Vergil: Felix qui potuit rerum cognoscere causas[1]

T.S. Elliot: Und das Ende unseres Forschens $-x = \frac{1}{x}$
Ist, an den Ausgangspunkt zu kommen
Und zum erstem Mal den Ort zu erkennen.

Ein Physiker ist das Mittel der Atome, um über Atome nachzudenken.

Goethe: Es ist ein groß Ergetzen, $e^{i\pi} + 1 = 0$
Sich in den Geist der Zeiten zu versetzen,
Zu schauen, wie vor uns ein weiser Mann gedacht,
Und wie wir's dann zuletzt so herrlich weit gebracht.

$x - 1 = \frac{1}{x}$ Goldener Schnitt, Rekursion, Kettenbruch $x = 1 + \frac{1}{x}$

Udo Schwarz * Potsdam: Begriffe, Verflechtungen, Quellen. 19. März 2023

Unten gelisteten Themen ging und gehe ich nach[2]. Auf meinen Wegen nutze ich den rizomartigen (graphen- oder netzwerkartigen) Text als Kompass für meine ganz persönliche Orientierung. Das gewachsenes Sammelsurium dient der raschen Rekapitulation von Grundideen[3], deren Verwurzelungen[4] und Verflechtungen. In den gelisteten Quellen sind die unten adressierten Sachverhalte strukturiert und umfassend dargestellt. Es gibt kaum einen Gedanken, dessen systematische Ausarbeitung nicht für jedermann frei zugänglich vorliegt[5]. Allein die Adresse des Textes ist oft nicht gleich zur Hand. Dafür ist der vorliegende Text gedacht.
Wir lehren, lösen administrative Aufgaben, suchen nach Klarheit und arbeiten interdisziplinär. Es wird erwartet, dass wir auch viele Details und deren Bezüge aus dem Stehgreif wissen. Den hier skizzierten kleinen Katechismus braucht man nicht nur in der Lehre. In der Forschung geht es, anders als beim Lösen von Übungsaufgaben, ums kreative Suchen in einer Welt, die bislang nicht auf's Lehrbuch abgebildet wurde. Diverse Begriffe, Modelle und Werkzeuge sind bereits in Gebrauch. Man wusste es, aber nun steht man vorm Erst-Semester und soll auf Zuruf die Hamilton-Jacobi-Theorie oder die Nützlichkeit des Residuen-Kalküls elementar, ohne rätselhafte Tricks oder Verweise, überzeugend an einem Beispiel erklären oder eben mal eine Übungsgruppe in theoretischer Physik leiten/Studentenfragen beantworten und hat nur 30 Minuten Zeit zur Vorbereitung. Da jeder seinen ganz eigenen Zugang zum Stoff, sein eigenes Wissensnetz mit eigener Symbolik im Kopf hat, so helfen in diesem Moment ausführliche Lehrbücher nicht. Auf die raschen Antworten des allwissenden Netzes finden wir nicht die korrekten Fragen. Es geht schlicht um die Reaktivierung ruhender eigener ganz individueller Wissens- und Kompetenznetze. Die folgenden Stichpunkte sind der Schlüssel zu meinen verschütteten Speichern, um Studenten kurz und knapp die Kern-Ideen und deren

[1] Befriedigender als richtig zu liegen ist es, zu wissen warum. **Erkenntnis befreit von törichter Furcht wie von eitler Hoffnung und bewirkt jene Gelassenheit/Ataraxie, welche das höchste Gut und zugleich die wahre Glückseligkeit ist.** Lukrez * um 96, †55 v.Chr. Lies **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990; **Poincaré: Wert der Wissenschaft 1902.**

[2] **Paracelsus 1493–1541:** Wer nichts weiß, liebt nichts. Wer nichts versteht, ist nichts wert. Aber wer versteht, der liebt, bemerkt und sieht auch... Je mehr Erkenntnis einem Ding innewohnt, desto größer ist die Liebe ...

[3] Horaz: Mit einem, der die Grundbegriffe nicht versteht, lässt sich nicht diskutieren.

[4] Krbek: Grundzüge der Mechanik 1954 p140 bis 180.

[5] Leibniz am 26.8.1714 an Remond: **Die Wahrheit ist weiter verbreitet als man meint!** Lies z.B. zum Verständnis der QED die nicht formal verschleierten Arbeiten von Iwanenko, Sokolow, Rohrlich, Peierls, Landau, Lifschitz und zum Verständnis der ART insbesondere die vortensoriellen, Prager Arbeiten Einsteins wie *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*, Annalen der Physik 38 1912 355-369 siehe Renn: Einstein's Annalen Papers. The Complete Collection 1901-1922, 2005. Die wesentlichen Aspekte der klassischen Physik finden sich bei Hermann **Weyl: Raum, Zeit, Materie** 1918 auch Metrik und Zusammenhang sind nun dynamische Felder 1993[8] mit **Ehlers Kommentaren! Speiser: Hermann Weyl, PhysBl42 1986 H2 39-44.**

Verwurzelungen mit anderen Begriffen zu vermitteln. Der Text ist in Analogie zu einer DNA kompakt und gleichzeitig redundant aufgebaut - scheinbar unbrauchbar, nicht aber für den Eingeweihten. Symbole/Zeichen sind Wohl und Übel der modernen Naturwissenschaften, wie $\partial^2 = 0$ und $\mathrm{d}^2 = 0$, **Randoperator** ∂ ist zum **Korandoperator** d **dual** oder

$$\mathrm{d}\wedge\mathrm{d}\wedge\omega = \mathrm{dd}\omega = \mathrm{dd} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot} = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = \vec{0} = 0, \int_{\partial M}\omega = \int_M \mathrm{d}\wedge\omega = \int_M \mathrm{d}\omega, \quad <\partial M, \omega> = <M, \mathrm{d}\omega>.$$

Ein **Wohl** im Sinne der Methodenauslagerung, so dass wir metakompetenzlosen Androiden unmissverständliche Botschaften senden können, deren Syntax klar ist und danach gefragt, z.B. Klausurleistungen, leicht bewertbar macht. Begriffliche Genauigkeit nicht mit formalistischer Pedanterie verwechseln! **Übel** ist die Methodenauslagerung in dem Sinne, dass Zeichen Begriffe codieren, die tief und vielschichtig verwurzelt sind, weil sie eine Kulturleistung vieler Generationen sind, sich unablässig wandelnd bislang alle Bewährungsproben gegen ihren Untergang bestanden haben und ihre Zukunftstauglichkeit dauernd neu unter Beweis stellen müssen. **Geometrisierung des Kalküls mittels Förmchen von Differenzialen:** Diese Symbolik moderner Codierung alter mathematischer Einsichten ist eine anti-descartische Bewegung im Sinne eines Widerstands gegen Bourbaki, zurück zur geometrischen Anschauung a la **Hilbert & Cohen-Vossen: Anschauliche Geometrie** 1932, die das Verstehen des Kalküls erleichtert und höherdimensionale Betrachtungen zwanglos einschließt. Volumen, Ladungsdichte, Stromdichte und Kontinuitätsgleichung sind dann gemäß Seite 567

$$\mathrm{vol}^n = o(x)\bigwedge_{i=1}^{n}\mathrm{d}x^i, \quad \sigma^n = \rho(x)\mathrm{vol}^n, \quad \mathcal{J}^{n-1} = i_{\vec{j}}\mathrm{vol}^n, \quad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \sigma^n = \int_{\partial\Omega}\mathcal{J}^{n-1}$$

Wir vermitteln zwischen jenen, die das was sie sehen oder erfahren, für die Wirklichkeit halten - Lipps: Grundriss der Psychophysik 1909 - und denen, die ihre Modelle oder gar mathematische Objekte für die Wirklichkeit halten - Mach: Mechanik p47?. So wie die Dinge kein von Subjekten unabhängiges Dasein führen, so sind alle Modelle - gemessen an der Wirklichkeit - falsch. Alle Modelle der Physik und erst recht die Modelle anderer Wirklichkeitsbereiche haben klar definierte Gültigkeitsgrenzen, z.B. Rothman: SdW 2 2012 p61-5. Nach Mach sind aber obige Standpunkte denkökonomisch unbedenklich. L̃andgrebe & Smith: Why machines will never rule the world. Artificial intelligence without fear 2022; Hoffmann & Schlattmann: Prizipien statt Orthodoxie. Treder zur Prinzipienfragen und Einstein, PhysJ21 2022 H11 p25-39 **unterscheide Prinzipienphysik von Modellphysik!**; Siehe auch Dyson! **Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik** 1981 p30-49; Shankar: Fundamentals of Physics. Mechanics, Relativity, and Thermodynamics (Open Yale Courses) 2014; Beide Wege zum Verstehen werden simultan gegangen: **Geometrisch, bildhafte Vorstellungen** werden verhandelt - siehe Feynmans verschollene Vorlesung 1996 zu Kepler-Gesetzen - und **beispielhaftes mechanisches/verdrahtendes Einüben** von Methoden wird praktiziert. Feynman: Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman! Abenteuer eines neugierigen Physikers. Autobiografische Anekdoten 1985 p448ff Cargo-Kult-Wissenschaft; Gleick: Richard Feynman. Das Leben und Werk des genialen Physikers 1993; Gribbin: Feynman. Die Biografie eines Genies 1997; Feynman: QED - die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p19ff; Gegenbewegung zu Nicolas Bourbaki! Siehe Freudental: Theoriebildung zum Mathematikunterricht, 87/3 Zt. Didaktik Mathe, Praxis der Mathematik 42 2000 **Mathematik als Prozess der Begriffs- und Theoriebildung!** Nicht als Produkt Lieferant von nützlichen Tricks und Techniken für die Anwendung. **Dedekind 1888:** Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen. **Kalkül ersetzt zwar Anschauung und Erfahrung, aber nicht das Verstehen.** Maier, Brady, Edelglass: Being on Earth. Practice in tending the appearance 2008; Spalt: Vom Mythos der mathematischen Vernunft 1980; Gerald Holton: Themata. Zur Ideengeschichte der Physik 1984;

Wer mit der Physik nichts anfangen kann, wer Physik für überflüssig oder praxisfern hält, wer einen leichten, mathematisch sparsamen Zugang - **totales Differential = Riemanns Idee der mehrfach ausgedehn-**

ten Größe wie (Musik: Tonhöhe, Lautstärke; Position und Ausdehnung: Länge, Breite, Höhe oder r, θ, ϕ; Farbe: R,G,B; Zustandsgrößen/thermo Potentiale: Guggenheim-Quadrat ; physikal. Größen: $E(x, \dot{x})$) - zur Physik oder eine Naturwissenschaft ohne Gültigkeitsgrenzen sucht, der muss mit der phänomenologischen **Thermodynamik** beginnen. Mechanik bedeutet Differentialgleichungen, Variationsrechnung und Mannigfaltigkeiten. Elektrodynamik - partielle Differentialgleichungen, Darsteller der Lorentzgruppe. Für Anspruchsvolle mit Blick auf das Verständnis der Quantenfeldtheorie der perfekte Einstieg. Schul- und Uniausbildung übersehen dies traditionell: Bei Helmholtz, Sommerfeld, Landau etc findet sich Thermodynamik im Band ≈ 5. Bei Hänsel & Neumann und in der Physik für Lehrer-Reihe passiert zwar eine frühe Behandlung der Thermodynamik, aber auch ohne rechte Begründung und Motivation: **Aber Thermodynamik hat den kulturellen Rang von Logik und Geometrie!** Alltagserfahrungen mit Kleidung, Obdach, Ofen-Wärme, Küchenphysik/Nahrung, Physiologie der Lebewesen, Wetter etc. und industrielle Anwendungen/Verfahren: Dampfmaschine, Dampfturbine, Verbrennungsmotoren, chemische Industrie - alles Kreisprozesse - sind ein unerschöpflicher Motivationsquell. Aber vorsicht! Es geht in der Thermodynamik tatsächlich um Thermostatik, also um Gleichgewichtsgrößen. In der Praxis findet man aber vor allem Nichtgleichgewichtsprobleme. Siehe Seite 509. Lies dazu **Müller: Grundzüge der Thermodynamik mit historischen Anmerkungen** 1994, 1998, 2001; Wirkungsgrade von Wärme-Kraft-Maschinen $\eta = \frac{T_1}{T_1 - T_2}$: 4-Takt Otto $< 35\%$, Diesel/Braunkohlenkraftwerk $< 43\%$, Steinkohlenkraftwerk $< 46\%$, mit CCS $< 34\%$. Delbrück: Kohlendioxid-Abscheidung aus Atmosphäre, PJ22 2023 H3 p16f A] Aufforstung, B] CO_2-Sequestrierung/sequestrare, absondern, trennen = CCS = carbon dioxide capture and storage bedeutet 790-1020 g/kWh zu 255-440 g/kWh bei Brennstoffmehrverbrauch von 24 bis 40 % wegen für die Abscheidung und Verdichtung des Kohlenstoffdioxids durch B1. Amin-Abgaswäsche, B2. Reinigung vor Kohlevergasung+Aufkonzentrierung Kraftwerk Buggenum, B3. Oxyfuel-Verfahren = O_2- statt Luft-Zufuhr zum Feuerraum. 30 MW im Industriepark Schwarze Pumpe 2008. Buchal: ENERGIE - Natur, Mensch, Technik. Natur, Mensch, Technik, Umwelt, Klima, Zukunft 2017 p126; Mach: Die Prinzipien der Wärmelehre 1896; **Hund: Einführung in die theoretische Physik Bd4. Theorie der Wärme** 1950; Štrunk: Moderne Thermodynamik PfL1 2017; M̃eyn: Wärme und Energie. Physik für Lehramtstudierende Bd3 2021 PhysJ22 2023 H2 p44; Noch elementarer, aber nicht so allgegenwärtig ist die Statik. Siehe Mach: Mechanik; **Zischka: Die alles treibende Kraft. Weltgeschichte der Energie** 1988; Meinhold & Pätz: Erdöl und Erdgas, vom Plankton bis zur Pipeline 1978; **Zischka: Ölkrieg. Wandlung der Weltmacht Öl** 1939; Logarithmen der Energiemengen dienen der leichteren Orientierung/Vorstellung im Reich der Größenordnungen, um Wichtiges von weniger Wichtigem klar zu unterscheiden! → **Dekadische Logarithmen von Energiemengen in Wh:** **40** = Supernova. **30** = Sterne = radioaktive Hochöfen ohne Abschirmung. Sonnenenergie pro Jahr wegen Leuchtkraft $3.8 \cdot 10^{26}$ W. Karamanolis: Das ABC der Sonnenenergie 1988; Karamanolis: Sonnenenergie. Ausweg aus dem Öko-Energie-Dilemma 1991; Karamanolis: Zurück zur Sonne. Photovoltaik und Solarwasserstoff für eine neue Weltenergie-Konzeption 1992; Karamanolis: Wasserstoff. Energieträger der Zukunft 2001; **25** = Rotationsenergie der Erde = Energie größter solarer Flares. **21** = Solarer Energieeintrag auf Erdscheibe pro Jahr. **20** = Licht + IR auf Erdoberfläche pro Jahr = Energie typischer solarer Flares. **17** = Weltprimärenergiebedarf pro Jahr. **15** = Deutschlands Primärenergiebedarf 2022 3PWh: 1.2 PWh Erdöl = $105 \cdot 10^6$ t + 1PWh Erdgas = $65 \cdot 10^6$ t = $90 \cdot 10^9$ m^3 + 0.6PWh Kohle = $100 \cdot 10^6$ t + 0.25 PWh erneuerbar + 0.05 PWh Biodiesel/Pellets. **14** = Jährlicher Dieselbedarf Deutschland 4 $\cdot 10^{10}$l je zur Hälfte PKW und LKW = jährl. **Erdgasspeicher** BRD 250TWh = 1/4 des Jahresbedarfs. **Elektroenergiebedarf in Deutschland** 600TWh = **40 Kernkraftwerke oder 1.4**$\cdot 10^6$ **t Braun-Kohle pro Tag**, 2030 750TWh, 2045 1000TWh=1PWh = 60 Kernkraftwerke in Deutschland. **Carsten Rau: Atomkraft forever** ARD/NDR-Doku 2022. Dual Fluid Reaktor = natrium/bleigekühlter Flüssigsalz(Aktinoidenmetall)reaktor in Kombination mit Hochtemperaturwiederaufarbeitung die fraktionierte Destillation/Rektifikation. Erntefaktor = Energy Returned on Energy Invested = ERoEI = EROI = Verhältnis der Elektrizität zur investierten Energie = die im Anlagenlebenszyklus aufgewandte „Graue Energie“ = Herstellung, Transport, Lagerung, Verkauf und Entsorgung. **Regelzonen** von Amprion, TenneT,

TransnetBW und 50Hertz. Liste der Schaltanlagen im Höchstspannungsnetz. 220kV/380kV. Max 2kA pro Leiterseil. Wegen der Endlager und zusätzlichen 40 Kernkraftwerke muss Niedrigstrahlung landesweit kontinuierlich gemessen und veröffentlicht werden: $^{90}_{38}\mathrm{Sr} \xrightarrow[28{,}78\ \ \mathrm{a}]{\beta^-0.55\mathrm{MeV}} {}^{90}_{39}\mathrm{Y} \xrightarrow[64{,}0\ \ \mathrm{h}]{\beta^-2.3\mathrm{MeV}} {}^{90}_{40}\mathrm{Zr}$, $^{131}_{53}\mathrm{I} \xrightarrow[8\ \ \mathrm{d}]{\beta^-0.97\mathrm{MeV}} {}^{131}_{54}\mathrm{Xe}$, $^{134}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow[2\ \ \mathrm{a}]{\beta^-2\mathrm{MeV}} {}^{134}_{56}\mathrm{Ba}$, $^{137}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow[30\ \ \mathrm{a}]{\beta^-0.515\mathrm{MeV}} {}^{137m}_{56}\mathrm{Ba} \rightarrow {}^{137}_{56}\mathrm{Ba}+\gamma$. Endlager-Umgehung durch elegante Abfallentsorgung. Alternativ kann man die krebserregenden Abfälle auch in Kriegsgebieten verschießen, wie es durch die USA seit den Golfkriegen 1991 und 2003 bereits praktiziert worden ist. $1.3{\cdot}10^6$ t ^{238}U warten auf Entsorgung als panzerbrechende Munition. F̃rieder Wagner: Todesstaub. Made in USA. Uranmunition verseucht die Welt 2007 Youtube. DU depleted Uranium-Munition; W̃agner: Todesstaub. Deadly Dust. DVD 2012; Höll: Die Wahrheit über die Atomkraftwerke. Gefahren für Mensch und Wasser 1977; Sitzlack: Einführung in den Strahlenschutz 1980; Weish & Gruber: Atomenergie und Umweltsituation 1973; Weish & Gruber: Radioaktivität und Umwelt 1975, 1986[3]; Sauter: Grundlagen des Strahlenschutzes 1983; **Buchal: ENERGIE** - Natur, Mensch, Technik. Natur, Mensch, Technik, Umwelt, Klima, Zukunft 2011, 2017 p96 Wer genug Energie hat, kann fast alle Probleme lösen.; **Woher kommt der Strom? energy-charts.info** ct26.2022. **Installierte Leistung Deutschland 2022 218.2 GW: a] Grundlast** 79.6GW (33.4GW Kohle/Öl + **27.4GW Erdgas** + Kernenergie 4.1GW + Wasser 14.7GW bedeutet maximal 79.6GW·9000h=720TWh, was aber wegen Wartung/Reperatur und Regelbetrieb nicht gefahren werden kann. **b] Regenerativ 123.2 GW, Kapazitätsfaktor < 25% = 6h am Tag, wetterbedingt, also 270TWh im Jahr:** 56.1GW Wind onshore + 7.8GW Wind offshore + Photovoltaik 59.3GW. **c]** Biomasse 9.5GW + sonst 5.9GW. **Plan:** 2030 115GW Wind onshore, 215GW Photovoltaik. 2045 600GW = 200GW Wind + 400 GW Photovoltaik. Netz wird extrem dezentral, was wegen der 50 Hz-Stabilität eine Herausforderung an digitale Steuerung stellt. Bereitgestellte und benötigte Elektroenergie müssen gleich sein. Netzstabilität ist bis 40% erneuerbarer Energie machbar. Weitere erneuerbare muss in Speicher gefahren werden. Gassturbinen oder Akkuspeicher müssen bei komplettem Grundlastverzicht die vielfache Leistung der regenerativen/erneuerbaren installierten Leistung bereithalten, um Stabilität des Netzes zu sichern. Nicht praktikabel! Die Vielzahl der Verbraucher/Gesetz der großen Zahlen und Kenntnis des mittleren Verbraucherverhaltens erlauben die Stabilität des nichtergodischen Gesamtsystems. Die Netzfrequenz ist daher eine Zufallsgröße mit dem Mittelwert 50Hz. Zudem laufen alle Einspeisungen phasen-synchron. Kraftwerksausfall, Umspannerstörungen und Flashmob-Verhalten der Verbraucher kann nur durch kurzfristige Lastabwürfe = Brownout, z.B. spontane Abschaltungen von Städten, beherrscht werden. Die Arbeit in den Dispatcher-Zentralen der Energieversorger entspricht einem Computerspiel mit praktischer Bedeutung oder der Arbeit eines Piloten. Gerald Markel & Helge Toufar: Märchen vom Gasausstieg 2022 mit grenzenlosen Energieressourcen kann theoretisch auch ohne Erdgas alles synthetisch erzeugt werden. Aber die Prozesswärme ist nicht zu ersetzen.; **Elsberg: Blackout** 2013; **Buchal, Oesterwind, Wittenberg: STROM. Die Gigawatt-Revolution** 2013; **13** = 1600 MW-Kohle/Kern-Kraftwerk pro Jahr (10% Eigenbedarf) = 36000 t Kohle pro Tag = monatlicher Dieselbedarf Deutschland $3.6\cdot10^9$l = weltweiter Cloudspeicherenergiebedarf 2021 = 50MT Zar-Bombe. **12** = Anihilationsenergie 1kg Materie = 100MW-Blockenergieerzeugung pro Jahr = tägl Dieselbedarf Deutschland $1.21{\cdot}10^8$l pro Tag = Energiemenge eines LNG-Tankers = Energiebedarf der Basisstationen des Mobilfunknetzes in Deutschland pro Jahr = Diesel für 3 Millionen LKW in BRD pro Woche = Kraftwerk Hassi R'Mel Gas- und Dampf-Kombi/Hybrid-Kraftwerk 150MW davon ISCC Integrated solar combined-cycle Sonne auf Thermoöl 293 → 393°C gibt 25MW. Schaufelradbaggermotor bis 5MW. Rasper: Schaufelradbagger als Gewinnungsgerät. Entwicklung, Konstruktion, Einsatz 1973; S̃iem: Die größten Bagger 2013; Durst: Schaufelradbagger 1986; Boyd: Riesige Maschinen. Gigantische Transporter, Kräne und Baumaschinen 2016; **11** = 1kg Uran. **10 bis 11** = taktische Kernwaffe. **11 bis 12** = ICBM. **10** = Hiroshima-Bombe = Windradenergie pro Jahr[6] Bau eines Windrades erfordert mehrere 1000 t Stahlbeton = jährliches Regelarbeitsvermögen des nicht gebauten Pumpspeicherwerk Atdorf = Energieverbrauch eines Tankers für 30tägige Fahrt vom persischen Golf 2700t Diesel = Gesamtenergie der Gaskraftwerke zwecks Netzwiederaufbau im Schwarzwerdefall in Thy-

[6] Windradleistung 3 bis 6 MW onshore mit max. Sonnenstunden = 2000 h pro Jahr bedeutet ein Viertel von 15000 Haushalten, offshore 15 MW.

row+Ahrensfelde 840000m^3 für 6h. **9** = 1kT Kernwaffe. **8** = Primärenergiebedarf US-Bürger pro Jahr = Verkehrsflug Frankfurt-NY 60000l Kerosin. **7** = Nettoenergiebedarf Udo 2021 = Dacia-Benzin pro Jahr = LKW-Diesel pro Woche = 300km M1 Abrams-Panzer mit einer Tankfüllung = 10 B-747-Flugminuten. **6** = Primärenergiebedarf Arme pro Jahr = **Eine B-747-Flugminute**, wegen 184 l mit Kerosinheizwert 34.5 MJ/l also 184· 34.5·10^6/3600 Wh = 1.8 ·10^{6}Wh. **5** = Kühlschrankverbrauch pro Jahr = E-Auto-Batterie 100kWh mit 7104 Zellen, 15-25kWh/100km, Hochspannungsakku 404 V = 96*4.2 V, also 96 Zellen in Reihe. Davon 74 parallel. Bedeutet 247 Ah. Supercharger 120kW = 400V*300A in 40 Minuten. 5kW-gedrosselte Wall-Box braucht dafür 24*40'=960'=16h. **4** = 1kg Erdgas/Heizöl/Benzin = 15km per Auto. **3** = Nahrungsenergie Mensch pro Tag = 1/4 l Benzin = 230g Gaskartusche = 2.8kWh = 28l Teewasser. Propan-Butan 12.5kWh/kg Kocher 2.24 kW oder 3g/min, Brenndauer 70Minuten = 6€ 2022. **2.5** = Energie Autostartbatterie = Pedelec-Akku 90km 37V 13 Ah =500Wh = 60°C-Waschgang. **2** = **1l Teewasser** = 40°C-Waschgang = Geschirrspülgang = Autocrash bei 120km/h = 4min 1.8kW Wasserkocher = 1 Stunde 100W Pedaldynamo. **Solarpanel:** 49,5 x 70 cm x 2,5 cm, 4,2 kg, monokristallines Photovoltaik-Panel mit effektive Flächer 0.47m x 0.64m = 0.3 m^2 gibt 50 Watt aus 420W-Photonenfluss. Leerlaufspannung: 21,5 V. Kurzschluss-Strom: 3,2 A. Nennstrom: max. 2,91 A. Betriebspunkt: 17,2 V. **1** = Kirschkernkissen von 18 auf 50°C nimmt 15 Wh. **0** = Treppenaufstieg pro Etage = Mignonbatterie. **-15 bis -3** = kinetische Energie **eines** Protons galaktischer kosmischer Strahlung 10^8 bis 10^{20} eV. **-11** = Energie eines Hadrons am LHC, CERN 2021 6.5TeV. **-14** = elektrostatische Energie aller Protonen **eines** Urankerns 2 GeV. **-15** = elektrostatische Energie von Ba- und Kr-Kern + Neutronen + γ- und β-Strahlung bei Urankernspaltung 200 MeV pro Urankern. **-17** = Energie **eines** γ-Stahlungsphotons bei e$^+$e$^-$-Paarzerstrahlung 1MeV. **-17 bis -13** = kinetische Energie **eines** solaren Protons, 1MeV bis 10GeV = 10^6 bis 10^{10} eV. **-23** = Energie **eines** Photons sichtbaren Lichts bei 600nm 50PHz, einige eV. **-24** = kinetische Energie eines Luftmoleküls bei Raumtemperatur. **-28** = Ein 2GHz-Photon. Ãleksandrov/Alexandrow: Energieprobleme trotz ausreichender Ressourcen. Aufwendigere Energiegewinnung bei wachsendem Energiebedarf. Prioritäten in d. sowjet. Energiepolitik 1986; Cap: Energieversorgung. Probleme und Ressourcen 1981; Übelacker: Atomenergie 1988 mit Coverbild Atompilz wird zu Übelacker: Energie. Was ist was Bd3 2003 mit Coverbild Windpark. Mit Solarmodulen und Windmühlen allein wird Deutschland vom Industriestandort zum Campingplatz/Gartenkolonie. Eine E-Auto-Ladestation zieht in 40 Minuten 120kW! Die Ladestationen bräuchte man für eine realistischen E-Auto-Nutzung flächendeckend im Abstand von 20 km! Weder Infrastruktur noch Energie sind nicht vorhanden. Zur Ablenkung vom Unsinn liefern die Grünen Waffen ins Kriegsgebiet und sorgen so für Tote, sinnlosen Energieeinsatz und Umweltverschmutzung. Zum Trost trägt der Gegner die Hälfte der Kosten. Die Antriebe von Raketen, Flugzeugen und Panzern arbeiten duchweg klimaneutral. Zudem ist der Schadstoff-Beitrag der Sprengstoffe und brennender Ziele vernachlässigbar im Sinne femininer Außenpolitik. Friedrich Herrmann KPK = Karlsruher Physikkurs, www. physikdidaktik.uni-karlsruhe.de, PhysJ 12 2013 Mai p3 & 6: Energieverbrauchsdeckung durch künstliche Photosynthese zur Wasserspaltung: menschl. Energieverbrauch 3·10^{20} Ja^{-1} = 1/10000 dessen, was die Sonne reinbringt. Energiewende per Sektorkopplung PhysJ18 2019 H3 p34-9; Düren: Das Ende der Autobahn, PhysJ 20 2021 H8/9 p68-71; Justi: Energiedirektumwandlung, PhysBl 29 1973 p20-33, p71-79; Wagner: Direkte Gewinnung elektrischer Energie 1973; **Naumann: Energie ohne Umwege** 1969 p101ff Ostwald: Elektrochemie. Geschichte und Lehre 1894 nutze **kalte Verbrennung** an den porösen Metallplatten, zwischen denen sich ein basisches Elektrolyt mit OH-Ionen befindet. **Anode** $2H_2+4OH^- \rightarrow 4H_2O+4e^-$. **Kathode** $O_2+2H_2O+4e^- \rightarrow 4OH^-$ = elektrochemische Brennstoffzelle; **Elektrolyseur** = elektrischer Strom macht chemische Reaktion/Stoffumwandlung. Bedeutet chemische Speicherung von Elektrizität. **Brennstoffzelle** = chemische Reaktion/Stoffumwandlung macht elektrischen Strom. G. Mie: Entwurf einer allgemeinen Theorie der Energieübertragung, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. CVII. BdVIII 1898 p1113; **Gefühl für persönlichen Energieverbrauch geben folgende Daten zum Lebensumfeld: 2-Personenhaushalt 2021 Helgard & Udo:** Heizung 3MWh + Strom 2MWh + Benzin 9.2MWh + Essen 180kg*24h*365d*1kcal/kg/h=1.8MWh bedeutet Nettoverbrauch 16MWh oder 8MWh pro Jahr und Person. Dazu kommen Erzeugung/Entsorgungsaufwand + Wasser. Bruttowerte 1972 USA 90MWh, BRD 40MWh, 30 MWh UdSSR, arme Länder 0.5 bis 2 MWh siehe Flohn: Globale Energiebilanz und Klimaschwankungen 1973

p123; Flohn: Das Problem der Klimaänderungen in Vergangenheit und Zukunft 1985; Stehr & von Storch: Klima, Wetter, Mensch 1999; Ludwig: Eine kurze Geschichte des Klimas 2006; Krüger: Die Entdeckung der Eiszeiten 2008; Behringer: Kulturgeschichte des Klimas. Eiszeit und bis globale Erwärmung 2011; Lozan, Graßl, Hupfer, Schönweise: Warnsignal Klima: Genug Wasser für alle? Genügend Wasser für alle - ein universelles Menschenrecht 2005; Schönwiese: Klimatologie 1994, 2013[4]; Houghton: Globale Erwärmung. Fakten, Gefahren und Lösungswege 1997; Rahmstorf & Noethen: Wolken, Wind und Wetter. Die Kinder-Uni 2010; Rahmstorf & Schellnhuber: Der Klimawandel. Diagnose, Prognose, Therapie 2012; Buchal & Schönwiese: Klima. Die Erde und ihre Atmosphäre im Wandel der Zeiten 2012[2]; Buchal, Oesterwind, Wittenberg: STROM. Die Gigawatt-Revolution 2013; Buchal: ENERGIE - Natur, Mensch, Technik. Natur, Mensch, Technik, Umwelt, Klima, Zukunft 2017; Archer & Rahmstorf: The climate crisis, an introductory guide to climate change 2010; Bittermann: Semi-empirical sea-level modelling 2015; Lozan, Graßl, Hupfer: Das Klima des 21. Jh. Warnsignal Klima. Wissenschaftliche Fakten, mehr Klimaschutz, weniger Risiken für die Zukunft 1998; Neufeld, Hernandez-Garcia: Chemical and biological processes in fluid flows. A Dynamical Systems Approach; S̃chönwiese: Klimawandel kompakt 2019; Mauelshagen: Geschichte des Klimas. Von der Steinzeit bis zur Gegenwart 2023; Welzer: Der FUTURZWEI - Zukunftsalmanach 2013, Geschichte vom guten Umgang mit der Welt, Schwerpunkt Mobilität 2013 vermittelt **Klimarettungsirrglauben!** 2000W-Quatsch kann Versprechen nie einlösen! Sicher gibt es Klimaschwankungen und derzeit einen globalen Temperaturanstieg und jeder sollte Ressourcen für die nächste Eiszeit sparen. Aber Asien baut in nächster Zeit ca 600 Kohlekraftwerke auch um europäische Bedarfe zu decken. Zudem ist der Klimawandel vermutlich nicht allein durch das zusätzliche antropogene CO_2 verursacht. Das Argument sollte sein, dass man fossile Brennstoffe nicht leichtsinnig verbrennen sollte, weil sie verfahrenstechnologisch zu wertvoll sind und während der nächsten Eiszeiten Kohle, Erdöl und Erdgas zum Heizen dringend von Nöten sein werden! Wenn man aber irgendwas machen will, wäre eher ein genereller Smartphoneverzicht, Stopp der Digitalisierung und Werbeverbot zielführend! Individuelles Sparen bringt leider nur wenige Prozent der Einsparung. Maximal 100 km/h auf Autobahnen wäre ein moralischer Beitrag. Es geht aber bei der Einsparung um Größenordnungen, die mit Appellen an die Sparsamkeit nicht zu leisten sind. Man braucht einfach künftig zunehmend viel mehr Energie, also plus 40 Atomkraftwerke allein in Deutschland, **es sei denn man verzichtet auf** a] **Flugverkehr**, Habeck wirbt 2022 für das Reisen, ohne eine massive Besteuerung von Kerosin zu beschließen. **A380 Startmasse 560t, 14000km, 15h, 260t = 330000l Kerosin, also 22000l Kerosin pro Flugstunde b] Digitalisierung**, bedeutet Smartphone-Verbot, Verbot des online-Handels. Es geht nur Einzelhandel und Logistik per Bahn. Nicht just-in-time! **c] Diesel-LKWs** zwecks just-in-time Lieferung. **d] auch elektrisch betriebenen PKWs**. Bedeutet formal den Einsatz von Tiefpass-Filtern. Ich präferiere 40 Atomkraftwerke nebst einem Endlager pro Bundesland als Begleitung des Ausbaus erneuerbarer Energien (Edward Teller, Franz Josef Strauß, Markus Söder, Lafontaine). **Franz Josef Strauß: Friedliche Verwendung der Kernenergie**, Union in Deutschland 10 1956 Nr 3/4 Seite 4 vom 12. Januar; **Zischka: Kohle im Atomzeitalter** 1961; Teller: Energie für ein neues Jahrtausend 1975; Ṽahrenholt & Lüning: Unerwünschte Wahrheiten. Was Sie über den Klimawandel wissen sollten 2020; Ṽahrenholt & Lüning: Unanfechtbar? Die Entscheidung des Bundesverassungsgerichts zum Klimaschutz im Faktencheck 2021; **Plastik. Die Recycling-Lüge** NDR-Dokfilm 19.10.2022; Schwab & Malleret: COVID-19. Der grosse Umbruch 2020 The great reset. Lieber Selbstmord, statt am Ende des Lebens zu sterben. Grün, die neue Blase. Karl Polanyi 1886-1964 The great transformation. Politische und ökonomische Ursprünge von Gesellschaften und Wirtschaftssystemen 1944, 1973[14] Staat und Gesellschaft werden Bestandteil der Ökonomie; W̃olff: Weltmacht IWF. Chronik eines Raubzugs 2014; W̃olff: World Economic Forum. Die Weltmacht WEF im Hintergrund 2022 Einführung des digitalen Zentralbankgeld mittels unerfahrener, ahnungsloser, engagierter, redegewandter, fotogener junger Leute aus Politik, Wirtschaft, Wissenschaft, Medien, Gewerkschaften, NGOs, Kultur und Kirchen; Ferguson: Der Niedergang des Westens. Wie Institutionen und Ökonomien sterben 2012; Ther: Das andere Ende der Geschichte Über die Große Transformation 2020; K̃ohei Saito: Natur gegen Kapital. Marx' Ökologie in seiner unvollendeten Kritik des Kapitalismus 2016; Streeck: Gekaufte Zeit. Die vertagte Krise des demokratischen Kapitalismus 2016; Mai: Tiefe oder freie Gesellschaft - Der Westen steht vor der Entscheidung, Kontrafunk Audimax 8.1.2023; H̃ofmann-Reinecke: GRÜN UND DUMM. Die Natur lässt sich nicht zum Narren halten 2012, 2021; https://www.achgut.com/autor/hofmann-reinecke_h https://www.weltderfertigung.de T̃hess: Sieben Ener-

giewendemärchen? Eine Vorlesungsreihe für Unzufriedene 2021; Dethloff: Unberechenbares Klima. Ursachen und Unsicherheiten des Klimawandels 2022; Mückenhausen: Die Produktionskapazität der Böden der Erde 1973; VW-Golf auf 100km braucht **5.6 l Diesel** mal 9.8 kWh/l = 55 kWh, bedeutet bei 2€/l ca. 11.2€. **Oder. 7.3 l Benzin** mal 8.5 kWh/l = 62 kWh, bedeutet bei 1.8€/l ca. 13.14€. **Oder. E-Auto** = 16.6 kWh, bedeutet bei 0.8€/kWh ca. 13.28€. Heizwerte: **Diesel** 9.8 kWh/l. **Benzin** 8.5 kWh/l. Dacia mit Motor 64 kW = 87 PS / 128 Nm: 7.8 l/100km = 66.3 kWh/100km bedeutet 12 km/l oder 1.5 km/kWh. 14000km pro Jahr bedeutet 9200kWh oder 1167 l Benzin im Jahr = LKW-Dieselverbrauch pro Woche = 600km Leopard2 = 300km M1 Abrams mit einer Tankfüllung! Warentransport muss auf die Schiene! Flug Frankfurt nach NY braucht 60000 l, bedeutet 10000l pro Flugstunde = 10 Wochen LKW-Verbrauch = 10 Jahre PKW-Nutzung. Langstreckenflug per A380 oder B747 nehmen 250000l = 250 Jahre PKW-Nutzung. Ein verharmlosendes Argument bezieht sich auf den 100km-Verbrauch pro Person: < 4 l, also ist Fliegen grün, wie auch Lieferung schwerer Waffen in Kriegsgebiete. Audi A6 Leistung: 163 bis 340 PS bedeutet 120 kW bis 250 kW. **E-PKW-Batterie** enthält 55 bis 82 kWh. 15kWh pro 100km. Audi 95kWh gibt 409 km. Beachte die lebenswichtigen, aber leider meist wenig alltagstauglichen **Energieäquivalente 1 Joule = 1 Ws =1/4.19 cal = 0.24 cal bedeutet 1 kWh = 3600 kWs = 3.6 MWs = 3.6 MJ = 0.86 Mcal = 860 kcal bedeutet 1 MJ = 0.278 kWh. 1 Kilotonne TNT = 1kT = 4.18** $\cdot 10^{12}$ **Ws = 1.162** $\cdot 10^9$ **Wh.** Zudem sind die Energieäquivalente wegen diverser Verluste technologisch nicht realisierbar, aber eine brauchbare Abschätzung. **Energieverbrauche:** 40°C-Waschgang 0.55kWh. 60°C-Waschgang 2kWh. Geschirrspülergang 0.8kWh. Kühlschrank 140 kWh/Jahr. **Treppenaufstieg** pro Etage 3m: $W = mgh$ = 60 kg 10m/s^2 3m = 1800Nm = 0.5 Wh. Die Energie eines Liters Benzin von 8500 Wh bringt uns in die 17000ste Etage. **Energiebedarf/Nahrungsaufnahme des Menschen** pro Stunde und pro 1kg-Körpermasse ist 1kcal=4.19 kJ. Bedeutet einen täglichen Energiebedarf $E = 24h80$kg 1kcal/kg = 1920 kcal = 1.92 Mcal $\approx$ 8 MJ = 2.2kWh = Viertel Liter Benzin. Mit einem Liter Benzin mit 8.5 kWh = 7.3 Mcal bekommt man ca. 183l = knapp 2 Badewannen mit Leitungswasser von 20°C auf 60°C: $m = \frac{Q}{c\Delta T} = \frac{7.3Mcal}{1kcal/kg/K40K} = 7300/40kg = 183$ kg. Gamow: Sonne, Stern unter Sternen 1964 p30ff Energieproduktion der Sonne. Solarkonstante $S = 1367$ W/m^2, Gesamtleistung des Sonne $P = SA = 4\pi a^2 S = 3.3 \cdot 10^{26}$ J/s mit Erdbahnradius a, bei der Sonnenmasse von $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg setzt jedes Kilogramm der Sonnen (also Mittelwert!) $P/M = 1.6 \cdot 10^{-4}$ W/s frei. Der menschliche Körper setzt etwa 80 W, also 1 W/kg frei. Mensch als Glühbirne;). **Solarmodul** mit 0.3m^2 Fläche bei Solarkonstante 1.4kW/m^2 bedeutet Photonenleistung von 420 W gibt elktr Leistung 50W, 17.2V. Solarmodul liefert in einer Stunde 50Wh, bedeutet 100 Etagen beim Treppenaufgang. Pro Tag bei 10h Sonnenschein hat man 0.5kWh. In 17 Tagen hat man die Energie eines Liters Benzin. Die 12 Vetschauer Dampfturbinen 1964-1996 hatten je 100MW = 136000PS = 1 Million 100 Watt-Lampen. Entsprich 2 Millionen Solarmodulen obiger Größe. Der Generator gibt 10kV und 10kA. Eine 100MW-Dampfturbine braucht 180 t Braunkohle mit Heizwert 2.2 kWh/kg in der Stunde[7], was 360 MWh Heizkesselenergie pro Stunde bedeutet. Gibt Wirkungsgrad $\eta = \frac{100MWh}{360MWh} = 28\%$. Haus/Wohnungswärme: a] 80qm Fußbodenheizung pro Jahr 3000kWh. b] Altes Haus/Warmwasser 2300l = 1909kg **Heizöl/HEL/Diesel** bedeutet Jahresenergie = 1909kg 12kWh/kg = 22908 kWh. **Reservekraftwerke in Bereitschaft zwecks Netzwiederaufbau im Schwarzwerdefall:** Gasturbinenkraftwerk Thyrow bei Trebbin mit 5 mal 150 MW mit Gasspeicher 480.000 m^3 für maximal 6 Stunden. Gasturbinenkraftwerk Ahrensfelde mit 4 mal 120 MW mit Gasspeicher 360.000 m^3 für maximal 6 Stunden. **Erdgas** = Methan, Ethan, Butan, Ethen und Pentanen. H-Erdgas aus den GUS-Staaten besteht aus circa 98 % Methan. H-Erdgas aus der Nordsee besteht aus circa 89 % Methan mit Brennwert 14 kWh/kg = 50 MJ/kg oder 11.1 kWh/m^3 = 40 MJ/m^3. **Heizwert** = 90% Brennwert. L-Erdgas aus den Niederlanden und Norddeutschland besteht aus etwa 85 % Methan mit Brennwert 10 kWh/kg = 36 MJ/kg oder 8.2 kWh/m^3 = 30 MJ/m^3. Heizwert = 90% Brennwert. **LNG-Tanker** 140000 m^3 = $1.4 \cdot 10^8$ l bei 6.1kWh/l gibt 10^{12} Wh pro Schiff. Gefahren siehe Teller: Energie für ein neues Jahrtausend 1975, 1979, 1981 p127; Zerfall des Urans in alle Protonen gibt $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \approx 10^{-9}$ Ws = 2 GeV = 2.8 10^{-16} kWh. Tatsächlich neutralisieren die thermischen Neutronen nicht den Zusammenhalt aller Protonen, sondern lassen den Urankern nur in zwei etwa gleichgroße Teile zerfallen, deren kinetische Energie etwa nur

[7] Hochwertige Braunkohle 4 kWh/kg.

1/10, also 200 MeV = 200 M·$1.6 \cdot 10^{-19}$AsV = 3.2 10^{-14} kWs = = 3.2/3.6·10^{-17} kWh pro Zerfall liefert. 235kg reines ^{235}U besteht aus 6·10^{26} Uranatomen, bedeutet 1kg reines Uran enthält $\frac{6 \cdot 10^{26}}{235}$ Uranatome. 1kg Uran liefert daher 8/9·$10^{-17}\frac{6 \cdot 10^{26}}{235}$ kWh 22000 MWh = 22 GWh. 2020 BRD 600·10^9kWh. Strommarktdaten per Python smard.de ct2022 H17 p56f; Gesamtstrahungsleistung der Sonne = Leuchtkraft $L_\odot = 3.8 \cdot 10^{26}$ W. Projektion 1.36kW/qm auf Erdscheibe 173 PW = 173·10^{15} W. Atmosphäre und Albedo gehen weg! Erdoberfläche bekommt 81PW, davon sind IR + Licht 48PW oder 95W/qm. Geothermie gibt nur 32TW oder 0.063W/qm siehe Flohn: Globale Energiebilanz und Klimaschwankungen 1973 p91; Flohn: Das Problem der Klimaänderungen in Vergangenheit und Zukunft 1985; Energy and Power, Scientific American 1972; Ged Davis: Energy for planet Earth. Special issue, SciAm263 (n3) p54-60, 62 Sept 1990 =Ñov-Heft SdW1990; Dieckmann & Rosenthal: Energie. Physikalische Grundlagen ihrer Erzeugung, Umwandlung und Nutzung 2014[3]; Galvanische Kapazität von Batterien und Akkus in Ah. T̃rueb & Rüetschi: Batterien und Akkumulatoren 1998; H̃amann & Vielstich: Elektochemie 1998[3]; **1.5V-Mignon-AA-IEC-FR6-Batterie/Micro-AAA-IEC-FR03-Batterie:** Zink-Kohle 1.2 Ah → 1.8Wh. Alkali-Mangan 2Ah → 3Wh. Lithium-Eisensulfid 3Ah → 4.5Wh. **1.5V-Mignon-AA-Akku:** 1. . . 2.5 Ah → 1.2. . . 3 Wh. **12V-PKW-Batterie** 36. . . 100 Ah → 432 Wh . . . 1.2 kWh. Zn/Luft 0.1 bis 1Wh, Typ312 1.4V, 160mAh also 0.244Wh. Mobilfunk-Server- und Rechenzentren in Deutschland ca. 16 ·10^9kWh. 250000 Basisstationen in Deutschland. 600W pro Sendemast nimmt täglich 0.5kW·24h=14.4kWh. 1.3·10^{12}Wh = 1.3·10^9kWh = 1300 GWh = 1.3 TWh in Deutschland pro Jahr für Basisstationen. **Cloudspeicher** weltweit jährlich 15 TWh. Weltweit 3·10^9 Mobiltelefone. GMS = Mobilfunknetz-Jahresbedarf 2011 125·10^9kWh. 2% der Stromerzeugung geht heute auf Mobilfunk/Internet/Clouds. GMS = Global system for mobile communication. Basisstation strahlt mit < 50W, Handy < 2W. Abstand 100m bis 35km, 500ms Signalstärkecheck zwecks Handover = Funkzellenwechsel. Walke: Mobilfunknetze und ihre Protokolle. Bd1 Grundlagen, GMS, UMTS und andere zellulare Mobilfunknetze 2001; B2 Bündelfunk, schnurlose Telefonsysteme, W-ATM, HIPERLAN, Satellitenfunk, UPT 2001; Schiller: Mobilkommunikation. Techniken für das allgegenwärtige Internet 2003; Sauter: Grundkurs Mobile Kommunikationssysteme 2008; **F̃eyerabend: Die Vernichtung der Vielfalt** 2000; **Bauer: Die Vereindeutigung der Welt. Über den Verlust an Mehrdeutigkeit und Vielfalt** 2018; Sarrazin: Deutschland schafft sich ab. Wie wir unser Land aufs Spiel setzen 2010; Klonovsky: Der Ramses-Code 2001; K̃lonovsky: Land der Wunder 2005; K̃lonovsky: Lebenswerte 2009; K̃lonovsky: Der Held. Ein Nachruf 2011; K̃lonovsky: Die Liebe in Zeiten der Lückenpresse. Reaktionäres vom Tage 2015; Houellebecq: Elementarteilchen 2015; Houellebecq: Serotonin 2019; Martin Klonovsky: Schilda wird täglich bunter. Reaktionäres vom Tage 2016; **Appell für freie Debattenräume** eigentümlich frei (ef) und Inhalte unten gelisteter Adressen werden offiziell als rechts verortet, um sie als indiskutabel zu verunglimpfen und als verfassungsfeindlich zu etikettieren. Unangenehme Wahrheiten oder Standpunkte werden auf den Index gesetzt/mit Mein Kampf gleichgesetzt. Widerspruch gilt als verfassungsfeindlich!? Leitmedieninhalte sind von Ignoranz und Ahnungslosigkeit gegenüber Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften, Wirtschaft und Geschichte geprägt. Der Gebrauch von Vernunft und Wissenschaften wird als rechtsradikal bezeichnet. Reaktion des Volkes auf absurde, staatsgefährdende und demütigende Medieninhalte und Politik sind Spaziergänge. Werner Höfer: Internationaler Frühschoppen 1953-1987. Vor 2000 genügte für die Orientierung ein Blick in Zeitungen/Fernsehen. Heute ist die Vermeidung der Medien ein verlässlicher Garant für gesunde/propagandefreie Orientierung. Eine solide Bibliothek erleichtert das Verständnis der Gegenwart und erlaubt einen Blick in die Zukunft. Orientierung der Menschen an Medien wird zu Angst- und Panikmache missbraucht. Moderne Hexen und Teufel werden glaubhaft beschworen, um die neue Märkte zu schafen, Wirtschaft anzukurbeln, neuen Waren-Absatz (Elektroautos, Autoakkus, Medikamente, Waffen) zu generieren: A] Menschgemachter Klimawandel → Wandel der Industrie. B] Mittels nicht sinnvoller Tests werden Pandemien erfunden und am Leben gehalten → statt Tierversuche nun Menschversuche, an denen jeder mitmachen muss. Ganz neue Produkte werden massenhaft verkauft/von Steuergeld eingekauft. C] Einmischung fremde Konflikte. Wir müssen mit massiver Waffengewalt den Frieden irgendwo herstellen. Waffenkauf dringend nötig. James: Pragmatismus 19??; James: Was ist Pragmatismus? 1994; James: Pragmatismus und radikaler Empirismus 19??; Swanberg: Citizen Hearst 1998; **Orson Welles: Citizen Kane** 1941; Honigmann: Chef weist an ...

oder Der Fall des William Randolph Hearst 1972; Frazier: William Randolph Hearst. Modern Media Tycoon 2001; Martin Bethke: Macht und Ohnmacht der Worte. William Randolph Hearst und der Weg der USA zur Weltmacht, 1898–1917, 2001 digisat; **Kriegsbegeisterung wird mit geeigneten Fotos hergestellt.** William Randolph Hearst: Denkt an die Maine, zur Hölle mit Spanien! You furnish the pictures. I'll furnish the war! Großklaus: Medien-Bilder 2004; Massen werden durch medienwirksam inszenierte angstbesetzte Ereignisse gelenkt. Pseudowissenschaftlich gestützt werden ein vom Menschen verursachter Klimawandel und Pandemien erfunden. Mediale Schöpfungen werden als Wirklichkeit erlebt. Medien-Theater wird als Lebenswirklichkeit wahrgenommen. Die Geschichte des Photojournalismus beginnt mit einer trügerischen Inszenierung. Die ersten veröffentlichten Fotos stammen aus dem Krimkrieg 1853–1856. Sie beschönigen den Krieg, sie zeigen ihn nicht von seiner grausamen Seite. Es ist ein gemütlicher Safaribericht aus einem fremden Land. Das Bild lehrt lügen. Das gegossene Bild, das lügen lehrt (Habakuk 2,18). Fulbert Steffensky: Iconic turn. F̃rieder Wagner: Todesstaub. Made in USA. Uranmunition verseucht die Welt 2007 DU depleted Uranium-Munition; W̃agner: Todesstaub. Deadly Dust. DVD 2012; **Golfkriege:** 1. 1980-1988 Irak-Iran. 2. 1990-1991 Irak-USA = 1. Irakkrieg 650000 vs. 960000, 30000 vs 1500 Tote, CNN, 320 t Uran-Munition → 11.9.2001 3. 2003 USA-Irak = 2. Irakkrieg. Wikileaks-Gründer Julian Assange verstieß mit der Veröffentlichung gefilmter US-amerikanischer Militäropperationen 2004-2009 gegen das **Bilderverbot des Westens.**. **Precht & Welzer: Die vierte Gewalt – Wie Mehrheitsmeinung gemacht wird, auch wenn sie keine ist** 2022 Brilliante Dokumentation des Untergangs der vierten Gewalt = realitätsferne Presse/öffentlicher Rundfunk = propagandistische Traumtänzerorgane Welt/Zeit/FAZ/DLF ohne politische Informations- und Integrationsfunktion. Twitter und Dekontextualisierung. Demokratie dienenden Presselandschaft wurde zur **Mediokratie**. Journalisten der deutschen Leitmedien marschieren im Gleichschritt gemeinsam mit der Hälfte des deutschen Volkes. S̃chuler: Generation Gleichschritt. Wie das Mitlaufen zum Volkssport wurde 2023; Die inquisitorischen Fragen der Deutschlandfunk-gleichschritt-Moderatoren/Politkommissare finde ich mittlerweile (ab 2021) unerträglich. Erinnert an SED-Agitatoren beim Parteilehrjahr oder Staatsbürgerkundelehrer. Sie sind doch nicht etwa Putinversteher? Sie würden wohl nicht den Sieg des Sozialismus bezweifeln, oder? Klose: Generation im Gleichschritt. Die Hitlerjugend. Ein Dokumentarbericht 1982; In den Printmedien und im öffentlich-rechtlichen Rundfunk/Fernsehen agieren Leitmedien politisch auf BILD-Zeitungsniveau, überschreiten ihre politische Kompetenz und treiben ohne Legitimation ahnungslose Poliker und Volk vor sich her. Marketing-Strategie: Quote durch Aufmerksamkeit mit allen Mitteln. Die im Gleichschritt marschierenden Blockparteien CDU/SPD/FDP/Grüne mit **flexiblen Grundsätzen** finden sich im Einklang mit den Massenmedien. Ẽllul: Propaganda. Wie die öffentliche Meinung entsteht und geformt wird 1980; **Johannes Menath: Moderne Propaganda - 80 Methoden der Meinungslenkung** 18.12.2022, Kontrafunk 4.3.2023 Franz Josef Strauß und Petra Kelly wären Kandidaten der AfD. Crouch: Postdemokratie I 2003; Crouch: Postdemokratie revisited 2021; Was wie Verschwörung aussieht, kann auch durch spontane Synchronisation auf Netzwerken erklärt werden. Siehe Seiten 202 und 403. Gleichschritt oder Klatschen im Takt stellt sich auch ohne externen Taktgeber ein. Strogatz: Synchron - vom rätselhaften Rhythmus 2003; Bauman: Moderne und Ambivalenz. Das Ende der Eindeutigkeit 1991; Habermas: Strukturwandel in der Öffentlichkeit 1965; Habermas: Ein neuer Strukturwandel der Öffentlichkeit und die deliberative[8] Politik 2022 Inwiefern sind in einer politischen, massenmedialen Öffentlichkeit Rationalitätsverhandlungen möglich, die zum Erhalt grundlegender wie notwendiger demokratischer Aushandlungen beitragen? Für die Sozialwissenschaften ist theoretisch noch nicht geklärt, wie eine Gesellschaft funktioniert, in der politische Kommunikation - und auch Propaganda, Hass und Fake News - zu einem großen Teil über digitale Plattformen und soziale Netzwerke geschieht.; Precht und Welzer belegen die mangelnde Meinungsfreiheit durch Umfragen und **unterschlagen** aber den Skandal der Beobachtung Andersdenkender[9] durch den Verfassungsschutz. **Unerwähnt** bleiben die Diffamierung von Spaziergängern und AfD. **Unerwähnt** bleibt der **Appell für freie Debattenräume vom 1. September 2020**. https://idw-europe.org/ Der Appell richtet sich gegen **Cancel Culture** = gegen systematische Bestrebungen zum partiellen sozialen Ausschluss von Personen oder Organisationen (AfD) bezeichnet, denen beleidigende, diskriminierende, rassistische, antisemitische, verschwörungsideologi-

[8] beratend, erwägend, beratschlagend

[9] Gemeinwohlgefährdend ist aber die Einmischung in den Ukrainekrieg und die künstliche Energieverknappung durch die Bundesregierung.

sche, bellizistische, frauenfeindliche, frauenverachtende, homophobe Aussagen, beziehungsweise Handlungen vorgeworfen werden. **Unerwähnt** bleibt das **Netzwerk Wissenschaftsfreiheit** zwecks Verbesserung der akademischen Streitkultur und gegen die Gefährdungen der Wissenschaftsfreiheit. Das letzte Buch-Kapitel zur Reform der Leitmedien zeigt keine Perspektive. Precht und Welzer **ignorieren** die vielen Journalisten und Publizisten, die die alten Leitmedien längst verlassen haben und neue Debattenräume jenseits der Leitmedien betreiben, den Job der Leitmedien längst übernommen haben und Hoffnung machen: Albrecht Müller **NachDenkSeiten.de**, **Kontrafunk** App, Internetradio, **https://kontrafunk.radio/**, **Matussek: Irrlichter und Fixsterne** 16.12.2022, „Irrlichter und Fixsterne“: Matussek! No 13 – Bucharins Ende vom 30.12.2022; Matussek: Außenseiter. Von Rebellen, Heiligen und Künstlern auf der Klippe 2021; Bolz: Realitätsverlust und Kommunikationsmacht. Wie die 68er-Meinungssoldaten das Denken durch Moralansprüche ersetzen; Bolz: Die Tyrannei der Wehleidigen; Bolz: Die Faszination der Katastrophe, Kontrafunk 2022; **Die Sonntagsrunde mit Burkhard Müller-Ullrich, Norbert Bolz, Silke Schöder: Fanatiker oder Opportunisten?** Folge 43 Kontrafunk 30.11.2022; Norbert Bolz: Der Angriff auf die Normalität;Mattias Desmet: Psychologie von Corona - Massenpsychose und Massenformation 2022; Desmet: Die Psychologie des Totalitarismus – vom Rationalismus zur Massenbildung 2022; H̃oppe, Dürr, Tögel, Mueller, Blankertz, Kowalsky: Geht mir aus der Sonne! Wege aus der Bevormundung 2022; **LUDWIG VON MISES INSTITUT DEUTSCHLAND KONFERENZ 2022 DIE FREIHEITSKULTUR DES WESTENS ihre Krisen, ihre Zukunft:** https://www.misesde.org/2022/04/ludwig-von-mises-institut-deutschland-konferenz-2022/ Michael Esfeld: Grenzen der Freiheit in der modernen Gesellschaft. **Gunnar Kaiser: Die aktuellen Krisen der Freiheit und ihre Bewältigung**; Thorsten Polleit: David Dürr: Gerd Habermann: Ploppa: Schöne Neue Welt 2030. Vom Fall der Demokratie und dem Aufstieg einer totalitären Ordnung 2021; Andreas Tiedtke: DER NACHWEIS EINES MENSCHENGEMACHTEN KLIMAWANDELS IST NICHT ERBRACHT. EINE ERKENNTNISTHEORETISCHE KRITIK 2022; Kaiser: Wie konnte es nur so weit kommen? 2021; **Gunnar Kaiser: Der Kult. Über die Viralität des Bösen Broschiert** 2022; Ẽsfeld, Tiedtke, Kotchoubey, Reiss, Spahl, Ackermannn, Zimmer, Kooths, Osterloh, Frey, Schultheiss: **Wissenschaft und Politik. Zuverlässige oder unheilige Allianz?** 2022; R̃aymond Unger: Vom Verlust der Freiheit. Klimakrise, Migrationskrise, Coronakrise 2022; **Matthias Burchardt & Sven Böttcher: BBTALK - Wir müssen reden** https://bbtalk.de/ **Matussek! Folge2 Rolling Stones** https://youtu.be/8_Xi8Ep4nIA **https://www.fairtalk.tv/**, **Achse des Guten** https://www.achgut.com/ https://www.tichyseinblick.de/ Bernhard Lassahn im Gespräch mit Hans Scheuerlein: Unter Freunden. '80 Jahre Paul McCartney' https://www.neulandrebellen.de/ Albrecht Müller Nachdenkseite.de. Friedman & Welzer: Zeitenwende. Der Angriff auf Demokratie und Menschenwürde 2020; K̃uttner: Can democracy survive global capitalism? 2018; Runciman: How democracies die 2018 = So endet die Demokratie; MacLeans: Democracy in chains. The deep history of the radical right's stealth plan for America 2017; Levitsky & Ziblatt: Wie Demokratien sterben. Und was wir dagegen tun können 2018; Calder ed: Unless peace comes 1968 = **Jungk & Mundt eds: Eskalation der neuen Waffen - Friede oder Untergang?** 1969 Beaufre: Konventionelle Kriegführung von 1980, **Dedjier: Guerilla-Kriegführung - Die Waffe des armen Mannes = asymmetrische Kriegsführung**, Cockroft: Gefahren der nuklearen Proliferation, Inglis: Perspektiven der Kernwaffen und ABM, Stratton: Kämpfe in der Luft - Flugzeuge, ABM, Satelliten, Wheeler: Computer in der Kriegsführung, Nierenberg: Unterwasser-Kriegführung, Fetizon & Magat: Chemische Kriegführung, Heden: Mikrobiologische Kriegführung, Thring: Selbstgesteuert Waffen, Klineberg: Entmenschlichung/Verantwortungslosigkeit, Noel-Baker: Rüstungswettlauf; Teller & Latter: Ausblick in das Kernzeitalter 1958 **p150 moderne Kriegsführung**; **Sokolowski: Militärstrategie** 1962 = Sokolovski Soviet military strategy 1963 Lehre aus dem ineffizienten Flächenbombardement im 2. Weltkrieg. Mittels Nuklearraketen muss bereits in der Anfangsphase eines Weltkriegs das Hinterland nachhaltig desorganisiert und demoralisiert werden! Douhet 1921: Flächen-Bombardierung von Zivilbevölkerung und Industrieanlagen als Mittel der modernen Kriegsführung. → **Trenchard-Doktrin 1930**: Baue als Kriegsvorbereitung viele schwere Bomber. Heute: Raketen aller Reichweiten und Marschflugkörper/Drohnen. Die Sanktionspolitik des Westens gibt einen zivilen Vorgeschmack. Die dadurch ausgelöste Energieverknappung der auf steigenden Energieverbrauch ange-

wiesenen kapitalistischen Wirtschaft bedeutet eine systematische Zerstörung der industriellen Infrastruktur. Eine ökonomisch und naturwissenschaftlich ahnungslose Regierung erübrigt den Einsatz militärischer Mittel eines Gegners, der erst ICBMs ins Ziel bringen müsste. ICBMs schalten zuerst militärische Anlagen, dann Verwaltung, Kommunikation, Treibstofflager, Land- und Schifffahrtswege, Häfen, Flugplätze, Stromversorgung, Wasser aus. Durch die fehlende Ver- und Entsorgung werden Städte auch ohne direkten Kernwaffeneinsatz zu Todeszonen. Nicht erst seit Hiroshima und Nagasaki ist offensichtlich, dass Zivilisten die schwersten Opfer bei kriegerischen Handlungen bringen werden. Aber Kernwaffen als Massenvernichtungswaffen sind die letzte Option. Die Zeit der Frontenkriege ist vorbei. Beide Seiten werden sehr viele schnell bewegliche autonomagierende Raketenbasen mit kleinkalibrigen Atomsprengköpfen in der Fläche an Land, zur See und in der Luft einsetzen, die extrem gut vernetzt sind und per Satellitenaufklärung bestens über die Position und Bewegung aller Akteure des Gefechtsfeldes informiert sind. Die Rolle der Zivilbevölkerung als Tarnung, Unterbringung, Verpflegung und Schutz dieser dezentralen Stellungen ist taktisches Kalkül. Jeder kann auf dem Gefechtsfeld aktiv werden. Zivilisten als Partisanen in der Fläche spielen eine zentrale Rolle. Es muss keine Truppe versorgt werden, zudem ist die Kampfmoral groß, da jeder auch Opfer kennt die gesühnt werden müssen. Mittels unnötiger Sanktionspolitik wird bereits geprobt, ob eine an Wachstum orientierte Wirtschaft auch mit weniger Rohstoffen floriert. Die Hoffnung beruht scheinbar auf der Ungültigkeit des Energieerhaltungssatzes. Lies dazu **Zischka: Tschernobyl - kein Zufall. Sowjetwirtschaft und die Fehler des Westens** 1987 **Kernkraftwerke statt Kernwaffen!** Deutsche Führung desorientiert und Wähler ahnungslos. Rapallo-Vertrag; S̃chumacher: Small is beautiful. Die Rückkehr zum menschlichen Maß 1977, 2019; Diner: Krieg der Erinnerungen und die Ordnung der Welt 1991; Diner: Verkehrte Welten - Antiamerikanismus in Deutschland 1993; Dan Diner: Das Jahrhundert verstehen. 1917-1989. Ein universalhistorische Deutung 2000; Populismus = massenhafter Versuch, alles Abstrakte mit Bildern des Konkreten zu illustrieren und leichthin machbar hinzustellen. Narrativ = sinnstiftende Erzählung. C̃hurchill: Reden in Zeiten des Krieges 2002; Churchill: Reden Bd1. 1938 - 1940, 1946 p249 Rundfunkansprache vom 20.1.1940: Rote Armee unfähig. Kommunismus verdirbt Seele einer Nation; Churchill: Reden Bd2. 1940 - 1941, 1947; Churchill: Reden Bd3. 1942, 1948; Churchill: Reden Bd4. 1943, 1949; Iwan Michailowitsch Maiski: Memoiren eines sowjetischen Botschafters 1967; Maiski: Das Drama von München 1972; **Maiski: Wer half Hitler?** 1960, 1992; **Mark Twain: Die Geschichte wiederholt sich nicht, aber sie reimt sich.** Diner: Gegenläufige Gedächtnisse. Über Geltung und Wirkung des Holocaust 2020; Diner: Ein anderer Krieg: Das jüdische Palästina und der Zweite Weltkrieg - 1935 – 1942, 2021; Zischka: Lebendiges Europa. Leistungen und Aufgaben des 'Erdteils der Mitte' 1957; Hacke & Knapp eds: Friedenssicherung und Rüstungskontrolle in Europa 1989; Christian Hacke: Die Aussenpolitik der Bundesrepublik Deutschland 2003; Hacke: Zur Weltmacht verdammt. Die amerikanische Aussenpolitik von J. F. Kennedy bis G. W. Bush 2005; **Zischka: Kampf ums Überleben. Das Menschenrecht auf Energie 1979** Nicht duch Mangel an Raum, an Rohstoffen oder an Energie droht uns der Untergang; nicht weil die Großstadtluft weniger rein ist als die des Hochgebirges, sondern weil mehr und mehr Menschen keine Ahnung davon haben, was sie am Leben erhält und worauf ihr Wohlstand beruht. Eine Verwirrung der Geister, die dazu führen kann, dass wir Angst vor den eingebildeten Gefahren Selbstmord begehen; Wie sich ein regionaler oder globaler Atomkrieg kurz- und mittelfristig auf die Dynamik der Erdatmosphäre auswirkt, weiß niemand. Sicher hingegen ist, dass durch die zerstörte Infrastruktur, die Komfortzone West-Europa verschwinden wird. Die **Legende vom Weltuntergang per Atomkrieg** wird oft missverstanden. Sie spiegelt nur die arrogante Sicht des weißen Mannes auf die Welt wieder. Lediglich die hochtechnisierte Nordwelt wird auf Südweltniveau gebracht und muss das Leben mit Niedrigstrahlung ertragen. R̃ajewsky: Strahlendosis und Strahlenwirkung 1956[2]; S̃ternglass: Radioaktive Niedrigstrahlung 1972, 1977; Krawczynski: Radioaktive Abfälle 1967; Herrmann: Radioaktive Abfälle. Probleme und Verantwortung 1982; Sternglas: Radioaktive NiedrigStrahlung. Strahlenschäden bei Kindern und Ungeborenen. Low-level radiation 1979; S̃ternglass: Secret fallout. Low-level radiation from Hiroshima to Three Miles 1981; S̃trohm ed: Warum auch geringe Radioaktivität lebensgefährlih ist 1986; Höll: Die Wahrheit über die Atomkraftwerke. Gefahren für Mensch und Wasser 1977; Handel geht auch mit Kieselsteinen oder Muscheln. Aber die Just-In-Time-Versorgung der Supermärkte ist wegen der unbelieferten Tankstellen weg. Hunger regiert dann auch einen Teil der Nordwelt. Das Rückgrat Internet

ist wegen seiner genialen Dezentralität zwar unkaputtbar, aber an eine stabile Stromversorgung gebunden. In der Nordwelt ist ein Leben ohne Smartphone zwar auch möglich, aber sinnlos;). Es wird ein Experiment mit offenem Ausgang. Klar ist, dass man mit erhöhter Radioaktivität und den damit verbundenen Krankheiten leben lernen wird. **Geschichte des Erdöls:** https://www.oekosystem-erde.de/html/geschichte_erdoel.html Vor 12.000 Jahren in Mesopotamien: Abdichten von Booten. Babylonien Erdöl zur Beleuchtung. Petroleum ("Steinöl" – zur Unterscheidung von Pflanzenöl und Tierfett) = Brennstoff für Lampen, Walrat und Walöl. 1859 fand Drake in Titusville, Pennsylvania, Ölquelle. 1870 Standard Oil Company. 1871 Rockefellers Monopolstreben gefährdet: Bei Baku am Kaspischen Meer Öl entdeckt. Ludwig und Robert Nobel. Ludwig Nobel = "russische Rockefeller". Tankschiff ab 1878 auf dem Kaspischen Meer. 1880er hochseetauglich. Bankiersfamilie Rothschild aus Paris: Eisenbahnstrecke zum Schwarzen Meer finanziert, russisches Öl Zugang Westeuropa. Rothschilds Ölquellen und Raffinerien in Baku. Konkurrenten für die Nobels und Rockefeller. Edison Glühbirne = Petroleum-Konkurrenz. Dafür Ölbedarf 1886 Carl Benz Auto mit Verbrennungsmotor. 1910 übertraf Absatz von Benzin den von Petroleum. 1907 Royal Dutch Öl auf Sumatra im niederländischen Ostindien. Der Kämpfe um den Ölmarkt zwischen Rockefeller, den Nobels, Rothschilds und Samuel gingen als "Ölkriege" in die Geschichte des Erdöls ein. 1908 Öl Persien. 1914 sicherte sich die britische Regierung 51 % an der Anglo-Persian Oil Company → BP. Marineminister Winston Churchill: Großkampfschiffe mit Öl antreiben! Im Wettlauf mit WII. Ölnachschub kriegsentscheidend, 1917 Deutschland uneingeschränkter U-Boot-Krieg zwecks Tankschiffversenkung. Deutschland versuchte sich die rumänischen Ölquellen zu sichern. Ab 1918 organisierten die Amerikaner, Briten, Franzosen und Italiener ihren Ölnachschub gemeinsam. Währenddessen scheiterte Deutschland auch bei seinen Versuchen, Öl aus dem russischen Baku zu erhalten. Nach den Erfahrungen im ersten Weltkrieg hatte Öl für ganze Staaten strategische Bedeutung erhalten. In Amerika explodierte der Ölverbrauch: 1920 9,2 Millionen Autos. Briten und Amerikaner Erdölvorkommen im Nahen Osten zu erschließen. 1927 Kirkut im Irak = 1921 aus den osmanischen Provinzen Bagdad, Mossul und Basra. Öl Venezuela und Mexiko. 1930 23,1 Millionen Autos in Amerika. Tempel der neuen Zeit. Tankstellen. Noch 1920 war Benzin überwiegend in Läden verkauft worden, 1929 gab es 140.000 Tankstellen. Verbrauch stieg rasant, aber die Entdeckung neuer Ölquellen noch schneller durch im ersten Weltkrieg entwickelte Luftaufklärung und der Seismographen. Ölflut Preisverfall: USA 1930 10 Cent pro Barrel. 1932 Insel Bahrain auf der arabischen Seite des Persischen Golfs Öl gefunden → Königreich Saudi-Arabien ins Blickfeld der Ölkonzerne. al-Hasa = Standard Oil of California = USA-Einfluss in der Region begründet. 1938 amerikanische Gulf Oil und der Anglo-Persian gegründete Kuwait Oil Company das Burgan-Ölfeld = zweitgrößte Ölfeld der Welt. Standard in Saudi-Arabien fündig Ölstadt Dhahran und Erdölhafens Ras Tanura. Das kohlereiche Deutschland hatte schon vor dem ersten Weltkrieg versucht, synthetischen Treibstoff aus Kohle zu erzeugen. I.G. Farben hatte 1926 in Leuna: „Leunabenzin" kostete aber ein Mehrfaches des Erdöls. Autarkie Vierjahresplan von 1936 als offizielle Regierungspolitik. Am 1. September 1939 14 Anlagen, 6 im Bau. Blitzkrieg-Strategie von Treibstoffversorgung abhängig. Nachdem die Deutschen Norwegen, die Niederlande und Frankreich überrannt hatten, begann der Feldzug nach Russland, wo unter anderem die Ölfelder von Baku und dem Kaukasus warteten. Kvastiani & Spolanski: Reiseführer Georgien. Unterwegs zwischen Kaukasus und Schwarzem Meer 2019[10]; S̃chewardnadse: Als der eiserne Vorhang zerriss. Begegnungen und Erinnerungen 2007; Dauscher: 111 Gründe, Georgien zu lieben. Eine Liebeserklärung an das schönste Land der Welt 2019; Problem Treibstoffnachschub bei Russlandfeldzug, schlechte russische Straßen. Rommel: über Palästina, Irak und Iran die Ölfelder von Baku. Rommel: "Benzinknappheit! Es ist zum Weinen" im Juli 1942. Deutschland scheitert am Treibstoffmangel. Im Dezember 1944 scheitert Dt am Treibstoffmangel in den Ardennen. Der Ölnachschub bei den Alliierten hatte besser geklappt. Briten vor Kriegsausbruch Ölindustrie verstaatlicht. USA liefert unter Franklin Roosevelt Öl. Deutsche U-Boote stören Ölnachschub für Briten. März 1943 Knacken des deutschen U-Boot-Codes, besseres Radar, Flugzeuge mit größerer Reichweite. Öl entschied den Krieg. **Colin Campbell, Liesenborghs, Schindler, Zittel: Ölwechsel! Das Ende des Erdölzeitalters und die Weichenstellung für die Zukunft** 2002; G̃ebhardt, Glaser, Radtke: Geographie. Physische Geographie und Humangeographie 2007, 2019[3]; F̃rieder Wagner: Todesstaub. Made in USA. Uranmunition verseucht die Welt 2007 DU depleted Uranium-Munition; W̃agner: Todesstaub. Deadly Dust. DVD 2012; **Golfkriege:** 1. 1980-1988 Irak-Iran. 2. 1990-1991 Irak-USA = 1. Irakkrieg 650000 vs. 960000, 30000 vs 1500 Tote, CNN, 320 t Uran-Munition → 11.9.2001 3. 2003 USA-Irak = 2. Irakkrieg.

Wikileaks-Gründer Julian Assange verstieß mit der Veröffentlichung gefilmter US-amerikanischer Militäropperationen 2004-2009 gegen das **Bilderverbot des Westens.**. Die Sowjetunion hat von 1942 bis 1945 unter großen Opfern Europa vom Deutschen Faschismus befreit und die Basis für ein demokratische Europa gelegt. Geschichtvergessen ignoriert die EU die Befreiungstat und setzt die Tradition fort: Im Osten lauert das Böse. Die USA nutzten die Gelegenheit zur Schaffung eine europäischen Vorpostens, um ab 1989 nach Osten vorzurücken. Aus 16 NATO-Staaten werden über 30. Seit 1997 agiert die NATO in der Ukraine. Russland zieht 2014 die Reißleine und stört den Vormarsch der NATO seit 2022. G̃anser: Kuba-Krise 2006; G̃anser: NATO-Geheimarmeen in Europa. Inszenierter Terror und verdeckte Kriegsführung 2008 Ein durch die NATO und die militärischen Geheimdienste koordiniertes Netzwerk von Geheimarmeen war bis zum Auseinanderfall der Sowjetunion in mehreren westeuropäischen Ländern in schwere Verbrechen verwickelt, darunter Mord, Folter, Staatsstreich und Terror. Dokumente belegen, dass die von den USA angeführte Militärallianz nach dem Zweiten Weltkrieg in allen Ländern Westeuropas geheime Armeen aufgebaut hat, welche von den Geheimdiensten CIA und MI6 trainiert wurden. Ziel: im Falle einer sowjetischen Invasion als Guerilla zu kämpfen, um die besetzten Länder wieder zu befreien. Gezielt wurden Attentate gegen die eigene Bevölkerung ausgeführt, um Unsicherheit zu erzeugen und den Ruf nach einem starken Staat zu unterstützen. = Planung antikommunistisch motivierten Verbrechen.; **David Ignatius: Das Netzwerk. Siro** 1991, 2009 Destabilisierung Zentralasiens durch CIA um 1980; G̃anser: Illegale Kriege. Wie die NATO-Länder die UNO sabotieren - Eine Chronik von Kuba bis Syrien 2016; Chomsky: People without rights. Kosovo, Ost-Timor und der Westen 2002; Chomsky: Hybris. Die endgültige Sicherung der globalen Vormachtstellung der USA 2003; Chomsky: Wer beherrscht die Welt? Die globalen Verwerfungen der amerikanischen Politik. Eine zornige Abrechnung mit den USA und ihrer rücksichtslosen Machtpolitik 2016; G̃anser: Imperium USA. Die skrupellose Weltmacht 2020; **Calder: An investigation into possible wars, BBC 1979** = **Atomares Schlachtfeld Europa. Report über die Wahrscheinlichkeit eines Atomkrieges in den 80er Jahren** 1980; P̃eter Ustinov: NUCLEAR NIGHTMARES BBC DVD 1979; Neuman: Kernwaffen in Europa. NATO-Doppelbeschluss. Rüstungskontrolle. International Institute for Strategic Studies 1982; Stein & Feaver: Assuring control of nuclear weapons. The evolution of permissive action links 1987; **Atommächte:** USA 1945/52 1600 (3750). UdSSR 1949/53 1600 (6257). UK 1952/57 120 (225). France 1960 280 (290) und Israel 90. China 1964/67. Indien 1974 160. Pakistan 1998 165. Nordkorea. Iran. Saudi-Arabien. Bechert: Der Wahnsinn des Atomkriegs 1956; **SAC** Strategic Air Command 1947-1992: Peace is our profession war is just a hobby!; Einen Eindruck in die alte Technik geben **Kubrik: Dr. Seltsam - Oder: wie ich lernte, die Bombe zu lieben** 1964 und **Frears: Fail Safe** 2000 Befehl ohne Ausweg/versagenssicher/ausfallsicher Hiroshima und Nagasaki haben klar gezeigt, dass Atombomben klassische Flächenbombardements sehr effektiv als ideale Massenvernichtungswaffen ersetzen. Ziel von Atomwaffen ist die Zivilbevölkerung.; Douhet 1921: Flächen-Bombardierung von Zivilbevölkerung und Industrieanlagen als Mittel der modernen Kriegsführung. → **Trenchard-Doktrin 1930**: Baue als Kriegsvorbereitung viele schwere Bomber. Heute werden keine Bomber und Piloten riskiert. Raketen aller Reichweiten und Marschflugkörper/Drohnen finden ihre längst bekannten Ziele selbstständig. Krefelder Appell 1980. Lies von Ardenne & Bechert: 1. Zur Weiterentwicklung der explosiven Kernwaffen seit Hiroshima. 2. Unsere Verantwortung im Atomzeitalter 197?; **Bredthauer & Mannhardt eds: Es geht ums Überleben. Warum wir Atomraketen ablehnen.** Albertz, Bastian, Bechert, Kade, Mountbatten, Mechtersheimer, Niemöller 1981 p153 **Krefelder Erklärung vom 16. November 1980**; Bechert: Droht dir der Atomtod? Gefahren der Radioaktivität 1957; Jungk: Menschenleben. Der Aufstand gegen das Unerträgliche 1983; Jungk: Projekt Ermutigung. Streitschrift wider die Resignation 1988; **Jungk: Glaubhafte Ermutigung. Zur Zukunft des kritischen Jounalismus**. Oldenburger Rede 1988; Jungk: Deutschland von außen. Beobachtungen eines illegalen Zeitzeugen 1990; Tuschhoff: Deutschland, Kernwaffen und die NATO 1949-1967. Zum Zusammenhalt von und friedlichem Wandel in Bündnissen 2003; Moser: Report. Über das Elend von Funk und Fernsehen. Ein Insiderbericht 1988; **Gorbatschow: Was jetzt auf dem Spiel steht. Mein Aufruf für Frieden unf Freiheit** 2019 Europa ignoriert auf demütigende Weise a] die Vernich-

tung des deutschen Faschismus und somit die Befreiung Europas vom Faschismus. Des Tages der Befreiung wird heute in Europa kaum gedacht. Die beiden ersten Atombomben der US-Armee (6.8. über Hiroshima und 9.8.1945 über Nagasaki) waren ursprünglich für Berlin und Mannheim/Ludwigshafen vorgesehen. Der rasche Vormarsch der Roten Armee vereitelte den Plan. b] die Beendigung des Kalten Krieges durch die Sowjetunion. Es fehlt also Dankbarkeit für die Voraussetzung des jetzigen Europas. c] die Entmilitarisierung Ostdeutschlands. c] die Auflösung des Warschauer Pakts. Beklagt wird a] westliche Ignoranz von Russland beim Bau des Hauses Europa. b] Osterweiterung der NATO. c] systematischer Aufbau des Feindbildes Russland durch Politik und Medien. d] EU-Assoziierung der Ukraine. e] Fehlende Schritte zur Abschaffung von Atomwaffen. f] Mangel an diplomatischer Fantasie im Umgang mit Russland. g] Arroganz des Westens. **NATO-Entwicklung.** Anfänglich 14 bis 16 Mitglieder: USA, Kanada, UK, Island, Belgien, Niederlande, Spanien bis 1986, Italien, Türkei, Steinbach: Die Türkei im 20. Jahrhundert. Schwieriger Partner Europas 1996; Norwegen, Dänemark, Deutschland, Portugal, Luxemburg, Griechenland, **Frankreich** seit 1966 raus, weil NATO gemäß de Gaulle nur US-Instrument, daher **NATO-Sitz von Paris nach Brüssel**, ab 2009 wieder volle NATO-Rückkehr. USAF-NATO-Basis Chateauroux nach Dover/Delaware bis 1967. **Kennan: Im Schatten der Atombombe. Eine Analyse der amerikanisch-sowjetischen Beziehungen** von 1947 bis heute 1982; **Kennan: Memoiren eines Diplomaten 1925-1950**. 1967, 1971, 1982 p113 Menschen in Berlin und Hamburg, p552 Teile des **Langen Telegramm**s; Kennan: Memoiren 1950-1963 1972; Che Guevara: Der Partisanenkrieg, eine Methode Mensch und Sozialismus auf Cuba 1962; Chesterton: Sind wir uns einig? Ein Streitgespräch mit Bernard Shaw nebst einigen Essays 2009; Che Guevara: Ich umarme dich mit all meiner revolutionären Hingabe. Gesammelte Briefe 1947-1967, 2021; Che Guevara - Der Tod und der Mythos, ARTE 2007; Che Guevara: Bolivianisches Tagebuch. Dokument einer Revolution 1986; **Kennan: Russland, der Westen und die Atomwaffe** 1958; H̃ofmann: Marion Dönhoff. Die Gräfin, ihre Freunde und das andere Deutschland. Eine Biographie 2019; Creuzberger: Die sowjetische Besatzungsmacht und das politische System der SBZ 1996; Dönhoff: Im Wartesaal der Geschichte. Vom Kalten Krieg zur Wiedervereinigung 1995; **Demütigungen der USA durch die Sowjetunion: 1.** Die Befreiung Europas durch die Rote Armee (u.a. 27.1.1944 Befreiung Leningrads nach 900 Tagen, 27. Januar 1945 Befreiung des Konzentrations- und Vernichtungslagers Auschwitz-Birkenau). Mit der Landung in der Normandie sicherten sich die USA in letzter Minute ein Mitspracherecht/US-Stützpunkte in Europa. Anderenfalls hätte die Rote Armee Frankreich befreit. Heym: Kreuzfahrer von heute 1950; Heym: Nachruf 1988; Heym: Der Winter unseres Missvergnügens 1996; Heym: Einmischung. Gespräche, Reden, Essays 1990; Heym: Die Architekten 1963-1966, 2000; Martens & Heym: Es gibt Ideen, die Jahrtausende überstehen. Ein Gespräch zur Person und über die Zeit mit Stefan Heym 2001; Heym: Offene Worte in eigener Sache. Gespräche, Reden, Essays 1989–2001, 2003; Ingo Schulze: Wie wir unsere Vergangenheit sehen, bestimmt unsere Zukunft, In Vollmer et al: Neubeginn. Aufbegehren gegen Krise und Krieg 2022 p75ff; Granin: Mein Leutnant 2011; Schmidt: Kindheit und Jugend unter Hitler 2012; Leeb: Tagebuchaufzeichnungen und Lagebeurteilungen aus zwei Weltkriegen 1976; **2.** wirtschaftlicher Aufschwung der UdSSR trotz Verweigerung von Reparationsleistung durch Westdeutschland gemäß Londoner Außenministerkonferenz 25.11.-15.12.1947. 23.2.-2.6.1948 Londoner Sechsmächtekonferenz beschließt 'Weststaat' und Marschallplan, um Deutschland als US-Stützpunkt zu zementieren. **3.** Atombombe ab 29.8.1949. H-Bombe ab 12.8.1953. **4.** Sputnik-Schock am 4.10.1957. Die für den Westen für unmöglich gehaltene Befreiung Europas von Hitler-Deutschlands Völkermord verstärkte die Angst vorm Kommunismus/Stalinismus und konnte daher von vielen nicht als Befreiungstat des Jahrhunderts wahrgenommen werden[10]. Die Deutschen erwarteten den versprochenen Endsieg und erlebten das Ende des Krieges als Zusammenbruch, Hungersnot und Vertreibung. Museum Berlin-Karlshorst. Broschüre, zweisprachig deutsch-russisch 1995; **D̃eutsch Russisches Museum Berlin Karlshorst. Katalog zur Dauerausstellung** 2014; B̃lank & Quinkert: Dimensionen eines Verbrechens/Dimensions of a Crime. Sowjetische Kriegsgefangene im Zweiten Weltkrieg/Soviet Prisoners of War in World War II 2021; Hertrampf: Kriegsspuren Portraits deutscher und russischer Veteranen. Deutsch-Russisches Museum Berlin Karlshorst

[10] Als Willy Brandt am 8. Mai 1970 eine offizielle Regierungserklärung anlässlich des 25. Jahrestages abgab, versuchte die CDU/CSU-Opposition dies mit Hinweisen zu verhindern wie **Niederlagen feiert man nicht** oder **Schande und Schuld verdienen keine Würdigung**. Dankbarkeit gegenüber den Befreiern Europas von Unrecht und Tyrannei. Gerhard Schröder am 8.5.2000: Befreiung von nationalsozialistischer Herrschaft, von Völkermord und vom Grauen des Krieges.

2003; **Langes Telegramm vom 22. Februar 1946 von George Frost Kennan** = Geburtsurkunde des Antikommunismus und des **Kalten Krieges** = amerikanische Handlungsmaxime für Containment/Eindämmung des Kommunismus/Stalinismus/Totalitarismus = **X-Artikel** von **George F Kennan** = The Sources of Soviet Conduct: Die UdSSR sehe sich in einem fortwährenden Kriegszustand mit der westlichen Welt; In den Augen der UdSSR seien Demokratische Sozialisten und Sozialdemokraten keine Alliierten, sondern Feinde; Die Alliierten der UdSSR in der westlichen Welt seien von derselben kontrollierte marxistische Gruppierungen; Die Politik der UdSSR wurzle in einer historisch begründeten russischen Xenophobie und Paranoia; Die kommunistische Regierungsform sei strukturell unfähig, sich ein realistisches Bild der inneren und äußeren Zustände zu machen; Die UdSSR sei gekennzeichnet von innerer Instabilität und dem Westen geistig und ökonomisch grundsätzlich unterlegen. Siehe auch Mein Kampf. H̃itler & Hartmann: Mein Kampf. Eine kritische Edition 2022; Wunsch: Teufelsberg. Die Berliner Ruinologie 2016; Soborski & Laabs: Checkpoint Charlie und die Mauer. Ein geteiltes Volk wehrt sich 1997; Heisig: You can't miss Gatow. Die Geschichte eines Flugplatzes 2021 Funk- und Luftaufklärung der Briten als Royal Air Force getarnt in der Ostzone → Luftwaffenmuseum 1995 von Hamburg-Appen nach Gatow. Ruby: Es geht mir gut. Deutsche Feldpost von 1870-2010 2012; Müller-Toovey: Was vom Krieg übrig bleibt. Blindgänger aus dem Bombenkrieg 1942-1945, 2021; Kennan: Wolken der Gefahr. Gegenwärtige Realitäten der amerikanischen Außenpolitik 1977; Kennan, Impressionen eines Lebens 1989; **Geschichte der NATO-Osterweiterung:** a] Bereits 1993, als der Abzug der sowjetischen Streitkräfte fast abgeschlossen war: **1993 US-Kongress empfiehlt NATO-Osterweiterung**. Lies Clinten-Rede vom 12.7.1994 am Brandenburger Tor. b] 1996 Clinton-Beschluss zur NATO-Osterweiterung der US-Regierung. c] 5.2.1997 George Frost **Kennan warnt in New York Time vor NATO-Osterweiterung**. B̃rzezinski: Die einzige Weltmacht. Amerikas Strategie der Vorherrschaft 1997 = Brzezinski: The Grand Chessboard. American Primacy and Its Geostrategic Imperatives 1997 Danach müssen mit der Ukraine zwischen 2005 und 2010 ernsthafte Verhandlungen zum NATO-Beitritt geführt werden. d] Noch unter Clinton 1999 NATO-Beitritt Polen, Ungarn und Tschechien. Mit Ukraine eine NATO-Ukraine-Charta über eine „besondere Partnerschaft" vereinbart. Am 24. März 1999 begann die NATO mit SPD und Grünem Segen unter Leitung der USA im Zuge des Kosovokrieges mit Luftangriffen gegen Belgrad. Spanien ab 1999 wieder NATO. Am 29.9.2001 erinnert Putin bei seiner Rede vor dem Bundestag an die die beispiellos geringe Konzentration von Streitkräften und Waffen in Europa und die baltische Region. Schon kurz danach 2004 werden unter US-Präsident Bush Estland, Lettland, Litauen, Slowakei, Slowenien, Bulgarien und Rumänien NATO-Mitglieder. Entsprechend platzt Putin auf der Münchner Sicherheitskonferenz 2007 der Kragen, weil o.g. NATO-Mitglieder mit dem Aufbau eines Raketen-Abwehrsystems begonnenen haben. Mit Estland, Lettland und Litauen wurden erstmals Staaten auf ehemals sowjetischem Gebiet NATO-Mitglieder und mit Slowenien erstmals eine ehemalige Teilrepublik Jugoslawiens. NATO-Raketenabwehrprogramm 2006: Erfassung und Bekämpfung von gegnerischen Kurz- und Mittelstreckenraketen bis zu einer Reichweite von 3000 Kilometern vor USA, Vereinigte Königreich, Polen und die Tschechische Republik. **Radom Wachtberg** zwischen Werthhoven und Berkum im Drachenfelser Ländchen. 15km südl von Bonn. Funkaufklärung zwecks Gewinnung der Anfangsbedingungen, um Zielgebiet der ICBM in 30 Minuten. angeben zu können. Anfang ist in den letzten 2 Minuten des ballistischen Fluges möglich: Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho,\varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho,\varphi,\dot{\rho},\dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$. 1957 das Forschungsinstitut für Hochfrequenzphysik = FHP. Forschungsgesellschaft für Angewandte Naturwissenschaften = FGAN = Gemeinschaft von Instituten der Verteidigungs- und Sicherheitsforschung. 1973 erste Satellitenvermessung. Institutsgeschichte - Fraunhofer FHR Weltraumbeobachtungsradar TIRA = Tracking and Imaging Radar zwecks Erkennung aufsteigender Interkontinentalraketen und Verfolgung und Abbildung von Weltraumobjekten = Forschungsradar des Fraunhofer FHR seit 2009 Fraunhofer-Verbund für Verteidigungs- und Sicherheitsforschung = VVS. **Synthetic Aperture Radar** = SAR = „Radar mit synthetischer Apertur" = abbildendes Radare. Hovanessian: Introduction to Synthetic Array and Imaging Radars 1980; Wehner: High Resolution Radar 1987; Ab 2009 Albanien und Kroatien. Ab 2020 Nordmazedonien. Russlands Präsident Putin bezeichnete bereits 2007 auf der Münchner Sicherheitskonferenz die Erweiterungsabsichten der NATO als eine Gefährdung der russischen Sicherheitslage und eine „ernste Provokation". Wiedereingliederung

Frankreichs 2009. Das Raketenabwehrsystem in Polen und in Tschechien sollte bis 2012 rund 1,6 Milliarden US-Dollar kosten und nach US-Angaben vor möglichen Raketenangriffen von Staaten wie dem Iran und Nordkorea schützen. Der russische Präsident Dmitri Medwedew interpretierte die Pläne zum Aufbau der Raketenabwehrsysteme der USA als Aufrüstung gegen Russland und plante im Gegenzug die Stationierung von Raketen in Kaliningrad. NATO-Einsatz 19. März bis zum 31. Oktober 2011 Libyen. Derzeit sind im Rahmen der NATO etwa 240 (20 in Belgien, 20 in Büchel, Italien 90, Niederlande 20, 90 Türkei) US-Atomwaffen in Europa stationiert. NATO-Erweiterung um Schweden und Finnland 2023. NATO. Organisation des Nordatlantikvertrages. Tatsachen und Dokumente 1965; **Zischka: Das Ende des amerikanischen Jahrhunderts. USA - Land der begrenzten Möglichkeiten** 1972; **Poser: Die NATO. Werdegang, Aufgaben und Struktur des Nordatlantischen Bündnisses** 1974[1], 1979[2]; Poser: Militärmacht Sowjetunion 1980. Daten, Tendenzen, Analyse. Geschichte und Staat 1980; P̃oser: Bedrohte westliche Sicherheit. Seestrategie 1979; Günter Poser: Das Jahrhundert des Unrechts. Rückblick eines Deutschen der Erlebnisgeneration in das zwanzigste Jahrhundert 1985; NATO-Handbuch. Jubiläumsausgabe zum fünfzigjährigen Bestehen der Nordatlantikpakt-Organisation 1998; Reisach & Köthe: Europa. Was ist was? Band 113 2002; G̃uerot & Ritz: Endspiel Europa. Warum das politische Projekt Europa gescheitert ist - und wie wir wieder davon träumen können 2022; Varwick: Die NATO. Vom Verteidigungsbündnis zur Weltpolizei? 2008; Taschenbrecker: Die völkerrechtliche Bewertung der NATO-Einsätze seit dem Ende der Sowjetunion aus dem Blickwinkel des NATO-Vertrages 2020; **Lafontaine: Ami, it's time to go. Plädoyer für die Selbstbehauptung Europas** 2022 NachDenkSeiten.de, Solide Darlegung der aktuellen Lage Deutschlands und Europas, während Politiker und Presse im Gleichschritt fast täglich neue Hexen erfinden und jagen, um Europas Wirtschaft systematisch zu ruinieren und ungenierte Werbung zum Töten von Feinden betreiben. S̃chuler: Generation Gleichschritt. Wie das Mitlaufen zum Volkssport wurde 2023; Gleichstellungsindustrie basiert auf Feminismus-Religion: C̃assie Jaye: The red pill. DVD oder amazon-prime 2016; F̃reeman: Die rote Pille Jan Oechsner: Männer.Frauen.Menschen 2023; https://www.männer-frauen-menschen.de/ Klose: Generation im Gleichschritt. Die Hitlerjugend. Ein Dokumentarbericht 1982; Es werden alle Register der kognitiven Kriegsführung eingesetzt. Die Naturtalente Adolf Hitler und Joseph Goebbels werden in den Schatten gestellt. Die Entspannungspolitik Willy Brandts ist am Ende und ein neues Zeitalter der Aufrüstung und Eskalation hat begonnen. 'Von deutschem Boden darf niemals wieder Krieg ausgehen', sagte Brandt einst - heute liefert die Bundesregierung schwere Waffen in die Ukraine und macht sich damit wieder einmal zum Vasallen der USA. USA werden bis zum letzten Ukrainer kämpfen. Der Waffenabsatz kann mit einem langen Krieg zu einem guten Geschäft werden. In deutschen Leitmedien werden währenddessen vollkommen unkritisch die abenteuerlichen Äußerungen unserer Außenministerin, Annalena Baerbock, verbreitet, wonach deutsche Waffen in der Ukraine Menschenleben retten. Dazu liefern Grüne grüne Panzer mit 200 bis 400 Liter Sprit auf 100 km für den Endsieg. Gleichzeitig kappt man die Geschäftsbeziehungen zu unserem größten Energielieferanten, schafft Voraussetzung der Deindustrialisierung Deutschlands. Die Grünen entpuppen sich als Trojanisches Pferd der Geostrategen zur Deindustrialisierung Deutschlands. Grün bedeutet Konfliktlösung durch Eskalation von Konflikten resp. feministische Außenpolitik/'Waffen statt Diplomatie' und Deindustrialisierung Deutschlands/Deutschland als landesweiter Campingplatz. Das Versagen der deutschen Außenpolitik ist beispiellos.; **NATO-Auflösung – jetzt! EU-Antwort** ignoriert Stalingrad und Afghanistan. Deutsche Grüne bevorzugen den Einsatz schwerer Waffen und reaktivieren lieber Kohle- und Gaskraftwerke, weil russische Rohstoffe besser bei der aufstrebenden Weltmacht China aufgehoben sind. Grossmann: Stalingrad 1946; **Schukow: Erinnerungen und Gedanken** 1969 p644 Geheimbefehl Churchills: sowjetischen Vormarsch nach Westen stoppen! p636 Engländer hielten Wehrmacht in Gefechtsbereitschaft, p641 IG-Farben verschont, aber nicht für Reparation an Sowjetunion, p643 Nazihass bei GIs, aber nicht bei US-Regierung, p669 Zukunft sind die Atom-Raketen; Ewers: Marshall Schukow. Der Mann, der Hitler besiegte. Die Biographie 2017; K̃ershaw: Wendepunkt. Schlüsselentscheidungen im Zweiten Weltkrieg 2010; Churchill: Reden Bd1. 1938 - 1940, 1946 p249 Rundfunkansprache vom 20.1.1940: Rote Armee unfähig. Kommunismus verdirbt Seele einer Nation; Churchill: Reden Bd2. 1940 - 1941, 1947; Churchill: Reden Bd3. 1942, 1948; Churchill: Reden Bd4. 1943, 1949; Iwan Michailowitsch Maiski: Memoiren eines sowjetischen Botschafters 1967; Maiski: Das Drama von München 1972; **Maiski: Wer half Hitler?**

1960, 1992; MacMillan: Die Friedensmacher 2001; **Zischka: Englands Bündnisse - sechs Jahrhunderte britischer Kriege mit fremden Waffen** 1940 Kardinalfehler oder Absicht? Versaille teilt Deutschland, um Polen freien Zugang zur Ostsee zu geben. Churchill spitzte den Konflikt zu. p282 England trieb Polen in den Krieg, damit Deutschland der Sowjetunion direkt gegenübersteht; p115 Stalin: England treibt falsches Spiel, seine Friedensliebe ist Heuchelei. England möchte einen Krieg zwischen Deutschland und Sowjetunion, um dadurch Deutschlands Drang nach seinen Kolonien abzufangen. Stalin auf der Potsdamer Konferenz: Durch Oder-Neiße-Grenze Deutschland verkleinern! Seit 1939 gedehmütigte Polen mit deutschen Gebieten beschenken. Ukraine und Weißrussland rücken auf polnisches Gebiet. So wurde die sowjetische Grenze nach Westen verschoben. Alle Deutschen aus Ostpreußen, Pommern und Schlesien nach Westen vertreiben und die hinterlassene Industrie als Reparation in Sowjetunion auslagern. MacMillan: Die Friedensmacher 2001; Haffner: Der Teufelspakt. Die deutsch-russischen Beziehungen vom Ersten zum Zweiten Weltkrieg 1968, 1988; Haffner: Geschichte eines Deutschen. Die Erinnerungen 1914-1933; Haffner: Germany. Jekyll und Hyde. 1939 - Deutschland von innen betrachtet 1996; Musial: Stalins Beutezug. Die Plünderung Deutschlands und der Aufstieg der Sowjetunion zur Weltmacht 2010; Schau die Propagandafilme: Victor Tourjansky: Feinde 1940 und Gustav Ucicky: Heimkehr 1941; Stalin: Über den Großen Vaterländischen Kriege der Sowjetunion 1952; Chlewnjuk: Stalin. Eine Biographie 2017; **Sherwood: Roosevelt und Hopkins** 1948 p760 Sieg Deutschlands wurde erwartet, um dann Deutschland per Atomwaffen auszuschalten. Der rasche Vormarsch der Sowjetarmee durchgekreuzt den Plan der USA.; DVD Stalingrad. Bis zum letzten Mann, Regie Joseph Vilsmaier 2006 Ostfront, Winter 1942. Die 6. Armee ist mit knapp 600.000 Mann in der zerbombten Stadt STALINGRAD eingekesselt worden. Die Temperaturen sinken zeitweise bis auf minus 50 Grad. Für die Landser Fritz, Hans, Rollo und GeGe hat der Kampf ums nackte Überleben begonnen. Kugelhagel und Stalinorgeln sind nur ein Teil des puren Wahnsinns, die meisten verlieren den Kampf gegen Hunger und Kälte. Die Durchhalteparolen des Führers haben plötzlich keine Bedeutung mehr, denn vor ihren Augen zerbricht alles, woran sie geglaubt haben, bis nur noch ein Wunsch existiert: ZU STERBEN. Gerlach: Durchbruch bei Stalingrad 2016; **Decision-Day = D-Day am 6.2.1943 in Stalingrad oder im Juni 1944 durch Zerschlagung der Heeresgruppe Mitte und nicht in der Normandie am 6.7.1944**. Peeters & Kleindienst: Vermisst in Stalingrad. Als einfacher Soldat überlebte ich Kessel und Todeslager. 1941-1949, 2005; Strack: Ich hatte ein Leben. Wie ich mir vom Kriegseinsatz in Afghanistan traumatisiert den Weg zurück ins Glück erkämpfen musste 2016; Wöss: Hunde, wollt ihr ewig leben. Ein Stalingrad-Roman 2017; Hartinger: Bis das Auge bricht. Als MG-Schütze im Feuersturm der Ostfront 1943-45, 2019; Busch: Stalingrad - Die stillen Helden. Das Schicksal der Sanitätseinheiten im Kessel 2019; Kobras: Afghanistan und die NATO. Gefangen im asymmetrischen Krieg 2010; Friesen: „Wer spricht von Siegen? Überstehn ist alles." Über das Scheitern der US-Strategie im Afghanistankrieg 2014; Münch: Die Bundeswehr in Afghanistan. Militärische Handlungslogik in internationalen Interventionen 2015; Bohnert & Schreiber: Die unsichtbaren Veteranen. Kriegsheimkehrer in der deutschen Gesellschaft 2016; Whitlock: The Afghanistan papers. Der Insider-Report über Geheimnisse, Lügen und 20 Jahre Krieg 2021; Wohlgethan: Endstation Kabul. Als deutscher Soldat in Afghanistan - ein Insiderbericht. Von den Anfängen des Bundeswehr-Einsatzes 2001 bis zum Abzugs-Debakel in 2021; Clair: Vier Tage im November. Mein Kampfeinsatz in Afghanistan. Erfahrungen eines Fallschirmjägers der Bundeswehr 2021; Creuzberger: Kampf für die Einheit 2006; Creuzberger: Das deutsch-russische Jahrhundert. Geschichte einer besonderen Beziehung 2022; **Krone-Schmalz: Russland verstehen. Der Kampf um die Ukraine und die Arroganz des Westens** 2015; Zar Peter I und Soldatenkönig, Kirche Potsdam-Bornstedt → BDO = **Bund Deutscher Offiziere** 11.9.1943 Gefangenenlager Lunjowo bei Moskau. Ziel Bewahrung des **Deutschen Reiches**. Scheer & Mende: Friedhof Bornstedt 2014; Gerlach: Odyssee in Rot. Bericht einer Irrfahrt 1966, 2017 Von den über drei Millionen Wehrmachtssoldaten, die zwischen 1941 und 1945 in sowjetische Kriegsgefangenschaft gerieten, starben mehr als eine Million. Heinrich Gerlach überlebte. Das Grauen von Stalingrad hatte er in einem Roman verarbeitet, seinen schier endlosen Weg durch sowjetische Arbeits- und Gefangenenlager beschreibt er in seinem autobiographischen Bericht Odyssee in Rot. Im Lager Lunjowo war Gerlach aber auch Gründungsmitglied des Bundes Deutscher Offiziere = BDO, eines

Verbands kriegsgefangener Wehrmachtsoffiziere, die ab 1943 aus der Gefangenschaft deutsche Soldaten zur Desertion und zum Kampf gegen Hitler aufriefen – in aufgezwungener Zusammenarbeit mit Exilkommunisten wie Wilhelm Pieck, Walter Ulbricht oder Erich Weinert. 1944 wurde in Nazi-Deutschland in Abwesenheit gegen Gerlach ein Verfahren wegen Hochverrats eingeleitet, seine Familie kam in Sippenhaft.; von Frankenberg und Poschwitz: Tradition im Kreuzverhör. Meine Familie in der Geschichte 1980; **Nationalkomitee Freies Deutschland** = NKFD 12.7.1943-2.11.1945 Lager Lunjowo im Moskauer Vorort Krasnogorsk. Chef Erich Weinert. **Leonhard: Die Revolution entlässt ihre Kinder** 1955; Chesterton: Sind wir uns einig? Ein Streitgespräch mit Bernard Shaw nebst einigen Essays 2009; Leonhard: Meine Geschichte der DDR 2007; **Zischka: Tschernobyl - kein Zufall. Sowjetwirtschaft und die Fehler des Westens** 1987 Geschichte Russlands, **Kernkraftwerke statt Kernwaffen!** Deutsche Führung desorientiert und Wähler ahnungslos. Rapallo-Vertrag; von Frankenberg: Massenvernichtungswaffen 1958; von Frankenberg und Proschlitz: Meine Entscheidung 1963; Scheurig: Verräter oder Patrioten. Das Nationalkomitee „Freies Deutschland“ und der Bund deutscher Offiziere in der Sowjetunion 1943–1945 1993; Auflösung durch Stalin 2.11.1945. Geburtshelfer der Gesellschaft für Deutsch-Sowjetische Freundschaft = DSF. 30.6.1947 Gesellschaft zum Studium der Kultur der Sowjetunion → DSF 2.7.1949-28.3.1992 → Brücken nach dem Osten bis 31.12.1992 → Stiftung „West-Östliche Begegnungen“. **Arbeitsgemeinschaft ehemaliger Offiziere** = AeO 1959-1971 auf Initiative des Politbüros der SED im Berliner Haus der Deutsch-Sowjetischen Freundschaft gegründet. Erster Vorsitzender war Otto Korfes, ein ehemaliger Generalmajor der deutschen Wehrmacht. Wegner-Korfes: Weimar - Stalingrad - Berlin. Das Leben des deutschen Generals Otto Korfes 1994; Alan Taylor: Bismarck. Mensch und Staatsmann 1962; Wegner-Korfes: Otto von Bismarck und Russland. Des Reichskanzlers Russlandpolitik und sein realpolitisches Erbe in der Interpretation bürgerlicher Politiker 1918-1945, 1990; Lepsius: Bismarck als Pazifist. Auf Grund der neuen Bismarck-Akten. Deutsche Vorkriegsakten. Süddeutsche Monatshefte20 Nov 1922 H2; **Krone-Schmalz: Eiszeit. Wie Russland dämonisiert wird und warum das so gefährlich ist** 2017; Krone-Schmalz: Respekt geht anders. Betrachtungen über unser zerstrittenes Land 2020; Welzer & Holzem: Zeitenwende, Politik-Forum Nr9 2022 p26- Liberale Demokratie unter Druck = Postdemokratie. Enttäuschungserfahrungen. **Konstruierte neue Eindeutigkeit ist die Gefahr**, die Gesellschaften bereit macht, auf Krisen mit Gewalt zu reagieren. 1. WK. **Distanzlose Identifikation mit Opfern ist gefährlich**. Verzicht auf Außenperspektive bedeutet Gefahr und kann keine Basis für rationales politisches Handeln sein, wie es Baerbock leider praktiziert. Sicher sind die europäischen Klimaziele und eine Verringerung der Anzahl von Atomwaffen durch leichtfertig provozierte Atomschläge in Europa erreichbar. Brutale Kriegsführung befeuert Vereindeutigung. Empörung über Bilder aus dem Krieg resultieren aus Unwissen über die Mitwirkung von Zivilisten wegen der dezentralen Kriegsführung moderner Kriege, den man kennen sollte oder nachlesen kann. Asimov: Gewalt ist die letzte Zuflucht des Unfähigen. **Anti-Kriegsliteratur:** Dahn: Im Krieg verlieren auch die Sieger. Nur der Frieden kann gewonnen werden 2022; Nathan, Norden, Russell: **Einstein. Über den Frieden** 1960; Zur deutschen Kriegsverherrlichung, Bellizismus, Kriegsbegeisterung gegen Frankreich lies **Franz Marc: Briefe aus dem Felde 1914-1916** 1920, Krieg als Abenteuer. Krankes Europa muss durch Krieg geheilt werden! Kurz vor seinem Tod im Felde: **Krieg als gemeinster Menschenfang**. Die Bundesregierung steht vor einem leicht lösbaren Problem, das sie ohne Not herbeigeführt hat durch a] langfristig geduldete NATO-Osterweiterung, und b] kurzfristige Sanktionen, die sie mittelfristig destabilisiert. **Lösung:** A] Kurzfristig Sanktionen stoppen, B] langfristig Frieden schaffen ohne Waffen! = Entmilitarisierte, raketenfreie und kernwaffenfreie Zonen in Europa schaffen. Weltweit ca. 80,000 **Marschflugkörper** einsatzbereit. Reichweite unter 1000 km. Flughöhe von 50 bis 100 m Flughöhe kaum zu orten. **Kästner: Fabian** 1931 Warnung vor dem Abgrund, dem sich Deutschland und Europa nähern. Meide Massenmedien p29ff Fake news. Weglassen von berichtenswerte Nachrichten p31. Hinterfrage Standardmeinungen. Bilde dir Urteile selbst! **Hitler: Je größer die Lüge, desto mehr Menschen folgen ihr. Johannes Menath: Moderne Propaganda - 80 Methoden der Meinungslenkung** 18.12.2022, Kontrafunk 4.3.2023 Morelli: Die Prinzipien der Kriegspropaganda 2014; EMMA: Der **Offene Brief** an Kanzler Scholz 29.2.2022 https://www.emma.de/; Petition vom 6.2.2023 Alice Schwarzer und Sahra Wagenknecht: Manifest für Frieden https://www.change.org/ Mann: Betrachtungen eines Unpolitischen 1918; Ã Ponsonby: Lügen in Kriegszeiten 1928; Rajewsky & Reisenberger eds: Wider den Krieg.

Große Pazifisten von Kant bis Böll 1987; Böll: Wo warst du, Adam? 1951; Böll: Wanderer, kommst du nach Spa... 1950; Böll: Und sagte kein einziges Wort 1953; Böll: Als der Krieg ausbrach. Als der Krieg zu Ende war 1962; Böll: Entfernung von der Truppe 1964; **Barbusse: Das Feuer. Tagebuch einer Korporalschaft** 1916; Barbusse: Briefe von der Front an seine Frau 1914-1917 1974; Hašek: Der brave Soldat Schwejk 1921, 1960 DVD; Ernst Friedrich: Krieg dem Kriege 1924; Renn: Krieg 1928; Remarque: Im Westen nichts Neues 1929; Heisig, Bernhard: Krieg. 24 Lithografien zu Ludwig Renn 1979; Franz Seldte: Fronterlebnis 1933; Der Stahlhelm = Bund der Frontsoldaten = Wehrverband 1918-1935. Bund Königin Luise = BKL 1923 → 1928 Stahlhelm Frauenbund. Schirmherrin Cecille von Preußen ohne Jüdinnen und Fremdrassige. Seldte: Die Sommeschlacht. Erlebnisse aus dem Weltkriege. Jugendbuch 1934; Thürk: Die Stunde der toten Augen 1957 Fallschirmjäger Ende 1944 bei Nemmersdorf/Ostpreußen. Wiki: Massaker im Oktober 1944 in Nemmersdorf.

Erich Weniger: Die Erziehung des deutschen Soldaten

1944 p5 Die Kraft der deutschen Wehrmacht ruht in Krieg und Frieden auf dem, was sich in ihr von selbst versteht. ... Der Wille des Führers und Feldherrn bestimmt mit der kriegerischen Aufgabe, zugleich, was in der Truppe als selbstverständlich zu gelten habe. ... der Soldat nicht müssen, sondern wollen ...; **Englund: Schönheit und Schrecken. Eine Geschichte des Ersten Weltkriegs, erzählt in neunzehn Schicksalen** 2009; **Ñeitzel & Welzer: Soldaten. Protokolle vom Kämpfen, Töten und Sterben** 2011; Wehrmachtsausstellung. Vernichtungskrieg. Verbrechen der Wehrmacht 1941-1944. Ausstellungskatalog 1997; Thiele: Die Wehrmachtsausstellung. Dokumentation einer Kontroverse 1997; Drewermann: Reden gegen den Krieg 2002 Rousseau: Das Leben eines Einzelnen ist kostbarer als die Freiheit der Menschheit. R̃adnitzky: Das verdammte 20. Jahrhundert. Erinnerungen und Reflexionen eines politisch Unkorrekten 2006; Philipp Egert & Gerard Radnitzky: Pearl Harbor = USA möchte Europa erobern und als dessen Retter wahrgenommen werden. Franklin Roosevelt opfert dafür in Pearl Harbor seine Marines und darf Deutschland Krieg erklären. 2001d.pdf; R̃adnitzky: Karl R. Popper. Denker der Freiheit 1995; Popper: Logik der Forschung 1934, 1971; Feyerabend: Wider den Methodenzwang. Skizze einer anarchistischen Erkenntnistheorie 1976 Post-Wissenschaft; B̃aader ed: Wider die Wohlfahrtsdiktatur. Zehn liberale Stimmen 1995; S̃eiffert & Radnitzky: Handlexikon der Wissenschaftstheorie; R̃adnitzky: Centripetal Forces in the Sciences 2004; Albert, Andersson & Radnitzky: Fortschritt und Rationalität der Wissenschaft 1980; R̃adnitzky: Selbstgefährdung der offenen Gesellschaft 1982; Drewermann: Krieg ist Krankheit, keine Lösung 2002; Rothmann: Im Frühling sterben 2015 Vernichtung der Waffen-SS März/April 1945 bei Stuhlweißenburg; Feind wird über moralisierende Sprache identifiziert = Krieg notwendig. **Moralisieren kommt vor Argumentieren?** Keiner der heutigen Entscheider hat eine Vorstellung von Kriegsverwüstung auch nach dem 2. Weltkrieg in Hiroshima, Nagasaki, Vietnam, Irak, Syrien, ... Michael Cimino: Die durch die Hölle gehen 1978; Francis Ford Coppola: Apocalypse Now 1979; Oliver Stone: Platoon 1986; Stanley Kubrick: Full metal jacket 1987; In der Regel haben sie sich, weil sie die Wahl hatten, Zivildiensterfahrung verschafft. Mit dieser Erfahrung befeuern sie per Beführwortung schwerer Waffen eine Kriegsgefahr. Übersehen wird, dass aus russischer Sicht bis jetzt kein Krieg geführt wird. Bislang will Putin in der Ukraine mit militärischen Aktionen das Zusammenspiel von NATO und ukrainische Streitkräften, das mit dem NATO-Besuch des ukrainischen Präsidenten Kutschma 1.6.1995 begann, nur aufklären und stören. Details siehe **NATO-Handbuch. Jubiläumsausgabe zum fünfzigjährigen Bestehen der Nordatlantikpakt-Organisation** 1998 p116ff Partnerschaft der Ukraine mit der NATO; Gipfel der Scheinheiligkeit der vorgeblichen Verteidigung westlicher Werte sind die Waffenlieferungen ins Kriegsgebiet, obwohl moderne, dezentrale Kriegsführung durch Zivilisten getragen wird, und die ungleiche Behandlung von Flüchtlingen. Faktisch ist die Ukraine bereits EU/NATO-Mitglied. Aufklärung/-Zielführung und Waffenlieferung durch USA/NATO. Die Grenze der Verteidigung westlicher Werte in der Ukriane wird sich beim Wiederaufbau ukrainischer Städte zeigen, wenn Deutsche auf ukrainischen Baustellen zu ortsüblichen Löhnen arbeiten. **David Ignatius: Das Netzwerk. Siro** 1991, 2009 Destabilisierung Zentralasiens durch CIA um 1980; S̃chreiber: Reiseführer Zentralasien. Auf der Seidenstraße durch Kasachstan, Kirgistan, Usbekistan, Tadschikistan und Turkmenistan 2019; K̃unze: Zentralasien: Porträt einer Region 2018; Pander: DuMont Kunst-Reiseführer Zentralasien 2001; TERRA Nordafrika und Vorderasien. Themenband Klasse 10-13 2013; Peitz: Usbekistan entdecken. Auf der Seidenstraße nach Samarkand, Buchara und Chiwa 2005; Ellworth: Marco Polo und die Verfolgungsjagd auf der Seidenstraße 2007; **Henning:**

Krieg im Osten. Die Ukraine zwischen Nationalismus, Imperialismus und Revolution 2017; Halford Mackinder: Britain and the British seas 1902 Herzland-These, Weltinsel; Die Rohstoff- und Bevölkerungsressourcen dieses Gesamtgebietes würde die Beherrschung der kontinentalen „Randländer" und sukzessive auch des amerikanischen und australischen Kontinents sowie Japans ermöglichen. Mackinder: Der geographische Drehpunkt der Geschichte, 1904. In: Lettre International, Ausgabe 120, 2018, S. 124–129; Effenberger: Geo-Imperialismus. Die Zerstörung der Welt 2017; Plokhy: Die Frontlinie. Warum die Ukraine zum Schauplatz eines neuen Ost-West-Konflikts wurde 2022; Otto Bonhoff, Peter Hagen, Ottomar Lang, Michel Mansfeld, Wenzel Renner, Herbert Schauer: Das unsichtbare Visier DEFA Folge 1 bis 9 1973 bis 1979; Himmeroder Denkschrift = deutsche Wiederbewaffnung, Oktober 1950 im Kloster Himmerod. Hallstein: Die Europäische Gemeinschaft 1974; B̃ooz: 'Hallsteinzeit' - deutsche Außenpolitik 1955 - 1972, 1995; Matthias Schönwald: Walter Hallstein. Ein Wegbereiter Europas 2017; **Konzept von Aufhören und Endlichkeit fehlt!** Endlichkeitsverweigerung bringt Unglück. **Mehrheit der Weltbevölkerung: Westen arrogant und doppelzüngig.** Der Rest der Welt darf nicht so leben wie der Westen! Verzicht müsste verkündet werden. Kampfbegriff Verzicht? Beginen und Begarden = Angehörigen eines Laienordens im Mittelalter, die ein asketisches und andächtiges Leben führten. Genossenschaftsbewegungen. W̃elzer: Nachruf auf mich selbst 2021; **Menschen haben Orientierungsbedarf**. Populismus = Fähigkeit Gemeinde zu bilden/Einsamkeit der Menschen zu kapitalisieren. Sinn kann glücklich machen! Welzer: Klimakriege. Wofür im 21. Jahrhundert getötet wird 2008; R̃ainer Funk: Der entgrenzte Mensch. Warum ein Leben ohne Grenzen nicht frei, sondern abhängig macht 2011; **Obermann: Verteidigung der Freiheit. Idee, Weltstrategie, Bundeswehr** 1966 Die Freiheit Europas brachte die Rote Armee am 8. Mai 1945 nach Berlin. Buchdeckel zeigen gute Bilder zum **Eisernen Vorhang**; Kilian: Kai-Uwe von Hassel und seine Familie 2013; Rousseau: Die Freiheit des Menschen liegt nicht darin, daß er tun kann, was er will, sondern daß er nicht tun muß, was er nicht will. Kersten Reich: Der entgrenzte Mensch und die Grenzen der Erde B̃d1. Wie Erziehung und Verhalten die Nachhaltigkeit erschweren 2021; Bd2. Wie Ökonomie und Politik die Nachhaltigkeit verhindern 2021; Feyerabend: Zeitverschwendung 1997; **Leibniz** 1646-1716: Es ist wichtig darauf zu achten, dass die Bezeichnungen Verstehen und Entdeckungen erleichtern - begreiflich sind. Wie die Kultur sind aber Bezeichnungen nichts festes, sondern stetem Wandel unterworfen. In wundervoller Weise kann man so die Arbeit des Geistes reduzieren. Padova: Leibniz, Newton und die Erfindung der Zeit 2015; Quarg: Leibniz. Eine Ausstellung zu Leben und Werk in Büchern und Dokumenten 1996; MacDonald Ross & Leisenz: Leibniz. Leben und Denken 1990; Finster & van den Heuvel: Leibniz mit Selbstzeugnissen und Bilddokumenten 2010[6]; Hecht: Leibniz im Philosophischen Diskurs über Geometrie und Erfahrung 1991;

Weinbergs Golden Lessons - oceanographic metaphor, Nature 426, 2003, 389: **1 no one knows everything**, and you don't have to. Aber mit den hier beschriebenen Ideen sollte man vertraut sein. **2 go for the messes** — that's where the action is. **3** forgive yourself for **wasting time**. Students are only asked to solve problems that their professors (unless unusually cruel) know to be solvable. **4** learn something about the **history of science**, or at a minimum the history of your own branch of science. **Teske & Ulbrich: Marian Smoluchowski**. Leben und Werk 1977 p7ff Vorbild, Verehrung, Fortleben, Inflation Vergessen von Wissen im XX.Jh; Deacon: **Zu wissen, wie etwas entstanden ist, ist oft der beste Hinweis darauf, wie es funktioniert.** Hawking: Die Klassiker der Physik. Kopernikus, Nikolaus 1473-1543, Galilei, Galileo 1564-1642, Kepler, Johannes 1571-1630, Newton, Isaac 1643-1727, Einstein, Albert, 1879-1955 2002 Tipp: Statt der abgedruckten Einstein'schen Arbeiten hätte hier besser **Thirring: Die Idee der Relativitätstheorie** 1948 oder **Einstein: Über spezielle und allgemeine RT** 1916 oder **Born: Die RT Einsteins** 1920 wieder gedruckt werden müssen! Anderenfalls ist der Einstein-Teil nur für mathematisch Geschulte und erreicht weder den naturwissenschaftlich Interessierten, noch den Rest der Gebildeten. Max Bense: Briefe großer Naturforscher und Mathematiker 1943; Bense: Physikalische Welträtsel 1942; Zink: Physikalische Welträtsel 1942; Sieroka: Philosophie der Physik 2014; **Gombrich: Eine kurze Weltgeschichte für junge Leser** 1935, 1985, 2004

siehe Seite 749; Zankl & Betz: Trotzdem genial. Darwin, Nietzsche, Hawking und Co. 2014 Einstein, Freud, Edison - autistisch, schizophren, schwerhörig, mit Handicap.; West: In the mind's eye. Visual thinkers gifted people with learning difficulties 1992 Rückkehr zum visuellen Denken bei Maxwell, der Gips-Modelle thermodynamischer Potenzial baute, Einstein visuell statt mathematisch. MPG-Bericht 1/94 Wissenschaftliches Rechnen p45-60. Gleick: Wenn man sich die Gestalt vorstellen kann, kann man auch das System verstehen. Computer, Datenanalyse und Visualisierung. Flügge: Wege und Ziele der Physik 1969; March: Die physikalische Erkenntnis und ihre Grenzen 1964; Feigl: Theorie und Erfahrung in der Physik. Wissen und Wirken 1929; Kistner, Feigl, Carnap, Driesch: Der Feinaufbau der Materie. Theorie und Erfahrung in der Physik. Physikalische Begriffsbildung. Relativitätstheorie und Philosophie 1923, 1929; March: Der Weg des Universums 1948; March: Natur und Erkenntnis. Die Welt in der Konstruktion des heutigen Physikers 1948; Schlegel: Transfinite numbers and cosmology, Nature 196 1962 p1016; Schlegel: Completeness in science. A study of how completely science may bescribe the Universe 1967; Stengers: Wem dient die Wissenschaft 1998; Stengers et al.: Spekulativer Konstruktivismus 2008; Heermann: Von der Zahl zum Gesetz 1974; **Schlegel: Steckbrief Wissenschaft**. Bereich und Grenzen, Spielregeln und Ziele der exakten Wissenschaften 1969 = Inqiry into science ; Hesse & Peakock: Schlegel 1913-1982, PhysToday 36 1983 H8p79-81; Schlegel: Superposition and interaction. Coherence in physics 1980; Haber: Der Stoff der Schöpfung 1966; March: Das Denken des modernen Physikers 1967[2]; Cap: Wie man 130 Jahre alt wird. Der Mensch als Wesen der Natur 2008; Backe: Physik selbst erlebt 1963, 1972[4]; Peierls: Surprises in Theoretical Physics 1979; Peierls: Bird of Passage. Recollections of a Physicist 1985; Peierls: Atomic histories 1996; **Pauli: Das Gewissen der Physik** 1988; P̃eierls: More surprises in theoretical physics 1991; Heitler: Der Mensch und die naturwissenschaftliche Erkenntnis 1970; Ertl: Mein Leben mit der Wissenschaft 2021; H̃eitler: Naturwissenschaft ist Geisteswissenschaft 1972; H̃eitler: Wahrheit und Richtigkeit in den exakten Wissenschaften 1972; Heitler: Die Natur und das Göttliche 1975; Sykes: No ordinary genius. The illustrated Richard Feynman 1994; R̃es Jost: Das Märchen vom Elfenbeinernen Turm. Reden und Aufsätze. Lecture Notes in Physics Monographs 34 1995; F̃ierz: Über das Wesen der theoretischen Physik 1956; F̃ierz: Naturwissenschaft und Geschichte 1988; Sambursky: Der Weg der Physik. 2500 Jahre physikalischen Denkens. Texte von Anaximander bis Pauli 1978; Sambursky: Naturerkenntnis und Weltbild. Zehn Vorträge zur Wissenschaftsgeschichte 1983; Zott & Vogt: Berlingeschichte im Spiegel wissenschaftshistorischer Forschung. 300 Jahre Wissenschaft in Berlin. Materialien der wissenschaftlichen Konferenz vom 9.-11. April 1987 anläßlich der 750-Jahr-Feier der Stadt Berlin 1987; **Laitko, Fabian, Girnus, Grau, Hoffmann, Kant, Schlicker, Vogt, Altner: Wissenschaft in Berlin. Von den Anfängen bis zum Neubeginn nach 1945**, 1987 IWTO = Institut für Theorie, Geschichte und Organisation der Wissenschaft 1969, ab 1975 ITW = Instituts für Theorie, Geschichte und Organisation der Wissenschaft; G̃riebel: Ich war ein Mann der Straße 1986; G̃riebel: Malerei, Zeichnung, Grafik 1972; Hellemans & Bunch: Fahrplan der Naturwissenschaften 1990; **Chramov: Physiker**. Biographisches Lexikon, Nauka Moscow 1983 400 Seiten mit Fotos. Ohne **Sacharow 1921-1989**; **Sacharow: Mein Leben** 1990; Andrej D. Sacharow: Leben und Werk eines Physikers in einer Retrospektive seiner Kollegen und Freunde in der AdW. Priroda 1990 Feinberg, Golowin, Andrej Linde, Kirschnitz, Altschuler, Okun, Schklowskij, Jaglom, ...; **Chramov: Biografie der Physik** 1983 beschreibt auch die 2. Hälfte des 20.Jh, ganz anders als das provinzielle und Westeuropa zentrierte Buch von Schreier: Biographien bedeutender Physiker 1984 in dem fast alle ukrainischen und russischen Physiker und Mathematiker fehlen: L.I. Mandelstam1879-1944, N.M. Krylow1879-1955, A.A. Friedmann1888-1925, W.I. Smirnow1887-1974 PhysBl 30 1974 p269ff, G.M. Fichtenholz1888-1955, S.I. Wawilow1891-1951, W.A. Fok o Fock1898-1974, A.A. Andronow1901-1952, Ju.B. Rumer1901-85; **A.A. Witt1902-38, M.P. Bronstein1906-1938**, D.I. Blochinzew1907-1979, P.A. Tscherenkow1904-90, N.N. Bogoljubow1909-92, A.A. Sokolow1910-86, A.B. Migdal1912-91, A.S. Dawydow1912-93, W.B. Berestezki1913-77, S.L. Sobolew1908-89, E.M. Lifschitz1915-85, J.A. Mitropolski1916-2008, A,N. Kolmogorow1903-87 Zur Umkehrbarkeit der statistischen Naturgesetze 1937, W. Arnold1937-2010, S.P. Nowikiow1938- , I.M. Gelfand1913-2009, G.J. Schilow1917-75, D.W. Schirkow1928-2016, L.P. Pitajewski1933- , A.A. Logunow1926-2015, W.S. Wladimirow1923-2012, A.D. Sacharow1921-89, J.B. Seldowitsch1914-87, I.D. Nowikow1935- ; Braunbek: Aufbruch ins Grenzenlose. Vom Werden unserer physikalischen Erkenntnis 1961; **60 Jahre Braunbek 1901-1974**, PhysBl 17 1961 34 und 70 Jah-

re Braunbek PhysBl 27 1971 33; **von Laue zum 70. Geburtstag** PhysBl5 1949 442-449; Herneck: Max von Laue 1979; von Laue: Mein physikalischer Werdegang, In: **Hartmann: Triumph der Idee. Schöpfer des neuen Weltbildes** 1952 und In: PhysB16 1960 p259; **von Laue: Geschichte der Physik** 1947, 1958[4]; PhysBl16 (1960) 257-266, 549-567 Briefe an seinen Sohn. Hund: **Geschichte der Quantentheorie** 1967, 1976; **Hund: Geschichte der physikalischen Begriffe** 1978[2]; Hermann: Weltreich der Physik 1980; **Westfall: Isaak Newton** 1980, 1996; **Sommerfeld: Albert Einstein 70 Jahre** PhysBl5 1949 126f; Schroeder: Planck oder Als das Licht seine Leichtigkeit verlor 2022 Albert und Eduard Einstein; Hoffmann & Dukas: Einstein. Schöpfer und Rebell. Die Biografie 1976; Charpa & Grunwald: Albert Einstein 1993; Einstein: Ausgewählte Texte von Meister 1986, 1990; Banesh Hoffmann: Einsteins Ideen. Das Relativitätsprinzip und seine Wurzeln 1988; Gordin: Einstein in Bohemia 2022; Dos Santos: Das Einstein Enigma. Roman 2006; Einstein: Briefe an Maurice Solovine 1956; Solovine: Freundschaft mit Albert Einstein PhysBl15 1959 p97ff; Einstein: Mein Weltbild 1922-34 Carl Seelig, 1934; Rosenthal-Schneider: Begegnungen mit Einstein, von Laue und Planck 1988; Einstein: Aus meinen späteren Jahren 1934-55, 1950, 1955; **Seelig ed: Helle Zeit - Dunkle Zeit. In Memoriam Albert Einstein** 1956, 1986 Meyenn, Kollros, Born, Straus, Blumenfeld, Kayser, Szilard, Wigner, Hahn, Strassmann, Turner, Meitner, Frisch, Weizsäcker, Heisenberg; Goetz & Mottek: Gedanken zum öffentlichen Interesse für die Relativitätstheorie, Potsdamer Forschungen, Naturwissenschaftliche Reihe B Heft 14 1978 p7-10; Seelig: Albert Einstein. Leben und Werk eines Genies unserer Zeit 1960[3]; Berliner Tagesblatt 27.8.1920 Titelseite: Einstein hatte am 24.8.1920 in alter Philharmonie den NP Lenard beleidigt "... er hat in der theoretischen Physik noch nichts geleistet" und Lenards Einwände sind von solcher Oberflächlichkeit". Einstein unterstellte Lenard Antisemitismus und trug so zur Polarisierung bei. Arne Schirrmacher: Neue Physik im Kurbad Bad Nauheim PhysJ19 2020 H10 p36-41; Lenard: Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation 1920; Gehrcke: Die Relativitätstheorie, eine wissenschaftliche Massensuggestion 1920; Erwin Freundlich: Relativitätstheorie 1920; Braunbek: Neue Physik. Die Revolutionierung des physikalischen Weltbildes 1975; Treder: Einstein in Potsdam 1986; Treder & Wheeler: Zur Grundlagen-Problematik der Physik, Naturwissenschaftliche Reihe B Heft 14 1978 p7-10; Eckhard Kreisel 1927-, Liebscher, Treder: Zur Quantengeometrodynamik 1967; **Kuznecov: Einstein. Leben-Tod-Unsterblichkeit** 1972, 1979[2] Helmut Fuchs *1937-, Jürgen Treder; DEFA-Dok-Film Der Physiker - Ansichten zu Hans-Jürgen Treder vom 23.2.1990 Regie Peter Rocha; **Monika Schulz-Fieguth: Hans-Jürgen Treder. Ein Porträt. Einsteins Universum im DDR-Format** 1989, 2018; https://leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2019/08/14-Kant-2.pdf Horst Kant: Treder-Biographie, Sitzungsberichte Leibniz-Sozietät der Wiss zu Berlin 139/140 2019 173-183, p185 **Liebscher: Eigenzeit und Weltalter**, p201 Mauersberger: Gedanken zu einem Bildband über Hans-Jürgen Treder, p211 Bernhardt: Begegnungen mit Hans-Jürgen Treder. Persönliche Erinnerungen, p215 Rauh: Mehr als nur eine physikphilosophische/naturdialektische Episode. Warum der junge Physik-Philosophie-Student Hans-Jürgen Treder mit seiner unmittelbar nachkriegszeitlichen „naturphilosophischen" Aspirantur/Promotion scheitern musste; Hoffmann & Schlattmann: Prinzipien statt Orthodoxie. Treder zur Prinzipienfragen und Einstein, PhysJ21 2022 H11 p25-39; Pais: Ich vertraue auf Intuition. Der andere Albert Einstein 1994; Hentschel: Patente Pfade zur modernen Physik = Einstein in Bern1902-1909 PhysJ18 2019 H6 p28f; Bernstein: Albert Einstein. Moderne Theoretiker 1973; Strauch: Einstein in Caputh. Die Geschichte des Sommerhauses 2001 Einstein: ... das Leben ist zu kurz für das Ehrengeschenk. Treder p106. Herneck: Einstein privat. Herta Waldow erinnert sich an die Jahre 1927 bis 1933, 1978; Highfield & Carter: Die geheimen Leben des Albert Einstein 1994; Plesch: Ein Arzt erzählt sein Leben 1947; Frank Harris & Antonia Vallentin: Mein Leben. Selbstbiographie 1927; Antonina Vallentin: Das Drama Albert Einsteins 1954; Barnett: Einstein und das Universum 1958; Hoffmann: Einsteins Berlin. Auf den Spuren eines Genies 2006 Mileva, Albert, Eduard April bis Juni 1914 Dahlem Ehrenbergstr. 33, dann Hittorfstr. 24, Einstein ab Herbst Wittelsbacher Str. 13, ab Herbst Haberlandstr. 5 bei Cousine Elsa. Melcher: Albert Einstein wider Vorurteile und Denkgewohnheiten 1979; **Fölsing: Albert Einstein - Eine Biographie** 1995; Jacob Grommer 1879-1933, Walther Mayer 1887-1948; Lanczos: Albert Einstein and the Cosmic World Order 1965; L̃anczos: Space through the Ages. The Geometry of Geometrical Ideas

from Pythagoras to Hilbert and Einstein 1970; **Lanczos: The Einstein Decade 1905-15** 1974 Teil 2 enthält erläuternde Zusammenfassungen aller Einsteinarbeiten in den zehn Jahren. Die Arbeiten selbst findet man im Netz oder in Renn: **Einstein's Annalen Papers. The Complete Collection 1901-1922**, 2005; Die Ideengeschichte ausführlich bei M̃eyenn: Albert Einsteins Relativitätstheorie - Die grundlegenden Arbeiten 1990; Ẽco: Auf den Schultern von Riesen. Das Schöne, die Lüge und das Geheimnis 2019; Renn: Auf den Schultern von Riesen und Zwergen. Albert Einsteins unvollendete Revolution 2006; und **Pais: Albert Einstein. Eine wissenschaftliche Biographie** 1982; Stachel: Einstein from B to Z 2002; **Stachel, Penrose, Ehlers: Einsteins Annus mirabilis. Fünf Schriften, die die Welt der Physik revolutionierten** 1998, 2005 p27ff Dryden: Das Jahr der Wunder 1666 = Sieg über holländische Flotte und Londons Überstehen des Brandes und Newtons Erfindungen p197 Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt: Körperzustand bei ponderabler Materie = endliche Anzahl von Teilchen mit Ort und Impuls. Ganz anders Maxwelltheorie mit elektromagnet Zustand mit kontinuierlichen Funktionen = unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Schwarzer Körper sagt: Licht muss auch endliche Anzahl von Teilchen sein; Frank, Philipp: Einstein. Sein Leben und seine Zeit 1941, 1949; Jordan: Albert Einstein. Sein Lebenswerk und die Zukunft der Physik 1969; ṽon Meyenn: Albert Einsteins Relativitätstheorie. Die grundlegenden Arbeiten 1990; Bührke: Genial gescheitert: Schicksale großer Entdecker und Erfinder 2012; Bührke: Einsteins Jahrhundertwerk. Die Geschichte einer Formel 2014[2]; Bührke: $E = mc^2$ - Einführung in die allgemeine und spezielle Relativitätstheorie 2015; Dazu schöne Fotos und Kommentare in: **Renn: Albert Einstein - Engineer of the Universe**. 100 Authors for Einstein. Essays 2005; Renn: Einsteins Leben und Werk im Kontext 2005; Moskowski: Einstein. Einblicke in seine Gedankenwelt. Gemeinverständliche Betrachtungen über die Relativitätstheorie und ein neues Weltsystem. Entwickelt aus Gesprächen mit Einstein 1921; Einstein & Born: Briefwechsel 1916-1955; Born: Der Luxus des Gewissens 1958; Õtto Frisch: Woran ich mich erinnere. Physik und Physiker meiner Zeit 1981; Max Born, James Franck, Physiker in ihrer Zeit. Der Luxus des Gewissens. Ausstellung der Staatsbibliothek Berlin, 1982 p133 **James Franck-Report** = Atombombe nicht auf Menschen, sondern in unbelebter Gegend demonstrieren! vom 12.6.1945 an US-Verteidigungsminister Stimson (Flitterwochen in Kyoto) unterzeichnet durch Donald Hughes, James Nickson, Eugene Rabinowitch, Glenn Seaborg, J. C. Stearns, Leó Szilárd; Born: Mein Leben 1944/48 und 1961/63 1975; **Born: Die Zerstörung der Ethik durch die Naturwissenschaft**, PhysBl 25 1969 H7 p289-295 oder in Rees: Unsere letzte Stunde. Warum die moderne Naturwissenschaft das Überleben der Menschheit bedroht 2003; Rees: Unsere Zukunft. Perspektiven für die Menschheit. Wie Wissenschaft und Politik jetzt unser Überleben sichern können. Chancen und Risiken der Biotechnologie, Robotik, KI und Raumfahrt 2020; Anders: Die Antiquiertheit des Menschen. BdI Über die Seele im Zeitalter der zweiten industiellen Revolution 1956 **Lehre des Westens aus der Wirkung der Vietnam-Kriegssbilder: Bilder sind kriegsentscheidend im ikonischen Zeitalter.** ; a] Gezeigte 'Realität'/fake news/gewünschte Wahrnehmung muss medial a la Hollywood inszeniert werden, um Diskurs überflüssig zu machen. Nemmersdorf Oktober 1944. b] Reduziere komplexe Welt auf schwarz/weiß, dafür/dagegen. Blockparteien/Opposition. c] Verbiete Fotos/Videos von Kriegshandlungen. Wikileaks-Gründer Julian Assange verstieß mit der Veröffentlichung gefilmter US-amerikanischer Militäropperationen 2004-2009 im Irakkrieg gegen das **Bilderverbot des Westens.** Anders: Die Antiquiertheit des Menschen. BdII: Über die Zerstörung des Lebens im Zeitalter der dritten industriellen Revolution 1980; Vierte industrielle Revolution der vernetzten Cyberwelt übersehen. Tröstlich ist, dass die Prophezeihungen nur die hybristriefenden westlichen Zivilisationen betreffen. Kreuzer ed: Die zwei Kulturen 1968 p254-259; Born: Von der Verantwortung des Naturwissenschaftlers. Gesammelte Vorträge 1965; **Born: Physik im Wandel meiner Zeit** 1957; Born & Infeld 1898-1968: Erinnerungen an Einstein 1969; **Infeld: Leben mit Einstein**. Kontur einer Erinnerung 1969; Infeld: Der Mann neben Einstein. Ein Leben zwischen Raum und Zeit 1999; **Infeld: Albert Einstein, sein Werk und sein Einfluss auf unsere Welt** 1953; Wuensch: Zwei wirkliche Kerle. Neues zur Entdeckung der Gravitationsgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie durch Albert Einstein und David Hilbert 2005; Tilman Sauer und David E Rowe, Mainz; Gutfreund & Renn: Relativity: The

Special and the General Theory - 100th Anniversary Edition 2015; Vaas: Jenseits von Einsteins Universum. Von der Relativitätstheorie zur Quantengravitation 2015; Einstein an Milewa 1918: Der Nobelpreis würde Dir - im Falle der Scheidung und für den Fall, dass er mir zuteil wird - a priori vollständig abgetreten. Hunziker: Der jugendliche Einstein und Aarau. Einsteins letztes Schuljahr. Relativität, Brownsche Bewegung, Lichtquanten und Astrophysik[11]. Begleitband zur Jubiläumsveranstaltung 2005, Alte Kantonsschule Aarau. 2005; Kerner: Lise, Atomphysikerin. Die Lebensgeschichte der Lise Meitner 1988; Meitner: Wege und Irrwege zur Kernenergie, Naturwissenschaftliche Rundschau 16 1963 p167–169; Rife: Lise Meitner. Ein Leben für die Wissenschaft 1990; Sime: Meitner. Ein Leben für die Physik 2001; Greenspan über Born und Cassidy über Heisenberg = Kommentierte Brief- und Tagebuch-Sammlung! G̃reenspan: Max Born - Baumeister der Quantenwelt. Eine Biographie 2011; Hermann: Einstein - Der Weltweise und sein Jahrhundert 2004; **Bertrand Russell: Unpopular eassays** 1950. http://www. users. drew. `edu/~jlenz/brtexts.html` Why I Am Not A Christian: Gott, Unsterblichkeit, Jesus. Lob des Müßiggangs. Und andere Essays. Ehe und Moral; Bertrand Russell: Über das Kennzeichnen; Johannes 14:27: **Jesus über den Frieden: Den Frieden lasse ich euch; meinen Frieden gebe ich euch. Nicht gebe ich euch, wie die Welt gibt. Euer Herz erschrecke nicht und fürchte sich nicht!** Niemöller: Vom U-Boot zur Kanzel 1934; **Martin Niemöller 1892-1984** Herausgeber sind die Stasi-IMs Feurich und Ordnung: **Was würde Jesus dazu sagen?** 1980 Bergpredigt zwingt zu Bekennder Kirche; Perels: Martin Niemöller. Gewissen vor Staaträson 2016; **Nachwelt zum 100. Einsteingeburtstag:** Einstein-Verunglimpfung siehe Haaf: Physikalische Blätter. Zensur im Verbandblatt, Die Zeit 13/1982 wegen Unsöld: Zur Diskussion gestellt. Albert Einstein. Ein Jahr danach, Physikalische Blätter 36 1980 p337ff, Haag & Lehmann: Zwei Jahre danach, Physikalische Blätter 37 1981 p229f. Lies besser den Geburtstagsgruß von Arnold Sommerfeld zu Einsteins 70. Geburtstag, Physikalische Blätter 5 1949 p127; Nathan, Norden, Russell: **Einstein. Über den Frieden** 1975, 2% Verweigerer genügen. Rolland: Naiv, 2% genügen, um die immer effektiveren Waffen zu handhaben. **Lem: Frieden auf Erden** 1986 Alle Waffenarsenale und deren Weiterentwicklung auf den Mond ausgelagert; Treder: Große Physiker und ihre Probleme 1983; **Asimov, Baker, Choppin, Fowler, Holden, Kolenkow, Sands, Weisskopf: Concepts in physics** 1973; Lanius: Wandel im Weltbild der Physik In: Sitzungsberichte Leibniz-Sozietät der Wissenschaften, Band 105: Leibniztag 2009; CFv Weizsäcker: Große Physiker. Von Aristoteles bis Werner Heisenberg 1999 p5 Sucht n gute Physiker so aus, dass keiner von ihnen das Spezialgebiet des anderen wirklich versteht. Wie groß kann man die Zahl n machen? 1900 n=1=einer versteht die gesamte Physik. 1930 n=5, 2000 n=20. Ackermann & Eisenberg: Erfahrung des Denkens - Wahrnehmung des Ganzen. Carl Friedrich von Weizsäcker als Physiker und Philosoph 1989; **Kirsten, Körber & Treder: Physiker über Physiker** Bd1 Wahlvorschläge zur Aufnahme von Physikern in die Berliner Akademie 1870 bis 1929. Helmholtz bis Schrödinger 1975; Kirsten: **Physiker über Physiker** Bd2 Antrittsreden, Erwiderungen bei der Aufnahme von Physikern in die Berliner Akademie, Gedächtnisreden 1870 bis 1929, 1979; Alon: **How to choose a good scientific problem?** Erkenntnisgewinn vs Schwierigkeit der Fragestellung. Dorozynski & Stössel: Der Mann, der nicht sterben durfte Gebundenes 1966 = Landau-Tod; Feynman: Vom Wesen physikalischer Gesetze. Messenger Lecture 1967; **Dyson:** Maker of Patterns. An Autobiography Through Letters 1979; Dyson: Disturbing the Universe = **Innenansichten - Erinnerungen in die Zukunft** 1981 TRIGA = Training, Research, Isotopes, General atomic = Wie baut man vermarktungsfähige Kernreaktoren Genf, Metallurge **Massoud Simnad 1920-2001** wasserstoffhaltige Brennstäbe aus Uranhydrid und Zirkonhydrid 1955; **Schweber: QED and the Men Who Made It. Dyson, Feynman, Schwinger and Tomonaga** 1994; Dyson: Die zwei Ursprünge des Lebens 1988; D̃yson: Infinite in All Directions. Gifford Lectures Given at Aberdeen, Scotland April-November 1985, 2004; Dyson: Die Sonne, das Genom und das Internet. Wissenschaftliche Innovation und die Technologien der Zukunft 2000; D̃yson: Zeit ohne Ende. Physik und Biologie eines offenen Universums 1989 87 Seiten; Thirring: Kosmische Impressionen. Gottes Spuren in den Naturgesetzen 2003; Thirring: Lust am Forschen. Lebensweg und Begegnungen 2008; T̃hirring: RÜCKBLICKE - Ein barfüßiger Gelehrter erinnert sich 2013; Segre: Die großen Physiker und ihre Entdeckungen. Von den fallenden Körpern zu den

[11] Andreas Müller: Lexikon der Astrophysik 2007 https://www.spektrum.de/astrowissen/downloads/ Lexikon/Lexikon_AMueller2007.pdf

Quarks 1984; Krafft: Lexikon großer Naturwissenschaftler 1999; Mason: Geschichte der Naturwissenschaft in der Entwicklung ihrer Denkweisen 1997[3]; **Cohen: Die zweite Erschaffung der Welt. Wie die moderne Naturwissenschaft entstand** 2010; H̃art-Davis: Schrödingers Katze und 49 andere Experimente, die die Physik revolutionieren 2019; **Russo & Denninger: Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens** 1996, 2005; Weingart: Wissensproduktion und sozial Struktur 1976; Eagleton: Literary theory 1983 Shklovsky, Literatur als Gerät 1917; **Hochhut: Spitze des Eisbergs. Ein Reader** 1982 p9 Alter. Das Leben ist nicht logisch - sondern lebendig. Selbstverständlich darf man einem Prinzip ein Leben opfern - doch nur das eigene. Bis vierzig trägt uns das Leben, ab vierzig tragen wir es. Ob der Mensch zum Scheitern verurteilt ist? Das Denken ist es bestimmt oder wenigstens der Denkende. Das Leben ist ein Abstieg. Burke & Stadler: Gutenbergs Irrtum und Einsteins Traum. Eine Zeitreise durch das Netzwerk menschlichen Wissens 2001; P̃olanyi: Implizites Wissen 1985; Aguado & Burke: Um 1808. Restrukturierung der Wissensarten. Circa 1808: Restructuring Knowledges 2009; Burke & Wolf: Die Explosion des Wissens. Von der Encyclopédie bis Wikipedia 2014; Subramanyam, Mahajan, Archana Madhukar: Geschichte der Naturwissenschaft - Bilderbuch mit Fehlern 2010; **Bryson: Eine kurze Geschichte von fast allem** 2003 ist exzellent, wenn man's besser weiß; **Simonyi: Kulturgeschichte der Physik:** Von den Anfängen bis heute 2001[3]; Brandt: The Harvest of a Century. Discoveries in Modern Physics in 100 Episodes 2009; Griffiths: Revolutions in Twentieth-Century Physics 2012; **G̃riffiths: Einführung in die Physik des 20. Jahrhunderts. Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Elementarteilchenphysik und Kosmologie** 2015; **Karl von Meyenn: Die großen Physiker**, Bd1 Von Aristoteles bis Kelvin, Bd2 Von Maxwell bis Gell-Mann 1997; **Brandt: Geschichte der modernen Physik** 2011; H̃onerkamp: Die Vorsokratiker und die moderne Physik. Vom Wesen und Werden einer strengen Wissenschaft 2020; Honerkamp: Was können wir wissen? Mit Physik bis zur Grenze verlässlicher Erkenntnis 2013; H̃onerkamp: Die Idee der Wissenschaft. Ihr Schicksal in Physik, Rechtswissenschaft und Theologie 2016; H̃onerkamp: Über die Merkwürdigkeiten der Quantenmechanik 2020; G̃aßner & Müller: Können wir die Welt verstehen? Meilensteine der Physik von Aristoteles zur Stringtheorie 2019 PhysJ 19 2020 H7 p59; **Bergmann & Epple: Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur** 2009; S̃egal: Mathematicians under the Nazis 2003 p323ff KH Boseck *1915-; Kinnebrock: Bedeutende Theorien des 20. Jahrhunderts. Relativitätstheorie, Kosmologie, Quantenmechanik und Chaostheorie 2012[4]; Brockman ed: Wie funktioniert die Welt? 2013 Rovelli, Susskind, Tegmark, Dyson, Linde, Randall, Barabasi, Steinhardt, Wilczek, Gigerenzer, Rees, Kandel, Dennett... Tegmark: Unser mathematisches Universum. Auf der Suche nach dem Wesen der Wirklichkeit 2014;

An der Quelle ist das Wasser noch klar! Lies gelegentlich Originalarbeiten[12] und unbedingt die Klassiker Grimsehl, Pohl, Recknagel, B̃artelmann, Feuerbacher, Krüger, Lüst, Rebhan, Wipf: Theoretische Physik 2018; **Clemens Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** 1921, **Landau & Lifschitz**, **Flügge: Wege und Ziele der Physik 1974** 1912-97 PhysBl38 1982 H9 p298, Westphal[13], Gerthsen, Tipler, Warburg: LB der Experimentalphysik 1893, 1906[9], Paus, Bergmann & Schäfer, Schrödinger, von Laue, Hund, Pauli, Sommerfeld, Eckert: Die Atomphysiker. Eine Geschichte der theoretischen Physik am Beispiel der Sommerfeldschule 1993; Ẽckert: Sommerfeld. Atomphysiker und Kulturbote 1868-1951 – eine Biografie 2013 darin p85ff Lesezimmer & **Modell-Sammlung Kleins** oder Maxwells Gips-Modelle von Potenzialen, die heute durch Computer-Simulationen eine Ersetzung findet. Kautschitsch & Metzler: **Mathematische Anschauung** und Mathematikfilm 1982; **Lies Arnold: On teaching mathematics** 1997; Schreibweise der Vektoren und Bedeutung physikalischer Größen p182, Mathe-Intros siehe Reihe **Student mathematical library**, M̃arcus Weber: Phantastisch physikalisch 2021; Backe: Physik selbst erlebt 1963, 1972[4]; **Physik-Intros zum Verstehen:** Werner Braunbek 1901-1977,

[12] Gesammelte Werke von Helmholtz, Einstein, von Laue, Pauli, Heisenberg, **CFv Weizsäcker**, Weyl, Schrödinger, . . . , Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften oder Weber & Dedekind: **Bernhard Riemanns Gesammelte Mathematische Werke** 1876; J. von Neumann: Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen, Mathematische Zeitschrift 30 (1929) 3-42

[13] Anfang 1915 in Spezialtruppe für den Gaskampf in Ypern und Galizien unter anderem Fritz Haber 1868-1934, James Franck 1882-1964, Otto Hahn 1879-1968, Gustav Hertz 1887-1975, Wilhelm Westphal 1882-1978, Erwin Madelung 1881-1972 und Hans Geiger 1882-1945 Potsdam Neuer Friedhof. Geigers Tod in Potsdam siehe PhysBl28 1972 p265.

Hans Gustav Backe 1903-1979, Helmut Lindner 1907-1984, Walter Conrad 1922-2006, Ernst Herbert Krause 1940?-, Hagen Jakubaschk 1934-2005, Lenk & Gellert: Brockhaus Physik 1973, Kilian & Weber: Lexikon der Physik 2003, Feynman, Wheeler, d'Espagnat: Grundprobleme der gegenwärtigen Physik 1971, Berkeley-Kurs, Schmutzer[14], Dirschmid, **Schottenloher**, Schwindt, Pade, Shankar, **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990; Schulz, Haake, Greiner, Nolting, Rebhan, Mitter, **Goldstein**, Budo, Jänich, Janich, **Kränzig: Physik-Vorlesungen ETH**, Sexl, **de Vries**[15], Arens, Meyberg & Vachenauer, Storch/Wiebe, **Oxford master series in physics**; Wigner, Straumann, Lang & Pucker, **Zeidler**, **Weyl**, **Lectures in theoretical physics:** Summer Institute for Theoretical Physics, University of Colorado, Boulder 1.1958(1959) - 14.1972/73,B **Spektrum der Wissenschaft von 1978 bis 2000!** danach verflacht die Tiefe der Beiträge, **Praxis der Naturwissenschaften**, G&G, Handbuch der Physik, Landau/Lifschitz, American J Physics, European J Physics, c't, Gamow, Eddington, McMahon: Demystified, Jeans, Jordan, Treder[16].

Dank an die Ideen-Spender **Wikipedia, Gerhard Wilhelm Becker Phys Blätter,Stefan, Johannes, Thomas, Florian, André, Michael, Achim, Marco, & Igor**

Bibliotheken rechnen sich nicht, aber sie zahlen sich aus. Sammlung von Berichten über den Aufstieg zum Licht, über das Ringen um Klarheit/freie Sicht. Lichtenberg über Bücher PhysBl12 1956 p29-32. Es gibt 3 Orte: a] Wohnung. b] Arbeitsstelle. c] Bibliothek = nichtkommerzieller, weltanschaulich neutraler Ort. Bradbury: Fahrenheit 451 1953; Knoche: Wozu Bibliotheken? 17.12.2017 9:30 Informationsmonopol verschiebt sich ins Netz. Suchmaschinen. Krisenanfälliges Lizenzmodell. Digital ist fluid! Suchmaschienen: Gopher, Mosaic, Altavista, Google, Bing, DuckDuckGo, **Metager**, Qwant, **Searx**, Startpage. Spezialsuchmaschinen ct2019H6 p66 Brockhaus ct2018H22 p61 Duden, name. **Rothenberg: Die Konservierung digitaler Dokumente**. Nutze **simple text** 7-bit oder 8-bit = UTF-8 Unicode text oder 16-bit ASCII. In: SdW Sept1995 p66-71 Digitale Bibliotheken bleiben für immer oder 5 Jahre, je nachdem, was eher eintrifft. Die Idee des Webs war nicht Datenschutz, sondern die globale Kontrolle von allem. Social-Media-Inhalte datenschutzfreundlich in Webseite einbinden per **Shariff** ct.de/y9rj 2014 oder **Embetty**. Container-Software Docker-Einstieg ct10/2018 p160. ct2/2019 p148, ct15/2017 p106, ct16/2018 p104; Gertner: The Idea Factory. Bell Labs and the Great Age of American Innovation 2013; Clifford **Stoll: Die Wüste Internet. Geisterfahrten** auf der Datenautobahn 1995 gibt Prä-Smartphone-Ära (=1996 Flashspeicher SSD, 2007 Multitouch, 2010 Android-Smartphones dominieren) wieder und enthält viele falsche Voraussagen. Dennoch lesenswert als Zeitdokument zum Stand der Computertechnik im Jahre 1994. Die 1979 von der Raumsonde „Pioneer" vom Saturn übertragen und bei der NASA auf Magnetbänder archiviert wurden, waren 1994, obwohl die Daten auf vier verschiedenen Datenträgern gespeichert waren (9-Spur-Magnetband, 7-Spur-Magnetband, Lochstreifen und Lochkarte), nicht mehr lesbar, da bei der NASA für keinen dieser vier Datenträger mehr Lesegeräte vorhanden waren. W Ernst: Konzept der Nachhaltigkeit? Lieber schnell als ewig verfügbar! **Fühmann: Pavlos Papierbuch** In: Saiäns-Fiktschen 1983 p157-177;

Inhaltsverzeichnis

Sachregister **1**

1 Metaphysik, Kränkungen, Physik, Modell, Mathe, Gödel **29**

[14] Grundlagen der Theoretischen Physik. Nachruf 1930-2022, PJ22 2023 H3 p62f. Dietrich Kramer 1939-2016, Eduard Herlt 1942-2017, Hans Stephani 1935-2003, Gerhard Kluge 1934-2011.

[15] Arithmetik und Algebra 2Bde, Geometrie 2Bde 1954 = Rechenmethoden = praxisnahe Mathematik.

[16] Schrödinger-Schüler Papapetrou: Schüler sind Treder und Dautcourt Georg Dr. Hans-Otto-Str. 17 10407 Berlin Prenzlauer Berg Tel.: (0 30) 42 16 18 65

2 Messen, Datenanalyse, Zufall, Likelihood, Spektren, Ergodizität **70**

3 Aussagenlogik, Leibniz, Mengen, Cantor, Beweis, Zahlen **126**

4 Konvergenzen, Approximation, Splines **139**

5 Lineare, additive, gemischte Modelle **141**

6 Schätzer, Modelle, Lernen, Bayesianer vs Frequentisten **142**

7 Differenzengleichungen, z-Trafo **145**

8 Scientific Computing, Zeichen, Sprache, Signal, Daten, Kybernetik, HMM **145**

9 Numerik, Rechengenauigkeit, -Fehler, -stabilität, -aufwand **173**

10 Optimierung **177**

11 Calculus, Frechet, Gateaux, Taylor, Fubini, fractional calculus **177**

12 i, Funktionentheorie, Quaternionen, Oktonionen **196**

13 Matrizen, lineare Algebra, Determinanten **209**

14 Hilbert vs Descartes Traum: Geometrie, Tensoren, Plangrößen, Topologie **226**

15 Differential/Pfaff'sche Formen: Cartan- statt Ricci-Kalkül **291**

16 Mechanik/Dgls: Falk, Hamel, Jelitto, Fließbach, Goldstein, Mitter, Straumann & Scheck **294**

17 Brown'sche Bewegung als Modell der Körnigkeit der Welt **385**

18 Nichtlineare Dynamik, nichtlineare Physik & komplexe Systeme **391**

19 Fluch der Dimension/Curse of dimensionality **407**

20 Einbettungstheorem, Rekurrenz **407**

21 Starrer Körper **409**

22 Raum-Zeit, Drehung, Gruppen, Redshift, Kovarianz, Olbers **410**

23 Thermostatik vs Thermodynamik irreversibler Prozesse **509**

24 Phasenübergänge und Renormierung **522**

25 Soft condensed matter/weiche Materie/Fluide/Schäme/Gele/Kolloide **524**

26 Zellen, Proteom, Systembiologie, CYP450, DNA **525**

27 Neuronale Anregung - Künstliche Neuronale Netze KNN **531**

28 Graphen-Theorie & komplexe Netzwerke **534**

29 Cellular Automata, Lattice-Gas methods, CA machines **534**

30 Voronoi-Tessalation/Mosaik, Delaunay-Triangulation **539**

31 Klassische Feldtheorie/Hamilton-Prinzip für Felder, Pseudo-Formen **539**

32 Optik **570**

33 Planetare Magnetfelder, Sonnenaktivität, Legendre'sche Polynome **574**

34 Semiklassische Physik: Asymptotische Methoden, WKB-Näherung **579**

35 PDEs, Hydrodynamik, Pattern Formation, Turbulenz, Plasmaphysik **584**

36 Gasdynamik, Bernoulli-Gleichung **601**

37 Ähnlichkeits-Kennzahlen: Reynolds, Rossby, Ekman **602**

38 QM, Supraleitung, Planck-Gesetz und geometrische Reihe. Kosmische Strahlungupraflui-dität **606**

39 Festkörper-Physik **637**

40 QI - zweite Quantenrevolution **642**

41 Zeit, Quantengravitation **646**

42 Kerne, Radioaktivität **652**

43 Elementarteilchen, Teilchen, Feynman-Graphs **670**

44 Feinstruktur-Konstante. Raum-zeitlich wankende Naturkonstanten **687**

45 Arbeit, Liebe, Sinnstiftung, Willensfreiheit **690**

46 Qualia **699**

47 Geist: Hirn, Gedächtnis, Aufmerksamkeit, Ich, Perspektiv-Übernahme **700**

48 Philosophie **711**

49 Basic phenomena **712**

50 Arbeitstipps **713**

51 Anthropische Konstanten und Substanzen **716**

52 Elektronik **717**

53 Speicherbausteine, FPGA, VHDL **721**

54 CPU, Controller **723**

55 Abkürzungen **744**

56 Eine kurze Weltgeschichte **746**

1 Metaphysik, Kränkungen, Physik, Modell, Mathe, Gödel

Rapp: Metaphysik 2015; Dirac: In der Wissenschaft versucht man den Menschen auf allgemeinverständliche Weise etwas zu sagen, was bislang noch niemand wusste. Aber in der Dichtung ist es genau anders herum. Singh 2003 p7; Drewermann: Dichter, wenn sie groß zu nennen sind, haben die Angewohnheit, in wenigen Sätzen intuitiv Wahrheiten auszudrücken, zu deren wissenschaftlicher Darstellung umfangreiche Traktate erforderlich sind. Drewermann: Worte für ein unentdecktes Land 1993; CP **Snow & Kreuzer: Die zwei Kulturen**: Literarische und naturwissenschaftliche Intelligenz 1959, 1963; Charles Purcy Snows Thesen/Label/Klischees in der Diskussion: Hans Mohr, Michael Yudkin, Frank R. Leavis, Lionel Trilling, Martin Green, **Robert Oppenheimer**, Aldous Huxley, Hilde Domin, Helmut Heissenbüttel, **Karl Steinbuch**, Charles Percy Snow, p254-261 **Max Born:** Zerstörung der Ethik durch die Naturwissenschaft. Seit Newton wurde die primitive Technik des Handwerks entwertet. Verstand kontrolliert aber die neue Technik nicht, sondern macht Überbevölkerung. a] Maschinen haben menschliche Arbeit/Geschick/Sorgfalt entwertet und Würde der Arbeit zerstört. Heutiger Zweck der Arbeit ist Geld. b] Im heutigen Krieg spielen Stärke, Mut und Großmut keine Rolle mehr. **Zivilisitorischer Bruch:** Minderheit der Naturforscher, die die Dinge versteht, steht die Minderheit der nicht-naturwissenschaftlich Gebildeten/Juristen/Theologen/Historikern/-Philosophen, die infolge der Begrenzung ihrer Ausbildung nicht imstande sind, die gewaltigen sozialen Kräfte unsrer Zeit verstehen. Falls nicht Krieg zum Ende der Menschenrasse führt, so dann wird sie zu einer Herde von stumpfen törichten Kreaturen unter Tyrannei von Diktatoren, die mit Hilfe von Maschinen und Computern herrschen. Hellmut Glubrecht, August Nitschke, G. Christian Amstutz, Hans Paul Bahrdt, Jürgen Habermas, Arnold Buchholz 1987; Die Thesen: **Geisteswissenschaftler / Literaten/ Philosophen/ Büchermenschen** kommen aus guten Verhältnissen, sehen das Elend des Einzelnen nicht, kennen hingegen die Geschichte, sind ohne soziale Hoffnung, stehen politisch rechts, sind fortschrittsfeindlich, antiwissenschaftlich, daher ohne Urteilskraft. Statt Schichtenmodell der Gesellschaft: Bourdieu: Die feinen Unterschiede. Kritik der gesellschaftlichen Urteilskraft 1979 Ökonomisches, kulturelles, soziales und symbolisches Kapital, Protestkatital. **Naturwissenschaftler** kommen aus Mittelschicht, die ungebildet ist, keine Literatur kennt, sie sind soziale Optimisten, die die Masse nicht wahrnimmt, stehen politisch links, sind atheistisch. Daher wird der Konflikt zwischen diesen Kulturen getrieben durch Spezialisierung, Entfremdung, gegenseitige Ignoranz, Gleichgültigkeit, Nichtverstehen, Feindseligkeit, Aversion. Kunst des Naturwissenschaftlers: Er hält sich durch Sachlichkeit existenzielle Bedrohung vom Leibe. **Schroeer: Physik verändert die Welt? Die gesellschaftliche Dimension der Naturwissenschaft** 1984; Literatur, alte Produktionsmittel und Gebrauchsgegenstände sind Denkmäler, die einen Blick in das Leben unserer Eltern/Vorfahren erlauben, unsre Identität stiften und das Verstehen der Gegenwart unterstützen. Hidde & Schultze: Deutsches Technikmuseum. Museumsführer mit Lageplan 2015; Leider fehlt der Hinweis auf die Technikfeinde, die durch die oben zitierten Born'schen Bemerkungen erklärt. Technik macht Menschen zu Göttern. Technik ist die Basis dafür, dass immer mehr Menschen wie Könige leben. Die Grenze der Technik wird durch die Endlichkeit der Ressourcen deutlich. Koesling & Schülke: Deutsches Technikmuseum Berlin Bd1. Mensch, Technik! Eine Entdeckungsreise durch die Kulturgeschichte der Technik 2013; Kudraß & Rüsewald eds: Deutsches Technikmuseum Berlin Bd3: Netz-Dinge. 30 Geschichten - Vom Telegrafenkabel bis zur Datenbrille 2018 Titel bedeutet Hardware des Internets. Buch kommt ohne Hinweis auf Literatur zum Verstehen daher. Hinweis auf

populäre Darstellungen der physikalischen und technologischen Basis von Conrad und Schmellenmeier fehlen. Bedeutung von Mathematik und Informatik für das Verstehen der Technik fehlen. Marcuse: Der eindimensionale Mensch 1967 siehe PhysBl 26 1970 p180ff; **Ulrich: Auflösung der absoluten Ideen durch Naturwissenschaften**, PhysBl28 1972 p192ff, p266ff. **Schopenhauer: Lebenssinn ohne Illusion unmöglich! Das Spannungsverhältnis zwischen Geistes- und Naturwisenschaften** PhysBl44 1988 H3 p57-69, FAZ 11.11.1987, **Zimmerli: Einheit oder Vielheit der Kulturen?** PhysBl44 1988 H3 p63-66, verquer ist Capra: Wendezeit 1984[7], M̃aturana: Erkennen - Organisation und Verkörperung von Wirklichkeit 1982, Maturana: Was ist Erkennen? 1994, Kanitscheider: Gibt es Grenzen der naturwissenschaftlichen Methode? Physik als Archetypus wissenschaftlicher Erkenntnis PhysBl44 1988 H3 p63-66, Biedenkopf: Die technologische Gesellschaft PhysBl44 1988 H3 p67-69 leider ohne Verweis auf Weizsäcker: Der bedrohte Friede 1983; Jordan1902-1980: Forschung macht Geschichte 1954; Schüler von Born, Lehrer von Jürgen Ehlers, Trümper, Heckmann, Schücking, Kundt. Jordan: Der gescheiterte Aufstand 1956 p21 **Verstehen**, p28ff Scheinprobleme, p29 Gleichzeitigkeit, Verfechter dt. Wiederbewaffnung und Abschreckung durch Atomwaffen; Kleist: Wie viele Freuden gewährt nicht schon allein die richtige Wertschätzung der Dinge! **Kleist: Spezialisierungszwang**. Schopper: Materie und Antimaterie. Teilchenbeschleuniger und der Vorstoß zum unendlich Kleinen 1989 p374ff; **Verflechtung vs Spezialisierung** siehe **Ãrmstrong: Basic topology** 1979, 1983; Gamelin & Greene: Introduction to Topology 1999; **Jänich: Topologie** 1980, 1996[5] p1ff; JGA Galleti 1750-1828 Gallettiana, für Liebhaber höheren Blödsinns = Verdenken 1866, 1968 **Das größte Insekt ist der Elefant. Unter allen Tieren hat die Ente mit dem Schweine die größte Ähnlichkeit. Von Newton brauche ich nichts weiter zu sagen, als dass er gestorben ist. Alexander wurde 21 Jahre vor seinem Tode vergiftet; Je gelehrter, je verkehrter. Gelehrte und Huren kann man für Geld haben.** Akademische Stufenleiter PhysBl22 1966 p129; Kosten eines Wissenschaftlers PhysBl22 1966 p463; Gruen: Verratene Liebe. Falsche Götter 2003 p144ff Wissenschaft als falscher Gott; P. Ehrenfest: Reformvorschläge von 1930 zu Born 50. Geburtstag, PhysBl17 1961 p186-188; Ziman: The Force of knowledge 1976; Ziman: Teaching and learning about science and society 1980; Wolfgang Bibel: Reflexionen vor Reflexen. Memoiren eines Forscher 2017; Ziman: Wie zuverlässig ist wissenschaftliche Erkenntnis? 1982; Heermann: Von der Zahl zum Gesetz 1974; Ziman: Knowing everything about nothing. Specialization and change in research careers 1987; Ziman: An introduction to science studies. The philosophical and social aspects of science and technology 1987; Medvedev, Rich, Ziman: The Medvedev papers. Fruitful meetings between scientists of the world. Secrecy of correspondence is guaranteed by law 1971; Ziman: Prometheus bound. Science in a dynamic staedy state 1994; Alvin Weinberg: Probleme der Großforschung 1970; Ziman: Real Science. What it is and what it means 2000; Lauterbach: Bevor es zu spät ist. Was uns droht, wenn die Politik nicht mit der Wissenschaft Schritt hält 2022; Houellebecq: Elementarteilchen 1998 **Wissenschaftsbetrieb**; Ãleksandrov/Alexandrow: Die Wahrheit über den Kulturaustausch 1976; Djerassi: Stammesgeheimnisse. Zwei Romane aus der Welt der Wissenschaft. Cantors Dilemma & Das Bourbaki Gambit 2011. Ketterle *1957 1990 USA Laserkühlung 1996 Interferenz von BEC, 1997 Atomlaser, dann Management PhysJ18 2019 H3 p28-31; Homo scientificus zeigt ideokratische Verhaltensweisen: Kompetenz und Konformität. Außenwelt wird bis ins kleinste Detail analysiert, Stammesverhalten aber nicht. Keine Zeit für Selbstbeobachtung und Selbstanalyse; **Peter & Hull: Das Peter-Prinzip oder Die Hierarchie der Unfähigen** 1972 Nach einer gewissen Zeit wird jede Position von einem Mitarbeiter besetzt, der unfähig ist, seine Aufgabe zu erfüllen.; von Selbig geerbt; Peter: Schlimmer geht's immer. Das Peter-Prinzip im Lichte neuerer Forschung 1995; **Adams: Das Dilbert-Prinzip**. Die endgültige Wahrheit über Chefs, Konferenzen, Manager und andere Martyrien 1997 Nach dem Dilbert-Prinzip werden die unfähigsten Arbeiter systematisch ins Management versetzt, weil sie dort vermeintlich den geringsten Schaden anrichten. Dadurch verfüge die Person im Management weder über die notwendigen sozialen Kompetenzen eines Managers noch über die für den geführten Bereich notwendigen fachlichen Kenntnisse. Nach dem (abgelösten) Peter-Prinzip von Laurence J. Peter und Raymond Hull dagegen war jeder Beschäftigte bis zu einer Stufe im Unternehmen aufgestiegen, deren Anforderungen er nicht mehr gewachsen war. Der Aufstieg erfolgte, weil die Person auf der bisherigen Stufe erfolgreich war. So wurden Personen zu Managern, die immerhin einen gewissen Einblick in die fachliche Materie ihrer Abteilung hatten. Adams: Bring mir den Kopf von Willie, dem Büroboten! 2001;

Danisch: Adele und Fledermaus; Donna Haraway: Die Neuerfindung der Natur. Primaten, Cyborgs und Frauen 1990; Frauenquote: Wie die Gender-Ideologie Politik, Wissenschaft, Recht und Verfassung unterwandert 2012; Gegenbewegung: **Offene/Öffentliche Wissenschaft/Open Science** = Oberbegriff für verschiedene Strömungen, die zum Ziel haben, Wissenschaft einer größeren Zahl von Menschen einfacher zugänglich zu machen. Produktorientierte Ansätze, die (Zwischen-)Ergebnisse möglichst offen zugänglich machen, etwa Open Access, Open Data oder Reproducible Research. **Citizen Science-Projekte** = Öffnung von Prozessen der Wissenschaft, die Bürgerbeteiligung einschließt. Barrett: Das unterstellte Geschlecht. Umrisse eines materialistischen Feminismus 1983; Gleichstellungsindustrie basiert auf Feminismus-Religion: C̃assie Jaye: The red pill. DVD 2016; F̃reeman: Die rote Pille Jan Oechsner: Männer.Frauen.Menschen 2023; Leo Szilard: Collected Works of Leo Szilard 1989; **Szilard: Die Stimme der Delphine** 1961 p12 **10 Gebote von Leo Szilard, 1939: 1. Erkenne die Zusammenhänge** der Dinge und die Gesetze der Handlungen der Menschen, damit Du wissest, was Du tuest. **2. Deine Taten** sollen gerichtet sein auf ein würdiges Ziel, doch sollst Du nicht fragen, ob sie es erreichen; sie seien Vorbild und Beispiel, nicht Mittel zum Zweck. **3. Sprich zu den Menschen** wie zu Dir selber ohne Rücksicht auf die Wirkung Deiner Rede, auf dass Du die Menschen nicht ausstoßest aus Deiner Welt und in der Vereinsamung der Sinn des Lebens Deinen Augen entschwindet und Du verlierest den Glauben an die Vollkommenheit der Schöpfung. **Ulrich: Auflösung der absoluten Ideen durch Naturwissenschaften**, PhysBl28 1972 p192ff, p266ff. **Schopenhauer: Lebenssinn ohne Illusion unmöglich!** Baltasar Gracian: Handorakel und Kunst der Weltklugheit 1986, 2020; M̃ilosz Matuschek: Wenn's keiner sagt, sag ich's. Kolumnen. Verengte Räume - Absurde Zeiten 2022; Matuschek: Corona - Die Stunde der Wahrheit, Kontrafunk 18.12.2022 Im Reich der Lüge ist Wahrheit Verrat. Plattform rumble.com: The Great Reset from the World Economic Forum. Condemned. Science for hire. Matuschek: Generation Chillstand. Aufbruch in ein selbstbestimmtes Leben 2022 Was wird meine Generation der Welt hinterlassen? Eher nichts von Bedeutung, nicht einmal besonders viele Kinder. Dafür ein Datenmeer, das den Silicon-Valley-Konzernen zur Weltherrschaft verhilft. Dabei gelten die Jahrgänge ab 1980, auch 'Generation Y' und 'Millennials' genannt, doch angeblich als die smarteste Generation, die es je gab, als hochgebildete 'digital natives'. Anstatt jedoch aktiv die Zukunft zu gestalten, verwaltet sie lieber den Status Quo, begnügt sich mit der Jagd nach Statussymbolen und Diplomen als bloßem Selbstzweck, spiegelt ihr 'Selfie' in der eigenen Filterblase aus Klicks und Likes. 'Generation Fake'! Auswege aus der selbstgewählten Misere. Ein scharfzüngiger Appell, den ewigen 'Chillstand' zu beenden und endlich Verantwortung für die Gesellschaft und ihre Zukunft zu übernehmen. Felix Somary: Erinnerungen aus meinem Leben. Erinnerungen eines politischen Meteorologen 1955, 1959 20 Sozialgesetze; Somary: Krise und Zukunft der Demokratie 1952, 2009; **4. Zerstöre nicht**, was Du nicht erschaffen kannst. **5.** Rühre kein Gericht an, es sei denn, dass Du hungrig bist. **6. Begehre nicht**, was Du nicht haben kannst. **7. Lüge nicht** ohne Notwendigkeit. **8. Ehre die Kinder.** Lausche andächtig ihren Worten und sprich zu ihnen mit unendlicher Liebe. **9. Verrichte sechs Jahre lang Deine Arbeit**; im siebenten aber gehe in die Einsamkeit oder unter Fremde, damit die Erinnerung Deiner Freunde Dich nicht hindert zu sein, was Du geworden bist. **10. Führe das Leben mit leichter Hand und sei bereit fortzugehen, wann immer Du gerufen wirst.**; Hugo von Hofmannthal: Reife ist, wenn man das Vollkommene nicht im Ungewöhnlichen, sondern im Alltäglichen sieht. **5. Buch Mose 10.-6. Jh, Exodos, Dekalog, Deuteronomium 10 Gebote Gottes zu Mose auf dem Berg Sinai:** 1. Ich bin der Herr dein Gott. 2. Du sollst nicht andere Götter haben neben mir. 3. Du sollst den Namen deines Gottes nicht unnützlich führen, denn der Herr wird den nicht ungestraft lassen, der seinen Namen missbraucht. 4. Du sollst den Feiertag heiligen. 5. Du sollst deinen Vater und deine Mutter ehren, auf das dirs wohl gehe, und du lange lebest auf Erden. 6. Du sollst nicht töten. 7. Du sollst nicht ehebrechen. 8. Du sollst nicht stehlen. 9. Du sollst nicht falsch Zeugnis reden wider deinen nächsten Haus. 10. Du sollst nicht begehren deines nächsten Weib, Knecht, Magd, Vieh oder alles was sein ist. Denn ich der Herr, dein Gott, bin ein eifriger Gott, der da heimsucht der Väter Missetat an den Kindern bis in das dritte und vierte Glied, die mich hassen und tue Barmherzigkeit an vielen tausenden, die mich lieb haben und meine Gebote halten. Rhodes: The Making of the Atomic Bomb 1986 = Die Atombombe oder die Geschichte des 8. Schöpfungstages 1988; Rhodes: Dark Sun: The Making Of The Hydrogen Bomb 1995; Henry Tizard UK-USA-Austausch von Radar- und Strahltriebswerk;

Hargittai: The Martians of Science. Five physicists who change the world 2006; Ammann: Der Kampf um die Freiheit MDR 2013 Sechs Freunde und ihre Mission - Von Budapest nach Manhattan; Lanouette: Genius in the Shadows. A Biography of Leo Szilard 2008; Marton: Great Escape. Nine Jews Who Fled Hitler and Changed the World 2007; Ein Mönch fragte Hsiang-lin: **Was ist der Sinn** davon, dass fern vom Westen her der Patriarch gekommen ist? Hsiang-lin erwiderte: Vom langen Sitzen müde. Gundert, Bi-Yän-Lu: Die Niederschrift von der Smaragdenen Felswand; Seidl: Das Weisheitsbuch des ZEN. Koans aus dem Bi-Yän-Lu 2008; Kodo Sawaki: Zen ist die grösste Lüge aller Zeiten 2005 Ein Zen-Schüler fragt den Meister nach dem Weg des Zen. Der Meister antwortet: Wenn ich gehe, dann gehe ich. Wenn ich esse, dann esse ich. Wenn ich schlafe, dann schlafe ich. Du hältst nur das, was in deinen engen Rahmen passt, für Wirklichkeit. Über Zazen: Wir sitzen, eins mit dem Universum. Wenn du sagst, dass du keine Zeit hast, bedeutet das, dass du dich von etwas Äusserem versklaven lässt. Solange du noch die Bestätigung von anderen brauchst, ist deine Praxis nicht echt. Wenn du aufhörst, so ein Theater um dich selbst zu machen, wirst du sehen, dass alles ganz einfach ist. Welchen Sinn hat unser Leben eigentlich? Unser Leben hat keinen Sinn! Und durch Zazen kommst du jetzt endlich an den Punkt, an dem du verstehst, das es gar nicht darum geht, 'was es bringt' - einschliesslich dieses Zazens selbst.

Matthias Kroeger: Gotthold Ephraim Lessing - Erziehung des Menschengeschlechts 1780; Die Menschheit entwickelt sich stetig zum Positiven hin, wenn sie ihr Handeln durch die Vernunft lenken lasse. Aber Abwehr gegen die radikale Rationalisierung der Religion durch manche Aufklärer. Vernunft wird zur Norm der Erkenntnis und Urteilsbildung. Diese Vorstellung hält auch Einzug in den Protestantismus und führt bei manchen Theologen zu einem neuen Verständnis der biblischen Schriften. Wenn wir uns wörtlich an die Heilige Schrift halten, dann bleiben wir ständig unter ihrem Diktat. **Lessing: Der Geist ist nicht der Buchstabe [Luther] und die Bibel ist nicht die Religion.** Vergötzung der Bibel. Bibel als neuer Papst. Orthodoxie basiert auf Verbalinspiration. Worte sind die Flöte, auf der der Heilige Geist geblasen hat. Lessing: Natürlich ist die kirchliche Lehre verunreinigtes Wasser. Aber ich weigere mich, dieses verunreinigte Wasser auszuschütten, wenn man hinterher die Kinder in reiner Mistjauche baden muss. Denn, das wirst du wohl verstehen, dass die heutige Aufklärungstheologie nichts anderes als Mistjauche im Vergleich zur Orthodoxie ist. Ringparabel: Lessing reduziert faktisch die Kriterien des christlichen und jeden anderen Glaubens auf vernünftiges, unbestochenes Tolerant-Sein und Tun der Liebe und Ergebenheit in Gott. Gruen: Falsche Götter. Über Liebe, Hass und die Schwierigkeit des Friedens 1991; Gruen: Verratene Liebe. Falsche Götter 2003; Hermeneutischen Seite: Zufällige Geschichtswahrheiten können nie der Beweis von notwendigen Vernunftwahrheiten werden. Kriterium für echte **Religiosität: Vernünftigkeit und die moralische Wirkung. Gott:** In der einen Hand habe ich die **Wahrheit** und in der anderen Hand habe ich die **Suche nach der Wahrheit**, was möchtest du haben, Lessing? **Lessing:** Gib mir die Suche. Denn die Wahrheit ist ja nur für dich, Gott, für uns ist nur die Suche. Wir sind die Suchenden und das ist unsere Wahl. 4. Buch der philosophischen Ethik von Spinoza: Gott ist keine eigene jenseitige Person, sondern - die Formel heißt Deus sive natura - Gott, das ist der Inbegriff der Natur und ihrer Kräfte. Geist und Natur fallen zusammen. Spinoza ist nicht ein Pantheist, sondern Panentheist, das Göttliche ist in allem. Es ist die Frage, ob Gott der Inbegriff aller Kräfte des Kosmos ist, aber nicht identisch mit der Natur, sondern in der Natur. Deutschlandradio am 21.3.2013. **Pascal'schen Wette:** a] Glaube ich an Gott und es gibt ihn, habe ich gewonnen. b] Glaube ich an Gott und es gibt ihn nicht, habe ich nichts verloren. c] Glaube ich nicht an Gott und es gibt ihn nicht, habe ich nichts verloren. d] Glaube ich nicht an Gott und es gibt ihn, habe ich verloren. http://www. derprotestant. de/kosten-nutzen-analyse-die-pascalsche-wette/

Spinoza: Ignorantia non est argumentum, die Unwissenheit ist kein Beweisgrund! **Erkenntnis befreit von törichter Furcht wie von eitler Hoffnung und bewirkt jene Gelassenheit/Ataraxie, welche das höchste Gut und zugleich die wahre Glückseligkeit ist.** Lukrez (* um 96, †55 v.Chr.) überliefert dem römischen Denken die epikureische Atomlehre durch sein umfangreiches Lehrgedicht "Von der Natur der Dinge". Göttliche Agentur. Heraklids Naturmagie. **Newton**s Erfindung von mathematisch formulierten Gesetzen. Am 25. Dezember 1642 geboren als das Christkind der Aufklärung †1726. Newtonmas statt Christmas? Bei Jesus geht es um Glauben, bei Newton um Vernunft. Historisch tut man damit freilich dem tief gläubigen und ständig in theologische Streitfragen verwickelten von Jacob Böhme beeinflussten Neoplatoniker (Treder,

Wawilow) Isaac Newton Unrecht. Newton war, so Ökonom John Maynard Keynes, weniger der erste Rationalist, als vielmehr **der letzte Magier**. Westfall: Isaac Newton 2007; Charlotte Wahl: Newton-Leibniz. Hall: Philosophers at War. The Quarrel between Newton and Leibniz 2002; Finster & Heuvel: Gottfried Wilhelm Leibniz 1990; Julien Offray de La Mettrie, geboren am 25. Dezember 1709: La Mettrie lebte unter dem sehr zweifelhaften Schutz Friedrichs II. in Potsdam. Er starb dort nach dem Genuss einer (vergifteten?) Pastete. Der Mann, der keinen Gott kannte, betrachtete den Menschen mal als Pflanze und mal als Maschine. Sein letztes Werk trug den Titel: „Die Kunst Wollust zu empfinden." **Laplace' Reduktionismus, Zusammensetzbarkeit, Linearität.** Laplace fragte 1773 Lagrange nach einer Stelle in Friedrichs Akademie. Kauffman: Reinventing the Sacred. A New View of Science, Reason, and Religion 2010. No law entails the evolution of the biosphere, in short, The end of a Physics World View: Heraclitus and the Watershed of Life. Answering Descartes: Beyond Turing for the **Alan Turing** Centennial Volume, The Once and Future Turing, 2012; Zenil ed: **A Computable Universe. Understanding and Exploring Nature as Computation** 2012;

Goethe/Wawilow: **Auge ist sonnenhaft.** Wawilow: Die Mikrostruktur des Lichtes 1950/53;

Richard Dawkins: The Selfish Gene. Das egoistische Gen 1976; Dawkins: Der blinde Uhrmacher 1986 **Statistiker Persi Diaconis: Wir wissen, was Zufälligkeit nicht ist. Was sie ist, wissen wir nicht.** Dembski: The Design Inference - Die außerordentliche Vielfalt des Lebens durch Evolution = natürliche Selektion ist statistisch unwahrscheinlich. Eine Kultur von Außerirdischen erfüllt die Bedingungen. Paradoxon: kein intelligenter Akteur, der streng physisch ist, kann den Ursprung des Universums und des Lebens eingeleitet haben. Der Designer ist der christliche Gott, unter dem Ausschluss aller anderen Religionen. Dorschner: Sind wir allein im Weltall? 1974; Haber: Brüder im All. Kosmisches Leben 1970; Lem: Stimme des Herrn 1968/1981 Botschaften in **Neutrino**flüssen; Interplanetare Botschaften. Ozma-Projekt. SETI = Search for Extraterrestrial Intelligence seit 1960. PhysBl22 1966 p480f; **Drake-Gleichung** = Wie wahrscheinlich ist außerirdische Intelligenz? Die Milchstraße besteht aus über 400 Milliarden Sternen, und die Milchstraße ist nur eine von Milliarden anderer Galaxien. Kann es somit sein, dass wirklich nur auf der Erde Leben entstand? Oder vielleicht ist außerirdisches Leben gar nicht so außergewöhnlich, nur dass es sich oft selber zerstört, weil es die Möglichkeiten nicht mehr kontrollieren kann, die sich durch die technische Entwicklung ergeben. Die potentielle Anzahl intelligenter, die Kommunikationstechnologie beherrschende Zivilisationen in unserer Galaxie N = R * f(p) * n(e) * f(l) * f(i) * f(c) * L mit R = Anzahl geeigneter Gas- und Sternformationen in unserer Galaxie, aus denen Sterne und Planetensysteme geboren werden, die die Entwicklung einer Zivilisation begünstigen wie zB der Adler-Nebel, f(p) = Prozentsatz derjenigen Sterne, die Planeten besitzen, n(e) = Zahl der Erden/flüssiges Wasser in einem Planetensystem. Planeten, die haben könnten, f(l) = Anteil der Planeten, die auch wirklich Leben entwickeln, f(i) = Anteil der Planeten, auf denen sich dann eine Intelligenz entwickelt, f(c) = Anteil, auf denen eine technologische Zivilisation entsteht, L = Zeitspanne, die eine solchen Zivilisation von den Anfängen der Radiotechnologie bis zu ihrer Selbstzerstörung existiert. **Schiller Distichone:** Welche Religion ich bekenne? Keine von allen, die du mir nennst. Und warum keine? Aus Religion. Siehe auch p51 von Laues Abhandlungen Bd3. Gerne dien ich den Freunden, doch tu ich es leider mit Neigung / Und so wurmt es mir oft, dass ich nicht tugendhaft bin.

Intelligent Design und die wissenschaftliche Methode: a] Unterscheide Modell und Wirklichkeit. b] mathematische Modelle sind wahr, falls konsistent. c] Vergleiche Modellaussagen mit Beobachtungen an Wirklichkeit. Bei akzeptabler Übereinstimmung wird das Modell als wahr im Sinne von zur Vorhersage brauchbar bezeichnet. Die wissenschaftliche Methode bezieht sich auf einen Unterbau von Techniken für die Untersuchung von Phänomenen und den Erwerb neuer Erkenntnisse über die Natur, ohne dass dabei von der Existenz oder Nicht-Existenz des Übernatürlichen ausgegangen wird. Intelligent-Design-Befürworter sagen oft, dass ihre Position nicht nur wissenschaftlich ist, sondern sogar noch wissenschaftlicher als die Evolutionstheorie und dass sie die Wissenschaft umdefinieren wollen, damit sie, wie sie es formulieren, „non-naturalistic theories such as intelligent design" („nicht-naturalistische Theorien wie Intelligent Design") zulässt. Das ist ein Abgrenzungsproblem der Wissenschaftsphilosophie, d.h. wo und wie man die Grenzen um die Wissenschaft ziehen soll. **Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik** 1981

p30-49; Ziman: Wie zuverlässig ist wissenschaftliche Erkenntnis? 1982; Steitz: Die Evolution des Menschen 1993;

Bedingungen für Wissenschaftlichkeit einer Theorie:

Konsistenz (innere und äußere Widerspruchsfreiheit) **Sparsamkeit** (sparsam in den vorgeschlagenen Strukturen oder Erklärungen, siehe Ockhams1285–1347 differenzierter Nominalismus = Realität haben nur extramentale Einzeldinge! Der Nominalist Pierre d'Ailly vertrat auf dem Konzil von Konstanz die These, dass aus dem Realismus die ketzerische Konsubstantiationslehre folge, die der Lehre der Transsubstantiation widerspricht. Damit wurde dem Realisten Jan Hus erfolgreich eine ketzerische Position unterstellt. Rasiermesser) Franziskanischer Orden. Franziskus von Assisi 1181-1226. **Nützlichkeit** (beschreibt und erklärt beobachtbare Phänomene)

Empirische Prüfbarkeit und Falsifizierbarkeit (siehe Falsifizierbarkeit) **Begründung auf vielen Beobachtungen**, oft in der Form kontrollierter, wiederholbarer Experimente.

Korrigierbarkeit und Dynamik (wird geändert, wenn neue Daten entdeckt werden)

Progressivität (ist besser als vorhandene Theorien) **Vorläufigkeit** (macht das Zugeständnis, dass sie nicht richtig sein könnte, statt Sicherheit vorzugeben). Ullrich: Poesie der Theorie 2014; Geisteswissenschaften Des Geistes Jagd nach Anerkennung. Ein kritischer Blick auf Theorien und ihr Design. DLF Essay und Diskurs Beitrag vom 07.09.2014 Ziman: Wie zuverlässig ist wissenschaftliche Erkenntnis 1982?;

Engels: Dialektik der Natur, und Hegel: Die Empirie der Beobachtung allein kann nie die Notwendigkeit genügend beweisen. Post hoc 'nach diesem', aber nicht propter hoc 'wegen diesem' Enzyklopädie I p84. Beachte den irreführenden **wenn . . . dann**-Gebrauch! **Logisch** und **kausal** sind verschiedenene Bedeutungsebenen. **H.D. Zeh: Entropie** 2005 p51; Karl **Kraus: Über die Richtung der Zeit**, PhysBl 29 1973 p9-19;

Hume: Wie waren Vorhersagen, solange das Vorhergesagte noch zukünftig war, begründet?

Kant: Die grundlegenden allgemeinen Einsichten der Physik bewährten sich deshalb immer in der Erfahrung, weil sie notwendige Bedingungen für die Erfahrung aussprechen. Kritik der reinen Vernunft, 1781: Monotheistischer Gott durch menschliche Erfahrung nicht erfassbar. Alle Gottesbeweise sind nur sprachlicher Kniff. **Existieren ist keine Eigenschaft**, sondern die notwendige Voraussetzung dafür, überhaupt gewisse Eigenschaften besitzen zu können. Wolfram Eilenberger: Gott, eine gute Idee? In: Philosophie Magazin 1/2013 p40 Ob es Gott gibt ist danach keine wesentliche Frage. Wichtiger ist daher der pragmatische Zugang zum Glauben: Ist Gott für mich eine gute Idee? Gott ist eine nützliche Idee, die uns das Voranschreiten in schwierigen Phasen ermöglicht. Kant sei Dank! Radikaler Glaubensfundamentalismus oder naiv wissenschaftsgläubiger Atheismus. Heisenberg: Der erste Schluck aus dem Becher der Natur führt zum Atheismus, aber auf dem Grund wartet Gott.

Ein **allmächtiges Wesen** kann es nicht geben. Wäre X allmächtig, so könnte X ein unveränderliches Ding schaffen und wäre nicht mehr allmächtig. Oder X verliert in diesem Moment seine Allmächtigkeit. Oder man erklärt die Schaffung von was unveränderlichem gleich als unlogisch und X muss sich nicht anstrengen. **Mittelstraß: Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie** 4Bde 1996; Kriz, Lück, Heidbrink: Wissenschafts- und Erkenntnistheorie 1990^2;

Wissenschaftstheorie, Teilgebiet der Philosophie, das sich mit den Voraussetzungen, Methoden und Zielen von Wissenschaft und ihrer Form der Erkenntnisgewinnung beschäftigt. Kernfragen: 1. Welche Charakteristika weist wissenschaftliche Erkenntnis auf? (Erklärung, Vorhersage von experimentellen Ergebnissen) 2. Was zeichnet wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn aus, Methodologie? 3. Gibt es wissenschaftlichen Fortschritt? 4. Welchen erkenntnistheoretischen Status haben wissenschaftliche Theorien und die von ihnen postulierten Entitäten? Ist Wissenschaft eine Form von Wahrheitsfindung oder muss wissenschaftliche Erkenntnis pragmatischer konzipiert werden? **Wahrheit** SdW Juli 2001; **Janich: Was ist Wahrheit?** 2000 5. Welchen Einfluss haben ästhetische Faktoren auf wissenschaftliche Erkenntnisse und auf die Entwicklung der Wissenschaften?

Realistische Theorien: Gegenstände der Physik sind real/unab vom Geist. Sonst gibt es nur idealisierte Objekte. Die natürlichen Objekte des Geistes sind (Ab)bilder/idealisierte Dinge/immateriell. Bohr:

Physik beschreibt nicht die Wirklichkeit, sondern unsere Erfahrung mit der Wirklichkeit. http:// www. vom-urknall -zum- durchknall.de/index.html

Arbeitsweise der Naturwissenschaften: Politik und Medien, PhysJ21 2022 H1 p3, p6; **Struktureller Realismus:** Was ein Elektron ist weiß ich nicht, wohl aber wie es sich verhält, Dirac 1954 in einem populären Vortrag in Indien. Farmelo: Der seltsamste Mensch. Das verborgene Leben des Quantengenies Paul Dirac 2016; Kursunoglu: Reminiscences about a Great Physicist. Paul Adrien Maurice Dirac 1990; Kragh: Dirac 1990; **Farmelo: The Strangest Man. The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius. The Life of Paul Dirac** 2009 p353; Wissenschaft nicht in der Lage, Inhalt der Realität zu erkennen. Wissenschaft beschreibt vielmehr die Struktur der Realität. Nicht auf die in Theorieformulierungen erwähnten Objekte (Elektronen, Äther etc.) kommt es an, sondern die mathematischen Gesetzmäßigkeiten entsprechen (wenn eine Theorie wahr ist) der Ordnung der Natur. Worrall: Die mathematischen Gleichungen, die Fresnel durch Theoretisierungen über den Licht-tragenden Äther gewann, stehen in Kontinuität zu den Maxwell'schen Gleichungen, die die Eigenschaften von elektromagnetischen Feldern beschreiben. Der Äther wurde verworfen, aber die Gleichungen gelten heute noch. Epistemische strukturelle Realisten: bezüglich der strukturellen Aussagen unserer Theorien sind wir epistemisch besser gestellt als bezüglich der nicht-strukturellen. H̃interberger: Der Kritische Rationalismus und seine antirealistischen Gegner 1996; Dreyfus & Taylor: Die Wiedergewinnung des Realismus 2016; **Albert: Die Wissenschaft und die Fehlbarkeit der Vernunft** 1982; Albert: Traktat über kritische Vernunft 1968, 1991; Albert: Kritischer Rationalismus 2000; Hinterberger: Die Fälschung des Realismus. Kritik des Antirealismus in Philosophie und theoretischer Physik 2016 hier werden antirealistische (konventionalistische, instrumentalistische, operationalistische, strukturalistische bzw. mathematisch platonistische) Positionen in der Philosophie (der Physik) kritisiert. Der Autor konfrontiert diese mit dem konsequent fallibilistischen Falsifikationismus des kritischen Realismus/Rationalismus und bildet das Ganze auf aktuelle Probleme der physikalischen Kosmologie ab. Dazu werden die Falsifizierbarkeit der Loop Quantum Cosmology (einer stark vereinfachten Form der Loop Quantum Gravity) sowie fehlende Testmöglichkeiten in der String- bzw. M-Theorie besprochen, aber z. B. auch Kontinuitäts-Ideen des String-Theoretikers David Tong sowie Martin Bojowalds Vereinigungs-Visionen bezüglich String- und Loop- Ansatz. R Opelt: Wasser und Eis; Materie und Antimaterie kennen wir ja schon. Norbert Hinterberger untersucht das Realitätsbewusstsein der theoretischen Physiker und unterstellt ihnen jede Menge Antirealismus. Er spricht damit aus, dass der Kaiser keine Kleider hat, sprich bar jeder empirischen Beweise postuliert. Ich kritisiere in meinen Rezensionen, dass die theoretische Physik seit 15 Jahren in die Metaphysik abgedriftet ist und es für ihre kosmologischen Modelle kaum überprüfbare Daten gibt, der kritische Rationalismus samt Fallibismus offensichtlich nicht mehr gefragt ist. Aber ich bekomme bestenfalls zur Antwort, dass ich das eben nicht verstünde ohne Physik studiert zu haben. Roma locuta, causa finita. Ich konnte mir nicht vorstellen, dass es nur mir so geht. Immerhin habe ich meine Philosophie-Geschichte gelernt und die lehrt uns, dass eine Theorie, wenn sie immer mehr unbeweisbare Zusatzannahmen braucht, meist kurz vor dem Aus steht. Gerlach: Physik des täglichen Lebens 1967; Gerlach: Materie, Elektrizität, Energie 1926; Gerlach: Das Fischer Lexikon. Physik 1960; Gerlach: Die Sprache der Physik 1962; Gerlach ed: Der Natur die Zunge lösen. Leben und Leistung großer Forscher 1967; **Asimov, Baker, Choppin, Fowler, Holden, Kolenkow, Sands, Weisskopf: Concepts in physics** 1973; Wiener: Mathematik - Mein Leben 1956, 1965 p91 ... der moderne Physiker sei montags, mittwochs und freitags Quantenmechaniker, dienstags, donnerstags und samstags studiere er die Relativitätstheorie der Gravitation, und am Sonntag sei der Physiker keins von beiden, sondern bete zu Gott, dass irgend jemand, am besten natürlich er selber entdecke, wie man diese beiden Betrachtungen unter einen Hut zu bringen; **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990; Endlich Grundsatzargumente, die wir für diese Diskussion brauchen. Schon in der Einleitung zeigt Hinterberger auf, dass der realistische Naturalismus und der pankritische Rationalismus versuchen, sich als Alternativen zum kritischen Rationalismus nach Popper anzubieten. Ziel des ganzen Manövers ist es, die Falsifizierbarkeit als lästiges Hindernis ungehemmter Theorienbildung loszuwerden. So geben sich viele Physiker als Realisten aus, wollen aber nur so erscheinen und damit verschleiern, dass sie eigentlich Antirealisten sind.

Das Grundproblem dabei ist, dass formal richtige Denkgebäude noch lange nichts über die Realität aussagen müssen. Ob eine Theorie Aussagen über die Realität zu machen imstande ist, kann eben allein über die Überprüfung mit der Möglichkeit der Falsifizierung festgestellt werden. Dieser feste Boden der Wissenschaft wird von immer mehr Autoren in der Physik verlassen, das Fallenlassen der Popperschen Grundprämisse aber durch grandiose Modelle verschleiert. Im 2. Kapitel zerpflückt Hinterberger die Multiversumstheorie als unzulässigen Neuplatonismus. Dass alle formal denkbaren Welten möglich sind, heißt eben gerade nicht, dass sie auch real sind, auch wenn man sie mit noch so viel Statistik aufpeppt und die Realität durch den Verweis auf die Unendlichkeit aufhebt. Wenn z.B. Tegmark die Wirklichkeit so beschreibt, dass in einem unendlichen Universum auch unendlich viele Kopien von jedem Menschen existieren, dann wird es aus der Sicht eines Realisten mehr als absurd. Das Ebene IV Multiversum ist dann die Summe aller überhaupt denkbaren Möglichkeiten, die im Sinne Platons dann die Realität sind, denn die Ideen sind die eigentliche Realität. Das ergäbe einen ständigen Ideen-Urknall, weil ständig Menschen, Aliens, Geister, Götter und wer auch immer neue Ideen haben, die sich dann zu neuen Multiversen potenzieren. Theoretische Physiker neigen zum Platonismus. Sie vermuten, dass die Mathematik das Universum so gut beschreibt, weil es an sich mathematisch ist“ (Lebten dann die Mathematiker der Maya in einem anderen Universum?) Damit verfallen sie aber leicht in einen mittelalterlichen Dualismus, wo es jenseits der materiellen Dinge eben auch geistige gibt. Dem Dualismus-Problem ist es egal, ob es sich bei den geistigen Klassen um Götter oder wie heute um mathematische Formeln handelt. Hingegen gibt es für den Realisten keine Klassifikationen unabhängig von der materiellen Wirklichkeit. Denn schon die erste Klassifikation „giftig-ungiftig“ kann jeder Einzeller mittels Geruchssinns treffen und muss dies auch, sonst könnte er nicht lange überleben. Wenn seine Rezeptoren sich irren, ist er nämlich tot. Damit beginnt die Falsifizierung bereits auf der Zellebene. Hingegen kann man durch den Begriff Unendlichkeit jede Falsifizierung aushebeln, wie in Zenons Wettlauf zwischen Achilles und der Schildkröte. Achill kann die Schildkröte nie einholen, was offensichtlich falsch ist, logisch aber via Unendlichkeit begründet werden kann. Sitzen wir also vielen unendlichen Schildkröten auf, die unseren Lauf behindern? In der Quantengravitation werden viele solche Modelle errechnet, obwohl es noch keinerlei Beobachtungen dazu gibt. Alles was darüber gesagt wird, könnte also ein Zenon'scher Trugschluss sein. Als Trugschluss erweist sich auch die vom Hausverstand her begründete Sicherheit, dass Beobachtung nicht irren könne. Wenn 80% der optischen Wahrnehmung aus Interpretation innerhalb des Gehirns besteht, dann könnte uns unsere evolutionär bedingte Optik zu jeder Menge Trugschlüssen verleiten, da wir ja nur unseren Wirklichkeitsausschnitt wahrnehmen können. Das bedeutet, dass unsere Klassifikationen vielleicht die Wirklichkeit keineswegs adäquat abbilden. Insofern war auch die Euklidsche Geometrie nur eine vorläufige, die für die Relativitätstheorie nicht mehr taugte und von ihr überwunden wurde. So macht es einen Unterschied, ob man Quanten als Teilchen oder als Kräuselungen energetischer Felder bezeichnet. Je nachdem, wie man es sieht, stützt man die Quanten- oder die Stringtheorie. So sind sich die Physiker noch nicht einmal darüber einig, ob es unterhalb der Quark-Ebene die Schwingungen der Preonen oder der Strings gibt und ob unterhalb dieser Ebene noch weitere Unbekannte auftauchen werden. Insofern wird klar, dass die herrschende M-Theorie nur eine sprachliche Übereinkunft ist, was die Mehrheit der Physiker derzeit für wahrscheinlich hält. Die Untersuchung der verschiedenen wissenschaftstheoretischen Positionen der Physiker läuft auf einen zentralen Satz hinaus: Die Regel sind gegenwärtig Theorien, die überhaupt nicht überprüft werden können. Das ist traurig, denn die Überprüfbarkeit unterschied bislang Wissenschaft von Esoterik. Je weiter man sich in die theoretische Physik vertieft, desto unsicherer werden alle Paradigmen. Heber 1927-2010 & Kozik: Physik. Eine Einführung 1970 p17ff;

Entitätenrealismus glaubt nicht an die Realität aller in der Formulierung einer Theorie erwähnten Entitäten, sondern nur derjenigen, die in Experimenten eine ursächliche Rolle spielen: Teilchen, Kräfte etc. Es sei aber nicht gerechtfertigt, Theorien vollständig für wahr zu halten. Insbesondere nicht die in ihnen erwähnten Naturgesetze. Bei diesen handle es sich lediglich um nützliche Hilfsmittel. Experimente sind designed, wirken wie Tierfallen und sind nur in einem bestimmte Kontext zu verstehen. **Janich: Was ist Information?** 2006; Experimente haben nichts mit Natur zu tun, sondern sind Artefakte, die nichts beweisen können. Lass Helium-Ballon fallen. Liebscher: Eine Theorie kann aus Experimenten und Beobachtungen nicht abgeleitet werden, sie muss gesehen, gefunden werden. Die beste Stütze ist immer der praktische Nutzen. Ucke &

Schlichting: Spiel, Physik und Spaß 2011;

Raffinierter Falsifikationismus: Imre Lakatos, der an die Signifikanz der Wissenschaftsgeschichte glaubte, sie jedoch gegen Kuhns Unterstellung eines irrationalen Moments verteidigen wollte, verwarf die Auffassung von Kuhn zugunsten einer Modifikation von Poppers Methode. Die wesentliche Änderung ist die Aufgabe von Poppers Verbot der konventionalistischen Wendung (Immunisierung) durch Ad-hoc-Hypothesen. Theorien müssen bei ihm nicht durch bessere ersetzt werden, wenn sie falsifiziert, d.h. von experimentellen oder empirischen Resultaten widerlegt werden, sondern dürfen unter gewissen Bedingungen mit einem Schutzgürtel aus Ad-hoc-Hypothesen versehen werden. Dieser muss dazu dienen, bewusste oder auch unbewusste Grundüberzeugungen im Kern der Theorie zu schützen, die ein so genanntes Forschungsprogramm bilden und den Paradigmen bei Kuhn entsprechen. Nur die über diesen Kern hinausgehenden Zusatzannahmen werden modifiziert. Die Grundüberzeugungen, die den Kern eines Forschungsprogramms ausmachen, können und sollen nach Lakatos erst dann aufgegeben werden, wenn das Forschungsprogramm sich degenerativ entwickelt und durch ein besseres Forschungsprogramm ersetzt werden kann. Die Sichtweise von Lakatos ist jedoch kein Teil des kritischen Rationalismus geworden, weil die Wissenschaftsgeschichte dort nicht als wesentlich angesehen wird. **Popper: Vermutungen und Widerlegungen** 1974; Lakatos: Beweise und Widerlegungen. Die Logik Mathematischer Entdeckungen 1982; L̃akatos: Mathematik, Empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie 1982; Hempel: Beiträge zur logischen Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs 1934; H̃empel, Grundzüge der Begriffsbildung in der empirischen Wissenschaft 1974; Hempel: Aspekte wissenschaftlicher Erklärung 1977; Hempel: Philosophie der Naturwissenschaften 1977;

Nicht-Realistische Theorien:

Positivismus = philosophische Position, welche nur mittels Interpretation naturwissenschaftlicher Beobachtung gegebene Befunde akzeptiert. Dazu müssen die Untersuchungsbedingungen exakt definiert werden. Nur diejenigen Begriffe, die eine Entsprechung in unterschiedlichen möglichen Beobachtungen haben, sind wörtlich zu nehmen; alle übrigen sind bedeutungslos. Soweit Theorien auf Beobachtungssprache reduzierbar sind, können sie wörtlich genommen werden und wahr oder falsch sein. Vertreten wurde diese Position besonders im 19. und frühem 20. Jahrhundert von Emil du Bois-Reymond, Ernst Mach und Richard Avenarius (Empiriokritizismus) und war eine der bedeutendsten Richtungen seiner Zeit, welche die Entwicklung der modernen Naturwissenschaft stark beeinflusste. Albert Einstein erwähnt z.B. die außerordentlich wichtigen Impulse, die er von Machs Philosophie für die Entwicklung seiner Relativitätstheorie erhielt. Trotz dieses großen Einflusses entsprach die Relativitätstheorie letztlich aber nicht den Erwartungen Machs. Nach dem ersten Weltkrieg wurde die Tradition des Positivismus vom Wiener Kreis und dem Logischen Empirismus aufgegriffen, welche aber wichtige Positionen des ursprünglichen Positivismus aufgaben. Oft wird auch der **Logische Empirismus** selbst als Neopositivismus oder Logischer Positivismus bezeichnet, obwohl dies nach Wolfgang Stegmüller eine Fehlbezeichnung ist, sofern man den Begriff 'Positivismus' in seiner ursprünglichen Bedeutung versteht. Zwar sahen die Logischen Empiristen sich selbst durchaus in der Tradition von Mach, verwendeten aber den Begriff 'Positivismus' in einem viel weiteren Sinn. Die logischen Empiristen bezeichneten alle philosophischen Richtungen als Positivismus, in denen die Bewertung von wissenschaftlichen Theorien maßgeblich (aber nicht ausschließlich) durch Konfrontation mit empirischen Beobachtungen erfolgte. Lenin: Materialismus und Empiriokritizismus. Kritische Bemerkungen über eine reaktionäre Philosophie 1908, 1972; Schreiter: Zur Kritik der philosophischen Grundpositionen des Wiener Kreises 1977; Haller: Neopositivismus. Eine historische Einführung in die Philosophie des Wiener Kreises 1993; Franz Kreuzer im Gespräch mit Rudolf Haller: Grenzen der Sprache - Grenzen der Welt. Wittgenstein, d. Wiener Kreis u.d. Folgen 1982; H̃aller: Schlick und Neurath - Ein Symposion aus Anlass der 100. Wiederkehr der Geburtstage von Moritz Schlick Wien, 16.-20. Juni 1982; Peter J. Brenner: Vom „Wiener Kreis zu „Follow the Science". Die Theoriegeschichte eines Irrtums, KONTRAFUNK Audimax.

Konventionalismus: Henri Poincaré & Ernst Mach Mach betrachteten wissenschaftliche Theorien als möglichst einfache, neutrale und pragmatische Beschreibungen der Welt. Diese These wird auch als Denkökonomie bezeichnet. Da er jede wissenschaftliche Theorie immer in einem konkreten, empirischem Gesamtzusammenhang sah, lehnte Mach jeden allgemeinen Wahrheitsanspruch ab. Wissenschaft wird so zu einer nützlichen Konvention, die auch psychologische Komponenten berücksichtigen muss. Siehe: Gestalttheorie.

Instrumentalismus = Theorien können nicht wörtlich genommen werden und auch nicht wahr oder falsch sein. Die in Theorieformulierungen erwähnten Begriffe (die sog. theoretischen Terme) sind lediglich nützliche Hilfsmittel, um die Gesetzmäßigkeiten empirischer Experimente zu strukturieren. Dass eine Theorie Atome erwähnt, legt diese daher keinesfalls auf die wirkliche Existenz kleinster Teilchen fest. Pierre Duhem.

Relativismus: Paul Feyerabend, Thomas Samuel Kuhn: Inkommensurabilitätsbegriff. Wissenschaftliche Paradigmen können vollständig oder teilweise inkommensurabel sein, also unvergleichbar, genauer: es gibt kein gemeinsames Maß, das es erlaubt, Sätze des einen Paradigmas mit solchen eines anderen zu vergleichen. Von Wahrheit kann man deswegen immer nur unter Bezugnahme auf ein bestimmtes Paradigma sprechen. Strenge Trennung zwischen Theorie- und Beobachtungssprache: Beobachtungen grundsätzlich theoriegeladen ('theory-laden').

Sozialkonstruktivisten: Auch scheinbar objektive naturwissenschaftliche Tatsachen sind das Ergebnis von Prozessen der sozialen Konstruktion, und abhängig von der sozialen Situation des Labors, der Forschungseinrichtung etc. sind.

Konstruktiver Empirismus = agnostisch gegenüber theoretischen Begriffen einer Theorie (Atom, Gen o.ä.). Entscheidend ist nicht, wovon eine Theorie spricht, sondern ob sie sich an den Beobachtungen bestätigt. 'Beobachtung' kann üblicherweise die Zuhilfenahme von Instrumenten einschließen. Das Ziel von Wissenschaft ist nach dieser Auffassung empirische Adäquatheit. Friedrich Wallner unterscheidet in seiner Ontologie zwischen der Wirklichkeit - dem menschlichen Bewusstsein gegenüberstehend -, der konstruierten Realität mit ihren (sub)disziplinären Mikrowelten und der Lebenswirklichkeit - kulturspezifisch tradierte Systeme von Regeln und Überzeugungen. Das Ziel ist die Darstellung des Zirkels von Gegenstand und Methode in der Forschung und dessen Berücksichtigung bei der Deutung der Wissenschaft. Wie der Solipsismus ist er sich der Ungewissheit des Gegenstandes bewusst, erkennt aber, dass es einer Vielzahl von Handlungen bedarf, um zu einem inhaltlichen Sinn zu kommen. Als Methode der (Selbst)-Erkenntnis wird die Verfremdung angeboten.

Methodische Programme: Der **logische Empirismus** ist eine der bedeutendsten wissenschaftstheoretischen Richtungen des 20. Jahrhunderts, zu deren Exponenten etwa der Wiener Kreis gehörte, sowie Vertreter der mathematischen Logik (in der Tradition von Russell und Gottlob Frege). Führende Vertreter sind u. a. Rudolf Carnap, Otto Neurath = **Wir können nie neu anfangen wie auch ein Segler nicht während der Fahrt.** Wichtige Kernpunkte des logischen Empirismus sind das Toleranzprinzip (methodischer Neutralismus) und das Programm der Einheitswissenschaft, in welcher alle empirischen Wissenschaften in einer physikalistischen Sprache formuliert werden sollten. Besonders die Kritik von W. Quine an den Grundlagen des logischen Empirismus trug maßgeblich dazu bei, dass diese Dominanz an den methodischen Naturalismus abgegeben wurde.

Der maßgeblich von Karl Popper entwickelte **Kritische Rationalismus** beinhaltet eine Wissenschaftstheorie (Falsifikationismus), der zufolge sicheres oder rechtfertigbares Wissen nicht möglich ist und daher auch nicht das Ziel der Wissenschaft sein kann. Wissenschaft als methodisches Vorgehen durch Versuch und Irrtum, wobei Hypothesen und Theorien sich beständig durch Überprüfung bewähren müssen. Der Forscher versucht seine Hypothesen zu verallgemeinern, zu verfeinern und sie durch Experimente in Frage zu stellen, um ihre Schwächen herauszufinden, so dass sie durch neue, verbesserte Hypothesen ersetzt werden können ('trial and error'). Im Unterschied zu positivistischen Richtungen geht der Kritische Rationalismus auch bei nachhaltiger Bewährung einer Theorie nicht davon aus, dass dies ein Argument für die Theorie ist oder die Theorie begründet. Er ist jedoch der Auffassung, dass durch die ständige Fehlerkorrektur eine Annäherung an die Wahrheit möglich ist und die Wahrheit sogar erreicht werden kann, der Forscher jedoch nicht sicherstellen kann, dass das der Fall ist. Trotz dieses Eingeständnisses behält der Kritische Rationalismus den absoluten Wahrheitsbegriff der Korrespondenztheorie bei und distanziert sich vom Relativismus. **Kosmologe Guth:** Wissenschaftler stimmen über richtige Theorie/Wahrheit demokratisch ab. **Eleganz-Prinzip** statt Falsifizierbarkeit. George Ellis und Joe Silk: Steinhardt in Nature 2014: Theorie des inflationären Universums nicht wissenschaftlich! Denn anpassungsfähig, lässt sich mit jedem experimentellen Ergebnis vereinbaren. Richard Dawid und Sean Carroll: Anforderungen an die Überprüfbarkeit von grundlegender Physik, Klimaforschung

bis hin zur Evolutionstheorie sind abzuschwächen. Richtigkeit der Stringtheorie durch philosophischen und Bayes'schen Ansatz des Forschungsprozesses feststellen. Mit Bayes Wahrscheinlichkeit angeben, mit der eine Aussage einen bestimmten Sachverhalt korrekt beschreibt – und setzt eine Bestätigung mit dem Anstieg einer Wahrscheinlichkeit dafür gleich, dass eine Theorie wahr oder plausibel ist. Doch dieser Zuwachs der Wahrscheinlichkeit kann rein theoretisch sein. Weil niemand eine gute Alternative gefunden hat und Theorien ohne Alternativen sich in der Vergangenheit oft bewährt haben, argumentiert Dawid, solle man die Stringtheorie als gültig erachten. Wir können nicht sicher wissen, dass keine alternativen Theorien existieren. Vielleicht haben wir diese einfach noch nicht gefunden. Auch die Prämisse könnte falsch sein. Denn möglicherweise bedarf es gar keiner allumfassenden Theorie der vier fundamentalen Kräfte, wenn sich die Gravitation – zurückgeführt auf eine Krümmung der Raumzeit – von der starken, schwachen und elektromagnetischen Kraft zwischen den Elementarteilchen unterscheidet. 7.4.2015 Spektrum.de

Analytische Philosophie aus dem logischen Empirismus hervorgegangen. Die heutige analytische Philosophie keine philosophische Position sondern Ansatz/Standpunkt aus unterschiedlichen Strömungen mit sehr unterschiedlichen Grundvoraussetzungen. Methodische Gemeinsamkeit: Probleme in einer möglichst klaren exakten Sprache verfassen und mit Hilfe formaler Instrumentarien (wie der mathematischen Logik oder z.B. semantischer und formal-ontologischer Hilfsmittel) bearbeiten. Dazu gehören etwa Theorien über die Struktur wissenschaftlicher Theorien, über deren ontologische Verpflichtungen, über die Erklärung ihrer Begriffe, über die Natur, Reichweite und Kriterien wissenschaftlicher Erkenntnis usw. Philosophen, die in einem der Punkte gleichartige Positionen verteidigen, können an anderen Punkten gegensätzlicher Auffassung sein. Trotzdem lassen sich teilweise geteilte Gesamtauffassungen und Schulbildungen benennen, deren heutige Ausarbeitung und Modifikation aber oft stark divergiert. Zu derartigen Gesamtbildern über das Wesen der Wissenschaft könnte man etwa den von W. Quine vertretenen Naturalismus zählen oder das Strukturalistische Theorienkonzept, welches u.a. von J.D.Sneed und Wolfgang Stegmüller vertreten wurde.

Erlanger oder Methodischer Konstruktivismus (Paul Lorenzen und Wilhelm Kamlah, sowie Jürgen Mittelstraß, Kuno Lorenz, Peter Janich, Friedrich Kambartel, Christian Thiel und Harald Wohlrapp, einst auch Oswald Schwemmer) zielt auf die methodisch einwandfreie Re-Konstruktion der Wissenschaftssprache im allgemeinen und der einzelwissenschaftlichen Terminologien im besonderen, der Logik in Form einer dialogischen Argumentationslehre, der konstruktiv begründbaren Mathematik im engeren (Arithmetik, Analysis) wie im weiteren Sinn (Wahrscheinlichkeitstheorie, Geometrie und Kinematik), der protophysikalischen Messlehre sowie der ethischen Prinzipien und darauf gründenden politischen Wissenschaft mit dem Ziel einer 'Theorie der technischen und politischen Vernunft'. Kern des Erlanger **Konstruktivismus ist die allgemein lehr- und lernbare und damit von jedermann nachvollziehbare Konstruktion von Begriffen als Grundelementen aller theoriegestützten Praxis**. Böhme: Protophysik. Für und wider eine konstruktive Wissenschaftstheorie der Physik 1976; Lorenzen: Lehrbuch der konstruktiven Wissenschaftstheorie 1987; Janich: Konstruktivismus und Naturerkenntnis. Auf dem Wege zum Kulturalismus 1996; B̃orzeszkowski & Wahsner: Messung als Begründung oder Vermittlung?: Ein Briefwechsel mit Paul Lorenzen über Protophysik und ein paar andere Dinge 1995; S̃chonefeld: Protophysik und Spezielle Relativitätstheorie 1999; Lorenzen: Die Entstehung der exakten Wissenschaften 1960; Lorenzen: Grundbegriffe technischer und politischer Kultur 1978; Lorenzen: Meta-Mathematik 1962; Lorenzen: Elementargeometrie - Das Fundament der Analytischen Geometrie 1984; **Enz & Mehra: Physical Reality and Mathematical Description.** 1974 p48-90 Weizsäcker: Geometrie und Physik bei Hugo Dingler. D̃ingler: Aufbau der exakten Fundamentalwissenschaften 1964; Dingler: Metaphysik als Wissenschaft vom Letzten 1929; D̃ingler: Die Methode der Physik 1938; Dingler: Die Ergreifung des Wirklichen. Kapitel I-IV. Kuno Lorenz, Jürgen Mittelstraß 1964; Dingler: Über die Geschichte und das Wesen des Experimentes 1932; D̃ingler: Geschichte der Naturphilosophie 1932; D̃ingler: Die Grundlagen der Naturphilosophie 1967; D̃ingler: Philosophie der Logik und Arithmetik 1931; D̃ingler: Grundlagen der Physik. Synthetische Prinzipien der mathematischen Naturphilosophie 1919; Janich: Entwicklungen der methodischen Philosophie 1993 p240 Dingler und Relativitätstheorie p322 Dingler und Zusammenbruch; **Asimov, Baker, Choppin, Fowler, Holden, Kolenkow, Sands, Weisskopf: Concepts in physics** 1973;

Janich: Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit und Materie 1997; Rolf Ascheberg: Kritik der 'Protophysik der Zeit' und der 'Logischen Propädeutik': zur Kritik des neueren Konstruktivismus; Operationalismus vgl. Percy William Bridgman: The logic of modern physics 1927; Schneider: Die Kunst des Teilens. Zeit, Rhythmus und Zahl 1991;

Der logische Empirist Hans Reichenbach führte die Unterscheidung 'Context of discovery' und 'context of justification' 1938 ein. * **Entdeckungszusammenhang:** Reichenbach zufolge braucht der Wissenschaftsphilosoph bei der rationalen Rekonstruktion und der Erklärung von Wissenschaft singuläre und subjektive Einflüsse, denen ein Forscher ausgesetzt ist (Entdeckungszusammenhang), nicht zu berücksichtigen. * **Begründungszusammenhang:** Alles, worauf es ankommt, ist, wie der Wissenschaftler seine Behauptungen - normalerweise in der Form von mathematischen Gleichungen und mittels Logik - rechtfertigt (Rechtfertigungszusammenhang, Begründungszusammenhang, Erklärungszusammenhang). Karl Popper übernahm diese Trennung unter diesen Bezeichnungen. Da sich der Kritische Rationalismus jedoch gegen Begründung stellte, wird heute das Wort Analysezusammenhang statt Begründungszusammenhang verwendet. Diese Unterscheidung will also zufällige Bedingungen (besonders soziologischer und psychologischer Art) aus wissenschaftlichen (Kausal-)Erklärungen und Begründungen ausschließen.

Dass 'zufällige' Bedingungen in diesem Sinne irrelevant für die Begründung wissenschaftlicher Theorien seien und von 'eigentlichen' Faktoren streng unterscheidbar sind wurde von Thomas Samuel Kuhn angefochten. Jede Rechtfertigung sei vielmehr an ein 'Paradigma' gebunden, das u.a. bestimmte Begriffsschemata und normative Bedingungen einschließt. Bestätigungen einer bestimmten Theorie finden immer nur innerhalb eines solches Paradigmas statt, die Evidenz konkurrierender Theorien ist daher, wenn diese einem gravierend andersgearteten Paradigma zugehören, überhaupt erst sichtbar, nachdem man zu jenem Paradigma gleichsam konvertiert werde. Innerhalb welchen Paradigmas man sich befindet ist damit wesentlich auch zufällig und zunächst selbst nicht nochmals rational gerechtfertigt. Diese Thesen wurden in jüngerer Zeit verstärkt kritisiert von praktisch sämtlichen Anhängern eines wissenschaftlichen Realismus. Kuhn: Die Entstehung des Neuen 1977; Kuhn: Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen 1981; K̃uhn: Die Kopernikanische Revolution 1981;

Bottom-up-Denker, Darwin, Autoregressive Modelle: Finde das die Daten optimal beschreibende Gesetz. Reichweite der Gesetze ist entsprechend gering. **Top-down-Denker, Newton, Maxwell, Einstein, Dirac:** Glaube an simultane Wirksamkeit allgemeiner Gesetze. Differentialgleichungen. Zugleich gedachte SRT und QM erzwingt auf logische Weise die Existenz von Antimaterie. Katz: An introduction to the special relativity 1964; **Radikale logische Denkart ohne Blick auf die Daten.** Für Paul Dirac waren Bilder verpönt. Naturgesetze lenken die Welt nicht auf eine Art und Weise, die man sich vorstellen kann, 1935. In Zeiten der Quantenmechanik könne man kein konsistentes Bild der Wirklichkeit mehr formen, ohne Widersprüchlichkeiten einzuführen. **Farlemo: The Strangest Man. The Hidden Life of Paul Dirac, Quantum Genius. The Life of Paul Dirac** 2009; Pauli = konservativer Analytiker über den revolutionären Intuitionisten Dirac: Wenn ich Dirac richtig verstehe, meint er: Es gibt keinen Gott und Dirac ist sein Prophet. Feynman stand dem Rechenkult skeptisch gegenüber. Man braucht Anschauung und verstehen.

Sichtweisen in Bezug auf **Theorie und Modell**. Mit beidem wird **Mitteilbarkeit hergestellt und Wirklichkeit konfiguriert**. Wir betrachten die **Plots oder Bilder mechanischer oder elektronischer Nachstellungen wie Computer - also artifizieller physikalischer Gegenstände - numerischer, diskreter, endlicher Modelle von in der Sprache der Mathematik beschriebener physikalischer Modelle unserer raum-zeitlich gemittelten Erfahrungen mit der Realität.** **Boltjanski: Differentialrechnung einmal anders** 1956 p57f; **UML Unified Modeling Language** definiert Bezeichner für die meisten bei einer Modellierung wichtigen Begriffe und legt mögliche Beziehungen zwischen diesen Begriffen fest. UML definiert weiter graphische Notationen für diese Begriffe und für Modelle statischer Strukturen und dynamischer Abläufe, die man mit diesen Begriffen formulieren kann. UML ist die dominierende Sprache für die Softwaresystem-Modellierung. Entity-Relationship-Modell **ERM**

Gegenstand-Beziehung-Modell dient der semantischen Datenmodellierung. Balzert & Heide: Lehrbuch der Objektmodellierung. Analyse und Entwurf mit der UML 2 mit e-learning-Online-Kurs 2005; Heide & Balzert: Objektorientierung in 7 Tagen: vom UML-Modell zur fertigen Web-Anwendung, 2000; Balzert: Lehrbuch Grundlagen der Informatik - Konzepte und Notationen in UML 2, Java 5, C++ und C#, Algorithmik und Software-Technik, Anwendungen 2005; Klemm: Automaten, Forscher und Raketen. Geschichten aus 100000 Jahren Technik 1969; Genrich Saulowitsch Altschuller *1926-1998 & Seljuzki: FLÜGEL FÜR IKARUS. Über die moderne Technik des Erfindens 1983; Liest sich wie Lem: Genrich Altow: Der Hafen der Steinernen Stürme. Wissenschaftl.-phantast. Erzählungen 1980; Asimov: Best of Asimov 1973 Haverie vor Vesta 1938, Und Finsternis wird kommen 1941, C-Chote = Geschichte eines Helden 1951, The Martian way = Die verschwender vom Mars 1952, Die in der Tiefe = The deep 1952, Der Spaß, den sie hatten 1956, The last question = Wenn die Sterne verlöschen 1956, The dead past = Das Chronoskop 1956, Die verschwindende Nacht 1956, Anniversary des Silver Queen Craschs = Jahresfeier 1959, The billiard ball = Das Nullfeld 1967, Spiegelbild 1972; Ley: Science Fiction. Sinn und Unsinn In: Urania Universum Bd29 1983 p373-9; Hanke: Ins nächste Jahrhundert. Was steht uns bevor? 1983; Claudia Hentschel: TRIZ - Innovation mit System 2010; EXtensible Markup Language **XML** Auszeichnungssprache wie auch TeX, LaTeX (Kennzeichnung von Texten) oder HTML zur Darstellung hierarchisch strukturierter Daten in Form von Textdateien. XML-Dokument besteht aus Textzeichen, im einfachsten Fall in ASCII-Kodierung, und ist damit menschenlesbar. Binärdaten enthält es per Definition nicht.

XML ist Satz vo Regel zur Definition von semantischen **Tag**s, die ein Dokument strukturieren. **Tag** = Schlagwort, Etikette, markiert, beschildert = **Marken** = Auszeichnung eines Datenbestandes mit zusätzlichen Informationen. Beim Robocup **2050 siegen die Roboter gegen den aktuellen Fußballweltmeister.** Schließlich werden sie als Inkarnation von Sprechakten des vernuftbegabten Menschen die Erde vom lebensfeindlichen Menschen befreien. Singer: Nature 477, 399–401 22 Sept 2011 Military robotics and ethics: A world of killer apps. Wir sind technologische Giganten, aber ethische Kinder. **Ray(mond) Kurzweil:** The singularity is near. When humans transcend biology 2006 = M̃enschheit 2.0. Die Singularität naht 2014; Kurzweil: Homo Sapiens: Leben im 21. Jahrhundert - Was bleibt vom Menschen? 2000 ab 2099 hat der Begriff **Lebenserwartung** für intelligente Wesen keine Bedeutung mehr. Kurzweil verleugnet seine Urväter: Wiener: Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine 1948; Mumford: Hoffnung oder Barbarei. Die Verwandlungen des Menschen = The transformations of man 1956; Samuel Butler: Von Schwätzern, Schwärmern und Hallunken 1984; Butler: Wollschwein und Tafelsilber. Notizen eines viktorianischen Querdenkers 2005; Vollmer: Evolutionäre Erkenntnistheorie 1975; Wiener: Mathematik - Mein Leben 1956, 1965; Wiener: The Human Use of Human Beings - Cybernetics and Society 1952 = **Mensch und Menschmaschine** 1964 p108 Pater **Dubarle warnte** am 28. Dez 1948 in Le Monde vor maschineller Regelung menschlicher Angelegenheiten, also vor dem, was **Leibniz** meinte, als er Kontroversen durch Berechnung bei zulegen hoffte. Leibniz: Während Gott rechnet, entsteht die Welt. Siehe Seite 64; **von Neumann: Can we survive technology?** in Sarnoff 1955 William Ogburn 1886-1959 cultural lag 1922 = immatrielle Kultur, Institutionen, Werte, Normen, Organisationen bleiben hinter dem raschen technischen Fortschritt nicht hinterher. Ungleichgewicht und Fehlanpassung wird schließlich durch gewaltsame Auseinandersetzung herbeigeführt. K̃oestler: Das Gespenst in der Maschine 1968; Mumford: Mythos der Maschine 1976; **Elsberg: Blackout** 2013; Elsberg: ZERO - Sie wissen, was du tust 2016; HL Dreyfus: What Computers Still Can't Do: A Critique of Artificial Reason 1972, 1979, Was Computer nicht können. Die Grenzen künstlicher Intelligenz 1989; Dege: EDV. Maschinelles Rechnen 1971; Gerwin: So rechnen Elektronen heute. Eine technische Beschreibung moderner Datenverarbeitungsanlagen 1967; Rechberger: Computer-Technik - leicht verständlich 1971; Weizenbaum: Kurs auf den Eisberg - oder. Nur das Wunder wird uns retten 1984, 1992 Der Computer ist für Weizenbaum ein Symbol der modernen Wissenschaft und Hochtechnologie, die unweigerlich in den Abgrund führen muss, weil die Masse der ahnungslosen Nutzer der bequemen Technik, deren Machtmissbrauch nicht wahrhaben wollen. **Vonnegut: Das höllische System** 1952; **Vonnegut: Schlachthof 5** 1972, 2016 Hens neue Übersetzung siehe Dyson: Innenansichten 1981 Kinderkreuzzug; Isaac Asimov: I, robot. Ich, der Robot 1950, 2004 mit Will Smith in Chicago 2035; Asimov: Alle Roboter-Geschichten 1982; **Weizenbaum: Die Macht der Computer und die Ohnmacht der**

Vernunft 1976 diese Macht beruht auf dem Missverständnis der Nutzer, die aus Unkenntnis Personifizieren oder aus Empathie Intelligenz projizieren und wie bei **Eliza** und **Doctor** 1964 wird einem Baby, Hund, humanoiden Roboter **nur einen Spiegel ihrer Wünsche erschaffen**, manchmal kommt ein Diktator heraus. Marvin Lee **Minsky**: Computation: Finite and Infinite Machines (Automatic Computation) 1972, **Berechnung: Endliche und unendliche Maschinen** 1982; **Minsky: The Society of Mind** 1986 = **Mentopolis** 1990 **Intelligenz** = verwobenes Netz von unintelligenten Agenten. Erst durch Zusammenarbeit von relativ einfachen Agenten emergiert Intelligenz. Menschliches Gehirn kein einzelnes, großes monolithisches Wesen, das an etwas denkt oder gerade nicht denkt. Gehirn besteht aus unzähligen, verschiedenartigen, aber relativ einfachen Agenten. Diese Agenten haben einfache Aufgaben und Ziele. Erst durch die Kommunikation miteinander und einem Ausverhandeln der Bedürfnisse der einzelnen Agenten untereinander entstehen Denken und Handeln. **Retter: Studienbuch. Pädagogische Kommunikation** 1999; Einzelne Agenten können wieder aus noch kleineren Agenten bestehen, die wiederum miteinander kommunizieren und verhandeln. Die kleinen Agenten sind spezialisiert für bestimmte Aufgaben, beispielsweise das Auge für das Sehen oder ein Gehirnbereich zur Sicherstellung von genügend Schlaf. Vollmer: Die Grenzen des Auges, PJ22 2023 H3 p28-33; Konflikte innerhalb eines Agenten führen zur Schwächung dieses Agenten, wodurch andere Agenten Oberhand gewinnen. **Lernen** = Verbesserung der Kommunikation zwischen den Agenten. Persönliche Eigenheiten von Menschen resultieren aus den unterschiedlichen Gewichtungen der Agenten. Die Speicherung von Erinnerungen wird dabei durch die Erzeugung von K-Lines ermöglicht. **K-Lines** = Liste, die alle Agenten enthält, die bei einer Aktivität beteiligt waren; Minsky bedauert die aktuelle Entwicklung der KI-Forschung, da hier verstärkt statistische Lernverfahren verwendet würden, anstatt auf eine umfassende Modellierung kognitiver Agenten hin zu arbeiten. **Minsky: The Emotion Machine: Commonsense Thinking, Artificial Intelligence, and the Future of the Human Mindi** 2007; **Jeff Hawkins: Zukunft der Intelligenz** 2004; Wiener: Nerve, Brain and Memory Models 1963; Steinbuch: Automat und Mensch 1961-71[4]; Steinbuch: Falsch programmiert 1968; Steinbuch: Mensch, Technik, Zukunft 1971; Steinbuch: Information, Computer und künstliche Intelligenz. 12 amerikanische Wissenschaftler zeigen den zukünftigen Einfluss der Computer auf die menschliche Gesellschaft 1968; Rid: Maschinendämmerung 2016 = Menschmaschinen und Maschinenwelten aus angloameran Sicht; von Neumann: Die Rechenmaschine und das Gehirn 1963; Horgan: The undiscovered mind. How the brain defies explanation 1999; Wiener: Kybernetik PhysBl5 1949 355-362; **Ducrocq: Die Entdeckung der Kybernetik. Über Rechenanlagen, Regelungstechnik und Informationstheorie** 1959; Göldner & Müller: Steuern & Regeln 1967, Maximowitsch: Kybernetik 1976; Kämmerer: Kybernetik 1977; Göldner: Kybernetik 1979; **Automatisierbarkeit von Berufsfeldern** c't 2015 H7 p86f; Kurzweil: KI - Das Zeitalter der künstlichen Intelligenz 1993; How to Create a Mind: The Secret of Human Thought Revealed 2012 = Wie man einen Geist schafft 2012, Gehirn = Spracherkennungsprogramm = lernfähige Algorithmen = verborgene hierarchische Markow-Modelle = HMM SdW April 2013 p22. Matrix. Terminator 1 bis 4. Drösser: Total berechenbar? Wenn Algorithmen für uns entscheiden 2015; **2029: Computer besteht Turing-Test** = Singularität = Beginn des Transhumanismus = Maschinen übernehmen die Führung der Evolution, die sich danach rasend beschleunigt. Elsberg: Blackout 2013; Elsberg: ZERO - Sie wissen, was du tust 2016; Elsberg: HELIX - Sie werden uns ersetzen 2018; von Neumann: Can we survive technology? 1955; Skinner: Jenseits von Freiheit und Würde 1971; HL Dreyfus: Was Computer nicht können. Die Grenzen künstlicher Intelligenz 1985; HL & S Dreyfus: Künstliche Intelligenz 1998; Jurafsky & Martin: Speech and language processing. An introduction to natural language processing, computational linguistics, and speech recognition 2000 p1 HAL9000; **Kubrik: 2001. Odyssee im Weltraum** 1968 HAL; **Cameron: Terminator** 1984; Joy: Why the future doesn't need us, Wired magazine 8(04) April 2000, 21st-century technologies - robotics, genetic engineering, and nanotech - are threatening to make humans an endangered species; Anderson: Machine ethics. Creating an ethical intelligent agent, AI magazine 28 (4) 2007 p15ff; Steinbuch zu Jobs oder Lem zu zukünftigen Zivilisationen: Eine kleine Gruppe sehr hochspezialisierter, gut bezahlter Modellierer/Programmierer kreiert die

humanoiden Roboter, also Androiden = männl Roboter und Gynoiden = weibliche Roboter[17], die andere auf dem Arbeitsmarkt überflüssig macht. Dick: Träumen Androiden von elektrischen Schafen? 1968, Scott: Blade Runner 1982; D̃ick: Minority Report 1956 = Der Minderheiten-Bericht In: Sämtliche **118 SF-Geschichten in fünf Bänden**, Bd4: Zur Zeit des Perky Pat 2010, Spielberg: Minority Report 2002;

von Neumann: Die Rechenmaschine und das Gehirn 1955; Die logische Imitation/Mimetik von Intuition fußt auf einem falschen Modell. Gigerenzer: Bauchentscheidungen: Die Intelligenz des Unbewussten und die Macht der Intuition Gut Feelings;

Rössler: **Endophysik** Merve 1992 = Physik von innen. Exo(außen)perspektive: externer Beobachter ↔ System. Exomodelle von Exofakten.

* **Syntaktische Sicht/logiko-linguistische Sicht:** Theorien = axiomatisch-deduktive Kalküle = Symbolen + Regeln. **Bedeutung gewinnen die Terme der Theorie durch Referenz auf Beobachtungen bzw. durch Korrespondenzregeln.** Hanard: **Symbol-Grounding-Problem**, PhysicaD42 p335ff 1990; Rauhut, Schmitz, Zachow: Spieltheorie 1979; Jäger: Evolutionäre Spieltheorie für Linguisten Potsdam 2004: Carnap: Modelle haben lediglich heuristische und pädagogische Funktion. Braithwaite: Modelle als weitere mögliche Interpretationen des Kalküls. Syntaktische Sicht, die auf Logischem Empirismus beruht, überholt. * **Semantische Sicht/modell-theoretische Sicht:** Patrick Suppes, Alfred Tarski, Frederick Suppe, Bas van Fraassen, Wolfgang Stegmüller, Carlos Ulises Moulines, Ronald Giere. Theorien := Mengen von Modellen. Modelle = nicht-linguistische Entitäten Modelle = Realisierungen von Theorien entsprechend Modellen in der Modelltheorie der Mathematischen Logik. Realisierungen = Objekte + konkrete Verknüpfungen. Werden von der Theorie abstrakt formuliert. Mathematisches Vorbild ist Gruppentheorie.

Modellkonstruktion und Analogien: Modelle durch Analogieschluss mit anderen Systemen konstruiert. Mary Hesse: **a]**positive Analogien = Aspekte zwischen Modell und System ähnlich, **b]** negative Analogien = Aspekte zwischen Modell und System verschieden, **c]** neutrale Analogien = Aspekte zwischen Modell und System nicht determinierbar, motivieren weitere Untersuchungen der Eigenschaften des realen Systems, das durch das Modell repräsentiert werden soll.

Hypothese = Unterstellung = Voraussetzung = Grundlage = Aussage, deren Gültigkeit bloß vermutet wird, die aber im Gegensatz zu einer **Spekulation** nicht nur anscheinend widerspruchsfrei ist und in Übereinstimmung mit dem allgemeinen Wissen steht, sondern auch begründet werden kann. Für Hypothesen ist es üblich, dass die Bedingungen angegeben werden, unter denen sie gültig sein sollen.

Henne-Ei-Situation bei Schleife/Zirkel einer physikalischen, mentalen und mathematischen Welt gemäß **Penrose: Roads to reality**! 2007; oder deutsche Kurzfassung Der Weg zur Wirklichkeit: Die Teilübersetzung für Seiteneinsteiger 2010;

Spieltheorie: Quake-Engine. SdW 2/2011: Schnittstelle von Mathematik, Soziologie und Psychologie. Spiele = **Modelle von Entscheidungssituationen**, Strategien für erfolgreiches Verhalten für Militär, Ehe, Wirtschaft liefern. Ich bringe ein System zum Zusammenbruch mit der Rate $Q = q \ln q + \frac{1}{q} \ln \frac{1}{q}$, wenn ich die Gegnerschaft um $q \in (0, 1)$ reduziere. q=linspace(0.1,1,99); plt.plot(q,q*log(q)+1./q*log(1./q)); Unter welchen Umständen die Spieler kooperieren miteinander – oder es eben nicht tun, weil sie darin einen individuellen Vorteil für sich sehen? Durch Kooperation könnte man zwar sowohl den Gesamtnutzen maximieren als auch einen hohen eigenen Nutzen einfahren, sich aber dennoch dagegen entscheidet, weil das bei isolierter Betrachtung jedes denkbaren Einzelfalls für sie persönlich vorteilhafter ist, und am Ende weitaus schlechter dasteht als bei gegenseitiger Kooperation. Klassisches Beispiel = **Gefangenendilemma** SdW Feb 1998 p8; **7 soziale Dilemmas:** Das sind neben dem Gefangenendilemma unter anderem die übermäßige Ausnutzung von öffentlichen Gütern (tragedy of the commons), Trittbrettfahrerverhalten oder der Kampf der Geschlechter: All diesen Dilemmata ist gemein, dass die Beteiligten, ob aus Eigennutz oder aus Misstrauen dem anderen gegenüber, nicht kooperieren, obwohl das sowohl die Gesamtauszahlung als auch den eigenen individuellen Nutzen steigern würde. **Bedingungen, die einer Kooperation förderlich sind: 1.** die Möglichkeit, **erneut aufeinander zutreffen** (direkte Reziprozität), **2.** die Sorge um das **eigene Ansehen** (indirekte

[17] Humanoider Roboter. Repliee Q1, Universität Osaka.

Reziprozität), **3.** die Androhung von **Strafe**, besonders durch die soziale Gruppe (Netzwerkreziprozität), **4.** eine Kombination aus goldener Regel und **Vergeltungsmaßnahmen**, falls der andere Spieler den Kooperationspfad verlässt sowie **5.** räumliche und menschliche **Nähe** der Spieler. Ein **Pareto-Optimum**, auch Pareto-Effizienz oder Pareto-Menge (1848–1923), ist die Menge aller Zustände, in denen es nicht möglich ist, eine Eigenschaft zu verbessern, ohne zugleich eine andere verschlechtern zu müssen. **Keiner Verliert.** Brandenburger & Nalebuff: Coopetition. Koopertiv konkurrieren. Mit der Spieltheorie zum Geschäftserfolg p21 Geschäft ist Krieg. Erfolg genügt nicht. Andere müsssen scheitern.

Bauer: Über die längste Zeit seiner Evolution war der Mensch kein Jäger, sondern ein **gejagtes Wesen**, unsere Vorfahren mussten kooperieren. Aus Sicht des Gehirns sind Demütigung und Isolation das Gleiche wie körperlicher Schmerz. Aggression ist nur sein Reaktionsmuster. Ehrhardt: Aggressivität, Dissozialität, Psychohygiene 1975;

Bekannte Strategien, die das Prinzip der Vergeltung realisieren, sind 'Tit for Tat' (Wie du mir, so ich dir) und deren Verfeinerung 'win-stay/loseshift': Hast du gewonnen, bleibe bei deinem Verhalten; hast du verloren, wechsele zum entgegengesetzten.

All diese Umstände erhöhen das Vertrauen darauf, dass sich auch der Partner an die implizite Vereinbarung zur Kooperation halten wird. Bedingungen des Spiels so gestalten, dass mindestens einer der vertrauensfördernden Mechanismen zur Anwendung kommt und eine Abkehr von der Kooperation unattraktiv erscheinen lässt. So kann der Spieler sich selbst glaubhaft zur Kooperation verpflichten. Beide Spieler beziehen eine dritte Person ein, etwa als Schlichter oder Wächter über eine 'Kooperationskaution', oder sie stellen eine der genannten Formen von Reziprozität her.

Typischerweise besteht ein Spiel darin, dass alle Beteiligten ihre Entscheidungen für sich treffen, dann alle anderen damit überraschen, aber eben auch selbst von den Entscheidungen der anderen überrascht werden. Das Spiel 'Schere, Stein, Papier' ist dafür ein einleuchtendes Beispiel. Nun liefert die Quantenkryptografie ein Verfahren, mit dem jeder Spieler seine Absichten vorab und unwiderruflich zur Kenntnis geben kann, aber so, dass andere Spieler ihn dadurch nicht aufs Kreuz legen können. Eine solche Absichtserklärung wäre also nicht 'Ich werde unter allen Umständen kooperieren' – was zum Ausnutzen einlädt –, sondern 'Ich werde kooperieren, wenn alle anderen das auch tun'.

Alle Absichten zusammen werden mit Hilfe verschränkter Qubits (Quanten- Bits) an sämtliche Spieler derart übermittelt, dass alle sich darauf verlassen können, aber niemand die Absichten eines einzelnen Mitspielers erfährt. Diese quantenmechanische Pseudo- Telepathie entzieht dem eigensüchtigen Verhalten die theoretische Grundlage und hat in Laborversuchen tatsächlich zu mehr Kooperation geführt.

Klassischen Dilemmata der Spieltheorie: Fisher: Schere, Stein, Papier. Spieltheorie im Alltag 2008; Merö: Die Logik der Unvernunft. Spieltheorie und Psychologie des Handelns; **Weizsäcker Wege in der Gefahr**. Eine Studie über Wirtschaft. Gesellschaft und Kriegsverhütung 1976 Kap3 Grenzen des Wachstums. Strukurelle Arbeitslosigkeit. Kap4 **Warum Sozialismus eine Utopie bleiben wird.** Läuft praktisch auf Feudalismus mit Solidarität hinaus. Zentralverwaltung mit Dogmen.; Chesterton: Sind wir uns einig? Ein Streitgespräch mit Bernard Shaw nebst einigen Essays 2009; Zänker: Der lange Weg nach Utopia. Vom Vormarsch des politisch Vernünftigen 2003 Morus, Sonnenstaat, Bellamy, Wells: Zeitmaschine und Marsianer, Hitler dachte wie ein 13jähriger. Karl Bechert 1901-1981: Fachliche Erziehungsziele. Die deutschen Hochschullehrer. Genese des Nazismus, Brief vom 21.3.1966 PhysBl22 1966 p381; PhysBl22 1966 p374, PhysBl37 1981 p376f; Foucault: Überwachen und Strafen. Die Geburt des Gefängnisses 1993; Orwell: Farm der Tiere 1945; Orwell: 1984, 1949 Neusprech, Bradbury: Fahrenheit 451 1953; Lem; **Pawlak: Der literarische Wissenschaftler Lem**, Phys J 20 2021 H8/9 p30-32; Alfven: Saga vom großen Computer. Ein Rückblick aus der Zukunft 1970; Alfven: Atome, Mensch und Universum. Die lange Kette der Komplikationen 1984; Alfven: M 70. Die Menschheit der siebziger Jahre 1969 menschliche Umwelt wird zunehmend komplexer durch Gebrauch von Technik. Ohne mathematisch-naturwissenschftliches Wissen ist man verloren; Scheuch: Die Wiedertäufer der Wohlstandsgesellschaft. Neue Linke 1968 Marx und Lenin p68ff; **Eigen & Winkler: Das Spiel** 1975;

Nachhaltigkeit: Drei-Säulen-Modell der nachhaltigen Entwicklung = nachhaltige Entwicklung nur durch das gleichzeitige und gleichberechtigte Umsetzen von umweltbezogenen = **kein Raubbau**, wirtschaftlichen = Gesellschaft sollte wirtschaftlich nicht über ihre Verhältnisse leben, da dies zwangsläufig zu Einbußen der nachkommenden Generationen führt, und sozialen Zielen = Staat oder eine Gesellschaft sollte so organisiert sein, dass sich die sozialen Spannungen in Grenzen halten und Konflikte nicht eskalieren, sondern auf friedlichem und zivilem Wege ausgetragen werden können, erreichbar. Aber Generationengerechtigkeit im Konflikt mit globaler Gerechtigkeit. Westliche Welt vermeidet Technologie-Export, nimmt Rohstoffe und benötigt weltweit Stadthalter zur Aufrecherhaltung des Status quo. Globaler Gerechtigkeit würde die westliche Welt zu massiver Verbrauchsdrosselung zwingen. **Weniger verbrauchen! Werbung ist kriminell!** Ebenso der Einbau von Sollbruchstellen und Schummelsoftware. PIK-Vorläufer: Steinbuch, Lorenz in Phys Blättern, **Cv Weizsäcker:** Dialog statt Anordnung, Max-Planck-Institut zur Erforschung der Lebensbedingungen der wissenschaftlich-technischen Welt = **Institut für unangenehme Fragestellungen** 1970-1981 zwecks Kriegsverhütung, Entwicklungspolitik, Wissenschaftsphilosophie = Entwicklung der Wissenschaft in anwendungsreifen Forschungsgebieten muss auf gesellschaftliche Bedürfnisse hin gerichtet werden. Sozialpolitik. Alfred Mechtersheimer, Ernst Tugendhat, Wolfgang van den Daele, der Friedensforscher Horst Afheldt = neue Verteidigung, die den Gegner abschreckt, ohne ihn zu bedrohen – Verteidigungswaffen wie zielsuchende Abwehrraketen können mit großer Sicherheit Angriffswaffen vernichten, zum Beispiel Panzer oder Jagdbomber, die das Vielfache der Abwehrwaffe kosten. Ein mit solchen Waffen ausgerüstetes Netz kleiner 'Technoguerilla'-Einheiten soll den Preis, den ein möglicher Angreifer zahlen müsste, um die Bundesrepublik zu erobern, so hoch schrauben, dass er auf den Angriff verzichtet. Afheldts Verteidigungssystem enthält ein für uns lebenswichtiges Element: Guerilla-Einheiten bieten im Gegensatz zu Panzerarmeen oder Flughäfen keine sinnvollen Ziele für den Einsatz von Atomwaffen. Mitherausgeber des Kursbuches, Tilman Spengler, der Politikwissenschaftler Wolf Schäfer. Ökonom **Stefan Welzk** = Ansatz zu einer neuen volkswirtschaftlichen Gesamtrechnung, die anstelle der betriebswirtschaftlichen Effizienz und volkswirtschaftlicher Wachstumseffekte den Beitrag misst, den wirtschaftliches Handeln zur Wohlfahrt der Menschen leistet. Philosoph Michael Drieschner. Folker Fröbel, Jürgen Heinrichs, Otto Kreye: Die sozialen und politischen Folgen der Verlagerung ausgereifter Produktionszweige in Entwicklungsländer ist offensichtlich. Multinationale Konzerne lassen beispielsweise elektronische Bauelemente, Kamerateile etc. fertigen, die für den Konsum der Industrieländer bestimmt sind. Diese Art der Arbeitsteilung beseitigt nicht Armut, Hunger und Rückständigkeit der Massen in den Entwicklungsländern. Rapoport: Ursprünge der Gewalt 1990; Asimov: Gewalt ist die letzte Zuflucht des Unfähigen. Sachs: Das Ende der Armut 2005; Die beteiligten Konzerne nutzen lediglich die Vorteile extrem niedriger Löhne und eines politisch günstigen Investitionsklimas so lange aus, wie es nicht anderswo günstiger wird, um dann in neuen Ländern zu investieren. In den Industrieländern trägt diese Form internationaler Arbeitsteilung zur Verbreitung von Arbeitslosigkeit bei. NeuerInternationalen Arbeitsteilung = Globalisierung muss menschlich gestaltet werden, Industrieländer müssen sich massiv im Konsum einschränken, um Migration zu begegnen. Schmalz-Jacobsen & Hansen: Kleines Lexikon der ethnischen Minderheiten in Deutschland 1995 p246 Vorurteil, Wohnen p248; Dahrendorf: Auf der Suche nach einer neuen Ordnung. Vorlesungen zur Politik der Freiheit im 21. Jahrhundert 2001; Dahrendorf: Die Krisen der Demokratie. Ein Gespräch mit Antonio Polito 2003 Demokratie = Veränderung ohne Gewalt im Rahmen eines Rechtsstaats = Schutz vor Tyrannei, Kontrolle der Macht durch Institutionen, periodischer Machtwechsel per Wahl. ABER: Übersehen wird die Allmacht der Naturgesetze in Gestalt des ersten und zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik, die kein ewiges Wachstum ohne Konflikte wie Klimawandel und Migration erlauben. Auch Innovationen vertuschen den Konflikt, dessen Basis Raubbau in der Südwelt und Verwüstung/Entwertung/Entropiezunahme in der Natur und Klimawandel sind. Koyaanisqatsi 1982. Die naturwissenschaftliche Basis unseres komfortablen Lebens ist kulturell sowenig verankert wie der christliche Glaube. Bei unvermeidlichen Krisen sind die naturwissenschaflichen Auswege nicht vermittelbar.; Dahrendorf: Der Wiederbeginn der Geschichte. Vom Fall der Mauer zum Krieg im Irak 2004; Dahrendorf: Versuchungen der Unfreiheit. Die Intellektuellen in Zeiten der Prüfung 2021; Müller: Freiheit, Gleichheit, Ungewissheit: Wie schafft man Demokratie? 2021; Beck: Was ist Globalisierung? 1997; Moderne Welt bedeutet eine Hinzunahme weiterer gekoppelter dynamischer Gleichungen und wegen der Computerisierung eine drastische Verkürzung der Zeitskalen. **Globalisierung** bedeutet im Sinne dynamischer Systeme eine Zunahme des Vernetzungsgrades = Anzahl von Links über große Di-

stanzen nimmt zu (small world network). Konrollparameter ist der Vernetzungsgrad. Die mikrobiologische Vernetzung begleitet diesen Prozess und führt so auch zu rascher Ausbreitung und drastische Steigerung der Mutationsgeschwindigkeit. An den Bifurkationspunkten braucht die Einstellung des Gleichgewichte hingegen deutlich länger. Leendertz: Die pragmatische Wende. Die Max-Planck-Gesellschaft und die Sozialwissenschaften 1975–1985, 2010; **Schließung des Instituts** bestätigt, in welchem Maß die wissenschaftliche Selbstverwaltung gelernt hat, sich den herrschenden Tendenz anzupassen. Der Gegensatz zwischen der Mystifikation der Technik als universaler Heilsbringerin und den Zerstörungen, die ihr chaotisches Wuchern in der Gesellschaft und der Natur hinterlassen haben, ist kaum noch überbrückbar. Mit atemraubender Geschwindigkeit nähert sich die Entwicklung der Rüstung beider Militärblöcke jenem kritischen Zustand, in dem allein die Technik der atomaren Konsequenz den Krieg provoziert, den jeder fürchtet. **CFv Weizsäcker: Der Garten des Menschlichen. Geschichtliche Antropologie** 1980; **CFv Weizsäcker: Der bedrohte Frieden. Politische Aufsätze 1945 - 1981**. 1981 p354 **Islam = Allernative zur Zerstörung** der Gesellschaft durch kap Konsumgesellschaft mit seiner die Menschen ratlos zurück lassenden zerfallenden Wertordnung und gegen Kommunismus mit erzwungenen und gewaltsamen Doktrin. Niedergang des Sowjet-Kommunismus innerhalb weniger Jahre! Gut, das sagten wir zeitgleich in Freudeskreisen und gegenüber US-Studenten auch. Ein Blick in die Heilige Schrift, auf die ägyptischen Pyramiden, in den Faust **Denn alles, was entsteht, ist wert, dass es zu Grunde geht.** oder **Russo & Denninger: Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens** 1996, 2005; Erst recht gibt es kein Gesetz zur Wahrung von Zivilisation, Umgangsformen und Kulturgütern. Lebensniveau der Lohn-, Gehaltsabhängigen wird nach Fall des Kommunismus fallen. Weizsäcker beschreibt die Auswirkungen einer dann einsetzenden 'Globalisierung', obwohl es damals dieses Wort noch nicht gab, so wie er sie erwartete: Die Arbeitslosenzahlen werden weltweit ungeahnte Dimensionen erreichen. Die Löhne werden auf ein noch nie da gewesenes Minimum sinken. Alle Sozialsysteme werden mit dem Bankrott des Staates zusammenbrechen, Rentenzahlungen zuerst. Auslöser ist eine globale Wirtschaftskrise ungeheurer Dimension, die von Spekulanten ausgelöst wird. Circa 20 Jahre nach dem Untergang des Kommunismus werden in Deutschland wieder Menschen verhungern. Einfach so. Die Gefahr von Bürgerkriegen steigt weltweit dramatisch. Die herrschende Elite wird gezwungen, zu ihrem eigenen Schutz Privatarmeen zu unterhalten. Um ihre Herrschaft zu sichern, werden diese Eliten frühzeitig den totalen Überwachungsstaat schaffen, und eine weltweite Diktatur einführen. Die ergebenen Handlanger dieses 'Geld-Adels' sind korrupte Politiker. Die Kapitalwelt fördert wie eh und je einen noch nie dagewesen Nationalismus/Faschismus, als Garant gegen einen eventuell wieder erstarkenden Kommunismus. Zum Zweck der Machterhaltung wird man die Weltbevölkerung auf ein Minimum reduzieren. Dies geschieht mittels künstlich erzeugter Krankheiten. Hierbei werden Bio-Waffen als Seuchen deklariert, aber auch mittels gezielten Hungersnöten und Kriegen. Als Grund dient die Erkenntnis, daß die meisten Menschen ihre eigene Ernährung nicht mehr finanzieren können, jetzt wären die Reichen zu Hilfsmaßnahmen gezwungen, andernfalls entsteht für sie ein riesiges, gefährliches Konfliktpotential. Um Rohstoffbesitz und dem eigenen Machterhalt dienend, werden Großmächte Kriege mit Atomwaffen und anderen Massenvernichtungswaffen führen. Die Menschheit wird nach dem Niedergang des Kommunismus das skrupelloseste und menschenverachtendste System erleben, wie es die Menschheit noch niemals zuvorerlebt hat, ihr Armageddon/Endkampf. Das System, welches für diese Verbrechen verantwortlich ist, heißt unkontrollierter Kapitalismus. CFv Weizsäcker 1983: Sein letztes 'großes Werk' wird mit Sicherheit von der Bevölkerung nicht verstanden werden. Die Dinge werden somit ihren Lauf nehmen! Das deutsche Volk bewertete er wenig schmeichelhaft wie folgt: absolut obrigkeitshörig des Denkens entwöhnt typischer Befehlsempfänger ein Held vor dem Feind, aber ein totaler Mangel an Zivilcourage! Der typische Deutsche verteidigt sich erst dann, wenn er nichts mehr hat, was sich zu verteidigen lohnt. Wenn er aber aus seinem Schlaf erwacht ist, dann schlägt er in blindem Zorn alles kurz und klein – auch das, was ihm noch helfen könnte! Die einzige Lösung die Weizsäcker bietet, ist die Hoffnung, das nach diesen unvermeidlichen Turbulenzen dieser Planet noch bewohnbar bleibt. Denn Fakt ist, die kleine Clique, denen diese Welt schon jetzt gehört, herrscht nachdem einfachen, aber klaren Motto: Eine Welt, in der wir nicht das alleinige Sagen haben, die braucht es auch in Zukunft, nicht mehr zu geben. Rezension siehe PhysBl39 1983H10 p348f; Sachs: Das

Ende der Armut 2005; T̃homas Piketty: Das Kapital 2018 P̃iketty: Ökonomie der Ungleichheit. Eine Einführung 2020; P̃iketty: Kapital und Ideologie 2020; **CFv Weizsäcker: Bewusstseinswandel** 1988 Die drei großen weltpolitischen Aufgaben der Gegenwart – die Überwindung des Ungleichgewichtes zwischen dritter Welt und Industrienationen, die Überwindung der Institution Krieg und die Rettung der Natur – bleiben unbewältigt, solange es keinen Bewußtseinswandel gibt. Weizsäcker zeigt, daß die Herkunft unserer heutigen Weltprobleme in unserer kulturellen, politischen und religiösen Geschichte zu suchen ist; Ursache ist jeder, der Besitzstandwahrung und -mehrung für ein Naturgesetz hält und der durch staatlichen Zwang für sich ein besseres Leben garantiert glaubt. Harry Harrison: New York 1999, 1966 Verfilmung durch R Fleischer: **Soylent green** 1973 ... Jahr 2022 ... die überlebn wolle. Ökodystopie. Im Auftrag des **Club of Rome**. Donella und Dennis L. Meadows: **Die Grenzen des Wachstums** 1972 Wirtschaftswachstum muss vom Anstieg der Treibhausgas-Emission entkoppelt werden. Daher keine Kohleverstromung! Warnung vor dem Klimawandel geht am Problem vorbei! Die Menschheit sollte Öl und Kohle wie den Notgroschen hüten, also in der Erde belassen, damit die Enkel eine nächste Eiszeit besser überdauern können. C̃alder: Die launische Sonne widerlegt Klimatheorien 1997; Alles zum Klima siehe **Flohn: Globale Energiebilanz und Klimaschwankungen** 1973; K̃noch: Klima und Klimaschwankungen 1930; K̃noch: Methoden der Klimaklassifikation 1952; Flohn: Das Problem der Klimaänderungen in Vergangenheit und Zukunft 1985; Calder: Die Wettermaschine. Droht eine neue Eiszeit? 1982; C̃alder & Svenmarks: Sterne steuern unser Klima. Eine neue Theorie zur Erderwärmung 2007; Meadows & Randers: Die neuen Grenzen des Wachstums 1993; EUv Weizsäcker & Lovins: Faktor vier. Doppelter Wohlstand - halbierter Naturverbrauch. Der neue Bericht des Club of Rome 1995; **Potsdam-Institut für Klimafolgenforschung = PIK**; Nachhaltigkeitsforschung: **Institute for Advanced Sustainability Studies = IASS Potsdam**; Meadows, Randers: Grenzen des Wachstums - Das 30-Jahre-Update. Signal zum Kurswechsel 2008; Gabor: Menschheit morgen 1965 p13 Muße, p165 **Kathedrale der Wissenschaft**, aber **abgerundetes Wissen ohne Wert**. Für die Mehrheit der Menschen ist Arbeit die einzige Zerstreuung, die sie auf Dauer aushaltenkönnen.; **Gabor: Demokratie und Technologie, PhysBl 28 1972 p529ff siehe Koestler: Sonnenfinsternis**; Gabor: Technische Wege zur Sparsamkeit PhysBl 30 1974 p1ff; Striebel: Universität und Grenzen des Wachstums PhysBl 30 1974 p4-8; Gabor: Der vernünftige Mensch. Konzept für unsere Selbst-Entwicklung 1972; Goldsmith & Allen: Planspiel zum Überleben. Ein Aktionsprogramm 1972; Wittmann: Der unbewältigte Wohlstand. Die Zukunft von Wirtschaft, Staat und Gesellschaft 1972; Aldous Huxley 1894-1963: Das Genie und die Göttin 1955 p5 Die Wirklichkeit ergibt keinen Sinn. Das Merkmal der Wirklichkeit ist ihre wesentliche Beziehungslosigkeit. **Entmenschlichung der Gesellschaft durch wissenschaftlich Fortschritt**; Gabor 1900-1979, Colombo, King 1909-2007, Galli, Pestel 1914-1988: Das Ende der Verschwendung. Zur materiellen Lage der Menschheit. Tatsachenbericht an den Club of Rome 1976; Peccei & Siebker: Grenzen des Wachstums 1974; **Zischka: Kampf ums Überleben. Das Menschenrecht auf Energie 1979** Nicht duch Mangel an Raum, an Rohstoffen oder an Energie droht uns der Untergang; nicht weil die Großstadtluft weniger rein ist als die des Hochgebirges, sondern weil mehr und mehr Menschen keine Ahnung davon haben, was sie am Leben erhält und worauf ihr Wohlstand beruht. Eine Verwirrung der Geister, die dazu führen kann, dass wir Angst vor den eingebildeten Gefahren Selbstmord begehen.; **Teller: Energie** für ein neues Jahrtausend 1975, 1979, 1981 = US-Antwort auf Club of Rome/MIT, 1 Quad = 293 GWh = Energiemenge von Iowa 1973; **Energy and Power, Scientific American** 1971; Ged Davis: Energy for planet Earth. Special issue, SciAm263 (n3) p54-60, 62 Sept 1990 =Ñov-Heft SdW1990; Dieckmann & Rosenthal: Energie. Physikalische Grundlagen ihrer Erzeugung, Umwandlung und Nutzung 2014[3]; Cap & Schöpf: Energieversorgung. Probleme und Ressourcen 1981; Karamanolis: Phänomen Energie 1993; Peccei & Ikeda: Noch ist es nicht zu spät 1983; Pestel: Jenseits der Grenzen des Wachstums 1988; Ãrguirre: The Modern Survival Manual. Surviving the Economic Collapse 2009; Pestel: Grundlagen der Regelungstechnik. Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure 1961; Braunbek: Die unheimliche Wachstumsformel 1973; **Forrester: Grundzüge der Systemtheorie** 1972, 2012; F̃orrester: World dynamics 1971 mit FORTRAN-Code; PIK und IASS. **Forrester: Der teuflische Regelkreis.** Das Globalmodell der Menschheitskrise 1972 ohne FORTRAN-Code. Befund: Die westliche Welt

ist wegen ihrer Komplexität instabil gegen Störungen.; P̃estel: Eine Chance für die Menschheit. Perspektiven für die Welt von morgen. Gesammelte Schriften und Vorträge 2011; Rainer Funk: Der entgrenzte Mensch. Warum ein Leben ohne Grenzen nicht frei, sondern abhängig macht 2011; Kersten Reich: Der entgrenzte Mensch und die Grenzen der Erde B̃d1. Wie Erziehung und Verhalten die Nachhaltigkeit erschweren 2021; Bd2. Wie Ökonomie und Politik die Nachhaltigkeit verhindern 2021; Welzer: Selbst denken. Eine Anleitung zum Widerstand (gegen Konsumterror) 2014 Wir sind inzwischen selbst zu Produkten geworden, Adressaten des absatzorientierten Wirtschaftssystems, das uns immer neu mit völlig unnötigen Innovationen, wie z.B. Smartphones beglücken will. Wir sind degradiert zu bloßen „Relaisstationen zwischen Herstellung und Entsorgung von Produkten. Und da diese von früh auf erfahrenen Habitusprägungen jenseits der Bewusstseinsschwelle verlaufen, dringt selbst kognitive Einsicht in die Umweltprobleme nur höchst selten bis zur Änderung des praktischen Verhaltens vor. **Ich selbst bin das Problem, das gelöst werden muss, wenn unsere Welt zukunftsfähig werden soll!** Wie werde ich gelebt haben? Wer werde ich gewesen sein? Schirrmacher: Ego - Das Spiel des Lebens 2013; Informationskapitalismus. Sieg des synthetischen, inhumanen Modell des homo oeconomicus über die realen Individuen, ihre Lebenswelt, ihre Demokratie. L̃evitsky & Ziblatt: Wie Demokratien sterben 2018 DLF 29.7.2018; Dewey: Demokratie und Erziehung 1915; **1.** Maximen der **Spieltheorie** - siegreiches Instrument des Kalten Krieges, schaue **Kubrik: Dr. Seltsam - Oder: wie ich lernte, die Bombe zu lieben 1964**, nun Krieg der Banken, Broker, Unternehmen, Investoren gegen den Menschen überhaupt (begrifflich Wolf im Schafspelz) - beherrschen Wettbewerb und Markt. **2.** Im homo oeconomicus zum Modell erhobener und nobilierter **Egoismus** herrscht. **3.** Totale **Digitalisierung der Ökonomie**, die die Marktprinzipien universalisiert und jedes Unternehmen, jeden Privathaushalt miteinander vernetzt und in dieselbe ökonomische Logik der Informationsgewinnung und -verarbeitung zwingt. Modellplatonismus als Realtyrannei. **Platon: Nomoi = Suche nach der bestmöglichen Staatsverfassung**. Gemeinwohl und das marktüberwölbende Gebilde des Staates gibt es nicht. Entwertung des Wissens zugunsten der Information. **Automatisierte Verwertung: Information braucht kein Verstehen.** Bildung, Lebenserfahrung, Selbsterkenntnis, Einordnung in größere thematische Zusammenhänge, universitäre Ausbildung und Forschung sind unnötig. Hochgeschwindigkeitshandel zerbröselt das Fundament der Rechtsordnung, das unternehmerisches Eigentum und auch die Verantwortung. Arnold: Was man über Philosophie wissen sollte. Von den alten Griechen bis zur Postmoderne 2009; **Engelmann: Philosophie und Totalitarismus.** Zur Kritik dialektischer Diskursivität - Eine Hegellektüre 1990; **Engelmann: Postmoderne und Dekonstruktion.** Texte französischer Philosophen der Gegenwart 1999; Badiou & Engelmann: Philosophie und die Idee des Kommunismus 2015; Badiou & Engelmann: Für eine Politik des Gemeinwohls 2017; **L̃yotard: Das postmoderne Wissen** 1982; Die frühere Aktienhaltezeit von 4 Jahre beträgt mittlerweile 22 Sekunden. Superrationalität, die den mathematischen Entscheidungsprozessen zugrundeliegt, ist Scheinrationalität, die von Urhebern und Akteuren nicht verstanden werden kann. Andreas Zielcke SZ 16.2.2013 p13; **Ray Kurzweil:** The singularity is near. When humans transcend biology 2006 = Lyotard: Das Inhumane. Plaudereien über die Zeit 1989; M̃enschheit 2.0. Die Singularität naht 2014; Jetschke: Prinzipien der Selbstorganisation, Wurzel 13 1979/80 H9 p3; Wentzel: Elemente der Spieltheorie 1964; Worobjov: Entwicklung der Spieltheorie 1975; Formby: An Introduction to the Mathematical Formulation of Self-organizing Systems 1965; Stauffer & Aharony: Perkolationstheorie 1995; Nasar: Genie und Wahnsinn; Burger: Einführung in die Theorie der Spiele 1959;

Komplexität (v. lat.: complectari = umarmen, umfassen; Partizip Perfekt: complexum) bezeichnet allgemein die Eigenschaft eines Systems oder Modells, dass sein Gesamtverhalten nicht beschrieben werden kann, selbst wenn man vollständige Informationen über seine Einzelkomponenten und ihre Wechselwirkungen besitzt. Die wesentlichen Merkmale eines komplexen Systems liegen jenseits der vollständigen Information über seine Einzelkomponenten und deren Wechselwirkungen. **Terrence Tao: Komplexität und Universalität.** Die weltweit besten mathematischen Artikel im 21. Jahrhundert 2015 ebook; Charbonneau: Natural Complexity. A Modeling Handbook 2017; **Pagels: The Dreams of Reason. The Computer and the Rise of the Sciences of Complexity** 1988; **Helbing:** Komplexität von Gesellschaften kann zum Schutz vor Gefahren und zum Wohlergehen eingesetzt werden. SdW Sept 1995; `global_dynamics_of_CA.pdf`, **Taleb:**

Antifragility/Unzerbrechlichkeit: Fragil (Feind des Zufalls/Störung) - robust (konservativ) - antifragil (speist sich aus Zufall/Störungen, überdauert bei bleibenden Umgebungsveränderungen, **profitiert unter Störungen!**). Taleb: **Der Schwarze Schwan:** Die Macht höchst unwahrscheinlicher Ereignisse 2010, A1 = Ausreißer = Seltenheit = geringe Vorhersagbarkeit; A2 = enorme Auswirkung; A3 = nur im Rückblick erklärbar. Nichtkontingente Experimente! Menschen erfinden stimmige Bilder der Wirklichkeit. Menschen sind Konstruktivisten. Alle Modelle sind aber falsch, nur die Wirklichkeit nicht. **Strategische Spiele:** Was man weiß, ist bedeutungslos. Experten sind die besseren Erzähler und Vernebler mittels mathematischer Modelle; intellektueller Betrug durch Mathe: Gauß-verteilung als GIB = großer intellektueller Betrug = großer math Betrug. Challenger-Unglück 28.1.1986 **Feynman: Naturwissenschaft ist der Glaube an die Unwissenheit der Experten**, siehe Unzicker: Vom Urknall zum Durchknall 2010 p320; Barrow: Der Ursprung des Universums. Wie Raum, Zeit und Materie entstanden 1994; Feynman: Sie belieben wohl zu scherzen, Mr. Feynman! Abenteuer eines neugierigen Physikers. Autobiografische Anekdoten 1985 p448ff Cargo-Kult-Wissenschaft; Feynman warnte vor Cargo-Kult-Wissenschaftlern. Pädagogen, Didaktiker. Meide technisch nicht-versierte Menschen! Illich: Entmündigung durch Experten. Zur Kritik de Dienstleistungberufe 1979; Besser herumprobieren und Chancen erkennen statt zu planen. **Illich: Entschulung der Gesellschaft**. Entwurf eines demokratischen Bildungssystems 1971; Ecos **Antibibliothek** = Konzentration auf die ungelesenen Bücher. Taleb: Hehl: Der Zufall in der Physik 2021; **Narren des Zufalls:** Die unterschätzte Rolle des Zufalls in unserem Leben 2013; Koestler: Die Wurzeln des Zufalls 1972; **Antifragilität: Anleitung für eine Welt, die wir nicht verstehen** 2013;

`melanie_mitchel__complexity_-_a_guided_tour.pdf` **What is the study of Complex Systems?** Complex Systems is a new field of science studying how parts of a system give rise to the collective behaviors of the system, and how the system interacts with its environment. Social systems formed (in part) out of people, the brain formed out of neurons, molecules formed out of atoms, the weather formed out of air flows are all examples of complex systems. The field of complex systems cuts across all traditional disciplines of science, as well as engineering, management, and medicine. It focuses on certain questions about parts, wholes and relationships. These questions are relevant to all traditional fields. **Why Complex Systems?** The study of complex systems is about understanding indirect effects. Problems that are difficult to solve are often hard to understand because the causes and effects are not obviously related. Pushing on a complex system **here** often has effects **over there** because the parts are interdependent. This has become more and more apparent in our efforts to solve societal problems or avoid ecological disasters caused by our own actions. The field of complex systems provides a number of sophisticated tools, some of them concepts that help us think about these systems, some of them analytical for studying these systems in greater depth, and some of them computer based for describing, modeling or simulating these systems. **Three approaches to the study of Complex Systems:** There are three interrelated approaches to the modern study of complex systems, (1) how interactions give rise to patterns of behavior, (2) understanding the ways of describing complex systems, and (3) the process of formation of complex systems through pattern formation and evolution. http://www.necsi.edu/guide/concepts/conceptmap.html; **Boccara: Complex systems** 2010[2], How to Build Up a Model. Recurrence Equations. Iteration of Maps. The Small-World Phenomenon. Highly Connected Extra Vertex Model. Power-Law Distributions. SOC. The Sandpile Model. Cellular automata - Chaotic discrete-time models - Drossel-Schwabl forest fire model - Hutchinson's time-delay model - Kinetic growth phenomena - Lotka-Volterra model - Power-law distributions - Predator-prey models - Two-dimensional systems - Deuschel & Scheutzow: Probability in Complex Physical Systems: In Honour of Erwin Bolthausen and Jürgen Gärtner 2012; Ngai: Relaxation and Diffusion in Complex Systems 2011; Hutchinson: A Student's Guide to Numerical Methods; **Bouchaud ed.: Complex systems:** Ecole d'Été de Physique des Houches, session LXXXV 2007;

James P. Crutchfield: Between order and chaos, Nature Physics 8, 17–24 (2012) **What is a pattern?** How do we come to recognize patterns never seen before? Quantifying the notion of pattern and formalizing the process of pattern discovery go right to the heart of physical science. Over the past few decades physics' view of nature's lack of structure—its unpredictability—underwent a major renovation with the discovery of deterministic chaos, overthrowing two centuries of Laplace's strict determinism in classical physics. Behind

the veil of apparent randomness, though, many processes are highly ordered, following simple rules. Tools adapted from the theories of information and computation have brought physical science to the brink of automatically discovering hidden patterns and quantifying their structural complexity.

'Complex systems' are more than the sum of their parts: roughly speaking, they are large ensembles — the brain, financial markets, traffic networks, social groups, the internet — for which the properties of the system as a whole cannot be understood from the study of its individual components. Over the past decade, fuelled by the availability of large datasets, research on complexity has expanded to encompass more real-world systems, from physics to engineering, biology, sociology and beyond. This Nature Physics Insight provides a broad survey of complexity: what we have learned about quantifying complexity; how complex systems are structured; what kinds of dynamic processes they support; how they interact with each other; and what more we need to understand to be able to build models that can reliably predict the behaviour of the real world.

Nielsen: Reinventing Discovery. The New Era of Networked Science 2011; In many large ensembles, the property of the system as a whole cannot be understood from studying the individual entities alone — these ensembles can be made up by neurons in the brain, transport users in traffic networks or data packages in the Internet. The past decade has seen important progress in our fundamental understanding of what such seemingly disparate 'complex systems' have in common; some of these advances are surveyed here.

Andreas Trabesinger: Complexity Nature Physics 8, 13 (2012) A formal definition of what constitutes a complex system is not easy to devise; equally difficult is the delineation of which fields of study fall within the bounds of 'complexity'. An appealing approach — but only one of several possibilities — is to play on the 'more is different' theme, declaring that the properties of a complex system as a whole cannot be understood from the study of its individual constituents. There are many examples, from neurons in the brain, to transport users in traffic networks, to data packages in the Internet.

Large datasets — collected, for example, in proteomic studies, or captured in records of mobile-phone users and Internet traffic — now provide an unprecedented level of information about these systems. Indeed, the availability of these detailed datasets has led to an explosion of activity in the modelling of complex systems. Data-based models can not only provide an understanding of the properties and behaviours of individual systems, but also, beyond that, might lead to the discovery of common properties between seemingly disparate systems. **Mainzer: Die Berechnung der Welt. Von der Weltformel zu Big Data** 2014 liefert nützliche allgemeine Muster, a la Autoregressiven Modellen, also **blinde Voraussagekompetenz** jedes ohne Verständnis. Das leistet nur der Verstand.; c't 17/2014 p132;

Much of the progress made during the past decade or so comes under the banner of 'network science'. The representation of complex systems as networks, or graphs, has proved to be a tremendously useful abstraction, and has led to an understanding of how many real-world systems are structured, what kinds of dynamic processes they support and how they interact with each other. This Nature Physics Insight is therefore admittedly inclined towards research in complex networks. As Albert-László Barabási argues in his Commentary, the past decade has indeed witnessed a 'network takeover'. On the other hand, James Crutchfield, in his review of the tools for discovering patterns and quantifying their structural complexity, demonstrates beautifully how fundamental theories of information and computation have led to a deeper understanding of just what 'complex systems' are.

For a topic as broad as complexity, it is impossible to do justice to all of the recent developments. The field has been shaped over decades by advances in physics, engineering, computer science, biology and sociology, and its ramifications are equally diverse. But a selection had to be made, and we hope that this Insight will prove inspiring, and a showcase for the pivotal role that physicists are playing — and are bound to play — in the inherently multidisciplinary endeavour of making sense of complexity. Ian Dobson: Complex networks: Synchrony and your morning coffee Nature Physics 9, 133–134 (2013) Michele Catanzar & Mark Buchanan: Network opportunity, Our developing scientific understanding of complex networks is being usefully applied in a wide set of financial systems. What we've learned from the 2008 crisis could be the basis of better

management of the economy — and a means to avert future disaster. Nature Physics 9, 121–123 (2013);

Albert-László Barabási: The network takeover Nature Physics 8, 14–16 (2012) Reductionism, as a paradigm, is expired, and complexity, as a field, is tired. Data-based mathematical models of complex systems are offering a fresh perspective, rapidly developing into a new discipline: network science.

Encyclopedia complexity avaxhome

Complex systems a 'catch-all' category created by Turok to encompass research that lies at the intersection of other theoretical physics areas. This includes statistical physics, complex modelling and dynamic systems.

Lies Horgan: Komplexität in der Krise, SdW Sept 1995 p58-64 Kybernetik und andere Katastrophen p62, ABER Uhr $\neq$ mathematische Pendel. Wesentliche Botschaft ist simpel: Man braucht Nichtlinearität. Formby: An Introduction to the Mathematical Formulation of Self-organizing Systems 1965; Richter & Rost: Komplexe Systeme; **Pagels: The Dreams of Reason. The Computer and the Rise of the Sciences of Complexity** 1988; **Goya 1746-1828: Der Traum der Vernunft bringt Ungeheuer hervor!** Die Phantasie, verlassen von der Vernunft, erzeugt unmögliche Ungeheuer; vereint mit ihr ist sie die Mutter der Künste und Ursprung der Wunder. Der Schlaf der Vernunft gebiert Ungeheuer! Goya: Caprichos; Goya: Desastres de la Guerra 1810-16; Johnson: Simply Complexity. A Clear Guide To Complexity Theory 2010; Holland: Complexity. A Very Short Introduction 2014; Miller: Complex Adaptive Systems: An Introduction to Computational Models of Social Life 2007; Mitchell: Complexity. A Guided Tour 2009; **Northrop & Robert: Introduction to Complexity and Complex Systems** biomedical engineering, biophysics, or physiology 2010; Ball, Kolokoltsov & MacKay: Complexity Science. The Warwick Master's Course 2013; Sibani & Jensen: **Stochastic Dynamics of Complex Systems. From Glasses to Evolution** 2013; Alterung, bei disordered magnetic materials, superconductors, ecosystems, the brain or the economy; Sandra Mitchell: Komplexitäten. Warum wir erst anfangen, die Welt zu verstehen; Mainzer: Komplexität 2008; Haken: Die Selbstorganisation komplexer Systeme - Ergebnisse aus der Werkstatt der Chaostheorie 2008; Haken: Information and self-organization. A macroscopic approach to complex systems 1988, 2000^2 Maximum-Information-Prinzip; Ogorzalek: Chaos in electronic circuits; Frey: Physik lebender Systeme 2013

Kruse: Wie reagieren Menschen auf wachsende Komplexität ? i] Trail & error. ii] Ausblenden/ignorieren/verdrängen. iii] Rationales Durchdringen der Komplexität anhand von Details. iv] Simplify your life. Konzentration auf wenige Faktoren. Trivialisieren eines komplizierten Systems. Aber komplexes System wird beim Trivialisieren zerstört. v] Intuition. Emotionale Bewertung. Reduziere Komplexität durch Musterbildung. Merö: Die Grenzen der Vernunft. Kognition, Intuition, komplexes Denken.

vi ist, gemessen an anderen Editoren, kompliziert, aber nicht komplex. Spaghetti-Code ist kompliziert, OOP ist komplex - beide können sowohl einfache, als auch komplizierte und komplexe Probleme beschreiben. Kompliziertheit als unnötige Unübersichtlichkeit. Subjektive Kategorie: Laie & Fachmann schauen sich ein Kraftwerk oder einen Schaltplan an.

Beach animals: http://www.strandbeest.com/film.html Jansen creates new creatures: `http://www.ted.com/talks/theo_jansen_creates_new_creatures.html` complex: con / com: zusammen, mit plectere, plecto, plexi, plexus: flechten, Passiv: plector, Demnach **komplex: zusammen geflochten, verknüpft, (⇒ perplex)**. Kompliziert: con- + plicare, plico, plicui, plicatus / plicitus: (zusammen-)rollen, falten, (complicare) complicatus: zusammengefaltet, verworren, unklar, erschwert. Demnach **kompliziert: verwirrt / verworren, erschwert (⇒ Komplize, Replik, Replikation, Multiplikator usw.)** 'Die Genialität einer Konstruktion liegt in ihrer Einfachheit. Kompliziert bauen kann jeder.' - Sergej P. **Koroljow**, in: Gründer, Matthias (2000): SOS im All. Pannen, Probleme und Katastrophen der bemannten Raumfahrt, p163. Schwarzkopf & Schwarzkopf. Britische Talsperrenbombardierung 2. Weltkrieg: Flug-Höhe per gekreuzter Scheinwerfer als Bodenpunkt. Entfernung beim Abwurf mittels Holzdreieckschablone. **Ausfallwahrscheinlichkeit von Gerät mit n Subeinheiten** ist gemäß Binomial-Verteilung p^n, wenn jedes Subsystem die Ausfallwahrscheinlichkeit p hat. **Begriff der Komplexität selbst komplex - autologisch.** Komplexität (Informatik), Kolmogorow-Komplexität, Algorithmische Tiefe: Komplexität ist dann groß, wenn

einerseits zu viele und andererseits in der Summe zu komplizierte Details zu behandeln sind.

Theorie komplexer (vielschichtiger) Systeme (Koagulation $\propto$ #Agenten: Elementarteilchen, Atome Biomoleküle, Zellen, Organe, Individuen, Gesellschaften. Mensch, Hirn, Ökosystem, Klimasystem siehe **Imkeller & von Storch: Stochastic climate models** 1999 und Schönwiese: Klimatologie 1994, 2013[4]; **Saltzman: Dynamical Paleoclimatology. Generalized Theory of Global Climate Change** 2002 mit 2-Box-Modell Rahmstorf/-Kuhlbrot, Sprache, Internet, Gesellschaft) ist nicht die Theorie von allem oder sich bloß kompliziert scheinenden Dingen, sondern eine Sammlung von bereits bekannten Ansätzen (Ebeling, Haken, Prigogine, Jetschke; angewandte Dynamik, Kybernetik, Synergetik, im Gegensatz zur Mathematik auf Naturbeschreibung gerichtete Strukturwissenschaft) zur Modellierung und Analyse von Systemen, deren Struktur zur teilweisen Rücknahme des **Reduktionismus - Zusammensetzbarkeit, Linearität** (Modell muss umfassender sein oder bei Näherung gehen wesentliche Eigenschaften verloren) bei der Naturbeschreibung zwingt. Keine Theory of Everything. **Pagels: The Dreams of Reason. The Computer and the Rise of the Sciences of Complexity** 1988; Haken & Wunderlin: Synergetik. Eine Einführung 1983; Das Verhalten oder der Aufbau des Ganzen kann nicht aus dem Verständnis der Agenten des Systems erklärt werden. Das Paradigma des Reduktionismus ist erfolgreich bei der Beschreibung der Realität, wenn die Hierarchie von Raum- und Zeitskalen keine dominante Rolle spielt. Das ZUSAMMENSPIEL "autonomer" Subsysteme, das durch ihre Wechselwirkungspotenziale geregelt wird, bringt makroskopische Eigenschaften hervor: **Emergenz**. SdW Sept 2012 p48ff. Statist Mechanik $\rightarrow$ Thermodynamik. Reversibel $\rightarrow$ irreversibel. Beschreibend, integrierend, Regeln liefernd, Ordnung illusionierend oder klassifizierend, aber nicht erklärend. Aber emergente Phänomene sind nützliche Begriffe (Temperatur, Druck), die erklärt werden können und zwischen denen z.B. die Gasgleichung $pV/T = \text{const}$ gilt. Das Ganze ist mehr als die Summe der Teile (Temperatur, Druck, Konzentrationswellen). Emergente Eigenschaften zeigen oft Skalengesetze. Im Unterschied dazu Multi-Skalen-Systeme: Längen- und Zeitskala des kleinsten relevanten Prozesses sind bei Simulation wichtig! Seifenblasen, Schäume, Foam siehe http://www.livephysics.com/physics-videos/demonstration/foam-physics/. Biomorphes Bauen von Frei Otto! **Seife** und Chemie. Hoffmann & Laszlo: Was die Dinge sagen, In: Von Verständnis der Natur, Einstein Forum 2000 p75-108; Hockney & Eastwood: Computer Simulation Using Particles 1975; Steinhauser: Computer Simulation in Physics and Engineering 2012; Kochi: Multi-Scale Modeling of Structural Concrete 2009; Typisch ist Adaption: rückkoppelnde Vernetzung der Subsysteme als Antwort auf veränderte Bedingungen. Sehr flexibles I/O-Verhalten (Zelle, Mensch). Katastrophen als extreme Zustände (zB Subsystemausfall) und mögliche qualitativ auffällige Antworten. Strukturierte skalenfreie Netzwerke als Modell. Reproduktion/Replikanten: Mutation als adaptive Replikation. Evolution der Biosphäre und des Lebens. Kybernetik: Robustheit gegenüber inneren und äußeren Störungen und Adaptivität/Lernfähigkeit basiert auf multiplex (Hierarchie und Parallelität von Subnetzen verschiedener logischer Tiefe), nichtlinear und stochastisch arbeitenden Systemen.

UNIFYING THEMES IN COMPLEX SYSTEMS: Emergence: The relationship of component to collective behavior; the relationship of internal structure to external influence; multiscale structure and dynamics; self-similarity and fractals. **Pesenson: Multiscale Analysis and Nonlinear Dynamics - From Genes to the Brain** 2014; Complexity & Information: Defining complexity; characterizing the information necessary to describe complex systems; structuring, storing, accessing, distributing, visualizing and analyzing information describing complex systems; the dynamics of information and its computational characterization. Dynamics & Self-Organization: Time series analysis and prediction; chaos; temporal correlations; the time scale of dynamic processes; spatio-temporal patterns; dynamic scaling; pattern formation; evolution, development and adaptation; interaction between internal dynamics and external inputs; programmability of self-organization. Networks: **Netzwerke - Linked - Alles mit Allem**. Netzwerke im Ergebnis von natürlichen Wachstumsprozessen. Empirische Analyse vorgefundener Netzwerke (Straßennetz, Telefonnetz, Elektrizitätsnetz, soziale Strukturen). Erklärungsmodelle, intelligenter Umgang mit Netzwerken Netzwerke = Systeme aus Knoten und Verbindungen (Erdös & Renyi). Beispiele: WWW= Dokumente + Links, AIDS= Menschen + sexuelle Kontakte. Zufallsgrafen: Knotengrad Poisson-verteilt, Demokratie in Hinblick

auf Verbindungen. Small world-Netz: Einige Knoten habe langreichweitige Verbindungen. Skalenfreie Netze: Wenige haben viele und viele haben wenige Verbindungen. Es gibt Zentren, Hubs, Hierarchie. Eigenschaften: * **mittlere Verbindungslänge**. Milgram: Das Milgram-Experiment. Zur Gehorsamsbereitschaft 1960; **Milgram 1967:** Je 2 Amerikaner durch eine Kette von im Mittel 6 Bekanntschaften verbunden! Je zwei Web-Seiten durch im Mittel 19 Links verkettet. **Cliquenbildung** = Knotengruppen bei denen jeder mit jedem verbunden ist. **Lokaler Cluster- oder Cliquen-Koeffizient** vom Knoten i ist $C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}$ mit **Knotengrad** = Anzahl der Links von Knoten i und der Kanten/Edges-Zahl E_i zwischen den nächsten Nachbar von i. Beim Bibabutzemann-Haus haben der Dachfirst und die beiden Bodenecken volle Vernetzung der nächsten Nachbarn $C = 1$. **Globaler Cluster- oder Cliquen-Koeffizient** ist $\bar{C} = \frac{1}{N}\sum C_i$. In natürlichen Netzwerken ist die Cliquenbildung weit ausgeprägter als in zufälligen. Skala des Netzwerks = typische Anzahl von Verbindungen eines Knotens. ABER es gibt sie nicht. **Skalenfreiheit** ! Es gibt also immer nur wenige Zentren und sehr viele Einzelgänger. Lässt sich über Entstehungsprozess erklären. -**Wachstum**: es kommen neue Knoten (Agenten) dazu. -**Präferenz**: Verknüpfung erfolgt mit bereits vorhandenen Zentren. -**Stabilität**: natürliche Netzwerke sind i.a. robust gegen Angriffe auf ihre Teile, aber verletzbar durch gezielte Angriffe auf ihre wichtigsten Zentren. Netzwerke werden durch Förderung ihrer Zentren am effektivsten gestärkt (Moskau und Bejing). Jenseits natürlicher und zufälliger Netzwerke gibt es nichtnatürliche, nach Plänen geschaffene Netzwerke im politischen und sozialen Bereich. Weniger robust und effektiv? **Complex network topologies:** Zufallsnetze haben Poisson-Verteilung der Knotengrade, **small-world** = **six degrees of separation** zweier Knoten = Milgram-Modell hat **Knotenabstände** gemäß $L \propto \log N$, and **scale-free** networks $P(k) \sim k^{-\gamma}$ mit $2 < \gamma < 3$ (die meisten Leute haben sehr wenige Verbindungen = k Knotengrad/Anzahl der Verbindungen. Nur wenige haben extrem viele Verbindungen. Hubs), scale-free networks are ultra-small worlds mit **Knotenabständen** $L \propto \log\log N$; connectivity and centrality; motifs, cliques and communities; dynamical networks; adaptive networks; network modeling and analysis; modularity, degeneracy, redundancy, and substructure; visualization of networks. Methodology: Computer simulation; agent-based modeling; data-driven research methods; analytical methods; nonlinear statistics; soft computing; methods and tools for complex systems education.

The **system categories** are: Physical & Chemical Systems: Non-equilibrium processes; hydrodynamics; glasses; non-linear chemical dynamics; complex fluids; molecular self-organization; information and computation in quantum and classical physical systems; spatio-temporal patterns in physical systems from subatomic to astrophysical. Sibani & Jensen: Stochastic Dynamics of Complex Systems. From Glasses to Evolution 2013; Bio-Molecular & Cellular Systems: Systems biology; protein and DNA folding; bio-molecular informatics; membranes; cellular response and communication; genetic regulation; gene cytoplasm interactions; development; cellular differentiation; primitive multicellular organisms; the immune system; origins of life. Physiological & Psychological Systems Nervous system; sensorimotor systems; computational models of neural and cognitive function; perception, cognition and action; psychological dysfunction; pattern recognition; learning and development; human machine interaction; autonomous mental development; neurocognitive networks. Organisms & Populations Population biology; ecosystems; ecology; ecological networks; speciation; evolution. Human Social & Economic Systems: Social networks; corporate and social structures and dynamics; organizational behavior and management; markets; urban development; the global economy; military systems; global conflict; interactions between human and natural systems. Engineered Systems: Design and manufacturing; nano-technology; bioengineering; modified and hybrid biological organisms; computer based interactive systems; multi-agent systems; artificial life; artificial intelligence; robots; communication networks; the Internet; traffic systems; distributed control; self organizing artifacts; complex systems engineering; biologically inspired engineering; sensor networks. special topics: Mathematical Aspects of Social and Cognitive Complexity. Complex Information Flows. Engaging Emergence: Working with Changing Social Systems. in Complex, Volatile Times State-Topology Coevolution in Adaptive Networks.

Schrödinger: Was ist Leben? 1943, Ordnung des aperiodischen Kristalls gibt Ordnung = Genetik. Kaufmann, Eigen, ... Systembiologie, stabile Dynamik, Grenzzyklen komplexer Systeme als Geheimnis derEpigenetik. Granin: Der Genetiker. Das Leben des Nikolai Timofejew-Ressowski, genannt Ur 1987; W̃underlich: Zum

Exodus gezwungen 1933-1945. Lebenswege von Wissenschaftlern aus Berlin-Buch 2014; Das in Berlin-Buch ansässige Kaiser-Wilhelm-Institut für Hirnforschung war zum Zeitpunkt der Machtübernahme durch die Nationalsozialisten eine hochmoderne Einrichtung. Danach erlitt es innerhalb weniger Jahre als Folge zunehmender i politischer Einflussnahmen einen schwerwiegenden personellen und konzeptionellen Verlust. i Politisch missliebige Wissenschaftler wurden vertrieben. Von den verbliebenen Wissenschaftlern wurden im Herbst 1945 weitere Mitarbeiter von der sowjetischen Besatzungsmacht nach Russland deportiert. Der Elektronik-Ingenieur Jan Friedrich Tönnies (1902–1970) trug mit bahnbrechenden technischen Erfindungen maßgeblich zur Entwicklung der Elektrophysiologie bei. Er registrierte 1934 erstmals Ströme vom menschlichen Großhirn. i Tönnies arbeitete bis 1935 in Berlin-Buch und von 1936 bis 1939 am Rockefeller Institut in New York. i Ab 1949 war er ein erfolgreicher Unternehmer, der in Freiburg im Breisgau eng mit der Universität zusammen arbeitete. Nach einer in Berlin-Buch erarbeiteten genetischen Dissertation (1937) folgte Marguerite Vogt (1913–2007) ihren aus politischen Gründen aus dem Institut gedrängten Eltern an das private Hirnforschungsinstitut in Neustadt im Schwarzwald. Ab 1950 arbeitete sie am Caltech in Pasadena und später am Salk Institut in La Jolla (USA), vor allem mit Renato Dulbecco (1914–2012). Ihre Untersuchungen zur Virus- und Krebsforschung waren wegweisend und lieferten frühe Hinweise auf die genetische Natur von Krebs. Der Physiker Karl Günther Zimmer (1911–1988) wurde als Mitautor (neben N. V. Timoféeff- Ressovsky und M. Delbrück) einer brillanten Abhandlung über Genmutation und Genstruktur (1935) bekannt. Mit grundlegenden dosimetrischen Arbeiten machte er sich um die Entwicklung der quantitativen Strahlenbiologie verdient. Nach seiner Rückkehr aus Russland arbeitete er ab 1957 in Karlsruhe und Heidelberg. Timoféeff-Ressovsky & Zimmer: Biophysik Band 1 - Das Trefferprinzip in der Biologie 1947; Fritz-Niggli: Geheimschrift der Biologie 1967; Fritz-Niggli: Strahlenbiologie 1959; Fritz-Niggli: Strahlengefährdung /Strahlenschutz 1991; Hecht, Grundzüge der Radio- und Reaktionschemie 1968 Timofejew-Ressowski, Zimmer, Delbrück: Über die Natur der Genmutation und der Genstruktur 1935; Zimmer: Studien zur quantitativen Strahlenbiologie 1960; **Murphy & O'Neill: Was ist Leben?** Die Zukunft der Biologie 1997; **Biologie für Gymnasien. Natura** 1, 2=7.-10. Klasse bis 3, Lehrerband 1 = 5.+6. Klasse, 1996, Lösungsheftei 1-3; **Genetik und Immunbiologie** 1997; Paläogenetik basiert auf Gensequenz aus den nur mütterlich vererbten Mitichondien. Baer: Biologische Versuche im Unterricht 1960; **Oswald: Die Mühle des Lebens**. Physikalisch-chemische Grundlagen der Lebensvorgänge 1911; Einhaltung des **energetischen Imperativs** Vergeude keine Energie - verwerte sie! **Ostwald: Gedanken zur Biosphäre** 1931, 1978 darin Biologie und Chemie, Vortrag in Berkeley 18.8.1903 p24 freie Energie macht stationäre Zustände, Flamme[18], Flüsse, Wolken und Organismen, fern ab vom Gleichgewicht stabil! Bertalanffy: Biophysik des Nichtgleichgewichts 1952, 1977; Tokin: Theoretical Biology and Biophysics. Notes on the work of E.S. Bauer 1988; Bauer: Die Grundprinzipien der rein naturwissenschaftlichen Biologie und ihre Anwendungen in der Physiologie und Pathologie Springer 1920 =GoogleBooks; Hees & Sinowatz: Allgemeine und Spezielle Pathologie. Kurzlehrbuch 1995; Penzlin: LB der Tierphysiologie 2003[5]; Eckert: Tierphysiologie 1996[3]; Müller: Tier- und Humanphysiologie 1997; Herter: Vergleichende Physiologie der Tiere. Bd1 Stoff- und Energiewechsel. Bd2 Bewegung und Reizerscheinungen 1950; Klinke, Pape & Silbernagel: Physiologie 2005[5]; **Schmidt & Thews: Physiologie des Menschen** 1995[26]; Girndt: Praxis der Hochdruckkrankheiten 1990; Luttmann, Bratke Küpper, Myrtek: Der Experimentator. Immunologie 2008[3]; ARTE Anne Georget: Impfen - Die ganze Geschichte 2022; **Bhakdi & Reiss: Schreckgespenst Infektionen. Mythen, Wahn und Wirklichkeit** 2016 Epidemlogie/Menschen, Infektologie/Mikroben, Immunologie/Proteine. Test-Skandal BSE p271ff, Infektion $\neq$ Infektionskrankheit! p16, 91, 171. Medien sind das Problem. Wahre Gefahren sind nicht medientauglich p309, Angst ist gefragt p290; Holtmann: BASICS Medizinische Mikrobiologie, Hygiene und Infektiologie 2017; Gries & Ly: Infektologie. Kompendium humanpathogener Infektionskrankheiten und Erreger 2019; Spektrum Spezial - Das Immunsystem. Wie es unsere Gesundheit schützt - und bedroht. Spektrum der Wissenschaft Sammlung 2021; Köhler & Eichmann: Immunsystem. Abwehr u. Selbsterkennung auf molekularem Niveau 1988; Crapo: Hormone. Die chemischen Boten des Körpers 1986; Reiss & Bhakdi: Corona Fehlalarm? Zahlen, Daten und Hintergründe, Mai 2020 Horrorbilder und -zahlen morgens, mittags und abends ohne offene Diskussion p126. Totalversagen der öffentlichen Medien p125ff. Fehler der Regierung p82; Reiss & Bhakdi: Corona unmasked. Neue Daten,

[18] Faraday: Naturgeschichte einer Kerze 1860

Zahlen, Hintergründe 2021; **Sucharit Bhakdi** 31.3.2020 Offenen Brief an die ehemalige Bundeskanzlerin Angela Merkel: 1. In der Infektiologie – begründet von Robert Koch selbst – wird traditionell zwischen Infektion und Erkrankung unterschieden. Eine Erkrankung bedarf einer klinischen Manifestation. 2. Eine Reihe von Coronaviren sind – medial weitgehend unbemerkt – schon seit Langem im Umlauf. Sollte sich herausstellen, dass dem COVID-19 Virus kein bedeutend höheres Gefahrenpotential zugeschrieben werden darf als den bereits kursierenden Coronaviren, würden sich offensichtlich sämtliche Gegenmaßnahmen erübrigen. 3. Virus hat sich bereits unbemerkt in der gesunden Bevölkerung ausgebreitet. 4. Unscheide 'gestorben an Covid-19' und 'gestorben mit Covid-19'! 5. Luftverschmutzung im Norden Italien ist eine Besonderheit. Deutsches Gesundheitssystem besser. 11.4.2021 17532-offener_brief_aerosolwissenschaftler.pdf Kontrafunk 14.1.2023 Thekengespräch: Thomas Ly mit Sucharit Bhakdi; B̃ahner: Corona-Impfung. Was Ärzte und Patienten unbedingt wissen sollten 2021; Kontrafunk 1712.2022 Tom Lausen: „Plötzlich und unerwartet" - Pressekonferenz zum Thema Impffolgen; Streeck: Unser Immunsystem. Wie es Bakterien, Viren & Co. abwehrt und wie wir es stärken. Das umfassende Gesundheitsbuch mit praktischen Tipps für unsere Gesundheit 2021; **Klein: Immunologie** 1991; Roitt: Leitfaden der Immunologie 1990[3]; Tardent: Meeresbiologie 1980; Erwin Bauer: Theoretische Biologie, Leningrad, Moskau 1935 Freie Energie wird dazu benutzt, um fern vom Gleichgewicht zu bleiben. Arzt und Biophysiker, 1890 Lech, Österreich, Erschossen 11.1.1938 durch Leningrad NKVD wegen Spionage. Nach medizinischer Ausbildung und ärztlicher Tätigkeit Ungarn 1918 wegen linker politischer Überzeugungen verlassen; emigrierte nach Tätigkeit in Göttingen und Prag in die UdSSR, wo er 1930 den Lehrstuhl für Biologie am 2. Medizinischen Institut in Moskau übernahm; Verheiratet mit Leo Szilards Schwester Stefania. einer der Begründer der theoretischen Biologie; Arbeiten über die Ursachen der Entwicklung und Selbstorganisation der lebenden Materie; erkannte das Prinzip des **stabilen Ungleichgewichts** biologischer Systeme als universales Gesetz, das die Lebensprozesse erst möglich macht. Nahm viele Konzepte der modernen Nichtgleichgewichts-Thermodynamik (Prigogine) vorweg. Homöostase. Wolkenstein 1912-1992: Biophysik; **MV Volkenstein: Glaser: Biophysik 1986, Biophysics 2004; Daune: Molekulare Biophysik 1997; Schünemann: Biophysik; Nelson: Biological physics. Energy, Information, Life 2007; Milo & Phillips: Cell Biology by the Numbers 2016; Berg: Random walks in biology 1992; Romanowsky, Stepanova & Chernavsky: Kinetische Modelle in der Biophysik 1974; Physical approaches to biological evolution** 1994 Vorwort Manfred Eigen; Wolkenstein: Moleküle und Leben. Einführung in die Molekularbiophysik 1969; Wolkenstein: Entropie und Information 1990; Bertalanffy: Biophysik des Nichtgleichgewichts 1952, 1977; **Ebeling & Feistel: Physik der Selbstorganisation und Evolution** 1982 p42; Kammer & Schwabe: Thermo irreversibler Prozesse 1984; **Feistel & Ebeling: Evolution of complex systems. Self-organization, entropy and development** 1989; **Duale Rolle irreversibler Prozesse:** a] als **Ordnungsvernichter nahe dem Gleichgewicht**. b] als **Ordnungsschöpfer fern vom Gleichgewicht**. **Prigogine, Ebeling, Haken: Physik der Evolution.** Synergetik. Biologie als Physik nichtergodischer Systeme. Ebeling: Chaos, Ordnung, Information 1989; J̃acobs: Lecture Notes on Ergodic Theory 1962/63; **Prigogine: Vom Sein zum Werden.** Zeit und Komplexität in den Naturwissenschaften 1979; **Prigogine & Stengers: Dialog mit der Natur.** Neue Wege naturwissenschaftlichen Denkens 1981; Karl **Kraus: Über die Richtung der Zeit**, PhysBl 29 1973 p9-19; Brush: Kinetische Theorie Bd2 Irreversible Prozesse 1966 Boltzmann, Zerlemo, Poincare; Nicolis & Prigogine: Die Erforschung des Komplexen. Auf dem Weg zu einem neuen Verständnis der Naturwissenschaften 1987; Prigogine & Stengers: Das Paradox der Zeit 1993; Ebeling, Engel & Herzel: Selbstorganisation in der Zeit, WTB 309 1990; Feistel & Ebeling: Physics of Selforganization and Evolution 2011; Wilhelm Reich, Burkhard Heim (1925-2001): Wir sehen nur die 3d-Projektion eines 5- oder 6-dimensionalen Raumes, daher erscheinen uns viele Prozesse als zufällig. Das Humangenom ist nur die Inventarliste! Komplexität fordert einen Paradigmenwechsel in der Genforschung - die Analyse einzelner DNA-Bausteine verblasst in ihrer Bedeutung neben dem Zusammenspiel der Erbstrukturen und der Beobachtung komplexer Regulationsmechanismen des Genoms. Text der Gene vs Regulation ihrer Aktivitäten fußt auf einem hoch komplexen Steuerungssystem, das zudem di-

rekt mit Umwelteinflüssen interagiert. Selbstregulatorisches epigenetisches Netzwerk. Ziel ist es, den genauen Schwachpunkt in dem gesamten Netzwerk zu treffen. Aber im Augenblick finden wir nicht einmal diese Netzwerke. Und insofern hat man nur die Möglichkeit, ein großes Schaltermolekül zu entfernen, und dann haben Sie eben 10 000 Wechselwirkungen, die Sie auf einmal stören. Und niemand versteht so richtig, was dann die Konsequenzen sind.

Weisskopf: Das Wunder des Wissens 1964; Einstein & Infeld: Physik als Abenteuer der Erkenntnis 1938 = Exil-Ausgabe aus Leiden, viel bessere Übersetzung als die Nachkriegsausgabe = Evolution der Physik. Physiker als Detektiv, der seinen Dieb glaubhaft erfindet. Galileis Kränkung = Intuition geht im nicht sozialen Bereich oft fehl. Hingegen offenbaren erst unrealistische/idealisierte Experimente die Wirklichkeit. Trägheitsgesetz p5; üble Übersetzung der obigen niederländischen Exilausgabe ist Einstein & Infeld: Die Evolution der Physik 1950 Buchentstehung siehe Teller: Die dunklen Geheimnisse der Physik 1991; Infeld 1898-1968: Leben mit Einstein. Kontur einer Erinnerung 1969 p70-91; **Asimov, Baker, Choppin, Fowler, Holden, Kolenkow, Sands, Weisskopf: Concepts in physics** 1973; **Physik: How to Learn Math and Physics** von John **Baez** http://math. ucr. edu/home/baez/books. html; **Kant: Alle Erscheinungen enthalten das Beharrliche (Substanz) als den Gegenstand selbst und das Wandelbare als dessen Bestimmung, das ist eine Art, wie der Gegenstand existiert.** Angewandt auf die Physik. **Liebscher: The geometry of time** 2005: Geometrie und Physik p142, **1. Wandelbares, Bewegungsgesetze:** Erkläre, was die Änderung der Attribute der Dinge wie Lage, Orientierung, Form und Struktur regiert. **2. Beharrliches, Invarianten:** Erkläre die Klassifikation der unveränderlichen Strukturen wie das PSE oder das Massenspektrum der Teilchen. Letztere sind die Invarianten der Bewegungsgesetze, die mit Symmetrie zusammenhängen. **Symmetrie** wird oft dadurch übersehen, dass Sachverhalte gerade durch Anwendung der Transformation **unverändert** bleiben. Wenn also etwas bei allem Wandel drum herum einfach beharrt, so kann sich dahinter eine Symmetrie-Eigenschaft verbergen. Konservatives Verhalten oder Beharren kann durch ein Symmetrie-Gesetz erzwungen werden. Symmetrie-Transformationen verändern was, ohne dass es als Veränderung wahrgenommen werden kann: Die Drehung (nicht zeitlich gemeint, sondern instantan. Wie beim Zauber des Hütchenspiels) einer Kugel lässt z.B. die Gravitationskraft oder die Abstände unverändert. **Wird alles gemäß der Elemente der Symmetriegruppe verändert, so bleibt alles beim alten.** Siehe auch Epilog von Brandt: The Harvest of a Century. Discoveries in Modern Physics in 100 Episodes 2009; **Kurt Sundermeyer: Symmetries in fundamental physics** 2014; **Schopper: Physik - wie und wozu?** PhysBl31 1975 p4-12 und p49-53; **Ludwig: Wert oder Unwert der Physik** KapXX p481-510 in: Einf in die Grundlagen der theor Physik Bd4 1979; Poincare: Wert der der Wissenschaft 1902; Galilei-Dialog: Unterredungen 1619; **Park: Introduction to strong interaction** 1966 lies Einführung und Vorwort, David Allen Park 1920-2012: Physiker sind Modellschöpfer oder Problemlöser; Intersubjektiver Konsens mensch-gemachter Modelle: **Decartischer Schnitt: Theorie/Modell/Geist ↔ Fakten. Fakten werden erfunden und nicht entdeckt.** Goethe im Faust[19] 1808/1832: **Alles faktische ist schon Theorie** - oft nichtformal und unreflektiert. Kuhn, von

[19] Wer immer strebend sich bemüht, den können wir erlösen. ABER: 1. Faust glaubt nicht an die Auferstehung Jesu Christi und daran, dass dessen Tod und Auferstehung die Menschheit gerettet habe. 2. Eine nostalgische Gefühlsaufwallung, nicht aber die Einsicht, dass der Suizid eine Todsünde sei, hindert Faust daran, einen giftigen Trank auszutrinken. Was das Fehlen derartiger Skrupel anbelangt, gleicht Faust Goethes Figur Werther, der in seinen Äußerungen ebenfalls den Aspekt, dass der Suizid eine Todsünde sei, nicht thematisiert. 3. Faust ist nicht bereit, seine sexuelle Begierde zu zügeln, und gibt auf Gretchens Frage keine klare Antwort, um den Erfolg seiner Bemühungen um Gretchen nicht zu gefährden. Er stürzt sie ins Unglück, indem er sie schwängert und anschließend im Stich lässt. Für Gretchens Verzweiflungstat, die Tötung ihres Kindes, ist er mitverantwortlich. 4. Faust ist an der Tötung von Gretchens Mutter beteiligt und für den Tod ihres Bruders Valentin verantwortlich. 5. Auch an dem Tod von Philemon und Baucis trägt Faust zumindest eine Mitschuld. 6. Seine Geschäfte sind dubios. Mephistos Behauptung, man könne generell Handel schwer von Piraterie unterscheiden, widerspricht Faust nicht. 7. Die schlimmste aller Sünden Fausts besteht darin, dass er sich mit Mephisto eingelassen hat.

