

# エントロピー (Entropy)

## 情報量

$P(a)$  を事象  $a$  の発生確率とする. このとき事象  $a$  の (自己) 情報量は以下のように定義される.

$$I(a) = \log \frac{1}{P(a)}$$

情報量の意味は, 珍しいほど情報の価値が高いという考え方をもとにして作られた関数. 発生確率  $P(a)$  について単調減少な関数となっている. 情報量の単位として, 対数の底が 2 のときはビット,  $e$  のときはナット, 10 のときはハートレイと呼ばれる. 今後の議論では, 対数の底が 2 であるとする.

定義域である発生確率は  $0 \leq P(a) \leq 1$  なので, 値域である情報量は  $0 \leq I(a) < \infty$  となる. よって情報量は  $P(a) = 1$  のとき最小値  $I(a) = 0$  をとる.

## エントロピー

事象の集合を事象系  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_J\}$  と呼ぶ. 事象系は各事象の発生確率について以下を満たす.

$$\sum_{j=1}^J P(a_j) = 1$$

事象系  $A$  の各事象が持っている情報量の平均を平均情報量 (エントロピー) と呼び, 以下のように定義する.

$$H(A) = \sum_{j=1}^J P(a_j) I(a_j) = \sum_{j=1}^J P(a_j) \log \frac{1}{P(a_j)}$$

エントロピーは不確かさを表す. または観測者が得る情報量の平均とも考えられる.

## エントロピーの最小値

事象系  $A$  をある事象  $a_i$  の発生確率  $P(a_i)$  が 1 で, それ以外の事象の発生確率が 0 となるような事象系とする. このとき  $A$  のエントロピーが最小になることを示す.  $A$  のエントロピーは以下ようになる.

$$H(A) = -0 \log 0 - \dots - 0 \log 0 - 1 \log 1 - 0 \log 0 - \dots - 0 \log 0 = 0$$

よって  $A$  以外の任意の事象系  $A'$  について  $H(A') \geq 0$  を示す. 事象系の性質より,  $A$  以外の事象系では発生確率が 0, 1 以外の事象が 2 つ以上存在する. そしてその 2 つの事象の情報量は, 0 よりおおきい. また任意の  $a'_j$  について  $P(a'_j)$  は非負なので,  $H(A') \geq 0$  を満たす.

## エントロピーの最大値

事象系  $A$  をすべての事象が均等な発生確率であるような事象系とする。このとき  $A$  のエントロピーが最大になることを示す。 $A$  のエントロピーは以下のようになる。

$$H(A) = \sum_{j=1}^J \frac{1}{J} \log J = \log J$$

よって  $A$  以外の任意の事象系  $A'$  について  $H(A') - \log J \leq 0$  を示す。左辺から、

$$\begin{aligned} H(A') - \log J &= \sum_{j=1}^J P(a'_j) \log \frac{1}{P(a'_j)} - \log J \\ &= \sum_{j=1}^J \left( P(a'_j) \log \frac{1}{P(a'_j)} - \log J \right) \\ &= \sum_{j=1}^J P(a'_j) \log \frac{1}{P(a'_j) \log J} \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^J P(a'_j) \ln \frac{1}{P(a'_j) \log J} \end{aligned}$$

任意の  $0$  より大きい  $x$  について  $\ln x \leq x - 1$  を満たす。よって、

$$\begin{aligned} H(A') - \log J &\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^J P(a'_j) \left( \frac{1}{P(a'_j) \log J} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{\log J} - P(a'_j) \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} (1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

これらのことから  $H(A') - \log J \leq 0$  を示せた。

## 結合エントロピー

### 結合事象

2つの事象系  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_J\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_K\}$  を考える。 $a_j, b_k$  が同時に発生するような事象  $(a_j, b_k)$  を結合事象と呼ぶ。この時の事象系を結合事象系と呼び、 $A$  と  $B$  の直積で表す。

$$A \times B = \{(a_j, b_k) \mid a_j \in A, b_k \in B\}$$

### 結合事象の発生確率

結合事象が発生する確率は、まず  $a_j$  が発生し  $a_j$  が発生した条件のもとで  $b_k$  が発生すると考えられる。 $a_j$  と  $b_k$  は対称形なので入れ替えても同様に考えられるので、

$$P((a_j, b_k)) = P(a_j)P(b_k|a_j)$$

$$P((a_j, b_k)) = P(b_k)P(a_j|b_k)$$

事象系の性質  $\sum_{j=1}^K P(b_k) = 1$  より,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) &= \sum_{j=1}^J P(b_k)P(a_j|b_k) \\ &= P(b_k) \sum_{j=1}^J P(a_j|b_k) \\ &= P(b_k)\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) = \sum_{j=1}^K P(b_k) = 1$$

入れ替えても同様に考えられるので,

$$\sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) = \sum_{j=1}^K P(b_k) = \sum_{j=1}^J P(a_j) = 1$$

## 結合エントロピー

結合事象  $(a_j, b_k)$  の情報量は以下になる.

$$I(a_j, b_k) = \log \frac{1}{P(a_j, b_k)}$$

よってすべての結合事象の平均をとることで結合事象系  $A \times B$  のエントロピーが得られる. それを結合エントロピーと呼ぶ.

