

# **Analysis 1 Skript**

Dominic Zimmer

9. November 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Beweisprinzipien</b>	<b>3</b>
1.1	Logik . . . . .	3
1.2	Axiome . . . . .	3
1.3	Direkter Beweis . . . . .	3
1.3.1	Beispiel . . . . .	4
1.4	Kontraposition . . . . .	4
1.5	Widerspruch . . . . .	4
1.6	Induktion . . . . .	4
1.7	Summennotation . . . . .	4
1.8	Gaußformel . . . . .	5
1.9	Fakultät . . . . .	5
1.9.1	Notation . . . . .	5
1.9.2	Binomalkoeffizient . . . . .	5
1.10	Lemma: Binomalkoeffizient . . . . .	5
1.11	Binomischer Lehrsatz . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Mengen</b>	<b>6</b>
2.1	Mengen nach Cantor . . . . .	6
2.1.1	Schreibweisen . . . . .	6
2.2	Mengenoperatoren . . . . .	6
2.3	Wichtige Mengen . . . . .	7
2.4	Quantoren . . . . .	7
2.5	Verneinung von Quantoren . . . . .	7
2.6	Vereinigung und Schnitt . . . . .	7
2.7	De Morgan . . . . .	8
2.8	Abbildungen . . . . .	8
2.8.1	Definition . . . . .	8
2.8.2	Eigenschaften . . . . .	8
2.9	Komposition . . . . .	9
2.10	Identitätsabbildung . . . . .	9
2.11	Umkehrabbildung . . . . .	9
2.12	Kardinalitäten . . . . .	9
2.12.1	Definition . . . . .	9
2.12.2	Abzählbar . . . . .	9
2.12.3	Überabzählbar . . . . .	9
2.13	Kardinalität von $\mathbb{R}$ . . . . .	9

<b>3</b>	<b>Folgen</b>	<b>11</b>
3.1	Folgen reeller Zahlen . . . . .	11
3.1.1	Definition . . . . .	11
3.1.2	Beispiele von Folgen . . . . .	11
3.2	Konvergenz . . . . .	11
3.2.1	Definition . . . . .	11
3.2.2	Bemerkung . . . . .	11
3.3	TODO: FEHLT!! . . . . .	11
3.4	Anordnung . . . . .	12
3.5	Notation . . . . .	12
3.6	Beispiele . . . . .	12
3.7	Anordnungsgesetze . . . . .	13
3.8	Einbettung . . . . .	13
3.8.1	Notation . . . . .	13
3.9	Bernoulli'sche Ungleichung . . . . .	13
3.10	Betrag . . . . .	13
3.11	Eigenschaften Betrag . . . . .	14
3.12	Archimedisches . . . . .	14
3.13	Folgerungen Archimedes . . . . .	14
3.14	Behauptung . . . . .	14
3.15	Weiterführung . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Folgen in <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>15</b>
4.1	Definition . . . . .	15
4.2	Beispiele . . . . .	15
4.3	Konvergenz . . . . .	15
4.4	Inverse Ungleichung . . . . .	15
4.5	Beispiele . . . . .	15
4.6	Eindeutigkeit . . . . .	15
4.7	Sprechweise . . . . .	16
4.8	Bemerkung . . . . .	16
4.9	Formel . . . . .	16
4.10	Beispiele . . . . .	16
4.11	Beschränktheit . . . . .	16
4.12	Satz . . . . .	16
4.13	Einschachtelung . . . . .	16
4.14	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	16
4.15	Lineartität . . . . .	17
4.16	Beispiel . . . . .	18
4.17	Quotienten von Folgen . . . . .	18
4.18	Rechenbeispiel . . . . .	18
4.19	Ordnung von Grenzwerten . . . . .	18
4.20	Ordnung im Grenzübergang . . . . .	18
4.21	Beispiel . . . . .	18

4.22 Bestimmte Divergenz . . . . .	19
4.23 Beispiele . . . . .	19
4.24 Kehrwert von Grenzwerten . . . . .	19

# 1 Beweisprinzipien

## 1.1 Logik

Die Aussagenlogik befasst sich mit *Aussagen*, welche *(w)ahr* oder *(f)alsch* sein können. Aus den Operatoren