Engelhardt & Müller: Goethe - Die Schriften zur Naturwissenschaft. Sieroka: Philosophie der Physik 2014; Koestler: Die Wurzeln des Zufalls 1972; **Fakten** beschreiben zwar unsere **unmittelbare Erfahrung** mit der Welt/Wirklichkeit, nicht aber die **Wirklichkeit** selbst. Physik als naturwissenschaftliche Orientierungskarte, spezieller Blick auf die Welt. Physik als daten- und erfahrungsbasierter Modellbau zwecks Handlungsorientierung. Getrieben durch die in der Ausbildung vermittelte gutartige Paranoia, dass es Regelhaftigkeit in dieser Welt gibt. Spieler. **Nicht-kontingente Experimente**. Regeln im Zufall. **Kontingenz** (lat. contingere: sich ereignen / spätlat.: Möglichkeit; Niklas Luhmann, Talcott Parsons) gebräuchlicher Begriff, um die prinzipielle Offenheit und Ungewissheit menschlicher Lebenserfahrungen zu bezeichnen. Luhmann: Einführung in die Systemtheorie 2017; Luhmann: Soziale Systeme 1984, p152: Kontingent ist etwas, was weder notwendig ist noch unmöglich ist; was also so, wie es ist (war, sein wird), sein kann, aber auch anders möglich ist. Der Begriff bezeichnet mithin Gegebenes (zu Erfahrendes, Erwartetes, Gedachtes, Phantasiertes) im Hinblick auf mögliches Anderssein; er bezeichnet Gegenstände im Horizont möglicher Abwandlungen. Selbst die Wahrnehmung der Welt ist kontingent, ein Individuum kann also beispielsweise den Wald so, aber auch anders wahrnehmen: Einer wird das zu verarbeitende Holz und den Gewinn daraus wahrnehmen, ein anderer die Idylle und das Vogelgezwitscher. Keiner kann von sich behaupten, seine Wahrnehmung sei die einzig mögliche und richtige. Und keiner kann sicher voraussehen, wie der andere diesen Wald nun wahrnimmt aufgrund der Kontingenz des anderen. Kontingenz beruht also auf Unterscheidungen und Konstruktionen, welche immer so und auch anders sein und gemacht werden könnten. Der Begriff bedeutet insofern eine Negation von Notwendigkeit und Unmöglichkeit. **Die prinzipielle Offenheit menschlicher Einstellungen und Handlungen, die zu Komplexität und Unberechenbarkeit führt, soll in manchen Theorien durch eine feste soziale Ordnung überwunden werden.** Luhmann hingegen will sie durch Kommunikation überwinden, bei der durch Beobachtung und Versuch und Irrtum im Lauf der Zeit eine emergente Ordnung entsteht. Diese emergente Ordnung nennt Luhmann „soziales System“. Erkenntnistheoretisch betrachtet ist Kontingenz das (seinerseits kontingente) Wissen darüber, dass jedes Wissen relativ ist. Absolutes Wissen ist prinzipiell unmöglich. „Es kann immer auch ganz anders sein“. Kontingenz hat sich zu einem zentralen Begriff der Erkenntnistheorie entwickelt. Er zeigt, dass in sich geschlossene und gleichzeitig universelle Theorien nicht möglich sind. Erkenntnis entsteht vielmehr in selbstreferentiellen Prozessen, auf der Basis vorheriger Erkenntnisse, die bei jeweiligen Wissenschaftsbereichen oder Individuen unterschiedlich sind. Daher kommen verschiedene Wissenschaftsbereiche oder Individuen auf der Basis ihrer bisherigen Erkenntnisse zu verschiedenen neuen Erkenntnissen. Ein Spezialproblem der Kontingenz ist die doppelte Kontingenz. Sie beschreibt die zunächst scheinbare Unwahrscheinlichkeit von gelingender Kommunikation, wenn zwei Individuen ihre Handlungen jeweils von den kontingenten Handlungen des Gegenübers abhängig machen. Luhmann will die doppelte Kontingenz überwinden durch Kommunikation: Durch Beobachtung des Anderen sowie durch Versuch und Irrtum entsteht im Lauf der Zeit eine emergente Ordnung, die Luhmann „soziales System“ nennt. Die Systemtheorie nach Niklas Luhmann sieht eine Zunahme der Komplexität des Sozialen im Zuge der funktionalen Differenzierung moderner Gesellschaften. Handlungsoptionen haben zugenommen, somit sind Kontingenzerfahrungen wahrscheinlicher geworden. Luhmann nahm diesen Begriff im Sinne von Aristoteles auf, welcher **Kontingenz als nicht notwendig und nicht unmöglich** sah. Was wie oben schon angedeutet bedeutet: es könnte auch anders sein. **Kontingenzbewältigung** ist die Einschränkung des Risikos, enttäuscht zu werden. Das Risiko der Enttäuschung entsteht durch Ungewissheiten, für die man keine Erklärung hat. In der Kulturgeschichte des Menschen wurden dazu viele Strategien entwickelt, um die Welt berechenbarer zu gestalten. Zentrale Bedeutung hat hier die Religion, bzw. deren **Kontingenzunterdrückungs-Mechanismen.** Es gab und gibt jedoch auch andere Systeme, die auf Kontingenzunterdrückung setzen, wie Kommunismus und Faschismus. **Lübbe: Religion ist Kontingenzbewältigungspraxis handlungssinntranszendenter Kontingenzen.** Damit ist gemeint, dass Religion für die schlimmsten Abstürze des Lebens, den Tod, die Trennung nicht etwa Trost, sondern eine Form des Handelns bietet, die das Umgehen mit solchen Katastrophen überhaupt ermöglicht. Die Strategien der **Kontingenzbewältigung** schließen gewissermaßen an die theologische Frage der sogenannten Theodizee an, d.i. die Frage, wie Gott gedacht werden kann in einer Welt des Übels. Eine mögliche Antwort ist seit Leibniz eine ethische: Unterstützung und Hilfe sind bei solchen Kontingenz-Erfahrungen angesagt. Alles andere – z.B. der Versuch der Erklärung – gilt theologisch als Blasphemie (Biblisches Ijob-Buch). Religiöse Deutungssysteme

versuchen Antworten auf die Existenz des Leidens zu geben. Im Christentum und auch bei Schopenhauer wurde die menschliche Existenz als etwas Sündhaftes gedacht, die durch das Dasein abgebüßt werden müsse. Während Paul Gerhardt diese Deutung noch akzeptiert, ist sie bei Leibniz nicht mehr vorhanden. Michael Heidelberger: Die Kontingenz der Naturgesetze; Niederberger: Die Kontingenz der Welt als Problem des Handelns; Henke: Kontingenz als Bedrohung, als Chance und als Gegenwart: Simone de Beauvoir; Alex Bavalas: **noncontingent reward experiments**. Tests, bei denen kein Zusammenhang zwischen dem Versuchsverhalten des Betreffenden und der Bewertung dieses Verhaltens seitens des Versuchsleiters besteht. Diese Nichtkontingenz, das heißt das Fehlen jeder Kausalbeziehung zwischen Leistung und Bewertung, ist der Versuchperson nicht bekannt. **Watzlawick: Die erfundene Wirklichkeit. Wie wissen wir, was wir zu wissen glauben? Beiträge zum Konstruktivismus** 1981 Ernst von Glasersfeld: Enführung in den radikalen Konstruktivismus. Heinz von Foerster: Das Konstruieren einer Wirklichkeit; Wir können nur wissen, was nicht ist. Watzlawick: Wie wirklich ist die Wirklichkeit? 1976; Glasersfeld: Über Grenzen des Begreifens 1995; F̃oerster: Wahrheit ist die Erfindung eines Lügners. Gespräche für Skeptiker 1998; Braitenberg & Hosp eds: **Die Natur ist unser Modell von ihr.** Forschung und Philosophie - Das Bozner Treffen 1995. Peter Mulser, Valentin Braitenberg, Ernst von Glasersfeld, Thomas Bernhard Seiler, Alfred Gierer, Eva Ruhnau, Gerhard Roth, Andrea Sgarro, Claus Kiefer, Guiseppe O. Longo 1996; Koestler: Die Wurzeln des Zufalls 1972; Vollmer: Evolutionäre Erkenntnistheorie 1975; **Kognitive Verzerrungen** = cognitive biases oder cognitive illusions = systematische fehlerhafte Neigungen beim Wahrnehmen, Erinnern, Denken und Urteilen. Bleiben meist unbewusst und basieren auf kognitiven Heuristiken. Ankereffekt = anchoring effect = Wenn Menschen beim Schätzen von Zahlenwerten durch momentan vorhandene numerische Umgebungsinformationen beeinflusst werden, ohne dass ihnen dieser Einfluss bewusst wird. Attributionsfehler = correspondence bias = Die Neigung, die Ursache für ein beobachtetes Verhalten zu oft in (feststehenden) 'Charaktereigenschaften' der handelnden Person und zu selten in den (variablen) Merkmalen der jeweiligen Situation zu suchen. Backfire-Effekt = Die Neigung, Fakten, die der eigenen Überzeugung widersprechen, als Bestätigung der eigenen Überzeugung zu betrachten. Beharren auf Überzeugungen = Das Beharren auf einer hartnäckigen ersten Hypothese, obwohl neue Informationen dieser Überzeugung widersprechen. Belief-Bias = Überzeugungsbias = Die Tendenz, glaubwürdige Schlussfolgerungen zu akzeptieren, unabhängig davon, ob sie logisch korrekt aus den Prämissen hergeleitet werden können. Besitztumseffekt = Endowment-Effekt = Die Tendenz, ein Gut wertvoller einzuschätzen, wenn man es besitzt. Bestätigungsfehler = confirmation biasxi =) Die Neigung, Informationen so auszuwählen und zu interpretieren, dass sie die eigenen Erwartungen bestätigen. Bias blind spot = Verzerrungsblindheit = Die Tendenz, sich für unbeeinflusst zu halten. Clustering-Illusion = auch Apophänie und Pareidolie = Die Neigung, in Datenströmen Muster zu sehen, selbst wenn gar keine da sind. Cross-Race-Effect = Das schlechtere Wiedererkennen von Gesichtern, die nicht der eigenen Ethnie entstammen, im Vergleich zu Gesichtern der eigenen ethnischen Gruppe. Decoy-Effekt = Die Bevorzugung einer von zwei Optionen, wenn eine dritte Option (Köder) hinzugefügt wird, die einer der beiden Optionen in allen Belangen unterlegen ist. Default-Effekt = Die Bevorzugung derjenigen Option, die in Kraft tritt, wenn ein Akteur keine aktive Entscheidung trifft. Déformation professionnelle = Die Neigung, eine berufs- oder fachbedingte Methode oder Perspektive unbewusst über ihren Geltungsbereich hinaus auf andere Themen und Situationen anzuwenden. Dunning-Kruger-Effekt = Die Tendenz von wenig kompetenten Menschen, das eigene Können zu überschätzen und die Kompetenz anderer zu unterschätzen. Dieser Effekt findet nach Charles Bukowski eine umgekehrte Entsprechung im Verhalten kompetenter Menschen: Das Problem dieser Welt ist, dass die intelligenten Menschen so voller Selbstzweifel und die Dummen so voller Selbstvertrauen sind. Emotionale Beweisführung = Die Neigung, eine empfundene Emotion als Beweis für eine Annahme zu betrachten. Gender Bias = Die Neigung, generische als spezifische Maskulina zu lesen bzw. bei Rollenklischees entsprechende Vermutungen anzustellen, z.B. Baggerführer = Mann, Flugbegleiter(in) = Frau. Halo-Effekt = Die Tendenz, von bekannten Eigenschaften einer Person auf unbekannte Eigenschaften zu schließen. Healthy-Worker-Effekt = Healthy Worker Bias = Die Tendenz, bei epidemiologischen Kohortenstudien einen besseren Gesundheitsstatus der Beschäftigten zu finden, weil Berufstätige einen gewissen Gesundheitszustand aufweisen müssen, um ihre Arbeit ausführen zu können, während in der Gesamtbevölkerung auch krankheitsbedingt Arbeitsunfähige zu finden sind. Hot-Hand-Phänomen = Eine zufällige Häufung von Erfolgen im Sport und Glücksspiel wird als 'einen Lauf haben' oder als 'Glücksträh-

ne' angesehen. IKEA-Effekt = Die Neigung, selbst entworfenen oder zumindest selbst zusammengebauten Gegenständen im Vergleich zu fertig gekauften Massenprodukten mehr Wertschätzung entgegenzubringen. Illusorische Korrelation = Die fälschliche Wahrnehmung einer Korrelation zweier Ereignisse. Impact Bias = Die psychischen Auswirkungen eines vorgestellten negativen Ereignisses wie Verlust des Arbeitsplatzes oder Trennung vom Partner werden in Dauer und Tiefe systematisch zu stark erwartet. Katastrophisieren = magnifying = Vergrößern = Die falsche Annahme, dass das Schlimmste, weil es vorstellbar ist, mit hoher Wahrscheinlichkeit auch tatsächlich eintreten wird. Kontrasteffekt = Die intensivere Wahrnehmung einer Information, die zusammen mit einer in Kontrast stehenden Information präsentiert wird. Kontrollillusion = illusion of control = Die falsche Annahme, zufällige Ereignisse durch eigenes Verhalten kontrollieren zu können. Labeling = Sich selbst oder andere mit einer abwertenden, pauschalen und fixen Bezeichnung versehen, z.B. die Bezeichnung 'Verlierer', wodurch selbsterfüllende Prophezeiungen entstehen können, vgl. Etikettierungsansatz. Law of the Instrument = Wenn Menschen, die mit einem Werkzeug oder einer Vorgehensweise gut vertraut sind, dazu neigen, dieses Werkzeug auch dann zu benutzen, wenn ein anderes besser geeignet wäre = 'Maslows Hammer'. Missachtung des Maßstabs = Das Nichtbeachten des Maßstabs eines Problems. Zum Beispiel erklären sich Menschen in einer Studie bereit, im Durchschnitt 78 US-$ für die Rettung von 20.000 Vögeln zu bezahlen. Werden sie hingegen zur Zahlungsbereitschaft zur Rettung von 2.000 Vögeln gefragt, kommt im Durchschnitt beinahe der gleiche Wert heraus. Mitläufereffekt = Bandwagon-Effekt = Wahrgenommener Erfolg erhöht die Bereitschaft, sich voraussichtlich erfolgreichen Handlungsweisen anzuschließen. Moralische Lizenzierung = Wenn Menschen ohne Schuldgefühle eine schlechte Tat vollbringen können, wenn sie zuvor eine gute Tat vollbracht haben. Nachträgliche Begründungstendenz = Die Rechtfertigung des Erwerbs nach dem Kauf einer wenig sinnvollen Sache. Recall Bias = Erinnerungsverzerrung = Fehlerquelle vor allem in retrospektiven Studien. Rhyme-as-reason-Effekt = Wenn Aussagen als eher zutreffend und wahr betrachtet werden, wenn diese gereimt sind. Rückschaufehler = hindsight bias = Die verfälschte Erinnerung an eigene Vorhersagen, die bezüglich eines Ereignisses getroffen wurden, nach dem Eintreten des Ereignisses. Selbstüberschätzung, auch Vermessenheitsverzerrung = Die Überschätzung des eigenen Könnens und eigener Kompetenzen. Selbstwertdienliche Verzerrung und Lake-Wobegon-Effekt = Die Verzerrungen, die der Aufrechterhaltung eines positiven konsistenten Selbstbildes dienen. Self-Reference-Effekt = Schematisierender Effekt des Selbstkonzepts. Status-quo-Verzerrung = Die Bevorzugung des Status quo gegenüber Veränderungen. Survivorship Bias = Verzerrung zugunsten der „Überlebenden"/„Erfolgreichen", Erfahrungen „erfolgloser" Individuen werden nicht gleichermaßen berücksichtigt. Truthahn-Illusion = Die Neigung, einen Trend zu extrapolieren, ohne ihn zu hinterfragen. Die Sicherheit wächst permanent mit dem Trend. Daher ist zum Zeitpunkt des Trendbruchs die Sicherheit am größten, ebenso wie der Schock über den Trendbruch. Unterlassungseffekt = Die Überschätzung der Risiken bei Handlungen im Vergleich zu Nicht-Handlungen. Verfügbarkeitsheuristik = Verfügbarkeitsverzerrung = Ein systematischer Urteilsfehler, der entsteht, wenn die Bewertung der Wahrscheinlichkeit (bzw. Häufigkeit) eines Ereignisses von den leicht verfügbaren Beispielen in unserem Gedächtnis oder von der Anzahl der verfügbaren Beispiele in unserem Gedächtnis geprägt ist. Beispiele, an die wir uns leicht erinnern, erscheinen wahrscheinlicher. Ein Ereignis erscheint wahrscheinlicher, wenn uns dazu viele Beispiele einfallen. Die Einschätzung der Wahrscheinlichkeiten ist verzerrt. Verlustaversion = Die Tendenz, Verluste höher zu gewichten als Gewinne. Wahrheitseffekt = Die Tendenz, Aussagen, die zuvor bereits gehört oder gelesen wurden, einen größeren Wahrheitsgehalt zuzusprechen als solchen, die erstmals gehört werden. Wahrscheinlichkeitsvernachlässigung = Wenn die Eintrittswahrscheinlichkeit kleiner Risiken falsch eingeschätzt wird. Kleine Risiken werden entweder komplett ignoriert oder aber maßlos überschätzt. Zwei-Faktoren-Theorie der Emotion = Die Neigung, situative Hinweisreize zur Kausalattribution von Emotionen heranzuziehen. **Watzlawick: Anleitung zum Unglücklichsein** 1983; Ursache von Leid: Unwilligkeit, Tatsachen als reelle Tatsachen und Ideen als bloße Ideen zu sehen. Tatsachen und Konzepte werden dauernd vertauscht. Watzlawick: Menschliche Kommunikation. Formen, Störungen, Paradoxien 1972; von Thun: Miteinander Reden 1. Störungen und Klärungen 1990; Baecker: Form und Formen der Kommunikation 2007; Baecker: Kommunikation 2000; Baecker: Was ist nochmal Wirklichkeit? Essay im Merkur 2017 DLF 1.1.2018 Essay und Diskurs 9:30 Wirklichkeit wird durch Kommunikation hervorgebracht. Wieviel Fiktion braucht man, um Wirklichkeit realistisch darzustellen? Wir

haben nur mentale Wirklichkeit! Karikaturen geben die Wirklichkeit exakter wieder als hochaufgelöste Fotos. **Einstein:** Sofern die Beschreibung mathematisch exakt ist, besitzt sie keine Entsprechung in der Wirklichkeit. Hingegen haben unscharfe Beschreibungen der Realität gute Entsprechungen. Nolting: Bd7 pVI Karikaturen hilfreicher als detaillierte Beschreibungen. Wir haben nur mentale Wirklichkeit. Die Geschlossenheit des Bewusstseins wird nur unterbrochen durch gelegentliche Blicke/Momente der Aufmerksamkeit auf die Außenwelt. Wie bei Smartphone oder Roboter gibt es gelegentliche Interrupt für die Abfrage der Sensordaten, ganz im Sinne eines Bayesianischen Modells. Im nächsten Schritt wird die Plausibilität des aktuellen, inneren Modells über die Innen- und Außenwelt bei aktueler Datenlage bewertet. Wissenschaft = intersubjektive Bewertung von Modellen nach Vergleich mit empirischen Erhebungen. Kunst = Fiktion schafft Wirklichkeit. Was sich der Fiktion entzieht, ist Wirklichkeit. Hegel: Ende der Kunst! Wachsende Skepsis gegen Kirche, Staat, Wissenschaft, Journalismus, deren Monopolanspruch wird untergraben. Lenin: Staat und Revolution 1917; Mühsam: Befreiung der Gesellschaft vom Staat 1933 Gemeinschaftliche Verantwortung aller. Forderung nach Förderalismus und Gerechtigkeit übersieht die 8 Todsünden und die 10 Gebote. Moral kann staatliche Stabilisierung nicht ersetzen. Aber **Staat** zwecks Begrenzung von Privatfehde und Bürgerkrieg. **Weizsäcker: Wege in der Gefahr**. Eine Studie über Wirtschaft. Gesellschaft und Kriegsverhütung 1976 p135-138 Frieden nur durch umfassenden Bewusstseinswandel; von Weizsäcker: Der bedrohte Friede 1981 p307-311 Marx'scher Sozialismus braucht Staat! p404 **Problem der demokratischen Askese** = mangelnde Resistenz der Tugenden des kleinen Mannes gegen die konsumtiven Lockungen des Wohlstands/Technikkitsch. Henrich: Der vormundschaftliche Staat. Vom Versagen des real existierenden Sozialalismus 1989; Diskurs selbst zerbröselt alles. Wissenschaft löst Gegenstand bis zur scheinbaren Unbegreiflichkeit auf. Scheinbare Fundamente werden wissenschaftlich bezweifelbar. Reflexion entzieht uns den festen Boden/Kinderglauben weg und trägt uns ab diesem Moment. Nicht also der Stein der Weisen kann und helfen. **Derrida** 1930-2004: Dekonstruktion. Völkner: Derrida und Husserl. Zur Dekonstruktion einer Philosophie der Präsenz 1993; Katerina Karakassi ww.kritische-ausgabe.de/hefte/reich/karakassi.pdf Engelmann: Postmoderne und Dekonstruktion. Texte französischer Philosophen der Gegenwart 1990; a] Substanz, Eigenschaft, Inhärenz. b] Kausalität. c] Wechselwirkung. Hegels Dialektik liefert Aufschub, Uneindeutigkeit, Zaudern, Dazwischen-Sein. **Luhmann: Funktion der Religion** 1982 Hegel: Wir brauchen nicht mehr zu beten, wir haben doch morgens die Tageszeitung! Aber im Internet gibt es die Ordnung und Rubrizierung der Zeitung nicht. Ordnung liefern die Bibel, Mathematik oder Physik. Die Medienwirklichkeit muss durch wirklichen Austausch im Gespräch, Arbeit oder Wandern durch die Natur abgeglichen werden! Anderenfalls drohen Selbstverstrickung/-verschränkung, das Unglück der Selbstreferenzierung. **Religion ist individuelle Sinnfrage**. **Frankl: Ein Psychologe erlebt das Konzentrationslager** 1945; Eccles & Robinson: Das Wunder des Menschseins. Gehirn und Geist 1984; **Frankl 1905-1997: Der Mensch vor der Frage nach dem Sinn** 1979 p47ff a] Eine **Tat** setzen. Ein **Werk** schaffen. b] **Lieben**. c] Verwandlung von **Tragödie in Triumph**. Umgang mit Grenzsituationen/Kriegsgefangenschaft; Was ist mein Leben? Was macht mein Leben sinnvoll? Wie bin ich gerechtfertigt vor Gott? Gesellschaftliche Fragen sind nachgeordnet. Neues Testament: 2-Reichelehre = Reich des Kaisers vs inwendiges Reich Gottes/nicht draußen. Siehe Johannes 14:27 in der Apsis der Friedenskirche oder auf Seite 24. Auch in sozial gerechter, ökologischer und pazifistischer Welt bleibt die Sinnfrage. Also auch dann, wenn politisch nichts mehr zu tun ist. Politikkirche geht am Kern vorbei! Kirche vs Religion: Wie übersetzt man das Vokabular der Erlösungsreligion in das Vokabular der spätindustriellen/vollvernetzten Gesellschaft? Macht und Medien widerstehen!; Luhmann: Liebe als Passion 1982; Luhmann: Die Wissenschaft der Gesellschaft 1998; Knipping: Jeder vierte zahlt an Axel Cäsar. Das Abenteuer des Hauses Springer 1963 Knipping: Monopole und Massenmedien 1969; **Johannes Menath: Moderne Propaganda - 80 Methoden der Meinungslenkung** 18.12.2022, Kontrafunk 4.3.2023 Wahrnehmung ist heute medial konstruiert. Unser Wissen ist nicht mehr das Resultat eigenen Erlebens, sondern das einer Vermittlung durch Medien. Wir sehen die Welt durch die Augen von Dritten und sind dadurch anfällig für Manipulationen und psychologische Beeinflussung. Lies Ash, Bernays oder Tocqueville! Techniken der Propaganda zur Lenkung von Meinungen durch Framing, Dämonisierung oder Verzerrung. **Hitler: Je größer die Lüge, desto mehr Menschen folgen ihr. Kästner: Fabian** 1931 Warnung dem Abgrund, dem sich Deutschland und Europa nähern. Meide Massenmedien p29ff Fake

news. Weglassen von berichtenswerte Nachrichten p31. Hinterfrage Standardmeinungen. Bilde dir Urteile selbst! Jungk: Projekt Ermutigung. Streitschrift wider die Resignation 1988; Chomsky: Media control. Wie die Medien uns manipulieren 1997, 2003; **Noam Chomsky. Sternstunden der Philosophie** SRF Kultur 2012; Jungk: Deutschland von außen. Beobachtungen eines illegalen Zeitzeugen 1990; Moser: Report. Über das Elend von Funk und Fernsehen. Ein Insiderbericht 1988; Luhmann: Macht im System 1990; Luhmann: Die Realität der Massenmedien 1995; **Janich: Information** 2000: Experimente haben nichts mit Natur zu tun, sondern sind Artefakte, die nichts beweisen können. Lasse Helium-Ballon fallen. **Methode der Physik:** Naturerscheinung als log/math Konsequenz erster Prinzipe. Der Anfänger zeigt, wie sich alles den bekannte Regeln/Modellen unterordnet. Der Profi baut falsifizierbare Modelle/Regeln für bislang widerspenstige Phänomene. Falsifizierbarkeit. Feynman: Bd2 Kap31: **Angewohnheit der Physiker** = greife bei allen Phänomenen stets nur das **einfachste** Beispiel heraus. **Was Physik NICHT ist! 1. Warum** ist Scheinfrage. Struktur und Ordnungsprizip aber kann angegeben werden. **2. Vorhersagen** machen Techniker. Geräte sind ein Ausdruck davon. Physik will Bahn als Ganzes. **3. Ursache-Wirkung** wird nicht aufgeklärt, eher vorausgesetzt. **4. Theorie muss erraten werden!** Keine bedeutende Theorie kann aus Erfahrung deduziert werden. Umgekehrt muss das aus Theorie deduzierte nicht der Erfahrung entspechen. siehe G. Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd1 1978^2 p3ff; E. Scheibe: Der Fortschritt der Physik im Selbstverständnis der Physiker, In: Vom Verständnis der Natur. Einstein Forum 2000 p127-147; Born: Die begriffliche Situation in der Physik, PhysBl10 1954 p193-201, p241-248; Juhos & Schleichert: Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der klassischen Physik 1963; J̃uhos: Die erkenntnislogischen Grundlagen der modernen Physik 1967; Bondi et al. Physics, Logic, and History. First International Colloquium held at the University of Denver, May 16–20, 1966; Schleichert: Elemente der physikalischen Semantik 1966; Anatol Rapoport: Bedeutungslehre 1972; Schleichert: Wie man mit Fundamentalisten diskutiert, ohne den Verstand zu verlieren, oder Anleitung zum subversiven Denken 1997; Schleichert: Der Begriff des Bewußtseins 1992; **Erhard Scheibe: Die Philosophie der Physiker** 2006, p207 zur Kausalität; Grenzen der Physik: **Physik - ein baufälliger Turm von Babel**. Besser geht es aber grundsätzlich nicht! z.B. Rothman: SdW 2, 2012, p61-65. **Theorie-Lehrbuchreihen** von Neumann, Voigt, Helmholtz, Planck, Jäger, Döring, Haas, **Sommerfeld, Landau & Lifschitz, Schäfer**, **Pauli**, **Hund**, **Joos, Weizel**, Flügge, Stephani & Kluge, Wagner, **Liebscher**, Haake, Mitter, Ludwig, **Thirring**, Wachter & Hoeber, **Schmutzer**, Hänsel, **Jelitto, Greiner, Nolting, Fließbach**, **Rebhan, Scheck**. **Saletan & Cromer: Theoretische Mechanik 1974**; Susskind & Hrabowsky: **The Theoretical Minimum. What You Need to Know to Start Doing Physics** 2013; **d'Espagnat: Auf der Suche nach dem Wirklichen aus der Sicht eines Physikers** 1983; Ẽidemüller: Quanten – Evolution – Geist. Eine Abhandlung über Natur, Wissenschaft und Wirklichkeit 2016 SdW 7.17 p86f; Bernard **d'Espagnat: On Physics and Philosophy** 2006; **Kanitscheider: Kosmologie** - Geschichte und Systematik in philosophischer Perspektive 1984; **Auyang: How is Quantum Field Theory Possible?** 1995;

Aufklärung und Naturwissenschaft vertreiben den Bösen oder Schuldigen bei Krankheiten, auch wenn sich Ratgeber gut verkaufen. Die Suche nach dem Verursacher wird unübersichtlich. **Kränkungen: 0. Hippasus** von Metapont 500 v.Chr. - nicht alle Dinge lassen sich Pythagoreisch durch ganze Zahlen ausdrücken. **1. Kopernikus** - **Erde ist nicht der Weltmittelpunkt. 2. Kant** 1784 Sapere aude! = denke und habe Mut! **Menschen werden an ihrer Denk-Faulheit & Feigheit scheitern!** Also an Selbstentmündigung! Ahrendt: Eichmann 1964. Horkheimer & Adorno: Dialektik der Aufklärung 1969, 1989; Adorno: Erziehung zur Mündigkeit 1969. Siehe Seite 757. **3. Galilei** Intuition geht im Nichtsozialen oft fehl. Unrealistische/idealisierte Experimente = Gedanken-Experimente und Mathematik sind für Naturbeschreibung die besseren Ratgeber! **4. Darwin** - **Mensch hat Verwandte im Tierreich. 5. Marx** Eines der Grundgesetze der kapitalistischen Produktionsweise ist fortwährendes Wachstum. Kapitalismus ist asozial und führt auf das Ende der menschlichen Zivilisation. **Der Mensch wird die von ihm bevorzugte/tolerierte Ökonomie nicht überleben!** Elias: Über den

Prozess der Zivilisation 1976; **6. Chemiker, Boltzmann, Perrin, Einstein:** Es gibt kleinste Bausteine = Atome. Die Welt setzt sich daher aus abzählbar vielen Dingen zusammen. Sexl: Was die Welt zusammenhält 1982; Ujemow, Drujanow & Rosental: Was die Welt zusammenhält, Passat Bd 21 1960; **7. Einstein, Minkowski** Raum und Zeit eines Ereignisses sind vom Bewegungszustand des Beobachters abhängig. Zeit ist keine objektive Größe. Metrik ist physikalische Größe. Geometrie wird zum Gegenstand der Physik. **8. Planck, Einstein, Bohr, Born, Stern, Gerlach:** Man kommt an Quantentheorie nicht vorbei. Es gibt kleinste Phasenraumvolumina. Physikalische Größen sind i.a. keine kontinuierlichen Größen. Quantensprünge sind die Regel: Energien und Drehimpulse können nicht jeden beliebigen Wert annehmen. Das Kontinuum ist eine Illusion. **9. Freud** - **Ich bin nicht der Herr in meinem Hause.** Welt-Sinne-Stammhirn-Cortex-Ich. **10. Gödel:** **Leider kann das Wahre nicht immer bewiesen werden.** Damit ist KI ein uneinlösbares Versprechen, aber praktisch irrelevant. L̃andgrebe & Smith: Why machines will never rule the world. Artificial intelligence without fear 2022; Man entwirft einfach eine neue Theorie, in der das unentscheidbare nicht auftritt. Daher ist Mathematik offen, da man weitere Theorien nutzen kann. i. Wahrheit mit formaler Theorie nicht darstellbar. ii. Widerspruchsfreiheit nicht formal darstellbar. **Lügner-Paradoxon** entspricht Unbeweisbarkeits-Paradoxon. Beweis-Skizze zum **Unvollständigkeitssatz:** Gegeben sei eine Universal Truth Machine UTM, die alle Fragen korrekt beantwortet auf Basis eines endlich langen Programm-Codes P(UTM). **Gödel: G = Die Maschine, die auf der Basis des Programms P(UTM) konstruiert wurde, wird niemals sagen, dass dieser Satz wahr ist.** Also: **UTM wird niemals sagen, dass G wahr ist.** Falls die UTM nun sagt, dass G wahr ist, dann ist G in Wahrheit falsch, und UTM hat eine falsche Aussage gemacht. Damit ist gezeigt, dass die UTM niemals sagen wird, dass G wahr ist. Also ist **UTM wird niemals sagen, dass G wahr ist** keine wahre Aussage. Also ist G trotzdem auch wahr. Damit darf Gödel behaupten: **Ich kenne eine Wahrheit, die UTM niemals erkennen wird. Ich aber weiß, dass G wahr ist. Somit ist die UTM nicht im Allgemeinen gültig!** Obwohl dieser Lehrsatz mathematisch bewiesen werden kann, ist seine Aussage, dass der rationale Verstand sich nicht zur endgültigen Wahrheit vorarbeiten kann! KI ist nicht möglich. Yourgrau p75ff. Gödel: Wifo 10/1978 p399; Goldstein: Jahrhundertmathematiker und großer Entdecker 2007; **Beweis** = Begründung für aufgestellte Behauptung/Aussage siehe Mittelstraß: Enzylopädie p304. Beweisfehler p305; Schreiber: Grundlagen der Mathematik 1977; Nagel & Newman: Der Gödelsche Beweis 2010[9]; **Dawson & Kellner: Kurt Gödel. = Herr Warum** Leben Und Werk (Computerkultur) 1999; Hofstadter: Gödel, Escher, Bach 1979; Stegmüller: **Unvollständigkeit und Unentscheidbarkeit**. Hofstadter: Die FARGonauten. Über Analogie und Kreativität 1996; Die metamathematischen Resultate von Gödel, Church, Kleene, Rosser und ihre erkenntnistheoretische Bedeutung 1970[2]; **11. Einstein, Gödel**, Barbour: **Es gibt nur Existenz oder Zeit.** Zeit ist auf der Mensch-Skala sinnvoll und für Humanoide nützlich, aber keine fundamentale Größe. da Vinci: Ungleichheit ist die Ursache aller örtlichen Bewegung. Die Bewegung ist die Ursache alles Lebens. Hier ist nicht die Diffusion als Folge der Gradienten gemeint, sondern die Ordnung der Dinge: Es gibt unterschiedliche Dinge! Die akausalen ordnen wir räumlich, die kausalen ordnen wir zeitlich. Gödel: Eine Bemerkung über die Beziehungen zwischen der Relativitätstheorie und der idealistischen Philosophie. In: Schilpp: Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher - zum 70. Geburtstag, 1955; http://khazarzar.skeptik.net/books/ `ein_mat/ph_natur`/index.htm **12. Einstein, Rosen, Podolsky 1935, Bell 1960, Aspect 1980** Fehlannahmen: a] Jede Theorie muss das Prinzip des physikalischen Realismus erfüllen = alle Zustände exitieren bereits vor der Messung! b] Prinzip der Lokalität! Aber Zustand $\Psi(\vec{x}, t)$ ist zu zu einem Moment t_0 an allen Orten zugleich fixiert. Anders als bei Punktteilchen der Mechanik. Dazu kommt die tensorielle Verschränkung des Zustandes bei mehr als einem Teilchen. **Realismus und Lokalität sind mit der QM unvereinbar.** Anders Einstein 1935: gemessene Eigenschaften sind schon vor der Messung da! Heisenberg: Nein! v. Weizsäcker: Ortsbestimmung eines Elektron durch ein Mikroskop, ZfPhysik70 p114 1931; PJ14 Nr3 p37, Nr5 p15 2015; Wiseman: Das Ende des lokalen Realismus SdW Feb 2016 p14-16 alternativlos! Welt realistisch: 1. Prinzip = Ein Exp enthüllt nur Eigenschaften der Welt, die zuvor schon existiert haben. Das gilt für QM nicht. 2. Prinzip = Lokalität = beschreibt, wann Veränderungen an einem

Ort einen anderen beeinflussen können. Information läuft maximal mit c. Trifft für QM nicht zu. Selbst die Wellenfunktion $\psi(q)$ überlebt die Relativistik nicht - ein Ausweg ist die Streu-Matrix. **13. Pater Dubarle 1948: Die Zivilisation wird an maschineller Regelung menschlicher Angelegenheiten scheitern.** Siehe auch von Neumann, Wiener, Weizenbaum Seite 41, Steinbuch und Kurzweil auf Seite 41. Samuel Butler: Von Schwätzern, Schwärmern und Hallunken 1984; Butler: Wollschwein und Tafelsilber. Notizen eines viktorianischen Querdenkers 2005; K̃oestler: Das Gespenst in der Maschine 1968; Mumford: Mythos der Maschine 1976; Mumford: Hoffnung oder Barbarei. Die Verwandlungen des Menschen = The transformations of man 1956; Kränkung durch Maschine: Googles PALM = Pathway Language Model = neuronale Netz mit $5.4{\cdot}10^8$ Parametern. **14. Meadows: Es gibt Grenzen des Wachstums** 1972 Club of Rome. **Teller: Energie** für ein neues Jahrtausend 1975, 1979, 1981 = US-Antwort auf Club of Rome/MIT, 1 Quad = 293 GWh = Energiemenge von Iowa 1973; **15. Statt, Gott sieht alles,** muss es seit 2006, wegen Smartphone/sozialer Netzwerke heißen, nicht nur Er - **jeder kann alles sehen**. 2021 bereits über 250,000 Basisstationen in Deutschland, Vogel: Die Anker des Mobilfunks, PhysJ20 2021 H11 p38f; Durch Maschinen offenbaren sich nun die Gedanken eines jeden jedem. Sogar uns selbst: Das wahre Ich des Menschen siehe Rudder: Inside Big Data. Unsere Daten zeigen, wer wir wirklich sind 2016; Auch über politische Ansichten, verraten unsere Daten vieles, was wir öffentlich nicht kundtun!; **Elsberg: ZERO - Sie wissen, was du tust** 2016; **Ash: Prinzipien für eine vernetzte Welt** 2011 Redefreiheit vs Gotteslästerung oder Rassismus. **Instagram** Online-Dienst zum Teilen von **gefilterten/augmented** Fotos und Videos. **2010**. Mischung aus Microblog und audiovisueller Plattform. Fotos auch in anderen sozialen Netzwerken verbreitbar. 2016 werden jede Minute mehr als 40.000 Fotos und Videos und damit täglich knapp 60 Millionen Beiträge hochgeladen. **Snapchat** = IM = Instant-Messaging-Dienst für kurzlebige Nachrichten ***2011**. Ab 2012 $20{\cdot}10^6$ Bilder/**Snaps** pro sec. Nach einmaligem Ansehen löscht sich das Video automatisch. 2016 $10 \cdot 10^9$ pro Tag. Benutzer unter 13 Jahren, konnten zwar auf den aufgenommenen Bildern malen, sie verzieren/morphen, jedoch keine Bilder an andere Nutzer verschicken. **Filter / Augmenter:** aktuelle Uhrzeit, Temperatur, Akkustand, geogr Höhe, Schwarzweiß- und Sättigungsfilter, Geofilter. Smileys klassifizieren/kodieren den Freundeskreis/Status. Baby-Smiley = frisch 'befreundet'/beschnuppert/wahrgenommen. Geschichtenerzählungen/Storys bleiben 24 Stunden verfügbar und werden danach automatisch gelöscht. Im Oktober des Jahres 2014 geriet eine Sammlung von etwa 200.000 Bildern in den Umlauf. **16. Unser Körper ist das Gehäuse seiner Gene** Dawkins: Das egoistische Gen 1976 **17. Wir sind Holobionten!** = Gemeinschaft verschiedener Lebewesen, die sich zu einem größeren Organismus zusammen getan haben. Das Gehäuse ist daher in erster Linie ein Biotop für Mikroben (Viren, Bakterien) und **erst in zweiter Linie die Heimstadt unseres Gehirns.** Kein Lebewesen ist mit sich allein. Biologische Individuen existieren nicht und haben nie existiert. Kegel: Die Herrscher der Welt. Wie Mikroben unser Leben bestimmen 2015; **18. Dynamische Systeme!** beherbergen heimtückische Instabilitäten.

Physik lehren? Heißt modellieren lehren!!! Problemlösen im Team! Entdeckendes und forschendes Lehren gemäß S̃chleichert: Elemente der physikalischen Semantik 1966; Wagenschein: Verstehen lehren 1968, 1981 Mondentfernung braucht keine Trigonometrie; **Trigonometrie** = Dreieckslehre = erblicke in alles Polygonen Dreiecke. Diese Dreiecke zerlege in rechtwinklige Dreiecke, für die wegen Pythagoras und Ähnlichkeit leicht Seiten- und Inhaltsberechnung möglich. **Eselsbrücken:** Gegen zu An ist tan. Sinus = Sie Nuss, Sie da drüben. Cosinus = Kosi, kosi (kuscheln wegen Ankathete beim Winkel, so kuschelt Winkel mit Ankathete). Beim Umstellen von Gleichungen hilft dem Anfänger die URI-Pyramide $R = \frac{U}{I}$. Nenner U wohnt im Dach, R und I wohnen im Erdgeschoss. Die Decke über R und I wirkt als Divisionszeichen. Die Wand zwischen R und I bedeutet das Mal-Zeichen. Cibilla. Riedel: Duden Allgemeinbildung - Eselsbrücken: Die schönsten Merksätze und ihre Bedeutung 2013; Riedel: Eselsbrücken. Die besten Merksätze und ihre Bedeutung 2006; Thörner, Bade, Meike: Eselsbrücken: Merksätze, Gedichte und ganz viel Lustiges 2016; Wagenschein: Kinder auf dem Weg zur Physik 1973, 1990, Wagenschein: Die pädagogische Dimension der Physik 1976. **Spinthariskop = Atomic Energy Lab!** Strahlerstift ^{226}Ra mit 4 kBq U8483115 trifft auf

Zinksulfid. Wisse: **Alle Modelle sind falsch!** Worte belehren, aber Beispiele reißen mit. Seneca: Mühsam ist der Weg durch Lehren, kurzweilig durch Beispiele. Horaz: Wer gut aussucht, lehrt gut. Denn es ist nicht möglich, alles zu wissen. Ziel: Vorstellungskraft, abstraktes Denken und Aufmerksamkeit schärfen. Geist trainieren und erweitern. Neben erzählten Geschichten bereichern auch mathematische und naturwissenschaftliche Theorien und Modelle die Innenwelt und schirmen uns ab von den Härten des Lebens, weil wir verstehen und daher hoffend gezielt ausweichen können. Wir fühlen uns wohl, wenn wir Anschluss und Nestwärme an die naturwissenschaftliche Sicht vergangener Kulturen und zu der Wirklichkeit, die sie beschreibt, haben. Denken wir uns in die abstrakten Vorstellungen ein, so werden wir psychologisch zu einem Teil ihres Personals. Geschichten und Modelle der Welt sind ein erstklassiger Empathielieferant. Das stellt Gemeinsamkeit und Nähe mit der gegenwärtigen Wirklichkeit und vergangenen Kulturen her. Holmes & Wieman: Introductory physics labs: We can do better 2017 Research reveals that labs are more effective when their goal is to teach experimental practices rather than to reinforce classroom instruction. Basiskompetenzen: a] Rechenkunst, b] Statistik/Stochastik, c] Methoden zum Vergleich von Modell und Messung, d] Computerhochsprache. **1. Wie komme ich an BEKANNTES Wissen über die Natur?** Elementar siehe Zeitler & Simon: Physik für Techniker 2008[5] und Metzler: Physik; **Was gehört in Physik-Ausbildung?** Breite Kenntnis der Grundlagen! Bitte nicht zu modern und speziell! Siehe PhysBl17 1961 p1; Rolf Heilmann: Eine Anleitung zum schnellen Denken. Mit Physik zum Erfolg 2018; **Kompetenz** = Eignung, zusammentreffen, ausreichen, zu etwas fähig sein, zustehen. Lynn Holt: Ersetzung der Kompetenz des Einzelnen durch die Methode. Beginnt bei Descartes mit Verortung oder Rechnen statt Zeichnen. **Kalkül ersetzt Anschauung, aber nicht das Verstehen.** Dennett: Kompetenz ohne Verstehen[20]. **Hilbert & Cohen-Vossen: Anschauliche Geometrie** 1932 online siehe http://gdz. sub.uni-goettingen. de/dms/load/img/?PPN=PPN379425343&DMDID=DMDLOG_0006; **Ehrenfest-Afanassjewa: Übungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse** 1931; **Leibniz: Ersetze Kontroversen durch Berechnung. Konsequenz für das Lehren:** Versuche einen Ausgleich der verherenden Wirkung der Methodenauslagerung, die zwar einen raschen und sicheren Zugriff auf und Umgang mit Gewissheiten sichert (Computer-Algebra und Wikipedia), aber dem Verstehen entgegensteht und Basis-Ideen verdeckt und geheimisvoll erscheinen lässt. Wissen als Geheim-Code. Statt Semantik der Grundbegriffe wie Punkt nur logische Beziehungen zwischen Grundelementen. Anatol Rapoport: Bedeutungslehre 1972; Statt Inhalt, Semantik und Wahrheit sollten Form, Syntax und Beweis herrschen. Gödel zeigte, dass den Elementen eines formalen Systems formaler Arithmetik (den Zeichen oder Symbolen selbst, also Symbolfolgen/Formeln und Folgen von Formeln, eben auch beweisen) eine numerische Darstellung zugeordnet werden kann: Gödelisierung. Yourgrau p77; Geometrie (logisch formal, absolut sicher, Math, inhaltsleere Begriffs-Schemata) & Erfahrung / Anschauung Zwei Wege des Verstehens: Geometrische, bildhafte Vorstellung und/oder beispielhaftes mechanisches/verdrahtendes Einüben von Methoden. **Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette, Dillard-Bleick: Analysis, Manifolds and Physics** Pt1 Basics 1982 2009 pVff Physik verstehen heißt oft nur, mit ihr vertraut zu sein, daher zweifeln Anfänger an sich selbst oder der Physik. Mathematische Physik aber kann zum besseren Verstehen der Physik führen; **Einstieg-Physik: Einstein & Infeld: Physik als Abenteuer der Erkenntnis** 1938 oder die üble Übersetzung Evolution der Physik 1950; Grimsehl, Westphal, Rechnagel, Gerthsen oder moderner Halliday, Resnick, Walker: Physik 2005; Christman: Fundamentals of physics. Halliday, Resnick, Walker's student's pocket companion 1997[5]; **Giancoli: Physik** 2009[3] 1640 Seiten. Einfacher als Gerthsen; Tipler: Physik; Mills: Bachelor-Trainer Physik zu Tipler/Mosca 2007; Hellenthal: Physik für Mediziner und Biologen 1998[6]; Herr, Bach & Maier: Technische Physik. Lehr- und Aufgabenbuch 2008; Kurzweil, Frenzel, Eichler, Schiewe: Physik Aufgabensammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler mit Fragestellungen aus der Physikalischen Chemie und Technik 2012[2]; Langkau, Linström & Scobel: Physik kompakt. Bd1 Mechanik. Bd2 Fluiddynamik und Wärmelehre. Bd3 Elektromagnetische Wellen. Bd4 Statistische Physik. Bd 5 Quan-

[20] Daniel Dennett: Von den Bakterien zu Bach - und zurück - Blick des Philosophen auf die Evolution des Geistes 2018 Körper und Geist, Natur und Kultur - dazwischen besteht kein grundlegender Unterschied. DLF 8.8.2018 https://www.deutschlandfunk.de/daniel-dennett-von-den-bakterien-zu-bach-und-zurueck-blick. 676.de. html?dram:article_id=424960

tenmechanik 1996; Paus: Physik in Experimenten und Beispielen 1995, 2007[3]; Pelte: Physik für Biologen 2005; Otten: Repetitorium Experimentalphysik für Vordiplom und Zwischenprüfung 1998; **Kompakter, Mathematik getragener Einstieg** oder **Theoretische Grundlagen der Physik kompakt:** Liebscher: Theoretische Physik. Eine Übersicht 1973 - alles auf 370 Seiten; Haake: Einführung in die theoretische Physik 1983 - alles auf 356 Seiten; Honerkamp & Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993; Hertel: Theoretische Physik 2007 - alles auf 380 Seiten; Günther: Bewegung in Raum und Zeit. Eine Einführung in die Physik 2012; Harris: Moderne Physik. Ein Lehr- und Übungsbuch 2013; W̃eidlich: Grundkonzepte der Physik. Mit Einblicken für geisteswissenschaftler 2014; W̃alecka: Introduction to modern physics 2008; Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010; P̃oole: The Physics Handbook - Fundamentals and Key Equation 2006; Shankar: Fundamentals of Physics. Mechanics, Relativity, and Thermodynamics. Open Yale Courses 2014; **Ñakahara: Differentialgeometrie, Topologie und Physik** 2013; **Houston: Principles of mathematical physics** 1934; **Houston: Introduction to mathematical physics** 1951; **B̃and: Introduction to mathematical physics** 1959; **Menzel: Mathematical physics** 1961 Mechanik, Hydrodynamik, SRT und ART; **Triebel: Analysis und mathematische Physik** 1981 Variationsrechnung Kap11, Mechanik Kap12, Maßtheorie Kap13, Singularitäten Kap15.4 Kap34, Residuen Kap15.5, Hydrodyn Kap16, KlassFeldtheorie Kap24, SRT Kap25, QM Kap28, Geometrie auf Mannigfaltigkeiten Kap29, ART Kap30&31; Blumenberg: Die Lesbarkeit der Welt 1986. Was war es, was wir wissen wollten? Was war es, was wir erhoffen durften? Welches war die Welt, die man haben zu können glaubte? Blumenberg: Wirklichkeiten, in denen wir leben 1986. Es gibt nicht nur eine Wirklichkeit, nicht nur eine Geschichte, sondern mehrere Wirklichkeiten nebeneinander, unendlich viele Geschichten. Ist mit Jacques Derridas Auffassung von Pluralität zu vergleichen. **2. Wie komme ich an das UNBEKANNTE Wissen über die Natur?** Qualitative Heuristik! **Ẽnz: Pauli, das Gewissen der Physik 1983** darin **Pauli: Der Einfluss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlicher Theorien bei Kepler** 1952; Descartes: Discours de la méthode. Heuristische Regeln für die wissenschaftliche Erkenntnis: 1. Nichts annehmen, ohne Evidenzprüfung. 2. Komplexe Aufgaben in einfache zerlegen. 3. Beim Einfachsten beginnen 4. Allgemeine Übersichten einbeziehen. Grundmann: Vom Ursprung der Universität im Mittelalter 1957; **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990 p143 Engels: Technische Bedarfe/-Nöte helfen der Wissenschaft mehr als zehn Universitäten; **Leibniz:** Ars inveniendi. via demonstrativa also von Axiomen ausgehend mit z.B. Infinitesimalrechnung und via indicativa kombinatorisch vorgehend. In Schule & Uni stehen der kleine Kathechismus im Vordergrund - die Crash-Kurs-Vermittlung der von vergangenen Generationen geschöpften Systematik und gepflegten Traditionen. In der Schule die Zuordnung der qualitativen Relationen phys Begriffsbildungen in bezug auf alltagsnahe Erfahrungen. In der Uni die mathematischen Relationen. Physik als theoriengeleitete Erfahrungswissenschaft ist aber Problemsuche/-Stochern im Nebel, datengetriebene Modellierung und Daten-Modell-vergleichendes Akzeptieren/Verwerfen. Datengetriebener industrieller Komplex. Es geht ums Erfinden von Begriffen und Kategorien im Sinne des Aufstellens von Netzen und anderen Fallen für die Wirklichkeit. **Mathematik in der Schule = Rechnen** = Vertraut machen mit praxisrelevanten Kalkülen = Abfallprodukt/Spinoff von Mathematik. Wirth: Algorithmen und Datenstrukturen vs Programmierung in Schule ct 23/2017 p30, 24/2017 p6; **Language of coding.** Treibe Informatik und Numerik. Kalküle, später Mathematik als Gottersatz. Zum Erfinden von Begriffen, Entdecken von Sätzen und Beweisen ist leider oft zu wenig Muße. Das Rechnen in Schule und Hochschule wird daher eher als eine Naturwissenschaft wahrgenommen in der es viele Rezepte gibt. **Klein: Mathematik-Lehrer erlebt zwei Diskontinuitäten/Schocks:** 1. wenn er von Schule zur Uni kommt. 2. wenn nach dem Abschluss wieder in die Schule kommt. Hund: Geschichte der physikalischen Begriffe; Solide Physik-, Informatik- und Mathematik (hier insbesondere Stochastik und Schätzung von stochastischen Modellmerkmalen) -Kenntnisse bleiben die Grundlage zur Lösung der meisten uns heute noch unbekannten Probleme. Physiker sind gern gesehene Modellierer, da Praxisprobleme oft keine klare begriffliche Gestalt haben. Es muss zunächst ein adäquates mathematisches Modell erraten werden. Bei der Umsetzung in ein computationales Modell kommen informatische und numerische Aspekte ins Spiel. Physik = mathematische

Modellierung der Welt auf Basis weniger Grundgesetze. Heber 1927-2010 & Kozik: Physik. Eine Einführung 1970 p17ff; **Born: Physik im Wandel meiner Zeit** 1957; Born: Symbol und Wirklichkeit, PhysBl 20 1964 554f, 21 1965 53-63, 106-108;

Müller & Furjanic: **Fermiprobleme** PdNSiP Bd50 2001 H8 p13-36; **Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule = PdN** UB Golm UA7040; **Fermi-Fragen:** quantitative Abschätzung für ein Problem, zu dem zunächst praktisch keine Daten verfügbar sind. Wieviel Hauptspeicher lässt sich maximal mit einer 64 Bit-Architektur eines Computers adressieren? **Fermi-Methode** siehe Santos: How Many Licks?: Or, How to Estimate Damn Near Anything 2009; Wieviel Bits sind nötig, um die Moleküle eines Liters eines Gases zu adressieren? Wieviel Byte braucht man zur Adressierung aller Anfangsbedingungen aller Moleküle? In einem Regal stehen 10 verschiedene Bücher. Wie lange braucht man, um alle 10! = 3 628 800 Anordnungen auszuprobieren? Ein Jahr bei 9942 Anordnungen pro Tag oder 7 pro Minute. 1 Jahr = 31 536 000 sec.

Russo & Denninger: Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens 1996, 2005; Wissenschaftliche Methode der Hellenisten: Euklidische Geometrie ist Physik oder Modell der menschlichen Raumerfahrung. Die euklische Geometrie ist wahr, gemessen an der Alltagserfahrung. Die hyperbolische insofern falsch. Mathematisch sind beide gleichwertig wahr, sofern sie in sich konsistent formuliert sind. Wirklichkeit und Modell nicht verwechseln/identifizieren. Gleichwohl gehören beide zur Realität, es sind Dinge, die unabhängig von unserem Denken existieren. Es gibt zwei Wahrheiten. **Einstein: Geometrie & Erfahrung**. Einige Geometrien sind gute physikalische Modelle der Wirklichkeit. Hecht: Leibniz im Philosophischen Diskurs über Geometrie und Erfahrung 1991; Hilbert: Grundlagen der Geometrie 1903; Hilbert: Die Grundlagen der Physik 1915; Mainzer: Geschichte der Geometrie 1980; M̃lodinow: Das Fenster zum Universum. Eine kleine Geschichte der Geometrie 2002; Russo & Denninger, 1996, 2005: Die modernen Naturwissenschaften wurden nicht im 16. und 17.Jahrhundert erfunden, sondern aus alten Skripten neu entdeckt, die zu dieser Zeit in großer Zahl nach Europa gelangten. Diese Wissenschaften gab es schon im 4. und 3. Jh.v.Chr. Leonardo da Vinci - ein Genie, das seiner Zeit um Jahrhunderte voraus war? Nicht ganz. Er war teilweise nur ein genialer Kopist griechischer Autoren. Leonardos schriftliche Erläuterungen reichen an Herons Skizzen oft nicht heran. Galilei? - Galilei einer derjenigen, der die griechischen Autoren noch am besten verstanden hat und die deduktiv-hypothetische Methode weitergetragen hat. Kopernikanische Revolution? Die Beschäftigung mit den Klassikern führte auch zur Wiederentdeckung der Erdbewegungen. Das erste Werk der Neuzeit in dem die tägliche Drehung der Erde um ihre Achse festgehalten wird, verfasste 1525 Celio Calcagnini, ein Professor für Literatur(!) in Ferrara. Seine Argumente für die Rotation der Erde bestehen im Wesentlichen aus einer Reihe klassischer Zitate von Virgil bis Archimedes. Sobel: Galileos Tochter. Eine Geschichte von der Wissenschaft, den Sternen und der Liebe 2008; **Padova: Das Weltgeheimnis. Galilei und Kepler** 2010; Kepler? - mehr Naturphilosoph, denn Wissenschafter Newton und die Dispersion? Newton schreibt am Anfang seiner Erklärung für den Regenbogen:'...Der Regenbogen entsteht durch Brechung des Sonnenlichts in den fallenden Regentropfen. Dies haben schon einige der Alten eingesehen. Dominis war also nicht nur ein Pionier der modernen Theorie der Dispersion. Offenbar muss er auch als einer der Begründer der 'experimentellen Methode' angesehen werden ... Dominis behandelt in seinem Buch auch die Theorie der Linsen und erklärte auch die Funktion von Teleskopen, obwohl diese Instrumente damals wohl noch nicht existierten. Die Entwicklung der Optik war offenbar von unglaublichem Pech verfolgt. In der 'Antike' wusste man zwar, wie man gute Linsen herstellen, nicht jedoch, was man mit ihnen anstellen sollte. Man betrachtete sie als Spielereien. Spätere Intellektuelle - nicht nur Leonardo und Fracastoro, sondern auch Roger Bacon und Grosseteste Jahrhunderte vor ihnen - kannten zahlreiche Verwendungen, konnten sie jedoch nicht herstellen und hatten derartige Dinge nie gesehen. In einigen mittelalterlichen Manuskripten findet man sogar Abbildungen von Astronomen, die durch lange Röhren in den Himmel schauen. Man erklärte sich diese Unstimmigkeit mit der Vermutung, es habe sich dabei um leere Zielröhren gehandelt. Verfolgt den Inhalt und die Geschichte vergangener Werke und setzt so einen Teil einer verlorenen Welt neu zusammen. Plädoyer für die Brillanz der Wissenschaften in den 200 Jahren nach dem Beginn des hellenistischen Zeitalters im Jahre 320 v.Chr. Wendet sich gegen den Mythos eines sich kontinuierlich fortsetzenden Fortschritts. Keine wissenschaftliche Revolution ist unwiderruflich. Kein Wissen ist endgültig, alles, was eine Zivilisation mit großen Mühen erreicht hat, kann verloren gehen. Russos Buch

liest sich wie die Geschichte des 'Aufstiegs und Untergangs des wissenschaftlichen Rationalismus der Antike.' Bringt Geistesgrößen nahe, die bisher im Schatten von Persönlichkeiten wie Aristoteles, Platon oder Cicero gestanden haben. Zeichnet ein antikonformistisches Bild einer hellenistischen Welt, die von den Römern gewaltsam zerstört wurde. Der Gedanke eines unaufhaltsamen wissenschaftlichen Fortschritts 'naiv und gefährlich'. Er hat sich nur durchsetzen können, da die Erinnerung an das Scheitern der Wissenschaften in der Antike aus unserem Gedächtnis getilgt worden sei. Russo verlegt die Entstehung der Wissenschaften um 2000 Jahre vor, ins hellenistische Griechenland. **Bernal: Die Wissenschaft in der Geschichte** 1961, 1967[3];

Mathematik = Beweisende Wissenschaft = Allumfassenden Strukturwissenschaft, Hirngespinst, reines Denken, unabhängig von Erfahrung, Wunder und Kraftquelle unserer Kultur. Ausdruck symbolischer Gestaltung. Bevor etwas als Realität erkannt werden kann, muss es in irgendwelche apriorisch erkennbaren mathematischen Formen treten. H̃onerkamp: Wissenschaft und Weltbilder. Wie Wissenschaft unser Leben prägt und wir uns letzten Fragen nähern 2014; H̃onerkamp: Denken in Strukturen und seine Geschichte. Von der Kraft des mathematischen Beweises 2018; **Grinberg: Lösungsstrategien. Mathematik für Nachdenker** 2011; Bronstein, Semendjaew, Grosche, Ziegler, Zeidler: Taschenbuch der Mathematik 1958, Zeidler I & II 2003 Springer-Taschenbuch der Mathematik 2012[3]; **Naas & Schmid: Mathematisches Wörterbuch mit Einbeziehung der theoretischen Physik** 1961; Rottmann = Mittelstaedt: Mathematische Formelsammlung 1960, 1991[4]; CFv Weizsäcker: Der Mensch in seiner Geschichte 1991; **Mathematik - Was man lesen sollte!** siehe **Arnold: On teaching mathematics** 1997; Meschkowski & Laugwitz: Meyers Handbuch über die Mathematik 1972[2] p5; Mathematik PhysBl22 1966 241-250; **Davis & Hersh: Erfahrung Mathematik** 1994[2]; **Waismann: Einführung in das mathematische Denken. Die Begriffsbildung der modernen Mathematik** 1936, 1970; S̃charlau: Das Glück, Mathematiker zu sein. Friedrich Hirzebruch und seine Zeit 2016; Scharlau: I megalli istoria - Die große Geschichte 1999; Scharlau: Mathematik für Naturwissenschaftler 2005; Scharlau: Wer ist Alexander Grothendieck? Anarchie, Mathematik, Spiritualität, Einsamkeit. Eine Biographie. Teil1 Anarchie 2011; Scharlau: Wer ist Alexander Grothendieck? Anarchie, Mathematik, Spiritualität, Einsamkeit Eine Biographie Teil 3: Spiritualität 2013; Crilly: 50 Schlüsselideen Mathematik 2000; **Roman: Some modern mathematics for physicists and other outsiders.** Vol1, 2Bde An Introduction to Algebra, Topology, and Functional Analysis 1975 B̃d2; Tietze: Gelöste und ungelöste Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und Freunde der Mathematik 1947[1], 1957[2], 1982 im Vorwort alles zur Lehre Münchner Dreigestirn Tietze1880-1964, Oskar Perron1880-1975, Caratheodory1873-1950 lies Camille Jordan 1838-1922 zu Gruppentheorie; Meschkowski: Mathematisches Begriffswörterbuch 1965[3] p5; Speiser: Die mathematische Denkweise. Wissenschaft und Kultur Bd1 1945; Frey: Die Mathematisierung unserer Welt 1967; Schulz: Repetitorium Mathematik 1994; **Zeidler: Springer-Handbuch der Mathematik** I = Analysis, Funktionentheorie, ODEs, PDEs, II = Algebra, Geometrie, Grundlagen der Math, III = Variationsrechnung, Stochastik, Numerik, Wirtschaftsmathe, Informatik, bis IV = höhere Analysis, lin und nichtlin Funktionalanalysis, nichtlin PDEs, Mannigfaltigkeiten, Riemannsche Geometrie und ART, Liegruppen, -algebren und Elementarteichen, Krümmung, Toplogie, **Kap19.2 Bündel**, Stringtheorie, Supermathematik 2012; Eberhard Zeidler: **Mathematik ist ein Organ der Erkenntnis, ein geistiges Auge des Menschen, das es ihm gestattet in Erkenntnisbereiche vorzustoßen, die außerordentlich weit von seiner täglichen Erfahrungswelt entfernt sind.** http://www. mis.mpg. de/de/publications/ populaerwissenschaftliche-artikel/ geistiges-auge/part-1.html Russell: Einführung in die mathematische Philosophie 1952; H̃annes Leitgeb: Logic, Methodology and Philosophy of Science 2017; **Dedekind 1888:** Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen. Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik 1931 p2 Mathematesierend isoliert sich der Geist aus seinem in die Welt geworfenen Daseins zur Einsamkeit mit sich selbst, er verzichtet auf die Entschleierung von

Weltgeheimnissen. Aber als Entgelt dafür ist Mathematik viel weniger Wandlungen der Geschichte verhaftet als die Physik. **Bertrand Russell:** Somit kann die Mathematik definiert werden als die Wissenschaft, in der wir niemals wissen, worüber wir reden, noch, ob das, was wir reden wahr ist. Siehe Eddington: Raum, Zeit und Schwere - Eine Umriss der allgemeinen Relativitätstheorie 1923; **Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette, Dillard-Bleick: Analysis, Manifolds and Physics** Pt1 Basics 1982 2009 pVff Physik verstehen heißt oft nur, mit ihr vertraut zu sein, daher zweifeln Anfänger an sich selbst oder der Physik. Mathematische Physik aber kann zum besseren Verstehen der Physik führen; **Das Buch** zur klassischen Mathematik ist von **Courant & Robbins: Was ist Mathematik?** 1941, 2010[5]; **Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik** 1981 p30-49; Stewart: Mathematik. Probleme — Themen — Fragen 1990; Manin: Mathematik als Metapher: Ausgewählte Essays Manin: Mathematics and physics 1981; M̃anin: Mathematik und Physik 2016; Manin: Mathematik als Metapher 2016; Manin: Mathematik und Sprache 2019; Kanitscheider: Was ist Mathematik? SdW 6.2009 p72-78; Davis & Hersh: Erfahrung Mathematik 1994[2]; Feigl & Rohrbach: Einführung in die höhere Mathematik. Vorlesungen an der Universität Berlin (1920-1934) 1953; Speiser: Elemente der Philosophie und der Mathematik 1952; Matt Parker: Auch Zahlen haben Gefühle = Things to Make and Do in the Fourth Dimension 2015 = das Ausweiten von Zusammenhängen, die in drei Dimensionen gelten, auf höherdimensionale Räume. Mathematik voll von unsichtbarer Kohärenz. **Fuchs & Tabachnikov: Ein Schaubild der Mathematik. 30 Vorlesungen über klassische Mathematik** 2011; Robbins, Courant, Stewart: What Is Mathematics?: An Elementary Approach to Ideas and Methods 1941, 1969, 1996; **Storch & Wiebe: Lehrbuch der Mathematik für Mathematiker, Informatiker und Physiker**. Bd1 Analysis einer Veränderlichen, Bd2 Lin Algebra, Bd3 Analysis mehrerer Veränderlicher - Integrationstheorie, **topologische Grundbegriffe, Differenzialformen, Dgls, dyn Systeme, Maßtheorie, FT, Stochastik** 2010, Bd4 **Analysis auf Mannigfaltigkeiten - Funktionentheorie - Funktionalanalysis** 2011; Geiger & Scheel: HdP Bd3 Thirring, Duschek, Lense, Mader, Radakovic, Zernicke: Mathematische Methoden 1926; Flügge: HdP Bd1 Mathematische Methoden 1955 p297; Flügge: HdP Bd2 Mathematische Methoden 1956; Flügge: Mathematische Methoden der Physik I Analysis 1979; Flügge: Mathematische Methoden der Physik II Geometrie und Algebra 1980; Schwartz: Mathematische Methoden der Physik BdI 1974; **Yaglom: Mathematical Structures And Mathematical Modeling** 1986; B̃erger: A panoramic view of Riemannian geometry 2003; **Leibniz: Ersetze Kontroversen durch Berechnung.** Bramer ed: Research and Development in Intelligent Systems XXXI: Incorporating Applications and Innovations in Intelligent Systems XXII 2014 Formalisierung von Argumentations-Schemata; Zeidler, E.: Nonlinear Functional Analysis I-IV; Zeidler: Quantum Field Theory Vol I, **A Bridge Between Mathematicians and Physicists** 2006; S̃chottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik 1995 Kap1;

von Neumann: Gott benutzt zur Darstellung der Wirklichkeit eine andere Mathematik! **Dirac:** Gott ist der größte Mathematiker. **History of Math:** http://www.ams.org/samplings/math-history/math-history **Zenil:** A computable universe. Understanding and exploring nature as computation 2013; **Was ist Mathe?** Beweisende Wissenschaft! Wohlgemuth: Math für Anfänger; **Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik** 1981 p30-49; Rademacher & Töplitz: Von Zahlen und Figuren: Proben mathematischen Denkens für Liebhaber der Mathematik 1930, 1968; **Mathe Spielerei und Rätsel:** Wittmann: Mathematische Trick und Basteleien 2001; Gardner: Mathematische Rätsel und Spiele. Der Klassiker 2012; Gardner: Noch mehr mathematische Rätsel und Spiele: 166 Aufgaben und Lösungen 2004; Gardner: Mathematische Zaubereien. 115 Karten, Würfel- und Münztricks, mathematische Spiele und Zauberkunststücke 2005; Schkarin, Fedjanow & Sandler: Algebraische Aufgaben aus der Technik 1964; Sanjoy Mahajan: Street-Fighting Mathematics: http://streetfightingmath.com/ The Art of Educated Guessing and Opportunistic Problem Solving 2010; http://mitpress. mit. edu/catalog/item/default.
`asp?ttype=2&tid=12156` Weinstein: Guesstimation. Solving the World's Problems on the Back of a Cocktail Napkin 2008; **Terrence Tao: Solving Mathematical Problems.** A Personal Perspective 2006; Menzer & Althöfer: Zahlentheorie und Zahlenspiele. Sieben ausgewählte Themenstellungen 2014; Althöfer & Voigt: Spiele, Rätsel, Zahlen. Faszinierendes zu Lasker-Mühle, Sudoku-Varianten, Havannah, Einstein würfelt nicht, Yavalath, 3-Hirn-Schach, .. 2014; Barrow: Warum die Welt mathematisch ist 1993; Barrow: Ein Himmel vol-

ler Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit. Pi in the sky 1992; **Dedekind 1888:** Die Zahlen sind freie Schöpfungen des menschlichen Geistes, sie dienen als Mittel, um die Verschiedenheit der Dinge leichter und schärfer aufzufassen. Durch den rein logischen Aufbau der Zahlenwissenschaft und durch das in ihr gewonnene stetige Zahlenreich sind wir erst in den Stand gesetzt, unsere Vorstellungen von Raum und Zeit genau zu untersuchen, indem wir dieselben auf dieses in unserem Geiste geschaffene Zahlenreich beziehen. Lehto: Erhabene Welten. Das Leben Nevanlinnas 2008; **Willi Bothe** am 24.2.1982 im I218 bei einem Vortrag zur Topologie: a] Mit dem Alter nimmt der Spieltrieb wieder zu. b] Die Anwendung von Mathematik ist null, dennoch ist sie eine schöne Spielerei, besonders die Beweise. c] Die Dimensionstheorie ist mit einer schönen gotischen Kirche vergleichbar, während für die Anwendung eine Baracke reicht. **Einstein:** Sofern die Beschreibung mathematisch exakt ist, besitzt sie keine Entsprechung in der Wirklichkeit. Hingegen haben unscharfe Beschreibungen der Realität gute Entsprechungen. Dem Werk von Barrow kann man entnehmen, dass er seine Ansätze nur mit sehr wenigen oder der allgemeinen oder unscharfen Erfahrungstatsachen konfrontiert hat. Bei idealer Symmetrie, insbesondere in den Randbedingungen, führen die Gleichungen der Physik (NSG) auf Lösungen, die in der Natur nicht beobachtet werden. Wahrheit und Schönheit der Mathematik gründet sich auf klar definierten Begriffen und Logik. Richtigkeit der Physik basiert auf einem Vergleich von Modell und Realität auf Basis von Begriffen die Messvorschriften genügen. Beetz: $E = mc^2$: Physik für Höhlenmenschen 2015; Blaschke: Reden und Reisen eines Geometers 1961 p9 Mathematik und Leben, Hamburg 1940: ... die Wege der Menschen zu den Gesetzen der Natur sind nicht weniger wunderbar als die Gesetze selbst! Goethe: In bunten Bildern wenig Klarheit, viel Irrtum und ein Fünkchen Wahrheit; Falk: Physik - Zahl und Realität - Die begriffliche und mathematische Grundlagen einer universellen quantitativen Naturbeschreibung 1990; H. Baumgaertel: Mathematische Strukturen passen auf die Natur. Preprint 94/18. Dezember 1994; Weinberg: Traum von der Einheit des Universums 1995 Allez en avant et la foi vous viendra. Weinberg: Teile des Unteilbaren 1984; Kanitscheider: Natur und Zahl. Die **Mathematisierbarkeit der Welt** 2013; **Universalienstreit: Realismus** = Oberbegriffen kommt eine wirkliche Existenz zu = Stuhl als Oberbegriff für Sessel, Hocker, Schaukelstuhl **versus Nominalismus** = bestreitet diese Existenz = Oberbegriffe nur als Konstruktion denkender Gehirne. A) **Sind mathematische Objekte (z.B. Ellipse, Primzahlen) real existierend** (realistische Position) oder nicht (nominalistische Position)? B) **Warum passen mathematische Gleichungen so oft und so exakt zu physikalischen Objekten und Prozessen?** R. Hedrich: Die nicht ganz so unglaubliche Effizienz der Mathematik in den Naturwissenschaften. Philosophia naturalis 30 (1), 106-125; Seydal & Bulirsch: Vom Regenbogen zum Farbfernsehen; **Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen**; Schulz: Physik mit Bleistift; Jänich egal; **Hertel: Mathematikbuch zur Physik** 2009 e-book, Arbeitsbuch Mathematik zur Physik 2011; Schulze, Bert-Wolfgang: Erlebnisse an Grenzen - Grenzerlebnisse mit der Mathematik 2013; **Grenzen der präzisen Wissenschaft.** Das Unmögliche erkennen. Hoffmann: **Grenzen der Mathematik.** Eine Reise durch die Kerngebiete der mathematischen Logik 2012[2]; Wahrheit lässt sich nicht mit Beweisbarkeit in Einklang bringen. **Validität** validus kräftig wirksam validity Gültigkeit ist (neben der Reliabilität und der Objektivität) ein **Gütekriterium für Modelle**, Mess- oder Testverfahren. Validität bezeichnet die inhaltliche Übereinstimmung einer empirischen Messung mit einem logischen Messkonzept. Allgemein ist dies der Grad an Genauigkeit, mit der dasjenige Merkmal tatsächlich gemessen wird, das gemessen werden soll. **Radnitzky & Andersson: Voraussetzungen und Grenzen der Wissenschaft** 1981 teils online. **Beweis** a] Logik = Reihe von logischen Schlussfolgerungen, die die Wahrheit eines Satzes auf als wahr Angenommenes zurückführen. b] Mathematik = als fehlerfrei anerkannte Herleitung der Richtigkeit bzw. der Unrichtigkeit einer Aussage aus einer Menge von Axiomen, die als wahr vorausgesetzt werden, und anderen Aussagen, die bereits bewiesen sind. Um den Beweis klar vom gültigen Schluss zu unterscheiden, spricht man auch vom axiomatischen Beweis. c] Das Gegenteil des Beweises ist die Widerlegung. Falsifikation in der Wissenschaft, das als falsch Erkennen eines Sachverhalts. Student auf dem Weg zur Kantine: In der Wissenschft kann nichts bewiesen werden! Udo: Ja und nein ;) Beweisen ist kontextabhängig! Definiere den Begriff, achte auf Kategorien! Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik 1981 p150-154; Hans Klotz: Der philosophische Beweis 1967; Die Betonung der Beweisbarkeit ist ein Schrei nach Halt/Sicherheit (in freier/beliebiger Welt) oder Beistand gegen die Dogmatiker (unter Diktatoren). Offener und kontruktiver

ist der Wunsch nach verständiger Gestaltung/Voraussage auf der Basis von konkurierenden Modellen der Wirklichkeit. Karikaturen geben die Wirklichkeit exakter wieder als hochaufgelöste Fotos. Stengers et al.: Spekulativer Konstruktivismus 2008; **Einstein:** Sofern die Beschreibung mathematisch exakt ist, besitzt sie keine Entsprechung in der Wirklichkeit. Hingegen haben unscharfe Beschreibungen der Realität gute Entsprechungen. Nolting: Bd7 pVI Karikaturen hilfreicher als detaillierte Beschreibungen. **Leibniz: Prinzip des zureichenden Grundes.** Warum es so ist und nicht anders. Hoffmann: Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze; Bedürftig, Thomas und Murawski, Roman: Philosophie der Mathematik; Edgar Froese: Der Staub der Universitäten liegt wie ein Leichentuch über der Wahrheit.

Mathematik wird in der Physik benutzt. Ruelle: Zufall und Chaos 1992 Kap1; **Schmutzer: Mathematik - Ein Kompendium für Physiker 2003**; Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik 1989, 2005; Warum und wofür? Rolle der Mathematik in der Physik: **Mathematik ist eine mögliche und angemessenene Sprache, Ausschnitte der erkennbaren Realität frei von Willkür und Aufoktroyieren zu fassen.** Dirac: Der Mathematiker spielt ein Spiel, bei dem er selbst die Regeln erfindet, während der Physiker ein Spiel spielt, bei dem die Regeln von der Natur vorgegeben werden, doch im Laufe der Zeit wurde immer deutlicher, dass die Regeln, welche die Mathematiker interessant finden, dieselben sind, die auch die Natur gewählt hat. Stewart: Eine Welt voller Symmetrien 2008 Ian Stewart: In Pursuit of the Unknown. 17 Equations That Changed the World 2012 = Weltformeln 2014; **Bell: Die großen Mathematiker** 1967; Bourbaki: Elemente der Mathematikgeschichte 1971; Bourbaki: Architektur der Mathematik, PhysBl17 1961 p161-166 und 212-218; **R̃uelle: Wie Mathematiker ticken. Geniale Köpfe - ihre Gedankenwelt und ihre größten Erkenntnisse** 2010; Hehl: Der Zufall in Physik, Informatik und Philosophie. Zufall als Fundament der Welt 2021; Brücker-Steinkuhl: Die Analyse des Zufallsgeschehens 1980; Koestler: Die Wurzeln des Zufalls 1972;

Geometrie (logisch formal, absolut sicher, Math, inhaltsleere Begriffs-Schemata) & Erfahrung / Anschauung. **Euklidische Geometrie ist die Physik des Anschauungsraumes.**

2 Messen, Datenanalyse, Zufall, Likelihood, Spektren, Ergodizität

Taubenheim, Jens: Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten 1969; Bracewell: The Fourier transform and its applications 1965, 1986; G̃rus: Einführung in die Data Science 2019[2]; **Hoaglin, Mosteller, Turkey: Understanding robust and exploratory data analysis** 1982; **Messen heißt raumzeitlich tiefpassfilternd/aggregierend / grobkörnend / informationverdichtend / binnend / musterbildend von Daten einer Welt, die raum-zeit-muster-bildenden nichtlinearen Gleichungen über Raum und Zeit zu erfinden / destillieren.** Zwecks Orientierung **Zerlegung der Welt = Daten** in Wunschdenken $w + n$ noise / lästiges Wissen oder Unwissen mittels Variationsprinzip und Regularisierung. a] ignoriere die Daten nicht $(d-w)^2$= klein, b] Wunschbild sei nicht zu wirr ∇w = klein, c] Umgebung und Wunschbild sollten sich unterscheiden, also beim Rand Δ = groß. $\mathcal{L} = (d-w)^2 + \alpha\nabla w + \lambda\frac{1}{\Delta(d-w)^2}$ mit $\int \mathrm{d}s\mathcal{L}$= stationär. Skalenniveau oder Messniveau oder Skalendignität (Skalenqualität) ist Eigenschaft von Merkmalen bzw. von **Variablen**, Flexible = Zeichen für ein beliebiges Element aus einer vorgegebenen **Menge**, die diskret (kategorial) oder stetig sind: **Nominalskala** (Frau/Mann, Koordinatennummer, ohne Ordnung), **Ordinalskala** (Noten, es gibt eine Ordnungsrelation, **Ordnungsstatistik**), speziell **Rangskala** (Plazierung) = jeder Wert kann nur einmal vergeben werden, Kardinalskala. **Ranking data:** import scipy.stats; x = [5.05, 6.75, 3.21, 2.66]; print scipy.stats.stats.rankdata(x) Zwei Korrelationskoeff nutzen die **Rank-Statistik: Spearman Rank Correlation** (Spearman's ρ) $\rho = r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n^3-n}$ print scipy.stats.stats.spearmanr(x, y)[0] NO TIE CORRECTION! Besser ist import Bio.Cluster! und **Kendall's** τ print scipy.stats.stats.kendalltau(x, y)[0]. Glossar: http://www. reiter1. com/ Glossar/Glossar. htm **range** rückwärts range(9) als range(8,-1,-1); Listen, array oder matrix Formabfrage mit len(), type, shape(); 2-D case a=rand(6,4) rebin(a,6,4) rebin(a,6,2) a[0:2,0:2] rebin(a,3,2) rebin(a,2,2) a[0:3,0:2] oder
mean(a[0:3,0:2]) Speziell ist rebin(a,1,1) = mean(a); **Binning oder bucketing** zwecks Verringerung von

Beobachtungsfehlern auf Kosten reduzierter Auflösung: 1-D case a=rand(4) rebin(a,4) rebin(a,2) rebin(a,1) Gegegeben Daten-Vektor T mit Abtastzeit dt, binsize = 50; dty=dt*binsize; finallength = len(T)/binsize; cuttedlenght= finallength * binsize; gebinnte Daten; t=rebin(T[:cuttedlenght],finallength) GrobTrialKind.append(int(median(array(TrialKind[j*Binsize:(j+1)*Binsize]))))

```
def rebin(a, *args):                        # ars=(2,1); a=np.matrix([[1,2,3],[4,5,6]])
     shape = a.shape                        # a.shape          -> (2, 3)
     lenShape = len(shape)                  # len(a.shape)     -> 2
     factor = asarray(shape)/asarray(args) # asarray(a.shape) -> array([2, 3])
     evList = ['a.reshape('] + \
         ['args[%d],factor[%d],'%(i,i) for i in range(lenShape)] + \
         [')'] + ['.mean(%d)'%(i+1) for i in range(lenShape)]
     print ''.join(evList)
     return eval(''.join(evList))
```

Janich: Information: **Experimente haben nichts mit Natur zu tun,** sondern sind Artefakte, die nichts beweisen können. Lasse Helium-Ballon fallen. Treder: Was man erforscht, entscheidet nicht das Experiment, sondern die Fragestellung.

Autoassoziativität: a] Wir können nur wahrnehmen, wovon wir bereits wissen. So müssen wir stets mit Annahmen, Vorgefasstheiten und Modellen an unsere Welt herantreten. Völlig neue Erfahrungen und Eindrücke sind nur schwer zu gewinnen. Unserem Schema widersprechende Erfahrungen werden automatisch ignoriert. b] Praktische, effiziente Komplexitätsreduktion.

In God we trust, all others bring data. Deming: Hastie 2nd edition pvii **a] Wir leiden** nicht unter einem zu großen Informationsangebot, sondern unter einer zu großen **Datenflut**. Daher sind Datamining/-Datenanalysemethoden, die Information destillieren so wichtig. Mainzer: Die Berechnung der Welt. Von der Weltformel zu Big Data 2014; Videos, Software, Forschungsprotokolle, Visualisierungen, Messungen, Simulationen, Kataloge brauchen **Metadaten** = Index. FAIR-Prinzip = Findable/Auffindbarkeit, Accessible, Interoperable, Reusable. NFDI.pdf und NFDI4Phys `http://www.forschungsdaten.org/index.php/Nationale_Forsch`
Nature: Scientific Data: standardization and sharing. Scientific Data is an open-access, peer-reviewed publication for descriptions of scientifically valuable datasets. It would take over 33 years to watch a 1 PB MP3 movie yet, within the decade, data sets of this size will be as everyday a feature of astronomical life as astro-ph or APOD. **Data's shameful neglect**: Nature 461, 145 (10 Sept2009)
b] When you asked alumni graduates from universities in Europe and US moving into non-academic jobs in society and industry what they actually need in their business, you found that most of them did **stochastic things like time series analysis, data processing** etc., but that had never appeared in detail in university courses. Krämer: Statistik verstehen. Eine Gebrauchsanweisung 1998, 2010; Bös: Statistikkurs I; Riebesell: Mathematische Statistik und Biometrik 1932; Kahnemann: Schnelles Denken, langsames Denken 2012; Handl: Multivariate Analysemethoden: Theorie und Praxis multivariater Verfahren unter besonderer Berücksichtigung von S-PLUS; Saint-Mont: Die Macht der Daten 2013, Statistik: In Daten lesen. Informatik: Mit Daten umgehen. Wissenschaft: Aus Daten lernen. Philosophie: Auf Daten bauen. **Ziegenproblem** siehe GuG 7-8 2013 p28 **Wie wahrscheinlich ist eine Hypothese?** Während andere Tests prüfen, wie wahrscheinlich die gemessenen **Daten im Licht einer wahren Hypothese** sind, fragt **Bayes**, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Hypothese zutrifft, wenn die **Daten wahr** sind. Pichid Kittisuwan: Image Denoising via Bayesian Estimation of Statistical Parameter Using Generalized Gamma Density Prior in Gaussian Noise Model, Fluctuation and Noise Letters 14 2015 02, **Tschirk: Statistik. Klassisch oder Bayes. Zwei Wege im Vergleich** 2014; **Umtauschparadoxon** in Gardner: Aha! Gotchai 1996; Särkkä: Bayesian Filtering and Smoothing 2013; **Stange: Bayes-Verfahren. Schätz- und Testverfahren bei Berücksichtigung von Vorinformationen** 2013; Hehl: Der Zufall in Physik, Informatik und Philosophie. Zufall als Fundament der Welt 2021; Paul & Baschnagel: Stochastic processes; Ross: Simulation 1996; Pflug:

Stochastische Modelle in der Informatik 1986 Mustererkennung, Hash-Tabellen, Martinginale; Svozil: Randomness and undecidability in physics 1993; **Jacobs: Stochastic processes for physicists 2010; Taylor & Karlin: An Introduction to Stochastic Modeling 2009**[3]**; Chorin & Hald**: Stochastic tools in math and sciences, **Honerkamp**: Stochastische dynamische Systeme, or **M̃ahnke, Kaupuzs, Lubashevsky: Physics of stochastic processes** 2009, pXV

c] Konzepte für komplexe Systeme (Synergetik, Emergenz, Nichtlinearität: Regulator sofern Grenzzyklusgenerator oder Zufalls-/Störungsverstärker) sind ebenso wichtig. Nicht zur Klärung von Detailfragen, wohl aber für's naturwissenschaftliche **Weltbild**, das weit von dem der traditionellen klassischen Mechanik abweicht. Multistabilität, Bifurkation siehe Seite 324, Störungstheorie, Mittelungsmethoden, KS-Entropie. Krankheiten als quantitative oder qualitative Abweichungen von der Standard-Dynamik, denen durch Lebenswandel oder Akuttherapie begegnet werden kann. Ändere Kontrollparameter oder Hinzugabe weiterer dynamischer Rückkopplungsgleichungen. Medikamentengabe kann beides Bedeuten.

Ordnung ist eine Erinnerung an Zustände am Beginn aller Dinge, Feynmans Determinismus vs Chaos Definition BdI/2 46-11: 0 % Neuigkeit/Innovation: Fixpunkt, Grenzzyklus - **PRAGMATISCHE INFORMATION** edge of chaos, Evolution, zelluläre Automaten - 100 % Innovation: iid=identical independent distribution. C.v. Weizsäcker: ...; Janich: Was ist Information? 2006 Information ist kein Naturgegenstand. Kommt durch Zeichen oder Symbole generierende **Grobkörnung** oder **Partitionierung** von Zustandsvariablen oder Zufallsvariablen ins Spiel. Die subtile **Wechselwirkung** von Dingen wird in eine Kovarianzstruktur/Modalitäten projiziert. Siehe Seite 153. Partitionierung, Grobkörnung oder Filterung ist Ausgangspunkt jeder Erfahrung. Zeitlich, räumlich, farblich: **Koyaanisqatsi. Life Out of Balance** 1982; Shannon und Wiener haben diesen Sachverhalt im Zusammenhang mit Kommunikation - z.B. zwischen Mensch-Maschine oder Maschine-Maschine, Mensch-Mensch - thematisiert. Lipsmeier: Friedrich Tabellenbuch. Informations- und Kommunikationstechnik 2005[5]. **GEHÖRT, GELESEN, ZITIERT Datenkult:** Leon Wieseltier, Feuilletonredakteur des amerikanischen Magazins The New Republic, hielt bei der Abschlusszeremonie der Brandeis University eine Rede an die Absolventen. Darin verteidigte er die Geisteswissenschaften gegen das Effizienzdenken der technologischen Mentalität: 'Das digitale Universum reduziert Wissen zur Information. Wer erinnert sich noch daran, dass sich Wissen zur Information verhält wie **Kunst zu Kitsch**, dass eine Information die wertloseste, weil äußerlichste Art von Wissen ist? Ein großer jüdischer Denker des frühen Mittelalters fragte sich, warum Gott uns nicht einfach die Wahrheit sagte, wenn er wollte, dass wir die Wahrheit wissen. Seine weise Antwort war: Wenn man uns bloß sagen würde, was wir wissen müssen, wüssten wir es streng genommen nicht. Wissen kann man sich nur mit der Zeit und mit Methode aneignen. Und die Geräte, die wir wie Süchtige in unseren Händen tragen, verformen unseren Geist: Sie bringen eine unvorstellbare Menge von Zahlen hervor und verwandeln uns in eine Kultur der Daten, in einen Datenkult, in dem jede menschliche Regung und Handlung messbar wird, in der Glück ein Thema für Ökonomen ist, in der die Qualen des menschlichen Herzens in mathematische Formeln übersetzt werden, während uns nur Illusionen von Klarheit und Kontrolle bleiben.' SZ vom 29.06.2013 **Roman: Coding and information** 1992 mit vielen Beispielen; Brillouin: Science and information theory 1956; **Pierce: An introduction to information theory - symbols, signals & noise** 1980[2]; Cover & Thomas: Elements in information theory, 2006; Beachte den irreführenden **wenn . . . dann**-Gebrauch! **Logisch** und **kausal** sind verschiedenene Bedeutungsebenen. Analog zu korreliert und kausal. **H.D. Zeh: Entropie** 2005 p51; Fischer: Information. Kurze Geschichte in 5 Kapiteln 2010; Gleick: Die Information. Geschichte, Theorie, Flut 2011; SdW vor Sept 2012; Burkhardt: Eine kurze Geschichte der Digitalisierung 2019 ct2019H7 p178; Burke: Explosion des Wissens. Von der Encyclopédie bis Wikipedia 2014;

Beobachtungsproblem: Messen bedeutet, verzerrte raum-zeitliche Mittelwerte von Gebieten eines Phasenraumes mittels einer modell-geschneiderten Messapparatur zu erfassen = grobgekörnte Abtastung des Phasenraumes. **Messung ist stets Faltung/Raum-Zeit-Mittel** Lang & Pucker p410 $f_{exp}(x) = \int \mathrm{d}x\, f_{theo}(y)\, r(x-y)$ oder $\tilde{f}_{exp}(k_x) = \tilde{f}_{theo}(k_y) * \tilde{r}$. Mit Sensor und AD-Wandler schaffen wir Artefakte. **Auflösungsvermögen** siehe Treder: Über Physik 1979, p20ff;

Die Welt wird als mathematisch beschreibbar angenommen. shw/TeX/ introductions/ `Stochastic_Processes/0_Basics/Honerkamp2.ps` Die Beschreibung wird in ein hypothetisches Modell f

mit wenigen Freiheitsgraden oder Parametern und eine vorläufig nebensächliche und unsystematische/komplizierte, weil hochdimensionale und daher oft als gauß'sches Rauschen anzusehende Restwelt-Dynamik ϵ gemäß **Zustandsraummodell** = ZRM zerlegt: $x_i = f(x_{i-1}, p) + \epsilon_i, \quad \epsilon_i \sim N_x(0, \sigma_x^2)$
$y_i = O[x_i] + \eta_i, \quad \eta_i \sim N_y(0, \sigma_y^2)$, O beschreibt das projizierende, verzerrende und zufällig gestörte, also die Dynamik verschleiernde Beobachtungsmodell. Kein Beobachtungobjekt kann als isoliert gelten. Es treten zumindest unkontrollierbare WW mit der Messapparatur auf. In diesem Zusammenhang kommt der Zufall (alle nicht systematischen Einflüsse auf das Beobachtungsresultat) ins Spiel. Folglich hat jede Messung nur den Status einer Stichprobe (beobachten heißt würfeln). Das **Problem der Reproduzierbarkeit** in den Wissenschaften wird durch die Einführung des Begriffspaars Prozess $X(t, \nu)$ und **Realisierung** oder **Stichprobe** $x(t)$ relativiert (Doppelrolle der Zeit bei Prozessen): $\{X(t, \Theta) = X(t, \nu) | t \in \mathbb{Z}, \Theta \in \Phi, X \in \mathbb{R}^r\}$, ν Nummer der Realisierung. Im Falle der Erde oder des Kosmos ist uns bislang jeweils nur eine Realisierung zugänglich! **Zufallsvariable und Realisierung/Stichprobe haben die Entsprechung Klasse und Instanz/ Objekt/ Individuum.** Die Definition einer Zufallsvariablen kann als Klassendefinition gemäß objektorientierter Programmierung siehe Seite 726 gesehen werden. Physics Today 2012 July: Discovery or fluke: Statistics in particle physics: When you're searching for elusive manifestations of new physics, it's easy to be fooled by statistical fluctuations or instrumental quirks. P̃riemer: Unsicherheiten, aber sicher! Vom kompetenten Umgang mit ungenauen Daten 2022; **Eigen & Winkler: Das Spiel** 1975; Heermann: Von der Zahl zum Gesetz 1974; Losos: Glücksfall Mensch. Ist Evolution vorhersagbar? 2018; Hörz: Zufall - Eine philosophische Untersuchung 1980; Hehl: Der Zufall in Physik, Informatik und Philosophie. Zufall als Fundament der Welt 2021;

Gikhman & Skorokhad: Introduction to the Theory of Random Processes 1969; Nelson **Wax** ed: **Selected Papers on Noise and Stochastic Processes** 1954; Wainstein & Zubakov: Extraction of Signals from Noise 1970; Borovkov: Elements of Stochastic Modelling 2014[2] MacDonald: Noise and Fluctuations. An Introduction 2006; Röpke, Honerkamp; van Kampen: Stochastic processes in physics and chemistry; Gardiner; Revesz & Raevaesz: Random Walk in Random and Non-Random Environments 2013[3]; **Gillespie & Seitaridou: Simple Brownian Diffusion:** An Introduction to the Standard Theoretical Models 2013; Numerical simulations provide deep insight into stochastic processes generally and diffusion in particular. The principles of such numerical-simulation algorithms and the methods of their implementation are presented in considerable detail throughout the book. Thus, in relation to the mathematical and numerical toolkit required to understand simple Brownian diffusion, this book is indeed self-contained. **Jacobs: Stochastic Processes for Physicists. Understanding Noisy Systems** 2010; **Stochastische Thermodynamik:** Die seit etwa 1999 entwickelte stochastische Thermodynamik bietet den konzeptionellen Rahmen, kleine getriebene Systeme, wie zum Beispiel Kolloide oder Biomoleküle in zeitabhängigen Laserfallen, entlang ihrer fluktuierenden Trajektorien mit Begriffen der klassischen Thermodynamik, wie Wärme, Arbeit und Entropieproduktion konsistent zu beschreiben. Effizienz von molekularen Motoren, von thermoelektrischem Transport im Magnetfeld und zelluläre Informationsverarbeitung. TU Stark Nichtgleichgewicht-VL 2013 Udo **Seifert: Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines,** RepProgPhys 75 (Dec. 2012) 126001; **A Stochastische Dynamik** siehe Risken und Gardiner; 1 Langevin-Gleichung 2 Fokker-Planck-Gleichung 3 Pfadintegraldarstellung lies Kleinert und Feynman & Hibbs: Quantum mechanics and path integrals 1965 in Kap12 sagt $\sigma_{\Delta x}^2 \propto t$ gilt nur für sehr lange Zeiten $t >> \Delta t$. Für kurze Zeiten $t > \Delta t$ gilt $\sigma_{\Delta x}^2 \propto t^3$. **Swanson: Path integrals and quantum processes** 1992; **Schulman: Techniques and application of path integration** 1981; Reinhardt: Quantenmechanik 1 & 2. Pfadintegralformulierung und Operatorformalismus 2013; **Wiegel: Introduction to Path-Integral Methods in Physics and Polymer Science** 1986 Kap10.2 Tetrode: Über den Wirkungszusammenhang der Welt. Eine Erweiterung der klassischen Dynamik = Strahlungstheorie der Absorption ZPhys10 1922 317 Wirkung über Distanz in Elektrodynamik und Weltlinien-Koordinaten. Tugai: Supersymmetric electrodynamics of charged and neutral fermions in the (extended) Fokker-Schwarzschild-Tetrode-Wheeler-Feynman approach,

arxiv.org/pdf/hep-th/9602128; Chaichian & Demichev: Path Integrals in Physics. VolI Stochastic Processes and Quantum Mechanics, Vol II Quantum Field Theory, Statistical Physics and Other Modern Applications 2001; Chaichian & Tureanu: Basic concepts in physics. From the cosmos to quarks 2014; Murugan, Weltman & Ellis eds: Foundations of Space and Time. Reflections on Quantum Gravity 2012; 4 Mastergleichung Risken, Kampen; **B Thermodynamik auf der Einzeltrajektorie** 5 Stochastische Energetik. 6 Stochastische Entropie und das integrale Fluktuationstheorem. **Fluktuations-Dissipations-Theorem** = Mikroskopischer Antrieb, der sich aus dem Wärmebad speist, wird durch makroskopische Reibung/phänomenologische Dämpfung austarriert. Röpke: Statistische Mechanik für das Nichtgleichgewicht 1987 p36 Im thermischen Gleichgewicht gilt Gleichverteilungssatz $< v_i^2 >= \frac{kT}{m}$, also $\frac{D}{\gamma} = \frac{kT}{m}$, wobei γ der die Impulsdissipation beschreibende makroskopische Reibungskoeffizient und D die Varianz der mikroskopischen stochastischen Kraft beschreibt. Im Gleichgewicht T=const heißt $\gamma \propto \sigma^2$. **Je größer die Varianz der treibenden Kraft, umso größer die zur Balance nötige Reibung!** Ebenda p164ff. Honerkamp: Statistical physics p77 Die thermodynamischen Potenziale sind die **erzeugenden Funktionen** der Kummulanten. **Kovarianzen** = 2. Ableitungen der thermodynamischen Potenziale messen die **Fluktuationen**. **Die Suszeptibilitäten** messen die **Dissipationen**. **Fluktuations-Dissipations-Theorem** siehe PJ17 2018 H2 p31; Die Kramers-Kronig-Beziehungen setzen Real- und Imaginärteil bestimmter meromorpher Funktionen in Form einer Integralgleichung miteinander in Beziehung. Sie stellen damit einen Spezialfall der Hilbert-Transformation dar. Sei $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine meromorphe Funktion, deren Polstellen in der unteren Halbebene liegen. Dieser Forderung an die Lage der Polstellen entspricht physikalisch das Kausalitätspostulat. Ferner seien $\mathrm{Re}\ F|_{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathrm{Im}\ F|_{\mathbb{R}}$ Real- und Imaginärteil der Funktion F. Es sei vorausgesetzt, dass diese beiden Funktionen gerade bzw. ungerade sind. Das bedeutet, dass F durch Fourierintegration nicht aus einer beliebigen komplexen, sondern aus einer reellen Funktion gebildet werden kann. In der Physik betrachtet man oft statt F die Funktion F/i, wodurch sich die Voraussetzungen bezüglich gerade und ungerade vertauschen. Schließlich sei $\lim\limits_{|z|\to\infty} |F(z)| = 0$. Dann gelten für $x \in \mathbb{R}$ die folgenden als Kramers-Kronig-Beziehungen bezeichnete Gleichungen: $\mathrm{Im}\ F(x) = -\frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{CH} \int_0^{+\infty} \frac{x \cdot \mathrm{Re}\ F(t)}{t^2 - x^2} \mathrm{d}t$ und $\mathrm{Re}\ F(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{CH} \int_0^{+\infty} \frac{t \cdot \mathrm{Im}\ F(t)}{t^2 - x^2} \mathrm{d}t$. CH = cauchyscher Hauptwert des auftretenden Integrals. Real- und Imaginärteil der Funktion F bedingen sich also gegenseitig durch Integration. Dies findet Anwendungen in der Optik und in der Systemtheorie wenn F die Suszeptibilität eines Systems angibt, siehe Kausalität. Anwendungen finden sich auch in der Hochenergie-Physik bei den Dispersionsrelationen der S-Matrix. Eine wichtige Anwendung ist der Zusammenhang zwischen der Absorption und der Dispersion eines sich in einem Medium ausbreitenden 'Lichtstrahls'. Auf diese Weise hängt die Absorption elektromagnetischer Wellen in einem Medium mit dem Brechungsindex zusammen. Es reicht also, die Abhängigkeit einer der beiden Größen von der Frequenz zu kennen, um die andere berechnen zu können. Die von der Kreisfrequenz ω abhängige Permittivität $\varepsilon(\omega)$ lässt sich ausdrücken als Integral der von der Kreisfrequenz abhängigen Absorption:[1] $\mathrm{Re}(\varepsilon(\omega)) = 1 + \frac{2}{\pi} \cdot \mathrm{CH} \int\limits_0^\infty \frac{\Omega \cdot \mathrm{Im}(\varepsilon(\Omega))}{\Omega^2 - \omega^2} \mathrm{d}\Omega$. Alternative Betrachtungsweise ergibt sich mit dem Absorptionskoeffizienten α, dem Brechungsindex n und der Lichtgeschwindigkeit c: $n(\omega) = 1 + \frac{c}{\pi} \cdot \mathrm{CH} \int\limits_0^\infty \frac{\alpha(\Omega)}{\Omega^2 - \omega^2} \mathrm{d}\Omega$. Dadurch lässt sich vor allem in der nichtlinearen Optik aus einer einfachen Absorptionsmessung die komplexe Form des Brechungsindex ableiten. Auch der Name der Dispersionsrelationen der Hochenergiephysik bezieht sich auf dieses Beispiel. Menzel: Photonics 2007 p93ff; **Anwendungen des Theorems: a] Einstein-Relation** 1905 Brownsche Molekularbewegung: Dieselben zufälligen Kräfte, die die ziellose Bewegung eines Teilchens aufgrund der Brownschen Bewegung bewirken,i rufen einen Widerstand hervor, wenn das Teilchen durch die Flüssigkeit gezogen wird. Anders gesagt: Die Fluktuationen des eigentlich in Ruhe befindlichen Teilchens haben denselben Ursprung wie die dissipative Reibungskraft, gegen die man arbeiten muss, wenn man das Teilchen in eine bestimmte Richtung zieht. Marian Smoluchowski 1906. Aufgrund dieser Beobachtung und Statistischer Mechanik unerwartete Einstein-Smoluchowski-Beziehung: $D = \mu\, k_\mathrm{B} T$ = verknüpft die Diffusionskonstante D (entsprechend der fluktuierenden Kraft) mit der Mobilität μ der Teilchen (entsprechend der Dissipation). $\mu = v_d/F$ = Ver-

hältnis der Endgeschwindigkeit = Driftgeschwindigkeit v_d, die das Teilchen unter der Wirkung einer äußeren Kraft F erreichen kann. **b] Langevin-Gleichung:** Für die fluktuierende Kraft $n(t)$ in einer Langevin-Gleichung gilt das als „weißes Rauschen" bezeichnete Gesetz: $\langle n(t)n(t')\rangle = \frac{2k_\mathrm{B}T}{\mu}\delta(t-t')$. **c] Thermisches Johnson-Nyquist-Rauschen 1928 in einem elektrischen Widerstand:** Fließt bei einem Widerstand kein Strom, so gilt $\langle V^2\rangle = 4Rk_\mathrm{B}T\Delta\nu$ V = Spannung, R = Widerstand, $\Delta\nu$ = Bandbreite, über die die Spannung gemessen wird. Siehe http://www.scholarpedia.org/article/Fluctuations. Lies **G̃allavotti: Statistical Mechanics. A short treatise 2000 Chap8**; Gallavotti: Statistical Mechanics. Theoretical and Mathematical Physics 2016; Godec & Metzler: Linear response, fluctuation-dissipation, and finite-system-size effects in superdiffusion Phys. Rev. E 88, 012116; **Strobl: The physics of polymers** 1997[2] Kap6 p257ff; Becker: Theorie der Wärme; **Gebhardt & Krey: Phasenübergänge und kritische Phänomene** 1980; Sadovskii: Statistical physics 2012 p160f, p204ff; Leith: **Fluktuations-Dissipations-Theorem und Klima** = FDT 1975. Fluktuationen werden niemals beliebig groß. von Storch 2004: On statistical dissipation in GCM climate. Für kleine Parameter-Störungen verhalten sich GCMs linear zeit-invariant LTI. FDT bedeutet, dass die Kovarianzfunktion der Zustands-Variablen der Impuls-Antwortfunktion entspricht. Fluktuation und Dissipation haben gleiche Ursache. von Storch, Climate dynamics 23 2004 p1-15; **7 Jarzynski-Relation** C Mesoskopische Maschinen und ihre Effizienz 8 Ein einfaches Modell einer stochastischen Wärmekraftmaschine 9 Molekulare Motoren **D Thermodynamik und Information** 10 Maxwells Dämon und das Landauer-Prinzip Lubkin: Keeping the Entropy of Measurement. Szilard Revisited, IntJ-Theo Phys26 p523-35 1987, Plenio & Vitelli: The physics of forgetting: Landauer's erasure principle and information theory, ContempPhys42 p25-60 2000; 11 Stochastische Thermodynamik und Feedback 12 Kinetic Proofreading; Highes & Hughes: Random Walks and Random Environments 1 & 2 1996, 1996; Klafter & Sokolov: **First Steps in Random Walks: From Tools to Applications** 2011; Risken: The Fokker-Planck equation. Methods of solution and applications 1996[2]; Ahlbehrendt & Kempe: Analyse stochastischer Systeme. Nichtlineare dynamische Systeme 1984; Für einen Ito-Prozess X_t der 1D-Position x gilt die SDE $dX_t = \mu(X_t,t)dt + \sqrt{2D(X_t,t)}dW_t$ mit der **Drift** $\mu(X_t,t)$ und dem **Diffusionskoeffizient** $D(X_t,t)$. **Stratonovich-Formulierung:** $dX_t = \left[\mu(X_t,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_t}D(X_t,t)\right]dt + \sqrt{2D(X_t,t)}\circ dW_t$. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x,t)$ gilt die **Fokker-Planck-Gleichung** $\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,t)f(x,t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D(x,t)f(x,t)\right]$. Den Zusammenhang von SDE und PDE stellt die **Feynman–Kac-Formel** her: $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \mu(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - V(x,t)u(x,t) + f(x,t) = 0$, mit $x \in \mathbb{R}$ und $t \in [0,T]$ und der Bedingung $u(x,T) = \psi(x)$, wobei μ, σ, ψ, V bekannte Funktionen und T Parameter und $u : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}$ eine unbekannte Funktion sind. Die **Feynman–Kac-Formel** gibt den bedingten Erwartungswert $u(x,t) = E^Q\left[\int_t^T e^{-\int_t^\tau V(X_\tau,\tau)\,d\tau} f(X_r,r)dr + e^{-\int_t^T V(X_\tau,\tau)\,d\tau}\psi(X_T)\middle| X_t = x\right]$ bei dem Wahrscheinlichkeitsmaß Q so dass der Prozess X ein **Ito-Prozess** ist, der durch die Gleichung $\mathrm{d}X = \mu(X,t)\,dt + \sigma(X,t)\,\mathrm{d}W^Q$ gegeben ist. W^Q = **Wiener-Prozess** (**Brown'sche Bewegung**) unter Q. Anfangsbedingung für $X(t)$ ist $X(0) = x$. Siehe http://en. wikipedia. org/wiki/Feynman-Kaci_formula Beispiel: **Wiener-Prozess** sei durch $\mathrm{d}X_t = \mathrm{d}W_t$ erzeugt, also ohne Drift und $D = 1/2$. Die entsprechende FPE ist dann die Diffusionsgleichung $\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}$ Mit der Anfangbed $f(x,0) = \delta(x)$ ist die Lösung $f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-x^2/(2t)}$. Jede FPE, weil eine Art Schrödinger-Gleichung, ist zu einem Pfadintegral äquivalent. Ausgangspunkt feldtheoret Methoden. Honerkamp oder Zinn-Justin: Quantum field theory and critical phenomena 1996. FPE ist $\frac{\partial}{\partial t}f(x',t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\left[D_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + D_2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\delta(x'-x)\right)f(x,t)$. Integration über kleines Zeitintervall gibt: $f(x',t+\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\left(1+\varepsilon\left[D_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + D_2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\right)\delta(x'-x)\right)f(x,t) + O\left(\varepsilon^2\right)$. Mit $\delta(x'-x) = \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{d\tilde{x}}{2\pi i}e^{\tilde{x}(x-x')}$ folgt

$$\begin{aligned} f(x',t+\varepsilon) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{d\tilde{x}}{2\pi i}\left(1+\varepsilon\left[\tilde{x}D_1(x,t)+\tilde{x}^2D_2(x,t)\right]\right)e^{\tilde{x}(x-x')}f(x,t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{d\tilde{x}}{2\pi i}\exp\left(\varepsilon\left[-\tilde{x}\frac{(x'-x)}{\varepsilon} + \tilde{x}D_1(x,t) + \tilde{x}^2D_2(x,t)\right]\right) \end{aligned}$$

Die Gl gibt $f(x',t+\varepsilon)$ als Funktional von $f(x,t)$. Die $(t'-t)/\varepsilon$-malige Integration und $\varepsilon \longrightarrow 0$ geben das

Pfadintegral mit dem Lagrangian $L = \int dt \left[\tilde{x} D_1(x,t) + \tilde{x}^2 D_2(x,t) - \tilde{x}\frac{\partial x}{\partial t}\right]$. Die zu x konjugierte Variable $\tilde{x}$ heißt **Response-Variable**.

Bobrowsky: Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes. An Introduction 2005; **Grimmett & Strizaker: Probability and random processes. Problems and solutions 1992**; Gikhman & Skorokhad: **Introduction to the Theory of Random Processes** 1969; Gihman & Skorohod: Stochastic Differential Equations 1968; Gichman & Skorochod: Stochastische Differentialgleichungen 1971; Etheridge: Stochastic Partial Differential Equations (London Mathematical Society Lecture Note Series) 1995; Papoulis & Pillai: Probability, random variables and **stochastic processes** 2002; **Schuss: Theory and Applications of Stochastic Processes**: An Analytical Approach e-book http://dx. doi. org/10. 1007/978-1-4419-1605-1; http://bayes.wustl.edu/etj/articles/ Jaynes & Bretthorst: Probability Theory. The Logic of Science. Principles and Elementary Applications Vol1 2007; 1. Probability, random variables 2. Random processes 3. Markov processes 4. Fokker-Planck Equation 5. Some stochastic methods 6. Self-Avoiding walk, Percolation 7. Localization 8. Random walk in random environment, roughening interfaces 9. Turbulence Grandy: Physics and Probability - Essays in Honor of Edwin T. Jaynes 2008; Zufallsvariable/-funktion, Dichte (Würfel Punktverteilung, [0,1] oder Normal), Verteilung. Naive Dichte-Schätzung mittels Histogramm, Silverman: Density estimation for statistics and data analysis 1992;
`hist(x,bins=M,cumulative=True,normed=True), hist(xdy,bins=20,range=(0,1.)),`
`[H,x,g]=hist(randn(100)); plot(x[1:],H)` **Verteilungsdichte** $p(x)$ **ist proportional zur Ableitung der Umkehrfunktion** siehe Seite 184 von $x(t)$:

$$x(t) = \sin(t) \to t(x) = \arcsin(x), \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \propto p(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

kummulative Dichte `cumsum(p)` Momente x.mean(), x.var(), x.min(), das Objekt x hat Methode mean. Mit dem Punkt sagt man zum Objekt 'bitte'. A.var(axis=None,ddof=0) bzw. var(A) berechnet die **Varianz** $\hat{\sigma}_A^2 = \hat{\mathrm{Var}}(A) = \frac{1}{N-ddof}\sum_{a\in A}^{N=|A|}\left(a-\bar{A}\right)^2$ mit ddof=1 für **Schätzwert für die Varianz ohne Bias. Kovarianz** ist Skalarprodukt zweier ZV: $Cov(X,Y) =< X^*, Y >$, Brockwell & Davis: Time series analysis; Bracewell: The Fourier transform and its applications 1965, 1986; Sei $X = (X_1, \ldots, X_n)^T$ ein Zufallsvektor. **Kovarianzmatrix** $\mathrm{Cov}(X) = \Sigma_X = (\mathrm{Cov}(X_i, X_j))_{i,j=1,\ldots,n} =$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}(X_1,X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_1,X_n) \\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Cov}(X_2,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Covi}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(X_n,X_n) \end{pmatrix} = E((X-\mu)(X-\mu)^T) = E(XX^T) - \mu\mu^T$$

DDDDDD **Korrelationskoeffizient/Korrelation** ist **zentriertes und normiertes Skalarprodukt** von zwei Zufallsvariablen X und Y:

$$r(X,Y) = \frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y p(x,y)(x-\mu_X)(y-\mu_Y), \quad \hat{r}(X,Y) = \hat{\gamma}_{XY} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\hat{\sigma}_X\,\hat{\sigma}_Y}$$

Das Verschwinden des Korrelationskoeffizienten $r(X,Y)$ oder senkrecht zueinander Stehen der Zufallsvariablen X und Y bedeutet **Unkorreliertheit** der Zufallsvariablen. Bei gauß'schen Zufallsvariablen sogar **Unabhängigkeit** von X und Y. **Korrelationskoeffizient** **Kausalität** $\Rightarrow$ **Korrelation**, aber nicht umgehehrt! Fasst alles ist mehr oder minder korreliert, das wenigste davon auch kausal verknüpft. **Particle Image Velocimetry = PIV** = berührungsloses optisches Verfahren zur Bestimmung von Geschwindigkeitsfeldern in der Strömungsmechanik. In kurzem zeitlichen Abstand werden Partikel im Fluid fotografiert. Aus den Partikelpositionen auf den Bildern kann die Bewegungsrichtung und -geschwindigkeit = Tangentenvektor = **Richtungs-Feld** näherungsweise gemittelt werden. Andererseits dient die Korrelation zweier Bilder zur Identifikation der Tracer. corrcoef(rand(N),rand(N))[0][1]. import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt print np.linspace(xmin, xmax, (xmax-xmin)/step) h1 = np.histogram(s, bins=np.linspace(xmin, xmax,

(xmax-xmin)/step)) `def calc_centers_of_bins(x):` return list(x[i]+(x[i]-x[i+1])/2.0 for i in xrange(len(x)-1)) `plt.bar(calc_centers_of_bins(x),y, width=(x[len(x)-1]-x[0])/(len(y)), color='red', alpha=0.5)` plt.hist(s, bins=5,alpha=0.5) plt.grid(True) Unterscheide die die Grundgesatzheit darstellende Zufallsvariable X von der **Realisierung/Stichprobe** $\{x_i\}_N$ vom Umfang N und die Momente/Verteilungen von deren Schätzern (Histogramm). **Hypothesetest-Idee zur Dynamik:** Für **periodische Prozesse** ist der Korrelationskoeffizient von Prozess-AKF und AKF der Ableitung des Prozesses $r(\gamma_X, \gamma_{X'}) = 1$! Für **zeitreversible** Prozesse ist der Korrelationskoeffizient von Prozess-AKF und AKF des **zeitgespiegelten** Prozesses $r(\gamma_{X(t)}, \gamma_{X(-t)}) = 1$!

Rückfangmethode, capture-recapture method: Gesamtumfang N unbekannt. Fange M und wirf sie markiert zurück. Fange erneut n, von denen m markiert sind: $N = n\frac{M}{m}$. Wick-Theorem: Betrachte Kovarianz von positiv definiten symmetrischen Matrizen:

`http://www.math.ethz.ch/~gruppe5/mmp/99ws/` In probability theory, Isserlis' theorem or Wick's theorem is a formula that allows one to compute higher-order moments of the multivariate normal distribution in terms of its covariance matrix. **Fetter & Walecka: Quantum Theory of Many-Particle Systems** 1971, 2003;

Datenanalyse: Datenanalyseresultat gleicht dem Kunstwerk einer tiefpass-gefilterten Wirklichkeit. Clustering, **Cluster-Analyse**: Taxometrie auf Basis von Häufungen in Merkmals-Räumen, auch mittels Potts-Modell nach Domani, Klassifikation, Regression, Nachbarschaft; Isomap. Non-standard Geometries and Data Analysis, Suresh Venkatasubramanian, School of Computing, University of Utah Dec. 5, 2008, November 2008, http://videolectures. net /etvc08_venkatasubramanian_nsgada/ Schröder, Vetter, Fränzle eds: Neuere statistische Verfahren und Modellbildung in der Geoökologie 1994;

Honerkamp, Bishop, Tibschirani, Brandt, Stahel, Timmer, Rinne, Sachs. shw/TeX/ introductions/ `Stochastic_Processes/0_Basics/Honerkamp2.ps` MAP = Maximum-A-Posteriori-Schätzer, **Maximum - Likelihood - Schätzer = MLE**, Power eines Tests, ZRM = Zustandsraummodell. Wood: Statistical inference for noisy nonlinear ecological dynamic systems, Nature 466 2011 p1102, Chaotic ecological dynamic systems defy conventional statistical analysis. Systems with near-chaotic dynamics are little better. Such systems are almost invariably driven by endogenous dynamic processes plus demographic and environmental process noise, and are only observable with error. Their sensitivity to history means that minute changes in the driving noise realization, or the system parameters, will cause drastic changes in the system trajectory1. This sensitivity is inherited and amplified by the joint probability density of the observable data and the process noise, rendering it useless as the basis for obtaining measures of statistical fit. Because the joint density is the basis for the fit measures used by all conventional statistical methods2, this is a major theoretical shortcoming. The inability to make well-founded statistical inferences about biological dynamic models in the chaotic and near-chaotic regimes, other than on an ad hoc basis, leaves dynamic theory without the methods of quantitative validation that are essential tools in the rest of biological science. Prototypisches ökologische Model: **Riker-Map** $N_{t+1} = r\, N_t\, e^{-N_t+\eta_t}$; Nimm Metropolis–Hastings **Markov chain Monte Carlo** (MCMC) Methode zur Schätzung der Maximum-Likelihood gemäß Held: Methoden der statistischen Inferenz. Likelihood und Bayes 2008, p193 ff; UQ = uncertainty quantification = statistische Inferenz. **Davison: Statistical Models** 94–160, 456–458, 605–619 2003 und Krzanowski: Principles of Multivariate Analysis: A User's Perspective 60, 211–213, 231–235 1988;

```
from pylab import *; from scipy.stats import *
N = 5; Mean = 2.;  Std  = 1. ; Stichprobe = norm.rvs(Mean,Std,size=N)
M_para = 100; Para_limit = 4.; para = linspace(-Para_limit,Para_limit,M_para)
L = ones(M_para); Sample_Std=Stichprobe.var()
for i in range(N):
  L *= norm.pdf(para,Stichprobe[i],Sample_Std)
Max_L = max(L); Max_Index = list(L).index(max(L))
Mean_Stichprobe = Stichprobe.mean()
print("Sample mean",Mean_Stichprobe,"Likelihood-Max",para[Max_Index])
```

Bonferoni-Korrektur, Mardia & Jupp: Directional statistics 2000; Fisher: Statistical analysis of spherical data 1993; Fisher: Statistical analysis of circular data 1995; Fahrmeier et al.: Statistik + Arbeitsbuch; Exzellentes freies Visualisieren: http://www.gapminder.org; Yau: Visualize this; ParaView zur Visualisierung von wissenschaftlichen Daten. Die Naturwissenschaften und das visuelle Denken Von Michael Opitz. **Galilei, Hobbes, Leibniz dachten in Bildern.** Gower, Lubbe, le Roux: Understanding Biplots 2011; v.d. Lippe: Deskriptive Statistik 1992; StatProb: The Encyclopedia Sponsored by Statistics and Probability Efros: Physics and geometry of disorder. Percolation theory 1982 temperaturunabhängige Phasenübergänge 2. Art; Broatbent & Hammersley: Percolation processes. Crystals and mazes 1957; Stauffer & Aharony: Perkolationstheorie 1995; Bollobas & Riordan: Percolation 2006; Chernick: **Bootstrap methods**. A practitioner's guide 1999; P.I. Good: Resampling methods. A practical guide to data analysis 1999; Westfall & Young: Resampling-based multiple testing 1993; Societies http://statprob.com/ Shmueli, Galit, Patel, Nitin R., Bruce, Peter C.: Data Mining for Business Intelligence. **Mainzer: Die Berechnung der Welt. Von der Weltformel zu Big Data** 2014; Concepts, Techniques, and Applications in Microsoft Office **Excel** with XLMineri 2010[2]; `=WENN(S4<45;"nicht bestanden"`;WAHL(RUNDEN((S4-45)/4,5+0,5); 4;3,7;3,3;3;2,7;2,3;2;1,7;1,3;1)) Pierson: Data Science For Dummies 2015 supervised and unsupervised machine learning, including regression, model validation, and clustering techniques. **Big data processing tools** like MapReduce, Hadoop, Dremel, Storm, and Spark; **Chihara & Hesterberg: Mathematical Statistics with Resampling and R**, 2011, Case Study: Flight Delays. Birth Weights of Babies. Verizon Repair Times. Introduction to Hypothesis Testing. Test of Homogeneity. Introduction to the Bootstrap. Monte Carlo Sampling: The 'Second Bootstrap Principle'. Maximum Likelihood Estimation. Adjustments for Multiple Testing. Simple Hypotheses and the Neyman-Pearson Lemma. Multiple Regression. Bayesian Methods. Smoothed Bootstrap. Kernel Density Estimate. Parametric Bootstrap. The Delta Method. Stratified Sampling. Computational Issues in Bayesian Analysis. Importance Sampling in Bayesian Applications.; **Shumway & Stoffer: Time series analysis and its applications with R**, 2010[3] http://rstudio.org/ http://www.stat. pitt. edu/stoffer/ tsa3/Rexamples.htm http://www.stat. pitt. edu/stoffer/tsa3/ , http://anson. ucdavis. edu/
~shumway/tsa.html; **Groß: Grundlegende Statistik mit R** 2010; Baclawski: **Introduction to probabilities with R** mit Markov-Ketten; Sehr gute Intro: Krishnan: Nonlinear filtering and smoothing 1984 Wahrscheinlichkeit, stoch Prozesse, Ito und Stratonovich Kalman; **Topics** a] **Classical statistics:** basic concepts, parameter estimation, statistical inference, error analysis, hypothesis testing, confidence intervals. The frequentist aproach versus Bayesian statistics. Priors. The problem of model selection. Sampling techniques (MCMC, **nested sampling** ...). Latest developments in Bayesian inference for Astronomy b] Advanced statistical techniques: Time series analysis. Wavelet analysis. Statistical techniques for image processing. Spherical statistics. c] **Supervised Classification and Regression:** the problem of feature selection, the curse of dimensionality. Regression methods. Assessment of regression models. Continuous and categorical variables. Classification models (artificial neural networks, support vector machines, bayesian networks...). Model evaluation (n-fold cross validation and variants; statistical tests). Feature selection revisited. The construction of training and test sets in astronomical applications of Data Mining. Sammut & Webb: Encyclopedia of Machine Learning 2011; Mackay: Information theory, inference, and learning algorithms 2003; Lee Gomes: Machine-Learning; Michael Jordan on the Delusions of Big Data and Other Huge Engineering Efforts Big-data boondoggles and brain-inspired chips are just two of the things we're really getting wrong. Jordan: Learning in Graphical Models 1999; Jordan: Graphical Models Foundations of Neural Computation 2001; **Richert & Coelho: Building Machine Learning Systems with Python** 2013; Ethem Alpaydin: Introduction to Machine Learning, Second Edition; Harari: 21 Lektionen maschinelles Lernen 2018; Elsberg: Blackout 2013; Elsberg: ZERO - Sie wissen, was du tust 2016; Mackay: Information theory, inference, and learning algorithms 2003; Bucher Gruppe: Maschinelles Lernen: Künstliche Intelligenz, Künstliches Neuronales Netz, Hidden Markov Model, Support Vector Machine Schölkopf: **Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond.** 2002. Empirische Inferenz - Komplexität entschlüsseln; http://www. kyb. tuebingen. mpg. de/de/ forschung/ abt/bs. html; Hartmann & Selbig:

Introductory bioinformatics 2009, 2013[5] **Kap3.3**; d] **Unsupervised classification:** alternative methodologies, the problem of feature selection for clustering, evaluation. e] **Data Mining** and Statistics in the era of the petabyte databases. Technical aspects, database architecture, intelligent access, distributed computing, efficient software. **Deep learning** = deep machine learning = deep structured learning = hierarchical learning = DL = machine learning based on a set of algorithms that attempt to model high-level abstractions in data by using model architectures, with complex structures or otherwise, composed of multiple non-linear transformations. Deng & Yu: Deep Learning. Methods and Applications 2014 p198; Jones: The learning machines = deep learning = vielschichtige neuronale Netze mit schwarzer Magie sind gemäß Hilton super bei Kategorisierung von Bildern, Nature 505 p146-148, 2014. **Mainzer: Die Berechnung der Welt. Von der Weltformel zu Big Data** 2014; **4 big data Vs:** Volumen (ab TByte bis PetaByte), Velocity (30k bit pro Sekunde bis 30G bps), Variety (unstrukturierte Daten: Blogposts, Email, Textdokumente oder semi-strukturierte Daten: XML oder JSON), Value (unformatiert, beliebige Formate). Harold: Die XML-Bibel 2001, 2004[2]; **xml-Parser:** `xmllint -debug seminars.xml`; Harold: XML in a ntshell. A desktop quick reference 2004; **Morik: Knowledge Representation and Organization in Machine Learning 1989 = super Intro!**; Morik, Kietz, Emde: Knowledge Acquisition and Machine Learning. Theory, Methods and Applications 1993; **Bill & Fritsch: Grundlagen der Geoinformationssysteme** mit vielen Rechenbeispielen! Bd1 Hardware, Software, raumbezogene Daten, topologischen Modellieren mittels Graphentheorie p220-235, Bd2 Datenanalyse in 2D = bivariate Verfahren Kreuztabelle = Kontingenztabelle, Scatterogramm, lineare Regression oder 3D, multivariate Verfahren, Faktorenanalyse, Geostatistik, **Interpolation per Variationsrechnung**, Variogramm, Kriging Anwendungen 1996; Schröder, Vetter, Fränzle eds: Neuere statistische Verfahren und Modellbildung in der Geoökologie 1994; **Nathke**: Einführung in die Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse 1992[3]; Andel: Statistische Zeitreihenanalyse 1984; Kreyszig: Statistische Methoden und ihre Anwendungen 1965; Hütt: Datenanalyse in der Biologie 2001; Lem: Stimme des Herrn 1968/1981 Botschaften in **Neutrino**flüssen; Interplanetare Botschaften. Ozma-Projekt. SETI = Search for Extraterrestrial Intelligence seit 1960. PhysBl22 1966 p480f; Seising el al.: **Fuzzy Theorie und Stochastik. Modelle und Anwendungen in der Diskussion** 1999 = unterhaltsame historische und philosophische Grundlagen. Theismus vs Deismus; Weisberg: Willful Ignorance. The Mismeasure of Uncertainty 2014 Das Gegenteil von Gewissheit ist die Wahrscheinlichkeit als Maß der Ungewissheit.

Hand: Die Macht des Unwahrscheinlichen 2015 Was ist Zufall? Gesetz der **ganz** großen Zahlen. Gesetz vom Wahrscheinlichkeitshebel. Gesetz von Unvermeidlichkeit. Gesetz der annähernden Ungenauigkeit.

3 Quellen des klassischen Zufalls

nach Wolfram p299ff: A] **externe Umgebung** = Schatten = niedrig-dimensionale Projektion der Dynamik sehr vieler Nachbarn = Brown'sche Bewegung. B] **Irrationaler Wert der Anfangsbedingung**, Bitshift oder nichtlineaere Gleichung offenbaren nur die Monströsität reeller Zahlen, deterministisches Chaos. C] **Regel 30 beim Zellulären Automaten** = absoluter Zufall? Napoleon: Zufall ist der einzige legitime Herrscher des Universums. Hörz: Zufall - Eine philosophische Untersuchung 1980;

Zufallsvariable und Realisierung/Stichprobe haben die Entsprechung Klasse und Instanz/Objekt/Individuum. Die Definition einer Zufallsvariablen kann als Klassendefinition gemäß objektorientierter Programmierung siehe Seite 726 gesehen werden. **Barth & Haller:** p169 oder **Arens** p1297 Die Abbildung von Elementen des Ereignisraums Ω, zB alle möglichen thermodynamischen Gleichgewichtszustände eines Körpers mit einem Flüssigkeits-Thermometer, in dem Raum der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, zB dadurch, dass die Länge der Flüssigkeitssäule gemessen wird, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vermöge $\omega \mapsto X(\omega)$ heißt **Zufallsvariable** X, wenn sie eine Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X < x) \in [0,1] \subset \mathbb{R}$ besitzt oder Abbildung $\mathbb{R} \to [0,1] \subset \mathbb{R}$ vermöge $x \in \mathbb{R} \mapsto F_X \in [0,1] \subset \mathbb{R}$. **Würfel:** Ereignisraum = Ω = alle möglichen 6 Lagen des Würfels ω_i werden eindeutig auf 6 Zahlen abgebildet $\{1,2,3,4,5,6\} \in \mathbb{N}$, also $\omega_i \mapsto i$. Offen oder zufällig ist die konkrete Realisierung ω_i. Dies führt sofort auf die Idee eines Wahrscheinlichkeitsraumes siehe Seite 97. Unterscheide diese Verteilung/Dichte $p_X(x)$ und deren Momente μ_X von den entsprechenden Schätzern $\hat{p}_X^{(N)}(x) = h_N(x)$ und $\hat{\mu}_X^{(N)}$ beim Stichprobenumfang N. Schulz: Statistische Physik; Haake: Einf in die theoret

Physik 1983 Kap17 p282ff; Lenk: PfL12; **Võjta: Teubner-Taschenbuch der statistischen Physik** 2010 p35ff Beispiele und super Definitionen; **Gibbs: Elementare Grundlagen der Statistischen Mechanik, entwickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik** 1905; Paul & Tatiana Ehrenfest: Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. 90S In: Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Band IV, 2/II. Heft 6 1912 The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics; Fließbach: Statistische Physik; Becker: Theorie der Wärme 1985[3] p62; Kittel: Theorie der Wärme; Brenig: Statistische Theorie der Wärme; Reif: Statistische Physik. Berkeley Physik Kurs Bd5 1990[3]; Reif: Grundlagen der Physikalischen Statistik und der Physik der Wärme 1976 p295, 661ff;

Flachsmeyer: Kombinatorik. Eine Einführung in die mengentheoretische Denkweise 1969; Alexander Halameisär = Chalamajzer: Kombinatorik - unterhaltsame Mathematik, Urania 1983 H7 p68-71; Jacobs & Jungnickel: Einführung in die Kombinatorik 2003; Tittmann: Einführung in die Kombinatorik 2014; Andreas Brinken: Einführung in die Kombinatorik - Schulmaterialien Wikipedia. László Lovász, Vesztergombi, Pelikan: Kombinatorik 1977; Korte & Lovasz: Greedoids. Algorithms & Combinatorics 1991; Martin Aigner: Kombinatorik. II Matroide und Transversaltheorie 1976; Lovasz: Combinatorial Problems and Exercises 2007; Lavasz & Pelikan: Diskrete Mathematik 2006; Aigner: Diskrete Mathematik 2006; **Abzählende Kombinatorik:** Abzählmethode nutzen! Hat zunächst nichts mit Wahrscheinlichkeiten zu tun, sondern nur mit dem Abzählen von zulässigen Elementarereignissen. Bestimmung der Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen, = Abbildungen, unterscheidbarer oder nicht unterscheidbarer Objekte (d. h. „ohne“ bzw. „mit“ Wiederholung derselben Objekte) sowie mit oder ohne Beachtung ihrer Reihenfolge (d. h. „geordnet“ bzw. „ungeordnet“). **Alphabetlänge** = n. **Wortlänge** = k. **W** = Wortbildung auch durch mehrfachen Gebrauch ein und desselben Buchstaben. **O** = Wortbildung erlaubt nur einmaligen Gebrauch ein und desselben Buchstabens.

Permutation $(a,b) \neq (b,a)$: Ohne Wiederholung/Zurücklegen (a,b,c) gibt $P_n = n!$ Mit Wiederholung/Zurücklegen (a,a,b) gibt $P_n = \dfrac{(k_1+\ldots+k_s)!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_s!} = \dfrac{n!}{k_1!\cdot\ldots\cdot k_s!} = \dbinom{n}{k_1,\ldots,k_s}$. Betrachte zB 5 Personen, die auf 5-, 4-, 3-, 2 oder 1-Raumwohnungen verteilt werden.

Variation = geordnete Auswahl, also $(a,b) \neq (b,a)$:

Ohne Wiederholung/Zurücklegen $(a,b,c), \{a,b,c\}$: $V^k_{(O)\,n} = \dbinom{n}{k}\cdot k! = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Mit Wiederholung/Zurücklegen $(a,a,b), \{a,a,b\}$: $V^k_{(W)\,n} = n^k$.

Kombination = ungeordnete Auswahl, also $\{a,b\} = \{b,a\}$:

Ohne Wiederholung/Zurücklegen $(a,b,c), \{a,b,c\}$: $K^k_{(O)\,n} = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Mit Wiederholung/Zurücklegen $K^k_{(W)\,n} = \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \dbinom{n+k-1}{k} = \dfrac{(n+k-1)!}{(n-1)!\cdot k!}$.

Bartsch: Math Formeln 1986[21] p70-73; Scheid: Zufall 1996 p58; **Barth & Haller: Stochastik** 1996 p88-108; Glücksspiel: Wahrscheinlichkeitsrechnung am Beispiel des Münzwurfs, Würfelspiel, Kartenspiel, Lotto. Kitaigorodski: Unwahrscheinliches - möglich oder unmöglich 1972; Renyi: Briefe über die Wahrscheinlichkeit 1969; Gnedenko & Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung 1945; Rosanow: Wahrscheinlichkeitstheorie 1970;

1. Diskrete und kontinuierliche **Zufallsvariable = Zufallsgröße** = launige Dinger - Du bekommst auf gleiche Frage i.a. verschiedene Antworten. Rosanow 1934- : Wahrscheinlichkeitstheorie 1972 p50f Eine **Funktion** $X(\omega)$**, die in Abhängigkeit vom Elementarausgang** $\omega \in \Omega$ bestimmte Zahlenwerte annimmt, nennen wir eine Zufallsgröße. **Idee der Gesamtheiten** siehe Gnedenko & Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung 1952, 1967 p66ff; Müller: Lexikon der Stochastik 1975[2] p336 Unterschied von zufälliger Variablen und Zufallsgröße; Võjta: Teubner-Taschenbuch der statistischen Physik 2010; Gnedenko: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 1957; **Barth & Haller: Stochastik** 1996; Gnedenko 1912-1995 & Khinchin 1894-1959: An elementary introduction to the theory of probability 1962 p59ff; Schrödinger: Die gegenwärtige Situation der Quantenmechanik 1935. T. Tao: Structure and ran-

domness. Pages from year one of a mathematical blog 2008; **Stempell: Programmierte Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung** 1968; Wie geht man mit sowas um? Lerne Statistik und Stochastik! **Krengel: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik** 1990; Fisz: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik; **Intro-Folien:** Summer School in Statistics for Astronomers IX (June 3-7, 2013) http://astrostatistics. psu. edu/su13/program.html Dichten, Zufällig alternierende Vorzeichen/Münzwurf: x=rand(M)-0.5, v=ceil(x)+floor(x) oder randint(0,2,M) *2-1. **Zufallsmatrizen**: randint(10,size=(2,3)) Sprechweise: Eine Zufallsvariable auf $[0,1]$ besitzt eine β-Verteilung mit den Parametern $c, d \in \mathbb{R}^+$, falls ihre Dichte gegeben ist durch

$$p(x|c,d) = \frac{1}{B(c,d)} x^{c-1} (1-x)^{d-1}, \quad B(c,d) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(d)}{\Gamma(c+d)}$$

Verteilungen, Erwartungswerte, Momente, Kummulanten. Pastur: Eigenvalue distribution of large random matrices 2011; Ein Zufallsexperiment mit exakt präziser Verteilung seines Ausganges ist kein Modell. `help(distributions)`: alpha anglit arcsine bernoulli beta betaprime binom Binomial-Verteilung gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, bei einer Wahrscheinlichkeit p Wappen bzw rechts zu gehen, bei insgesamt n Würfen oder Schritten k mal Wappen zu erhalten oder k Schritte nach rechts zu kommen:

$$k \mapsto B(k \mid p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

boltzmann bradford burr cauchy

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}, \quad \lambda > 0, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad G(k) = e^{i\mu k - \lambda|k|}$$

Für $\lambda = 1, \mu = 0$ ist es die t-Verteilung, die dem Quotiente zweier unabh. gauß'scher Zufallsvariablen entspricht. Müller: Lexikon der Stochastik p438, Papoulis p162; chi **chi2** cosine dgamma dlaplace dweibull erlang **expon** exponpow exponweib f fatiguelife fisk foldcauchy foldnorm frechet_l frechet_r gamma gausshyper genexpon, genextreme, gengamma, genhalflogistic, genlogistic, genpareto, **Gammaverteilung**Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge $\mathbb{R}_+$, direkte Verallgemeinerung der **Exponentialverteilung** und Verallgemeinerung der **Erlang-Verteilung** für nichtganzzahlige Parameter. Die Gammaverteilung $\gamma(p,\, b)$ durch Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \begin{cases} \frac{b^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-bx} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ definiert. Normierbarkeit erfordert $b > 0$ und $p > 0$. **scipy.stats.gamma** import scipy.stats as st; x=linspace(0.1,10,100); p=st.norm.pdf(x,0.,1.); g=st.gamma.pdf(x,3., loc = 0., scale = 2.) **Verteilungsfunktion der Gammadichte** $F(x) = \begin{cases} P(p, bx) & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$, wobei $P(p,\, bx)$ die regularisierte Gammafunktion der oberen Grenze ist. Der Vorfaktor $b^p/\Gamma(p)$ dient der korrekten Normierung. **Special functions scipy.special** gammainc(a, x) Incomplete gamma function. import scipy.special as ssp; t=linspace(-1,2,100); plot(t,ssp.gammainc()); **Pareto-Verteilung:**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x_{\min}} \left(\frac{x_{\min}}{x}\right)^{k+1} & x \ge x_{\min} \\ 0 & x < x_{\min} \end{cases}$$

Paretoprinzip, **Pareto-Effekt**, 80-zu-20-Regel, Richard Koch: Das 80-20-Prinzip. Mehr Erfolg mit weniger Aufwand 1998; geom, gilbrat, **gompertz, gumbel_l, gumbel_r, halfcauchy**, **Große Abweichungen**: Die Chebyshev-Ungleichung besagt, dass die Wahrscheinlichkeit der Abweichung der Summe von unabhängigen Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert um $\delta > 0$ durch p-te Momente mal δ^{-p} für $p \ge 1$ nach oben abgeschätzt werden können. Falls die Summe exponentielle Momente besitzt, erhält man so ein exponentielles Abfallen inδ der Wahrscheinlichkeiten für große Abweichungen δ um den Erwartungswert. Die Theorie der Großen Abweichungen gibt diesem Verhalten für eine große Klasse von Modellen einen präzisen Rahmen. Dembo-Zeitouni: Large deviations techniques and applications 1998[2]; Freidlin-Wentzell: Random perturbations of dynamical systems 1998[2]; halflogistic, halfnorm, hypergeom, hypsecant, invgamma, invnorm, invweibull, johnsonsb, johnsonsu, ksone, kstwobign, laplace, levy, levy_l, levy_stable, loggamma, logistic,

loglaplace, **lognorm**, logser, lomax, Strutz: **Bemerkungen zur Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung** PdNPiS Bd50 2001 H4 p46-47;

$$p(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)$$

maxwell, mielke, nakagami, nbinom, ncf, nct, ncx2, **norm, pareto**, **planck poisson**, powerlaw, powerlognorm, powernorm, **randint, rayleigh**, rdist, recipinvgauss, reciprocal, rice, semicircular, t, triang

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \quad \lim_{\nu\to 0} u(\nu, T) = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} u(\nu, T) = 0$$

Schmüser I p231; **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** BdII.1 1921 Kap11 p502ff **Das Eingreifen der Quantentheorie** und BdIII.2 1950; **Weizel: BdI p756-762 und BdII** p1171-90; **Schöpf: Von Kirchhoff bis Planck** 1978 p102, 114, 119, 124ff geometrische Reihe; Hänsel & Neumann: Physik BdV p18f; truncexpon truncnorm tukeylambda **uniform vonmises** wald weibull_max weibull_min wrapcauchy **zipf**; **Methoden der Verteilungen:** norm.rvs random variates, .cdf, .entropy, .isf inverse survival function, .moment, .pdf, .ppf(q) percent point function, .sf 1-cfd suvival function, stats(loc=2, scale=5,moments='mvsk');
Varianz von X ist mittleres Schwankungs/Abweichungs-Quadrat, also Quadrat der Abweichung vom Mittelwert,

$$\sigma_X^2 = \int \mathrm{d}x (x-\mu)^2 p(x) = \lim_{N\to\infty} \hat{\sigma}_{X,N}^2 \text{ mit } \hat{\sigma}_{X,N}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \hat{\mu}_{X,N})^2$$

wobei $\hat{\sigma}_{X,N}$ **Schätzer für Standardabweichung**. 1860 von Francis Galton. σ_X ist Maß für die Streuung der Werte einer Zufallsvariablen X um ihren Erwartungswert μ_X. Graf & Henning: Über Zuverlässigkeit und Vergleich der Streuungen von Meßreihen PhysBl10 1954 p249-258; Die Standardabweichung $\hat{s}_N(\bar{X}_N) = \frac{\hat{s}_N(X)}{\sqrt{N}}$ des geschätzten Mittelwertes $\bar{X}_N$ auf der Basis von N Werten ist der N-te Bruchteil der geschätzten Standardabweichung. Honerkamp: Stochastische dynamische Systeme 1990 Kap3 p30ff; Speziell für die beliebte, aber oft **nicht** gerechtfertigte, siehe Talebs **Schwarzen** Schwan, **Normalverteilung** gilt

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

`from scipy.stats import *` Stichprobe `x=norm.rvs(0.,1.,size=30); x = linspace(-x0,x0,M)` **Gauß-Verteilung:** `plot(x,norm.pdf(x,mean,std))` x=linspace(-3,3,100); plot(x,norm.pdf(x,mean=1,std=1.)); `x=binom.rvs(10,0.7,size=30);` Mittelwert ist theoretisch 10*0.7 oder fuer die Realisierung N.mean(). `planck.rvs(1,6,size=10)` **Binomial-Verteilung** = diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $B(k \mid p, n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ für $k = 0, 1, \ldots, n$ und $p \in (0, 1)$. **Galton-Brett**. Aus Binomial-Verteilung wird Poisson-Verteilung als Verteilung seltener Ereignisse $\lim_{N\to\infty} pN = \lambda = \text{const}$, also $p = \frac{\lambda}{N} = \frac{E(k)}{N} = \frac{<k>}{N}$ gemäß $P_p(k) = \lim_{N\to\infty} B(k \mid p, N) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!}{(N-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} =$ **Poisson-Verteilung** $P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ gibt die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Ereignisanzahl k im Einzelfall an, wenn die mittlere Ereignisrate λ=E(k)=Var(k) $= \sigma_k^2$ bekannt ist. Binnig: Aus dem Nichts. Über die Kreativität von Natur und Mensch 1997; t=zeros(10); for test in xrange(0,10000): result = binomial(10,.16666) t[result] = t[result]+1

Calvetti & Somersalo p5ff. $\pi_X(x)$ CCD-Beispiel zu Gauß- & Poisson-Verteilung. **Gillespie: Markov processes. Wiener-Khinchine-Theorem.** Afraimovich, Ugalde, Urias: Fractal dimensions for Poincare recurrences 2006 Markov-Ketten & Synchronisation; Lawler: **Introduction to Stochastic Processes**; Allen: An introduction to stochastic processes with applications to biology 2011[2]; **Maistrov: Probability Theory. A Historical Sketch** 1974; Lies erst **Lemons, Don Stephen: An introduction to stochastic processes in physics 2002 Vorwort!;** und dann **Chandrasekhar: Stochastic**

problems in physics and astronomy, RevModPhys January 1943 oder Wax: Selected papers on noise and stochastic processes 1954; Klebaner, Fima C.: Introduction to stochastic calculus with applications;

2. Realisierungen/Stichproben/Sample

/ Merkmalsausprägung, Erzeugung von Zufallszahlen gegebener Verteilung und Korrelation: Paul & Baschnagel: Stochastic processes; Lax & Xu: Random Processes in Physics and Finance 2006; Calude: Randomness And Complexity. From Leibniz To Chaitin 2007; Calude: Information and Randomness. An Algorithmic Perspective 2010; Honerkamp; Press et al.; Lang/Pucker p550; Johnson: Construction of particular random processes. Proceedings of the IEEE 82 1994 p270-285; **linearer Kongruenz-Methode:**

$$r_{n+1} = (a\, r_n + b) \mod m, \quad \eta_n = \frac{r_n}{m}$$

mit $(m, a, b) = (2^{31}, 2^{16} + 3, 0) = (714\,025, 1366, 150\,889) = (2^{47}, 513, 297\,410\,973)$. Erste Implementationen in den 1960ern für IBM Mainframe, Scientific Subroutine Package (SSP): $a = 65539$, $b = 0$, $m = 2^{31}$. Auf 32-Bit Rechner lässt sich die modulo 2^{31} Operation sehr effizient als Bit-Shift ausführen. **Es besteht aber folgende Korrelation:**

$$K = \sum_{n=1}^{N-2} \left[(-9x_n + 6x_{n+1} - x_{n+2}) \mod 2^{31}\right] = 0$$

In manchen Versionen nutzt Python standardmäßig nur 32 Bit für die Integer-Darstellung, das kann bei der Berechnung von K zum Überlauf führen. 64 Bit (oder mehr) Nutzung erzwingen durch L-Anhang, also zB. 9L∗x statt 9∗x. **help('modules')** zeigt alle geladenene Module. PythonKurs: http://www.physik.uzh.ch/lectures/ingrafiken.php; Zufälliger Start mit from time import time; r[0]=int(abs((time()-round(time()))*11344));
`print "Run time:",str(Endzeit-Startzeit)[:5],"oder",round(Endzeit-Startzeit,2),"sec"` Gauß mit Box-Muller import time; print 'This'; time.sleep(6); in Sekunden print 'and that.'
indexPython!sleep frac(x) Abrundung: floor(x), int(x), mathematische Rundung: **round(x,2)**, float(repr(12.78988081231)[:7]); Aufrundung: ceil(x), entier(x) **modf(x) gibt Bruch und Ganzteil separat**. modf(pi)[1]+modf(pi)[0]-pi; **Vorzeichen** oder **sign** `def Sign(a): if ( a > 0 ): return 1 elif ( a < 0 ): return -1 else: return 0;` $y_1 = \sqrt{-2\ln x_1}\,\cos 2\pi x_2$ oder $X' = (X - 1/2)\sqrt{12}\sigma$ und $Z = 1/\sqrt{N}\sum_{i=1}^{N} X_i'$ **Zirkulären Statistik:** von-Mises-Verteilung - Verteilung auf dem Kreis. von Mises: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. Bd1 Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung 1931; N.I. Fisher: Statistical analysis of circular data 1995; Mardia & Jupp: **Directional statistics** 2000; Wells & SenGupta: Advances in Directional and Linear Statistics. A Festschrift for Sreenivasa Rao Jammalamadaka Jammalamadaka & SenGupta: Topics in circular statistics; e-book On Implementation of the Markov Chain Monte Carlo Stochastic Approximation Algorithm; Zucchini & Macdonald: **Hidden Markov Models for Time Series: An Introduction Using R**, 2009[2] p155 Schätzung zirkulärer AKF einer Fliege. **R-Einführung** in c't 3 2014 p180; Gilks & Richardson: **Markov Chain Monte Carlo in Practice** 1995; **Müller-Gronbach, Novak & Ritter: Monte Carlo-Algorithmen** 2012 e-book; Eine

Copula: (Pl. Copulas oder Copulae) ist eine Funktion, die einen funktionalen Zusammenhang zwischen den Randverteilungsfunktionen verschiedener Zufallsvariablen und ihrer gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung angeben kann:

$$C : [0,1]^2 \to [0,1], \quad H(x,y) = C(F(x), G(x))$$

Kuxhaus: Copulas Dipl 2010 LaeuterParaSchaetzer.pdf Mai & Scherer: Simulating copulas 2017; Ruelle: Zufall und Chaos 1992 Kap1 **Abhängigkeiten**; **Fischer: Modellierung von Abhängigkeiten mit Hilfe von Copulas**. Anwendung bei der Bestimmung des Value at Risk, Logos Berlin, 2009; Copula und Rang-Korrelation mit Spearman und Kendall setzen keine sphärischen oder elliptischen Verteilungen voraus und müssen daher bei der Suche nach Abhängigkeiten angenommen werden! Siehe copulavortragneumann.ppt als Zusammenfassung von Embrechts et al: Correlation and dependence in risk management, properties and pitfalls. Risk Management: Value at Risk and Beyond, ed. Dempster, pp176-223, 2002; Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, Embrechts, Lindskog, McNeil: Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, ed Rachev 2003 Chap8, p329-384. Mai & Scherer: Simulating Copulas: Stochastic Models, Sampling Algorithms, and Applications 2012; Salvadori: Extremes in nature. An approach

using copulas 2007; Jaworski: **Copula Theory and Its Applications**, Proceedings of the Workshop Held in Warsaw, 25-26 Sept2009 Kap1 ist kurze Einführung Kap2 Levy-Prozess Kap3 Copula-Schätzung; Nelsen: An Introduction to Copulas 2006; Mit ihrer Hilfe kann man stochastische Abhängigkeit deutlich komplexer modellieren als beispielsweise mit dem **Korrelationskoeffizienten**. `corrcoef(diff(X),diff(Y))` entspricht der Idee eines Systems von Differenzialgleichungen: Die momentanen Änderungen dX und dY bestimmen die Zukunft, nicht die absolute Größe von X. Nonsens- oder Schein-Korrelation durch a] formale Korrelation durch const=$a+b$, also b antikorreliert zu a, b] Selektinskorrelation oder Beobachtungs- oder Auswahl-Effekt, weil nicht die Grundgesamtheit, sondern nur spezielle Stichproben betrachtet werden. Es werden, nicht ins Konzept passende Datenpunkte als Ausreißer weggelassen. c] Ausreißer. d] Inhomgenitätskorrelation. Bei Gehalt-Schuhgröße kommt es wegen des unterschiedlichen Geschlechts zu zwei Punktwolken mit verschiedenen Schwerpunkten. d] Confounder oder Gemeinsamkeitskorrelation, wenn zwei Größen von einer dritten abhängen. Betrachte neben **Scatter-Plot** oder **Streu-Diagramm** Y vs X auch **Bland-Altman-Plot** $(X+Y)/2$ vs $X-Y$. Bei ordinalen Zuständen jittered oder **verwackelte** Streudiagramme. 1- oder 1.5-dimensionale **Dotplot**s.Weiß: Basiswissen Medizinische Statistik; **Sternkoordinaten/Sternabbildung bei multivariaten Daten der Dimension** n Gegeben N Datenpunkte mit je n Merkmalen: $\vec{D}_j \in \mathbb{R}^n$ mit $j \in \mathbb{N}$. Gesucht sind Sternvektoren/Sternkoordinaten $\vec{P}_j$ bei N multivariaten Daten $\vec{D}_j \in \mathbb{R}^n$ der Dimension n. Algorithmus oder Schritte zum Scatterplot/Sternkoordinaten: 1] Normierung jedes einzelnen Merkmals D_{ji} auf das Einheitsintervall: $D_{ji} \in \mathbb{R} \to d_{ji}[0,1]$. 2] Führe den n-zackigen Stern gemäß $\vec{u}_i = \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{i-1}{n} \\ \sin 2\pi \frac{i-1}{n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $i = 0(1)n-1$ in der Euklidischen Ebene ein. 3] Projektion jedes Messdatenpunktes $\vec{D}_j \in \mathbb{R}^n$ in einen Punkt der Euklidischen Ebene als Summe aller je n Merkmale (Apfel-Birnen-Summe) in jeder Komponente gemäß $\vec{P}_j = \sum_{i=1}^n d_{ji}\vec{u}_i$ mit $\vec{P}_j \in \mathbb{R}^2$ 4] Analyse des Scatterplots/der Sternkoordinaten $\vec{P}_j$ mit $j = 1, N$. Speziell in der Diss von Christian: Sieben räumliche Konzentrationsfelder $\vec{D}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^7$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, wobei $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ die Positionen auf der CCD oder einfach den Feldindex/das Feldindexpaar bezeichnet, werden mittels Sterndarstellung zu Scatterplots/Sternkoordinaten in der Euklidischen Ebene $\vec{P}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^2$. Falls an einem beliebigen CCD-Ort alle Konzentrationen gleich sind, so ist $\vec{P}_j = \vec{0}_2$ der Nullvektor = alle Sternkoordinaten 0. Man landet im Ursprung des Sterns. Für unkorrelierte Zufallszahlen in den Konzentrationen wird man im Mittel ebenfalls im im Ursprung des Sterns landen. Swee Chuan Tan: Blind spots in Star Coordinate Visualization. Analysis and correction. Pattern Recognition Lett106 (2018) 7–12;

Harris et al.: **Startwissen Mathematik und Statistik: Ein Crash-Kurs** für Studierende der Biowissenschaften und Medizin 2007; Nun möchte man Zufallsvariable vergleichen, die man aber nur über ihre **launigen Realisierungen** zu fassen bekommt. Die Lösung dieses Problem führt auf **Statistische Problemstellungen: Schätzproblem, Modellwahlproblem, Prognoseproblem** Held: Methoden der statistischen Inferenz: Likelihood und Bayes, 2008; P̃earl: Causality. Models, reasoning and inference 2009; Spektrum Spezial - Künstliche Intelligenz 2020; Pearl: An Introduction to Causal Inference 2015; P̃earl, Glymour & Jewell: Causal Inference in Statistics - A Primer 2016; Morgan: Counterfactuals and Causal Inference. Methods And Principles For Social Research 2010; R̃osenbaum: Observation and experiment - An introduction to causal inference 2017; Pearl: The book of why. The new science of cause and effect 2018; Holmes: Simple Bayesian method for improved analysis of quasi-two-dimensional scattering data PhysRevB90 024514 2014; PyCon2014 Bayesian Statistics Made Simple Youtube; Wahrscheinlichkeiten π werden häufig in Chancen/Odds angegeben

$$\omega = \frac{\pi}{1-\pi}$$

3. Schätzer sind selbst wieder Zufallsvariable: Schätzung Momenten und Dichten. **Likelihood / Plausibilitäts-Funktion**. Held: Methoden der statistischen Inferenz; $L(\Theta) > 0.1$ plausibel, sonst weniger plausibel. **Score-Funktion** $S(\Theta) = \frac{\mathrm{d}l(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}$, wobei $l(\Theta) = \log L(\Theta)$. **Fisher-Information:** ist negative zweite Ableitung der Log-Likelihood-Funktion $I(\Theta) = -\frac{\mathrm{d}^2 l(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta^2} = -\frac{\mathrm{d}S(\Theta)}{\mathrm{d}\Theta}$. **Beobachtete Fisher-Information:** $I(\hat{\Theta}_{ML})$. Toutenburg & Heumann: Deskriptive Statistik: Eine Einführung in Methoden und Anwendungen mit R und SPSS; Induktive Statistik: Eine Einführung mit R und SPSS; Arbeitsbuch zur deskriptiven und in-

duktiven Statistik mit multiple Choice in Kap16; R-Intro http://www. agnld. uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/ 2009SS/R.html Hartmann & Selbig: Introductory bioinformatics 2009, 2013[5] Kap6; `R - -no-save < commands.R`, source('Plot0.R') ?c, ?read.table Hilfe zu c() oder read.table help.search('c') sucht in der Hilfe nach c find('c') liefert das package in dem c sich befindet quit(), example('c') library(mgcv) laedt die bibliothek mgcv library(help=mgcv) liefert infos zu mgcv, welches objekte, funktionen etc. install.packages('akima') installiert das package akima objects(), ls() zeigen an welche Objekte erstellt wurden search() zeigt den Suchfpfad an, insbesondere welche Libs geladen wurden str(x), strucure(x) zeigen die Struktur eines Objektes an summary(x) gibt statistische Zusammenfassung des Datensatzes x aus rm(x) loescht x aus dem Speicher save(x,file='file.dat') schreibt Daten x in die Datei file save.image(file='file') schreibt den kern, d.h. alle Daten usw. in die Datei file.Rdata, default Datei ist .Rdata load('file.dat') laedt die Daten wieder in den Speicher Alles in R sind Objekte Jedes Objekt hat eine Laenge und einen Typ (length(), mode()) z.B. `a<-1:10` erzeugt 1,2,...,10, der type ist numeric und die Laenge 10 Zahlen: 1.2e3, 3.9+4.5i, Inf, NaN NA not available, undefiniert, z.B. `a <- 1` ; `length(a) <- 100` Funktionsobjekte, Ausdrucksobjekte, . . . Datenreihen koennen beschriftet werden, names, row.names Klassen koennen erstellt werden Levels (Faktorlevel) Dimension fuer Matrix, Arrays, oder allgemein Tensoren attributes(a) zeigt alle Attribute an, `attr(a,'xyz')` zeigt spezielles Attribut, `attr(a,'xyz')<-100` setzt ein spezielles Attribut, Jedes Objekt hat eine Laenge, das i.te Element kann mit a[i] gesetzt werden `a<-numeric(250)` erzeugt numerischen Vektor mit 250 Eintraegen c() kombiniert objekte length(x) gibt die Laenge eines objektes zurueck min(x), max(x), range(x) sort(x) sortiert einen Vektor `y <- 2*x` multipliziert jedes Element aus x mit 2 `y <- sin(x)` berechnet von jedem Element aus x den Sinus `y <- x1+x2` summiert die beiden Vektoren x1 und x2, falls x1 und x2 unterschiedliche Laenge haben wird der kuerzere Vektor zyklisch wiederholt `x<-1:10` erzeugt den Vektor 1,2...,10 `x<-seq(1,10)` erzeugt den Vektor 1,2...,10 `x<-seq(1,10,0.1)` erzeugt den Vektor 1,1.1,1.2,1.3..,9.9,10 `x<-seq(1,10.01,0.1)` erzeugt den Vektor 1,1.1,1.2,1.3..,9.9,10,10.0 `x<-seq(1,10,len=5)` erzeugt 1,3.25,5.5,7.75,10 `x<-rep( 1:2 , times=5)` erzeugt 1,2,1,2,1,2,1,2,1,2 `x<-rep( 1:2 , each=5)` erzeugt 1,1,1,1,1,2,2,2,2,2 `x<-rep( c(1,2,3,4) , c(1,2,3,4) )` erzeugt 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4 ähnlich zu Vektoren, allerdings koennen die Typen in einer Liste unterschiedlich sein `l <- list( 1 , 2 , 3 )` Ausserdem koennen die einzelnen Elemente gelabelt werden `l <- list( eins = 1 , zwei = 2 , drei = 1:10 )` Dann kann man die Elemente mit l$eins abrufen/ansprechen Dataframes sind Listen der Klasse data.frame Vektorstrukturen in einem Dataframe muessen die gleiche Laenge haben werden von `d <- data.frame( eins=c(1:10) , zwei=c(1:10) )` erzeugt Dataframes werden von read.table() erzeugt attach(bacteria) haengt einen dataframe an, d.h. die komponenten koennen direkt angesprochen werden detach(bacteria) loescht detaches the dataframe bacteria, d.h. die komponenten koennen nicht direkt angesprochen werden; Einlesen auf Daten read.table('file') liest daten aus file ein und erzeugt einen Data Frame Zeilenlabel und Spaltenlabel werden versucht zu lesen Einzelen Spalten und Zeilen haben Namen data.dat: Zeit x y 1 1 1 1 2 2 2 1.5 3 3.5 2.5 1.25 `inp <- read.table('data.dat'), inp <- scan('data.dat', list(0,'',0))`

Definiere eine Funktion `my_pow <- function(x,i) { if( i<=0 ) 1.0 else x*my_pow(x,i-1) }` Schleifen sollten vermieden werden, sehr langsam. logistischen Abbildung: `a<-numeric(250) a[1] = 0.125 for( i in 2:250 ) a[i] = 4.0*a[i-1]*(1.0-a[i-1])`, plot(a,type='l') oder type='p'; `x<-read.table('dataframe')` `x<-read.table ('lotto. dat')`, Grundgesamtheit (Klasse, Population), Merkmalsträger (Untersuchungseinheit, Erhebungseinheit, Unit) Merkmal (Statistische Variable, Item, Instanz) Merkmalsausprägung (Wert der Variable).
`tmp<-c(x$V1,x$V2,x`$V3, x$`V4,x`$V5, x$`V6); mean(tmp); dim(tmp)<-c(2777,6);`
`for(i in 1:2777){tmp[i,]=sort(tmp[i,])}` logisches UND auf Vektor: `all(tmp[1,]==tmp[2,])`, all(tmp) logisches und `all(c(TRUE,FALSE))`, `any = log oder-Operation auf Vektor, any(tmp[1,]==tmp[2,])`, `for(i in 1:2776) for(j in (i+1):2777) all(tmp[i,]==tmp[j,]) tmp[1,][tmp[1,]==tmp[2,]]` # TRUE in erster und 2. Ziehung gleiche Zahlen 3 12; `length(tmp[1,][tmp[1,]==tmp[2,]] == 6 ) # 2; length( tmp[1,][tmp[1,]==tmp[2,]] ) == 6 # FALSE`; RRRRRR

4. Kurvenanpassung

/Ausgleichrechnung (Ludwig)/ glättende Splines, Hultsch, Knorrenschild Kap6, p91ff: Oelschlägel, Matthäus: Numerische Methoden, MINÖL 1974; Plato: Num Mathe - kompakt Kap2;

Harris & Taylor: Startwissen Math und Statistik Kap42 p170ff. **Anstieg ist Varianz gewichteter Regressionskoeffizient.** Sachs: Datenanalyse Kap511; geg: n Wertepaare (x_i, y_i) ges: $f(x_i) \approx y_i$ bestmöglich. a) $f(x_i) = y_i$ als **Interpolation** optimal (Graph geht durch alle Punkte), aber weil x_i, y_i Zufallszahlen eher unsinnig. b) f wird auf Raum stetiger und mehr oder weniger **glatter Ausgleichs- oder Ansatzfunktionen** auf $[a, b]$ eingeschränkt. Es wird das Fehlerfunktional

$$E(f(a,b)) := \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \frac{1}{\sigma_i} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a\,x_i - b)^2 \frac{1}{\sigma_i}$$

betrachtet, wobei die Parameter a, b so zu wählen sind, dass der Fehler stationär und minimal wird. Das Ritz-Verfahren bedeutet $\partial E/\partial a = \partial E/\partial b = 0$ Meist **mehr Datenpunkte als Parameter!** Speziell für linear Ausgleichprobleme $y = ax + b$ sind die Ansatz- oder Basis-Funktionen $f_1(x) = x$ und $f_2(x) = 1$ und damit der Raum aller Ausgleichfunktionen $\mathcal{F} = \{a_1\, f_1 + a_2\, f_2 | a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 **Methode der kleinsten Quadrate = least square fit** p114f; **Stahel: Statistische Datenanalyse** 2000[3] Kap13 p264ff.

$$\hat{a} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}, \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x}, \quad r_{XY} = \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\hat{a}$$

wobei die **Residuen** $R_i = y_i - \hat{a}\,x_i - \hat{b}$ sind und deren Varianz $\hat{\sigma}_R^2 = \dfrac{1}{n-2}\sum_i R_i^2$ ist χ^2-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden. Das Vertrauensintervall des Anstiegs ist dann $\hat{a} \pm c\sigma_{\hat{a}}$ mit $\sigma_{\hat{a}} = \dfrac{\sigma_R}{\sigma_X}$ und dem 97.5%-Quantil der t-Verteilung von $\hat{a}$ mit zwei FG. Siehe Bronstein 1991[25] Kap5.2.4 p692f; Falls X und Y gleiche Varianz, so fallen Anstieg und Korrelationskoeffizient zusammen. Die resultierenden **Normal-Gleichungen** sind

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i\, y_i, \quad \text{und} \quad a \sum x_i + n\, b = \sum y_i$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$\begin{pmatrix} n\hat{\sigma}_x & n\hat{\mu}_x \\ n\hat{\mu}_x & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y \\ n\hat{\mu}_y \end{pmatrix}, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

`plot(x,poly1d(polyfit(XMessung,YMessung,1))(x))` N = 1000; time = arange(N) zum Fit mit Polynom 6. Ordnung `plot(time,poly1d(polyfit(time,time*time`+randn(N),6))(time)) **Levenberg-Marquardt-Verfahren** Arens p1211, **Trust-Region-Methode** Siehe Werner: Num Mathematik II 1991. **Bernstein-Polynome** $B_{i,n}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \binom{n}{i} t^i\,(1-t)^{n-i}$ vom Grad n für $n \in \mathbb{N}_0$ und (mit $0 \le i \le n$) $B_{i,n}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \binom{n}{i} t^i\,(1-t)^{n-i}$ Familie reeller Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten. Durch **affine Transformation** (Abbildung des Intervalls [0,1] auf ein beliebiges Intervall [a,b]) erhält man die **verallgemeinerten Bernsteinpolynome** $B_{i,n}^{[a,b]}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{1}{(b-a)^n}\binom{n}{i}(t-a)^i\,(b-t)^{n-i}$. Eigenschaften bezüglich des Intervalls [0,1]: Basiseigenschaft: **Bernsteinpolynome** $\{B_{i,n} : 0 \le i \le n\}$ sind linear unabhängig und bilden eine **Basis** von Π_n, dem Raum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n. Positivität: $B_{i,n}(t) > 0$ für alle $t \in (0,1)$. Extrema: $B_{i,n}$ besitzt im Intervall [0,1] genau ein (absolutes) Maximum. Es befindet sich an der Stelle $t = \dfrac{i}{n}$. Man erhält insbesondere: $B_{0,n}(0) = B_{n,n}(1) = 1$. **Zerlegung der Eins** (auch Partition der Eins): $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = 1$ (mit Hilfe des **binomischen Lehrsatzes** aus $(t + (1-t))^n$.) **Symmetrie:** $B_{i,n}(t) = B_{n-i,n}(1-t)$ **Rekursionsformel:** $B_{i,n}(t) = (1-t)\cdot B_{i,n-1}(t) + t \cdot B_{i-1,n-1}(t)$, mit der Definition $B_{i,n} := 0$ für $i < 0$ oder $i > n$, $B_{0,0} := 1$. **Approximationstheorie**. Konstruktiver Beweis für den Approximationssatz von Weierstraß durch Bernstein. Methoden im Design von Kurven und Flächen bei Renault: Entwicklung von Bézierkurven. Grundstein des heutigen **Computer Aided Design (CAD)**. **Pascal-Dreieck** = Yang-Hui-Dreieck = Tartaglia-Dreieck = Chayyam-Dreieck = grafische Darstellung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Jeder Eintrag ist Summe der zwei darüberstehenden Einträge. Entspricht Gleichung $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. $n = 0, 1, \ldots$ **Zeilenindex**. $k = 0, 1, \ldots$ **Spaltenindex**. Beginnt man an den

Rändern mit Einträgen mit dem Wert 1, so ergeben sich dadurch genau die Binomialkoeffizienten:

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$$

Binomischer Lehrsatz: $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ gibt für $x=-2$ und $n=-1$ gibt $-1=\infty$. **Bell: Die großen Mathematiker** 1967 Gauß p227 jede positive Zahl $= \Delta + \Delta' + \Delta''$, also als Summe dreier **Pascal-Dreiecks-Zahlen** = Anzahl verschiedener, unabhängiger Einträge einer symmetrischen Matrix der Ordnung n darstellbar $= \frac{n}{2}(n+1) = 0, 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$. Summen der **flachen Diagonalen** ergeben jeweils eine Fibonacci-Zahl (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...) $= F(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-k-1}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\binom{n-k-1}{n-2k-1}, n \geq 1$. Die **erste Diagonale** enthält nur Einsen und die **zweite Diagonale** die Folge der **natürlichen Zahlen**. In der **dritten Diagonale** finden sich die **Dreieckszahlen** und in der **vierten** die **Tetraederzahlen**. Allgemein findet man in der r-ten Diagonale die regulären figurierten Zahlen der Ordnung r. **In jeder Diagonale steht die Folge der Partialsummen** zu der Folge, die in der Diagonale darüber steht. Umgekehrt ist jede Diagonalenfolge die Differenzenfolge zu der in der Diagonale unterhalb stehenden Folge. Allgemein gilt also für die **Dreieckszahlen** $\Delta(n) = \binom{n+1}{2}$, für die **Tetraederzahlen** $T(n) = \sum_{k=1}^{n}\Delta(k) = \binom{n+2}{3}$ und für die **regulären figurierten Zahlen der Ordnung** r ist $R(r,n) = \sum_{k=1}^{n} R(r-1,k) = \binom{n+r-1}{r}$. Die Summe der Einträge einer Zeile wird als Zeilensumme bezeichnet. **Von oben nach unten verdoppeln sich die Zeilensummen von Zeile zu Zeile:** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$. Reiht man jeweils die Ziffern der ersten fünf Zeilen des pascalschen Dreiecks aneinander, erhält man mit 1, 11, 121, 1331 und 14641 die ersten Potenzen von 11. Die **alternierende Summe jeder Zeile ergibt Null:** $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0, n > 0$. Formal folgen die drei obigen Formeln aus dem binomischen Lehrsatz Worobjow: Die Fibonaccischen Zahlen 1977[3]; = Vorobiev: Fibonacci numbers 2013; Walser: Fibonacci. Zahlen und Figuren 2013; Devlin: Man of Numbers. Fibonacci's arithmetic revolution 2011; Sprengel & Wilhelm: Funktionen und Funktionalgleichungen 1983; $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ für $x=1, x=10$ und $x=-1$. **Conway & Guy: Zahlenzauber. Von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen** 1997; **Harmonisches Dreieck oder Leibniz'sches Harmonisches Dreieck:** Die n-te Zeile beginnt und schließt am Rand mit $\frac{1}{n}$. Jede Zahl ist die Summe der beiden unter ihr stehenden Zahlen. Huygens hatte 1672 seinem jungen Freund Leibniz die Summation der reziproken Dreieckszahlen als Aufgabe gestellt: $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} + \ldots = 2$ Hofmann, Wieleitner, Mahnke. Die Differenzenrechnung bei Leibniz. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-Mathematische Klasse 1931 p562-590 Insbes p566-572. Jede Zahl ist die Summe der beiden unter ihr stehenden Zahlen

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & & & \\
 & & & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & & & \\
 & & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & & & \\
 & & \frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7} & & \\
 & \frac{1}{8} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{280} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{8} & \\
 & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & &
\end{array}.$$

Die Einträge werden mit dem Symbol $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ bezeichnet, wobei die Nummerierung der Zeilen und Spalten mit 1 beginnt (dies wird nicht einheitlich gehandhabt (bei 0 bzw. bei 1 beginnend)). Es gilt die Rekursion $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = \frac{1}{n}, \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}, \quad n \geq 1, 1 \leq k \leq n$. Ein Zusammenhang mit den Binomialkoeffizienten des Pascalschen Dreiecks ist gegeben durch $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \frac{1}{n\binom{n-1}{k-1}}$, d.h. die Einträge sind Stammbrüche. Wegen $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ ergibt sich somit für die Summe der Nenner in der n-ten Zeile $n \cdot 2^{n-1}$. Beispiel: $5 + 20 + 30 + 20 + 5 = 5 \cdot 2^4 = 80$. Für die Summe einer Diagonale ergibt sich wegen $\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+k \\ k+1 \end{bmatrix}$ die Teleskopsumme $\sum_{k=1}^{\nu} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+\nu \\ \nu+1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n} - \begin{bmatrix} n+\nu \\ \nu+1 \end{bmatrix}$. Wegen der Stammbrüche folgt durch Grenzübergang die Reihe von Leibniz:
$\sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{n}$ bzw $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{n+k}{k}} = \frac{n}{n-1}, n \geq 2$

Over-und Underfitting, Gershenfeld: The Nature of Mathematical Modeling 1998 p147: Überanpassung (engl. overfitting, Trainingsdaten einfach auswendig gelernt) bezeichnet eine bestimmte Korrektur eines Modells an einen vorgegebenen Datensatz. Spezifizierung eines Modells in der multiplen Regressionsanalyse, das zu viele erklärende Variablen enthält. Siehe **Beurteilung eines Klassifikators**. Gigerenzer: Das Einmaleins der Skepsis 2004; Beck-Bornholdt & Dubben: Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken 2006; Werden dagegen relevante Variablen außer Acht gelassen, spricht man von underfitting. Überanpassung durch zu viel Training: Nach einer Sättigungsphase nimmt die Erkennungsleistung wieder ab, weil sich die Datenrepräsentation zu sehr an die Schreibweise der Trainingsdaten anpasst und nicht mehr an den zugrundeliegenden Formen der zu lernenden Ziffern selbst orientiert. Dieser Prozess hat den Begriff Überanpassung im Kern geprägt. Wenn mit dem Modell kein Einsatz über die Trainingsmenge hinaus geplant ist, wenn also nur ein Modell für die abgeschlossene Problemstellung gelöst wird, kann natürlich von Üeranpassung nicht die Rede sein. Ein Beispiel hierfür wäre, wenn nur ein Rechnermodell für eine abgeschlossene Menge von Vorfahrtsituationen im Straßenverkehr gesucht wird. Abgeschlossene Modelle sind deutlich weniger komplex als das oben genannte und meistens kennt man die Regeln schon, so dass von Menschen verfasste Programme hier meist effizienter sind, als maschinelles Lernen. **Cross-validation** Gershenfeld: The Nature of Mathematical Modeling p147: Fitte Modell nur an einen Teil der Messdaten und teste Modell an verdeckten Messdaten. Dann nutze ein komplexeres Modell und tue das gleiche. Dabei wird naturgemäß der In-sample-Fehler kleiner. Nicht so der Out-of-sample-Fehler. Der steigt ab einer bestimmten Modellkomplexität, bei einem zu detailreichen Modell wieder an (overfitting). **Über den richtigen Umgang mit Messdaten:** Erdmann & Hebbeker: Experimentalphysik, Bd5 **Moderne Methoden der Datenanalyse** 2013 e-book; McKinney: Python for Data Analysis. Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython 2012; Kirkup: Data Analysis for Physical Scientists 2011[2];

Models: Specification, complexity and choice (David Hogg): What is a model? What freedoms does a model have and how can we capture that? Are qualitatively different models comparable? What is the **difference between a likelihood and a probability** for a model or for model parameters? How do we decide among models that are qualitatively similar but quantitatively different? **How do we decide among models that are qualitatively different?** The most important content will be conveyed through a lab session in which participants pair-code solutions to some model selection problems.

5. Statistische Tests, weil **Schätzer selbst Zufallsvariable und Funktionen des Stichprobenumfangs** sind. **Was soll die Gleichheit zweier Zufallsvariable bedeuten?** Vergleich über eine **Prüf- oder Testgröße**, die als Funktion der beiden Zufallsvariablen wiederum eine, wenn auch weniger launige Zufallsvariable ist. Die einfachste und klare Annahme über die beiden Zufallsvariablen: Sie sind identisch und gauß-verteilt. Wenn nun diese Prüfgröße jenseits eines kritischen Wertes liegt (positiver Test, Poppers Prinzip: Ich behaupte, dass zwei verschienene Dinge, repräsentiert durch Zufallsvariable, gleich sind. Diese Behauptung sollte verneinbar sein, falsch sein dürfen!), dann gilt die Hypothese als wi-

derlegt. Der **kritische Wert** wird so gewählt, dass die **Irrtumswahrscheinlichkeit** für die unbegründete Ablehnung z.B. 5% beträgt, d.h. mehr als 4 mal hintereinander, eben **überzufällig oft** das Wappen geworfen worden ist. Kanji: 100 statistical tests. **Rost: Lehrbuch Testtheorie und Testkonstruktion** 1996; **Lienert: Testaufbau und Testanalyse** 1998[6]; **6. Bayesianer = Daten sind fix gegeben und Hypothesen variieren. (Aristoteles, von Platon lernend) und Frequentisten = Hypothesen sind fix und Daten variieren. (Platon) oder Fisher-Statistiker = Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist seine relative Häufigkeit für den Fall ∞-oft wiederholbarer Experimente.** Was aber, wenn die ∞ Wiederholbarkeit nicht gegeben ist, aber zusätzlich Erfahrung zum Problem existiert? **Babu: http://astrostatistics. psu.edu/** `Feigelson_STScI_Astrostat1.pdf` http://ada7. cosmostat. org/ **Münzwurf:** http://www. behind-the-enemy-lines. com/2008/01/ are-you-bayesian-or-frequentist-or. html Die Bayes'sche Variante Volker Dose: PhysJ08 2005 p67: **Die von Bayes begründete und von Laplace ausgebaute Methode, von Jaynes als "The Logic of Science" bezeichnet, sollte dringend zum Standard werden und zwar sowohl in der Forschung als auch in der Lehre.** Sharon Bertsch **McGrayne: Die Theorie, die nicht sterben wollte**. Wie der englische Pastor Thomas **Bayes** eine Regel entdeckte, die nach 150 Jahren voller Kontroversen heute aus ... und Gesellschaft nicht mehr wegzudenken ist 2013 Suchmaschinen und Qualitätsmanagement, Versicherungen und Erdbebenvorhersagen, Verkehrsflüsse, Geheimcodes und medizinische Prognosen – die sogenannte **Bayes'sche Regel** ist geradezu allgegenwärtig und dennoch nur wenigen vertraut. Dabei ist sie in ihrer grundlegenden Aussage bestechend einfach: Man beginnt mit einer Vermutung und revidiert diese anhand neuer, objektiver Informationen – und gelangt so zu einer verbesserten Annahme. Für seine Anhänger ist das **Bayes-Theorem** eine elegante Formulierung dafür, dass man aus Erfahrung klug wird, und ein mathematisches Instrument, das einer klaren Linie folgt. Für seine Gegner ist es ein Amoklauf der Subjektivität. Entdeckung des Theorems durch den britischen Geistlichen und Amateurmathematiker Thomas Bayes in den 1740er-Jahren. Weiterentwicklung in eine moderne Form, die fast der heutigen entspricht, durch den französischen Wissenschaftler Laplace. Angesehene Statistiker belegten das Theorem 150 Jahre lang mit einem Tabu, während in der gleichen Zeit Praktiker darauf zurückgriffen, um Probleme zu lösen, die mit großen Unsicherheiten und einem Mangel an Informationen einhergingen. Eine wichtige Rolle spielte dabei **Alan Turing**, als er im Zweiten Weltkrieg den deutschen Enigma-Code knackte. Mit dem Aufkommen der immer preiswerter und für alle verfügbaren Computertechnologie in den 1980er-Jahren brach ein ganz neues Zeitalter für das Bayes-Theorem anbrach. Heute spielt es in Wissenschaft, Technik und Gesellschaft fast überall eine Roller: Entschlüsselung der DNA, Börsengeschehen, Terrorabwehr; J. Berg: Stat analys of biolog networks. Bates in Chap12 von **Bouchaud ed.: Complex systems:** Ecole d'Été de Physique des Houches, session LXXXV 2007; Silver: The Signal and the Noise. Why So Many Predictions Fail-but Some Don't 2012; Nate **Silver: Die Berechnung der Zukunft. Warum die meisten Prognosen falsch sind und manche trotzdem zutreffen** 2013; **Alternative Zukunftsentwürfe** zum Kapitalismus. Armen Avanessian: Spielarten des Ethno-Futurismus siehe SEIN UND STREIT DLF 22.07.2018. Comic-Verfilmung 'Black Panther'. William Gibson: "Die Zukunft ist schon da, sie ist nur ungleich verteilt.Für gesellschaftliche Wirklichkeit: Ës haben nicht alle die gleichen Zukunfts-Chancen: Es sind nur wenige, die über die Daten von allen verfügen und damit über eine unglaubliche Macht. Präemptions-Phänomenen Neues Zeitmodell = Zeit wirkt von der Zukunft auf die Gegenwart und nicht mehr, wie wir bisher instinktiv angenommen haben, aus der Vergangenheit in Richtung Zukunft läuft. Zukunftserwartung bestimmte schon immer gegenwärtigens Verhalten. Online-Händlers schon weiss im Voraus 'was wir wollen oder was wir wollen werden'. **Klausnitzer: Das Ende des Zufalls. Wie Big Data** uns und unser Leben vorhersagbar macht 2013; **Mainzer: Die Berechnung der Welt. Von der Weltformel zu Big Data** 2014; Dressler: Thomas Bayes und die Tücken der Statistik, SdW Okt 2011 p70-73. Streiter für Newtons Differenzialrechnung. Berkeley nahm Anstoß: Wie kann h verschieden von Null und dann doch Null sein? Mathematiker interessiert nicht, ob Größenordnungen in der Wirklichkeit eine Entsprechung haben, sondern allein, ob sie vorstellbar sind. Breidert: George Berkeley 1685-1753 1989; Kulenkampff: George Berkeley 1987; Ging von den Gegenständen seines Wahrnehmens aus und zog daraus seine jeweils eigenen Schlussfolgerungen und setzte diese gegen Theorien, die aus seiner Sicht nicht zutreffend waren. Zetetischen Annahmen = Suchen steht im Vordergrund, vertrat nominalistische Philosophie. Immaterialist.

Berkeley: Eine Abhandlung über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis 1710; Berkeley: Philosophische Werke Hecht, Raab, Richter, Schmidt Ueberweg. **Bd1** Theorie der Gesichtswahrnmung, Abhandlung über die Prinzipien der menschlichen Erkenntnis, Drei Dialoge zwischen Hyla und Philonous, **Bd3** Siris. Tugenden des Teerwassers. Philosophisches Tagebuch 1912; **Bayes-Idee:** Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft eine Theorie zu, wenn bestimmte Beobachtungen vorliegen? Perspektive der klassischen Statistik: Hier geht es um die Wahrscheinlichkeit, etwas tatsächlich zu beobachten, sofern eine bestimmte Theorie zutrifft. Mit seinem Theorem setzte Bayes die Idee um, dass Wahrscheinlichkeiten ein Gradmesser unseres Wissens sind und sich folglich mit diesem ändern. Wir lernen aus Erfahrung. Beispiel: C sei schüchtern. Ist es ein **A**rzt $P_A = 0.99$ oder **B**ibliothekar $P_B = 0.01$? Schüchterner Arzt $P(C|A) = 0.1$, schüchterner Bibliothekar $P(C|B) = 0.8$. $P_C = P(C|A)P_A + P(C|B)P_B = 0.107$. $0.0748 = P(B|C) = \frac{P(C|B)P_B}{P_C} < \frac{P(C|A)P_A}{P_C} = P(A|C) = 0.93$ In statistische Rechnungen geht bei Bayes (1701-1761) stets eine **a-priori-Wahrscheinlichkeit** ein, also die Wahrscheinlichkeit, die man den Ereignissen zuweist, ohne zusätzliche Erkenntnisse einzubeziehen, und die im Extremfall nur totales Unwissen widerspiegelt. **Klassische Statistik geht anders ran:** Am Anfang steht die Festlegung, wie groß die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlentscheidung sein darf, die **Irrtumswahrscheinlichkeit**, das Signifikanzniveau. Man unterscheidet als **Gegensatzpaar Nullhypothese und Alternativhypothese/Gegenhypothese**. Häufig sagt die Nullhypothese aus, dass kein Effekt bzw. Unterschied vorliegt oder dass ein bestimmter Zusammenhang nicht besteht. Diese These soll verworfen werden, so dass die Alternativhypothese als Möglichkeit übrig bleibt. Poper'sches Falsifikations-Prinzip. Durch dieses indirekte Vorgehen soll die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Verwerfung der Nullhypothese kontrolliert klein bleiben. Oft entsteht jedoch Verwirrung beim Anwender, weil dieses Vorgehen die Möglichkeit nahelegt, dass – sofern die Nullhypothese nicht verworfen und die Alternativhypothese damit nicht angenommen werden kann – die Nullhypothese als erwiesen gilt. Dies ist allerdings nicht der Fall. **Überschreitungswahrscheinlichkeit** oder **p-Wert** gibt die Wahrscheinlichkeit der Null-Hypothese an. Bortz: Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler 2002[6]; **Rowe: Statistik für Mediziner und Pharmazeuten** 2012 Konfidenzintervall, Einführung in Hypothesentests, Der berüchtigte p-Wert, Falsch-negative Befunde, Güte und notwendige Stichprobenumfänge, Statistische Signifikanz, praktische Bedeutung und Äquivalenz, Der gepaarte t-Test - Vergleich von zwei zusammenhängenden Datensätzen, Varianzanalyse; Deutet an, wie **glaubhaft** es ist, ein solches Stichprobenergebnis zu erhalten, wenn die Nullhypothese wahr ist und damit umgekehrt, wie glaubhaft die Nullhypothese bei Erhalt dieses Stichprobenergebnisses ist. Der p-Wert ist die Wahrscheinlichkeit, unter Gültigkeit der Nullhypothese das erhaltene Ergebnis oder ein extremeres zu erhalten. Mit dem p-Wert wird also angedeutet, wie extrem das Ergebnis ist: je kleiner der p-Wert, desto mehr spricht das Ergebnis gegen die Nullhypothese. Werte kleiner als eine im voraus festgesetzte Grenze, wie 5 %, 1 % oder 0,1 % sind Anlass, die Nullhypothese abzulehnen. **Beziehung zum Signifikanzniveau**: Es besteht eine enge Beziehung zwischen dem (beobachteten) p-Wert p und dem (im Voraus gewählten) Signifikanzniveau. Wenn t das Ergebnis der Teststatistik (Prüfgröße) T ist, und k der kritische Wert beim Signifikanzniveau α ist, so gilt z. B. rechtsseitig: $p = P(T \geq t|H_0) \qquad \alpha = P(T \geq k|H_0)$ und $p < \alpha \Leftrightarrow t > k$ In statistischer Software wird bei der Durchführung eines Tests der p-Wert angegeben. Ist der p-Wert kleiner als das vorgegebene Signifikanzniveau α, so ist die Nullhypothese abzulehnen. Auf der einen Seite enthebt die Ausgabe des p-Wertes bei einem Test die Software explizit davon, nach dem vorgegebenen Signifikanzniveau zu fragen, um eine Testentscheidung zu treffen. Auf der anderen Seite besteht die Gefahr, dass der Forscher das eigentlich im voraus festzulegende Signifikanzniveau anpasst, um sein gewünschtes Ergebnis zu bekommen. Ergibt nun eine Serie von Beobachtungen einen Wert, der im Rahmen der zur Debatte stehenden Theorie sehr unwahrscheinlich ist - z.B. 5 mal hintereinander Zahl zu werfen 0.5*0.5*0.5*0.5*0.5=0.03125 etwa 3% - dann empfiehlt der Statistiker, die Theorie zu verwerfen. Anderenfalls eben nicht. Und man hat keine Aussage über die Theorie. Zitierbar ist nur die Wahrscheinlichkeit, dass die Beobachtungen die Theorie bestätigen, **vorausgesetzt** sie ist richtig. Das Resultat des Bayes-Theorems lässt sich dagegen interpretieren als Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Theorie richtig ist, **vorausgesetzt** die Beobachtungen liegen vor. **Lavine: What is Baysian statistics and why everything else is wrong**, 2000; www.math.umass.edu/~lavine/whatisbayes.pdf; Historie siehe: **Barth & Haller: Stochastik** 1996; **Haller & Barth: Berühmte**

2014 p42 Martingal; Riemer: Stochastische Probleme aus elementarer Sicht. Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Bd18 1991; Schneider ed: Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1986; Kersting & Wakolbinger: Elementare Stochastik 2010; **T̃ao Qian & Rodino eds: Mathematical Analysis, Probability and Applications – Plenary Lectures**. ISAAC 2015, Macau, China (Springer Proceedings in Mathematics & Statistics) 2016 super Überblick partial differential equations in mathematical physics, Fourier analysis, probability and Brownian motion, numerical analysis, and reproducing kernels Plato: Creating modern probability. Its mathematics, physics and philosophy in historical perspective 1998; **Anwendungen:** Nishimoto et al.: **Reconstructing Visual Experiences from Brain Activity** Evoked by Natural Movies. In: Current Biology 10.1016/j.cub.2011.08.031, 2011 Mittels Bayes-Statistik werden aus der gemessenen Hirnaktivität die plausibelsten Filmschnipselkandidaten ermittelt. Liddle: **Kosmologie** F6.3 p181; http://cosmologist. info/teaching/STAT/ **Laplace'sche Schätzung der Saturn-Masse** siehe Julien Langou: Translation and modern interpretation of Laplace's Théorie Analytique des Probabilités von 1763 p505-512, 516-520, arXiv: http://arxiv.org/abs/0907.4695; oder **Sivia: Data analysis: a Bayesian tutorial for scientists and engineers.** Denison: Bayesian methods for nonlinear classification and regression; Reißzweckenwurf kann per Computer-Simulation frequentistische Daten geben. Calvetti & Somersalo: **Inverses Problem** = destilliere Information über unbekannte Größen durch indirekte Beobachtung (Satellitenumlaufzeit und Zentralkörpermasse). **Statistisches Schließen** - Erschließe Eigenschaften einer unbekannten Verteilung auf alleiniger Gundlage von Stichprobendaten: Gegeben eine Menge beobachteter Realisierungen $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, $x_j \in |R^n$ einer ZV X wird auf die zugrundeliegende Wahrscheinkeitsverteilung geschlossen, die auf die Stichprobe S führt. Statistische Modellierung und Analyse schließt Beschreibung und zugrundeliegenden Datenaufnahmevorgang ein. Sie liegt wissenschaftlicher Modellierung und empirischem Testen zugrunde. Von einem **Modell** spricht man erst, wenn die Verteilung einer Zufallsvariablen nicht exakt präzisiert, sondern innerhalb einer Familie von zulässigen Verteilungen frei wählbar ist. Bei parametrischen Modellen ist das z.B. die mögliche Schar von Parametern der Verteilungen. **Parametrischer** (wenige Verteilungsparameter statt vieler Messwerte, Modellreduktion: Mittelwert, Varianz, aber riesige Anzahl von Modellparametern/Freiheitsgraden bei inversen Problemen) und **nicht-parametrischer** Ansatz wo keine Falschmodellierung passiert, wo es aber halt auch keine synthetische Formel gibt, die das Verstehen ermöglicht Abhängigkeitsstruktur steht im Fokus. 1889 kritisierte Francis Galton die Statistikerzunft mit: 'who limited their inquires to Averages, and do not seem to revel in more comprehensive views. Their souls seem as dull to the charm of variety as that of a native of one of our flat English counties, whose retrospect of Switzerland was that, if the mountains could be thrown into its lakes, two nuisances would be got rid at once' (F. Galton, Natural Inheritance). Im Unterschied zu Taleb im **Schwarzen Schwan: Die Macht höchst unwahrscheinlicher Ereignisse** (**Sir K. Popper**) hat Galton aber wesentliche Beiträge zur Statistik geleistet.

Black-Scholes-Merton-Formel als Standardformel zur Berechnung von Optionen geht von einer Normalverteilung aus. Bei Anwendung korrigiert man die Formel durch den sogenannten Volatility-Smile. D.h. man gibt größere Parameterwerte vor, um die **fat-tails** zu kompensieren. Slanina: Essentials of Econophysics Modelling 2013; P. Wilmott: Finanzmathematik. Man gibt in eine falsche Formel falsche Werte ein, um das richtige Ergebnis zu bekommen. Reliance on models based on incorrect axioms has clear and large effects. The Black–Scholes model for example, which was invented in 1973 to price options, is still used extensively. But it assumes that the probability of extreme price changes is negligible, when in reality, stock prices are much jerkier than this. Twenty years ago, unwarranted use of the model spiralled into the worldwide October 1987 crash; the Dow Jones index dropped 23% in a single day, dwarfing recent market hiccups. Economics needs a scientific revolution, Bouchaud NATURE Vol 455 30 Oct 2008 OPINION ESSAY p1181;

B. Mandelbroit: **scale-invariant (oder stable)** distributions. Statistisches äquivalent zu Fraktalen. Eine triviale scale-invariante Verteilung ist die Normalverteilung. Die will man aber nicht. Die übrigen in Frage kommenden Verteilungen haben aber eher grausliche mathematische Eigenschaften, wie unendliche Varianz bei **stabilen Prozessen**, z.B. Lévy flight. **Feller**. http://www. mathematik.uni-ulm. de/stochastik/leh-

re/ss05/wt/skript/skript.html Schrittweiteverteilung $p(x) \propto |x|^{-1-\alpha} = \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$ mit $1 \leq \alpha \leq 2$. Moritz Zeidler: Die **Nahrungs-Suchstrategie** des Albatros gemäß Levy-Flug ist effizient, falls die Beute bergauf oder entgegen der Strömung zu finden ist, anderenfalls ist eine Brown'sche Bewegung $\alpha = 2$ optimal. Klages: Suchzeiten bei Pilzsucher oder weißen Blutzellen bei Neutralisierung des Erregers, Jagd nach U-Booten. Viswanathan, da Luz, Raposo, Stanley: The physics of foraging. An Introduction to Random Searches and Biological 2011 Besonders lange Levy-Flüge minimieren die Suchzeiten für zufällig verteilte, ruhende, wiederauffüllbare Nahrungsquellen geringer Dichte. Hummel sucht seltene Blume, dann Fluglänge l gemäß $P(l) \propto l^{-1-\mu}$ mit $0 < \mu < 2$. Levy-Flüge effizienter als als Brown'sche Bewegung, um weit verteilte Nahrungsquellen zu finden. Bei hoher Dichte ist Brown'sche Bewegung effizienter PhysJ14 2015 H12 p22; Mean first passage time sagt nur, wie rasch eineHummel einzige Blume findet, Sagt nicht über die **Suchstrategie**. **Cover time = Überdeckungszeit** = Zeit, um M beliebige Knoten in einem aus N Verknüpfungspunkte bestehendes Netzwerk aufzusuchen: $P(x) = \frac{e^{-(p+1)x-e^{-x}}}{p!}$ mit $p = N - M$ und $x = \frac{\tau}{<T>} - \ln N$ für $N, M \to \infty$. $\tau(M, N)$ = partial cover time = Zeit, um M beliebige Knoten aufzusuchen. $< T >$ = mittlere MFPT zu gegebeneem Knoten gemittelt über alle Startbedingungen. Méndez, Campos, Bartumeus: Stochastic Foundations in Movement Ecology. Anomalous Diffusion, Front Propagation and Random Searches 2013; Benichou et al.RevModPhys 83 2011 p81; Zaburdaev, Denisov, Klafter: Levy-Walks realistischer als Levy-Flüge RevModPhys 87 2015 483 Wilson: The universal statistics of random searches, Physics Today Oct 2015 p17 The time it takes a random walker to find all the targets in a given domain can be determined from the average time it takes to find just one of them. Ferreira, Raposo, Viswanathan, Luz: The influence of the environment on Lévy random search efficiency: Fractality and memory effects Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 391 H11 2012, 3234–3246; **Lévy flight** = Random walk mit Schrittweite endlastiger Verteilung. Für $d > 1$ isotrop. **Cauchy flight** = Schrittweite mit Cauchy-Verteilung. **Rayleigh flight** = Schrittweite normal verteilt, also nicht endlastig. A Lévy flight is a random walk in which the steps are defined in terms of the step-lengths, which have a certain probability distribution, with the directions of the steps being isotropic and random. Defined by the survivor function (commonly known as the survival function) of the distribution of step-sizes: $\Pr(U > u) = \begin{cases} 1 & : u < 1, \\ u^{-D} & : u \geq 1. \end{cases}$ Here D is a parameter related to the fractal dimension and the distribution is a particular case of the Pareto distribution. Later researchers allow the distribution of step sizes to be any distribution for which the survival function has a power-like tail $\Pr(U > u) = O(u^{-k})$, for some k satisfying $1 < k < 3$. (Here the notation O is the Big O notation.) Such distributions have an infinite variance. Typical examples are the symmetric stable distributions. **Lévy flights** sind per Konstruction Markov-Processe. For general distributions of the step-size, satisfying the power-like condition, the distance from the origin of the random walk tends, after a large number of steps, to a stable distribution due to the generalized Central Limit Theorem first proved by Kolmogorov. Due to this property many processes can be modeled using Lévy flights. The probability densities for particles undergoing a Levy flight can be modeled using a **generalized version of the Fokker- Planck equation**, which is usually used to model Brownian motion. The equation requires the use of **fractional derivatives**. For jump lengths which have a symmetric probability distribution, the equation takes a simple form in terms of the Riesz fractional derivative. In one dimenson, the equation reads as $\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\phi(x,t) + \gamma \frac{\partial^\alpha \phi(x,t)}{\partial |x|^\alpha}$ where γ is a constant akin to the diffusion constant, α is the stability parameter and $f(x,t)$ is the potential. The Reisz derivative can be understood in terms of its Fourier Transform. $F_k[\frac{\partial^\alpha \phi(x,t)}{\partial |x|^\alpha}] = k^\alpha F_k[\phi(x,t)]$. This can be easily extended to multiple dimensions. Another important property of the Lévy is that of diverging variances in all cases except that of $\alpha = 2$, i.e. Brownian motion. In general, the Θ fractional moment of the distribution diverges if $\alpha < \Theta$ Also, $< |x|^\theta > \propto t^{\frac{\theta}{\alpha}}$ if $\Theta \leq \alpha$. The exponential scaling of the step lengths gives Lévy flights a scale invariant property, and they are used to model data that exhibits clustering. Levy-Flug: Warum fürchten sich Physiker vor dem Unendlichen? **Kramers-Rate** Hänngi et al. Reaktion-rate theory RMP1990 p251ff Kramers-Entweichrate für ein Brown'sches Teilchen aus einer Potenzialmulde. Kein Trägheitsterm! Kramers mit Levy ist Unfug, denn für ewig Riesensprünge ist ∞-viel Energie aus Umgebungsbad nötig mit $T = \infty$. Wie soll aus Anzahlfluktuation per ein ∞-weiter Sprung kommen? Praktisch aber ist das scheinbar Unendliche nur ein bis zwei Größen-

ordnungen größer als das Normale. Daher ist der beschränkte Levy-Flug manchmal ein nützliches Modell: Such-Amplitude des Auges, Windgeschwindigkeitsfluktuation. Applebaum: Probability and Information. An Integrated Approach 2008; Ãpplebaum: Levy Processes and Stochastic Calculus 2009[2]; **Mandelbroit: Fraktale Geometrie der Natur** 1980; Börsenkurse nicht scale-invariant. Für kurze Zeiträume (bis ca. 5 min) die sogenannte Microstructure. Die Verteilung wird durch die technischen Handelsbedingungen bestimmt (z.B. bid-ask-Spread). Über längere Zeiträume nähern sich die Kursentwicklungen hingegen der Normalverteilung relativ gut an. Die Ideen von Mandelbrot sind interessant, aber unhandlich und ebenfalls weit von der Realität entfernt. **Watkins:** Anomale Diffusion kommt aus **zusammengesetzter Bm**! Archetyp ist raum-zeitlich ungekoppelter CTRW: $\varphi(\xi,\tau) = \lambda(\xi)\psi(\tau)$ mit **Wartezeit in CTRW** τ. Aber Raum ξ ist an Zeit τ gekoppelt. Levy-Flight Shlesinger & Klafter PRL1985. Bewegungsmuster von Kunden in Kaufhäusern zeigt **Wegintelligenz** Typisch für Ortsverhalten wohlhabender moderner Menschen ist die nicht Brown'sche anomale Diffusion: $(\Delta x)^2 \sim$ **nichtlinear**(t). $\varphi(\xi,\tau') = \lambda(\xi)\psi(\tau'|\xi) = \delta(|\xi| - \tau')$ mit **mittlerer Flugdauer** beim Levy-Flight τ'. Kombination von Levy-Flight mit stabilem Levy-Prozess $X(t) \sim t^{\frac{1}{\beta}}$ mit **räumlichem Exponenten** $\beta \in (0,2)$ und fraktionalem Zeitprozess = FTP (nicht fBm!) mit $X(t) \sim t^{\frac{\alpha}{2}}$ mit **zeitlichem Exponenten** $\alpha \in (0,1)$. Brockmann Nature 2006, aber FTP statt fBm. Grund: Symptom komplexen Transports ist längere Wartezeit. In komplexer Umgebung ist Levy-Flight die effektive Suchstrategie, auch bei Schwärmen. Man sieht Flicker-Rauschen oder 1/f-Spektren. MacDonald: Noise and Fluctuations. An Introduction 2006;

Kleine Literaturliste für Methoden, die laut Taleb erst erfunden werden müssen, aber schon längst erfunden sind: L.v.Bortkewitsch (auch Bortkiewicz geschrieben): Das **Gesetz der kleinen Zahlen**. Ein klassisches Buch. Erschienen 1898! Wie der Titel schon sagt geht es um seltene und nicht normalverteilte Ereignisse (bei der Normalverteilung spricht man vom Gesetz der grossen Zahl). Das berühmteste Beispiel aus diesem Buch ist die Verteilung von Toten durch Hufschlag in der Preussischen Armee. Die von Bortkewitsch verwendeten Methoden spielen in der modernen Finanzmathematik eine zentrale Rolle (Levy-Prozesse). **Qi Li & Racine: Non Parametric Econometrics, Theory and Practice**. Die Nonparametric Statistic macht überhaupt keine Annahme über die Verteilung. Sie ist ein eigenes, riessiges Gebiet der Statistik. Nonparametric Statistics gibt es schon seit mindestens 200 Jahren. **Koenker: Quantile Regression**. Hier schätzt man z.B. die untersten oder obersten 10% einer Verteilung. Also genau das, auf was es laut Taleb ankommt. Man kann natürlich auch den Median damit schätzen. In der normalen Linearen Regression schätzt man das arithmetische Mittel. Erfunden 1978. Maronna et al.: **Robust Statistics. Theory and Methods**. In der robusten Statistik untersucht man Methoden, die von einzelnen **Ausreissern** , den **schwarzen Schwänen**, wenig beeinflusst werden. In vielen Untersuchungen hat man **das umgekehrte Schwarze Schwan Problem**. Man will etwas über die weissen Schwäne wissen, die Daten enthalten aber ein paar schwarze Schwäne. Diese sollen das Ergebnis nicht zu stark beeinflussen. Das arithmetische Mittel ist ein grauer Schwan, ein robustes Mittel (z.B. Median) ist ein weisser Schwan. Seit mindestens 200 Jahren bekannt. R.B. **Nelsen: An Introduction to Copulas**. Mit Copulas kann man beliebige statistische Zusammenhänge zwischen Zufallsvariablen modelieren. Die auf der Normalverteilung basierende Korrelation (Pearsons-R) ist nur ein Spezialfall. Erfunden 1959, i **Satz von Sklar**. Embrechts, Klüppelberg, **Mikosch: Modelling Extremal Events for Insurance and Finance**. Hier geht es um statistische Methoden für Extremereignisse. Wie häufig treten graue Schwäne auf und welchen Grauwert haben sie bzw. kann auch ein schwarzer Schwan vorkommen? Seit mindestens 100 Jahren bekannt. Didier Sornette: Why Stock Markets Crash. Erschienen 2001. Die Schwarzen Schwäne heissen bei Sornette **King-Dragons**. Sornette versucht mit Methoden der Statistischen Physik und der Erdbeben-Forschung diese King-Dragons vulgo Crashes zu prognostizieren. Man kann über diese Methoden streiten. Aber Sornette und seine Mitarbeiter publizieren seit 15 Jahren über dieses Thema. **Econophysics:** Finanzphysik, Bounchaud, Phys J 2 2003 Nr 3 p 43 ff;

Hafner: **Nichtparametrische Verfahren der Statistik** 2001; verteilungsfreie Methoden, also Verfahren und Aussagen gültig ohne einschränkende Annahmen über die im Modell auftretenden Verteilungen. Der Frequentist glaubt an wahre Parameter der Verteilungen, wogegen der Bayesianer auch die Parameter wegen Ignoranz (Mangel an Information) als Zufallsvariable betrachtet. Calude: Randomness And Complexity. From Leibniz To Chaitin 2007; Calude: Information and Randomness. An Algorithmic Perspective 2010;

ABER Mittel (empirisches und Kovarianz) sind nur bei gaußverteilten Daten zur Beschreibung der zugrundeliegenden Verteilung gut (2d-Gauß und Ring, der Scatterplot zeigt's unmittelbar). Methode für Güte der Gaußheit p25 Bayesianer bevorzugen den Begriff **Glaubwürdigkeit** statt des **Vertrauen** bei den Frequentisten. Grundidee der Bayesianer ist, nicht zu glauben, es gebe eine richtige Hypothese und die Beobachtung auf diese Hypothese zu bedingen (Hintergrund von ML ist letztlich argmax $pP(o|\mu_p)$), sondern eher von der Beobachtung auszugehen und die Modelle auf diese Beobachtung zu bedingen, also etwa $P(\mu_p|o)$ zu betrachten. `http://www.cl.uni-heidelberg.` de/kurs/skripte/stat/html/page023.html Das ist zunächst grundvernünftig, denn immerhin wissen wir ja nur die Beobachtung mit Bestimmtheit – die Modelle kommen von uns, und auf sie zu bedingen heißt irgendwo, auf Phantasie zu bedingen. Aber das sollte nicht so ernst genommen werden, denn auch BayesianerInnen brauchen Modelle.

Viel dramatischer ist, dass Bayesianer eben auch Theorien oder Modellen 'Wahrscheinlichkeiten' zuschreiben, und das ist es, was die Frequentisten ärgert – letztere argumentieren nämlich, Wahrscheinlichkeiten könnten nur aus beliebig oft wiederholbaren Experimenten kommen, und in so ein Bild passen Modelle nicht rein. Tatsächlich ist schon eine Aussage wie 'Die Regenwahrscheinlichkeit am nächsten Sonntag ist 30%' für Frequentisten ein Graus, weil es eben nur einen nächsten Sonntag gibt (während die Regenwahrscheinlichkeit an Sonntagen in Ordnung wäre).

Als Nebeneffekt des mutigen Schritts, Wahrscheinlichkeiten so zu emanzipieren, können Bayesianer Theorien auch ohne Daten Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Das klingt nach schwarzer Magie, ist aber häufig gut motivierbar. Occams Klinge ist beispielsweise ein uraltes und bewährtes Prinzip der Naturwissenschaften und sagt in etwa „Wenn du die Wahl zwischen einem einfachen und einem komplizierten Modell hast, nimm das einfache, wenns irgend geht". Für uns könnte sowas heißen: Bevorzuge ein Modell mit wenigen Parametern gegenüber einem mit vielen. Oder auch: Bevorzuge ein Modell ohne allzu wilde Annahmen gegenüber einem, das mehr Mut braucht.
ABER: Frage nicht, was die numerische Analysis für die Statistik tun kann, sondern frage, was die Statistik für die numerische Analysis tun kann. Subjektive oder Bayesianische Wahrscheinlichkeit. Bayes detectors, Bayes estimators, **MLE** Scharf: Statistical signal processing. Detection, estimation, and time series analysis 1991. Bayes-Test multipler Hypothesen. PCM pulse code modulation PCA-Methoden. ROC receiver operating characteristics Rinne: Test-Beurteilungsmaßstab ist Güte-Funktion, GF(Θ) Fehlentscheidungswahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art als Funktion des zu testenden Parameters Θ, Macht-Funktion, power function oder die dazu (auf Eins) komplementäre OC(Θ)-Funktion, Annahmewahrscheinlichkeit, Fehlentscheidungswahrscheinlichkeit für Fehler 2. Art, Operationscharakteristik. Test-Statistik ist Detektor. Siehe **Beurteilung eines Klassifikators**. Gigerenzer: Das Einmaleins der Skepsis 2004; Beck-Bornholdt & Dubben: Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken 2006; **Sensitivität vs Spezifität** Sensitivität = P(Test positiv | Proband krank) = TP/(TP + FN) ist Rate wahrer positiver Testausgänge. Spezifität = P(Test negativ | Proband gesund) = TP/(TN + FP) ist Rate richtiger negativer Testausgänge.

7. Funktionen von Zufallsvariablen: $Y = X^2$, $Y = A\cos X$, Maxwell, $Z = X/Y, Z = |X-Y|$, insbes bei unabhängigen Variablen

$$p(x) = \int dx_1 \cdots \int dx_n \, p_1(x_1) \ldots p_n(x_n) \, \delta(x - \sum x_i)$$

8. Zufallsvektoren: $\vec{X}(\omega)$, Multivariate Daten deren Linearkombinationen: $n! - 1$-maliges Mischen, Permutieren, shuffle oder Randomisierung zerstört jede Abhängigkeit: r=rand(N);
r[argsort(rand(N))]. plt.acorr(sin(t[argsort(rand(100))]),30);show(). **Permutations-Test** , Randomisierungs-Test, re-randomization test, oder Exakter Test, ist statistical significance test bei dem die Verteilung der Test-Statistik unter der Null-Hypothese erzeugt wird, dass es nicht auf die Anordnung der beobachteten Daten ankommt. $\vec{Y} = A\,\vec{X}$, Kovarianz $\gamma_{XY}(x, y)$,

$$\hat{\gamma}_{XY} = \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\hat{\sigma}_X\,\hat{\sigma}_Y}$$

PCA, EOF, SVD. For N different observation $Y_1, \ldots, Y_N$ of possibly interrelated variables, each of length

m, the general purpose of the principal component analysis is the transformation to a new, linearly uncorrelated set of variables through the orthogonal transformation to a new coordinate system with orthogonal dimensions which explain most of the observed variance. Rinne: Statistische Analyse multivariater Daten 2000 p97ff; **Elsner & Tsonis: Singular spectrum analysis** 1996 elementare Einführung; Yang & Tse: Rauschreduktion per SVD, NDT&E International 36 2003 419-432; von Storch & Zwiers: Statistical analysis pp294; Erste EOF $\vec{e}^1$ wird durch Minimierung von

$$\epsilon_1 = E(||\vec{X} - < \vec{X}, \vec{e}^1 > \vec{e}^1||^2)$$

oder Maximierung der Varianz im Unterraum der EOF

$$Var(< \vec{X}, \vec{e}^1 >) = \vec{e}^{1+} \Sigma_X \vec{e}^1$$

unter der Nebenbedingung $||\vec{e}^1|| = 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{e}^1} \left[-\vec{e}^{1+} \Sigma_X \vec{e}^1 + \lambda(\vec{e}^{1+} \vec{e}^1 - 1) \right] = 2\,\Sigma_X \vec{e}^1 + 2\,\lambda\,\vec{e}^1 = \vec{0}$$

auf Basis der Lagrange'schen Multiplikator-Regel ermittelt, wobei λ zum gesuchten Eigenwert der Kovarianz-Matrix wird! Da sie m Stück davon hat, so nehmen wir den größten, der halt $\mathrm{Var}(< \vec{X}, \vec{e}^1 >) = \vec{e}^{1+} \Sigma_X \vec{e}^1 + \vec{e}^{1+} \lambda \vec{e}^1 = \lambda = 0$ maximiert. Analog sieht man, dass die restlichen Eigenwerte und Eigenvektoren den anderen EOFs entsprechen. Die EOF-Koeffizienten oder Hauptkomponenten/PCs sind

$$\alpha_i = < \vec{X}, \vec{e}^i > = \vec{X}^T \vec{e}^{i*} = \vec{e}^{i+} \vec{X}$$

Die Varianz der k-ten Komponente von $\vec{X}$ ist $\mathrm{Var}(\vec{X}_k) = \sum_{i=1}^m \lambda_i |e_k^i|^2$ Navarra, Antonio; Simoncini, Valeria: A Guide to Empirical Orthogonal Functions for Climate Data Analysis 2010; e-book

Bisgaard & Kulahci: Time Series Analysis and Forecasting by Example 2011; Anderson: An introduction to multivariate statistical analysis 1984[2], 2003[3] Cromwell: Multivariate Tests for Time Series Models (Quantitative Applications in the Social Sciences), Statistics for Spatio-Temporal Data; Karl Pearson 1901, Hotelling: **Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA, Karhunen-Loève-Transformation)**: Umfangreiche Datensätze strukturieren, vereinfachen und veranschaulichen, indem eine Vielzahl statistischer Variablen durch eine geringere Zahl möglichst aussagekräftiger Linearkombinationen von Hauptkomponenten genähert wird. Priesendorfer: PCA in meteorology and oceanography, Amsterdam 1988. Von n Stichproben werden jeweils p Merkmale erfasst $z(t,x)$ oder $\underline{z}(t) = [z(t,1), \ldots, z(t,p)]^T$ und eine $p \times p$-Kovarianzmatrix $\Sigma = \sum_{t=1}^n \underline{z}(t)\,\underline{z}^T(t)$ geschätzt und diagonalisiert.

$$\Lambda = \Gamma^T \Sigma \Gamma$$

Die Eigenvektoren oder **empirischen Orthononalfunktionen EOFs** Γ_j sind wegen der Gaussianität der Daten sogar unabhängig. Die PCAs oder Amplituden sind

$$a_j(i) = \sum_x z(t,x) e_j(x) = z^T(t) e_j$$

(Analyse von z).

```
# /usr/cnld/shw/Python/Code-Schnipsel/pca1.py
from pylab import *
N=1000;r=random(N); x=linspace(-10,10,N); y=sin(x); a=array(([0.5,0.2],[0.3,0.7]))
a = vstack((hstack((0.5, 0.2)), hstack((0.3, 0.7)) ))
S=vstack((r,y)); print S.shape; subplot(3,1,1); plot(x,S[0, :],'y',x,S[1,:],'b')
M=dot(a,S); subplot(3,1,2); plot(x,M[0,:],'y',x,M[1,:],'b')
c = cov(M[0,:],M[1,:]); s,v= eig(c); R = dot(v.T,M)
subplot(3,1,3); plot(x,R[0,:],'y',x,R[1,:],'b'); show()
```

9. Zufallsprozesse: Autokorrelations-Funktion Gauß'scher Zufallsprozess $S(t) = X \sin t + Y \cos t$ mit nichttrivialer Kovarianz, falls $X, Y \sim$ iid Gauß'sche Zufallsvariablen.

$$R(s,t) = \frac{\mathrm{E}[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]}{\sigma_t \sigma_s},\ R(\tau) = \frac{\mathrm{E}[(X_t - \mu)(X_{t+\tau} - \mu)]}{\sigma^2} = R(-\tau)$$

$$\hat{R}(k) = \frac{1}{(n-k)\sigma^2} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)\,, \text{mit Schranke für Unabhängigkeit } \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{N}} \approx \pm \frac{1.96}{\sqrt{N}}$$

R. L. Stratonovich: Topics in the theory of random noise 1963; Davenport & Root: An Introduction to the Theory of Random Signals and Noise 1958; MacDonald: Noise and Fluctuations. An Introduction 2006; Erneuerungs-Prozesse, siehe semi-Markov-Prozess, Cox, David (1970). Renewal Theory; Doob, J. L. (1948). Renewal Theory From the Point of View of the Theory of Probability; Smith, Walter L. (1958). Renewal Theory and Its Ramifications; Karlin; np.random.randn(2,2); x=np.random.rand(10), x.shape=(2,5), n=x.view(dtype=np.int8),

```
print("x.shape : {}".format(x.shape)); print("{}".format(np.pi)
print("x.ndim : {}".format(x.ndim));  print("{:.25f}".format(np.pi))
print("x.nbytes : {}".format(x.nbytes)); print("{}".format(x.shape))
print("x.itemsize : {}".format(x.itemsize)),
print("x.strides : {}".format(x.strides)), Achsen-Permutation.
print("x :\\n {}".format(x)),
print("n.shape : {}".format(n.shape)),
print("n.ndim : {}".format(n.ndim)),
print("n.nbytes : {}".format(n.nbytes)),
print("n.itemsize : {}".format(n.itemsize)),
print("n.strides : {}".format(n.strides)),
print("n :\\n {}".format(n))
```

A.itemsize = Elementegröße in Bytes; A.nbytes Array-Gesamtgröße. **Indexakrobatik in Python:** `x[x<0]=0; print(x); x[[1,3,5]]=-1; print(x); print(x[np.arange(2,7)])`; bf Vektoriserung: x=np.arange(print(np.sin(x)) ist standardmäßig vektorisiert; Aber import math as m; braucht vecsin = np.vectorize(m.sin); `plt.acorr(x,x,maxlags=C)` oder
`ACF=xcorr(x,y,maxlags=C); plot(ACF[0][C:],ACF[1][C:]) plt.acorr(randn(20),maxlags=3)[1][3:]` wie Faltungen generell per FFT (Stoer: Num Mathe I, Kap2.3 oder scipy fft) Diskrete Fourier-Transformation DFT: Beachte bei FFT das rechenzeitsparende **Auffüllen mit Nullen**, padding,, siehe Landau & Paez: A survey of computational physics p243; **Yin:** - Method for Calculating Autocorrelation Function of an Array , YIN, a fundamental frequency estimator for speech and music. Oppenheim & Schafer: Zeitdiskrete Signalverarbeitung 1999[3]; Oppenheim & Wilsky: Signale und Systeme. Arbeitsbuch. 1989 Komplexe Zahlen. Kontinuierliche & diskrete FT, z-Transformation, Laplace-Transformation Super Übungsbuch mit vielen Aufgaben! **Churchill: Fourier series and boundary value problems** 1963; **Greuel: Math Ergänzungen und Aufgaben** für Elektrotechniker 1990[12]; Scherbaum: Of poles and zeros. Fundamentals of digital seismology 1996;

$$\hat{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, e^{-2\pi\, i\, j\, k/N}, \qquad j = 0, 1, \ldots, N-1$$

Beachte die Faltung zwecks Herstellung der Periodizität der Daten, damit Fourier-Reihe überhaupt existiert oder praktisch zur Vermeidung der Seitenbänder im Frequenzbereich oder des Leck-Effekts, Lattenzaun-Effekts, (Leakage Effect) - mittels Fenstern x:

```
from scipy import fft; n=len(Y); x = linspace(0,1,n); Y=fft(data*sin(pi*x)**2)
power = abs(Y[1:(n/2)])**2
```

`Y[0] = ist mean(x), Y[1:n/2]` enthält Werte für positive Frequenzachse,

```
Y[n/2+1:]=list(conjugate(Y[1:n/2])).reverse()
```

ist für reelle Daten konjugiert komplex

```
nyquist=1./2;freq=array(range(n/2))/(n/2.0)*nyquist;period=1./freq;plot(period[1:],power)
```

Oder kurz für reelle Signale $x(t)$, wo $\hat{x}(-\omega) = \hat{x}^*(\omega)$ gilt:

```
Y=rfft(data*sin(pi*x)**2);power=abs(Y)**2;f=arange(n/2)/(n*float(dt));plot(1/f,power)
```

Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P), Ereignisraum, Ereignisfamilie/-algebra, Wahrscheinlichkeitsmaß auf A. **Hertel: Mathematikbuch zur Physik** 2009 e-book **Kap7 p181 Tiefere Einsichten! Maßtheorie** Arbeitsbuch Mathematik zur Physik 2011; Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) ist ein Maßraum mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß P. Das bedeutet, die Ergebnismenge Ω ist eine beliebige Menge, der Ereignisraum Σ ist eine σ-Algebra mit Grundmenge Ω und $P : \Sigma \to [0, 1]$ ist ein Maß, das durch $P(\Omega) = 1$ normiert ist. Dirac: Bakerian Lecture. The Physical Interpretation of Quantum Mechanics. **Negative Wahrscheinlichkeit,** Proc Roy Soc Lond A 180 1942 1. Maddox: Nature 320 1986 p481. Mückenheim: A review of extended probabilities, Physics reports 133 1986 337-401 und Nature 324 1986 p 307;

Axiome von Kolmogorow: Wahrscheinlichkeitsmaß muss demnach die folgenden drei Axiome erfüllen: 1. Für jedes Ereignis A aus Σ ist die Wahrscheinlichkeit von A eine reelle Zahl zwischen 0 und 1: $0 \leq P(A) \leq 1$. 2. Das sichere Ereignis Ω hat die Wahrscheinlichkeit 1: $P(\Omega) = 1$. 3. Die Wahrscheinlichkeit einer Vereinigung abzählbar vieler inkompatibler Ereignisse entspricht der Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse. Dabei heißen Ereignisse A_i inkompatibel, wenn sie paarweise disjunkt sind, also $A_i \cap A_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$ gilt; es muss also gelten: $P\left(A_1 \dot\cup A_2 \dot\cup \cdots\right) = \sum P(A_i)$. Diese Eigenschaft wird auch **σ-Additivität** genannt. Nur die Wahrscheinlichkeiten unvereinbare Ereignisse addieren sich. Beim Grundstückskauf sollten sich die Grundstücke nicht überlappen! Kolmogorow 1903-1987: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie 1933; Neidhardt: Einführung in die Informationstheorie 1957; Gesammtelte Schriften Bd1= Mathematik und Mechanik 1985. Bd2 = Wahrscheinlichkeits- und Informationstheorie; Gnedenko & Chintschin: Elementare Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung 1952, 1967; Gnedenko: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 1957; Gnedenko 1912-1995 & Khinchin 1894-1959: An elementary introduction to the theory of probability 1962; Wurzel 10 1979 p150ff; **Mürmann: Wahrscheinlichkeitstheorie und Stochastische Prozesse** 2013; Hans-Otto **Georgii: Stochastik. Einführung in die Wahrscheinlichkeit** 2008 p10; Menge aller möglichen Ergebnisse Ω: Zeiger zeigt auf Zahl, Quecksilbersäule bei Teilstrich. **Zufallsvariable** = **messbare Funktion** von einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, Σ, P) in einen **Messraum** (Ω', Σ'). Eine (Σ, Σ')-messbare Funktion $X : \Omega \to \Omega'$ heißt dann eine Ω'-Zufallsvariable auf Ω. Hinderer: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie 1980; **Borowkow: Wahrscheinlichkeitstheorie. Eine Einführung** 1976; Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra aus Teilmengen von Ω. Dann wird das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ **ein messbarer Raum** oder Messraum genannt. Die Elemente A von $\mathcal{A}$ heißen **messbare Mengen**. Eine Funktion $f : \Omega \to \Omega'$ zwischen zwei Messräumen $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ heißt **messbar** (genauer $\mathcal{A} - \mathcal{A}'$-messbar), wenn das Urbild jeder messbaren Menge messbar ist. Henze: Stochastik für Einsteiger 1997; Ash: Real Analysis and Probability 1972; Henze: **Irrfahrten und verwandte Zufälle. Ein elementarer Einstieg in die stochastischen Prozesse** 2013; Kallenberg: Foundations of Modern Probability 2002[2]; Pflug: Stochastische Modelle in der Informatik 1986 Mustererkennung, Hash-Tabellen, Martinginale; Schmidt: Maß und Wahrscheinlichkeit 2009; **Durrett: Essentials of Stochastic Processes** Continuous Time Markov Chains. Beispiele **Martinginal**e. **Martinginal** = stochastischer Prozess, bei dem der bedingte Erwartungswert einer Beobachtung gleich dem Wert der vorigen Beobachtung ist. Levy. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei eine Folge $(M_0, M_1, \ldots)$ integrierbarer Zufallsvariablen gegeben, d. h., für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelte $E(|M_n|) < \infty$. Diese Folge heißt ein Martingal, wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der bedingte Erwartungswert einer zukünftigen Beobachtung M_{n+1} gleich dem zuletzt beobachteten Wert ist, also $E(M_{n+1} \mid M_0, M_1, \ldots, M_n) = M_n$. **Anschaulich:** Auf Basis aktueller Information ist die beste Vorhersage über die Zukunft (= zukünftiger Zustand) die Gegenwart (=gegenwärtiger Zustand). **Es wird i.a. nicht deutlich anders.** Diese Bedingung kann so interpretiert werden, dass ein Martingal ein faires Spiel ist, da der Erwartungswert einer zukünftigen Beobachtung gleich der letzten getätigten Beobachtung ist. Wenn der Wert eines Martingals zum Zeitpunkt n bekannt ist, dann ist der Erwartungswert zukünftiger

Beobachtungen nicht von Werten abhängig, die vor n beobachtet wurden. Damit gilt noch **nicht zwingend die Markow-Eigenschaft**, dass die Verteilung von M_{n+1} lediglich von M_n abhängt. Zum Beispiel kann die Streuung des Martingals auch von Beobachtungen vor n abhängen. Die Information, die zum Zeitpunkt n über den stochastischen Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bekannt ist, kann allgemeiner durch eine **Filtrierung** gegeben sein. Eine Filtrierung ist eine Folge $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von σ-Algebren, die aufsteigend geordnet ist, d. h. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$. Der integrierbare Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Martingal bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, wenn gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist M_n messbar bezüglich $\mathcal{F}_n$ (man sagt dazu „der Prozess ist an die Filtrierung adaptiert“) und für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt die Martingalgleichung $E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n$. **Luschgy: Martingale in diskreter Zeit. Theorie und Anwendungen** ebook 2012; **Beispiele für zeitstetige Martingale: Wiener-Prozess** W_t ist ein Martingal, ebenso sind für einen Wiener-Prozess W_t die Prozesse $W_t^2 - t$ und die **geometrische brownsche Bewegung ohne Drift** $a \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}t\right)$ Martingale. Ein **Poisson-Prozess** mit Rate λ, der um seine Drift bereinigt wird, also $\hat{P}_{\lambda,t} = P_{\lambda,t} - \lambda t$, ist ein Martingal. Nach dem Lemma von Ito gilt: Jedes **Ito-Integral** (mit beschränktem Integranden) ist ein Martingal. Nach dem Itoschen Martingaldarstellungssatz lässt sich umgekehrt jedes Martingal (sogar jedes lokale Martingal) bezüglich einer von einer **Brownschen Bewegung erzeugten Filtration** als Ito-Integral bezüglich ebendieser Brown'schen Bewegung darstellen. Jedes stetige Martingal ist entweder von unendlicher Variation oder konstant. Jedes gestoppte Martingal ist wieder ein Martingal.

http://de.wikipedia.org/wiki/Martingalespiel **Strategie im Glücksspiel**, bei der der Einsatz im Verlustfall erhöht wird. Verliert er, so setzt er im nächsten Coup zwei Stück, verliert er wieder, so setzt er vier Stück, usw. Sobald er gewinnt, sind alle bis dahin eingetretenen Verluste getilgt, und der Spieler darf sich über einen Gesamtgewinn von einem Stück freuen. Nach einem Gewinn setzt er seinen Angriff auf die Spielbank wieder mit **einem Stück** fort. Dieses scheinbar sichere System funktioniert aber nicht, da Spielbank Höchsteinsatzes vorschreibt. Wer im Laufe eines Spielabends nicht ständig mit gleich hohen Einsätzen spielt, sondern die Einsätze in welcher Art auch immer steigert, hat – so wie ein Martingale-Spieler – relativ gute Chancen, etwaige Verluste zurückzugewinnen und zu guter Letzt doch mit einem positiven Saldo abzuschließen. Optimierung des Kreditgeschäfte. Williams: Probability with Martingales 1991; Müller: Lexikon der Stochastik; Bauer: Wahrscheinlichkeit; Doob: Stochastic processes; Walsh: **Knowing the odds. an introduction to probability** e-book 2012; Bailey: The elements of stochastic processes with applications to the natural sciences 1990; **Resnick: Adventures in stochastic processes** 1992; Schuss: Theory and Applications of Stochastic Processes An Analytical Approach. The Physical Brownian Motion: Diffusion And Noise. Itô Integration and Calculus. Large Deviations of Markovian Jump Processes 2010; Serfozo: **Basics of Applied Stochastic Processes** 2009; Koralov: Theory of probability and random processes Kap16 Stationarität und Ergodizität 2007; Kree: LNP 451 Probabilistic Methods in Applied Physics 1995; **Erstmaliger Gebrauch math Begriffe:** Jeff Miller: Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics http://jeff560.tripod.com/r.html Nagasawa: Stochastic processes in quantum physics 2000; Capasso: An Introduction to Continuous-Time Stochastic Processes: Theory, Models, and Applications to Finance, Biology, and Medicine 2012; Gallager: Stochastic processes. Theory for applications 2013; Menge aller Ereignisse $\mathcal{P}(\Omega)$. Elemente der σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ sind Teilmengen aus der Menge der Ereignisse $\mathcal{P}(\Omega)$. Sei $\varphi : X \to \mathbb{R}^a$, dann ist **$\mathcal{A}$-messbar** $\Leftrightarrow \quad \bigwedge_{a\in\mathbb{R}}\{\varphi < a\} \in \mathcal{A}$, wobei $\{\varphi < a\} = \{x \in X | \varphi(x) < a\}$.

Thomas Mikosch: Elementary Stochastic Calculus 1996; Fima Klebaner: Introduction to Stochastic Calculus with Applications 2012[2]; **Liggett: Continuous Time Markov Processes: An Introduction** 2010; Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(Z, \mathcal{Z})$ ein mit einer σ-Algebra versehener Raum (zumeist die reellen Zahlen mit der Borelschea σ-Algebra) und T eine Indexmenge, zumeist $T \in \{\mathbb{N}_0, \mathbb{R}_+\}$. Ein **stochastischer Prozess** X ist dann eine Familie von Zufallsvariablen $X_t : \ \Omega \to Z, \ t \in T$, also eine Abbildung

$$X : \Omega \times T \to Z, \ (\omega, t) \mapsto X_t(\omega),$$

sodass für alle $t \in T$ die Abbildung $X_t : \ \omega \mapsto X_t(\omega)$ $\mathcal{F} - \mathcal{Z}$-messbar ist. Eine alternative Formulierung sieht vor, dass X eine einzige Zufallsvariable $\Omega \to (H, \mathcal{H})$ ist, wobei $H \subseteq Z^T$ eine (mit einer geeigneten Sigma-Algebra versehene) Menge von Funktionen $f : T \to Z$ ist.

Ist T abzählbar (etwa $T = \mathbb{N}_0$), so heißt der Prozess **zeitdiskret** = **Markov-Kette**, ansonsten **zeitstetig** = **Markov-Prozess**. Ist Z endlich oder abzählbar, spricht man von wertediskreten Prozessen oder **Punktprozessen**. Realisierung der exponetiell-verteilten Wartezeiten $\tau \propto p(\tau) = \lambda e^{-\lambda}$ durch gleichverteilte $r \propto [0,1]$ mit Transformation $\tau = -\frac{1}{\lambda} \ln r$. **Cox-Prozess** = inhomogener Punktprozess mit $\lambda(t)$.

Müller: Lexikon der Stochastik oder Bharucha-Reid: Elements of the theory of Markov processes and their applications 1960; **Markov'sche Kette** = Markov'scher Prozess $X_T(T = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ oder $T = [0, \infty))$ mit **abzählbarem** Zustandsraum S. Enthält S nur endlich viele Elemente, so **endliche Markov-Kette**. **Übergangswahrscheinlichkeiten** $p_{ij}(s,t) := P(X_t = j | X_s = i)$ mit $i, j \in S, s, t \in T, s \leq t$, werden zu **Übergangsmatrizen** = **Doppelt-stochastische Matrix** oder **stochastische Matrizen** $M_{(s,t)}$ zusammengefasst. Quadratische Matrix, deren Zeilen- und Spaltensummen eins betragen und deren Elemente zwischen null und eins liegen. **Chapman-Kolmogorow-Gleichung**

$$M_{(s,u)} M_{(u,t)} = M_{(s,t)}, \quad p_2(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int \mathrm{d}x_2 p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2)\, p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1)$$

Falls $M_{(s,t)} = M_{(s+u,t+u)}$ für $s, t \in T, s \leq t, u \geq 0$, so Markov-Kette zeitlich **homogen** $M_t := M_{(s,s+t)} = m_{(0,t)}$, also $M_n = M^n$. Kung, Rota, Yan: Combinatorics. The Rota Way 2009 Sets, Functions, and Relations, Sets, Valuations, and Boolean Algebras, Partially Ordered Sets, Lattices, Functions, Partitions, and Entropy, Relations, Matching Theory, What Is Matching Theory? The Marriage Theorem, Free and Incidence Matrices, Submodular Functions and Independent Matchings, Rado's Theorem on Subrelations, Doubly Stochastic Matrices, The Gale-Ryser Theorem, Matching Theory in Higher Dimensions, Partially Ordered Sets and Lattices, Möbius Functions, Chains and Antichains, Sperner Theory, Modular and Linear Lattices, Finite Modular and Geometric Lattices, Valuation Rings and Möbius Algebras, Generating Functions and the Umbral Calculus, Generating Functions, Elementary Umbral Calculus, Polynomial Sequences of Binomial Type, Sheffer Sequences, Umbral Composition and Connection Matrices, The Riemann Zeta Function, Symmetric Functions and Baxter Algebras, Symmetric Functions, Distribution, Occupancy, and the Partition Lattice, Enumeration Under a Group Action, Baxter Operators, Free Baxter Algebras, Identities in Baxter Algebras, Symmetric Functions Over Finite Fields, Historical Remarks and Further Reading, Determinants, Matrices, and Polynomials, Polynomials, Apolarity, Grace's Theorem, Multiplier Sequences, Totally Positive Matrices, Exterior Algebras and Compound Matrices, Eigenvalues of Totally Positive Matrices, Variation Decreasing Matrices, Polya Frequency Sequences. **Alberti & Uhlmann: Stochasticity and partial order** 1981;

Nollau: Semi-Markov'sche Prozesse; Markov'sche Kette wie oben, aber zu gleichabständigen Zeitpunkten. Falls aber Veränderungen zu zufälligen Zeitpunkten erfolgen, so nicht durch Markov-Ketten beschreibbar. Dies sind Systeme mit Markov'scher Eigenschaft bezüglich der Zustandsfolge UND einem zufälligen zeitlichen Ablauf innerhalb der Zustandsfolge. **Semi-Markov'scher Prozess:** X endliche oder abzählbar unendliche Menge. a] $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ Folge von Zufallsgrößen über **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit Werten in X. b] $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit Werten in $[0, \infty]$. c] $\tau_n = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$ mit $n \in \mathbb{N}, \tau_0$. d] $\tau(t) = \max\{n \in \mathbb{N}_0 | \tau_n \leq t\}$.
Gilt für alle $n \in N_0, y \in X, t \geq 0, P(X_{n+1} = y | V_n \leq t | X_n, \dots, X_0, V_{n-1}, \dots, V_0)$ und sind diese Wahrscheinlichkeiten von $n \in \mathbb{N}_0$ unabhängig, so heißt $\{X(t)\}_{t \in [0,\infty)}$ mit $X(t) = X_{\tau(t)}, t \geq 0$, ein **semi-Markov'scher Prozess**.

Für jedes $\omega \in \Omega$ erhält man eine Abbildung $X(\cdot, \omega) : T \to Z$, $t \mapsto X(t, \omega) = X_t(\omega)$. Diese Abbildungen nennt man die **Pfade** / **Trajektorien** oder **Realisierungen** des stochastischen Prozesses. Ist speziell $T = \mathbb{R}_+$ und $Z = \mathbb{R}$ (oder ein allgemeinerer topologischer Raum), so kann man von Stetigkeitseigenschaften der Pfade sprechen.

Eine Zufallsvariable X ist eine μ-integrable Funktion über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, A, P). Ihr Wert ist $X(a) = \int_a d\,\mu(\omega) X(\omega)$

$X : \Omega -> \mathbb{R}$ vermöge $\omega \to X(\omega) \in \mathbb{R}$ Zufalls**variable**, ω ist nicht zu bändigen, oder auch Zufalls**funktion**, weil in eindeutiger Weise von ω abhängt.
$P : A \to \mathbb{R}$ vermöge $a \in A \to P(a) \in \mathbb{R}$

Inverse Fourier-Transformation der Verteilungsfunktion $p_X(x)$, also die **charakteristische Funktion** $G(k) =< e^{ikX} >= FT^{-1}p(x)$, ist **erzeugende Funktion der Momente**

$$\left.\frac{\mathrm{d}^n G(k)}{\mathrm{d}k^n}\right|_{k=0} = i^n < X^n >, \quad \ln G(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n!} (ik)^n$$

oder der **Kumulanten** oder Semi-Invarianten Mittelwert, Offset $\kappa_1 = \mu_1$, Varianz, 2. zentrales Moment, Streuungsquadrat, Dispersion, mittlere Abweichungsquadrat, Trägheitsmoment $\kappa_2 = \sigma^2 = \mu_2 - \mu_1^2$, $\kappa_3 = \mu_3 - 3\mu_2\mu_1 + 2\mu_1^3$ bleiben bei $X \to X + a$ bis auf dem Mittelwert κ_1 erhalten. Sie sind **additiv** für unabhängige Gauß-Verteilung. **Wilf: Generatingfunctionology** 1990; Speziell für **Gauß-Verteilung** gilt

$$G(k) = e^{i\mu_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 k^2}, \quad < X - \mu_1)^k >= 1 \cdot 3 \ldots (k-1)\sigma^k,$$

falls k gerade. Sonst null.

Linearkombination und Funktion von Zufallsvariablen, Honerkamp: Statistical physics, Chap2.5

$$Z = \alpha X, \quad p_Z(z) = \int \mathrm{d}x\, \delta(z - \alpha x)\, p_X(x) = \frac{1}{|\alpha|} p_X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$$

Lukacs: Characteristic functions 1960; Lukacs: Applications of characteristic functions 1964;

$$Z = f(X) \quad p_Z(z) = \int \mathrm{d}x\, \delta(z - f(x))\, p_X(x) = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i(z))|} p_X(x_i(z))$$

Beispiele p31

$$Z = X_1 + X_2, \quad p_Z(z) = \int \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \delta(z - x_1 - x_2)\, p_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \int \mathrm{d}x_1\, p_{X_1 X_2}(x_1, z - x_1)$$

Extremwert-Statistik: Coles: An introduction to statistical modeling of extreme values 2007[4];

Stochastisch Prozesse – Gaußianität & Linearität:

Granger-Kausilität oder **statistische oder zeitliche Kausilität:** Prämisse: **Vergangenheit bestimmt die Zukunft und nicht umgekehrt**. Sie besagt, dass eine Variable X für Y **Granger-kausal** ist, wenn bei einer gegebenen Informationsmenge bis zum Zeitpunkt t-1 im Zeitpunkt t die Variable Y besser prognostiziert werden kann, als ohne den Einbezug der Variablen X. Die Granger-Kausalität kann in eine Richtung gelten oder auch in beide Richtungen (Feedback-System). Die Granger-Kausalität ist statistisch testbar. Der Kausalitätsbegriff ist eng mit einem weiteren theoretischen Konzept der Ökonometrie oder Zeitreihenanalyse verwandt, der Exogenität.

Die Granger-Kausalität kann getestet werden. Hierzu sei ein bivariates VAR(p)-Modell betrachtet:

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_{11,1} & \phi_{12,1} \\ \phi_{21,1} & \phi_{22,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-1} \\ Y_{2,t-1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} \phi_{11,p} & \phi_{12,p} \\ \phi_{21,p} & \phi_{22,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{1,t-p} \\ Y_{2,t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix}$$

Es liegt keine Granger-Kausalität für Y_2 auf Y_1 vor, wenn: $\phi_{12,1} = \phi_{12,2} = \cdots = \phi_{12,p} = 0$

Y_1 ist für Y_2 nicht Granger-kausal, wenn: $\phi_{21,1} = \phi_{21,2} = \cdots = \phi_{21,p} = 0$ Berzuini, Dawid & Bernardinell: Causality 2012 P̃earl: Causality. Models, reasoning and inference 2009; Spektrum Spezial - Künstliche Intelligenz 2020; Pearl: An introduction to causal inference 2015; P̃earl, Glymour & Jewell: Causal inference in statistics - A primer 2016; Morgan: Counterfactuals and Causal Inference. Methods And Principles For Social Research 2010; R̃osenbaum: Observation and experiment - An introduction to causal inference 2017; Pearl: The book of why. The new science of cause and effect 2018; Wagner: **Bayes-Netze** Erlangen 2000 pdf; Wiki; SPP 1114 = Mathematical Methods for Time Series Analysis and Digital Image Processing 2001 to 2007 Rainer Dahlhaus, Jürgen Franke, Jens Timmer. **Probalistische Graphische Modelle** siehe Kevin Murphy: A Brief Introduction to Graphical Models and Bayesian Networks und an der UP Sawade, Landwehr, Scheffer. **Russell & Norvig: Künstliche Intelligenz** – Ein moderner Ansatz 2012[3]; **DALL•E2** nutzt CLIP = Contrastive Language-Image Pre-training., um Bilder nach textsprachlicher Eingabe zu kreieren.

Spektral-Darstellung deterministischer Signale. Harmonische Analyse

Schröder: Mathematik im Reich der Töne 1982; Ton, Klang, Musik, Geräusch. Spektrum als Fingerabdruck eines Musikinstruments. Dahlhaus: Musik 1+2 Funk-Kolleg 1981; Dahlhaus: Grundlagen der Musikgeschichte 1977; Dahlhaus & Eggebrecht: Was ist Musik? 1985; B̃enade: Musik und Harmonie. Die Akustik der Musikinstrumente 1960; Heinzel: Zahl, Harmonie, Ethos 2013; Höge: Emotionale Grundlagen ästhetischen Urteilens. Experimente 1984; Kreitler: Psychologie der Kunst 1972, 1980; Ansorge & Leder: Wahrnehmung und Aufmerksamkeit 2017; Bergeyijk & Pierce: Die Schallwellen und wir 1960; Dahlhaus et al.: Hören, messen und rechnen in der frühen Neuzeit 1987 In: Zaminer ed: Geschichte der Musiktheorie Bd8; Kolneder: Musikinstrumentenkunde 1979[5]. Energieniveaus der Atome, Massenspektren der Elementarteilchen. MP3-Format. Zeit-, Phasenraum- und Spektraldarstellung. Wirth: Stimmstörungen 1995[4]; Wirth: Sprachstörungen, Sprechstörungen, kindliche Hörstörungen. Lehrbuch für Ärzte, Logopäden und Sprachheilpädagogen 2000[5]; Szagun: Sprachentwicklung beim Kind 1995[6]; Böhme: Sprach-, Sprech-, Stimm- und Schluckstörungen Bd2 Therapie 1997[2]; Stimme. Mathelitsch & Verovnik: Physik des Mundraums PiuZ 46 2015 p32-33; 45 2014 286; 44 2013 188; Siehe **Labiales Pfeifen** = Lippenpfeifen. Stimmlippen liefern obertonreiches Spektrum, das Einbettung sehr vieler Klänge ermöglicht und durch länglichen Mundhohlraum = Pfeife, die bei Stimmlippen als geschlossen angesehen werden kann = Vokaltrakt, durch die Zungenstellung, modifiziert wird. Mundeigenfrequenzen = Formanten $f_n = (2n-1)\frac{c}{4L}$ mit Mundresonatorlänge $L = 17.5$ cm, also 500 Hz und Vielfache. Flüstern passiert durch halboffene Stimmlippen. T̃reuenfels: Gesund beginnt im Mund 2017 SdW 7.17 p87f; Daniel Grieser: Can one hear the shape of a triangle? Stephanie Russ: Can you hear or experience the shape of a (fractal) drum? Gleiß: Klänge und Geräusche, mit dem Computer herstellen und analysieren PdNPiS Bd50 2001 H2; Jim Woodhouse: Acoustics of the violin, 2014 RepProgPhys 77 115901; Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik Teil2 §149; Lohmann: Harmonische Analyse zum Selbstunterricht 1921; Schönwiese: Praktische Statistik 1992; Kertz; **Zeldovich & Yaglom: Higher Math** 1982 Chap10.9 **Harmonic analysis** p380; **Jens Taubenheim 1929-2021: Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten** 1969; Spektralzerlegung weißen Lichts mittels Glasprisma oder Spalt. **AndroidApps**: Smarter App für Notfall-Netze. Wilhelm: Für alles eine App. Ideen für Physik mit dem Smartphone 2022; Angela Fösel, Erlangen, Alexander Pusch, Münster. Einplatinen-Computer Raspberry Pi und Mikrocontroller Arduino PhysJ18 2019 H3 p74 Make: http://makezine.com/category/electronics/ Raspberry Pi XBMC = XBox Media Center in c't 17/2014 p106; **App**schließbar = smarte Schlösser. Gegensprechanlage ct12 2018 p108-117. Arduino BeagleBone Black. Bastelprojekte in http://shop.heise.de/ct-hardware-hacks-abo . **remixoc** http://www.jide.com/remixos-for-pc; c't 17/2014 p64 Dale Dougherty: Maker Fair Hannover, Paka → Rusty. Messungen physikalischer Experimente per **Phyphox** = http://phyphox.org/de/home-de/ ct7.2020p87; **Eingänge:** Beschleunigungssensor Magnetometer Gyroskop Lichtsensor Drucksensor Näherungssensor Mikrofon GPS/Standort Bluetooth für eigene Geräte (z.B. ein Arduino) **Ausgänge:** Lautsprecher Bluetooth für eigene Geräte zB Arduino. **Fernsteuerung:** Phyphox kann von jedem Gerät ferngesteuert werden, das sich im gleichen Netzwerk befindet wie das Smartphone und das über einen modernen Webbrowser verfügt. **Apps loswerden:** ct26.2018 p144, ct10.2020 p142; **Datenexport:** Export-Formate per Komma-getrennte Werte = CSV, Tabulator-getrennte Werte, MS Excel = xls. Speedy Spectrum Analyzer, Spectral Audio Analyzer, Spectrum Analyze, Spektrum-Analysator, Spectrum Analyzer, **ProSpec - Lite** is a basic Real time spectrum analysis tool. Wasserfalldiagramm, Sonagramm oder Spektrogramm. It generates a spectrogram on the fly and supports 8kHz and 44.1kHz sampling frequencies, **Spektralanalyse-App: Advanced Spektrum Analyzer Pro**. You can record, playback, save and share the spectrogram for a given time frame. It provides a maximum frequency tracking facility with measurements both in dBFS, (SPL in paid version only). - Time scale in seconds - Update speed - Dynamic range control - Complete color customisation - RGB option - For audio engineers, an invert feature for live events in dark rooms - Audio tool, allowing you to share, save and listen to the complete audio that has been recorded - Saving, sharing and exporting the configuration (i.e. analysis settings: window size, dynamic range, FFT length and analysis window) - FFT size fixed to 1024 for 8kHz and 512 for 44.1kHz - Uses a moving window to calculate the FFT Magnitude spectrum - **Uses Hamming analysis window - Frame Length fixed to 32ms - Frame shift fixed to 14ms - Dynamic**

range: -1dB to -90dB - Bandwidth available: 50Hz - 22.05kHz - Selectable update time from (10-40s)(also depends on frame length) - JET RGB color scheme (and many many many others) - Free version has watermarked images when saving or sharing Motorola Xoom with Android 4.0.4 (Good) Samsung Galaxy S III (Quad core, AU release) with Android 4.0.4 (Good) Sony Xperia with Android 4.0.4 (Good) Motorola Atrix 2 with Android 2.3.6 (Good, must have sdcard installed) HTC Desire HD with Android 2.3.5 (A bit slow) Motorola Atrix with Android 2.3.4 (Good) HTC Incredible S with Android 2.3.5 (A bit slow). Optische Fourier-Zerlegung http://www. lehrerseminar-forschung. de/lehrmittel_buecher/shop/catalog/ `product_info.php?cPath=21_60&products_id=181` **mp3** Framelänge etwa 25 ms, entspricht der **mental empfundenen Gleichzeitigkeit** von ca. 30ms siehe Seite 434, mit 1526 Samples gibt 40*1526 Datenpunkte pro Sekunde = 3662400 Samples pro Minute 220 Mega Samples pro Stunde, falls alles Datenpunkte genommen werden. Per mp3 sind es aber im Schnitt nur 1MB pro Minute bei 44 kHz. Es wird also 40 mal pro Sekunde eine Zeitreihe der Länge 1526 analysiert: $\Delta t = 25/1526$ ms = 16.38 μs macht 61 kHz Abtastung. Macht Faktor 10 gegenüber CD mit 60 Minuten bei 700MB. **jpeg** per diskreter Kosinustransformation **DCT** 1974 ct22 2016 p34, jpeg2000 mit DWT = diskreter Wavelet-Transformation Nutzen steht nicht im Verhältnis zum Anfwand.

In der Signalverarbeitung treten **Alias-Effekte=Aliasing** beim Digitalisieren analoger Signale auf: Das Originalsignal wird dabei in regelmäßigen Zeitabständen abgetastet und bei der späteren Wiedergabe mittels eines analogen Tiefpassfilters wiederhergestellt. Damit es korrekt wiederhergestellt werden kann, muss gemäß dem **Nyquist-Shannon-Abtasttheorem** das Originalsignal mit einer Rate abgetastet werden, die mehr als doppelt so hoch wie die höchste im Signal vorkommende Frequenz ist. Wird das Abtasttheorem durch eine zu niedrige Abtastrate verletzt, so werden Frequenzanteile, die ursprünglich höher waren, als die halbe Abtastrate (Nyquist-Frequenz), als niedrigere Frequenzen interpretiert, da für diese eine Unterabtastung stattfindet. Dieses unerwünschte Phänomen wird Alias-Effekt genannt. Sandmann: Aliasing, in: Hischer, Mathematikunterricht und Neue Medien 2002; **Stroboskop-Effekte:** Rückwärtslaufende Kutschenräder. **Schwebung Feynman: Bd1.2** Kap48. Hischer: Abtast-Moire-effekt als Aliasing 2004; Hoffmann: TB der Messtechnik 1997 p42;

Titchmarsh: Introduction to the theory of Fourier integrals 1948; Butz: Fouriertransformation für Fußgänger 1998, 2005; **Brigola: Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen** 1997, 2012[2], 2013; T. Tao: Higher order Fourier analysis 2012; Siehe auch Seite 382. http://ebookee. org/Introduction-to- the-theory- of-Fourier -integrals-By- E-C-Titchmarsh_173247.html; Tolstov & Silverman: Fourier Series 1976; **Sneddon: Fourier Transforms und ihre Anwendungen in der Physik** 1995; **Fourier-basiert:** Wohlgemuth: Mathematisch für Anfänger 2010; oder auf **Basis eines linearen stochastischen Modells**, siehe auch **Welt als gefiltertes Rauschen** und Spektrallösung zum gedämpften Oszillator auf Seite 383, und Pseudospektral-Methode auf den Seiten 598 und 599. **Spektralanalyse:** http://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_de oder http://de.wikipedia.org/wiki/Spektrale_Leistungsdichte; Rauscher: Fundamentals of spectrum anaysis 2001; Buttkus: Spectral analysis and filter theory in applied geophysics 2000; **Norten: Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers** 2007; MacDonald: Noise and Fluctuations. An Introduction 2006;

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{d}\omega\, \hat{x}(\omega)\, e^{i\,t\,\omega}, \quad \textbf{Zerlegung der Eins:} \quad \delta(t-t') = \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}\omega e^{i\omega(t-t')}$$

Wiener-Chintchin-Kriterium oder Chintschin-Kolmogorow-Theorem:

$$\gamma_{XX}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \Rightarrow S_{XX}(\omega) = \int \mathrm{d}\tau\, \gamma_{XX}(\tau)\, e^{-i\omega\tau} = \sigma^2 = \mathrm{const}$$

$$\gamma_{XX}(\tau) = \sigma^2 e^{i\omega_0 t} \Rightarrow S_{XX}(\omega) = \sigma^2 \int \mathrm{d}\tau e^{i(\omega_0-\omega)\tau} = \sigma^2 \delta(\omega_0 - \omega)$$

Äquidistante Puls-Sequenz, Kicks (Herzschlag, Pulsar) mit Pulsabstand T und gleicher Pulsamplitude x_0 ist $x(t) = \frac{x_0}{N} \sum_{n=0}^{N} \delta(t - nT)$. a] AKF ist $\gamma_{XX}(\tau) = \sigma^2[\delta(\tau) + \delta(T-\tau) + \delta(T+\tau)]$ und Powerspektrum gibt $P_{XX}(\omega) = \hat{\gamma}_{XX}(\omega) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \gamma_{XX}(\tau) e^{-i\omega\tau} = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}[e^0 + e^{-i\omega T} + e^{i\omega T}] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}[1 + 2\cos\omega T]$ mit

Maximxa bei $\omega T = m2\pi$. Das erste beschreibt die Grundfrequenz, die Obertöne die Pulsform. 2] **Fourier-Transformation:** $\hat{x}(\omega) = \frac{x_0}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N} \int \mathrm{d}t \delta(t - nT) e^{-i\omega t} = \frac{x_0}{N\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N} e^{-i\omega n T}$. Betrachte **geometrische Reihe**, siehe Seite 124, unter der Annahme $\omega T \neq m\pi$ mit $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} e^{-i\omega n T} = \frac{1}{1 - e^{-i\omega T}}$. Das Powerspektrum $P_{XX}(\omega) = \hat{X}(\omega)\hat{X}(\omega)^* = \frac{x_0^2}{2\pi N^2} \frac{1}{(1 - e^{-i\omega T})(1 - e^{i\omega T})} = \frac{x_0^2}{4\pi N^2} \frac{1}{1 - \cos \omega T}$ hat Polstellen bei geraden Vielfachen $\omega T = m2\pi$. Siehe auch Pikowski: Stochastische Prozesse und statistische Methoden WS 1999; Riley p360;

Chintschin-Kolmogorow-Theorem Herleitung siehe Hertel: Theoret Physik 2007 p356f, $A(t)$ zeitabhängige Observable des Systems sei durch den Prozess $A(t) = U_{-t} A U_t$ mit $U_t = e^{-itH/\hbar}$ gegeben. Erwartungswert des stationären Gibbs-Zustands $G \propto e^{-\beta H}$ und zyklischer Vertauschbarkeit der Spur $< A(t) >=$ tr $G U_{-t} A U_t =$ tr $U_t G U_{-t} A =$ tr $GA =$ const. Für zeitunabhängige Schwankungen/Fluktuationen gilt für die Zeit-Korrelationsfunktion das symmetrisierte Produkt

$$K(AB;\tau) = \frac{< A(t+\tau)B(t) + B(t)A(t+\tau) >}{2} - < A >< B > \in \mathbb{R}$$

$K(AB;0)$ Korrelationskoeffizient. $K(AA;\tau)$ Auto-Korrelationsfunktion. Mit den Fourier-transformierten Prozessen

$$A(t+\tau) =< A > + \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t+\tau)} \hat{A}(\omega), \quad B(t) =< B > + \int \frac{\mathrm{d}\omega'}{2\pi} e^{-i\omega' t} \hat{B}^\dagger(\omega')$$

Gibt mit der stets positiven Spektraldichte $S(AB;\omega)$

$$\frac{< \hat{A}(\omega)\hat{B}^\dagger(\omega') + \hat{B}^\dagger(\omega')\hat{A}(\omega) >}{2} = 2\pi\delta(\omega - \omega') S(AB;\omega) \in \mathbb{R}^+$$

Die Fourier-Komponenten der **Fluktuationen zu verschiedenen Frequenzen sind unkorreliert**, weil Gibbs-Zustand stationär! Keine Schwebungen **Feynman: Bd1.2** Kap48. Es folgen

$$K(AB;\tau) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} S(AB;\omega), \quad \text{Wiener} - \text{Chintchin} - \text{Theorem}: \quad K(AA;\tau) = \int \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} S(AA;\omega)$$

Alexander Chintchin: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. In: Mathematische Annalen Bd109 1934. Als „Satz von Chintchin über die Korrelationsfunktion“ bewiesen z.B. in Gnedenko: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie 1957, 1978, Seite 310; **Lighthill: Einführung in die Theorie der Fourieranalysis und der verallgemeinerten Funktionen** BI 1966; Wiener: The Fourier Integral and Certain of its Applications 1959; Wüst: Mathe für Physiker und Mathematiker Bd1 p314f;

A] Grundfrequenz sei ω_0. Die rechts neben der Grundfrequenz auftauchenden **höheren Harmonischen** beschreiben gemäß Fourier-Reihe die **Anharmonizität**, d.h. die vom **Sinus**

$$\sin(x) = \frac{GK}{H} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots, \quad \cos(x) = \frac{AK}{H} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots$$

abweichende Form des Signals. Siehe Seite 104. Tolstov: Fourier series 1962; Geschichte des **sinus** Julius Ruska: Zeitschr. für Mathematik und Physik 40, 1895, hist.-lit. Abtheilung, p126-128, http:// juliusruska. digilibrary. de/q001/q001. html; Die links auftauchenden Spitzen bei jeweils sukzessiver halber Frequenz (**Subharmonische**) oder doppelter, vierfacher, etc. Periodenlänge des Signals kann auf den perioden-verdoppelnden Übergang zum Chaos (Trajektorienkomponeneten mit **unendlicher Periodenlänge**) hindeuten. .

B] Kommt noch eine weitere Grundfrequenz hinzu, so treten wegen der **Additionstheoreme** $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ und $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ Schönwald: Geometrische Herleitung **Additionstheoreme** DdM18 1990 p241-2, und
Summenformeln $\sin x \pm \sin y = 2 \sin \frac{x \pm y}{2} \cos \frac{x \mp y}{2}$, $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$, $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{-x+y}{2}$ auch Summen- und Differenz-Frequenzen auf.

C] Die engen Seiten-Bänder bei den o.g. Spitzen kodieren die Endlichkeit der Beobachtungsfenster, die Länge der Trägerintervalls. Wegen des zufällig gewählten Zeitfensters (=Schnappschuss), des auch noch durch die endliche Messdauer begrenzt ist, sind die Zeitreihen nicht periodisch. Daher Faltung notwendig zwecks Herstellung der Periodizität der Daten - damit Fourier-Reihe überhaupt existiert oder praktisch zur Vermeidung der Seitenbänder im Frequenzbereich oder des **Leck-Effekts, Lattenzaun-Effekts, Leakage Effect** - mittels verschiedener Fenster.

Parseval's Theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

Konsistente Schätzung des Leistungsspektrums

Akustik: Westphal: Deine tägliche Physik 1940 p195ff Schall**quellen** koppeln an schwingfähige = **resonanzfähige** Gebilde, wie Mundhöhle, Nasen-Rachen-Raum, Musikinstrumentkörper, Lautsprechermembran. Aschoff: Über das räumliche Hören, Arbeitsgemeinschaft für Forschung H138 1964; **Schall** ist wandernde Schwingung der Luft. Im Unterschied zu Wasserwellen sind Luftwellen gleich schnell: Daher haben hohe Töne kleine Wellenlänge. Anderenfalls wären Kommunikation oder Orchestermusik unmöglich. Analog zum Licht, aber $c \approx 10^6 c_S$. Eberhard **Schröder: Mathematik im Reich der Töne** 1982; T. Tao: Higher order Fourier analysis 2012; Tipler: Physik, p481; Siehe Seite 103. Reiner **Ton**: 440 Hz Sinus der Grundschwingung des **Kammerton**s a hat gemäß 343 m/s = $c_S = \lambda\, f = c_{\text{Gas}} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}} = \sqrt{\frac{\kappa}{3}} \sqrt{\overline{v_x^2}}$ Wellenlänge 78 cm. **Isentropenexponent** $\kappa = c_{\text{p}}/c_{\text{V}}$. **Klang:** Ton mit Oberschwingungen = anharmonische Schwingung. Stüber & Kallenbach: Glocken PhysBl5 1949 p268ff; Cox: Das Buch der Klänge 2015; **Geräusch:** Nichtperiodische Schwingung. Siehe auch Seite 125 **Winkler: Die Physik der Musikinstrumente** 1998[2]; **Helmholtz: Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik** 1896, 1983; Mittönen = Resonanz; Rayleigh: Theory of sound 1877; Johnston: Measured tones. The interplay of physics and music, 2009[3]; Benade: Fundamentals of musical acoustics 1990; Olson: Music, Physics and Engineering 1967; **Hall & Goebel: Musikalische Akustik. Ein Handbuch** 2008 p238-254 Orgel: Am Labium wird durch turbulente Luftströmung um den Keil eine lokale instabile Luftdruck-Schwingung erzeugt = a] punktförmige Schallquelle für den Umgebungsraum. b] die der stehenden Welle im Pfeifen-Resonanz-Korpus Energie zuführt und gleichzeitig die als van der Pol-Oszillator beschreibbare lokale Schwingung am Labium stabilisiert; Roederer: The physics and psychophysics of music - an introduction 1995; **Barkowsky: Einführung in die musikalische Akustik** 2009; Jost Fischer: Nichtlineare Kopplungsmechanismen akustischer Oszillatoren am Beispiel von Orgelpfeifen 2014; Lüthi: Physical Acoustics in the Solid State 2007; Minnaert Resonanz bei Gasblasen etwa 5 kHz $f = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{3\gamma\, p_A}{\rho}\right)^{1/2}$ Gasblasenradius a.

Verzerrungsleistung, Oberschwingungsblindleistung oder Oberwellenblindleistung $D = U\, I_V = U\sqrt{\sum_{k=2}^{n} I_k^2}$, wobei I_k die k-te Fourier-Komponente der **Fourier-Reihe-Zerlegung** siehe Seiten 384 und 138, z.B. bedingt durch nichtlineare Verbraucher (Dimmen durch Diode), beschreibt. **Klirrfaktor** $k = \frac{D}{S}$ mit S Scheinleistung. Wattloser Strom, Greiner 3 p305; Flosdorff: Elektrische Energieverteilung 2003;

Bei Darstellung von $f(t)$ mittels Fourier-Polynom, siehe Seite 384, wird die Periodizität $f(t+T) = f(t)$ vorausgesetzt. Die **kleinste positive reelle Zahl** T heißt **primitive Periode**. Daher ist die Grundschwingung auch T oder die tiefste Frequenz oder Grundfrequenz $\nu_1 = \frac{1}{T}$ und höheren Harmonischen $\nu_k = k\,\nu_1$ mit $k > 1$. **Fourier-Transformation**, **Kreismethode** und Primzahlen. **cicle method** SdW Aug 2013 p17; Die Aussage **Jede ungerade Zahl** N **ist die Summe dreier Primzahlen** p_k. hat die Spektralübersetzung: **Für alle ungerade Zahlen** N **ist das Integral** $\int \mathrm{d}x f^3(x) e^{-iNx}$ **positiv, wobei** $f(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{ip_k x}$. K. Strick: Riemann spektrum.de 1.11.2012; Naess: Die Riemannsche Vermutung 2007; Dittrich: Reassessing Riemann's Paper. On the Number of Primes Less Than a Given Magnitude 2018; Trost: Primzahlen 1953;

Bei der Klassifikation und Analyse von dynamischen Systemen kann eine spektrale Darstellung nützlich sein. Gegeben sei jeweils eine Zeitreihe $\{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$ mit dem Stichprobenumfang N. Beachten Sie bei der Spektral-Darstellung die **Nyquist-Frequenz** $f_{\mathrm{Ny}} = \dfrac{1}{2\Delta t}$ oder $\omega_{\mathrm{Ny}} = \pi/\Delta t$. Sie ist die obere Grenzfrequenz des Spektrums bei der Abtast-Zeit Δt. **Abtast-Theorem:** Eindeutige Schwingungserfassung nur bis zur Nyquist-Frequenz, was zur Abtast-Frequenz $f_{\mathrm{sampling}} = 2\, f_{\mathrm{Ny}}$ zwingt. Nyquist-Shannon-Abtasttheorem, auch Whittaker, Kotelnikow und Shannon-(WKS)-Abtasttheorem. Das mit einem Dirac-Kamm abgetastete kontinuierliche Signal $s(t)$ wird zu $s_{\mathrm{a}}(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$. Für das Frequenzspektrum $S_a(f)$, welches die Fourier-Reihe des Signals s_a darstellt, erhält man mit Hilfe der Umkehrung des Faltungstheorems: $S_{\mathrm{a}}(f) = S(f) * \left[\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)\right]$. Das Spektrum ist also das Spektrum des Eingangssignals $s(t)$, das periodisch mit der Periode $1/T$ wiederholt wird - dies drückt die Faltungseigenschaft des Dirac-Impulses aus. Daraus ergibt sich, dass das Spektrum von s maximal $1/(2T)$ breit sein darf, damit sich die verschobenen Spektren nicht überlappen. Ist das Spektrum von s schmaler als $1/(2T)$, so ist das ursprüngliche Signal $s(t)$ nach idealer Tiefpass-Filterung aus dem zeitdiskreten Spektrum vollständig rekonstruierbar. Grundlage der AD-Wandlung. Dieser Umstand ist die Grundlage des **Nyquist-Shannon-Abtasttheorems = Samplingtheorem = Probensatz**. Ist hingegen das Spektrum des Eingangssignals $s(t)$ breiter als $1/(2T)$, tritt **Aliasing** auf und das ursprüngliche Signal $s(t)$ kann aus $s_a(t)$ nicht wiedergewonnen werden. Hoffmann: TB der Messtechnik 1997 p42, p416, p425, **p479**;

Diskrete Fourier-Transformation (DFT): ist nur bis zur Nyquist-Frequenz $\omega_{\mathrm{Nyquist}} = \dfrac{\pi}{\Delta t}$ oder $f_{\mathrm{Nyquist}} = \dfrac{1}{2\Delta t}$ sinnvoll.

$$\hat{x}(s) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} x_t\, e^{-\pi\, i\, s\, t/(\Delta t M)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=0}^{N-1} x_t\, e^{-i\,\omega_s\, t}, \quad \omega_s = \pi s/(M\Delta t), \quad s = 0, 1, \ldots, M-1,$$

Für reelle Zeitreihen ist die DFT konjugiert komplex $\hat{x}(-\omega) = \hat{x}^*(\omega)$ genügt die Betrachtung der positiven reellen Frequenz-Achse: `nyquist=1./2./dt; freq=array(range(n/2))/(n/2.0)*nyquist;`

Periodogramm ist als Betrags-Quadrat der DFT ist kein konsistenter Schätzer, obwohl es im Falle deterministischer periodischer Zeitreihen überzeugende Schätzungen liefert:

$$\hat{I}(\omega) = \frac{2}{N}\left|\sum_{t=1}^{N} X_t e^{i\omega t}\right|^2, \quad \hat{I}(k) = \frac{2}{N}\left|\sum_{t=1}^{N} X_t e^{i\frac{k}{M}\frac{\pi}{\mathrm{d}t}t}\right|^2 \quad \text{mit} \quad k = 1, M$$

Bandbreite, spektrale Auflösung ist bei DFT beliebig klein, da die Frequenzachse dicht ist: $\omega_k = \dfrac{k}{M}\omega_{\mathrm{Nyquist}} = \dfrac{k}{M}\dfrac{\pi}{\mathrm{d}t}$ mit $k = 1, M$. Man sieht allerdings zunehmend ein Rauschspektrum. **Spektrale Auflösung** = kleinste theoretisch sinnvolle **Bandbreite**: $\Delta f = \dfrac{1}{N\Delta t}$. **Berge, Pomeau & Vidal: Order within Chaos. Towards a Deterministic Approach to Turbulence** 1984;
`n=len(data); W = linspace(0,1,n); Y=rfft(data*sin(pi*W)**2);`
`power=abs(Y)**2;f=arange(n/21)`/(n*dt);semilogy(f,power)+ Beachte die Faltung mit dem Fenster W zur Erzwingung der Periodizität der Zeitreihe, damit Fourier-Reihe überhaupt existiert und Seitenbänder im Frequenzbereich vermieden werden (Leakage, Leck-Effekt, Latten-Zaun-Effekt).

Das **Power-Spektrum** ist ein konsistenter Spektral-Schätzer, d.h. Verfehlung des Erwartungswertes und mittlere quadratische Fehler verschwinden mit zunehmendem Stichprobenumfang.

1. Schätzung mittels gemittelter oder geglätteter Periodogramme.

2. Schätzung gemäß Wiener-Chintschin-Theorem

$$\hat{P}_{kons}(\omega) = \sum_{t=-(N-1)}^{N-1} \lambda(t)\, \hat{\gamma}(t)\, e^{-i\omega t} \quad \text{mit dem Fenster} \quad \lambda(t) = \frac{\sin\frac{\pi\, t}{M_W}}{\frac{\pi\, t}{M_W}} \quad \text{der Breite} \quad M_W.$$

Das Power-Spektrum ist eine komplexe Funktion $\hat{P}_{kons}(\omega) \in \mathbb{C}$. Dargestellt werden der Logarithmus des Betrags $\log[P^*P](\omega)$ und der Phase $\varphi[P(\omega)]$ als Funktion der Frequenz.
`PSD=psd(DATA,NFFT=256, Fs=1); cla(); semilogy(PSD[1],PSD[0])`

3. Schätzung mittels **autoregressiver Modelle p-ter Ordnung** muss für die Spektral-Darstellung ein $\tilde{p} \gg p$ gewählt werden:

$$\hat{P}^{(p)}_{kons}(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi\sigma_X^2} \frac{1}{\left|1 - \sum_{l=1}^{\tilde{p}} a_l e^{il\omega}\right|^2}, \qquad \hat{P}^{(1)}(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi\sigma_X^2} \frac{1}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos\omega}$$

Dreieck- `D=[0,1,2,3,2,1]` und Rechteck-Sequenzen `R=[0,0,0,0,1,1,1,1]` mit Listen-Operationen, Mengen-Operationen ähneln `plot(20*D)` **Listen-Element-Zugriff:** D[-1] gibt das **letzte Element**, D[-2] das vorletzte Element, D[-2:] gibt die letzten zwei Elemente von D. D[:] alles. D[3:] gibt alle Elemente **ab** dem 4. D[:3] gibt alle Elemente **bis** zum 3. D[:-2] ignoriert die letzten zwei Elemente. **Listenmethoden:** `s.append(x)`, `s.extend(t)`, `s.count`, `s.insert(i,x)`, `s.pop([i])`, `s.remove(x)`, `s.reverse()`, `s.sort([key[,revers]])`. ID[2:].index(15.) gibt den Listenindex des ersten Listenelements der Liste ID mit der Zahl 15. aus, das sich nach dem 2.ten Listenelement befindet. Letztes Element der Liste Time: Time[-1:],Time[len(Time)-1]. **Sieb des Eratosthenes:** L0=range(2,20); L0; A0=array(L0); L1=list((A0%2)*A0)#. remove(0) beseitigt nur die erste 0, daher im Notebook mit **while**(True): **try:** L1.remove(0) **except:** ValueError **Oder so im Skript:**

```
while (True):  bekommt L1 = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19]
 try: L1.remove(0)
 except ValueError:
  print L1 liefert L1 = [3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19]
  break
def Remove(L1):
 while (True):
  try: L1.remove(0)
  except ValueError:
   break
 return L1
L0=range(2,numbers); A0=np.array(L0)
while len(L0) >0:
  Primes.append(L0[0]); a0=A0%L0[0]; EinsKamm = a0/a0; L1=list(EinsKamm*A0)
  L0 = Remove(L1); A0=np.array(L0)
```

Listenbehandlung = list comprehension = an mathematische Schreibweise für Mengendefinitionen angelehnt: `S = [x**2 for x in range(10)]` oder `V = [2**i for i in range(13)]` oder `M = [x for x in S if x % 2 == 0]` `noprimes = [j for i in range(2, 8) for j in range(i*2, 50, i)]` `primes = [x for x in range(2, 50) if x not in noprimes]` words = 'The quick brown fox jumps over the lazy dog'.split(); `stuff = [[w.upper(), w.lower(), len(w)] for w in words]` oder stuff = map(lambda w: [w.upper(), w.lower(), len(w)], words); `for i in stuff: print i`; **Typumwandlung bei Listen** mittels **List-Comprehension** ID-Elemente sind float. So wird eine int-Liste draus: [int(i) for i in ID]. Y=[round(x,3) for x in ZustandsKorrelation]. Index-Shift oder Roll-Kommando mit zufällige Phase: `roll(x,randint(len(D)))` oder `x=x[-m:]+x[:-m]` wobei m = randint(len(D)). **reshape** `x = arange(9.).reshape(3, 3)` `x[where(x>5)]` `where(x < 5, x, -1)` http://en. wikibooks. org/wiki/ `Think_Python/Lists#Traversing_a_list` Traversierung, Reißverschluss von Listen: map(None,L1,L2), zip(L1,L2); `xD=20*D; x=array(xD)*1.; N=len(xD); t=arange(N)*dt; x-=mean(x);C=40; ACF=acorr(x,maxlags=C);cla(); lags=dt*ACF[0][C:]; acf=ACF[1][C:];` **Periodogramm:** `W = linspace(0,1,N); Y=rfft(x*sin(pi*W)**2); power=abs(Y)**2;f=arange(N/2+1)/(N*dt); semilogy(f,power); PSD=psd(x,NFFT=256, Fs=1); cla(); semilogy(PSD[1]/dt,PSD[0])`

Python-Prozedur/Funktion:

```
def fakultaet(x,optionalerWert=1.):
```

```
if x > 1:   oder x == 1 oder x>-1 and x<3
  return x * fakultaet(x - 1)
else:
  return 1
```

Quicksort:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Python_syntax_and_semantics#Comparison_operators`
Prozedure ist det ohne return. Gibt None zurück.

Sei $\hat{\Theta}_N$ der Schätzer für die Größe Θ auf Grund einer Zeitreihe x_t mit N Werten. Der Schätzer heißt **konsistent** im quadratischen Mittel, wenn gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{MSE}(\hat{\Theta}_N, \Theta) = \lim_{N\to\infty} \left\langle \left(\hat{\Theta}_N - \Theta\right)^2 \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\{ \left\langle \hat{\Theta}_N^2 \right\rangle - 2\Theta \left\langle \hat{\Theta}_N \right\rangle + \Theta^2 \right\} = \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_N) + \mathrm{Bias}^2(\hat{\Theta}_N, \Theta) = 0, \tag{1}$$

also der mittlere quadratische Fehler verschwindet. Oder die Varianz und Bias oder Verfehlung des Erwartungswertes

$$\mathrm{Var}(\hat{\Theta}_N) := \left\langle \hat{\Theta}_N^2 \right\rangle - \left\langle \hat{\Theta}_N \right\rangle^2, \quad \mathrm{Bias}(\hat{\Theta}_N, \Theta) := \left\langle \hat{\Theta}_N \right\rangle - \Theta \tag{2}$$

verschwinden beide für $N \to \infty$. **Erwartungstreu**, falls $\lim_{N\to\infty} \mathrm{Var}(\hat{\Theta}_N) = 0$ und **unverzerrt**, falls $\lim_{N\to\infty} \mathrm{Bias}(\hat{\Theta}_N, \Theta) = 0$. Honerkamp: Stoch dyn Systeme p31; Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel 2014 p39; Cepstral-Analyse: Bogert et al. The Quefrency analysis of time series of echos 1963. Logarithmierte Leistungsspektraldichtespektrum eines echo-enthaltenden Signal hat periodische Komponente. Oppenheim & Schafer: Zeitdiskrete Signalverarbeitung 1999[3]; **Indirekte Methode** Über die AKF per FT auf Basis des Wiener - Khintchin - Theorems zum Spektrum. **Gestutzte AKF**

$$\hat{P}_{naiv}(\omega) = \sum_{t=-(N-1)}^{N-1} \hat{\gamma}(t)\, e^{-i\omega t}, \quad \hat{\gamma}(t) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{naiv}(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \tag{3}$$

$$\hat{P}_{kons}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{naiv}(\theta)\, W(\omega - \theta) d\theta, \quad W(\theta) = \sum_{t=-(N-1)}^{N-1} \lambda(t)\, e^{-i\theta t} \tag{4}$$

$$\hat{P}_{kons}(\omega) = \sum_{t=-(N-1)}^{N-1} \lambda(t)\, \hat{\gamma}(t)\, e^{-i\omega t}, \quad W(\theta) = \begin{cases} \frac{M_W}{2\pi} & : \ \mid \theta \mid \leq \frac{\pi}{M_W} \\ 0 & : \ \text{sonst} \end{cases}, \quad \lambda(t) = \frac{\sin \frac{\pi\, t}{M_W}}{\frac{\pi\, t}{M_W}} \tag{5}$$

Die varianzmindende Glättung des Schätzers $\hat{P}_{naiv}(\omega)$ entspricht einer Fensterung der AKF $\hat{\gamma}(t)$.

Varianz:

$$\mathrm{Var}[\hat{P}(\omega)] \propto \frac{M_W}{N} \tag{6}$$

Die Varianz des Erwartungswertes geht asymptotisch gegen Null.

Erwartungstreue: Bandbreite vs Auflösung

$$\mathrm{Bias}[\hat{P}(\omega)] \propto \frac{1}{M_W} \tag{7}$$

Der Erwartungswert ist asymptotisch der wahre Wert. Der Stutzungspunkt M_W ist subjektiv und balanciert die Auflösung gegen die Varianz. M_W klein: glattes Spektrum, aber wichtige Eigenschaften werden möglicherweise weggeglättet. M_W groß: stark fluktuierendes Spektrum. Gipfel liegen verzerrt. Mangelnde Erwartungstreue. Wahl von $M_W \propto 1/\text{Ordnung}$.

Parametrische/modellbasierte Methoden

Spektraldarstellung stochastischer Prozesse siehe Honerkamp: Stochastische dynamische Systeme 1990 p258; Haykin: Nonlinear methods of spectral analysis, Topics in applied physics 34 1983[2] Maximum Entropie Spektren, Burg-Algorithmus;

Autoregressives Modell, AR-Spektrum – Yule-Walker-Methode

2. Moment bei Bm zeitabhängig, es existiert nicht! Diffusion. Stationär Gleichverteilung! Mit Parameter a kann Bm stationär gemacht werden. Idee ist z-Transformation oder **Verschiebungsoperator**. Geometrische Reihe konvergiert nur innerhalb des Einheitskreises! Für den Lag-Operator = Verschiebe-Operator L gelten die Eigenschaften der z-Transformation http://en.wikipedia.org/wiki/Z-transform Idee: Stationatität ist mit Konvergenz der entsprechenden geometrische Reihe der Koeffizientenpolynome sichergestellt. Geburt linearer stationärer Prozesse. $X_i = aX_{i-1} + \epsilon_i$ für alle i. Quadrat davon gibt für Moment $\sigma^2_{X_i} = a^2\sigma^2_{X_{i-1}} + \sigma^2_\epsilon$, wegen unkorreliert oder senkrecht $< X_{i-1}\epsilon_i >= 0$. Mit Stationarität $\sigma_{X_i} = \sigma_{X_{i-1}}$ folgt $\sigma^2_X = \dfrac{\sigma^2_\epsilon}{1-a^2}$ für $|a| < 1$. Scherbaum: Of poles and zeros. Fundamentals of digital seismology 1996; Newland: An intro to random vibrations, spectral & wavelet analysis; Solnes: Stochstic processe and random vibrations;

Idee: **Die Welt ist die Menge aller möglichen gefilterter Zufallsprozesse.** Siehe das Spektrum eines Noise-getriebenen gedämpften Oszillators. Siehe Seiten 383, 598, 599,102. Modellierung meint hier: Nimm Deine Messungen und finde reproduzierende Filter per Cross-Validation . Dann genügen die der Ordnung des Prozesses entsprechende Anzahl von Vergangenheitmessungen und die Zukunft ist vorausgesagt. Der momentane Zustand ist genauso wichtig, wie der Vergangenheitshorizont. **Autoregressive Modelle** machen sich kaum Begriffe zur Wirklichkeit, außer Zerfalls/Correlations-Zeit, Periode. Ganz im Gegensatz zum physikalischen Ansatz, der ab initio arbeitet: Kenne das physikalische Modell, den strukturellen Kern, die Differenzialgleichungen, in denen das Allgemeine unserer Erfahrung mit der Wirklichkeit destilliert ist und Du kannst sein Verhalten designen/verstehen und gar voraussagen, wenn Du den momentanen Zustand weist.

Die **Langevin-Gleichung** $m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + F(t)$ mit der Zufallskraft $F(t) \propto N(0, \sigma^2_F)$ gibt $\dot{v} = -\dot{\tilde{\gamma}}v + \tilde{F}$ kann als überdämpfter Relaxator AR[1] betrachtet werden.

$$X_t = \sum_{l=1}^{p} a_l\, X_{t-l} + \epsilon_t, \text{ gibt } \langle X_{t+k}\, X_t\rangle = \gamma(k) = \sum_{l=1}^{p} a_l\, \gamma(k-l) = \sum_{l=1}^{p} a_l\, \langle X_{t+k}\, X_{t-l}\rangle\,, \quad k = 1, \cdots, p \tag{8}$$

$$\vec{\gamma} = T\,\vec{a}, \text{oder mit inverser Töplitz} - \text{Matrix} \quad \vec{a} = T^{-1}\,\vec{\gamma}$$

Speziell bei AR[1] ist $\hat{a}_1 = \hat{\gamma}(\tau = 1)$, $(1-\hat{a}^2)\sigma^2_X = \sigma^2_\epsilon$ und $\gamma(\tau) = \hat{a}^{|\tau|}$ mit $|a_1| < 1$ was aus folgenden Erwartungswert-Bildungen folgt

$$X_{k+1} = aX_k + e_{k+1}| \cdot X_k \rightarrow < X_k X_{k+1} >= a\sigma^2_X \quad \text{außerdem gilt} \quad \gamma(\tau) := \frac{< X_k X_{k+\tau} >}{\sigma_X} \Rightarrow \gamma(1) = a$$

die AKF folgt aus dem Erwartungswert

$$< X_k X_{k+2} >=< X_k(a[aX_k + e_{k+1}] + e_{k+2}) >= a^2 < X^2_K >= a^2\sigma^2_X \quad \Rightarrow \gamma(2) = a^2$$

dei Varianz-Beziehung folgt analog aus

$$X_k = aX_{k-1} + e_k\,| \cdot X_k \quad \Rightarrow \sigma^2_X = a\gamma(-1)\sigma^2_X + \sigma^2_e, \quad \sigma^2_X = a^2\sigma^2_X + \sigma^2_e$$

oder bei AR[2], Box & Jenkins: Time series analysis: forecasting and control (3.2.7), (6.3.6), rekursive Berechnung p82; Zur formalen Betrachtung sind z-Transformation und Differenzenoperator nützlich siehe Seite 186. Bracewell: The Fourier transform and its applications 1965, 1986; Priestley: Spectral analysis and time series; Schlittgen, Chatfield, Cryer, Brockwell & Davies, von Storch und Zwiers, Timmer: Mathematische Methoden zur Analyse von Zeitreihen 2001, p26 **autoregressive Modelle**:

$$\hat{a}_1 = \frac{\hat{\gamma}(1)(1-\hat{\gamma}(2))}{1-\hat{\gamma}^2_1}, \qquad \hat{a}_2 = \frac{\hat{\gamma}(2)-\hat{\gamma}(1)^2}{1-\hat{\gamma}^2_1}$$

Stabilitätsdreieck $a_1 \in [-2, 2]$ und $a_2 \in [-1, 1]$. Dämpfungsfaktor $d = \sqrt{-a_2}$. Pseudo-Periode

$$f_0 = \frac{1}{2\,\pi}\,\arccos\frac{|a_1|}{2\,\sqrt{-a_2}} \qquad \text{für} \quad a^2_1 + 4\,a_2 < 0$$

Varianz des treibenden Rauschens folgt aus

$$\hat{\sigma}_\epsilon^2 = \left\langle (X_t - \sum_{l=1}^{p} \hat{a}_l \, X_{t-l})^2 \right\rangle \tag{9}$$

Beispiel für einen **periodischen autoregressiven Prozess 2. Ordnung** AR[2] mit den AR-Koeffizienten $a_1 = 1.6$ und $a_2 = -0.99$ bei einer Varianz des treibenden Rauschens von 1. I] monotoner Relaxator mit $a_1 = 0.3, a_2 = 0.04$, II] alternierender Relaxator mit $a_1 = 0.87, a_2 = -0.117$, III] hochfrequent oszillierender Relaxator: $a_1 = -1.0, a_2 = -0.5$ **IV niederfrequent oszillierender Relaxator:** $a_1 = 1.6, a_2 = -0.99$

python Yule-Walker: http://pypi.python.org/pypi/spectrum/0.5.2 **Beachte die merkwürdige Vorzeichen-Konvention der AR-Koeffizienten** bei matlab und python! Auch Frequenzachse läuft analog FFT, also von 0 bis 0.5 und dann über -0.5 bis 0.

```
from scipy.signal import lfilter; from spectrum import *
plot(lfilter([1,-2],[1,-1.9,.99],randn(700)))
A  =[1, -2.7607, 3.8106, -2.6535, 0.9238] bedeutet A = [1, -a1, -a2, -a3, -a4]
noise = randn(1024); y = lfilter([1], A, noise);
#filter a white noise input to create AR(4) process
[ar, var, reflec] = aryule(y[0], 4); ar, P, k = aryule(y, 15, norm='biased')
plot(linspace(0,0.5,2048),arma2psd([-1.6,0.99],B=None)[:2048]);show()
psd = arma2psd(ar); plot(linspace(-0.5, 0.5, 4096), 10 * log10(psd/max(psd)))
axis([-0.5, 0.5, -60, 0])
```

Für das **autoregressive Spektrum p-ter Ordnung** gilt:

$$\hat{P}_{kons}(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi\sigma_X^2} \frac{1}{\left|1 - \sum_{l=1}^{p} a_l e^{il\omega}\right|^2}, \qquad \hat{P}^{(1)}(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi\sigma_X^2} \frac{1}{1 + a_1^2 - 2a_1 \cos\omega}, \qquad \hat{P}^{(2)}(\omega) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{2\pi\sigma_X^2}? \tag{10}$$

Yule-Walker-Spektrum: om=linspace(0,pi,1000); om1=om*1j; om2=om*2j;
Nenner=abs(1-1.6*exp(om1)+0.99*exp(om2)); plot(om,1/Nenner). Der Schätzer ist asymptotisch biasfrei

$$\mathrm{Var}\left[\hat{P}_{kons}(\omega)\right] \sim \frac{2pP_{kons}^2(\omega)}{N} \to 0 \tag{11}$$

falls $\frac{p}{N} \to 0$.
$\Rightarrow$ AR-Spektrum ist konsistenter Schätzer.
In der Praxis sollte p größer gewählt werden, als theoretisch erwartet wird. Es sollten mindestens 4 Perioden der längsten Periode enthalten sein.

Entropie-Spektrum (Maximum-Entropie- oder Burg-Methode)

Die Töplitz-Matrix der Kovarianzen wird wird nach der Burg-Methode berechnet.

Direkte/Nicht-parametrische Methoden (leakage)

Periodogramm, SCHUSTER 1898: Die Autokorrelations-Funktion $\gamma_{XX}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t)X(t+\tau)\mathrm{d}t$ mit $\bar{X}(t) = 0$ wird in Form der Kreuzkorrelations-Funktion, also Skalar-Produkt von Realisierung des Prozesses $X(t)$ mit bekannten/periodischen Funktionen eingesetz: $\gamma_{X\cos}(\omega, \tau = 0)$. **Beispiele:** a] weißes Rauschen $\gamma_X(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$, b] Harmonische mit Frequenz ω_0 ist $\gamma_X(\tau) = e^{i\omega_0\tau}$. Zur Gewinnung des Spektrums wird das Lag τ noch über die Periode von $\sin(t)$ gemittelt. Bei der Berechnung des Power-Spektrums erhält man Betrag und Phase als Funktion von ω.

$$\hat{I}(f) = N\left\{C^2(f) + S^2(f)\right\} = N\left|D(f)\right|^2 \quad \text{mit} \quad D(f) = C(f) + iS(f) \tag{12}$$

$$C(f) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x_t - \mu)\cos(2\pi f t) \quad \text{und} \quad S(f) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(x_t - \mu)\sin(2\pi f t) \tag{13}$$

$$\hat{I}(\omega) = \frac{2}{N}\left|\sum_{t=1}^{N} X_t e^{i\omega t}\right|^2 \tag{14}$$

Wiener - Khintchin - Theorem

$$\hat{I}(\omega) = \hat{P}_{\text{naiv}}(\omega), \quad \lim_{N\to\infty} \text{Var}[\hat{I_N}(\omega)] = \text{const} \tag{15}$$

Erwartungstreue (Bandbreite, Auflösung):

$$\lim_{N\to\infty} \text{Bias}[\hat{I_N}(\omega)] = 0 \tag{16}$$

Nun wird die Varianzreduktion mieser Auflösung und Bias geopfert.

Barlett-Methode: Gemitteltes Periodogramm

Mittelung über K unabhängige Realisierungen:

$$\hat{P}_{kons}(\omega) = \frac{1}{K}\sum_{t=1}^{K} Per(\omega_j) \tag{17}$$

Konsistenz:

$$\text{Var}[\hat{P}(\omega)] \propto \frac{1}{K} \tag{18}$$

Erwartungstreue (Bandbreite, Auflösung):

$$\text{Bias}[\hat{P}(\omega)] \propto K \tag{19}$$

K groß: Interessante Eigenschaften werden weggeglättet. Bandbreite, Auflösung $\propto K/N$.

Welch-Methode: Gemitteltes Periodogramm gefensterter Daten

Mittelung über K überlappende (50 % optimal) Periodogramme gefensterter Zeitreihensegmente.

Blackman & Tuckey – Methode: Geglättetes Periodogramm

Bei kurzen Zeitreihen. Praktisch wird die inverse FT des Periodogramms mit einem Hanning-Fenster

$$w(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi t}{T}\right) & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{20}$$

geglättet. Manolakis: Digital signal processing. principles, algorithms, and applications 1996[3]; Porat: A course in digital signal processing 1997

Gefensterte FT

Gabor-Matrix, Zeit-Frequenz-Spektrum

$$F_\psi f(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(t')e^{-i\omega t'}\psi(t'-t)dt'$$

(Fenster, Gewichtsfunktion, Träger, Faltung)

$$\psi(t) = 1/\sqrt[4]{\pi}e^{-t^2/2}$$

liefert optimale Lokalisierung im Phasenraum. Sprachspektrogramm;

Kontinuierliche WT

Bäni: Wavelets 2005[2]; Bergh: Wavelets in Physics 2010; **Bergh, Ekstedt, Lindberg: Wavelets** 1999; Torrence & Compo: A practical guide to wavelet analysis, Bulletin of the AmericanMeteorologuical Society, 79 (1) 1998 p61-78 Signifikanz-Niveau mitttels AR[1]; Matthias Holschneider: Introduction to continuous wavelet analysis, In: Triebel: Function spaces and wavelets on domains 2008; Roland Klees and Roger Haagmans: Wavelets in the Geosciences 2000;

Maraun: Cross Wavelet Analysis. Significance Testing and Pitfalls, Nonlin. Proc. Geoph. 11(4), 505-514, 2004; Maraun: Epochs of Phase Coherence between El Niño/Southern Oscillation and Indian Monsoon, Geophys. Res. Lett., 32, L15709, doi:10.1029/2005GL023225, 2005; patch-Signifikanz statt punktweiser Signifikanz, Siehe **Beurteilung eines Klassifikators**. Gigerenzer: Das Einmaleins der Skepsis 2004; Beck-Bornholdt & Dubben: Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformation durch Querdenken 2006; **Sensitivität vs Spezifität** Springer: Encyclodedia of machine learning 2011; Maraun: Nonstationary Gaussian Processes in Wavelet Domain: Synthesis, Estimation and Significance Testing. PhysRevE 75 016707 p2007; D. Maraun: What Can We Learn from Climate Data? Methods for Fluctuation, Time/Scale and Phase Analysis, PhD Thesis, Potsdam 2006 Klees: Wavelets in geophysics 2000. Eine Funktion $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, welche die **Zulässigkeitsbedingung**

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty$$

erfüllt, heißt **Wavelet**. Die **Wavelet-Transformierte** einer Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ zum Wavelet ψ ist durch

$$L_\psi f(a,b) = c_\psi^{-1/2} |a|^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(t)\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$ definiert.

Mittelwert eines Wavelets verschwindet $\Rightarrow$ Wellchen. **Plancherel-Theorem:** Integral des Betragsquadrats einer Funktion stimmt mit dem Integral des Betragsquadrats derselben Funktion im Fourier-Raum überein, siehe Seite 104. Zerlegung der Eins als Ersatz für die Orthoganalitätsrelation: Basis $\rightarrow$ Rahmen. Beauchamp: Applications of walsh and related functions, with an introduction to sequency theory 1984; **Beispiele:**

- **Haar-Wavelet**

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \le t < 1/2 \\ -1 & : \quad 1/2 < t \le 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega/2} \sin(\omega/4) \frac{sin(\omega/4)}{\omega/4}, \qquad c_\psi = 2\ln 2$$

- **Mexikanischer Hut**

$$\psi(t) = -\frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} = (1-x^2) e^{-x^2/2}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \omega^2 e^{-\omega^2/2} / \sqrt{2\pi}, \qquad c_\psi = 1$$

- Daubechie:

Zoom von f in $U(b)$ durch eine Schar Wavelets ψ, die alle aus ein und demselben Mutterwavelet durch Dilatation D_a und Translation T_b (affine Abbildung, Mikroskop) hervorgehen:

$$\{\psi((\cdot - b)/a)) | a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$$

Deutung: $L_\psi f(a,.)$ Bandpaßfilter für $f(t)$. $L_\psi f(.,b)$ Spektrum an der Stelle b.

Rekonstruktion:

$$f(t) = c_\psi^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} L_\psi f(a,b)\, |a|^{-1/2}\, \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^2}$$

Gegenüberstellung: WT ⇔ WFT. Waveletshrinking (wesentliche Muster, Infoübertragung). Diskrete Wavelet Transformation DWT PyWavelets import pywt; cA, cD = pywt.dwt([1, 2, 3, 4], 'db1'); https://github.com/nigma/pywt/tree/master/demo

Hayes: Statistical Digital Signal Processing and Modeling 1996. Kay: Modern Spectral Estimation 1988; Marple: Digital Spectral Analysis 1987; Orfanidis: Introduction to Signal Processing 1996; Percival & Walden: Spectral Analysis for Physical Applications. Multitaper and Conventional Univariate Techniques 1993; Proakis & Manolakis: Digital Signal Processing. Principles, Algorithms, and Applications 1996; Stoica, P., and R. Moses. Introduction to Spectral Analysis 1997; Welch: The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra. A Method Based on Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. AU-15 (June 1967). Pgs. 70-73; Manolakis, DIGITAL SIGNAL PROCESSING Principles, algorithms, and Applications 1996[3]; Porat: A COURSE IN DIGITAL SIGNAL PROCESSING 1997;

Bispektrum Nikias & Petropulu, Higher-Order Spectra Analysis 1993; T. Tao: Higher order Fourier analysis 2012; Rao & Subba Rao: An Introduction to Bispectral Analysis and Bilinear Time Series Models

$$B_X(\omega_1,\omega_2) = \sum_{m,n} C_{XXX}(m,n) e^{-i(\omega_1 m + \omega_2 n)}$$

Kumulante dritter Ordnung $C_{XXX}(m,n) = E[(X(t)-\mu)(X(t+m)-\mu)(X(t+n)-\mu)]$ Symmetrien: $B(\omega_1,\omega_2) = B(\omega_2,\omega_1) = B(\omega_1,-\omega_1-\omega_2) = B(-\omega_1,-\omega_2)^*$. Bikohärenz/normiertes Bispektrum: $N(\omega_1,\omega_2) = \frac{|B_X(\omega_1,\omega_2)|^2}{f(\omega_1)f(\omega_2)f(\omega_1+\omega_2)}$. Eigenschaften $X(t)$ Gaußsch $\Rightarrow$ $B_X(\omega_1,\omega_2) = 0$. $X(t)$ linear $\Rightarrow$ $N(\omega_1,\omega_2) =$ konstant Brockett, Hinich Patterson Bispectral-based tests. Grade von Linearität und Gassianität werden abgeschätzt. JAmerStatAss 1988 p657-664; $X(t)$ zeitumkehrinvariant$\Rightarrow$ Im $B_X(\omega_1,\omega_2) = 0$. Bispektren liefern keine hinreichenden Bedingungen: Spektren höherer Ordnung nötig! Kohärenzfunktion n. Ordnung (n=2 Bikohärenz, Betrag davon ist der Kohärenzindex):

$$P_n^X(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}) = \frac{C_n^X(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})}{\sqrt{C_2^X(\omega_1)\ldots C_2^X(\omega_{n-1}) C_2^X(\omega_1+\cdots+\omega_{n-1})}}$$

gaußsch/ nichtgaußsch, linear/nichtlinear **Carter: Coherence and time delay estimation IEEE Press** 1993

Linear und gaußsch (Prozess 2. Ordnung): $|P_n^X(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})| = 0$. Linear und nichtgaußsch (Kohärenz ist freuquenzunabhängig): $|P_n^X(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1})| = \frac{\gamma_n^X}{(\gamma_2^X)^{n/2}} = \text{const}$, wobei γ_n^X das n. zentrale Moment des Prozesses X ist. **Zeitreversibilität:** Imaginärteile aller Kummulantenspektren verschwinden ($\Im C_3^X = 0$ auch bei nichtgaußschen Prozessen möglich!): $\Im C_n^X(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}) = 0$ und $c_n^X(\tau_1,\ldots,\tau_{n-1}) = c_n^X(-\tau_1,\ldots,-\tau_{n-1})^*$.

Idee bei **Maßtheorie:** Man bewerte oder messe die 'Menge/Inhalt' des Intervalls (verschiedene Banknoten: Was ist mehr? zwei 500 €Noten oder 100 10-€Noten?). Die Funktion über der Menge bringt nur noch eine 'unwesentliche' weitere Bewertung des Intervalls (Banknote seien in verschiedenen Abpackungen verteilt). **Brokate & Kersting: Maß und Integral** 2010; **Terrence Tao: An Introduction to Measure Theory** 2011; Hawkins: Lebesgue's Theory of Integration. Its Origins and Development 1970; **Hertel: Mathematikbuch zur Physik** 2009 e-book Kap7 p181 Tiefere Einsichten! Arbeitsbuch Mathematik zur Physik 2011; Billingsley: Weak convergence of measures. Applications in probability 1987; Billingsley: Convergence of probability measures 1999[2]; Billingsley: Probability and measure 2007[2]; Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie 1996; Falconer, Brehmer: Maßtheorie 1976 Zugang per **Lebesgue-Integral** = Grenz-Integrale der Levi-Folgen von Zackenfunktionen → Funktionen und nicht über **Lebesgue-messbare Mengen** = Inhalts- und Maßproblem per σ-Algebren von Mengen; Henze: Einführung in die Maßtheorie 1971; Belkner, Tolstow, Kamke, Meintrup http://www. springerlink. com/content/r24g36/ Kap3 Quantencomputing; **Maßtheorie Motiv/Problem:** a] **Dirichletfunktion** $\varphi(x) = \chi_{[0,1]\subset\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$ nicht R-integrierbar. Belkner & Brehmer: Lebesgue'sche Integrale 1984 p9; b] Wie abzählbar viele **Ausreißer**

behandeln? c] **Wie über beliebige Borel-Mengen, nicht nur** Rb **integrieren?** d] Wie **Wahrscheinlich für einen Punkt** definieren? e] **Inhaltsproblem unlösbar**, falls $p \geq 3$ Hausdorff 1914. Für $p = 1, 2$ nicht eindeutig lösbar (Banach 1923, Bewegunggruppen, spezielle orthogonale Gruppe SO(3) enthält freie Untergruppe vom Rang 2). Satz von Banach Tarski 1924: Es sei $p \geq 3$, und $A, B \in \mathbb{R}^2$ seien beschränkte Mengen mit nicht-leerem Innern. Dann gibt es Mengen $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}^p$ und Bewegungen $\beta_1, \ldots, \beta_n$, so dass A die disjunkte Vereinigung der Mengen $C_1, \ldots, C_n$ ist und B die disjunkte Vereinigung der Mengen $\beta_1(C_1), \ldots, \beta_n(C_n)$. Elstrodt p5; f] **Maßproblem unlösbar.**

Wapner: Aus 1 mach 2 oder das Banach-Tarski-Theorem (BTT) aus dem Jahre 1924: Eine Kugel kann in eine endliche Anzahl von Teilstücken zerlegt und in der Weise wieder neu zusammengelegt werden, dass zwei Kugeln von gleicher Form und gleichem Volumen wie die ursprüngliche Kugel entstehen p172. Das Buch ist sehr breit angelegt, man erfährt zunächst viel von den handelnden Mathematikern Georg Cantor (1845 - 1918), Stefan Banach (1892 - 1945), Alfred Tarski (1902 - 1983), Kurt Gödel (1906 - 1978) und Paul Cohen (1934 - 2007) und damit auch viel Interessantes aus der Geschichte der Mathematik der zweiten Hälfte des 19. und der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts. Wichtige Aussagen aus der Mengenlehre werden vorgestellt, dabei wird insbesondere auf das **Auswahlaxiom** hingewiesen, welches von zentraler Bedeutung beim Beweis des BTT ist. F̃insler: Aufsätze zur Mengenlehre 1975; K̃rbek: Formen und Formeln 1967; K̃rbek: Über Zahlen und Überzahlen 1964; Krbek: Eingefangenes Unendlich 1962; Krbek: Geometrische Plaudereien 1966; Siehe Meschkowski: Math verständlich dargestellt 1997 p140ff. **Auswahlaxiom:** Es sei $\mathcal{Z}$ ein System $\{M\}$ von nicht leeren, paarweise disjunkten Mengen. dann gibt es eine 'Auswahlmenge' A, die aus jeder Menge von $\mathcal{Z}$ genau ein Element enthält. **Problem:** Mengenleere betrachtet meist unendliche Mengen und man findet nicht stets ein konstruktives Verfahren zur Bestimmung der Auswahlmenge A. Bei dem unendlichen Mengensystem $\mathcal{Z}$ der Menge der Intervalle $\{[n, n+1)\}$ für die natürlichen Zahlen klappt das. Eine Auswahlmenge ist die Menge der $\mathbb{N}$. Es geht aber auch die Menge $\{n + \frac{1}{2}\}(n \in \mathbb{N})$ als 'Repräsentantenmenge' = Auswahlmenge. Reine Existenzbeweise aber brauchen die konkrete Zuordnung mittels Rechen- oder Zeichenverfahren nicht. Bei rationalen Zahlen **Wohlordnung** durch Cantor'sches Diagonalverfahren als Abzählverfahren. Bei reellen Zahlen geht das nicht. Wohlordnung: Jede nichtleere Teilmenge hat Minimum (nicht nur Infimum). $\mathbb{Z}$ mit der üblichen Ordnung ist nicht wohlgeordnet, denn $\{x|x < 0\}$ hat kein Minimum. $\mathbb{Z}$ mit der Ordnung $0 < 1 < -1 < 2 < -2 < 3 < -3$... IST wohlgeordnet: $\{x < 0\}$ hat Minimum -1. Cantor: mittels Wohlordnungen kann man Ordinalzahlen definieren. Cantors Wohlordnungssatz (ohne Beweis): Jede Menge kann (streng) wohlgeordnet werden. Koenigs falsche Widerlegung (1904). **Russell-Scherz:** Wähle aus Menge aller Schuhpaare je einen Schuh aus! Vorschrift: Nimm stets den rechten. Wie soll die Vorschrift bei Strumpfpaaren lauten? Hier gibt es keine konstruktive Vorschrift für die Auswahl. In sehr anschaulicher Weise informiert Wapner den Leser weiterhin u. a. über Isometrien, über die Gruppe als wichtige algebraische Struktur, über Kardinalzahlen und wie man mit ihnen rechnet und vieles mehr. Arens p838;

Gebietsintegral für reellwertige Funktionen Arens p828/838

$$\int_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}V = \int_D f(\vec{r})\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z), \int_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}^n\vec{x} = \int_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}^n x = \int\int_D\int f(\vec{x})\,\mathrm{d}^n\vec{x}$$

Fubini: Gebietsintegrale über Quader lassen sich stets als iterierte Integrale über die einzelnen Koordinaten berechnen, falls f integrierbar ist (ohne Singularität):

$$\int_\Gamma \mathrm{d}A = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{g(x)}^{f(x)} \mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, y|_{g(x)}^{f(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\,[f(x) - g(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(x) - \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, g(x)$$

Integration über mehrfach ausgedehnten Gebieten: Speziell $\int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{\pi y/2} \mathrm{d}x = 2\pi$ oder $\int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{\pi y/2} \mathrm{d}x \cos(x/y)$
4. Für das bestimmte Integral als Fläche unter einer Kurve $f(x)$ gilt die Entsprechung

$$\int_\Gamma \mathrm{d}A = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} \mathrm{d}y = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, y|_0^{f(x)} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\, f(x)$$

$$\int_{K(R)} \mathrm{d}A = \int_{K(R)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x\, y|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} = 2\int_{-R}^{R} \mathrm{d}x\, \sqrt{R^2 - x^2} = \pi R^2$$

Volumen von $K \in \mathbb{R}^n$: $V(K) = \int_K 1 \mathrm{d}\vec{x}$. Masse von K mit Dichte ρ: $m(K) = \int_K \rho(\vec{x}) \mathrm{d}\vec{x}$. **Schwerpunkt** oder besser **Massenmittelpunkt** $\vec{x}_s$ von K mit Dichte ρ: $\int (\vec{x} - \vec{x}_s)\rho(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = 0$. **Definition Masse:** i] Wattwaage $UI = mgv = \frac{nn'}{r} f_J f'_J \frac{h}{4}$ wobei $U \propto v$ ein n-faches einer Josephson-Spannung, die bei Bewegung mit der Geschwindigkeit v entsteht, und $I \propto mg$ Strom aus Quanten-Hall-Effekt. ii] Avogodroprojekt $N_A = \frac{MVn}{m}$ mit M = Masse von ^{28}Si, V Volumen

Generische Bewegungstypen:

stochastisch Stratonovich: Topics in the theory of random noise 1963; Schilling: **Brownian motion: an introduction to stochastic processes** 2012;

a. Brown'sche Bewegung: unabhängige, normalverteilte Inkremente
b. fBm: abhängige, normalverteilte Inkremente
c. Stabile Prozesse: unabhängige Inkremente mit $\sigma^2 = \infty$ (diskontinuierliche Funktionen)

$D = 2 - H$ **Peitgen, Jürgens, Saupe: Bausteine des Chaos.** Fraktale 1992, 1998 p463; Hofstadter (1976). Energy levels and wavefunctions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. Physical Review B 14 (6): 2239–2249. Hofstadter-Schmetterling = graf Darstellung des Spektrums des almost Mathieu Operators $[H_\omega^{\lambda,\alpha} u](n) = u(n+1) + u(n-1) + 2\lambda \cos(2\pi(\omega + n\alpha))u(n)$ der bei Untersuchung zum Quantum Hall Effekt auftritt. Bräuer: Chaos, Attraktoren und Fraktale - mathematische und physikalische Grundlagen nichtlinearer Phänomene mit Anwendungen in Physik, Biologie und Medizin 2002; **Leonard A. Smith: Chaos. A very short introduction** 2007 Voraussagbarkeit, Modellfehler, p76ff = Sehr gute Fraktaleinführung; **Manfred Schröder: Fraktale, Chaos, Selbstähnlichkeit 1994;** Wornell: Signal processing with fractals. A wavelet based approach 1996 1/f processes, ARMA R. Voss, Fractals in Nature, in: **The Science of Fractal Images, Peitgen & Saupe** 1988 p63-64; Mandelbrot: Self-affine fractals and fractal dimension, PhysicaScripta32 1985 p257-260; Mandelbrot and fractional renewal models: 1. Mandelbrot 1967: Some Noises with 1/f Spectrum, a Bridge Between Direct Current and White Noise, 2. Niemann et al, 2013, Fluctuations of 1/f Noise and the Low-Frequency Cutoff Paradox http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.140603; 3. Dechant and Lutz, 2015, Wiener-Khinchin theorem for nonstationary scale-invariant processes http://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.115.080603; 4. Rodriguez, 2014, Complete spectral scaling of time series: Towards a classification of 1/f noise http://link.aps.org/c Biagini, Hu, Oksendal & Zhang: **Stochastic calculus for fractional Brownian motion** 2008; **Borodin & Salminen: Handbook of Brownian motion** - facts and formulae 2002[2]

fBm ist selbst-affiner Zufallsprozess mit **korrelierten Zuwächsen**, Verallgemeinerung der Brown'schen Bewegung. Mandelbrot: Die fraktale Geometrie der Natur 1980; Kleen: **Physik des 1/f–Rauschens**, PiuZ14 1983 p107–115, Flicker, pink (Press, Kumičak 1994). Peitgen, Jürgens & Saupe 1992 Chaos – Bausteine der Ordnung p494;

Prozeß	Spektralindex β	Skalenindex H
Weißes Rauschen	0	- 0.5
1/f-Rauschen, Flicker, pink	$0.5 \ldots 1.5$	$-0.25 \ldots 0.25$
Brown'sches Rauschen, unabh. Inkremente	2	0.5
fraktionales Brown'sches Rauschen (Theiler 91)	$1 \ldots 3$	$0 \ldots 1$

Tabelle 1: Klassifikation verschiedener Prozesse durch den Spektralindex β Schätzung Pilgram Physica D 114 (1998) und den Skalenexponenten $H = \frac{\beta - 1}{2}$.

$H = \frac{1}{2}$: entspricht der gewöhnlichen Brownschen Bewegung (gewöhnliche Diffusion), bei der die Zuwächse voneinander unabhängig sind. Die Korrelation ist 0.

$H > \frac{1}{2}$: zwischen den Zuwächsen besteht eine positive Korrelation. Wenn die Kurve zu einem Zeitpunkt ansteigt, so zeigt sie diese Tendenz auch künftig (Erhaltungsneigung).

$H < \frac{1}{2}$: die Zuwächse sind negativ korreliert (Antipersistenz) und die Kurve oszilliert erratisch. Die Kurve strebt

ständig dem Ausgangspunkt zu. Die Diffusion erfolgt langsamer als bei der gewöhnlichen Brownschen Bewegung.

Zwischen der fraktalen Dimension D_F, dem Spektralindex β, dem Skalen-Exponenten H und der euklidischen Dimension des Prozesses E bestehen die folgenden Beziehungen

$$D_F = E + 1 - H = E + \frac{3-\beta}{2} \tag{21}$$

Mandelbrot 1987; Peitgen & Saupe 1988; Feder 1988; Frøyland 1992; Falconer 93;

Deterministische Bewegungstypen:
a. Fixpunkt hat beliebige Periode
b. Grenzzyklus hat eine feste Periode/quasiperiodisch, siehe Seite 203. Jacobi 1804 Potsdam -1851: **Grund: Man muss umkehren**, weil **Phasenräume endlich** sind! Rotation = umlaufendes Pendel/Rad $q = \phi, p(t+\tau) = p(t)$, Limitationsbewegung/Grenzfall/Pendel zwischen $-\pi$ und π und Libration/geschlossene Phasenraumkurve/Orbit $q(t+\tau) = q(t), p(t+\tau) = p(t)$. **Phase** als Winkelgröße bei linearer Bewegung des harmonischen Oszillators. **Tass: Phase resetting** in medicine and biology, Stochastic modelling and data analysis 1999; Winfree: The Geometry of Biological Time 2001[2]; Winfree: Biologischen Uhren. Zeitstrukturen des Lebendigen 1988; 3d-Pendel: Journal of Nonlinear Science Volume 21, Number 1, 3-32;
c. involutorisch=einwickeln, kehrt nie mehr zurück, Periode ist ∞

Poincaré–Bendixson-Theorem Langzeitverhalten von Trajektorien kontinuierlicher dynamischer Systeme im Konfigurationsraum der Ebene. Given a differentiable real dynamical system defined on an open subset of the plane, then every non-empty compact ω-limit set of an orbit, which contains only finitely many fixed points, is either a. a fixed point, b. a periodic orbit, or c. a connected set composed of a finite number of fixed points together with homoclinic and heteroclinic orbits connecting these. Moreover, there is at most one orbit connecting different fixed points in the same direction. However, there could be countably many homoclinic orbits connecting one fixed point. Beachte: Auf dem Torus kann es nichtperiodische wiederkehrende Trajektorien geben. Irrationale Frequenzen. Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos p203;

Billingsley: Ergodic theory and information 1965; Liebscher: Entropie; Zu Ergodizität siehe **Terrence Tao: Poincare's Legacies, Part I.** Pages from year two of a mathematical blog 2009; Petersen: Ergodic Theory 1989; **Pollicott & Yuri: Dynamical systems ergodic theory** 1998 mit vielen Beispielen; Walters: An introduction to ergodic theory 1982; Walters: Ergodic theory: Introductory lectures LNM 458 1975; Peitgen, Jürgens, Saupe: Chaos 1992; Patrascioiu: Ergodic hypothesis, p263-279 & Mycielski: Ergodicity p109, In: **Los Alamos Science** 15 1987 Stanislaw Ulam, Lemberger Schule (Ostjuden) - Geburtsstadt der Funktionalanalysis: Banach, Mazur, Steinhaus, Schauder, Orlicz, Ulam; Koralov: Theory of probability and random processes Kap16 **Stationarität und Ergodizität** 2007; Shields: The ergodic theory of discrete sample paths 1996;

Jacobi: **Man muss umkehren! Ergodizität** notwendig und hinreichend für stationäre Gleichgewichtsdichte mit maximaler Entropie.

$$\boxed{\overline{\mathcal{O}}(X_t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(X_i) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{O}(X(t))\mathrm{d}t = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \mathcal{O}(X(t))\mathrm{d}t \stackrel{!}{=} \int_\Omega \mathcal{O}(X)\mathrm{d}\mu_X =< \mathcal{O}(X) >}$$

mit $\mathrm{d}\mu_X = \rho_X(x)\mathrm{d}x$ und Periode τ. Eine entsprechende Beziehung gilt für die Schätzer. Im einfachsten Fall gilt **Mittelwert = Einsoperator:** $\mathcal{O} = \mathbb{1}$. **Zeitmittel** = mittleres Bild eines Film $\stackrel{!}{=}$ mittleres Bild von sehr vielen Momentaufnahmen zu einem fixen Zeitpunkt = **Scharmittel**. Wenn Beobachtungszeit sehr kurz. Dann Scharmittel. Falls verschiedene Populationen, so Individualentwicklung/Alterung ablesbar. Hertzsprung-Russel-Diagramm. Eberhard Hopf: Ergodentheorie 1937; **M̃orawetz, Serrin, Sinai: Selected Works of Eberhard Hopf with Commentaries** 2003 Bifurkationstheorie, 1936-44 in Leibzig; Eberhard Hopf: Mathematical Problems of Radiative Equilibrium 1930; Schau die Schar an und schließe auf Individualentwicklung. a] Außerirdische besuchen die Erde und entwerfen den Lebenslauf eines Menschen. b] Blick an Himmel gibt Hertzsprung-Russel-Diagramm und damit Sternentwicklungsidee. Bei einmaligen Beobachtungen stellt die Ergodizität sicher, dass die Zeitreihe = Lebenslauf eines Individuums auch hinreichend viel Information über den gesamten Prozess enthalten kann, wenn man das System nur genügend lange beobach-

tet. Das setzt allerdings die Konstanz der Parameter des Systems voraus - **Stationarität**. Stationarität allein aber genügt nicht, um aus einer Zeitreihe die Momente des Prozesses zu schätzen! $X_t, x_t = a$ mit $a \sim [0,1]$ gleichverteilt: Zeitmittel ist $\overline{X} = a$, aber Prozess/Scharmittel ist $< X >= 1/2$. http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_6/advanced/t6_3_1.html

Einstein 1917, Bd10: Man wird stationär und phantasielos im Alter. Man gewöhnt sich ans Hängen.

Handbuch der Mathematik IV Kap13.11; Moser: Dynamical systems, theory and applications. Battelle Seattle 1974 Rencontres, LNP 38 1975; Rosenthal: Introduction to the theory of measure and integration 1955; Rosenthal & Plancherel: **Unmöglichkeit der Existenz ergodischer mechanischer Systeme, d.i. dynamischer Systeme, bei denen die Bahnkurve der Lösung durch jeden Punkt des Phasenraums auf der Energiefläche verläuft!** Brush Proof of the Impossibility of Ergodic Systems: The 1913 Papers of Rosenthal and Plancherel, Transport Theory and Statistical Physics, Bd1 1971 p287-311. **Ergodizität ist eine Frage des gewählten Maßes**. Man kann stets Maße finden, die Ergodiztät sichern. Arnold: Random dynamical systems 1998; Anosov: Ordinary differential equations and smooth dynamical systems Bd1 1988; Anosov: Dynamical systems. Dynamical systems with hyperbolic behavior Bd9 1995; Smale: The Mathematics of Time - Essays On Dynamical Systems, Economic Processes, And Related Topics 1980 Globale Analysis; **Mane: Ergodic Theory and Differentiable Dynamics** 1987 Kap6 Zerlegbarkeit ergodischer Maße; Yoshida: Functional analysis 1966, 1980[6]; Zuse-Bericht von Weber, Kube, Riemer, Bujotzek: Bei dynamischen Systemen mit stationären Dichten und Trappingregionen kommt es auf optimales Samplen an, um ergogische zu bleiben!

I] Ergodisch & instationär: Grenzzyklus $X_t = \sin t$ mit Dichte ist U-Funktion $p_{\sin}(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ der logistischen Abbildung $x_{t+1} = 4x_t(1-x_t)$ hat Dichte $p_{4x(1-x)}(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ oder Brownsche Bewegung (fBm, generalized Langevin equation, subbalistische Levy-Flug im Gleichgewicht).

II] Ergodisch & stationär: Bewegung auf Fixpunkt/Gleichgewicht oder harmonischer Prozess $X_t = \sin t + \phi$ mit $\phi \propto (0, 2\pi]$

III] Nichtergodisch & stationär: Change-Point-Analyse ist bei $X_t = a$ mit $a \propto (0,1] \rightarrow$ eine Realisierung wertlos. Change-Point-Position sei Markov-Prozess gemäß Hamilton: Time series analysis p634. Shot-Noise, Schrot-Rauschen: Zufällige Folge von Relaxationen mit verschiedenen zufälligen Parametern M, τ:

$$x(t_i) = \sum_j M\,\Theta(t_i - T_j)\,e^{-(t_i - T_j)/\tau} \quad \text{mit} \quad S(\omega) = \frac{M^2\,\rho}{1/\tau^2 + \omega^2}, \quad \omega \neq 0$$

wobei die Shot-Zeiten T_j einem Poisson-Prozess folgen: Ereignis-Wahrscheinlichkeit ist proportional zur Warte- oder Abtastzeit Δt

$$\lim_{\Delta t \to 0} \text{prob (Event in}(t, t+\Delta t)) = \rho \Delta t$$

Müller: Rauschen 2013 p31ff Spektrum Schrot-Rauschen; Bittel & Storm: Rauschen 1971, 2012[2]; Lawson & Uhlenbeck: Threshold signals 1950; **Pfeiffer: Elektronisches Rauschen**. T1 Rauschquellen 1959. T2 Spezielle rauscharme Verstärker 1968; van der Ziel: Noise. Sources, Characterization, Measurement 1970; Freeman: Principles of noise 1958; MacDonald: Noise and Fluctuations. An Introduction 2006;

IV] Nichtergodisch & instationär: gedämpfter Oszillator/Relaxation hin zum Fixpunkt, Evolution, Alterung oder $X_t = t$ oder balistischer Levy walk oder subbalistische Levy-Flug beim Nichtgleichgewicht oder subdiffusiver CTRW = continuous time random walk. Bewegung nicht in gleich lange Zeitschritte Δt zerteilt, sondern bei **gleich bleibender Sprunglänge** Δx wird die **Wartezeit** zwischen zwei Sprüngen aus einer Verteilung betrachtet. Rothman MIT12_086F11_anomalous.pdf **Diffusion auf einem Gitter mit Fallen**, wobei die Fallen das diffundierende Teilchen unterschiedlich lange festhalten. Ist die Wartezeitverteilung **endlastig** = Heavy-Tail-Verteilung = endlastige Verteilung = Verteilung mit unendlicher Varianz, also: $p(\Delta t) \propto \Delta t^{-(1+\alpha)}, 0 < \alpha < 1, \quad$ für $\quad \Delta t \to \infty$. Oder $p(l) \sim l^{-(1+\mu)}$ mit $\mu > 0$ und $l \to \infty$. **Mittelwert** $< l >= \int_{l_0}^{\infty} \mathrm{d}l\, l\, p(l) = \int_{l_0}^{\infty} \mathrm{d}l\, l^{-\mu}$ und **2. Moment** $< l^2 >= \int_{l_0}^{\infty} \mathrm{d}l\, l^2\, p(l) = \int_{l_0}^{\infty} \mathrm{d}l\, l^{1-\mu}$. Für $0 < \mu \leq 1$: sind $< l >, < l^2 >$ **UNendlich!** Für $1 < \mu \leq 2$: ist $< l >$ **Unendlich!** und nur $< l^2 >$

endlich!. Für $2 < \mu$ sind beide Momente $< l >, < l^2 >$ **endlich!** und zentraler Grenzwertsatz erfüllt. **Barkaie** Lecture. Chem. Phys 2002; Pekalski ed: Anomalous Diffusion LNP 519 1999; Fluktuierende Zeiten. Parzen: Stochastic Processes 1962; Kempe: Theorie stochstischer Prozesse 1974; Klabaner: Introduction to Stochastic Calculus with Applications 2006; Syski: Random Processes: A First Look 1988; Jan **Kallsen: Levy-Prozesse anschaulich erklärt**. **Levy-Prozess**e = stochastische Prozesse $Y_t = X_t - X_0$ mit $Y_0 = 0$. $X_0 = 0$, mit **stationären** $X_{t_1+h} - X_{t_1} \sim X_{t_2+h} - X_{t_2}\ \forall t_1, t_2 \in T,\ h > 0$, und **unabhängigen Zuwächsen** $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Jacod & Shirayev: Limit theorems for stochastic processes 1987, 2003^2; Jacod: Probability essentials 2000; Lévy Matters I. Recent progress in theory and applications. Foundations, trees and numerical issues in finance 2010 hierin **Feller- und Levy-Prozesse** in Finanz. Böttcher: Lévy matters III: Lévy-type processes: construction, approximation and sample path properties 2013; Sato: **Levy Processes and Infinitely Divisible Distributions** 2013^2; **Unendliche Teilbarkeit** von Zufallsvariablen: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ eine d-dimensionale Zufallsvariable darauf. X heißt unendlich teilbar auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum, falls es für jedes $n \in \mathbb{N}$ Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots X_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ gibt mit $X_1, X_2, \ldots X_n$ sind unabhängig und identisch verteilt $\sum_{i=1}^n X_i \sim X$. Die Klasse der unendlich teilbaren Verteilungsfunktionen ist identisch mit der Klasse der Grenzverteilungen für Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen. **Unendliche Teilbarkeit und Lévy-Prozesse:** Für Zufallsvariablen A und B existiert genau dann ein Lévy-Prozess $(X_t),\ t \in \mathbb{Q}$ mit Zuständen $X_0 \sim A, X_1 \sim B$, wenn die Zufallsvariable $B - A$ unendlich teilbar ist. Dieses Resultat von Paul Lévy vereinfacht den Beweis von der Existenz der **Brownschen Bewegung** (erstmals bewiesen durch Norbert Wiener im Jahr 1923) dramatisch, da leicht gezeigt werden kann, dass die **Normalverteilung unendlich teilbar** ist, denn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\quad n \in \mathbb{N}$ wähle unabhängige $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim \mathcal{N}\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Damit sind die obigen Bedingungen erfüllt. Die **Exponentialverteilung** mit Erwartungswert τ ist unendlich teilbar, die dazugehörigen 'Teiler' sind **gammaverteilt** mit Erwartungswert $\frac{1}{n} \cdot \tau$ und Varianz $\frac{1}{n} \cdot \tau^2$. (Man beachte die uneinheitliche Parametrisierung). Es existieren auch diskrete unendlich teilbare Zufallsvariable: So ist die **Poisson-Verteilung** mit Parameter $\lambda > 0$ unendlich teilbar: hier sind die unabhängigen Summanden $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ebenfalls Poisson-verteilt mit Parameter λ/n. Weitere Beispiele für unendlich teilbare Zufallsvariable sind die Gamma-Verteilung (damit Chi-Quadrat-Verteilung und Exponentialverteilung), die Logarithmische Normalverteilung, die logistische Verteilung, die Pareto-Verteilung, die Dirac-Verteilung, die negative Binomialverteilung, Alpha-stabile Verteilungen, die Gumbel-Verteilung, die F-Verteilung und die Student-Verteilung, außerdem die inverse gaussian und die normal inverse gaussian Verteilungen. **Bernoulli-Verteilung und stetige Gleichverteilung NICHT unendlich teilbar.** Eine Verteilungsfunktion $F(x)$ ist genau dann unendlich teilbar, wenn ihre **charakteristische Funktion** $f(t)$ eine der folgenden Darstellungen hat $\log f(t) = iat + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, \mathrm{d}H(u)$ (kanonische Darstellung nach Lévy und Chintschin) bzw. $\log f(t) = iat - \frac{\sigma^2}{2} \cdot t^2 + \int\limits_{\infty}^{-0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) + \int\limits_{+0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \mathrm{d}N(u)$ (kanonische Darstellung nach Lévy). Dabei sind a und σ reelle Zahlen, H ist eine monoton nicht fallende und beschränkte Funktion mit $H(-\infty) = 0$ und M und N sind in $(-\infty, 0)$ bzw. $(0, \infty)$ monoton nicht fallend mit $M(-\infty) = N(\infty) = 0$ und die Integrale $\int\limits_{-\epsilon}^{-0} u^2\, \mathrm{d}M(u)$ und $\int\limits_{+0}^{\epsilon} u^2\, \mathrm{d}N(u)$ existieren für jedes $\epsilon > 0$. Gnedenko: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie 1968; Jan **Kallsen: Levy-Prozesse anschaulich erklärt: Linearer Levy-Prozess = Prozesse mit stationären und unabhängigen Inkrementen**. Was ist stochastische Entsprechung der linearen Funktion? Konstante Funktion hat **überall keinen Zuwachs**. Lineare Funktionen stehen für **konstanten Zuwachs**, d.h. in gleich lange Intervallen $(s, s + \Delta t)$ und $(t, t + \Delta t)$ ist $X_{s+\Delta t} - X_s = X_{t+\Delta t} - X_t$. Mit Steigung b und X_0 ist $X_t = X_0 + bt$ bestimmt. Man nimmt nun nicht zufällige b, sondern meint mit konstantem Wachstum, dass die Inkremente $X_{s+\Delta t} - X_s, X_{t+\Delta t} - X_t \sim$ iid, also bei gleicher Schrittweite Δt stets aus gleicher Verteilung kommen und voneinander unabhängig gewählt werden. **Ableitung einer Zufallsfunktion** bedeutet, sich beim Inkrement auf eine schrittweitenabhängige Verteilung der Inkremente zu beziehen. Mittelwert und Varianz wachsen mit der Zeit: $E(X_t) = E(X_{\mathrm{d}t})\dfrac{t}{\mathrm{d}t} = N\, E(X_{\mathrm{d}t})$ und $Var(X_t) = Var(X_{\mathrm{d}t})\dfrac{t}{\mathrm{d}t} = N\, Var(X_{\mathrm{d}t})$. Für gauß'sche Zu-

wächse: $E(X_t) = 0$ und $Var(X_t) = N\sigma_{\mathrm{dt}}$. **Zeitstetige Lévy-Prozesse** eng verwandt mit dem Begriff der unendlichen Teilbarkeit: Ist nämlich $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Lévy-Prozess, so ist X_1 unendlich teilbar. Diese ist auch die Basis für die Integration stochastischer Dgls, siehe Seite 389. Andererseits legt eine unendlich teilbare Zufallsvariable X_1 bereits die Verteilung des gesamten Lévy-Prozesses $(X_t)_{t\geq 1}$ eindeutig fest. Jedem Lévy-Prozess entspricht also eine unendlich teilbare Verteilungsfunktion und umgekehrt. Wichtige Beispiele für zeitstetige Lévy-Prozesse sind der Wiener-Prozess (auch Brownsche Bewegung genannt), bei dem die unendlich teilbare Verteilung von X_1 eine Normalverteilung ist, oder der Poisson-Prozess, bei dem die X_1 poisson-verteilt ist. Doch auch viele andere Verteilungen, beispielsweise die Gammaverteilung oder die Cauchy-Verteilung, können zur Konstruktion von Lévy-Prozessen herangezogen werden. Neben dem deterministischen Prozess $X_t = \sigma t$ ist der Wiener-Prozess mit konstanter Drift und konstanter Volatilität der einzige stetige Lévy-Prozess, d. h. aus der Stetigkeit eines Lévy-Prozesses folgt schon die Normalverteilung seiner Zuwächse. **Normale Diffusion:** Positionssprung $\Delta x = x_t - x_{t-1}$ = Inkrement gauß-verteilt: $p(\Delta x) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta x^2}{2D\cdot\Delta t}\right)$. **Lévy-Flüge:** Anomale Superdiffusion = Sprunglängenverteilung endlastig. Varianz ∞, zentrale Grenzwertsatz gilt nicht mehr. **Sprunglängenverteilung Potenzgesetz** $p(\Delta x) \propto |\Delta x|^{-(1+2/\alpha)}, \alpha > 1, \quad$ für $\quad \Delta x \to \infty$ Es existiert jedoch beispielsweise kein Lévy-Prozess mit gleichverteilten Zuständen. Wichtig ist auch der Begriff der **endlichen und unendlichen Aktivität**: Gibt es in einem Intervall unendlich viele (und damit unendlich kleine) Sprünge oder nicht? Auskunft darüber gibt auch das **Lévy-Maß**. Bertoin: Lévy Processes 2002; http://www. mathematik. uni-ulm. de/stochastik/lehre/ss05/wt/ skript/node32. html

Eine Realisierung wertlos. Froemberg & Barkai: A no-go theorem for ergodicity and an Einstein relation arXiv:1306.2036 [cond-mat.stat-mech]. **Alterung** siehe Seite 193. Der Begriff Erfahrung kann an dieser Stelle formalisiert werden. **Guttmann: The Concept of Probability in Statistical Physics** 1999; Sadovskii: Statistical physics 2012;

Wiener: Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications 1949; Wiener: Nonlinear problems in random theory 1958;

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}A(\phi^n x_0) = \int_M A(x)d\mu, \quad x\in M, n\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T A(\phi_t x_0)dt = \int_M A(x)d\mu, \quad x\in M, t\in\mathbb{R}$$

mischend bedeutet rasches Durcheinander wie z.B. durch **Bäckertransformation** $f : [0,1] \to [0,1]$ mit Umklappen $x_{n+1} := f(x_n) := \begin{cases} 2x_n & \text{falls } x_n \in [0,1/2] \\ 2-2x_n & \text{falls } x_n \in (1/2,1] \end{cases}$ oder Durschneiden und Übernanderlegen mit $x_{n+1} := f(x_n) := \begin{cases} 2x_n & \text{falls } x_n \in [0,1/2] \\ 2x_n - 1 & \text{falls } x_n \in (1/2,1] \end{cases}$ oder für Teig von endlicher Dicke: $f : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ mit $(x_{n+1}, z_{n+1}) := f(x_n, z_n) := \begin{cases} (2x_n, \frac{z_n}{2}) & \text{falls } x_n \in [0,1/2] \\ (2-2x_n, 1-\frac{z_n}{2}) & \text{falls } x_n \in (1/2,1] \end{cases}$ oder Übernanderlegen mit $(x_{n+1}, z_{n+1}) := f(x_n, z_n) := \begin{cases} (2x_n, \frac{z_n}{2}) & \text{falls } x_n \in [0,1/2] \\ (2x_n - 1, \frac{1+z_n}{2}) & \text{falls } x_n \in (1/2,1] \end{cases}$. Worg: Deterministisches Chaos. Wege in die nichtlineare Dynamik 1993; Satija: The Butterfly in the Quantum World. The story of the most fascinating quantum fractal 2016; **Argyris, Faust, Haase: Die Erforschung des Chaos** 1994 p22 Deterministisches Chaos, auch durch den Butterfly-Effect bekannt, bezeichnet das Zufallsverhalten der dynamischen Variablen eines Systems, dem eine nichtlineare deterministische Dynamik zugrunde liegt. **Peitgen, Juegens, Saupe: Chaos. Bausteine der Ordnung** 1994; Bedeutet eine vernachlässigbare Kurzzeitabhängigkeit: Für zwei beliebige Mengen $A, B \subset \Omega$ gilt: $\lim_{t\to\infty}\mu(A\cap f^{-t}B) = \mu(A)\cdot\mu(B)$ oder für Gaußsche Prozesse: $\lim_{(t-s)\to\infty}\mathrm{cov}(X(t)X(s)) \to 0$. Notwendig für Annäherung an die stationäre Gleichgewichtsdichte! Thermodynamischer Grenzwert. Entropie im Gleichgewicht steht im Widerspruch zur Zustands-Wiederkehr bei Hamilton'schen Systemen nach Poincare (Wiederkehreinwand) oder Nietzsche: Wenn die Welt bereits

unendlich lange existiert, so muss alles schon mal dagewesen sein! Longitudinale Kette. Poincare'sche Wiederkehrzeit, siehe Federkette auf Seite 329. Greiner 2 p135ff; Rebhan: Mechanik. Wirkungs-Winkel-Variablen p299ff; Cantor: Stufen der Unendlichkeit. **Sexl: Was die Welt im innersten zusammenhält** 1982. Müller-Krumbhaar & Wagner: Was die Welt zusammenhält 2001; Gribbin: Auf der Suche nach Schrödingers Katze, p54; Statistische Deutung der Entropie-Idee. Reversibilität würde zur unwahrscheinlichen und nie beobachten Rückkehr zum Anfangszustand führen. Maxwell-Dämon oder spontane Entmischung. Molekulares Chaos. Bennett: Maxwells Dämon, SdW, Januar 1988, p48; Entropie als Verteilungsmaß oder als Anzahl möglicher Anordnungen, die den gleichen Eindruck erzeugen. Penrose: Zyklen der Zeit. **H.D. Zeh: Entropie** 2005;

Deutsch: Der Anfang der Unendlichkeit. Erklärungen, die die Welt verwandeln 2012, 2021 Constructor theory = physikalische Transformation ohne mentale Bilder wie Teilchen und Felder. Statt Trajektorie, Anfangsbedingung und dynamischem Gesetz $[x(t), x_o, \dot{x} = F(x)]$. Ohne Ensemblemittel zu Thermodynamik! Basis weiterhin Ergodentheorie. Heaven: Theory of everything says Universe is a transformer, New Scientist 6 November 2012, p22; Deutsch: Constructor Theory arXiv:1210.7439 Barbour: Shape Dynamics. An Introduction, In Finster ed: Quantum Field Theory and Gravity 2012 Swartz: A Neo-Humean Perspective. Laws as Regularities 1995; Deutsch & Marletto: Constructor theory of information 2014 https://arxiv.org/pdf/1405.5563.pdf; Marletto: Constructor Theory of Probability 2016 https://arxiv.org/pdf/1507.03 Merall: A Meta-Law to Rule Them All: Physicists Devise a "Theory of Everything SciAm

Brin & Stuck: Introduction to dynamical systems 2002 Kap1+4; **Ãrnold & Avez: Ergodic problems of classical mechanics** 1968; Sardnashvily: Handbook of integrable Hamiltonian systems 2015; Lichtenberg: Phase-space dynamics of particle 1969; Nur die Trajektorien mit irrationalem Frequenzverhältnis oder quasiperiodische Trajektorien liegen dicht auf dem Torus T^2 oder oder kommen jedem Punkt beliebig oft beliebig nahe. Allein für solche ist die **Übereinstimmung von Schar- und Zeitmittel** garantiert, was gemäß Koopmanismus elegant spektral gezeigt werden kann. Yoshida: Functional analysis 1966, 1980[6]; Rudin: Functional analysis 1974; Arnold: Random dynamical systems 1998; Reed & Simon: Methods of modern mathematical physics, Vol 1: Functional analysis 1972, 1981, Ergodentheorie zeigt Macht und Grenze der Hilbert-Raum-Methoden (adjungierte und **Projektionsoperator**en, idempotent, Matrizen mit die Eigenwerten allesamt 0 oder 1

$$P = P^2, \quad P = \mathbb{I} - \frac{|r><r|}{<r|r>} = \mathbb{I} - \frac{\vec{r}|\vec{r}}{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \mathbb{I} - \frac{\vec{r}\bigotimes\vec{r}}{\vec{r}\cdot\vec{r}}$$

Hall: Matrices and tensors 1963 p60 Projektionsoperator; Kern und Bereich eines Operators, siehe Grau: Aufgaben zur QM und Steeb: Problems in theoretical physics I & II 1990). **Nullter Hauptsatz**: Jedes beliebige System nähert sich einem Gleichgewichtszustand an! **Warum erreichen markroskopische Systeme ein Gleichgewicht?** Wo doch ein mikrokopisches System keinen stationären Zustand und folglich kein Gleichgewicht erreichen kann. Siehe **Landau & Lifschitz, Statistische Physik** Bd5 oder Storchi: Microscopic and macroscopic quantities in statistical mechanics, Il Nuovo Cimento 65B 1970 p239-265; Z̃wanzig: Nonequilibrium Statistical Mechanics 2001; Balakrishnan: Elements of Nonequilibrium Statistical Mechanics 2007; Klages: Microscopic Chaos, Fractals and Transport in Nonequilibrium Statistical Mechanics 2007; Die abstrakte Anwort fällt dünn aus. Siehe auch Seite 402. VII. Koopmanismus - spektrale Ergodentheorie: Nutze Hilbert-Raum-Methoden zur Beschreibung klassisch mechanischer Systeme! O.B. Koopman: Hamiltonian systems and transformations in Hilbert spaces, PNAS 17 1931 315-318. $\dot{y} = 1$ ist Bewegung auf Torus T^1 mit Umfang oder Umlauf-Periode $T_y = 1$ oder Sägezahn gemäß $y(t) = t + y_0$ mod 1 oder als Fourier-Reihe

$$y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k_y=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2\pi k\, t}{T_y}, \quad x(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k_x=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{2\pi k\, t - t_{x0}}{T_x}$$

letztere Reihe für die Bewegung auf Torus T^1 mit Umfang oder Umlauf-Periode $T_x = \frac{1}{\alpha}$ gemäß $x(t) = \alpha t + x_0$ mod 1 oder $\dot{x} = \alpha$. Kartesisches Produkt gibt Bewegung auf Torus $T^2 = S^1 \times S^1$. Eliminierung der Zeit $x(y) = [\alpha(y - y_0) + x_0]$ mod 1. Für $\alpha = \frac{p}{q}$ erkennt man, dass $x(y)$ die Periode q hat: $x(y + q) = x(y)$. Nun sei $f(x, y)$ messbare Funktion, eine Größe wie die Energie mit der Periode 1. Die Fourier-Reihen-Darstellung

des **Scharmittels** ist dann, weil ja für die Dichte $p(x) = p(y) = 1$ gilt,

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} e^{2\pi i(ny+my)}, \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi imx}\mathrm{d}x}_{\delta_{0m}} \underbrace{\int_0^1 e^{2\pi iny}\mathrm{d}y}_{\delta_{0n}} = c_{00}$$

Obige Fourier-Reihe von f konvergiert zu $f : T^2 \to \mathbb{R}$ im L^2. Siehe Brin & Stuck p78. Für das **Zeitmittel** gilt

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x(t), y(t))\mathrm{d}t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{mn} \int_{t_0}^{t_0+T} e^{2\pi i(n+m\alpha)t+mx_0+ny_0}\mathrm{d}t$$

mit

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{2\pi i(n+m\alpha)t+mx_0+ny_0)}\mathrm{d}t = \begin{cases} Te^{2\pi i(mx_0+ny_0)} & \text{für } m\alpha + n = 0 \\ \dfrac{e^{2\pi i(n+m\alpha)T} - 1}{2\pi i(n+m\alpha)} e^{2\pi i(n+m\alpha)t_0+mx_0+ny_0)} & \text{für } m\alpha + n \neq 0 \end{cases}$$

Im **quasiperiodischen** Fall, also $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **irrational**, ist $m\alpha + n = 0$ nur für $m = n = 0$ zu erfüllen. Es gibt für $T \to \infty$ nur den Koeffizienten c_{00}. Scharr- und Zeitmittel stimmen überein, weil das untere Integral mangels T im Nenner verschwindet. Für **rationale** $\alpha \in \mathbb{Q}$ gibt es jedoch weitere nichtverschwindende Terme für $m = qk$ und $n = -kp$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c_{00} \neq c_{00} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{kq,-kp} e^{2i\pi(qx_0-py_0)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x(t), y(t))\mathrm{d}t$$

Michael Reed & Barry Simon: Methods of modern mathematical physics, Vol 1: Functional analysis 1972, 1981, II. Ergodic theory: an introduction p54-66; Straumann: Klassische Mechanik 1987, p147-157, **Satz von Weyl:** Ebeling, Engel & Herzel: Selbstorganisation in der Zeit 1990 p25 Ausgangpunkt für die Beschreibung sind **Winkel-Wirkungs-Variable** siehe Seite 362. Für ein separables System mit f Freiheitsgraden ist die Bewegung periodisch. Jedes Variablenpaar (q_k, p_k) verhält sich wie im eindimensionalen Fall (Schwingung=Libration oder Rotation. Die kanonisch konjugierten Variablen sind dann die **Winkelvariable** ϑ_k und die die **Wirkungsvariable** I_k. Wirkung I_k und Frequenz ω_k von f freien harmonischen Oszillatoren haben die Hamiltonfunktion $H(I_1, \ldots, I_f) = \sum_{k=1}^{f} \omega_k I_k$. Die Winkelvariable ϑ_k ist also zyklische Variable. Die Bewegungsgleichungen sind $\dot{\vartheta} = \dfrac{\partial H}{\partial I_k}$ und $\dot{I}_k = -\dfrac{\partial H}{\partial \vartheta_k}$ p52f Ein Hamilton'sches System habe 2 Freiheitsgrade und sei integrabel, man hat also 2 globale Bewegungsintegrale I_1 und I_2. Dann kann man es auf Winkel und Wirkungsvariable transformieren und hat die Bewegungsgleichungen $\dot{\vartheta}_k = \omega_k = \text{const}$. Die Dynamik im ursprünglich 4-dimensionalen Phasenraum beschränkt sich so auf einen 2-dimensionalen Torus im Phasenraum, wobei die Bewegung auf die Torus durch die Frequenzen ω_1 und ω_2 charakterisiert wird. Besonders robust gegen Störungen ist ein System, wenn das Frequenzverhältnis eine 'gute' (= rationale Näherung $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{p}{q} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ = Goldener Schnitt, falls q und p eine Folge von **Fibonacci-Zahlen**) irrationale Zahl ist. p148f; Jetschke: Mathematik der Selbstorganisation. Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie 1989 und 2009 p104; Rebhan: Mechanik p301ff; Ãrnold & Avez: Mechanik; Arnold: Klassische Mechanik; **Peitgen, Jürgens & Saupe: Bausteine des Chaos. Fraktale** 1992 p195. **Manfred Schröder: Fraktale, Chaos, Selbstähnlichkeit** 1994; Schuster: Deterministic chaos 1987 185ff, p200ff; Calkin: Lagrangian and Hamiltonian mechanics p175ff; Budo: Klass Mech p231ff; Reineker: Mechanik p309ff Jackson: Perspectives of nonlinear dynamics Bd1 1989, Bd1 1990 p55; **Hasselblatt & Katok: A first course in dynamics** 2003, p208ff;

Dimension einer Punktmenge A. Kunick & Steeb: Chaos in dynamischen Systemen 1986; Stoop & Steeb: Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen. Verständnis durch Konzepte und Experimente 2006; Charakterisiere zerklüftete Punktmengen, Fraktale. Idee basiert auf der Frage: 1] Wieviel Boxen/Würfel $N_\epsilon(A)$ mit Durchmesser/Kantenlänge ϵ sind zur Überdeckung der Punktmenge A nötig? 2] Wie ändert sich diese Anzahl, wenn man zur Überdeckung immer kleinere Würfeldurchmesser ϵ wählt? Beobachtung: Je kleinere Boxen, um so Überdeckungselemente $N_\epsilon(A) \propto f\left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)$, also $N_\epsilon(A) = \left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)^{D_{\mathrm{Box}}} = \epsilon^{-D_{\mathrm{Box}}}$. Daher

$D_{\mathrm{B}ox}(A) = -\lim_{\epsilon\to 0}\dfrac{\log N_\epsilon(A)}{\log\epsilon}$. Diese Definition schließt an den vertraute Dimensionsbegriff an. Oder alternative Fragestellung: Wie wächst das Berandungsmaß (Umfang, Überdeckungs-Fläche oder -Volumen)? $L_\epsilon(A) \propto g\left(\dfrac{1}{\epsilon}\right)$, also $L_\epsilon(A) = N_\epsilon(A)\,\epsilon = \epsilon^{-D}$. Dimension ist dann $D(A) = -\lim_{\epsilon\to 0}\dfrac{\log L_\epsilon(A)}{\log\epsilon}$ oder wegen $N_\epsilon = \epsilon^{-D-1}$: $D(A)+1 = -\lim_{\epsilon\to 0}\dfrac{\log N_\epsilon(A)}{\log\epsilon} = D_{\mathrm{B}ox}(A)$. Eine „feinere“ Volumenmessung als durch die Boxdimension erhält man, wenn zur Überdeckung des der Punktmenge A nicht nur Würfel gleicher Kantenlänge genutzt werden, sondern auch andere Mengen mit einem maximalen Radius $r = \epsilon$. Ausgangspunkt für die **Hausdorffdimension** D_H ist das **Hausdorff-Maß**

$$m_H(A) = \lim_{r\to 0}\inf\sum_{i=1}^{N_H} r_i^d = \begin{cases} \infty & : \quad d < D_H(A) \\ 0 & : \quad d > D_H(A) \end{cases} \tag{22}$$

$N_H(r)$ ist die minimale zur Überdeckung notwendige Anzahl von Überdeckungselementen. Es gilt $D_H(A) \leq D_B(A)$. <u>Beispiel:</u> A sei eine Gerade $r(n) = \epsilon(n) = 2^{-n} \to N_H(A,n) = 2^n$

$$\lim_{n\to\infty}\inf\sum_{i=1}^{2^n}(2^{-n})^d = \lim_{n\to\infty}\inf 2^n 2^{-nd} = \lim_{n\to\infty}\inf 2^{n(1-d)} \to \begin{cases} \infty\ , \text{ falls} & d < 1 \\ 0\ , \text{ falls} & d > 1 \end{cases}$$

Die Hausdorffdimension ist in diesem Fall $D_H(A) = 1$. Dies ist ein Sonderfall, denn i.a. ist $D_H(A)$ nicht ganzzahlig. Im Fall einfacher Attraktoren (Fixpunkt, Grenzzyklus) stimmt die Hausdorffdimension aber mit der **topologischen Dimension** des Attraktors überein. **Induktive Dimension**: Idee, Rand einer n-dimensionalen Kugel ist $(n-1)$-dimensional. Da ein einpunktiger Raum, der sicher die Dimension 0 erhalten soll, einen leeren Rand hat, muss man die Dimension der leeren Menge als -1 festlegen. $\mathrm{ind}(\emptyset) := -1$ und $\mathrm{ind}(X) \leq n$, falls es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder offenen Umgebung U von x eine offene Umgebung V von x gibt mit $\overline{V} \subset U$ und $\mathrm{ind}(\partial V) \leq n-1$. Damit ist erklärt, was $\mathrm{ind}(X) \leq n$ bedeutet. Man definiert weiter: $\mathrm{ind}(X) = n$, falls $\mathrm{ind}(X) \leq n$ und nicht $\mathrm{ind}(X) \leq n-1$ und $\mathrm{ind}(X) = \infty$, falls für kein $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\mathrm{ind}(X) \leq n$ gilt. **Nagami: Dimension Theory** 1970;

Betrachtet werde eine optimal an ein System A angepasste Überdeckung β, wobei die Elemente B_i der Überdeckung aus disjunkten Teilmengen bestehen sollen.

$$\beta = \{B_i\}_{i=1}^M\,; \quad \bigcup_{i=1}^M A \subseteq B_i; \quad B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{falls} \quad i \neq j \tag{23}$$

Es sei r die maximale Kantenlänge der Boxen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Punkte in der Box B_i liegen, ist gegeben durch $p_i = p(B_i)$.

