AP#02: Noções de electromagnetismo

Bartolomeu Joaquim Ubisse

Instituto Superior de Ciências de Saúde (ISCISA)

(Aulas preparadas para estudantes de Radiologia)

29 de Janeiro de 2022

Conteúdos

Carga e força eléctrica

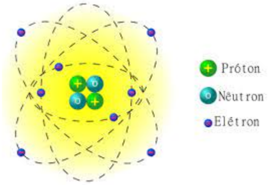


Figura 1: Modelo atómico

- Carga eléctrica é medida quantitativa de interação electromagnética.
- protão $(+e)$
- electrão $(-e)$
  $e = 1.6 \times 10^{-19} C$ (e- carga elementar)
- A unidade de carga eléctrica é Coulomb (C)

Lei de conservação da carga eléctrica

A carga eléctrica total em um sistema isolado, i.é., a soma algébrica de cargas negativas e positivas existente em certo instante, nunca varia.

Quantização da carga eléctrica

As carga eléctricas que temos na natureza são somente múltiplos inteiros da carga elementar.

$$Q = Ne \tag{1}$$

$N = 1, 2, 3, ...$

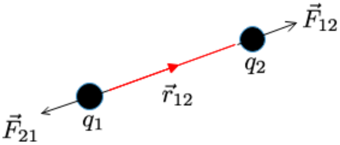
Densidade de carga eléctrica

Embora a carga seja quantizada e associada a partículas discretas, ela é frequentimente considerada como estando distribuida de uma forma contínua no espaço (principalmente quando existem muitas cargas).

Existem três tipos de densidades:

1. Densidade linear:
$$\lambda = \frac{dq}{dl} \qquad \text{ou} \quad \lambda = \frac{Q}{l} \qquad [C/m] \tag{2a}$$
2. Densidade superficial:
$$\sigma = \frac{dq}{dA} \qquad \text{ou} \quad \sigma = \frac{Q}{A} \qquad [C/m^2] \tag{2b}$$
3. Densidade Volumétrica:
$$\rho = \frac{dq}{dV} \qquad \text{ou} \quad \rho = \frac{Q}{V} \qquad [C/m^3] \tag{2c}$$

Lei de Coulomb



$\vec{F}_{12}$ - força que q_1 exerce sobre q_2

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q_1q_2}{r_{12}^2}\hat{\vec{r}}_{12} \qquad (3)$$

$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$ - permissividade eléctrica do vácuo

ε_r - permissividade relativa do meio

Tabela 1: Permissividades relativas

Material	Água	Lípidos	Proteinas	ar	vácuo
ε_r	80	2.5	10	1,00059	1.0

A força eléctrica pode ser atrativa (para cargas de $\neq$ sinais) ou repulsiva (para cargas de $=$ sinais)!

Exemplo 1

No átomo de hidrogênio, a distância média entre o elétron e o próton é de aproximadamente $0.5\mathring{A}$. *Calcule a razão entre as atrações columbiana e gravitacional das duas partículas no átomo.*

Dados:

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27} kg$$
$$m_e = 9.12 \times 10^{-31} kg$$
$$q_p = +e$$
$$q_e = -e$$
$$r_{ep} = 0.5\mathring{A}$$
$$G = 6.67 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$$
$$\frac{F_e}{F_g} - ?$$

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{|q_p||q_e|}{r_{ep}^2}$$
$$F_g = G\frac{m_p \times m_e}{r_{ep}^2}$$
$$\frac{F_e}{F_g} = 2.27 \times 10^{37}$$

Repare que $F_e \gg F_g$

Princípio de superposição

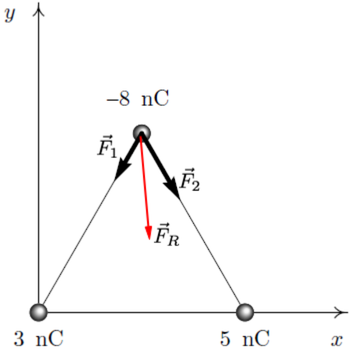
A força electrostática é a força entre duas partículas carregadas. Porém, uma partícula carregada pode estar no seio de muitas outras cargas, pelo que, é necessário saber-se como determinar a força que a mesma sente pela presença dessas cargas.