- Negation:

$$\neg a = \begin{cases} w & \text{falls } a \equiv f. \\ f & \text{falls } a \equiv w. \end{cases}$$

- Konjunktion:

$$a \vee b = \begin{cases} w & \text{falls } a \equiv w \text{ oder } b \equiv w \text{ (oder beide)}. \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Disjunktion:

$$a \wedge b = \begin{cases} w & \text{falls } a \equiv w \text{ und } b \equiv w. \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Implikation:

$$a \rightarrow b = \begin{cases} f & \text{falls } a \equiv w \text{ und } b \equiv f. \\ w & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Äquivalenz:

$$a \leftrightarrow b = \begin{cases} w & \text{falls } a \equiv b. \\ f & \text{sonst.} \end{cases}$$

lassen sich aus bereits bestehenden aussagelogischen Ausdrücken Weitere bilden. Auch lassen sich einfach aus den Definitionen Gesetzmäßigkeiten ableiten.

## 1.2 Axiome

*Axiome* sind grundlegende Aussagen, die nicht weiter zurückgeführt werden (können). Wir *beweisen*, indem wir *Aussagen* auf Axiome zurückführen.

## 1.3 Direkter Beweis

Ein *Direkter Beweis* wird geführt, indem man eine Aussage *A* annimmt und ausgehend von dieser eine weitere Aussage *B* *beweist*.

### 1.3.1 Beispiel

Wir wollen zeigen, dass folgende Aussage korrekt ist:

Das Quadrat einer geraden Zahl ist wiederum gerade.

*Beweis.* Sei  $a \in \mathbb{N}$  eine gerade Zahl, welche sich also auch als  $a = 2 \cdot k$  darstellen lässt. Betrachten wir nun das Quadrat von  $a$ , so gilt:

$$a^2 = (2 \cdot k)^2 = 2^2 \cdot k^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2)$$

Somit hat also  $a^2 = 2 \cdot (2k^2)$  eine Zwei als Teiler und ist somit gerade.  $\square$

## 1.4 Kontraposition

Statt die Implikation  $A \rightarrow B$  zu beweisen, können wir auch  $\neg B \rightarrow \neg A$  beweisen. Wir nehmen also an, dass das zu zeigende nicht gilt und folgern daraus, dass unsere Annahme nicht gilt.

## 1.5 Widerspruch

Wir können eine Aussage  $A$  auch beweisen, indem wir  $\neg A$  annehmen und daraus einen Widerspruch folgern.

## 1.6 Induktion

Das Prinzip der *vollständigen Induktion* besagt:

Ist  $A(n)$  eine Aussage mit  $n \in \mathbb{N}$ , so können wir diese Gültigkeit dieser Aussage für alle  $n > n_0$  zeigen, indem wir

- Die Gültigkeit der Aussage  $A(n_0)$  zeigen und
- Aus der Annahme, dass die Aussage  $A(n)$  für ein festes  $n \in \mathbb{N}$  bereits gilt, darauf schließen, dass auch  $A(n+1)$  gilt.

## 1.7 Summennotation

Seien  $a_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) eine Familie von Zahlen. Wir führen folgende Kurzschreibweise ein:

$$\sum_{k=m}^n a_i = a_m + \cdots + a_n$$

## 1.8 Gaußformel

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt einfach durch Induktion oder alternativ durch geschicktes, zweifaches Summieren obiger Summe.

## 1.9 Fakultät

### 1.9.1 Notation

Wir definieren

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$$

als die *Fakultät* von  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.9.2 Binomialkoeffizient

Wir verwenden die Fakultät zur Definition des *Binomialkoeffizientens*, den wir als  $n$  über  $k$  oder  $k$  aus  $n$  lesen:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

## 1.10 Lemma: Binomialkoeffizient

Für alle  $1 \leq k \leq n$  gilt:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

*Beweis.* Nachrechnen. Eine Intuition für die Korrektheit erhält man leicht durch das *Pascal'sche Dreieck*.