Korrelations-Dimension, Two-point correlation function

The two-point correlation function $z(r)$ is a simple measure of non-Poissonian statitics, Totsuji & Kihara 1969 PublAstronSocJapan21 p221; <u>P</u>eebles: The Large Scale Structure of the Universe 1980; Feigelson & Babu eds: Statistical Challenges in Modern Astronomy 1992 ;

Dekel & West: On percolation as acosmological test ApJ 288 (1985) 411-417; Mo et al. Typical scales in the distribution of galaxies and clusters of galaxies from unnormalized pair counts A&A 257 (1992) 1-10 O. Buryak & A. Doroshkewich, Nonlinear Correlation function as a measure of the structure of the universe, A&A 306 (1996) 1-8

The joint probability of finding two objects in the small volumes dV_1, dV_2 separeted by a distance r is given by $\mathrm{d}P = n^2(1 + z(r_1, r_2))dV_1 dV_2$ und $n(r) = \sum_{i=1}^N d(r - r_i)$ Paar-Korrelationsfunktion <u>S</u>toyan & Stoyan: Fraktale, Formen, Punktfelder. Methoden der Geometrie-Statistik 1992 p310 mit Epaneschnikov-Kern

$$e_h(t) = \frac{3}{4h}\left(1 - \frac{t^2}{h^2}\right), \qquad t \in [-h, h]$$

instantaneous two-point autocorrelation function:
$g(r) = F^{-1}(F(n(k))^* F(n(k)))/D^2$, D=particle density structure function: $S(k) = |F(n(k))|^2/D$. McCauley:

The Galaxy Distribution: Homogeneous, Fractal, or Neither?, Fractals6 1998 p109-119; n=mean number density of a field $z > 0$: clustered distribution $z = 0$: Poissonian (purely random distribution of points) $z < 0$: anti-clustered distribution **Index of clumping** David & Moore (1954) Ripley: Spatial Statistics 1981; Ripley: Statistical Inference for Spatial Processes 1988 ; **Venables & Ripley: Modern applied statistics with S**, New Castle; Webster & Oliver: Statistical Methods in Soil and Land Resource Survey 1990; Cressie: Statistics for spatial data 1993; R'enyi: Probability Theory 1970; Grassberger: Generalized Dimensions of Strange Attractors, PhysLettA 97 p227 1983; Die **Schätzung der fraktalen Dimension** miitels Korrelations-Dimension nach Grassberger und Procaccia durch Schätzung des Korrelationsintegrals $C(r,m) = \frac{1}{N^2}\sum_{i\neq j}\left(\Theta\left(r - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right)\right) = \frac{1}{N_{ref}N}\sum_{i=1}^{N_{ref}}\sum_{j=1(j\neq i)}^{N}\left(\Theta\left(r - |\vec{x}_i - \vec{x}_j|\right)\right)$ mit r Skalierungsradius, m Dimension des Raumes, N Anzahl der Punkte, der zu charakterisierenden Punktmenge. Betrachte $D_2(m) = -\lim_{r\to 0}\lim_{m\to\infty}\frac{d\log C(r,m)}{d\log r}$.

Kriging Krige. Mining industry 1965; Ripley: Spatial Statistics, p44; **Minimal Spanning Trees** MST J.D. Barrow, S.P. Bhavsar, D.H. Sonoda 1985 MN 216, 17-35; Schröder, Vetter, Fränzle eds: Neuere statistische Verfahren und Modellbildung in der Geoökologie 1994;

Statistik von Zufallsfeldern, H. Künsch Gibbs'sche Zufallsfelder (statistischen Mechanik, statistischen Analyse räumlumlicher Daten, Rekonstruktion verrauschter Bilder. Zufallsfelder auf dem reguläumlren Gitter Z^2. Schäumltzung des Potentials eines Gibbsfeldes aus einer Realisierung. Scale Similarity of Random Fields, E.A. Novikov, PRE 50 (1994) 3303-3305;

Mutual information/ Transinformation und Kullback-Leibler divergence oder Distanz $I(X;Y) = \int_Y\int_X p(x,y)\log\left(\frac{p(x,y)}{p(x)\,p(y)}\right)dx\,dy = I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) = H(X,Y) - H(X|Y) - H(Y|X) = \sum_y p(y)\sum_x p(x|y)\log_2\frac{p(x|y)}{p(x)} = \sum_y p(y)\ D_{\mathrm{KL}}(p(x|y)\|p(x)) = \mathbb{E}_Y\{D_{\mathrm{KL}}(p(x|y)\|p(x))\} = \sum_{i,j} p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{p_i p_j}$ Brillouin: Science and information theory 1956; Cover & Thomas: Elements in information theory, 2006;

Transfer-Entropie = bedingte Transinformation/mutual information. non-parametric statistic measuring the amount of directed (time-asymmetric) transfer of information between two random processes. Schreiber, Thomas (1 July 2000). Measuring Information Transfer. PRL85 (2): 461–464. Seth (2007). Granger causality. Scholarpedia. doi:10.4249/scholarpedia.1667. Hlaváčková-Schindler, Palus, VEJMELKA, Bhattacharya (1 March 2007). Causality detection based on information-theoretic approaches in time series analysis. Physics Reports. 441 (1): 1–46; Transfer entropy from a process X to another process Y is the amount of uncertainty reduced in future values of Y by knowing the past values of X given past values of Y. More specifically, if X_t and Y_t for $t \in \mathbb{N}$ denote two random processes and the amount of information is measured using Shannon's entropy, $T_{X\to Y} = H\left(Y_t \mid Y_{t-1:t-L}\right) - H\left(Y_t \mid Y_{t-1:t-L}, X_{t-1:t-L}\right)$. Bossomaier, Barnett, Harré & Lizier: An Introduction to Transfer Entropy Information Flow in Complex Systems 2016 Transfer Entropy Toolbox. Google Code., a toolbox, developed in C++ and MATLAB, for computation of transfer entropy between spike trains.

Informations-Entropie: $H(X) = E[I(X)] = E[-\ln(P(X))] = \sum_i P(x_i)\,I(x_i) = -\sum_i P(x_i)\log_b P(x_i) = -(\log p^p) = -<\log p>= -\sum_{i=1}^n p(x_i)\log_b p(x_i)$ **Selbst-Information:** $I(\omega_n) = \log\left(\frac{1}{P(\omega_n)}\right) = -\log(P(\omega_n))$. **Thermodynamische Entropyie:** $S = -k_B\sum p_i\ln p_i = -k_B\ \mathrm{Tr}(\rho\ln\rho)$. **Rényi–Entropie** q**–ter Ordnung:** $H_q\left(\beta(r)\right) = \frac{1}{1-q}\log\left(\sum p_i{}^q\right)$ $(q \to 1 \Rightarrow H_q \to H\ )$. Die **Rényi–Dimension** q**–ter Ordnung** $D_q = \lim_{r\to 0}\inf_{\beta(r)}\left(-\frac{H_q(\beta(r))}{\log r}\right)$. **Tsallis-Entropie** (Boltzmann-Gibbs für offene Systeme mit unvollständiger Statistik): $S_q = k\dfrac{1-\sum_i^W p_i}{1-q}$. **Replica-Trick** $\lim_{q\to 0}\dfrac{Z^q - 1}{q} = \ln Z$ führt für $q \to 0$ auf Shannon-Entropie: $S_q(p) = \dfrac{\sum_i^W p_i^q - \sum_i^W p_i}{1-q}$. Wahrscheinlichkeit dafür, das System im i-ten Mikrozustand anzutreffen, W Geamtzahl der Systemkonfigurationen, $q \in \mathbb{R}$ entropischer Index, der den Grad der Nichtadditivität (Nicht-Extensivität der Tsallis-Entropie) $S_q(A+B)/k = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)\,S_q(A)\,S_q(B)$, wobei A und B unabhängige Systeme sind, ausdrückt. $q = \dfrac{D_H(A)}{D_T(A)}$ steht in Beziehung zu vernachlässigter Wechselwirkung. $q = 1$, falls keine Wechselwirkungsvernachlässigung, also Boltzmann-Gibbs-Entropie. Gell-Mann & Tsallis:

Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications (Santa Fe Institute Studies on the Sciences of Complexity) 2004 about a student-t like distribution. Too much ado. There is no generalization of entropy (see the comment by Nauenberg and Balian in 2005 Europhysics News, e.g.) and no 'generalized thermostatistics. i In fact, there is nothing but a postulated distribution that (as do student-ts typically) has a Gaussian limit. So what? The claim of 'nonlinear Fokker-Planck' and 'nonlinear Markov processes' was quite easy to explode: There is no such thing as a 'nonlinear Markov process'. There is no such thing as a 'nonlinear Fokker-Planck equation' for a conditional probability. A conditional probability with initial state memory is nonMarkovian. A conditional probability with initial state memory is not guaranteed to obey a Chapman-Kolmogorov equation and usually doesn't. A Chapman-Kolmogorov equation is a necessary but not sufficient condition for a Markov process. A Fokker-Planck equation with memory of an initial state in its drift and/or diffusion coefficients does not generate a Markov process. A nonlinear diffusion equation does not define any stochastic process at all, in fact a diffusion equation for a 1-point density defines no stochastic process at all. A 1-point density cannot be used to identify/define a stochastic process, both scaling Markov processes and strongly nonMarkov processes like fractional Brownian motion have exactly the same 1-point density, with widely differing conditional densities. For detailed explanations see cond-mat/0701589 and references therein. It would be of interest to psychologists and sociologists to study and analyze how such 'movements', based on claims hanging in thin air, gain a multitude of followers and hangers-on, as this movement has. The literature over the last 10 years is riddled with wrong and empty papers on such stuff. Tsallis: Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World 2009 **Guttmann: The Concept of Probability in Statistical Physics** 1999; G̃reven, Keller & Warnecke: Entropy. Princeton Series in Applied Mathematics 2014;

Maße Kolmogorov führte die Idee der Entropie zur Definition geeigneter metrischer Invarianten ergodischer dynamischer Systeme (stochastische System, seltsame Attraktoren) ein. K(quasireguläre)-Systeme. **KS-Entropie q-ter Ordnung (fallend), K_0 topologische Entropie:**
$K_q = \lim_{\tau\to 0}\lim_{R\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\tau N}\frac{1}{1-q}\log\sum_{i_1,\ldots i_N} p^q_{(i_1,\ldots i_N)}$, τ Beobachtungszeitfenster, N Wortlänge=Anzahl verschiedenen Phasenraumzellen, die bei τ überdeckt werden. R Durchmesser der Phasenraumzelle. $K_1 = h(\mu)$ **metrische Entropie:** $h_\mu(f) = \sup_\beta h(\beta,\mu,f) = \sum^+ \lambda_i \geq K > K_2$ A.N. Kolmogorov, A new metric invariant of transitive dynamical systems, and Lebesgue space automorphisms, DoklAkadNaukSSSR119:5 1958 p861–864 oder Selected works of Kolmogorov T3: Information theory and the theory of algorithms, ed A.N. Shiryayev 1993 p57-61. Sinai hat die Definition dann in die heutige Form gebracht. Ya.G. Sinai, On the notion of entropy of dynamical systems DoklAkadNaukSSSR 124:4 1959 p768–771. Schätzung metrischer Entropie Fraser; Using MI to estimate metric entropy, In: Mayer-Kress: Dimensions and Entropies in Chaotic Systems 1986; Ebeling, Freund & Schweitzer: Komplexe Struturen. Entropie und Information 1998; **H.D. Zeh: Entropie** 2005; $h(\beta,\mu,f) = \lim_{w\to\infty} H_{w+1}(\beta,\mu,f) - H_w(\beta,\mu,f)$. K_2 **Korrelationsentropie:** $K_2 = \lim_{\tau\to 0}\lim_{R\to 0}\lim_{dim_E\to\infty}\log\frac{C_{dim_E}}{C_{dim_E+1}}$. **Sierpiński-Dreieck** = gerade Zahlen im Pascal-Dreieck den

Menge	m_L	D_T	D_H / D_B	m_H
$\mathbb{Q}$	0	0	0 / 1	∞
$\{1/i\}_{i=1}^{\infty}$	0	0	0 / 0.5	∞
Cantor-Menge	0	0	$\log 2/\log 3 = 0.63$	≤ 1
$\mathbb{R}$	1	1	1	1
Koch-Kurve	1	1	1.262	
Sierpiński-Dreieck	1	1	1.585	
Sierpiński-Teppich			1.893	
fraktales Schiefgewebe			2	
Menger-Schwamm			2.727	

Tabelle 2: Maße

Lücken im Sierpinski-Dreieck. **Peano-Kurve** siehe **Parchomenko: Was ist eine Kurve?** 1957; **Hairer & Wanner: Analysis in historischer Entwicklung** 2008 p314ff; Auch Cantormenge als überabzählbare Menge von Punkten hat Lebesgue-Maß Null, Arens p344; SdW Dez 1998; Wische bei jeder Iteration **offene Drittel weg**. In der n-ten Ieration bleiben 2^n Intervalle der Einzellänge $(1/3)^n$ oder der Gesamtlänge $(2/3)^n$ übrig. Cantormenge umfasst mehr als nur die Randpunkte der entfernten Intervalle; die Randpunkte sind genau die Zahlen in [0,1], welche sich mit einer 0-Periode oder mit einer 2-Periode schreiben lassen, zum Beispiel

Mathematische Schülerbücherei ist Fundus für Lehrer. Kufner: Raum und Entfernung 1981; Caratheodory: Variationsrechnung und PDEs 1935 p256f Euklidische Entfernung, Riemann'scher Raum; Gritzmann & Brandenberg: **Das Geheimnis des kürzesten Weges** 2003[2]; Löh, Krauss, Kilbertus: 'Quod erat knobelandum' 2016 = Knobelbuch = Von Algebra bis Schlussverfahren hält dieses Werk viele Knobelaufgaben für Jugendliche bereit. Beutelspacher: Wie man in eine Seifenblase schlüpft: Die Welt der Mathematik in 100 Experimenten 2015; Beutelspacher: Warum Kühe gern im Halbkreis grasen 2012; Albrecht Beutelspachers kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik 2011; **Meyberg & Vachenauer: Höhere Mathematik.** Bd1 Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. Bd2 Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analysis, Variationsrechnung; Barth: Mathematik-Unterricht. **Mathe ist ein Tun-Fach, kein Lernfach!** DdM18 1990 304-314; Beutelspacher: Wie man durch eine Postkarte steigt und andere spannende mathematische Experimente 2010; **Rechenmethoden der Physik, Mathe-Bücher: de Vries: Arithmetik und Algebra 2Bd, Geometrie 2Bd** 1954; **Haftendorn**: M verstehen; **Wohlgemuth**: M für Anfänger & Fortgeschrittene; **Storch & Wiebe: Lehrbuch der Mathematik für Mathematiker, Informatiker und Physiker**. Bd1 Analysis einer Veränderlichen, Bd2 Lin Algebra, Bd3 Analysis mehrerer Veränderlicher - Integrationstheorie, **topologische Grundbegriffe, Differenzialformen, Dgls, dyn Systeme, Maßtheorie, FT, Stochastik** 2010, Bd4 **Analysis auf Mannigfaltigkeiten - Funktionentheorie - Funktionalanalysis** 2011; **Goebbels & Ritter: Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation** 2011; **Papula**; **Arens**; Basieux: Die Architektur der Mathematik: Denken in Strukturen 2000[3]; Rieckers & Bräuer: Einladung zur Mathematik - Eine mathematische Einführung und Begleitung zum Studium der Physik und Informatik 2002[2]; Ebbinghaus et al.: Zahlen 1992[3]; **Nearing: Mathematical tools for physics** $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-ar} = 1/a$ gibt $\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-ar} = \frac{\partial a^{-1}}{\partial a}$, also $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, e^{-ar} = 1/a^2$ usw. 2010 e-book; **Dutailli: Mathematics for theoretical physics** 2012 arXiv e-book; Online Mathematics Textbooks: http://people. math. gatech. edu/~cain/textbooks/ onlinebooks. html; **Zahldarstellung:** $1/3 = 2{\cdot}3^{-2}+2{\cdot}3^{-3}+2{\cdot}3^{-4}+\cdots = 0{,}0\overline{2}_3 = 0{,}1_3$ **Zinsrechnung:** Zinsen $= Z = \frac{Kp}{100}t = \frac{Kp}{100}\begin{cases} t_{Jahr} & \text{Jahre} \\ \frac{t_M}{12} & \text{Monate} \\ \frac{t_d}{360} & \text{Tage} \end{cases}$. K Kapital = Guthaben, p Zinssatz. Zinszahl $N = \frac{Kt}{100}$, also $Z = pN$ **Geometrische Parzialsumme/Reihe:** $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. **Zinseszins:** Gesamtkapital nach n Jahren $K_n = K_0\, q^n$ bei Startkapital K_0 mit Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{100}$, thesaurierend. Geometrische Reihe, weil Summanden geometrische Folge darstellen: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ bedeutet $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$, bedeutet, dass jedes Folgenglied das geometrische Mittel seiner beiden Nachbarn ist. **Geometrisches Mittel bedeutet** a] Quadrat der Thaleskreishöhe $K^2 = ab$ ist Produkt der Durchmesserabschnitte a und b. b] Quadratur eines Rechtecks mit Seitenlängen a und b oder der Hyperwürfelkante eines n-dimensionalen Quaders $K = \sqrt[N]{\Pi_{n=1}^N a_n}$. c] Kantenlänge des flächengleichen Quadrats liegt näher an der Kleinseite. http://www.zinsen-berechnen. de/ zinsrechner.php http://www.foris. de/ prozessfinanzierung/ zinsen-berechnen.html http:// basiszinssatz. info/aktuell/ **72er-Regel oder 69er-regel** Kapitalverdopplung nach $t \approx \frac{72}{p}$ Jahren bei Prozentsatz p in %. Wegen $G_t = 2G_0 = G_0 q^t$, also

$0.69 = \ln 2 = t \ln q = t \ln(1 + \frac{p}{100}) \approx t\frac{p}{100}$, wegen Taylor 1. Ordnung.

Tonleiter: Schwingungszahlen von Grundton, siehe Seite 104 und Oktave stehen im Verhältnis 1:2. Zwischen Grundton und Oktave werden 11 Halbtöne so eingeschaltet, dass das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Schwingungszahlen konstant (logarithmische Skalenteilung auch pH-Wert: $\mathrm{pH} = -\log_{10}(\mathrm{a_H})$, wobei die Wasserstoffionen-Aktivität mit der Konzentration der Wasserstoffionen $[c_H]$ geht) ist. Fechner'sche Gesetze, Omori-Gesetz, Gutenberg-Richter. Wie lauten die Schwingungszahlen der Tonleiter, deren Grundton 440 Hz hat? $a_1 = 440$ Hz, a_2=880 Hz.

$$\frac{a_2}{a_1} = q^{12}, \quad q = 2^{\frac{1}{12}} = e^{\frac{\ln 2}{12}}$$

Erhardt-Ferron& Walter Bd1 p222.

Algorithmische Komplexität A: Grobkörnung gemäß $x_i \Rightarrow s_i$ mit $x_i \in \mathbb{Q}$ und $s_i \in \{1, 2, \ldots, L\}$

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i > k \quad \text{oder} \quad 1 \quad \text{falls } x_i > x_{i-1} \\ 0 & \text{sonst} \quad \text{oder} \quad 0 \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Hilberg: Mehrdimensionale Morse-Thue-Folgen PiuZ22 1991 H1 p24–28; **Prouhet-Thue-Morse-Folge** ist morphisches Wort aus 0 und 1, beginnt mit 0, gefolgt durch nicht 0, gefolgt vom Komplement der bisherigen Sequenz. 0, 01, 0110, 01101001, ... C='01'; N=5; for i in range(N): for k in range(len(C)-1,-1,-1): **C+=str((int (C[k])+i)%2)** Ist **Lindenmayer-System** mit Regeln $\{0 \to 01\}$ und $\{1 \to 10\}$. Komplexität einer Symbolkette = Anzahl von binären Informationseinheiten des kürzesten Computer-Programms für einen universellen Computer, der diese Kette regenerieren kann, Kolmogorov 1965. Um diese Definition operational zu gestalten, benutzten Lempel and Ziv 1976 On the Complexity of Finite Sequences, IEEE TransInformTheory22 p75-88;

```
initialisiere Mustertabelle mit (<leeres Muster>+zeichen) für alle Zeichen
     muster := <leeres Muster>
     solange noch Zeichen verfügbar
           zeichen := lies nächstes Zeichen
           wenn (muster+zeichen) in Mustertabelle dann
                 muster := (muster+zeichen)
           sonst
                 füge (muster+zeichen) zur Mustertabelle hinzu
                 Ausgabe muster
                 muster := zeichen
     wenn muster nicht <leeres Muster> dann
           Ausgabe muster
```

Beispiel zur Kompression: Ein Beispiel mit der Zeichenkette „LZWLZ78LZ77LZCLZMWLZAP“

```
Zeichenkette  gefundener Eintrag  Ausgabe  neuer Eintrag
LZWLZ78LZ77LZCLZMWLZAP  L  L  LZ (wird zu <256>)
ZWLZ78LZ77LZCLZMWLZAP  Z  Z  ZW (wird zu <257>)
WLZ78LZ77LZCLZMWLZAP  W  W  WL (wird zu <258>)
LZ78LZ77LZCLZMWLZAP  LZ (= <256>)  <256>  LZ7 (wird zu <259>)
78LZ77LZCLZMWLZAP  7  7  78 (wird zu <260>)
8LZ77LZCLZMWLZAP  8  8  8L (wird zu <261>)
LZ77LZCLZMWLZAP  LZ7 (= <259>)  <259>  LZ77 (wird zu <262>)
7LZCLZMWLZAP  7  7  7L (wird zu <263>)
LZCLZMWLZAP  LZ (= <256>)  <256>  LZC (wird zu <264>)
CLZMWLZAP  C  C  CL (wird zu <265>)
LZMWLZAP  LZ (= <256>)  <256>  LZM (wird zu <266>)
```

```
MWLZAP  M  M  MW (wird zu <267>)
WLZAP  WL (= <258>)  <258>  WLZ (wird zu <268>)
ZAP  Z  Z  ZA (wird zu <269>)
AP  A  A  AP (wird zu <270>)
P  P  P  -
```

Es entsteht also die Zeichenkette „L Z W <256> 7 8 <259> 7 <256> C <256> M <258> Z A P“ („Ausgabe“ von oben nach unten gelesen), die mit 16 anstatt ursprünglich 22 Zeichen dieselbe Information beinhaltet. In diesem Beispiel wurde somit eine Kompressionsrate von etwa 27 % erreicht.

Jedoch wird in der Praxis die komprimierte Zeichenkette mit 12 Bit (16 Zeichen * 12 Bit / 8 Bit = 24 Byte) pro Zeichen kodiert. In diesem Beispiel wurde demnach eine tatsächliche Kompressionsrate von etwa -9 % erreicht. Compression of Individual Sequences via Variable-Rate Coding IEEE TransInformTheory24 1978 p530-536, eine Prozedur, die auf nur zwei Operationen beruht: Kopieren und Einsetzen. Kaspar & Schuster 1987 Easily Calculable Measure for the Complexity of Spatiotemporal Patterns, PhysRevA36 p842-848; Schuster 1989 Information Content of Chaotic Signals, Physica Scripta40 p367-372; schlugen einen Algorithmus vor, der auf ein normiertes Maß $c(m)$ führt, das diese Art von Komplexität erfasst. Dieser **Algorithmus** arbeitet wie folgt: Der gegebene Symbolkette $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ wird rekursiv in Worte w_α zerlegt: $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_\mu\}$. Dabei werden die Worte w_α so gewählt, dass das erste Wort aus dem ersten Symbol der Kette besteht, $w_1 = s_1$, und $w_{\alpha+1}$ genau das kürzeste auf w_α folgende Wort ist, das nicht aus den benutzten Worten $w_1, w_2, \ldots w_\alpha$ oder deren Teilen aufgebaut werden kann. Die algorithmische Komplexität ist dann proportional zu der Anzahl μ, der Bestandteile der so zerlegten Kette. So wird z.B. die Symbolkette $\{S = 10100100010000\ldots\}$ in die Worte $\{(1)(0)(100)(1000)(10000)\ldots\}$ zerlegt. μ ist für den ersten Teil der Symbolsequenz gleich 5.
Im Fall weißen Rauschens wird dieses Maß für unendlich lange Symbolsequenzen maximal. Anzahl der Ersetzungen $C_L(S_N)$ gibt $A = \frac{C_L}{h_L}\frac{\log_L N}{N}$ mit $h_L = -\sum_{i=1}^{L} p_i \log_L\ p_i$. Beispiel: $S_\infty = 0\,0\,0\,0\ \cdots \rightarrow (\underline{0})(0\,0\,0\ \cdots) \Rightarrow C_1(S_\infty) = 1$. $S_\infty = 0\ 1\ 0\ 1\ \cdots \rightarrow (\underline{0})(\underline{1})(0\ 1\ \cdots) \Rightarrow C_2(S_\infty) = 2$.
$S_{16} = 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0 \Rightarrow S_{16} = (\underline{1})(1\underline{0})(10\underline{0})(11\underline{1})(101001\underline{0}) \Rightarrow C_2(S_{16}) = 5$

3 Aussagenlogik, Leibniz, Mengen, Cantor, Beweis, Zahlen

Mittelstaedt: Logig und Quantenlogik, PhysBl18 1962 p23-29; R.I.G. Hughes: Quantenlogik, SdW1981 H12; https://www. uni-muenster. de/Physik. TP/archive/fileadmin/lehre/teilchen/ss09/Quantenlogik.pdf Sputnik-Schock führte im Westen irrsinnigerweise zur Einführung der Mengenlehre in die Schule. **Tinhofer: Mathematik für Studienanfänger** 1977 im Vorwort: Was ist akademische Bildung. Asser: Einführung in die mathemtische Logik. Bd1=Aussagenkalkül = zusammengesetzte Aussagen daraufhin untersucht, aus welchen einfacheren Aussagen sie zusammengesetzt sind. Zum Beispiel besteht die Aussage „Es regnet oder die Erde ist eine Scheibe“ aus den beiden Aussagen „Es regnet“ und „Die Erde ist eine Scheibe.“ Diese beiden Aussagen lassen sich ihrerseits nicht in weitere Teilaussagen zerlegen – sie werden deshalb atomar oder elementar genannt. In der Prädikatenlogik werden atomare Aussagen hinsichtlich ihrer inneren Struktur untersucht. Bd2=Prädikatenkalkül der ersten Stufe = zentrales Konzept der Prädikatenlogik ist das Prädikat. Ein Prädikat ist eine Folge von Wörtern mit Leerstellen, die zu einer wahren oder falschen Aussage wird, wenn in jede Leerstelle ein Eigenname eingesetzt wird. Zum Beispiel ist die Wortfolge '... ist ein Mensch' ein Prädikat, weil durch Einsetzen eines Eigennamens - etwa „Sokrates“ - ein Aussagesatz, zum Beispiel „Sokrates ist ein Mensch“, entsteht. Die Aussage „Die Erde ist eine Scheibe“ lässt sich prädikatenlogisch in den Eigennamen „die Erde“ und das Prädikat „... ist eine Scheibe“ zerlegen. Anhand der Definition und der Beispiele wird klar, dass der Begriff „Prädikat“ in der Logik, speziell in der Prädikatenlogik, nicht dieselbe Bedeutung hat wie in der traditionellen Grammatik, auch wenn historisch und philosophisch ein Zusammenhang besteht. Statt eines Eigennamens kann in das Prädikat auch eine Variable eingesetzt werden, wodurch das Prädikat zu einer Satzfunktion wird: $\varphi(x) =$„'x ist ein Mensch' ist eine Funktion, die in der klassischen Prädikatenlogik für die Eigennamen derjenigen Individuen, die Menschen sind, den Wahrheitswert wahr ausgibt und für alle

anderen den Wahrheitswert falsch. Das zweite charakteristische Konzept der Prädikatenlogik ist der Quantor. Quantoren geben an, von wie vielen Individuen des Diskursuniversums eine Satzfunktion erfüllt wird. Ein Quantor bindet die Variable einer Satzfunktion, so dass wieder ein Satz entsteht. Der Allquantor sagt aus, dass ein Prädikat auf alle Individuen zutreffen soll. Der Existenzquantor besagt, dass ein Prädikat auf mindestens ein Individuum zutrifft. Die Quantoren ermöglichen Aussagen wie „Alle Menschen sind sterblich“ oder „Es gibt mindestens einen rosa Elefanten“. Gelegentlich werden zusätzlich numerische Quantoren verwendet, mit denen ausgesagt werden kann, dass ein Prädikat auf eine bestimmte Anzahl von Individuen zutrifft. Diese sind jedoch nicht unbedingt nötig, denn sie lassen sich auf den All- und den Existenzquantor sowie auf das Identitätsprädikat zurückführen. 1972; Mathebücher für Schüler: **Kolosow: Kreuz und quer durch die Mathematik** 1963 hierin wird erklärt, was Mathematik ist. Physik begnügt sich mit unvollständiger Induktion, Mathematik aber nicht; **All-Quantor,** Universalquantor, Universalquantifikator, Generalisator $\forall_x$ oder $\bigwedge_x$ = Für alle/jedes x gilt. **Existenzquantor,** Existenzialquantifikator, Partikularisator, Einsquantor, Manchquantor $\exists_x$ oder $\bigvee_x$ Für (mindestens) ein/einige/manche x gilt; Es existiert/gibt ein x, für das gilt. $\exists_x$ = es gibt ein x. $\exists_x!$ = es gibt höchstens ein x. $\exists_x!!$ = es gibt genau ein x. Klaua: Elementare Axiome der Mengenlehre 1971 p31; Spalt: Die Vernunft im Cauchy-Mythos. Synthetischer Aufbau der Analysis 1996; **Deitmar: Analysis** Kap1 2014 Wenn Mond aus Käse, so 9 prim, ist wahr Aussage, da $A \to B$ wahr, wenn B wahr oder A falsch. Beachte den irreführenden **wenn . . . dann**-Gebrauch! **Logisch** und **kausal** sind verschiedenene Bedeutungsebenen. Das **Modell der zweiwertigen Aussagenlogik** unterscheidet nicht die Aussagen 'U wurde krank und der Arzt verschrieb ihm ein Medikament' und 'Der Arzt verschrieb ihm ein Medikament und U wurde krank.' Mehrwertige Aussagenlogik von J. von Neumann, SdW 1980; Müller: Mehrwertige Logik und Quantenphysik, PhysBl10 1954 151-157; **H.D. Zeh: Entropie** 2005, p51; Spencer-Brown: Gesetze der Form; Schönwälder-Kuntze, Wille & Hölscher: George Spencer-Brown. Eine Einführung in die „Laws of Form“ e-book; **Amann & Escher: Analysis 1-3**, 2006[3]; Burkhardt: Algebraische Analysis 1908[2]; Landau: Grundlagen der Analysis 1930 KZ Zimmer mit Balkon nach Süden; **Arens** p15: **Aussagenlogik** seit kurz nach 1900 Grundpfeiler der Mathematik: In Mathe - ganz im Gegensatz zur Alltagssprache - müssen alle Formulierungen eine klare, scharf definierte Bedeutung haben. Absichtliche oder unabsichtliche ist unzulässig. Jedes Wort zählt! Man kann sich nicht mehr rausreden. **Aussage** ist feststellender Satz, dem eindeutig einer der beiden **Wahrheitswerte** `wahr` oder `falsch` zugeordnet werden kann. Wohlgemuth: Math für Anfänger;
Aussage S - S für Satz - wird bewertet durch Funktion f gemäß

$$f(S) = \begin{cases} 1 & \text{oder wahr oder w} \quad \text{falls } S \quad \text{wahre Aussage} \\ 0 & \text{oder falsch oder f} \quad \text{falls } S \quad \text{falsche Aussage} \end{cases}$$

Friedmann: Die Welt als Raum und Zeit 1923, 2014[4] p8 Menschmerkmal: Frau = 0, Mann = 1, ergab schon 1923 Gender-Ärger; **Aussagen** sind $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oder 'Für alle $\mathbb{R}$ gilt $|\sin x| \leq 1$' oder 'der Himmel ist blau'. **Keine Aussagen** sind Fragen, Befehle, Satzfragmente. Mittels Aussagen verknüpfenden **Junktoren**/Bindewörter kommt man zu neuen Aussagen: **Negation**/Nicht $\neg A$, $\bar{A}$, $\sim A$ **Konjuktion**/And/Und/Reihenschaltung $\wedge$, **Disjunktion**/Oder/Parallelschaltung/vel $\vee$, kontraintuitive **Implikation**/Subjunktion oder **seq**-Funktion $\Rightarrow$ oder **Hufeisen** $\supset$ bedeutet 'wenn A, dann B', 'A folgt B', **nur wahr falls A und B wahr oder wenn A falsch** ist. **Aus was Wahrem soll nicht Falsches folgen. Aus Falschem kann alles folgen!** Wohlgemuth, Mathematisch für Anfänger, p28. Also wenn A wahr, so gilt auch B. Ist nur falsch, wenn A wahr und B falsch. Ist aber A von vornherein falsch, so ist B immer wahr. Sei A='m gerade', B='$m \cdot n$ gerade'. Untersuche Aussage $A \Rightarrow B$ für alle $\mathbb{N}$. Vier Fälle! Wenn A wahr, so ist B wahr. Aber wenn A falsch, so hat B zwei Möglichkeiten. Es gilt das Prinzip **ex falso quodlibet - aus Falschem folgt Beliebiges**. Mit einer einzigen falschen Grundannahme kann man jede beliebige Aussage beweisen. Jounalist zu Russel oder Whithead: **Beweis** doch 'Aus 1+1=3 folgt, dass du Papst bist'. Konter: 'Nun aus 1+1=3 folgt 1=2 bzw. 2=1. Der Papst und ich sind 2, wir sind eins, demnach bin ich der Papst.'
$A \Rightarrow B$ A ist **hinreichende Bedingung** für B, B ist **notwendige** Bedingung für A. $A = f(x)$ hat Exremum bei x_0, $B = f'(x_0) = 0$ oder $A = f$ differenzierbar, $B = f$ stetig. **Thiele: Mathematische Beweise** 1980[2]; **Lang & Pucker**: Mathematische Methoden in der Physik, Schluss von

Anhang A, p588; Carnap: Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften; Semantik; Logische Syntax der Sprache; Jaspers: Philosophie. Bd1 Philosophische Wertorientierung. Bd2 Existenzerhelung. Bd3 Metaphysik 1932; Jaspers: Einführung in die Philosophie 1950; Adorno: Jargon und Eigentlichkeit 1965; Gaarder: Sofies Welt. Roman über die Geschichte der Philosophie 1991; Eilenberger: Zeit der Zauberer. Das große Jahrzehnt der Philosophie 1919 - 1929, 2019; Carnap: Mein Weg in die Philosophie 1963; Carnap: Meaning and necessity. A study in semantics and modal logic 1947, 1956; Hacking: Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften 1995; Esfeld: Einführung in die Naturphilosophie 2011; Philosophie der Physik 2012; Drieschner: Einführung in die Naturpilosophie 1981 = PhysBl38 1982 H3 p77; Gruber: Was ist Bedeutung? Eine Naturphilosophie der Subjektivität 2007; **Meschkowski: Math verständlich dargestellt** p167; A Schnee ist weiß. B Erde ist Scheibe. C 1+9=13. D ggT(18,12)=6 **Mechanische, elektromechanische und**

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \setminus B$	$A \dot{\vee} B$
w	w	f	f	w	w	w	w	f	f
w	f	f	w	f	w	f	f	w	w
f	w	w	f	f	w	w	f	f	w
f	f	w	w	f	f	w	w	f	f

elektronische Realisierungen logischer Verknüpfungen Töpfer & Rudert: Einführung in die Automatisierungstechnik 1976 p54; **Jean Améry:** Man muss **Heimat** haben, um sie nicht nötig zu haben, so wie man im Denken das Feld formaler **Logik** besitzen muss, um darüber hinauszuschreiten in fruchtbare Gebiete des Geistes. **Tautologien: „Kräht der Hahn auf dem Mist**, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.“ bedeutet die stets wahre Aussage $(A \Rrightarrow B) \vee (A \Rrightarrow \neg B)$ oder $A \Rrightarrow (B \vee \neg B)$ oder Wenn A nicht gilt, dann folgt B, wenn A gilt: $A \to (\neg A \to B)$ oder $\neg A \to (A \to B)$ oder $(\neg A \to \neg B) \to (A \to B)$ oder $(\neg A \to B) \vee (A \to B)$.
Tautologien sind stets wahr: $a \vee \neg a$, $a \longmapsto b \iff \neg b \longmapsto \neg a$, $(a \wedge b) \longmapsto c \iff a \longmapsto (b \longmapsto c)$ $b \longmapsto (\neg b \longmapsto a)$. **Verbale Tautologien:** Etwas ist wahr oder falsch. Wenn a hinreichend für b ist, gilt stets, das nicht b hinreichend für nicht a ist. Wenn a und b hinreichend für c ist, ist a hinreichend für die Folgerung c aus b. Ein Schluss von einer Tautologie ist immer richtig.

Zu w/f gelangt man durch Interpretation von Zeichenketten. Sei M Menge. Interpretation: Terme 1: Variable und Konstante bekommen Werte aus M. Terme 2: Funktionen +, *, < werden auf M interpretiert. **Metasprachliches Konzept:** Modus ponens MP Schlussfigur, als Schlussregel verwendet . Der Modus ponens erlaubt es, aus zwei Aussagen der Form Wenn A, dann B und A (den beiden Prämissen der Schlussfigur) eine Aussage der Form B (die Konklusion der Schlussfigur) herzuleiten. Der vollständige lateinische Name, Modus ponendo ponens, 'Schlussfigur (modus), die durch das Setzen (ponendo) einer Aussage eine andere Aussage setzt (ponens)', lässt sich so erklären, dass bei gegebener erster Prämisse, 'Wenn A, dann B', durch das 'Setzen' (Annehmen) der zweiten Prämisse, A, der aus beiden folgende Satz B 'gesetzt' (hergeleitet) wird. Aus den Prämissen $A \to B$ und A folgt die Conclusio B. **Objektsprachlicher Ausdruck:** wäre $(A \wedge (A \to B)) \to B$ oder $\neg B \wedge (\neg B \to \neg A) \Rightarrow \neg A$. Chaitins Zufallszahl der Weisheit Ω. Calude: Randomness And Complexity. From Leibniz To Chaitin 2007; Gardner: SdW 1980 H1; http://www.joergresag.privat.t-online.de/mybk3htm/chap34.htm **Informatik. Schülerbuch 12. Klasse.** Ausgabe für Bayern: Formale Sprachen, Kommunikation und Synchronisation von Prozessen, Funktionsweise eines Rechners, Grenzen der Berechenbarkeit; Geroch: Perspectives in Computation 2015; Hotz, Walter & Claus: **Automatentheorie und formale Sprachen**. 1. Turingmaschinen und rekursive Funktionen 1968, 2. Endliche Automaten 1969, 3. Formale Sprachen 1984; Bucher & Maurer: Theoretische Grundlagen der Programmiersprachen. Automaten und Sprachen 1984; Hromkovic: Berechenbarkeit 2001; Resag: Die Grenzen der Berechenbarkeit. Unvollständigkeit und Zufall in der Mathematik 2008 Die Komplexität einer Zahl = Bitlänge des kürzesten Programms, das die Zahl ausgibt, wobei wir zuvor eine Programmiersprache, Compiler und Computer festlegen müssen. **Zufallszahl** = Zahl, deren Komplexität ungefähr ihrer Bitlänge entspricht. Bei Zahlen mit endlichem Binärstring ist diese Definition etwas unscharf, denn man muss sagen, um wieviel die Komplexität der Zahl unterhalb ihrer Bitlänge liegen darf, damit sie noch

zufällig genannt werden soll. Bei Zahlen mit unendlichem Binärstring dagegen ist die Definition präzise. Normalerweise sind Zahlen, die in der Mathematik eine Rolle spielen, keine Zufallszahlen. Aus ihre mathematischen Definition kann man in den meisten Fällen eine Vorschrift zur Berechnung der Zahl ableiten, so dass man ein Programm schreiben kann, das die ersten n Binärstellen der Zahl berechnen kann und das dabei eine Länge deutlich unterhalb von n aufweist: π oder Eulersche Zahl $e = 2.7182818285..$. Nichtberechenbare Größen, die sich mathematisch durchaus definieren lassen: Die Komplexität einer Zahl. Eine mathematische Definition muss also nicht unbedingt eine Rechenvorschrift beinhalten. Es gibt mathematisch definierbare relle Zahlen, die nicht nur nicht-berechenbar sind, sondern die sogar Zufallszahlen sind = also nicht komprimierbar sind. T. Tao: Structure and randomness. Pages from year one of a mathematical blog 2008; Gregory **Chaitin: Randomness in Arithmetic and the Decline & Fall of Reductionism in Pure Mathematics** http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/unm.html. **Chaitin: Paradoxes of Randomness** http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/Summer.html. Berechenbare Zahlen. Calude: Randomness And Complexity. From Leibniz To Chaitin 2007; Tarski 1936: Unterscheide wahr, richtig von beweisbar. Gödel: Leider kann das Wahre nicht immer bewiesen werden. Gödel: Wifo 10/1978 p399; Palle Yourgrau: Gödel, Einstein und die Folgen. Nach Gödel wird **Leibniz** absichtlich geheim gehalten. Aber Leibniz 1697 an Jacob Bernoulli: **Ich habe Unzähliges über Unzähliges geschrieben, aber nur Weniges über Weniges veröffentlicht.** Nur seine **Studien zur Theodizee = Rechtfertigung Gottes über die Güte Gottes, die Freiheit des Menschen und den Ursprung des Übels** sind 1710 herausgekommen. Hierin auch Begründung des Variationsprinzips. **Voltaire** hat diese in sich widerspruchsfreie Leibniz'sche rationale Ethik falsch verstanden, was seine satirische Candide 1776 beweist. Leibniz setzt voraus, dass der Mensch sich frei zwischen verschiedenen Handlungsmöglichkeiten entscheiden kann. Menschliche Freiheit besteht im vernünftigen Handeln. Dazu muss er aber das Gute auch kennen. Verbesserte Erkenntnisfähigkeit führt zu moralischem Handeln. Übel sind nicht als Mängel, sondern in der Welt der Geister und Monaden als Möglichkeit zur Vervollkommnung zu betrachten. In moralischer Hinsicht bedeutet danach Vollkommenheit der Welt gerade diese Möglichkeit. Die Metaphysischen Abhandlungen von 1686, Neue Studien über den menschlichen Verstand von 1704 und die Monadologie von 1714 erschienen erst 1846, 1765 und 1840. **Monade** = Prinzip der Individualität, wonach jedes Seiende Qualitäten hat, die sich mit oder gar aus den Eigenschaften des Körperseins (Ausdehnung, Gestalt, Größe, Bewegung) **nicht erklären lassen**. In seiner **Monadologie** beantwortet Leibniz die Frage, wie Seele und Leib in Einklang zu bringen sind. Monistische Substanztheorie, die sich gegen Descartes dualistisches Weltbild mit Denken und Ausdehnung wendet. Das Nichtmaterielle jedes Lebewesens ist einfache Substanz, Monade oder Kraftzentrum, dem jeweils eine materieller Körper zugeordnet ist. Intelligible Welt der Substanzen die nach Vervollkommnung streben ist durch Zwecke geregelt, während die sichtbare Welt der Körper durch Kausalität geregelt wird. Harmonie zwischen beiden durch Synchronisation. Über 15000 Briefe und 50000 Abhandlungen auf 200000 Blättern in sieben Sprachen werden einst über 100 Bände füllen. SdW 8 (2011) p48-57. www.leibniz-edition.de http://ritter.bbaw.de http://leibnizviii.bbaw.de

Axiom = Aussage, der unbewiesen der Wahrheitswert 'wahr' zugeordnet wird. Schmincke in Wüst Bd1 p550: Unbegündete Aussage braucht nicht wahr zu sein. **Beweis** = Anwendung von Schlussregeln auf Axiome oder andere als wahr angesehene Aussagen, um die Wahrheit einer in Frage stehenden Aussage darzutun. Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik 1981 p150-154; **Definition** Festlegung der Bedeutung eines Wortes oder einer Wendung: $:\Leftrightarrow$ = definitorische Äquivalenz = möge dasselbe bedeuten wie. **Prädikatabkürzung:** verh (x, y) $:\Leftrightarrow$ 'x ist mit y verheiratet', wobei die Zeichengruppe verh **Initialsymbol** oder **Präfix** der **Prädikatabkürzung** heißt. **Trivial** = unmittelbar einzusehen. **Widerspruch** = Aussage der Form '$A \wedge \neg A$', hat stets den Wahrheitswert 'falsch'. **Beweis durch vollständige Induktion:** Induktionsanfang $H(1)$, Induktionsvoraussetzung $H(n)$, Induktionsbehauptung $H(n+1)$, Induktionsschritt = Beweis $H(n) \Rightarrow H(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left[H(1) \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}^*} \left(H(n) \Rightarrow H(n+1)\right)\right] \Rightarrow \forall_n H(n)$$

Wie ist Physik überhaupt möglich? Wie erklären wir, dass wir mit der Physik prophezeien können? Sigwart: Logik Bd1 1873-78, Bd2 1895 Vollständige Induktion stammt von Francis Bacon, John Stuart Mill, David Hume; Ayer: The foundations of empirical knowledge 1940; Jaakko Hintikka: Knowledge and Belief. An

Introduction to the Logic of the Two Notions 1962 entwickelte Formalsprache in der epistemischen Logik, entwickelte logische Hintergründe von Wissens- und Glaubensaussagen, um sie genauer zu definieren; Golowina & Jaglom: Vollständige Induktion in der Geometrie 1973; Sieroka: Philosophie der Physik 2014; David Hume: Daraus, dass bisher jeden Tag die Sonne aufgegangen ist, folgt nicht logisch, dass sie nochmals aufgehen wird. Es folgt nur, wenn ich auch noch das Prinzip voraussetze, dass, was in der Vergangenheit geschehen ist, unter gleichen Umständen in der Zukunft wieder geschehen wird. ... Von der Vergangenheit zur Zukunft führt, so folgert Hume, nur die Brücke eines Glaubens (belief), den wir uns durch Gewöhnung (custom) erworben haben. ... Die methodologische Regel, dass auf frühere Erfahrung gegründete Gesetze auch in Zukunft gültig oder wahrscheinlich zukunftsgültig sind, ist als **Induktionsprinzip** bekannt. d'Alembert: Geh voran, und der Glaube kommt zu dir. = **Geh voran, und man wird dir glauben.** Allez en avant et la foi vous viendra. **Glauben** = Wenn man nichts weiß und trotzdem ganz sicher ist.

Thiele: Mathematische Beweise

1980[2]; Aigner & Ziegler: Das BUCH der Beweise 2009[3]; Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik 1981 p150-154; Havil: Verblüfft? Mathematische Beweise unglaublicher Ideen 2012; Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Großfamilie mit sechs Mitgliedern zwei Geburtstage in eine Woche fallen? GetDigital: $a = b \to a^2 = ab \to 2a^2 = a^2 + ab \to 2a^2 - 2ab = a^2 - ab \to 2a(a-b) = a(a-b) \to 2 = 1$. Bei **Nullteiler-Freiheit** ginge das. Arens p24. Wohlgemuth: Mathematisch für Anfänger; **Gödel: Wenn man etwas zu sagen hat, sollte man einen Beweis haben. Es ist zu viel Meinung in der Welt.** Beweistechniken: direkt, indirekt, mittels Widerspruch. Sei $A : (a, b \in \mathbb{R}^+, a^2 < b^2)$ und $B : a < b$. Bewiesen wird nun $A \to B$ oder äquivalent $(\neg B) \to (\neg A)$.
Direkt: $(a^2 < b^2) \to (0 < (b^2 - a^2)) \to (0 < (b-a)(b+a)) \to (0 < (b-a)) \to (b > a)$ qed.
Indirekt: $(a \geq b) \to ((a^2 \geq a\,b) \wedge (a\,b \geq b^2)) \to (a^2 \geq b^2)$ ist genau $\neg A$. Wenn $a < b$ nicht gilt, dann kann auch $a^2 < b^2$ nicht gelten. QED.
Widerspruch, $(\neg B) \wedge A$ ist falsch: Zeige, dass die gleichzeitige Annahme A wahr und $\neg B$ wahr - also $a^2 < b^2$ und $b \leq a$ - zum Widerspruch führen. Wegen $(b \leq a) \to (a\,b \leq a^2 < b^2)$ und $(b \leq a) \to (b^2 \leq a\,b)$ folgt $a\,b \leq a^2 < b^2 \leq a\,b$, also $a\,b < a\,b$, was nicht sein kann - qed.
Äquivalenz der Beweise: $[A \Rightarrow B] \Leftrightarrow [(\neg B) \to (\neg A)] \Leftrightarrow \neg[(\neg B) \wedge A] \Leftrightarrow [\neg A \vee B]$

Für **Intuitionisten** wie Brouwer und Kolmogorow gilt nicht $\neg\neg A = A$. Es gilt allein der **direkte Beweis!** SdW Nov 2012 p82 **Aufgabenlogik statt Aussagelogik**

Zuordnungen oder **Relationen** können in zwei Richtungen **eindeutig oder mehrdeutig** sein. **Rechtseindeutige Zuordnungen** nennt man **Abbildungen oder Funktionen** = kein Element der „ linken Seite" hat mehr als einen zugewiesenen Partner auf der „rechten Seite", der „rechte Partner" eines Elements ist also eindeutig bestimmt. Grundlegende Konstruktion, aus gegebenen Mengen eine neue Menge zu erzeugen: **Kartesisches Produktes** = Mengenprodukt oder Kreuzprodukt = Menge aller geordneten Paare von Elementen der beiden Mengen. $A = \{x, y, z\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$ gibt Produktmenge, Kreuzmenge oder Verbindungsmenge $A \times B = (x, 1), \ldots, (z, 3)$ mit $\#A \cdot \#B$ Elementen übersichtlich als Matrix notierbar. **Reelle Zahlenebene:** $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Funktionen als Teilmenge davon umfasst nur $\#A$ Elemente! Eine Teilmenge f des **kartesischen Produktes** $D \times W$ zweier beliebiger Mengen D, W heißt eine **Funktion aus D in W**, wenn aus $(x, y_1), (x, y_2) \in f$ stets $y_1 = y_2$ folgt. Sprengel & Wilhelm: Funktionen und Funktionalgleichungen 1983; **Abbildung** f aus einer Menge/**Definitionsmenge** $A = D(f)$ in eine Menge/**Wertmenge** $B = W(f)$ ist Vorschrift, die jedem $a \in A$ genau ein Element/**Bild**element $b = f(a)$ aus $f(A) \subseteq B$ zuordnet. **Koerzitive Funktion** = falls die Funktionswerte gegen positiv unendlich streben, wenn die Eingabewerte gegen unendlich streben. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine **reellwertige** Funktion auf X. Die Funktion f heißt koerzitiv, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$. Motivation: Im Allgemeinen nehmen stetige Funktionen auf nicht-kompakten Mengen kein Minimum oder Maximum an, zB realisiert $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$ das Maximum und das Minimum nicht, nach unten und nach oben unbeschränkt und nicht koerzitiv. Aber $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$ koerzitiv und nimmt das Minimum $(0 = g(0))$ an. Folgender Satz macht klar, unter welchen Bedingungen eine koerzitive Funktion ihr Minimum tatsächlich annimmt: Sei X ein reflexiver Banachraum und $f : X \to \mathbb{R}$ erfülle wenigstens eine der folgenden Bedingungen: i] f ist schwach halbstetig von unten und koerzitiv. ii] f ist stetig, konvex und

koerzitiv. Dann nimmt f das Minimum an. **Erweiterung auf Sesquilinearformen:** Eine komplexwertige Sesquilinearform $B : X \times X \to \mathbb{C}$ wird als koerzitiv bezeichnet, falls die Funktion $x \mapsto B(x,x)$ reellwertig und koerzitiv ist. Anwendung beim Lemma von Lax-Milgram. Der Begriff darf nicht mit der Koerzitivfeldstärke verwechselt werden. Werner: Funktionalanalysis 2005; **Verkettung** von $f_1 : A \to B$ und $f_2 : B \to C$ ist $(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$. $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ vermöge $n \mapsto \frac{1}{n}$ und $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ vermöge $x \mapsto \sqrt{x}$ gibt $f_2 \circ f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ vermöge $n \mapsto \sqrt{\frac{1}{n}}$. **Funktionen** sind auf Zahlen spezialisierte Abbildungen, die gemäß einer Vorschrift f einer Zahl x aus dem Definitionsbereich **genau eine** Zahl $f(x)$ des Wertebereichs zuordnet. Jede Zahl auf sich selbst per **Identitätsfunktion** $f(x) = \mathrm{id}(x) = x$. **Mehrdeutige Funktionen** $\pm\sqrt{2}$ oder Archimedische Spirale sind **schwarze Schwäne oder weiße Schimmel**.

Jänich Bd1; **Injektiv** = Jedes Element im **Bildbereich kommt höchstens einmal** dran. Idee hat Nähe zur eindeutigen Lösung. Aus $a_1 \neq a_2$ folgt auch immer $f(a_1) \neq f(a_2)$. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vermöge $n \mapsto n^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv. Zu linkseindeutig sagt man auch injektiv oder voreindeutig. Zu linkstotal sagt man auch linksvollständig oder vordefiniert. Zu rechtseindeutig sagt man auch nacheindeutig oder funktional. Zu rechtstotal sagt man auch surjektiv oder nachdefiniert. Zu eineindeutig sagt man auch bijektiv. **Surjektiv** = gesamter Wertebereich wird ausgenutzt und zudem kommt jedes Bildelement mindestens einmal dran. $f : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ vermöge $n \mapsto (-1)^n$ ist nicht injektiv, weil n nicht mehr rekonstruiert werden kann, aber surjektiv. **Bijektiv** = injektiv und surjektiv. Jedes Bildelement kommt **genau einmal** dran. Eindeutig und der gesamte Bildbereich wird ausgeschöpft. Eineindeutige Abbildung alle Elemente des Urbildbereichs auf alle Elemente des Bildbereichs. Umkehrabbildung definiert. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ vermöge $n \mapsto 1 - n$ ist bijektiv, Arens p34.

Halmos: Naive **Mengenlehre**; $A \backslash B$ A ohne B. Hasse: Grundbegriffe der Mengenlehre und Logik 1970[5]; Peter: Unendlichkeit; Meschkowski: Math verständlich p155 **geordnete Menge**; Meschkowski: 100 Jahre Mengenlehre; Meschkowski: Leben und Werk Georg Cantor; Wallace: Die Entdeckung des Unendlichen; Auch Cantormenge mit überabzählbare Menge von Punkten hat Lebesgue-Maß Null, Arens p344;

Eine **Relation** ist allgemein eine Beziehung, die zwischen Dingen bestehen kann. Eine Relation R ist eine Menge von n-Tupeln. Dinge, die in der Relation R zueinander stehen, bilden ein n-Tupel, das Element von R ist. Eine **binäre Relation** R zwischen zwei Mengen A und B ist eine Teilmenge des **kartesischen Produkts** $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$: $R \subseteq A \times B$. Die Menge A wird als **Vorbereich oder Quelle** der Relation R bezeichnet; die Menge B als **Nachbereich, Ziel oder Zielmenge**. Spezialfälle, zum Beispiel **Äquivalenzrelationen = Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv** und **Ordnungsrelationen = Relation, die transitiv**, sind Relationen in einer Menge. Ordnungsrelation ist zweistellige Relation $R \subseteq M \times M$ auf einer Menge M mit Transitivität. Paar (M, R) ist eine geordnete Menge. Statt Schreibweise $(a,b) \in R$ die sogenannte Infix-Notation $a\,R\,b$. $<= \{(1,2), (e,\pi), (-2,-1)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Berghammer: Ordnungen, Verbände und Relationen mit Anwendungen 2012[2]; Erne: Einführung in die Ordnungstheorie 1982; Lehmann & Schulz: Mengen - Relationen - Funktionen: Eine anschauliche Einführung 2007; Äquivalenzrelation teilt eine Menge restlos in disjunkte = elementfremde Untermengen, **Äquivalenzklassen**. **Potenzmenge** $\mathcal{P}(X) := \{U \mid U \subseteq X\} = \mathfrak{p}(X) = 2^X = \mathrm{Pot}(X) = \Pi(X) = \wp(X) = \mathfrak{P}(X)$. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}, \mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}, \mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}, \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Von Neumanns Modell der natürlichen Zahlen: Natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen durch Mengen darzustellbar, Klaua: Allgemeine Mengenlehre 1968, Kardinal- und Ordinalzahlen 1974:

$$\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= 0' &&= \{0\} &&= \{\emptyset\} \\
2 &:= 1' &&= \{0,1\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &:= 2' &&= \{0,1,2\} &&= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
&\vdots \\
n' := (n+1) &:= \{0,1,\ldots,n\} &&= n \cup \{n\}
\end{aligned}$$

Für das Startelement, die „0“, ist die leere Menge $\emptyset$ gewählt worden. Die „1“ ist hingegen die Menge, welche die leere Menge als Element enthält. Dies sind verschiedene Mengen, denn die leere Menge „0“={} enthält kein Element, wohingegen die Menge „1“={0} genau ein Element enthält. Jeder Nachfolger ist vom Vorgänger verschieden, da die Nachfolgermenge ein Element mehr enthält als die Vorgängermenge, nämlich den Vorgänger selbst. Die Mengen 0, 1, 2 usw. sind durch die Elementrelation ($n \in n+1$) wohlgeordnet. Zum Beispiel hat die Zahl 4 die Elemente 0, 1, 2, 3, die als $0 < 1 < 2 < 3$ geordnet werden. Man schreibt deshalb auch $4 := \{0 < 1 < 2 < 3\}$. Eine natürliche Zahl a ist also kleiner als eine Zahl b, wenn a ein Element von b ist. Für die gesamte Menge der natürlichen Zahlen setzt man: $\omega := \{0 < 1 < 2 < 3 < \cdots\}$. Die Menge ω stellt ein Modell des **Peano-Axiomensystems** dar. Ihre Existenz wird in der Zermelo-Fraenkelschen Mengenlehre durch das **Unendlichkeitsaxiom** gesichert.

Differenzierung von Mächtigkeiten des Unendlichen: **Rationale Zahlen:** Die Dezimaldarstellung per Division gemäß m/n, wobei m, n ganze Zahlen sind, geht stets auf, wie bei 1/2, oder sie ist periodisch, wie bei 1/3 mit Periode 1. Wenn aber die Nenner größer werden, so werden auch die Perioden länger, aber nie länger als der Nenner groß ist. In deinem Beispiel 'durch Sieben' also höchstens Periode 7. Bei den reellen Zahlen kommen alle Zahlen dazu, die in der Dezimaldarstellung keine Periode zeigen und auch nie abbrechen. Aperiodische Zahlenfolge nach dem Komma wie Wurzel aus 2 oder Pi. Mit Kettenbruch kommt man jenseits rationaler Zahlen. Athen & Bruhn: Rechnen und Mathematik 1974 p100ff; **Teilbarkeitregeln:** Eine Zahl ist genau dann **teilbar durch 2,** wenn letzte Ziffer gerade Zahl, **4,** wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 4 teilbare Zahl oder 0, **8,** wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 8 teilbare Zahl oder 0, **5,** wenn letzte Ziffer 5 oder 0, **25,** wenn ihre letzten beiden Ziffern eine durch 25 teilbare Zahl oder 00, **125,** wenn ihre letzten drei Ziffern eine durch 125 teilbare Zahl oder 000, **3,** wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar, **9,** wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar, Athen & Bruhn: Rechnen und Mathematik 1974 p76ff; Alexandroff, Markuschewitsch, Chintschin: Enzyklopädie der Elementarmathematik. Bd1 Arithmetik 1951 p227ff Teilkeit und Primzahlen; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, also **periodische Dezimalbrüche** wie $\frac{1}{2} = 0.4999\cdots \subset \mathbb{A} =$ algebraische Zahlen wie $\sqrt{2} =$ abzählbar ∞, $\mathbb{T} =$ **transzendente Zahlen** $\subset \mathbb{R}$ **überabzählbar** ∞. $a = 0.999\ldots \stackrel{?}{=} 1$. Mit $10a = 9.99\cdots = 9 + 0.99\cdots = 9 + a$ ist $a = 1$. **Irrationale Zahlen:** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T} =$ **nichtperiodische Dezimalbrüche**. Periodische und quasiperiodische Bewegung. Moore: Eine kurze Geschichte des Unendlichen SdW H6 1995, p64; Delahaye: Unendliche Spiele und große Mengen SdW H12 1998 p46; **Zahl transzendent**, wenn sie nicht als Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ungleich dem Nullpolynom auftreten kann, also wenn kein Polynom $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1,\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0)$ existiert mit $p(b) = 0$. Andernfalls handelt es sich um eine algebraische Zahl. Jede transzendente Zahl ist überdies irrational. **Transzendente Zahl = Zahl, aus der in endlich vielen Rechenschritten die Null entsteht.** Bundschuh: Einführung in die Zahlentheorie 1998[4]; Tönniessen: Das Geheimnis der transzendenten Zahlen - Eine etwas andere Einführung in die Mathematik 2010; Schneider: Einführung in die transzendenten Zahlen 1957; Euler 1748: Bei positivem rationalem $a \neq 1$ und natürlichem b, das keine Quadratzahl ist, ist die Zahl $a^{\sqrt{b}}$ nicht rational ist, aber auch „nicht mehr irrational“, wobei „irrationale Zahlen“ = algebraische Zahlen. **Beispiele für transzendente Zahlen:** $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 95\ldots$ Grund für die Unlösbarkeit der Quadratur des Kreises mittels Zirkel und Lineal. $e = 2{,}71828182845904523536028747135 26\ldots$, e^a für algebraisches $a \neq 0$, $2^{\sqrt{2}}$. Ist $0 \neq a \neq 1, a$ algebraisch, b algebraisch und irrational, dann ist a^b eine transzendente Zahl. Für transzendente b gilt dieser Satz offensichtlich nicht, da z. B. $3^{\log_3 2} = 2$. Der Sinus von 1. Der Logarithmus $\ln(a)$ einer rationalen positiven Zahl $a \neq 1$. $\Gamma(\frac{1}{3})$ und $\Gamma(\frac{1}{4})$. $\sum_{k=0}^{\infty} 10^{-\lfloor \beta^k \rfloor}, \beta > 1$. mit der unteren Gauß-Klammer = Abrundungsfunktion = $\lfloor . \rfloor$ floor(x) = floor „Boden“. Oberere Gaußklammer = ceil(x) und $\lceil x \rceil$ = ceiling „Decke“ = Aufrundungsfunktion.

Zahlkonversion: p-adische Zahldarstellung, Alphabet der Zahldarstellung bei der **Basis** p hat p Zeichen, Elemente, Buchstaben $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9, A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15, \ldots\}$. Arens p31. from decimal import * siehe Weigend: Python ge-packt p364ff; Mittels **Python** siehe Seite 536! Es gilt die

Verabredung

$$x = a_n\, a_{n-1} \ldots a_1\, a_0\, a_{-1}\, a_{-2} \ldots a_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} a_i\, p^i$$

Dezimal nach binär, dual: $13_{10} = 8_{10} + 4_{10} + 1_{10} = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 1101_2$ oder dezimal nach hexadezimal $499_{10} = 256_{10} + 15 \cdot 16 + 3 = 16^2 + 15 \cdot 16 + 3 \cdot 16^0 = 1F3_{16}$ oder triadisch nach dezimal $102_3211 = 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-3} = 11\frac{22}{27} = 11.\overline{814}$. $10_p = p$. $9_{10} = 9_{16}, 10_{10} = A_{16}, 110_{10} = 1A_{100}, 777_{10} = 11102_5$. **Uhren-Arithmetik** = operational wird **Restklassendivision** verwendet: $29_{10} = 11101_2$ weil 29:2=14 Rest 1, 14:2=7 Rest 0, 7:2=3 Rest 1, 3:2=1 Rest 1, 1:2=0 Rest 1. **Reste** von hinten nach vorn oder unten nach oben gelesen. Kürschner: **Im Reich der Zahl**, Halle 1947; **8** Zahl der Unbeständigkeit, des Todes, denn die **Quersumme**n der Produkte von 8, $8n$ = 8,16,24,32,... nehmen immer um 1 ab 8,7,6,5,.... Die Quersummen der Neunerprodukte geben stets **9**. **Perfekte** oder **vollkommene Zahl**, die gleich der Summe $\sigma^*(n)$ aller ihrer (positiven) Teiler außer sich selbst ist. Äquivalent ist eine vollkommene Zahl n eine Zahl, die halb so groß ist wie die Summe aller ihrer positiven Teiler (sie selbst eingeschlossen), d. h. $\sigma(n) = 2n$. $1 + 2 + 3 = 6$, $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$, 496, 8128, $2^{n-1}(2^n - 1)$. **Befreundete und gesellige Zahlen** = bei denen die Summe der echten Teiler σ^* der ersten Zahl die zweite und die der zweiten Zahl die erste ist: $220 = \sigma^*(284)$ und $284 = \sigma^*(220)$. Sociable numbers: 12.496, 14.288, 15.472, 14.536, 14.264. **13** #Jünger beim letzten Abendmahl am Freitag.

Wische das innere offene Drittel weg. Die Länge des verbleibenden Intervalls geht gegen Null. Auch Cantormenge als überabzählbare Menge hat Lebesgue-Maß Null, Arens p344; Denn: Wische bei jeder Iteration **offene Drittel weg**. In der n-ten Ieration bleiben 2^n Intervalle der Einzellänge $(1/3)^n$ oder der Gesamtlänge $(2/3)^n$ übrig. Also Lebesgue-Maß Null! Diese Punktmenge ist so mächtig wie [0,1] und hat dennoch Maß Null. Brehmer: Maßtheorie, p69, Peitgen et al.: Bausteine des Chaos; Beim Wischen sieht man, dass bei jeder Iteration die Zahlen mit a_n verschwinden. Es bleiben nur 0 oder 2 als Ziffern erhalten: $x = 0.(2b_1)(2b_2)\ldots_3 = 0.b_1b_2\ldots_2$ mit $b_n \in \{0, 1\}$. Also ist Cantormenge mit [0,1]$\subset \mathbb{R}$ gleichmächtig. Cantormenge ist die Menge der Punkte in [0,1] für die es eine triadische Darstellung ohne die Ziffer 1 gibt. Jede **Dezimalzahl** aus [0,1] kann in der **Basis** 3 so dargestellt werden. Also $x = 0.a_1a_2\cdots = a_1\frac{1}{3} + a_2\frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $x = 1_{10} = 1_3 = 0.\bar{2}_3 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2}\ldots$ oder $x = \frac{1}{3} = 0_31 = 0_30\bar{2}$ Nutze geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ Kegelsequenz in Arens p218;

$0^0 = 1$ ist oft sinnvoll und für Computer eine gute Entscheidung. Bei Rechnungen zur Shannon-Entropie ist **nach Sinai** $0 \cdot \log 0$. **H.D. Zeh: Entropie** 2005;

Meschkowski: Mathematik leicht verständlich; **Menge** = Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens. Klaua: Elementare Axiome der Mengenlehre 1971 Beispiele p7f; Menge M_1 = {Doktordiplom von Cantor, die Zahl 27, der Begriff Wehmut}, $M_2 = \{\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{M}_4\}$. $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$, falls $\mathcal{A}$ die Menge aller abstrakten Begriffe ist. $\mathcal{M} \in \mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ die Menge aller Mengen ist. $\mathcal{M}_4 \in \mathcal{M}_4$, falls $\mathcal{M}_4$ die Menge aller Mengen ist, die mehr als 4 Elemente haben. **Vernünftige Mengen: Russel'sche Menge** $\mathcal{R}$: Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten. **Dorfbarbier: Ich rasiere alle, die sich nicht selbst rasieren.** ABER: Wenn sie sich selber rasieren, dann können Sie sich nicht selber rasieren! $0 = \emptyset$, 1= $\{\emptyset\}$,2=$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, 3=$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ Ganz im Sinne eines **Alphabets** zur Wortbildung werden innerhalb der Alphabetlistung **Reihenfolge** und **Mehrfachnennung** ignoriert: $\{a, b, c\} = \{c, b, a\} = \{c, c, b, a, b\}$. Die gleichen Elemente sind stets dieselben! card$\{1\}$ =card$\{1, 1, 1, 1, 1\} = 1$. Meschkowski: Mathematik leicht verständlich p128. Analog hat auch zur Wortlistung im Lexikon.

Ebbinghaus et al.: Zahlen 1992[3]; Differenzierung von Mächtigkeiten des Unendlichen: **Cantor-Diagonalisierung** = Die Menge der rationalen Zahlen der Matrix $q_{ij} = j/i$ wird mit $J(i, j) = 1/2(i + j - 1)(i + j - 2) + j$ auf die natürlichen abgebildet. Mostowski: Sentences of Undeciable in Formalized Arithmetic. An Exposition of the Theory of Kurt Gödel 1964; $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (periodische

Dezimalbrüche $\frac{1}{2} = 0.4999\ldots) \subset \mathbb{A}$ (algebraische Zahlen wie $\sqrt{2}$) abzählbar ∞, $\mathbb{T}$ (transzendente Zahlen) $\subset \mathbb{R}$ überabzählbar ∞. Irrationale Zahlen: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{A} \cup \mathbb{T}$ nichtperiodische Dezimalbrüche. Periodische und quasiperiodische Bewegung. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{A}$ sind nach Cantor (1845-1918) 1874 abzählbar oder siebartig $\aleph_0 = \text{card}\, \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Durch das Kontinuum kommt kein (ausdehnungsloser) Punkt hindurch $\aleph = \text{card}\, \mathcal{P}(\mathbb{R})$. **Das Kontinuum zerstört den Begriff der Dimension: $\mathbb{R} \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \mathbb{R}^n$, wenn auch nicht mittels stetiger Abbildung. Ich sehe es, aber ich glaube es nicht! Einfache Kontinuumshypothese** CH = continuum hypothesis: Es gibt keine überabzählbare Teilmenge der reellen Zahlen, die in ihrer Mächtigkeit kleiner ist als die der reellen Zahlen. = Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der reellen Zahlen liegt. **Kardinalzahl (Mächtigkeit) der natürlichen Zahlen** $\aleph_0$ (Aleph-Funktion), die darauf folgende Kardinalzahl ist $\aleph_1$, die Kardinalzahl der reellen Zahlen sei $\mathfrak{c}$, **Kontinuumshypothese** formal: $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Mächtigkeit des Kontinuums stimmt mit der mit $2^{\aleph_0}$ bezeichneten Mächtigkeit der Potenzmenge von $\aleph_0$ überein, kurz $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. A.W. Moore: Eine kurze Geschichte des Unendlichen SdW H6 1995, p64; Jean-Paul Delahaye: Unendliche Spiele und große Mengen SdW12 1998 p46; Halmos: Naive Mengenlehre; Peter: Unendlichkeit; Meschkowski: 100 Jahre Mengenlehre; Meschkowski: Leben und Werk Georg Cantor; Wallace: Die Entdeckung des Unendlichen; Auch Cantormenge mit überabzählbarer Menge von Punkte hat Lebesgue-Maß Null, Arens p344; . $D_0 = \log 2/\log 3$.

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_1 - \mathbb{N}_2$ als Differenzen natürlicher Zahlen, $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_1/\mathbb{Z}_2$ als Quotienten ganzer Zahlen, Konvergenzbegriff $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. **Wurzeln von Hand** http://www.diaware.de/ html/ wurzel.html. Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis 6.-8. Schuljahr, Volk und Wissen Berlin 1945 p206; Strategie: Erweitere mit Quadratzahl so, dass im Zähler auch eine Quadratzahl mit kleinem Rest entsteht. Forme so um, dass unter der Wurzel nur noch eine Zahl nahe 1 steht und nutze Taylor an der Stelle 0:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - O(2),\ \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\cdot 25}{25}} = \frac{1}{5}\sqrt{49+1} = 7\frac{2}{10}\sqrt{1+\frac{1}{49}} < 1.4\cdot\left(1+\frac{1}{98}\right) = 1.4\cdot 1.01 = 1.414$$

Probiere: $\sqrt{7}, \sqrt{19}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{727}$. **Baum et al.: Mathematikthemen für 9. Klasse Waldorfschulen**, http://www. anthrobuch. com Kassel 1999, p130;

Nikola **Obreschkoff: Verteilung und Berechnung der Nullstellen reeller Polynome** 1963; Kamyshlov & Bystrov: Analytical method for finding polynomial roots. AppMathSci9 2015 no95 4737-4760; **Kettenbrüche:** Gegeben seien die Strecken $b_0 > b_1 > b_2 > \cdots > b_k$. Durch **Wechselwegnahme** erhält man für ein nach endlich vielen Schritten abbrechendes Verfahren $b_0 = n_1 b_1 + b_2$, $b_1 = n_2 b_2 + b_3, \ldots, b_{k-1} = n_k b_k$. b_k ist gemeinsames Maß von b_0 und b_1 oder b_0 und b_1 sind **kommensurabel**. Ebbinghaus p24+121ff; Perron: Irrationalzahlen 1939[2]; Perron: Die Lehre der Kettenbrüche 1977; Gellert, Küstner, Hellwich, Kästner: **Kleine Enzyklopädie Mathematik** 1965; **Haber: Das mathematische Kabinett** Folge1 1973 p34 Fibonacci-Zahlen, p33f Goldener Schnitt, Kettenbruch, Kettenwurzel, Koch'sche Schneeflocke und Folge2 1973; Zippel: Effective Polynomial Computation. Number theory: Continued fractions 1993; Khinchin: Continued Fractions 1954; Scheel: Algorithmen für regelmäßige Kettenbrüche, BA-Arbeit 2005; Notation für endliche Kettenbrüche

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{\ddots}}}} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_n|}{|b_n} = b_0 + \mathop{\mathbf{K}}_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}, \quad \text{falls alle } a_i = 1, \text{ kurz } = [b_0; b_1, \ldots, b_n]\,.$$

mit $b_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i, b_i \in \mathbb{N}$.

$$\frac{17}{10} = 1 + \frac{7}{10} = 1 + \frac{1}{\frac{10}{7}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{3}{7}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{7}{3}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}} = [1;1,2,3] = [1;1,2,2,1]$$

Ist $x^2 = n \in \mathbb{N}$ keine Quadratzahl, so kann die Wurzel x als ein unendlicher, periodischer **Kettenbruch** geschrieben werden:

$$x = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \cfrac{1}{b_3 + \cdots + \cfrac{1}{b_n + x}}}} = [b_0, \overline{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n + b_0} = [b_0, \overline{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_3, b_2, b_1, 2 \cdot b_0}]$$

wegen der Symmetrie der Periode: $b_n = b_0, b_{n-1} = b_1, \ldots$. 95/43=[2,4,1,3,2]. $(n+1)$-gliedriger **Kettenbruch ist Ausdruck** $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$ mit Anfangsglied $[b_0] = b_0$, $[b_0, b_1] = b_0 + \frac{1}{b_1}$. Durch

$$[b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}] = \left[b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n + \frac{1}{b_{n+1}}\right]$$

kann der $(n+2)$-gliedrige auf den $(n+1)$-gliedrigen Kettenbruch zurückgeführt werden. Perron: Irrationalzahlen 1920 p97; **Jede rationale Zahl hat daher zwei Darstellungen als einfacher Kettenbruch.** Je eine mit gerader und ungerader Anzahl von Teilnennern: 1/2=[0;2]=[0;1,1], 19/51=[0,2,1,2,6]=[0,2,1,2,5,1]. Es gilt $[b_0, b_1, \ldots, b_n] = b_0 + \frac{1}{[b_1, \ldots, b_n]}$. **Kettenbruch-Darstellung** von $\sqrt{2}$ durch positive Lösung $x = 1 + \sqrt{2}$ von $x^2 - 2x - 1 = 0$ mit der Kettenbruch-Darstellung von $x^2 = 2x + 1$ rekursiv durch

$$(1 + \sqrt{2}) = x = 2 + \frac{1}{x} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + x}}}} = 2 + [2, 2, 2, 2, \ldots]$$

oder äquivalente Fixpunktgleichung $x_{n+1} = f(x_n)$

$x = f(x) = \frac{1}{2+x} = 1 + [2, 2, 2, \ldots]$, gibt Folge $1, 1 + [b_0] = 1 + \frac{1}{2} = 1 + [2] = 1.5, 1 + [2, 2] = 1.4, 1 + [2, 2, 2] = 1.416 \rightarrow$

Mit $x^2 = ax + 1$, wobei $a \in \mathbb{Z}$ folgt analog

$$x = a + \frac{1}{x} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + x}}}} = a + [a, a, a, a, \ldots]$$

Goldenen Schnitt = **Teilungsverhältnis einer Strecke oder anderen Größe** - Reckeckseiten, bei dem das **Verhältnis des Ganzen zu seinem größeren Teil dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil** entspricht. $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ falls $a > b$. Oder Strecke der Länge $1+x$ gibt $x/1 = 1/(1+x)$. **Goldenem Schnitt** entspricht gemäß $a = 1$, $x^2 = x + 1$, die positive Lösung $x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + [1, 1, 1, \ldots]$. **Peitgen, Jürgens & Saupe: Bausteine des Chaos. Fraktale** 1992 p195. **Manfred Schröder: Fraktale, Chaos, Selbstähnlichkeit** 1994; Roumen Tsekov: Golden Ratio Autocorrelation Function and the Exponential Decay, Fluctuation and Noise Letters 14 2015 Nr2; **Falconer: Fraktale Geometrie** 1993 p162: Wurzeln führen auf unendliche periodische Kettenbrüche. Nicht abbrechend entspricht irrational.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+\ldots}, \ \sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1+}\frac{1}{2+}\frac{1}{1+}\frac{1}{2+\ldots}$$

Für die Menge F der periodischen Kettenbrüche mit 1 oder 2 gilt $0.44 < \dim_H F < 0.66$. **Hasselblatt & Katok: A first course in dynamics** 2003, p369ff **Beste rationale Approximation irrationaler Zahlen**

und beste Darstellung reeller Zahlen durch Kettenbrüche = continued fraction). Denker: Einführung in die Analysis dynamischer Systeme 2005 p7, p36 **Gauß-Abbildung** und Diophantische Approximation. Peitgen, Jürgens & Saupe: Chaos - Bausteine der Ordnung 1998 p109 Gauß-Abbildung $x_{n+1} = G(x_n)$ mit $G(x) = \text{Frac}\ (1/x) = \dfrac{1}{x} \bmod 1$ für $x \in (0,1)$.

Betrachte quadratische Funktion $f(x) = x^2 - a$ fürs Wurzelziehen per Newton a] aus Anstieg $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$ oder b] per Taylorentwicklung von f an der Stelle x_n zur Nullstelle $0 = f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$. Spezialfall der Newton-Methode = Nullstellenbestimmung differenzierbarer Funktionen mit $f(x) = x^2 - a, f'(x) = 2x, x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = x_n - (x_n^2 - a)/(2 * x_n) = x_n/2 + a/2x_n$. Oder c] **Heron-Verfahren/Babylonisches Verfahren zum Wurzeln**: Aus $x = \sqrt{2}$ wird $\sqrt{2} - x = 0$ oder $(\sqrt{2} - x)^2 = 0$ und liegt man mit x neben $\sqrt{2}$, dann gilt $(\sqrt{2} - x)^2 \geq 0$ also $2 - 2\sqrt{2}x + x^2 \geq 0$ oder $2 + x^2 \geq 2\sqrt{2}x$ bedeutet $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x} + x\right) \geq \sqrt{2}$, bedeutet Fixpunktgleichung $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{x_n} + x_n\right) = x_{n+1}$. $w(?) = \sqrt{x}$ gibt $0 \leq w^2 - 2\,w\,\sqrt{x} + x$, also $w = \sqrt{x} \leq \dfrac{1}{2}\left(w + \dfrac{x}{w}\right)$ und schließlich die Iterationsgleichung $w_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(w_n + \dfrac{x}{w_n}\right)$, die i.a. nicht in $\mathbb{Q}$ konvergent ist, aber eine **Cauchy-Folge** ist! Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge. x_n Cauchy-Folge im **normierten Raum** ($||f|| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ (positiv definit), homogen $||\lambda\, f|| = |\lambda|\, ||f||$ und Dreiecksungleichung), falls $||x_n - x_m|| < \epsilon(m, n > N)$. **Folge oder Sequenz** = Auflistung = Familie von endlich oder unendlich vielen fortlaufend nummerierten Objekten, zB Zahlen. **Reihe** = Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren n-tes Glied als Summe der ersten n Glieder einer anderen Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ geschrieben werden kann: $s_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Honsberg: Lineare Geometrie 1976; **Schäfer: Theoretische Grundlagen der Stabilität** technischer Systeme 1976 p16 metrische Räume; **1) Linearer Raum** = Vektorraum. 3 Arten: a] Endlichdimensionale **affine=schiefe Räume** = **nichtmetrische lineare** Räume. Speziell für der Fall der **affinen Abbildung** det $(A) \neq 0$ bedeutet ein Überleben der Parallelität bei Transformation. Schouten: Tensor Analysis for Physicists 1954[2]; b] Endlichdimensionale normierte lineare Räume. c] **Euklidische** Räume = Endlichdimensionale Hilbert-Räume = Prä-Hilbert-Räume. $\mathbb{N}$ ist kein linearer Raum beim reellen Feld, Multiplikation rausführt. **2) Metrischer Raum** = Raum mit **Abstandskonzept** $d(x, y)$ mit i) $0 \leq d(x, y) < \infty$, ii) $d(x, x) = 0$ nur für $x = y$, iii) symmetrisch/reflexiv $d(x, y) = d(y, x)$ und transitiv $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, also Grenzwert-Idee durchführbar. Für Elemente $f, g, \ldots$ über Intervall $[a, b]$ stetiger Funktionen von t sind Abstände $d(f, g) = [\int_a^b \mathrm{d}t(f - g)^2]^{1/2}$, $d(f, g) = \int_a^b \mathrm{d}t|f - g|$ oder $d(f, g) = \max_{a\leq t\leq b}|f - g|$. Dies heißt, dass man die Elemente zwar nicht addieren können muss, aber Abstand hat. **Kufner: Raum und Entfernung** 1981 Kap2; **3) Normierter linearer Raum** = metrischer linearer Raum bedeutet, dass man die Elemente addieren kann, die selbst auch wieder Länge haben. Das muss bei einem metrischen Raum nicht sein. Abstand zweier Elemente hat man bei beim normierten Raum über den Normbegriff. = **Banach-Raum** = linearer Raum mit Abstandskonzept um Umgebungkonzept für Grenzwert-Idee zu haben. Speziell **Banach-Algebra** L^1 = Banach-Raum mit (punktweiser oder Faltung) Multiplikation, womit die Ungleichung $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, Assoziativgesetz $x(yz) = (xy)z$, Distributivgesetze $x(y + z) = xy + xz$ und $(y + z)x = yx + zx$ und $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha xy$ gelten. Rudin: Reelle und komplexe Analysis 2009 p227. **4) Hilbert-Raum** = linearer, metrischer Raum mit innerem Produkt/Skalarprodukt/Winkel-Idee = linearer Raum, bei dem es neben Abstandskonzept / Grenzwert-Idee außerdem noch einen **"Winkel"** gibt. **Skalarprodukt-Deutung** = auf gegenseitige Richtung bezogenes Längenmaß. Oder: Betrachte das Skalarprodukt von Zufallsgrößen, also Korrelationskoeffizient: $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = a_\perp\, b = a\, b\, \perp$. **Satz des Pythagoras** geht. Winkel ist hier allgemeiner auch zwischen Funktionen gemeint im Sinne einer Projektion. **5) Normierte Algebren** = Hilbert-Raum mit Produkt. Operatoren können multipliziert werden. **Shilov: Elementary functional analysis** 1974; Normierter Raum, in dem jede Cauchy-Folge Grenzwert besitzt, heißt vollständig. **Banach-Raum** = vollständiger normierter Raum $(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, C([a, b]))$. Aber $C([a, b])$ mit Maximumnorm ist z.B. wegen der nicht stetigen Differenzierbarkeit von $f_n := |x|^{1+\frac{1}{n}}, x \in [-1, 1], n \in \mathbb{N}$ am Punkt 0 kein Banach-Raum. Erst die ge-

eignete Norm $||f|| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| + max_{x\in[a,b]}|f'(x)|$ macht ihn dazu. Das **Subdifferenzial** der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$ ist gegeben durch:

$$\partial f(\bar{x}) = \begin{cases} \{-1\} & \bar{x} < 0 \\ [-1,1] & \bar{x} = 0 \\ \{1\} & \bar{x} > 0 \end{cases}$$

Meschkowski: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion 1962 p5, p42ff; Meschkowski & Laugwitz: Meyers Handbuch über die Mathematik 1972[2] p256, p744, p778; Döppert: Hilberträume mit reproduzierenden Kernen Dipl 1991;

Fälle Lot von f bezüglich des L^2-Skalarprodukts auf Unterraum der trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens n. Betrachte also **Fourierpolynome zur Funktion** $f(x)$ gemäß $p_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, e^{ikx}$ mit $c_k = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\exp(-ikx)\mathrm{d}x$ oder für reell-wertige Funktionen siehe Seite 384, also beste App im quadrat Mittel, nicht aber überall Approximation bei nichtglatten Funktionen f. **Fourier'scher Entwicklungssatz:** Die Folge $\{p_n\}$ der **Fourierpolynome zu einer Funktion** $f \in L^2(-\pi,\pi)$ **konvergiert im quadratischen Mittel** gegen f, d.h. $\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |p_n(x) - f(x)|^2)^{1/2} \to 0, (n \to \infty)$. Die in diesem Sinne konvergente Reihe $(\sum_{-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx})$ mit den Fourierkoeffizienten (c_k) von f heißt Fourier-Reihe. Es gelten das Riemann-Lebesgue-Lemma $c_k \to 0 (k \to \pm\infty)$ und die Parseval'sche Gleichung (Bessel'sche Ungleichung) $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2$ Siehe **Arens p1026ff**.

Stetigkeit von $f(x)$ an der Stelle $\hat{x}$, die auch zum Definitionsbereich gehört, bedeutet Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung:

$$\lim_{x\to\hat{x}} f(x) = f\left(\lim_{x\to\hat{x}} x\right) = f(\hat{x}), \quad f(U_\epsilon(x) \cap D) \subseteq U_\epsilon(f(x))$$

Stetigkeit bezieht sich auf die Abbildungseigenschaft von f: Hinreichend kleine Änderungen des Argumentes führen zu beliebig kleinen Änderungen des Funktionswertes. Keine Sprünge in den Funktionswerten. A] **Folgendefinition der Stetigkeit**. B] **Umgebungsdefinition der Stetigkeit**. Brehmer 1 p140ff. Treten **Sprünge** nur in einer Richtung auf, spricht man von **Halbstetigkeit**. Klotzek: Differentialgeometrie I 1981 p8; **Visconti: Introductory differential geometry for physicists** 1992;

Ist die Ableitung von f stückweise stetig, so konvergiert die Fourierreihe **punktweise!**

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$$

Für eine Funktion mit einem Sprung konvergiert die Fourierreihe niemals gleichmäßig: Mit der L^2-Norm $||f||_{L^2(-\pi,\pi)} := (\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, |f(x)|^2)^{1/2}$ sind die trigonometrischen Polynome nicht vollständig! Konzepte **a] Funktion ist unstetig** und b] **Fourier-Reihe konvergiert punktweise** gegen die Funktion **passen nicht zueinander. Approximation einer Sprungfunktion gibt Gibbs-Phänomen**, also **Unter- und Oberschwinger** der Fourierpolynome in der Nähe einer Unstetigkeitsstelle. Cahill: Physical Mathematics 2013 p82; Arens p 1040; Fornberg: A practical guide to pseudospectral methods p10f oder $\sin x/x$) Fourier-Reihe ist zur Approximation unstetiger Funktionen ungeeignet, wenn man an gleichmäßiger Konvergenz interessiert ist. **Zeldovich & Yaglom: Higher Math** 1982 Chap10.9 **Harmonic analysis** p380; **Nikolsky: A course of mathematical analysis** 1975 Bd2 Gibbs' phenomenon §15.9 p217ff, **Sobolevs regularisierende Funktion** §18.2 p329ff; Daher **Sobolev-Räume** Arens-Bonus Kap31 ; Sobolev: Partial Differential Equations of Mathematical Physics 1989; **Folland: Introduction to partial differential equations** 1995[2]; Bleecker: Index theory with applications to mathematics and physics 2013 Sobolev-Raum = Connecition + Funktionalanalysis; **Atiyah-Singer-Indexsatz:** Für elliptischen Differentialoperator auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ist der analytische Index (eng verbunden mit der Dimension des Lösungsraums) gleich dem topologischen Index (über

topologische Invarianten definiert) ist. Da der elliptische Differentialoperator D ein Pseudoinverses hat, ist er ein **Fredholm-Operator** = Klasse linearer Operatoren, die man „fast“ invertieren kann. Jeder Fredholm-Operator hat einen **analytischen Index**, definiert als Differenz der (endlichen) Dimensionen des Kerns von D (also der Lösungen von $Df = 0$) und des Kokerns von D (die einschränkenden Bedingungen an die rechte Seite von inhomogenen Gleichungen wie $Df = g$, oder äquivalent: der Kern des adjungierten Operators D^*), also $\mathrm{index}_a(D) = \dim \mathrm{Kern}(D) - \dim \mathrm{Cokern}(D) = \dim \mathrm{Kern}(D) - \dim \mathrm{Kern}(D^*)$. Sei $K(x,y)$ ein integrierbarer Kern. Betrachte die homogene **Fredholmsche Integralgleichung** $\lambda\phi(x) - \int_a^b K(x,y)\phi(y)\,dy = 0$, sowie die inhomogene Gleichung $\lambda\phi(x) - \int_a^b K(x,y)\phi(y)\,dy = f(x)$.

Beachte, dass die Polynom-Koeff c_k bei allen **Anwendungen wegen endlicher Anzahl von Messwerten aus Quadraturformeln** statt Integralen berechnet werden. Zur Approx von f durch p_n gemäß Seite 384 wird also eine Interpolation q_n an der Stützstellen $x_j = -\pi + j\frac{\pi}{N}$ mittels trigonometrischen Polynomen betrachtet:

$$q_N(x) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} c_k e^{ikx} + \frac{c_N}{2}(e^{iNx} + e^{-iNx}) \text{ mit } c_k = \frac{1}{2N}\sum_{j=0}^{2N-1} f(x_j)e^{-ikx_j}, \quad k = -N+1, \ldots, N$$

Die Interpolation zeigt die gleichen Konvergenzeigenschaften wie die Quadratmittelapprox und entspricht der **diskreten FT**. Siehe Seite 105 Arens p1042;

Banach-Raum (=normierter Raum) mit Skalarprodukt nennt man Hilbert-Raum: Innenproduktraum, der bzgl. der vom Skalarprodukt erzeugten Norm vollständig ist. **Banach-Raum** mit **schwacher Ableitung** = **Sobolev-Raum**. **Sobolev** mit Skalarprodukt $< f, g >_1 = \int_a^b \mathrm{d}x[f(x)\overline{g(x)} + f'(x)\overline{g'(x)}]$

Funktionenraum von schwach differenzierbaren Funktionen. Erweiterung des Begriffs der gewöhnlichen (klassischen) Ableitung. Er ermöglicht es, Funktionen eine Ableitung zuzuordnen, die nicht (stark bzw. im klassischen Sinne) differenzierbar sind. **Sobolev smooth**. **Besov smooth**.. **Schauder-Basis**. Folland: Introduction to partial differential equations 1995[2]; **Schwache Ableitung für reelle Funktionen:** Betrachtet man eine auf einem offenen Intervall $I = (a,b)$ klassisch differenzierbare Funktion f und eine Testfunktion φ (das heißt, φ ist beliebig oft differenzierbar und besitzt einen kompakten Träger), dann gilt

$$\int_I f'(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Parzielle Integration

$\int_a^b u\,v'\mathrm{d}x = u\,v|_a^b - \int_a^b u'\,v\mathrm{d}x$ oder bei höherer Dimension, wo die gewöhnliche Ableitung durch die parzielle Ableitung und der Randterm durch ein Randintegral ersetzt werden $\int_G u\partial_j v\mathrm{d}x = \int_{\partial G} u\,v\,n_j\mathrm{d}F - \int_G v\,\partial_j\,u\mathrm{d}x$, wobei G eien beschränkte offene nichtleere Menge des $\mathbb{R}^N$ mit stückweise glattem Rand ∂G, ist der Schlüssel zur Einführung der **verallgemeinerten Ableitung** und Grundlage für moderne Theorie der PDEs. Distributionen besitzen dadurch die exzellente Eigenschaft, beliebig oft differenzierbar zu sein! Sobolew-Raum. Die Formel $\int_G \partial_j w\mathrm{d}x = \int_{\partial G} w n_j \mathrm{d}F$ folgt aus dem Stokes'schen Satz gemäß Seite 275, falls man für ω eine $(N-1)$-Form wählt. Mit $w = uv$ und Leibniz-Regel $\partial_j(uv) = v\partial_j u + u\partial_j v$ folgt der obige Satz. Zeidler: TB der Mathe 1996 p353. **Beispiele:** $\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = e^x\,(x-1) + C$, $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$, $\int e^x \sin x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^x\,(\sin x - \cos x) + C$, $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\,(\ln x - 1) + C$, $x > 0$, $\int x^{10}\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{11}x^{11}\,(\ln x - \frac{1}{11}) + C$, $x > 0$, $\int (\ln x)^2\,\mathrm{d}x = x\,\big((\ln x)^2 - 2\ln x + 2\big) + C$, $x > 0$, $\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. Hierbei wurde die **parzielle Integration als Trick** verwendet, wobei die Randterme auf Grund der Eigenschaften der Testfunktionen wegfallen ($\varphi(a) = 0, \varphi(b) = 0$). Beispiel bei Bärwolf: Numerik p248;

$$f(t) = \begin{cases} t/2 & 0 \le t \le 1/2 \\ 1/2 - t/2 & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}, \; f'(t) = \begin{cases} 1/2 & 0 \le t < 1/2 \\ \text{beliebig} & t = 1/2 \\ -1/2 & 1/2 < t \le 1 \end{cases}; f(t) = |t|, \; f'(t) = \begin{cases} -1 & t < 0 \\ \text{beliebig} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Dijk: Distribution Theory. Convolution, Fourier Transform, and Laplace Transform 2012; Ist f eine L^2-Funktion, dann kann, selbst wenn f nicht differenzierbar ist (genauer: keinen differenzierbaren Vertreter in der Äquivalenzklasse besitzt), eine Funktion $g \in L^2(a,b)$ existieren, die die Gleichung

$$\int_I g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = -\int_I f(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

für jede Testfunktion φ erfüllt. Eine solche Funktion g heißt schwache Ableitung von f. Man schreibt wie bei der klassischen Ableitung $f' := g$. Noch allgemeinerer Begriff der Ableitung ist die **Distributionenableitung**. Die Theorie der Distributionen ermöglicht es, Ableitungen für Funktionen zu bestimmen, die im klassischen Sinn nicht differenzierbar sind. In der Definition der Distribution ist der Begriff der **Testfunktion** beziehungsweise der des Testfunktionenraums zentral. Dieser Testfunktionenraum ist der Raum der glatten Funktionen mit kompaktem Träger zusammen mit einer induzierten Topologie. Eine Topologie auf dem Testfunktionenraum zu wählen ist sehr wichtig, weil sonst der Begriff der Stetigkeit nicht sinnvoll definiert werden kann. Die Topologie wird auf dem Raum durch einen Konvergenzbegriff festgelegt. Zwei unterschiedliche Sichtweisen: Distribution ein Funktional, also eine Funktion mit bestimmten Zusatzeigenschaften. Physik versteht man unter einer Distribution ein Objekt, beispielsweise δ genannt, mit gewissen sich aus dem Kontext ergebenden Eigenschaften. Die gewünschten Eigenschaften verhindern oftmals, dass δ eine Funktion sein kann, aus diesem Grund spricht man dann von einer verallgemeinerten Funktion. Nachdem nun die Eigenschaften von δ festgelegt sind, betrachtet man die Zuordnung

$$\phi \in C_c^\infty \mapsto \int \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x,$$

die einer Testfunktion ϕ eine reelle Zahl zuordnet. Da δ jedoch im Allgemeinen keine Funktion ist, muss für den Ausdruck von Fall zu Fall erst ein Sinn erklärt werden. Mathematisch gesehen ist eine Distribution eine Funktion mit bestimmten abstrakten Eigenschaften (Linearität und Stetigkeit), die einer Testfunktion eine reelle Zahl zuordnet. Ist das δ aus vorigem Absatz eine integrierbare Funktion, so ist der Ausdruck $T(\phi) = \int \delta(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ mathematisch präzise definiert. Jedoch wird hier nicht die Funktion δ als Distribution bezeichnet, sondern das Funktional $\int \delta(x) \cdot \mathrm{d}x$ heißt Distribution. Viele Mathematiklehrbücher unterscheiden nicht zwischen der (distributions)erzeugenden Funktion δ und der eigentlichen Distribution im mathematischen Sinne. **Wilf: Generatingfunctionology** 1990;

4 Konvergenzen, Approximation, Splines

Berechnung der Quadratwurzel bis 1958 in Schule mit Approx im Mittel und gleichmäßiger Approx siehe Kerner: Num Mathe mit Kleinstrechnern 1985 p255! Riesz: Gesammelte Abhandlungen 1960 1601 Seiten 2 Bde; Idee der **schwachen Konvergenz** nach Riesz & Sz.-Nagy: VL über Funktionalanalysis 1956 §29: Aus der **Konvergenz im Mittel**=starke Konvergenz $f_n \to f$ oder $||f - f_n|| \to 0$ folgt schwache Konvergenz (=**Konvergenz durch Mittelungsprozedur mittels beliebiger Funktion** g: $(f_n, g) \to (f, g)$ für alle $g \in L^2$. Siehe auch Kolmogorov & Fomin: Reelle Funktionen und Funktionalanalysis 1972 p193ff; Arens p1192, 1025;

Knorrenschild: Numerische Mathematik Kap5.3 2008; Splinefunktion: Interpolierende mit die stückweise die Gestalt eines Polynom dritter Ordnung mit stetiger erster und zweiter Ableitung insbesondere an den Stützstellen. Schiffslatten. Sonar: Angewandte Math, 2001 Hanke-Bourgeois: Grundlagen der numerischen Mathematik e-book http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9309-3; Bude: Numerische Mathematik, Shaker 1990

$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3$

Given set of coordinates

$C = [(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)]$

we wish to find set of n splines,

$S_i(x)$ for $i = 0, \ldots, n-1$.

These must satisfy:

$$S_i(x_i) = y_i = S_{i-1}(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad S_i'(x_i) = S_{i-1}'(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1$$
$$S_i''(x_i) = S_{i-1}''(x_i), \quad i = 1, \ldots, n-1, S_0''(x_0) = S_{n-1}''(x_n) = 0.$$

Smoothing splines siehe Hastie & Tibshirani: Generalized additive models 1990; de Boor: A Practical Guide to Splines 1978; MC Jones and MP Wand: Kernel Smoothing; http://statsmodels. sourceforge. net/ devel/ examples/ notebooks/ generated/ kernel_density.html Doucet, Freitas, Gordon: Sequential Monte Carlo Methods in Practice 2001

$$S[f] = p \sum_i w_i \left(y_i - f(x_i)\right)^2 + (1-p) \int dt\, \lambda(t)\, f''^2(t) \stackrel{!}{=} \text{Min}$$

$p = \dfrac{1}{1 + \dfrac{h^3}{s}}$, mit $h = \overline{\Delta x_i}$, balanciert die Nähe zu den Daten (Quadrat des Residuums) gegen ihre Rauheit (Quadrat der Krümmung). $s, p \to 0$ Daten glatt.

i] **Linearisierung** an einer Stelle = totales Differenzial = **Zuwachs**, setzt Ableitbarkeit, also Satz von Schwarz voraus.
ii] lokale Approx per **Taylor-Polynom** = Mittelwertsatz $f(t+h) = f(t) + f'(t+\theta h)\, h$ mit $\theta \in (0,1)$
iii] **Tschebyschev**-App einer stetigen Funktion, Abstand per Maximumnorm

$$\|f - p\|_\infty = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)|$$

Dieser Abstandsbegriff liegt der **gleichmäßigen Konvergenz** zugrunde! Polynominterpolation und Spline-Interpolation. **B-spline Michael Unser**. http://bigwww. epfl. ch/tutorials/
iv] Punktweise Approximation per Treppen- oder Zackenfunktion → **L-integrierbare** Funktion $L([a,b])$.
v] beste Approx an eine **quadratintegrierbare** Funktion $f \in L^2([a,b])$ bezüglich L^2-Norm (=Euklidische Norm für stetige Funktionen)

$$\|f - p_n\|_{L^2} = \left(\int_a^b dx\, |f(x) - p_n(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist Fourierpolynom. l_2 Euklidische Norm für n-Vektoren = Beste Approximation für Daten. Absoluter Abstand zweier Funktionen ist L_∞ bzw. für Daten l_∞. **Greedy**-Algorithmen oder gierige Algorithmen (i.a. nicht optimal): Wählen schrittweise den Folgezustand aus, der zum Zeitpunkt der Wahl den größten Gewinn bzw. das beste Ergebnis verspricht (z. B. Matching pursuit - beginnt mit Komponente größter Varianz-Reduktion, **Gram-Schmidt-Orthogonalisierung**, was aus **linear unabhängigen** Vektoren $w_1, \ldots, w_n$ ein Orthogonalsystem von n **paarweise orthogonalen** Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, das denselben Untervektorraum erzeugt, generiert. Idee: Erster Basisvektor sei $\vec{w}_1$ selbst, also $\vec{v}_1 = \vec{w}_1$. Der zweite darf keine Komponente in Richtung des ersten Basisvektors $\vec{v}_1$ haben: $\vec{v}_2 = \vec{w}_2 - \alpha \vec{v}_1$. Skalar mal $\vec{v}_1$ gibt $\alpha = \vec{w}_2 \cdot \vec{v}_1 / v_1^2$ wegen $\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$. Daher

$$v_1 = w_1,\ v_2 = w_2 - \frac{\langle v_1, w_2 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1,\ v_3 = w_3 - \frac{\langle v_1, w_3 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, w_3 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2,\ \ldots$$

$$v_n = w_n - \frac{\langle v_1, w_n \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle v_2, w_n \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \cdots - \frac{\langle v_{n-1}, w_n \rangle}{\langle v_{n-1}, v_{n-1} \rangle} v_{n-1} = w_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_i, w_n \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i$$

siehe Cahill: Physical Mathematics 2013 p17; Arens p688f oder Gradientenverfahren). Householder-Transformation und Givens-Rotation sind stabiler. l_1 ist unempfindlich gegenüber Ausreißern. **Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie: Ein Lehrbuch für Physiker** und Mathematiker 2004[2]; 0-Norm $||x||_0 = \#\{x_i \neq 0\}$, 1-Norm $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$ Betragssummennorm; die von ihr abgeleitete Metrik heißt auch Manhatten-Metrik, da sie den Abstand zweier Punkte wie die Fahrtstrecke in Schachbrett-Stadtplan misst. 2-Norm $||(x,y)||_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Norm zu $p = \infty$ ist $||(x,y)||_\infty = \max\{|x|, |y|\}$ heißt auch Maximumsnorm. Nichteuklidisch bei 4-er-Vektoren in SRT. **Hyperbel ist der verallgemeinerte Einheitskreis. Tropische Geometrie** SdW 6.2019 p12ff i als zielführender Umweg. $x = a^u$ und $y = b^v$ mit riesigen Basen. Idee ist tropischer Semiring $(\mathbb{R}_\infty, \oplus, \odot)$ mit $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $x \oplus y = \min\{x, y\}$ mit $\min\{a, \infty\} = a$ und $x \odot y = x + y$.

Konvergenzradius $r := \sup\{|x-x_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ ist konvergent}\}$ Formel von Cauchy-Hadamard: $r = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. **Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics** 1993[7] p203; **Gleichmäßige Konvergenz** $\lim_{n\to\infty}\max_{x\in D}|f_n(x)-f(x)| = 0$ ist stärker (betrachte dazu $f_n(x) = x^n$) als **punktweise Konvergenz** $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in D$ ist stärker als Konvergenz des **Abstands im quadratischen Mittel** (bis auf Nullmengen gleiche Funktionen) Arens p1027. Beachte, dass es keinen Sinn macht bei einer Funktion aus $L^2([-a,a])$ von ihrem Wert bei 0 zu sprechen, da Nullmengen unerheblich sind.

In der Integralrechnung bezeichnet das **Stieltjesintegral** eine Verallgemeinerung des Riemannintegrals oder eine Konkretisierung des Integralbegriffs von Lebesgue: $\int_a^b dh(t)\, f(t)$. Die Funktion h, auch als Integrator bezeichnet, regelt, wie stark f, an verschiedenen Stellen gewichtet wird. Statt Integrator ist deshalb auch die Bezeichnung Gewichtsfunktion üblich. Offensichtlich kann das gewöhnliche Riemannintegral nun als Spezielfall des Riemann-Stieltjes-Integrals mit $h(x) = x$, für alle x, (Identität) aufgefasst werden.

Das Riemann-Stieltjes-Integral existiert z.B. bei stetiger Funktion $f(x)$, selbst mit der Cantor-Funktion als Integrator (das ist eine monoton von 0 auf 1 wachsende Funktion, die fast überall konstant ist, nämlich bis auf eine überabzählbare Nullmenge).

5 Lineare, additive, gemischte Modelle

Lineare Regression: Geg: a] **Stichprobe** von n Tupeln von Messwerten (x_i, y_i). b] **Modell** $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + E_i$, die erklärende Variable ist hier keine Zufallszahl. c] Schätzung

$$\hat{\gamma}_{XY} = \sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}), \hat{\sigma}_X^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2,\ \hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\gamma}_{XY}}{\hat{\sigma}_X^2},\ \hat{\beta}_0 = \hat{\bar{y}} - \hat{\beta}_1\hat{\bar{x}}$$

Brink: Essentials of statistics 2010 bookboon.com; YYYYY Bei linearen Modellen hängt der Prädiktor linear von den zu schätzenden Parametern ab. Die Responsevariable Y_i wird als Gauß-verteilt angenommen. Bei generalized linear Modellen wird die strenge Linearität dadurch zurückgenommen, indem der Response-Erwartungswert von einer glatten monotonen Funktion des linearen Prädiktors abhängt. Verallgemeinerung linearer Regressions-Modelle, die weniger voraussetzen: Ersetze die übliche lineare Funktion einer Kovarianz durch eine unspezifische Glättungsfunktion. Additive Modelle setzen sich aus einer Summe solcher Funktionen zusammen. **Wood: Generalized additive models: an introduction with R, 2006**; http://books.google.co.uk/books?id=hr17lZC-3jQC penalized regression splines. Faraway: Extending the linear model with R: generalized linear, mixed effects and nonparametric regression models; Fabian Scheipl: Additive Mixed Models: Flexible Regression for Grouped Data in R, http://www.stat.uni-muenchen.de/ scheipl/index.html; Fahrmeir: Regression - Modelle, Methoden und Anwendungen e-book; Demidenko: Mixed Models. Theory and Applications 2004; Generalisierte lineare Modelle: Die Zielvariable wird nicht mehr als (approximativ) normalverteilt betrachtet, sondern folgt einer beliebigen Verteilung aus der univariaten Exponentialfamilie. Enthalten sind damit insbesondere Regressionsmodelle für binäre Zielgrößen (Bernoulliverteilung) und Zählvariablen (Poissonverteilung), aber auch Regressionsmodelle für nichtnegative Zufallsvariablen basierend auf der Gammaverteilung. Modelle mit zufälligen Effekten: Bei der Analyse von Longitudinaldaten oder gruppierten Daten ist die Annahme der Unabhängigkeit der Beobachtungen typischerweise nicht mehr gegeben. Regressionsmodelle mit zufälligen Effekten erweitern den linearen Prädiktor linearer und generalisierter linearer Modelle um zufällige, individuen- bzw. gruppenspezifische Effekte und erlauben damit die Berücksichtigung von Korrelationen. Generalisierte additive Modelle: In linearen und generalisierten linearen Modellen wird der Erwartungswert der Zielvariablen basierend auf einem rein linearen Prädiktor modelliert. Obwohl durch Transformationen von Kovariablen bereits einfache, nichtlineare Zusammenhänge beschrieben werden können, sind automatisierte, flexiblere Alternativen zur Analyse nichtlinearer Zusammenhänge in der Praxis von besonderem Wert. Generalisierte additive Modelle sind eine allgemeine Modellklasse zur Untersuchung solcher nichtlinearer Zusammenhänge. Hastie & Tibshirani: Generalized

additive models 1990. Man can learn nothing unless he proceeds from the known to the unknown. Claude Bernard. Peter J. Green, B. W. Silverman: Nonparametric regression and generalized linear models: a roughness penalty 1994

6 Schätzer, Modelle, Lernen, Bayesianer vs Frequentisten

Held: Methoden der statistischen Inferenz. Likelihood und Bayes 2008; Leonard & Hsu: Bayesian methods. An analysis for statisticians and interdisciplinary researchers 2005; Bayes-Theorem als logischer Schlüssel und computationaler Mechanismus für sequenzielles Lernen. Aoki: Optimization of stochastic systems 1967; Doucet et al.: Sequential Monte Carlo Methods in Practice 2001; Gelb: Applied optimal estimation 1974, 1979; Loredo: Promise of Bayesian inference for astrophysics, in: Feigelson & Babu: Statistical challenges in modern astronomy 1992 p275ff; Reich & Cotter: Probabilistic Forecasting and Bayesian Data Assimilation 2015; general dynamical systems approach, with a profusion of low-dimensional, discrete-time numerical examples designed to build intuition about the subject. Part I framework of ensemble-based probabilistic forecasting and uncertainty quantification. Part II Bayesian filtering algorithms, from classical data assimilation algorithms such as the Kalman filter, variational techniques, and sequential Monte Carlo methods, through to more recent developments such as the ensemble Kalman filter and ensemble transform filters. The McKean approach to sequential filtering in combination with coupling of measures serves as a unifying mathematical framework throughout Part II. Samaniego: A Comparison of the Bayesian and Frequentist Approaches to Estimation 2010; Särkkä: Bayesian Filtering and Smoothing 2013; Gregory: Bayesian Logical Data Analysis for the Physical Sciences. A Comparative Approach with Mathematica Support 2010; Bengtsson, Ghil, Källen: Dynamic Meteorology. Data Assimilation Methods. Applied Mathematical Sciences 36 1981; **Ghil & Malanotte-Rizzoli: Data assimilation in meteorology and oceanography**, In: Advances in Geophysics 33 1991 p141-266; **Datenassimilation** = inverses Modell = direkte Informationen aus Beobachtung + indirekte Informationen von früheren Beobachtung aus bisherigem Modell. Beide Informationen mit Fehler. Ozean- und Magnetosphären-Beobachtung wegen Undurchsichtigkeit oder Unerreichbarkeit fast unmöglich. Dennoch braucht man Atmosphären- und Space-weather-Voraussagen. Satelliten messen zwar nur eine Spur/partiale Beobachtung, aber mit Modell = alte assimilierte Beobachtung hat man viel mehr Info. Data assimilation und sequenzielle / updating/Innovation Vektor, aus synoptische Voraussage. EKF = auf Beobachtungsebene y-Innovation mit Observationsoperator H. Voraussage = deterministisch + Modell Update = probalistisch. Modell Fehler = Gaußfehler der Subgridparametrisierung. Was verbessert die Voraussage? Zusätzliche Satelliten-Beobachtung oder größere Computer? Smoothing, Filterung, Prediktion siehe Wiener 1949, Ghil Dao 1989, OAF, Trevison, Uboldi JAS 2008, DADA = Data assimilation for the detection and attribution. Log-normal EKF. Particle filter für nichtlineare Systeme! Für lineare Systeme ensemble Kalman filter. DA Research DART. Lorenz System als Modell ist zu simpel, denn Wetter ist nicht autonom und Parameter sind zeitabhängig! Flohn: Mathematische Wettervorhersage PhysBl12 1956 442-452; Farhat, Lunasin, Titi, On the Charney ..., Climatology, Roques, Chekron, Proc Royal Soc A 2014; Asch, Bocquet, Nodet: Data Assimilation. Methods, Algorithms, and Applications 2016; Lewis, Lakshmivarahan, Dhall: Dynamic data assimilation. A least squares approach 2006; L̃ewis, Lakshmivarahan, Dhall: Dynamic Data Assimilation. A Least Squares Approach 2006; Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 **Methode der kleinsten Quadrate = least square fit** p114f; Evensen: Data Assimilation. The Ensemble Kalman Filter 2009[2]; Lahoz ed: Data Assimilation. Making Sense of Observations 2010; http://enkf.nersc.no/
Law, Stuart & Zygalakis: Data assimilation. A mathematical introduction 2015;
e-book: `http://www.springerlink.com/content/k21813/#section=108914&page=1` ; Tycho Brahe Teynkirche Prag sammelte über Jahrzehnte die Positionen der Planeten. Kepler assimilierte die Positionsdaten in Gestalt/der Sprache von Kegelschnitten. **Kegelschnitte** als effiziente Modelle der Daten, als einigendes Band der Planetenbewegung. Newton fand den Stein der Weisen, erriet die Differentialgleichung wenigstens 2. Ordnung, derer Lösung die zu erwartenden Bewegungsmuster sind. Lefebvre et al: Nonlinear Kalman Filtering for Force-Controlled Robot Tasks 2005; Jazwinski: Stochastic Processes and Filtering Theory 2007;

Ristic, Arulampalam, Gordon: Beyond the Kalman Filter. **Particle Filters** for Tracking Applications 2004; Anderson & Moore: Optimal filtering 1979; Astrom: Introduction to Stochastic Control Theory; Stengel: Optimal Control and Estimation; Gelb: Applied Optimal Estimation; Kirk: Optimal Control Theory. An Introduction; Gelfand & Fomin: Calculus of Variations 1963; Simon: Optimal State Estimation. Kalman, H Infinity, and No; Krishnan: Nonlinear Filtering and Smoothing. An Intro; Anderson: Optimal Control. Linear Quadratic Methods; Doyle, Francis, Tannenbaum: Feedback Control Theory; Doucet: Sequential Monte Carlo methods in practice 2001; Gibbs: Advanced Kalman Filtering, Least-Squares and Modeling. A Practical Handbook 2011; Kalman-Filter und Glätter: **F̃ristedt, Jain, Krylov: Filtering and prediction. A primer** 2007; Harwey: Forecasting, structural time series models and Kalman filter 1991; Harwey: Time series models, MIT 1993; Kitagawa & Gersch: Smoothness priors analysis of time series 1996

Box: Alle Modelle sind falsch, aber einige sind nützlich! Modelle an sich, wie jegliche Vorstellung, sind weder wahr noch falsch. Erst wenn man ihre Güte oder ihren Abstand in Bezug auf die Beschreibung ausgewählter Merkmale der Wirklichkeit bezieht.

'So you don't have a unique answer to your questions?' 'Adson, if I had, I would teach theology in Paris.' 'Do they always have a right answer in Paris?' 'Never', said William, 'but there they are quite confident of their errors.' Umberto Eco: The Name of the Rose; **Ẽco & Held: Lector in fabula.** Die Mitarbeit der Interpretation in erzählenden Texten 1979, 1987;

Sei $\hat{\Theta}_N$ der **Schätzer für die Größe** Θ auf Grund einer Zeitreihe x_t mit N Werten. Der Schätzer heißt **konsistent** im quadratischen Mittel, wenn gilt

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{MSE}(\hat{\Theta}_N, \Theta) = \lim_{N\to\infty} \left\langle \left(\hat{\Theta}_N - \Theta\right)^2 \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \left\{ \left\langle \hat{\Theta}_N^2 \right\rangle - 2\Theta \left\langle \hat{\Theta}_N \right\rangle + \Theta^2 \right\} = 0, \tag{24}$$

also der mittlere quadratische Fehler verschwindet. Oder die Varianz

$$\mathrm{Var}(\hat{\Theta}_N) := \left\langle \hat{\Theta}_N^2 \right\rangle - \left\langle \hat{\Theta}_N \right\rangle^2 \tag{25}$$

und Bias oder Verfehlung des Erwartungswertes

$$\mathrm{Bias}(\hat{\Theta}_N, \Theta) := \left\langle \hat{\Theta}_N \right\rangle - \Theta \tag{26}$$

verschwinden für $N \to \infty$.

Bishop: Pattern recognition and machine learning, 2006; Siehe Fisz! Drösser: Total berechenbar? Wenn Algorithmen für uns entscheiden 2016; Rudder: Inside Big Data: Unsere Daten zeigen, wer wir wirklich sind 2016; Marsland: Machine Learning. An Algorithmic Perspective 2009; **glyphe** = Streudiagramm mit verschieden farbigen und formigen Datenpunkten. Python codes http://seat.massey. ac. nz/personal/s. r.marsland/MLBook.html **Scikit-learn** = scikits.learn free software machine learning library for the Python programming language. It features various classification, regression and clustering algorithms including support vector machines, random forests, gradient boosting, k-means and DBSCAN, and is designed to interoperate with the Python numerical and scientific libraries NumPy and SciPy. **SciPy Toolkit**. Hartmann & Selbig: Introductory bioinformatics 2009, 2013[5] **Kap3.3**; Baldi & Brunak: Bioinformatics. The machine learning approach 2001; Andrew **Gelman: Bayesian Data Analysis** 1997; Barlow: Statistics. A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences 1989; Brandt: Datenanalyse 1992; Brandt: Statistical and Computational Methods Methods for Scientists and Engineers 2014; Narsky: Statistical Analysis Techniques in Particle Physics - Fits, Density Estimation and Supervised Learning 2014; Cowan, Statistical Data Analysis 1998; Eadie, Drijard, James, Roos and Sadoulet: Statistical Methods in Experimental Physics 1971;

Auf statistische Ansätze bei Naturbeschreibung wird man aus Infomangel geführt: Modellparameter werden Zufallsvariablen und die Ungewissheit der Natur wird durch PDFs kodiert ohne sich Gedanken über Existenz und Eindeutigkeit zu machen. Qualitatives Vorwissen fließt in Modellierung ein und Lösung des Problems sind Verteilungsfunktionen. Geht i.a. über Benutzung von **Regularisierungsmethoden** - wo Vorwissen mittels Straftterm in der Zielfunktion (Optimierung) erfasst wird - bei Lösung inverser Probleme hinaus. Vor

beoachtbaren Daten soll auf unsichtbare Ursache geschlossen werden. Das Problem ist schlecht gestellt, weil innere, unsichtbare Struktur meist sehr empfindlich von den beoachtbaren Daten abhängt. Die Beseitigung der Fehlerverstärkung und damit einhergehende **Stabilisierung der Lösung** heißt Regularisierung. Die Urbilder linearer kompakter Operatoren können dicht beieinander liegen! **Regularisieren heißt stabilisieren!** http://www. math.kit. edu/user/rieder/ online-service. html Andreas **Rieder: Keine Probleme mit Inversen Problemen - Eine Einführung in ihre stabile Lösung** 2003. A. Mohammad-Djafari: Maximum Entropy and Bayesian Methods 1992;

Koch: Einführung in die Bayes-Statistik; BayesMeth Griffith Kemp Tennebaum: http://cocosci. berkeley.edu/tom/papers/bayeschapter.pdf http://web.mit.edu/cocosci/josh.html Hoff: A first course in Bayesian Statistical Methods 2010; Eberhardt & Danks: The Problematic Case of Bayesian Models 2011; Hristea: The Naïve Bayes Model for Unsupervised Word Sense Disambiguation: Aspects Concerning Feature Selection 2012; Held: Methoden der statistischen Inferenz: Likelihood und Bayes 2008; **Viertl & Hareter: Beschreibung und Analyse unscharfer Information. Statistische Methoden für unscharfe Daten 2006 Kap4 - Schließende Statistik für unscharfe Daten Kap5 - Bayes'sche Analyse bei unscharfer Information;** Arens at al.: Ergänzungen und Vertiefungen 2009 Kap40.3; Calvetti, Daniela, Somersalo, Erkki: An Introduction to Bayesian Scientific Computing. Ten Lectures on Subjective Computing 2007; **Sivia: Data analysis. A Bayesian tutorial for scientists and engineers**

Der **Subjektivist** oder **Bayesianer** quantifiziert sein **Vorwissen** und seine **subjektive Bewertung** mit einer **A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung** Arens p145. Diese wird auf Basis von späteren Beobachtungen mittels Bayes-Regel aktualisiert. Es gibt nur bedingte Wahrscheinlichkeiten P! $P(A|B)$ ist die Einschätzung über das Eintreten von A auf der Basis des subjektven momentanen Wissens B. Das Weglassen von B bedeutet stillschweigend das gesamte Wissen des jeweils Sprechenden.

Beim Lernen geht das Subjekt aus von einem momentanen Wissen über A, dass in der **A-priori-Verteilung** $P(A)$ quantifiziert wird. Dann wird eine Info B geliefert. $P(B|A)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B im Licht des Vorwissens A.

Hastie, Tibshirani, Friedman: Elements of statistical learning 2003; **Duda, Hart, Stork: Pattern classification** 2001; Zu Support Vector Machines und Kernel-Funktionen siehe **Schölkopf: Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond** 2002; Cristianini, Shawe-Taylor: Kernel Methods for Pattern Analysis 2004

$P(A|B)$ ist die **A-posteriori-Verteilung**: Sie quantifiziert das **Wissen des Subjektes NACH** dem Experiment. **Lernen:** $P(A) \to P(A|B) \to P(A|BC) \to \dots$ Die Umrechnung von A-priori- in A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten passiert mit dem Satz von Bayes.

So wird relevantes Vorwissen und Erkenntnisse aus Experimenten/Beobachtungen in möglichst einfacher, operational durchsichtiger Form zur Modellierung und Vorhersage für nicht wiederholbare Einzelfallsituationen benutzt.

Archillesferse der Bayesianischen Statistik ist die Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeit! Arens p150

Satz von Bayes, siehe Barth:

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)}{P(B)} P(A_j) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Bishop: Pattern recognition and machine learning 2006, p22 **Bayes-Idee: posterior $\propto$ likelihood (StichprobenInfo / Ausbeute zum Parameter) $\times$ prior (Vorwissen zur Parameterverteilung)**, wobei alle Ausdrücke Funktionen der Parameter sind. Beispiel: stochastische parametrische Modell $X \sim f(\cdot, \theta), \theta \in \Theta$ mit der A-priori-Dichte des Parameters $\pi_\Theta(\cdot)$. Ziel: Nach Stichprobennahme $D = \{x_1, \cdots, x_n\}$ kann diese Info mit A-priori-Dichte verknüpft werden, um aktualisierte/verbesserte Parameterverteilung zu bekommen:

$$\pi(\Theta|x_1, \cdots, x_n) \propto l(\Theta; x_1, \cdots, x_n) \times \pi(\theta)$$

mit der **Likelihood/Plausibilitäts-Funktion**

$$l(\Theta; x_1, \cdots, x_n) = \Pi f(x_i|\Theta)$$

die sagt wie wahrscheinlich die beobachtete Stichprobe als Funktion der Parameter ist. **Die gesamte Stichproben-basierte Info über den Parameter ist in der Likelihood enthalten!** Mittels A-priori-Dichte kann eine aktuelle Dichte für X bestimmt werden, die Prädiktivdichte:

$$f(x|D) = \int_\theta d\theta\, f(x|\theta)\, \pi(\theta|D)$$

In dieser Prädiktivdichte sind alle Informationen aus dem stochastischen Modell, der A-priori-Dichte und den beobachteten Daten verarbeitet. Bernardo & Smith: Bayesian Theory 1995;

Dubben & Beck-Bornholdt: Mit an Wahrscheinlichkeit grenzender Sicherheit 2006; von Randow: Das Ziegenproblem 1992/2006; **Felsenstein: Bayes'sche Statistik für kontrollierte Experimente** 1996; von Storch & Zwiers: Statistical analysis in climate research 1999; Barth & Haller: Stochastik 1996; **Schönwiese: Praktische Statistik** 1992[2]; Heigl & Feuerpfeil: Stochastik 1976;

7 Differenzengleichungen, z-Trafo

Scherbaum: Of poles and zeros. Fundamentals of digital seismology 1996; Mickens: Difference Equations. Theory and Applications 1990;

Erzeugende Funktion

$$X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} x(k) s^k$$

Laurent-Transformation

$$Z(x)(z) = X(1/z) := \sum_{k=0}^{\infty} x(k)/z^k$$

Green-Matrix. Siehe Seite . Jordansche Normalform. **Wilf: Generatingfunctionology** 1990; Positive dyn Systeme. Nichthyperbolisch/relative Stabilität.

Berg: Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit Anwendungen 1979; Krause & Nesemann: **Differenzengleichungen** & diskrete dynamische Systeme 1999; Elaydi: An introduction to difference equations 1996, Kelley/Peterson: Difference equations 2001

8 Scientific Computing, Zeichen, Sprache, Signal, Daten, Kybernetik, HMM

John James Osborne: Der Computer ist die logische Weiterentwicklung des Menschen. Intelligenz ohne Moral. Moral setzt Fähigkeit zur zeitlichen Perspektive voraus. Der Computer ist Teil unseres Sprechaktes.

Robert **Johansson: Scientific computing projects** http://jrjohansson.github.io/research.html **ScientificCompQuantumToolBox.** HPI Future **SOC = Service-oriented computing** Lab in Potsdam: 1000 core compute cluster, servers with up to 64 cores and 2 TB RAM, an HP private cloud solution comprising 32 individual blades and SAP's In-Memory Computing appliance HANA and Business Suite on HANA: efficient management of concurrency and memory, **Cloud Computing** including topics such as security, elasticity, and scalability, in-memory technology, Multicore architectures / GPU, **Croud Computing** Hybrid Computing, On-demand delivery models for business applications. http://hpi.de/future-soc-lab. Carr: The Big Switch. Der große Wandel. Cloud Computing und die Vernetzung der Welt von Edison bis Google 2006; Pang: An Introduction to Computational Physics 2010; **Wiedemann: Numerische Physik** 2004; Hartmann: Big Practical Guide to Computer Simulations 2015; Rubin, Bordeianu, Landau: Computational Physics: Problem Solving with Computers 2010; Rubin, Bordeianu, Paez: A Survey of Computational Physics:

Introductory Computational Science 2008; Giordano, Nakanishi: Computational Physics 2005; **Tveito: Elements of Scientific Computing** e-book 2010 http://www.mn.uio. no/ifi/english/services/knowledge/cs/ www.ifi. uio.no/cs; Computer als **Hochgeschwindigkeitstrottel** ist gut für Rekursion, Fakultät, Folgen, Trajektorien der logistische Abbildung, **Zerlegung in Primfaktoren**,

```
def Primfaktoren(n):
    faktoren = []; z = n
    while z > 1:
        # bestimme den kleinsten Primfaktor p von z
        i = 2
        gefunden = False
        while i*i <= n and not gefunden:
            if z % i == 0:
                gefunden = True
                p = i
            else:
                i = i + 1
        if not gefunden:
            p = z
        # füge p in die Liste der Faktoren ein
        faktoren = faktoren + [p]
        z = z // p
    return faktoren
```

from faktorisierung import primfaktoren; from time import *; n = 4563421773: t1 = clock(); ergebnis = primfaktoren(n); t2 = clock(); t = t2 - t1; print('Zahl: ', n); print('Primfaktoren:', ergebnis); print('Rechenzeit: ', t). Pseudo-Zufall, Lösung von Differenzialgleichungen.

Euklidischer Algorithmus für den ggT zweier Zahlen, 325 v. Chr.: Man dividiere die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, dann den Divisor durch den verbleibenden Rest und wiederhole diesen Rechengang, bis die Division aufgeht. **Der letzte Divisor ist der ggT der beiden Ausgangszahlen.** Simon & Stahl p46f.

```
def EUCLID(a,b):
    if b == 0 then return a else return EUCLID(b, a mod b)
```

Kürzen: Wegen ggT(1190,672)=14 ist $\frac{1190}{672} = \frac{85}{48}$ oder 85/48 nicht kürzbar oder 85 und 48 **teilerfremd**, da ggT(85,48)=1.

Die Grenze zwischen Mensch und Automat verschwindet.

Unauffällig schleichen sich Cyborgs[21] in den Alltag. Was sind ihre mikro- und makroskopischen Mechanismen? Hier Zellen dort Schaltkreise. Gemäß erster Prinzipien werden beide durch Differenzialgleichungen beschrieben. Bleibt man im Falle der Schaltkreise bei Differenzialgleichungen, so hat man einen Analogrechner. **Boltjanski: Differentialrechnung einmal anders** 1956 p57f; Bernd Ulmann: Analogrechner. Wunderwerke der Technik - Grundlagen, Geschichte und Anwendung 2010; http://www.analogmuseum.org/library/ Sydow: Programmierungstechnik für elektronische Analogrechner 1964; Adler: Elektronische Analogrechner. Mathematik für Naturwissenschaft und Technik Bd8 1968; Möchte man aber rechnend weiter, so nutzt man **Reihen-Parallelschaltungen, um so über die Ausdrücke des Aussagenkalküls die Boole'schen Funktionen des jeweiligen Algorithmus auf einem Digitalrechner** zu realisieren. Aus Differenzialgleichungen, die die Veränderung des momentanen Zustands im infinitesimalen beschreiben wird Sprache, die Aussagen transportiert. Dabei durchläuft man eine Codierungssequenz, die die Kommunikation

[21] Menschen, deren Körper dauerhaft durch künstliche Bauteile ergänzt werden.

zwischen den verschiednen Ebenen herstellt. An dieser Stelle kommt das Sprachübersetzungsproblem ins Spiel. Dieses Spiel beginnt bei der Kommunikation. Sie geben heute Shell-Befehle per Tastatur ein oder agieren nonverbal über Windows und stellen so sicher, dass es keine Missverständnisse gibt. Dem spielerischen Raum der Kommandozeilenebene stehen die smarten Windows-Oberflächen, die sich des mächtigen computationalen Hinterlandes mit einem Icon nebst vorgegebner Optionen bedienen. Hier die Leser von Beletristik, dort die der Vorschulkindpappen oder Bildzeitungen, eben klare bunte Bilder. Wolf: **Shell-Programmierung:** das umfassende Handbuch. **Shell?** `echo $SHELL`; Bourne-, Korn- und Bourne-Again-Shell (Bash); grep, sed und awk; IP mit hostname. Herold: GNU/Linux-Unix-Shells. Bourne-Shell, Korn-Shell, C-Shell 1992, bash alias in .bashrc modifizieren zB alias rm='rm -i', **Leer-/Sonderzeichen im Namen:** Aus Gesamtklausur (1).pdf wird `Gesamtklausur\ \(1\).pdf` tcsh 1999[3]: **Koeberlin: Tastenkürzel** Typefacts typefacts.com/artikel/tastenkuerzel.html Sonderzeichen per Unicode. **Bash-Prompt:** `${debian_chroot:+($debian_chroot)}\u@\h:\w\$` echo $PS1 gibt `\[\e]0;\u@\h: \w\a\]${debian_chroot:+($debian_chroot)}\[\033[01;32m\]\u@\h\[\033[00m\]:\[\033[01;34m\]\w\[\033[00m\]\$` **Debian** und openSUSE Tumbleweed 32-bit-x86-Computer ct24 2019 p92, ct26 2019 p8; Hardware, Betriebssystem (Linux=Kernel), **Shell = Schale ums Betriebssystem = Kommando-Interpreter**, der Kommandos in Systemaufrufe umsetzt, den Kernel veranlasst, die Hardware handeln zu lassen. Dienstprogramme= GNU, Anwenderprogramme. Tanenbaum: Moderne Betriebssysteme 1992, 2001[2], 2009, 2016[4]; Bourne-Shell ohne History und Rechenfertigkeit, daher dc und bc -l: Eulerzahl = e(1), e^x = e(x), x^n = `x^n`, $\sqrt{x}$ = sqrt(x), $\ln(x)$ = l(x), $\sin x$ = s(x), $\cos x$ = c(x), $\arctan x$ = a(x), π = 4*a(1), definiere pi=4*a(1), dann Winkel in Grad w=b*180/pi, **Besselfunktion** $J_n(x)$ = j(n,x). `pi=$(echo "scale=10; 4*a(1)" | bc -l)`; xmodmap -pke `>~/.Xmodmap` gibt Tastenbelegung. `xmodmap ~/.Xmodmap` belegt die Tastatur. **xkeycaps** zeigt Tastenbelegung. Wenn man den Keycode einer Taste nicht kennt, verrät 'xev' den bei Tastendruck. **Compose Key** per XServer-Konfiguration editiere /etc/X11/xorg.conf. Siehe https://wiki.archlinux.de/title/Xmodmap bringt ß, €, ä,Ä,ö, Ö, ü,Ü per

```
Lokal geht
vim .Xmodmap editieren
xmodmap -pke >~/.Xmodmap , falls noch keine .Xmodmap existiert.
keycode  65 = space NoSymbol space
clear Lock  Kommando davorsetzen, falls sich Umdefinition sträubt
keycode 66  = ssharp  EuroSign statt Caps_Lock NoSymbol Caps_Lock
keycode 135 = Adiaeresis  Odiaeresis Udiaeresis
keycode 78  = odiaeresis  Odiaeresis statt Scroll_Lock NoSymbol Scroll_Lock
keycode 107 = Print Sys_Req Print Sys_Req NICHT Aendern!
keycode 110  = adiaeresis  Adiaeresis statt Home NoSymbol Home
keycode 115 = udiaeresis  Udiaeresis statt End NoSymbol End
xmodmap ~/.Xmodmap  ausführen, um Tastatur neu zu belegen.

~$ cat ~/.Xmodmap
clear Lock
! Caps lock and menu as Compose keys.
keycode 66  = Multi_key
keycode 135 = Multi_key
http://wiki.linuxquestions.org/wiki/List_of_Keysyms_Recognised_by_Xmodmap
In meiner xinit wird dann xmodmap ~/.Xmodmap gestartet, was das anwendet.
# Read and parsed by systemd-localed. It's probably wise not to edit this file
# manually too freely.
Section "InputClass"
        Identifier "system-keyboard"
        MatchIsKeyboard "on"
```

```
        Option "XkbLayout" "us"
EndSection

Section "InputDevice"
        Identifier      "Generic Keyboard"
        Driver          "kbd"
        Option          "CoreKeyboard"
        Option          "XkbRules"      "xorg"
        Option          "XkbModel"      "pc105"
        Option          "XkbLayout"     "de"
        Option          "XkbVariant"    "deadgraveacute"
```

UNIX-Konzept = Schlechter ist besser. Gertner: The Idea Factory. Bell Labs and the Great Age of American Innovation 2013; **Stallman** *1953 c't 1/2017 p60 Es geht um korrekte Wahrnehmung und Anerkennung: **GNU is Not Unix**/GNU/Linux=Shell, Compiler, Bibliothek, POSIX = awk, vi, echo. Stallman-Idee 1980 GNU General Public License = Free software foundation = Open source = FOS = freie und offene Software Gnu-Projekt als UNIX-Nachbau. 20 Jahre Open Source - Ein Rückblick von Michael Kleinhenz Oliver Zendel; Ethical Principles for Service-Oriented Computing: When users run programs on their own computers, the ethical criterion is simple: to avoid doing wrong to them, the programs must be frei (under the control of the users). Service-oriented computing raises different issues, of which the most important one is: which jobs are legitimate for servers to do, and with what kinds of interaction with users? Dr. Richard Stallman launched the free software movement in 1983 and started the development of the GNU operating system in 1984. GNU is free software: everyone has the freedom to copy it and redistribute it, with or without changes. The GNU/Linux system, basically the GNU operating system with Linux added, is used on tens of millions of computers today. Stallman has received the ACM Grace Hopper Award and the ACM Software and Systems Award, a MacArthur Foundation fellowship, the Electronic Frontier Foundation's Pioneer Award, and the the Takeda Award for Social/Economic Betterment, as well as several doctorates honoris causa, and has been inducted into the Internet Hall of Fame. Admission is free of charge, and the public is encouraged to attend. A registration only for Dr. Stallman's speech, which can be done anonymously, while not required, is appreciated, as it will help us ensure we can accommodate all the people who wish to attend.

Hurd ↔ Torwald-Kernel= Scheduling, Multitasking, Treiber, Speicherverwaltung. Fluxflux auf Netbooks oder Tablet-PC siehe blit.org Arch als Alternative zu Ubuntu **Fluxbox** sparsamer Fenstermanager für das X Window System in unixoiden Betriebssystemen. http://de.wikipedia.org/wiki/Fluxbox Xubuntu 18.04 LTS, Linux Mint 20.3 xfce, www.porteus.org, **Firewall Mint:** sudo ufw status; sudo ufw enable; grafische Oberfläche per sudo apt-get install gufw -y; Lubuntu mit evince, Gnome MPlayer, Audacious, GPicview; **OpenBSD**, NetBSD = Berkeley Software Distribution.

Scientific computing am Beispiel: Phys Modell, math Modell, numerisches Modell, Algorithmus, Programmiersprache, Informatik (Computer Science: Parallelisierung, Zahldarstellung), Computer als physikalisches Gerät oder Ensemble von Transistoren, Resultat: Plot auf Schirm, Geldautomat gibt Geld, Bewegung einer Maschine, Regelung einer Industrieanlage. **Chip**-Herstellung c't 18/2013 p76ff. **rust** 2010/15 Multiparadigmen-Systemprogrammiersprache = Multiparadigmen = generisch, nebenläufig/parallelläufig, funktional, imperativ, strukturiert. Zugriffsverletzungsschutz, der simultanen Zugriff ausschließt. O'Leary: Scientific Computing with Case Studies 2009; **Crash-Kurs/Schnelleinstieg:** Approximiere Reihen. Konvergenz und Physik-Modell-, Kontinuum-Mathematik→Diskrete-Approximation/Verfahrens-, Zahldarstellungs /Rundungs -Fehler. Logistische Abbildung. Zelluläre Automaten. Dahmen & Reusken: Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2008; **Tveito: Elements of Scientific Computing** 2010;

Problemanalyse Pendelposition $\varphi(t)$:

1. Math. Modell für Pendel: $\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$. **Lies Arnold: On teaching mathematics 1998** und dann **Charles Hermite: Uebersicht der Theorie der Ellip-**

tischen Funktionen 1855, 1863 mit Anwendung des Kettenbruchs p6. Motiv ist Newton II für die Drehbewegung im homogenen Gravitationsfeld $I\ddot{\varphi} = -M_\varphi$ mit dem rücktreibenden Kraftmoment $M_\varphi = |\vec{l} \times \vec{G}| = lm_S g \sin\varphi$ und dem Trägheitsmoment des Pendelkörpers $I = m_T l^2$ und $m_T = m_S$ bedeutet $0 = (\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi)\dot{\varphi} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega^2\cos\varphi\right]$. Erstes Integral bedeutet Energieerhaltung und für die spezielle Anfangsbedingung $\varphi_0 > 0$ und $\dot{\varphi}_0 = 0$ gilt dann $\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2[\cos\varphi - \cos\varphi_0]$ oder mit Halbwinkel $2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x$ folgt $\dot{\varphi}^2 = 4\omega^2[\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}]$. Bedeutet $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = 2\omega\sqrt{\alpha^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}}$. Schwingungsdauer ist $T(\varphi_0) = \int_0^{T(\varphi_0)} \mathrm{d}t = \frac{4}{2\omega\alpha}\int_0^{\varphi_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}\sin^2(\varphi/2)}}$ oder mit $\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)} = x = \sin\theta \in (-1, 1)$ und $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ also $\mathrm{d}x = \frac{1}{2\alpha}\cos\frac{\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$ und $\cos(\varphi/2) = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi/2)} = \sqrt{1 - \alpha^2 x^2}$ gibt Schwingungsdauer als elliptisches Integral als Funktion der Anfangsauslenkung φ_0: $T(\varphi_0) = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - \alpha^2 x^2}\sqrt{1 - x^2}}$ mit $\alpha = \sin\frac{\varphi_0}{2}$. **Oder** für $\varphi \in [0, \varphi_0)$ mit $\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\varphi_0/2)} = x = \sin\theta \in [0, 1)$ und $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ hat man $\frac{1}{2\sin(\varphi_0)}\cos(\varphi)\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2\alpha}\sqrt{1 - \sin^2(\varphi/2)}\mathrm{d}\varphi = \cos\theta\mathrm{d}\theta$ also $\frac{\mathrm{d}\varphi}{2\alpha} = \frac{\cos\theta\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi/2)}}$ bedeutet $T(\varphi_0) = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}}$. Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd1 1967 p52f Bei nicht zu großen Anfangsauslenkungen $\alpha = \sin\frac{\varphi_0}{2}$ gilt $\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2\sin^2\theta}} = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2\sin^2\theta + \frac{3}{8}\alpha^4\sin^4\theta + \ldots$. Für die amplitudenabhängige Schwingungsdauer gilt dann $T(\alpha(\varphi_0)) = \frac{2\pi}{\omega}(1 + \frac{1}{4}\alpha^2 + \frac{9}{64}\alpha^4 + \ldots)$. Siehe auch Seite 321. Burkhardt: Elliptische Funktionen 1906[2]; **Elliptische Funktion** = doppeltperiodische meromorphe Funktionen. „Doppeltperiodisch“ bedeutet, dass es im reellen Vektorraum $\mathbb{C}$ zwei linear unabhängige Perioden in Form zweier komplexer Zahlen ω_1, ω_2 gibt, sodass die beiden Periodizitätsbedingungen in Form der Funktionalgleichungen $f(z + \omega_1) = f(z)$ und $f(z + \omega_2) = f(z)$. Zuerst bei der Berechnung des Umfangs von Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gibt $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$ mit **numerischer Exzentrizität** $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ oder $\epsilon^2 a^2 = a^2 - b^2$ verwendet. Bedeutet $1 + y'^2 = \frac{a^2 - \epsilon^2 x^2}{a^2 - x^2} \overset{x = a\cos\varphi}{=} \frac{1 - \epsilon^2\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}$. Wegen $x = a\cos\varphi$ folgt für ein Viertel der **Länge einer Planetenbahn:** $\frac{U}{4} = \int_0^a \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}$ mit $a \in [-a, a]$ oder $\frac{U}{4} = -a\int_{0 = a\cos\varphi}^{a = \cos\varphi}\mathrm{d}\varphi\sqrt{1 - \epsilon^2\cos^2\varphi} = -a\int_{\pi/2}^0 \mathrm{d}\varphi\sqrt{1 - \epsilon^2\cos^2\varphi} = a\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\sqrt{1 - \epsilon^2\cos^2\varphi}$. Mit $x = \epsilon\cos\varphi$ und $\mathrm{d}x = -\epsilon\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$ und $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ oder $\varphi \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ folgt $\frac{U}{4} = -a\int_{\epsilon = \epsilon\cos 0}^{0 = \epsilon\cos\pi/2}\mathrm{d}x\frac{\sqrt{1 - x^2}}{\epsilon\sqrt{1 - \cos^2\varphi}} = a\int_0^\epsilon \mathrm{d}x\sqrt{\frac{1 - x^2}{\epsilon^2 - x^2}} \overset{x = \epsilon z}{=} a\int_0^1 \mathrm{d}z\frac{\sqrt{1 - \epsilon^2 z^2}}{\sqrt{1 - z^2}}$. Koecher & Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen 2007[2]; Königsberger: Elliptische Funktionen, nebst einer Einleitung in die allgemeine Functionenlehre 1874 e-book http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ACQ7775.0001.001; Fricke: Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen Teil2 1922; Abramowitz & Stegun: Handbook of Mathematical Functions 1964 Kap16; Whittaker & Watson: A Course of Modern Analysis 1940; **Elliptisches Integral** $\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)\mathrm{d}x$, wobei R eine rationale Funktion in zwei Variablen und P(x) ein Polynom dritten oder vierten Grades ohne mehrfache Nullstelle ist. Das Integral heißt elliptisch, weil Integrale dieser Form bei der Berechnung des Umfangs von Ellipsen und der Oberfläche von Ellipsoiden auftreten. **I. Art:** $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$. **II. Art:** $\int\sqrt{\frac{1 - k^2x^2}{1 - x^2}}\mathrm{d}x$. **III. Art:** $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1 - nx^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$. Dabei ist $0 < k < 1$. Durch die Substitution $x = \sin\vartheta$ werden diese Integrale auf die Legendre-Form gebracht: **I. Art:** $F(\varphi, k) = \int_0^\varphi\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{1 - k^2(\sin\vartheta)^2}}$ **II. Art:** $E(\varphi, k) = \int_0^\varphi\sqrt{1 - k^2(\sin\vartheta)^2}\,\mathrm{d}\vartheta$ **III. Art:** $\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi\frac{\mathrm{d}\vartheta}{(1 - n(\sin\vartheta)^2)\sqrt{1 - k^2(\sin\vartheta)^2}}$. Die Integrale mit unterer Integralgrenze 0 nennt man **unvollständige elliptische** Integrale. Ist zusätzlich die **obere Integralgrenze** $\pi/2$, spricht man im Falle der I. und II. Art von **vollständigen elliptischen** Integralen, $K(k) = F(\frac{\pi}{2}, k), E(k) = E(\frac{\pi}{2}, k), \Pi(n, k) = \Pi(\frac{\pi}{2}, n, k)$. Bulirsch & Callis: Mathematik und Hochtechnologie, Verh der Gesell. Dt Naturf und Ärzte 118. Vollv Hamburg 1995 p97-114;

Modellfehler: Reibungsfrei, Stange ohne **Trägheitsmoment** $J_x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}m\, x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x^2\, \rho(x) = ml^2$ wegen $\rho(x) = m\delta(x-l)$. **2. Numerisches Modell**: Euler-Verfahren. Verfahrensfehler. **3. Lösungs-Algorithmus**: Ein durch einen Text endlicher Länge beschreibbares Verfahren zur schematischen Beantwortung einer abgegrenzten Problemklasse. Algorithmen realisieren mathematische Modelle einer problemstellung ct8.2020p63ff. Kurz: Abstrakte Methode zur Berechnung einer Ausgabe bei gegebener Eingabe. $\mathcal{A} : W \to \Sigma^*$ mit Sprache $W \subseteq \Sigma^*$ ordnet als Fragen oder Aufgaben interpretierbaren Wörtern über einem Alphabet eine Antwort in Σ^* zu. Beispiel: $\Sigma = \{0, 1, \ldots, 9, \sqcap\}$ **4. Programmierung** - Rechnerverständlichkeit herstellen. **Language of coding.** Programm, Code: Verkörperung des Algorithmus in einer Programmiersprache. Frage und Antwort als Sprache oder Kommunikation. **Alphabet** nötig! **5. Compilierung**: Assembler (Montage. Zuordnung Symbolwort ADD zu Maschinenwort 0000 0010) oder Hochsprache. Formale Sprache L. Gegeben Alphabet Σ mit $\Sigma \subseteq \Sigma^*$, Produktionssystem $P = (\Sigma, R)$ macht mit Regelsystem $R : \Sigma^* \times \Sigma^* \to \Sigma^*$ Wortableitungen $W \in \{*, -, +, /, \ldots\} \subset \Sigma^*$. **Programmfehler = bug**: Heisenbug = extrem schwierige Wiederherstellung der für die Reproduktion des Bugs notwendigen Rahmenbedingungen, treten in Multi-Threaded-Umgebungen vermehrt auf, insbes. bei Race Condition. Bohrbug = einfache Wiederherstellung der für die Reproduktion des Bugs notwendigen Rahmenbedingungen. **Debugging = entwanzen**. **Python:** Programmdatei programm.py ⇒ **Compiler** ⇒ **Kompilat = Byte-Code** im Speicher ⇒ **Interpreter = virtuelle Maschine** führt Byte-Code erst jetzt auf Prozessor aus. **Shebang = Magic Line** am Skriptzeilenbeginn `#!` bezeichnet Dokumenttypdefinition, die Unixsystem zur Ausführung auf Prozessor veranlasst. Doppelkreuz `#` = hash oder sharp, ! = bang.

Schmid: Einführung in die deutsche Sprachgeschichte 2009; Glück: Metzler Lexikon der Sprache 1993; Pinker: Der Sprachinstinkt 1994; Heike: Phonologie 1982[2]; Von ca. 2650 Sprachen werden noch mehr als 504 gesprochen. Genetischer Gründer-Effekt geht mit Abnahme der Phonemvielfalt einher. Vokalverlust mit Abstand von Afrika. Allgemeine Regelgrammatik, kontextfreie oder Chomsky-Grammatik $\mathcal{G} = (\Phi, \Sigma, R, S)$ mit Hilfsvokabular/Nichtterminalsymbolen oder Grammatik $\Phi = \{B, L, N\}$, Grundvokabular/Terminalsymbolen $\Sigma = \{0, 1, .\}$, $\Phi \cap \Sigma = \emptyset$, Startvariable (ein Nichtterminalsymbol) $S \in \Phi$ hier speziell $N \in \Phi$ und Regelsystem $R : B \to 0, B \to 1, L \to B, L \to LB, N \to L, N \to L.L$. **Chomsky-Hierarchie**. Als Wortproblem einer formalen Sprache bezeichnet man in der Theoretischen Informatik das Entscheidungsproblem, zu einem gegebenen Wort festzustellen, ob dieses zur Sprache gehört, oder nicht. Das Wortproblem einer Sprache L ist entscheidbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ_L berechenbar ist. Sie ist definiert durch $\chi_L \colon \Sigma^* \to \{0,1\};\ w \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } w \in L \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$. Die Sprache L hat also ein entscheidbares Wortproblem, wenn es einen Algorithmus gibt, der in endlicher Zeit herausfindet, ob $w \in L$ oder nicht. Jedes Entscheidungsproblem lässt sich als Wortproblem einer formalen Sprache codieren. Die Schwierigkeit des Wortproblems hängt von der zugrunde gelegten Klasse der Sprachen ab. Für die Chomsky-Hierarchie ist bekannt: Das Wortproblem für Typ-0-Sprachen ist rekursiv aufzählbar und nicht entscheidbar. Das Wortproblem für Typ-1-Sprachen ist entscheidbar. Der Zeitbedarf ist höchstens exponentiell, die Platzkomplexität ist exakt linear. Damit ist insbesondere das Wortproblem für weiter eingeschränkte Sprachklassen ebenfalls entscheidbar. Das Wortproblem für Typ-2-Sprachen ist durch den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus lösbar (setzt Chomsky-Normalform voraus), oder auch durch den Earley-Algorithmus (setzt Epsilon-freie Grammatik voraus). Der Zeitbedarf ist höchstens kubisch, die Platzkomplexität ist höchstens quadratisch. Das Wortproblem für Typ-3-Sprachen ist durch deterministische endliche Automaten lösbar. Die Zeitkomplexität des Problems ist linear, die Platzkomplexität ist konstant. **Schöning: Theoretische Informatik kurz gefasst** 2008[5]; Bahro, Engelmann, Laabs, Paulin, Raake et al.: Kleiner Leitfaden. Informatik und ihre Anwendungen 2001; Paetzold: Grundlagen der Computertechnik für Elektroberufe 1988; Weigend: Objektorientierte Programmierung mit Python 3, p757 EBNF Extended Backus Naur Form:

Scientific computing ist auch physikalisches Computing. Es geht nicht nur darum ein Resultat auf dem Bildschirm auszugeben. Das wäre mit dem Wachkoma vergleichbar. Wir selbst sind lernende Wesen, die unmittelbar auf Umgebung reagieren. Modell eines Tieres, des Menschen kann ein Ziel sein. Roboter, Terminator. Zeige: Flip-Flop mit Verweis auf Elektronik-Praktikum. Arduino zu Mikrokontroller. Humanoider Roboter: Ingenieursarbeit, Fachhochschule, Informatik, Field programable gate array, Kognitionswissen-

schaft.

Physik, Mathematik, Elektronik, Semiotik, Informatik, Kybernetik, Sprachtheorie, Kognitionswissenschaften. Penrose: Schleife/Zirkel einer phys, mentalen und mathematischen Welt.

1.1 Naturwissenschaftliche Methoden nehmen isolierte, begrifflich umschriebene, idealisierte Situationen in den Blick a] Experiment im Labor legt durch eine Vielzahl von geeignet präparierten Gegenständen Beziehungen offen: $s\ t^2, F\ \ -x$, b] analyt. Modelle liefern sythetische Urteile über die Wirklichkeit mittels Mathematik nachdem die Entsprechungen mit der Wirklichkeit vereinbart worden sind: Newton'sche Gleichung + Kraftgesetz = Bewegungsgleichung = Differenzial-Gleichung. Lösung per Bleistift. ABER b1] oft keine geschlossene Lösung: Math. Pendel mit beliebiger Auslenkung. Näherung oder Störungsrechnung notwendig. b2] Anzahl der Gleichungen zu groß weil viele Störungsterme nötig oder weil System sehr viele Teilchen umfasst. b3] Bei komplexen Systemen, wo Reduktionismus versagt, liegen nichtlineare Gleichungen vor, die nur mit computationalen Modellen gelöst werden können: logistische Abbildung als demografisches Modell einer Population. Heitzinger, Troch, Valentin: Praxis nichtlinearer Gleichungen 1984; c] computationale Modelle sind elektronisch kodierte, also diskrete, digitale, numerische Abbilder analyt. Modelle oder von Anfang an Abbilder der gar nicht anders als in Raum und Zeit diskret abgetasten Wirklichkeit. c0] Logistische Abbildung ist grobes Modell der Wirklichkeit, liefert Idee der Iteration c1] Taylor-Reihen: sin(x), sqrt(x) c2] Lösung von linearen Gleichungssystemen c3] Lösung von Dgls c4] Schätzung von Momenten, Verteilungen c5] Ausgleichsrechnung, Fits c6] Simulation von Zufallsprozessen ion(); YData=randn(Length); plot(YData); for i in range(14): clf(); YData[randint(Length)] = randn(); plot(YData); raw_input('Press enter...'), The graph is interactive *and* the terminal responds to enter; Unicode-Block Griechisch und Koptisch: http://de. wikipedia. org/wiki /Unicode-`Block_Griechisch_und_Koptisch` **Python-Symbole:** 's' = square; 'o' + circle; `'^'` = triangle up; `'>'` : triangle right; 'v' : triangle down; `'<'` = triangle left; 'd' = diamond; 'p' = pentagram; 'h' = hexagon; '8' = octagon; **Python-Linestyle:** '-',':','-.'; **Plot-Ticksize**, also Achsenzahlengröße: plot.tick_params(axis='both', which='major', labelsize=10) plot.tick_params(axis='both', which='minor', labelsize=8); **Plot-Beschriftungsgröße:** xlabel('t',fontsize=30) oder title('x',fontsize=30); legend(['S','C'],loc='best',prop={'size':30}); **Plot-Symbolgröße:** markersize=0.8 oder **ms=0.5**; plot(x, y, 'o', markersize=20) bigger; X=randint(0,8,20); Y=randint(0,8,20); val_array = [str(int(v)) for v in X]; plot(X,Y,'o') for x, y, val in zip(X, Y, val_array): text(x, y, val) np.linspace(0,1,num=10); np.linspace(0,1,10,endpoi Y=**logspace**(log der unteren Intervallgrenze, log der oberen Intervallgrenze, num=50, base=10.0) gibt Exponentialfunktion linear auf der logarithmischen Achse aus semilogy(Y). np.logspace(-3,0,num=4,base=2) gibt 4 Werte 1/8,1/4,1/2, 1. np.logspace(start,stop,num=50,endpoint=True,base=10.0) **Plot-Aspektverhältnis:** fig = plt.figure() plt. axes().set_aspect (1.0) plt.plot([-0,1],[0,1]) Uhde: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik. Taf1 Zylinderfunktionen 1964; Uhde: Spezielle Funktionen der mathematischen Physik. TafelnII. Eliptische Integrale. Thetafunktionen. Legendresche Polynome. Laguerresche Funktionen. Gammafunktionen 1964; **Spezielle Funktionen** from scipy.special import jn **Bessel-Funktion**. **Bowman: Introduction to Bessel Functions** 1958; **IPython Notebook Viewer:** http://nbviewer. ipython. org/ install und call **ipython notebook &** oder **jupyter notebook** Enter wie bei Mathematica **Shift-Enter**, Beispiel: http://nbviewer. ipython. org/gist/ perrette/ 822030dc071636cc97f6/ carbonatei_compensation. ipynb **Notebook-Intro** ist **qt-basiert.** http://ipython. org/ipython-doc/stable/interactive/qtconsole.html. **spyder** = matlab-Analog. **pdb** = Python-Debugging; **Shell** mit ! oder % ls -l. Bei **ipython** mit **import os; os.system('pwd');** PathName = '/home/helgard/Python/'; print os.path.getsize(PathName); FileName1 = 'A4.py' print 'Filegroesse von',
str(PathName+FileName1), 'umfasst', **Filegröße** mit **os. stat(PathName+ FileName1)[6]**, 'Bytes'; **os.system('gzip Text1.txt')**; os.system('gzip '+FileName2); FileName3 = FileName2+'.gz'; x = linspace(0,1.4,500); Expo = [] for n in range(-5,7): expo = 2**n; Expo.append(str(expo)); plot(x,x**expo); `title('$x^n$ wobei $n=2^m$ mit $m\in[-5,7]$');`
`xlabel('x');ylabel('$x^{2^m}$')` **legend**(Expo,loc='upper left'); **axis**([0,1.4,0,2])
plot(linspace(0,1.4,100),[x**x for x in linspace(0,1.4,100)],'-',linspace(0,1.4,100),[x**x*(1+log(x)) for x in linspace(0,1.4,100)],':',linspace(0,1.4,100),[0 for x in linspace(0,1.4,100)])
`legend(['$x^x$','$(1ln(x)x^x$'],loc='lower right')` r=linspace(0.1,4,100); plot(r,(r**2-1)/r,r,[0 for i

in r]); plot([sin(x) for x in rand(500)]); Definitionsbereich = arange(7); **plot**(Definitionsbereich,[x**2 for x in Definitionsbereich]);

```
#!/bin/local # -*- coding: utf-8 oder cp1252 -*- from pylab import *
t=linspace(-pi,pi,100) # Anfang, Ende, Stuetzstellenzahl
figure(0).canvas.set_window_title('Kegelschnittfenster-Fenster')
subplots_adjust(wspace=0.4, hspace=0.4) # verhindert überlappen der Beschriftungen
subplot(2,1,1); plot(cos(t),sin(t)); title('Ellipse');xlabel('x')
subplot(2,1,2); t=linspace(-1,1,100); plot(-cosh(t),sinh(t),'xy',cosh(t),sinh(t),'.g')
title('Hyperbel');xlabel('x'); legend(('linker Ast','rechter Ast'),loc='best')
figure(1).canvas.set_window_title('Pulsfenster'); M=[0,1,2,3,4,6,7,8,8,8,8,0,0,0]
plot(7*M); axis([-2,90,-1,9]); oder ylim(ymin=-1,ymax=12) show()
semilogx(x,y); loglog(x,y)

       legend(["y = "+str(m[0])+'$\\tau$x + '+str(b)])
tau = u'\N{GREEK SMALL LETTER TAU}'; ord(tau); 964; print tau;
Pi = u'\N{GREEK CAPITAL LETTER PI}'
http://www.scarfboy.com/coding/unicode-tool?s=U%252b03c3
# Kurven-Schar
m = array(ones((1,7))*linspace(-3,3,7),dtype=int)
x = ones((1,200))*linspace(-4,4,200)
M = dot(m.T,x).T

for b in linspace(5,8,4):
        plot(0,0,'w.')
        plot(M+b)
        legend(["y = "+str(m[0])+'$\\cdot$x + '+str(b)])
        show()
        exit()

import urllib, urllib2
datafile="http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/DATA/1d-Observations/
Sonnenflecken.dat" # declaration of the data source file name
req = urllib2.Request(datafile)
urllib2.urlopen(req)           # open the source file
fileName = "Sonnenflecken.dat" # declaration of the destination file name
urllib.urlretrieve(datafile,fileName)
x=mlab.load("Sonnenflecken.dat") oder data = loadtxt("daten.dat")
x,y,z = loadtxt('somefile.dat', usecols=[3,5,7], unpack=True, comments='#', skiprows=0)
unpack=True transponiert den Input-Daten-Strom!
Neu numpy.loadtxt
Delay = 3; plot(X[:-N],X[Delay:])
plot(x[:,0],x[:,1])
f=open('Data.txt','w+'); data=f.read(); close(); a=matrix([[],[]])
from pylab import *; num = 19 f = file('numbers.txt','w')
s = ['alt','neu','wo?','Ich','gehe','jetzt']; r = linspace(-1.1,pi,len(s))
liste = ["Nummer %d\n" % x for x in range(num)]; f.writelines(liste)
sliste= ["Wort %s %0.3f\n" % (s[i], r[i]) for i in range(len(s))]
f.writelines(sliste); f.close()
D=Array[Liste] oder L=list(D)
# Punkte.dat hat Rechteckschema
```

```
from pylab import *
x=loadtxt("Punkte.dat", usecols=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10], unpack=False, comments='#', skiprows=0)
for i in range(len(x)): int(sum(x[i])) dann paste Punkte.dat S
```

writelines. Rekursion (Wikipedia, Hofstadter p137ff, Peitgen et al.: Fraktale) Bedeutung des Zeichens = 1. Mathematisch für Gleichheit von Ausdrücken. In diesem Sinne bei Abfragen if oder while als == oder eq. Bei einer **while-Anweisung** wird eine Anweisungsfolge oder **suite** solange wiederholt, bis **Schleifenbedingung** erfüllt ist. 2. Bei Definitionen der Mathematik ist a:= BlaBla in Gebrauch. Ähnlich fungiert das in Computer-Codes allgegenwärtige dynamische Gleichheitszeichen bei Zuweisungen. eps = 1; n = 0; while 1.0+eps != 1.0 : n += 1; eps = 2**(-n); n = 0 nfak = 1 e = 0 cont = True Abbruchvariable (cont = continue); while cont: e += 1.0/ nfak; n += 1; nfak *= n fakultaet von n als n! = n*(n-1)! cont = (e != (e + 1.0/nfak)) **Rekursionsgrenze:** from sys import *; getrecursionlimit(); setrecursionlimit(20000)

Aizerman: **Logik, Automaten, Algorithmen** 1967; Kämmerer: Digitale Automaten. Theorie, Struktur, Technik, Programmieren 1973[2]; Gössel: Automatentheorie für Ingenieure 1991; **Programmier-Stil:** Stodden & Minguez: Best Practices for Computational Science. Software Infrastructure and Environments for Reproducible and Extensible Research, Journal of Open Research Software2 2014 p1-6; Meinel & Mundhenk: Mathematische Grundlagen der Informatik. Mathematisches Denken und Beweisen 2009; e-books von Schindler: Logische Grundlagen der Mathematik 2009; Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik 1981 p150-154; Rautenberg: Einführung in die Mathematische Logik. Ein Lehrbuch 2008;

Durch **Grobkörnung**, Filterung, **Partitionierung** der Zustandsvariablen eines komplexen dynamischen Systems kommt man zu Zeichen, also zu **emergenten Strukturen** und entsprechenden konzeptionellen Modellen. Aus der Zufallsvariablen Körpertemperatur $T(\omega)$ erhält man die Patitionierung $\{gesund, krank\}$, entsprechend Halsrötung oder CRP-Wert ober oder unterhalb einer Schranke $R(\omega)$. Durch Kovarianz $\gamma(R,T)$ codiert man Einsichten, Zusammenhangsstrukturen. Der Umgang mit Makrozuständen statt mit Mikrozuständen schafft eine weniger zufällig erscheinende Welt. Filtern einer Zufallsvariablen verleiht einer Realisierung eine makroskopische Struktur, die aber auch Zufallsprodukt ist. Siehe Seite 72.

Worte = schriftliche / lautsprachliche Sachverhalte, die bedeutsame Sachverhalte abbilden / bezeichnen, spezielle Grobkörnungen / emergente Strukturen repräsentieren $\subset$ Zeichen $\subset$ Signal = physikalischer Sachverhalt mit Bedeutung $\subset$ physikalische Sachverhalte. Zeichen oder Buchstabe ist Klasse aller bedeutungsgleichen Glyphe. Glyphe ist deren konkrete grafische Darstellung eines Zeichens. Eco gemäß Augustinus: **Ein Zeichen ist etwas, das das, was in meinem Kopf war, in den Kopf anderer Menschen bringt.** Philosophie Magazin 2 2013 p64;

NLD untersucht dyn Systeme im Hinblick auf typisches Verhalten, während in Kybernetik/Regelungstheorie dyn Systeme durch Hinzunahme zumeist nichtlinearer Glieder auf gewünschtes Lösungsverhalten führt. Zustandsvariable trägt zunächst weder Semantik noch Sytax. Die Position der Erde oder der Sonnenstand haben zunächst keine Bedeutung. Dazu muss ein weiteres System ankoppeln, z.B. Maschine/Pflanze/Mensch die Energie brauchen. Goetzberger & Wittwer: Sonnenenergie. Thermische Nutzung 1989 p16 Wärmepumpe;

Zustände von Transistoren = **transfer resistor** repräsentieren die Größen selbst und deren Werte. Analogie zum Hirn. Der Zustand eines physikalischen Gegenstands repräsentiert unser Modell und deutet unser Modell aus. **Signal- & Interpretations-Verarbeitung: Signal ist physikalischer Sachverhalt mit vereinbarter Bedeutung**: Ampel rot, Blinker links, Daumen nach unten. Hofstadter p170ff;

Daten sind sind die den Signalen zugeordneten Bedeutungen: Halt, will vorgeblich links abbiegen, schuldig. Zeichen ist Signalklasse/Synonym: geschriebener Buchstabe/Ziffer, gesprochenes Phonem. Heike: Phonologie 1982[2]; Wörter. Können verschiedene Bedeutung haben, Homonyme: Welle (Wasser, Zylinder zur Kraftübertragung) Code ist bijektive Abbildungsvorschrift: gewöhnliche Buchstaben = latainische und Ziffern, die indischen $\rightarrow$ moderne arabische Ziffern 0=5 und .=0 oder die römischen Ziffern L=50, C=100, D=500, M=1000 oder **Morsezeichen** A.- B-... C -.-. D -.. E . F..-. G- -. H.... I.. J.- - - K-.- L.-.. M- - N-. O- - - P.- -. Q- -.- R.-. S... T- U..- V...- W.- - X-..- Y-.- - Z- -.. 1.- - - - 2..- - - 3...- - 4....- 5..... 6-.... 7- -... 8- - -.. 9- - - -. 0- - - - - werden eineindeutig zugeordnet. Beschreibung Buch liegt auf Buchdeckel: Vereinbare

Ort im Speicher für Buch=Adresse und Eigenschaft des Buches=Wert 0 oder L für liegt auf Buchdeckel oder Buchrücken. Ganz analog Vereinbarung mein Guthaben=Adresse der Adresse hat Wert in Euro. All das wird durch Ikons einer Fensteroberfläche verdeckt. Auch bei der Verwendung einer Hochsprache wird zur Vertuschung der Details alles in Sytax gelegt. In Wirklichkeit kann man genau sagen, welche Transistoren an welcher Zeit auf die fas Nanosekunde genau an welcher Stelle auf dem Chip fast mit Nanometer-Genauigkeit ein Transistor gerade leitend sind und welche nicht. Der Anwender soll damit verschont werden. Er hat schon so genug zu tun - kommt oft mit sich selbst nicht klar. Aber ein Naturwissenschaftler sollte davon eine Ahnung haben. So wird die Lösung einer Dgl plötzlich über ein Mensch-Maschine-Kommunikation mittels Hochsprache in ein algorithmus-getriebenenes dynamisches System über Transisitoren. **Programmiersprachen** ersparen Programmierern, Maschinencode zu schreiben. Compiler übersetzen den Programmcode in den Maschinencode-Dialekt der jeweils benutzten CPU. Informationsverarbeitung in Maschine, Zelle, Gehirn. **Körperlagesinn = 6. Sinn**. Miram & Krumwiede: Informationsverarbeitung. Reizphysiologie. Sinnesphysiologie. Neurophysiologie. Kybernetik 1990; **Boltjanski: Differentialrechnung einmal anders** 1956 p57f; **Neil Gershenfeld: The physics of information technology** 2000; Berthet & Mercouroff: Informationsverarbeitung 1982;

Technische Informatik. Modell des gedämpften Schwingers in Mechanik oder E-Dyn führt auf Dgl. Nun wird aus dem theoretischen Konstrukt wieder ein Modell entweder als Analogcomputer oder als Algorithmus/Turing-Maschine, Python-Code, Maschinencode, L0-Sequenz von Zuständen einer elektronischen Schaltung oder Spannungen eines Digital-Computers mit all seinen begrenzten Fähigkeiten und Artefakten. Von Neumann: Die Rechenmaschine und das Gehirn; McCuoch & Pitts; Steinbuch: Automat & Mensch; Hofstadter: Gödel, Escher Bach 1979; Kippenhahn: Verschlüsselte Botschaften 1997; Dege: Maschinelles Rechnen 1971; Reiss & Stroth: Endliche Strukturen (Mathematik fur das Lehramt, Gruppentheorie, Tourenplanung, **Codierung**) 2011; Kerner: Num Mathe 1985; Kerner: Informatik 1990; Schiffmann: Technische Informatik 1 &2, 2005; Knoll & Christaller: Robotik; Dyson: **Turing's Cathedral**. The Origins of the Digital Universe 2012;

Scientific Computing = Behandlung von Problemen aus Wiss & Technik mit num Methoden & Informatik. Computeralgebra/symbolisches Rechnen und numerisches Rechnen. Press Bibel oder Dahlquist: Numerical methods in scientific computing oder speziell Computational science and its applications - ICCSA 2006; Yevick: A Short Course in Computational Science and Engineering. C++, Java and Octave. Numerical Programming with Free Software Tools 2012; LINPACK, LAPACK, Als Hilfsbibliothek nutzen die Routinen in LAPACK für elementare Operationen der linearen Algebra das Softwarepaket Basic Linear Algebra Subprograms (BLAS). Mit -mkl linken. **Object dump oder Octal dump per od:** `echo "Hello ^C" | od -cb`; Die Streaming SIMD Extensions (SSE), früher auch Internet SIMD Streaming Extensions (ISSE) ist eine von Intel entwickelte Befehlssatzerweiterung der x86-Architektur, die mit der Einführung des Pentium-III-(Katmai)-Prozessors 1999 vorgestellt wurde und deshalb anfangs den Namen Katmai New Instructions (KNI) trug. Zweck ist es, Programme durch Parallelisierung auf Instruktionslevel zu beschleunigen, genannt SIMD. Rostamian: Programming Projects in C for Students of Engineering, Science, and Mathematics SIAM 2014; Beu: Introduction to Numerical Programming: A Practical Guide for Scientists and Engineers Using Python and C/C++ 2014; Franklin: Computational Methods for Physics 2013; Markus: Modern Fortran in Practice 2012; Hanson & Hopkins: Numerical Computing with Modern Fortran SIAM 2013;

Drösser: Total berechenbar? Wenn Algorithmen für uns entscheiden 2016; Rudder: Inside Big Data. Unsere Daten zeigen, wer wir wirklich sind 2016; Press: Software, Algorithmen und Codes gibt es im Netz ohne Ende. Mikrocontroler sind überall: Cell phone = 10^9 Transistoren und 50 verschiedenen Metallen = Li, Mg, Koltan=Tantal aus Burundi, Ruanda und Kongo für Kondensatoren, Alu aus Dt, Norwegen und Kanada, Au, Ag, Pt, Neodym und Dysprosium, **Handy-Strom-Verbraucher:** Video $\leq$ 4 W, WLAN-Download $<$ 3 W, Display $<$ 1 W, WLAN-Scan $<$ 0.9 W, GPS $<$ 0.5 W, c't 2015, H22 p86-95: Zur Not WLAN aus oder Flugmodus! Landsat 8 liefert GPS. Mikrowellen-Hearing. Hans Bethe. Schwan-Versuche. Microwave scalp. Frey-Effekt 1961 = microwave auditory effect, microwave hearing effect, RF hearing. Apps deinstallieren, um Wakelocks zu vermeiden. Play: keine automatischen Updates, automatische Synchro deaktivieren, um Hintergrunddaten-Transfers zu beschränken. 2021 bereits über 250,000 Basisstationen in Deutschland, Vogel: Die Anker des Mobilfunks, PhysJ20 2021 H11 p38f; **Smartphone, Tablet** = (Leuchte, Notizzettel, Life360

= raumzeitliche Familienüberwachung, Personentracking, nachtlesbares Papier/Buch/Zeitschrift, Radio mit Aufnahmefunktion, Wörterbuch, Fotoapparat, Videokamera, Familienalbum, Diktiergerät, Sanduhr, Terminkalender, Stoppuhr, Kalender, Landkarte, Kompass, Navigator, Wecker, Uhr, virtueller 3D-Raum (Head-mounted Smartphone c't 2015 H7 p88f, p96, VR-Handyhalter-Apps), Apps, die mathematische Gleichung auf jpeg extrahieren und lösen, Enzyklopädie, Telefon. Auto, Autopilot. Greanias: The Alignment. Ingress = Augmented-Reality-/Alternate-Reality-Computerspiel 2013; **Computerspiele** Programmierung per Browser ab 15 Jahren in Processing.js ct2019H7 p184; I/O = **Sinne** eines Smartphones: Tastatur, Touchscreen Robert Adler 1913-2007 **Adler-Gleichung**, Fernbedienung (= IR-Trägersignal 38 kHz. Signalfolge = burst hat Sendedauer von 560 μs = 21 Wellenzüge des Trägersignals. Bursts und Pausen zwischen ihnen kodieren die Information. **Impulstelegramm:** Burst- und Pausendauer. Verfahren RC-5 und RC-6. Träger von 36 kHz. Bursts und Pausen haben jeweils eine Dauer von 889 μs. Kodierung per Manchester-Code. Signalpaket überträgt 14 Bit, so dass pro Sekunde ein Sendebefehl mindestens zehnmal wiederholt ausgestrahlt wird), Mikrophon, Lagesensor, 2 Kameras, FM-Empfänger, GPS, tastet Flashspeicher ab (MP3-, MP4-sensibel), BlueTooth, WLAN, NFC, UMTS, G2, G3. **Ausgabe:** Lautsprecher, Klingel/Rufton, Vibration, LED/LCD-Display, diverse USB-Anschlüsse. **ActionCam**: DashCam. Zeigt, was unserer Aufmerksamkeit entgeht, was andere über uns wissen können, misst Schnelligkeit von Umgebungsveränderungen, liefert Beweisfotos, zeigt Grenzen der Speicher bei 2MByte pro sek oder 7 GByte pro Stunde. Ein 12-Stundentag bringt es auf 100GB. Diese physikalische Datenmenge filtert, ignoriert und kondensiert ein gesundes Nervensystem, unmittelbar Handlungen zu steuern oder erinnert werden zu können. Das besiert auf Kategorien, Mustern oder Modellen. Verstehen, was geht, was hinter Smartphones steckt und warum sie hin und wieder versagen. Denn es gibt kein num Verfahren, dass unter allen Umständen funktioniert. Es gibt keine reellen Zahlen und auch nur wenige rationale Zahlen. Beim Aufwärtszählen Zählen gibt es ein Ende oder einen Zyklus. -Es gibt neben der Null, die oft nicht richtig repräsentiert ist, ein ganzes Zahlenintervall, das Null ist. So der Begriff einer singulären Matrix schwammig und es gibt numerische Lösungen, die gar nicht existieren.

Problemstellung Pendel Dahmen p4f: Math Modell (Modellfehler), Messung beim Experiment (Daten/-Messfehler), Konstruktiver num Ansatz (Verfahrensfehler), Realisierung über Algorithmus (Rundungsfehler)

Ein Signal (latein: signalis 'dazu bestimmt', signum 'ein Zeichen') ist ein Zeichen mit einer bestimmten Bedeutung, die das Signal durch Verabredung oder durch Vorschrift erhält. Eine Information kann durch ein Signal transportiert werden. Dazu braucht es einen Sender und einen Empfänger (vgl. das Funksignal in der Nachrichtentechnik). Lipsmeier: Friedrich Tabellenbuch. Informations- und Kommunikationstechnik 2005[5]. Kress: Theoretische Grundlagen der Übertragung digitaler Signale 1979; Ohne technische Hilfsmittel kommt man bei der direkten menschlichen Kommunikation aus, dort können (oft nonverbale) Signale verschiedene Aufforderungen bedeuten. Ein Signal enthält im allgemeinen eine Bedeutung und kann zur Übertragung einer Nachricht genutzt werden. Es ist nur dann von Nutzen, wenn der Empfänger einen definierten Sinn darin erkennt, über einen geeigneten Sensor verfügt und den Informationsgehalt entsprechend auswerten kann. Ein Gerät oder Gegenstand zur Signalerzeugung ist ein Signalgerät (Signalmittel). Wird ein Signal zur Auswertung von Information genutzt, nennt man es Nutzsignal. Behindert es die Übertragung nützlicher Information, so heißt es Störsignal: In diesem Fall enthält es selbst keine verwertbare Information. Zwischenmenschliche Kommunikation: Signale in der Kommunikation zwischen Menschen können Aufforderungen zum Beginn bedeuten und zur Aufmerksamkeit (Warnsignal, Kleidung in Signalfarbe, freie Fahrt, Signal zum Angriff, Paarungswilligkeit). Von elektrischen, chemischen oder körpersprachlichen Zeichen kann auch Signalwirkung ausgehen - z. B. bei einem Duftstoff oder einer Geste. Konditionierung: Auch im Umgang zwischen Mensch und Tier sind Signale üblich (vgl. Kommando), so zum Beispiel bei Hund oder Pferd. Hierbei müssen die Schritte des Signalerkennens, der Signalauswertung und einer entsprechend antrainierten Reaktion vorher geübt werden. Die Abgrenzung von technischen und nicht-technischen Signalen ist nicht in jedem Fall vollkommen eindeutig herzustellen. Ein nicht technisches Signal aus dem Bereich Verkehrswesen ist ein Polizist, der mit Handzeichen den Verkehr regelt. Und ein technisches Signal aus dem Bereich Kommunikation ist das Signal in der Telefonleitung. Lichtsignal und Tonsignal lassen sich nach den verschiedenen Quellen eindeutig voneinander unterscheiden. Bekannte Quelle für ein Lichtsignal ist die Beleuchtung für

Notausgänge (Piktogramm). Allgemein ist ein Signal im technisch-physikalischen Zusammenhang eine Wirkung, welche von einem physikalischen Objekt ausgeht und sich mathematisch als eine Funktion beschreiben lässt (beispielsweise ein elektrischer Spannungsverlauf über der Zeit).

Dorsal - auf das Tun gerichtet. Ventral ... **Affordanz = Zuhandensein**, heideggersch, Angebotscharakter ist die von einem Gegenstand – offensichtlich vorhandene oder tatsächlich gegebene – angebotene Gebrauchseigenschaft für Subjekte (Mensch oder Tier). Dies ist für die Handlungsplanung von Mensch und Roboter wichtig. Ein Stuhl hat für Menschen den Angebotscharakter zum Sitzen oder Hinaufsteigen geeignet zu sein (nicht für einen Elefanten). Ein Schalter hat den Angebotscharakter, dass er in die jeweils andere Position umgelegt werden kann - gestreichelt zu werden gehört dagegen nicht zu seinem Angebotscharakter.

Für den Angebotscharakter der Gegenstände gibt es Begrenzungen, die sich aus physischen, physikalischen, logischen oder kulturellen Gründen ergeben. Beispiele hierfür:

* Ein drei Tonnen schwerer Hammer könnte von einem Menschen nicht benutzt werden um Nägel einzuschlagen (physisch). * Ein Mauszeiger kann nicht über den Bildschirmrand hinaus bewegt werden (physikalisch). * Bei einer Schalterleiste mit einem linken und einem rechten Schalter zur Ansteuerung zweier nebeneinanderstehender Geräte sollte der linke Schalter das links stehende und der rechte Schalter das rechtsstehende Gerät bedienen (logisch). * Eine rote Ampel bedeutet „Stopp!“ (kulturell).

Der englische Usability-Begriff Affordance, der von Donald Norman als Übertragung eines ökologischen Ansatzes der Wahrnehmung von James Jerome Gibson (1904–1979) auf digitale Artefakte geschaffen wurde, lässt sich nicht problemlos ins Deutsche übertragen. Der eingedeutsche Ausdruck „Affordanz“ wird oft nicht verstanden. Es wird daher zumeist empfohlen, die Ausdrücke „Aufforderungscharakter“ oder genauer „Angebotscharakter“ zu verwenden.

Ein Signal (Computer) ist eine Systemnachricht an einen laufenden Prozess. Signale sind eine primitive Form von Interprozesskommunikation. Die meisten Signale bewirken auch eine Aktion – meist das Beenden des Prozesses. Andere hingegen dienen lediglich der Information (z. B. SIGWINCH) oder können einen Prozess anhalten (SIGSTOP). Es gibt auch vom Benutzer frei verwendbare Signale (SIGUSR1 und SIGUSR2). Einige Signale können vom Prozess abgefangen oder unterdrückt werden. So fangen z. B. manche Serverprogramme (im Unix-Jargon „Daemon) SIGUSR1 oder SIGUSR2 ab und lesen dann ihre Konfigurationsdateien neu ein. Gängige UNIX-Signale: Im folgenden ist eine Auflistung der üblichen Signale mit deren Nummern. Die unterstützten Signale und deren Werte können sich aber von System zu System unterscheiden. Der POSIX.1-Standard sieht hierbei unterschiedliche numerische Werte abhängig von der verwendeten Hardwarearchitektur vor. Signal Wert Bedeutung Standard SIGHUP 1 Hangup POSIX SIGINT 2 Interrupt ANSI SIGQUIT 3 Quit POSIX SIGILL 4 Illegal instruction ANSI SIGTRAP 5 Trace trap POSIX SIGABRT 6 Abort ANSI SIGIOT 6 IOT trap 4.2 BSD SIGBUS 7 BUS error 4.2 BSD SIGFPE 8 Floating-point exception ANSI SIGKILL 9 Kill, unblockable POSIX SIGUSR1 10 User-defined signal 1 POSIX SIGSEGV 11 Segmentation violation ANSI SIGUSR2 12 User-defined signal 2 POSIX SIGPIPE 13 Broken pipe POSIX SIGALRM 14 Alarm clock POSIX SIGTERM 15 Termination ANSI SIGSTKFLT 16 Stack fault SIGCLD 17 Same as SIGCHLD System V SIGCHLD 17 Child status has changed POSIX SIGCONT 18 Continue POSIX SIGSTOP 19 Stop, unblockable POSIX SIGTSTP 20 Keyboard stop POSIX SIGTTIN 21 Background read from tty POSIX SIGTTOU 22 Background write to tty POSIX SIGURG 23 Urgent condition on socket 4.2 BSD SIGXCPU 24 CPU limit exceeded 4.2 BSD SIGXFSZ 25 File size limit exceeded 4.2 BSD SIGVTALRM 26 Virtual alarm clock 4.2 BSD SIGPROF 27 Profiling alarm clock 4.2 BSD SIGWINCH 28 Window size change 4.3 BSD, Sun SIGPOLL SIGIO Pollable event occurred System V SIGIO 29 I/O now possible 4.2 BSD SIGPWR 30 Power failure restart System V SIGSYS 31 Bad system call SIGUNUSED 31 Das Unix-Kommando kill kann verwendet werden, um beliebige Signale unter Unix zu senden. **Unix-Kommandos** sync Puffer auf Festplatte zurückschreiben, split, paste = **spaltenweise zusammenfügen** Fotobearbeitung gimp packen mit tarball **tar cvfz Zieldatei.tgz *** tar = Teer = tape archiver oder tar cv Ba* -f Zieldatei.tar, entpacken mit **tar xvfz Zieldatei.tgz** chmod 755 File;

Semiotik (gr. semeion „Kennzeichen) ist die Wissenschaft, die sich mit Zeichensystemen aller Art (zum Beispiel: Bilderschrift, Gestik, Formeln, Sprache, Verkehrszeichen) befasst. Sie ist die allgemeine Theorie vom Wesen, der Entstehung (Semiose) und dem Gebrauch von Zeichen. **Ceram: Götter, Gräber und Gelehrte. Roman der Archäologie** 1949, 1980; Eco: Im Labyrinth der Vernunft 1989; **Walther: Allgemeine Zeichenlehre** 1974; **Aristoteles behandelt die Zeichen als eine Dreiecksbeziehung** zwischen dem Zeichen selbst (dem gesprochenen Wort), dem Bezeichneten (einem Gegenstand) und einer Vorstellung in der Seele. Ein gesprochenes Wort wie 'Tisch' ruft nach Aristoteles in der Seele desjenigen, der dieses Wort hört oder spricht, die Vorstellung eines Tisches hervor. Diese Vorstellung steht in einer von Aristoteles nicht näher erläuterten Abbildbeziehung zum jeweils bezeichneten Gegenstand. Mündliche Zeichen (Worte) sind für Aristoteles vorrangig gegenüber schriftlichen Zeichen, da letztere nur auf mündliche Zeichen verweisen würden: „Die gesprochenen Worte sind die Zeichen von Vorstellungen in der Seele und die geschriebenen Worte sind die Zeichen von gesprochenen Worten. So wie nun die Schriftzeichen nicht bei allen Menschen dieselben sind, so sind auch die Worte nicht bei allen Menschen dieselben; aber die Vorstellungen in der Rede, deren unmittelbare Zeichen die Worte sind, sind bei allen Menschen dieselben und eben so sind die Gegenstände überall dieselben, von welchen diese Vorstellungen die Abbilder sind. (Aristoteles, Peri hermeneias, 1. Kap).

Wie später Peirce ordnet Aristoteles die Semiotik in die Logik (Organon) ein. Der Ausdruck semeiotikon meros (semiotischer Teil) bezeichnet in der Medizin der Antike die Wissenschaft der Symptome und der Diagnostik (Galen, Pseudo-Galen) und findet in einigen stoischen Texten auch in erkenntnistheoretischen Zusammenhängen Verwendung. In lateinischen Übersetzungen von Galen wird semeiotikon meros wiedergegeben als pars semiotica.[1] Im Thesaurus graecae linguae von Henri Stephanus (1572 u.ö.) wird dafür Semeiotiké verwendet und dies erklärt als jener Teil der Medizin, welcher die Unterschiede und (Bezeichnungs-)Vermögen aller Zeichen behandelt. Zeichen- und Bedeutungslehren entstanden auch in der stoischen Dialektik, zum Beispiel bei Diogenes von Babylon. Ihm zufolge ist die Äußerung eines Menschen körperlich und wird durch die Vernunft artikuliert und ausgedrückt. Sie ist darin verschieden von den tierischen Lauten, die nur Luft sind, welche durch Instinkt hervorgebracht werden. Als verstehbare Rede (logos) gilt ihm eine Äußerung, welche etwas bedeutet. Auch Epikureische Philosophen wie Philodemos von Gadara (um 110–40 v. Chr.) diskutieren Aspekte von Zeichen, Bedeutungen und deren Relationen, insbesondere analoge und induktive Relationen. Im Übergang vom Mittelalter zur Neuzeit ist es zum Beispiel Nikolaus von Kues, der die Zeichenlehre als grundlegend für jede Erkenntnis darstellt, insbesondere für die Theologie. Auch die scholastischen Diskussionen werden weitergeführt, beispielsweise bei Pedro da Fonseca (1528–99). Der aus Lissabon stammende Theologe und Philosoph Johannes a S. Thomas (1589–1644), auch als Johannes Poinsot bezeichnet, entwickelt in seinem zweiten Hauptwerk Cursus philosophicus eine umfangreiche Semiotik, und zwar im zweiten (materiellen) Teil seiner Logik. Auch John Locke spricht in seinem Essay concerning Humane Understanding von 1690 von einer Theorie der Zeichen, die er Semeiotike nennt.

Die Semiotik als Lehre von den Zeichen ist nach Peirce nicht nur die Grundlage jeder Kommunikation, sondern auch die Voraussetzung für jede Form der Erkenntnis, denn jedes Denken ist ein Denken in Zeichen. Die Theorie begreift das Zeichen nicht als ein Ding, als ein statisches Objekt, sondern als eine dreistellige (triadische) Relation zwischen

1. einem Mittel, also dem materiellen Zeichen, 2. einem Objekt, auf das sich das Zeichen bezieht, und 3. einem Interpretanten, also dem System, in dem das Zeichen zu verstehen ist.

Diese dreifache Beziehung wiederholt sich auf jeder Ebene und bildet die verschiedenen Arten von Zeichen:

In Bezug auf	das Mittel (Zeichen)	das Objekt	den Interpretanten
Mittelbezug	Qualizeichen	Ikon	Rhema
Objektbezug	Sinzeichen (token)	Index	Dicent
Regel, Konvention	Legizeichen (Typ)	Symbol (verschlüsselt)	Argument

Eine Grundlage für diese Einteilung ist die ontologische These dreier nicht aufeinander reduzierbarer Grund-

formen jeden Seins, die aus den grundlegenden philosophischen Kategorien abgeleitet sind und als Möglichkeit, Wirklichkeit und Vernunft identifiziert werden können. Die Bedeutung eines Zeichens oder Zeichenkomplexes lässt sich nur unter Berücksichtigung aller drei Bezüge erfassen. Peirce vertritt also einen holistischen Begriff von Bedeutung. Dabei schließen sich die verschiedenen Zeichenarten keineswegs gegenseitig aus, sondern sind nur Aspekte des Zeichenprozesses, der Semiose, und wir nennen ein Zeichen nach seinem jeweils dominierenden Aspekt.

Dies gilt auch für die wichtigste Einteilung der Zeichen in Ikon, Index und Symbol = geahnter, aber noch unbekannter Sachverhalt, Spontanes Wachstumsprodukt der Psyche. C.G. Jung. Carl A. Meier, **Wolfgang Pauli, Carl G. Jung: Ein Briefwechsel 1932 - 1958** 1992; Heinz Kroehl, der die semiotische Theorie auf die visuelle Kommunikation anwendet und sie einer empirischen Überprüfung unterzogen hat, spricht daher von einem 'Kontinuum der Bezeichnungsmöglichkeiten'. Zugleich identifiziert er die nächsttiefere Ebene der triadischen Relation:

	Ikon	Index	Symbol
Mittelbezug	Metapher	Kennzeichen	Symptom
Objektbezug	Abbild	Anzeichen	Signal
Interpretantenbezug	Diagramm	Wahrzeichen	Signet

Das Gelingen jeder Kommunikation entscheidet sich in Bezug auf den Interpretanten, das System, in dem das Zeichen zu verstehen ist. Eine Klärung setzt dabei mindestens ein anderes Zeichen voraus. Wenn jemand beispielsweise fragt, was ist ein Pharao, lautet die Antwort in der Regel: ein König bei den alten Ägyptern. Um aber wirklich zu verstehen, was ein Pharao ist, muss ich die Kultur kennen, muss die Vorstellung von einem Gottkönig nachvollziehen können. Andererseits bin ich belastet mit Konnotationen, die der Begriff König in unserer Kultur mit sich bringt. Derartiges Kulturwissen, alle Erlebnisse und Erfahrungen sind Teil der Bedeutung. Daher können zwei Menschen niemals ein exakt gleiches Verständnis einer Sache haben. Baumann: Die Welt der Pharaonen 1964;

Die Begriffe Rhema, Dicent und Argument korrespondieren mit der klassischen Einteilung in Term, Proposition und Argument. Daraus kann man drei Hauptsysteme mit völlig unterschiedlichen Formen der Bedeutungsvermittlung ableiten: Kunst, Alltag und Wissenschaft. Im Bereich der Kunst kann ein Zeichen immer nur Möglichkeiten vermitteln; es gibt keine festen Bedeutungen, sondern nur individuelle Interpretationen. Im Alltag beziehen sich die Zeichen auf die Wirklichkeit, sie haben ein reales Objekt, und ein Sprecher darf in der Regel davon ausgehen, dass der Andere das Gemeinte versteht. In der Wissenschaft verweisen die Zeichen auf Notwendigkeiten und folgen fachspezifischen Regeln: verwendete Begriffe müssen definiert, Aussagen belegt und Schlussfolgerungen bewiesen werden. **Ausdruck** = syntaktisch korrekte Termverknüpfung $t_1 = t_2$. **Term** = syntaktisch korrekte Zeichensequenz. **Formel** = Zeichen-, Wortsequenz zur verkürzten Bezeichnung eines Sachverhalts/Zusammenhangs: $E = mc^2$, C_6H_6, ${}^4_2He$, $A \Leftrightarrow B$.

Da der Interpretant stets ein Zeichen ist, das wiederum nur durch ein Zeichen erklärt werden kann, wird die Semiose zu einem prinzipiell endlosen Prozess. In alltäglichen Situationen tritt dies aber oft nicht zutage, denn solange sich die Kommunikation auf konkretes Handeln bezieht, kann dieser Prozess abgebrochen werden, sobald ein Konsens über das Handeln erreicht ist.

Semiotik als Sinnprozesslehre Der deutsche Sozialphilosoph Johannes Heinrichs verbindet mit dem Wort Semiotik eine allgemeine, formale Theorie von Sinnprozessen. Zeichen ergeben sich demnach vermittels von Bewusstseinsvollzügen und sind also keine „positive Gegebenheit und können auch keine Unhintergehbarkeit beanspruchen. Mit dem Akzent auf Bewusstsein verbindet sich eine Unterscheidung von biologischer oder anderer physischer Informationsübertragung. Von einer so verstandenen Semiotik unterscheidet er die Auswertung einzelner Gehalte, was er Hermeneutik nennt. Heinrichs postuliert vier semiotische Ebenen: 1. die semiotischen Prozesse des Handelns und dem Erleben als dessen rezeptiver Form, worin sich auch eine Ortsbestimmung des Zeichen-Handelns, somit also des Zeichens, ergibt 2. der Sprache (als sich selbst in eigenen syntaktischen Zeichen regulierenden Meta-Handelns) 3. der Kunst (als sich in einer Meta-Syntax

reflektierende Meta-Sprache) sowie 4. der Mystik, die von der Annahme bzw. Erfahrung einer Eigenaktivität des von Anfang an vorausgesetzten Sinnes (Sinn-Mediums) ausgeht. Mystik ist in semiotischer Betrachtung der Titel für die Schließung eines systemischen Kreislaufs zwischen Subjekt und Sinn-selbst, worin die Einseitigkeit des Handelns, einseitig subjektgeleitet zu sein, über die Vorstufen der sozialen Gegenseitigkeit sowie des künstlerischen, „medialen Prozesses hinweg, aufgehoben ist.

Information (lat. informare „bilden, „eine Form, Gestalt, Auskunft geben) ist ein in vielen Lebensbereichen verwendeter Begriff. Dazu gehören die Naturwissenschaften, die Geisteswissenschaften, die Technik und der Bereich des menschlichen Handelns. Ihr Kennzeichen: Information vermittelt einen Unterschied. Die Information verliert, sobald sie informiert hat, ihre Qualität als Information: „News is what's different. Information ist ein weitläufig verwendeter und schwer abzugrenzender Begriff. Verschiedene Wissenschaften betrachten die Information als ihr Arbeitsgebiet, namentlich die Informatik, die Informationstheorie und die Informationswissenschaft, die Nachrichtentechnik, die Informationsökonomik und die Semiotik.

Erst in jüngster Zeit gibt es Bestrebungen, die einzelnen Ansätze zu verbinden und zu einem allgemein gültigen Informationsbegriff zu kommen. Entsprechende Literatur findet sich derzeit meist unter dem Stichwort Philosophie (etwa im Bereich Erkenntnistheorie). Von einer vereinheitlichten, allgemein akzeptierten Theorie der Information kann vorläufig noch nicht gesprochen werden.

Im allgemeinen Sprachgebrauch sowie in einigen Wissenschaften (Semiotik, Informationswissenschaften) wird „Information“ mit „Bedeutung“ oder „übertragenem Wissen“ gleichgesetzt. Eine andere Sichtweise des Begriffes, die heute beispielsweise in der Computertechnik von großer praktischer Bedeutung ist, stammt aus der Nachrichtentechnik. Die wegweisende Theorie dort ist diejenige von Claude Shannon. Er betrachtet die statistischen Aspekte der Zeichen in einem Code, der Information repräsentiert. Die Bedeutung der Information geht bei Shannon nur implizit in den Wahrscheinlichkeiten der verwendeten Zeichen ein, die letztlich nur unter Zuhilfenahme eines Menschen bestimmt werden können, da nur der Mensch in der Lage ist die Bedeutung eines Codes bewusst zu erfassen und dabei sinnvollen von nicht sinnvollem Code unterscheiden kann. Das unmittelbare Ziel seiner Überlegungen ist die optimale Übertragung von Information in einem Nachrichtenkanal (Telefonie, Funktechnik).

Neidhardt: Einführung in die Informationstheorie 1957; Der Begriff Information und andere Begriffe aus der Informationstheorie werden oftmals im alltäglichen Sprachgebrauch und auch in den Naturwissenschaften in einer metaphorischen Weise benutzt. Eine direkte Übernahme des Begriffes Information in naturwissenschaftliche Theorien, so wie er in den Ingenieurwissenschaften benutzt wird, ist aber nach weitverbreiteter wissenschaftstheoretischer Auffassung [2] nicht zulässig. Als ein Grund hierfür kann genannt werden, dass die Ingenieurwissenschaften letztlich auf den Menschen ausgerichtet sind und deswegen der Mensch als Benutzer oder Erzeuger künstlicher Systeme selbst Teil der Betrachtungen sein kann, womit die verwendeten Begriffe oftmals eine zielgerichtete und auf menschliches Bewusstsein ausgerichtete, teleologische Komponente enthalten. Demgegenüber wird es allgemein als Ziel der Naturwissenschaften angesehen, die Natur möglichst unabhängig vom Menschen zu beschreiben. Somit müssten bei Übernahme informationstheoretischer Begriffe diese erst in einer von teleologischen Zusätzen befreiten Version neu definiert werden. So werden beispielsweise unter dem Begriff „Genetischer Code“ in der Genetik eine Menge von Regeln verstanden, welche rein physikalisch-chemische Prozesse beschreibt, durch welche DNA-Strukturen in Protein-Strukturen übertragen werden, und nicht eine Vereinbarung von bewussten Wesen über die Verwendung von Symbolen zum Austausch von Botschaften, wie der Begriff „Code“ in der Informationstheorie meist verstanden wird. Der Verzicht auf solche teleologischen Begriffe in den Naturwissenschaften habe dabei nicht zum Ziel „teleologische Welterklärungen“ von vornherein auszuschließen, sondern diene dazu, Fehlschlüsse zu verhindern, bei denen nur scheinbar neue Erkenntnis aus einer naturwissenschaftlichen Theorie gewonnen wird, welche aber in Wirklichkeit durch inadäquaten Gebrauch der Begriffe vorher in die Theorie hineingelegt wurde. Insbesondere sei dies auch eine Methode, welcher sich einige Pseudowissenschaften teilweise bedienen. So warnte beispielsweise der Wissenschaftsphilosoph Wolfgang Stegmüller vor einem Wiederaufleben des Neovitalismus durch unangemessenen Gebrauch informationstheoretischer Begriffe in der Biologie.

Es kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass in Zukunft der naturwissenschaftliche Strukturbegriff und

der Informationsbegriff aufeinander zurückgeführt werden können. So untersucht etwa die Neuroinformatik die Beziehung neuronaler Strukturen des Gehirns und dessen Fähigkeit, Information zu verarbeiten.

In diesem Artikel wird versucht, die verschiedenen Ebenen Statistik, Struktur und Bedeutung zu unterscheiden und auf die Bezüge zwischen diesen Ebenen einzugehen.

Struktur und Bedeutung: Eine Sichtweise geht vom Informationsträger aus. Die Frage, welche Struktur sich innerhalb dieses Trägers feststellen lässt, wird untersucht. Ein anderer Ansatz bemüht sich zu verstehen, welche Bedeutung dem zukommt, was man dann (irgendwie) diesem Informationsträger entnommen hat. Die erste Sichtweise hat ihre Wurzeln in der Nachrichtentechnik, die zweite in der Kognitionswissenschaft, der Sprachwissenschaft oder allgemein in der Geisteswissenschaft. Eine nachrichtentechnisch erkennbare Struktur (beispielsweise Lichtpulse, die in einer zeitlichen Reihenfolge auf einzelne Zellen in der Netzhaut treffen) muss in einem komplexen Dekodierungsprozess in eine Bedeutung übersetzt werden. Coseriu: Einführung in die allgemeine Sprachwissenschaft 1988; de Saussure 1857-1913: Grundfragen der allgemeinen Sprachwissenschaft 1915; Bußmann: Lexikon der Sprachwissenschaft 2002; Wo hier die reine Strukturinformation aufhört und beginnt, eine Bedeutungsinformation zu werden, wo also in diesem Dekodierungsprozess die Grenze zum Bewusstsein zu ziehen ist, ist eine der spannenden Fragen der Informations- und Kognitionswissenschaften. **Matlin: Cognition** 2002[5]; Anderson: Kognitive Psychologie 1996[2], 2013[7]; Aus diesen Betrachtungen ergeben sich vier Ebenen, unter denen der Begriff der Information heute allgemein betrachtet wird. Diese sind

1. Codierung 2. Syntax 3. Semantik 4. Pragmatik Anatol Rapoport: Bedeutungslehre 1972; Schwarz & Chur: Semantik 1996[2]$a]FensterzumGeist, b]FormaleSemantik$; Wilhelm Schmidt & Eberhard Stock: Rede, Gespräch, Diskussion. Grundlagen und Übungen 1982; Schmidt: Geschichte der deutschen Sprache, ein Lehrbuch für das germanistische Studium 2013; Schmidt: Grundfragen der deutschen Grammatik. Eine Einführung in die funktionale Sprachlehre 1972; Schmidt: Lexikalische und aktuelle Bedeutung, ein Beitrag zur Theorie der Wortbedeutung 1986; Dreyer & Schmitt: Lehr- und Übungsbuch der deutschen Grammatik 1996;

Diese Ebenen steigern sich im Hinblick auf den Bedeutungsgehalt der Information. Sie spiegeln dabei auch die oben erwähnten theoretischen Angriffspunkte wider, wobei die Codierungs-Ebene der Sichtweise der Nachrichtentechnik nahe kommt, die Syntaxebene die Sichtweise der Linguistik oder die der Theorie der formalen Sprachen wiedergibt, die semantische Ebene Ansätze aus der Semiotik oder Semantik integriert, und die Pragmatik eher auf Konzepte der Kognitionswissenschaften zurückgreift. Anatol Rapoport: Bedeutungslehre 1972; **Matlin: Cognition** 2002[5]; **Vater: Einführung in die Textlinguistik** 2001[3]; **Carstensen, Ebert, Endriss, Jekat, Klabunde, Langer: Computerlinguistik und Sprachtechnologie** 2000;

Die vier Ebenen sollen an der Zeichenfolge „ES IST WARM“ erläutert werden:

Code-Ebene: Die Zeichenfolge „ES IST WARM ist zu kurz für eine statistische Betrachtung. Bei längeren Texten wird aber klar, dass nicht alle Elemente der Zeichenfolge (Buchstaben) gleich häufig vorkommen. Gewisse Buchstaben wie zum Beispiel die Buchstaben e und t – in unserem Beispiel aber s – sind häufiger als andere. Diese Tatsache kann bei der Informationsübertragung genutzt werden um Übertragungszeit zu sparen. Als Beispiel seien die Huffman-Codes erwähnt. Sie stellen ein Verfahren dar, mit dem Information effizient übermittelt und gespeichert werden kann. Viele weitere Verfahren existieren.

Syntaktische Ebene der Information: Auf der syntaktischen Ebene wird Information nur als Struktur gesehen, die es zu übermitteln gilt. Der Inhalt der Information ist hierbei im Wesentlichen uninteressant. Beispielsweise könnte das Problem darin bestehen, das Bild einer Kamera auf einen Monitor zu übertragen. Das Übertragungssystem interessiert sich dabei beispielsweise nicht dafür, ob es das Bild überhaupt wert ist, übertragen zu werden (Einbrecher macht sich am Fenster zu schaffen) oder nicht (Katze läuft am Fenstersims entlang), oder ob überhaupt etwas zu erkennen ist (auch das Bild einer komplett unscharf eingestellten Kamera wird vollständig übertragen, obwohl es da eigentlich nichts Erkennbares zu sehen gibt). Der Informationsgehalt ist dabei ein Maß für die maximale Effizienz, mit der die Information verlustfrei übertragen werden kann.

Unterscheidbarkeit und Informationsgehalt: Grundprinzip der syntaktischen Information ist die Unterscheidbarkeit: Information enthält, was unterschieden werden kann. Eine Unterscheidung setzt jedoch mindestens zwei unterschiedliche Möglichkeiten voraus.

Gibt es genau zwei Möglichkeiten, so lässt sich die Unterscheidung mit einer einzigen Ja-/Nein-Frage klären. Beispiel: Angenommen, auf einer Speisekarte gibt es nur zwei Gerichte, Schnitzel und Spaghetti. Wir wissen, eines der beiden Gerichte hat der Gast bestellt. Um herauszufinden, welches er bestellt hat, braucht man ihm nur eine einzige Frage zu stellen: „Haben Sie Schnitzel bestellt?„ Lautet die Antwort Ja, so hat er ein Schnitzel bestellt, lautet die Antwort Nein, so hat er Spaghetti bestellt.

Sind hingegen mehr als zwei Möglichkeiten vorhanden, so kann man dennoch mittels Ja-/Nein-Fragen herausfinden, welche Alternative zutrifft. Eine einfache Möglichkeit wäre, einfach der Reihenfolge nach alle Gerichte abzufragen. Jedoch ist das eine recht ineffiziente Methode: Wenn der Gast noch keine Bestellung aufgegeben hat, braucht man sehr viele Fragen, um es herauszufinden. Effizienter ist es, wenn man beispielsweise erst fragt: „Haben Sie bereits bestellt?“, um dann konkreter zu werden, „War es ein Gericht mit Fleisch?, „War es Schweinefleisch?, so dass schließlich nur noch wenige Alternativen übrig bleiben (War es Schweineschnitzel?, „Schweinebraten?, Schweinshaxe?). Die Reihenfolge der Fragen spiegelt die Wertigkeit der Bits in einer derartig kodierten Nachricht wider. Der Informationsgehalt einer Nachricht entspricht der Anzahl der Ja-/Nein-Fragen, die man bei einer idealen Fragestrategie braucht, um sie zu rekonstruieren.

Auch die Wahrscheinlichkeiten spielen bei einer optimalen Fragestrategie eine Rolle: Wenn man beispielsweise weiß, dass die Hälfte aller Gäste Schweineschnitzel bestellt, so ist es sicher sinnvoll, erst einmal nach Schweineschnitzel zu fragen, bevor man den Rest der Karte durchgeht.

Interessant ist hierbei, dass zwar vordergründig keinerlei semantische oder pragmatische Informationen verwendet werden, diese jedoch implizit in Form der Wahrscheinlichkeit eingehen. Beispielsweise ist die Tatsache, dass 50 Prozent der Gäste Schweineschnitzel bestellen, nicht aus der Speisekarte zu erkennen; es ist eine pragmatische Information. Und dass man normalerweise nicht nach der Bestellung von „Wir wünschen Ihnen einen guten Appetit fragt, folgt aus der semantischen Information, dass dies keine Speise ist, und es daher höchst unwahrscheinlich ist, dass jemand dies bestellt.

Binarisierung und die Wahrscheinlichkeit von Zeichen: Die Zeichenfolge „ES IST WARM enthält nur Großbuchstaben. Wenn wir einmal nur davon ausgehen, dass wir nur Großbuchstaben zur Verfügung hätten (also 27 Buchstaben einschließlich Leerzeichen), so können wir an jeder der elf Stellen der obigen Nachricht eines der 27 Zeichen setzen. Jede Stelle der Nachricht hat also 27 mögliche Zustände.

Von großer technischer Bedeutung ist aber der Binärcode. Jeder Code wird durch eine Folge von Bits dargestellt. Ein Bit unterscheidet nur zwischen zwei möglichen Zuständen, die man durch eins und null darstellt. Damit wir 27 verschiedene Zustände darstellen können, benötigen wir mehrere Bits - in diesem Fall genau fünf. Damit kann man 2 hoch 5 = 32 Zustände unterscheiden.

Ein naheliegender, möglicher Binärcode sieht wie folgt aus:

A 00001 B 00010 C 00011 D 00100 E 00101 F 00110 G 00111 H 01000 I 01001 .. .. <LZ> 11100 (Leerzeichen)

Unsere Nachricht hieße dann „00101 10011 11100 01001 10011 10100 11100 ... 01101“. Nun ist die obige Codierung der Buchstaben in fünf Ja-/Nein-Entscheidungen nicht die allein gültige. Im Rahmen der klassischen Informationstheorie wird nämlich die Informationssequenz aus statistischer Sicht betrachtet. So kann berücksichtigt werden, wie häufig ein bestimmtes Zeichen des Zeichenvorrats verwendet wird, mit anderen Worten, wie wahrscheinlich sein Auftreten ist. So ist beispielsweise der Buchstabe E im Deutschen häufiger als der Buchstabe Y.

Berücksichtigt man diese Auftretenswahrscheinlichkeit der Zeichen im Zeichenvorrat, so kann man die Anzahl der benötigten Ja-/Nein-Entscheidungen, die zum Erkennen eines Zeichens notwendig sind, je nach Zeichen unterschiedlich groß machen. Eine solche Codierung nennt man auch Entropiekodierung. Damit benötigt man, um ein häufig auftretendes Zeichen zu codieren, weniger Bits, als für ein selten auftretendes Zeichen. Ein Zeichen hat also einen umso höheren Informationsgehalt (benötigt zur Erkennung eine höhere Anzahl an 'atomaren' Entscheidungseinheiten, an Bits), je seltener es auftritt. Entropie (Informationstheorie).

Semantische Ebene der Information: Strukturierte, syntaktische Informationen werden erst verwertbar, indem sie gelesen und interpretiert werden. Das heißt, zur Strukturebene muss die Bedeutungsebene hinzu-

kommen. Dazu muss ein bestimmtes Bezugssystem angelegt werden, um die Strukturen in eine Bedeutung überführen zu können. Dieses Bezugssystem bezeichnet man als Code. Im obigen Beispiel muss man also wissen, was „warm“ bedeutet.

Jedoch ist die Überführung von Syntax in Semantik selten so direkt; in der Regel wird die Information über sehr viele unterschiedliche Codes immer höherer semantischer Ebene verarbeitet: Dabei wird auf den unterschiedlichen semantischen Ebenen wiederum Informationsverarbeitung auf strukturell-syntaktischer Ebene geleistet: Die Lichtpulse, die gerade auf Ihre Netzhaut treffen, werden dort von Nervenzellen registriert (Bedeutung für die Nervenzelle), an das Gehirn weitergeleitet, in einen räumlichen Zusammenhang gebracht, als Buchstaben erkannt, zu Worten zusammengefügt. Während dieser ganzen Zeit werden Nervenimpulse (also Strukturinformationen) von einer Gehirnzelle zur nächsten 'geschossen', bis sich auf diese Weise in ihrem Bewusstsein die durch Worte nur unzureichend wiedergebbaren Begriffe für „warm“, „jetzt“, und „hier“ zu formen beginnen, die dann im Zusammenhang eine Bedeutung haben: Sie wissen jetzt, dass es bei diesen Worten um die Feststellung geht, dass es warm (und nicht etwa kalt) ist.

Zusammengefasst: * Strukturinformation wird in einem Dekodierungsprozess in Semantik (Bedeutung) überführt. * Dabei wird Strukturinformation stufenweise über Codes in andere Strukturinformation überführt, wobei sich auf den unterschiedlichen semantischen Stufen jeweils Bedeutung für das verarbeitende System entwickelt. Siehe auch: Kodierung, Kommunikation (Informationstheorie). **Jungnickel: Codierungstheorie** 1995; **Pragmatische Ebene der Information:** Diese kommt dem umgangssprachlichen Informationsbegriff am nächsten. Die Aussage, dass es warm ist (die wir nun semantisch richtig interpretiert haben; wir wissen, was diese Botschaft uns sagen will), hat echten Informationscharakter, wenn wir uns mittags um zwölf nach einer durchzechten Nacht noch halb schlaftrunken überlegen, was wir anziehen sollen, und uns die Freundin mit den Worten „es ist warm“ davon abhält, in den Rollkragenpullover zu schlüpfen. Der pragmatische Informationsgehalt der - semantisch exakt gleichen - Aussage ist aber gleich null, wenn wir bereits im T-Shirt auf dem Balkon sitzen und schwitzen. Diese Mitteilung bietet uns nichts Neues und ist daher nicht Information.

In diesem Zusammenhang bezeichnet der Begriff Granularität (Kommunikationswissenschaft) das qualitative Maß der „Passgenauigkeit“ einer Information aus der Perspektive des Empfängers.

Smalltalk ist eine Art des Informationsaustausches, bei dem die offensichtlich über die Sprache ausgetauschten semantischen Informationen so gut wie keine pragmatische Information darstellen - wichtig sind hier die Körpersignale, deren Semantik (Freundlichkeit, Abneigung) wir erkennen und pragmatisch (mag er/sie mich?) verwerten können.

In diesem pragmatischen Sinne ist wesentliches Kriterium von Information, dass sie das Subjekt, das die Information aufnimmt, verändert, was konkret bedeutet, dass sich die Information, die potentiell dem Subjekt entnommen werden kann, verändert.

Zusammengefasst: * Information führt zu einem Gewinn an Wissen - erhöht aber auch, wie aus der Thermodynamik bekannt - die Entropie eines Systems. Um Entropie zu reduzieren wird Energie bzw. Arbeitsaufwand benötigt. Zuviel an nicht zweckmässiger Informationführt demnach in Organisationen zur Bürokratisierung und Kostenerhöhung. * Information ermöglicht die Verringerung von Ungewissheit kann aber auch die Ungewissheit vergrössern, wenn sie an Volumen zunimmt, widersprüchlich ist und die Auswertbarkeit in der gegebenen Zeit und Kostenrahmen nicht möglich ist. * Information ist übertragbar; in Form von Daten bzw. Signalen * Information ist ein Ereignis, das den Zustand des Empfängers bzw. Systems verändern kann. Hierzu muss Sie vom Empfänger verstanden werden. Kress: Theoretische Grundlagen der Übertragung digitaler Signale 1979;

In diesem pragmatischen Sinne ist Information ein Kernbegriff der Wirtschaftsinformatik und der mit ihr verwandten Betriebswirtschaftslehre (Information als Produktionsfaktor, Information als wirtschaftliches Gut). Kurz gesagt: Information ist Reduktion von Ungewissheit.

Bezüge zwischen den Ebenen: Wenn man das Phänomen Information betrachtet, sind die vier Ebenen im Zusammenhang zu betrachten. Damit Information stattfindet, sind Vereinbarungen auf allen vier Ebenen

notwendig. Auch stellt die semantische Verarbeitung (beispielsweise das Zusammenfassen von Buchstaben zu Wörtern) wiederum syntaktische Information (nämlich eine Abfolge von Wort-Symbolen) her. Letztlich definiert sich auch die pragmatische Ebene nicht zuletzt dadurch, dass sie selbst neue Information syntaktischer Natur schaffen muss (sonst hätte die Information keine Wirkung entfaltet). Aufgrund des engen Zusammenspiels zwischen semantischen Dekodierungsprozess und Wirkentfaltung in der Pragmatik, die beide wiederum syntaktische Informationen als End- und Zwischenprodukte generieren, werden manchmal diese beiden Ebenen auch zur Semantopragmatik verschmolzen.

Modelle: Das Wesentliche an Information ist die Eigenschaft, Veränderungen im empfangenden System hervorzurufen. Da es bislang keine einheitliche Theorie der Information gibt, sondern lediglich unterschiedliche Modelle, steht eine eindeutige Definition des Begriffs Information noch nicht zur Verfügung.

Erklärungsansätze für den Begriff der Information kommen sowohl aus geisteswissenschaftlicher Richtung (Semantik, Semiotik, Philosophie, Kommunikationswissenschaft, etc...), als auch aus naturwissenschaftlicher Richtung (Physik, Kybernetik, Nachrichtentechnik, Informatik, etc...). Die unterschiedlichen Ansätze decken sich nicht, haben aber teilweise Überschneidungen.

Einer der wesentlichen Unterschiede zwischen geisteswissenschaftlichen und naturwissenschaftlichen Modellen besteht darin, dass für die Naturwissenschaft bereits in einer Wechselwirkung subatomarer Teilchen ein Informationsaustausch gesehen wird (vgl. z.B. den EPR-Effekt, wo das klassische Zitat Einsteins über eine spukhafte Fernwirkung $c = \infty$ herrührt, weil hier zwei Teilchen scheinbar instantan Information auszutauschen scheinen, statt mit Lichtgeschwindigkeit, wie Einstein dies vorhersagt.)

Der naturwissenschaftliche Begriff von Information ist eng verknüpft mit dem Konzept der Entropie (d.h. dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik) . Hieraus ergeben sich zahlreiche Konsequenzen, entsprechend den zahlreichen Konsequenzen, die sich aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik ergeben. (Eine der möglichen Konsequenzen lautet: Als Gegenstand der Naturwissenschaften wird unter Information ein potenziell oder tatsächlich vorhandenes nutzbares Muster von Materie und Energieformen verstanden. Information ist hier, was sich aus dem Zustand eines Systems für die Zustände anderer Systeme ableiten lässt.) Weidenmann: Über den Informationsgehalt physikalischer Messungen PhysBl12 1956 p151-155;

Dieses naturwissenschaftliche Verständnis steht im Widerspruch zu dem Informationsbegriff, der von den Geisteswissenschaften herrührt, sowie den alltäglichen Sprachgebrauch dominiert.

Sowohl die Geisteswissenschaften, als auch der Begriff von Information im täglichen Gebrauch tendieren zu einem Verständnis, für das dem Begriff der **Bedeutung eine tragende Rolle zukommt. Die Bedeutung ist hier eine intrinsische Eigenschaft von Information, womit außerdem die Existenz eines (potentiellen) Empfängers impliziert wird, für den sich der Bedeutungsinhalt entfaltet.**

Die gängigen Kommunikationsmodelle basieren auf diesem Konzept. Somit gehen sowohl die meisten geisteswissenschaftlichen Konzepte, als auch das weitläufige Verständnis im täglichen Sprachgebrauch davon aus, dass Information immer eine funktionale Bedeutung hat, im Gegensatz zum naturwissenschaftlichen Verständnis, in dem weder Funktion noch Bedeutung zwingend konstitutive Eigenschaften von Information sind.

Als Terminus in der mathematischen Informationstheorie bezieht sich Information auf die Auftretenswahrscheinlichkeiten von bestimmten Folgen von Elementen (beispielsweise einer Folge von Buchstaben) aus einer festgelegten Menge (beispielsweise dem Alphabet). Durch diese Festlegung wird Information zu einem berechenbaren Maß für die Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse in einem technischen System. Claude Elwood Shannon (1948) konzipierte die mathematische Theorie der Information ursprünglich nicht für den Bereich menschlichen Handelns und menschlicher Kommunikation, sondern für die technische Optimierung von Übertragungskapazitäten.

Im Bereich des menschlichen Handelns wird unter Information ein Wissen (genauer: das Ergebnis eines Erfahrungsprozesses) verstanden, dem in der jeweiligen aktuellen Situation Bedeutung und Geltung beigemessen wird. In diesem Zusammenhang wird die Rede von „Information“ oder „sich informieren“ mit einer

Beseitigung oder Verkleinerung von Ungewissheit verbunden, die durch Auskunft, Aufklärung, Mitteilung, Benachrichtigung oder durch Kenntnis über Gegenstände und Phänomene geschieht. Bestandteil des Informationsbegriffs ist dabei häufig Wiedererkennbarkeit sowie ein Neuigkeitsgehalt. **Kommunikationsmodell der Information:** Das Verständnis der syntaktischen Ebene war lange Zeit gekennzeichnet durch das Sender-Empfänger-Modell: Ein Sender will eine Information dem Empfänger mitteilen. Dazu codiert er seine Information nach bestimmten Prinzipien (beispielsweise als Abfolge von Nullen und Einsen nach dem oben erwähnten Prinzip) in einen Informationsträger, der Empfänger wertet diesen Informationsträger aus, denn auch er kennt den Code, und erhält dadurch die Information (siehe auch: Kommunikation).

Nicht immer ist jedoch ein menschlicher Sender vorhanden, der uns etwas mitteilen will. Ein typisches Beispiel ist die Messung: Dem physikalischen System ist es, bildlich gesprochen, völlig egal, was Menschen von ihm denken. Das Ziel der Messung ist eine Informationsübertragung vom gemessenen System zu dem, der die Messung durchführt (man misst, um etwas über das gemessene System zu erfahren).

Ein Beispiel ist die Geschwindigkeitsmessung per Radarfalle: Das Auto hat keine Intention, seine Geschwindigkeit zu verraten (und der Autofahrer meist auch nicht). Dennoch gewinnt der Polizist durch die Messung Information über die Geschwindigkeit. Für die Gewinnung der Information wird ein physikalisches Gesetz genutzt (**Dopplereffekt**), das von einem Ingenieur aufgegriffen wurde um das Gerät zu konstruieren. Die Polizei setzt das Gerät ein und veranlasst somit, dass Information erzeugt wird. Die unmittelbare Erzeugung von Information hingegen wird damit an einen Apparat delegiert. Urheber der Information ist aber auch an dieser Stelle der Mensch. Das Radarmessgerät wurde entwickelt und die gewonnenen Messergebnisse werden dann automatisch, in einem vom Menschen vorgegebenen Code, angezeigt, aufgezeichnet oder übertragen.

Auch viele Tiere sind der Kommunikation, auch als Sender, fähig. Diese ist zwar in der Hauptsache zur Kommunikation mit Artgenossen (Gefahrruf etc.) gedacht, kann aber teilweise auch vom Menschen genutzt werden.

Zusammengefasst: * Damit Information für den Menschen erkennbar wird, muss Materie oder Energie eine Struktur aufweisen. * Syntaktisch entspricht Information der Auftretenswahrscheinlichkeit eines bestimmten Symbols innerhalb eines definierten Dekodierungsschemas * Information ist im Kommunikationsmodell eine räumliche oder zeitliche Folge physikalischer Signale, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten oder Häufigkeiten auftreten. * Der Informationsgehalt einer Nachricht ergibt sich aus der Anzahl der Ja-/Nein-Möglichkeiten, für die in der Nachricht einer der Werte festgelegt ist.

Informationstransport, Entstehung und Vernichtung: Interessant ist es, dass Information, die an Materie als Informationsträger gebunden ist, auf bzw. durch Elektromagnetische Wellen übertragen werden kann. Diese Information kann, da masselos, dann im Prinzip mit Lichtgeschwindigkeit transportiert werden. Schließlich kann die Information wieder zurück an Materiestrukturen gebunden werden. Ein Beispiel für so einen Übertragungsprozess ist das Telefax. Dabei wird die Information eines bestimmten Schriftstückes mit Lichtgeschwindigkeit über große Entfernungen transportiert und am Ziel auf ein zweites Schriftstück mit exakt demselben Informationsinhalt übertragen.

Allgemeiner: Um Informationen zu transportieren ist ein Informationsträger nötig.

Kann Information ohne Verlust weitergegeben werden? Beim Kopieren von Software ist dies der Fall, weil technische Mechanismen (Redundante Codes / Prüfsummen) dafür sorgen. Information kann nicht generell weitergegeben werden, ohne dadurch weniger zu werden. Das Ausmaß des Verlustes hängt von den physikalischen Randbedingungen ab. Gemäß Shannon kann bei einer Übertragung nicht mehr Information aus einem Kanal entnommen werden als auf der Senderseite hineingegeben wird. Beim Weitergeben oder Kopieren von Information wird sie aber an sich nicht verdoppelt, sondern sie liegt dann nur redundant vor.

In einem thermodynamisch als geschlossen anzusehenden System wird Information letztlich vernichtet, spätestens beim Wärmetod des Universums. In einem thermodynamisch offenen System kann Information weitergegeben werden, informationstragende Strukturen können sogar spontan entstehen. Beispiele sind eine Vielzahl von theoretisch und experimentell untersuchten dissipativen Strukturen. Besonders Spin-Systeme (Spin = Drehimpuls atomare und subatomarer Teilchen), insbesondere die sogenannten Spin-Gläser bzw.

Ising-Modelle, sind sehr oft untersucht worden, nicht zuletzt wegen ihrer Relevanz für die Theorie neuronaler Netze. Viele Experimente zeigen, dass in Ising-Gläsern spontan Strukturen entstehen können, die wegen der gequantelten Natur des Spins sogar schon als in digitalisierter Form vorliegende Information interpretiert werden können, welche z. B. die Entstehungsbedingungen der Struktur in codierter Form enthält.

Digitale Information entsteht durch Digitalisierung beliebiger Information. Das Ergebnis sind Daten. Kress: Theoretische Grundlagen der Übertragung digitaler Signale 1979; Obwohl für die Messung von digitalen Informationsmengen, für Informationsströme und für die Informationsspeicherung das Bit und das Byte als Basiseinheiten vorliegen, wird die Informationsmenge immer noch gerne anhand des jeweiligen Informationsträgers quantifiziert. So kann man die digitale Informationsmenge, die in einem Buch steht, leicht und anschaulich an der Seitenzahl oder an der Zahl der Wörter ablesen. Siehe auch: Dualsystem, Künstliche Intelligenz;

Definition der Information in verschiedenen Fachrichtungen: Zum Abschluss sollen hier die einzelnen Fach- und Forschungsrichtungen zu Wort kommen, die je ihr eigenes Verständnis der Information haben. Deutlich wird dabei der jeweilige Ansatz auf den unterschiedlichen, oben geschilderten Ebenen zwischen der reinen Syntax bis zur Pragmatik, teilweise auch mit der besonderen Betonung des Transportcharakters von Information.

Die **Semiotik definiert Daten als potenzielle Information**. In der Semiotik werden Daten heute in die Sigmatik-Ebene eingeordnet. In älterer Literatur sind sie oft noch als zweckorientiertes Wissen definiert, also zweckorientierte Daten, die das Wissen erweitern. Informationswissenschaft: Die Informationswissenschaft verwendet den Begriff der Information ähnlich zum semiotischen Ansatz. Für sie sind die Begriffe Wissen und Information von zentraler Bedeutung. Information ist dabei Wissenstransfer beziehungsweise „Wissen in Aktion“. Information entsteht in diesem Sinne immer nur punktuell, wenn ein Mensch zur Problemlösung Wissen (eine bestimmte Wissenseinheit) benötigt. Diese Wissenseinheit geht als Information aus einem Wissensvorrat in einen anderen über, beispielsweise aus einer Datenbank in den Wissensvorrat eines Menschen. Wissen wird intern repräsentiert, Information wird - zum besseren Verständnis für den Informationssuchenden - präsentiert. (Wissensrepräsentation - Informationspräsentation).

Information als Wirtschaftsgut: Information kann als wirtschaftliches Gut angesehen werden, da Information im Unternehmen durch Einsatz anderer Produktionsfaktoren (Menschen, Computer, Software, Kommunikation, etc.) produziert, oder von außen angekauft werden kann. Information hat somit einen Wert, der handelbar ist. Der Wert ergibt sich aus dem Nutzen der Information und den Kosten zur Produktion, Bereitstellung und Weiterleitung. Problematisch hierbei ist, dass der potenzielle Käufer den Wert der Information nicht immer im Voraus kennt und sie teilweise erst nachdem er sie erworben hat, bewerten kann (sog. Informationsparadoxon). Bereits der angestrebte Handel mit Information ist dabei mit dem Problem asymmetrischer Information behaftet.

Weiterhin kann man Information auch als Produktionsfaktor verstehen. Information wird somit nicht nur konsumtiv genutzt, sondern kann auch produktiv verwendet werden. Dokumentations- und Ordnungslehre: Wilhelm Gaus schreibt in seinem Werk Dokumentations- und Ordnungslehre (1995) dass Information unter verschiedenen Aspekten betrachtet werden kann

1. Struktur = structure approach 2. Erkenntnis = knowledge approach 3. Signal = signal approach 4. Nachricht = message approach 5. verstandene Nachricht = meaning approach 6. Wissensvermehrung = effect approach 7. Vorgang = process approach

Information als Veränderung: Nach den Arbeiten des Berliner Informatikers Peter Rüdiger: „Information ist eine Veränderung konkreter Quantität und Dauer. Eine Definition der Information über Veränderung bedeutet eine Beschreibung der Information über physikalische Auswirkung. Wird eine einfache Veränderung als ein mathematisches Element betrachtet, das einen Zustandswechsel herbeiführt, so lässt sich beweisen, dass eine Menge solcher Elemente, die Zustandswechsel am selben „Objekt“ herbeiführen und Eigenschaften wie Zusammenhang und Wiederholbarkeit aufweisen, eine mathematische Gruppe darstellen, die als Information bzgl. des Objekts deklariert wird. Diese Gruppe erlaubt eine Längenbestimmung, die für Optimierungen ver-

wendet werden kann, denn da Veränderung Folge physikalischer Wirkung ist, gilt auch das Variationsprinzip der geringsten Wirkung. (Quelle: Die Definition der Information und die Folgen). Eine weitere mathematische Beschreibung, die auf der Natur der Veränderung beruht, ist die Beschreibung von Jan Kahre: The Law of Diminishing Information. (Jan Kahre: The Mathematical Theory of Information). Bewegung ist auch Veränderung. Eine (weitere) Definition der Information über Veränderung erfolgt deshalb über Bewegungsunterschied (Informationsbewegung) und Unterschiedsbewegung (Ruhepotentialität): Information existiert nur in der Bewegung, die immer eine komplementäre, relative Bewegung ist. (**Jerg Haas: Die Kybernetik der Natur: Komplementarität**). Der Begriff der Information ist eng verknüpft mit Fragestellungen im Themenkomplex Wissen. Dazu gehört insbesondere das Problem der Definition von Komplexität, die sich über die algorithmische Tiefe eines informationsverarbeitenden Prozesses beschreiben lässt. Weiterhin zählen hierzu Betrachtungen über den Unterschied zwischen Zufall und Ordnung sowie der Begriff der Unterscheidbarkeit und der Relevanz. In der Algorithmische Informationstheorie wurde ein Maß entwickelt, mit dem man die Komplexität von Strukturen bestimmen kann, z. B. der Komplexität von Zeichenketten. Dies kann unter gewissen Voraussetzungen auch als Maß für die Information angewendet werden, das in einigen Aspekten Vorteile gegenüber dem von Shannon hat. In einem engen Zusammenhang steht auch die (menschliche) Kommunikation: Die Kommunizierbarkeit gilt als eine wesentliche Eigenschaft von Information und jegliche Kommunikation setzt Information voraus.

Daten sind die den Signalen zugeordneten Bedeutungen: Halt, will vorgeblich links abbiegen, schuldig. **Zeichen ist Signalklasse/Synonym**: geschriebener Buchstabe/Ziffer, gesprochenes Phonem, {Halt: Stoppschild, Ampelrot, Polizist}. Wörter. Können verschiedene Bedeutung haben Homonym: Welle (Wasser, Zylinder zur Kraftübertragung) Code ist bijektive Abbildungsvorschrift.: gewöhnliche Buchstaben/Ziffern werden Morsezeichen eineindeutig zugeordnet.

Die Thema-Rhema-Gliederung (auch aktuelle Satzgliederung, funktionale Satzperspektive) ist in der funktionalen Grammatik ein Ansatz, um den inhaltlichen Aufbau von Sätzen und Texten zu beschreiben. Das Thema ist die Ausgangsinformation, das schon Bekannte, während das Rhema die darauf bezogenen Ausführungen bzw. das inhaltlich Neue bezeichnet. Einheiten können aus dem vorangehenden Text bekannt und vorher eingeführt sein (Beispiel 1) oder aber sich aus dem Vorwissen ergeben (Beispiele 2 und 3). (1) Es war einmal ein König (Rhema). Der (Thema) hatte drei Töchter (Rhema). (2) In Berlin (Thema) hat es heute geregnet (Rhema). (3) Ich (Thema) habe gerade einen Anruf bekommen (Rhema). Als Ausdrucksmittel für die Thema-Rhema-Struktur dienen im Deutschen vor allem: die Betonung (des Rhemas), die Satzgliedstellung (Thema am Satzanfang, Rhema am -ende) und besondere grammatische oder lexikalische Mittel der Perspektivierung wie etwa das Passiv. Sowohl das Thema als auch das Rhema können mehrere Satzglieder umfassen, wobei in einem Satz das Thema fehlen kann. Satzglieder mit dem größten Mitteilungswert befinden sich in der Regel am Ende des Satzes. Der Thema-Rhema-Gliederung (alt – neu) werden folgende Gliederungen zur Seite gestellt: * Fokus-Hintergrund-Gliederung (relevant – weniger relevant) * Topik-Kommentar-Gliederung (worüber – was) Molnar teilte die Gliederungen dem Organon-Modell folgendermaßen zu: * Senderebene des Ausdrucks: Fokus-Hintergrund-Gliederung * Sachebene der Darstellung: Topik-Kommentar-Gliederung * Empfängerebene des Appells: Thema-Rhema-Gliederung In der Textlinguistik wird die Thema-Rhema-Gliederung eingesetzt, um als Thema-Rhema-Progression Typen der Satzverbindung und damit der Kohärenz bzw. Kohäsion zwischen Sätzen zu bestimmen.

Ullmann: Psycholinguistik - Psychosemiotik. Dargestellt am Problem der Genese sprachlicher Bedeutungsrelation unter besonderer Berücksichtigung des Englischen 1975; Aichert: Die Bausteine der phonetischen Enkodierung. Untersuchungen zum sprechmotorischen Lernen bei Sprechapraxie 2008; **Sprechapraxie** = Störung der Initiierung und Exekution der für das Sprechen notwendigen Bewegungsabläufe. Broca-Aphasie. Kotten: Lexikalische Störungen bei Aphasie 1997 p28 multimodales serielles Modell der Wortverarbeitung; Blanken ed: Einführung in die linguistische Aphasiologie. Theorie und Praxis 1990;

Kybernetik: Robustheit gegenüber inneren und äußeren Störungen und Adaptivität / Lernfähigkeit basiert auf multiplex (Hierarchie und Parallelität von Subnetzen verschiedener logischer Tiefe), nichtlinear und stochastisch arbeitenden Systemen. Ampere: Idee der Kybernetik 1834; Flechtner: Grundbegriffe der

Kybernetik 1970 p9; CFv **Weizsäcker: Die Einheit der Natur** 1971 TeilIII **Der Sinn der Kybernetik**; **Boltjanski: Mathematische Methoden der optimalen Steuerung** 1971; Wiener: Kybernetik PhysBl5 1949 355-362; **Wiener: Kybernetik** 1948/1963 **kinästetische = propriozeptive Wahrnehmung**; **Propriozeptive neuromuskuläre Faszilation** = PNF. Gehen bedeutet Fallen. Wir gehen nicht, wohin wir wollen, sondern in die Richtung, in die wir fallen. Buck, Beckers & Adler: PNF in der Praxis. Reha und Prävention 1996[3]; Transösophageale Echokardiographie = TEE. **S = Regelstrecke** = Behälter, y Stellgröße per **Stellglied**, **R = Regler**, x Regelgröße: Istwert, Sollwert. **Wiener: Mensch und Menschmaschine** 1954 Pater Dubarle; Ashby: Einführung in die Kybernetik 1956, 1974; **Göldner & Müller: Steuern & Regeln** 1967; Frank: Kybernetik. Brücke zwischen den Wissenschaften. 24 Beiträge aus Umschau in Wissenschaft und Technik 1970; Maximowitsch & Gluschkow: Kybernetik, Computer, Gesellschaft 1976, Kämmerer: Kybernetik 1977; Göldner: Kybernetik 1979; Göldner & Kubik: Nichtlineare Systeme der Regelungstechnik 1978; Pestel: Grundlagen der Regelungstechnik. Ein Lehrbuch für Studierende und Ingenieure 1961; Göldner & Müller: Steuern und Regeln 1967 p126; Zypkin: Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung 1955, 1958; Thiel: Kraftwerksregelungstechnik 1969 p18; Frankovoc, Petras, Skakala, Vykook: Automatisierung und selbständige Steuerung 1970; Schmid: Steuern und Regeln für Maschinenbau und Mechatronik 2010; **Lutz & Wendt: Handbuch der Regelungstechnik** Rückkopplung. Regelungstheorie (http:// techni. tachemie. uni-leipzig. de/ reg/ reglung.html Spurhalten, Geschwindigkeit halten, aufrecht stehen). Fiedler: Steuerungs- und Regelungstechnik 1978; **Lunze: Regelungstechnik (Matlab) Vol1-3 2001** Holger & Wolfgang: Taschenbuch der Regelungstechnik: Mit MATLAB und Simulink; DiStefano & Stubberud: Regelsysteme. Theorie und Anwendung mit Beispielen aus Technik, Physik und Biologie. Schaum 1976; Knobloch & Kwakernaak: Lineare Kontrolltheorie 1986; Linear matrix inequalities in system and control theory Von Stephen Boyd, Laurent El Ghaoui, Eric Feron, Society for Industrial and Applied Mathematics, Venkataramanan Balakrishnan Jungnickel: Optimierungsmethoden. Eine Einführung Balakrishnan: Stochastic differential systems 1973;

Kalman-Filter siehe bei Honerkamp: Stoch dyn Systeme 1990 p267ff; Gershenfeld & Eubank: A Kalman filter primer Chapman 2006; **Grewal & Andrews: Kalman filtering** 1993 ohne Kalman wäre Apollo 11, Saturn V, speziell die Mondfähre, nicht zum Mond gekommen!; Rezension von Bass: ProcIEEE84 1996 p321ff! Schätzer für das linear-quadratische Gaußproblem = Schätzung des instantanen Zustands eines lineare dyn Systems, das durch weißes Gauß'sches Rauschen gestört ist. Der Schätzer ist in Bezug auf eine beliebige quadratische Funktion des Schätzfehlers statistisch optimal. Stratonovich-Kalman-Bucy-Filter = Bayes'scher Minimum-Varianz-Schätzer für lineare stochastische Systeme in Zustandsraumdarstellung. Erweiterte Kalman-Filter, das Unscented Kalman-Filter, das Informationsfilter und eine Vielzahl von numerisch stabilen Varianten wie beispielsweise die sog. Wurzel-Implementierung oder der Bierman-Thornton-UD-Algorithmus. Die meistgenutzte Variante jedoch ist die der Kontrolltheorie entstammende sogenannte Phasenregelungsschleife, ein wesentlicher Bestandteil der meisten modernen Kommunikationsmittel. Im Gegensatz zu den klassischen FIR- und IIR-Filtern der Signal- und Zeitreihenanalyse basiert das Kalman-Filter auf einer Zustandsraummodellierung, bei der explizit zwischen der Dynamik des Systemzustands und dem Prozess seiner Messung unterschieden wird. Näherung des nichtlinearen Problems durch ein lineares: analytische (**extended KF**) oder statistische Techniken (**unscented KF**). Kalman-Matrix wird zur Zufallsvariablen und muss während des gesamten Filtereinsatzes mitgeschätzt werden. Scherbaum: Of poles and zeros. Fundamentals of digital seismology 1996; Nørgaard et al.: Neural networks for modelling and control of dynamical systems 2000; Ljung: System identification 1999;

Hidden-Markov-Modell λ, HMM

Fink: Mustererkennung mit Markov-Modellen: Theorie-Praxis-Anwendungsgebiete 2003; **Segmentierungsfreie** Methode zur Text-, Sprach (Datenrate 250 Worte pro Minute, neben Gestik, Mimik) -, Schrift (klassisch OCR optical character recognition oder Markov-Modelle bei degraded documents)- (Mensch-Maschine-Interaktion: Janich: Was ist Information, 2006), Bio-Sequenzanalyse, -erkennung. OCR trickst meist mit Wörterbuch im Hintergrund! ct20129H6 p8. Segmentierung und Klassifikation in einem

Schritt. Modellparameter werden an Beispieldaten trainiert. Gute **Startparameter-Wahl** und viele Daten nötig. Methoden zur Vektorquantisierung und Schätzung von Mischverteilungsmodellen. n-Gramm-Modelle: HMM und Markov-Ketten-Modelle. Sprachabtastung 11 bis 16 kHz mit Genauigkeit von 8 bis 16 bit. Spracherkennung, textuelle Repräsentation, symbolische Zwischeninterpretation - Phon - Phonem. Heike: Phonologie 1982[2]; Phonem: kleinste Lauteinheiten - Vokale, Konsonanten oder auch Tonhöhen - einer Sprache, die dazu verwendet werden, Bedeutungen zu unterscheiden. Unterscheidet Gunst von Kunst. Pirahã Amazonas-Gebiet hat 11 Phoneme. Kung-Ekoka Namibia hat 141! Sprachverstehen. 16 bis 25 ms Frames mit Überlappung bei Framrate von 10 ms. Daraus Vektoren kontinuierlicher Merkmalswerte des Cepstrums, mittels Emission von akustischem HMM-Wort-Modell identifiziert werden. Darauf setzt ein eine formale Grammatik repräsentierendes HMM-Sprach-Modell auf. Lahres: Einführung in die diskreten Markov-Prozesse und ihre Anwendungen 1964; Ferguson ed. Symp on the application of HMM to text and speech, Inst for defence analysis 1980 (das blaue Buch) darin Ferguson: Hidden Markov analysis: An introduction; Murphy, HMM-Toolbox www. cs. ubc. ca/˜murphyk/Bayes/ hmm.html; http://www. cs. ubc. ca/˜`murphyk/Software/HMM/hmm.html` Fraser: HMM & dyn systems, SIAM 2008; Mackay: Information theory, inference, and learning algorithms 2003; **Koski: HMMs for bioinformatics 2001** Kullback-Distanz, Learning, EM-Algorithmus, Alignment, Scoring. Markov-Ketten Baum-Welch-Algorithmus matlab-codes http://www-math. bgsu.edu/z/ap/ http://wiki. helsinki. fi/display/ mathstat-Kurssit/ Markovian+modeling+ and+ Bayesian + learning,+fall+2010 Gershenfeld: The Nature of Mathematical Modeling Chap15.5; Poritz: HMM: A guided tour, Proc ICASSP 1, 7-13, CH2561-9/1988 IEEE; Rabiner: A tutorialon HMMs and selected applications in speech recognition, Proc of the IEEE 77 (2) 1989 257-285;
`http://xenia.media.mit.edu/~rahimi/`rabiner/rabiner-errata/rabiner-errata.html Billingsley: Elements of Statistical Inference 1961; shw/TeX/introductions/
`Stochastic_Processes/0_Basics/Honerkamp2.ps` Niemann: **Hidden-Markov-Prozess**e und das Suchen von Sequenzen 2005. Hidden-Markov-Modell ist ein 5-Tupel $\lambda = (S; V; A; B; \pi)$ mit: $S = \{s_1; \ldots ; s_n\}$ der Menge aller Zustände = **Alphabet der versteckten** Zufallsvariablen X_t annehmen können, $V = \{v_1; \ldots ; v_m\}$ das **Alphabet der möglichen Beobachtungen oder Emissionen** der Y_t, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die **Übergangsmatrix zwischen den Zuständen des versteckten Systems**, a_{ij} gibt dabei jeweils die Wahrscheinlichkeit an, dass vom Zustand s_i in den Zustand s_j gewechselt wird, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die **Beobachtungsmatrix**, die $b_i(v_j)$ geben die Wahrscheinlichkeit an, im Zustand s_i die Beobachtung v_j zu machen, $\pi \in \mathbb{R}^n$ die **Anfangsverteilung**, $\pi_i = P(X_1 = s_i)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass s_i der Startzustand ist. Oder: Sei $H = \{h_0, \ldots, h_{T-1}\} \in S^T$ die unsichtbare Sequenz von T Tagen des dyn Systems (die Folge von Sonne und Regen, die in einer Dunkelzelle nicht gesehen werden kann) mit den N Zuständen (= 2, Sonne und Regen) oder der Länge N des Alphabets $h_t \in \{q_0, \ldots, q_{N-1}\} \equiv \{0, \ldots, N-1\}$. Die beobachtbaren oder emittierten Daten oder die HMM-Output sei $D = \{d_0, \ldots, d_{T-1}\} \in S^T$, wobei hier M Zustände tatsächlich gesehen werden $d_t \in \{0, \ldots, M-1\}$ (Wärter hat gute oder schlechte Laune, saubere oder schmutzige Schuhe). Annahme: Momentane Beobachtung d_t hängt nur vom hidden Zustand h_t und Parameter-Vektor $\Theta(\pi, Q)$ ab, der die Emission-Wahrscheinlichkeit π und die Übergangswahrscheinlichkeit $Q = q(r, s)$ des HMM beschreibt. http://cran. r-project. org/web/packages/HMM/index. html Die Wahrscheinlichkeit der Ausgabe einer Beobachtungssequenz D vom gegebenen Modell Θ wird HHM-likelihood genannt

$$p(D|\Theta) = \sum_{H\in S^T} p(D, H|\Theta) = \sum_{H\in S^T} \pi_0(h_1)\, P_{h_1}(d_1|\Theta)\, \Pi_{t\in 2..T}\, q(h_{t-1}, h_t)\, P_{h_t}(d_t|\Theta)$$

Baum-Welch- oder (iterativer) forward-backward-Algorithmus zur **MLE** der Parameter. Olle Häggström: Finite Markov chains and algorithmic applications 2009; Marsland: Machine Learning. An Algorithmic Perspective, Chapman & Hall 2009; Mackay: Information theory, inference, and learning algorithms 2003; Python codes zu Markow-Ketten http://seat. massey.ac. nz/personal/s.r. marsland/MLBook.html http://www.cl. uni-heidelberg.de/ kurs/skripte/stat/ html/page027.html; **Markow-Ketten & HMM** http://www. ai-playground.org/ artikel/markov/; http://www. boerse. bz/hard-software/ programmierung/766458- python-text- generieren-mit-markov.html Völz, Horst: Information I & II. Studie zur Vielfalt und Einheit der Information; Theorie und Anwendung vor allem in der Technik 1982; Barbu, VS, Limnios, N. (2008) Semi-Markov

Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications. Their Use in Reliability and DNA Analysis; Nollau: Semi-Markov'sche Prozesse; Frank Noe: Computational Molecular Biology Group, Modeling of conformation dynamics of single molecules using **projected Markov models**, GPU codes **https://simtk.org/**users/noe Manfred Droste, Leipzig: Propalistische Automaten über Modellen mit endlich vielen Zuständen Gewichtete Automaten liefern pdfs über Strings. Hidden Markov. Mustererkennung und Maschinen-Intelligenz. Random constructions imply symmetry!

Münzwurf - 2 Zustände, Würfelaugensequenz - 6 Zustände und Lotto-Ziehung 49 Zustände sind Systeme ohne Gedächtnis - **Markov-Ordnung 0**. Kinderbrettspiele, Irrfahrten, Morse-Signale, Random Telegraph Process, die Buchstaben-Abfolge innerhalb von Worten, die Wort-Abfolge in Sätzen, Erdbebenabfolge, Ruhezustand/Ausbruch in Lichtkurve einer Zwerg-Nova, L-0-Sequenzen auf Datenleitungen und die Abfolge der Basen im DNS-Strang sind Beispiele für **Sequenzen mit Kurzzeitgedächtnis** oder Realisierungen von **Markov-Ketten** verschiedener Ordnung. Wir betrachten Markov-Ketten 1. Ordnung: Die Zukunft hängt allein von der Gegenwart ab. Der folgende Zustand hängt nur vom unmittelbar vorangegangenen Zustand ab. Er folgt aus der folgt allein aus dem momentanen Zustand und der vorgegebenen **Übergangs-Wahrscheinlichkeit** $p_{i\,j} = p_{i\to j}$ mit $\sum_j p_{i\,j} = 1$ für $i = 1, \ldots, M$, wobei M die Anzahl möglicher Zustände eines Systems oder die Länge des entsprechenden Alphabets bezeichnet. Die **Transition-Matrix** $A_{i\,j} = A_{i\to j} = 0$ **oder 1 codiert die Syntax** des Prozesses. Gegeben sei **Übergangs-Matrix** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **charakteristische Gl** $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda = 0$ liefert maximalen Eigenwert oder **topologische Entropie** $h(A) = \lambda_{\max} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. A **mischend**, weil von einem beliebigen Ausgangszustand alle Zustände oder der gesamte Zustandsraum erreicht wird: $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Kurz gefasst: S sei eines der o.g. physikalischen Systeme. Es kann sich zu jedem Zeitpunkt in einem der Zustände

$$A_i \in \{A_1, \ldots, A_M\} = \mathcal{A}$$

befinden. Entsprechendes gilt im multivariaten Fall. Es kann nur zu Zeiten $t_1, \ldots, t_N, \ldots$ seinen Zustand ändern. Für die Markov'sche Kette hängt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das System zum Zeitpunkt $\tau \in (t_s, t_{s+1}]$ in irgendeinem Zustand $A_i \in \mathcal{A}$ befindet nur davon ab, in welchem Zustand sich das System zum Zeitpunkt $t \in (t_{s-1}, t_s]$ befunden hat. Die Wahrscheinlichkeit dafür ändert sich nicht, wenn man die Zustände zu noch früheren Zeitpunkten kennt.

Eine Markov'sche Kette ist ein Zufallsprozess (Familie von Zufallsvariablen), bei dem die Zufallsvariablen nur endlich viele diskrete Werte (Punkt-Prozess, Alphabet ist endlich, Ω besteht aus nur endlich vielen Elementen) zu diskreten Zeitpunkten annehmen können:

$$\{X(t,\omega) | \omega \in \Omega, X \in \{1, \ldots, i, \ldots, M\}, t \in \mathbb{N}_0\}.$$

Sprechweise: Für festes ω^* hat man eine Stichprobe, Realisation, Realisierung, Pfad, Trajektorie oder Zeitreihe. Gnedenko: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie 1957; Graph zur syntaktischen Konstruktion von Sätzen nach Yngve 1955. Meyer-Eppler Abb. 160. Lyons: Introduction to theoretical linguistics 1968; Chomsky: Aspekte der Syntax-Theorie; Syntaktische Konstruktionen auf endlichen, zusammenhängenden, gerichteten Graphen, deren Knoten morphemische Kontextklassen repräsentieren. Die Kanten repräsentieren die grammatischen Regeln. Miller: Wörter; Nomen/Nominalphrase: Bezeichnung f. Person, Ort, Ding. Verb/Verbalphrase: Bezeichnung f. Vorgang. Adjektiv. Letztere sind Prädikat. Adverb: selten, wahrscheinlich. Pronomen. Präpositionen. Konjunktionen/Bindewort: und, oder, wenn, weil, dass, als, wie, allerdings. Interjektion/Einwurf: hey! hey? ach, aha, nanu, huch, igitt, hurra, o lala, tja, äh, ähm. Determinatoren: ein, der, einige.

```
def Jump(TransitionProb):
```

```
 Total = sum(TransitionProb);TransitionProb=TransitionProb/Total
 CumDense = cumsum(TransitionProb)
 return len(CumDense[where(rand()>CumDense)])

def ZeigeMarkovKette(TransitionProb,Markov):
 Alphabetlaenge = len(TransitionProb)
 print("Markov-Kette:",Markov)
 print("Alphabetlaenge",Alphabetlaenge,"mit Uebergangswahrscheinlichkeiten",
TransitionProb)
 for i in range(Alphabetlaenge):
  print("Zustand",i,"Prob",Markov.count(i)*1./N)

# Syntaktischer Graph ueber 4 Knoten. 4. Knoten ist Satz-Zeichen.
TransitionMatrix=array([[0.0,0.8,0.2,0.],
                        [0.0,0.2,0.8,0.],
                        [0.0,0.0,0.0,1.],
                        [0.9,0.0,0.0,0.1]])
# Generiere Markov-Kette
Markov=[]; Markov.append(0) # Start im Zustand 0
j=0
for i in range(N):
 Markov.append(Jump(TransitionMatrix[j]))
# print("i",i,"State",Markov[i],Markov[i+1])
 j = Markov[i+1]
# Knotenbelegung des Graphen mit Wortklassen
Start = ['This','That','He','It','One']         # State 0
Adjektiv1 = ['large','small','old','other']     # State 1
Nomen1 = ['cat','man','boy','girl','dog']       # State 2
Verb1  = ['is','was','looks','seems']           # State 3
Abjektiv2 = ['large','small','old']             # State 4
Konjunktion1 = ['and','or','as well as']        # State 5
Konjunktion2 = ['and','or','as well as','but','however','therefore']    # State 6
Verb2  = ['has','likes','has','wants','needs','is','was','looks','seems'] # State 7
Nomen2 = ['meat','vegetables','fruits','water','cat','man','boy','girl','dog']#State 8
Konjunktion3 = ['and','or','as well as']        # State 9
SatzEnde = ['!','.','?']                        # State 10
Lexikon = [Start,Adjektiv1,Nomen1,SatzEnde]
# Lexikon[1][randint(len(Lexikon[1]))]
# Satz aus Markov-Kette
Satz=[]
for i in range(N):
 Satz.append(Lexikon[Markov[i]][randint(len(Lexikon[Markov[i]]))])
# print(Lexikon[Markov[i]][randint(len(Lexikon[Markov[i]]))])
SatzNew=str(Satz).replace("', '",' ')
```

Wiktionary: Umstellprobe (Verschiebeprobe) und Weglassprobe für Satzglieder als archaisches Mittel für die Beurteilung von syntaktischer Wohlgeformtheit. http://dlexdb.de/ http://cohmetrix. memphis. edu/cohmetrixpr/index. html **Reguläre Ausdrücke** sind textstückbeschreibende datensiebende Strings in denen normale Zeichen 'az' und Metazeichen(sequenzen) '[^a-z]*' (hier führt das Zirkumflex ^ zur Ablehnung der kleinen Buchstaben) kombiniert sind, mit denen komplizierte Muster und Ersetzungsregeln für Strings definiert werden können. Hexadezimale Strings haben nur [0-9a-fA-F]. **Zeilenanker**: Zirkumflex ^ = Zeilenan-

fang, Dollar $ für Zeilenende. ^ding$ oder ^$ search('^\d*\.\d*$','21.12.2012') sucht auf dem gesammten Wort nur einen Punkt mit Ziffernumgebung, stattdessen sucht search('\d*\.\d*','21.12.2012') auf beliebigen Wortfragmenten einen Punkt mit Ziffernumgebung. Die normalen Zeichen sind **Literale** und stehen für sich selbst. Die Metazeichen(sequenzen) = Spezialzeichen drücken eine Grammatik aus stehen für Konzepte wie Menge, Lage oder Art von Zeichen. Hartmann & Selbig: Introductory bioinformatics 2009, 2013[5] Kap5; Reguläre Ausdrücke sind ein Mittel zur formalen Beschreibung von Zeichenketten/Wörtern, die zu einer bestimmten Sprache gehören. Falls Grammatik beschreibende Metazeichen ebenfalls Alphabet-Bestandteil der zu beschreibenden Sprache sind, so werden sie mit dem **Rückwärtsstrich** \ maskiert. Schwartz: Einführung in Perl 1999; Wall, Christiansen, Schwartz: Programmieren mit Perl 2002; Christiansen: Perl Kochbuch 2000[2]; Lutz & Ascher: Einf in Python p475ff;

```
echo $LANG
find -name '*.html'
find -name '*.html' -exec echo name:'{}'\;
find -name '*.html' -exec echo name:'{}' \;
find -name '*.html' -exec grep -n /usr/share/latex2html/icons '{}' \;
find -name '*.html' -exec grep -n -H /usr/share/latex2html/icons '{}' \;
find -name '*.html' -exec grep -n -H /usr/share/latex2html/icons '{}' \; | less
dmesg
find -name '*.html' -exec grep -n -H /usr/share/latex2html/icons '{} && echo ja gefunden' \;
 | less
find -name '*.html' -exec grep -n -H /usr/share/latex2html/icons '{}' '&&' echo ja gefunden \;
 | less
find -name '*.html' -exec grep -l /usr/share/latex2html/icons '{}' \;
find -name '*.html' -exec grep -l /usr/share/latex2html/icons '{}' \;
      | while f=read ; do echo $f ; done
find -name '*.html' -exec grep -l /usr/share/latex2html/icons '{}' \;
   | perl -ne 'open(DAT, $_);
   @l = <DAT>; foreach my $n (@l) { if($n =~ s,file:/usr/share/latex2html/icons,
   http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/LaTeX-Icons,){ print $n; } };'
find -name '*.html' -exec grep -l /usr/share/latex2html/icons '{}' \; |
   perl -ne 'open(DAT, $_);
   @l = <DAT>; open(DAT, ">$_"); foreach my $n (@l) { $n =~ s,file:/usr/share/latex2html/icons,
   http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/LaTeX-Icons,; print DAT $n; };'
```

Ernst: Grundkurs Informatik 2008[4] p472; **Modul re:** from re import *; findall ('e',str(1./23467)); findall('\.',str(1./23467)); [n for n in str(1./23467) if n not in ''] **Muster-Wiederholungs-Grammatik** der Quantoren +*?: + = linkes Muster tritt **ein oder mehrmals** auf. * = linkes Muster tritt **kein oder mehrmals** auf. ? = linkes Muster tritt **kein oder einmal** auf, Merkmal **optionalen Vorkommens** von Zeichen. from re import * s=r'ab*' findall(s,'abbbbabb') findall(r'a','ababbbbb') findall(s,'abbbbbb') 0 oder beliebig ofte Wiederholung von a, greedy findall(r'a*','abbbbbb') findall(r'a*','abb') = ['a', '', '', ''] findall(r'a*','a') = ['a', ''] beliebig ofte kleinste Uebereinstimmung Durchschnitt findall(r'a*?','a') = ['', ''] findall(r'ab*?','a') = ['a'] a+ 0 oder 1 Wiederholung von a, greedy findall(r'a+','aaabbab') = ['aaa', 'a'] findall(r'ab*','aaabbab') = ['a', 'a', 'abb', 'ab'] findall(r'ab+','aaabbab') = ['abb', 'ab'] findall(r'(ab)+','aaabbab') = ['ab', 'ab'] a+? 0 oder 1 kleiste Uebereinstimmung findall(r'a+?','aaabbab') = ['a', 'a', 'a', 'a'] · ist alles außer Newline, \w* alle alphanumerischen Zeichen findall(r'\w','a a?aübb98ab') = ['a', 'a', 'a', 'b', 'b', '9', '8', 'a', 'b'] \W alle **nicht**alphanumerischen Zeichen findall(r'\W','a a?aübb98ab') = [' ', '?', '\xc3', '\xbc
findall("[\s(\d\d)\.\s(\d\d)\.\s(\d\d){1,2}]+",' z06.01.55,,, 25. 4. 1954 uuuee 4.f.22 2.1.2 2')
Kurzanleitung siehe 'python regular tartley.com'.

Gleitkomma-Sytax:
Pattern3=r'^[ ]*[+-]?[0-9]*[\.]?[0-9]*[eE]?[+-]?[0-9]*$'

```
Kette='0.1, 01.0, 0.99, 1E-7, +3.141E+00, hasi87, 21.12.2012, 10:30h'
def Search(pattern,Str):
 match = search(pattern, Str)
# If-statement after search() tests if it succeeded
 if match:
    print 'found', match.group()
 else:
    print 'did not find'
 return match
Pattern3=r'^[ ]*[+-]?[0-9]*[\.]?[0-9]*[eE]?[+-]?[0-9]*$'; Floats = []
for i in range(len(Kette.split(','))):
 Flag = Search(Pattern3,Kette.split(',')[i])
 print 'i=',i,Search(Pattern3,Kette.split(',')[i])
 if Flag:
  Floats.append(float(Kette.split(',')[i]))
print 'Gleitkommazahlen der Liste:',Floats
```

Stubblebine: Reguläre Ausdrücke - kurz & gut, 2007[7] mit **Rezepten**. Regex-Klassen und -Interfaces für Ruby, Java, .NET und C, Regex-Operatoren für Perl 5.8, **Regex** = mächtiges, flexibles, effizientes Mittel zur i.w.S Textbearbeit und i.e.S. generelle Notation zur textmusterbeschreibung = kleine Programmiersprache zum Prüfen und Manipulieren von Texten. Regex-Modulobjekte und -Funktionen für Python, Pattern-Matching-Funktionen für PHP und den Editor vi, Pattern-Matching-Methoden und -Objekte für **JavaScript** siehe Intro c't 15/16/17/2014 p160ff; Friedl: Reguläre Ausdrücke; **grep** -i (=ignore case) Suchmuster Datei Global Regular ExPressions. Mengenangabe `[...] oder Komplement [^...]` grep -i rX *.py; Breymann: Der C++ Programmierer Kap12 p399ff; **Alliteration-Sieb:** `egrep -n -i '\b([a-z]+) +\1\b'` *.tex * = Wildcards = Dateiglobs `egrep "<.>" demo4.xml | tr -d "<>/X" | sed 's/^[ \t]\+Z\?//' | tr "\n" "\t" | tr "Z`
#!/bin/bash `grep -i 'x' testparser | cut -d '>' -f2 | cut -d '<' -f1 > x_file`;
`grep -i 'z' testparser | cut -d '>' -f2 | cut -d '<' -f1 > z_file`; `paste x_file z_file > ergebnis`

Steeb: Nonlinear workbook p498; **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical Methods** 2008; Baldi & Brunak: Bioinformatics. The machine learning approach 2001; ist als einfachste Form eines dynamischen Bayes'schen Netzes ein Quintupel $\lambda = (X, A, Y, B, \pi)$ mit Anfangswahrscheinlichkeitsverteilung der Startzustände $\pi(x_i)$. Zustände des Markov-Modells (X, A) sind nicht direkt beobachtbar. Learning Bayesian networks from postgenomic data with an improved structure MCMC sampling scheme: http://videolectures. net/`licsb08_husmeier_lbn/` http: //www. bioss. sari. ac. `uk/~dirk` http://www. hugin. com/ http://www. norsys. com/ http://sites.stat.psu.edu/~dhunter/ast
http://astrostatistics.psu.edu/su13/program.html

Testens der Markov Eigenschaft in Zeitreihen: Ait-Sahalia (1997) und Amaro de Matos und Fernandes (2007)

Random telegraph process siehe Schnakenberg: Algorithmen in der Quantentheorie und statistischen Physik Seite 177; Giloi: Simulation und Analyse stochastischer Vorgänge 1967; Gillespie: Markov processes; **Karlin & Taylor: A first course in stochastic processes;** Völz & Ackermann: Die Welt in Zahlen und Skalen 1996; Völz: Information 1 & 2 1982; Rinne: Taschenbuch der Statistik; Rosanow: Stochastische Prozesse; Gnedenko: Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitstheorie 1957; Fristedt & Gray: A modern approach to probability theory 1997; **Guttmann: The Concept of Probability in Statistical Physics** 1999; Hyvärinen: Information theory for systems engineers 1970; Meyer-Eppler: Grundlagen und Anwendungen der Informationstheorie 1959, 1969; **Meyn & Tweedie: Markov chains and stochastic stability 2009;** Stauffer & Aharony: Perkolationstheorie 1995; oder http://lib.mexmat.ru/books/5232

9 Numerik, Rechengenauigkeit, -Fehler, -stabilität, -aufwand

Hartmann: Big Practical Guide to Computer Simulations 2015; Davis & Hersh: Erfahrung Mathematik 1994[2] p179 Algorithmen und num Mathe; **Oelschlägel, Matthäus: Numerische Methoden**, MINÖL 1974; **Plato: Numerische Mathematik kompakt** 2010, Plato: Übungsbuch zur numerischen Mathematik. Aufgaben, Lösungen und Anwendungen 2010; **Knorrenschild: Numerische Mathematik** 2008; Preuss & Wenisch: Lehr- und Übungsbuch numerische Mathematik 2001 Kap7 p223ff Analyt. bestimmte Integration geht i.a. nicht numerische dagegen klappt. **Python-Installation und Packages**

```
sudo apt update
apt list --upgradable
sudo apt-get update
sudo apt autoremove
sudo apt install --no-install-recommends python2.7-minimal python2.7
sudo apt install python-numpy python-scipy
sudo apt-get purge python-matplotlib
sudo apt-get install python-matplotlib
```

Python-Packages bei Anacoda: http://continuum.io/downloads **import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from scipy import integrate; import scipy.integrate.quadrature as qd; import scipy.stats.stats as sss**; x = np.linspace(0,np.pi/2,1000); x2 = lambda x,a: a*x**2; b = 1; plt.plot(x,x2(x,b)); y, err = **integrate.quad**(x2,0.,4.,args=(1,)) **args** sagt, dass x die Integrationsvariable ist. import scipy.integrate.quadrature as qd; **Integrand der Γ-Funkion**: ga = lambda t,a: t**(a-1)*exp(-t);a=array([0.1,0.5, 1,2,5,10]); t=linspace(-1,2,100); for i in range(len(a)): plot(t,ga(t,a[i])); qd(ga,0,1,args=(1,)); Analyt. Ableitung geht immer, aber numerische nicht. **Numerische Differenziation** von $f(x)$ bei x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \tilde{f}'(x_0) + E(h) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{(\tilde{f}_h + e_h) - (\tilde{f}_0 + e_0)}{h}\right] + E(h)$$

Zurmühl p342; Dahmen & Reusken p290 +-, Bärwolf Kap5.4 p101; Arens p983 Kap13.2, 28.5; 29.5 p977; **Turing: Wenn eine Maschine absolut fehlerfrei arbeiten soll, kann sie nicht zugleich intelligent sein!** SdW 6/2012 p83; **Computable Analysis:** Turing-Maschine läuft ewig und ist für die reellen Zahlen gemacht! Martin Pape & Streicher, Darmstadt. **Continueous computation theory** Type-2-Theorie. Weihrauch: Einf in die computationale analysis, Hagen. Kreitz: Admissible representation. http://www. cs. uni-potsdam. de/ti/kreitz/cv/node2. html Berechenbarkeit ist Spezialfall von Stetigkeit (Chaos). In Berechenbarkeitstheorie definiert man eine Menge von 'Automaten' die Wörter Σ^* eines endlichen Alphabets Σ verarbeiten (vielleicht besser konsumieren und produzieren). Wenn man nun mit anderen Objekten rechnen will (z.B. $\mathbb{N}$) muss man eine notation (codes) definieren, d.h. eine surjektive Funktion $n : \Sigma^* -> N$. Da Σ^* abzëhlbar ist können die notierten mengen auch max abzählbar sein. Somit kann man nicht $\mathbb{R}$ notieren !! Aber wenn man mit unendlichen Wörtern arbeitet kann man $\mathbb{R}$ notieren. Dies ist Type-2 Theorie. Grob gesagt ist eine stetige(!) Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Type-2 berechenbar, wenn es eine Type-2-Maschine gibt die bei eingabe einer Cauchyfolge (aus rationalen Zahlen) für x eine Cauchyfolge (aus rationalen Zahlen) für $f(x)$ produziert. Type-2 Berechenbarkeit ist also eine spezielle form von Stetigkeit! Eine nichtstetige Funktion ist dagegen nicht Type-2 berechenbar. Aus praktischer Sicht ist eine Type-2 maschine (oder ein Type-2 program) eine (per definition) numerisch stabile Type-1 maschine die aber niemals terminiert.

Zurmühl: **Praktische Mathematik** für Ingenieure und Physiker 1965[5]; **Graham, Knuth: Concrete math;** Da bereits die Zahldarstellung fehlerhaft ist, müssen wir mit Fehlern leben und unter Kontrolle behalten. Die Darstellung von zweierpotenten Zahlen geht weitgehend besser als Dreierpotenzenzen. **Quarteroni & /Saleri: Scientific computing** oder Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB e-book, p22; **Chapra: Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and scientists** 2012[3]; Phys Realität → math Modell → numerisches Problem. Sich fortpflanzende **Rundungsfehler** wegen

Zahldarstellung e_a, Abbruchfehler oder **truncation error** e_t, zusammen Berechnungfehler, **computational error**. **Beispiel Varianz:** Falls mit großen Werten gerechnet wird, so führt ein **naiver Algorithmus** $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2/n}{n-1}$ wegen der Summen von Quadraten zu numerischer Instabilität und arithmetischen Überläufen. Ausweg ist ein **Zwei-Schritt-Algorithmus** oder ein **inkrementeller Algorithmus** mit der Idee **sukzessiven Mittelung** $m_n = m_{n-1}\frac{n-1}{n} + \frac{x_n}{n}$ oder $\bar{x}_n = \frac{(n-1)\,\bar{x}_{n-1} + x_n}{n} = \bar{x}_{n-1} + \frac{x_n - \bar{x}_{n-1}}{n}$ und $s_n^2 = \frac{(n-2)}{(n-1)}\,s_{n-1}^2 + \frac{(x_n - \bar{x}_{n-1})^2}{n}$, $n > 1$ und ein **dekrementeller Algorithmus** mit $\bar{x}_{n-1} = \frac{n\,\bar{x}_n - x_n}{n-1} = \bar{x}_n - \frac{x_n - \bar{x}_n}{n-1}$ und $\sigma_{N-1}^2 = \frac{N\,\sigma_N^2 - (x_N - \bar{x}_{N-1})(x_N - \bar{x}_N)}{N-1}$, um Auslöschung von Genauigkeit zu vermeiden die oberhalb der Genauigkeit der Floatingpointoperationsgenauigkeit liegt. Betrachte das Skalierungsverhalten des Gesamtfehler als Funktion eines positiven **Diskretisierungsparameters** h:

$$e_c \leq C\,h^p$$

mit C unabhängig von h und dem Skalierungs-Exponenten p. 1. Num Rechnen und Fehleranalyse: Algorithmus, Zahldarstellung Bär p1-20; Press; Stöcker p4ff; TBM2001 p961 Dahmen p35, Fehlerquellen TBM2001 p964ff, Stöcker p19, Kondition, Stabilität, Rekursion TBM 1, p1095; Dahmen p11ff, Bronstein p771; Zahldarstellung gemäß TBM Kap19.8 neuer Bronstein, Schwarz/Koeckler Intro; 2. Lösung nichtlinearer Gl. Dahmen p159 3. Gewöhnliche Dgls Dahmen p375ff. 4. Quadratur Bronstein p799, Merziger p178ff. 5. Interpolation Bronstein p792f.

9. Sprache: Datentypen & Variablen Literale, Klassen, Methoden, Operatoren, Schlüsselworte: Funktionen, Schleifen, Kontrollstrukturen (if else, while, switch case), Kommentare, Trennzeichen. Walsch: Java Bibel; Kühnel: Die Java-Fibel. Interaktive Homepages 1996; **Rechenaufwand, computational costs** eines Algorithmus = Anzahl arithmetischer Operationen für dessen Ausführung. Bei Kenntnis der Computer-Geschwindigkeit in Floating-Point-Operations flops hat man Rechenzeitabschätzung. **Komplexität** eines Algorithmus = Größenordnung $O(d)$ - verhält sich für große d wie eine Konstante mal d - der notwendigen Anzahl arithmetischer Operationen als Funktion eines Parameters d: $O(1)$ Algor mit konstanter, $O(d)$ Algorithmus mit linearer, $O(d^m)$ Algorithmus mit polynomialer, $O(c^d)$ Algorithmus mit exponentieller, $O(d!)$ faktorieller Komplexität. Beispiele: Matrix der Ordnung n mal Vektor ist von quadratischer Komplexität $O(n^2)$. **Matrix mal Matrix** geht mit $O(n^3)$ oder bei Strassen mit $O(n^{\log_2 7})$ oder Winograd und Coppersmith mit $O(n^{2.376})$. **Determinante** $O(n!)$, bei $n = 24$ 20 Jahre, aber Rückführung auf Matrizenmultiplikation geht mit Strassen mit $O(n^{\log_2 7})$. **L̃andsberg: Tensors. Geometry and applications** 2012 p5ff; **Elapsed time** = cpu time + I/O. Gegeben seien die Matrizen A, B und $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit der Eigenschaft $A\,B = C$, ausführlich $\begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & b_{12} & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & b_{32} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$ gibt $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 4 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$. **Arens et al.: Arbeitsbuch Mathematik**: Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege 2009 Kap16 p244;

Matlab to python cross-compiler: http://ompc.juricap.com/ Knorrenschild; Kallenrode: Rechenmethoden; **Skeel & Keiper: Elementary numerical computing with Mathematica** 1993; **Numerik-Einführung auf den ersten 26 Seiten!** Pine: Introduction to Python for Science and Engineering 2018; Garrido: Introduction to Computational Models with Python 2015; Frochte: Maschinelles Lernen. Grundlagen und Algorithmen in Python 2019; Igual & Segui: Introduction to Data Science. A Python Approach to Concepts, Techniques and Applications 2017; Hutchinson: A Student's Guide to Numerical Methods; Robitaille, Barmby, Jeschke, Mumford, Persson: Python in Astronomy http://python-in-astronomy.github.io/. **Python-Crash-Kurs/Schnelleinstieg:** W̃alker: Computational Physics 2016; Wood: Python and Matplotlib Essentials for Scientists and Engineers 2015; Hinsen: Computation in Science 2015; Ãnagnostopoulos: Computational Physics - A Practical Introduction to Computational Physics and Scientific Computing using C++, VolI+II 2016; K̃inder & Nelson: A Student's Guide to Python for Physical Modeling 2015; **Python-Einführung:** **0. Syntax** http://docs.python-guide.org/en/latest/intro/learning/ http://www. mantidproject. org/Introduction_To_Python_Exercise_Solutions, **Mark Newman: Computational Phy-**

sics 2012 http://www-personal.umich.edu/~mejn/cp/index.html; **navigierbare Sichten/Projektionen im 3D** mit **VPython** http://www. vpython.org/. **1. Plot** mehrerer Funktionen mit subplot und legende. **Prozedur-Definition**. hist(). **2. Summiere** Partialsummen/Fehler-Diskussion **Iteriere** $x_{n+1} = f(x_n)$: Brown'sche Bewegung. Logistische Abbildung. Zelluläre Automaten. Harmon Oszillator mit Euler. Lorenz. Kepler. 3D-Trajektorie siehe Seite 273. Beachte **Array-Kopie**. q=arange(3); r=q; r[1]=99, print q; Weil nun Referenzen auf Adressen existieren. Anders mit wird mit r=1*q oder r=q.copy() eine neue Instanz geschaffen! **Programmbeispiele** siehe http://www. michael-holzapfel. de/progs/python/python_beisp. htm; **Kiusalaas: Numerical Methods in Engineering with Python 2005**; **Webentwicklung mit Python Django** in c't 2015 H3, p156ff und ct.de/yhkh. Numarray Home Page http://www. stsci. edu/resources/software_hard ware/numarray; **Grander & Hrebicek: Solving problems in scientific computing**; Deuflhard & Hohmann: Numerical analysis in modern scientific computing; **Deuflhard & Hohmann: Numerische Mathematik 1. Algorithmisch orientierte Einführung** 1992[2]; Stoer: Numerische Mathematik 1 & 2; Filtschakow: numerische und grafische Methoden der angewandten Mathematik 1975; Wilkinson: Rundungsfehler 1969; **Nonweiler: Computational Mathematics: Introduction to Numerical Approximation** 1984; Stoer & Bulirsch: Introduction to numerical analysis; Stoer: Numerische Mathematik - eine Einführung unter Berücksichtigung von Vorlesungen von Bauer Teil1; **Michael Overton: Numerical Computing with IEEE Floating Point Arithmetic 2001**; http://cs.nyu.edu/faculty/overton/v22_421/index. html **Gregory & Krishnamurthy: Methods and Applications of Error-Free Computation** 1984; Press et al.: Numerical recipes 2007[3]; Stoer & Bulirsch: Intro to num analysis 2002; Wilkinson: Rounding errors in algebraic processes 1964 Bärwolff: Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker Kap1; **Knorrenschild: Numerische Mathematik** Kap1 2008; **Stuart & Humphries: Dynamical systems and numerical analysis** 1998; Ginoux: Differential geometry applied to dynamical systems 2009; Leimkuhler & Reich: Simulating Hamiltonian dynamics 2004

Landau, Páez, Bordeianu: Computational Physics: Problem Solving with Computers 2007[2] Marvin Lee **Minsky**: Computation: Finite and Infinite Machines. Automatic Computation 1972, **Berechnung: Endliche und unendliche Maschinen**, Stuttgart 1971; John Von Neumann, Arthur Walter Burks: Theory of self-reproducing automata 1966; SdW H5 2012; Mirek Wojtowicz: 1D and 2D Cellular Automata http://psoup.math.wisc.edu/mcell/ Replikation = absolut genaue Verdoppelung. Reproduktion = Kinder dürfen sich von ihren Eltern unterscheiden. Nobili & Pesavento 1995: Zellen können 32 statt 29 (von Neumann) verschiedene Zustände annehmen. Die selbstreplizierende Konfiguration besteht aus 6329 Zellen plus einem 145 315 Zellen langen Band, das vergleichbar dem Erbgut von Lebewesen eine Konstruktionsanweisung zum Ablesen enthält. Ein Fortpflanzungszyklus, das heißt das Duplizieren der Konfiguration einschließlich des Bands, erfordert 63 Milliarden Zeitschritte. http://www. pd. infn. `it/~rnobili/wjvn/index.` htm; Buckley 2000: Die sich selbst replizierende Konfiguration umfasst 18 589 Zellen, das Kodierungsband besteht aus 294 844 Zellen, und eine Verdopplung benötigt 261 Milliarden Schritte. Kostenfreies PC-Programm Golly. **QR-Code** = Bithaufen, ct2022 H17 p142f;

Haftendorn: Mathematik verstehen 2009 - Verschlüsselung. **pyDES Der PageRank-Algorithmus** ist Verfahren, eine Menge verlinkter Dokumente/Knoten, wie beispielsweise das World Wide Web, anhand ihrer Struktur als Graph zu bewerten bzw. zu gewichten. ct9.2020p10 Dabei wird jedem Element ein Gewicht, der PageRank, aufgrund seiner Verlinkungsstruktur zugeordnet. Algorithmus von Larry Page (daher der Name PageRank) und Sergei Brin an der Stanford University entwickelt und von dieser 1997 zum Patent angemeldet. Er diente der Suchmaschine Google des von Brin und Page gegründeten Unternehmens Google Inc. als Grundlage für die Bewertung von Seiten. Der PageRank-Algorithmus ist eine spezielle Methode, die Linkpopularität einer Seite bzw. eines Dokumentes festzulegen. Das Grundprinzip lautet: Je mehr Links auf eine Seite verweisen, umso höher ist das Gewicht dieser Seite. **Collaborative filtering** ct8.2020 p66 Jacob Levy Moreno 1930 Soziometrie, Leo Katz 1953 Wie misst man Sympathie? Je höher das Gewicht der verweisenden Seiten ist, desto größer ist der Effekt. Das Ziel des Verfahrens ist es, die Links dem Gewicht entsprechend zu sortieren, um so eine Ergebnisreihenfolge bei einer Suchabfrage herzustellen, d.h. Links zu wichtigeren Seiten weiter vorne in der Ergebnisliste anzuzeigen. Der PageRank-Algorithmus bildet einen zufällig durch das

Netz surfenden Benutzer nach. Die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser auf eine Webseite stößt, korreliert mit dem PageRank. Das Prinzip des PageRank-Algorithmus ist, dass jede Seite ein Gewicht (PageRank) besitzt, das umso größer ist, je mehr Seiten (mit möglichst hohem eigenem Gewicht) auf diese Seite verweisen. Das Gewicht PR_i einer Seite/Knotens i berechnet sich also aus den Gewichten PR_j der auf i verlinkenden Seiten j. Verlinkt j auf insgesamt C_j verschiedene Seiten, so wird das Gewicht von PR_j anteilig auf diese Seiten aufgeteilt. Folgende rekursive Formel kann als Definition des PageRank-Algorithmus angesehen werden:

$$PR_i = \frac{1-d}{N} + d \sum_{j \neq i} \frac{PR_j}{C_j}$$

Dabei ist N die Gesamtanzahl der Seiten/Knoten und d ein Dämpfungsfaktor zwischen 0 und 1, mit dem ein kleiner Anteil des Gewichts $(1-d)$ einer jeden Seite abgezogen und gleichmäßig auf alle vom Algorithmus erfassten Seiten verteilt wird. Dies ist notwendig, damit das Gewicht nicht zu Seiten „abfließt“, die auf keine andere Seite verweisen. Die Gleichung kann sowohl als Eigenvektorproblem der Matrix

$$M_{\mathrm{EV}\,ij} = \frac{1-d}{N} + d\,T_{ij}\ , T_{ij} = \begin{cases} 1/C_j, & \text{falls Seite } j \text{ zu Seite } i \text{ linkt} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

als auch (für $d < 1$) als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$M_{ij}\,PR_j = \frac{1-d}{N}$$

mit

$$M_{ij} = \delta_{ij} - d\,T_{ij}$$

interpretiert werden. Die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$PR_i = \frac{1-d}{N} \sum_j {M^{-1}}_{ij}$$

kann analytisch oder numerisch erfolgen. Für $d < 1$ ist die Lösung des Gleichungssystems eindeutig. Durch Verwendung der Jacobi-Iteration zur numerischen Lösung ergibt sich obige rekursive Gleichung. Andere numerische Verfahren zur Matrixinvertierung, wie das Minimale-Residuum-Verfahren oder das Gauß-Seidel-Eliminations-Verfahren, konvergieren jedoch in der Regel schneller.

Primzahlen $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$. **Primzahlzwillinge:** (3,5),(5,7),(11,13), also durch nur eine Zahl getrennte Primzahlen. Tammet: Die Poesie der Primzahlen 2014; Eines der zentralen offenen Probleme in der Mathematik ist die Riemann-Hypothese 1859 Genaue Abschätzung für die Größe der n-ten Primzahl. Obwohl die Aussage äußerst konkret ist, wird allgemein erwartet, dass der Beweis der Riemann-Hypothese auf gänzlich neuen Ideen beruhen muss. Dies liegt an einer ähnlichen Entwicklung für ein Analogon der Riemann-Hypothese, das in den 1940er Jahren von Andre Weil formuliert wurde und als 'Weil-Vermutungen' berühmt wurde. Diese Vermutungen wurden aufbauend auf revolutionären Ideen von Alexander Grothendieck in der algebraischen Geometrie schließlich von seinem Schüler Pierre Deligne 1974 bewiesen. Stolperstein-Verlegung in der Brunnenstraße 165. Alexander Grothendieck entkam 1941 dem Lager und fand Unterschlupf in Le Chambon-sur-Lignon. Er wurde einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts und hat insbesondere die Algebraische Geometrie revolutioniert. Er ist am 13. November 2014 gestorben. Gorski & Müller-Phillipp: Leitfaden der Arithmetik 2009[5]; Havil: **Gamma** 2007; Valentiner: Notiz zum Goldbachschen Primzahlsatz, PhysBl 22 1966 p154-157; Klassische **Goldbach'sche Vermutung:** Jede gerade Zahl > 4 kann als Summe zweier Primzahlen ausgedrückt werden. Christian Goldbach 1742 an Euler. SdW Aug 2013 p16; Dez 2008 p94; Jede gerade/ungerade Zahl größer 2/5 ist darstellbar als Summe zweier/dreier Primzahlen. www. utm. edu/research/primaes/ largest. html http://www.primzahlen.de/primzahltests/2-100003.htm 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331,

337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569, 571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659, 661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769, 773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881, 883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997, 1009, 1013, 1019, 1021, 1031, 1033, 1039, 1049, 1051, 1061, 1063, 1069, 1087, 1091, 1093, 1097, 1103, 1109, 1117, 1123, 1129, 1151, 1153, 1163, 1171, 1181, 1187, 1193, 1201, 1213, 1217, 1223, 1229, 1231, 1237, 1249, 1259, 1277, 1279, 1283, 1289, 1291, 1297, 1301, 1303, 1307, 1319, 1321, 1327, 1361, 1367, 1373, 1381, 1399, 1409, 1423, 1427, 1429, 1433, 1439, 1447, 1451, 1453, 1459, 1471, 1481, 1483, 1487, 1489, 1493, 1499, 1511, 1523, 1531, 1543, 1549, 1553, 1559, 1567, 1571, 1579, 1583, 1597, 1601, 1607, 1609, 1613, 1619, 1621, 1627, 1637, 1657, 1663, 1667, 1669, 1693, 1697, 1699, 1709, 1721, 1723, 1733, 1741, 1747, 1753, 1759, 1777, 1783, 1787, 1789, 1801, 1811, 1823, 1831, 1847,...; K. Strick: Riemann spektrum.de 1.11.2012; Naess: Die Riemannsche Vermutung 2007; Trost: Primzahlen 1953; **Pi-Funktion, Primzahlzählfunktion** $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto \pi(n)$, Wachstumsverhalten. $\pi(1) = 0$; $\pi(10) = 4$; $\pi(100) = 25$; $\pi(1000) = 168; \pi(10000) = 1229, pi(10^5) = 9592,\ \pi(10^6) = 78498$. **Primzahlsatz:** $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$, besser Legendre $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)-1{,}08366}$. **Primzahldichte** $\pi(x)/x$ ist fallend. **Restklasse** der 2 modulo 5 $= \{2, 7, 12, 17, \dots, -3, -8, \dots\}$, also $3+4 \equiv_5 7 \equiv_5 2$ oder $5 \cdot \mathbb{Z} + 2 = \{\cdots -8, -3, 2, 7, \dots\}$ Modulo 5 auf Kreisrand if (np.mod(Steps,100) == 0): print ('Iteration',Steps) Modulo-Funktion in Python: 7%6, mod(7,6), divmod(7,6);

Kippenhahn: Verschlüsselte Botschaften. **pyDES** Page rank; ct3 2019 p3, p189ff; **Verschlüsselung** per **gpg**2 -ca Geheim liefert Geheim.asc. Geheim löschen! Ausloggen! gpg2 -d -o GeheimRecover Geheim.asc. http://www.gnupg.org/ http://www.openpgp.org/ eduroam https://www.eduroam.org/ Biehl & Thielscher: Copyright-Schutz digitaler Daten durch kryptographische Fingerprinting-Schemata. Kognitive Robotik - Perspektiven und Grenzen der KI-Forschung. Colloquia Academica 1999; Spektrum Spezial: Kryptographie kompakt. Vertrauliches verschlüsseln. Kodes knacken 2016; Manfred Schroeder: Number Theory in Science and Communication: With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing, and Self-Similarity 2008[5]; Kryptografie Aufgabe von Abel Emigma . Horster, P. Kryptologie 1985; Karpfinger & Meyberg: Algebra: Gruppen - Ringe - Körper 2010; **Zahlentheorie** Martin Wohlgemuth et al. eds: Mathematisch für fortgeschrittene Anfänger 2010; **Diffie-Hellman-Schlüsselaustausch:** p prim, $g \in \mathbb{N}$ sind öffentlich. Alice wählt Zufallszahl $a \in [0, 1]$ und sendet Bob die Zahl $A = g^a \bmod p$. Bob würfelt $b \in [0, 1]$ und sendet Alice die Zahl $B = g^b \bmod p$. Nun kennen Allice mit $B^a \bmod p$ und Bob mit $A^b \bmod p$ die gleich Zahl, sie haben ein gemeinsames Geheimnis $g^{ab} \bmod p$. c't 18 2013, p17

10 Optimierung

Moisseev & Tikhomirov: Optimisation und Variationsrechnung In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; Jungnickel: Optimierungsmethoden. Eine Einführung; Spektrum Digest 2/1999 Optimierung; Ley & Löther: Mikrokosmos-Makrokosmos. Philosophisch-theoretische Probleme der Naturwissenschaft und Technik, Medizien 1967 Bd1 Felke: Vom Prinzip der kleinsten Wirkung zur Optimierungsforschung p431-512; Grossmann & Kleinmichel: Verfahren der nichtlinearen Optimierung 1976; Großmann & Kaplan: Strafmethoden und modifizierte Lagrangefunktionen in der nichtlinearen Optimierung 1979; Zieliński & Neumann: Stochastische Verfahren zur Suche nach dem Minimum einer Funktion 1983; Großmann & Terno: Numerik der Optimierung 1993; Kosmol: Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben 1990;

11 Calculus, Frechet, Gateaux, Taylor, Fubini, fractional calculus

Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis 1947, 1956, 1967; **Dirschmid: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik** 1988[3], 1990[4];

Dirschmid: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik. **Lösungen und Hinweise** 1988; Boltjanski: Differentialrechnung einmal anders 1956; Grundidee der Differenzialrechnung = Näherung von differenzierbaren Abbildungen durch lineare. Vereinfache analytisch schwierige, nichtlineare Probleme zu linear-algebraische. Differenzial = **Zuwachs** $\mathrm{d}f_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ von f bei x ist $f(x+v) = f(x) + \mathrm{d}f_x \cdot v + \varphi(v)$ mit $\lim_{v\to 0} \varphi(v) = 0$. Jänich: Analysis für Physiker p25ff **Unter dem Mikroskop = Jacobi-Matrix sieht alles linear aus.** Wüst: Mathe2 p633; Jänich 1 p26; dtv-Atlas Mathe2 p321; Rudin: Principles of mathematical analysis 1964; Rudin: Analysis 2009[4]; Rudin: Reelle und komplexe Analysis 2009; Folland: Real Analysis. Modern Techniques and Their Application 1999[2]; Kolmogorov: Introductory Real Analysis 2000; Kolmogorov & Fomin: Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis 1999; Riemann & Weber: Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemanns Vorlesungen, 4. Aufl. neu bearb. von Heinrich Weber (1842-1913); Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953; **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; B̃alakrishnan: Mathematical Physics with Applications, Problems and Solutions 2017; Kusse: Mathematical Physics 2006; **Menzel: Mathematical physics** 1961 Mechanik, Hydrodynamik, SRT und ART; Lebedev, Skalskaya & Uflyand: Problems in Mathematical Physics 1966; Hassani Mathematical Physics 2013: C̃arroll & Nachbin: Mathematical Physics 1988; Fujita & Godoy: Mathematical Physics 2009; Reed & Simon: Methods of modern mathematical physics Vol1 Functional analysis 1972, 1981; Grübl: Mathematische Methoden der Theoretischen Physik 1. Gewöhnliche Differentialgleichungen Fourieranalysis - Vektoranalysis 2019; Grübl: Mathematische Methoden der Theoretischen Physik 2. Wahrscheinlichkeitstheorie, Funktionentheorie, Partielle Differentialgleichungen 2019; Callahan: Advanced Calculus. A Geometric View 2010 e-book; **Callahan: The Geometry of Spacetime. An Introduction to Special and General Relativity** 2001[2]; Solution manual for The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity e-book; **Robb: Geometry of Time and Space** 1914, 1936[2]; **Kaplan: Advanced calculus** 1952, 2001[4]; Friedman: Advanced Calculus 2007; Widder: Advanced Calculus 1989; **Meyberg & Vachenauer: Höhere Mathematik.** Bd1 Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. Bd2 Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analysis, Variationsrechnung; Leibniz: Calculi 1673-1680. Brown: The Tangled Origins of the Leibnizian Calculus: A Case Study of a Mathematical Revolution 2012; Nach Penrose ist allerdings ein rechnendes Universum nur mit diskreter Mathematik vorstellbar, siehe Zenil ed: **A Computable Universe: Understanding and Exploring Nature as Computation** 2012;

Integralrechnung - Hauptsatz

Natanson: Summierung unendlich kleiner Größen. Einführung in die Integralrechnung 1955;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}t f(t) = f(x), \quad f(x) = f(a) + \int_a^x \mathrm{d}t\, f'(t)$$

Auf wundersame Weise werden laut Hauptsatz zwei geometrisch völlig verschiedene Eigenschaften von Funktionen, die über Grenzwerte definiert sind, verheiratet: Die **Ableitung = lineare Näherung der Funktion in einem Punkt** und die Fläche unter der Kurve der Funktion über einem Intervall. **Ableitung = Grenzwert per Folgendefinition: Sekanten → Tangente!** Aber Integral = Folge von Zerlegungs- oder Parzialsummen → Reihenwert. **Bernoulli'sche Ungleichung:** Taylor von $(1+x)^n = (1+x)^n|_{x=0} + n(1+x)^{n-1}|_{x=0}x \geq 1 + nx$. **Brehmer & Apelt: Analysis I. Folgen, Reihen, Funktionen, MfL4**, 1974 p16f; Trauzeuge ist das Differenzial = **Zuwachs**. Man dachte bis ins 19. Jh, dass Integrale bloß Stammfunktionen sind. Wie aber berücksichtigt man Löcher im Definitionsbereich? Was ist das Volumen einer Teilmenge des $\mathbb{R}^p$? Man stößt auf das Inhaltsproblem, das dimensionabhängig ist. von Neumann: Die strukturellen Unterschiede der Bewegungsgruppen von $p = 1, 2$, die auflösbar sind, und $p \geq 3$, wo die SO(3) eine freie Untergruppe vom Rang 2 hat, was die Unlösbarkeit des Inhaltsproblems bedingt. Siehe Seite 113. **Idee der Ableitung** bei **barometrischer Höhenformel:** $\lim_{s\to 0}\ p(x) - p(x+s) = sg\rho$ bedeutet $\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x} = -g\rho$. **Ableitung hat aber i.a. nichts mit Raum zu tun** (dazu siehe Seite 299), obwohl dies oft Ausgangspunkt zum Verständnis ist, da man sich einen Berg vorstellt -

eine **Tangente an eine Kurve** malt, die man sich gar als Winkel mit der Abszisse vorstellen darf $T(t)$. Ableitung $\alpha = \arctan T'(t)$. **Winkel zwischen Änderung einer Temperatur und Zeitdauer?** Diese Vorstellung steht einem aber im Weg, wenn man auf **Tangenzialräume und Faserbündel** raus will. In diesem Zusammenhang ist es nützlicher, sich den Raum als Draht = 1D-Raum vorzustellen, dessen **innere Eigenschaften** als Funktionen eines **Positionsparameters längs des Drahtes = Bogenlängen**- oder Linienelement oder Parameter λ wie Masse, Farbe, Temperatur, etc. und alle deren höhere Ableitungen, sofern existent, als Bündel aller Eigenschaften $\lambda \to \vec{x}(\lambda)$ mitschleppt. Analog kann der Zustand/Ereignisse der Welt längs der Zeitachse eines Beobachters mit dem Zeit-Parameter t betrachtet werden: $t \to \vec{x}(t)$. **Man kehrt also besser die Ortsvektor-Idee um! = Faserbündel-Idee.** Dem 1D-Raum kann man beliebige hochdimensionale Räume anhängen: $G = \pi^{-1}(t)$. Die Ableitungen oder Tangenzialräume sind, weil sie die Änderungen der o.g. Eigenschaften der Raumpunkte beschreiben, mit der Position λ verknüpft. Stehen aber, weil sie völlig verschiedene Qualitäten beschreiben, senkrecht aufeinander. Unzicker: Die mathematische Realität. Warum Raum und Zeit eine Illusion sind 2019 p145ff; H̃estenes: Space-time algebra 1966, 2015; Hestenes: Space-time physics with geometric algebra AmJPhys71 2003 p691-714; **Sternberg: Curvature in mathematics and physics** 2012; K̃imura: Instanton counting, quantum geometry and algebra 2021; **Stewart: Mathematik. Probleme. Themen. Fragen 1990 Faserbündel** p254f, p278; **Laures & Szymik: Grundkurs Topologie** 2009 p183 **Bündel = Klasse von Abbildungen.** Faserbündel sind zB Prinzipalbündel und Vektorbündel. **Fasern** sind topologische Gruppen und Vektorräume. **Beispiel: Tangenzialbündel der Kreislinie** ist der Teilraum $\mathrm{TS}^1 = \{(z,v)|v \perp z\} \subseteq S^1 \times \mathbb{C}$ zusammen mit der Projektion $\pi : (z,v) \mapsto z$ auf die erste Koordinate in S^1. Diese Abbildung ist trivial, mit typischer Faser $\mathbb{R}$. Eine **Trivialisierung** ist durch $\mathrm{T}S^1 \to S^1 \times \mathbb{R}; (z,v) \mapsto \left(z, \frac{v}{iz}\right)$ gegeben. Auf S^1 hat man in jedem Punkt Eigenschaften, die durch ein Vektorbündel erfasst werden. Zwar ist auch hier die Vorstellung einer Tangente hilfreich, um sich etwas unter Tangentenvektoren vorzustellen. Jedoch kann die geometrische Vorstellung zur irrigen Annahme führen, dass man aus dem S^1 hinaus in einen $\mathbb{R}^2$ kommt. Man bleibt auf S^1, nur die Eigenschaften jenseits des Punktes, aber innerhalb derselben Mannigfaltigkeit S^1, ändern sich linear mit der Entfernung zum Punkt im Sinne eines Differenzials. Genauer bei **Booss: Topologie und Analysis. Einführung In Die Atiyah-Singer-Indexformel** 1977 p323 Man lebt in der eindimensionale Untermannigfaltigkeit $X = S^1$ des euklidischen Raums $Y = \mathbb{R}^2$, den man nicht sehen, aber spüren kann. Man macht in X eine Translation/man schreitet um φ fort, was in Y einer Drehung um einen Winkel φ entspricht. Einen Winkelbegriff gibt es in S^1 nicht. So identifiziert man alle Tangenzialräume $T(S^1)_X$ mit demselben Unterraum von $T(\mathbb{R}^2)_0$, also alle Geschwindigkeitsvektoren starten im Ursprung oder Tangenzialraum $T(S^1)_{(1,0)}$, der im Punkt $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ sitzt.

Es gibt **Graphen mit Ableitung**, wenn beim Zoomen/Mikroskopieren die krumme Glattheit zur Geraden wird, und **Graphen ohne Ableitung**, die beim Mikroskopieren/Zoomen rauh bleiben, z.B. Fraktale. **Graphen mit lokalem Maß: Anstieg**. Anstiegslose Graphen lassen sich nur durch globale Maße wie Varianz der Inkremente oder **fraktale Dimension** beschreiben.

Hertel: Mathematikbuch zur Physik 2009 e-book, Arbeitsbuch Mathematik zur Physik, 2011; Wilf: Mathematics for the physical sciences 1962; Schulz, Jänich, **Königsberger: Analysis I& II**; EBooks http://bookboon.com/de/studium/mathematik; Meschkowski, **Spivak**, Seldovich, **Nickel, Conrad, Völkel, Leupold, Herfurth: Mathe für Ingenieur- und Fachschulen**; Piskunow, Smirnov, Papula **Arens**; Haftendorn: Mathematik sehen und Verstehen 2009; Willers: Elementar-Mathematik. Ein Vorkurs zur höheren Mathematik 1948, 1965[12]; **Mathe-Test = Rechentest**: https://dmv. mathematik. de/studium-und-beruf/ mathe-studieren. html **Tinhofer: Mathematik für Studienanfänger** 1977; **Meyberg & Vachenauer: Höhere Mathematik.** Bd1 Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. Bd2 Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analysis, Variationsrechnung;

Differenzialrechnung **Hilbert & Cohen-Vossen: Anschauliche Geometrie** 1932 p152 zu Ebenen Kurven. Sekante. Tangente als beste Annäherung an Kurve. Berührungspunkt. Hilbert: Grundlagen der Geometrie 1903; Hilbert: Die Grundlagen der Physik 1915; **Differenziation bedeutet Linearisierung. Nichtlineare Operatoren werden durch lineare approximiert. Nichtlineare Probleme werden so**

durch lineare Algebra gelöst. Beantwortet raum-zeitlich lokal die Frage: Wie geht's im nächsten Moment weiter? Wie wird sich eine Eigenschaft ändern, wenn ich irgendwas verändere. Wird's jetzt anders? Hochpassfilter. **Spivak: Calculus 1994** Kap9 & 10. Haftendorn p151; **Blick auf den Punkt. Ableitung = wie geht's mit einer Eigenschaft woanders linear weiter? Aber Ableitung im Mehrdimensionalen erfordert die Umgebungsdefinition des Grenzwerts!** Ableitung bedeutet hier nicht, dass man bloß die mehrdimensionalen reellwertigen Funktionen ableiten kann, sondern dass alle paarweise gemischten auch übereinstimmen: Satz von Schwarz erfüllt, wegunabhängig, Cauchy-Riemann'sche Differenzialgleichungen, siehe Seite 205 gelten, rot $\vec{F} = \vec{0}$, wirbelfrei, konservativ oder $\mathrm{dd}\omega = 0$. Grund: Im Mehrdimensionalen kann man im allgemeinen von jedem Punkt in überabzählbar unendlich viele Richtungen Veränderungen spüren. Wird auch bei der Definition des Gradienten - in Sinne wegabhängig oder nicht - und anderen Vektordifferenziationen deutlich. Nur wenn bei allen Annäherungen aus diesen Richtungen an diesen Punkt die Grenzwerte übereinstimmen, so ist die Funktion ableitbar, glatt, analytisch oder holomoph. Schreibe stets ∂_x Schulz. Grenzwert/Limes des Sekantenanstiegs = Tangentenanstieg. Steigungsschild. Janus-Kopf: $\cdot$ bei $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ist einerseits Operator für $\lim_{h\to 0} \frac{\cdot(\cdot + h) - \cdot}{h}$ und andererseits Differenzialquozient, mit dem man symbolisch rumrechnen kann $\mathrm{d}f = \alpha\,\mathrm{d}t$. $G(t)$ ist **Anti-Ableitung** von $G'(t)$. Ableitungsfunktion. Geometrisch. Extremstellen zwecks qualitativer Deutung.

Mathematica: `f[x_]:= Expand[(1+x)^2], f[x],f[1.1],f[a+b],`
Ableitung: `D[f,{x,2}], D[ArcCoth[x], x],D[Log[a, x^17], x]`
Simplify: `Simplify[D[Sqrt[(1 - x^n)/(1 + x^n)], x]],`
Plot: `Plot[1/(x - 1)/(x - 3), {x, -2, 7}], ssh tesla.stud.physik.uni-potsdam.de -l shw -X -Y -vvv; Quit, Exit, ^D, Shift-Return = ENTER, ; suppress output, «name.m = Zuweisung, := Definitionszeichen, == Relationszeichen, Help: ?Log - Info about Log[x], ??Log -`
`More info about Log[x], ?L* - All functions begining with L, (* comment *)` K̃rämer: Symbolische Maschinen: Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss 1988; Lisp, Macsyma. **REDUCE:** df(f(x),x), df(y,x1,2,x2,x3,2) **Dynamische-Geometrie-Software (DGS):** tplot. Markus Hohenwarter 2002 dynamische Mathematiksoftware **GeoGebra** mit Java Runtime Environment = JRE unter Linux und Android 2013. Nutzt Mapreduce. Kaenders & Schmidt: Mit GeoGebra.org mehr Mathematik verstehen. Beispiele für die Förderung eines tieferen Mathematikverständnisses. 2014[2]; **GeoGebra** für Prüfungen ct11.2020 p120; Haftendorn: Kurven erkunden und verstehen. Mit GeoGebra und anderen Werkzeugen 2016; Erb: Optik mit GeoGebra 2107; Mathe-Vorkurs: **www.ombplus.de** PhysJ 18.2019.4 p8. **Systemic Initiative for Modeling Investigations and Opportunities with Differential Equations** = Simiode.org. **Scudem** = SIMIODE Challenge Using Differential Equations Modeling. **Unterschleif** per **Spickzettel** Spicker, Schwindel- oder Schummelzettel, MP3-Player oder Smartphones mit diktierten Texten. Hessenauer: Erwischt! Alles über Spickzettel 2009; **Cue Card = Schlagwort-Karte** = schriftliche Erinnerungshilfe = Regieanweisung.

CAS = Computer Algebra System: **Symbolische Mathematik mit Python - SymPy oder Sage:** http://www.sympy.org/en/index.html Tutorial, Installation. from sympy import * x = symbols('x'); init_printing() liefert mathematische Schreibweise als Ausgabe; a = Integral(cos(x)*exp(x), x); Eq(a, a.doit()); Integral(exp(x)*cos(x),(x,0,1)).doit() == exp(x)*sin(x)/2 + exp(x)*cos(x)/2;
Integral(x*cos(x),(x,0,pi/2)).doit().evalf(); **Integral**(cos(x)/(1+sin(x)**2),x).doit() oder **integrate**(cos(x)/(1+sin(x)**2),x); **Uneigentliche Integrale:** integrate(exp(-x),(x,0,oo)); simplify(), factor(), expand(), cancel, apart(), collect(), trigsimp(), expand_trig(), str_expr = 'x**2+1';
simplify(str_expr).subs(x,1) **Rational**(1,2); **Plotten numerisch gegebener Funktionen:** import matplotlib.pyplot as plt; import numpy as np; a=np.arange(10)*0.1; f=lambdify(x,sin(x),'numpy'); plt.plot(a,f(a));
a=(arange(600)+1)*0.01; f1=lambdify(x,x*exp(x),'numpy'); f2=lambdify(x,sqrt(x+sqrt(x)),'numpy')
f3=lambdify(x,x*cos(x),'numpy'); f4=lambdify(x,cos(x)/(1+sin(x)**2),'numpy'); f5=lambdify(x,ln(x),'numpy');
plt.plot(a,f1(a),'d',a,f2(a),'.',a,f3(a),'x',a,f4(a),'.-',a,f5(a),'-')
`plt.legend(['$xe^x$','$\sqrt{x+\sqrt{x}}$','$x\cos x$','$\cos x/(1+\sin^2x)$',`
`'$\ln x$'],loc='best')`; plt.xlabel('x');plt.ylabel('$f(x)$'); plt.axis([0,a[-1],-4,4])

Plotten symbolisch gegebener Funktionen: logmap = p*x-p*x**2; logmap2 = p*logmap-p*logmap**2; fp1=solve (logmap-x,x); fp2=solve (logmap2-x,x); logmapdiff1= diff (logmap,x); logmapdiff2= diff (logmap2,x); plot(fp1[0],fp1[1],fp2[0],fp2[1],fp2[2],fp2[3],(p,0,4)); axis([0,4,0,1]); **Variablensubstitution:** logmapdiff1.subs(x,fp1[0]);

Schulz: Idee der Abrundung/Abstumpfung/Glättung/Mollifikation der Spitze einer Funktion

$$f(r) = \frac{1}{r} \to F(r,\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{r^2+\epsilon^2}}$$

Schwache Ableitung Ljusternik & Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis 1955 p210ff, **Funktionalableitung**, Variationsableitung oder **Gateaux-Ableitung** = **Richtungsableitung** verallgemeinert **Richtungs-Ableitungs-Konzept** - siehe Gradient 238 - auf unendlichdimensionale Vektorräume. Arens p1213 oder p1200 in Auflage 2; Elementare Beispiele siehe Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik p385ff; **Steeb: Problems in theoretical physics II** 1990 p37-49; Ist V normierter Vektorraum und $f : D \to \mathbb{R}$ Funktion auf einer offenen Teilmenge $D \subset V$. Dann heißt f an einer Stelle $\hat{x}$ Gateaux-differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\delta f(\hat{x})\vec{h} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}(f(\hat{x}+\epsilon\,\vec{h}) - f(\hat{x})) \in \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad \vec{f}'_{\hat{h}}(\vec{r}) = \hat{h}\lim_{h\to 0}\frac{f(\vec{r}+\hat{h}\,h) - f(\vec{r})}{h} \in \mathbb{R}^n = V$$

für jede Richtung $\vec{h} \in V$ existiert und wenn durch $\delta f(\hat{x}) : V \in \mathbb{R}$ eine **beschränkte lineare Abbildung** gegeben ist. Man beachte dabei $\hat{x} \in D(f), \vec{h} \in V$, aber $\epsilon \in \mathbb{R}$. Feldmeier: Mechanik 2013 p15; Wüst: Mathematik p626ff; Die Gâteaux-Ableitung nach ϵ ist bezüglich der Größe $\vec{h}$ ein Funktional, das auch als 1. Variation von f an der Stelle $\hat{x}$ bezeichnet wird. Also

$$\bigvee_{c>0}\bigwedge_{h\in V} |\delta f(\hat{x})h| \le c||h||_V, \quad \delta f(\hat{x})(g+h) = \delta f(\hat{x})g + \delta f(\hat{x})h, \text{und} \quad \delta f(\hat{x})\lambda h = \lambda\delta f(\hat{x}).$$

Das **Gateaux-Differenzial ist zwar homogen, muss aber weder linear noch stetig sein.** Betrachte dazu das Beispiel $F(\vec{x}) = x_1\left(1+\frac{1}{x_2}\right)$ für $x_2 \neq 0$, sonst 0. Siehe Kielhöfer: Variationsrechnung 2010 p16; Für ein totales Funktional ist das Gateaux-Differenzial auch **linear**. Zum Gebrauch bei der klassischen Feldtheorie siehe Seite 539, Gebrauch bei Taylorreihe siehe Seite 185 oder Simonyi: Theoretische Elektrotechnik 1993[10] p945ff;

Starke Ableitung oder **Frechet-Ableitung** = Ableitungs als lineare Abbildung, verallgemeinert den Begriff der Ableitung aus der üblichen Differentialrechnung auf normierte Räume im $\mathbb{R}^n$. Existiert die Frechet-Ableitung, so existiert die Gâteaux-Ableitung = Richtungsableitung. Gâteaux-Ableitung ist aber nicht stets als lineare Abbildung = Frechet-Ableitung darstellbar. Ljusternik & Sobolew: Elemente der Funktionalanalysis 1955 p210ff. Ableiten heißt linearisieren, totales Differenzial = **Zuwachs** bilden. **Gehe also längs der Koordinatenachsen!** Ganz anders bei Richtungsableitung, die $\vec{h}$ in alle Richtungen zeigen lässt. Siehe Seite 185. Aber bei Gültigkeit des Satzes von Schwarz wird dieser Unterschied verwischt. **Ableitung ist lineare Abbildung!** Bei Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen stimmt sie mit der üblichen totalen Ableitung überein und kann durch die **Jacobi-Matrix**, deren Einträge die partiellen Ableitungen sind, dargestellt werden. Arens p798 **Jacobi-Matrix** übernimmt die Rolle der Ableitung aus dem 1-dimensionalen Fall. Elementare Beispiele siehe Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik p385ff; Jänich: Mathematik 1; Praktisch bei Umrechnung zwischen Koordinatensystemen. **Vektorgradient** = Jacobi-Matrix mal Vektor, siehe Merziger p144; Sie rechnet lokal die Koordinaten um: $\mathrm{d}\vec{x} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{\varphi}}\mathrm{d}\vec{\varphi} = J\vec{\mathrm{d}}\varphi = (\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)\mathrm{d}\vec{\varphi}, \mathrm{d}\vec{\varphi} = J^{-1}\mathrm{d}\vec{x}$ mit $J^{-1} = J^T$ oder

$$\begin{pmatrix}\hat{e}_x\\ \hat{e}_y\\ \hat{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\nabla x\\ \nabla y\\ \nabla z\end{pmatrix}_{r=1}\begin{pmatrix}\hat{e}_r\\ \hat{e}_\theta\\ \hat{e}_\varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial\theta} & \frac{\partial z}{\partial\varphi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{e}_r\\ \hat{e}_\theta\\ \hat{e}_\varphi\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}n_x\partial_x + n_y\partial_y + n_z\partial_z\\ n_x\partial_x + n_y\partial_y + n_z\partial_z\\ n_x\partial_x + n_y\partial_y + n_z\partial_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_x(x,y,z)\\ E_y(x,y,z)\\ E_z(x,y,z)\end{pmatrix} =$$

$= (\vec{n}\cdot\nabla)\vec{E} = J_{\vec{E}}\,\vec{n}$ Die Spalten müssen gemäß Seite 233 **normiert** sein! Dann stellt obige Matrix eine Drehung dar, falls $r = 1$ können so die Einheitsvektoren beim Basiswechsel bequem ineinander umgerechnet werden. **Die Metrik bestimmt das Skalarprodukt und dient so der Längen- und Winkelmessung** und für das **Volumenelement** gilt $g = |g_{ik}| = h_1^2 h_2^2 h_3^2$ mit $\mathrm{d}V = \sqrt{|g_{ik}|}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3$, Riley 1998 p706;

$$g_{ik} = J^T J = \begin{pmatrix} \partial_\rho x & \partial_\rho y & \partial_\rho z \\ \partial_\varphi x & \partial_\varphi y & \partial_\varphi z \\ \partial_z x & \partial_z y & \partial_z z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\rho x & \partial_\varphi x & \partial_z x \\ \partial_\rho y & \partial_\varphi y & \partial_y y \\ \partial_\rho z & \partial_\varphi z & \partial_z z \end{pmatrix} = J^T \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{grad} x \\ \operatorname{grad} y \\ \operatorname{grad} z \end{pmatrix}$$

wobei $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ die kartesischen Koordinaten durch die sphärischen oder Kugelkoordinaten ausdrückt. Umrechnung von Zylinder auf Kugel per $\hat{z} = \cos\theta\,\hat{r}(\theta,\varphi) - \sin\theta\,\hat{\theta}(\theta,\varphi)$ und $\hat{\rho}(\varphi) = \sin\theta\,\hat{r}(\theta,\varphi) + \cos\theta\,\hat{\theta}(\theta,\varphi)$. Kurz mit Drehmatrix $\begin{pmatrix}\hat{z}\\ \hat{\rho}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\end{pmatrix}$. **Links-Rechts-System**-Wechsel oder **Spiegelung an der Winkelhalbierenden** per $\begin{pmatrix}\hat{r}\\ \hat{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{\theta}\\ \hat{r}\end{pmatrix}$. Quadtrat wird an Diagonalen gespiegelt $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Rechteck wird an der Winkelhalbierenden gespigelt: $\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 2 & 2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2\end{pmatrix}$. Metrik siehe Seite 224. Zur **grad-Schreibweise** siehe Furlan: Das gelbe Buch 2, p60ff; Andererseits kommt man mit den **ko**varianten/tiefer Index **Basisvektoren** als **Tangentenvektoren** der Koordinatenlinien $\vec{b}_{u^i} = \dfrac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}$ und **kontra**varianten/hoher Index **Basisvektoren** als **Normalenvektoren** auf den **Koordinatenflächen** $\vec{b}^{u_i} = \operatorname{grad} u_i$ auf den **ko**varianten und **kontra**varianten **metrischen Tensor**

$$g_{u_i u_k} = \vec{b}_{u_i}\cdot\vec{b}_{u_k} = \nabla_{\vec{x}} u_i \cdot \nabla_{\vec{x}} u_k, \quad g^{u_i u_k} = \frac{\partial\vec{x}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial\vec{x}}{\partial u_k}, \quad g_{u_i u_k} g^{u_k u_l} = \delta_{u_i}^{u_l}$$

also zueinander **gegenläufig/invers/kontragredient**. Joos & Lorentz, Kaluza: Höhere Mathematik 1964[10] p269; Auch die gegengleiche Konvention von ko- und kontra ist üblich. Arens p894; **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p8; **Ausgangspunkt Christoffelsysbol:** Betrachte die Änderung/Ableitung der **kovarianten Basisvektoren** $\hat{e}_j(u^1,u^2,u^3) = \dfrac{\partial\vec{x}(u^1,u^2,u^3)}{\partial u^j}/h^j$, die ja längs/tangenzial der Koordinatenlinien liegen, wiederum längs/in Richtung der Koordinatenlinien und drücke diese Änderung nicht in kartesischen, sondern mittels der lokalen Basis aus $\dfrac{\partial\hat{e}_i}{\partial u^j} = \Gamma^k{}_{ij}\hat{e}_k = \Gamma_{kij}\hat{e}^k$. Das **Christoffelsysbol** $\Gamma^k{}_{ij}$ ist einfach die $k$te Komponente der Änderung des Basisvektors $\hat{e}_i(u^1,u^2,u^3)$. Damit hat man in jedem Raumpunkt (u^1,u^2,u^3) 27 Zahlen $\Gamma^k{}_{ij} = \hat{e}_k\cdot\dfrac{\partial\hat{e}_i}{\partial u^j}$. Unter Verwendung des metrischen Tensors gilt $\Gamma^i{}_{kl} = \frac{1}{2}g^{im}\left(\dfrac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \dfrac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \dfrac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}\right) = \frac{1}{2}g^{im}(g_{mk,l} + g_{ml,k} - g_{kl,m})$, mit der Inversen des metrischen Tensors $g^{im} = \hat{e}^i\cdot\hat{e}^m$. Bishop & Goldberg: Tensor Analysis on Manifolds 1968 p241; Riley, Hobson & Bence: Mathematical methods for physics and engineering 1998 p713;

Es seien X und Y normierte Räume und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein Operator $f\colon U \to Y$ heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle $x \in U$, wenn es einen beschränkten linearen Operator $f'(\hat{x})\colon X \to Y$ oder $\delta f(\hat{x})\colon X \to Y$ derart gibt, dass der Grenzwert

$$\lim_{||h||_V \to 0} \frac{1}{||h||_V}\,|f(\hat{x}+h) - f(\hat{x}) - \delta f(\hat{x})h| = 0$$

für beliebige Richtung h existiert. Der Operator $f'(\hat{x})$ oder $\delta f(\hat{x})$ heißt Fréchet-Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$. Existiert die Fréchet-Ableitung für alle $\hat{x} \in U$, dann heißt die Abbildung $f' : U \to L(X,Y)$ oder $\delta f : U \to L(X,Y)$ mit $\hat{x} \mapsto f'(\hat{x})$ oder $\hat{x} \mapsto \delta f(\hat{x})$ die Fréchet-Ableitung von f auf U. Mit $L(X,Y)$ wird der Raum der stetigen linearen Abbildungen von X nach Y bezeichnet. P. Hertel: Mathematikbuch zur Physik 2009 e-book **Kap6 Frechet-Ableitung**

Meschkowski: Mathematik leicht verständlich; **Mathe online: Matroids & Matheplanet** **Maurer: Mathematik im Aufriss** 2015; http://matheplanet.com/ Das Integral beantwortet die Frage danach: Was bekomme ich, wenn ich geduldig warte? Was habe ich, wenn ich alles zusammennehme? **Partialsummen:** Summe von Quadratzahlen $\sum_{i=1}^{N} i^2 = \frac{1}{6}[N(N+1)(2N+1)]$. Messung, Mittelung, Tiefpassfilter. `Integrate[x*Log[x], {x, 1, E}]` **REDUCE:** int(f(x),x), `int(e^x,x)` http://reduce-algebra. sourceforge. net/ Beachte $\int \sqrt{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\left[-\frac{a^2}{2}\ln a\right] = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2}-\right.$

Wegen $\operatorname{arsinh} z = \ln(z+\sqrt{z^2+1})$, $\operatorname{arcosh} z = \ln(z+\sqrt{z+1}\sqrt{z-1})$, $\operatorname{artanh} z = \frac{1}{2}\ln(1+z)-\frac{1}{2}\ln(1-z)$, $\operatorname{arcoth} z = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{z}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{z}\right)$, $\operatorname{arcsch} z = \ln\left(\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{z^2}+1}\right)$, $\operatorname{arsech} z = \ln\left(\frac{1}{z}+\sqrt{\frac{1}{z}+1}\sqrt{\frac{1}{z}-1}\right)$. **Rothe: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure Bd1-6 1925**, BdIV 1949[4] §8, p8; **Benchmark** $\int \sqrt{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ mit Substitution $x=u^2$. Dann quadratische Ergänzung $u^2+u = (u+1/2)^2-\frac{1}{4} = v^2-\frac{1}{4}$ gibt $2\int\sqrt{v^2-\frac{1}{4}}v\mathrm{d}v - \int\sqrt{v^2-1/4}\mathrm{d}v$

$\frac{1}{12}\sqrt{\sqrt{x}+x}\,(-3+2\sqrt{x}+8x)+\frac{1}{8}\log\left(1+2\sqrt{x}+2\sqrt{\sqrt{x}+x}\right)$.

$\int\sqrt{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\sqrt{\sqrt{x}+x}\,(-3+2\sqrt{x}+8x)+\frac{1}{8}\log\left(1+2\sqrt{x}+2\sqrt{\sqrt{x}+x}\right) =$

$\frac{2}{3}(\sqrt{x+\sqrt{x}}^3-\frac{1}{2}(\sqrt{x}+\frac{1}{2})\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\sqrt{x}}) =$

$= \frac{1}{12}(4\sqrt{x}+3)(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x+\sqrt{x}}+\frac{1}{8}\ln(\sqrt{x}+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\sqrt{x}})$

`Integrate[x^2,{x,1,2}]`, Unbestimmt: Integrate[Sin[x], x], numerisch `NIntegrate[x^3,{x,1,2}]`, **Numerische Näherung:** `N[Integrate[Sin[x], {x, 1, E}]]`, `N[Integrate[x*Cos[x], {x, 0, Pi}]]` Herrmann: Mathematica. Beispielorientierte Einführung 1997;

Immer erst einige einfache und praktisch nützliche Dinge, Newton in Heuser Dgls p17. **Parzielle Ableitung wegen Mehrdimensionalität:** Funktionen & Eigenschaften können von mehr als einer unabhängigen Variablen abhängen. Die **elektrische Verschiebung** kann keine totale zeitliche Ableitung erfahren! Es sei denn, man hat eine vorgebene Geschwindigkeit, wodurch die Raumkomponenten im Sinne der **Lagrange'schen Beschreibung** = **Modell des mitbewegten Beobachters**, über die **substanzielle oder totale Ableitung** gebunden sind, sich also nicht mehr unabhängig von der Zeit ändern können. **Körperfest** wird durch $\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t}$ und **raumfest** durch $\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ erfasst:

$$\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\Psi}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\,\Psi, \quad \rho\,\dot{\vec{u}} = \rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\right] = \vec{f}$$

In der Punkt-Mechanik ist die totale Ableitung oft gut, nicht aber in den Feldtheorien. Euler'sche Betrachtungsweise, geht vom feststehenden Beobachter aus. Siehe **Substanzielle Ableitung** und Kontinuitäts-Gleichung auf Seite 311. Directionals bei Fleming. Dann entsteht die Frage: Wie hängt $f(\vec{x})$ mit $\vec{x} = x^i\,\hat{e}_i$ von x^k ab? $\frac{\partial f}{\partial x^k}$. Bröcker: Analysis 1-3 1992; Jänich: Mathematik 1 & 2; Analysis für Physiker und Ingenieure; Bröcker: Analysis in mehreren Variablen, einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und des Satzes von Stokes 1980; Spivak: The hitchhiker's guide to calculus 1995; Bollobas: Linear Analysis. An Introductory Course 1999; **Spivak, Michael: Calculus 1994**, Salas & Hille: Calculus. Einführung in die Differential- und Integralrechnung 1994; **Jordan & Smith: Mathematik für die Praxis 1994**; Schröder ed: **Mathematik für die Praxis. Ein Handbuch** 1965 Bd3 Statistik. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Stichproben. Optimierung. Mechanik. Kartenentwurfslehre. Höhere Analysis für Physik. Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953; **Elementare Kunstgriffe:** K̃orn, Korn: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review 1961, 1968; Thompson: Höhere Mathematik und doch verständlich 1926 = Calculus made easy 1910; Roubine, Deschamps: Mathematics Applied to Physics 1970;

$$f\circ f^{-1}(x) = \mathrm{id}(x) = x, \quad f\circ f^{-1} = \mathrm{id}$$

Ableitung der identischen Funktion mittels Kettenregel führt auf Ableitung der Umkehrfunktion

$$(f \circ f^{-1}(x))' = \mathrm{id}'(x) = 1, \quad (f(f^{-1}(x)))' = f'\,(f^{-1}(x))' = 1,\ f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'},\ 1 = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$$

Oder kurz: $f(f^{-1}(x)) = x \to [f^{-1}(x)]'\,f' = 1$. $[\ln\exp(x) = \ln e^x = x] \to (e^x)'\frac{1}{e^x} = 1$ oder $[\exp\ln(x) = e^{\ln x} = x]' \to [\ln x]' e^{\ln x} = [\ln x]' x = 1$. $[\sin\arcsin x = x]' \to [\arcsin x]' \cos\arcsin x = 1$ gibt wegen $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ den Ausdruck $[\arcsin x]'\sqrt{1-x^2} = 1$. Erst an bekannten Funktionen: $y = \sqrt{x}$, Umkehrfunktion ist $x = y^2, \quad y' = 1/x' = 1/2y = 1/2\sqrt{x}$.
$y = \ln(x)$, Umkehrfunktion ist $x = e^y, \quad y' = 1/x' = 1/e^y = 1/e^{\ln(x)} = 1/x$

$$y = \arcsin x,\ x = \sin y,\ y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arctan x,\ x = \tan y,\ y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2},\ \text{ wegen } \tan^2 y = \frac{1-\cos^2 y}{\cos^2 y} = \frac{1}{\cos^2 y} - 1$$

Satz über implizite Funktionen: Sei $F(x,y) = 0$ mit stetiger Abl, dann ist wegen $0 = \mathrm{d}F = 0 + \partial F/\partial x \mathrm{d}x + \partial F/\partial y \mathrm{d}y$

$$y'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

.