Se existem N cargas $(q_1, q_2, q_3, ..., q_N)$, entao a força resultante que a carga j sente pela presença de outras é:

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j}^{N-1} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i \neq j}^{N} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{\vec{r}}_{ij} \tag{4}$$

Exemplo 2

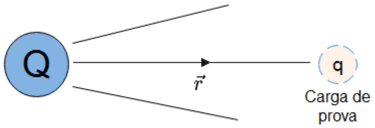
Três partículas com cargas de $3nC$, $5nC$ *e* $-8nC$ *encontram-se nos vértices de um triângulo equilátero de* $4mm$ *de lado. Determine a força que atua sobre a partícula de carga negativa.*



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$F_1 = 13.5mN$$
$$F_2 = 22.5mN$$
$$F_x = (-13.5cos(60) + 22.5cos(60)) \times 10^{-3}$$
$$= 4.5 \times 10^{-3}N$$
$$F_y = (-13.5sin(60) - 22.5sin(60)) \times 10^{-3}$$
$$= -18\sqrt{3} \times 10^{-3}N$$
$$\vec{F}_R = (4.5\vec{i} - 18\sqrt{3}\vec{j}) \times 10^{-3}N$$

CAMPO ELÉCTRICO (ELECTROSTÁTICA)

Campo eléctrico



- Definição:

$$\vec{E} = \lim_{q \to 0} \frac{\vec{F}}{q} \qquad (5a)$$

- Campo devido a carga pontual:

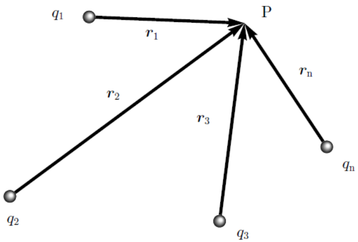
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{Q}{r^2}\hat{e}_r \qquad [N/C] \quad (5b)$$

- A carga q ao ser colocada a uma distância $\vec{r}$ sofre acção da força $\vec{F}_{Qq}$;
- $\rightsquigarrow$ A carga de prova é usada para testar a existência de campo eléctrico ($\vec{E}$) daí que deve ser menor ($q \longrightarrow 0$)

Campo eléctrico é um formalismo usado para descrever a interação entre partículas carregadas distantes uma das outras (força de acção a distânncia).

Campo eléctrico

Em caso de muitas cargas discretas usa-se o princípio de superposição:



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\vec{r}}_i \qquad (6)$$

Quando a distribuição das cargas é contínua, o campo é determinado tendo-se em consideração o tipo de distribuição da referida carga (λ, σ, ρ).

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\vec{n}} \qquad (7)$$

Qual é o sentido do campo eléctrico ?

Campo eléctrico é um vector polar que aponta radialmente para fora ou directamente para a carga quando a carga é positiva ou negativa, respectivamente.

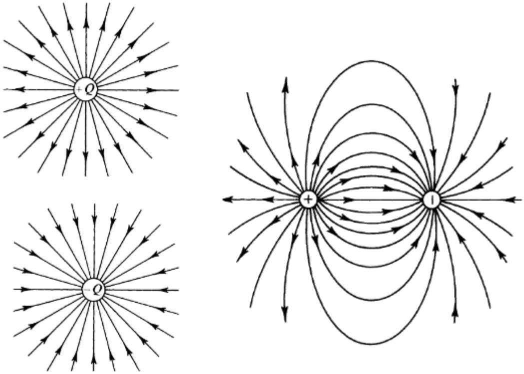
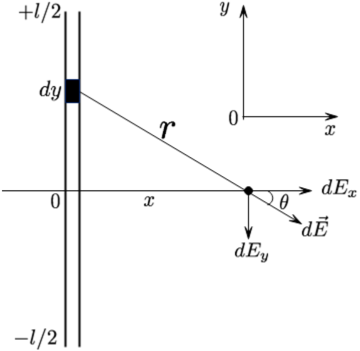