## 1.11 Binomischer Lehrsatz

Für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$$

*Beweis.* Der Beweis erfolgt leicht durch Induktion über  $n$ .

## 2 Mengen

### 2.1 Mengen nach Cantor

Cantors naive Mengendefinition besagte:

Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung wohlbestimmter und wohlunterscheidbarer Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.

Diese *naive* Definition birgt einige Widersprüche; zum Beispiel erlaubt sie die Menge aller Mengen.

#### 2.1.1 Schreibweisen

Wir benutzen folgende Schreibweisen im Umgang mit Mengen:

- $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ : Die Menge mit den Elementen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  und *Kardinalität*  $\#M = |M| = n$
- $x \in M$  :  $x$  ist Element der Menge  $M$
- $N \subset M$ :  $N$  ist eine *Teilmenge* der Menge  $M$

### 2.2 Mengenoperatoren

Außerdem definieren wir für Zwei Mengen  $M$  und  $N$

i) die Vereinigung von  $M$  und  $N$ :

$$M \cup N = \{x \mid x \in M \vee x \in N\}$$

ii) den Schnitt von  $M$  und  $N$ .

$$M \cap N = \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}$$

iii) das Komplement von  $M$  in  $N$ .

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$$



## 2.3 Wichtige Mengen

Einige wichtige Mengen sind:

- $\emptyset = \{\}$ , die *Leere Menge*, welche keine Elemente hat.
- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ , die *Natürlichen Zahlen*
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ , die *Ganzen Zahlen*
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ , die *Rationalen Zahlen*
- $\mathbb{R}$ , die Menge der *Reellen Zahlen*
- $\mathbb{C} = \{(a, b \cdot i) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

## 2.4 Quantoren

*Quantoren* sind Kurzschreibweisen für in der Mathematik häufig benutzte Flosskeln.  $\exists$  nennt man *Existenzquantor* und  $\forall$  *Allquantor*. Sei nun  $X$  eine Menge und  $P(x)$  eine Aussage über  $x$ .

- $\forall x \in X : P(x)$  für „Für alle  $x \in X$  gilt die Aussage  $P(x)$ .“
- $\exists x \in X : P(x)$  für „Es gibt (zumindest) ein  $x \in X$  für welches die Aussage  $P(x)$  gilt.“

## 2.5 Verneinung von Quantoren

Ausdrücke, welche Quantoren enthalten, werden Verneint, indem man den jeweiligen Existens- oder Allquantor mit dem Anderen ersetzt, und den Ausdruck dahinter verneint. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} & \neg \forall x \in X : \exists y \in Y : P(x, y) \\ &= \exists x \in X : \neg \exists y \in Y : P(x, y) \\ &= \exists x \in X : \forall y \in Y : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

## 2.6 Vereinigung und Schnitt

Sei  $I \subseteq \mathbb{N}$  eine Indexmenge und  $M_i$  eine Familie von Mengen. Wir notieren

- $\bigcup_{i \in I} M_i = M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \dots = \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$
- $\bigcap_{i \in I} M_i = M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots = \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}$

## 2.7 De Morgan

Sei  $M_i$  eine Familie von Mengen, so ist

- $\overline{\bigcup_{i \in I} M_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{M_i}$
- $\overline{\bigcap_{i \in I} M_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{M_i}$

## 2.8 Abbildungen

### 2.8.1 Definition

Seien  $X$  und  $Y$  Mengen. Wir definieren eine *Abbildung* oder auch *Funktion*

$$f : x \longrightarrow Y$$

als eine Vorschrift, die jedem  $x \in X$  genau ein  $y \in Y$  zuordnet. Wir nennen dabei  $X$  den *Definitionsbereich* und  $Y$  den *Wertebereich*.

### 2.8.2 Eigenschaften

Wir nennen eine Abbildung  $f : X \longrightarrow Y$

- *injektiv*, wenn  $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$
- *surjektiv*, wenn  $\forall y \in Y : \exists x \in X : f(x) = y$
- *bijektiv*, wenn  $f$  injektiv und surjektiv ist.