Computer algebra online: http://integrals.wolfram.com/index.jsp http://calc101.com/german/ Leibniz'scher Differenzial-Kalkül, das Rechnen mit unendlich kleinen Größen, Frechet-Differenzial: **Differenziale sind lineare Abbildungen** = **Zuwachs**, Cartan'scher Differenzial-Kalkül. **Lander & Rogge: Nichtstandard Analysis** 1994; Spalt: Rechnen mit dem Unendlichen. Beiträge zur Entwicklung eines kontroversen Gegenstandes 1990; **Laugwitz & Schmieden: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung**. Mathematische Zeitschrift 69 (1958), 1-39; **Filter** ist eine nichtleere nach unten gerichtete Oberhalb-Menge innerhalb einer umgebenden halbgeordneten Menge. = Verallgem des Folgenbegriffs. Anschaulich betrachtet enthält ein Filter Elemente, die zu groß sind, als dass sie den Filter passieren könnten. Ist x ein Filterelement, so ist auch jedes in der gegebenen Ordnungsrelation größere Element y ein Filterelement, und je zwei Filterelemente x und y haben einen gemeinsamen Kern z, der selbst schon zu groß ist, als dass er den Filter passieren könnte. Filter in der umgekehrten Halbordnung heißen Ideale der Ordnung oder Ordnungsideale. **Mengenfilter:** Man geht in diesem Fall von der durch die Mengeninklusion halbgeordneten Potenzmenge $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ einer beliebigen nichtleeren Mengen X aus. Eine echte Teilmenge $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ ist genau dann ein Mengenfilter oder Filter, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind: $\emptyset \notin \mathcal{F} und X \in \mathcal{F}, F, G \in \mathcal{F} \Rightarrow F \cap G \in \mathcal{F}, F \in \mathcal{F},\ G \supset F \Rightarrow G \in \mathcal{F}$. Diese Definition stimmt mit der oben gegebenen für echte Filter in Verbänden überein, da die Potenzmenge von X einen Verband bildet. **Beispiele für Mengenfilter:** a] $\mathcal{F}_C := \{M \subseteq X \mid C \subseteq M\}$ heißt der von $C \subseteq X$ erzeugte Hauptfilter. b] Ist (X, τ) ein topologischer Raum mit Topologie τ, dann heißt $\mathcal{U}(x) := \{U \subseteq X \mid \exists O \in \tau : O \subseteq U \wedge x \in O\}$ Umgebungsfilter von x. c] Ist S eine unendliche Menge, dann heißt $\{M \subseteq S \mid S \setminus M$ endlich$\}$ Fréchet-Filter der Menge S. d] Ist $\mathcal{B}$ ein nichtleeres Mengensystem von $\mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften 1]$\emptyset \notin \mathcal{B}$ und 2] $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \exists B_3 \in \mathcal{B}\colon B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$, so heißt $\mathcal{B}$ Filterbasis in X. Ein solches Mengensystem erzeugt auf natürliche Weise einen **Filter** $\mathcal{F}_\mathcal{B} := \langle \mathcal{B} \rangle := \{M \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}\colon B \subseteq M\}$. Dieser heißt der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter. Führer: Allgemeine Topologie mit Anwendungen 1977 p9; Schubert: Topologie 1975 p44;

$$F(y) = f(x) \to \frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Ableitung bei implizit gegebener Kurve oder schaue Ableitung längs einer **Höhenlinie**:

$$g(x,y) = 0, 0 = \mathrm{d}g = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}g/\mathrm{d}x}{\mathrm{d}g/\mathrm{d}y}$$

Betrachte das Beispiel $0 = g(x,y) = y^2 - x$.

a] **Taylor-Entwicklung auf Basis des Mittelwertsatzes** $f(t+h) = f(t) + f'(t+\theta h)\,h$ mit $\theta \in (0,1)$ Großmann: Math Einführungskurs p132; b] Beobachtung: Die $N+1$ Koeffizienten einer ganzrationalen Funktion N-ten Grades $p(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ sind **vollständig durch die Werte ihrer** $N+1$ **Ableitungen an einer beliebigen Stelle** x_0 bestimmt. Nun zeigt sich, dass die polynomiale Entwicklung, versehen mit den Ableitungen von f bei x_0, sogar eine beliebige Funktion f in der Nachbarschaft der Stelle x_0 annähert. Brehmer & Apelt: Analysis II, p53ff; Man kann auch vom Hauptsatz der Integralrechnung ausgehen $f(x) = f(a) + \int_a^x \mathrm{d}t\, f'(t)$ **Taylor-Polynom** vom Grad n zur Funktion f um den Entwicklungspunkt x_0 Gregory 1668, Taylor 1712

$$p_{f,n,x_0}(x) = T_{f,n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

oder mit **Mathematica** `Series[Exp[x], {x, 0, 4}]` zeigt groben Verlauf einer Funktion f an der Stelle x_0. $f(x) = \sqrt{1+x}$ hat bei $x_0 = 0$ das Taylor-Polynom

$$p_{f,n,x=0}(x) = T_{f,n,x=0}(x) = 1 + \frac{x}{2} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-3)x^k}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + O(5)$$

Series[Sqrt[x + 1], {x, 0, 6}] f = lambda x: sqrt(x+1); x=linspace(-1,3,100);
plot(x,f(x),x,ones(len(x)),x,1+x/2,x,1+x/2-x**2/8,x,1+x/2-x**2/8+x**3/16,[0,0],[-2,4],[-1,3],[0,0])
axis([-1,3,.5,3]);`legend(["f(x)","$P_0$","$P_1$","$P_2$"],loc='best') title('$f(x)=\sqrt{1x}$') xlabel("x"); ylabel("$f(x)$")` **Mehrdimensionale Taylorreihe:** Anwendung Multipolentwicklung siehe Seite 551. Sei $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ beliebig oft stetig differenzierbare Funktion mit Entwicklungsstelle $a \in \mathbb{R}^d$. Dann lässt sich für beliebiges $x \in \mathbb{R}^d$ die Funktionsauswertung $f(x)$ als $F_{x;a}(1)$ darstellen, wobei $\begin{aligned} F_{x;a}\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(a + t\cdot(x-a)) \end{aligned}$ Berechnet man von $F_{x;a}$ die Taylorentwicklung am Entwicklungspunkt $t_0 = 0$ und wertet sie bei $t = 1$ aus, so erhält man die mehrdimensionale Taylorentwicklung von f: $Tf(x;a) := TF_{x;a}(1;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_{x;a}^{(n)}(0)}{n!}$ Mit der mehrdimensionalen Kettenregel und den Multiindex-Notationen $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_d^{\alpha_d}}$ $\binom{n}{\alpha} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^d \alpha_i!}$, wobei $|\alpha| = \sum \alpha_i$ erhält man ferner: $F_{x;a}^{(n)}(t) = \sum_{|\alpha|=n} \binom{n}{\alpha}(x-a)^\alpha D^\alpha f(a+t(x-a))$ Mit der Schreibweise $\alpha! = \prod_{i=1}^{d} \alpha_i!$ erhält man für die mehrdimensionale Taylorreihe bzgl. des Entwicklungspunktes a den Ausdruck $Tf(x;a) = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{(x-a)^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(a)$ in Übereinstimmung zum eindimensionalen Fall, falls man die Multiindex-Notation verwendet. $Tf(x;a) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_d=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^d (x_i-a_i)^{n_i}}{\prod_{i=1}^d n_i!} \left(\frac{\partial^{\sum_{i=1}^d n_i} f}{\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_d^{n_d}}\right)(a) = f(a) + \sum_{j=1}^d \frac{\partial f(a)}{\partial x_j}(x_j - a_j) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d\sum_{k=1}^d \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_k}(x_j-a_j)(x_k-a_k) + + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^d\sum_{k=1}^d\sum_{l=1}^d \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_j\partial x_k\partial x_l}(x_j-a_j)(x_k-a_k)(x_l-a_l) + \ldots$ **Operatorform** $= \mathrm{e}^{(x-a)D} f(a)$, mit $D =$ gewöhnlicher Ableitungsoperator. Der Operator T^h mit $(T^h f)(x) := f(x+$ $=$ **Translationsoperator**. Beschränkt man sich auf Funktionen, die global durch ihre Taylorreihe darstellbar sind, so gilt $T^h = \mathrm{e}^{hD}$. In diesem Fall ist also $f(x+h) = \mathrm{e}^{hD} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!} D^k f(x)$. Für Funktionen von mehreren Variablen lässt sich hD durch die **Richtungsableitung** $D_h = \langle h, \nabla\rangle$ austauschen. Also $f(x+h) = \mathrm{e}^{\langle h,\nabla\rangle} f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle h,\nabla\rangle^k}{k!} f(x) = \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{h^\alpha}{\alpha!} D^\alpha f(x)$. Man gelangt von links nach rechts, indem man zunächst die Exponentialreihe einsetzt, dann den Gradienten in kartesischen Koordinaten sowie das Standardskalarprodukt und schließlich das **Multinomialtheorem** verwendet. **Multinomialkoeffizient ist für nichtnegative ganze Zahlen** $k_1, \ldots, k_n$ und $k := k_1 + \ldots + k_n$ definiert als $\binom{k}{k_1,\ \ldots,\ k_n} := \frac{k!}{k_1!\cdot\ \ldots\ \cdot k_n!}$. **Multinomialsatz:** $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^k = \sum_{k_1+\ldots+k_n=k} \binom{k}{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$. Oder kurz per **Mul-**

tiindexnotation mit Multiindex α: $(x_1+x_2+\cdots+x_n)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} \cdot x^\alpha$ Dabei identifiziert man x mit dem Vektor $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$. **Multinomialtheorem folgt für Multiindizes die Abschätzung** $n^k = (1+\cdots+1)^k = \sum_{|\beta|=k} \frac{|\beta|!}{\beta!} \geq \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$ $\forall \alpha$ mit $|\alpha| = k$ und $\Leftrightarrow |\alpha|! \leq n^{|\alpha|} \cdot \alpha!$. Für Taylorreihe **diskretes Analogon**: Man definiert dazu den **Differenzenoperator** Δ_a durch $(\Delta_a f)(x) := f(x+a) - f(x)$. Anwendung Differenzengleichungen siehe Seite 145 z-Transformation und autoregressive Prozesse Seite 108. Es gilt nun $T^a = I + \Delta_a$, wobei mit I der Identitätsoperator gemeint ist. Potenziert man nun auf beiden Seiten mit h und verwendet die binomische Reihe, so ergibt sich $T^{ah} = (I+\Delta_a)^h = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{h}{k} \Delta_a^k$. Man gelangt zur Formel $f(x+ah) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{h}{k} \Delta_a^k f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{\underline{k}}}{k!} \Delta_a^k f(x)$, wobei mit $h^{\underline{k}}$ die absteigende Faktorielle gemeint ist. Diese Formel ist als newtonsche Formel zur Polynominterpolation bei äquidistanten Stützstellen bekannt. Sie stimmt für alle Polynomfunktionen, muss aber für andere Funktionen nicht unbedingt korrekt sein. **Beispiel:** $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ hat **Konvergenzradius** 1. Definition: $r := \sup\{|x-x_0| \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ ist konvergent}\}$. Speziell bei $\sin x, \cos x$ sind die Konvergenzradien ganz $\mathbb{R}$. Bestimmung mit Formel von Cauchy-Hadamard
$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)}$ aus Wurzelkriterium $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n (x-x_0)^n|} = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ oder aus Quotientenkriterium $\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}(x-x_0)\right| = |x-x_0| \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ mit $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. x=linspace(-2,2,100) plot(x,x,x,x-x**2/2.,x,x-x**2/2.+x**3/3.,x, x-x**2/2.+x**3/3. -x**4/4., x,x-x**2/2.+x**3/3. -x**4/4.+x**5/5., x,x-x**2/2.+x**3/3. -x**4/4.+x**5/5.-x**6/6.,x,x-x**2/2.+x** -x**4/4.+x**5/5.-x**6/6.+x**7/7., x,x-x**2/2.+x**3/3. -x**4/4.+x**5/5.-x**6/6.+x**7/7.-x**8/8.,x, x-x**2/2.+x**3/3. -x**4/4.+x**5/5.-x**6/6.+x**7/7.-x**8/8. +x**9/9., ':',x,log(1+x),'d') legend(['1','2','3','4','5','6 axis([-2,2,-2,2]) **Lokale Approximation!**

Komplementär zur **globalen Approximation** mittels der **lokal miserabel** nähernden **Fourier-Entwicklung** einer allerdings **perodischen** Funkion, siehe Seite 384. **Taylor-Entwicklung** ist Grundlage für Kurven-Diskussion. Arens p336 Extremalstellen von $f(x) = \frac{\sin^2 x}{(1-a\cos x)^5}$ mit $a \in (0,1)$? Lokale Gestalt von Flächen. Besonderheit der 1. Ordnung: Wenn der Term für die lineare Näherung verschwindet, dann liegt dort ein Extremum vor. Basis für Stabilitäts-Untersuchung an Fixpunkten von $\dot{x} = f(x,p)$ $f'(x^*) > 0$ **instabil** für beliebige Δx, aber **stabil** für beliebige Δx falls $f'(x^*) < 0$. L'Hospital'sche Regel: Schau statt auf den Quotienten der beiden Funktionen an der Stelle x_0 auf deren erste von Null verschienen Glieder der entsprechenden Taylor-Polynome. Beweis siehe **Dirschmid: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik** 1988[3], 1990[4] p203f; Nicht mit Quotienten-Regel verwechseln! Arens 325ff : $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = 1/2$. $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{e^x - 1 - x} = 0$. $\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right] = 0$.
$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2}\left[1 - \frac{1}{\cos^2 s}\right] = -1$. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = 0$.
$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right] = -1/2$. $\lim_{\mu\to 0} \frac{\ln(\cosh(t\sqrt{\mu g}))}{\mu} = \frac{g}{2}t^2$.
$\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a} = ?$. $\lim_{x\to 0} \cot x \arcsin x = ?$. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos x - x\sin x}{\sin^2 x} = 0$. $\lim_{x\to 0} \tan x \ln x = 0$.
$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x - x^2}\right] = -1$. **Strahlungsgesetz** siehe Seite 82 $u(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$, $\lim_{\nu\to 0} u(\nu,T) = 0$, $\lim_{\nu\to\infty} u(\nu,T) = 0$. Brehmer & Apelt: AnalysisII p81 $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\cot x} = 0$. $\lim_{x\to\pi/2} [(x-\pi/2)\tan x] = -1$. Bei 0^0, 1^∞ oder ∞^0 macht man aus der Potenz per Logarithmus ein Produkt/Quotient mit $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$. Beispiele: $\lim_{x\to\pi/2} (\sin x)^{\tan x} = \exp\left(\lim_{x\to\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\cot x}\right) = 1$.

$\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\tan x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x}{\cot x}\right) = 1.$

$\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x^2+1}\right]^x = \exp\lim_{x\to 0} x\ln\frac{x}{x^2+1} = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{x}{x^2+1}}{1/x} = 1.$ $\lim_{x\to 0} x^x = \exp\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x} = 0.$ $\lim_{t\to\infty}\left[1+\frac{x}{t}\right]^t = \exp\lim_{t\to\infty}\left(t\ln\left[1+\frac{x}{t}\right]\right) = e^x$. ABER: Gibbs-Phänomen Arens p1040, Fornberg: A practical guide to pseudospectral methods p10f. keine punktweise Konvergenz bei Funktionen mit Sprüngen! Da geht nur Konvergenz im Mittel!

Legendre'sche Gamma-Funktion oder Gauß'sche Pi-Funktion

$\Pi(x) = \Gamma(x+1) = \lim_{k\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots k\cdot k^x}{(x+1)(x+2)\cdot\cdots\cdot(x+k)}$ interpoliert die nur für ganzzahlige Argumente erklärte Fakultäts-Funktion auch über komplexen Gebieten. **Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers** 1922, 1950[4] p121f; Lösch & Schoblich: Fakultät 1951; Rothe, Höhere Math, Teil II, Integralrechnung p76;

$$\frac{1}{s+t} = \int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-r(s+t)}, \quad \Gamma(s+1) = \Pi(s) = \int_{x=0}^\infty x^s e^{-x}\mathrm{d}x \overset{\text{parzielle Int}}{=} s\int_{x=0}^\infty x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x = s\Pi(s-1) = s\Gamma(s)$$

$$N! = \int_0^\infty \mathrm{d}t\; e^{-t}\,t^N, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\; e^{-t}\,t^{x-1}, \quad \Gamma(x+1) = x! = x\,\Gamma(x) \quad \text{mit}\, x\in\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,\ldots\}$$

$$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x}e^{\theta(n)/12n}, \quad \Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}, n! = \sqrt{2\pi\, n}(n/e)^n e^{\theta(n)/12n}$$

Verdopplungsformel

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) \quad \text{oder} \quad \Gamma(\frac{x}{2})\Gamma(\frac{x+1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x) \quad \text{für} \quad x,z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}.$$

Unvollständige Gammafunktion im Hinblick auf Integrationsgrenzen und Normierung (Regularisierung) nicht einheitlich. Häufige Notationen: $\gamma(a,x) = \int_0^x t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ = **unvollständige γ-Funktion der oberen Grenze**, $\Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ = unvollständige γ-Funktion der unteren Grenze, $\mathrm{P}(a,x) = \frac{\gamma(a,x)}{\Gamma(a)}$ = regularisierte (unvollständige) γ-Funktion der oberen Grenze, $\mathrm{Q}(a,x) = \frac{\Gamma(a,x)}{\Gamma(a)}$ = regularisierte (unvollständige) γ-Funktion der unteren Grenze. Regularisierte γ-Funktion impliziert unvollständige. $\Gamma(a,x,y) = \int_x^y t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ oder $\Gamma(a,x,y) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_x^y t^{a-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ = **verallgemeinerte unvollständige γ-Funktion**. **Integralexponentialfunktion** ist Spezialfall der unvollständigen Gammafunktion $E_n(x) = x^{n-1}\Gamma(1-n,x)$. Sie kann auch als $E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n}\,\mathrm{d}t \quad \Re(x) > 0$ verallgemeinert werden. Integralexponentialfunktion $\mathrm{Ei}(x) := \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = -\int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ Da $\frac{1}{t}$ bei $t=0$ divergiert, ist das obige Integral für $x>0$ als **Cauchy'scher Hauptwert** zu verstehen. $\int \mathrm{d}x\frac{f(x)}{x-x_0+i\eta} \overset{\eta\to 0}{=} -i\pi f(x_0) + \mathcal{P}\int \mathrm{d}x\frac{f(x)}{x-x_0}$. Die Definition des Hauptwerts ist $\mathcal{P}\int \mathrm{d}x\frac{f(x)}{x-x_0} = \lim_{\eta\to 0_+}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\eta}\mathrm{d}x\frac{f(x)}{x-x_0} + \int_{x_0+\eta}^\infty \mathrm{d}x\frac{f(x)}{x-x_0}\right]$, (46) was dem Integral entlang dem Rest von $\mathcal{C}$ für $\eta\to 0_+$ entspricht. Reihendarstellung $\mathrm{Ei}(x) = \gamma + \ln|x| + \sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k!\cdot k}$, mit γ die Euler-Mascheroni-Konstante ist. Mit dem Integrallogarithmus $\mathrm{li}(x)$ verwandt, es gilt $\mathrm{li}(x) = \mathrm{Ei}(\ln x) \quad 0 < x \neq 1$. Oder verwandt mit Funktion, die über einen anderen Integrationsbereich integriert: $\mathrm{E}_1(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-tx}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$. Diese Funktion kann als Erweiterung der Integralexponentialfunktion auf **negative reelle** Werte aufgefasst werden, da $\mathrm{Ei}(-x) = -\mathrm{E}_1(x)$. Beide Funktionen können gemeinsam als ganze Funktion ausgedrückt werden: $\mathrm{Ein}(x) = \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k!k}$. Durch diese Funktion lassen sich die anderen beiden als $\mathrm{E}_1(x) = -\gamma - \ln x + \mathrm{Ein}(x)$ und $\mathrm{Ei}(x) = \gamma + \ln x - \mathrm{Ein}(-x)$ darstellen.

Gebietsintegrale, Bereichsintegrale Arens p828

$$\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}(x,y,z) = \int_D f(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x} = \int_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}^n\vec{x} = \int_D f(\vec{x})\,\mathrm{d}^n x \neq \int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

gehen wie eindimensionale Integrale. Nicht mit **iterierten Integralen - sukzessive Integration** über eindimensionale Integrale - verwechseln! Satz von **Fubini:** Gebietsintegrale über Quader lassen sich stets

als iterierte Integrale über Einzelkoordinaten berechnen. Aber allgemein NICHT in beliebieger Reihenfolge! Man nennt ein Gebiet **Normalbereich**, wenn ... Arens p833.

Physikalische Größen als **Gebietsintegral** wie **Volumen, Masse, Massenmittelpunkt/Schwerpunkt, Kraftmoment:**

$$V(D) = \int_D 1\,\mathrm{d}\vec{x}, \quad m(D) = \int_D \rho(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}, \quad \vec{x}_S = \frac{1}{m(D)}\int_D \vec{x}\rho(\vec{x})\mathrm{d}\vec{x}, \quad \vec{r}_s = \frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i\,\vec{r}_i$$

$$\vec{M} = \int_D \vec{x}\times\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{x}, \quad I_z(D) = \int_D \vec{x}_{\perp z}^2\mu(\vec{x})\mathrm{d}V = \int_D \rho_{\perp z}^2\mathrm{d}m$$

Beachte: Integration mehrdimensionale Gebiete geht schwanger mit der Mass-Idee. Reiner Inhalt = bloßes Gebiets-Volumen hat daher **homogene Dichte** $\rho(\vec{x}) = 1$! **Aber bei Koordinatentransformation** kommt die Funktionaldeterminante zur bloßen Dichte gemäß $\mathrm{d}V(x,y) = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho(r_\perp,\varphi)\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r_\perp,\varphi)}\mathrm{d}r_\perp\mathrm{d}\varphi$ multiplikativ dazu. Kartesische Koordinaten repräsentieren auch Längen, bei Winkel-Koordinaten muss mit Skalenfaktoren multipliziert werden, um auf Längen/Abstände zu kommen! Bei Kreis also $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r_\perp\mathrm{d}r_\perp\mathrm{d}\varphi$. Der Kreis hat in Polarkoordinaten scheinbar die Dichte $r_\perp$ und nicht 1. Herleitung des **Kreisflächeninhalt**s: a] Streifensumme: Integral unter Kurve per Substitution in Polarkoordinaten. **Streifeninhalt** als Funktion der Streifenposition x = Parameterintegral $F(x) = \int_{y=y_1(x)}^{y=y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}x$ speziell Paraboloid über Einheitskreis $F(x) = \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} x^2+y^2\mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}\sqrt{1-x^2}(2x^2+1)$ siehe **Körber & Pforr: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen** 1989 [7]; b] Tortenstückchen = Basis aller Dreiecke liegt auf Rand-Kurve = Gebiet begrenzendem Umfang = geschlossene Kurve. Siehe **Ringintegral** auf Seite 314 Höhen aller Dreiecke haben gleichen Punkt = enden alle in einem Pol. Statt bei Riemann-Integral = Summe über Trapeze unter Kurve. Bei polarer Integration ist Basis der Polpunkt oder der liegt auf Berandungskurve. Man summiert über Dreiecke mit gleichem Punkt über der wandernden Basis. c] Tortenstückchen: Per Betrag des Vektorprodukts als Dreiecke oder halbe Parallelogramme oder Gauß'sche Sektorformel oder Vektorprodukt beim **Parallelogramm** mit Kanten $\vec{a} = \hat{e}_x$ und $\vec{b} = \alpha\hat{e}_x + \hat{e}_y$ bedeutet **Prinzip von Cavalieri** $\vec{a}\times\vec{b} = \hat{e}_x\times(\alpha\hat{e}_x+\hat{e}_y) = \hat{e}_z$. d] Tortenstück-Häpchen, Segmentparketierung in Polarkoordinaten per Jacobi-Determinante. **Die Idee der Differenzialform** bedeutet, dass man die Idee des **totalen Differenzials** mit der Idee des **Vektorprodukts** verheiratet: Goldstein: Mechanik 2002[3] p314ff 1-Formen und Tensoren; Aus $x = \rho\cos\varphi$ und $y = \rho\sin\varphi$ folgen die totalen Differenziale $\mathrm{d}x = \cos\varphi\mathrm{d}\rho - \rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$ und $\mathrm{d}y = \sin\varphi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$. Oder kurz mit **Jacobi-Matrix als vektorielle Schreibweise des totalen Differenzials** $\begin{pmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi\\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\rho\\ \mathrm{d}\varphi\end{pmatrix}$. Die kartesischen Flächenstücke $\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \mathrm{d}\vec{A}_k = \mathrm{d}\vec{x}\times\mathrm{d}\vec{y} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{z}$ rechnen sich mit $\mathrm{d}\vec{x} = \hat{x}\mathrm{d}x = \cos\varphi\mathrm{d}\rho\hat{\rho} - \rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$ und $\mathrm{d}\vec{y} = \hat{y}\mathrm{d}x = \sin\varphi\mathrm{d}\rho\hat{\rho}+\rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$ in Polarkoordinaten-Flächenstücke $\mathrm{d}\vec{A}_p = \mathrm{d}\vec{x}\times\mathrm{d}\vec{y} = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\hat{\rho}\times\hat{\varphi} = \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\hat{z}$ um, wobei sich der Skalenfaktor ganz natürlich als Fundamentaldeterminante erweist. Jänich: Mathematik 2, p215 **Deutung der Green'schen Formel** $\int_{\partial M} f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y = \int_M\left(\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ für $f = y$ und $g = -x$.

Volumen (n-Kugel), Maximum bei $n = 5$, und Oberläche ($(n-1)$-Sphäre S^{n-1}) einer Kugel mit $K_n(r')$ und $r' \in [0,r]$, wegen $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$:

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\,r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \quad O_n = \frac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}\,r^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

nD-Kugel-Volumen siehe Rothe Teil3 p81; Siehe Seite 407. Aber **3D-Kugelvolumen** in sphärischer 4D-Welt $= 2\pi^2R^3$, wobei R = Krümmungsradius mit $R^2 = 2/K\rho$, $K_{\text{cgs}} \propto 10^{-27}$ und ρ mittlere Materie-Dichte der Weltraums. **Treder: Die Relativitätstheorie**, Math und Naturwiss in der neuen Schule Bd1 H1 1949 p28-38; Hayes: Ein Abenteuer in n Dimensionen, SdW August 2012 p52-58; Umschreibender Würfel hat 2^n Ecken. **Räumliche Gleichdicke**, Reuleaux-Dreieck, Wankel-Kolben, SdW Aug 2013 p70ff. Der Kreis von den Gleichdicken die größte Fläche. Pöppe: Leben in 10000 Dimensionen, SdW Dez 2013 p75-79; **Vierte Dimension** SdW Dez 2004 p106ff.

$$\ln\beta = \ln|\beta| + i\arg\beta + 2k\pi i; \ln -1; \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\ln(2\pi)^n K = \frac{1}{2}\ln(2\pi e)^n K$$

Numerische Integration: **Newton-Cotes** für $m = 1$ ist **Trapez-Regel** in R `integrate(f,lower,upper,...)` $I = \int_a^b f(x)dx$ lautet

$$I = \Delta x \left\{ \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right\} \tag{27}$$

mit den Stützstellen $x_i = a + i \cdot \Delta x$, $\Delta x = (b - a)/N$.

Die Mittelpunkts-Regel hingegen lautet ganz ähnlich

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} f((x_{i+1} + x_i)/2)\Delta x = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{i+1} + \Delta x/2)\Delta x \tag{28}$$

Die Simpson-Regel wiederum lautet

$$I = \frac{\Delta x}{3}\left(f(b) + f(a) + 4f(x_{2N-1}) + 2\sum_{i=1}^{N-1}[2f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \right) \tag{29}$$

wobei N die halbe Zahl der Intervalle ist, man also $2N + 1$ Stützstellen x_i hat. **Laplace-Approximation** siehe Held: Methoden der statistischen Inferenz: Likelihood und Bayes 2008 p294

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x x^n e^{-ax} = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}, \quad \Gamma(n+1) := n!, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\Gamma\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{z-1}}\Gamma(z)$$

$$\Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{z}{k}\right)\Gamma\left(\frac{z+1}{k}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{z+k-1}{k}\right) = \frac{(2\pi)^{(k-1)/2}}{k^{z-1/2}}\Gamma(z)$$

Integrations-Tricks Gauß-Funktion: Pascal, Epstein, Timerding: Repertorium der höheren Mathematik. Bd1.1 p497ff; **Nahin: Inside Interesting Integrals. A Collection of Sneaky Tricks**, Sly Substitutions, and Numerous Other Stupendously Clever, Awesomely Wicked, and ... 2014; a] per Grenzwert von Reihen Rothe: Höhere Math, Teil 2, p77, b] Fourier-Kosinus-Transformation bei Furlan: Gelbes Buch 2, p48 oder c] Polarkoordinaten $I_x = A\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \rightarrow I^2 = I_x I_y = A^2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r\, e^{-r^2/2\sigma^2} = -2\pi\sigma^2 A^2\left[e^{-r^2/2\sigma^2}\right]_0^\infty = 2\pi A^2\sigma^2$ **Nearing: Mathematical tools for physics** $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-ar} = 1/a$ gibt $\frac{\partial}{\partial a}\int_0^\infty \mathrm{d}r\, e^{-ar} = \frac{\partial a^{-1}}{\partial a}$, also $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r\, e^{-ar} = 1/a^2$ usw. gibt $\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^n e^{-ar} = \frac{n!}{a^{n+1}}$ 2010 e-book;

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^\infty \mathrm{d}x x^n e^{-ax^2} = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\, a^{\frac{n+1}{2}}} & n, a \in \mathbb{R}, a > 0, n > -1 \\ \frac{1 \cdot 3 \ldots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^{k+1}\, a^{k+\frac{1}{2}}} & n = 2k, k \in \mathbb{N} \\ \frac{k!}{2\, a^{k+1}} & n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{30}$$

Swanson: Path integrals and quantum processes 1992 p23 berechne Gauß-Integral $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x e^{-ax^2}$; **Reihen:**

$$\sum_{n=0}^\infty x^n, \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n}, \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n^2}$$

besitzen alle das Konvergenzinterval (-1,1), weil $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/n^2} = 1$ Die erste Reihe konvergiert in keinem der Randpunkte, die zweite im Randpunkt -1 und die dritte in beiden. **Deitmar: Analysis** 2014; Nikolsky: A course of math analysis 1+2 1977; Sauvigny: Analysis - Grundlagen, Differentiation, Integrationstheorie, Differentialgleichungen, Variationsmethoden 2014; Modler & Kreh: Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1 - Mathematik von Studenten für Studenten erklärt und kommentiert 2014[3]; Otto Forster; Hoevel: Höhere Mathematik kompakt 2014[2] sehr simpel; Kütting: Elementare Analysis 1+2 1992; Erwe; Rothe; Timmann: Repetitorium Analysis; **Heuser: LB der Analysis** 1, p363; Erhardt-Ferron: Mathe Rep1, p223; **Amann & Escher: Analysis 1-3**, 2006[3]; Efimov; Bröcker: Analysis 1 bis 3; Jänich: Analysis für Physiker und Ingenieure; Erhardt-Ferron, Walter; Königsberger: Analysis; Walter: Analysis; Aumann & Haupt: Einführung in die reelle Analysis. I Funktionen einer reellen Veränderlichen 1974[3]; Brehmer & Apelt: Analysis I & II p62; Titchmarsh: Mathematics for the General Reader 1981;

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^2}{n}, x \in (-1,1], \quad \ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots$$

Dirichletreihe:

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}, \text{ mit } s = \sigma + it \in \mathbb{C}$$

Heuser: Analysis 1, p95, 558, 589; Wohlgemuth: Mathe für Anfänger p284; **Ma: Statistical mechanics 2000[2] Anhang D p506**; Titchmarsh: The theory of the **Riemann zeta-function** 1930, 1951, 1987[2]; Ramanujan: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... = −1/12 is nonsense and not pure mathematics. YouTube `https://m.youtube.com/watch?v=w-I6XTVZXww` Gauß: It is already well known that (x*(x+1))/2 = 1+2+....+x. For example, 1+2+...+100 = 100*101/2 = 5050. The sum obviously diverges. The interpretation of the Riemann Zeta Function is not a sum for numbers whose real part is less than one. Zeta(-1)=-1/12 just works for the analytical continuation. Well here is the proof that you are wrong. Let S= 1+1+1+1+ .... then it is S=1 + ... +1+S and 0*S = a where a is a natural number greater than 0. Then let $D = 1 + 2 + 3 + 4 + ... <=> D = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + ... = S + D <=> 0 * D = S$ then combine the two equalities and you get 0*D= a so D is equal to infinity QED. Saying 1+2+3+4+5... =-1/12 is like saying e*e*e*e*e*e pi imaginary times = -1. a:=1+2+3+4+5+6....=0+1+2+3+4+5:=b, therefore a-b=1+1+1+1+...=0, 1+1+1+1+1...=0+1+1+1+1+1, therefore 0=(a-b)-(a-b)=1. Ivic: The Riemann Zeta-Function. Theory and Applications 1985; Weg von der divergenten harmonische Reihe mit $s = 1$:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}, \quad s > 1, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$$

Arens p1050;

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \text{ auf } [-\pi,\pi] \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

π und Wallis-Produkt, Rothe, Teil 2 p19

$$\pi \approx \left(\frac{2143}{22}\right)^{1/4} \approx \frac{355}{113}, \quad \frac{\pi}{2} = \lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\ldots(2m-2)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots(2m-1)}\frac{2m}{(2m-1)}$$

π transzendent, Lindemann 1885. π-Berechnung als Computer-Hardware-Test. Peitgen et al.: Bausteine des Chaos Bd1. Fraktale 1992 p187ff; Botschaften in π siehe Lem: Stimme des Herrn 1968/1981; Sagan: Contact 1985; **Subfakultät** $!n = n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$. **Doppelfakultät** $n!! = \begin{cases} n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot 2 & \text{für } n \text{ gerade,} \\ n\cdot(n-2)\cdot(n-4)\cdot\ldots\cdot 1 & \text{für } n \text{ ungerade,}\end{cases}$ für $n > 0$ und $0!! = 1$ und $(-1)!! = 1$. $n!! = \frac{1}{n+2}\cdot\frac{1}{n+4}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{1}$ für ungerade $n < 0$. **Multifakultät** $\mathrm{sf}(n) = \prod_{i=1}^{n} i! = 1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot n! = G(n+2)$ oder $n\$ = \underbrace{n!^{n!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n!}}}}}}_{n!}$. Peter **Luschny: The Homepage of Factorial Algorithms**. **Hyperfakultät** $H(n) = \prod_{i=1}^{n} i^i = 1^1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 4^4\cdot\ldots\cdot n^n$.

$\int \mathrm{d}x \sin^2(x)$ statt **parzieller oder unvollständiger Integration** leichter mit $1 = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Idee der **Bedeutungs-Ausdehnung**: Was passiert bei Funktionen, wenn man den Definitionsbereich von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$ und schließlich nach $\mathbb{C}$ erweitert? Speziell bei Fakultät $n!$ nach $\Gamma(n)$. L'Hospital an Leibniz 1695: Kann man beim Ausdruck für die Ableitung $\mathrm{d}^n f(x)/\mathrm{d}x^n$ oder dem Intregral $\int \mathrm{d}x^n f(x)$ die Ordnung auch brauchbare Kalküle für $n \in \mathbb{R}$ oder $n \in \mathbb{C}$ finden? **Gebrochene Ableitung** oder **fractional calculus: Lacroix 1819:** Betrachte die m-te Ableitung von $y = x^n$

$$\frac{\mathrm{d}^m y}{\mathrm{d}x^m} = \frac{n!}{(n-m)!} x^{n-m}, \quad y = x^a \quad \text{ist wegen} \quad \frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}} y}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}}, \quad \frac{\mathrm{d}^{\frac{1}{2}} x}{\mathrm{d}x^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x}$$

wenn man formal statt $n!$ das Legendre-Symbol $\Gamma(n+1)$, für m $1/2$ und n das $a \in \mathbb{R}^+$ schreibt. Entspricht der Riemann-Liouville Definition für gebrochene Ableitung. Euler und Fourier konnten keine Anwendung finden. Abel löste damit elegant das Tautochronen-oder Isochronen-Problem von Bernoulli 1696: Gesucht ist Kurvenform, bei der der Körper unabhängig von Startpunkt zur gleichen Zeit am Ziel ist. Wegen Energiesatz $mv^2/2 = mgy$ und $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2}$

$$T = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_1^2 \mathrm{d}x \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ siehe Seite 189. Liouville geht von der Ableitung der e-Funktion $\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ aus: YYY Oldham & Spanier: The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order 2006; Samko & Kibas: Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications 1993; Machado: Recent history of fractional calculus, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation 16 Iss3 2011 p1140–1153; Sabatier, Agrawal & Machado: Advances in Fractional Calculus. Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering 2007; Ortigueira & Coito: From differences to derivatives, Fractianal calculus and applied analysis 7 2004 459ff; **Herrmann: Fraktionale Infinitesimalrechnung. Eine Einführung für Physiker** 2008; Uchaikin: Fractional derivatives for physicists and engineers 2012; Tarasov: Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media 2010; Fraktionale Ableitungen nach Riemann, Liouville, Fourier, Caputo. **Fraktionale Reibung:**

$$m\ddot{x} = -\mu\,\mathrm{sgn}(\dot{x})|\dot{x}|^\alpha = -\mu\,\mathrm{sgn}(\dot{x})\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)\right|^\alpha \neq -\mu\,\mathrm{sgn}(\dot{x})\frac{\mathrm{d}^\alpha}{\mathrm{d}t^\alpha}x(t) = m\ddot{x} \quad \text{mit } \dot{x}(t) > 0$$

Oszillator, fraktionale Wellengleichung,, fraktionale Schrödinger-Gleichung, fraktionale Eichfeldtheorie, fraktionale Gruppentheorie. Herrmann: Fractional Calculus: An Introduction for Physicists 2011; Margulies: Mathematics and **Science Applications** and Frontiers: with Fractional Calculus 2008; Tarasov: Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media 2010; Ladungsverteilung frakaler Mengen; Das: Functional Fractional Calculus 2011; Diethelm, Baleanu & Scalas: Fractional Calculus: Models and Numerical Methods 2012; **Earnshaw: Brownian Motion. Theory, Modelling and Applications 2011**; Klafter, Lim & Metzler: Fractional Dynamics. Recent Advances 2011; Denis S Grebenkov: Narrow escape problem http://pmc.polytechnique.fr/pagesperso/dg/ **Holcman & Schuss: Stochastic Narrow Escape in Molecular and Cellular Biology: Analysis and Applications** 2015; Globale Mean-first-escpe-time $T \propto \ln(1/eps)$ mit der relativen Öffnungsgröße ϵ. Grebenkov. Sneddon: Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory 1966; Pal Revesz & Paal Raevaesz: Random Walk in Random and Non-Random Environments 2013[3]; Klafter & Sokolov: **First Steps in Random Walks. From Tools to Applications** 2011; Kap6 = fractional calculus, Eigenfunktionen der FPG p89; Siehe auch **Risken**; Elgart & Kamenev: Rare event statistics in reaction-diffusion systems, reformulation of the systems Master equation. Schrödinger equation treated in semi-classical way WKB, Hamiltonians phase portrait, theory about tunneling, calculate the probability of rare events or find them numerically. **Master- oder Pauli-Gleichung** schon bei Rayleigh: Theory of sound: $\frac{\mathrm{d}P_k}{\mathrm{d}t} = \sum_\ell (T_{k\ell}P_\ell - T_{\ell k}P_k) = \sum_\ell T_{k\ell}(P_\ell - P_k)$, wegen $T_{k\ell} = T_{\ell k}$. $\frac{d\vec{P}}{dt} = \mathbf{A}\vec{P}$ falls stationär. Sonst

$\frac{d\vec{P}}{dt} = \mathbf{A}(t)\vec{P}$ oder $\frac{d\vec{P}}{dt} = \int_0^t \mathbf{A}(t-\tau)\vec{P}(\tau)d\tau$ $\frac{dP_k}{dt} = \sum_\ell (A_{k\ell}P_\ell - A_{\ell k}P_k) = \sum_{\ell\neq k}(A_{k\ell}P_\ell - A_{\ell k}P_k)$ mit A_{12} für $1 \leftarrow 2$ gemäß Einstein. Für die Mastergleichung gilt die **detaillierte Balance**, da im Gleichgewicht jeder Summand für sich verschwindet: $A_{k\ell}\pi_\ell = A_{\ell k}\pi_k$, wegen Zeitsymmetrie auf mikroskopischer Ebene = **Onsager-Reziprozitätsrelation**.

Chapman–Kolmogorov-Gleichung für die Zufallsvariablen f_i **marginalisiert** die **gemeinsame Wahrscheinlichkeit** $p_{i_1,\ldots,i_n}(f_1,\ldots,f_n)$ zu $p_{i_1,\ldots,i_{n-1}}(f_1,\ldots,f_{n-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{i_1,\ldots,i_n}(f_1,\ldots,f_n)\,df_n$. Für versetzte Zustände $i_1 < \cdots < i_n$ einer **Markow-Kette** hat man $p_{i_1,\ldots,i_n}(f_1,\ldots,f_n) = p_{i_1}(f_1)p_{i_2;i_1}(f_2 \mid f_1)\cdots p_{i_n;i_{n-1}}(f_n \mid f_{n-1})$ oder $p_{i_3;i_1}(f_3 \mid f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{i_3;i_2}(f_3 \mid f_2)p_{i_2;i_1}(f_2 \mid f_1)\,df_2$.

Das Standard Markov'sche Transportmodell, das auf der Boltzmann-Gleichung basiert, kann einige Nichtgleichgewichtsprozesse, die als anormal bezeichnet werden, nicht beschreiben. Ungeordnete Festkörper haben nichtgleichförmig skalierende, fraktale räumliche Inhomogenitäten. Trajektorien clustern, es gibt Traps/Fallen, fat tails in den Aufenthaltzeiten. Uchaikin & Sibatov: Fractional kinetics in solids 2012; Klafter, Schlesinger & Zumofen: Physics today 49(2) p33 1996; Sokolov: PhysRevE63 011104; Shlesinger, Zaslavsky, Frisch: Lévy Flights and Related Topics in Physics LNP 450 1995 Observation of anomalous diffusion and Lévy flights. Kahane: Definition of stable laws, infinitely divisible laws, and Lévy processes. Klafter, G. Zumofen, M. F. Shlesinger: Lévy description of anomalous diffusion in dynamical systems. Bouchaud: More Lévy distributions in physics. Ultra-slow convergence to a Gaussian: The truncated Lévy flight. Bouchaud & Georges: **Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical application,** Physics Reports 195 Issues 4-5, Nov1990 p127-293; Bouchaud & Potters: Theory of Financial Risk and Derivative Pricing 2003; Metzler & Klafter: The random walk's guide to anomalous diffusion: fractional dynamics approach, PhysReports339 2000 p1-77; Sokolow: **Models of anomalous diffusion in crowded environments**, Soft matter35 2012 p9043-9052; Thiel: PRE 012115; PRL 010601; Ross ed: Fractional Calculus and Its Applications: Proceedings of the International Conference Held at the University of New Haven, June 1974, Springer 1975 e-book Der erste **Aufsatz von Ross** liefert Historie und Kerngedanken; Eli Barkai, Yuval Garini, Ralf Metzler: Strange kinetics of single molecules in living cells, The irreproducibility of time-averaged observables in living cells poses fundamental questions for statistical mechanics and reshapes our views on cell biology. Wegen Entwicklung/Alterung der Zelle ist i.a. Scharmittel $< . >$ verschieden vom Zeitmittel $\overline{\cdot}$:

$$\left\langle \vec{\delta}^2(\Delta)\right\rangle = \left\langle \vec{R}^2(\Delta)\right\rangle = \int \vec{R}^2 p(\vec{R},\Delta)\mathrm{d}^3\vec{R} \neq \frac{1}{t-\Delta t}\int_0^{t-\Delta t}[\vec{r}(t'+\Delta t)-\vec{r}(t')]^2\mathrm{d}t' = \overline{R^2(\Delta)} = \overline{\delta^2(\Delta)} \sim D_\alpha \Delta^\alpha$$

mit $\vec{R}(\Delta,t') = \vec{r}(t'+\Delta t) - \vec{r}(t')$, wobei t' mögliche Alterungsmöglichkeit einschließt, $\alpha = 1$ in vitro = im Glas = in Zellkultur = **zellfrei** = außerhalb eines lebenden Organismus und $\alpha = 0.7$ in vivo = im Lebendigen = im Tier = **in der lebenden Zelle**. Obige Gleichung setzt $\Delta \ll t$ voraus und $\overline{\delta^2(\Delta)}(t)$ ist zeitabhängig. Das **Schätzproblem** ist $\widehat{\overline{\delta^2(\Delta)}}(t)$ ist allein wegen der i.a. fehlenden Stationarität, die die Existenz der Momente sichert, schwierig. Ob ergodisch oder nicht, erfordert Schätzer für instationäre Prozesse. Statt $< x^2(t) >= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 P(x,t) = 2K_1 t$ mit $P(x,t) = \frac{1}{4\pi K_1 t}e^{-\frac{x^2}{4K_1 t}}$, wird seit 1926 $< \widehat{x^2(t)} > \sim K_\alpha t^\alpha$ mit dem **verallgemeinerten Diffusionskoeffizient** $[K_\alpha] = \mathrm{cm}^2\ \mathrm{s}^{-\alpha}$, **subdiffusiv** $0 < \alpha < 1$ oder **superdiffusiv** $\alpha > 1$ **beobachtet**. Einsteins Annahmen: i) stoßende Moleküle bewegen sich voneinander unabhängig. ii) Molekül-Stoßdauer $\tau_0 \ll \tau$ ist viel kürzer als die Relaxationzeit $\tau = 1/\gamma$ für die Bewegung des Brown'schen Teilchens. Daher sind die Stöße voneinander unabhängig: $< \Gamma(t)\Gamma(t') >= 0$ für $|t-t'| \geq \tau_0$. iii) Stöße sind isotrop/symmetrisch: $< \Gamma(t) >= 0$. Risken p3 oder Gardiner; Lottspeich & Zorbos (eds.): **Bioanalytik** 1998; He, Burov, Metzler: Random Time-Scale Invariant Diffusion and Transport Coefficients, PRL 101, 2008, 058101 **Nichtergodizitäts-Maß:** Maß für Unterschied von Zeit- und Scharmittel. wird als Quadrat des **Variationskoeffizient**en $E_{\text{Breaking}}(\Delta, T_{\max})$=$\mathrm{Var}^2(\delta^2) = \nu^2(\delta^2(\Delta, T_{\max})) = \left(\frac{\sigma_{\delta^2}}{\mu_{\delta^2}}\right)$ oder Erwartungwert normiertes Streumaß, gemäß Seite 320, der Schwankungsquadrate $\delta^2(\Delta, T_{\max})$ definiert. continuous-time random walk = CTRW model Montroll and Weiss, JMathPhys 6 167 (1965) Froemberg: A no-go theorem for ergodicity and an Einstein relation arXiv:1306.2036 [cond-mat.stat-mech]. Metzler et

al.: Anomalous diffusion models and their properties: non-stationarity, non-ergodicity, and ageing at the centenary of single particle tracking, Physical Chemistry Chemical Physics 11/2014; 16. **Wiener-Prozess mit Drift** $X_t = \mu t + \sigma W_t$. **Geometrische Brown'sche Bewegung:** $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$ löst im Ito-Sinne die SDE $dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$. **Continuous-time random walk = CTRW:** Ausgangspunkt ist stoch Prozess $X(t) = X_0 + \sum_{i=1}^{N(t)} \Delta X_i$ mit iid-Inkrementen $\Delta X_i \propto \Omega$ und $N(t)$ Sprüngen im Zeitintervall $(0,t)$. Die Wahrscheinlichkeit für X zur Zeit t ist dann $P(X,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(n,t)P_n(X)$ mit der Wahrscheinlichkeit von X nach n Sprüngen $P_n(X)$ der Wahrscheinlichkeit $P(n,t)$ von n Sprüngen nach der Zeitdauer t. Wartezeit τ zwischen zwei Sprüngen von $N(t)$ habe Verteilung $\psi(\tau)$, deren Laplace-Transformation ist $\tilde{\psi}(s) = \int_0^\infty \mathrm{d}\tau\, e^{-\tau s}\psi(\tau)$. Die charakteristische Funktion der Sprungverteilung $f(\Delta X)$ ist die Fourier-Transformierte $\hat{f}(k) = \int_\Omega \mathrm{d}(\Delta X)\, e^{ik\Delta X} f(\Delta X)$. Churchill: **Fourier series and boundary value problems** 1963; Die Laplace-Fourier-Transformierte der Wahrscheinlichkeit $P(X,t)$ ist **Montroll-Weiss-Formel:** $\hat{\tilde{P}}(k,s) = \frac{1-\tilde{\psi}(s)}{s}\frac{1}{1-\tilde{\psi}(s)\hat{f}(k)}$. Kenkre, Montroll, Shlesinger: Generalized master equations for continuous-time random walks, JStatPhys9 45–50 1973; Hilfer & Anton: Fractional master equations and fractal time random walks PRE51 1995 R848-R851; Paul & Baschnagel: Stochastic Processes. From Physics to Finance 2013 p72ff;

Levine: Quantum Mechanics of Molecular Rate Processes 1969; Coffey, Kalmykov & Waldron: **The Langevin Equation.** With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering 1996, 414 Seiten; 2004[2], 680 Seiten mit **Kramers Theorie des Zerfalls über Barriere, 1940:** $m\ddot{x} = -U'(x) - \gamma m\dot{x} + f(t)$ mit $\langle f(t)f(t')\rangle = 2m\gamma k_B T\delta(t-t')$. Für moderate Reibung $\gamma = k_B T/D$ gilt

$$k_R = \frac{1}{\omega_b}\left(-\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_b^2}\right)\left\{\frac{\omega_R}{2\pi}\exp\left[-\beta E_b\right]\right\}. \quad \gamma \gg \omega_b: \quad k_R = \frac{\omega_b}{\gamma}\frac{\omega_R}{2\pi}\exp\left[-\beta E_b\right]$$

Kalmykov & Coffey: **The Langevin Equation: With Applications to Stochastic Problems in Physics, Chemistry and Electrical Engineering** 2012[3], 900 Seiten; BAO JING DONG: The anomalous statistics Dynamics Introduction; ZHOU TIAN SHOU: stochastic dynamics of biological systems; Carolyn Van Vliet: Equilibrium and Non-Equilibrium Statistical Mechanics; Physics today August 2012, p29-35; Zur Alterung siehe Seite 118. **Subdiffusion:** $< x^2(t) > \propto K_a\, t^a$ mit $0 < a < 1$ bei biophysikalischen Reaktionen in zytoplastischer Umgebung für $t \to 0$. **Fraktionale Langevin-Gl**: $\ddot{x}(t) + \bar{\gamma}\int_0^t \mathrm{d}t'(t-t')^{-\lambda}\dot{x}(t') + \mathrm{d}U/\mathrm{d}x(x)/m = \sqrt{kT/m}f(t)$ mit fraktionalem Gauß'schen Rauschen und Memory-Kern $\gamma(t-t') = \bar{\gamma}(t-t')^{-\lambda}$, das die Fluktions-Dissipationsrelation $< f(t) >= 0, < f(t)f(t') >= \gamma(t-t') = c(t-t') \approx \sum_{i=1}^N \frac{D_i}{\tau_i}e^{-(t-t')/\tau_i}$ für $0 < \lambda \leq 2$ diffusiv, für $0 < \lambda < 1$ subdiffusiv. **Fraktionales Rauschen** kann durch einen Summe von **Ornstein-Uhlenbeck-Rauschprozessen** ersetzt werden $f(t) = \sum_i \eta_i(t)$ wobei das farbige OU-Rauschen $\eta_i(t)$ durch die lineare Gleichung $\dot{\eta}_i = -\frac{\eta_i}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_i}\zeta_i(t)$ mit $< \zeta_i(t) >= 0$ und ζ_i unkorreliertes Gauß'sches Rauschen ist $< \zeta_i(0)\zeta_j(\tau) >= 2D_i\delta_{ij}\delta(\tau)$. Für das farbige OU-Rauschen gilt $< \eta_i(t) >= 0$ und $< \eta_i(t)\eta_j(t') >= \frac{D_i}{\tau_i}e^{-|t-t'|/\tau_i}\delta_{ij}$. **Honerkamp: Stoch dyn Systeme** p71 & p151; **Mörters & Peres: Brownian motion** 2010; **Nelson: Dynamical Theories of Brownian Motion** 1967 pdf im Netz. **Wiener-Prozess** als Lösung der Wärmeleitungsgleichung $p_2(x,t|x',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t')}}e^{-(x-x')^2/2(t-t')}$ mit $t > t'$ hat keine von Null verschiedene stationäre Lösung: $p_1(x,t) = \frac{1}{2\pi t}e^{-x^2/2t} \to \delta(t)$ für $t \to 0$. **Ornstein-Uhlenbeck-Prozess:** $dX_t = \theta(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = a$, wobei (W_t) ein Standard-Wiener-Prozess ist. $X_t = ae^{-\theta t} + \mu(1-e^{-\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)}dW_s$. $E(X_t) = ae^{-\theta t} + \mu(1-e^{-\theta t})$ und $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2\theta}\left(e^{-\theta|s-t|} - e^{-\theta(s+t)}\right)$. Bei deterministischem Anfangswert a ist also $X_t \sim \mathcal{N}(ae^{-\theta t} + \mu(1-e^{-\theta t}), \frac{\sigma^2}{2\theta}(1-e^{-2\theta t}))$ verteilt: $p_2(x,t|x',t') = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-e^{-2\tau})}}e^{-(x-x'e^{-\tau})^2/2(1-e^{-2\tau})}$ mit $\tau = t - t' > 0$. Da sowohl Erwartungswert als auch Varianz konvergieren, existiert eine stationäre Verteilung für den Markov-Prozess X. $p_{\mathrm{stat}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$

Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz $\frac{\sigma^2}{2\theta}$. Im Gegensatz zum Wiener-Prozess ist der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess also (schwach) stationär. Man sagt dann, dass der Prozess ein invariantes Maß hat: Für jedes t gilt dann $X_t \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{2\theta})$. Der Prozess hat also keine Asymptote bei $y = \mu$. Uhlenbeck, Ornstein: On the theory of Brownian Motion. In: PhysRev 36 1930 p823–841. Gillespie: Exact numerical simulation of the Ornstein-Uhlenbeck process and its integral. In: PhysRevE 54 1996 p2084–2091. Honerkamp: Stoch dyn Systeme 1990 p151, 181;

Kibas et al.: Theory and applications of fractional differential equations 2006 e-book;

Rechenmethoden der Physik: Vorkurs propädeutisch mit **Dgls** a la May und **komplexen Zahlen** motivieren und vertraut machen. Lösungen raten! Welt modellieren durch Schneidern von Dgls. 7te Wurzel von 1? Tietz: Geometrie In HdP Bd2 Mathematische Methoden 1955; **Lebedev, Uflyand, Skalskaya: Worked Problems in Applied Mathematics** 1965, 1979; `http://www.math.ethz.ch/~felder/mmp/mmp1/` Arens et al.; Merziger el al., Bartsch, Bronstein; Modler & Kreh: Mathe Tutorium; Geiger & Scheel: HdP Bd3 Thirring, Duschek, Lense, Mader, Radakovic, Zernicke: Mathematische Methoden 1926; Karl Scheel 1866-1936 PhysBl22 1966 p121-128; Flügge: HdP Bd1 Mathematische Methoden 1955 p297; Flügge: HdP Bd2 Mathematische Methoden 1956; Pruscha & Rost: Mathematik für Naturwissenschaftler. Methoden, Anwendungen, Programmcodes; **Cramer: Vorkurs Mathematik**. Arbeitsbuch zum Studienbeginn in Bachelor-Studiengängen 2009; **Schulz: Repetitorium Bachelor Mathematik** zur Vorbereitung auf Modulprüfungen in der mathematischen Grundausbildung, Kap6 - Num Mathe Integration Kap11 Zahlen; **Hertel: Mathematikbuch zur Physik** 2009 e-book, Arbeitsbuch Mathematik zur Physik 2011; **Greuel: Math Ergänzungen und Aufgaben** für Elektrotechniker 1990[12]; **Papula: Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler.** http://www. springerlink. com/content/x24530/ Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 1 2000[12]; http:// www. springerlink. com/content/q81177/ (im Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen), • Vektorrechnung, • Lineare Algebra. Bd2 http:// www.springerlink. com/content/l35xw7/ **Eigenwerte online:** http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/eigenwert2.htm Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix gewöhnlicher Differentialgleichungen, Systeme linearer Laplace-Transformationen Differentialgleichungen Bd3: • Vektoranalysis: • Wahrscheinlichkeitsrechnung: Kombinatorik, Zufallsexperimente, Wahrscheinlichkeiten, Zufallsvariable, Prüf- oder Testverteilungen wie z. B. Chi-Quadrat- oder t-Verteilung • Grundlagen der mathematischen Statistik: Zufallsstichproben, Häufigkeitsverteilungen, Kennwerte oder Maßzahlen einer Stichprobe, Parameterschätzungen, Parametertests, Anpassungs- oder Verteilungstests wie z. B. der Chi-Quadrat-Test, Korrelation und Regression. • Fehler- und Ausgleichsrechnung: Fehlerarten und Messabweichungen, statistische Verteilung der Messwerte und Messabweichungen, Auswertung einer Messreihe, Vertrauensbereiche, Fehlerfortpflanzung nach Gauß (Varianzfortpflanzungsgesetz), Ausgleichs- oder Regressionskurven. Fristedt & Gray: A modern approach to probability theory 1997;

Ansorge & Oberle: Mathematik für Ingenieure. Bd2: Differential- und Integralrechnung mehrerer Variabler, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Partielle Differentialgleichungen, Integraltransformationen, Funktionen einer komplexen Variablen 2003[3];

Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler - Klausur- und Übungsaufgaben: Über 600 Aufgaben mit ausführlichen Lösungen zum Selbststudium und zur Prüfungsvorbereitung; **Plaue & Scherfner: Mathematik für das Bachelorstudium** I. Grundlagen, lineare Algebra und Analysis; **massive open online courses, or MOOCs**: online-Kurse e-learning: Online learning: Campus 2.0 MOOCs are transforming higher education — and providing fodder for scientific research. Mitchell Waldrop Nature 495, 160–163, 13 March 2013 **Goldhorn & Heinz: Mathematik für Physiker** 3 vols;

Aufgabensammlung und Leitfaden für Arithmetik, Algebra und Analysis, 6.-8. Schuljahr, Volk und Wissen Berlin Leipzig 1945, 112 Seiten.

Aufgabensammlung und Leitfaden für Geometrie, 6.-8. Schuljahr, Volk und Wissen Berlin Leipzig 1945, 212 + 152 Seiten.

Vorbereitungslehrgang Physik, Jena 1973; Feigl & Rohrbach: Einführung in die höhere Mathematik. Vorle-

sungen an der Universität Berlin (1920-1934) 1953; R̃äsch: Mathematik der Physik für Dummies 2011; K̃orsch: Mathematik-Vorkurs. Mathematisches Handwerkszeug für Studienanfänger Physik 2004; Mathematische Ergänzungen: zur Einführung in die Physik 2007[4]; Kuhn, Glaßl, Stöckel, Hänsel: Mathematische Hilfsmittel, PfL1, Berlin 1978; Merziger, Mühlbach, Wille, Wirth: Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik 2001; **Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik** 2006; **Göhler: Höhere Mathematik. Formeln und Hinweise. Kleiner Wissensspeicher** 1970 p17 Determinanten, p20 Wronski-Determinante, p25 Gauß'scher Algorithmus = Eliminationsverfahren, Austauschverfahren, p28 **Tetraeder-Volumen**; Dietrich & Stahl: Grundzüge der Matrizenrechnung 1969; **Cullen: Matrices and linear forms** 1972[2]; Gantmacher: Matrizenrechnung 1 & 2 1958, 1966; Wilkinson & Reinsch: Linear algebra 1971; Wilkinson: The algebraic eigenvalue problem 1965; Gantmacher & Krejn: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanisher Systeme 1960; Bartsch: Math Formeln 1986; Jelitto: Theo Phys, Mechanik 1, Anhang; Wille: Repetitorium der linearen Algebra Teil 1+2, Binomi 2001, Umschlag innen mit wichtigen Sätzen; **Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis** 1947, 1956, 1967; Lang: Introduction to Linear Algebra 1973; S̃trang: Introduction to Linear Algebra 1973; S̃trang: Wissenschaftliches Rechnen 2010; S̃trang: Linear Algebra and Its Applications 2007[4]; Lang: Linear Algebra 1985[3]; Jänich: Lineare Algebra; Stroth: Lineare Algebra 1995; Reiss & Stroth: Endliche Strukturen (Mathematik fur das Lehramt, Gruppentheorie, Tourenplanung, Codierung) 2011; Lorenz: Lineare Algebra I & II 1992[3]; **Bär:** http://geometrie.math.uni-potsdam.de/documents/baer/skripte/skript-ELinAlg.pdf

Rothe: Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure, Teil1: Differenzialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen 1957, Teil2: Integralrechnung, Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen 1949, Teil3: Flächen im Raume, Kurven/Linienintegrale, ODEs, PDEs nebst Anwendungen 1949, Teil4: Übungsaufgaben mit Lösungen: Integralrechnung, Reihen, Parameterintgrale, Determinanten, Vektoren 1949, Teil5: Übungen zu Teil3 1949,

Karman & Biot: Mathematical methods in engineering 1940; Poloshi: Mathematisches Praktikum 1963; Kuhrt: Vektoralgebra und lineare Abbildungen 1993 dazu Kuhrt: Übungen 1993; **Leupold, Conrad, Völkel, Große, Funke, Nickel, Mende: Analysis für Ingenieure** 1971; Endl & Luh: Analysis 1-3. Eine integrierte Darstellung. Studienbuch für Studierende der Mathematik, Physik und anderer Naturwissenschaften 1994; Arens et al.: Mathematik zum Mitnehmen. Zusammenfassungen und Übersichten 2009; **Plaue & Scherfner: Mathematik für das Bachelorstudium I. Grundlagen, lineare Algebra und Analysis**; Nickel: **Algebra und Geometrie für Ingenieure** 1974[9]; Syrbe: Messen, steuern, regeln 1972; **Erhardt-Ferron, Walter: Mathematik-Repetitorium zur Prüfungsvorbereitung, Bd1** Komplexe Zahlen, Vektorrechnung, Matrizen, Determinanten, Gleichungssysteme, Folgen, Reihe, Differenzialrechnung, Bd2 Fktn mehrere Veränderlicher, Integralrechnung, ODEs, Differenzialgeometrie, Laplace-Tranfo, Fouriertranfo, Vektoranalysis 1993-95; Stein & Wihan: Einführungskurs höhere Mathematik, Bd1, Funktionen, Grenzwerte, Ableitungen, Bd2, Bestimmte Integrale, Hauptsätze der Infinitesimalrechnung, Bd3, Vektorrechnung, Bd4, Folgen, Reihen, Grenzwerte 1996-97; **Arens et al.: Arbeitsbuch Mathematik**: Aufgaben, Hinweise, Lösungen und Lösungswege 2009; Glaeser: Der mathematische Werkzeugkasten. Anwendungen in Natur und Technik 2008[3]; Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik 2004[9]; Geiger & Scheel: HdP Bd3 Thirring, Duschek, Lense, Mader, Radakovic, Zernicke: Mathematische Methoden 1926; Flügge: HdP Bd1 Mathematische Methoden 1955 p297; Flügge: HdP Bd2 Mathematische Methoden 1956; Gröbner & Lesky: Mathematische Methoden der Physik 1964/65; Kuhn, Stöckel & Glaßl: **Mathematische Hilfsmittel der Physik** 1995[5]; Wong: Mathematische Physik. Konzepte, Methoden, Übungen 1994; Geroch: Mathematical Physics 1985; Dirschmid, Kummer, Schweda: Einführung in die mathematischen Methoden der Theoretischen Physik 1976; Pötter: Elementare mathematische Methoden in der Physik 1997; **Greuel: Math Ergänzungen und Aufgaben** für Elektrotechniker 1990[12]; http://en.wikipedia.org/, Bronstein, Lang, Riley et al., Kuhrt, Nickel, Feynman, Boas p96, Kerner: Mathematik für Physiker 2007; van der Waerden: Mathematik für Naturwissenschaftler 1975; Kallenrode: Rechenmethoden der Physik; http://www.sotere.uni-osnabrueck.de/Lehre/index.php Otto: Rechenmethoden für Studierende der Physik im ersten Jahr 2011; **Riley, Hobson, Bence: Mathematical Methods for Physics and Engineering**; Arfken & Weber: Mathematical Methods for Physicists; **Snieder: A Gui-**

ded Tour of Mathematical Methods: For the Physical Sciences 2009[2]; **Kaplan: Advanced calculus** 1952, 2001[4]; **Cahill: Physical Mathematics** 2013; Boas: Mathematical Methods in the Physical Sciences; Shankar: Basic Training in Mathematics. A Fitness Program for Science Students 2008; Weltner: Mathematik für Physiker I. Basiswissen für das Grundstudium Experimentalphysik; Christmann & Wick: Kompaktkurs Analysis Vektorrechnung; Salas & Hille: Calculus; **Schmutzer: Mathematik. Ein Kompendium für Physiker 2003** **Cunningham: Vektoren** 1969, 1972, **Hay: Vector and tensor analysis** 1953 ChapVI p157ff alles zur Tensorrechnung; **Chorlton: Vector and tensor methods** 1976; Riech, Furlan I, **Riech: Mathematik zu den Experimentalvorlesungen der Physik 1997** Bronstein et al: TB der Mathematik; **Schulz: Physik mit Bleistift 2006** **Hertel: Mathematikbuch zur Physik** mit matlab 2009 e-book, Arbeitsbuch Mathematik zur Physik 2011; Gottwald et al.: Meyers kleine Enzyklopädie Mathematik 1969, 1995; Meschkowski: Lexikon Mathematik 1967; **Reinhardt: dtv - Atlas Mathematik I. Grundlagen, Algebra und Geometrie. II. Analysis und angewandte Mathematik**; Metzler, Mackens & Voß: Mathematik I: Für Studierende der Ingenieurwissenschaften 1994, **Zeidler: Nonlinear Functional Analysis and Its Applications Part4. Applications to Mathematical Physics** 1997 Mechanik, Hydrodynamik, Gravitationsphysik; Ansorge/Oberle **Android-Apps zu Rechenmethoden:** REDUCE, Mathematica, Massenumbennenungs-Tools KRename und GPRename, AndroSensor für Beschleunigungen, Cloudii zur Cloud-Synchro, c't 2 2014 p76, Prelado & Traffic Monitor als Datenaustauschmesser. http://rclone.org/ **rsync auf atlas** https://www.bitblokes.de.

12 i, Funktionentheorie, Quaternionen, Oktonionen

Riemann: **i** bringt Harmonie in die bekannten Zusammenhänge. **Baez & Huerta: Exotische Zahlen und die Stringtheorie**, SdW Okt 2011 p55-60; Pontrjagin: Verallgemeinerungen der Zahlen 1986, 1995; **Titchmarsh: Theory of functions** 1932; Hanisch: Komplexe Zahlen machen Vektoralgebra, Wurzel 14 1980 H7/8; **http://www.wurzel.org/zeitschrift/** Zeichne $z, z^*, -z$ und $-z^*$ in Gaußebene. $f(x)$ gegen x Darstellung verstellt den künftigen Blick. Gehe von reeller Darstellung $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ mit Vorteil bei Nullstellensuche, Lösung der Schwingungsgl oder Integration singulärer Funktionen (Residuenkalkül) ins Komplexe gemäß $w(z) = w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y) \in \mathbb{C}$. Betrachte also die Abbildung von Gaußebene = Defnitionsbereich = $\mathbb{C}$ der z auf Gaußebene = Wertebereich = $\mathbb{C}$ der $f(z)$, um die **Idee der Funktionentheorie** klar von der reellen Analysis abzugrenzen. Bei Nullstellensuche $f(z) = z^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0 + i0$ passiert die Abbildung von Punkten des Definitionsbereichs $z_0 \in D = \mathbb{C}$ auch jenseits der reellen Achse auf den Nullpunkt = Ursprung der Gaußebene $w(z_0) = 0 + i0$ als speziellen Punkt des Wertebereichs $W = \mathbb{C}$. Man kann die Wurzel auch kartesisch bekommen: Aus $z = x + iy$ folgt $z^2 + 1 = x^2 - y^2 + 1 + i2xy \stackrel{!}{=} 0 + i0$, also $xy = 0$ und $x^2 - y^2 + 1 = 0$ und daher $x = 0$ und $y = \pm 1$ oder kurz $z_0 = \pm i$. Apfelmännchen und Julia-Mengen. **Mandelbrot-Menge** ist die Menge aller komplexen Zahlen c, für welche die durch $z_0 = 0$ und $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $c \in \mathbb{M} \iff \limsup_{n\to\infty} |z_{n+1}| \leq 2$ rekursiv definierte Folge beschränkt ist. Bilder der Mandelbrot-Menge können erzeugt werden, indem für jeden Wert des Parameters c, der gemäß obiger Rekursion endlich bleibt, ein Farbwert in der komplexen Ebene zugeordnet wird. **Reihenschwingkreis** $Z = R + i(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})$. $e^{i\pi} = -1$. Lösung von $-x = 1/x$ ist $x = \sqrt{-1} =: i$. Leibniz 1712 $\ln(-1) = \ln e^{i\pi} = i\pi$. $i \ln i = ie^{i\pi/2} = -\pi/2$. Gaußebene seit 1815. $i^i = e^{-\pi/2} = 0.21 = 0.21^* = (i^i)^* = (-i)^{-i} \in \mathbb{R}$. **Quantenmechanik** liest sich ohne komplexe Zahlen kompliziert. **Operatoren in Ortsdarstellung** aus $E = h\nu = \hbar\omega = \hbar\dfrac{2\pi}{T}$ folgt $E \to \hat{E} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, aus $p = \hbar k = \hbar\dfrac{2\pi}{\lambda} \stackrel{\text{deBrogli}}{=} \dfrac{h}{\lambda}$ folgt $\mathbf{p} \to \hat{\mathbf{p}} = \dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\nabla$ und $\mathbf{r} \to \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$. **Schrödingergleichung** $\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta\Psi(t,\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) \cdot \Psi(t,\mathbf{x})$ oder $\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\partial^2\Psi(t,x)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(t,x)$ oder $i\hbar\dot{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Psi'' + V(x)\Psi$. Freies Teilchen $V(\mathbf{r},t) = 0$ hat Materiewelle $\psi(\mathbf{r},t) = A\,\exp\left(-\dfrac{\mathrm{i}}{\hbar}\,(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right)$. $\psi(\mathbf{r},t)$ ist nicht messbare Zustandsfunktion, analog zu den Potenzialen $\varphi(\mathbf{r},t)$ und $\vec{A}(\mathbf{r},t)$ der Elektrody-

namik. Aus $i\hbar\Psi_t(\vec{x},t) = \hat{H}\Psi(\vec{x},t)$, Raum-Zeit-trennenden Ansatz $\Psi(\vec{x},t) = \psi(\vec{x})\phi(t)$ und Eigenwertgl $\hat{H}\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})$ folgt $\frac{\mathrm{d}\phi}{\phi} = \frac{E}{i\hbar}\mathrm{d}t$ oder $\ln\frac{\phi(t)}{\phi_0} = \frac{E}{i\hbar}(t-t_0)$, also $\Psi(\vec{x},t) = \Psi(\vec{x})\phi_0 e^{\frac{E}{i\hbar}(t-t_0)}$. **Dirac** bringt SRT und QT zusammen $(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0$. Ñeeb & Olafsson: Reflection Positivity. A Representation Theoretic Perspective 2017 Wick-Rotation betrachte Zeitachse $i\,t$!

Breuer: Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Functionen eine complexen Variablen in organischer Verbindung mit der Geometrie 1898; **Boas & Boas: Invitation to complex analysis** 1987, 2010; Needham: Anschauliche Funktionentheorie 2001; **Heegner-Zahlen** sind die neun Zahlen 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67 und 163. **Gaußschen Zahlen** = Verallgemeinerung der ganzen Zahlen in den komplexen Zahlen. Jede gaußsche Zahl liegt auf einem ganzzahligen Koordinatenpunkt der komplexen Ebene. Die gaußschen Zahlen bilden den Ganzheitsring des quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\mathrm{i})$. Außerdem bilden die gaußschen Zahlen einen euklidischen Ring und damit insbesondere einen faktoriellen Ring, biquadratischen Reziprozitätsgesetz. **Eisenstein-Zahlen**. **Neuenschwander: Riemanns Einführung in die Funktionentheorie**. Eine quellenkritische Edition seiner Vorlesungen mit einer Bibliographie zur Wirkungsgeschichte der Riemannschen Funktionentheorie 1996; Weber, Dedekind & Narasimhan: Bernhard Riemann. Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge = Collected papers 1990 p91ff **Wegunabhägigkeit**; Denecke & Todorv: Algebraische Grundlagen der Arithmetik 1994 p157ff; Berechne Autokorrelationsfunkt als Skalarprodukt oder Beziehungen der Winkelfunktionen. Freitag & Busam: Funktionentheorie 1 1993, 2006^4 pXVI; Freitag: Funktionentheorie 2. Riemann'sche Flächen. Mehrere komplexe Variable. Abel'sche Funktionen. Höhere Modulformen 2014; Burkhardt: Elliptische Funktionen 1906^2; Hurwitz: Vorlesungen über Allgemeine Funktionen-theorie und Elliptische Funktionen 1922; Hurwitz & Courant: Funktionentheorie 1964; Neuenschwander: Riemanns Einführung in die Funktionentheorie - eine quellenkritische Edition seiner Vorlesungen mit einer Bibliographie zur Wirkungsgeschichte der Riemannschen Funktionentheorie 1996; Die Welt ist analytisch. Lies Weber & Dedekind: Bernhard Riemanns Gesammelte Mathematische Werke 1876; $\mathbb{C}$ ohne Ordnung, **Quaternionen** nicht kommutative Drehstreckung, Hanisch: Anschauliche Einführung hyperkomplexer Zahlensysteme als Drehung um $\frac{\pi}{2}$ und Drehstreckung. **C̃onvay & Smith: On quaternions and octonions** 2002; **Oktonion** oder Oktave - gut für Drehungen in 7- oder 8-dimensionalen Räumen - **nicht assoziativ**. M̃öbius: Das baryzentrische Kalkül, ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie dargestellt. Kegelschnitte 1827; G̃rassmann: Die Ausdehnungslehre 1844, 1862^2; H̃amilton: Elemente der Quaternionen 1884; T̃ait: Elementares Handbuch der Quaternionen 1880; G̃ursey & Chia-Hsiung: On The Role Of Division, Jordan And Related Algebras In Particle Physics 1996; Hurwitz: Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen 1896; Brauer: Collected papers 1, p224 Quaternionen = Zerfällungskörper; Anwendung bei Supersymmetrie auf Seite 686. Intro bei Arens! Remmert: Funktionentheorie I & II 1989^2 e-book; Italiener: **1545 Cardano** rechnete bei Wurzel aus -1 ohne Rücksicht einfach weiter und bekam am Ende reelle Lösungen. "Geht nicht, gibt es nicht" gibt es dann nicht mehr. **Cardani(o)'sche Formeln:** Aus $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ wird wegen $x = y - \frac{a}{3}$ die reduzierte Form $y^3 + py + q = 0$ mit den Cardani(o)'schen Lösungsformeln $y_1 = u + v$, $y_2 = \frac{u+v}{2} + i\frac{u-v}{2}\sqrt{3}$ und $y_2 = -\frac{u+v}{2} - i\frac{u-v}{2}\sqrt{3}$ mit $u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ und $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$, wobei es für $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0$ drei reelle Lösungen gibt. Auch Gleichungen höheren Grades haben dann Lösungen; Bombeli. Was ist $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$ - Polygon-Dreiteilung- oder $\sqrt{-81}$? Was ist die Nullstelle von $f(z) = z^2 + 1$? **Beispiel: Wurzel aus i?** $\pm\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{2i}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+2i-1} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(1+i)^2 i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \pm(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$. Dritte Wurzel aus -27i ? Eine Wurzel durch Raten: 3i, denn 3i3i3i=-27i. Die anderen **Wurzeln geometrisch per regelmäßigem Polygon**, weil dem **Wurzelziehen** die **Winkelteilung** entspricht oder analytisch per Polynom-Division: Denn die Frage $\sqrt[3]{-27i}$ =? bedeutet $\sqrt[3]{-27i} = x$ oder $-27i = x^3$ oder Nullstelle des Polynoms $P(x) = x^3 + 27i = 0$. **Polynom-Division** durch geratene Nullstelle $3i$ gibt $(x^3 + 27i) : (x - 3i) = x^2 + 3ix - 9$. $p-q$-Formel gibt $x_\pm = -\frac{3}{2}i \pm \frac{\sqrt{27}}{2}$. Oder formal per Moivre-Formel siehe Seite 200. $\sqrt[3]{-27i} = 3e^{\frac{\frac{3}{2}\pi i + ki2\pi}{3}}$

mit $k = 0, 1, 2$ also $x_k \in \{3e^{\pi i/2} = 3e^{i90^o} = 3i, 3e^{7\pi i/6} = 3e^{i210^o}, 3e^{11\pi i/6} = 3e^{i330^o}\}$. **Spencer-Brown: Gesetz der Form**:

$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{oder welches x loest} \quad -x = \frac{1}{x} \quad ?$$

Gesucht ist Zahl, deren Inverse mit ihrem Entgegengesetzten übereinstimmt: $(1)^{-1} = -1$ oder $x^{-1} = \frac{1}{x} = -x$. i erfüllt die Forderung, dass sein **additives mit dem multiplikativen Inversen übereinstimmt**. **Moore: Six ideas that shaped physics.** Unit Q = Particles behave like waves 2003 p89-97 **Intro zu komplexen Zahlen:** ib mit $b \in \mathbb{R}$ ist **imaginäre Zahl**, weil $(ib)^2 = -b^2 \leq 0$. **Multiplikation mit** i bedeutet 90°**-Drehung** oder allgemein Dreh-Streckung/Spirale $z_n = (2i)^n = 2^n e^{i\frac{\pi}{2}n}$ in der Ebene. **Man erweitere den Definitionsbereich ins Komplexe!** Euler führt die Abkürzung i := $+\sqrt{-1}$ ein. **Produkt zweier Brüche** geometrisch als Fläche kann Anschauung liefern. **Gamow: Eins, zwei, drei, Unendlichkeit** 1956, 1968 p42 ; Komplexe Zahlen: Multiplikation mit i bedeutet **Drehung** um 90°: $z_n = (i)^n$. Wie lauten die beiden komplexen Zahlen, deren Summe mit ihrem Produkt zusammenfällt und gleich 10 ist: $z_1 + z_2 = 10 \wedge z_1 z_2 = 40$? Keine reelle Lösung: $z_1 = 5 + i\sqrt{15} = z_2^*$! Gauß-Ebene (1777-1855) von Amateur-Mathematiker Argand (1768-1822). In **Python** mit Modul pylab oder cmath.sqrt(-1.+0j) geht $\sqrt{-4}$ mit sqrt(-4.*(1+0j)) und auch conjugate `z=-3-1j, 1j*rand(5), angle(0+1j)-pi/2, imag(a), exp(1j*pi/2). imag, exp(1j*pi/2). conjugate()`, np.conjugate(A); A.conj(); A.conjugate(). A=np.random.rand(2,2)+1j*np.random.rand(2,2), Hermitesch konjugierte Matrix zu A ist At=A.T.conj(). sqrt(-1+0j), Wurzeln komplexer Zahlen 180*angle((-1+0j)**(1./3))/pi. Körper, weil $\mathbb{C} := \{z = a + \mathrm{i}\, b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$ für + und · assoziativ, **neutrales Element** (Null $0 = 0 + 0\mathrm{i}$, Eins-Element $1 = 1 + 0\mathrm{i}$), inverses Element, kommutativ, zudem distributiv (Ausklammern geht). Division wird auf Multiplikation zurückgeführt, in dem mit dem konjugiert komplexen Nenner multipliziert wird $z^{-1} = z^*/z\, z^*$. **Beachte bei komplexer Konjugation:** $(e^{iz})^* = e^{-iz^*}$. $\Re(z) = 1/2(z + \bar{z})$, $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$. $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

$$A = \Re A + \mathrm{i}\,\Im A = \frac{A + A^*}{2} + \frac{A - A^*}{2}$$

Vermeide beim Rechnen mit komplexen Zahlen das für diese nicht erklärte $\sqrt{}$-Zeichen und i = $\sqrt{-1}$! **Betrag, Länge oder Modul** einer komplexen Zahl $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$. **Aufgaben zu komplexen Zahlen:** a] Gegeben seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = 3 - 2i$ und $z_2 = -2 + i$ Gilt $z_1 > z_2$? Stellen Sie die beiden Zahlen in der Gauß'schen Ebene dar. Bestimmen Sie die Summe $z_1 + z_2$. Bestimmen Sie das Produkt $z_1\, z_2$. Bestimmen Sie den Quotienten $\frac{z_1}{z_2}$. Geben Sie das Ergebnis in kartesischer Darstellung an. Stellen Sie die Summe, das Produkt und den Quotienten von z_1 und z_2 in der Gauß'schen Ebene dar. Stellen Sie die zu z_1 und z_2 konjugierten komplexen Zahlen in der Gauß'schen Ebene dar. Berechnen Sie die Beträge der komplexen Zahlen z_1 und z_2. b] Polardarstellung komplexer Zahlen. Sei $z = 1 - i$. Stellen Sie z und die konjugiert komplexe Zahl z^* in der Gauß'schen Ebene dar. Berechnen Sie den Betrag $|z|$. Bestimmen Sie die Polardarstellung von z. Alle Werte $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ bilden den Einheitskreis der komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 = **unimodulare Zahlen** bilden **Kreisgruppe**. **Eulerscher Relation** gibt **Polarform** $z = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$. Ein Drehzeiger $\underline{u} = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)} = \hat{u}\, \underline{/\omega t + \alpha}$. Polardarstellung = **Versor** = Drehzeiger $Zahl\underline{c} = a \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ Winkelförmiges Versorzeichen durch $\underline{c} = a\underline{/\varphi}$. c] Kehrwert $z = 3 - 2i$ in kartesischer Darstellung $\frac{1}{z} = a + ib$. d] Welches Gleichheitszeichen in $-1 = i^2 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$ gilt nicht? e] Bestimmen Sie die Menge aller Zahlen $z \in \mathbb{C}$, für die gilt $\mathrm{R}e\left(\frac{z}{z+1}\right) < 0$. Stellen Sie das Ergebnis in der Gauß'schen Ebene dar. Aus $a^2 + a + b^2 < 0$ folgt $(a + 1/2)^2 + b^2 < 1/4$, also Kreis um (-.5,0) mit Radius 1/2. f] **Potenzen mit der imaginären Einheit** i**:** Eine Folge von komplexen Zahlen sei rekursiv definiert durch $z_{n+1} = (z_n)^i \quad \mathrm{m}it \quad z_1 = i \quad (n \in \mathbb{N})$, also $z_1 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}, z_2 = i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}, z_3 = (i^i)^i, \ldots$. Berechnen Sie die ersten sechs Elemente der Folge, wobei von eventuell auftretenden Logarithmen nur der Hauptwert berücksichtigt werden soll. Welchen Wert hat $z_{42} = e^{-\pi/2}$? $z_n = e^{in\pi/2}$. $z_{n+4} = z_n$. g] **nichtkommutatives Skalarprodukt komplexer Zahlen** $< z_1, z_2 >= z_1^* z_2 = z_1^{***} z_2^{**} = (z_1^{**} z_2^*)^* = (z_2^* z_1)^* =< z_2, z_1 >^*$ harmoniert mit Längenbegriff oder Betrag einer komplexen Zahl, denn $< z_1, z_1 >=< z_1, z_1 >^* \in \mathbb{R}_+$. **Vertauschung der Faktoren** bedeutet bei Skalarprodukt komplexer Zahlen

Konjugation! Skalarprodukt komplexer Zahlen ist anti-kommutativ. van der Waerden: Physiker nehmen $(\alpha x, y) = \alpha^*(x, y)$, weil Bra-Vektor = konjugiert komplexer Vektor = aus Koraum. Mathematiker umgekehrt $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ und $(x, \lambda y) = \lambda^*(x, y)$. **van der Waerden: Algebra I & II = Moderne Algebra** 1930/31; Brehmer: Hilbert-Räume und Spektralmaße 1979 p10; Das Produkt zweier komplexer Zahlen ist natürlich kommutativ. Denn aus $z_1 = ae^{\alpha}$ und $z_2 = be^{\beta}$ folgt $< z_1, z_2 >= z_1^* z_2 = abe^{i(-a+b} =< z_2, z_1 >^*$. **Winkel zwischen Zeigern** = Winkel zwischen komplexen Zahlen $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ harmoniert auch mit notwendiger Konjugation eines Faktors $< z_1, z_2 >= z_1^* z_2 = r_1 r_2 e^{i(-\varphi_1+\varphi_2)} = (r_1 r_2 e^{i(\varphi_1-\varphi_2)})^* = (z_1 z_2^*)^* = (z_2^* z_1)^* =< z_2, z_1 >^*$. Der **Winkel zwischen Zeigern** ist also $\varphi_1 - \varphi_2 =$arg(z_1)-arg(z_2). Für **zueinander senkrechte komplexe Zahlen** gilt $\varphi_1 - \varphi_2 =$arg(z_1)-arg(z_2) $= \frac{\pi}{2} + m\pi$ mit $m \in \mathbb{Z}$. Oder kartesisch: $z_1 = a + ib$ und $z_2 = c + id$ statt Gauß'scher Ebene im Reellen $\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ **orthogonal**, falls $\vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = ac + bd = 0$ bedeutet wegen $< z_1, z_2 >= z_1^* z_2 = (a - ib)(c + id) = ac + bd + i(ad - bc)$, dass **Realteil verschwinden** muss $\Re < z_1, z_2 >= 0$. Bei gegebenem $z_1 = a + ib =$ fix sind also alle Zeiger $z_2 = c + id$, die der **Geradengleichung** $ac + bd = 0$ oder $d = -c\frac{a}{b}$ genügen, **orthogonal** zu z_1, also $a + ib = z_1 \perp z_2 = c(1 - i\frac{a}{b})$. Einfacher sind zu $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ alle Zeiger/Zahlen $z_2 = \alpha r_1 e^{ii(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} + m\pi)}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$ senkrecht. Noch einfacher $z \perp iz$, weil i jeden Zeiger/Zahl um 90° dreht und es gibt wegen $< z, iz >= i < z, z >= iz^* z = (a^2 + b^2)i$ **keinen Realteil**. h] **Skalarprodukt komplexer Vektoren** $\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in \mathbb{C}^n$ ist $< \vec{z}_1, \vec{z}_2 >= \sum_{k=1}^n z_{1,k}^* z_{2,k} = z_{1,1}^* z_{2,1} + \cdots + z_{1,n}^* z_{2,n} =< \vec{z}_2, \vec{z}_1 >^*$. **Orthogonalität**, falls $< \vec{z}_1, \vec{z}_2 >= 0$ also $z_1 \perp z_2 \in \mathbb{C}^n$, aber Winkel nicht anschaulich. Willers: Elementar-Mathematik - ein Vorkurs zur höheren Mathematik 1948, 1965^{12} p129ff; Kartesische, goniometrische $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ und Polar-Darstellung einer komplexen Zahl. Summe als Diagonale eines Parallelogramms bei kartesischer Darstellung. **Winkel der Würfel-Raumdiagonalen** acos(1./3)*180./pi = 70.53^o und -acos(1./3)*180./pi=109.47^o. Multiplikation und Division über Polarform: $z_1\, z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$, $z_1/z_2 = r_1/r_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$. **Winkel** ist System zweier von einem Punkt, Scheitelpunkt O ausgehender Strahlen, Schenkel. **Winkel** α im Gradmaß oder **Bogenmaß** b **des Einheitskreises** ist Äquivalenzklasse für alle anderen Bögen der Länge B beim Radius r

$$b = \text{arc } \alpha = \frac{B}{r} = \frac{\pi}{180^o}\alpha$$

1) Geometrische Def der trigonometrischen Fkt: Ein Schenkel von α in positive x-Richtung, der andere schneidet den Einheitskreis in P. Dann sind durch die Koordinaten von P die Bilder der trigonometrischen Fkt erklärt. **2) Analytische Def der trigonometrischen Fkt:** Drehung t in komplexer Ebene. Ein Punkt der Ebene fix und längentreu Bewegung. Es gelte für die komplexen Zahlen $\xi_i \in \mathbb{C}$ die Funktionalgleichung der Exponenzialfunktion $\xi(t) := e^{it}$, $\xi(t_1 + t_2) = \xi(t_1)\,\xi(t_2)$. Real- und Imaginärteil erweisen sich als Cosinus und Sinus (Bogen). **Spezielle Winkel per Pythagoras am Kreis mit Radius = 1** *570 v.Chr.:
$\sin 0^o = 1/2\sqrt{0}$, $\sin 30^o = 1/2\sqrt{1}$, $\sin 45^o = 1/2\sqrt{2}$, $\sin 60^o = 1/2\sqrt{3}$, $\sin 90^o = 1/2\sqrt{4}$.
Weber & Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. BdI Elementare Algebra und Analysis 1915^3 p302; **Euklidischer Raum erlaubt Winkel-Deutung per Skalar-Produkt** nach Einführung des **Richtungskosinus** wird zwischen Vektor und Basis gemessen $r_x = \mathbf{r} \cdot \hat{x} = \|\mathbf{r}\| \cos\alpha$. Das Quadrat der Diagonalen eines Quaders ist gleich der Summe Kantenlängenquadrate. $r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$ gibt sofort $\boxed{1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}$. Selbst beim Rechteck ist $d^2 = a^2 + b^2 = (\hat{x} \cdot \vec{d})^2 + (\hat{y} \cdot \vec{d})^2 = d^2\cos^2\angle(\hat{x}, \vec{d}) + d^2\cos^2\angle(\hat{y}, \vec{d}) = d^2\cos^2\angle(\hat{x}, \vec{d}) + d^2\sin^2\angle(\hat{x}, \vec{d})$ wegen $\angle(\hat{x}, \vec{d}) + \angle(\hat{y}, \vec{d}) = \pi/2$. Die Quadrate erlauben zwei verschiedene Vorzeichen oder Lösungen: Für $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/4$ gilt $1 = 1/4 + 1/2 + \cos^2\gamma$, also $\cos\gamma = \pm 1/2$ oder $\gamma = 60^o$ oder $\gamma = 120^o$. Die **Richtungswinkel** sind **spitz**, falls $r_i > 0 \Leftrightarrow \vec{r}_i \uparrow\uparrow$ **Grundvektor** oder **stumpf**, falls $r_i < 0 \Leftrightarrow \vec{r}_i \uparrow\downarrow$ **Grundvektor**. Konvention ist stets das Intervall $[0^o, 180^o]$ oder der **kleinere Winkel** gemeint, also nicht 300° oder 240°, sondern die kleineren Ergänzungswinkel! Nickel et al: Algebra und Geometrie für Ingenieure 1974^9 p480; Großmann: Math Einführungskursfür die Physik 2004^9 p31; Joos, Richter, Kaluza: Höhere Math 1994^{13} p86; Allgemein bekommt man daher den Winkel so $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$, siehe Seite 251 und **Kosinus-Satz**

Seite 266 oder definiert sogar **Skalar-Produkt** unter Verwendung des Winkels: $\vec{a}\cdot\vec{b} = ||a||||b||\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$. **Skalarprodukt definiert Arbeit** per $\mathrm{d}W(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}$. **Skalarprodukt definiert Ebene** per $\vec{k}\cdot\vec{x} = 0$, dh, alle Vektoren $\vec{x}$, die bf senkrecht auf festen Vektor $\vec{k}$ stehen, zeigen auf Punkte der Ebene. **Nearing: Mathematical tools for physics** 2010 betrachte $\tan\varphi = 1/x$ und $\sin\varphi = x/\sqrt{1+x^2}$ gibt sofort $\sin\varphi = \tan\varphi/\sqrt{1+\tan^2\varphi}$.

Moivre'sche Formel: $z^n = r^n(\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi))$ Radizieren entspricht Kreisteilung = Moivre'scher Satz:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,e^{i\,\phi}} = \sqrt[n]{r}\,e^{\frac{\phi+k\,2\,\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\phi+k\,2\,\pi}{n} + i\,\sin\frac{\phi+k\,2\,\pi}{n}\right] \quad k = 0,\ldots n-1$$

mit **Hauptwert** (Äquivalenzklasse analog $3 = 3\frac{n}{n}$ auf $\arg(z_k) \in [0, 2\,\pi)$ oder $\arg(z_k) \in [-\pi, \pi)$. Iteriere die Folge $z_{n+1} = (z_n)^i$ mit $z_1 = i$ und $n \in \mathbb{N}$. Folge hat Periode 4 mit $z_2 = \exp(-\pi/2), z_3 = -i, z_4 = \exp(\pi/2), z_5 = i$ und speziell ist $z_{42} = \exp(-\pi/2)$.

Logarithmen Arens p272 mit und ohne ($k = 0$) Nebenzweigen $\ln -1 = \ln e^{\pi i + 2\pi k i} = \pi i(1+2k)$, $\ln i = i\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$

Kronjäger: Mathe für Funkamateure 1968, p57; **Dreiecksungleichung:** Aus $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ folgt nach Quadrieren und wegen $|z_1|\cdot|z_2| = |z_1|\cdot|z_2^*| = |z_1\cdot z_2^*|$ $z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + \underbrace{\overline{z_1}z_2}_{=\overline{z_1\overline{z_2}}} + z_2\overline{z_2} \le z_1\overline{z_1} + 2\underbrace{|z_1 z_2|}_{=|z_1\overline{z_2}|} + z_2\overline{z_2}$, Mit $z := z_1\overline{z_2}$, bleibt $z + \bar{z} \le 2|z|$. Mit $z = u + iv$ erhält man $(u+iv)+(u-iv) = 2u \le 2\sqrt{u^2+v^2}$

Geometrische Deutung: Gauß'sche Zahlen-Ebene und **Riemann'sche Zahlen-Kugel:** Stereographische Projektion vom Nordpol einer im Ursprung zentrierten Einheitskugel ordnet jeder komplexen Zahl einen Punkt auf der Kugel ohne Nordpol (dem wird ∞ zugeordnet) zu. Nordhemisphäre erfasst alle Zahlen außerhalb des Einheitskreises, Äquator den Einheitskreis und Südhemisphäre erfasst alle Zahlen innerhalb des Einheitskreises. Komplexe Mannigfaltigkeiten, Differentialformen, **Garbentheorie** siehe Forster: Riemannsche Flächen 1977; Kultze: Garbentheorie 1970; Lesbar, weil mit vielen Beispielen, für Anfänger ist **Zeidler Teubner-TB II Kap19** p767ff oder HB der Mathe Bd4 Kap 19.9. **Garbe = sheaf, Halm = stalk und Keim = germ.** Idee: Globale analytische Objekte werden aus lokalen Elementen aufgebaut. Analyt Fortsetzung von Potenzreihen. **Prägarben und Garben** verallgemeinern den Begriff der Gesamtheit aller stetigen und glatten Funktionen, die lokal oder global auf einer Mannigfaltigkeit X gegeben sind. X sei topologischer Raum. **Prägarbe** $\mathbb{G}$ auf $X :=$ i] **Lokal gegebene Gruppen:** Jeder offenen Menge $U \subset X$ wird eine **kommutative** (additive) Gruppe $\mathbb{G}(U)$ zugeordnet. ii] **Restriktionsabbildung:** Für $V \subseteq U$ existiert ein Gruppenmorphismus $r_{U,V} : \mathbb{G}(U) \to \mathbb{G}(V)$. iii] **Identische Abb auf** $\mathbb{G}(U)$: Für $U = V$ gilt $r_{U,U} = \mathrm{id}$. iv] Im Falle $W \subseteq V \subseteq U$ ist das Diagramm $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$ kommutativ. Für die Einschränkung $r_{U,V}(f)$ eines Schnittes $f \in \mathcal{F}(U)$ auf eine offene Teilmenge $V \subseteq U$ schreibt man auch $f|_V$. **Standardbeispiel1: Stetige Fkt**. Mit $\mathbb{C}(U)$ bez. wir die Gesamtheit aller stetigen Funktionne $f : U \to \mathbb{R}$. Dann entsteht durch $\mathbb{G}(U) := \mathbb{C}(U)$ eine **Prägarbe**., die man die Prägarbe $\mathbb{C}$ der stetigen reellen Funktionen auf X nennt. Die Gruppenstruktur auf $\mathbb{G}(U)$ entspricht der üblichen Addition. von Funktionen. **Standardbeispiel1: Glatte Funktionen**. Es sei X eine reelle/komplexe Mannigfaltigkeit. Mit $\mathbb{C}^\infty(U) =$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller C^∞-Funktionen mit $f : U \to \mathbb{K}$. Im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ stimmen die Funktionen aus $\mathbb{C}^\infty(U)$ mit den holomorphen Funktionen GGGG **Tennison: Sheaf theory** 1975; Germs. Bröcker: Differentiable Germs and Catastrophes 1975; **Bröcker: Differenzierbare Abbildungen**. Der Regensburger Trichter Bd3, 1971/72; Lu: Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory 1976; Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 p396f; **Booss: Topologie und Analysis. Einführung In Die Atiyah-Singer-Indexformel** 1977; Atiyah: Topological quantum field theories 1989; Physik und Geometrie. Feldtheorie als PDE und Lösungs-Mannigfaltigkeiten bleiben kontinuierlich. Lokale Feldtheorien: Elektrodyn und ART. Diskontinuitäten bei Quantentheorie und Topologie im Sinne globaler Eigenschaften. Suche: A reading list for topological quantum field theory? There are two kinds of topological quantum field theory, (Albert) Schwarz-type theories and Witten-type theories. In Schwarz type theories (like Chern-Simons theory and BF-theory), you have an action which is explicitly independent of the metric and you expect that the correlation functions computed by the path integral will also

be independent of the metric. In Witten-type theories (Donaldson theory, Gromov-Witten theory), metric independence is a little bit more subtle. In these theories, you do have to choose a metric to get started. But you have some extra structure that allows you to compute some quantities which are metric independent. (Slightly) more precisely: In a Witten-type theory, you have some operator Q which squares to zero, which you think of as a differential. (Witten type theories are also called cohomological field theories.) You also have an operator T, taking values in (2,0)-tensors, which a) is Q-exact (T = [Q,G] for some G), and b) generates changes in the metric g. The latter means that if we compute the expectation value < epsilon(T)A > as a function of g, we find that it's equal to the expectation value of A computed with respect to g + epsilon. Here epsilon is a 'small' (0,2) tensor we pair with T to get a scalar. In these theories, you can show that the correlation functions of operators which are Q-exact must vanish, which implies that small deformations of g don't change the correlation functions of Q-closed operators A. If you choose A so that its expectation value behaves like a function on the space of metrics, this tells you it's constant on the space of metrics. If you choose some fancier A so that the correlation functions behave like differential forms on the space of metrics, cohomological complications can arise. Most of the references here are for Schwarz-type theories. For a physics treatment of Witten-type theories, it's worth looking at Witten's 'Introduction to cohomological field theory'. There's also a long set of lecture notes by Cordes, Moore, & Ramgoolam. The mathematical treatments of the idea are less complete. Hopkins, Lurie, & Costello's stuff is about the most comprehensive, but it's pretty far removed from actions and path integrals. For a starter, you might enjoy Teleman's classification of 2d semi-simple 'families topological field theories'. Ivancevic & Ivancevic: Undergraduate Lecture Notes in Topological Quantum Field Theory arXiv:0810.0344v5; Kock: Frobenius Algebras and 2-D Topological Quantum Field Theories 2011; Anton Kapustin: Topological Field Theory, Higher Categories, and Their Applications arXiv:1004.2307 2010; Ñakahara: Geometry, topology, and physics 1990, 2003[2] ebook pdf im Netz; Gamow: Herz auf der anderen Seite. Topologie. Möbius-Band, PhysBl17 1961 176-182; **Ñakahara: Differentialgeometrie, Topologie und Physik** 2013; **Monastyrsky: Riemann, Topology, and Physics** 1987; Kap16.2 Knotentheorie. **Artin: Theorie der Zöpfe** 1925; **Monastyrsky: Topology of gauge fields and condensed matter** 1993; Avrin: Knots, Braids and Möbius Strips. Particle Physics and the Geometry of Elementarity. An Alternative View 2015; **Baez & Muniain: Gauge Fields, Knots and Gravity** 1994; Monastyrskii oder Monastyrsky: Modern Mathematics in the Light of the Fields Medals 1997; Doughty: Lagrangian interactions 1990; Ğuidry: Gauge field theories 1991; Pokorski: Gauge field theories 1984; Chaichian & Nelipa: Introduction to Gauge Field Theories 1984; **Naber: Topology, Geometry and Gauge fields. Foundations** 2010[2]; Swan: The Theory of Sheaves 1964; Beispiel der **Garbe = sheaf** der stetigen Funktionen: Gegen sei Funktor = strukturerhaltende Abbildung zwischen zwei Kategorien. $F(U)$ ist dann die Menge der stetigen Funktionen $U \to \mathbb{R}$, die Einschränkungsabbildungen (Bilder der Inklusionsabbildungen unter dem Funktor F) sind einfach die Einschränkungen der Funktionen auf kleinere Bereiche. **Bredon: Sheaf theory** 1997; Pragacz: Algebraic Cycles, Sheaves, Shtukas, and Moduli: Impanga Lecture Notes 2008; Huybrechts & Lehn: The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves 1997; Miraglia: An Introduction to Partially Ordered Structures and Sheaves 2006;

Möbius-Transformation: $f(z) = 1/z$. Arens p142

Aber man verliert die **Ordenbarkeit**! Bei hyperkomplexen Zahlen geht gar die **Kommutativität** verloren. Funktionentheorie als schöner und für Elektrostatik und Strömungslehre Arens p1100; Meybach& Vachenauer: Höhere Mathematik, Vol2 1991; Spiegel: Schaum's outline of complex variables 1994; Eleganter Apparat für physikalische Modellierung: **Kepler-Gesetz-Herleitung per komplexer Zahlen** (Kalkül) oder per Anschauung gemäß Kepler, Newton und Goodstein: Feynmans verschollene Vorlesung 1996. Strutz: Von Apollonius zur Himmelsmechanik. Auf der Spur zu Newtons Gravitationsformel, PdN-PhiS 51 2002 H4 p34-38; Köpf: Warum im 3. Kepler'schen Gesetz nur die große Achse vorkommt: Ergänzungen zu Feynmans 'verschollener Vorlesung' PdNPiS Bd53 2004 H1 p38-40; Schwingungen und Wellen. So sieht man die Lösung

der Dgl für den **harmonischen Oszillator** sofort oder mittels Trennung der Variablen als $u(t) = u_0\, e^{i\omega\, t}$

$$\dot{u} = i\,\omega\, u \quad \text{mit } u \in \mathbb{C} \quad \text{oder } \dot{\vec{x}} = A\vec{x} \quad \text{mit } \vec{x} \in \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder } \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Andronov-Hopf-Bifurkation bei $\alpha = 0$ per Hopf-Normal-Form

$$\dot{u} = (\alpha + i)\, u - |u|^2\, u + O(|u|^4)$$

stabiler Grenzzyklus-Radius ist $\sqrt{\alpha}$. $\dot{y}_1 = \beta y_1 - y_2 \pm y_1(y_1^2 + y_2^2)$ und $\dot{y}_1 = y_1 + \beta y_2 \pm y_2(y_1^2 + y_2^2)$. http://www.scholarpedia. org/article/Andronov-Hopf_bifurcation; Universelle Entfaltungen siehe Gilmore; Iooss: Bifurcation of maps and applications 1979; Iooss & Joseph: Elementary stability and bifurcation theory 1980; Marsden & McCracken: Hopf Bifurcation and its Applications 1976; Andronov, Leontovich, Gordon & Maier (1971) Theory of Bifurcations of Dynamical Systems on a Plane. Israel Program Sci. Transl. Arnold: Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations 1983; Izhikevich: Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting. The MIT Press 2007; Kuznetsov (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory, Springer, 3rd edition. **ScholarPedia:** Govaerts, Kuznetsov, Sautois (2006) MATCONT. Scholarpedia, 1(9):1375. Murdock (2006) Normal forms. Scholarpedia, 1(10):1902. Moehlis, Josic, Shea-Brown (2006) Periodic orbit. Scholarpedia, 1(7):1358. Holmes & Shea-Brown (2006) Stability. Scholarpedia, 1(10):1838. Guckenheimer & Holmes: Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields 1983 p158ff; Iooss & Joseph: Elementary stability and bifurcation theory 1997[2] p123f **Stuart-Landau-Oszillator**, **Kuramoto: Chemical oscillations, waves, turbulence** 1984; Kuramoto: Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators, In: LNP39 1975 p420-422, Araki ed. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics January 23–29, 1975, Kyoto University, Kyoto/Japan; Siehe aber Wilson-Cowan-Modell betrachtet die WW zwischen erregbaren und inhibitorischen Neuronenensembles (je einige 10 oder 100 tausend). Modelliert Grenzzklus, Multistabilität und Hysterese. Ausgangspunkt ist Inertial Manifold: Kuramoto–Sivashinsky beschreibt dissipative Dynamik mittels PDE, deren Attraktor trotz aller Komplexität niedrigdimensional durch inertial manifold, die Lösungen exponentiell absorbiert, genähert werden kann. Dies ist die Grundannahme, wenn man z.B. komplexe Hirndynamik beschreibt: Es sei stets in der Nähe eines kritischen Punktes, an dem eine niedrig-dimensionale Beschreibung wesentliche Aspekte erfasst. Umezawa, Hiroomi: Advanced Field Theory. Micro, Macro, and Thermal Physics 1995; Hyman & Nicolaenko: The Kuramoto-Sivashinsky equation. A bridge between PDEs and dynamical systems PhysicaD18 1986 p113–126; Jirsa & Haken. Field theory of electromagnetic brain activity. PhysRevLett77 p960–963 1996;

Phasendynamik nahe des Grenzzyklus: Pikowsky, Rosenblum, Kurths: Synchronization 2001 p180ff; Osipov, Kurths, Zhou: Synchronization in oscillatory networks 2007 Phasenoszillatoren p21 **Adler-Gleichung** Robert Adler, Zenith Radio Corporation, Chicago, A study of locking phenomena in oscillators, Proceedings of the IRE61 1946 H6 351-357 = Reprint Proceedings of the IEEE61 H10 1973, beschreibt **Rotator**, also oszillierende Neurone, Schlaf-Wach-Zyklus, Josephson-Übergang, überdämpfter Oszillator. Parlitz, Pikovsky, Rosenblum Kurths: Schwingungen im Gleichtakt. Synchronisation - ein universelles Ordnungsprinzip für Oszillationen und Rhythmen, PJ5 2006 H10 p33-40 **Phasendynamik allein, nicht Dynamik** der Zustandsvariablen = Amplitude+Phase **Adler-Gleichung:** 1946, Abel et al. Synchronization of organ pipes. Experimental observations and modeling arXiv:physics/0506094 2006 $\frac{\mathrm{d}\Delta\varphi}{\mathrm{d}t} = \Delta\omega - \epsilon \sin\Delta\varphi = -\mathrm{grad}_{\Delta\varphi} U(\Delta\varphi)$ wobei $U(\Delta\varphi) = -\Delta\omega\Delta\varphi - \epsilon\cos\Delta\varphi$ mit Phasendifferenz der gekoppelten Schwinger = $\Delta\varphi$, kleiner **Frequenzverstimmung** $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ und Kopplungsstärke = Locking-Term ϵ. **Phasendynamik in Nachbarschaft des Grenzzyklus** folgt schwach gekoppter Schwinger mit Dgls 1. Ordnung $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$ und $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$ mit neutraler Stabilität in der Phase, analog der neutralen Stabilität harmonischer Schwinger bzgl der Amplitude. Für kleine Kopplungsstärke $|\epsilon| < |\Delta\omega|$ hat Potenzial $U(\Delta\varphi)$ der Adler-Gleichung keine Minima und Phasendifferenz $\Delta\varphi$ nimmt monoton zu. Für große Kopplung $|\epsilon| > |\Delta\omega|$ hat Potenzial $U(\Delta\varphi)$ der Adler-Gleichung lokale Minima und Phasendifferenz $\Delta\varphi$ hat stabilen Gleichgewichtszustand, also synchron. Beachte drei Frequenzen: 1] ω_0 = Frequenz des freien Sklaven. 2] ω Frequenz des Masters = Frequenz des treibenden Schwingers = unabhängig vorgegeben = Erregerfrequenz.

3] $\Omega =< \dot{\varphi} >$ = beim Sklaven beobachtete Frequenz= mittlere Momentanfrequenz. Siehe auch Seite 403 **Arnold-Zunge** = Arnold tongue Ordungsparameter für Gleichtakt als Funktion von Verstimmung $\Delta\omega$ und Kopplungsstärke ϵ. Experimente zur qualitativen Darstellung der **Arnold-Zunge** sind. a] Zwei Metronome: Schwache Kopplung durch Brett auf Rollen. Starke Kopplung auf leichter Schaukel. Liefert aber nur Phasen-einfang beim Start mit zufälliger Phasen bei fast identischer Eigenfrequenz, da Metronome kein Frquenzein-fang zulassen. b] Zwei verstimmbare Orgelpfeifen mit variablem Abstand $d \propto \frac{1}{\epsilon}$. Synchronisation bei Brücken PJ17 2018 H2 p38f; Strogatz: Synchron - vom rätselhaften Rhythmus 2004; Strogatz: Nonlinear dynamics and chaos. With applications to physics, biology, chemistry, and engineering 1999; Barndorff-Nielsen, Jensen, Kendal: Networks and chaos. Statistical and probalistic aspects 1993; Wu: Synchronization in Complex Networks of Nonlinear Dynamical Systems 2007; Arenas, Kurths, Zhou: Synchronization in complex networks PhysRep 469 2008 93-153; Blekhman: Synchronization in science and technology 1988; Für die Dynamik der **Phasendifferenz** φ phasen-gelockter Schleifen gilt $\dot{\varphi} + \sin\varphi = \omega$ mit zwei Gleichgewichtszuständen für $\omega < 1$: $\varphi^{*s} = \arcsin\omega$ und $\varphi^{*u} = \pi - \arcsin\omega$. $\omega = 1$ gibt $\varphi^* = \pi/2$. Für $\omega > 1$: Kein Gleichgewicht, nur Rotation. Eisen: Mathematical methods and models in the biology 1988; **Murray: Mathematical biology** 1993[2] **gekoppelte Grenzzyklus-Schwinger** $\dot{x}_1 = x_1(1-\rho) - \omega x_2$ und $\dot{x}_2 = x_2(1-\rho) - \omega x_1$ mit $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Mit Polarkoordinaten $x_1 = \rho\cos\theta, x_2 = \rho\sin\theta$ folgt $\dot{\rho} = \rho(1-\rho)$ und $\dot{\theta} = \omega$ mit **Grenzzyklus** bei $\rho = 1$. Man kann also $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ auch so notieren $\dot{\vec{r}} = \vec{f_1}(\vec{r},\theta)$, $\dot{\theta} = \omega + \vec{f_2}(\vec{r},\theta)$ mit den periodischen Antrieben $\vec{f_1}, \vec{f_2}$. Ohne Antrieb gilt $\dot{\vec{r}} = \dot{\theta} = 0$, also $\rho = \text{const}$ und $\theta(t) = \theta(0) + \omega t$. p261ff , Spiralwellen p353; Nach Strogatz: Nonlinear Osc p273 gilt für die Phasen zweier **Grenzzykler** $\dot{\theta}_1 = f_1(\theta_1,\theta_2)$ und $\dot{\theta}_2 = f_2(\theta_1,\theta_2)$ mit periodischem Antrieb $f_j(\theta_1,\theta_2) = f_j(\theta_1 + 2\pi m, \theta_2 + 2\pi n)$. Im einfachsten Fall realisiert diese Vorstellung die sin-Funktion. Also $\dot{\theta}_1 = \omega_1 + k_1\sin(\theta_2 - \theta_1)$ und $\dot{\theta}_2 = \omega_2 + k_2\sin(\theta_1 - \theta_2)$ mit $k_i, \omega_i > 0$. Für die Dynamik der **Phasendifferenz** $\varphi = \theta_1 - \theta_2$, und deren Geschwindigkeit $\dot{\varphi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = \omega_1 - \omega_2 - (k_1 + k_2)\sin\varphi$. **Fixpunkt** ist $\sin\varphi^* = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 + k_2} \begin{cases} |\omega_1 - \omega_2| < k_1 + k_2 \text{ zwei Fixpunkte} \\ |\omega_1 - \omega_2| > k_1 + k_2 \text{ kein Fixpunkt} \end{cases}$. **Sattel-Knoten-Bifurkation** bei $|\omega_1 - \omega_2| = k_1 + k_2$. **Wild strange attractor** Newhouse: The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for dieomorphisms 1979; Turaev & Shilnikov 1998 SbMath189 p291; Krauskopf: A geometric perspective on the route to chaos in the Lorenz system 2015; A. Shilnikov, Georgia State University: Symbolic tools for homoclinic chaos 2015 homoclinic structures are the primary cause for high sensitivity and instability of deterministic chaos in such systems by recurrent, unpredictable switching between several metastable centers separated by saddle thresholds. Chaos due to the Shilnikov saddle-focus. Phase space partition and a symbolic description. nonlocal bifurcations in parameterized systems. **Sattel-Fokus/Strudel-Bifurkation.** **Kuznetsov: Elements of applied bifurcation theory** 2004[3]:

$$\dot{u} = (\alpha + i)\,u - |u|^2\,u$$

mit durchstimmbarer Frequenz ω und dem Sheer-Parameter β der die gleichzeitige Annäherung der Tajektorien an den Grenzzyklus steuert. **Spiralwellen:**

$$u_t = (\epsilon + i\,c)u - (a + i\,b)|u|^2 u + D\nabla^2 u.$$

Gyrationsbewegung: $\ddot{x} = \Omega\,\dot{y}$ und $\ddot{y} = -\Omega\,\dot{x}$, mit der **Gyrationsfrequenz oder Lamor-Frequenz** $\Omega = \frac{|q|\,B}{m}$. Übergang zu komplexen Zahlen mit $\dot{r} = \dot{x} + i\,\dot{y}$, $\ddot{r} = \ddot{x} + i\,\ddot{y}$ und $\dot{r} \pm \dot{r}^*$ gibt $\ddot{r} = -i\Omega\dot{r}$. $r(t) = r_0\,e^{-i\Omega\,t}$. Rechnen im Fourier-Raum: lin Differenzialgleichungen werden zu algebraischen Gleichungen. **Greuel: Math Ergänzungen und Aufgaben** für Elektrotechniker 1990[12]; Residuen-Kalkül. **Zeigerdarstellung von Widerständen**, Spannungen und Strömen für Wechselstromrechnung bei Schaltkreisen ist DIE Anwendung. **HF-Tapete = Impedanzdiagramm = R-L-C-f Nomogramm** siehe http://www.beis. de/Elektronik/ Nomograms/RF-WP/RF-Wallpaper.html **Euler-Relation** $z = r\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$ mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ als **Hauptwert des Arguments**, vermittelt zwischen **kartesischer** Darstellung und **Polarform** oder trigonometrischer Form. **Rechenregeln:** Addition und Subtraktion (in der algebraischen Form) komponentenweise. Multiplikation in algebraischer Form oder in Exponentialform (Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente/Winkel). Division in Exponentialform: Beträge dividieren und Argumente/Winkel subtrahieren,

oder in algebraischer Form: Quotient mit konjugiertem Nenner erweitern. Potenzieren mit reellem Exponenten: Betrag potenzieren und Argument mit Exponenten multiplizieren. Radizieren (Wurzelziehen) mit reellem Exponenten: Betrag radizieren und Argument (Winkel) durch den Exponenten dividieren. Hierdurch entsteht die erste Lösung. Bei n-ten Wurzel n Lösungen, die im Winkel von $2\pi/n$ um Ursprung der Gaußschen Ebene verteilt. Drei mögliche Schreibweisen oder Darstellungen komplexer Zahlen, Arens p528 mit entsprechenden Betragsdefinitionen:

$$z = a + i\,b, |z| = \sqrt{zz^*}, \quad z = (a,b)^T, |z| = \sqrt{z^T z}, \quad z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \text{kommutativ!} \quad |z| = \sqrt{\det z}$$

Matrixdarstellung: Konjugieren durch transponieren: $z^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$. **Betrag** ist $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & a^2+b^2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$. **Multiplikation komplexer Zahlen per Matrix-Darstellung:**
$z_1 z_2 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & -ad-cb \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix} = z_2 z_1$. **Multiplikation komplexer Zahlen per Vektor-Darstellung:** $z_1 z_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd \\ ad+bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = z_2 z_1$. **Konjugation:** $z^* = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}$. **Betrag** ist $|z| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}} = \sqrt{\begin{pmatrix} a^2+b^2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Multiplikation einer komplexen Zahl mit i bedeutet **Drehung um 90°**. Ausgangspunkte sind was ist Lösung von $x^2 + 1 = 0$ und $|z\,z'| = \sqrt{zz'(zz')^*} = \sqrt{zz^*}\sqrt{z'z'^*} = |z| \cdot |z'|$. Das Produkt der Summe zweier Quadrate mit der Summe zweier Quadtrate ist wiederum die Summe zweier Quadrate. Bei Vektoren klappt so ein Produkt nicht, weil $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Division geht nicht! Zahlensysteme mit Division nennt man **Divisionsalgebra** SdW 6 2011 p18. Geht nur bei 1, 2, 4. Hamilton 1805-1865: Drehstreckung im 3 Dimensionalen braucht 4 Zahlen! **Man braucht für 4-dim Raum, um Transformation im 3-D zu beschreiben: 3 Eulerwinkel + Streckung** und 8 Dimensionen. Solche Identitäten gibt es für 4 Quadrate **Quaternionen** von Hamilton $\mathbb{H}$: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, ij = k = -ji, jk = i = -kj, ki = j = -ik$), für 8 Quadrate von Anwalt John Graves, Arthur Cayley: **Oktaven, Cayley-Zahlen oder Oktonionen** $\mathbb{O}$ = 8-dimensionale Algebra über den reellen Zahlen. **Basis:** $(1, i, j, k, l, m, n, o)$

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = m^2 = n^2 = o^2 = -1 \\ i = jk = lm = on = -kj = -ml = -no \\ j = ki = ln = mo = -ik = -nl = -om \\ k = ij = lo = nm = -ji = -ol = -mn \\ l = mi = nj = ok = -im = -jn = -ko \\ m = il = oj = kn = -li = -jo = -nk \\ n = jl = io = mk = -lj = -oi = -km \\ o = ni = jm = kl = -in = -mj = -lk \end{aligned}$$

Daraus errechnet sich das Produkt der Einheiten $ijklmno = -1$.

Siehe **Doing Physics with Quaternions** im Netz/Wiki. **Dray & Manogue: The Geometry of the Octonions** 2015; Conway & Smith: On Quaternions and Octonions 2003; Erlauben auch Division

$$\frac{z'}{z} = \frac{\bar{z}\,z'}{|z|^2}$$

Daher **Divisionsalgebra Kuipers: Quaternions and Rotation Sequences. A Primer** with Applications to Orbits, Aerospace and Virtual Reality 1999; Ebbinghaus et al.: Zahlen 1992[3] hier Koecher & Remmert; Reelle Divisionsalgebren. Kap7 **Hamilton'sche Quaternionen** p147-181 Kap9 **Cayley'sche Oktaven = nicht assoziative Divisionsalgebra** p205; Denecke & Todorv: Algebraische Grundlagen der Arithmetik 1994 p157ff; Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2004 Kap9 **Quaternionen und orthogonale Gruppen**; **Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie** 2003[4]; Bei n Quadraten

gibt es Zahlen der Form $a_1 + a_2\, i + a_3\, j + \cdots + a_n\, l$ mit den imaginären Einheiten $\{i, j, \ldots l\}$. **Baez & Huerta: Exotische Zahlen und die Stringtheorie**, SdW Okt 2011 p55-60, **Oktonionen** **Nahin: An imaginary tale. The story of the square root of -1** 1998; Kantor & Solodownikow: Hyperkomplexe Zahlen 1978; **Kramer & von Pippich: Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen** 2013; Hanisch: Hyperkomplexe Zahlen $\mathbb{H}$ und Drehungen im Raum, WURZEL14 1981 p11-16; **Blaschke: Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik** I, II, III, Hamburger Mathematische Einzelschriften H34 1942; **Quaternion** ist $Q = q_0 + e_1 q_1 + e_2 q_2 + e_3 q_3 = e_j q_j$ mit $e_0 = 1$, $q_j \in \mathbb{R}$. **Skalarteil** $q_0 = SQ$ und **Vektorteil** $e_j q_j = VQ$, **konjugiertes Quaternion** $\bar{Q} = SQ - VQ = q_0 - e_1 q_1 - e_2 q_2 - e_3 q_3$. Addition $Q + Q' = e_j(q_j + q'_j)$ und Multiplikation $QQ' = e_j e_k q_j q_k$ mit $+e_r e_s = -e_s e_r = e_t$ und $e_j e_j = -1$. Assoziativer Schiefkörper: $(Q_1 Q_2) Q_3 = Q_1 (Q_2 Q_3)$. Bilden außer den komplexen Zahlen **einzige Algebra ohne Nullteiler**. **Blaschke: Kinematik und Quaternionen** 1960; Pickert: Analytische Geometrie, eine Einführung in Geometrie und lineare Algebra 1976[7]; Holme: A Royal Road to Algebraic Geometry 2012 e-book; Hodge & Pedoe: Methods of algebraic geometry I 1947 II 1952 III 1054; Lang: Introduction to algebraic geometry 1958; **Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Ein Lehrbuch für Physiker** und Mathematiker 2004[2]; van der Waerden: Hamiltons Entdeckung der Quaternionen 1973, 1302 = SG 570 WAE; MacFarlane: Vector Analysis and Quaternions 1886; Hathaway: Primer of Quaternions 1896; Artmann: Der Zahlbegriff 1983, Nicht-Standardzahlen; Blaschke: **Calley-Klein-, Clifford-Algebra:** C. Gunn: Geometry, Kinematics Calley-Klein Algebra 2011; Leo Dorst & Joan Lasenby ed: Guide to Geometric Algebra in Practice 2011;

Knopp: Funktionentheorie 2 Bde 1913, Knopp: Aufgabensammlung 2 Bde; **Bieberbach: Einführung in die Funktionentheorie** 1952[2]; **Bieberbach: Konforme Abbildungen**; Kuypers: Mechanik Kap2.5.2; Priwalow: Einf in die Funktionentheorie 1-3 1954, 1969; **Riley, Hobson, Bence: Mathematical Methods for Physics and Engineering**; Behnke & Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen 1955; Timman: Repetitorium der Funktionentheorie 1998; Rühs: Funktionentheorie; Breuer: Elementar entwickelte Theorie und Praxis der Functionen eine complexen Variablen in organischer Verbindung mit der Geometrie 1898; Burkhardt: Einführung in die Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen 1903[2]; **Sommer: Functions of complex variables** p1-51 In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; Kaplan: Advance calculus 2002[5] Kap8.5 p541; Schulz: Kap9.3 Wege in der komplexen Ebene: Ersetze das Argument einer anständigen weichen Physiker-Funktion durch $z \in \mathbb{C}$: Mit der Argumenterweiterung um iy kann man Pole umfahren und über Ränder hinaus differenzieren: **Diese Funktionen sind analytisch = regulär = harmlos = holomorph = weich = physikalisch**, gehorchen den **Cauchy-Riemann'schen Dgls in einer offenen Umgebung** wegen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z = x + iy$ vermöge $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \to \partial_x u = \partial_y v, \partial_y u = -\partial_x v$, weil $\partial_x f(x,y) = \partial_x u + i\partial_x v = \partial_y f(x,y) = \frac{1}{i}[\partial_y u + i\partial_y v]$ oder $\Delta f = 0$, also Spezialfall, 2d-**Laplace-Gleichung**. Zeige Analytizität: $w = f(z) = 1/z = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}; w = f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy; w = f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z$. Hingegen ist $w = x^2y^2 + i2x^2y^2$ nur im Nullpunkt analytisch, also nur in einem isolierten Punkt und nicht in einem Gebiet = offener Umgebung, folglich ist w nicht analytisch. Keine analyt Fkt: $w = f(z) = z^*; w = f(z) = |z|; w = f(z) = |z|^2$ sind wegabhängig. Die Analogie zur Vektoranalysis im 2d formalisiert der **Wirtinger-Kalkül**: Beweis des Integralsatzes die Berechnung des Kurvenintegrals verstanden als Integration der komplexwertigen Differentialform $\omega = f(z)dz$ über die geschlossene Kurve C, die das einfach zusammenhängende und von $C = \partial S$ berandete Gebiet S umläuft. Differential ist $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z}$, woraus unmittelbar $d\omega = df \wedge dz = \frac{\partial f}{\partial z}dz \wedge dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz$ folgt. Nun ist zunächst grundsätzlich $dz \wedge dz = 0$ Weiterhin bedeutet die vorausgesetzte Holomorphiebedingung für f nach dem Wirtinger-Kalkül nichts weiter als $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. was unmittelbar $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}d\bar{z} \wedge dz = 0$ nach sich zieht. Also: $d\omega = 0$ und damit schließlich mittels Satz von Stokes folgt **Cauchy'scher Integralsatz**: $\int_C f(z)dz = \int_{\partial S} \omega = \int_S \mathrm{d}\omega = \int_S 0 = 0$. Endl & Luh: Analysis 3 1994; Jänich: Einführung in die Funktionentheorie; Mit den **Wirtinger-Operatoren** $\partial f = f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$ und $\bar{\partial} f = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y)$. $\operatorname{grad} u = (u_x, u_y) = u_x + iu_y = 2u_{\bar{z}} = 2\bar{\partial}u$, $\operatorname{div} f = u_x + v_y = 2\Re f_z = 2\Re\partial f$, $\operatorname{rot} f = u_x - v_y = 2\Im f_z = 2\Im\partial f$. Timmann: Repetitorium Funktionentheorie p73f 234ff. Nebenprodukt: Ableitung einer komplexen Funktion ist bereits gegeben, wenn man

nur ihren Real- oder Imaginärteil hat: $f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x$ (**Schwarz-Bedingung** per **Rotor-Definition** mit $\vec{F} = -\nabla U(\vec{r})$ und $\mathrm{rot}\vec{F} = \vec{0}$ wirbelfreies Feld, Gradientenfeld, wegunabhängige Integrals, Satz von Schwarz ist erfüllt, geschlossene n-Form) und dem **Cauchy-Theorem** = **Cauchy'scher Integralsatz** für einfach zusammenhängende Gebiete ist $\oint_\gamma dz\, f(z) = 0$ wegunabhängig. Auch für $\oint \frac{\mathrm{d}z}{z} = 0$ auf **polmeidenden Wegen!** Γ **einfach zusammenhängend** $\leftrightarrow$ Γ hat genau eine Randkurve. Γ mit 2 Löchern hat 3 Randkurven, ist daher drei-fach zusammenhängend. Hat Gebiet Γ im innern $(n-1)$ ausgegrenzte Bereiche, so n-fach zusammenhängend. **Lemma von Goursat = Fundamentallemma der FT = Vorstufe des Cauchy'schen Integralsatzes**: Setzt lediglich komplexe Differenzierbarkeit, nicht aber die stetige Differenzierbarkeit voraus! **Swanson: Path integrals and quantum processes** 1992 p23 berechne Gauß-Integral $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x e^{-ax^2}$; Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph = komplex-differenzierbar. Dann gilt für das Wegintegral längs der Randkurve $\partial\triangle$ eines jeden in U gelegenen Dreieckes $\triangle$: $\oint_{\partial\triangle} f(z)\mathrm{d}z = 0$. Freitag & Busam: Funktionentheorie 1 1993, 2006[4] p74ff; Kuhn, Stöckel p143; Endl & Luh: Analysis 3 1994; Details bei **Jänich: Analysis für Physiker oder Funktionentheorie**; Für Kurvenintegral über dem Einheitskreis $r = 1$ bei $z_0 = 0$ gilt

$$2\pi i\delta_{n,-1} = \oint (z-z_0)^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi z^n \dot{z} = i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi e^{i(n+1)\varphi} = \begin{cases} i\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi i \text{ für } n = -1 \\ \left[\frac{e^{i(n+1)\varphi}}{n+1}\right]_0^{2\pi} = 0 \text{ für } n \neq -1 \end{cases} = 2\pi i\delta_{n,-1}.$$

Das **geschlossene Integral** ist wie im Reellen, also **in jedem Falle wegunabhängig**, auch bei Polumfahrung von $1/z$. Hier kommt unabhängig von der Polumfahrung ein Integralbeitrag $2\pi i$ zustande. Bei m gleichgesinnten, wenn auch weg-verschiedenen Umfahrungen der Integralbeitrag $2\pi i\, m$ zustande. Zur höherdimensionalen Verallgemeinerung dieser Befunde siehe Seite 282. Integral $\int f(z)\mathrm{d}z = \int (u+iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y) = \int u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y + i(u\mathrm{d}y + v\mathrm{d}x) = \int [u\dot{x} - v\dot{y}]\mathrm{d}t + i\int [u\dot{y} + v\dot{x}]\mathrm{d}t$. Daher hat oft nur das Glied -1 der **Laurent-Reihe** $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}}_{\text{Hauptteil, polhaltiger Teil}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k}_{\text{Nebenteil,polfreier o. analytischerTeil}}$ im Kreisringgebiet $r_1 < |z-z_0| < r_2$ mit den Konvergenzradien r_1, r_2, einen von Null verschiedenen Wert, was die Bestimmung des Residuums so einfach macht, weil **im Fall eines Pols 1. Ordnung** der abgelesene Koeffizient a_{-1} das Residuum ist. **Allgemein aber gilt:** $a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial U_\varrho(c)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - c)^{n+1}} \mathrm{d}\zeta$. Idee für Taylor-Entwicklung durch Blick auf bekannte Reihen: $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ mit Konvergenzradius $R = 1$, Kuhn p148. Im Innengebiet $|z-a| < |a|$ konvergiert die linke **geometrische Reihe** $\underbrace{\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{z-a}{a}\right)^n}_{\text{Nebenteil}} = \frac{1}{a}\frac{1}{1 - \frac{z-a}{a}} =$

$$\frac{1}{a + (z-a)} = \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-a)+a} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{(1 + \frac{a}{z-a})} = \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{z-a}\right)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a^n \left(\frac{1}{z-a}\right)^{n+1}}_{\text{Hauptteil}}$$

konvert im Außengebiet bei $|z-a| > |a|$ = **Kreis** bei a mit Radius a. **Klassifikation des Hauptteils:** 1. **Isolierte Singularität bei** z_0, falls **regulär** in z_0-Umgebung. $f(z) = e^{\frac{1}{|z|-1}}$ hat Singularitäten auf Einheitskreis, also keine isolierte Singularität. 2. **Wesentliche Singularität** = Hauptteil hat ∞ viele Glieder, **Pol der Ordnung** ∞. $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} \overset{\text{Taylor}}{=} e^{\frac{1}{1-1}} - e^{\frac{1}{1-1}}(1-1)^{-2}(z-1) - \cdots = \infty$, wegen $e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ ist $f(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!(z-1)^n}$ hat daher bei $z_0 = 1$ wesentliche Singularität. 3. **Außerwesentliche Singularität**, falls **Hauptteil endlich viele Glieder** hat. 4. **Hauptteil von Ordnung** n, falls $f(z) = \sum_{k=1}^n a_{-k}(z-z_0)^{-k}$, **Pol** n**-ter Ordnung** in z_0. $f(z) = \frac{1}{z-1}$ hat Pol 1. Ordnung in $z_0 = 1$. Taylorentw mit Konvergenzradius 1 ist $T(z)[f(z), z_0 = 1] = -1 - z - z^2 - z^3 = \ldots$. Arens p1122 **Mittelwertgleichung**. Konforme Abbildungen sind holomorphe Funktionen. Driscoll & Trefethen: **Schwarz–Christoffel mapping** 2002;

Konformität=winkeltreue. z hat Pol im Unendlichen. Meromorphe Funktion ist analytisch bis auf endlich viele Pole. **Meromorphe Funktionen** sind bis auf Pole **holomorphe** Funktionen. **Residuum** von f in z_0 ist $a_{-1} = \mathrm{Res}[f; z_0] = \mathrm{Res}_{z_0} f := \frac{1}{2\pi i} \oint \mathrm{d}z f(z) = a_{-1}$, also die Maßzahl zur Einheit $2\pi i$ bei einer Polumfahrung. Beachte f holomorph in z_0, so $\mathrm{Res}[f; z_0] = 0$, **aber** $\mathrm{Res}[\frac{1}{z^2}; z_0] = 0$ bedeutet nicht holomorph in z_0! **Regeln für Residuum:** 1. Nimm den Koeffezienten a_{-1} der Laurententwicklung. Ist z_0 einfacher Pol von f, dann $\mathrm{Res}[f; z_0] = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$. 2. Sei $f = g/h$ und g, h in z_0-Umgebung holomorph. Nenner h habe einfache Nullstelle bei z_0 und $h'(z_0) \neq 0$, dann ist $\mathrm{Res}[f; z_0] = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$. Also hat die Funktion $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ in Punkten $k\pi$ Residuum das $\mathrm{Res}[\cot z; k\pi) = \frac{\cos k\pi}{\sin' k\pi} = 1$. 3. g in z_0-Umgebung holomorph und h in z_0 Pol erster Ordnung. $\mathrm{Res}[g\,h; z_0] = g(z_0)\mathrm{Res}[h; z_0]$. 4. z_0 m-facher Pol von f. Dann kann $(z - z_0)^m f(z)$ in z_0 holomorph ergänzt werden und es gilt $\mathrm{Res}[f; z_0] = \frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z - z_0)^m f(z)]|_{z=z_0}$. Residuum besser für Differenzialformen $f\mathrm{d}z$ definieren, Fischer & Lieb: Funktionentheorie 1980; **Residuensatz:** G Gebiet, dessen Rand ∂G eine Summe einfach-geschlossener Kurven. f mit höchstens endlich vielen Ausnahmestellen z_ν holomorph und stetig auf ∂G, dann $i\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial G} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_\nu)$. dtv-Atlas Mathe p441; Analytizitätsgebiet umschließt Pol z.B. von z^{-1}. Integriere entgegen Uhrzeiger auf beliebig verbogenem Weg, am **liebsten Kreis** mit fixem Radius R wegen der durch die **Analytizität** der Funktion z oder $1/z$ gegebenen **Wegunabhängigkeit**: $z = Re^{i\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi)$, also $\mathrm{d}z = i\,z\,\mathrm{d}\varphi$ oder $\frac{\mathrm{d}z}{z} = i\,\mathrm{d}\varphi$

$$\oint \mathrm{d}z\frac{1}{z} = \int_0^{2\pi}(Re^{i\varphi}i\,\mathrm{d}\varphi)\frac{1}{Re^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi\,i, \quad \text{aber stets} \oint \mathrm{d}z\,z = \oint \mathrm{d}\varphi\,z^2 = R^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\,e^{2\,i\,\varphi} = 0$$

Idee der Wegunabhängigkeit im Reellen: $0 = \oint \mathrm{d}x f(x) = \int_a^b f(x) + \int_b^a \mathrm{d}x f(x) = 0$. Gilt für holomorphe Funktionen auch für Elementargebiete $= D$ ist einfach zusammenhängend $=$ jede geschlossene Kurve in D ist **nullhomotop**, $=$ auf den Anfangspunkt stetig zusammenziehbar. Anschaulich: D keine Löcher hat. **Cauchyscher Integralsatz** $\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$. Falls Loch, so $\oint_{\partial U_r(0)} \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2\pi m\mathrm{i} \neq 0$ bei **Windungszahl** m, also m Umfahrungen. Steht auch noch eine Funktion $f(z)$ mit im Zähler, die überall im Kreis analytisch ist, dann nehmen wir den Kreisradius R so klein, dass man $f(z)$ an der Stelle $z = 0$, wo sie ja praktisch konstant bleibt, vor das Integral ziehen kann. Schließlich liefert auch eine **Translation nach** a und **Ableitung nach Parameter** a mit ∂_a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\partial U}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta, \quad \oint \mathrm{d}z\frac{f(z)}{z - a} = 2\pi\,i\,f(a) \quad \text{oder} \quad \oint \mathrm{d}z\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!}\partial_a^n f(a)$$

dies ist die **Cauchysche Integralformel für Kreisscheiben** mit ∂U als positiv orientierte Kurve $t \mapsto a + re^{\mathrm{i}t}$ für $t \in [0, 2\pi]$ über den Rand von U. **Residuen-Kalkül:** Kurze operationale Intros bei **Jelitto: Elektrodynamik p179**, Charles Hermite: Uebersicht der Theorie der Elliptischen Funktionen 1863 p135; **Kreyszik: Advanced Engineering Mathematics** p837ff, **Nearing: Mat tools for physics** p392; **Kuhn, Stöckel: Mathematische Hilfsmittel der Physik** 1995[5] p155ff; **Snieder: A guided tour of math methods for the physical sciences** 2004[2] Kap17 p254-266; **Knopp: Funktiontheorie** 1913 Bd2 §18 p101ff. Endl & Luh: Analysis 3 1994; **Šrauch: Classical mechanics p368** oder **Kaplan: Advanced calculus** 1957, 2002[5] Kap8.15 p575ff; **Greiner: Elektrodynamik**, Bd3 p102-124 Elementares über Funktiontheorie; **Idee:** Man **setzt reelle Funktion** $f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ **analytisch fort**, dh man verlässt die reelle Achse und hat $f(z)$ mit $z \in \mathbb{C}$. Man kennt das **wegunabhängige Integral für einen geschlossenen Weg im Komplexen**, möchte aber nur den Beitrag auf der reellen Achse, $=$ **Hauptweg** und argumentiert den Beitrag auf dem komplexen Halbkreis mit unendlichem Radius $=$ **harmloser Hilfsweg** weg, **Jänich: Analysis f Physiker** p110-127; 1. Pole fixen. 2. Integrationsweg wählen. 3. Residuen bei den Polen ausrechnen:

$$2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), z_k] = \oint \mathrm{d}z f(z) = \lim_{R\to\infty}\left[\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x f(x) + \int_{@:R\to -R}\mathrm{d}z f(z)\right] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x f(x) + \cancel{\lim_{R\to\infty}\left|\int_{@:R\to -R}\mathrm{d}z f(z)\right|}$$

Wenn das letzte Integral verschwindet für $R \to \infty$, daher **harmloser Hilfsweg**, so ist eine einfache Berechnung reeller Integrale gegeben. Auf einer kreisförmigen Kurve mit dem Radius R habe die Funktion den Maximal-Wert $M(R) = \frac{C}{R^2}$, dann ist der Integralbetrag auf dem rückwegigen Halbkreis $\pi R\, M(R)$ eine obere Schranke des Integrals, also $\lim_{R\to\infty} \left| \int\limits_{@:R\to -R} \mathrm{d}z f(z) \right| \leq \lim_{R\to\infty} \pi R\, M(R) = \lim_{R\to\infty} \pi \frac{C}{R} = 0$. Das Residuum, bedingt durch die Singularität im Komplexen, ist also der wesentliche Integralbeitrag, wenn $f(x)$ keine Singularität auf der reellen Achse hat. **Rezept:** Gegeben $f(x) \in \mathbb{R}$. Gehe ins Komplexe $f(z) \in \mathbb{C}$. Bestimme Pole erster Ordnung z_k. Berechne Residuum gemäß

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k] = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} a_{-1}[f(z), z_k] = \sum_{k=1}^{n} \lim_{z\to z_k} (z - z_k) f(z) \overset{\text{oder}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{g(z_k)}{h'(z_k)}$$

$f(x) = \frac{1}{1+x^4} = \frac{g(z)}{h(z)}$ hat Pole bei $z_i \in \{e^{\pm i\frac{\pi}{4}},\ e^{\pm i\frac{5\pi}{4}}\} = \{1+i, -1+i, -1-i, 1-i\}$. $\mathrm{Res}[x_i f(z_i)] = \frac{g(z_i)}{h'(z_i)}$, $h'(z) = 4z^3$, $g(z) = 1$. Wir laufen um die Pole des oberen Halbraums: $z_1^+ = e^{i\frac{\pi}{4}}$ und $z_2^+ = e^{-i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 2\pi i \sum_{obere Halbebene, x_i} \mathrm{Res}_{z_i} f(z_i) = 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{9\pi}{4}}} \right) = \frac{\pi i}{2} \left[e^{-i\frac{3\pi}{4}} + e^{-i\frac{9\pi}{4}} \right] =$$

$$\frac{\pi i}{2} \left[\exp\left(-i\frac{3\pi}{4}\right) + \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{\pi i}{2} \left[\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - i\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right] =$$

$$\frac{\pi i}{2} \left[-\cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) - i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \right] = \pi \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(x-\pi/4)^2 + a^2} \qquad \Big| \text{ Pole bei } \quad x^+ = \frac{\pi}{4} + ia$$

$$h'(x) = 2(x - \pi/4), \quad g(x) = \cos(x) = \mathcal{R}\exp(ix)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x-\pi/4)^2 + a^2} \mathrm{d}x = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{x^+} f(x^+) = 2\pi i \frac{\mathcal{R}\exp\left(-a + i\frac{\pi}{4}\right)}{2ia}$$

$$= \pi \frac{\exp(-a)}{a} \mathcal{R}\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \pi \frac{\exp(-a)}{a} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \frac{\exp(-a)}{a} \qquad \text{q.e.d.}$$

siehe **Cahill: Physical Mathematics** 2013 p183; **Snieder: A Guided Tour of Mathematical Methods: For the Physical Sciences** 2009[2] Chap17; Furlans Gelbes Buch 3; **Kaplan: Advanced calculus** 1957, 2002[5] Kap8.15 p575ff; Choquet-Bruhat: Problems and Solutions in Mathematical Physics 1965; **Nearing: Mathematical tools for physics** 2010; **Wegverbiegen und Zusammenziehen an den Polen sehr nützlich** z.B.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax \mathrm{d}x}{x^2 + b^2} = \frac{\pi}{2b} e^{-ab}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int dx \frac{e^{itx}}{x - i\epsilon} = \theta(t)(\epsilon \to +0)$$

Residuen-Kalkül: Kuypers: Mechanik; Jelitto Elektrodyn p179f; Riley; Goldstein: Mechanik 1950, 1978, Hamilton-Jacobi-Kapitel, p334; Arens p1125 **Fourierdarstellung der Stufenfunktion** $\int_{\infty}^{x} \mathrm{d}t \delta(t - x_0) = \Theta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & x_0 < x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ als Parameterintegral, mit **Parameter** x, z.B. Schulz p197; Glaßl p166; Arens p1133 $\Theta(x) = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ikx}}{k + i\epsilon} \mathrm{d}k = \frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{-ikx}}{k + i\epsilon} \mathrm{d}k \overset{\circlearrowleft}{=} -\frac{i}{2\pi} \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ 2\pi i\, \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-ikx}}{k + i\epsilon} \right) \right\} = \lim_{\epsilon\to 0} \left\{ \lim_{k\to -i\epsilon} (k + i\epsilon) \frac{e^{-}}{k +}$

$\lim_{\epsilon\to 0}\{e^{-\epsilon x}\} = 1$ für positiven Parameter $x > 0$, für $x < 0$ null, weil kein Pol in oberer Halbebene. Denn **Beitrag komplexer Schließung** verschwindet für $R \to \infty$ mit $k = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$: $|\int_{\mathbb{C}}^{\curvearrowleft} \mathrm{d}z \frac{e^{-ixk}}{z}| = |i\int_0^\pi e^{-ixR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\mathrm{d}\varphi| = |i\int_0^\pi e^{-ixR\cos\varphi}e^{xR\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi| \leq$
$|\int_0^\pi e^{xR\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi| \overset{R\to\infty}{=} 0 \left\{ \begin{array}{ll} \text{falls } x < 0 & \text{erzwingt } \sin\varphi > 0 \text{ mit } \varphi : 0 \to \pi) \text{ den Weg links rum} \\ \text{falls } x > 0 & \text{erzwingt } \sin\varphi < 0 \text{ mit } \varphi : 0 \to -\pi \text{ den Weg rechts rum.} \end{array} \right\}$
Schulz p197 und Glaßl p166 argumentieren umgekehrt mit $\Theta(x) \overset{\epsilon\to+0}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{izx}}{z - i\epsilon}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{izx}}{z}\mathrm{d}z$ in dem sie den in die obene Halbebene legen oder einfach links umfahren. Siehe auch **Lang & Pucker**: Mathematische Methoden in der Physik Kap17; Joos, Kaluza, Lorentz & Richter Kap5 (alt) oder Kap9 1994; **Berendt & Weimar: Mathe für Physiker** Bd2 Kap7 p73ff **Beispiel:** Fouriertransformierte von $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Also zuerst **analytische Fortsetzung** der FT ins Komplexe $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t\frac{e^{-i\omega t}}{t^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint \mathrm{d}z\frac{e^{-i\omega z}}{z^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\oint \mathrm{d}z\frac{e^{-i\omega z}}{z+i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}2i}2\pi i\ \mathrm{Res}(\frac{e^{-i\omega z}}{z+i}, z_0 = -i) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\omega}$, wobei der **geschlossene Integrationsweg die gesammte reelle Achse** einschließt. Wegen $f(z) = \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$ schließt jeder der beiden Umwege einen Pol ein und bringt dadurch ein Residuum proportional zu $2\pi i$ mit sich. Pol oberhalb ist $z_0 = i$, unterer Pol bei $z_0 = -i$. Glaßl p166; Furlan III p172; Arfken & Weber: Chap7; Arens p1160; Nearing p392; f sei im gelochten Kreis $0 < |z - z_0| < r$ **holomorph** und die Laurantreihe von f beim Pol in z_0 gegeben durch $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, dann ist das **Residuum** $\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1}$. Dann entscheidet der **Typ der Singularität den Rechenweg!**
1] Hebbare Singularität bedeutet $a_{-1} = 0$. 2a] f hat bei z_0 Pol n-ter Ordnung bedeutet $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}[(z-z_0)^n f(z)]$. 2b] Speziell $n = 1$ $\mathrm{Res}(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$. 2c] Oft hat f die Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit $g(z_0) \neq 0$, dann $\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$. Res hat Maß $2\pi i$. Zum Einstieg $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \frac{1}{a^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2/a^2} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{1}{a}\arctan x|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}$ oder $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \oint_{\circlearrowleft\mathbb{C}}\frac{\mathrm{d}z}{a^2+z^2} = 2\pi i\mathrm{Res}(f, ia) = 2\pi i\lim_{z\to+ia}(z-ia)\frac{1}{a^2+z^2} = 2\pi i\lim_{z\to+ia}\frac{1}{z+ia} = \frac{\pi}{a}$ weil der Integrand $\frac{1}{a^2+z^2}$ zwei Polstellen 1.Ordnung hat, weil $a^2 + z^2 = (z-ia)(z+ia)$ zwei Nullstellen 1. Ordnung hat.

13 Matrizen, lineare Algebra, Determinanten

Matrix = Mutter = Ursprung = Gebärmutter = Muttertier: Sylvester 1850. Physisch Foto, CCD oder Screen. jpgeg-Datei. mp4-Stream = 25 Matrizen pro Sekunde. Abstands- oder Entfernungsmatrix für Routenplaner. Nachbarschaftsmatrix, Adjazenz-Matrix siehe Seite 534 oder Inzidenzmatrix siehe Shifrin & Adams: Linear Matrix spielt **Doppelrolle** wie komplexe Zahl: Element einer Mannigfaltigkeit und auch Operator/Abbildung. algebra. A geometrical approach 2002 p192ff Grafen und Einbahnstraßen. Matrix kann man per Determinante, Spur, Rang, Norm und Eigenwerten **eine Zahl** zuweisen: $f(A) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. **Vektoren und Matrizen kann auf mannigfache Weise eine Zahl/Wert zugeordnet werden.** **$\tilde{\text{Lin}}$: Geometric Linear Algebra** 1+2 2005; Shifrin, Adams: Linear Algebra. A Geometric Approach 2001; **Matrizen codieren verschiedenste Bedeutungen und Eigenschaften: A] Bedeutungsspielraum: A1. Darsteller für physikalische Größe,** Operator. **A2. Im allgem. verzerrende Abbildung** $\vec{y} = A\vec{x}$ von allen Punkten $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ einer Hyperebene auf eine zweite $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, weder Form noch Inhalt erhaltend. Speziell für der Fall der **affinen Abbildung** det $(A) \neq 0$ bedeutet ein Überleben der Parallelität bei Transformation. Mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ wird aus dem Quadrat $Q_{\text{Quadrat}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ eine Parallelogramm $Q_{\text{Parallelogramm}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Index-Shift oder Kompo-

nententausch bei Vektor durch Multiplikation mit spalten-vertauschter $\mathbb{I}$-Matrix, Drehung/Richtungskosinus für **Film-Animation:** Drehung Einheitsquadrat $Q_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ um 90° mit $D_{90} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gibt $Q_{\text{neu}} = D_{90} Q_{\text{alt}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ falls Q die Koordinaten des Bildschirminhalts bedeutet, so macht D_{90} die Fotodrehung links. Also orthogonale Transformation = Bewegung, wie auch Verschiebung einfach durch $Q_{\text{neu}} = V + Q_{\text{alt}}$, wobei die erste Zeile von V die x-Verrückung und die zweite Zeile von V die y-Verrückung macht. **Kuchenrolle** $K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} Q$ oder $K^n Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}^n Q = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1/2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^n & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1/2^n & 1/2^n \end{pmatrix}$ mit $|K| = 1$ und **Bäckertransformation** erhalten noch das Volumen wegen det $K = \pm 1$. Verzerrtes Quadrat durch $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, wo es keine Invarianten gibt. **A3.** Matrix als Darsteller eines **Gruppenelement**s. Einheitsmatrix als $\mathbb{I}$-Element. **A4. Tensor**, also physikalische Größe, die ein invariantes Skalarprodukt liefert. **A5. Gleichungssystem** $\vec{b} = A\vec{x}$ ist Suche nach Nullstelle/Kern, also Lösung eines inversen Problems. Was ist Urbild, das zur Inhomogenität = Bild bei der Abbildung A führt? Lageparameter von Hyperebenen. **A6: Matrix als diskrete Form einer skalaren Funktion über einem 2D- oder nD Bereich**, wobei die Indices den Bereich markieren und die Matrix-Koeffizienten die Werte der Funktion. Siehe auch Seite 210. Poizat: Stable groups 1987; **Rechtecksmatrix (erster Index Zeile, zweiter Index Spalte)** ist Zahlenschema, Tabelle, die als Abbildung, speziell Drehung, der die Koeffizienten-Matrix die Richtungskosinus zwischen neuen und alten Koordinatenachsen sind, $A : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ oder Multilinearform/Skalarprodukt $A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ angesehen oder auch auch als Funktion zweier ganzzahliger Veränderlicher gesehen werden kann, also als Punkte über einem Gitter in der Höhe $a_{ij} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{K}$, ganz in Analogie zu einer Fläche/Gebirge $f(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. Vektoren $\vec{r} : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ können auch als Funktionen über ganzen Zahlen, den Indices, betrachtet werden. Siehe zur Deutung Seite 210. **matlab: Always specify the row first and column second!** repräsentiert Warenbestand & Vektor enthält Preise, Input-Output-Analyse von Leontjief. Arens p527; Adjazenz für Graphen, Gleichungssysteme für Maschen- und Knoten elektrischer Schaltkreise, GPS Arens p640, 649. Vorwärtskinematik serieller Roboter Arens p662, Gritzmann & Brandenberg: **Das Geheimnis des kürzesten Weges** 2003[2]; **Matrizen-Produkt** gemäß **Falk**-Schema. **Hadamard**-Produkt oder **Schur**-Produkt = elementweises Matrizenprodukt ist **nullteilerfrei**. $A_{n \times n} = \alpha\, B, \quad |A| = \alpha^n |B|$ Entspricht dem punktweisen Produkt bei Funktionen. Im Unterschied zum Faltungsprodukt. **B] Matrix-Eigenschaften/Klassen und Spielraum** für die reellen und komplexen Einträge. $U = U^+$ hat im $\mathbb{R}^3$ nur 9 freie Parameter. Die reelle symmetrische Matrix bringt's auf $1+2+\cdots+n = \frac{n}{2}(n+1)$ freie Parameter Siehe Seite 443 und Darsteller kontinuierlicher Gruppen.

Die Menge der **quadratischen Matrizen** erfüllt mit der Matrizenaddition und der Matrizenmultiplikation die Ringaxiome: Sie bildet mit der Matrizenaddition eine kommutative Gruppe, nachdem (R,+) eine kommutative Gruppe ist. Sie bildet mit der Matrizenmultiplikation eine Halbgruppe aufgrund der Assoziativität der Matrizenmultiplikation. Die Distributivgesetze gelten aufgrund der Distributivität der Matrizenmultiplikation mit der Matrizenaddition. Das neutrale Element bezüglich der Addition/Multiplikation im **Matrizenring** ist die Nullmatrix/Einsmatrix. Matrix-Algebra. **Vektor-Matrix-Schreibweise** $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gemäß $A\vec{x} = \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} = \vec{b}$ **Praxisproblem bei linearen Gleichungs-Systemen: Kräfte im Fachwerk**, siehe **Balkenproblem** Gemessen wird die Einfluss-Matrix A gemäß $\vec{y} = A\vec{F}$ indem man die Auslenkungen linear in den Kräften annimmt. Die Kräfte sind dann bei gegebener Auslenkung $\vec{F} = A^{-1}\vec{y}$. **Dietrich & Stahl: Grundzüge der Matrizenrechnung** 1970[6] p?; **Göhler: Höhere Mathematik. Formeln und Hinweise. Kleiner Wissensspeicher** 1970 p17 Determinanten,

p20 Wronski-Determinante, p25 Gauß'scher Algorithmus = Eliminationsverfahren, Austauschverfahren, p28 **Tetraeder-Volumen**; Schmidt WK1A **Seilzugverfahren** oder Arens p471 oder **lineare Stromkreise** / Kirchhoff'sche Gesetze, **Kurth: Matrizen, Determinanten,lineare Gleichungs-Systeme** 1993 p94; Arens p476 oder Wählerstromanalyse. Löse Normal-Gleichung beim Geradenausgleichsproblem siehe Seite 86 oder die Yule-Walker-Gleichung jeweils bei gegebenen Daten zur Schätzung der Modellparameter. **Elementare Einführung zur Lösung von Gleichungssystemen: Euler: Vollständige Anleitung zur Algebra** 1923, 1942; **Anwendung Gleichungssysteme:** $n = \#$ Unbekannte, m #Anzahl Gleichungen. **Überbestimmt**: $n < m$ Ausgleichsrechnung führt auf Normalgleichungen. Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 **Methode der kleinsten Quadrate = least square fit** p114f; **Unterbestimmt:** $n > m$ ist Optimierungproblem z.B. Transportproblem: An den Erzeugungsorten $E_1, E_2, E3$ lagern 10t, 3t, 8t Gold. An den Verbrauchsorten V_1, V_2, V_3, V_4 werden 2t 5t, 7t, 7t Gold gebraucht. Die Transportkosten sind in Koeff-Matrix $(E_i, V_j) = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 7 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ fix. Wie muss optimaler Transport organisiert werden? Schröder: Mathematik für die Praxis 3 1965 Kap28 p108ff **Koeffizienten-Matrix** = Abstandsmatrix, = Transportkosten-Matrix, **Koeffizienten-Matrix-Zeilen können als Lage-Parameter von Hyperebenen gesehen werden.** Navi, Decker: Diskrete Modelle der Computertomographie als Einstieg in das Lösen linearer Gleichungssysteme, Praxis Mathe. Computerpraxis 42 (2000) 2 p80-82, **Computertomographie** basiert auf inverser **Radon-Transformation** = Es wird das Integral der Funktion $f(x, y)$ längs aller Geraden der x-y-Ebene bestimmt. Für jede dieser Geraden kann man sich die Radon-Transformierte Rf als eine Projektion der Funktion $f(x, y)$ auf die Senkrechte zu dieser Gerade vorstellen. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig und außerhalb eines Kreises von endlichem Radius identisch Null und sei γ eine Gerade, die durch den Winkel α zur x-Achse und ihren Abstand r zum Ursprung definiert ist. Dann ist die Radon-Transformation gegeben durch das **Kurven/Linienintegral** von $f(x, y)$ entlang γ. $Rf(\gamma) = \int_\gamma f(x, y)\mathrm{d}s$ Die Gerade γ lässt sich parametrisieren als $(x(t), y(t)) = (r\cos\alpha + t\sin\alpha, r\sin\alpha - t\cos\alpha)$. Damit lässt sich das Kurven/Linienintegral auch schreiben als $Rf(r, \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r\cos\alpha + t\sin\alpha, r\sin\alpha - t\cos\alpha)\,\mathrm{d}t$. **Elektrische Impedanz-Tomografie** = EIT = Oberflächen-Impedanz von Körpern wird gemessen. Tomografisches 2D Bild von der internen Leitfähigkeitverteilung wird berechnet. Keine Tomographie, da ein dreidimensionales Körperareal auf eine zweidimensionale Ebene projiziert wird! Holder ed: Electrical Impedance Tomography. Methods, History and Applications 2005; Sobolev-Raum p25 Folland: Introduction to partial differential equations 1995[2]; Siltanen: Electrical Impedance Tomography and Faddeev Green's Functions. Annales Academiae Scientiarum Fennicae/Series A: Mathematica/Dissertationes Vol121 1999; Ammari: Mathematical Modeling in Biomedical Imaging I. Electrical and Ultrasound Tomographies, Anomaly Detection, and Brain Imaging. Lecture Notes in Mathematics Vol1983 2009; Sheffield-Back-Transformation siehe Barber & Brown: Recent developments in applied potential tomography-APT. In: Bacharach, Nijhoff: Proceedings of 9th Conference on Information Processing in Medical Imaging. Dordrecht 1986 p106-121; Yorkey, Webster & Tompkins: Comparing Reconstruction Algorithms for Electrical Impedance Tomography. IEEE Trans. On Biomedical Engineering 1987 34 no11 p843-852 Barber: A review of image reconstruction techniques for electrical impedance tomography. Med Phys 1989 16 2 p162-169; **Rücktransformation** = schlecht gestelltes Problem, weil Lösung keine stetige Funktion der Eingangsdaten. Um das Problem dennoch hinreichend genau zu lösen, können **Regularisierungstechniken** oder iterative Verfahren angewandt werden. Louis: Inverse und schlecht gestellte Probleme 1989 Kap6.1f; Keil: Prinzip des CT PdN41 1992 H6 p24ff; Weigand: Iteratives Lösen von Gleichungen DdM20 1992 p298-318; **Reichel: Tausend Gln, und was nun?** DdM 18 1990 p245-270; **Pageranking bei Google** Arens p616; **Gekoppelte Schwinger**: Kuhn: Theoret Mechanik, PfL9 p170 ff.

Reiss & Stroth: Endliche Strukturen (Mathematik fur das Lehramt, Gruppentheorie, **Tourenplanung**, Codierung) 2011; Voloshin: Introduction to Graph and Hypergraph Theory 2009; Tittmann: Graphentheorie: Eine anwendungsorientierte Einführung; Krumke, Noltemeier: Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen; Nitzsche: Graphen für Einsteiger: Rund um das Haus vom Nikolaus e-book; ODE-System für Schwingerkette, Eigenvektoren bei Hauptträgheitsmomenten, Normalmoden, Operatordarstellungen in einer **Basis**.

Ausklammerung zeilen- oder spaltenweise, falls als Multilinearform- oder Tensor-Repräsentant betrachtet! Sonst ist Länge oder Determinante nicht erhalten. Zerlegung quadratischer Matrizen in symmetrische $a_{ji} = a_{ij}$ mit reellen Eigenwerten, wie beim **Trägheitstensor** $I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_\alpha^2\,\delta_{ij} - x_{\alpha\,i}\,x_{\alpha\,j})$ und antisymmetrischen Anteil $a_{ji} = -a_{ij}$, als Matrixdarstellung der Winkelgeschwindigkeit oder Darstellung der infinitesimalen Drehung im Gebrauch ist, siehe Seite 441. **Reichl: A modern course in statistical physics** 1980 p680 $T = \frac{1}{3}(TrT)1 + T^s + T^a$ mit $T^a = \frac{1}{2}(T - T^T)$ und $T^s = \frac{1}{2}(T + T^T) - \frac{1}{3}(TrT)1$, Vektordarstellung der Winkelgeschwindigkeit per Hodge-Sternprodukt mittels **Levi-Civitta-Symbol** $(*\vec{\omega})_{ij} = -\epsilon_{ijk}\,\omega_k$ in **Matrizendarstellung der Winkelgeschwindigkeit, Drehung, äußeres Produkt,, Vektorprodukt, Kreuzprodukt, Matrix, axialer Vektor, Tensor:** Für die **Bahngeschwindigkeit** bei starrer Rotation $\vec{v} = \omega \times \vec{r} = \begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\omega_y z - \omega_z y\\ \omega_z x - \omega_x z\\ \omega_x y - \omega_y x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\omega_z & \omega_y\\ \omega_z & 0 & -\omega_x\\ -\omega_y & \omega_x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = *\omega\vec{r} = -\vec{r}\times\vec{\omega} = -*\vec{r}\vec{\omega} = -\begin{pmatrix}0 & -z & y\\ z & 0 & -x\\ -y & x & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$ **Speziell:** $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ gibt $\vec{v} = \omega \times \vec{r} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega y\\ \omega x\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\omega & 0\\ \omega & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

Matrix-Symmetriesierung: $A = A_s + A_a = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$.

Quadratische Gleichungssysteme oder n **Gleichungen in** n **Unbekannten können als Frage danach gedeutet werden, ob sich die jeweils** $n-1$**-dimensionalen Hyperflächen im** $\mathbb{R}^n$ **schneiden. Lösbarkeit** eines lin Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ erfordert Rang(A)=Rang(A,$\vec{b}$), was bei $\begin{pmatrix}-x + y = 1\\ -x + y = -1\end{pmatrix}$, obere Gleichung bedeutet $\vec{a}\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = 1 = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\cos\angle(\vec{a},\vec{x}) = \sqrt{2}|\vec{x}|\cos\angle(\vec{a},\vec{x})$ Koeffizientmatrixeintrag repräsentiert Vektor senkrecht zur beschriebenen Gerade/Hyperebene, Rang(A)$= 1 \neq 2 =$ Rang(A,$\vec{b}$) nicht gegeben ist, oder det A = det (A,$\vec{b}$)= Nebendeterminanten.

$\boxed{\text{Rang(A)} \neq \text{Rang(A,}\vec{0}\text{) kann bei homogen Gleichungssystemen nicht passieren!}}$ Die sind also stets lösbar. **Dimension der Lösung** = Anzahl der freien Parameter des Lösungsvektors = Dimension des Kerns = Nullstelle des Gleichungssystems, ganz im Sinne der reellen Gleichung $A\,x = 0$ = Dimension des Lösungsraums= Defekt =n-Rang(A). **Genau eine Lösung**, also ein Punkt, bedeutet Kern hat Dimension **Null**. $\boxed{\text{Kern }(\varphi) = \{v \in V | \varphi(v) = 0\}}$. $\boxed{\text{Bild }(\varphi) = \varphi(V)}$. **Kern-Bild-Satz**

$\boxed{\text{dim Bild }\varphi_A + \text{dim Kern }\varphi_A^{-1}(\{\vec{0}\}) = \text{dim V}}$. Matrix n-ter Ordnung als Abbildung der Punkte des $V = \mathbb{R}^n$ bedeutet dim V = Rang von A + Anzahl freier Parameter der Lösung = Anzahl von Nullzeile verschiedener Zeilen der Stufen-Matrix + dim der linearen Hülle der Lösungen = Bilddimension + Urbilddimension des $\vec{0}$-Vektor/Nullvektorbildes/Nullstelle der Matrix. Ganz unabhängig von den Eigenschaften der Matrix A gilt: Der Nullvektor hat stets den Nullvektor als Bild. Oder: Der Nullvektor gehört stets zum Urbild des Nullvektors. Ob der Kern über den Nullvektor hinausgeht hängt von den Eigenschaften der Matrix ab. Siehe Arens: Mathematik; **Boseck: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume** 1967 p57ff $V = \mathbb{R}^2 = W$ nutze für's Verständnis der **Dimension des Bildes der Abbildung** = dim φ_A die Abbildung des Einheitsquadrates. $Q = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ mit Fall1: $A_1 = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ hat Rang 2 und $|A| = 1 \neq 0$ gibt $A_1\,Q$ = Parallelogramm, bedeutet volles Bild, bedeutet nur der Nullvektor wird zum Nullvektor, also $0 =$ dim $\varphi_{A_1}^{-1}(\{\vec{0}\})$, bedeutet dim Kern = dim $\{\vec{0}\} = 0$. Fall2: $A_2 = \begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ hat Rang 1 und $|A| = 0$ gibt $A_1\,Q$ = Gerade bedeutet Kerndim = 1= dim $\varphi_{A_1}^{-1}(\{\vec{0}\})$. Fall1: $A_3 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ hat Rang 0 und $|A| = 0$,

bedeutet Bild ist stets Nullvektor, also Bilddimension = dim $\{\vec{0}\} = 0$. Kerndim = 2 dim $\varphi_{A_1}^{-1}(\{\vec{0}\})$ = dim V, bedeutet, dass der gesamte Definitionsbereich von A zum Kern wird. Alles in Analogie zur Nullstellendebatte bei Funktionen. Wille: Repetitorium der linearen Algebra Bd1 2001[4] pII, p45; Brehmer & Belkner: Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra 1972[3]; Bartsch: Mathe Formeln p92; Merziger et al: Formeln + Hilfen 183; **Inhomogenes Gleichungssystem repräsentiert ein Geraden / Hyperebenen-Bündel, das den Nullpunkt meidet!** $\mathrm{Vol}(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) = \det(A) = |A| \neq 0$ (lu) eindeutige Lösung oder **vektoriell gedeutet Koeffizienten-Matrix hat Volumen**, $|A| = 0$ (la) keine Lösung (Geraden / Hyperebenen-Bündel liegen parallel) oder nicht eindeutige Lösung (Schar: Geraden/Hyperebenen-Bündel liegen parallel und übereinander).

a] Homogene Gleichungssysteme haben immer mindestens eine Lösung, **triviale Lösung**, sind **immer lösbar**. Bei $|A_{\text{hom}}| = 0$ gibt's unendlich viele Lösungen! $|A_{\text{hom}}| \neq 0$ nur **triviale Lösung**!

b] Inhomogene Gleichungssysteme mit Rang(A)=Rang(A,$\vec{b}$) sind lösbar und haben für $|A_{\text{inhom}}| \neq 0$, genau eine Lösung $\begin{pmatrix} -x+y=1 \\ x+y=2 \end{pmatrix}$, Rang(A)=2=Rang(A,$\vec{b}$), oder bei $|A_{\text{inhom}}| = 0$ unendlich viele Lösungen, bedeutet, dass Gleichungen doppelt notiert sind, dh, mehrere identische Geraden $\begin{pmatrix} -x+y=1 \\ x-y=-1 \end{pmatrix}$, Rang(A)=1=Rang(A,$\vec{b}$). Also genau eine oder unendlich viele!

Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik p244ff; **Homogenes Gleichungssystem** repräsentiert **Geraden/Hyperebenen-Bündel durch Ursprung**. Daher bedeutet $|A| \neq 0$, es gibt nur Null-Lösung (Kern = Nullvektor) und $|A| = 0$ **bedeutet nichttriviale Lösung = Schar = Kern der Abbildung A ist nicht allein der Nullvektor!**

Unabhängigkeit: Eine Menge von Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ heißt **linear abhängig**, wenn sich mit ihren Vektoren eine nichttriviale Nullsumme bilden lässt. Anderenfalls heißt die Menge **linear unabhängig**. Barth, Krumbacher, Barth: Anschauliche analytische Geometrie 1994 p109f; v und u lu $\Leftrightarrow v, u \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{o}\} \Leftrightarrow \lambda v + \mu w = \vec{o} \leftrightarrow \lambda = \mu = 0 \Leftrightarrow$ Nullvektor als Summe $\lambda v + \mu w$ geht allein auf triviale Weise $\lambda = \mu = 0$. la $\Leftrightarrow \exists_{\lambda,\mu \in \mathbb{R}, \text{ aber nicht beide } = 0} \lambda v + \mu w = \vec{0}$. Wenn $\vec{a}, \vec{b}$ la, also $\vec{b} = k\vec{a}$, so gilt $(\alpha + \beta k)\vec{a} = \vec{0}$ stets mit $\alpha = -k\beta$. Daher ist der Nullvektor von jeder Menge von Vektoren la, denn $\lambda\vec{0} + \mu w = \vec{0}$ mit $\lambda \neq 0$ und $\mu = 0$! Oder kurz: $\beta\vec{a} = \vec{0}$ man kann also den Nullvektor aus jedem Vektor erzeugen. Fischer: Lineare Algebra p18; Flachsmeyer & Prochaska: Algebra p34f; Arens p506f; Jänich: Lineare Algebra; **Familie** von Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ **linear unabhängig** $\leftrightarrow Vol(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}| = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = abc \sin \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \cos \measuredangle(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$ oder $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ haben Volumen oder $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ nur für $\alpha = \beta = \gamma = 0$ **Umdeutung der Bedingung für lineare Unabhängigkeit** durch $A\vec{\alpha} = \vec{0}$, wobei $\vec{\alpha}$ die reellen Koeffizienten der Linearkombination und die A-Zeilen die gegebenen Vektoren sind. Die triviale Lösung $\vec{\alpha} = \vec{0}$ entspricht lu oder A bildet nur den Nullvektor auf den Nullvektor ab. Oder, alle vom Nullvektor verschiedenen Vektoren können nur auf einem vom Nullvektor verschiedenen Vektor landen, wenn sich die A-Zeilen aus lu Vektoren speisen. **Ein Matroid** = abstrakte Verallgemeinerung einer Matrix, mathematische Struktur, mit deren Hilfe der Begriff der Unabhängigkeit aus der linearen Algebra verallgemeinert wird. Sei Grundmenge von in unabhängigen Vektoren $E = \{a, b, c, d, e, f\} E \subseteq V$ und die Potenz-Menge $\mathcal{I} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ der Vektormengen mit jeweils zueinander linear unabhängigen Vektoren gegeben. Das Paar $M = (E, \mathcal{I})$ ist ein **Vektormatroid**. Martin Aigner: Kombinatorik. II Matroide und Transversaltheorie 1976; **Rang** einer Matrix = Rang(A) = dim Bild(A) = **Dimension der linearen Hülle** der Zeilen = Anzahl der linear unabhängigen Spalten.

Check auf **lineare Unabhängigkeit:** Vektoren $\vec{r}_1 = -3\hat{\imath} + 2\hat{k}$, $\vec{r}_2 = \hat{\imath} + 5\hat{\jmath} + \hat{k}$ und $\vec{r}_3 = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ sind wegen Det = 25 linear **unabhängig**. Vektoren $\vec{u} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{v} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$ und $\vec{w} = -\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ sind wegen Det = 0 linear **abhängig**.

Lösung Gleichungssysteme: a] Graphisch als Lagerelation von Hyperebenen. b] Einsetzungsverfahren, Arens p56. c] Gleichsetzungsverfahren. d] Eliminierungsverfahren. e] **Gauß-Algorithmus**, **Probe per Spalten- oder Zeilensummen:** Erzeuge Zusatzzeile mit Spaltensumme. Deren Zeilensumme muss mit Summe des Inhomogenitätsvektors übereinstimmen, siehe Dietrich & Stahl: Grundzüge der

Matrizenrechnung 1970[6] p80ff; **ABER 1** Direktes Verfahren = Koeff-Matrix wird iteriert = Speicherplatz und Rechenaufwand steigt mit Dimension $\mathcal{O}(n^3)$, für Determinante günstig ist, da das Produkt der Diagonale der oberen Dreiecksmatrix ausreicht, aber dennoch unhandlich für große n, daher iteratives Verfahren = Lösungs-Vektor wird gemäß **Richardson-Iteration**, wo ein nahrhafter Nullvektor $\vec{x} - E\vec{x} = \vec{0}$ zu $A\vec{x} = \vec{b}$ addiert wird, also eine **Fixpunkt-Gleichung** mit $\vec{x} = \vec{b} + (E - A)\vec{x}$ iteriert, die nicht konvergieren muss, siehe logistische Abbildung, oder gemäß Gauß-Seidel 1820 = Bringe Diagonale auf 1 und dann Gauß'sches Eliminations-Verfahren **Splitting-Verfahren:** $Ax = Ux + Dx + Ox = b \Leftrightarrow Dx = b - (U + O)x \Leftrightarrow x = D^{-1}b - D^{-1}(U + O)x$ = **Fixpunktgleichung** oder **Jacobi-Verfahren = Gesamschrittverfahren**, weil mit Matrix-Multiplikation gelöst wird 1845. **Präkonditionierte Gleichungssysteme** $P^{-1}Ax = P^{-1}b$ oder $P^{-1}AQy = P^{-1}b$, wobei $Qy = x$ mit **Präkonditions-Matrices** P oder Q. Idee kommt von $x = A^{-1}b$, wenn nur A^{-1} nicht so schwer zu berechnen wäre. Optimal ist die **Präkonditions-Matrix** $P = A$. Speziell: $P = \mathrm{diag}A$ = **Gesamschrittverfahren von Jacobi.** $P = L$ = **Einzelschrittverfahren von Gauß-Seidel.** Southwell: Relaxationsverfahren. $P = L - (1 - \frac{1}{\omega})\mathrm{diag}A$ = **SOR=Successive Overrelaxation Method-Verfahren von David Young.** Opfer: Numerische Mathematik für Anfänger 2008[5] p180; Oevel: Einführung in die Numerische Mathematik 1996; Poloshi: Mathematisches Praktikum 1963 Kap6 Numerische Methoden der linearen Algebra p282ff; Frazer, Duncan, Collar: Elementary matrices and some applications to dynamics and differential equation 1938; **ABER 2** numerisch wegen Instabilität oder Rechenzeit besser iterative Verfahren, mit steuerbarer **Konvergenz-Geschwindigkeit.** **Trefethen & Bau: Numerical linear algebra** 1997 pdf im Netz. Arnoldi und alles, was man numerisch bei großen Matrizen braucht;

Gauß-Algorithmus fasst Lösung von Gleichungssystemen, Ersetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren, Eliminationsverfahren, Cramer-Regel (= Problem Rechenzeit proportional $(n-1)\cdot n!$ Multiplikationen und $n! - 1$ Additionen notwendig, also $(n+1)n!$, was mit **Stirling-Formel** $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, $n \to \infty$. f=lambda n:(n+1)*sqrt(2*n*np.pi)*(n/np.e)**n; **Gleichungssystemen mit n Unbekannten** f(20)=5 10^{19} gibt bei 100 Mflops eine **Rechenzeit = 5 10^{11} s = 16000 Jahre**), effektiv zusammen, aber diese Methoden sind nur theoretisch wichtig, hingegen praktisch unbrauchbar, da sie viel Rechenzeit und Hauptspeicher/RAM und bei endlicher Zahldarstellung gut konditionierte Koeffizientenmatrizen erfordern. Für eine effiziente Lösung **großer linearer Gleichungssysteme** (**Riesige diagonalnah besetzte Matrizen:** Laplace-Gl, Quantenchemie durch Matrix-Darstellung der Hartree-Fock-Gleichung $\hat{F}|\phi_m\rangle = \varepsilon_m|\phi_m\rangle$, $\hat{F} = \hat{h} + \sum_{\gamma}^{N} \langle\phi_\gamma|\,\hat{w}\,|\phi_\gamma\rangle - |\phi_\gamma\rangle\langle\phi_\gamma|\,\hat{w}$ mit $\hat{h} = -\frac{\Delta(\mathbf{r})}{2} - \sum_{k}^{N_k} \frac{Z_k}{|\mathbf{r}-\mathbf{R_k}|}$ und $\hat{w} = \frac{1}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|}$, Reinhold: Quantentheorie der Moleküle 1994, 2015[5] ebook p282ff; Physikalische Näherung: Hückel-Näherung = **HMO** = Hückel-Molekülorbital-Modell/Methode = Methode der semiempirischen Quantenchemie. Molekülorbitale in konjugierten Systemen werden approximiert. Ritz'sches Verfahren gibt Eigenwertproblem mit Molekül-Hamiltonoperators $\mathbb{H}_m\Psi = E\Psi$ für Wellenfunktion Ψ gemäß $\int \Psi^*\mathbb{H}_m\Psi \mathrm{d}\tau = \int \Psi^* E\Psi \mathrm{d}\tau$ für eine feste Energie und der Darstellung der Wellenfunktion $\Psi = \sum_i c_i\varphi_i$, zB π_z-Orbitale an den Orten i mit $\varphi_i = \pi_z(\vec{x}_i)$, zu $E = \frac{\int \Psi^*\mathbb{H}_m\Psi \mathrm{d}\tau}{\int \Psi^*\Psi \mathrm{d}\tau} = \frac{\sum_i\sum_j c_ic_j \int \varphi_i^*\mathbb{H}_m\varphi_j \mathrm{d}\tau}{\sum_i\sum_j c_ic_j \int \varphi_i^*\varphi_j \mathrm{d}\tau} = \frac{\sum_i\sum_j c_ic_jh_{ij}}{\sum_i\sum_j c_ic_jS_{ij}}$ mit dem Überlappungsintegral S_{ij} oder $E\sum_i\sum_j c_ic_jS_{ij} = \sum_i\sum_j c_ic_jh_{ij}$ wird, woraus per Ritz'schem Variationsverfahren die Gleichung die Eigenwertgleichung $\sum_i(h_{ij} - ES_{ij})c_i = 0$ für $j = 1, N$ oder mit $S_{ij} = \delta_{ij}$ einfach auf $H\vec{c} = E\vec{c}$ mit Vektor $\vec{c}$ = Koeffizienten zur Linearkombination, reduziert wird. **Hückelnäherung = alle Integrale werden parametrisiert:** Bei n konjugierten Atome im Molekül ist $H = (h_{ij})$ eine Matrix mit dem **Coulombintegral** des Atoms i $h_{ii} = \alpha_i = \int_V \Psi_i^*\mathbb{H}_m\Psi_i\, dV$ und dem Resonanzintegral zwischen zwei benachbarten und per Konjugation verknüpften Atomen i, j mit $h_{ij} = \beta_{ij} = \int_V \Psi_j^*\mathbb{H}_m\Psi_i\, dV \quad (i \neq j)$. Bei einem Ring gleicher Atome hat man $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & ... & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & ... & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & ... & 0 \\ ... & & & & & \\ \beta & 0 & ... & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ Eigenwerte dieser Matrix ergeben sich zu $\alpha + 2\beta\cos(2\pi k/n); 0 \leq k \leq n-1$.

Bei Benzen sind die **Eigenwerte** $(\alpha+2\beta, \alpha+\beta, \alpha+\beta, \alpha-\beta, \alpha-\beta, \alpha-2\beta)$ und Eigenvektoren: ((1, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (-1, -1, 0, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, -1, 1, 0), (-1, 0, 1, -1, 0, 1), (-1, 1, -1, 1, -1, 1)). Der Sinn der Näherung ist, dass diese beiden Integrale nicht berechnet, sondern einfach parametriesiert = einfach hingeschrieben, werden. **Moore & Hummel: Physikalische Chemie** 1986[4] p854ff; Scholz& Köhler: QC3 1981 p130ff; Reinhold: QT der Moleküle 1994 p150ff; Szabo & Ostlund: Modern quantum chemistry 1982 p309ff; Kirejew: Physik der Halbleiter 1972 p546-606 Angewandte Gruppentheorie; Mathiak & Stingl: Gruppentheorie für Chemiker, Physikochemiker, Mineralogen 1969; Folgerungen **a] Hückel-Regel** = handelt es sich bei der chemischen Verbindung um ein aromatisches Molekül? Ein planares, cyclisch durchkonjugiertes Molekül ist mit $[4n+2]\pi$-Elektronen mit $n \in \mathbb{N}$, also einer **ungeraden Zahl** von Elektronen**paaren**, Beispiel: $n = 1, [41+2=6]$, also drei Elektronenpaare, **besonders stabil und wird als Aromat** bezeichnet. Bei $[4n]\pi$-Elektronen, also einer geraden Zahl von Elektronenpaaren, Beispiel: $n = 2, [42 = 8]$, also vier Elektronenpaare, ist es **instabil und wird als Antiaromat** bezeichnet. b] Woodward-Hoffmann-Regeln erlauben Aussagen über den Verlauf und die Produkte von pericyclischen Reaktionen. **Bei konzertiert = per Übergangszustand ohne Zwischenprodukte, verlaufenden Reaktionen bleibt die Orbitalsymmetrie erhalten.** Woodward & Hoffmann: Die Erhaltung der Orbitalsymmetrie 1970; Wieland & Kaufmann: Die Woodward-Hoffmann-Regeln Einführung und Handhabung 1972;

CT seit 1973, MRT, PDEs) haben Gauß 1820 und Jacobi 1845 iterative Methoden erfunden, bei denen nicht die Koeffizientenmatrix, sondern der Lösungsvektor iteriert wird. Die iterativen Methoden sind Fixpunkt-Methoden, die man für 2D leicht einsehen kann. Cimino- oder Kaczmarz-Methode. Spiegelung an Hyperebenen. Betrachte Schwerpunkte und Orthogonalprojektionen. Diese ART = algebraischen Rekonstruktions-Techniken sind aber numerisch kompliziert, zu rechenintensiv. **Reichel & Zöchling: Tausend Gleichungen - und was nun?** DdM18 1990 p245ff; Formal kann man ein 3x3-System auf ein **Fixpunktgeichungssystem** bringen:

$$\begin{aligned} a_{11}\boxed{x_1} + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}\boxed{x_2} + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}\boxed{x_3} &= b_3 \end{aligned}$$

gibt **Fixpunktgeichungssystem**

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 \\ x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}}x_3 \\ x_3 &= \frac{b_3}{a_{33}} - \frac{a_{31}}{a_{33}}x_1 - \frac{a_{32}}{a_{33}}x_2 \end{aligned}$$

Kompakt: $\vec{x}^{(i+1)} = B\vec{x}^{(i)}$ mit Startvektor zB $\vec{x}^{(0)} = \vec{0}$. **Beispiel:** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ geben

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{matrix}, \; E-A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \; \vec{x}_{i+1} = (E-A)\vec{x}_i + \vec{b}' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_i + \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{7}{4} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Jacobi-Verfahren: $Ax = b$ mit $A = L + D + R$ gibt $(L+D+R)x = Dx + (L+R)x = b$ also $Dx = -(L+R)x + b$ und damit die **Fixpunktgeichung** $x = -D^{-1}(R+L)x + D^{-1}b$, die nur die Berechnung einfacher Skalarprodukte erfordert. **Gauß-Verfahren** macht andere Matrix-Splittung $(L+D)x = -Rx + b$, also $x = -(L+D)^{-1}Rx + (L+D)^{-1}b$ und ist bei der Berechung der Inversen $(L+D)^{-1}$ und der Matrixprodukte rechenintensiv. Hinreichende Konvergenzbedingung: A sollte **diagonaldominant** sein. **Jacobi-Verfahren** konvergiert genau dann, wenn für den betragsgrößten Eigenwert $\lambda_{\max}$ der quadratischen Matrix $D^{-1}(R+L)$ gilt: $|\lambda_{\max}| < 1$. Je kleiner $|\lambda_{\max}|$, desto schneller konvergiert das Verfahren. Hämmerlein & Hoffmann: Numerische Mathematik 1989; **Preuss & Wenisch: Lehr- und Übungsbuch numerische Mathematik** 2001; Strang: Computational Science and Engineering 2007; **Golub & Loan: Matrix computations**. Ginelli: Covariant Lyapunov vectors. Kuptsov Saratov. Gauß'scher Algorithmus/Eliminierungsverfahren: Betrachte erweiterte Koeffizienten-Matrix, erzeuge Einheitsform, Zeilenstufenform oder gar Diagonalform. Die gegebenenfalls nicht am Stufenrand stehenden Variablen werden als freie Parameter gesetzt. Numerik zur Lösung von Gleichungssystemen siehe Bärwolff: Numerik für Ingenieure, Physiker und Informatiker; **Numerik lin Gleichungssysteme:** Problem Diagonalisierung nicht normaler Matrizen, nicht orthogonale Basen. Nutze Krylow-Raum, Arens p685; Meister & Vömel: Numerik linearer Gleichungssysteme: Eine Einführung in moderne Verfahren. Mit MATLAB-Implementierung. Klassische Splitting-Verfahren. Krylov-Unterraummethoden (CG, GMRES, BiCGSTAB,

CGS, ...) Präkonditionierung. Mehrgitterverfahren. Parallelisierung: OpenMP, MPI, PETSc, iterativer Verfahren. Spektrum Digest 2/1999 Wittum: Mehrgitterverfahren und dünn besetzte Gleichungssysteme; Gleichungssysteme `http://www.scipy.org/Tentative_NumPy_Tutorial`
The NumPy array: a structure for efficient numerical computation http://arxiv. org/abs/1102.
1523 `from numpy import matrix; from numpy import linalg; b=array([1,2,3])`
`a=matrix([[1,2,3],[2,1,4],[0,1,0]]); b=array([1,2,3]); linalg.solve(a,b)`, Constructor a = np. array(L) erstellt ein Numpy Array aus einem Container L, der Elementliste ist. Alle Elemente des Arrays besitzen den allgemeinsten Datentyp in L. Eine Liste aus zwei Containern mit je zwei Elementen, z.B. [[1,2],(3,4)] wird in ein 2x2 Matrix Array umgewandelt. a.shape gibt Dimensions-Tupe (2,2). a.dtype gibt Datentyp. n.eye(3,dtype=comlex); A = np.diag([1,2,3,4,5],k=1); x=np.diag(A,k=0); **matrix-Element:** a[2,0]=$a_{3,1}$. **array-Element:** a[2][0]=$a_{3,1}$. A=array(a) oder L=list(a). `transpose(M)`, falls M array, unter numpy `M.transpose`, np.transpose(A); A.transpose(); A.T. **Tensor-Produkt:** x=arange(4) x. reshape(1,4). transpose()*x oder x. reshape(4,1)*x; **Lineare Gleichung lösen:** `x = linalg.solve(a,b)`, Probe: `dot(a,solve(a,b))-b,`
`invx= dot(inv(a),b)`, **dot** ist aus Modul numpy, und nicht aus linalg. http://www. physik. uzh. ch/lectures/informatik /python/ python-funktionen. php **Einheitsmatrix:** E = eye(2,3); len(E) = **Zeilenzahl**, size(E) = **Anzahl der Matrizelemente**; **Erste Spalte** E[:,0] ist array([1., 0.]); np.ones_like(x); np.zeros_like(x); **Formatierte Ausgabe:** fits Greenfeld: pydattut.pdf nasa. wika http://cdf. gsfc. nasa. gov/ Auf 64 Stellen genau: print '{:.64f}'.format(pi)[:20], print '{:.99f}'.format(0.333*10**(-64)) oder x=`",('{:.64f}'.format(x)),"` x hat
String`laenge=",len(str(('{:.64f}'`.format(x)))) **Jordanisieren:** http://matheraum. de/forum/Jordanisieren/t412582 Arens p956 p616; Holz & Wille: Repetitorium der linearen Algebra Bd2 2002; $\ddot{x} = a\,x + b \to \dot{v} = A\,v + f$ gibt mit $v = (x, \dot{x})^T$

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ a\,x + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Determinante = Entscheider über zB Lösungstyp = homogene reellwertige Funktion in n^2 Argumenten = n! Summanden. Nickel: Algebra und Geometrie 1971[6] p156-180; Arens p549; Großmann:; Schmeidler: Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik 1949; **Baltzer: Theorie und Anwendung de Determinanten 1857**, 1875[4] **Vorwort lesen!** Funktionaldeterminante Jacobi 1833 p127ff, Leibniz 1693, Cramer 1750; Brehmer & Belkner: Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra 1972[3] induktive Definition der Det; Determinante (wie kin Energie) ist Beispiel für **homogene Funktion vom Grad** n, denn für die Matrix $A_{n\times n} = \alpha\,B$, **Hadamard-oder Schur-Produkt** ist die Determinante $|A| = \alpha^n |B|$ oder wegen $\det(r \cdot I_n) = r^n$ und somit $\det(rA) = r^n \det A$ oder $f(\alpha x_1, ..., \alpha x_n) = \alpha^n f(x_1, ..., x_n)$ **Determinante** ist homogen und additiv in jeder Zeile oder Spalte für sich! Dies erleichtert die Berechnung der Determinante, indem man wie beim Gauß-Algorithmus elementare oder zulässige Umformungen ausführt, bis man auf Diagonalform stößt, und das Produkt der Diagonalelmente nimmt. Addition von Vielfachen einer Zeile wirken neutral! Aber Vorsicht bei Multiplikation einer Zeile! $4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ Nickel 1971 p156-180, Arens p549, Kreyszig p376; $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & c \\ s & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+r & c \\ b+s & d \end{vmatrix}$, wobei also **ein beliebiger Vektor** $\vec{z} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ auf die erste Spalte addiert wurde, oder $|A| = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}_a^{-b} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & c \\ ab - ba & ad - bc \end{vmatrix} = \frac{1}{a}\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & |A| \end{vmatrix} = \frac{|A|}{a}\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|\begin{vmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = |A|$. Willers: Elementar-Mathematik. Ein Vorkurs zur höheren Mathematik 1948, $1965^{12} p15, p19 ff$; **Determinante = Maß für auch schiefwinklige Volumina** = Volumenprodukt = Spatprodukt, inverse Matrix, Lösbarkeit von Gleichungssystemen, Jacobi-Matrix ist die erste Ableitung oder lineare Näherung/Abbildung für vektorwertige Funktionen,

Arens p800. Spalten oder Zeilen einer quadratischen Koeffizienten-Matrix können als Vektoren gedeutet werden. Determinante ungleich Null bedeutet dann neben linearer Unabhängigkeit und Volumen der durch o.g. Vektoren aufgespannten Spats verschieden von Null auch eindeutige Lösbarkeit des zugeordneten Gleichungssystems. Die **Determinante der Jacobi-Matrix**, die **Fundamental-Determinante** ist als alternierende Multilinearform das Volumenmaß der Ableitung, ist der infinitesimale Volumen-Zuwachs. Nolting 1, §1.5.3; Wronsky-Determinante, Spezielle Funktion, die auf der Menge der n-reihigen quadratischen Matrizen erklärt ist und reelle Werte besitzt. Die n-reihige Determinante ist eine reellwertige Funktion auf der Menge $\mathcal{A}_{n,n}$ der quadratischen n-reihigen Matrizen, die als Funktion der Spalten eine alternierende n-Linearform auf $\mathcal{A}_{n,n}$ ist und für die Einheitsmatrix den Wert 1 annimmt: **Leibniz-Def. Determinante** $|a_{ij}| = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}\pi\, a_{\pi(1)\,1}\, a_{\pi(2)\,2} \dots a_{\pi(n)\,n}$, wobei π eine der $n!$ möglichen Permutationen ist oder mit **Levi-Civitta-Symbol** - codiert das Spat-Volumen bei Determinante g = Volumenprodukt = Spatprodukt, Vektor-Produkt, Hodge- Star- Operator. Es stehen rechts $n!$ Summanden: $\det A = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_n} A_{1i_1} A_{2i_2} \dots A_{ni_n}$. **Die Faktoren jedes Summanden müssen stets aus verschiedenen Zeilen und Spalten stammen, was durch das Levi-Civitta-Symbol gesichert wird!** Eine Permutation heißt gerade, wenn die Anzahl ihrer Inversionen $\alpha(\pi)$ eine gerade oder gleich Null ist. Signum der Permutation π ist $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{\alpha(\pi)}$.

$$\varepsilon_{ijk\dots} = \begin{cases} +1, & \text{falls } (i,j,k,\dots) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3,\dots) \text{ ist,} \\ -1, & \text{falls } (i,j,k,\dots) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3,\dots) \text{ ist,} \\ 0, & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases}$$

Nach Heitler: The quantum theory of radiation 1954 p68 **ε-Funktion**

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1, & \text{falls x>0} \\ -1, & \text{falls x<0} \end{cases}.$$

$\int_0^x \delta(x)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\varepsilon(x)$ und $\varepsilon'(x) = 2\delta(x)$. Kovarianter ϵ-Symbol ist **Tensor 3. Stufe** bei schiefwinkligen Koordinaten. Arens p755; **Determinante ist Multilinearform!** Beispiel ist **Slater-Determinante Hartree-Fock-Ansatz** = **Mean- Field**- Näherungsansatz mit **Ein**-Elektronen **Fock-Operator** $\hat{F}[\{\phi_j\}](1) = \hat{H}^{\text{core}}(1) + \sum_{j=1}^{N/2}[2\hat{J}_j(1) - \hat{K}_j(1)]$ mit **Ein**-Elektronen-Kern- oder Meanfield-Operator $\hat{H}^{\text{core}}(1) = -\frac{1}{2}\nabla_1^2 - \sum_\alpha \frac{Z_\alpha}{r_{1\alpha}}$, **Coulomb-Operator** $\hat{J}_j(1)$ der e-e-Abstoßung innerhalb des j-ten Orbitals, und **Austausch-Operator** $\hat{K}_j(1)$ als Artefakt der Idee der Slater-Determinante g = Austauschenergie wegen antisymmetrischer Gesamtwellenfunktion. Die Austauschwechselwirkung (besser spricht man nur von der Austauschenergie oder allgemeiner vom Austauschterm) erhöht oder erniedrigt die Energie eines physikalischen Systems aus mehreren wechselwirkenden identischen Teilchen gegenüber dem Wert, der für den Fall gelten würde, dass die Teilchen nicht identisch, sondern unterscheidbar sind. Hamiltonoperator des Atoms, soweit hier betrachtet, treten die Spins nicht auf. Dennoch werden die beiden Niveaus, die sich durch die Aufspaltung aufgrund der Elektron-Elektron-Wechselwirkung gebildet haben, durch verschiedene Quantenzahlen S für den Gesamtspin gekennzeichnet. Der Grund ist, dass zu einer symmetrischen bzw. antisymmetrischen Ortsfunktion Φ immer eine entgegengesetzt symmetrische Spinfunktion χ gehört, und dass diese im Fall von zwei Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$ je nach Symmetrie immer einen definierten Gesamtspin besitzt, entweder $S = 0$ oder $S = 1$ (gleiche Teilchen mit Spin 1/2). Nach ihrem Entartungsgrad hinsichtlich der Spinorientierung heißen Zustände mit $S = 0$ Singulettzustände, die mit $S = 1$ Triplettzustände. Für die Energieniveaus des He-Atoms folgt, dass die Elektronen, wenn sie in zwei (voneinander verschiedenen) Einteilchenorbitalen sitzen, je ein Singulettniveau und ein Triplettniveau bilden, wobei das Triplettniveau (d. h. symmetrisch bei Vertauschung der Spins, antisymmetrisch im Ort) tiefer liegt als der entsprechende Singulettzustand. Ein Sonderfall ergibt sich, wenn beide Elektronen dasselbe Orbital φ_A=φ_B besetzen, denn dazu existiert nur die symmetrische Ortswellenfunktion. Ein Standardbeispiel ist die Konfiguration $1s^2$ des Grundzustands im Helium-Atom. Der Gesamtspin ist zu S=0 festgelegt, eine Aufspaltung tritt nicht ein. Insgesamt führt die elektrostatische Abstoßung mittels der quantenmechanischen Austauschwechselwirkung zu der paradoxen Folge, dass die

Spinquantenzahl einen bestimmenden Einfluss auf das Niveauschema erhält, ohne dass die mit dem Elektronenspin verbundene (magnetische) Wechselwirkung überhaupt betrachtet wird. Historisch wurden an diesem konkreten Beispiel 1926 diese Zusammenhänge von Heisenberg entdeckt. Die Austauschenergie, die von der elektrostatischen Abstoßung der Elektronen herrührt, wirkt nur zwischen zwei Elektronen mit überlappender Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Dies können neben Elektronen desselben Atoms aber auch Elektronen benachbarter Atome oder, in Metallen, sogar delokalisierte Elektronen des Leitungsbands sein. Zu den Folgen gehört in der Chemie die sterische Hinderung, in der Festkörperphysik die langreichweitige magnetische Ordnung in den magnetischen Materialien (s. z. B. Heisenberg-Modell, Ising-Modell). Dispersion von Bethe-Strings der Länge n in eindimensionalen Spinketten PhysJ 19 2020 H7 p20f; Ibach & Lüth: Festkörperphysik. Einführung in die Grundlagen 2000^5 p197 Austauschenergie; Strobl: Condensed matter physics. Crystals, liquids, liquid crystals, and polymers 2004; Koch: Exchange mechanisms. Die Coulomb-Energie der Elektronen hängt von ihren Spins ab! Pavarini & Koch: Correlated Electrons. From Models to Materials: Lecture Notes of the Autumn School 2012; $\hat{F}(1)\phi_i(1) = \epsilon_i\phi_i(1)$ gibt **Hartree-Fock-Einelektronen-Wellenfunktion** = HF- Molekülorbital. Zur Lösung der Schrödinger-Gleichung eines Systems mit N gleichartigen Fermionen dient Wellenfunktion als **Hartree-Produkt** = anti-symmetrisiertes Produkt aus N orthonormalen Einelektronenfunktionen

$$\psi(1,2,\ldots,N) = A_N\phi_1(1)\phi_2(2)\ldots\phi_N(N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix} \phi_1(1) & \phi_2(1) & \ldots & \phi_N(1) \\ \phi_1(2) & \phi_2(2) & \ldots & \phi_N(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(N) & \phi_2(N) & \ldots & \phi_N(N) \end{vmatrix} = |\phi_1\phi_2\ldots\phi_N|, \text{ mit } \phi(i) \equiv$$

$\phi(\vec{r}_i)$ und dem **Antisymmetrisierungsoperator** A_N zur Erfüllung des **Pauli-Prinzips** = Die Gesamtwellenfunktion $\psi(\vec{r}_1, s_1; \vec{r}_2, s_2; \ldots)$ eines Systems von n identischen Fermionen muss total antisymmetrisch bezüglich jeder Vertauschung P zweier Teilchen sein: $\psi(\vec{r}_1, s_1; \ldots, \vec{r}_n, s_n) = -(P\psi)(\vec{r}_1, s_1; \ldots, \vec{r}_n, s_n)$ .. **Multilinearform**, **Slater-Determinate**, Verschränkung, Fernwirkung, Nichtlokalität, und **Tensorprodukt/Verschränkung** Schwindt: Tutorium QM p66ff, **Boseck: Tensorräume** oder **Brehmer & Haar: Differenzialformen und Vektoranalysis** 1973 oder **Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis** 1947, 1956, 1967; **Kowalsky: Vektoranalysis** 1 + 2 Karten, Differenzialformen 1974, 1976; Alles auf 120 Seiten **Gans: Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik** 1905, 1929, 1950; Schmellenmeier, Houtermans und Richard Gans; Haas: Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen 1922; **Valentiner: Vektoranalysis** 1943; **Fischer: Vektordifferentiation und Vektorintegration** 1904; Gibbs und Wilson: Vektor-Analysis 1901; Weyrauch: Theorie elastischer Körper 1884; MacFarlane: Vector Analysis and Quaternions 1886; Bourne & Kendall: Vektoranalysis 1973; **Päsler: Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung 1977** p44-100; **Spiegel: Vectoranalysis and introduction to tensor analysis**, Schaum 1959; Brand: Vector analysis 2006; Boljanovic: Applied Mathematical & Physical Formulas 2000^2; Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie KapVII p209ff. Die **Sarrus-Regel** erfasst bei 4 ×4-Matrizen nur 8 der 4! = 24 Permutationen. Daher **Laplacescher Entwicklungssatz**: k-ter Spalte $|A| = \sum_i a_{ik}\, A_{ik}$ oder i-ter Zeile $|A| = \sum_k a_{ik}\, A_{ik}$. **Die Adjunkte = adjungierte Unterdeterminante** = Kofaktor A_{ik} zum Element a_{ik} ist die mit dem Schachbrett-Faktor $(-1)^{i+j}$ mutiplizierte Unterdeterminante. Shifrin & Adams: Linear algebra. A geometrical approach 2002; Dieser reduziert sich auf das Produkt der Diagonalelemente, wenn man eine Zeilenstufenform der Matrix per Gauß'schem Eliminations-Verfahren herstellt - **Jänich: Lineare Algebra**. Boseck: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume 1973; **ComputerAlgebra-Systeme nutzen zur Det-Berechnung eine LR- oder LU-Zerlegung:** Arens p547 o 553; $PA = LR, \quad |P| = \pm 1, \quad |L| = 1, \quad |A| = \pm|R| =$ **Produkt der Diagonalelemente!** Wobei **Gauß-Algorithmus als LR-Zerlegung (auch LU-Zerlegung oder Dreieckszerlegung genannt)**

interpretieren!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = L \cdot R$$

Dabei hat R die oben erwähnte Stufenform und die Matrix L dient dem Speichern der benötigten Umformungsschritte, die Multiplikationen mit Frobeniusmatrizen entsprechen. Das zeigt die Existenz der Zerlegung. Um Eindeutigkeit zu erreichen, werden die Diagonalelemente der Matrix L als 1 festgelegt. Die Umformungsschritte zu speichern hat den Vorteil, dass für verschiedene „rechte Seiten“ b das Gleichungssystem effizient durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen gelöst werden kann. Die im Allgemeinen aus Stabilitätsgründen benötigten Zeilenvertauschungen können durch eine Permutationsmatrix P beschrieben werden. $P \cdot A = L \cdot R$.

LR-Zerlegung ohne Pivotisierung:

```
Eingabe: Matrix A

For i = 1 To n
    // Bestimmen von R
    For j = i To n
        For k = 1 To i-1
            A(i,j) -= A(i,k) * A(k,j)
        end
    end
    // Bestimmen von L
    For j = i+1 To n
        For k = 1 To i-1
            A(j,i) -= A(j,k) * A(k,i)
        end
        A(j,i) /= A(i,i)
    end
 end

Ausgabe: Die mit den Dreiecksmatrizen L und R überschriebene Matrix A,
wobei die Einsen auf der Diagonale von L nicht gespeichert werden.
```

Engeln-Müllges & Reutter: Formelsammlung zur numerischen Mathematik; Hanke-Bourgeouis: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens; Hans Kaiser: Numerische Mathematik II; 1926 - 2013, Jena, Berlin bei Erhard Schmidt HU, 1964 PH Potsdam; Kaiser & Nöbauer: Geschichte der Mathematik für Schule und Unterricht 1998; Knorrenschild p47, **Dreickszerlegung** ohne Zeilenvertauschung: L stets mit $l_{ii} = 1$, R mit $r_{ii} \neq 0$, $A = L\,R$ also $Ax = b \leftrightarrow Ly = b$ und $Rx = y$. Bei Zeilenvertauschung durch Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotierung zerstört die Dreiecksstruktur von L, daher $PA = LR$ mit $P^{-1} = P$, also $Ax = b \leftrightarrow Ly = P\,b$ und $Rx = y$. **Cholesky-Zerlegung** liefert obere Dreiecksmatrix oder Wurzel-Matrix von A R mit $R^T R = A$ in R per `chol(A)` Held: Methoden der statistischen Inferenz: Likelihood und Bayes 2008 p280;

Motivation Inverse ist **Balkenproblem:** Gemessen wird die Einfluss-Matrix A gemäß $\vec{y} = A\vec{F}$ indem man die Auslenkungen linear in den Kräften annimmt. Die Kräfte sind dann bei gegebener Auslenkung $\vec{F} = A^{-1}\vec{y}$. **Kehrmatrix** oder **inverse Matrix** mittels **Gauß-Algorithmus** als simultane Lösung von 3 Gleichungssystemen oder 9 Gleichungen gemäß $AA^{-1} = A(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = E$ Matrix A mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen auf obere Dreiecksgestalt!

$$(\,A\,|\,I\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (\,D\,|\,B\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & \dots & * & * & \dots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & * & * & \dots & * \end{array}\right).$$

Matrix A genau dann invertierbar, wenn die Matrix D keine Nullzeile enthält. Ist dies der Fall, so kann die Matrix D mit weiteren elementaren Zeilenumformungen zunächst auf Diagonalgestalt und dann in Einheitsmatrix überführt werden.

$$(\,I\,|\,A^{-1}\,) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & \hat{a}_{11} & \dots & \hat{a}_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \hat{a}_{n1} & \dots & \hat{a}_{nn} \end{array}\right)$$

oder mittels Adjunkten, A sei regulär oder nicht singulär,

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}}{|A|}\text{Unterdet}(a_{ij}^T) = \frac{(-1)^{i+j}}{|A|}|A_{ji}| = \frac{(\text{Adj a})^T}{|A|}$$

folgt aus Cramer-Regel. Speziell:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{31}$$

Matrix mit $|A| << 1$ **bösartig**, fast singulär, ill-conditioned, schlecht-konditioniert. Dietrich & Stahl: Grundzüge der Matrizenrechnung 1970[6]; **Cullen: Matrices and linear forms** 1972[2]; Gantmacher & Krejn: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanisher Systeme 1960; **Hall: Matrices and tensors** 1963 p60 Projektionsoperator; **Orthogonale und unitäre Matrizen** erhalten nicht nur Länge und Winkel, sondern geben fix ihre Inversen her $A^{-1} = A^+ = A^{*T}$. **Unitäre Matrix:** Betrachte Skalarprodukt von Spalte/Zeilenprodukte Spalte 1 mal kongugiert komplexer (Spalte 2)* gleich 0. $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ bedeutet adjungierte Matrix $A^+ = A^{T*} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = A^{-1} \neq A$ ist Inverse zu A. A hat die charakteristische Gleichung $|A - \lambda E| = (i-\lambda)^2 = 0$ mit zweifachem Eigenwert $\lambda = i$ mit beliebigen Eigenrichtungen. Jede Richtung ist Eigenrichtung, weil Matrixmultiplikation $A = iE$ nur Multiplikation mit i bedeutet. Anders bei selbstadjungierten/hermitischen Matrizen $A^+ = A^{T*} = A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ hat die charakteristische Gleichung $|A - \lambda E| = (\lambda - \sqrt{2})\lambda = 0$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \sqrt{2}$ mit den zueinander senkrechten Eigenvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Neben reellen Eigenwerten stets mit unitärer Transformation $U^{-1}AU = D$ **diagonalisierbar** mit den als unitäre Matrix zusammengefassten orthonormalen Eigenvekoren $U = \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ oder, falls die Eigenvektoren mit i multipliziert werden $\tilde{U} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}$.

Also $U^{-1}AU = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D \neq UAU^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

Bei orthogonalen oder unitären Matrizen, wie **Drehung** geht die Invertierung/Bildung der Inversen bequem per Transponierung $O^{-1} = O^T$ oder Adjunktion $U^{-1} = U^+$.

Lösung mittels Inverser $\vec{x} = A^{-1}\,\vec{b}$. **Cramer-Regel:** j-te Spalte in Koeffizientenmatrix durch $\vec{b}$ ersetzen gibt A_j. Dann ist Lösung $x_j = \frac{|A_j|}{|A|}$. Beachte $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$. Boseck: Theorie lin Vektorräume p172f

Bestimmung der Inversen von A: 1. Schreibe $(A|E_n)$ 2. Mittels elementaren Zeilenumformungen obere Dreiecksmatrix herstellen $(D|B)$ 3. Wenn keine Nullzeile vorliegt erhält man $(E_n|A^{-1})$. Invertierung von Blockmatrizen siehe Held: Methoden der statistischen Inferenz: Likelihood und Bayes 2008 p280 Sherman-Morrison-Formel für Inverse einer um dyadisches Produkt veränderten Matrix.

Fredholm'sche Alternative: $A\,\vec{x} = \vec{b}$ besitzt genau dann eine Lösung $\vec{x}$, wenn $\vec{b^T}\,\vec{y} = 0$ für alle Lösungen $\vec{y}$ der homogenen dualen Gleichung $A^T\,\vec{y} = \vec{0}$ gilt. Zu Randwertproblemen siehe Arens: Ergänzungsband p161;

Äquivalente **Vektornormen:** 1-Norm, Summennorm, 2-Norm, Euklidische Norm, ∞-Norm, Maximumnorm

$$||\vec{x}||_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad ||\vec{x}||_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \quad ||\vec{x}||_\infty := \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Äquivalente **Matrixnormen:** 1-Norm, Spaltensummennorm, 2-Norm, Spektral-Norm, ∞-Norm, Zeilensummennorm

$$||A||_1 := \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|, \quad ||A||_2 := \sqrt{\rho(A^T A)}, \quad ||A||_\infty := \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

mit dem Spektralradius $\rho(B) := \max\{|\lambda| \,|\, \lambda \text{ Eigenwert von } B\}$.

Konditionszahl einer Matrix cond(A)=$||A|| \cdot ||A^{-1}||$: Wie wirken sich Fehler A und $\vec{b}$ auf Lösung des Gleichungssystems aus? Knorrenschild p54; Für die Fehlerabschätzung bzgl. des Absolutglieds gilt

$$||\vec{x} - \vec{\tilde{x}}|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\vec{b} - \vec{\tilde{b}}||, \quad \frac{||\vec{x} - \vec{\tilde{x}}||}{||\vec{x}||} \leq ||A|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot \frac{||\vec{b} - \vec{\tilde{b}}||}{||\vec{b}||} = \text{cond}(A) \cdot \frac{||\vec{b} - \vec{\tilde{b}}||}{||\vec{b}||}$$

Für die Fehlerabschätzung bzgl. des Absolutglieds und der Koeffizienten-Matrix gilt

$$\frac{||\Delta\vec{x}||}{||\vec{x}||} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A)\frac{||\Delta A||}{||A||}} \left(\frac{||\Delta A||}{||A||} + \frac{||\Delta\vec{b}||}{||\vec{b}||} \right)$$

Abschätzen = eine Schranke angeben.

Eigenwert-Problem-Idee: Sei A regulär, also det $A \neq 0$. Gibt es Kern der Abbildung = Richtungen im Vektorraum, für die die Wirkung von A durch eine Zahl ersetzt werden kann? $A\vec{x} \overset{?}{=} \lambda\vec{x}$, also $(A - \lambda E)\vec{x} \overset{!}{=} \vec{0}$, aber für nichttriviale Lösung, die allein physikalisch interessant det $(A - \lambda E) \overset{!}{=} 0$. Die **Nullstellen** der Gleichung oder der **Kern** der Gleichung sind gefragt. Zwanghafte **Suche nach vom Nullvektor verschiedenen Kern** oder **zwanghafte Suche nach nichttrivialer Lösung eines homogenen Systems durch Tunen** von λ (insbesondere symmetrischer Matrizen nur reelle Eigenwerte) oder stets bei antisymmetrischer (nur imaginäre Eigenwerte) Koeffizientenmatrix erfüllt. Eigenraum stets 1-dimensional $A\vec{e} = \lambda\vec{e}$, weil EIN Parameter in der Lösung. **Eigenwerte per charakteristischem Polynom, Eigenvektoren per Gauß**. **Eigenwerte per Cramer**. Dietrich & Stahl: Grundzüge der Matrizenrechnung 1970[6] p98; **Eigenwert-Problem-Idee** kann auch als **Verschiebung der Matrix in eine Eigenrichtung** begriffen werden. Siehe Idee der **Resolventen** auf Seite 580. Vogt: Zur **Numerik großdimensionaler Eigenwertprobleme** 2004; **Hall: Matrices and tensors** 1963 p60 Projektionsoperator; **Börm & Mehl: Numerical Methods for Eigenvalue Problems** 2012 ebook; Die Eigenwerte der **Einheitsmatrix** in $\mathbb{R}^n$ sind n-fach entartet. Die Eigen-Vektoren bilden eine beliebige Basis im $\mathbb{R}^n$. **Nutzen der Eigenraumdarstellung:** Gibt es Vektoren im $\mathbb{R}^2$, die bei der Abbildung mit Matrix A auch per reeller Multiplikation abbildbar sind? Ja, wenn man die Vektoren im Eigenvektorraum herausgreift. Bei Vektoren des Eigenraums genügt Multiplikation mit dem Eigenwert, statt Matrix-Multiplikation!

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \to \vec{e}_9 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_9 \cdot \vec{e}_{-1} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_0 = 0$$

Symmetrische Koeffizientenmarizen liefern reelle Eigenwerte und orthogonale Eigenvektoren = einfache deutung für Quantentheorie in Matrixdarstellung!

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \vec{e}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{e}_5 \cdot \vec{e}_{-1} \neq 0$$

Die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** det $(A-\lambda E)\vec{e}=\vec{0}$ sind die **Eigenwerte**. $|A|=-2$.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\ \overset{|A-\lambda E|\overset{!}{=}0}{\Longrightarrow}\ \lambda_\pm=\pm\sqrt{2},\ \vec{e}_+=a\begin{pmatrix}\sqrt{2}+1\\ 1\end{pmatrix},\ \vec{e}_-=b\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix},\ \vec{e}_+\cdot\vec{e}_-=0$$

Eigenvektoren sind linear unabhängig: Seien $A\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i$ gegeben. $\mu_1\vec{v}_1+mu_2\vec{v}_2=\vec{0}$ (*) mal A gibt $\mu_1 A\vec{v}_1+\mu_2 A\vec{v}_2=A\vec{0}=\vec{0}$, also $\mu_1\lambda_1\vec{v}_1+\mu_2\lambda_2\vec{v}_2=\vec{0}$ plus (*) mal $-\lambda_2$ gibt $\mu_1(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}_1=\vec{0}$. Also $\mu_1=0$ und mit (*) $\mu_2=0$ qed. Arens p603; **Goebbels & Ritter: Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation** 2011 p494; **Eigenvektoren symmetrischer Matrizen orthogonal:** $A\vec{v}_i=\lambda_i\vec{v}_i$ und $A=A^T$ gegeben. $\lambda_1\vec{v}_1^T\vec{v}_1=(A\vec{v}_1)^T=\vec{v}_1^T A^T\vec{v}_2\overset{A=A^T}{=}\vec{v}_1^T A\vec{v}_2=\vec{v}_1^T\lambda_2\vec{v}_2$. Also $(\lambda_1-\lambda_2)\vec{v}_1^T\vec{v}_2=0=\vec{v}_1^T\vec{v}_2$. Daher $\vec{v}_1\perp\vec{v}_2$ qed. Arens p609; **Goebbels & Ritter: Mathematik verstehen und anwenden – von den Grundlagen bis zu Fourier-Reihen und Laplace-Transformation** 2011 p494; Mittels **Kongruenz-Transformation** kommt man unmittelbar auf die Eigenvektoren und Diagonalmatrix:

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & V\\ \tilde{V} & A'\end{pmatrix},\quad Q_1=\begin{pmatrix}1 & -V/A_{11}\\ 0 & E_{n-1}\end{pmatrix},\quad Q_1^T\,A\,Q_1=\begin{pmatrix}A_{11} & 0\\ 0 & A''\end{pmatrix}$$

mit $V=(A_{12},A_{13},\ldots,A_{1n})$ und $(n-1)\times(n-1)$-Matrix $B_{ij}=A_{i+1,j+1}-\dfrac{A_{1,i+1}\,A_{1,j+1}}{A_{11}}$ siehe **Margenau & Murphy: Die Mathematik für Physik und Chemie**, Bd1 p399 1964; **Arens: Mathematik p708 f** oder p603 Die **geometrische Vielfachheit** = **Dimension des Eigenraums** zum Eigenwert λ ist stets kleiner oder gleich der **algebraischen Vielfachheit** = Potenz des Linearfaktors $(X-\lambda)^k$. **Diagonalisierbar,** falls für jeden Eigenwert: geometrische = algebraische Vielfachheit. Mathiak & Stingl: Gruppentheorie p89; Netto: Gruppen- und Substitutionstheorie 1909; Boseck: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume 1973 p135 **Sprechweise:** Die reelle Zahl λ ist dann und nur dann ein EW des lin Operators A, wenn die Vektorgl. $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ eine nichttriviale Lösung besitzt oder wenn $A-\lambda E$ nicht regulär ist. Die nichttrivialen Lösungen der Vektorgl. $(A-\lambda E)\vec{x}=\vec{0}$ sind die EV zum EW λ. Die EWn zu einem festen EW λ und der Nullvektor bilden einen linearen Teilraum $W(\lambda)$, der gleich dem Kern des Operatos $A-\lambda E$ ist: $W(\lambda)=(A-\lambda E)^{-1}(\{\vec{0}\})$. Der lin Teilraum $W(\lambda)$, der aus den zum EW λ gehörenden EV und dem Nullvektor besteht, heißt der Eigenraum zum EW λ. Holz & Wille: Repetitorium der linearen Algebra, Teil 2, p207; **Eigenwerte gestörter Matrizen** siehe Kahn, Der **Kern** einer linearen Abbildung ist die Menge aller Argumente, die auf den **Nullvektor** geworfen werden Kern $K:=A^{-1}(\vec{0})=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n|a\,\vec{x}=\vec{0}\}$, **Urbild** der **Null**, entspricht den verallgemeinerten **Nullstellen**: Für Abbildungen $y=f(x)$ also $\{x_N|0=f(x_N)\}$ oder $y=f(x)$ also $\{\vec{x}_N|0=f(\vec{x}_N)\}$ oder linearen Abbildungen $\vec{y}=A\vec{x}$ also $\{\vec{x}_N|\vec{0}=A\vec{x}_N\}$. Oder $\mathcal{L}\phi=\rho$, $\mathcal{L}G(x,x')=\delta(x,x')$ gibt $\phi(x)=\int\mathrm{d}x'G(x,x')\rho(x')$. Eine lineare Abbildung ist genau dann **injektiv**, wenn der Kern nur aus dem Nullvektor besteht. Oder $A\vec{x}=\vec{0}$ hat Lösungsschar. Oder, wenn A kein Volumen hat: det A=0. Schulz: Physik mit dem Bleistift; Wille: Repetitorium der linearen Algebra Bd1 2001 p163ff; **Hauptachsentransformation:** Beseitige gemischte Terme durch Drehung ins Hauptachsensystem, um geometrisch argumentieren zu können - um Kegelschnitt-Typ zu erkennen. **Eigenwert-Problem mit Python und Mathematica:** `EIG = eig(a), EIG[0]` **Eigenwert-Spektrum:** EIG[1] = **Eigenvektoren**, Determinante = det(A), `from time import time` `time()`, `max(eig(M)[0].real)`, `from scipy.stats import *` gibt gleich-verteilt auf (0,1] mit `rand(10,10)`, gauß-verteilt $N(0,1)$ mit `randn(10,10)` oder `norm.rvs(size=(10,10))` und χ^2-verteilt mit 2 Freiheitsgraden `chi.rvs(2,size=(10,10))`, Gauß-Ebene : EIG=eig(M);
`plot(EIG[0].real,EIG[0].imag)` **Eigenwerte online:**http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/eigenwert2.htm **Mathematica:** `Eigenvalues, Eigenvectors, Eigensystem[{{1,2}, {2,3}}]` **Betragsgrößter Eigenwert** $|\lambda_1|>\cdots>|\lambda_n|$ **nebst Eigenvektor per Vektor-Iteration.** Ausgehend von einem günstigen Startvektor $\vec{v}^{(0)}\in\mathbb{C}^n$ konvergiert die Folge $\vec{v}^{(i+1)}=A\vec{v}^{(i)}$ gegen einen Eigenvektor $\vec{v}$ der Matrix A zum Eigenwert λ_1: $A\vec{v}=\lim_{r\to\infty}A^r\vec{v}^{(0)}=\lim_{r\to\infty}A\vec{v}^{(r)}=\lambda_1\lim_{r\to\infty}\vec{v}^{(r)}=\lambda_1\vec{v}$. Poloshi: Mathematisches Praktikum 1963 Kap6 Numerische Methoden der linearen Algebra p282ff Hauptfrage bei Suche nach Eigenwerten: a] Nur ein EW? b] Wenige EWe? c] Alle EWe? A] Direkte Methode nutzt charakteristische

Gl, aber **nicht** durch Entwicklung der Determinante $|A - \lambda E| = 0$, weil wegen $n! \approx n^n$ zeitlich nicht zu schaffen. **restgrößenverfahren = Interpolationsverfahren** = grafische Nullstellenermittlung. Faddejew & Faddejewa: Numerische Methoden der linearen Algebra 1964; **Dietrich & Stahl: Grundzüge der Matrizenrechnung** 1970[6] p171 Für einen oder einige Eigenwerte indirektes Verfahren = **iteratives Mises-Verfahren:** Nimm bei beliebigem Startvektor einen beliebigen Quotienten beliebiger Komponente aufeinander folgender Iteration $\frac{z_{j+1}}{z_j} \to \lambda$. Geht gut, falls $|\lambda_1| > \lambda_i$ und $|\lambda_1| \geq 3|\lambda_i|$. **Kreyszik: Advanced Engineering Mathematics** Kap7.4 Lineare Gleichungssysteme p344ff Geometrische Deutung p346, Gauß-Elimination p347ff, Inverse p365 Determinante p370, Cramer, **Kap7.10 Eigenwerte** p386 Menge aller Eigenwerte = **Spektrum der Matrix**, **Spektralradius** = $\lambda_{\max}$, $\{EV, \vec{0}\}$ = **Eigenraum**. $D(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$ **charakteristische Determinante** = $\sum_0^n b_k \lambda^k$ = **charakteristisches Polynom** =0 = **charakteristische Gleichung**. Kap 7.12 Symmetrische, schiefsymmetrische, **orthogonale** Matrizen, weil sie Transformation leisten, die rechte Winkel in rechte Winkel transformiert = bedeutet Bewegung eines Körpers = erhält Skalarprodukt, Länge und Winkel invariant. Quadrate bleiben Quadrate. **Matrizenspalten/-zeile untereinander orthogonalnormal**, Zeilen und Spalten der quadrat Matrix bilden ein System zueinander orthogonaler Einheitsvektoren, $AA^T = E$ meint **orthogonale Matrix** = bedeutet n^2 Skalarprodukte für Zeilen oder Spalten untereinander, oder $A^{-1} = A^T$. Bilden die Spalten der quadrat Matrix nur ein System **orthgonaler** Vektoren $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, also Matrix mit det $A = \pm 1$ so bleibt nur das Volumen erhalten, nicht aber Gestalt. Kap 7.14 **Eigenvektoren und Diagonalisierung** $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $E_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $S = (E_1, E_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $S^{-1}AS = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ Gantmacher: Matrizenrechnung 1 & 2 1958, 1966; Wilkinson & Reinsch: Linear algebra 1971; Wilkinson: The algebraic eigenvalue problem 1965;

Vogt: Zur **Numerik großdimensionaler Eigenwertprobleme** 2004; Effiziente Lösung großer linearer Gleichungssysteme durch Parallelisierung numerischer Verfahren und iterativer Gleichungssystemloeser: Klassische Splitting-Verfahren, Krylov-Unterraummethoden (CG, GMRES, BiCGSTAB, CGS, ...), Präkonditionierung, Mehrgitterverfahren, Parallelisierung (OpenMP, MPI, PETSc, iterativer Verfahren) Kanzow: Numerik linearer Gleichungssysteme. Direkte und iterative Verfahren 2005 ebook. **Börm & Mehl: Numerical Methods for Eigenvalue Problems** 2012 ebook; **Arnoldi-Verfahren** wie das Lanczos-Verfahren ein iteratives Verfahren zur Bestimmungeiniger Eigenwerte und zugehöriger Eigenvektoren. Zu einer gegebenen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und einem gegebenen Startvektor $q \in \mathbb{C}^n$ wird eine orthonormale Basis des zugeordneten Krylowraumes $\mathcal{K}_m(A, q) = \operatorname{span}\{q, Aq, A^2q, \dots A^{m-1}q\}$ berechnet. Da die Spalten A^iq bis auf eine etwaige Skalierung genau den in der Potenzmethode berechneten Vektoren entsprechen, ist es klar, dass der Algorithmus instabil wird, wenn zuerst diese Basis berechnet würde und anschließend, zum Beispiel nach Gram-Schmidt, orthonormalisiert würde. Der Algorithmus kommt allerdings ohne die vorherige Aufstellung der sogenannten **Krylovmatrix** $K_m(A, q) = \big(q, Aq, A^2q, \dots, A^{m-1}q\big)$ aus. **Trefethen & Bau: Numerical linear algebra** 1997 pdf im Netz. p250ff Arnoldi und alles, was man numerisch bei großen Matrizen braucht; Golub & Van Loan: Matrix Computations 1996[3]; **Satz über die Gerschgorin-Kreise in der komplexen Ebene,** welche die Eigenwerte einer quadratischen Matrix enthalten: Für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt, dass die Eigenwerte von A in der Vereinigung der Kreisscheiben $D\big(a_{k,k}, r_k\big) = \big\{\, z \in \mathbb{C} : |z - a_{k,k}| \leq r_k \,\big\}$ um die Diagonalelemente $a_{k,k}$ mit Radien $r_k = \sum_{j \neq k} |a_{k,j}|$ bzw. bei Betrachtung der transponierten Matrix mit Radien $r_k = \sum_{j \neq k} |a_{j,k}|$ liegen. Jede Zusammenhangskomponente der Vereinigung enthält genauso viele Eigenwerte wie Diagonalelemente der Matrix A.

Satz von Gerschgorin Die komplexen Nullstellen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ eines normierten komplexen Polynoms $p = X^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_0$ liegen in einem Kreis K um den Nullpunkt mit dem Radius r, wobei die Abschätzungen $r \leq \max\{1, \sum_{j=0}^{n-1} |p_j|\}$ und $r \leq \max\{|p_0|, 1+|p_1|, \ldots, 1+|p_{n-1}|\}$ gelten. Arens et al. Ergänzungsband = Bonusmaterial Kap18; **BiCG-Verfahren** = **biconjugate gradients** ist ein iteratives numerisches Verfahren zur approximativen Lösung eines linearen Gleichungssystems. In der Praxis selten verwendet, da ziemlich instabil und anfällig für Rundungsfehler. Basiert auf der Dreitermrekursion des unsymmetrischen Lanczos-Verfahrens. Meister Vömel: Numerik linearer Gleichungssysteme 2005 p165 Arnoldi; Kanzow: Numerik linearer Gleichungssysteme. Direkte und iterative Verfahren 2005 p222ff **Generalized minimal residual method** = **GMRES-Verfahren**, Sei $Ax = b$ und A regulär, so ist n-dim **Krylov-Raum**-Unterraum $K_n = K_n(A, b) = \operatorname{span}\{b, Ab, A^2b, \ldots, A^{n-1}b\}$. ebook. **Börm & Mehl: Numerical Methods for Eigenvalue Problems** 2012 ebook; Pastur: Eigenvalue distribution of large random matrices 2011; T. Tao: Topics in Random Matrix Theory 2012; Carmeli: Statistical theory and random matrices 1983;

Quadratische Matrizen A. **Definitheit von Bilinearformen** und Sesquilinearformen $< \vec{x}, \vec{x} >$, $x^T Ax > 0$ alle Eigenwerte von A positiv, also positiv definit.

Für jede reelle symmetrische Matrix A ist das Produkt $\vec{v} \cdot \vec{w} := \vec{v}^T A \vec{w}$ linear im ersten Argument, symmetrisch wegen der Symmetrie von A - und damit linear im zweiten Argument. Wir nennen eine reelle quadratische Matrix A **positiv definit**, wenn für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $\vec{v}^T A \vec{v} \geq 0$ und $\vec{v}^T A \vec{v} = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ gilt.

Skalarprodukt und Einheitskreise: Arens p682 $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}^T \eta \vec{w}$, wobei η symmetrisch, sonst nicht reflexiv, also Finsler-Geometrie, Länge anisotrop. Speziell mit $\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gibt Einheitskreis $1 = v_1^2 + v_2^2$ für **Euklidisches Skalarprodukt** siehe Arens p677, sonst $\eta_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gibt 'Einheitskreis' = gedrehte Ellipse $1 = v_1^2 + (v_1 + v_2)^2$, $\eta_3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gibt 'Einheitskreis' = Ellipse $1 = 4v_1^2 + v_2^2$.

Hesse-Matrix und relative Extrema. Merziger et al. p135: Jede positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert durch $\vec{v} \cdot \vec{w} := \vec{v}^T A \vec{w}$ ein **euklidisches Skalarprodukt**. **Skalarprodukt, Jacobimatrix siehe Seite 182 und Metrik** ebene Polar-, Zylinder-, Kugel- und Minkowski-(pseudo-euklidische)-Koordinaten:

$$g_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = g = J^T J, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & (r \sin\theta)^2 \end{bmatrix}, \eta_{\mu\nu}^{\mathrm{QFT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\eta_{\mu\nu}^{\mathrm{ART}}$$

Inverse $(g_{ij})^{-1} = g^{ij} = \hat{e}^i \cdot \hat{e}^j = g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 \end{bmatrix}$. Die Wurzeln der Diagonalelemente sind die metrischen Faktoren h_i. **Längenänderung** $\mathrm{d}l_i$ = **metrischer Faktor** h_i $\times$ **Koordinatenänderung** $\mathrm{d}q_i$. Für das **Volumenelement** gilt $g = |g_{ik}| = h_1^2 h_2^2 h_3^2$ mit $\mathrm{d}V = \sqrt{|g_{ik}|}\mathrm{d}u^1\mathrm{d}u^2\mathrm{d}u^3$, **Riley, Hobson, Bence: Math methods for physics and engineering** 1998 p706; **Mathematiker definieren** **kontra**variante **Basisvektoren** als **Tangentenvektoren** der Koordinatenlinien: $\vec{b}^{u_i} = \dfrac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$ und **ko**varianten **Basisvektoren** als **Normalenvektoren** auf den **Koordinatenflächen** $\vec{b}_{u_i} = \operatorname{grad} u_i$ auf den **kontra**varianten und **ko**varianten **metrischen Tensor**

$$g_{u_i u_k} = \vec{b}_{u_i} \cdot \vec{b}_{u_k} = \nabla_{\vec{x}} u_i \cdot \nabla_{\vec{x}} u_k, \quad g^{u_i u_k} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_k}, \quad g_{u_i u_k} g^{u_k u_l} = \delta_{u_i}^{u_l}$$

also zueinander invers. Arens p895; **Die gegengleiche Konvention von ko- und kontra ist in der Physik üblich**. Arens p894; **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p8; Mit diesem ist R^n ein euklidischer Vektorraum, weil so Länge und Winkel bestimmt werden können. Die Bezeichnung ist irreführend, da das Produkt aus dem Grundraum herausführt. **Skalarprodukt also kein algebraisches**

Produkt. Es ist eine Bilinearform $f(\vec{x}) = \vec{a}\cdot\vec{x} = ax+by+cz$ mit Dualraumelement $\vec{a} = (a,b,c) \in U^*$ und Argument $\vec{x} = (x,y,z)$ aus Raum U, wie die Determinante = Multilinearform. **Symmetrische Bilinearform** wegen **Kommutativität** des **Inneres Produkts oder Skalarprodukt**s $<\cdot,\cdot>: U \times U \to \mathbb{R}$ vermöge $(\vec{u},\vec{v}) \mapsto <\vec{u},\vec{v}>$ bilinear, symmetrisch, positiv definit

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{u}^T\vec{v} = (u^i\vec{b}_i)\cdot(v^j\vec{b}_j) = u^i\,v^j(\vec{b}_i\cdot\vec{b}_j) = g_{ij}u^iv^j = \vec{u}^T g_{\text{Metrik}}\vec{v} = u^i\,v^j\delta_{ij} = u^i\,v_i = (\vec{u},\vec{v}) =<\vec{u}|\vec{v}>.}$$

Für **allgemeine/nichtkartesische/schiefwinklige Koordinaten** mit den Grundvektoren/Basisvektoren/Einheitsvektoren (i.a. NICHT Länge eins!) $\hat{e}_i$ und der reziproken Basis $\hat{e}^i$ gilt $\hat{e}_i\cdot\hat{e}^j = \delta_i^j$ ist das Skalarprodukt durch den i.a. voll besetzten, symmetrischen metrischen Tensor definiert:

$$\boxed{g_{ij}u^iv^j = u^iv_i = g^{ij}u_iv_j = u_iv^i = \vec{u}\cdot\vec{v} = (u^i\hat{e}_i)\cdot(v^j\hat{e}_j) = u^i\,v^j(\hat{e}_i\cdot\hat{e}_j) = (u_i\hat{e}^i)\cdot(v_j\hat{e}^j) = u_i\,v_j(\hat{e}^i\cdot\hat{e}^j).}$$

wobei die kovarianten Basisvektoren/Einheitsvektoren/Grundvektoren durch die Tangentenvektoren der Koordinatenlinien $\hat{e}_i = \dfrac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}$ und die kontravarianten Basisvektoren durch die Normalenvektoren auf den Koordinatenflächen $\hat{e}^i = \operatorname{grad} u^i$ gegeben sind. Kurz $g_{ij} = \hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \dfrac{\partial\vec{x}}{\partial u^i}\cdot\dfrac{\partial\vec{x}}{\partial u^j} = J^TJ$. Folglich i.a. $g_{ij} \neq \delta_{ij}$ und $g^{ij} \neq g_{ij}$, aber dennoch $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$. Aber auch für allgemeine orthogonale Koordinaten ist $g_{ij} \neq \delta_{ij}$. Der metrische Tensor ist g_{ij} lediglich diagonal. **Orthogonal bedeutet nicht kartesisch!** Alle bewegten Dreibeine sind (lokal) orthogonal, z.B. Polarkoordinaten: $g_{ij} = \hat{e}_i\cdot\hat{e}_j = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \rho^2\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \delta_{ij}$. Kartesischer Koordinaten bedeuten einen extremen Spezialfall: in diesem Fall sind ko- und kontravariante Basis identisch, der metrische Tensor diagonalisiert und ZUDEM stehen auf der Diagonale allein Einsen $g_{ij} = \delta_{ij}$. **Orthogonal nicht mit kartesisch identifizieren.** Kästner: Vektoren, Tensoren, Spinoren 1960 p140; Riley, Hobson, Bence: Math methods for physics and engineering 1998 p704; Schilcher p245: Zeilenvektoren + Spaltenvektoren geht nicht! Daher **Dualraum** mal **Raum**. Dualraum = Zeilenvektoren = Kovektorenvektoren = Bra-Vektor, isomorph zu Spaltenvektoren = Ket-Vektor. **Pseudo-euklidisch:** Aus Element des Raumes x^μ wird Dualraumelement

$$\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_\nu = \eta_{\mu\nu}x^\mu = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^0\\x^1\\x^2\\x^3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^0\\-x^1\\-x^2\\-x^3\end{pmatrix}.$$

Pseudo-euklidische Metrik auch mit imaginärer Einheit in den Komponenten: $\vec{r} = (ict, x)$ hat Länge i.a. imaginäre Länge, weil Abstandsquadrat auch negativ $\sqrt{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \sqrt{x^2 - c^2t^2}$. Hier wäre ein **imaginärer Abstand zeitartig (SRT)**. Boseck: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume 1973 p212f Isotrope Vektoren = auf Lichtkegel haben Länge 0;. Unterscheidet man kontravariante $(x^\mu) = (ct, x)$ und kovariante $(x_\mu) = (ct, -x)$ Vektoren, so ist die Länge $\sqrt{x^\mu x_\mu} = \sqrt{c^2t^2 - x^2}$, eine **positive Länge wäre hier zeitartig (E-Dyn, QFT)**. Kriterien: i] reelle symm Matrix genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv. ii] reelle symm Matrix genau dann positive definit, wenn alle ihre n Hauptunterdeterminanten positiv. So ist

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix} \tag{32}$$

nicht positiv definit. Hesse-Matrix entspricht dem Transponierten der Ableitung des Gradienten, ist aber bei stetigen zweiten Ableitungen wegen der Vertauschbarkeit der Differentiationsreihenfolge (**Satz von Schwarz**) symmetrisch. **Gegenbeispiel:** ist $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ **Hairer & Wanner: Analysis in historischer Entwicklung** 2008 p342; Ist H an einer Stelle positiv definit, so befindet sich dort ein lokales Minimum der Funktion. Ist H dort negativ definit, so handelt es sich um ein lokales Maximum. Ist H indefinit, dann handelt es sich um einen Sattelpunkt der Funktion, d. h., es liegt weder ein Minimum noch ein Maximum vor. Falls H an der untersuchten Stelle nur semidefinit (Eigenwert verschwindet) ist, so versagt dieses Kriterium. **Schäfer: Theoretische Grundlagen der Stabilität** technischer Systeme 1976 p14f;

Das Polynom $\chi_A := |A - X\,E_n| = (-1)^nX^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0 \in \mathbb{R}[X]$ vom Grade n heißt **charakteristisches Polynom der Matrix** A. Es gilt: $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. Nullstellen gemäß Obreschkoff, Nikola: Verteilung und Berechnung der Nullstellen reelle Polynome 1963. **Nullstellensuche: Bisektion** R-Funktion `uniroot(f,interval, tol, ...)`, f = lambda x:sin(1./x)def bisec(a,b):

Regula falsi = Regel des Falsche startet mit zwei Stellen in der Nähe der Nullstelle a_0 und b_0, deren Funktionswerte $f(a_0), f(b_0)$ unterschiedliche Vorzeichen haben. In $[a, b]$ befindet sich somit nach dem Zwischenwertsatz (für stetiges f) eine Nullstelle. Nun verkleinert man in mehreren Iterationsschritten das Intervall und bekommt so eine immer genauere Näherung für die Nullstelle. **Newton-Raphson-Verfahren:** Nimm Nullstelle des Taylor-Polynoms erster Ordnung auf dem Intervall $[a, b]$ für $f(a) \cdot f(b) < 0$: $0 = f(x_N) = f(x_0) + f'(x_0)(x_N - x_0)$, also $x_N = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$, Die Nullstelle des Taylor-Polynoms erster Ordnung einer Funktion wir zur Bestimmung aller ihrer Nullstellen benutzt. R-Funktion `optimize(f,interval, ...)`, Sekanten-Methode. Held: Methoden der statistischen Inferenz. Likelihood und Bayes 2008 p287ff;

Jordan-Normalform Arens p616 ist von einigen Einsen in der oberen Nebendiagonalen abgesehen eine Diagonalform. Lorenz: Lineare Algebra II 1992[3] p160; Holz & Wille: Repetitorium der linearen Algebra 2, 2002;

Äußeres Produkt, Vektorprodukt für Drehimpuls im 4-dimensionalen Raum.

14 Hilbert vs Descartes Traum: Geometrie, Tensoren, Plangrößen, Topologie

Siehe erste Kapitel oder Anhänge von Mechanik-Büchern: Jelitto 1 & 2; Haake (pdf), Rebhan; Wess (e-book); Dreizler (e-book); Greiner 1 & 2; Nolting 1 & 2 (e-book); Kuhn: PfL 9; Stephani & Kluge; Mestscherski: Aufgabensammlung zur Mechanik. Hochschulbücher für Physik Bd13 1955; Neuber: **Lösungen zur Aufgabensammlung Mestscherski**. Hochschulbücher für Physik Bd19 1956; Kuypers; Schulz: Physik mit dem Bleistift. Singer & Syrbe: Repetitorium und Aufgabensammlung 1971; Kargermann & Köhler: Aufgabensammlung theoretische Physik 1. Mechanik 1986[2]; Tiebel: Theoretische Mechanik in Aufgaben. Mathematica. **Links zu den e-books**
`http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/Lehre/lehrangebot/2009SS/Mech.html` Spencer & Moon: Vectors 1960; S̃pencer & Moon: Field theory for engineers 1960; Promberger: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der theoretischen Elektrotechnik 1960; Kästner: Vektoren, Tensoren, Spinoren 1960, 1964; Pach & Fery: Vector and tensor analysis 1964; **Wunsch: Feldtheorie** 1 1973[2], 2 1975;

Descartes Traum: Numerische Verortung zwecks **Methodenauslagerung.** + rascher und sicherer Zugriff auf und Umgang mit Gewissheiten. Gödel lagerte gar die Logik aus indem er zeigte, dass den Elementen eines formalen Systems formaler Arithmetik (den Zeichen oder Symbolen selbst, also Symbolfolgen/Formeln und Folgen von Formeln, eben auch beweisen) eine numerische Darstellung zugeordnet werden kann: **Gödelisierung**. Yourgrau p77; - Verstehen und Basis-Ideen bleiben unsichtbar und geheimisvoll. Wissen als Geheim-Code. Verortung selbst ist Physik, weil angewandte Geometrie. Positionsbestimmung/Ereignisfixierung $\vec{x}(t)$ setzt Raum und Zeit als Bühne/Behälter/Minkowski-Diagramm voraus. Kalkül ersetzt Anschauung, aber nicht das Verstehen. Decartes: Rechnen statt Zeichnen. Gegenbewegung durch Hilberts Anschauliche Geometrie 1932. Efimow: Höhere Geometrie 1960 projektive Geometrie p225, Gruppentheorie p393, Minkowski-Raum p425; **Schutz: Geometrical Methods of Mathematical Physics** 1980; Wiedergänger a la Descartes waren die Mathematiker der Bourbaki-Gruppe. Axiomatischer Aufbau der Mathematik. Die Geometrie wird oft mit der Behandlung der topologischen Vektorräume als erledigt angesehen. Die Homogenität der Raum-Zeit führt auf Impuls- und Energie-Erhaltung. Kant: Kritik der reinen Vernunft. Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung. F̃ierz: Vorlesungen zur Entwicklungsgeschichte der Mechanik 1972; Heun: Formeln und Lehrsätze der Allgemeinen Mechanik. In systematischer und geschichtlicher Entwicklung dargestellt 1902; Poincare: Wissenschaft & Methode. Physik ist angwandte Geometrie. **Einstein: Geometrie & Erfahrung**. Callahan: **Euclid or Einstein.** A Proof of the Parallel Theory and a Critique of Metageometry 1931; Janich: **Euklids Erbe. Ist der Raum dreidimensional?** 1989; **Genz: Eine kleine Geschichte des Raumes** PdNPiS Bd50 2001 H3; **Weyl: Raum, Zeit, Materie** 1918, 1923[5], mit Ehlers Anmerkungen 1993[8].

Fueter: Weyl Nachruf PhysBl12 1956 p33-35. Weyl: Selecta 1952; H̃ermann Weyl: Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie 1985; **Speiser: Hermann Weyl**, PhysBl42 1986 H2 39-44; John Archibald Wheeler: Hermann Weyl and the unity of knowledge, American Scientist Juli 1986; D̃eppert, Hübner, Oberschelp, Weidemann (Hgs): Exact Sciences and their Philosophical Foundations. Exakte Wissenschaften und ihre philosophische Grundlegung. Vorträge des Internationalen Hermann-Weyl-Kongresses, Kiel 1985, 1988. Neumann: Hermann Weyl 1885-1955 Wissenschaft und Fortschritt 1985 H11 295; Erhard Scholz: Hermann Weyls Raum, Zeit, Materie 2001; **Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität** 1964; **anti-descartischer Auftakt:** Frankel: Gravitational Curvature. An Introduction to Einstein's Theory 2011; **Liebscher: Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal** 1977, 1991. Born: Die RT Einsteins 1920 p170ff 1969 205ff; Joos: LB der theoret Physik 1989[15] Veranschaulichung der Lorentz-Transformation durch **Minkowski-Diagramme** p235ff; Bergold: Relativitätstheorie in der Kollegstufe. Leistungskurs, In: DER PHYSIKUNTERRICHT 8 H4 1974 p5-30 Krämer: Relativitätstheorie Materialien für die Sekundarstufe II 1977; Resnick: Einführung in die spezielle Relativitätstheorie 1976; Gschwind: Raum, Zeit, Geschwindigkeit 1986; Gruner 1869-1957: Eine elementare geometrische Darstellung der Transformationsformeln der speziellen Relativitätstheorie, PhysikalischeZeits 22 1921 p384–385; **P̃aul Gruner: Elemente der Relativitätstheorie. Kinematik und Dynamik des eindimensionalen Raumes** 1922; Paul Gruner: Graphische Darstellung der speziellen Relativitätstheorie in der vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt I. ZfPhysik10 1922, p22–37 und 227–235; Moore: Six ideas that shaped physics. Unit R. The law of physics are frame independent; **Liebscher: Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene. Illustrationen zum Wechselspiel von Geometrie und Physik** 1999; Liebscher: Relativitätstheorie zum Mitmachen. Der kürzeste Weg zu $E = mc^2$ PdN=PiS54 2005 11-17; Liebscher: **The geometry of time** 2005; **Richter-Gebert & Orendt: Geometriekalküle** 2009; Gschwind: Raum, Zeit, Geschwindigkeit 1986; **Benz: Geometrische Transformationen unter besonderer Berücksichtigung der Lorentztransformationen** 1992 Eine Abbildung der Ebene in sich, die den euklidischen Abstand 1 erhält, ist bereits eine klassische kongruente Abbildung. Dies ist ein Spezialfall des Satzes von Beckmann und Quarles. Eine bijektive Abbildung der vierdimensionalen Raum-Zeit, die dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit genügt, ist, abgesehen von einer Streckung, bereits Lorentztransformation. Benz: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Geometrien von Möbius, Laguerre-Lie, Minkowski in einheitlicher und grundlagengeometrischer Behandlung 1973; **Dray: The geometry of special relativity** 2012; **Callahan: The Geometry of Spacetime. An Introduction to Special and General Relativity** 2001[2]; **Weber: General relativity and gravitational waves** 1961; Robb: Geometry of Time and Space 1914, 1936[2]; Robb: The absolute relations of time and space 1921 https://archive.org/details/absoluterelation00robbiala; **Frankel: The Geometry of Physics**. An Introduction 2011[3] 750 Seiten

$$\mathrm{vol}^n = o(x) \wedge_{i=1}^n x^i, \mathcal{J}^{n-1}\mathrm{vol}^n, -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \sigma^n = \int_{\partial\Omega} \mathcal{J}^{n-1}$$

Ñakahara: Geometry, Topology and Physics 1990;

Scalar: $T, t, s, m, E, W \in R$ has only numerical magnitude. $T = \{T\}[T]$ mit $\{.\} \in R$. Blätter können nicht addiert werden.

Vektor = Reisender = traveler, passenger, voyager = Spur der Bewegung. Verschiebung. Pfeil. Verschiebungsvektor **Vektor** hat numerischen Wert = **Modulus, Magnitude** und **Richtung**: $\vec{v} = |\vec{v}|\,\hat{v} = v\,\vec{v}^o$=**Betrag mal Einheits-Richtung**. **Größe (Betrag), Richtung, Wirkungslinie**. Klasse $\neq$ Pfeil, der nur ein beliebiger Repräsentant ist! 4-er-Vektoren in SRT. **Vektor** v **ist Element eines linearen Raums** $(V, +, \cdot)$ **über dem Körper/Feld** $\mathbb{K}$**,** wobei $\cdot$ die skalare Feldmultiplikation ist, $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

Notation: bold in books **A**, easier to handwrite $\vec{A} \in R^n$, $\underline{A} \in R^n$ or $|b> \in R^n$, components of a vector by

a script $A_x \in R$ or $b_i \in R$.

$(P, V, +)$ sei reeller n-dim **affiner Raum** $\leftrightarrow$ 1. V reeller n-dim Vektorraum, 2. P nichtleere Punktmenge, 3. Verknüpfung von Punkt (Ortsvektor $\vec{r}_A$) A und Verschiebungsvektor $\vec{a}$ $+: P \times V \to P$ vermöge $(A, \vec{a}) = A + \vec{a} = B \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Vektoren als Verschiebungen. Oniscik & Sulanke: Algebra und Geometrie 1977 §3 Axiome der affinen Geometrie Militärische Luftraumüberwachung. Ablauf Zielbekämpfung per Leitmethode: A] Zielaufklärung per LOPAR = low power aquisition radar im S-Band 2-4 GHz, 230 km Rundblick liefert Koordinaten nebst IFF = identification friend or foe an Batterie. B]atterie: TTR = target tracking radar liefert (θ_T, φ_T) und TRR = target range radar liefert r im X-Band 8-12 GHz an Feuerleitcomputer. Also Target-Position $\vec{r}(r_T(t)\theta_T(t), \varphi_T(t)) = r_T\hat{r}(\theta_T, \varphi_T)$. MTR = missile tracking radar (θ_m, φ_m) auch an Feuerleitcomputer, der Abfangpunkt in Kugelkoordinaten und Kursberechnung an Abfangrakete sendet. C] Gefechtskopfdetonation per Funk mittels a] Feuerleitcomputer b] manuell durch Batterieführer c] Selbstzerstörung nach 2 sec Abriss Lenksignal. Problem der Leitmethode: Feuerleitcomputer und 3 Radargeräte verfolgen nur EIN Ziel, was bei Mehrfachsprengköpfen nicht optimal. Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$ Thirring: Mechanik Bd1 p158 **Affin = inhomogen linear** $y = mx + b$.

Vektorfunktion: Gerichtete Größe $\vec{E}(t, \vec{r}) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ beim Ort $\vec{r}$ zur Zeit t oder Raumpunkt zur Zeit t ist $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Isham: Modern differential geometry for physicists 1989; Jänich: Mathematik Bd2; Jänich: Vektoranalysis;

Parameterdarstellung einer Geraden/Wirkungslinie/Bahn/Trajektorie: $\vec{x}(t) = \vec{x}_o + t\,\vec{v}$.

Geben Sie eine Parameterdarstellung für die durch den Punkt $P_o = (1, 0, -2)^T$ verlaufende Gerade parallel zum Vektor $\vec{v} = \frac{1}{2}\hat{e}_x + 2\hat{e}_y = \hat{e}_z$ an.

Zwei-Punkte-Gleichung *durch $P_o = (1, 0, -2)$, $P_1 = (2, 4, -4)$:* $\vec{x}(t) = \vec{P}_o + t\,\vec{P_oP_1} = \vec{P}_o(t) = (1, 0, -2) + t(1, 4, -2)$

$\vec{x}(t) = v\,t\,\hat{e}_x + \cos\omega\,t\,\hat{e}_z$ Autokolbenbewegung, Arens-Aufgabe.

Erdbewegung bzgl des galaktischen Zentrums: Sonne im Abstand von 25.000 bis 28.000 Lichtjahren = 250 Em oder 7.94 kpc. Galaktisches Jahr = 230 Mio Jahre. Umlaufgeschwindigkeit von ca. 267 km/s = 961.200 km/h.

Vektor-Feld oder -Funktion als Funktion eines Vektor: $\vec{v}(\vec{x}) : R^3 \times R^3 \to R^3$. Windfelder.

Magnitude of a vector: length, magnitude, norm, **Modulus** $A = |\vec{A}| = ||\vec{A}|| = mag(\vec{A}) = abs(\vec{A}) = modulus(\vec{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n A_i^2} \geq 0$ of the arrow representing a vector $\vec{A} \in R^n$. $mag(\vec{A}_x) = |A_x| \neq A_x$! Nichteuklidisch bei 4-er-Vektoren in SRT.

Addition of vectors: $\vec{A} + \vec{B}$ component wise or head to tail addition, try this geometrically! Algebra (+commutative, associative, inverse, neutral), multiplication with a real number, subtraction of vectors, zero vector. A vector of length 1 is called a unit vector $\vec{A}^o = \vec{A}/|\vec{A}| = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}(A_x, A_y, A_z)^T$, $|\vec{A}^o| = 1$.

Vektorzerlegung von $\vec{F} = \vec{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k}$ in die Richtungen der Vektoren $\vec{a} = -3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ und $\vec{c} = \hat{i} - 2\hat{j} - 3\hat{k}$ gibt $\vec{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} = \vec{F} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = (-3\alpha + 2\beta + \gamma)\hat{i} + (\alpha + 3\beta - 2\gamma)\hat{j} + (-2\alpha - \beta - 3\gamma)\hat{k}$. Gauß-Algorithmus gibt $\vec{F} = \frac{1}{52}(23\vec{a} + 61\vec{b} - \vec{c})$. **Statik & Kraftzerlegung/-erhaltung, Geschwindigkeitszerlegung**, Ski am Hang, Hochseil mit Krad bei mittiger Aufhängung, ausgelenktes Fadenpendel, Wasseroberfläche eines um seine Symmetrieachse rotierenden Eimers, Geschwindigkeits-Vektor stets tangenzial zur Bahn, denn $\hat{t}^2 = 1 \quad \to \quad \hat{t}\cdot\dot{\hat{t}} = 0 \quad \to \quad \hat{t} = \mathrm{d}\vec{r}|\vec{v}^o = \dot{\hat{t}}$:

$$v_i = \dot{x}_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_i(t + \Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}, \ \vec{\text{velocity}} = \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \vec{v}^o\, v_{\text{tangential}} = \vec{t} \cdot \text{speed}, \text{speed} = v = \sqrt{v_i v^i} = \dot{s}$$

wobei $s(t, t_0) = \int_{t_0}^t \mathrm{d}t\ v = \int_{t_0}^t \mathrm{d}t \sqrt{v_i v^i}$. Duschek & Hochrainer: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung Bd3 p2; Schwimmer möchte zur gegenüberliegenden Seite bei konstanter Flussströmung,

gespanntes Seil über Straße, Hangabfahrt (Kraft? Man wird leichter), auskragender Ausleger an dem Körper der Masse hängt. Haltekraft für gleitenden und rollenden Körper am Hang.

Welchen Winkel müssen zwei an gleichem Punkt angreifende Kräfte von gleicher Größe miteinander bilden, damit ihre Resultierende wiederum die gleiche Größe hat? Nickel: Geometrie p474;

Vectors in terms of components in a Cartesian coordinate system: $\vec{A} = \sum_{i=1}^{n} A_i\,\hat{e}_i$ where $\hat{e}_i$ are **directionals**.

Multiplication of vectors:

Skalar-, dot-, inneres Produkt: Sonderfall der **Kontraktion**, siehe Seite 567. $\cdot : R^3 \times R^3 \to R$ vermöge $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\cos\Theta = A\,B\cos\Theta = |\vec{A}|\,|\vec{B}_A| = |\vec{A}_B|\,|\vec{B}| = A_i\,B^i$, $\vec{A}\cdot\vec{A} = A^2$ Deutungen: Welche geometrischen Objekte werden durch $|\vec{x}| = 1$, $|\vec{x}-\vec{x}_o| = R$, $\vec{x}\cdot\vec{e} = 0$, $\vec{x}\cdot\vec{k} = k^2$ beschrieben?

Angle between two vectors: $\vec{A} = (3,6,9)^T$ and $\vec{B} = (-2,3,1)^T$ yields
$3\sqrt{14}\sqrt{14}\cos\Theta = 21$.

Typische Anwendungen: **Winkel, Parallelkomponente, mechanische Arbeit, 1-Form, Kovarianz für Zufallsvariablen, qm. Zustandsfunktion/Wellenfunktion** $<\Psi,\Phi>$**. Geraden und Hyper-Ebenen-Darstellung mittels Hesse'scher Normalform:** $\vec{n}\perp(\vec{x}-\vec{a})$ durch $\vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{a}) = 0$, statt Abschnittsform $ax+by+cz = d$ oder Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$. Analog zur Abschnittsform $ax+by+d = 0$ einer gerade in der Ebene: $y = -\frac{a}{b} - \frac{d}{b}$ mit **Normalenvektor** $\vec{n} = (a,b)$ ist bei **Ebenengleichung** $Ax+By+Cz+D = 0$ der **Normalenvektor** $\vec{n} = (A,B,C)$. Falls P_0 in der Ebene liegt gilt für alle Ebenenpunkte $\vec{r}$ die Gl $(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$ oder $Ax+By+Cz = \vec{r}\cdot\vec{n} = \vec{r}_0\cdot\vec{n} = -D$ oder senkrechter Abstand d_E der Ebene vom Ursprung $\vec{n}\cdot\vec{d}_E = |\vec{n}|d_E$, also $d_E = \frac{\vec{n}\cdot\vec{d}_E}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ plus senkrechter Abstand d_0 des Punktes von der Ebene $d_0 = \frac{\vec{n}\cdot\vec{d}_0}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ gibt ist gesamt $d = \left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$. Nickel: Algebra und Geometrie p502. Welchen Abstand hat der Punkt $P_1(2,-3,-1)$ von der Ebene, deren Schnittgerade mit der x-y-Ebene $2x+3y = 6$ und mit der x-z-Ebene $x+2z = 3$ ist? Die Ebenengleichung ist daher $2x+3y+4z-6 = 0$.

Abstand eines Punktes P_1 **von der Ebene** $Ax+By+Cz+D = 0$ **ist** $\boxed{d = \left|\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|} = \left|\frac{2\cdot 2+3\cdot -3+4\cdot -1-6}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}\right| = \frac{15}{\sqrt{29}} \approx 2.8$.

Perpendicular and parallel vectors: $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$, $\frac{A_i}{B_i}$ =const.

Satz des Thales *624 v.Chr.: $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = 0$. Herleitung Kosinussatz aus $\vec{a}-\vec{b} = \vec{c}$ wird $a^2+b^2-2\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{c}^2 = c^2$ also $a^2+b^2-2ab\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{c}^2 = c^2$ oder speziell **Pythagoras** bei euklidischer Metrik $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, falls $\vec{a}\perp\vec{b} = 0$! $c^2 = \sum a_i^2$. Deutung c^2 als Quadratinhalt weist auf Quadrat mit Kantenlänge c als geometrisches Objekt hin. Die Summe der rechten Seite deutet eine beliebige Summe von Inhalten von Quadraten mit Kantenlängen a_i hin. Spezielle Deutung, falls die drei Quadratkanten je eine Kante eines rechwinkligen Dreiecks darstellen. $ch_c = ab$, $c_ac = a^2$, $c_bc = b^2$ gibt $(c_a+c_b)c = c^2 = a^2+b^2$. **Sichtweite:** w auf Kugel mit Radius R bedeutet $x^2 = R^2+w^2$ mit $x = R+h$, wobei h Höhe des Beobachters über der Kugel. Bedeutet $w^2 = 2hR+h^2$, Mensch $h = 2$ m, $R = 6\cdot 10^6$ m wegen $2R \gg h$ etwa $w = \sqrt{2hR}$. w(2m)=5km oder w(10m)=11km. Barth: Mathematik-Unterricht. DdM18 1990 304-314; Pickert: Replik. Problem Skalarprodukt und Pythagoras gibt es nicht! DdM18 1990 p315-22; **Beweisideefindung** a] Bastelarbeit. Zerschneide Kathetenquadrate und passe die Bruchstücke systematisch in das Hypothenusenquadrat ein. b] Ziehe Hilfslinien durch die Ecken der Quadrate und entdecke kongruente Dreicke. **Euklids Beweis** siehe Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik 1981 p150-154 mit 4 Hilfslinien erkennt man je zwei kongruente Dreiecke, die die Flächengleichheit $c^2+ab = a^2+b^2+ab$ allein auf Basis der Flächenberechnung von rechwinkligen Dreiecken erlaubt. Oder siehe Polya: How to solve oder; Thiele oder Aigner. Betrachte über der Seite a die Höhe h. Rechts liege γ. Addiere $h^2 = b^2-e^2$, $d^2 = (a-e)^2$ zu $c^2 = h^2+d^2$. Nach Schroeder geht der junge **Einstein** von Ähnlichkeit der Dreiecke aus,

weshalb für deren Flächeninhalten folgende Proportionalitäten gelten $E_a = ma^2, E_b = mb^2, E_c = mc^2$. Man sieht sofort $E_a + E_b = E_c$. Beweis durch Hingucken unter Nutzung des cavalierischen Prinzips. **Liebscher: Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene. Illustrationen zum Wechselspiel von Geometrie und Physik** 1999 p93; Beweis geht auch analytisch per Ähnlichkeit beim rechtwinkligen Dreieck $\frac{h_c}{c''} = \frac{c'}{h_c} \Leftrightarrow \frac{h_c}{a} = \frac{c'}{b} \wedge \frac{c''}{a} = \frac{h_c}{b}$ und Recheckinhalt: $ab = ch_c$.

Vektor Produkt = gerichtete Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildeten Parallelogramms ist **Tensor-Produkt** zweier Vektoren und damit ein **Tensor 2. Stufe**, also Abbildung mittels schiefsymmetrischer Matrix, siehe Seite 264, Plangröße oder **axialer Vektor**. Alternative Betrags-Vorstellung: $|\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin\angle(\vec{a},\vec{b})$. Anwendung Herleitung Pendelkraftmoment $M = |\vec{l}\times\vec{G}| = mgl\sin\angle(\vec{l},\vec{g})$. $\times : R^3 \times R^3 \to R^3$
vermöge $\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = (A_2B_3 - A_3B_2, A_3B_1 - A_1B_3, A_1B_2 - A_2B_1) = \vec{C} = \hat{e}^i C_i = \epsilon_{ijk}\hat{e}^i\, A^j\, B^k,}$ mit $\epsilon_{ijk} := \hat{e}_i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$, es geht also ko- und kontravariant beim Vektorprodukt durcheinander, was man durch $\epsilon^i{}_{jk} := \hat{e}^i \cdot (\hat{e}_j \times \hat{e}_k)$ willkürlich steuern kann. **Merkregel Vektor Produkt:** Laplace-Entwicklung oder Sarrus

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & a_1 & b_1\\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2\\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3\end{pmatrix} = \vec{e}_1\begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} - \vec{e}_2\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix} + \vec{e}_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix} = (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,\vec{e}_2 +$$

$$(a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\vec{e}_3 \text{ oder per zyklisch versetztem Reißverschluss } \vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}a_x\\ \overset{1}{\downarrow} a_y\\ \overset{2}{a_z \downarrow}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_x\\ \overset{2}{b_y \downarrow}\\ \overset{1}{\downarrow} b_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overset{1}{a_y}b_z - \overset{2}{a_z}b_y\\ a_zb_x - a_xb_z\\ a_xb_y - a_yb_x\end{pmatrix}.$$

Deutung: $\vec{x}\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a}$ offenbart nach $|\cdot\vec{b}$ eine durch den Ursprung senkrecht zum Vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ der Länge $\boxed{|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle(\vec{a},\vec{b})}$ gehende Ebene: $\vec{x}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{0}$. Man kann das Vektorprodukt $\vec{b}\times\vec{a}$ auch rein geometrisch deuten und alle flächengleichen Parallelogramme meinen, die in der zu $\vec{b}\times\vec{a}$ senkrechten Ebene liegen und deren eine Seite durch $\vec{a}$ gegeben ist. Man erkennt in $\vec{x}\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a}$ ein unterbestimmtes Gleichungssystem mit einer singulären Koeffizienten-Matrix unterbestimmt ist und somit der Lösungsraum eine Ebene ist. Vektorprodukt beim **Parallelogramm** mit Kanten $\vec{a} = \hat{e}_x$ und $\vec{b} = \alpha\hat{e}_x + \hat{e}_y$ bedeutet **Prinzip von Cavalieri** $\vec{a}\times\vec{b} = \hat{e}_x \times (\alpha\hat{e}_x + \hat{e}_y) = \hat{e}_z$. Kurz: Da alle Vektoren $\vec{b}_n$, die die gleiche Normalkomponente $\vec{b}'_{\vec{a}}$ besitzen, mit $\vec{a}$ das gleiche Vektorprodukt ergeben, kann aus $\vec{a}\times\vec{b}$ und dem Vektor $\vec{a}$ der **Vektor $\vec{b}$ nicht eindeutig bestimmt** werden: $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\vec{b}'_{\vec{a}} = \vec{a}'_{\vec{b}}\times\vec{b}$! **Noch kürzer**: Jeder Vektor kann als Vektor-Produkt zweier beliebiger zu ihm senkrechter Vektoren gedacht werden! Hierbei werden polare und axiale Vektoren zusamengeworfen. Kreuz- oder Vektor-Produkt ist **bilinear** $\vec{a}\times(\beta\,\vec{b}+\gamma\,\vec{c}) = \beta\,(\vec{a}\times\vec{b})+\gamma\,(\vec{a}\times\vec{c})$, $(\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b})\times\vec{c} = \alpha\,(\vec{a}\times\vec{c})+\beta\,(\vec{b}\times\vec{c})$, ist **alternierende Abbildung** $\vec{a}\times r\vec{a} = \vec{0}$, ist **antikommutativ** $\vec{a}\times\vec{b} = -\,\vec{b}\times\vec{a}$, es gilt als Ersatz für die fehlende Assoziativität die **Jacobi-Identität** $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = \vec{0}$. Das Kreuzprodukt ist nicht assoziativ. Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ bildet eine Lie-Algebra, wenn man die Lie-Klammer als das Kreuzprodukt definiert. Stattdessen gilt die Jacobi-Identität, das heißt die zyklische Summe wiederholter Kreuzprodukte $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) + \vec{c}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right) = 0$. Folge: **Graßmann-Identität** = BAC-CAB-Regel $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ oder $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$. Das Vektorfeld $\vec{A}(x,y,z) = \vec{\omega}\times\vec{x}$ sind mit senkrechtem Abstand vom $\vec{\omega}$ linear wachsende Tangenzialvektoren auf konzentrischen Zylindern, kurz **starre Rotation** um Achse $\vec{\omega}$ beschreibend. Nickel et al.: Algebra und Geometrie für Ingenieure 1971[6], p506f; Das **Hodge-Stern-Produkt** vermittelt zwischen diesen beiden Konzepten. **Das ϵ-Symbol ist kein Tensor**, sondern als **verallgemeinertes Kronecker-δ** ein **Permutationssymbol mit Pseudo-Tensor-Eigenschaft**, geschaffen für die Leibniz-Definition der Determinanten = Volumen. Tensor hat basis**abhängige** Komponenten. δ_{ij} und Levi-Civitta-Symbol sind aber basis**unabhängig**, also Konstanten! Genauer: $\mathrm{vol}^n = o(y)\sqrt{g(y)}\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}$ ist eine Pseudo-n-Form! Damit sind die Komponenten $\sqrt{g(y)}\epsilon_{i_1,\ldots,i_n}$ Komponenten eines kovarianten **Pseudo-Tensors** vom Rang n. $g_{ij}(y)$ ist der Riemann'sche metrische Tensor. Siehe auch Seite 567 und **Frankel: The Geometry of Physics**. An Introduction 2011[3] p67; Die Regeln des Kreuzprodukt für 7 Dimensionen $e_i \times e_{i+1} = e_{i+3}$ zyklisch modulo 7 mit $(a\times b)\cdot a = 0$ und $(a\times b)\cdot b = 0$ für die **Orthogonalität** und **Pythagoras** $|a\times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a\cdot b)^2$ gehen nur für $n = 3$

und $n = 7$! **Lounesto: Clifford algebras and spinors** 2001 p96; Im n-dimensionalen Raum ist das Kreuzprodukt von $n-1$ Vektoren per Determinante g definiert durch

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ \vec{e}_2 & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{e}_n & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix},$$

analog zu der oben erwähnten symbolischen Berechnung mit Hilfe einer Determinante. Der Vektor $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1}$ ist orthogonal zu $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$, die Orientierung ist so, dass die Vektoren $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Der Betrag von $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \cdots \times \vec{a}_{n-1}$ ist gleich dem $(n-1)$-dimensionalen Volumen des von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_{n-1}$ aufgespannten Parallelotops. **Wie alle Räume mit Vektorprodukt** ausgestattet werden siehe letzte Seiten von Eckmann: Stetige Lösungen linearer Gleichungssysteme, CommMathHel15 1942/43 p318-339;

Für $n = 2$ erhält man dabei kein Produkt, sondern nur eine lineare Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix},$$

die Rotation um 90° im Uhrzeigersinn. Eine noch weitergehende Verallgemeinerung führt auf die Graßmann-Algebren.

Typische Anwendungen: **(Feld)-Spat als Volumen, Drehimpuls = Drall, Kraftmoment, Lorentz-Kraft, Pointing-Vektor.**

$\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{x}) = (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x)$.

Zylinderkoord: $\vec{r} = \rho \cos\phi \hat{i} + \rho \sin\phi \hat{j} + z\hat{k}$

Gartmann: Vom Kompass zur Funkmesstechnik 1954; DVD: NVA Funker. Scharfschützen im Äther 1961 bis 1987; Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$. Otto: Militärtechnische Hefte. Funkmeßtechnik präzis, zuverlässig 1986; Polarkoord: $\vec{r} = \rho\cos\phi\hat{i} + \rho\sin\phi\hat{j}$. **Kartesische Basis in Gestalt polarer Basis:** $\hat{y} = \hat{\rho}\sin\varphi + \hat{\varphi}\cos\varphi$.

$$\vec{r}(t) = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} = \rho\hat{e}_\rho, \quad \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho} \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) \\ \sin\varphi(t) \end{pmatrix} + \rho\dot{\varphi}(t) \begin{pmatrix} -\sin\varphi(t) \\ \cos\varphi(t) \end{pmatrix} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}(t)\hat{e}_\varphi.$$

$$\ddot{\vec{r}}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi$$

Beschleunigung mit **Handy per Accelerometer Monitor**-App von **mobile-tools.eu** https://play.google. com/store/apps/ details?id=com.lul. accelerometer wird mit kapazitivem Lage-Sensor erfasst. **Lagesensor** ist gekickter Federschwinger als Kondensatorplatte. Kondensatorreihenschaltung mit beweglicher mittlerer Elektrode als Schwingkörper der Masse m: $C_1 = \epsilon_0 \dfrac{A}{d_0 + \delta}$ und $C_2 = \epsilon_0 \dfrac{A}{d_0 - \delta}$. **Wheatstone-Brücke** erfasst die Abweichung von Ruhelage. Watzka: Beschleunigungssensoren PdNPiS Bd61 2012 H7 p25-33; Vogt: Beschleunigungssensoren von Smartphones: Beispielexperimente zum Einsatz im Physikunterricht PdNPiS Bd60 2011 H7 p15-22; Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule Spezialheft 2011 und 2014. Solin: Machine Learning and sensor fusion. IndoorAtlas im Haus 1m Genauigkeit. Indoorposition Odometrie auf Basis des Magnetfeld. Die extrem billigen Sensoren sind eine Herausforderung für Orientierung. Modellfamilien: SDEs aus Beobachtungsmodell. Wegen hoher Abtasrate sind die Fehler stark korreliert. Learning Part: finding the model parameter. Parameter sensor biased! Inertial Navigation, man muss dauernd die Lage des Handys vor Integration rausrechnen. Dummerweise basieren die Beschleunigungsmessungen auf einer Lagemessung, siehe oben! PDR. Dead-reckoning. Sitetrack erlaubt Zimmerausmessung. PIVO = probabilistic inertial-visual odometry. Magnetometer-Daten geben komplementäre Sicht auf Umgebung. Magnetisches Bild von Innenräumen, 20 muTesla, Crooked pathes. Särkkä & Solin: Applied

stochastic differential equations; Särkkä: Bayesian Filtering and Smoothing 2013; Linebarger: Data assimilation in autonomous vehicles. Swarm-dased ideas and methods, EKF and residual-sampling PF= Particle filter, distributed Kalman filter nutzen jeweils die Parameterschätzungen der anderen.

Wegelement: $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz$

Non-cartesian coordinates: Salkowski: Affine Differenzialgeometrie 1934; Riley p207; Kästner p23; Stephani p14; Arens Kap22; **Torkelkörper** SdW 7/2000 p114-116. Stephan Kleinschmidt, Paul Schatz & Rudolf Steiner: **Oloid** = Menge aller Punkte zwischen den Berührungspunkten sich schneidender Tangenten (Schnittpunkt liegt auf der Gerade, die durch die Kreismittelpunkte gegeben ist) zweier senkrecht zueinander und im Radiusabstand zueinander befindlicher Kreise. Für die Winkel der Tangentenberührungspunkte, gemessen zur Verbindungslinie der Kreismittelpunkte, gilt $\cos\omega \cdot \cos\omega' = \cos\omega + \cos\omega'$. Die Berührungspunkte haben alle den gleichen Abstand! Bastelbogen: Oloid http://www.wissenschaft-online. de/page/-fei_seiten?article_id=575991 Sphericon, Hexasphericon, Dreikant 1, Dreikant 2, Kleines Sphericon, Fünfstern. SdW Feb 1991 Schlichting, PiuZ 25 1994 p127; Schlichting: Physikalische Spielereien 2016;

Feldspat oder n-Spat, Parallelepiped/Parallelotop/Parallelflach statt Quader/Würfel. Krummlinige und schiefwinklige Koordinatenlinien führen auf **Kontra**variante **Basisvektoren** als **Tangentenvektoren** der Koordinatenlinien: $\vec{b}^{u_i} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$. **Ko**variante **Basisvektoren** als **Normalenvektoren** auf den **Koordinatenflächen** $\vec{b}_{u_i} = \operatorname{grad} u_i$. Auch die gegengleiche Konvention ist üblich. Arens p894; **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p8;

Päsler: Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung 1977 gbook p25. Beachte Unterscheidung von **Koordinaten** bezüglich einer Basis und **Komponenten**. **Weinberg: Quantenmechanik** 2015 Vektor koordinatenfrei: orthogonal und unabhängig haben auch ohne Koordinaten eine Bedeutung. **Kontravariante Komponente** ist a^i bzgl. der kovarianten Basis $\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i} = \frac{\vec{e}^j \times \vec{e}^k}{\vec{e}^i \cdot (\vec{e}^j \times \vec{e}^k)}$ in **Parallelprojektion**. $\vec{a} = a_i \vec{e}^i$ ist Darstellung in kovarianten Komponenten a_i bzgl. kontravarianter Basisvektoren $\vec{e}^i = \nabla_{\vec{r}} u^i = \frac{\vec{e}_j \times \vec{e}_k}{\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)}$ in **Orthogonalprojektion**. Joos & Kaluza: Höhere Mathematik 1964[10] p269;

Ausgangspunkt ist der Ortsvektor: Bei krummlinigen/allgemeinen/curvilinear Koordinaten https://en.wikiped $\vec{r}_{kart} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, $\vec{r}_{zyl} = \rho\cos\phi\hat{e}_x + \rho\sin\phi\hat{e}_y + z\hat{e}_z$, Dann ist der normierende **Skalenfaktor**, **Lame-Faktor**, oder **metrische Faktor** bei der Ableitung des Ortsvektors nach den verallgemeinerten Koordinaten: $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}\right| = \sqrt{g^{u_i\,u_i}}$, wobei nicht über die u_i summiert wird - es sind lediglich die **diagonalelemente** des metrischen Tensors $g^{u_i\,u_i}$. Der **kovariante Basis-Vektor** ist danach der normierte Tangentenvektor längs der Koordinatenlinie: $\hat{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u^i}$,
kovariante Basis: $\vec{e}_i = \nabla_{\vec{r}} u^i$. **Längenänderung = metrischer Faktor × Koordinatenänderung.**

Kegelschnitte: Kegelschnitte konfokal, wenn sie die gleichen Brennpunkte besitzen. Menge aller Ellipsen mit denselben Brennpunkten bildet eine Ellipsenschar, in der sich keine Ellipsen schneiden. Ebenso schneiden sich keine zwei Hyperbeln mit denselben Brennpunkten. Dagegen schneidet eine Hyperbel alle dazu konfokalen Ellipsen immer im rechten Winkel.

Elliptische Koordinaten: Greiner: Mechanik Bd1 1993[6] p101ff; **spezielle orthogonale Koordinatensysteme**; Joos & Kaluza: Höhere Mathematik 1964[10] p136ff; Mittelstaedt 1929-2014 = **Rottmann: Mathematische Formelsammlung** 1960[2] p69-83 **Bipolarkoordinaten**, **Toruskoordinaten**; Fresnel Doppelspiegel-Interferenz und Hyperbeln Hänsel & Neumann: Physik Bd4 1972 p78; **Polare elliptische Koordinaten:** $x = c\cosh u\cos v$, $y = c\sinh u\sin v\cos\theta$ und $z = c\sinh u\sin v\sin\theta$ mit Isolinien für $0 \le u \le \infty$ = Ellipsen bei u=const, für $0 \le v \le \pi$ Hyperbeln bei v=const. Drehung um X-Achse mit $0 \le \theta \le 2\pi$ gibt rotationskörper. $c = a\epsilon$ und $\epsilon = \sqrt{1 \pm (a/b)^2}$. **Ellipsoidale Koordinaten** Neutsch: Koordinaten p1028, 1038; Morse & Feshbach: PT1 p512; p241 $\xi_1 > a > \xi_2 > b > \xi_3 > 0$ gibt $x = \sqrt{(\xi_1^2 - a^2)(\xi_2^2 - a^2)(\xi_3^2 - a^2)}$, $y = \sqrt{(\xi_1^2 - b^2)(\xi_2^2 - b^2)(\xi_3^2 - b^2)}$, $z = \frac{\xi_1\xi_2\xi_3}{ab}$ für $\frac{x^2}{\xi_1^2 - a^2} + \frac{x^2}{\xi_2^2 - b^2} + \frac{z^2}{\xi_3^2} = 1$ bei $a \ge b \ge 0$. **Abramowitz & Ste-**

gun: Pocketbook of mathematical functions 1984; **Madelung; Morse & Feshbach**; Neutsch: Koordinaten; Aus den Parametergleichungen für Ellipse $\vec{x} = a\cos\mu\hat{e}_x + b\sin\mu\hat{e}_y$ und Hyperbel $\vec{x} = a\cosh\mu\hat{e}_x + b\sinh\mu\hat{e}_y$

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2f}, \quad \eta = \frac{r_1 - r_2}{2f}, \quad a = f\xi, \quad b = f\sqrt{\xi^2 - 1}, \quad e = \frac{f}{a}$$

mit $1 < \xi < \infty$ bei Ellipse und $-1 < \eta < 1$ bei Hyperbel. Bartsch: Math Formeln 1986; Gellert, Küstner, Hellwich, Kästner: **Kleine Enzyklopädie Mathematik** 1965 p212 Fadenkonstruktion der Hyperbel, Parabel. **Konfokale Ellipsen und Hyperbeln**

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\xi^2} + \frac{y^2}{\xi^2 - 1} = f^2 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{\eta^2} - \frac{y^2}{1 - \eta^2} = f^2$$

Beziehung zu kartesichen Koordinaten: $x = f\xi\eta, y = f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}$ Mit den elliptischen/hyperbolischen Koordinanaten ist die Parameterdarstellung in kartesischen Koordinaten $\vec{x} = f\xi\eta\hat{e}_x + f\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}\hat{e}_y + z\hat{e}_z$ Fließbach & Walliser: Arbeitsbuch; Nolting 1 p92 **Parabolische Zylinder-Koordinaten:**

$$x = \frac{1}{2(u^2 - v^2)},\ y = u\,v,\ z = z. \text{Aus } \hat{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \text{ folgt u} - \text{Kompo des Gradienten } \hat{e}_u \cdot \frac{\partial\cdot}{\partial\vec{r}} = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\cdot}{\partial u}$$

Neutsch: krummlinige orthogonale Koordinaten Ausgangspunkt ist der Ortsvektor: Bei krummlinigen/allgemeinen/curvilinear Koordinaten https://en.wikipedia.org/wiki/Curvilinear_coordinates (r, θ, φ), θ **Poldistanz** Margenau/Murphy, **Polwinkel** Schmutzer, geographische Breite Joos/Kaluza, Deklination, **Parallelkreis** und φ **Azimut**winkel, geographische Länge, Längenkreis, Rektaszension = himmlischer Längengrad, dann $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ Rechtssystem. Militärische Luftraumüberwachung. Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$. Zu einem festen Zeitpunkt: Position (h, a) bei Höhe h und Azimut a bzgl Himmelsäquator am Beobchtungspunkt (θ, φ) wird umgerechnet in Position (δ, α) bei Deklination δ und Rektaszension α bzgl Erdäquator. Conrad: Vom Jakobsstab zur Satellitennavigation 1979;

Beispiel 1 zu schiefwinkligen Koordinatenlinien: Errichte **Basis** in einer Ebene so, dass der eine parallel zur **Höhenlinie** = **Iso-Linie** = **Äquipotenzial**, Höhe hat hier keine geometrische Deutung, und der andere senkrecht dazu steht. Geg. sei die volumentreue, modulinvariante oder **unimodular**e Abb $u = x - y, v = y, w = z$ mit $\partial(u, v, w)/\partial(x, y, z) = 1$ liefert für die kontravariante Basis: $\vec{e}^u = \nabla u = \hat{e}^x - \hat{e}^y, \vec{e}^v = \hat{e}^y, \vec{e}^w = \hat{e}^z$ und die kovariante Basis: $\vec{e}_u = \vec{e}^v \times \vec{e}^w, \ldots$ **Basisvektoren sind die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien:** $\hat{e}_{q_i} = \dfrac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right|} =: \left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right)^0$. Oder kompakt als **Vektorgradient** alias **Jacobi-Matrix** $\mathrm{d}\vec{r} = \dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\vec{u}}\mathrm{d}\vec{u} = (\nabla_{\vec{u}}\vec{r})\mathrm{d}\vec{u}$ siehe Seite 181. $\mathrm{d}\vec{x} = \dfrac{\partial\vec{x}}{\partial\vec{u}}\mathrm{d}\vec{u} = J\vec{\mathrm{d}}u = \partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)\mathrm{d}\vec{u}, \mathrm{d}\vec{u} = J^{-1}\mathrm{d}\vec{x}$ mit $J^{-1} = J^T$ oder $\vec{r} = x_i\hat{e}_i = x\,\hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z = \rho\cos\varphi\,\hat{e}_x + \rho\sin\varphi\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z = r\sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{e}_x + r\sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{e}_y + r\cos\vartheta\,\hat{e}_z$ zylindrische Einheitsvektoren als Funktion der kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_\rho = \left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right)^0 = \cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\varphi\,\hat{e}_y$, $\hat{e}_\varphi = \left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)^0 = -\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y$, $\hat{e}_z = \left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right)^0 = \hat{e}_z$ sphärische Einheitsvektoren als Funktion der kartesischen Einheitsvektoren $\hat{e}_r = \left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right)^0 = \sin\vartheta\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\,\hat{e}_y + \cos\vartheta\,\hat{e}_z$, $\hat{e}_\varphi = \left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right)^0 = -\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y$, $\hat{e}_\vartheta = \left(\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\right)^0 = \cos\vartheta\cos\varphi\,\hat{e}_x + \cos\vartheta\sin\varphi\,\hat{e}_y - \sin\vartheta\,\hat{e}_z$ kartesische Einheitsvektoren als Funktion der zylindrischen Einheitsvektoren: $\hat{e}_x = \cos\varphi\,\hat{e}_\rho - \sin\varphi\,\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_y = \sin\varphi\,\hat{e}_\rho + \cos\varphi\,\hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_z = \hat{e}_z$. kartesische Einheitsvektoren als Funktion der sphärischen Einheitsvektoren: $\hat{e}_x = \cos\varphi\sin\vartheta\,\hat{e}_r - \sin\varphi\,\hat{e}_\varphi + \cos\varphi\cos\vartheta\,\hat{e}_\vartheta$ $\hat{e}_y = \sin\varphi\sin\vartheta\,\hat{e}_r + \cos\varphi\,\hat{e}_\varphi + \sin\varphi\cos\vartheta\,\hat{e}_\vartheta$ $\hat{e}_z = \cos\vartheta\,\hat{e}_r - \sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta$. zylindrische als Funktion der sphärischen Einheitsvektoren: $\hat{e}_\rho = \sin\vartheta\,\hat{e}_r + \cos\vartheta\,\hat{e}_\vartheta$ $\hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_z = \cos\vartheta\,\hat{e}_r - \sin\vartheta\,\hat{e}_\vartheta$. sphärische als Funktion der zylindrischen Einheitsvektoren: $\hat{e}_r = \sin\vartheta\,\hat{e}_\rho + \cos\vartheta\,\hat{e}_z$, $\hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi$, $\hat{e}_\vartheta = \cos\vartheta\,\hat{e}_\rho - \sin\vartheta\,\hat{e}_z$.

Beispiel 2 zu konzentrischen, aber lokal orthogonalen Koordinatenlinien: $u_1 = \rho = \sqrt{x^2+y^2}, v = y, w = z$ liefert ...

Typische Vektorfelder: starre Rotation $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$, **Vorticity = Wirbelstärke:** $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v}$: Betrachte $\vec{F} = (-y, x, 0)$, rot $\vec{F} = 2\,\hat{z}$ oder die Scherströmung $\vec{v} = x\,\hat{y}$, rot $\vec{v} = \hat{z}$. **Vorticity** vs **Stream-Function**: Siehe http://en.wikipedia.org/wiki/Stream_function 2D-Stromfunktion oder der **Volumenstrom durch eine Kurve** zwischen A und P von Lamb (1932 pp62–63) und Batchelor (1967 pp75–79) für inkompressibles Fluid ist $\psi(x,y,t) = \int_A^P (u\,\mathrm{d}y - v\,\mathrm{d}x)$, weil durch das **innere Produkt** oder auch Skalarprodukt von Geschwindigkeitsfeld (u,v) und Kurvennormale $(\mathrm{d}y, -\mathrm{d}x)$ zum Kurvenstück $\delta P = (\delta x, \delta y)$ der Ausdruck $\delta\psi = u\,\delta y - v\,\delta x$ ist. Das Differezial ist exakt, wenn $\mathrm{d}\psi = \partial\psi/\partial x \mathrm{d}x + \partial\psi/\partial y \mathrm{d}y$, was $\partial^2\psi/\partial x\partial y = -\partial v\partial y = \partial u/\partial x$ oder $\partial\psi/\partial x = -v$ und $\partial\psi/\partial y = u$ oder $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = \operatorname{div}(u,v,0) = \operatorname{div}\vec{u} = 0$ oder **Inkompressibitität** des Fluids bedeutet. **Oder nochmals anders.** V sei konstant, aber beliebig glatt verformbar. **Elastische Hülle** ∂V eines Volumens V, die sich mit einem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r},t)$ bewegt und also verformt. Zeigen Sie, dass dann div $\vec{v} = 0$ ist. Ein beliebiges Randstück $\mathrm{d}\vec{a} \subset \partial V$ bewegt sich in Zeit $\mathrm{d}t$ um $\vec{v}\mathrm{d}t$ und ändert das Randvolumen gemäß $\mathrm{d}V\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{a}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t$. Das Gesamtvolumen soll fix bleiben const $= V \stackrel{!}{=} \mathrm{d}t \int_{\partial V} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{a} = \mathrm{d}t \int_V \operatorname{div}\vec{v}\mathrm{d}V$, also $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. Wegen der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes ist $\vec{u} = \nabla\times\vec{\psi}$ mit dem **Vektor-Potenzialfeld** $\vec{\psi} = (0,0,\psi)$. **Vorticity:** Die Stromfunktion kommt aus der Vortizität mittels Poisson-Gl gemäß: $\nabla^2\psi = -\omega$ oder $\nabla^2\psi' = +\omega$, wo der **Vortizitätsvektor** $\boldsymbol{\omega} = \nabla\times\mathbf{u}$ mit $\boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$ ist. In Meteorologie führt Annahme des **geostrophischen Gleichgewichts** auf Stromfunktion. Falls Variations des Coriolis-Parameters f vernachlässigbar, so ist Stromfunktion auf einer Isobaren proportional zum Geopotenzial gz, dh, $\psi = gz/f$; Auf **isentropischen Flächen** is $\psi = (gz + c_pT)/f =$ **Häckel: Meteorologie** 1990[2], 2016[8] Corioliskraft macht Rechtsablenkung auf Nordhalbkugel p201ff; **Montgomery Stromfunktion**, c_p specifische Wärme bei p=const. Weizel: LB der theoret Physik, Bd1 1949, p241ff Skizze, Divergenz und Rotor von Igel $\vec{A}(x,y,z) = \vec{x}$ gibt div $\vec{A} = 3$ und rot $\vec{A}(x,y,z) = \vec{0}$, **starre Rotation** senkrecht zu $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$ gibt **Leitstrahlgeschwindigkeit** mit zum Ortsvektor $\vec{x} = r\hat{e}_\rho$ senkrechten Bahngeschwindigkeiten $\vec{B}(x,y,z) = \vec{\omega}\times\vec{x} = \vec{v}_{\text{Bahn}} = \rho\omega\hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = v_{\text{Bahn}}\hat{e}_\varphi$ gibt div $\vec{B} = 0$ und rot $\vec{A}(x,y,z) = 2\vec{\omega}$ aber Ehrenfestsches Paradoxon, Relativitätstheorie erlaubt keine starre Rotation und keinen starren Körper, siehe auch Thomas-Rotation, **Parallelabströmung aus konzentrischen Kugeln**, wo Divergenz und Rotation des Feldes komplementär im Raum symmetrisch zur Vorzugsrichtung verteilt sind: $\vec{C}(x,y,z) = r\vec{a}$ gibt div $\vec{C} = \vec{a}\cdot\hat{r}$, also senkrecht zu $\vec{a}$ quillt nix, in $\vec{a}$-Richtung quillt maximal mit a oder $-a$ und rot $\vec{C}(x,y,z) = \hat{r}\times\vec{a}$ also senkrecht zu $\vec{a}$ maximale Rotation, in $\vec{a}$-Richtung kein Rotor.

Satz von Stokes FeynmanII Kap3.5ff; Nolting3 p27; Schulz p187f; Budo Anhang C; Nearing p367; Arens p929; Greiner1 p114; Snieder p100; Pötter: Elementare mathematische Metoden in der Physik p224; Feldmeier; **Zirkulation oder Wirbelfluss auf dem Rand** $\Gamma = \oint_{\partial A} d\vec{r}\cdot\vec{u} = \int_A d\vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} = \int_A d\vec{A}\cdot\vec{\omega} =$ **Flächenmittel der Rotation=Wirbelstärke=Vorticity**. Die Integration geht über einen geschlossenen Umgang innerhalb des Fluids, **der an den materiellen Fluidteilchen haftet** und mit diesen fortschwimmt! Siehe p128 bei **Sommerfeld: Mechanik deformierbarer Körper**. Theorie der Wirbel p125, Kreisförmige Wirbel p132; Päsler: Mechanik deformierbarer Körper 1960; Schmidt: Aerodynamik des Fluges. Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie 1929; Harry **Schmidt: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung** 1953 Wirbelröhre. Erklärt alles detailliert, nicht formal sondern inhaltlich. Das Verstehen steht im Fokus. **Budo: Theoretische Mechanik** KapC p422-538; Wirbelfluss auf geschlossene Fläche S ist Null: $\oint_S \mathrm{d}\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{V_S} \mathrm{d}V \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{u} = 0$ oder per Stokes mit Beutel, der per Limes verschnürt wird $\oint_S \mathrm{d}\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} = \lim_{\text{Öffnung}\to 0}\oint_{\text{Beutel}} \mathrm{d}\vec{a}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \lim_{\text{Öffnung}\to 0}\int_{\partial\text{Beutel}} \mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{u} = 0$. Siehe Seite 283. **Erster Helmholtz'scher Wirbelsatz:** W Wirbelröhre im Fluid mit Geschwindikeitsfeld $\vec{v}$: i] $\{C\}$ Menge aller Kurven/Wirbellinien/Integralkurven, deren Tangente rot $\vec{v}$ ist, analog zur Feldlinie oder Stromlinie. Wirbelfeld $\vec{\omega}$ hat als Feldlinien **Wirbellinien** = Rotationsachse der dort befindlichen Teilchen. Die durch kleine geschlossene Kurve verlaufenden Wirbellinien bilden Wirbelröhre, ihr flüssiger Inhalt heißt **Wirbelfaden** Budo p449. Budo p469. ii] K_i geschlossene Kurven, die nirgends parallel zu rot $\vec{v}$. iii] Die Teilmenge $\{C_1,\dots\}$ der Kurven C, die K schneiden, bildet eine (Mantel)-Fläche W: die Wirbelröhre mit

dem Volumen V. Weil auf der Mantelfläche keine Beiträge auftreten gilt

$$\int_{\partial Deckel} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{v} + \int_{\partial Boden} \mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{v} = \int_{Deckel} \mathrm{d}\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v} + \int_{Boden} \mathrm{d}\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v} = \int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v} = \int_V \mathrm{d}V \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0$$

und die Zirkulation auf beliebigen Rändern K_i ist eine Erhaltungsgröße. **Problem der Rotation bei Magnetfeld um geraden Leiter tritt nicht auf, wenn man $r = 0$ beim Stokes'schen Satz aus dem Integrationsgebiet ausschließt.** Bei der Verbindung von Außenrand- und Innenrandkreis darf sich der Rand nicht schneiden, wie bei Residuenkalkül:

$$\oint_{\partial S\setminus\{\vec{0}\}} d\vec{r}\cdot\vec{F} - \oint_{\partial S\setminus\{\vec{0}\}} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int_{\partial S\setminus\{\vec{0}\}} d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int_{S\setminus\{\vec{0}\}} d\vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{F}$$

Denn $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{0}$ gilt wegen $H_z = H_\rho = 0$, tatsächlich $(\mathrm{rot}\,\vec{H})_z = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi}\right] = 0$ für alle außerhalb des Stromfadens liegenden Raumpunkte $\rho > 0$, aber Zirkulation des Magnetfeldes in jeden noch so großen Umgebung um einen bei $\rho = 0$ **eingeschlossenen** Stromfaden in z-Richtung mit $I > 0$ ist $\vec{H}(x,y,z) = \frac{I}{2\pi}\begin{pmatrix}\frac{-y}{x^2+y^2}\\ \frac{x}{x^2+y^2}\end{pmatrix} = \vec{H}(\rho,\varphi,z) = \hat{e}_\varphi\frac{I}{2\pi\rho} > 0$. Ampere-Gesetz: Magnetische Energie eines gestreckten Koaxialkabels. Zwischen den Zylindern mit den Radien a und b herrscht das Ampere-Gesetz mit $H_\varphi(r_\perp) = \frac{I}{2\pi r_\perp}$. Magnetische Energie pro Längeneinheit l des Koaxialkabels ist $W_m = \frac{1}{2}\int_Z \mathrm{d}V\vec{B}\cdot\vec{H}$, wobei Z den Raumbereich zwischen den beiden Zylindern mit der Höhe l bezeichnet. Stromdichte $\vec{j}(r_\perp) = I[\delta(r_\perp - a) - \delta(r_\perp - b)]$ bedeutet $I(r_\perp) = I\chi_{[a,b]}(r_\perp)$. $W_m = \frac{\mu_0 I^2}{24\pi^2}\int_0^l \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_a^b\frac{r\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi}\ln b/a$. Griffiths Aufgabe 7.13; Auf diesen, den Null-Punkt einschließenden Wegen ist das geschlossene Wegintegral/Zirkulation gleich groß, aber von Null verschieden. Also wegunabhängig verschieden von Null. Diese Merkwürdigkeit ist der Ausgangspunkt der Cauchy'schen Integralformel und der Funktionentheorie. Alle Wegintegrale, die den Null-Punkt nicht einschließen, sind Null. Daher muss die Wirbelnatur im Zentrum bei Null ihren Ursprung haben. Ganz analog zur fehlenden Divergenz des Coulomb-Feldes im Außenraum, wo die elektrische Feldstärke mit $1/r^2$ geht, fällt die magnetische Feldstärke beim Stromfaden - der zylindersymmetrischen Geometrie der Anordnung folgend - mit $H_\varphi \propto 1/\rho$. Es kommt keine Zirkulation dazu. Die **Zirkulation** ist an jeder Stelle außerhalb des Leiters konstant, kurz: außerhalb von Strömen gibt es keine Wirbelquellen = Magnetfeldquellen. Dem Verbot $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$ wird konsequent Rechnung getragen.

The magnitude of $\vec{A}\times\vec{B}$ is $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}|\,|\vec{B}|\sin\Theta$, where Θ is the positive angle ($\leq 180^o$) between $\vec{A}$ and $\vec{B}$. The direction of $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ is perpendicular to the plane of $\vec{A}$ and $\vec{B}$ and in the sense $\vec{C}$ of advance of a right=handed screw rotated from $\vec{A}$ to $\vec{B}$.

Spat: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = Det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = Vol(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k \neq 0$ mit dem **Permutationssymbol** geschaffen für die Leibniz-Definition der Determinanten = Volumen, genau dann linear unabhängig: $\vec{a}_i$ lu $\leftrightarrow \sum\alpha_i\vec{a}_i = \vec{O}$, $\alpha_i = 0$ notwendig! . **Lang & Pucker**: Mathematische Methoden in der Physik;

Nabla = altägypt Saitenintrument oder DEL-Operator oder atleD:=Δ rückwärts gelesen, also Delta auf den Kopf gestellt siehe **Valentiner: Vektoranalysis** 1943 p45; Bedeutet Ableitung nach einer von mehr als einer Variablen abhängigen Funktion. Edminster: Electromagnetics, Schaum 1979, 1995[2]; **Nabla hat keine spezielle Bedeutung oder Gestalt, sondern symbolische Bedeutung - muss im speziellen Kontext operationalisiert werden.** **Schulz: Physik mit Bleistift** Kap8.4! Fließbach/Walliser p139; Schulz p160 ff, Stephani, Kuhn p279 ff: $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,u = \vec{0}$, $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = 0$, $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u} - \Delta\vec{u}$, $\mathrm{div}\,(v\,\vec{u}) = \vec{u}\cdot\mathrm{grad}\,v + v\mathrm{div}\,\vec{u}$, $\mathrm{rot}\,(v\,\vec{u}) = (\mathrm{grad}\,v)\times\vec{u} + v\,\mathrm{rot}\,\vec{u} = \epsilon_{ijk}(\partial_j\,u^k)v + \epsilon_{ijk}(\partial_j\,v)u^k = \mathrm{rot}\,(\vec{u}\,v)$. **Laplace-Operator** $\Delta u = \nabla\cdot(\nabla u) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,u$ **Sphärische Koor** $\nabla = (\partial_r, 1/r\partial_\vartheta, 1/(r\sin\vartheta)\partial_\varphi)$ **Dipol**-Feld $\varphi = \frac{\cos\vartheta}{r^2}$ gibt $\vec{E} = \nabla\varphi = -2\frac{\cos\vartheta}{r^3}\hat{r} - \frac{\sin\vartheta}{r^3}\hat{\vartheta}$ gibt **Feldlinien** wegen $\vec{E}\parallel \mathrm{d}\vec{r}$ also Tangenten parallel $E_r\hat{r} + E_\vartheta\hat{\vartheta} + E_\varphi\hat{\varphi} = \mathrm{d}r\hat{r} + r\mathrm{d}\vartheta\hat{\vartheta} + r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$ also

wegen Ähnlichkeit $\frac{-2\cos\vartheta}{r^3\,\mathrm{d}r} = \frac{E_r}{\mathrm{d}r} = \frac{E_\vartheta}{r\mathrm{d}\vartheta} = \frac{-2\sin\vartheta}{r^3\,r\mathrm{d}\vartheta}$ also $\frac{2\mathrm{d}(\sin\vartheta)}{\sin\vartheta} = \frac{2\cos\vartheta\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\mathrm{d}r}{r}$ bedeutet Feldlinien bei $\sin^2\vartheta = Cr$. Kuhn et al: Math Hilfsmittel p282f. **Zylinder Koord:**

$$\nabla_{zylinder} = \begin{pmatrix} \partial_\rho \\ \frac{1}{\rho}\partial_\varphi \\ \partial_z \end{pmatrix}, \quad \mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla\times\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial[\rho\,A_\varphi]}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{e}_z$$

Rotor in Kugelkoordinaten:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial\varphi}\right]\hat{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rF_\varphi)\right]\hat{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial\theta}\right]\hat{e}_\varphi\,.$$

Vektoranalysis = Analysis über mehrdimensionalen Gebiete: Verallgemeinerung des Anstiegs einer reellen Funktion auf die Richtung des stärksten Anstiegs einer reellwertigen Funktion über einem Bereich, wie beim Gradient oder die Quellhaftigkeit eines Vektorfeldes oder die Wirbelhaftigkeit. Jeweils für einen Punkt definiert. Reellwertige Funktionen können zwar nur ihren Werte ändern, dafür aber immerhin in überabzählbar Richtungen anders. Dieser Beliebigkeit wird mit dem Gradientenbegriff begegnet, die sich stets auf die Richtung des stärksten Anstiegs bezieht. Bei vektorwertigen Funktionen weiß man vom Zerlegungssatz, dass jeder Vektor in Wirbel und Quellen zerlegbar. Daher genügt es, die Veränderung dieser Eigenschaften punktweise zu kennen, also Ringintegrale bzgl einer beliebig ausgewählten Fläche = Rotor = Wirbelstärke, und integrale Flussstärkenänderung = Divergenz = Quelle/Senke = Fluss-Entstehung/Vernichtung. **Richtungsableitung** siehe **Furlan: Das gelbe Buch** Bd2 p60 ff oder Elementare Beispiele siehe Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik p385ff;
In Anhängen von Elektrodynamikbüchern, Purcell: Berkeley-Kurs Bd2 p31, p38, p46, Schmüser Bd2 p199ff, Jelitto, Fließbach, Rebhan, finden sich knappe Darstellungen zur Vektoranalysis. Idee: Die lokale Eigenschaft der Änderung des Abbildungswertes wird bei mehr als eindimensionalen Definitionsbereichen, also bei **mehrfach-ausgedehnten Größen** wie Tönen, Farben, Anschauungsraum oder p, V, T in Thermodynamik gemäß Riemann 1854, wegen der Annäherungsrichtung scheinbar beliebig. Aber nicht, wenn man **infinitesimal benachbarte Niveaulinien = Höhenlinien = Isohypsen $\perp$ Falllinien** in kotierter Projektion, betrachtet. Dann ist die Änderung im Abbildungsbereich **längs der Falllinie maximal!** Die lokale Richtungswahl bei Bergwanderungen/Idee der Geländedarstellung. Noch eigenschaftsreicher sind mehrfachausgedehnte Wertebereiche = Vektorfunktionen. Die lokale Richtungswahl in Windgeschwindigkeitsfeldern. $\Delta \looparrowright$ [Skalarfelder : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$] $\underset{\mathrm{div},\,\nabla\cdot}{\overset{\nabla,\,\mathrm{grad}}{\rightleftarrows}}$ [Vektorfelder : $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$] $\circlearrowleft \Delta, \nabla\times$ **Arens** p913; Man kann auch **Oberflächenvektor-Mittelwerte** betrachten. **Schmidt: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung** 1935, 1953; Promberger: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der theoretischen Elektrotechnik 1960; Päsler: Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung 1977 gbook; Päsler: Mechanik deformierbarer Körper 1960; Gabriel Lame hat alles genau beschrieben; Alles auf 120 Seiten **Gans: Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik** 1905, 1929, 1950; Haas: Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen 1922; Haas: Einf in die theoret Physik Bd1 1930 axialer Vektor=Plangröße p10, Gradient p32, Gauß'scher Satz p116, Feldlinienidee p118; **Joos & Kaluza: Höhere Math** 1964[10] Kap7; Heber 1927-2010 & Kozik: Physik. Eine Einführung 1970 p462f Vektoranalysis: Gradient, betrachte Gebirge/Idee der Geländedarstellung und Wetterkarte mit Höhenlinien, Anstieg, Gefälle und Falllinienen, Wirbel- $\vec{w}(\vec{x}) = (y, -x, 0)$ und Scherstrom $\vec{s}(\vec{x}) = (-y, 0, 0)$ haben rot $\vec{w} = 2\hat{k}$ und rot $\vec{s} = \hat{k}$; **Gerlich: Vektor- und Tensorrechnung für die Physik** 1977 ohne Beispiele, schlägt Brücke von Boseck: Tensorrechnung 1972 zu Brehmer & Haar: Differentialformen und Vektoranalysis 1972; Holmann: Lineare und multilineare Algebra 1970; Greub: Multilineare Algebra 1967; Holmann & Rummler: Alternierende Differentialformen 1972; Eisenreich: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung 1971; **Klingbeil: Tensorrechnung für Ingenieure** 1966, 1989[2]; **Wills: Vector analysis with an introduction to ten-**

sor analysis 1945; **Bowen & Wang: Introduction to Vectors and Tensors** 1976, 2008; **Kurven/Linienintegraldarstellung** des Gradienten:

```
import matplotlib.pyplot as plt import numpy as np Phi = lambda x,y: x*y X = np.linspace(-1,1,20) x,y =
np.meshgrid(X,X) plt.imshow(Phi(x,y)) grx,gry = np.gradient(Phi(x,y),0.1) plt.quiver(x,y,grx,gry)
```

Beispiele zu Gradient: Periodisches Feld $W(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ gibt $\operatorname{grad} W(\vec{r}) = i\vec{k}W(\vec{r})$, speziell $\vec{k} = \hat{x}$ gibt $W(\vec{r}) = e^{ix}$ und $\operatorname{grad} W(\vec{r}) = \hat{x}ie^{i\,x}$ mit Realteil $-\hat{x}\sin x$. **Radialsymmetrische Felder:** $\Phi_n(\vec{r}) = -\dfrac{c}{r^n}$ geben $\operatorname{grad}\Phi_n(\vec{r}) = \dfrac{c}{r^{n+1}}\hat{r}(\vartheta,\varphi)$. Speziell $\Phi_1(\vec{r}) = -\dfrac{c}{r}$ gibt $\operatorname{grad}\Phi_1(\vec{r}) = \dfrac{c}{r^2}\hat{r}(\vartheta,\varphi)$. Speziell $\Phi_{-1}(\vec{r}) = -cr$ gibt $\operatorname{grad}\Phi_{-1}(\vec{r}) = -c\hat{r}(\vartheta,\varphi)$.

Dipolpotenzial: $\Phi(r,\vartheta) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{p\cos\vartheta}{r^2} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{pz}{r^3} = \Phi(r,z)$ Koordinatenmix. **Äquipotenzialflächen des Dipolpotenzials** const$=P = \dfrac{z}{r^3}$ also $r^3 = \dfrac{z}{P}$ bedeutet $\rho^2 + z^2 = r^2 = \left(\frac{z}{P}\right)^{2/3}$. **Dipolfernfeldkraft:** $\vec{E}(r,\vartheta) = -\nabla\Phi(r,\vartheta) = \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2\cos\vartheta\hat{r} + \sin\vartheta\hat{\vartheta}}{r^3} = \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{3\cos\vartheta\hat{r} - \hat{z}}{r^3}$ wegen $\hat{z} = \cos\vartheta\hat{r} - \sin\vartheta\hat{\vartheta}$.

Verallgemeinere den Ableitungsbegriff auf den Fall von mehr als einer unabhängigen Variablen, **mehrfachausgedehnter Größen**, sowohl bezüglich des Definitionsbereichs/Ortsvektor und Wertebereichs/Feld/-Messwerte beim Ortsvektor. Das gibt zwangsläufig diverse Möglichkeiten zur Beschreibung der Veränderung/Ableitungsmöglichkeiten von Feldern hinsichtlich der Ortsvektorveränderung, wie grad, rot, div und für stetige Fälle die Schwarz'schen alias Cauchy-Riemann'schen Beziehungen. Gegeben sei Funktion $f(\vec{r})$. $\hat{n}$ stehe stets senkrecht auf den **Niveauflächen**. Haas: Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen 1922 p19 Wähle Punkt und gehe stets weder hoch noch runter = Weg ist Niveaulinie. Tue dasgleiche für einen Nachbarpunkt, der nicht auf Niveaulinie/Idee der Geländedarstellung liegt. Dann gehe längs Falllinie des Wertebereiches oder im Definitionsbereich senkrecht von einer Niveaulinie zur einer eng/infinitesimal benachbarten. Das Symbol **grad** bezeichnet die **Richtungsableitung in Richtung des stärksten Anstiegs** einer Funktion $f(\vec{r})$, weil für die Richtungsableitung $\hat{r} \overset{!}{=} \hat{n}$ gewählt werden muss, um eindeutig zu sein. Schweitzer: Man merkt es schon, wenn man auf dem richtigen Weg ist: Er ist steil:

$$\text{beliebige Richtungsableitg} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f}{\partial n}\cos\angle(\hat{n},\hat{r})\hat{r} \overset{\hat{r}=\hat{n}}{=} \frac{\partial f}{\partial n}\hat{n} = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} = \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} =: \operatorname{grad} f(\vec{r})$$

oder Betrachte ein beliebiges Wegelement $\vec{s}$ der Länge s mit **Richtung** des Einheitsvektors $\hat{s}$ und die zugehörige **Richtungsableitung** $\hat{s}\frac{\partial \phi}{\partial s} = \hat{s}\lim_{s\to 0}\frac{\phi(\vec{r}+\hat{s}\,s)-\phi(\vec{r})}{s}$, dann gilt

$$\hat{n}\cdot\operatorname{grad}_{\hat{s}}\phi(\vec{r}) = \hat{n}\cdot\hat{s}\frac{\partial\phi}{\partial s} = \cos(\angle(\hat{n},\hat{s}))|\operatorname{grad}_{\hat{s}}\phi(\vec{r})| = \hat{n}\cdot\nabla_{\hat{s}}\phi(\vec{r}) = \hat{n}\cdot\hat{s}\lim_{s\to 0}\frac{\phi(\vec{r}+\hat{s}\,s)-\phi(\vec{r})}{s} \quad \in \mathbb{R}$$

Valentiner: Vektoranalysis 1943 geht vom totalen Differenzial $\mathrm{d}V = \partial_x V\,1\,\mathrm{d}x + \partial_y V\,1\,\mathrm{d}y + \partial_z V\,1\,\mathrm{d}z = \operatorname{grad} V\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ aus und nutzt die Idee des Skalarprodukts $1 = \hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1$. Dies ist die **Kurven-/Linienintegraldarstellung** des Gradienten gemäß Lagally p151 oder Nolting Bd3 p30. Demnach ist der **Gradienten**-Vektor jener, der senkrecht zu den Höhenlinien=Iso-Hyperflächen von $\phi(\vec{r})$, also in Richtung des **stärksten Anstiegs** $\hat{n} = \hat{s}$ weist. **Valentiner: Vektoranalysis** 1943 p45; **Cunningham: Vektoren** 1969, 1972 p138f; **Fischer: Vektordifferentiation und Vektorintegration** 1904 p5; Gibbs und Wilson: Vektor-Analysis 1901; Weyrauch: Theorie elastischer Körper 1884; MacFarlane: Vector Analysis and Quaternions 1886; Flügge: Mathematische Methoden der Physik II 1980 enthält Gruppentheorie und Quaternionen, Spinoren; Hathaway: Primer of Quaternions 1896; Kurz mit Kettenregel für Ableitung in beliebiger Richtung $\hat{r}$, statt normal zu Niveau-Flächen $\hat{n}$, Weatherburn: Advanced vector analysis 1937 p3:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathrm{d}r = \frac{\partial f}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial r}\mathrm{d}r = \frac{\partial f}{\partial n}\cos\angle(\hat{n},\hat{r})\mathrm{d}r = \frac{\partial f}{\partial n}\hat{n}\cdot\hat{r}\mathrm{d}r = \nabla f\cdot\mathrm{d}\vec{r} \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{grad} f = \nabla f = \hat{e}^i\partial_i f \in \mathbb{R}^n$$

Oder über **totales Differenzial: Gradient ist kovarianter Vektor:** $\phi(x^i), d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^i}dx^i = \partial_i\phi\,dx^i$, weil das **totale Differenzial** als Skalarprodukt von kovariantem (Gradient liegt im Dualraum = Zeilenvektor = Kovektor! und kontravariantem Vektor = Spaltenvektor geschrieben/gedeutet werden kann, Kästner:

$$\mathrm{d}T = \frac{\partial T}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i = \partial_i T\mathrm{d}x^i = \nabla T\cdot\mathrm{d}\vec{r} = ||\nabla T||\,||\mathrm{d}\vec{r}||\,\cos(\angle(\nabla T,\mathrm{d}\vec{r}) = 90^o) = \frac{\partial T}{\partial x^i}\,\delta^i_j\,\mathrm{d}x^j = \frac{\partial T}{\partial x^i}\,\vec{e}^i\cdot\vec{e}_j\,\mathrm{d}x^j$$

Totales Differenzial kann also per Skalarprodukt zum Gradienten aufgeblasen werden. Niveau- oder Höhenlinie ist durch die Menge aller Punkte mit fehlendem Zuwachs definiert. **Fischer: Vektordifferentiation und Vektorintegration** 1904 p5 Differential $\mathrm{d}x$ ist nur Symbol für stetige, lineare Veränderung von x bei x. Größe $V(\vec{x})$ = **skalare Funktion** hat Zahlenwert und Lage $\vec{x}\in\Gamma$, entsprechend ist $\mathrm{d}V(\vec{x}) = \operatorname{grad} V(\vec{x})\cdot\mathrm{d}\vec{x}$ auch Funktion über einem Gebiet $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$; **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p18 definiert Tensoren über Gradient; Da nur totale Differenzial interessant, so wird für die differenzielle **Arbeit** als differenzielle Änderung = **Zuwachs** der potenziellen Energie gemäß Hooke $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\;\mathrm{d}U = \omega = \mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla U$ gesetzt. Greiner 1 Kap17 Grundbegriffe: Arbeit in konservativen Feldern ist Potenzialunterschied.

Gradient in Polarkoordinaten Merziger & Wirth: Repetitorium p529 $f(x,y)\to\tilde{f}(\rho,\varphi)$. Wie sieht der Gra-

dient aus? $\text{grad}_{(x,y)} f(x,y) \to \text{grad}_{(\rho,\varphi)} \tilde{f}(\rho,\varphi)$. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{f}(x(\rho,\varphi), y(\rho,\varphi))}{\partial x}$ mit totalem Differenzial = **Zuwachs** $\mathrm{d}\tilde{f}(\rho,\varphi) = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi$ gibt $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$ und mit $\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = x/\rho = \cos\varphi$ und $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{\partial \arccos(\frac{x}{\rho})}{\partial x} = \dfrac{-\sin\varphi}{\rho}$ und analog $\dfrac{\partial \rho}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$ gibt

$\text{grad}\, f = \left(\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\cos\varphi - \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\dfrac{\sin\varphi}{\rho}\right)\hat{x} + \left(\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\sin\varphi + \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\dfrac{\cos\varphi}{\rho}\right)\hat{y} = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \rho}\hat{\rho} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial z}\hat{z}$ mit $\tilde{f}$ in Zylinderkoordinaten.

Was ändert sich in der Welt, nach dem ich einmal im Kreis gegangen bin? Außer, dass ich selbst älter, anders geworden bin? Ändert sich z.B. meine Gesamtenergie? **Rotor ist mittlerer 'Anstieg'/Änderung einer Größe auf dem Rand einer LOCHLOSEN Fläche** betrachte dazu Flächenelement $\Delta\vec{A}||\vec{n}$ bei $\vec{r}$ mit Randkurve $\partial\Delta A$

$$\text{rot}\,\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \Delta\vec{A}^0\cdot\text{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = \vec{n}\cdot\text{rot}\,\vec{E}(\vec{r}) = \vec{n}\cdot\nabla\times\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{1}{\Delta A}\oint_{\partial\Delta A}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = \oint_{\partial \mathrm{d}A}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} \in \mathbb{R}$$

$\nabla\times\mathbf{E} = \boldsymbol{e}_k\epsilon^{k\ell m}\partial_\ell E_m$ oder $\boldsymbol{e}_k\epsilon^{k\ell}{}_m\partial_\ell E^m$ oder $\boldsymbol{e}^k\epsilon_k{}^\ell{}_m\partial_\ell E^m \in \mathbb{R}^3$. **Rotor bedeutet daher Hinweis auf geschlossenen Fluss = Wirbelströmung**. **Emde: Quirlende elektrische Felder**. Sammlung Vieweg, Heft 121 1949 Quirlende Felder verschleiern den Tensorcharakter der Feldstärke! Spreizung und Drilling;

grad, div, rot in krummlinigen oder allgemeinen Koordinaten: Del in cylindrical and spherical coordinates siehe https://en.wikipedia. org/wiki/Del_in_cylindrical_and_spherical_coordinates https://en.wikipedia.org/wiki/Curvilinear_coordinates Landau & Lifschitz: Bd8 p558f. Haas: Vektoranalysis in ihren Gründzugen und wichtigsten physikalischen Anwendungen 1922 p64 **Tensorfeld-Divergenz** → Vektordivergenz = jede Richtung hat uU verschiedene Senke/Quelle, im Unterschied zur **skalaren Divergenz**; Speziell bei $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$ gibt $\text{div}\,\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial E_r(r)r^2}{\partial r} = \lim_{\Delta V\to 0}\dfrac{1}{\Delta V(r,\vartheta,\varphi)}[\vec{E}(r_+)\cdot\Delta\vec{a}(r_+) + \vec{E}(r_-)\cdot\Delta\vec{a}(r_-)] = \dfrac{1}{r^2}\lim_{\Delta r\to 0}\dfrac{E_r(r+\frac{\Delta r}{2})\,(r+\frac{\Delta r}{2})^2 - E_r(r-\frac{\Delta r}{2})\,(r-\frac{\Delta r}{2})^2}{\Delta r}$ mit $\Delta V = r^2\sin\vartheta\ \Delta r\Delta\vartheta\Delta\varphi = \Delta r\Delta a(r,\vartheta,\varphi)$ und $\Delta\vec{a}(r_\pm,\vartheta,\varphi) = \Delta a(r\pm\Delta r,\vartheta,\varphi)\hat{r}(\vartheta,\varphi)$. Für $E(\vec{r}) = -r^n$ folgt $\text{div}\,\vec{E}(\vec{r}) = -(n+2)r^{n-1}$.

$$\nabla = \hat{e}^i\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial q^i},\quad \nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial(h_2h_3E_1)}{\partial q^1} + zykl.\right],\quad \nabla\times\vec{E} = \frac{1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial h_3E_3}{\partial q^2} - \frac{\partial h_2E_2}{\partial q^3}\right]\hat{e}^1 + zykl.$$

Divergenz in Kugelkoordinaten: Betrachte einen „Würfel" mit den Ecken $(r\pm\mathrm{d}r,\vartheta\pm\mathrm{d}\vartheta,\varphi\pm\mathrm{d}\varphi)$ $\mathrm{d}V = r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}A_r = r\mathrm{d}\vartheta r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}A_\vartheta = \mathrm{d}rr\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi, \mathrm{d}A_\varphi = \mathrm{d}rr\mathrm{d}\vartheta$.
Taylorreihe: $\vec{v}(\vec{r}_0 + (\mathrm{d}r,\mathrm{d}\vartheta,\mathrm{d}\varphi)) = \vec{v}(\vec{r}_0) + \left.\dfrac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{\vec{r}_0}\mathrm{d}r\hat{r} + \left.\dfrac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta}\right|_{\vec{r}_0}\mathrm{d}\vartheta\hat{\vartheta} + \left.\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{\vec{r}_0}\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$. $\text{div}\,\vec{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\dfrac{1}{\Delta V}\oint_{\Delta V}\mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{v} = \lim_{\Delta V\to 0}\dfrac{1}{\Delta V}[\mathrm{d}A_{r+}v_r(\vec{r}_0 + \mathrm{d}r\hat{r}) + \mathrm{d}A_{r-}v_r(\vec{r}_0 - \mathrm{d}r\hat{r}) + \mathrm{d}A_{\vartheta+}v_r\left(\vec{r}_0 + \mathrm{d}\vartheta\hat{\vartheta}\right) + \mathrm{d}A_{\vartheta-}v_r\left(\vec{r}_0 - \mathrm{d}\vartheta\hat{\vartheta}\right)$
$\lim_{\Delta V\to 0}\dfrac{1}{\Delta V}\left[\mathrm{d}A_r\left.\dfrac{\partial v_r}{\partial r}\right|_{\vec{r}_0}\mathrm{d}r + \mathrm{d}A_\vartheta\left.\dfrac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta}\right|_{\vec{r}_0}\mathrm{d}\vartheta + \mathrm{d}A_\varphi\left.\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{\vec{r}_0}\mathrm{d}\varphi\right] = \frac{1}{r^2}\left.\dfrac{\partial v_r r^2}{\partial r}\right|_{\vec{r}_0} + \left.\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial v_\vartheta\sin\vartheta}{\partial \vartheta}\right|_{\vec{r}_0} + \left.\dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}\right|_{\vec{r}_0}$.

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$$

Greiner Bd1 p91 Betrachte totale Flussänderung $\mathrm{d}\Phi(r,\vartheta,\varphi) = \dfrac{\partial\Phi_r(r,\vartheta,\varphi)}{\partial r}\mathrm{d}r + \dfrac{\partial\Phi_r(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\vartheta}\mathrm{d}\vartheta + \dfrac{\partial\Phi_r(r,\vartheta,\varphi)}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi$ des Feldes $\vec{F}$ mit **radialem** Fluss $\Phi_r(r,\vartheta,\varphi) = F_r r\mathrm{d}\vartheta r\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi$, **meridionalem** (Nord-Süd) Fluss $\Phi_\vartheta(r,\vartheta,\varphi) = F_\vartheta\mathrm{d}rr\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi$ und **zonalem** (Ost-West) Fluss $\Phi_\vartheta(r,\vartheta,\varphi) = F_\varphi\mathrm{d}rr\mathrm{d}\vartheta$ über dem infinitesimalen Volumen $\mathrm{d}V(r,\vartheta,\varphi) = r^2\sin\vartheta\mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$. was wegen Differenzial-Säge, lokal alle Skalarprodukte vereinfacht und $\text{div}\,\vec{E}(r,\vartheta,\varphi) = \dfrac{\mathrm{d}\Phi(r,\vartheta,\varphi)}{\mathrm{d}V} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial F_r r^2}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial F_\vartheta\sin\vartheta}{\partial\vartheta} + \dfrac{1}{r\sin\vartheta}\dfrac{\partial F_\varphi}{\partial\varphi}$ gibt. Aus den totalen Differenzialen $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$

oder den Diagonalelementen des **metrischen Tensors** erhält man die metrischen Faktoren h_i

$$d\vec{r} = h_i\, dq_i \hat{e}_i = \begin{cases} dx\,\hat{e}_x + \quad dy\,\hat{e}_y + \qquad dz\,\hat{e}_z \\ d\rho\,\hat{e}_\rho + \rho\, d\varphi\,\hat{e}_\varphi + \qquad dz\,\hat{e}_z \\ dr\,\hat{e}_r + \ r\,d\theta\,\hat{e}_\theta + r\,\sin\theta\, d\varphi\,\hat{e}_\varphi \end{cases}$$

Beziehung zu Basisdefinition und Metrik siehe Seite 232 und Jacobi-Matrix siehe Seite 224. **Längenänderung** $\mathrm{d}l_i$ = **metrischer Faktor** h_i × **Koordinatenänderung** $\mathrm{d}q_i$**. Längenänderung** $\mathrm{d}l_i$ = **metrischer Faktor** h_i × **Koordinatenänderung** $\mathrm{d}q_i$**.** Schey: Div, Grad, Curl and all that 1973; Griffiths, p548; Greiner 1 p107ff; Fließbach: Elektrodyn p7ff; **Moon & Spencer: Field Theory Handbook Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions** 1971, 1988[2];

$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{B} - \Delta\vec{B}$ mittels **Nabla-Kalkül BAC-CAB** $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$ oder mittels **Levi-Civitta-Symbol** wegen

$$\varepsilon_{ijk} = \hat{e}_i\cdot(\hat{e}_j\times\hat{e}_k) = \det\begin{pmatrix} - & \hat{e}_i & - \\ - & \hat{e}_j & - \\ - & \hat{e}_k & - \end{pmatrix} =: \det A, \quad \varepsilon_{lmn} = \hat{e}_l\cdot(\hat{e}_m\times\hat{e}_n) = \det\begin{pmatrix} - & \hat{e}_l & - \\ - & \hat{e}_m & - \\ - & \hat{e}_n & - \end{pmatrix} =: \det B$$

und $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \det A\,\det B = \det A\,\det B^T = \det(A\cdot B^T) = \left|\begin{pmatrix} - & \hat{e}_i & - \\ - & \hat{e}_j & - \\ - & \hat{e}_k & - \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} | & | & | \\ \hat{e}_l & \hat{e}_m & \hat{e}_n \\ | & | & | \end{pmatrix}\right| =$ $\begin{vmatrix} \hat{e}_i\cdot\hat{e}_l & \hat{e}_i\cdot\hat{e}_m & \hat{e}_i\cdot\hat{e}_n \\ \hat{e}_j\cdot\hat{e}_l & \hat{e}_j\cdot\hat{e}_m & \hat{e}_j\cdot\hat{e}_n \\ \hat{e}_k\cdot\hat{e}_l & \hat{e}_k\cdot\hat{e}_m & \hat{e}_k\cdot\hat{e}_n \end{vmatrix}$ folgt $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$. **Schmutzer: Mathematik** 2003 p198ff; Flügge: HdP2 p171; **Levi-Civitta-Symbol** $\varepsilon_{ijk} = |\hat{e}_i\,\hat{e}_j\,\hat{e}_k|$ = Volumen der Quader mit Kantenlänge 1, bedeutet Komponente im Falle eines Rang-3-Tensors in der Basis des Tensorprodukts $\hat{e}_i\otimes\hat{e}_j\otimes\hat{e}_k$, das alle möglichen Quader repräsentiert, die aus den Kanten $\hat{e}_i$ aufgebaut werden können, wobei $\hat{e}_i\in\mathbb{R}^n$ die kartesischen Einheitsvektoren bezeichnen. $\hat{e}_1\otimes\hat{e}_1\otimes\hat{e}_1 = \hat{x}\otimes\hat{x}\otimes\hat{x}$ repräsentiert einen Quader, der nur eine Kante $\hat{x}$ hat. Bedeutet, Volumen null. Für den Fall $n=3$ hat man $i,j,k\in\{1,2,3\}$, also Zahlnewürfel mit $3^3 = 27$ Komponenten/Determinante gn, von denen aber nur $n!$ Determinanten nicht verschwinden. Wegen der **totalen Antisymmetrie** der 27 Determinanten, also antisymmetrisch jeder bei Indexvertauschung, ist je die Hälfte der 6 Determinanten +1, bedeutet 3 Quader mit Volumen 1, die anderen Quader haben Volumen -1. Die restlichen 21 Komponenten sind null, die Quader haben kein Volumen. Hat man nur Kanten aus dem $\mathbb{R}^2$, so haben Rang-3-Tensor-Komponenten $\varepsilon_{ijk} = 0_{3\times3\times3}$ stets den Wert Null, weil stets mindestens eine Würfelkante mit einer weiteren zusammenfällt. Die rangniederen Levi-Civitta-Symbole codieren die Hyperflächeninhalte der jeweiligen Würfel. **Menzel: Mathematical physics** 1961 Mechanik, Hydrodynamik, SRT und ART p122, p127; Roman: Theory of elementary particles 1961 p57, p93, p 109; **Schmutzer: Mathematik** 2003 p198ff unterscheidet **Levi-Civitta-Pseudotensor** $\varepsilon_{i_1i_2\ldots i_n} = \sqrt{-|g_{rs}|}\Lambda_{i_1i_2\ldots i_n} = i\sqrt{|g_{rs}|}\Lambda_{i_1i_2\ldots i_n}$ und $\varepsilon^{i_1i_2\ldots i_n} = -\frac{1}{\sqrt{-|g_{rs}|}}\Lambda^{i_1i_2\ldots i_n} = -\frac{i}{\sqrt{|g_{rs}|}}\Lambda^{i_1i_2\ldots i_n}$ von **Levi-Civitta-Symbol** $\Lambda_{i_1i_2\ldots i_n} = |\hat{e}_{i_1}\,\hat{e}_{i_2}\,\ldots\,\hat{e}_{i_n}| = |\hat{e}^{i_1}\,\hat{e}^{i_2}\,\ldots\,\hat{e}^{i_n}| = \Lambda^{i_1i_2\ldots i_n}$. **Bowen & Wang: Introduction to Vectors and Tensors** 1976, 2008 p127; $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,\epsilon^{\gamma\eta\rho\sigma} = 2(\delta^\rho_\alpha\,\delta^\sigma_\beta - \delta^\sigma_\alpha\,\delta^\rho_\beta)$ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,\epsilon^{\beta\gamma\eta\sigma} = -3! = -6\,\delta^\sigma_\alpha$ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\eta}\,\epsilon^{\alpha\beta\gamma\eta} = -4! = -24$ **Römer & Forger: Elementare Feldtheorie** 1993 p147 **Speziell gilt** $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \begin{vmatrix} \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ oder $\boxed{\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm} \text{ und } \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \text{ und } \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 3! = 6}$. **Laplace-Operator ist Divergenz des Gradienten** $\Delta = \nabla\cdot\nabla$:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q^1}\right) + \ldots\right]$$

Wirbelform: $\omega_W = \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{\rho^2}$ oder $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{\hat{\varphi}(\varphi)}{\rho}$. Anders als **Starre Rotation:** $\rho\hat{\varphi}$. $\mathrm{rot}\,(-y,x) = \mathrm{rot}\,\rho\hat{\varphi} = 2$ ist rot $W = \mathrm{rot}\,(-y/\rho^2, x/\rho^2) = \vec{0}$ für $\vec{\rho}\neq\vec{0}$, also gesamte Rotation bei $\vec{\rho} = \vec{0}$, weil das tangenziale Randskalarprodukt mit $1/\rho^2$ ausdünnt! Obiger Rotor im zylindersymmetrischen Fall ist analog zur

kugelsymmetrischen Divergenz $\operatorname{div} r^{-2}\hat{r} = 0$. **Nichtstarre Rotation:** Magnetfeld $\vec{H} = C\hat{\varphi}$ um Stromfaden/Draht $\operatorname{rot}\hat{\varphi} = \operatorname{rot}(-y/\rho, x/\rho) = \operatorname{rot}(-\sin\varphi, \cos\varphi) = 1/\rho$ mit $\rho \neq 0$, siehe aber Seite 235. Undefinierte Stelle **lochlos umfahren**, wobei jeweils linker Hand Fläche ist! Also Außenrand bei ρ_2 math positiv und den Innenrand bei ρ_1 math negativ durchlaufen. Für den Rotor des infinitesimale Ringes der Dicke $\mathrm{d}\rho$ bei ρ gilt $2\pi\rho\mathrm{d}\rho(\operatorname{rot}\hat{\varphi})_\rho = \oint \hat{\varphi}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \oint \hat{\varphi}\cdot\hat{\varphi}\rho\mathrm{d}\varphi = \oint \rho\mathrm{d}\varphi = \int_{\partial\mathrm{d}A}\rho\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\rho_2\mathrm{d}\varphi + \int_0^{-2\pi}\rho_1\mathrm{d}\varphi = 2\pi(\rho_2-\rho_1) = 2\pi\mathrm{d}\rho$ wegen $\rho_2 = \rho_1 + \mathrm{d}\rho$. **Kartesische Koordinaten:** Quadrat mit Fläche $4a^2$ mit Seitenlänge $2a = 2\Delta x_i$ längs der Achsen y, z. Siehe auch Greiner 1 p85 oder Großmann: Math Einf 2004[9] §7.2 p275ff; Der Wert der Rotation wird sich auf den Mittelpunkt der Fläche beziehen. Die Berandung liegt aber im Abstand $a = \Delta x_i$, wo das Feld senkrecht zur x-Komponente gemäß Taylorreihe mit dem **niedrigsten nicht-trivialen Term** den Wert $v_i(\vec{r}_0 + (0,\Delta y,\Delta z)) = v_i(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_i}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0}\Delta y + \left.\frac{\partial v_i}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0}\Delta z$ annimmt. Somit ist der **Rotor** $(\operatorname{rot}\vec{v})_x =$

$$\frac{1}{4a^2}\oint_{\text{Rand}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{4a^2}\left[\int_{(x,y-a,z-a)}^{(x,y+a,z-a)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(x,y+a,z-a)}^{(x,y+a,z+a)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(x,y+a,z+a)}^{(x,y-a,z-a)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(x,y+a,z-a)}^{(x,y-a,z-a)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\right] = =$$

$$\frac{1}{4a^2}\left[\int_{y_0-a}^{y_0+a} v_y(x_0,y,z_0-a)\,\mathrm{d}y + \int_{z_0-a}^{z_0+a} v_z(x_0,y_0+a,z)\,\mathrm{d}z + \int_{y_0+a}^{y_0-a} v_y(x_0,y,z_0-a)\,\mathrm{d}y + \int_{z_0+a}^{z_0-a} v_z(x_0,y_0+a,z)\,\mathrm{d}\right.$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left[\int_{-a}^{+a}\left(v_y(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_y}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} y - \left.\frac{\partial v_y}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} a\right)\mathrm{d}y - \int_{-a}^{+a}\left(v_y(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_y}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} y + \left.\frac{\partial v_y}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} a\right)\mathrm{d}y +\right.$$

$$\left.+\int_{-a}^{+a}\left(v_z(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_z}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} a + \left.\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} z\right)\mathrm{d}z - \int_{-a}^{+a}\left(v_z(\vec{r}_0) - \left.\frac{\partial v_z}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} a + \left.\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} z\right)\mathrm{d}z\right] =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[-\int_{-a}^{+a}\left.\frac{\partial v_y}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} a\mathrm{d}y + \int_{-a}^{+a}\left.\frac{\partial v_z}{\partial y}\right|_{\vec{r}_0} a\mathrm{d}z\right] = \underline{\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}}.$$

Zylinder–Koordinaten: ρ-Komponente hat Rechteck mit den Seiten $2a = 2\rho\Delta\varphi$ und $2b = 2\Delta z$. Taylorreihe $v_i(\vec{r}_0 + (0,\Delta\varphi,\Delta z)) = v_i(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_i}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi + \left.\frac{\partial v_i}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0}\Delta z$ gibt den Rotor $(\operatorname{rot}\vec{v})_\rho = \frac{1}{4ab}\oint_{\text{Rand}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{4ab}\left[\int_{(\rho,\varphi-\Delta\varphi,z-b)}^{(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z-b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z-b)}^{(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z+b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} +\right.$

$$\left.+\int_{(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z+b)}^{(\rho,\varphi-\Delta\varphi,z-b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z-b)}^{(\rho,\varphi-\Delta\varphi,z-b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\right] = \frac{1}{4ab}\left[\int_{\varphi_0-\Delta\varphi}^{\varphi_0+\Delta\varphi} v_\varphi(\rho,\varphi,z-b)\,\rho\,\mathrm{d}\varphi + \int_{\varphi_0+\Delta\varphi}^{\varphi_0-\Delta\varphi} v_\varphi(\rho,\varphi,z+b)\,\rho\,\mathrm{d}\varphi +\right.$$

$$\left.\int_{z_0-b}^{z_0+b} v_z(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z)\,\mathrm{d}z + \int_{z_0+b}^{z_0-b} v_z(\rho,\varphi-\Delta\varphi,z)\,\mathrm{d}z\right] = \frac{1}{4ab}\left[\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(v_\varphi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\varphi - \left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} b\right)\rho\,\mathrm{d}\varphi -\right.$$

$$-\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(v_\varphi(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\varphi + \left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} b\right)\rho\,\mathrm{d}\varphi + \int_{-b}^{+b}\left(v_z(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0} a + \left.\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} z\right)\mathrm{d}z -$$

$$\left.\int_{-b}^{+b}\left(v_z(\vec{r}_0) - \left.\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0} a + \left.\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} z\right)\mathrm{d}z\right] = \frac{1}{2ab}\left[-\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} b\rho\,\mathrm{d}\varphi + \int_{-b}^{+b}\left.\frac{\partial v_z}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi\,\mathrm{d}z\right] = \underline{\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}}.$$

φ-Komponente – „Rechteck“ mit den Seiten $2a = 2\Delta r$ und $2b = 2\Delta z$ mit **Taylorreihe:** $v_i(\vec{r}_0 + (\Delta\rho,0,\Delta z)) = v_i(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_i}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\rho + \left.\frac{\partial v_i}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0}\Delta z$ gibt Rotor $(\operatorname{rot}\vec{v})_\varphi = \frac{1}{4ab}\oint_{\text{Rand}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{4ab}\left[\int_{(\rho-a,\varphi,z-b)}^{(\rho+a,\varphi,z-b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(\rho+a,\varphi,z-b)}^{(\rho+a,\varphi,z+b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\right.$

$$\left.+\int_{(\rho+a,\varphi,z+b)}^{(\rho-a,\varphi,z+b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(\rho-a,\varphi+,z+b)}^{(\rho-a,\varphi,z+b)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\right] = \frac{1}{4ab}\left[\int_{\rho_0-a}^{\rho_0+a} v_\rho(\rho,\varphi,z-b)\,\mathrm{d}\rho + \int_{\rho_0+a}^{\rho_0-a} v_\rho(\rho,\varphi,z+b)\cdot\mathrm{d}\rho\right.$$

$$\left.+\int_{z_0-b}^{z_0+b} v_z(\rho+a,\varphi,z)\,\mathrm{d}z + \int_{z_0+b}^{z_0-b} v_z(\rho-a,\varphi,z)\,\mathrm{d}z\right] = \frac{1}{4ab}\left[\int_{-a}^{+a}\left(v_\rho(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}\rho - \left.\frac{\partial v_\rho}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} b\right)\mathrm{d}\rho\right.$$

$$-\int_{-a}^{+a}\left(v_\rho(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}\rho + \left.\frac{\partial v_\rho}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} b\right)\mathrm{d}\rho + \int_{-b}^{+b}\left(v_z(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0} a + \left.\frac{\partial v_z}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} z\right)\mathrm{d}z - \int_{-b}^{+b}\left(v_z(\vec{r}_0) - \left.\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0} a +\right.$$

$$\left.\frac{1}{2ab}\left[-\int_{-a}^{+a}\left.\frac{\partial v_\rho}{\partial z}\right|_{\vec{r}_0} b\,\mathrm{d}\rho + \int_{-b}^{+b}\left.\frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0} a\,\mathrm{d}z\right] = \underline{\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}}.$$

z-Komponente – „Trapez“ mit den Seiten $2a = 2\Delta r$ und $2b_i = 2\rho_i\Delta\varphi$ und **Taylorreihe:** $v_i(\vec{r}_0 + (\Delta\rho,\Delta\varphi,0)) = v_i(\vec{r}_0) + \left.\frac{\partial v_i}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\rho + \left.\frac{\partial v_i}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi$ gibt Rotor $(\operatorname{rot}\vec{v})_z = \frac{1}{4ab}\oint_{\text{Rand}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{4ab}\left[\int_{(\rho-a,\varphi-\Delta\varphi,z)}^{(\rho+a,\varphi-\Delta\varphi,z)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(\rho+a,\varphi+\Delta\varphi,z)}^{(\rho+a,\varphi-\Delta\varphi,z)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\right.$

$$\left.+\int_{(\rho+a,\varphi+\Delta\varphi,z)}^{(\rho-a,\varphi+\Delta\varphi,z)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s} + \int_{(\rho-a,\varphi-\Delta\varphi,z)}^{(\rho-a,\varphi+\Delta\varphi,z)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}\right] = \frac{1}{4ab}\left[\int_{\rho_0-a}^{\rho_0+a} v_\rho(\rho,\varphi-\Delta\varphi,z)\,\mathrm{d}\rho + \int_{\varphi_0-\Delta\varphi}^{\varphi_0+\Delta\varphi} v_\varphi(\rho+a,\varphi,z)\,(\rho+a)\,\mathrm{d}\varphi\right.$$

$+\int_{\rho_0+a}^{\rho_0-a} v_\rho(\rho,\varphi+\Delta\varphi,z)\,\mathrm{d}\rho+\int_{\varphi_0+\Delta\varphi}^{\varphi_0-\Delta\varphi} v_\varphi(\rho-a,\varphi,z)(\rho-a)\,\mathrm{d}\varphi\Big]=\frac{1}{4ab}\Bigg[\int_{-a}^{+a}\left(v_\rho(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}\rho-\left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi\right)$

$-\int_{-a}^{+a}\left(v_\rho(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}\rho+\left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi\right)\mathrm{d}\rho+\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(v_\varphi(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}a+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\varphi\right)(\rho+a)\,\mathrm{d}\varphi$

$-\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(v_\varphi(\vec{r}_0)-\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}a+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\varphi\right)(\rho-a)\,\mathrm{d}\varphi\Bigg]$. **Terme 1. Ordnung** geben

$=\frac{1}{2ab}\left[-\int_{-a}^{+a}\left.\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi\,\mathrm{d}\rho+\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(av_\varphi(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho}\right|_{\vec{r}_0}a\rho\right)\mathrm{d}\varphi\right]=\frac{1}{\rho}v_\varphi+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}=\underline{\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho v_\varphi}{\partial\rho}-\frac{\partial v_\rho}{\partial\varphi}\right)}.$

Kugel–Koordinaten: r-Komponente – „Trapez“ mit den Seiten $2a_i=2r\sin\vartheta_i\Delta\varphi$ und $2b=2r\Delta\vartheta$. **Taylorreihe** $v_i(\vec{r}_0+(r,\Delta\vartheta,\Delta\varphi))=v_i(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_i}{\partial\vartheta}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\vartheta+\left.\frac{\partial v_i}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi$ und **Näherung** $\sin(\vartheta\pm\Delta\vartheta)=\sin\vartheta\cos\Delta\vartheta\pm\cos\vartheta\sin\Delta\vartheta\approx\sin\vartheta\pm\Delta\vartheta\cos\vartheta$ gibt Rotor

$(\mathrm{rot}\,\vec{v})_r=\frac{1}{4ab}\oint_{\text{Rand}}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{4ab}\left[\int_{(r,\vartheta-\Delta\vartheta,\varphi-\Delta\varphi)}^{(r,\vartheta+\Delta\vartheta,\varphi-\Delta\varphi)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\int_{(r,\vartheta+\Delta\vartheta,\varphi-\Delta\varphi)}^{(r,\vartheta+\Delta\vartheta,\varphi+\Delta\varphi)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\int_{(r,\vartheta+\Delta\vartheta,\varphi+\Delta\varphi)}^{(r,\vartheta-\Delta\vartheta,\varphi+\Delta\varphi)}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{s}+\int_{(r,\vartheta-\Delta\vartheta,\varphi-}^{(r,\vartheta-\Delta\vartheta,\varphi}\right.$

$=\frac{1}{4ab}\Big[\int_{\vartheta-\Delta\vartheta}^{\vartheta+\Delta\vartheta}v_\vartheta(r,\vartheta,\varphi-\Delta\varphi)\,r\mathrm{d}\vartheta+\int_{\varphi-\Delta\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}v_\varphi(r,\vartheta+\Delta\vartheta,\varphi)\,r\sin(\vartheta+\Delta\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi+\int_{\vartheta+\Delta\vartheta}^{\vartheta-\Delta\vartheta}v_\vartheta(r,\vartheta,\varphi+\Delta\varphi)\,r\mathrm{d}\vartheta+$

$\int_{\varphi+\Delta\varphi}^{\varphi-\Delta\varphi}v_\varphi(r,\vartheta-\Delta\vartheta,\varphi)\,r\sin(\vartheta-\Delta\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\Big]=\frac{1}{4ab}\Bigg[\int_{-\Delta\vartheta}^{+\Delta\vartheta}\left(v_\vartheta(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}\right|_{\vec{r}_0}\vartheta-\left.\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi\right)r\mathrm{d}\vartheta$

$-\int_{-\Delta\vartheta}^{+\Delta\vartheta}\left(v_\vartheta(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\vartheta}\right|_{\vec{r}_0}\vartheta+\left.\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi\right)r\mathrm{d}\vartheta+\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(v_\varphi(\vec{r}_0)+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\vartheta}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\vartheta+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\varphi\right)(\sin\vartheta+\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi-$

$\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(v_\varphi(\vec{r}_0)-\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\vartheta}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\vartheta+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\varphi\right)(\sin\vartheta-\cos\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\Bigg]$ **Terme 1. Ordnung** geben

$=\frac{1}{2ab}\left[\int_{-\Delta\varphi}^{+\Delta\varphi}\left(v_\varphi(\vec{r}_0)\cos\vartheta+\left.\frac{\partial v_\varphi}{\partial\vartheta}\right|_{\vec{r}_0}r\Delta\vartheta\right)\sin\vartheta\mathrm{d}\varphi-\int_{-\Delta\vartheta}^{+\Delta\vartheta}\left.\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right|_{\vec{r}_0}\Delta\varphi r\mathrm{d}\vartheta\right]=$

$\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(v_\varphi\cos\vartheta+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\vartheta}\sin\vartheta-\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right)=\underline{\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial v_\varphi\sin\vartheta}{\partial\vartheta}-\frac{\partial v_\vartheta}{\partial\varphi}\right)}$ KUGEL

Alternativer Ausgangspunkt ist der Gradient = Oberflächenvektoren-Mittel einer Größe in der Hydrodynamik, wo das Druckfeld $p(\vec{r})$ nicht die **Kraft auf eine berandte Fläche** $\vec{F}=-\int\mathrm{d}\vec{o}p(\vec{r})$ macht, sondern die Kraft sich als **Oberflächenvektoren-Mittel** aus **allen Oberflächenelementen** einer geschlossenen Fläche eines **mikroskopischen Volumenelements** $\Delta\tau$ ergibt, also auf die Volumeneinheit bezogen wird:

Gradient als Mittelwert über Oberflächenvektoren kommt ohne Richtungsableitung aus:

$$\mathrm{grad}\,p=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\int_{\partial\Delta\tau}\mathrm{d}\vec{o}\,p(\vec{r})}{\Delta\tau}=-\vec{F},\quad\mathrm{grad}\;=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vec{r}}=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\int_{\partial\Delta\tau}\mathrm{d}\vec{o}}{\Delta\tau}$$

$$\vec{n}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}=\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\int_{\partial\Delta\tau}\vec{n}\cdot\mathrm{d}\vec{o}\times\vec{v}}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta o\to0}\frac{\int_{\partial\Delta o}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}}{\Delta o}$$

Oder mit dem **Mittelwert des Rotors** in einem Punkt von Δo gilt $\Delta\vec{o}\cdot\overline{\mathrm{rot}\,\vec{v}}=\int_{\Delta o}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}$.