Figura 2: linhas de campo eléctrico

Exemplo 3

Determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ.



$$dE_x = dE cos\theta \Rightarrow dE_x = \frac{k\lambda dy}{r^2} cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}; \quad dE_x = \frac{k\lambda x dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = k\lambda x \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dy}{(y^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$E_x = \frac{2k\lambda l}{x\sqrt{l^2 + \frac{1}{4}x^2}}$$

$$l \to \infty \rightsquigarrow \boxed{E_x = \frac{2k\lambda}{x}}$$

Devido a simetria, $E_y = 0$!

Lei de Gauss para o campo eléctrico

A determinação do campo eléctrico usando a lei de Coulomb é em alguns casos difícil e/ou trabalhoso (conforme se vê no Exemplo 3)

Quando a distribuição das cargas apresenta uma simetria, é mais fácil determinar-se o campo eléctrico usando-se a lei de Gauss.

A lei de Gauss estabelece uma relação entre o fluxo de campo elétrico (ϕ_E) através de uma superfície fechada e as cargas que estão no interior dessa superfície.

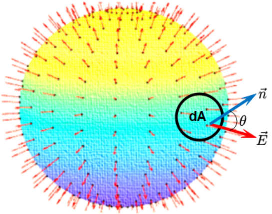


Figura 3: Fluxo do campo eléctrico em uma superfície esférica fechada

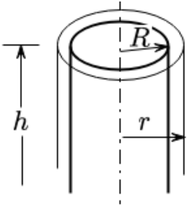
$$\phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \qquad \text{(8a)}$$

Na forma diferencial, a lei de Gauss para o campo eléctrico fica:

$$\nabla \times \vec{E} \equiv div\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \qquad \text{(8b)}$$

Exemplo 4

Recorrendo-se a lei de Gauss, determine o campo eléctrico gerado por um fio condutor infinito com uma densidade uniforme de carga λ.



$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Condutor: $E|_{r<R} = 0$

$\underline{r > R}$

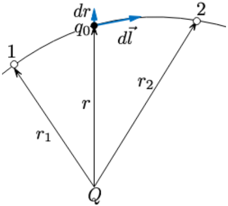
$$\int_0^r E 2\pi h dr = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^h \lambda dl$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{\varepsilon_0 2\pi} \frac{1}{r} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{2k\lambda}{r}}$$

ENERGIA E POTENCIAL ELÉCTRICO

Energia e potencial eléctrico

✓A carga Q cria $\vec{E}$ a sua volta
✓Quando a carga q_0 é colocada no seio do campo, sente acção da força $\vec{F} = q_0\vec{E}$ e desloca-se de um ponto para outro $(1 \longrightarrow 2)$.
✓Há realização de trabalho sobre q_0!



$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} \Rightarrow W_{12} = \int_1^2 F dr$$

$$W_{12} = q_0 \int_1^2 E dr \Rightarrow W_{12} = q_0 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_1^2 \frac{Q}{r^2} dr$$

$$\boxed{W_{12} = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)} \tag{9}$$

✓W_{12} da eq.9 não depende da trajectória;
✓$\vec{F}$ e $\vec{E}$ são conservativos!

Energia e potencial eléctrico

Para campos conservativos :

$$W_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U \qquad (U \text{ - energia potencial}) \tag{10}$$

Assim,

$$\frac{\Delta U}{q} = -\frac{W_{12}}{q} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \tag{11a}$$

$$\Delta \underbrace{\left(\frac{U}{q}\right)}_{\varphi} = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \Longrightarrow \Delta\varphi \equiv \varphi_2 - \varphi_1 = -\int_1^2 \vec{E} d\vec{r} \tag{11b}$$

Deste modo, potencial eléctrico (φ) é a energia por unidade de carga. Esta, expressa a capacidade que um corpo energizado tem de realizar trabalho, i.é., atrair ou repelir cargas.

