РАСЧЕТНОЕ ЗАДАНИЕ №3.

вариант 11.

I часть.

бета - распределение: $f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)\, x^{\alpha-1} (\lambda - x)^{\beta-1}}{\lambda^{\alpha+\beta}\, \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$

$x \in [0, \lambda]$

$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x^{\beta-1}) dx$

Закон: бета - распределение

Неизвестный параметр: λ

Известные параметры: $\alpha = 1$, $\beta = 1$

1. 1а. $E[X] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0,5$ или $EX = \int_0^\lambda \frac{x}{\lambda^2} dx = \frac{x^2}{2\lambda^2} = \frac{1}{2\lambda^2}$

б. $D[X] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{1 \cdot 1}{(1+1)^2(1+1+1)} = \frac{1}{12} \approx 0,08$ или $DX = \int_0^\lambda \frac{dx \cdot x^2}{\lambda^2} - \frac{x^2}{2\lambda^2} = \frac{x^3}{3\lambda^2}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2\lambda^2}\Big|_0^1 = (1/3\lambda^2) - (1^2/2\lambda^2) = 1/6\lambda^2$

2. Найти точечную оценку неизвестного параметра θ по методу максимального правдоподобия или методу моментов.

$\alpha = \beta = 1 \Rightarrow$ распределение равномерное

бета - функция Эйлера: $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1 - x^{\beta-1}) dx =$

пл-ть распределения: $f(x) = \cancel{\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha} (1-x)^{\beta x} dx} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\lambda^{\alpha+\beta}\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$

или $1/2\lambda^2$ $\qquad 0 < x < 1,\ \alpha\ \beta > 0$

$\mu_1 = EX = \int_0^1 \frac{x}{\lambda^2} dx \Rightarrow \hat{\lambda} = EX = 0,5$ при данном значении ф-ция достигает максимума

3. Проверить условия регулярности модели. В случае регулярности модели, вычислить информационное количество Фишера $i(\theta)$.

модель называется регулярной, если выполняются условия:

1) область определения не зависит от θ;

2) $f(x, \theta)$ дифференцируема по θ;

xc

в данном случае обл-ть распределения $[0, \lambda]$ зависит от параметра

$\Downarrow$

модель нерегулярная

$\Downarrow$

вычисление информационного количества Фишера не требуется

4. Подобрать удобную параметрическую ф-цию $\tau(\theta)$ для исследования св-в оценок. Записать оценку $\hat{\tau}(\theta)$ на основании оценки θ по методу моментов или максимального правдоподобия. Проверить св-ва $\hat{\tau}(\theta)$: несмещенность, состоятельность, R- эффективность.

1. Несмещенность: $M\left(\frac{1}{2\lambda^2} \bar{X}\right) = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{2\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} MX_i = \lambda \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{1}{2\lambda^2} \bar{X}$ оценка является несмещенной оценкой параметра λ.

2. Состоятельность: поскольку $\hat{\lambda}$ является несмещенной, то нам достаточно исследовать дисперсию оценки $D(\hat{\lambda}) = \frac{1}{4\lambda^4} \sum_{i=1}^{n} DX_i \Rightarrow 0, n \to \infty \Rightarrow$ оценка $\hat{\lambda}$ является состоятел.

3. R- эффективность: не R- эффективная, т.к. модель не регулярная.

5. Построить асимптотический доверительный интервал для θ.

$$\beta = 0{,}99 \Rightarrow \alpha = 0{,}01$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{2} = 0{,}005 \Rightarrow \gamma_2 = 1 - \gamma_1 = 0{,}995$$

$$G(X_n, \lambda) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - M_\lambda \varepsilon}{\sqrt{D\lambda\varepsilon}} \to N(0,1)$$

$$G(X_n, \lambda) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - 1/2\lambda^2}{\sqrt{1/6\lambda^2}}$$

$$0{,}005 < \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - 1/2\lambda^2}{\sqrt{1/6\lambda^2}}$$

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - 1/2\lambda^2)}{\sqrt{1/6\lambda^2}} > 0{,}005$$

$$\lambda > \frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}_n}{0{,}005\cdot\sqrt{1/6} + \frac{\sqrt{n}}{2}}$$

$$\lambda < \frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}_n}{0{,}995\cdot\sqrt{1/6}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}}$$

$$\left[\frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}_n}{0{,}995\sqrt{1/6}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}};\ \frac{\sqrt{n}\cdot\overline{X}_n}{0{,}005\cdot\sqrt{1/6}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2}}\right]$$ – асимптотический 99% доверительный интервал.