Oberflächenvektor-Mittelwerte für verschiedene Produkte betrachten:

$$\mathrm{grad}\,\Phi(\vec{x})=\lim_{V\to0}\frac{1}{V(\vec{x})}\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{a}(\vec{x})\,\Phi(\vec{x}),\quad\mathrm{rot}\,\vec{E}=\lim_{V\to0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{a}\times\vec{E},\quad\mathrm{div}\,\vec{E}=\lim_{V\to0}\frac{1}{V}\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{a}\cdot\vec{E}$$

Bronstein, Musiol: TB Mathe 2001[5] p766; Mit der Volumen-basierten Definition des Gradienten oder **Flächenintegraldarstellung des Gradienten**ß Gl. (14) erkennt man, dass der **Stokes'sche Satz** $\int_A\mathrm{d}\vec{o}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}=\int_{\partial A}\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{v}$ wegen $\mathrm{d}\vec{o}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{v}=\mathrm{d}\vec{o}\cdot\nabla\times\vec{v}=\mathrm{d}\vec{o}\times\nabla\cdot\vec{v}$ als skalares Produkt der Operatorgleichung = **allgemeiner Stokes'scher Integralsatz** $\int_A\mathrm{d}\vec{o}\times\nabla=\int_{\partial A}\mathrm{d}\vec{r}$ mit $\vec{v}$ geschrieben werden kann. Denn direkt aus der Definition **Flächenintegraldarstellung** des Gradienten folgt:

$$\int_A\mathrm{d}\vec{o}\times\nabla=\lim_{\Delta\vec{o}_i\to0}\sum_i\Delta\vec{o}_i\times\left(\overline{\lim_{\Delta\tau\to0}\frac{\int_{\partial\Delta\tau}\mathrm{d}\vec{o}'}{\Delta\tau}}\right)_i=\lim_{\Delta\vec{o}_i\to0}\sum_i\Delta\vec{o}_i\times\frac{\int_{\partial\Delta\tau}\mathrm{d}\vec{o}'}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta\vec{o}_i\to0}\sum_i\int_{\partial\Delta\tau_i}\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\partial A}\mathrm{d}\vec{r}$$

Der rechte Grenzübergang = Gradient muss vor dem linken Grenzübergang = Integral ausgeführt werden! Das letzte Integral geht über den Rand der Gesamtfläche. Für jede geschlossene Fläche ist $\int_A \mathrm{d}\vec{o} \times \nabla = 0$! Speziell gilt je nach Feldfunktion wegen der **Flächenintegraldarstellung** des Gradienten:

$$\oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v} = \int \mathrm{d}\vec{o} \times \nabla \cdot \vec{v} = \int \mathrm{d}\vec{o} \cdot \nabla \times \vec{v} = \int \mathrm{d}\vec{o} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}, \quad \oint \mathrm{d}\vec{r} U = \int \mathrm{d}\vec{o} \times \nabla U = \int \mathrm{d}\vec{o} \times \operatorname{grad} U$$

$$\oint \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{v} = \int (\mathrm{d}\vec{o} \times \nabla) \times \vec{v}, \quad \oint \mathrm{d}\vec{r} \cdot \underline{\Psi} = \int (\mathrm{d}\vec{o} \times \nabla) \cdot \underline{\Psi} = \int \mathrm{d}\vec{o} \cdot \nabla \times \underline{\Psi}$$

wobei $\underline{\Psi}$ **Dyade**. Beispiel: $\operatorname{div}(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2}\vec{E}^2 \mathbb{I}) = \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E}$ wegen $\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} = e_i E^i \partial_k E^k = e_i D^i$, $D^1 = D^x = E^x \frac{\partial E^x}{\partial x} + E^x \frac{\partial E^y}{\partial y} + E^x \frac{\partial E^z}{\partial z}$ und $\vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E} = e_j \epsilon^j{}_{uv} E^u \epsilon^v{}_{rs} \partial_r E^s = e_j \epsilon^j{}_{uv} \epsilon^r{}_{su} E^u \partial_r E^s =$ $= e_j [\delta^{jr} \delta_{us} - \delta^j_s \delta^r_u] E^u \partial_r E^s = e_j [E^u \partial_j E^u - E^r \partial_r E^j] = e_j R^j$ und $(\vec{E} \operatorname{div} \vec{E} - \vec{E} \times \operatorname{rot} \vec{E})^x = D^1 - R^1 = D^x - R^x =$ $E^x \frac{\partial E^x}{\partial x} + E^x \frac{\partial E^y}{\partial y} + E^x \frac{\partial E^z}{\partial z} - E^y \frac{\partial E^y}{\partial x} - E^z \frac{\partial E^z}{\partial x} + E^y \frac{\partial E^x}{\partial y} + E^z \frac{\partial E^x}{\partial z}$ und $\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2}\vec{E}^2 \mathbb{I} = E^i E^j e_i e_j - \frac{1}{2} E^k E^k e_i e_j \delta_{ij}$ und $\operatorname{div} = e^n \partial_n$ explizit $\operatorname{div}(\vec{E} \otimes \vec{E} - \frac{1}{2}\vec{E}^2 \mathbb{I}) = e^n \partial_n \cdot (E^i E^j e_i e_j - \frac{1}{2} E^k E^k e_i e_j \delta_{ij}) = \partial_n E^n E^j e_j - \frac{1}{2} \partial_n E^k E^k e_j \delta_{nj} = \partial_n E^n E^j e_j - \frac{1}{2} \partial_n E^k E^k e_n$. Tai, Chen-To: **Generalized vector and dyadic analysis** - applied mathematics in field theory 2000; **Lagally & Franz: Vorlesungen über Vektorrechnung** 1928, 1956[5] p151, 1964[7] oder Nolting: Elektrodyn p32: Sei $\vec{B} = \vec{\mathrm{const}}$ und $\vec{F} = \vec{v} \times \vec{B}$, dann gilt mit Satz von Stokes

$$\int_{\partial A} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{\partial A} \mathrm{d}\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \int_{\partial A} (\mathrm{d}\vec{r} \times \vec{v}) \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \int_{\partial A} \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{v} = \int_A \mathrm{d}\vec{A} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} = \int_A \mathrm{d}\vec{A} \cdot \nabla \times \vec{F} = \int_A (\mathrm{d}\vec{A} \times \nabla) \cdot \vec{F} =$$

$$= \vec{B} \cdot \int_{\partial A} \mathrm{d}\vec{r} \times \vec{v} = \int_A (\mathrm{d}\vec{A} \times \nabla) \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \int_A (\mathrm{d}\vec{A} \times \nabla) \times \vec{v} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \int_A (\mathrm{d}\vec{A} \times \nabla) \times \vec{v}$$

Siehe auch **Zangwill: Modern Electrodynamics** 2013 p10 und **Bowen & Wang: Introduction to Vectors and Tensors** 1976, 2008; **Anschauliche Vektoranalysis** siehe **Purcell: Berkeley Physik Kurs, Bd2, Elektrizität und Magnetismus** 1976, 2001[4];

Divergenz ist Anstieg durch **Volumenwachstum** eines infinitesimalen Gebiets $\Gamma(\vec{r})$ am Ort $\vec{r}$ oder **mittlerer Zuwachs** einer vektoriellen Größe durch geschlossenes Fläche oder **Ergiebigkeit des Flusses** $\mathrm{d}\vec{a}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})$ **eines Vektorfeldes** $\vec{A}(\vec{r})$ **am Ort** $\vec{r}$**:** $\mathrm{div}\vec{A}(\vec{r}) = \lim_{Vol(\Gamma(\vec{r}))\to 0}\frac{1}{Vol(\Gamma(\vec{r}))}\oint_{\partial\Delta\Gamma(\vec{r})}\mathrm{d}\vec{a}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r}) \in \mathbb{R}$ Beachte aber, dass die Größe für den Übergang zur lokalen oder differenziellen Form existieren und differenzierbar sein muss! Betrachte dazu das Volumenelement $\Delta V(\vec{r})$ bei $\vec{r}$ mit der Oberfläche $\Delta A(\vec{r})$ bzgl. $\vec{r}$

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{\Delta V(\vec{r})\to 0}\frac{1}{\Delta V(\vec{r})}\oint_{\partial\Delta V(\vec{r})}\mathrm{d}\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{E}(\vec{r}) \in \mathbb{R}$$

Koordinatendarstellung mittels **Netz-Methode** nach Becker gibt kartesisch $\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = \nabla\cdot\vec{E}(\vec{r}) = \hat{e}^i\partial_i\cdot\hat{e}_jE^j = \hat{e}^i\cdot\hat{e}_j\partial_iE^j = \delta^i_j\partial_iE^j = \partial_iE^i = \frac{\partial E^i(x^1,\ldots,x^n)}{\partial x^i}$. **Lang & Pucker**: Mathematische Methoden in der Physik; Die Divergenz misst die Quelldichte, Ergiebigkeit, Quellstärke eines Vektorfeldes oder misst wie viel ein Vektorfeld stärker oder schwächer wird. Arens p901. Recknagel: Mechanik p368 Quellstärke ist Stromstärke $I = \frac{A\,v\,t}{t} =$ (Volumen oder Teilchenzahl)/Zeit, durch eine das ganze Quellgebiet umspannende Fläche. Stromdichte $j = \frac{I}{A} = v$. Quellen = Brauseöffnung im Raum. Senke = Abfluss im Raum. Schulz p168ff; Wo div $\vec{E}(\vec{r}) \neq 0$ dort, also bei $\vec{r}$ Brauselöcher mit der Dichteänderung $\dot{\rho} = -\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r})$. Newtons Gravitations-Gesetz und Coulomb-Gesetz sind mit $1/r^2$ gerade so gebastelt, damit wegen der Flächen-Änderung proportional r^2 keine Feldlinien dazukommen oder oder plötzlich im Raum aufhören. Man summiert die Feld-Änderungen in Richtung der Flächennormalen - also quer zum Rand. Bei Rotation summiert man die Feld-Änderungsrate längs einer geschlossenen Kurve - also längs des Randes. In beiden Fällen wird der Rand betrachtet. **Flächendivergenz** siehe Joos: LB theoret Physik 1989[15] p41; Für **krummlinige Koordinaten** gilt allgemein $\nabla\cdot\vec{E} = \hat{e}^i\partial_i\cdot\hat{e}_jE^j = \partial_iE^i + E^j\hat{e}^i\cdot\partial_i\hat{e}_j = \partial_iE^i + E^j\Gamma^i_{ij}$ wegen Zerlegung von **kogredienten Basisvektoren** $\partial_i\hat{e}_j = \Gamma^l_{ij}\hat{e}_l = \Gamma^l_{ji}\hat{e}_l$, Symmetrie durch Satz von Schwarz. Die Entwicklung nach **kontragredienten Basisvektoren** ist $\partial_i\hat{e}^j = -\Gamma^j_{il}\hat{e}^l$. Mit den **Christoffelsymbolen** aus Metrikkoeffizienten gemäß Seite 224 hat man $\Gamma^l_{ik} = \frac{1}{2}g^{ln}(\partial_ig_{kn} + \partial_kg_{in} - \partial_ng_{ik})$. Speziell ist $\Gamma^k_{ik} = \frac{1}{2}g^{kn}\partial_ig_{kn}$, Schultz-Piszachich: Tensoralgebra 1977 p90ff; **Riley, Hobson, Bence: Math methods for physics and engineering** 1998 p713; **Zauner: Gravitationswellen - Grundlagen, Entstehung und Detektion** BA-Arbeit 2013 p13 AmazonVorschau $-\Gamma^j_{il}$ = tensorieller Anteil + nichttensorieller Anteil ist **Vernetzungssymbol**, das die die Vergleichbarkeit von Vektoren gekrümmter Mannigfaltigkeiten ermöglicht, in dem es die **krümmungsbedingte** von der bloßen Ortsabhängigkeit der Basisvektoren in gekrümmten Koordinaten unterscheidet. Eliminiert die **koordinatenwahlbedingte** Veränderung lokaler Basisvektoren. Beschreibt den **Parallelen-Transport** eines Vektors von einem Tangenzialraum in einen benachbarten. Siehe auch Seite 254.

Gauß-Theorem Greiner 1 p109. **Arnold: Meth Methoden der klassischen Mechanik** 1988 p303 Parallelentransport auf gekrümmten Flächen;
$f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\text{grad}} \vec{a}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{rot}} \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{div}} \beta \in \mathbb{R}^1$
Satz von Poincare: $\mathrm{d}\wedge\mathrm{d}\wedge\omega = \mathrm{dd}\omega = \mathrm{dd} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot} = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = \vec{0} = 0$. Spezialfälle - der Rand vom Rand hat keinen Rand oder ist die leere Menge - von $\mathrm{dd}\omega = 0$ sind $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = \vec{0}$ und $\mathrm{div}\ \mathrm{rot}\,\vec{a} = 0$, wobei die **Differenziale** so zusammenhängen

$$\mathrm{d}\cdot = \frac{\partial\cdot}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\cdot}{\partial y}\mathrm{d}y + \cdots = \frac{\partial\cdot}{\partial x}\mathrm{d}x\wedge + \frac{\partial\cdot}{\partial y}\mathrm{d}y\wedge + \ldots$$

Arens p913

$$\Delta \looparrowright [\text{Skalarfelder}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}] \underset{\text{div},\ \nabla\cdot}{\overset{\nabla,\ \text{grad}}{\rightleftarrows}} [\text{Vektorfelder}: \quad \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3] \circlearrowleft \Delta, \nabla\times$$

Ableitung: ω' Strich bedeutet Aufforderung, nach einer **unabhängigen** Variablen abzuleiten. **Reisegleichung** siehe Seite 311. $\partial_y\omega$ bedeutet Aufforderung, nach der unabhängigen Variablen y abzuleiten. **Frage: Was passiert mit den Eigenschaften eines Dings, wenn ich was ein bisschen**

ändere? Wie sieht Zuwachs aus? $\mathrm{d}\omega$ bedeutet, bilde **totales Differenzial** oder **äußere Ableitung** also $\mathrm{d}\omega = \partial_x\omega\mathrm{d}x + \partial_y\omega\mathrm{d}y + \partial_z\omega\mathrm{d}z$ oder $\mathrm{dd}\omega = \partial_{yx}\omega\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \partial_{zx}\omega\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \partial_{xy}\omega\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + \partial_{zy}\omega\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y + \partial_{xz}\omega\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + \partial_{yz}\omega\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0$. **Gradientenfelder sind wirbelfrei. Wirbelfelder sind quellenfrei**. Arens p904. $\vec{v}$ **Gradientenfeld oder Potenzialfeld, konservativ** falls $\vec{v} = \nabla\phi$. **Bei Existenz des Potenzials muss die Kraft** $-\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{x})$ **gerade senkrecht auf den (Äqui- oder Iso-) Potenzialflächen liegen,** weil für die Äqui- oder Iso-Flächen definierende Menge alles Punkte $\vec{x}$ das **totale Differenzial = Zuwachs verschwinden muss** $0 = \mathrm{d}\varphi(\vec{x}) = \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{d}\vec{x}$! Hund: Mechanik p136; $\vec{w}$ **Wirbelfeld** falls $\vec{w} = \nabla\times\vec{A}$. Siehe auch **Penrose: Roads to reality!** Anwendung Zustandsfunktionen der Thermodynamik $F(T,V) = U - TS$.

Differenziale sind lineare Abbildungen $\mathrm{d}f(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\mathrm{d}f(x)(\alpha h + \beta h) = \alpha\mathrm{d}f(x)h + \beta\mathrm{d}f(x)k$$

wobei $h, x \in \mathbb{R}^n$.

Differenzialgeometrie als Synthese von Calculus und Elementargeometrie ist ein weiterer Schritt in Richtung descartischer Methodenauslagerung als Erweiterung von **Analytischer Geometrie - also rechnen statt zeichnen!** - und erfasst die innere Geometrie Mannigfaltigkeiten - ganz ohne Ortsvektor, allein im Tangenzialraum. **Kreyszig: Differentialgeometrie** 1968[2]; B̃ianchi: Vorlesungen über Differentialgeometrie 1899; K̃nobloch: Differentialgeometrie 1913; D̃uschek & Walther Mayer: Lehrbuch der Differentialgeometrie Bd1 Kurven und Flächen im euklidischen Raum. Bd2 Riemann'sche Geometrie 1930; Hertel: Theoretische Physik p220 Riemann'sche Geometrie $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$; Geroch: Differential Geometry. 1972 Lecture Notes 2016; **Hilbert & Cohen-Vossen: Anschauliche Geometrie** 1932 p159; **Talpaert: Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics** 1993, 2001; **Crampin & Pirani: Applicable differential geometry** 1987; **Cipolla & Giblin: Visual motion of curves and surfaces** 2000 sehr anschauliche Einführung in die Differenzialgeometrie nebst Anwendungen. **Mongesches Flächenstück = Monge-Patch:** $\vec{x} = u\hat{e}_1 + v\hat{e}_2 + f(u,v)\hat{e}_3$, obere Halbkugel ohne Äquator $\vec{x} = x_1\hat{e}_1 + x_2\hat{e}_2 + \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\,\hat{e}_3$ mit $x_1^2 + x_2^2 < 1$, weil ohne Berandung! Orientierbare Fläche, Einheitsnormale variiert stetig über gesamte Fläche. Walter: Differentialgeometrie 1989[2]; **Rothe: Differentialgeometrie I Raumkurven und Anfänge der Flächengeometrie** 1944; **Kobayashi & Nomizu: Foundations of differential geometry** 2 Bde 1963; **Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie: Ein Lehrbuch für Physiker** und Mathematiker 2004[2]; Vektorrechnung und Algebra machen Verortung und Bewegung im Euklidischen Raum. Laugwitz: Differentialgeometrie in Vektorräumen unter besonderer Berücksichtigung der unendlichdimensionalen Räume 1965; Laugwitz: Differentialgeometrie 1977; **Curtis & Miller: Differential manifolds and theoretical physics** 1985 e-book; Kosinski: Differential manifolds 1993; **B̃arden & Thomas: An introduction to differential manifolds** 2003; **Klingenberg: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie** 1973; **Klotzek: Differentialgeometrie** I & II; K̃lingenberg: Klassische Differentialgeometrie. Eine Einführung in die Riemannsche Geometrie 2004; **Visconti: Introductory differential geometry for physicists** 1992; S̃toker: Differential geometry 1969; G̃oursat: Lehrbuch der Analysis 1914; Ṽaliron: Classical differential geometry of curves and surfaces. Lie groups. History, frontiers and applications 1987; C̃armeli: Classical fields. General relativity and gauge fields 1982; Bär: Elementare Differentialgeometrie 2004[2]; Koh: The evolution equation for closed magnetic geodesics 2008; **Göckeler & Schücker: Differential geometry, gauge theories, and gravity** 1989; Kurzfassung in **S̃chottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik**; http://www. formel-sammlung. de/ ld-Differentialgeometrie-404.html; Ebene Kurven $\gamma : t \to \vec{x} = \vec{\gamma}(t)$. Ebene Fläche mit Leibniz'scher **Sektorformel** $A = \frac{1}{2}\int_1^2 |\vec{x}\times\dot{\vec{x}}|\mathrm{d}t$. **Bogenlänge** mit $s(1,2) = \int_1^2 ||\dot{\vec{x}}(t)||\mathrm{d}t = \int_1^2 \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t$ kann zur Parametrisierung benutzt werden. Schupp & Dabrock: Höhere Kurven 1995; **Archimedische Spirale** = Aufwickeln eines gleichmäßig dicken Teppichs $r(\phi) = a\cdot\phi$,

logarithmische Spirale = beim Wachstum von Schneckenhäusern $r(\phi) = b \cdot e^{a \cdot \phi}$ oder $\ln r - \ln b = a\phi$, **hyperbolische Spirale** = beim senkrechten Blick durch eine Wendeltreppe $r(\phi) = \frac{a}{\phi}$, **Fermatsche Spirale** $r^2 = a\phi$, **Klothoide**, Cornu-Spirale oder Spinnkurve = zwei Garnrollen, Krümmung dieser Kurve proportional zur Länge ihres Bogens. **Krümmung** einer **ebenen Kurve 2D** $\vec{\gamma}(t)$ oder $\vec{r}(t)$

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'^2(x)}^3}$$

Alexandroff: Kurven und Flächen 1956, 1959; Kühnel p13; do Carmo; Zeidler: TB Mathematik; Born: Die Relativitätstheorie Einsteins 1920, 2000 p281ff; **Krümmung** und **Torsion/Windung** von **Raumkurven (3D)** $\vec{\gamma}(t)$ oder $\vec{r}(t)$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)|}{|\dot{\vec{r}}(t)|^3}$$

denn **Velocity** $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{|\mathrm{d}\vec{r}|}\dot{s} = \hat{t}\dot{s} = \vec{v}(t)^o\, v(t)$ mit Speed $v(t)$ = momentane Tachoanzeige = zeitlicher Weggewinn in Fahrtrichtung $\hat{t}$. **Beschleunigung** $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \dot{\hat{t}}\,\dot{s} + \hat{t}\,\ddot{s} = \kappa\,\dot{s}^2\hat{n} + \hat{t}\,\ddot{s}$ wobei die zeitliche Änderung der Tangentenrichtung auf die Tangentenrichtungsänderung pro Bogen/Weglänge bezogen wird: $\hat{t}' = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{t}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\dot{\hat{t}}}{\dot{s}}$. Die Änderung $\hat{t}'$ steht senkrecht zur Tangente $\hat{t}$. Also $\hat{t}' \perp \hat{t}$ oder $\hat{t}' = \kappa\hat{n} = \frac{\dot{\hat{t}}}{\dot{s}}$. Bedeutet $\dot{\hat{t}} = \kappa\dot{s}\,\hat{n}$, mit dem Normalenvektor $\hat{n}$. Damit ist $\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t) = \hat{t}\dot{s} \times (\kappa\,\dot{s}^2\hat{n} + \hat{t}\,\ddot{s}) = \kappa\,\dot{s}^3\hat{t} \times \hat{n} = \kappa\,\dot{s}^3\hat{b} = \kappa(t)\,|\dot{\vec{r}}(t)|^3\hat{b}$. Bedeutet $|\dot{\vec{r}}(t) \times \ddot{\vec{r}}(t)| = \kappa(t)\,|\dot{\vec{r}}(t)|^3$. (Schraube = Helix, Handlauf einer Wendeltreppe, Flugbahn, Sonnenwindteilchen im Erdmagnetfeld, Helix, Pflanzenranken) im Ergebnis der simultanen Ableitung dreier Vektorkomponenten nach einem Parameter **längs der Kurve**, weil **eindimensional**: $\vec{x}'(\varphi) := \frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\varphi} := \lim_{\mathrm{d}\varphi \to 0} \frac{\vec{x}(\varphi + \mathrm{d}\varphi) - \vec{x}(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}$

$$\vec{x}(\varphi) = \vec{\gamma}(\varphi) = \begin{pmatrix} x(\varphi) \\ y(\varphi) \\ z(\varphi) \end{pmatrix}, \overbrace{v\vec{t} = \vec{v} = \vec{x}'(\varphi) = \vec{\gamma}'(\varphi)}^{\textbf{Geschwindigkeit}} = \begin{pmatrix} x'(\varphi) \\ y'(\varphi) \\ z'(\varphi) \end{pmatrix}, \overbrace{\kappa(t) = \frac{||\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}||}{||\dot{\vec{x}}||^3}}^{\textbf{Krümmung}}, \quad \underbrace{\tau(t) = \frac{|(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})|}{||\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}||^2} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{x}'''}{||\vec{b}||}}_{\textbf{Torsion,Windung,Schraubung}}$$

Die Krümmung ist so definiert, dass sie per Kreuzprodukt die beschleunigungsbedingte Ablenkung von der momentanen Bewegungsrichtung misst, $2\vec{t} \cdot \dot{\vec{t}} = 0$ folgend verursacht eine Beschleunigung in Bewegungsrichtung $\vec{t}$, also $\dot{\vec{t}} = 0$ = ohne Krümmung. **Sternberg: Curvature in mathematics and physics** 2012; Duschek & Hochrainer: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung Bd3 p2ff; **Gray: Differentialgeometrie mit Mathematica** 1994 p6f; **Länge einer Kurve** hängt nicht von Parameterdarstellung ab! Beispiel Viertel des Einheitskreises $\vec{r}(\phi) = \hat{\phi}(\phi)$ mit $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oder mit **Reparametrisierung** $\phi = \varphi^2$, also $\vec{r}(\varphi) = \hat{\varphi}(\varphi)$ mit $\varphi \in [0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}]$ gibt $s = \int \mathrm{d}\phi |\mathrm{d}\vec{r}(\phi)| = \int \mathrm{d}\varphi |\mathrm{d}\vec{r}(\varphi)| \phi'$. Die **Parametriesierung auf den Parameter Kurvenlänge** s vereinfacht Ausdruck für Krümmung $\kappa = |\vec{x}''(s)| = \sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} = \frac{|\dot{\vec{x}}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t)|}{|\dot{\vec{x}}(t)|^3}$. Mit der **Parametriesierung** s **zieht man sich auf das natürliche Innenleben der Mannigfaltigkeit zurück**. Leider ist aber die Kurvenlänge meist nicht einfach auszurechnen. Daher rechnet man dann in der allgemeinen Parametriesierung t. Gray p117, p127, p578 Speziell Schraubenlinie = Helix. Analog misst die Torsion per Skalar- oder Spatprodukt die Verlagerung der Schmiegungsebene. **Kreyszig: Differentialgeometrie** 1968[2]; **Thomson: Höhere Mathematik und doch verständlich** 1949[7] p207ff; Bartsch: Mathematische Formeln 1986[21] p366ff; Kurzfassung von Bartsch liefern Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik p508f; Merziger, Mühlbach, Wille, Wirth: Formeln + Hilfen zur höheren Mathematik 2001[4]; Großmann: Mathematischer Einführungskurs 2004[9] p110ff; Riech: Mathematik zu den Experimentalphysik-Vorlesungen 1997 p86f; Ganz **ohne Vektornotation** arbeitet Eisenhart:

A treatise on the differential geometry of curves and surfaces 1909; **Joos & Lorentz, Kaluza: Höhere Math** 1938, 1964[10] §29 **Differentiation eines Vektors nach einem Skalar** p143ff mit Beispiel **Spaßbad**/Helix 1994[13] §7.3 p241ff; **Lang & Pucker: Math Methoden** p268ff; **Rothe: Differentialgeometrie I Raumkurven und Anfänge der Flächengeometrie** 1944; **Alexandrow: Kurven und Flächen** 1959; Schmutzer: Mathematik - Ein Kompendium für Physiker p226f; Brehmer & Reupsch: Differentialgeometrie BdI 1966 p40 ist Basis für Brehmer & Belkner: Einführung in die analytische Geometrie und lineare Algebra 1972[3]; **Klotzek: Einführung in die Differentialgeometrie BdI** 1981 p34f, p42 **zulässige Parametrisierung** $\vec{r}(t)$, **natürliche Parametrisierung** mit Bogen/Kurvenlänge $\vec{r}(s)$, man nehme also $t(s)$, gemäß lokalem Pythagoras $\mathrm{d}s^2 = ((\mathrm{d}x)^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)\frac{(\mathrm{d}t)^2}{(\mathrm{d}t)^2} = (\mathrm{d}t)^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ **dot** meint **Zeitableitung** und **Prime** bezeichnet **Ableitung nach der Bogen/Kurvenlänge**. Gray: Differentialgeometrie p9 Kurven der Geschwindigkeit **1** werden durch ihre Länge parametrisiert. **Kurvenlänge** aus **Bogendifferenzial** der Kurve ist $\mathrm{d}s(\varphi) = \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi) + z'^2(\varphi)}\mathrm{d}\varphi$. Oder per Geschwindigkeitsbetrag $\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = v^2 = \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$, der ja der Tangentenlänge entspricht mit $(\mathrm{d}s(t))^2 = (\mathrm{d}t)^2(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t))$. **Kurvenlänge**$=s(t_0, t_1) = \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$. **Kurvenlänge der Parabel:** $y = x^2/2$ ist $L(0, 2, x^2/2) = \int_0^2 \mathrm{d}x\sqrt{1 + y'^2} = \int_0^2 \mathrm{d}x\sqrt{1 + x^2} = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arcsinh} x)_0^2 = \frac{1}{2}(2\sqrt{5} + \operatorname{arcsinh} 2)$. **arcsinh und ln**: wegen $e^x = \sinh x + \cosh x$ folgt $y = \operatorname{arcsinh} x = \ln e^y = \ln(\sinh y + \cosh y) = \ln(\sinh y + \sqrt{1 + \sinh^2 y}) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$. **Krümmung der Kurve** ist Änderungsstärke des Tangentenvektors, also **Länge des Haupt-Normalenvektors** oder **Betrag des Beschleunigungsvektors** $\kappa(s) = \kappa(\varphi) = |\vec{x}''(\varphi)| = |\vec{t}'(\varphi)| = |\vec{n}(\varphi)| = \sqrt{x''^2(\varphi) + y''^2(\varphi) + z''^2(\varphi)}$ im Punkt (φ) der Kurve, Tiebel: Theoret Mechanik p62 ff. Damit wird offenbar, dass **Beschleunigung und Krümmung** identifiziert werden müssen, insbesondere wegen der Raumzeit-Union und großem Wert für c hat die Zeitkomponente bei kleinen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in der Raumkomponente eine sehr kleine **Krümmung im Ereignisraum**. Beim schrägen Wurf beträgt der Krümmungsradius für die **Konfigurationsraum-Komponente** bei irdischen Körpergeschwindigkeiten im Meterbereich, hingegen im **Ereignisraum** $\rho = \frac{c^2}{g} \approx 10^{16}$ m. Schröder: Gravitation p29 & Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation p33; Anders in der Nähe schwarzer Löcher - ART! **Krümmungsradius** ist $\rho = 1/\kappa$. **Begleitendes Dreibein**, oskulierende Elemente oder ortsabhängige Orthonolmalbasis $(\vec{t}, \vec{h}, \vec{b}) = \left(\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \frac{\ddot{\vec{x}}}{|\ddot{\vec{x}}|}, \dot{\vec{x}}^o \times \ddot{\vec{x}}^o\right) =$ (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Winkelgeschwindigkeit) = () mit dem **Tangentenvektor-Einheitsvektor** $\vec{t}$ oder **Geschwindigkeitsvektor** $v\,\vec{t} = \vec{v} = \vec{x}'(\varphi) = \vec{\gamma}'(\varphi)$ mit $\vec{t}^2 = 1$ also $2\vec{t} \cdot \dot{\vec{t}} = 0$, d.h. **bei Beschleunigung** gibt es entweder **keine Richtungsänderung**, wie bei $\vec{r}(t) = e^t \hat{e}_x$ oder nur eine **zur Bewegungsrichtung senkrechte Richtungsänderung**, oder $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \vec{v}^o\, v = \vec{t}\,\dot{r}$, dem **Haupt-Normalenvektor** oder **Beschleunigungsvektor** $\vec{h} = \vec{n} = \vec{x}''(\varphi) = \vec{\gamma}''(\varphi)$ und dem **Binormalenvektor** oder **Vektor der Winkelgeschwindigkeit** der senkrecht zur **Schmiegungsebene** = Oskulationsebene (oskulatieren = küssen, anschmiegen, berühren) oder **oskulierenden Ebene** mit den Basis-Vektoren $(\vec{t}, \vec{n}) = (\vec{x}', \vec{x}'')$ steht $\boxed{\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}}$ oder $\vec{\omega} = \vec{t} \times \dot{\vec{t}} = \dot{\phi}(\vec{t} \times \vec{n}) = \dot{\phi}\vec{b} = \omega\vec{b}$. **Gray: Differentialgeometrie mit Mathematica** 1994 p121; **Streckebene** oder **rektifizierende** Ebene $(\vec{t}, \vec{b}) = (\vec{x}', \vec{x}' \times \vec{x}'')$ senkrecht zum Haupt-Normalenvektor $\vec{n} \propto \vec{x}''$ oder Beschleunigung. Für die Änderung der **Normalen** gilt $\frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}\varphi} = \vec{b}' \times \vec{t} + \vec{b} \times \vec{t}' = -\tau\vec{n} \times \vec{t} + \kappa\vec{b} \times \vec{n} = +\tau\vec{b} - \kappa\vec{t}$. Der Betrag von $\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}\varphi}$ ist ein Maß für die **Schraubung** der räumlichen Kurve. τ ist **Torsion/Windung** der Raumkurve, τ ist **Windungsradius**:

$$\underbrace{\vec{h} = \vec{n} = \frac{\vec{t}'}{|\vec{t}'|} = \frac{1}{\kappa(s)}\vec{t}'}_{\textbf{Normalenvektor}}, \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}\varphi} = \kappa\vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{\mathrm{d}\vec{n}}{\mathrm{d}\varphi} =: -\tau\vec{n}}_{\textbf{Torsion,Windung,Schraubung}}, \quad \begin{pmatrix} \vec{t}' \\ \vec{h}' \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{t} \\ \vec{h} \\ \vec{b} \end{pmatrix}$$

Letztere praktische Ableitungsformel in natürlicher Parametrisierung ist die **Frenet-Serret'sche Formel. Parametrisierung** bedeutet nichts anderes als ein Tagebuch, Flugschreiber-Protokoll, GPS/Funkzellen-Tracking-Protokoll der Smartphones. Speziell: **Lückenlose Ortsangabe zu allen Zeiten**. Arens et al., Mathematik Kapitel 26; Greiner: Mechanik Teil1, Kapitel 1.7; Viele Beispiele bei Merziger und Wirth: Repetitorium Mathematik 1995 p499ff; Klotzek: Einführung in die Differentialgeometrie Bd1, 1981 p31ff; Arens p883 ff; Tiebel: Theoret Mechanik p62 ff; Kuhn, Stöckel: Math Hilfsmittel 1995[5] p266ff, p362; Großmann: Mathematischer Einführungskurs 2004[9] p110ff; **Flächentheorie:** Kurven auf Flächen höherer Ordnung behandelt man mit **Flächen-Darstellung.** Schöne: Differentialgeometrie MIMÖL 6 1975 p75ff; Statt Betrachtung der Fläche durch (u,v) liefert die mit u,v parametriserte Punktmenge $\vec{x}(u,v)=\vec{\Phi}=(u,v,f(u,v))\in\mathbb{R}^3$ mit $(u,v)\in D(f)$ einen Zugang zu den **Eigenschaften der Fläche** durch **Messung in der** Fläche. **Python-Winkelfunktionen:** acos(sqrt(2./3.))*180./pi; atan(1); Die Tangenzialvektoren $\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}$ und $\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}$ sind fast überall l.u., also **Flächennormale** $\vec{n}=\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}\neq\vec{0}$ oder **Flächenelement** bei den Koordinaten u und v ist $\mathrm{d}\vec{A}(u,v)=\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. **Kreiszylinder, Kugel**

$$\vec{x}_Z(u,v)=\begin{pmatrix}R\cos u\\R\sin u\\v\end{pmatrix}\text{ mit }(u,v)\in[0,2\pi)\times\mathbb{R},\quad \vec{x}_K(\theta,\varphi)=\begin{pmatrix}R\sin\theta\cos\varphi\\R\sin\theta\sin\varphi\\R\cos\theta\end{pmatrix}\text{ mit }(\theta,\varphi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi)$$

Oberflächenelement der Kugel mit R ist wegen $\frac{\partial\vec{x}_K}{\partial\theta}=R(\cos\theta\hat{\rho}-\sin\theta\hat{z})=R\hat{\theta}$ und $\frac{\partial\vec{x}_K}{\partial\varphi}=R\sin\theta(-\sin\varphi\hat{x}+\cos\varphi\hat{y})=R\sin\theta\hat{\varphi}$ gleich $\mathrm{d}\vec{A}_K(R,\theta,\varphi)=\frac{\partial\vec{x}_K}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{x}_K}{\partial\varphi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi=R^2\sin\theta\hat{r}$. **Wendelfläche = Helikoid:** Wird von Hauptnormalen der Schraubenlinie gebildet: $\vec{r}(\varphi,t)=\hat{e}_\rho(\varphi)t+b\varphi\hat{e}_z$ mit $(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$, **Möbiusband**. **Norden: Differentialgeometrie** 1957 p161

$$\vec{x}(u,v)=\begin{pmatrix}u\cos v\\u\sin v\\bv\end{pmatrix}\text{ mit }(u,v)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R},\quad \vec{x}(u,v)=\begin{pmatrix}(1+\frac{u}{2}\cos v)\\(1+\frac{u}{2}\sin v)\\\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2}\end{pmatrix}\text{ mit }(u,v)\in[-1,1]\times[0,2\pi)$$

Kurven auf Fläche werden durch Kurven im Parameterraum festgelegt:

$$\vec{x}(u,v)=\begin{pmatrix}x(u,v)\\y(u,v)\\z(u,v)\end{pmatrix}=\vec{\Phi}(\gamma(t))=\begin{pmatrix}\Phi_1(u(t),v(t))\\\Phi_2(u(t),v(t))\\\Phi_3(u(t),v(t))\end{pmatrix},\quad \begin{array}{rclcl}\dot{x}&=&x_u\dot{u}+x_v\dot{v}&=&\frac{\partial x}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial x}{\partial v}\dot{v}\\\dot{y}&=&y_u\dot{u}+y_v\dot{v}&=&\frac{\partial y}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial y}{\partial v}\dot{v}\\\dot{z}&=&z_u\dot{u}+z_v\dot{v}&=&\frac{\partial z}{\partial u}\dot{u}+\frac{\partial z}{\partial v}\dot{v}\end{array},\quad \dot{\vec{x}}=\vec{\Phi}_u\dot{u}+\vec{\Phi}_v\dot{v}$$

Die **Bogenlänge** ist dann $s(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\sqrt{\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2}=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\sqrt{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\mathrm{d}v+G\dot{v}^2}$ also ist das **Bogendifferenzial** $\mathrm{d}s=\sqrt{E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2}$.

Sattelfläche mit Fläche definierendem Kreis:

$$\vec{x}(u,v)=\vec{\Phi}(u,v)=\begin{pmatrix}u\\v\\uv\end{pmatrix}\text{ mit }(u,v)\in\mathbb{R}^2,\quad \gamma(t)=\begin{pmatrix}u(t)\\v(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix},\text{also }\vec{\Phi}_u=\begin{pmatrix}1\\0\\v\end{pmatrix},\quad \vec{\Phi}_v=\begin{pmatrix}0\\1\\u\end{pmatrix}$$

gibt $E=\vec{\Phi}_u^2=1+v^2$, $F=\vec{\Phi}_u\cdot\vec{\Phi}_v=uv$, $G=\vec{\Phi}_v^2=1+u^2$ und somit ist die Kurvenlänge auf der Sattelfläche $s(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\sqrt{(1+v^2)\dot{u}^2+2uv\dot{u}\dot{v}+(1+u^2)\dot{v}^2}$. $s(0,2\pi)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t\sqrt{1+\cos^2 2t}=2\int_0^{\pi}\mathrm{d}\tau\sqrt{1+\cos^2\tau}\approx 7.64$. **Parametrisierung der $x-y-$Ebene mittels Polarkoordinaten:**

$$\vec{x}(\rho,\varphi)=\vec{\Phi}(\rho,\varphi)=\begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\\rho\sin\varphi\end{pmatrix},\quad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\rho}=\vec{x}_\rho=\vec{\Phi}_\rho=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}=\hat{e}_\rho,\quad \frac{\partial\vec{x}}{\partial\varphi}=\vec{x}_\varphi=\vec{\Phi}_\varphi=\begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\\rho\cos\varphi\end{pmatrix}=\rho\,\hat{e}_\varphi$$

$E=\vec{x}_\rho^2=\hat{e}_\rho^2=1$, $F=\vec{x}_\rho\cdot\vec{x}_\varphi=\hat{e}_\rho\cdot\hat{e}_\varphi=0$, $G=\vec{x}_\varphi^2=(\rho\,\hat{e}_\varphi)^2=\rho^2$. Ist Kurve mit $\gamma(t)=(\rho(t),\varphi(t))^T$ gegeben, so ist ihre Bogenlänge $s(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\mathrm{d}t\sqrt{\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2}$. Speziell gibt $\varphi(t)=t$, also $\dot{\varphi}=1$ die Bogenlänge

$s(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\varphi\sqrt{\rho^2+\dot\rho^2}$ mit $\dot\rho=\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t=\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}\varphi$. Arens p889;

Theorema egregium: hervorragend wichtiger Lehrsatz. **Norden: Differentialgeometrie** p226. Die Gaußsche Krümmung einer Fläche $S\subset R^3$ ist eine Größe der inneren Geometrie von S, sie hängt lediglich von den Koeffizienten der Matrix der ersten Fundamentalform und deren ersten und zweiten Ableitungen ab. Die Krümmung einer Fläche lässt sich allein durch Längen- und Winkelmessung auf eben dieser Fläche bestimmen, sie wird durch die Koeffizienten der ersten Fundamentalform der Fläche induziert. Man muss die Fläche zu diesem Zweck also nicht verlassen, von außen untersuchen. Darstellung gekrümmter Fläche durch $z=f(x,y)$, dann per $A=\int_B\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Bei parametrischer Darstellung der Fläche durch $\vec r(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$, dann $A=\int_B|\vec r_u\times\vec r_v|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_B\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ mit $E=\dfrac{\partial\vec r}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\vec r}{\partial u}$, $G=\dfrac{\partial\vec r}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial\vec r}{\partial v}$ und $F=\dfrac{\partial\vec r}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial\vec r}{\partial v}$ **Körber & Pforr: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen** 1989 [7]; Denz & Ebmeyer: Lehrbrief Hochschulstudium Dresden 1982 p74. Gauß, Riemann und Minkowski: Gaußsche Flächentheorie, Riemannsche Räume und Minkowski-Welt, Teubner-Archiv zur Mathematik Bd1 1987 Artikel, die die Entwicklung der Differentialgeometrie wesentlich beeinflußt haben. **Längemessung auf einer Fläche durch erste Fundamentalform** der Fläche $\mathrm{d}s^2=E\mathrm{d}u^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G\mathrm{d}v^2$ **(Differenzialform)** mit $E=x_u^2+y_u^2+z_u^2=\Phi_u^2$, $F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v=\Phi_u\cdot\Phi_v$, $G=x_v^2+y_v^2+z_v^2=\Phi_v^2$. **Krümmung nach Formel von Brioschi:**

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left(\left|\begin{pmatrix}-\frac12E_{vv}+F_{uv}-\frac12G_{uu} & \frac12E_u & F_u-\frac12E_v\\ F_v-\frac12G_u & E & F\\ \frac12G_v & F & G\end{pmatrix}\right|-\left|\begin{pmatrix}0 & \frac12E_v & \frac12G_u\\ \frac12E_v & E & F\\ \frac12G_u & F & G\end{pmatrix}\right|\right)$$

do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces 1976 p234; Sochi: Introduction to Differential Geometry of Space Curves and Surfaces 2015; Schöne: Differentialgeometrie MINÖL 6 1975 p105; **Born:** Die Relativitätstheorie Einsteins 1920, 2000 p278ff; **Struik: Lectures on Classical Differential Geometry** 1969[2] p111f; Gaußsche Flächentheorie ist **Geometrie im Kleinen** und kennt weder die Gestalt der Fläche, noch Dimension außerhalb, ist Physik als Nahwirkungstheorie. Euklids Geometrie ist Fernwirkungstheorie $c=\infty$. **Manfredo do Carmo: Differentialgeometrie von Kurven und Flächen**, Vieweg Studium 1993[3], 263 Seiten; Besser, weil mit 503 Seiten komplett: **do Carmo: Differential Geometry of Curves and Surfaces** 1976; **Jänich: Mathematik 2**

Kap36 Die Euler-Lagrange-Gleichungen

p295ff **Zeitabhängiger Konfigurationsraum** M_t zur Zeit t im Unterschied zum Ereignisraum (SRT, Feynmam-Graphen) K_t zur Zeit t, die **Faser**, weil fixer Zeitpunkt, ist eine n-dim Fläche. In K_t als Ereignismöglichkeitsraum liegen auch die mit den zeitlich veränderlichen (Pendellänge kann explizite Zeitanhängigkeit besitzen) Zwangsbedingungen verträglichen **virtuellen Verrückungen. Fläche über D** $=\{t\}\in\mathbb{R}$ sei der Faserbündel-Raum = Ereignisraum als $(n+1)$-dimensionale Fläche $K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $(t,\vec x)\in\{t\}\times M_t=K_t\in K\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ = **Menge aller möglichen Ereignisse** mit der Eigenschaft, dass die Projektion auf die erste Koordinate eine surjektive, überall reguläre **Zeit-Abbildung** $\pi_k:K\to D$ definiert, d.h. dass **keine Konfiguration aus der Zeit fällt.** $\pi_k(t,\vec x):=t$.. Das **Urbild** $K_t:=\pi_k^{-1}(t)\subset K$ heißt **Faser** von K über t. Jedem Zeitpunkt entspricht die Gesamtheit aller Ereignisse. **Kein Ereignis fällt aus der Zeit.** Der gesamte **Bewegungsablauf** des Systems wird durch den **lokalen Schnitt** = Abbildung $\sigma:D\to K$ mit $\sigma(t)\in K_t$ beschrieben, der zu allen Zeitpunkten die Konfiguration des Systems angibt. **Planetenbewegung:** Konfigurationsraum = Ellipse, Schnitt = Trajektorie im Ereignisraum = elliptische Wendel. Die Raumkrümmung ist nicht die Ursache für die die Keplerbewegung, sondern die **Krümmung der Zeitkomponente!** Der **Differenzialoperator** $L[\sigma](t)=\{\dfrac{m}{2}(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^2+\dfrac{k}{2}\}[\sigma](t)$ für die **Lagrange-Funktion** $L(\sigma)$ erfordet neben dem **Schnitt** = Bahn im im Ereignisraum, auch $\dot q$. Das Argument von L ist $(t,q,\dot q)\in\mathbb{R}^{2n+1}$. Mit dem Kartenbild $U'=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ des Ereignisraums ist der Definitionsbereich der Lagrange-Funktion wegen der Geschwindigkeiten $U'\times\mathbb{R}^n=(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n$. Koordinatenfrei $L:J^1(\pi_k)\to\mathbb{R}$. Dieudonne: Bd3. Palaise: Geometrization of physics 1981; Balachandran, Marmo, Skagerstam, Stern: Gauge Symmetries and Fibre Bundles: Applications to Particle Dynamics, LNP188 1983 Kap3 **Faserbündel und Spinteilchen** e-book;

Nash & Sen: Topology and geometry for physicists 1983 Kap7 p140ff; Mendelson: Introduction to Topology 1971; Henle: A Combinatorial Introduction to Topology 1990; Geroch: Topology 1978 Lecture Notes 2013; Člebsch: Vorlesungen über Geometrie ; Pluecker & Clebsch: Neue Geometrie des Raumes Gegründet auf die Betrachtung der Geraden Linie als Raumelement 19??; Klein: Vorlesungen über höhere Geometrie 1926 p331 Radons mechanische Herleitung des Parallelismus von Levi-Civita und p344 Parallelverschiebung aus der innere Geometrie der Fläche; **Parallelen-Transport: Norden: Differentialgeometrie** p237. **Arnold: Meth Methoden der klassischen Mechanik** 1988 p303 Parallelentransport auf gekrümmten Flächen; Urbantke: Physical holonomy, Thomas precession, and Clifford algebra, AmJPhys 58 (1990) 747; **Kühnel: Differentialgeometrie. Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten**, e-book `http://www.springerlink.com/content/gx8264/#section=688794&page=9&locus=42` **Curtis & Miller: Differential manifolds and theoretical physics** 1985 e-book; **Göckeler & Schücker: Differential geometry, gauge theories, and gravity** 1989; Kurzfassung in **Schottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik**; **Fischer: Mathematik für Physiker 3:** Variationsrechnung, Differentialgeometrie, **Talpaert: Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics** 1993, 2001; **Mathematische Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie**, Vieweg 2006 e-book: http://www.springerlink.com/content/pp3922/ **Norden: Differentialgeometrie I & II** 1956, 1957; Peschl: Differentialgeometrie 1973; Klotzek: Einführung in die D I 1981 & D II 1983; Bär: Elementare Differentialgeometrie 2010 e-book; Mumford: Indra's pearls. The vision of Felix Klein 2002; Poston & Stewart: Taylor expansions and catastrophes 1976; Bruce & Giblin: Curves and singularities - a geometrical introduction to singularity theory 2010; Arnold: Catastroph theory 1992[3]; Gilmore: Catastrophe Theory for Scientists and Engineers 1981; Poston & Stewart: Catastrophe theory and its applications 1978; Arnold: The theory of sigularities and its applications 1991;

Schwarz: **Topology for Physicists** 1994; **Ivey & Landsberg: Cartan for beginners** - differential geometry via moving frames and exterior differential systems 2003; **Bott & Tu: Differential Forms in Algebraic Topology** 1995; **Renteln: Manifolds, Tensors, and Forms. An Introduction for Mathematicians and Physicists** 2013; Super Überblick für Physiker ist **Domingos: Geometrical properties of vectors and covectors. An introductory survey of differentiable manifolds, tensors and forms** 2006; Lang: Introduction to differentiable manifolds 1962; Lang: Differential Manifolds 1972; Špivak: Calculus on manifolds 1965; Auslander & MacKenzie: Introduction to differentiable manifolds 2008; Barden & Thomas: Introduction to differentiable manifolds 2003; **Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry** 2003 exzellente Einführung. **Metrik** per Abstand von Punkten mit Koordinaten x^i, y^j bzgl eines zuvor fixierte Koordinatensystems $d(x,y) = (\sum_{i=1}^n (x^i - y^i))^{1/2}$. **Norm-Idee** für Vektoren als Elemente eines Vektorraums, der mit **innerem Produkt** $(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n (x^i y^i$ ausgestattet ist, (nicht für Punkte x!) $||\vec{x}|| = ((\vec{x}, \vec{x}))^{1/2}$, dann Abstand zwischen Punkten x, y mit $d(x,y) = ||\vec{x} - \vec{y}|| = ((\vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y}))^{1/2}$. Beachte: **Vektorraum** $= \mathbb{R}^n \neq E^n = \mathbb{R}^n +$ **Koordinatensystem** $=$ **Euklidischer Raum** $+$ **Koordinatensystem**; Ohanian & Ruffini: Gravitation and Spacetime 2013; **Dray: Differential Forms and the Geometry of General Relativity** 2014; Elementar **Grinfeld: Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces** 2013; e-book Elementar: **Neuenschwander: Tensor Calculus for Physics: A Concise Guide** 2014; **Schutz: Geometrical Methods of Mathematical Physics** 1980; Jordan: Ergebnisse und Probleme der erweiterten Gravitationstheorie, PhysBl 10 1954 p557-564; **Jordan: Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie** 1952, 1955[2] p2 **Winkelsumme** π für Dreiecke ist analytisch bequem durch die Gültigkeit des **pythagoreischen Satz** für **infinitesimale Dreiecke** festgelegt; **Riemann'sche Geometrie:** Für infinitesimale Dreiecke gelte die euklidische Geometrie, sonst nicht. **Für endliche Dreiecke mit geodätischen Linien als Seiten gibt es Winkelsummenüberschuss oder -defizit. Es gibt**

keine verzerrungsfreie Bewegung, keine Kongruenzsätze. Jedem infinitesimal benachbartem Punktepaar P_0P entspricht ein Abstand $\mathrm{d}s$, wobei dessen Quadrat $\mathrm{d}s^2 = g_{kl}(\vec{x})\mathrm{d}x^k\mathrm{d}x^l$ einer **positive definiten quadratischen Form der Koordinatendifferenziale** entspricht, also $g = \mathrm{Det}|g_{kl}| > 0$ mit $g_{kl} = g_{lk}$. Reziproke oder Inverse $(g_{kl}) = (g^{kl})$. $g_{kl}g^{lj} = \delta^l_k$. **Längen von Kurven** werden zu **geodätischen Linien** durch $\delta\int_{P_1}^{P_2}\mathrm{d}s = 0$. **Winkel** sind mit $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{P_0P}, \overrightarrow{P_0P_*}) = \cos\sphericalangle(\mathrm{d}\vec{s}, \mathrm{d}_*\vec{s}) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{s}\cdot\mathrm{d}_*\vec{s}}{\sqrt{\mathrm{d}s^2\mathrm{d}_*s^2}}$ durch das **Skalarprodukt** $\mathrm{d}\vec{s}\cdot\mathrm{d}_*\vec{s} = g_{kl}(\vec{x})\mathrm{d}x^k\mathrm{d}_*x^l$ gegeben. **Inneres Produkt oder Skalarprodukt ermöglicht Beziehungs-Vergleich zwischen Vektoren: Verschwindet das Produkt, so haben sie keine Gemeinsamkeit/ keine Projektionsanteile/ Orthogonalität.** Manchmal geht anschauliche Winkel-Deutung, siehe Seite 200. Vektorprodukt beim **Parallelogramm** mit Kanten $\vec{a} = \hat{e}_x$ und $\vec{b} = \alpha\hat{e}_x + \hat{e}_y$ bedeutet **Prinzip von Cavalieri** $\vec{a}\times\vec{b} = \hat{e}_x \times (\alpha\hat{e}_x + \hat{e}_y) = \hat{e}_z$. **Volumina** von Gebieten G sind $V(G) = \iiint_G \sqrt{g}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x^3$. **Flächenmaß** eines 2d-Gebietes G' mit x^3 =const ist $F(G') = \iint_{G'}\sqrt{g'}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$, wobei g' die zu g_{33} gehörige Unterdeteminante $g' = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$ bedeutet. Beispiel für räume mit konstanter Krümmung, also Metrik **diagonal** und **ortsunabhängig**: Euklidischer Raum, rechtwinklige Koor $(g_{kl}) = (\delta_{kl}) = (\delta^{kl}) = (g^{kl})$. Krummlinige, aber orthogonale Koord $(g_{kl}(\vec{x}))$ **diagonal**, aber **ortsabhängig**! Abstandsquadrat in Kugelkoord $\mathrm{d}s^2(\vec{x}) = \mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2)$. **3-dimensionale Oberfläche** einer **Kugel mit Radius** R **im 4-dimensionalen euklidischen Raum** mit $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ ist gegeben durch $x^2+y^2+z^2+u^2 = R^2$ =const, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}u^2$. Mit einer Hälfte der Kugeloberfläche zwecks Eindeutigkeit ergibt sich ein **3-dimensionaler Raum konstanter positiver Krümmung mit Radius** R mit dem Linienelement in dieser Fläche $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 + \dfrac{(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z)^2}{R^2 - (x^2+y^2+z^2)} = \mathrm{d}\vec{r}^2 + \dfrac{(\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r})^2}{R^2 - \vec{r}^2} \overset{\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=r\mathrm{d}r}{=} r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) + \dfrac{\mathrm{d}r^2}{1 - r^2/R^2} = R^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sin^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\mathrm{d}\varphi^2)]$, weil wir uns nur innerhalb der Kugel $r \le R$, deren Punkte alle die Berandung eines 4d-Gebiets darstellen mit $\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = r\mathrm{d}r$ des 3-dimensionalen Raums konstanter positiver Krümmung bewegen (sphärische Geometrie, Ferngeometrie). Zweckmäßige neue Koord ist ist $r/R = \sin\chi$ mit $0 \le \chi \le \pi$. Ganze Oberflächenmannigfaltigeit durch Koord $\chi, \theta\varphi$ eindeutig dargestellt. Für $-R^2$ Raum negativer konstanter Krümmung (Lobatschewski,Ferngeometrie) mit $r/R = \sinh\chi$ folgt die positive quadratische Form $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r}^2 - \dfrac{(\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r})^2}{R^2 - \vec{r}^2} = r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2) + \dfrac{\mathrm{d}r^2}{1 + r^2/R^2} = R^2[\mathrm{d}\chi^2 + \sinh^2\chi(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\mathrm{d}\varphi^2)$. Irgendeine Hyperebene im Raum konstanter positiver Krümmung - zB $\theta = \pi/2$ =const, also $\mathrm{d}\theta = 0$ ist gleichbedeutend mit der Kugeloberfläche vom Radius R im euklid Raum. **Ferngeometrien, also konstante Krümmung, erlauben verzerrungsfreie Bewegungen.** Für beide o.g. Ferngeometrien kommt man durch Einführung orthogonaler Koordinaten $\vec{\bar{r}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ durch **stereografische Projektion** $\vec{r} = \dfrac{\vec{\bar{r}}}{1 + \vec{\bar{r}}^2/4R^2}$ mit $\rho = 1 + \vec{\bar{r}}^2/4R^2$, $\rho' = 1 - \vec{\bar{r}}^2/4R^2$ und folgt die **Beltrami-Formel** $\mathrm{d}s^2 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\bar{r}}^2}{(1 + \vec{\bar{r}}^2/4R^2)^2}$. **Kosmologisches Homogenitätspostulat**: Der kosmische Raum ist statistisch unregelmäßig, aber im Durchschnitt gleichmäßig mit Spiralnebeln besät. **Ryder: Introduction to General Relativity** 2009 ebook berechne Verhältnis von Umfang zu Durchmesser eines Kreises auf Kugel = positive Krümmung, Ebene = keine Krümmung und Sattel negative Krümmung; Oder betrachte die Entfernungen aud diesen Mannigfaltigkeiten. Beim 'geraden' Vorwärtsschreiten verlässt man die Kugel. Das totale Differenzial muss modifiziert werden! **Pohl: Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen.** Eine Einführung für Lehramtsstudierende 2017 ebook p68; Winkler: Ein Laser-Interferometer als Gravitationswellendetektor PiuZ16 1985 H5 138; Blair: Gravitationswellen-Antennen PiuZ17 1986 H5 142 Soffel & Ruder: Der Doppelpulsar PSR 1913 + 16 PiuZ22 H1 1991 p29; Physik-Nobelpreis 1993 für Hulse und Taylor PiuZ24 H6 1993 p253; Aufmuth & Rüdiger: Gravitationswellen PiuZ31 2000 14-21; Zee: Einstein Gravity in a Nutshell 2013; Schöne: Differentialgeometrie MIMÖL 6 1975; Klotzek: Einf in die Differentialgeometrie Bd2 1981 p100f; Peschl: Differentialgeometrie 1973 p26; Weatherburn: An intro to Riemannian geometry 1957 p58; Kühnel: Differentialgeometrie 2008[4] p94; **Gray: Differentialgeometrie** 1994 Kap26 p491; do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces 1976 p238; Fließbach: ART Kap15 und 16; Weyl: Konzept der Parallelverschiebung bringt das Konzept

des Größenvergleichs in die Riemann'sche Geometrie. **Problem: Tangenzialraum liegt nicht in der Mannigfaltigkeit.** Siehe **Norden: Differentialgeometrie** p237; Dirschmid; Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Ein Lehrbuch für Physiker und Mathematiker 2004^2 p164; oder do Carmo: Riemannian Geometry. Der Winkel zwischen Vektor und transportiertem Vektor beim **Paralleltransport** ist auf einer Kugel proportional zur eingeschlossenen Fläche innerhalb des Weges. Wenn die Mannigfaltigkeit eine **kovariante Ableitung** (im Tangentialbündel) besitzt, dann kann man Vektoren in der Mannigfaltigkeit entlang von Kurven so transportieren, dass sie bezogen auf den zur kovarianten Ableitung gehörenden Zusammenhang parallel bleiben. Greub, Halperin, Vanstone: Connections, Curvature, and Cohomology. VolI De Rham Cohomology of Manifolds and Vector Bundles 1972; Vol2 Lie Groups, Principal Bundles, and Characteristic Classes 1973; In ART sind auch Metrik und Zusammenhang dynamische Felder. Metrik definiert **Zusammenhang**, der die in $\mathbb{R}^N$ anschauliche Vorstellung der **Parallelität** verallgemeinert, **Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis** Bd3 Zusammenhang auf Vektorraumbündel p323ff, Bd4 p226ff; **Booss: Topologie und Analysis. Einführung In Die Atiyah-Singer-Indexformel** 1977 Intro im Anhang: **Was sind Vektorraumbündel? Physikalische Deutung:** Ortsvektor $\vec{c}(t)$ wird für jeden Zeitpunkt t mit **Retraktion** $\tilde{\vec{c}}(\tau) = \vec{c}(\tau) - \vec{c}(t)$ auf t bezogen. Damit liegt Tangentialraum = Gesamheit aller Geschwindigkeitsvektoren $T(X)$ im Ursprung. p309-325; Militärische Luftraumüberwachung. Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho,\varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho,\varphi,\dot{\rho},\dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$ **Morsetheorie** der Differentialtopologie gibt einen direkten Zugang zur Analyse der Topologie einer Mannigfaltigkeit über das Studium differenzierbarer Funktionen auf dieser Mannigfaltigkeit. Nicolaescu: An Invitation to Morse Theory 2011^2; Betrachte bergige Landschaft M. Wenn $f\colon M \to \mathbb{R}$ die **Höhenfunktion=Morsefunktion** ist, die jedem Punkt seine Höhe zuordnet, dann ist das Umkehrbild eines Punktes in $\mathbb{R}$ = **Niveaumenge** einfach eine **Konturlinie**. Jeder zusammenhängende Teil einer Konturlinie ist entweder ein Punkt, eine einfache geschlossene Kurve oder eine geschlossene Kurve mit Doppelpunkt = Knoten. Konturlinien können auch Punkte höherer Ordnung (Dreifachpunkte usw.) haben, aber diese sind instabil und können durch leichte Deformation von M beseitigt werden. Doppelpunkte in Konturlinien kommen bei Sattelpunkten vor (oder Pässen). Dort verlaufen die umliegenden Konturlinien einmal aufwärts und in anderer Richtung abwärts. Nun stelle man sich vor, die **Landschaft würde mit Wasser geflutet**. Erreicht dieses eine Höhe a ist die durch das Wasser bedeckte Fläche (die Punkte mit Höhe $\leq a$) gleich $f^{-1}(-\infty, a]$. Wie ändert sich die Topologie der Region wenn das Wasser steigt? Intuitiv ändert sie sich nur, falls a die Höhe eines kritischen Punktes passiert. Das ist ein Punkt, an dem die Ableitung (Gradient) von f verschwindet. Mit anderen Worten, die Topologie ändert sich nur, falls das Wasser beginnt (1) ein Becken zu füllen (Minimum), (2) einen Sattel (Bergpass, Jochpunkt) zu überdecken, oder (3) einen Gipfel (Maximum) zu überfluten. Jedem dieser drei Typen von kritischen Punkten – Minima = Talpunkten, Maxima = Gipfelpunkten, Sattelpunkten – ordnet man eine Zahl, den Index zu = Morseindex = Zahl der unabhängigen Richtungen um den Punkt, auf denen die Funktion f abnimmt. Das ist für Minima 0, Sattelpunkte 1, Maxima 2. **Jänich: Topologie** 1980, 1996^5; Boto von Querenburg: Mengentheoretische Topologie 2013^3; Bröcker & Jänich: Einführung in die Differentialtopologie 1973, 1990; **Shastri: Elements of Differential Topology** 2011; **Tu: An Introduction to Manifolds** 2011^2; **Ratcliffe: Foundations hyperbolic manifolds** 1994; Artzy: Geometry. An algebraic Approach 1992; Guillemin & Pollack: Differential topology 1974, 2010; Der zu einem Zusammenhang gehörende Paralleltransport erlaubt also in gewisser Weise, die lokale Geometrie einer Mannigfaltigkeit entlang einer Kurve zu bewegen. Begrifflich plastische Darstellung siehe: **Weyl: Raum, Zeit, Materie** 1923^5, mit Ehlers Anmerkungen 1993^8. In ART sind auch Metrik und Zusammenhang dynamische Felder. Erhard Scholz: Hermann Weyls Raum, Zeit, Materie 2001; Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität 1964; **Landau & Lifschitz: Klassische Feldtheorie** §85 p282; **Weyl: Mathematische Analyse des Raumproblems** 1923; Gray: Ideas of space. Euclidean, non-Euclidean, and relativistic 1979, 1989; Berger: A panoramic view of Riemannian geometry 2003; Schöne: Differentialgeometrie MIMÖL 6 1975; Klotzek: Einf in die Differentialgeometrie Bd2 1981 p100f; Peschl: Differentialgeometrie 1973 p26; Weatherburn: An

intro to Riemannian geometry 1957 p58; Kühnel: Differentialgeometrie 2008[4] p94; **Gray: Differentialgeometrie** 1994 Kap26 p491; do Carmo: Differential geometry of curves and surfaces 1976 p238; Fließbach: ART Kap15 und 16; Bezüglich einer Karte (U, φ) erhält man mittels $\partial_1|_p := \frac{\partial}{\partial\varphi^1}|_p, \ldots, \partial_n|_p := \frac{\partial}{\partial\varphi^n}|_p$ eine Basis des Tangentialraums T_pM und somit auch einen lokalen Rahmen $\partial_1, \ldots, \partial_n$ des Tangentialbündels. Für alle Indizes i und j sind dann die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k durch $\nabla_{\partial_i}\partial_j =: \Gamma_{ij}^k\partial_k$ definiert. Die n^3 Symbole Γ_{ij}^k bilden also ein System von Funktionen, welche vom Punkt der Mannigfaltigkeit abhängen (dieses System bildet aber keinen Tensor, s.u.). Genauso kann man die Christoffelsymbole auch für einen lokalen Rahmen $E_1, \ldots, E_n$, welcher nicht durch eine Karte induziert ist, durch $\nabla_{E_i}E_j =: \Gamma_{ij}^k E_k$ definieren. **Kovariante Ableitung von Vektorfeldern:** Die $\partial_1, \ldots, \partial_n$ bezeichnen einen lokalen Rahmen, welcher durch eine Karte induziert wird und $E_1, \ldots, E_n$ einen beliebigen lokalen Rahmen. Seien $X, Y \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder mit den in $U \subset TM$ lokalen Darstellungen $X = X^iE_i$ und $Y = Y^jE_j$. Dann gilt für die **kovariante Ableitung** von Y in Richtung von X: $\nabla_X Y = (XY^k + X^iY^j\Gamma_{ij}^k)E_k$. Dabei bezeichnet XY^k die Richtungsableitung der Komponentenfunktion Y^k in Richtung X. Wählt man einen **lokalen Rahmen** $\partial_1, \ldots, \partial_n$, der von einer **Karte** ϕ induziert wird, und wählt man für das Vektorfeld X speziell das **Basisvektorfeld** ∂_i, so erhält man $\nabla_{\partial_i}Y = (\partial_iY^k + Y^j\Gamma_{ij}^k)\partial_k$ bzw. für die k-te Komponente $(\nabla_{\partial_i}Y)^k = \partial_iY^k + Y^j\Gamma_{ij}^k$. Sochi: Principles of Tensor Calculus 2015; Sochi: Solutions of Exercises of Principles of Tensor Calculus 2015; Im **Indexkalkül für Tensoren** schreibt man dafür auch $Y_{;i}^k$ oder D_iY^k, während man die gewöhnliche Ableitung ∂_iY^k von Y^k nach der i-ten Koordinate als $Y_{,i}^k$ bezeichnet. Es ist aber zu beachten, dass hier nicht nur die Komponente Y^k abgeleitet wird, sondern dass es sich um die k-te Komponente der kovarianten Ableitung des gesamten Vektorfelds Y handelt. Obige Gleichung schreibt sich dann als $D_iY^k = \frac{\partial Y^k}{\partial\varphi^i} + \Gamma_{ij}^kY^j$ bzw. $Y_{;i}^k = Y_{,i}^k + \Gamma_{ij}^kY^j$. Paralleltransport eines entlang einer Kurve $x^\mu(\tau)$ mit Kurvenparameter τ definierten Vektors $A^\mu(\tau)$ liegt genau dann vor, wenn seine kovariante Ableitung entlang der Kurve verschwindet: $\frac{\mathrm{D}A^\mu(\tau)}{\mathrm{D}\tau} = \frac{\mathrm{d}A^\mu(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(\tau)\frac{\mathrm{d}x(\tau)^\lambda}{\mathrm{d}\tau}A^\nu(\tau) = 0$. Christoffel-Symbol siehe Seite 244. Die anschauliche Bedeutung dieses Begriffes entnimmt man der Tatsache, dass in lokalen Inertialkoordinaten (dort ist die kovariante Ableitung gleich der gewöhnlichen) der paralleltransportierte Vektor A^μ im üblichen Sinne parallel verschoben wird. Riley, Hobson & Bence: Mathematical methods for physics and engineering 1998 p723 **absolute Ableitung**, p716 **kovariante Ableitung**. **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p5; Wählt man für X und Y den Tangentialvektor $\dot\gamma$ einer Kurve $\gamma\colon\ ]a, b[\to M$ und ist M eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, so hat $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ die gleiche lokale Darstellung bezüglich der Christoffelsymbole wie $(\ddot\gamma)^\top$. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang ∇. Ein Vektorfeld V entlang einer Kurve γ heißt parallel entlang γ, falls $\nabla_{\gamma'(t)}V(\gamma(t)) = 0$ für alle t gilt. Ein Vektorfeld heißt parallel, falls es parallel bezüglich jeder Kurve in der Mannigfaltigkeit ist. Sei $\gamma : I \to M$ eine Kurve und $t_0, t_1 \in I$ zwei reelle Zahlen. Dann existiert zu jedem $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ ein eindeutiges paralleles Vektorfeld V entlang γ, so dass $V_0 = V(\gamma(t_0))$ gilt. Mit Hilfe dieser Existenz- und Eindeutigkeitsaussage kann man die **Abbildung, welche man Paralleltransport nennt**, definieren. Die Abbildung $P_{\gamma(t_0),\gamma(t_1)} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M, V_0 \mapsto V(\gamma(t_1))$ welche einem Vektor $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ sein eindeutiges paralleles Vektorfeld V ausgewertet an der Stelle $\gamma(t_1)$ zuordnet. **Paralleltransport für den Levi-Civita-Zusammenhang** ist wichtigster Spezialfall für den Paralleltransport, der Transport eines Tangentialvektors entlang einer Kurve auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit, wobei der Zusammenhang der Levi-Civita-Zusammenhang ist. Konkret: Ist $v_0 \in T_pM$ ein Tangentialvektor am Punkt p und $\gamma(t)$ eine glatte Kurve mit $\gamma(0) = p$, so heißt ein Vektorfeld $v(t)$ entlang γ, d.h. mit $v(t) \in T_{\gamma(t)}M$, genau dann Paralleltransport von v_0, wenn gilt: $\nabla_{\gamma'(t)}v(t) = 0, v(0) = v_0$, wenn also die kovariante Ableitung von $v(t)$ entlang γ verschwindet. Hierbei handelt es sich um ein lineares Anfangswertproblem 1. Ordnung, von dem man die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung zeigen kann. **Lee: Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature** 1997 und **Introduction to Smooth Manifolds** 2002; **Boothby: An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry** 1986 e-book;

Der Paralleltransport entlang einer Geodätischen: Titelbild Klotzek: Bd2, Parallel am Äquator und am Pol Winkel zwischen 0 und 360°. Im Falle, dass γ eine Geodätische ist, hat der Paralleltransport besondere Eigenschaften. Beispielsweise ist der Tangentialvektor einer proportional zur Bogenlänge parametrisierten Geodätischen selber parallel: $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$ Denn dies war genau die Definition einer Geodätischen auf einer

riemannschen Mannigfaltigkeit. Steht der Anfangsvektor v_0 senkrecht auf der Geodätischen $(g(v_0, \gamma'(0)) = 0$, so stehen alle Vektoren des Paralleltransportes senkrecht darauf, denn $\frac{d}{dt} g(v(t), \gamma'(t)) = g(\nabla_{\gamma'(t)} v(t), \gamma'(t)) + g(v(t), \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t)) = 0 + 0 = 0$.

Mittels eines **affinen Zusammenhangs** = connection = Vernetzung lassen sich geometrische Verhältnisse in verschiedenen Punkten vergleichen. Zusammenhang quantifiziert Richtungsänderungen im Laufe einer Bewegung, setzt Richtungen in verschiedenen Punkten miteinander in Beziehung. Wenn ein solcher Zusammenhang die Metrik respektiert, können auch Größen selbst miteinander verglichen werden. In ART sind auch Metrik und Zusammenhang dynamische Felder. Riemann: Wie Maxwells Feldtheorie = Nahwirkungstheorie die Fernwirkungstheorie = Coulomb-Gesetz ersetzt, so müssen Euklids oder Lobatschewskies Fernwirkungsgeormetrien durch Nahwirkungsgeometrie ersetzt werden! **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p44 **Affinität**; Siehe Jost und Weyl exzellent kommentierte Habilschrift: **Bernhard Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen** 1854, 2013 **p90**; Siehe auch Seite 244. Steenrod: The topology of fibre bundles 1951 p3ff; Trautman: Lectures on general relativity 1965; **Trautman: Fiber bundles, gauge fields, and gravitation**, p287-305 In: Held ed. Vol1. General relativity and gravitation. 100 years after the birth of Albert Einstein 1980; **Eichung = lokale Trivialisierung.** Aristoteles, Zeit und Raum absolut $T \times S$. Galilei: S relativ, weil stets bezüglich eines **inertialen Beobachters**. Jedes Ereignis $p \in E$ hat zwar **seine** Zeit $t = \pi(p) \in T$ = **Basisraum**, aber jedem Zeitpunkt entspricht eine **Vielzahl von simultanen Ereignissen = Faser** $p = \pi^{-1}(t)$ über der Zeit t. Jede **Faser = Augenblick aller Ereignisse zu einem Zeitpunkt**, ist zum $\mathbb{R}^3$ = **typische Faser** isomorph. Faser ist also eine Momentaufnahme der Konfiguration eines Systems = die Gesamtheit dessen, was wir in einem Augenblick wahrnehmen oder der momentane Zustand der Welt, wobei die verschiedenen Momente durch den Zeitparameter addressiert werden = der Moment von allem = Fluss allen Geschehens = Vektorraum = Faser = Einzelbild eines Film = Vektorbündel = Faserbündel. **Knapp: Vektorbündel**. Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus 2013; Z.B. die Position aller Punkte der Erdoberfläche, der sich drehenden Erde. An jedem Punkt hängt dann ein Tangenzialraum. Der **Gesamtraum** E des Faserbündels kann **trivialisiert** werden = kann durch das kartesische Produkt $T \times \mathbb{R}^3$ repräsentiert werden. Eine beliebige **Trivialisierung** (Abbildung) $h : E \to T \times \mathbb{R}^3$ ist von der Form $h(p) = (\pi(p), \vec{r}(p))$ mit der Koordinaten des Ereignisses p relativ zum inertialen Beobachter $\vec{r}(p) = (x(p), y(p), z(p))$. Schutz p35-42: 1d-Mannigfaltigkeit = Kurve mit Tangentenraum, der aber quer zur Kurve und untereinander parallel dargestellt wird, um bedeutungslose, zufällige und verwirrende Schnitte zu vermeiden. Zudem ist i.a. bei Tangentenraum nicht etwa die Tangente gemeint, was durch eine geometrische Deutung des Anstiegs irreführend suggeriert wird. Die Schnittpunkte mit M sind die tangenzialen Berührungspunkte. Die Galilei-Raum-Zeit E ist der Gesamtraum eines Faserbündels, welches trivial ist, d.h. isomorph zum Produktbündel $T \times \mathbb{R}^3$, ohne dass es einen **natürlichen** Isomorphismus zwischen diesen Bündeln gibt. Schutz p174f **Faserbündel und Hamiltonsche Gleichungen:** Evolution ist Kurve $q(t) \in M$ im Basisraum der Tangentenbündelraums = Konfigurationsraum M. Stewart: Mathematik. Probleme. Themen. Fragen 1990 p254f, p278 Faserbündel; Ñakahara: Geometry, topology and physics 1990 p304; **Lagrangefunktion** $L : (q, \dot{q}) \in TM \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion auf dem Tangenzialbündel $\{q^i, q^i_{,t}\} \in TM$ von M. Impuls $p = \partial L / \partial(q_{,t})$ ist 1-Form-Feld auf M, eine Schnittmenge des **Kotangentialbündels** T^*M = **Phasenraum** mit den Koordinaten $\{q^i, p_i\}$. Die **Hamilton-Funktion** lebt auf diesem trivialen (Struktur, weil Produkt von q- und p-Raum) Faser-Bündel, d.h., dass die **symplektische Form** $\tilde{\omega} = \tilde{\mathrm{d}} q^i \wedge \tilde{\mathrm{d}} p_i$ unabhängig von den Koordinaten in M ist. Spivak: Physics for mathematicians. Mechanics I 2010 p604 Kap20; Hermann: Vector bundles in mathematical physics 2 Bde 1970; **Knapp: Vektorbündel**. Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus 2013; Osborne: Vector bundles 1982; Meyer: Mathematical physics a survey of gauge theories and symplectic topology 2006; Krusch: Application of diff geometry to math physics 2013; Knill: Some illustrations (using **Povray** = reiner **Renderer** ohne 3D-Modellierung) to vector buncles 2009; Sternberg: Lectures on Physics 2008; **Trautman: Fiber bundles associated with space-time**, Rep on mat phys 1 1970 29-62; **Daniel & Viallet: Geometrical setting of gauge theory**, Rev mod phys 52 1980 p175-97; Rebhan: Rel QM p450ff; **Auyang: How is Quantum Field Theory Possible?** 1995 p214 **Faserbündel und WW-Dynamik:** Monadologie und Faserbündel. Explizit seit 1932. Aber die Idee, an

jeden Punkt einer Mannigfaltigkeit ein Objekt oder Raum zu heften, gibt es mit der Differenzialgeometrie: Ortsabhängigkeit der Basisvektoren bei krummlinigen Koordinaten, rotierende Bezugssysteme (Vermittlung durch Drehmatrix D_φ), Tangentenbündel (Impuls $\vec{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\vec{q}}}$). Faser als Repräsentant einer Klasse, des Bündels. Balachandran, Marmo, Skagerstam, Stern: Gauge Symmetries and Fibre Bundles. Applications to Particle Dynamics, LNP188 1983; Nakahara: Differentialgeometrie, Topologie und Physik 2013 pdf Kap9 Faserbündel; **Visconti: Introductory differential geometry for physicists** 1992 Chap4 p372ff; **Trautman: Differential geometry for physicists** 1984 pdf; D̃rechsler, Mayer, Böhm, Dollard: Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories, LNP67 1977; Drechsler, Mayer: Introduction to the Fiber-Bundle Approach to Gauge Theories with Gauge Theory of Strong and Electromagnetic Interactions Formulated on a Fiber Bundle of the Cartan Type Balachandran: Gauge Theories and Fiber Bundles Applications to Particle Dynamics 2017; Bröcker & Jänich: Einführung in die Differentialtopologie 1973, 1990; **Dubrovin, Fomenko, Novikov: Modern Geometry - Methods and Applications:** Part I: The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields 1992, enthält viele Beispiele! Part II: The Geometry and Topology of Manifolds 1985, Part III: Introduction to Homology Theory 1990; **Novikov: Tologie der Faserungen**, In: Wiss. u. Menschheit 1982, p337ff; Thomas: Introductory lectures on fiber bundles 1978 pdf im Netz; Schwichtenberg: Physics from Finance. A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and **fiber bundles** 2017; C̃armeli: Classical fields. General relativity and gauge fields 1982; Drechsel & Mayer: Fibre bundles techniques in gauge theories 1977; Balachandran et al.: Gauge Symmetries and Fibre Bundles. Applications to Particle Dynamics, LNP 188, 1987; Coquereaux & Jadczyk: Riemannian geometry, fiber bundles, Kaluza-Klein theories and all that 1987; Bernstein & Phillips: Fibre bundles, SciAm July 1981 p94-108; **Faserbündel - der mathematische Schlüssel zur Quantenphysik**, SdW H9 1981 p88-105 Eichfeld = Spezialfall einer Konnexion/Verbindung in Faserbündeln. Faserbündel wird durch zwei Experimente nahegelegt: Neutron durch Magnetfeld um 360° gedreht, was auf **globale** Struktur des Faserbündels führt = **topologischer** Aspekt eines Faserbündels. Verallgemeinerung des Krümmungsbegriffs = **Konnexion = Beispiel für Eichfeld als dem Faserbündel aufgeprägte lokale Struktur** = **geometrischer** Aspekt des Faserbündels folgt aus Magnetfeldwirkung auf zwei getrennte Elektronenstrahlen. **Basisraum** = Kugel = Mannigfaltigkeit; **jeder Kreishorizont** = **Faser** = Menge aller Richtungen auf der Kugeloberfläche, in die man von diesem Punkt aus blicken kann, Gesamtheit solcher Kreise ist das Faserbündel. Die Gesamtheit aller bewegten Dreibeine auf einer Kugel. Idee der bewegten Dreibeine stammt von Cartan. Alternative Sicht: Die Gesamtheit alle Richtungskreise möchte man eindeutig beschreiben. Dazu definiert man Bezugsrichtungen. Problem: **Kugel mit Haaren nicht kämmbar!** Betrachte daher für die Bezugsrichtungen nur Halbkugel. Projiziere diese Richtungen in Äquatorialebene = **Basisraum** = Karte. Über dieser Karte errichtet man in jedem Punkt eine Faser mit der Höhe, die dem Winkel zwischen der jeweiligen Richtung und der Bezugsrichtung einschließt. YYYY Chen Ning, Yang: Magnetic monopoles, fibre bundles, and gauge fields, In: Annals of the NY Acad of Sciences 294 1977 p1-102; Fraas: Magnetische Monopole, PiuZ 15 1984 H6 p173-181; Mielke: Magnetische Monopole in vereinheitlichten Eichtheorien, Z.Naturforschung 41a 1986 777-787; R̃oepstorff: QFT 1997 p53 Differenzialgeometrisch sind die lokalen Eichtransformationen differenzierbare Schnitte des Hauptfaserbündels mit dem Minkowski-Raum M_4 als Basis und der Lie-Gruppe $SU(n)$ als Faserraum. Das Eichfeld wird mit der Differenzialform $\phi = A_\mu(x)\mathrm{d}x^\mu$ identifiziert, die einen **affinen Zusammenhang** definiert und den Begriff der Parallelität einführt. **Eichfeld ist Spezialfall von Konnexion/Verbindungen/affine Zusammenhänge bei Faserbündeln.** Faserbündel hat Zusammenhang entspricht Eichfeld. $\omega = F_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^m u \wedge \mathrm{d}x^\nu$ bestimmt die Krümmung. Baum: Eichfeldtheorie: Eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln 2009; **F̃rampton: Gauge Field Theories** 1986, 1999, 2008; **P̃olyakov: Gauge fields and strings** 1987; Vollendorf: Geometrodynamik Z.Naturforschung 31a 1976 1155-1159; Eckhard Kreisel 1927-, Liebscher, Treder: Zur Quantengeometrodynamik 1967; Mielke: Über Hypothesen, welche der Geometrodynamik zugrunde liegen 1982 = Naturwissenschaften 72 1985 118 = **M̃ielke: Geometrodynamics of gauge fields** 1987, 2017; Hehl: Zur Eichfeldtheorie der Gravitation In: Nitsch & Mittelstaedt eds: Grundlagenprobleme der modernen Physik. Festschrift für Peter Mittelstaedt zum 50. Geburtstag 1981; **Faserbündel:** Scheck:

Mechanik p210 **Totalraum** = Gesamtraum = Ereignisraum = 4D-Galilei-Raumzeit: $(t, \vec{x}) \in P_G$, **Basisraum** = 1D-Zeitmannigfaltigkeit: $M = \mathbb{R}_t$, **Projektion:** $\pi : P_G \to M : (t, \vec{x}) \mapsto t$ ordnet jedem Punkt der Weltlinie $(t, \vec{x}) \in P_G$ seine Zeitkoordinate zu. Hält man t fest, so fasst π alle $\vec{x}$ zusammen, die gleichzeitig sind: $t' = t + s$, $\vec{x}' = \underline{R}\vec{x} + \vec{w}t + \vec{a}$. Die Projektion π hat eine in koordinaten**un**abhängiger Weise klare Bedeutung: Sei I **Zeitintervall**, das den Zeitpunkt $t \in I \subset \mathbb{R}_t$ enthält. Das Urbild von I hat unter π die Struktur **Zeitintervall** $\times$ **affiner Raum**: $\pi^{-1} : I \to \pi^{-1}(I) \in P_G$. P_G ist ein affines Faserbündel über der eindimensionalen Zeitmannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}_t$ isomorph zu $I \times E^3$. **Jost: Geometry and physics** 2009 e-book; Arnold: Klassische Mechanik 1981, p89, Anhang 4 **Kontaktstrukturen** vs symplektische Strukturen p354ff, Anhang 15 Singularitäten von Strahlensystemen p487 ff; Spivak: Physics for mathematicians. Mechanics I 2010 p604 Kap20; S̃chottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik p40; Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 Faserbündel p317f.; Jänich: Mathematik 2 Kap36 p295 ff; Scheck: Mechanik p210; Husemoller: Fibre bundles 1994; Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis Bd3 Kap16.12 1976; Sulanke & Wintgen: Differentialgeometrie und Faserbündel 1972; Baum: Eichfeldtheorie - eine Einführung in die Differentialgeometrie auf Faserbündeln 2009 e-book; **Terrence Tao: Poincare's Legacies, Part II.** Pages from year two of a mathematical blog 2009 p18f; Schwichtenberg: Physics from Finance. A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and fiber bundles 2017; **Bleecker: Gauge theory and variational principles** 1981; **Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette, Dillard-Bleick: Analysis, Manifolds and Physics** Pt1 Basics 1981 & Pt2 2001 e-book; Schottenloher: Geometrie und Physik Kap5; **Coquereaux & Jadcyzk: Riemannian geometry fiber bundles, Kaluza-Klein theories** and all that ... 1988 Theorien werden vielleicht einfacher, wenn wir die Beobachtung als **Raum-Zeit-Schatten oder 3+1-Projektion** von etwas mit mehr als 4 Dimensionen ansehen. Kaluza: Gravitation mit hyperbolischer 4D-Metrik und Maxwellfeld als $U(1)$-Zusammenhang werden zu einem $U(1)$-invarianten 5D-Raum zusammengefasst. Die Extradimensionen des internen Raum erscheinen uns aus Symmetriegründen äquivalent. **Zusammenhang** = Hilfsmittel, um Richtungsänderungen im Laufe einer Bewegung zu quantifizieren und Richtungen in verschiedenen Punkten miteinander in Beziehung zu setzen. **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p44 **Affinität**; In euklidischen Räumen ist Krümmung einer Kurve $\gamma(t)$ einfach die zweite Ableitung. Auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten ist die zweite Ableitung nicht direkt zu bilden. Man für die zweite Ableitung dieser Kurve den Differenzenquotienten mit den Tangenzialvektoren $\gamma'(t)$ und $\gamma'(t_0)$ bilden. Diese Vektoren befinden sich jedoch in unterschiedlichen Vektorräumen, daher kann man nicht einfach die Differenz der beiden bilden. Lösung ist **Zusammenhang**, der sagt was die Richtungsableitung eines Vektorfeldes in Richtung eines Tangentialvektors ist. Sei M eine **glatte Mannigfaltigkeit**, TM = **Tangentialbündel**, $\pi\colon E \to M$ = **Vektorbündel**, $\Gamma^\infty(E)$ = **Menge der glatten Schnitte im Vektorbündel** E. **Zusammenhang auf einem Vektorbündel** ist Abbildung $\nabla\colon \Gamma^\infty(TM) \times \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(E)$ vermöge $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$, die einem Vektorfeld auf M für $p \in M$ und einem Schnitt im Vektorbündel E wieder einen Schnitt in E zuordnet, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $\nabla_X Y$ ist in $X \in \Gamma^\infty(TM)$ linear über $C^\infty(M)$, das heißt $\nabla_{fX_1+gX_2} Y = f \cdot \nabla_{X_1} Y + g \cdot \nabla_{X_2} Y$ für $f, g \in C^\infty(M)$ und $X_1, X_2 \in \Gamma^\infty(TM)$. $\nabla_X Y$ ist $\mathbb{R}$-linear in Y, das heißt, es gilt $\nabla_X(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2) = \lambda_1 \cdot \nabla_X Y_1 + \lambda_2 \cdot \nabla_X Y_2$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt die Produktregel beziehungsweise Leibnizregel $\nabla_X(fY) = Xf \cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$ für jede Funktion $f \in C^\infty(M)$. Hier bezeichnet Xf die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung X (Tangentialvektoren werden also als Derivationen aufgefasst). Eine andere Schreibweise dafür ist $Xf = \mathrm{d}f(X)$. Alternativ kann man den Zusammenhang auch als Abbildung $\nabla\colon \Gamma^\infty(E) \to \Gamma^\infty(T^*M \otimes E)$ mit den gleichen Eigenschaften definieren. **Zusammenhang auf einer reellen Untermannigfaltigkeit:** Sei $\partial_1, \ldots, \partial_n$ die **Standardbasis** von $\mathbb{R}^n$, dann wird auf $\mathbb{R}^n$ der euklidische Zusammenhang $\nabla_X^{\mathbb{R}^n}$ durch $\nabla_X^{\mathbb{R}^n} Y := \sum_{i,j}(X^i \partial_i Y^j)\partial_j$ definiert, wobei $X = \sum_i X^i \partial_i$ und $Y = \sum_j Y^j \partial_j$ Darstellungen der Vektorfelder X, Y bzgl. der Standardbasis sind. Ist M eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$, so erhält man auf M einen von $\mathbb{R}^n$ induzierten Zusammenhang. Dieser ist durch $\nabla_X^M Y := \pi(\nabla_X^{\mathbb{R}^n} Y)$ bestimmt. Dabei bezeichnet $\pi\colon T_p\mathbb{R}^n \to T_pM$ die orthogonale Projektion. **Darstellung in Koordinaten per Christoffel-Symbolen:** Bilden die lokalen Vektorfelder $X_1, \ldots, X_n$ in jedem Punkt eine Basis des Tangentialraums, so sind die Christoffel-Symbole definiert durch $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$ bzw. $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k$. Christoffel-Symbol siehe Seite 244. Haben die Vektorfelder X und Y bezüglich dieser Basis die Gestalt $X = x^i X_i$ und $Y = y^j X_j$, so gilt für die Komponenten z^k von $\nabla_X Y = z^k X_k$ mit

$z^k = \Gamma^k_{ij} x^i y^j + x^i X_i(y^k)$, wobei $X_i(y^k)$ die Richtungsableitung der Funktion y^k in Richtung des Vektors X_i bezeichnet. Wählt man als Basisvektorfelder speziell die durch eine Karte gegebenen Vektorfelder $\partial_1, \ldots, \partial_n$, so erhält man die Koordinatendarstellung $z^k = \Gamma^k_{ij} x^i y^j + x^i \partial_i y^k$. Dieses Resultat entspricht der Produktregel: Im Produkt $Y_k y^k$ ändern sich bei infinitesimalen Änderungen sowohl die BasisvektorenY_k als auch die Komponentenfunktionen y^k , und es entsteht die Summe beider Änderungen. Percacci: Geometry Nonlinear Field Theories 1985;

Weatherburn: An Introduction to Riemannian Geometry and the Tensor Calculus 1938; Luke & Mishchenko: Vector bundles and their applications 1998; **Knapp: Vektorbündel**. Vom Möbius-Bündel bis zum J-Homomorphismus 2013; Mishchenko & Fomenko: A course of differential geometry and topology 1980; Fomenko: A Short Course in Differential Geometry and Topology 2009; **Pressley: Elementary differential geometry** 2001; Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature 1997; **Boothby: An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry** 1986 e-book; Lineare Algebra geht symbolisch mit koordinatenfreiem Zugang. Bei Anwendung aber Koordinaten wichtig, daher Tensorrechnung. **Denschlag: Relativitätstheorie kompakt** 2012 p13-25; Weller & Wellstein: Bd3 Angewandte Elementar-Mathematik, I. Mathematische Physik 1910 p18-45, p526f; Liqun Qi et al: Tensor eigenvalues and their applications 2018; **Reich: Die Entwicklung des Tensorkalküls. Vom absoluten Differentialkalkül zur Relativitätstheorie** 1994; Geometrische und physikalische Größen repräsentierende Vektoren und Matrizen können als Tensoren betrachtet werden, die anhand ihres Transformationsverhaltens definiert werden. **Motivation für Tensor-Begriff: Budo: Theoretische Mechanik** 1974 §97 p572ff; Sauer: Projektive Liniengeometrie 1937 p96; **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p18; **Feynman: Bd2 Elektromagnetismus** Kap31: **symmetrischer Tensor der Polarisierbarkeit** χ mit $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ frisst zwei elektrische Vektoren, was die durch Polarisation bedingte Energiedichte $u_P = \frac{1}{2}\vec{E}^T \cdot \chi \cdot \vec{E}$, geometrisch das **Energie-Ellipsoid des Polarisations-Tensors**, zeigt, Verzerrungs/Deformations-Tensor $T_{ij} = \sum_{k,l} \gamma_{ijkl} S_{kl}$ mit **Spannungs-Tensor** S_{ij} gibt **elastische Energiedichte in einem Festkörper** $u_{\text{elast}} = \sum_{ijkl} \gamma_{ijkl} S_{ij} S_{kl}$, **Leitfähigkeits-Tensor** gibt Energiedichte durch Joule'sche Wärme $u_J = \frac{1}{2}\vec{E}^T \cdot \sigma \cdot \vec{E}$, Trägheits-Tensor, $I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (\vec{r}^2_\alpha \delta_{ij} - x_{\alpha i} x_{\alpha j})$ kommt von $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_i m_i (\vec{\omega}(\vec{r}_i^2) - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}))$ wegen $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ bei Drehung um **beliebige feste** Achse $\vec{\omega}$ bringt die **Deviationsmomente**, die man per **Hauptachsentransformation** beseitigen kann. Siehe Seiten 188 und 113 zu den entsprechenden Gebietsintegralen. **Ausgewählte Beispiele für Trägheitmomente:** Quader mit Volumen $V = abc$ und $\rho(x,y,z) = m/(abc)$ =const: Betrachte Hauptachse x

$$I_x = \int_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z(y^2+z^2)\rho(x,y,z) = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \mathrm{d}x \int_{-b/2}^{b/2} \mathrm{d}y \int_{-c/2}^{c/2} \mathrm{d}z(y^2+z^2) = \frac{m}{12}(b^2+c^2), \quad I_{\text{Würfel}} = \frac{m}{6}a^2$$

Quadratische Platte mit $c \ll a, b = a$ und **Würfel-Schachtel** aus solchen Platten haben gemäß **Satz von Steiner** über achsparallele Trägheitsmomente $I(s) = I + ms^2$

$$I_x = I_y = \frac{m\,(a^2+c^2)}{12} \approx \frac{m\,a^2}{12}, \quad I_z = \frac{m\,a^2}{6}, \quad I_{\text{Würfel-Schachtel}} = 2I_z + 4I_x + 4m\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5}{3}m\,a^2$$

$I_{\text{dünnerStab}} = \frac{1}{12}ml^2$ $I(\text{Punkt}) = m\rho^2$, $I(\text{Zyl}) = mR^2/2$, $I(\text{Zyl}-\text{Mantel}) = mR^2 = \mu(V_a R_a^2 - V_i R_i^2)/2 \approx MR_i^2$, $I(\text{Rohr}) = (M_a R_a^2 - M_i R_I^2)/2 = \mu h\pi(R_a^4 - R_i^4)/2 = M(R_a^4 - R_i^4)/(R_a^2 - R_i^2)/2 = M(R_a^2 + R_i^2)/2$ wegen $M = M_a - M_i = \mu h\pi(R_a^2 - R_i^2)$, wobei μ = Massendichte. $I(\text{Kugelschale}) = 2mr^2/3$, $I(\text{Vollkugel}) = 2mr^2/5$, $I(\text{Kegelmantel}) = mr^2/2$, $I(\text{Vollkegel}) = 3mr^2/10$, $I_x = I_y(\text{Ring}) = mR^2/2$, $I_z(\text{Ring}) = mR^2$. **Trägheitsmoment bzgl x-Achse** = Rotationskörper mit Mantellinie $f(x)$ ist mit Salami-Taktik = Zerlegung in flache Zylinder der Höhe $\mathrm{d}x$ mit $\mathrm{d}I_x = \frac{f^2(x)\mathrm{d}m}{2}$ mit der Masse pro Scheibe $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho\pi f^2(x)\mathrm{d}x$ also $I_x = \frac{1}{2}\pi\rho \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x f^4(x)$. Leupold et al.: Analysis p342; Bartsch p439; Bergmann & Schäfer: Mechanik p319; Speziell mit um x-Achse rotierender Vollkegel der Höhe h und Radius R hat $f(x) = \frac{R}{h}x$ also

$I_x = \frac{\pi}{10}\rho R^4 h = \frac{3}{10}mR^2$. Oder ohne Taktik **Zylinderkoordinaten** ($\rho = r_\perp, \varphi, z$) wegen Rotation um feste Achse z, also $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho(r_\perp, \varphi, z) r_\perp \mathrm{d}r_\perp \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$, wobei Raum mit Massenbelegung $0 \le r_\perp \le \frac{R}{h}z$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $0 \le z \le h$ die Integrationswege, -grenzen und deren Abhängigkeiten fixiert. **Integration über die abhängigen Grenzen zuerst!** Unabhängige zum Schluss! Wie sieht das Integrationsgebiet beim Integtral $I = \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2}y} \mathrm{d}x = 2\pi$ aus? Unabhängige Koordinate ist $y \in [1,3]$. Betrachte daher Streifen senkrecht zur y-Achse auf den Intervallen $x \in [0, \frac{\pi}{2}y]$, also Trapez mit Höhe 2, obere Breite $= 3\pi/2$ und untere Breite $= \pi/2$ macht $A =$ Höhe mal Breitenmittel$=2\pi$. Wenn man statt der 1-Funktion über dem Gebiet die Gebietsbewertung durch $f(x,y) = \cos\frac{x}{y}$ möchte, so hat man $I = \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{\frac{\pi}{2}y} \mathrm{d}x \cos\frac{x}{y} = 4$. Bei eindimensionaler Integration, also Integration über Teilmengen von $\mathbb{R}$ entspricht der 1-Funktion einfach der Intervalllänge. Bei einer Kugel mit dem Radius R hat man drei Integrationsrichtungen: Äußerste=unabhängige Variable=x, nächste Variablen $= y$, innerste Variable $=z$. In x-Richtung muss man von $-R$ bis R laufen, um jedes Teilvolumen der Kugel zu erreichen. Ist man jedoch bei einem beliebigen Punkt $x \in [-R, R] \subset \mathbb{R}$ **auf der x-Achse**, so kann die y-Koordinate nur noch zwischen $-\sqrt{R^2 - x^2}$ und $\sqrt{R^2 - x^2}$ laufen. Anderenfalls hat man die Kugel verlassen. Nun errichtet man die Volumensäulen über dem Kugeläquator. Deren Höhe = z-Koordinaten kann i.a. nur noch zwischen $-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ und $\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ laufen. Also gilt kartesisch V(Vollkugel mit R) $= \int_{\circ(R)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z$. **Lang & Pucker: Math Methoden**. Kap 4.4 **Mehrdimensionale Integrale** p146-162; **Boas: Mathematical methods in the physical sciences** 2006^3 p211-250; **Riley, Hobson, Bence: Mathematical methods for physics and engineering. A comprehensive guide** 2005^5 p130ff; Fischer & Kaul; Schaum's; Berechne Parallelogrammfläche mit den Gebietsgrenzen $x+y = 0$, $x+y = 1$, $2x-y = 0$ und $2x-y = 3$. Skizze! Mit Koordinatentransformation $u = x+y$ und $v = 2x-y$ werden die obigen Gebietsbegrenzungs-Gleichungen achsparallel: $u = 0$, $u = 1$, $v = 0$ und $v = 3$, Skizze! Die Transformationsformeln $(u,v) \to (x,y)$lauten: $x = \frac{u+v}{3}$, $y = \frac{2u-v}{3}$. **Fundamental-Determinante** ist $J = \frac{(x,y)}{(u,v)} = -\frac{1}{3}$. Fläche ist $\int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^3 \mathrm{d}v\, |J| = 1 \cdot 3 \cdot |-\frac{1}{3}| = 1$. Kanten des Parallelogramms sind $\vec{a} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), 0$ und $\vec{b} = (1, -1, 0)$. Fläche ist $\vec{a} \times \vec{b} = (0, 0, -1)$. Salas, Hille, Atgen: Calculus p1013; $I_x = \int\int\int_K r_\perp^2 \mathrm{d}m(r_\perp, \varphi, z) = \int\int\int_K \rho(r_\perp, \varphi, z)\, r_\perp^2\, \mathrm{d}V(r_\perp, \varphi, z) \overset{\rho(r_\perp,\varphi,z)=\text{const}}{=} \rho \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{R}{h}z} \mathrm{d}r_\perp r_\perp^3 = 2\pi\rho \int_0^h \mathrm{d}z \left[\frac{r_\perp^4}{4}\right]_0^{\frac{R}{h}z} = \frac{2\pi\rho}{4}\frac{R^4}{h^4}\int_0^h \mathrm{d}z z^4 = \frac{\pi\rho}{10}R^4 h = \frac{3}{10}R^2 m$, wegen der Gesamtmasse des Vollkegels $m = \rho V = \rho\pi R^2 h/3$. Analog um z rotierende Vollkugel nehme das Gebiet $0 \le r_\perp \le \sqrt{R^2 - z^2}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $-R \le z \le R$ ein. $R^2 = r_\perp^2 + z^2$. $I_z = \int\int\int_K r_\perp^2 \mathrm{d}m = \rho \int_{-R}^{R} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \mathrm{d}r_\perp r_\perp^3 = 2\rho 2\pi \int_0^R \mathrm{d}z \left[\frac{r_\perp^4}{4}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} = \rho\pi \int_0^R \mathrm{d}z (R^2 - z^2)^2 = \rho\pi[R^4 z - \frac{2}{3}R^2 z^3 + \frac{z^5}{5}] = \frac{8}{15}\rho\pi R^5$. **Aber bei kugelsymmetrischer Geometrie trotz Rotation leichter mit Kugelkoordinaten** $\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \mathrm{d}r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi$ und $r_\perp^2 = x^2 + y^2 = r^2 \sin^2\vartheta$ gibt $I_z = \rho \int\int\int_K r_\perp^2\, \mathrm{d}V = \rho \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi r^4 \sin^3\vartheta = 2\pi\rho \int_0^R \mathrm{d}r r^4 \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin^3\vartheta = 2\pi\rho \frac{R^5}{5}\frac{4}{3} = \frac{8}{15}\pi\rho R^5$ wegen $\int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin^3\vartheta = \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta (1 - \cos^2\vartheta)\sin\vartheta = \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta + \int_0^\pi \mathrm{d}\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta = \frac{4}{3}$. Oder Salami-Taktik = Vollkugel senkrecht zur x-Achse gibt Scheibchen mit $\mathrm{d}m = \rho\pi r_\perp^2 \mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}I_x = \frac{1}{2}r_\perp^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\rho\pi r_\perp^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\rho\pi(R^2 - x^2)^2 \mathrm{d}x$ wegen $R^2 = r_\perp^2 + x^2$. Tipler: Physik 1994 p238; **Elementare Beispiele siehe** Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik p492ff, 509, 519; Rothe; Jordan & Smith p354ff p724; Salas p978

Trägheitsmoment bzgl der Achse $\vec{\omega}$ ist $I_{\vec{\omega}} = \vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega} = \vec{\omega}^T I \vec{\omega}$ Hänsel & Neumann: Mechanik; **Satz von Steiner** $\mathbf{J} = \mathbf{I} + m\left[(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})\,\mathbf{E}_3 - \mathbf{R}\otimes\mathbf{R}\right]$ oder $J_{ij} = I_{ij} + m\left(|\mathbf{R}|^2\delta_{ij} - R_i R_j\right)$, wo $\mathbf{R} = R_1\hat{\mathbf{x}} + R_2\hat{\mathbf{y}} + R_3\hat{\mathbf{z}}$ die Verschiebung des Massenmittelpunkts ist. Für den Vergleich der Trägheitsmomente sind die obigen Massen m aber verschieden! **Energie-Impuls-Tensor:**

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}) & c\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} \\ c\epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B} & \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0})\delta_{ik} - \epsilon_0 E_i E_k - \frac{1}{\mu_0} B_i B_k \end{pmatrix}$$

Vierer-Tensor des elektromagnet Impulses oder Energie-Impuls-Tensor,

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} w & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix} = T^{\alpha\beta} = F^{\alpha\gamma}F_\gamma{}^\beta - \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} \quad \text{mit} \quad (F_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

w Energiedichte, (S_x, S_y, S_z) Impulsdichten, G_{ik} sind die Impuls-Strom-Dichten. **Bilanzgleichungen für den Energie-Impulstensor in der Elektrodynamik** $\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(E^2+B^2)\right] + \operatorname{div}\vec{S} = \vec{j}\cdot\vec{E}$, linke Seite **lokale Energiebilanz des elektromagnetischen Feldes**, rechte Seite ist **Leistungsdichte des elektromagnetischen Feldes am Materiefeld**. **Satz von Poynting:** $\frac{\partial}{\partial t}S_k + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{1}{2}(E^2+B^2)\delta_{ik} - E_iE_k - B_iB_k\right] = (\vec{j}\times\vec{B} + \rho\vec{E})_k \quad k = 1,\ldots 3$ oder $\frac{\partial}{\partial x^\alpha}T^\alpha{}_\beta = j^\alpha F_{\alpha\beta} \quad \beta = 0,\ldots 3$ rechts **lorentzsche Kraftdichte des elektromagnetischen Feldes am geladenen Materiefeld** oder **lorentzschen Viererkraftdichte (Viererimpulsübertrag pro 4D-Volumenelement). Impulsdichte eine ebenen em Welle** $\vec{\mathcal{P}} = \dfrac{\vec{S}}{c^2}$ mit Poynting-Vektor $\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$. **Strahlungsdruck und Lichtsegel:** $\vec{p} = \int \mathrm{d}V\vec{\mathcal{P}} \approx \mathcal{P}A\mathrm{d}x\hat{x}$, $F_x = \dfrac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{P}A\mathrm{d}x) = \mathcal{P}A\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}Ac$, $\vec{P} = \dfrac{\vec{F}}{A} = \vec{\mathcal{P}}c = \dfrac{1}{c}\vec{S} = \dfrac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\vec{E}\times\vec{B} \quad \Big|\ \vec{k}\parallel\hat{x}$, $P = \dfrac{1}{2\mu_0\varepsilon_0}E_0B_0 = \dfrac{1}{2\mu_0c^2}E_0^2 = \dfrac{\varepsilon_0}{2}E_0^2$. **Lichtdruck:** $F = PA = wA = ma$, $a = \dfrac{wA}{m} \sim 4,7\cdot 10^{-3}\mathrm{ms}^{-2}$. Sonnenwind $p = \varrho v$ aus Protonen mit $\varrho \sim 8,363\cdot 10^{-21}\mathrm{kgm}^{-3}$ gibt $a = \dfrac{1}{m}\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{m}\varrho vAv = \varrho v^2\dfrac{A}{m} \sim 2,09\cdot 10^{-6}\mathrm{ms}^{-2}$.

Maxwell'scher Spannungstensor geht von **Lorentz-Kraft** aus $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$, $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J}\times\mathbf{B}$. **Mit Gauß- und Ampere-Gesetz**: $\mathbf{f} = \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}$. Mit Zeitableitung des **Poynting-Vektor** und **Faraday-Induktionsgesetz** $\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B} - \mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})$, also $\mathbf{f} = \epsilon_0(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0}(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \epsilon_0\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) = \epsilon_0[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0}[-\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$. Zur Herstellung der Symmetrie darf ohne Gefahr $(\operatorname{div}\vec{B})\vec{B}$ hinzugefügt werden: $\mathbf{f} = \epsilon_0[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} - \mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})] + \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} - \mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})] - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$. Mit der **Vektoridentitität** $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \mathbf{A}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}) + (\mathbf{A}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{A}$ folgt $\mathbf{f} = \epsilon_0[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E})\mathbf{E} + (\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0}[(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B})\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}] - \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}\left(\epsilon_0E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) - \epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B})$. Dieser Ausdruck verknüpft Elektromagnetismus mit Impuls. Mit der Definition des **Maxwell'schen Spannungstensor**s $\sigma_{ij} \equiv \epsilon_0\left(E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right)$, kann man fast alles als Divergenz schreiben: $\mathbf{f} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t} = \nabla\cdot\sigma$, mit dem **Poyntingvektor** $\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$.

Maxwell'scher Spannungstensor mit Druck und Scherspannung, **Energie-Impuls-Tensor der Hydrodynamik**

$$T^{ik} = \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)u^iu^k - P\eta^{ik}$$

P Druck, (u^i) **Vierergeschwindigkeit**. Im Ruhesystem $(u^i) = (c,0,0,0)$ mit Druck

$$(T^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}$$

ART (hier eröffnet die Tensorrechnung auch die Betrachtung von nicht-euklidischen Metriken, deren Skalarprodukt auf einer nicht positiv definiten Bilinearform beruht, in der **Einstein-Hilbert-Gl** ist nicht nur die Masse Quellterm für die Raumkrümmung

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

Die geometrischen Eigenschaften der Raumzeit, Kombination des metrischen Tensors und Krümmungstensor, werden durch den Energie-Impuls-Tensor als Quelle definiert. Kuchar: Geometrodynamics regained: A

Lagrangian approach JMathPhys 15 708 (1974); Siehe auch Treder: Philosophische Probleme des physikalischen Raumes 1974; Siehe auch Seite 431. Treder: Gravitationstheorie und Theorie der Elementarteilchen. Wiederabdruck ausgewählter Beiträge des Einstein-Symposiums 1965 in Berlin 1979; **Wheeler: Geometrodynamik** , In: Wahsner: Mensch und Kosmos - die copernikanische Wende 1978; Eckhard Kreisel 1927-, Liebscher, Treder: Zur Quantengeometrodynamik 1967; Wheeler: Geometrodynamics 1962; P̃fister: Inertia and gravitation. The fundamental nature and structure of space-time 2015; Ciufolino & Wheeler: Gravitation and Inertia 1995; P̃hilipsen: Quantenfeldtheorie und das Standard-Modell der Teilchenphysik. Eine Einführung 2018; M̃ünster: Von der Quantenfeldtheorie zum Standard-Modell. Eine Einführung in die Teilchenphysik 2019; B̃uras: Gauge theory of weak decays 2021; Knochel: Neustart des LHC, das Higgs-Teilchen und das Standardmodell. Die Teilchenphysik hinter der Weltmaschine anschaulich erklärt 2016; Derdzinski: Geometry of the Standard Model of Elementary Particles 1992; Knochel: Neustart des LHC. Neue Physik - Die Teilchenphysik hinter der Weltmaschine anschaulich erklärt 2016; W̃itten ed: Gravitation. An introduction to current research 1962; Eddington: Relativity theory of protons and electrons 1938; Ẽddington: Fundamental theory 1946; S̃later: The Development and Meaning of Eddington's 'Fundamental Theory'. Including a Compilation from Eddington's Unpublished Manuscripts 1957; d̃eWitt ed: Relativity, groups and topology 1964 950 Seiten; **Blumenberg: Die Genesis der kopernikanischen Welt** 1981; Danielson & Graney: Kopernikus - Erde nicht im Mittelpunkt des Universums, SdW Okt 2014 p54-59. **Weigerung**, vernünftig erscheinende Schlussfolgerungen aufzugeben, ist kein Zeichen für hartnäckige **Vorurteile**, sondern gute wissenschaftliche Praxis: A] Andromedanebel = Einzelstern mit planetenerzeugender Akkretionsscheibe. B] Kosmos statisch, also Expansion verhindernde kosmologische Konstante nötig.. Falsche Annahmen können fruchtbar sein! Kaiser & Creager SdW Jan2013 p76. Noch lange nach Galileis Fernrohrbeobachtung 1609 Zweifel an Kopernikus = Erde rotiert und kreist um Sonne. Ab 1588 Tycho Brahe mit geoheliozentrische Kosmologie = **tychonisches System**: **Erde fest im Zentrum**, um das Mond und Sonne kreisen. Um Sonne kreisen alle anderen Planeten. a] Denn welche Kraft sollte die schwere Erde dauerhaft um die Sonne schieben? Die auf der Erde fehlende Äthersubstanz (Dunkle Materie, Energie) führt per Definition zu schneller Kreisbewegung! b] Bei rotierende Erde müssten sich Geschosse und fallende Körper auf krummen Bahnen bewegen. c] Himmelssphäre mit Stern ist **unermesslich groß**, da **keine tägliche Parallaxe**! Durchmesser der Erde gegen Sternabstand vernachlässigbar! Erde ist Punkt. Man kannte auch **keine jährliche Parallaxe**! Also auch Erdbahndurchmesser ein Punkt, daher Kosmos noch größer. Blick an den Himmel scheint auf kleine feste Öffnungswinkel oder Sterndurchmesser zu verweisen, die aus geometrischen Gründen, wenn sie in kopernikinischen Entfernungen lägen, Erdbahndurchmesser haben müssten, gegen die die Sonne $d_{\odot}$ 1.4 Gm ein Winzling wäre. Brahe fand solche Sterntitanen absurd. Brahe Logik und Messungen sind makellos, daher ist Kopernikus abzulehnen! Erst Bessel sah 1838 jährliche Parallaxe und Airy gab Erklärung für Beugung, die punktförmige Stern immer als gleichgroßes Beugungsscheibchen erscheinen lässt. Ferdinand Reich sah als erster die Coriolis-Kraft bedingte Ablenkung fallender Körper. Die kühnen Behauptungen anderer besonders streng zu prüfen, ist gute wissenschaftlicher Brauch. Aus Brahes Marsdaten schloss sein Mitarbeiter Kepler auf Ellipsenbahn. Sciama & Lake: The Physical Foundations of General Relativity 1969; Sciama & Wedge: The Unity of the Universe 1959; Sciama: Modern Cosmology 1971; Sciama: Modern Cosmology & the Dark Matter 2008; Sciama: Thermodynamics of Black Holes 2008; **Wheeler: Einsteins Vision. Wie steht es heute mit Einsteins Vision, alles als Geometrie aufzufassen?** 1968 = geometric unity = alles ist Metrik und Faserbündel; **Kaku & Trainer: Jenseits von Einstein. Die Suche nach der Theorie des Universums**[22] 1993; W̃ahsner: Die Natur muss bewiesen werden. Zu Grundfragen der Hegelschen Naturphilosophie 2002; Schuller, Witte & Dennis Rätzel. Feb 26, 2014. How quantizable matter gravitates: a practitioner's guide e-Print: arXiv:1402.6548. Mit dem **Permutations-Symbol**, geschaffen für die Leibniz-Definition der Determinanten = Volumen (siehe Seite 235) (**nicht** Epsilon-**Tensor!** siehe Seite 230) folgt die Tensor-Schreibweise des Vektorprodukts und Schreibweise für **Rotations-Tensor** $\vec{x}' = \omega \times \vec{x}$ gibt $x'_j = (\epsilon_{ijk} d_j) x_k = t_{ik} x_k$ alias **Hodge-Stern-Operation**. Siehe Einführungskapitel von **Raschewski: Riemann'sche Geometrie und Tensoranalysis** 1959; Elementar **Grinfeld: Introduction to Tensor Analysis and the Calculus of Moving Surfaces** 2013; e-book Viele Rechenaufgaben:

[22] Seite 9f erklärt auch mein Motiv

Akivis & Goldberg: Tensor calculus with applications 2003; Spiegel: **Vectoranalysis and introduction to tensor analysis**, Schaum 1959; **Simmonds: A brief on tensor analysis** 1994, 2012[2]; **Jeevanjee: An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists** 2010; **Multilinearität:** $T(\vec{v}_1 + c\vec{v}_2, \vec{w}) = T(\vec{v}_1, \vec{w}) + c\,T(\vec{v}_2, \vec{w})$ und $T(\vec{v}, \vec{w}_1 + c\,\vec{w}_2) = T(\vec{v}, \vec{w}_1) + c\,T(\vec{v}, \vec{w}_2)$. In Koordinatenschreibweise sind die Vektoren $\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$ und $\vec{w} = w_x\hat{x} + w_y\hat{y} + w_z\hat{z}$ und der Tensor ist $T(\vec{v}, \vec{w}) = T(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}, w_x\hat{x} + w_y\hat{y} + w_z\hat{z}) = v_xT(\hat{x}, w_x\hat{x} + w_y\hat{y} + w_z\hat{z}) + v_yT(\hat{y}, w_x\hat{x} + w_y\hat{y} + w_z\hat{z}) + v_zT(\hat{z}, w_x\hat{x} + w_y\hat{y} + w_z\hat{z}) = v_xw_xT(\hat{x}, \hat{x}) + v_xw_yT(\hat{x}, \hat{y}) + v_xw_zT(\hat{x}, \hat{z}) + \cdots = v_xw_xT_{xx} + v_xw_yT_{xy} + v_xw_zT_{xz} +$ wobei $T_{xx} = T(\hat{x}, \hat{x}), T_{xy} = T(\hat{x}, \hat{y})$ und $T_{xz} = T(\hat{x}, \hat{z})$ die Komponenten des Tensors 2. Ranges im gegeben Koordinatensystem und nicht irgendwelche Koeffiziente sind. Als Multilinearformen **fressen Tensoren Rang-viele Vektoren und geben eine Zahl zurück!** Historisch werden **Tensoren durch ihr Verhalten bei Koordinatentransformation** definiert: Z.B. Kovarianter Rang-2-Tensor $T_{i'j'} = A^{\alpha}_{i'}A^{\beta}_{j'}T_{\alpha,\beta}$ ist Element des Tensorprodukts zweier kovarianter Vektoren aus dem Dualraum $V^* \bigotimes V^* \to \mathbb{R}$ vermöge $v^*(x)w^*(y) \in \mathbb{R}$, frisst also zwei kontravariante Vektoren. Boseck: Tensorräume p99 Rang-r-Tensoren oder Tensoren r.ter Stufe sind Elemente eines Tensorraums $T^m_{m^*} = V \overset{\bigotimes}{m} V \bigotimes V^* \overset{\bigotimes}{m^*} V^*$ also $r = m + m^*$-Linearform. **Kovarianz-Gedanke führt auf elitäre Elemente von Matrizen, die Komponenten heißen, da sie speziellen Transfomationen genügen:** x, x', y, y', A, A' seien geometrische Objekte/Tensoren, dann müssen die Gesetze in verschiedenen Koordinatensystemen dieselben sein: Bei Gültigkeit von $y = Ax$ muss auch Gültigkeit von $y' = A'x'$ bestehen. Das geht nur bei bestimmten (orthogonalen oder pseudo-euklidischen) Transformationen, die die Metrik (Abstände und Winkel) erhalten: $x' = Sx$ und $y' = Sy$ führen auf $Sy = A'Sx$ oder $y = S^{-1}A'Sy$ und erzwingen $A' = SAS^{-1}$. **Abstrakt ist also ein Tensor eine Vektoren-fressende Multilinearform, die der Anwender gern durch eine Vektoren-linear-abbildende Matrix bezüglich einer gegebenen Basis darstellt:** 1. **Tensor als Vektoren-fressende Multilinearform:** Wenn I der **Trägheits-Tensor** 2. Ranges ist die Rotations-Energie

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2}T_I(\vec{\omega}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

2. **Tensor als Vektoren-linear-abbildende Matrix:** Andererseits kann der **Trägheits-Tensor** 2. Ranges auch als **Abbildung** betrachtet werden und liefert den **Drehimpuls** oder **Drall**

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \vec{r} \times \vec{p} = *(\vec{r})\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$$

Tensor wegen Kovarianzforderung bei Drehung D geht $\vec{L} = I\vec{\omega}$ in $\vec{L}' = I'\vec{\omega}'$ über. Da gilt $\omega' = D\omega$, $\vec{L}' = DL$ und die Ähnlichkeits-Transformation $(I'_{ij}) = I' = DID^{-1} = DID^T = (D_{ik}D_{jl}I_{kl})$. Nur dann ist I Tensor. Dann kann auch immer z.B. mittels Lösung eines **Eigenwert-Problems auf Diagonal-Matrix transformiert** werden, also eine Basis gefunden werden, für es nur Hauptträgheitsmomente gibt (**Trägheitstensor im Hauptachsensystem**) Greiner 2 p213. Der Trägheitstensor für eine beliebige Richtung $\hat{n}$ ist $I_{\hat{n}} = \hat{n}^T\, I\, \hat{n}$ mit $\hat{n}^T = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ gibt **Trägheitsellipsoid**.

Beide Sichtweisen, **Tensor als Multilinear-Form/Funktion und Tensor als linearer Operator**, sind als Tensor-Definition äquivalent! Ruiz-Tolosa & Castillo: From Vectors to Tensors 2005; Hertel: Mathematikbuch zur Physik 2009 e-book **Kap6 kurze Tensor-Intro** **Hans J. Dirschmid: Tensoren und Felder** 1996 Uni 537 Seiten; Hochgestellte Indices = kontravariant/parallel projizierten Koordinaten = Basis senkrecht zu Koordinatenfläche = Zeilennummer, tiefgestellte/kovariante Indices/ orthogonal projizierten Koordinaten = Basis längs Koordinatenlinien = Spaltennummer. Kontravarianter Vektor $x \in E$ hat die **parallel projizierten Koordinaten** X^i bei der Basis $B = \{e_1, \ldots, e_N\}$. Der durch den Isomorphismus ι assoziierte kovariante Vektor $\iota x \in E^*$ hat die **orthogonal projizierten Koordinaten** X_i bei der dualen Basis $B^* = \{\epsilon^1, \ldots, \epsilon^N\}$. **Idee der reziproken, inversen oder dualen Basen:** Anwendung reziproke Gitter Kristallografie, Blochzustände und Festkörperphysik. Kittel: **Einführung in die Festkörperphysik** 2006[14] p88ff; Ziman: Principles of the theory of solids 1965; Ziman: Prinzipien der Festkörpertheorie 1999; Ziman:

Electrons and phonons 1972; Ziman: Elements of advanced quantum theory 1975; Hänsel & Neumann: Physik Bd7 p28ff; Arfken & Weber: Mathematical Methods for Physicists; **Vektorzerlegung** in kontravariante und kovariante Koordinaten: **Schmutzer: Mathematik - Ein Kompendium für Physiker** 2003 p53; **Lagally & Franz: Vorlesungen über Vektorrechnung** 1928, 1956[5] p31; **Boardman, O'Connor & Young: Symmetry and its applications in science** 1973 p219, p236; Bedingung für die zueinander reziproken, inversen oder dualen Basen ist $e^i(\epsilon_j) =< \epsilon^i, e_j >= \delta^i_j$. Gegeben seien kovariante Basisvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Die gesuchte kontravariante Basis muss also die vier Gleichungen $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}^1 = 1$, $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}^2 = 0$, $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}^2 = 0$ und $\vec{b}_2 \cdot \vec{b}^2 = 1$ erfüllen. In Matrixschreibweise: $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ als Zeilen mal gesuchte ontravariante Basis als Spalten $= \begin{pmatrix}..\vec{b}_1..\\..\vec{b}_2..\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\vec{b}^1 & \vec{b}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. Dann Gauß-Algorithmus wie bei Berechnung der inversen Matrix: $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ gibt $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & -1\\0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ bedeutet $\vec{b}^1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{b}^2 = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$. **Zauner: Gravitationswellen - Grundlagen, Entstehung und Detektion** BA-Arbeit 2013;

Koordinatenfreie Tensoren sind für die multilineare Algebra wichtig. Die Koeffizienten in Linearformen verhalten sich kovariant und erhalten tiefgestellte Indizes $\vec{l}(\vec{x}) = u_i x^i$. **Tensor-Produkt zweier Vektoren** ist multilineare Abbildung zweier Eingänge, **L̃andsberg: Tensors. Geometry and applications** 2012; **Reichhardt: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung**; **Schmidt: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung** 1935, 1953; Jänich; Feynman Bd2 Kap26.3. Richard Lenk & Walter Gellert: **Brockhaus Physik** 1973; Weller & Wellstein: Bd3 Angewandte Elementar-Mathematik, I. Mathematische Physik 1910 p18-45, p526f; **Heber: Math Hilfsmittel der Physik** Bd1 1966 p45ff oder **Lagally & Franz: Vorlesungen über Vektorrechnung** 1928, 1956[5], 1964[7] §276 p396 Sauer: Projektive Liniengeometrie 1937 p96; **Physiklische Vektoren** $\vec{a}$ sind selbst **invariant**. Bei ihrer Darstellung im Ricci-Kalkül sind aber die Maßzahlen oder **kontravarianten bzw. kovarianten Komponenten** x^i, x_i verschieden $\bar{x}^i \hat{\bar{e}}_i = x^i \hat{e}_i = \vec{a} = x_i \hat{e}^i = \bar{x}_i \hat{\bar{e}}^i$. Diese Komponenten-Tupel können auch als Vektoren der Vektorrechnung betrachtet werden, haben aber zunächst nicht mit Verschiebungen zu tun. In **Grassmanns Vektorrechnung** sind Vektoren extensive Größen, um geometrische Gesetze mathematisch zu formulieren - **analytische Geometrie**. **Zaddach: Grassmanns Algebra in der Geometrie. Mit Seitenblicken auf verwandte Strukturen** 1994; Petsche: Graßmann 2006; Diss 1979 Gutachter und Betreuer **Dorothea Goetz 1925/1960-1985/2006** & **Hans Kaiser 1926/1964-2013**, Gutachter H. Hörz; Graßmann: Die Wissenschaft der extensiven Größe oder die **Lineare Ausdehnungslehre** 1844; Die **Grundvektoren** $\hat{e}_i$ sind hingegen **nicht invariant**, sind keine Vektoren. Sie gehören nicht zu den Objekten der Tensorrechnung. In der Vektorrechnung werden sie wegen ihres extensiver Charakters ohne Rücksicht auf ihre Transformationseigenschaften zu Vektoren gestempelt. Vektor im Sinne der Vektorrechnung ist **gerichtete Größe**, Verschiebung. Bei Vektorrechnung spielt die Invarianz von Vektor oder **Dyade** oder Tensor oder **Affinor** keine Rolle, sie werden stets nach denselben algebraischen Gesetzen behandelt. Feldmeier: Mechanik Kap11 p221ff; **Lotze: Vektor- und Affinor-Analysis** 1950; Tensor = **Affinor** Frank & v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Riemann-Webers Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik 2 Bde 1927[7] Erster, mathematischer Teil p80f; Dyade repräsentiert Matrix, mit

einem Vektor c multipliziert und ergibt einen Vektor, der parallel zu a ist

$$(a\otimes b)c = a\langle b,c\rangle = \vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}^T\vec{c}) = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}\right] = a\langle b,c\rangle$$

Das dyadische Produkt $\vec{a}\,|\,\vec{b}$ von zwei Vektoren $\vec{a},\vec{b}$ wird durch $(\vec{a}\,|\,\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$ definiert, wobei $\vec{c}$ ein beliebiger dritter Vektor ist, und "$\cdot$" das Skalarprodukt (von Vektor mit Vektor und Dyade mit Vektor) bedeutet. Im kartesischen Koordinatensystem lautet dann die rechte Seite der obigen von Gleichung $A_{ij} = (\vec{a}\,|\,\vec{b})_{ij} = a_i b_j$ kann als Matrix gesehen werden, die per Matrixprodukt mit $\vec{c}$ multipliziert wird. Linke Seite ist $(\vec{a})_i(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) = \sum_j (a_i b_j) c_j = \sum_j a_i (b_j c_j)$ Daher ist jedes Produkt 'Matrix mal Vektor' oder 'Matrix mal Matrix' bereits durch Dyaden schreibbar. **Man kann ohne Matrixprodukt auskommen!** Feldmeier: Mechanik 2014 p232f Rotationsenergie $2E_{\text{rot}} = \int \mathrm{d}V\rho\vec{v}^2 = \int \mathrm{d}V\rho\vec{v}^2(\vec{\omega}\times\vec{r})^2$ mit $(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \epsilon_{ijk}a_j b_k \epsilon_{imn} a_m b_n = (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})(a_j b_k a_m b_n) a_j a_j\, b_k b_k - a_n b_n a_l b_l = a^2 b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = [(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a}]\cdot\vec{b} = [\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a})]\cdot\vec{b} = [a^2\vec{b} - \vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})]\cdot\vec{b}$, folgt $2E_R = \int \mathrm{d}V\rho[r^2\vec{\omega}\cdot\mathbb{1}\cdot\vec{\omega} - \vec{\omega}\cdot(\vec{r}|\vec{r})\cdot\vec{\omega}] = \vec{\omega}\cdot[\int \mathrm{d}V\rho(r^2\mathbb{1} - \vec{r}|\vec{r})]\cdot\vec{\omega} = \omega_i\omega_j T_{ij}$, wegen $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{r}|\vec{r} = \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix}$ wegen $(\vec{u}|\vec{v})\cdot\vec{x} = \vec{u}(\vec{v}\cdot x)$ und $\vec{u}|\vec{v} = u_i\, v_j\, \hat{e}_i|\hat{e}_j$. **Trägheits-Tensor per Dyade:** $T = r^2\mathbb{1} - \vec{r}|\vec{r}$. Analog für Drehimpuls $\vec{L} = \int \mathrm{d}V\rho\vec{r}\times\vec{v} = \int \mathrm{d}V\rho\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \int \mathrm{d}V\rho[r^2\vec{\omega} - (\omega\cdot\vec{r})\vec{r}] = \int \mathrm{d}V\rho[r^2\vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r}\cdot\vec{\omega})] = \int \mathrm{d}V\rho[r^2\mathbb{1}\cdot\vec{\omega} - (\vec{r}|\vec{r})\cdot\vec{\omega}] = \int \mathrm{d}V\rho[r^2\mathbb{1} - \vec{r}|\vec{r}]\cdot\vec{\omega} = T\cdot\vec{\omega} \overset{\text{kartesisch}}{=} L_i = T_{ij}\omega_j$. **Hall: Matrices and tensors** 1963 p60 Projektionsoperator; Division durch r^2 gibt einen **Projektionsoperator** $P = \dfrac{T}{r^2}$ gemäß

$$P = P^2, \quad P = \mathbb{I} - \frac{|r><r|}{<r|r>} = \mathbb{I} - \frac{\vec{r}|\vec{r}}{\vec{r}\cdot\vec{r}} = \mathbb{I} - \frac{\vec{r}\bigotimes\vec{r}}{\vec{r}\cdot\vec{r}}$$

Dyade in sozialpsychologischer Hinsicht = Zweiergruppe, in der besondere emotionale und intensive Beziehungen herrschen. Schmidt: Aerodynamik des Fluges. Eine Einführung in die mathematische Tragflächentheorie 1929; Harry **Schmidt: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung** 1935 erklärt alles detailliert, nicht formal sondern inhaltlich. Das Verstehen steht im Fokus. *1894 Hamburg, +1951 Halle, 1953 überarbeitet von Hans Kaiser p98 das Buch wird bei Hänsel/Neumann zitiert, aber nur als Formelsammlung verwendet; oder **Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik** 2005^3 oder Mathematik. Ein Kompendium für Physiker 2003; **Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis** 1947, 1956, 1967; **L̃andsberg: Tensors. Geometry and applications** 2012; **Tensor hat algebraischen und transformatorischen Charakter!** Rechenregeln für Skalare, Vektoren, Matrizen etc. Transformationseigenschaften wie geometrische Objekte. **Flügge: Mathematische Methoden der Physik II** 1980 Tensoren und Spinoren; **Veblen: Invariants of quadratic differential forms** 1933 p14, 16, 19f, 27f **Tensor? Voigt dachte an den Spannungszustand von deformierbaren Medien. Mathematisch geht es aber um das koordinatensystem-unabhängige Transformationsverhalten mathematischer Eigenschaften. Daher besser: Funktionensystem mit Transformationsgesetz (Längenerhaltung, der beschriebene Punkt im Raum bleibt fix) = mathematisches Objekt = Invariante einer quadratischen Differenzialform = differenzielle Invariante**; Lies Eddington: The mathematical theory of relativity 1933; **Talpaert: Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics** 1993, 2001; Eisenhart: An introduction to differential geometry with use of the tensor calculus 1947; Morgan: Riemannian Geometry. A Beginner's Guide 1993; Eisenhart: Non-Riemannian geometry 1927; Elementare Geometrie der Kegelschnitte in Eisenhart: Coordinate geometry 1939; Eisenhart: Riemannian geometry 1949; Struik: Mehrdimensionale Differentialgeometrie 1922; Tensor ist Größe eines n-dimensionalen Vektorraumes, die auf ein vorgegebenes Koordinatensystem bezogen und als freies Produkt bezeichnet wird,

weil sie in jedem der m vektoriellen Argumente linear, d.h. homogen und additiv ist. Anzahl der Argumente m ist Stufe. Allgemeines Element hat die Gestalt $a^{ikl}\ldots\vec{e}_i\vec{e}_k\vec{e}_l\cdots = a_{ijk}\vec{e}^i\vec{e}^k\vec{e}^l\ldots$, die angibt, dass ihre Komponenten sich kontragredient transformieren wie die Grundvektoren, d.h., sie transformieren sich wie die Produkte der Koordinaten $x^{ikl}\ldots$ bzw. $x_{ikl}\ldots$ Für einen **Tensor 2. Stufe** T_{ij} **im 3D** ist das **vektorielle Produkt** $(\vec{a}\times\vec{b})_{i\,j} = a_i b_j - a_j b_i$, dass tatsächlich ein **Tensorprodukt zweier Vektoren** ist, ein Beispiel. Bei diesem Tensor sind nur 3 der 9 Komponenten voneinander unabhängig, daher eingeschränkt als Vektor - eben nur **Pseudo-Vektor** im 3D betrachtbar. Ist tatsächlich ein schiefsymmetrischer oder anti-symmetrischer Tensor. Kann für bestimmte Zwecke durch **Vektor** $(\vec{a}\times\vec{b})^k = \epsilon_{ijk}\,a^i\,b^j$ ersetzt werden und ist im Unterschied zu echten oder polaren Vektoren ein **axialer Vektor**. Beachte das Verhalten schiefsymmetrischer Tensoren und axialer Vektoren bei Spiegelungen $x_i \to -x_i$. Im 4D hat der entsprechende Tensor 6 unabhängige Komponenten, was ein Rechenaufwand verringerndes Vektorprodukt analog zum 3D ausschließt. Das äußere Produkt oder Vektorprodukt ist ein gutes Beispiel dafür, dass ein Verstehen notwendig ist, um zwischen verschiedenen Kalkülen unterscheiden zu können. Formal vermittelt das **Hodge-Stern-Produkt** zwischen diesen beiden Kalkülen. Indexpermutierte Tensoren sind Isomere. Symmetrischer Tensor stimmt mit allen seinen Isomeren überein, schiefsymmetrische nur bis auf's Vorzeichen. Tensorielles Produkt assoziativ, aber nicht kommutativ. **Tensorielles Produkt zweier Vektoren** ist bilineare Abbildung zweier Eingänge, zweier Vektoren und wird als **dyadisches Produkt** bezeichnet. **Römer & Forger: Elementare Feldtheorie** 1993 p178 $\vec{a}|\vec{b} = \vec{a}\otimes\vec{b} := [\vec{a},\vec{b}](\cdot,\cdot) : V\times V \to \mathbb{R}$ mit $[\vec{a},\vec{b}](\vec{c},\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) = c_i(a_i\,b_j)d_j = \vec{c}M\vec{d}$ oder $\vec{a}|\vec{b} =< \cdot|\vec{a} >< \vec{b}|\cdot >$ führe Skalarprodukt von links und rechts aus, wobei $\vec{a},\vec{b}$ nicht aufeinander wirken. **Deschamps: Exterior differential forms** p111-161 In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; **Talpaert: Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics** 1993, 2001 p131 **Tensor** $T^q_p = T_x{}^q_p = T^q_p(x)$ beim Punkt x ist vom **Tensor-Typ** $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ bei x von **kontravarianter Ordnung** q und **kovarianter Ordnung** p. **Beispiele:** Trägheitstensor bei x ist eine Bilinearform auf $T_xM\times T_xM$ also kovarianter Tensor vom Type $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos 1998 p461ff;

Wüst: Mathematik Bd1 Kap10.4 p425 In Physik oft **symmetrische Abbildungen** wichtig. Also lineare Abb in Prä-Hilbert-Räumen, die man im **Inneres Produkt oder Skalarprodukt** von einer auf die andere Seite schieben kann $(Tx,y) = (x,Ty)$ oder $(Tx,y)_{V_2} = (x,T^*y)_{V_1}$ mit $x\in V_1, y\in V_2$; **Def Dualraum**: Sei V lin Raum über K. Dann heißt der **Raum der lin Abb** von V nach K $V^* := L(V,K)$ der (algebraische) **Dualraum** vo V. Die Elemente von V^* nennt man **lineare Funktionale**. Beim euklidischen oder **unitären Räumen** (= linearer Vektorraum mit Skalarprodukt) sind Raum und Dualraum isomorph. V kann mit Dualraum identifiziert werden, da jedes Element aus V^* kann eindeutig über das **Skalarprodukt** mit einem geeigneten Element aus V dargestellt werden. **Dualraum** V^* zu Vektoren V über $\mathbb{R}$ ist die Menge der Linearformen auf V. Die **Elemente des Dualraums** sind die Kovektoren/ 1-Formen/ Linearformen $3x+y$ /Zeilenvektoren $(3,1)$ oder **Bra**s $<\Phi| = |\Phi>^*$. Die Elemente des Raums sind die Vektoren/ Spaltenvektoren oder **Ket**s $|\Phi>$. $V^*\times V\to\mathbb{R}$ vermöge $x^*(x) = x_i x^i \in \mathbb{R}$. Vektor ist in diesem Sinne Linearform oder Tensor 1. Stufe, die/der nur einen Vektor frisst und dabei per Skalarprodukt eine Zahl gibt. Basis des Dualraums ist $\{e^i\}$. Basis von V ist $\{e_i\}$. $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Die Bilinearform auf V oder die bilineare Abbildung von $V\times V$ in den Grundkörper $\mathbb{R}$ gemäß $(x,y)\to u^*(x)v^*(y)$ für $x,y\in V$ heißt **Tensor-Produkt** von u^* und v^* und wird mit $u^*\times v^* = u^*|v^*$ bezeichnet. Die Menge der **Bilinearformen** bildet einen Vektorraum $(u^*\times v^*)(x,y) = u^*(x)v^*(y)$. n Linearformen e^i bilden eine Basis von V^*. n^2 Linearformen $e^i\times e^j$ bilden eine Basis im Vektorraum der Bilinearformen auf V^*. **Dualer Raum macht das Konzept Metrik überflüssig! Zaddach: Grassmanns Algebra in der Geometrie. Mit Seitenblicken auf verwandte Strukturen** 1994 p9; **Flügge: Mathematische Methoden der Physik II** 1980 Tensoren und Spinoren; **Arens** Startet bei p744 mit Umdeutung oder Übernahme der Algebra von Vektoren und Matrizen in die stets **basis-bezogene** Notation. Dadurch haben die Objekte stets **Komponenten** bzgl. einer Basis, wodurch bloße Matrizen/quadrat Tabellen durch ihr Transformationsverhalten

bei Basiswechsel definiert werden. Schultz-Piszachich p23: Bzgl. der orthogonalen Transformation ist auch der (variable) Ortsvektor ein Tensor 1. Stufe. Arens p747 Lineare Algebra $\Longrightarrow$ **Tensorschreibweise im Levi-Civita-Kalkül** fasst Vektoren, Matrizen und Bilinearformen unter dem Begriff des Tensors zusammen, sofern sie geometrische oder physikalische Größen repräsentieren. Günstig für **schiefwinklige/affine** oder krummlinige Koordinaten oder Tensorfelder (kovariant vs kontravariant). **Skalarprodukte auch als nicht positiv definite Bilinearformen. Komponenten** statt Koordinaten eines Vektors/Tensors x^i:

$$_B\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^i \vec{b}_i$$

Übergang von Basis B zu $\bar{B}$ bedeutet **Komponentenänderung** gemäß $_{\bar{B}}\vec{x} = {}_{\bar{B}}T_{BB}\vec{x}$ wobei die neuen Basisvektoren $_{\bar{B}}\vec{b}_i = \bar{\vec{b}}_i$ als Spalten zur Matrix $_{\bar{B}}T_B = ((_{\bar{B}}\vec{b}_1, \ldots, _{\bar{B}}\vec{b}_n))$ zusammengefasst werden. In den Spalten der Transformationmatrix stehen die **neuen Koordinaten der alten Basisvektoren**, die Bezugsbasis ist die neue Basis $\bar{B}$ bezüglich der die Koordinaten der alten angegeben werden:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{neue Basis}: \quad \bar{\vec{b}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \bar{\vec{b}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad {}_{\bar{B}}T_B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Komponenten-Umrechnung:

$$\bar{\vec{x}} = \vec{x}' =_{\bar{B}} \vec{x} = {}_{\bar{B}}T_{BB}\vec{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Basis-Umrechnung:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \vec{b}_1^T \\ \vec{b}_2^T \end{pmatrix} \bar{\vec{b}}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu jedem Vektorraum gibt es es einen Dualraum, zu jeder Basis eine Dualbasis. Wie sehen die entsprechenden Koordinaten, Basen und Transformationen $x^i\vec{b}_i \Leftrightarrow x_i\vec{b}^i$ aus? **Linearformen** über **Vektorraum** V also **lineare Abbildungen** von $V \to \mathbb{R}$ bilden wieder einen Vektorraum, den zu V **dualen** Vektorraum V^*. Man denke an die **Rotationsenergie** $E_{\text{rot}} = \omega^T\Theta\omega$. Zu jeder Basis $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ von V gibt es die **duale Basis/Dualbasis** $B^* = (\vec{b}^1, \ldots, \vec{b}^n)$ von V^*. Dabei ist die Linearform $\vec{b}^i : V \to \mathbb{R}$ dadurch festgelegt, dass sie $\vec{b}_i$ auf 1 und alle anderen $\vec{b}_j$ auf 0 abbildet: $\vec{b}^i(\vec{b}_j) = \delta^i_j$. Speziell bildet das Dualraumelement $\vec{b}^i \in V^*$ den Vektor $\vec{x} \in V$ auf dessen i-te Komponente x^i ab: $\vec{b}^i(\vec{x}) = \vec{b}^i(x^j\vec{b}_j) = x^j\delta^i_j = x^i$. Für die **Linearform** $\vec{l} \in V^*$ mit der Darstellung $\vec{l}(\vec{x}) = \vec{l}(x^j\vec{b}_j) = \vec{l}(b_j)x^j = u_jx^j$ bedeutet dies $u_j = \vec{l}(\vec{b}_j)$ und auch $u_j\vec{b}^j(\vec{x}) = u_jx^j = \vec{l}(\vec{x})$. Die Abbildungen $\vec{l}$ und $u_j\vec{b}^j$ ordnen jedem $\vec{x}$ diesselbe reelle Zahl zu, sind daher identisch: $\vec{l} = u_j\vec{b}^j$. Mit **Linearform** u_j meinen wir ein Element des zu V dualen Vektorraums V^* und die u_j sind dessen Komponenten bzgl. der dualen Basis B^* zu B und **gleichzeitig** auch die Bilder $\vec{l}(\vec{b}_j)$ der Vektoren aus B. **Skalarprodukt:**

$$V^* \times V \to \mathbb{R} \text{ vermöge } {}_{B^*}\vec{x} \cdot {}_B\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x_ix^i \in \mathbb{R}$$

Parallel zum **Basiswechsel** in V von B zu $\bar{B}$ passiert auch im **Dualraum** V^* ein **Wechsel von Dualbasis** $B^* = (\vec{b}^1, \ldots, \vec{b}^n)$ von B zur Dualbasis $\hat{B}^* = (\bar{\vec{b}}^1, \ldots, \bar{\vec{b}}^n)$ von $\bar{B}$ statt. Gemäß $\vec{b}_j = \hat{a}^i_j\hat{\vec{b}}_i$ und $\hat{x}^i = \hat{a}^i_jx^j$ ist $\bar{\vec{b}}^i = \bar{a}^i_k\vec{b}^k$ wegen wegen $\bar{\vec{b}}^i(\vec{x}) = \bar{x}^i = \hat{a}^i_kx^k = \hat{a}^i_k\vec{b}^k(\vec{x})$ und die beiden **Linearformen** $\bar{\vec{b}}^i$ und $\hat{a}^i_k\vec{b}^k$ ordnen jedem $\vec{x}$ dieselbe Zahl zu. **Beispiel:** Sei B in $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$_E\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, {}_E\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, {}_E\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Gesucht ist **Dualbasis** B^*! Daher suchen wir die Lösung zu $(u^1, u^2, u^3)((_E\vec{b}_1, {}_E\vec{b}_2, {}_E\vec{b}_3)) = (1, 0, 0)$, weil die (u^1, u^2, u^3) die kanonischen Koordinaten des **Dualbasisvektors** $\vec{b}^1$ sind. Simultan gilt

$$\begin{pmatrix} {}_E\vec{b}^1 \\ {}_E\vec{b}^2 \\ {}_E\vec{b}^3 \end{pmatrix} ((_E\vec{b}_1, {}_E\vec{b}_2, {}_E\vec{b}_3)) = \begin{pmatrix} {}_E\vec{b}^1 \\ {}_E\vec{b}^2 \\ {}_E\vec{b}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

und es ist praktisch die Inverse der Matrix $((_E\vec{b}_1, {}_E\vec{b}_2, {}_E\vec{b}_3))$ zu bestimmen. Wegen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 27 & 6 & -4 \\ 8 & 2 & -1 \\ -13 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

lauten die **Linearformen der Dualbasis in kanonischer Darstellung** ${}_E\vec{b}^1(\vec{x}) = 27x^1 + 6x^2 - 4x^3$, ${}_E\vec{b}^2(\vec{x}) = 8x^1 + 2x^2 - x^3$ und ${}_E\vec{b}^2(\vec{x}) = -13x^1 - 3x^2 + 2x^3$. Jedes $\vec{b}^i$ bildet die $\vec{b}_j$ auf δ^i_j ab! **Vektorraum V** ist strukturelle Begriff und nicht mit euklidischem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ zu identifizieren! **Die Elemente eines Vektorraums sind die Menge aller Verschiebungen (nicht Punkte!), Matrizen oder Polynome, Funktionen, Fourier-Reihen-Darstellung.** Arens p570 ff; Boseck; Jänich 1; Jänich p24: Lineare Algebra = Theorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume $\cup$ Theorie der $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen. Morphismen der Struktur von lin Vektorräumen sind die $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $f : V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, die additiv und homogen sind: $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f\, u + \mu f\, v$. Gegeben sei $\mathbb{K}$-Körper oder **Feld** $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$-Vektorraum ist Tripel $(V, +, \cdot)$, gegeben durch eine abelsche Gruppe $(V, +)$ und seine skalare Multiplikation, genannt Verknüpfung $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ notiert als $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ mit Axiomen: $1v = v, \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$ und **Ähnlichkeit** (Weyl) oder **Linearität** $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v, (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$. Thirring: Mechanik Bd1 p158 **Affin = inhomogen linear** $y = mx + b$. Speziell **Kosinus-Satz:** Für beliebige $\lambda \neq 0$ und $\vec{A}' = \lambda\vec{A}$ gilt $\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \cos(\vec{A}', \vec{B}') = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB} = \dfrac{\vec{A}' \cdot \vec{B}'}{A'B'} = \dfrac{\lambda^2 A_i B^i}{\sqrt{\lambda^2 A_i A^i}\sqrt{\lambda^2 B_i B^i}}$. Boseck: Theorie lin Vektorräume, p12; **Einzigkeit des Nullelements.** Annahme: Es gäbe zwei Nullelemente o und o'. Für alle v gilt dann $v + o = v$ und $v + o' = v$, also auch für o und o'. Damit gilt speziell $o' + o = o'$ und $o + o' = o$, und wegen der Kommutativität $o' + o = o + o'$ folglich Einzigkeit $o = o'$. **Einzigkeit des Inversen** von v. Annahme: Es gibt zwei verschiedene Inverse $(-v)$ und $(-v)'$. Also $v + (-v) = o$ und $v + (-v)' = o| + (-v)$ gibt $o = v + (-v) + (-v)' = (-v)$. **Zauner: Gravitationswellen - Grundlagen, Entstehung und Detektion** BA-Arbeit 2013;

Zu einem Vektorraum V über einem Körper K bezeichnet V^* den zu V gehörigen Dualraum, das heißt die Menge aller linearen Abbildungen von V nach K. Seine Elemente werden je nach Kontext auch Funktionale, Linearformen oder auch 1-Formen genannt. Insbesondere in der Physik verwendet man gerne die Sprache der Tensoralgebra; dann heißen die Elemente von V kontravariante, die von V^* kovariante Vektoren, oder auch Kovektoren. **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p18;

bash-Shell-Tensor per echo $\{a, b, c, d\}\{1, 2, 3, 4\}$ gibt Tensor-Komponenten a1 a2 a3 a4 b1 b2 b3 b4 c1 c2 c3 c4 d1 d2 d3 d4.

Tensor als Begriff kommt von mechanischer Spannung/Druck im Festkörper Woldemar Voigt 1898. **Duschek: Der Tensorbegriff und seine Bedeutung für die Physik. Die geometrischen Grundlagen**, PhysBl10 1954 Tensorbegriff ist Konsequenz des Erlanger Programm von Felix Klein 1872. Geometrie und Gruppentheorie sind Identität. Jede Geometrie ist die Invariantentheorie einer bestimmten Transformationsgruppe: Bewegungen in euklidischen Räumen bedeuten Orthogonaltransformationen, also Längen-Winkel-Volumnen-Invarianz. Unitäre Transformationen auf Hilberträumen. Gruppentheorie ist Basis. Anwendungen der Physik basieren auf der Darstellungstheorie, damit Längen, Winkel, Inhalte, Massenverteilung, Temperaturen, elektrische und magnetische Ladungen, Zeit. Dafür liefert Tensorrechnung die Verfahren, die Invarianzen sichern, Rechnungen von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig machen p389-395; **Tensoralgebra** p436-444; **Carmeli:**

Group theory and general relativity. Representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field 1977; Macke: Mechanik und Teilchen 1964 Kap21 und Kap26; Papapetrou: Spezielle Relativitätstheorie 1972 p69-83; Hänsel & Neumann: Physik Bd4. Grenzen des klassischen Begriffssystems 1974 p46ff; W̃erner: Vektoren und Tensoren. Bd1 Tensoralgebra und Tensoranalysis, Bd2 Universelle Sprache in Physik und Technik 2019; Tensor ist aber mathematisch **MultiLinearForm** mit Darstellervielfalt. Wegen der Bedeutung der Relativitätstheorie tritt die Betonung der Invarianz/Kovarianz gegen Orthogonaltransformation in Vordergrund. Ein **Tensor** k-ter Stufe transformiert sich bezüglich aller k Indices wie ein Vektor. Tensor ist eine multilineare Abbildung, also eine Abbildung, welche in jeder Variablen linear ist. Orthogonaltransformation: Winkel und Längen bleiben erhalten. Aufgaben in Arens p747; **Lichnerowicz: Einführung in die Tensoranalysis** 1966; **Schmidt: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung** 1935, 1953; **Hall: Matrices and tensors** 1963 p60 Projektionsoperator; Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos 1998 p461ff; Teichmann: Physikalische Anwendungen der Vektor- und Tensorrechnung 1973[3]; Kolecki: An Introduction to Tensors for Students of Physics and Engineering, NASA-Publikation; Bernhardt: Über Tensoren, Matrizen und Pseudovektoren, Wiki; **Myshkis: Advanced mathematics for engineers** 1975 p280ff; **Matrix hat Elemente, Tensor hat Komponenten.** Komponenten sind Elemente mit geometrischer Bedeutung (die Elite unter den Elementen, Schulz Kap4!!!). Indexrechnungsübung * **Flügge: Mathematische Methoden der Physik II** 1980 Tensoren und Spinoren; C̃armeli & Malin: Theory of spinors. An introduction 2006; **Kästner:** Vektoren, Tensoren, Spinoren 1964[2]; Gruppentheoretisch folgt, dass man zwischen Tensoren zur Beschreibung von Ganz-Zahl-Spin-Teilchen und Spinoren, Kästner p280ff, zur Beschreibung von Teilchen mit halbzahligem Spin, unterscheiden muss. Betrachte Vektor auf Möbius-Band: Man muss 4π oder zweimal rum, um wieder gleiche Richtung zu haben. Piet Hein: Spinor ist $\sqrt{-1}$ der Geometrie, **weil i Drehung bedeutet**. Spinor-Modell = Tangloid, Super-Ei. $n = p + q$-dim Die **Clifford-Algebra** $\mathrm{C}l_{p,q}(\mathbb{R})$ besteht aus $n = p + q$ orthonormalen Basisvektoren, wobei p die Norm 1 (räumliche Vektoren) und q die Norm -1 (zeitliche Vektoren) haben. Die Produktregel der Basisvektoren ist

$$e_i e_j = \begin{cases} +1 & i = j,\, i \in (1 \dots p) \quad \text{räumliche Vektoren} \\ -1 & i = j,\, i \in (p+1 \dots n) \quad \text{zeitliche Vektoren} \\ -e_j e_i & i \neq j. \end{cases}$$

Altmann: Rotations, quaternions, and double groups 1977 erklär alles anschaulich und gibt historischen Zusammenhänge p15 Hamilton verstand seine Quaternionen und den Unterschied zu den komplexen Zahlen nicht. Erst Clifford erkannte den Unterschied zwischen Operatoren (Drehungen) und Operanden (Vektoren). **Komplexen Zahlen sind zugleich Operatoren (Drehungen) und Operanden (Vektoren)!** Daher ideale, simultane Darsteller eines Mixes von Mannigfaltigkeiten als Gruppen. **Ñormand: A Lie Group. Rotations in Quantum Mechanics** 1980; **Das & Okubo: Lie groups and Lie algebras for physicists** 2014; Hilgert & Neeb: Lie-Gruppen und Lie-Algebren 1991; **Sudarshan & Mukunda: Classical Dynamics: A Modern Perspective** 1972, 2015 Kap13 Lie-Gruppen und -Algebren; **Bröcker: Darstellung kompakter Liegruppen**. Regensburger Trichter 12 1977; **Sophus Lie, Scheffers: Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen** 1893; **Hawkins: Emergence of the theory of Lie groups**. An essay in the history of mathematics 1869-1926, 2000; Bei komplexen Zahlen wird der Operand i durch den Operator i gemäß $i \cdot i = i \cdot e^{i\pi/2} = -1$ um 90° gedreht. Bei Quaternionen wird hingegen ein Vektorprodukt gemäß $ij = k$ = Bivektor realisiert! Die i, j, k sind keine polaren Vektoren, sondern flächenbeschreibende axiale oder Bivektoren; **Beispiel für Spinoren in 2d** die **Clifford-Algebra** $\mathrm{C}l_{2,0}(\mathbb{R})$ besteht aus der Basis: Einheitsskalar 1, zwei orthogonale Einheitsvektoren σ_1, σ_2 und einem Einheits-pseudo-Skalar $i = \sigma_1\sigma_2$. Daher gilt $(\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = 1$, und $(\sigma_1\sigma_2)(\sigma_1\sigma_2) = -\sigma_1\sigma_1\sigma_2\sigma_2 = -1$. Daher heißt konjugiert komplex $(a + b\sigma_1\sigma_2)^* = a + b\sigma_2\sigma_1 = a - b\sigma_1\sigma_2$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. **Clifford-Algebra** $\mathrm{C}l_{1,1}(\mathbb{R})$ für 1d Raum-Zeit. **Beispiel für Spinoren in 3d** sind Quaternionen und räumliche Drehungen, also **Clifford-Algebra** $\mathrm{C}l_{3,0}(\mathbb{R})$: **Einheitsskalar** 1, drei orthogo-

nale Einheitsvektoren $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, drei **Einheits-Bivektoren** $\sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_3, \sigma_3\sigma_1$ und ein **Einheits-Pseudo-Skalar** $i = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \cos(\theta/2) - \{a_1\sigma_2\sigma_3 + a_2\sigma_3\sigma_1 + a_3\sigma_1\sigma_2\}\sin(\theta/2) \\ &= \cos(\theta/2) - i\{a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\}\sin(\theta/2) \\ &= \cos(\theta/2) - iv\sin(\theta/2) \end{aligned}\right\}$$

bedeutet Drehung des Vektors u um Achse $v = a_i\sigma_i$ um Winkel θ gemäß $u' = \gamma u \gamma^*$. Die Bivektoren entsprechen den Quaternionen $\hat{i} = -\sigma_2\sigma_3 = -i\sigma_1$, $\hat{j} = -\sigma_3\sigma_1 = -i\sigma_2$, $\hat{k} = -\sigma_1\sigma_2 = -i\sigma_3$. Coddens: From Spinors to Quantum Mechanics 2015; Aus Sicht der Darstellungstheorie bedeutet die Einordnung phys Theorien in den Rahmen der SRT: Phys Größen/Observablen werden werden (relative) Tensoren zugeordnet, die sich linear mit den Darstellungen der Lorentz- bzw Poincare-Gruppe transformieren. Die phys. Gesetze werden dann als Gleichungen zwischen solchen Trägern der Darstellungen der Lorentz-Gruppe transformiert. In der vorrelativistischen Physik tritt die Galilei-Gruppe an die Stelle der Poincare-Gruppe. **Carmeli: Group theory and general relativity**. Representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field 1977; **Goenner: Einf in spez und allg Relativitätstheorie** 1996 p100, Spinoren-Kalkül **p144-161**. **Sexl & Urbantke: Relativität, Gruppen, Teilchen** p186; Bröcker: Lineare Algebra p288; **Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie** 2003[4]; Geroch: Quantum Field Theory 1971 Lecture Notes 2013; Ryder: QFT p32; Greiner: Rel. QM, Bd6 p469; Rebhan: Rel. QM, QFT, Elementarteilchen, Motivation Dirac-Gl p7, p12, p48; Kästner: Vektoren, Tensoren, Spinoren p280; Hladik & Cole: Spinors in Physics 1999; Spinor-Intro ist **Lounesto: Clifford algebras and spinors** 2001; Leichter als Penrose & Rindler: Spinors and space-time 1984; sind **Hurley & Vandyck: Geometry, Spinors and Applications** mit Beispielen 1999; C̃orson: Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations 1955; **Õ'Donnell: Introduction to 2-spinors in general relativity** 2003 pVII p5ff Minkowski-Koord auf Riemann-Zahlenkugel x, y, z mit einem komplexen Argument auf komplexe 2-Ebene $Z \in \mathbb{C}$ per stereograf Projektion; **Benn: An introduction to spinors and geometry with applications in physics** 1989; Cartan: The Theory of Spinors 1955; B̃enn: An introduction to spinors and geometry with applications in physics 1987; Kurz und knapp: Gerlich: Vektor- und Tensorrechnung für die Physik 1977; **Schmidt: Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung** 1935, 1953; Tietz: Geometrie. Tensorrechnung In HdP Bd2 Mathematische Methoden 1955; **Denschlag: Relativitätstheorie kompakt** 2012 p13-25; Iben: Tensorrechnung 1999[2]; **Hay: Vector and tensor analysis** 1953 ChapVI p157ff alles zur Tensorrechnung; **H̃uggett & Tod: An introduction to twistor theory** 1985, 2001; Bailey & Baston: Twistors in mathematics and physics 1990; **Schultz-Piszachich: Tensoralgebra und -analysis** 1985[3]; Es geht um eine kovariante Formulierung, da die physikalische Beschreibung nicht von der zufälligen Lage des Koordinatensystems abhängen darf. Wie müssen die verschiedene Größen (Skalare: q, m, c, P, Spur, Determinante g; Vektoren, Matrizen) bei Drehung transformiert werden, damit die Beziehungen zwischen ihnen forminvariant bleiben? Relativitätsprinzip bezüglich Drehung von Achsen, die ja Menschenwerk sind. Ursache $\vec{u}$-Antwort $\vec{a}$-Beziehungen müssen erhalten bleiben: Aus $\vec{a} = D\,\vec{u}$ muss $\vec{a}' = D\,\vec{u}'$ folgen. Vektor: $\vec{b} = C\,\vec{a}$ erfordert $C^T = C^{-1}$. Analoges gilt für C bei Matrix-Transformation: $B = C^{-1}A\,C$.

Drehung um Bewegungspol: Beliebige Bewegung einer Figur in Ebene stehts reine Drehung um Bewegungspol. Kontinuierlichen Bewegung erfordert Polbahn. Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd1 1967 p209;

Papapetrou: Spezielle Relativitätstheorie 1972; Betrachte **Koordinatentransformation** = passive Drehung kontravarianter Koordinaten gemäß $x'^i = x'^i(x^j)$. Der Strich am Index, siehe Goenner: Einf in SRT und ART 1996 p5; kennzeichnet die Transformation und bedeutet **bei Festhalten des Punktes/fester Lage des Punktes/Wechsels des Koordinatensystems/passiver Transformation** ein Auswechseln der Koordinaten $\vec{a}' = a^{i\prime}\hat{e}_i' = a^j\,\hat{e}_j = \vec{a}$! Schmutzer Kap1.12 p206. **Budo: Mechanik** p574ff; **Greiner: Bd1** p25f; Wie lauten die Koordinaten eines festen Objekts im Licht einer gedrehten Basis? Spezielle **passive Drehung**. Nach **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p5, p15 die **einzig sinnvolle Perspektive auf physikalische Größen** und **Idee der Kovarianz**; Sowohl die Basis $\vec{b}_j = a^{i\prime}_j\,\vec{b}'_i$ (aber die

neuen Koordinaten stehen rechts!), als auch das Linienelement transformieren sich gemäß $dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$, ein beliebiger kontravarianter Vektor A^i gemäß $A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j$. **Kovarianz: Die kovarianten Komponenten - also bezüglich der reziproken Basis/ Dualbasis - eines Vektors A_j transformieren sich wegen der Längen-Invarianz** $A_{i'} A^{i'} = A_j A^j$, also $A_{i'} A^{i'} = \Lambda^j_{i'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} A_j A^j$ gemäß $A_{i'} = \Lambda^j_{i'} A_j = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} A_j$. $A^i \hat{e}_i = \vec{A} = A_i \hat{e}^i$, wobei A^i die Parallelprojektionen/kontravarianten und A_i die Orthogonalprojektionen/-kovarianten Komponenten von $\vec{A}$ sind. Die Vektoren zweier reziproker Basen stehen paarweise senkrecht aufeinander $\hat{e}_i \cdot \hat{e}^j = \delta^j_i$. Kästner. Stimmen die neuen Basisvektoren mit den alten überein, so ist die Transformationsmatrix die Einheitsmatrix $E_n = (\delta^i_j)$. Zur reziproken Basis/ Dualbasis und selbstreziproker Basis siehe Nearing: Math tools for physics 2003 p349 Aus dem **Ortsvektor** $\vec{r} = \rho\hat{\rho}$ folgt das totale Differenzial in der Mannigfaltigkeit $\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \hat{\rho}\mathrm{d}\rho + \rho\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi = \hat{\rho}\mathrm{d}\rho + \rho\hat{\varphi}\mathrm{d}\varphi$ und wegen der Kettenregel für eine Funktion $f(t)$ gemäß Kettenregel $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$ und daher $\nabla f = \hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}$, wobei die Basis $\{\hat{\rho}, \hat{\varphi}\}$ ist, die selbstreziprok ist. Man kann das richtige Skalarprodukt aber auch dadurch bekommen, in dem man ρ und $1/\rho$ in die Basis verlagert, die dann allerdings nicht mehr normiert und nicht mehr selbstreziprok ist durch die neuen Basisvektoren $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} = \{\hat{\rho}, \rho\hat{\varphi}\}$ und die reziproke/duale Basis $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2\} = \{\hat{\rho}, \frac{1}{\rho}\hat{\varphi}\}$. Dann gilt $\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_1\mathrm{d}\rho + \vec{e}_2\mathrm{d}\varphi$ und $\nabla f = \vec{e}^1\frac{\partial f}{\partial \rho} + \vec{e}^2\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ **Obwohl durch basisabhängige Komponenten bezeichnet, haben Tensoren wegen des geforderten Transformationsverhaltens stets eine vom KS unabhängige Bedeutung. Sie sind daher geometrische oder physikalische Größen.** **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p18; Wẽrner: Vektoren und Tensoren. Bd1 Tensoralgebra und Tensoranalysis, Bd2 Universelle Sprache in Physik und Technik 2019; **Boseck: Tensorräume** haben als Elemente Tensoren 1972 p29 Das **kartesische Produkt** gibt 'Größere Räume'. Das 'direkt' verweist auf die 'gerichtete' Stellung der Faktoren. So konstruiert man mittels **direkter Summe** z.B. Konfigurationsraum der Mechanik und **direktem Produkt** = **Tensorprodukt** z.B. Zustandsraum in QM, weil die physikalischen Größen nicht bloß c-Zahlen, sondern Operatoren sind oder Gleichungen für Verteilungen (= Wellenfunktion) nicht unabhängiger Zufallsvariablen (= Messungen, Kollapse der Wellenfunktionen) werden. **c-Zahlen** = commutating numbers = complex numbers $\in \mathbb{C}$ = classical theory. **q-Zahlen** = quantum numbers/Operatoren = quaternionic numbers = nicht kommutierende Größen = Quantentheorie. Schwindt: Tutorium QM p66ff; Audretsch: Verschränkte Welt. Faszination der Quanten 2002; Audretsch: Verschränkte Systeme. Quantenphysik auf neuen Wegen 2005, 2008; **Multilinearform!**, **Slater-Determinante**, Verschränkung, Fernwirkung, Nichtlokalität,Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie KapVII p209ff; **Beispiele zu Tensoren** von Asch in Wüst: Mathematik 1 Kap14.3 **Tensorräume** 1] Raum reeller Polynome $P^n([0,1])$ vom Grad $\leq n$ über $[0,1]$ mit $\int : P^n([0,1]) \to \mathbb{R}, p \mapsto \int_0^1 \mathrm{d}x\, p(x)$, wobei $\int \cdot$ oder $\int \mathrm{d}\cdot$ als **lineares Funktional** ein **kovarianter Vektor** oder **Kovektor** über den Vektoren $P^n([0,1])$ ist. 2] Sei $< V, (\cdot,\cdot) >$ **euklidischer Raum**. Mit dem **dualen Raum** V^* hat man $(\cdot,\cdot) \in V^* \otimes V^*$ und $(\cdot,\cdot)$ ist ein 2-fach **kovarianter Tensor** über V. 3] Im $\mathbb{R}^4$ ist das **Minkowski-Produkt** $(x,y)_{Minkowski} := (< x_0, x_1, x_2, x_3 >, < y_0, y_1, y_2, y_3 >:= -x_0y_0 + \sum_1^3 x_k y_k$, auch $(\cdot,\cdot)$ ist ein 2-fach **kovarianter Tensor** über $\mathbb{R}^4$. 4] **Determinante** ist ein **n-fach kovarianter Tensor**: Für lin Raum V mit dim $V = n$ sei $\mathcal{B} := \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis, $\Phi_{\mathcal{B}}$ die Basisdarstellung von V bezgl. $\mathcal{B}$. Definiere $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}} : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-\text{fach}} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \det\,(\Phi_{\mathcal{B}}(v_1) \ldots \Phi_{\mathcal{B}}(v_n))$. Nach den Rechenregeln über Determinanten idt dann $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}} \in V^{*(n)}$ ein n-fach kovarianter Tensor, der unabhängig gegenüber Basiswechsel vermöge einer Transformation mit Determinante 1 definiert ist. 5] Eine lin Abbildung in einem lin Vektorraum V lässt sich in natürlicher Weise als 1-fach ko-, 1-fach kontravarianter Tensor auffassen. **Tensoren 1-ter Stufe aus Physik:** Bewegung eines Systems sei durch eine Kurve im lin Raum V (etwa $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{R}^4$) beschrieben. Dann sind Ort q und Geschwindigkeit $\dot{q} := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q$ **kontravariante Vektoren** in V. In vielen phys Theorien werden Tensorprodukte gleicher Stufe identifiziert. Ein Grund ist: Das Transformationsverhalten eine phys Größe ist oftmals nicht eindeutig gegeben, es hängt etwa von der definierenden

Messvorschrift ab. So kann einerseits eine **Kraft** als ein Vektor in V gegeben sein; andererseits wird sie häufig durch die Arbeit $W(q)$ definiert sein, die sie bei einer Verschiebung q leistet. In diesem Fall ist die **Kraft** der **Kovektor**: $q \mapsto W(q)$ in V, wegen $W(q) = F \cdot q$. Hat man ein V ein Skalarprodukt (oder Minkowskiprodukt) $(\cdot, \cdot)$, so ist die erwähnte Identifizierung durch den im Riez'schen Darstellungssatz, Wüst 1, p426, definierten kanonischen Isomorpismus $\phi : V \to V, v \mapsto \phi(v) := (v, \cdot)$ gegeben.YYYY weiter p516. **Riez'scher Darstellungssatz:** Sei $< V, (\cdot, \cdot) >$ ein euklid oder **unitärer Raum** (= **Prähilbertraum** = **Vektorraum mit Skalarprodukt**) über K (= $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$). (1) Zu jedem $f \in V^*$ existiert genau ein $y_f \in V$ mit $f(x) = (x, y_f)$, wobei $x \in V$. (2) Die Abbildung $S : V^* \to V$, $f \mapsto y_f$ ist ein (im Fall $K = \mathbb{C}$ konjugiert linearer) Isomorphismus, also eine bijektive Abbildung mit $S(\lambda f + \mu g) = \bar{\lambda} C f + \bar{\mu} S g$ mit $f, g \in V^*, \lambda, \mu \in K$. **Duschek & Hochrainer: Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung** 1946. Teil 1 Tensoralgebra 1968. Teil 2 Tensoranalysis 1970. Teil 3 Anwendungen in Physik und Technik 1965[2] = Tensorrechnung an vielen Beispielen, Definition über Orthogonaltransformation. **Brehmer & Haar: Differenzialformen und Vektoranalysis** 1973; **Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis** 1947, 1956, 1967; Lawden: An Introduction to Tensor Calculus and Relativity 1967; Dodson & Poston: Tensor Geometry. The Geometric Viewpoint and its Uses 1991[2]; **Spain: Tensor Calculus** 1965; Schouten: Tensor Analysis for Physicists 1954[2]; Šchouten: Ricci-Calculus - An Introduction to Tensor Analysis and its Geometrical Applications 1954; Schouten: Der Ricci-Kalkül.Eine Einführung in die neueren Methoden und Probleme der mehrdimensionalen Differentialgeometrie 1924; Šchouten & Struik: Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie Bd1 und Bd2 1935, 1938; **Schade & Neemann: Tensoranalysis** 2009[3]; Klingbeil: Tensorrechnung für Ingenieure 1966, 1989[2]; **Kay: Tensor Calculus** (Schaum's Outlines) 2011 Einstieg: Tensor-Komponenten vs komponentenfreie Behandlung. p1 **freie und Dummy-Indices** = wie bei Computer-Programm-Schleife ist Schleifen-Index-Name irrelevant, aber verschieden vom davon unabhängigen **freien Index!** $a_{ii}x_k$ oder $a_{ij}x_j = a_{ir}x_r = a_{iv}x_v \neq a_{kj}x_j$; **Index-Gymnastik** Basiert auf: Gerretsen: Lectures on tensor calculus and differential geometry 1962; Indexrechnung in allen Intros zur ART Fließbach, Rebhan, Goenner, Schröder; **Schultz-Piszachich: Tensoralgebra und -analysis** 1985[3]; Ryder: Introduction to General Relativity 2009 ebook; Landau/Lifschitz Bd2; Sokolnikoff: Tensor analysis. Theory and applications to geometry and mechanics of continua 1950, 1964[2]; Sard: Relativistic mechanics - Special relativity and classical particle dynamics (Lecture notes and supplements in physics) 1970; Eisenhart: Coordinate geometry 1939; Eisenhart: A treatise on the differential geometry of curves and surfaces 1909; Eisenhart: Continuous Groups of Transformations 1961; Eisenhart: Riemannian geometry 1924, 1949; Eisenhart: Non-Riemannian geometry 2005; **Elementar:** Schroeder: Vektor- und Tensorpraxis 2009 **Tensor als Zahlenkollektiv zur Beschreibung achsenbezogener oder anisotroper Eigenschaften**, wie Trägheitsmoment unsymmetrischer Kreisel,; Nguyen-Schäfer & Schmidt: Tensor Analysis and Elementary Differential Geometry for Physicists and Engineers 2014; **Moon & Spencer: Theory of Holors: A Generalization of Tensors** 1986; Holoren = nichtgeometrische und geometrische Objekte, wobei diese entweder **Oudoren** (= nicht, also alle anderen geometrische Objekte wie Christoffel-Symbole) oder **Akinetoren** = fest oder invariant, wobei sich die kontravarianten Akinetoren gemäß $v^{i'} = \sigma \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} v^i$ transformieren. **Tensoren** sind spezielle Akinitoren mit $\sigma = 1$. Akinitoren entsprechen Pseudotensoren. Holoren werden weiter klassifiziert nach ihrem **Plentos** n (= Multitude im Sinne der Dimensionalität eines Vektors) und nach ihrer **Valenz** N (= soll an chemische Valenz erinnern! = Anzahl der Indizes, um die mehrdimensionalen Komponenten zu bezeichnen. Unterscheide **Grade**, Grad und Ordnung/-Grad/Rang eines Tensors oder Matrix). **Fester Rhabdor** (Stab) = auf Linien frei verschiebbares **gerichtetes Liniensegment** = Gleitender Vektor. Weiter gibt es freie Rhabdoren, Kineoren (Bewegbare), fixe Strophoren (eine Drehung), freie Strophoren und **Helissoren** (rollbar oder herumwindbar). **Geometrische Algebra: Blade** = Verallgemeinerung des Konzepts von Skalaren und Vektoren auf Bi-, Tri-Vektoren, etc. Ein k-Blade ist ein Objekt, das als **äußeres, Grassmann-, geometrisches, kombinatorisches oder Keilprodukt** von k Vektoren ausgedrückt werden kann. Ist vom **Grade** k. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum: Das Produkt $\wedge$ der **äußeren Algebra ist assoziativ**. Außerdem ist es **kommutativ-graduiert**, das

heißt es gilt $a \wedge b = (-1)^{kl} b \wedge a$ für $a \in \Lambda^k(V)$ und $b \in \Lambda^l(V)$. Insbesondere ist $v \wedge v = 0$ für alle $v \in V$, aber im Allgemeinen ist $a \wedge a \neq 0$ für $a \in \Lambda^k(V)$ mit k gerade. In der Terminologie der **Supergeometrie** verwendet man statt **kommutativ-graduiert** den äquivalenten Begriff **superkommutativ** und mit Hilfe des Superkommutators $[\cdot, \cdot]$ lässt sich die Bedingung der Superkommutativität ausdrücken als $[a, b] = 0$ für $a \in \Lambda^k(V)$ und $b \in \Lambda^l(V)$. Ist f eine p-Form und g eine q-Form, so lautet die explizite Formel für das äußere Produkt von f und g für beliebige endlichdimensionale Vektorräume (und für unendlichdimensionale Banachräume): $(f \wedge g)(v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in Sym_{p+q}} \epsilon(\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$, wobei Sym_{p+q} die symmetrische Gruppe der Ordnung $p + q$ und $\epsilon(\sigma)$ das Vorzeichen der Permutation σ darstellen sollen. Rodrigues (2000). §1.2 Geometric algebra: an outline. In: Invariants for pattern recognition and classification p3 ff; **Blaschke: Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik** I, II, III 1942. **Blaschke: Kinematik und Quaternionen** 1960; **Geometrisches** oder **Clifford-Produkt** ist die Vereinigung von Grassmanns äußerem Produkt (assoziativ und nicht-kommutativ, z.B. Produkt quadratische Matrizen) und Hamiltons Quaternionen, wobei Grassmanns Regel $e_p e_p = 0$ durch $e_p e_p = 1$ ersetzt wird (für Quaternionen gilt ja $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, siehe auch Penrose: Roads to Reality) $ab = a \cdot b + a \wedge b =$ **Skalar** (0-Blade = **gerichtete Linie** = Idee von Grassmann 1844) + **Bivektor** (gerichte Fläche in der a und b liegen) mit $a \cdot b = \dfrac{1}{2}(ab + ba)$ und $a \wedge b = \dfrac{1}{2}(ab - ba)$. **Trivektor** ist gerichtetes Volumen. 1-Blade = einfacher Vektor. 2-Blade = Bivektor kann durch Keilprodukt ausgedrückt werden $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. Linear-Kombinationen von 2-Blades sind auch Bivektoren, die aber keine 2-Blades sein müssen. 3-Blade ist einfacher **Trivektor** = $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$. Im n-dim Raum wird ein Blade vom grade $n - 1$ als Pseudovektor bezeichnet. Baylis §4.2.3 Higher-grade multivectors in Cl_n: Duals. Lectures on Clifford (geometric) algebras and applications 2004; Das Element vom höchsten Grade im n-dim Raum ist ein Pseudoskalar = n-Blade. Vince: Geometric algebra for computer graphics 2008 p85; Im n-dim Raum gibt es $k(n - k) + 1$ Freiheitsgrade ein k-Blade zu wählen, bei dem eine Dimension ein überall skalierende Faktor ist. Griffiths & Harris: Principles of algebraic geometry 1994; Im 2-dim Raum werden Skalare als 0-Blades und Vektoren als 1-Blades beschrieben. Flächenelemente sind 2-Blades = **Pseudoskalare** = **Zahl mit Richtung**, die als 1-dim Objekte von regulären Skalaren verschieden sind. Im 3-dim Raum werden Skalare als 0-Blades und 3-dim Vektoren als 1-Blades beschrieben. Aber Flächen haben Orientierung, 3-Blades = **Trivektoren** repräsentieren Voluminenelemente, die aber skalar-artig sind und einen 1-dim Vektorraum bilden. The geometric product of two bivectors, A and B, is **Geometrisches** oder **Clifford-Produkt** zweier **Bivektoren** http://en.wikipedia.org/wiki/Bivector $\mathbf{AB} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$. Dabei ist $A \cdot B$ das skalarwertige Innere Produkt, $A \wedge B$ das **Äußere grade-4-Produkt**, das es in 4 oder mehr Dimensionen gibt, und $\mathbb{A} \times B$ ist das **Bi-Vektor-wertige Kommutator-Produkt** gemäß $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA})$. Der Raum der Bivektoren $\Lambda^2 \mathbb{R}^n$ ist eine **Lie-Algebra** über $\mathbb{R}$ mit dem **Kommutator-Produkt** als **Lie-Klammer**. Nicht assoziativ! **Nicht-kommutative, aber assoziative Strukturen werden durch das Lie-Produkt oder den Klammerausdruck nicht-assoziativ.** Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ bildet eine Lie-Algebra, wenn man die Lie-Klammer als das Kreuzprodukt definiert. Siehe Seite 355. The full geometric product of bivectors generates the even subalgebra. Of particular interest is the product of a bivector with itself. As the commutator product is antisymmetric the product simplifies to $\mathbf{AA} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{A}$. If the bivector is simple the last term is zero and the product is the scalar valued A · A, which can be used as a check for simplicity. In particular the exterior product of bivectors only exists in four or more dimensions, so all bivectors in two and three dimensions are simple. **Lounesto: Clifford algebras and spinors** 2001; Čorson: Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations 1955; Riesz: Clifford numbers and spinors 1993; Vectors and linear spaces p1 Complex numbers p18 Bivectors and the exterior algebra p33 Pauli spin matrices and spinors p50 Quaternions p67 The fourth dimension p80 The cross product p92 Electromagnetism p100 Lorentz transformations p118 The Dirac equation p135 Fierz identities and boomerangs p152 Flags, poles and dipoles p162 Tilt to the opposite metric p174 Definitions of the Clifford algebra p188 Witt rings and Brauer groups p195 Matrix representations and periodicity of 8 p205 Spin groups and spinor spaces p219 Scalar products of spinors and the chessboard p231 Mobius transformations and Vahlen matrices p244 Hypercomplex analysis p255 Binary index sets and Walsh functions p279 Chevalley's construction and characteristic 2 p288 Octonions and triality p300 A history of Clifford algebras; Doran & Lasenby: Geometric Algebra

for Physicists 2003, §1.6 The outer product; Perwass: Geometric Algebra with Applications in Engineering 2008; Corrochano & Scheuermann: Geometric Algebra Computing: in Engineering and Computer Science 2010; Dorst, Fontijne & Mann: Geometric Algebra for Computer Science. An Object-Oriented Approach to Geometry 2009[2]; **Hildenbrand: Foundations of Geometric Algebra Computing** 2013 ebook; **Hestenes: New foundations for classical mechanics. Fundamental theories of physics** 1999; Hestenes & Sobczyk: Chap1 Geometric algebra. Clifford Algebra to Geometric Calculus. A Unified Language for Mathematics and Physics 1987[2] Euklidische Geometrie war erste physikalische Theorie. Descartes Konzept p7; Callahan: **Euclid or Einstein.** A Proof of the Parallel Theory and a Critique of Metageometry 1931; Janich: **Euklids Erbe. Ist der Raum dreidimensional?** 1989; **Grassmann-Algebra** = äußere Algebra eines Vektorraums V ist assoziative, schiefsymmetrisch-graduierte Algebra mit Einselement. z.B. Matrizen-Multiplikation. **Nicht-kommutative, aber assoziative Strukturen werden durch das Lie-Produkt oder den Klammerausdruck nicht-assoziativ.** Hong-Tao Zhang: A Simple Method of Calculating Commutators in Hamilton System with Mathematica Software arXiv:quant-ph/0204081v1;

Bei Fließbach: Mechanik p183 und Kallenrode: Rechenmethoden Kap8.6 p160f reduziert sich der Tensorbegriff auf die Feststellung, dass auch Matrizen als physikalische Größen, wie Trägheit, Polarisation, Spannung dienen können, deren Komponenten bei Drehung im Raum wie geometrische Objekte zu transformieren sind, damit die Gleichungen, in denen sie auftauchen, bei **Orthogonaltransformation** forminvariant sind. Das ist auch die einzig sinnvolle Physiker Sicht: Kovarianz = Bei aller beliebigkeit der lokalen Wahl der Basis oder deren Änderung (passive Transformation) bleiben doch der reale Ort des Punktes, Länge und Winkel der physikalische Objekte invariant! Siehe auch Veblen. Meyer: Allgemeine Formen- und Invariantentheorie. BdI Binäre Formen 1909; Der Tensorbegriff setzt aber tiefer an, bei Multilinearformen wie Determinanten, wo noch keine Metrik und Koordinatentrnsformation nötig sind. Siehe Boseck: Tensorräume = Tensorprodukt ermöglicht aus Vektorräumen die größten Räume zu generieren 1972; Tensor-Definition auch Sternberg: Lectures on Differental Geometry 1983[2]; Fließbach/Walliser p140: Tensoren in kartesischen Koordinaten. Bei Drehung des kartes KSs ändern sich die Komponenten eines Ortsvektor, obgleich er selbst unverändert bleibt $\vec{r} = x^i \hat{e}_i = x^{i`} \hat{e}_{i`} = \vec{r}`$ gemäß $x^{j`} = \alpha_i^{j'} x^i$ wegen orthogonaler Transformation $\alpha^T \alpha = \alpha_{j'}^i \alpha_i^{j'} = \underline{1}$. Beachte: **Riemann'scher Raum kennt keine Ortsvektoren**, daher x^a selbst nicht Komponente eines Vektors, **nur die Koordinaten-Differenziale = Formen** werden so transformiert. Stephani ART p34. Tensorfeld $T_{i_1,\ldots,i_N}(x)$ ist indizierte koordinatenabhängige Größe, die sich gemäß

$$T^{i'_1,\ldots,i'_N}(x') = \alpha_{j_1}^{i'_1} \ldots \alpha_{j_N}^{i'_N} T^{j_1 \ldots j_N}(x)$$

transformiert. Das Argument $x = (x^1, x^2, x^3)$ wird mittransformiert. $\phi'(x') = \phi(x)$ und $V^{j`}(x') = \alpha_j^{i'} V^j(x)$. Speziell bei Tensorfeldern gilt für die Differenzierbarkeit Riech p130; Fließbach: Elektrodynamik; Die Ableitung $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ verhält sich wie ein Vektor:

$$\partial_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i`}} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i`}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \alpha_{i'}^j \partial_j$$

Unsägliches Tensor-Kapitel in Margenau & Murphy I p207ff! Besser Budo: Theoretische Mechanik p572; Grøn, Øyvind, Næss, Arne: **Einstein's Theory. A rigorous introduction for the mathematically untrained**, 2011.

Skalarfelder über kartesischem Gebiet. **Contour-Plot:** **contour**(SternZahl, aspect='auto', extent=[0,3,-1,1]); Zeilen = 60; Spalten = 80; N = Zeilen*Spalten; x=arange(N)*0.01; x=x.reshape(Zeilen,Spalten); imshow(sin(x)); x=randn(Zeilen,Spalten);
y=sin(linspace(-5*pi,5*pi,Zeilen)); x=cos(linspace(-5*pi,4*pi,Spalten)); Feld=x*y.reshape(len(y),1); imshow(Feld)
Auch hexbin satt imshow `imshow(L,extent=[x[0],x[M-1],y[0],y[M-1]],origin='lower')` **imshow**(X, cmap=None, norm=None, aspect=None, interpolation=None, alpha=None, vmin=None, vmax=None, origin=None, extent=None, shape=None, filternorm=1, filterrad=4.0, imlim=None, resample=None, url=None, hold=None, **kwargs) Mit **aspect='auto',extent**=[0,180,73,0] wird die **Achsen-Skalierung erzwungen**. **Darstellung von Skalar-** $F(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ **und Vektorfeldern/Richtungsfeldern** $\vec{F}(\vec{r}) =$

$(x\,y, \sin(x)\ \sin(y)$ **:**
`imshow(sin(x)*transpose(sin(x)))` oder per reshape imshow(sin(x)*sin(x).reshape(len(x),1)) und `quiver(x*tra`
über dem Orts-Raum `x=linspace(-10,10,10000).reshape((100,100))` **Surface-Plot:** import numpy as np; from **mpl_toolkits.mplot3d** import Axes3D; import matplotlib.pyplot as plt; import random; from pylab import sqrt; def fun(x, y): return x**2 + y; fig = plt.figure(); ax = fig.add_subplot(111, projection='3d'); **Es genügt subplot(111, projection='3d')**; x = y = np.arange(0., 1.0, 0.05); X, Y = np.meshgrid(x, y); zs = np.array([fun(x,y) for x,y in zip(np.ravel(X), np.ravel(Y))]) Z = zs.reshape(X.shape); ax.plot_surface(X, Y, Z); ax.set_xlabel('X Label'); ax.set_ylabel('Y Label'); ax.set_zlabel('Z Label') oder kurz mit Phi = lambda x,y: x*y; ax.plot_surface(X,Y,Phi(X,Y)) **Trajektorien-Plot:** import numpy as np; import matplotlib.pyplot as plt; from numpy import linspace; from pylab import sin,cos,sqrt; from mpl_toolkits.**mplot3d** import Axes3D; def Bahn2(N, dt): x = []; y = []; z = [] for i in range(N): t = i*dt x.append(t*cos(t)); y.append(t*sin(t)); z.append(2*t) return x,y,z def Bahn1(N, dt): x = []; y = []; z = [] dt = 1./N for i in range(N): u = i*dt for j in range(N): v = j*dt x.append(1+u+v); y.append(1-u-v); z.append(1+sqrt(2.)*u) return x,y,z dt = 0.133; N = 100; x, y, z = Bahn1(N,dt); fig = plt.figure() ax = fig.add_subplot(111, projection='3d'); ax.plot(x, y, z,'.'); ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); ax.set_zlabel('z'); plt.show() **Vektor-Feld-Plot:** x=linspace(-10,10,100).reshape((10,10)); quiver(-x,x); quiver(x*x*transpose(x),x*transpose(x)*transpose(x))
Syntax: quiver(x,y,u,v, width=0.001, headwidth=10, headlength=10, angles = 'xy', scale_units='xy', scale=1) Anzahl = 6 x = arange(Anzahl); y = -arange(Anzahl) u = ones(Anzahl); v = ones(Anzahl) quiver(x,y,u,v); quiver(1,1,1,0); quiver([1],[1],[1],[0]), text(1.5,-1,'Vektoren'), text(mean(data),mean(data),'Name'), **suptitle**('Zustandsraumpfade', **fontsize**=20) Für sequenzielle Datentypen str, bytes, list und tuple geht **Ist Element vorhanden? if 5. in** arange(7): print 'YES' **A] parametrische Abtastung** per t=linspace(0,2*pi,10);
X=cos(t);Y=sin(t); quiver(X,Y,Y,-X); oder **B] kartische Abtastung** des Definitionsbereichs / der Ortsvektoren mittels meshgrid(x,y): x=linspace(-5,5,10); y=linspace(-2,2,10); g=meshgrid(x,y), das in g[0] alle x-Koordinaten und in g[1] alles y-Koordinaten enthält, also das **Tensor-Produkt** von $x-$ und y-Koordinaten als Matrix repräsentiert; quiver(g[0],g[1],g[1],-g[0]); Der **Gradient** von $f(\vec{x}) = xyz + \sin(xyz)$ in der Ebene z=1 ist $u(z=1) = y(1+\cos(xy)), v(z=1) = x(1+\cos(xy))$ also x=linspace(-5,5,20); y=linspace(-5,5,20); g=meshgrid(x,y); quiver(g[0],g[1], g[1]*(1. -cos(g[0]*g[1])), g[0]*(1. -cos(g[0]*g[1]))));

```
from pylab import *
# /usr/cnld/shw/TeX/introductions/Praktikum+Exercise/2013SS-MathMeth2/2-Uebung/El.py
#http://physics.stackexchange.com/questions/30744/confusion-about-finite-line-charge

a = 2.; b = 1.; A = sqrt(2.*a**2); B = sqrt(2.*b**2)
t = linspace(0,2*pi,200); x=cos(t)*A; y=sin(t)*B

def df(x,y):
 h = 0.2
 leng = len(x); dx=ones(leng)+h
 dfx = ((x+dx)**2-x**2)/A**2+y**2/B**2
 dfy = ((y+dx)**2-y**2)/B**2+x**2/A**2
 return dfx, dfy

figure(0)
phi =pi/6.
xs=x*cos(phi)-y*sin(phi)
ys=x*sin(phi)+y*cos(phi)
plot(x,y)
plot(xs,ys,'.')
```

```
figure(1)
plot(x,y)
quiver(x,y,x/a/a,y)
plot(xs,ys,'.')
[xvs,yvs] = df(x,y)
xv=xvs*cos(phi)-yvs*sin(phi)
yv=xvs*sin(phi)+yvs*cos(phi)
quiver(xs,ys,xv,yv) show()
```

Tutorial: http://www. sagemath. org SageTutorial.pdf Vektorfeld per GeoGebra

```
Tangent fields mit Mathmatica

Clear[Global`*"]
<<Graphics`PlotField`
p1=PlotVectorField[{1,Exp[-x]-2 y},{x,-2,2},{y,-2,2}]

sol=DSolve[y'[x]+2y[x]==Exp[-x],y[x],x]
sol[[1,1,2]]
table=Table[sol[[1,1,2]]/.C[1]->a,{a,-1,1,0.5}]
p2=Plot[Evaluate[table],{x,-1,1}]
Show[p1,p2]

r=Sqrt[x^2+y^2]
(* richtung={r(1-r)(2-r)(3-r),-1} *)
(* richtung={y,3 x^2 -1}
p1=PlotVectorField[richtung,{x,-1,1},{y,-1,1}] *)
richtung={y,-x-y (y^2 / 3 -1)}
richtung={- x+2 y,2 x- y}
richtung={-2 x+y,x-2 y}
p1=PlotVectorField[richtung,{x,-1,1},{y,-1,1}]
(* p1=PlotVectorField[{1,Exp[-x]-2 y},{x,-2,2},{y,-2,2}] *)

(* sol=DSolve[y'[x]+2y[x]==Exp[-x],y[x],x]
sol[[1,1,2]]
table=Table[sol[[1,1,2]]/.C[1]->a,{a,-1,1,0.5}]
p2=Plot[Evaluate[table],{x,-1,1}]
Show[p1,p2]
*)

Clear[Global`*"]
« Graphics'
```

$\dot{x} = y, \dot{y} = -\omega^2 \sin x$.

```
The rhs are entered as components of a list and given the name simpend:
simpend ={y, -ω^2 Sin[x]};

gr1=PlotVectorField[simpend,{x,-7,7},{y,-3,3}, PlotPoints->15, Frame->True,
FrameTicks->{{-2 Pi,- Pi, 0,{1.5,¨x¨},Pi,2 Pi},{-3,0,{1.5,¨y¨},3}, {},{}},
ScaleFunction->(1&), ScaleFactor->0.5,HeadLength->0.01,
DisplayFunction->Identity];

Show[gr1,PlotRange->{{-7.5,7.5},{-3.3,3.3}},
Epilog->PointSize[.03],{RGBColor[0,1,0],Point[{-2 Pi,0}],
```

```
Point[{0,0}],Point[{2 Pi,0}],{RGBColor[1,0,0],Point[{-Pi,0}],
Point[{Pi,0}]}},DisplayFunction->$DisplayFunction,
TextStyle->{FontFamily->"Times",FontSize->16},
ImageSize->{600,300}];
```

Stokes: Die geschlossene Randkurve auch eine gewölbten Fläche merkt nichts vom Zerschneiden der Fläche. Die Beiträge der neuen, wegen der Orientiertheit der Flächen, gegenläufigen Randkurven kompensieren sich. Die Fläche darf also bei festem Rand ungestraft abgeändert werden, ohne dass die rechte Seite was bemerkt. Feynman II Kap3. Schulz: Physik mit dem Bleistift Kap9 p187: **Stokes'scher & Gauß'scher Satz** sind Verallgemeinerungen der für reelle Funktionen bekannten Tatsache, dass das Integral über der Ableitung von etwas genau dieses etwas am Rand ist $\int_a^b \mathrm{d}x\partial_x F(x) = F(b) - F(a)$, was auch bei der Auswertung von Gebiets-Integralen alternative Berechnungswege liefert:

$$F(x)|_a^b = \int_a^b dx\, F'(x), \int_{\partial M} \omega = \int_M d \wedge \omega, \quad \int_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_S d\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\, \vec{F}, \quad \int_V dV\, \mathrm{div}\vec{F} = \int_{\partial V} d\vec{A} \cdot \vec{F}$$

gilt nur, wenn das Gebiet F keine Definitionslücke hat! **Gauß'scher Integralsatz = Satz von Gauß = Divergence theorem = Gauß integral theorem: Valentiner: Vektoranalysis** 1943 p54f; Cunningham: Vektoren 1972 p178f, p189; **Houston: Principles of mathematical physics 1934 p236ff;** Margenau & Murphy: Die Mathematik für Physik und Chemie Bd1 1960 p204f; Hay: Vector and tensor analysis 1953 p142f Green's theorem in space; Kreyszig: Advanced engineering math 1993 p544ff; Fano & Adler: Electromagnetic fields, energy, and forces 1960 p60ff; Smirnow: Höhere Mathematik Bd2 1960 p288f; Weatherburn: Advanced vector analysis 1937 p20ff; Wunsch: Feldtheorie Bd1 1973 p72f; Bourne & Kendall: Vektoranalysis 1967 p160ff; Lagally & Franz: Vektorrechnung 1956 p146ff; Großmann: Mat Einführungskurs für die Physik 2004 p250ff; Phillips: Vector analysis 1933 p67f; Hague; An introduction to vector analysis 1951 p59; Gibbs, Wilson: Vector analysis 1925; McConnell: Applications of the absolut differential calculus 1931; Thomas: The elementary theory of tensors with applications to geometry and mechanics 1931; Kron: Short course in tensor analysis for electric engineers = Tensors for circuits 1942; Schlegelmilch: Die Differentialoperationen der Vektoranalysis 1955; Spain: Tensor calculus 1953; Craig: Vector and tensor analysis 1943; Lass: Vector and tensor analysis 1950; Lass: Elements of Pure and Applied Mathematics 1957; **Joos & Kaluza: Höh Math 1964 p246f, 1994 p262;** Wills: Vector analysis with an introduction to tensor analysis p96f; Fleisch: A Student's guide to vectors and tensors. With 50 exercises 2011; F̃leisch: Vectors and tensors 2013; Piskunow Diff- und Integralrechnung Bd4 T3 1964 p26f; Beispiel **Stokes'scher Satz:** a] Scherströmung $\vec{v}(\vec{r}) = x\hat{y}$ mit $\vec{r}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Geschlossenes Kurven/Linienintegral für Quadrat mit Kantenlänge k gibt $\oint_\gamma \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \int_{\partial\square(k)} < (0,x),(\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y) >= \int_{\partial\square(k)} x\mathrm{d}y = \int_{\partial\square(k)} \omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\square(k)} \mathrm{d}\wedge\omega = \int_{\square(k)} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = k^2$ wegen $\mathrm{d}\wedge x = \partial_x x\mathrm{d}x + \partial_y x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ b] Sei Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ des Wirbels. Kurvenintegral $\oint_{K(R)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v}$ längs des Randes eines konzentrischen Kreises mit dem Radius R ist $\oint_{K(R)} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{v} = \int_{\partial K(R)} < (-y,x),(\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y) >= \int_{\partial K(R)} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial K(R)} \mathrm{d}\wedge(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) = 2\int_{\partial K(R)} \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 2\pi R^2$. **Schlüssel Green'sche Formel ist obige für parzielle Integration** siehe Seite 138. Verallgemeinerte Ausdrücke siehe **Lagally & Franz: Vorlesungen über Vektorrechnung** 1928, 1956[5], 1964[7] Durch die Hinwegnahme der **Definitionslücke** wird die Menge des Definitionsbereichs **kompaktifiziert** und die obigen Sätze gelten. Das **Gauß'sche Gesetz** basiert auf der **Idee eines Flusses durch eine beliebige geschlossene Fläche** A also $\Phi_A(\vec{x}) = \int_A \vec{E}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{a} = Q_{eingeschlossen/innen}$ und ist somit zunächst unabhängig von der Maxwell'schen Gleichung $\mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{x}) = \dfrac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$, die die Existenz einer Ableitung voraussetzt, was gerade an Punktladungen scheitert. Es geht also um Anzahl von Feldlinien pro Fläche auf der Fläche A bei $\vec{x}$ und gestattet die Berechnung von $\vec{E}(\vec{x})$ für $\vec{x} \in A$, also nur auf der betrachteten Fläche A! Nur der Fluss durch die Fläche ist dabei wichtig. Wie $\vec{E}(\vec{x})$ an anderen Stellen des Raumes aussieht ist egal. Griffiths p108f; Das differenzielle **Gauß'sche Gesetz** = 1. Maxwell-Gleichung = inhomogene Feldgleichung (Fließbach p48) $\mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{x}) = \dfrac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0}$ wird mit dem **Gauß'schen Satz** zum integralen **Gauß'schen Gesetz** $\int_{\partial V} \vec{E}(\vec{x}) \cdot \mathrm{d}\vec{a} = \int_V \mathrm{div}\, \vec{E}(\vec{x})\mathrm{d}V = \dfrac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\vec{x})\mathrm{d}V = \dfrac{q}{\epsilon_0}$, wenn $\vec{E}(\vec{x})$

überall im Gebiet V endlich ist. Anderenfalls hat die Menge Löcher bei den neuralgischen Punkten: Der Gesamtfluss aus einer geschlossenen Fläche ist gleich der Netto-Ladung innerhalb dieser Fläche $\int_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = Q_{eingeschlossen/innen}$, **aber nur**, wenn das **Coulomb-Gesetz gilt**! Gegenbeispiel dazu siehe Seite 336. Bei Zentralsymmetrie und homogener Ladungsverteilung gilt

$$\int_{\partial V(R)} \vec{E}(r) \cdot \mathrm{d}\vec{a}(r) = E_r(R) 4\pi R^2 = \frac{Q_V(R)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{V(R)} \mathrm{d}V(r)\rho(r) = \frac{4\pi\rho}{3\epsilon_0} R^3, \quad E_r(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r, \quad r \geq 0$$

Exzentrische Punktladung: Gegeben sei eine Punktladung q innerhalb eines kugelförmigen Gebiets $g \subset \mathbb{R}^3$. Die Punktladung liege exzentrisch. Berechnen Sie $\oint_{\partial G} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{E}$ mit $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')^o}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$. Also $\oint_{\partial G} \mathrm{d}\vec{a'} \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial G} \mathrm{d}\vec{a'} \cdot \frac{(\vec{r}' - \vec{r})^o}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\partial G} \mathrm{d}\Omega(\vec{r}') = \frac{q}{\epsilon_0}$ mit Raumwinkel $\Omega(\vec{r}')$. **Spiegel: Vectoranalysis and introduction to tensor analysis**, Schaum 1959 **Skizze zum Raumwinkel = solid angle = Einheit Steradiant/sterad** p124 Schicke Raumwinkelskizze; Raumwinkel im $\mathbb{R}^d$ ist $\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} = \Omega_d = \begin{cases} \frac{1}{\left(\frac{d}{2}-1\right)!} 2\pi^{\frac{d}{2}} & d \text{ even} \\ \frac{\left(\frac{1}{2}(d-1)\right)!}{(d-1)!} 2^d \pi^{\frac{1}{2}(d-1)} & d \text{ odd} \end{cases}$ Bei Coulomb-Gesetz oder Punktladung hat man für Gauß'schen Satz ein Gebietsloch und kommt ohne δ-Funktion nicht weiter! Ausweg ist die Anwendung des Gauß'schen Gestzes mittels der Idee des Raumwinkels. **Punktladung innerhalb eines konvexen Gebiets:** Gegeben sei eine Punktladung q innerhalb eines konvexen Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
Berechnen Sie $\oint_{\partial\Omega} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{E}$. Zeigen Sie $\Delta(1/r) = 0$ für r ungleich 0 koordinatenfrei, nur mit der Definition von Divergenz und Gradient! $\operatorname{grad} 1/r = \hat{r} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\frac{1}{r+\epsilon} - \frac{1}{r-\epsilon}}{2\epsilon} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$ Definition von Divergenz gibt $\operatorname{div}\left(-\frac{\vec{r}}{r^3}\right) = -\lim_{\Delta V(\vec{r}) \to 0} \frac{1}{\Delta V(\vec{r})} \int_{\partial\Delta V(\vec{r})} \frac{\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{a}}{r^3} = -\lim_{\Delta V(\vec{r}) \to 0} \frac{1}{\Delta V(\vec{r})} \int_{\partial\Delta} \mathrm{d}\Omega = 0$ stets, unhängig von Lage des betrachteten Gebiets $V(\vec{r})$. Gegebenenfalls muss der Nullpunkt beachtet werden. Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics 1993[7] p682f; Günter: Die Potentialtheorie 1957 p36ff; Grimsehl: Angewandte Potentialtheorie in elementarer Behandlung Bd1 1909; Schwarz: Einführung in die Methoden der Potentialtheorie Schaefer: Einführung in die theoretische Physik III.T1 1950 p17f Kraftfluss durch alle geschlossenen Flächen. Wenn es z.B. eine **Yukawa-Potenzial-artige Feld-Absorption** gibt, so gilt kann man Ladung nicht einfach in eine Feldstärke umrechnen. Siehe auch Bourne & Kendall: Vektoranalysis p200; Purcell: **Berkeley Physik Kurs Bd2, Elektrizität und Magnetismus** 2001[4]; Stöhr & Siegmann: Magnetism 2006; van Vleck: The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities 1932; **Edminster: Electromagnetics**, Schaum 1979, 1995[2], p34; Piskunow: Differential- und Integralrechnung Teil3 1970 p34ff mit Aufgaben zu Oberfächenintegralen. Berechne **Oberflächenintegrale** $\int_{\partial M} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{E}(\vec{x})$ auf dem Rand ∂M der durch den Körper einbeschriebenen Punktmenge M: a] $\vec{E}(\vec{x}) = (x + y^2 + z^2, x/z, 2z - y/x)$ und $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ macht 32π. b] $\vec{E}(\vec{x}) = (-y, x, z^2)$ und $M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1\}$ macht 1. c] $\int_{\partial M} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \hat{z}$ für die Nordhalbkugel. $\int \mathrm{d}V \operatorname{div} 1 = 0$, also $\int_{Nordsphärenfläche} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \hat{z} + \int_{Äquatorfläche} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \hat{z} = 0$ gibt πR^2. d] $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(r) = r \ln r \hat{r} = v_r \hat{r}$, also $\vec{v}(r = 1) = \vec{0}$ und $\operatorname{div} \vec{v}(r = 1) = 1$ wegen $\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \operatorname{div} \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \operatorname{div} v_r(r) \hat{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 v_r}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^3 \ln r}{\partial r} = \frac{1}{r^2} [3r^2 \ln r + \frac{r^3}{r}] = 1 + 3 \ln r$ mit $r > 0$, riesiger Sog beim Nullpunkt und dort selbst nicht definiert! Quell/senkenfrei bei $r_0 = e^{-1/3}$, hingegen **feldfrei** bei $r = 1$ und $r = 0$ wegen l'Hospital $\lim_{r \to 0} r \ln r = \lim_{r \to 0} \frac{\ln r}{1/r} = \lim_{r \to 0} -r = 0$. Gesucht Fluss durch Oberfläche einer Kugel mit Radius R. Wegen $\mathrm{d}V(r) = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$ und $\mathrm{d}\vec{A} = \hat{r} \mathrm{d}A$ gilt $\int_{\partial V(R)} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{v} = \int_{\partial V(R)} r \ln r \mathrm{d}A = R \ln R \int_{\partial V(R)} \mathrm{d}A = 4\pi R^3 \ln R = \int_{V(R)} \mathrm{d}V \operatorname{div} \vec{v} = \int_{V(R)} (1 + 3 \ln r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r = 4\pi \int_0^R (r^2 + 3r^2 \ln r) \mathrm{d}r = 4\pi \int_0^R \frac{\mathrm{d}(r^3 \ln r)}{\mathrm{d}r} \mathrm{d}r = 4\pi r^3 \ln r|_0^R = 4\pi R^3 \ln R$. Letzteres Integral an unterer Grenze

braucht $0^3 \ln 0$. Mit l'Hospital gilt $\lim_{r\to 0} r^3 \ln r = \lim_{r\to 0} \frac{\ln r}{r^{-3}} = \lim_{r\to 0} -\frac{r}{3} = 0$. e] Oberflächenintegral für Vektorfeld $\vec{v}(\vec{r}) = (yz, -xz, xy)$ Kugel mit R leicht mit $\int_{\partial V(R)} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{v} = \int_{V(R)} \mathrm{d}V \mathrm{div}\, \vec{v} = 0 \int_{V(R)} \mathrm{d}V = 0$ wegen $\mathrm{div}\, \vec{v}_r(r) = 0$. Anderenfalls explizit per Oberflächenintegral siehe Seite 546. f] Das **Newton'sche Gravitations-Gesetz** für eine Punktmasse, also außerhalb des Ursprungs $r > 0$, wird seit Laplace wegen $\vec{g} = -\nabla\varphi$, $\varphi = -\frac{\gamma M}{r}$ und $\mathrm{div} \cdot \vec{g} = 0$ für das Außenfeld durch die **Laplace-Gleichung** notiert $\Delta\varphi = 0$, weil Funktionen $\varphi(\vec{x})$ eleganter als Vektorfelder $\vec{F}(\vec{x})$ sind. Der Apparat der PDEs und der Green'schen Funktionen ist eleganter. von Laue: Geschichte der Physik 1958 p36f. **Russo & Denninger: Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens** 1996, 2005; Die Ausdünnung der Kraft nach dem Lambert'schen Gesetz war schon in der hellenistischen Zeit, also 300 v.Ch. bekannt. Für die Gravitationbeschleunigung einer **zentralsymmetrisch homogen verteilte Masse** oder kurz Kugel mit Radius R notiert man wegen $M(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0 \Theta(R-r)$ und $\vec{g}(r) = -\gamma \frac{M(r)}{r^3}\vec{r}$, wobei $\Theta(x)$ Heaviside-Funktion, kurz für $r < R$, also Kugelinnenraum $\vec{g}(r) = -\gamma \frac{4\pi}{3} \vec{r} \rho_0 \Theta(R-r)$ oder analog eine **Poisson-Gleichung** $\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho_0$ und hat bei $r = 0$ kein Problem. Siehe Seite 333 zum Feld in einer Höhle. Denn $\mathrm{div}\, \rho_0 \vec{r} = 3\rho_0$. Auch für beliebige konzentrische Massenverteilung $\rho(r)$ gilt $\Delta\varphi = 4\pi\gamma\rho$ wegen $\int_{V(R)} \mathrm{div}\, \vec{g}(r') \mathrm{d}V' = -\gamma \int_{\partial V(R)} \frac{M(R)\hat{r}}{R^2} \cdot \mathrm{d}A\hat{r} = -\gamma M(R) 4\pi = -4\pi\gamma \int_{V(R)} \rho(r') \mathrm{d}V'$ für beliebige R: Also $\mathrm{div}\, \vec{g}(r) = \mathrm{div} \cdot (-\mathrm{grad}\, \varphi) = -\Delta\varphi = -4\pi\gamma\rho(r)$. Zur Lösung dieser Gl kommt die **Methode der Green-Funktion** ins Spiel. **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** BdI.1 1914, 1950[5] p635ff Beispiel **Punktladung vor Metallkugel**, Wallisers Arbeitsbuch p185 und Fließbach: Edyn Kap8; **Einfluss-Funktion:** Beim Lösen von Dgls. **Stoß mit Dauer Null wird als Standard-Einfluss** betrachtet. Jänich: Analysis für Physiker 2004[4] p252-269; Kuypers: Mechanik Kap2.5; Geiger & Scheel: HdP Bd3 Thirring, Duschek, Lense, Mader, Radakovic, Zernicke: Mathematische Methoden 1926; Flügge: HdP Bd1 Mathematische Methoden 1955 p297; Flügge: HdP Bd2 Mathematische Methoden 1956; $\Delta G(r, r') = \delta(r - r')$ gibt für die Poisson-Gleichung $\Delta\varphi = \rho$ die Green-Funktion $G(r, r') = -\frac{1}{4\pi|r - r'|}$. Damit löst $\varphi = \int G(r, r')\rho(r')\mathrm{d}r'$ die Poisson-Gleichung. Für die Punktmasse beim Ursprung $\rho(r) = M\delta(r)$ löst $\varphi(r) = \int \frac{4\pi\gamma\rho(r')}{-4\pi|r - r'|}\mathrm{d}r' = -\gamma \int \frac{\rho(r')}{|r - r'|}\mathrm{d}r' = -\frac{\gamma M}{r}$. Die **Poissson-Gleichung oder die Krümmung** ist, siehe auch Seite 548, $\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(r)$. **Man hat also auch eine Ableitung an der Stelle** $r = 0$. $\mathrm{div}\, \vec{g} = -4\pi\gamma\varrho$ gibt für die Schwerebeschleunigung im Erdinnern, also $r < R$: $4\pi r^2 g = \int_{\partial M} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{g} = \int_{Oberfläche\ der\ Erdinnenkugel} \mathrm{d}V \mathrm{div}\, \vec{g} = -4\pi\gamma\varrho \frac{4}{3}\pi r^3$. Für $r > R$ folgt $g = -\frac{\gamma M}{R^2}$, weil keine Masse mehr dazu kommt. Wouters, Bonin, Chambers, Riva, Sasgen and Wahr: GRACE, time-varying gravity, Earth system dynamics and climate change, Reports on Progress 77 2014, 116801; **Phänomenologischer Ansatz für Dunkle Materie:** Gravitations-Gesetz mit a als anziehender **Rindler-Kraft** $\varphi = -\frac{\gamma M}{r} + ar$ gibt $\vec{g} = -\nabla\varphi = -\frac{\gamma M}{r^2} + a$. Erklärt die großen Rotationsgeschwindigkeiten weit weg vom galaktischen Zentrum und die **Pioneer-Anomalie**. Grumiller & Preis: Rindler force at large distances IntJModPhysD20 (2011) 2761-2766 oder arXiv:1107.2373 [astro-ph.CO]; Suchan: **stabilitas mundi - Gravitationsparadoxa in der Newton'schen Kosmologie** PdNPiS Bd53 2004 2, p2-14; Suchan: Die Stabilität der Welt. Eine Wissenschaftsphilosophie der Kosmologischen Konstante 1999; **Auswege aus Divergenz:** a] Kosmos nichteuklidisch als 3D-Sphäre im 4D. Kosmos hat damit keinen Rand, ist aber räumlich unbegrenzt und muss dennoch keine unendliche Masse haben. b] Dichte nicht homogen. c] Kraftgesetz gemäß Seeliger = Yukawa oder analog Potenzial nach Neumann, rotierender Kosmos hebt divergierende Anziehung auf. d] abstoßende Massen analog zur Elektrostatik **Poisson-Gleichung** (Fisch) $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ im Spiel. e] es gibt trägheitsfreie Materie, also Galilei fraglich: $m_{träge} \neq m_{schwer}$! - Trägheit als Ergebnis kosmischer Gravitation, **Treder: Elementare Kosmologie** 1975; Kaufmann: Relativity and Cosmology 1973; Dominguez-Tenreiro & Quiros: Introduction to Cosmology and Particle Physics 1981; **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990; Will: Theory and experiment in gravitational physics 1993; Poisson & Will: Gravity. Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic 2014; Kolata: Elementary Cosmology. From Ari-

stotle's Universe to the Big Bang and Beyond 2015; **Schmutzer: Relativistische Physik** 1968 p904ff; Lotze, Sauer: **Kosmologische Modelle** PdNPiS Bd51 2002 H3 p2-30; Thirring: Gravitation, Schicksal der Sterne PiuZ1 1979 17-20; **Thirring: Die Universalität der Gravitation** PiuZ1 1970 p77-79; **Gravitation** = Körper krümmen den Raum, dem Probekörper in freiem Fall folgen, geraden Linien, Geodäten. **Kundt & Reinhardt: Unser Wissen vom Ursprung der Welt** PiuZ2 1971 24-28; Barrow: Der Ursprung des Universums. Wie Raum, Zeit und Materie entstanden 1994; Abdelwahab Meddeb: Der Ursprung der Welt, Lettre International 89 Sommer 2010 28-31; Barrow & Silk: Die linke Hand der Schöpfung. Der Ursprung des Universums 1983, 1999; Barrow: Die Natur der Natur. Wissen an den Grenzen von Raum und Zeit 1988, 1995; **Sexl: Die experimentelle Prüfung der allgemeinen Relativitätstheorie**. PiuZ1 1970 p43, **Sexl: Kosmologie** PiuZ3 1972 p156-160; **Harrison: Kosmologie. Die Wissenschaft vom Universum** 1984 Cosmology, the science of the universe 2000; Treichel: Teilchenphysik und Kosmologie. Eine Einführung in Grundlagen und Zusammenhänge 2000; Liddle: Einführung in die moderne Kosmologie 2008; Guth & Steinhardt: The inflationary Universe SciAm Mai 1984 p90-102 = SdW H7 1984 p13, 80-94, p134; Barrow & Silk: Die Struktur des Universums, SdW H6 1980 p78-89; **Appenzeller ed: Kosmologie** Sammlung SciAm SdW 1984, 1988 Bok: Milchsraße, Karamanolis: So entstand das Universum. Der Urknall und seine Folgen 1990 Geballe: Zentrum der Milchstraße, Hodge: Andromeda, Strom: Scheibenentwicklung, Rubin: Dunkle Materie, Meier & Sunyaev: Galaxie im Frühzustand, Quasare, Galaxienhaufen, Superhaufen, Röntgenhintergrund, Raum und Zeit, Materie und Antimaterie. Allday: Quarks, leptons and the big bang 1997, 2001; **Appenzeller ed: Kosmologie und Elementarteilchen** 1990 Sammlung SciAm SdW der 80er Jahre: Großräumige Strukturen im Universum, Dunkle Materie, doppelter β-Zerfall, Quark-Letonen-Familien, kosmologische Konstante, Higgs-Boson, Protonenzerfall, Inflation, **Schmutzer: Intro in 5. Dimension** 5th dimension Aquarius 1967/69, massives Skalarfeld **Scalon** macht dunkle Energie. **Pioneer-Anomalie** = Beschleunigung der Sonde zur Sonne hin (also ihre Abbremsung) um ca 10^{-9} m/s^2 = Diskrepanz von etwa 0,4 m/s in der Geschwindigkeit und von etwa 100.000 Kilometern in der Entfernung, 1972 und 1973 baugleiche Pioneer 10 und 11 **durch thermische Abstrahlung** und **Fly-by-Anomalie** = kleine zusätzliche Geschwindigkeitszunahme, verborgene Dimensionen, SUSY, Superstrings, kosmische Strings. Pagels: The cosmic code. Quantum physics as the language of the universe 1984; Pagels: Die Zeit vor der Zeit. Das Universum bis zum Urknall 1990; Pagels: Perfect Symmetry. The Search for the Beginning of Time 1992; Pfister: **Lange nach Newton** PhysJ15 H3 2016 p47-51; Treder: Relativität der Trägheit; Das einzige von **Einstein**: **Über die spezielle und die allgemeine RT** 1916 = [unbedingt lesen, weil begrifflich klar, aber nicht elegant - ohne Kalkül. Nach Boltzmann trägt die Eleganz der Schneider und Schuster zur Verschleierung bei] zitierte Buch ist Laue: Erkenntnistheorie und Relativitätstheorie, PhysBl17 1961 p153f Kant **von Laue: Spezielle Relativitätstheorie 1911, Allgemeine RT 1921**; Vergleichbar ist **Tolman: Relativity, thermodynamics and cosmology** 1934; **Bergmann: Introduction to the Theory of Relativity** 1942, 1976 hierin Weyls zunächst erfolglose **Eichfeld-Idee** und Kaluzas **5-dimensionale Feldtheorie**; Flint: Quantum Equation and the Theory of Fields 1966 Kap3 Kaluza-Klein-Theorie; Rumer: Über eine Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie, NachrAkadWiss Gött1929 p92–99 Einstein, Eddington und Weyl versuchten die Vereinigung von Gravitation und EDyn durch Modifikation der 4d-Metrik, während Kaluza ins 5-dimesionale auswich. **Rumer deutet, Weyl folgend, Torsion als em Feld. ECE-Theorie** Einstein-Cartan-Evans, Horst Eckert & Laurence Felker 2005. Evans: Principles of ECE Theory. A new paradigm of physics 2016; Myron Evans: Generally covariant unified field theories 2005; RT als Analogon zur Flächentheorie. Gibt 6d pseudo-euklidischen Raum mit 2d-Zeit, wo elektrische Felder auftreten. **Zeit ist stets die Länge der Weltlinie.** Rumer: Zur allgemeinen Relativitätstheorie, NachrAkadWiss Gött1931 p148–165; Einstein & Born: Briefwechsel 1916-1955 p142ff **Appelquist, Freund, Chodos: Modern Kaluza Klein Theories** 1987; Moller: The theory of relativity 1952; Moller: Relativitätstheorie 1976; **Jordan: Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie** 1952, 1955^2; Alfred Wegeners Kontinentaldrift galt zeitweilig als Hinweis auf Raumdehnung und variable Gravitationskonstante. Jordan:

Dirac-Hypothese und Erdexpansion PhysBl22 1966 p443; Jordan: Die Expansion der Erde. Folgerungen aus der Diracschen Gravitationshypothese 1966; Jordan: Die Theorie der Erdexpansion PhysBl31 1975 p487-495; Angenheister: Erdexpansion und Kontinaldrift PhysBl31 1975 p496-501; Brecht: Furcht und Elend im III. Reich. **Physiker** Stücke Bd1 p546; **Schücking: Jordan, Pauli, Politics, Brecht, and a Variable Gravitational Constant**, PhysicsToday52 H10 p26 1999 Born verschlampt Jordans Paper, wo er vor Fermi und Dirac die Quantenstatistik erfand. Pauli bekam die erste Ausgabe von Schwerkraft und Weltall mit leeren Seiten; Michael Springer zum Tode von Walter Thirring in SdW Okt 2014 p22 Las als Schüler Jordan: Hyroglyphensequenz a la Landau/Lifschitz garniert mit normalen Sätzen, deren Inhalt weniger erklärt als verhöhnt. Dies motiviert zum Studium der Rechenkunst und theoret Physik. **Born, Ehlers, Pössel: Die Relativitätstheorie Einsteins** 1920, 1969, 2000; elementar und tief mit vielen Literaturtipps; **Einstein: Über die spezielle und die allgemeine RT** 1916 hier sind die Grundideen gemeinverständlich und lesbar zu finden; **Einstein: Grundzüge der RT** 1922; Alle späteren Werke setzen deren Kenntnis voraus. **Rindler: Essential Relativity: Special, General, and Cosmological** 1969, 1977 pV Hinweis auf Riemann, Courant und Jordan: **Beweis durch Verstehen statt Rechnung erbringen!**; Rindler: Relativity - Special, General, and Cosmological 2006[2]; Rindler: Relativitätstheorie: Speziell, Allgemein und Kosmologisch 2016; **Eddington, Arthur Stanley, Sir [1882-1944] Raum, Zeit und Schwere - Eine Umriss der allgemeinen Relativitätstheorie** 1923; **Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität** 1964; Eddington: The mathematical theory of relativity 1963; Fokker: Time and Space Weight and Inertia 1966; Fock 1898-1974: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation 1955, 1960 mit Ungenauigkeiten gemäß Born, aber auch mit Klarheit gemäß Pirani PhysBl 16.1960 p540f; Erst **Bishop & Goldberg: Tensor Analysis on Manifolds** 1980 oder besser noch **O'Neill: Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity** 1983 e-book; unterhaltsames Sachbuch **O'Shea: Poincares Vermutung** 2007 p104; Rauchhaupt: **Was kein Loch hat, ist eine Kugel!** = Frage nach Gestalt der Erde, Scheibe oder Kugel ist topologische Frage. Poincare: Unter den geschlossenen 3D-Mannigfaltigkeiten ist die 3D-Entsprechung der Kugeloberfläche was ganz Besonderes, weil sich nur auf ihr jede geschlossene Linie zusammenziehen lässt. Dieses Objekt hat als einziges der 3D-Mannigfaltigkeiten keine Eigenschaften, die das Zusammenziehen einer beliebigen geschlossenen 3D-Linie, also einer 2D-Fläche zu einem Punkt verhindern könnten. Thurston: Jede noch so komplizierte 3d-Mannigfaltigkeit lässt sich auf Kombinationen aus Bausteinen aus acht verschiedenen Grundtypen zurückführen. FASZ 20.4.2003; **Schnabel-Topologie. Jänich: Topologie** 1980, 1996[5]; **Blaschke & Leichtweiss: Elementare Differentialgeometrie** 1936 http://gdz.sub.uni-goettingen.de/ebook; **B̃erger: A Panoramic View of Riemannian Geometry** 2003; oder als elementare **begriffliche Einführung** die von Jost und Weyl exzellent kommentierte Habilschrift: **Bernhard Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen** 1854, 2013; Lies PhysBl10 1954 296-313; Betrachte **mehrfach-ausgedehnte Größen** wie Töne, Farben, Anschauungsraum oder p, V, T in Thermodynamik! Im HiTOP-Modell = Hierarchical Taxonomy Of Psychopathology werden Symptome und Merkmale der untersten Ebene gemäß ihrem gemeinsamen Auftreten zu Dimensionen unterschiedlicher Breite und Abstraktion zusammengefasst. Die Ebene der Syndrome entspricht in etwa den kategorialen Diagnosen nach ICD. Riemann: Wie Maxwells Feldtheorie = Nahwirkungstheorie die Fernwirkungstheorie = Coulomb-Gesetz ersetzt, so müssen Euklids oder Lobatschewskies Fernwirkungsgeormetrien durch Nahwirkungsgeometrie ersetzt werden! **Biografie** von Laugwitz: Bernhard Riemann 1826-1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik 1996; **von Helmholtz: Über die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen.** In: Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Bd9, Diertichsche Buchhandlung, Göttingen 1868 p193-221; Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. In: Verhandlungen des Naturhistorisch-Medizinischen Vereins zu Heidelberg. Bd4 Heidelberg 1868 p197-202; alles im Netz! Schröder: Vorlesungen über Geometrie. BdI Möbiussche, elliptische und hyperbolische Ebenen, BdII Affine und projektive Geometrie, BdIII Metrische Geometrie 1991;

Naas & Schröder: Der Begriff des Raumes in der Geometrie - Bericht von der Riemann-Tagung des Forschungsinstituts für Mathematik 1957; **Mannigfaltigkeit** = topologischer (qualitative Beziehungen, also **ohne metrische Relationen!**) Begriff für das kontinuierliche Nebeneinander von Punkten, dass sich eineindeutig auf den kartesischen Raum beziehen lässt. Punkte der Erdoberfläche werden durch lokale Umgebungskarten abgebildet. Die **voneinander unabhängigen oder qualitativen Lagebeziehungen oder Qualitäten** können z.B. im Anschauungsraum [Länge, Breite, Höhe], bei Farben [R,G,B], Tönen [Intensität, Tonhöhe], Gasvolumen [Druck, Temperatur] sein. Eine **Maßstruktur wird nicht vorausgesetzt.** Koordinaten = Repräsentation eines Teil einer Mannigfaltigkeit durch ein Gebiet in einem kartesischen Raum per Konvention. Mit vielen Beispielen siehe **Rudolph & Schmidt: Differential Geometry and Mathematical Physics. PartI. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems** 2012; **Jost: Geometry and physics** 2009 e-book; Helgason: Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces 1978; Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups 1971; Jost: Riemannian Geometry and Geometric Analysis 2011[6] lesbar, e-book; Berry: Kosmologie und Gravitation. Eine Einführung 1974; 1990; **Hausdorff-Raum** = **separierter Raum** = topologischer Raum M, in dem das Trennungsaxiom T_2 (= Hausdorffeigenschaft oder Hausdorff'sches Trennungsaxiom) gilt. Ein topologischer Raum M hat die Hausdorffeigenschaft, wenn für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ disjunkte offene Umgebungen $U(x)$ und $V(y)$ existieren = **alle paarweise verschiedenen Punkte x und y aus M werden durch Umgebungen getrennt.** Ein topologischer Raum ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn er i] präregulär (R_1) ist = alle paarweise topologisch unterscheidbaren Punkte x und y aus M werden durch Umgebungen getrennt, und ii] die Kolmogoroff-Eigenschaft (T_0) besitzt = alle paarweise verschiedenen Punkte x und y aus M sind **topologisch unterscheidbar** = heißen zwei Punkte x und y genau dann, wenn es eine offene Menge gibt, die den einen Punkt enthält, den anderen aber nicht. **Kufner: Raum und Entfernung** 1981 Kap3; Meschkowski & Laugwitz: Meyers Handbuch über die Mathematik 1972[2] p755ff; Meschkowski: Mathematisches Begriffswörterbuch 1965[3]; Querenburg: Mengentheoretische Topologie 2013[3] p27ff Beispiele zu Teilraumtopologie = induzierten Topologie = relativen Topologie = Relativtopologie = Spurtopologie = Unterraumtopologie = spezielle Initialtopologie: X Grundmenge eines topologischen Raums $(X, \mathcal{T})$ und $Y \subseteq X$ Teilmenge. Dann ist die Teilraumtopologie auf Y die Topologie $\mathcal{T}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{T}\}$. Die offenen Teilmengen von Y sind also genau die Schnitte der offenen Teilmengen von X mit Y. **Eigenschaften:** a] Die Teilraumtopologie auf einer Teilmenge $Y \subseteq X$ eines topologischen Raumes X ist die schwächste Topologie, für die die Inklusionsabbildung $Y \to X, \quad y \mapsto y$ stetig ist. b] Ist Y eine offene Teilmenge eines topologischen Raumes X, so ist eine Teilmenge $U \subseteq Y$ genau dann offen in der Teilraumtopologie von Y, wenn U als Teilmenge von X offen ist. c] Ist Y eine abgeschlossene Teilmenge eines topologischen Raumes X, so ist eine Teilmenge $Z \subseteq Y$ genau dann abgeschlossen in der Teilraumtopologie von Y, wenn Z als Teilmenge von X abgeschlossen ist. d] Eine stetige Abbildung topologischer Räume ist genau dann ein Monomorphismus im Sinne der Kategorientheorie, wenn sie als Abbildung auf das mit der Teilraumtopologie versehene mengentheoretische Bild ein Homöomorphismus ist. Insbesondere sind Monomorphismen injektiv. **Beispiele:** b1] Man stelle sich ein Blatt Papier ohne Rand als zweidimensionales Objekt vor. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies **keine offene** Menge. Betrachtet man aber die **Topologie bezüglich der Ebene**, in der sich das Blatt befindet, so liegt eine offene Menge vor. Weil es keine Welt senkrecht zur Ebene gibt. b2] Die Teilraumtopologie auf $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist die **diskrete Topologie**, dh alle Teilmengen von $\mathbb{Z}$ sind offen als Teilmengen des topologischen Raumes $\mathbb{Z}$. Beispielsweise ist die Menge $\{0\}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{Z}$, weil sie Schnitt $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ von $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{Z}$ ist. **Diskrete/indiskrete Topologie:** Topologischer Raum diskret, wenn alle Punkte isoliert sind, dh wenn in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes keine weiteren Punkte liegen. Diskrete Räume sind total unzusammenhängend: Jedweder Teilraum mit mindestens zwei Elementen ist unzusammenhängend, zerfällt also in zwei disjunkte offene Mengen. Diskrete Räume sind 0-dimensional, sowohl bzgl der kleinen und großen induktiven Dimension als auch bzgl. der Lebesgue'schen Überdeckungsdimension. dtv-Atlas zur Mathematik Bd1 p219 Beispiele; Jänich: Topologie p13; Heine: Topologie und Funktionalanalysis 2002, 2011; Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre 1914; Hausdorff: Mengenlehre (1927, 1935); Deskriptive Mengenlehre und Topologie; n-dim Mannigfaltigkeit = Hausdorff-Raum X mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homömorph. Forster: Riemannsche Flächen. Komplexe Karten von 2d-Mannigfaltigkeiten 1977; M, N Mannigfaltigkeiten, p, q Punkte; f, g, h reelwertige

Funktionen, α, β, γ Kurven; v, w Vektoren, V, W, X, Y Vektorfelder; ϕ, ψ Abbildungen, $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ offene Mengen; $\xi = (x^1, \ldots, x^n)$ Koordinatensystem; Eine Untermenge A hat Abschluss $\bar{A}$, das Innere int A und den Rand bd A. **Mannigfaltigkeit** ist topologischer Raum, der lokal einem Euklidischen gleicht. Geografische Karten sind lokale $\mathbb{R}^2$ oder euklidische Ebenen. Hake & Grünreich: Kartographie 1990; Scholz, Tanner, Jänckel: Einführung in die Kartographie und Luftbildinterpretation 1978; Wilhelmy, Hüttermann, Schröder: Kartographie in Stichworten 1996[6] p42 **Kugelzonenfläche** $A(\varphi_1, \varphi_2) = 2\pi R^2(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)$; Resnik & Bill: Vermessungskunde für den Planungs, Bau- und Umweltbereich 2000 p21 globale, erdfeste Bezugssysteme, 5 Kontrollstationen vom US Department of Defense, ITRF89 EUREF89 DREF, p107 **Gauß-Krüger-Koordinaten** Schmauks & Nöth: Landkarten als synoptisches Medium = ZfSemiotik20 1998 3-175 reale und mentale Karten p25 Kartosemiotik p91 Kognition; Spatial information theory. A theoretical basis for geographic information systems 1993 = LectureNotes ComputerScience716; Cognitive and computational foundations of geographic information science 1999 = LN ComputerScience1661 p1 Insektennavigation; Autonomes Fahren ct7.2020p126; Bollmann & Koch: Lexikon der Kartographie und Geomatik 2001; **Schröder: Kartenentwürfe der Erde. Kartographische Abbildungsverfahren aus mathematischer und historischer Sicht** 1988; **Spallek: Kurven und Karten** 1994[2]; Wir können an jedem Weltort einen trügerischen $\mathbb{R}^n$ aufmachen. Trügerisch, weil wir den $\mathbb{R}^n$ nur **lokal** überblicken, dessen unendliche Ausdehnung nicht ernst zu nehmen ist, da empirisch nicht erreichbar. Die Extrapolation auf ∞ offenbart eine falsche Vorstellung vom Unendlichen. Aber man kann versuchen, einen Atlas zu gewinnen und alle Karten zusammen zu heften, eine **Klebefläche** zu gewinnen. Böhm: Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik 2011; **Mannigfaltigkeit** ist zusammenhängende Menge, die in der Umgebung jedes ihrer Punkte die gleiche topologische Struktur wie der Euklidische Raum hat und das **Trennungs-Axiom**T_2-Axiom gilt. Siehe Rinow: Topologie 1973; Gibt nur schwer erreichbare Originalarbeiten. Nicht aber die unten genannten Brückenreferenzen. Wirkt auf mich wie kriminelle Vertuschung oder Spurenbeseitigung. **Borisovich, Bliznyakov, Izrailevich, Fomenko: Introduction to topology** 1980, 1985; **Barr: Experiments in topology** 1964 Um Topologie nahezubringen, muss man ihr etwas hinzufügen, von dem sie sich ihrer selbst willen befreit hat. Denn sie ist ein Geisteszustand. Es ist das Studium der Kontinuität. Beginnt mit Kontinuität von Räumen oder Formen, verallgemeinert und kommt per Analogie zu andsersartiger Kontinuität und lässt den gewöhnlichen Raumbegriff hinter sich. Topologen haben Bilder von Dingen überwunden, vermeiden und misstrauen ihnen. Denn manche Räume lassen sich gar nicht veranschaulichen, und wenn, so ist hat die Veranschaulichung keinen Sinn. Siehe Rinow: Tpologie! Um aber ein Gefühl vom Standpunkt eines Topologen zu bekommen, sollte man sich gewissen Formen und Räumen ansehen. Topologe ist an formunabhängigen Eigenschaften interessiert, die jegliche Verzerrungen und Dehnungen überstehen, also an den zähesten geometrischen Merkmalen von etwas. ; Boltjanski: Homotopy theory od continuous mappings and vector fields 1957; Hu, Sze-Tsen: Homotopy Theory 1959; Willard: General Topology 2004; Lahiri: A First Course in Algebraic Topology 2005; Brown: Topology and Groupoids 2007; Patty: Foundations of Topology 2012[2]; Malik & Singh: Topology 2012; Boltjanski & Gochberg: Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie 1972; **Boltjanskij & Efremovic: Anschauliche kombinatorische Topologie** 1986; **Willi Bothe** am 24.2.1982 im I218 bei einem Vortrag zur Topologie: a] Mit dem Alter nimmt der Spieltrieb wieder zu. b] Die Anwendung von Mathematik ist null, dennoch ist sie eine schöne Spielerei, besonders die Beweise. c] Die Dimensionstheorie ist mit einer schönen gotischen Kirche vergleichbar, während für die Anwendung eine Baracke reicht. **Pascal, Epstein, Timerding: Repertorium der höheren Mathematik**. Bd1 Analysis. Bd1.1 Algebra, Differential- und Integralrechnung 1910, Bd1.2 Höhere Analysis, Bd2 Geometrie, Bd2.1 Grundlagen und ebene Geometrie, Bd2.2 Raumgeometrie 1922; W̃ölffing: Mathematischer Bücherschatz. Buchverzeichnis der wichtigsten Lehrbücher und Monographien des 19 Jh 1903; **Weber, Heinrich & Josef Wellstein: Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende**. BdI Elementare Algebra und Analysis 1903, 1905[2], BdII Geometrie 1905; BdIII Teil1 Mathematische Physik BdIII Teil2 Angewandte Elementarmathematik. Darstellende Geometrie. Wahrscheinlichkeit. Astronomie; Alexandroff, Markuschewitsch, Chintschin: Enzyklopädie der Elementarmathematik, 5 Bde 1958; Alexandroff und Efraimovich in **Enzyklopädie der Elementarmathematik** Bd4 & 5 Geometrie 1971; **Hilbert & Cohen-Vossen: Anschauliche Geometrie** 1932 hat Anhang **Alexandroff:**

Einfachste Grundbegriffe der Topologie Moskau 1932; **Jänich: Topologie** 1980, 1996[5]; **Hausdorff: Grundzüge der Mengenlehre** 1914; **Topologie = Mathematik des qualitativen Verhaltens** siehe Grosche: TB der Mathematik Bd2 p705-738; Harzheim & Ratschek: Einführung in die allgemeine Topologie 1978; Hatcher: Algebraic toplogy 2001 e-book cornell.edu; **Franz: Allgemeine Topologie** 1 & 2 1973; **Wurzel 15** 1981 H2 p26-31, H3 p44-48, H4 p59-64; **Fomenko: Visual Geometry and Topology** 1994; Fomenko & Mishchenko: A short course in differential geometry and topology 2009; Fomenko & Tuzhilin: Elements of the geometry and topology of minimal surfaces in three-dimensional space 2005; Fomenko & Kunii: Topological modeling for visualization 1997; Fuks & Rokhlin: Beginner's course in topology - geometric chapters 1984; Schubert: Topologie 1969[2]; **Laures: Grundkurs Topologie** 2009; **Seifert & Threlfall: Lehrbuch der Topologie** 1934, 1947, 1968 = A textbook of topology 1980 e-book; Tammo tom Dieck: Topologie 2000; Artin & Hel Braun: Vorlesungen über algebraische Topologie. Thedy 1964; **Teleman: Grundzüge der Topologie und differenzierbare Mannigfaltigkeiten** 1968; **Stöcker & Zieschang: Algebraische Topologie. Eine Einführung** 1988, 1994[2]; Safarevic: Algebraische Flächen 1968; **Grundidee** ordne **topologischen Räumen**, wie Teilmengen des Anschauungsraums wie Kugeln, Tori oder deren Oberflächen, gewisse **algebraische Strukturen** wie zum Beispiel **Gruppen oder Vektorräume** zu, und das auf eine Weise, dass verwickelte Verhältnisse auf Seiten der topologischen Räume sich vereinfacht auf Seiten der algebraischen Strukturen wiederfinden und so einer Behandlung zugänglich werden. Siehe Grosche TB MatheII Kap18 Anschaulicher Hintergrund der **Dualität von Homologie und Kohomologie** p718; **Ñakahara: Differentialgeometrie, Topologie und Physik** 1990, 2013; **Arnold: Klassische Mechanik** p203f; **Bressoud: Second year calculus** 1991 Cp314ff; **Baez & Muniain: Gauge Fields, Knots and Gravity** 1994; **Mishchenko & Fomenko: A course of differential geometry and topology** 1980 Kap6 **Bredon: Topology and geometry** 1993; **Bott & Tu: Differential Forms in Algebraic Topology** 1995; **Gysin-Sequenz** Algebraischen Topologie = lange exakte Sequenz, welche die **Kohomologieklassen** von Basis, Faser und Totalraum eines Sphärenbündels miteinander in Beziehung setzt. Anwendung = Berechnung der Kohomologie aus der Eulerklasse (und umgekehrt) eines Sphärenbündels dar. **Charakteristische Klasse** = mathematisches Objekt = topologische Invariante eines Vektorbündels, kann durch Differentialform dargestellt werden. Beschreibt **Verdrehtheit eines Bündels**: Charakteristische Klasse eines trivialen Bündels = Eins-Element.

Obstruktionstheorie oder Hindernis-Theorie die Hindernisse für die Existenz von Schnitten in Faserbündeln. May: A concise course in algebraic topology pdf; Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 Rham-Theorie p370f; **Homologie-Theorie**; Zeidler: Springer Handbuch der Mathematik IV Kap18.4 p500ff Verallgemeinerung der Integralsätze der Funktionentheorie, die die Wegunabhängigkeit holomorpher Funktionen über einfach zusammenhängenden Gebieten ausnutzen, auf beliebige Dimensionen. Zur Wegunabhängigkeit seitens der Funktionentheorie siehe Seite 206, seitens konservativer Felder/Gradientenfelder siehe Seite 315. Ist mit Lösung der Dgl $\mathrm{d}\omega = \mu$ auf n-dimensionaler reeller Mannigfaltigkeit M verbunden. Gegeben ist q-Form μ. Gesucht wird $(q-1)$-Form ω mit $q = 1, \ldots, n$. μ ist dann **Korand**. Lösbarkeitsbedingungen: a] $\mathrm{d}\mu = 0 =$ **Kohomologie**, b] $\int_c \mu = 0$ für alle q-Zyklen c auf $M =$ **Homologie**. q-Zyklus $c =$ **randlose** q-dimensionale Teilmenge von $M = \partial c = 0$. **0-Zyklus** = Punkt. **1-Zyklus** = randlose Eindim Teilmenge = geschlossene Linie homöomorph zur Kreislinie, also ∂(geschlossene Kurve) = 0. **2-Zyklus** = randlose 2D Teilmenge = geschlossene 2D-Fläche, speziell Kugelfläche, also ∂(geschlossene 2D-Fläche) = 0. Aus a] folgt $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$. Aus b] folgt $\int_c \mu = \int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega = 0$ nach Satz von Stokes mit $\partial c = 0$. $H^q(M)$ = reeller linearer Raum. $\beta_q = \dim H^q(M) = q$-te **Bettische Zahl** der Mannigfaltigkeit M. b*] $\int_{c_j} \mu = 0$ für $i = 1, \ldots, \beta_q$, wobei c_j geeignet gewählte Basiszyklen von M. Zwei q-Zyklen c und d **homolog** $= c \sim d \Leftrightarrow c$ und d unterscheiden sich nur um einen Rand $\partial\Omega$ einer Menge $\Omega \subset M$. Es gilt für zusammengesetzte orientierte Kurven $c = d + \partial\Omega$ im Sinne von $\int_c \mu = \int_d \mu + \int_{\partial\Omega} \mu$ wegen Stokes und $\partial(\partial\Omega)$ gilt $\int_{\partial\Omega} \mu = \int_{\partial\Omega} \mathrm{d}\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial(\partial\Omega)} \omega = 0 =$ **Homologe**

Zyklen liefern das gleiche Integral über einen Korand μ. Folglich braucht man bei b] nur ein System $c_1, \ldots$ von q-Zyklen zu verwenden, die bzgl der Homologierelation linear unabhängig sind. Ein Zyklus c heißt genau dann **nullhomolog**, $c \sim 0$, wenn c ein Rand ist. Solche Zyklen sind unwesentlich, weil das Integral über nullhomolge Zyklen $c = \partial\Omega$ verschwindet. Keiner der Basis-Zyklen c_j sei nullhomolog! Sei $< G, \omega >:= \int_G \omega$. **Dualität:** Der Stokes'sche Satz $\int_{\partial c} \omega = \int_c \mathrm{d}\omega$ hat dann die symmetrische Gestalt $< \partial c, \omega >=< c, \mathrm{d}\omega >$. Der **Randoperator** ∂ ist zum **Korandoperator** d **dual**. Daher $\partial(\partial\Omega) = 0$ und $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$ oder kurz $\partial^2 = 0$ und $\mathrm{d}^2 = 0$. **Elementares Beispiel:** Der Wirbelfluss $\int_A \mathrm{rot}\,\vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ eines beliegen Vektorfeldes $\vec{H}(\vec{r})$ durch eine **geschlossene** Fläche verschwindet stets. Denn für jeden Raumpunkt sei $\vec{J} = \mathrm{rot}\,\vec{H}$. Nach Gauß ist für eine geschlossene Fläche $\int_{A=\partial V} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{J} = \int_V \mathrm{d}V \mathrm{div}\,\vec{J} = \int_V \mathrm{d}V \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0 \int_V \mathrm{d}V = 0V = 0$. Also per Gauß $\oint_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{H} \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{V_S} \mathrm{d}V \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$ oder per topologischer Argumentation und Stokes: Stokes mit Beutel, der zu einem beliegen wegzusammenhähngende Flächenstück topologisch äqui ist, der per Limes verschnürt wird $\oint_S \mathrm{d}\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{H} = \lim_{\text{Öffnung}\to 0} \oint_{\text{Beutel}} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{H} \overset{\text{Stokes}}{=} \lim_{\text{Öffnung}\to 0} \int_{\partial\text{Beutel}} \mathrm{d}\vec{s} \cdot \vec{H} = 0$. Bei Stokes fällt die konkrete Form der Ausbeulung einer Fläche über der geschlossenen Kurve bei Integral nicht ins Gewicht. Siehe Seite 234. **Kohomologie:** Zwei q-Formen ω und α **kohomolog**, wenn sie sich um einen Korand unterscheiden, also $\omega = \alpha + \mathrm{d}\beta$. Besitz $\mathrm{d}\omega = \mu$ für μ Lösung ω, dann ist μ **Korand** und wegen $\mathrm{d}\mu = 0$ auch zugleich ein **Kozyklus**. **Totales Differenzial** muss vollständig sein, also Schwarz'scher Satz, dann Dualität. Pushforward = Abbildung zwischen Tangentialräumen glatter Mannigfaltigkeiten, die die im euklidischen Raum definierte Richtungsableitung verallgemeinert. Das duale Konzept heißt meist Rücktransport (Pullback). **Beispiele**: Zeidler: HdM IV e-book p219, 226, 243, 377, 379, 497, 502ff; Zeidler: TBII 1995 p595, 597; Lück: Algebraische Topologie. Homologie und Mannigfaltigkeiten 2005; **Mayer: Algebraische Topologie** 1989; **Armstrong: Basic topology** 1979, 1983; **Croom: Basic Concepts of Algebraic Topology** 2007; Grotemeyer: Topologie 1969; **Lietzmann: Anschauliche Topologie** 1955; Arnold: Intuitive Concepts in Elementary Topology 1962 = Arnold: Elementare Topologie. Anschauliche Probleme und grundlegende Begriffe 1964; **Boltjanskij & Efremovic: Anschauliche kombinatorische Topologie** 1986; Boltjanski & Gochberg: Sätze und Probleme der kombinatorischen Geometrie 1972; Alexandroff: Lehrbuch der Mengenlehre 1994; **Hausdorff: Grundzüge der Mengelehre** 1949; Alexandroff: Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie 1984; Ringel: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen 1959; Aleksandr Aleksandrov: Kurven und Flächen 1959; Asser et al.: Theory of sets and topology. In honour of Felix Hausdorff (1868 - 1942) 1972; Beispiel: Erdoberfläche kann **lokal** auf $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden = **Karte**. Mannigfaltigkeiten erlauben Kartographierungen mittels Karten und Atlanten. **Schröder: Kartenentwürfe der Erde. Kartographische Abbildungsverfahren aus mathematischer und historischer Sicht** 1988; **Spallek: Kurven und Karten** 1994[2]; Friedrich & Spallek: Kinematik in n-dimensionalen Räumen. Vom klassischen Schroten zur allgemeinen Gleitkinematik 1993; Glatte Mannigfaltigkeit erlaubt parzielle Ableitung - calculus in the large. **Alexandroff & Hilbert: Einfachste Grundbegriffe der Topologie** im Anhang von **Hilbert & Cohen-Vossen: Anschauliche Geometrie** 1932; Dobrowolski: Angewandte Funktionalanalysis 2010 p1; Zeidler: Vorlesungen über nichtlineare Funktionanalysis Bd1 Fixpunksätze 1976; **Topologischer Raum** (X, T): **Eine Topologie auf einer Menge X ist eine Mengenfamilie T für die gilt:** a] $\emptyset$ und M sind offene Mengen. b] **Durchschnitt endlich vieler** offener Mengen ist eine offene Menge. c] Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist eine offene Menge. **Topologische Räume:** $\{\{\}, \{1, 2, 3\}\}$ = **triviale Topologie**; **Topologische Räume:** $\{\{\}, \{1\}, \{1, 2, 3\}\}$; $\{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$; $\{\{\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. **Keine topologischen Räume:** $\{\{\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}\}$ kein topologischer Raum, da die Mengen $\{2\}$ und $\{3\}$ zur Topologie gehören, aber ihre Vereinigung $\{2, 3\}$ nicht; $\{\{\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ kein topologischer Raum, da die Mengen $\{1, 2\}$ und $\{2, 3\}$ zur Topologie gehören, aber der Schnitt $\{2\}$ der beiden nicht. Bei der Topologie gehts um offene Mengen, daher muss bei b] Endlichkeit gefordert werden! **Durchschnitt offener Mengen:** Sei $O_k = \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}$ offenes Intervall, dann ist $\bigcap_{k=1}^{\infty} O_k = \{0\}$ **abgeschlossen**. **Kufner: Raum und Entfernung** 1981 Kap3; **Offene Menge** kennt nur innere Punkte. **Topologische Mannigfaltigkeiten** Sei M ein topologischer Raum. M eine (topologische) Mannigfaltigkeit der Dimension n oder kurz eine n-Mannigfaltigkeit, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt werden: M ist ein Hausdorff-Raum. M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom. M ist lokal euklidisch, das heißt, jeder Punkt besitzt eine Umgebung,

welche homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Mannigfaltigkeiten erben viele lokale Eigenschaften vom Euklidischen Raum: sie sind lokal wegzusammenhängend, lokalkompakt und lokal metrisierbar. Ein topologischer Raum X heißt **lokal zusammenhängend**, falls jede Umgebung eines Punktes noch eine zusammenhängende umfasst. $\mathbb{R}\setminus 0$ **lokal zusammenhängend**, aber **nicht zusammenhängend**! Hat ja bei 0 eine Lücke. Hingegen ist der **Sinuskurvenraum** $X = 0 \times \mathbb{R} \bigcup \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$ **zusammenhängend**, aber **nicht lokal zusammenhängend**! Laures & Szymik: Grundkurs Topologie 2009 p45; Mannigfaltigkeiten, welche homöomorph zueinander sind, werden als gleich (beziehungsweise äquivalent) angesehen. Daraus entstand die Frage nach der Klassifikation, also die Frage, wie viele nicht äquivalente Mannigfaltigkeiten es gibt. **Differenzierbare Mannigfaltigkeiten** Es sei M eine solche topologische n-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Ist eine offene Teilmenge von M vorgegeben, auf der ein Homöomorphismus zu einer offenen Menge von $\mathbb{R}^n$ definiert ist, dann nennt man diesen Homöomorphismus eine Karte. Eine Menge von Karten, deren Urbilder M überdecken, heißt Atlas von M. Verschiedene Karten θ, η induzieren einen **Homöomorphismus** $\theta \circ \eta^{-1}$ (einen so genannten **Kartenwechsel** oder Koordinatenwechsel) zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Falls für einen **Atlas** $\mathcal{A}$ alle solchen Kartenwechsel k-mal differenzierbar sind, dann nennt man $\mathcal{A}$ einen C^k-Atlas. Zwei C^k-Atlanten (derselben Mannigfaltigkeit) nennt man genau dann miteinander verträglich, wenn ihre Vereinigung wieder einen C^k-Atlas bildet. Diese Verträglichkeit ist eine **Äquivalenzrelation**. Eine C^k-Mannigfaltigkeit ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einem C^k-Atlas (eigentlich mit einer Äquivalenzklasse von C^k-Atlanten). Glatte Mannigfaltigkeiten sind Mannigfaltigkeiten vom Typ C^∞. Sind alle Kartenwechsel sogar analytisch, dann nennt man die Mannigfaltigkeit ebenfalls **analytisch** oder auch C^ω-Mannigfaltigkeit. Auf einer C^k-Mannigfaltigkeit M nennt man eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ genau dann s-mal differenzierbar ($s \leq k$), wenn sie auf jeder **Karte** s-mal differenzierbar ist. Zu jeder (parakompakten) C^r-Mannigfaltigkeit ($r > 1$) existiert ein **Atlas**, der beliebig oft differenzierbar oder sogar analytisch ist. In der Tat ist diese Struktur sogar eindeutig, das heißt, es ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, anzunehmen, dass jede Mannigfaltigkeit analytisch ist (wenn man von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten redet). Straumann: General relativity and astrophysics 1991 p1ff Mannigfaltigkeiten;

Diese Aussage ist aber für topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension 4 oder höher nicht mehr unbedingt richtig: So gibt es sowohl C^0-Mannigfaltigkeiten, die keine differenzierbare Struktur besitzen, als auch C^1-Mannigfaltigkeiten (oder auch $C^\omega - M.$, s.o.), die als differenzierbare Mannigfaltigkeiten unterschiedlich, aber als topologische Mannigfaltigkeiten gleich sind. Das bekannteste Beispiel für den zweiten Fall sind die so genannten exotischen 7-Sphären, die alle homöomorph zu $\mathbb{S}^7$ (aber untereinander nicht diffeomorph) sind. Da die topologische und die differenzierbare Kategorie in niedriger Dimension übereinstimmen, sind solche Resultate nur schwer zu veranschaulichen. Die **Kategorientheorie**, (Grundbegriffe sind **Kategorie aus Objekt und Morphismus, Funktor und natürliche Transformation**) lässt sich, ähnlich wie die **universelle Algebra**, als allgemeine Theorie mathematischer Strukturen auffassen (klassische Strukturen sind z.B. Gruppen, Ringe, Moduln und topologische Räume). dtv-Atlas Mathe Bd1 p248f. **Kategorie wegzusammenhängender Räume** besteht aus **Objekt** wegzusammenhängeder topologischer Räume $(M, \mathcal{M})$ und **Morphismen** stetiger Abbildungen. **Kategorie der Gruppen** besteht aus **Objekt** Gruppen und **Morphismen** Gruppenhomomorphismen. Kategorien werden über **Funktoren** in Beziehung gesetzt. So können kommutative Diagramme aufeinander abgebildet werden, indem **topologische Abbildungen** f auf **Gruppenisomorphismen** $\Pi(f)$ abgebildet werden. Dabei werden Eigenschaften mathematischer Strukturen allerdings **nicht über Relationen zwischen Elementen der Trägermenge(n)** definiert, **sondern mittels Morphismen und Funktoren** quasi über Vergleiche sowohl innerhalb von als auch zwischen Kategorien. Hasse & Michler: Theorie der Kategorien 1966; Mac Lane: Kategorien. Begriffssprache und mathematische Theorie 1972; Algebraische Topologie, Gruppentheorie, Theorie kommutativer Ringe, algebraische Geometrie $\in$ **Homologische Algebra** = **Kategorientheorie**. Hintergrund: f, g Matrizen mit $fg = 0$. u, v Vektoren. Sei $gv = 0$. Dann geht nicht stets $v = fu$. Dieses Versagen wird durch den **Defekt** $d = n - \mathrm{rank}(f) - \mathrm{rank}(g)$ gemessen. Bei der Abb $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ ist $d = \ker(g)/f(U)$ die Dimension des **homologischen Moduls**. **Pfeildenken:** $A \to B$ statt $A \subset B$ bei Inklusion. Brunner: Homologische Algebra 1973; Weibel: Introduction to Homological Algebra 2008 p1; Brandenburg: Einführung

in die Kategorientheorie. Mit ausführlichen Erklärungen und zahlreichen Beispielen 2015; **Spivak: Category Theory for the Sciences** 2014; **Krömer: Tool and object. A history and philosophy of category theory** 2007; Osborne: Basic Homological Algebra 2000; Gelfand: Methods of Homological Algebra 2010; **Richter: Kategorielle Algebra** 1979; Lugowski: Universelle Algebra 1978; **Semadeni & Wiweger: Einführung in die Theorie der Kategorien und Funktoren** 1979 general abtract nonsense; Pareigis: Kategorien und Funktoren mit Beispielen 1969; Brinkmann & Puppe: Kategorien und Funktoren 1966; Mac Lane: Categories for the Working Mathematician 2013; Pumplün: Elemente der Kategorientheorie 1999; Freyd & Scedrov: Categories, allegories 1990 Allegorie = Gleichnis = Versinnbildlichung; **Ehrig, Mahr, Cornelius, Große-Rhode, Zeitz: Mathematisch-strukturelle Grundlagen der Informatik** 2001[2]; Unterscheide wie bei Algebren zwischen **Trägermengen**, wo man Isomorhismen hat, und **Kompositions-Operationen oder Abbildungen**, zwischen denen man Homoimorphismen hat. **Ehrig: Kategorien und Automaten** 1972 **Kategorien Theorie = Analogie von Begriffen und Konstruktionen**, die in verschiedenen Gebieten der Mathematik auftreten, mathemat exakt zu definieren und deren gemeinsame Eigenschaften zu erfassen. Dazu verallgemeinert man strukturierte Mengen, wie Gruppen und topologische Räume, zu Objekten und strukturverträgliche Abbildungen, wie Homomorphismen und stetige Abbildungen, zu Morphismen einer Kategorie. Die **Eigenschaften von Begriffen und Konstruktionen werden kategoriell =elementfrei über die Existenz, Eindeutigkeit oder Kürzbarkeit geeigneter Morphismen = strukturverträglicher Abbildungen definiert.** Entspricht der Klassendefinition bei **objektorientierter-Programmierung**. Verschiedene Modelle eines Axiomensystems = Räume zB der Topologie, Algebra oder Automatentheorie können als **Objekte** und die strukturverträglichen Abbildungen als **Morphismen** einer geeigneten **Kategorie = Klasse** aufgefasst werden. Aufgrund ihres hohen Grades an Abstraktion wird die Kategorientheorie gelegentlich – selbst von den Mathematikern, die sie entwickelten – als allgemeiner Unsinn bezeichnet. Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht besteht gemäß Eilenberg und MacLane 1945 aus folgendem: i] Einer **Klasse** $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ von Objekten. ii] Einer **Klasse von Pfeilen oder Morphismen** = Morphismus ist ein Element einer Menge $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y)$, die es zu jedem Paar (X,Y) von Objekten gibt = $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y), [X,Y]_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}(X,Y) oder (X,Y)_{\mathcal{C}})$. Diese Mengen sind paarweise disjunkt, dh kein Morphismus $f \in \mathrm{Mor}(X,Y)$, auch $f\colon X \to Y$ geschrieben, ist Element einer anderen Morphismenmenge. X ist die **Quelle eines Morphismus** $f \in \mathrm{Mor}(X,Y) = \mathrm{dom}(f)$ dom = domain, das **Ziel eines Morphismus** = Y mit $\mathrm{cod}(f)$ mit cod = co-domain. iii] **Verknüpfungsabbildungen** $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z),\ (g,f) \mapsto g \circ f$, die im offensichtlichen Sinne **assoziativ** sind: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, sofern $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ und $\mathrm{cod}(g) = \mathrm{dom}(h)$. $h \circ g$ wird oft nur hg geschrieben. iv] einem **Identitätsmorphismus** $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ zu jedem Objekt X, der neutrales Element für die Verknüpfung mit Morphismen mit Quelle oder Ziel X ist, dh es gilt $\mathrm{id}_X \circ f = f$, falls $\mathrm{cod}(f) = X$ ist, und $f \circ \mathrm{id}_X = f$, falls $\mathrm{dom}(f) = X$. Anstelle id_X ist auch die Form 1_X gebräuchlich. **Klasse aller Morphismen** = $\mathrm{Ar}(\mathcal{C}), \mathrm{Fl}(\mathcal{C})$ oder = $\mathrm{Pf}(\mathcal{C})$ bezeichnet, **Pf = arrow = flèche = Pfeil**. Schubert: Kategorien 1+2 1970; **Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie: Ein Lehrbuch für Physiker** und Mathematiker 2004[2] p209ff; **Metrische/quantitative vs qualitative/topologische/projektive Eigenschaften:** Metrische Eigenschaften = Streckenlänge, Winkel sind gegen beliebigen Transformationen instabil oder variant, also nicht so wesentliche und tiefe geometrische Eigenschaften. **Ähnlichkeitstransformationen** entsprechen der **Linearität**, und erhalten Winkel und Streckenverhältnisse. Bei **projektiven Transformationen** - speziell **Zentralprojektion** - gehen nur noch **Geraden in Geraden über**. **Topologische Eigenschaften** sind gegen allgemeinen projektiven oder **homöomorphen Transformationen** stabil, invariant. **Homöomorph = von gleicher Morphologie im Sinne gleicher topologischer Eigenschaften** sind Figuren, die sich aufeinander abbilden lassen. Nachbarschaften der Figurenpunkte bleiben erhalten: Risse und Verheftungen verboten. Kreis = Ellipse = Oval =Vieleck = beliebige geschlossene Kurve ohne Selbstüberschneidung. Sphäre = Oberfläche eines Ellipsoids = Würfeloberfläche = Oberfläche eines beliebigen konvexen Körpers. **Euler'scher Polyeder-Satz** siehe Meschkowski: Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie 1960; **Lokale topologische Eigen-**

schaft einer Mannigfaltigkeit ist **Euler'sche Polyeder-Zahl** = **Euler-Descartes-Charakteristik** Kennzahl/topologische Invariante für topologische Räume, zum Beispiel für geschlossene Flächen. Für konvexe Polyeder, zB platonischen Körper haben alle $\chi = E + F - K = 2$ gemäß **(E,F,K):** Tetraeder (4,4,6), Würfel (8,6,12), Oktaeder (6,8,12), Dodekaeder (20,12,30), Ikosaeder (12,20,30), Buckminsterfullerene (60,32,90) oder $\chi = 1$ für alle Vielecke wie 5Eck (5,1,5), 4Ecke (4,1,4), Strecke (2,0,1), Punkt (1,0,0), gilt $E - K + F = 2$ mit $E = \#$ **Ecken/Vertices/Knoten**, $K = \#$ **Kanten/Bögen/Links/Edges** und $F = \#$ **Flächen**. Diese spezielle Aussage heißt **eulerscher oder descartischer Polyedersatz**. Enzyklodädie der Elementarmathemtik BdV Geometrie p491; **Saskin: Ecken, Flächen, Kanten** 1989; Für **Flächen**: Eine geschlossene Fläche S lässt sich stets triangulieren, das heißt man kann sie immer mit einem endlichen **Dreiecksgitter** überziehen. Die **Euler-Charakteristik** χ ist dann definiert als $\chi(S) := E - K + F$, mit $F = \#$ **Dreiecke** bei Triangulierung. **Inhalte der Simplices: Harzheim: Einführung in die kombinatorische Topologie** 1929, 1978; **History of Math:** http://www.ams.org/samplings/math-history/math-history hier Gale: Linear Programming and the Simplex Method March 2007; Simplex = n-Simplex = n-dimensionales Hypertetraeder = n-dimensionales Polytop. Jedes n-dimensionale Simplex besitzt $n + 1$ Ecken. Man erzeugt ein n-Simplex aus einem $(n - 1)$-Simplex, indem man einen affin unabhängigen Punkt hinzunimmt und alle Ecken des niedrigerdimensionalen Simplex mit diesem Punkt in Form einer Kegelbildung durch Strecken verbindet. Somit ergibt sich mit zunehmender Dimension die Reihe Punkt, Strecke, Dreieck, Tetraeder. Ein n-Simplex ($n \in \mathbb{N}$) ist die Fortsetzung dieser Reihe auf n Dimensionen. n-Simplex Δ st die Menge alles Punkte mit $\Delta = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{i=0}^{k} t_i v_i \text{ mit } 0 \le t_i \le 1 \text{ und } \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\right\}$. 4-Simplex = Pentachoron. Ein Beispiel eines n-Simplex im $\mathbb{R}^n$ (und zwar eines mit rechtwinkliger Ecke im Ursprung) ist durch $\left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \ge 0, \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le 1\right\}$. **Fäche eines Dreiecks** = 2D-Simplex mit den Punkten $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3 \in \mathbb{R}^3$ ist $2\vec{A} = \vec{a} \times \vec{b} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{r}_3 - \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 - \vec{r}_2 \times \vec{r}_3$ oder $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$ mit $A_1 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$, $A_2 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$, $A_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. Bartsch p293ff in der z-Ebene $A_1 = A_2 = 0$, also $A = A_3 = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$. Das **Volumen eines Tetraeders** = 3D-Simplex mit den Punkten $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4 \in \mathbb{R}^3$ ist $V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|(\vec{r}_1 - \vec{r}_4)(\vec{r}_2 - \vec{r}_4)(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)|$. Tetraeder mit einer Kante beim Ursprung $V = \frac{1}{6}(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{r}_3 = \frac{1}{3} A_{Tetraeder-Grundfläche} h_{Tetraeder-Höhe} \frac{2}{2} = \frac{1}{6}|\vec{r}_1 \vec{r}_2 \vec{r}_3| = \frac{1}{6}\mathrm{Spat}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$. Nickel et al.: Geometrie und Algebra p517. **Rändern von Determinanten** p500; **Simplices:** Zellkomplex oder CW-Komplex. **Satz von Gauß-Bonnet** stellt Zusammenhang zwischen der **gaußschen Krümmung und der Euler-Charakteristik her**. Verzerrt man die Mannigfaltigkeit, so bleibt ihre Euler-Charakteristik unverändert, im Gegensatz zur Gaußkrümmung an den einzelnen Punkten. Der Satz sagt aus, dass das Integral über die Krümmung, also die Gesamtkrümmung, unverändert bleibt. Die runde Sphäre $M = S^2$ mit Radius 1 hat in jedem Punkt die Gauß-Krümmung 1. Das Integral über die Gauß-Krümmung entspricht also ihrer Fläche, 4π. Andererseits ist die Euler-Charakteristik 2, da man die Sphäre als Verklebung von zwei (runden) Flächen entlang einer Kante mit einer Ecke bekommt (also 2-1+1=2). **Theorema elegantissimum:** Diese von Gauß stammende Folgerung besagt, dass die Gesamtkrümmung $\int_\Delta K \, dA$ eines einfach zusammenhängenden geodätischen Dreiecks gleich dessen **Winkelexzess** ist. Für den Spezialfall der **2-Sphäre** sieht man über die Außenwinkelsumme eines infinitesimalen (also flachen) Dreiecks von 5π die Äquivalenz zum **Satz von Gauß-Bonnet**. Die Äquivalenz gilt allerdings – im zweidimensionalen Fall – auch allgemein, was mithilfe einer Triangulierung eingesehen werden kann, denn für diese gilt: $2\pi\chi = 2\pi(E - K + F) = 2\pi(E - \frac{3}{2}F + F) = 2\pi E - \pi F = \sum \varepsilon$. Für zusammenhängende **planare Graphen** kann eine verallgemeinerte Version des eulerschen Polyedersatzes formuliert werden. Dort ersetzen die

Gebiete die Flächen und es gilt **Knotenzahl + Gebietszahl - Kantenzahl = 2,** wobei bei der **Gebietszahl das äußere Gebiet mitgezählt** wird. Diese Formulierung erweitert den Gültigkeitsbereich des Satzes um eine Vielzahl nicht-konvexer Polyeder sowie solche planaren Graphen, denen überhaupt keine Polyeder zugrunde liegen. Unter dem **Geschlecht einer kompakten orientierbaren Fläche** versteht man in der Topologie die **Anzahl der „Löcher" (oder der „Henkel")** der Fläche. Das **Geschlecht ist eine topologische Invariante**. Das **Geschlecht einer Fläche** ist definiert als die **maximale Anzahl** von möglichen **Schnitten entlang disjunkter**, einfach geschlossener Kurven, so dass die Fläche nach dem Schnittvorgang, also nach allen gemachten Schnitten, immer noch **zusammenhängend** ist. Die **Euler-Charakteristik** χ und das **Geschlecht** g Fläche S hängen zusammen. Ist die Fläche S **orientierbar**, dann gilt die Beziehung $\chi(S) = 2 - 2g$, ist die **Fläche nicht orientierbar**, so gilt hingegen die Gleichung $\chi(S) = 2 - g$. Formel für orientierbare Flächen ergibt sich folgendermaßen: Wir starten mit einer 2-Sphäre, also einer Fläche vom Geschlecht 0 und Euler-Charakteristik 2. Eine Fläche vom Geschlecht g erhält man daraus durch g-fache Bildung der verbundenen Summe mit einem Torus. Die verbundene Summe lässt sich so einrichten, dass die **Verklebung** jeweils entlang eines **Dreiecks** der Triangulierung erfolgt. Es ergibt sich pro Verklebung die folgende Bilanz: **Flächen:** F'=F-2 (die beiden Verklebeflächen) **Kanten:** K'=K-3 (je 3 Kanten werden verklebt, sie zählen dann nur noch einmal) **Ecken:** E'=E-3 (je 3 Ecken werden verklebt, sie zählen ebenfalls nur noch einmal) insgesamt also $\chi' = \chi - 3 + 3 - 2 = \chi - 2$. Durch jeden der g Tori verringert sich die Euler-Charakteristik also um 2. **Boltjanski & Efremovitsch: Anschauliche kombinatorische Topologie** 1986; **Efremovitsch: Grundbegriffe der Topologie** in Alexandroff et al.: Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd5 Geometrie 1966, 1971 p471-550; **Flegg: From Geometry to Topology** 2001; Coxeter: The beauty of geometry - twelve essays 1968; **Euklid Raum = inneres Produkt oder Skalarprodukt = Winkel $\Longrightarrow$ Normierter Raum**, bedeutet, dass man die Elemente addieren kann, die selbst auch wieder Länge haben = Länge $\Longrightarrow$ **metrischer Raum = Abstand** zweier Punkte genügt **Dreiecksungleichung** Dies heißt, dass man die Elemente zwar nicht addieren können muss, aber Abstand hat. Punkte haben Abstand, sind als Elemente aber nicht addierbar. $\Longrightarrow$ topologischer Raum. Pierre Cartier: What is a point in geometry: a tangled historical tale? 2015 Anschaulich ist es der Schnittpunkt zweier Zirkel. Aber bis zu den reellen Zahlen konnte dieser Punkt keiner Zahl zugeordnet werden. Die Euklid'sche Punkt-Definition ist unklar. Basiert allein auf Hingucken. Descartes nutzte für seine Koordinaten nur Längen, also was mit Maßeinheit, keine Zahlen. Schnitt von Kreis und Gerade: 2 Punkte, 1 Punkt = Tangente, kein Punkt = komplexe Lösung. Ponceler. https://mediaup.uni-potsdam.de/Play/2466 **Kufner: Raum und Entfernung** 1981 **Was ist Abstand oder Entfernung?** Vorwort lesen! Kap2; **Topologie** unterscheidet nicht zwischen △, □ und ◯, aber sie erkennt Löcher (Geschlecht), also ob etwas ein- oder mehrfach zusammenhängend ist oder nicht. Torus und Henkeltasse sind das gleiche, weil man das Loch nicht kontinuierlich zum Verschwinden bringen kann. Nash & Sen: Topology and geometry for physicists 1983; **Bettizahl** = topologische Invarianten = topologische globale Figurenklassifikation auf der Basis von Löchern. Es sei X ein **topologischer Raum**. Dann ist die i-te **Bettizahl** von X $b_i(X) = \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q})$ für $i = 0, 1, 2, \ldots$ Dabei bezeichnet $H_i(X, \mathbb{Q})$ die i-te singuläre Homologiegruppe mit Koeffizienten in den rationalen Zahlen. Bettizahlen geben an, wie viele k-dimensionale **nicht zusammenhängende Flächen** der entsprechende topologische Raum hat. Die ersten drei Bettizahlen besagen anschaulich also: b_0 ist die Anzahl der **Wegzusammenhangskomponenten** = Anzahl der zusammenhängenden Figurenteile. b_1 ist die Anzahl der „zweidimensionalen Löcher" = Anzahl der Löcher 2. Art (Sieblöcher). b_2 ist die Anzahl der dreidimensionalen Hohlräume = Anzahl der Löcher 1. Art (Schweizer Käse). Bettizahlen des Torus/Oberfläche sind 1, 2, 1, 0, ..., weil **eine** Zusammenhangskomponente, **zwei** „zweidimensionale Löcher", zum einen das in der Mitte, zum andern das im Inneren des Torus, und hat **einen** dreidimensionalen Hohlraum. Ist der zu betrachtende topologische Raum jedoch keine orientierbare kompakte Mannigfaltigkeit, so versagt die Anschauung. **Bettizahlen der n-Sphäre** = $b_k(S^n) = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \text{ und } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ Die **Bettizahlen der reellen projektiven Ebene** sind 1,0,0,0,..., genau wie die eines **einzelnen Punktes** und **jeder konvexen Menge** im $\mathbb{R}^n$. Zwei sehr verschiedene Räume

können also in allen Bettizahlen übereinstimmen. **Homotopietheorie**, Test: Versuche **ALLE geschlossenen Kurve** auf einen Punkt zusammenzuziehen. Geht für Kugel, aber nicht Für Torus. **Homologietheorie**, Test: Suche in den Figuren geschlossene Kurven, die nicht Rand eines in der Figur enthaltenen Flächenstücks sind. Auf Kugel ist jede geschlossene Kurve zugleich auch Rand eines Flächenstücks. Nicht so beim Torus, wo manche Kurven nur Rand eines Loches sind.

Alexandrow: Kurven und Flächen 1959; **Wallace: An introduction to algebraic topology** 1957; Reid: Undergraduate algebraic geometry 1988; Milnor: Topology from the differentiable viewpoint 1965;zxc **Barr: Experiments in topology** 1964; Steen & Seebach: Conterexamples in topology 1970; Mendelson: Introduction to Topology 1971; Hirzebruch: Topological Methods in Algebraic Geometry 1978; Hirzebruch: Neue Topologische Methoden in der Algebraischen Geometrie 1956; van der Waerden: Zur algebraischen Geometrie - Selected Papers 1983; Schafarewitsch: Grundzüge der algebraischen Geometrie 1972; Herrmann, Kertész, Krötenheerdt: Beiträge zur Algebra und Geometrie 1, 1971 Safarevic: Algebraische Flächen 1968; Hodge & Pedoe: Methods of algebraic geometry I 1947 II 1952 III 1054; Lang: Introduction to algebraic geometry 1958; S̃hafarevich: Basic Algebraic Geometry 1977; Bd1 Varieties in Projective Space, Bd2 2: Schemes and Complex Manifolds 2013[3]; K̃unz: Einführung in die algebraische Geometrie 1997; Kunz: Einführung in die kommutative und algebraische Geometrie 1980; W̃arner: Abstract Algebra for Beginners. A Rigorous Introduction to Groups, Rings, Fields, Vector Spaces, Modules, Substructures, Homomorphisms, Quotients, ... Group Actions, Polynomials, and Galois Theory 2017; **Verheftung** = Schließung von Löchern, keine topologische Abbildung. Zwei disjunkte Definitionsbereiche können mit $\sin x$ im Wertebereich verheftet werden. Asser, Flachsmeyer & Rinow: Theory of sets and topology. In honour of Felix Hausdorff (1868-1942) 1972; **Rinow: Lehrbuch der Topologie** 1975; **Laures & Szymik: Grundkurs Topologie** 2009; Ñakahara: Geometry, Topology and Physics 1990; **Infimum** von $M = (-\pi, e) \subset \mathbb{R}$ ist $-\pi = \inf M$ als **größte untere Schranke**. $e = \sup M$ ist das **Supremum = Oberstes = kleinste obere Schranke**. Kann durchaus **auch außerhalb („jenseits") der Menge** liegen! Anders das Maximum: Das Maximum ist nämlich das größte Element „unter allen Elementen" einer Menge. Obiges M hat weder Minimum noch Maximum. **Jedes Maximum immer auch Supremum.**

Der metrische Tensor einer Riemann-Mannigfaltigkeit M macht aus Tangentenräumen Räume mit innerem Produkt, die linear isometrisch zum euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ sind. Bogenlängen werden zu euklidischen Abständen. Jeder Tangentenraum zur Lorentz-Mannigfaltigkeit ist linear isometrisch zum Minkowski-Raum $\mathbb{R}^n_1$. Lorentz-Geometrie gestattet kausalen Charakter von Vektoren.

Dann Straumann: Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik LNP 1981; Enthält alles zum Formenkalkül! General Relativity and Relativistic Astrophysics 1984; General relativity: with applications to astrophysics 2004; General relativity 2012[2] p579-706 PartIII: **Differential Geometry**; oder Wald, Carroll, Ohanian & Ruffini, Stephani, Ryder, Plebanski & Krasinski, Choquet-Bruhat, Rindler, and Gron & Hervik;

Kompaktheit: Eine Teilmenge der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist. ∞ = **Tabu** Sie darf also keine Folgen enthalten, die zwar konvergieren, deren Grenzwert jedoch nicht zu der Menge gehört. Auch Folgen, deren Wert „über alle Grenzen wächst (also keinen Grenzwert besitzen)", dürfen nicht enthalten sein. T. Tao: Compactness and Contradiction 2013; **Gebiet = offene Menge = besteht nur aus inneren Punkten**. **Bereich** = kompakte Menge, also mit Abschluss oder Rand. [a,b] **kompakt**. Jede konvergente Folge in diesem Intervall muss auf einen Intervallwert konvergieren. Die halboffenen Intervalle]a,b], [a,b[und das offene Intervall]a,b[sind **nicht kompakt**, da sie nicht abgeschlossen sind. Es gibt Folgen, die auf einen Randpunkt des Intervalls konvergieren. Die Menge der reellen Zahlen ist **nicht kompakt**, da sie zwar abgeschlossen, aber nicht beschränkt ist. Sie enthält deshalb Zahlenfolgen, von denen jede Teilfolge „über alle Grenzen wächst" (zum Beispiel die Menge der natürlichen Zahlen). **Kufner: Raum und Entfernung** 1981 Kap3;

Vectors in physics:

A. **Reference frame:** The object to which the frame is attached. Orientation of the frame's axis in space

(**directionals** $\hat{e}_i$. Location of the frame's origin $\vec{O}$. Which side of each axis represents the positive direction (Richtungssinn). Earth x=east, y=north, z=upward.

B. **Coordinate system**. Affine (Teilverhältnis & Parallelität invariant) or Cartesian (Winkel invariant). Symmetry: Polar, spherical, cylindrical, elliptic, It is geodetic practice — contrary to the mathematical convention — to let the x axis point to the North and the y axis to the East.

C. **Freier** vector = **parallel** = **kollinear** verschiebbar: homogeneous gravitational field $\vec{g} = -g\,\hat{e}_z$

D. **Gebundener** vector = an bestimmten Anfangs**punkt**/Angriffspunkt gebunden. Force defining a torque $\vec{M}(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{L}(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{p}(\vec{x})$

E. **Linienflüchtiger** vector. Darf nur längs einer Wirkungslinie verschoben werden, niemals parallel. (Central) force $\vec{F}$, $\vec{\omega}$.

Two kinds of vectors depending their transformation behavior under inversion.

F. **Polarer Vektor** oder gewöhnlicher **Vektor** Verschiebung, erfährt bei Orientierungsänderung bei Punktspiegelung/Inversion shift in position by specifying the direction and distance traveled: **Ortsvektor** - gibt es im Riemann-Raum nicht - beschreibt das Wo, den Ort des Teilchens, den momentanen Zustand - geht vom Ursprung aus, $\vec{x}, \vec{r}$. **Verschiebungs-Vektor** - ist eine Form - sagt, wo es hin geht - Tangezialvektor $\vec{p}, \vec{F}, \vec{v}, \vec{E}$ - die rechte Seite der Differenzialgleichung. Militärische Luftraumüberwachung. Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$ Ganz im Sinne eines affinen Raums: Punkte = Zustand = Ortsvektor plus Verschiebung (rechte Seite der Bewegungsgleichung) = Ortsvektor = Zustand oder eine Bewegungsgleichung 1. Ordnung: Verschiebung $\dot{\vec{x}} = f(\vec{x})$ hängt vom Ortsvektor $\vec{x}$ ab. **Polare Vektoren** ergeben sich als Produkt von **Vektor mal Pseudo-Vektor** wie die Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, Coriolis-Kraft $\vec{F} = -2m\vec{v} \times \vec{\omega}$, rot $\vec{H}$. Denn **Nabla** ist polarer Vektor. **Axialer Vektor** = Vektor mal Vektor: rot $\vec{E}$, **magnetische Induktion** $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ Hand & Finch p257. Levi-Civitta-Tensor ist Pseudo-Tensor. **Pseudo-Skalar:** Skalare, die bei **Punktspiegelung**, Raumspiegelung, Inversion, dh, Haas: Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigsten physikalischen Anwendungen 1922 p4, Gans: Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik 1905 p5, Übergang vom Rechtssystem/Korkzieher geht bei Rechtsdrehung in z-Richtung = **englisches System** zum Linkssystem = **französisches System** also Rechte Hand geht in linke Hand (was nur mit zusätzlicher Spiegelung und nicht allein mit orthogonaler Transformation klappt!), ihr Vorzeichen wechseln: Volumina Vol(Inv($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$))= Vol($-\vec{a}, -\vec{b}, -\vec{c}$) = - Vol ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$), Determinante (Zeilenvertauschung), Jacobi-Determinante , Spatprodukt, elektrische Ladung beim Übergang zur Anti-Welt. **Spiegel-Symmetrie** PdN41 H7 p35;

G. **Axialer Vektor zu antisymetrischem Tensor vom Rang 2 dual = Pseudovektor = polarer Vektor × polarer Vektor**= $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$, $-\partial_t \vec{B} = \nabla \times \vec{E}$, $\vec{j} + \partial_t \vec{D} = \nabla \times \vec{H}$, $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ **maskiert oder verschleiert einen antisymmetrischen Tensor 2. Stufe** $\vec{D}$, $\vec{B}$, $\vec{j}$, $\vec{\omega}$, $\vec{S}$, bleibt bei Punktspiegelung unverändert = rolling direction is conserved under inversion: $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$ oder $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ Die **Feldstärke der Elektrodynamik = Feldstärketensor** = Welttensor ist dual zum Sechservektor $(\vec{E}, \vec{B})$ ist von Natur aus ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, was das merkwürdige **Vektorprodukt** der Maxwellgleichungen verschleiert. Landau & Lifschitz: Klassische Feldtheorie p22ff, 71; Einstein: Die Grundlage der ART, Ann der Physik 49 1916 p769-822 = Renn: **Einstein's Annalen Papers. The Complete Collection 1901-1922**, 2005 p518-571; von Laue: Spezielle Relativitätstheorie 1911 p62 Welttensoren; Papapetrou: Spezielle Relativitätstheorie 1972; Weyl: Raum, Zeit, Materie 1918, mit Ehlers Anmerkungen 1993[8] magnet Feldstärke als Vektor mit Schraubensinn = quirlendes Feld ist Irrtum p41; Das Vektorprodukt zweier polarer Vektoren ist kein Pfeil oder gerichtete Strecke, sondern ein Flächenstück mit Umlaufsinn, eine **Plangröße**, Budo p577 p546. In SRT haben polare Vektoren 4 unabhängige Komponenten, axiale 6, wie der Feldtensor $F(E, B)$. Im $\mathbb{R}^3$ haben beide 3 unabhängige Komponenten! Pierre Curie: **Polarer Vektor ist Strecke mit Richtung und axialer Vektor ist Fläche mit Umlaufsinn.** Segre: Die gr. Physiker Bd2 1980 p45; von Laue: Spezielle Relativitätstheorie 1911 p68; Inneres Produkt oderSkalarprodukt zweier polarer Vektoren ist Skalar, von polarem und axialem ist Pseudoskalar $w = \vec{E} \cdot \vec{D}/2$ oder $w = \vec{B} \cdot \vec{H}/2$

Mie: Elektrodynamik. Handbuch der Experimenetalphysik 1932 p7 elektrischer Zustand = polarer Vektor = Kraftrichtung, magnetische Zustand axialer Vektor = Feilspäne = kleine Magnete = kraftlose Richtung! **Täubert: Elektrizitästlehre** 1976, 1979 p117ff $\vec{D}$ beschreibt das elektrische Feld also Quelle/Senke. Kompensiere dessen Wirkung an einem Raumpunkt durch kompensierende Kondensator-Felder. Indikator wäre kraftfreie Ladung. $\vec{E}$ misst Kraftwirkung auf Probeladung. Analog wäre Kraftwirkung eines Magnetfeldes auf Ladung, die muss aber gemäß Lorentz-Kraft $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ **quer** bewegt sein! Magnetfeldmessung an einen Ort nutzt aber Strom, so dass $\vec{D}$ und $\vec{H}$ hinsichtlich der Messvorschrift einander entsprechen. Oerstedt 1820 = Strom beeinflusst ruhende Magnetnadel, nicht aber ruhende Ladung! Daher muss es neben $\vec{E}$ oder $\vec{D}$ noch eine magnet Feldstärke $\vec{H}$ geben. Gestreckte Spule der Länge L, Windungszahl N und Strom I hat im Inneren $\vec{H} = \frac{NI}{L}\hat{z}$ oder gerader Leiter $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\hat{\varphi}$. Zur Messung von $\vec{H}$ werden die Felder mit feldmachenden Strömen kompensiert. Sommerfeld: Bd3 p10 B=Kraft/Polstärke, H=Polstärke/Fläche. Magnetisches Moment= $m = IA = Pl$ = Polstärke mal Abstand. **Idee der Feldlinie:** Gradientenfeld = Feldlinie von $\vec{B}$ senkrecht zur Niveaufläche, also totales Differenzial des Feldes verschwindet. $0 = \mathrm{d}B = B_x \mathrm{d}x + B_y \mathrm{d}y$. **Feldlinienberechnung** aus $\vec{B}(x,y) = (B_x, B_y)$ per Anstieg bei (x,y) mit $\frac{\mathrm{d}B_y}{\mathrm{d}B_x} = \frac{B_y}{B_x}$. **Geometrische Interpretation der Methode der Charakteristiken:** Geometrisch kann das Vorgehen wie folgt beschrieben werden. Die Lösungsfunktion $u = u(x,t)$ führt zu Flächengleichungen $z = u(x,t)$ im Raum der Koordinaten (x,t,z) (Integralflächen). Eine solche **Integralfläche hat den Normalenvektor**: $\vec{N} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}, -1\right)$ und die PDE besagt geometrisch, dass das Vektorfeld $\vec{X}(x,t,z) = (Q(x,t,z), P(x,t,z), R(x,t,z))$ der Charakteristiken auf $z = u(x,t)$ tangential zur Integralfläche $z = u(x,t)$ ist, denn das Skalarprodukt des Vektorfelds $\vec{X}(x,t,z)$ mit dem Normalenvektor $\vec{N}(x,t,z)$ verschwindet: $\vec{X} \cdot \vec{N} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot Q + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot P + (-1) \cdot R = 0$. Die Lösungen der PDE sind Integralkurven des Vektorfeldes $\vec{X}(x,t,z)$ (im Teilraum der x,t sind das die Charakteristiken). In einer Parameterdarstellung der Integralkurve mit Parameter τ ergeben sich die Gleichungen: $\vec{X} = (Q,P,R) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)$ für die Charakteristiken = Lagrange-Charpit-Gleichungen: $\frac{\mathrm{d}x}{Q} = \frac{\mathrm{d}t}{P} = \frac{\mathrm{d}z}{R}$. Haas: Einf in die theoret Physik Bd1 1930 Feldlinienidee p118; Päsler: Grundzüge der Vektor- und Tensorrechnung 1977 gbook p45 Gemäß **Longitudinatätsbedingung** ist jedes Feldlinienstück $\mathrm{d}\vec{r}(\vec{r})$ parallel zum Feldvektor $\vec{F}(\vec{r})$. Aus $\mathrm{d}\vec{r}(\vec{r}) \parallel \vec{F}(\vec{r})$ folgt $\mathrm{d}\vec{r}(\vec{r}) \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0}$. Quantity that transforms like a vector under a proper rotation, but gains an additional sign flip under an improper rotation. A transformation that can be expressed as an inversion followed by a proper rotation: $\vec{B}, \vec{H}, \vec{\omega}, \vec{L}$ magnetic field, torque, vorticity, and the angular momentum. Generated by vector $\vec{v}$ cross vector, $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$, or by pseudovector cross pseudovector. Often, the distinction between vectors and pseudovectors is overlooked, but it becomes important in understanding and exploiting the effect of symmetry on the solution to physical systems. For example, consider the case of an electrical current loop in the z=0 plane: this system is symmetric (invariant) under mirror reflections through the plane (an improper rotation), but the magnetic field is anti-symmetric (flips sign) under that mirror plane—this contradiction is resolved by realizing that the mirror reflection of the field induces an extra sign flip because of its pseudovector nature. To the extent that physical laws are the same for right-handed and left-handed coordinate systems (i.e. invariant under inversion), the sum of a vector and a pseudovector is not meaningful. However, the weak force, which governs beta decay, does depend on the chirality of the universe, and in this case pseudovectors and vectors are added.

Hodge star operator: $*\colon \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^{n-k}(V^*)$. Beispiel: Ist $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine positiv orientierte Orthonormalbasis von V und $\{e^1, \ldots, e^n\}$ die dazu duale Basis von V^*, so ist $*(e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^k) = e^{k+1} \wedge e^{k+2} \wedge \cdots \wedge e^n$. Sei $\{x,y,z\}$ die orientierte **Standardbasis** von $\mathbb{R}^3$ und $\{\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z\}$ die entsprechende **duale Basis**. Die Elemente $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ können dann als Differentialformen verstanden werden. Für den Hodge-Stern-Operator $\star$ gilt dann $\star\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$, $\star\mathrm{d}y = \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$ und $\star\mathrm{d}z = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. **Levi-Civitta-Symbol:** Speziell für $\vec{L} \in \mathbb{R}^3$ kommt man mit $(*\vec{L})_{ij} = -\epsilon_{ijk} L_k$ zu Matrizen im $\bar{\bar{L}} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ und umgekehrt $(*\bar{\bar{L}})_k = -\epsilon_{ijk} L_{ij} \in \mathbb{R}^3$.

von Westenholz: Differential Forms in Mathematical Physics 1978; Kraftfeld als Pfaffsche Form oder Differentialform 1. Ordnung. Pfaffsche Form $\frac{1}{T}\overrightarrow{\delta Q}_{rev}$ die Entropie als Stammfunktion S, . Baez & Muniain: Gauge Fields, Knots and Gravity 1994; Wright: Invariants of quadratic differential forms 1908; **Veblen: Invariants of quadratic differential forms** 1927; Bachman: A geometric approach to differential forms 2006, 2011[2]; **Vargas: Differential Geometry for Physicists and Mathematicians. Moving Frames and Differential Forms. From Euclid Past Riemann** 2014; Domingos: Geometrical Properties of Vectors and Covectors: An Introductory Survey of Differentiable Manifolds, Tensors and Forms 2006; **Deschamps: Exterior differential forms** p111-161 In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; **Talpaert: Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics** 1993, 2001; Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 p365f; Bartocci, Bruzzo eds: Differential Geometric Methods in Theoretical Physics LNP375 1991; **Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis** 1947, 1956, 1967; **Bressoud: Second year calculus** 1991 p82 und Edwards: Advanced calculus 1969 p20 **Pull back**-Idee; Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos 1998 p461ff; Ein kovarianter schiefsymmetrischer Tensor n-ter Stufe auf einer N-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ heißt Differenzialform n-ten Grades oder kurz eine n-Form auf $\mathcal{M}$. Ist κ ein lokales KS für $\mathcal{M}$, so stellt

$$\varphi = \sum_{i_1<\cdots<i_n} \Phi_{i_1,\ldots,i_n}\, \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_n}$$

die kanonische Darstellung der n-Form φ in diesem KS dar. Duistermaat: Fourier integral operators 1996 Differenzialformen p49; **Hans J. Dirschmid: Tensoren und Felder** 1996 Uni 537 Seiten; **Talpaert: Tensor Analysis and Continuum Mechanics** 2010; **Parallelverschiebung** auf Mannigfaltigkeiten p325; **Sternberg: Curvature in Mathematics and Physics** 2012; Straumann: General Relativity and Relativistic Astrophysics 1984, Lotze: Vektor- und Affinor-Analysis 1950; Tensor = **Affinor**

Arnold: Meth Methoden der klassischen Mechanik 1988; Christian **Lessig: A Primer on Differential Forms** 2012 arXiv:1206.3323; **Bott & Tu: Differential Forms in Algebraic Topology** 1995; Agricola & Friedrich: **Vektoranalysis: Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik** 2010[2]; Kalkül ersetzt Anschauung, aber nicht das Verstehen. Der Gebrauch des Formen-Kalküls ist eine anti-descartische Bewegung, die durch die Geometrie kleiner Elemente - den Formen - und das Rechnen mit diesen kleinen Größen wieder Verstehen durch Anschauung zurückbringt. Baez & Muniain: Gauge Fields, Knots and Gravity 1994; Dray: Differential Forms and the Geometry of General Relativity 2014; Elementar, viele Beispiele bei **Weintraub: Differential Forms: Theory and Practice** 2014; **Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis** 1947, 1956, 1967; **Henri Cartan & Rolf Walter: Differentialformen** mit Aufgaben 1974: Differenzial-Formen-Intro Eichfelder: `sdw_2009_5_S66.pdf` **Brehmer & Haar: Differenzialformen** 1972; Lang & Pucker, Mathematische Methoden in der Physik; Schafarewitsch: Grundzüge der algebraischen Geometrie 1972 Teil III Differenzialformen; **Königsberger: Analysis II**; Straumann: Thermodynamik 1986; Fleming: Functions of several variables 1977; **Talpaert: Differential Geometry with Applications to Mechanics and Physics** 1993, 2001; **Frankel: The Geometry of Physics**. An Introduction 2011[3] 750 Seiten Jänich: Mathematik I & II; **Arens at al.: Ergänzungen und Vertiefungen 2009 Kap27.3;** Bronstein: TB der Mathematik, Teil2; Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik, ab 2005[9] auch Differenzialformen; Schafarewitsch: Grundzüge der algebraischen Geometrie 1972 Teil III Differenzialformen;

Straumann: General relativity and astrophysics 1991 p27 Differenzialformen; Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 p365f; Sergei Petrovich Novikov *1938 & *1945 Anatoli Timofejewitsch **Projekt Neue Chronologie = Datierungen christlicher Zeitrechnung im 16. Jahrhundert weitestgehend unrichtig festgelegt = die letzten 2000 Jahre sind auf 1000 Jahre zu kürzen!** Fomenko: Basic elements of differential geometry and topology 1990; **Edwards: Advanced Calculus - A Differential Forms Approach 1994**; Flanders: Differential Forms and Applications 1969; Slebodzinski: Exterior Forms and Their Applications 1970; **Ẽdelen: Applied Exterior Calculus** 1985; Heil: Differentialformen; Schreiber: Differential Forms 1977; Römer und Forger: Elementare Feldtheorie 1993; Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos 1998 p461ff; Lovelock & Rund: Tensors, Differential Forms and Variation Principle **Elementar:** Schroeder: Vektor- und Tensorpraxis 2009; **Struik: Lectures on Classical Differential Geometry** 1969[2]; **do Carmo: Differential Forms and Applications** 1994; **Spivak: A Comprehensive Introduction to Differential Geometry** Vol1; Ismo V. Lindell: Differential forms in electromag Wiley IEEE; **Bressoud: Second year calculus 1991** hierin gegebene Referenzen sind super!; Straumann: General Relativity and Relativistic Astrophysics 1984, **Sternberg: Curvature in Mathematics and Physics** 2012; Haack: Elementare Differentialgeometrie 1955; **Wang:** Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism 1969; **Walter Thirring:** Lehrbuch der Mathematischen Physik, Bd1-4; Harper: Analytical Methods in Physics 1999 Kap12.9, p310; **Kerner & von Wahl: Mathematik für Physiker** 2007 van der Waerden: Mathematik für Naturwissenschaftler 1975; **Fischer: Mathematik für Physiker 3:** Variationsrechnung, Differentialgeometrie, Ahsan: Tensors. Mathematics of Differential Geometry and Relativity 2015; Osgood: A First Course in the Differential and Integral Calculus 2015; **Göckeler & Schücker: Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity** 1987; **Mathematische Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie** 2006; e-book: http://www.springerlink.com/content/pp3922/ **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical Methods** 2008; **Steeb: The nonlinear workbook. Chaos, Fractals, Cellular Automata, Neural Networks, Genetic Algorithms, Gene Expression Programming, Support Vector Machine, Wavelets, Hidden Markov Models, Fuzzy Logic with C++, Java and SymbolicC++ Programs** 2008[4] http://issc.uj.ac.za/; New topics added to the fifth edition 2011 are Langton's ant, chaotic data communication, self-controlling feedback, **differential forms and optimization, T-norms and T-conorms with applications** p304 ff;

Äußeres, Grassmann-, kombinatorisches, Dach-, Keil- oder Wedge-Produkt: doCarmo p5 **Beispiele:** Bachman: A geometric approach to differential forms 2006, 2011[2]; a) Berechnen Sie das Produkt der 1-Form $\omega = x_1\,dx_1 + x_1\,dx_1 + x_1\,dx_1$ mit der 2-Form $\phi = x_1\,dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$.
$\omega \wedge \phi = (x_1x_3 - x_2)\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.

doCarmo Differential forms and applications 1994 p6; b) Obgleich $dx_i \wedge dx_i = 0$ gilt, so gilt dies nicht für jede Form $\omega \wedge \omega = 0$. Geben Sie ein entsprechendes Gegenbeispiel für ω an. $\omega = x_1\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + x_2\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_4$ oder $\omega_0 \wedge \omega_0 = 1$.

Fomin p75, 191 Heil c) Geben Sie die äußere Ableitung der 1-Form $\omega = 13\,x\,dx + y^2\,dy + x\,y\,z\,dz$ an. $\mathrm{d}\omega = z(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y) \wedge dz$

Fomin p75, 191 d) Geben Sie die äußere Ableitung der 2-Form $\omega = z^2\,dx \wedge dy + (z^2 + 2\,y)dx \wedge dz$ an. $\mathrm{d}\omega = 2(z-1)dx \wedge dy \wedge dz$.

Differentialgleichungen und Symmetrien in der Sprache der Differenzialformen, Stephani: Dgls

Differenzialformen in der Thermodynamik Landsberg: Thermodynamics and statistical mechanics; Straumann: Thermodyn 1986; **Differenzialformen in der Elektrodynamik**: **Bressoud: Second year calculus 1991**; **Sternberg: Curvature in Mathematics and Physics** 2012; Jose & Saletan Chap9.1.3; Rasband: Dynamics 1983 p190 **Jost: Elektrodynamik** im Differenzialformen-Kalkül 1976; Baez & Muniain: Gauge Fields, Knots

and Gravity 1994; Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 p365f; Baylis: Electrodynamics. A Modern Geometric Approach 1999; **Scheck: Klassische Feldtheorie** p96ff; **Elektrische Feldstärke** $\overset{1}{\omega}_{\vec{E}} := E_1(t,\vec{x})\mathrm{d}x^1 + E_2(t,\vec{x})\mathrm{d}x^2 + E_3(t,\vec{x})\mathrm{d}x^3$, **magnetische Induktion** $\overset{2}{\omega}_{\vec{B}} := B_1(t,\vec{x})\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + B_2(t,\vec{x})\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + B_3(t,\vec{x})\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$, **elektrische Verschiebung** $\overset{2}{\omega}_{\vec{D}} := D_1(t,\vec{x})\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + D_2(t,\vec{x})\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + D_3(t,\vec{x})\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$, **magnetische Feldstärke** $\overset{1}{\omega}_{\vec{H}} := H_1(t,\vec{x})\mathrm{d}x^1 + H_2(t,\vec{x})\mathrm{d}x^2 + H_3(t,\vec{x})\mathrm{d}x^3$, **Ladungsdichte** $\overset{3}{\omega}_{\rho} := \rho(t,\vec{x})\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3$, **Stromdichte** $\overset{2}{\omega}_{\vec{j}} := j_1(t,\vec{x})\mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + j_2(t,\vec{x})\mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + j_3(t,\vec{x})\mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$. **Maxwell'sche Gleichungen:** $\mathrm{d}\,\overset{2}{\omega}_{\vec{B}} = 0$, $\mathrm{d}\,\overset{1}{\omega}_{\vec{E}} + \partial_t\,\overset{2}{\omega}_{\vec{B}} = 0$, $\mathrm{d}\,\overset{2}{\omega}_{\vec{D}} = \overset{3}{\omega}_{\rho}$, $\mathrm{d}\,\overset{1}{\omega}_{\vec{H}} - \partial_t\,\overset{2}{\omega}_{\vec{D}} = \overset{2}{\omega}_{\vec{j}}$. **Kontinuitätsgleichung:** $\partial_t\,\overset{3}{\omega}_{\rho} + \mathrm{d}\,\overset{2}{\omega}_{\vec{j}} = 0$. Im **Minkowski-Raum** aber Scheck: Klassische Feldtheorie p131f: $\omega_F := \sum_{\mu<\nu} F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x^0 \wedge \overset{1}{\omega}_{\vec{E}} - \overset{2}{\omega}_{\vec{B}}$ mit $\mathrm{d}x^0 = ct$, also $\omega_{\vec{E}} = \overset{2}{\omega}_{\vec{E}} = E_i(t,\vec{x})\mathrm{d}x^0 \wedge \mathrm{d}x^i$ und $\omega_{\vec{B}} = \overset{2}{\omega}_{\vec{B}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B_i(t,\vec{x})\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k$. a) Zeigen Sie, dass die äußere Ableitung für die geschlossene 2-Form der magnetischen Induktion $0 = \omega_B = B_x\,dy \wedge dz + B_y\,dz \wedge dx + B_z\,dx \wedge dy$ auf den bekannten Ausdruck für die Divergenz-Freiheit der magnetischen Induktion führt.

Sexl & Urbantke §7.2 p198; Meetz p547; **Schutz: Geometrical Methods of Mathematical Physics** 1980 p175; b) Betrachten Sie die Gleichung $\vec{D} = \epsilon\,\vec{E}$ im Formenkalkül. Welche Formen repräsentieren die einzelnen Größen der Gleichung? Ganz in Anlehnung an die physikalische Definition der Größen gilt, weil auf Flächendurchflutung bezogen: $D^i\hat{e}^j \wedge \hat{e}^k$ mit $[i,j,k]$ ist ungerade 2-Form, wie auch $\vec{B}$ und $\vec{j}$. Wang: Mathematical Principles of Mechanics and Electromagnetism II 1979, Meetz & Engl: Elektromagnetische Felder: Mathematische und physikalische Grundlagen 1980 p547; Römer p147; Schutz p175ff $\overline{D} = \epsilon . * \overline{E}$ mit $\overline{E} \in$ 1-Form $\overset{*}{\to}$ 3-2=2-Form. $H^i\hat{e}^i$, also $\vec{H}$ und $\vec{E}$ sind gerade 1-Formen, weil auf 1-dimensionale Wirkungslinie bezogen.

Wang B; Thirring 2; c) Gegeben sei das relativistische elektromagnetische Feld als 2-Form $\Phi = (E^1\,\hat{e}^1 + E^2\,\hat{e}^2 + E^3\,\hat{e}^3) \wedge \hat{e}^4 + (B^1\,\hat{e}^2 \wedge \hat{e}^3 + B^2\,\hat{e}^3 \wedge \hat{e}^1 + B^3\,\hat{e}^1 \wedge \hat{e}^2)$ und das entsprechende Potenzial als 1-Form $\Pi = A^1\,\hat{e}^1 + A^2\,\hat{e}^2 + A^3\,\hat{e}^3 + \phi\,\hat{e}^4$. Welche **Maxwellschen Gleichungen** werden im **Cartan-Kalkül** durch $d\Phi = \vec{0}$ und $d\Pi = \Phi$ repräsentiert? **Frankel: The Geometry of Physics**. An Introduction 2011^3 p118ff;

Satz von Poincare: $\mathrm{d} \wedge \mathrm{d} \wedge \omega = \mathrm{dd}\omega = \mathrm{dd} = \mathrm{div\,rot} = \mathrm{rot\,grad} = \vec{0} = 0$. Spezialfälle von $dd\omega = 0$ sind $\mathrm{rot\,grad}\,f = \vec{0}$ und $\mathrm{div\ rot}\,\vec{a} = 0$

0-Formen: Jänich II p254ff;

$\Omega^0 X \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1 X \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2 X \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^3 X$

$f(\vec{x}) \in \mathbb{R}^1 \xrightarrow{\mathrm{grad}} \vec{a}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\mathrm{div}} \beta \in \mathbb{R}^1$

Dachprodukt mit einer Nullform (Funktion) $f \in \Omega^0(M)$ ist das einfache Produkt $f \wedge \eta = f\,\eta$. **Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis** 1947, 1956, 1967; **Brehmer & Haar: Differenzialformen** p139: Stufe der Differenzialform ist st ω. Form 0. Stufe ist **Funktion**. Form 1. Stufe ist **totales Differenzial**. Form n. Stufe ist **Jacobi-Determinante**. Die Nullform $1 \in Alt^0V = \mathbb{R}$ erfüllt $1 \wedge \omega = \omega$ für alle $\omega \in Alt^rV$. Jänich: Vektoranalysis p139, 136. Marsden & Tromba: Vektoranalysis 1995; Basen sind $1, dx, dx \wedge dy$. Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 p365f;

p-Form, Thirring 2 p12

$$\omega = \sum_{i_k} \frac{\omega_{i_1,\ldots,i_p}}{p!}\,e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \ldots e^{i_p}$$

Basis hat nur $\binom{m}{p}$ unabhängige Elemente. Für $p = 0$ sind die p-Formen gewöhnliche Funktionen; für $p > m$ setzt man sie Null, da dann die Antisymmetrie unmöglich ist.

$\omega_0 = 1$, $\omega_0 \wedge \omega_0 = 1$, $\omega_0 \wedge \omega_1 = \omega_0\,\omega_1$.

Äußere Ableitung von $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$ ist einfach $\mathrm{d}\omega = (\partial_x a\mathrm{d}x + \partial_y a\mathrm{d}y + \ldots) \wedge \mathrm{d}x + \ldots$ Man ersetzt z.B. den ersten Summanden $a\mathrm{d}x$ durch das totale Differenzial von a mal $\wedge\mathrm{d}x$.