Escolhe - se $(\varphi|_{r \longrightarrow \infty} = 0)$

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} d\vec{r}} \qquad [\text{Volt}] \tag{11c}$$

Energia e potencial eléctrico

Na prática o que se mede é a diferença de potencial ($\Delta\varphi \equiv V \equiv ddp$)

Qundo se conhece o potencial eléctrico em um dado ponto pode-se determinar a magnitude do campo eléctrico com base na seguinte expressão:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla\varphi \equiv -grad\varphi} \tag{12}$$

$$\nabla \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cartesianas} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k} & \text{Coordenadas cilindricas} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{rsen\theta}\dfrac{\partial}{\partial \phi}\vec{u}_\phi & \text{Coordenadas esféricas} \end{cases}$$

Energia e potencial eléctrico

Exemplo 5

Determine o potencial eléctrico criado por uma carga pontual q em um dado ponto r do espaço.

$$\int_{\infty}^{r} d\varphi = -\int_{\infty}^{r} E dr \Longrightarrow \int_{\infty}^{r} d\varphi = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2}$$

$$\varphi(r) - \varphi(\infty) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right)$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}} \tag{13}$$

Em caso de várias cargas distribuidas, usa-se o princípio de superposição:

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad \text{(dist. discreta)} \tag{14a}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_\ell \frac{\lambda}{r_i} d\ell \qquad \text{(dist. linear)} \tag{14b}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_S \frac{\sigma}{r_i} ds \qquad \text{(dist. superficial)} \tag{14c}$$

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_V \frac{\rho}{r_i} dV \qquad \text{(dist. volumétrica)} \tag{14d}$$

Superfícies equipotenciais

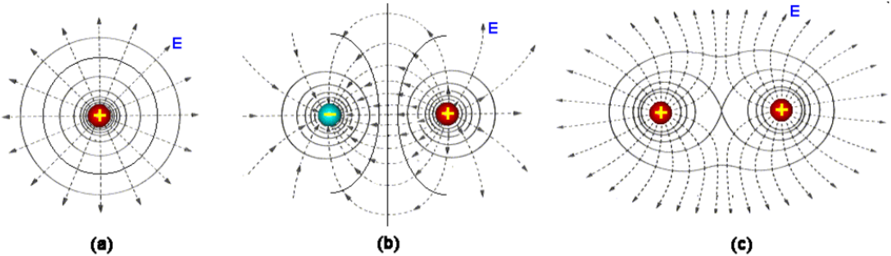


Figura 4: Superfícies equipotenciais e linhas de campo para diferentes distribuições de carga; (a) carga pontual; (b) dipolo eléctrico; (c) monopolo de duas cargas positivas

RESISTÊNCIA E CORRENTE ELÉCTRICA

Resistência e corrente eléctrica

Quando acendemos a luz, conectamos o filamento de uma lâmpada a uma ddp, ocorre o fluxo de cargas eléctricas pelos fios condutores.

✓Corrente eléctrica é a quantidade de cargas que passam (movimento ordenado) por uma secção transversal de um condutor por unidade de tempo.

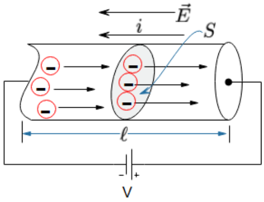


Figura 5: fio condutor

$$i = \frac{dQ}{dt} \tag{15}$$

A unidade da corrente eléctrica no SI é Ampere (A)

- O movimento de deriva dos portadores de cargas lívres é devido a existência de força eléctrica ($q\vec{E}$).
- Em equilíbrio electrostático, $\vec{E}_{r<R} = 0 \rightsquigarrow i = 0A$

Resistência e corrente eléctrica

✓Resistência eléctrica é a oposição que um material oferece quanto à passagem da corrente eléctrica.
✓Em alguns materiais, mesmo variando-se a ddp nos seus terminais, a resistência mantém-se constante $\rightsquigarrow$ Resistores óhmicos !

