força $\vec{F} = q_0\vec{E}$ e desloca-se de um ponto para outro $(1 \longrightarrow 2)$.
✓Há realização de trabalho sobre q_0!



✓W_{12} da eq.9 não depende da trajectória;
✓$\vec{F}$ e $\vec{E}$ são conservativos!

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F}d\vec{l} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 F dr$$

$$W_{12} = q_0 \int_1^2 E dr \Rightarrow W_{12} = q_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_1^2 \frac{Q}{r^2} dr$$

$$\boxed{W_{12} = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \tag{9}$$

Energia e potencial eléctrico

Para campos conservativos :

$$W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U \qquad (U \text{ - energia potencial}) \tag{10}$$

Assim,

$$\frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \tag{11a}$$

$$\Delta \underbrace{\left(\frac{U}{q}\right)}_{\varphi} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \Longrightarrow \Delta\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \tag{11b}$$

Deste modo, potencial eléctrico (φ) é a energia por unidade de carga. Esta, expressa a capacidade que um corpo energizado tem de realizar trabalho, i.é., atrair ou repelir cargas.

Escolhe - se $(\varphi|_{r \longrightarrow \infty} = 0)$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int\limits_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{r}} \qquad [\text{Volt}] \tag{11c}$$

Energia e potencial eléctrico

Na prática o que se mede é a diferença de potencial ($\Delta\varphi \equiv V \equiv ddp$)

Qundo se conhece o potencial eléctrico em um dado ponto pode-se determinar a magnitude do campo eléctrico com base na seguinte expressão:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \equiv -grad\varphi \tag{12}$$

$$\nabla \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cartesianas} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cilindricas} \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{rsen\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi & \text{Coordenadas esféricas} \end{cases}$$

Exemplo 5

Determine o potencial eléctrico criado por uma carga pontual q em um dado ponto r do espaço.

$$\int_{\infty}^{r} d\varphi = -\int_{\infty}^{r} E dr \Longrightarrow \int_{\infty}^{r} d\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty}\right)$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}} \tag{13}$$

Energia e potencial eléctrico

Em caso de várias cargas distribuidas, usa-se o princípio de superposição:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \text{(dist. discreta)} \tag{14a}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_\ell \frac{\lambda}{r_i} d\ell \qquad \text{(dist. linear)} \tag{14b}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_S \frac{\sigma}{r_i} ds \qquad \text{(dist. superficial)} \tag{14c}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho}{r_i} dV \qquad \text{(dist. volumétrica)} \tag{14d}$$

Superfícies equipotenciais

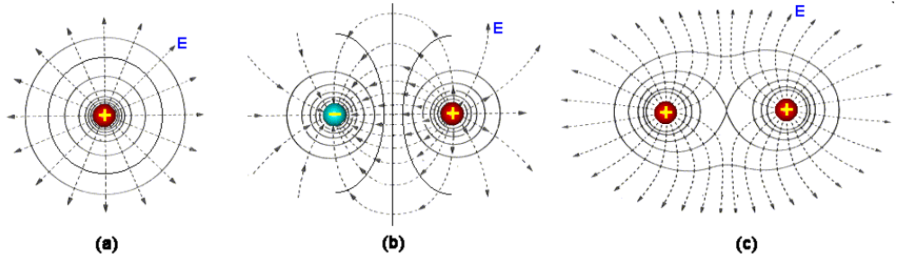


Figura 4: Superfícies equipotenciais e linhas de campo para diferentes distribuições de carga; (a) carga pontual; (b) dipolo eléctrico; (c) monopolo de duas cargas positivas

RESISTÊNCIA E CORRENTE ELÉCTRICA

Resistência e corrente eléctrica

Quando acendemos a luz, conectamos o filamento de uma lâmpada a uma ddp, ocorre o fluxo de cargas eléctricas pelos fios condutores.

✓Corrente eléctrica é a quantidade de cargas que passam (movimento ordenado) por uma secção transversal de um condutor por unidade de tempo.

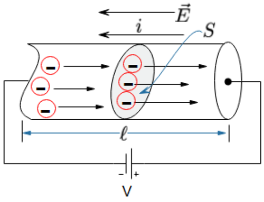


Figura 5: fio condutor

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{15}$$

A unidade da corrente eléctrica no SI é Ampere (A)

- O movimento de deriva dos portadores de cargas lívres é devido a existência de força eléctrica $(q\vec{E})$.
- Em equilíbrio electrostático, $\vec{E}_{r<R} = 0 \rightsquigarrow i = 0A$

Resistência e corrente eléctrica

Para muitos materiais condutores, a corrente depende linearmente da tensão aplicada aos seus terminais. Tais condutores são chamados óhmicos e obedece a seguinte lei de Ohm:

$$V = Ri \tag{16}$$

Onde, R é a resistência eléctrica em Ohm (Ω).

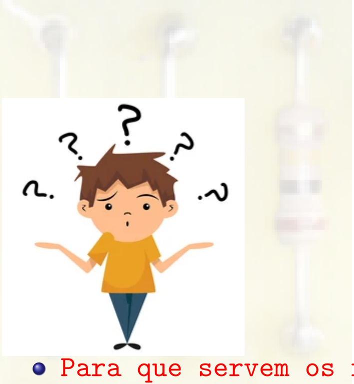
$R = R(\rho, l, S, T)$

$$R = \rho \frac{l}{S} \tag{17}$$

$$R(T) = R_0 \left[1 + \alpha \left(T - T_0\right)\right] \tag{18}$$

ρ - resistividade em Ωm; l – comprimento do fio e S - secção transversal do fio condutor; T_0 - Temperatura de referência em ^oC; R_0 - resitência a temperatura de referência e α - coeficiente térmico da resistência eléctrica

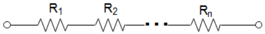
Resistência e corrente eléctrica



- Para que servem os resístores ?
- Tem resítores no corpo humano ?
- Há corrente eléctrica no corpo humano?

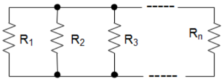
Resistência e corrente eléctrica - Associação de resistores

Série



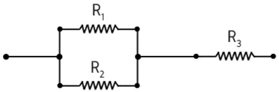
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Paralelo

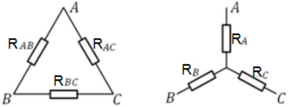


$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Mista



$$R_{eq} = R1//R_2 + R_3$$



$$\triangle \longrightarrow Y : R_A = \frac{R_{AB}R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$Y \longrightarrow \triangle : R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C}$$

$\triangle \longrightarrow Y$: altera só no numerador $\rightsquigarrow$ produto de resistências adjacentes;
$Y \longrightarrow \triangle$: altera só no denominador $\rightsquigarrow$ fica a resistência oposta

MAGNETISMO

Magnetismo