16 Mechanik/Dgls: Falk, Hamel, Jelitto, Fließbach, Goldstein, Mitter, Straumann & Scheck

Borzeszkowski & Wahsner: Klassische Mechanik und mechanistisches Weltbild, Wifo 28 1978 p12f. **Bergman Basic theories of physics. Mechanics and Electrodynamics** 1949; pV Ph. Franck: Theoretische Physik ist keine Formelsammlung, sondern eine logisch vernetzte Struktur des menschlichen Geistes. Einstein: Ein theoretischer Physiker ist ein Philosoph im Blaumann. **Bergmann: Basic theories of physics. Heat and quanta** 1951; Hattendorff Vorlesungsmitschrift des WS1854/55 WS1860/61 SS1862 = Mercier: Principes de mecanique analytique 1958; Martienssen: Einführung in die Physik Bd1 Mechanik 1969; Martienssen: Einführung in die Physik Bd2 Elektrodynamik 1969; **Volz: Einführung in die theoretische Mechanik** Bd1 Mechanik der Kräfte 1971; Volz: Einführung in die theoretische Mechanik Bd2 Lagrange- und Hamiltonsche Mechanik und die Wurzeln der Quantentheorie 1972; Wolfgang Bibel: Reflexionen vor Reflexen. Memoiren eines Forscher 2017; Likharev: Classical Mechanics. Lecture notes 2018; Likharev: Classical Mechanics. Problems with solutions. Problems with solutions 2018; Budde: Allgemeine Mechanik der Punkte und Starren Systeme, Vol. 1 2018; H̃onerkamp: Denken in Strukturen und seine Geschichte. Von der Kraft des mathematischen Beweises 2018; P̃letser: Lagrangian and hamiltonian analytical mechanics. Forty exercises resolved and explained 2018; Fließbach: Die relativistische Masse 2018; Sorenssen: Elementary Mechanics Using Python. A Modern Course Combining Analytical and Numerical Techniques 2015; Chang: Geometry, Mechanics, and Dynamics. The Legacy of Jerry Marsden 2015; Tomé & de Oliveira: Stochastic Dynamics and Irreversibility 2015; Cveticanin: Strongly nonlinear oscillators. Analytical solutions 2014; H̃elliwell & Sahakian: Modern Classical Mechanics 2020 Quantenmechanik, Eichsymmetrie, Black hole, Elektrodynamik; Bartlett: Classical and Modern Mechanics 1925; Burghes & Downs: Modern Introduction to Classical Mechanics and Control 1975; Barger & Vernon: Classical Mechanics. A Modern Perspective 1973; **T̃orres del Castillo: Differentiable Manifolds**. A Theoretical Physics Approach 2012; **Woodhouse: Introduction to Analytical Dynamics** 2009; **Wess: Theoretische Mechanik** aus algebraisches Sicht 2008 Methode der Green'schen Funktion, Noether-Satz-Anwendung, Dalitz-Plot, Residuen-Satz, Ausdehnung fester Stoffe als Funktion der Temperatur.; **Dreizler & Lüdde: Theoretische Physik 1. Theoretische Mechanik** 2008; **Õliva: Geometric mechanics** 2009; S̃antra: Einführung in die theoretische Physik. Klassische Mechanik mit mathematischen Methoden 2019; **Riemann: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik** 1869[1],1882[3], Fritz Emde 1873-1951 1938[4] p2 **A] NewtonII = Dgl. Begriff der beschleunigenden Kraft**, Begriff einer einfachen Bewegungsursache, **B] Begriff eines anziehenden Centrums. G̃eiger & Scheel: HdP Bd4 und Bd5 Mechanik** 1926; Konopinski: Classical Descriptions of Motion 1969; **Marion: Classical dynamics of particles and systems** 1970; McCuskey: An introduction to advanced mechanics 1959; McCuskey: Introduction to Celestial Mechanics 1963; Wangsness: Introduction to theoretical physics. Classical mechanics, and electrodynamics 1963; Rajeev: Advanced Mechanics B̃lass: Theoretical physics 1962; Lindsay & Margenau: Foundations of physics. Fundamental concepts of physical theory explained. Foundations, background ideas, meaningfulness of data and tools of modern sciences 1936, 1957; H̃auser: Introduction to the Principles of Mechanics 1965; Slater & Frank: Mechanics 1947; L̃indsay: Mechanics 1961; B̃ecker: Introduction to theoretical mechanics 1954; Symon: Mechanics 1960, 1971; Mestscherski: Aufgabensammlung zur Mechanik. Hochschulbücher für Physik Bd13 1955; Neuber: **Lösungen zur Aufgabensammlung Mestscherski**. Hochschulbücher für Physik Bd19 1956; Krbek: Grundzüge der Mechanik. Lehren von Newton, Einstein und Schrödinger 1954; Pädagogische Hochschule wurde 1946 noch für Groß-Berlin/Berlin-Mitte gegründet. Kalter Krieg. West: 1948-1980 Lankwitz, dann FU und TU. Ost: HUB, Teile 1951 nach PH Potsdam. 1948 BLH → 1951 PH Potsdam → 1971 PHP Karl-Liebknecht → 1990 BLH → 1991 Uni Potsdam. Dokumente und Materialien zur Lage in der CSSR, PH Potsdam August 1968; Am Rande der durch militärischen Drill geprägten Garnisionstadt Potsdam wurde eine durch ideologisch geprägten Drill rote Lehrerbildungsstätte mit Kampf-

gruppe, Wehrsport, Zivilverteidigungslagern und Parteilehrjahr gegründet. Im Unterschied zu volkseigenen Betrieben oder der AdW war für eine straffe SED-Führung und enge MfS-Begleitung gesorgt. Büro für konspirative Treffen z.B. im Haus 8 am Neuen Palais, jetzt Raum des Prüfungsamts. Man wurde durch das MfS telefonisch einbestellt oder zur Klärung eines Sachverhalts vorgeladen. **Ludwig Brehmer: Geschichte der Hochschule in Potsdam-Sanssouci Band 9**. Gründung und Gründer der **Hochschul-Physik** in Potsdam Sanssouci 1948-1993, 2022; Gründer Hans-Wolfgang Kölle 1948-50 Höhenwindkraft, **Johannes Picht** 1897/1949-1962/1973, Picht 1897-1973 PhysBl30 1974 p125, 1925 PhD bei Laue, 1928-30 AOP Einstein-Stiftung, 1932-45 TH Berlin-Charlottenburg, **Picht: Einführung in die Theorie der Elektronenoptik** 1939; 1949-62 PH Potsdam, Wohnung Stubenrauchstr. Otto Toepfer (1845–1914), Gehilfe bei Edmund Hartnack 1826-1891 in Potsdam, 1873 gründete er seine eigene Werkstatt und war zunächst hauptsächlich Zulieferer Hartnacks. Dann optisch-feinmechanische Geräte für Geomagnetismus, Spektroskopie/AOP. Daraus gründet sich Askania. **Picht: Vorlesungen über Atomphysik** Bd1/2 1956/7; Robert Rompe 1905-1993, **Fritz-Joachim Schütte: Schütte 1924-2014** lehrt seit 1950 Rechenmethoden nebst Picht-Vertretung, baut mit Melcher u.a. F-Praktikum auf und ab 1954 Fernstudium-Material 2000 Seiten: **Lehrbriefe für das Fernstudium der Lehrer, Theoretische Physik**, Das Begriffssystem der Physik - Einleitung zum Lehrgang der Theoretischen Physik 1971, Teil A = Physik der **Teilchen** 1966. Teil B = Physik der **Felder** Kapitel 1 und 2 in UB Golm, 3, 4, 5 und 6, 7, Potsdam 1965; Picht und Schütte teilen das Schicksal - sie ließen sich nicht vereinnahmen und erlebten beim Renteneintritt eine politische Wende: Mauerbau und Zusammenbruch der DDR. **Schütte** ist letzter Vorsitzender der Gesellschaft für Verantwortung in der Wissenschaft und erhält 2004 **Max Born-Medaille für Verantwortung in der Wissenschaft**. Auch Prof. Schütte konnte sich dem demütigenden monatlichen Parteilehrjahr nicht entziehen. Er saß die 90 Minuten wie versteinert als Mahnung ab. **Themen des Parteilehrjahrs:** 1983/84: Grundlehren der marxistisch-leninistischen Philosophie. 1985/86: Grundprobleme der politischen Ökonomie des Sozialismus und der ökonomischen Strategie der SED. 1987/88: Leninsche Theorie über den Imperialismus. Die offensichtlichen Ursachen des bevorstehenden Zusammenbruchs des sozialistischen Lagers waren Tabu. Das Parteilehrjahr war auch für parteilose Lehrende verpflichtend. Dr. Stöckel 1928-2015 machte sich den Spaß, einen ND-Leitartikel grammatikalisch zu disqualifizieren. Es war unterhaltsam. Stöckel: Ergänzungen und Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Bd2 §15-31 1969; Kuhn, Stöckel & Glaßl: **Mathematische Hilfsmittel der Physik** 1995[5]; Stöckel: Full Poincare-invariant equation of motion for an extended charged particle in an electromagnetic field https://arxiv.org/pdf/math-ph/0702015.pdf; **Otto Singer** 1915/1948-1950/1977 lehrte Astronomische Geographie, ab 1966 Treders Stellvertreter Sternwarte Babelsberg = Inst f relat und extragal Forschung der DAW; **Heinz Schmellenmeier** 1909/1951-1956/1994 AdW Gasentladung in Orangerie des Neuen Gartens 1956-1961 Schmellenmeier: Besiegte Dämonen 1970; Jürgen Hanspach *1940-. Schmellenmeier 1909-1994 war Freund von Houtermans 1903-1966 und Richard Gans 1880-1954; **Schmellenmeier: Technologie elektronischer Bauelemente** 1970; Schmellenmeier: Die Naturwissenschaften im gesamtgesellschaftlichen System, gezeigt an Beispielen aus der Physik 1970; Brehmer 1939/1961-1971 und 1991-201? Reinstlabor Heizhaus Haus 19 = S-Gebäude. **Ab 1948 erste Physikstudenten Melcher 192?-202? und Klebe 1928-20??**, **K̃lebe: Keine Schonzeit für Rehe** 20??; Klebe: Die Sprache der Zeichen und Bilder 1984; Klebe: Durch die Augen in den Sinn 1987, 1992; Klebe: Die sieben Farben des Regenbogens 1994; **Welsch & Liebmann: Farben. Natur, Technik, Kunst** 2006[2]; Cyanidin, Anthocyanidine, kationischer Pflanzenfarbstoff. Blaufarbene Blüten und Früchte. Cyanidin verformt sich je nach pH-Wert der Umgebung und ändert Farbe. Lackmus-Test: Sauer pH=2 Absorptionsbande bei 500nm bedeutet rote Farbe. Basisch pH=8 Absorptionsbande bei 650nm bedeutet blaue Farbe. **Zweiter Jahrgang Horst Hänsel und Germey**, Estel, **Melcher baut 1962 Isotopenlabor auf.** 1965 vom Institutsdirektor Hänsel 1927-202? oder Junghähnel 1926-2004 entlassen, siehe Regenstein, In: Brehmer: Band7 p115f; **Melcher: Relativitätstheorie** 1968, 1974[4]; Melcher: Albert Einsteins Lehrveranstaltungen an der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelm-Uni Berlin, Potsdamer Forschungen, Naturwissenschaftliche Reihe B Heft 14 1978 p53-58 und Wifo 1979 H2 p72ff; Melcher: Addenda zur Einstein-Biographie mit Kommentatoren, Potsdamer Forschungen, Naturwissenschaftliche Reihe B Heft 14 1978 p73-90 mit Patentschriften zu Kältemaschinen; Melcher: Albert Einstein wider Vorurteile und

Denkgewohnheiten 1979; **Melcher: Kernphysik. Nachweis- und Messmethoden**. Eigenschaften, Wirkungen und Anwendungen der Strahlenarten. Radiochemie. Dosimetrie und Strahlenschutz p93-393. In: Friedrich: Handbuch der experimentellen Schulphysik mit **Nuklid-Karte** 1969; Manfred Gläser 1935/1967-1971 Kernstrahlungslabor PHP, dann Landtechnik Bornim, **Gläser: Was ist Radiographie?** 1971 G. Sauer, Wieland Müller, Ewald Gerth; **Friedrich Herneck**[23] **1909/1952-54/1993: Bahnbrecher des Atomzeitalters** 1970[5]; **Hubert Mohr** 1914/1957-1979/2011 Pallottiner. desertiert im April 1944. Nationalkommitee Freies Deutschland. In Gefangenschaft Antifa-Lektor in Krasnodar bis 1949. Seit 1959 IME = Mitarbeiter des Staatssicherheitsdienstes im besonderen Einsatz. Stasi-Medaille in Gold. Mohr: Einführung in das Studium der Geschichte 1966; **M̃ohr: Wer in der Weltgeschichte lebt** 2004; Gerhard Junghähnel 1926/1964-1991/2004 siehe FDP-Potitiker Edgar Swinne 1936-2016 in **Freisinn und Demokratie** Nr. 14 1991; Kurths ab 1992 am Schreibtisch von Junghähnel. **Ludwig Brehmer: Geschichte der Hochschule in Potsdam-Sanssouci Band 7** 2017 p100ff Mikelskis über Pazifismus und Panzer, p115-120 Regenstein Isotopenlab und Melcher-Rauswurf; Regenstein: Albert Einstein über sich selbst als Schüler und Student, Potsdamer Forschungen, Naturwissenschaftliche Reihe B Heft 14 1978 p29-40; Interviews von Sylvie Paycha 2018 und Elke Rosenberger 2020: Zeitzeugen der Wende am Mathematischen Institut in Potsdam 2018-2020 Andreas Braunß, Läuter, Werner Neumann, Regenstein, Schulze, Tiebel, Horst Wendland, https://www.math.uni-potsdam.de/institut/zeitzeugen-der-wende; Schulze, Bert-Wolfgang: Erlebnisse an Grenzen - Grenzerlebnisse mit der Mathematik 2013; Benno Klotzek 1937-2???: Geboren jenseits der Oder. Autobiografische Erinnerungen an eine Kindheit und Jugend 2006; **Ames & Murnaghan: Theoretical mechanics** 1929; Hosemann: Mechanik spinfreier Teilchen. Die Hamilton'sche und Schrödinger'sche Bedingung. Vertrautheit vs Anschaulichkeit. PhysBl13 1957 109ff; K̃lein: Einleitung in die analytische Mechanik 1886; Szabo: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen 1987[3] Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung. Leider fehlen hier die grundlegenden Ansätze zur Begründung der Trägheit von Weber 1846, Riemann 1864, Weyl 1918; K̃irchhoff: Vorlesungen über mathematische Physik, Digisat, Bd1 = Mechanik 1877, Bd2 = Optik 1891, Bd3 = Electricität und Magnetismus 1891, Bd4 = Wärme 1891; Rompe1905-95 Treder1928-2006; **Rompe & Treder: Zur Grundlegung der theoretischen Physik.** 1984 Beiträge von Helmholtz = Bd1 Abt1 und Hertz: Einleitung zur Mechanik. **Helmholtz: Vorlesungen über theoretische Physik.** Bd1, 1.Abt = **Einleitung zu den Vorlesungen über Theoretische Physik**. 50 Seiten von König und Runge 1903; Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] 380 Seiten = WS1893/94 Helmholtz: Vorlesungen Bd2 Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen 248 Seiten 1902; Helmholtz: Vorlesungen Bd3 Mathematische Prinzipien der Akustik 1898 256 Seiten; Helmholtz: Vorlesungen Bd4 Elektrodynamik und Theorie des Magnetismus 1907 = WS1888 406 Seiten; Helmholtz: Vorlesungen Bd5 Elektromagnetische Theorie des Lichtes 1897 370 Seiten; Helmholtz: Vorlesungen Bd6 Theorie der Wärme 1903 von Sommer 1890 und 1893 418 Seiten; = Hermann von Helmholtz Gesammelte Schriften IV.1bis5 2002 = UB Potsdam; Schiemann: Ein letzter Gigant der Wissenschaft, PhysJ20 2021 H10 p29-34 = https://www.pro-physik.de/nachrichten/helmholtz-ein-gigant-der-wissenschaft; Brüche: Aus der Vergangenheit der Physikalischen Gesellschaften III - Die Epoche von Hermann von Helmholtz, PhysBl17 1961 p27-33; C̃ahan: Helmholtz. Ein Leben für die Wissenschaft 2021; Koenigsberger & Dörflinger: Helmholtz 1902 Digisat 2012 bit.ly/ Recover per http://checkshorturl.com/expand.php http://bit.ly/3khySwG = http://histmath-heidelberg.de/htmg/HHelmholtz.htm Stock & Lemmerich: Hermannn von Helmholtz. Ein Wegbereiter der wissenschaftlichen Psychologie 2021 bit.ly/3nKtLHA; Planck: Einführung in die Allgemeine Mechanik. Zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht 1920[2] p57 zum Potenzial eines gelade-

[23] 1940 NSDAP. 1946-1952 Lehrer an der Landesparteischule der SED Brandenburg und von 1952-1954 Dozent für Dialektischen Materialismus an der Pädagogischen Hochschule „Karl Liebknecht" Potsdam. Ab 1954 HUB, wo er 1958 unter dem Vorwurf des Revisionismus aus dem Institut f Philosophie gedrängt wird. Grund: Arbeiten zu dem Chemiker Wilhelm Ostwald und zu Ernst Mach 1956 sowie seine Unterstützung der Positionen von Robert Havemann. 1967-1974 Professor für Geschichte der Naturwissenschaften der HUB. Siehe Karl-Friedrich Wessel, Martin Koch: Lügen ist überhaupt das Kennzeichen unserer Zeit. Über einen unveröffentlichten Briefwechsel zwischen Max Born und Friedrich Herneck. **Born: Es ist Unsinn, alle Kultur auf Lenin oder den dialektische Materialismus zurückzuführen. Sozialismus funktioniert nicht! Die Methoden der Diktaturen sind nicht akzeptabel, weder Berliner Mauer, noch Verfolgung Andersdenkender.**

nen Stabes $\int \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \int \mathrm{d}z \frac{(z+\sqrt{z^2+\rho^2})}{(z+\sqrt{z^2+\rho^2})\sqrt{z^2+\rho^2}} = \int \mathrm{d}z \frac{\frac{(z+\sqrt{z^2+\rho^2})}{\sqrt{z^2+\rho^2}}}{z+\sqrt{z^2+\rho^2}} = \log(z+\sqrt{z^2+\rho^2})$ also wie Greiner Bd3 p43 aus großer Entfernung $\int_{-l}^{+l} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z^2+\rho^2}} = \log \frac{l+\sqrt{l^2+\rho^2}}{-l+\sqrt{l^2+\rho^2}} = \log \frac{(l+\sqrt{l^2+\rho^2})^2}{\rho^2} \overset{\rho \ll l}{=} \log \frac{4l^2}{\rho^2} = 2\log\frac{2l}{\rho}$ Picht-Exemplar. Landau & Kitaigorodski: Physik für alle Bd1 Mechanik 1978, 1981; Chetaev: Theoretical mechanics 1987, 1989; Süßmann: Theoretische Mechanik Pt1 1966; **Sudarshan & Mukunda: Classical Dynamics. A Modern Perspective** 1972, 2015 Kap13 Lie-Gruppen und -Algebren; Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd1 Einführung. Elementare Mechanik und Kontinuumsphysik 1961 Physikausbildung pVff mit Hinweis auf K̃ramers: Die Grundlagen der Quantenmechanik 1937, K̃ramers: Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung 1937; Kramers: Quantum mechanics 1957; Ter Haar: Master of Modern Physics. The Scientific Contributions of H. A. Kramers 1997, Besselfunktionen p128ff, Potenzialtheorie p185ff; Bd2 Klassische PhysikI. Mechanik geordneter und ungeordneter Bewegung 1967 Massenpunktsysteme. Kontinua. Statistische Physik. Thermodynamik; **Schmutzer: Grundprinzipien der klassischen Mechanik und der klassischen Feldtheorie** 1973; Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik 1989, 2005; **Straumann: Klassische Mechanik. Grundkurs über Systeme endlich vieler Freiheitsgrade** LNP 289 1987; **Fetter & Walecka: Theoretical mechanics of particles and continua** 1980; **Fetter & Walecka: Nonlinear mechanics** 2006; Schilcher, Jose & Saletan, Sommerfeld, Joos: LB der theoret Physik 1999 p88-133 dazu Variationsprinzip p84-87; **Päsler: Prinzipe der Mechanik** 1968; Corben & Stehle: Classical mechanics 1950, 1977; Knauf: Mathematische Physik - Klassische Mechanik 2012; Theilmann: Expeditionen in Mechanik für Schule ohne Mathematik 2006; Bayerwaltes: Große Pause! Nachdenken über Schule 2002; Weizel, **Goldstein: Klassische Mechanik** 1950[1], **1980**[2], 2003[3] Fehlersammlung bei Tiersten AmJPhys 71 2003 103, Budo, Stephani/Kluge, Kuhn=PfL9, Reinecker/Schulz, Scheck. **Mechanik = Prototyp für naturwissenschaftliche Denkweise** = A] Dinge werden zu Punkten in Raumzeit B] Bewegung $\vec{x}(t)$ verstehen heißt seit 1687 Dgls der Form $m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(m)})$ zu lösen, nach dem man F festgelegt hat. Dgl = Naturgesetz. Newton: Es ist nützlich Dgls zu lösen! C] Weil Dgls ia zu kompliziert, so nutze zu deren Lösung physikalische Konzepte wie Erhaltungssatz, erste Integrale, Zwangskraft, Symmetrie, effektives Potenzial, ... Phasenraum, Flüsse, qualitative Lösungen. D] Fundament der Statistische Mechanik und QM. **Mechanik** = a] DIE Laborbormaus der Prinzipienphysik und aller Modelle, b] eliminiere die Kraft-Idee, die für Statik ideal, aus Dynamik durch Einführung von Zwangskraft und Lagrange-Funktion, c] Symmetrien und Erhaltungssätze, d] Hamilton-Funktion und HJG als Vorbereitung für reibungslose QM. Harmonischer Oszillator ist entarteter/neutraler Fall im Sinne der Dynamik. e] Hamilton'sche Systeme sonst nur am Himmel. **Kibble & Berkshire: Classical Mechanics** 2014[5]; **F̃asano & Marmi: Analytical Mechanics: An Introduction** 2002; **Spivak: Physics for mathematicians - mechanics I** 2010; Woodhouse: HdP 5 1924; HdP 3/1 p55; Hilbert: Analytische Mechanik. Vorlesungsnachschrift 1913; http://echo. mpiwg-berlin. mpg. de/content/modernphysics/ hilbert; Gallavotti: The elements of mechanics 1983; **Morin: Introduction to Classical Mechanics. With Problems and Solutions** 2008; **Moore: Six ideas that shaped physics.** Unit C = Conservation laws constrain interactions 2003; Unit T = Some processes are irreversible, Unit R = The laws of physics are frame-independent, Unit N = The laws of physics are universal, E = Electric and magnetic fields are unified, Unit Q = Particles behave like waves; Mathelitsch & Thaller: **Physik des Sports.** Egry: Physik des Golfspiels. Mit Newton zum Tee 2014; Püschl: Physik des Segelns 2012; Overschmidt & Gliewe: Sportbootführerschein Binnen. Segel, Motor; Heuer: Der perfekte Tipp. Statistik des Fußballspiels 2012; Woodhouse: Introduction to Analytical Dynamics 2009 ebook; Sussman & Wisdom: Structure and interpretation of classical mechanics 2001; Gignoux: Solved problems in Lagrangian and Hamiltonian mechanics 2009; **S̃trauch: Classical mechanics - an introduction** 2009 besser geht's nicht!; Rebhan: Mechanik; Marsden: Lectures on mechanics 1992;

Straumann: Klassische Mechanik 1987; Taylor: Klassische Mechanik 2014; Arnold: Geometrische Methoden in der Theorie der Dgls 1978, 1987; Zaslavsky: Chaos in dynamic systems 1985; **Falk: Theoretische Physik auf Grundlage der allgemeinen Dynamik**. Ohne Euler-Lagrange-Mechanik. BdI: Elementare Punktmechanik & BdIa: Aufgaben u. Ergänzungen zur Punktmechanik 1966; **Arnold: Meth Methoden der klassischen Mechanik** 1988; Mechanik- vs Mathe-VL siehe Jänich: Mathe 2 p292; Georg **Hamel: Theoretische Mechanik**: Eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik 1949, 1978; Honerkamp, Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993; Es geht um die Beschreibung der langsamen Bewegung nicht zu kleiner Körper, deren Abmessungen unwesentlich im Verhältnis zu den räumlichen Abmaßen der Bewegungsänderung ist und deren momentaner Zustand absolut genau bestimmt werden kann. Das kann nicht gut gehen. Magnus: Klassische Mechanik im Zeitalter der Raumfahrt? PhysBl24 1968 p4-12; Weyl: Seit SRT sind **absoluter Raum**, siehe Born p65ff, 267ff, und Zeit leere Mietskasernen, in die wir unsere Erfahungen eingebettet haben. In der klass Mech ist für das 4d-Raum-Zeit-Kontinuum kein Platz. 1. nicht-relativist 2. ungequantelt 3. deterministisch. Gibbs & Boltzmann beseitigten den qualitativen Unterschied zwischen Wärmelehre und Mechanik. **Gibbs: Elementare Grundlagen der Statistischen Mechanik: entwickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik** 1905 digital im Netz: Seite III fehlt und Seiten 44, 146, 150, **153**, 166, 168, 172, 178 teils unlesbar gescannt. Original im Pendelsaal des Geodätischen Instituts Potsdam auf Telegrafenberg A17, Signatur H O2178; Bereits vor Planck und Born wurde so der **Wahrscheinlichkeitsbegriff in die Mechanik** eingeführt. Born und Wiener sprechen von der pseudodeterministischen Unredlichkeit der Mechanik a la **Laplace** 1749-1827: **Philosophischer Versuch über Wahrscheinlichkeit** 1814 = nachträglich verfasste Einleitung in die Théorie analytique des probabilités von 1812. In: von Meyenn: Lust an der Erkenntnis. Triumph und Krise der Mechanik. Ein Lesebuch zur Geschichte der Physik 1990 p378f Laplace: Analytische Wahrscheinlichkeitstheorie 1812; Jacobi: Pierre-Simon Laplace und die Darstellung des Weltsystems. In: Physik in unserer Zeit Bd41 Nr2 2010 p82–86; **L̃aplace: Darstellung des Weltsystems** Bd1, Bücher1-3 Von der scheinbaren Bewegung der Himmelskörper. Von der wahren Bewegung der Himmelskörper. Von den Gesetzen der Bewegung, übersetzt Jacobi, Kerschbaum, Ostwalds Klassiker Bd301 + Bd2, Bücher4-5: Von der Theorie der allgemeinen Schwere. Abriss der Geschichte der Astronomie, Ostwalds Klassiker Bd302 2008; Absolute Präzision! Alles ist bestimmt, absolut determiniert. Kausalität wird begründet. Welt als Uhrwerk. Kein Platz für Zufall. Doppelspalt: Apfel wird zum Elektron. Denn das Problem besteht in der Erfassung der Anfangbedingungen. Magnus: Klassische Mechanik im Zeitalter der Raumfahrt PBl 24 1968 p4ff; Born sieht Mischung mit Ljapunov-Exponent 0 bei reflektierten Kugeln. NS **Krylov 1917-1947: Works on the foundations of statistical physics** 1979 p193 PhD 1942 mit 25 Jahren The process of relaxation of statistical systems and the criterion of mechanical instability. Nature 10. Juli 1944 p709; Rumer & Ryfkin: Termodinamika, statisticheskaya fizika i kinetika 1977 p501ff; Thermodynamics, Statistical Physics, and Kinetics Mir 1980 p498 §96 Problem der Unumkehrbarkeit makroskopischer Vorgänge; Born: Klass Mech ist das zuverlässigste Instrument der gesamte Naturwiss. von Laue: Tempel von majestätischer Architektonik und überwältigende Schönheit. Physiker als Tempeldiener? Aber für die Steuerung von Raumschiffen bei Aufstiegsbahn oder Bahn für Mondrakete mit nur stückweise stetigen Funktion reicht Hamilton'sche Theorie nicht aus, um optimale Bahnen zu bekommen. Ducrocq: Sieg über den Raum 1959; Verallgemeinerung der Variationsprinzipien durch dyn Programmierung Bellmann und Maximumprinzip von Pontrjagin. Euler: Drehungen um die 'mittlere Hauptachse' instabil. Problem: Im zentralsymmetrischen Gravitationsfeld gibt es keinen Schwerpunkt, sondern nur Massenmittelpunkt. Bezüglich dessen ist der Körper aber nicht kräftefrei, weil die zum Zentrum dichtere Körperpunkte stärker angezogen werden, wodurch die lange Achse - die mit kleinstem Trägheitsmoment - in Richtung des Zentrums gezogen wird. Die lange Achse zeigt stets zum Erdmittelpunkt. Stabil aber nur, wenn ... Kontinuumsmechanik, insbes. **Drallsatz** = Drehimpulssatz, fußt nicht auf Newton, sondern Euler. Joos: LB theoret Physik oder Trusdell, Toupin & Noll: HdP III/1 & 3 1960. Moderne Kontinuumsmechanik als Feldtheorie: Prinzip des Determinismus = Spannungszustand in einem bestimmten Punkt des Kontinuums zu einer Zeit eindeutig durch Vorgeschichte der Bewegung des Kontinuums festgelegt, 2. Prinzip lokaler Wirkung = Spannungstensor in einem Punkt eindeutig durch dessen unmittelbare Umgebung bestimmt, 3. Prinzip stofflicher Indifferenz = Unbahängigkeit der Stoffeigenschaften vom jeweiligen Bezugspunkt. Physikalische Blätter online http://onlinelibrary. wi-

ley. com/journal/10.1002/%28ISSN%291521-3722. 1944-2001 Geschichter der PhysBl in PhysBl50 1994 H1 p21-23 https://bit.ly/2WXf5oW und https://onlinelibrary.wiley.com/loi/15213722; **Falk: Theoretische Physik auf Grundlage der allgemeinen Dynamik**. BdI Elementare Punktmechanik & BdIa Aufgaben u. Ergänzungen zur Punktmechanik 1966; Falk: Mechanik, Relativität, Gravitation. Die Physik des Naturwissenschaftlers 1983[3];

Kinematik: Beschreibung der Ortsänderung von Körpern im Raum. Körper fällt aus fahrendem Zug. Einstein p12. Problem: **Raum meint Bezugssystem - körperfest**, fahrender Zug oder Bahndamm, und **Ort meint Koordinaten** bzgl. eines dieser Bezugssysteme! Für hamiltonsche Mechanik vergiss den Raum als Behälter! Es gibt nur Mannigfaltigkeiten. Der Konfigurationsraum ist Zwangsbedingungen-konsistente Mannigfaltigkeit. Bei Pendel z.B. ein 1D-Gebilde. Vergiss den Anschauungsraum und fühle dich in den sich bewegenden punktförmigen Pendelköper ein: Der kennt nur Beschleunigung, aber **keinen Raum!**. Siehe Ableitung auf Seite 178. Es gibt hier keinen Ortsvektor mehr. Nur Positionen innerhalb von Bezugssystemen innerhalb von Mannigfaltigkeiten. **Unter Zwangsbedingungen lebend, gibt es keinen erfahrbaren Außenraum mehr. Rindler-Koordinaten:** flache Raumzeit, Minkowski-Vakuum. Beschreibt beschleunigtes Bezugssystem im Minkowski-Raum. Goenner: Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie 1996 p176; System in dem der beschleunigte Beobachter ruht. In SRT zeigt gleichförmig beschleunigtes Teilchen hyperbolische Bahn, in dem das Rindler-Bezugssystem ruht. Sei kartesische Karte für Inerzialsystem mit Metrik oder **Maßbestimmung** $ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2,\ \forall T, X, Y, Z$. Die Region $0 < X < \infty,\ -X < T < X$, ist die **Rindler-Ecke**, falls g die Beschleunigung längs der Hyperbel $x = 1$ ist. Die **Rindler-Koordinaten** sind dann $t = \frac{1}{g}\operatorname{arctanh}\left(\frac{T}{X}\right),\ x = \sqrt{X^2 - T^2},\ y = Y,\ z = Z$ mit der **inversen Transformation** $T = x\sinh(gt),\ X = x\cosh(gt),\ Y = y,\ Z = z$. In der Rindler-Karte ist das Minkowski-Linienelemen $ds^2 = -g^2x^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2,\ \forall x > 0, \forall t, y, z.\ t(\eta) = \dfrac{e^{a\xi}}{a}\sinh(\eta)$ und $x(\eta) = \dfrac{e^{a\xi}}{a}\cosh(\eta)$ eta=linspace(0,1,200); plot(cosh(eta),sinh(eta)) Trajektorie: $\eta(\tau) = \dfrac{\alpha}{a}\tau$ und $\xi(\tau) = \dfrac{1}{a}\ln\dfrac{a}{\alpha}$. Metrik $\mathrm{d}s^2 = e^{2a\xi}(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\xi^2)$. Koks: Explorations in Mathematical Physics. The Concepts Behind an Elegant Language 2006 p240, Koordinaten in beschleunigten Bezugssystemen. Was bedeutet es, ewig konstant beschleunigt zu werden? Kommt man über c hinaus? Schröder: Gravitation p29; Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation p33; Goenner: Spezielle Relativitätstheorie und die klassische Feldtheorie 2004; Goenner: Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie 1996; Chaichian, Merches & Tureanu: Mechanics. An intensive Course 2012; Stöße & Billards: Kopplung von Schwerpunktbewegung und innere Bewegung ist vernachlässigbar. Stoß – Austausch von Energie, Impuls Gesamtimpulserhaltung: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2'$ Gesamtenergieerhaltung beim elastischen Stoß: $m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2$ 4 Gleichungen, 6 Unbekannte $(\vec{v}_1', \vec{v}_2') \rightarrow$ die Geschwindigkeitsvektoren müssen nicht alle in einer Ebene liegen. Auswertung im Ruhsystem/Schwerpunktsystem $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = \vec{0} m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1v_1'^2 + m_2v_2'^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad m_1v_1^2 = -m_2v_2^2, \quad m_1v_1'^2 = -m_2v_2'^2, v_1^2 = v_1'^2$ **Gerader Stoß für $v_2 = 0$** Für zwei Punktmassen folgt $2v_1'v_2' = 0 \quad \rightarrow v_1' = 0\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$ Wegen $v_2' = \frac{2}{1+m_2/m_1}v_1$ und $v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$ gilt für $m_1 << m_2\ v_2' = 0, \quad v_1' = -v_1$ (Reflexion) Speziell findet für $m_1 = m_2$ ein totaler Impulsaustausch statt: $v_1' = 0, \quad v_2' = v_1$ Für drei Punktmassen folgt mit $v_2 = 0$ und $v_3 = 0$: $2v_1'v_2' + 2v_1'v_3' + 2v_2'v_3' = 0 \quad \rightarrow v_1' = v_2' = 0$ **Kugelstoßkette – Heinrich Hertz**: Über die Berührung fester elastischer Körper, Journal für reine und angewandte Mathematik **92** (1881) 156-171: Die Schlußbetrachtungen betreffen den Stoßvorgang $p = k\alpha^{\frac{3}{2}}$ wobei gilt $p =$ Druck, $k =$ Konstante, $\alpha =$ Verschiebung der Kugeloberfläche in radialer Richtung. Über die Berührung fester elastischer Körper und über die Härte, Aus den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes, Berlin, November 1882; Budó, A. (1974) Theoretische Mechanik; Herrmann & Schmälzle (1981) AmerJPhys 49 p761; Hertz (1895) Gesammelte Werke, Bd1: Schriften vermischten Inhalts, Ph. Lenard; Hertz, Heinrich (1971) Über sehr schnelle elektrische Schwingungen; Kopylov, G.I. (1983) Elementary Kinematics of Elementary Particles, Mir, Moscow; Korsch, Mirbach & Jodl 1987 Chaos und Determinismus in der klassischen Dynamik: Billard-Systeme als Modell, PdN-Physik **36**, 2-10; Jung, Christov 1992 Chaos & Streuung, WiFo**42**, 110-113;

José & Saletan, Classical Dynamics; Knauf: Mathematische Physik - Klassische Mechanik 2012; **Reineker, Schulz: Theoretische Physik.** Mechanik 2006, Elektrodynamik, Quantenmechanik 1, Statistische Physik und Thermodynamik, Quantenmechanik 2; **Haake: Einf in die theoret Physik**; **Wachter & Hoeber: Repetitorium Theoretische Physik** 2005[2]; Poole: The Physics Handbook - Fundamentals and Key Equation 2006; Honerkamp, Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993; Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010; Krey & Owen: Basic Theoretical Physics: A Concise Overview 2006; Döring: Einführung in die theoretische Physik; Harris: Introduction to Modern Theoretical Physics. Bd1 Classical Physics and Relativity & Bd2 Quantum Theory and Statistical Physics 1975; Harris: Moderne Physik. Ein Lehr- und Übungsbuch 2013; **Walecka: Introduction to modern physics. Theoretical foundations** 2008; Advanced modern physics. Theoretical foundations 2010; Topics in Modern Physics 2013; Abraham & Marsden: Foundations of Mechanics 1967, 2008; Laplace zeigt 1798 in seiner Mechanik des Himmels, die als Abschluss der von Newton begonnen Entwicklung gilt, dass trotz der gegenseitigen Störung der Planetenbahnen das Sonnensystem niemals in Unordnung geraten kann. Newton nahm an, dass die Gravitationskräfte zur langfristigen Destabilisierung führen und das wiederholte Eingreifen Gottes nötig sei. **Napoleon:** Gott kommt in der Himmelsmechanik nicht vor!? **Laplace:** Ich hatte diese Hypothese nicht nötig. Lobgesang auf die analytische Mechanik und Ursachen dafür, warum sie als schwer gilt, 1949: **Lanczos: The Variational Principles of Mechanics** 1970; McCall: Classical Mechanics. From Newton to Einstein: A Modern Introduction 2010[2]; **Metzler: Dynamische Systeme** in der Ökologie - Lotka-Voltera, Laub-Wurzelmodell 1987; Tischler: Einführung in die Ökologie 1992; Begon, Harper, Townsend: Ecology 2001; Tischler: Ökologie der Lebensräume 1990; Remmert: Ökologie 1992[5]; Schubert: LB der Ökologie 1991[3]; Schlee: Ökologische Biochemie 1999; Schwoerbel: Einführung in die Limnologie 1998[8]; Kalff: Limnology. Inland water ecosystems 2001; Lampert & Sommer: Limnoökologie 1992; Schultz: Die Ökozonen der Erde 1988, 2008[4]; Walter & Breckle: Ökologie der Erde, Bd2+4; Gisi: Bodenökologie 1990; Scheffer & Schachtschabel: Lehrbuch der Bodenkunde 2002[15]; Brady & Weil: The nature and properties of soils 2002[13]; Finke: Landschaftsökologie 1986; Marsden: Lectures on mechanics 1993; Drazin: Nonlinear systems 1992;

Bellman & Cooke: Modern elementary differential equations 1995; **Piskunow: Differential- und Integralrechnung Teil3** 1970; Scheinerman: Invitation to Dynamical Systems 1995 Was ist eine Dgl? p351f; **Newton: Es ist nützlich, Differenzialgleichungen zu lösen:** Kraft macht **Impulsstromstärke** $\dot{p} = m\ddot{x} = F(\dddot{x}, \ddot{x}, \dot{x}, x, t)$. **Keine Kraftdefinition, sondern Bewegungsgesetz!** Kraft kommt zB von Hooke oder gar Trägheit gemäß d'Alembert. Friedrich Herrmann KPK = Karlsruher Physikkurs, www. physikdidaktik.uni-karlsruhe.de, PhysJ 12 2013 Mai p3 & 6: extensive Größen wie Masse, Energie und Impuls werden als Basisgrößen und als Fluidum mit entsprechender Dichte und Stromdichte betrachtet. (artificial photosynthesis, zB zur Wasserspaltung: menschl. Energieverbrauch $3{\cdot}10^{20}$ $\mathrm{Ja}^{-1} = 1/10000$ dessen, was die Sonne reinbringt). Max Vollmer: Kinetik der Phasenumwandlung 1939; M. Planck: Bemerkungen zum Prinzip der Aktion und Reaktion in der allgemeinen Dynamik, PhysZeitschrift 9 Nr23 (1908) p828; Job: Neudarstellung der Wärmelehre – Die Entropie als Wärme 1972; **Piaggio: An Elementary Treatise on Differential Equations and Their Applications** 1920; H̃orn: Differentialgleichungen 1927; May: Differentialgleichungen 1971; **L. Hopf: Dgls in der Physik** 1933 **Die Dgl als Ausdruck des Naturgesetzes.** Hattendorff Vorlesungsmitschrift des WS1854/55 WS1860/61 SS1862 = **Riemann: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik** 1869[1],1882[3], Fritz Emde 1873-1951 1938[4] p1 Nahwirkungstheorie = Idee der Dgl; Ludwig Hopf als Sommerfeldschüler arbeite bis 1911 bei Einstein. Wurde in Aachen 1933 denunziert und ging nach Cambridge, dann Dublin. Folgender Göschenband1070 von Sauter: Dgls in der Physik 1942; Hairer, Norsett, Wanner: Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems 1992[2]; **Tihonov, Vasileva & Volosov: Ordinary differential equations** p162-228 In: **Hairer & Wanner: Analysis in historischer Entwicklung** 2008 p153f Starte stets mit $\ddot{x} + \sin x = 0$ und deren direkter Lösung. Erst dann $\ddot{x} + x = 0$ mit **e-Ansatz!Pendel** p219 Euler 1739 p158f; **Boltjanski: Differentialrechnung einmal anders** 1956 p30ff; **Mathematisches**

Pendel: Erkenne, dass Kreisbewegung vorliegt. Für **Sekante/Tangente am den Ruhepunkt** kommt man mit **Linearbewegung** aus! **1. Weg:** Bewegung nur senkrecht zum Feld, also tangenzial zum Ruhepunkt, der Stärke g aus **Kraftdreieck der Sekante** gemäß mit **elastischer/Hooke'scher Kraft** $\frac{f}{mg} = \frac{x}{l}$ mit Newton $m\ddot{x} = -f$ gibt sofort $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. Bleibt man aber bei Kreisbewegung, so sind Newton für Kreis, Kraftmoment und Trägheitsmoment des Punktes involviert: **2. Weg:** Rücktreibende Schwer-Kraft kann nur senkrecht zur Zwangskraft wirksam werden! Betrachte **Kräfteparallelogramm** und finde $F = -mg\sin\varphi$ bei Trägheitsterm aus Trägheitsmoment und Winkelbeschleunigung $ml^2\ddot{\varphi}$. **3. Weg:** Beachte, dass Newton für Kreisbewegung in Betracht kommt, also lineare Massenträgheit m durch Trägheitsmoment $J = ml^2$ und Kraftmoment statt Kraft ins Spiel kommen $ml^2\varphi = J\ddot{\varphi} = -|\vec{M}| = -|\vec{l} \times \vec{G}| = -lmg\sin\varphi$. Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1979, 1991[5] Kap7 **Harmonischer Oszillator** p124-148; **Stepanow: Lehrbuch der Differentialgleichungen** 1952, 1956, 1976[4] p176ff; **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; Emmrich: Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen: Eine **integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen** für Studierende 2004; **Beltrami: Mathematics for Dynamic Modeling** 1987; Abell & Braselton: Differential equations with Mathematica 1993; **Henner, Belozerova & Khenner: Ordinary and Partial Differential Equations 2013 elementar, mit vielen Beispielen, Maple, Mathematica**; Tu: Dynamical systems - an introduction with applications in economics and biology 1994; Reinhard Tiebel: MATHEMATICA. Demonstration Project der Firma Wolfram. Quantenoptik http://demonstrations.wolfram.com/author.html?author=Reinhard+Tiebel Arnold: Gewöhnliche Differentialgleichungen 2001; Bröcker: Analysis in mehreren Variablen, einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und des Satzes von Stokes 1980; Arrowsmith & Place: Ordinary Differential Equations: A Qualitative Approach with Applications 1982; oder Dynamical Systems - Differential Equations, Maps, and Chaotic Behaviour 1992; **Hirsch & Smale: Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra** 1974 oder mit Devaney: **Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos** 2012[3]; **Palais & Palais: Differential equations, mechanics, and computation** 2009; Batterson: Stephen Smale. The Mathematician Who Broke the Dimension Barrier 2012; **Dgl verbindet die Änderung von Größen mit diesen Größen selbst**: $F(x^{(n)}, \ldots, x'', x', x, t) = 0$ oder $F(y^{(n)}, \ldots, y'', y', y, x) = 0$. **Bender:** An introduction to mathematical modeling 1978; Morrison: The art of modeling dynamics systems. Forecasting for chaos, randomness, and determinism 1991; **Mesterton-Gibbons: Concrete approach** to mathematical (deterministic & stochastic) modelling 1995; Sussmann & Wisdom: Structure and interpretation of Classical Mechanics http://mitpress. mit. edu/sicm/ **Newton 1666: Bewegungsvorgänge auf Dgls abbilden! Wenn man das schafft, so sind alle Probleme gelöst.** Newton'scher Kraftansatz: $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}, \ldots, \vec{r}^{(n)}) =$

$$\begin{cases} \vec{0} & \text{freies Teilchen} \\ \vec{G} = \text{const} & \text{homogenes Feld, gravit Antrieb, Coulomb/Haft/Gleitreibung} = \text{Stick} - \text{Slip} \\ \vec{F}_0 \cos\Omega t & \text{für periodischen Antrieb} \\ \sum \vec{F}_k \delta(t - t_k) & \text{für zufällige Stöße} \\ -k\vec{r} & \text{für Hooke'sche Feder} \\ -6\pi\eta\dot{\vec{r}} & \text{für Stokes'sche Reibung} \\ -k\text{sign}(\dot{x})\dot{x}^2\hat{x} & \text{für Newton'sche Reibung} \end{cases} = \text{Differen-}$$

zialgleichungen $F(x, y(x), y(x)', \ldots, y(x)^{(n)}) = 0$ sind punktweise Gleichungen, punktweise, dh, für jeden Punkt x zu erfüllen! Daraus folgt naive Unterscheidung von **inhomogenen** $y' + p(x)y = f(x)$ oder $y' + p(x)y = -1$, weil rechts eine i.a. von Null verschiedene Konstante steht. **Homogene Differenzialgleichung** hat stets als **triviale Lösung die Nulllösung!** Ganz analog zu den linearen Glgn. Inhomogene Gl $y(x) = mx - b = 0$, also $mx = b$, wird nicht durch $x = 0$ gelöst! Steht dort **stets Null**, so **homogene Dgl** $y' + p(x)y = 0$. Kunick: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1989 p11 Differenzialgleichung homogen, wenn rechte Seite eine **homogene Funktion** n-ten Grades ist $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$; Brunner: Mathematik für Chemiker Bd2 p89; Jug: Math in Chemie 1981 p170; Zachmann & Jüngel: Mathematik für Chemiker 2014[7]; **Beispiele:** a] $y' - xy + x =$

0 mit Trennung der Variablen oder Variation der Konstanten liefert $y(x) = 1 + ke^{x^2/2}$. b] $y' - 4y = e^{5x}\cos 3x$ erst Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung durch Hingucken, e-Ansatz oder Trennung der Variablen gibt $y_h = Ke^{4x}$. Dann weiter mit Variation der Konstanten $y = K(x)e^{4x} = \frac{e^{5x}}{10}(\cos 3x + 3\sin 3x) + Be^{4x}$ oder Bestimmung einer partikulären Lösung mit dem Ansatz $y_p = A\cos 3x + B\sin 3x$. Analog löst man c] $\dot{Q} + \frac{Q}{RC} = \frac{U_0}{R}\sin\omega t$ durch $Q(t) = \frac{U_0 C}{1 + R^2C^2\omega^2}(\sin\omega t - \omega RC\cos\omega t) + \left(Q_0 + \frac{\omega U_0 RC^2}{1 + R^2C^2\omega^2}\right)e^{-\frac{t}{RC}}$. Riech: Mathematik zu den Experimentalphysik-Vorlesungen 1997 p190; Jerk- oder Ruck-Mechanik. Rein ortsabh Kraft $m\ddot{x} = F(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$ wegen $F(x) = -\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}$ Gibt **1. Integral der Bewegungsgleichung** oder Energiesatz const $= E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)$ wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}\dot{x}^2 + V(x)\right) = 0$. $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$. **Idee der stationären Lösung** $\dot{x} = 0$, stabiles und instabiles Gleichgewicht. Typische Periodendauer oder Lösung der Bewegungsgl aus $\int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}} = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t = t - t_0$. Anderer Lösungsweg aber bei **freiem Fall mit Newton-Reibung**

$$m\ddot{x} = -mg - \mathrm{sign}(\dot{x})\beta\dot{x}^2 = \begin{cases} -mg - \beta\dot{x}^2 & \text{falls Bewegung nach oben } \dot{x} > 0 \\ -mg + \beta\dot{x}^2 & \text{falls Bewegung nach unten } \dot{x} < 0 \end{cases}$$

also bei Bewegung nach unten $m\ddot{x} = -mg + \beta\dot{x}^2$ oder $\ddot{x} = -g + \frac{\beta}{m}\dot{x}^2$. Mit $v = \dot{x}$ also $\dot{v} = -g + \frac{\beta}{m}v^2$. **Riccati-Dgl nichtlinear!** Hat partikuläre Lösung $v_P = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$. Transformation (Bronstein p457) $v = v_\mathrm{P} + \frac{1}{y}$ unter Verwendung der partikulären Lösung v_P liefert **lineare Dgl** $\dot{y} = -2\sqrt{\frac{\beta g}{m}}y + \frac{\beta}{m}$ deren weitere partikuläre Lösung $y_P = -\frac{\beta}{2m}\sqrt{\frac{m}{\beta g}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{mg}}$ und allgem Lösung der homogenen Dgl $y_h = y_0 e^{-2\sqrt{\frac{\beta g}{m}}(t-t_0)}$ allgem Lösung geben $y = y_P + y_h = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{mg}} + y_0 e^{-2\sqrt{\frac{\beta g}{m}}(t-t_0)}$. Rücktsubstitution gibt $v(t) = v_P + \frac{1}{y} = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} + \frac{1}{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{mg}} + y_0 e^{-2\sqrt{\frac{\beta g}{m}}(t-t_0)}}$ Anfangsbedingung $v(t_0 = 0) = v_0 = 0$ liefert $v(t) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}\frac{e^{-2\sqrt{\frac{\beta g}{m}}(t-t_0)} - 1}{e^{-2\sqrt{\frac{\beta g}{m}}(t-t_0)} + 1}$. **Oder einfacher per Parzialbruchzerlegung:** Die **stationäre Lösung** ist guter Kandidat für **partikuläre Lösung** $\dot{v}_\mathrm{stat}(t) = \dot{v}_\mathrm{partikulär}(t) = 0$ ist $\dot{v}^2_\mathrm{partikulär}(t) = \frac{mg}{k}$ Also Fall im widerstehenden Medium mit stets $v < 0$ sei $m\dot{v} = -mg + kv^2$ bedeutet $\dot{v} = g(w^2v^2 - 1) = g(vw - 1)(vw + 1)$ mit $w^2 = \frac{k}{mg}$. **Trennung der Variablen** $\frac{\mathrm{d}v}{(vw-1)(vw+1)} = g\mathrm{d}t$ und Parzialbruchzerlegung $\frac{1}{(vw-1)(vw+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(vw-1)} - \frac{1}{(vw+1)}\right]$ $2g\int_0^t \mathrm{d}t = 2gt = \int_{v_o}^{v}\left[\frac{1}{vw-1} - \frac{1}{vw+1}\right]\mathrm{d}v = \frac{1}{w}\ln\left|\frac{vw-1}{vw+1}\right|_{v_o}^{v}$ bedeutet $\ln\left|\frac{vw-1}{vw+1}\frac{v_0w+1}{v_0w-1}\right| = 2gwt$ gibt mit $v_o = 0$ einfach $\ln\left|\frac{vw-1}{vw+1}(-1)\right| = \ln\left|\frac{1-vw}{vw+1}\right| \overset{vw<1}{=} \ln\frac{1-vw}{1+vw} = 2gwt$. Bedeutet $vw = \frac{1-e^{2gwt}}{1+e^{2gwt}}$. Also $v(t) = \frac{1}{w}\frac{1-e^{2gwt}}{1+e^{2gwt}}$. $\lim_{t\to\infty} vw = wv_\infty = -1$ bedeutet $v_\infty = -\frac{1}{w} = -\sqrt{\frac{mg}{k}}$. Planetenbewegung, Sonnenfinsternisse, Wettervorhersage, Lottozahlen, eigener Lebensweg, Hellsehen, Voraussage der Zukunft. Wie geht das? ab initio per Dgls im 19. Jh.: Die Welt ist eine Uhr. Laplace: Anfangsbedingungen und gewöhnliche Dgls 2. Ordnung (Newton) reichen. Raum-zeitlich lokal gehe vom momentanen Zustand aus und wende gegebene Regeln an, die für alle Zeiten gelten (ergodische Systeme!). **Beginne mit geometrischen und qualitativen Methoden a la Poincare und Arnold** von Dgls 1. Ordnung: qualitative Methoden a la Poincaré! Zu Ergodizität siehe **Terrence Tao: Poincare's Legacies, Part I.** Pages from year two of a mathematical blog 2009;

Feldlinie: Pfad entlang eines Vektorfeldes auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, beispielsweise entlang des elektrischen Feldes im Ortsraum. Analog zu einer speziellen Lösung einer Dgl. Ein Feldlinienfeld

entspricht dem Phasenfluss oder **Phasenportrait**. Da das Vektorfeld jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen Tangentialvektor zuordnet, Feldlinien aber, um sinnvoll von „Feldliniendichte“ sprechen zu können, zueinander Abstände haben müssen, wird klar, warum man das Konzept „Feldlinie“ nur zur qualitativen Veranschaulichung benutzt. **Arya: Introduction to classical mechanics** p127; **a] Rechte Seite als Anstieg/Richtungsfeld** sagt, wo es hingeht. Euler- und anderen Integrationsschemen z.B. Knorrenschild, Kallenrode: Rechenmethoden, p141, **Quarteroni & Saleri: Scientific computing**; Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB e-book; **Chapra: Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and scientists** 2012[3]; Hunt, Lipsman & Rosenberg: A Guide to MATLAB. For Beginners and Experienced Users 2014[3]; **Stewart: Python for Scientists** 2014; Blanco-Silva: Learning SciPy for Numerical and Scientific Computing 2013; Mackay: Information theory, inference, and learning algorithms 2003; Rossant: Learning IPython for Interactive Computing and Data Visualization Idris: NumPy Beginner's Guide 2013[2]; Richert & Coelho: Building Machine Learning Systems with Python 2013; McKinney: Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython 2012; Skeel & Keiper: Elementary numerical computing with Mathematica 1993; Hutchinson: A Student's Guide to Numerical Methods; Hill: Learning Scientific Programming with Python; **Kiusalaas: Numerical Methods in Engineering with Python** 2005 für Python 3 2013;; **Grander & Hrebicek: Solving problems in scientific computing**; Ayres, Differenzialgleichungen, Schaum; Boyce & Prima: Gewöhnliche Dgls; Robinson: Ordinary diff equations; Nusse & Yorke: Dynamics. Numerical explorations 1997[2]; **Preuss & Wenisch: Lehr- und Übungsbuch numerische Mathematik** 2001; Mickens: Advances in the Applications of Nonstandard Finite Difference Schemes 1990; **Langtangen: A Primer on Scientific Programming with Python** 2011[2]; **S̃trang: Wissenschaftliches Rechnen** 2010; **www. codeacademy. com**

ODEs und Corona per Python: SEIR-Modell. S = susceptebility = alle, die sich anstecken können und sich bislang NICHT infiziert haben. E = expose = trägt das Virus, ist aber wegen Inkubationszeit 5.2 Tage novj nicht ansteckend. I = infections = ansteckende Patienten. R = removed = jene, die Virus nicht mehr verbreiten = immun geworden, verstorbene, Menschen in Quarantäne. ct11.2020 p124; Wodarg: Falsche Pandemien. Argumente gegen die Herrschaft der Angst 2021;

```
import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt import scipy.integrate as iss O2 = 1.
G  = 1.  ta = 0.; te = 15; dt = 0.1 N  = int((te-ta)/dt)
def RHS(x,t=0): return np.array([x[1],-2.*G*x[1]-O2*x[0]])
t = np.linspace(ta, te, N) X0 = np.array([0., 1.])
X, infodict = iss.odeint(RHS, X0, t, full_output=True)

# http://www.scipy.org/LoktaVolterraTutorial
# /usr/cnld/shw/Python/Code-Schnipsel/ode1.py
from numpy import *
from scipy import integrate
from pylab import *
# Definition of parameters
a = 1.; b = 0.1; c = 1.5; d = 0.75
def dX_dt(X, t=0): # t ist fuer zeitabhaengige rechte Seite
 return array([ a*X[0] -   b*X[0]*X[1] , -c*X[1] + d*b*X[0]*X[1] ])
t = linspace(0, 15,  1000) # time
X0 = array([10, 5])        # initials conditions: 10 rabbits and 5 foxes
X, infodict = integrate.odeint(dX_dt, X0, t, full_output=True)
infodict['message']        # 'Integration successful.'
rabbits, foxes = X.T
plot(t, rabbits, 'r-', label='Rabbits'); plot(t, foxes  , 'b-', label='Foxes')
grid(); legend(loc='best'); xlabel('time'); ylabel('population')
title('Evolution of fox and rabbit populations'); show()
http://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.
```

integrate.odeint.html#scipy.integrate.odeint

Advanced Scientific CALculators: Rascal http://rascal.sourceforge.net/, * rCalc with GTK+-frontend * Spar also as library * Calc C-style arbitrary precision calculator * ycalc TI59 a la xcalc * CXC console calculator like TI-83 (warning: tar.gz does not extract to own directory) * LMP command line calculator * NumExp Gnome with 2D plot rendering * Purenum Long integer library, optimized for small numbers * CLN C++ library for long numbers and other high precision datatypes * Ginac C++ library for symbolic computations * Octave a high-level language for numerical computations * Webcalc numerous online computational applets * Iguana an interpreted, interactive, computation-oriented scripting language /indexMathematica!Sytax /shw/TeX/introductions/Praktikum+Exercise/0001-TSA-Computer-Manual/Codes.tex `Mathematica, Quit, Exit, ^D, Shift-Return = ENTER,`

`; suppress output «name.m, = Zuweisung, := Definitionzeichen, == Relationszeichen`

`Help: ?Log - Info about Log[x], ??Log - More info about Log[x]`

`?L* - All functions begining with L, (* comment *)`

`Process an external script: «name.m`

`Plot a notebook. Comment in the notebook via Format-Style-Text: Note the special cell mark! Use the Plot command with ;`

`40+1 % is used to refer to the output of the previous command line, %/5 ,`

`N[%] numerical value,  [] arguments of built-in functions`

`() used to group terms`

`{} lists`

```
Functions: Name[function arguments]
Sqrt[16], N[Pi/2], Sin[%], Sqrt[2]/2, Gamma[2]
Plot[Gamma[x],{x,0.1,5}]
```

```
f[x_] := Expand[(1+x)^2], {f[x],f[1.1],f[a+b]}, D[f,{x,2}]
```

Taylor expand exp(cos(2x)) or -x log(x) about x=0, keeping terms to order x^{10}:
`Series[Exp[Cos[2x]],{x,0,11}]` generates a power series expansion for f about the point $x = x0$ to order $(x - x0)^n$,
`Normal[%]` remove $O(x^{12})$, `Collect[%]` extract a factor, `force=Series[f[x],{x,0,5}]`

```
Out[15] Exp[0.5], Log[%], Log[E, %15], Sqrt[-1], I, ii
Exp[I*N[Pi/4]], Re[%]+I*Im[%], ArcTan[1]
```

```
Plot[Sin[x],{x,0,2 Pi}]
Plot[{BesselJ[0,x],Bessel[1,x],{x,0,10}]
Plot3D[Exp[-(x^2+y^2)],{x,-2,2},{y,-2,2}]
ParametricPlot[{Cos[t],Sin[t],{t,0,2 Pi}]
Show[%,AspectRatio->Automatic]
Parametric3D[{Cos[t],Sin[t],t/6},{t,0,6 Pi}]
Parametric3D[{r Cos[t],r Sin[t],f^2},{r,0,2},{t,0,2 Pi}]
ContourPlot[Exp[-(x-1)^2-y^2]+Exp[-(x+1)^2-y^2], {x,-3,3},{y,-3,3},PlotPoints->60]
Kinzel Plot[Sin[Exp[x]],{x,0,4}];
```

MATHEMATICA: Löse Gleichung analytisch $Solve[x^2 - 4x + 4 == 0, x]$, $Solve[x^5 - 5x^2 + 1 == 0, x]$, oder **numerisch** $NSolve[x^5 - 5x^2 + 1 == 0, x]$, **Eigenwerte per Polynomnullstelle:** Matrix $A = \{\{1 - x, 2\}, \{2, 3 - x\}\}$ verschwindet für NSolve[Det[A] == 0, x].

```
MATHEMATICA ODE solver
DSolve[y''[x]==y[x],y[x],x]
DSolve[y'[x]==Cos[x*y[x]],y[x],x]
DSolve[y'[x]==Cos[x*y[x]],y[0]==0,y[x],x,-5,5]
```

```
(* liefert Objekt InterpolatingFunction *)
f[x_] = y[x] /. % (* liefert normale Funktion *)
```

$equation = y'[x] == (x^2+8)/((x^2-5x+6)y[x]^2 Cos[y[x]])$

```
DSolve[equation,y[x],x]
```

$lhs = y^2 Cos[y];$

$rhs = (x^2+8)/(x^2-5x+6);$

```
Integrate[lhs,y]
Integrate[rhs,x]

(* separable equation *)
lhs=Exp[y] Cos[y];
```

$rhs = x^2/Sqrt[9-x^2];$

```
slhs=Integrate[lhs,y]
srhs=Integrate[rhs,x]
sol=slhs==srhs+c
(* bestimme die Konstante c fuer die Anfangsbedingung y(0)=0 *)
cval=Solve[sol /. y->0 /. x->0, c]
solution=sol /. cval[[1]]
«Graphics`ImplicitPlot`
graphone=ImplicitPlot[solution,{x,-3,3},{y,-4,4}]
(* numerische Loesung *)
altsol=NDSolve[{equation,y[0]==0},y[x],{x,0,2.75}]
result=NDSolve[{y''[t]+0.1y'[t]==-Sin[y[t]],y[0]==1,y'[0]==0},y,{t,0,50}]
Plot[y[x]/.result,{x,0,30}];
replacement rule /.
ode=y''[t]+y[t]+0.25 y[t]^2==0.55 Sin[0.1 t]
sol=NDSolve[ode,y[0]==1, y'[0]==0,y, {t,350, 500},
MaxStep->5000,Method->RungeKutta];

Plot[Evaluate[y[t]/.sol],{t,350,500},PlotPoints->1000,
PlotRange->{-2.5,2},Frame->True,PlotStyle->Hue[.9],
FrameLabel->{¨time¨,¨displacement¨},ImageSize->{600,400},
FrameTicks->{{350,500},{-2,0,2},{},{}},
TextStyle->{FontFamily->¨Times¨,FontSize->16}];

ParametricPlot[Evaluate[{y[t],y'[t]}/.sol],{t,350,500},
Frame->True,FrameTicks->{{-2,-1,0,{.75,¨y¨},1.5},
{-1,0,{.5,¨v¨},1},{},{}},PlotStyle->Hue[.9],
ImageSize->{600,400},TextStyle->{FontFamily->¨Times¨,FontSize->16}];
```

$\dot{r}(t) = a\,r(t) - b\,r(t)\,f(t)$

$\dot{f}(t) = -c\,f(t) + d\,r(t)\,f(t)$

```
Clear[¨Global`*¨]
a=2;b=0.01;c=1;d=0.01;

eq1=r'[t]==a r[t] - b r[t] f[t]

eq2=f'[t]==-c f[t] + d r[t] f[t]

sol=NDSolve[eq1,eq2,r[0]==100, f[0]==5,{r,f}, {t,0, 20},
MaxStep->5000,Method->RungeKutta];
```

Using the Block construct, two graphs are produced but not displayed:

```
Block[$DisplayFunction=Identity,
```

```
gr1=Plot[Evalute[{r[t],f[t]}/.sol],{t,0,20},
PlotStyle->{Hue[.6],{Dashing[{.02}],Hue[1]}},
{{{.01,0},{10,¨time¨},20},{500,{700,¨number¨},1000}},
TextStyle->{FontFamily->¨Times¨,FontSize->14},
PlotLabel->¨solid blue: rabbits, dashed red: foxes¨];

gr2=ParametricPlot[Evalute[{r[t],f[t]}/.sol],{t,0,20},
PlotStyle->{Hue[.3]},PlotRange->{{0,1000},{0,1100}},
Ticks->{{{.01,0},500,{700,¨rabbits¨},1000},
{500,{700,¨foxes¨},1000}},
TextStyle->{FontFamily->¨Times¨,FontSize->14}];

Show[GraphicsArray[{gr1,gr2}],ImageSize->{600,200}];

Clear["Global`*"]
a=-2;b=4;c=4;d=-2;
a=-2;b=1;c=1;d=-2;
eq1=r'[t]==a r[t] + b j[t]
eq2=j'[t]==c r[t] + d j[t]
sol=NDSolve[{eq1,eq2,r[0]==10, j[0]==5},{r,j}, {t,0, 10},
MaxSteps->500,Method->RungeKutta]
gr1=Plot[Evaluate[{r[t],j[t]}/.sol],{t,0,10}];
gr2=ParametricPlot[Evaluate[{r[t],j[t]}/.sol],{t,0,10}];
(* Show[GraphicsArray[{gr1,gr2}],ImageSize->{400,400}] *)
```

Numerische Lösung von Differenzialgleichungen

Lediglich explizite gewöhnliche Dgls können mit einer geschlossenen Theorie gelöst werden. Dgl integrabel, wenn analytisch lösbar, also Lösungsfunktion = Integral angebbar. Nichtlineare und partielle Differentialgleichungen sind nicht integrabel: Dreikörperproblems, Doppelpendels, die meisten Kreiseltypen. Numerische Integration von odes in der Linux-Shell siehe man ode: in2.ode-File enthält die Angaben zum Anfangswert-Problem analog zu xppout.

```
echo " " | ode -f in2.ode
sine' = cosine # 1. ODE
cosine' = -sine # 2. ODE
sine = 0 # 1. Anfangsbedingung
cosine = 1 # 2. Anfangsbedingung
print t, sine
step 0, 2*PI # Integrationsbereich, Standardschrittweite 0.1 siehe man ode
gnuplot> plot "< echo ' ' | ode -f in2.ode " w d
```

Kinzel & Reents, **Physik per Computer** 1996 p127ff; de Vries: **Computerphysik**: Grundlagen, Methoden, Übungen 1995 p217-287; Hartmann: Big Practical Guide to Computer Simulations 2015; Brandt & Dahmen: Quantenmechanik auf dem Personalcomputer 1993; Brandt & Dahmen: Quantenmechanik in Bildern. Eine Einführung mit vielen Computergrafiken 2015; Scherer: Computational Physics. Simulation of Classical and Quantum Systems 2013[2]; Shiflet: Introduction to Computational Science. Modeling and Simulation for the Sciences 2014[2]; Stöcker: Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren 1999[4], enthält Pseudo-Codes; **Iserles: A first course in the numerical analysis of differential equations** mit PDE-Solvern, 2009[2], siehe dortiges Flussdiagramm; Panov: Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren 1955; **Hanke-Bourgeois: Grundlagen der numerischen Mathematik** p519ff e-book http://dx. doi. org/10. 1007/978-3-8348-

9309-3; Reimer: Grundlagen der numerischen Mathematik Bd2 Kap3 1982; **Quarteroni & Saleri: Scientific computing** oder Wissenschaftliches Rechnen mit MATLAB e-book Kap7; Steuding & Volkert eds: Facetten der Mathematik - 85 Jahre Mathematische Semesterberichte 2017; Werner & Wendland: In Facetten der Mathematik 2011 p433ff Steuding: Elliptische Kurven SdW 1998 H1 p96; SdW 1993 H8 p14; **Werner: Elliptische Kurven in der Kryptographie** 2002; Wohlgemuth: Mathe für fortgeschrittene Anfänger p283 Kap23 **Gruppengesetz elliptischer Kurven**; Spektrum Digest 2/1999 Fahrplanalgebra, Optimierung, Kryptographie, Faktorisierung großer Zahlen, Raumflugbahn; Google summer of code 2011: https://github. com/ headmyshoulder/ odeint-v2, http://www. codeproject. com/KB/ recipes/ odeint-v2. aspx, odeint-v2 odeint.com Metaprogramming https://gitup.uni-potsdam.de/marwan/datalecture2019/blob/master/lectu datamanagement.pdf

$\dot{x} = f(x,t)$: **Euler-Streckenzug-Verfahren:** Vorwärtsmethode, explizites Verfahren, da $x(t_{i+1})$ im Sinne einer **Taylor-Entwicklung** $x(t+h) = x(t) + h\dot{x}|_t + O(h^2)$ nur vom Anstieg am Ende des voran gegangenen Schrittes abhängt - also über dem Intervall $[t, t+h]$ als konstant angesehen wird. Auf kleinen Intervallen kann immer eine **Trennung der Variablen**, also Unabhängigkeit der Steigung oder des Richtungsfeldes von Zeit und Zustand angenommen werden. Alle anderen Methoden geben diese Annahme mit gutem Grund in irgend einer Weise auf. **Kallenrode: Rechenmethoden** p138. Preuss Kap8; Dankert: Numerische Methoden der Mechanik p255ff; **Engeln-Müllges, Reutter: Formelsammlung zur numerischen Mathematik**, §17; Zurmühl: **Praktische Mathematik** für Ingenieure und Physiker 1965[5]; Willers: Methoden der praktischen Analysis 1950, 1970; **Tveito: Elements of Scientific Computing** Chap2&3, Diff equations 2010; Törnig: **Numerische Mathematik** Bd1 Algebra 1988[2], Bd2 Numerische Methoden der Analysis 1990[2]; Törnig: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik. Differenzenverfahren, finite Elemente und die Behandlung großer Gleichungssysteme 1991[2]; **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical Methods** 2008; Stoer & Bulirsch: Numerische Mathematik 2; **Modifiziertes Euler-Verfahren** bezieht eine modifizierte Steigung $f(t_{n+1/2}, x_{n+1/2})$ aus der Schritt-Mitte ein, indem es vom falschen Zustand beim Halbschritt $x(t_{n+1/2})$ ausgeht

$$x(t_{n+1/2}) = x(t_n) + \frac{h}{2} f(t_n, x_n), \quad x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\, f(t_{n+1/2}, x_{n+1/2})$$

Verfahren von Heun oder Prädiktor-Korrektor-Methode zur Verringerung des globalen Fehlers durch Steigungsmittelwert

$$x^0(t_{n+1}) = x(t_n) + h\, f(t_n, x_n), \quad x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{h}{2}\left[f(t_n, x_n) + f(t_{n+1}, x^0_{n+1})\right]$$

Chapra: Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and scientists 2012[3] p562; **Schrittweitensteuerung:** Schrittweitenverdopplung bringt keine drastische Fehlervergrößerung E. Annahme: Verfahren konvergiert mit $h \to 0$. Nun wähle Schrittweite h_{opt} so, dass $E = |x_{h_1+h_2} - (x_{h_1} + x_{h_2})|/x_0$ stets in einem Intervall, das zwischen dem theoretisch kleinsten Gesamtfehler $e \propto h^{-1}(h^{p+1} + 10^{-m}) = h^p + h^{-1}10^{-m}$ wegen $n = h^{-1}$ Schritten auf dem Intervall [0,1], der **Ordnung des Verfahrens** p, also Verfahrensfehler proportional h^{p+1} und der **Maschinengenauigkeit** $\Gamma = 10^{-m}$ und $m\Gamma$ liegt. **Maschinengenauigkeit** = kleinste von der Null verschiedene Zahl: Step 1: Set $\epsilon = 1$;
Step 2: If $1 + \epsilon$ is less than or equal to 1, then go to Step 5. Otherwise go to Step 3;
Step 3: $\epsilon = \epsilon/2$; Step 4: Return to Step 2; Step 5: $\epsilon = 2\,\epsilon$. **Machine ϵ: print(np.finfo(np.float).eps).** def Reihe(): "'Berechnung einer Reihe bis auf Maschinengenauigkeit. Aufruf durch Reihe()"' reihe=0.; s=10.; n=0; while (reihe+s!=reihe):; n+=1; reihe+=s; s=1./float(n*n*n*n*n); return reihe,n; Fehlerminimum bei $h_{\text{opt}} = (\frac{1}{p}10^{-m})^{\frac{1}{p+1}}$, also $e_{\min} \propto 10^{-\frac{mp}{p+1}}$. Bei einfacher Genauigkeit $m = 8$ ist $e_{\min}(\text{Euler}, p = 1) = 10^{-4}$. Daher gewinnt zunächst mit einer Verfahrensverbesserung, also RK4. Danach hilft nur eine Verfesserung der Maschinengenauigkeit! Dahmen, Reusken p404, p393ff; Engeln-Muellges p425ff; Chapra: Numerical Methods for Engineers p602ff; **Rückwärtsmethode**, bei der der zu bestimmende Wert bereits zu seiner Bestimmung

benötigt wird: a] Prädiktor-Schritt x^P, b] $x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t\, f(t_{i+1}, x_{i+1})$ mit $x_{i+1} = x^P$. Echtes implizites Verfahren entsteht durch Fixpunkt-Iteration. **Crank-Nicolson-Verfahren:** 1947 Kombination von explizitem und implizitem oder Vor- und Rückwärts-Euler-Verfahren. Beispiel: $y' = -ay$, $y(x_0 = 0) = y_0$ hat Lösung $y(x) = y_0 e^{-ax}$. Aber Euler-Verfahren ohne Trennung der Variable, weil $y(x) = \text{const}$ über kleine Intervalle der Länge $h =$ **kleine Schrittweite**: $y_1 - y_0 = \int_{y_0}^{y_1} = -a \int_0^h y \mathrm{d}x \sim -ay(x)|_{\tilde{x}} \int_0^h \mathrm{d}x = -ay(x)|_{\tilde{x}} h$ gibt $y_1 = \begin{cases} y_0 - ay_0 h = y_0(1-ah) & y_n = (1-ah)^n y_0 \text{ Kovergenzradius } |1-ah| < 1 \\ y_0 - ay_1 h \text{ oder } y_1 = y_0/(1+ah) & y_n = (1+ah)^{-n} y_0 \text{ ohne Kovergenzradius}, h \text{ egal!} \end{cases}$. **Euler explizit** = rechte Seite auf Basis einer **Untersumme** des Integrals $y_1 = y_0 + f(x_0)\, h$. **Euler implizit** = Rückwärts-Euler-Verfahren = rechte Seite auf Basis einer **Obersumme** des Integrals $y_1 = y_0 + f(x_0 + h)\, h$. Ein muss für **steife ODEs**, wiel Wahl der **Schrittweite unkritisch**, Preuss p288; **Leapfrog-(Halbschritt-Verfahren)-Verfahren:**

$$x(t_{n+1/2}) = x(t_{n-1/2}) + h\, f(t_n, x_n) \text{ mit } x_{1/2} = x_0 - f(t_0, x_0)\frac{h}{2}, \quad x(t_{n+1}) = x(t_n) + h\, f(t_{n+1/2}, x_{n+1/2})$$

mit $x_0 = x_0$. s**-Schritt-Adams-Bashforth-Methode** - Multischrittmethode: Nutze den bisherigen integrierten Lösungskurvenverlauf, um ein Polynom der Ordnung m mittels Lagrange'scher Interpolation zu bestimmen, dessen Steigung beim nächsten Schritt genommen wird. **Schwarz & Köckler: Numerische Mathematik** 2004[4]; Steife Differenzialgleichung: $\dot{x} = a\,(x - \exp(t)) - exp(-t)$ mit $x(0) = 1. + \epsilon$ hat Lösung $x(t) = \epsilon \exp(a\,t) + \exp(-t)$. Toernig: Num Math Bd2 p203; **Runge-Kutta-Verfahren 2. Ordnung** oder nutze auch die Steigung auf halbem Schritt, 1895. Mit Stützstellen $t_n = t_0 + nh$ liefert Taylor für $x(t)$ im zeitlichen Abstand h: $x_{n\pm1} = x(t_n \pm h) = x_n \pm h\dot{x}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_n \pm \frac{h^3}{6}\dddot{x}_n + O(h^4)$ der rechten Seite von $\dot{x} = f(x, p)$ **Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung** nutzt mittleren Anstieg $y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k4)h/6$ mit $k_1 = f(t_i, y_i)$, $k_2 = f(t_i + h/2, y_i + k_1\, h/2)$, $k_3 = f(t_i + h/2, y_i + k_2\, h/2)$ und $k_4 = f(t_i + h, y_i + k_3\, h)$. Chapra: Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and scientists 2012[3] p570; Büll: Physik mit dem PC 1998 AD-Wandler, IEEE-1284-Port Dgls der Mechanik, Duffing, Messanordnung zur getriebene Kompassnadel mit dem magnetischen Dipolmoment μ im Magnetfeld $B = B_0 \sin \Omega t$ hat Bewegungsgleichung $I\ddot{\varphi} = -\mu B \sin \varphi$; Kinzel & Reents: **Physik per Computer** 1996 p127ff; de Vries: Computerphysik. Grundlagen, Methoden, Übungen 1995 p217ff; Butcher: Runge-Kutta methods in modern computation I & II, Comp in physics 8 Nr4 1994 p411-5; **Symplektisches Runge-Kutta-Nyström-Verfahren**: Jentzen 2006. Wegen der Energieerhaltung ist das totale Differenzial $\mathrm{d}H = H_p\dot{p} + H_q\dot{q} = 0$ für die Lösungskurve $\{p(t), q(t)\}$ für alle Zeiten erfüllt. Sei $\dot{q} = p$ und $\dot{p} = -V'(q) =: F(q)$. Dann ist das **symplektische Euler-Verfahren**

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} F(q_0) \\ p_1 \end{pmatrix}$$

Energieerhaltung erreicht man praktisch durch $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) + (H_0 - H)\nabla H(p, q)$ wobei der numerischen Fehler energieerhaltend korrigiert wird. **Stuart & Humphries: Dynamical systems and numerical analysis** 1998 p582ff alles über symplektische Verfahren; **Steeb: The nonlinear workbook** p276; **Leimkuhler & Reich: Simulating Hamiltonian dynamics** 2004; Hairer, Norsett, Wanner: Solving ordinary differential equations I. Nonstiff problems 1992[2]; Hairer, Lubich, Wanner: Geometric numerical integration. Structure-preserving algorithms for ordinary differential equations 2006[2] speziell für separable Hamilton-Systeme; http://en.wikipedia. org/wiki/ Symplectic_integrator; Yoshida (1990). Construction of higher order symplectic integrators. PhysLettA 150 5–7; Candy & Rozmus (1991): A Symplectic Integration Algorithm for Separable Hamiltonian Functions. JComputPhys92 230; Moan (May 2002). Practical symplectic partitioned Runge–Kutta and Runge–Kutta–Nyström methods. Journal of Computational and Applied Mathematics 142 313–330; Henner: Mathematical Methods in Physics. Partial Differential Equations, Fourier Series, and Special Functions 2009; Henner, Belozerova & Khenner: Ordinary and Partial Differential Equations 2013 elementar, mit vielen Beispielen, maple, mathematica; Guillemin & Sternberg: **Symplectic techniques in physics** 1984, 1993; Alberto Abbondandolo, Ruhr Universität Bochum: On short geodesics and shadows of balls. How large is the four-dimensional shadow of a symplectic ball? And how long

can the shortest closed geodesic on a two-sphere be? How these two questions can be put into a common framework using a particular class of Hamiltonian dynamical systems known as Reeb flows.

b] Isoklinen = Wo liegen Punkte gleichen Anstiegs. Speziell Gleichgewicht/Fixpunkt. Qualitative Methoden - Stabilitätsanalyse (siehe Seite 186) per Linearisierung/Jacobi-Matrix. Störungsmethoden. **Schäfer: Theoretische Grundlagen der Stabilität** technischer Systeme 1976 p14f; Khalil: Nonlinear systems 2002 Robinson: An Introduction to Dynamical Systems. Continuous and Discrete 2004; Ginoux: Differential geometry applied to dynamical systems, 2009; **Palis & de Melo: Geometrical theory of to dynamical systems** 1982; Dobner: Gewöhnliche Differenzialgleichungen. Differenzialgleichungen in Theorie und Praxis 2004; Elmer: Differentialgleichungen in der Physik 1997; Aulbach: Gewöhnliche Differenzialgleichungen 2010; Goering: Elementare Methoden, Asymptotische Methoden, Stepanow, Elmer, Poljanin & Sajzew, Riech, Furlan 3 (Das gelbe Rechenbuch), Smirnow, Schulz, May, PfL1, Weise, **Heuser, Haberman, Mesterton-Gibbons: A concrete approach to math modelling; Beltrami: Mathematics for Dynamic Modeling 1987; Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik 1981 p30-49; Fowkes & Mahony: Einführung in die mathematische Modellierung; SdW Spezial Physik zur mathematischen Modellierung. Math und Technik 3/2015 Simulation komplexer Systeme per Computer. Neuronale Netze. Prandtl; Zell: Simulation Neuronaler Netze 1994; Müller & Rinhardt: Neural networks. An introduction 1991; Mooney: A course in mathematical modeling 1999; Giordano: A first course in mathematical modeling 1983; Lenny Smith: Chaos 2007 p76ff = Sehr gute Fraktaleinführung; Acheson: Vom Calculus zum Chaos 1999; Peitgen et al.: Fraktale - Bausteine des Chaos & Chaos**; Triebel: Fractals and spectra. Related to Fourier analysis and function spaces 1997; Schroeder: Fractals, Chaos, Power Laws. Minutes from an Infinite Paradise 1991; **Hertel: Mathematikbuch zur Physik** 2009 e-book, Arbeitsbuch Mathematik zur Physik 2011; Stephani: Differentialgleichungen (Lie-Transformation). Boyce & DiPrima: Gew. Differentialgl; Borelli, Lazarus, Thibert: **Glatte Fraktale und konvexe Inegration**, SdW Jan 2015 p45-52 Nash zeigt die Existenz der **isometrischen Einbettung** = Abbildung einer Ebene in gekrümmte Fläche, wobei alle Längen erhalten bleiben. Gromov: **Konvexe Integration** löst bestimmte Klassen von PDEs SdW Mai 2009 p74 Idee basiert auf Riemanns Perspektivwechsel: Statt Fläche **im Raum** durch Parametrisierung - Karte - genügt die Sicht aus innerhalb der Karte, also mittels intrinsischer Eigenschaft = Riemann'sche Metrik enthält ort- und richtungsabhängigen Maßstab, weil Längen der Karten bei Kartenwechsel sonst nicht erhalten bleiben. Siehe Landkarten. Riemanns Idee erlaubt es, die unübersichtliche Form der Fläche außer Acht zu lassen, wenn man nur den ortsabhängigen Maßstab im Auge behält. Analyse einer Fläche reduziert sich auf Analyse der riemannschen Metrik. Problem der **isometrischen Einbettung** = Abbildung, bei der Entfernungen unveränder bleiben: Existiert zu einer beliebigen riemannschen Mannigfaltigkeit (= Ebenenstück mit Metrik) eine Fläche, die diese Geometrie im $\mathbb{R}^3$ konkret realisiert?

Bestimme erst die **allgemeine Lösung** der inhomogenen Dgl. als Summe der **allgemeine Lösung** der entsprechenden homogenen Dgl. und einer **partikulären Lösung** der inhomogenen Dgl. Danach erst die spezielle Lösung fixieren!

Die Lösung $x(t)$ eines AWPs = **Cauchy-Problem** $x' = f(x,p)$ (1) hängt aber meist von mehreren Parametern p und den Anfangs- und Randbedingen x_0 ab, was zu einem unübersichtlichen Lösungsraum führt. Arens p425; **Choquet-Bruhat, DeWitt-Morette, Dillard-Bleick: Analysis, Manifolds and Physics** Pt1 Basics 1982 2009 p256 Lösung von PDE 1.Ordnung $F(x^1,\ldots,x^n,z,\partial z/\partial x^1,\ldots,\partial z/\partial x^n) = F(\vec{x},z,\nabla_{\vec{x}}z) = F(\vec{x},z,\vec{p}) = 0$ mit den n unabhängigen Variablen $\vec{x}$, einer abhängigen Variablen und n 'Impulsen' $\vec{p}$ bei vorgegebener Anfangsbedingungshyperfläche W^{n-1} über $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $z = h(x^i)$.; Arnold: VL über PDEs 2004 p34f Cauchy-Problem ist Frage nach Lösung einer PDE, die gewisse Bedingungen auf einer Hyperfläche über abgeschlossenem Gebiet erfüllt. Folland: Introduction to Partial Differential Equations 1876 Kap1C p42 p160 allgemeines Cauchy-Problem. **Ziel der Reskalierung einer Diffenrenzialgleichung** besteht im Auffinden **charakteristischer (Raum- und/oder Zeit-) Skalen** der Lösung noch bevor Sie Ihre Lösungssuche oder numerische Integration beginnen, insbesonder bei PDEs siehe Seite 598, um a] eine Vorstellung von der zu wählenden oberen Schranke für die Intgrationsschrittweite h zu bekommen und b]

in der Gewinnung einer **übersichtlicheren** - weil schließlich von weniger Parametern abhängigen - Lösung. **Rezept zur Reskalierung**: a] Reskaliere die unabhängigen t und abhängigen Variablen x der Dgl gemäß $x = k_x * X$ und $t = k_t * T$ (2) b] Substituiere mittels (2) die Variablen der gegebenen Dgl (1) c] Setze nun in der neuen, transformierten Dgl (1') $X' = F(X, P)$ die verbleibenden Koeffizienten $P = 1$. Dann ergeben sich in k_x und k_t charakteristische Zeitskalen und als Parameter bleiben nur reskalierte Anfangsbedingungen zurück. Bolster, Hershberger, Donnelly: Dynamic similarity, the dimensionless science, Physics Today 64 H9 2011 p42;

Beispiel Fadenpendel: $m*l^2*x''+m*g*l*sin(x) = 0$. Reskalierte Dgl: $X''+(k_t^2*g/k_x/l)*sin(k_x*X) = 0$ mit $k_x = 1$ und $k_t^2*g/(l*k_x) = 1$ gibt die Dgl $X''+sin(X) = 0$ mit den reskalierten Anfangsbedingungen für Ort $X(0) = x(0)/k_x = x(0)$ und Geschwindigkeit $X'(0) = x'(0)*k_t/k_x = x'(0)*\sqrt(l/g)$ und der charakteristischen Zeitskala $k_t = \sqrt(l/g)$ =Schwingungsdauer/$(2 * i\pi)$ Sie integrieren also nur die Dgl. $X'' + sin(X) = 0$ mit der gleichen Anfangsbedingung für den Ort, aber der reskalierten Anfangsbedingung für Geschwindigkeit. Siehe auch: Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering 1994 p64ff; Haberman: Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and **Traffic Flow**, Seite 52; Lin & Segel: Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciences; De Lange: Solved problems in classical mechanics: Analytical and numerical solutions with comments 2010; Fowkes & Mahony: Einführung in die mathematische Modellierung;

Beachte die Nähe zum Begriff der **mechanischen Ähnlichkeit** Landau: Mechanik; Kuypers: Mechanik; Tiebel: Theoretische Mechanik in Aufgaben p41, 108; Sei die **Skalentransformation** $x' = \alpha\, x, t' = \alpha^{1-k/2}\, t$, dann ist die **homogene Funktion** $U' = U(x') = U(\alpha\, x) = \alpha^k U(x)$ **homogen von Grad** k. $\dot{x}' = \alpha^{k/2}$ und $T' = \alpha^k\, T$, also $\mathcal{L}' = T' - U' = \alpha^k \mathcal{L}$. Kuypers Aufgabe 1.17. **Euler-Theorem:** Def: $f(\vec{x})$ **homogene Funktion** m-ter Ordnung $\Leftrightarrow$ $f(a\vec{x}) = a^m f(\vec{x})$. Falls $f(\vec{x})$ **homogene Funktion** m-ter Ordnung, dann gilt $\vec{x} \cdot \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial \vec{x}} = m f(\vec{x})$. Beweis: $\dfrac{\mathrm{d} f(a\vec{x})}{\mathrm{d}a} = \dfrac{\partial f(a\vec{x})}{\partial a\vec{x}} \dfrac{\partial a\vec{x}}{\partial a} = \dfrac{1}{a} \dfrac{\partial f(a\vec{x})}{\partial \vec{x}} \cdot \vec{x} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} a^m f(\vec{x}) = m a^{m-1} f(\vec{x})$, also $\vec{x} \cdot \dfrac{\partial f(a\vec{x})}{\partial \vec{x}} = m a^m f(\vec{x})$. Speziell $a = 1$ gibt qed. Oder $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} = \vec{r} \cdot \mathrm{grad}\, f = m\, f$, denn gemäß Kettenregel gilt $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} f(a\vec{x}) = \dfrac{\mathrm{d} f(a\vec{x})}{\mathrm{d}a\vec{x}} \cdot \dfrac{\mathrm{d}a\vec{x}}{\mathrm{d}a} = \dfrac{\mathrm{d} f(a\vec{x})}{a\mathrm{d}\vec{x}} \cdot \vec{x} = \dfrac{1}{a} \vec{x} \cdot \mathrm{grad}\, f(a\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial a\, x_i} \frac{\partial a\, x_i}{\partial a} = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial a\, x_i} = \vec{x} \cdot \frac{\partial f}{\partial a\, \vec{x}} = \frac{1}{a}\, \vec{x} \cdot \nabla f = m\, a^{m-1}\, f(\vec{x})$ folgt $\vec{x} \cdot \mathrm{grad}\, f(a\vec{x}) = m a^m f(\vec{x})$. Speziell für $a = 1$ folgt $\vec{x} \cdot (\nabla f) = m\, f$. **Kinetische Energie** $T = \sum m_i\, \dot{\vec{r}}_i^2/2$ ist homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten: $T(\lambda\dot{\vec{r}}_1, \ldots, \lambda\dot{\vec{r}}_n) = \lambda^2 T(\dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_n)$ und daher $\dot{\vec{x}} \cdot \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\vec{x}}} = 2\, T$. Beachte die Nähe zum Begriff Scaling, siehe Barenblatt: Scaling 2003;

Massenerhaltung bringt Kontinuitätsgleichung Stephani & Kluge oder Greiner: Hydrodynamik p35: Grundlagen der theoretischen Mechanik Kap Bilanzgleichungen; **Chorin & Marsden: A mathematical introduction to fluid mechanics** 1997[3]; Honerkamp & Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993 p188ff **konduktive**/durch Leitung und **konvektive Stromdichte**/durch Mitführung; **Stromdichte des Drehimpulses** p190ff. Mit der konduktiven Impulsstromdichte $\vec{j}_i = -(\tau_{1i}, \tau_{1j}, \tau_{1k})$ lautet die **Bilanzgleichung** für die i-te Impulskomponente $\rho \dfrac{\mathrm{D}v_i}{\mathrm{D}t} - \nabla_j \tau_{ji} = f_i$, zu jeder Stromrichtung i tragen also alle 3 Raumrichtungen des Impulses bei! Die Größe τ_{ji} gibt also den Fluss der i-Impuls-Komponete pro Zeit und pro Fläche durch eine Fläche normal zu $\hat{e}_j$ an. So gibt $K_i = -\mathrm{d}F_j \tau_{ji}$ die i-te Komponente des Impulses durch die Fläche $\mathrm{d}\vec{F}$ in Richtung $\mathrm{d}\vec{F}$ an, also die **Kraft** = Impulsstrom. Wegen **Scherung** müssen Kraftrichtung und Flächennormale nicht übereinstimmen. **Drucktensor** $\tau_{ji} = -p\delta_{ji} + \tau'_{ji}$, mit $\tau_{ji} = \tau_{ij}$, falls Massenelemente ohne **inneren Drehimpuls**.; Weizel: LB der theoret Physik Bd1 1949 p116ff, p223; Siehe auch Seite 567. Betrachte die Masse in einem raumfesten Gebiet W. Die Dichte hat **unabhängige** Raum-Zeit-Koordinaten

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} m(W,t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_W \rho(\vec{x},t)\mathrm{d}V = \int_W \underline{\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x},t)}\mathrm{d}V = -\int_{\partial W} \rho(\vec{x},t)\vec{u} \cdot \hat{n}\mathrm{d}A \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_W \underline{\mathrm{div}\, \rho(\vec{x},t)\vec{u}(\vec{x},t)}\mathrm{d}V$$

Die **parzielle** Ableitung verweist darauf, dass die **zeitliche Änderung** der Dichte am **selben Orte** zu betrachten ist (Wetteränderung am fixen Ort). Der Term $\vec{v} \cdot \nabla A$ beschreibt Wetteränderung bei Gang zu

anderen Ort zur gleichen Zeit. **Reisegleichung**: $\frac{\mathrm{D}A}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla A$. Wegen $\nabla \cdot (\rho\vec{v}) = \vec{v}\mathrm{grad}\,\rho + \rho\mathrm{div}\,\vec{v}$ und der **substanziellen Ableitung** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\rho \cdot \dot{\vec{x}} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\,\rho = \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t}$ folgt aus der **Kontinuitätsgleichung** Stephani & Kluge: Mechanik p180 verschieden notiert werden

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho\vec{v}) = 0 \quad \text{oder mit substanzieller Ableitung} \quad \frac{\mathrm{d}\rho(\vec{x},t)}{\mathrm{d}t} + \rho(\vec{x},t)\mathrm{div}\,\vec{v}(\vec{x},t) = 0 \tag{33}$$

mit der Stromdichte/Fluss $\vec{j} = \varrho\vec{v}$, ϱ Massendichte, c Konzentration oder p Wahrscheinlichkeit, folgt für Bewegungen im Phasenraum mit $\vec{x} = (\vec{q},\vec{p}) \in \mathbb{R}^{6N-k}$ und $\dot{\vec{x}} = \vec{f} = \vec{v} = (\dot{\vec{q}},\dot{\vec{p}}) = (\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}) \in \mathbb{R}^{6N-k}$ wegen Hamilton'scher Mechanik = reibungsfreier Bewegung folgt

$$0 = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left[\frac{\partial(\rho\,\dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial(\rho\,\dot{p}_i)}{\partial p_i}\right] = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(\dot{q}_i\frac{\partial\rho}{\partial q_i} + \dot{p}_i\frac{\partial\rho}{\partial p_i}\right) + \rho\sum_{i=1}^{3N}\underbrace{\left(\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial\dot{p}_i}{\partial p_i}\right)}_{=0}$$

der **Liouville'scher Satz:** Betrachte Bewegung eines freien Teilchens im Phasenraum. Sofort folgt er mit der Quellenfreiheit der Strömung $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$, was von den hamilton'schen kanonischen Gleichungen stets erfüllt wird. Beachte Geschwindigkeit eines Phasenraum-Punktes = Geschwindigkeit aller Teilchen im Γ-Raum am Ort ist $\vec{v} = \vec{u} = (\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_N,\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_N) = \vec{\Gamma} \in \mathbb{R}^{6N}$. **Kurz:** Die kanon Bewegungsgleichungen geben für den Fluss der Phasenbahnen $\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$. Daher folgt aus der **Kontinuitätsgleichung**, die wegen der substanziellen/totalen Ableitung in zwei verschiedenen Gestalten geschrieben werden kann: a] mit Dichteänderung an ein und derselben Stelle des Raum gemäß $\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\rho\,\vec{u} = 0$ oder **äquivalent** b] mit totaler Dichteänderung in der Raumzeit gemäß
$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \dot{\rho} = -\rho\,\mathrm{div}\,\vec{u} = 0$, die Dichtekonstanz $\rho(\vec{x},t) =$ konst oder, da keine Teilchen/Bahnen verloren gehen, dass die zeitliche Entwicklung der Phasenraumvolumina = Teilchenhorden zwar auseindergetrieben werden können, aber insgesamt stets den gleichen Phasenrauminhalt beanspruchen. **Satz von Liouville:** Das Liouville-Theorem zielt auf Teilchengesamtheiten/ensemble der statistische Mechanik ab. Dazu braucht man den Begriff der Phasenraumdichte in der Umgebung eines gegebenen Systempunkts. Die Quellenfreiheit des Phasenraumflusses Hamilton'scher Systeme zieht die zeitliche Konstanz der Dichte der Systempunkte nach sich. Budo: Mechanik p184 Integralversion; Straumann: Klass Mechanik 1987 p138 $\nabla_{\vec{q},\vec{p}} \cdot (\dot{\vec{q}},\dot{\vec{p}}) = 0$ ist Voraussetzung für Aussage zum Fluss im Phasenraum: Lebesgue-Liouville'sches Maß ist unter dem Fluss invariant. Goldstein, Poole, Safko: Mechanik 2006 p455;
https://en.wikipedia.org/wiki/Liouville%27s_theorem_(Hamiltonian) Das Volumen irgendeines beliebigen Gebietes des Phasenraum bleibt erhalten, wenn sich die Punkte seiner Begrenzung entsprechend den kanaonischen Gleichungen bewegen. **Oder:** Die Dichte der Punkte im Phasenraum in der Umgebung eines mitbewegten Punktes ist konstant. **Kurz:** 1. Zeitliche Änderung des totalen Differentials der Teilchendichte = Reisegleichung der Teilchendichte ist $\dot{n} = \partial_t n + \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\,n$ mit $\vec{v} = \begin{pmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{pmatrix}$. 2. Divergenz der Teilchenstromdichte $\vec{j} = n\vec{v}$ ist $\mathrm{div}\,n\vec{v} = \mathrm{grad}\,n \cdot \vec{v} + n\mathrm{div}\,\vec{v} \overset{\text{Hamilton-Glgn}}{=} \vec{v} \cdot \mathrm{grad}\,n$. Bedeutet wegen Kontinuitätsgleichung $\partial_t n = -\mathrm{div}\,n\vec{v}$ sofort $\dot{n} = \partial_t n + \mathrm{div}\,n\vec{v} \overset{\text{Hamilton-Glgn}}{=} 0$. Bedeutet zeitlich unveränderte Teilchendichte $n = \frac{\delta N}{\delta V}$ bedeutet, dass die gleiche Anzahl von denselben Teilchen δN stets das gleiche Volumen δV, aber ganz verschiedene Bereiche im Phasenraum einnimmt. **Beweis:** a] Zeige Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung, basiert/nutzt teils auf der zT die Idee der Divergenz. Betrachte infinitesimales raumfestes Gebiet der Koordinatenzelle $[\mathrm{d}q,\mathrm{d}p](q,p) =$ fixem Rahmen mit Schwerpunkt bei (q,p) und Inhalt $\mathrm{d}V(q,p) = \mathrm{d}q\mathrm{d}p$ am Ort (q,p) und mit $\mathrm{d}N(q,p,t)$ Teilchen darin am Ort (q,p). Bedeutet Teilchendichte $n(q,p,t)$. Das Gebiet sei stetigem Teilchenfluss $\vec{j}(q,p) = n(q,p,t)\vec{v} = n(q,p,t)(\dot{q},\dot{p})$ ausgesetzt. Der Teilchenfluss gehe links in q-Richtung in die fixe Koordinatenzelle $[\mathrm{d}q,\mathrm{d}p](q,p)$ hinein mit $\delta\mathrm{d}N_l = n_l\dot{q}_l\mathrm{d}p\delta t$ Teilchen im Zeitraum δt und ströme rechts in q-Richtung im gleichen Zeitraum mit $\delta\mathrm{d}N_r = n_r\dot{q}_r\mathrm{d}p\delta t$ Teilchen heraus. Entsprechend hat man in der Impulsrichtung Von unten nach oben die Teilchenzahlen $\delta\mathrm{d}N_u = n_u\dot{q}_u\mathrm{d}q\delta t$ in die Zelle hinein und oben $\delta\mathrm{d}N_o = n_o\dot{q}_o\mathrm{d}q\delta t$ hinaustretende Teilchen. Die Teilchenzahländerung für

die einzelne Koordinatenzelle $[\mathrm{d}q,\mathrm{d}p](q,p)$ bei (q,p) ist $\delta\mathrm{d}N = -\delta\mathrm{d}N_r + \delta\mathrm{d}N_l - \delta\mathrm{d}N_o + \delta\mathrm{d}N_u$ bedeutet $\frac{\delta\mathrm{d}N}{\delta t} = -[n_r\dot q_r - n_l\dot q_l]\mathrm{d}p\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}q} - [n_o\dot q_o - n_u\dot q_u]\mathrm{d}q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}p}$. Rechte Seite ist Definition des Divergenz-Begriffs, bedeutet $\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\delta\mathrm{d}N}{\mathrm{d}q\mathrm{d}p\delta t} = -\frac{n_r\dot q_r - n_l\dot q_l}{\mathrm{d}q} - \frac{n_o\dot p_o - n_u\dot p_u}{\mathrm{d}p} = -\frac{\partial n\dot q}{\partial q} - \frac{\partial n\dot p}{\partial p} = -\mathrm{div}\, n\vec v =$ **Kontinuitätsgleichung**. McCuskey: An introduction to advanced mechanics 1959 p215ff = **Beweis Liouville-Theorem**; Budo: Mechanik p184 Liouville-Theorem bedeutet Integralinvariante $I_f = \int \mathrm{d}\Gamma = \mathrm{const}$; Lichtenberg & Lieberman: Regular an stochastic motion 1983 p13; Lichtenberg & Lieberman: Regular an stochastic motion 1983 p13; Straumann: Klassische Mechanik 1987 p138 $\mathrm{div}\,\dot{\vec v} = 0$ für $\vec v = (\vec q, \vec p)$ gibt Liouville-Theorem = Lebesgue-Liouville-Maß ist unter dem Fluss invariant. b] Hamilton'sche Bewegungsgleichungen gelten. **Marion: Classical dynamics of particles and systems** 1970 p231f **Beweis per Taylor-Entwicklung**; Greiner Bd2 p380; Feldmeier: Mechanik Kap4; Huang: Stat Mechanik Bd1 p72; **Liouville mittels Funktionaldeterminante:** Dabei wird die Transformation des Produkts der Differentiale (infinitesimales Phasenraumvolumen) betrachtet. Bei kanonischen Transformationen $(q,p) \to (Q,P)$ bleibt das Gebietsintegral $\int_G \mathrm{d}q\mathrm{d}p = \int_{\tilde G} \mathrm{d}Q\mathrm{d}P$ invariant.

Andererseits gilt für Gebiete die Substitutionsregel = Transformationssatz = Transformationsformel für Rauminhalte von Gebieten $\int_G \mathrm{d}q\mathrm{d}p = \int_{\tilde G} J\mathrm{d}Q\mathrm{d}P$. Daher genügt der Nachweis $J = 1$, um Invarianz des Inhalts (Erhaltung des Phasenraumvolumens) zu zeigen. Bröcker: Analysis in mehreren Variablen, einschließlich gewöhnlicher Differentialgleichungen und des Satzes von Stokes 1980 p26 **Transformationsformel für stetige Funktionen** f und stetige differenzierbare Substitution/Transformation φ ist $\int_a^b (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$ oder $\int_a^b f\circ\varphi(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\mathrm{d}x$ oder p228 $\int_X f\circ g\, J_g = \int_{g(X)} f$; Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik 2003[9] p245 für bloße Rauminhalte von Gebieten ist $\varphi(t) = 1$ oder $g = 1$; Körber & Pforr: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. MINÖL5 1989 p69; **Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik** p480f; Zeidler, Bronstein: TB der Mathe 2003 p343; Furlan: Das gelbe Buch Bd2 p166; **Arens et al.: Mathematik** 2012[2] Transformationsformel p852, **Transformationssatz für Dichten von Zufallsvariablen** p1344-47 $p_X(x)\mathrm{d}x = p_Y(y)\mathrm{d}y$ bedeutet $p_X(x) = p_Y(y)\left|\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|$; Khintchin p16; **Khinchin & Gamov: Mathematical Foundations of Statistical Mechanics** 1949 p15-27 = verkürzte Darstellung in **Landau/Lifschitz: Mechanik** p180f Funktionaldeterminante $= \left[\frac{(q,p)}{(Q,P)}\right]^{-1} = \frac{(Q,P)}{(q,p)} = \frac{(Q,P)}{(q,P)}\frac{(q,P)}{(q,p)} = \frac{\partial Q}{\partial q}/\frac{\partial p}{\partial P} = 1$ wegen $Q = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial P}$ und $p = \frac{\partial F_2(q,P)}{\partial q}$ mit $K = H + \partial_t F_2$; **Funktionaldeterminante bei kanonischer Transformation** siehe **Schmutzer: Grundprinzipien der klassischen Mechanik und der klassischen Feldtheorie** 1973 p47; **Landau & Lifschitz: Mechanik §46**; Percival & Richards: Introduction to dynamics 1982 p58 zeitliche Taylor-Entwicklung der Phasenraum-trajektorie $q_1 = q(t_0+\delta t) = q_0 + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}_{q_0,p_0,t_0}\delta t + O(\delta t^2)$ mit $\dot q = \partial H/\partial p$ und $p_1 = p(t_0+\delta t) = p_0 + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}_{q_0,p_0,t_0}\delta t + O(\delta t^2)$ mit $\dot p = -\partial H/\partial q$ gibt sofort $\frac{(q_1,p_1)}{(q_0,p_0)} = 1 + O(\delta t^2)$. Pauli: Statistical mechanics p26 betrachte zeitliche Entwicklung der Funktionaldeterminante $D(t,t_0) = \frac{(q(t),p(t))}{(q_0,p_0)} = 1 + \frac{\partial D}{\partial t}(t,t_0)|_{t=t_0}(t-t_0) + \cdots = 1$ wegen $\dot q = \partial H/\partial p$ und $\dot p = -\partial H/\partial q$, denn $D = q_1p_0 - p_1q_0$ gibt $\mathrm{d}D = \frac{\partial D}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial D}{\partial p_1}\mathrm{d}p_1 + \frac{\partial D}{\partial q_0}\mathrm{d}q_0 + \frac{\partial D}{\partial p_0}\mathrm{d}p_0$. Arnold: Klass Mech p78; Petrina, Gerasimenko & Malyshev: Mathematical foundations of classical statistical mechanics. Continuous systems 2002; Quadratisches Startgebiet wird zum flächengleichen Trapez deformiert. Aufgaben in Fließbach & Walliser: Arbeitsbuch zur theoret Physik p106, p111 ff; Alligood 385f; Sommerfeld Bd1 p24ff; Kuypers p347, Scheck p96; **Sadovskii: Statistical physics** 2012 p9ff; Weizel: LB der theoret Physik Bd1 1949 p116 ff, p223; Jose & Saletan p267; Stephani & Kluge; Goldstein;

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \{\rho, H\} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Dichte der Systempunkte im Phasenraum setzt sich aus der lokalen zeitlichen Dichteänderung und der Fluss-

bedingten Dichteänderung zusammen und ist zeitlich konstant, da bei hamilton'schen Flüsse keine Teilchen einfach so verschwinden oder auftauchen $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\dot{\vec{x}} = \operatorname{div}\cdot(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q}) = \frac{\partial^2 H}{\partial q \partial p} - \frac{\partial^2 H}{\partial p \partial q} = \operatorname{div}\vec{f} = 0$. Daher bleibt auch das **Phasenraumvolumen konstant**, nicht aber das von ihm eingenommene Gebiet. Das Gebiet kann **bizarre Formen** annehmen. Brockhaus Physik. **Maßeinheit des Phasenraumvolumens** $= [\mathrm{d}\Gamma] = \mathrm{d}q^s \mathrm{d}p^s = [h^s] =$ Wirkung. Straumann: Mechanik; Jänich: Mathematik 1 & 2; Jedes System zu einem Zeitpunkt ist Punkt im Phasenraum. Gesamtheit des Systems ist Punktschwarm, Wolke oder offene Menge, die im Phasenraum lebt. Stephani & Kluge, Goldstein, Sommerfeld Bd1 p24, Jose & Saletan, Guckenheimer & Holmes, Kuypers, Landau & Lifschitz: Bd5: Der durch die Dgl. $\dot{\vec{x}} = (\dot{x}, \dot{p}) = \vec{v} = \vec{f}(\vec{x})$ induzierte Fluss/Menge aller Trajektorien eines Phasenraumgebietes $\vec{x}_0 \in \Gamma_0 \in \Gamma(t)$ ist $\vec{x}(t) = \phi(t, \vec{x}_0)$ bewirkt folgende Phasenraum**volumenänderung** $\delta\Gamma = \Gamma(dt) - \Gamma_0$, die man sich im um die Zeit erweiterten Phasenraum anschaut. $\mathrm{d}\vec{x}$ zeigt in Richtung der Zeitachse des erweiterten Phasenraums und damit die Richtung der möglichen Phasenraumvolumenänderung senkrecht zur Phasenraumvolumenberandung $\partial\delta\Gamma$, die durch den Flächenvektor $\mathrm{d}\vec{A}$ beschrieben wird:

$$\delta\Gamma = \oint_{\partial\delta\Gamma} \mathrm{d}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{x} = \oint_{\partial\delta\Gamma} \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = \oint_{\partial\delta\Gamma} \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{f}\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\Gamma)}{\mathrm{d}t} = \oint_{\partial\delta\Gamma} \mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{f} = \int_{\delta\Gamma} \mathrm{d}\Gamma \operatorname{div}\vec{f} \approx \delta\Gamma \operatorname{div}\vec{f} \qquad \rightarrow \qquad \delta\Gamma(t) = \delta\Gamma_0\, e^{t\,\nabla\cdot\vec{f}}$$

Fluss als kanonische Transformation der Anfangsbedingungen

$$\Gamma(t) = \int_{\Gamma_0} \mathrm{d}\Gamma_0 \frac{\partial(q(t), p(t))}{\partial(q(0), p(0))} = \int_{\Gamma_0} \mathrm{d}q_0\, \mathrm{d}p_0\, \{q(t), p(t)\}_{q_0, p_0} = \int_{\Gamma_0} \mathrm{d}\Gamma_0 = \Gamma_0$$

Wegen Transformationssatz, Funktional-Determinante = Poisson-Klammer, bei kanon Transformation Klammer =1. **System ist konservativ/hamiltonsch, falls Fluss divergenzfrei oder inkompressibel** div $\vec{v} = 0$, folgt $\dot{\rho} = 0$ oder **Divergenz der rechten Seite** von Dgl-Systemen 1. Ordnung $\nabla\cdot\vec{f} = 0$ oder Fluss eine speziell Orthogonaltransformation oder nur inhaltstreue Abbildung mit Jacobi-Determinante 1 (oder -1, weil Pseudo-Skalar) , also nicht winkeltreue Abbildung darstellt. Transformation von Linien-, Flächen und Volumenelement gibt div $\vec{v} = 0$. Ottino: Stretching oder Chorin & Marsden: Math fluid dyn; **Satz von Liouville für schiefen Stoß:** Stoß findet bei $t = 0$ mit $y = 0$ und $x = 0$ statt. Die Wand ist gleichzusetzen mit der x-Achse. Damit sind Orte und Impulse in x-Richtung vor und nach dem Stoß $p'_x = p_x$ und $x'(t) = x(t) = p_x/m \cdot t$ und für die Differenzen gilt $\Delta p'_x \Delta x' = \Delta p_x \Delta x$. In y-Richtung gilt $p'_y = -p_y$, $y = p_y/m \cdot t$ und $y' = -p_y/m \cdot t$ und deshalb $\Delta p'_x = -\Delta p_x$ und $\Delta y' = -\Delta y$. Insgesamt folgt deshalb: $\Delta p'_x \Delta p'_y \Delta x' \Delta y' = \Delta p_x \Delta p_y \Delta x \Delta y$. **Liouville'scher Satz und vertikaler freier Fall:** Betrachten sie die Bewegung von vier Teilchen gleicher Masse m mit den Anfangsbedingungen $z_{01} = z_1(t=0) = z_0, p_1(t=0) = p_0, z_2(t=0) = z_0 + \Delta z, p_2(t=0) = p_0, z_3(t=0) = z_0, p_3(t=0) = p_0 + \Delta p, z_4(t=0) = z_0 + \Delta z, p_4(t=0) = p_0 + \Delta p$. $z_i(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_{0i}}{m}t + z_{0i}, p_i(t) = -gmt + p_{0i}, z_1(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_0}{m_i}t + z_0, p_1(t) = -gm_i t + p_0, z_2(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_0}{m_i}t + z_0 + \Delta z, p_2(t) = -gmt + p_0, z_3(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_0 + \Delta p}{m}t + z_0, p_3(t) = -gmt + p_0 + \Delta p, z_4(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \frac{p_0 + \Delta p}{m}t + z_0 + \Delta z, p_4(t) = -gmt + p_0 + \Delta p$. Daher $A(t) = (z_4(t) - z_1(t))(p_4(t) - p_2(t)) - 2\frac{1}{2}(z_4(t) - z_2(t))(p_4(t) - p_2(t)) = (p_4(t) - p_2(t))(z_4(t) - z_1 - z_4(t) + z_2(t)) = (p_4(t) - p_2(t))(z_2(t) - z_1(t)) = \Delta p \Delta z$. Betrachte Lösung des **harmonischen Oszillators** $q(t) = q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega}\cos\omega t$ und $p(t) = -m\omega q_0 \cos\omega t + p_0 \sin\omega t$ als **aktive Drehung** - also dadurch nicht nur Volumenerhaltend, sondern sogar **winkeltreu** - im Uhrzeigersinn im Phasenraum, siehe Seite 357. Satz von Liouville aus Kontinuitätsgleichung und Hamilton'schen Gleichungen: n Anzahl der Teilchen/Trajektoriensegmente pro Phasenraumvolumen $\mathrm{d}q^{3N}\mathrm{d}p^{3N} \in \Gamma^{6N}$-Raum $0 = \frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\,\vec{v}) =$
$= \frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left[\frac{\partial(n\,\dot{q}_i)}{\partial q_i} + \frac{\partial(n\,\dot{p}_i)}{\partial p_i}\right] = \frac{\partial n}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N}\left(\dot{q}_i\frac{\partial n}{\partial q_i} + \dot{p}_i\frac{\partial n}{\partial p_i}\right) + n\sum_{i=1}^{3N}\underbrace{\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right)}_{=0} = \frac{\partial n}{\partial t} + \{n, H\} = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$. Mit generalisierte Kräfte A_i, die nicht aus einem Potenzial abgeleitet werden können, lauten die Hamil-

ton'schen Gleichungen $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\quad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} + A_i$, $\quad i = 1, N$. Also verallgemeinerte Form des Satzes von Liouville $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho \sum_{i=1}^{3N} \dfrac{\partial A_i}{\partial p_i} = 0$. Teilchenschwarm von N freien Teilchen bewege sich in x-Richtung und unterliege allein Reibungskräften $A_i = -c\,\dot{x}_i$, $i = 1, N$, also $A_i = -c\,\dot{x}_i = -c\,p_i/m$ folgt $\dfrac{\partial A_i}{\partial p_i} = -\dfrac{c}{m}$ und wegen oben $\dfrac{d\rho}{dt} - 3N\rho\dfrac{c}{m} = 0$ und bedeutet für die Gesamtheit zeitlich exponenzielles Dichte-Wachstum $\rho = \rho_o\, e^{3Nc(t-t_o)/m}$. Gemäß Newton gilt $m\,\ddot{x} = -c\,\dot{x}$ und folglich $x = x_o + \tau\,\dot{x}_o(1 - e^{-t/\tau})$ mit $\tau := m/c$. Daraus folgen $p = p_o\, e^{-t/\tau}$ und $x = x_o + \tau\,\dot{x}_o(1 - e^{-t/\tau})$. Bedeutet für die Jacobi-Determinante = für das vom Schwarm insgesamt eingenommene Phasenvolumen $D(t) = \dfrac{\partial(x, p_x)}{\partial(x_o, p_{x_o})} = e^{-t/\tau}$, also verschwindendes Phasenraumvolumen in einem Phasenraumpunkt unendlicher Dichte. **Drehimpulserhaltung für ein Teilchenschwarm von N Teilchen**, die untereinander gravitativ wechselwirken: a] Auf jedes Teilchen i wirkt die Kraft $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$. b] Für jedes Teilchen i gilt NII $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$ oder $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i$. c] Der Gesamtdrehimpuls des Schwarms ist $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, seine Änderung ist $\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{(a)} + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}) \overset{\vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}}{=} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(a)} = \vec{D}^{(a)}$ bedeutet Drehimpulserhaltung, falls keine äußeren Kräfte gibt, also falls alle $\vec{F}_i^{(a)} = \vec{0}$.

Skalares und vektorielles **Kurven-, Linien-, Weg-Integral** Arens p905ff o p916, Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics 1993[7] lineintegral Salas & Hille: Calculus. Einführung in die Differential- und Integralrechnung 1994; entlang einer mit $\vec{\gamma}(t), t \in [a, b]$ parametrisierten Kurve γ über ein Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ ist

$$\int_\gamma \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{F} := \int_a^b \mathrm{d}t\, \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t) \quad \text{mit z.B.} \quad \vec{x}(t) = (t, t^2, t^5) = (x, y, z).$$

Pullback In der Sprache der Differenzialformen = Berechnung der 1-Form per Pullback siehe **Bressoud: Second year calculus** 1991 p82ff; Bei Integration längs der Koordinaten erst x-Achse, dann y-Achse und endlich z-Achse ist γ: $(0,0,0) \overset{y=z=0, \mathrm{d}y=\mathrm{d}z=0}{\longrightarrow} (1,0,0) \overset{x=1, z=0, \mathrm{d}x=\mathrm{d}z=0}{\longrightarrow} (1,1,0) \overset{x=1, y=1, \mathrm{d}x=\mathrm{d}y=0}{\longrightarrow} (1,1,1)$ daher für Feld $\vec{F}(\vec{x}) = (3x^2, -9yz, 8xz^2)$

$$\int_\gamma \mathrm{d}\vec{x} \cdot \vec{F} = \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{(1,0,0)}^{(1,1,0)} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{d}y \\ 0 \end{pmatrix} + \int_{(1,1,0)}^{(1,1,1)} \begin{pmatrix} 3 \\ -9z \\ 8z^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} =$$

$= \int_0^1 \mathrm{d}x 3x^2 + 0 + \int_0^1 \mathrm{d}z 8z^2 = 1 + \dfrac{8}{3} = \dfrac{11}{3}$.

Wegintegral $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ vom Feld $\vec{f}(x,y,z) = xyz(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ längs:

1. der Kanten $(0,0,0) \longrightarrow (1,0,0) \longrightarrow (1,1,0) \longrightarrow (1,1,1)$, $I_a = \int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{(1,0,0)}^{(1,1,0)} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{(1,1,0)}^{(1,1,1)} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_0^1 x \cdot 0 \cdot 0\, \mathrm{d}x + \int_0^1 1 \cdot y \cdot 0\, \mathrm{d}y + \int_0^1 1 \cdot 1 \cdot z\, \mathrm{d}z = \left[\dfrac{1}{2}z^2\right]_0^1 = \underline{\underline{\dfrac{1}{2}}}$
2. der Raumdiagonalen, $I_b = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad || \; x = y = z = t$ und $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 1 \; = \int_0^1 3t^3\, \mathrm{d}t = \left[\dfrac{3}{4}t^4\right]_0^1 = \underline{\underline{\dfrac{3}{4}}}$
3. der Kurve $\vec{r} = (t^2, t^3, t^4)$ mit $0 \le t \le 1$! $I = \int_{r_0}^{r_1} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_0}^{r_1} \left(f_x(x,y,z)\vec{i} + f_y(x,y,z)\vec{j} + f_z(x,y,z)\vec{k}\right) \cdot \left(\mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}\right) = \int_{r_0}^{r_1} (f_x(x,y,z)\mathrm{d}x + f_y(x,y,z)\mathrm{d}y + f_z(x,y,z)\mathrm{d}z) = \int_{t_0}^{t_1} (f_x(t)\dot{x} + f_y(t)\dot{y} + f_z(t)\dot{z})\, \mathrm{d}t$.

   $I_c = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \vec{f}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \quad \left\| \begin{array}{ll} x = t^2 & \dot{x} = 2t \\ y = t^3 & \dot{y} = 3t^2 \\ z = t^4 & \dot{z} = 4t^3 \end{array} \right. = \int_0^1 t^9 \left(2t + 3t^2 + 4t^3\right) \mathrm{d}t = 2\int_0^1 t^{10}\, \mathrm{d}t + 3\int_0^1 t^{11}\, \mathrm{d}t +$

   $4\int_0^1 t^{12}\, \mathrm{d}t = \left[\dfrac{2}{11}t^{11}\right]_0^1 + \left[\dfrac{3}{12}t^{12}\right]_0^1 + \left[\dfrac{4}{13}t^{13}\right]_0^1 = \dfrac{2}{11} + \dfrac{3}{12} + \dfrac{4}{13} = \dfrac{423}{572} \approx 0.74$

Das **entgegen dem Uhrzeiger** genommene **Ringintegral auf Basis des Riemann'schen Integrals:** $2A = \oint (x\dot{y} - y\dot{x})\, \mathrm{d}t$ denn für den zweiten Summanden gilt $-A = \oint y\dot{x}\, \mathrm{d}t = \int_r^l y_{\text{oben}} \mathrm{d}x + \int_l^r y_{\text{unten}} \mathrm{d}x =$

$-\int_l^r y_{\text{oben}}\mathrm{d}x + \int_l^r y_{\text{unten}}\mathrm{d}x$ also $A = \int_l^r y_{\text{oben}}\mathrm{d}x - \int_l^r y_{\text{unten}}\mathrm{d}x$ wegen $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r}|$ folgt der **Flächen-Satz** $\dot{A} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}| = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$ bedeutet ein Polarkoordinaten mit dem Kurven-Parameter t, nicht als Zeit betrachten, $x(t) = \rho(t)\cos\varphi(t)$ und $y(t) = \rho(t)\sin\varphi(t)$ folgt $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t = \rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$ oder $\mathrm{d}A = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)$. Tortenstückchen = Basis aller Dreiecke liegt auf Rand-Kurve = Gebiet begrenzendem Umfang = geschlossene Kurve. Höhen aller Dreiecke haben gleichen Punkt = enden alle in einem Pol. Statt bei Riemann-Integral = Summe über Trapeze unter Kurve. Bei polarer Integration ist Basis der Polpunkt oder der liegt auf Berandungskurve. Man summiert über Dreiecke mit gleichem Punkt über der wandernden Basis. **Beispiel Scherfeld:** $\vec{E} = x\hat{y}$ hat rot $\vec{E} = \hat{z}$. Betrachte das Ursprungsquadrat mit Kantenlänge 2. Satz von Stokes $\int_{A_\square}\mathrm{d}\vec{a}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E} = A_\square = 4 = \int_{\partial A_\square}\mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{E} = \int_{\partial A_\square}\mathrm{d}t\,\dot{\vec{l}}\cdot\vec{E} = \int_{\gamma_I}\vec{E}\cdot\dot{\vec{l}}\mathrm{d}t + \int_{\gamma_{III}}\vec{E}\cdot\dot{\vec{l}}\mathrm{d}t = 2+2$, wobei γ_I mit $\vec{l}_I(t) = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$ mit $t\in[0,1]$, also $\mathrm{d}\vec{l}_I(t) = 2\mathrm{d}t\hat{y}$, und γ_{III} mit $\vec{l}_{III}(t) = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-2\\0\end{pmatrix}$ mit $t\in[0,1]$, also $\mathrm{d}\vec{l}_{III}(t) = -2\mathrm{d}t\hat{y}$, die vertikalen Kanten bezeichnen. Rechnet man ohne Parameter, so bleibt das Skalarprodukt unbetrofen und man hat $\int_{\partial A_\square}\mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{E} = \int_{\gamma_I}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_{\gamma_{III}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_{\gamma_I}\mathrm{d}y + \int_{\gamma_{III}}\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y + \int_1^{-1}(-\mathrm{d}y)$. Bei zweiten Integral laufen die Inkremente negativ von 1 nach -1.

Arbeit ist das Wegintegral der Kraft, wobei der Körper aus einer Gleichgwichtslage heraus gegen das Kraftfeld verschoben wird oder **Systemgrenzen verändernde Energie**: Speziell an einer Feder gilt $dW = \mathrm{d}\vec{x}\cdot\vec{F}(\vec{x})$ mit $\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{F}_{\text{Hooke}}(\vec{x}) = k\,\vec{x}$. Hooke'scher Körper + Newton'sches Fluid = in Reihe Maxwell-Körper oder parallel Kelvin-Körper. Stephani & Kluge: Mechanik p256; **Kraft konservativ**, wenn nicht zeit- und geschwindigkeitsabhängig, also nur ortsabhängig und a] ein Potenzial besitzt $\vec{F} = -\nabla V$ - das **Minuszeichen** regelt das Vorzeichen zwischen Potenzialdifferenz und Arbeit! Mit positiver **mechanischer Arbeit** kommt man auf ein höheres Potenzial - oder b] die Arbeit wegunabhängig ist $\oint\mathrm{d}\vec{s}\cdot\vec{F} = 0$ ist oder c] das Kraftfeld wirbelfrei ist rot $\vec{F} = \vec{0}$. Zur Verallgemeinerung dieser Befunde siehe Seite 282. Hund: Mechanik p130 ff $W = -\int_1^2\mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{F} = -\int_1^2\mathrm{d}\vec{r}\cdot(-\mathrm{grad}\,V) = \int_1^2\mathrm{d}\vec{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\vec{r}} = \int_1^2\mathrm{d}U = U_2 - U_1$, wobei das totale Diff benutzt wird $\mathrm{d}U = \mathrm{d}\vec{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\vec{r}}$, gemäß Hooke $\mathrm{d}W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$. Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend oder bogenweise zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y\in X$ eine stetige Abbildung $w:[0,1]\to X$ gibt mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$. Die Abbildung w heißt Weg von x nach y. Rieckers & Bräuer: Einladung zur Mathe p168; Eine Teilmenge $A\subseteq X$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $x, y\in A$ einen Weg von x nach y in A gibt, also eine stetige Abbildung $w:[0,1]\to A$ mit $w(0) = x$ und $w(1) = y$. **Wegunabhängigkeit:** $\vec{E} = \mathrm{grad}\,\varphi \Leftrightarrow \oint_\gamma\mathrm{d}\vec{l}\cdot\vec{E} = 0$ oder Sei $U\in\mathbb{R}^n$ offen und wegzusammenhängend. Dann sind für das stetige Vektorfeld $\vec{E}\in C^0(U,\mathbb{R}^n)$ die drei Aussagen: äuquivalent, Walter: Analysis 2 Kap6.16; Heuser: Analysis 2^5 p369 Satz 180.1, p391 Satz 184.1, p393 Satz 185.1; **Königsberger: Analyis 2 Kap5.3**, Existenz einer Stammfunktion ist äquivalent 1-Form besitzt Stammfunktion ist äqui zur Wegunabhängigkeit der Integration! Als **Anti-Ableitung** wird auch die **Stammfunktion** oder **Wegunabhängigkeit** bezeichnet. Moore: Six ideas that shaped physics. Unit N = The laws of physics are universal 2003 p246; **Gravitationsform:** $\omega_G = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{r^3}$. **Wirbelform:** $\omega_W = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{\rho^2}$ oder $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\hat{\varphi}(\varphi)}{\rho}$. Anders als das Wirbelfeld des **harmonischen Oszillators** oder der **starren Rotation** $\mathrm{rot}\,(-y,x) = 2\hat{e}_z$ ist rot $W = \mathrm{rot}\,(-y/\rho^2, x/\rho^2) = \vec{0}$ für $\vec{\rho}\neq\vec{0}$, also gesamte Rotation bei $\vec{\rho} = \vec{0}$, weil das tangenziale Randskalarprodukt mit $1/\rho^2$ ausdünnt! Dieser zylindersymmetrische Fall ist analog zum kugelsymmetischen Fall $\mathrm{div}\,r^{-2}\hat{r} = 0$. **Reineker, Schulz: Mechanik** 2006 p67f; **Ein homogenes Polynom von n Veränderlichen heißt** **Form**. Eine **Form vom Grade 1** $\sum_{\nu=1}^n a_\nu x_\nu = a_1x_1\ldots a_nx_n$ heißt **Linearform** oder **lineares Funktional**. **Riez'scher Darstellungssatz:** In jedem Hilbertraum X gibt es eine stetige **Linearform** $\varphi: X\to\mathbb{C}$, $x\in X\to$ Zahl $\in\mathbb{C}$ mit $\varphi(x) =< x, z >$. Umgekehrt ist jeder Linearform φ genau ein z zugeordnet gemäß $< \cdot, z >$. Siehe Arens; Jänich: Mathe 1 p346 **Kurven/Linienintegrale und Vektor- vs Formensprache:** Formensprache erlaubt kurze Wege

beim Beweis. Vektorsprache für Anwendung besser. 1] Vektorfeld $\vec{E}$ ist **Potenzialfeld** $\Leftrightarrow \exists_{\varphi\in C^1(U,\mathbb{R})}\vec{E} = \operatorname{grad}\varphi$. 2] $\int_\alpha \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$ hängt nur von **Anfangs-** $\alpha(a) = p \in U$ und **End-Punkt** $\alpha(b) = q \in U$ ab, $a, b \in \mathbb{R}$. 3] Für jeden geschlossenen Weg $\gamma : [a, b] \to U$ mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist $\int_\gamma \mathrm{d}r\cdot\vec{E} = 0$. 1]$\Rightarrow$2],3]: Sei $\alpha \in C^1 : [a, b] \in \mathbb{R} \to U$, also einmal stetig diff Weg, dann gilt $\int_\alpha \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_a^b \mathrm{d}t \operatorname{grad}\varphi(\alpha(t))\cdot\dot{\alpha}(t) = \int_a^b \mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(\alpha(t)) = \varphi(\alpha(b)) - (\varphi\circ\alpha)(a) = \varphi(q) - \varphi(p)$. Falls Weg geschlossen $\alpha = \gamma$, also $q = p$, dann $\int_\gamma \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = 0$. 3]$\Rightarrow$ 2]: Seien α, β zwei verschiedene Wege von p nach q und somit $\gamma = (\alpha, \beta_)$ ein geschlossener, aber wegen p, q nur **stückweiser** C^1-Weg. Es gilt $0 = \int_\gamma \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_\alpha \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} + \int_\beta \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_\alpha \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} - \int_\beta \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$, also $\int_\alpha \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = \int_\beta \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$, Wegverlauf ist also egal! 2]$\Rightarrow$1: Sei also $\int_\alpha \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E}$ **wegunabhängig**, hängt also allein von Start- $p \in U$ und Endpunkt q ab. Für einen beliebigen Anfangspunkt $p \in U$ ist $\varphi(q) := \int_\alpha$ mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha(1) = q$, wobei $\alpha : [0, 1] \to U$ und $\alpha \in C^1$. Zeige nun: $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R})$ und $\nabla\varphi = \vec{E}$. Sei **axialsymmetrisches Radialfeld** $\vec{A}(x, y, z) = (x, y, 0) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0)$ mit $\operatorname{div}\vec{A} = 2$ und $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$, also $\int_\gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{f} = 0$ für jeden geschlossenen Weg γ, und **Kreiswirbelfeld** $\vec{B}(x, y, z) = (-y, x, 0) = (-\rho\sin\varphi, \rho\cos\varphi, 0)$ mit $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot}\vec{B} = 2\hat{z}$, also $\int_\gamma \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{f} \neq 0$ mit wegabhängigem Wert auch für jeden geschlossenen Weg γ.

Arbeit im elektrischen Feld: Ein **äußerer Beobachter** muss die Kraft $F^* = -F$ gegen die wirkende Feldkraft aufbringen und verrichtet dabei die positive Arbeit $W = \int_1^2 \mathrm{d}rF^* = -\int_1^2 \mathrm{d}rF = -q\int_1^2 \mathrm{d}rE \overset{E=-\nabla\varphi}{=} q\int_1^2 \mathrm{d}r\varphi =: qU_{2\leftarrow 1} > 0$. Oft $U_{2\leftarrow\infty}$, wobei Ladung q aus dem feldfreien Unendlichen auf einen gleichnamig geladenen Körper gebracht wird. **Spannung** ist **ladungs- und wegUnabhängiges Arbeitsmaß**. Rückl: **Verschiebungsarbeit, gravitative Feldenergie und Potenzial = skalares Quellfeld, für das Arbeit wegunabhängig** PdNPiS Bd53 2004 H5 p39-42; Falk: Theoretische Physik auf Grundlage der allgemeinen Dynamik. BdI: Elementare Punktmechanik & BdIa: Aufgaben u. Ergänzungen zur Punktmechanik 1966; **Arbeit am System gibt System Potenzial:** Hooke $F = -kx$ erfordert bei Federdehnung die äußere Krafteinwirkung $F^* = -F = kx$, also Arbeit $\mathrm{d}A = -F^*\mathrm{d}x = kx\mathrm{d}x = U$ schenkt dem System potenzielle Energie = Potenzial = Fähigkeit andere (zB kinetische) Energie hervorzubringen. **Potenzial** $\Phi(\vec{r})$ ist Funktion des Ortsvektors bei gegebener räumlicher Ladungsanordnung, wogegen die **potenzielle Energie** $W_{\text{pot}} = \int_0^Q U\mathrm{d}Q = \int_0^Q \frac{Q}{C}\mathrm{d}Q = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2}\int \vec{E}\cdot\vec{D}$ des elektrostatischen Systems die zum Aufbau des Systems erforderliche Gesamtarbeit ist. Ist dem System als ganzem zugeordnet. Speziell Kugelkondensator gibt mit Gauß'schem Gesetz $E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\chi_{[R_i,R_a]}(r)$. Potenzial stetig. $U = \frac{W_{a\to i}}{q_+} = \int_{R_i}^{R_a} F^*\mathrm{d}r$ mit $E^* = -E = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ gibt $U = \int_{R_i}^{R_a} -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_a}\right)$. Kapazität $C = \frac{Q}{U} = 4\pi\epsilon_0\frac{R_iR_a}{R_a - R_i} \approx \epsilon_0\frac{A}{d}$. Nolting 3 p69; Macke p82; Purcell: Berkeley Physik Kurs Bd2 Elektrizität und Magnetismus 1989[4] 38f;

Kraft, Feldstärke, Potenzial: Kraftfeld als Pfaffsche Form oder Differentialform 1. Ordnung. Die Feldstärken $\vec{g} = -\operatorname{grad}\Phi$ und $\vec{E} = -\nabla\Phi$ sind als Eigenschaften der Quelle, deren beschleunigende Wirkung ist gemeint. $\Phi(r) = -\frac{\gamma M}{r}$. Die **Ankopplung** durch schwere Probekörpermasse m macht erst Kraft. In Mechanik meint Potenzial den Ankopplungsfall, der auf Kraft und potenzielle Energie führt: $V(r) = -\frac{\gamma M m}{r}$ oder $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\frac{Qq}{r}$ die **potenzielle Energie** des Testteilchens der Masse m oder Ladung q. Weizel: LB der theo Phys BdI p13 Wenn Kräfte kein Potenzial haben, so wird kinet Energie in andere Energieformen umgesetzt. **Geladenes Teilchen im em Feld:** Kuhn: Theoretische Mechanik PfL9 1978 p181ff $\vec{F} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}}\times\vec{B})$ mit $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ und $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ wegen $\dot{\vec{r}}\times(\nabla\times\vec{A}) = \nabla(\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}) - (\dot{\vec{r}}\cdot\nabla)\vec{A}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}(\vec{r}, t)) = \dot{\vec{r}}\cdot\nabla\vec{A} - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ folgt $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t)$ oder **speziell für das homogene elektrische** Feld $\vec{E}(\vec{r}, t_0) = \vec{E}_0 =$ const wegen $\vec{E} = -\operatorname{grad}\Phi$ bedeutet $\mathrm{d}\Phi = -\vec{E}_0\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ bedeutet das **Potenzial** $\Phi(\vec{r}, t) = -t\vec{E}_0\cdot\vec{r}$ also $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + qt\vec{E}_0\cdot\vec{r} + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A}(\vec{r}, t)$ oder mit der **potenziellen Energie** $E_{\text{pot}} = V(\vec{r}, t) = q\Phi(\vec{r}, t) = -qt\vec{E}_0\cdot\vec{r}$. Das negative Vorzeichen, weil gleichnamige elektrische Ladungen im Unterschied zu massiven 'Ladungen' repulsiv. **Ohne Magnetfeld** $\mathcal{L}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = T - V = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 - q\Phi(\vec{r}, t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + qt\vec{E}_0\cdot\vec{r}$. Wegen $\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$ gilt für die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + V = \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} + q\Phi \overset{\vec{E}=\text{räuml. const}}{=} \frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2m} - qt\vec{E}_0\cdot\vec{r}$. **Über-**

gang von kräftefreier Bewegung zu Bewegung im em Feld: $H \to H' = H + q\Phi$ und $\vec{p} \to \vec{p}' = \vec{p} - q\vec{A}$. Walliser & Fließbach: Arbeitsbuch p49;

Gegeben $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, gesucht ist U mit $\vec{F} = -\mathrm{grad}\, U = (-\partial_x U, (-\partial_y U, (-\partial_z U)$ bedeutet, finde Stammfunktion U, die jede Komponente gemäß $F_x = -U'$ befriedigt. Schulz Kap3.3; Als **Anti-Ableitung** wird auch die **Stammfunktion** oder **Wegunabhängigkeit** bezeichnet.

Newton II: Impulsänderung geht nur über Kraft/Beschleunigung ist Kraft durch träge Masse $\ddot{x} = \frac{1}{m_T} F$. Aus dieser Gleichung wird eine Dgl 2. Ordnung und damit eine Bewegungsgleichung, wenn $F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m})$ explizit angegeben werden kann. Mitter, Mittelstaedt. Wenn sich zwei Körper mit Massen m_1 und m_2 unter dem Einfluss einer verschwindenden Gesamtkraft bewegen, so lassen sich die Bewegungsgleichungen in die freie Bewegung des Schwerpunktes und das Ein-Körper-Problem der Relativbewegung aufspalten. Dabei bewegt sich der relative Abstand wie ein Teilchen, das die reduzierte Masse μ hat,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ , \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\ .$$

Dynamisches System ist math Objekt zur Beschreibung der Zeitentwicklung auf einer Menge möglicher Zustände M Zustandsraum/Phasenraum auf die eine einparametrige Familie von Abbildungen oder Fluss $\varphi^t : \Gamma \in \mathbb{R} \times M \to M$ wirkt: a] Anfangsbedingung x $\bigwedge_{x \in M} \varphi^0(x) = x$ oder $\phi(0, x) = x$, b] $\bigwedge_{x \in M, s, t \in \Gamma} \varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x)$ oder $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$, c] $\varphi^t(\cdot)$ stetig. Für festes t hat man die **Fluss-Abbildung** $\phi^t : M \to M$, Öltropfen nach Zeit t. **Fluss-Linie** von p oder Bahn/Orbit/Trajektorie mit Anfangsbedingung p ist $\alpha_p : \mathbb{R} \to M, t \mapsto \phi(t, p)$, p ist dabei fest. Koordinaten des mech Systems durchlaufen den Phasenraum. Oft durch Dgls gegeben. Scheinerman: Invitation to Dynamical Systems 1995 Was ist ein dynamisches System? p1f;

Phasenportrait zeigt qualitative Struktur aller Phasenbahnen und lebt auf Phasenraum M als offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{2f}$ oder erweiterter Phasenraum $\mathbb{R}^{2f+1}$. Straumann: Mechanik p39.

Poincaré-Abbildung (auch Poincaré map, first return map = Abbildung P die jedem Schnittpunkt x von Trajektorie und transversaler Hyperfläche Σ = quer zum Phasenfluss den jeweils nächsten $P(x)$ zuordnet, ist somit ein (n-1)-dimensionales diskretes dynamisches System. Für nichtautonome Systeme $\dot{x} = f(x, t)$ mit periodischer rechter Seite $f(t+\tau, x) = f(t, x)$, wobei τ die Periode des Antriebs. Teschl: Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems 2012 online; Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1997^2; Amann: Ordinary differential equations : an introduction to nonlinear analysis 1990;

```
def RHSDA(x,t): return np.array([x[1],-a*x[1]-b*x[0]-c*x[0]**3+k2*np.cos(Omega*t)])
X = INT.odeint(RHSDA,XInit,Time)
def PoincareSection(X,Time):
        PSection=[]
        TotalLength = len(Time); CycleNumber = 1.; Period = 2.*np.pi/Omega
        TotalPeriodNumber = Time[-1:]/Period; i = 0
        print 'Total time',Time[-1:],'PeriodenLength',Period,'Periodenzahl',TotalPeriodNumber
        while (i < TotalLength):
            if (abs(Time[i]-CycleNumber*Period)<0.02):
                print i,Time[i]
                CycleNumber +=1.
                if CycleNumber > 10:
                    PSection.append(X[i])
            i+=1
        return np.array(PSection)
```

Baker & Gollub: Chaotic Dynamic. An Introduction 1996^2 Kap3.2 p43-58; **Baker & Blackburn: The Pendulum. A Case Study in Physics** 2005; **Poincare-Schnitt = Surface of**

section method = Schnittpunkte einer Trajektorie mit einer $(n-1)$-dimensionalen transversalen Hyperfläche Σ, um **qualitativ verschiedene Trajektorien** zu unterscheiden, **Schuster & Just: Deterministic chaos** 1987 p14, 2005[4]. Nimm Projektion des Phasenraums auf eine beliebige Ebene. Bei Schwingern ist das Phasenportrait ein Torus. Fixiere einen Phasenwinkel oder nimmt φ_1 mod 2π und notiere entsprechendes φ_2. **Isophase** per Poincaré-Abbildung, siehe Schwabetal. Phase-Diffusion. **Steeb: The nonlinear workbook** oder **Steeb: Chaos and fractals. Algorithms and computations** 1992 Surface of section method = bei 2 Freiheitsgraden, also auf Torus, Hamilton'scher Systeme sind das Schnitte der Trajektorie mit einer Fläche der Energieschale (p_2, q_2) beim Punkt $q_1 = 0$ **p74**, **getriebener anharmonischer Schwinger** $\dot{u}_1 = u_2$ und $\dot{u}_2 = -au_2 - bu_1 - cu_1 + k_1 + k_2 \cos \Omega t$ p104, **gedämpftes parametrisch getriebenes Pendel** $\ddot{u} = -a\dot{u} - (1 + k \cos \Omega t) \sin u$ ist invariant bezüglich $t \to t + \dfrac{2\pi n}{\Omega}$ mit $n \in \mathbb{Z}$ gibt $-\pi \leq u \leq \pi$ p124; **Wittenburg: Schwingungslehre** 1996 Parametererregte Schwingung p147ff zeitlich-periodische Parameter: a] Pendel mit veränderlicher Fadenlänge $M = \dot{L}$ mit $L = J\dot{\varphi}$, $J = ml^2$ gibt $\dot{L} = m2l\dot{l}\dot{\varphi} + ml^2\ddot{\varphi}$ also $\ddot{\varphi} + 2\dfrac{\dot{l}}{l}\dot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$. Für Aufzugschacht betrachte horizontale Schwingungamplitude $q = l(t)\varphi(t)$. Führt über $\ddot{q} + \dfrac{g}{l_0 + vt}q = 0$ auf Besselsche Dgl. oder b] periodische Gravitationskraft bei Schaukel mit Resonanz bei $\nu = 2\omega_0$ oder vertikal bewegtem $a(t) = -b\cos\nu t$ Aufhängepunkt gibt $\ddot{\varphi} + \dfrac{g + \ddot{a}}{l}\sin\varphi = 0$ gibt Mathieu'sche Dgl $\ddot{\varphi} + (\alpha + \beta\cos t)\varphi = 0$. Magnus & Popp: Schwingslehre p148ff oder Heuser: Dgl p322 oder **Jordan & Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations**. An Introduction to Dynamical Systems 1999, 2007[4] p324ff; Polyanin & Zaitsev: Handbuch der linearen Dgl p31, 57, 67, Kuypers: Mechanik p73, p269 Aufgabe 13.8 p579; Fischer & Stephan: Mechanische Schwingungen p62, 197ff, 282. Wittenburg: Schwingungslehre p166ff Stabilitätskarte der Mathieu'schen Dgl; Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] Kap7.11 **Harmonischer Oszillator** p138-148; Parker & Chua: Practical numerical algorithms for chaotic systems 1989 p47ff; Auswahl der **transversalen Hyperfläche**: Normalenvektor $\vec{h} \perp \Sigma$, also senkrecht zum Richtungsfeld der Dgl $\vec{h} = f(x_\Sigma)$ oder für beliebigen Punkt des Grenzzyklus x^* wählen $\vec{h} = f(x^*)$. Ed Lorenz bei Ebene mit z=27: http://www. robert-doerner. de/Glossar/glossar.html

Jänich: Mathe 2 p294ff; Konfigurations-, Lage, Ortsraum Q. Phasenraum ist die Manigfaltigkeit $P := Q \times \mathbb{R}^n$ = Raum aller **kinematisch möglichen Zustände**, nicht der gesamte $q-p-$Raum. Betrachte die **Dreh-Impulsartigkeit** oder **Wirkung** aller Punkte und Volumina $[pq]$=$[L]$=$[h]$=$[Ftq]$=$[Et]$, Energie ist zur eingeschlossenen Fläche proportional. Das Phasenraum-Portrait zeigt die **dynamisch zulässigen Bewegungen** im Phasenraum auf Grund von Bewegungsgleichungen und Zwangsbedingungen. Schottenloher p57. Zwangsbedingungen führen auf einen **reduzierten Phasenraum**. Pendel: Aus $P = Q \times \mathbb{R}^2$ mit $Q = \mathbb{R}^2$ wird $P' = \mathbb{S}^1_r \times \mathbb{R}$. Schottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik Kap4; Abstände zwischen zwei Punkten werden nicht mehr im R^n, sondern im $\mathbb{S}^{n-1}$ gemessen, sind also Großkreisbögen oder Geodätische - Isomap. Infinitesimales **Abstandsquadrat zweier Punkte auf Kugel** mit Radius R ist gemäß Pythagoras $\mathrm{d}s^2 = R^2\,\mathrm{d}\vartheta^2 + R^2\sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2$. Infinitesimaler Abstand $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\vartheta\sqrt{1 + \sin^2\vartheta\left(\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vartheta}\right)^2}$. Weglänge einer beliegen Kurve $\varphi(\vartheta)$ auf der Kugel zwischen zwei beliebigen Punkten 1 und 2 ist $s(1,2) = \int_1^2 \mathrm{d}s = R\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\mathrm{d}\vartheta\, F(\vartheta, \varphi')$ mit $F(\vartheta, \varphi') = \sqrt{1 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}$. Unabhängige Koordinate ist also die Breite ϑ! Da φ zyklische Variable, so ist $0 = \dfrac{\partial F}{\partial\varphi} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\vartheta}\dfrac{\partial F}{\partial\varphi'}$ oder $\dfrac{\partial F}{\partial\varphi'} = \dfrac{\varphi'\sin^2\vartheta}{\sqrt{1 + \varphi'^2\sin^2\vartheta}} =$ const, also für die Kurve $\varphi(\vartheta)$ mit kürzester Länge die Bedingung $\varphi'\sin^2\vartheta = \tilde{C}$, was für beliebige ϑ zu $\varphi(\vartheta) =$ const zwingt! Also polare Großkreise bei φ, das durch 1 und 2 läuft. **Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik** BdIV 1958 p177 $C = 0$ bedeutet Meridiane sind geodätische Linien! Weinstock: Calculus of Variations With Applications to Physics and Engineering 1952 p27f nach Trennung der Variablen $\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{\sin^2\vartheta - C^2}} = \dfrac{\mathrm{d}\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{1 - C^2 - \cos^2\vartheta}} \overset{x=\cos\vartheta}{=} \dfrac{-\mathrm{d}x}{1 - C^2 - x^2}$. Setze später wegen $C < 1$ zweckmäßig $C = \sin\vartheta$! Man bekommt nach Übergang zu kartesischen Koordinaten $Ax + By + Cz = 0$ also Ebene

durch Ursprung. Schnitt mit Kugel also Großkreise. **Riley, Hobson, Bence: Math methods for physics and engineering** 1998 p725; **Längendifferenzial** $\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_k)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}$ mit unabhängigen verallgemeinerten Koordinaten x_k und $\dot{x}_k = \mathrm{d}x_k/\mathrm{d}t$ gibt **Verbindungslänge** $= \int_A^B \mathrm{d}s$ zwischen Punkten A und B. Lagrangefunktion ist $f = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$. Forderung nach extremaler Länge liefert Euler-Lagrange-Gleichungen (ELG), also n Differenzialgleichungen $\ddot{x}_l + \sum_{i,j}\Gamma_{l,ij}\dot{x}_i\dot{x}_j = 0$, (l=1,. . . n) **Christoffelsymbole** sind gegeben durch (Inverse g^{-1} von g

$$\Gamma_{l,ij} = \frac{1}{2}\sum_k (g^{-1})_{lk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}\right).$$

Komma dient nur der Klarstellung, dass Γ bzgl Vertauschung von i und j symmetrisch ist, nicht aber bzgl Vertauschung mit l. Wegen $\partial\dot{x}_i/\partial\dot{x}_j = \delta_{ij}$ und $\sum_{i,j} g_{ij}\delta_{ik}\dot{x}_j = \sum_j g_{kj}\dot{x}_j$ ist das Variationsproblem $0 = \delta\int_A^B \mathrm{d}s = \delta\int_A^B \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_k)\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \delta\int_A^B \mathrm{d}t\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x_k)\dot{x}_i\dot{x}_j} \equiv \delta\int_A^B \mathrm{d}t f(x_k, \dot{x}_k, \cancel{t})$. Die ELGs sind $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f}{\partial\dot{x}_k} - \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ oder mit Beltrami-Identität $f - \dot{x}_k\frac{\partial f}{\partial\dot{x}_k} = \text{const}$, mit $k = 1, \ldots n$. Wegen Unabhängigkeit $\partial\dot{x}_i/\partial x_k = 0$ folgt $\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{1}{2\sqrt{\ }}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_i\dot{x}_j = \frac{1}{2f}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_i\dot{x}_j$ wegen Symmetrie von g und nach Umbenennung des Summationsindex. Setze $f = 1$, was neuen, geeignet gestreckten Kurvenparameter $t \equiv s =$ **Bogenlänge** bedeutet! Die ELGs lauten daher $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{f}\sum_i g_{ki}\dot{x}_i\right) - \frac{1}{2f}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_i\dot{x}_j = \sum_i g_{ki}\ddot{x}_i + \sum_{i,j}\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}\dot{x}_i\dot{x}_j - \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\dot{x}_i\dot{x}_j = \sum_i g_{ki}\ddot{x}_i + \sum_{i,j}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\dot{x}_i\dot{x}_j = 0$. Nach linksseitiger Multiplikation mit der Inversen g^{-1} verschwindet auch das letzte Summenzeichen: $\sum_{i,k}(g^{-1})_{lk}g_{ki}\ddot{x}_i + \sum_{i,j,k}(g^{-1})_{lk}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\dot{x}_i\dot{x}_j = 0$. Mit $\sum_{i,k}(g^{-1})_{lk}g_{ki}\ddot{x}_i = \sum_i \delta_{li}\ddot{x}_i = \ddot{x}_l$ folgt $\ddot{x}_l + \sum_{i,j,k}(g^{-1})_{lk}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\dot{x}_i\dot{x}_j = 0$. Die Christoffelsymbole sieht in den so umgeformten ELG durch Symmetrierelation, die durch Umbenennen von Dummy-Summationsindizes folgt $0 = \ddot{x}_l + \sum_{i,j,k}(g^{-1})_{lk}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)\dot{x}_i\dot{x}_j$
$= \ddot{x}_l + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}(g^{-1})_{lk}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ji}}{\partial x_k}\right)\dot{x}_i\dot{x}_j$. Also $\boxed{\ddot{x}_l + \sum_{i,j}\Gamma_{l,ij}\dot{x}_i\dot{x}_j = 0}$. Für den Fall Euklidischer Räume ist $g_{ik} = \delta_{ik}$, also $\Gamma_{l,ij} = 0$ und daher gilt stets das **Trägheitsgesetz** in der Form $\ddot{x}_l = 0$.

Phasenraum-Portraits:

1] Betrachte die Energie $E(p,q) = T(p) + U(q)$ für verschiedene **Gesamtenergien und die Umkehrpunkte** bei denen die gesamte Energie im Potenzial steckt. Die zudem noch kritischen Punkte mit $U(x^*) = 0$ sind Kriechpunkte , die die Annäherungszeit divergieren lassen.

Energie ist **erstes Integral** der Bewegungsgleichung: Multipliziere mit $\dot{x}$ und integriere bestimmt, um die Anfangsbedingungen zu berücksichtigen! Also $m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$.

2] $H(q_0, p_0) = T(p) + U(q)$ Phasenbahnen fallen mit den Zusammenhangskomponenten der **Energieniveaukurven** $H(q_0, p_0)$ zusammen. Die lokalen dynamischen Details sind dabei durch das Richtungsfeld oder die rechte Seite der Bewegungsgleichung kodiert: $\dot{q} = f(q,p)$. Die Phasenbahnen müssen stets in der Energiehyperfläche liegen: $\operatorname{grad} H \cdot f = 0$, also Richtungsfeld stets senkrecht zur Energiehyperfläche-**Normalen**. Straumann: Mechanik p52. Man braucht also weder Bewegungsgleichungen, noch deren Lösungen! Freier Fall oder hüpfender Ball $E(q_0, p_0) = \frac{p^2}{2m} + mgq$ ist Parabel-Scharr. Oszillator sind Ellipsen-Schar.

3] Bewegungsgleichung bekannt, so geben die rechten Seite des Systems 1. Ordnung das **Richtungs-Feld**. Freier Fall $\ddot{x} = -g$ gibt $\dot{x} = v, \dot{v} = -g$, also $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{g}{v}$. Falls diese Dgl nicht leicht lösbar, so kann das Richtungs-Feld gezeichnet werden. Anderenfalls ist Lösung $q_0 = -\frac{p_0^2}{2gm^2} + \frac{C}{g}$

4] Hat man bereits Lösung $s = -\frac{g}{2}t^2 + s_0$ und $v = -gt$, so liefert die **parameterfreie Darstellung der bekannten Lösung** das Phasenportrait $s = -\frac{p^2}{2gm^2} + s_0$

Mögliche Niveaukurven/Phasenkurven/Phasenbahnen:

A] Gleichgewichtspunkte, kritische Punkte $U'(x^*) = 0$,, Fixpunkte x^*: $\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \varphi^t(x^*) = x^*$ (siehe Seite 186)

B] Geschlossene Bahnen ohne kritische Punkte, period Lösung

C] Streubahnen: Unbeschränkte Bewegung ohne kritische Punkte

D] Flucht- oder Einfangsbahn geht einseitig ins Unendliche, findet sich aber erst nach unendlicher Zeit im endlichen kritischen Punkt. Gedämpfter Schwinger. Realistisch ist Coulomb-Reibung = Haftreibung = Gleitreibung ! die auf Adhäsion beruht. John Comyn: Adhesion Science 1993 e-book. **Physikalische Adsorption** per Dipol-Dipol-WW = Van der Waals, kovalente, ionische oder Wasserstoff bedingte **chemische Bindung**, polymere Diffusion, Elektrostatik, mechanische Verkakung und Grenzflächen-Ansatz. Kommt zT aus Volumen bis 100 nm tief unter der Oberfläche generiert. Czichos: Tribologie-Handbuch: Tribometrie, Tribomaterialien, Tribotechnik: Reibung und Verschleiß 2010 Kap3; Holm 1946, 1967; de Gee 1982; Bischof & Possart: Adhäsion – Theoretische und experimentelle Grundlagen 1983; Popov: Kontaktmechanik und Reibung. Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation 2009; **Glatteis** PJournal17 2018 Nr1 p44f a]Farady 1850Flüssigkeitsfilm ist auf jeder Eisoberfläche, die per H-Brücken gehalten wird. 50 nm dicke Wasserteppische sieht man per ESRF = European Synchrotron Radiation Facility b] Reibung c] kaum Druckaufschmelzung. Energieverlust eines Teilchens mit der Ladung $Z \cdot e$ durch die Abstrahlung beträgt in Speicherring pro Umlauf $\Delta E = \dfrac{(Ze)^2 \cdot \beta^3 \cdot \gamma^4}{\varepsilon_0 \cdot 3R}$ Z die Kernladungszahl, R Radius des Speicherrings, $\beta = \dfrac{v}{c}$ und $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \dfrac{E}{mc^2}$ = Lorentzfaktor. Für relativistische Geschwindigkeiten $v \approx c$, also $\beta \approx 1$, wird dies zu: $\Delta E = \dfrac{(Ze)^2 \cdot E^4}{\varepsilon_0 \cdot 3R \cdot (mc^2)^4}$. Bei Geschwindigkeiten nahe der Lichtgeschwindigkeit nimmt also der Energieverlust des Teilchens durch die Abstrahlung sehr steil mit der kinetischen Energie zu. Auch wird ersichtlich, warum für Synchrotronstrahlungsquellen immer die leichtesten geladenen Teilchen eingesetzt werden: Aufgrund der geringeren Masse ist die abgestrahlte Energie bei Elektronen und Positronen im Vergleich zu den leichtesten Ionen, den Protonen, um 13 Größenordnungen höher. Öffnungswinkel = ϑ in dem die Synchrotronstrahlung um die momentane Flugrichtung des Teilchens herum gebündelt ist, nimmt mit wachsender Energie E des Teilchens ab und ist gegeben durch $\tan\vartheta = \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{mc^2}{E}$.

Deterministische Bewegungstypen für dissipative Systeme, d.h., **Spur der Jacobi-Matrix** der rechten Seite des Dgl-Systems = div $f < 0$, (A, φ^t, μ) mit **Attraktor** A, Fluss mit i] $\bigwedge_{x\in B} \lim_{t\in\infty} \varphi^t x \in A$ mit B **Bassin**, ii] $\varphi^t A = A$ und iii] φ^t auf A rekurrent und A nicht zerlegbar. Ein dynamische System mit mittlerer negativer Divergenz von f, also der rechten Seite der Dgl, wird als **dissipatives dynamisches** System bezeichnet: $\Lambda_0 = \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \int_0^t \mathrm{d}\tau \mathrm{div}\, \vec{f} = \lim_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \ln\left(\dfrac{\Delta\Omega(t)}{\Delta\Omega(0)}\right) < 0$, wobei $\Delta\Omega$ ein beliebiges Volumenelement auf dem Attraktor ist. Speziell gedämpfter harmon Oszillator $\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega^2 x = 0$ oder $\dot{x} =: y$ und $\dot{y} = -\beta y - \omega^2 x$ mit $\beta > 0$, also für alle Phasenraumpunkte und damit insbesondere in jeder offenen Umgebung des Fixpunkt-Attraktors bei $\vec{0}$ gilt $\mathrm{div}\, \vec{f} = -\beta < 0$. Lichtenberg & Lieberman: Regular and **stochastic motion** 1982 $\Rightarrow$ Regular and **chaotic dynamics** 1992; Ebeling, Engel & Herzel: Selbstorganisation in der Zeit 1990 p14, aber p70 Im Unterschied zu **dissipativen Strukturen** mit überkritischem Abstand zum Gleichgewicht $\dot{S} = \dot{S}_e + \dot{S}_i$ mit $\dot{S}_e = -\dot{S}_i < 0$ und $\dot{E} = \dot{E}_i = 0$. Glansdorff & Prigogine: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations 1971; Prigogine & Nicolis: Self-organization in nonequilibrium systems 1977; L̃awenda: Nonequilibrium statistical thermodynamics 1985;

a. Fixpunkt hat beliebige Periode.

b. Grenzzyklus hat eine feste Periode/quasiperiodisch: **Rotation** = umlaufendes Pendel/Rad $q = \phi, p(t+\tau) = p(t)$, Almost periodic function: Harald Bohr and later generalized by Vyacheslav Stepanov, Hermann Weyl and Abram Samoilovitch Besicovitch. Variationskoeffizient = $\sigma_T/\mu_T \ll 0$.

Pendel als anharmonischer Oszillator: Mahnke: Nichtlineare Physik in Aufgaben 1994 p34 **Kinks**; **Jose & Saletan: Mechanics** p21; **Kuypers** p78; **Argyris, Haase, Faust, Friedrich: Die Erforschung des Chaos.** Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme 1994 p112f; Drehmoment $\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$

mal $\dot\varphi$ gibt für Energie $\frac{\dot\varphi}{2} - \omega^2\cos\varphi = -\omega^2\cos\varphi_0$ mit Anfangsbedingung $\varphi_0 > 0$ und $\dot\varphi_0 = 0$. Aus $\dot\varphi^2 = 2\omega^2(\cos\varphi - \cos\varphi_0) = 4\omega^2(\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2})$ wegen Halbwinkel-Relation $2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha$. Mit $a^2 = \sin^2\frac{\varphi_0}{2}$ folgt $\dot\varphi^2 = 4\omega^2a^2(1 - \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{\varphi}{2})$ oder $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\varphi}{2a\omega\sqrt{1-\frac{1}{a^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$ und damit die Schwingungsdauer als Funktion der Anfangsauslenkung $T(\varphi_0) = \int_0^T \mathrm{d}t = 4\frac{\sqrt{l/g}}{2a}\int_0^{\varphi_0}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\frac{1}{a^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$. Siehe auch Seite 149. Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] Kap7.11 p138-148 ... Magnus & Popp: Schwingungen 1997[5]; Limitationsbewegung/Grenzfall/Kinks/Pendel zwischen $-\pi$ und π und **Libration**/geschlossene Phasenraumkurve/Orbit/Trajektorie $q(t+\tau) = q(t), p(t+\tau) = p(t)$. **Phase** als Winkelgröße bei linearer Bewegung des harmonischen Oszillators:

$$\dot u = i\,\omega\,u \quad \text{mit } u \in \mathbb{C} \quad \text{oder } \dot{\vec x} = A\vec x \quad \text{mit } \vec x \in \mathbb{R}^2, A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder } \ddot x + \omega^2 x = 0$$

A] **Harmonischer Oszillator** ist aus Sicht der **Stabilität ein entarteter Fall**. Denn $\ddot x + x = 0$ gibt die kanonischen Gleichungen $\dot x = y$ und $\dot y = -x$, linke Seite = Richtungsfeld der Dgl $\dot{\vec x} = \vec V(\vec x)$ ist also **Wirbelfeld** mit $\operatorname{rot}\vec V(\vec x) = -2\hat e_z$. B] Mit $\dot x_1 = x_2$ und $\dot x_2 = -\omega^2 x_1$ und dem Ansatz $x_i = e^{\lambda t}$ oder durch Taylorentwicklung der Bewegungsgleichung/lineare Stabilitätsanalyse erhält man die **Eigenwerte der Jacobi-Matrix** aus der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ als rein **imaginäre Eigenwerte** $\lambda_\pm = \pm i\omega$, also einen **nicht-hyperbolischen** Fixpunkt, **elliptischen** Fixpunkt oder **Zentrum**. Schäfer: **Theoretische Grundlagen der Stabilität** technischer Systeme 1976 p70f; Mit den Eigenvektoren

$$\vec e_+ = a\begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix}, \vec e_- = a\begin{pmatrix} 1 \\ -i\omega \end{pmatrix}, \quad \vec x(t) = e^{\lambda_- t}\vec e_- + e^{\lambda_+ t}\vec e_+ = 2\begin{pmatrix} \cos\omega t \\ -\omega\sin\omega t \end{pmatrix}$$

Steeb & Kunick: Chaos in dynamischen Systemen 1989[2] p40; Guckenheimer & Holmes: Nonlinear oscillations p8ff; Ebeling & Feistel: 1982 p107; Jetschke p40; Arrowsmith & Place: Ordinary Differential Equations: A Qualitative Approach with Applications 1982; Ein dynamisches System heißt **hyperbolisch** im Gleichgewichtspunkt, wenn dort **alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix von Null verschiedene Realteile** haben. Arrowsmith & Place: Dynamical Systems - Differential Equations, Maps, and Chaotic Behaviour 1992; Tu: Dynamical systems - an introduction with applications in economics and biology 1994; **Hirsch & Smale: Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra** 1974 oder mit Devaney: **Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos** 2012[3]; Ebeling, Engel & Herzel: Selbstorganisation in der Zeit 1990 p17; Winfree: The Geometry of Biological Time 2001[2]; Winfree: Biologischen Uhren. Zeitstrukturen des Lebendigen 1988; **Tass: Phase resetting** in medicine and biology, Stochastic modelling and data analysis 1999; Adaptive Frequency Oscillators/Hopf-Oszillator http://biorob.epfl.ch/

$$\begin{aligned} \dot x &= \gamma(r - (x^2+y^2)\,x - \omega\,y + \epsilon\,F(t) \\ \dot y &= \gamma(r - (x^2+y^2)\,y + \omega\,x \\ \dot\omega &= -\epsilon\,F(t)\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

forced by a periodic input signal F

c. involutorisch=einwickeln, kehrt nie mehr zurück, Periode ist ∞.

Symplektische Integration: Erst Impuls und danach Ort iterieren. Berndt: Einführung in die Symplektische Geometrie 1998; Guillemin & Sternberg: **Symplectic techniques in physics** 1984, 1993 p145; **3 Prinzipe** die auf die gleichen Hamilton'schen Bewegungsgleichungen führen: **a] Variationsprinzip**,

b] Methode der Hochfrequenznäherung, **c] Prinzip der Kovarianz**. Für Gitter-Gleichungen: Duncan In: Rmoissenet: LNP393 p151.

Grundlage und Prototyp mathematisch basierter Naturbeschreibung: Modell $\leftrightarrow$ Experiment getriebene Erfahrung eines modellierenden Wahrnehmers $\leftrightarrow$ Realität.

a] erfinde mechanische Eigenschaften und ordne ihnen Größen zu (Verortung punktförmiger Körper, Masse, Zeit, Energie)

b] errate Axiome/**Bewegungsgleichung in Form von Differenzialgleichungen**, die die mechanischen Eigenschaften verknüpfen: $\dot{x} = f(x, p)$. Modellerweiterung hin zu Beobachtungs- und dynamischem Rauschen: (A, μ, φ^t).

c] **analytische** Lösung der ODEs, Green'sche Funktion, Lösung im Fourier-Raum liefert spektrale Eigenschaften der Lösung, störungstheoretische Lösung, Mittelungsmethoden, **simulativ-numerische** Lösung, qualitativ-topologische (Fixpunkt/Isoklinenschnitt/Tod, Zentrum, Grenzzyklus/ewige Wiederkehr, seltsamer Attraktor/nie wieder, Bifurkation) Lösung. **Kuznetsov: Elements of applied bifurcation theory** 1995 elementar, genau und viele Beispiele!

d] **Qualitative Analyse:** xppauto, Candys oder PyDSTool = Dynamical systems modeling, simulation and analysis environment `http://www.ni.gsu.edu/~rclewley/PyDSTool/FrontPage.html` Nichtlineare deterministische, dissipative, diskrete dynamische Systeme. Fadenpendel, Pendeluhr, Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 Pendeluhr p134f; **Doppelpendel**, Kuypers p36; Rebhan p201; Pendelstäbe haben Länge ℓ, also $I = \frac{1}{12}m\ell^2$ $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2}I\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right) - mg\left(y_1 + y_2\right) = \frac{1}{6}m\ell^2\left[\dot{\theta}_2^2 + 4\dot{\theta}_1^2 + 3\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2)\right] + \frac{1}{2}mg\ell\left(3\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$ **Rott: A multiple pendulum** for the demonstration of non-linear coupling, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik21 H4 1970, p570-582); Levien & Tan: **Double Pendulum:** An experiment in chaos. AmJofPhys61 1993 H11 1038-1044; **Wells, D. A. Theory and Problems of Lagrangian Dynamics** 1967 p13-14, 24, and 320-321; Štrauch: Classical mechanics p62f, 74f; $T = \frac{1}{2}\left((m_1 + m_2){l_1}^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \right.$ und $V = -g\left((m_1 + m_2)l_1\cos\left(\varphi_1\right) + m_2 l_2\cos\left(\varphi_2\right)\right)$ führt auf
$(m_1 + m_2)\,l_1\ddot{\varphi}_1 + m_2 l_2\ddot{\varphi}_2\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + m_2 l_2\dot{\varphi}_2^2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + g\left(m_1 + m_2\right)\sin\varphi_1 = 0$ und
$m_2 l_2\ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1\ddot{\varphi}_1\cos\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) - m_2 l_1\dot{\varphi}_1^2\sin\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + gm_2\sin\varphi_2 = 0$ $\dot{\varphi}_1 = (p_1 - p_2\cos\Delta\varphi)/N$ mit $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ und $N = 1 + \sin^2\Delta\varphi$, $\dot{\varphi}_2 = (2p_2 - p_1\cos\Delta\varphi)/N$, $\dot{p}_1 = -2g\sin\varphi_1 - A + B$ mit $A = (p_1 p_2\sin\Delta\varphi)/N$, $B = (p_1^2 + 2p_2^2 - p_1 p_2\cos\Delta\varphi)\sin(2\Delta\varphi)/2N^2$, $\dot{p}_2 = -g\sin\varphi_2 + A - B$.

$$H = \frac{p_1^2 + 2p_2^2 - 2p_1 p_2\cos\Delta\varphi}{2N} - 2g\cos\varphi_1 - g\cos\varphi_2$$

Oder mit $D = \varphi_1 - \varphi_2$. Für $m = m_1 = m_2$ **Lagrange-Fkt** $\mathcal{L} = ml_1^2\dot{\varphi}_1^2 + ml_1 l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos D + \frac{m}{2}l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + gml_1\cos\varphi_1 + gml_2\cos\varphi_2$ gibt **Euler-Lagrange-Gln** $\ddot{\varphi}_1 + \frac{l_2}{2l_1}\ddot{\varphi}_2\cos D + \frac{l_2}{2l_1}\dot{\varphi}_2^2\sin D + \frac{2g}{l_1}\sin\varphi_1 = 0$ und $\ddot{\varphi}_2 + \frac{l_1}{2l_2}\ddot{\varphi}_1\cos D + \frac{l_1}{2l_2}\dot{\varphi}_1^2\sin D + \frac{g}{l_2}\sin\varphi_2 = 0$. Oder $2T = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 l_1 l_2\cos D\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + m_2 l_2^2\dot{\varphi}_2^2$ und $-V/g = (m_1 + m_2)l_1\cos\varphi_1 + m_2 l_2\cos\varphi_2$ und $l = l_1 = l_2$ und $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ gilt $T = \frac{m_1 + m_2}{2}l^2\dot{\varphi}_1^2 + m_2 l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos D + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}_2^2$, $V = -g[(m_1 + m_2)l\cos\varphi_1 + m_2 l\cos\varphi_2]$. **Lagrange-Fkt:** $\mathcal{L} = \frac{m_1 + m_2}{2}l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + m_2 l^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2\cos D + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}_2^2 + g(m_1 + m_2)l\cos\varphi_1 + gm_2 l\cos\varphi_2$. **Euler-Lagrange-Gln:** $\ddot{\varphi}_1 + \mu\ddot{\varphi}_2\cos D + \mu\dot{\varphi}_2^2\sin D + \frac{g}{l}\sin\varphi_1 = 0$ oder mit $l = 1$ folgt (I) $\ddot{\varphi}_1 + \mu\ddot{\varphi}_2\cos D + \mu\dot{\varphi}_2^2\sin D + g\sin\varphi_1 = 0$ und $\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1\cos D - \dot{\varphi}_1^2\sin D + \frac{g}{l}\sin\varphi_2 = 0$ oder mit $l = 1$ folgt (II) $\ddot{\varphi}_2 + \ddot{\varphi}_1\cos D - \dot{\varphi}_1^2\sin D + g\sin\varphi_2 = 0$. (II)-(I)$\cos D$ gibt **(**)** $\ddot{\varphi}_2(1 - \mu\cos^2 D) - (\dot{\varphi}_1^2 + \mu\cos D\dot{\varphi}_2^2)\sin D + g\sin\varphi_2 - g\cos D\sin\varphi_1 = 0$ (I)-$\mu\cos D$(II) gibt **(*)** $\ddot{\varphi}_1(1 - \mu\cos^2 D) + \mu\sin D(\dot{\varphi}_2^2 + \cos D\dot{\varphi}_1^2) + g\sin\varphi_1 - g\mu\cos D\sin\varphi_2 = 0$. Die **Dgls 1. Ordnung** lauten $\dot{\varphi}_1 = p_1$, $\dot{\varphi}_2 = p_2$, $\dot{p}_1 = \{\mu\sin D[p_2^2 + \cos Dp_1^2] + g\sin\varphi_1 - g\mu\cos D\sin\varphi_2\}/(\mu\cos^2 D - 1)$ und $\dot{p}_2 = \{\sin D[p_1^2 + \mu\cos Dp_2^2] - g\sin\varphi_2 + g\cos D\sin\varphi_1\}/(1 - \mu\cos^2 D)$. **Lakshmanan & Rajaseekar: Nonlinear Dynamics. Integrability, Chaos and Patterns** 2002 p231; Srivastava, Kaufman, Muller: Hamiltonian Chaos, Computers in Physics 4 (5) 549 1990; Energieerhaltung prüfen. Schrittweite nicht

zu groß. Integriere rückwärts, um Startpunkt wieder zu erreichen. Mahnke: Nichtlineare Physik in Aufgaben 1994 p38ff; **Wiedemann: Numerische Physik** 2004; **Bergmann & Schäfer: Mechanik, Relativität, Wärme** 1998 chaotische Schwingungen p640ff; **Linearisierung** gibt $2\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 + 2\omega_0^2\phi_1 = 0$ und $\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2 + \omega_0^2\phi_2 = 0$. **Entkoppelungstrick 1:** zweite Glg. $\times\sqrt{2}$, addieren und subtrahieren gibt **EINE** Dgl $\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pm 1}\right)\left[\phi_2 \pm \sqrt{2}\phi_1\right] = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pm 1}\right) z = 0$ mit Amplituden-Ansatz $z(t) = \phi_2 \pm \sqrt{2}\phi_1 = a\sin\omega t$. **Entkoppelungstrick 2:** Algebraisierung mittels e-Ansatz oder Übergang in Fourierraum $\phi_n = \phi_{0n}e^{i\omega t}$ gibt charakeristische Gleichung $2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^4 = 0$, also $\omega = \omega_0\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\pm 1}} = \omega_0\frac{1}{1 \pm 1/\sqrt{2}}$. Person an Kronleuchter, Sommerfeld: Mechanik p107.

http://scienceworld. wolfram. com/physics/DoublePendulum.html http: //www. physics. usyd.edu.au/~wheat/dpend_html/solve_dpend.c http: //matplotlib. org/examples/animation/double_pendulum_animated.html http://www. physics. usyd. edu. au/~wheat/sdpend/ import matplotlib.animation as animation; y = integrate.odeint(derivs, state, t); **Eingabe-Aufforderung** a=float(rawi_input('Ort')); x1 = L1*sin(y[:,0]) y1 = -L1*cos(y[:,0]) x2 = L2*sin(y[:,2]) + x1 y2 = -L2*cos(y[:,2]) + y1; fig = plt.figure() http://jakevdp. github. io/blog/2012/08/18/matplotlib-animation-tutorial/ http://matplotlib. org/examples/animation/index. html

```
ax = fig.add_subplot(111, autoscale_on=False, xlim=(-2, 2), ylim=(-2, 2))
ax.grid()
line, = ax.plot([], [], 'o-', lw=2)
time_template = 'time = %.1fs'
time_text = ax.text(0.05, 0.9, '', transform=ax.transAxes)
def init():
    line.set_data([], [])
    time_text.set_text('')
    return line, time_text
def animate(i):
    thisx = [0, x1[i], x2[i]]
    thisy = [0, y1[i], y2[i]]
    line.set_data(thisx, thisy)
    time_text.set_text(time_template%(i*dt))
    return line, time_text
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, np.arange(1, len(y)),
    interval=25, blit=True, init_func=init)
ani.save('double_pendulum.mp4', fps=15, clear_temp=True)
```

http://matplotlib. org/examples/ animation/ double_pendulum_animated.html „verrückte Pendel“ , das Rott'sche-Pendel, Planetensystem): Simulationen unter http://physics. clarku. edu/cip2/ Bahn, Trajektorie, Orbit im Konfigurations- oder (beschränkten) Phasenraum. Zauberformel der Linearisierung & Störungstheorie/Mittelungsmethoden oder unter voller Mitnahme der Nichtlinearität zu diskreten Systemen/iterierten Maps/ Folgen / Cobwebs über.

Lanius: Tipping Points - Beispiele aus Natur und Gesellschaft, In: Sitzungsberichte Leibniz-Sozietät der Wissenschaften, Band 107 2010; Manche **Tipping points** = **Umkipp-Punkt** wie Abschmelzen des Grönlandeises und Änderung des El-Ninos siehe Gladwell: Tipping Point. Wie kleine Dinge Großes bewirken können 2002 Kleine Ursachen, große Wirkungen! hierin: 1. Ideen und Verhaltensweisen verbreiten sich wie Epidemien. 2. Daher können kleine Veränderungen (wie bei einem Grippevirus) dramatische Auswirkungen haben. 3. Es gibt Menschen, die sehr viele Bekannte haben und sehr überzeugend sind. 4. Wenn man diese Menschen überzeugt, so kommt eine Lawine in Gang. 5. Dafür ist es wichtig, dass die Ideen haften bleiben. 6. Es kommt auch auf die äußeren Umstände an. Es genügt, die Aufmerksamkeit auf einige wenige Stellschrauben zu richten, um zu erklären, warum bestimmte Ideen, Verhaltensweisen oder Produkte 'Epidemien' auslösen und andere nicht. Die Stellschrauben dafür, dass es nur noch eines kleinen Anstoßes

bedarf, sind: 1. das 'Gesetz der Wenigen', 2. die 'Verankerung' und 3. die 'Macht der Umstände'. Gemeint ist jener Punkt, den Marxisten einst gut hegelianisch als 'qualitativen Umschlag' zu bezeichnen pflegten: Das Wasser wird heißer und immer heißer (Quantität!), bis es an einem bestimmten Punkt kochend in einen anderen Aggregatzustand (Qualität!) 'umschlägt'. Kim & Mauborgne: Der Blaue Ozean als Strategie - Wie man neue Märkte schafft, wo es keine Konkurrenz gibt 2005 Kap7; **turning point** oder **change point**, Structural break—Change in model structure, lassen sich durch die Bifurkation eines dynamischen Systems erklären. Basseville & Nikiforov: Detection of Abrupt Changes - Theory and Application 1993 hierin CUSUM, AR/ARMA, GLR, Bayes type algorithms;

Nils Waterstraat, University of Kent: The buckling of the Euler rod. **Bifurcation theory is a field of nonlinear analysis that studies branches of solutions of equations** of the type $F(\lambda, x) = 0$, where $F : [0,1] \times X \to Y$ is a continuous map and X, Y are real Banach spaces. Concepts of global analysis, like the spectral flow, can be used to investigate bifurcation phenomena.

Bifurkation = invariante Menge ändert: a] Stabilität, b] Anzahl(1FP $\to$ 2FP), c] Art (FP $\to$ Torus) (siehe Seite 186).

Lokale Bifurkation = Dynamikwechsel in lokaler Phasenraumpunktumgebung: FP $\to$ GZ. Saddle-node (fold), Transcritical, Pitchfork, Period-doubling (flip), Hopf und Neimark (secondary Hopf) bifurcation.

Globale Bifurkation = Dynamikwechsel in Region des Phasenraumes längs Orbit, hetero- und homokline Bif. Periodischer Orbit kollidiert zu Fixpunkt, was den gesamten Phasenraum erfasst. Homoclinic bifurcation in which a limit cycle collides with a saddle point. Heteroclinic bifurcation in which a limit cycle collides with two or more saddle points. Infinite-period bifurcation in which a stable node and saddle point simultaneously occur on a limit cycle. Blue sky catastrophe in which a limit cycle collides with a nonhyperbolic cycle. Global bifurcations can also involve more complicated sets such as chaotic attractors (e.g. crises). Modell von Peter Thomas, Hillel J. Chiel, Jeffrey P. Gill, David N. Lyttle, Kendrick M. Shaw für rhythmische Motorkontroll-Systeme, Gehen, Atmen, ist nur zugleich robust und sensibel gegenüber **propriozeptiven Störungen**, wenn eine Sequenz heteroklinen Attraktoren, die Grenzzyklen und reflektorische Ketten beschreibt, besteht.

Sattel-Knoten Bif/turning point: $\dot{x} = \mu - x^2$ mit $t = \mu^{1/2}$ arctanh $x/\sqrt{\mu}$ oder $x = \mu^{1/2} \tanh t/\sqrt{\mu}$ wegen $[\text{arctanh } x]' = \dfrac{1}{1-x^2}$

Transkritische Bif: $\dot{x} = \mu\, x - x^2$ mit $t = -2/\mu$ arctanh $(\mu - 2\,x)/\mu$

Heugabel/Pitchfork-Bif: $\dot{x} = \mu\, x - x^3$

$\dot{x} = -x + x^3$ und $\dot{y} = -2\,y$

Andronov-Hopf-Bifuration siehe Seite 202.

Beginne mit geometrischen Methode bei Dgls 1. Ordnung. Dann qualitative Methoden (Fixpunkte). Störungsmethoden. Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] Kap7.11 **Harmonischer Oszillator** p138-148; **Beginne aber den Beginn mit der Aufstellung von Dgln!** Finde **Lösungen durch Erraten** von entsprechender Funktionen.

a] Berechnen Sie das **Wasseroberflächenprofil eines rotierenden Eimers** im Schwerefeld: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{mx\omega^2}{mg}$ gibt Parabelprofil.

b] Traktrix, Schlepp-, Zieh-, Zug-, **Treidelkurve**: Ein Eisstück wird auf einer Eisfläche an einer Schnur von einem geradeaus Laufenden gezogen.

$$y' = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \quad \text{Ziehpunkt auf y} - \text{Achse oder auf x} - \text{Achse } \tan\alpha = y' = \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

Welcher Bahnkurve folgt das Eisstück, wenn es ursprünglich jenseits der Geraden lag. Nutze substitution $a/x = \cosh t$: $y = \int_0^t \tanh^2 t dt = t - \tanh t = \text{atanh } a/x - \sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$ und $[\tanh x]' = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$. Heuser: Dgls p17f; Kargermann & Köhler: Theoretische Physik1. Mechanik 1986[2] p30-32 **Katz und Maus:** Eine

Maus läuft mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = v\hat{y}$ an einer Katze vorbei. Sie wird von der Katze verfolgt, die doppelt so schnell ist, $u = 2v$, und ihre Laufrichtung ständig so ändert, dass sie immer auf die Maus zuläuft: Sichtvektor $= \vec{s}(\varphi)$. Der Winkel, den der Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}$ der Katze mit $\vec{v}$ einschließt, sei $\varphi = \angle(\vec{v}, \vec{u}) = \angle(\vec{r}_{Maus}, \vec{s}) = \angle(\hat{y}, \hat{s}(\varphi))$. Abstand $s(\varphi)$ zwischen Katze und Maus als Funktion der Winkels φ. Zeitableitung des Ortsvektors $\vec{r}_{Maus} = \vec{r}_{Katze} + \vec{s}$ gibt zwei gekoppelte Differentialgleichungen für $\dot{s}(s, \varphi)$ und $\dot{\varphi}(s, \varphi)$. Nach welcher Zeit holt die Katze die Maus ein, wenn sie zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $s(\varphi = \pi/2) = s_o$ losläuft? Unter welchem Winkel wird die Maus gefangen? Es gilt $\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}$. $\vec{s} = s\hat{e}_s$ ist die Sichtlinie der Katze zur Maus mit $\hat{e}_s = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ und $\dot{\hat{e}}_s = -\dot{\varphi}(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\vec{v}_K = \dot{\hat{r}}_K = 2v\hat{e}_s$ ist die Geschwindigkeit der Katze $\vec{r}_M = vt\hat{e}_y + \vec{r}_{M0}$ ist der Ort der Maus $\dot{\vec{r}}_M = \vec{v}_M = v\hat{e}_y$ ist die Geschwindigkeit der Maus. $\vec{r}_M = \hat{r}_K + \vec{s} = \hat{r}_K + s\hat{e}_s, \vec{v}_M = v\hat{e}_y = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_K + \dot{s}\hat{e}_s + s\dot{\hat{e}}_s = (2v + \dot{s})\,\hat{e}_s + s\dot{\hat{e}}_s$ entspricht $\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = (2v + \dot{s})\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} - s\dot{\varphi}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ liefert $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\dot{s}}{\dot{\varphi}} = \frac{v\,(2-\cos\varphi)}{\underline{-v\sin\varphi}} = -s\frac{2-\cos\varphi}{\sin\varphi}$ oder $\frac{\mathrm{d}s}{s} = 2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} - \cot\varphi\,\mathrm{d}\varphi$ mit $\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi} = \ln\tan\frac{\varphi}{2}$ und $\int\cot\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \ln\sin\varphi$ folgt die spezielle Lösung $s(\varphi) = s_0\frac{\tan^2\frac{\varphi}{2}}{\sin\varphi}$. Aus $\dot{\varphi} = -\frac{v}{s}\sin\varphi = -\frac{(1+\cos\varphi)^2}{s_0}v$ folgt der Zugriff nach der Zeitdauer $T = \int_0^T \mathrm{d}t = -\frac{s_0}{v}\int_{\pi/2}^0 \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = -\frac{s_0}{v}\left[\frac{1}{2}\tan\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\varphi}{2}\right]_{\pi/2}^0 = \frac{2}{3}\frac{s_0}{v}$. Oder kurz: Katze-Maus oder U-Boot-Jagd auf Liner, wobei Jäger doppelt so schnell wie Gejagter: $\vec{r}_M = vt\hat{e}_y = \vec{r}_K + s\hat{e}_s$ gibt $v\hat{e}_y = 2v\hat{e}_s + \dot{s}\hat{e}_s + s\dot{\hat{e}}_s$ mit $\hat{e}_s = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ führt auf $-(2v + \dot{s})\sin\varphi = s\dot{\varphi}\cos\varphi$ und $(2v + \dot{s})\cos\varphi = s\dot{\varphi}\sin\varphi + v$, was die Kurve $s(\varphi) = s_0\frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2}$ gibt. Aus $\dot{\varphi} = -\frac{v}{s_0}(1+\cos\varphi)^2$ und $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\cos\varphi)^2} = 1/2\tan x/2 + 1/6\tan^3 x/2$ folgt $T = 2s_0/3v$. Kargermann & Köhler: Aufgabensammlung theoret. Physik. Mechanik 1986 p31. **Pseudospäre** oder Hyperboloid mit **negativer konstanter Gauß'scher Krümmung** = -$1/a^2$ entsteht durch **Rotation der Traktrix** $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ um die y-Achse. Sie dient als Modell für die **hyperbolische Geometrie**. Artzy: Geometry. An algebraic Approach 1992; Modell einer **Parkettierung** einer Ebene mit Quadraten. Botsch: Spiel mit Zahlenquadraten 1967; Berge & Ghouila-Houri: Programme, Spiele, Transportnetze 1969; Golowina & Jaglom: Vollständige Induktion in der Geometrie 1973; Siemon: Anwendungen der elementaren Gruppentheorie in Zahlentheorie und Kombinatorik 1981; Klotzek: Kombinieren, parkettieren, färben 1985; An den Ecken treffen dabei mehr als vier zusammen. **Kreisscheiben-Modelle**. Nimm Kreis und parkettiere. **Müller-Philipp & Gorski: Leitfaden Geometrie - Für Studierende der Lehrämter** 2012[5]; Meschkowski: Nichteuklidische Geometrie 1965[3]; Haack: Elementare Differentialgeometrie 1955;

Betrachte erst die geometrische Lösung mittels **Anstieg/Richtungsfeld($\vec{x}$) = rechte Seite**. Stelle **Isoklinen**=Punktmengen gleichen Anstiegs, speziell **Gleichgewichtspunkte**: verschwindende rechte Seite. Beachte **Existenz und Mehrdeutigkeit der rechten Seite**/symmetrische Richtungsfelder, die erst durch die Anfangbedingung zu eindeutiger Lösung führt!

c] Ein **horizontal gleitender Körper** werde allein durch Luftreibung mit der Kraft $F(\dot{x}) = -\alpha\,\dot{x}$ mit $\alpha > 0$ gebremst. Anfänglich hat der Körper die Geschwindigkeit $v_0 = \dot{x}(t = 0) > 0$. Berechnen Sie die Lösungen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ der Bewegungsgleichung.

d] Finden Sie die Lösungen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ der **nur für nicht zu kleine Geschwindigkeiten gültigen** Bewegungsgleichung für den **gedämpften harmonischen Oszillator:** Die Kraft auf den schwingenden Körper der Masse m sei $F(x, \dot{x}) = -k\,x - 2\,m\,\beta\,\dot{x}$ mit der Federkraftkonstanten $k > 0$ und der Reibungskonstanten $\beta > 0$. Aber bei **kleinen Geschwindigkeiten wird die Gleitreibungskraft dominant und der Dgl-Typ ändert sich!** Die plausible, aber **böse Anfangsbedingung** $x(t = 0) = x_0 = 1 > 0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$ zwingt zu komplexer Amplitude in der Nebenrechnung, wenn man nicht an Widersprüchen interessiert ist. Man weiche der Bestimmung dieser speziellen nicht aus, weil einem sonst die ganze Nützlichkeit der komplexen Zahlen entgeht! $\ddot{x} + 4\dot{x} + 8x = 0$ gibt $x(t) = Ae^{(-2+2i)t} + Be^{(-2-2i)t}$ oder für $x(0) = 1$ und $\dot{x}(0) = 0$ kurz $x(t) = \sqrt{2}e^{-2t}\cos(2t - \frac{\pi}{4}) = e^{-2t}(\cos 2t + \sin 2t)$. Witziger Wei-

se resultiert bei **unbegründeter, falscher Annahme reeller Amplitude** $\beta = -\frac{v_0}{2x_0}$! Bei komplexer Amplitude folgt $x_0 = 2ReA$ und $v_0 = -\beta\, x_0 - 2\Omega\, ImA$, also $B = A^*$. **Die friedfertige Anfangsbedingung** $x(t=0) = x_0 = 0$ und $\dot{x}(t=0) = 1$ erlaubt kurze, rein reelle Rechnung bei der Auswahl der speziellen Lösung $x(t) = \frac{e^{-2t}}{2}\sin 2t$. Siehe auch Falk: Theoretische Physik auf Grundlage der allgemeinen Dynamik. Aufgaben u. Ergänzungen zur Punktmechanik BdIa 1966 p1ff; Nolting 1, p146 (2.177); Wagner: Schwingungen p107 (188d); Kuhn, Stöckel, Glaßl: Mathematische Hilfsmittel p181f; Riemann & Weber: Bd1 p277; Arens p454; Courant& Hilbert: Methoden der mathematischen Physik 1924 p223; Kneubühl: Lin und nichtlin Schwingungen 1995 p17; Bronstein: TBM 2001^5 p520; Margenau & Murphy: Bd1 p77; Lang & Pucker p246; **Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics** 1993^7 p69-74; **Joos & Kaluza: Höhere Math** 1964^{10} p314ff 1994^{13} p352ff; **Allgemeine Lösung** der **Schwingungsdifferenzialgleichung** $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = (\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2)x = 0$ per algebrasierendem **e-Ansatz** $x(t) = e^{\lambda t}$, der auf **charakteristisches Polynom** mit den **Lösungen = Wurzeln = Eigenwerten** $\lambda_\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm \sqrt{-\Omega^2} = -\beta \pm i\Omega$ mit **reibungsbedingt reduzierten Schwingerfrequenz** $\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ führt, ist $x(t) = e^{-\beta t}\Re[A'_+ e^{i\Omega t} + B'_- e^{-i\Omega t}] = e^{-\beta t}[A\cos\Omega t + B\sin\Omega t] \overset{\text{Add-Theorem}}{=} e^{-\beta t}C\cos(\Omega t + \varphi)$, wobei $A'_+ = A_+ + ia_+, B'_- = B_- + ib_- \in \mathbb{C}$ und $A, B, A_+, a_+, B_-, b_-, C, \varphi \in \mathbb{R}$. Diskussion von Schwingfall, aperiodischem Grenzfall, Kriechfall siehe Seite 380. **Double root of characteristic equation.** Doppelwurzel des charakteristischen Polynoms. **Sokolnikoff & Redheffer: Mathematics of physicsand modern engineering** 1941, 1958 p55 und p83 **Deadbeat = aperiodische Grenzfall**. In Kontrolltheorie bedeutet es mit der kleinsten Anzahl von Schritten in den stationären Zustand zu kommen. **Wiki-Suche: wiki Fundamentalsystem bei Doppellösung.** Kaluza, Richter: Höhere Mathematik 1964^{10} p314; Furlan: Das gelbe Buch Bd3 p103ff Bestimmung des Fundamentalsystems; **Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik** p440, p448 Basislösungen p454; Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik 2003^9 p296 aperiodische Grenzfall per Variation der Konstanten. Kuhn et al: Math Hilfsmittel 1995^5 p175 Fundamentalsystem bei Doppelwurzel der charakteristischen Gleichung. Margenau, Murphy: Die Mathematik für Physik und Chemie I 1964 p74. **Entartung, Doppellösung und Fundamentalsystem des Lösungsraumes** bei Lösung der Bewegungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators: $\ddot{x} + 2\,\delta\,\dot{x} + \omega_0^2\, x = 0$. Exponential-Ansatz $x(t) \sim e^{\lambda t}$ gibt charakteristische Gleichung $\lambda^2 + 2\,\delta\,\lambda\, + \omega_0^2 = 0$ mit Lösung: $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$. Für $\delta = \omega_0$ aperiodischen Grenzfall kehrt ausgelenkter Körper in minimaler Zeit zur Ruhelage zurück. Entartung, Doppellösung $\lambda = -\delta$ mit allgemeiner Lösung $x(t) = c_1 \cdot e^{-\delta\, t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\delta\, t}$. Speziell Zeitpunkt Null an der Stelle x_0 mit der Geschwindigkeit Null. also $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$ bedeutet $x(t) = x_0 \cdot (1 + \delta\, t) \cdot e^{-\delta\, t}$ Bei gekicktem/gestoßenem Schwinger zum Zeitpunkt Null an der Stelle $x(0) = 0$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = \dot{x}(0)$ folgt $x(t) = v_0 \cdot t \cdot e^{-\delta\, t}$ Allgem $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$ gilt $x(t) = \big(x_0 + (v_0 + x_0 \cdot \delta) \cdot t\big) \cdot e^{-\delta\, t}$.

Der explizite Hinweis auf den **Realteil** der Lösung verweist darauf, dass die Anfangsbedingungen stets den **Imaginärteil = Null** haben. Der Gang ins Komplexe verdoppelt die Anzahl der Gleichungen. Daher braucht man die doppelte Anzahl von reellen Anfangsbedingen, von denen die eine Hälfte nur dazu da ist, ins Reelle zurückzuprojizieren. Grund für's Komplexe ist der bequeme **e-Ansatz** $x(t) = e^{\lambda t}$, der aus der **Dgl eine algebraische Gleichung** macht, deren **Lösungen = Wurzeln = Eigenwerte** der Differenzialgleichung genannt werden. Dem Eigenwertspektrum entspricht das Fundamentalsystem der Dgl = Menge aller Eigenvektoren = Menge aller nichtrivialen speziellen Lösungen. Großmann: Math Einführungskurs für die Physik 2004^9 p295; Für die Anfangsbedingungen $x_0 = x(0) = A = 0i$ und $v_0 = \dot{x}(0) = i0 + \omega B - \beta A = 0i + \omega B - \beta x_0$, also $B = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}$ folgt $x(t) = e^{-\beta t}[x_0\cos\omega t + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega}\sin\omega t]$. Man findet die gleiche Lösung, wenn man konsequent komplex rechnet. **Beispiel:** $\ddot{x} + 8\dot{x} + 25 \overset{x=e^{\lambda t}}{=} (\lambda^2 + 8\lambda + 25)x = 0$ gibt $\lambda_\pm = -4 \pm 3i$. Allgem. Lös. $x(t) = e^{-4t}[A'e^{3it} + B'e^{-3ti}]$. Gibt mit $A' = A_+ + ia_+$, $B' = B_- + ib_-$ und Anfangsbedingungen $x_0 = x(0) = 0 + 0i$, $v_0 + i0 = \dot{x}(0)$ und die Projektion auf die reelle Achse mit $\Im x(t) = 0$ die ispez. Lösung $x(t) = \frac{v_0}{3}e^{-4t}\sin 3t$. Obiges läuft unter dem Stichwort **Vermeidung komplexer Arithmetik** wegen Euler-Beziehung für komplex konjugierte Lösungen. **Hairer & Wanner: Analysis in historischer Entwicklung** 2008 p153f Starte stets mit $\ddot{x} + \sin x = 0$ und deren direkter Lösung. Erst

dann $\ddot{x} + x = 0$ mit **e-Ansatz** p219 Euler 1739 p158f; **Stepanow: Lehrbuch der Differentialgleichungen** 1952, 1956, 1976[4] p176ff;

e] Die Kraft auf einen **Fallschirmspringer** oder einen herabsinkenden Schwebstoff mit der Masse m und dem Radius r sei $F(\dot{z}) = -6\,\pi\,r\,\eta\,\dot{z} - m\,g$ mit der Gravitationskonstanten g und der Zähigkeit η des Fluids von dem der Körper umströmt wird. Svedberg S = Sv = 10^{-13} s Einheit für Sedimentationskoeffizienten = Maß für die Größe eines Partikels basierend auf seiner Sedimentationsrate unter Beschleunigung = wie schnell sich ein Partikel einer bestimmten Größe und Form auf den Boden einer Lösung absetzt. Ultrazentrifuge. Stokes'sche Reibung und **negative Coulomb-Reibung = gravitativer Antrieb** geben $m\ddot{x} = -\tilde{\beta}\dot{x} - mg$ oder mit $v = \dot{x}$ die inhomogene Dgl $\dot{v} + \beta v = -g$. Stationäre Lösung $\dot{v} = 0$ legt partikuläre Lösung $v_{\text{par}}(t) = -\dfrac{g}{\beta} = v_\infty$ nahe. Lösung der homogenen Dgl $v_h(t) = v_0 e^{-\beta t}$. Mit Anfangsbedingung $v(t = 0)$ folgt $v(t) = \dfrac{g}{\beta}(e^{-\beta t} - 1) = v_\infty(1 - e^{-\beta t})$. Berechnen Sie den Fixpunkt und die Lösungen $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ der Bewegungsgleichung. Stokes'sche Reibung. $v_\infty \propto r$. ø-0.3 mm-Regentropfen sind aber 30% schneller als Fallgesetz und Reibung zulassen. Stöße als Ursache. SdW Oktober 2014 p10; f] Finden Sie die **Fixpunkte/Gleichgewichtspunkte** x^* folgender Differenzialgleichungen rechnerisch und grafisch a] $\dot{x} = \mu - x^2$. Fixpunkte für $\dot{x} = \mu - x^2$ bei $x^*_{s,i} = \pm\sqrt{\mu}$. stabil für $\mu > 0$ und instabil für $\mu < 0$. Lösung: $x = \mu^{1/2}$ cotanh $t\sqrt{\mu}$ für $x > \sqrt{\mu}$ und $x = \mu^{1/2}\tanh t\sqrt{\mu}$ für $x < \sqrt{\mu}$. und b] Lotka-Volterra mit Geburt und Tod, Jetschke p74 $\dot{x} = \mu\,x - x^2$. Fixpunkte für $\dot{x} = \mu\,x - x^2$ bei $x^*_i = 0$ und bei $x^*_s = \mu$. Bei $x^*_i = 0$ stabil für $\mu < 0$ und instabil für $\mu > 0$ und bei $x^*_s = \mu$ instabil für $\mu < 0$ und stabil für $\mu > 0$. Gradienten-System: Potenzial? Lösung ist $x(t) = \dfrac{\mu}{\left(1 + e^{-\mu t}\left(\dfrac{\mu}{x_0} - 1\right)\right)}$ oder $x(t) = \dfrac{a}{1 + e^{-at}(\dfrac{a}{x_0} - 1)}$ oder $t = -2/\mu$ arctanh $(\mu - 2\,x)/\mu$. Stellen Sie die Fixpunkte x^* als Funktion des Parameters μ grafisch dar. Stabilität siehe Seite 186. Lösen Sie die Differenzialgleichungen. $\dot{x} = f(x)$ **führt niemals auf Oszillation!** $\dot{x} = 1 + \cos x$ gibt $x(t) = 2\arctan t$ oder $x(t \to \infty) = n\,\pi$

g] **Kreisgleichung:** $y' = -\dfrac{x}{y}$

f] $y' = -\dfrac{1 + y^2}{x\,y}, \quad (x_0, y_0) = (1, 2), \quad x, y \neq 0$

h] $y' = f(a\,x + b\,y + c)$ wird mit Subs $z = a\,x + b\,y + c$ geknackt. $y' = e^{3(x+2y)}, (x_0, y_0) = (0, 2)$

i] Ähnlichkeits-Dgl $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ wird mit Subs $z = \dfrac{y}{x}$ geknackt. $y' = \dfrac{9x^2 + 3y^2}{2xy}, \quad (x_0, y_0) = (2, 2)$

j] $y' + A(x)\,y(x) = f(x)$ wird mit Subs $y(x) = u(x)\,v(x)$ gelöst. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad (x_0, y_0) = (2, 3)$ oder **Stromkreis mit Spule** der Induktivität $L: \quad L\,\dot{I} + R\,I = U_0 \sin\omega t$

k] **Raketengleichung:** $-v_g \mathrm{d}m = m\mathrm{d}v$ mit der konstanten Gasaustrittsgeschwindigkeit v_g, der momentanen Änderung der Raketenmasse bzw. -geschwindigkeit dm bzw. dv und der momentanen Raketenmasse m. $v(T) = v_g \ln \dfrac{m_0}{m_T}$. Für mehrstufige Rakete im Schwerefeld siehe Greiner Bd1; Mehrstufige Raketen sichern den ballistisch kontrollierten Niedergang der ersten schweren Stufen. Barth: Hermann Oberth. Leben Werk Wirkung 1985; Oberth: Die Rakete zu den Planetenräumen 1923, Wege zur Raumschiffahrt 1929; Walter Hohmann: Die Erreichbarkeit des Himmels 1945; Ley: Die Himmelkunde. Eine Geschichte der Astronomie von Babylon bis zum Raumzeitalter 1965; L̃ey: Vorstoß ins Weltall. Rakete und Raumschiffahrt 1948; bgl Erde: 1. Kosmische Geschwindigkeit = Kreisbahn 7.2 km/s = 2. Kosmische Geschwindigkeit = Flucht 11.2 km/s = 40 320 km/h. bzgl Sonne 3. Kosmische Geschwindigkeit = 42.1 km/s. Bei Schuss in Richtung Erdbahn = 29.8 km/s also nur 12.3 km/s nötig. 4. Kosmische Geschwindigkeit vom Bzgl Galaxie $m = 2 \cdot 10^{41}$ kg 320 km/s. Sonne hat schon 220 km/s also nur 100 km/s nötig. W̃olff: Raketen und Raketentechnik 1976, 2006[5]; Mielke: Lexikon Raumfahrt 1972, 1986; Mielke: Raumflugtechnik, eine Einführung 1974; Dornberger: Peenemünde. Die Geschichte der V-Waffen 1981; Gartmann: Feuerstrahlen. Die Geschichte einer geheimnisvollen Versuchsreihe 1954 Technikgeschichte aus Sicht der Entwicklungswerkstatt. Hygolischer Raketentreibstoff: Salpetersäure, Ethanol und Benzenamin, Bildwandler, Nachtsicht; Gartmann: Econ Welt-

raum ABC 1958; Gartmann: Raketen 1956; **MANPADS** = man-portable air-defence system = Fliegerfaust, früher Panzerfaust. Seit 1981 5000 Stinger FIM-92 in Afghanistan erfolgreich. Strela, Igla, Mistral, QianWei. >2 Mach. Freund-Feind-Erkennung. Passiv UV und IR 3.5-5μm, Bleisulfid, flüssig N_2 oder Ar. 15 kg, 1.6m, d=7cm, bis 6km Zielbekämpfung, max Brenndauer 17sec, 40T€. Mobiles Überwachungsradar P-Star ER bis 35km, 180kg, 1.5 Mio $. Klemm: Automaten, Forscher und Raketen. Geschichten aus 100000 Jahren Technik 1969; Weyer: Werher von Braun 1999; Gartmann: Jahrhundert der Raketen 1958, 1961; **Raketenflugzeiten:** Typische Geschwindigkeiten bei militärischen Einsätzen 1 bis 7 km/s bedeuten bei typischen Radarerfassungen von 200km einen Einschlag beim Radar von 30 sec bis 3 Minuten. Mig31 mit Hyperschallrakete Ch-47M2 optimal. Stinger/Strela 600m/sec. Born: Zum Sinn der Weltraumfahrt, PhysBl14 1958 p238 militärischer Hintergrund ist unübersehbar! Sänger: Raumfahrt, technische Überwindung des Krieges 1958; Gail & **Petri: Weltraumfahrt.** Physik, Technik, Biologie 1947[1], 1958[2], 1970[3]; **K̃ovacs: Raketen-Einmaleins. Einführung in die elementaren Grundlagen der Himmelsmechanik und der Raketentechnik** 1970; Gartmann: Künstliche Satelliten 1958; Paetzold: Künstliche Erdsatelliten und Planetoiden, PhysBl15 1959 p306-313 und p350-357; Luna3 und Mondrückseite, PhysBl16 1960 p324; Paetzold: Neue Forschungsergebnisse durch Erdsatelliten und Raumsonden, PhysBl16 1960 p325-333; Gartmann: Raumfahrtforschung, PhysBl16 1960 p461-469 Liste Satelliten und Raumsonden; P̃etri: Künstliche Erdsatelliten und Raumsonden 1965; Haber: Künstliche Erdsatelliten für die geophysikalische Forschung 1946 19 Seiten; Reichardt & Niekisch: Künstliche Erdsatelliten 1959 = Uspekhi fizicheskikh nauk 63 1957 und 64 1958 Mondflug; Wallisfurth: Russlands Weg zum Mond 1964; Anders: Der Blick vom Mond. Reflexionen über Weltraumflüge 1970; **Maegraith: Mondlandung.** Dokumentation der Weltraumfahrt USA und UdSSR 1969 Luna 15 stürzt 2h vor Rückstart von Apollo-Mondfähre am 21.7.1969 334 Meilen entfernt ab; Ducrocq: La route du cosmos 1957; **Ducrocq: Sieg über den Raum. Erdsatelliten und Monderoberung** 1959, 1961; **Bohrmann: Bahnen künstlicher Satelliten** 1963, 1966; Bialas: Erdgestalt, Kosmologie und Weltanschauung. Die Geschichte der Geodäsie als Teil der Kulturgeschichte der Menschheit 1982; S̃eeber: Satellitengeodäsie 1989; Cartier: Die Welt. Woher sie kommt. Wohin sie geht 1957; Cartier & Groueff: Die Welt - Der Mensch und die Erde 1959; Ducrocq: Der Mensch im Weltall. Die zweite Entwicklungsstufe der Raumflugkörper 1961, 1963; Burdakow & Sigel: Raumfahrt und Weltraumforschung 1979; **Tiziou,..., Butze, Zwehl eds: Die Sterne rücken näher. Enzyklopädie der Weltraumfahrt** 2 Bde 1968 mit Originaltexten von Gagarin, Ginsburg, Leonow, Miroschnitschenko, Mustel, Titow von Braun, Strughold, Sänger; Die Erforschung des Weltraums mit Satelliten und Raumsonden 3 Bde. 1. Physikalische Grundlagen, 2. Steuerung - Prüfstände - Ortung, 3. Auswertung der Messdaten für die Erforschung der Atmosphäre 1968; Uhlitzsch: Anatomie einer Erdfunkstelle 1969; Gartmann: Träumer – Forscher – Konstrukteure. Das Abenteuer der Weltraumfahrt. Ganswindt, Ziolkowsky, Goddard, Oberth, Valier, Nebel, Engel, Tiling, Winkler, Eugen Sänger, v. Zborowski, v.Braun, Loeser 1962; Haber: Menschen, Raketen, Planeten 1955; Lessing: Mannheimer Pioniere 2007; Ruff & Strughold: Grundriss der Luftfahrtmedizin 1957; Harsch: Leben, Werk und Zeit des Physiologen Hubertus Strughold (1898-1986) 2004 = Campbell & Harsch: Hubertus Strughold. Life and Work in the Fields of Space Medicine 2015; Strughold: Your Body Clock ; Strughold: The green and red planet: A physiological study of the possibility of life on Mars 1953; Werner Wehr: Ich lebte im Jahr 3000. Roman einer möglichen Reise 1960; Eugen Sänger: Raumfahrt - technische Überwindung des Krieges 1958;

l] $\dot{x} = \sin x$ hat Fixpunkte bei allen Vielfachen von π wegen $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \frac{1}{2}\left[\ln(\cos x - 1) - \ln(\cos +1)\right]$ oder $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin \alpha x} = \frac{1}{\alpha} \ln \tan \frac{\alpha x}{2}$ ist eine spezielle Lösung $x(t) = 2\arctan[\tan(x_0/2.) * \exp((t - t_0))] + x_0$

m] **Gekoppelte Systeme von Federn = Federkette:** 1] Die Systemkonfiguration sei im stabilen Gleichgewicht. **Superpositionsprinzip** Bei jedem Körper wird nun ein mit den **Zwangsbedingungen verträgliches lokales** Koordinatensystem errichtet. 2] Kleine Auslenkungen sind nun die verallgemeinerten Koordinaten / Freiheitsgrade des Systems x_k zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen über die Lagrange-Funktion oder direkt mittels Kräften/ Momenten. 3] Übergang von Differenzialgleichungen im Zeitbereich zu algebraischen Gleichungen im **Fourier-Raum** am einfachsten per e-Ansatz führt auf Eigenwertgleichung

mit den Eigenwerten λ^2 Kuhn: Theoret Mech PfL9 p171; Arya: Introduction to classical mechanics p110

$$x_k = \alpha_k\, e^{i\omega\, t} = \alpha_k\, e^{\lambda\, t}, \quad \ddot{x}_k = -\omega x_k$$

4] Lösung der Matrix-Eigenwert-Gleichung über die Säkular-Determinante $|A(\omega)| = 0$. Die Eigenwerte ω_i sind die Eigenfrequenzen des Problems mit den zugehörigen Eigenvektoren $\vec{\alpha}_i$ als nichttriviale Lösungen des Eigenwert-Problems. 5] Die Komponenten der Eigenvektoren $\vec{\alpha}_i$ sind die Amplituden/Koeffizienten der Eigenschwingungen, Einzelschwingungen oder **Normalschwingungen** . 6] Einführung von **Normalkoordinaten** ξ_i des Systems die die die Bewegungsgleichungen voneinander unabhängig werden.

Lineare Kette. Brockhaus Physik Vol1 p880f; Walliser & Fließbach: Arbeitsbuch p89; Kittel: **Einführung in die Festkörperphysik** 2006[14]; **Gross & Marx: Festkörperphysik** 2012; **Feder-Kette**: siehe **Falk Ia** p49ff. **Unendliche Kette gekoppelter Oszillatoren** Autoschlange im Stau, Kristallmodell $F_s = m\ddot{x}_s = c\,(x_{s-1} - x_s) + c\,(x_{s+1} - x_s) = c\,(x_{s-1} + x_{s+1} - 2x_s)$ es werden die Kräfte auf den Massepunkt s bei unabhängigen Auslenkungen des Massepunktes selbst und der auf s wirkenden Kräfte bei unabhängiger Auslenkung der nächsten Nachbar-Punkte $s-1$ und $s+1$ aus der Ruhelage betrachtet = **Knoten/Körper-Sicht**, oder aus **Feder-Sicht, Link-Sicht** potenzielle Federenergien $V(x_s, x_{s-1}) = \frac{k_s}{2}(x_s - x_{s-1})^2$. **Benzen als Federsechseck:** $mR\ddot{\varphi}_i = kR\,(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + kR\,(\varphi_{i-1} - \varphi_i) = kR\,(\varphi_{i-1} + \varphi_{i+1} - 2\varphi_i)$ mit $\Omega^2 = k/m$ und e-Ansatz $\varphi_i = a_i e^{i\omega t}$, also $\ddot{\varphi}_i = -\omega^2\varphi_i$ gibt algebraisches Gleichungssystem $(-\omega^2+2\Omega^2)a_i - \Omega^2 a_{i-1} - \Omega^2 a_{i+1} = 0 = (\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 2)a_i + a_{i-1} + a_{i+1} = na_i + a_{i-1} + a_{i+1}$. Nichttriviale Lösung nur unter Bedingung, dass die Determinante (6! Summanden, Sarrus geht nicht!) Koeffizientenmatrix verschwindet: $n^6 - 6n^4 + 9n^2 - 4 \stackrel{!}{=} 0$ mit $m = n^2$ sieht man die Lösung $m = 1$ für $m^3 - 6m^2 + 9m - 4 = 0$. Per Polynomdivision $0 = m^3 - 6m^2 + 9m - 4 = (m-1)(m^2 - 5m + 4) = (m-1)^2(m-4) = (n-1)^2(n+1)^2(n-2)(n+2)$ lies man die Lösungen $n = -2, -1, -1, 1, 1, 2 = \frac{\omega^2}{\Omega^2} - 2$ ab und gesuchten Schwingungsfrequenzen ω/Ω sind 0=Rotation, 1,1 beide Schwerpunktbewegung und die echten Schwingungen $\sqrt{3}, \sqrt{3}$ und 2 mit den Eigenvektoren

n	-2	-1	-1	1	1	2
ω/Ω	0	1	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2
	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Falk: Aufgaben u. Ergänzungen zur Punktmechanik Ia p49ff; Kuhn: Pfl12 p170; Kuipers: Mechanik 12-5 p248 p550; Für eine Feldgröße q an der Stelle x kommt man über eine Kette von Raumpunkten bei x zu Raumeigenschaften $q(x)$ an diesen Punkten und erreicht so den Übergang vom Diskreten zum Kontinuierlichen, also const$=L = aN$ mit $N \to \infty$, $a \to 0$, gemäß $q_n \longrightarrow q(x) = \frac{q_n}{\sqrt{a}}$= Abstand vom Ursprung der Kette x liefert **zweite räumliche Ableitung** oder anschaulich **Krümmung** = **Anstiegsänderung** $q''(x)$

$$\ddot{q}_n = \Omega^2(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}), \quad q''(x_n) = a^2 \lim_{a\to 0} \frac{[q(x_{n+1}) - q(x_n)] - [q(x_n) - q(x_{n-1})]}{a^2}, \quad \ddot{q}(x) = \Omega^2\, a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} q(x)$$

Denn die erste Ableitung ist $q' = a \lim_{a\to 0} \frac{q(x_{n+1}) - q(x_n)}{a}$. **Beschleunigung** hängt offensichtlich mit **lokaler Krümmung** zusammen. $\Omega\, a = v_{\text{ph}}$ ist Wellengeschwindigkeit. Damit man also eine Kette von unendlich vielen Atomen mit endlicher Starrheit erhält, ist eine unendlich große Kraft zwischen benachbarten Atomen erfoderlich. Als Folge davon kann die Kette Schwingungen mit unendlich hoher Frequenz ausführen. Raumzeitlich periodischer Ansatz für monochromatische Welle:
$x_s = x_0 \exp(iksa) \exp(i\omega_n t) = x_0\, e^{ik(s+n)a}\, e^{i\omega_n\, t}$ mit periodischer Randbedingung $\exp(ikna) = 1$ bei der **Raumperiode** $n\,a$ gibt $kna = 2\pi\, m = \frac{2\pi}{\lambda} na$ mit $m \in \mathbb{Z}$ oder die **Dispersions-Relation** $\omega(k)$, Falk Ia 1966

p39, p49ff, Greiner 2 Longitudinale Ketten p135, Fließbach & Walliser: Arbeitsbuch p100ff,

$$\omega_n(k_{n,m}) = 2\sqrt{\frac{c}{m}}\left|\sin\frac{k_{n,m}a}{2}\right| = 2\Omega|\sin\pi\frac{m}{n}| \quad \text{mit} \quad \frac{2\pi}{\lambda} = k_{n,m} = \frac{2m\pi}{na}$$

Für $m \to 0$ oder $m \ll n$, also $ka \ll 1$ folgt $\omega_n = \Omega k\, a = 2\pi\Omega\frac{a}{\lambda}$

$$x_s(t) = x_0 e^{ikas}\, e^{2i\Omega|\sin ka/2|\, t} = x_0 e^{is\frac{m}{n}}\, e^{2i\Omega\, t\,|\sin\pi\frac{m}{n}|}$$

1. Brillouin-Zone:

$$\frac{ka}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad 2a = \frac{2\pi}{k_{\max}} = \lambda_{\min} \le \lambda$$

Die kleinste Wellenlänge ist also größer als die doppelte Gitterkonstante a.

Aufgabenbücher zur Mechanik: Kuypers; **Kotkin & Serbo: Exploring classical mechanics. Collection of Problems in Classical Mechanics** 1969, 1971, 2010[4], 2020; China-Kladde: Lim: Problems and Solutions on Mechanics: Major American University PhD Qualifying Questions and Solutions 1994; Calkin: Lagrangian and Hamiltonian mechanics. Solutions to the exercises, 2Bde; Wells: Theory and Problems of Lagrangian Dynamics 1967; Rothe: Classical and quantum dynamics of constrained hamiltonian systems 2010; Willi-Hans Steeb: Problems and solutions in theoretical and mathematical physics; Lindner: Physikalische Aufgaben 1974[15]; Kreß, Mikelskis et al: Energie. Regenerative Energiequellen und alternative Energietechnologien 1984;

Ebene Bewegung: Wie lautet die linke Seite der Newton'schen Gleichung in krummlinigen Koordinaten und in Abhängigkeit vom Bezugssystem (Inerzial oder Karussel)? Beachte $\hat{e}_i = \vec{\text{const}}$. Kinematik in Polarkoordinaten (ρ, φ) bei der Basis $\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi\} = \{\hat{e}_\rho(\varphi(t)), \hat{e}_\varphi(\varphi(t))\}$ mit $\hat{e}_\rho^2 = 1$, also $2\,\hat{e}_\rho \cdot \dot{\hat{e}}_\rho = 0$ und

$$\hat{e}_\rho(\varphi(t)) = \cos\varphi(t)\hat{e}_x + \sin\varphi(t)\hat{e}_y, \quad \dot{\hat{e}}_\rho(\varphi(t)) = \dot{\varphi}\,\hat{e}_\varphi(\varphi(t)), \quad \dot{\hat{e}}_\varphi(\varphi(t)) = -\dot{\varphi}\,\hat{e}_\rho(\varphi(t))$$

gibt $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho$, $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{e}_\varphi$, $\vec{b} = \ddot{\vec{r}} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\hat{e}_\varphi =$ linke Seite der Newton-Gleichung. Im Inertialsystem $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = K_\rho$, $m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = K_\varphi$. Die Azimutalscheinkraft wird nach Lanczos Eulerkraft genannt. **Lanczos: The Variational Principles of Mechanics** 1970; Im Karusselsystem gilt wegen $\rho = \rho', \varphi = \omega t + \varphi'$
$m(\ddot{\rho}' - \rho'\dot{\varphi}'^2) = K_\rho + 2m\omega\rho'\dot{\varphi}' + m\omega^2\rho'$, $m(\rho'\ddot{\varphi}' + 2\dot{\rho}'\dot{\varphi}') = K_\varphi - 2m\omega\dot{\rho}'$ **Kreisbewegung:** Für Teilchen auf Kreisbahn $\gamma(t)$ gilt $\vec{x}^2 = R^2$ und $2\vec{x}\cdot\dot{\vec{x}} = 0$, also $\vec{x} \perp \dot{\vec{x}}$.

Bewegungsgleichung in beliebig beschleunigten Bezugssystemen, also Idee der Scheinkräfte siehe Planck: Einführung in die Allgemeine Mechanik. Zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht 1920[2] §55 Relative Bewegung; Schäfer: Theoret Physik Bd1 Mechanik 1950 p65ff; **Bergmann & Schäfer: Bd1 Mechanik Kap8** p240ff; Weizel: LB theo Physik Bd1 p35 oder Tipler: Physik 1994 p117 oder https://physik.wissenstexte.de/coriolis.htm; **Weyl: Raum, Zeit, Materie** 1923[5] KapIV §29 p224 Einstein vereinigte Gravitation mit Trägheitskräften = a] **scheinbare Kraft**, sofern man an jeder einzelnen Weltstelle stets ein derartiges Koordinatensystem einführen kann, relativ zu dem das **Führungsfeld ein Galilei'sches** ist. b] **wirkliche Kraft**, sofern es ia nicht möglich ist, für ein **ausgedehntes Weltgebiet** ein derartiges Koordinatensystem anzugeben. Pfister & King: Inertia and Gravitation. The Fundamental Nature and Structure of Space-Time 2015; Pfister: **Lange nach Newton** PhysJ15 H3 2016 p47-51; Born: Die RT Einsteins 1920 p60 Trägheit; **Treder: Relativität der Trägheit** 1972 Mach'sches Prinzip = Fixsternhimmel macht Trägheit. Mach-Einstein-Doktrien: Trägheit hat Ursprung in Wechselwirkung der Körper mit umgebendem Gravitationspotenzial $\Phi(\vec{r})$ mit $\vec{g}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\Phi(\vec{r})$. Beschleunigte Bewegung in massiver Umgebung induziert Trägheitswiderstand. Siehe Liebscher auf Seite 651.; **Bleyer & Liebscher: Stört der Kosmos die Physik auf der Erde?** Die Sterne70 1994 p197-206; Retzlaf: Über die Trägheitsfreie Mechanik – der analytischen Fassung des Machschen Prinzips. Hönl: Allgemeine Relativität und Machsches Prinzip 1961;

Newton und Einsteins ART: Trägheit kommt vom absoluten Raum! Für das freie Teilchen gilt $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\eta_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k$. Träge Masse fehlt nach Weyl in Bewegungsgleichung, weil Raumstruktur Führungsfeld darstellt. Ausweg **A]:** Gibt **Weyl: Raum, Zeit, Materie** 1923[5] KapIV §29 p219ff Riemann'sche Mannigfaltigkeit wird mit affinem Zusammenhang begabt, was zum Führungsfeld führt. Oder: Mit dynamischer Auffassung vom Riemann'schen Raum wird der Widerspruch zwischen Relativitätsprinzip und Existenz von Trägheitskräften aufgelöst. In ART lebt absoluter Raum fort: Es gilt das **Trägheitsgesetz** $\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^i_{kl}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s} = 0$. Ausweg **B]**: Zeigen Weber 1846 und Riemann 1858: **Es gibt nur relative Orte, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen:** $x^i_{AB} = x^i_A - x^i_B$, $\dot{x}^i_{AB} = \dot{x}^i_A - \dot{x}^i_B$ und $\ddot{x}^i_{AB} = \ddot{x}^i_A - \ddot{x}^i_B$ und keine absoluten kinematischen Größen $x^i_A, x^i_B, \dot{x}^i_A, \dot{x}^i_B, \ddot{x}^i_A, \ddot{x}^i_B$ selbst. **Trägheit basiert auf oder wird induziert durch geschwindigkeitsabhängiges Gravitationspotential der umgebenden Massen!** $\mathcal{L}(r_{2,1}, r_{3,1}, r_{3,2}, \dots, v_{2,1}, v_{3,1}, v_{3,2}, \dots) = \sum_{A>B}\sum_B f\frac{m_Am_B}{r_{AB}}(1+\beta\frac{v^2_{AB}}{c^2})$. Kraft auf Teilchen A ist $\vec{F}_A = \sum_{B\neq A}^N \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}_{AB}} = -\sum_{B\neq A}^N f\frac{m_Am_B}{r^3_{AB}}(1+\beta\frac{v^2_{AB}}{c^2})(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$. Siehe auch Seite 625 zur Wheeler-Feynman-Elektrodynamik. The Collected Works of Bernhard Riemann, Dover 1953; Raghavan Narasimhan: Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge = Collected papers Bernhard Riemann. Nach der Ausg. von Heinrich Weber und Richard Dedekind 1990 = UB Potsdam; Bernhard Riemann, Karl Hattendorff: Schwere, Elektrizität und Magnetismus 1872, 1880[2]; Hattendorff Vorlesungsmitschrift des WS1854/55, WS1860/61 und SS1862 = **Riemann: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik** 1869[1] 1882[3] = Emde 1938; Szabo: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen 1976 leider fehlen hier die grundlegenden Ansätze zur Begründung der Trägheit von Weber 1846, Riemann 1864, Weyl 1918; Hertz: Die Prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhange dargestellt. Drei Beiträge 1996; Unsöld: Hertz. Prinzipien der Mechanik, PhysBl 26 1970 337-342; Hertz: Die Prinzipien der Mechanik in neuen Zusammenhange dargestellt 1894; Ortlieb: Hertz und das Konzept des mathematischen Modells 2007; L̃opes Coelho: Das Hertzsche System. Die Mechanik und die Erkenntnistheorie 1995; L̃opes Coelho: Zur Konzeption der Kraft der Mechanik 2001; **Bergmann: Intro to the theory of relativity** 1942 p9 Koordinatentransformation für den Fall des Karussels $\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gibt aus Karusselsicht die Geschwindigkeit $\begin{pmatrix} \dot{x}^* \\ \dot{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega y^* \\ -\omega x^* \end{pmatrix}$, also Oszillation der Geschwindigkeit für im Inertialsystem ruhenden Körper $\dot{\vec{r}} = \vec{0}$, und die Beschleunigung $\begin{pmatrix} \ddot{x}^* \\ \ddot{y}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2x^* + 2\omega\dot{y}^* \\ \omega^2y^* - 2\omega\dot{x}^* \end{pmatrix}$ Die Beschleunigung des Ruhsystems erscheint nicht als simple Koordinatentransformation per Drehmatrix. Es tauchen auch noch orts- und geschwindigkeitsabhängige Zusatzbeschleunigungen auf. Aus $\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$ im Ruhsystem wird im Karussel nicht $\ddot{\vec{r}}^* = \vec{0}$! Das Trägheitsgesetz wird verletzt. Im Nichtinerzialsystem **Karussel** mit $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ wird man aus Sicht des Mitfahrers/Bewegten **Fliehkraft/Scheinkraft bedingt** nach außen $\hat{\rho}$ getrieben. Geht man auf's Drehzentrum zu $\vec{v} = -v_0\hat{\rho}$, so wird man Coriolis-Kraft bedingt $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega}\times\vec{v} = 2m\omega v_0\hat{z}\times\hat{\rho} = 2m\omega v_0\hat{\varphi}$ in Drehrichtung $\hat{\varphi}$ beschleunigt, da man von hoher Bahngeschwindigkeit/Drehimpuls zu kleinerer gelangt. Die Außensicht/ruhender Beobachter/Inerzialsystem wundert sich über die Kreisbewegung und muss eine Zentripetalkraft = -Fliehkraft annehmen, was kinematisch, siehe oben, durch den richtigen Ausdruck des Trägheitsterms $m\ddot{\vec{r}}$ der Newton-Gleichung passiert. Stephani/Kluge: $\vec{r}$ Ortsvektor vom Inerzialsystem zum Körper im System, dessen Ursprung bei $\vec{r}_0$ liegt und dass um diesen Ursprung mit ω rotiert. Die nicht-rotatorische Schwerpunkts-Bewegung des bewegten Systems wird durch $\vec{r}_0(t)$ erfasst. Die Position eines Körpers in diesem bewegten und rotierenden Systems sei $\vec{r}'(t)$, also vom Inertialsystem aus gesehen $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$. Feldmeier: Mechanik p58; Die **Euler-Formel für mit ω rotierende Bezugssysteme** eine Art kovarianter Ableitung: $\frac{d}{dt} = \frac{d'}{dt} + \vec{\omega}\times$ oder $\frac{d}{dt}|_I = \frac{d'}{dt}|_R + \vec{\omega}\times$ mit I=**raumfestes Inerzialsystem** und R = **rotierend/gestrichenen/bewegt**. Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010; Dies gibt $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$, Die vom **raumfesten Inerzialsystem** her gesehene Zeitableitung (d/dt) eines im **be-**

wegten/ rotierenden/ gestrichenen Nichtinerzialsystem aufgeschriebenen Vektors bildet man, indem man zunächst die Zeitableitung der Komponenten ausführt (d'/dt) und dann den Einfluss der Rotation berücksichtigt ($\vec{\omega}\times$): Im raumfesten Inerzialsystem $m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}}_0 + m\ddot{\vec{r}}' + m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'$ also mit Zentripetalkraft und wegen $m\ddot{\vec{r}} = \vec{K}$ aus der Sicht des rotierenden Systems $m\ddot{\vec{r}}' = \vec{K} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') - 2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}'$ mit Zentrifugalkraft. Speziell mit $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ und $\vec{r}' = \rho\hat{\rho}$, also $\dot{\vec{r}}' = \vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \dot{\varphi}\rho\hat{\varphi}$ folgt für die **Coriolis-Kraft** $\vec{F}_C = -2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}' = -2m(\omega\hat{z}[\dot{\rho} + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}]) = -2m\omega\dot{\rho}\hat{z}\times\hat{\rho} - 2m\omega\rho\dot{\varphi}\hat{x}\times\hat{\varphi} = 2m\omega\rho\dot{\varphi}\hat{\rho} - 2m\omega\dot{\rho}\hat{\varphi}$, wodurch Hochs auf der Nordhalbkugel stets nach rechts und Tiefs nach links drehen, und für die **Flieh-Kraft** $\vec{F}_F = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = -m\rho\omega^2\hat{z}\times\hat{\varphi} = m\rho\omega^2\hat{\rho}$. Die drei **Scheinkrafftterme** dienen dazu, die Punktmasse bei Abwesenheit von $\vec{K}$ im Inerzialsystem auf einer Geraden zu führen. **Häckel: Meteorologie** 1990[2], 2016[8] Corioliskraft macht Rechtsablenkung auf Nordhalbkugel p201ff; Rührt von Trägheit her, daher auch Trägheitskräfte genannt. Axialsymmetrisches Fliehkraftpotenzial, zB **Kreiselpumpe** $U(\vec{r}) = \frac{m}{2}[(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 - \omega^2 r^2]$. Mit **BAC-CAB:** $\vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\frac{m}{2}[(\vec{\omega}\cdot\vec{r})^2 - \omega^2 r^2] = -m(\vec{\omega}\cdot\vec{r})\vec{\omega} - \omega^2\vec{r} = -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$. Dransfeld, Kienle, Vonach: Physik1 - Newtonsche und relativistische Mechanik; **Lugt: Wirbelströmung in Natur und Technik** 1979 p239: **Erde dreht links**. Teilchen nach Norden gerät in zur langsamer drehenden Erde und eilt ihr bei höheren Breitengraden wegen Drehimpulserhaltung voraus. Horizontale Bewegung auf Nordhalbkugel hat daher **Rechtsablenkung**. Coriolisparamter $f = 2\Omega\sin\varphi$ = Vorticity-Komponente. **Häckel: Meteorologie** 1990[2], 2016[8] Corioliskraft macht Rechtsablenkung auf Nordhalbkugel p201ff; **Geostrophische Strömung:** durch Gleichgewicht von **Druck- (Flächenkraft)** und **Corioliskraft (Volumenkraft)**, **Stromlinie** = **Isobare**. Lugt p241. Nicht so in bodennähe wegen Reibung oder bei stark gekrümmter Stromlinie = Wirbel. **Gradienten-Strömung** bei Gleichgewicht von Druck-, Coriolis- und Fliehkraft (Volumenkraft). Beispiel1: Karussel mit $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$ gibt $m\,\vec{a} = -m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) - 2m\,\vec{\omega}\times\vec{v}$ gibt wegen $\vec{r}\perp\vec{\omega}$ für die Fliehkraft $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega^2\,\vec{r}$. Coriolisbeschleunigung ist $-2m\,\vec{\omega}\times\vec{v} = 2m\omega\rho\dot{\varphi}\hat{\rho} - 2m\omega\dot{\rho}\hat{\varphi} = -\begin{pmatrix}0\\0\\\omega\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}-\omega\,\dot{y}\\\omega\,\dot{x}\\0\end{pmatrix}$ und macht auf Nordhalbkugel Rechtsdrehung eines Hochs. $\ddot{x} = \omega^2 x + 2\omega\dot{y}$ und $\ddot{y} = \omega^2 y - 2\omega\dot{x}$ oder in Gaußebene $\ddot{z} - \omega^2 z + 2i\omega\dot{z} = 0$ mit $z = x + iy$. Algebraisierung mit $z = e^{\gamma t}$ gibt $(\gamma + i\omega)^2 e^{\gamma t} = 0$ also Doppelwurzel $\gamma = -i\omega$, daher Fundametalsystem $e^{-i\omega t}$ and $t\,e^{-i\omega t}$ mit allgemeiner Lösung $z(t) = (A + iB)\,e^{-i\omega t} + (C + iD)\,t\,e^{-i\omega t}$ Anfangsbedingungen $x = R$, $y = 0$, $\dot{x} = -V$ und $\dot{y} = 0$ geben $z(t) = [(R - Vt) + iR\omega t]\,e^{-i\omega t} \in \mathbb{C}$ oder $\vec{r}'(t) = D(\omega t)\vec{r}_0(t) = \begin{pmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t\\ -\sin\omega t & \cos\omega t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R - Vt\\ R\omega t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ letzteres zeigt klar, dass man die Lösung als Verknüpfung von Koordinatentransformation und gleichförmiger Bewegung in $x = R - Vt$ in Richtung negativer ungedrehter/alter x-Richtung und $y = R\omega t$, also freier Bewegung mit Bahngeschwindigkeit in anfängliche y-Richtung sehen kann. **Coriolis-Beschleunigung in Kugelkoordinaten:** Erde dreht mit $\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega(\hat{r}(\theta,\varphi)\cos\theta - \hat{\theta}(\theta)\sin\theta)$. Körper bei $\vec{r}(r,\theta,\varphi) = r\hat{r}(\theta,\varphi)$ im drehenden Karussel habe die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(r,\theta,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\varphi}$. Daher $\vec{F}_C(r,\theta,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = -2m\,\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = 2m\,\omega[r\dot{\varphi}\sin^2\theta\hat{r} + r\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\hat{\theta} - (r\dot{\theta}\cos\theta + \dot{r}\sin\theta)\hat{\varphi}]$ **Am Äquator** $\vec{F}_C(R,\theta = \pi/2,\varphi,\dot{r},\dot{\theta},\dot{\varphi}) = 2m\,\omega[r\dot{\varphi}\hat{r}(\theta = \pi/2,\varphi) - \dot{r}\hat{\varphi}(\varphi)]$. Freier Fall $\dot{r} < 0$ zeigt mit linker Handregel Ostablenkung, 1804 in Hamburger Michaeliskirche, Döring: Einf in die theoret Physik Bd1 Mechanik 1960 p38. Flug nach Osten $\dot{\varphi} > 0$ gibt **zusätzliche 'Fliehkraft'**. **β-Ebene** im lokalen Koordinatensystem bei der Breite β siehe Nolting Bd1 1989 p118, p123, p292f; **Idee der Energie:** Für ein Teilchen hat man a] bf Bewegungsenergie $T = \dfrac{m}{2}v^2 \geq 0$ und b] **potentielle, Ruhe- oder Wechselwirkungsenergie** im elektrischen/magnetischen/gravitativen Feld U eines anderen Teilchens. Diese Energie kann positiv, null oder negativ sein, je nachdem ob man bei Abstandsverringerung Arbeit aufwendet, keine Arbeit nötig ist oder Arbeit gewinnt. Je nach Kraftwirkung: Abstoßung, keine Kraftwirkung/Neutralität oder Anziehung. **Neutralität oder Indifferenz** kann durch große Abstände hergestellt werden, was die Fixierung einer **Nullmarke** erlaubt. **Gesamtenergie** = $E = T + U$ für ein ruhendes Teilchen ($T = 0$) und ein freies/wechselwirkungsfreies Teilchen ($U = 0$) ist $E = 0$. **Freies/wechselwirkungsfreies Teilchen:** i] unendlich weit entfernt $U_\infty = U(r \to \infty) = 0$ oder ii] neutrales masseloses Spin-0-Teilchen. Täubert: Elektrizitätslehre PfL4 1976 p91ff; Leibniz 1695 ohne Faktor 1/2, Helmholtz und Planck bevorzugen L für die kin Energie wegen der Bedeutung als **L**ebendige Kraft - vis viva = $\dfrac{m}{2}v^2$. Siehe auch von Laue: Geschich-

te der Physik 1958 p96ff; L ist sicher die schlechteste Wahl wegen gleicher Bezeichnung des Drehimpulses und der Lagrange-Funktion. Boltzmann in seinen populären Vorlesungen, Whittaker nimmt 1904 in seiner analytischen Mechanik und Born nutzt 1920 bei der Darstellung der Relativitätstheorie und Schrödinger 1926 bei der Darstellung seiner Wellenmechanik T. Sommerfeld verwendet 1942 in seinem Lehrbuch zur Theoretischen Mechanik T. Vermutlich hat er in Atombau und Spektrallinien 1919 damit angefangen. Meine Vermutung: Die Multiplikation von Newton mit der Geschwindigkeit macht ja gerade aus dem Trägheitsterm die Zeitableitung der kinetischen Energie. T also wegen der vom **T**rägheitsterm herrührenden Energie. **Qualitativ anschaulich-geometrisches Verstehen/Einsehen** des Lösungsraumes beim Zentralkraftproblem: **Zentralkraft** im $\mathbb{R}^n$ ist $\vec{F}(\vec{x}) = f(r)\hat{x}$, für $n = 3$ folgt wegen **Drehimpulserhaltung ebene Bewegung/Kegelschnittbahnen** $\dot{\vec{L}} = \vec{0}$, also $\vec{L} = \text{const}$ oder $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^2$ und $L_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$=const. **Mit effektiver potenzieller Energie 1-d-Betrachtung, nur Radialbewegung**. $U_{eff}(\rho) = \dfrac{L_\varphi^2}{2m\rho^2} - \gamma\dfrac{Mm}{\rho} = \dfrac{\beta}{\rho^2} - \dfrac{\alpha}{\rho}$ = fiktive, virtuelle (Goldstein: alt mit SRT, neu mit Chaos), **effektive potenzielle Energie** = potenzielle Energie+ Zentrifugal-Energie oder Rotationsenergie oder (azimutale) kinetische Energie (lebendige Kraft, Wirkfähigkeit)= **Ersatzpotenzial** (Stephani/Kluge) Anteil der Gesamtenergie **ohne Radialbewegung**, der also keine Radialgeschwindigkeit enthält = Gravitation+kinetische Energie, die als Funktion des radialen Abstands geschrieben werden kann = **Gravitation + Zentrifugalpotenzial** = **gravitative potentenzielle + Rotationsenergie**. **Energieterm, der eine qualitative Diskussion der radialen Bewegung erlaubt**. Darf aber nicht als potenzielle Energie für die Langrange-Funktion benutzt werden, weil sie die Differenz von kinetischer und potenzieller Energie darstellt. **Kreisbahn-Extremum** für $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r^n}$, also $V_{eff}(r) = \dfrac{\beta}{r^2} - \dfrac{\alpha}{r^n}$ wegen $V_{eff}(r)' = -2\beta r^{-3} + \alpha n r^{-n-1}$ gibt $0 \stackrel{!}{=} V'_{eff}(R) = R^{-3}(-2\beta + n\alpha R^{-n+2})$ oder $\dfrac{2\beta}{n\alpha} = R^{2-n}$, also $n > 0$. Für $n = 0$ hat man das eff Potenzial $V_{eff}(r) = \dfrac{\beta}{r^2} - \alpha$ und der Kreisbahnradius liegt im Unendlichen. Für **Coulomb'sche Potenziale** kann α auch kleiner Null sein und daher $n \in \mathbb{Z}$. Allgemeiner **Kreisbahn-Extremum** für zentralsymmetrisches Potenzial $V(r)$ bei R gemäß $\dfrac{\mathrm{d}V_{eff}(r)}{\mathrm{d}r}_{r=R} = \dfrac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}_{r=R} - \dfrac{L^2}{mR^3} = 0$ oder kurz $V'(R) = \dfrac{L^2}{mR^3}$. **Kreisbahn stabil**, wenn $V_{eff}(r)$ bei R ein Minimum $\dfrac{\mathrm{d}^2V_{eff}(r)}{\mathrm{d}r^2}_{r=R} = \dfrac{\mathrm{d}^2V(r)}{\mathrm{d}r^2}_{r=R} + \dfrac{3L^2}{mR^4} = V''(R) + \dfrac{3}{R}V'(R) > 0$ wegen $V'(R) = \dfrac{L^2}{mR^3}$, also bei Gravitation, $\alpha > 0$ geht nur $0 < n < 2$, also $n = 1$ für $V(r) = -\dfrac{\alpha}{r^n}$, wegen $V(r)' = n\alpha r^{-n-1}$ und $V(r)'' = -n(n+1)\alpha r^{-n-2}$ also $V_{eff}(r)'' = -n(n+1)\alpha r^{-n-2} + \dfrac{3}{r}n\alpha r^{-n-1} = n\alpha r^{-n-2}(2-n) > 0$. Bei **Newton'schem Gravitationgesetz gibt es also allein für $n = 1$ stabile Kreisbahnen.** Für **Coulomb'sche Potenziale** kann α auch kleiner Null sein, also $-n|\alpha|r^{-n-2}(2-n) = |\alpha|r^{-n-2}(n^2 - 2n) > 0$ und daher gibt $2 < n < 0$ stabile Kreisbahnen. Potenzialfunktion 1773 Lagrange. Potenzial 1828 Green. **Heil & Klitzka: Grundkurs theoretische Mechanik** 1984; Papastavridis: Analytical Mechanics. A Comprehensive Treatise on the Dynamics of Constrained Systems for Engineers, Physicists and Mathematicians 2002; **Spivak: Physics for mathematicians. Mechanics I** 2010 p151 Kap4 **Bertrand-Theorem:** Die einzigen Zentralkräfte für die alle beschränkten Orbits geschlossen (Ellipsen) sind: $f(r) = \alpha r$ mit Zentrum im Ursprung. $f(r) = \alpha r^{-2}$ Brennpunkt als Ursprung.

Hohlraum in der Erde Auf ihrer Reise zum Mittelpunkt der Erde kommen Sie in einen gewaltigen kugelförmigen Hohlraum, der die Erdoberfläche nicht durchstößt. Sein Zentrum liegt im Abstand a vom Erdmittelpunkt. Wie schwer sind Sie im Hohlraum, nach Betrag und Richtung? Die Erde ist bis auf den Hohlraum als Kugel mit **homogener Massendichte** anzunehmen. In der homogenen Kugel gilt für die Gewichtskraft das Hooke'sche Gesetz/elastische Kraft $\vec{G} \propto -\vec{r}$ oder $\vec{G}_E = -\gamma\dfrac{m4\pi r^3\rho}{3}\dfrac{\vec{r}}{r^3} = -\gamma\dfrac{4\pi m\rho}{3}\vec{r} = K\vec{r}$. Siehe Seite 277. Entsprechend geht von einer Kugel bei $\vec{a}$ im Abstand $\leq d$ die Kraft $G_{gefülltesLoch}(\vec{r}) = K\vec{d} = K(\vec{r} - \vec{a})$ aus. Wegen $\vec{d} = \vec{r} - \vec{a}$ gilt im Loch $G_{\text{Loch}} = K\vec{a}$. Die Gravitationsfelder superpositionieren. Oder $\vec{g}_r = g_R\dfrac{\vec{a}}{R}$ mit $g_R = -4\pi\gamma\rho/3$ = Gravitationsfeldstärke an der Erdoberfläche. Also herrscht überall in der Höhle dieselbe Feldstärke wie in deren Zentrum und dazu auch noch homogen/parallel zu dessen Richtung.

Betrachte infinitesimal **dünne Kugelschale** KS mit Radius r, Dicke dr und Volumenmassendichte ρ. Smirnov II p87, Budo p297; Gamow: Das Gesetz der Schwerkraft 1962; **Aufpunktabstand** gemessen vom Kugelmittelpunkt sei R. Zerlege infinitesimal dünne Kugelschale in dünne Ringe, deren Öffnungswinkel θ sei. Für die Volumenelemente gilt: $dV_{KS} = r^2 \sin\theta dr\, d\theta\, d\phi$, $dV_{Ring} = 2\,\pi\, r^2 \sin\theta dr\, d\theta$. Masse der KS ist $dm = 4\,\pi\, r^2\, \rho\, dr$. Die Masse des Ringes ist $dm_{Ring} = 2\,\pi\,\rho\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta$. Für das Potenzial gilt dann

$$dV_{Ring} = -\gamma \frac{dm_{Ring}}{r_1}$$

wobei r_1 der Abstand zwischen Ring und Aufpunkt ist. Mit $r_1^2 = R^2 + r^2 - 2\,R\,r\,\cos\theta$ folgt für das Potenzial der dünnen Kugelschale

$$d\,V_{KS} = \int_0^\pi d\theta\, dV_{Ring} = -2\,\pi\,\gamma\,\rho\, r^2\, dr \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\,\cos\theta}}$$
$$= -\frac{2\,\pi\,\gamma\,\rho\, r^2\, dr}{R\,r}[\sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R\,r\,\cos\theta}]_0^\pi = -\frac{2\,\pi\,\gamma\,\rho\, r\, dr}{R}[\sqrt{(R+r)^2} - \sqrt{(R-r)^2}]$$
$$= -2\,\pi\,\gamma\,\rho\, r\, dr \frac{|R+r| - |R-r|}{R}$$

Für das **Außenfeld** der KS gilt dann

$$dV_{KS}^{außen}(R \geq r) = -\frac{4\,\pi\,\gamma\,\rho\, r^2\, dr}{R} = -\gamma \frac{dm}{R} \tag{34}$$

Das **Innenfeld-Potenzial** ist ein Konstante

$$dV_{KS}^{innen}(R \leq r) = -4\,\pi\,\gamma\,\rho\, r\, dr = -\gamma \frac{dm}{r} \tag{35}$$

Für Kugelradius $r = 1$ gilt

$$dV_{KS}(R) = \begin{cases} -\frac{1}{R} & \text{für } R \geq 1 \\ -1 & \text{für } R \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad F_{KS}(R) = \begin{cases} -\frac{1}{R^2} & \text{für } R \geq 1 \\ 0 & \text{für } R \leq 1 \end{cases}$$

Für die **homogene Vollkugel** gilt

$$V_K^{außen}(R \geq R_0) = \int_0^{R_0} d\,V_{KS}^{außen} = -\gamma \frac{m}{R} \tag{36}$$

Homogene Kugelschale und Vollkugel wirken gemäß Gleichungen (36 und 34) auf einen äußeren Punkt so, als ob ihre gesamte Masse im Mittelpunkt konzentriert wäre. Folglich ist keine Schlussfolgerung über die Dichte und Größe der Kugel durch bloße gravimetrische Messung möglich. Wegen $R_0^3\,\rho = 3\,m/4\,\pi =$const ruft eine Kugel mit $R_0 = 1$ und Dichte $\rho = 1$ (Wasser) das gleiche Potenzial hervor wie eine Kugel halb so großem Durchmessers und 8-facher Dichte (Eisen)!

Das Potenzial für einen inneren Aufpunkt P bei $R \leq R_0$ einer Vollkugel mit dem Radius R_0 setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Die Kugel mit dem Radius R liefert

$$V_K^{innen\ 1}(R) = \int_0^R d\,V_{KS}^{außen}(R \geq r) = -\frac{4\,\pi\,\gamma\,\rho}{R} \int_0^R dr\, r^2 = -\frac{4}{3}\gamma\,\rho\, R^2$$

Der zweite Anteil von der außerhalb von R liegenden Kugelschale lautet

$$V_K^{innen\ 2}(R) = \int_R^{R_0} d\,V_{KS}^{innen}(R \leq r) = -\int_R^{R_0} dr\, 4\,\pi\,\gamma\,\rho\, r\, dr = -2\,\pi\,\gamma\,\rho\,(R_0^2 - R^2) \tag{37}$$

Für das Innenfeld der Kugel gilt dann

$$V_K^{innen}(R) = V_K^{innen\ 1}(R) + V_K^{innen\ 2}(R) = -2\,\pi\,\gamma\,\rho\,(R_0^2 - \frac{R^2}{3})$$
$$= -2\,\pi\,\gamma \frac{3\,m}{4\,\pi}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{R^2}{3\,R_0^3}\right) = -\gamma \frac{m}{2}\left(\frac{3}{R_0} - \frac{R^2}{R_0^3}\right)$$

$$V_K(R) = \begin{cases} -\frac{1}{R} & \text{für } R \geq 1 \\ \frac{R^2-3}{2} & \text{für } R \leq 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad F_K(R) = \begin{cases} -\frac{1}{R^2} & \text{für } R \geq 1 \\ -R & \text{für } R \leq 1 \end{cases}$$

Beachte: Schwere springt nicht, wohl aber ihre Änderung $\partial F/\partial R$.

Für **dicke Kugelschale** gilt mit (34) für den Außenraum

$$V_{dKS}^{außen}(R \geq R_0) = \int dV_{KS}^{außen}(R \geq R_0) = -\gamma \frac{m}{R} = -\frac{4\,\pi\,\gamma}{3\,R}\rho(R_0^3 - a^3) \tag{38}$$

Für den Hohlraum in der Kugel gilt

$$V_{dKS}^{Hohlraum}(R \leq a) = \int_a^{R_0} dV_{KS}^{innen}(R \leq a) = -4\,\pi\,\gamma\,\rho \int_a^{R_0} dr\,r = -2\,\pi\,\rho\,\gamma[R_0^2 - a^2]$$
$$= -\frac{3}{2} m\,\gamma \frac{(R_0^2 - a^2)}{(R_0^3 - a^3)}$$

Für einen beliebigen Punkt innerhalb der dicken Kugelschale gilt schließlich

$$V_{dKS}^{in\ Schale\ 1}(R \geq a) = \int_a^R dV_{KS}^{außen}(R \geq a) = -\frac{4\,\pi\,\rho\,\gamma}{R} \int_a^R dr\,r^2 = -\frac{4\,\pi\,\rho\,\gamma}{3\,R}(R^3 - a^3)$$

und

$$V_{dKS}^{in\ Schale\ 2}(a \leq R \leq R_0) = \int_R^{R_0} dV_{KS}^{innen} = -2\,\pi\,\rho\,\gamma[R_0^2 - R^2]$$

Somit gilt

$$V_{dKS}^{in\ Schale}(a \leq R \leq R_0) = -2\,\pi\,\rho\,\gamma[\frac{2}{3}R^2 - \frac{2\,a^3}{3\,R} + R_0^2 - R^2] = -2\,\pi\,\rho\,\gamma[R_0^2 - \frac{2\,a^3}{3\,R} - \frac{1}{3}R^2]$$
$$= -\frac{3\,m\gamma}{2(R_0^3 - a^3)}\left[R_0^2 - \frac{2\,a^3}{3\,R} - \frac{1}{3}R^2\right]$$

$$V_{dKS}(R) = \begin{cases} -\frac{1}{R} \\ -\frac{12}{7}\left(1 - \frac{1}{12\,R} - \frac{R^2}{3}\right) \\ -\frac{9}{7} \end{cases} \quad \text{und} \quad F_{KS}(R) = \begin{cases} -\frac{1}{R^2} & \text{für } R \geq 1 \\ \left(\frac{1}{7\,R^2} - \frac{8}{7}R\right) & \text{für } \frac{1}{2} \leq R \leq 1 \\ 0 & \text{für } R \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Morse-Potenzial:

$$V(R) = D_\mathrm{e} \cdot \left(1 - e^{-a\cdot(R-R_\mathrm{e})}\right)^2, \quad V(R) - D_\mathrm{e} = D_\mathrm{e} \cdot \left(e^{-2a\cdot(R-R_\mathrm{e})} - 2e^{-a\cdot(R-R_\mathrm{e})}\right),$$

wobei D_e spektroskopische **Dissoziationsenergie**, R_e Kernabstand-Gleichgewichtsabstand mit der geringsten potentiellen Energie und a Steifigkeit des Potentials und $R \in (0, \infty)$ und der **Auslenkung** weg vom Kernabstand-Gleichgewichtsabstand $x \in (-R_\mathrm{e}, \infty)$ mit $V(x) = D_\mathrm{e}\left(e^{-2ax} - 2e^{-ax}\right)$. $E_\nu = h\nu_0 \cdot \left(\nu + \frac{1}{2}\right) - \frac{h^2\nu_0^2}{4D_\mathrm{e}} \cdot \left(\nu + \frac{1}{2}\right)^2$ mit $\nu_0 = \frac{a}{2\pi}\sqrt{\frac{2D_\mathrm{e}}{m}}$. Morse: Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels. In: Physical Review 34 Nr1, 1.Juni 1929, p57; Hertel & Schulz: Atome, Moleküle und optische Physik 1. Atome und Grundlagen ihrer Spektroskopie 2017[2]; Hertel & Schulz: Atome, Moleküle und optische Physik 2. Moleküle und Photonen - Spektroskopie und Streuphysik 2011 p13; Otter & Honecker: Atome – Moleküle – Kerne: Molekül- und Kernphysik 1996 p152ff;

Yukawa-Potenzial:

$$U_Y(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - A\frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r} = \frac{L^2}{2mr^2} - A\left[\frac{1}{r} + \frac{e^{-\frac{r}{r_0}} - 1}{r}\right], \quad \text{aber } \textbf{kein} \text{ Yukawa ist } \vec{E}(r) = \frac{A}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-br}}{r^2}\hat{r}$$

da das Drehimpulspotenzial fehlt. Mit dem **Gauß-Gesetz** ist $\frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \int_{\partial K(r)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = \frac{A}{4\pi\epsilon_0} e^{-br} \int_{\partial K(r)} \frac{\mathrm{d}a}{r^2} = e^{-br}\frac{A}{\epsilon_0}$, während bei $r = 0$ die volle Ladung gespürt wird, so ist der gesamte Raum feldfrei, weil die **Feldlinienabsorption** der Anwesenheit von entgegengesetzt geladenen Ladungsschalen entspricht. Für die Umgebung der Punktladung Q bei $r > 0$ gilt $\mathrm{div} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 E_r}{\partial r} = -\frac{Ab}{4\pi\epsilon_0 r^2}e^{-br} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$ und somit für die Quellen

des gesamten Raumes $\int_\Omega \operatorname{div}\vec{E}\mathrm{d}V = -Q$. Im Unendlichen erscheint der Raum ladungsfrei, keine Quelle zu enthalten.

Zweikörperproblem lässt sich mittels **Massenmittelpunkt**skoordinaten $\vec{r}_S = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/M = \vec{r}_1 - \vec{r}_1' = \vec{r}_2 - \vec{r}_2'$, **reduzierter** Masse $1/m_{\mathrm{red}} = \sum_i (1/m_i)$, **Relativ**koordinaten $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ auf eine **Ein**körper-Problem zurückführen, Kuhn: PfL 9, Theoretische Mechanik 1978; Ungestrichene Koordinaten bezüglich beliebigen Ursprungs, gestrichene bezüglich Schwerpunktkoordinate $\vec{r}_S$!

$$m_{\mathrm{red}}\ddot{\vec{r}} = -\gamma\frac{m_{\mathrm{red}}\,M}{r^2}\hat{r}$$

Herleitung **Kepler-Gesetz per Geometrie** siehe Gamow: Schwerkraft 1959 oder genauer Goodstein: **Feynman's Lost Lecture: Motion of Planets Around the Sun** 1996; oder **per komplexer Zahlen:** $z = x + iy = re^{i\phi}$ gibt nach **Knauf**: Mathematische Physik: Klassische Mechanik 2012 e-book p3 oder genauer **Nahin: An imaginary tale. The story of the square root of -1** 1998 p113ff;

$$\ddot{z} = [\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + i(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})]e^{i\phi} = -\gamma\frac{z}{|z|^3}$$

Imaginärteil gibt Drehimpulserhaltung, Realteil gibt Ellipsengleichung! **Zylinderkoordinaten:** $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - V(r,\phi,z)$ mit $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $p_\phi = mr^2\dot{\phi}$, $p_z = m\dot{z}$ gibt $H(q,p) = \sum p\dot{q}(p) - L(q,\dot{q}(p)) = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} + p_z\dot{z} - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + V(r,\phi,z) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + \frac{p_z^2}{2m} + V(r,\phi,z)$. **Bewegungsgleichungen:**

$$\begin{aligned}
r:&\quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, && \dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}\\
\phi:&\quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2}, && \dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}\\
z:&\quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m}, && \dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned}$$

Kugelkoordinaten: $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r,\phi,\theta)$ mit $p_r = m\dot{r}$, $p_\phi = mr^2\sin^2\theta\dot{\phi}$, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$ gibt $H = \sum p\dot{q} - L = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} + p_\theta\dot{\theta} - \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r,\phi,\theta) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + V(r,\phi,\theta)$ **Hamilton-Funktion und mittelbare Abhängigkeit:** $H(f(q,p)) = \ln[p\,(2+\sin q)]$, also $f(q,p) = \ln[p\,(2+\sin q)]$, oder einfach $H(f(q,p)) = \ln(1+q^2p^2)$, also $f(q,p)) = \ln(1+q^2p^2)$, bedeutet f **Erhaltungsgröße** wegen zeitlicher Änderung des totalen Differenzials $\dot{f} = \partial_q\dot{q} + \partial_p\dot{p} = 0$ unter Beachtung der kanonischen Gleichungen $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{\partial H}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial p}$ und $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\dfrac{\partial H}{\partial f}\dfrac{\partial f}{\partial q}$.
Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
r:&\quad \dot{r} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m}, && \dot{p_r} = -\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{p_\phi^2}{mr^3\sin^2\theta} + \frac{p_\theta^2}{mr^3} - \frac{\partial V}{\partial r}\\
\phi:&\quad \dot{\phi} = \frac{\partial H}{\partial p_\phi} = \frac{p_\phi}{mr^2\sin^2\theta}, && \dot{p_\phi} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi}\\
\theta:&\quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m\,r^2}, && \dot{p_\theta} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{p_\phi^2\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta}
\end{aligned}$$

def dX_dt(X, t=0): return array([X[1]/m , X[3]**2/m/X[0]**3-MG*m/X[0]**2, X[3]/m/X[0]**2,0.]) oder return array([X[3]**2/m/X[0]**3-MG*m/X[0]**2,X[1]/m , 0., X[3]/m/X[0]**2]) Gärtnerkonstruktion mit den beiden von den Brennpunkten ausgehenden Leitstrahlen $r + \bar{r} = 2a$ und Kosinussatz beim linken Brennpunkt gibt $(r-2a)^2 = \bar{r}^2 = r^2 + (2e)^2 - 4re\cos\varphi$ bedeutet $r = \dfrac{1-\epsilon^2}{1-\epsilon\cos\varphi}$. Bedeutet für den Halbparameter $p(\frac{\pi}{2}) = 1-\epsilon^2$ **Kepler-Ellipse**. Gleichung der regulären Kegelschnitte in Polarkoordinaten mit **Halbparameter** p, numerischer Exzentrizität ϵ und linearer Exzentrizität e, bedeutet **Polarform der Kegelschnitte**, wobei bei + der **Pol = Drehachse für den Leitstrahl** $r(\varphi)$ im rechten Brennpunkt der Ellipse liegt:

$$r = \frac{p}{1\pm\epsilon\cos\varphi}, p = \frac{L^2}{m\alpha} = \frac{L^2}{m^2MG} = \frac{l^2}{MG} = \frac{b^2}{a}, \quad \epsilon = \frac{r}{d} = \frac{e}{a}, a = \frac{p}{1-\epsilon^2}$$

Aus **Pythagoras** $K^2 = (2e)^2 + p^2$, **Gärtnerkonstruktion** $K + p = 2a$ und $a^2 = e^2 + b^2$ folgt $p = \frac{b^2}{a}$. $\varphi = 0$ naher Punkt r_P Periapsis, Perigäum, Perihel. $\varphi = \pi$ ferner Punkt $r_A > r_P$ Apoapsis, Apogäum, Aphel. d **Leitlinienabstand**, Bartsch: **Math Formeln** 1986[21] p297; ϵ **numerische** Exzentrizität, $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ **Exzentrizität**, $\alpha = m\,M\,G$, L Drehimpuls, G Gravitationskonstante, M Masse des Zentralkörpers, m Masse des Planeten. **Lagrange-Punkte:** Librationspunkte = Gleichgewichtspunkte eingeschränkten Dreikörperproblems geben L3 Sonne L1 mit SOHO Erde L2 mit James Webb Teleskop. Bei $\pm 60^o$ L4 und L5. Nullstellen des Schwerefeldes in jenem rotierenden Bezugssystem. ct2022 H17 p148ff; **Marion: Classical dynamics of particles and systems** 1970 p254ff, Apsiden p266 Apsidenwinkel; **Spiegel: Vectoranalysis and introduction to tensor analysis**, Schaum 1959 p85f; Bracco, Provost, Salati: A pedagogical discussion of the gravitational energy radiated by Keplerian systems, AmJPhys77 p886 2009;

$E > 0, \epsilon > 1, e = \frac{\epsilon p}{(1-\epsilon)^2}$ Überfluss, weil Ordinatenquadrat stets größer als Sperrungsrechteck, Hyperbel

$E = 0, \epsilon = 1, e = \frac{p}{2}$ Gleichheit, Parabel

$E < 0, \epsilon < 1, e = \frac{\epsilon p}{1-\epsilon^2}$ Mangel, weil Ordinatenquadrat stets kleiner als Sperrungsrechteck, Ellipse

$E < 0, \epsilon = 0, e = 0$ Kreis

Apollonius von Perge 265-190: Sperrungsrechteck mit halber Höhe bei Halbparameter zwischen Scheitel und Ordinatenquadrat. **Ellipsenpol** M **in deren Zentrum** gibt $r^2(\varphi) = \frac{b^2}{1 - \epsilon^2 \cos^2\varphi}$. Alles über **Polarformen oder Polargleichungen** findet sich bei Friedrich Adolf Willers 1883-1959 ab Seite 200 **Willers: Elementar-Mathematik. Ein Vorkurs zur höheren Mathematik** 1948, 1965[12] p174f, p200 **Polargleichungen der Geraden** mit Pol im Ursprung, Polabstand d und ihr Lot zum Ursprung beim Winkel δ, dann beschreibt $r(\varphi) = \frac{d}{\cos(\delta - \varphi)}$ mit $\delta - 90^o < \varphi < \delta + 90^o$. Nickel el al. Algebra und Geometrie 1971[6] p398 **Parabel**, p412 Ellipse. **Lötzbeyer, Philipp: Vierstellige Tafeln zum praktischen Rechnen in Unterricht und Beruf mit Angabe der Genauigkeit in Zahl und Bild, graphische Rechentafeln. Anhang Mathematische Formeln. Tafelwerk** 1941[13] besser geht's nicht! Tafelwerk 1969 p64. Bartsch: Math Formeln 1986[21] p312 **rechtsoffene Parabel** $r(\varphi) = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$ mit $\varphi = \angle(\hat{x}, \hat{r})$ gemessen von x-Achse nach links zum Leitstrahl, also Brennpunkt = Pol bei $(p, 0)$ gibt $r(\varphi = 0) = \infty$, $r(\varphi = \frac{\pi}{2}) = p$, $r(\varphi = \pi) = \frac{p}{2}$, oder $r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$ mit $\varphi = \angle(-\hat{x}, \hat{r})$ gemessen von negativer x-Achse nach rechts zum Leitstrahl. **Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik** p24;

Enz & Mehra: Physical Reality and Mathematical Description. 1974 pX Fallzeit τ eines Körpers aus gestoppter Kreisbahn $\tau = \frac{T}{\sqrt{32}}$: a] Gravitationskraft = Fliehkraft bei Kreisbahn $r = R$ bedeutet $\gamma \frac{Mm}{r^2} = mr\omega^2$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ gibt $\gamma \frac{M}{r^3} = \frac{(2\pi)^2}{T^2}$ bedeutet **Kepler III** $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\gamma M} = \text{const}$ (*). b] **Freier Fall bei Newton-Gravitation** aus Kreisbahn bei $r = R$ ins Zentrum bei $r = 0$ bedeutet Bewegungsgleichung $m\ddot{r} = -\gamma \frac{Mm}{r^2}$. Mal $\dot{r}$ gibt erstes Integral $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{r}^2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma\frac{M}{r}$ bedeutet **Energiesatz** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{r}^2}{2} - \gamma\frac{M}{r}\right) = 0$. Mit obiger Anfangsbedingung $\frac{\dot{r}^2}{2} - \gamma\frac{M}{r} = -\gamma\frac{M}{R} = \text{const} = \text{Gesamtenergie}$. Bedeutet Geschwindigkeit ins Gravitationszentrum $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{2\gamma M}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} < 0$ mit $r \in [R, 0)$. Substitution $\frac{r}{R} = \cos^2\varphi$ mit $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ bedeutet $2R\cos^2\varphi \mathrm{d}\varphi = \sqrt{\frac{2M\gamma}{R}}\mathrm{d}t$ oder $\int_0^\tau \mathrm{d}t = 2\sqrt{\frac{R^3}{2M\gamma}}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\cos^2\varphi$ bedeutet $\tau = \sqrt{\frac{2R^3}{M\gamma}}\frac{\pi}{4}$ bedeutet $\tau = \frac{T}{\sqrt{32}}$. Die Erde fliegt also bei **instantanem Drehimpulsverlust** $L = 0$ oder **'Stillstand der Zeit'** nach weniger als 2 Monaten durch das Sonnenzentrum.

Sternexplosion: Ein Planet bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius R in deren Zentrum sich ein Stern der Masse M befindet. Durch eine Explosion wird die Sternenmasse zu M' reduziert. Finden Sie die Exzentrizität der Planetenbahn nach der Explosion. Bei welcher Masse M' entflieht, meint $\epsilon > 1$ der Planet?

Vor Explosion $R = r(\varphi = 0) \overset{\epsilon=0}{=} \dfrac{p}{1+0\cos 0} = p = \dfrac{L^2}{m^2 MG}$. Explosion $M \to M'$, also $p \to p' = \dfrac{L^2}{m^2 M' G}$ wegen Drehimpulserhaltung oder kurz $p' = p\dfrac{M}{M'}$. Wegen $R = r(\varphi = 0) = p \overset{Explosion}{=} \dfrac{p'}{1+\epsilon\cos 0} = \dfrac{pM}{M'(1+\epsilon)}$ folgt sofort $M = M'(1+\epsilon)$ oder $\epsilon = \dfrac{M}{M'} - 1 > 1$ oder $M' < M/2$, Hyperbelbahn, falls Zentralgestirn mehr als die Hälfte seiner Masse verliert.

Collas: Algebraic Solution of the Kepler Problem Using the Runge-Lenz Vector, AmJPhys38 p253 1970; Bahnellipse läuft nicht um. Fester Lenz-Vektor zeigt von Mittelpunkt zu Ellipsenbrennpunkt. Es gibt keine Rosettenbahn! Sein Betrag ist Ellipsenexzentrizität. Reflektiert eine höhere Symmetrie des Wasserstoffproblems, die die hochgradige Entartung der Wasserstoffniveau erklärt. Mitter: QT p291; Fritz Reiche: Die Quantentheorie 1920;

Moulton: An Introduction to Celestial Mechanics 1914, 1970 p278ff §152; Feldmeier: Mechanik p96f; Neutsch & Schneider: Celestial mechanics 1992 p573; HdP 5 1924; HdP 3/1 p55; Gegeben sind die Bewegungsgleichungen für eine Testmasse (Mond) bei (ξ, η, ζ). im raumfesten und ruhenden Schwerpunkts-Koordinatensystem. Die sich umkreisenden, gleichgroßen Massen M (Erde, Sonne) liegen im Abstand $r_\pm = \sqrt{(\xi \pm \xi_M)^2 + (\eta \pm \eta_M)^2 + \zeta^2}$

$$\ddot{\xi} = -\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\xi+\xi_M}{r_+^3} + \frac{\xi-\xi_M}{r_-^3}\right], \quad \ddot{\eta} = -\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\eta+\eta_M}{r_+^3} + \frac{\eta-\eta_M}{r_-^3}\right], \quad \ddot{\zeta} = -\frac{\gamma}{2}\left[\frac{\zeta}{r_+^3} + \frac{\zeta}{r_-^3}\right]$$

Transformation $\xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t$, $\eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t$ des mit $\omega = 1$ und $\zeta = z$ rotierenden Hantelsystems in ein mitrotierendes System (x, y, z), in dem die Hantelmassen bei den Orten $+X$ und $-X$ liegen, gibt wegen $\ddot{\xi} = \ddot{x}\cos t - 2\dot{x}\sin t - x\cos - \ddot{y}\sin t - 2\dot{y}\cos t + y\sin t$ (Gl I) und $\ddot{\zeta} = \ddot{x}\sin t + 2\dot{x}\cos t - x\sin t + \ddot{y}\cos t - 2\dot{y}\sin t - y\cos t$ (Gl II) nach Gl(1) mal $\cos t \pm$ Gl (2) mal $\sin t$ die **Hill'schen Gleichungen:**

$$\ddot{x} - \omega^2 x - 2\omega\dot{y} = -\frac{\gamma}{2}\left[\frac{x+X}{R_+^3} + \frac{x-X}{R_-^3}\right], \quad \ddot{y} - \omega^2 y + 2\omega\dot{x} = -\frac{\gamma}{2}\left[\frac{y}{R_+^3} + \frac{y}{R_-^3}\right], \quad \ddot{z} = -\frac{\gamma}{2}\left[\frac{z}{R_+^3} + \frac{z}{R_-^3}\right]$$

Stumpff: Himmelsmechanik III p456 Die Hill'sche Theorie umgeht die Schwäche der Mondtheorie mit besserer Reihenkonvergenz. Hill bezieht die Störungen der Sonne auf den Mond nicht die elliptischen Elemente einer intermediären Bahn, sondern auf rechtwinklige Koord in einem System mit beweglichen Achsen, das sich in der Ebene der Ekliptik gleichmäßig mit der mittleren Bewegung der Sonne dreht. Stumpff: Himmelsmechanik II KapXXI,1. Schneider: Himmelsmechanik 1984 p275; Ulrich Meyer: Diss 2008; Montenbruck: Grundlagen der Ephemeridenrechnung 1985, 2005, 2009; G̃uthmann: Einführung in die Himmelsmechanik und Ephemeridenrechnung 2000; Richter: Ephemeridenrechnung Schritt für Schritt - Sonnenaufgang und Co. bestimmen leicht gemacht 2017; Montenbruck: Ephemeridenrechnung und Bahnbestimmung geostationärer Satelliten mit Hilfe der Taylorreihenintegration 1991; Stumpff: Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung 1949; Wintner: The Analytical Foundations of Celestial Mechanics 1952; Dvorak: Celestial Dynamics - Chaoticity and Dynamics of Celestial Systems 2014; **Kaula: Theory of Satellite Geodesy: Applications of Satellites to Geodesy** 1966; Goldstein: Klass Mechanik Kap4.8 Zeitliche Änderung eines Vektors; Die Hillschen Gleichungen in der $x-z$-Ebene sind $\ddot{x} + 2\omega\dot{z} = b_x$, $\ddot{y} + \omega^2 y = b_y$, $\ddot{z} - 2\omega\dot{x} - 3\omega^2 z = b_z$ beschreiben Bahnänderungen eines Satelliten innerhalb des **mitrotierenden Bezugssystems**. Mit ihnen lässt sich berechnen, welchen weiteren Verlauf (Bahn und Geschwindigkeit) ein Satellit nimmt, wenn man seine Geschwindigkeit verändert. Radiales Manöver mit Anfangsbedingungen $(x, z) = (0, 0)$ und $(\dot{x}, \dot{z}) = (0, \Delta v)$ hat Bahngleichungen: $x = 2\frac{\Delta v}{\omega}(\cos\omega t - 1)$ und $z = \frac{\Delta v}{\omega}\sin\omega t$. Tangentiales Manöver $(x, z) = (0, 0)$ und $(\dot{x}, \dot{z}) = (\Delta v, 0)$ gibt Zykloide $x = 4\frac{\Delta v}{\omega}\sin\omega t - 3\Delta v \cdot t$, $z = 2\frac{\Delta v}{\omega}(1 - \cos\omega t)$ gibt mit $\dot{x}_1 = -3\dot{x}_0 + 4\dot{x}_0\cos\omega t$ nach halbem Umlauf im mitrotierenden Bezugssystem mit siebenfachem Δv in die Gegenrichtung: $\dot{x}_1\left(t = \frac{T}{2}\right) = -3\Delta v - 4\Delta v = -7\Delta v$. **Hohmann-Manöver** = 2 tangentiale Manöver nach π geben wieder Kreisbahn. Szebehely & Mark: Adventures in celestial mechanics 2004^2 p142 Kreisförmigmachung am Apogeum. p162 Satelliten und **raumfestes Inertialsystem**. Punkt im Satelliten sei $\vec{r} = \hat{s}_1 r\cos\alpha + \hat{s}_2 r\sin\alpha$. Satellit s rotiert in i mit $\vec{\omega}(s, i) = \omega(s, i)\hat{s}_3$ mit $s_3 = \hat{s}_1 \times \hat{s}_2$. Zeitableitung in s ist $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(s)$ und in i haben wir $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i)$. Geschwindigkeit in s ist $\vec{v}(s) = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(s) = \dot{\alpha}\hat{\alpha}_s$ bei $r = \text{const.}$

$\vec{v}(i) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}(i) = \vec{v}(s) + \frac{\mathrm{d}\hat{s}_1}{\mathrm{d}t} r\cos\alpha + \frac{\mathrm{d}\hat{s}_2}{\mathrm{d}t} r\sin\alpha = \vec{v}(s) + \hat{s}_2\omega(s,i) r\cos\alpha - \hat{s}_1\omega(s,i) r\sin\alpha = \vec{v}(s) + \vec{\omega}(s,i)\times r$, wegen $\mathrm{d}\hat{s}_1 = \hat{s}_2\omega(s,i)\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}\hat{s}_2 = \hat{s}_1\omega(s,i)\mathrm{d}t$.

Technisch gesehen kann man in der Physik mit Differenzialgleichungen auskommen. Lineare Unabhängigkeit von n Lösungen der homogenen Dgl $L\,x = 0$ n-ter Ordnung: $\{x_1(t),\ldots,x_n(t)\}$ = **Fundamentalsystem** und allgemeiner Lös $x(t) = \sum_1^n C_k x_k$ auf dem Intervall $t \in (a,b)$, falls Wronsky-Determinante von Null verschieden:

$$W(x_1,\ldots,x_n) = \begin{vmatrix} x_1(t) & \ldots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \ldots & x_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{für} \quad t \in (a,b) \tag{39}$$

Die **triviale Lösung** $x_0(t) = 0$ eines homogenen Differenzialgleichungssystems ist als **Null-Vektor** oder **Null-Funktion** von allen Fundamentallösungen **linear unabhängig** und kann stets folgenlos zu Lösung hinzuaddiert werden. Siehe auch May p86ff, Krasnov: Ode's 1987 und Krasnov, Kiselyov, Makarenko: A book of problems in ordinary differential equation 1981; **Lineare Unabhängigkeit im Raum der Polynome:** $p_k = x^k$. So ist $a_k p^k = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$ nur für $a_k = 0$ erfüllt. **Wronski-Det** ist einfaches notwendiges Kriterium: $W(p_0,p_1)(x) = \begin{vmatrix} p_0(x) & p_1(x) \\ p_0'(x) & p_1'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ also p_0, p_1 lu Polynome. Beweis-Idee: Dgl $n$ter Ordnung lässt genau n verschiedene Lösungen zu, deren lin Unabhängigkeit sicher gegeben ist, wenn die Taylor-Entwicklungskoeff für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ linear unabh sind. Józef Hoene-Wroński 1776-1853 befasste sich mit Reihenentwicklungen von Funktionen. 1812: Determinante der n Entwicklungskoeff von n Funktionen verschwindet für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$) Wüst: MathI p356; Dallmann & Elster: Math3, p104 betrachtet die Koeffizientenmatrix A einer homogenen linearen Dgl, die sich für alle n Fundamentallösungen $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ im Sinne der linearen Unabhängigkeit eines linearen Gleichungssystems ergibt , zB, $\ddot{x}+x = 0$ mit Fundamentallösungen sind $f_1 = \cos t, f_2 = sint$. **Allgem Lösung** für alle $t \in I$ ist $x(t) = C_1 f_1 + C_2 f_2$ und $\dot{x}(t) = C_1\dot{f}_1 + C_2\dot{f}_2$ oder in Matrix-Form $A\vec{C} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ \dot{f}_1 & \dot{f}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \vec{x}$ nur eindeudig falls **Wronski-Determinante** det $A \neq 0$; Heuser: Analysis2 p608; Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1995 p250; Fritsche: Analysis2; Dobner: Gewöhnliche Differentialgleichungen p99 linear unabh Funktionen; **Kriterium für lineare Unabhängigkeit** von Funktionen: Gilt $W(f_1,\ldots,f_n)(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in I$, so sind die Funktionen $f_1,\ldots,f_n$ auf dem Intervall I linear unabhängig. Gegenbeispiel für die Umkehrung: Vorsicht: Aus $W(f_1,\ldots,f_n) \equiv 0$ folgt nicht die lineare Abhängigkeit der Funktionen $f_1,\ldots,f_n$, das heißt, die Umkehrung ist falsch. Es gilt jedoch, dass die Funktionen auf einem Teilbereich linear abhängig sind. Als Beispiel hierfür dienen die auf den reellen Zahlen definierten Funktionen $f_1(t) = \begin{cases} 0\ , & \text{falls } t \leq 0, \\ t^2\ , & \text{falls } t > 0, \end{cases}$ und $f_2(t) = \begin{cases} t^2\ , & \text{falls } t \leq 0, \\ 0\ , & \text{falls } t > 0. \end{cases}$

Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $W(f_1,f_2)(t) = \begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t) \end{vmatrix} = 0$. Aber $\lambda\ f_1(t) + \mu\ f_2(t) = 0$ führt für $t = 1$ zu $\lambda = 0$ und für $t = -1$ zu $\mu = 0$, was die lineare Unabhängigkeit auf $t = 1$ beziehungsweise für $t = -1$ der beiden Funktionen impliziert. Für $t = 0$ gilt $f_1(0) = 0$ und $f_2(0) = 0$, was lineare Abhängigkeit in $t = 0$ bedeutet. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1995 p250;

Bei Dgl höherer Ordnung $a_n(x)y^{(n)}(x) + \cdots + a_0\,y(x) = f(x)$ mit **Variation der Konstanten** zur Konstruktion einer partikulären Lösung

$$y_p(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\,y_j(x)$$

werden gemäß Arens p954 wieder die Konstanten der Lösung zur entsprechenden homogenen Dgl zu Funktionen

$$y_p'(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\,y_j(x) + \sum_{j=1}^{n} c_j(x)\,y_j'(x)$$

Zur Vermeidung höherer Ableitungen von c_j setzt man

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\, y_j(x) = 0, \quad \sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\, y_j^{(k)}(x) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-2$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'(x)\, y_j^{(n-1)}(x) = \frac{f(x)}{a_n(x)}$$

Man löst schließlich ein lineares Gleichungssystem für die n Unbekannten $c_j'(x)$

Speziell für 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten $a_2\, y'' + a_1\, y' + a_0\, y = f(x)$: $y_H(x) = c_1\, y_1 + c_2\, y_2$, wobei y_1, y_2 Fundamentalsystem mit Wronsky-Det $W(y_1, y_2)$ oder speziell $c_1 e^{\lambda_1} + c_2 e^{\lambda_1}$ folgt

$$c_1' = -\frac{y_2\, f}{a_2\, W}, \quad c_2' = \frac{y_1\, f}{a_2\, W}$$

Bei Entartung, d.h. r_k-fachen **Wurzeln** = **Eigenwerten** $\lambda = \lambda_k$, bildet $x_{1,(k)} = e^{\lambda_k\, t}, x_{2,(k)} = t\, e^{\lambda_k\, t}, \ldots, x_{r_k,(k)} = t^{(r_k-1)}\, e^{\lambda_k\, t}$ ein **Fundamentalsystem** = **Eigenraum**.

Begrifflich ist Physik aber eher (koordinatenfreie bei Differenzialformen) Geometrie. Lax Representations in Classical Mechanics. Nambu mechanics. Was die Differenzialformen für die Feldtheorie (=Differenzialgeometrie, Feldgrößen sind p-Formen), sind die geometrischen Methoden bei der Behandlung der Differenzialgleichungen in der klassischen Mechanik (Phasenraumfluss, Fixpunkte, periodische Lösungen, Bifurkation siehe Seite 324, ...) neben der **Störungstheorie, Mittelungsmethode, Zeitskalentrennung, ...**

Lichnerowicz: Lineare Algebra and Analysis 1947, 1956, 1967;

Punktmassensysteme, Teilchensysteme: Kugelsternhaufen, Galaxienhaufen. Abschuss eines Asterioden. Aufteilung in System mit im einzelnen **unbekannten inneren** WW-Kräften und **bekannten äußeren Kräften**. Gesamtkraft auf das i-te Teilchen $\vec{F}_i^{(a)} + \sum_k \vec{F}_{ik} = \dot{\vec{p}}_i$ mit $\vec{F}_{ii} = \vec{0}$ und $\sum_{ik} \vec{F}_{ki} = \vec{0}$ wegen $\sum_{ik} \vec{F}_{ki} = -\sum_{ki} \vec{F}_{ik} = \vec{0}$ und Newton III actio = reactio $\vec{F}_{ki} = -\vec{F}_{ik}$. Daher sind die inneren Kräfte des gekoppelten Dgl-System $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} = \sum_i \vec{F}_i^{(a)} + \sum_i \sum_k \vec{F}_{ik} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{P}}$ belanglos. **Innere WW-Kräfte:** a] nur ortsabhängig von bloß jeweils zwei Körpern $\vec{F}_{ik}(\vec{r}_i, \vec{r}_k) = \vec{F}_{ik}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_N, \ddot{\vec{r}}_1, \ldots, \ddot{\vec{r}}_N, \ldots)$, b] WW-Kräfte haben stets nur Richtungslinie der räumlichen Verbindungslinie $\vec{F}_{ik} \propto (\vec{r}_i - \vec{r}_k)$, c] Zweikörperkraft sei Potenzialkraft $\vec{F}_{ik} = -\nabla_i U(\vec{r}_i, \vec{r}_k)$. **Äußere Kräft:** ohne Gegenkraft ist nur Impulsstromlieferant, z.B. Schwerkraft. Fiktiver Massenmittelpunkt mit Gesamtmasse und Gesamtimpuls. Seien $\vec{d}_i := \vec{r}_i - \vec{R}$ **Relativkoordinaten** oder für den Fall $n = 2$ **Abstandsvektor** der Hantelkörper $\vec{r} := \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Wegen $\vec{R} := \frac{1}{M} \sum_1^n m_i\ \vec{r}_i = \frac{1}{M} \sum_1^n m_i\ (\vec{R} + \vec{d}_i) = R + \frac{1}{M} \sum_1^n m_i\ \vec{d}_i$ und $M := \sum_1^n m_i$ gilt $\sum m_i \vec{d}_i = \sum m_i \dot{\vec{d}}_i = 0$. Folglich $\vec{P} = \sum \dot{\vec{r}}_i = \sum m_i (\dot{\vec{d}}_i + \dot{\vec{R}}) = M\dot{\vec{R}}$, $T = \sum \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{m_i}{2} (\dot{\vec{d}}_i + \dot{\vec{R}})^2 = \sum \frac{m_i}{2} \dot{\vec{d}}_i^2 + \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2$, $\vec{L} = \sum m_i (\vec{d}_i + \vec{R}) \times (\dot{\vec{d}}_i + \dot{\vec{R}}) = \sum m_i \vec{d}_i \times \dot{\vec{d}}_i + M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}$. Für zwei Teilchen gilt $\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{M} \vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{M} \vec{r}$. Deshalb $\vec{d}_1 = -\frac{m_2}{M} \vec{r} \qquad \vec{d}_2 = \frac{m_1}{M} \vec{r}$ und $T = \frac{m_1 m_2}{2M} \dot{\vec{r}}^2 + \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2$ und $\vec{L} = \frac{m_1 m_2}{M} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + M\vec{R} \times \dot{\vec{R}}$. Weizel p39; Greiner 2 p40; Kuhn: PfL9 p83ff; Joos p114; Goldstein p4; Kluge/Stephani p61;

Das **Virial** sei $G = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = qp$. Betrachte unter der Annahme der Stationarität, dass also die Dichten von Ort $p(\vec{x}_i)$ und Impuls $p(\vec{p}_i)$ nicht von der Zeit abhängen, das zeitliche Mittel der zeitlichen Änderung des totalen Differenzials $\mathrm{d}G = \partial_q \mathrm{d}q + \partial_p \mathrm{d}p = p\mathrm{d}q + q\mathrm{d}p$, also also zeitliches Mittel von $\dot{G} = p\dot{q} + q\dot{p} = 2T + qF = 2T + U$ für ein abgeschlossenes System **verschwindet**, bedeutet $\dot{G} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}$ oder $\dot{G}\mathrm{d}t = \mathrm{d}G$ oder wegen $\overline{f}^t = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{d}t f$ = Mittelwertdefinition $\tau \overline{\dot{G}}^t := \int_0^\tau \mathrm{d}t \dot{G} = \int_0^\tau \mathrm{d}G = G|_0^\tau = G(\tau) - G(0) \overset{\text{stete Wiederkehr}}{=} 0$ oder $\bar{\dot{G}} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathrm{d}G = \lim_{\tau\to\infty} \frac{G(\tau) - G(0)}{\tau} = 0$, wegen Beschränktheit des Systems oder **Wiederkehr**, die nichtmal exakt sein muss. Mittlere kinetische Energie eines Systems entspricht seinem Virial! Siehe Brush: Kinetische Theorie. Einführung und Originaltexte. 1965, 1970 Bd1 Die Natur der Gase und der Wärme p56 und Arbeit 11; **Marion: Classical dynamics of particles and systems** 1970 p233f; **Virialsatz**

1870 Clausius1822-1888 (vis = Kraft, virialisiert = befindet sich im Gleichgewicht): $\bar{T} = -\frac{1}{2}\overline{\sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i}$ = **Clausius'sches Virial**. Das Virial ist von der Virialentwicklung zu unterscheiden! Goldstein: Mechanik p76ff; Ist die Kraft konservativ und besitzt ein Potential U, das homogen vom Grad k ist, d.h. für $\alpha > 0$ gilt $U(\alpha\vec{r}_i) = \alpha^k \cdot U(\vec{r}_i)$, so vereinfacht sich die obige Form zu

$$\overline{T} = \frac{k}{2}\overline{U} = \langle E_{\text{kin}}\rangle = \frac{k}{2}\langle U_{\text{pot}}\rangle = \frac{k}{k+2}E, \quad \text{Zentralkraft}: \quad k=-1, \quad \overline{T} = -\frac{\overline{U}}{2} = -E$$

gibt eindeutige Auskunft über die Vorzeichen der beteiligten Energiegrößen, wegen $E = T + U$. Speziell Zentralkraft für ein Teilchen mit $\vec{F} = -\nabla V$ gibt mit $V = a\,r^{n+1}$ für $\overline{T} = \frac{1}{2}\overline{\frac{\partial V}{\partial r}r} = \frac{n+1}{2}\overline{V}$. Speziell: Gravitation oder Coulomb $n = -2$ gibt $\overline{T} = -\frac{1}{2}\overline{V}$. Erlaubt Massenabschätzung für Sternhaufen oder Galaxienhaufen bei Kenntnis Radialgeschwindigkeiten, Winkelabstände und scheinbare Helligkeiten der Einzelobjekte und Abstandes des Haufens. Harmon Oszillator $n = 1$ gibt $\overline{T} = \overline{V}$. Sachs, Sen, Sexton: Elements of statistical mechanics with an introduction to quantum field theory and numerical simulation 2006 Anwendungen des Virial-Satzes in Astrophysik Chap8 p175ff;

An die Stelle der $\boxed{\text{Kräfte-Gleichgewichts-Idee}}$: **physikalische Kräfte** und **geometrische Kräfte** $= {}^a\vec{F} + \vec{Z} = \vec{0}$ mit $\vec{Z} \parallel \nabla g$ tritt unter Hinzunahme der **Idee der virtuellen Verrückung** = **Virtuelle Verschiebung** $\delta\vec{r}$ infinitesimal klein, mit Bewegungseinschränkungen verträglich und instantan $\delta t = 0$, das $\boxed{\textbf{Prinzip der virtuellen Arbeit}}$ = **PdvA** = **auch die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte verschwindet = Bernoulli 1717! Gilt auch bei Hinzunahme der Trägheitskräfte = d'Alembert-Prinzip**, da die virtuellen Verschiebungen aus den Zwangskräften keine Arbeit machen $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, die Summe $\sum_{i=1}^n ({}^e\vec{F}_i + {}^z\vec{F}_i - m\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ verschwindet, weil die einzelnen Vektorprodukte verschwinden. Summiert man aber über die Koordinaten, so müssen die Summen verschwinden, da die Koordinaten der virtuellen Verrückungen $\delta\vec{r}_i$ i.a. voneinander abhängig sind. Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd2 1967 p52; Aber es verrichten Zwangskräfte auch virtuelle Arbeiten wie bei der einfachen Rolle Greiner: Bd2 p294ff, daher muss nur die Summe $\sum_i \vec{Z}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ verschwinden und nicht jeder Summand für sich. Kurz: Aus ${}^a\vec{F} + \vec{Z} = \vec{0}$ und $\vec{Z} \cdot \delta\vec{r} = 0$, Schaefer: Einf in die theoret Physik Bd1 1914, 1950^5 p216 folgt ${}^a\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = 0$ und umgekehrt. Auch Newtons Bewegungsgleichung kann so als Statik verstanden werden: $\boxed{\text{d'Alembert-Prinzip}}$ = Trägheitswiderstände stehen mit physisch eingeprägten Kräften im Gleichgewicht = d'Alembert 1743, Schaefer: Einf in die theoret Physik Bd1 1914, 1950^5 p112ff, Päsler: Prinzipe der Mechanik 1968 p20ff, Sommerfeld: Mechanik p57; Budo: Mechanik p66 Die Rückführung der Dynamik auf die Statik. **d'Alembert-Kraft** erlaubt Statik-Deutung der Newton'schen Gleichung für das freie Teilchen: 1743 d'Alembert-Kraft = Trägheitskräfte = weitere eingeprägte Kraft! Dynamik wird zur Statik. Bewegungssituation wird zum Gleichgewichtsproblem $\vec{F} - m\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$. Lagrange 1788 wendet virtuelle Verschiebung an und formuliert das d'Alembert'sche Prinzip per virtueller Arbeit durch $\delta A = (\vec{F} - m\ddot{\vec{r}}) \cdot \delta\vec{r} = 0$ mit beliebigem $\delta\vec{r}$. Lagrange 1788: das Prinzip der virtuellen Arbeit gelte auch für **bewegte, freie Körper** der Masse m = d'Alembert-Prinzip $(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}^{(e)}) \cdot \delta\vec{r} = m\ddot{x}\delta x + m(\ddot{z} + g)\delta z = 0$. Erweiterung auf Nebenbedingungen bedeutet $f(\vec{r}) = f(\vec{r} + \delta\vec{r}) \overset{\text{Taylor}}{=} f(\vec{r}) + \text{grad}\, f \cdot \delta\vec{r} = 0$ fordert $\text{grad}\, f \cdot \delta\vec{r} = 0$. Lagrange 1788 gibt Lagrange-Gl 1. Art $(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}} + \lambda\text{grad}\, f(\vec{r})) \cdot \delta\vec{r} = 0$, statt NII $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$. Die Zwangskräfte vernichten einen Teil der Trägheitskräfte. Budo: Mechanik p??, **Reineker, Schulz: Mechanik BdI** p98ff; Die **Projektion der Bewegungsgleichungen** auf die virtuellen Verrückungen eliminiert die Zwangskräfte und führt auf das **d'Alembert'sche Prinzip = formale Rückführung der Dynamik auf die Statik**, aus dem die Lagrange'schen Gleichungen 1. und 2. Art abgeleitet werden können: Für ein System von N gebundenen Punktmassen gilt $m\ddot{\vec{r}}_i = {}^e\vec{F}_i + {}^z\vec{F}_i$ und somit $\sum_{i=1}^n ({}^e\vec{F}_i + {}^z\vec{F}_i - m\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, also Summe, weil die $\delta\vec{r}_i$ nicht unabhängig voneinander. Weil virtuelle Arbeit der Zwangskraft Null=verlorene Kraft=**d'Alembert-Prinzip** folgt die **d'Alembert-Gleichung** $\sum_{i=1}^n ({}^e\vec{F}_i - m\ddot{\vec{r}}_i) \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, d.h., dass die virtuelle Arbeit aus eingeprägten und d'Alembert-Kräften Null ist. Speziell folgt für die Ruhelage $\ddot{\vec{r}}_i = \vec{0}$ das Gleichgewichtsprinzip der **Statik**/d'Alembert-Kräfte=Null: $\sum_{i=1}^n {}^e\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, wenn also die gesamte virtuelle Arbeit der am System angreifenden **eingeprägten Kräfte** verschwindet, Kuhn: Theoretische Mechanik PfL9 1978; Kuypers: Klassische Mechanik Aufgabe 2.7 p413; Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das

Lehramt 2010 p37; **Seilverbundene Kugeln über Keil:** 2 Körper im $\mathbb{R}^3$, also 6 zT abhängige Koordinaten. 5 Zwangsbedingungen: **Z1]** $y_1 = (a+x_1)m = (a+x_1)\tan\alpha$, also $\delta y_1 = \delta x_1 \tan\alpha$ bedeutet $\delta\vec{r}_1 = \delta x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \tan\alpha \end{pmatrix}$ oder $f(x_1, y_1) = y_1 - (a+x_1)\tan\alpha = 0$ bedeutet $\vec{Z}_f = \lambda_f \begin{pmatrix} -\tan\alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ und **Z2]** $y_2 = (b-x_2)m = (b-x_2)\tan\beta$ bedeutet $\delta y_2 = -\delta x_2 \tan\beta$ bedeutet $\delta\vec{r}_2 = \delta x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\tan\beta \end{pmatrix}$ oder $g(x_2, y_2) = y_2 - (b - x_2)\tan\beta = 0$ bedeutet $\vec{Z}_g = \lambda_g \begin{pmatrix} \tan\beta \\ 1 \end{pmatrix}$ **wegen Keilgeometrie** also $\vec{Z}_f \cdot \delta\vec{r}_1 = 0 = \vec{Z}_g \cdot \delta\vec{r}_2$, **Z3]** konstante Seillänge $L = -L_1 + L_2 = -\dfrac{x_1}{\cos\alpha} + \dfrac{x_2}{\cos\beta}$, daher abhängige Differenziale $\delta L_1 = \delta L_2$ auch bgl. x-Richtung gemäß $\delta x_1 \cos\beta = \delta x_2 \cos\alpha$, **Z4]** $z_1 = 0$ also $F(z_1) = z_1 = 0$ also $\vec{Z}_F = \lambda_F\, \hat{z}_1$, **Z5]** $z_2 = 0$ also $G(z_2) = z_2 = 0$, daher $\vec{Z}_G = \lambda_G\, \hat{z}_2$. **Eingeprägte Kräfte aus Gewichtskraft**: $\vec{F}_1^e = \vec{G}_1 = m_1 g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{F}_2^e = \vec{G}_2 = m_2 g \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. **d'Alembert-Prinzip:** $\delta A = (\vec{F}_1^e + \vec{Z}_f - m_1\ddot{\vec{r}}_1)\cdot\delta\vec{r}_1 + (\vec{F}_2^e + \vec{Z}_g - m_2\ddot{\vec{r}}_2)\cdot\delta\vec{r}_2 = 0$ bedeutet $(\vec{G}_1 - m_1\ddot{\vec{r}}_1)\cdot\delta\vec{r}_1 + (\vec{G}_2 - m_2\ddot{\vec{r}}_2)\cdot\delta\vec{r}_2 = 0$ mit $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ (a+x_1)\tan\alpha \end{pmatrix}$ bedeutet $\ddot{\vec{r}}_1 = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_1 \tan\alpha \end{pmatrix}$ und $\ddot{\vec{r}}_2 = \begin{pmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_2 \tan\beta \end{pmatrix}$. Wegen $\delta\vec{r}_1 \neq \vec{0} \neq \delta\vec{r}_2$ oder $\delta x_1 \neq 0$ folgt $\dfrac{\ddot{x}_1(m_1+m_2)}{\cos\alpha} = g(m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha)$ oder in Richtung der **verallgemeinerten Koordinate längs des linken Abhangs** $\ddot{L}_1 = \dfrac{g(m_2\sin\beta - m_1\sin\alpha)}{m_1+m_2}$. Kagermann & Köhler: Aufgabensammlung theor Phys T1. Mechanik 1986[2] p159 Im **statischen Gleichgewicht** reduziert sich das Prinzip der virtuellen Arbeit auf die Gleichung für die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte beim **Hebel**: $\vec{F}_1\cdot\delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2\cdot\delta\vec{r}_2 = F_1\delta z_1 + F_2\delta z_2 = 0$. Der Hebel besitzt den Drehwinkel ϕ als Freiheitsgrad durch den die virtuellen Verrückungen wie folgt ausgedrückt werden können: $\delta z_1 = -x_1\delta\phi$ und $\delta z_2 = x_2\delta\phi$. Für beliebigen virtuelle Verrückungen muss folglich die Gleichung $(F_1x_1 - F_2x_2)\delta\phi = 0$ erfüllt sein, was unmittelbar das Hebelgesetz $F_1x_1 = F_2x_2$ liefert.

Rutschende Leiter/Brett an Wand: Arya: Introduction to classical mechanics 1979 p88; Normale Wandkraft eines Brettes der Neigung ϑ und Masse m ist $N = \dfrac{mg}{2}\tan\vartheta$. Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] p121; Kuypers: Mechanik Leiter mit Seil p19, p95, p455; Morin: Introduction to Classical Mechanics 2007 p351f; Greiner: Mechanik1 1993[2] p190, 2007[8] p178; Greiner: Mechanik2 2003[7] p254 Zwei Klötzchen im L;

Bewegung eines Massepunkts im Schwerefeld der Erde ($V(z) = mgz$) auf einer **biquadratischen Parabel** $y = bx^4$ sowie einer **Kettenlinie** oder Katenoide $z = b\cosh(x/b)$: Die Bewegung auf der biquadratischen Parabel erfolgt in der Horizontalen. In der Horizontalen wirken keine äußeren Kräfte. Die biquadratische Parabel liefert als Nebenbedingung für die Bewegung auf folgende Beziehung zwischen den virtuellen Verrückungen $\delta y = 4bx^3\delta x$. Es wirken d'Alembert/Trägheits- und Zwangskraft $\lambda\mathrm{grad}\, f(\vec{r}) = \lambda(4bx^3, -1)$, deren virtuelle Arbeit nach dem d'Alembert-Prinzip $\delta A = [-mg\hat{z} - m\ddot{\vec{r}} + \lambda\mathrm{grad}\, f(\vec{r})]\cdot\delta\vec{r} = [-mg\hat{z} - m\ddot{\vec{r}}]\cdot\delta\vec{r} = 0$, wobei die Zwangskraft keine Arbeit verrichtet und sich auch bei der Aufstellung der Bewegungsgleichung weghebt, also $(-m\ddot{x} + \lambda 4bx^3)\delta x + (-m\ddot{x} - \lambda)4bx^3\delta x = 0$ verschwindet für beliebige $\delta x \neq 0$. Also $\ddot{x} + 4bx^3\ddot{y} = 0$. Wegen $\dot{y} = 4bx^3\dot{x}$ und $\ddot{y} = 12bx^2\dot{x}^2 + 4bx^3\ddot{x}$ folgt die Differenzialgleichung $\ddot{x}[1 + (4bx^3)^2] + 48b^2x^5\dot{x}^2 = 0$. Bei der Bewegung auf der Kettenlinie ist die Gravitationskraft als eingeprägte Kraft zu berücksichtigen. Damit lauten die Lagrange'schen Gleichungen 1. Art $(\vec{F} - m\ddot{\vec{r}} + \lambda\mathrm{grad}\, f(\vec{r}))\cdot\delta\vec{r} = 0$ mit $\vec{F} = -mg\hat{z}$ und wegen Geometrie $f(\vec{r}) = b\cosh\frac{x}{b} - z$ gibt die Zwangskraft $\lambda\mathrm{grad}\, f = \sinh x\hat{x} = \hat{z}$, also $(-m\ddot{x} + \lambda\sinh x)\delta x + (-m\ddot{y})\delta y(-mg - m\ddot{z} - \lambda)\delta z = 0$ und Zwängen Nebenbedingung für die virtuellen Verrückungen $\delta y = 0$ und $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\sinh\frac{x}{b}$ verschwindet $\ddot{x} + m(g + \ddot{z})\sinh\frac{x}{b} = 0$ für beliebige $\delta x \neq 0$. Mit $\dot{z} = \dot{x}\sinh(x/b)$ und $\ddot{z} = (\dot{x}/b)\cosh(x/b) + \ddot{x}\sinh(x/b)$ folgt schließlich die gesuchte Differenzialgleichung $\ddot{x}(1 + \sinh^2(x/b)) + \frac{\dot{x}}{b}\cosh(x/b)\sinh(x/b) + g\sinh(x/b) = 0$.

Auch bei der Bewegung auf der Hyperbelbahn ist die Gravitationskraft als eingeprägte Kraft zu betrachten. Mit zu b) analoger Argumentation erhalten wir die folgenden Gleichungen: $(m\ddot{\vec{r}} - \vec{F}^{(e)}) \cdot \delta\vec{r} = m\ddot{x}\delta x + m(\ddot{z} + g)\delta z = 0$. Mit

$$\delta z = -\frac{c}{x^2}\delta x \text{ folgt } \ddot{x} - \frac{c}{x^2}(\ddot{z} + g) = 0$$

Aus

$$\dot{z} = -\frac{c}{x^2}\dot{x} \text{ und } \ddot{z} = \frac{2c}{x^3}\dot{x}^2 - \frac{c}{x^2}\ddot{x}$$

folgt

$$\ddot{x} - \frac{2c^2}{x^5}\dot{x}^2 + \frac{c^2}{x^4}\ddot{x} - \frac{cg}{x^2} = 0$$
$$-\ddot{x}(x^5 + c\,x) + 2c^2\dot{x}^2 + c\,g\,x^3 = 0$$

$\mathcal{L} = T - U$, potenzielle Energie aus $\vec{F} = -\nabla U$ oder als negative Arbeit am System, dann homöomorphe Transformation auf verallgemeinerte Koordinate gemäß Skizze. Dabei sind die Koordinaten-Nulllagen völlig beliebig $z(\phi)$.

Beipiele Euler-Lagrange 2 und Hamilton-Formalismus:

Atwood'sche Fallmaschine zur Ausdünnung der Gravitationskraft. Fließbach: Mechanik p62f 5 Zwangsbedingungen eine echte $-y_1 - y_2 - L + \pi R = l$ oder $g_1(y_1, y_2) = -y_1 - y_2 - l + \pi R = 0$, die sofort $\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = 0$ gibt und vier gedachte $g_2(x_1) = x_1 + R = 0$, $g_3(x_2) = x_2 - R = 0$, $g_4(x_1) = x_1 = 0$, $g_5(x_2) = x_2 = 0$, p78 Verallgemeinert Koordinate y_1 daher $\mathcal{L}(y_1, \dot{y}_1) = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{y}_1^2 - (m_1 - m_2)gy_1$+const gibt die Beschleunigung beider Massen $\ddot{y}_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}g = a = \frac{1-\beta}{1+\beta}g$ und die gleiche Zwangskraft = Seilkraft = $Z_\lambda = \lambda = \frac{2}{\beta+1}m_1 g$ oder mit $m_2 = \frac{m_1}{\beta}$ für Bruchteil $\beta \in [1, \infty)$ auf beide Körper. Auf der Achse lastet daher 2 mal Seilkraft = $2Z_\lambda = 2\lambda = \frac{4}{\beta+1}m_1 g = \frac{4\beta}{(\beta+1)^2}Mg$ mit $g > 0$. Bedeutet für gleiche Massen $\beta = 1$ höchste Last und sonst kleinere Last nicht nur wegen der kleineren Gewichtskraft = kleineren Achslast $M = m_1 + m_2 = m_1(1 + \frac{1}{\beta})$, sondern weil die fehlende Zwangskraft in die Beschleunigung der Massen geht. Bei $\beta \to \infty$, also fehlendem Gegengewicht keine Achslast und freier Fall. Budo: Theoretische Mechanik 1956, 1974 p67, p146, p300; Schäfer: : Einführung in die theoretische Physik BdI 1914, 1950 p267ff; Lummer & Schäfer, Physikal Z 7 1906 269 beide Federkraftmesser zeigen gleiche Seilkraft; Nolting: Mechanik Bd1 1989 p158f, p294; Arya: Introduction to classical mechanics 1979 p65f; Morin: Introduction to Classical Mechanics 2007 p58 Seilkraft; Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd2 1967 p13f, p20, p53; Greiner: Bd1 p64; Mitter: Mechanik p50; Recknagel 1910-1994: Mechanik 1954, 1969 p99; Grimsehl 1861-1914: LB der Physik Bd1 1970 p42; Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] p50f Seilspannung auch ohne Gravitation auf dem ganzen Seil gleich;

$H(p) = c\sqrt{p^2 + m^2c^2} = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}$ und mit $|\dot{q}/c| \ll 1$ Mit $\beta = \dot{q}/c$ und den Näherungen $\sqrt{1 - x^2} = 1 - x^2/2 + \dots$ und $1/\sqrt{1 - x^2} = 1 + x^2/2 + \dots$ und $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$ folgt $p = \frac{mc\dot{q}}{\sqrt{c^2 - \dot{q}^2}} = \frac{m\,\dot{q}}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m\,\dot{q}(1 + \frac{\beta^2}{2} + ...) \approx m\,\dot{q}$ Legendre-Transformierte $L(q, \dot{q}) = p(\dot{q})\dot{q} - H(q, p(\dot{q})) = \frac{mc\dot{q}^2}{\sqrt{c^2 - \dot{q}^2}} - c\sqrt{\frac{m^2c^2\dot{q}^2}{c^2 - \dot{q}^2} + m^2c^2} = -mc\sqrt{c^2 - \dot{q}^2} = -mc^2\sqrt{1 - \beta^2} = -mc^2(1 - \frac{\beta^2}{2} + \dots)$ Für den klassischen Grenzfall $\dot{q}/c \to 0$ erhältein freies Teilchen man endlich die bekannten Lagrange- und Hamilton-Funktionen für ein freies Teilchen $L(\dot{x} << c) \approx -mc^2 + \frac{m}{2}\dot{q}^2 - mc^2 = T(\dot{q}) - V \qquad H(p) \overset{p \ll mc}{=} \dot{x}(p)\,p - L(\dot{x}(p) = \frac{p^2}{2m} + mc^2 = T(p) + V$

Harmonischer Oszillator: $E = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2, \quad \mathcal{H}(x, p_x) = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{k}{2}x^2, \quad \mathcal{L}(\dot{x}, x) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$. **Fadenpendel für beliebige Auslenkungen:** $E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi, \quad \mathcal{H} = \frac{1}{2ml^2}p_\varphi^2 - mgl\cos\varphi, \quad \mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$. **Fadenpendel für kleine Auslenkungen:** $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$, $E = \frac{ml^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{mgl}{2}\varphi^2 - mgl, \quad \mathcal{H} =$

$\frac{1}{2ml^2}p_\varphi^2 - mgl + \frac{mgl}{2}\varphi^2$, $\mathcal{L} = \frac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 - \frac{mgl}{2}\varphi^2$. **Freier Fall:** $E = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 - m\vec g\cdot\vec r$, $\mathcal{H} = \frac{1}{2m}p_x^2 - mgz$, $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 + m\vec g\cdot\vec r$. **Keplerproblem:** $E = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 - \gamma\frac{mM}{r}$, $\mathcal{H} = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2\sin^2\theta} + \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} - \gamma\frac{mM}{r}$, $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2 + \gamma\frac{mM}{r}$.

$\mathcal{L}(q,\dot q) = \frac{1}{2}e^{2q}(\dot q^2 - 1)$

$H(q,p) = \ln(q+p)$ gibt $\dot q = \frac{1}{q+p}$ und $\dot p = -\frac{1}{q+p}$ bedeutet $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = -1$ also $p = -q + q_0$ also Phasenraumporträt oder $\ddot q = 0$ oder $q(t) = \frac{t^2}{2} + p_0 t + q_0$.

$L(q,\dot q) = \ln(q+\dot q) \to H(q,p) = 1 - qp + \ln p \to \dot q + q = p_0 e^{-t} \to \hat G = \frac{1}{i\omega+1} \to G(t,t') = e^{-(t-t')}\Theta(t-t') \to q(t) = q_h + q_{in} = q_0\,e^{-(t-t_0)} + \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\,\theta(t-t')\,e^{-(t-t')}p_0\,e^{-t'} = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\,\theta(t-t') = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t' = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\,(t-t') = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\,(t-t^0) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}$

Freier gedämpfter harmonischer Oszillator: $\mathcal{L}(q,\dot q,t) = \left(\frac{m}{2}\dot q^2 - \frac{m\,\omega^2}{2}q^2\right)e^{2\gamma\,t}$.

Nichtstandard-Lagrange-Funktionen des harmonischen Oszillators, Heil & Klitzka: Grundkurs theoretische Mechanik:
$\mathcal{L} = \frac{1}{3}\dot x^4 + 2\dot x^2\,x^2 - x^4$ gibt als ELG $0 = 4(\ddot q + q)(\dot q^2 + q^2)$ oder kurz $0 = \ddot q + q$ und $\mathcal{L} = 2\frac{\dot x}{x}$ atan $\frac{\dot x}{x} - \ln(\dot x^2 + x^2)$

Modellbau a la Lagrange-Funktion, Mitter p135: **i)** $\mathcal{L}(\dot q)$ braucht $\dot q^2$. Wäre $\mathcal{L}(q,\dot q) = \dot q K(q,t) - V(q,t)$, dann wäre $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial q} + \dot q\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}T(q,t) = \frac{\partial T}{\partial q}\dot q + \frac{\partial T}{\partial t}$ also Kraft $\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial t}$ kommt von explizit zeitabh kin Energie, was keine Bewegungsgleichung ist. **ii)** $\mathcal{L}_{A+B} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B$ mit $\mathcal{L}_A(q_A,\dot q_A,t)$ und $\mathcal{L}_B(q_B,\dot q_B,t)$ **wechselwirkungsfrei heißt additiv**. Daher **Strategie zum Auffinden der Lagrange-Funktion** bei Modellierung: Finde WW-Term $\mathcal{L}_{\text{ges}} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{\text{WW}}(q_A,q_B,\dot q_A,\dot q_B,t)$ wobei System B fast abgeschlossen (Erde). Löse also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q_B} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_B}$ separat, da unabh vom Satelliten A: $q_B = q_B^{(0)}(t)$. Effektive Lagrange-Funktion $\mathcal{L}_{\text{ges}}^{(1)} = \mathcal{L}_A(q_A,\dot q_A,t) + \mathcal{L}_{\text{WW}}(q_A,q_B^{(0)},\dot q_A,\dot q_B^{(0)},t)$. **iii) Eichtransformation** $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \dot M(q,t)$ liefert wegen $\tilde S[q] = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\tilde L(q,\dot q,t) = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\tilde L(q,\dot q,t) + \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = S[q] + M(q^{(2)},t_2) - M(q^{(1)},t_1)$, wobei das Zusatzglied die Variation nicht mitmacht, also $\delta\tilde S = \delta S = 0$, siehe Landau/Lifschitz: Mechanik p5, die Klasse der **eichinvarianten** Lagrange-Funktionen, die zu gleichen, forminvarianten ELGs führen. Kurz: **Eichtransformation**en lassen die **Variationsableitung** = Euler-Lagrange-Ableitung, siehe Seite 542 $\frac{\delta\cdot}{\delta u} = \frac{\partial\cdot}{\partial u} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\cdot}{\partial\dot u}$ **kovariant oder form-invariant**. Beweis: $\tilde S[q] = \int_1^2\mathrm{d}t\tilde{\mathcal{L}} = \int_1^2\mathrm{d}t\mathcal{L} + [M(q(t),t)]_1^2 = S[q] + M(q(t_2),t_2) - M(q(t_1),t_1)$. Für die Variation gilt dann $\delta\tilde S[q] = \delta S[q] + \left.\frac{\partial M}{\partial q}\right|_{t_2}\delta q(t_2) - \left.\frac{\partial M}{\partial q}\right|_{t_1}\delta q(t_1) = \delta S[q]$, wegen $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$. Kuhn: PfL9 p163; Fließbach p119; So ist die Lagrange-Funktion eines freien Teilchens $\mathcal{L}(\dot{\vec r}) = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^2$ **nicht galilei-invariant** $\vec r \to \vec r - \vec v t$ und entsprechend $\dot{\vec r} \to \dot{\vec r} - \vec v$ gibt ja $\tilde{\mathcal{L}}(\dot{\vec r}) = \frac{m}{2}(\dot{\vec r} - \vec v)^2 = \mathcal{L}(\dot{\vec r}) - m\dot{\vec r}\cdot\vec v + \frac{m}{2}\vec v^2 = \mathcal{L}(\dot{\vec r}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\left(\frac{\vec v^2}{2}t - \vec r\cdot\vec v\right)$, aber **eichinvariant**, weil der transformations-bedingte Zusatzterm der Lagrange-Funktion als totale Zeitableitung von $M(\vec r,t) = m\left(\frac{\vec v^2}{2}t - \vec r\cdot\vec v\right)$ geschrieben werden kann. Denn die ELGn stimmen überein $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{\vec r}}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vec r}}\right) = m\ddot{\vec r} = \vec 0$. Die **Idee der Eichinvarianz** entdeckte Weyl beim Blick auf die Maxwell-Gl, als er Gravitation und Elektrik in einer Theorie vereinigen wollte. Eichtheorie = physikalische Feldtheorie, die einer **lokalen Eichsymmetrie** genügt. Čarmeli, Huleihil & Leibowitz: Gauge fields. Classification and equations of motion 1989; Čarmeli: Cosmological relativity. The special and general theories for the structure of the Universe 2006 $\mathrm{d}s^2 = \tau^2\mathrm{d}v^2 + c^2\mathrm{d}t^2 - (\mathrm{d}\vec r)^2$ mit $\tau = \frac{1}{H_o}$, wobei H_o Weltalter; Čarmeli: Cosmological special relativity structure of space, time and velocity 1997;

Kugo: Eichtheorie

1997; **QCD Quantenchromodynamik & QFD Quantenflavordy-**

namik: Böhm & Hollnick: Eichtheorien der starken, em und schwachen WW In: PiuZ10 1979 p18-26, I.US; Ishikawa: Gluonenbälle, SdW 1983 H1 p44-55; Zimmermann: Asymptotische Freiheit in der Elementarteilchenphysik, PhysBl 47 1991 H7 p605ff; Feynman: Photon-hadron interactions 1972; C̃ollins: An introduction to Reggy theory 1973; **Polkinghorne: Models of high energy physics** 1975; **Okun: Physik der Elementarteilchen** 1991; **Pais: Inward bound of matter and forces in the physical world** 1986 p588; Gottfried & Weisskopf: Concepts of particle physics Vol1 1984 KapE7 p95ff; Gottfried & Weisskopf: Concepts of particle physics Vol2 1986; **Lanius: Physik der Elementarteilchen** 1981; Close, Marten, Sutton: Spurensuche im Teilchenzoo, die elementaren Bausteine der Materie 1989; Waloschek: Neuere Teilchenphysik, einfach dargestellt 1991; Genz: Elementarteilchen 2003; Höfling & Waloschek: Die Welt der kleinsten Teilchen. Vorstoß zur Struktur der Materie 1984; Pokorski: Gauge Field Theories 1987 Kap8; Becher, Böhm, Joos: **Eichtheorien** der starken und elektroschwachen Wechselwirkung 1983[2] Kap2; S̃check: Electroweak and Strong Interactions. An Introduction to Theoretical Particle Physics 1996; Höfling & Waloschek: Die Welt der kleinsten Teilchen. Vorstoß zur Struktur der Materie 1984; **Joos: Elementarteilchen**, PiuZ1 1979 9-15; **Musiol, Ranft, Reif, Seeliger: Kern- und Elementarteilchenphysik** 1989, 1995[2] siehe Anhang; Groom et al.: **Review of particle physics.** The European Physical Journal C15 **2000** p85ff QCD Ellis, Stirling, Webber: QCD and collider physics 1996; Ebert: Eichtheorien 1989 Kap7; Rebhan: Rel Quantenmechanik, QFT und Elementarteilchentheorie 2010 p493ff; Aitchison & Hey: Gauge Theories in Particle Physics. A Practical Introduction 1990[2]; Halzen & Martin: Quarks and Leptons. An Introductory Course in Modern Particle Physics 1984; **Quigg: Gauge Theories of the Strong, Weak & Electromagnetic Interactions** 1983, 1985, 1997, 2013[2] 482p; Physics Today 67(6), 50 (2014); https://doi.org/10.1063/PT.3.2421 Quigg: Elementarteilchen und die Grundkräfte der Natur SdW H6 1985 p5, 110-122, 146; Nambu: Quarks. Frontiers In Elementary Particle Physics 1985; Fritsch: Quarks; Riordan: The hunting of the quark. A true story of modern physics 1987, 2016; Pickering: Constructing quarks 1984; Okun: Particle Physics. The Quest for the Substance of Substance 1985; Okun: The Relations Of Particles 1991; Lee: Particle Physics and Introduction to Field Theory 1981; Creutz: Quarks, gluons and lattices 1983; Okun: Leptons and quarks 1981; Anisovich: Quark models and high energy 1984; G̃reiner & Schäfer: Quantenchromodynamik, Bd10 1989; M̃uta: Foundations Of Quantum Chromodynamics: An Introduction To Perturbative Methods In Gauge Theories 1986, 2008; NATO Advanced Studies Institute Series B: Bd 54 = Mahanthappa & Randa: Quantum flavordynamics, QC and unified theories 1980; Rebbi: Die Gitter-Eichtheorie. Warum Quarks eingesperrt sind, SdW 1983 H4, p88ff; R̃ebbi: Lattice gauge theories and Monte-Carlo simulations 1982; Leader & Predazzi: An Introduction to Gauge Theories and the New Physics 1982; Leader & Predazzi: An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics. Vol1, Electroweak Interactions, the 'New Particles' and the Parton Model 1996; Leader & Predazzi: An Introduction to Gauge Theories and Modern Particle Physics. Vol2, CP-Violation, QCD and Hard Processes 1996; Zichichi, Wigner, Weinberg, Nelkin, Fano: Gauge interactions. Theory and Experiment 1984; **Bailin & Love: Introduction to gauge field theory** 1994; Anschaulich: die von der Theorie vorhergesagten Wechselwirkungen ändern sich nicht, wenn eine bestimmte Größe lokal frei gewählt wird. Diese Möglichkeit, eine Größe an jedem Ort unabhängig festzulegen, zu eichen wie einen Maßstab, führte zur Wahl des Namens Eichinvarianz bzw. Eichsymmetrie. Aber das Potenzial und potenzielle Energie selbst sind bereits eine eichinvariante, nichtphysikalische Größe, weil nur bis auf eine Konstante festgelegt $V = mgh + h_0$ mit z.B. $h_0 = 0$. Die Arbeit aber als Änderungsgröße von der zufälligen Eichung $h_0 \neq 0$ unabhängig $W = mg\Delta h$. Das gleiche Argument betrifft die **Eichinvarianz des Impulses** $\vec{p} \to \vec{p} + \vec{p}_0$, d.h. es darf stets eine **additive Konstante** hinzugenommen werden oder der Impuls ist nur bis auf unbestimmte Konstante festgelegt, da beim Stoß nur Impulsstrom $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ zur Geltung kommt. Alle physikalischen Größen müssen **eichinvariant** sein! Siehe en.wiki TStein/Gauge_invariance. **Pal & Sateesh: The field strength and Lagrangian of a gauge field theory** AJP58 1990 p789-90 XXXX **Healey: Gauging What's Real. The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories** 2007;

Die **Eichtransformation bei Punkt-Mechanik** $L^*(q,\dot q,t) = L(q,\dot q,t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(q,t) = L + \dot f = L + \frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}$ berührt wegen $\mathrm{d}f(q,t) = \frac{\partial f}{\partial q}\mathrm{d}q + \frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$ oder $\dot f = \frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial t}$ die Euler-Lagrange'schen Bewegungsgleichungen nicht. Bedeutet: Aus $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{\partial L}{\partial q}$ folgt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^*}{\partial \dot q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot q} + \frac{\partial f}{\partial q}\right] = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\dot q + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q} = \frac{\partial L^*}{\partial q}$ wegen des totalen Differenzials der parziellen Ableitung $\mathrm{d}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\mathrm{d}q + \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q}\mathrm{d}t$. Kuypers p53; Cromer & Saletan p50; Fließbach & Walliser: Arbeitsbuch p34 ungenau; Šrauch: Classical mechanics p82;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial q^2}\mathrm{d}q + \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t}\mathrm{d}t\right) = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial M}{\partial q}\dot q + \frac{\partial^2 M}{\partial q \partial t}\right),$$

bleiben die **Euler-Lagrange'schen Bewegungsgleichungen forminvariant**, Lösung wird von Umeichung nicht beeinflusst (Symmetrietransformation). **iv)** $\tilde{\mathcal{L}} = \alpha\mathcal{L}$ mit $\dot\alpha = 0$ gibt $\delta\tilde S = \alpha\delta S$, nur Skalenfaktor, Dimension oder Einheiten egal.

NII scheint nicht zu stimmen: **Ruhender Ball** $\vec x_{\text{Ball}}$=const auf Tisch im homogene Feld $\vec g$= const: $\vec 0 = m_{\text{T, Ball}}\ddot{\vec x}_{\text{Ball}} \neq \vec F = \vec G = m_{\text{g, Ball}}\vec g$, gibt $\vec 0 = \ddot{\vec x} \neq \vec g$. Ausweg modifizierte Newton-Gl = Lagrange 1. Art. $m\ddot{\vec x} = \vec F_e + \vec Z = \vec F_e + \lambda\nabla f(\vec x)$. **NII-Modifikation durch geometrische Kräfte:** a] Newton'sche Bewegungsgleichung braucht die **Idee der Zwangskraft** $\vec Z_f(\vec x) = \lambda\nabla f(\vec x)$, die sich aus **Zwangsbedingungen** = Einschränkungen oder Dimensionsreduktion des Konfigurationsraum $f(x,y,z) = z - z_0 = 0$ oder anderen Anhängigkeiten ergeben. Bewegung senkrecht zu geometrischen Zwangskräften. Aber nur **holonome Zwangsbedingungen** bringen Abhängigkeiten zwischen zuvor unabhängigen **Koordinaten des Konfigurationsraums und verringern dessen Dimension = Anzahl der Freiheitsgrade**. Nichtholonome Zwänge bringen das nur einseitig durch Ungleichungen $f(\vec x) \geq 0$ und differenzielle Zwänge. **Zwangskraft** kommt auch unabhängig von **Zwangsbedingung durch Reibung**. **Reineker Bd1 Mechanik** p88ff oder Marco Thiel Diplom; b] **Idee der verallgemeinerten Koordinaten**

Lagrange'sche Multiplikator-Regel, Lagrange'sches Lemma, Fundamental-Lemma Merziger p133; Lang & Pucher; **Schulz: Physik mit dem Bleistift** p264, Addiere einen Term, der Abweichungen von der Nebenbedingung unter Strafe stellt. **Lagrange'sches Lemma:** Seien $f(\vec r), g(\vec r), h(\vec r) \in \mathbb{R}$ mit $\vec r \in \mathbb{R}^3$. f hat Extremum unter unabhängigen Nebenbedingungen $g(\vec r) = h(\vec r) = 0$ genau dann, wenn es $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ mit $\nabla(f + \lambda g + \mu h) = 0$ gibt. D.h. $f + \lambda g + \mu h$ hat somit Extremum ohne Nebenbedingungen, wobei $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ durch $g(\vec r) = h(\vec r) = 0$ bestimmt sind. Nochmals kurz **Lagrange'sche Multiplikator-Regel:** **Extremum der Lagrangefunktion** $f(x,y) \in \mathbb{R}$ bedeutet $\mathrm{d}f(x,y) = \partial_{,x} f\mathrm{d}x + \partial_{,y} f\mathrm{d}y = 0$. Aber zusätzliche **Nebenbedingung** $g(x,y) = 0$ bedeutet außerdem $\mathrm{d}g(x,y) = \partial_{,x} g\mathrm{d}x + \partial_{,y} g\mathrm{d}y = 0$, bedeutet, dass die zuerst unabhängigen Variablen des Definitionsbereichs nicht mehr unabhängig voneinander sind, also nicht mehr beliebig gewählt werden dürfen. Bedeutet, dass auch die Differeziale gemäß $\mathrm{d}y = -\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{,y}}\mathrm{d}x$ gebunden sind. Aus $\mathrm{d}f(x,y) = 0 = \partial_{,x} f\mathrm{d}x + \partial_{,y} f\mathrm{d}y = (\partial_{,x} f - \partial_{,y} f\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{,y}})\mathrm{d}x$ und wegen $\mathrm{d}x \neq 0$ gilt $\partial_{,x} f - \partial_{,y} f\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{,y}} = 0$ oder $\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{,y}} = \frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{,y}} = \lambda = \text{const}$. Bedeutet $\tilde f(x,y) = f + \lambda\, g(x,y)$ führt auf $0 = \mathrm{d}\tilde f = \mathrm{d}f + \lambda\,\mathrm{d}g(x,y) = \partial_{,x} f\mathrm{d}x + \partial_{,y} f\mathrm{d}y + \lambda\,(\partial_{,x} g\mathrm{d}x + \partial_{,y} g\mathrm{d}y) = (\partial_{,x} f + \lambda\partial_{,x} g)\mathrm{d}x + (\partial_{,y} f + \lambda\partial_{,y} g)\mathrm{d}y = 0$, bedeutet wieder $\frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{,y}} = \frac{\partial g_{,x}}{\partial g_{,y}} = \lambda = \text{const}$. Somit dürfen in der um $\lambda\, g(x,y)$ ergänzten Lagrangefunktion $\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}y$ unabhängig variiert werden. Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010 p37; **Kaplan: Advanced Calculus** 1952 Kap2.17 oder 2001[4] Kap2.20; Feldmeier Kap7.9; Arens p1195; Heuser: Analysis II, §174, p320ff, Förster II: Sei

$$L = f + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j\, g_j$$

Lagrange'sche Funktion zu einem Optimierungsproblem $\min_{\vec x \in D} f(\vec x)$ mit **Zielfunktion** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und NB $D = \{\vec x \in \mathbb{R}^n | g_j(\vec x) = 0, j = 1, \ldots, k\}$. Ist $\hat{\vec x} \in D$ lokales Minimum von f auf D und sind die k **Gradienten**

$\nabla g_j(\hat{\vec{x}})$ an Stelle $\hat{\vec{x}}$ **linear unabhängig**, dann existieren Lagrange'sche Multiplikatoren $\hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_k \in \mathbb{R}$, so dass die $n+k$ Gleichungen die **notwendigen Bedingungen** für die Extrema darstellen

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{\lambda}}) = 0, i = 1, \ldots, n, \frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{\lambda}}) = 0, i = 1, \ldots, k$$

Bressoud p266; Beispiel: Größtes Rechteck in Ellipse $L(x, y, \lambda) = 4xy + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$ gibt Kantenlängen $2x = \sqrt{2}a$ und $2y = \sqrt{2}b$. **Vorspiel zur Variationsrechnung mit Nebenbedingung.**

Totales Differenzial & Straf-Term: Für Extrema der Funktion $f(x, y)$ verschwindet das totale Diffenrenzial, also $\partial_x f \stackrel{!}{=} 0$ und $\partial_y f \stackrel{!}{=} 0$. **Die Extrema der Funktion $f(x, y)$ mit der Nebenbedingung** $g(x, y) = 0$ bekommt man mit zwei grundsätzlich verschiedenen **Verfahren1:** Verfahren: Einsetzen von g in $z = f(x, y)$ gibt $z = \bar{f}(x)$ oder $z = \hat{f}(y)$ und **Kurvendiskussion:** notwendige Bed. ist lokales Extremum für $f'(x_0) = 0$. Hinreichende Bedingung: Wert der zweiten Ableitung oder Vorzeichenwechsel der ersten. Notwendige Bedingung Wendepunkt gibt $f''(x_0) = 0$. Hinreichende Bedingung: Wert der dritten Ableitung $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, oder Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung. **Verfahren2:** Lagrange-Hilfs-Funktion $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ mit **notwendigen Bedingungen** für die Extrema L_x, L_y, L_λ. Man führt für die Verletzung der Nebenbedingung einen Straf-Term $\lambda g(x, y)$ ein und sucht nach dem Extremum der Funktion $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$. Das Verschwinden des totalen Differenzials bedeutet, dass auch beliebig kleine Variationen von dλ keine Änderung von $F(x, y, \lambda)$ bewirken: $\partial_\lambda F \stackrel{!}{=} 0$! Die Funktion ändert sich in der (linearen) Nähe von Extrema in 1. Ordnung nicht. **Beispiele für Extremwerte unter Nebenbedingungen: Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik** §15.9 p406ff **Beispiel1:** Maximaler Rechteckinhalt $A(a, b) = ab$ bei fixierten Umfang = Nebenbedingung $u = 2(a + b)$ folgt auf zwei Wegen **a] Nebenbedingung** $g(a, b) = u - 2(a + b) = 0$ **in zu maximierende Größe:** $A = ab$ eingesetzt: $A(a) = a(\frac{u}{2} - a)$ gibt $A'(a^*) = \frac{u}{2} - 2a^* \stackrel{!}{=} 0$ gibt Quadrat mit Seitenlänge $a^* = b^* = \frac{u}{4}$. **Ansatz geht auch umgekehrt** nach Suche minimaler Einzäunung $u = 2(a + b)$ bei vorgegebener Fläche $b = A/a$, also Extremum von $u(a) = 2(a + \frac{A}{a})$. **b] Multiplikatorenmethode ist allgemeiner als a]:** $L(a, b, \lambda) = A(a, b) + \lambda g(a, b) = ab + \lambda[u - 2(a + b)]$. **Notwendige Bedingungen für Extrema:** $\frac{\partial L}{\partial a} = b - 2\lambda \stackrel{!}{=} 0$, $\partial_b L = a - 2\lambda \stackrel{!}{=} 0$ geben $a^* = \lambda = b^*$ und $\partial_\lambda L = u - 2(a + b) \stackrel{!}{=} 0$ zwingt zur Beachtung der Nebenbedingung $g(a, b) = u - 2(a + b) = 0$, bedeutet $u = 4a^*$. **Beispiel2:** Wo liegen die Extrema auf der Nordhemisphäre $z = h(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ über einem Kreis mit dem Radius $R = \frac{1}{4}$ in der Äquatorialebene bei $x_0 = \frac{1}{2}$ und $y_0 = 0$? Die Nebenbedingung der Hemisphäre $g(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{16} = 0$ gibt $L(x, y, \lambda) = h(x, y) + \lambda g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} + \lambda[(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{16}]$. $\partial_x L = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + 2\lambda(x - \frac{1}{2}) \stackrel{!}{=} 0$ und $\partial_y L = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0$ gibt $y^* = 0$. Dies bedeutet $x^* - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{4}$, bedeutet $x^*_+ = \frac{3}{4}$ und $x^*_- = \frac{1}{4}$. Dieses Problem kann nicht umgekehrt als reines Extremsucheproblem formuliert werden. Bartsch: Mathematische Formeln 1986[21] p153, Bronstein, **Meyberg & Vachenauer: Höhere Mathematik.** Bd1 Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung. 2003[6] Kap7 §3.6 p408ff Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen. **Beispiel3:** Gesucht sund die wärmsten und kältesten Punkte auf der Sphäre $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bei der Temperaturverteilung $T(x, y, z) = xy + xz = T(-x, -y, -z)$, also genügt es, nur Nordhemisphäre anzuschauen. $\partial_x L = y + z + 2\lambda x \stackrel{!}{=} 0$, $\partial_y L = x + 2\lambda y \stackrel{!}{=} 0$ und $\partial_z = x + 2\lambda z \stackrel{!}{=} 0$. Unabhängig von λ geben die letzten beiden Gleichungen aus Symmetriegründen $y = z$. So ist die erste Gleichung $2y + 2\lambda x = 0$. Dies bedeutet mit der letzten Gl $x + 2\lambda y = 0$. Daher $y^2 = \frac{x^2}{2}$. Mit der Nebenbedingung bekommt man $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $y = z = \pm\frac{1}{2}$. Für $T = xy + xz > 0$ hat man die Punkte $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Für $T = xy + xz < 0$ hat man die Punkte $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Oder formal durch Lösung von $L\vec{x} = \vec{0}$. $L = \begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}$

mit det $L \stackrel{!}{=} 0$ mit $\alpha = 2\lambda$ gibt Gauß-Algorithmus $(\alpha^2-1)^2-1 \stackrel{!}{=} 0$ gibt $\alpha_\pm = \pm\sqrt{2} = 2\lambda_\pm$ liefert diegleiche Lösung. Beachte, dass det $L = 0$ Lösungsschar gibt, durch die Nebenbedingung erst bestimmt wird. Einsetzen der Nebenbedingung führt zur gleichen Lösung: $T(y,z) = (y+z)\sqrt{1-y^2-z^2}$. Auf Kreis bei $x = 0$, also $y^2+z^2 = 1$ ist $T(x,y,z) = 0$, also keine Extrema. Aus $\partial y T = \sqrt{1-y^2-z^2} - \dfrac{(y+z)y}{\sqrt{1-y^2-z^2}} \stackrel{!}{=} 0$ gibt $2y^2+z^2+zy = 1$. $\partial z T = \sqrt{1-y^2-z^2} - \dfrac{(y+z)z}{\sqrt{1-y^2-z^2}} \stackrel{!}{=} 0$ gibt $2z^2+y^2+zy = 1$. Dies bedeutet $z = y = \pm\dfrac{1}{2}$. **Beispiel4:** Es ist das Volumen des größten Quaders mit achsparallelen Kanten innerhalb eines Ellipsoids $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1$ zu bestimmen. $V_\square(x,y,z) = 2x2y2z = 8xyz$ mit Nebenbedingung $g(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1 = 0$ gibt $L = 8xyz + \lambda\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)$. $\partial_x L = 8yz + 2\lambda\dfrac{x}{a^2} \stackrel{!}{=} 0$ mal x, $\partial_y L = 8xz + 2\lambda\dfrac{y}{b^2} \stackrel{!}{=} 0$ mal y, $\partial_z L = 8xy + 2\lambda\dfrac{z}{c^2} \stackrel{!}{=} 0$ mal z, gibt $-4xyz = -\dfrac{x^2}{a^2}12xyz$ bedeutet $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \dfrac{c}{\sqrt{3}}$. Also $V = \dfrac{8\sqrt{3}}{9}abc$. **Leupold, Conrad, Völkel, Große, Funke, Nickel, Mende: Analysis für Ingenieure** 1971 Kap13.5 Extrema von Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher p402ff; Furlan: Das gelbe Buch 2, Kap4.6 Extrema mit Nebenbedingungen p105ff; Lang & Pucker: Math Methoden der Physik 1998[2] Kap3.5.2 Lagrange'sche Multiplikatoren p104ff; Arens et al.: Mathematik 2012[2] Kap35.2 Optimierung unter Nebenbedingungen p1204ff Merziger, Mühlbach, Wille, Wirth: Formeln+Hilfen zur höheren Mathematik 2001[4] p132ff;

Dorling: Energy-Momentum Conservation for Collision, Creation, and Annihilation Processes: Geometrical Derivation from a Very Simple Classical Action Principle, AmJPhys38 p1023 1970.

Lagrange 1. Art für N Koordinaten bei k Zwangsbedingungen $g_k(q_1,\ldots,q_{3N},\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{3N})$: $\mathcal{L}$ hängt im $\mathbb{R}^3$ von allen $3N$ Koordinaten und $3N$ Geschwindigkeiten ab! Die Anzahl der Lagrange'schen Multiplikatoren k ist gleich der Anzahl aller Zwangsbedingungen! Z_j ist generalisierte Zwangskraft, die die Einschränkung der Koordinate q_j erzwingt oder zumindest die Bewegung von q_j beeinflusst. Die Bewegungsgleichungen ergeben sich durch **Elimination der Multiplikatoren** λ_i! Erst zum Schluss werden die Zwangsbedingungen in die Bewegungsgleichungen eingesetzt!

$$\mathcal{L} = T - V + \sum_{i=1}^{k}\lambda_k g_k \text{ mit } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \text{ oder } \mathcal{L} = T - V \text{ mit } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_j} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\left[\frac{\partial g_i}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial g_i}{\partial\dot{q}_j}\right] = Z_j$$

mit $j = 1,\ldots,3N$. Hamel in HdP5 1927; Hamel: Grundbegriffe der Mechanik 1921 alle Ideen bis zur ART verbal ohne analyt. Mechanik; Dugas: History of mechanics 1968; Feldmeier: Mechanik Kap7.6 p145f; **Schmutzer: Theoretische Physik** 1989; Rebhan: Mechanik p165f; Rezept: 1. Wahl von $3N$ Koordinaten und Zwangsbedingungen $g_k(q_1,\ldots,q_{3N},\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_{3N})$) Zwangskräfte notieren: $\vec{Z} = \lambda\,(\mathrm{grad}_q g - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{grad}_{\dot{q}} g)$ oder $Z_j = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\dfrac{\partial g_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\,a_{ij}$ für $j = 1,\ldots,3N$. 2. $\mathcal{L}$ als Funktion von $6N$ Koordinaten. 3. Berechne alle $3N$ Euler-Lagrange-Bewegungsgleichungen. **4. Erst jetzt Zwangsbedingungen in die Bewegungsgleichungen einsetzen!** Anderenfalls wird Dynamik unterschlagen! Gegebenenfalls Erhaltungsgrößen in Bewegungsgleichungen substituieren. 5. Eliminiere die Multiplikatoren.

Nebenbedingungen = Zwangsbedingungen, Randbedingungen: Goldstein Kap1.3 **holonome = ganzgesetzliche** auch zweiseitige $f(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\ldots,t) = 0$. **Nichtholonome = nicht ganzgesetzliche** als **Ungleichung = einseitige Nebenbedingung** $g(r) = r^2 - a^2 \geq 0$, falls Perle **auf** Kugel oder mit $g(z) = z - h = 0$ Perle auf Tisch, oder differenzieller Zusammenhang, wie $g(q,\dot{q},t) = 0$. Explizite Zeitabhängigkeit - **rheonome = fließende Nebenbedingung** bei Perle auf von außen zeitlich vorgegeben bewegtem Draht $g(t) = \varphi t - \omega_0 = 0$. Kuypers: Mechanik; Zwangskraft auf Perle an der konstant rotierenden Stange ist rheonome Zwangsbedingung $g_2(\phi,t) = \phi - \omega t$, die azimutale Zwangskraft $\vec{Z}_\phi = \lambda_2\mathrm{grad}\,g_2 = \dfrac{\lambda_2}{r}\hat{\phi}$ gibt. **Beachte den azimutalen Gradienten mit dem ρ im Nenner, der eine Kraft darstellt! Anders in der ELG, wo nur parziell abgeleitet wird, was auf ein Kraftmoment/ Drehimpuls führt.** Perle auf

geneigter Stange mit $\tan\alpha = -\frac{r_\perp}{z}$, also $g_1(\rho,z) = \rho + z\tan\alpha$. **Weg1 NII:** Man sei die Perle auf diesem seltsamen Karussell mit konstanter Drehzahl ω, die der Schwerkraft $-gm$ und der Fliehkraft $mr_\perp\omega^2$ ausgesetzt ist. Die Lotabweichung der nach unten zeigenden Speiche sei α: Radiale Schwerkraftkomponente $mg\sin\alpha$. NII ist $m\ddot{r}_\perp = mg\sin\alpha + mr_\perp\omega^2$. **Weg2 ELG2:** # Zwangsbedingungen =2. f = #Freiheitsgrade =1. Wähle Kugelkoordinate r, also Abstand vom Ursprung als **verallgemeinerte Koordinate**. Wegen $\rho = r\sin\alpha$ und $z = -r\cos\alpha$ und $\dot{\varphi} = \omega$ folgt aus $L(\rho,\dot{\rho},z,\dot{z}) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2 + \dot{z}^2) - mgz$ die Lagrangefkt $L(r,\dot{r}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha) + mgr\cos\alpha$. Die **kinetische Energie** $T(r,\dot{r}) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin^2\alpha)$ ist **keine homogene Funktion der Geschwindigkeit**. Daher ist die Energie des Systems keine Erhaltungsgröße, auch wenn $\frac{\partial L(r)}{\partial t} = 0$. **Bewegungsgleichung** $\ddot{r} - r\Lambda^2 = g\cos\alpha$ mit $\Lambda = \omega^2\sin^2\alpha$ **Weg3 ELG1:** $L = \frac{m}{2}(\dot{r}_\perp^2 + r_\perp^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) - mgz$ gibt ELG1 mit $m\ddot{r}_\perp = mr\dot{\phi}^2 + \lambda_1$, $2m\omega r\dot{r}_\perp = \lambda_2$ und $m\ddot{z} = -mg + \lambda_1\tan\alpha$. Eliminierung von λ_1 gibt $\ddot{z} - \Omega^2 z = -g\cos^2\alpha$ mit $\Omega = \omega\sin\alpha$. Mit $r(0) = \dot{r}(0) = 0$ ist $z(t) = \frac{g}{\omega^2}\cot^2\alpha(1-\cosh\Omega t)$ oder $r_\perp(t) = \frac{g}{\omega^2}\cot\alpha(\cosh\Omega t - 1)$. Daher $\vec{Z}_\phi = \frac{\lambda_2}{r_\perp}\hat{\phi} = \frac{2m}{r_\perp}\omega r\dot{r}_\perp\hat{\phi} = \frac{2mg^2}{r_\perp\omega^2}\cot^2\alpha\sin\alpha\sinh\Omega t(\cosh\Omega t - 1)$ Arbeit pro Umlauf $T = 2\pi/\omega$ ist $W = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi r_\perp\lambda_2$. Hier L nicht explizit von der Zeit abhängig. Die Lösung $\rho(t) = \rho_0\cosh\omega t$ gibt aber $E(t) = \frac{m}{2}\rho_0^2\omega^2(1+\sinh^2\omega t)$. Siehe aber Seite 349. $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ bedeutet also nicht Energieerhaltung! Stephani & Kluge: Mechanik p86 Kap3.84; Greiner 2 Beispiel 15.6 p308; Aber $\mathcal{L}(t)$ kann auch vom Antrieb kommen, was nicht als Zwangsbedingung gilt, wenn er nicht unmittelbar auf eine Koordinate geht, da er nicht die Anzahl der unabh Koordinaten einschränkt. Perle auf ruhendem Draht **skleronome = starre** Nebenbedingung/Zwangsbedingung. Wenn sich der Draht aber nur als Reaktion auf die Bewegung der Perle bewegt, so skleronom. Aber rollendes Rad führt auf **nichtholonome** Zwangsbedingung, Goldstein: Klassische Mechanik 2006[3] p12, Kuypers 48f: Radradius/Achsabstand von x-y-Ebene a, Radgeschwindigkeit $v = a\dot{\phi}$, also $v\,\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}\phi$ mit dem Raddrehwinkel ϕ gibt die Radachsen- oder Rad-Ebenen-Berührungspunktgeschwindigkeit $\dot{x} = v\sin\theta$, $\dot{y} = -s\cos\theta$ mit dem Polarwinkel θ in der x-y-Ebene und somit die **differenzielle Zwangsbedingung**: $\mathrm{d}x - a\sin\theta\,\mathrm{d}\phi = 0$, $\mathrm{d}y + a\cos\theta\,\mathrm{d}\phi = 0$.

$h(q,\dot{q}) = H(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L} = p\dot{q} - [L_0(q,t) + L_1(q,t)\dot{q} + L_2(q,t)\dot{q}\dot{q}] = T + V = E$ **für skleronome, holonome Zwangsbedingungen, ruhende Koordinaten, konservative Kräfte**, denn dann gilt $L_2\,\dot{q}\dot{q} = T$ und $L_0 = -V$. (Goldstein Chap8; Kuypers Kap5.4 & 15.3; Jose & Saletan Chap2.2 Perle auf Draht Example 2.2.2). Hill: Hamilton's principle and the conservation theorems, RMP 23 1951 p253ff; Oder: $H = T + V$ ist die totale Energie, wenn die Transformationsgleichungen, die die **generalisierten** Koordinaten definieren: $\vec{x}_m = \vec{x}_m(q_1,\ldots q_f,t)$ **nicht explizit** von der Zeit abhängen, und wenn das **Potenzial geschwindigkeitsun**abhängig ist. $\dot{H} = H_t = -\mathcal{L}_t$ - Hamiltonfunktion genau dann Erhaltungsgröße, wenn H und $\mathcal{L}$ nicht explizit von Zeit abhängen. $T(\dot{x}) = m/2\dot{x}^2$ ist wegen $T(a\dot{x}) = m/2(a\dot{x})^2 = a^2m/2\dot{x}^2 = a^2T(\dot{x})$ **homogene Fkt 2. Ordnung**. Daher gilt $\dot{\vec{x}}\cdot\frac{\partial T(\dot{\vec{x}})}{\partial\dot{\vec{x}}} = 2T(\dot{\vec{x}})$ oder $\dot{\vec{x}}\cdot\frac{\partial T}{\partial\dot{\vec{x}}} = 2T$. Wegen $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = T(\dot{q}) - V(q)$ ist $E = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{\partial(T-V)}{\partial\dot{q}}\dot{q} - T(\dot{q}) + V(q) = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}} - T + V = 2T - T + V = T + V$. Wenn man so klar gestellt hat, dass $E = \left(\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \mathcal{L}$ die Gesamtenergie ist, so gilt der Energieerhaltungssatz $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_i\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i}\right] - \left[\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\dot{q}_i + \cancel{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\ddot{q}_i}\right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\right] \overset{\text{ELG}}{=} -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = 0$, falls die Bewegung den Euler-Lagrange'schen Gln folgt und $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = \mathcal{L}_t = 0$ ist, die Lagrange-Funktion eine **homogene Funktion der Geschwindigkeiten** ist und nicht explizit von der Zeit abhängt. Siehe aber Perle auf getriebenem Draht auf Seite 349. Die Identifizierung von H als Gesamtenergie und H als Erhaltungsgröße sind aber i.a. zwei verschiedene Sachverhalte, die nicht miteinander verknüpft sind Jose & Saletan p72. Perle auf Draht. **Vorteile der Hamiltonfunktion:** 1. Phys. Bedeutung oft Energie. Bis auf additive Konstante bestimmt, aber L nicht, siehe **Nichtstandard-Lagrange-Funktionen**. 2. Bewegungskonstante stets als Symmetrie herkommend betrachtbar. 3. $L \to H$ H hat mehr Symmetrie. 4. kanonische Quantisierung 5. Geometrische Zusatzstruktur: Symplektisch. Details siehe Schottenloher p136. **Spivak: Physics for mathematicians. Mechanics I** 2010 p604 Kap20;

Totales oder vollständiges Differenzial verallgemeinert den **Ableitungsbegriff** von Abbildung über einer Dimension auf beliebige Dimensionen des Definitionsbereichs = **Riemanns Idee n-ausgedehnter Größen** = lineare Näherung einer Funktion $f(\vec{x})$ mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, die von mehr als einer Variablen abhängt. Frage: In welche Richtung $\mathrm{d}\vec{x}$ muss ich im Definitionsbereich wandern, damit ich an Höhe gewinne? Antwort ist $\mathrm{d}h = \operatorname{grad} h \cdot \mathrm{d}\vec{x} > 0$. Ganz allgemein ist eine Lagrange-Funktion zu formulieren. MRT-Bild wird auf dieser Basis berechnet. Skizze zum Fächenzuwachs $\mathrm{d}A(x, \mathrm{d}x, y, \mathrm{d}y) = \operatorname{grad} A \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \frac{\partial A}{\partial x}|_{x,y}\mathrm{d}x + \frac{\partial A}{\partial y}|_{x,y}\mathrm{d}y = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y < A' - A = (x + \mathrm{d}x)(y + \mathrm{d}y) - xy = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ bei einem **Rechteck** $A = xy$ zeigt, dass das **fehlende oder vernachlässigte Zuwachstückes** $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ von **höherer Ordnung** ist =**Unterm Mikroskop sieht alles linear aus, wenn man Fraktale ignoriert**. Anwendung Zustandsfunktionen der Thermodynamik $F(T, V) = U - TS$. Nickel: LB der Thermodynamik. Eine verständliche Einführung 1995 p305f; **Frage: Was passiert mit den Eigenschaften eines Dings, wenn ich was ein bisschen ändere?** Geht nur, wenn $f(\vec{x})$ paarweise den Satz von Schwarz erfüllt: $\partial_i\partial_j f(\vec{x}) = \partial_j\partial_i f(\vec{x})$. $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t + \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$ beschreibt die Änderung von $f(t, x, y, z)$, wenn t, x, y, z **unabhängig voneinander** geändert werden. **Warnung:**

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}, \quad G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{40}$$

erfüllen Schwarz mit $F_{xy} = \dfrac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2+y^2)^3} = F_{yx}$, ist aber nicht stetig! Denn mit der Annäherung an den (0,0) auf der Winkelhalbierenden ist $\lim_{(x,x)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+x^2} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{m}{m+1} = \lim_{(x,mx)\to(0,0)} \dfrac{mx^2}{x^2+m^2x^2}$ auf Geraden mit $y = mx$. Bressoud p172, p184; Parzielle Ableitbarkeit nicht hinreichend für Ableitbarkeit. Ohne die Stetigkeit der zweiten Ableitungen gilt der Satz im Allgemeinen tatsächlich nicht. **Gegenbeispiel**, für Satz von Schwarz ist

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{41}$$

Bei dieser Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existieren die zweiten partiellen Ableitungen auf ganz $\mathbb{R}^2$, aber es gilt $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(0,0) = 1$ und $\dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} f(0,0) = -1$. Amann & Escher: Analysis II 2006[2] p192; **Implizite Ableitung** liefert die Dgl: $x^2 + y^2 = 1$ gibt $2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y = 0$ und per Rechnung mit kleinen Größen $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = -\dfrac{x}{y}$. Begründung der impliziten Ableitung durch totales Differenzial mit $0 \overset{!}{=} \mathrm{d}f(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y = 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y$.

Die **Variation** von $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ fragt aber spezieller nach zwar auch infinitesimaler, jedoch zeit**un**abhängiger Änderung $\delta q(t)$ von q. Daher folgt aus der Änderung δq die Änderung von $\dot{q}$ um $\delta\dot{q} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q)$, und t wird nicht geändert $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}t) = (\mathrm{d}q, \mathrm{d}\dot{q}, \mathrm{d}t) = (\delta q, \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q), 0)$! Die **Variation** von $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$ ist daher im Unterschied zum totalen Differenzial $\delta\mathcal{L} = \dfrac{\partial f}{\partial q}\delta q + \dfrac{\partial f}{\partial \dot{q}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q)$, weil die Änderungen der Argumente **nicht unabhängig voneinander** erfolgen. Die Änderungen über die Zwängen gekoppelt!

Das totale Differenzial $\mathrm{d}f(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ im Punkt $p \in M$ ist eine lineare Abbildung, die jeder Tangenzialrichtung $c \in T_pM$ die Richtungsableitung in diese Richtung zuordnet. Das totale Differenzial selbst ist Element des Kotangezialraumes, T_p^*M, der dual zum Tangenzialraum ist. Siehe Seite 185.

Sei $f(u, v) = u^4\, v^2$ oder $g(x, y) = e^{x^2}\, \sin(y)$.

x und y seien ihrerseits zeitabhängig: $x(t) = \ln(t + 1)$ und $y(t) = t^2$. Geben Sie die totale Zeitableitung von $z = e^{-x} \cos y$ an.