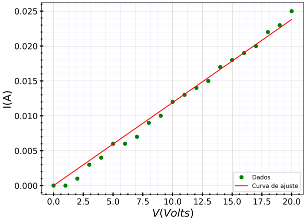


Figura 6: Resistência óhmica

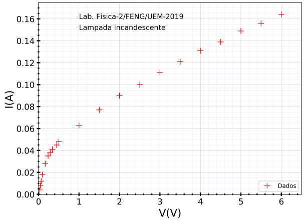


Figura 7: Resistência não óhmica

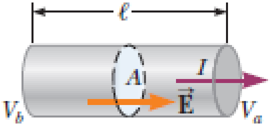
Resístores óhmicos obedecem a lei de Ohm:

$$V = Ri \qquad (\Omega) \tag{16}$$

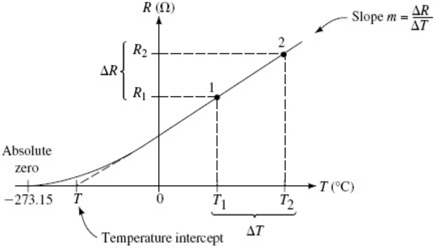
Resistência e corrente eléctrica

A resistência de um resístor não só depende do tipo de material que o constitui mas também depende de outros factores externos.

$R = R(\rho, l, S, T)$



$$R = \rho \frac{l}{S} \qquad (17)$$



$$R(T) = R_0 \left[1 + \alpha \left(T - T_0\right)\right] \qquad (18)$$

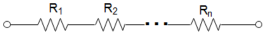
ρ - resistividade em Ωm; l – comprimento do fio e S - secção transversal do fio condutor; T_0 - Temperatura de referência em ^oC; R_0 - resitência a temperatura de referência e α - coeficiente térmico da resistência eléctrica

Resistência e corrente eléctrica

- Para que servem os resístores ?
- Tem resítores no corpo humano ?
- Há corrente eléctrica no corpo humano?

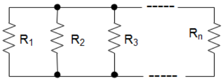
Resistência e corrente eléctrica - Associação de resistores

Série



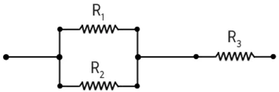
$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Paralelo

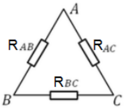


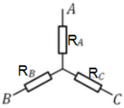
$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}$$

Mista



$$R_{eq} = R1//R_2 + R_3$$





$$\triangle \longrightarrow Y : R_A = \frac{R_{AB} R_{AC}}{R_{AB} + R_{AC} + R_{BC}}$$

$$Y \longrightarrow \triangle : R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_A R_C}{R_C}$$

$\triangle \longrightarrow Y$: altera só no numerador $\rightsquigarrow$ produto de resistências adjacentes;
$Y \longrightarrow \triangle$: altera só no denominador $\rightsquigarrow$ fica a resistência oposta

MAGNETISMO

Magnetismo: Imã permanente - Fontes de campo magnético

Figura 8: Magnetita (Fe_3O_4)

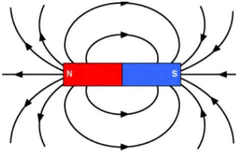


Figura 9:

- Magnetita é um imã permanente que atrai pequenos fragmentos de ferro.

Qual é o ente físico responsável por essa interação e como é que surge?

- ($\vec{B}$) do imã permanente é devido às correntes micoscópicas de electrões que orbitam os núcleos e ao magnetismo intrínsico das partículas fundamentais do material.

Podemos ter polos magnéticos (S e N) separados?

- Monopolos magnéticos aínda não foram descobertos! $\rightsquigarrow div\vec{B} = 0$ ($\vec{B}$ tem carácter rotacional!)

