Diseño y análisis de experimentos

Universidad de Pamplona
Norte de Santander
Kenneth Roy Cabrera Torres

12 de octubre de 2015

Tabla de contenido

Tabla de contenido

Experimento con un solo factor

- Un factor
- Familia de diseños
- Modelos
- Supuestos

Comparación de rangos múltiples

- Prueba de Hipótesis
- Contrastes

Diseño en bloques completos al azar

- Característica
- Modelo
- Cuadrado latino
- Grecolatino

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Un factor
Familia de diseños
Modelos
Supuestos
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Experimento con un solo factor

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Un factor
Familia de diseños
Modelos
Supuestos
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Experimentos con un solo factor

El interés del experimentador se centra en comparar los tratamientos en cuanto a sus medias poblacionales, sin olvidar que también es importante compararlos en relación a sus varianzas.

Modelo:

$$y_{ij} = \mu_i + e_{ij} \text{ para } i = 1, \ldots, k \text{ y } j = 1, \ldots, n$$

Donde:

$$e_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \; i.i.d.$$

Hipótesis estadística:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k = \mu$$
$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j$$

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Un factor
Familia de diseños
Modelos
Supuestos
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Otra forma de expresar la hipótesis

Si consideramos que

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{i}^{k}\mu_i$$

Entonces podemos pensar que cada μ_i se diferencia del promedio total μ en $\alpha_i = \mu_i - \mu$, al cual se le denomina efecto.
Luego la hipótesis se puede plantear como:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$$
$$H_1 : \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Un factor
Familia de diseños
Modelos
Supuestos
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Familia de diseños de un solo factor

Los más usuales son:

- Diseño completamente al azar (DCA).
- Diseño en bloque completamente al azar (DBCA).
- Diseño en cuadrado latino (DCL).
- Diseño en cuadrado grecolatino (DCGL).

Modelos de un solo factor

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Un factor
Familia de diseños
Modelos
Supuestos
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Diseño	Bloques	Modelo
DCA	0	$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$
DBCA	1	$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijk}$
DCL	2	$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijkl}$
DCGL	3	$y_{ijklm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + e_{ijklm}$

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Un factor
Familia de diseños
Modelos
Supuestos
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Supuestos

- Aditividad.
- Linealidad.
- Independencia.
- Distribución gausiana de los errores.
- Homocedasticidad. (igualdad de variancias)
- No interacción con el bloque.

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Prueba de Hipótesis
Contrastes
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Comparación de rangos múltiples

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Prueba de Hipótesis
Contrastes
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Prueba de hipótesis pareada

Si se rechaza la hipótesis principal sobre los niveles del factor, entonces se quiere saber si:

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu_i = \mu_j \\ H_1 &: \quad \mu_i \neq \mu_j \text{ para toda } i \neq j \end{aligned}$$

Se destacan los siguientes métodos:

1. LSD (Diferencia mínima significativa).
2. HSD (Tukey) Sólo comparaciones pareadas.
3. Scheffe. muchos contrastes.
4. Bonferroni. Corrige falsos positivos.
5. Duncan. (Un poco más sensible. Exige normalidad).
6. Dunnett. (Con un control)

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Prueba de Hipótesis
Contrastes
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Comparación por contrastes

No siempre es de interés todas las posibles comparaciones, sino algunas de ellas.
En particular en una comparación que se puede escribir como un contraste:

$$C = \sum_{i=1}^{k} c_i \mu_i \text{ es contraste si } \sum_{i=1}^{k} c_i = 0.$$

Si se construyen contrastes ortogonales, se garantiza la independencia de los resultados de cada contraste.
El método de Scheffe estás diseñado para probar varios constraste simultáneos, sin necesidad de ser independientes.