## 2.9 Komposition

Seien  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  Abbildungen. Wir definieren die *Komposition*  $g \circ f : X \rightarrow Z$  definiert durch

$$g \circ f := g(f(x)) \text{ für } x \in X.$$

## 2.10 Identitätsabbildung

Wir nennen  $id_X : X \rightarrow X$  die *Identitätsabbildung* auf  $X$  mit

$$id_X(x) = x, \forall x \in X$$

Sie fungiert als das Neutrale Element der Komposition von Funktionen.

## 2.11 Umkehrabbildung

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine Bijektion. Wir definieren die *Umkehrabbildung*  $f^{-1}$  von  $f$  durch

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, f^{-1}(y) = x \text{ mit } f(x) = y$$

Woraus offensichtlich folgt, dass  $f \circ f^{-1} = id_Y$

## 2.12 Kardinalitäten

### 2.12.1 Definition

Zwei Mengen  $N$  und  $M$  sind *gleichmächtig*, falls eine Bijektion  $f : N \rightarrow M$  existiert.

### 2.12.2 Abzählbar

Eine Menge  $M$  heißt *abzählbar*, falls sie entweder *endlich* oder *gleichmächtig wie*  $\mathbb{N}$  ist.

### 2.12.3 Überabzählbar

Eine Menge  $M$ , die nicht abzählbar ist, nennen wir *überabzählbar*.

## 2.13 Kardinalität von $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$  ist überabzählbar.

*Beweis.* Offensichtlich genügt es zu zeigen, dass eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  überabzählbar ist, um zu zeigen, dass  $\mathbb{R}$  überabzählbar ist. Betrachten wir also das Intervall  $[0, 1]$ . Wir wollen einen Widerspruchsbeweis führen. Nehmen wir also an,  $\mathbb{R}$  sei abzählbar. So könnten wir also alle Zahlen aus  $\mathbb{R}$  abzählen.

$$\begin{array}{ll} 1 & 0.a_1a_2a_3a_4a_5\dots \\ 2 & 0.b_1b_2b_3b_4b_5\dots \\ 3 & 0.c_1c_2c_3c_4c_5\dots \\ 4 & 0.d_1d_2d_3d_4d_5\dots \\ \vdots & \ddots \end{array}$$

Konstruieren wir nun eine Zahl  $z$ , welche stets in der  $n$ -ten Nachkommastelle mit der  $n$ -ten Zahl der Liste *nicht* übereinstimmt. Also kann  $z$  nicht die erste Zahl der Liste sein, da sie in der ersten Nachkommastelle nicht mit ihr übereinstimmt. Dies läuft darauf hinaus, dass  $z$  mit jeder Zahl aus der Liste in der  $n$ -ten Nachkommastelle *nicht* übereinstimmt. Also ist  $z$  nicht in der Liste. Somit ist  $[0, 1]$  nicht abzählbar und somit ist  $\mathbb{R}$  nicht abzählbar.

## 3 Folgen

### 3.1 Folgen reeller Zahlen

#### 3.1.1 Definition

Eine Folge reeller Zahlen ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$ . Schreibweise:  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  Folgen müssen nicht mit dem Index 1 beginnen, auch Folgen der Form  $(a_n)_{n \geq n_0}$  sind unmöglich.

#### 3.1.2 Beispiele von Folgen

- i)  $a_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}$  also  $(2, 2, 2, \dots)$
- ii)  $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$  also  $(1, 2, 3, \dots)$
- iii)  $a_n = \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$  also  $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$
- iv)  $a_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$  also  $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

### 3.2 Konvergenz

#### 3.2.1 Definition

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen heißt konvergent mit Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$  (oder „konvergent gegen  $a$ “), falls  $\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon$ . Schreibweise:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim n \rightarrow \infty$

#### 3.2.2 Bemerkung

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt die inverse Dreiecksungleichung

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

### 3.3 TODO: FEHLT!!

### 3.4 Anordnung

Ein Körper  $(K, +, \cdot)$  heißt *angeordnet*, falls wir gewisse Elemente aus  $K$  als *positiv* auszeichnen können. Schreibe  $a \in K, a > 0$ , falls gilt:

- i) Es gilt für  $a$  genau eine der drei Beziehungen:
  - $a > 0$
  - $a = 0$
  - $-a > 0$
- ii) Für  $a, b \in K, a > 0, b > 0$  gilt:  $a + b > 0$  und  $a \cdot b > 0$

### 3.5 Notation

Wir benutzen folgende Notation:

- $a > b :\Leftrightarrow a - b > 0$
- $a < b :\Leftrightarrow b > a$
- $a \geq b :\Leftrightarrow a > b \vee a = b$
- $a \leq b :\Leftrightarrow b \geq a$
- $\max(a, b) := \begin{cases} a & \text{falls } a > b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$
- $\min(a, b) := \begin{cases} a & \text{falls } a < b \\ b & \text{sonst} \end{cases}$

### 3.6 Beispiele

- $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  sind angeordnete Körper.
- $\mathbb{C}$  ist kein angeordneter Körper.
- $\mathbb{F}_p$  (zur Primzahl  $p$ ) ist kein angeordneter Körper.

Insbesondere lassen sich  $\mathbb{C}$  und  $\mathbb{F}_p$  *nicht* (durch besondere Tricks) anordnen!

### 3.7 Anordnungsgesetze

Sei  $(K, +, \cdot)$  ein angeordneter Körper und  $a, b, c \in K$ , so gilt:

- i)  $a < b, b < c \Rightarrow a < c$
- ii)  $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
- iii)  $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- iv)  $a < b \Leftrightarrow -a > -b$
- v)  $0 \leq a < b$  und  $0 \leq c < d$   
 $\Rightarrow ac < bd$

### 3.8 Einbettung

Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Dann können wir  $\mathbb{N}$  in  $K$  einbetten.

$$n_k := \underbrace{1_K + \cdots + 1_K}_{n\text{-mal}} \in K$$

Für  $n \in \mathbb{N}$ .

#### 3.8.1 Notation

Wir werden im Folgenden intuitiv  $n$  mit  $n_k$  identifizieren.

### 3.9 Bernoulli'sche Ungleichung

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $-1 < x \in K$ , so gilt:

$$1 + nx \leq (1 + x)^n$$

### 3.10 Betrag

Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Für  $a \in K$  definieren wir:

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{sonst} \end{cases}$$

Und nennen  $|a|$  den (Absolut-)Betrag von  $a$ .

### 3.11 Eigenschaften Betrag

Es gilt für  $a, b \in K$ :

i)  $|-a| = |a|$

ii)  $|ab| = |a||b|$

iii)  $|a + b| \leq |a| + |b|$

Und nennen iii) die *Dreiecksungleichung*.

### 3.12 Archimedisch

Wir nennen einen angeordneten Körper *archimedisch*, falls für alle  $x \in K$  ein  $n \in \mathbb{N}$  existiert, so dass  $n > x$  ist.

### 3.13 Folgerungen Archimedes

Ist  $K$  ein archimedischer Körper, so folgt:

i) Zu jedem  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt.

ii) Ist  $b = 1 + \varepsilon$  mit  $\varepsilon > 0$ , so existiert für alle  $R \in K$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $b^n > R$  für alle  $n \geq N$ .

iii) Ist  $0 < q < 1$ , so gibt es ein  $\varepsilon > 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $q^n < \varepsilon$  für alle  $n \geq N$ .

### 3.14 Behauptung

$\mathbb{R}$  ist ein angeordneter Körper

### 3.15 Weiterführung

Momentan gilt noch  $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$ . Bald werden wir untersuchen, worin sich diese beiden Mengen unterscheiden, sprich  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  betrachten.



## 4 Folgen in $\mathbb{R}$

### 4.1 Definition

Eine *Folge* reeller Zahlen heißt ist eine Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $n \mapsto a_n$ . Wir schreiben die Folge als  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  oder  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ .

### 4.2 Beispiele

- i)  $a_n = 2$  ist die Folge  $(2, 2, 2, 2, \dots)$
- ii)  $a_n = n$  ist die Folge  $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$
- iii)  $a_n = \frac{1}{n}$  ist die Folge  $(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots)$

### 4.3 Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *konvergent* mit Grenzwert  $a \in \mathbb{R}$ , falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon$$

und schreiben  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ .

### 4.4 Inverse Ungleichung

Für  $x, y \in \mathbb{R}$  gilt die *inverse Dreiecksungleichung*:

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

### 4.5 Beispiele

- i)  $a_n = 2$  ist eine konvergente Folge mit Grenzwert 2.
- ii)  $a_n = n$  konvergiert nicht.
- iii)  $a_n = \frac{1}{n}$  konvergiert gegen 0.

### 4.6 Eindeutigkeit

Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig bestimmt.

## 4.7 Sprechweise

Eine Folge die nicht konvergiert heißt *divergent*.

## 4.8 Bemerkung

Eine konvergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert auch, wenn man endlich viele Folgenglieder weglässt. Insbesondere konvergiert  $(a_n)_{n \geq n_0}$  mit  $n_0 \in \mathbb{N}$  gegen den selben Grenzwert.

## 4.9 Formel

Sei  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  und  $(s_n) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ . Dann konvergiert  $(s_n)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = \frac{1}{1 - x}$$

## 4.10 Beispiele

Ausgelassen, da triviale Anwendungen obiger Formel.

## 4.11 Beschränktheit

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt *nach oben (nach unten) beschränkt*, falls ein  $k \in \mathbb{R}$  existiert, so dass  $a_n \leq k$  ( $a_n \geq k$ ) für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist. Eine Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben oder nach unten beschränkt ist.

## 4.12 Satz

Jede konvergente Folge ist beschränkt.

## 4.13 Einschachtelung

Für alle  $a, \varepsilon \in \mathbb{R}$  mit  $\varepsilon > 0$  gilt:

$$a - \varepsilon < a < a + \varepsilon$$

## 4.14 Rechenregeln für Grenzwerte

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n \end{aligned}$$

## 4.15 Lineartität

Das Bilden der Grenzwerte konvergenter Folgen ist linear, also ergänzend zu 4.14 gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

### 4.16 Beispiel

Sei  $a_n = \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + 0 = 1$$

### 4.17 Quotienten von Folgen

Seien  $(a_n)$  und  $(b_n)$  konvergente Folgen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ , dann gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , für alle  $n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

### 4.18 Rechenbeispiel

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 10n} \\ &= \frac{5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{10}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{5}{3} \end{aligned}$$

### 4.19 Ordnung von Grenzwerten

Seien  $(a_n)$ ,  $(b_n)$  und  $(c_n)$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$ .

i) Ist  $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ , so ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

ii) Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  und  $b_n < a_n < c_n$ , so konvergiert  $(a_n)$  ebenfalls gegen  $b$ .

ii) wird häufig auch als Sandwichlemma bezeichnet, da anschaulich  $a_n$  von  $b_n$  und  $c_n$  eingeeignet - „gesandwich“ - wird.

### 4.20 Ordnung im Grenzübergang

Sind  $a_n < b_n$  konvergente Folgen in  $\mathbb{R}$  mit gleichem Grenzwert, so gilt für deren Grenzwerte im Allgemeinen nur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

### 4.21 Beispiel

Der Grenzwert von  $(\frac{n}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$  ist 0.

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch Anwendung des Sandwichlemmas auf die Nullfolge und  $(q^n \cdot \lambda)$

## 4.22 Bestimmte Divergenz

Eine divergente Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nennen wir *bestimmt divergent* (oder *uneigentlich konvergent*) gegen  $\pm\infty$ , wenn gilt:

$$\forall K \in \mathbb{R} : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : a_n > K \text{ (bzw } a_n < K)$$

Wir notieren den Grenzwert als  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pm\infty$ .

## 4.23 Beispiele

- i)  $a_n = n$  konvergiert uneigentlich gegen  $\infty$ .
- ii)  $a_n = -n^2$  konvergiert uneigentlich gegen  $-\infty$ .
- iii)  $a_n = (-1)^n$  divergiert.

## 4.24 Kehrwert von Grenzwerten

Sei  $(a_n)$  eine reelle Folge mit  $a_n > 0$ . Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$