Fehlerfortpflanzung für Abschätzung des Größtfehlers. Die Messfehler bei der Messung von Länge, Breite und Höhe eines Aquariums seinen $\Delta L, \Delta B$ und ΔH. Wie groß ist der absolute Fehler des Volumens? Wie

berechnet sich der Relativfehler des Volumens? Die **Wirkleistung** für einen Ohm'schen Widerstand ist durch $P = \frac{U^2}{R}$ gegeben. Berechnen Sie das totale Differenzial der Wirkleistung $\mathrm{d}P$. Die Messung der Spannung ergibt 230 V bei einer Ablesegenauigkeit von ± 5V. Der Widerstand betrage 100 Ω, sein Relativ-Fehler 10 %. Wie groß sind der absolute und der relative Fehler der Wirkleistung?

Berechnen Sie das totale oder vollständige **Differenzial der Gesamt-Energie** eines reibungslos schwingenden Federschwingers. Schmalz: **Federpendel nichtideal** PdNPiS Bd50 2001 H6 p45-47; Geben Sie die totale Ableitung der Gesamt-Energie bezüglich der Zeit an. Benutzen Sie Newton II für die Feder oder alternativ die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für den Federschwinger mit $\omega^2 = \frac{k}{m}$, um zu einer Aussage zur zeitlichen Entwicklung der Gesamt-Energie zu kommen.

Impulssatz $\dot{\vec{p}} = \vec{F} = \vec{0}$. Wenn aber em Kräfte wegen $\vec{A}$ und φ mitspielen, so ist Actio = Reactio verletzt, denn dies unterstellt absolute und instantane WW = absolute Zeit und absolute Simultanität, die bei Wirkung über Distanz wegen endlicher Lichtgeschwindigkeit nicht geht, also die Newton'sche **Fernwirkungstheorie** $c = \infty$, und $p_x = m\dot{x} + qA_x = \text{const.}$ Goldstein: Mechanik; Ole Römer: Unpünktlichkeit der Io-Finsternis bedeutet endlichei Lichtgeschwindigkeit wegen Retardierung $t_{ret} = \frac{2\mathrm{AE}}{c}$ Herrmann: Vom Schattenstab = Gnomon zum Riesenspiegel 1978 p116f; Gnomon = Schattenstab, Mauerquadrant, Meridian = Mittagslinie; Tuinstra: Romer and the finite speed of light, Physics Today 57 2004 H12 p16f; Sanders: Die Lichtgeschwindigkeit. Einführung und Originaltexte 1965, 1970; **Mach: Populärwissenschaftliche Vorlesungen** 1896 Kap V; Mach: Die Analyse der Empfindungen und das Verhältniss des Physischen zum Psychischan 1886; Mach: Erkenntnis und Irrtum 1905; D̃uhem: Ziel und Struktur der physikalischen Theorien 1906, 1998;

Endliche Lichtgeschwindigkeit ist für die Newton'sche Mechanik ein Problem. Annahme konservativer Kräfte - also keine Anomalien wie em Kräfte. Geschwindigkeit werde nicht von Verschiebung des Koordinatenursprungs beeinflusst. Kuypers p46; Landau & Lifschitz: Mechanik §7; **Fließbach: Mechanik** p90; **Jelitto: Mechanik II** 1995[3] p207 **Homogenität des Raumes** heißt $\mathrm{d}\mathcal{L} = 0$ bei Ortsänderung $\mathrm{d}q_k = \epsilon$ und bedeutet **Gesamtimpulserhaltung: Wo ein Experiment** gemacht wird, ist unwesentlich. **Beweis Impulserhaltung aus Homogenität des Raumes**: Für reale Bahn gilt per Variationprinzip $\mathrm{d}\mathcal{L} = 0$, also sollte simultane Verschiebung des Raums um ϵ die Lagrangefunktion nicht berühren! Wegen instantaner Verrückung ist auch $\mathrm{d}t = 0$. Geschwindigkeiten sind ebenfalls nur auf relative Abstände bezogen, also $q \dot{+} \epsilon = \dot{q}$. Lagrange-Funktion sei immun $\mathrm{d}\mathcal{L} = 0$ gegen instantane $\mathrm{d}t = 0$ Versuchsortverschiebung in Raum-Richtung $\hat{e}_k$ gemäß $\mathrm{d}q_k = \epsilon \neq 0$ und $\mathrm{d}\dot{q}_k = 0$. $0 = \mathrm{d}\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \mathrm{d}t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \epsilon \overset{\mathrm{ELG}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \epsilon$ gibt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0$ oder $p_k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.}$ **Invarianz vs Erhaltung:** Neuenschwander: Emmy Noether's Wonderful Theorem 2011 p4, **Invarianz** basiert auf dem Vergleich einer Größe beim **Übergang zwischen Bezugssystemen**. Invariant = eine Größe ändert sich nicht bei **Koordinatentransformation = passive Transformation**. PJ16 2017Nr11 p62. Nach **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p5, 15 die einzig sinnvolle Perspektive auf physikalische Größen und Idee der Kovarianz; **Erhaltung** vergleicht eine Größe vor und nach Stoß, Reaktion oder während eines Vorgangs innerhalb **ein und desselben Bezugssystems**. **Noether-Theorem setzt Erhaltung und Invarianz in Beziehung, also Erhaltung und Symmetrie. Bewegung:** Betrachte infinitesimale Verschiebung des **Realitätsraumes** = **aktive Transformation**, also ALLER Punkte des Systems in beliebige Richtung $\hat{n}$: $\vec{r} \to \vec{r}'_k = \vec{r}_k + \epsilon\hat{n}$, $t \to t' = t$, also Verrückung $\delta\vec{r}_k = \epsilon\hat{n}$ selbst hat **keine Geschwindigkeit** $\delta\dot{\vec{r}}_k = \vec{0}$ und $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(\vec{r}'_k, \dot{\vec{r}}'_k, t') = \mathcal{L}(\vec{r}_k + \epsilon\hat{n}, \dot{\vec{r}}_k, t)$. Die differenziellen Verrückungen der Bahn δq bleiben von **kleinen Veränderungen der unabhängigen Koordinaten** $q_i \to q_i + \epsilon K_i(q)$ unberührt: $\mathrm{d}\vec{r}'_k = \mathrm{d}\vec{r}_k$. Wenn eine räumliche Verschiebung die Lagrange-Funktion nicht ändert (abgeschlossenenes System, kein äußeres Feld), also von ihr gar nicht abhängt, so bleibt der Impuls erhalten. **Morin: Introduction to Classical Mechanics** p236 Eines der schönsten und nützlichsten Theoreme der Physik verknüpft die beiden Konzepte **Symmetrie** und **Erhaltungsgröße**. Für jede Symmetrietransformation von $\mathcal{L}$ (meint: Wenn Koordinate ein wenig abgeändert $q_i \to q_i + \epsilon K_i(q)$, dann bleibt $\mathcal{L}$ oder ergänzt um die totale Zeitableitung einer nur

vom Ort q und der Zeit t abhängigen Funktion $M(q,t)$, also $\mathcal{L}+\dot{M}(q,t)$ in erster Ordnung ungeändert) gibt es eine Erhaltungsgröße (meint Größe, die sich in der Zeit nicht ändert). Alle diese Symmetrietransformationen, die $\mathcal{L}$ im obigen Sinne nicht ändern oder die **Kovarianz der Euler-Lagrange-Ableitung** sichern, bilden eine **Symmetrie-Gruppe**. Beweis: $\mathcal{L}$ sei invariant wegen Variation $=0$ in erster Ordnung von ϵ bei Koordinatentransformation

$$0=\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\epsilon}=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial\epsilon}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial\dot{q}_i}{\partial\epsilon}=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i}K_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{K}_i\overset{\text{ELG}}{=}\sum_i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\right)K_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}\dot{K}_i=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}K_i\right)$$

Also **Impulserhaltung** mit **Erhaltungsgröße** $P(q,\dot{q})=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}K_i(q)$. **Beispiel1:** $\mathcal{L}=m/2(5\dot{x}^2-2\dot{x}\dot{y}+2\dot{y}^2+C(2x-y))$, $K_x=1,K_y=2$. $P(x,y,\dot{x},\dot{y})=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}K_x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}K_y=3m(\dot{x}+\dot{y})$. **Beispiel2:** Wurf $\mathcal{L}=m/2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz$ ist invariant unter Translation $x\to x+\epsilon$, $y\to y+\epsilon$, also x,y **zyklische oder ignorable Variablen**, bedeutet: keine Kraftwirkung in x,y-Richtung wegen $F=-\frac{\partial V(z)}{\partial x}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}=0$. $\mathcal{L}$ hat zwei Symmetrien: I) $K_x=1,K_y=0,K_z=0$ und II) $K_x=0,K_y=1,K_z=0$. Die x- und y-Komponenten des linearen Impulses $P_I(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}K_x+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}K_y+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{z}}K_z=m\dot{x}$ und $P_II(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=m\dot{y}$ sind Erhaltungsgrößen! **Dynamische Variable** $A(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)$ **Erhaltungsgröße**, falls totale Ableitung nach Zeit für **alle Zeiten** verschwindet $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=0$. Sei $F(q_i,p_i,t)$. Die Zeitentwicklung der Observablen F wird durch die Hamilton-Funktion gemäß Zeitableitung des totalen Differenzials der Funktion $F(q,p,t)$ geregelt, Calkin,

$$\mathrm{d}F=\partial_qF\mathrm{d}q+\partial_pF\mathrm{d}p+\partial_tF\mathrm{d}t\to\dot{F}=[F,H]_{q\,p}+F_t,\quad\dot{x}=\{x,H\},\quad\dot{p}=\{p,H\}$$

F Erhaltungsgröße oder Konstante der Bewegung, falls nicht explizit von Zeit abh. und Poissonklammer verschwindet. Lanczos: Die Poisson'sche Klammer in der Quantenmechanik PhysBl31 1975 p301-308; Man beoachtet bei Zentralsymmetrie Erhaltungssätze. Noether: Symmetrie führt auf Invarianten, nicht umgekehrt. **Kurt Sundermeyer: Symmetries in Fundamental Physics** 2014; Leubner & Marte: Unified treatment of canonical and Noether symmetries in the analytical mechanics course, EurJPhys6 1985 22-32 klärt die unterschiedliche Anzahl von Erhaltungsgrößen, die einerseits im **Konfigurationsraum per Noether** und andererseits im **Phasenraum über infinitesimale kanonische Symmetrietransformationen** gefunden werden. **Noether-Theorem: 1-Parameter-Symmetrie liefert immer eine Bewegungskonstante**, reduziert Freiheitsgrade, siehe Saletan & Cromer: Theoretische Mechanik 1974 p93; Fließbach; **Mitter: Mechanik** p163ff; **Neuenschwander: Emmy Noether's Wonderful Theorem** 2011

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}U}{\partial x}=-\lim_{\epsilon\to0}\frac{U(x+\epsilon)-U(x)}{\epsilon}=-\lim_{\epsilon\to0}\frac{\epsilon^s}{\epsilon}=-\lim_{\epsilon\to0}\epsilon^{s-1}=\begin{cases}0 & s>1\quad\text{Impulserhaltung}\\ -1\quad\text{für} & s=0\\ -\infty & s<1\end{cases}\tag{42}$$

Noether-Theorem: Die zeitunabhängige **Lagrange-Funktion** $\mathcal{L}(q,\dot{q})$ eines holonomen Systems sei für alle Werte des parameters s aus einem kontinuierlichen Intervall um $s=0$ gegenüber differenzierbaren und umkehrbaren Koordinatentransformationen $q\to Q=Q(q,s)$ mit der **identischen Bewegung** $Q(q,s=0)=q$ **invariant**, d.h. für alle s gelte $\mathcal{L}(q,\dot{q})\overset{q\to Q}{=}\mathcal{L}(q(Q,s),\sum_{i=1}^f\frac{\partial Q}{\partial q_i}\dot{q}_i)=\tilde{\mathcal{L}}(Q,\dot{Q},s)\overset{!}{=}\mathcal{L}(Q,\dot{Q})$**(*)**. Dann ist die Größe $I_o(q,\dot{q})=\sum_i\frac{\partial\mathcal{L}(q,\dot{q})}{\partial q_i}\frac{\partial Q_i(q,s)}{\partial s}|_{s=0}$ ein Integral der Euler-Lagrange-Gleichungen. Rebhan: Mechanik p186; **Beweis:** Lagrange-Funktion invariant gegenüber $q\to Q=Q(q,s)$, denn aus $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}$ folgt $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial Q}$. Es gilt $\tilde{\mathcal{L}}(Q,\dot{Q})\overset{q\to Q}{=}\mathcal{L}(q(Q(t)),\sum_{l=1}^f\frac{\partial q}{\partial Q_l}\dot{Q}_l+\frac{\partial q}{\partial t},t)=\mathcal{L}(q,\dot{q},t)$. Der neue Impuls ist $\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{Q}_i}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\frac{\partial\dot{q}}{\partial\dot{Q}_i}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\frac{\partial q}{\partial Q_i}$. Mit $\dot{q}=\sum_{l=1}^f\frac{\partial q}{\partial Q_l}\dot{Q}_l+\frac{\partial q}{\partial t}$ ist die neue Kraft ist daher $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{Q}_i}=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\right)\frac{\partial q}{\partial Q_i}+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial q}{\partial Q_i}\right)\overset{\text{ELG}}{=}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial Q_i}+$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\left(\sum_{l=1}^{f}\frac{\partial^2 q}{\partial Q_i \partial Q_l}\dot{Q}_l+\frac{\partial^2 q}{\partial Q_i \partial t}\right)=\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial Q_i}$ Also $\mathcal{L}$ invariant unter der Symmetriegruppe qed. **Parzielle Intergration** von (*) $\tilde{\mathcal{L}}(Q,\dot{Q},s)\stackrel{!}{=}\mathcal{L}(Q,\dot{Q})$ nach s bei festen q_i und $\dot{q}_i$ gibt, weil linke Seite unabh von s die Bedingung $\sum_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s}+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial s}\right)$ ELG$=\sum_i\left[\frac{\partial Q_i}{\partial s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right)+\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial Q_i}{\partial s}\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\left(\sum_i\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s}|_{s=0}\right)}_{=:I_s=\text{Invariante}}=0$

mit ELG $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}_i}=\frac{\partial \tilde{\mathcal{L}}}{\partial Q_i}$ folgt das $\boxed{\textbf{Noether-Theorem } I(x,\dot{x},t)=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial s}|_{s=0}-\frac{\partial F}{\partial s}|_{s=0}.}$ **Bailin & Love: Introduction to gauge field theory** 1994 p18ff; Allgemeiner liefert eine **Lie-Gruppe von Symmetrien** die zugehörige **Momentenabbildung** , welche die Anzahl der Freiheitsgrade des Problems reduziert. Schottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik 1995 Kap7 **Zentralfelder** p86 $F:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ sind **Vektorfelder** F auf dem **Ortsraum** $\mathbb{Q}:=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ der Form $F(q)=\varphi(|q|)\hat{q}$ mit $\varphi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ Harmon Oszillator: $F(q):=-q$ mit $q\in\mathbb{R}^3$. Kepler: $F(q):=-kq(|q|)^{-3}$ mit $q\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Homogenes Feld mit $F=0$. Stetiges Feld Vektorfeld $F:Q\to\mathbb{R}^n$ auf offener Menge Q des R^n **konservativ**, wenn es ein **Gradientenfeld** ist mit $F=-\nabla U$, wobei U eine differenzierbare Funktion U - **Potenzial** genannt - auf Q ist. Gradientenfeld ist Vektor, weil gerade als Richtungsableitung definiert. Das totale Differenzial kann als Multilinearform von Gradient und Linienelement betrachtet werden. In Koordinatenschreibweise wird die Multilinearform mit einem Skalarprodukt zu einer Abbildung und der Gradient hat kovariante Koordinaten, wenn das Linienelement durch kontravariante Koordinaten gegeben ist. Stetiges Zentralfeld immer konservativ. Wegen $E(q,\dot{q})=\frac{m}{2}\dot{q}^2+U(q)$ gilt stets der **Energieerhaltungssatz:**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(q(t),\dot{q}(t))=\frac{\partial E}{\partial q^\mu}\dot{q}^\mu+\frac{\partial E}{\partial v^\mu}\ddot{q}^\mu=<\nabla_q U(q(t)),\dot{q}(t)>+<m\,\dot{q}(t),\ddot{q}(t)>=$$

$=-<F(q(t)),\dot{q}(t)>+<m\,\dot{q}(t),\ddot{q}(t)>=<m\ddot{q}(t)-F(q(t)),\dot{q}(t)>=-<m\ddot{q}(t),\dot{q}(t)>+<m\,\dot{q}(t),\ddot{q}(t)>=$ 0. **Drehimpulserhaltung bei Zentralsymmetrie** mit **Newton'scher Bewegungsgleichung** gibt $m\ddot{\vec{q}}=F(\vec{q})=GmM\vec{q}/q^3$ und somit $\dot{L}=(\vec{q}\times\dot{m\,\vec{v}})=\dot{\vec{q}}\times m\,\vec{v}+\vec{q}\times m\dot{\vec{v}}=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{q}\times m\ddot{\vec{q}}=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{q}\times\varphi(|q|)\vec{q}=0$. Also $|\vec{L}|/m=|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|=$ const. Aus **differenzieller Leitstrahlfläche** $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{r}|$ folgt der **Flächen-Satz** $\dot{A}=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})$ bedeutet in Polarkoordinaten mit dem Kurven-Parameter t, nicht als Zeit betrachten, $x(t)=\rho(t)\cos\varphi(t)$ und $y(t)=\rho(t)\sin\varphi(t)$ folgt $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})\mathrm{d}t=\rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi$ oder $\mathrm{d}A=\frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x})\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)$. Wo stecken die Symmetrien hinter diesen Erhaltungssätzen? Zentralsymmetrie ist gegen Elementen von Darstellern der SO(3) immun:

$$A_s=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\cos s&-\sin s\\0&\sin s&\cos s\end{pmatrix},\quad B_s=\begin{pmatrix}\cos s&-\sin s&0\\\sin s&\cos s&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

und Schottenloher p142;

Kuypers: Mechanik; Fließbach: Mechanik Kap15 p121; Schmutzer: Symmetrien und Erhaltungssätze der Physik 1972 p56ff;

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}=\dot{p}=\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q},\quad \dot{f}=[f,H]_{q,p}+\frac{\partial f}{\partial t}=[H,f]_{p,q}+\frac{\partial f}{\partial t}$$

Kuypers oder Hand & Finch: Analytical mechanics p172! **Török: Analytical mechanics with introduction to dynamical systems** 2000; Ter Haar: Elements of Hamilton mechanics 1961;

A Motiv: Ohne **Lagrange-Funktion** keine Feldtheorie und keine überzeugende Vorstellung vom allgegenwärtigen Wirken des Variationsprinzips. Ohne **Hamilton-Funktion** keine QM. Fokus auf **kanon Formalismus**, als ergiebiges allgemeines Lösungsverfahren für mechanische Probleme durch $q,p\to Q,P$ also $H\to K$: Transformation von q,p nach Q,P kanonisch, falls die Struktur der Bewegungsgleichungen erhalten bleibt! $\{Q_i,P_j\}_{q,p}=\delta_{ij}$, $\{Q_i,Q_j\}_{q,p}=\{P_i,P_j\}_{q,p}=0$.

Idee der kanonischen Transformation:
a] K eines schon gelösten Problems
b] Falls $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$ und K in Q zyklisch oder ignorabel folgt $P = \alpha =$const. Wegen $\frac{\partial K}{\partial \alpha} = \omega$ gilt $Q = \omega\, t + \beta$ mit $2f$ Anfangsbedingungen.
c] $K = 0$, $Q = \beta =$const und $P = \alpha =$const. **Homogene Transformation a la Dirac:** Zeitkoordinate wird als verallgemeinete Koordinate gleichgeschaltet/gleichgestellt. Mitter: Mechanik p206, Energie und Zeit als zueinander konjugierte Koordinaten 216;

Punkttransformation bezieht sich nur auf die Ortskoordinaten, **kanon Transformation**, als eine der wirksamsten Methoden der Integration von Bewegungsgleichungen, verwischt die Unterscheidung von Ort und Impulskoordinaten zu Gunsten eine mathematisch einfachen Lösung.

Punkttransformation A: bildet bei **Jacobi-Determinante** det $J_A = 1$ **volumentreu und orientierungstreu** ab. Weizel: LB der theoretischen Physik Bd1 1949 p116; Kanon Transformationen sind **volumentreue/flächentreue Abbildungen** des Phasenraumes - die Jacobi-Determinante einer kanon Transformation ist 1. **Transformationen** a] Bewegung = orthogonale Abbildung/ unitäre Transformation = alle Abstände bleiben = starre Transformation $A^{-1} = A^T$, $A^{-1}A = 1$ also det A =1, also **Inhaltstreue = Flächentreue** sowieso. b] **Ähnlichkeitstransformationen** = affine Transformation = Linearität = **Winkeltreue**. c] **projektive Abbildung:** Gerade → Gerade. **krümmungstreu** = verbiegungsfreie Transformation. A] **Inhaltstreue = flächentreue Abbildung** bei det A = 1, zB kanon Transformation = Phasenraumfluss. B] **Topologische Transformation:** morphen ohne Zerreißen, ohne Heftung, Betti-Zahlen bleiben. Isomorhe Transformation. **Betti-Zahlen-invariante** Transformation.

$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt\, (\sum_i p_i \dot{q}_i - H) = 0$, wobei die $p_i(t)$ und $q_i(t)$ unabhängig voneinander variiert werden. Für die gleichzeitige Gültigkeit dieses und des äquivalenten Variationsprinzips für das transformierte System ist es hinreichend, dass sich die Integranden nur bis auf einen konstanten Faktor (d. .h. bis auf eine Skalentransformation) und eine totale Zeitableitung unterscheiden, d.h. $\lambda\,(\sum_i p_i \dot{q}_i - H(q,p)) = \sum_i P_i \dot{Q}_i - H(Q,P) + \frac{dF}{dt}(q,p)$. **Eichinvarianz** der Lagrange-Funktion. Kanonisch (eigentlich lokal kanonisch) heißen gerade die Transformationen, die obige Gleichung mit $\lambda = 1$ erfüllen. Solche mit anderen Koeffizienten werden auch als **extended canonical transformations** bezeichnet und sind immer als Komposition einer kanonischen Transformation und einer Skalentransformation darstellbar, Goldstein. Für diese gilt $\sum_i p_i\, dq_i = \sum_i P_i\, dQ_i + dF$.

$$p\dot{q} - H = P\dot{Q} - K + \frac{dF(q,Q,p,P,t)}{dt}$$

	Q	P
q	$F_1(q,Q)$,$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}$, $P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}$	$F_2(q,P), p = \frac{\partial F_2}{\partial p}, Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}$
p	$F_3(p,Q)$,$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}$, $P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}$	$F_4(p,P), q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, Q = \frac{\partial F_4}{\partial P}$

Erzeugende F_i, G_i, R_i, Φ_i für **identische Trafo** sind $F_2(q,P) = qP$ oder $F_3(Q,p) = -Qp$. **Koordinatenskalierung Streckung/Stauchung** geht mit $F_2(q,P) = \frac{qP}{\alpha}$ oder $F_3(p,Q) = -Qp/\alpha$. **Austausch von Ort und Impuls** erfordert für Kanonizität einen Vorzeichen wechsel: $F_1(q,Q) = qQ$ oder $F_4(p,P) = pP$. Bloßer Variablentausch $P = q$, $Q = p$ erhält zwar z.B. beim harmonischen Oszillator, weil der Hamiltonian eine quadratische **Form** ist, die Bewegungsgleichungen und deren Lösungen, nicht aber die kanonische Struktur. $\{Q,P\}_{qp} = -1$ bedeutet zwar **Volumenerhaltung**, aber eine andere **Raumorientierung**. Man kommt nicht stetig auf $\{Q,P\}_{qp} = 1$. Lanczos: Die Poisson'sche Klammer in der Quantenmechanik PhysBl31 1975 p301-308; Die Eigenschaft einer Transformation, kanonisch zu sein, **hängt nicht von der Gestalt der Hamilton-Funktion ab**, sondern ist von der speziellen Natur des mechanischen Problem ganz unabhängig, Weizel: Bd1 p107. **Kanonische Transformation** $\mathcal{F}$ ist **volumenerhaltende Transformation der verallgemeinerten Koordinaten**, also det$\partial(P,Q)/\partial(p,q) = 1$, speziell für **hamilton'sche Flüsse** oder den **Phasenraum**. Die Jacobi-Determinante kann in diesem Fall auch als **Poisson-Klammer**

$\{P,Q\}_{p,q}=1$ geschrieben werden, die ja auch als **linearer Differenzialoperator** oder zur **Vernichtung der Assoziativität** anti-kommutierender Algebren taugt, siehe Seite 271 und 445. **Beispiel** Finde $F_1(q,Q)$ und $(p,q)\to(P,Q)$ für freien Fall, falls $K(Q,P)=mgQ=H(q,p)=p^2/2m+kq^2/2$. Zeitabhängige Hamiltonfunktion: Sei $H(q,p,t)=H_0(q,p)+\epsilon q\sin\omega t$ gibt $\dot q=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{\partial H_0}{\partial p}$, $\dot p=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\frac{\partial H_0}{\partial q}-\epsilon\sin\omega t$. Finde kanonische Transformation $q,p\to Q,P$ und $H(q,p,t)\to h(Q,P)=H_0(q(Q,P),p(Q,P))$, also Übergang zu zeitunabh Hamitonfunktion! Dann ist **Kovarianz der Hamilton'schen Bewegungsgleichungen** $\frac{\partial h(Q,P)}{\partial P}=\frac{\partial H_0(q,p)}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P}+\frac{\partial H_0(q,p)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P}=-\frac{\partial H_0(q,p)}{\partial p}=-\dot q=\dot Q$ und $\frac{\partial h(Q,P)}{\partial Q}=\frac{\partial H_0(q,p)}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q}+\frac{\partial H_0(q,p)}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial Q}=(-\dot p-\epsilon\sin\omega t)(-1)=\dot p+\epsilon\sin\omega t=-\dot P$. Ansatz: $H(q,p,t)-\epsilon q\sin\omega t=h(Q,P)=H(q,p,t)+\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}$. Gibt $\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}=-\epsilon q\sin\omega t$, bedeutet $F_2(q,P,t)=\frac{\epsilon}{\omega}q\cos\omega t+C(q,P)$. Sei $F_2(q,P,t)=-qP-f(q,t)$. Bedeutet $C(q,P)=-qP$ und $f(q,t)=-\frac{\epsilon}{\omega}q\cos\omega t$? $\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}=-\frac{\partial f(q,t)}{\partial t}=-\epsilon q\sin\omega t$ gibt $f(q,t)=-\frac{\epsilon q}{\omega}\cos\omega t$ oder $F_2(q,P,t)=-qP+\frac{\epsilon q}{\omega}\cos\omega t$. Die kanonische Transformation ist daher $p=\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q}=-P+\frac{\epsilon}{\omega}\cos\omega t$ und $Q=\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P}=-q$. Prüfe $\{Q,P\}_{q,p}=1$. Damit ist $h(Q,P)=H(q,p,t)-\epsilon q\sin\omega t=H_0(q,p)+\epsilon q\sin\omega t-\epsilon q\sin\omega t=H_0(q,p)$. Die Struktur der Hamitonschen Gln bleibt erhalten: $\frac{\partial h}{\partial P}=\frac{\partial H_0}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P}+\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P}=\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial P}=\frac{\partial H_0}{\partial p}=\dot q=\dot Q$ und $\frac{\partial h}{\partial Q}=\frac{\partial H_0}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q}+\frac{\partial H_0}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial Q}=\frac{\partial H_0}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial Q}=\frac{\partial H_0}{\partial q}=-\dot p-\epsilon\sin\omega t=-\dot P$.

Nochmals **Idee der kanonischen Transformation**:

a] Kanonische Gleichungen forminvariant. Fluss gehorcht wieder kanonischen Gleichungen. **Kanonisch = auf bestmögliche Art und Weise.**

b] Topologie des Phasenraums ändern, um einfachere kanonische Gleichungen in neuen Koordinaten zu bekommen.

c] Q_i **ignorabel oder zyklisch** in $K\to P_i=\text{const}\to Q_i(t)=\alpha_i t+\beta_i$ entspricht Reduktion auf Gleichgewichtsproblem = Integration. McCuskey: An introduction to advanced mechanics 1959 p208ff r ignorable Koordinaten bei m FG bedeutet $H(p_{r+1},\dots,p_m;q_{r+1},\dots,q_m;\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ bedeutet $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ konstante Impulse. $\dot p_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}=0$ also $p_k(t)=\alpha_k=\text{const}_k$ mit $k=1,r$ und $\dot q_k=-\frac{\partial H}{\partial p_k}=\frac{p_k}{m}=\frac{\alpha_k}{m}=\text{const}_k$ bedeutet $q_k(t)=\frac{\alpha_k}{m}t+q_{0k}$;

d] $K=0$ entspricht Reduktion auf Anfangsbedingungen.

Dittrich & Reuter: Classical and quantum dynamics 2001[3] p53; Gignoux & Silvestre-Brac: Solved Problems in Lagrangian and Hamiltonian Mechanics 2009 UF 1000 GIG; Esposito, Marmo & Sudarshan: From classical to quantum mechanics. An Introduction to the Formalism, Foundations and Applications 2004;

Erzeugende Funktionen:

$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\dot q_k p_k-H)\,\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot Q_k P_k-\tilde H\right)\mathrm{d}t=0$ also $0=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\dot q_k p_k-\dot Q_k P_k+\tilde H-H\right)\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t=\delta F(t_2)-\delta F(t_1)$ und daher $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}=p_k\dot q_k-P_k\dot Q_k+\tilde H-H$ Wenn F eine Funktion der alten und neuen Koordinaten $F_1(q,Q,t)$ ist, so ist deren totale Zeitableitung $\frac{\mathrm{d}F_1(q,Q,t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F_1}{\partial q_k}\dot q_k+\frac{\partial F_1}{\partial Q_k}\dot Q_k+\frac{\partial F_1}{\partial t}$ und man kann die partiellen Ableitungen von F_1 nach q bzw. Q sowie nach t aus der Zeile vorher direkt ablesen: $\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial q_k}=p_k$, $\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial Q_k}=-P_k$, $\frac{\partial F_1(q,Q,t)}{\partial t}=\tilde H-H$. Aus $\dot p=-\partial H/\partial q,\dot q=\partial H/\partial p$ folgt $\dot P=-\partial H/\partial Q,\dot Q=\partial H/\partial P$. Wir zeigen das für $p=\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial q}$ und $P=-\frac{\partial F_1(q,Q)}{\partial Q}$ wegen $\mathrm{d}p(Q,P)=\frac{\partial p}{\partial Q}\mathrm{d}Q+\frac{\partial p}{\partial P}\mathrm{d}P=\frac{\partial^2F_1}{\partial q\partial Q}\mathrm{d}Q+\underbrace{\frac{\partial^2F_1}{\partial q\partial P}}_{=0}\mathrm{d}P$ folgt sofort

$$\frac{\partial K(Q,P)}{\partial P}=\frac{\partial H(q(Q,P),p(Q,P))}{\partial P}=\frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial P}+\frac{\partial H}{\partial p}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial P}}_{=0}=-\dot p\left(-\frac{\partial Q\partial q}{\partial^2F_1}\right)=\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial q\partial Q}\right)\dot Q\left(\frac{\partial Q\partial q}{\partial^2F_1}\right)=\dot Q$$

Oder: Sei $F = F(q,p,\bar{q},\bar{p},t)$. Weiterhin sei eine der beiden Gleichungen $q = \frac{\partial F}{\partial p}$, $p = -\frac{\partial F}{\partial q}$ erfüllt, sowie eine der beiden Gleichungen $\bar{q} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{p}}$, $\bar{p} = \frac{\partial F}{\partial \bar{q}}$(4), und es gelte $H - \bar{H} = \partial F/\partial t$ (*). Dann erfüllen $q,p,\bar{q},\bar{p}$ die kanonischen Gleichungen. Denn z.B. $\dot{\bar{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{p} \overset{(4)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \bar{q}} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \bar{q}} = \frac{\partial^2 F}{\partial \bar{q} \partial t} \overset{(*)}{=} \frac{\partial (H-\bar{H})}{\partial \bar{q}} = -\frac{\bar{H}}{\partial \bar{q}}$. Die **Vertauschbarkeit von totaler und parzieller Abeitung** folgt aus der Kanonizität der Transformation oder der Invarianz des Phasenraumvolumnens: Für das totale Differenzial der **Erzeugenden** F gilt $\mathrm{d}F = F_q \mathrm{d}q + F_p \mathrm{d}p + F_{\bar{q}}\mathrm{d}\bar{q} + F_{\bar{p}}\mathrm{d}\bar{p} + F_t \mathrm{d}t = -p\mathrm{d}q + q\mathrm{d}p + \bar{p}\mathrm{d}\bar{q} - \bar{q}\mathrm{d}p + F_t\mathrm{d}t = \begin{vmatrix} q & \mathrm{d}q \\ p & \mathrm{d}p \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bar{q} & \bar{\mathrm{d}}q \\ \bar{p} & \bar{\mathrm{d}}p \end{vmatrix} + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t = |\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{x}| - |\vec{\bar{x}} \times \mathrm{d}\vec{\bar{x}}| + \frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t$ oder $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{|\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{x}|}{\mathrm{d}t} - \frac{|\vec{\bar{x}} \times \mathrm{d}\vec{\bar{x}}|}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial t}$ mit $\vec{x} = (q,p)$ und $\vec{\bar{x}} = (\bar{q},\bar{p})$. Die in den Phasenräumen pro Zeit $\mathrm{d}t$ überstrichenen Phasenraumvolumina ändern zwar ihre Form, aber nicht ihren Inhalt. Der Inhalt des überstrichenen Phasenraumvolumens ändert sich nicht: $\frac{|\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{x}|}{\mathrm{d}t} = 0$! Also $|\vec{x} \times \mathrm{d}\vec{x}| = c =$ **const** und $|\vec{\bar{x}} \times \mathrm{d}\vec{\bar{x}}| = C =$ **Const**. Es gilt daher $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = c + C + \frac{\partial F}{\partial t}$, dh, dass **totale und parzielle Ableitung bis auf eine Konstante zusammenfallen** und daher mit anderen Ableitungen nach $q,p,\bar{q}$ und $\bar{p}$ vertauscht werden können. Obige Überlegung kann **physikalisch verstanden gut werden:** Aus $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = q\dot{p} - \dot{q}p + P\dot{Q} - Q\dot{P} + \frac{\partial F}{\partial t} = \vec{x} \cdot \operatorname{grad} H - \vec{X} \cdot \operatorname{grad} H + \frac{\partial F}{\partial t}$ bei Hamilton-Systemen Trajektorie $\vec{x} = (q,p)$ senkrecht auf Energie-Hyperfläche $H(q,p)$ wegen $q\dot{p} - \dot{q}p = \vec{x} \cdot \operatorname{grad} H = \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = 0$ oder speziell $q\dot{p} - \dot{q}p \overset{p=m\dot{q}}{=} qm\ddot{q} - \dot{q}m\dot{q} \overset{m\ddot{q}=-kq}{=} -(\frac{k}{2}q^2 + \frac{m}{2}\dot{q}^2) = -E =$ const, also **Energieerhaltung**. Spezielle Beispiele siehe Calkin; Fließbach/Walliser p107; Hamel p289; Cromer p208 oder mittels **Poisson-Klammern**

$$[Q,P]_{q,p} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial q_k}{\partial \xi_\beta}\right) = \sum_{i,k=1}^{2n} G_{ik}\frac{\partial Q}{\partial x_i}\frac{\partial P}{\partial x_k}, [Q_i,P_j]_{q,p} = \delta_{ij}, \quad [Q_i,Q_j]_{q,p} = 0, \quad [P_i,P_j]_{q,p} = 0$$

oder nach **Weyl: Classical groups** 1939 in **symplektischer/verflochtener** Schreibweise

$$\dot{\vec{x}} = J\,\nabla_{\vec{x}}H = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\dot{p}_1 \\ -\dot{p}_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial H/\partial q_1 \\ \partial H/\partial q_2 \\ \partial H/\partial p_1 \\ \partial H/\partial p_2 \end{pmatrix} = J\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} = J\operatorname{grad}_{\vec{x}}H$$

$\operatorname{grad}_{\vec{x}}H$ steht senkrecht auf **Energie-Hyperfläche**. J sorgt dafür, dass die Bewegung genau senkrecht dazu, also in der energieerhaltenden H-Isofläche stattfindet. Oder für die Bewegung im Phasenraum $x = (p,q)$ gilt $\operatorname{grad}_x H \cdot \dot{x} = \nabla_x H \cdot f = 0$ bei den Bewegungsgleichungen $\dot{x} = f(x)$, denn $\partial H/\partial p \cdot \dot{p} = -\partial H/\partial p\ \partial H/\partial q$ plus $\partial H/\partial q \cdot \dot{q} = \partial H/\partial q\ \partial H/\partial p$ gleich 0. **Harmonischer Oszillator** $H(q,p) = \frac{1}{2}(q^2+p^2)$. Ter Haar: Elements of Hamilton mechanics 1961; Lichtenberg: Phase-space dynamics of particle 1969 pV Einstein rückte die Idee der Phasenraum-Techniken und der Winkelwirkungsvariablen auf der Solvey-Konferenz 1911 im Zusammenhang mit der Bohr'schen Quantisierung ins Zentrum. Ab 1950 erlebten die Phasenraum-Techniken im Zusammenhang mit Teilchen-Beschleuniger-Strahlen eine Renaissance, PhD 1961 von Lichtenberg; **Phasenraumfluss** und **Gradient der Hamiltonfunktion**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = J\operatorname{grad} H = \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} \overset{\text{kanon BewGl}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{-\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} \overset{H(q,p)=(q^2+p^2)/2}{=} \begin{pmatrix} p \\ -q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

wegen $\ddot{q} = \dot{p} = -q$ bedeutet $\ddot{q} + q = 0$ mit Lösung $q(t) = q_1 \cos t + q_2 \sin t$ und $\dot{q} = p(t) = -q_1 \sin t + q_2 \cos t$. Mit den Anfangbedingungen $q_0 = q(0)$ und $p_0 = p(0)$ folgt $q_0 = q(0) = q_1$ und $p_0 = p(0) = q_2$. Bedeutet $q(t) = q_0 \cos t + p_0 \sin t$ und $p(t) = -q_0 \sin t + p_0 \cos t$. Die Lösung als Matrixgleichung mit dem Startvektor der Anfangbedingung ist eine Drehung = orthogonale Transformation (erhält neben Inhalt auch Metrik/Winkel) Daher ist Lösung **aktive Drehung**, im Uhrzeigersinn um den Ursprung läuft, gemäß

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \cos t + p_0 \sin t \\ -q_0 \sin t + p_0 \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

Bei $H(q,p) = p^2/2m + kq^2/2$ landet man mit $\omega^2 = k/m$ bei $q(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ und wegen Anfangsbedingung $0 < q_0 = q(0) = a$. Impuls ist $p(t) = m\dot{q}(t) = -q_0\omega m\sin\omega t + m\omega b\cos\omega t$ und wegen Anfangsbedingung $0 < p_0 = p(0) = m\omega b$

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0\cos\omega t + \dfrac{p_0}{m\omega}\sin\omega t \\ -q_0 m\omega\sin\omega t + p_0\cos\omega t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t + \dfrac{1}{m\omega}\sin\omega t \\ -m\omega\sin\omega t + \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

was für $t = 0$ die Einheitsmatrix bedeutet und mit den Anfangsbedingungen harmoniert. Die Flussmatrix hat die Determinante 1 für alle Zeiten t . Die obige Drehmatrix entspricht der passiven Drehung in mathematisch negativer Richtung, weil diese Richtung den physikalischen Phasenraumflüssen entspricht, oder der **passiven Drehung!** mit Bedeutung einer Koordinatentransformation. Aber Fluss senkrecht

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_0\sin t + p_0\cos t \\ -q_0\cos t - p_0\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

senkrecht auf Gradient der Hamiltonfunktion = Energiehyperfläche! Siehe auch Seite 313. **Geometrische Beziehung:** Phasenraumflussrichtung und Gradient der Hamiltonfunktion stehen senkrecht aufeinander $\operatorname{grad} H \cdot \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{p} \\ -q \end{pmatrix} = 0$. **Beispiele für Transport des Einheitsquadrats** = Menge aller Anfangsbedingungen mit den Eckpunkten A, B, C und D gemäß $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: $m = g = 1$ a] **Kräftefreie Bewegung** $H(p) = p^2/2$ also $\dot{p} = 0$ bedeutet $p(t) = p_0$ und $q(t) = q_0 + p_0 t$ gibt die Lösung mit det $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ also volumenerhaltend = kanonische Transformation = Satz von Liouville

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \text{ bedeutet für t=1 } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

bedeutet ein bei der p=0 Kante als Basis verzerrtes Parallelogramm. b] **Freier Fall nach oben** $H(p) = p^2/2 - q$ also $\dot{p} = 1$ bedeutet $p(t) = t + p_0$ und $\dot{q} = p$ also $q(t) = \dfrac{t^2}{2} + tp_0 + q_0$ gibt die Lösung mit det $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ also volumenerhaltend = kanonische Transformation = Satz von Liouville

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t^2/2 \\ t \end{pmatrix} \text{ bedeutet für t=1 } \begin{pmatrix} 1/2 & 1.5 & 2.5 & 1.5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lichtenberg: Phase-space dynamics of particle 1969; **Freier Fall im Phasenraum:** Greiner: Mechanik Bd2 p327 Wegen $H(p,q) = \dfrac{p^2}{2m} + mgq = E = mgq_0$ sind die Phasenbahnen $q(p) = \dfrac{E - p^2/2m}{mg} = q_0 - \dfrac{p^2}{2gm^2}$ Parabeln, die zueinander horizontal um Δq verschoben sind, also überall den gleichen horizontalen Abstand haben. Auch die vertikale Ausdehnung des Parabelsegments bleibt stets Δp. Daher hat das Parabelsegment hat stets die Fläche $\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p \int_{q_1 - \frac{p^2}{2gm^2}}^{q_2 - \frac{p^2}{2gm^2}} \mathrm{d}q = (q_2 - q_1)\int_{p_1}^{p_2} \mathrm{d}p = \Delta q\,\Delta p$.

Spivak: Physics for mathematicians. Mechanics I 2010 Kap19 & 20; **Symplektische Umdeutung in Formenkalkül** $X_H = \sum_i \dfrac{\partial H}{\partial p_i}\dfrac{\partial}{\partial q_i} - \sum_i \dfrac{\partial H}{\partial q_i}\dfrac{\partial}{\partial p_i}$ gibt die **Tangenzialvektoren** $\dot{\gamma}(t) = X_H(\gamma(t))$ in jedem Punkt der Trajektorie $\gamma(t) = (q(t), p(t))$. Die Geschwindigkeit als **kontravariante Komponente** $\dot{q}^\nu$ ist Element des Tangenzialraums/Raums, während der **verallgemeinerte Impuls** als **kovariante Komponente** $p_\nu = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}^\nu$ Element des **Kotangenzialraums** oder Dualraums ist: $\mathcal{H}(p,q) = p_\nu\,\dot{q}^\nu - \mathcal{L}$. Jänich: Math 2 Kap37.2 p320 ; Die **Hamilton-Funktion** $\mathcal{H}(p,q) : T^{|*}K \to \mathbb{R}$ lebt auf dem **Faserkontaktbündel**,

in Koordinaten: $\mathcal{H}(t, q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n)$. Mit der 2-Form $\omega = \sum_i \mathrm{d}q_i \wedge \mathrm{d}p_i \in \Omega$ auf dem **Kotangenzialraum** T^*Q am **Konfigurationsraum** Q und dem **inneren Produkt** i, das aus einem Vektorfeld X und der 2-Form ω eine 1-Form $i(X)\omega$ macht. Die **Hamiltonschen Gleichungen** sind dann zu äquivalent $i(X_H)\omega = \mathrm{d}H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t$. Berndt: Einführung in die Symplektische Geometrie 1998 p6; Guillemin & Sternberg: Symplectic techniques in physics 1996; Variablen oder Transformation dieser kanonisch, falls obige Relationen gelten. Elegante Formalisierung mit $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n}) = (q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n)$ mittels **Lagrange-Klammern**

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\}_{q,p} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial q_k}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial p_k}{\partial \xi_\beta} - \frac{\partial p_k}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial q_k}{\partial \xi_\beta} \right) = \Lambda^{(\xi)}_{\alpha\beta} \equiv \{\xi_\alpha, \xi_\beta\}_x = \sum_{i,k=1}^{2n} G_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial \xi_\beta} \text{ mit } G_{ik} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & \mathbb{O}_n \end{pmatrix}$$

$G = -G^T, G^2 = -\mathbb{I}$ also $GG^T = \mathbb{I}, GG^{-1} = G^T$. det G=+1. **Kanonizität** für die Transformation $x \to X$ ist dann kurz $\Lambda^{(X)}_{\alpha\beta} = \{X_\alpha, X_\beta\}_x = G_{\alpha\beta}$ oder $\Lambda^{(x)}_{\alpha\beta} = \{x_\alpha, x_\beta\}_X = G_{\alpha\beta}$. **Lagrange-Klammern** sind Inverse zu den **Poisson-Klammern**

$$\Pi^{(\xi)}_{\alpha\beta} = [\xi_\alpha, \xi_\beta]_x = \sum_{i,k=1}^{2n} G_{ik}\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial \xi_\beta}{\partial x_k}$$

$(\Lambda\Pi)_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$. Mittelstaedt: Klassische Mech 1995^2 p240; **Poisson-Klammern** sind bilinear $\{f, \lambda g\} = \lambda\{f, g\}$, $\{f, g+h\} = \{f, g\}+\{f, h\}$ und **alternierend** $\{f, g\} = -\{g, f\}$. Feldmeier: Mechanik p178f; Schilcher p58; Mitter: Mechanik p157; G Falk: Über Ringe mit PK, Mat Ann123 1951 p373 und ZPhysik130 1951 p151, $\{L_i, x_j\} = \epsilon_{aij}x_a, \{L_i, p_j\} = \epsilon_{aij}p_a, \{L^2, L_j\} = 0$, denn $\{L^2, L_1\} = \{L_1^2+L_2^2+L_3^2, L_1\} = 2L_1\{L_1, L_1\} + 2L_2\{L_2, L_1\} + 2L_3\{L_3, L_1\} = 0$, wegen $\{L_i, L_{i'}\} = \begin{cases} 0 & i' = i \\ x_ip_k - x_kp_i = -L_j & \text{für } i' = k \\ x_ip_j - x_jp_i = L_k & i' = j \end{cases}$ siehe Landau & Lifschitz: Mechanik §42 Aufgaben, und $\{L_i, (\vec{r}\cdot\vec{p})\} = 0, \{p_i, r^m\} = -mx_i\, r^{m-2}$ klassische Darstellung **Landau & Lifschitz: Mechanik §42**, Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd2 1967 p102, moderne Darstellung **Mittelstaedt: Kassische Mechanik 1995^2 p213f**, p215, p223; Es gilt die **Jacobi-Identität** = Ersatz für die fehlende Assoziativität = $\{f, \{g, h\}\}+\{g, \{h, f\}\}+\{h, \{f, g\}\} = 0$, bedeutet einen Exzessterm $-\{g, \{h, f\}\}$ beim Umklammern $\{f, \{g, h\}\} = -\{g, \{h, f\}\} - \{h, \{f, g\}\} = \{\{f, g\}, h\} - \{g, \{h, f\}\}$. **Beweis** Flügge, Siegfried: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd2 1967 p98 Poissonklammer p99 Goursat-Beweis; siehe **Landau & Lifschitz: Mechanik** p167 und **Mittelstaedt: Kassische Mechanik 1995^2 p213f**; Allgemein definiert man die Poisson-Klammer der Funktionen f und g auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit mit symplektischer Form, die in lokalen Koordinaten gegeben ist durch $\omega = \sum_{ij} \omega_{ij}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^j$ als $\{f, g\} = \sum_{ij} \omega^{ij}\, \partial_i f\, \partial_j g$. Poisson-Klammern lassen sich **algebraisieren**, mit $D_f g := \{f, g\}_{p,q}$ oder besser $D_f(\cdot) := \{f, \cdot\}_{p,q} = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial(\cdot)}{\partial q_k} - \frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial(\cdot)}{\partial p_k} \right)$. Es gilt die Produktregel $D_f(gh) = (D_f g)h + g\, D_f h$ und $D_f g$ ist wegen seiner Linearität ein **Differenzialoperator** = **Poisson-Operator**. Daher ist $[D_f, D_g] = D_f\, D_g - D_g\, D_f$ ein **Differenzialoperator** 1. Ordnung $[D_f, D_g]h = D_{\{f,g\}}h$ = **Lie-Ableitung** = spezielle **Richtungs-Ableitung** eines Vektor- o. Tensorfeldes **in Richtung des Richtungsfeldes** $\vec{V}(\vec{u})$ **der Bewegungsgleichung** $\dot{\vec{u}} = \vec{V}(\vec{u})$. Speziell für konservative dynamische Systeme definiert die **Hamilton-Funktion** mittels der **kanonischen Bewegungsgleichungen** genau dieses spezielle Richtungsvektorfeld Vektorfeld $\vec{V}_H$ und für jede differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ gilt

$$L_{V_H} = \mathcal{V}_H := \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k} \right), \quad L_{V_H} f := \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \right) \equiv \{H, f\}$$

Das Volumenelement $\Omega := \mathrm{d}q_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}q_N \wedge \mathrm{d}p_1 \cdots \wedge \mathrm{d}p_N$ bleibt invariant unter dem Fluss, der durch die Hamilton-Funktion H gegeben ist: $L_{V_H}\Omega = 0$. **Steeb & Kunick: Chaos in dynamischen Systemen** 1989^2 p61ff, 148ff; **Stoop & Steeb: Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen** 2006 p189ff Beispiele; **Euler & Steeb: Continuous**

symmetries, Lie algebras and differential equations 1992 p104ff; Eine differenzierbare Funktion $I(\vec{u}) : U \to \mathbb{R}$ heißt **erstes Integral** von $\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}(\vec{u}) =$ **Richtung der Trajektorie** mit $\vec{u} \in \mathcal{U}$, wenn die **Lie-Ableitung** längs des Vektorfeldes $\vec{V}(\vec{u})$ verschwindet: $0 = L_V I(\vec{u}) \equiv \mathcal{V}(I(\vec{u})) = \vec{V} \cdot \nabla_{\vec{u}} I(\vec{u}) = V_1(\vec{u})\frac{\partial I(\vec{u})}{\partial u_1} + \cdots + V_N(\vec{u})\frac{\partial I(\vec{u})}{\partial u_N} = 0$. Es ist $\mathcal{V} := V_1(\vec{u})\frac{\partial}{\partial u_1} + \cdots + V_N(\vec{u})\frac{\partial}{\partial u_N}$. **Beispiel: Harmonischer Oszillator** $\ddot{x} + x = 0$ gibt die kanonischen Gleichungen $\dot{x} = y$ und $\dot{y} = -x$, linke Seite = Richtungsfeld der Dgl $\dot{\vec{x}} = \vec{V}(\vec{x})$ ist also **Wirbelfeld** mit $\operatorname{rot}\vec{V}(\vec{x}) = -2\hat{e}_z$. Für $m = 1$ ist $p = \dot{x}$. Die Hyperfläche im Phasenraum ist die Energie $H(x,p) = H(x,\dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 = I(\vec{u})$, sie ist Invariante oder erstes Integral wegen $L_V = \mathcal{V} = V_x(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x} + V_y(\vec{y})\frac{\partial}{\partial y}$ und der Energie $H = \dot{x}^2 + x^2 = y^2 + x^2 = I(x,y)$ gibt $L_V(I) = \vec{V} \cdot \operatorname{grad} H = (\vec{V} \cdot \nabla)\, H = \vec{V} \cdot \nabla H = y\frac{\partial H}{\partial x} - x\frac{\partial H}{\partial y} = 0$, d.h, dass das Richtungsfeld $\vec{V}(\vec{x})$ = Trajektorienrichtung stets senkrecht zum Gradienten der Energie-Hyperfläche im Phasenraum ist, also Bewegungungen stets tangenzial zur Hyperfläche oder nur innerhalb der Hyperfläche möglich sind. Siehe **Lie-Algebra** auf Seite 446. Poisson-Klammer invariant gegenüber kanonischen Transformationen.

Wie man einfache physikalische Problemstellungen auch umständlich, kompliziert und uneinsichtig löst: **Hamilton-Jacobi**, aber dafür sofort die **Schrödinger-Gleichung** sieht. Schwarzschild 1873-1916: Zur Quantenhypothese, Sitzungsber der Kgl. Preuß AdW zu Berlin 30. März 1916 QT in Sprache der Himmelsmechanik! Siehe Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien Bd1 1919 p659 Periodische Systeme sind durch lauter zyklische Koordinaten zu beschreiben! Die **zykl Koordinate = kräftefreie Koordinate** kommt im Energieausdruck nicht vor: $E(I_1, \ldots, I_f)$, also $\frac{\partial E}{\partial w_k} = 0$, daher const Frequenz$_k = \frac{\partial E}{\partial I_k} = w_k = \omega_k = \dot{\phi}_k$, dh, $\phi_k(t) = w_k t + \phi_o$, bedeutet ϕ_k ist Umlaufwinkel um eine Achse, für die das Kraftmoment Null ist. Dieser 'Winkel' schreitet aber nicht gleichmäßig in der Zeit voran, sondern bedeutet **überstrichene Fläche!** Die Winkelkoordinate wird durch das lineare Fortschreiten der Zeit definiert. Das geht nur so, indem man das Phasenintegral $I_k = \oint \mathrm{d}q_k p_k$ als Impulskoordinate erklärt und die zu ihr konjugierte Lagekoordinate = Winkelkoordinate durch die Hamilton'sche Bewegungsgleichung, gemäß $\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q}$ aufsucht. Planetenbewegung und Atommechanik also per HJG und Winkel-Wirkungsvariable w_k, I_k! Picht: Vorlesungen über Atomphysik Bd1 1956 p43-46; Schuster: Deterministic chaos 1987 p187ff; Kreuzer: Numerische Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme 1985; **Landau & Lifschitz: Mechanik §49**; Betrachte den Inhalt eingeschlossener Flächen = Wirkung W periodischer Systeme im Phasenraum: Libration, Rotation, freie Bewegung. Wirkungsvariable = $I = W/2\pi = I_0$ = const. Konjugierte Winkelvariable w ist folglich ignorabel = zyklische Variable. Daher $H(\cancel{w}, I)$, kanonische Gleichungen $\dot{I} = -\partial H(I)/\partial w = 0$, bedeutet $I(t) = I_0$ = const und $\dot{w} = \partial H(I)/\partial I = f(I)$ also $\dot{w} = f(I_0) = C$ = const, bedeutet $w(t) = Ct + w_0$. Ein Hamilton'sches System $H_0'(\vec{q},\vec{p})$ ist integrabel, falls man eine kanon Transformation $S(\vec{q},\vec{J})$ von ursprünglich $\vec{q},\vec{p}$ hin zu neuen Variablen $\vec{\vartheta},\vec{J}$ findet: $\vec{q},\vec{p} = \frac{\partial S(\vec{q},\vec{J})}{\partial \vec{q}} \leftrightarrow \vec{J},\vec{\vartheta} = \frac{\partial S(\vec{q},\vec{J})}{\partial \vec{J}}$, so dass die neue Hamilton-Funktion nur noch von den neuen Impulsen $\vec{J}$ abhängt. Bedeutet, dass die dazu nötige kanon Transformation $S(\vec{q},\vec{J})$ Lösung der HJG, also **alter Hamiltonian** $= H_0'\left[\vec{q}, \frac{\partial S(\vec{q},\vec{J})}{\partial \vec{q}}\right] = H_0(\vec{J}) =$ **neuer Hamiltonian** ist. Die Bewegungsgleichungen in den **Wirkungs-Winkel-Variablen** $\vec{J}$ und $\vec{\vartheta}$ sind dann $\dot{\vec{J}} = -\frac{\partial H_0}{\partial \vec{\vartheta}} = 0$ und $\dot{\vec{\vartheta}} = \frac{\partial H_0}{\partial \vec{J}} = \vec{\omega}(\vec{J})$ mit Lösung $\vec{J}$ = const und $\vec{\vartheta} = \vec{\omega}\, t + \vec{\delta}$. **Beispiel harmon Oszillator:** Mit $H_0'(q,p) = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ hat man die HJG $\frac{1}{2}\left[(\frac{\partial S}{\partial q})^2 + \omega^2 q^2\right] = H_0(J)$ bedeutet $p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2}$. Die **Wirkung = geschlossene Fläche/Gebiet G im Phasenraum** $= S = \iint_G \mathrm{d}q\mathrm{d}p \overset{\text{Satz von Stokes}}{=} \oint_G \mathrm{d}q p(q)$ ist das Integral über einen Phasenraum-Zyklus $J = \frac{1}{2\pi}\oint_G \mathrm{d}q\, p = \frac{1}{2\pi}\oint_G \mathrm{d}q\, \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{1}{2\pi}\oint_G \mathrm{d}q\, \sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2} = \frac{H_0(J)}{\omega}$, bedeutet $H_0(J) = J\,\omega$. Die Bewegungsgleichungen in den **Wirkungs-Winkel-Variablen** sind dann $\dot{J} = -\frac{\partial H_0}{\partial \vartheta} = 0$

bedeutet $J = \text{const}$ und $\dot{\vartheta} = \dfrac{\partial H_0}{\partial J} = \omega$ mit der Lösung $\vartheta(t) = \omega\, t + \delta$. Die Rücktransformation per kanon Transformation in die alten Koordinaten gibt $\vartheta = \dfrac{\partial S}{\partial q} = \dfrac{\partial}{\partial q}\int \mathrm{d}q\sqrt{2H_0 - \omega^2 q^2} = \arccos(q\sqrt{\frac{q}{2J}})$, bedeutet $q(\vartheta) = \sqrt{\frac{2J}{\omega}}\cos\vartheta$ und $p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = -\sqrt{2J\omega}\sin\vartheta$. Oder: Aus Wirkungsgleichheit $2\pi I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\vartheta I = S = \oint \mathrm{d}qp = \oint \mathrm{d}q\sqrt{m(2E - kq^2)}$ folgt $I = \dfrac{1}{\pi}\int_{q_{\text{links}}}^{q_{\text{rechts}}}\mathrm{d}q\sqrt{m(2E-kq^2)} = \dfrac{\sqrt{mk}}{2\pi}\left[q\sqrt{\dfrac{2E}{k} - q^2} + \dfrac{2E}{k}\arcsin q\sqrt{\dfrac{k}{2E}}\right]_{q_{\text{links}}}^{q_{\text{rechts}}}$ mit $q_{q_{\text{links/rechts}}} = \pm\sqrt{\dfrac{2E}{k}}$ wegen $H = T + V = \frac{1}{2}(\dfrac{p^2}{m} + kq^2) = E$ für $p = 0$. **Argyris, Haase, Faust, Friedrich: Die Erforschung des Chaos.** Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme 1994 p95ff; Sammlung von Celletti, Ferraz-Mello eds: Periodic, Quasi-Periodic and Chaotic Motions in Celestial Mechanics. Theory and Applications 2009; **Arnold: Klassische Mechanik** 1978; **Involution integrabler Systeme:** Whittaker: A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies 1904 p323; Lichtenberg & Lieberman: Regular an stochastic motion 1983 p23 Integrable Systeme in Involution sichert die Vollständigkeit auch der neuen Impulskoordinaten; Für ein separables System mit f Freiheitsgraden ist die Bewegung periodisch. Jedes Variablenpaar (q_k, p_k) verhält sich wie im eindimensionalen Fall. Siehe Seite 120. Die kanonisch konjugierten Variablen sind dann die **Winkelvariable** ϑ_k und die die **Wirkungsvariable** I_k. Man hat f ungekoppelte Oszillatoren. Die Hamiltonfunktion lautet $H(I_1, \ldots, I_f) = \sum_{k=1}^{f}\omega_k I_k$ mit den Oszillatorfrequenzen ω_k. Für 2 Schwinger hat man im 4-dimensionalen Phasenraum eine Beweung auf einem T^2-Torus. n-Torus ist direktes Produkt aus n Kreisen = n-Sphäre ist $S^n = \{x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ gibt n-Torus $\mathbf{T}^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$. 1-Torus ist Kreis. Eine Trajektorie verläuft periodisch auf dem zweidimensionalen Torus $S \times S$ im vierdimensionalen Phasenraum, $\dot{\varphi}_1 = \omega_1,\ \ \dot{\varphi}_2 = \omega_2$ mit konstanten ω_1, ω_2. Zeichnen Sie die Trajektorien in einem quadratischen Diagramm mit φ_1 als x-Achse und φ_2 als y-Achse (beide von 0 bis 2π), für die Fälle $\omega_2/\omega_1 = 2:1$ und $3:2$ und $4:3$. Begründen Sie damit die Aussage: ist ω_2/ω_1 eine rationale Zahl, dann schließt sich die Trajektorie auf dem Torus. $\dot{\varphi}_1 = \omega_1,\ \ \dot{\varphi}_2 = \omega_2$ bedeutet

$$\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}\varphi_2}, \quad \varphi_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1, \quad \varphi_2 = 2\pi m, \quad \varphi_1 = 2\pi n, \quad 2\pi m = \frac{\omega_2}{\omega_1}2\pi n,$$

Bedeutet $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ oder kommensurables Frequenz für geschlossene Bahnen. Für $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dichte $T^2 = S^1 \times S^1$ Überdeckung. **Ãrnold & Avez: Ergodic problems of classical mechanics** 1968; Jackson: Perspectives of nonlinear dynamics Bd1 1989, Bd1 1990 p30; Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos 1998 p169; Turning a punctured torus inside-out The fundamental group of the torus is just the direct product of the fundamental group of the circle with itself: $\pi_1(\mathbf{T}^2) = \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Wiki.en Intuitively speaking, this means that a closed path that circles the torus' 'hole' (say, a circle that traces out a particular latitude) and then circles the torus' 'body' (say, a circle that traces out a particular longitude) can be deformed to a path that circles the body and then the hole. So, strictly 'latitudinal' and strictly 'longitudinal' paths commute. An equivalent statement may be imagined as two shoelaces passing through each other, then unwinding, then rewinding. If a torus is punctured and turned inside out then another torus results, with lines of latitude and longitude interchanged. This is equivalent to building a torus from a cylinder, by joining the circular ends together, in two different ways: around the outside like joining two ends of a garden hose, or through the inside like rolling a sock (with the toe cut off). Additionally, if the cylinder was made by gluing two opposite sides of a rectangle together, choosing the other two sides instead will cause the same reversal of orientation. Eckert: Der Himmel voller Geigen, PJournal15 2016 Nr5 p41-45; Mitter Mechanik p172; Singh & Chaturvedi: IIT JEE Physics (38 Years) **Topic-wise Complete Solutions** Vol1: Mechanics, Waves and Optics 1978-2015; Nolting 2, §3.5; Budo Kap43, Landau; Kuypers Kap22. Betrachte Wirkung $S(t_1; q_i, \dot{q}_i) = \int_{t_0}^{t_1} dt\, \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ für eine vorgebene Lösung $q(t, t_0, q_0, \dot{q}_0)$ als Funktion der oberen Grenze t_1. Eine **Änderung der Wirkung** $\delta S = p\,\delta q(t_1)$ setzt sich aus einer Änderung infolge Endpunktvariation **und** Bahnvariation δq bei festem Endpunkt zusammen. Es folgt $p = \partial S/\partial q$ oder $\vec{p} = \nabla S$. Wegen der Definition

$\frac{dS}{dt} = \mathcal{L} = p\,\dot{q} - H = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q}\dot{q} = \frac{\partial S}{\partial t} + p\,\dot{q}$. Oder wegen $H = p\,\dot{q} - \mathcal{L} = \mathcal{L} - \frac{\partial S}{\partial t} - \mathcal{L} = -\frac{\partial S}{\partial t}$ folgt $\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}) = 0$ bedeutet eine parzielle Dgl zur Bestimmung der Wirkung, die per Separationsansatz $S(q,t) = W(q,P) - E\,t$ zu einer zeitfreien PDE für die **verkürzte Wirkung** $W(q,P) = F_2(q,P)$ wird, die als **Erzeugende** $F_2(q,P)$ verstanden werden kann. Die Lösung der Hamilton-Jacobi-PDF liefert also die gesuchte Erzeugende, die die kanonischen Transformationen hergibt in denen die neue Hamiltonfunktion die Gestalt $h(Q,P) = \text{const}$ hat. Jacobi benutzte die HJ-Theorie als Methode zur Auffindung von Lösungen von PDEs. **Nochmals kurz HJ:**

Wie findet man passende kanonische Trafo für triviale Hamiltonfunktion h =const= 0? Berechne die **Jacobi-Transformation** F_2 auf $h = \text{const} = 0$ mittels HJG, also einer nichtlinearen PDE 1. Ordnung für F_2 in $f+1$ Variablen $\vec{q}, t$. **Landau & Lifschitz: Mechanik §46**; **Freier Fall** $H = \frac{p^2}{2m} + aq$ gibt HJG $H(q,p) = \frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial q})^2 + aq = E = h(Q,P)$. Separationsansatz $S(q,t) = W(q,P) - E\,t$ mit $H + \frac{\partial S}{\partial t} = h$. $\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m(E-aq)}$ bedeutet $W = \sqrt{2m}\int\sqrt{E-aq}dq = \sqrt{2m}\frac{2}{3}\frac{(E-aq)^{3/2} - E^{3/2}}{-a}$. Wähle $P = E$, daher $Q = \frac{\partial W}{\partial E} = -\frac{\sqrt{2m}}{a}(\sqrt{E-aq} - \sqrt{E})$. Die kanonische Transformation ist daher $q = -\frac{Q^2 a}{2m} + \sqrt{\frac{2E}{m}}Q$ und $p = \sqrt{2m(E-aq)} = -aQ + \sqrt{2mE}$. Lösung in neuen Koordinaten $\dot{P} = -\frac{\partial h}{\partial Q} = 0$ also $P(t) = \text{const} = E$ und $\dot{Q} = \frac{\partial h}{\partial P} = 1$ bedeutet $Q = t - t_0$. Lösung in alten Koordinaten $q = (t-t_0)\sqrt{\frac{2E}{m}} - \frac{a}{2m}(t-t_0)^2$ und $p = -a(t-t_0) + \sqrt{2mE}$.

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + H(t, \vec{q}, \frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}}) = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_2}{\partial \vec{q}}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = 0, \quad \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t)$$

Letzteres motiviert die zeitabhängige **Schrödinger-Gleichung** für den harmonischen Oszillator, siehe **heuristische Analogie-Gleichung** unten. Vollständige Lösung hängt von n Konstanten, den neuen Impulse $\vec{P}$ ab. Diese spezielle Erzeugende $F_2 = S(\vec{q}, t)$ ist die **Hamiltonsche Wirkung** des Systems für verschiedene Bahnen die zur Zeit t_0 bei $\vec{q}_0$ beginnen.

Für $\frac{\partial K}{\partial t} = 0$ wählt man als Trick zur Umwandlung einer PDE in ODEs den oft hilfreichen **Ansatz** $S(q,P,t) = W(q,P) - Et$ und erhält als HJG $H(\vec{q}, \frac{\partial W}{\partial \vec{q}}) = E$ wobei W die verkürzte/reduzierte Wirkungsfunktion, Hamiltonsche charakteristische Funktion oder kurz **Wirkung** bezeichnet, Mitter: Mechanik p172:

$$W(q,E) = S(q,P,t) + E\,t = \int dt\,\mathcal{L} + E\,t = \int dt(p\,\dot{q} - H) + Et = \int dt\,p\,\dot{q} = \int dq\,p(q,E)$$

Winkel- und Wirkungsvariable Weizel Bd1 p121ff; Picht: Vorlesungen über Atomphysik Bd1 1956 p43-46; Rebhan: Mechanik. Wirkungs-Winkel-Variablen p299ff; Scheck; Mechanik p153f; Calkin Kap IX 9.02, 9.03, Budo, Kuypers §3.9 p327ff, Kap22.5, Dittrich & Reuter p87ff, Weizel: LB der theoret Physik Bd1 1949 p122 ff; Greiner: Mechanik 2 p423; Nolting Bd2 p169; Rebhan Mechanik Kap8.5: Wähle neuen Impuls derart, dass sich die neue Koordinate Q bei periodische Bewegung um 2π ändert.

Im autonomen Fall kann man mit dem Ansatz $S(q,a,a_1,t) = W(q,a) - a_1 t$ die Zeit separieren, Mitter p174. **Die Wirkungsvariable $I(\alpha)$ ist also der Zuwachs der Erzeugenden W pro q-Umlauf.** Beachte, dass q nur Integrationsvariable ist und $I = I(\alpha)$ allein von den Konstanten der Bewegung abhängt, also auch $\alpha = \alpha(I)$ geschrieben werden kann. Damit kann auch die Wirkung $W(q,I)$ geschrieben werden. Damit aber wegen $E(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \alpha_1$, also $H = K = \alpha_1(I) = K(I_1, \ldots, I_s)$. Speziell gilt $E(p,q) = H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + U(q) = E(-p,q) = E_0 = \text{const}$. Die geschlossene Phasenbahn einer Ellipse schließt die Fläche $\pi p_0 q_0 = F(E) = 2\int_{q_{min}}^{q_{max}} \mathrm{d}q\,p$ ein. Wegen $\mathrm{d}F(E) = \frac{\partial F}{\partial E}\mathrm{d}E$ ist $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}E} = 2\int_{q_{min}}^{q_{max}} \mathrm{d}q\,\frac{\partial p}{\partial E} = 2\int_{q_{min}}^{q_{max}} \mathrm{d}q\,\frac{1}{\frac{\partial H}{\partial p}} = 2\int_{q_{min}}^{q_{max}} \mathrm{d}q\,\frac{1}{\dot{q}} = 2\int_0^{T/2} \mathrm{d}t = T$. Für den harmonischen Oszillator gilt andererseits $q = q_0\cos\omega t, p = -mq_0\omega\sin\omega t, p_0 = mq_0\omega$:

$E(p,q) = H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = E_0 = \frac{m\omega^2}{2}q_0^2 = \frac{\omega}{2}q_0p_0 = \frac{\omega}{2\pi}F(E) = \frac{F(E)}{T}$, also ist Fläche/Wirkung gleich Umlaufzeit mal Gesamtenergie $F(E) = T \cdot E = \frac{2\pi}{\omega}$ oder $\frac{F(E)}{2\pi} = \frac{E}{\omega}$ oder $\hbar\omega = E$. **Also: Die Wirkung und Energie äquivalent**, wenn nur bf ein Umlauf T betrachtet wird. **Wirkung geht linear mit der Zeit.** Picht: Vorlesungen über Atomphysik Bd1 1956 p36, p231f $h^* = \frac{h}{T} = m_\nu c^2$ Wirkungsquantum pro Umlauf ist Elementar-Energie = Ruhenergie des Neutrinos. $m_e = 10^{20}m_\nu$; Oder auch anders gilt für die **Umlaufperiode**

$$\frac{\mathrm{d}F(E)}{\mathrm{d}E} = 2\int_{q_{min}}^{q_{max}} \mathrm{d}q\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}E} = 2\int_{q_{min}}^{q_{max}} \frac{\mathrm{d}q}{\partial H/\partial p} = 2\int_{t_{min}}^{t_{max}} \mathrm{d}t = 2\frac{T}{2} = T$$

Wegen $W = \oint p\mathrm{d}q = \pi q_0 p_0$ und $q = q_0\cos\omega t, p = -mq_0\omega\sin\omega t, p_0 = mq_0\omega$ gilt

$$E(p,q) = H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 = E_0 = \frac{m\omega^2}{2}q_0^2 = \frac{\omega}{2}q_0p_0 = \frac{\omega}{2\pi}W = \nu W = \omega\hbar = \omega n\hbar = \mathrm{const}$$

wobei $\hbar$ die kleinstmögliche Wirkung, die kleinste Bewegung im Phasenraum bezeichnet. **EBK-Regel** = Einstein-Brillion-Kramers-Quantisierungsregel. Gignoux & Silvestre-Brac: Solved problems in Lagrangian and Hamiltonian mechanics 2009 p285; Oder ein drittes Mal nochmals anders

$$\frac{p^2}{2mE} + \frac{q^2}{2E/k} = 1, \text{ gibt } F(E) = \pi\sqrt{\frac{2mE2E}{k}} = \frac{2\pi E}{\omega}, \text{ also } T(E) = \frac{\mathrm{d}F(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Motivation für $I(E) = F(E)/2\pi$ als Wirkungsvariable ist einbeschriebene Fläche pro Umlauf. Landau & Lifschitz: Mechanik p191ff; **Wirkung** bezeichnet:

$$W(q,E) = S(q,P,t) + E\,t = \int dt\,\mathcal{L} + E\,t = \int dt(p\,\dot{q} - H) + Et = \int dt\,p\,\dot{q} = \int dq\,p(q,E)$$

Šchottenloher: Geometrie und Symmetrie in der Physik 1995 p60, 65; Scheck: Mechanik p437, 490; Wähle neuen Impuls derart, dass sich die neue Koordinate Q bei periodischer Bewegung um 2π ändert:

$$\frac{H}{\omega} = \frac{E}{\omega} = \frac{F(E)}{2\pi} = I = \oint \frac{\mathrm{d}W(q,\alpha)}{\mathrm{d}q}\mathrm{d}q = \frac{1}{2\pi}\oint dq\,p \to H = H(I) = I\omega, \quad \dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial\theta} = 0, \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial I} = \omega = \mathrm{const}$$

Die Winkelvariable θ ist zyklische Koordinate! Die Lösung $\theta(t) = \omega t + \theta_0$ geht linear, kann also als Winkel im Sinne einer **Phase** angesprochen werden. Daher der Begriff **Winkelvariable**. Die zeitliche Änderung dieser Winkelvariable, proportional zur Frequenz des harmonischen Oszillators ist **energieunabhängig** und hat rein gar nichts mit einem geometrischen Winkel im Phasenraum zu tun, sondern entspricht dem **Phasen**-Aspekt des Winkels! Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd2 1967 p80, Der Winkel ist also nicht im Ortsraum, sondern als ein Parameter innerhalb der Mannigfaltigkeit S^1 zu finden. Was sollte ein Winkel außerhalb der Mannigfaltigkeit bedeuten? Ein Drehpunkt bei (0,0)? Die Winkelgeschwindigkeit auf der Phasenbahn wäre von diesem Punkt abhängig. Hingegen ist die Geschwindigkeit auf S^1 inhomogen verteilt. Bei Analyse der Phasensynchronisation tauchen diese Fragen wieder auf. Bornheimer 2011. **Kepler** = kugelsymmetrischen Potential $V(r)$ ist

$$p_r = \sqrt{2m}\sqrt{E - V(r) - \frac{L^2}{2mr^2}}, \quad p_\theta = \sqrt{L^2 - \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}}, \quad p_\phi = L_z = L\cos i$$

mit den Konstanten i = Bahninklination, E, L und L_z. Trajektorien aus effektivem Potenzial in den Phasenräumen (r,p_r), (θ,p_θ) und (ϕ,p_ϕ). McCuskey: An introduction to advanced mechanics 1959 p208ff r ignorable Koordinaten bei m FG Energie lässt sich durch Wirkung-Variablen, bedeutet zyklisch, bedeutet neue Hamiltonfunktion unabhängig von den Winkelvariablen w_i: $h(\cancel{w_i}, I_i) = E(\cancel{w_i}, I_i) = -\frac{mk^2}{2(I_r + I_\theta + I_\phi)^2}$ ausdrücken. Wegen $\dot{I}_i = -\frac{\partial E}{\partial w_i} = 0$, also alle I_i = const und gleich Konstanten $\dot{w}_i = \frac{\partial E}{\partial I_i} = \sqrt{-\frac{8E^3}{mk^2}} = \omega_i$ = const bedeutet $w_i(t) = \omega_i\,t + w_{0i}$ gibt es geschlossene Bahnen im Phasenraum. Schwarzschild oder

Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien 1919 §6 p105-118 **Einführung in die Hamilton'sche Mechanik:** $S[q,t] = \int_0^t \mathrm{d}\tau L = \int_0^t \mathrm{d}\tau(2T - W) = 2\int_0^t \mathrm{d}\tau T - Wt$ mit $L = T - V = 2T - W$ wegen $V = W - T$ wegen $H = T + V =$ constant $= W$, **daher ist** $[S[q,t]]=$ **Energie mal Zeit = Nms = Ws^2 = Wirkung = h = q p = Ort mal Impuls = kg m^2/s = Drehimpuls = L** $= |\vec{r} \times \vec{p}|$. Elegante Reformulierung der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung als Ausgangspunkt für Quantenchaos gaben Schwarzschild, Epstein, Sommerfeld und Einstein in der Sprache der Hamilton-Jacobi-Theorie und mittels Winkel-Wirkungsvariable siehe **Einstein: Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein**. In: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 19 1917 p82–92 https://einsteinpapers.press.princeton.edu Gesammelte Werke Vol6 The Berlin Years: Writings 1914-1917 p556-567; Curtis & Ellis: Use of the Einstein–Brillouin–Keller action quantization AmerJPhys72 2004 p1521-; **Keppeler: Die 'alte' Quantentheorie, Spinpräzession und geometrische Phase. Eine geometrische Phase rettete Sommerfelds Theorie der Feinstruktur**, PhysJ3 2004 H4 p45-49; Calkin: Lagrangian and Hamiltonian mechanics p175ff; Török: Analytical Mechanics. With an Introduction to Dynamical Systems 1999; Ter Haar: Elements of Hamilton mechanics 1961; de Lange & Pierrus: Solved Problems In Classical Mechanics: Analytical and Numerical Solutions with Comments 2010; **Fasano & Marmi: Analytical Mechanics. An Introduction** 2002 p466-471; Gignoux & Silvestre-Brac: Solved problems in Lagrangian and Hamiltonian mechanics 2009 Kepler als ebenes Wirkungsproblem p314ff; Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd2 1967 p82, **Iro: A modern approach to classical mechanics** 2002 Kepler als Wirkungsproblem **449-451!** Saletan & Cromer: Mechanik 1974 p264ff; **Dittrich & Reuter: Classical and quantum dynamics** 2001^3 p83; Dittrich: Klassische Narben im quantenmechanischen Fleisch, PhysBl52 1996 H7/8 p656-657; Lichtenberg: Phase-space dynamics of particle 1969 pV Einstein rückte die Idee der Phasenraum-Techniken und der Winkelwirkungsvariablen auf der Solvey-Konferenz 1911 im Zusammenhang mit der Bohr'schen Quantisierung ins Zentrum. Ab 1950 erlebten die Phasenraum-Techniken im Zusammenhang mit Teilchen-Beschleuniger-Strahlen eine Renaissance, PhD 1961 von Lichtenberg; Esposito, Marmo & Sudarshan: From classical to quantum mechanics. An Introduction to the Formalism, Foundations and Applications 2004;

Wirkungsvariable als adiabatische Invarianten siehe Landau & Lifschitz: Mechanik p190ff Bleiben bei langsamer Systemparameteränderung erhalten:

$$\lambda = \lambda(t), \quad \frac{d\lambda}{dt} \propto \epsilon, \quad K = H + \frac{\partial W(I,\phi,t)}{\partial t} = H(I) + \epsilon\, G(I,\phi,t)$$

Die näherungsweise Lösung der Bewegungsgleichungen

$$\dot{\phi} = \frac{\partial K}{\partial I} = \omega(I) + \epsilon\,\frac{\partial G}{\partial I}, \quad \dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \phi} = -\epsilon\frac{\partial G}{\partial \phi}$$

gibt in nullter Näherung $I =$const und $\phi = \omega\, t + \phi_0$ λ und I bleiben während eine Periode näherungsweise konstant.

Das Phasenintegral

$$\oint \frac{\mathrm{d}W(q,\alpha)}{\mathrm{d}q}\mathrm{d}q = I(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\oint dq\, p \to H = H(I), \quad \dot{\Phi} = \frac{\partial H}{\partial I}$$

über eine Periode der Bewegung von einem Freiheitsgrad ist von der Zeit unabhängig und heißt **Wirkungsvariable**. Wir können es als eine der Integrationskonstante der Bewegung (der Gesamtenergie) ansehen, die die Bewegung kennzeichnet. In der Wirkungsfunktion $W = -Et + S$ können wir die Gesamtenergie E als eine Funktion der Wirkungsvariablen I auffassen. In der SRT ist die Wirkung eine Konstante. Gribbin: Auf der Suche nach Schrödingers Katze. Quantenphysik und Wirklichkeit p58; I kann als Impulskoordinate angesehen werden, die für eine bestimmte Bewegung einen festen Wert hat. Verschiedene Werte von I ergeben verschiedene mögliche periodische Bewegungen. Jacobi: **Man muss umkehren!** Argument für das **Virial**. **Winkelvariable** ist $\theta = 2\pi\partial S/\partial I$. Zu I ist nicht θ, sondern die Phasenkonstante

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial I} = -t\frac{\partial E}{\partial I} + \frac{\partial S}{\partial I} = -t\frac{\partial E}{\partial I} + \frac{\theta}{2\pi}$$

kanonisch konjugiert. Man sieht, dass θ linear mit der Zeit anwächst: Pro Periode T um

$$\Delta\theta = 2\pi T\frac{\partial E}{\partial I} = \int_0^T \frac{\partial\theta}{\partial q}\mathrm{d}q = 2\pi\int_0^T \frac{\partial^2 S}{\partial q\partial I}\mathrm{d}q = 2\pi\frac{\partial}{\partial I}\int_0^T p\mathrm{d}q$$

Je nachdem wie I definiert ist, erhält man pro Umlauf einen Zuwachs von 2π oder 1. **Landau & Lifschitz: Mechanik §49**; Die Grundfrequenz erhält man aus der Ableitung der Energie $E = \omega I$ nach der Wirkungsvariablen I. Gemäß **Bohr-Sommerfeld-Quantisierungs-Vorschrift** gibt eine **kleinste Phasenraum-Exkursion**. Daher kann das Phasenintegral nur diskrete Werte annehmen

$$I = \frac{1}{2\pi}\oint dq\, p = n\hbar, \quad E_n = I_n\omega = n\hbar\omega$$

EBK-Regel = Einstein-Brillion-Kramers-Quantisierungsregel. Gignoux & Silvestre-Brac: Solved problems in Lagrangian and Hamiltonian mechanics 2009 p285 und p292 & 314 Winkel-Wirkungs-Variablen bei Kepler. Siehe auch Calkin Beispiel Zentralkraft p178-181, Jose & Saletan: Class mech p318ff, Saletan & Cromer 1974 p264ff, Budo §43 p227-237, Goldstein: Mechanik Kap9.7; Kibble & Berkshire: Class mech Kap14.3 p279ff 1996[3], Iro: A modern approach to classical mech 2002 p390ff, Spivak: Physics for mathematicians. Mechanic I p635f. Sommerfeld: Mechanik §46 p226 und Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien. Bd1 Kap2 §6 **Einführung in die Hamilton'sche Mechanik** p105-113 , §13 Math Anhang: Variablenseparation ist Königsweg 1919, **1931**;

Eikonal χ, HJG und QM: Wellenmechanik WM = Schrödinger-Gl, klassische Mechanik KM = HJG, Wellenoptik WO = Helmholtz-Gl, geometrische Optik GO = Eikonal-Gl.

$$\frac{WM}{KM} = \frac{WO}{GO}, \quad \frac{\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\vec{x})\right]\psi(\vec{x}) = E\psi(\vec{x})}{[\nabla W]^2 = 2m(E-V)} = \frac{-\frac{1}{k_0}\Delta E = n^2 E}{[\nabla\chi(\vec{r})]^2 = n^2(\vec{r})}.$$

Schrödinger: Wellenmechanik und Hamilton-Prinzip. Optik-Mechanik-Wellen PhysBl22 1966 p3-12; Speziell aus Phase der ebenen Welle $\varphi(\vec{x},t) = k_0[\chi(\vec{x}) - ct)]$ folgt Eikonal $\chi(\vec{x}) = a\hat{n}\cdot\vec{x}$ oder Kugelwelle $\chi(\vec{x}) = n|\vec{x} - \vec{x}_0|$. Rudolf Karl **Luneburg: Mathematical theory of optics** 1966; Sommerfeld: Mechanik §Hamilton'sche Dgl p220f HJG führt nach Schrödinger zwandsläufig auf Wellen- und Quantenmechanik! **Fernglas** PdNPiS Bd50 2001 H4 p2-11; Luneburg: Asymptotic Development of Steady State Electromagnetic Fields 1923; Luneburg: Asymptotic Evaluation of Diffraction Integrals 1923; Fowles: Introduction to Modern Optics 2009; **Wimberger: Nonlinear Dynamics and Quantum Chaos. An Introduction** 2014; Sommerfeld: Die Bohr-Sommerfeld'sche Atomtheorie 2013 = Sammlung von Vorträgen 164 S.; Kragh: Niels Bohr and the quantum atom 2012; Aaserud & Heilbron: Love, literature and the quantum atom 2013; Moore: Niels Bohr. Ein Mann und sein Werk verändern die Welt 1970; **Bohr-Sommerfeld-Comeback** durch **Dimensional scaling**, d.h. analytische Lösung eines Problems in **unphysikalischer Dimension** $D \neq 3$ und dann per Störungstheorie Näherung für $D = 3$ siehe E. Witten: Physics Today 33 1980 p38, Herschbach ed: **Dimensional scaling** in chemical physics 1992; Barenblatt: Scaling 2003, und Herschbach PhysJ12 2013 H7 p37ff; **Schrödinger Gleichung** mit Zentrifugalterm

$$\Delta = \frac{1}{r^{D-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{D-1}\frac{\partial}{\partial r}\right] - \frac{L_{D-1}^2}{r^2}$$

Transformation der Wellenfunktion gibt $\psi = r^{-(D-2)/2}\phi$, des Radius $r \to \frac{(D-1)^2}{4}r$ und der Energie $E \to \frac{4}{(D-1)^2}E$. Für beliebige Dimension folgt

$$\left(-\frac{2}{(D-1)^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{(D-3)}{(D-2)} - \frac{1}{r}\right)\phi = E\phi \quad \to (D\to\infty) \to \quad E = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}$$

Schirrmacher: Der realistische Bohr, PhysJ12 2013 H7 p43ff; Greiner: Bd2 p431;

Funktional ist unter einem Integral oder bei Erwartungswert-Bildung eine Verallgemeinerung der Funktion. Arens p1069; Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$), so nennt man eine Abbildung $\varphi : V \to \mathbb{C}$ ein

Funktional. Ist φ eine lineare Abbildung, so nennt man es ein **lineares Funktional** oder eine **Linearform**. Beispiele: Lineares Funktional ist Arbeit $A = \int_0^T \mathrm{d}t P(t)$ bei Leistung P. **Nichtlineare Funktionale** sind Energie, Hamilton-Funktion, Lagrange-Funktion, Wirkung. Beim Lösen linearer Operator-Gleichung $Ax = y$ minimiert man die Norm des **Residuums** oder äquivalent deren Quadrat $||Ax - y||^2$, also ein nichtlineares Funktional. Die bei der Suche des Minimums auftretenden **Instabilitäten** mindert man durch Einführung eines zusätzlichen **Straf-Terms**, **Regularisierung** $||Ax - y||^2 + \alpha\, ||x||^2$

Distributionen sind Funktionale: Nützlich bei Beschreibung unstetiger Phänome, wie Stoß mittels Green-Funktion oder Modell der Punktladung mit Laplace-Operator für $1/r$ bei $r = 0$ siehe Seiten 277 und 548. Heaviside bei Einschaltvorgang, also Behandlung von Dgls & Dirac erkannten, dass sie richtig sind, Laurent Schwartz bewies es und George Temple zeigte, wie einfach es ist. Temple: Generaliezed functions, ProcRoySocA 228 p175-190 1955; Historie bei Temple: JLond. MathSoc28 p134-148 1953; **Lighthill: Einf in die Theorie der Fourier-Analysis und der Verallgemeinerten Funktionen** 1958, 1966; **Brigola: Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen** 1997, 2012[2], 2013; Wüst: Mathe für Physiker und Mathematiker Bd1 p314f; van Dijk: Distribution theory 2013; Arens: Mathematik p1082 C_0-Funktion eine stetige Funktion, die anschaulich gesprochen im Unendlichen verschwindet. **Grundfunktionen oder Testfunktionen** sind aus C_0^∞.; **Peters: Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel der Geschichte der Distributionen. Eine historische Untersuchung über die Grundlagen der Physik im Grenzbereich zu Mathematik, Philosophie und Kunst** PhD 2004; Preuß, Bleyer & Preuß: Distributionen und Operatoren. Ihre Anwendungen in Naturwissenschaft und Technik 1985; Duistermaat: Distributions 2010; Duistermaat: Fourier integral operators 1996 Differenzialformen p49; **Bochner: Fouriersche Integrale** 1948; Vladimirov: Generalized functions in mathematical physics 1979; **de Jager: Theory of distributions** p52-101 In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; **Wüst: Mathe 1** p315; Jänich: Analysis für Physiker KapX §6 p269ff; Kanwal: Generalized Functions. Theory and techniques 1983, Theory and applications 2004[3]; Gelfand & Schilow: Verallgemeinerte Funktionen. Distributionen Bd1 Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen 1960; **Rechenregeln:** Madelung p16; Joos, Kaluza, Richter: Höhere Mathematik 1994[13] p309ff hier auch Aufgaben.

$$\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x), \quad \delta'(x-x_0) = -\frac{\delta(x-x_0)}{(x-x_0)} = -\delta'(x_0-x), \quad \delta(\phi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta(x-x_i)}{|\phi'(x_i)|}, \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

bedeuten **Variablentransformation** und **Skalierung**. Für die **Ableitung** der **Delta-Distribution** gilt $\int_I \mathrm{d}x f(x)\delta'(x-a) = -f'(a)$, wobei $a \in I$ und im 3D mit Jacobi-Determinante zur Volumen-Normierung gilt. Maßeinheit beachten, siehe Seite 548!

$$\delta(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{|J(x_i, \xi_j)|}\delta(\xi_1 - \xi_1')\delta(\xi_2 - \xi_2')\delta(\xi_3 - \xi_3')$$

Betrachte **Raum der Grundfunktionen** $C_0^\infty(\mathbb{R})$, φ beliebig oft diff mit kompaktem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, sodass $\varphi(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus I$, wie

$$f(x) = \chi(x)_{[-1,1]}\, e^{-\dfrac{1}{1-x^2}}$$

Haake: Einf in die theoret Physik pdf im Netz 1983 p26ff Kap2.8; Kuypers: Mechanik Kap2.5; Honerkamp, Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993 pdf im Netz; Feynman: Lectures **Kraftstoß:** Newton $F = \dot{p}$ gibt $\Delta p = 1 = \lim_{\Delta t \to 0} F\,\Delta t$, also $F \to \infty$. Stoßdauer mal Kraft = Impuls = fix. Analog Breite des Wissens mal Tiefe des Wissens = const. Der Spezialist weiß alles über nichts. Gesamtmasse als Massenverteilung der Atome der Welt $m = \int \mathrm{d}V \rho$ mit $\rho(\vec{r}) = \sum m_k \delta(\vec{r} - \vec{r}_k)$. Beispiele: $\int \mathrm{d}x\, e^{-x^2}\delta(x+1) = 1/e$ oder $\int \mathrm{d}x\, \sin x \delta(x - \pi) = 0$. Bezug zur **Gauß-Verteilung** für Fehlerrechnung und **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** BdI.1 1914, 1950[5] p635ff **Methode der Green'schen Funktion**. Motivation: Einschaltvorgang bei Elektrotechnik ist Heaviside-Funktion. Deren linksseitige Ableitung ist $+\infty$, deren rechtsseitieg Ableitung ist $-\infty$: Delta-Funktion darf als Ableitung

der Heaviside-Funktion gedacht werden: $\delta(x-x_0) = \Theta'(x-x_0)$. Kibble & Berkshire: Classical mechanics p31f; **Schulz: Physik mit Bleistift** Kap6.6, **Distributionen/verallgemeinerte Funktionen:** $\delta(x)$ ist Funktion mit positiver Fläche, welche bei $x=0$ auf den ϵ-Bereich $(-\epsilon,\epsilon)$ konzentriert ist und den Werte $\int \mathrm{d}x\delta(x)=1$ hat. Kurz, das Funktional frisst ganze Funktionen und gibt eine Zahl zurück $D_{x_0}[f] := \int \mathrm{d}x\delta(x-x_0)f(x) = f(x_0)$. **Iwanenko & Sokolow: Klassische Feldtheorie** 1948 1960 Alles über $\delta(x)$ und Methode der Green'schen Fkt; **Messiah: QMI** 1976 p417ff alles über Distributionen, schnell fallende Funktionen p425. Temperierte Distributionen. Joos, Richter, Kaluza, Lorentz: Höhere Math 1994[13] p310; **Bröcker: Analysis 1** 1995[2] p169 ff; Dirac-Folgen. Physiker erzählen oft von einer Dirac-Funktion oder folgendem Fabelwesen $\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,(i) $\delta(t)=0$ für $t\neq 0$, (ii) $\delta(t)=\infty$ für $t=0$, (iii) $\int\delta(t)\mathrm{d}t=1$, (iv) $\int \mathrm{d}t\delta(x-t)f(t)=f(x)=\int\delta(t)f(x-t)\mathrm{d}t$. **Beispiele:** Skizze beider Funktionen $f(x)$ und $\delta(x)$! $D_{x_0=2}[x^3+2x-2]=\int_{-1}^{4}(x^3+2x-2)\,\delta(x-2)\,\mathrm{d}x=10$, $\int_{-2}^{2}(x^2-1)\,\delta(x-3)\,d\,x=0$, weil $3\notin[-2,2]$, $\int_a^b(f(x)-f(x_0))\,\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=0$, x_0 sei fixe reelle Zahl und es sei $x_0\neq a$ und $x_0\neq b$, zwei Fälle unterscheiden! $\int_{-\infty}^{\infty}x\,\delta(c(x-x_0))\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{|c|}\,\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x=\frac{x_0}{|c|}$ mit $c,x_0\in\mathbb{R}$. Es gilt nach Substitution des Arguments der δ-Funktion $\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\,g(x)\delta(f(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|}$ wegen $\delta(f(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ mit den n Wurzeln/Nullstellen x_i von $f(x)$ z.B. $\int_2^{10}x^2\,\delta(x^2-6x+5)\,\mathrm{d}x=\int_2^{10}x^2\,\frac{\delta(y)}{|y'(5)|}\mathrm{d}y=\frac{25}{4}$, wegen Wurzeln von $y(x)=f(x)=x^2-6x+5$ mit $1\notin[2,5]$, aber $5\in[2,5]$. Mit parzieller Integration geht $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}\frac{\mathrm{d}\,\delta(x-x_0)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}\,\delta'(x-x_0)\mathrm{d}x=[e^{-x}\delta(x-x_0)]_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}-e^{-x}\,\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=0+\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x}\,\delta(x-x_0)\mathrm{d}x=e^{-x_0}$ Dreidimensionale Integration über Kugel mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Radius R ist $\int_{K(R)}\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,\delta(\vec{r})\,\mathrm{d}V=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}z\frac{\delta(x)\delta(y)\delta(z)}{1+x^2+y^2+z^2}=1$ oder in Kugelkoordinaten $\int_0^R\mathrm{d}r\frac{r^2}{1+r^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\frac{\delta(r)\delta(\theta)\delta(\phi)}{r^2\sin\theta}=\int_0^R\mathrm{d}r\frac{\delta(r)}{1+r^2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\delta(\theta)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\delta(\phi)=1$. **Alle Behauptungen über δ-Funktionen sind nur Aussagen über das Grenzverhalten von Dirac-Folgen** $\delta_n\to\delta$ für $n\to\infty$. Die Idee ist typisch für ein Wahrscheinlichkeitsmaß **mit der Wahrscheinlichkeitsdichte** $\delta_n(t)$. Faltung $f(x):=(\delta_n*f)(x):=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(x-t)\mathrm{d}t$. Dirac-Folge ist z.B. $G_\sigma(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2/\sigma^2}$ mit schrumpfender Varianz kommt dem Fabelwesen der δ-Funktion beliebig nahe. Jänich: Analysis für Physiker 2004[4] p273 $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)A(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)B(x)\mathrm{d}x$ mit $A(x)\neq B(x)$ im δ-symbolischen Sinne! Die **explizite Darstellung** ist nebensächlich:

$$\delta_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\epsilon^2}}=\partial_x\frac{1}{1+e^{-\frac{x}{\epsilon}}}=-\partial_x\frac{1}{e^{\frac{x}{\epsilon}}+1}=\frac{\epsilon}{\pi x^2}\sin^2\frac{x}{\epsilon}=\frac{1}{\pi x}\sin\frac{x}{\epsilon}=\frac{1}{2\pi}\int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon}\mathrm{d}k\cos kx=$$

$$\int_{-1/\epsilon}^{1/\epsilon}\mathrm{d}ke^{ikx}=\frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{\pi^2+\epsilon^2}=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}ke^{ikx-\epsilon|k|}=\frac{1}{2\pi}\int\mathrm{d}ke^{ikx}(e^{-\epsilon|k|})$$

$e^{-\epsilon|k|}$ ist der oft weggelassene **konvergenz-erzeugende** oder **regularisierende Faktor**, der den Träger der Funktion praktisch auf die Länge gemäß $\lim_{k\to\infty}e^{-\epsilon|k|}$ null bringt. Sonst ist obiges Integral ill-defined oder sinnlos. **Joos, Richter, Kaluza: Höhere Mathematik Kap8.6 p309**; $\delta(x)$ als Limes einer Gauß-Funktionenfolge

$$\delta(x-\xi):=\lim_{n\to\infty}g_n(x-\xi)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2\pi\sigma^2}}e^{-n\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma^2}}=\begin{cases}\infty & x=\xi\\ 0 & \text{sonst}\end{cases},\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x-\xi)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & \xi\in[a,b]\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Oder Kasten-Folge:

$$\chi_n(x-\xi):=\begin{cases}n/\sigma & \xi-\frac{\sigma}{2n}\le x\le\xi+\frac{\sigma}{2n}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases},\quad \delta(x-\xi)=\lim_{n\to\infty}\chi_n(x-\xi)=\begin{cases}\infty & x=\xi\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Aber stets erst Integration, dann Grenzwertbildung!

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\chi_n(x-\xi)\mathrm{d}x=\begin{cases}1 & \xi\in[a,b]\\ 0 & \text{sonst}\end{cases},\quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b\chi_n(x-\xi)f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}f(\xi) & \xi\in[a,b]\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Kerner: Mathematik für Physiker 2007 e-book p339; Willi-Hans Steeb: Hilbert spaces, generalized functions and quantum mechanics 1991; Constantinescu: Distributionen und ihre Anwendung in der Physik 1974; Dirac Kamm (peige de) Shah-Funktion, Abtastfunktion, Erhard-Ferron/Walter Bd2 p319; Verallgemeinerte Dichte $\rho(x) = \sigma(x) + \sum_i m_i\, \delta(x - x_i)$ Blanchard & Brüning: Distributionen und Hilbertraumoperatoren. Math Meth in der Physik 1993; El Kinani & Oudadess: Distribution theory and applications 2010;

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b dt f_n(t) \neq \int_a^b dt \lim_{n\to\infty} f_n(t), \quad f(t_0) = \lim_{\sigma\to 0} \int dt \delta_\sigma(t - t_0)\, f(t) =: \int dt\, \delta(t - t_0) f(t)$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 2\,x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{43}$$

$f''(x) = 2H(x), \quad f'''(x) = \delta(x)$ und $D_x[f] = \int dx' \delta(x' - x) f(x') = f(x)$

Dirac-Funktion = verallgemeinerte Funktion analog zu den reellen Zahlen, die völlig neue Objekte gegenüber rationalen Zahlen sind= Distributionen, weil an die Mittelungsprozedur im Sinne einer Messung unter Benutzung einer Verteilung erinnert werden soll. Aber Grenzwert- und Integralbildung sind nicht vertauschbar! Wüst: Mathe für Physiker und Mathematiker Bd1 p314f; **Sokolnikoff & Redheffer: Mathematics of physicsand modern engineering** 1941, 1958; **Zeldovich & Yaglom: Higher Math** 1982 Chap16 Dirac's remarkable Delta function p486; **Nikolsky: A course of mathematical analysis** 1975 Bd2 Fourierintgral und verallgemeinerte Funktionen §16 p240ff; Berz: Verallgemeinerte Funktionen und Operatoren 1967, Einführung und Mikusinski p159 Laplace-Trafo mal anders. Jantscher: Distributionen 1971; Mikusinski & Sikorski: The elementaty theory of distributions Bd1 und Bd2; Mikusinski: Operatorenrechnung 1957; **Distribution ohne Hinweis auf Dirac** siehe Gelfand & Schilow: Verallgemeinerte Funktionen. Distributionen Bd1 Verallgemeinerte Funktionen und das Rechnen mit ihnen 1960 und **Naas & Schmid: Mathematisches Wörterbuch mit Einbeziehung der theoretischen Physik** 1961; **Greuel: Math Ergänzungen und Aufgaben** für Elektrotechniker 1990[12]; Berg: Einfuehrung in die Operatorenrechnung 1965; Wladimirow: Math Physik 1972 p68f; Gelfand: Verallgemeinerte Funktionen 1962; Babitsch: Lineare Differentialgleichungen der Mathematischen Physik 1967; Lewin & Grosberg: Differentialgleichungen der mathematischen Physik 1952; Vladimirov: Generalized Functions in Mathematical Physics 1979; Jänich: Analysis für Physiker und Ingenieure 1983, 2001 KapX Green'sche Funktion und δ-"Funktion" und **δ-symbolisches Gleichheitszeichen**.

Die Betonung der Dirac-Distribution verstellt den Blick auf die Idee der verallgemeinerten Funktionen, weil ja die klassischen lokal-integrierbaren Funktionen auch Distributionen sind. Wichtiger ist die Idee der Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs und die Ausdehnung des Funktionenraums der Fouriertransformierbaren! **Heavisidefunktion** auf jedem kompakten Intervall **lokal integrierbar**. Alle klassischen Funktionen $g \in L_{loc}$ sind **lokal integrierbar**, also gehören sie zu den regulären Distributionen. **Regulären Distribution** definieren sich für jede lokal integrierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $\psi_g(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x g(x)\varphi(x) = \psi_g[\varphi] =< g|\varphi >$ mit **Testfunktionen** = Grundfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$= sehr glatte Funktionen mit kompaktem Träger I außerhalb dessen $\mathbb{R}\backslash$I ist $\varphi(x) = 0$. Arens p1083. Für jeden Ableitungsgrad n gilt jede Folge von Grundfunktionen $\varphi_k \to \varphi$ der Grenzprozess $||\varphi_k^{(n)} \to \varphi^{(n)}||_{I,\infty} \to 0$. Vektorraum/linearer Raum der Testfunktionen $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$: **Testfunktionen** = Grundfunktionen = gutartige Funktionen = Fraß oder Nahrung von Distributionen. a] Im einfachsten Fall (beschränkte Population) leben sie auf einem **kompakten Träger** und sind beliebig oft stetig ableitbar $f \in C^\infty$. Eine nichttriviale wäre z.B. $f(x) = \chi_{(-1,1)}(x) e^{-\frac{1}{1-x^2}}$. Kompakter Träger bedeutet, dass die theoretisch unendliche Welt praktisch nur endlich groß zur Geltung kommt: So lebt $\chi_{[0,1]}(x)$ mit $x \in \mathbb{R}$ auf ganz $\mathbb{R}$, hat aber nur auf dem Intervall $[0, 1]$ Bedeutung. Leider nicht C^∞. Der **Dualraum** $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ enthält als Linearformen die Menge aller Distributionen T, die Testfunktionen fressen und Zahlen liefern $T[f] \in \mathbb{K}$. Wegen des kompakten Trägers werden so **alle Distributionen** $d \in D$ **beliebig oft ableitbar** gemäß $< d', f >= - < d, f' >$ nach partieller Integration. Die garantierte Ableitbarkeit der Distributionen wir wegen des kompakten Trägers von den Testfunktionen geerbt. **Heaviside:** $< H', f >= - < H, f' >= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x H(x) f'(x) = -\int_0^\infty \mathrm{d}x f' = -f(x)|_0^\infty = f(0) = \int \mathrm{d}x f(x)\delta(x) =< \delta, f >$, also $H' = \delta$. Jede Distribution kann beliebig oft abgeleitet werden $< \delta', f >= - < \delta, f' >= -f'(0)$. b]

Für die Fouriertrafo praktisch wichtige Population von Funktionen hat keinen kompakten Träger! Abschwächend, weil nicht den kompakten Träger fordernd, betrachtet man den **Schwartz-Raum** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$, der auch beliebig oft stetig ableitbare $f \in C^\infty$ enthält, die keinen kompakten Träger besitzen, dafür aber alle schnell abfallen, also schneller als jede Potenz: $|f|_{l,m} := \text{supremum}|x^l \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{(m)} f(x)| < \infty$. Hintergrund ist der Physiker-Wunsch nach sicherem Grund für die Fourier-Integrale/Transformierten. Zeidler: QFT Bd1 2006 p617 temperierte Distributionen $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ wächst moderat im Unendlichen $|f(x)| = O(||x||^m)$ für $||x|| \to \infty$, bedeutet $\frac{|f(x)|}{||x||^m} < \infty$, und sind die Basis die Fouriertransformation $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subset \mathcal{D}'S(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. **Gelfand'sches Raumtripel** $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subset L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$. **Schwindt: Tutorium QM** 2013 p103; Die **temperierten/gemäßigten Distributionen** $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ sind genau der Dualraum der rasch oder schnell abfallenden Testfunktionen des Schwartz-Raumes. **Schwartz-Raum** $S(\mathbb{R}) = \{x(t) \in C^\infty(\mathbb{R}) | t^p x^{(k)} \in L(\mathbb{R}), p, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ = Menge der schnell abfallenden Funktionen wie $x(t) = e^{-x^2}$ mit $S(\mathbb{R}) \subset L(\mathbb{R})$ und $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen gegenüber Fourier-ransformation. Arens p1163; Vladimirov: Generalized functions in mathematical physics 1979 p94 **generalized functions of slow growth = temperierte/-gemäßigte Distributionen**; Die Untermenge $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ der Testfunktionen mit kompaktem Träger wird durch die Fourier-Transformation nicht in sich abgebildet. Der Funktionenraum der schnell abfallenden Testfunktionen des Schwartz-Raumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ bildet eine dichte Untermenge des Hilbertraumes $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{K})$ mit dessen Skalarprodukt dann gilt $< \varphi|\vartheta >=< \hat{\varphi}|\hat{\vartheta} >$. Müller: Quantenmechanik 2000 p86ff; **Großmann: Funktionalanalysis** 1988[4] p151f; Hirzebruch & Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis 1971; Pflaumann: Funktionalanalysis 1985; Dijk: Distribution Theory. Convolution, Fourier Transform, and Laplace Transform 2012; de Jager: Theory of distributions p52110 In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; **Blanchard, Brüning: Mathematical Methods in Physics** 2015 pdf; Schwartz: Théorie des distributions 1966; **Wightman & Streater: Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie**. PCT 1969 Kap2 Math Hilfsmittel p46-126; Ãrsac: Fourier transforms and the theory distributions 1966; B̃remermann: Distributions, complex variables, and Fourier transforms 1965; Laurent Schwartz: Mathematics for the Physical Sciences 2008; **Schwartz: Mathematische Methoden der Physik Bd1** 1965, 1974; Halperin & Schwartz: Introduction to the Theory of Distributions 1952; K̃anwal: Generalized functions. Theory and Technique 1983; Zemanian: Distribution theory and transform analysis. An introduction to generalized functions, with applications 1965; L̃ützen: The prehistory of distribution theory 1980; Peters: Der Zusammenhang von Mathematik und Physik am Beispiel von Distributionen 2004 pdf im Netz; Jager: Applications of Distributions in Mathematical Physics 1964; Walter: Einführung in die Theorie der Distributionen 1994; Sobolev: Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik 1964; Rozhkovskaya & Isakov eds: Sobolev Spaces in Mathematics. III Applications in Mathematical Physics 2009; Blanchard: Distributionen und Hilbertraumoperatoren. Mathematische Methoden der Physik 1993; Philippe Blanchard: Mathematical Methods in Physics 2015;

Shilov: Elementary functional analysis 1974; Wulich: Einführung in die Funktionalanalysis 2Bde 1961; Alt: Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung 1999; Kesavan: Nonlinear functional analysis. A first course 2011; Kesavan: Topics in Functional Analysis and Applications 2015; Rudin: Functional analysis 1974; Yoshida: Functional analysis 1966, 1980[6]; **Kreyszig: Introductory functional analysis with applications** 1989; Kolmogorov & Fomin: Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis 1999; Kreyszig: Statistische Methoden und ihre Anwendungen 1965; Cahill: Physical Mathematics 2013; Aliprantis & Border: Infinite Dimensional Analysis. A Hitchhiker's Guide für Wirtschaftswissenschaftler 2006[3]; **Heuser: Funktionalanalysis: Theorie und Anwendung** 1996[3], 2006[4], Geschichte Funktionalanalysis p660ff mit Erschießung der Banach'schen Schule = Ostjuden in Lemberg im Ergebnis des Hitler-Stalin-Pakts; **Geschichte der Analysis:** Walter: Analysis 1 & 2; **Werner: Funktionalanalysis** 2011[7]; **Pietsch (Jena): History of Banach spaces and linear operators** 2007; **Alt: Lineare Funktionalanalysis - eine anwendungsorientierte Einführung** 2012[6]; **Großmann: Funktionalanaly-**

SiS 1988[4]; Meise & Vogt: Einführung in die Funktionalanalysis 1992; Mathieu: Einführung in die Funktionalanalysis 1998;

Haken: Synergetics p191ff, p341; Versklavungsprinzip **Inertialmannigfaltigkeit** = die kleinen Skalen werden durch die großen versklavt und sind daher aus ihnen berechbar. https://www.math.umass.edu/ kevrekid/ http://works.bepress.com/panos_kevrekidis/ **Jolly, Kevrekidis, Titi: Approximate inertial manifolds** for the Kuramoto-Sivashinsky equation $u_t + u_{xxxx} + u_{xx} + uu_x = 0$ oder mit $h = u_x$ integrale Form $h_t + h_{xxxx} + h_{xx} + 1/2h_x^2 = 0$ auf $x \in [-L/2, L/2]$. $u_t + \nabla^4 u + \nabla^2 u + |\nabla u|^2/2 = 0$ kurz $\dot{u} + u'''' + u'' + uu' = 0$: Analysis and computations, Physica D: Nonlinear Phenomena, Volume 44, Issues 1–2, August 1990, Pages 38-60;

Bifurkationsstruktur der 3D Navier-Stokes- und MHD-Gleichungen mittels approximierender Inertialmannigfaltigkeiten, obgleich deren Existenz nicht bewiesen. Schwache Lösung durch Skalarprodukt unter Integral mittels Testfunktion gibt nur global gute Lösung. Temam, Roger: Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics 1997[2]; Gero Nießen: Analyse und Konstruktion von Inertialmannigfaltigkeiten 1998; Durch Reduktion auf eine Inertialmannigfaltigkeit und mithilfe von Conley-Index-Theorie studieren wir die Feinstruktur des Attraktors. Jia-Zhong Zhang et al.: Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. Volume 16, Issue 12, December 2011, Pages 4666–4670 Approximate inertial manifolds of Burgers equation approached by nonlinear Galerkin's procedure and its application; **Blätterungen** Inertialmannig-Bohnet2007.pdf Yang, H., Radons, G., Geometry of Inertial Manifolds Probed via a Lyapunov Projection Method. PhysRevLett108 154101 (2012), http://prl.aps.org/abstract/PRL/v108/i15/e154101

Hamel: Grundbegriffe der Mechanik 1921 Die quasigeometrische Form der Mechanik. Die **Jacobi'sche Form** = Trägheitsbahn als kürzeste Verbindung p120ff; **Variations-Rechnung, Hamilton-Prinzip im Konfigurationsraum:** Landau Vol 1 & 2; Lanczos; Schulz p257 ff; Kielhöfer; **Deutung a] Als Funktion** $L(x, \dot{x})$ gemäß $L : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vermöge $(x, \dot{x}) \to L_0 \in \mathbb{R}$. Für beliebiges festes t_0, x_0 und v_0 gibt $L(x_0, v_0)$ einen Punkt auf einem Paraboloid mit Minimum beim Ursprung. **Bewegung ist aber ein gerader Weg im Konfigurationsraum mit dem Parameter** $t \in \mathbb{R}$, den eine ganz bestimmte Schnelligkeit auszeichnet. **Deutung der Lagrangefunktion = Grundfunktion eines Variationsproblems = Integrand des Grundintegrals:** Sei speziell Lagrangefunktion $L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2$. Bei obigem Oszillator Kreise im Phasenraum, also auf einer Höhenlinie von $H(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 + x^2 = 1$, wegen Lösung der Euler-Lagrange-Gl $x = \sin t$. Aber $L(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2 = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ werden 4 Extrema durchlaufen. **Deutung b] Als Funktional** $L[x(t), \dot{x}(t)]$ gemäß $L : C^2(\mathbb{R}) \times C^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ vermöge $(x(t), \dot{x}(t)) \to L(t) \in \mathbb{R}$ mit $t \in \mathbb{R}$. $L[x(t), \dot{x}(t)] = \dot{x}^2 - x^2 = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$ wird also mit Funktionen gefüttert, die auf 1-dimensionalen Gebieten des Konfigurationsraumes leben. Wichtig ist aber nicht $L(t)$, sondern dessen Zeitintegral über einem Zeitintervall = Wirkung $S[x] = \int_{t1}^{t2} \mathrm{d}t L[x(t), \dot{x}(t)]$, also der Mittelwert von $L(t)$, speziell das **Zeitmittel der Differenz von kinetischer und potenzieller Energie**. Sei $W[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \mathcal{L}(q_k(t), \dot{q}_k(t), t)$ die Wirkungsfunktion oder das Wirkungsintegral oder Zeitmittel über eine Energie-Differenz, also Energie mal Zeit. **Ryder: Quantum Field Theory** 1996[2] p80ff; Die wirkliche vom System durchlaufene Bahnkurve des Systems gegenüber allen anderen ist dadurch ausgezeichnet, dass für sie das **Wirkungsintegral** einen Extremwert annimmt: $\delta W[\delta q_k] = W[q_k + \delta q_k] - W[q_k] = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \mathcal{L}(q_k + \delta q_k, \dot{q}_k + \delta \dot{q}_k, t) - \mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k, t) \stackrel{!}{=} 0$, wobei bei festem Anfangs- und Endzeitpunkt **a] alle Bahnen durch den gleichen Anfangs- und Endpunkt** gehen, **b] die Vergleichsbahnen zur realen Bahn in generalisierten Koordinaten** sich nur wenig unterscheiden $q'_k(t) = q_k(t) + \delta q_k(t)$ und $\dot{q}'_k(t) = \dot{q}_k(t) + \delta \dot{q}_k(t)$, c] der Vergleich wird bei fester Zeit, also $\delta t = 0$ durchgeführt. Die **virtuellen Verrückungen** des **d'Alembert'schen Prinzip**s werden zu ganzen Bahnen zusammengefasst. Hamilton-Prinzip im Phasenraum, also **Taylor-Entwicklung** oder totales Differenzial von $\mathcal{L}(q, \dot{q})$ in zwei Varianten: a] Verallgem. Orte und Impulse werden an Grenzen festgehalten. b] Nur die verallgem. Orte werden an den Grenzen festgehalten. Kuypers Kap15.5. Siehe Seite 541.

Mache aus Variation $\delta q(t)$ der Variationsrechnung ein $\lim_{\epsilon \to 0} \eta((t)\epsilon$ der Differenzialrechnung! **Euler-Herleitung mit methodus veniendi 1744**: Geh von der Riemann-Summe mit $N + 1$ Stützstellen des entsprechenden

Integrals aus

$$0 \stackrel{!}{=} \delta W = \sum_{i=1}^{N} \delta\mathcal{L}_i\,\Delta t = \Delta t \sum \left(\frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{q}_i}\delta \dot{q}_i \right)$$

Bei der Minimalzahl von 2 Summanden gibt es z.B. 2 rechtsseitige Anstiege

$$\dot{q}_0 = \frac{q_1 - q_0}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}_i}{\partial \dot{q}_i}\frac{\delta(q_{i+1} - q_i)}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_0}\frac{\delta(q_1 - 0)}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{q}_1}\frac{\delta(0 - q_1)}{\mathrm{d}t},$$

da erste und dritte Stützstelle fest bleiben.

$$0 = \delta W = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_0}\frac{\delta(q_1 - 0)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{q}_1}\frac{\delta(0 - q_1)}{\mathrm{d}t} \right)\Delta t = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q_1}\delta q_1 - \frac{\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \dot{q}_0} \right)}{\mathrm{d}t}\delta q_1 \right)\Delta t$$

muss für beliebige $\Delta t > 0$ gelten, was die Euler-Lagrange'schen Bewegungsgleichungen erzwingt. Die Euler-Lagr-Gl ist äquivalent zum Variationsproblem: Die Lösungskurve oder wirkliche Bahn macht ein Funktional extrem und löst zugleich ein DGL-System. Neuenschwander: Emmy Noether's Wonderful Theorem 2011 p5; Sommerfeld: Mechanik §37 Prinzip der kleinsten Wirkung 1744 veniendi; **Madelung: Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers** 1922, 1950[4] p334 $\mathcal{L}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, t)$ und **Ritz-Verfahren** ; Beispiele bei Wells: Lagrangian dynamics, Schaum 1967; **Stationarität der Wirkung:** $I[f] = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, f, f', f'', \ldots, f^{(n)})\,\mathrm{d}x$; $f' := \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $f'' := \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$, $f^{(n)} := \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ wobei nur **eine unabhängige Variable**, aber die gesuchte Funktion auch in **höheren Ableitungen** in der Wirkung vertreten ist. $f(x)$ muss **Euler–Lagrange-Gleichung** $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f'}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f''}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f^{(n)}}\right) = 0$ genügen. Sind viele Funktionen $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ nur einer unabhängigen Variable gesucht, also $I[f_1, f_2, \ldots, f_n] = \int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(x, f_1, f_2, \ldots, f_n, f_1', f_2', \ldots, f_n')\,\mathrm{d}x$; $f_i' := \frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x}$ dann gilt nach Weinstock: Calculus of Variations With Applications to Physics and Engineering 1952 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_i'}\right) = 0$. Diese elegante Schreibweise führt leider bei der Anwendung oft zum Vorzeichenfehler, daher besser die Schreibweise, die mit $m\ddot{x} = F$ sofort an NII erinnert, also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$. Funktion **mehrerer unabhängiger Variablen**, also zB Felder über der Raumzeit: $I[f] = \int_\Omega \mathcal{L}(x_1, \ldots, x_n, f, f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$; $f_{x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ f muss die PDE $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial f_{x_i}} = 0$. erfüllen. **Fox: An introduction to the calculus of variations** 1987; $J[y] = \int_{x_1}^{x_2} L[x, y(x), y'(x)]\,dx$ mit den Konstanten x_1, x_2, zweimal stetig ableitbaren Funktion $y(x)$ und zweimal bzgl x, y, y' stetig ableitbarem Ausdruck $L[x, y(x), y'(x)]$. Sei $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. **Idee: Mache aus Funktional eine Funktion:** Falls $J[y]$ bei f lokales Minimum und $\eta(x)$ beliebige Funktion mit wenigstens einer Ableitung und $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, dann gilt für beliebiges bei 0 liegendes ϵ die Relation $J[f] \le J[f + \varepsilon\eta]$. Man nennt $\delta f = \epsilon\eta$ die Variation der Funktion f. Ersetzt man im Funktional $J[y]$ die Funktion y durch $f + \epsilon\eta$ so ist das Funktional $\Phi(\varepsilon) = J[f + \varepsilon\eta]$ eine Funktion von ϵ. Da das Funktional $J[y]$ für $y = f$ ein Minimum hat, so hat Funktion $\Phi(\varepsilon)$ ein Minimum bei $\epsilon = 0$. Es gilt $\Phi'(0) \equiv \frac{d\Phi}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dL}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} dx = 0$. Betrachte die totale Ableitung von $L[x, y, y']$ bzgl ϵ (nicht x) wobeit $y = f + \epsilon\eta$ und $y' = f' + \epsilon'\eta'$ gilt $\frac{dL}{d\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial y}\frac{dy}{d\varepsilon} + \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{dy'}{d\varepsilon} = \frac{dL}{d\varepsilon} = \frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta'$ wegen $\mathrm{d}y/\mathrm{d}\epsilon = \eta$ und $dy'/\mathrm{d}\epsilon = \eta'$. Daher gilt $\int_{x_1}^{x_2} \frac{dL}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f}\eta + \frac{\partial L}{\partial f'}\eta'\right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial f}\eta - \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\right) dx + \frac{\partial L}{\partial f'}\eta\Big|_{x_1}^{x_2}$ wo $L[x, y, y'] \to L[x, f, f']$, falls $\epsilon = 0$ und nach parzieller Integration mit $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Daher ist $\int_{x_1}^{x_2} \eta\left(\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial f'}\right) dx = 0$ und folglich gilt die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial L}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial f'} = \frac{\delta J}{\delta f}(x) = 0$. Die linke Seite der Gleichung wird als

Funktionalableitung von $J[f]$ bezeichnet $\delta J/\delta f(x)$. Die Lösung dieser ODE 2. Ordnung liefert die extremale Funktion $f(x)$. Die ELG ist eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für ein Extremum des Funktionals $J[f]$. **Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik** BdIV 1958 p165-258 Literaturtipps p700; Born & Wolf: Principles of Optics 1999 p853ff Variationsrechnung; Kowalewski: Bd3 p241ff Variationsrechnung; Kneser: Lehrbuch der Variationsrechnung 1925; **Herleitung der Euler-Lagrange'schen Gleichungen:** Betrachte Funktional $S[y(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t L(t, y(t), y'(t))$, um die wirkliche, gesuchte Funktion $y(t)$ zu finden, wobei $y(t_1)$ und $y(t_2)$ fest, also auch die Variationen $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$ verschwinden. Das Funktional sei bei der wirklichen Funktion/Bahn **stationär** = sei gegenüber linearen Änderungen der Lagrangefunkion in Bezug auf kleine Änderungen $\mathrm{d}L = \partial_y L\,\mathrm{d}y + \partial_{y'} L\,\mathrm{d}y'$ neutral, bedeutet das totale Differenzial der **unabhängigen Variablen/Funktionen** $\delta y(t)$ und $\delta y'(t)$, die $\delta y(t_1) = \delta y(t_2) = 0$ erfüllen. Die unabhängige Variable t ist keine Variations-Größe, sondern einfach Variable des Definitionsbereichs von $y(t)$ und $\delta y(t)$. Also $\delta S[\delta y(t), \delta y'(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \delta L(t, \delta y(t), \delta y'(t)) \stackrel{!}{=} 0$. Bedeutet $\delta S[\delta y(t), \delta y'(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \partial_y L\,\mathrm{d}y + \partial_{y'} L\,\mathrm{d}y' = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \left\{ [\partial L_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_{y'} L)]\delta y(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_{y'} L\,\delta y(t))|_{\delta y(t_1)=0}^{\delta y(t_2)=0} \right\} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, 0\, \delta y(t) \stackrel{!}{=} 0$ wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_{y'} L\,\delta y(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\partial_{y'} L)\,\delta y(t) + \partial_{y'} L\,\delta y'(t)$ also $\partial L_y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_{y'} L$, falls $\delta y(t) \neq 0$ beliebig. **Schmutzer: Mathematik. Ein Kompendium für Physiker Kap13 Variationsrechnung**; Kuhn: Theoret Mechanik, PfL9 p160ff; Paul Funk: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik 1970[2]; Riley, Hobson & Bence: Mathematical methods for physics and engineering 1998 Kap20 Variationsrechnung p731-757; Baule: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs Bd5 Variationsrechnung 1968; **Moisseev & Tikhomirov: Optimisation** und Variationsrechnung In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; Mach: Mechanik p458ff; **Kielhöfer: Variationsrechnung - Eine Einführung in die Theorie einer unabhängigen Variablen mit Beispielen und Aufgaben;** Yourgrau & Mandelstam: Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory 1960; Lanczos: The Variational Principles of Mechanics 1970; **Egquist & Schmid: Mathematics unlimited - 2001 and beyond** 2001; Oden & Reddy: Variational Methods in Theoretical Mechanics 1976; Very marginal work, which deals with subjects generally forgotten by other authors and which is, consequently, an invaluable complement. Smirnov: BdIV Kap2; Krasnov, Makarenko & Kiselev: Problems and exercises in the calculus of variation 1975 p29; Gegenseitige **Nähe** von Kurven auf einem Intervall $[a.b]$ in 0.ter Ordnung = in den Koordinaten, in 1.ter Ordnung = in den Koordinaten und Ableitungen, usw. also in Bezug auf die Rauhigkeit der Kurve. Merziger el al.; Bartsch, Bronstein, Feynman Vol2, Chap19 Variationsprinzip; Fowkes & Mahony: Einführung in die Modellierung 1994 Kap4.

Isoperimetrie mit Euler-Lagrange: Zeigen Sie unter Verwendung der Euler-Lagrange'schen Gleichungen, dass unter allen ebenen zwei-dimensionalen Gebieten G, die von einer glatten Kurve der Länge u berandet werden, das kreisförmige den größten Flächeninhalt hat. Hinweis: Betrachten Sie als das zu untersuchende Funktional für die gesuchte Berandungskurve $y(x)$ die Differenz zwischen dem Inhalt der Fläche unter der Kurve $y(x)$ und dem λ-fachen (Lagrange'scher Multiplikator) der Länge der berandenden Kurve über dem Intervall $[-R, R]$. Die Lagrange-Funktion ist der Integrand dieses Funktionals. Die gesuchte Berandungskurve $y(x)$ ergibt sich als Lösung der Euler-Lagrange'schen Gleichung. **Auf welchem Weg kommt man in Ebene am schnellsten** von A nach B? $S[y] = \int_A^B \mathrm{d}s = \int_{x_a}^{x_B} \mathrm{d}x \sqrt{1 + y'^2}$. Auf welchem Weg kommt man in Ebene am schnellsten von A am Strand nach B im Wasser, wenn die Geschwindigkeit an Land v_B und im Wasser v_B ist? Feynman: QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p71 **Licht zum Narren halten = Sammellinsen machen sehr viele Photonenwege gleichschnell.** Das Wegintegral liefert alle Gesetze der Strahlenoptik. Bailin & Love: Introduction to field theory 1993 p1ff Ausgangspunkt: Gauß-Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+b)^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}+c}$, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n A_{ij} x_i x_j\right)\, d^n x = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} X^T A X\right)\, d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$, wobei A eine **symmetrische positiv definite Matrix**. Wegen **Diagonalisierbarkeit** $\det A = \exp \ln \det A = \exp \mathrm{Tr} \ln A$, also $\ln \det A = \mathrm{Tr} \ln A$.

http://en. wikipedia. org/wiki/Common_integrals_in_quantum_field_theory

Kleinert: Pfadintegrale in Quantenmechanik, Statistik und Polymerphysik 1993; http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/b4/psfiles/ und Feynman & Hibbs lesen! Wentzel: Zur Quantenoptik ZfP22 1924 193-199; Watson: Physics - where the action is, New Scientist 30.1.1986 p42-44; Paul Dirac: The Lagrangian in Quantum Mechanics, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion 3 1933 p54-72; Dirac: The principles of quantum mechanics 1930[1], 1957[4] p121-130 $ 31 Wellenpaket, §32 Wirkungsprinzip; Dirac: On the analogy between classical and quantum mechanics RMP17 1945 p195ff; Lies Feynman: Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics RMP20 1948 367-387; Garrod: Pfadintegrale im Phasenraum RMP38 1966 483ff; Schweber: Feynman and the visualisation of space-time processes RMP58 1986 449-508; Aharonov & Vardi: Meaning of an individual 'Feynman path' PhysRev D21 1980 2235ff; **Schwinger: Selected papers on quantum electrodynamics** 1958; Zee: Quantum Field Theory in a Nutshell 2003 p7ff; **Wiegel: Introduction to Path-Integral Methods in Physics and Polymer Science** 1986 Kap10.2 Mattuck: A guide to Feynman diagrams in the many-body problem 1967; **Schulman: Techniques and application of path integration** 1981; **Partitionsfunktion** mittels **Pfadintegral** $Z = \int Dx\, e^{\mathrm{i}\mathcal{S}[x]/\hbar}$, wobei Dx nach der Integration über allen Wegen verlangt. **Wirkung** $\mathcal{S}[x] = \int_0^T \mathrm{d}t L[x(t)]$. Klassisch $\mathcal{S}[x] \gg \hbar$ bedeutet, dass der Weg des Wirkungsminimums dominiert, weil sich alle anderen Phasen wegen der raschen Oszillation wegheben. R̃oepstorff: Pfadintegrale in der Quantenphysik 1992; Idee geht auf Wiener zurück. Chaichian & Demichev: Path Integrals in Physics. Volume I Stochastic Processes and Quantum Mechanics 2001; Grosche & Steiner: Handbook of Feynman path integrals 1998; Dittrich & Reuter: Classical and quantum dynamics. From classical paths to path integrals 2001; Das: Field theory. A path integral approach 2006; Zinn-Justin: Path integrals in quantum mechanics 2009; Marcus Werner, Tokyo: Optische Geometrie = geometrische Optik = Fermat-Geometrie liefert den räumlichen Lichtstrahlverlauf auch in Magnet- und Gravitationsfeldern. Optische Geometrie von Riemann und Randers-Finsler liefern Einsicht in topologische Eigenschaften der Bild-Multiplizität bei Gravitations-Linsen. **Optische Geometrie:** Huygens'sche Konstruktion der Wellenfront. Betrachte Raumzeitpunkte, die jeweils gleichen Zustand einer Welle/Störung = gleiche Phase $\varphi(t,\vec{x}) = \omega t - \vec{k}\cdot\vec{x} =$ const adressieren und starte dort Kugelwellenfronten mit **lokaler Phasengeschwindigkeit längs Ausbreitungsrichtung** $|\vec{v}(\vec{x})| = v(\vec{x}) = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{c}{n(\vec{x})}$ siehe Seite 247 und deren Einhüllende. Bergmann & Schäfer: Optik Kap1.5 Brechung p32ff; Recknagel: Optik 1971[5] Kap1.3; **Strahlenoptische Lichtbrechung gemäß Fermat-Prinzip:** Wirkung ist totale Lichtlaufzeit von A nach B auf dem Wege $\vec{r}(\tau)$ mit dem Kurvenparameter τ ist durch Funktional $T_{A\to B}[\vec{r}(\tau)] = \int_A^B \mathrm{d}t = \int_A^B \dfrac{\mathrm{d}s}{v(s)} = \int \mathrm{d}s \dfrac{n}{c} = \int \mathrm{d}\tau \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\dfrac{n}{c} = \int \mathrm{d}\tau \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\dfrac{n(\vec{x})}{c}$ wegen $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)\dfrac{\mathrm{d}\tau^2}{\mathrm{d}\tau^2} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)\mathrm{d}\tau^2$ oder $\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\mathrm{d}\tau$ siehe Seite 247. Für $n(\vec{x}) =$ const, also const $= \partial\mathcal{L}/\partial x' = x' n/(c\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2})$ folgt $x' =$ const oder $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\tau/|\mathrm{d}\vec{x}/\mathrm{d}\tau| =$ const, also Geschwindigkeit in jeder Komponente konstant. Macke: Mechanik 1964[2] p271 §416 **Bahngleichungen der Optik** Sommerfeld: Optik p365ff; Rudolf Karl **L̃uneburg: Mathematical theory of optics** 1966; Born: Optik 1933 p49ff; Budo: Mechanik p207; Flügge: Theoretische Physik Bd3 p241ff; Marion: Classical dynamics of particles and systems 1970 p197f Fermat-Prinzip = **Maupertuis-Prinzip der kleinsten Wirkung** hat theologische Basis: **die Weisheit Gottes führt zur Minimierung der Wirkung**; Ley & Löther: Mikrokosmos-Makrokosmos. Philosophisch-theoretische Probleme der Naturwissenschaft und Technik, Medizien 1967 Bd1 Felke: Vom Prinzip der kleinsten Wirkung zur Optimierungsforschung p431-512; Yourgrau & Mandelstam: Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory 1960; Szabo: Geschichte der mechanischen Prinzipien und ihrer wichtigsten Anwendungen 1987[3] p102ff Geschichte des Prinzips der kleinsten Wirkung; Mach: Die Mechanik in ihrer Entwicklung 1883, 1912; Kurrer: Geschichte der Baustatik 2002; Kurrer: The history of the theory of structures 2008; Watson: Physics - where the action is, New Scientist 30.1.1986 p42-44; Picht: Einführung in die Theorie der Elektronenoptik 1939; Joos: LB der theoretische Physik 1945 Elektronenoptik, Materiewelle, **Phasengeschwindigkeit** $v_{\mathrm{Ph}} = \dfrac{1}{v_e}$ mit Elekronengeschwindigkeit p610f, Geometrische Optik Kap11 Anhang p348ff **Lichtweg durch Mediengrenze** bei $z = 0$. Beachte die **Unstetigkeit** des Brechungsindex = **Geschwindigkeitssprung**

an der Grenzfläche! Born & Wolf: Principles of Optics 1999 p862; Wahrer Strahverlauf in Ebene bei $x = 0$. Länge des wahren Lichtwegs von 1 nach 2 ist $L = n_1 r_1 + n_2 r_2$. Jeder andere Lichtweg hat Länge $\tilde{L} = n_1(r_1 + \delta r_1) + n_2(r_2 + \delta r_2)$ mit $\delta\vec{r}_1 = (\delta x, \delta y, 0)$ und $\delta\vec{r}_1 = (\delta x, -\delta y, 0)$, wobei $\delta z = 0$ weil Strahl genau dort von Medium 1 nach Medium 2 wechselt. $\delta x \neq 0$ bedeutet, dass Strahl aus Einfallsebene raus darf. $\delta L = \tilde{L} - L = n_1\sqrt{z_1^2 + (y_1 + \delta y)^2 + (\delta x)^2} + n_2\sqrt{z_1^2 + (y_1 - \delta y)^2 + (\delta x)^2} - n_1\sqrt{z_1^2 + y_1^2} - n_2\sqrt{z_2^2 + y_2^2} \stackrel{!}{=} 0$. Bedeutet in erster Ordnung das **Snellius'sche Brechungsgesetz** $n_1 \sin\alpha_1 = n_1 \dfrac{y_1}{\sqrt{z_1^2 + y_1^2}} = n_2 \dfrac{y_2}{\sqrt{z_2^2 + y_2^2}} = n_2 \sin\alpha_2 = n \sin\alpha = \text{const}$, bedeutet Konst $= \dfrac{\sin\alpha}{v_{\text{Ph}}}$. Lindsay & Margenau: Foundations of physics. Fundamental concepts of physical theory explained. Foundations, background ideas, meaningfulness of data and tools of modern sciences 1936, 1957 133ff; Arens et al: Mathematik 2012^2 p336, p1208ff; Kowalewski: Bd3 p241ff Variationsrechnung; Weller & Wellstein: Bd3 Angewandte Elementar-Mathematik, I. Mathematische Physik 1910 **Geometrische Optik** p359-478, **Ebene Wellen** p479-525; Bachmann: Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung 1919; Goldstein: Klassische Mechanik 1950 Kap9 Eikonal; Born & Wolf: Principles of Optics 1999 p873ff Hamiltonanalogie für Licht- und Elektronenoptik; Lichtenberg: Phase-space dynamics of particle 1969 p14, p27ff **optische Analogie der Mechanik:** Hamilton'sche charakteristische Funktion = Eikonal der geometrischen Optik. Wellengl $\Delta\varphi = \dfrac{n^2}{c^2}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ mit $\varphi(\vec{r}, t) = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$ mit $k = \dfrac{n\omega}{c}$ und $n = \dfrac{c}{v_{\text{ph}}}$. Übergang zu inhomogenen Medien $\varphi(\vec{r}, t) = e^{A(\vec{r})} e^{ik_0(L(\vec{r}) - ct)}$ mit $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_0 L(\vec{r})$, wobei $L(\vec{r})$ = **optische Weglänge**. Wellengl gibt für Realteil $\Delta A + (\nabla A)^2 + k_0^2[n^2 - (\nabla L)^2] = 0$ und Imaginärteil $\Delta L + 2\nabla A \cdot \nabla L = 0$. Annahme: n nur geringfühgig ortsabhängig! Bedeutet $\Delta A \approx 0$ und $|\nabla A| \approx 0$ bedeutet **Geometrische Optik** $(\nabla L)^2 = n^2(\vec{r})$ = Eikonalgleichung = Gleichung der optischen Weglänge der geometrischen Optik. **Eikonal** = Bild = Abbild = optische Weglänge eines Lichtstrahls zwischen Ausgangs- und Endpunkt bezeichnet. Licht von einem Originalpunkt muss auf beliebigen Wegen zur gleichen Zeit auf einen bestimmten Punkt der Netzhaut/Sensor gelangen. Sommerfeld Bd4 Optik p211ff, p345 $(\nabla S)^2 = n^2(\vec{r})$ bedeutet für die Wellenfrontfläche rot $n\vec{S} = vec0$. Fall1 n=const gibt lineare Funktion $S(x, y, z) = (\alpha x + \beta y + \gamma z)n$ mit $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ wegen α=const, β=const bedeutet γ=const daher $\vec{k}$=const also **ebene Welle** also Strahlen paralele Linien grad $S = n(\alpha, \beta, \gamma)$. Fall2 Einfachster Fall mit singulärem Punkt und n=const, daher $S = nr$ und grad $S = \dfrac{n}{r}$. Fall3 Einfachsten Lösung mit singulärer Gerade bedeutet Zylinderwelle $S = n\rho$ also $\nabla S = \dfrac{n}{\rho}$. $L(\vec{r})$ als Lösung der Eikonalgleichung ordnet jedem Punkt im Ortsraum die Laufzeit der Welle zu. Linien gleicher Laufzeit lassen sich entsprechend als Wellenfronten interpretieren. ∇L = **optischer Impuls** $\sim \dfrac{\hat{k}}{v_{\text{ph}}}$ Dann wird Newtons Korpuskulartheorie mit Huygens Wellentheorie verträglich. HJT: $H\left(q_k, \dfrac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) + \dfrac{\partial S}{\partial t} = 0$ $S(q_i, \alpha_i, t) = W(q_i, \alpha_i) - H_0 t$ gibt eingeschränkte/verkürzte HJG $H(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}) = H_0$. Sommerfeld: Bd1 Mechanik p220ff; Goldstein: Klassische Mechanik 1950 p256 geomet Optik, p344ff **Eikonal**; Joos: LB theoret Physik p610 Materiewellen, p348ff, p675ff geomet Optik; Aus $\mathrm{d}W = H_0 \mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}W = ||\nabla W|| \mathrm{d}s$ folgt $v_{\text{ph}} = u = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{H_0}{||\nabla W||} = \dfrac{H_0}{||\vec{p}||}$. $(\nabla W)^2 = n^2(\vec{r}) = 2m(H_0 - U(\vec{r}))$. Hamiltonmechanik kann als geometrisch-optische Näherung der Wellenmechanik betrachtet werden! $\dfrac{\vec{p}^2}{2m} + U\vec{r}) = H_0 =$ const mit $\vec{p} = \dfrac{\partial F_2}{\partial \vec{r}} = \nabla F_2$ gibt $(\nabla F_2)^2 = 2m(H_0 - U(\vec{r}))$. Schaefer: Einf in die theoret Physik III.1 p572ff **Eikonal = Bild** p582ff Optik und Punktmechanik; Hinrichs: Einführung in die geometrische Optik 1924^2 Kline & Kay: Electromagnetic theory and geometric optics 1965; Maximilian Herzberger 1899-1982: Strahlenoptik 1931; Hamilton & Prange: Abhandlungen zur Strahlenoptik 1933; Steward: On the optical writings of Sir William Rowan Hamilton, Math .. 16 1932 p179; Rudolf Karl **Luneburg: Mathematical theory of optics** 1966 p88ff Lichtstrahlposition bei Axial- oder Rotationssymmetrie = relevanter Fall bei Linsensystemen, wobei z= optische Achse ist Achsenabstand $\rho(z)$. z wird zur **unabhängigen Koordinate**. $x(z), y(z)$ bedeutet Lichtstrahlposition variiert längs optischer Achse. Geometrischer Strahlenweg längs Mantellinie ist $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \mathrm{d}z^2(x'^2 + y'^2 + 1)$ also $\mathrm{d}s = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\mathrm{d}z$. Lichtwegfunktional ist $T[\vec{r}(\hat{z})] = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t = \int_{s_0}^{s_1} \dfrac{\mathrm{d}s}{v_{\text{ph}}} = \dfrac{1}{c}\int_{s_0}^{s_1} n(\vec{r})\mathrm{d}s = \dfrac{1}{c}\int_{z_0}^{z_1} n(\vec{r})\sqrt{1 + x'^2 + y'^2}\mathrm{d}z$. **Lagrange-Funktion**

der Strahlenoptik $\mathcal{L}(x,y,z,x',y') = n(x,y,z)\sqrt{1+x'^2+y'^2}$. Mit den **strahlenoptischen Impulsen** $p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{nx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} = n\cos\alpha$ und $p_y = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{ny'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} = n\cos\beta$, wobei die **Richtungskosinus** des Lichtstrahls $\cos\alpha = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}$, $\cos\beta = \frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}$ und $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}$ sind, und **strahlenoptischen Kräften**$K_x = \frac{\mathcal{L}}{\partial x} = \sqrt{1+x'^2+y'^2}\frac{\partial n}{\partial x}$, $K_y = \frac{\mathcal{L}}{\partial y} = \sqrt{1+x'^2+y'^2}\frac{\partial n}{\partial y}$, die die Strahlen senkrecht zur optischen Achse verschieben, hat man die ELG2 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x'} = \frac{\mathcal{L}}{\partial x}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y'} = \frac{\mathcal{L}}{\partial y}$, also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{nx'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} = \sqrt{1+x'^2+y'^2}\frac{\partial n}{\partial x}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{ny'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} = \sqrt{1+x'^2+y'^2}\frac{\partial n}{\partial y}$. Aus $n^2-p_x^2-p_y^2 = n^2-n^2\cos^2\alpha-n^2\cos^2\beta = n^2\cos\gamma = \frac{n^2}{1+x'^2+y'^2}$ folgt $x' = \frac{p_x}{\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2}} = -\frac{\partial}{\partial p_x}\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$ und $y' = \frac{p_y}{\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2}} = -\frac{\partial}{\partial p_y}\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2} = \frac{\partial H}{\partial p_y}$ und $p_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x}\frac{n}{\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2}}$, $p_y' = -\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial y}\frac{n}{\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2}}$ mit $H(x,y,p_x,p_y) = -\sqrt{n^2-p_x^2-p_y^2} = -n\cos\gamma$;

Wie muss reibungsfreie Rutsche im homogenen Kraftfeld geformt sein, um am schnellsten von einem höheren A zu einem tieferen und **horizontal versetzten** Punkt B zu kommen (**Brachistochrone** = zeitkürzeste)? Fallgeschwindigkeit durch Fallhöhe z (z zeigt nach unten!) ist mit dem Energiesatz $mv^2/2 - mgz = 0$ und daher $t_{AB} = \int_A^B \mathrm{d}t = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_A^B \mathrm{d}x\frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}$ also $L(z,z') = \sqrt{\frac{1+z'^2}{2gz}}$. **Beltrami-Identität** gibt $1+z'^2 = 1/2gC^2z$ oder $z' = \sqrt{\frac{2r_0-z}{z}}$ mit $2r_0 = 1/2gC^2$. Substitution $z = 2r_0\sin^2\varphi/2 = r_0(1-\cos\varphi)$ gibt $\mathrm{d}x = \mathrm{d}z\sqrt{z/(2r_0-z)} = r_0(1-\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$ oder die Zykloide $x-c_1 = r_0(\varphi-\sin\varphi)$. Kowalewski: iLB der höheren Mathe Bd3 1933 p246f: Arens p1211f; Caratheodory: Variationsrechnung und PDEs 1935 p296f; **Gelfand & Fomin: Calculus of Variations** 1963 p26f; Joos & Kaluza: Höhere Mathematik für Praktiker 1938 p336; Heber: Math Hilfsmittel 2 1967 p121ff; **Sokolnikoff & Redheffer: Mathematics of physicsand modern engineering** 1941, 1958; van der Waerden: Mathematik für Naturwissenschaftler 1975; Courant & Hilbert: Methoden der mathematischen Physik 1924 p58, 107; Margenau, Murphy: Die Mathematik für Physik und Chemie I 1948 p261ff; Schulz: Physik mit Bleistift; Siehe Bolza, **Weinstock: Calculus of variations** 1952 Kap7 **Systeme mit** **2 unabhängigen Variablen** $\delta\iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ F(x,y,\ f(x,y),\ f_x(x,y),\ f_y(x,y)) = 0$ **Schwingende Saite.** Erster Schritt in Richtung Feldtheorie über die Kontinuumsmechanik. Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953 Bd1 p120f, p303f; Siehe auch **Gelfand & Fomin: Calculus of Variations** 1963 p155; Lanczos, **Goldstein: Klassische Mechanik** 1963 p39f. Greiner: Mechanik 1 p253ff Huygens: Wie muss Pendelkurve geformt sein, damit alle höher gestarteten Körper die gleiche Reisezeit/Schwingungsdauer haben? = **Tautochrone** = Linie gleicher Fallzeit? **Zykloide:** $x(t) = r(t-\sin(t)), y(t) = r(1-\cos(t))$ mit r Kreisradius, t Wälz-Winkel. $x(y) = r\arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{y(2r-y)}$. **Eine Seifenhaut**, die zwischen zwei axialsymmetrisch im Abstand a angeordneten Kreisen mit den Radien R_1 und R_2 (Kegelstumpfkanten) eingespannt ist, nimmt eine Minimalfläche ein: Kettenlinie oder Katenoide. $\operatorname{acosh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Die Fläche eines Oberflächengürtels ist $\mathrm{d}A(y(x)) = 2\pi y(x)\mathrm{d}s(x)$ mit Gürtelumfang $y(x)$ und Gürtelbreite $\mathrm{d}s(x) = \mathrm{d}x\sqrt{1+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2}$ beim Ort x. Größe der gesamten Rotationsfläche zwischen x_1 und x_2 ist

$$A[y(x)] = 2\,\pi\int_{s_1}^{s_2} y(x)\,\mathrm{d}s(x) = 2\,\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\ \mathrm{d}x = \text{ Minimal!}$$

Gesucht ist also die Mantellinie $y(x)$, die die Fläche A minimiert. **Beltrami Identität:** Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(y,y') = y\sqrt{1+y'^2}$ **hängt nicht explizit von der unabhängigen** Variablen x ab. Dann gilt $\dot{H} = \frac{d}{dx}(\mathcal{L}-y'\,\mathcal{L}_{y'}) = \mathcal{L}' - y''\mathcal{L}_{y'} - y'\,\mathcal{L}_{y'}' = \mathcal{L}_y\,y' + \mathcal{L}_{y'}\,y'' - y''\mathcal{L}_{y'} - y'\mathcal{L}_y = 0$ wegen der Euler-Lagrange'schen

Gleichung $\mathcal{L}'_{y'} = \mathcal{L}_y$ und der totalen Ableitung nach der unabhängigen Variablen x des totalen Differenzials $\mathrm{d}\mathcal{L} = \mathcal{L}_y \mathrm{d}y + \mathcal{L}_{y'} \mathrm{d}y'$. Für die Mantellinie die Bedingung folgt daher $\frac{d}{dx}(\mathcal{L} - y'\,\mathcal{L}_{y'}) = 0$ und somit const $= \mathcal{L} - y'\,\mathcal{L}_{y'} = y/\sqrt{1+y'^2(x)} = \alpha$. Dies führt sofort auf $y' = \sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2} - 1}$ oder speziell für $\alpha = 1$ auf $1 = y^2 - y'^2$, dh wegen $1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$, also die Lösung $y(x) = \cosh^2(x)$. Allgemeiner gilt Die Integration dieser Gleichung liefert nach Trennung der Variablen die Beziehung

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int \mathrm{d}x = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}} = K + \operatorname{arcosh}\frac{y}{\alpha} = \ln(y + \sqrt{y^2-\alpha^2}) = \left(\ln\alpha + \operatorname{acosh}\frac{y}{\alpha}\right).$$

Deren Umformung liefert die gesuchte Gleichung für die Mantellinie, die sich als eine **Kettenlinie oder Katenoide** $y(x) = \alpha\,\cosh\frac{x-x_1}{\alpha}$ erweist. Arens p1211; Caratheodory: Variationsrechnung und PDEs 1935 p297f; **Kettenlinie mit Restriktion** oder Nebenbedingung $S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\{y\sqrt{1+y'^2} + \lambda(\sqrt{1+y'^2} - L)\}$ Kuypers Aufgabe 8.9; Watson: Physics - where the action is, New Scientist 30.1.1986 p42-44; **Dido-Problem: Welche Form muss meine Grenze haben**, damit ich meinen Besitz durch möglichst wenig Truppen zu verteidigen habe? **Kreis**:

Lösungsvariante 1: Die Fläche des Gebietes G ist $A = \int_{-R}^{R} y\,dx$ und die Länge der Berandung ∂G ist $u_G = 2\,R + \int_{-R}^{R} dx\,\sqrt{1+y'^2}$. Das entsprechende Funktional lautet dann

$$\mathcal{F}(y) = 2\,R + \int_{-R}^{R} dx(y - \lambda\sqrt{1+y'^2(x)}\,) = \int_{-R}^{R} dx\,(1 + y - \lambda\sqrt{1+y'^2(x)}\,) = \int_{-R}^{R} dx\,\mathcal{L}(y,y') = \max!$$

Da die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(y,y') = 1 + y - \lambda\sqrt{1+y'^2(x)}$ nicht explizit von der unabhängigen Variablen x abhängt, folgt $\frac{d}{dx}(\mathcal{L} - y'\,\mathcal{L}_{y'}) = 0$, const $= \mathcal{L} - y'\,\mathcal{L}_{y'} = 1 + y - \lambda\sqrt{1+y'^2(x)} + \frac{\lambda\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}$, $y = b + \frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}$ mit $b =$const-1. Geeignete Umformung und Integration

$$y'^2 = \frac{\lambda^2}{(y-b)^2} - 1 \quad \text{und} \quad \frac{(y-b)\,dy}{\sqrt{\lambda^2-(y-b)^2}} = dx$$

liefert die Kreisgleichung $(x-a)^2 + (y-b)^2 = \lambda^2$

Lösungsvariante 2 ohne Lagrange'schen Multiplikator: Man betrachte eine überall positive Funktion über der positiven x-Achse, die ihre Nullstellen bei 0 und x hat. Dann muss das Integral $\int_0^x y\,dx$ maximal werden, während die Nebenbedingungen $\int_0^x dx\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} = L$ zu erfüllen ist. Wir führen die Bogenlänge s als unabhängige Variable ein: $dx = \sqrt{ds^2 - dy^2} = \sqrt{1-(\frac{dy}{dx})^2}ds$. Dadurch erreichen wir, dass die Nebenbedingung in die Forderung, der Parameter s soll zwischen den festen Grenzen 0 und L laufen, übergeht. Außerdem erfassen wir durch die Parameterdarstellung auch solche Kurven für die $\frac{dy}{dx}$ an gewissen Stellen unendlich wird. Die Variationsaufgabe lautet nunmehr

$$\int_{s=0}^{s=L} y\sqrt{1-(\frac{dy}{dx})^2}\,ds = \text{ Maximum!}$$

Die Lagrange-Funktion enthält die unabhängige Variable nicht. Deshalb erhalten wir als Zwischenintegral

$$y\sqrt{1-(\frac{dy}{dx})^2} + \frac{dy}{ds}\frac{y\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1-(\frac{dy}{dx})^2}} = C_1$$

mit der Lösung $y = C_1\sin(s/C_1 + C2)$. Aus $dx = \sqrt{1-(\frac{dy}{dx})^2}ds$ folgt $dx = \frac{y}{C_1}ds = \sin(s/C_1 + C2)ds$, also $x = -C_2\,\cos(s/C_1 + C2)) + C_3$. Die Eliminierung von s gibt die Kreisgleichung $(x - C_3)^2 + y^2 = C_1^2$.

Lösungsvariante 3: Betrachte das Minimumproblem mit dem negativen Flächeninhalt $-\int_G dx\,dy = \min!$ und Länge der Randkurve $\int_{\partial G} ds = u$. Suche Randkurve in Gestalt $x = x(t), y = y(t), t \in [t_0, t_1]$.

Für die Ebene geht der Gauß'sche Integralsatz in die Integralformel von Gauß über, woraus man speziell die Sektorformel $\int_G dx\,dy = \int_{\partial G} -y\,dx + x\,dy = \int_{\partial G}(-y\,x' + x\,y')dt$ erhält.

Man kann zu diesem Integral auch mit Überlegungen zum Flächensatz kommen $\frac{1}{2}|\vec{x} \times \dot{\vec{x}}|\,dt = \frac{1}{2}|x\,\dot{y} - y\,\dot{x}|\,dt$ oder auch wie folgt argumentieren: Betrachte die äußeren Normaleneinheitsvektorkomponenten

$$n_1 = \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^(t)}} \quad n_2 = -\frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^(t)}}$$

Parzielle Integration von $-\int_G dx\,dy$ gibt

$$2\int_G dx\,dy = \int_G dx\,dy\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) = \int_{\partial G} ds(x\,n_1 + y\,n_2)$$

Dies gibt mit den Anfangsbedingungen $x(t_0) = x(t_1) = R$ und $y(t_0) = y(t_1) = 0$

$$\int_{t0}^{t1}(-y'(t)\,x(t) + x'(t)\,y(t))\,dt = \max! \quad \text{und} \quad \int_{t0}^{t1}\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt = u$$

mit dem Parameter R. Nimm die modifizierte Lagrange-Funktion
$\mathcal{L} = -y'\,x + x'\,y + \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}$. Mit den Euler-Lagrange'schen Gleichungen folgt

$$2\,y' + \lambda\frac{d}{dt}\frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0 \quad \text{und} \quad -2\,x' + \lambda\frac{d}{dt}\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$$

Für $\lambda = -2\,R$ resultiert die Kreislinie mit $x = R\cos t, y = R\cos t$ mit $u = 2\,\pi\,R$.

Isoperimetrie & Variationsrechnung: Gesucht ist $p(x)$, die bei gegebener Varianz $\sigma^2 = \int dx\,p(x)\,x^2$ und Normierbarkeit maximale Entropie hat. Oder: Gesucht ist jene Dichte $p(x)$, die maximale Entropie hat und als Nebenbedingungen den Momenten $< g_i(x) >$ genügt. Honerkamp p27 Reif Kap6.10 1975 p267, 763. Landsberg: Thermodynamics and statistical mechanics 1978 p148, 399. Kuypers Kap8-9 p483. Spataru: Theorie der Informationsübertragung 1973 p677. Aus

$$S[p] = -k\int \mathrm{d}x\,p\ln p - \alpha\int \mathrm{d}x\,p - \beta\int \mathrm{d}x\,x^2\,p = \int \mathrm{d}x\mathcal{L}(p), \quad \mathcal{L}(p) = -p\ln p - \alpha p - \beta x^2 p$$

folgt $\ln p = -k - \alpha - \beta x^2$ oder kurz $p = e^{-\beta x^2}$. Normierung: $1 = \int \mathrm{d}x\,p = a\int \mathrm{d}x\,e^{-\beta x^2} = a\sqrt{\pi/\beta}$ also $a = \sqrt{\beta/\pi} = 1/\sqrt{2\pi}\sigma$, wegen $\sigma^2 = a\int \mathrm{d}x x^2 e^{-\beta x^2} = a/2\sqrt{\pi/\beta^3} = 1/2\beta$, also $\beta = 1/2\sigma^2$.

oder **B moderne nichtlineare/dissipative Mechanik** ohne die die Funktion der Uhr (Menny: Die Uhr und ihre Funktionen) - das Paradigma des Grenzzyklus: Pendeluhr Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 Pendeluhr p134f; $I\ddot{\varphi} + k\dot{\varphi} + c\varphi = \frac{1}{2}[(k_1 + k_2) + (k_1 - k_2)\mathrm{sign}\ddot{\varphi}]\delta(\varphi)$ siehe **Jordan & Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations**. An Introduction to Dynamical Systems 1999, 2007[4] p37f; Bertele: Marine- und Taschenchronometer. Geschichte, Entwicklung, Auswirkungen 1981; Davis: Aufstieg und Niedergang der Chronometerherstellung in Großbritannien. Alte Uhren, Jahrgang 4, Calwey 1981; mittlerer täglicher Gang max -5 bis +8 sek/Tag. Quarzuhr: max ± 0.07 sek/Tag. Parvulesco: Armbanduhren mit Komplikationen 2010; Parvulesco: Zeit & Meer – Die Geschichte der Chronometer 2013; John Harrison 1693-1776 Grasshopper-Hemmung, Chronometer lies Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 Pendeluhr p134f; und Sobel: Längengrad. Die wahre Geschichte eines einsamen Genies, welches das größte wissenschaftliche Problem seiner Zeit löste. Illustrierte Ausgabe 2013; Dash: Die Jagd nach dem Längengrad 2004; Despoix: Die Welt vermessen. Dispositive der Entdeckungsreise im Zeitalter der Aufklärung 2004; **Setze den van der Pol** (1926) siehe Acheson: Vom Calculus zum Chaos p168 **oder Lienard-Systeme an die Spitze der Mechanik-Ausbildung!Lienhard-System:**

g odd function and f an even function. $\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0$. Lienard- oder Helmholtz-Potenzial = Modelle für Dissoziation. Eyring-Modell. Kaplan & Glass: Understanding nonlinear dynamics 1995 Kap5.7 p240ff; Feynman & Sands: Lectures Bd2 Trioden-Schwingkreis. Barkhausen: Einführung in die Schwingungslehre. Nebst Anwendungen auf mechanische und elektrische Schwingungen 1950; Barkhausen: Lehrbuch der Elektronenröhren Bd1=Grundlagen, Bd2=Verstärker, Bd3=Rückkopplung, Bd4 Gleichrichter und Empfänger 1969[10]; Seydel & Bulirsch: Vom Regenbogen zum Farbfernsehen 1986 p74 Herzschlag - nicht begriffen werden kann:

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\,\dot{x} + x = 0$$

Jetschke: Mathematik der Selbstorganisation. Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie 1989 und 2009 p270; Grüne & Junge: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme 2015 p181f; `http://www.scholarpedia.org/article/Van_der_Pol_oscillator` Bei $\mu = 0$ ist (0,0) Zentrum, das für $\mu > 0$ instabil wird: $\mu = 0.1$ fast harmon. Osz., $\mu = 1.0$ Sägezahn, $\mu = 10$ oszillierender Relaxator, der plötzlich durchschlägt. **Argyris, Haase, Faust, Friedrich: Die Erforschung des Chaos.** Eine Einführung in die Theorie nichtlinearer Systeme 2010 p614ff; Kryloff & Bogoliuboff Introduction to non-linear mechanics 1937/1947 Andronov, Vitt, Chajkin/Khaikin: Theory of oscillators 1966; **Andronov, Vitt, Chajkin: Theorie der Schwingungen** 1965; Bogoljubow & Mitropolski: Asymptotische Methoden 1958/1965; Kapitaniak ed: Chaotic oscillators 1992; Minorsky: Nonlinear Oscillations 1971; Pippard: The physics of vibrations 1989; Aggarwal: Notes on nonlinear systems 1972; Nayfeh: Introduction Perturbation 1981; Simmonds: A first look at perturbation theory 1998; Hagedorn: Non-linear oscillations 1978; Percival & Richards: Introduction to dynamics 1982 Excellent textbook that we recommend for its clarity and its pedagogical emphasis; Zaslavsky: Stochastische dynamische Systeme 1984; Lichtenberg & Lieberman: Regular and **stochastic motion** 1982 ⇒ Regular and **chaotic dynamics** 1992; **Wiedemann: Numerische Physik** 2004; **Kahn: Mathematische Methoden für Wissenschaftler und Ingenieure** 1995; Haberman: Mathematical Models 1998; Iro: A modern approach to classical mechanics; Haken: Synergetics; **Hand & Finch: Analytical mechanics 1998**; **Török: Analytical mechanics with introduction to dynamical systems** 2000; Landa: Nonlinear Oscillations and Waves in Dynamical Systems 2001; Landa: Regular and Chaotic Oscillations 2010; Neimark & Landa: Stochastic and Chaotic Oscillations 1992; Konotop & Vasquez: Nonlinear random waves 1994; Broer & Takens: Dynamical Systems and Chaos e-book http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-6870-8 ; Lai & Tel: Transient Chaos e-book http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4419-6987-3nfuehrung in die Operatorenrechnung; Ginoux: Differential geometry applied to dynamical systems 2009; Zaslavsky: Hamiltonian chaos and fractional dynamics 2008; MacKay & Meiss: Hamiltonian Dynamical Systems; José & Saletan: Classical Dynamics 1998. Very pedagogical textbook takes time to explain and illustrate every new notion.

Realistische Beschreibung der Reibung bei langsamer Bewegung ist **die Coulomb'sche Reibung/Gleitreibung/Haft** und nicht in erster Näherung **Stokes'sche Reibung** $F = -\gamma\dot{x}$ oder **turbulente Reibung** $F = -\gamma\mathrm{sign}(\dot{x})\dot{x}^2$. Dies gibt eine **nichtlineare** Dgl $\dot{v} = c\,v^2 + g$, eine spezielle **Riccatische Differentialgleichung** $y'(x) = f(x)y^2(x) + g(x)y(x) + h(x)$, nach Trennung der Variablen per Parzialbruchzerlegung gelöst werden kann. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen 2004; **Newtonsches Fluid** hat ideal-elastisches, also lineares, unelastisches Fließverhalten. Schergeschwindigkeit proportional zur Scherspannung: $\tau = \eta \cdot \dot{\gamma}$. Wasser und Luft, werden durch diese belastungsunabhängige Viskosität charakterisiert. Ihre Bewegung gehorcht den Gleichungen von Navier-Stokes. **Newtonsches Reibungsgesetz:** $F_\mathrm{r} = A \cdot \eta \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ mit A Fläche mit der der Körper auf dem Fluid aufliegt, η ist die **dynamische Viskosität** des Fluids. $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}$ **vertikales Geschwindigkeitsgefälle in dem Fluid** mit beliebigem Profil. Siehe Seite 590 **Hagen-Poiseuille-Gesetz**.

Nayfeh: Introduction to perturbation techniques 1981; **Bogoljubow & Mitropolski: Asymptotische Methoden in der Theorie der nichtlinearen Schwingungen** 1958/1965 p3ff Idee: Koeffizientenvergleich für gleiche Potenzen des kleinen Parameters ϵ ; **Verhulst: Nonlinear differential equations and dynamical systems** 1990, 2006[3] p130ff Lichtenberg & Lieberman: Regular and **stochastic motion** 1982 ⇒ Regular and **chaotic dynamics** 1992 Kap2 p70ff; **Scott:**

Nonlinear science 2003^2 Kap7, p287ff; Nayfeh: The Method of Normal Forms 2011; **Kahn: Math Methoden** **Störungstheorie nach Poincare 1892-Lindstedt 1882:** $\ddot{x} = -g + \epsilon\, f(x, \dot{x})$ mit $\epsilon << 1$,
$x(t) = x_0(t) + \epsilon\, x_1(t) + \epsilon^2\, x_2(t) + \ldots,\ \dot{x}(t) = \dot{x}_0(t) + \epsilon\, \dot{x}_1(t) + \epsilon^2\, \dot{x}_2(t) + \ldots$ **Drazin: Nonlinear systems** 1992 181ff; Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991^5 Kap7.11 p138-148 **Anharmonischer Oszillator** $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\right] = 0$ hat amplitudenabhängige Eigenfrequenz! Mit $\varphi^3 = \varphi_0^3 \sin\omega t + 3\epsilon\varphi_0^3 \sin^2\omega t \sin 3\omega t + O(\epsilon^2) = \varphi_0^3 \frac{3}{4} \sin\omega t - \frac{\varphi_0^3}{4} \sin 3\omega t + \epsilon 3\varphi_0^3 \sin^2\omega t \sin 3\omega t + O(\epsilon^2)$ und $\dot{\varphi} = \varphi_0\omega\cos\omega t + \epsilon 3\omega\varphi_0 \cos 3\omega t$ und $\ddot{\varphi} = -\varphi_0\omega^2 \sin\omega t - \epsilon 9\omega^3\varphi_0 \sin 3\omega t$ folgt aus $\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left[\varphi - \frac{\varphi^3}{6}\right] = -\varphi_0\omega^2 \sin\omega t - \epsilon 9\omega^3\varphi_0 \sin 3\omega t + \omega_0^2[\varphi_0 \sin\omega t + \epsilon\varphi_0 \sin 3\omega t] - \frac{\omega_0^2}{6}\left[\varphi_0^3 \frac{3}{4} \sin\omega t - \frac{\varphi_0^3}{4} \sin 3\omega t + \epsilon 3\varphi_0^3 \sin^2\omega t \sin 3\omega t\right] = 0$ und $\epsilon \ll 1$ und $\varphi_0 \ll 1$ folgt durch Koeffizientenvergleich bei ϵ^0 : $(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3\omega_0^2\varphi_0^2}{24})\varphi_0 \sin\omega t = 0$ also $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\varphi_0^2}{8}}$ und bei ϵ : $(-\epsilon 9\omega^2 + \epsilon\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2\varphi_0^2}{24})\varphi_0 \sin 3\omega t = 0$ mit $\omega^2 \approx \omega_0^2$ gilt die obige Näherung bis etwa $\epsilon \approx \frac{\varphi_0^2}{192}$ Kuypers: Mechanik Kap13 p252ff; **H̃and & Finch: Analytical mechanics** 1998 p398ff; **Iro: A modern approach to classical mechanics** 2002 p53f; Fowles: Analytical mechanicsi 1977; **Török: Analytical mechanics with introduction to dynamical systems** 2000; Rand & Armbruster: Pertubation methods, bifurcation theory and computer algebra; **Minorsky: Nonlinear Oscillations** 1971; **Ñayfeh & Mook: Nonlinear oscillations** 1995; **M̃ickens: An introduction to nonlinear oscillations** 1981 p130ff; Mickens: Truly nonlinear oscillations. Harmonic balance, parameter expansions, iteration, and averaging methods 2010; Straumann: Klassische Mech p287ff;

Zentren/Drehbewegung bei Dampfmaschine/Kolbenmotor/kicked rotator über Regelung oder räumlicher Periodizität (Stator/Rotor bei Turbine), aber **Grenzzyklus** folgt erst mittels eines zusätzlichen Reglers

Methode der Green'schen Funktion, Kubo-Formalismus, Schäfer: Einführung in die theoretische Physik BdI.1 1914, 1950^5 p635ff Response-Funktion: Wagner: Elemente der theoret Physik Bd1; **Iwanenko & Sokolow: Klassische Feldtheorie** 1948 1960 Alles über $\delta(x)$ und Methode der Green'schen Fkt; Verschaffe Dir die Lösung eines Systems bei Pulsanregung (zeitlich singulärer Fall: gekickter Schwinger) oder punktförmige Feldquelle (räumlich singulärer Fall: Coulomb-Feld), dann ist die Lösung des Problem für beliebig Anregung oder Ladungsverteilung durch ein Faltungsintegral der Imhomogenität mit der Green-Funktion zu bekommen. Beachte, dass es für jede Standardsituation eine von den Randbedingungen abhängige Green-Funktion gibt. **Gesucht ist Lösung** von $L\Psi(x) = \rho(x)$, wo L ein auf x wirkender linearer Operator ist. Rezept: Nimm bekannte Lösung zur Pulsanregung beim durch L ausgedrückten physikalischen Problem bei dem die Singularität an einer beliebigen Stelle x' sitzt: $LG(x - x') = \delta(x - x')$ (*). $G(x - x')$ ist die Inverse zu L. Die Lösung für beliebige Ladungsverteilung $\rho(x')$: Multipliziere (*) mit $\rho(x')$ und integriere über das gesamte Volumen $\mathrm{d}x'$!

$$L_x\Psi(x) = L_x \int \mathrm{d}x' G(x - x')\rho(x') = \int \mathrm{d}x' L_x G(x - x')\rho(x') = \int \mathrm{d}x' \delta(x - x')\rho(x') = \rho(x)$$

Scherbaum: Of poles and zeros. Fundamentals of digital seismology 1996;

Wegintegral-Methode ist verwand! **Schulman: Techniques and application of path integration** 1981; **Arya: Introduction to classical mechanics** p120; **Hertel: Mathematikbuch zur Physik** 2009 e-book Kapitel zu gewöhnlichen Dgls!, Arbeitsbuch Mathematik zur Physik 2011; **Reineker, Schulz: Mechanik** 2006 p144ff; **Török: Analytical mechanics with introduction to dynamical systems** 2000; H̃and & Finch: Analytical mechanics, p100 oder S̃trauch: Classical mechanics p113 p134ff, 352! **TeX/introductions/Praktikum+Exercise/Aufgaben/Mechanik/ 1FredSammlungMechaniktpi** Methode der Green-Funktion siehe **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** BdI.1 1914, 1950^5

p635ff **Haake: Einführung in die Theoretische Physik 1983**, Subarew oder Zubarev: Statistische Thermodynamik 1976; Röpke: Statistische Mechanik 1986 Kap4, p159 Stauffer & Aharony: Perkolationstheorie 1995; **Byron & Fuller: Mathematics of classical and quantum physics** 1969 Chap7 p388ff; Riley, Hobson & Bence: Mathematical methods for physics and engineering 1998; Friedman: Advanced Calculus; Leech: Mechanics; Wagner, Max: Theoretische Physik, RoRoRo 1975; **Myshkis: Advanced mathematics for engineers** 1975; Zeldovich Myshkin: Singh & Chaturvedi: IIT JEE Physics (38 Years) **Topic-wise Complete Solutions** Vol1: Mechanics, Waves and Optics 1978-2015; Liebscher: Theoretische Physik; Kuypers: Klassische Mechanik; **Propagator-Idee:** $x(t) = P(t,t_0)x_x + \int_{t_0}^t P(t,\tau)\,B(\tau)$ mit $P(t,\tau) = e^{\int_t^\tau ds\,A(s)}$ als Verallgemeinerung der Methode der **Variation der Konstanten** = setze **Inhomogenität** = **Null** und gehe mit der so gewonnenen Lösung $x(t)$ in die ursprüngliche Dgl mit C(t)x(t), die Konstanten der Linearkombination werden als abhängige Variablen betrachtet, die der neuen Dgl genügt. Bronstein: Taschenbuch der Mathe Ziegler 1958, Zeidler 2003 p455; $\dot{x} = A(t)x + B(t), x(0) = x_0 \overset{B(t)=0}{\to} x(t) = C\,e^{\int_{t_0}^t dt\,A(t)} \to C(t) = x_0 + \int_{t_0}^t d\tau\,B(\tau)\,e^{\int_{t_0}^\tau ds\,A(s)}$. **Beispiel:** $\dot{x} + 2xt = e^{-t^2}$. Löse die homogene Dgl $\dot{x} + 2xt = 0$ durch $x(t) = e^{-t^2}$ und setze $x(t) = C(t)e^{-t^2}$ in die Ausgangsgleichung, die zu $\dot{C} = 1$ wird. Dies gibt $C(t) = t \to x(t) = te^{-t^2}$ aus Jug: Math in Chemie 1981 p170; Freier Fall mit Stokes'scher Reibung. Harper: Analytical Methods in Physics 1999 Kap7.4.4 p184; Die Green-Funktion ist die Lösung für das **impulsgetriebene Ersatz-Problem**: p170; Freier Fall mit Stokes'scher Reibung. Harper: Analytical Methods in Physics 1999 Kap7.4.4 p184; Die Green-Funktion ist die Lösung für das **impulsgetriebene Ersatz-Problem**: p170; Freier Fall mit Stokes'scher Reibung. Harper: Analytical Methods in Physics 1999 Kap7.4.4 p184; Die Green-Funktion ist die Lösung für das **impulsgetriebene Ersatz-Problem**: $Lx = F(t)$, $LG(t-t') = \delta(t-t')$, $x(t) = x_h(t) + \int_{-\infty}^\infty dt' G(t,t')F(t')$.

$$\hat{G}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{L(i\,\omega)}$$

Die Integration über $\mathbb{R}$ widerspricht der Kausalität! Bei räumlichen Problemen macht die Integration über der Grundbereich Sinn. Kennst du die obige Lösung für's **gekickte System**, so kennst du auch die Lösung für alle zeitlich beliebig geführten Antriebe $F(x)$ des sonst gleichen autonomen Systems L. Bei $\ddot{x} + 2\Gamma\dot{x} + \Omega^2 x = b$ hängt die Lösung **linear** vom Antrieb b ab: $x(t) = \int \mathrm{d}t' G(t,t')b(t')$. Die **Einflussfunktion** $G(t,t') = G(t-t') = G(\tau)$ hängt nur von der Zeitdifferenz zwischen **Ursache**/Antrieb $b(t')$ und der **Wirkung** $x(t)$ ab. Außerdem soll die Ursache der Wirkung vorausgehen. Daher verschwindet $G(\tau)$ für negatives Argument $\tau =$ **Alter des Einflusses**. **Iro: A modern approach to classical mechanics** 2002 p41-44, **428-432!** Was ist $x(t)$ für erzwungene Schwingungen eines **ungedämpften linearen Oszillators**, der sich zur Zeit $t = 0$ in der Gleichgewichtslage $x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$ befindet? Allgemein gilt

$$G(t-t') = \theta(t-t')\frac{\sin\omega(t-t')}{m\omega}, \quad x(t) = \int_{-\infty}^\infty f(t')G(t-t')\mathrm{d}t' = \frac{1}{m\omega}\int_{t_1'=0}^{t_2'=t} f(t')\sin(\omega(t-t'))\,dt'$$

Die untere Integralgrenze gibt den Zeitpunkt des Beginns der Ursache, die obere das Ende der Wirkung. **Obere Grenzen ∞ bedeutet Wirkung aus der Zukunft auf die Gegenwart!** **Kotkin & Serbo: Exploring classical mechanics. A collection of 350+ solved problems** 1969, 1971, 2010[4] Aufgabe 5.16; Kuypers: Mechanik §2.5 oder Kap14 p275ff; **Getriebener harmonischer Oszillator und Methode Green'scher Funktion:** Wegen $G(t,t') = \theta(t-t')\dfrac{1}{\omega_0}\sin\omega_0\,(t-t')$ gibt $x(t) = x_{\text{homogen}}(t) + \frac{1}{m\omega}\int_0^t f(t')\sin(\omega(t-t'))\,dt'$ und wegen $x = \dot{x} = 0$ ist $x_{\text{homogen}}(t) = 0$. Aus $F = F_0$=const wird eine Schwingung um verschobene Ruhelage wie im homogenen Schwerefeld der Erde $x(t) = \frac{F_0}{m\omega}\int_{-\infty}^\infty \sin(\omega(t-t'))\theta(t-t')\,dt' \overset{\text{AB } t=0}{=} \frac{F_0}{m\omega}\int_0^t \sin(\omega(t-t'))\,dt' = \frac{F_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$. Die **untere Grenze** wird durch die Anfangsbedingung $t = 0$ fixiert, während die **obere Grenze** der **Heaviside-Funktion/Kausalität** folgt: $t \geq t'$, t' kann nicht größer als t sein oder die Ursache kann nicht vor der Wirkung stattfinden! Aus $F = at$ wird eine mit der Zeit linear immer länger werdende Feder mit gleicher Schwingungsamplitude $x(t) = \frac{a}{m\omega}\int_0^t t\sin(\omega(t-t'))\,dt' = \frac{a}{m\omega^2}\left[t'\cos\omega(t-t')|_0^t - \int_0^t \cos\omega(t-t')\,dt'\right] = \frac{a}{m\omega^2}[t - \frac{\sin\omega t}{\omega}]$. Antrieb $F = F_0 e^{-at}$ gibt eine Schwingung $x(t) = \frac{F_0}{m\omega}\int_0^t e^{-at'}\sin(\omega(t-t'))\,dt' = \frac{F_0 e^{-at}}{m\omega}\mathrm{Im}[\int_0^t e^{a(t-t')+i\omega(t-t')}\,dt'] = \frac{F_0 e^{-at}}{m\omega}\mathrm{Im}\left[\frac{1-e^{at+i\omega t}}{-a-i\omega}\right] = \frac{F_0}{m\omega(a^2+\omega^2)}(a\sin\omega t + \omega(e^{-at} - \cos\omega t))$,die im Limes

einer phasenverschobenen ungedämpften Schwingung entspricht. Falk: Theoretische Physik auf Grundlage der allgemeinen Dynamik. BdI: Elementare Punktmechanik & BdIa: Aufgaben u Ergänzungen zur Punktmechanik 1966; **R. Snieder: A Guided Tour of Mathematical Methods: For the Physical Sciences** 2009[2] Chap18; **Gekickter freier Oszillator** $F(t) = \sum_{n=0}^{N} \delta(t-nT)$ gibt $x(t) = \frac{1}{m\omega}\int_0^t f(t')\sin(\omega(t-t'))\,dt' = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\omega(t-nT)}{m\omega} = \frac{1}{m\omega}\mathrm{Im}[\sum_{n=0}^{N} e^{i\omega(t-nT)}] = \frac{1}{m\omega}\mathrm{Im}e^{i\omega t}[q^0+q^1+q^2+\cdots+q^N] \overset{\text{geometri Reihe mit } q=\exp(-i\omega T)}{=} \frac{1}{m\omega}\mathrm{Im}\left[e^{i\omega t}\frac{1-e^{-i\omega T(N+1)}}{1-e^{-i\omega T}}\right]$. Für $\omega T \neq 2\pi k$ ist die Amplitude der **geometrischen Reihe endlich**, siehe Seite 124, für $\omega T = 2\pi k$ erhalten wir hingegen eine mit N divergierende Amplitude $x(t,N) = \frac{N+1}{m\omega}\sin\omega t$.
Schönes Beispiel zu Methode Green'scher Funktion: $L(q,\dot q) = \ln(q+\dot q) \to H(q,p) = 1 - qp + \ln p \to \dot q + q = p_0 e^{-t} \to \hat G = \dfrac{1}{i\omega+1} \to G(t,t') = e^{-(t-t')}\Theta(t-t') \to q(t) = q_h + q_{in} = q_0\,e^{-(t-t_0)} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t'\,\theta(t-t')\,e^{-(t-t')}p_0\,e^{-t'} = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\,\theta(t-t') = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\int_{t'}^{t}\mathrm{d}t' = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\,(t-t') = q_0\,e^{-(t-t_0)} + p_0\,e^{-t}\,(t-t^0) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$

Finde Green-Funktion $x = G(t,t')$, die $\ddot x + \alpha\dot x = \delta(t-t')$ mit $x = \dot x = 0$ bei $t = 0$ löst. Gib die Lösung von $\ddot x + \alpha\dot x = f(t)$ für

$$f(t) = \begin{cases} A\,e^{-\beta\,t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{44}$$

an. $x_h(t) = Ae^{-\alpha t}$ und $x_{in}(t) = B$. Allgem. Lösung $x(t) = Ae^{-\alpha t} + B$. Folglich gilt

$$G(t,t') = \begin{cases} C\,e^{-\alpha\,t} + D & t' < t \\ Ae^{-\alpha t} + B & 0 \leq t \leq t' \end{cases} \tag{45}$$

Mit den Anfangsbed. folgt $G(t,t') = 0$ für $0 \leq t \leq t'$ und wegen Stetigkeit folgt $G(t,t') = \dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-t')})$ für $t > t'$ und schließlich

$$x(t) = \frac{A(\alpha(1-e^{-\beta t}) - \beta(1-e^{-\alpha t}))}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}.$$

Freier gedämpfter harmonischer Oszillator mit $L_t = \partial_t^2 + 2\gamma\partial_t + \omega_0^2$ bedeutet $L_t G(t-t') = \delta(t-t')$ oder Fourier-transformiert $(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2)G(\omega) = 1$ oder
$G(\omega) = \dfrac{1}{-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2} = -\dfrac{1}{(\omega - i\gamma - \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2})(\omega - i\gamma + \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2})}$. Rücktransformation per Residuensatz gibt für $t > 0$ die **kausale Green-Funktion** $G(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\omega e^{i\omega t}G(\omega) = \dfrac{1}{\Omega}e^{-\gamma t}\sin\Omega t$. **Iro: A modern approach to classical mechanics** 2002 p41-44, **428-432!**

Röpke p159; Zubarew 1976; Schulz:

$$G(t,t') = \theta(t-t')\frac{e^{-\gamma(t-t')}}{\Omega}\sin\Omega\,(t-t')$$

mit der durch **Reibung reduzierten Eigenfrequenz** $\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$. Die Heaviside-Funktion Θ oder H sichert Kausalität: Die Antwort darf nicht der Anregung vorausgehen! **1. schwache Dämpfung, Normaltyp, unterdämfter Schwinger** $\omega_0 > \gamma$, $x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\Omega t + \varphi$; **2. aperiodischer Grenzfall, kritisch gedämpft**, am schnellsten zur Nulllage $\omega_0 = \gamma$, $x(t) = Ae^{-\gamma t}(B + Ct)$; **3. Kriechfall, starke Dämpfung, überdämpfter Schwinger** $\omega_0 < \gamma$, also $x(t) = De^{\lambda_1 t} + Ee^{\lambda_2 t}$; Allgemeine Lösung siehe Seite 326. Pötter: Math Meth Physik p157. **Erzwungene Schwingung oder getriebener Oszillator siehe Budo: Mechanik p96f oder Sommerfeld: Mechanik p100f** ist im komplexen leicht lösbar. Rechenvorteil durch Gang ins komplexe. $\ddot x + \omega_0^2 x + 2\beta\dot x = fe^{i\omega t}$ hat im eingeschwungenen Zustand die nachlaufende Lösung $x(t) = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$, die oben eingesetzt die Amplituden- und Phasenverhältnisse klärt, indem man sich Betrag und Phase der komplexen Zahl $A(\omega_0^2 - \omega^2 + i2\beta\omega) = fe^{i\varphi}$ ansieht, also $A = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$ und $\tan\varphi = \dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ erkennt. Man hat also für große Zeiten $x(t) = A\cos(\omega t - \varphi) + \cancel{ae^{-\beta t}\sin(\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}t + \alpha)}$.
Oder umständlicher reell $\ddot x + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot x = F\sin\omega t$ hat im eingeschwungenen Zustand, nach dem alle Moden mit von ω verschiedenen Frequenzen zerfallen sind, die **spezielle Lösung der inhomogenen** Gleichung

$x_{\text{spez der inhomogenen}} = B\sin(\omega t+\varphi)$ mit Additionstheoremen zur Findung der Sinus-Werte, die nicht in der Sinus-Tafel stehen, siehe **Hermite: Uebersicht der Theorie der Elliptischen Funktionen** 1855, 1863 p4 $\sin(\omega t+\varphi) = \sin\omega t\cos\varphi + \cos\omega t\sin\varphi$ und $\cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t\cos\varphi - \sin\omega t\sin\varphi$ folgen die Gln $\sin\omega t(\omega_0^2 B - \omega^2 B\cos\varphi - 2\gamma\omega B\sin\varphi - F) = 0$ und $\cos\omega t(2\gamma\omega B\cos\varphi - \omega^2 B\sin\varphi + \omega_0^2 B\sin\varphi) = 0$ oder

$$\tan\varphi = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2}, \quad \sin\varphi = \frac{-2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{-(\omega^2-\omega_0^2)}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}$$

. $x(t) = x_{\text{homogene}} + B\sin(\omega t+\varphi)$ mit $x_{\text{homogene}}(t) = Ae^{-\gamma t}\cos\Omega t+\varphi$ und $B(\omega) = F[(\omega^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega^2]^{-1/2}$ hat Maximum oder **Resonanz** bei $\omega_R^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$ Stephani & Kuge: Mechanik p28; **Horizontal getriebener Aufhängepunkt beim ebenen Pendel** gibt 2 Zwangsbedigungen holonom $g_1(z) = z = 0$ und rheonom $g_2(x,y,t) = (x-f(t))^2+y^2-l^2 = 0$. Wegen $x = l\sin\theta + f$, $\dot x = l\dot\theta\cos\theta + \dot f$, $y = -l\cos\theta$, $\dot y = -l\dot\theta\sin\theta$, $V = mgy = -mgl\cos\theta$, $T = m/2(l^2\dot\theta^2 + \dot f^2 + 2l\dot\theta\dot f\cos\theta)$, $L = T - V = m/2(l^2\dot\theta^2 + \dot f^2 + 2l\dot\theta\dot f\cos\theta) + mgl\cos\theta$. Gibt Bewegungsgleichung $m\,l^2\,\ddot\theta + ml\ddot f\cos\theta + m\,g\,l\,\sin\theta = 0$ oder $\ddot\theta + \frac{\ddot f}{l}\cos\theta + \omega_0^2\sin\theta = 0$. Für kleine Auslenkungen $f_a(t) = at+b$, $\dot f_a = a$, $\ddot f_a = 0$ hat man harmonische Oszillator mit allgemeiner Lös. $\theta_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Für die Lagrange-Gleichung gilt zwar $\partial L/\partial t = 0$, die Energie ist aber dennoch nicht erhalten, weil die kin Energie T keine homogene Funktion der Geschwindigkeit ist. Für $f_b(t) = c\cos(\Omega t)$ (c,Ω konstant), also $\dot f_b = -c\Omega\sin\Omega t$, $\ddot f_b = -c\Omega^2\cos\Omega t$ und $\cos\theta \approx 1$ hat man die Bewegungsgleichung $\ddot\theta + \omega_0^2\theta = \frac{c\Omega^2}{l}\cos\Omega t = F\cos\Omega t$. Mit dem Ansatz für eine partikuläre Lös $\theta_p(t) = D\cos(\Omega t)$ folgt $(-\Omega^2 + \omega_0^2)D\cos(\Omega t) = F\cos\Omega t$, also $\theta_p(t) = \frac{c\Omega^2}{l(\omega_0^2-\Omega^2)}\cos\Omega t$. Energie ist wegen $\partial L/\partial t \neq 0$ nicht erhalten. Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] Kap7.11 **Harmonischer Oszillator** p138-148; Bei Resonanz nicht mehr periodisch, da Entwicklung nach Frequenzabstand $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ tritt t als säkulares Glied auf $x = C(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t)$, Sommerfeld: Mechanik p98, Pötter: Math Meth Physik p154. Einfacher und Anschluss an Green'sche Funktion: $\ddot x + \omega_0^2 x + 2\gamma\dot x = Fe^{i\omega t}$ mit stationärer Lösung als partikulärer Lösung $x_p = GFe^{i\omega t}$ folgt die algebraische Gl $[-\omega^2 + \omega_0^2 + i2\gamma\omega]G(\omega) = 1$, Green'sche Funktion ist

$$G(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega}$$

Glaßl p184; **Haake: Einf in die theoret Physik** 1983 p22 ff; **Kagermann & Köhler: Aufgabensammlung theoretische Physik 1. Mechanik** 1986 p139; Singh & Chaturvedi: IIT JEE Physics (38 Years) **Topic-wise Complete Solutions** Vol1: Mechanics, Waves and Optics 1978-2015;

Vergangenheit: $t_- = \frac{1}{2}(|t| - t)$ und Zukunft $t_+ = \frac{1}{2}(|t| + t)$

Elk & Gasser: Die Methode der Green'schen Funktionen in der Festkörperphysik 1979 **Fetter & Walecka: Quantum Theory of Many-Particle Systems** 2003; http://www3.interscience.wiley. com/cgi-bin/bookhome/109872852 Ñg: Introduction to classical and quantum field theory 2009; Kadanoff: Quantum statistical mechanics. Green's function methods in equilibrium and nonequilibrium problems 1962; Zeidler: QFT 1 & 2;

Harper: Analytical Methods in Physics 1999 Kap7.4.4 p184, **Legendre-Transformation** p75; Berührungstransformation - die Variablentransformation transformiert von einer Funktion $f(x)$ zu einer Funktion $g(u)$, wobei die unabhängige Variable von g die Ableitung der Funktion f ist, $u = \frac{\partial f}{\partial x}$ und umgekehrt $x = \pm\frac{\partial g}{\partial u}$. $g(u) = \pm\left[u\,x(u) - f(x(u))\right]$, $\quad f(x) = x\,u(x) \mp g(u(x))$ Die Kurve kann, statt die Punktmenge anzugeben, aus der sie besteht, auch durch die Menge aller Tangenten charakterisiert werden, die sie einhüllen. Genau das passiert bei der Legendre-Transformation. Die Transformierte, $g(u)$, ordnet der Steigung u einer jeden Tangente deren Y-Achsenabschnitt zu. Es ist also eine Beschreibung derselben Kurve - nur über einen anderen Parameter, nämlich u statt x. **Curtis & Miller: Differential manifolds and theoretical physics** 1985 e-book p8 Sei **Zustandsraum** $S = M\times\mathbb{R}^{3n}$ mit **Standardbasis** $(e_1,\ldots,e_{3n})$ und **Phasenraum** $S^* = M\times(\mathbb{R}^{3n})^*$ mit **dualer Standardbasis** $(e^1,\ldots,e^{3n})$, dann ist **Legendre-Transformation** $\mathcal{L}: S\to S^*$ vermöge $\mathcal{L}(q,\sum_i M_i v^i e_i) = (q,\sum_i M_i v^i e^i)$ oder in Koordinaten

$\mathcal{L}(q^1,\dots,q^{3n},v^1,\dots,v^{3n}) = (q^1,\dots,q^{3n},M_1v^1,\dots,M_{3n}v^{3n}) = (q^1,\dots,q^{3n},p_1,\dots,p_{3n})$; Mit dem **inneren Produkt** $g:\mathbb{R}^{3n}\times\mathbb{R}^{3n}\to\mathbb{R}$ vermöge $g(v,w)=\sum_i M_iv^iw^i$ hat man isomorph $\tilde{g}:\mathbb{R}^{3n}\to(\mathbb{R}^{3n})^*$ vermöge $[\tilde{g}(v)]w = g(v,w)$. Also $\mathcal{L}(q,v) = (q,\tilde{g}(v))$ und mit $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial v^i} = M_iv^i$ ist die **Legendre-Transformation** $\mathcal{L}(q,v) = (q,\sum_i \dfrac{\partial L}{\partial v^i}(q,v)e^i) = (q,p)$. Trajektorie des Systems ist Kurve im **Zustandsraum** $c: I\to S$, die gewissen Dgls genügt. $\mathcal{L}\circ c$ ist **Trajektorie** oder **Orbit im Phasenraum**. Zeidler TB Mathe p516 Berührungstransformation: Lösungen von Dgls gehen in Lösungen transformierter Dgls über. Grundlage für kanon Transformation. Greiner 2: p351 KapVI: $f(x,y)\to g(x,u) = uy(u) - f(x,y(u))$ wegen $u = \partial f/\partial y$. Totales Diff $\mathrm{d}g = u\mathrm{d}y + y\mathrm{d}u - f_{,x}\,\mathrm{d}x - f_{,y}\,\mathrm{d}y = y\mathrm{d}u - \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x$. **Beispiele:** Gegeben seien folgende Funktionen: $f_1(x) = a\sqrt{x}, f_2(x) = bx, f_3(x) = x^c/c$ mit $a,b,c,x,f\in\mathbb{R}$ und $x\neq 0$. Berechnen Sie die Legendre-Transformierten. Drücken Sie diese in Abhängigkeit vom "konjugierten Impuls" $p = df/dx$ aus. Aus $f_1 = a\sqrt{x}$ folgt $p = \frac{df_1}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$ und somit $g_1(p) = xp - f_1(x) = -\frac{a^2}{4p}$ für $x>0$ und $a<0$ wegen $f_1''(x) = -\frac{a}{4\sqrt{x^3}}$. Für $f_2(x) = b\,x$ existiert wegen $f_2''(x) = 0$ nur eine triviale Legendre-Transformierte, weil der Abstand von xp und $f(x)$ überall gleich ist. **Arnold: Klassische Mechanik** p32ff. Linearer Raum zu dualem Raum. Projektive Dualität. Tangenzialkoordinaten. Abstand von xp und $f(x) = F(p,x)$ hat bei $x(p)$ Maximum, falls p fix, denn $0 = F_{,x} = p - f'(x)$ also $p = f'(x)$. Aus $f_3(x) = x^c/c$ folgt $p = \frac{\partial f_3}{\partial x} = x^{c-1}$. Wegen $f_2''(x) = (c-1)x^{c-2}$ ist für $c>1$ und geradem Zähler m mit $c = m/n$ für $x\in\mathbb{R}$ und $x\neq 0$ lautet die Legendre-Transformierte $g_3(p) = xp - f_3(x) = \frac{p^d}{d}$ mit $d := \frac{c}{c-1}$ In der Thermodynamik verwendet man die untere Vorzeichenkonvention $g = f - ux$, in der Mechanik die obere Vorzeichenkonvention $g = ux - f$. Für die innere Energie $U(S,V)$ eines Gases gilt $dU = TdS - pdV$. Wie lauten also $\partial U/\partial S$ und $\partial U/\partial V$? Konstruieren Sie mittels der Legendre-Transformation $W = pV + U$ den entsprechenden Ausdruck dW = totales Differential für die Enthalpie $W(S,p)$. Wie lauten die Ableitungen von W nach S und p? Aus $dU = T\,dS - p\,dV$ und $dU = \frac{\partial U}{\partial S}dS + \frac{\partial U}{\partial V}dV$ folgt $p = -\frac{\partial U}{\partial V}$. Mit dem Ansatz $W = p\,V + U$ für die Legendre-Transformierte folgt $dW = p\,dV + V\,dp + dU = V\,dp + T\,dS$ (1 Punkt) wobei gilt: $V = \frac{\partial W}{\partial p}|_{S=const}$ und $T = \frac{\partial W}{\partial S}|_{p=const}$. **Jänich: Bd2 p322** Die $p_i = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{q}$ sind die Faserkoordinaten in einem **Kotangentenbündel** und in einem **1-Jetraum** - physikalisches Substrat auf dem die Lagrangefunktion lebt. Genauer: Dieudonne: Grundzüge der modernen Analysis Bd3 & 4 1976;

Fourier-Transformation und **Zerlegung der Eins**. Siehe auch Seite 102. T. Tao: Higher order Fourier analysis 2012; Tolstov: Fourier series 1962; **Brigola: Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen** 1997, 2012², 2013; Butz: Fouriertransformation für Fußgänger 1998, 2005; Bochner: VL über Fouriersche Integrale 1932; Burkhardt: Trigonometrische Reihen und Integrale 1850 digital gdz In: Enzyklopädie der math Wiss; Schlömilch: Analytische Studien. LB über Fouriersche Integrale 1848; **Schlömilch: Beiträge zur Theorie bestimmter Integrale** 1843 google-books; Titchmarsh: Introduction to the theory of Fourier integrals 1937; **Byerli: An Elementary Treatise on Fourier's Series and Spherical, Cylindric, and Ellipsoidal Harmonics. With Applications to Problems in Mathematical Physics** 1893; Fourier-Transformierte ist/isst/frisst Funktion ist als Funktional mit Parameter ω:

$$\hat{x}[x(t)](\omega) = \int \mathrm{d}t\, x(t)\, e^{-i\,t\,\omega},\quad x[\hat{x}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\, \hat{x}(\omega)\, e^{i\,t\,\omega},\quad \delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega e^{i\omega(t-t')}$$

falls $x(t), x(\omega)\in L^1$, also absolut (Lebesgue-)integrabel. Denn mit Zerlegung der Eins gilt

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\, \hat{x}(\omega)\, e^{i\,t\,\omega} = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}\omega\, \left[\int \mathrm{d}t'\, x(t')\, e^{-i\,t'\,\omega}\right] e^{i\,t\,\omega} = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}t'\, x(t')\int \mathrm{d}\omega e^{i\,(t-t')\,\omega} =$$

$= \int \mathrm{d}t'\, x(t')\delta(t-t') = x(t)$. Feldmeier: Mechanik p199 Beweis. Joos, Kaluza: Höhere Mathematik p314 §8.6 Zerlegung der Eins; Andere **Vorfaktorkonvention:**

$$(\mathcal{F}f)(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-\mathrm{i}y\cdot x}\,\mathrm{d}x \text{ oder } (\mathcal{F}f)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-\mathrm{i}y\cdot x}\,\mathrm{d}x \text{ und } f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}f)(y)\, e^{\mathrm{i}y\cdot x}\,\mathrm{d}y\ .$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin p}{p}\, e^{ixp} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}p\frac{\sin p}{p}\,\cos px,\ f(0) = 1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{d}p\frac{\sin p}{p}$$

An der Sprungstelle liefert die Fourier-Transformation, wie auch die Fourier-Reihe, den **Mittelwert** $f(1) = 1/2$. Lang & Pucker: Math Methoden der Physik; Furlan: Das gelbe Buch Bd3;

Spektraldarstellung für weißes Rauschen:

$$\delta_\epsilon(t) := \frac{\epsilon}{\pi(\epsilon^2+t^2)} \leftrightarrow \hat{\delta}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\epsilon|\omega|}$$

Beispiele: $\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} e^{-a|t|} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t e^{t(a-i\omega)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t e^{t(-a-i\omega)} = \frac{1}{2\pi}[\frac{e^{t(a-i\omega)}}{a-i\omega}]_{-\infty}^0 + \frac{1}{2\pi}[\frac{e^{t(-a-i\omega)}}{-a-i\omega}]_0^\infty = \frac{1}{2\pi}(\frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega}) = \frac{a}{\pi(a^2+\omega^2)}$ **Fourier-Transformierte ist Funktional! Frisst Funktion und wirft Funktion aus.**

Für $a > 0, b \geq 0$ gilt

$$x(t) = \begin{cases} e^{-a\,t+i\,b\,t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \to \hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i(\omega-b)} \tag{46}$$

$$x(t) = \begin{cases} e^{-a\,t}\cos b\,t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \to \hat{x}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a+i\,\omega}{(a+i\omega)^2+b^2} \tag{47}$$

Wilhelm **Magnus** & Fritz **Oberhettinger**: Formulas and theorems for the functions of mathematical physics 1954, p432, p324 für Re $\nu > -1$, arg $(-ip) = \pm\pi/2$ gilt

$$\hat{f}(p) = (-i\,p)^\nu\, e^{-a^2p^2} \to f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(p)\, e^{ixp} = \sqrt{2}\, 2^{-\frac{\nu}{2}}\, a^{-\nu-1} e^{-\frac{x^2a^2}{2}} D_\nu\left(\frac{x}{a\sqrt{2}}\right)$$

mit D_ν parabolische Zylinderfunktion. Speziell gilt

$$\hat{f}(p) = -i\,p\, e^{-a^2p^2} \to f(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{x}{a^3}\, e^{-x^2\left(\frac{a^2}{2}+\frac{1}{8a^2}\right)}$$

Die Welt ist gefiltertes weißes Rauschen! Autoregressive Modelle machen die gesamte diskrete lineare Welt. Siehe Seite 102. Mit Filtern - wir selbst sind/unser Hirn ist ein einziger Filter im Sinne der Wirklichkeitskonstruktion - kann jedes Signal gebastelt werden. Geeigneter Filter macht aus reinem Zufall eine Schwingung (Ewgeny Slutsky, 1927). Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] Kap7.11 **Harmonischer Oszillator** p138-148; Das **Spektralverhalten der Lösungen von Bewegungsgleichungen** wie $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega^2 x = f(t)$ gibt wegen $x(t) = \int \mathrm{d}\omega\, X(\omega) e^{i\omega\,t}$ für die zeitlichen Ableitungen $\dot{x}(t) = \int \mathrm{d}\omega\, X(\omega) i\omega e^{i\omega\,t}$ und $\ddot{x}(t) = \int \mathrm{d}\omega\, X(\omega) i^2\omega^2 e^{i\omega\,t}$ und mit $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega^2 x = \int \mathrm{d}\omega\, X(\omega) i^2\omega^2 e^{i\omega\,t} + 2\delta\int \mathrm{d}\omega\, X(\omega) i\omega e^{i\omega\,t} + \Omega^2 \int \mathrm{d}\omega\, X(\omega) e^{i\omega\,t} = \int \mathrm{d}\omega\, F(\omega) e^{i\omega\,t} = f(t)$ also

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, e^{i\omega\,t}[\{(i\,\omega)^2 + 2\delta\, i\,\omega + \Omega^2)\}\, X(\omega) - F(\omega)] = 0$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\Omega^2 - \omega^2 + 2\delta\, i\,\omega}, \quad X(\omega) = H(\omega)\, F(\omega)$$

$$S_{XX}(\omega) = X^* X = |H(\omega)|^2\, |F(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2\, S_{FF}(\omega)$$

Für einen durch weißes Rauschen $S_F(\omega) = \sigma^2$ getriebenen gedämpften harmonischen Oszillator folgt die Gestalt von **Spektrallinien in Lorentzform** oder Breit-Wigner-Verteilung oder Cauchy-Lorentz-Verteilung mit $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{s}{s^2+(x-t)^2}$ für $-\infty < x < \infty$ mit $s > 0$ und **Lageparameter** $-\infty < t < \infty$ oder

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\sigma^2}{(\Omega^2-\omega^2)^2 + 4\delta^2\,\omega^2}$$

Das **Lorentz-Profil der Spektraldarstellung** des gedämpften Oszillators liefert nach Pauli siehe Seite 645 Hinweis auf **Deutung der Linienbreite** = Dämpfungsstärke = Reibungsstärke δ bei Strahlungsdämpfung. Linienbreite mal Lebensdauer Unschärferelation $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$. Bergmann & Schäfer: Bd4 Teilchen 1992 p188f.

Beachte, dass der Lageparameter = **reibungsbedingte reduzierte Schwingerfrequenz** $\Omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$ ist. Die Frequenzverschiebung kommt also durch **Reibung verursachte Ankopplung/Auskopplung der Energie** des elektrischen Dipols an das umgebende Strahlungsfeld. Die Energieaufnahme kann als Strahlungsfeld verursachte negative Reibung des Dipols gedeutet werden, siehe Seite 644.

Jacobi: **Man muss immer wieder umkehren! Trigonometrisches Polynom** N-ten Grades

$$T_N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, T_N(x)\, e^{-inx}, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, e^{-i(m-n)x} = \delta_{mn} \tag{48}$$

zur **globalen** Approximation **periodischer** Funktionen f mit **lokal mieser** Annäherung an abzählbar vielen Stellen wird zum **Fourier-Polynom** N-ten Grades

$$S_{N,f} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-N}^{N} \tilde{f}_n\, e^{inx}, \quad \tilde{f}_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)\, e^{-inx}$$

Fourier-Polynom, trigonometrische Summe oder Fourier-Reihe n-ten Grades für reellwertige periodische Funktionen $f(x+2\pi) = f(x)$ auf Intervall $(0, 2\pi)$ stetig differenzierbar und auf Rand stetig fortsetzbar:

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \cos(kx), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \sin(kx)$$

wobei die a_k, b_k Amplituden oder Fourier-Koeffizienten der Teilschwingungen der k.-ten Harmonischen genannt werden, **oder auf Intervall** $(-\pi, \pi)$ und $a_0 = \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x)$

$$p_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)], \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \cos(kx), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x\, f(x) \sin(kx)$$

$$kx \to \frac{2\pi}{L} k\, x \quad , \quad p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(\frac{2\pi}{L} kx) + b_k \sin(\frac{2\pi}{L} kx)]$$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^{L} \mathrm{d}x\, f(x) \cos(\frac{2\pi}{L} kx), \quad b_k = \frac{2}{L} \int_0^{L} \mathrm{d}x\, f(x) \sin(\frac{2\pi}{L} kx)$$

Tolstov: Fourier series 1962; Krylov & Skoblya: Handbook of methodes of approximate Fourier transform 1974; Zeldovich & Novikov: p386ff; **Greuel: Math Ergänzungen und Aufgaben** für Elektrotechniker 1990[12]; Ungerade periodische Funktionen $f(x)$ haben keine a_k und gerade keine b_k. Lindner: Elektro-Aufgaben Bd3 1977; **Jordan & Smith: Mathematik für die Praxis** p573ff; Nickel 1994; **Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics** 1993 p537ff o p573ff; Furlan: Das gelbe Buch 3; Aus Skizzen liest man folgende **Orthogonalitäts-Relationen** ab:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \overset{\sin}{\cos} mx \overset{\sin}{\cos} nx = \pi \delta_{mn} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \sin mx \cos nx = 0 \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x e^{i(m-n)x} = \delta_{mn}$$

Joos, Kaluza: Höhere Mathematik p314 §8.6 Zerlegung der Eins; Wie sieht die Darstellung der Eins, also aus? Welle vs. Teilchen. Unendliche Ausdehnung vs. Lokalisierung. $f(x) = 1$ vs. $\delta(x)$. Idee des Wellenpakets = Bei der Startwellenform $u(x,0) = e^{-x^2 + ik_0 x}$ liefert die Spektralfunktion $A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)\, e^{-ikx} dx =$ $A(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4}}$ ein **nichtdispersives Wellenpaket** $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$. Speziell für $c_n = 1$ in obiger Gl. (48) wird aus dem trigonometrischen Polynom **der Dirichlet-Kern** $= 2\pi\, D_N(\tau) =$

$$= \sum_{n=-N}^{N} e^{in\tau} = e^{-iN\tau} \sum_{n=0}^{2N} e^{in\tau} = e^{-iN\tau} \frac{e^{-i\tau/2}}{e^{-i\tau/2}} \frac{1 - e^{i(2N+1)\tau}}{1 - e^{i\tau}} = \frac{e^{-i(N+1/2)\tau} - e^{i(N+1/2)\tau}}{e^{-i\tau/2} - e^{i\tau/2}} = \frac{\sin([N+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\frac{\sin([N+1/2)\tau)}{\sin(\tau/2)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in\tau} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\sum_{n=1}^{N}\cos n\tau)\mathrm{d}\tau = 1$$

$S_{N,f}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x-x')f(x')\mathrm{d}x'$ und

$$D_N(x-x') := \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-x')} = \begin{cases} 2N+1 & (N+\frac{1}{2})t = 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin(N+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} & (N+\frac{1}{2})t \neq 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Mit $k = x - x'$ ist $D_\infty(k) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N} e^{ink} =$ $\lim_{N\to\infty}\left(1+2\sum_{n=1}^{N}\cos nk\right) = \begin{cases} +\infty & (N+\frac{1}{2})k = 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \\ \text{unbestimmt divergent} & (N+\frac{1}{2})k \neq 2\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$. An keiner Stellei k existiert ein Grenzwert der trigonometrischen Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ink} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos nk$. **Brigola: Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen** 1997 p11ff, p17ff Dirichletkerne erlauben die rasche Einsicht, dass $S(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n}$ eine Sägezahnsequenz darstellt. **Sinus cardinalis**, auch si-Funktion, Kardinalsinus oder **Spaltfunktion**: si $x = \frac{\sin x}{x}$. Fourier-Transformierte der **Rechteck-Funktion** rect$(\frac{x}{2\pi})$ ist sinc $x = \frac{\sin\pi x}{\pi x}$, beschreibt idealen **Interpolationskern für ganzzahlige Stützstellen**, **schwankungsärmste** unter allen interpolierenden Funktionenreihen, Paar-Korrelations-Verteilung der Energien der Eigenzustände von schweren Atomkernen und Verteilung von Primzahlen assoziierte Paar-Korrelation der Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion, bei den zugrundeliegenden Zufallsmatrizen, Dyson, Wohlgemuth: Mathe für fortgeschrittene Anfänger p370; **Fermatschen Vermutung** = Alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion haben den Realteil 1/2 SdW9/2008 p86 oder kürzer: P≠NP SdW10/2008 p74; **Integralsinus:** $\mathrm{Si}\,(x) := \int_0^x \mathrm{sinc}\,(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

17 Brown'sche Bewegung als Modell der Körnigkeit der Welt

Perrin 1913 Selbstähnlichkeit, Mandelbrot 1977 Fraktal; Reif, Gardiner; Giorgio Parisi, Brownian motion, Nature 433, 221 (2005); 1650 Leeuwenhoek (1632-1723). Robert Brown, ein schottischer Regimentsarzt und Botaniker (1773-1858), untersuchte 1827 den Befruchtungsvorgang von Pflanzen und verfolgte den Lauf der kleinsten Pollenkörner, um die Stelle ihrer Vereinigung mit dem Ei zu entdecken. "Als ich die Gestalt dieser in Wasser getauchten Partikeln untersuchte, bemerkte ich, dass viele von ihnen sichtlich in Bewegung waren. Ihre Bewegung bestand nicht bloß aus einer Ortsveränderung in der Flüssigkeit, wie es sich durch die Veränderungen in ihren gegenseitigen Lagen ergab; sondern auch nicht selten aus einer Veränderung in der Gestalt der Teilchen selbst." Blütenstaubkörner oder andere kleine ($0.1 \le a \le 4\mu m$) in Wasser suspendierte Teilchen führen eine nicht endende und sehr irreguläre zitternde Bewegung aus. Beobachtungsintervall 15 ...5 sec. Sichtbarer Tanz von Rauchteilchen. Alte Brown-These: Die Lebenskraft = vis vitalis von den Molekülen einer Pflanze wird lange Zeit über den Tod der Pflanze hinaus bewahrt. Aber: Untersuchung von in Quarz eingeschlossenem Wasser mit Sporen und Pollen zeigt, dass die Zitterbewegung nicht die Lebenskraft darstellt. Die Ursache scheint nicht biologischer Natur zu sein.

Beginn der stochastischen Modellierung von Naturerscheinungen: Albert Einstein (1879-1955) über seine Entdeckung aus dem Jahre 1905: " Mein Hauptziel war es, Tatsachen zu finden, welche die Existenz von Atomen von bestimmter endlicher Größe möglichst sicherstellten. Dabei entdeckte ich, dass es nach der atomistischen Theorie eine der Beobachtung zugängliche Bewegung suspendierter mikroskopischer Teilchen geben müsse, ohne zu wissen, dass die Beobachtungen über die 'Brownsche Bewegung' schon lange bekannt waren." (Einstein 1951) Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen, Annalen der Physik 17, 549 (1905), Eingangsdatum 11.Mai 1905. Marian von Smoluchowski (1872-1917), Annalen der Physik 21, 756 (1906) Idee: Die Atombewegung muß sich in der Teilchenbewegung zeigen. Die mittlere Entfernung, die das Körnchen zurücklegt, ist in vorhersehbarer

Weise mit der Beobachtungszeit verknüpft. Zwar bleibt die Bewegung des einzelnen Rußkörnchens völlig unbestimmt, da die Stöße der einzelnen Moleküle selbst unter dem Mikroskop unbeobachtbar bleiben, doch läßt sich zumindest die Durchschnittsbewegung einer großen Zahl von Rußkörnchen vorhersagen. Einstein und Smoluchowski haben die wahre Geschwindigkeit, die meßbar ist, ganz beiseite gelassen, haben sich auch um den unendlich verwickelten Weg, den ein Teilchen während einer gegebenen Zeit beschreibt, nicht gekümmert, sondern haben als charakteristische Größe der Bewegung die gerade Verbindungslinie gewählt, welche den Ausgangs- und Endpunkt der Bahn verbindet und im Mittel augenscheinlich um so größer ist, je lebhafter die Bewegung ist. Diese Gerade soll die Verschiebung eines Teilchens während der betrachteten Zeit genannt werden. Ursache der Brownschen Bewegung sind die Stöße der Flüssigkeitsmoleküle. Einstein promovierte 1905 an der Universität Zürich mit der Arbeit "Eine neue Bestimmung der Moleküldimension". Frage von Einsteins Dissertation: Was bedeutet die Endlichkeit der Loschmidt'schen Zahl $N_A \approx 6 \cdot 10^{23} mol^{-1} < \infty$ physikalisch? Das Ende Pascalscher Reisen! = man kann nicht beliebig Verkleinern und immer wieder ähnliche Welten antreffen. **Endliche Zahl von Atomen oder Bestandteilen bedeutet Existenz von Atomen. Siehe auch Seite 717. Existenz von Atomen bedeutet endliche Zahl von Atomen oder Bestandteilen.** Verbietet die Epsilontik und Analysis. Fordert Nicht-Standard-Analysis. Experimentelle Bestätigung der Theorie von Einstein – Smoluchovski: 1907 erste Messungen in Gasen durch Ehrenhaft. 1908 Jean-Baptiste Perrin (1870-1942): Die Brown'sche Bewegung und die wahre Existenz der Moleküle (1911).

" ... die Kurven, welche keine Tangente besitzen, sind die Regel, und die höchst regelmäßigen Kurven, wie der Kreis, sind zwar interessante, aber ganz spezielle Fälle. ... experimentelle Befunde bietet das Studium der Kolloide in Hülle und Fülle. Wir wollen z.B. eine jener weißer Flocken beobachten, die man erhält, wenn man Seifenwasser mit Kochsalz versetzt. Von weitem erscheint ihre Oberfläche scharf umrissen zu sein, sobald man sich aber nähert, verschwindet diese Schärfe. Das Auge vermag keine Tangente mehr an einen Punkt der Oberfläche zu anzulegen ... " $< m >= \frac{1}{\tau} \int_0^\tau m dt$

Aristoteles: Das Weltall besteht aus nur vier Elementen Feuer, Erde, Luft und Wasser. **Antiker Atomismus: Wir sagen süß, wir sagen sauer, wir sagen warm, wir sagen kalt, wir sagen Farbe, aber in Wirklichkeit gibt es nur Atome und das Nichts.** Das bedeutet aber, dass es um riesige Anzahlen winziger Bestandteile von makroskopischen Körpern geht. Die Einheit der Stoffmenge oder Objektmenge ist bequem. Siehe Stoffmenge oder Objektmenge aus Seite 716. Leukipp aus Milet (* um 500, † um 440 v.Chr.) Demokrit von Abdera (* um 460 v.Chr., †370 v.Chr.): Nur scheinbar hat ein Ding eine Farbe, nur scheinbar ist es süß oder bitter; in Wirklichkeit gibt es nur Atome im leeren Raum. " Urgründe des Alls sind die Atome und das Leere". Nanotechnologie-Gründung 29. Dezember 1959 durch Feynman am Caltech **There's Plenty of Room at the Bottom** - Ganz unten ist eine Menge Platz oder Viel Spielraum nach unten! Feynman's empty space isn't really empty space. Crease and Mann's The Second Creation 1986, 1996; 1947 Shelter Island Conference (on the coast of New York between the North Fork and the South Fork) **Der leere Raum ist voller Teilchen, bei deren Buchhaltung Feynman-Diagramme nützlich sind. Oppenheimer: Atom and Void. Essays on Science and Community** 1989; Oppenheimer 1904-67: Wissenschaft und allgemeines Denken 1955; Nach Born: Mein Leben 1975 p311ff unterbrach Oppenheimer arrogant jeden Vortragenden und ging an die Tafel, was Born am Ende geschickt beendete. Dafür oder weil Born als Atomwaffengegener bekannt war wurde Born nie nach Princeton eingeladen. Haakon Chevalier: Der Mann der Gott sein wollte 1971; Joseph Kanon: Die Tage vor Los Alamos 2007; Heinar Kipphardt: In der Sache J. Robert Oppenheimer Oppenheimer. Fernsehinszenierung 1964; **Oppenheimer: Drei Krisen der Physiker 1966 Raum und Zeit, Atom und Feld, Krieg und Nation. Selbstbiografie** 1954; J. Putik: Der Fall Oppenheimer, Svedomi 1960, Protokoll der McCarthy-Inquisition instrumentalisiert durch paranoiden und in Eitelkeit (Frustration über die Berufung von Hans Bethe zum Direktor der theoretischen Forschungsabteilung in Los Alamos) verletzten Ed Teller. Materie ist ein philosophischer Begriff! Siehe besser Kant oder Janich oder zum Substanzproblem **Joseph Petzoldt: Das Weltproblem** 1912[2] oder strukturellen Realismus statt Honerkamp: Materie seit Galilei undurchdringliche Dinge, im Raum lokalisierbar und teilbar bis zu Atomen. Deren Bewegung zu ändern braucht nach Newton Kraft. Matielle Objekt haben Impuls, träge Masse und wegen Anziehung auch schwere Masse. Felder und Photonen haben Masse per $E = mc^2$, Masse und Energie können synomyn gebraucht werden, ob wohl es verschiedene Begriffe sind.

Gegner der körnigen Struktur der Materie: Anaxagoras (* um 500, †428 v.Chr.) Warum sollte es eine Grenze der Teilbarkeit geben? Aristoteles (* 384 v.Chr., †322 v.Chr.) kontinuierlicher, stetiger und ungeteilter Aufbau der Materie, es gibt weder Atome noch leeren Raum. Im leeren Raume ist keine Richtung ausgezeichnet, folglich auch keine Bewegung möglich. Leerer Raum ist undenkbar. Thomas von Aquin (13.Jh.): Aristoteles als Vorläufer Christi im weltlichen Bereich. Die plan- und ziellose Bewegung der Atome widersprach dem göttlichen Walten in unserer Welt. Die Atomisten lehren ein mechanisches, gottloses Universum. **Kurd Laßwitz 1848-1910: Atomistik und Kriticismus. Ein Beitrag zur erkenntnistheoretischen Grundlegung der Physik** 1878; Christianisierung der Atome im 17.Jh., Pierre Gassendi (1592-1655): Die Bewegung der Atome ist vom Schöpfer festgelegt worden. **Erste Abschätzung der Loschmidtschen Zahl** durch Johann Chrysostomus Magnien (um 1650): "Mehr als einmal habe ich beobachtet, wie sich der Rauch eines verbrannten Weihrauchkornes so verbreitet, dass er einen Raum erfüllt, der mehr als 700 Millionen mal größer ist als das Korn selbst ... Das Weihrauchkorn kann in mindestens 1000 noch vom Auge feststellbare Teilchen geteilt werden. → 700,000,000,000 duftende Teilchen. Aber auch jene einzelnenTeilchen waren ein Konglomerat von verschiedenen Partikeln, und mit großer Wahrscheinlichkeit enthielt jedes von ihnen mindestens eine Million Atome." → 700,000,000,000,000,000 = 7 $\cdot 10^{17}$ Atome pro Weihrauchkorn. **Die Chemie entdeckt das Atom!** Antoine Lavoisier (1743-1794) Theorie der chemischen Elemente 1789 23 chemische Elemente; Amadeo Avogadro (1776-1856) Bei Gasen stehen die Reaktionspartner stets in besonders einfachen Volumenverhältnissen; 1811: Ein bestimmtes mit Gas gefülltes Volumen bei gleicher Temperatur und gleichem Druck enthält stets die gleiche Anzahl von Molekülen, unabhängig von der chemischen Natur des Gases! John Dalton (1766-1844) Stöchiometrische Verhältnisse; 1860 Kongreß der Chemiker in Karlsruhe (für die Chemie gibt es Atome): Atome → Stöchiometrische Verhältnisse; Dimitrij Mendelejew (1834-1907) 64 chemische Elemente. Kragh: PSE und Mendelejew 1869 PhysJ18 2019 H3 53-57. Dalton 1808 Element = Atom, Soddy, Isotop-Idee. Julius Thomsen 1895, Janne Rydberg-Formel 1906 Maximale Anzahl von Elementen einer Periode mit Hauptquantenzahl n ist $N = 2n^2$. Bohr 2 Quantenzahlen. Stoner 3 Quantenzahlen. Pauli 1924 Zweideutigkeit = Spin **Kinetische Gastheorie 1856 - Statistik ohne Zeitentwicklung:** Karl August Krönig (1822-1879); Rudolf Emanuel Clausius (1822-1888): Hauptsätze der Wärmelehre; James Clerk Maxwell (1831-1879); Ludwig Boltzmann (1844-1906). Harris: An Introduction to Theory of the Boltzmann Equation 1971; **Boltzmann-Gleichung** für Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{force}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{diff}} + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}}$$

Stosszahl Ansatz: Stoßterm kann als Impulsintegral des Produkts von Ein-Teilchen-Verteilungsfunktionen geschrieben werden

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{coll}} = \iint g I(g, \Omega)[f(\mathbf{p}'_A, t) f(\mathbf{p}'_B, t) - f(\mathbf{p}_A, t) f(\mathbf{p}_B, t)]\, d\Omega\, d^3\mathbf{p}_A.$$

mit dem differenziellen Wirkungsquerschnitt

$$I(g, \Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega}$$

σ ist hypothetische Fläche, Ω Raumwinkel, $g = |\mathbf{p}_B - \mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}'_B - \mathbf{p}'_A|$ Betrag des relativen Impulses. Formal mit Liouville-Operator $\hat{\mathbf{L}}$ und Stoß-Operator $\mathbf{C}$

$$\hat{\mathbf{L}}[f] = \mathbf{C}[f], \hat{\mathbf{L}}_{\text{NR}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \hat{\mathbf{L}}_{\text{GR}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}$$

Gasdruck (Boyle: Berührung elastischer Teilchen; Newton: Abstoßende Fernwirkung $c = \infty$; Daniel Bernoulli: Atomhagel). Pendel im luftgefüllten Raum (1860): $N_{Stöße} \propto p, \lambda \propto 1/p$ Atome → Gaskinetik. Solvey-Kongreß 1911 zu Brüssel: Durchbruch der Atomtheorie auch in der Physik! Moleküle → Bewegung der Rußteilchen. **Plausible Herleitung der Einsteinschen Gleichung:** $< x^2 >$ bezeichnet das mittleres Quadrat der ein-dimensionalen Verschiebung nach N Einzelbewegungen der Länge λ mit zufälliger Bewegungsrichtung $< x^2 >= \lambda^2 N$, v mittlere Geschwindigkeit des Teilchens, N Zahl der Schritte in der Zeit t gibt $N = \frac{vt}{\lambda}$.

Gleichverteilungssatz der Energie. Das makroskopische Brownsche Teilchen sei im Gleichgewicht mit seiner mikroskopischen Umgebung: $< \frac{1}{2}mv^2 >= \frac{3}{2}kT$. T ist die Temperatur der mikroskopischen Umgebung. $< v >$ selbst verschwindet, nicht aber $< v^2 >$. Wegen $< v_x^2 >= \frac{kT}{m}$ und der "besseren" Statistik scheinen große Teilchen in Ruhe zu sein. Auf Grund ganz zufälliger Schwankungen werden sich nämlich die von allen Seiten erfolgenden Stöße von Zeit zu Zeit nicht kompensieren und so dem beobachtbaren Teilchen zu einer kurzen und abrupten Bewegung verhelfen. k bezeichnet die Boltzmann-Konstante mit dem Wert 1.380,658(12) $10^{-23}JK^-1$.
Abschätzung der mittleren freien Weglänge λ des Brownschen Teilchens, mit dem Radius a. Die über die Strecke λ wirkende Stokes'sche Reibungskraft $F = 6\pi a\eta v$ bringt das Teilchen mit einer bestimmten kinetische Energie zum Stillstand. $6\pi a\eta v\lambda = \frac{3}{2}kT$ oder

$$\lambda v = \frac{kT}{4\pi\eta a}, \qquad < x^2 >= \frac{kT}{4\pi\eta a}t, \qquad D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \quad \text{Einsteins Rechnung ergibt :} \quad < x^2 >= \frac{kT}{3\pi a\eta} = 2\,D\,t$$

Einsteins Herleitung: $f(x,t)$ sei die Teilchenzahl im Einheitsvolumen. $p(\Delta)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Teil während der Zeit τ eine Ortsverschiebung um den Wert Δ erfährt. Es gilt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta)d\Delta = 1, \qquad p(\Delta) = p(-\Delta), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \Delta p(\Delta)d\Delta = 0$$

Dann ist dn die Anzahl der Teilchen, die eine solche Verschiebung erfährt $dn = np(\Delta)d\Delta$. In einem festen räumlichen Intervall ergibt sich nach einer Zeit τ die Veränderung der Teilchenzahl dadurch, dass in allen um jeweils Δ verschobenen Einheitsvolumina Veränderungen der Teilchenzahlen vor sich gehen und obige Gleichung auch für kleine Veränderungen der Teilchenzahlen gilt:

$$f(x,t+\tau)dx = dx\int_{-\infty}^{\infty} f(x+\Delta,t)p(\Delta)d\Delta, \qquad f(x,t+\tau) = f(x,t) + \tau\frac{\partial f}{\partial t}$$

$$f(x+\Delta,t) = f(x,t) + \Delta\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

Es folgt damit

$$f + \frac{\partial f}{\partial t}\tau = f\int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta)d\Delta + \frac{\partial f}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta p(\Delta)d\Delta + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2}p(\Delta)d\Delta \quad \text{mit} \quad \frac{1}{\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta^2}{2}p(\Delta)d\Delta = D \quad (49)$$

bekommt man in niedrigster Näherung eine Gleichung, die dem Fick'schen Gesetz entspricht

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f(x,t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp -\frac{x^2}{4Dt}$$

ist. Damit ist $\sigma_x^2 = 2Dt$. **Langevins Herleitung (1908)** Newtonsches Grundgesetz für eine Kugel mit dem Durchmesser a, die sich in einer Flüssigkeit mit der dynamischen Viskosität η unter dem Einfluß einer zufälligen Kraft X bewegt: $m\ddot{x} = -6\pi\eta a\dot{x} + X$ Erste stochastische Differentialgleichung zur Beschreibung der Natur. Lies erst **Lemons, Don Stephen: An introduction to stochastic processes in physics 2002 Vorwort!;** und dann **Chandrasekhar: Stochastic problems in physics and astronomy**, Reviews of modern physics January 1943 oder Wax: Selected papers on noise and stochastic processes 1954; Gihman & Skorohod: Stochastic Differential Equations 1968; Etheridge: Stochastic Partial Differential Equations (London Mathematical Society Lecture Note Series) 1995; Gichman & Skorochod: Stochastische Differentialgleichungen 1971; Gichman & Skorochod: Stochasticeskie differencial'nye uravnenija i ich priloshenija 1982; Bunke: Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern 1971; Ludwig **Arnold: Stochastische Differentialgleichungen. Theorie und Anwendung** 1973; Beachte bei Integrationsschritt, dass wegen $\sigma_x^2 = 2Dt$ der linear Zuwachs Δx innerhalb des Zeitschritts $\sqrt{\Delta t}$ passiert. Ran, van Schuppen, Kaashoek eds: Realization and Modelling in System Theory. Proceedings of the International Symposium MTNS-89, VolI Progress in Systems and Control Theory 1990; Honerkamp: Stoch dyn Systeme 1990 p86; Gillespie: The chemical Langevin equation JChemPhys113(1)p297–306 2000; **Gillespie & Seitaridou: Simple Brownian diffusion. An introduction to**

the standard theoretical models 2013; K̃loeden & Platen: Numerical solution of stochastic differential equations 1992, 1995[2]; **Evans: An Introduction to Stochastic Differential Equations** 2014;Protter: Stochastic integration and differential equations. A new approach 1990; Glasserman: Monte Carlo Methods in Financial Engineering 2006; Robert & Casella: Monte Carlo Statistical Methods 2005; Ripley: Stochastic simulation 1987; **Robert & Casella: Introducing Monte Carlo Methods with R** 2009; Newman & Barkema: Monte Carlo methods in statistical physics 1999; Kroese, Rubinstein, Botev, Taimre: Handbook of Monte Carlo Methods 2008, 2011 montecarlohandbook.org; Euler-Maruyama-Verfahren stochastisches Euler-Schema: zur Berechnung des **Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses** als Lösung des Anfangswertproblems $dY_t = \theta \cdot (\mu - Y_t)dt + \sigma dW_t, \quad Y_0 = IC$ import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt tBegin=0 tEnd=2 dt=.00001 t = np.arange(tBegin, tEnd, dt) N = t.size IC=0 theta=1 mu=1.2 sigma=0.3 sqrtdt = np.sqrt(dt) y = np.zeros(N) y[0] = IC for i in xrange(1,N): y[i] = y[i-1] + dt*(theta*(mu-y[i-1])) + sigma*sqrtdt*np.random.normal(loc=0.0,scale=1.0) ax = plt.subplot(111) ax.plot(t,y) plt.show() Siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Euler-Maruyama-Verfahren Bewegung im Potenzial $V(x) = x^4$ bei iid Zufallskraft f hat Newton-Gl $m\ddot{x} = -\beta\dot{x} - 4x^3 + f$ oder $\dot{x} = v$ und $\dot{v} = -\frac{\beta}{m} - \frac{4}{m}x^3 + \frac{f}{m}$ hat Euler-Gl. $\Delta v = (-\frac{\beta}{m} - \frac{4}{m}x^3)\Delta t + \frac{f}{m}\sqrt{\Delta t}$. **Integralbegriffe nach Ito und Stratonowitsch:** Seien $(X_t), (Y_t), t \in [a, b]$ zwei (nicht notwendigerweise unabhängige) reellwertige stochastische Prozesse auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Als **Ito!Integral** von X nach Y über dem Intervall $[a, b]$ bezeichnet man die **Zufallsvariable** $I := \int_a^b X_{t-}\,\mathrm{d}Y_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n X_{a+(i-1)h}(Y_{a+ih} - Y_{a+(i-1)h}), \quad h = \frac{b-a}{n}$. **Stratonowitsch-Integral** für dieselbe Wahl von h als $S := \int_a^b X_t \circ \mathrm{d}Y_t := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(X_{a+(i-1)h} + X_{a+ih})(Y_{a+ih} - Y_{a+(i-1)h})$. Beim Ito-Integral wird der Integrand X also stets am Anfang des h-Intervalls ausgewertet, bei Stratonowitsch werden der Anfangs- und Endwert gemittelt. Syrbe: Messen, steuern, regeln 1972; **Winkler: Stochastische Systeme. Analyse und Synthese** 1977; Winkler: Stochastische Prozesse in der statistischen Modellierung 2000 pdf im Netz; von Weizsäcker & Winkler: Stochastic Integrals 1990 UP; Pugachev & Sinitsyn: Stochastic differential systems. Analysis and filtering 1987; **Pugachev & Sinitsyn: Stochastic Systems. Theory and Applications** 2002 mit vielen Beispielen und Tabelle zu stochastischen Differenzialen von Standard-Wiener-Prozessen p837ff; Arnold: Stochastic Differential Equations. Theory and Applications 1974; Friedman: Stochastic Differential Equations and Applications; Arnold ed: Stochastic nonlinear systems in physics, chemistry, and biology. Proceedings of the Workshop, Bielefeld, October 5-11, 1980; Arnold, Crauel & Eckmann: Ljapunov Exponents. Proceedings of a Conference held in Oberwolfach, May 28 June 2, 1990 Arnold & Levefer: Stochastic Nonlinear Systems in Physics, Chemistry, and Biology. Proceedings of the workshop Bielefeld, Oct 5 - 11, 1980; Schlitt: Systemtheorie für stochastische Prozesse. **Kalman-Filter** 1992; **Crauel: Stochastic Dynamics** 1999 D-Bifurkation; Oksendal: Stochastic differential equations. An introduction with applications; Idee basiert auf unendlicher Teilbarkeit, siehe Seite 118! **Milstein: Numerical Integration of Stochastic Differential Equations** 1994; Toral & Colet: Stochastic Numerical Methods. An Introduction for Students and Scientists 2014; Evans: An Introduction to Stochastic Differential Equations 2014; **Holcman & Schuss: Stochastic Narrow Escape in Molecular and Cellular Biology: Analysis and Applications** 2015; Globale Mean-first-escpe-time $T \propto \ln(1/eps)$ mit der relativen Öffnungsgröße ϵ. Grebenkov. MacCauley: Stochastic Calculus and Differential Equations for Physics and Finance 2013; **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical Methods** 2008; Ermark & Buckholz: Numerical integration of the Langevin equation mittels Monte-Carlo-Simulation JCompPhys35 1980 169-182 Statt der Einzeltrajektorien wird deren Wahrscheinlichkeitsdichte simuliert. Chung & Williams: Introduction to stochastic integration 1990[2]; Hassler: **Stochastische Integration und Zeitreihenmodellierung:** Eine Einführung mit Anwendungen aus Finanzierung und Ökonometrie 2007 p224; `http://www.springerlink.com/content/j86p24/#section=291951&page=11&locus=42` Pontryagin, Andronov, Vitt: On the statistical treatment of dynamical systems 1933 In: Moss & McClintock: Noise in nonlinear dynamical sytems 1989, 3 Vols; MacDonald: Noise and Fluctuations. An Introduction 2006; Stratonovich: Topics in the theory of random noise 1963;

$$\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - mv^2 = \underset{389}{-}3\pi\eta a\frac{d}{dt}x^2 + Xx \tag{50}$$

Bei der Mittelung $< Xx >$ für eine große Teilchenzahl gilt, wegen der Unabhängigkeit der Bewegung von mikroskopischen und makroskopischen Teilchen $< Xx >= 0$, und damit

$$< \frac{1}{2}mv_x^2 >= \frac{1}{2}kT, \quad \frac{m}{2}\frac{d^2 < x^2 >}{dt^2} + 3\pi\eta a\frac{d < x^2 >}{dt} = kT, \quad \frac{d < x^2 >}{dt} = \frac{kT}{3\pi\eta a} + C\exp -\frac{6\pi\eta at}{m}$$

$\frac{d<x^2>}{dt} = \frac{kT}{3\pi\eta a}, \qquad < x^2 >= 2Dt$ mit $D = \frac{kT}{6\pi\eta a}$.

Bestimmung der Loschmidtschen Zahl $N_A = \frac{R}{k}$ R = universelle Gaskonstante = 8.314,510(70) $Jmol^{-1}K^{-1}$ Bestimmung von a, x und t. $\rightarrow$ prinzipielle Begrenzung der Genauigkeit bestimmter Messverfahren: Drehspiegelschwingung (Zeigerinstrument), Widerstandsrauschen (elektronische Messverfahren).

Brown, Robert (1828) A brief account of microscopical observations made in the mounth of June, July and August, 1827, on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and anorganic bodies, Philos. Mag. Ann. of Philos. New ser. 4, 161-178; Chandrasekhar, Subrahmanyan: Marian Smoluchowski. His Life and Scientific Work, Biographie, Theorie, Originalarbeiten Warschau 1986 **Teske & Ulbrich: Marian Smoluchowski**. Leben und Werk 1977; Einstein (1922) Untersuchungen über die Theorie der Brownschen Bewegung. Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften 199; Einstein & Infeld: Die Evolution der Physik 1950 Elementare Einführung zur Brownschen Bewegung p74-78; Feynman, Leighton, Sands (1973) Feynman Vorlesungen über Physik. Mechanik, Strahlung und Wärme, BdI.2 p41-1ff; Gardiner 1985[2] Handbook of Stochastic Methods for Physics, Kap1.2 Einführung in die stochastischen Methoden; Jüss, Müller, Schmidt: Griechische Atomisten. Texte und Kommentare zum materialistischen Denken der Antike 1977; Hida: Brownian Motion 1987; Honerkamp: Stochastische Dynamische Systeme. Konzepte, numerische Methoden, Datenanalyse 1990 (Brownsche Bewegung als stochastischer Prozess); Lavenda: Die Brownsche Bewegung SdW H? 1985 p58-68 Brownsche Bewegung heute; Mandelbrot: Die fraktale Geometrie der Natur 1987 p24ff, 364ff KapIX; Melcher: Albert Einstein wider Vorurteile und Denkgewohnheiten 1979 p27f, p98; Matveev: Molecular Physics 1985 Kap13 mathematisch elementare Behandlung; Nelson: Dynamical Theories of Brownian Motion pdf unter mat.princeton.edu; Paley & Wiener: Fourier Transforms in the Complex Domain 1934 Kap9 & 10 Brownsche Bewegung als Zufallsfunktion und deren harmonische Analyse; **Jean Perrin: Die Atome** 1914, 1920[3] hervorragende Beschreibung des Themas; Reichenbach: Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik 1949; Reichenbach: Atom und Kosmos. Das physikalische Weltbild der Gegenwart 1930 p209-211 Beschreibung der Brownschen Untersuchung; Reif: Grundlagen der Physikalischen Statistik und der Physik der Wärme 1976 p295, 661ff; Röpke: Statistische Mechanik für das Nichtgleichgewicht 1987; Russel: Denker des Abendlandes. Eine Geschichte der Philosophie 1990 Geschichte des Atomismus in der Antike; Noack: Deutsche Geisteswelt Bd1 Luther bis Hegel. Bd2 Schopenhauer bis Heisenberg 1986; Schallreuter & **Grimsehl**. Lehrbuch der Physik Bd1, Mechanik- Akustik-Wärmelehre 1971[21] p433f, 536ff Einführung in die experimentellen Befunde; Schrödinger: Die Natur und die Griechen 1994 Denkansätze der Antike und moderne Naturwissenschaft; Schrödinger: Was ist Leben? Die lebende Zelle mit den Augen des Physikers betrachtet 1989[3] Uhr beim Anfall Brownscher Bewegung; Segrè, Emilio (1981) Die großen Physiker und ihre Entdeckungen. Bd2 Von den Röntgenstrahlen zu den Quarks 1981 p99, 323f plausible Herleitung; Sommerfeld: Vorlesungen über Theoretische Physik. Thermodynamik und Statistik 1965 p154-159 das Beste, alle anderen haben hier ungenau abgeschrieben; **Sexl: Was die Welt zusammenhält. Physik auf der Suche nach dem Bauplan der Natur** 1982 p84, 121ff sehr gute Beschreibung der Ideengeschichte der Physik; K̃uhn: Ideengeschichte der Physik. Eine Analyse der Entwicklung der Physik im historischen Kontext 2016; Rooney: Geschichte der Physik. Von den Naturphilosophen bis zum großen Rätsel der dunklen Materie 2008; **Stratonovich: Topics in the theory of random noise 1963;** Treder: Große Physiker und ihre Probleme. Studien zur Geschichte der Physik 1983 p122-125 tiefgründige Darstellung der physikalischen Problemstellungen; Trigg: Experimente der modernen Physik. Die Existenz der Atome 1984 p33-50 kurze Beschreibung der Details der Perrinschen Experimente; Uhlmann: Das wissenschaftliche Erbe Albert Einsteins, Leipziger Universitätsreden, NF H54 1979 p11-19 kurze Darstellung und Einordnung der Brownschen Bewegung; Weyl: Was ist Materie? 1924 Atomistik; Weyl: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft 1976[4] p210-239 Atomistik; Wiener: Kybernetik. Regelung und Nachrichtenübertragung im Lebewesen und in der Maschine 1963[2] p12f, p97-123,

215f, 229ff Einführung in die Idee des Wiener-Prozesses; Zeldovich & Yaglom: Higher Math for Beginners. Mostly Physicists and Engineers 1987 p393f Brownsche Bewegung und Verteilung der kinetischen Energie;

18 Nichtlineare Dynamik, nichtlineare Physik & komplexe Systeme

Jackson: Perspectives of nonlinear dynamics Bd1 1989, Bd1 1990; Nichtlineare Dgl = gesuchte Funktion oder ihre Ableitungen linear in die Gleichung ein. **Beltrami: Mathematics for Dynamic Modeling** 1987; Rasband: Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems 1990; Anishchenko, Vadivasova, Strelkova: Deterministic Nonlinear Systems. A Short Course 2014; Greiner: Mechanik2 KapII Nichtlineare Dynamik ab 7. Auflage! **Meschede: Gerthsen. Physik** 1995[18], 2003[22] Kap20 Nichtlineare Dynamik mit Aufgaben; **Jordan & Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations**. An Introduction to Dynamical Systems 1999, 2007[4]; Kunick: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1989; Kunick: Differentialrechnung einer und mehrerer Variabler 1991; Jordan & Smith: Nonlinear Ordinary Differential Equations: **Problems and Solutions** 2007; Goode: Differential equations and linear algebra 2000; **Bellman & Cooke: Modern elementary differential equations** 1995; Kunkel: mit **Index-Konzept**; Günzel: Gewöhnliche Differentialgleichungen 2008; Aulbach: Gewöhnliche Differentialgleichungen 2010; Boyce & DiPrima: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Einführung, Aufgaben, Lösungen 2000; Luther, Niederdrenk, Reutter & Yserentant: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Analytische und numerische Behandlung 1987; Grüne & Junge: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung aus der Perspektive der dynamischen Systeme 2015; Johnson: Linear differential and difference equations : a systems approach for mathematicians and engineers 1997; Thorne: Gekrümmter Raum und verbogene Zeit 1999 p414 Nichtlinearität; **Saltzman: Dynamical Paleoclimatology. Generalized Theory of Global Climate Change** 2002 Kap6 = Basic concepts of dynamical systems analysis; Kauderer: Nichtlineare Mechanik 1958; Aggarwal: Notes on nonlinear systems 1972; **Sagdeev, Usikov, Zaslavsky: Nonlinear physics. From the pendulum to turbulence and chaos** 1988; Gaponov-Grekhov & Rabinovich: Nonlinearities in action. Oscillations, chaos, order, fractals 1992; Zaslavsky: Chaos in dynamic systems 1985; Abarbanel, Rabinovich, Sushchik: Introduction to nonlinear dynamics for physicists 1993; Rabinovich & Trubetskov: Oscillations and waves in linear and nonlinear systems 1989; Nayfeh & Mook: Nonlinear oscillations 1995; **Myshkis: Advanced mathematics for engineers** 1975 p720-769 Nichtlineare Schwingungen; **Hale: Oscillations in Nonlinear Systems** 1963; Nolte: Introduction to Modern Dynamics. Chaos, Networks, Space and Time 2015; Barrat, Barthélemy & Vespignani: Dynamical Processes on Complex Networks 2013; Barabási: Network Science; Meron: Nonlinear Physics of Ecosystems; Die großen Theorien sind linear: Maxwell'sche Elektrodynamik und die Quantenmechanik. Ostwald: Superpositionsprinzip. Heisenberg: Der Teil und das Ganze. Einstein, Pauli, Schrödinger, Born, Heisenberg: WW führt zwangsläufig auf Nichtlinearitäten. a) SRT nichtlineare Lorentz-Trafo. Additionstheorem für Geschwindigkeiten. Die Einsteinschen Gleichungen für die Beschreibung von Gravitationsfeldern sind intrinsisch nichtlinear, heißt Bewegungsgleichungen nicht mehr unabhängig von den Feldgleichungen! b) Ab den 40-iger Jahren betrachten Einstein ("Wenn alles linear wäre, würde nichts irgend etwas beeinflussen"= Einsteins Diktum laut Schrödinger), Born, Heisenberg & Schrödinger nichtlineare Feldtheorien = **Emigrationsphysik** PhysBl H5 199? p449ff. Es gibt eine rationale Struktur mit dem sich unser Wissen über das Sammelsurium nichtlinearer Phänomene (mathematisches Pendel ohne Näherung, Bleistift auf der Spitze stehend (Rolle der Anfangsbedingung), nichtlineare Materialeigenschaften, NSG. Wer hat, dem wird gegeben) in Verbindung bringen lässt. Vergleich von Modell und Beobachtung mittels Methoden der Zeitreihenanalyse = Vergleiche höheren Momente und bedingte Wahrscheinlichkeiten (=Visualisierung mittels Streudiagramm oder Rekurrenzplot) von Modell-Simulation und Messung per Bayes. **Downey: Think Bayes** 2013; von Weizsäcker: Zoologie von Nichtelefanten. Kruskal: Topics in Nonlinear Mathematics, Proceedings of the Physics Session International School of Nonlinear Mathematics and Physics. A NATO Advanced Stude Institute, Max-Planck-Institute for Physics and Astrophysics, Munich, June

18 1966, Springer 1968; Žabusky: Topics in Nonlinear Physics, ebenda, Munich, June 27 1966; Eilenberger & Müller-Krumbhaar: 14. Ferienkurs, Nichtlineare Dynamik in kondensierter Materie, 28.2.-11.3.1983, Kernforschungsanlage Jülich; Scheinerman: Invitation to Dynamical Systems 1995; **Stoop & Steeb: Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen.** Verständnis durch Konzepte und Experimente 2006; **Berge, Pomeau & Vidal: Order within Chaos. Towards a Deterministic Approach to Turbulence** 1984; Schuster: Deteministic Chaos. An Introduction 1988; Würfel, Kugeln (Lotto), Roulette und Mikadostäbe als Zufallsgeneratoren auf Basis von Nichtlinearität als Ungenauigkeitsverstärker. **Leonard A. Smith: Chaos, a very short introduction** 2007, 2010 Sehr gute Einführung; **Letellier: Chaos in Nature** 2013; **Lakshmanan & Rajaseekar: Nonlinear Dynamics: Integrability, Chaos and Patterns** 2002; Wimberger: Nonlinear Dynamics and Quantum Chaos. An Introduction 2014 siehe PhysJ 14 2015 Nr1 p52; **Alle linearen Systeme sind gleich. Jedes nichtlineare System ist auf andere Weise nichtlinear.** Reproduzierbarkeit wird in Frage gestellt. Schmidt: Auf des Messers Schneide ... : Instabilitätstypen in der Nichtlinearen Dynamik und Chaostheorie PdNPiS Bd53 2004 Nr2 p15-24; So kann man ein Leben lang den **van der Pol-Oszillator** untersuchen und versteht den Duffing nicht. Dann aber entdeckte man die Feigenbaum-Konstanten = Maß für die Selbstähnlichkeit des Bifurkationsdiagramms im Bereich des Kontrollparameters bei Periodenverdopplung für die Klasse der unimodalen Abbildunge, Metzler: Nichtlineare Dynamik und Chaos 1998 p41: $\alpha = 2.502,907,875,0\ldots$

$$\alpha = -\frac{d_n}{d_{n+1}}, \quad n >> 1. \tag{51}$$

Die neue Punktgeneration sollte etwa α - mal dichter liegen als die alte. $\delta = 4.669,201,990,97\ldots$

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} \tag{52}$$

A) **Uhr vs math Pendel:** Bewegungsgleichung, Lösung $\alpha(t,\omega) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 Pendeluhr p134f; Mit Reibung. Attraktorbegriff zur begrifflichen Unterscheidung von Hamiltonschen und dissipativen Systemen. Gleichgewichtspunkt $\neq$ Fixpunkt. Grenzzyklus. Seltsamer Attraktor ist **stabil instabil** B) Lösungsdarstellungen: Trajektorie als Projektion auf eine Komponente, Phasenraum, Zustandsraum. Fourierraum $\neq$ Powerspektrum, AKF $< x, x_\tau >$, Periodogramm $< x, \cos n\omega >$, KS-Entropie. Formby: An Introduction to the Mathematical Formulation of Self-organizing Systems 1965; Jetschke: Mathematik der Selbstorganisation. Qualitative Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie 1989 und 2009; **Anishchenko, Astakhov, Neiman, Vadivasova & Schimansky-Geier: Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Tutorial and modern developments** 2003; **Cecini: Chaos** 2010; **Scheck: Mechanik** Kap6; **Homokline Orbits** Eilenberger & Müller-Krumbhaar: 14. Ferienkurs, **Nichtlineare Dynamik** in kondensierter Materie, 28.2.-11.3.1983, Kernforschungsanlage Jülich pX-26ff; Schuster: Deteministic Chaos. An Introduction 1988, 1995, 2008, p195; Barrow-Green: Poincare and the Three body problem 1997; Vernic: Diskussion der Sundermannschen Lösung des Dreikörperproblems 1954; Leven, Koch, Pompe: Chaos in dissipativen Systemen 1989 p148ff Poincare sah beim 3-Körperproblem, dass äußerst verwickelte Trajektorien entstehen, wenn homokline Orbits vorhanden sind. Betrachte **homokline Punkte** $q(\neq \bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ des Fixpunktes $\bar{x}$ bei der **Poincare-Abbildung** P definiert durch $\lim_{m\to\infty} P^m(q) = \lim_{m\to\infty} P^{-m}(q) = \bar{x}$. Die homoklinen Punkte gehören also sowohl zur stabilen als auch zur instabilen Mannigfaltigkeit von $\bar{x}$. Schneiden sich die Mannigfaltigkeiten transversal, heißt q **transversaler homokliner Punkt**. Der Orbit $\{P^m(q)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ durch einen (transversalen) homoklinen Punkt p heißt (transversaler) **homokliner Orbit**. Homokline Orbits sind aber keine hinreichende Bedingung für Chaos. Existenz transversaler homokliner Orbits bedeutet, dass Smale'sche **Hufeisenabbildung** relevant: strukturell stabile hyperbolische (Zerlegung in stabile und instabile Unterräume) Struktur. a] sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen. b] es lassen sich lokal glatte stabile und instabile Mannigfaltigeiten definieren. c] für hyperbolische Menge gilt das **Beschattungs-Lemma**. Computer=generierte Pseudo-Orbits, der i.a. mit wahrem Orbit wenig zu tun hat, liegt stets inn seiner Nähe. **Melnikov-Methode:** Leven, Koch, Pompe: Chaos in dissipativen Systemen 1989 p161ff; Stoop & Steeb:

Berechenbares Chaos in dynamischen Systemen. Verständnis durch Konzepte und Experimente 2006 p150ff; Lichtenberg & Lieberman: p423; Steeb: Chaos in dynamischen Systemen 1989[2], p109ff; **Wiedemann: Numerische Physik** 2004; Steeb: A handbook of terms used in chaos and quantum chaos 1991; Wimberger: Nonlinear Dynamics and Quantum Chaos: An Introduction 2014; Steeb: Chaos and fractals. Algorithms and computations 1992; **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical Methods** 2008; Steeb: Chaos und Quantenchaos in dynamischen Systemen 1994; **Leven, Koch, Pompe, B.: Chaos in dissipativen Systemen** 1989, 1994 Kap6 p212; Peinke;Sergey P. Kuznetsov: Hyperbolic Chaos: A Physicist's View 2011; Kap7; Kuznetsov: Dynamical chaos http://www. sgtnd. narod. ru/staff/spkuz/eng/index.htm; S. Kuznetsov et al.: Nonlinear oscillations http://www. sgtnd. narod. ru/staff/spkuz/eng/index. htm; Yuri A. Kuznetsov: Elements of applied bifurcation theory 1996; **Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos**: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering 1994, 1997, 2002 p197 Grenzzyklus: Phase $\dot{\varphi} = \omega_0$ mit $\lambda_\varphi = 0$ und Amplitude $\dot{A} = -\gamma A(A_0 - A^2)$ mit $\lambda_A = \gamma$. **Logistische Abbildung als demografisches Modell einer Population:** R. May, Simple mathematical models with very complicated dynamics, Nature 261 (1976) 459; **Jordan & Smith: Mathe für die Praxis** p783ff; **Mahnke, Schmelzer, Röpke: Nichtlineare Phänomene und Selbstorganisation** 1992 p50-58; Ausloos & Dirickx: The Logistic Map and the Route to Chaos: From the Beginnings to Modern Applications 2005; Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel 2014 p41; **Mahnke: Nichtlineare Physik in Aufgaben** 1994 p164-177;

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad \text{mit} \quad a \in (0, 4], \quad x \in [0, 1], \tag{53}$$

$f^2(x) = f(f(x)) = r^2x(-rx^3+2rx^2-rx-x+1)$, $f^3(x) = f(f(f(x))) = r^3x(-r^4x^7+4r^4x^6-6r^4x^5+4r^4x^4-r^4x^3-2r^3x^5+6r^3x^4-6r^3x^3+2r^3x^2-r^2x^3+2r^2x^2-r^2x-rx^3+2rx^2-rx-x+1)$, $f^4(x) = f(f(f(f(x)))) = r^4x(-r^{11}x^{15}+8r^{11}x^{14}-28r^{11}x^{13}+56r^{11}x^{12}-70r^{11}x^{11}+56r^{11}x^{10}-28r^{11}x^9+8r^{11}x^8-r^{11}x^7-4r^{10}x^{13}+28r^{10}x^{12}-84r^{10}x^{11}+140r^{10}x^{10}-140r^{10}x^9+84r^{10}x^8-28r^{10}x^7+4r^{10}x^6-6r^9x^{11}+36r^9x^{10}-90r^9x^9+120r^9x^8-90r^9x^7+36r^9x^6-6r^9x^5-2r^8x^{11}+12r^8x^{10}-34r^8x^9+60r^8x^8-70r^8x^7+52r^8x^6-22r^8x^5+4r^8x^4-6r^7x^9+30r^7x^8-61r^7x^7+64r^7x^6-36r^7x^5+10r^7x^4-r^7x^3-6r^6x^7+24r^6x^6-36r^6x^5+24r^6x^4-6r^6x^3-r^5x^7+4r^5x^6-8r^5x^5+10r^5x^4-7r^5x^3+2r^5x^2-r^4x^7+4r^4x^6-8r^4x^5+10r^4x^4-7r^4x^3+2r^4x^2-2r^3x^5+6r^3x^4-7r^3x^3+4r^3x^2-r^3x-r^2x^3+2r^2x^2-r^2x-rx^3+2rx^2-rx-x+1)$

$$\lambda(x_0 \in A(a)) = \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_{i=0}^{N-1} \mathrm{ld}\ \left|f'(a, x_i)\right| \ ,$$

wobei x_i Punkte auf dem jeweiligen Attraktor $A(a)$ sind.

```
# -*- coding: utf-8
import random
import numpy
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.fftpack
iterationen_liste = []
for i in range(0,5000) :
     ##### startwerte zufällig bestimmen ###
     a = random.uniform(0.0,4.0)
     x = random.uniform(0.0,1.0)
     ####die ersten 229 zum Atraktor#####
     for j in range(0,229) :
        x = a*x*(1-x)
     ##### 100 mal machen für ein a in Liste Speichern###
     for k in range(0,100) :
        x = a*x*(1-x)
        c = [a,x]
```

```
        iterationen_liste.append(c)
###zum ploten umschreiben ###
y_daten = []
x_daten = []
for i in iterationen_liste:
     x_daten.append(i[0])
     y_daten.append(i[1])
plt.ylabel("x-Werte")
plt.xlabel("a")
#ploteinlesen plt.plot(x_daten , y_daten , "bo", markersize=0.8 )
plt.plot(x_daten , y_daten , ".", markersize=0.8 )
#Achsen-Bereiche manuell festlegen. Syntax: plt.axis([xmin, xmax, ymin, ymax]) plt.axis([0, 1500
# gepunktetes Diagramm-Gitter einblenden: plt.grid(True)
plt.show() #### Diagramm anzeigen:
```

Oder

```
# /usr/cnld/shw/TeX/introductions/Praktikum+Exercise/2011WSChuaRaumK31/
# 3-AuswertungPerPython/logistische_abb.py
from numpy import zeros
from matplotlib import rc
from pylab import plot,show, title, axis,xlabel,ylabel, figure,grid
from math import log
#Programm zur Untersuchung der logistischen Abbildung

#Fkt fuer die logistische Abbildung
def logistische_abb(a,x):
        x*=a*(1-x)
        return x
#Fkt. zum Berechnen der liapunov Exponenten
def liapunov(x,a):
        N=len(x)
        l=0
        for i in range(N):
                l+=log(abs(a-2*a*x[i]))
        l/=N
        return l

#Laenge der Trajektorien
trajlen=300
#zu untersuchendes a-Intervall
a_area=([3.54,3.58])
#Anzahl der a Werte
a_inter=10000 a_step=(1.*a_area[1]-a_area[0])/a_inter
#arrays fuer die Werte
a_ar=zeros([a_inter,trajlen]) x_traj=zeros([a_inter,trajlen]) liap_werte=zeros(a_inter)
for j in range(a_inter):
        a=a_area[0]+a_step*j
        x=0.5
#1000 Iterationen zum Einschwingen
        for i in range(0,1000,1):
```

```
                x=logistische_abb(a,x)
        x_traj[j,0]=x
        for i in range(1,trajlen,1):
                x_traj[j,i]=logistische_abb(a,x_traj[j,i-1])
        for i in range(30):

                a_ar[j,i]=a
        liap_werte[j]=liapunov(x_traj[j,:],a)
        print( 100*j/a_inter, "%")
#plot
rc('text', usetex=True)
figure(1) axis([3.54,3.58,0.32,0.4]) plot(a_ar,x_traj,"b,") xlabel("a") ylabel("x*") rc('text',
figure(2) plot(a_ar[:,1],liap_werte,'b,') xlabel("a") ylabel(r"$\lambda$") grid(True) show()

# Abschaetzung von r_infinity der logistischen Abbildung
r=3.449
rmem=3
for i in range(300):
        a=r
        r+=(r-rmem)/4.669
        rmem=a
print r
```

Referenzen zu Schüler-Einführungen: a) Bücher zur nichtlinearen Physik und logistischen Gleichung: Oberstufenschulbücher enthalten oft entsprechende Kapitel, wie z.B. Oberstufe Physik. Gesamtband. Cornelson 2002 p174ff. **Ebeling: Chaos, Ordnung, Information** 1989; Peitgen, Juegens, Saupe, Maletsky: Chaos. Iteration, Sensitivität, Mandelbrot-Menge. Ein Arbeitsbuch 1992 **Diffusion-limited aggregation**/ Diffusionsbegrenztes Wachstum Lichtenbergfiguren. Eden growth model. Simulation für kleine Konzentration: Starte 3 Teilchen von innen nach außen. Starte den Rest der Teilchen nach innen. Witten & Sander: Fractal Growth, Scientific American Bd256 1987 p94-100; Witten & Sander, PRL 47 1400-3 (1981), PhysRevB 1983 5686-97; Ball, Nauenberg & Witten, PhysRevA29 2017 (1984); **Peitgen, Jürgens & Saupe: Bausteine des Chaos. Fraktale** 1992 p441; Dreidimensionale Fraktale und andere Monumentalgeometrie aus Karton: http://www.wissenschaft-schulen. de/alias/material/ dreidimensionale-fraktale-und-andere-monumentalgeometrie-aus-karton/1051375, Benoit B. Mandelbrot: Schönes Chaos. Geschichte eines Außenseiters vs Andre Weil 2013; SdW 2013 Aug p95f; Briggs & Peat: Die Entdeckung des Chaos; Stewart: Spielt Gott Roulette? p163ff; **Peitgen, Juegens, Saupe: Chaos. Bausteine der Ordnung** 1994, Seiten 126-209; Seifritz: Wachstum, Rückkopplung und Chaos. Eine Einführung in die Welt der Nichtlinearität und des Chaos 1989; Bahr & Diener, Chaotisches Verhalten vollständig deterministischer Systeme, Wissenschaft & Fortschritt **39**, 209-212; Jaeckel & Joachim Schellnhuber 1986 Exemplarische Darstellung des aktuellen Paradigmenwechsels innerhalb der klassischen Mechanik, PdN-Physik **35**, 41-44; Thomas 1986 Systemtheoretische Konzepte für fächerübergreifenden Unterricht, MNU **39**, 464-477; Silverberg, Luchner & Worg 1986 Nichtlineare gekoppelte mechanische Systeme. Simulation, Experiment, stabiles und chaotisches Verhalten, PhuD **1**, 23-38; **Wiedemann: Numerische Physik** 2004; Luchner & Worg 1987 Harmonische und chaotische Schwingungen, MNU **40**, 337-343; Vongxaya: Ordnung und Chaos bei nichtlinearen Schwingungen 1995; Kirchgraber 1987 Das Vorhersehbare und das Unvorhersehbare, Naturwissenschaften **74**, 105-110; Backhaus & Schlichting 1987 Ein Karussel mit chaotischen Möglichkeiten, PdN-Physik **36** p14-22; Metzler 1987 Chaos und Fraktale bei zwei gekoppelten Modelloszillationen, PdN-Physik **36**, 23-29; Glatzer & Seydel 1986 Schwingung eines Duffing Oszillators. Unterrichtsfilm C 1532, PdN-Physik **35**, 42-45; Holden 1985 Chaos is no longer a dirty word, New Scientist 25 April p12-15; Crutchfield, Farmer, Packard & Shaw: Chaos, SciAm **254** H12 p46-57; Jung & Schröder 1994 Bizarre Bilder des Herrn Poincaré, DOS H4 p240-243; Lauterborn & Meyer-Ilse 1986 Chaos, PiuZ**17** p177-187; Feigenbaum 1980 Universal Behavior in Nonlinear Systems, Los Alamos

Science, Summer 1980 p4-27; Ruelle: Zufall und Chaos 1992; Ruelle: Statistical Mechanics. Rigorous Results 1999; Ruelle: Statistical Mechanics and dynamical systems In: Duke turbulence conference 1977; Wesson, R. 1991 Die unbekannte Ordnung. Chaos, Zufall und Auslese in der Natur; Scholl & Pfeiffer 1991 Natur als fraktale Grafik. Stochastische Fraktale und L-Systeme programmiert in Turbopascal, Markt und Technik; Faszination Fraktale (incl. Fractint, Einführung, Geschichtliches, viele Bilder) SysThema; GEO-WISSEN - Chaos und Kreativität 1990; Kuhn 1989 Physik, BdII, 1.Teil: Klasse 11, Westermann, Braunschweig; Kaye 1994 Katastrophen im Labor, PiuZ25 p29-35; Haken & Wunderlin 1991 Die Strukturierung der Materie. Synergetik in der unbelebten Welt; **Baker & Gollub: Chaotic Dynamic. An Introduction** 1996[2]; **Mahnke: Nichtlineare Physik in Aufgaben** 1994 p34; **Jose & Saletan: Mechanics** p21; **Kuypers** p78; **Baker & Blackburn: The Pendulum. A Case Study in Physics** 2005; http://www.thphys.uni-heidelberg.de/~gasenzer/Falconer: Fraktale Geometrie 1993; Frøyland: Introduction to Chaos and Coherence 1992; Backhaus, U. & H.-Joachim Schlichting 1992 Was hat Schönheit mit Chaos zu tun? Vergleich der Mandelbrot-Iteration mit einem chaotischen Drehpendel, Preprint; Loistl, Otto & Iro Betz 1993[2] Chaostheorie. Zur Theorie nichtlinearer dynamischer Systeme; Peak & Frame 1994 Chaos under Control; Peak, & Frame 1995 Komplexität - das gezähmte Chaos; **Pagels: The Dreams of Reason. The Computer and the Rise of the Sciences of Complexity** 1988; Zeitler & Neidhardt 1994 Fraktale und Chaos; **Leonard Smith: Chaos**. Eine sehr kurze Einführung 2007; Gleick: Chaos 1987; Küppers: Chaos und Ordnung; b) Internet: http://www. robert-doerner. de/Logistische_Abbildung/logistische_abbildung.html http://webber. physik. uni-freiburg. de/~jeti/studenten_seminar/stud_sem05/Logistische_Abbildung.pdf http://de. wikipedia. org/wiki/Logistische_Gleichung; http://www. j-berkemeier. de/LogistischeAbbildung. html; https://elearning. physik. uni-frankfurt. de/data/ FB13-PhysikOnline/ lm_data/lm_284/Kap2/ Logmap/logmap1.html

Tolstoi. Gilmore & Lefranc: **The topology of chaos. Alice in stretch and squeezeland**, Vorwort! 2002; Chan & Tong: **Chaos: a statistical perspective** 2001; Kapitaniak & Wojewoda: Attractors of quasiperiodically forced systems 1993, strange nonchaotic attractors, Salzman oscillator, El Nino (-,-,-) punktförmiger Atraktor, (0,-,-) Grenzzyklus, (0,0,-) m-Torus mit 2-Frequenzen, falls **quasiperiodisch oder irrational** strange nonchaotic attractors, (+,0,-) strange chaotic, Spur Jacobi-Matrix kleiner Null, dissipativ.

$$\sum \lambda_i < 0$$

Nicolis: Introduction to nonlinear science 1995; **Enns & McGuire: Nonlinear physics with Mathematica for scientists and engineers**; Kaplan: Understanding nonlinear dynamics 1995; Schuster: Complex adaptive systems = **CAS** 2001 p286-290 A primer an det chaos, p310-18 Ising-Modell, p324 Pathintegral, p282 **Kramers-Moyal-Entwicklung**, CA, feedback loop, neuronale Netzwerke, unsupervised learning, supervised learning; Narsky: **Statistical Analysis Techniques in Particle Physics - Fits, Density Estimation and Supervised Learning** 2014; Mackay: Information theory, inference, and learning algorithms 2003; Hartmann & Selbig: Introductory bioinformatics 2009, 2013[5] **Kap3.3**; Clote & Backofen: Computational molecular biology. An introduction 2000 p23ff Zufallsvariablen, p81 Sequenz alignment = DNA-Sequenzanalyse, p 135 Eva-Hypothese, evolutionäre Genetik, p173 Hidden Markov models; Sokal & Rohlf: Biometry 1994; Riebesell: Mathematische Statistik und Biometrik 1932; Schuster: Reviews of nonlinear dynamics and complexity, 3 Vols, 2008; Cencini, Cecconi & Vulpiani: Chaos. From simple models to complex systems 2010; **Mitchell: An Introduction to Genetic Algorithms** 1998; Holland: Genetische Algorithmen SdW Sept 1992 p44;

Argyris, Faust & Haase: Erforschung des Chaos 1995; Robinson: An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete, PH 2004; Elementare Einführung: Hütt: Datenanalyse in der Biologie 2001; Acheson: Vom Calculus zum Chaos; **Tu: Dynamical systems. An introduction with applications in economics and biology** 1994; SdW Nov 2001 p66; Kunst & Chaos SdW April 1995; Controling chaos Pecora SdW Nov 1993; **Khalil:** Nonlinear systems 2007; **Steeb: The nonlinear workbook. Chaos, Fractals, Cellular Automata, Neural Networks, Genetic Algorithms, Gene Expression Programming, Support Vector Machine, Wavelets, Hidden Markov Models, Fuzzy Logic with C++, Java and SymbolicC++ Programs** 2008[4] http://issc.uj.ac.za/; **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical**

Methods 2008; Strogatz: Nonlinear dynamics 1994; Jean-Marc Ginoux: Differential geometry applied to dynamical systems, 2009;

Labormäuse stochastischer & deterministischer dynamischer Systeme **Gaußsches Rauschen:** $e_t \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2)$. **Linearer Gaußscher Prozeß:** $X_t = \beta\, e_{t-1} + e_t$. **Nichtlinearer Gaußscher Prozeß:** $X_t = \beta\, e_{t-1} e_{t-2} + e_t$. Threshold AR Modell

$$X_t = \begin{cases} \beta^- X_{t-1} + e_t^- & \text{if } |X_{t-1}| > T \\ \beta^+ X_{t-1} + e_t^+ & \text{sonst}\ , \end{cases} \tag{54}$$

Bilineares Modell (0.4, 0.4; 0.4, 0.8): $X_t = 0.4\, X_{t-1} + 0.8\, X_{t-1} e_{t-1} + e_t$ **Autoregressiver Prozeß** p**-ter Ordnung AR[p]:** $X_t = \sum_{\tau=1}^{p} \alpha_\tau\, X_{t-\tau} + e_t, \epsilon_t \sim$ iid. **I. Monotoner Relaxator** (0.3, 0.04), **II. Alternierender Relaxator** (-0.3, 0.3), **III. Hochfrequent oszillierender Relaxator** (-1,-0.5), **IV. Niederfrequent oszillierender Relaxator** (0.9,-0.4), **V. Oszillator** mit $\omega = \arccos a_1/2\sqrt{-a_2}$ (1.6, -0.99). **Irrfahrten, Irrflüge, Random Walk:** Brownsche Bewegung, Rayleigh-Flug $X_t = X_{t-1} + e_t$. MacDonald: Noise and fluctuations. An introduction 1962; **Begrenzte Brownsche Bewegung:** Barber & Ninham: Random and restricted walks 1970, **Berg: Random walks in biology** 1992; **1/f Schrot-Rauschen:** Kaulakys & Meskauskas, PRE 58 (1998) 7013, Übergangszeit mit zufälligen Inkrementen $t_k = t_{k-1} - \gamma(t_{k-1} - \bar{\tau}) + \sigma e_t$ mit der mittleren Wartezeit τ. **Fraktionierte Brownsche Bewegung**, Brownsche Bewegung mit dem Index $H \in (0,1)$ $(S(\tau) = \tau^{2H} S(1))$, wobei $H = (\beta - 1)/2$, $\beta \in (0,2)$, und $P(\omega_k) = C\, \omega_k^{-\beta}$ gelten

$$X_i = \sum_{k=1}^{N/2} \zeta_k \cos(\omega_k i \Delta t + \varphi_k)\,, \qquad i = 1, ..., N, \tag{55}$$

mit $\omega_k = k\,\Delta\omega$ $(k = 1, ...N/2)$, $\Delta\omega = 2\pi/N\,\Delta t$, $\zeta_k = \sqrt{P(\omega_k)\,\Delta\omega}$ und $\varphi_k \in [0, 2\pi)$. **Lévy-Flug** ist random Walk mit isotroper Schrittweitenverteilung $p(R_t) \propto R^{-1-\gamma}$ $(0 < \gamma < 2)$, $X_t = X_{t-1} + R_t$. Gauß ist dann Grenzfall für $\gamma = 2$. **Henón:** $(a = 1.4, b = 0.3)$ M. Henon, CommMathPhys50 (1976) 69;

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 1 - a\, x_k^2 + b\, y_k \\ y_{k+1} &= x_k \end{aligned} \tag{56}$$

mit $a > 0, |b| < 1$. $0 < a < a_1 = 0.3675$. **Periodenverdopplung:** $a_1 < a < a_\infty \approx 1.06$. **Chaos:** $a_\infty < a < \hat{a} \approx 1.55$. **Lozi** Misiurewicz, M. 1980: The Lozi mapping has a strange attractor. In: Nonlinear Dynamics (Ed. R. H. G. Helleman), Ann. New York Acad. Sci. **357**, 348-358):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= 1 - a\,|x_k| + b y_k \\ y_{k+1} &= x_k \end{aligned} \tag{57}$$

Ikeda $(\rho = 0.85, a = 0.4, b = 9, c = 0.9, \Re(z_o) = \Im(z_o) = 0.5)$ K. Ikeda, Opt. Commu. 30 (1976) 257; S. Hammel, C.K.R.T. Jones, J. Maloney, JOSA B2 (1985) 552;

$$z_{n+1} = \rho + c\, z_n\, \exp i \left(a - \frac{b}{1 + |z_n|^2} \right), \quad z \in \mathbb{C} \tag{58}$$

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \rho + c(x_n \cos\tau_n - y_n \sin\tau_n) \\ y_{k+1} &= c(x_n \sin\tau_n + y_n \cos\tau_n) \\ \tau_{n+1} &= a - b/(1 + x_n^2 + y_n^2) \end{aligned} \tag{59}$$

Rayleigh - Bénard - Konvektion: von unten erhitzte Flüssigkeiten, Atmosphären von Planeten, Sternen und Akkretionsscheiben. Bénard-Experiment (1900), Rayleigh-Theorie (1916). **Mori & Kuramoto: Dissipative structures and chaos** 1994 p5-14; Glatzmaier: Introduction to modeling convection in planets and stars 2014; Becher mit Raum-Temperaturwasser und zweiter Becher mit siedendem Wasser in Eisschrank. Wegen größerem Temperaturgradienten hat man im zweiten Becher neben Wärmeleitung nach Fick auch den effektiveren Transport durch Konvektion. Kippenhahn & Weigert: Stellar structure and evolution 1991; **Konvektionsrätsel der Sterne:** Sternmodelle basieren auf Mischungslängenmodelle die Konvektionszellentiefe von 200 Mm für die Sonne mit Radius 600 Mm geben = Riesenzelle = größte konvektive Skala.

Problem: Seismische Messung gibt für diese Zellen kaum Geschwindigkeit. 3d-Simulationen geben für die gemessenen idifferenziellen Geschwindigkeiten viel kleinere Skalen. Konvektion erklärt Magnetfelder und Sternentwicklung. **Navier-Stokes-Gleichung Chandrasekhar: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability** 1981; Iooss & Joseph: Elementary stability and bifurcation theory 1980, 1997[2] p123f; Hahn: Theorie und Anwendung der direkten Methode von Ljapunov 1967; Amann: Gewöhnliche Differentialgleichungen 1997; La Salle & Lefschetz: Die Stabilitätstheorie von Ljapunow. Die direkte Methode mit Anwendungen 1967; **Erste Methode = Linearisierung**, also mit Kenntnis der Trajektorien. **Methode von Ljapunow = Direkte, weil allein auf Basis der rechten Seite der Dgl = Zweite Methode** zur Untersuchung der Stabilität von Ruhepunkten. Idee: definiere zu dynamischem System $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$ und einer reellwertigen differenzierbaren Funktion $V(\vec{x})$ die **orbitale Ableitung** bei der gewählten Hyperfläche $\dot{V}(\vec{x}) := \left\langle \text{grad } V(\vec{x}), \dot{\vec{x}} \right\rangle = \text{grad } V(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \nabla_{\vec{x}} V(\vec{x}) \cdot \vec{f}(\vec{x})$ auf einer geeignet gewählten Hyperfläche über dem Phasenraum = Ljapunov-Funktion/Funktional. Wenn die Richtung der rechten Seite des Dgl-Systems innerhalb eines Phasenraumgebietes bei dieser Hyperfläche stets bergab zeigt, dann bleiben alle Trajektorien bei zeitlicher Entwicklung auch innerhalb dieses Phasenraumgebietes. Anschaulich in Strogatz: Nonlinear Dynamics and Chaos p201; Reellwertige differenzierbare Funktion V heißt Ljapunow-Funktion für das Vektorfeld $\vec{f}$, wenn $\dot{V}(\vec{x}) \leq 0$ für alle Punkte $\vec{x}$ aus dem Phasenraum gilt. Eine Ljapunow-Funktion ist starkes Hilfsmittel für einen Stabilitätsbeweis, wie die folgenden beiden Kriterien zeigen: **Erstes Kriterium von Ljapunow:** Gegeben sei ein dynamisches System $\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$. Gelten die **Bedingungen:** 1. $\vec{x}_R$ ist eine Ruhelage des Systems, 2. $V(\vec{x})$ ist eine Ljapunow-Funktion für $\vec{f}$, 3. $V(\vec{x})$ besitzt an der Stelle $\vec{x}_R$ ein striktes lokales Minimum, dann ist die Ruhelage $\vec{x}_R$ stabil. **Zweites Kriterium von Ljapunow:** Gilt zusätzlich 4. für $\vec{x} \neq \vec{x}_R$ in einer Umgebung der Ruhelage $\vec{x}_R$ gilt $\dot{V}(\vec{x}) < 0$, dann ist die Ruhelage asymptotisch stabil. **Schäfer: Theoretische Grundlagen der Stabilität** technischer Systeme 1976 p79 Beispiele für das **Auffinden geigneter Ljapunow-Funktionen/Funktionle**; **Stabilität periodischer Lösungen = Floquet-Theorie** siehe Argyris: Erforschung des Chaos Kap5.4.2 p166; Sentef: Licht treibt Materie, PJ22 2023 H3 p51-56 Kapiza-Pendel; **Wittenburg: Schwingungslehre** 1996 p153; **Lineare Stabilitätstheorie** siehe Schlichting, K. Gersten: Grenzschicht-Theorie 1997; Zweiling: Gleichgewicht und Stabilität 1953; Rayleigh: On the Stability, or Instability, of certain Fluid Motions 1880; Navier (1785-1836), Stokes (1819-1903), Greiner 2A, Lugt, Brockhaus, Kreuzer. Beachte die **Nichtlinearität durch konvektive Beschleunigung** $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$:

$$\varrho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \varrho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = F - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} \tag{60}$$

Skalenfreie Form:

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + (\vec{v}' \cdot \vec{\nabla}')\vec{v}' = F' - \vec{\nabla}' p' + \frac{1}{R} \Delta' \vec{v}' \tag{61}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{x_j}(u_i\, u_j) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_3^2} \right), \; \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Reynold'sche Zahl (1842-1912): Greiner 285:

$$Re = \frac{\varrho L V}{\eta} = \frac{LV}{\nu} \tag{62}$$

$\eta = \varrho \nu$ dynamische Viskosität, ν kinematic viscosity of the fluid. Boussinesq-Näherung: Nur die Dichte ist von der Temperatur abhängig:

$$\varrho = \varrho_0 (1 - a \Delta T) \tag{63}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \vec{v}) = 0 \tag{64}$$

mit der Stromdichte/Fluss $\vec{j} = \varrho \vec{v}$, ϱ Massendichte, c Konzentration oder p Wahrscheinlichkeit. **Diffusionsbedingte Fließgeschwindigkeit**

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = -\frac{a}{\varrho(\vec{x}, t)} \nabla \varrho(\vec{x}, t)$$

Fouriersche Wärmeleitungsgleichung (1822)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \vec{\nabla}^2 T \tag{65}$$

Saltzman: **Dynamical Paleoclimatology. Generalized Theory of Global Climate Change** 2002; Saltzman-Gleichungen (1962)

Ed Lorenz (Prandtl-Zahl $\sigma = 10$, Rayleigh-Zahl $r = 28, b = 8/3$) E.N. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20 (1963) 130, Sparrow: The Lorenz equations: bifurcarion, chaoa, and strange attractors 1982;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma\,(y - x) \\ \dot{y} &= x\,(r - z) - y \\ \dot{z} &= x\,y - b\,z \end{aligned} \tag{66}$$

Rössler: $a = b = 0.2$ oder $a = 0.15$, $b = 0.15$, $c = 10$, PhysLettA 57 397 (1976), Ann. New York Acad. Sci. **316**, 376, Jackson:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + a\,y \\ \dot{z} &= b + (x - c)\,z \end{aligned} \tag{67}$$

Jetschke 136ff; `http://www.scholarpedia.org/article/Rossler_attractor` Periodenverdopplung: $c_1 = 2.6, c_2 = 3.5, c_4 = 4.1, c_8 = 4.18, c_{16} = 4.21$

Chaos vom Pferdehuf- (oder Schraubentyp) für $a = 0.55, b = 2, c = 4$. $a \in [0.3.0.55]$ oder speziell $a = 0.432$. Jetschke, Falconer 215; **Chua-Schaltkreis** Orgonzalek Chaos & Complexity p142ff; **Lakshmanan & Rajaseekar: Nonlinear Dynamics. Integrability, Chaos and Patterns** 2003 p165-170; Madan ed: Chua's Circuit. A Paradigm for Chaos 1993; **Memristor** = passives elektrisches Bauelement, elektrischer Widerstand nicht konstant, sondern von seiner Vergangenheit abhängt. aktuelle Widerstand ist davon abhängig, wie viele Ladungen in welcher Richtung geflossen sind. Damit ist der Widerstandswert über den zeitlichen Verlauf des geflossenen Stroms einstellbar. Dieser Widerstand bleibt auch ohne Energiezufuhr erhalten. Memristoren werden neben dem Widerstand, dem Kondensator und der Spule als viertes fundamentales passives Bauelement beschrieben. Das Verhalten des Memristors ergänzt damit die drei anderen fundamentalen Bauelemente Unterschiedliche Wirkung von elektrischer Ladung und elektrischem Strom! Elektrische Spannung U: (reziproke) Kapazität $\frac{1}{C} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q} = \frac{\mathrm{d}\dot{\Phi}}{\mathrm{d}q}$ und Resistivität $R = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}I} = \frac{\mathrm{d}\dot{\Phi}}{\mathrm{d}\dot{q}}$. Magnetischer Fluss Φ: Memristivität $M = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}q}$ und Induktivität $L = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}I} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\dot{q}}$ Francesco Caravelli, Invenia Labs: Trajectories entropy in dynamical graphs with memory arXiv:1511.07135v3 [physics.soc-ph] 26 Jan 2016 arXiv.org Alligood 375, 393; Kilic: A practical guide for studying Chau's circuits 2010;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c_1(y - x - h(x)) \\ \dot{y} &= c_2(x - y + z) \\ \dot{z} &= -c_3 y \end{aligned} \tag{68}$$

mit $h(x) = m_1 x + (m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|)/2$. Für $c_1 = 2, c_2 = 0.2, c_3 = 3, m_0 = -1.5, m_1 = -0.5$ und $x_0 = y_0 = z_0 = 1.2$ Doppelloop. Für $c_1 = 6.3 c_2 = 0.7 c_3 = -10 m_0 = -0.75 m_1 = -0.44$ sollte ein Rössler-artiger Attraktor entstehen.

Duffing $\ddot{u} + b\dot{u} - cu + d\,u^3 = f\cos(\Omega t)$ ($b = 1, c = 10, d = 100, \Omega = 3.5$ oder $b = 0.1, c = 0, f = 12, \Omega = 1$) Argyris 669;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -b\,y + c\,x - d\,x^3 + f\,\cos z \\ \dot{z} &= \Omega \end{aligned} \tag{69}$$

van der Pol $\ddot{u} + \epsilon\,(u^2 - 1)\,\dot{u} + u = f\,\cos(\Omega t)$ ($\epsilon = 5, f = 5, \Omega = 2.466$) Kaplan & Glass 241, Alligood 316, Steeb 126;

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \epsilon\,(1 - x^2)\,y - x + f\,\cos z \\ \dot{z} &= \Omega \end{aligned} \tag{70}$$

Holmes-Moon ($f = 1, \beta = 0.75,\ \Omega = 1$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\,\sin z - \beta\, x - y^3 + y \\ \dot{y} &= x \\ \dot{z} &= \Omega \end{aligned} \tag{71}$$

FitzHugh-Nagumo: ($I = 0.02 - 0.1, \epsilon = 0.008, a = 1.39, \gamma = 2.54$) Kaplan-Glass 245, 276

$$\begin{aligned} \dot{v} &= I - v\,(v-a)(v-1) - w \\ \dot{w} &= \epsilon\,(v - \gamma\, w) \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} u_t &= u_{xx} + u(u-a)(1-u) + w \\ w_t &= \epsilon u \end{aligned} \tag{72}$$

Mackey-Glass ($n = 10, P = 0.2 - 1, \alpha = 0.1 - 1., \Delta t = \tau/100$) Machey & Glass, Science 197 (1977) 130; Dorizzi et al. PRA 35 (1987) 328-393; Kaplan-Glass p183ff, p207f; http://chaos. phy. ohiou. `edu/~thomas/chaos/macke` model for the production of white blood cells (WBC) x is the density of the circulating white blood cells, B is the random WBC destruction rate and the function F is the current flux of new WBC into the blood in response to the demand created at a time t in the past

$$\dot{x} = \frac{P\,x(t-\tau)}{1 + x^n(t-\tau)} - \alpha\, x, \quad \dot{x} = -\alpha\, x(t-\tau) \tag{73}$$

Ikeda: ($\mu = 20, \tau = 2, x_o = \pi/3, \Delta t = 0.02$) $\dot{x} = -x + \mu \sin(x(t-\tau) - x_o)$ The growing need for a better

Attraktor	D_H	K	D_{KY}	λ_i	Parameter
Henón	1.2	0.417	1.26	0.42, -1.58	$a = 1.4, b = 0.3$
Lorenz	2.06	1.37	2.06	1.37, 0, -22.37	$R = 40, \sigma = 16, b = 4$ $\Delta t = 0.01$
Rössler	2.01	0.069	2.01	0.07, -0.0002, -5	$a = b = 0.2$, $c = 5.7$, $\Delta t = 0.12$
Mackey-Glass		0.098	3.54	0.0071, 0.0027, 0, -0.0167, -0.0245	$a = 0.2, b = 0.1$, $c = 10, T = 30$, $\Delta t = T/100$

understanding of nonlinear processes in plasma physics has in the last decades stimulated the development of new and more advanced data analysis techniques. This review lists some of the basic properties one may wish to infer from a data set and then presents appropriate analysis techniques with some recent applications. The emphasis is put on the investigation of nonlinear wave phenomena and turbulence in space plasmas.

Nichtlinearität eines dynamischen Systems bedeutet nicht zwangsläufig eine Verstärkung von Unbestimmtheit, führt nicht zwangsläufig zum Schmetterlingseffekt. Viel häufiger und weniger spektakulär führt sie auf Grenzzyklen, also gegen Störungen robuste Schwingungen. Paradebeispiel dafür ist die Uhr. Helmholtz: Vorlesungen Bd1, 2.Abt. Die Dynamik diskreter Massenpunkte 1898, 1911[2] WS1893/94 Pendeluhr p134f; **Nichtlinearität sorgt auf kleinen Skalen für Verstärkung von Unbestimmtheit und auf großen Skalen für Muster** (Farge, Smith: Chaos 2007).

Beispiele für nichtlineare Zusammenhänge: i] Statische Nichtlinearität: Spannung-Dehnungszusammenhang (nicht-Hooke'sches Kraftgesetz), $p(T)$ für die Dampfdruckkurve, isotherme Zustandsänderung $p = RT/V$, Nichtlineare optische Kristalle: Frequenzverdopplung, Geschwindigkeitsaddition in der SRT: $v = v1 + v2/1 +$

$v1 * v2/cc$. Betrachte Kreis mit Radius $c = 1$. Sättigung (Füllen eines Glases). ii] Nichtlinearität bei dynamischen Systemen (Nichtlinearität der Bewegungsgleichung): **Uhr** und Schwingkreise, Grenzzyklus siehe Seite 203 als Paradigma, nichtlin aber nicht chaotisch, Straßenerklärung zu nichtlinearer Dgl: Rückkopplung. Regelungstheorie http://techni. tachemie. uni-leipzig.de /reg/ reglung.html Spurhalten, Geschwindigkeit halten, aufrecht stehen. Syrbe: Messen, steuern, regeln 1972; **Fiedler: Steuerungs- und Regelungstechnik, Berlin 1978**. Jan Lunze: Regelungstechnik. Kippschwinger, komplizierter (zeitlicher) Bewegungsverlauf, Doppelpendel, BZ-Reaktion, **Populationsdynamik**, Sensitivität gegen Störungen, keine Langzeitvorhersage, Multistabilität, Bifurkation siehe Seite 324, Historizität gemäß **Katastrophentheorie** von Arnold und Thom führt auf Klassifikation kritischer Punkte von glatten Funktionen oder der seltenen(!) **Gradientensystemen** $\dot{x} = -\nabla V(x, u, t)$, wenn sie entartete lokale Extrema haben, also $\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$ und $\det\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right) = 0$ $\Rightarrow$ zB nichtlokale Bifurkationsmengen von elliptischen Nabel = umbilic - Punkten, wo kritische Punkte kollidieren, = **Maxwell sets** Arnold: Catastroph theory 1992[3]; **Maxwell stratum = Schicht** siehe Saunders & Streeruwitz: Katastrophentheorie. Facetten der Physik 1986; Thom: Structural Stability And Morphogenesis 1975 p56; Zeidler: Teubner TB der Mathematik II p509f oder Springer TB der Mathematik; Gilmore: Catastroph theory for scientists and engineers p89; Poston & Stewart: Catastrophe theory and its applications 1978 p239 p338; **Zeeman: Catastrophe theory.** Selected papers 1972-1977; Woodcock & Poston: A Geometrical Study of the Elementary Catastrophes. LNM373 1976; Lu: Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory 1976; Bröcker: Differentiable Germs and Catastrophes 1975; Triebel: Analysis und mathematische Physik 1981 p396f; Poston & Stewart: Taylor Expansions and Catastrophes 1976; Woodcock & Davis: Catastrophe Theory 1980; DeWitt-Morette: The small distubance equation, caustics and catastrophes 1975; Komorowski: On Thom's idea concerning Guggenheim's one-third law in phase transition 1977; Schulman: Tricritical points PhysRevB7 1973 p1960; Güttinger & Eikemeier: Structural Stability in Physics. Proceedings of Two International Symposia on Applications of Catastrophe Theory 1979 **Maxwell stratum** bei thermodynamischen Potenzialen. Dukek: The 180° rule at triple point p176, Keller: Phasediagrams and catastrophes p186; **Bruce & Giblin: Crves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory** 1984 russ; Falk: Theoret Physik II Thermodynamik 1968; Ebeling & Feistel: Physik der Evolution 1982 Katastrophen in Gradientensystemen Kap4.3 p110; Haken: Synergetics 1983[3] Kap5.5 Klassifikation statischer Instabilitäten nach Thom p133; **Strukturbildung im Kosmos und auf der Erde** Sitzungsberichte der AdW der DDR 10N 1983 Watznauer: Evolution, Peschel, Mende Richardt, Voigt: Nichtlinearität und Strukturbildung auf der Basis der Fuzzy-Ansatzes, Ebeling & Feistel: Thermodynamik irreversibler Prozesse und spontane Strukturbildung, Schmutzer: Variabilität der Gravitationskonstanten, Stiller, Möhlmann, Franck: Strukturbildung in präplanetaren Phasen; Triebel & Arnold: The theory of sigularities and its applications 1991, spontane Strukturbildung, Solitonen: Akhmediew: PRL 79 (1997) 4047 Flachwasserwellenaufsteilung, Rayleigh-Bénard Wolkenbildung, Granulen. Poincare 1900, Bohm: Causality and chance in modern physics 1985; **Born: Ist die klassische Mechanik tatsächlich deterministisch?** PhysBl11 H2 p49-54 1955; Ed Lorenz 1963: Determiniertheit kann bei nichtlinearen Bewegungsgleichungen auf begrenzte Vorhersagbarkeit führen (schwache Kausalität). Deterministischer Zufall. Meist aber liegt es nicht an der Instabilität der Bewegungsgleichungen, sondern an einem FALSCHEN MODELL, auf das man sich zurückzieht, wenn es ZU VIELE FREIHEITSGRADE gibt. Jetschke: Mathe der Selbstorganisation 1989. **Bjerknes: Das Problem der Wettervorhersage, betrachtet vom Standpunkte der Mechanik und der Physik.** 1904;

Strenger Kausalität: a] Einfache K: Gleiche Ursache $\rightarrow$ Gleiche Wirkung. b] Starke K (Physiker, wegen Messfehler): Ähnliche Ursache $\rightarrow$ Ähnliche Wirkung.

Schwache K (Chaos): Ähnliche Ursachen $\rightarrow$ Sehr verschiedene Wirkungen.

Kausalität wird in der Physik über Vorhersagbarkeit definiert (Einstein: Raum-Zeit-Kegel für Ereignisse in der speziellen RT oder Carnap: Einführung in die Philosophie der Naturwissenschaften). Werner Ebeling: Zur Vorhersagbarkeit komplexer Prozesse, Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät 2002;

Nichtlinearität: SRT-Geschwindigkeitsaddition in der Geldbörse. Wer hat, dem wird gegeben. Phänomen der

Eskalation (Schmutzecken, Kettenreaktion, Zinseffekt). Benzinverbrauch in Abh von der Geschwindigkeit. Wetter. Populationsdynamik. Fraktale haben zunächst nichts mit Nichtlinearität zu tun. Der Begriff des Fraktals ist unabhängig vom Begriff Nichtlinearität und gestattet eine differenziertere Unterscheidung von Mengen. Dennoch gibt es nichtlineare dynamische Systeme, deren Attraktoren fraktale Mengen sind.

Nichtlinearität in den Bewegungsgleichungen ist Voraussetzung für Strukturen / Konvektions - Muster / Emergenz, deren Robustheit und deren Zerfall, z.B. durch Turbulenz! Regulator sofern Grenzzyklusgenerator oder Zufalls-/Störungsverstärker. Synergetik, Emergenz. Nicolis & Prigogine: Die Erforschung des Komplexen. Auf dem Weg zu einem neuen Verständnis der Naturwissenschaften 1987; Kuhlmann: Theorien komplexer Systeme: Nicht-fundamental und doch unverzichtbar? In: Bartels et al.: Wissenschaftstheorie 2009; Stephan: Emergenz. Von der Unvorhersagbarkeit zur Selbstorganisation 1999; Phänomene der Nichtlinearität und bei Vielteilchensystemen. Ergodizität. Irreversibilität. Kröger: Haken und Synergetik 2013; Prigogine & Nicolis: Self-organization in nonequilibrium systems 1977; Vergleichende Betrachtung der Konzepte siehe **Mori & Kuramoto: Dissipative structures and chaos** 1994 p279f; **Duale Rolle irreversibler Prozesse:** a] als **Ordnungsvernichter nahe dem Gleichgewicht**. b] als **Ordnungsschöpfer fern vom Gleichgewicht**. **Prigogine, Ebeling, Haken: Physik der Evolution.** Synergetik. Biologie als Physik nichtergodischer Systeme. Ebeling: Chaos, Ordnung, Information 1989;

a] MULTISTABILITÄT = Lösungvielfalt unter identischen Bedingungen, spontane Übergänge zwischen verschiedenen Lösungen, Hysterese, Katastrophentheorie.

b] INSTABILITÄT - unerwartete und ungehemmte Eskalation/Relaxation von Zustandsvariablen: Tal mutiert zum Gipfel. Kleine Störungen zerfallen nicht. KAM = bei genügend kleiner Störung überleben die meisten Tori, weil rationale Frequenzverhältnisse ein kleineres Maß als irrationale haben: Irrationalität sorgt für Ordnung! Bei steigender Störungsstärke ist der Goldene Schnitt am robustesten. Ausgangspunkt ist die divergierende Störungsreihe. Thirring: Mechanik Bd1 p153 oder Erfolge und Misserfolge der mathematischen Physik, PhysBl33 1977 542-7 und Kilian & Weber: Lexikon der Physik Bd3 1999 p451-454,

c] BIFURKATION siehe Seite 324 - sensitive Abhängigkeit des qualitativen Verhaltens von SYSTEMPARAMETERN. **Abrupter Wandel stationärer Lösungen $\vec{x}^*$, bei langsamer Änderung des Kontrollparameters p.**

d] CHAOS - empfindliche Abhängigkeit von den ANFANGSBEDINGUNGEN, d.h., begrenzte Vorhersagbarkeit trotz Determinismus (Schmetterlingseffekt) Vettin: **Vom Chaos zur Ordnung: Animation mit Laser**licht, Anregungen für eine Projektarbeit PdNPiS Bd50 2001 H1 p32-36; Zwei ernste physikalische Probleme werden hier tangiert: **d1] Signaturen des Quantenchaos**, SdW März 1992: Energie-Niveau-Differenz-Dichte bei chaot qm Systemen ist Wigner-Spektrum, also Level-Abstoßung. Wellenfunktionen weniger irregulär; Schuster: Quantenchaos, PhysBl42 1986 4 112-113; Wunner: Gibt es Chaos in der Quantenmechanik? PhysBl45 1989 H5 p139-145; Gutzwiller: Chaos in Classical and Quantum Mechanics 1990 Wimberger: Nonlinear Dynamics and Quantum Chaos. An Introduction 2014; Haake: Quantum Signatures of Chaos 1990; Gutzwiller: Quantum Chaos, SdW März 1992 p56-62; Reichl: The Transition to Chaos. In Conservative Classical Systems. Quantum Manifestations 1992; **Ott: Chaos in dynamical systems** 1993 Kap10 p334-362; Stöckmann: Mikrowellenbillards. Chaos in der Quantenmechanik, PiuZ 24 1993 200 Koch & van Leeuwen: Importance of Resonances in Microwave Ionization of Excited Hydrogen Atoms. Physics Reports 255 1995 p289-403; Casati & Chirikov: Quantum Chaos - between Order and Disorder 1995 Kinzel: Bilder elementarer Quantenmechanik, PhysBl51 1995 H12 p1190; Kinzel & Reents: Physik per Computer 1996 p159-172; Dittrich: Klassische Narben im quantenmechanischen Fleisch, PhysBl52 1996 H7/8 p656-657; Stöckmann: Quantenchaos zum Anfassen - das Mikrowellenbillard, PhysBl53 1997 H2 p121-126;

d2] Thermodynamischer Grenzübergang und unvollkommenes stochastisches Chaos; Advances in Physics 51, N7 Nov 01, 2002 1529-1585; Evans & Searles: The Fluctuation Theorem. Siehe auch Seite 119. **Was ist die hinreichende Bedingung für irreversiblen makroskopischen Transport, wenn man von reversible, deterministische mikroskopische Gleichungen ausgeht? Wärmelei-**

tung/Fourier, Diffusion/Fick? Es geht auch ohne Chaos und starke Nichtintegrabilität! Diffusion in Spin-Ketten kommt auch bei integrablen Systemen (Solitonen). Prosen PRL 111, 040602 2013:

e] SYNCHRONISATION: schwach gekoppelte komplizierte Systeme zeigen einfaches Verhalten. Konstruktiver Mechanismus auf Basis von Nichtlinearität bei gleichgewichtsfernen Systemen zu Ordnung/Struktur/Emergenz zu kommen. Synchronisationsmaße: Korrelation, Tiago - Stroboskop-Lokalisation/Isomap, Phasenmittel. Syncho durch dissipative, diffusive Kopplung. **Schimären-Zustand** Mischwesen mit antigonistischen Eigenschaften, Koexistenz von Synchro und Desynchro in nicht-lokal gekoppelten Ketten. PhysJ 12 2013 H8/9 p18; Strogatz: Sync - the emerging science of spontaneous order 2003; Strogatz: Synchron - vom rätselhaften Rhythmus 2004; Parlitz: Schwingungen im Gleichtakt. Synchronisation - ein universelles Ordnungsprinzip für Oszillationen und Rhythmen, PhysJ 5 2006 Nr10 p33; Strogatz: Nonlinear dynamics and chaos. With applications to physics, biology, chemistry, and engineering 1999; Aschoff: Biologische Periodik als selbsterregte Schwingung, Arbeitsgemeinschaft für Forschung H138 1964; **Kuramoto-Modell** für N nichtlinear gekoppelte Grenzzyklus-Schwinger, Grenzzyklus siehe Seite 203

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial t} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin(\theta_j - \theta_i), \qquad i = 1\ldots N,$$

Exakte Lösung mit **Ordnungsparameter** $re^{i\psi} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{i\theta_j}$, wo r die **Phasenkohärenz** und ψ die **mittlere Phase** bezeichnen, liefert das **entkoppelte** System $\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + Kr\sin(\psi - \theta_i)$. Klassifizierende Größe = **Ordnungsparameter:** iwS ist jede phys Größe eine ordnende Größe, sofern Äquivalenzklassen bezeichnen: Energie, Impuls, Temperatur. Im engeren Sinne dienen sie der Beschreibung des Zustands eines physikalischen Systems während eines Phasenüberganges. Maß für die Ordnung des Systems im Sinne der Symmetrie. Unordnung = 0. Grad der raum-zeitlichen Korrelation. Korrelationslänge. Nützliches Funktional über einem raum-zeitlichen Zustand/Muster. Wellenlänge. Ordnungsparameter können vorläufige physikalische Größen sein. Magnetisierung, Ladungsdichte, Wellenfunktion Ψ in der Landau-Ginzburg-Theorie, wo $|\Psi|^2$ die Dichte der Cooper-Paare angibt. Gebhardt & Krey: Phasenübergänge und kritische Phänomene - Eine Einführung 1980; Teichmann: BSc-Arbeit Shot noise 2015; Shot noise Kettenbruch 2015; Bag, Petrosyan, Hu: Influence of noise on the synchronization of the stochastic Kuramoto model PRE76, 056210 2007 globally coupled phase oscillators subject to Ornstein-Uhlenbeck and non-Gaussian colored noise and investigate the influence of noise on the order parameter of the synchronization process; Im **mitrotierenden** System $\psi = 0$ hat man $\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i - Kr\sin(\theta_i)$. 2 Oszillatoren $\ddot{x}_1 = -\omega_1^2 x_1 + k(y_1 - x_1)$ und $\ddot{y}_1 = -\omega_2^2 y_1 + k(x_1 - y_1)$ führen auf $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -\omega_1^2 x_1 + k(y_1 - x_1)$ und $\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = -\omega_2^2 y_1 + k(x_1 - y_1)$ und damit die Jacobi-Matrix `matrix([ [0,1,0,0],[-w1**2-k,0,k,0],[0,0,0,1],[k,0,-w2**2-k,0] ])` mit dem Eigenwert-Spektrum als Funktion der Kopplungsparameters k

```
K=linspace(0,.2,1000); w1=0.9; w2=1.1; plot(K,imag(array( map(lambda k:
eig(matrix([ [0,1,0,0],[-w1**2,0,k,0],[0,0,0,1],[k,0,-w2**2,0] ]) )[0], K) ) ) );
```

mittels **anonymer Funktion** `f=lambda x,y,z: (x-y)*z; f(1,2,3)`, der deren Aufruf stets die **Argumente** anzugeben sind f(x)! `map(function,list,...)` erwartet Funktionsobjekt und Parameter-Listen. `erg=map(f,[1,2,3],[4,5,6],[7,8,9]);list(erg)` Die Eigenvektoren beim Gebrauch von `A = matrix([[1,2],[2,3]])` stehen in den Spalten `EV[:,0]` Petrovic: Synchronisation gekoppelter Osz; Johannes Doerr: http://physics. johannesdoerr. de/files/nichtlineare-dynamik/ausarbeitung/ **Ermentrout: Mathematical foundations of neuroscience** 2010 e-book; Izhikevich: Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting 2007; **Grasman & Herwaarden: Asymptotic Methods for the Fokker-Planck Equation and the Exit Problem in Applications** 1999 Ito-Kalkül; Ahlbehrendt & Kempe: Analyse stochastischer Systeme. Nichtlineare dynamische Systeme 1984; Peter Thomas: On the Asymptotic Phase of Stochastic Oscillators; Traversa: Asymptotic stochastic characterisation of phase and amplitude noise in free-running oscillators; Guillemin &

Sternberg: Symplectic techniques in physics 1984, 1993 p260 **stationary phase**; **Guckenheimer Phasendefinition** http://www. scholarpedia. org/article/Phase_model Winfree: The Geometry of Biological Time 2001[2]; Winfree: Biologischen Uhren. Zeitstrukturen des Lebendigen 1988;

Jacobian oder Jacobi-Matrix mit Mathematica: `jacobianMatrix={{a,b},{c,d},`

```
eivs=Eigenvalues[jacobianMatrix]
lambda1==ExpandAll[eivs[[2]]//.{a->-p-d,b c->-q+a d}]
lambda2==ExpandAll[eivs[[1]]//.{a->-p-d,b c->-q+a d}]
repeated replacement rule //. Enns p136
```

```
Clear["Global`*"]
% Lorenz system
eq[1]=s (x[2] - x[1]);
eq[2]= r x[1] - x[2] - x[1]*x[3];
eq[3]=x[1] x[2] - b x[3];
% fixed points
singpoints=Solve[Table[eq[i]==0,{i,3}],Table[x[i],{i,3}]]
sp3=singpoints[[3]]
% Jacobian
a[i_,j_]:= D[eq[i],x[j]]
% Jacobian at the third fixed point
A=Table[a[i,j],{i,3},{j,3}]/.sp3
% characteristic polynomial
cp=Det[A-l IdentityMatrix[3]]
% zero
cp2=Collect[-cp,{l,b,s}]==0
cp2
s=10; b=8/3; r=28;
cp2
lvalues1=NSolve[cp2]
lvalues2=Eigenvalues[A]
lvalues2=Eigenvalues[A]//N
```

f] Nichtlinearität sorgt auf kleinen Skalen für Verstärkung von Unbestimmtheit und auf großen Skalen für Muster (Farge, Smith: Chaos 2007).

g] Lokalisation: Nichtlinearität und Diskretheit führen in periodischen Systemen zu Lokalisation. So kann die Existenz von Inhomogenität, Klumpung, Atome, Teilchen plausibel gemacht werden. Fermi-Pasta-Ulam-Tsingou SdW Nov 2010 p70 Experimentelle Mathematik: Vier-Farbeproblem SdW Okt 1978 p82; Siehe auch **Los Alamos Science** 15 1987 Stanislaw Ulam; Bericht LA-1940 mit Vorwort von Stanislav Ulam in Fermis Gesammelten Werken von 1965; http://www.physiks.utah.edu/~detar/physics6720/handouts/ fpu/ Fermi-CollectedPapers1965.pdf; Sato, M. et al.: Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array. In: PhysRevLett, 90(4) p044102, 31. Januar 2003. Zabusky, N. J.: Fermi-Pasta-Ulam, solitons and the fabric of nonlinear and computational science: History, synergetics, and visiometrics. In: Chaos 15 p015102, 2005. Flach, S. et al.: Discrete breathers . Advances in theory and applications In: Physics Reports, 467(1-3) p1-116, Oktober 2008. (kostenfreier Volltext) Fermi-Pasta- Ulam nonlinear lattice oscillations. Scholarpedia Campbell, D.K. et al.: Introduction: The Fermi-Pasta-Ulam problem-The first fifty years In: Chaos 15 p015101, 2005. Dauxois, T.: Fermi, Pasta, Ulam and a mysterious lady In: Physics Today 61(1) p55-57, 2008 (kostenfrei auf arxiv-Server) Campbell, D. K. et al.: Experimental mathematics: The role of computation. In: Communications of the ACM 28, p374-384 1985. (kostenfreier pdf-Download) Campbell, Flach, Kivshar: Localizing energy through nonlinearity and discreteness. In: Physics Today 57(1) p43-49 2004. (kostenfreier pdf-Download) Pettini et al.: Weak and strong chaos in Fermi-Pasta-Ulam models and beyond In: Chaos 15, p015106, 2005. Zabusky & Deem: Dynamics of nonlinear lattices I. Localized

optical excitations, acoustic radiation, and strong nonlinear behavior. In: Journal of Computational Physics 2(2) p126-153, Nov 1967. Ford, J.: The Fermi-Pasta-Ulam problem: Paradox turns discovery. Physics Reports 213 p271-310 1992. Gallavotti ed.: The Fermi-Pasta-Ulam Problem: A Status Report 2008 (Buchauszug bei Google Books) Zabusky & Kruskal: Interaction of 'solitons' in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. In: Physical Review Letters 15, p240-243 1965. Diskrete nichtlineare Schrödinger-Gleichung.

h] Stochastische Resonanz bei bestimmter, **paradoxerweise von Null verschiedener Intensität des Rauschens** $F(t)$ in einem rauschbehafteten nichtlinearen System, wenn dieses durch ein periodisches Signal angeregt wird. $\dot{x} = -\dfrac{\partial U(x)}{\partial x} + F(t) + \epsilon g(x)\cos(\omega_0 t + \varphi)$ oder mit zeitabhängigem Potenzial $W(x,t) = U(x) - \epsilon h(x)\cos(\omega_0 t + \varphi)$ mit $g(x) = \partial g/\partial x$. Potenzial $U(x)$ habe zwei Minima. Man schaue auf Amplitude x als Funktion der Varianz der Rauschens σ_F^2. 1981 italienischen und belgischen Physikern: periodische Wiederkehr von Eiszeiten. Gammaitoni, Hänggi, Jung & Marchesoni, Review of Modern Physics, 70 (1) 223–287 1998; Hänggi: Stochastic resonance in biology: how noise can enhance detection of weak signals and help improve biological information processing . ChemPhysChem 2002; 3: 285–290; http://www.scholarpedia.org/article/Stochastic_resonance

Ljapunov–Exponenten

Pikovsky und Politi: Lyapunov Exponents. A Tool to Explore Complex Dynamics 2016; Leven, Koch, Pompe: Chaos in dissipativen Systemen 1989 p66ff per Taylorreihenentwicklung $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \frac{\mathrm{d}(x+\delta x)}{\mathrm{d}t} = f(x+\delta x) = f(x) + \delta x D_{f(x)} + O(2)$ mit $D_{f(x)}$ Jacobi–Matrix, δx differenzielle Störung in den Anfangsbedingungen $\boxed{\frac{\mathrm{d}\delta x}{\mathrm{d}t} = \delta x D_{f(x)}}$, lokal linearisiertes System oder per **Variationsgleichung = linearisierte Gleichung** siehe Steeb & Kunick: Chaos in dynamischen Systemen 1986 p7; Die unter dem Einfluss der Störung vorliegende Abweichung von der Trajektorie ohne Störung wird ausgedrückt durch $\delta x(t) = \delta x(0)e^{\lambda t}$ wobei λ der Ljapunov–Exponent ist. Für ein m–dimensionales dissipatives System gilt $\langle div f\rangle = \sum_{i=1}^m \lambda_i < 0$. Gilt $\lambda_{max} > 0$, dann handelt es sich um ein chaotisches Verhalten des Systems, **deterministisches Chaos**.

Dynamik von infinitesimalen Anfangsungenauigkeiten: Lokale Vorhersage L.A. Smith, C. Ziehmann und K. Fraedrich, Uncertainty dynamics and predictability in chaotic systems, Quarterly Journal of the Royal Meteorology Society 125, 2855-2886 1999; Peacock & Haller: **Lagrangian coherent structures. The hidden skeleton of fluid flows**. Physics today Feb 2013 41-47; Cauchy-Green-Tensor. Lin: Lagrangian Modeling of the Atmosphere 2013; Riehl: Introduction to the atmosphere 1965;

Maße für die Vorhersagbarkeit ergeben sich aus der Analyse der Abstandsentwicklung $\epsilon(t)$ von Trajektorienpaaren oder Trajektorienensemblen: i] Fehlerverdopplungszeit τ_2, ii] Fehlerwachstumsrate, iii] Maximale Voraussagezeit τ_{max} mit $\langle\epsilon^2(\tau_{max})\rangle \approx 2\,\sigma_X^2$.

Die Trajektorien können wahlweise von Modellen oder Beobachtungen herrühren. Somit können verschiedene Modelle, Beobachtung und Modell als auch verschiedene Beobachtungen hinsichtlich ihres Voraussageverhaltens miteinander verglichen werden.

Für das instantane lokal-lineare Fehlerwachstum eines Systems autonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen gilt (18)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{e}(t_0+\Delta t)}{\Delta t} =: \dot{\vec{e}} = J_{\vec{f}}(\vec{x})\vec{e} := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{M(\vec{x}_0,\Delta t)}{\Delta t}\vec{e} \tag{74}$$

und mit dem **Tangentenpropagator** $M(\vec{x}_0,\Delta t)$, auch Cauchy-Green-Tensor, für endliche Zeiten δt folgt $\vec{e}(\Delta t) = M(\vec{x}_0,\Delta t)\vec{e}_0$ Für die Entwicklung einer Anfangsstörung $\vec{e}_0$ kann man auch $\dot{\vec{e}}(t) = J\vec{e}(t) = S\Lambda S^{-1}\vec{e}(t)$ $\vec{e}(t) = Se^{\Lambda t}S^{-1}\vec{e}_0 = \sum_{i=1}^m c_i e^{\lambda_i t}\vec{\eta}_i$ wobei $S^{-1}\vec{e}_0$ die Zerlegung der Anfangsstörung $\vec{e}_0$ in der Basis der Eigenvektoren $\vec{\eta}_i$ mit $S = (\vec{\eta}_1,\ldots,\vec{\eta}_m)$ ist. Ob die Anfangsstörung, Anfangsungenauigkeit oder der Anfangsfehler $|\vec{e}(t)|$ steigt oder fällt (Fehlerwachstum größer oder kleiner 1; Wachstumsrate größer oder kleiner 0), hängt (i) von von den Eigenwerten von $J(x) = S\Lambda S^{-1}$, (ii) den Projektionen der Fehler auf die Eigenvektoren $\vec{e}^T S$ und (iii) ihre Zerlegung in die Eigenvektoren $S^{-1}\vec{e}$ ab. Die Eigenwerte von J allein liefern keine hinreichenden Bedingungen für das Ansteigen oder Fallen der Anfangsstörung, da die Eigenbasis i.a. nicht orthogonal ist

(J ist i.a. nicht-normal).

Zeitdiskretes System: Für das lokal-lineare Fehlerwachstum eines Systems von Abbildungen Fall gilt $\vec{e}_{n+1} = J_{\vec{f}}(\vec{x}_n)\vec{e}_n$

$$\vec{e}_{n+k} = \prod_{i=1}^{k} J_{\vec{f}}(\vec{x}_{n+i-1})\vec{e}_n = M(\vec{x}_n, k)\vec{e}_n. \tag{75}$$

Für den Betrag des Fehlers gilt $e(t) = |\vec{e}(t)| = \sqrt{\vec{e}^T(t)\cdot\vec{e}(t)}$ Die Ableitung des Fehlers ist dann

$$\frac{d\,e(t)}{d\,t} = \frac{1}{2\,e(t)}[\dot{\vec{e}}^T(t)\cdot\vec{e}(t) + \vec{e}^T(t)\cdot\dot{\vec{e}}(t)] \quad \text{oder} \quad \frac{d\,e(t)}{d\,t} = \frac{1}{e(t)}\,\vec{e}^T\,\frac{J(\vec{x}) + J(\vec{x})^T}{2}\,\vec{e}(t) \tag{76}$$

Die **effektive** Wachstumsrate eines Anfangsfehlers $\vec{e}_0$ zur Zeit $t = 0$ an der Stelle $\vec{x}_0$ des Phasenraumes ist dann durch

$$\bar{r}_{\Delta t}(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \frac{1}{\Delta t}\log_2\frac{|\vec{e}(\Delta t)|}{|\vec{e}_0|} \tag{77}$$

definiert. Für die Maßeinheit gilt $[r]$ = bits pro Zeit. Man kann dafür auch

$$\bar{r}_{\Delta t}(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \frac{1}{\Delta t}\log_2\sqrt{\frac{\vec{e}^T(\Delta t)\cdot\vec{e}(\Delta t)}{\vec{e}_0^T\cdot\vec{e}_0}} = \frac{1}{\Delta t}\log_2\sqrt{\frac{\vec{e}_0^T M^T(\vec{x}_0, \Delta t)\cdot M(\vec{x}_0, \Delta t)\vec{e}_0}{\vec{e}_0^T\cdot\vec{e}_0}} \tag{78}$$

schreiben. Die **instantane** Fehlerwachstumsrate r ist als Grenzwert von (77)

$$r(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\bar{r}_{\Delta t}(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\log_2\frac{|\vec{e}(\Delta t)|}{|\vec{e}_0|} \tag{79}$$

$$r(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\log_2|\vec{e}(\Delta t)| - \log_2|\vec{e}_0|}{\Delta t} = \frac{d\,\log_2|\vec{e}(t)|}{d\,t} = \frac{1}{|\vec{e}(t)|}\frac{d\,|\vec{e}(t)|}{d\,t} \tag{80}$$

definiert. Unter Berücksichtigung von (76) folgt unmittelbar

$$r(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \frac{1}{\vec{e}_0^T\cdot\vec{e}_0}\vec{e}_0^T\frac{J^T(\vec{x}_0) + J(\vec{x}_0)}{2}\vec{e}_0 \tag{81}$$

Der Gleichung entnimmt man sofort, daß selbst im Falle konstanter Jacobi-Matrix die Anfangsstörungsorientierung über die Größe der Störungswachtumsrate entscheidet. Da die Matrix $J^T(\vec{x}_0) + J(\vec{x}_0)$ symmetrisch ist, sind ihre Eigenvektoren orthogonal und der kleinste und der größte Eigenwert liefern eine untere und eine obere Grenze für die instantane Wachstumsrate. Falls alle Eigenwerte definit sind, so ist das Vorzeichen der instantanen Wachstumsrate von der Orientierung des Fehlers unabhängig.

Zusammenfassung: i] Für endliche Zeiten sind die EW für das Fehlerwachstum nicht relevant, sondern die Singulär-Werte. ii] Es gibt Fehlerorientierungen in denen das Wachstum größer als λ_{max} und kleiner als λ_{min} stattfinden kann. iii] Das Fehlerwachstum ist eine Funktion der Anfangsbedingung.

Das Fehlerwachstum beschreibt die lokale Voraussagbarkeit im Phasenraum, während der im folgenden betrachtete Ljapunov-Exponent eine Aussage über die globale Voraussagbarkeit macht.

Ljapunov-Exponenten: Globale Vorhersagbarkeit

Der Ljapunov-Exponent kann über die effektive Wachstumsrate (78) definiert werden:

$$\bar{r}_{\Delta t}(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \log_2\left(\frac{\vec{e}_0^T M^T(\vec{x}_0, \Delta t)\cdot M(\vec{x}_0, \Delta t)\vec{e}_0}{\vec{e}_0^T\cdot\vec{e}_0}\right)^{\frac{1}{2\,\Delta t}} \tag{82}$$

Oseledec-Matrix:

$$O(\vec{x}, \Delta t) = \left(M^T(\vec{x}, \Delta t)\cdot M(\vec{x}, \Delta t)\right)^{\frac{1}{2\,\Delta t}} \tag{83}$$

Lypunov-Exponenten I Multiplikatives Ergodentheorem, Oseledec 1968

Wenn

$$O(\vec{x}) = \lim_{\Delta t \to \infty} O(\vec{x}, \Delta t)$$

existiert, dann sind die Eigenwerte e_i von O (Singulärwerte: $(e_i) := \Sigma^{1/\Delta t}$) unabhängig von $\vec{x}$ (also unabhängig von den Anfangsbedingungen: Attraktor): $\Lambda_i = \log_2 e_i \quad \text{mit} \quad i = 1, m$

Lypunov-Exponenten II (durch SVD von M)

$$\Lambda_i = \lim_{\Delta t \to \infty} \log_2 \sigma_i^{1/\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \log_2 \sigma_i \quad \text{mit} \quad i = 1, m \tag{84}$$

σ_i Singulärwerte von M.

Lypunov-Exponenten III (mittels effektiver Wachstumsrate (78)

$$\Lambda_i = \lim_{\Delta t \to \infty} \bar{r}_{\Delta t}(\vec{x}_0, \vec{e}_0) = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1}{\Delta t} \log_2 \frac{|\vec{e}(\Delta t)|}{|\vec{e}_0|} \quad \text{mit} \quad i = 1, m \tag{85}$$

wobei $\vec{e}_0$ eine Projektion auf die Unterräume der rechten Singulärvektoren darstellt.

19 Fluch der Dimension/Curse of dimensionality

Fluch 1: Kugelvolumen hat Maximum bei Dimension 5. Siehe Seite 188. Hayes: Ein Abenteuer in n Dimensionen, SdW August 2012 p52-58; **Richard Bellmann:** Mit zunehmender Dimensionszahl wird es schwieriger, einen bestimmten Punkt zu finden. Anzahl der Parameter bei Optimierung. Man verirrt sich leicht im Raum der Möglickeiten. **Fluch 2:** Bei Schätzung eines linearen Modells geht die Anzahl der zu schätzenden Parameter mit D^p mit D Dimension des Raumes und p Ordnung des linearen Modells. Wohl dem, der ein brauchbares nichtlineares Modell verfolgt. Die homogene Abtastung des Raumes führt bei M Werten pro Dimension auf N^M Messpunkte. Gershenfeld: The Nature of Mathematical Modeling 1998 Chap12.5 p148; **Aber** Kaku: p36 Kap19 p214 **Segen** der Dimension 10: Die Naturgesetze werden einfacher.

20 Einbettungstheorem, Rekurrenz

`Delay = 3; plot(X[:-Delay],X[Delay:])` Ott, Sauer, Yorke: Coping with chaos 1994; **Ẽrhard Scholz: Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincare** 1980; Scholz: Herbart's Influence on Bernhard Riemann 1982 28 Seiten; M kompakte Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^d$ und $\vec{x} \in M$.

Für Paare (φ, ξ) mit $\varphi : M \to M$ (glatter Diffeomorphismus $\varphi \in C^2$) und $\xi : M \to \mathbb{R}$ (ξ glatte Funktion = Messung = oft eindimensionale Projektion) ist es eine generische Eigenschaft, dass die Abbildung

$$\Phi_{(\varphi,\xi)} : M \to \mathbb{R}^{2d+1} \quad \text{vermöge} \quad \vec{\xi}(\vec{x}) = \{\xi(\vec{x}), \xi(\varphi_1(\vec{x})), \ldots, \xi(\varphi_{2n}(\vec{x}))\}$$

eine Einbettung (= operationale Rekonstruktionsvorschrift) ist.

Dem Fluss/Diffeomorphismus φ im originalen Phasenraum M entspricht dann vermöge der Einbettung $\Phi_{(\varphi,\xi)}$ der Fluss/Diffeomorphismus $\Psi(\vec{\xi}) = \Phi_{(\varphi,\xi)} * \varphi * \Phi^{-1}_{(\varphi,\xi)}(\vec{\xi})$ rekonstruierter Fluss im Pseudophasenraum $\mathbb{R}^{2d+1}$ mit $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^{2d+1}$.

i] Vermeidung zeitlicher Korrelation durch Wahl einer optimalen Delay-Zeit: $C(\tau_{corr}) = 1/e$ oder $\tau_{trans} = \min \arg\min I(\tau)$ oder gemäß space-time-separation darf $p(||\vec{x}_{t+\Delta t} - \vec{x}_t|| < \epsilon) = p(\Delta t, \epsilon)$ nicht von Δt abhängen.

ii] optimale Einbettungsdimension aus $D_F(m)$ bei $m_{opt} = 2D_F + 1$ oder Eigenvektoren gemäß SDV-Spektrum.

iii] τ ist optimal, wenn Trajektorien auf dem Attraktor gut aufgelößt sind, also die räumliche Korrelation wiedergeben: $2\tau_c \leq \tau(m-1) \leq 4\tau_c$. Uzal & Verdes: Betrachte wegen Balance von Relevanz und Redundanz erstes Maximum der MI $\tau_M = 2\,\tau$ und betrachte FNN für $x_k = x(t - k\tau_M/m)$ für $k = 0$ bis $m-1$. Einbettung in m-dimensionalen Pseudo-Phasenraum mit Verzögerungszeit τ bei Abtast-Zeit Δt:

$$\vec{x}_i = \left(u_i, u_{i+\tau}, \ldots, u_{i+(m-1)\,\tau}\right), \quad t = i\,\Delta t.$$

Distanz $d_{i,j} = \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|, \quad i,j = 1 \dots N$. Kantz & Schreiber: Nonlinear time series analysis 1996; Priestley: Non-linear and non-stationary time series analysis 1991[2];

Elisa Grilli: dimension reduction, LLE = **locally linear embedding**, Isomap. **Beispiele für Mannigfaltigkeiten** in **Ãmari: Differential-Geometrical Methods in Statistics**. Lecture Notes in Statistics 28, 1985, 1990; **Ãmari, Barndorff-Nielsen, Kass, Lauritzen, Rao: Differential geometry in statistical inference** 1987; Ãmari: Methods of information geometry 2007; Ãmari: Information geometry and its applications 2016; Krakowski: Riemann Geometrie Inferenz 2002; **Murray & Rice: Differential geometry and statistics** 1993; Amari & Nagaoka: Methods of information geometry 2000 p1-24 **Intro in Differenzialgeometrie!** ; Introduction to Rao (1945) Information and the Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters Rao, C.R. (1946). Minimum variance and the estimation of several parameters, Proc. Cambridge Philos. Soc., 43, 280–283. = Google Scholar Rao, C.R. (1948). Sufficient statistics and minimum variance estimation, Proc. Cambridge Philos. Soc., 45, 215–218. Google Scholar Rao, C.R. (1961). Asymptotic efficiency and limiting information, in Proceedings of 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 1. University of California Press, pp. 531–546. Google Scholar Kashyap & Ramachandra Rao: Dynamic stochastic models from empirical data 1976; Girolami & Calderhead: Riemann manifold Langevin and Hamiltonian Monte Carlo methods J R Statist Soc B73, 2011, 123–214;Lee: Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature 1997; Micchelli & Naokes: Rao distances: Rao method puts a Riemannian structure on the parameter space which determines the family of probability densities under consideration and then the distance between two probability densities is measured by the distance between their corresponding parametric realizations. Needless to say these distances are difficult to identify. There are a few cases for which they have been obtained. For example, the Riemannian distance - Finsler-Geometrie, Chern: Finsler Geom ist Riemann-Geometrie ohne Beschränkung auf Quadrate, Notices of the AMS Sept 1996, 959 - induced by the Fisher information matrix between two multivariate normal densities with the same mean was identified in as well as the distance between any two univariate normals. Falls das zu Grunde liegende Modell aus einer Familie $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsdichten f_ϑ mit unbekanntem Parameter $\vartheta \in \Theta$ besteht, so ist die **Fisher-Information** für Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ als

$$\mathcal{I}(\vartheta) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta}\log\prod_{\ell=1}^{n} f_\vartheta(X_\ell)\right)^2\right]$$

definiert. Erweiterungen auf höhere Dimensionen: Falls das Modell von mehreren Parametern $\vartheta_i mit 1 \le i \le k$ abhängt, lässt sich die Fisher-Information als symmetrische Matrix definieren, wobei

$$\mathcal{I}_{ij}(\vartheta) = \mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\log\prod_{\ell=1}^{n} f_\vartheta(X_\ell)\frac{\partial}{\partial\vartheta_j}\log\prod_{\ell=1}^{n} f_\vartheta(X_\ell)\right]$$

gilt. Barndorff-Nielsen, Blaesild, Eriksen: Decomposition and Invariance of Measures, and Statistical Transformation Models 1989; Riemann'sche Geometrie und Momente der Statistik: Mittelwert - Schwerpunkt, lineare Regression - multidimensionales Scaling repräsentiert Objekt als Punkte. Arithmetischer, geometrischer, harmonischer Mittelwert siehe Wurzel 3/4 2003;

Rekurrenzdarstellung, contact map oder Dotplot mit Rekurrenz $R_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{x}_j\|), \quad i,j = 1 \dots N$. Rekurrenzrate
$r = \frac{1}{L^2}\sum_{i,j=1}^{L} R_{i,j} = \frac{1}{L^2}\sum_{l=1}^{L} l\,N(l)$. $N(l) = \sum_{i,j}\left(\prod_{k=0}^{l-1} R_{i+k,j+k}\,(1 - R_{i-1,j-1})\,(1 - R_{i+l,j+l})\right)$. Determinismus $D = \frac{\sum_{l=l_{min}}^{l_{max}} lN(l)}{\sum_{l=1}^{l_{max}} lN(l)}$. Mittlere Diagonallänge $L = \frac{\sum_{l=l_{min}}^{l_{max}} l\,N(l)}{\sum_{l=1}^{l_{max}} N(l)}$. Shannon-Entropie der Verteilung der Diagonallängen $S = -\sum_{l=l_{min}}^{l_{max}} p(l)\log_2 p(l) \quad \text{mit} \quad \mathrm{p(l)} = \frac{\mathrm{N(l)}}{\sum_{\mathrm{l=l_{min}}}^{\mathrm{l_{max}}} \mathrm{N(l)}}$. Trend $T = \frac{\sum_{i=1}^{L}(i-L/2)(D(i)-\langle D_i\rangle)}{\sum_{i=1}^{L}(i-L/2)^2}$. Rekurrenzdichte der i-ten Diagonalen $D_i = \frac{1}{L-i+1}\sum_{j=1}^{L-i+1} R_{i+j,j}$ mit $i = 1 \dots L$. Mittlere Verweildauer, wobei $N(v)$ der Längen der Vertikallinien, $V = \frac{\sum_{v=v_{min}}^{L} vN(v)}{\sum_{v=1}^{L} N(v)}, \quad N(v) = \sum_{i,j}(\prod_{k=0}^{v-1} R_{i,j+k}\,(1 - R_{i,j-1})\,(1 - R_{i,j-v})$.
Kreuzrekurrenzdarstellung
$K_{i,j} = \Theta(\varepsilon - \|\vec{x}_i - \vec{y}_j\|), \quad i,j = 1 \dots N$. contact map: Domany: Protein folding, Physica A 288, 1-9;

Compressive sensing PRL 106 2011, 154101. Candes & Romberg, http://www.acm.caltech.edu/ l1magic (2005). compressive sampling. L1-Magie The central idea in compressive sampling is that the number of samples we need to capture a signal depends primarily on its structural content, rather than its bandwidth.