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Característica
Modelo
Cuadrado latino
Grecolatino
Diseño de dos factores

Diseño en bloques completos al azar

Caracterización del DBCA

Tabla de contenido

Experimento con un solo factor

Comparación de rangos múltiples

Diseño en bloques completos al azar

Característica

Modelo

Cuadrado latino

Grecolatino

Diseño de dos factores

La regla general es:

"Bloquee lo que pueda, y aleatorice lo que no".

Se utiliza para aislar el efecto de factores que de antemano se sabe que influencian mi respuesta y que no interactúan con el factor de análisis.
Su ventaja está en que se reduce el número de réplicas.
Su desvetaja es que no permite estadísticamente establecer la significancia de la interacción.
Se denomina completo porque la aleatorización se hace dentro de cada bloque y se experimenta todos los niveles del factor en cada nivel del bloque.
Ejemplo de bloques usuales: turno, lote, día, tipo de material, línea de producción, operador, máquina, método.

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Característica
Modelo
Cuadrado latino
Grecolatino
Diseño de dos factores

Modelo del DBCA

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}; \begin{cases} i = & 1, 2, \ldots, k \\ j = & 1, 2, \ldots, b \end{cases}$$

Donde los α_i son los efectos del factor y los β_j son los efectos de los bloques y ϵ_{ij} es el error.
El número de experimentos totales es kb.
La hipótesis a probar es:

$$\begin{aligned} H_0 : & \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0 \\ H_1 : & \quad \text{Alguno diferente de } 0 \end{aligned}$$

La hipótesis del bloque sirve de verificación sobre la influencia del bloque.

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Característica
Modelo
Cuadrado latino
Grecolatino
Diseño de dos factores

Diseño de cuadrado latino

En este caso se tienen dos bloque y un factor, todos con el mismo número de niveles.
Se denomina cuadrado latino, porque se utilizan las letras latinas para designar los niveles del tratamiento el cuál se se realiza una sola vez por cada combinación de los bloques:
Un ejemplo de un cuadrado latino es:

A	B	C
B	C	A
C	A	B

El modelo es:

$$Y_{ijl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_l + \epsilon_{ijl}; \begin{cases} i = & 1, 2, \ldots, k \\ j = & 1, 2, \ldots, k \\ l = & 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

Cuadrado grecolatino

Tabla de contenido

Experimento con un solo factor

Comparación de rangos múltiples

Diseño en bloques completos al azar

Característica

Modelo

Cuadrado latino

Grecolatino

Diseño de dos factores

En este caso hay 3 bloques con el mismo número de niveles cada bloque que el factor.

El modelo en este caso es:

$$Y_{ijlm} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_l + \tau_m + \epsilon_{ijlm}; \begin{cases} i = & 1, 2, \ldots, k \\ j = & 1, 2, \ldots, k \\ l = & 1, 2, \ldots, k \\ m = & 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

Un ejemplo de una tabla de distribución de un cuadrado grecolatino es:

Aα	Bβ	Cγ	Dδ
Bγ	Aδ	Dα	Cβ
Cδ	Dγ	Aβ	Bα
Dβ	Cα	Bδ	Aγ

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Diseño de dos factores

Tabla de contenido
Experimento con un solo factor
Comparación de rangos múltiples
Diseño en bloques completos al azar
Diseño de dos factores

Modelo:

$$y_{ijl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijl}$$
$$\text{para } i = 1, \ldots, a; j = 1, \ldots, b; l = 1, \ldots, n.$$
$$\text{Donde } e_{ijl} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)\ i.i.d.$$

Hipótesis estadística:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_a = 0$$
$$H_1 : \text{ Algún } \alpha_i \neq 0$$
$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_b = 0$$
$$H_1 : \text{ Algún } \beta_j \neq 0$$
$$H_0 : (\alpha\beta)_{1,1} = (\alpha\beta)_{1,2} = \cdots = (\alpha\beta)_{a,b} = 0$$
$$H_1 : \text{ Algún } (\alpha\beta)_{i,j} \neq 0$$