Magnetismo: Lei de Biot-Savart

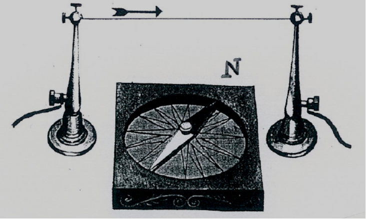


Figura 10: Experiência de Øested

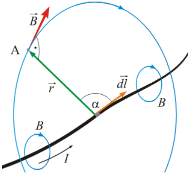


Figura 11:

- Sempre que se tem corrente eléctrica, a volta do respectivo fio tem-se um $\vec{B}$ (Experiência de Øested);

Qual é o campo ($\vec{B}$) a volta do fio com corrente eléctrica?

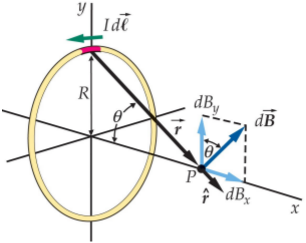
- Lei de Biot-Savart

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{I d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} \tag{19}$$

Onde, μ_o é a permeabilidade magnética no vácuo ($\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$H/m), e $\hat{r}$ é o vector unitário do Idl até ao ponto de medição do $\vec{B}$. (1H/m = 1N/A^2)

Exemplo 6

Determine a indução magnética no cento de uma espira circular que através dela passa uma corrente eléctrica I.



$$\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{Id\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint_{\ell} \frac{Id\ell sin\theta}{r^2} \vec{e}_i$$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{RId\ell}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

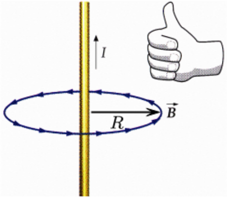
No centro da espira $(x = 0)$:

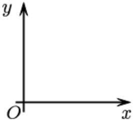
$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{2\pi I}{R}$$

Magnetismo: Lei de Biot-Savart

Exemplo 7

Determine a indução magnética a uma distância x de um fio condutor infinito que através dele passa uma corrente eléctrica I.





$$B(x) = \frac{\mu_o}{2\pi}\frac{\ell I}{x\sqrt{4x^2+\ell^2}}$$

Para um fio muito longo ($\ell \longrightarrow \infty$):

$$B(x) = \frac{\mu_o I}{2\pi x}$$

Magnetismo- Força magnéctica sobre uma carga puntiforme: Força de Lorentz

Quando uma partícula carregada, com carga Q, e com uma velocidade v entra no seio de um campo magnéctico, ela sente acção de uma forca magnética:

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B} \tag{20}$$

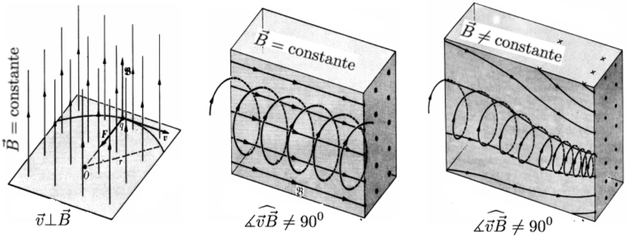


Figura 12:

Magnetismo- Força magnéctica sobre uma carga puntiforme: Força de Lorentz

✓A força magnética modifica a direcção da velocidade, mas não o seu módulo. Não altera a energia cinética da partícula (não realiza trabalho).
✓No caso de a velocidade ser perpendicular a um campo magnético uniforme, a partícula descreve uma órbita circular, caso contrário terá um movimento helicoidal.

Se para além de $\vec{B}$ existe também um campo eléctrico $\vec{E}$, então a força que age sobre a partícula carregada é a combinação de eléctica e magnética, e denomina-se *força de Lorentz*:

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{22}$$

Usando-se os campos eléctricos e magnéticos consegue-se guiar partículas carregadas.

Fim da Aula!