Task 1_1

Входом *Программы P1* являются три целых числа, выходом – одно число. Программа отнимает от первого числа третье и затем прибавляет к полученному второе число. Так получается выходное число. Все вычисления делаются в машинной арифметике в целых числах от -2^{31} до $2^{31} - 1$ (нет вычислений в других типах целых чисел). Сумма и вычитание – это бинарные операции над такими целыми числами, их результаты – такие же числа. Операции не определены для случая переполнения (блок-схема зацикливается при переполнении).

Входы и выходы *Программы P2* те же, что и у *Программа P1*. Ее цель – вычислить то же выражение. Она сравнивает значения входных чисел и выбирает такой порядок суммы и вычитания, чтобы не случилось переполнение всегда, когда лишь результат всего искомого выражения представим данными целыми числами. Попробуйте самостоятельно составить такую программу. Она использует ту же машинную арифметику, что и *Программа P1*.

Требования T1 применимы к программам с тремя входными переменными (назовем их *x1*, *x2*, *x3*) и одной выходной переменной. Домены всех переменных – множество всех целых чисел. Программа должна вычислять значение выражения *x1 + x2 - x3*. Программа не должна зацикливаться или вычислять другое значение, если значения всех входных переменных принадлежат множеству от -2^{31} до $2^{31} - 1$ включительно, а значения выражений *x1 - x3* и *x1 + x2 - x3* представимы в типе указанных выше ограниченных целых чисел.

Требования T2 применимы к программам с тремя входными переменными (назовем их *x1*, *x2*, *x3*) и одной выходной переменной. Домены всех переменных – множество всех целых чисел. Программа вычисляет значение выражения *x1 + x2 - x3*. Программа не должна зацикливаться или вычислять другое значение, если значения всех входных переменных принадлежат множеству от -2^{31} до $2^{31} - 1$ включительно, а значение выражения *x1 + x2 - x3* представимо в типе указанных выше ограниченных целых чисел.

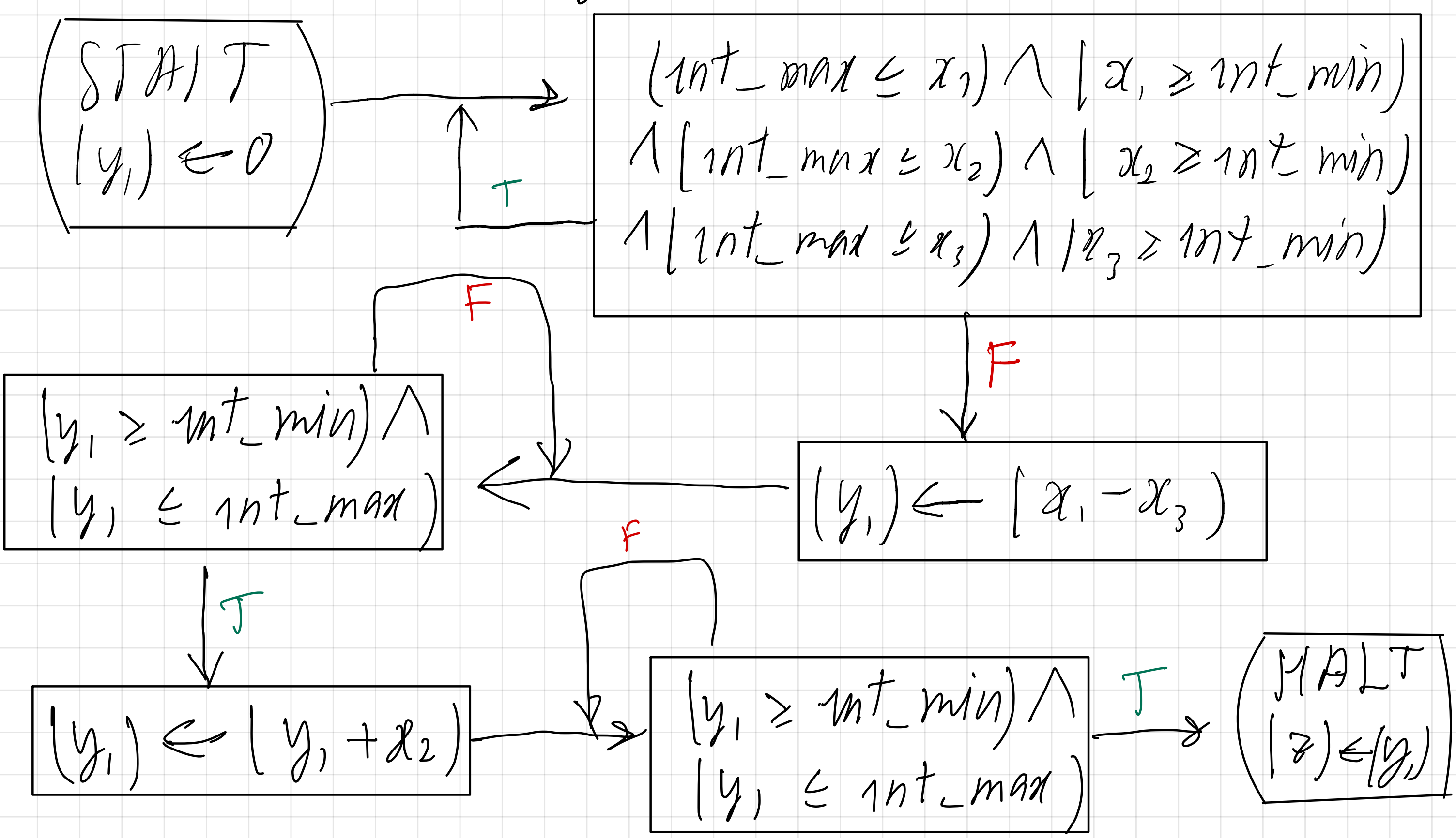
Ниже использованы обозначения:

$$int\_max == 2^{31} - 1$$

$$int\_min == -2^{31}$$

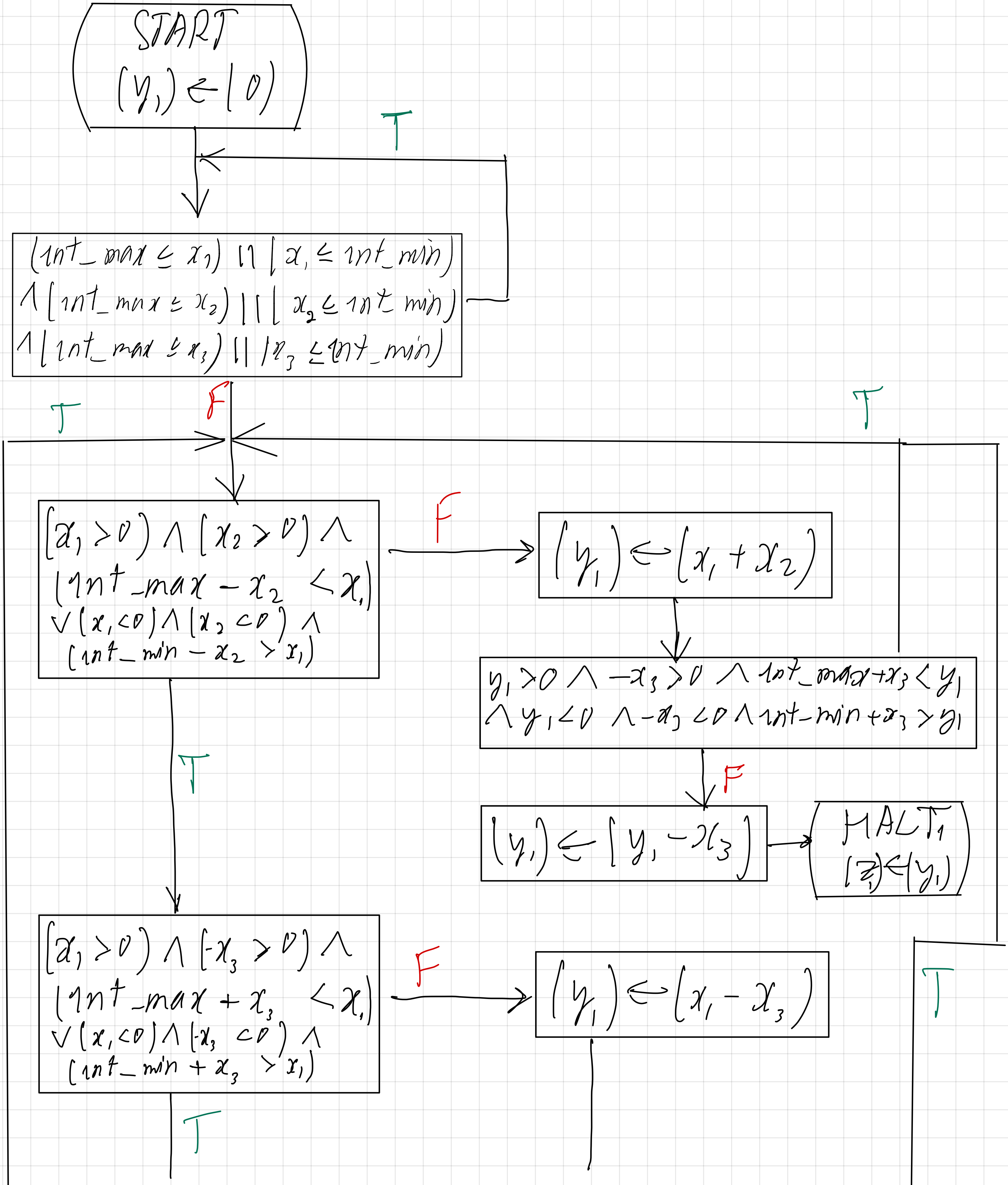
БС (блок-схема) P_1:

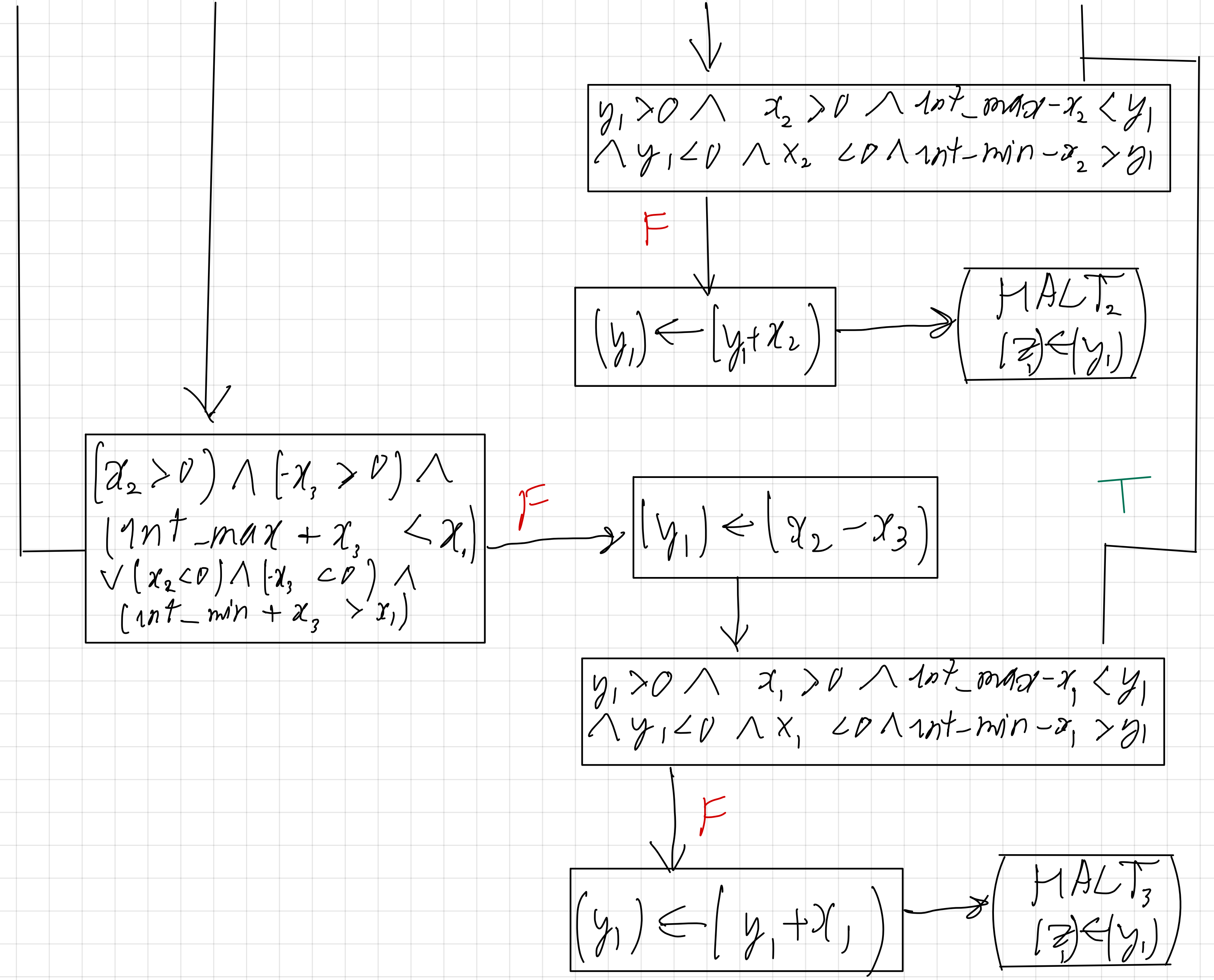
$$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = D_{y_1} = D_{z_1} = \mathbb{Z}$$



БС (блок-схема) P_2 ;

$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = D_{y_1} = D_{z_1} = \mathbb{Z}$





