AP#01: Conceitos Introdutórios Fundamentais

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Instituto Superior de Ciências de Saúde (ISCISA)

(Aulas preparadas para estudantes de Radiologia)

6 de Dezembro de 2021

Conteúdos

Funções exponencial e logarítmicas

Função é um meio através do qual se estabelece uma relação entre as grandezas, por meio das suas magnitudes.

Fenómenos (doenças, mudanças climaticas, difusão de substâncias em meios, etc.) evoluem de várias maneiras no decorrer do tempo.

Quando a evolução é descrita por uma função em qua a variável independente encontra-se no expoente, i.é., $f(x) = a^x$, então diz-se que $f(x)$ é exponencial.

Ex: Evolução das mortes devido a influenza na Prussia, Alemanha de 1918 a 1919

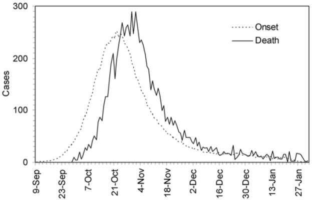


Figura 1: Curva epidémica da influenza na Prussia, 1918-19 [Nishiura, 2007]

Q: Imagine que se conheça $f(x)$ e x. Como determinar a?

Funções exponencial e logarítmicas

Para se determiar a magnitude do expoente usa-se a função logarítmica.

Seja $f(x) \equiv y = a^x$, então, $\boxed{x = \log_a^y}$

Onde, a denomina-se `base` e y é `logaritmando`.

Para que haja unicidade de $\log_a^y$, a e y tem algumas restrições, a saber:

- a (base) é positivo e $\neq 1$
- y (logaritmando) está contido no conjunto dos reais positivos sem zero ($y \in R_+^*$)

Algumas propriedades dos logaritmos:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
3. $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
4. $\log_a b^x = x \log_a b$
5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Funções exponencial e logarítmicas

Existem dois números mais usados como base de funções logaritmicas que são **10** e **e**.

- O logarítmo de base 10 ($\log_{10}$) é usualmente escrito por **lg**, i.é., $\log_{10} b \equiv \lg b$
- O logaritmo de base **e**[1] é chamado logaritmo natural e escreve-se **ln**; $\log_e x \equiv \ln x$

$\lg x = 0.4343 \ln x$ ou $\ln x = 2.3026 \lg x$

[1] e = 2.7183

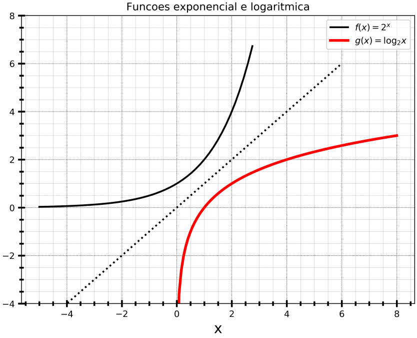


Figura 2: Funções exponecial e logarítmica

Repare que enquanto a função logarítmica cresce lentamente, a função exponencial cresce rapidamente!

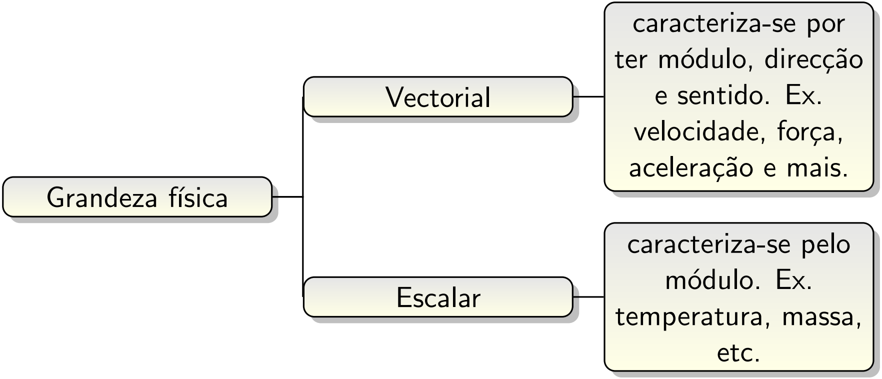
Plote o gráfico de $y = \log_{0.5} x$ para $x \in]0, 8[$

Dependendo de situações, os gráficos cartesianos não são úteis para análise, pelo que, recorre-se à gráficos na escala logarítmica (semi-log ou log-log).