$$H(A, B) = \sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) \log \frac{1}{P(a_j, b_k)}$$

## 条件付エントロピー

まず事象  $b_k$  が発生した条件のもとで  $a_j$  が発生するような場合を考える. この時の発生確率は条件付確率  $P(a_j|b_k) = \frac{P(a_j, b_k)}{P(b_k)}$  で表せる. よって事象  $b_k$  が発生した条件のもとでの事象系  $A$  のエントロピーは以下になる.

$$H(A|b_k) = \sum_{j=1}^J P(a_j|b_k) \log \frac{1}{P(a_j|b_k)}$$

これを  $B$  のすべての事象について平均をとると以下になる.

$$\begin{aligned}
H(A|B) &= \sum_{k=1}^K P(b_k) H(A|b_k) \\
&= \sum_{k=1}^K P(b_k) \sum_{j=1}^J P(a_j|b_k) \log \frac{1}{P(a_j|b_k)} \\
&= \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) \log \frac{1}{P(a_j|b_k)}
\end{aligned}$$

$H(A|B)$  は  $B$  をのもとでの  $A$  の条件付エントロピーと呼ばれる。  $A$  の  $B$  に対する曖昧度ともいう。

## 結合エントロピーと条件付エントロピー

### 結合エントロピーと条件付エントロピーの関係性

結合エントロピーは条件付エントロピーと事象系  $B$  のエントロピーで表せる。これは  $A$  と  $B$  を知ることはまず  $B$  を知り、 $B$  を知っているもとでの  $A$  を知ることを考えらる。また  $A$  と  $B$  は入れ替え可能。

$$\begin{aligned}
H(A, B) &= \sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) \log \frac{1}{P(a_j, b_k)} \\
&= \sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) \log \frac{1}{P(b_k)P(a_j|b_k)} \\
&= \sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) \log \frac{1}{P(b_k)} + \sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) \log \frac{1}{P(a_j|b_k)} \\
&= \sum_{j=1}^K P(b_k) \log \frac{1}{P(b_k)} + \sum_{j=1}^K \sum_{j=1}^J P(a_j, b_k) \log \frac{1}{P(a_j|b_k)} \\
&= H(B) + H(A|B)
\end{aligned}$$

$$H(A, B) = H(A) + H(B|A)$$

### シャノンの補助定理

0 以上 1 以下の任意の実数  $u_j, v_j, (j = 1, 2, \dots, J)$  について  $\sum_{j=1}^J u_j = 1, \sum_{j=1}^J v_j = 1$  を満たすならば以下の不等式が成り立つ。

$$\sum_{j=1}^J u_j \log \frac{1}{u_j} \leq \sum_{j=1}^J u_j \log \frac{1}{v_j}$$

$u_j = v_j$  のときに等号成立する。証明は以下の通り。

左辺引く右辺が 0 以下になることを示す。

$$\sum_{j=1}^J u_j \log \frac{1}{u_j} - \sum_{j=1}^J u_j \log \frac{1}{v_j} \leq 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^J u_j \log \frac{1}{u_j} - \sum_{j=1}^J u_j \log \frac{1}{v_j} &= \sum_{j=1}^J u_j \log \frac{v_j}{u_j} \\
&= \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^J u_j \ln \frac{v_j}{u_j} \\
&\leq \frac{1}{\ln 2} \sum_{j=1}^J u_j \left( \frac{v_j}{u_j} - 1 \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} \left( \sum_{j=1}^J v_j - \sum_{j=1}^J u_j \right) \\
&= \frac{1}{\ln 2} (1 - 1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

よって示せた.

## 結合エントロピーの性質

$$\sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^J P(a_j, b_k) = 1$$

$$\sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^J P(a_j)P(b_k) = 1$$

シャノンの補助定理より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^J P(a_j, b_k) \frac{1}{P(a_j, b_k)} \\
&\leq \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^J P(a_j, b_k) \frac{1}{P(a_j)P(b_k)} \\
&= \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^J P(a_j, b_k) \frac{1}{P(a_j)} + \sum_{j=1}^K \sum_{k=1}^J P(a_j, b_k) \frac{1}{P(b_k)} \\
&= \sum_{j=1}^J P(a_j) \frac{1}{P(a_j)} + \sum_{j=1}^K P(b_k) \frac{1}{P(b_k)}
\end{aligned}$$

したがって,  $H(A, B) \leq H(A) + H(B)$  となる. 等号成立はすべての  $j, k$  について  $P(a_j, b_k) = P(a_j)P(b_k)$  のとき, つまり  $A$  と  $B$  が互いに独立のときである.

## 結合エントロピーと条件付エントロピーの関係性

$H(A, B) = H(A) + H(B|A)$  と  $H(A, B) \leq H(A) + H(B)$  より,  $H(B|A) \leq H(B)$  が成り立つ. これは  $B$  を知るにより,  $A$  の不確かさが減少することをいみする. 等号成立は  $A$  と  $B$  が互いに独立のときである.

今までのことをまとめると、エントロピーは以下のような性質をもつ。これは条件が追加されると不確かさが減少すること、対象とする事象系が増加すれば不確かさも増加することをいみする。

$$0 \leq H(A|B) \leq H(A) \leq H(A, B)$$