Требования T_1 :

$$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = D_{y_1} = D_{z_1} = \mathbb{Z}$$

$$\varphi_1 \equiv (int\_min \le x_1) \land (x_1 \le int\_max) \land (int\_min \le x_2) \land$$
$$\land (x_2 \le int\_max) \land (int\_min \le x_3) \land (x_3 \le int\_max) \land$$
$$\land (x_1 - x_3 \ge int\_min) \land (x_1 - x_3 \le int\_max) \land$$
$$\land (x_1 + x_2 - x_3 \ge int\_min) \land (x_1 + x_2 - x_3 \le int\_max)$$

$$\psi_1 \equiv z_1 = x_1 + x_2 - x_3$$

Требования T_2:

$$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = D_{y_1} = D_{z_1} = \mathbb{Z}$$

$$\varphi_1 \equiv (int\_min \le x_1) \wedge (x_1 \le int\_max) \wedge (int\_min \le x_2) \wedge$$
$$\wedge (x_2 \le int\_max) \wedge (int\_min \le x_3) \wedge (x_3 \le int\_max) \wedge$$
$$\wedge (x_1 + x_2 - x_3 \ge int\_min) \wedge (x_1 + x_2 - x_3 \le int\_max)$$

$$\psi_1 \equiv z_1 = x_1 + x_2 - x_3$$

Докажем полную корректность используя опр-е полной корректности:

программа P полностью корректна относительно φ и ψ, если
для любого вектора значений входных переменных **x**, такого что $\varphi(\mathbf{x}) = T$, выполнены ограничения $M[P](\mathbf{x}) \neq \omega$ и $\psi(\mathbf{x}, M[P](\mathbf{x})) = T$.

Для P_1:

$$M_1(x) = \begin{cases} h(\bar{x}, \bar{y}), & \text{вычис. конечно} \\ \omega, & \text{вычисл. беск-но} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1, & ((y_1 \geq \text{int\_min}) \wedge (y_1 \leq \text{int\_max})) \\ \omega, & \neg((y_1 \geq \text{int\_min}) \wedge (y_1 \leq \text{int\_max})) \end{cases} \Leftrightarrow$$

(упрощение)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1, & (\text{int\_min} \leq y_1 \leq \text{int\_max}) \\ \omega, & \neg(\text{int\_min} \leq y_1 \leq \text{int\_max}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + x_2, & ((\text{int\_min} \leq y_1 + x_2 \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq y_1 \leq \text{int\_max})) \\ \omega, & \neg((\text{int\_min} \leq y_1 + x_2 \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq y_1 \leq \text{int\_max})) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + x_2, & ((\text{int\_min} \leq x_1 - x_3 + x_2 \leq \text{int\_max}) \wedge \\ & (\text{int\_min} \leq x_1 - x_3 + x_2 \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq x_1 - x_3 \leq \text{int\_max}) \\ & \wedge (\text{int\_min} \leq x_1 \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq x_2 \leq \\ & \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq x_3 \leq \text{int\_max})) \\ \omega, & \neg((\text{int\_min} \leq x_1 - x_3 + x_2 \leq \text{int\_max}) \wedge \\ & (\text{int\_min} \leq x_1 - x_3 + x_2 \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq x_1 - x_3 \leq \text{int\_max}) \\ & \wedge (\text{int\_min} \leq x_1 \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq x_2 \leq \\ & \leq \text{int\_max}) \wedge (\text{int\_min} \leq x_3 \leq \text{int\_max})) \end{cases}$$

$P_1 T_1 : \varphi_1 \wedge M_1(x) \neq \omega \Rightarrow$ верно $\Rightarrow$ п.к. ✓

$P_1 T_2 : \varphi_2 \wedge M_1(x) \neq \omega \Rightarrow$ неверно $\Rightarrow$ ✗

$P_1 T_2 : \varphi_2 \neq \omega \wedge M_1(x) \Rightarrow$ верно $\Rightarrow$ п.к. ✓

Для P_2:

$$\underset{(HALT_3)}{M_2(x)} = \begin{cases} h(\bar{x}, \bar{y}), & \text{вычисл. конечно} \\ \omega, & \text{выч. беск.} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 + x_1, & (y_1 > 0) \wedge (x_1 > 0) \ldots \wedge int\_min - x_1 > 1 \\ \omega, & \neg(\ldots) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 + x_1, & (x_2 > 0) \wedge (-x_3 > 0) \ldots + \\ \omega, & \neg(\ldots) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 + x_1, & (int\_max \leq x_1 \| \ldots) + \\ \omega, & \neg(\ldots) \end{cases}$$

Для $HALT_2$; $HALT_1$ – аналог-но $\Rightarrow$

$$M_2(x) = HALT_3 \wedge HALT_2 \wedge HALT_1$$

$\Rightarrow P_2 T_1 ; \varphi_1 \wedge M_2(x) \neq \omega \Rightarrow$ верно $\Rightarrow$ п.к. ✓

$P_2 T_2 : \varphi_2 \wedge M_2(x) \neq \omega \Rightarrow$ верно $\Rightarrow$ п.к. ✓