GRANDEZAS FÍSICAS. OPERAÇÕES SOBRE VECTORES

Grandezas físicas (escalares e vectoriais).

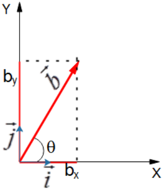
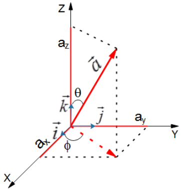
Qualquer propriedade mensurável de um fenómeno, corpo e/ou substância é uma grandeza.



Existem diferentes maneiras de representar vectores dependendo da comodidade de cada autor. Nas nossas sessões usaremos uma **letra minúscula com uma seta em cima**, por ex., $\vec{a}$.

Componentes de vector, módulo e vectores unitários.

As componentes de vector são as suas projecções ao longo dos eixos do sistema de coordenadas.

2D	3D
 $b_x = \vert\vec{b}\vert cos\theta$ $b_y = \vert\vec{b}\vert sin\theta$ $\vert\vec{b}\vert = \sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$	 $a_x = \vert\vec{a}\vert sin\theta cos\phi$ $a_y = \vert\vec{a}\vert sin\theta sin\phi$ $a_z = \vert\vec{a}\vert cos\theta$ $\vert\vec{a}\vert = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

$\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são vectores unitários e $|\vec{a}|$ chama-se módulo do $\vec{a}$.

Operação sobre vectores

Adição e subtração

A adição e subtração de vectores pode-se efectuar mediante dois métodos: Analítico e geométrico.

Analítico

Dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de forma analítica, o vector soma $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ é dado por:

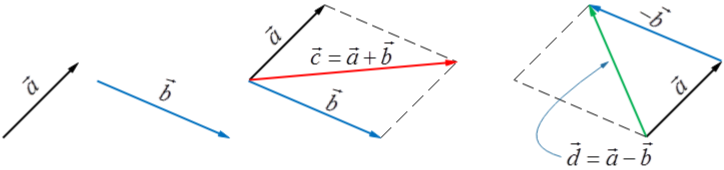
$$\vec{c} = (a_x + b_x)\vec{i} + (a_y + b_y)\vec{j} + (a_z + b_z)\vec{k} \tag{1}$$

e o vector diferença $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ é dado por:

$$\vec{d} = (a_x - b_x)\vec{i} + (a_y - b_y)\vec{j} + (a_z - b_z)\vec{k} \tag{2}$$

Geométrico

Sejam dados dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o vector soma $\vec{c}$ e o vector diferença $\vec{d}$ são expressos conforme se ilustra nos diagramas ii) e iii) respectivamente.



i) Dois vectores ii) Soma iii) Diferença

Operação sobre vectores - Cont.

Produto Escalar

O produto escalar de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})$, é um número definido por:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\vartheta \tag{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{4}$$

Comparando as duas expressões, conclui-se que:

$$cos\vartheta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ - **condição de perpendicularidade**

Operação sobre vectores - Cont.

Produto vectorial

O produto vectorial de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, $(\vec{a} \times \vec{b})$, é um terceiro vector $\vec{c}$ definido por:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| sin\vartheta \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{5}$$

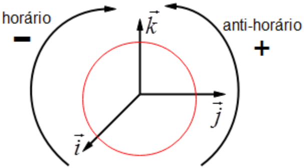
Onde, $\hat{\mathbf{n}}$- vector unitário $\perp$ ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$; ϑ– é o menor ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = 0$ - **condição de paralelismo**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k} \tag{6}$$

Operação sobre vectores - Cont.



$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad ; \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$
$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \quad ; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$
$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad ; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Operação sobre vectores - Cont.

Produto misto

O produto misto (escalar-vectorial) é um escalar cujo módulo equivale ao volume do paralelepípedo formado na base dos três vectores:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \tag{7}$$

Produto duplo

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) \tag{8}$$