21 Starrer Körper

Liebscher p14, p24; Jelitto: Mechanik2 Kap14; Fließbach: Mechanik Kap V; Feldmeier: Mechanik Kap12; Landau: Mechanik §31-38; Štrauch: Mechanik Kap8; Greiner: Mechanik2 Kap IV; Stephani & Kluge: Mechanik Kap6; Kuhn: PfL9; Budo: Mechanik; Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik Bd1 Kap2.4 p345. Betrachte Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes $\vec{r}_i$ körperfesten Koordinatensystem eines starren Körpers $\vec{v}_i$ mit der Translationsgeschwindigkeit $\vec{v}_T$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Körpers in diesem Punkt: $\vec{v}_i = \vec{v}_T + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. **Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ eines starren Körpers hängt nicht von der Wahl des Bezugspunktes ab, sie ist eine reine Eigenschaft des starren Körpers. Das ist rein geometrisch/ kinematisch gemeint. An beliebigen Stellen des rotierenden Waldes erlebt man die gleiche Winkelgeschwindigkeit. Man lasse sich nicht vom dynamischen Effekt der Fliehkraft täuschen. Für die Translationsgeschwindigkeit gilt $\vec{v}'_T = \vec{v}_T - \omega \times \vec{a}$.** Reineker: Mechanik p327;

Newton-Gleichung im Inertialsystem $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = K_\rho, \quad m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = K_\varphi$. Im Karusselsystem gilt wegen $\rho = \rho', \varphi = \omega t + \varphi'$ und $\dot{\varphi} = \omega + \dot{\varphi}'$ und $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}'$ also
$m(\ddot{\rho}' - \rho'\dot{\varphi}'^2) = K_\rho + 2m\omega\rho'\dot{\varphi}' + m\omega^2\rho', \quad m(\rho'\ddot{\varphi}' + 2\dot{\rho}'\dot{\varphi}') = K_\varphi - 2m\omega\dot{\rho}'$ aus Sicht des Karusselinsassen gibt es eine Fliehkraft. Die Azimutalscheinkraft wird nach Lanczos Eulerkraft genannt. **Lanczos: The Variational Principles of Mechanics** 1970;

Kreisel - ein in einem Punkt festgehaltener/unterstützter starrer Körper. Bewegungsgleichung in beliebig beschleunigten Bezugssystemen, Stephani/Kluge: Sei $\vec{r}_0$ willkürlich gewählter Körper-Nullpunkt eines mit dem Körper fest verbundenen Koordinatensystems (körperfestes System): $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$ gibt $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$, kurz $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d'}{dt} + \vec{\omega}\times$. **Starrer Körper/starre/feste Rotation:** $\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$. **Wirbelhaftigkeit/Vorticity** starrer Rotation ist $\operatorname{rot} \dot{\vec{r}} = \operatorname{rot} \vec{\omega} \times \vec{r}' = \rho\omega \operatorname{rot} \hat{e}_z \times \hat{e}_\rho = 2\omega\rho\hat{e}_z$. **Eulersche Gleichungen, Kreiseltheorie** Bewegungsgleichung des Drehimpulses $\dot{\vec{L}} = \bar{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$ mit zeitunab körperfesten Trägheitstensor $\bar{I}_{KS} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ gibt $\vec{L} = \bar{I}_{KS} \cdot \vec{\omega}_{KS} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = I_1\omega_1\vec{e}_1 + I_2\omega_2\vec{e}_2 + I_3\omega_3\vec{e}_3$. Drehimpulssatz wird durch die Transformation des Bezugsystems auf das raumfeste System per Euler-Ableitung zu $\vec{M} = \dot{\vec{L}} + (\vec{\omega}_{KS} \times \vec{L}) = \begin{pmatrix} I_1\dot{\omega}_1 \\ I_2\dot{\omega}_2 \\ I_3\dot{\omega}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \\ (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 \\ (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 \end{pmatrix}$. Zeitableitung bei $\dot{\vec{L}}$ passiert im körperfesten Bezugssystem! $M_1 = I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3, M_2 = I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1, M_3 = I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$, wobei die Komponenten des Drehmoments auf das körperfeste Bezugssystem bezogen sind, das damit von der Lage des Körpers im Raum abhängt, also zeitabhängig ist $\vec{M}(t)$. Bei frei fallendem Körper mit konstanter Rotation ist $(I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2$ müssen stets zwei ω_i=0 sein, also rotiert Körper stets gleichförmig um eine Achse. Fließbach: Mechanik p184f; Christoff Guttermann, Kreiselwerkstatt Aachen; Klein & Sommerfeld: Über die Theorie des Kreisels; **Magnus: Kreisel.** Theorie und Anwendungen 1971; **Blaschke: Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik** I, II, III 1942. **Blaschke, Kinematik und Quaternionen** 1960; Lotze: Die Grundgleichungen der Mechanik, insbesondere starrer Körper 1922 siehe ebook Michigan; Die vom Inerzialsystem her gesehene Zeitableitung (d/dt) eines im Nichtinerzialsystem aufgeschriebenen Vektors bildet man, indem man zunächst die Zeitableitung der Komponenten im rotierenden Bezugssystem ausführt (d'/dt) und dann den Einfluss der Rotation berücksichtigt ($\vec{\omega}\times$), also die **Euler-Formel für mit ω rotierende Bezugssysteme** $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d'}{dt} + \vec{\omega}\times$ benutzt: $m\ddot{\vec{r}}' = \vec{K} - m\ddot{\vec{r}}_0 - m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' - 2m\,\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}'$. Euler sitzt außen oder am Ufer oder Inerzialsystem und setzt die Gesamt-Bewegung aus der des sich drehenden Bezugssystems und der bezüglich dessen erfolgenden Bewegung mit der **substanziellen Ableitung**

zusammen. **Lagrange** sitzt auf einem im Fluss schwimmenden Blatt. Dabei ändern sich Raum und Zeit unabhängig voneinander. Es wird das totale Differenzial angeschaut. Die drei **Scheinkraftterme** dienen dazu, die Punktmasse bei Abwesenheit von $\vec{K}$ im Inerzialsystem auf einer Geraden zu führen. Rührt von Trägheit her, daher auch Trägheitskräfte genannt. Krbek: Grundzüge der Mechanik. Lehren von Newton, Einstein und Schrödinger 1954 p13 Scheinkraft; Dransfeld, Kienle, Vonach: Physik 1 - Newtonsche und relativistische Mechanik; Erdrotation macht aus Kugelsymmetrie Axial-Symmetrie. Huygens: Ei, Newton: Apfel, Entscheidung durch Peru- und Lappland-Reise von Maupertue durch Sternwinkel. Ebbe und Flut kommen durch Mond-Gravitation-bedingte weitere Symmetriereduktion: Zwei Flutberge, wodurch nach Kant Reibung im Himmelsmechanik gelangt. So entfernt sich der Mond 4cm pro Jahr von der Erde. Glebe: Geschichte der Gezeiten, PiuZ 2 (2011) p77, Ebbe und Flut: Das Naturphänomen der Gezeiten einfach erklärt 2010; **a]** Erde rotiert um Erde-Mond-Schwerpunkt im Abstand bei $r_E = 3/4$ Erdradien R, denn Gleichgewicht für Hebel liefert die Abstände von Erde r_E und Mond r_M zum Schwerpunkt/Drehzentrum $m_E r_E = m_M r_M$ und Erde-Mond-Abstand $r = r_E + r_M$ geben Abstand $r_E = \frac{m_M}{m_E + m_M} R = \frac{3}{4} R$ wegen $m_E = 81 m_M$. **b]** Erde ohne Eigenrotoion bedeutet: Alle Punkte der Erde mit gleicher Phase um den Schwerpunkt, bedeutet gleichgroße und gleichgerichtete Zentrifugalbeschleunigung aller Erdpunkte. **c]** Allein die Mondgravitation auf einen Probekörper der Masse m an der Erdoberfläche $\frac{m m_M}{(r \pm R)^2} = m m_M \frac{1}{r^2 \pm 2rR + R^2} \approx m m_M \frac{1}{r^2}(1 \mp \frac{2R}{r})$ bricht die Symmetrie. Oberes Vorzeichen mondabgewandt, unteres Vorzeichen zwischen Erde und Mond. Westphal: Physik 1956 p114ff; **Gamow: Das Gesetz der Schwerkraft** 1962 p73ff; Lindner: Physik im Kosmos. Physikalische Probleme der Raumfahrt und des Weltalls 1971 p58ff; Ursache ist astronomisch: Gravitation dominiert auf der dem Mond zugewandten Seite (hin zum Mond). Fliehkraft auf der dem Mond abgewandten Seite der Erde (weg vom Mond). Reaktion der Meer ist topographisch bedingt. Wasserwellengeschwindigkeit proportional zur Quadratwurzel der Tiefe. Petra Demmler: Das Meer Parker: The Power of the Sea. Tsunamis, Storm Surges, Rogue Waves, and Our Quest to Predict Disasters 2010. The tide predictions for D-Day;

22 Raum-Zeit, Drehung, Gruppen, Redshift, Kovarianz, Olbers

M̃lodinow: Das Fenster zum Universum. Eine kleine Geschichte der Geometrie 2002; Essenz der RT: a] Ausgangspunkt ist der Längenbegriff! Was ist der Abstand zweier Punkte? Fundamental ist die Wahl des Skalarprodukts. Metrik ist alles! b] Im Anschluss liefern die Darsteller der Gruppe, die die Beobachter unabhängige Längeninvarianz sicherstellen auch Spin und Antiteilchen. Purcell: Berkeley Physik Kurs Bd2 Elektrizität und Magnetismus 1989[4] **Beobachten = Feststellung der Raum-Zeit-Koordinaten mit Maßstäben und Uhren im Labor/Inerzialsystem** p295 beste Illustrationen; Kittel, Helmholz, Moyer: Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik 1991[5] Kap11 p201-250; Õliver Lodge: Der Weltäther 1911; Jellinek (Danzig, Goetheanum): Weltsystem, Weltäther und die Relativitätstheorie 1949 elementare Einführung vor Haas: Einf in die theoret Physik Bd2 1930 p337ff; **Melcher: Relativitätstheorie** 1974[4]; Janich: Euklids Erbe. Ist der Raum dreidimensional? 1989; Gschwind: Raum, Zeit, Geschwindigkeit 1986; Dirac: SRT zwingt zu Spin und Anti-Teilchen! Zeeya Merali: Theoretical physics. The origins of space and time Nature500 p516-519, 2013. Van Raamsdonk: Universum mit seinen drei Raumdimensionen ist eine Art Hologramm, projiziert von etwas, das als 2D-Chip nur in niederen Dimensionen existiert. **Deutsch: Die Physik der Welterkenntnis** = Fabric of reality 1996 Zeit ist nicht beobachterunabhängige Raumzeit, denn in diesem Sinne ist Zeit kein objektiver Begriff, sondern als Quantenbegriff zu verstehen; **Deutsch & Lockwood: Quantenphysik der Zeitreisen** SdW H11 1994 p50-57 **Großvater-Paradoxon** wird von physikalischen Gesetzen nicht verhindert. Dummett: Zeitreisender Kunstkritiker. Plagiieren von Meisterwerke durch Meister selbst frisst nur Kreativität, produziert aber keinen Widerspruch. **Chronologisches Prinzip:** Ausflüge in die Vergangenheit gehen nicht. Einfache Reisen in die Zukunft ohne Rückkehr unproblematisch. Aber **Gödel:** Es gibt im rotierende Universum Zeitschleifen! **Wheeler:** In Schwarzlochnähe erzeugen Wurmlöcher Zeitschleifen! JR **Gott:** Rasche String-Begegnungen machen Zeitschleifen! SdW H8 1992 p28. Großvater-Paradoxon verstößt gegen **Autonomie-Prinzip** = wir könnenlokal tun, was wir wollen, sofern physikalische

Gesetze beachtet werden = Kovarianz. Daher verliert die **klassische Physik - endet Juni 1925** - in Gegenwart von Zeitschleifen die lokale Autonomie. Grund: **Konsistenz-Prinzip** von JL Friedman. Außenwelt vermag unsere Handlungen selbst dann physikalisch einschränken, wenn unser Tun lokal den Gesetzen der Physik nicht widerspricht. **Davies: Mehrfachwelten**. Entdeckungen der Quantenphysik = Other worlds 1981; **Gott: Zeitreisen in Einsteins Universum** 1993; Zeh: Wozu braucht man Viele Welten in der QT? in Zeh: Physik oder Realität 2012 p27ff; **Wolf: Parallele Universen. Die Suche nach anderen Welten** 1988; Nolan: Interstellar DVD; **Hogan: Unternehmen Proteus. Zeitreisen und Multiversen** 1985 Eigentlich war die Welt ja in Ordnung. Nach dem 1. WK haben die Menschen eingesehen, dass so ein Gemetzel nicht mehr vorkommen soll und die USA haben sich nicht von Europa abgewandt und es tatsächlich geschafft, dass die Forderungen von Versailles nicht so schlimm waren. Deshalb gab es keine Weltwirtschaftskrise, die Systeme Kapitalismus und Sozialismus passten sich immer mehr an und alles war i.O. MacMillan: Die Friedensmacher 2001; Nur die Führungseliten waren damit nicht einverstanden. Es gab halt kein Extrem Reich und Arm mehr und das wollten die Oberen 10.000 nicht hinnehmen. Also wurde im Jahr 2025 ein Zeittor gebaut und unserem seligen A. Hitler und seinen Nazis die Errungenschaften des 21 Jhd. zur Verfügung gestellt. Natürlich wollte man dann in dieser Parallelwelt die Sache selbst in die Hand nehmen aber das wollten die Herrenmenschen dann doch nicht mit sich machen lassen. 1975, nach einem gegen die Nazis verlorenen Weltkrieg, ist Kennedy Präsident. Ein geheimes Zeitreiseprojekt wird angeschoben, um mit einem Team 1939 Churchill und die Alliierten zu warnen. Soweit noch nix Spektakuläres, wenn da nicht die bösen Nazis aus dem Jahre 2025 wären. Jetzt in 1975 - dem Zeitpunkt in dem der Roman spielt - gibt es nur noch die USA und Down under, alles andere ist Deutschland oder Japan. Da kommt JF Kennedy der US Prädident auf die Idee auch ein Zeittor zu bauen und die Sache umzukehren. Wer wird wohl gewinnen das 21. oder 20. Jhd. Es kommen viele historische Figuren vor Churchill, Einstein, Teller usw. und auf der anderen Seite die üblichen Verdächtigen der Nazisführungselite.; Abhay Ashtekar: All unsere Erfahrungen legen uns nahe, dass wir keine zwei extrem unterschiedlichen Konzepte (Raum und Zeit) von der Realität haben sollten – es muss eine einzige allumfassende Theorie geben. Theorie der **Schleifenquantengravitation:** Beschreibt das Gewebe der Raumzeit als ein sich entwickelndes Netzwerk aus Linien, die Informationen über die quantisierten Flächen und Volumina der Regionen in sich tragen, die sie durchdringen http://arxiv.org/abs/1201.4598 (2012). Die Enden der einzelnen Linien im Netz müssen sich schließlich zu Schleifen verbinden – daher auch der Name der Theorie. Mit den Strings oder Saiten der bekannteren Stringtheorie haben die Schleifen allerdings nichts zu tun. Matting: Die faszinierende Welt von Relativität, Standard-Modell und Stringtheorie: Auf der Suche nach der Weltformel 2015 populär als ebook pdf; P̃hilipsen: Quantenfeldtheorie und das Standard-Modell der Teilchenphysik. Eine Einführung 2018; Letztere spielt sich in der Raumzeit ab, während die Linien der Schleifenquantengravitation die Raumzeit tatsächlich bilden: Die Informationen, die sie in sich tragen, definiert die Form der Raumzeitstruktur in ihrer Nähe. Da es sich bei den Schleifen um Quantenobjekte handelt, definieren sie auch eine kleinste Flächeneinheit – ähnlich wie die gewöhnliche Quantenmechanik eine minimale Grundzustandsenergie für ein Elektron in einem Wasserstoffatom festlegt. Dieses Flächenquant misst rund eine Plancklänge auf jeder Seite. Borzeszkowski: Raum-Zeit und Elementarlänge Wifo 24 1974 p519ff Versucht man eine Linie mit weniger Fläche hinzuzufügen, wird sich diese einfach vom restlichen Netz ablösen. Da sie sich nirgendwo anheften kann, fällt sie gewissermaßen aus der Raumzeit heraus. Eine willkommene Konsequenz einer kleinsten Flächeneinheit: Mit der Schleifenquantengravitation lässt sich eine unendliche Krümmung nicht auf einen infinitesimalen Punkt zusammenquetschen. Dadurch führt sie nicht zu der Art von Singularitäten, die Einsteins Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie im Augenblick des Urknalls und in den Zentren von Schwarzen Löchern zusammenbrechen lassen. Quantenmechanik und Gravitation sind eng mit der Thermodynamik verflochten! a] Quanteneffekte in der Nähe eines Schwarzen Lochs würden nach Hawking dazu führen, dass es Strahlung aussendet – so als ob es heiß wäre. **Hawking-Strahlung:** optisches Analogsystem, Wasserfall PhysJ 18.2019.4 p20. In der klassischen Thermodynamik kann ein Objekt nur Wärme abstrahlen, wenn gleichzeitig seine Entropie abnimmt. Entropie eines Schwarzen Lochs erwies sich als proportional zur Oberfläche des Ereignishorizonts – jener Grenze, ab der nicht einmal Licht mehr entweichen kann. Es schien, als ob die Oberfläche irgendwie Informationen über das Innere enthielt – analog zu einem zweidimensionalen Hologramm, das ein dreidimensionales Bild kodiert. Amos Ori: PhysRev, Zeitreisen längs Zeitschleifen in verbogener Raumzeit-

geometrie ohne Materie negativer Dichte. Peter Aufmuth. **LQG** = Loop Quantum Gravity = From Classical to Quantum Gravity: Kristina Giesel, Erlangen. **ADM** formalism = Arnowitt, Deser, Misner = Hamiltonian formulation of general relativity. In the ADM formulation of general relativity one splits spacetime into spatial slices and time, the basic variables are taken to be the induced metric, $q_{ab}(x)$, on the spatial slice (the metric induced on the spatial slice by the spacetime metric and its conjugate momentum variable is related to the extrinsic curvature, $K^{ab}(x)$. This tells us how the spatial slice curves with respect to spacetime and is a measure of how the induced metric evolves in time). These are the metric canonical coordinates. In 1986 Abhay Ashtekar introduced a new set of canonical variables, **Ashtekar (new) variables** to represent an unusual way of rewriting the metric canonical variables on the three-dimensional spatial slices in terms of an SU(2) gauge field and its complementary variable. Benjamin Bahr, Hamburg, Spin networks and spin foam models. Schimming: Optimierung von Erkenntnis. Einfachheit, Einheitlichkeit, Anschaulichkeit. SB der Leibniz-Sozietät der Wiss 108 2010 67-77. Hosemann: Mechanik spinfreier Teilchen. Die Hamilton'sche und Schrödinger'sche Bedingung. Vertrautheit vs Anschaulichkeit. PhysBl13 1957 109ff; Schimming: Kants apriori, Kuhns Paradigma, Holtons Themata, ebenda 69 2004 133-143 6.1 Kovarianz = Forminvarianz der Gesetze = Bezugssystem unabhägig = physikalische Größen sind geometrische Objekte. 6.2 Eichinvarianz = Kovarianz bzgl innerer/nicht raum-zeitlicher Zustandsräume, Eichung = Wahl der Bezugssytems im nicht raum-zeitlichen Zustandsraum 6.3 Lokalität

Zeit ist in folgendem Sinne keine Illusion: Wenn ich also die Zeit, in Kurzform, als die Bewegung der Dinge (der Materieenergie, der Energiematerie) definiere, fällt sie unter die Erhaltungssätze. Sie ist dann so absolut, wie überhaupt etwas absolut sein kann in unserem Universum: die Erhaltung der Materieenergie bzw. der Energiematerie in ihren verschiedenen bewegten Erscheinungsformen. Sie ist dann so wenig eine Illusion wie die permanent bewegte Energiematerie selbst. Fluss von Informationen, ist auch der Fluss der Zeit - denn Information ist die Wahrnehmung der Veränderung eines Systems von einem unbestimmten Zustand in einen bestimmten Zustand. Wahrnehmung findet statt, wenn eine solche Systemänderung im Gehirn stattfindet. Craig Callender: Ist Zeit eine Illusion? SdW Okt 2010 p32ff; Sorkin & Rideout definieren kausale Ereignisräume: **Causet** Kausalmengen-Modell. Hierin werden die Bausteine der Raumzeit schlicht durch mathematische Punkte repräsentiert, die miteinander verbunden sind. Jede dieser Verbindungen weist von der Vergangenheit in die Zukunft, wodurch Kausalität ins Spiel kommt: Ein früherer Punkt kann sich auf einen späteren auswirken, aber nicht umgekehrt. Das resultierende Netzwerk verhält sich wie ein wachsender Baum und breitet sich allmählich aus. Man kann sich nun vorstellen, dass der Raum in einer ähnlichen Weise aus den einzelnen Punkten hervorgeht, wie die Temperatur aus Atomen. **Friedmann: Die Welt als Raum und Zeit** 1923, Singer, Ostwalds Klassiker 287 Europa-Lehrmittel 2014[4]; **Absoluter Raum** bedeutet nach Newton Widerstand aller Körper gegen Beschleunigung, die in allen Bezugssystemen gleich groß ist, anders als die Geschwindigkeit. Scheinkräfte oder Trägheitskräfte machen auf den absoluten Raum aufmerksam. Auch das Foucaultsche Pendel verweist auf die Existenz des leeren Raumes. Geschwindigkeitsänderung hat in in allen Bezugssystemen den gleichen Wert. Merkwürdig: Schwerkraft = Trägheitskraft. Bezugssysteme, die selbst gegen Inerzialsysteme beschleunigt sind, sind also mit diesen und untereinander **nicht** gleichwertig. Newtons Eimerversuch. Nach Mach sollte die Drehung der Welt den gleichen Effekt bringen, weil Trägheit auf der Wirkung alles Massen der Welt beruhe. **Born: Die Relativitätstheorie Einsteins** 1920, 2000 p65 ff; ART: Gesetze der Physik sollten nur die relativen Lagen und Bewegungen der Körper enthalten! Die Bevorzugung der Inerzialsysteme (Galilei oder SRT) soll aufgehoben werden, weil sonst in die Naturgesetze auch noch die o.g. absoluten Beschleunigungen gegenüber der Inerzialsystemen eingingen. Die Gesetze der Physik sollen gleicher Weise in beliebig bewegten Bezugssystem gelten! Daher muss das Galileische Trägheitsgesetz modifiziert werden. Pfister: **Lange nach Newton** PhysJ15 H3 2016 p47-51; Trägheit eines Körpers soll nicht mehr Wirkung des leeren Raumes, sondern der anderen Körper angesehen werden. Als WW kommt hier nur Gravitation der übrigen Massen in Frage. Gleiche Fallzeit: $m_T = m_G$. **Physik lehnt Nichtunterscheidbarkeit zweier Begriffe ab.** Gravitation und Trägheit sind z.B. in Aufzügen nicht unterscheidbar. **Ab jetzt: Jede Bewegung unter Einfluss der Gravitation ist Trägheitsbewegung.** Durch geeignete Wahl des Bezugssystems kann man für kurze Zeiten und kleine Raumbereiche stets beschleunigte Bezugsysteme finden, wo für kleine Raum-Zeit-Bereiche kein Schwerefeld existiert. Geht nicht

ohne weiteres bei Zentralkraftfeldern. **Gaußsche Koordinaten** = Markierungen ohne Maßbestimmung, mittels Metrik = **Maßbestimmung** Born p278f, Born p267 ff; **Einstein: Über die spezielle und die allgemeine RT** 1916 p69ff; Einstein: Grundzüge der RT 1922, 1954 p63f; **Struik: Lectures on Classical Differential Geometry** 1969[2] p111f; Carrier: Raum-Zeit 2009; Endliche Lichtgeschwindigkeit ist für die Newton'sche Mechanik ein Problem. Die Raum-Zeit-Koordinaten-Transformation zwischen bewegten Bezugsystemen hängt vom Geschwindigkeitsunterschied nichtlinear ab. Was vom Newton'schen Standpunkt bizarr wirkt, ist aus Minkowski-Sicht klar. Es gibt keinen Weg festzustellen, ob zwei verschiene Ereignisse gleichzeitig oder am gleichen Ort passiert sind. Es gibt kein absolute Geschwindigkeit materieller, ponderabler Teilchen. de Lavoisier 1743-1794 unterscheidet **ponderable Materie** = wägbare = chemische Elemente und **imponderable Materie** = nicht wägbare Materie = Wärme, Licht, Elektrizität und Magnetismus. Man kann bei unbeschleunigten Teilchen nicht feststellen, ob sie sich bewegen, wenn man nicht der Rückgriff auf willkürlich ins Auge gefasste Umgebung machen will. Licht ist quellenunabhängig immer gleich schnell. Cohn: Physikalisches über Raum und Zeit 1913[2]. **Physik = in Naturvorgängen quantitative Beziehungen auffinden und diese auf den einfachsten Ausdruck bringen, der Aussagen jenseits der Messungen erlaubt.** CFv **Weizsäcker: Die Einheit der Natur** 1971 p107ff; Mößbauer: Führe Phänomene auf allgemeine Gesetze, auf Naturgesetze zurück. Brill: Das Relativitätsprinzip 1914[2]. **Hund: Geschichte der physikalischen Begriffe** p263 ff; SRT = **Bewegung verteilt die raumzeitlichen Abstandskomponenten um**. **Die Zeit wird verräumlicht.** Zeitangabe in Metern ist aber unpraktisch. Greene: Der Stoff, aus dem der Kosmos ist. Raum, Zeit und die Beschaffenheit der Wirklichkeit 2008 Deutsch: Die Physik der Welterkenntnis = Fabric of reality 1996; oder 4teilige ARTE-Sendung 2011; Pohlig: SRT PdN 52 2003 H1 p38; Brandt: The Harvest of a Century. Discoveries in Modern Physics in 100 Episodes 2009; Siehe Seite 487: $E = \pm\sqrt{c^2\gamma^2\vec{p}^2 + m^2c^4} = \pm\sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4}$. Energie kann also nur über mc^2 oder unter $-mc^2$ liegen. Alle negativen Zustände durch Antiteilchen besetzt. Paarerzeugung geht, wenn Feldenergie ganz in Ruhmasse umgesetzt wird. **Kompanejez: Was ist die Quantenmechanik?** 1968 p139ff; Liebscher: The geometry of time 2005 Kap10: Unser Vertrauen in die SRT ist bestens gestützt durch Diracs Vorhersage der **Antiteilchen** und die Erklärung des **Spins**, beides strukturelle Aussagen, die nicht von kleinen Effekten abhängen. Würde man an der Lichtausbreitung kleine Diskrepanzen finden, hätte man die Maxwell-Gleichungen zu modifizieren, aber nicht die Relativität aufzugeben. Liebscher: Theoret Physik p194ff; Michelsons Frage 1881 in Potsdam: Ist die Isotropie der Lichtausbreitung von bewegten Objekten gestört oder nicht? Er fand, dass es kein universelles Isotropiesystem gibt, auf das sich eine Relativgeschwindigkeit beziehen könnte. Das Licht wird von einem reellen Medium getragen, das wie die Luft im Keller eingeschlossen und in Ruhe ist. Was ist so unvernünftig an Michelsons Vorstellung? Sie widerspricht einem kleinen Effekt, der Aberration des Sternenlichts. Sie wurde 1729 von Bradley gefunden und als Beweis der Copernicanischen heliozentrischen Hypothese in Verbindung mit Newtons Emanationstheorie des Lichts gefeiert. **Vom Regenschirm zur Relativitätstheorie** PdNPiS Bd60 2011 H1 p45-48; Liebscher: http://www.aip.de/People/deliebscher/Movies/Regenschirm.html **Die Aberration ist ein Effekt der relativen Bewegung und symmetrisch.** Sternenlicht zeigt genau diesen Effekt. Die Erde bewegt sich im Laufe des Jahres in verschiedene Richtungen um die Sonne, die fest innerhalb einer als starr angenommenen Sternumgebung sitzt. Wenn wir in Bewegungsrichtung schauen, scheinen die Sterne immer ins jeweilige Gesichtsfeld gedriftet zu sein. Schauen wir senkrecht zur Bewegungungsrichtung, so gilt für die Lichtwege im Fernrohr wegen der SRT $l_\parallel = v\Delta t'_\parallel = v\Delta t\gamma$ und $l_\perp = c\Delta t'_\perp = c\Delta t$ $\tan\theta = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx \beta = \dfrac{v\Delta t}{c\Delta t} = (\tan\theta)_{\text{klass}}$. Nach der klassischen Herleitung ist der Vorgang im Fernrohr bedingt. Durch Wasser im Fernrohr sollte ein größerer Aberrationswinkel θ auftreten, was aber nicht beobachtet wird. **Relativistisch** ist allein die Bewegung zwischen zwei Systemen die Ursache. **Born: Die Relativitätstheorie Einsteins** 1920, 2000 Aberration als Beleg für Emanationstheorie p79 und p121 Schwierigkeit für die Wellentheorie des Lichts; **Melcher: Relativitätstheorie** 1974[4] p102ff. Wegen $\theta \approx 20.5''$ findet man für die **Erdbahngeschwindigkeit** $v \approx 30$km/s. Der Effekt ist sehr klein (maximal 20 arcsec), aber er wurde 1729 als Beweis für das Copernicanische System wie auch für Newtons Emanationshypothese des Lichts gefeiert. Wenn der **Regen in Schauern** kommt, zeigen die Schauerfronten keine Aberration. Das ist merkwürdig, denn es erlaubt dem roten Beobachter, seine Relativgeschwindigkeit zum schwarzen festzustellen,

ohne nach ihm zu sehen, einfach durch Messung der Differenz zwischen Tropfenrichtung und Frontbewegung. Das ist ein Widerspruch zu Galileos Relativitätsprinzip: eine Relativgeschwindigkeit kann nicht bestimmt werden ohne vom Bezugsobjekt Kenntnis zu nehmen (In seinen Worten: Man kann in einer geschlossenen Kabine unter Deck nicht feststellen, ob der Segler abgelegt hat oder nicht.). Das dritte Panel zeigt es drastisch: Wir beobachten Licht, Licht ist eine Welle, und die Wellenfronten zeigen keine Aberration. Fresnel nannte das 1824 das schwierigste Problem der Wellentheorie des Lichts. Die Ausrede ist evident: Wenn eine Welle auf ihrem Kamm Strukturen trägt, können diese sich auch längs des Kamms bewegen (das sehen wir am Strand, wenn der Wind quer zu der Richtung weht, in der die Wellen auf den Strand rollen). Fresnel identifiziert das vom Teleskopobjektiv ausgeschnittene Stück der Wellenfront als solche Struktur und findet an ihr die Aberration des Sternenlichts. Das vierte Panel zeigt den Preis, den Fresnel zahlen musste: Die Ausbreitung des Lichts ist nun nicht mehr isotrop, und die Anisotropie ist auch innerhalb des Teleskops beobachtbar. (Um das zu sehen, monitieren wir eine Lichtquelle im Innern des Teleskops und beobachten die Ausbreitung der angeregten Kugelwellen.) Das konnte zu Fresnels Zeiten nicht geprüft werden, aber es musste als Brechung des Relativitätsprinzip verstanden werden. So wurde die Unterstellung des Äthers, einer Trägersubstanz der Lichtwellen erforderlich. Die Messung der Anisotropie ist dann eine Messung der Geschwindigkeit gegen den präsenten Äther und das Relativitätsprinzip scheint gerettet. Der Äther darf nun aber durch das Teleskop und selbst durch die Erde nicht gestört werden. Michelson war der erste, der die Anistropie der Lichtausbreitung, die Bewegung gegen den Äther testen konnte. 1881 stellte er im Keller des Astrpophysikalischen Observatoriums Potsdam fest, dass die Lichtausbreitung doch isotrop ist. Er schloss, dass der Äther doch wie die Luft von den Wänden eingeschlossen wird, und für die Aberrartion eine andere Erklärung gefunden werden muss. Das fünfte Panel zeigt den Schluss von Lorentz und Drude: Man muss akzeptieren, dass die Wellenfronten selbst Aberration zeigen müssen. Was bedeutet das? Für das schwarze Teleskop erreichenn die Wellenfronten an allen Stellen gleichzeitig den Boden. Für den dagegen bewegten Beobachter sind die Wellenfronten geneigt, das heißt, vor dem roten Teleskop finden die für das schwarze gleichzeitigen Ereignisse um so früher statt, je weiter sie entfernt sind, und hinter dem Teleskop finden sie um so später statt, je weiter sie entfernt sind. Gleichzeitigkeit wird von zueinander bewegten Beobachtern verschieden bewertet. Diese merkwürdige Zeit wurde von Lorentz und Drude virtuelle Zeit genannt. Das sechste Panel zeigt, dass die relative Gleichzeitigkeit auch für eine universell isotrope Lichtausbreitung sorgen kann. Hält die Camera auf den schwarzen Beobachter, sieht sie dort isotrope Ausbreitung, hält sie dagegen auf den roten, ist die Lichtausbreitung dort isotrop. Einstein begann nicht mit dem Problem der Aberration oder dem Michelson-Versuch, sondern mit allgemeineren Vorstellungen über die Lichtausbreitung. Sein Prinzip war das der universellen **Isotropie der Lichtausbreitung**, das **missverständlich Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** genannt wird. Erinnern wir uns an die Gaußsche Definition der elektrostatischen und magnetostatischen Einheiten von Ladung, Strom etc. Ihr Verhältnis ist der Betrag einer Geschwindigkeit, die von Relativgeschwindigkeiten nicht abhängen darf, wenn man an Galileis Relativitätsprinzip festhalten will. Deshalb kann sich die entsprechende Geschwindigkeit (von der man nachweisen konnte, dass sie etwa gleich der Lichtgeschwindigkeit ist) nicht einfach additiv mit anderen Geschwindigkeiten zusammensetzen: $c + v = c$. Einstein konnte zeigen, wie die Zusammensetzung aussehen muss. Seine Regel erklärt das Ergebnis von Michelsons Versuch ganz elementar, und der Versuch wurde nun zur Grundstütze der Theorie. Die Relativität war ohne Ätherhypothese rehabilitiert und der Äther deshalb überflüssig. Jedoch kann nur eine Wellentheorie die Interferenzeffekte erklären. Im Wellenbild kann auch Brechung und Spiegelung einfach konstruiert werden. Bedauerlicherweise hören wir nichts über die Tatsache, dass Wellenfronten in einer Galileischen Theorie (wo alle Geschwindigkeit additiv zusammengesetzt werden) keine Aberration zeigen. Fresnel nannte dieses Problem das schwierigste seiner Wellentheorie. Er fand eine Entschuldigung in den Teleskopen selbst, die mit der Aperturblende eine Wellengruppe ausschneiden, die sich nun wieder wie ein Teilchen bewegt. Diese Erklärung der Aberration des Sternenlichts im Wellenbild erfordert jedoch die Hypothese, dass kein Hindernis die Isotropie der Lichtausbreitung stört. Es schien plötzlich möglich, in einem geschlossenen Raum eine Geschwindigkeit messen zu können, ohne nach draußen sehen zu müssen - im Widerspruch zu Galileos Relativität. Um diese zu retten, musste das Licht einen materielle Träger haben, der sich allerdings widerstandslos durch alle Hindernisse fluten sollte. Fresnel rang sich zu dieser Auffassung durch, weil sonst die Aberration dem Wellenbild der Lichtausbreitung widersprochen hätte. Nur langsam gewöhnte man sich

an diese eigentlich utopische Eigenschaft.

Äther = Vereinheitlichung von Mechanik und Elektrodynamik siehe Fölsing: Einstein. Sommerfeld Bd3: Quintessenz = Lebenshauch = das Wesentliche. **Michelson** zeigte nun mit seinem Experiment, dass diese Hypothese nicht haltbar ist und das Trägermedium (dessen Existenz nicht in Frage gestellt wurde) wie es der Alltagsverstand erwartet von der Erde mitgenommen wird und Fresnels Erklärung der Aberration zusammenbricht. **Lorentz und Drude konnten zeigen, dass man eine bewegungsabhängige Form der Gleichzeitigkeit annehmen muss, um eine Aberration von Wellenfronten konstruieren zu können.** Drude: Physik des Äthers 1890; Siehe Liebscher http://www. aip. de/˜lie/ Lectures/Michelsonvortrag. html. Nickel: Raumstoff, PhysBl28 1972 p437ff, PhysBl29 1973 p472ff;

Barrow: Der Ursprung des Universums. Wie Raum, Zeit und Materie entstanden 1994; Randall: Die Vermessung des Universums. Wie die Physik von morgen den letzten Geheimnissen auf der Spur ist 2006; Randall: Verborgene Universen. Eine Reise in den extradimensionalen Raum 2006; Randall: Higgs discovery. The power of empty space 2012; Barrow & Tipler: The anthropic cosmological principle 1988; Max Scheler: Die Stellung des Menschen im Kosmos 1928, 2007; Barrow & Silk: Die linke Hand der Schöpfung. Der Ursprung des Universums 1983, 1999; Barrow: Die Natur der Natur. Wissen an den Grenzen von Raum und Zeit 1988, 1995; Unzicker: Vom Urknall zum Durchknall. Die absurde Jagd nach der Weltformel 2010; Unzicker: Die mathematische Realität. Warum Raum und Zeit eine Illusion sind 2019; Hossenfelder: Das hässliche Universum. Warum unsere Suche nach Schönheit die Physik in die Sackgasse führt 2018; Unzicker: Auf dem Holzweg durchs Universum. Warum sich die Physik verlaufen hat 2012 Botschaften: Es gibt eine Konkurrenz zwischen den einzelnen Forschergruppen. Der LHC ist ziemlich teuer. Gutachter von Fachzeitschriften haben manchmal keine Ahnung, die Kriterien über die Annahme von Fachartikeln sind nicht transparent. Es gibt manchmal fehlerhafte Messungen und Analysen. Jander & Jahr: Maßanalyse. Titrationen 1989; Es kommt vor, dass Ergebnisse manchmal falsch interpretiert werden. Es gibt auch kontroverse Diskussionen unter Fachleuten. Die Theorien sind unvollständig: die ART bei der intrinsischen Singularität, die QED mit dem Renormierungstrick. Die Stringtheorie ist (bisher) nicht erfolgreich. Leider gibt es auch ein unseriöses Verhalten mancher Wissenschaftler. Eine hohe Qualität bei Messungen ist nicht immer gegeben. Daten und Metadaten werden nicht aufbewahrt. Technische Fehler können passieren. Es gibt mehrere Autoren, die sagen, neue Ideen brauche die Physik. **Smolin: The trouble with physics** = Die Zukunft der Physik. Probleme der String-Theorie und wie es weitergeht 2006; Bothezat: Back to Newton. A challange to Einstein's theory of relativity 1936; Gotthard Barth: Einstein widerlegt 1968; Sallhofer: Hier irrte Einstein. Die Physik am Ende 1997 = interessanter Schrott; Reinhard Rohner: Offener Brief an die ... Uni Stuttgart 2014 www.kritik-relativitaetstheorie.de. Berliner Tagesblatt 27.8.1920 Titelseite: Einstein hatte am 24.8.1920 in alter Philharmonie den NP Lenard beleidigt "... er hat in der theoretischen Physik noch nichts geleistet" und Lenards Einwände sind von solcher Oberflächlichkeit". Einstein unterstellte Lenard Antisemitismus und trug so zur Polarisierung bei. Arne Schirrmacher: Neue Physik im Kurbad Bad Nauheim PhysJ19 2020 H10 p36-41; Lenard: Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation 1920; **Gehrcke: Die Relativitätstheorie, eine wissenschaftliche Massensuggestion** 1920; **Gravitationspotential mit einer endlichen Wirkungsgeschwindigkeit** C macht Perihelverschiebung $\Psi = 24\pi^3 \frac{a^2}{\tau^2 C^2 (1-\epsilon^2)}$. Denn $V = \frac{\mu}{r\left(1 - \frac{1}{C}\frac{dr}{dt}\right)^2}$ mit $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}$ liefert per Funktionalableitung die generalisierte Kraft $K = \frac{dV}{dr} - \frac{d}{dt}\frac{dV}{d\dot{r}}$ gibt mit Gravitationsgeschwindigkeit C, großer Halbachse a, Umlaufzeit τ für die Perihelverschiebung Ψ die Beziehung $C^2 = \frac{6\pi\mu}{a(1-\epsilon^2)\Psi}$. Bedeutet beim Merkur C= 305 000 km/s. Analogie zum Lienart-Wiechert-Potential macht Perihelverschiebung. Lies **Paul Gerber: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation** 1902, Wiederabdruck In: AnnPhys52 1917 445ff; **Hentschel: Interpretationen und Fehlinterpretationen der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie durch Zeitgenossen Albert Einsteins** 1990; Ripota: Einsteins einmalige Einsichten. Die Relativitätstheorien und wie es dazu kam 2018[2]; Ripota: Reise ins Ungewisse. Gravitationswellen und Schwarze Löcher 2018; Erwin Freundlich: Relativitätstheorie 1920; T̃erletskii: Paradoxes in the theory of relativity 1968; Kacser: Introduction to special theory of relativity 1967; **Klaus Gebler** *1944 http://www.klaus-gebler.de ansehen! Sexl: Außenseiter der Naturwis-

senschaften PhysBl 30 1974 p19-21; Schauberger: Implosion statt Explosion. Die naturrichtige Lösung des Energieproblems durch Diamagnetismus und Ätherkraft 1955; Whittaker: A history of the theories of ether and electricity. Bd1 Classical theories 1951 Der Äther bedeutet Newtons Tod! Bd2 Modern theoeries 1953; **Günther: Grenzgeschwindigkeiten und ihre Paradoxa. Gitter, Äther, Relativität** 1996 ebook pdf **Günther: Bewegung in Raum und Zeit** 2012 p38ff; **Ignoranz der Relativität der Gleichzeitigkeit führt in den Irrgarten der relativistischen Paradoxa!**; Günther: Das Zwillingsparadoxon 2020; Wer sich die Relativitätstheorie (SRT) unbefangen aneignen möchte (oder muss), stutzt meist (wenn auch nur kurzzeitig) über den Widerspruch zweier wahrer Aussagen: 1. In zwei gleichförmig gegeneinander bewegten Systemen herrschen genau dieselben Naturgesetze, d.h. alle Uhren gehen gleich. Richtig! 2. Im relativ zum Ruhsystem bewegten System gehen die Uhren langsamer. Falsch! Man liest es so sehr oft, nach dem Einstein, Landau und Gamow ihre korrekten Herleitungen missverständlich/falsch adressierten und kommentierten, in vielen Physiklehrbüchern, Schulbüchern und allen populären Darstellungen. **Gamow: Die seltsamen Abenteuer des Mr. Tompkins in Kosmos und Mikrokosmos** 1938, **aber anders** die von Sexl kommentierte Auflage von 1980. Auch falsch ist: Ein bewegter Maßstab ist kürzer als ein ruhender. **Goethe: Etwas Theoretisches populär zu machen, muss man es absurd darstellen. Man muss es erst selbst ins Praktische einführen, dann gilt's für alle Welt.** Physiker nutzen diesen missverständlichen Telegrammstil, der wörtlich genommen falsch ist, auch um Aufmerksamkeit zu erregen. Aber die Lorentz-Kontraktion bezieht sich auf den räumlichen Abstand von Ereignissen! Gemeint ist: Miss **gleichzeitig** den **räum**lichen Abstand von Ereignissen im Ruhsysstem an den Enden des Körpers im bewegten System. Fleischmann: Spezielle Relativitätstheorie und Längenmessung 1998 37 Seiten; Carroll: Was ist die Welt und wenn ja, wie viele. Wie die Quantenmechanik unser Weltbild verändert 2021; **Bell: Sechs mögliche Welten der Quantenmechanik** 2012 p75-89 Wie lehrt man spezielle Relativität? Rafelski: Relativity matters 2017 pXXII Einstein 1920: ART bedeutet, dass der Raum mit physikalischen Qualitäten ausgestattet ist = Äther. Sonst keine Lichtfortpflanzung und keine Existenz von Uhren und Maßstäben. Voraussetzung ist also stets ein **nicht-materieller relativistisch-invarianter Äther = Quantenfeldtheorie-Vakuum**, also nicht-ponderabel! Auf den Äther darf der Bewegungsbegriff nicht angewandt werden!; Siehe die **neueste Ausgabe Greiner Bd3A 1992**[3] **Kapitel zur SRT von Rafelski!** Landau & Lifschitz: Bd2 p1ff p13 hier steht es falsch. Auch bei **Griffiths: Einführung in die Physik des 20. Jahrhunderts. Relativitätstheorie, Quantenmechanik, Elementarteilchenphysik und Kosmologie** 2015; Kuhlmann: Einstein. Die fantastische Reise einer Maus durch Raum und Zeit 2020; Unzicker: Die mathematische Realität. Warum Raum und Zeit eine Illusion sind 2019; Thirring: Einstein entformelt - Wie ihm ein Teenager auf die Schliche kam 2007 = peinliches Alterswerk, weil **a]** sein Vater, Hans Thirring, bereits 1948 **Thirring: Die Idee der Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt** und Landau/Rumer: Was ist die Relativitätstheorie? und **Born: Die Relativitätstheorie Einsteins** 1920, 2000, sehr gute populäre Schriften abgeliefert haben, und **b]** bei Einstein 1916 alles viel klarer für Laien dargestellt hat. Siehe Gutfreund & Renn: Albert Einstein. Relativity. The Special and the General Theory - 100th Anniversary Edition 2015 p XIX **Einsteins Bitte von 1947: Nach den Massenmorden an Juden bitte keine deutschsprachigen Einstein-Texte!**; Es war, wie oft, anders: Erst werden die Ideen und Modelle qualitativ/verbal formuliert. Dann folgt eine geometrische und schließlich analytische, um mit dem geistigen Auge/Mathematik detaillierte, logisch widerspruchsfreie Schlussfolgerungen zu ziehen, die experimentell überprüft werden. Die mathematische Formulierung verstellt/verschleiert allerdings den Zugang zu den Ursprungsideen. Bei einem Blick in ein Theoriebuch entsteht der irreführede Eindruck, als wäre Physik nicht Modellbildung/Assimilate von Erfahrungen im Spiel mit Experimenten, sondern das Entschlüsseln mathematischer Gleichungen. Einstein war über die Verformelung seiner physikalischen Ideen durch Minkowski/Klein (SRT als hyperbolische Geometrie) und Grossmann (ART ortsabhängige Metrik der Differentialgeometrie wird zum Gegenstand der Physik) sehr irritiert. Geometrie wird zum physikalischen Bestandteil. Einstein: Über die spez und die allge RT 1956[21] p33 und Einstein: Grundzüge der RT 1922, 1954; unklar formuliert. Auch Hänsel & Neumann: Bd4, obgleich die vorausgehende Argumentation korrekt

läuft. Hänsel & Neumann: Bd1, Mechanik und Wärmelehre 2000; Hänsel & Neumann: Bd2, Elektrizität, Optik, Raum und Zeit 1993; Hänsel & Neumann: Bd3, Atome, Atomkerne, Elementarteilchen 1995; Hänsel & Neumann: Bd4, Moleküle und Festkörper 1996; **Kernidee ist die Relativität der Gleichzeitigkeit!** Born p198; Hier steht's richtig: Brill: Das Relativitätsprinzip 1914[2] p12. Pauli: Relativitätstheorie 1921 p11; Schwinger: Einsteins Erbe. Die Einheit von Raum und Zeit = Einstein's legacy 1986; **Russell & Felix Pirani: ABC der Relativitätstheorie** 1925; Westphal: Die Relativitätstheorie 1955; Couderc: Die Relativitätstheorie 1974; Joos: LB theoret Physik 1932, 1989[15] p225ff; Tolman: Relativity, thermodynamics and cosmology 1934 p22; Weizel: LB der theoret Physik Bd1 1949 p636ff; Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit 1950, 1963 p83; Becker: Theorie der Elektrizität Bd1. Einführung in die Maxwellsche Theorie. Elektronentheorie. Relativitätstheorie 1957 p227; Hund: Theoretische Physik Bd2. Theorie der Elektrizität und des Lichts. Relativitätstheorie 1957; Macke: Wellen 1962 p338f; Holton: SRT resource letter, AJP30 1962 462-469; Gamba: AJP35 1967 83; Schmutzer: Relativistische Physik 1968 p616f; Physik LB Klasse 12, Volk und Wissen 1970 p94; Skobelzyn: Das Zwillingsparadoxon in der Relativitätstheorie 1972 p52f; Liebscher: Theoretische Physik. Eine Übersicht 1973 p197; Melcher: Relativitätstheorie 1974[4] p38ff; Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd2 1974 p313ff.; Resnick: Einführung in die spezielle Relativitätstheorie 1976 p184f; Krämer: Relativitätstheorie Materialien für die Sekundarstufe II 1977 p50f; Liebscher: Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal 1977, 1991 p103f; Goldstein: Mechanik 1978 p213; **Lenk, Macheleidt & Möbius: Statistische Physik, Relativitätstheorie, Elementarteilchen**. Physik für Lehrer Bd12 1979 p115f; Sexl & Schmidt: Raum-Zeit-Relativität 1978 p77ff; Herlt & Salie: Spezielle Relativitätstheorie 1978 p46ff; **Schmutzer: Relativitätstheorie aktuell** 1979 p72f; Schäflein: Einführung in die spezielle Relativitätstheorie. Unterrichtsmaterial 1981 p48f; Holton: Thematische Analyse der Wissenschaft 1981; French: Die spezielle Relativitätstheorie. MIT Einführungskurs Physik 1982; Greiner: LB theoret Physik. Bd3A Spezielle Relativitätstheorie 1984 p48ff; Falk & Ruppel: Mechanik, Relativität, Gravitation 1989 p339f; Ruder: Die Spezielle Relativitätstheorie 1993 p83ff; Jelitto: Elektrodynamik, Theoretische Physik Bd3 1994 p241 Weil der Stab verkürzt erschein, so sagt man: Bewegte Stäbe sind kürzer.; **Machold: Zur qualitativen Behandlung der speziellen Relativitätstheorie, ein Konzept für den Physikunterricht der Realschule** 1995 p82f; Goenner: Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie 1996 p37f; **Bergmann & Schäfer: Mechanik, Relativität, Wärme** 1998 **Konsistenz der Längen- und Zeitmessung** p910ff; Boysen et al: Oberstufe Physik Gesamtband Cornelsen 1999 p396f; Nolting: Grundkurs Theoretische Physik Bd4. Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik 2002 p22f; Fließbach: Mechanik 2003 p287; Günther: Starthilfe Relativitätstheorie 2004, 2009[3], **2010**[4]; Günther: Spezielle Relativitätstheorie. Ein neuer Einstieg in Einsteins Welt 2007; G̃ünther: Die Spezielle Relativitätstheorie. Einsteins Welt in einer neuen Axiomatik 2012; **Günther: Bewegung in Raum und Zeit 2012 p133ff**; Günther: Zur nichtlinearen Kontinuumstheorie bewegter Versetzungen 1967; Günther: Zur Dynamik schneller Versetzungen 1973; G̃ünther: Elementary approach to special relativity 2020 Kristallstrukturen und SRT haben Entsprechungen, wenn man zu den elastischen Verformungen plastische Verformungen erlaubt. Solitonengl, also nichtlineare PDE: Sinus-Gordon-Gl für Versetzungen. Liebscher: PhysJ21 2022 H2p53, K-H Anthony, Paderborn; G̃ünther: Elementary Theory of Relativity - Lattice - Ether - Symmetry 2000; **G̃ünther: Grenzgeschwindigkeiten und ihre Paradoxa. Gitter, Äther, Relativität** 1996 ebook pdf; Unzicker: Die mathematische Realität. Warum Raum und Zeit eine Illusion sind 2019 p141 topologische Defekte und Paarerzeugung Teleparallel space-time with defects yields geometrization of electrodynamics with quantized charges https://arxiv.org/abs/gr-qc/9612061; G̃ünther: Das Zwillingsparadoxon 2020; G̃ünther: Tachyonen. Partikel mit Überlichtgeschwindigkeit in Einsteins Relativitätstheorie 2021; G̃ünther & Müller: EAGLE-GUIDE Relativitätstheorie von A bis Z. Einsteins Spezielle Relativitätstheorie 2013; Günther & Müller: EAGLE-STARTHILFE Allgemeine Relativitätstheorie 2015; G̃ünther & Müller: Doppler-Effekt und Rotverschiebung. Klassische Theorie und Einstein'sche Effekte 2020; Schröder: Spezielle Relativitätstheorie 2007; **Gleichzeitigkeit:** Craig & Smith: Einstein, Relativity and Absolute Simultaneity 2011; **Denschlag: Relativitätstheorie kompakt** 2012 p34;

Rebhan: Relativitätstheorie und Kosmologie 2012 p17; **Popularisierungsdilemma:** Popularisierung von schwer vorstellbaren Dingen braucht markige Adressen - liefert Konfliktpotenzial. Dadurch Debatten, die am Kern der Probleme vorbeigehen. **Metaphysische Begriffe**, die zur Popularisierung, als Metaphern zur Pointierung, zur Verführung Unwissender/Unerfahrener Verwendung finden, als Gottesersatz herhalten sollen, sind aus Sicht des strukturellen Realismus nur Adressen zur Vereinfachung der Kommunikation. Bayes'sche Ansätze bewerten mathematische Beziehungen der Modelle und Daten, nicht aber unmittelbar Adressen wie 'Atom', 'Urknall', etc. Die Debatte zur Deutung und der damit verbundenen Gültigkeit bei der Wirklichkeitsbeschreibung dauert bereit über 100 Jahre an. Wurde zeitweise durch den Antisemitismus instrumentalisiert: Stark, Lenard. Dazu Krbek: Grundzüge der Mechanik. Lehren von Newton, Einstein und Schrödinger 1954 p171; Auch PuMa Tse: Phase Theory of Everything. Cosmology that Works 2014 Überwindet die Hollywood-Version zur Geschichte des Universums! **Ursachen für den Widerstand gegen die Einstein'sche Relativitätstheorie:** a] Die genialen Grundideen stellen eine massive Kränkung des gesunden Menschenverstands dar. Wie konnten die simplen Ideen so lange übersehen werden? b] Unerhörterweise erklärt Einstein die Geometrie zum physikalischen Gegenstand. Metrik, Krümmung, Zusammenhang sind mit der Masse und Energie der Umgebung verküpft. Die naive Vorstellung vom Abstand erweist sich als nur erste Näherung. c] Die mathematische Grundlage der Theorie ist Physikern i.a. nicht geläufig. Auch Einstein war von Minkowskis Erklärung seines Befundes erschüttert. Marcel Grossmann erst offenbarte Einstein die mathematischen Konsequenzen seines Anspruchs an die Wirklichkeit. **Weyls Buch Raum, Zeit, Materie** machte 1918 die Situation deutlich. d] Die raum-zeitlichen experimentellen Konsequenzen sind alltagsphysikalisch nicht offensichtlich. Zur populären Illustration und Provokation/Effekthascherei wurden und werden die Längenkontraktion und Zeitdilatation in den Vordergrund der Theorie gestellt und auch noch oft falsch dargestellt. Die wesentlichen, quantenphysikalischen Folgen der SRT wie Spin und Antimaterie bleiben hingegen meist unerwähnt. x] Der junge Mann zitiert die Vorläufer nicht. Die Gleichungen waren bereits lange vor ihm in Gebrauch. Voigt, Lorentz und Poincare fühlten sich nicht übergangen, weil sie das Grundproblem, für das sie Lösungen anboten, offensichtlich gar nicht erkannt hatten. **Liebscher:** Es gibt nicht einmal sechs Versuche, die in den Schulbüchern zum Fach Physik namentlich genannt und im Einzelnen besprochen werden. Einer davon ist der Versuch von Michelson, der auch in keiner Einführung in die Relativitätstheorie fehlt. Der Ort, an dem er das erste Mal erfolgreich durchgeführt wurde, ist der Keller unter der Ostkuppel des ehemaligen Astrophysikalischen Observatoriums Potsdam, das jetzt (2009) das Potsdamer Institut für Klimafolgenforschung beherbergt.

Albert Abraham Michelson hatte eine Interferometer-Technik entwickelt, die es zum erstenmal gestatten sollte, den Fahrtwind der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne zu bestimmen. Mit diesem Fahrtwind ist nicht Luft gemeint, denn der Raum zwischen den Planeten ist im Vergleich zur Erdatmosphäre leer, sondern ein Trägermedium der Lichtausbreitung, der sogenannte Lichtäther. Wie ein Schwimmer im Fluss würden in diesem Fahrtwind Lichtsignale abgetrieben, und daran sollte man die Bewegung der Erde um die Sonne sehen.

Michelson konnte kein Abtreiben des Lichtsignale feststellen. Michelson selbst hat später dieses Ergebnis als negativ bezeichnet, und Einstein hat dieses Experiment als Grundlage der Relativitätstheorie bezeichnet. Beides ist aber genauer betrachtet ein Missverständnis. Warum Lichtäther? Der Begründer der axiomatischen Mechanik, Isaac Newton, hielt das Licht für eine Art Teilchenstrom, der von den Lichtquellen mit einer hohen Geschwindigkeit ausgeht. Das ist im heutigen Verständnis eigentlich naheliegend. Tatsächlich fand J. Bradley 1725 den Regenschirmeffekt: Die Einfallsrichtung eines Teilchenstroms scheint ins Gesichtfeld zu rücken, wenn man sich in Bewegung setzt. Wer im Regen losläuft, muss den Schirm nach vorn neigen.

Bradley sah, dass das Licht sich, wie von Newton erwartet, wie ein Strom von Teilchen benimmt, deren Einfallrichtung sich zu ändern scheint, wenn man sich in ihm bewegt. Dieser Effekt, die Aberration des Sternenlichts, wurde als Stütze sowohl der Newton'schen Lichttheorie als auch der kopernikanischen These der Bewegung der Erde um die Sonne gefeiert.

Als nun Thomas Young und nach ihm Auguste Fresnel die Wellentheorie des Lichts propagierten, weil nur diese auch die Interferenzerscheinungen erklären konnte, war es einfach, mit den Huygens'schen Konstruk-

tionen, die wir aus der Schule kennen, Brechung und Spiegelung zu erklären. Allerdings erwartet man nun ein Trägermedium dieser Wellen, weil man auf wegen des Erfolges der Mechanik ein mechanisches Modell erwartete.

Darüber hinaus hatte man seit Galilei verstanden, dass sich die Geschwindigkeit eines abgeschlossenen Raums nur bestimmen lässt, wenn man Bezugobjekte außerhalb dieses Raumes hat und diese auch beobachtet (Relativitätsprinzip). Wenn man nun Geschwindigkeiten einfach durch Addition zusammensetzt, dann muss Licht, das einem bei Bewegung entgegenkommt, schneller sein, als das Licht, von dem man überholt wird. Es schien, als könne man eine Geschwindigkeit allein aus der Differenz bestimmen, ohne sich auf äußere Objekte beziehen zu müssen. Um das Relativitätsprinzip zu retten, musste der Äther als äußeres Objekt existieren. Die Differenz der Geschwindigkeiten zwischen dem entgegenkommenden und dem überholenden Licht zeigt dann nicht irgendeine Geschwindigkeit, sondern die gegen den Äther.

So schön, wie das Wellenbild nun auch die Interferenzphänomene erklären konnte (Brechung und Reflexion gibt es auch für einen Teilchenregen), die Aberration war nun verschwunden. Kommt der Regen in horizontalen Fronten herab, ändert sich wohl die Richtung der Tropfen, wenn wir uns in Bewegung setzen, aber nicht die der Fronten. Fronten beziehen sich ja nicht auf eine Bewegung, sondern auf einen instantanen Zustand, also wird ihre Richtung auch nicht durch Bewegung beeinflusst. Fresnel sah in der fehlenden Aberration das Hauptproblem der Wellentheorie, bis er einen Ausweg, eine Ausrede fand. Das Fernrohr bestimmt nämlich nicht die Lage der Wellenfronten, sondern nur die Bewegung eines durch die Apertur bestimmten Ausschnitts, der sich wie eine Art Schaumkrone bewegt und durchaus wieder Aberration zeigt. Das funktioniert aber nur, wenn sich das Trägermedium (der Äther) ungestört durch die Wände des Fernrohrs bewegen kann. Tut der Äther das nicht, wird die Richtungsbestimmung mit dem Fernrohr ohnehin ganz problematisch.

Fresnel rang sich also zu der Auffassung durch, der Äther müsse sich ungehindert durch Wände bewegen, weil sonst die Aberration dem Wellenbild der Lichtausbreitung widersprochen hätte. Das reichte damals als Erklärung aus, weil die heutigen Möglichkeiten, die Lage von Wellenfronten selbst zu messen, ganz unerreichber waren (Applet Aberration). Nur langsam gewöhnte man sich an diese eigentlich utopische Eigenschaft des Äthers, aber man fand ohnehin noch viele andere unverständliche Eigenschaften. Michelson zeigte nun mit seinem Experiment, dass die Hypothese des ungestörten Äthers nicht haltbar ist. Dabei wurde die Existenz des Trägermediums nicht in Frage gestellt. Wie es der Alltagsvorurteil erwartet, wird der Äther von der Erde mitgenommen. Fresnels Erklärung der Aberration bricht zusammen.

The interpretation of these results is that there is no displacement of the interference bands. The result of the hypothesis of a stationary ether is thus shown to be incorrect, and the necessary conclusion follows that the hypothesis is erroneous. This conclusion directly contradicts the explanation of the phenomenon of aberration which has been hitherto generally accepted, and which presupposes that the earth moves through the ether, the latter remaining at rest.

Warum hat Einstein bei der Konstruktion der Relativitätstheorie den den Michelson-Versuch nicht erwähnt? Michelson hat sein Versuchsergebnis in so banaler Weise erklärt, dass nur diejenigen, die noch das Problem der Aberration kannten, sich an seiner Erklärung stießen und nach neuen Ausreden suchten (Lorentz-Kontraktion, formale Änderung der Gleichzeitigkeit bei der Messung der Wellenfronten). Andere Fragen der Beziehung zwischen Mechanik und Elektrodynamik wurden wenigstens ebenso wichtig, so dass bereits die Reduktion der Galileischen Relativität allein auf die Mechanik (d.h. die Aufgabe der Ätherhypothese) in Erwägung gezogen wurde.

Einstein hatte nach seinen Aussagen beim Nachdenken über die Bestimmung der Gleichzeitigkeit den Geistesblitz, die Unabhängigkeit der Lichtausbreitung von der Geschwindigkeit sowohl der Quelle als auch des Messenden als Axiom zu setzen und der Galileischen Relativität wieder Allgemeingültigkeit zu verleihen. Der Lichtgeschwindigkeit wird also unterstellt, allgemein unabhängig von der Richtung zu sein und also ihren Betrag bei Zusammensetzung mit anderen Geschwindigkeiten nicht zu ändern.

Nun klärte sich alles auf. Es zeigte sich, wie die Aberration der Wellenfronten zustandekommt und wie die Relativität der Gleichzeitigkeit und die Lorentz-Kontraktion zu verstehen ist. Das Ergebnis des Michelson-

Versuchs bekam eine neue Erklärung, ebenso einfach wie die alte, nur ein Äther musste nicht mehr zu Hilfe gerufen werden: seine Unterstellung wurde überflüssig.

Als Michelson den 1907 den Nobel-Preis erhielt (für die Technik, nicht für den speziellen Versuch), förderte dies die Akzeptanz der Relativitätstheorie in solchem Maße, dass der Michelson-Versuch nun als Grundlage der Relativitätstheorie gesehen wurde. Michelson selbst hat sich mit Recht dagegen gesträubt. Der Michelson-Versuch widerlegt nur die Fresnel'sche Annahme eines ungestört strömende Äthers, zeigt aber keineswegs die generelle Richtungsunabhängigkeit der Lichtausbreitung.

Kein Experiment kann eine über dass Experiment hinausgehende Gültigkeit einer Vermutung beweisen. Es kann eine Hypothese stützen, wenn sich die auf sie gegründete Erwartung bestätigt, aber es kann sie nicht beweisen. Ein Beweis entsteht nur im negativen Falle, wenn sich die Erwartung nicht erfüllt. Dann ist etwas an den Hypothesen oder ihrer Interpretation falsch. Es ist also auch nicht so, dass das Ergebnis des Michelson-Versuchs die Relativitätstheorie erzwingt: Es gibt ja andere Möglichkeiten seiner Erklärung. Die Aberration aber zeigt: Wenn man verlangt, dass die Aberration der Wellenfronten des Lichts mit der Aberration eines Photonenregens übereinstimmt, ergibt sich die Relativität der Gleichzeitigkeit und mit der Forderung nach uneingeschränkter Gültigkeit der Relativität der Geschwindigkeiten die gesamte (spezielle) Relativitätstheorie.

Das Experiment: Mit Hilfe der Überlagerungsfigur (Interferenz) zweier Lichtwellen kann man relative Veränderungen in den beiden Wegen, die sie durchlaufen haben, schnell feststellen. Eine Welle durch läuft einen Weg quer zur Bewegung der Erde durch den Äther (hin und zurück), die andere läft der Bewegung der Erde voraus oder entgegen und kehrt dann zurück. Dazu wird ein Lichtstrahl geteilt. Die Teilstrahlen laufen gegen Spiegel (in einer Entfernung L), die sie zurückwerfen, so dass sie zur Überlagerung gebracht werden können (Applet Versuch). Wir nehmen nun an, dass such die Apparatur mit einer Geschwindigkeit v (30 km/s ist die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne) gegen den Äther bewegt. Die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen wir mit c (300000 km/s). Wenn der Strahl quer zur Bewegungsrichtung an seinem Spiegel angekommen ist, hat er auch noch den Weg geschafft, den die Apparatur bis zu dieser Zeit genommen hat, im Ganzen also nach Pythagoras $c^2t_{quer}^2 = L_{quer}^2 + v^2t_{quer}^2$. Der Strahl in Bewegungsrichtung hat einmal $ct_{hin} = L_{lngs} + vt_{hin}$, und zurück $ct_{rck} = L_{lngs} - vt_{rck}$. Zunächst ergibt sich $t_{quer}^2 = L_{quer}^2/(c^2 - v^2)$, $t_{hin} = L_{lngs}/(c - v)$ und $t_{rck} = L_{lngs}/(c + v)$. Die Wegedifferenz ist $2ct_{quer} - ct_{hin} - ct_{rck} = 2L_{quer}/\sqrt{1-(v/c)^2} - L_{lngs}/(1 - v/c) - L_{lngs}/(1 + v/c) \approx 2L_{quer}(1 + (1/2)(v/c)^2) - 2L_{lngs}(1 + (v/c)^2)$ Wird der Apparat nun gedreht, verändern sich die Wege entsprechend der Lage der Arme und die Interferenzfigur müsste das zeigen. Der erwartete Effekt zeigt sich aber nicht. **Die Relativität der Gleichzeitigkeit:** Wenn die in instantan gemessene Lage einer sich bewegenden Ebene von der Bewegung des Messenden abhängt, dann kann sich diese Abhängigkeit nur noch in dem Wort instantan verbergen. Wenn auf den stehenden Beobachter eine zum Erdboden parallele Regenfront herabstürzt, dann sind die Ereignisse der Auftreffens der Regentropfen auf dem Boden gleichzeitig. Ist diese Regenfront für den laufenden Beobachter in die Bewegungsrichtung gekippt, dann sind die fü den stehenden Beobachter gleichzeitigen Ereingisse nun für den laufenden vor ihm früher und hinter ihm später als an der Stelle, wo er sich dann gerade befindet. Was als gleichzeitig beurteilt werden muss, ist fügegeneinander bewegte Beobachter verschieden: die Gleichzeitigkeit wird relativ. **Gleichzeitigkeit:** Craig & Smith: Einstein, Relativity and Absolute Simultaneity 2011; **Die Richtungsunabhängigkeit der Geschwindigkeit:** Wenn Geschwindigkeiten bei Zusammensetzung addiert werden, kann es keine Geschwindigkeit festen Betrags geben. Der Betrag jeder Geschwindigkeit wird dann durch Zusammensetzung mit einer Geschwindigkeit gleicher Richtung geändert. Einsteins Axiom einer generell richtungsunabhängigen Geschwindigkeit bedeutet deshalb auch die Addition als Regel bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten aufzugeben.

Fast 50 Jahre vor der Konstruktion der Relativitätstheorie und 25 Jahre vor dem ersten Michelson-Versuch gab es nun schon einen Versuch, der eine Geschwindigkeit ohne Richtung definierte, eine Geschwindigkeit also, die sich nicht einfach additiv mit anderen Geschwindigkeitesn zusammensetzen kann, eine Geschwindigkeit, deren Betrag eine Naturkonstante sein sollte.

Es handelt sich um den Versuch von R.Kohlrausch und W.Weber zur Definition der Einheit der elektrischen

Ladung auf mechanischem Wege. Seit sich das Internationale Einheitensystem durchgesetzt hat, ist das Problem und der Versuch von Kohlrausch und Weber weitgehend vergessen, obwohl sein Resultat das einzige ist, welches das Axiom der richtungsunabhängigen Lichtgeschwindigkeit unmittelbar stützt.

Zumindest im Prinzip kann die elektrische Ladung wie die magnetische Polstärke durch die Kraft definiert werden die gleiche Ladungen oder Polstärken aufeinander ausüben. Die magnetische Polstärke kann man aber auch auf elektrische Ladung umrechnen, wenn man sie als Strom durch eine geometrisch definierte Spule schickt und deren magnetische Polstärke dann berechnet. Es gibt so eine elektrostatische und eine magnetostatische Einheit der elektrischen Ladung. Der Umrechnungsfaktor ist eine richtungslose (skalare) Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit konnte 1856 nicht besonders genau bestimmt werden, aber es war sofort zu sehen, dass sie die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit hatte, und Maxwell schloss daraus, dass das Licht eine elektromagnetische Welle ist. Nimmt man den Versuch aber ernster als man sich 1856 traute, zeigt er die Existenz einer richtungsunabhängigen Geschwindigkeit, deren Existenz im Einsteinschen Axiom gerade gefordert wird.

Das Einsteinsche Axiom der universell richtungsunabhängigen Lichtgeschwindigkeit erzwingt gerade die auf die Aberration passende Relativität der Gleichzeitigkeit. Michelson,A.A.: The relative motion of the Earth and the luminiferous ether, The American Journal of Science 22 (1881), 120-129. Michelson: Die Relativbewegung der Erde gegen den Lichtäther, Deutsche Übersetzung mit einem Vorwort von A.H.Compton und einem Nachwort von M.v.Laue, Die Naturwissenschaften 19 (1931, Heft 38), 777-784. Bleyer,U., Gottlöber,S., Haubold,H.-J., Hempelmann,A., Mücket,J.-P., Müller,V., Stoll,D.: Zur Geschichte der Lichtausbreitung, Die Sterne 55(1979), 24-40; **Dierck-E.Liebscher: Der Michelson-Versuch und die Familie seiner Missverständnisse:** Es gibt nur wenige mit Namen zitierte Experimente, die den Weg nicht nur in die Lehrbücher, sondern auch bis in die Schulbücher geschafft haben. Der Michelson-Versuch ist der bekannteste von ihnen, weil er als Grundlage der Relativitätstheorie gilt. Die Relativitätstheorie genießt eine besondere Achtung und trägt die Attribute schwierig und genial. In diesen Begründungen verbergen sich bereits hundert Jahre alte didaktische Verkürzungen, deren Entflechtung wichtige Fragen stellt und erstaunliche Antworten zu Tage fördert. Wer vom Michelson-Versuch schon einmal gehört hat, weiß, dass Michelson den Fahrtwind im Äther messen wollte, den die Erde auf ihrer Bahn um die Sonne erfahren sollte. Er weiß auch, dass sich die Relativitätstheorie auf ihn beruft, weil der Fahrtwind nicht gefunden wurde. Unbeschrieben bleibt, was der Äther soll, warum der Fahrtwind im Keller gesucht wurde und wieso das Ergebnis mit der Relativitätstheorie zu tun hat. Was ist, was soll ein Äther? Wir lesen meist, der Äther werde benötigt, um die Lichtwellen zu erklären. Lichtwellen bedürften eines Trägermediums, dessen Schwingungen das Licht sind und in dem sie sich als Wellen ausbreiten. Das ist aus strenger Newtonscher Sicht überflüssig. Schließlich braucht das Schwerefeld auch keinen Träger. Der Wunsch nach einem realen Modell für die Zwischenschritte einer Theorie ist der wissenschaftlichen Methode ohnehin wesensfremd. Das bedeutet nicht, dass das in der Vergangenheit so gesehen wurde. Ein mechanisches Modell wie ein Trägermedium ist dennoch zunächst immer ein Privatvergnügen, auch wenn eine Analogie zur Ausbreitung der Schallwellen naheliegt. Wie wir gleich sehen werden, gibt es aber einen wichtigen Grund für die Annahme eines Äthers. **Missverständnis Nummer 1: Der Äther bricht das Relativitätsprinzip. weil er ein universelles Bezugssystem bereitstellt**. Eher das Gegenteil ist richtig. Unterstellt man die additive Zusammensetzung der Geschwindigkeiten auch für die Ausbreitung der Welle, dann gibt es genau ein Bezugssystem, in dem die Ausbreitung isotrop ist. Diese Auszeichnung ist mit dem Galilei zugeschriebenen Relativitätsprinzip nur dann vereinbar, wenn das Isotropiesystem an ein materielles Objekt gebunden ist, das dann Äther genannt wurde. Jede anisotrope Ausbreitung zeigt dann eine relative Geschwindigkeit, nämlich die gegen diesen Äther, und Galileis Relativität ist gerettet. Besondere universelle Bezugssysteme, die an universelle Materiekomponenten gebunden sind, stören die Relativität der Geschwindigkeit nicht. In der Astronomie kann man das Bezugssystem der fernen Galaxienhaufen benutzen und messen, dass wir uns gegen diese mit etwa 500 km/s bewegen. Das gleiche gilt für das Bezugssystem der Hintergrundstrahlung, ähnliche Geschwindigkeit, ähnliche Richtung. Mit der Lichtausbreitung haben diese Bezugssysteme aber nichts zu tun. Warum suchte Michelson den Fahrtwind ausgerechnet im Keller? Zunächst erwartet man von einem materiellen Medium, dass es von anderen Objekten irgendwie beeinflusst werden kann, dass es durch geeignete Wände aufgehalten werden kann. Es war lange

Zeit Gegenstand der Diskussion, welche physikalischen Eigenschaften der Äther noch hat. Sie war fruchtlos. Schlimmer noch: Da gibt es einen kleinen Effekt (den ersten Effekt der Hochgeschwindigkeitsphysik): die Aberration des Sternenlichts. Die Aberration wird allgemein als Regenschirmeffekt erklärt: ein Teilchenstrom ändert seine scheinbare Richtung, wenn man sich in ihm bewegt. Die Sterne scheinen im Gesichtsfeld zusammenzurücken, wenn man sich vorwärts bewegt. Die Größenordnung des Effekts ist $v/c \approx 10^{-4}$, also etwa 20 arcsec.

Nun ist das Licht aber eine Welle, und bei additiver Zusammensetzung der Geschwindigkeiten bleibt die Richtung der Wellenfronten unverändert: Lichtwellen zeigen keine Aberration der Wellenfronten. Fresnel fand eine Ausrede: Er berief sich auf die Tatsache, dass in einem herkömmlichen Teleskop nicht die Wellenfronten, sondern nur die von der Aperturblende generierten Ausschnitte beobachtet werden, die sich wie Schaumkronen auf den Wellen verhalten und Aberration zeigen. Dazu muss allerdings das Isotropiesystem universell sein, dann darf der Äther also durch Wände weder gehindert noch gebremst werden. Das war für Fresnels Zeitgenossen eine schwer verdauliche Schlussfolgerung, schwerer als heute, da wir nun Neutrinos kennen. Michelson wollte also einen frei durch die Wände flutenden (in der Literatur als stationär bezeichneten) Äther finden, und so baute er seine Versuchapparatur im Keller auf. Er fand nichts frei Flutendes.

Später hat er dann versucht, diesen Äther wenigstens im Freien und auf Bergen zu finden, aber alles war vergeblich. Der Michelson-Versuch zeigt, dass die Lichtausbreitung im Keller isotrop ist. Der Äther wird also durch die Wände eingeschlossen. Die Erklärung der Aberration des Sternenlichts ist wieder offen. **Missverständnis Nummer 2: Der Michelson-Versuch zeigt, dass es keinen Äther gibt.** So kann man es gelegentlich lesen, aber genau das Gegenteil ist richtig. Ein frei flutender Äther ist dynamisch einem universellen Bezugssystem äquivalent. Wenn es keinen Äther gibt, ist das Isotropiesystem eine Eigenschaft des leeren Raums (und das bricht dann das Relativitätsprinzip). Dann muss man eine Anisotropie auf der bewegten Erde finden. Findet man keine, muss es einen Äther geben, der wie die Lufthülle von der Erde mitgenommen und im Keller eingschlossen wird. Das war auch Michelsons Schluss. Er setzt ja immer noch die additive Zusammensetzung der Geschwindigkeiten voraus, deren Unzulänglichkeit erst mit der Relativitätstheorie aufgedeckt wurde. **Missverständnis Nummer 3: Einstein hat seine Kenntnis des Michelson-Versuchs verschwiegen.** Das war die mediale Aufregung von 2005, ist aber sicher falsch. Einstein hat den Michelson-Versuch nicht explizit genannt, sondern nur in einer summarischen Abrechnung mit anderen Versuchen ähnlicher Zielrichtung. Es ging Einstein nicht um die Aberration. Dafür haben sich Lorentz und Drude interessiert, die schon vor 1900 die Notwendigkeit einer formalen Zeit feststellten, in der die Gleichzeitigkeit relativ ist. Die Relativität der Gleichzeitigkeit und die berühmt gewordenen Lorentz-Transformationen sind eine Folge der Forderung, dass die Wellenfronten selbst Aberration zeigen sollen. - Einstein ging es um die Maxwellschen Gleichungen, die bei additiver Zusammensetzung der Geschwindigkeiten ganz merkwürdige Formen annehmen. Die Maxwellschen Gleichungen enthalten nämlich einen Geschwindigkeitsbetrag als Konstante, eine Geschwindigkeit also, die sich keinesfalls irgendwie mit einer wie üblich gerichteten Geschwindigkeit zusammensetzen kann. Diese ungerichtete Geschwindigkeit wurde bereits von R.Kohlrausch und W.Weber bei dem Versuch gefunden, das Verhältnis der elektrostatisch und magnetostatisch definierbaren Einheiten der elektrischen Ladung zu bestimmen. Hier knüpft Einstein's Axiom an, dass es eine Geschwindigkeit (die Lichtgeschwindigkeit) gibt, deren Betrag bei Zusammensetzung mit anderen Geschwindigkeiten konstant bleibt.

Nachdem Michelson für die Interferometertechnik den Nobelpreis erhalten hatte, geriet die elementare Erklärung, die die Relativitätstheorie für den Ausgang des Michelson-Versuchs hatte, in eine neue Position. Sie diente von nun an als einfachster Einstieg in die Relativitätstheorie und wurde in dieser Funktion auch von Einstein benutzt und gefeiert. Wer sich nicht besonders für die logische Struktur eines Beweises interessierte, sah im Ausgang des Michelson-Versuchs sogar den Beweis, dass die Isotropie der Lichtgeschwindigkeit durch Zusammensetzung mit anderen Geschwindigkeiten nicht gestört wird. Dem hat Michelson zu Recht zeit seines Lebens widersprochen. **Missverständnis Nummer 4: Der Michelson-Versuch beweist die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.** Das geht nun überhaupt nicht. Einmal ist mit Konstanz der Lichtgeschwindigkeit nur gemeint, dass sich der Betrag der Lichtgeschwindigkeit bei Zusammensetzungen nicht ändert. Die räumliche und zeitliche Konstanz ihres Betrags ist eine andere Frage. **Konstanz der Lichtge-**

schwindigkeit = Unveränderlichkeit bei Zusammensetzungen mit anderen Geschwindigkeiten: $c = c + v$. Meint aber nicht Unveränderlichkeit in Zeit und Raum!

Generell kann ein Versuch eine Theorie nicht beweisen, weil eine Theorie im allgemeinen für nicht abzählbare Einzelfälle gelten muss, die keinesfalls je nachgeprüft werden können. Ein Versuch kann nur zwei Ergebnisse haben. Entweder die Theorie erklärt ihn, dann widerspricht ihr der Versuch nicht. Wenn das Ergebnis des Versuchs unerwartet ist, oder sein unerwarteter Ausgang vorhergesagt werden konnte, ist er natürlich eine Stütze der Theorie, aber eben nur eine Stütze, kein Beweis. Ist der Ausgang des Versuch allerdings nicht mit der Theorie vereinbar, dann hat er Beweiskraft: Er zeigt, dass die Theorie falsch oder zumindest ungenau ist. Der Michelson-Versuch beweist, dass der Schluss auf den frei flutenden Äther von Voraussetzungen ausgeht, die nicht zutreffen.

Experimente inspirieren bestenfalls gescheite Hypothesen und testen sie dann. Ein Test ist aber immer ein Vergleich verschiedener Hypothesen, zwischen denen entschieden werden soll. Was ein Test also zeigt, hängt von den zugelassenen Hypothesen ab. Ohne Hypothesen zeigt ein Test überhaupt nichts. **Missverständnis Nummer 5: Die Relativitätstheorie ist auf den Michelson-Versuch angewiesen.** Dieser Irrtum lässt Hunderte von Amateuren glauben, sie könnten die Relativitätstheorie widerlegen, indem sie Hypothesen konstruieren, die das Ergebnis des Michelson-Versuchs erzeugen oder den Michelson-Versuch aus anderer Sicht analysieren. Diese Versuche sind vergeblich, weil es der Relativitätstheorie gar nicht in erster Linie darum geht, das Ergebnis des Michelson-Versuchs zu erklären. Die Relativitätstheorie erklärt es aber, und so sind alle Zusatzkonstruktionen widerlegt, weil sie – draufgesattelt – falsche Ergebnisse liefern müssten. **Missverständnis Nummer 6: Es gibt nur Effekte zweiter Ordnung.** Der beim Michelson-Versuch erwartete Effekt ist zweiter Ordnung in v/c, der Geschwindigkeit (der Erde), gemessen mit der Lichtgeschwindigkeit als Einheit. Längenkontraktion, Zeitdilatation, Geschwindigkeitsabhängigkeit der trägen Masse usw. sind alles Effekte zweiter Ordnung. Deshalb kann man gelegentlich lesen, der Unterschied der Ergebnisse der Relativitätstheorie zu den Ergebnissen anderer Konstruktionen sei zweiter Ordnung in der Geschwindigkeit. Das ist nicht richtig.

Einmal ist die Aberration des Sternenlichts (genauer der Wellenfronten) ein Effekt erster Ordung: Er ist proportional der Geschwindigkeit und er fehlt bei additiver Zusammensetzung der Geschwindigkeiten. Zum andern kann die von Michelson gesuchte Driftgeschwindigkeit auch in erster Ordnung von v/c beobachtet werden. Das ist im Versuch von Issak und Mitarbeitern geschehen, der eine Genauigkeit 10-10 erreicht hat.

Schließlich gibt es auch Effekte nullter Ordnung, wo überhaupt keine Geschwindigkeit eingeht und die Struktur der Theorie allein zu Voraussagen geführt hat, die glänzend bestätigt worden sind. Die sind die Voraussagen des Teilchenspins und der Antiteilchen. Beides sind charakteristische Prognosen der Relativitätstheorie und deshalb auch ihre wichtigsten Stützen. Es ist noch nicht gelungen, eine alternative Theorie zu finden, die diese Voraussagen gleichermaßen bereithält.

Der Äther und die Familie seiner Missverständnisse

Was ist der Äther? Auf diese Frage und alle Fragen der Art Was ist ... kann es keine eindeutige und unveränderliche Antwort geben. Namensgebung ist kein primärer Gegenstand der Wissenschaft. Namen zeigen die Absicht der Alliteration, nicht die Eigenschaft des Benannten. Die Gegenstände werden nicht durch ihren Namen, sondern allein durch ihre Wechselbeziehungen, ihre Wirkungen definiert. Was solche Wirkungen nicht hat, existiert nicht. Wie Hegel schreibt, ist das reine Sein und das reine Nichts dasselbe. Das kümmert die Umgangssprache allerdings nicht. Es bleibt uns allerdings, die verschiedenen Funktionen, die der Äther haben soll, gegenüberzustellen.

Gibt es einen Äther? Nenne mir die Eigenschaften und Wirkungen, die er haben soll, und dann kann es auch eine Antwort geben.

1. Der Äther erfüllt den Raum zwischen den Himmelskörpern und führt sie auf ihrer Bahn. Warum nicht, aber was kann das für prüfbare Folgen haben? Nachdem man sich an den Gedanken gewöhnt hatte, dass das Planetensystem um die Sonne kreist, wurde die Vorstellung geboren, die an den Namen DesCartes (Discours de la méthode, 1637) gebunden ist: Danach werden die Planeten des Sonnensystems duch einen Wirbel im

Äther geführt, der wie in der Badewanne innen schneller rotiert als aussen. Das wird gestützt durch die Beobachtung, dass die Umlaufzeit der Planeten mit dem Abstand von der Sonne zunimmt. Kann man da etwas rechnen? Nein. Isaak Newton (Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, 1687) konnte rechnen, sogar erstaunlich erfolgreich: aber in seiner Theorie kam kein Äther vor. Der Äther erschien wirkungslos. Wirkungslos und nicht existent ist dasselbe, sobald wir erkannt haben, dass Objekte erst durch ihre Wechselwirkungen definiert sind. Wer hat recht? Die Messung muss entscheiden. Nach Newtons Theorie ist die Erde dank ihrer Rotation am Äquator etwas dicker als eine Kugel. Die Analogie zum Wirbelfaden in der Badewanne, der mit schnellerer Drehung dünner wird, lässt vermuten, die Erde würde durch Rotation schlanker als eine Kugel. Ein Paar französischer Expeditonen (Maupertuis, Finnland und LaCondamine et.al. Peru, 1736) hat nachgemessen und gezeigt, dass Newton recht hat: die Erde ist am Äquator dicker als eine Kugel. Das Messgerät der einen Expedition kann man sich im Leibniz-Institut für Astrophysik in Potsdam ansehen und dabei staunen, dass man mit diesem Instrument nach langer Kutschfahrt durch Taiga und Tundra die notwendige Genauigkeit erreicht hat. Facit: Einen Äther, der die Planeten führt, gibt es nicht.

2. Der Äther erfüllt den Raum, und das Licht ist eine Welle in diesem Äther. Für Newton (Opticks, 1704) sah das ganz anders aus: Das Licht ist ein Teilchenstrom hoher Geschwindigkeit (Olaf Römers berühmte Messung 1676 ergab 1 Erdbahndurchmesser in 15 Minuten), und der von Bradley 1725 gefundene Regenschirmeffekt (die Aberration des Sternenlichts) stützte diese Vorstellung zusammen mit der kopernikanischen These (1543) von der Bewegung der Erde mit 3.14 Erdbahndurchmessern pro Jahr. Zwei Haken hat die Sache allerdings: Zum einen werden die Interferenzerscheinungen an dünnen Schichten nicht beschrieben, die Theorie ist also unvollständig. Zum andern müssen sich merkwürdige Dinge im Fahrplan der Doppelsterne und Mondsysteme zeigen, die man nicht findet. Die Theorie trifft also nicht überall zu. Doppelsterne und Mondsysteme zeigen ja zunächst, dass die Geschwindigkeit des Lichts unabhängig von der Farbe und auch der Art der Quelle sein muss. Es gäbe sonst keine unverschmierten Bilder. Diese Geschwindigkeit sollte sich nun mit der des Sterns additiv zusammensetzen, so wie zum Radarergebnis einer Zivilstreife auf der Autobahn die Geschwindigkeit der Streife selbst addiert werden muss. Dann müsste man aber das Bahnstück, auf dem der Stern sich auf uns zu bewegt, etwas zu früh sehen, und das Teilstück, auf dem er sich von uns entfernt, etwas zu spät. Das wird aber nicht beobachtet. Beim Jupitermond Io macht das nur eine Zehntelsekunde aus, aber 1913 haben P. Guthnick und R.Zurhellen Doppelsterne überprüft und mit einer Genauigkeit von 1:1000000 nachgewiesen, dass sich die Lichtgeschwindigkeit nicht auf die Lichtquelle bezieht. Huygens (Traité de la lumière, 1690) konnte nur mit den Interferenzerscheinungen an dünnen Schichten argumentieren: Das Licht ist eine Wellenerscheinung. Aber was schlägt diese Wellen? Diese Frage ist Abbild des theoriefremden Vorurteils, für alles müsse es ein mechanisches Modell geben. Für die Lichtwellen wird es Äther genannt, Lichtwellen werden also als Wellen in einem Äther aufgefasst, in welchem sie eine von der Quelle unabhängige Geschwindigkeit haben können. Jetzt wird der Äther als Träger des Wellenphänomens Licht definiert, die Bedeutung des Begriffs hat sich verändert. Es geht nicht mehr um das Medium, das die Planeten führt, sondern um das Medium, das Wellen schlägt. Merkwürdigerweise taucht der Äther in den tatsächlichen Rechnungen zu den Wellenphänomenen Lichtbrechung und Lichtbeugung überhaupt nicht auf, er beruhigt nur die Phantasie.

3. Geschwindigkeiten brauchen ein Bezugsobjekt. Mit dem Namen Galileo Galilei (Dialogo sopra i due massimi sistemi, 1632) ist die Erkenntnis verbunden, dass Geschwindigkeit allein keiner physikalischen Ursache bedarf, weil sie ausschließlich in Bezug auf äußere Objekte feststellbar ist, und deshalb je nach Bezugsobjekt die verschiedensten Werte hat. Das nennen wir Relativitätsprinzip. In einem Segelschiff - so schreibt Galileo - kann man mit keinem Experiment feststellen, ob das Schiff noch im Hafen liegt oder bereits auf dem offenen Meer treibt. Man muss nach draußen sehen, um das entscheiden zu können. Es ist nicht die Geschwindigkeit, die eine Ursache braucht, sondern erst ihre Änderung: die Beschleunigung. Genau das wird in Newtons Mechanik 1687 axiomatisch gesetzt. An Licht hat Galilei noch nicht explizit gedacht. Wenn aber die Geschwindigkeit des Lichts vom Äther bestimmt wird und wir uns im Äther bewegen, sollten wir feststellen, dass das Licht, was uns überholt, auf uns bezogen etwas langsamer ist und das uns entgegenkommende Licht etwas schneller. Wenn wir die Geschwindigkeit des an uns in entgegengesetzten Richtungen vorüberziehenden Lichts vergleichen, können wir aus der Differenz für uns selbst eine Geschwindigkeit ableiten. Messen wir auf diese Weise eine Geschwindigkeit, ohne nach draußen zu sehen? Nein, wenn wir den Äther haben, so ist er

das äußere Objekt, auf das sich unsere eigene so ermittelte Geschwindigkeit bezieht. Das Relativitätsprinzip wird also durch den Äther gerettet, so scheint es. Aber die technische Möglichkeit, die Zusammensetzung der Lichtgeschwindigkeit etwa mit der der Erde nachzuweisen, liegt noch in über zwei Jahrhunderten Entfernung.

4. Fresnel: Der Äther ist ungreifbar. Eine skandalöse Tatsache gab es dennoch bereits jetzt: die von Bradley 1725 beoachtete Aberration des Sternenlichts. Sie stützt das Newtonsche Teilchenmodell noch immer, denn Wellenfronten zeigten diesen Effekt nicht. Auguste Fresnel, der erste, der Interferenzbilder 1815 richtig berechnen konnte, hielt dieses Problem für das härteste der Wellentheorie überhaupt. Er war es auch, der die mit Widerwillen akzeptierte Ausrede fand: Teleskope beobachten keine Wellenfronten, sondern die von der Aperturblende ausgeschnittenen Bereiche, die sich ihrerseits wie Teilchen benehmen, wenn ... ja wenn der Äther von der Erde, den Wänden des Observatoriums und dem Tubus des Fernrohrs nicht umgerührt wird. Der Äther muss ungreifbar und (ausser vom Licht) unfühlbar sein, wenn er seine Funktion zutreffend erfüllen soll. Deshalb konnte Michelson 1881 auch frohgemut in einen Keller ziehen, um dort zu zeigen, dass sein Interferometer so genau misst, dass es auch den Fahrtwind der Erde durch den Äther nachweisen kann. Er muss unglaublich enttäuscht gewesen sein, dass er die Geschwindigkeitsdifferenz nicht fand und dass er auf einen im Keller gefangenen Äther schließen musste.

5. Michelson: Der Äther wird von Wänden festgehalten. Fresnels Ausrede ist nun aber geplatzt, Der kleine, technisch unbedeutende Effekt der Aberration des Sternenlichts beweist zusammen mit Michelsons Ergebnis, dass die Vorstellung von Licht als Wellenerscheinung in einem Äther als Träger nicht richtig ist. Abgesehen von den vielen anderen Problemen, die der Äther und die Elektrodynamik generell mit dem Relativitätsprinzip bekamen (man freundete sich schon mit dem Gedanken an, Galileis Relativitätsprinzip gelte nur für die Mechanik), war es die Aberration des Sternenlichts (die Auflösung der Fresnelschen Ausrede), die zur Lösung führte. Wenn Wellenfronten selbst Aberration zeigen sollen, dann muss es eine Relativität der Gleichzeitigkeit geben: Das Urteil, ob voneinander entfernte Ereignisse gleichzeitig sind oder nicht, muss sich immer auf einen Beobachter beziehen, und Beobachter in relativer Bewegung entscheiden verschieden, so wie sie auch verschieden über die Richtung einfallender Strahlung entscheiden (das ist ja gerade die Aberration). H.A.Lorentz, der dafür die heute unter seinem Namen bekannten Umrechnungen fand, hatte den Eindruck, dass das wieder nur eine Ausrede war, die das Schicksal der Ausrede Fresnels teilen würde.

6. Einstein: Die Lichtgeschwindigkeit gehört zu den Voraussetzungen der Theorie. Es war Albert Einstein, der im Nachdenken über die praktische Synchronisation voneinander entfernter Uhren das Axiom, den Haken fand, an dem man das ganze Netz der Probleme aus dem Sumpf der Undurchschaubarkeit ziehen konnte. Wenn man akzeptiert, dass man Gleichzeitigkeit unter elementarer Benutzung elektromagnetischer Signale feststellen kann, dann geraten Aussagen über die Lichtgeschwindigkeit in die Nähe von Zirkelschlüssen (das heißt Fehlschlüssen). Wenn man dagegen voraussetzt, dass der Betrag der Lichtgeschwindigkeit an einem Ort unabhängig von Beobachter und Richtung ist (wir nennen das Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, was leider oft als immer und überall gleich missverstanden wird), dann lösen sich more geometrico alle aufgelaufenen Probleme von selbst, insbesondere die Relativität der Gleichzeitigkeit wird eine Zeichenübung. Ein Äther als Medium der Lichtausbreitung taucht in keiner Rechnung mehr auf, er bleibt wirkungslos. Der Äther ist als Konstruktion oder Hypothese überflüssig. Wie die Schwerkraft Newtons brauchen auch die elektromagnetischen Wirkungen keinen Mittler. Nicht zuletzt ist auch Galileos Relativitätsprinzip wieder in sein vollen Rechte eingesetzt.

7. Welle und Teilchen: **Stachel, Penrose, Ehlers: Einsteins Annus mirabilis. Fünf Schriften, die die Welt der Physik revolutionierten** 1998, 2005 p197 Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt: Körperzustand bei ponderabler Materie = endliche Anzahl von Teilchen mit Ort und Impuls. Ganz anders Maxwelltheorie mit elektromagnet Zustand mit kontinuierlichen Funktionen = unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Schwarzer Körper sagt: Licht muss auch endliche Anzahl von Teilchen sein; Die Quantentheorie hat schließlich das Teilchenkonzept Newtons und das Wellenkonzept Huygens' in eigenartiger Weise verbunden, weil Wellen ihre Energie nicht mehr wie eine schwingende Seite abgeben können, ohne zu stottern. Sie können ihre Energie nur in charakteristischen Schritten (Quanten) abgeben. Bei diesen Schritten sieht das abgegebene Quantum wie ein Teilchen der mit eigener

Energie und eigenem Impuls aus. Das nennen wir dann Photon. Solange nur Energie und Impulsaustausch betroffen ist, können wir das Licht als Photonenstrom betrachten. Wegen des Axioms der Unveränderlichkeit des Betrags der Lichtgeschwindigkeit bei Zusammensetzungen hängt die Geschwindigkeit der Photonen auch nicht mehr wie die der Newtonschen Teilchen von der Geschwindigkeit der Quelle ab. Populäre Intro: **Ponomajaw: Welle oder Teilchen** DDR = Jenseits des Quants BRD. Eine populäre Quantenphysik 1974; Tschernogorowa: Geheimnisse der Mikrowelt 1976 Quarks; **Hey: Das Quantenuniversum. Die Welt der Wellen und Teilchen** 1990; Resnick: Basics concepts in relativity and early quantum theory 1972; **Eisberg & Resnick: Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles 1974, 1985**[2];

8. Hier halten wir inne und fassen noch einmal die drei Eigenschaften zusammen, welche von nun an den Namen Äther begründen können. a. Ein Äther soll überall sein, also eine homogene Komponente des ganzen Universums darstellen. b. Ein Äther soll nicht zu fassen sein, er soll sich nicht mit gewohnten Methoden eintüten lassen. c. Ein Äther soll uns Gelegenheit geben, eine Relativgeschwindigkeit gegen ihn zumindest gedanklich zu bestimmen. Einstein hat den Namen Äther nach 1916 noch einmal ganz abstrakt verwendet und mit ihm die Eigenschaften der Raum-Zeit selbst bezeichnet. Speziell beim Gravitationsfeld wollte er damit auf die Möglichkeit, Koordinaten und Bezugssysteme an der Krümmung der Raum-Zeit zu orientieren, anspielen. Der Äther Einsteins ist nun nicht mehr der Träger des Schwerefeldes oder der elektromagnetischen Felder, sondern er besteht aus diesen Feldern selbst. Das hat aber nichts mit demjenigen Ätherbegriff zu tun, dessen Bedeutungslosigkeit mit der Relativitätstheorie gezeigt worden war. Dieser Äther bezeichnet unsere Umwelt, und an der können wir uns ohne weiteres orientieren, so sie inhomogen genug ist. Da gibt es nichts Merkwürdiges.

9. Neutrinos: An die Vorstellung von Dingen, die kaum zu fassen sind und alles durchdringen, haben wir uns inzwischen gewöhnt. Neutrinos waren die ersten Teilchen dieser Art, deren Existenz nachgewiesen werden konnte, obwohl sie zunächst nur als Entschuldigung für merkwürdige Beobachtungen in der Energiebilanz von Kernprozessen galten. Während die Photonen mit den gewohnten Substanzen wegen derer elektromagnetischen Struktur reagieren, tun dies die Neutrinos nicht. Einmal erzeugt, verlassen sie uns mit Lichtgeschwindigkeit und lassen sich nur mit Materie sehr hoher Dichte aufhalten, wie sie etwa beim Kollaps einer Supernova auftritt. Teilchen deren Wechselwirkung ähnlich schwach ist, scheint es in vielen Arten zu geben, und wir werden ihnen unter dem Namen Dunkle Materie gleich noch einmal begegnen.

10. Lassen wir die Unfassbarkeit beiseite und fragen nach Dingen, die überall sind und an denen wir Bewegung orientieren können. Das allerdings gibt es (mit einer kleinen Einschränkung). Das Universum ist gebettet in ein Wärmebad aus elektromagnetischer Strahlung, dem Mikrowellenhintergrund. Er reagiert so wenig mit der im Weltall verteilten Materie, dass das Weltall durchsićhtig ist, aber wir können uns an ihm orientieren: Gegen den Mikrowellenhintergrund bewegen wir uns mit etwa 500 km/s. Auch dieser Hintergrund wird gelegentlich als Äther bezeichnet, aber er hat weder die von DesCartes erwarteten Eigenschaften, noch die von Fresnel unterstellten, und hat auch nichts mit dem metaphorischen Äther Einsteins zu tun. Die Unfassbarkeit ist ohnehin eingeschränkt: elektromagnetische Strahlung kann man mit einem Faraday-Käfig aussperren und mit einem Spiegel umrühren.

11. Da sieht es mit der Dunklen Materie anders aus. Sie wirkt bei der Strukturbildung im Universum, ihre Kondensationen sind die Sammelstellen für unsere gewohnte Materie, und die Schwerewirkung dieser Kondensationen lassen sich mit dem Gravitationslinseneffekt und der Röntgentemperatur des intergalakischen Gases nachmessen. Andererseits ist die Dunkle Materie so wenig festzuhalten wie die Neutrinos, weshalb der Dichtekontrast ihrer Kondensationen auch so gering ist, dass er das Planetensystem nicht stört. Deshalb können wir unsere Bewegung auch nicht mehr ohne weiteres an Dunkler Materie orientieren. Hier von Äther zu sprechen, zielt nur auf die Unfassbarkeit.

12. Bei der Dunklen Energie gibt es auch diese Orientierbarkeit nicht mehr. Mit dem Wort Dunklen Energie bezeichnet man eine Quelle des Schwerefeldes, die so homogen verteilt ist, dass ihre Schwerewirkung sich ausschließlich im Verlauf der Expansion des Universums bemerkbar macht (Reisz et al., Permutter et al. 1998). Diese Energie läßt sich nicht einfangen, nicht aussperren. Sie spielt bei den physikalischen Prozessen, die immer eine Art Transport und Austausch von Energie und Impuls sind, einfach nicht mit. Die Frage Was

ist die Dunkle Energie? kann deshalb keine Antwort finden, die sich auf unseren Erfahrungsbereich bezieht.

Was bewirkt die Dunkle Energie? Sie hält die Expansionsrate des Universums hoch, während die Schwerewirkung aller anderen Materiekomponenten die Expansionsrate nur verringert.

Es gibt allerdings gute Gründe für die Vermutung, dass die Dunkle Energie doch einmal an Umsetzungen beteiligt war. Das betrifft die vermutete inflationäre Phase der Expansion am Anfang des Universums (Starobinsky 1980, Guth 1980). Man unterstellt, dass damals die Dunkle Energie viele Größenordnungen dichter war als heute ($10^9 3$ kg/m^3 statt 1.7 10^{-27} kg/m^3) und für eine entsprechend große Expansionsrate des Universums gesorgt hat (das nennt man inflationäres Universum). Dies sollte zur Folge haben, dass dabei aller anderer Inhalt des Universums zur Unkenntlichkeit verdünnt wurde. Die Dunkle Energie, so erwartet man, wurde dabei instabil und hat sich schließlich bis auf einen kleinen Rest (den wir heute beobachten) wieder in gewohnte Materie umgesetzt. Man nennt das Rückheizung des Universums (es geht um 10^{28} K). Das hört sich nach reiner Unterstellung an, aber man kann mit einfachen quantentheoretischen Regeln das Spektrum der beobachteten Anisotropien der Hintergrundstrahlung und der großen Strukturen richtig ableiten. Die Restdichte der Dunklen Energie, die wir jetzt in dem Verlauf der Expansionsrate des Universums beobachten, entspricht konstant einer Strahlungstemperatur von etwa 30 K. Die Hintergrundstrahlung hat nur noch weniger als 3 K, man kann also wieder einmal spinnen, was noch so alles möglich ist.

13. Ein Nachsatz muss noch sein. Dunkle Materie und Dunkle Energie sind natürlich nur in allegorischem Sinne dunkel, weil das Licht unserer Kenntnis sie nicht beleuchtet. Beide sind jedoch transparent wie das Fensterglas, das ja auch niemand als dunkel bezeichnen würde, weil es beim Blick ins Grüne nicht auffällt oder stört. Für Fritz Zwicky war 1930 die fehlende Materie in den Galaxienhaufen dunkel, weil sie in der Leuchtkraftbilanz nicht auftrat, das kann man einsehen. Heute wissen wir, dass sie nicht nur in der Leuchtkraftbilanz fehlt. Sie wirft - anders als der interstellare Staub - auch keine Schatten: ein Peter Schlemihl im Universum. Der Begriff Dunkle Energie (1998) zitiert angesichts dieser Erkenntnis vielleicht nur die dunkle Seite der Macht aus Star Wars (1977). P.Brosche, D.-E.Liebscher (1999): Aberration and Relativity, Astron.Nachr.

Laura Baudis, Zürich: Kosmologische Beobachtungen und die Dynamik der Milchstrasse liefern starke Hinweise auf eine dominante unsichtbare Massenkomponente, die bisher ihre Existenz nur durch ihre Gravitationswirkung preisgibt. Wenn diese dunkle Materie aus sogenannten WIMPs (schwach wechselwirkende massive Teilchen) besteht, kann sie direkt ueber die elastische Streuung mit Kernen nachgewiesen werden, mit Detektoren tief unter der Erde in einer Umgebung mit extrem geringem Untergrund. WIMPs werden in ganz natuerlicher Weise von Theorien jenseits des Standard-Modells der Teilchenphysik vorhergesagt. Ein populaeres Beispiel ist das Neutralino als leichtestes supersymmetrisches Teilchen. P̃hilipsen: Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik. Eine Einführung 2018; B̃uras: Gauge theory of weak decays 2021;

Zeitdilatation und Zwillingsparadoxon. Der einfachste Zugang zu den elementaren Aussagen der Relativitätstheorie führt über die Geometrie auf dem Registrierstreifen einer eindimensionalen (in den folgenden Bildern horizontalen) Bewegung. Das erste Newtonsche Axiom (das Galileische Axiom) stellt fest, dass die kräftefreie Bewegung gerade Linien (gerade Weltlinien) auf den Registrierstreifen zeichnet. Die Neigung dieser Linien gegen die Vertikale ist die Geschwindigkeit. Wir rollen den Registrierstreifen so schnell ab, dass die Neigung der Weltlinie eines Photons 45 Grad beträgt. Holton ed: Special relativity theory. Selected reprints 1963; Skobelzyn: Das Zwillingsparadoxon in der Relativitätstheorie 1972; Resnick: Einführung in die spezielle Relativitätstheorie 1976 p191ff; Das heißt, die Zeit wird durch die horizontale (räumliche) Distanz gemessen, die das Licht in der gegebenen Zeit zurücklegt. Auf dem Registrierstreifen können wir nicht mehr mit dem Zirkel arbeiten: Eine horizontale Strecke ist kein Zeitablauf. Was Drehungen auf dem Registriestreifen sind, muss mit Spiegelungen neu konstruiert werden, und was Spiegelungen sind, muss uns die mechanische Erfahrung sagen. Die geometrischen Aussagen sollen ja schließlich physikalische Sachverhalte widergeben. Die Spiegelung des Tennisballs am Racket sind wir gewohnt, und sie sieht so aus, als wurde die Differenz der Geschwindigkeiten von Ball und Racket das Vorzeichen umkehren. Der Ball bewegt sich also nach einer kräftigen Vorhand schneller als er angekommen ist. Diese **Spiegelungsvorschrift** lässt sich ausbauen, sie ist aber leider bei großen Geschwindigkeiten falsch. Lichtgeschwindigkeit bleibt Lichtgeschwindigkeit, unabhän-

gig von der Geschwindigkeit des Spiegels. Wir konstruieren die **Spiegelung eines Ereignisses an einem bewegten Spiegel**, indem wir die beiden Lichtlinien durch das Ereignis ziehen und diese am Spiegel in die jeweils andere Richtung wenden. Der Schnittpunkt der gespiegelten Lichtlinien ist dann das Spiegelbild des Ereignisses. Wir konstruieren also immer mit solchen Lichtecken, die nach einem üblichen Rechteck aussehen, wenn wir den Registrierstreifen mit einem Lichtjahr pro Jahr herausziehen. Mit solchen Spiegelungen können und müssen wir nun Strecken (und Winkel) vergleichen. Strecken auf einer Registriergeraden zeigen nun die Zeit, die wir am Ablauf der physikalischen Prozesse erkennen, die in dem Objekt ablaufen, das die Registrierkurve gezeichnet hat. Wir können nicht erwarten, dass die den Registrierstreifen steuernde Uhr diese Dauer angibt. Schließlich müssen wir auch ein normales Lineal an der zu messenden Strecke orientieren und können es nicht irgendwie auf die Zeichenebene legen. Auch die Uhr, die die Zeitdauer messen soll, muss angelegt werden, d.h. ihre Registrierkurve muss parallel zur Registrierkurve des gemessenen Prozesses liegen. Nun fällt ganz vordergründig ins Auge, dass Projektionen jetzt länger als die projizierten Strecken sind. So ist die Dauer auf der Uhr, die den Registrierstreifen steuert, größer als die Dauer auf der Uhr, die richtig angelegt ist. **Diese** Zeitdilatation ist symmetrisch, wie der entsprechende Effekt der euklidischen Geometrie auch. Wir können aber ein Dreieck zusammenbauen, das wir als Registrierung eines Nesthockers und eines Zugvogels ansehen müssen. Kommt der Zugvogel zum Nesthocker zurück, ist die Uhr des Zugvogels noch nicht so weit vorangekommen wie die des Nesthockers: Der Umweg auf dem Registrierstreifen ist kürzer als der direkte Weg. Das kennen wir aus der üblichen Geometrie, nur dass dort der Umweg länger ist. Die Zeitanzeigen sind verschieden, weil beide Uhren völlig gleich sind, so wie in der üblichen Geometrie der Umweg länger als der direkte ist, wenn sich das Lineal beim Drehen (Anlegen) eben nicht ändert. Der Zugvogel unterscheidet sich vom Nesthocker dadurch, dass in den beiden Phasen seines Fluges verschiedene Projektionen und Lagen der Uhr verglichen werden müssen. Der Effekt ist aber nicht unmittelbar einem Einwirken der Beschleunigung bei der Umkehr auf die Uhr geschuldet! Einmal kann man den Nesthocker den gleichen Beschleunigungen unterwerfen, zum anderen könnte man auch drei unbeschleunigte Uhren verwenden, die beim gegenseitigen Treffen die Zeigerstellung übernehmen. Es gibt auch keine 'Lösung', die irgendwie der allgemeinen Relativitätstheorie zugerechnet werden müsste. Die mir der Zeitdilatation verbundenen Effekte sind experimentell ohne Zweifel bestätigt und bereits technisch wichtig. Die entwickelte Geometrie ist die der speziellen Relativitätstheorie, deren Gültigkeit durch die Existenz der Antiteilchen bereits jenseits kleiner Effekte gesichert ist. Was geschieht, wenn wir eine Sternenreise mit fast Lichtgeschwindigkeit unternehmen? Wir kommen hin und zurück, ohne Zeit zu haben, ein Tagebuch zu führen, aber auf der Erde vergehen zwanzig lange Jahre, bis Vater zurückkommt und nicht älter aussehen muss als seine inzwischen herangewachsenen Söhne. Zwei Dinge sollten diesen Gedankenflug aber bremsen. Es ist nicht so einfach, auf genügend große Geschwindigkeiten zu kommen, wenn die maximale Beschleunigung 4 g beträgt. Wir müssen ja zweimal beschleunigen und wieder bremsen. Viel schlechter sieht es aber mit den Hindernissen aus, die durch den Weltraum schweben: Wir haben kaum Reaktionszeit, ihnen auszuweichen, und die maximale Beschleunigung setzt auch dem Ausweichvorgang Grenzen. Ergänzende Bemerkungen: Das Wort Relativitätsprinzip ist zunächst ausgesprochen einschüchternd. Es ist aber nichts anderes gemeint als die Erwartung, dass Galileos Beobachtung (dass geradlinige gleichförmige Bewegung - wie auch Position, Orientierung und Zeitpunkt - eines abgeschlossenen und abgeschirmten Raums in Innern nicht festgestellt werden kann, wie fein auch die Messapparaturen seien, die ich zur Verfügung habe) uneingeschränkt gilt. Geschwindigkeit, Position, Orientierung und Zeitpunkt können nur bezogen auf andere, äußere Objekte (Schlaglöcher, Starkästen, Sterne, kosmische Hintergrundstrahlung) benannt werden. **Das erste Newtonsche Axiom** (die Idee ist von Galileo, wenn man die undokumentierten, aber erschließbaren Kenntnisse der Mathematiker zwischen Euklid und Archimedes beiseite lässt) muss heißen: Die Gesamtheit der unbeeinflussten Bewegungen zeichnen in Raum und Zeit eine Geradenschar. Bezugssysteme kommen noch gar nicht vor, müssen es auch nicht. Auch das Wort kräftefrei sollte vermieden werden, denn Kraft wird erst später genauer definiert. Geraden sind eben nicht über Koordinaten definiert, sondern durch ihre Eigenschaft, sich höchstens einmal zu schneiden, und durch zwei verschiedene Punkte eindeutig bestimmt zu sein. Das ist alles. Koordinaten kommen erst hinein, weil man zu einer Geradenschar immer Koordinaten (eben ein Bezugssystem) finden kann, in dem die Geraden durch lineare Beziehungen beschrieben werden. Diese Bezugssysteme heißen **lineare Bezugssysteme**. Inertialsysteme werden daraus erst nach Definition von Masse und Impuls. Pfister: **Lange**

nach Newton PhysJ15 H3 2016 p47-51; **Ludwig Lange 1863-1936: Die geschichtliche Entwicklung des Bewegungsbegriffes** 1886. **DefI Inerzialsystem 1886:** Drei Punktmassen bewegen sich nichtkolinear so, dass die Projektionen der Geraden/Tangenten/Koordinatenachsen sich stets in einem fixen Punkt treffen. **TheoremI** Mit Bezug auf ein räumliches Inerzialsystem ist die Bahn jedes beliebigen vierten sich selbst überlassenne Punktes gleichfalls geradlinig. **DefII InerzialZeitSkala:** Zeitskala, in Bezug auf welche ein sich selbst überlassener auf räumliches Inerzialsystem bezogener Punkt gleichförmig fortschreitet. **Inerzialsystem erlaubt schwebende Körper!** Mittelstaedt: Klassische Mech 1995^2 p26 Inertialsystem per Geometrie, Frege: Definition per Kraft enthält Zirkel! p84 **topologische Zeit**; Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd1 1978^2 p6, p407 affiner Raum a] Punkte durch n Koordinaten darstellbar. b] Punkt, Gerade, Ebene, Hyperebene durch lineare Gleichungen gegeben: $x^1 = c$ Punkt, $x^1 + x^2 = c$ Gerade, $x^1 + x^2 + x^3 = c$ Ebene, $\ldots$, $x^1 + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = c$ bedeutet $(n-1)$-dimensionale Hyperebene. Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd2 1974 p375; **TheoremII** In Bezug auf eine InerzialZeitSkala ist jeder beliebige andere sich selbst überlassene Punkt in seiner Inertzialbahn gleichförmig bewegt. **Konzeptuelle/experimentelle Mängel:** Freies Teilchen/sich selbst überlassener Punkt. Gerade Linie. Kräftefrei. **ART 1907:** Es gibt keine globalen Inerzialsysteme. Einstein 1913: **nicht-Newton'sche Mitführungseffekte** = Beschleunigte Massen induzieren für Testteilchen und Inerzialsysteme **parallele Beschleunigungen**. **Rotierende Hohlkugel induziert in ihrem Innern ein Coriolis- und Zentrifugalkräfte**. Pfister & Braun: Induction of correct centrifugal force in a rotating mass shell, Class Quantum Grav2 1985 p909; **Bleyer & Liebscher: Vom Newton'schen Eimer-Versuch zur Quantentheorie des Universums. Das Mach'sche Prinzip**, Tübingen 1993; Pfister & King: Inertia and gravitation. The fundamental nature and structure of space-time 2015; **Treder: Relativität der Trägheit** 1972; **Rätsel aller Rätsel: Nicht-Rotation der lokalen Inerzialsysteme gegenüber dem kosmischen Hintergrund.** Weinberg: Gravitation 1972 und Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation 1973, 2017 mit neuem Vorwort zur Entwicklung der ART. PJ16 2017Nr11 p62;

Dierck-E.Liebscher http://www.aip.de/ lie **Anders Spiegeln!** Man braucht **nichteuklidische Spiegelungssymmetrie** Drei gleichwertige Aussagen: 1. Spiegelbilder eines Ereignisses sind gleichzeitig = **Gleichzeitigkeit ist absolut**. 2. Massen sind geschwindigkeits**un**abhängig: $\partial m/\partial v = 0$. 3. Relativgeschwindigkeit ist Differenz zweier Geschwindigkeiten: $v_R = v_1 - v_2$. Einsteins RT ist Ausarbeitung der Forderung, dass sich die Mechanik/Physik nach dem Licht (also Spiegelungsvorschrift) richten muss. Ziehe daher andere als euklidische Geometrie zur Beschreibung der Realität in Betracht. Nutze Spiegelungsbegriff, um analytische Betrachtungen zu vermeiden. **Russo & Denninger: Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens** 1996, 2005;

Wirkung des Vakuums, des bloßen **Raum**s: ϵ_0 und **Kosmologische Konstante**. Große Mengen von Raum führen zu messbaren Effekten. Turtur: Wandlung von Vakuumenergie;

Dimension des Kontinuums und **Raum-Zeit: A] Raumzeit** ist extensives Medium der Außenwelt. **B] Metrische Struktur** des Raums. **C] Materielle Erfüllung** des Raumes mit einem von Stelle zu Stelle veränderlichen **Quale**. Hayes: Ein Abenteuer in n Dimensionen, SdW Aug 2012 p52-58; Umschreibender Würfel hat 2^n Ecken. **Räumliche Gleichdicke**, Reuleaux-Dreieck, Wankel-Kolben, SdW Aug 2013 p70ff. Der Kreis von den Gleichdicken die größte Fläche. Pöppe: Leben in 10000 Dimensionen, SdW Dez 2013 p75-79; **Vierte Dimension** SdW Dez 2004 p106ff. **Abbott: Flachländer** 1884; Wille: Zur Darstellung des 4-dimensionalen. In: Kautschitsch & Metzler: **Mathematische Anschauung** und Mathematikfilm 1982 p69-98 Hier auch Schlegel-Diagramme; Victor Schlegel 1843-1905: Über Projectionsmodelle der regelmässigen vier-dimensionalen Körper 1886 Weitzenböck: Der vierdimensionale Raum 1956; Zöllner: Theorie des 4-dimensionalen Raumes 1867; Kolman: Die vierte Dimension 1975; Prigogine: Vom Sein zum Werden = Ot suschestwujutschewo k stanowjatschemusja. Zeit und Komplexität in den Naturwissenschaften 1979; **Verräumlichung der Zeit.** Arieh Ben-Naim: The Briefest History of Time 2016; **Zimmerli & Sandbothe eds: Klassiker der modernen Zeitphilosophie.** Bergson, Boltzmann, Derrida, Dummett, Eddington, Gadamer, Heidegger, James, McTaggart, Popper, Prigogine, Russell, Smart - Schlüsseltexte 1993; Sandbothe: Die Verzeitlichung der Zeit. Grundtendenzen der modernen Zeitdebatte in Philosophie und Wissenschaft 1998; Rovelli: It is just a space where you can go up-down, left-right, ahead-back, but also in one other dimension,

something like leftB-rightB. It is a bit like having many arms, like an Indian god, University of Marseilles, France; Marolf: Relativity and cosmology 2003 e-book.pdf frei im Netz. Visualising higher dimensions is certainly harder. Marolf, Minic and S. Ross: Notes on Spacetime Thermodynamics and the Observer-dependence of Entropy arXiv:hep-th/0310022; Mook & Vargish: Inside Modernism. Relativity Theory, Cubism, Narrative. Pappbilderbuch 1999; Mook & Vargish: Inside Relativity 1991; **Hinton: Tesserakt** siehe Kaku: Physik der unsichtbaren Dimension 2013 p122ff. 4D-Vorstellung. Wells Zeitmaschine. Nahin: Time machines. Time travel in physics, metaphysics, and science fiction 2001; Thomas Banchoff, Brown Uni 4D→2D. Siehe Kaku: p36 Kap19 p214 Segen der Dimension 10: Die Naturgesetze werden einfacher. Wir sehen nur gemäß Platons Höhlengleichnis Schatten. **Platon 428-348: Phiadon** = Sokrates ist vor kurzem in Athen wegen Asebie = Religionsfrevel und Verführung der Jugend zum Tode verurteilt und hingerichtet worden. Phaidon schildert als Augenzeuge einer Gruppe von Zuhörern die Ereignisse des Todestags, den der Verurteilte im Gefängnis im Kreis von Freunden verbrachte. Wiedergabe einer philosophischen Diskussion, die Sokrates führte. Letzten Handlungen und Äußerungen des zum Tode Verurteilten. Die Gesprächspartner des Sokrates sind neben Phaidon zwei weitere seiner Schüler, Kebes und Simmias von Theben. Das Hauptthema ist die **Seele**: Es geht um ihre Beschaffenheit, ihr Verhältnis zum Körper, den sie beseelt, und ihr mutmaßliches Schicksal nach dem Tod. Sokrates versucht die Unsterblichkeit der Seele plausibel zu machen. Er betrachtet die individuelle Seele als unzerstörbar und sieht in ihr den Träger der Kenntnisse, Fähigkeiten und Erinnerungen des Menschen. Nach seinem Verständnis bewohnt, beherrscht und bewegt die Seele den Körper, sie verleiht ihm durch ihre Anwesenheit das Leben. Beim Tod trennt sie sich von ihm, was seinen Zerfall zur Folge hat. Im Verlauf der Seelenwanderung verbindet sie sich nacheinander mit verschiedenen Körpern. Demnach besteht kein Grund zur **Todesfurcht**, denn der Tod bedeutet nur Zerstörung des jeweiligen Körpers, die Person aber ist die Seele, die immer intakt erhalten bleibt. Sokrates verteidigt dieses anthropologische Modell gegen Einwände von Simmias und Kebes. Insbesondere wendet er sich gegen ein Alternativmodell, dem zufolge 'Seele' nur eine Bezeichnung für die Harmonie der materiellen Elemente des Körpers ist. Wenn man die Seele als Harmonie auffasst, muss man annehmen, dass sie vernichtet wird, wenn der Körper stirbt und infolgedessen seine Struktur zerfällt. Nach Sokrates' Überzeugung hängt das Schicksal der Seele nach dem Tod von ihrem Verhalten während des Lebens ab; optimal ist eine philosophische Lebensführung, wie er selbst sie praktiziert hat. Diese Sichtweise verhilft ihm zu einer gelassenen Haltung und einem heiteren, unbeschwerten Sterben, während die anderen tief betrübt sind und weinen. Heisenberg: Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen 1967; Mercier: Die Idee der Quantentheorie der Wellenfelder, PhysBl8 1952 H10 440-446; **Infeld: Leben mit Einstein**. Kontur einer Erinnerung 1969; Infeld: Der Mann neben Einstein. Ein Leben zwischen Raum und Zeit 1999; **Infeld: Albert Einstein, sein Werk und sein Einfluss auf unsere Welt** 1953 Die letzten 30 Jahre suchte Einstein eine Theorie, die die Weltbeschreibung im Großen/Feld-Idee und im Kleinen/Teilchen-Idee geschlossen/vereinigt/konsistent beschreibt. Feld und Punkt in Einem. Maxwell $(\vec{B}, \vec{E})$ oder $(\varphi, \vec{A})$ = em Feld = **physikalisches Feld** $\neq$ Schwerefelds hat **geometrisches Feld** als Gegenstück = Metrik-Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ = Schwerefeld. Aber: Schwerefeld wird durch a] bewegte schwere Massen, b] bewegte Ladungen und c] em Feld als Quellen beeinflusst. Reines Schwerefeld = gekrümmte Welt = Riemann'sche Geometrie, ohne em Feld möglich, aber reines em Feld nicht ohne Schwerefeld möglich. Eine Welt ohne Massen, ohne Ladungen und ohne em Feld ist als **leere Welt** flach = Euklid. Nur Schwerefeld hat geometrisches Gegenstück, nicht aber das em Feld. Weyl hielt diesen Unterschied für künstlich. **Zee: Unity of Forces in the Universe** Bd1 Bd2 1982, 1985 Einführung und Sammlung der Originalarbeiten; Šrednicki: Quantum Field Theory 2007; **Čhen, Derbes, Griffiths, Hill, Sohn & Ting: Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory** 2019; **Coleman: Aspects of Symmetry.** Selected Erice Lectures 1985; Abers und Lee PhysReports9 1973 p1 in: Balian & Zenn-Justin eds: Methods in Field Theory. Les Houches Summer School Proceedings Bd28 1981 oder Méthodes en théorie des champs. Les Houches, session XXVIII, 28 Julliet - 6 September 1975 UB UniPots Sign UD 4847.28 Kap1 Faddeev: Funktionalmethoden, Callen: Renormalisierung, Lee: Eichtheorien, Gross: Renormalisierungsgruppen, Veltman: QT der Gravitation; **Wheeler: Einsteins Vision. Wie steht es heute mit**

Einsteins Vision, alles als Geometrie aufzufassen? 1968 = geometric unity = alles ist Metrik und Faserbündel;; Debever: Elie Cartan and Albert Einstein: Letters on Absolute Parallelism, 1929-1932, 1979; Kondo: RAAG Memoirs of the unifying study of the basic problems in physics and engeneering science by means of geometry. Bde1-3 1952, 1962; Mercier & Schaer: Die Idee einer einheitlichen Theorie 1964 Mercier: Die Idee der Quantentheorie der Wellenfelder, PhysBl8 1952 H10 440-446; Treder & Borzeszkowski: Einsteins Arbeiten zur einheitlichen Feldtheorie Wifo 29 1979 p49ff; **a] Finsler-Geometrie:** Für Distanzen im Straßennetz mit Einbahnstraßen gilt sofort $\vec{A}^T\eta\vec{B} = d(A,B) \neq d(B,A) = \vec{B}^T\eta\vec{A}$, also Hin- und Rückweg sind verschieden lang. Aus $\vec{A}^T = (0,1)$ und $\vec{B}^T = (1,0)$ bei der Metrik $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ bedeutet $0 = d(A,B) \neq d(B,A) = 2$. **b] 5D Kaluza. c] Weyl und Eddington. d] Asymmetrische Felder** = Einsteins letzter Vorschlag nichtsymmetrische Feldtheorien siehe Einstein: Grundzüge der RT 1954 p131-163 mit 16 Potentialen. Details dazu bei Hlavaty: Geometry of Einstein's unified theory 1957; Mercier: Die Idee der Quantentheorie der Wellenfelder, PhysBl8 1952 H10 440-446; Edelen: The structure of field space. Axiomatic formulation of field physics 1962; e] Affin zusammenhängende Räume; Siehe auch Seite 260 Kuchar: Geometrodynamics regained. A Lagrangian approach JMathPhys 15 708 (1974); Siehe auch Treder: Philosophische Probleme des physikalischen Raumes 1974; Burkhard Heim: Vorschlag eines Weges zur einheitlichen Beschreibung der Elementarteilchen Z.f.Naturforsch 32a 1977 233-243; Treder: Gravitationstheorie und Theorie der Elementarteilchen. Wiederabdruck ausgewählter Beiträge des Einstein-Symposiums 1965 in Berlin 1979; **Wheeler: Geometrodynamik** , In: Wahsner: Mensch und Kosmos - die copernikanische Wende 1978; W̃heeler: Geometrodynamics 1962; Eckhard Kreisel 1927-, Liebscher, Treder: Zur Quantengeometrodynamik 1967; W̃itten ed: Gravitation. An introduction to current research 1962; Eddington: Relativity theory of protons and electrons 1938; d̃eWitt ed: Relativity, groups and topology 1964 950 Seiten; R̃und: The differential geometry of Finsler spaces 1959; Shen: Introduction to modern Finsler geometry 2016; L̃ichnerowicz & Chandrasekhar: Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme : Relativité générale et théories unitaires 1955; M̃arie Antoinette Tonnelat: Einstein's Theory of Unified Fields 1955; T̃onnelat: The Principles of Electromagnetic Theory and of Relativity 1966; Hlavaty: Geometry of Einstein's unified theory 1957; Edelen: The structure of field space. Axiomatic Formulation of Field Physics 1962; **Wheeler: Einsteins Vision. Wie steht es heute mit Einsteins Vision, alles als Geometrie aufzufassen?** 1968 = geometric unity = alles ist Metrik und Faserbündel;; **Mannheim: The Work of Behram Kursunoglu** 2004 arXiv:gr-qc/0405035:

1. Versuch durch Weyl 1918 Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität mit gemeinsamem $\alpha(x)$:

$$g_{\mu\nu}(x) \to e^{2\alpha(x)} g_{\mu\nu}(x) \tag{86}$$

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) - e\partial_\mu\alpha(x) \quad , \tag{87}$$

Weyl-Geometrie mit $A_\mu(x)$-abhängigem Zusammenhang

$$\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{e} g^{\lambda\sigma} \left(g_{\sigma\nu} A_\mu + g_{\sigma\mu} A_\nu - g_{\mu\nu} A_\sigma\right) \quad , \tag{88}$$

Kovariante Ableitung der Metrik ist dadurch

$$g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \partial_\nu g^{\mu\nu} + \hat{\Gamma}^\mu_{\nu\sigma} g^{\sigma\nu} + \hat{\Gamma}^\nu_{\nu\sigma} g^{\sigma\mu} = \frac{2A^\mu}{e} \quad ; \tag{89}$$

Einstein; Zur affinen Feldtheorie, Sitzungsber Preuss Akad Wiss XXVII 1923 p137-140; **Weyl: Raum, Zeit, Materie** 1918, 1923[5]

2. Versuch durch Kaluza: Zum Unitätsproblem 1921 durch Dimension 5. Metrischer Tensor bekommt 5. Zeile/Spalte mit den Potenzialen des elektromagnetischen Feldes $g_{5\mu} = A_\mu$ und dem Higgs-Feld $g_{55} = \phi$, dass sich wie Raumzeitskalar transformiert. Bedeutet dynamische Massenskala für Teilchen mit Kompaktifizierungsradius der Plancklänge $r_0 = (\hbar G_N/c^3)^{1/2}$ für die Zusatzdimension. Bailin & Love: Kaluza-Klein theories, reports on progress in physics 50 1987 1087-1170; Borzeszkowski: Raum-Zeit und Elementarlänge Wifo 24 1974 p519ff

3. Versuch durch vom Feldstärketensor geerbten antisymmetrischen Anteil im metrischen Tensor. Kursunoglu *Phys. Rev.* **88**, 1369 (1952)

$$\hat{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{F^{\mu\nu}}{q} \tag{90}$$

mit dem Mischungsparameter q, der die Einheit des Feldstärketensors hat.

$$q = \frac{c^2}{r_0(2G_N)^{1/2}} \quad , \tag{91}$$

mit der intrinsischen Längenskala auf der Plancklängenskala

$$r_0 = \left(\frac{\hbar G_N}{c^3}\right)^{1/2} \quad , \tag{92}$$

Einstein: Einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität, Sitzungsber Preuss AkadWiss XXII p414-419 (1925). Einstein:CanJMath2 p120 (1950). Moffat and Boal, PhysRevD11 1375 (1975), Schrödinger: Space-Time Structure 1950; Mercier: Die Idee der Quantentheorie der Wellenfelder, PhysBl8 1952 H10 440-446;

Bewegungsproblem: Wie kommt man innerhalb der ART zu einer Newton'schen Bewegungsgleichung? Siehe Einstein & Infeld 1938 und 1940, Infeld: Leben mit Einstein p61f, p94, p96f, Infeld: Albert Einstein p152ff, Infeld & Plebanski: Motion and relativity 1960; Fock: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation 1955, 1960; Fock: I. Die Stellung des Copernicanischen Systems im Ideekreis der Einsteinschen Gravitationstheorie. II. Das Prinzip der Relativität in bezug auf Beobachtungsmittel in der gegenwärtigen Physik 1974; Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation 1973 p1095; Bold: Famous Problems of Geometry and How to Solve Them 1963; Geometrie zu $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. **Rucker: Geometry, relativity and the fourth dimension** 1977; Spektralverteilung der m-dimensionalen **Berandungs-Hyperwürfel** eines n-dimensionalen Würfels: $m = 0 \to \#$ Ecken $= \#$ Punkten, $m = 1 \to \#$ Kanten, $m = 2 \to \#$ Flächen, ... $E_{n,m} = 2^{n-m}\binom{n}{m}$. Weyl: **Mathematische Analyse des Raumproblems** 1924; **Kant: Kritik der reinen Vernunft**. **Beschaffenheit oder qualitativer Inhalt** (Gold, Wasser) $\neq$ **Form** (raum-zeitliche Ausbreitung) gestattet eine zusätzliche Unterscheidung des Qualitativen, neben dem **Wo**. **Auch Form eines Raumbereichs ohne Inhalt schafft Individualität.** Ein und dasselbe Material/Intension kann sich noch durch Form oder Extension unterscheiden. Sind aber zwei Raumbereiche kongruent (metrische Struktur des Raums kommt ins Spiel), so haben sie keine Individualität (Elementarteilchen). Ehrenfest: Welche Rolle spielt die Dreidimensionalität des Raumes in den Grundgesetzen der Physik? Ann der Physik 61 1920 440; Ehrenfest: **Why has our space just three dimensions?** in: KNAW, Proceedings 20 I Amsterdam 1918 p200-209; Planetenbahnen in 2 oder 4 Dimensionen instabil. Weyl konstruierte mit seiner Eichidee eine nicht-Riemann-Geometrie, Metrik-Modifikation. Anders **Kaluza: Zum Unitätsproblem der Physik** Sitzungeberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1921 p966-972. Nimm eine Dimension dazu! Daniela **Wuensch: Der Erfinder der 5. Dimension. Theodor Kaluza: Leben und Werk** 2009[2]; Wuensch: **Dimensionen des Universums. Die Geschichte der höherdimensionalen vereinheitlichten Theorien von der Antike bis zur modernen Physik** 2010 Rezension von Hehl PiuZ 1/2011; Wie viele Dimensionen hat unser Universum? Fünf, antwortete kühn der Königsberger Physiker und Mathematiker Theodor Kaluza, denn es war ihm 1919 gelungen, den Elektromagnetismus (= 4er-Potenzial) mit der Schwerkraft mit $g_{\mu\nu}(x)$ (= 10 unabhängige Einträge des symmetrischen metrischen Tensors, die nicht von den zusätzlichen 5 Einträgen des 5-dim symmetrischen metrischen Tensors abhängen) in einem physikalischen Raum mit fünf Dimensionen zu vereinen, wobei die Zusatzdimension keine direkte physikalische Bedeutung hat, wenn man das Koordinatensystem geeignet wählt. Gravitation und 4er-Potenzial bestimmen die Struktur des Raumes! Man hat also 14 Feldgleichungen. **Bergmann: Intro to the theory of relativity** 1942 KapXVII; Edward Witten: The fifth dimension: Theodor Kaluza's ground-breaking

idea, Annalen der Physik 2003 12 p519–542; Whitrow: Why physical space has three dimensions, British J of the philosophy of science 6 Nr21 1955 p13-31 http://www. jstor. org/stable/685571?seq=6; Whitrow: The Structure and Evolution of the Universe. An Introduction to Cosmology 1949, 1959; Whitrow: Von nun an bis in Ewigkeit - die ewige Sekunde = What ist time? 1972; Whitrow: Die Erfindung der Zeit = Time in history 1988, 1991; Julius T. Fraser: Die Zeit. Auf den Spuren eines vertrauten und doch fremden Phänomens 1993; **Max Jammer: Das Problem des Raumes. Concepts of Space. Die Entwicklung der Raumtheorien** 1954 p181 Aristoteles = Raum ist unwesentliches Anhängsel der Sustanz. M̃lodinow: Das Fenster zum Universum. Eine kleine Geschichte der Geometrie 2002; **Clifford:** Sustanz ist unwesentliches Anhängsel des Raumes!; Gosztonyi: Der Raum. Geschichte seiner Probleme in Philosophie und Wissenschaften: 2 Bde 1976; Raum-Zeit-Darstellungen. Collas: ART in 2- und 3-dimensionalen Raumzeiten, Am.J.Phys 45 1977; Bei einer Raumdimension gibt es keine Materie und Raumkrümmung beliebiger Größenordnung unmöglich. Bei zwei Raumdimensionen gibt es Materie aber nur flache Räume, also keine Wirkung der Objekte aufeinander. Penney: On the dimensionality of the real world, JMathPhys 6 1607 (1965); Janich: **Euklids Erbe. Ist der Raum dreidimensional?** 1989; Janich: Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit und Materie; **Hawking & Penrose: Raum und Zeit** 1996, 1998; In 1D kann man nicht ausweichen. in 2D nicht stricken und wie bekannt essen und verdauen. Wellenausbreitung nur bei ungeradzahliger Dimension unverzerrt. **2D-Zeit:** Dorling: The Dimensionality of Time, AmJPhys38 539 (1970); Kalender, Uhren oder Tageszeitungen mit drei verschiedenen Zeitangaben. Man gehe in der Zeit seitlich. 10-monatiger röm Kalender beginnt mit Martius/Mars, Aprilis/Erdeöffner, Maia/Wachstumsgöttin, Göttin Juno, Juli/Julius Cäsar, Kaiser Augustus, September=7, Okt=8, Nov=9, Dez=10. König Numa setzte 700vChr 2 Monate hintan: doppelgesichtiger Gott Janus/Tür/Jahreseingang und Feb/Reinigungs/Sühneopfer, die später nach vorn wanderten. Hans-Joachim Felber im Mai 1989: Im 1. Jahrhundert Sieben-Tage-Woche/Planetenwoche im römisch-hellenistischen Kulturkreis mit Sonnabend/Tag des Saturn=1. Wochentag, was im Judentum/Sabbat schon immer galt. Sonntag wegen Auferstehung für Christen stets Ruhetag/Woskreseje/Wochenbeginn. 20iger Jahre USA Montag Wochenbeginn. Deutschland beharrte auf Sonntag. 1943 DIN1355. DDR stellte 1970 auf Montag um. Vatikan beharrt auf Sonntag. Walter, Lotze, Martin: Zeit, Zeitmessung PdNPiS 51 (2002) H6 p8-36; Genauigkeit Cäsium-Uhr 10^{-10} s pro Tag. Tanja E. Mehlstaeubler: **Optische Uhren** 10^{-18} s pro Tag: Tests jenseits des Standard-Modells, des Äquivalenzprinzips, der gravitativen Rotverschiebung, Tests neuer physikalischer Modelle und in der relativistischen Geodaesie. Realisierung von Anwendungen von Atomuhren als Quantensensoren der Gravitation. **Zeitgleichung** PdNPiS 52 2003 H4 p37; Angerer: Die Zeit, ein Irrtum der Physik. Zeit und Evolution www.jangerer.de/zeit2000 Philosoph Merleau-Ponty oder Physiker McTaggart bzw. Barbour oder Darwin kommen nicht vor. Kant wird missdeutet; **Kurd Laßwitz 1848-1910: Die Lehre Kants von der Idealität des Raumes und der Zeit im Zusammenhange mit seiner Kritik des Erkennens allgemeinverständlich dargestellt** 1883; Nach Einstein ist die Weltbühne eine Raumzeit. Nach Gödel und Wheeler bewegen die beobachtenden Menschen durch den Raum, was die Zeit hinzufügt. Die Welt ist Geometrie ohne Zeit. Die Zeit ist ein Beobachtungseffekt, eine Begleiterscheinung des Beobachtens. Rovelli: Die Ordnung der Zeit 2018; **Zeit** ist ein Fremdkörper in der Physik. Man kommt ohne aus. Allein durch die Erkundung der Dinge im Raum kommt Zeit ins Spiel. Cramer: Der Zeitbaum. Grundlegung einer allgemeinen Zeittheorie 1997; **Lyotard: Das Inhumane. Plaudereien über die Zeit** 1988; Schneider: Die Kunst des Teilens. Zeit, Rhythmus und Zahl 1991; **Keine Energie- und Materie-Erhaltung, keine Kauslität!** Wittmann: Wie unser Gefühl für die Zeit entsteht, SdW Okt 2014 p24-30; Inselrinde/Insula, durch Achtsamkeitsmeditation vergrößert: Selbstwahrnehmung/Interozeption und Zeiterleben untrennbar verknüpft. Körper-Ich basiert auf kontinuierlicher Aufnahme und Weiterverarbeitung von Signalen aus dem Körper über die Zeit hinweg. Über Aufbau der Körperrepräsentation entsteht Gefühl für Zeitverlauf. Subjektive Zeit bildet sich nicht durch Wahrnehmen äußerer sensorischer Reize, sondern durch einen selbst. Ist also nicht relational bzgl der Außenwelt, eher relational bzgl Innenwelt. Zeitlupeneffekt durch Schreck, Betrachtung von Unfall- oder erotischen Bildern und Fieber, also erhöhte physiologische Aktivität. Zeitgeber erhöht Pulsrate - Herzrate spielt spielt eine Rolle - durch erhöhte Aufmersamkeit, z.B. Warten. Craig: **Globales emotionales Moment** = das gefühlte Ich des Menschen. = umfassende Repräsentation des Jetzt-Zustandes, passiert in der vorderen Insula. Intensivere Ich-Wahrnehmung entspricht lamgsamerem Zeit-Erleben. Odo Marquard: Zukunft brauch

Herkunft. **Zukunftsselbst**. Kinnebrock: Was macht die Zeit, wenn sie vergeht? Wie die Wissenschaft die Zeit erklärt 2014; Wittmann: Gefühlte Zeit 2012; Imhof: Die gewonnenen Jahre. Von der Zunahme unserer Lebensspanne seit 300 Jahren ODER von der Notwendigkeit einer neueen Einstellung zu Leben und Sterben 1981; Blumenberg: Lebenszeit und Weltzeit 2001 Öffnung der Zeitschere: Der Lebensanteil an der Welterfahrbarkeit schrumpft trotz der Mechanismen zum Zeitgewinn, zum Aufholen der Erlebnisrückstände, die jeden einzelnen betreffen - und sei es als Anteil an jenen Lebensmittekrisen, die mit dem Bewusstsein verbunden sind, dass ein Leben - wie es jeder nur als das eine hat - zum Erleben dessen nicht ausreicht, was Welt genannt wird. **Hentschel: Der Einstein-Turm** 1992; 3sec Bronzehirn beim Einsteinturm. Ernst Pöppel: Illusion des Erlebens der Kontinuität. Mahnmal des Jetzt. Denkmal der unablässigen Gegenwart. Pöppel: Grenzen des Bewußtseins 2000; Pöppel: Der Rahmen. Ein Blick des Gehirns auf unser Ich 2006; **Zeit:** Kommt vom **Zeiterleben** = **primäre Ebene des Zeitbegriffs** Gedächtnis auf Basis der Neurowissenschaften, Physiologie, Psychologie. **Gleichzeitigkeit** der Sinnesmodalitäten: alles was innerhalb von $\leq$ 30 ms passiert, wird als gleichzeitig wahrgenommen. **Folge von verschiedenen Ereignissen** wird erst ab $\geq$ 30 ms erlebt. **Jetzt** erfordert 2 - 4 s Aufmerksamkeit auf **einen Inhalt**. **Dauer**. **Fraisse: Praktikum der experimentellen Psychologie** 1963 Zeit und Rhythmus p223-228, Nullhypothese p316f; **Gedächtnis ist das Fundament der Zeit.** Unzicker: Die mathematische Realität. Warum Raum und Zeit eine Illusion sind 2019; Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd1 1978[2] p32ff **Physikalische Zeit in einem Inertialsystem, setzt Zeiterleben voraus, hat aber sonst nichts mit menschlichem Zeiterlebnis zu tun! Poincare: Wert der Wissenschaft** 1902 Kap2 Maß der Zeit, XII Gleichzeitigkeit p30; H̃sü: In search of a physical theory of time 1992; Haber: Gefangen in Raum und Zeit. Die Grenzen der menschlichen Vorstellungskraft über das Wesen der Schöpfung 1975; **Aichelburg ed: Zeit im Wandel der Zeit**. Facetten der Physik 1988 hierin Aristoteles, Plotin, Augustinus, Kant, Mach, Boltzmann, Poincaré, Bergson, Russell, Minkowski, Reichenbach, Wiener, Piaget Gödel, Weizsäcker, Hund, Heckmann, Gardner, Prigogine, Stengers; **Brouwer: Ur-Intuition Zeit**, in Abgrenzung von Kant: Intuition Zeit ist keine permanente Eigenschaft der menschlichen Denkungsart, sondern ERST durch Ereigniss vermittelt, von dem an das Bewusstsein frei zu handeln vermag. In der naiven Phase zuvor werden weder Dinge/Raum noch Kausalität/Zeit wahrgenommen. Brouwer, Luitzen Egbertus Jan: Intuitionismus 1992; Weyl: Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik MathZ 10 1921 p39–79; Einstein: Über die spez und die allge RT 1956[21] p 110f; Gedächtnis braucht man nur in einer Welt, in der die Dinge von solcher Komplexität wahrgenommen werden, die Konstanz und Zufall (=subjektive Grobkörnung) erlauben. **M̃artin Korte: Wir sind Gedächtnis. Wie unsere Erinnerungen bestimmen, wer wir sind** 2017; Wissen schafft Struktur der Wahrnehmung. Ortsinfo ist lebensentscheidend. **Propriozeption = Körperlagesinn = 6. Sinn**. Gedächtnis erst erlaubt die Begriffe **Identität** und **Bewegung**, **Determiniertheit** und **Indeterminiertheit**. Siehe auch Seite 651, 648 und **Jeff Hawkins: Zukunft der Intelligenz** 2004 **Gerichtete Ereignisgraphen entsprechen der Zeiterfahrung des Menschen = Nacheinanderreihung**; **Sekundäre Ebenen des Zeitbegriffs** = Zeit als sekundäres Konstrukt: Hawkins: A thousand brains. A new theory of intelligence 2021; a] Physikalischer Zeitbegriff: Kognitiv basiert, daher ist Physik anthropozentrisch. Zweckmäßig für stimmige Welterklärung. b] Semantischer Zeitbegriff: hermeneutisch. Leben und Geschichte deutend. Auftrag, Sorge, Hoffnung, Sinnerfüllung, 'rechte' Zeit, Bedrohung, Vergänglichkeit, Tod, Zukunft. Siehe **Aschoff, Assmann, Eigen, Pöppel & Wheeler: Die Zeit - Dauer und Augenblick** 1983 p380 ff; **Chronos vs Kairos**. Hofmann: Kairos. Navigator der menschlichen Zeit 2010; Janich: Die Protophysik der Zeit 1969; Mittelstaedt: Der Zeitbegriff in der Physik 1976, 1989[3]; Gendolla: Zeit. Zur Geschichte der Zeiterfahrung. Vom Mythos zur Punktzeit 1992; **G̃endolla & Schulte: Was ist die Zeit?** 2012; **Liebscher: Eigenzeit und Weltalter**, In: Sitzungsberichte Leibniz-Sozietät der Wiss zu Berlin 139/140 2019 p185ff; Wittmann: Wenn die Zeit stehen bleibt. Psychologie der Grenzerfahrungen 2015; R̃enner ed: Time in Physics 2017; **Oliver Sacks: Der Tag, an dem mein Bein fortging 1985 p309**; Hierin Kommantare zu Kants Kritik der reinen Vernunft: unterscheidet zwischen **empirischen Anschauungen**, die uns durch Sinnesorgane gegeben werden, und **reinen Anschauungen**, die a priori vor jeder Erfahrung gegeben sind. Die beiden von Kant angenommenen **reinen Anschauungen sind Raum und Zeit**. Er behauptet nicht, dass sie den Dingen an sich anhaften, sondern

lediglich dem Gemüt. Raum und Zeit nennt Kant auch die „reinen Formen der Anschauung, Empfindung die Materie (KrV B 59 f.). Reine Anschauungen sind Vorstellungen, die zwar auf sinnliche Wahrnehmungen bezogen werden können, jedoch als solche frei sind von jeder sinnlichen Wahrnehmung, Empfindung oder Erfahrung. Eine Anschauung ist rein, „wenn der Vorstellung keine Empfindung beigemischt ist“ (KrV B 74). - Unter empirischer Anschauung versteht sich der sinnlich-rezeptive Anteil der Erkenntnis. Kant geht zudem davon aus, dass jede Erkenntnis auf das Zusammenspiel von Anschauungen und Begriffen angewiesen ist. „Das Mannigfaltige“, das in der Anschauung gegeben werde, brauche einer begrifflichen Ordnung, um zu Erkenntnis führen zu können. Andererseits bräuchten Begriffe Anschauungen, um nicht vollkommen leer zu sein. Natural philosphy and the theory of knowledge = epistemology: Kant's theory of synthetic knowledge a priori, vs. the modern idea that all mathematical knowledge is axiomatic and tautologic (Hilbert; Wiener Kreis). Leibniz's fragments on the computability of complex decisions, and its refutation in the Entscheidungsproblem (Turing, Church). Kant's concept of space and time as forms of pure intuition, vs. the empirical theory of space and time (Gauss, Riemann, Einstein; non-Euklidean geometry). Augustine's objection to the measurability of time, and its reflection by Husserl ('Zeitbewusstsein') **Husserl: Vorlesungen zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins 1928**. Boltzmann's derivation of an entropy increase, and the Zermelo-Poincare rejection. Hume's critique of the law of causality. Leibniz's monadology as 'a very different theory of atoms'. The concept of 'substance' in the middle ages and in empiricism and rationalism. Kant's 'thing in itself' vs. empirical reality vs. the 'first philosophy' of Descartes and Husserl, starting with the subject ('I') and consciousness. **Husserl 1859-1938** a] 1887 **Über den Begriff der Zahl. Psychologische Analysen** Philosophie der Arithmetik = psychologische Grundlegung der Mathematik = Bei Untersuchung der Struktur des Bewusstseins ist zwischen einem **„Akt des Bewusstseins“** und einem **„Phänomen, auf welches es sich richtet“** (das Objekt, auf das man sich intentional bezieht) zu unterscheiden. Das Wissen um das Wesen wäre durch die „Einklammerung“ aller Vorurteile über die Existenz einer Außenwelt möglich. Das entsprechende methodische Verfahren nennt Husserl Epoché, b] Logischen Untersuchungen = Kritik des zu dieser Zeit vorherrschenden Psychologismus = Gesetze der Logik als Ausdruck bloßer psychischer Gegebenheiten sah. Betrachtungen zur reinen Logik. Methode der „phänomenologischen Reduktion“ = Ansatz eines transzendentalen Idealismus. **Husserl: Formale und transzendentale Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft** 1929; Mariwalla: Dimensionality of Space-Time, JMathPhys12 p96 1971; Zu große Dimension ist für Vernetzungsgrad ein Fluch, weil Komplexität zu groß. **Ohne Zeit kein Anfang, kein Werden und keine Kausalität**. **Atkins: Schöpfung ohne Schöpfer 1981** p91-117; Ringförmige Black holes sind gesehen worden. Deren Entartung kann in 5D die AR Tbedrohen, da sie keinen Ereignishorizont, also nackte Singularität darstellen, haben müssen. Dort gilt ART nicht mehr. Kehlmann: Geister in Princeton 2012; Palle Yourgrau: Gödel, Einstein und die Folgen. Gödels erstaunlicher Beweis 1949: „In jedem Universum, das sich mittels der Relativitätstheorie beschreiben läßt, gibt es keine Zeit.“ Ein Satz wie ein Fallbeil, denn Gödel behauptete damit nichts Geringeres als die Nichtexistenz der Zeit. **Gödel: Zeit ist wie ein Zugfahrplan. Die Ereignisse sind die Stationen, an denen er hält. Aber egal wo du bist, die anderen Stationen gibt es noch. Sie verschwinden nicht. Und der Zug fährt im Kreis. Jeder Moment ist für immer.** Siehe auch Tiplers **Zeitmaschine** auf Seite 651 und Gödel auf Seite 704. Ist Zeit eine Illusion? **Landau & Lifschitz**: Klassische Feldtheorie §84 über Entfernungen und Zeitintervalle. Zeitintervalle, die an verschienen Ort genommen werden und gleichzeitig stattfinden, sind i.a. verschieden lang! Nicht alle Forscher sind der Ansicht, dass Zeit überhaupt als eigene Dimension existiert. Tatsächlich könnten fundamentalere Ebenen der Wirklichkeit völlig ohne sie auskommen. SdW Dossier 4/2011 p66-73: Raum, Zeit, Materie; **Weizsäcker:** Aufbau der Physik p454; SRT ist Konsequenz der Darstellung der Gruppe der unitären Transformationen des quantenmechanischen Zustandsraumes. **Zeitzonen:** Datumsgrenze hat nichts mit phys Zeit zu tun. Angezeigte Zeit am Ort φ_0 ist $\tau(t) = \frac{1}{2\pi}(2\pi t - \varphi_0) = t - \frac{\varphi_0}{2\pi}$. **Zeitdifferenz** nicht betroffen $\tau(t_2) - \tau(t_1) = t_2 - t_1$, **angezeigte Zeit** ortsabhängig $\tau(t) = t - \frac{\varphi(t)}{2\pi}$. Für $\dot{\varphi} = \omega > 0$ scheint Zeit langsamer zu laufen = Flug in Richtung Erddrehung. Bei $\omega > 2\pi$ läuft Zeit rückwärts = Sonne geht im Osten unter! Die Zeitzählung versagt, wenn man den Ursprung = Drehachse einmal umrundet hat. Bewegte Uhr geht einen Tag = 2π vor. Bewegung von Erde und Reisenden math positiv = nach osten. Für Wege, die den Ursprung einschließen gilt $\Delta = \oint_{\pm C} \operatorname{grad}\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \pm 2\pi$, weil Vektorfeld $\operatorname{grad}\varphi$ über $\vec{x} = \vec{0}$

nicht definiert ist. Bewegung passiert im nicht einfach zusammenhängende Gebiet. Arens p924; Eco: Die Insel des vorherigen Tages 1997; **Sawelski: Die Zeit und ihre Messung** 1972; Neue SI-Maßeinheiten Göbel & Siegner: The new international system of units 2019 7 Naturkonstanten: h, k_B, N_A, e, Kelvin, mol, Ampere. Frequenz der Hyperfeinabspaltung ^{133}Cs gibt Sekunde mit c Meter, Strahlungsäquivalent der Frequenz 540·10^{12} Hz. PhysJ18 2019 H11 p71f;

NI = Inerzialsystem: Newton 1-System. Impuls eines freien Teilchens bleibt erhalten. Trägheitsgesetzhöriges Bezugssystem. Liebscher: Betrachte simultane Orts-Aufzeichnung x von Prozessen α zu 'Zeiten' i, also $x^\alpha(i)$.Newton fand eine besonders einfache Regel, sein erstes Axiom: Die Registrierkurven der Bewegung unbeeinflusster Körper sind zueinander gerade: sie schneiden sich höchstens ein einziges Mal. Deshalb gibt es Koordinaten für Zeit und Raum, in denen diese Kurven das gewohnte Aussehen gerader Linien haben. Pfister: **Lange nach Newton** PhysJ15 H3 2016 p47-51; Treder: Relativität der Trägheit; **Zeitrichtung als Parallelität der Ausgleichsprozesse**. **Bezugssystem** ist stets ein starrer Körper, der auch nur in Näherung existiert. Zweckmäßige, der Symmetrie der Situation rechnungtragende Drahtgitter oder Koordinatenlinien, kurz Koordinatensysteme, machen die Beschreibung u.U. einfacher. **Einstein: Jede räumliche Beschreibung** von Geschehnissen bedient sich eines starren Körpers, auf den die Geschehnisse räumlich zu beziehen sind. Siehe **Einstein: Über die spezielle und die allgemeine RT** 1916 p12;

Galilei-Invarianz: Inerzialsysteme sind durch die Newtonschen Axiome nur bis auf Galilei-Transformation festgelegt. Man erreicht andere Raum-Zeit-Punkt durch Verschiebung um Konstanten, um festen Winkel dreht oder ...

$$\begin{pmatrix} \vec{r}' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & -\vec{v} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D\vec{r} - t\vec{v} - \vec{r}_0 \\ t - t_0 \end{pmatrix}$$

wobei $D \cdot D^T = 1$, also D orthogonale Matrix = quadratische, reelle Matrix, deren Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal bezüglich des Standardskalarprodukts sind. Damit ist die Inverse einer orthogonalen Matrix gleichzeitig ihre Transponierte, Liebscher: Theoret Physik p4. Obere Dreiecksmatrizen bilden ein Gruppoid. Die **Heisenberg-Gruppe** mit den Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

bildet eine nicht abel'sche Gruppe. Sattinger & Weaver: Lie groups 1985;

Analog zur Galilei-Transformation: Sei x Koordinate im alten=ruhenden KS $\{\vec{e}_x\}$. Dann ist $x' = x - v\,t$ die Koordinate im bewegten = neuen KS $\{\vec{e}_x{}'\}$

Denschlag: Relativitätstheorie kompakt 2012; **Postulate der SRT:** 1. **Relativitätsprinzip** = Bewegung lässt sich nur gegen die Umgebung feststellen! Kovarianzprinzip = physikalische Gesetze in allen Inerzialsystemen gleich. 2. **c = const** ist **absolut** in allen Inerzialsystemen. 3. **Gleichförmige Bewegung ist invariant** = Ruht ein Teilchen oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in einem Inerzialsystem, so bewegt sich in allen anderen Inerzialsystemen mit konstanter Geschwindigkeit oder ruht in einem Inerzialsystem. Konsistente Beschreibung obiger Feststellungen: **Prinzip der Lorentz-Invarianz rettet die Galilei'sche Relativität:** Der Ablauf eines Experiments in einem Inertialsystems hängt weder von der Orientierung des Systems noch von seiner Bewegung ab und folgt der Umrechnung: $x' = \gamma(x - v\,t)$ und $t' = \gamma(t - xv/c^2)$ Greiner 1 Kap30; Nolting 4; Pseudoeuklidische Räume: Lichtkegel besteht aus isotropen Vektoren der Länge Null. **Nichteuklidische Geometrie** = projektive, Riemannsche, hyperbolische, elliptische. Artzy: Geometry. An algebraic Approach 1992; Sommerville: Bibliography of non-Euclidian geometry 1911; **Synthetische Geometrie im Unterschied zur analytischen Gometrie**, in der algebraische Strukturen wie Körper und Vektorräume bereits zur Definition von geometrischen Strukturen verwendet werden = geht synthetische Geometrie von geometrischen Axiomen Punkte, Geraden, Ebenen und deren gegenseitigen Beziehungen und Theoremen aus und nutzt Konstruktionen. Beutelspacher: Einführung in die endliche Geometrie Bd 1 Blockpläne 1982; Dembrowski: Finite geometries 1968; **Parallelität & nicht-euklidische Geometrie**: **A] absolute Geometrie** (= was Eukid ursprünglich wollte

= Axiome der Verknüpfung (Inzidenzaxiomen) (H-I), der Anordnung (H-II), der Kongruenz (H-III) und der Stetigkeit) **ohne Parallelenaxiom** a la Bolyai, Lobatschewski, Gauß, Helmholtz, Tschernischewski. Tschernischewski: Ausgewählte philosophische Schriften 1953; **Zweieck** auf Kugel hat maximale Innenwinkelsumme von $720^o = 4\pi$. Geodätisches Dreieck max 2*90+360=$540^o = 3\pi$. Klein: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie 1928; **Blaschke: Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik** I, II, III 1942. Blaschke: Reden und Reisen eines Geometers 1957; **Blaschke: Kinematik und Quaternionen** 1960; **Mathematik** kann manchmal zwischen wahr und falsch unterscheiden, weil vom Menschen am weitesten entfernt. Jungen fehlen Kenntnisse und Erfahrungen, den Alten die Möglichkeiten und Einfälle; Callahan: **Euclid or Einstein.** A Proof of the Parallel Theory and a Critique of Metageometry 1931; Janich: **Euklids Erbe. Ist der Raum dreidimensional?** 1989; **Zacharias: Das Parallelenproblem und seine Lösung - eine Einf. in die hyperbolische nichteuklidische Geometrie** 1951, Kreis in hyperbolischer Geometrie p30ff: Spiegelt man einen Punkt A an sämtlichen Geraden eines Büschels, so ist der Ort der Spiegelbilder ein durch A gehender **Kreis**. Parallelen-Büschel macht Linie als entarten Kreis. Am Ende des Buches: Nach Poincare kann man messend nicht einfach zwischen nichteukidischer Welt und Gesetzen der Lichtausbreitung unterscheiden; Artzy: Geometry. An algebraic Approach 1992; Buchmann: Nichteuklidische Elementargeometrie 1975 Klein'sches Modell, Bierdeckelwelt = h-Welt = hyperbolische Welt = Heteroptera= Wanzen-Welt; Meschkowski: Nichteuklidische Geometrie 1954, 1971 Poincare-Modell der hyperbolischen Geometrie, h-Geraden als Halbkreise, Doppelverhältnis, elliptische Geometrie; S̃imon: Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung 1925; Bachmann: Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff 1959; Whittaker: Von Euklid zu Eddington. Zur Entwicklung unseres mod. physikal. Weltbildes 1952; P̃erron: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene 1962; Podehl & Reidemeister: Eine Begründung der ebenen elliptischen Geometrie 1924; Beide folgende Bücher von Klotzek sind nur Kalkül, für Anroiden bestens, tragen aber zum Verstehen nichts bei, also für eine Einführung völlig unbrauchbar. Klotzek: Euklidische und nichteuklidische Elementargeometrien 2001; Klotzek & Quaisser: Nichteuklidische Geometrie 1978; Kanitscheider: Vom absoluten Raum zur dynamischen Geometrie 1976; Klein: Riemann'sche Flächen. Vorlesungen Göttingen 1891; **B] Riemann:** Wie kann die **Idee der Parallelität im Kleinen**, z.B. auf der Kugel, gerettet werden? **Arnold: Meth Methoden der klassischen Mechanik** 1988 p303 Parallelentransport auf gekrümmten Flächen; Riemann: Wie Maxwells Feldtheorie = Nahwirkungstheorie die Fernwirkungstheorie = Coulomb-Gesetz ersetzt, so müssen Euklids oder Lobatschewskies Fernwirkungsgeormetrien durch Nahwirkungsgeometrie ersetzt werden! Man nehme Analysis zur Geometrie und kommt zur kovarianten Ableitung, zum Zusammenhang zwecks Parallelität und kommt auf Eichfelder, die man mit Kraftfeldern identifiziert und mit der Idee des Faserbündels begrifflich klar fassen kann, siehe Seite 249. Tomaschke: Projektive Geometrie BdI 1969; Projektive Geometrie BdII mit einer Einführung in die affine Geometrie 1972; **Bieberbach: Projektive Geometrie** 1931 Formuliere die Kreiseigenschaften so, dass auch sie auch standhalten für alle Kegelschnitte als weitere Zentralprojektionen des Kreises; Efimow: Höhere Geometrie 1960 projektive Geometrie p225, Gruppentheorie p393, Minkowski-Raum p425; Beutelspacher: **Projektive Geometrie**. Von den Grundlagen bis zu den Anwendungen 2004^2; **Courant & Robbins: Was ist Mathematik?** 1941, 2010^5 Kap4 p130ff; Mathematik ist beweisende Wissenschaft! **Davis & Hersch: Erfahrung Mathematik** 1981 p30-49; Enriques: Vorlesungen über **projektive Geometrie**: mit einem Einführungswort von Felix Klein 1916; **Anwendungen zur projektiven Geometrie** siehe **Faugeras: Three-dimensional computer vision** - A Connectionist Perspective on Development: A Geometric Viewpoint 1993; **Heffter: Grundlagen und analytischer Aufbau der projektiven, euklidischen, nichteuklidischen Geometrie** 1950^2, 1958^3; **Bonola: Die nichteuklidische Geometrie** 1921^3; Liebmann: Nichteuklidische Geometrie 1927; Klein: Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie 1928 p142ff Idee der pseudoeuklidischen Geometrie und der isotropen Vektoren; **Naber: The Geometry of Minkowski Spacetime** 1990, 2012 e-book; **Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität** 1964; **Klein: Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe**, PhysZeitschrift 12 14-27 1911 Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd19 (1910) im Netz; van der Waerden: Quantenmechanik p58 Drehgruppe und Lorentzgruppe. Kanitscheider: Vom absoluten

Raum zur dynamischen Geometrie 1976; Törnebohm: A Logical Analysis of the Theory of Relativity 1952; Nevanlinna & Kustaanheimo: Grundlagen der Geometrie 1988; **Schilling: Projektive und nichteuklidische Geometrie.** Bd1 Projektive in analytischer Behandlung. Bd2 Nichteuklidische Geometrie auf der Grundlage der projektiven Geometrie 1931; Baldus: Nichteuklidische Geometrie - hyperbolische Geometrie der Ebene 1927; Z̃eitler: Zeitler: Hyperbolische Geometrie 1970; Artzy: Geometry. An algebraic Approach 1992; Simon: Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung 1925; **Schilling: Die geodätischen Linien der Pseudosphäre und deren Umwelt** 1935[2]; **Schilling: Pseudosphärische hyperbolisch-sphärische und elliptisch-sphärische Geometrie** 1937; Whicher: Projektive Geometrie. Schöpferische Polaritäten in Raum und Zeit 1970; Hilbert & Cohn-Vossen: Anschauliche Geometrie 1932; Lenz: Vorlesungen über projektive Geometrie 1965 ein (mathematisch) sehr gutes Buch! **Blaschke**: Projektive Geometrie 1954; Blaschke: Ebene Kinematik 1956 56 Seiten; Blaschke: Griechische und anschauliche Geometrie 1953 56 Seiten; Blaschke: Kreis und Kugel 1956; Blaschke: Projektive Geometrie 1948; **Prüfer: Projektive Geometrie** 1953[2]; Efimow: Höhere Geometrie 1960 projektive Geometrie p225, Gruppentheorie p393, Minkowski-Raum p425; Locher-Ernst: Urphänomene der Geometrie 1937, 1980; Doehlemann: **Projektive Geometrie** 1912, 1922 **Büschel** als **Grundgebilde** 1. Stufe in Ebene: Gerade als Träger der **Punktreihe**. Gerade als Träger des **Ebenenbüschel**s=Buchseiten. **Strahlenbüschel**=Speichen eines Rades durch Mittelpunkt = Radnabe. **Bündel** als Grundgebilde 2. Stufe im Raum: **Strahlenbündel** und **Ebenenbündel**. **Mannigfaltigkeiten** von Punkten A, B, C, Strahlen/Geraden a, b, c, und Ebenen α, β, γ als Grundgebilde 3. Stufe im Raum; Operation des Schneidens von Grundgebilden gibt wieder Grundgebilde. Doehlemann: Geometrische Transformationen Bd1 Die projektiven Transformationen nebst ihren Anwendungen 1902, Bd2 Die quadratischen und höheren, birationalen Punkttransformationen 1908; Zacharias: **Projektive Geometrie** 1930; Grosche: Projektive Geometrie 2Bde 1957; Hessenberg: Grundlagen der Geometrie 1930; Benz: Ebene Geometrie 1997; **Geometrie** war von Geburt Erdvermessung und wurde als solche durch Gauß/ Riemann/Poincare/ Einstein/Minkowski/ Grossmann/ Weyl als solche wiedergeboren, zur Auferstehung gebracht, und erkannt als **Invariantentheorie**. Je nach Geometrie erkennt man die Dualität/Dichometrie von Invarianten/Multilinearformen/Formen/Funktionale / Tensorkalkül und Transformationsgruppen/Darsteller bei Bewegung. Die Invarianten Länge, Trägheitsmoment, Feldstärketensor sind Multilinearformen/Formen Metrisierung und Algebrisierung per Tensorkalkül durch kontravariante Koordinaten/ Raum/ Parallelprojektion und kovariante Koordinaten/ Dualraum / Orthogonalprojektion.. Umrechnung vonkontravarianten Koordinaten in kovariante Koordinaten per metrischem Tensor. Bei schiefwinkligen Koordinatensystemen betrachten! Ewald: Geometrie 1974; Redei: Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie 1965; C̃oxeter: Unvergängliche Geometrie 1963; C̃oxeter: Reelle projektive Geometrie der Ebene 1955; M̃inkowski: Geometrie der Zahlen 1912; Kunz: Ebene Geometrie. Axiomatische Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie 1976; Liebscher: Relativitätstheorie mit Zirkel und Lineal 1977, 1991. Liebscher:**The geometry of time** 2005; Locher-Ernst: Projektive Geometrie und die Grundlagen der Euklidischen und Polareuklidischen Geometrie 1980; Locher-Ernst: Raum und Gegenraum 1988; Casse: Projective geometry. An introduction 2009; Computer vision. Hartley & Zisserman: Multiple view geometry in computer vision 2008; Geometrische Mechanik. Rosenfeld & Jaglom: **Nichteuklidische Geometrien**, In: **Enzyklopädie der Elementarmathematik BdV** 1971 §3 p412; Boseck: Einführung in die Theorie der linearen Vektorräume 1973[3] p211; Preti & de Felice: Light cones and repulsive gravity, AmJPhys76 p671 2008; **Dombrowski: Wege in Euklidischen Ebenen. Kinematik der Speziellen Relativitätstheorie**. Eine Auswahl geometrischer Themen mit Beiträgen zu deren Ideen-Geschichte 1999;

Eine $n \times n$-Matrix R mit reellen Komponenten heißt **Drehmatrix**, wenn sie a) die Länge von Vektoren und die Winkel zwischen Vektoren erhält (ausgedrückt durch das **innere Produkt oder Skalarprodukt**), wenn also für alle Vektoren x und y des $\mathbb{R}^n$ gilt: $\langle Rx, Ry \rangle = \langle x, y \rangle$ und b) **orientierungserhaltend** ist, wenn also det $R = 1 > 0$ gilt. Scheck: Mechanik; Hanson: Rotations in three, four, and five dimensions. arxiv.org; Drehmatrizen sind orthogonale Matrizen mit der Determinante +1, also quadratische, reelle Matrix, deren

Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal bezüglich des Standardskalarprodukts sind. Damit ist die Inverse einer orthogonalen Matrix gleichzeitig ihre Transponierte. **Drehmatrix** ist - Greiner 1 Kap1 - für die Ebene Element einer Abelschen und Lie'schen Gruppe, der speziellen orthogonalen Gruppe in N Dimensionen $SO(2)$ mit einem unabhängigen Parameter, also der Ordnung 1. $SO(2)$ ist zu $U(1)$ isomorph. Die diskrete Fourier-Trafo ist $U(N)$. **Carmeli: Group theory and general relativity**. Representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field 1977; Darstellungsmatrix einer Drehung Arens p657 um φ mit normiertem Richtungsvektor $\hat{\omega}$ ist

$$R_{\hat{\omega},\varphi} = (\hat{\omega}\hat{\omega}^T) + \cos\varphi(E_3 - \hat{\omega}\hat{\omega}^T) + \sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist I die Einheitsmatrix und $\hat{e}_i$ sind die kanonischen Einheitsvektoren, dann lässt sich eine Drehmatrix im $\mathbb{R}^3$ darstellen als:

$$R_{\hat{n}}(\alpha) = (1 - \cos\alpha)\,[\hat{n} \otimes \hat{n}] + \cos\alpha\, I + \sin\alpha \sum_i (\hat{n} \times \hat{e}_i) \otimes \hat{e}_i$$

In Komponentendarstellung

$$[R_{\hat{n}}(\alpha)]_{ij} = (1 - \cos\alpha) n_i n_j + \cos\alpha\, \delta_{ij} + \sin\alpha\, \varepsilon_{ikj} n_k$$

Orthogonale Matrix A: Man hat deren **Inverse** praktisch auch immer vor sich, weil man **nur zu transponieren** braucht. Zeilen oder Spalten sind paarweise orthogonale Vektoren $D^{-1} = D^T$, bedeutet n^2 Skalarprodukte für Zeilen oder Spalten untereinander, gibt sofort $d_{\alpha\,i}\, d_{i\,\beta} = d_{\alpha\,i}\, d_{\beta\,i} = d_{i\,\alpha}\, d_{i\,\beta} = \delta_{\alpha\,\beta}$ oder $|A\,A^{-1}| = |A\,A^T| = |A|\,|A^T| = |A|^2 = |E| = 1$, wegen $\vec{x}' = D\vec{x}$ und $\vec{x}'^T = \vec{x}^T D^T$ und Längeninvarianz $\vec{x}'^T \cdot \vec{x}' = \vec{x}^T D^T\, D\vec{x}$.

$|D| = 1, D_\alpha\, D_\alpha^T = D_\alpha\, D_{-\alpha} = D_\alpha\, D_\alpha^{-1} = E$, D ist Drehmatrix. $|D| = -1$ dann stellt D eine Spiegelung dar. Eine $n \times n$-Matrix R mit reellen Komponenten heißt Drehmatrix = spezielle orthogonale Matrix, wenn sie a) die Länge von Vektoren und die Winkel zwischen Vektoren erhält, was der analytische Ausdruck für den **geometrischen Bewegungsbegriff** darstellt (ausgedrückt durch das Skalarprodukt), wenn also für alle Vektoren x und y des $\mathbb{R}^n$ gilt:$\langle Rx, Ry\rangle = \langle x, y\rangle$ und b) orientierungserhaltend also det $R = 1$ ist. Drehmatrizen sind orthogonale Matrizen mit der Determinante $+1 = |\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3| = \hat{e}'_1 \cdot (\hat{e}'_2 \times \hat{e}'_3) = d_{1m}\, d_{2n}\, d_{3p}\, \hat{e}_m \cdot (\hat{e}_n \times \hat{e}_p) = \epsilon_{mnp}\, d_{1m}\, d_{2n}\, d_{3p} = \det D$. $d_{jm} = \hat{e}'_j \cdot \hat{e}_m = \cos\varphi_{jm}$, wobei $\varphi_{jm} = \angle(\hat{e}'_j, \hat{e}_m)$ also Winkel zwischen der j-ten Achse des KD Σ' und der m-ten Achse des KS Σ bezeichnet. Beachte $\cos\varphi_{21} = \hat{e}'_2 \cdot \hat{e}_1 = \cos(\pi/2 + \varphi) = -\sin(\varphi)$.

Bewegung: **Festes KS/aktive Trafo - Abbildungs-Standpunkt des Mathematiker/Ingenieurs**, infinitesinale Transformation, Symmetrie, Noether - wie lauten die Körper-Koordinaten nach einer Zeit t mit $\alpha(t) = \omega t$? Wo landet der Körper nach seiner Bewegung im festen KS? Zülicke: QC Bd1 p304; Nernst & Schönfließ: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften 1919 p29 §14; Drehung eines Körpers passiert gemäß $\vec{r}' = D_\alpha\, \vec{r}$, wobei $\vec{r}'$ und $\vec{r}$ **verschiedene** Vektoren bezeichnen:

$$\textbf{Drehung des Körpers um Winkel } \alpha \textbf{ gegenüber fixem KS:} \quad D_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Deren **Inverse** ist einfach die **Transponierte**! **Anwendung:** Vorwärtskinematik serieller 6R-Roboter gemäß **Denavit-Hartenberg-Verfahren** mit 7 Gliedern und 6 Winkeln wegen 3 Koordinaten für Ursprungsverschiebung und 3 Eulerwinkel siehe Arens p668. Beachte Unterschied von **Vektor- und Punktkoordinaten!** Punktvektoraddition = Verschiebung mit $\vec{t}$ wird als nullte Koordinate zur 3-dimensionalen Drehmatrix D hinzugefügt = **erweiterte Transformationsmatrix** = 4-dimensionale Drehmatrix: $\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = D'\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{t} & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vec{t} + D\vec{x} \end{pmatrix}$ = Arens p666; **Nacheinanderausführung von Drehungen:** Drehungen eines Einheitsquadrats Q, das anfänglich in der $x - y$-Ebene liegt. Die Ecken des Quadrats werden durch

die Spalten der Matrix $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dargestellt. Die Drehungen um die Achsen zählen links um die jeweilige Achse positiv. a] Drehung des Einheitsquadrat per entsprechender Drehmatrizen erst 90° um die z-Achse und dann 90° um die y-Achse. Matrixmultiplikation gemäß $Q_a = D_y(90^o)\, D_z(90^o)\, Q$. b] Drehung des Einheitsquadrat mittels entsprechender Drehmatrizen erst 90° um die y-Achse und dann 90° um die z-Achse: $Q_b = D_z(90^o)\, D_y(90^o)\, Q$.

Koordinatentransformation:

Budo: Mechanik p574ff; **Greiner: Bd1** p25f; Brunner: Mathematik für Chemiker p201ff; **Feste Lage des Körpers/passive Trafo** bei Drehung des **Koordinatensystems** - gemäß Wigner unlogischer **Standpunkt des Physikers**, Kovarianz-Idee - der Körper ist fest im Raum, wie ändern sich seine Koordinaten bei Drehung des KS? Unter welchen Koordinaten erscheint der Körper bei gedrehtem KS? Wichtig für Teilchenbewegung im Karussel, siehe Coriolis-Kraft. Komponenten desselben Vektors im gedrehten Achsenkreuz. Bei $\vec{r}' = D_\alpha \vec{r}$ bezeichnen $\vec{r}'$ und $\vec{r}$ **ein und denselben** Vektor:

Koordinatentrafo bei Drehung des KS um Winkel α bei fixem Körper: $K_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Herleitung aus Sicht oder Fixierung des alten KS: a] Stelle die neuen Koordinaten x', y', für das um α gedrehte Koordinatensystem als Funktion der alten x, y dar. $x'(x,y) = x'^{(1)}(\alpha, x) + x'^{(2)}(\alpha, y)$. Aus Skizze liest man durch Parallelen und Orthogonalprojektion $\cos\alpha = \dfrac{x'^{(1)}}{x}$ und $\sin\alpha = \dfrac{x'^{(2)}}{y}$ ab, Lang & Pucker: Math Methoden der Physik p179. Analog gilt $y'(x,y) = -y'^{(1)}(\alpha, x) + y'^{(2)}(\alpha, y)$ mit $\cos\alpha = \dfrac{y'^{(1)}}{y}$ und $\sin\alpha = \dfrac{y'^{(2)}}{x}$ aus der Skizze, siehe Riley, Hobson, Bence: Math methods for physics and engineering p678. b] Für die Transformation der Basisvektoren gilt die gleiche Drehmatrix bei der Darstellung der um α gedrehten neuen Basisvektoren $\vec{e}_x' = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y$ und $\vec{e}_y' = c\vec{e}_x + d\vec{e}_y$ als Funktion der alten. Mit $\vec{e}_x' \cdot \vec{e}_x = a = \cos\alpha$, $\vec{e}_x' \cdot \vec{e}_y = b = \cos(90-\alpha) = +\sin\alpha$, und $\vec{e}_y' \cdot \vec{e}_x = c = \cos(90+\alpha) = -\sin\alpha$, $\vec{e}_y' \cdot \vec{e}_y = d = \cos\alpha$. **sin (90+x) = +cos x, sin (90-x) = +cos x, aber cos (90-x) = +sin x, cos (90+x) = -sin x.** Die kartesischen Koordinaten transformieren sich bei einer **Basisdrehung** wie die Basisvektoren. **Drehspiegelung** siehe Boseck: Theorie lin Vektorräume p209

$$DS(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Beachte die Doppelrolle der Matrizen: Einmal **Behälter von Basis-Vektoren** zwecks **Koordinatentransformation** und ein anderes Mal als **Transformations-Matrix für eine Abbildungs-Vorschrift** zwecks **Bewegung**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\hat{e}_{x'}, \hat{e}_{y'}) = K_{\pi/2}\,(\hat{e}_x, \hat{e}_y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{93}$$

Aber bei Drehung um y:

$$D_y(\beta) = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

Verschiebung eines Funktionsgraphen $f(x)$ nach rechts um $a > 0$ bedeutet eine Koordinatentransformation $x' = x - a$ also $f'(x) = f(x-a)$. Analog bedeutet Drehung/Rotation $\alpha > 0$, also entgegen Uhrzeiger eine Drehung des Arguments im Uhrzeiger.

Drehung eines Skalarfeldes$\Phi \in \mathbb{R}$ über $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ um Winkel α per Rotationsmatrix/Drehmatrix $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ bedeutet $\Phi(\vec{x})$ wird zu $\Phi_R(\vec{x}) = \Phi(R^{-1}\vec{x})$. **Drehung eines Vektorfeldes** $\vec{E} \in \mathbb{R}^2$ über $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ um Winkel α per Rotationsmatrix/Drehmatrix R_α bedeutet $\vec{E}(\vec{x})$ wird zu $\vec{E}_R(\vec{x}) = R_\alpha \vec{E}(R^{-1}\vec{x})$.

Die $SO(3)$ kann als Gruppe aller 3×3-Matrizen dargestellt werden, die auf alle Elemente des $\mathbb{R}^3$ wirkt, sie ist die einfachste echte Lie'sche Gruppe. Hat Ordnung 3, 3 **Eulerwinkel:** Drehung um $z, x/y, z$ zur Orientierung eines starren Körpers im Raum. Luftfahrt: Roll-(Querneigung), Nick-(Längsneigung) und Gierwinkel = Steuerkurs = Azimutwinkel. Wie viele Rotationsfreiheitsgrade hat starrer Körper im $\mathbb{R}^n$? **Orthogonale Gruppe** $O_n(\mathbb{R})$. Darstellung von $n\times n$-Matrizen mit reellen Einträgen ist eine $\frac{n}{2}(n-1)-$dimensionale Gruppe. Es gibt im n-dimensionalen Raum $d_n = \binom{n}{2} = \frac{n}{2}(n-1)$ Drehebenen mit der zugehörigen Drehgruppe SO(n) = **Rotationsgruppe**! **Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel** 2014 p72f; Mit Verschiebung $v_n = n$ gibt es $f_n = v_n + d_n = \frac{n}{2}(n+1)$ Freiheitsgrade. Treder: Relativität und Kosmos 1970 p16; **Cracknell: Angewandte Gruppentheorie**. Einführung in die Originaltexte WTB 84 1971 = DIE Einführung mit Literaturtipps p214ff! Drehgruppe = **Rotationsgruppe**, Eulerwinkel p78ff;

Änderung des Ortsvektors $\vec{r}_i$ bei Drehung um $\hat{n}$ = Richtung der Ebene in der in j-Richtung gegangen wird, ist $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \hat{n}\times\vec{r}_i$ zeigt in tangenziale j Richtung. **Infinitesimale Drehung**

$$\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{d}\varphi & 0 \\ -\mathrm{d}\varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist kommutativ. Goldstein: Mechanik p68 und 173. $x_i' = x_i + \epsilon_{ij}\,x_j = (\delta_{ij}+\epsilon_{ij})\,x_j$ kurz $\vec{x}' = (\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon})\vec{x}$. Denn $(\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon}_1)(\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon}_2) = \mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon}_1+\boldsymbol{\epsilon}_2 = (\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon}_2)(\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon}_1)$ **Daher kann infinitesimale Drehung durch Vektoren dargestellt werden**, siehe Seite 212. Wegen $A^{-1} = \mathbb{I}-\boldsymbol{\epsilon} = A^T$ gilt $A\,A^{-1} = (\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon})\,(\mathbb{I}-\tilde{\boldsymbol{\epsilon}})$ folgt $\boldsymbol{\epsilon} = -\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$ Die infinitesimale Matrix $\boldsymbol{\epsilon}$ muss also durch eine **antisymmetrische Matrix** dargestellt werden

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}\Omega_3 & -\mathrm{d}\Omega_2 \\ -\mathrm{d}\Omega_3 & 0 & \mathrm{d}\Omega_1 \\ \mathrm{d}\Omega_2 & -\mathrm{d}\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Obige Drehung per Matrix $\vec{r}' = (\mathbb{I}+\boldsymbol{\epsilon})\vec{r}$ kann wegen $\vec{r}'-\vec{r} = \mathrm{d}\vec{r}' = \boldsymbol{\epsilon}\,\vec{r}$ auch als Vektorprodukt geschrieben werden $\vec{r}' = \vec{r}\times\mathrm{d}\vec{\Omega}$.

Darstellungsmatrizen: Linearen Abbildungen $\varphi : V \to W$ zwischen Vektoräumen wird nach Basiswahl Darstellungsmatrix A der linearen Abbildung bezüglich der gewählten Basis zugeordnet. Betrachte statt $\vec{v}\in V$ den zugeordneten Koordinatenvektor ${}_B\vec{v}$ als Spaltenvektor. Dann bekommt man das Bild der linearen Abbildung $\varphi(\vec{v})$ als Multiplikation von Matrix A und Koordinatenvektor ${}_B\vec{v}$. Dann liefert $\vec{v}^T = (v_1,\ldots,v_n)\mathbb{R}^n$ den Ausdruck $\varphi(\vec{v}) = \varphi(v_1\hat{e}_1+\cdots+v_n\hat{e}_n) = v_1\varphi(\hat{e}_1)+\cdots+v_n\varphi(\hat{e}_n)\,\vec{v}^T = A\,\vec{v}^T = \varphi_A(\vec{v}^T)$ Wegen $\varphi_A(\hat{e}_i) = A\,\hat{e}_i = \hat{e}_i'$ ist die i-te Spalte der Matrix A das Bild des i-ten Standardbasis-Einheitsvektors $\hat{e}_i$. Bestimmung von Darstellungsmatrizen Arens p579. Boseck: Vektorräume; Jänich: Mathematik 1; **Boseck: Grundlagen der Darstellungstheorie** 1973; Jänich: Lineare Algebra; Fulton & Harris: Representation Theory. A First Course 1991; Müller: Darstellungstheorie 1980; Baston: The Penrose Transform: Its Interaction With Representation Theory 2017;

Linearität bedeutet Zusammensetzbarkeit = Assoziativität! **Weyl:** Linearität bringt den Begriff der **geometrischen Ähnlichkeit** zum Ausdruck. **Antilinearer Operator** X, Y komplexe Vektorräume. Operator T von X in Y antilinearer Operator, wenn für alle $x, y\in X$ und $\lambda\in\mathbb{C}$: T **antihomogen:** $T(\lambda x) = \overline{\lambda}T(x)$ und T **additiv:** $T(x+y) = T(x)+T(y)$. Speziell **Kosinus-Satz:** Für beliebige $\lambda\neq 0$ und $\vec{A}' = \lambda\vec{A}$ gilt $\cos(\vec{A},\vec{B}) = \cos(\vec{A}',\vec{B}') = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB} = \frac{\vec{A}'\cdot\vec{B}'}{A'B'} = \frac{\lambda^2 A_i B^i}{\sqrt{\lambda^2 A_i A^i}\sqrt{\lambda^2 B_i B^i}}$. $\vec{x}'' = B\vec{x}', \vec{x}' = A\vec{x}$ gibt $\vec{x}'' = B\,A\vec{x}$ also $x_i'' = \beta_{ij}\alpha_{jk}x_k$ YYYY Das Matrixelement der i-ten Zeile und der k-ten Spalte der **Produkt-Matrix** hängt nur von der i-ten Zeile des ersten Faktors und der k-ten Spalte des zweiten Faktors, nämlich ihrem Skalar-Produkt, ab.

Zusammenhang verschiedener **Darstellungsmatrizen ein und derselben linearen Abbildung** bezüglich verschiedener Basen: **Ähnliche Matrizen** $A, B = C^{-1}\,A\,C$ **Matrizengleichungen bleiben gültig**, wenn

jede Matrix dieser Operation unterworfen wird: Aus $\alpha\,\beta = \gamma$ wird $\sigma^{-1}\alpha\sigma\sigma^{-1}\beta\sigma = \sigma^{-1}\gamma\sigma$. **Spur-Erhaltung**, also Erhaltung der Summe der Diagonalelemente: $\beta^{-1}\alpha\beta = \beta\beta^{-1}\alpha = \alpha$, weil **Diagonal-Matrizen** eine abel'sche Gruppe bilden. **Cullen: Matrices and linear forms** 1972[2]; Speziell $1 + 2\cos\varphi = \text{const}$ bei **Drehung** im $\mathbb{R}^3$. **Alles Elementare zur Matrizenrechnung findet sich bei Wigner: Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren 1931**; Tapp: Matrix groups for undergruduates 2005; Gantmacher & Krejn: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanisher Systeme 1960;

Givens-Rotation/Transformation bei Matrix zur Wegdrehung von Komponenten (Brandt, Plato). **Matrizen in Python:** http://mbi-wiki. uni-wuppertal. de/interaktive-tutorials/matrizenrechnung/ **Zeilen-Matrix** M=matrix([[pi,2,-7]]). **Doppelklammer** über Liste-Befehl beseitigen mit [float(h) for h in list(M. transpose())], wobei matrix in float umgesetzt wird. **Fibonacci-Zahlen:** 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... als Summe der beiden Vorgänger gemäß F = [1,1] for i in range(5): Neu = F[-2]+(F[-1]) F.append(Neu) print(Neu,F) oder per Matrixmultiplikation, speziell im Eigenraum der Matrix A mittels **Ähnlichkeitstransformation**: $S^{-1}\,A\,S$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}; S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.25 & 1.25 \\ -0.5 & 1.25 & -0.25 \end{pmatrix} \tag{94}$$

Verallgemeinerte Fibonacci-Zahlen zwecks $\sqrt{2}$-Berechnung mit $a = b = 1$ aus den Eigenwerten $\lambda_\pm = a \pm \sqrt{a^2 + b} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$ der Abbildungmatrix der Gleichung $F_{n+1} = 2aF_n + bF_{n-1}$:

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

Anwendung des Ähnlichkeitstransformation bei Berechung der **Fibonacci-Zahlen**, Arens p534, $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{hat Eigenwerte} \quad \lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

A=matrix([[0,1],[1,1]]) a=matrix([[1],[1]]) B=A for i in range(N): B=B*A b=B*a print (b)

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}, \quad S^{-1} := -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} =: D$$

$$A^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

Der **Ganzteil** von a_n ist n-te Fibonacci-Zahl. **Ähnliche Matrizen** A, B

$$B = C^{-1}\,A\,C$$

$(\lambda, \vec{x})$ Eigenpaar von $A \Leftrightarrow (\lambda, C^{-1}\vec{x})$ Eigenpaar von $C^{-1}\,A\,C$. A, B ähnlich $\Rightarrow p_A = p_B$ **Geometrische Deutung:** Die lineare Abb $\vec{x} \to A\,\vec{x}$ bildet einen Eigenvektor $\vec{x}$ zum Eigenwert λ von A in das λ-fache dieses Eigenvektors ab: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Jeder Eigenraum wird auf sich abgebildet: $\vec{x} \in L_\lambda \Rightarrow A\vec{x} = \lambda\vec{\in}L_\lambda$. Die Matrix besitzt n lu Eigenvektoren $\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n\}$ zu den Eigenwerten $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \Leftrightarrow X^{-1}\,A\,X = D$ mit $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $X = (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \Leftrightarrow$ alle geometrischen Vielfachheiten sind gleich den algebraischen $\Leftrightarrow A$ ist diagonalisierbar oder diagonalähnlich $\Leftrightarrow A$ ist ähnlich zur Diagonalmatrix D mit der Transformationsmatrix X. Bärwolf: Num Mathe; **Börm & Mehl: Numerical Methods for Eigenvalue Problems** 2012 ebook;

Matrix-Klassen: Orthogonale/hermitesche Matrizen haben orthonormale Zeilen/Spalten, ihre Inversen sind einfach die Transponierten/Adjungierten und lassen als Operatoren Längen, Skalarprodukte, Normen oder Multilinearformen invariant. $A = -A$ **Nullmatrix** $A = -A$; **symmetrisch** $A = A^T$ oder $a_{ij} = a_{ji}$; **antisymmetrisch** $A = -A^T$ oder $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$; **orthogonal** $A^{-1} = A^T$ oder $\sum_k a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij}$; **reelle Matrix** $A = A^*$ oder $a^*_{ij} = a_{ij}$; **imaginäre Matrix** $A = -A^*$ oder $a^*_{ij} = -a_{ij}$; **selbstadjungiert, hermitesch** $A = A^+ = A^{T^*} = A^{*^T}$ oder $a^*_{ij} = a_{ji}$; **anti-hermitesch, alternierend, schief-hermitesch** $A = -A^+$ oder $a^*_{ij} = -a_{ji}$; **unitär** $A^{-1} = A^+$ oder $\sum_k a_{ik}a^*_{jk} = \delta_{ij}$, $A^2 = E$, $x \to -x$, $x \to \frac{1}{x}$, Konjugation $z \to z^*$, Transponierung $A \to A^T$; Quaternionen-Konjugation: $x \to \bar{x} = x_0 - x_1\mathrm{i} - x_2\mathrm{j} - x_3\mathrm{k}$, also $\overline{\overline{x \cdot y}} = \overline{\bar{y} \cdot \bar{x}} = x \cdot y$ **involutorisch=selbst-invers** $\sum_k a_{ik}a_{kj} = \delta_{ij}$; $A^2 = -E$ **halb-involutorisch** $\sum_k a_{ik}a_{kj} = -\delta_{ij}$. **Unitäre Matrizen** U sind gemäß $V^{-1}UV = D$ diagonalisierbar, wobei die Diagonalmatrix D die Eigenwerte und die diagonalisierenden Matrizen V die Eigenvektoren tragen. Die Eigenwerte haben den Betrag 1. Charakteristisches Polynom der 2d-Drehmatrix ist $\lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 stackrel!=0$ also Eigenwerte $\lambda_\pm = -\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ mit Betrag 1.

Die Begriffe hermitesch und unitär sind im Komplexen das Pendant zu symmetrisch und orthogonal. Arens p604; Reelle symmetrische und hermitesche/selbstadjungierte Matrizen $A = A^+ = A^{*T}$ geben reelle Eigenwerte, orthogonale Eigenvektoren und sind diagonalisierbar.

Gourdin: Unitary symmetries and their application to high energy physics 1967; Carruthers: Introduction to unitary symmetry 1966; Kisak: Particle Physics & Representation Theory. Mathematical Symmetries of The Universe 2016;

A symmetrisch $\Leftrightarrow$ es gibt eine reelle **orthogonale Matrix** $U(U^TU = E_n, \Leftrightarrow U^{-1} = U^T)$ aus Eigenvektoren und eine reelle Diagonalmatrix $D = U^T AU$. Ist A symmetrisch ($\Leftrightarrow A = A^T$), so gilt: 1. Alle Eigenwerte reell und $p_A(\lambda)$ zerfällt in Linearfaktoren. 2. Eigenvektoren (Spalten von U) zu verschiedenen Eigenwerten sind nicht nur linear unabhängig, sondern sogar orthogonal. A **normal** $\Leftrightarrow$ es gibt **unitäre Matrix** $U(\Leftrightarrow U^{-1} = U^+ := (U^T)^*$, **Plus** bedeutet konjugiert komplex von transponierter Matrix!) und eine Diagonalmatrix D mit $U^+AU = D$. Genau die normalen Matrizen (A **normal** $\Leftrightarrow AA^+ = A^+A$) sind unitär diagonalisierbar. Realteil einer hermiteschen Matrix ist symmetrisch. A hermitesch, dann ist iA schiefhermitesch. Hauptdiagonalelemente einer hermiteschen Matrix sind reell. Hermitesche Matrizen sind selbstadjungiert bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{C}^n$: Für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ Hermitesche Matrizen lassen sich immer diagonalisieren. Reelle symmetrische Matrizen lassen sich reell diagonalisieren. Die Eigenwerte einer hermiteschen Matrix sind reell. **PT-symmetrische Hamilton-Operatoren**. Intro siehe Making Sense of Non-hermitian Hamiltonians Bender & Mannheim: arXiv:0902.1365v1 [hep-th] 9 Feb 2009 PT symmetry and necessary and sufficient conditions for the reality of energy eigenvalues; Bender, Besseghir,†Jones,‡Xinghui Yin: Small$-\epsilon$ behavior of the Non-Hermitian PT -Symmetric Hamiltonian $H = p2 + x2(ix)^\epsilon$ arXiv:0906.1291v1 [hep-th] 6 Jun 2009; Bender, Gianfreda, Klevansky: Systems of coupled PT -symmetric oscillators arXiv:1406.5967v1 [math-ph] 23 Jun 2014; Ahmed, Ghosh, Nathan: A new solvable complex PT-symmetric potential arXiv:1502.04838v1 [quant-ph] 17 Feb 2015; Bender, Feinberg, Hook, Weir: Chaotic systems in complex phase space arXiv:0809.1975v1 [hep-th] 11 Sep 2008; Bender, Holm, Hook: Complex trajectories of a simple pendulum JPhysAMathTheor 40 (2007) F81–F89; Bender et al: Obs of PT phase transition in a simple mechanical system arXiv:1206.4972v1 [math-ph] 21 Jun 2012 $H = p^2 + x^2(ix)^\epsilon$ ist für $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus 0$ zwar nicht Dirac-hermitesch, $H = \begin{pmatrix} ae^{i\varphi} & 0 \\ 0 & ae^{-i\varphi} \end{pmatrix} \neq H^+$, aber PT-invariant! Eigenwerte $\lambda_\pm = ae^{\pm i\varphi}$, speziell $\lambda_\pm(\varphi = 0, \pi) = \pm 1$. Beachte: Zeitspiegelung bedeutet, dass i das Vorzeichen wechselt. Für $\epsilon = 0$ und $\epsilon = 1$ haben $H = p^2 + ix^3$ und $H = p^2 - x^4$ sogar reelle, positive und diskrete Eigenwerte! **PT-invariante Operatoren** sind zwar nicht-hermitesch, haben aber dennoch reelle Eigenwerte. Es existiert eine Orthogonalbasis aus Eigenvektoren. Die Determinante einer hermiteschen Matrix ist reell. Die Summe zweier hermitescher Matrizen ist hermitesch. Das Produkt zweier hermitescher Matrizen ist hermitesch, wenn sie kommutieren. Die Potenzen A^k mit $k \geq 0$ und bei Invertierbarkeit auch die mit $k < 0$ sind hermitesch. Eine beliebige quadratische Matrix C kann eindeutig als die Summe einer hermiteschen Matrix A und einer schiefhermiteschen Matrix B geschrieben werden. Wilkinson & Reinsch: Linear algebra 1971;

Wilkinson: The algebraic eigenvalue problem 1965; Die **hermite'schen** Matrizen $A, B, A \cdot B \in G$ bilden genau dann eine Gruppe, wenn sie kommutieren $[A, B] = 0$, also **kein Vertauschungsrest**. Denn dann folgt aus $A = A^+, B = B^+$ und $A \cdot B = (A \cdot B)^+ = B^+ \cdot A^+ = B \cdot A$ folgt verschwindender Kommutator/verschwindender Vertauschungsrest und umgekehrt. **Hermite'sche** ($\Leftrightarrow A = A^+$) und zugleich **unitäre Matrizen** ($\Leftrightarrow A^{-1} = A^+$), die unitäre Matrix

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = A^+ = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \neq A$$

ist nicht hermite'sch/selbstadjungiert, wie die **Einheitsmatrix** und spurfreien **Pauli-Matrizen** sind **normale Matrizen**

$$\sigma_0 = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die **Einheitsmatrix** hat den **doppelten Eigenwert** $\lambda(E) = 1$. Für sie ist **jede Richtung als Eigenrichtung akzeptabel** $v_1(E) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und speziell auch den zu ihm orthogonalen $v_2(E) = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Die **Pauli-Matrizen** haben die Eigenwerte $\lambda(\sigma_i) = \pm 1$ mit den Eigenrichtungen $v_+(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_-(\sigma_x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_+(\sigma_y) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $v_-(\sigma_y) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix}$, $v_+(\sigma_z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_-(\sigma_z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die **Pauli-Matrizen bilden einen reellen 3d-Vektorraum** gemäß $\vec{v} = v_1\sigma_x + v_2\sigma_x + v_3\sigma_z$ und sind unitär diagonalisierbar, alle Eigenwerte reell! **Pauli-Gleichung:** $\mathrm{i}\,\hbar\,\partial_t\,\varphi = \underbrace{\left(\frac{(\vec{p} - q\vec{A})^2}{2\,m} + q\,\phi\right)}_{\text{Hamiltonoperator ohne Spin}} \varphi - g \underbrace{\frac{q\,\hbar}{2\,m}\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{B}}_{\text{Spin-Magnetfeld}} \varphi$ mit der zweikomponentigen Ortswellenfunktion, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_\uparrow(t, \vec{x}) \\ \varphi_\downarrow(t, \vec{x}) \end{pmatrix}$. Nach Caley kann der $\mathbb{R}^3$ auf SU(2), also die Menge aller Drehungen (weil lineare und längentreue Abbildung!) beschreibenden komplexen 2×2-Matrizen gemäß

$$(v_1, v_2, v_3)^T \longrightarrow V = \begin{pmatrix} v_3 & v_1 - iv_2 \\ v_1 + iv_2 & -v_3 \end{pmatrix}$$

abgebildet werden, wobei die Länge $||\vec{v}^2|| = -\det V$ erhalten bleibt, SO(3) und SU(2) also einen 2-zu-1-Gruppenisomorphismus bilden. Straumann: QM 2002 p148. SU(2) ist universelle Überlagerungsgruppe von SO(3). SU(2) homöomorph zur 3-Sphäre S^3 und damit einfach zusammenhängend. T: SU(2)→ SO(3). $\vec{v} \to \vec{v}' = R\vec{v} = f^{-1} \circ A \circ f\vec{v}$. σ_x **spiegelt an Winkelhalbierender** $y = x$, σ_y **dreht in Gauß-Ebene um** $\mathbf{90^0}$ **entgegen Uhrzeiger** und σ_z **spiegelt an** x**-Achse.** Die Pauli-Matrizen $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ bilden eine Basis der 3-dimensionalen **Lie-Algebra** su(2) und erfüllen die Algebra

$$\sigma_i\,\sigma_j = \delta_{ij}\sigma_0 + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\sigma_k \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3\,,$$

bis auf einen Faktor 2 die Drehimpulsalgebra

$$[\sigma_i\,, \sigma_j] = \sigma_i\,\sigma_j - \sigma_j\,\sigma_i = 2\,\mathrm{i}\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\sigma_k \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3,$$

und die Clifford- oder Dirac-Algebra $\mathrm{Cl}(0, 3, \mathbb{R})$

$$\{\sigma_i\,, \sigma_j\} = \sigma_i\,\sigma_j + \sigma_j\,\sigma_i = 2\,\delta_{ij}\sigma_0 \quad \text{für } i, j = 1, 2, 3.$$

Nicht assoziativ! Pauli-Matrizen können neben der Darstellung als Matrizen mit Hilfe der Dirac-Notation dargestellt werden: Dabei können für die Linearkombination entweder die Standard-Basisvektoren oder die Eigenvektoren der Pauli-Matrizen verwendet werden:

$$\sigma_0 -, \sigma_3 - \text{Eigen} - \text{Vektoren}: \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 : |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 : |\phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}, |\phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Die Gruppe SU(2) ist topologisch isomorph mit der Untergruppe von SO(4), welche aus allen Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

besteht, wo a, b, c und d reelle Zahlen sind, welche $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ erfüllen. Straumann: QM 2002 p353; Paulis Behandlung von H_2^+ mittels **Runge-Lenz-Vektor** mit SO(4) siehe Münster: QM;

Zugeordnete Drehgruppe, Zusammenhang mit Spin-1/2-Systemen. Die lineare Hülle der mit i multiplizierten Pauli-Matrizen $\mathrm{i}\,\sigma_1, \mathrm{i}\,\sigma_2, \mathrm{i}\,\sigma_3$ ist mit der üblichen Matrizenmultiplikation eine Lie-Algebra, und aufgrund der mit $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} := n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 + n_3\sigma_3$ für jeden Einheitsvektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ und alle reellen α geltenden Identität

$$\exp\Big(-\mathrm{i}\,\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{n} \cdot \vec{\sigma}\Big) = \sigma_0 \cos\tfrac{\alpha}{2} - \mathrm{i}\,(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\tfrac{\alpha}{2}$$

sind diese drei Matrizen die Generatoren der komplexen Drehgruppe SU(2). Nicht assoziativ! Der Faktor 1/2 in der obigen Gleichung ist mathematisch verzichtbar, aber physikalisch nötig, da die Matrizen $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i,\ i \in \{1, 2, 3\}$ in der QM Operatoren darstellen, die die Veränderung des Zustands eines Spin-1/2-Systems der verschiedenen Spinkomponenten beschreiben. Andererseits beschreibt die durch den Exponentialausdruck gegebene Matrix die Veränderung des Spinzustands bei einer räumlichen Drehung. α entspricht dabei dem gerichteten Drehwinkel um die durch den Einheitsvektor $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ gegebene orientierte Drehachse. Für $\alpha = 2\pi$ ergibt sich $\exp\big(-\mathrm{i}\,\pi\,\vec{n} \cdot \vec{\sigma}\big) = -\sigma_0$; d.h. ein Spin-1/2-System wird nicht durch Drehung um den Winkel 2π, sondern erst durch Drehung um den Winkel 4π wieder in den Ausgangszustand übergeführt („Spinordrehungen“).

Stewart: Lie algebras 1970; Amayo & Stewart: Infinite-dimensional Lie algebras 1974; **Lie-Algebra** L ist Vektorraum über einem **Feld** F, auf dem das **Produkt** [,] - auch **Lie-Klammer** oder **Kommutator** mit folgenden Eigenschaften definiert ist, Euler & Steeb: Continuous symmetries, Lie algebras and differential equations 1992 Kap5 p53; **Steeb: Problems in theoretical physics I & II** 1990; X, Y, Z seien **Funktionen der generalisierten Koordinaten** q_k **und der kanonisch konjugierten Impulse** p_k. f sei die Anzahl der Freiheitsgrade. A1: **Abgeschlossenheit** $X, Y \in L$, so $[X, Y] \in L$. Da man in Vektorräumen jedes Element als Linearkombination bezüglich einer Basis darstellen kann, existiert für alle $i, j \in 1, \ldots n$ die Zerlegung $[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$ des Produkts der Lie-Algebra. Die n^3 Konstanten $c_{ij}^k \in \mathbb{C}$ nennt man **Strukturkonstanten der Lie-Algebra** V. Bei der Drehimpulsalgebra in der Basis der Kugelflächenfunktionen sind es die Clebsch-Gordan-Koeffizienten. A2: **Bilinearität** $[X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z]$ für $\alpha, \beta \in F$ und $X, Y, Z \in L$. A3: **Antisymmetrie** $[X, Y] = -[Y, X]$ A4: **Ableitungsregel** oder **Jacobi-Identität** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$. L ist reelle/komplexe Lie-Algebra, falls das Feld $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Georgi: Lie Algebras in particle physics, from isospin to unified theories

1982, 1999[2]; Auf einem **Feld, Field** $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder **Quaternionen**, Hamiltons Erfindung $\mathbb{H}$, kann man sich frei bewegen, weil es halt die Körpereigenschaft erlauben. Zaddach 1994 pX; Billingsley: Probability and measure 2007[3] p19 Statt Feld wird oft der Begriff Algebra benutzt. **Cullen: Matrices and linear forms** 1972[2]; **Nicht assoziativ! Nicht-kommutative,**

aber assoziative Strukturen werden durch das Lie-Produkt oder den Klammerausdruck nicht-assoziativ. Klammerausdruck oder antisymmetrischer Tensor verallgemeinern das **Vektorprodukt** gemäß $[x_i, x_j] = \epsilon_{ijk} x_k$! Beispiele: 1. Reeller Vektorraum $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3 = L$ mit dem **Vektorprodukt** $[\vec{x}, \vec{y}] = \vec{x} \times \vec{y}$ ist Lie-Algebra. Für die Elemente der **Standardbasis** $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ gilt der Kommutator $[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = \epsilon^{ijk} \hat{e}_k$. Hier kann das Epsilon-Symbol mit den **Strukturkonstanten** identifiziert werden. 2. Die **Menge aller n×n-Matrizen** mit dem Kommutator $[A, B] = AB - BA = -BA + AB = -(BA - AB) = -[B, A]$ definiert eine Lie-Algebra. 3. Die **Menge aller spurlosen n×n-Matrizen** mit dem Kommutator=Vertauschungsrest $[A, B] = AB - BA$ definiert eine Lie-Algebra $\mathrm{tr}([A, B]) = 0$. 4. Die **Diagonal-Matrizen** bilden eine Lie-Algebra. 5. Sei L Lie-Algebra mit $x, y, h \in L$ mit $[x, h] = [y, h] = 0$, so folgt $[h, [x, y]]$=0. 6. Der **Vektorraum der C^∞-Funktionen** $f(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$ über dem **Phasenraum** bilden mit der **Poisson-Klammer**

$$[f, g]_{pq} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

eine Lie-Algebra. Siehe auch Seite 359. Bourbaki: Lie Groups and Lie Algebras. Chap1-9 1998;

Betrachte Tangenzialvektor bei der **Gruppen-Eins**: SO(2)

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{pmatrix}, \dot{R} = \begin{pmatrix} -s\theta & -c\theta \\ c\theta & -s\theta \end{pmatrix} = L\,R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta \\ s\theta & c\theta \end{pmatrix}, L = \dot{R}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung der Dgl $\mathrm{d}R(\theta)/\mathrm{d}\theta = L\,R(\theta)$ gibt per **Matrix-Exponentiation** die Lie-Gruppe bei der Eins $\mathbb{I}$ mit $R(\theta) = e^{\theta\,L} = \mathbb{I} + L\,\theta + 1/2!\,L^2\,\theta^2 + O(\theta^3)$ Allgemein ist die **Lie-Algebra** so(3) der **infinitesimalen Erzeugenden/Generatoren** $[X_i, X_j] = \epsilon_{ijk} X_k$ die **lokale Darstellung der Lie-Gruppe** SO(3). Kurz: Die **Drehimpuls-Algebra** oder der Drehimpuls-Kommutator sind eine unmittelbare Folge der Drehgruppe oder der Drehsymmetrie. Geyer et al.: Einf in die QFT 1989 p31;

$$A_x(\epsilon_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\epsilon_x & -s\epsilon_x \\ 0 & s\epsilon_x & c\epsilon_x \end{pmatrix} \Rightarrow X_x = \frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}\epsilon_x}|_{\epsilon_x=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_y(\epsilon_y) = \begin{pmatrix} c\epsilon_y & 0 & s\epsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\epsilon_y & 0 & c\epsilon_y \end{pmatrix}$$

als differenzierbare Mannigfaltigkeit, Euler & Steeb p55, Sattinger & Weaver p32. Anhang M zur Gruppentheorie im Bd2 von Aitchison & Hey: Gauge Theories in Particle Physics 1989[2], Vol 2: QCD and the Electroweak Theory 2004; **Ryder: Quantum Field Theory** 1996[2]; Die infinitesimalen Generatoren sind die Basis X_i der Algebra so(3). Betrachte den Tangenzialraum bei der Identität der Gruppe.

$$A(\epsilon) = \mathbb{I} + \epsilon \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\epsilon}|_{\epsilon=0} + O(\epsilon^2)$$

SO(3) ist Matrix-Lie-Gruppe als glatte Kurve durch die Identität der SO(3). PfL12 p236. Böhm: Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik 2011;

Goldstein: Mechanik in Kap4, 5 und 9.4-9.8 gibt gute Physiker-Einführung zur **Lie-Algebra**. Euler-Winkel - es gibt 3! Möglichkeiten - geben die Orientierung eines 3D-Körpers im 3D an. Die Orientierung für sich bildet an jedem Punkt des $\mathbb{R}^3$ einen zusätzlichen $\mathbb{R}^3$. Daher 6n Freiheitsgrade für ein Molekül. Es geht hier um einen beliebig unsymmetrische Körper und nicht bloß um die Position auf einer symmetrischen Kugel S_2. Sommerfeld: Mechanik p189; Budo: Mechanik p262; Kuypers: Mechanik §11.5; Scheck: Mechanik, Drehgruppe, Lie-Gruppe p91;

Lie-Algebra als lokaler Darsteller einer Lie-Gruppe. Von Gruppe G zur Algebra g gibt es einen Informationsverlust. **Sudarshan & Mukunda: Classical Dynamics: A Modern Perspective** 1972, 2015 Kap13 Lie-Gruppen und -Algebren;

Drehimpuls: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, $L_x = yp_z - zp_y, Ly = zp_x - xp_z, L_z = xp_y - yp_x$ oder $L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k$, **Poisson-Klammer** $\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k$, $\{L_i, x_j\} = \epsilon_{ijk} x_k$, $\{L_i, p_j\} = \epsilon_{ijk} p_k$, $\{L_i, \vec{L}^2\} = \{L_i, \vec{r}^2\} = \{L_i, \vec{p}^2\} = 0$. Analoge Bezeichungen für **Bahndrehimpulsoperator** $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$, $\hat{L}_i = \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$. In der Ortsdarstellung

des Bahndrehimpulses in sphärischen Koordinaten sieht man die Vertauschbarkeit von Hamiltonian und z-Komponente des Bahndrehimpulses

$$\hat{L}_x = i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad \hat{L}_y = i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

aus Symmetriegründen sofort: Die Energie hängt allein von r ab $\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{\mathbf{L}}^2}{\hbar^2 r^2}$ und die z-Komponente des Bahndrehimpulses wirkt nur auf φ. Daher zugleich scharfe Werte. Dasselbe gilt für die anderen Drehimpulskomponenten:

$$\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y = \hbar\exp(\pm i\varphi)\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \quad \hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) = -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}$$

In Ortsdarstellung gilt $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla$ bzw. $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$. Dies gibt $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$, somit $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

Observable wegen $L = L^+$. $[L_i, L_j]_- = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$, $[L_i, x_j]_- = i\hbar\epsilon_{ijk}x_k$, $[L_i, p_j]_- = i\hbar\epsilon_{ijk}p_k$, oder $\vec{L} \times \vec{L} = i\hbar\vec{L}$. $[\vec{L}^2, L_i]_- = [L_i, \vec{r}^2]_- = [L_i, \vec{p}^2]_- = 0$. Zueinander **adjungierte** aber nicht hermitesche **Leiter-, Kletter- oder Stufen-Operatoren** $L_\pm = L_x \pm i\,L_y$ mit $[L_+, L_-]_- = 2\hbar L_z$ und $[L_z, L_\pm]_- = \pm\hbar L_\pm$ und $[\vec{L}^2, L_\pm] = 0$, weil $\vec{L}^2$ mit jeder Komponente kommutiert. Länge- oder Norm-erhaltende Drehoperator durch **unitäre Transformation** oder Ähnlichkeitstransformation $< \psi'|A'|\psi' >=< \psi'|A'|\psi' > \Rightarrow A' = UAU^+$. **Gemeinsame Eigenzustände** von $\vec{J}^2$ und J_z sind die $|\alpha_j, m >$ mit den Eigenwertgleichungen $\vec{J}^2|\alpha_j, m >= \hbar^2\alpha_j|\alpha_j, m >$ und $J_z|\alpha_j, m >= \hbar m|\alpha_j, m >$. Wegen Vertauschbarkeit ist mit $|\alpha_j, m >$ auch $J_\pm|\alpha_j, m >$ Eigenzustand zu $\vec{J}^2$ mit demselben Eigenwert $\hbar^2\alpha_j$ und zu J_z mit dem Eigenwert $\hbar(m \pm 1)$.

Quantisierung von Feldern = zweite Quantisierung = Besetzungszahl-Darstellung. $N := a^\dagger a$ mit $[N, a] = -a$, $[N, a^\dagger] = a^\dagger$ und $N\,|n\rangle = n\,|n\rangle$, wobei $|n\rangle$ **Fock-Zustände**. **Fock-Raum** für Vielteilchensystemen mit variabler Teilchenanzahl. **Gross & Rungen: Vielteilchentheorie** 1986 p3 Idee: wechselwirkendes Vielteilchensystem wird in ein freies oder wechselwirkungsloses Quasi-Vielteilchensystem transformiert. Siehe dazu **Prigogine: Vom Sein zum Werden.** Zeit und Komplexität in den Naturwissenschaften 1979 p50 in Analogie zur kanonischen Transformation, die die Energie, die zwischen den Teilchen/Moden ausgetauscht wird, durch eine nichtlineare Transformation wegtransformiert. a] 2. Quantisierung. b] Methode der Green'schen Funktion c] störungstheoretische Analyse per Feynman-Graphen. Kuper: An introduction to the theory of superconductivity 1968 2. Quantisierung; Štepanow: Relativistische Quantentheorie. Für Bachelor. Mit Einführung in die Quantentheorie der Vielteilchensysteme 2010; **Thouless: Quantenmechanik der Vielteilchensysteme** 1964; Thouless: Topological quantum numbers in non relativistic physics 1998; Kirzhnits: Field Theoretical Methods in Many-body Systems 1967; Brout & Carruthers: Lectures on the many=electron problem 1963; Schultz: Quantum Field Theory and the Many-Body Problem Volume I 1964; Mattuck: A guide to Feynman diagrams in the many-body problem 1967; Sumathi Rao, ed: Field theories in condensed matter physics 2001; Ter Haar: Introduction to the physics of many-body systems 1966; March, Young, Sampanthar: The many-body problem in quantum mechanics 1967; Horwitz: Relativistic Many-Body Theory and Statistical Mechanics 2014; **Parry: The many-body problem** 1973; Czycholl: Theoretische Festkörperphysik. Von den klassischen Modellen zu modernen Forschungsthemen 2004, 2007; Schwindt: Tutorium QM p308 Fock-Raum einer gegebenen Teilchensorte ist die Direkte Summe aller seiner N-Teilchen-Hilbert-Räume (der untere Index gibt die Anzahl der durch diesen Raum beschriebenen Teilchen an) $\mathcal{H}^{(\pm)} = \{|0>\} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2^{(\pm)} \oplus \mathcal{H}_3^{(\pm)} \oplus \ldots$, wobei jeder Zweiteilchenzustand zweier ununterscheidbarer Teilchen Element des Zustandsraums $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1^{(1)} \otimes \mathcal{H}_1^{(2)}$ ist. Der obere Index dient nur dazu, die Kopien von $\mathcal{H}_1$ durchzunummerieren. Zhu: Analysis on Fock spaces 2012; Basiszustände des Fock-Raumes mit fester Teilchenzahl (also Elemente von bzw. Dichteoperatoren über ihm, jeweils vom Betrag 1, oder auch die Eigenzustände des Teilchenzahloperators) heißen Fock-Zustände. **Bosonischer Fock-Raum** $\mathcal{F}_+(\mathcal{H})$ ist symmetrische Tensoralgebra über einem Ein-Teilchen-Hilbertraum $\mathcal{H}$, und dessen Vervollständigung bezüglich des Skalarprodukts. **Fermionischer Fockraum**

$\mathcal{F}_-(\mathcal{H})$ = Graßmann-Algebra über dem Ein-Teilchen-Hilbertraum, genauer gesagt deren Vervollständigung. Das geeignet normierte symmetrisierte Tensorprodukt (im bosonischen Fall) bzw. das Keilprodukt (im fermionischen Fall) induzieren Abbildungen $a^* : \mathcal{H} \times \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}), \quad (\psi, \Phi) \mapsto a^*_\psi \Phi$. mit $\psi, \phi \in \mathcal{H}$. Die Abbildungen $a^*_\psi : \quad \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ werden Erzeugungsoperatoren genannt, die adjungierten Operatoren dazu $a_\psi : \quad \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H}) \to \mathcal{F}_\pm(\mathcal{H})$ heißen Vernichtungsoperatoren. $a^\dagger |n\rangle = c_n^+ |n+1\rangle, a |n\rangle = c_n^- |n-1\rangle$. **Bosonische Kletteroperatoren** $[a, a^\dagger] = 1$, $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$, somit $a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$, $a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle$. $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(a^\dagger\right)^n |0\rangle$, $n \in \mathbb{N}_0 = \{0.1, \dots\}$.

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Besetzungszahl beliebig groß. **Fermionische Kletteroperatoren** mit **Anti-Kommutator** $\{a, a^\dagger\} = 1$, $\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = a^{\dagger\,2} = 0$, also $a^\dagger |n\rangle = (1-n) |n+1\rangle$, $a |n\rangle = n |n-1\rangle$. **Besetzungszahlen n können nur die Werte 0 oder 1 annehmen**. **Beispiel:** $H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2}$ mit $\tilde{P} := \frac{P}{\sqrt{2\hbar m\omega}}$ und $\tilde{Q} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q$ gibt $H = \hbar\omega \left(\tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2\right) = \hbar\omega \underbrace{\left(\tilde{Q} - i\tilde{P}\right)}_{a^\dagger} \underbrace{\left(\tilde{Q} + i\tilde{P}\right)}_{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2}\right)$

Die Eigenzustände von N sind auch Eigenzustände von H, da $[H, N] = 0$. $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$ und $|\Psi_n\rangle = |n\rangle$. $a^\dagger |\Psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\Psi_{n+1}\rangle$, $a |\Psi_n\rangle = \sqrt{n} |\Psi_{n-1}\rangle$. **Eigenfunktionen in Ortsdarstellung:** $\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right)$ und $\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \Psi_0(x)$. **Eigenzustände bosonischer Kletteroperatoren ('kohärente Zustände'):** Die Eigenzustände des **Vernichtungsoperators** sind die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle$. Der Vernichtungsoperator $\hat{a}$ erfüllt folgende Eigenwertgleichung: $\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$. Für den **Erzeugungsoperator** ergibt sich daraus, mit einem Linkseigenzustand (Bra-Eigenzustand): $\langle\alpha| \hat{a}^\dagger = \alpha^* \langle\alpha|$. Der Vernichtungsoperator $\hat{a}$ kann also - im Gegensatz zum Erzeugungsoperator $\hat{a}^\dagger$ - **Rechtseigenzustände (Ket-Eigenzustände)** besitzen. Der Erzeugungsoperator erhöht die minimale Teilchenzahl eines Zustandes im Fockraum um eins; der damit entstandene Zustand kann also nicht der ursprüngliche sein. Dagegen verringert der Vernichtungsoperator die maximale Teilchenzahl um eins; da ein Zustand im Fockraum aber Komponenten aller Teilchenzahlen (auch beliebig hoher Teilchenzahlen) beinhalten kann, ist damit nicht verboten, dass $\hat{a}$ Eigenzustände besitzt. Dies sind die **kohärenten Zustände**: Der **kohärente Zustand** $|\alpha\rangle$ ergibt sich als bestimmte Linearkombination aller Zustände **fester Teilchenzahl** $|n\rangle$, und zwar nach der Formel: $|\alpha\rangle := e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle$ Dieser Zustand ist also Eigenzustand des Vernichtungsoperators, und zwar zum Eigenwert α, während der zugehörige Erzeugungsoperator nur Links-Eigenzustände besitzt. Dabei ist α eine nichtverschwindende komplexe Zahl, die den kohärenten Zustand vollständig definiert und auch explizit von der Zeit abhängen darf. $|\alpha|^2$ ist der Erwartungswert der Besetzungszahl des kohärenten Zustandes. **Kohärente Zustände** haben (wie der Grundzustand des Harmonischen Oszillators) **minimale Unschärfe** und bleiben bei Zeitentwicklung kohärent. Mit ihnen lässt sich die – im Allgemeinen explizit zeitabhängige – **elektromagnetische Welle einer Laser-Mode** am besten beschreiben = **Glauber-Zustände**. Astaschenkow: Quanten-Elektronik 1964; Tarasov: Laser physics and applications 1983; Glauber: Quantum electronis 1964; Louisell: Radiation and noise in In Quantum Electronics 1964; **Fain & Chanin: Quantenelektronik.** Physik der Maser und Laser 1969; Brotherton: Maser und Laser. Grundlagen, Funktionsweisen, Anwendungen 1967[2]; Grau: Quantenelektronik. Optik und Laser 1978; Menzel: Photonics. Linear and nonlinear interactions of Laser light and matter 2000; **Klimontowitsch: Laser und nichtlineare Optik** 1966, 1971; Aeschbacher: Wie funktioniert eigentlich der Laser? PdNPiS Bd60 2011 H5 p45-48; **Milonni & Eberly: Laser physics** 1988, 2010; **Meschede: Optik, Licht und Laser** 2008[3]; Haken: Licht und Materie Bd2 Laser 1985; Boyd: Nonlinear optics 1998[2]; **Frequenzkamm = optisches Getriebe:** Datenübertragungsraten in Lichtleitern bei geringerer Interferenz zu Nachbarkanälen und verbesserter Abhörsicherheit, genauerer Ersatz für mobile Atomuhren, empfindliche

chemische Detektoren, idar-Technik basierenden Abstandsmesssystemen. Cundiff, Ye & Hall: Lineale aus Licht SdW H8 2009;

Condon & Shortley: The theory of atomic spectra 1935; **Drehimpulsaddition** und **Clebsch-Gordan-** (QC5, p303: Das Produkt von Kugelflächenfunktionen lässt sich als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen darstellen) oder **Wigner-Koeffizienten** siehe Grawert, Nolting, Fick, QM; Zülicke: QC1 p470; Haberditzl: QC4 Drehimpulsalgebra p72ff, Theorie der irreduziblen Tensoroperatoren p218; **Schwindt: Tutorium QM** 2013 p249ff; Drehimpulskopplung $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ mit Quantenzahlen j_1 und m_1 für z-Komponente, j_2 und m_2 mit m_1 und m_2: $m_1 = [-j_1, -j_1+1, ..., j_1]$ und $m_2 = [-j_2, -j_2+1, ..., j_2]$, Einzelne Drehimpulse unabhängig voneinander scharf messbar $[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0$, also jeder mit eigenem Eigenraum der durch die Eigenvektoren $|j_1, m_1\rangle$ bzw. $|j_2, m_2\rangle$ aufgespannt wird. In der Basis dieser Eigenvektoren $|j_1, m_1\rangle$ hat $\vec{J}_1$ eine einfache diagonale Gestalt; analoges gilt für $\vec{J}_2$ (genauer gesagt für das Quadrat und die z-Komponente des jeweiligen Operators). Nun koppeln die einzelnen Drehimpulse $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ per Addition der einzelnen Komponenten. Gesamtdrehimpuls besitzt die Quantenzahlen J und M, mit den Werten $|j_1 - j_2| \leq J \leq |j_1 + j_2|$ und $M = [-J, ..., J]$. Da sich der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ aus den Drehimpulsen $\vec{J}_1$ und $\vec{J}_2$ der beiden Einzelsysteme in den entsprechenden Eigenzustände zusammensetzt, muss der Gesamtzustand im Produktraum der einzelnen Eigenzustände dargestellt werden: $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle$, wobei $\otimes$ das Tensorprodukt bezeichnet. Dies sind keine Eigenvektoren des Gesamtdrehimpulses $\vec{J}$, so dass er in dieser Basis keine Diagonalgestalt besitzt. **Eigenbasis des Gesamtdrehimpulsoperators:** Die Eigenvektoren von $\vec{J}$ werden durch die Quantenzahlen J, M, j_1 und j_2 eindeutig festgelegt. Bezüglich der neuen Basis aus Eigenvektoren hat der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ wieder eine einfache Diagonalgestalt. Es gilt: $\vec{J}^2 |J, M, j_1, j_2\rangle = J(J+1)\hbar^2 |J, M, j_1, j_2\rangle$ und $J_z |J, M, j_1, j_2\rangle = M\hbar |J, M, j_1, j_2\rangle$ Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten geben nun den Übergang der Produktbasis $|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle$ in die Eigenbasis $|J, M, j_1, j_2\rangle$ durch die unitäre Transformation $|J, M, j_1, j_2\rangle = \sum_{m_1,m_2} |j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \langle\, j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle$ an. Dabei sind $\langle\, j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle$ die **Clebsch-Gordan-Koeffizienten**. **Eigenschaften der Clebsch-Gordan-Koeffizienten:** Koeffizienten sind gleich Null, bedeutet **Auswahlregeln**, wenn eine der beiden Bedingungen $|j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2$ und $M = m_1 + m_2$ nicht erfüllt ist: $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |j_1 - j_2| \leq J \leq j_1 + j_2 \;\wedge\; M = m_1 + m_2$. Koeffizienten sind konventionsgemäß reell: $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle \in \mathbb{R}$. Folgender Clebsch-Gordan-Koeffizient zu $M = J$ ist konventionsgemäß positiv: $\langle j_1, j_1; j_2, J - j_1 | J, J, j_1, j_2\rangle > 0$. Koeffizient zu M ist betragsmäßig gleich dem Koeffizient zu $-M$ gemäß $\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle = (-1)^{j_1+j_2-J} \langle j_1, -m_1; j_2, -m_2 | J, -M, j_1, j_2\rangle$. Koeffizienten erfüllen die **Orthogonalitätsrelation** $\sum_{m_1,m_2} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J', M', j_1, j_2\rangle = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}$ und $\sum_{J,M} \langle j_1, m_1; j_2, m_2 | J, M, j_1, j_2\rangle \langle j_1, m_1'; j_2, m_2' | J, M, j_1, j_2\rangle = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}$. **2-Spin-Problem** gibt 4 Funktionen $\{|s = 1/2, m_s = \pm 1/2\rangle\} \otimes \{|s = 1/2, m_s = \pm 1/2\rangle\}$. Ausreduktion des Produkts ergibt ebenfalls insgesamt vier „irreduzible“ Zustände. Diese sind ein sog. Singulett-Zustand mit $J = 0$, $|J = 0,\, M_J = 0\rangle \hat{=} (1/\sqrt{2})\,(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)$ sowie drei sog. Triplett-Zustände mit $J = 1$, nämlich $|J = 1, M_J = +1\rangle \hat{=} \uparrow\uparrow$, $|J = 1,\, M_J = 0\rangle \hat{=} (1/\sqrt{2})\,(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow)$ und $|J = 1, M_J = -1\rangle \hat{=} \downarrow\downarrow$. Clebsch-Gordan-Koeffizienten bei dieser Darstellung entsprechen den Werten $\pm 1/\sqrt{2}$ bzw. 1. Nolting: QM II Kap5.4;

Einfach zusammenhängend ist eine Menge von Punkten, sich jeder Ausflug von einem beliebigen Punkt der Menge stetig auf den Punkt selbst zusammenziehen/deformieren lässt. Geht nicht bei der 1-Sphäre! Bei S^n mit $n > 1$ geht das stets. **Poincare-Vermutung** 1904: Eine Oberfläche ist dann homöomorph zu einer (nicht begrenzten, 2-dimensionalen) Kugeloberfläche, wenn sich jede geschlossene Schleife auf dieser Fläche zu einem Punkt zusammenziehen lässt. Kreis S^1 zählt nicht dazu. Wie ist das mit S^3? Die Poincaré-Vermutung behauptet, dass dies auch im Fall einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit (also einer 3-Sphäre, einer unanschaulichen „Oberfläche eines 4-dimensionalen Kugeläquivalents“) so ist. Solange ein geometrisches Objekt kein Loch hat, kann es zu einer Kugel deformiert werden. Jede **einfach zusammenhängende** (= man kann jede geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammenziehen), kompakte, **unberandete** [= geschlossen, bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Mannigfaltigkeit beschränkt ist - also sich nicht ins Unendliche ausdehnt- und dass sie **keinen Rand** hat; zB ist dreidimensionale Kugel eine 3-Mannigfaltigkeit, aber sie hat einen Rand = die Oberfläche. Daher ist sie nicht geschlossen. $\dim(M) = \dim(\partial M) + 1$. Ihre Oberfläche ist dagegen eine geschlossene 2-d Mannigfaltigkeit. Erst wenn man alle Erdoberflächenpunkte besucht und

lokal kartografiert hat und bei zusammenheften der Karten - was im $\mathbb{R}^2$ nicht geht - kein Loch gefunden hat, dann ist die Kugelform der Erde gefunden. Analoges gilt für die lokalen $\mathbb{R}^3$-Karten des Universums. Man man muss das gesamte Universum teleskopieren. **Kurd Laßwitz 1848-1910: Auf zwei Planeten** 1897 abarisches Feld; Die Griechen glaubten an ein unendliches Universum, weil sie es für denknotwendig hielten. Die **Voyager-Sonden** aber kommen eines Tage wieder zur Erde zurück, wenn sie nur geradeaus weiterfliegen, wenn sie nicht, wie **Kolumbus**, aufgehalten werden. Die Poincaré-Vermutung stellt nur eine Behauptung für **geschlossene Mannigfaltigkeiten** auf], 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre: $S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)|x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. Eine 3-d Mannigfaltigkeit ist etwas, das in einer Umgebung jedes Punktes auf der Mannigfaltigkeit wie ein 3-d euklidischer Raum aussieht. Nur die Sphäre S^3 ist von allen 3d-Mannigfaltigkeiten lochfrei. Perelman, Seelen-Theorem. **O'Shea: Poincarés Vermutung: Die Geschichte eines mathematischen Abenteuers**, wenn auch fachlich überragend übersetzt 2007 Erdkugelglaube bereits in der Antike bei Pythagoras von Samos. 1490 klar etabliert, Erd-Umfang ± 10000 km ungenau; **Russo & Denninger: Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens** 1996, 2005; Jede geschlossene n-Mannigfaltigkeit mit dem **Homotopietyp** einer n-Sphäre ist zur n-Sphäre homöomorph. Selzer-McKenzie: Die Poincare Vermutung 2012; Szpiro & Bertram: Das Poincaré-Abenteuer. Ein mathematisches Welträtsel wird gelöst 2008; tom Dieck, Kamps, Puppe: Homotopietheorie 1970;

U(n) ist **einfach zusammenhängend/simply connected** und **abgeschlossen**. **Abgeschlossenheit von Matrizen-Gruppen:** Betrachte O(n) $\subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ als Untermenge aller reellen $n \times n$-Matrizen, also als Punkte eines n^2-dimensionalen Raumes. Für das Komplement von O(n) ist

$$M_n(\mathbb{R}) - O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A\,A^T \neq 1\}$$

eine **offene Menge** in deren ϵ-Umgebung die geschlossene Menge aller orthogonalen Matrizen liegt.

O(n) und SO(n) sind zwar **abgeschlossen/closed** und damit auch **kompakt** wegen det$A$=1, wie beispielsweise

$$\mathrm{O}(2), \mathrm{SO}(2) : \lim_{\alpha\to 0} \begin{pmatrix} c\alpha & -s\alpha \\ s\alpha & c\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \lim_{\alpha\to 0} \begin{pmatrix} c\alpha & s\alpha \\ s\alpha & -c\alpha \end{pmatrix} \text{ für } \mathrm{O}(2) - \mathrm{SO}(2) \text{ wegen det } A \neq 1$$

O(2)-SO(2) hat keine Identität $\mathbb{I}$, ist also nicht abgeschlossen/kompakt. Nur die SO(n) sind **weg-zusammenhängend**. Dazu ist es nötig, dass zu jeder Matrix $A_0 \in G$ eine stetige 1-parametrige Teilmenge $A(t) \subset G$ existiert ($0 \leq t \leq 1$) mit $A(0) = E$ und $A(1) = A_0$. SO(n) ist die **Zusammenhangskomponente** der Identität $\mathbb{I}$ in O(n), oder: SO(n) ist die Untermenge von O(n), deren Mitglieder mit der $\mathbb{I}$ durch Wege verbunden sind. Gruppe ist **weg-zusammenhängend**, wenn man von der $\mathbb{I}$ kontinuierlich zu beliebigen Elementen der Gruppe kommt, wobei die Darstellungsmatrizen als Punkt im $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefasst werden. Man kommt in O(2) halt i.a. nicht auf einem kontinuierlichen Weg von $\mathbb{I}$ zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

im Gegensatz zu SO(2) alias U(1) gemäß $\lim_{\alpha\to 0} \cos\alpha + i \sin\alpha = 1 + 0i$. **Die unitären Gruppen** U(n) sind alle **einfach zusammenhängend**, weil stets auf eine paramerisierbare Diagonalform mit den Elementen $e^{i\varphi_k}$ gebracht werden können. Ljubarski; **Pontrjagin: Topologische Gruppen** 1957; Wallace: Topolog algebra 1957; Boseck: Analysis on topological groups - general Lie theory 1981; MacCarty: Topology : an introduction with application to topological groups 1967; Montgomery & Zippin: Topological Transformation Groups 1974; Montgomery & Zippini: Topological transformation groups 1955; Stiefel: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung p72; Stillwell p164; Die SO(n) sind aber **NICHT nullhomotop = nicht zusammenziehbar = NICHT einfach zusammenhängend/simple connected** - SO(3)-Handbewegung mit einem Teller = philippinischer Weintanz lässt sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen, es entsteht ein Knoten, siehe Stillwell p184 ist nur **wegzusammenhängend** oder **path-connected**. Die einfachste nullhomotope =

zusammenziehbare = einach zusammenhängende/simple connected 3d-Mannigfaltigkeit ist S^3. **Bernstein & Phillips:** Fibre bundles, SciAm July 1981 p94-108; **Faserbündel - der mathematische Schlüssel zur Quantenphysik**, SdW H9 1981 p89 mathematische Konzepte beschreiben physikalische Vorgänge gut, weil sie die Natur das Maß der Beschreibung ist. **Knotentheorie:** **Monastyrsky: Riemann, Topology, and Physics** 1987; Kap16.2 Knotentheorie. **Artin: Theorie der Zöpfe** 1925; Bär: Elementargeometrie, Skript, Potsdam 2006; Kauffman: Knots and Applications 1995; Kauffman: Formal knot theory 2006; **Kauffman: Knots and Physics** 2001[3] **Livingston: Knotentheorie für Einsteiger** 1995; Es gibt bei SO(2) genau einen Punkt, dessen Schleifen sich nicht stetig zu einem Punkt schrumpfen lässt. Bei SO(3) sind es die Pole. **Daher sind beide nicht einfach zusammenhängend.** Alle einfach zusammenhängenden Gruppen mit gleicher Lie-Algebra sind isomorph: Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ und die rein imaginären **Quaternionen** im $\mathbb{R}i + \mathbb{R}j + \mathbb{R}k$ gemäß $[X, Y] = XY - YX$. Wegen $[[i, j], j] = -2i \neq 0 = [i, [j, j]]$ ist aber die Lie-Algebra der Quaternionen **nicht assoziativ!** Wohl aber **assoziativ** ist der Schiefkörper der Quaternionen bzgl des Produktes: $(ij)j = kj = -i = i(jj)$. **Schiefkörper** ist Körper mit nichtkommutativem Produkt. **Nicht-kommutative, aber assoziative Strukturen werden durch das Lie-Produkt oder den Klammerausdruck nicht-assoziativ. Blaschke: Nicht-Euklidische Geometrie und Mechanik** I, II, III 1942. **Blaschke: Kinematik und Quaternionen** 1960; MacFarlane: Vector Analysis and Quaternions 1886; Hathaway: Primer of Quaternions 1896;

Von Gruppe G zur Algebra g gibt es einen Informationsverlust. Drei Grupen mit derselben Lie-Algebra SU(n), SO(n), O(n). Eigenschaften der orthogonalen (Drehungen), unitären (Drehungen im Hilbertraum), pseudo-orthogonalen (Lorentz-Transfomation),

$$L = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_P & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{m-P} \end{pmatrix}$$

pseudo-unitäre und symplektische (kanonische Transformation, Phasenraum-Fluss) Gruppen. Spivak: Physics for mathematicians. Mechanics I 2010 p604 Kap20; Unitäre, orthogonale (Länge invariant) und **allgemeine lineare** Gruppe (bijektive lineare Abbildungen), **unimodular**e (det=1, **volumentreu**e und orientierungstreu, bei det A=-1, also negativem Volumen hat man Orientierung der Kantenvektoren)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist Normalteiler oder spezielle allgemeine lineare Gruppe SL(n,K) der allgemeinen linearen Gruppe GL(n,K): **Schottenloher**: Geometrie und Symmetrie in der Physik 1995 p21-28 und Anhang L, p364-387;

Gruppe	Invariante	Matrix-Bedingung	f	einf zus	wegzusa	kpkt
SU(n)	$\vec{x}^+ \cdot \vec{y}$	$A^+A = \mathbb{I}$, det $A = 1$	$n^2 - 1$	ja	ja	ja
U(n)	$\vec{x}^+ \cdot \vec{y}$	$A^+A = \mathbb{I}$	n^2	ja	ja	ja
SO(n)	$\vec{x}^T \cdot \vec{y}$	$A^TA = \mathbb{I}$, det $A = 1$	$\frac{n}{2}(n-1)$	nein	ja für $n > 1$	ja
O(n)	$\vec{x}^T \cdot \vec{y}$	$A^TA = \mathbb{I}$	$\frac{n}{2}(n-1)$	nein	nein	ja
SL(n,$\mathbb{C}$;$\mathbb{R}$)	Volumen	det $A = 1$	$2n^2 - 2$; $n^2 - 1$	ja	ja	nein
GL(n,$\mathbb{C}$;$\mathbb{R}$)	-	det $A \neq 0$	$2n^2$; n^2	ja	ja	nein

Obige Gruppen können als $n \times n$-Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{C}^{n\times n}$ mit reellen/komplexen Elementen dargestellt werden, die auf alle Punkte/Elemente des $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ wirken. n ist Dimension des Darstellungsraumes der kontinuierlichen Gruppe. f ist die Anzahl der unabhängigen Parameter der Darsteller der Gruppe. Speziell haben U(1) mit Darsteller $e^{i\varphi}$ der Gruppenelement und SO(2) mit den Gruppenelementen $\begin{pmatrix} c\varphi & s\varphi \\ -s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}$ jeweils nur einen freien Parameter. U(1) wirkt in der Gaus'schen Ebene $\mathbb{C}$, SO(2) wirkt in der Euklidischen Ebene E^2 dargestellt durch $\mathbb{R}^2$. Für 3 freie Parameter entsprechen sich SU(2) und SO(3). Belger & Ehrenberg: Theorie & Anwendung der Symmetriegruppe MINÖL23 1988; Stiefel & Fässler: Gruppentheoretische

Methoden und ihre Anwendung p70; Euler & Steeb: Continuous p21; Stillwell p188. Alle haben eine Linie als Tangenzialraum: SO(3) und SU(2) haben den gleichen Tangenzialraum. **Geyer, Kripfganz, Ranft: Einführung in die Quantenfeldtheorie der Elementarteilchen** 1990 p25-70; **O'Raifeartaigh: Group structure of gauge theories** 1987; **O'Raifeartaigh: The Dawning of Gauge Theory** 1997 Originalarbeitensammlung lies Weyl und Kaluza! **Yamanouchi: Quantum mechanics** und Lie-Gruppen p562-602 In: **Roubine** ed: **Mathematics Applied to Physics** 1970; **Weyl:** Alle Quantenzahlen, mit Ausnahme der Hauptquantenzahl, sind Kennzeichen von Gruppendarstellungen 1928; Straumann: QM 2002 p143; Drehgruppe und **symmetrische Gruppe** beherrschen die QM! Dazu elementare Darstellung mit vielen Beispielen bei **Kockel: Darstellungstheoretische Behandlung einfacher wellenmechanischer Probleme** 1955; Kemble: The Fundamental Principles of Quantum Mechnaics 1937; Wigner: Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren 1931; Herzberg: Atomspektren und Atomstruktur 1936; NP1971 Wifo22 1972 H4 p147-149; Herzberg: Atomic Spectra and Atomic Structure 1950; Herzberg PhysBl31 1975 p120f; Stoicheff: Gerhard Herzberg 2002; Weyl: Gruppentheorie und Quantenmechanik 1931, 1967; Barut ed: Quantum theory, groups, fields, particles 1983; B̃arut: Geometry and physics. Non-Newtonian forms of dynamics 1989; B̃arut & Raczka: Theory of Group Representations and Applications 1987; Barut, Neeman, Bohm eds: Dynamical groups and spectrum generating algebras 1988; Mackey: Mathematical Foundations of Quantum Mechanics 1965; Dirac: The principles of quantum mechanics 1930[1], 1957[4]; von Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik 1932; **Boardman, O'Connor & Young: Symmetry and its applications in science** 1973; Bhagavantam & Venkatarayudu: Theory of Groups and Its Application to Physical Problems 1969; Leech & Newman: How to use groups 1969; Ãrmstrong: Groups and symmetry 1988; **Hollingsworth: Vectors, matrices and group theory** for scientists and engineers 1967; Falicov: Group theory and its physical application 1966; **Fano & Rau: Symmetries in Quantum Physics** 1996; **Lee: Symmetries, asymmetries, and the world of particles** 1988; **Rowlatt: Group theory and elementary particles** 1966; **Kurt Sundermeyer: Symmetries in Fundamental Physics** 2014; Jordan: Quantum Mechanics in Simple Matrix Form 2005; van der Waerden: Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik 1932; F̃ock: Fundamentals of Quantum Mechanics 1978; Streitwolf: Gruppentheorie in der Festkörperphysik 1967; **Chaichian & Hagedorn: Symmetries in quantum mechanics - from angular momentum to supersymmetry** 1998; Baker: Matrix groups. an introduction to Lie group theory 2003; Cornwell: Group theory in physics ; Bröcker & tom Dieck: Representations of compact Lie groups; **Bröcker: Darstellung kompakter Liegruppen**. Regensburger Trichter 12 1977; H̃all: Lie Groups, Lie Algebras, and representations. An elementary introduction 2003; Bröcker: Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2004; **Koecher: Lineare Algebra und analytische Geometrie** 2003[4]; Simms: Lie groups and quantum mechanics 1968; Eisenhart: Continuous Groups of Transformations 1961; Tits: Tabellen zu den einfachen Lie-Gruppen und ihren Darstellungen 1978;

Gruppentheorie - Mathematik der Symmetrie: Ornamentik und Musik. Salkowski: Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unterricht 1933; Alexandroff: Einführung in die Gruppentheorie 1965; **Feynman: Bd1.2** Kap52; **Costa & Fogli: Symmetries and Group Theory in Particle Physics. An Introduction to Space-Time and Internal Symmetries** = LNP823 2012 pdf; Mitschka: Elemente der Gruppentheorie 1972; **Flügge: Mathematische Methoden der Physik II** 1980; C̃ater: Visual Group Theory 2009; K̃urosch: Gruppentheorie 1970; D̃uzhin & Chebotarevsky: Transformation groups for beginners 2004; Tapp: Matrix groups for undergruduates 2005; **Symmetrie** = Etwas = ein materielles Objekt, geometrische Figur oder abstrakter math Gegenstand, kann eine Riehe von Transformationen durchlaufen = Drehung, Verschiebung, Spiegelung, Bewegung in der Zeit, und sieht am Ende dennoch genauso aus wie zuvor. Transformation selbst bleibt unter Tansformation unverändert. **Lee: Symmetries, asymmetries, and the world of particles** 1988; Siemon: Anwendungen der elementaren Gruppentheorie in Zah-

lentheorie und Kombinatorik 1981; Dirl & Kasperkovitz: Gruppentheorie. Anwendungen in der Atom- und Festkörperphysik 1977; **Flach & Reif: Gruppentheoretische Methoden im Schalenmodell der Kerne** Bd1 Gruppentheorie, Darstellungstheorie, irreduzible Darstellungen, Lie-Gruppen, Casimir-Operatoren 1964, Dönau & Flach: Bd2 1969 Drehgruppe, graf Darstell der Vektorkopplung; Goeppert-Mayer & Jensen: Elementary theory of nuclear shell structure 1955; H̃entschel: Die Mentalität deutsch(sprachig)er Physiker in der frühen Nachkriegszeit 2005; PhysJ21 2022 H1 p70f; S̃charnberg: Jensen 2020; Feenberg: Shell Theory of the Nucleus 1959; **Cracknell: Angewandte Gruppentheorie**. Einführung in die Originaltexte WTB 84 1971 = DIE Einführung mit Literaturtipps p214ff! Drehgruppe = **Rotationsgruppe**, Eulerwinkel p78ff und Lorentzgruppe p101f **Z̃ee: Group theory in a nutshell for physicists** 2016; **C̃oleman: Aspects of Symmetry. Selected Erice Lectures** 1985; **Burnside: Theory of groups of finite order** 1911; Machi: Groups, an introduction to ideas and methods of the theory of groups 2012 ebook; **Schmutzer: Symmetrien in den physikalischen Naturgesetzen**, PhysBl 29 1973 213-219, p260-265; **Schmutzer: Symmetrie und Erhaltung - Kontinuierliche Raumzeit-Symmetrien** und die daraus folgenden Erhaltungsgesetze der Physik PdNPiS Bd52 2003 H5 p2-39; Die Freiheit der Wahl einer unabhängigen Variablen oder Sicht bedeutet Symmetrie, die mit Erhaltungsgröße einhergeht. Segre: Die gr. Physiker Bd2 1980 p45: Pierre Curie macht bereits im 19. Jh auf Symmetrie und die damit verbundene Gruppentheorie aufmerksam! Gespräche über die **Symmetrien** der physikalischen Welt werden in der Sprache der Gruppentheorie und Darstellungstheorie geführt. Weyl: Symmetrie 1955; **Tapp: Symmetry. A Mathematical Exploration** 2012; Flachsmeyer, Feiste & Manteuffel: Mathematik und ornamentale Kunstformen 1980; **Bethge & Schröder: Elementarteilchen und ihre WW** 1986, 2006 p20 **Symmetrie als Ordnungsprinzip:** Die Erfahrung, dass die Anfangsbedingungen für das grundsätzliche Verhalten irrelevant sind, also Wiederholbarkeit und Übereinkunft unter sonst gleichen Bedingungen gegeben und möglich sind, verweist auf Symmetrie! Azimut egal → Achsialsymmetrie! Nutze daher Symmetrieprinzipien bei Aufstellung dynamischer Gesetze; de Broglie: **Symmetrie und ihre Anwendungen** 1954; **Feynman: Bd1.2** Kap52; S̃chwichtenberg: Durch Symmetrie die moderne Physik verstehen = Physics from Symmetry (Undergraduate Lecture Notes in Physics) 2017; Gardner: Endliche Gruppen, SciAmer June 1980 p16; Gorenstein: Finite groups 1968, 2007^2; **Stork: Symmetrie** 1985; Istvan: Symmetrie. Eine neue Art, die Welt zu sehen 1998; Goldberg: The Universe in the Rearview Mirror. How Hidden Symmetries Shape Reality 2013; Wilczek: A Beautiful Question. Finding Nature's Deep Design 2015; W̃ilczek: Fundamentals. DIe zehn Prinzipien der modernen Physik 2021; McWeeny: Symmetry. An Introduction to Group Theory and its Applications 1963; Lyre: Symmetrien, Strukturen, Realismus - oberflächlich!, In: Esfeld: Philosophie der Physik Kap18 p368ff 2012; **Marcus du Sautoy: Das Geheimnis der Symmetrie** und **Stewart: Die Macht der Symmetrie**; Genz: Symmetrie - Bauplan der Natur 1987; **Genz & Decker: Symmetrie und Symmetriebrechung in der Physik** 1991; **Charalität** = Händigkeit. Rechts Zucker, links Aminosäuren. Racemization, Racemat, Alice: Spiegelmilch giftig? Ja, bei vielen Medikamenten. Frank Modell 1953, Plasson 2004 Michael Stich: Symmetriebruch durch Anfangsbedingung. Brunner: Rechts oder links in der Natur und anderswo 1999; Scherer: Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik 2015; Baumgartner: Gruppentheorie 1949^2; Specht: Gruppentheorie 1956; **Speiser: Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung** 1956 mit plastischer Beweisführung; Ẽrhard Scholz: Symmetrie, Gruppe, Dualität 1989; Freie Gruppe mit und ohne Relation ($R^2 = 1$, $D^4 = 1$) Wortbildung und Gruppe D_4. **Jones: Groups, representations and physics** 1998^2; **Physikalische Symmetrie - Gruppentheorie - spezielle Funktionen:** 1. **Teilchen im 1d-Gitter** $H = p^2/2m + V(x)$ mit $V(x + nb) = V(x)$ für $n \in \mathbb{Z}$. Invarianz bzgl. diskreter **Translationssymmetrie** $x \to x' = c + n\,b$ gibt $|\Psi >\to |\Psi' >= T(n)\,|\Psi >$ für alle $|\Psi >$ des Zustandsraums. Wenn die Physik dabei erhalten bleiben soll, so muss die Vektornorm erhalten bleiben, also das Skalar-Produkt. Lineare Transformationen, die das leisten, sind **unitäre Operatoren**. Die Operatoren $\{T(n)\}$ müssen Darstellungen der Symmetrie-Operationen des Hamilton-Operators sein. In QM werden Observablen durch hermite'sche Operatoren dargestellt. Entsprechend der Symmetrie-Transformation auf dem Zustandsraum gemäß $|\Psi >\to |\Psi' >= T(n)\,|\Psi >$ unterliegen die hermite'schen Operatoren der Transformation

$A \to A' = T(n)AT(n)^{-1}$. Wenn $|x>$ idealer Eigenzustand ist, dann gilt $T(n)|x>=|x+nb>$. Die Invarianz des Hamilton folgt aus $T(n)V(X)T(n)^{-1} = V(X-nb) = V(X)$ und $T(n)HT(n)^{-1} = H$ oder $[H, T(n)] = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. 2. **Darstellungen des diskreten Translationsoperators:** YYYYY

Stringtheorie: E8 ist 248 dimensional in einem $\mathbb{R}^{57}$. 57-dimensionaler Körper kann auf 248 verschiedene Weise gedreht werden. 248×248iger Matrizen mit Polynomen 31ten Grades in jedem Element. Adams: Science. Matrix mit 205,263,363,600 Einträgen siehe http://aimath.org/E8/ Kaku: Die Physik der unsichtbaren Dimensionen. Eine Reise durch Zeittunnel und Paralleluniversen 2013; **Wolf: Parallele Universen. Die Suche nach anderen Welten** 1988; **Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel** 2014; **Universen als Zustände des Multiversums**, weil Stringtheorie nicht eindeutige Lösungen liefern. Hier wird aus der Not eine Tugend. Lüst & Theissen: Lectures on string theory LNP346 1989; Witten: What every physicist should know about string theory, Physics Today 68 H11, p38 (2015) Zwiebach: A First Course in String Theory 2009^2; Polchinski: String Theory, Vol1. An Introduction to the Bosonic String 2005; Green, Schwarz, Witten: Superstring Theory Vol1. Introduction 1985; Potsdamer am AEI: Theisen, Schlotterer, Loll, Lehners, Bianca Dittrich, Matthias Staudacher; Bianchi: Perturbation theory for string sigma models 2016 HUB arXiv.org hep-th arXiv:1604.01676;

Beispiele für Gruppen und Aufgaben zur Gruppentheorie: Baumgartner: Gruppentheorie 1949^2; Specht: Gruppentheorie 1956; Mitschka: Elemente der Gruppentheorie 1972; **Adler: Gruppen in der neuen Mathematik. Eine elementare Einführung in die Theorie mathematischer Gruppen an Hand einfacher Beispiele** 1974; Herbert **Lugowski** & Joachim Weinert: Grundzüge der Algebra Vol 1-5 1957 -1972; **van der Waerden: Algebra I & II = Moderne Algebra** 1930/31; Belger & Ehrenberg: Theorie & Anwendung der Symmetriegruppe MINÖL23 1988; Reiss & Stroth: **Endliche Strukturen** (Mathematik für das Lehramt, **Gruppentheorie**, Tourenplanung, Codierung) 2011; Wohlgemuth et al.: Mathematisch für fortgeschrittene Anfänger 2010; Ordnung einer Gruppe Unter **Normalteiler** H von G versteht man eine Untergruppe H von G mit der zusätzlichen Eigenschaft $g\,h\,g^{-1} \in H$ für alle $g \in G$, $h \in H$. Bedeutet: alle Elemente von $h \in H$ sind zueinander konjugiert = ähnlich = gehören zu einer Äquivalenzklasse. **Smirnow: Lehrgang der höheren Mathematik** BdIII_1 1954 p181ff; **Faktorgruppen:** Es sei N ein Normalteiler der Gruppe G. Für $g, h \in G$ schreiben wir genau dann $g \sim h$, wenn $g\,h^{-1} \in N$ gilt. Das ist eine Äquivalenzrelation auf der Gruppe G. Die zugehörigen Äquivalenzklasen $[g]$ werden durch $[g][f] = [gf]$ zu einer Gruppe, die man die Faktorgruppe G/N nennt. Die Definition von $[g][f]$ hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten g und h ab. **Normalteiler** = spezielle Untergruppen = normale Untergruppen. = Kerne von Gruppenhomomorphismen. **-teiler** bedeutet, dass sich aus einer Gruppe G und jedem ihrer Normalteiler N eine **Faktorgruppe** G/N bilden lässt = homomorphe Bilder von G, und jedes homomorphe Bild von G ist zu einer solchen Faktorgruppe G/N isomorph. **Beispiel:** Es sei G die multiplikative Gruppe der reellen Zahlen $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, und es sei $N := \{x \in \mathbb{R}_+\}$. Dann gilt $g \sim h$ genau dann, wenn g und h das gleiche Vorzeichen besitzen. Somit besteht G/N aus den beiden Elementen $[1]$ und $[-1]$ mit der Multiplikationsregel $[1][-1] = [-1]$ usw. Das bedeutet, dass G/N isomorph zu $\{1, -1\}$ ist. Ziegler & Zeidler: Teubner TB der MatheI 2003^2 p697f;

Stiefel & Fässler: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung; Steeb: Problems in theoretical physics I p22-67, Matrizen: Hermite'sche Matrizen $H^+ = H$ geben mit der Beziehung $U := (H-iI)(H+iI)^{-1}$ unitäre Matrizen $U^+ = U^{-1}$ oder auch per **Exponentiation** eine Lie-Algebra gemäß H zur Lie-Gruppe aller U:

$$U = \exp(-iH) = 1_n + \frac{1}{1!}(-iH) + \frac{1}{2!}(-iH)^2 + \cdots = \lim_{n\to\infty}\left(1_n - \frac{iH}{n}\right)^n$$

Aus $\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x)$ folgt der wahre Weg aus der Stationarität der Hamilton'sche Wirkung $S_t[\gamma] \in_0^t \mathrm{d}\tau\mathcal{L}(\gamma(\tau), \frac{\mathrm{d}\gamma(\tau)}{\mathrm{d}\tau})$ bei Variation des Weges $\gamma = \{\gamma(\tau)\}$ mit $0 \le \tau \le t$ bei fixen Enden $\gamma(0) = y$ und $\gamma(t) = x$. **Hamiltonoperator** $\hat{H}$ **bestimmt Zeitentwicklung** $\mathrm{i}\,\hbar\frac{\partial}{\partial t}\,\psi(t) = \hat{H}\,\psi(t)$ und mögliche Energiemesswerte $\hat{H}\varphi_E = E\varphi_E$. Der Hamiltonoperator erzeugt die **unitäre Zeitentwicklung**. Falls für alle Zeiten τ und τ' zwischen t_0 und t der Hamiltonoperator $H(\tau)$ mit $H(\tau')$ kommutiert, so bewirkt $\hat{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{t_0}^t \hat{H}(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)$ die **unitäre Abbildung** jedes anfänglichen Zustandes $\psi(t_0)$ auf den zugehörigen Zustand $\psi(t) = U(t, t_0)\psi(t_0)$ zur Zeit t. **Falls der Hamiltonoperator nicht von der Zeit abhängt**,

vereinfacht sich dies zu $\hat{U}(t,t_0) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}\right)$. Operatoren, die mit $\hat{H}$ vertauschen, sind bei zeitunabhängigem Hamiltonoperator Erhaltungsgrößen des Systems. Insbesondere ist dann die Energie eine Erhaltungsgröße. Für Teilchen im Potenzial $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r},t)$ und **Operatoren in Ortsdarstellung** $E \to \hat{E} = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\mathbf{p} \to \hat{\mathbf{p}} = -\mathrm{i}\hbar\nabla$ und $\mathbf{r} \to \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}$ lautet **Schrödingergleichung** $\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,\mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Delta\Psi(t,\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\cdot\Psi(t,\mathbf{x})$ oder $\mathrm{i}\,\hbar\,\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\frac{\partial^2\Psi(t,x)}{\partial x^2} + V(x)\Psi(t,x)$ oder $i\hbar\dot{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2\,m}\Psi'' + V(x)\Psi$. Freies Teilchen $V(\mathbf{r},t) = 0$ hat Materiewelle $\psi(\mathbf{r},t) = A\,\exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})\right)$.

Quantenmechanisch gilt YYYYY $H = H_0 + V$ gibt $\psi(x,t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\varphi(x)$. Mit **Lie-Kato-Trotter-Formel:** $e^{A+B} = \lim_{N\to\infty}(e^{A/N}e^{B/N})^N$, wobei A, B quadratische Matrizen, folgt $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \lim_{k\to\infty}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{t}{k}V}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{t}{k}H_0}\right)^k$ siehe Münster: QM; und Albeverio: Mathematical Theory of Feynman Path Integrals: An Introduction 2008 e-book; Varadarajan: Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations 1984; Die unitären Gruppen U(n), SU(n) sind die Analoga zu den orthogonalen Gruppen O(n), SO(n): Bei letzteren bedeutet $OO^T = \mathbb{I}$, dass solche Transformations-Matrizen O das innere Produkt, also die Längen und Winkel erhalten. Die unitären Transformations-Matrizen U erhalten wegen $U\bar{U}^T = UU^+ = \mathbb{I}$, wenn also Zeilen und Spalten eine Orthonormal-Basis bilden, das hermitesche innere Produkt. Euler & Steeb: Continuous symmetry 1992 p56; Gourdin: Unitary symmetries and their application to high energy physics 1967; Wagner: p228; Stillwell: Naive Lie group p84, 91; Mit dem **Kommutator = Vertauschungsrest** $[x,y] = 0$ folgt $e^x\,e^y = e^{x+y}$. Steeb: Problems in theoretical physics II Gruppen: Eulerwinkel, Charaktertafel, **Parität** p81-90 1990; $(\hat{P}\psi)(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$ Paritätsoperator ist linear, ist Involution = zweifache Anwendung gibt ursprüngliche Wellenfunktion, $\hat{P}\hat{P}\psi = \psi$, somit ist $\hat{P}$ invertierbar $\hat{P}^{-1} = \hat{P}$. $\hat{P}$ erhält die Norm, da linear und invertierbar ist, ist $\hat{P}$ ein unitärer Operator, wie bei den Symmetrietransformationen in der Quantenphysik üblich. Aufgrund der Unitarität ist $\hat{P}^{-1}$ gleich seinem Adjungierten $\hat{P}^\dagger$, somit ist $\hat{P} = \hat{P}^\dagger$ selbstadjungiert. Shriver, Atkins & Langford: Anorganische Chemie 1997 Gruppentheorie p109-136, p849; Mathiak & Stingl: Gruppentheorie für Chemiker, Physikochemiker, Mineralogen 1969; **PT-symmetrische Hamilton-Operatoren**. Bender et al: Obs of PT phase transition in a simple mechanical system arXiv:1206.4972v1 [math-ph] 21 Jun 2012 **Wu-Ki Tung: Group theory in physics** 1985 und Michael **Aivazis: Group Theory in Physics - Problems and solutions** 1991 bei Wilkens; Ma, Zhong-Qi: Group Theory for Physicists 2007; Ma: Problems and Solutions in Group Theory for Physicist 2010;

Algebraische axiomatische Strukturen: Jänich, Mathe 1 Kap18 **Algebraische Strukturen**; Herbert **Lugowski** & Joachim Weinert: Grundzüge der Algebra Vol 1-5 1957 -1972; **van der Waerden: Algebra I & II = Moderne Algebra** 1930/31; Artmann: Der Zahlbegriff 1983, Nicht-Standardzahlen = nicht-archimedisch geordnete Körper. Es gibt auch unendlich große und unendlich kleine Zahlen! Diese **hyperreellen Zahlen** bilden einen geordneten Erweiterungskörper der reellen Zahlen, und können damit nicht das **archimedische Axiom**, Zu je zwei Größen $y > x > 0$ existiert eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$, erfüllen. Verletzung des Archimedischen Axioms hier durch die **Infinitesimalzahlen** = Zahlen, die näher bei Null liegen als jede von 0 verschiedene reelle Zahl. Laugwitz & Schmieden: Eine Erweiterung der Infinitesimalrechnung. Mathematische Zeitschrift 69 (1958), 1-39; Robinson: Nonstandard Analysis 1966; Landers & Rogge: Rogge: Nichtstandard Analysis 1994; Beutelbacher: Zahl - was ist das? Geschichte 2013; Kurosch: Gruppentheorie Bd1 1970^2, Bd2 1972^2; Benno Renschuch: Elementare und praktische Idealtheorie 1976; Meschkowski & Laugwitz: Meyers Handbuch über die Mathematik, III. Strukturen p63-117 1972^2; Karpfinger & Meyberg: Algebra: Gruppen - Ringe - Körper 2010; **Zahlentheorie:** Manfred **Schroeder: Number Theory in Science and Communication.** With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing, and Self-Similarity 2009^9; **Zahlentheorie in der Physik**, PhysBl50 1994 p1123–1128 & 55 1999 p47-50; Scharlau & Opolka: Von Fermat bis Minkowski, eine Vorlesung über Zahlentheorie und ihre Entwicklung 1990; Schroeder: Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise 1991; Martin **Wohlgemuth et al.: Mathematisch für fortgeschrittene Anfänger** 2010 Satz von Sydow, **Stabilisator**; Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie Hamburger. Mathematische Einzelschriften H21 1937; **Gruppe** besteht einer **Menge** M und

Abbildung $\mu : M \times M \to M$ - **kartesisches Produkt** zweier Mengen. Es werden also geordnete Paare (x, y) der Menge einem Mengenelement zugeordnet. Das Tripel $G = (M, \circ, e_M)$, bestehend aus einer nicht leeren Menge M, einer
Verknüpfung **E** $\circ : M \times M$ (**abgeschlossen, Gruppoid, Magma**, die **Menge der Vektoren** ist bezüglich **skalarer Multiplikation** nicht abgeschlossen wegen $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{A} \cdot \vec{B} \notin \mathbb{R}^3$, hingegen ist sie bzgl der **vektoriellen Multiplikation** nur abgeschlossen mit $\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B} \in \mathbb{R}^3$, sonst nichts, also nur Magma oder Gruppoid. Aber hier setzt die Lie-Algebra konstruktiv an und macht eine nützliche Struktur draus! Siehe Seite 446), und einem ausgezeichneten (**neutralen**) Element e heißt **Gruppe** genau dann, wenn: **A assoziativ** $\forall_{a,b,c \in G} a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. (= **Halbgruppe, EA**) **N Einselement/neutrales Element** $\forall_{a \in G} \exists_e$ mit $a \circ e = e \circ a = a$. **Monoid EAN**. **I** inverses Element $\forall_a \exists_{a^{-1}} a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$. **Innere einstellige Verknüpfung** per $\circ$ oder $+$ gibt **Gruppe. Innere zweistellige Verknüpfung** per $\circ$ und $+$, die **miteinander bzgl. Klammersetzung verträglich** gibt **A] Ring/Bereich/Integritätsbereich/Integritätsring**, also Inverses zu $+$, aber kein Inverses zu $\circ$, z.B. ganze Zahlen $\mathbb{Z}$. oder **B] Körper**, also Inverses zu $+$ und $\circ$, z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$(\mathbb{Z}, +)$, **rationale Polynome** und linearer Vektorraum sind **Modul** = additive, kommutative Gruppe. $(\mathbb{N}, +)$ ist Halb-Modul = additive, kommutative Halb-Gruppe. $\mathbb{Z}$ ist **Ring** = $(A, +) \in$ Modul $\wedge$ $(A, \cdot) \in$ Halb-Gruppe $\wedge$ distributiv. Beispiele: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}|(m), \mathbb{R}_{n,n}$. G Falk: Über Ringe mit Poisson-Klammern, Mat Ann123 1951 p373 und ZPhysik130 1951 p151; $\mathbb{N}$ ist Halb-Ring = $(A, +) \in$ Halb-Modul $\wedge$ $(A, \cdot) \in$ Halb-Gruppe $\wedge$ distributiv. $\mathbb{Q}_+$ Halb-Körper, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ Körper ist Ring mit bedingter Umkehrbarkeit (bis auf Nullelement hat jedes Element ein Inverses) - Divisionsaufgabe stets lösbar. Die lästige Sonderrolle der Null. Inder erfanden die **Null**! Alexandroff et al: Enzyklopädie der Elementarmathematik Bd1. Arithmetik 1965 p34f; Wußing: VL zur Geschichte der Mathematik 1979 p98f; Gericke: Geschichte des Zahlbegriffs 1970; Gericke: Mathematik in Antike und Orient 1984; Ifrah: Universalgeschichte der Zahlen 1986; **Kaplan: Die Geschichte der Null** 2003; M̃enninger: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl 1979; R̃otman: Die Null und das Nichts. Eine Semiotik des Nullpunkts 2000; Seife: Zwilling der Unendlichkeit. Eine Biographie der Zahl Null 2002; **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p11 Null = König; Ring ist genau dann ein Körper, wenn die von Null verschiedenen Elemente A^* eine Gruppe bilden. **Zentrum einer Algebra** oder einer Gruppe diejenige Teilmenge der betrachteten Struktur, die aus all den Elementen besteht, die mit allen Elementen bzgl. der Multiplikation kommutieren: $\mathrm{Z}(G) := \{z \in G \mid \forall g \in G : gz = zg\}$. Das Zentrum einer assoziativen Algebra A ist die kommutative Unteralgebra. Eine Algebra stimmt genau dann mit ihrem Zentrum überein, wenn sie kommutativ ist. Das Zentrum einer Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ ist das (abelsche) Ideal $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{Z \in \mathfrak{g} \mid [X, Z] = 0$ für alle $X \in \mathfrak{g}\}$, wobei $[\cdot, \cdot]$ die Lie-Klammer also die Multiplikation in $\mathfrak{g}$ bezeichnet. Eine Lie-Algebra stimmt genau dann mit ihrem Zentrum überein, wenn sie abelsch ist.

Die sechs Funktionen $x \to f_\nu(x)$

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{1}{x}, f_3(x) = 1 - x, f_4 = \frac{x}{-1 + x}, f_5(x) = \frac{1}{1 - x}, f_6(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

bilden mit der Verknüpfung $f_\nu \circ f_\mu = f_\nu(f_\mu)$ eine Gruppe, Meschkowski p76.

$\circ$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	1	5	6	3	4
3	3	6	1	5	4	2
4	4	5	6	1	2	3
5	5	4	2	3	6	1
6	6	3	4	2	1	5

Nullteiler = Produkt gibt Null ohne dass einer der Faktoren notwendig Null sein muss: $a \neq 0 \neq b \wedge a \circ b = 0$. Die Zahlenrechung kennt keine Nullteiler. Anders hingegen aber: **Äußeres Produkt oder Vektorprodukt** $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$. **Uhren-Arithmetik:** Restklassenring modulo m, $(\mathbb{Z}|(m), +, \cdot)$ wegen

$[3]_6 \cdot [2]_6 = [0]_6$ und $(\mathbb{R}_{n,n}, +, \cdot)$ wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rechter und linker Nullteiler. Nullteilerfrei $\rightarrow$ regulär (Kürzungsregel).

regulär: Kürzen geht. Aus $3a = 3b$ folgt $a = b$. $\mathbb{N}$ ist regulärer Halbring. $\mathbb{Z}$ ist regulärer Ring. $\mathbb{Q}_+$ Halbkörper. $\mathbb{Q}$ Körper. Kommutativ und nullteilerfrei $\Rightarrow$ **regulär.** Alle Zahlbereiche.

Isomorphie (gleiche Gestalt) algebraischer Strukturen: abstrakt gleich Strukturen sonst völlig verschiedener mathematischer Objekte. Bei endlichen Strukturen gleich Strukturtafeln: Produkt der Bilder ist gleich dem Bild des Produkts. $f : A \rightarrow B$ heißt **Isomorphismus** von A auf B $:\Leftrightarrow$ f **bijektiv** und **operationstreu**, also $\forall_{a_1,a_2 \in A} f(a_1)f(a_2) = f(a_1a_2)$. Endliche isomorphe Strukturen sind die **prime Restklasse modulo 8** (**Nullteilerfreie Restklasse**, die zu 8 teilerfremd) $P_8 = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$ und die **Klein'sche Vierer-Gruppe** $V_4 = \{(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

Gruppen Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, 0), (\mathbb{Q}, +, 0), (\mathbb{R}, +, 0), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, 1)$, **Zyklische Gruppen:** $\mathrm{Z}_n = (\{a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}, \cdot, e)$ mit $b = a^2, c = a^3, \ldots, z = a^{n-1}$. $\mathrm{Z}_2 = (\{-1, 1\}, \cdot, 1) \simeq \mathrm{C}_s \simeq \mathrm{C}_i = \mathrm{S}_2 = (\{\mathrm{E}, \text{ Inversion}\}, \circ, \mathrm{E})$, Die Elemente der **Punktgruppen** sind die **Symmetrieoperationen**, also spezielle Bewegungen, die ihn mit sich zur Deckung bringen, im $\mathbb{R}^3$. Daher bleibt mindestens ein Punkt fest - daher **Punktgruppe**. Trifft auf Moleküle zu. Mit den Symbolen C_n für die Drehung, σ Spiegelung, S_n Drehspiegelung und i für Inversion werden nicht nur dei Symmetrieoperationen bezeichnet, sondern auch die **Symmetrieelemente** bzgl deren die Symmetrieoperationen ausgeführt werden: Drehachse, Spiegelungsebene, Drehspiegelungsachse, Iversionszentrum. Bei Kristallen sind Translationen die Decktransformationen, **Raumgruppen**. Glaeske Bd5 p397; Mathiak/Stingl p40; Dmitriev: Symmetrie in der Welt der Moleküle 1976. Wilde: A General Theory of Symmetry Coordinates Am. J. Phys32 45 (1964); Hollas: Die Symmetrie von Molekülen - eine Einführung in die Anwendung von Symmetriebetrachtungen in der Chemie 1975; Grahn: Platonische Kohlenwasserstoffe, Chemie in unserer Zeit 15, 52 (1981); C_n mit n-zähliger Drehachse, mit Drehwinkel um $2\pi/n$, wobei der entartete Fall C_1 das völlig unsymmetrische Molekül, das nur die Identität E als Symmetrieoperation enthält, beschreibt. Lineare Moleküle haben C_∞. Drehsymmetrie-Gruppe: C_3 zyklische Gruppe der Ordnung 3 hat **Gruppentafel** oder Multiplikationstabelle:

$\mathrm{C}_3 \sim$

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

$S_3 \sim$

$\circ$	e	a	b	c	d	f
e	e	a	b	c	d	f
a	a	b	e	f	c	d
b	b	e	a	d	f	c
c	c	d	f	e	a	b
d	d	f	c	b	e	a
f	f	c	d	a	b	e

Die Gruppe $(S_n, \circ, \mathrm{id})$ aller **Permutationen** von N Objekten heißt **symmetrische Gruppe** $\mathrm{S}_N = \{f : \{1, \ldots, N\} \rightarrow \{1, \ldots, N\} | f \text{ bijektiv}\}$. Sie hat die Ordnung $N!$. Zöpfe und Ornamente werden von der symmetrischen Gruppe beherrscht. **Artin: Theorie der Zöpfe** 1925; Artin: Galoissche Theorie 1959; Flachsmeyer, Feiste & Manteuffel: Mathematik und ornamentale Kunstformen 1980; Name kommt von Funktionen $f(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, die symmetrisch bzgl. ihrer Argumente. **Beispiel:** Symmetrische Gruppe S_3 von 3 Objekten $W = \{1, 2, 3\}$ erlaubt 3! Permutationen, denen die folgenden Gruppenelemente entsprechen $e = \mathrm{id} = (1)(2)(3), a = (123), b = (132), c = (1)(23), d = (13)(2), f = (12)(3)$. Es gilt etwa $a \circ b = e, a^2 = b, ca = bc = d, f = cb = ac, e = a^3$. Wegen $ca \neq ac$ nicht abelsch. Drehungen um die Höhe des **Tetraeders** (120° und 240°) und um die Verbindungstrecke der Mitten gegenüberliegender Kanten (je 180°) Meschkowski p71. Untergruppe ist Mercedes-Stern $e, a, b \in C_3$, also zyklische Untergruppe, die auch durch ebene Drehungen um 120° und 240°, auch 1,$\exp(2\pi i/3)$ und $\exp(4\pi i/3)$ oder die speziellen orthogonalen

Matrizen

$$a = (123) \to D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}(b) = D^T(b), b = (132) \to D(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D^T(a) = D^{-1}(a)$$

$$e = (1)(2)(3) = a\,b = (123) \circ (132) \to D(a)\,D(b) = D(a\,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden kann. **Basisvektor-Permutation**. Dabei gibt die Permutationsvorschift an, welcher Basisvektor in der entsprechenden Spalte stehen soll:

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Spalte 1} & \text{Spalte 2} \\ \text{Basisvektor 2} & \text{Basisvektor 1} \end{pmatrix} = (12)$$

Multiplikativ bilden die **orthogonalen/unitären Matrizen** bilden eine Gruppe **EANI**. Die **symmetrischen Matrizen** bilden, wie **Vektorraum mit Skalarprodukt**, nicht mal ein **Gruppoid/Magma Ɇ**. Die **reellen Matrizen** und die **Dreiecksmatrizen** bilden ein **Monoid EAN**.

Darstellungstheorie: Die Darstellung einer Gruppe ist die Abbildung der Gruppenelemente $(a, b, c, d, \dots)$ auf lineare Transformationen $\mathbb{D}$ eines Vektorraumes mit den Eigenschaften 1. $ab = c$, dann gilt $\mathbb{D}(a)\mathbb{D}(b) = \mathbb{D}(c)$, 2. $\mathbb{D}(a^{-1}) = \mathbb{D}^{-1}(a)$, 3. $\mathbb{D}(e) = \mathbb{I}$. Den Elementen der Gruppe $SO(2)$ ordnen wir die unitären Matrizen $e^{i\alpha}$ zu. Schmutzer: Mathe Kompendium. **Boseck: Grundlagen der Darstellungstheorie** 1973; Ziegler & Zeidler: Teubner TB der MatheI 2003[2], Kap3.9 Geometrie in der modernen Physik, p877 & II = Grosche: Bronstein BdII 1995[7], Kap17 Lie-Gruppen. **Mathematik der Symmetrie** p643-704 ; Sattinger & Weaver: Lie groups and algebras 1985, 2010; Zeidler: Quantum Field Theory VolI. **A Bridge Between Mathematicians and Physicists**, Kap7.5 p342 2009[2];

Die Gruppe der 2×2-Matrizen

$$L_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a \in \mathbb{R}$$

bilden eine lineare Gruppe mit $L_a\,L_b = L_{a+b}$. Diese Gruppe ist **isomorph** zum $\mathbb{R}^1$ und bildet eine Darstellung von $\mathbb{R}^1$ durch 2×2-Matrizen. Eine **Darstellung** einer Gruppe G auf einem Vektorraum V ist ein **Homomorphismus** von G in die umkehrbaren linearen Transformationen von V: $a \to t_a$ gemäß $a \circ b \to t_a\,t_b$. Darsteller müssen nicht Matrizen sein. $\mathbb{R}^1$ kann auch auf den unendlichdimensionalen Vektorraum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ durch die Translation $(T_a\,f)(x) = f(x + a)$ dargestellt werden. Die Darstellungen machen den Unterschied zwischen abstrakter Gruppe und deren Vielfalt ihrer Realisierungen deutlich.

Lie-Gruppen, basieren auf Galois-Theorie, und sollten ursprünglich bei der Lsg von Dgls helfen, so wie endliche Gruppen bei der Lsg algebraische Gleichungen helfen. Galois insperierte Lie. Der trivialen additiven Konstante bei Intgration entspricht der 1-parametrigen Translationsgruppe. Details siehe G̃ilmore: Lie groups, physics and geometry. An introduction for physicists, Engineers and Chemists 2008 lies zuerst das letzte Kapitel!; Gegeben $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)$. Ableitung wird durch Koordinate $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ notiert. Notation als Flächengleichung $F(x, y, p) = p - g(x) = 0$ mit den Bedingungen $p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ und $F(x, y, p) = 0$. Nun definieren die drei parziellen Ableitungen $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial p$ der Fläche $F(x, y, p)$ drei odes:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} [p - g(x)] = \begin{bmatrix} * \\ 0 \\ * \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \begin{bmatrix} x \\ y \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daraus folgen die Gln für die infinitesimalen Operatoren der Invarianzgruppe und die kanonischen Koordinaten. Hermann: Lie groups for physicists 1966; Jacobson: Lie algebras 1962; Eisenhart: Continuous groups of transformations 1933; Cantwell: Introduction to Symmetry Analysis with CD-ROM 2002; Stephani: Differentialgleichungen. Symmetrien und Lösungsmethoden 1994; **Hydon: Symmetry Methods for Differential Equations. A Beginner's Guide** 2008 mit vielen Beispielen; Ovsiannikov: Group Analysis of Differential Equations Novosibirsk 1962, 1982; **Olver: Applications of Lie groups to differential equations** 1986, 2000; Bishop: Geometry of manifolds 1964; **Bluman & Anco: Symmetry and integration methods for differential equations** 2002 mit Beispielen; Bluman, Cheviakov & Anco: Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations 2009; Dorodnitsyn: Applications of Lie Groups to Difference Equations 2010; Antippa: On the Lie algebra of the rotation group EurJPhys 18 1997 253-5; Stetige, kontinuierliche, topologische oder **Lie-Gruppen** sind spezielle Mannigfaltigkeiten, **differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit Gruppenstruktur**. Weil **Mannigfaltigkeiten mit Symmetrie.** Elementares Beispiel ist Mannigfaltigkeit **Einheitskreis** $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset (\mathbb{C}^*, \cdot)$, * meint ohne 0+i0, kann auch als **Kreisgruppe** angesprochen werden. Das Produkt zweier komplexer Zahlen vom Betrag 1 hat wieder Betrag 1, ebenso das Inverse. Alles bleibt auf dem Einheitskreis. Auch hier hat man eine „mit der Differentialrechnung verträgliche Gruppenstruktur", dh eine Lie-Gruppe. **Gruppen-Homomorphismus** $F\colon \mathrm{SO}(2) \to S^1$. $F\left(\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}\right) = F\left(\begin{bmatrix} \cos(\phi+\psi) & \sin(\phi+\psi) \\ -\sin(\phi+\psi) & \cos(\phi+\psi) \end{bmatrix}\right) = \cos(\phi+\psi) + i\sin(\phi+\psi) = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\sin\psi + i(\sin\phi\cos\psi + \sin\psi\cos\phi) = (\cos\phi + i\sin\phi)(\cos\psi + i\sin\psi) = F\left(\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}\right) F\left(\begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}\right)$. Aus Sicht der Lie-Gruppen-Theorie sind die Gruppe der Drehmatrizen und der Einheitskreis dieselbe Gruppe. Eine wichtige Motivation der Lie-Gruppen-Theorie besteht darin, dass man für Lie-Gruppen eine Lie-Algebra definieren kann und sich viele gruppentheoretische oder auch differentialgeometrische Probleme auf das entsprechende Problem in der Lie-Algebra zurückführen und dort lösen lassen. („Lineare Algebra ist einfacher als Gruppentheorie".) Für die S^1 ist die Lie-Algebra die imaginäre Achse $i\mathbb{R}$ mit der **trivialen Lie-Klammer**. Die Trivialität der Lie-Klammer rührt in diesem Fall daher, dass S^1 eine abelsche Lie-Gruppe ist. Die Lie-Algebra der SO(2) ist $\mathrm{so}(2) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & i\phi \\ -i\phi & 0 \end{bmatrix} : \phi \in \mathbb{R}\right\}$ mit der trivialen Lie-Klammer, beide Lie-Algebren sind isomorph. Allgemein entsprechen isomorphe Lie-Gruppen stets isomorphen Lie-Algebren. Tangentialraum einer Lie-Gruppe G am neutralen Element eine Lie-Algebra. Zu jeder Lie-Gruppe G mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ gibt es eine **Exponentialabbildung** $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ mit $\exp(A) = \Phi_1(e)$, wobei Φ_t der Fluss des links-invarianten Vektorfelds A und $e \in G$ das neutrale Element ist. Falls G eine abgeschlossene Untergruppe der $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ oder $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ ist, so ist die so definierte Exponentialabbildung identisch mit der **Matrix-Exponentialfunktion**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k = E_n + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} e & e-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq (e^{a_{ij}})$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12}^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, k \geq 2, e^{E_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mit den Rechenregeln für die Abbildung $\exp : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ **a]** A, B **kommutativ** $[A, B] = 0$, dann $e^{A+B} = e^A e^B$; **b]** Für jede **invertierbare Matrix** $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist $S^{-1}e^A S = e^{S^{-1}AS}$; **c] Diagonalmatrix-Regel** $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$, kann man e^A für alle diagonalisierbaren Matrizen angeben. Ist A diagonalisierbar mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und den Eigenvektoren $\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_n$ = Spalten

S, so ist die exponierte Matrix von A $e^A = S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}$ Arens p618. Anwendung bei Lösung der linearen Dgl $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ durch $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 e^{At}$, wobei die Eigenwerte von A genommen werden. Jedes Skalarprodukt auf $T_eG = \mathfrak{g}$ definiert eine G-links-invariante **Riemannsche Metrik** auf G. Im Spezialfall, dass diese Metrik zusätzlich auch rechtsinvariant ist, stimmt die Exponentialabbildung der Riemannschen Mannigfaltigkeit G am Punkt e mit der Lie-Gruppen-Exponentialabbildung überein. Den Zusammenhang zwischen der Multiplikation in der Lie-Gruppe und der Lie-Klammer in ihrer Lie-Algebra stellt die **Baker-Campbell-Hausdorff-Formel** her: $\exp(u)\exp(v) = \exp\left(u + v + \frac{1}{2}[u,v] + \frac{1}{12}[[u,v],v] - \frac{1}{12}[[u,v],u] - \cdots\right)$. Betrachte den Kreis S^1 als Mannigfaltigkeit. In jedem Punkt gibt es **Flachmacher** Tangentialraum mit $\mathbb{R}$. Atlas. Andererseits hat man mit den orthogonalen Matrizen $\begin{pmatrix} c\alpha & -s\alpha \\ s\alpha & c\alpha \end{pmatrix}$ als SO(2)-Darsteller ein 1d-Kontinuum an Gruppenelementen, die das Einselement an jeden Punkt des Kreises bringen können. Die Elemente der 1d-Gruppe ist also ebenfalls eine 1d Untermannigfaltigkeit, denn im 4d ist gemäß $R_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ wegen des Pythagoras $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ein 1d-Gebilde bei dem für je zwei 'Punkte' $R_{\alpha_1}, R_{\alpha_2}$ deren Produkt $R_{\alpha_1} \circ R_{\alpha_2}$ wieder Element dieser 1d-Mannigfaltigkeit ist. **Geniale Entdeckung von Lie: Punkte einer Mannigfaltigkeit mit Symmetrie können zugleich Elemente einer Gruppe sein!** Das Produkt zweier Elemente der Mannigfaltigkeit ist nicht nur wieder Punkt der Mannigfaltigkeit, sondern es gelten auch Gruppeneigenschaften. Es gibt zu jedem Punkt einen Inversen usw. OK, der Grund ist natürch die **Symmetrie** der Mannigfaltigkeit! **Hawkins: Emergence of the theory of Lie groups. An essay in the history of mathematics 1869–1926**, 2000; **Tent: Groups and Analysis. The Legacy of Hermann Weyl** 2008; G̃ilmore: Lie groups, physics and geometry. An introdction for pysicists, Engineers and Chemists 2008; Chevalley: Theory of Lie Groups 1948; Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups 1971 Euklidischer Raum $\mathbb{R}^n$ ist bzgl + eine **Lie-Gruppe**. Siehe **Jänich: Mathe 2 p355** und **Jänich: Vektoranalysis** zu Mannigfaltigkeiten. **Lipkin: Anwendung von Lie'schen Gruppen in der Physik** 1974; Gourdin: Basics of Lie Groups 1982; Goldhorn et al.: Moderne mathematische Methoden der Physik: Bd2: Operator- und Spektraltheorie - Gruppen und Darstellungen 2010; http://www. physik. uni-bielefeld.de/~laine /symmetrien/cover.html Higman: Applied group-theoretic and matrix methods 1965; W̃intner & Lichtenstein: Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik 1929; Max Wagner: Gruppentheoretische Methoden in der Physik 2001; W̃ybourne: Classical Groups for Physicists 1974; **D̃uffey: Applied Group Theory. For Physicists and Chemists** 1992; Ñussbaum: Applied Group Theory for Chemists, Physicists and Engineers 1971; Rose & Rose: Elementary Theory of Angular Momentum 1957; R̃ose: Multipol fields 1955; Rose: Relativistische Elektronen-Theorie Bd1 und 2 1971; Rose: Internal Conversion Coefficients 1957; Judd: Angular momentum. Theory for Diatomic Molecules 1975; Silver: Irreducible Tensor Methods: An Introduction for Chemists 1977; Fano & Racah: Irreducible Tensorial Sets 1959 SK950; Fano & Rau: Symmetries in Quantum Physics 1996; Brink & Slatchler: Angular momentum 1962; Elbaz & Castel: Graphical methods of spin algebra 1972; Biedenharn & Louck: Angular Momentum in Quantum Physics. Theory and Application 1981; Biedenharn & Louck: The Racah-Wigner Algebra in Quantum Theory 2009; Griffith: The Irreducible Tensor Method for Molecular Symmetry Groups 2006; Zare: Angular momentum. Understanding spatial aspects in chemistry and physics 1988 UK3500; Sattinger & Weaver: Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry, and Mechanics 1986; Gilmore: Lie groups 1974; Stillwell: Naive Lie theory 2008; Sternberg: Group theory and physics 1995; Louck: Recent Progress Toward a Theory of Tensor Operators in the Unitary Groups, AmJPhys38 3 (1970); **Racah-Wigner-Drehimpuls-Addition**. **Edmonds: Drehimpulse in der Quantenmechanik** 1964; Feenberg & Pake: Notes on the quantum theory of angular momentum 1953; **Lindner: Drehimpulse in der Quantenmechanik** 1984; Biedenharn & van Dam: Quantum Theo-

ry of Angular Momentum. A Collection of Reprints and Original Papers 1965; **Böhm: Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik:** Eine Einführung in die mathematischen Grundlagen 2011 e-book; **Geyer, Kripfganz, Ranft: Einführung in die Quantenfeldtheorie der Elementarteilchen** 1990; Large**Gelfand & Neumark: Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen** 1957; **Carmeli: Group theory and general relativity**. Representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field 1977; **Carmeli & Malin: Representations of rotation and Lorentz groups. An introduction** 1976; **Kühnel: Matrizen und Lie-Gruppen. Eine geometrische Einführung,** e-book http://dx.doi.org/10.1007/978-3-8348-9905-7; **Greiner: QM Bd5 Symmetrien**; Einparametrige Gruppe von Punkttransformationen und Erzeugende. Gröbner: Mathematische Methoden der Physik; Stephani: Differentialgleichungen: Symmetrien und Lösungsmethoden 1994; Gute Einführung in Stumpff: Himmelsmechanik III §203 **Lie-Operatoren und -Reihen**. Lie-Transformation, dynamische Symmetrien: $\tilde{x}(x,y;\epsilon) = x + \epsilon\,\zeta(x,y) + \cdots = x + \epsilon\,Xx + \ldots$ und $\tilde{y}(x,y;\epsilon) = y + \epsilon\,\zeta(x,y) + \cdots = y + \epsilon\,Xy + \ldots$ mit $\zeta(x,y) = \frac{\partial\hat{x}}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}$ und $\eta(x,y) = \frac{\partial\hat{y}}{\partial\epsilon}|_{\epsilon=0}$ und dem Tangentenvektor oder die infinitesimale Erzeugende der Transformation $X = \zeta(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$, die den Gruppenorbit erzeugt/darstellt. **Lie-Integratoren:** Zuerst von **Gröbner: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen** 1960 für Himmelsmechanik, dann 1983 von Hanslmeier und R. Dvorak, benötigt Lie-Reihen, die schnell aus nur wenigen vorgegebenen Parametern berechenbar. Schnell und genau. **Beispiel:** harmonischen Oszillators mittels Lie-Integration gelöst. Die Bewegung des Oszillators kann durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben werden: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha^2 x = 0$. Zuerst wird diese Gleichung in ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt: $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y = \theta_1(x,y), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\alpha^2 x = \theta_2(x,y)$. Anfangsbedingungen $x(t=0) = \xi$ und $y(t=0) = \eta$ bezeichnet. Damit hat der Lie-Operator folgende Form: $D = \theta_1\frac{\partial}{\partial\xi} + \theta_2\frac{\partial}{\partial\eta} = \eta\frac{\partial}{\partial\xi} - \alpha^2\xi\frac{\partial}{\partial\eta}$. Die Lösungen der Differentialgleichungen sind nun durch die Lie-Reihen gegeben: $x = e^{\tau D}\xi$, und $y = e^{\tau D}\eta$, wobei hier τ den Zeitschritt $t - t_0$ der Integration darstellt. Um die Lösung explizit darzustellen, wird nun die Lie-Reihe in ihrer entwickelten Form dargestellt: $x = e^{\tau D}\xi = \left(1 + \tau D + \frac{\tau^2}{2!}D^2 + \frac{\tau^3}{3!}D^3 + \ldots\right)\xi$ Nun werden die einzelnen Terme der Reihe berechnet: $D\xi = \eta = \theta_1, D^2\xi = D\eta = -\alpha^2\xi = \theta_2, D^3\xi = -\alpha^2 D\xi = -\alpha^2\eta$, $D^4\xi = -\alpha^2 D\eta = \alpha^4\xi, D^5\xi = -\alpha^4 D\xi = \alpha^4\eta$, $D^6\xi = -\alpha^4 D\eta = -\alpha^6\xi$. Allgemein lässt sich zeigen, dass in diesem Fall gilt: $D^{2n}\xi = (-1)^n\alpha^{2n}\xi$ und $D^{2n+1}\xi = (-1)^n\alpha^{2n}\eta$ Nun können die einzelnen Terme in die Lie-Reihe eingesetzt werden: $x = \xi + \tau\eta - \frac{\tau^2}{2!}\alpha^2\xi - \frac{\tau^3}{3!}\alpha^2\eta + \frac{\tau^4}{4!}\alpha^4\xi\ldots$ Nach einer Faktorisierung von ξ und η ergibt sich schließlich $x = \xi\left(1 - \frac{\tau^2}{2!}\alpha^2 + \frac{\tau^4}{4!}\alpha^4 - \frac{\tau^6}{6!}\alpha^6 + \ldots\right) + \frac{\eta}{\alpha}\left(\tau\alpha - \frac{\tau^3}{3!}\alpha^3 + \frac{\tau^5}{5!}\alpha^5 - \frac{\tau^7}{7!}\alpha^7 + \ldots\right)$ Bei den beiden Reihen in den Klammern handelt es sich um die Potenzreihe der Kosinus- bzw. Sinus-Funktion. Damit folgt nun die Lösung der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators: $x(t) = \xi\cos\alpha\tau + \frac{\eta}{\alpha}\sin\alpha\tau$.

Jeevanjee: An Introduction to Tensors and Group Theory for Physicists 2010; http://www.cmth. ph. ic. ac. uk/people/d. vvedensky/courses.html Coleman: Groups and physics, Notices of the AMS 44 1997 p8; **Lucha & Schöberl: Gruppentheorie.** Eine elementare Einführung für Physiker 1993; **Kowalewski: Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen** 1950; Kowalewski: Einführung in die Infinitesimalrechnung. Mit Einer Historischen Übersicht 1900; Kowalewski: Allgemeine Methode Partielle Differentialgleichungen zu Integriren 1910; Kowalewski: Newtons Abhandlung Über Die Quadratur Der Kurven 1930; Kowalewski: Leibniz Über die Analysis des Unendlichen: Eine Auswahl 1930; Kowalewski: Einführung in die analytische Geometrie 1909; Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie : einschließlich der Fredholmschen Determinanten 1954; Kowalewski: Lehrbuch der höheren Mathematik für Universitäten und Technische Hochschulen. Bd1 Vektorrechnung und analytische Geometrie. Bd2 Diff und Integral. Bd3 Differentialgleichungen 1933; Kowalewski: Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik 1933; Kowalewski: Bestand und Wandel. Meine Lebenserinnerungen zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik 1950; Kowalewski: Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen. Ein Lehr- und Übungsbuch für Studierende zur Einführung in die Infinitesimalrechnung 1930; Hodge & Pedoe: Methods of algebraic geometry I 1947 II 1952 III 1954; Lang: Introduction to algebraic geometry 1958; Lang: Faszination Mathematik, ein Wissenschaftler stellt sich der Öffentlichkeit 1989; Lang: Algebraische Strukturen 1979; Safarevic: Algebraische Flächen

1968; **Lenk, Macheleit & Möbius: Statistische Physik, Relativitätstheorie, Elementarteilchen. PfL12 1979 Kap7 Mathematische Grundlagen der unitären Symmetrie**; **Rowlatt: Group theory and elementary particles** 1966; Schmutzer: Mathematik - Ein Kompendium für Physiker; **Glaeske et al.: Quantenchemie Vol5** 1986 Kap8 p368-427; Messiah: QMII im Anhang; Boerner: Darstellungen von Gruppen mit Berücksichtigung der Bedürfnisse der modernen Physik 1955, 1967; **Smirmov: Lehrgang der höheren Mathematik III,1**; **Stiefel & Fässler: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung** 1979; Mackey: The theory of unitary group representations 1967; M̃ackey: Unitary group representations in physics, probability and number theory 1978; Loeb: Group theory and its applications; Simms: Lie groups and quantum mechanics; **Mirman: Group Theory: An intuitive approach** 1995 klärt alle Verständnisfragen; Wolbarst: An intuitive approach to group representation theory, AmJPhys45, 803 (1977) & 47, 103 (1979) Louck & Metropolis: Classical dynamics and Lie groups AmJPhys54 558 (1986); Sternberg: Group theory and physics; Littlewood: The theory of group characters and matrix representations of groups 1950[2]; Barnes: Group Theory for the Standard Model of Particle Physics and Beyond; **Kosmann-Schwarzbach: Groups and Symmetries - From Finite Groups to Lie Groups** 2010 e-book; **Berndt: Representations of linear groups - an introduction based on examples from physics and number theory** 2007; Gell-Mann: The Eightfold Way 1964; In addition to organizing the mesons and spin-1/2 baryons into an octet, the principles of the Eightfold Way also applied to the spin-3/2 baryons, forming a decuplet = a combination of 10 of a kind. **Ñeumark: Lineare Darstellungen der Lorentzgruppe** 1963; Gelfand, Minlos, Shapiro: Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications 1958; C̃outo & Lymberopoulos: Introduction to Lorentz geometry. Curves and surfaces 2020; Rühl: The Lorentz Group and Harmonic Analysis 1970; **Carmeli & Malin: Representations of the Rotation and Lorentz Groups an introduction** 1976; **Gelfand, Minlos, Shapiro: Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications** 1963; Moshe: Representations of the rotation and Lorentz groups: An introduction 1972; **Cracknell: Angewandte Gruppentheorie**. Einführung in die Originaltexte WTB 84 1971 = DIE Einführung mit Literaturtipps p214ff! Drehgrppe = **Rotationsgruppe** p78ff und Lorentzgruppe p101f; Sexl & Urbandtke: Relativität, Gruppen, Teilchen 1992 p133-296 mit Aufgaben, Glossar p316-318; Martin Schottenloher: **G̃eometrie und Symmetrie in der Physik. Leitmotiv der mathematischen Physik** 1995, z.B. **Dirac-Gleichung** = logische Kombination von QM $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi$ und SRT, also Lorentz-Kovarianz, zwingt zu Spinoren, Elektronen-Spin und Anti-Teilchen, wenn man positiv definite Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \psi^*\psi$ und eine Vermischung der unabh Raum-Zeit-Variablen erlauben möchte, also neben linearer Zeitableitung auch lineare in den Ortsableitungen gestattet: $i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i}\left(\alpha_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \alpha_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \alpha_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\right) + \beta mc^2\psi = H\psi$. Dies kann nur eine Matrix-Gleichung mit mindestens Vierervektoren $\psi = [\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4]$ und 4 Vierer-Matrizen mit $\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i = 2\delta_{ik}$, $\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0$ und $\alpha_i^2 = \beta^2 = 1$ mit $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0_{2\times2} & \sigma_i \\ \sigma_i & 0_{2\times2} \end{pmatrix}$ und $\beta = \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & 0_{2\times2} \\ 0_{2\times2} & -1_{2\times2} \end{pmatrix}$ leisten. Zudem muss die Energie-Impuls-Beziehung für ein freies Teilchen erfüllt sein $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$. $\left[\mathrm{i}\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - m\right]\psi(x) = 0$ oder kurz $(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi(x) = 0$ und $\bar\psi(x)(i\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}^\mu + m) = 0$ oder noch kürzer $(i\not\partial - m)\psi(x) = 0$ mit $\not\partial = \gamma_\mu\partial^\mu$ und im Impulsraum $(\not p - m)\psi(p) = 0$ mit $\not p = p_\mu\partial^\mu$, Ebert: Eichtheorien 1989 p25, mit dem kovarianten 4-Vektor $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$, $\bar\psi_\alpha(x) = (\psi^+(x)\gamma^0)_\alpha$ und dem kontravarianten 4-Vektor $\gamma^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^0 \\ \gamma^1 \\ \gamma^2 \\ \gamma^3 \end{pmatrix}$ der **Dirac-Matrizen** $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2$ und γ^3 erlauben die **Raum-Zeit-Mischung oder verräumlichen die Zeit** auch für die Zustandskomponenten $\psi(x) \in \mathbb{R}^4$ der QM. Einführung siehe Landau & Lifschitz Bd4a = Beresteckij, Lifschitz & Pitaevkij: Relativistische Quantentheorie 1970[2] p66ff; Nolting: Theoret Physik Bd5T2 Kap5.3 Relativistische Theorie des Elektrons p53ff; Dirac: Zur Quantentheorie des Elektrons In Falkenhagen: Quan-

tentheorie und Chemie 1926 p85-94; Nachtmann: Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik 1992; Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005[2] p869ff; Clifford- oder Dirac-Algebra: $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu \quad (\mu,\nu \in \{0,1,2,3\}, \mu \neq \nu), \gamma^0\gamma^0 = -\gamma^1\gamma^1 = -\gamma^2\gamma^2 = -\gamma^3\gamma^3 = 1$ oder Matrix-Darstellung mit **Pauli-Matrizen**, siehe Seite 444

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} & & & -\mathrm{i} \\ & & \mathrm{i} & \\ & \mathrm{i} & & \\ -\mathrm{i} & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & -1 \\ -1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wird der Dirac-Operator $\mathrm{i}\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + m$ auf beide Seiten der Dirac-Gleichung angewandt, entkoppeln die vier Differentialgleichungen und man erhält für jede Komponente von ψ die **Klein-Gordon-Gleichung:** $\left[\frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} + m^2\right]\psi(x) = 0$. Die zweimalige Anwendung eines Dirac-Operators führt also auf die Klein-Gordon-Gleichung, weshalb die Dirac-Gleichung auch als die „Wurzel“ aus der Klein-Gordon-Gleichung angesehen wird. Für ein Teilchen in einem Impulseigenzustand ergibt die Klein-Gordon-Gleichung $-E^2 + \vec{p}^{\,2} + m^2 = 0$, also die relativistische Energie-Impuls-Beziehung eines Teilchens der Masse m. **Impulsraum und Slash-Notation:** $\left[\gamma^\mu p_\mu - m\right]\psi(p) = 0$. Mit **Feynman-Slash-Notation** wird das Skalarprodukt mit den i Gamma-Matrizen durch einen Slash ausgedrückt. Es gibt im Ortsraum $\left[i\partial\!\!\!/ - m\right]\psi(x) = 0$, und im Impulsraum gilt $\left[p\!\!\!/ - m\right]\psi(p) = 0$. **Bjorken & Drell: Rel QM** 1964; Aitchison: Relativistic quantum mechanics 1972; **Eichinvarianz und elektromagnetische Wechselwirkung:** Wenn $\psi(x)$ die Dirac-Gleichung löst, dann löst auch der mit einer Phase multiplizierte Spinor $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,q\,\alpha}\psi$ die Dirac-Gleichung. C̃orson: Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations 1955; Bergmann & Schäfer: Bd4 Teilchen p606; Wird darüber hinaus die Invarianz unter allen Phasentransformationen gefordert, die **stetig differenzierbar von Zeit und Ort abhängen**, $\psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,q\,\alpha(x)}\psi(x)$, müssen die partiellen Ableitungen in der Dirac-Gleichung durch eine kovariante Ableitung $D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}\,q\,A_\mu$ ersetzt werden. Das transformierte Eichfeld ist dann $A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^\mu}$. Der Zustandsvektor ψ löst die Dirac-Gleichung mit dem Eichfeld A_μ gemäß $\left(\mathrm{i}\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - q\sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu A_\mu - m\right)\psi(x) = 0$ oder in Slash-Notation $\left(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - q\,A\!\!\!/ - m\right)\psi(x) = 0$. Transformationen, deren Parameter so wie hier die Phase $\alpha(x)$ beliebig von Zeit und Ort abhängen dürfen, heißen **lokale Eichtransformationen**. Bei dem Eichfeld handelt es sich um das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential $\vec{A}$ der Elektrodynamik, $(A_0, A_1, A_2, A_3) = (\phi, -A_x, -A_y, -A_z)$. Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953 Bd1 p210f; Wenn gemäß $A'_\mu = A_\mu - \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x^\mu}$ transformiert, bleiben die elektrische und magnetische Feldstärke $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ sowie $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ und alle anderen messbaren Größen unverändert. Durch eine **kovariante Ableitung** koppelt die elektromagnetischen Potentiale an den Dirac-Spinor = **minimale Kopplung** im Gegensatz zu einem Kopplungsterm wie „magnetische Feldstärke mal Dirac-Spinor“, der auch eichinvariant wäre, aber nicht zur Ergänzung einer Ableitung zu einer kovarianten Ableitung erforderlich ist. **Schrödingerform der Dirac-Gleichung** nach Multiplikation mit γ^0 kann man wegen $(\gamma^0)^2 = 1$ in der Dirac-Gleichung nach der Zeitableitung auflösen und die Dirac-Gleichung in die Form einer Schrödinger-Gleichung bringen, $\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\psi = H_{\mathrm{Dirac}}\psi$ mit $H_{\mathrm{Dirac}} = \sum_{k=1}^3 \alpha^k(-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x^k} - qA^k) + \gamma^0 m + q\phi$. Die hier auftretenden 4×4-Matrizen $\alpha^k = \gamma^0\gamma^k$ lassen sich kompakt mit Hilfe der Pauli-Matrizen mit Blöcken von 2×2-Matrizen schreiben: $\alpha^k = \begin{pmatrix} & \sigma^k \\ \sigma^k & \end{pmatrix}$, $k \in \{1,2,3\}$, $\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2\times2} & \\ & -1_{2\times2} \end{pmatrix}$. Die möglichen Energien des Teilchens sind Eigenwerte dieses Hamiltonoperators. Für ungeladenes Teilchen (q=0) hat das Spektrum positive und negative Werte. Entspricht der Energie-Impuls-Relation der Klein-Gordon-Gleichung $E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2$ (c=1), die positive und negative Energiewerte $E = \pm\sqrt{m^2 + \vec{p}^{\,2}}$ erhält. Da Teilchen mit negativer Energie nie beobachtet wurden und da eine Welt mit Teilchen, deren Energien nach

oben und nach unten unbeschränkt ist, instabil wäre, postulierte Dirac, dass das Vakuum ein Dirac-See sei, in dem jeder denkbare Zustand negativer Energie schon besetzt sei, sodass weitere Elektronen nur positive Energien annehmen könnten. Fügt man diesem **Dirac-See** genügend Energie, mindestens die Ruheenergie zweier Elektronen, hinzu, so könne man einem See-Elektron positive Energie verleihen und das entstehende Loch verhielte sich wie ein Zustand mit der restlichen, ebenfalls positiven Energie und der fehlenden, entgegengesetzten Ladung. So sagte Dirac die Existenz von Antiteilchen und die **Paarerzeugung** von Elektron-Positron-Paaren voraus, die ein Jahr später beobachtet wurden. Die Vorstellung eines Dirac-Sees gilt allerdings heute als unhaltbar und ist durch die **Feynman-Stückelberg-Interpretation** ersetzt. Sie deutet die Dirac-Gleichung als Gleichung für ein Quantenfeld $\psi(x)$, das ist mathematisch ein Operator, der in den quantenmechanischen Zuständen Teilchen oder Antiteilchen erzeugt oder vernichtet. Die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen während der Wechselwirkung des Elektrons mit dem Proton führt in der Quantenelektrodynamik zu einer kleinen Verschiebung der Energien verschiedener Zustände des Wasserstoffatoms, die ohne diese Erzeugungs- und Vernichtungsvorgänge gleiche Energie hätten. Die berechnete Größe dieser **Lamb-Verschiebung** stimmt innerhalb der Messgenauigkeit von sechs Stellen mit dem gemessenen Wert überein. Die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen während der Wechselwirkung des Elektrons mit einem Magnetfeld ändert auch den Dirac-Wert $g = 2$ des **gyromagnetischen Faktors**. Sie bewirkt ein **anomales magnetisches Moment**, von dem man auch als **g-2-Anomalie** spricht. **Klein-Paradox** statt exponentieller Abnahme der Tunnelwahrscheinlichkeit hinter Potenzialbarriere kommt Teilchen gemäß Dirac-Gleichung bei Potenzialhöhe von mc^2 ins verbotene Gebiet und eine unendlich hohe Barriere stellt kein Hindernis dar. Folglich kann das alte p-e-Modell des Kerns nicht gelten. Zeitunabhänige Dirac-Gleichung für x-Richtung $(\sigma_x p + V)\,\psi = E_0\psi, \quad V = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x > 0 \end{cases}$ hat die beiden Lösungen **vor** $\psi_- = Ae^{ipx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + A'e^{-ipx}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \quad p = E_0$ und **hinter der Barriere** $\psi_+ = Be^{ikx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad |k| = V_0 - E_0$ Die **Wahrscheinlichkeitsströme** sind $J_i = \psi_i^\dagger \sigma_x \psi_i,\ i = 1,2$ Also $J_- = 2\left[|A|^2 - |A'|^2\right]$ und $J_+ = 2\,|B|^2$. Die **Transmissions und Reflexions-Koeffizienten** sind $R = \frac{|A'|^2}{|A|^2}$ und $T = \frac{|B|^2}{|A|^2}$. Wegen der Stetigkeit der Wellenfunktion bei $x = 0$ gilt $|A|^2 = |B|^2$ und $|A'|^2 = 0$. $T = 1$ bedeutet keine Reflexion. **Bjorken & Drell: Rel QM** 1964 p49-55; Hees https://fias.uni-frankfurt.de/~hees/publ/loesungen.pdf

Scherer: Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik 2015; Trifonow & Petraschen: Anwendung der Gruppentheorie in der Quantenmechanik 1960; Heine: Group theory in quantum mechanics 1960; Tinkham: Group theory and quantum mechanics 1964; Murnaghan: The theory of group representations 1949; Majid: Foundations of quantum group theory; Lusztig: Introduction to Quantum Groups 1994, 2010 e-book; Karpfinger & Meyberg: Algebra: Gruppen - Ringe - Körper 2010; Steinweg: Algebra in der Grundschule. Muster und Strukturen, Gleichungen, funktionale Beziehungen. Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II 2013 Algebraische Grundideen für die Grundschule. Implizites explizieren; **Zahlentheorie:** Wohlgemuth et al. eds: Mathematisch für fortgeschrittene Anfänger 2010; Sattinger: Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory 1979 e-book; Field & Golubitsky: Symmetry in chaos. A search for pattern in mathematics, art and nature 1992; Golubitsky & Stewart: **The symmetry perspective. From equilibrium to chaos in phase space and physical space** 2003; Dresselhaus: Group Theory. Application to the Physics of Condensed Matter 2008;

Diskrete Symmetriegruppen in der Physik und Chemie: Margenau & Murphy: Die Mathematik für Physik und Chemie 1964 & 1966 Vol1 Kap25, Vol2 Kap12; Ljubarski: Anwendungen der Gruppentheorie in der Physik 1962; Belger & Ehrenberg: Theorie & Anwendung der Symmetriegruppe MINÖL23 1988; Glaeske et al.: Quantenchemie Vol5 Ausgewählte mathematische Methoden der Chemie 1987 Kap8; Reinhold: Quantentheorie der Moleküle 1994, 2015[5] ebook AnhangA, p300ff; Demtröder: Molekülphysik 2003, 2013; Zülicke: Quantenchemie Vol1 1973 Kap6; Vol2 1985 Kap7; Empfehlung Heinrich XI. Prinz Reuss: **Reuth & Lachmann: Das erste Leben der Angela Merkel (in den Augen ihrer Zeitgenossen 1954-1991)** 2013; Mathiak & Stingl: Gruppentheorie für Chemiker, Physikochemiker, Mineralogen 1969; Rösler: LB der

Mineralogie 1985[4]; Klein & Hurlbut: Manual of mineralogy. Dana 1993[21]; **Cracknell: Angewandte Gruppentheorie**. Einführung in die Originaltexte WTB 84 1971; Stiefel & Fässler: Gruppentheoretische Methoden und ihre Anwendung 1979; Serre: Linear Representations of Finite Groups 1977; Dorain: Symmetrie und anorganische Strukturchemie 1972; Dmitriev: Symmetrie in der Welt der Moleküle 1979; Wagner: Gruppentheoretische Methoden in der Physik, ein Lehr- und Nachschlagewerk 1998; Ma: Group theory for physicists 2007; **Klassifikation der endlichen Gruppen (Das Riesentheorem entspricht dem Periodensystem der Elemente = PSE):** Die endlichen einfachen (=unzerlegbaren=Atome) Gruppen spielen für die endlichen Gruppen eine ähnliche Rolle wie die Primzahlen (=die Atome) für die natürlichen Zahlen (=Molelüle): Jede endliche Gruppe lässt sich in ihre einfachen Gruppen 'zerteilen'. Für die Art der Eindeutigkeit siehe den Satz von Jordan-Hölder. Eine Gruppe G heißt einfach, wenn sie nur $\{e\}$ und sich selbst als Normalteiler besitzt. Oft wird zusätzlich $G \neq \{e\}$ gefordert. Da die Normalteiler einer Gruppe genau die Untergruppen sind, die als Kern eines Gruppenhomomorphismus auftreten, ist eine Gruppe G genau dann einfach, wenn jedes homomorphe Bild von G isomorph zu G oder zu $\{e\}$ ist. Eine weitere äquivalente Definition ist: Eine Gruppe ist genau dann einfach, wenn die Operation der Gruppe auf sich selbst als Gruppe mittels Konjugation irreduzibel ist, das heißt, die einzigen unter dieser Operation invarianten Untergruppen sind $\{e\}$ und G. Feit: Satz über Auflösbarkeit. Alle nicht-abelschen endlichen einfachen Gruppen müssen eine gerade Ordnung haben. **Satz von Feit-Thompson:** Gruppen ungerader Ordnung sind sogar auflösbar. **Vollständigen Klassifikation:** Seit 1982 sind die endlichen einfachen=unzerlegbaren Gruppen vollständig klassifiziert. Ornes: Rettung des Riesentheorems, SdW März2016 p48-55; **Riesentheorem**: Es gibt nur 4 Großfamilien. Jede Gruppe ist a] zyklische Gruppe von Primzahlordnung, b] alternierende Gruppe A_n mit $n > 4$, c] Gruppe vom Lie-Typ über einem endlichen Körper (16 jeweils unendliche Serien), d] eine der 26 sporadischen Gruppen und e] die Tits-Gruppe, die 'fast' eine Gruppe vom Lie-Typ ('fast' eine Ree-Gruppe vom Typ ${}^2F_4$) ist und die manchmal auch zu den sporadischen Gruppen gezählt wird. SdW Feb 1986; Stellmacher & Kurzweil: Theorie der endlichen Gruppen. Eine Einführung 1998 **Beispiele von Familien endlicher einfacher Gruppen:** Zyklische Gruppen mit Primzahlordnung: Die zyklischen Gruppen Z_p mit $p = 2, 3, 5, 7, 11, ...$ bilden eine Familie einfacher Gruppen. Schreibweisen: $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$. Viereck-Drehungen der Ebene C_4 besteht in dieser Darstellung aus der Menge $\{0^o, 90^o, 180^o, 270^o\}$. Die Verknüpfung der Elemente ist die Hintereinanderausführung der Drehungen; das entspricht einer Addition der Winkel. Dabei stimmt die Drehung um 360° mit der Drehung um 0° überein, die Winkel werden also genau genommen modulo 360° addiert. Lässt man nicht nur Drehungen der Ebene zu, sondern auch Spiegelungen, dann erhält man im Fall von Vielecken die so genannten Diedergruppen. Bei den endlichen einfachen Gruppen fallen die Eigenschaften zyklisch und kommutativ zusammen, denn jede zyklische Gruppe ist kommutativ und jede endliche einfache kommutative Gruppe ist zyklisch. Bei den endlichen einfachen Gruppen fallen die Eigenschaften zyklisch und ungerade Ordnung beinahe zusammen: Jede endliche einfache zyklische Gruppe, außer Z_2, besitzt eine ungerade Anzahl von Elementen. Jede endliche einfache Gruppe mit ungerader Ordnung ist zyklisch. Die alternierenden Permutationsgruppen A_n mit $n > 4$ bilden eine Familie einfacher Gruppen. Die **alternierenden Gruppen** stammen von den Permutationsgruppen ab. **Permutation** = Abbildung, die n Glieder einer endlichen Folge in eine neue Reihenfolge bringt. Menge aller Permutationen ist ia Gruppe, keine einfache. Gruppe aller Permutationen, die aus einer **geraden Anzahl** von **Transpositionen=Vertauschung von nur zwei Elementen** bestehen = **alternierende Gruppe**. Bei P_3 sind dies nur die Elemente (1,2,3), (2,3,1) und (3,1,2). Nicht aber (1,3,2), (2,1,3) und (3,2,1). Die **Gruppen vom Lie-Typ** = arme Verwandte der **unendlichen** Lie-Gruppen, zB alle Drehungen im 3D um den Nullpunkt, bei denen die **Euler-Winkel nur Elemente eines endlichen Körpers** sind. **Sporadischen Gruppen** sind Sammelbecken für 26 Einzelgänger, darunter die **Monster-Gruppe** mit mehr als 10^{53} Elementen. Kann als Gruppe von Kongruenzabbildungen in einem Raum von mindestens 196883 Dimensionen. Dyson 1983: In 21.Jh wird sie sich als eine Struktur des Universum herausstellen.

Visualisierung relativistischer Effekte: Ute Kraus, SdW 2005 H8 p40-46; http://www. tempolimit-lichtgeschwindigkeit. de Gamow: Die seltsamen Abenteuer des Mr. Tompkins in Kosmos und Mikrokosmos 1984; Lorentz-Kontraktion des Radfahrers sieht man nach Penrose & Terrell 1959 nicht, da man gleichzeitig den vorderen und hinteren Ort bestimmen müsste. Für das Sehen ist aber entscheidend, dass das Licht gleichzeitig

auf der Netzhaut ankommen! Es muss also hinten eher emittiert worden sein. Daher sieht man das Fahrrad gar verlängert! Falsch ist auch Einsteins Aussage, dass eine schnell auf den Beobachter zueilende Kugel als Elipsoid erscheint. Stattdessen sieht man eine gedrehte Kugel. Fehler hierzu von Ruder im PhysikJ11 2012 p53; Schwoerer: Die Relativitätstheorie. Einstein - relativ einfach 1999;

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{lab}}{\lambda_{lab}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \gamma(1+\beta) - 1 = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1, \quad \beta = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1}, \quad \lambda = \lambda_0\gamma(1+\beta), \quad \frac{\lambda}{\lambda_0} = 1 + z$$

Für kleine Geschwindigkeiten $\frac{v}{c} = \beta \ll 1$ gilt $z = \beta$, also $v = zc$ wegen $z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \overset{v/c \ll 1}{=} \frac{1+\beta/2}{1-\beta/2} - 1 = \beta$. Ruder: Die Spezielle Relativitätstheorie 1993; Ñollert & Ruder: Die relativistische Welt in Bildern. Was Einstein gerne gesehen hätte, SdW Spezial H3 2005; Hehl, Puntigam & Ruder: Relativity and Scientific Computing. Computer Algebra, Numerics, Visualization 1996; Bergold: Relativitätstheorie in der Kollegstufe. Leistungskurs, In: DER PHYSIKUNTERRICHT 8 H4 1974 p5-30 hierin ist die Längenkontraktion auch falsch gedeutet; Krämer: Relativitätstheorie Materialien für die Sekundarstufe II 1977; Resnick: Einführung in die spezielle Relativitätstheorie 1976; Gschwind: Raum, Zeit, Geschwindigkeit 1986; Bader & Kraemer: Simulation einer relativistischen Welt. Aufgaben und Computersimulationen zur speziellen Relativitätstheorie 1989; Machold: Zur qualitativen Behandlung der speziellen Relativitätstheorie. Ein Konzept für den Physikunterricht der Realschule 1995; G̃ünther & Müller: Doppler-Effekt und Rotverschiebung. Klassische Theorie und Einstein'sche Effekte 2020; **Rotverschiebung** ist Verlängerung der gemessenen Wellenlänge gegenüber der ursprünglich emittierten Strahlung: **Doppler** durch Relativbewegung von Quelle und Beobachter, **gravitativ** durch unterschiedliches Gravitationspotenzial von Quelle und Beobachter (relativistisch), **kosmologische Raumdehnung** durch expandierendes Universum zwischen Quelle und Beobachter. Krankheit oder Alterung des Lichts. Die Expansion des Universums darf nicht so verstanden werden, dass sich Galaxien in der Raumzeit voneinander entfernen (Relativbewegung). Es ist die Raumzeit selbst, die sich ausdehnt, die Galaxien werden mitbewegt. Gravitativ gebundene Objekte wie Galaxien oder Galaxienhaufen expandieren nicht, denn sie sind durch ihre Eigengravitation von der allgemeinen Expansionsbewegung (beschrieben durch die Friedmann-Gleichungen) entkoppelt. Kosmische Expansion gibt es notwendig auch bei Newton'schen kosmologischen Modellen. Aber die ART liefert das erste konsistente **homogene** Modell des Universums, in dem es **keinen Mittelpunkt und keinen Rand bei endlicher Ausdehnung** des Universium gibt. Friedmann: 1] Einsteins stationäre Lösung ist ein Spezialfall! 2] positive Krümmung = geschlossener Kosmos nicht nötig, um ein homogenes Modell widerspruchsfrei zu konstruieren! 3] gilt alles auch bei verschwindender kosmologischer Konstanten! **ART:** Mit **Einstein-Tensor** $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda,\ \mu,\nu \in \{0,1,2,3\}$. Die Materieverteilung im Universum ist auf geringen Entfernungen sehr unregelmäßig, erscheint allerdings ab mehreren hundert Megaparsec zunehmend isotrop, das heißt in alle Richtungen gleich aussehend. Unter der Annahme, dass ein Beobachter im Universum in keiner Weise privilegiert ist (kopernikanisches Prinzip), leitet sich daraus unmittelbar ab, dass das Universum von jedem Standpunkt aus isotrop und homogen aussieht. Dies ist auch als Kosmologisches Prinzip bekannt. Friedmann 1922: $\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left[\mathrm{d}w^2 + f_K^2(w)\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right]$. w die „mitbewegte" Radialkoordinate, t die Eigenzeit eines „mitbewegten Beobachters", $a(t)$ den Expansionsfaktor des Universums. Ein mitbewegter Beobachter folgt der Expansion des Universums, seine mitbewegte Radialkoordinate behält hierbei ihren numerischen Wert. Die Funktion $f_K(w)$ unterscheidet zwischen dreidimensionalen **raumartigen Hyperflächen konstanter Zeit** t mit positiver, verschwindender, oder negativer Krümmung K. Unter einer solchen Hyperfläche versteht man alle Ereignisse, die zur gleichen kosmologischen Zeit stattfinden. Zum Beispiel formen unsere Milchstraße und alle anderen Galaxien heute eine raumartige Hyperfläche. Nur sehen wir diese Galaxien aufgrund der Lichtlaufzeit nicht in diesem heutigen Zustand, sondern in einem individuellen und bereits vergangenen Zustand. Die raumartige Hyperfläche, welche sie aufspannen, ist daher keiner Beobachtung zugänglich. $f_K(w)$ ist gegeben durch $f_K(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}w) & K > 0 \\ w & K = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(\sqrt{-K}w) & K < 0 \end{cases}$. Durch Umskalieren

der Radialkoordinate w und Neudefinition des **Skalenfaktors** a lässt sich der Krümmungsparameter K auf einen der Werte -1, 0 oder 1 festlegen. Misner, Thorne und Wheeler 1973. Aus der Forderung nach Isotropie der Materieverteilung des Universums folgt auch, dass der räumliche Anteil des Energie-Impuls-Tensors ein Vielfaches des Einheitstensors sein muss: $(T^{\mu}{}_{\nu}) = (g^{\mu\kappa}T_{\kappa\nu}) = \mathrm{diag}(-\rho c^2, p, p, p)$. $\rho = \rho(t)$ und $p = p(t)$ stehen dabei für die homogene Dichte und den Druck. Beide Funktionen hängen nur von dem zeitartigen Parameter t ab. R̃obertson & Noonan: Relativity and cosmology 1968; Setzt man diesen Energie-Impuls-Tensor und die Robertson-Walker-Metrik in die Feldgleichungen ein, so erhält man die Friedmann-Gleichung und die Beschleunigungsgleichung $\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$, (1) $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2 + 3p\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}$. (2) Leitet man die Friedmann-Gleichung (1) nach der Zeit ab und setzt sie in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich eine Gleichung, die in anschaulicher Weise die Energieerhaltung beschreibt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho\, a^3) = -\frac{p}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(a^3)$. Die Friedmann-Gleichung genügt daher, um zusammen mit dem Energieerhaltungssatz die globale Entwicklung des Universums zu beschreiben. **Kosmologische Konstante** wird hier durch die Energiedichte und den Druck ausgedrückt. Wir haben nun zwei Gleichungen für die drei Unbekannten a, ρ und p. Um eine eindeutige Lösung zu erhalten, ist daher eine weitere Gleichung, die **Zustandsgleichung der Materie**, nötig. Gewöhnliche **(baryonische) Materie, Strahlung und die Kosmologische Konstante** bilden die **Hauptquellen der Gravitation** auf der rechten Seite der Feldgleichungen der ART. Die **Materie kann hierbei als druckloser „Staub“** angesehen werden, d. h. die Teilchen bewegen sich kollisionsfrei mit nicht-relativistischen Geschwindigkeiten. Für die drei unbekannten Funktionen gelten damit die folgenden drei Zustandsgleichungen: $p_{\mathrm{mat}} = 0, p_{\mathrm{str}} = c^2\rho_{\mathrm{str}}/3, p_\Lambda = -c^2\rho_\Lambda$. Aus der Energieerhaltung ergibt sich daraus der Zusammenhang zwischen Dichte ρ und Skalenfaktor a $\rho_{\mathrm{mat}} \propto a^{-3}, \rho_{\mathrm{str}} \propto a^{-4}, \rho_\Lambda = \mathrm{const}$. Als Anfangswert für die erste Friedmann-Gleichung (auch als Friedmann-Lemaître-Gleichung bekannt, benannt zusätzlich nach Georges Lemaître, der sie unabhängig von Friedmann 1927 ebenfalls entdeckte) wird $a(t_0) = a_0$ verwendet, wobei t_0 die **kosmologische Zeit im Jetzt** darstellt. Mit den Konstanten $\Omega_0 := \frac{8\pi G}{3H_0^2}\rho_0, \qquad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda c^2}{3H_0^2}$, welche die Materiedichte und Vakuumenergiedichte parametrisieren, können die Friedmann-Lemaître-Gleichung dann auch als $H^2(t) = H_0^2\left(\Omega_0\frac{a_0^3}{a^3} - \frac{Kc^2}{a^2H_0^2} + \Omega_\Lambda\right)$, geschrieben werden. Die **Hubble-Funktion** wird dabei, wie oben, gemäß $H(t) := \dot{a}(t)/a(t)$ definiert. Diese beschreibt die Expansionsrate des Universums, mit $H_0 = H(t_0)$ zum heutigen Zeitpunkt. Die **Strahlungsdichte wurde vernachlässigt**, da sie mit a^{-4} abfällt und daher gegenüber der Materiedichte rasch unbedeutend wird. Löst man die Friedmann-Lemaître-Gleichung für den speziellen Zeitpunkt $t = t_0$ sieht man, dass die Konstanten nicht unabhängig sind, sondern dass gilt $\frac{Kc^2}{a_0^2H_0^2} = \Omega_0 + \Omega_\Lambda - 1$ Setzt man dies in die Friedmann-Lemaître-Gleichung ein, erhält man die bekannteste Darstellung: $H^2(t) = H_0^2\left(\Omega_0\frac{a_0^3}{a^3} + (1-\Omega_0-\Omega_\Lambda)\frac{a_0^2}{a^2} + \Omega_\Lambda\right)$. Für ein **flaches Universum** $(1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda = 0)$ wie unseres, kann man eine explizite Lösung dieser Gleichung für den Skalenfaktor angeben. Per Variablentrennung lässt sich die Differentialgleichung in ein Integral verwandeln. $t(a)$ berechnet sich damit zu $t - t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}\ln\left(\frac{(a/a_0)^{3/2}\Omega_\Lambda + \sqrt{\Omega_0\Omega_\Lambda + (a/a_0)^3\Omega_\Lambda^2}}{\Omega_\Lambda + \sqrt{\Omega_0\Omega_\Lambda + \Omega_\Lambda^2}}\right)$. Dieser Ausdruck lässt sich invertieren. Wählt man t_0 so, dass $a(0) = 0$ und das Universum somit einen kompakten Anfang besitzt, und benutzt man $\Omega_0 = 1 - \Omega_\Lambda$, so erhält man $a(t) = a_0\left(\sqrt{\frac{\Omega_0}{\Omega_\Lambda}}\sinh(\omega t)\right)^{2/3}, \qquad \omega = \frac{3\,H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}$. Siehe Fließbach: Allgemeine Relativitätstheorie 2003[4]; Peacock: Cosmological Physics 2001; Dieser Ausdruck beschreibt das **Expansionsverhalten für ein flaches Universum mit kosmologischer Konstante**. Die über die Raumsonde WMAP gemessenen Schwankungen in der Hintergrundstrahlung erlauben Rückschlüsse auf die Geometrie unseres Universums. Demnach ist dieses flach, mit einem **Materiedichteparameter** $\Omega_0 = 0{,}27$, einem **Vakuumdichteparameter** $\Omega_\Lambda = 0{,}73$ und einer **Hubblekonstante** von $H_0 = 72$ km s^{-1}/Mpc = 72m s^{-1}/kpc = 72mm s^{-1}/pc = 72mm s^{-1}/ 3 10^{13}km = 20μm s^{-1}/10^{10}km = 20nm s^{-1}/10^7km = 2nm s^{-1}/10^6km = 2A s^{-1}/10^5km. **0-0-Komponente** $H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$,

sowie als Spur der $i-i$-Komponenten $2\frac{\ddot{a}}{a}+\frac{kc^2}{a^2}+\frac{\dot{a}^2}{a^2}=-8\pi Gc^2p$. Aus der Kombination der beiden folgt die **Beschleunigungsgleichung** $\dot{H}+H^2=\frac{\ddot{a}}{a}=-\frac{4\pi G}{3c^2}\left(\rho c^2+3p\right)$. Einer elektromagnetischen Welle hingegen, die sich frei durch eine sich ausdehnende Raumzeit ausbreitet, wird die Expansionsbewegung direkt aufgeprägt: vergrößert sich die Raumzeit während der Laufzeit um einen Faktor n, so geschieht dies auch mit der Wellenlänge des Lichtes. G̃ünther & Müller: Doppler-Effekt und Rotverschiebung. Klassische Theorie und Einstein'sche Effekte 2020; Bereits ab Entfernungen von wenigen 100 Megaparsec ist der Anteil des **Dopplereffekts** verschwindend gering. Ferner ergibt sich aus der allgemeinen Relativitätstheorie, dass die beobachteten Fluchtgeschwindigkeiten keine relativistischen Zeiteffekte hervorrufen, wie sie von der speziellen Relativitätstheorie für Bewegungen im Raum beschrieben werden. Eine kosmologische Zeitdilatation findet dennoch statt, da die später ausgesandten Photonen eines Objektes aufgrund der Expansion eine größere Wegstrecke zurücklegen müssen. Physikalische Prozesse erscheinen daher bei rotverschobenen Objekten (aus unserer Sicht) zunehmend verlangsamt abzulaufen. Ruth Durrer, Universite de Geneve: What are galaxy surveys really measuring? What large galaxy surveys which go out to redshift z=1 or more truly measure? complications which arise due to the fact that we only observe on our past lightcone and that we do not truly know the distance of the observed galaxies, but only their redshift are not only additional difficulties, Betrachte ein Photon, emittiert von einer Galaxie mit mitbewegter Entfernung w gemäß Friedmann-Gleichungen, und absorbiert vom Beobachter bei w = 0. Sowohl die Galaxie als auch der Beobachter folgen der kosmischen Expansion. Für homogene und isotrope Expansion des Alls ist der infinitesimale **Abstand bei flacher Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker-Metrik**

$$ds^2=c^2dt^2-a(t)^2\cdot(dr^2+\bar{r}^2d\Omega^2),\quad \Omega^2=d\theta^2+\sin^2\theta\cdot d\phi^2$$

mit kovarianten Abstand

$$\bar{r}=\begin{cases}R_C\sin(r/R_C) & \text{für positive Krümmung}\\ r & \text{für Krümmung 0}\\ R_C\sinh(r/R_C) & \text{für negative Krümmung}\end{cases}$$

mit R_C als Absolutwert des Krümmungsradius. Diese **Metrik gilt nicht auf der Ebene der Atome oder der klumpigen Materie** (Planeten). d'Inverno: Introducing Einstein's Relativity Kap23; Blau: AmJPhys 63 (1995) 779f; Oder kurz $\mathrm{d}s^2=-\mathrm{d}t^2+R(t)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)$ für $c=1$ mit $R(t)=t^{\frac{2}{3}}$ bei mit drucklosem Staub gefüllten Universum, $R(t)=\sqrt{t}$ bei mit Strahlung gefülltem All. Bei inflationärer Phase mit $R(t)=e^t$, falls Universum anfänglich im falschen Vakuumzustand. Kippenhahn: Licht vom Rande der Welt 1984; Bei fester Koordinaten-Distanz D wächst der geometrische Abstand mit $d=R(t)D$. Der Kosmologe sagt, dass die Galaxie sich nicht bewegt, wobei D die Lösung der dynamischen Gleichungen der ART entspricht. Weinberg: Gravitation and cosmology 1972 p416; Wenn Photon bei D zum Zeitpunkt t_s abgesandt, so ist es wegen $\mathrm{d}s^2=0$ wegen $\int_{t_s}^{t_r}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}=D$ zum Zeitpunkt t_r bei uns. Ein etwas später $t_s+\mathrm{d}t_s$ gesandtes entsprechend zum Zeitpunkt $t_r+\mathrm{d}t_r$, wegen $\int_{t_s+\mathrm{d}t_s}^{t_r+\mathrm{d}t_r}\frac{\mathrm{d}t}{R(t)}=D$. Da $R(t)$ hier als konstant angesehen werden kann, gilt $\frac{\mathrm{d}t_s}{R(t_s)}=\frac{\mathrm{d}t_r}{R(t_r)}$. Weil Lichtperiode wegen $c=\lambda/T$ proportional zur Wellenlänge, so gilt $\frac{\lambda_r}{\lambda_s}=\frac{R(t_r)}{R(t_s)}$, also sagt **Rotverschiebung** nur etwas über den Skalenfaktor zu späterem Zeitpunkt aus. Die Physik ändert sich aber, wenn sich die Krümmung ändert. **Berry: Kosmologie und Gravitation: Eine Einführung** 1974; 1990; Gott: Zeitreisen in Einsteins Universum 1993 p245ff Voraussage des Falls der Berliner Mauer Gott: Implications of the Copernican principle for our future prospects, Nature 363 1993 p315-19; **Schicksal des Universums:** Adams & Laughlin: A dying universe. The long-term fate and evolution of astrophysical objects, RevModPhys 69 1997 337;

Linienelement des Photons $\mathrm{d}s^2=0=-c^2\,\mathrm{d}t^2+a^2(t)\,\mathrm{d}w^2$ Expansionsfaktor $a(t)$ und w die mitbewegte Radialkoordinate. Zwei aufeinanderfolgende Maxima der Lichtwelle werden zu den kosmologischen Zeiten te1 und te2 ausgesandt, und zu den Zeiten i ta1 und ta2 wieder absorbiert. Die Wellenlängen des Photons zu Zeiten der Emission und Absorption sind dann

$$\lambda_e=c\,(t_{\mathrm{e2}}-t_{\mathrm{e1}})\lambda_a=c\,(t_{\mathrm{a2}}-t_{\mathrm{a1}})$$

Die mitbewegte Entfernung, die von beiden Maxima zurückgelegt wird, ist per Definition gleich groß. Integriert man das Linienelement des Photons, so erhält man

$$0 = \int_{t_{e2}}^{t_{a2}} a^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \; - \int_{t_{e1}}^{t_{a1}} a^{-1}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Durch Vertauschen der Integrationsgrenzen ergibt sich dann für infinitesimal kleine Intervalle zwischen Emission (Absorption) der beiden Maxima

$$0 = \int_{t_{a1}}^{t_{a2}} a^{-1}(t)\,\mathrm{d}t \; - \int_{t_{e1}}^{t_{e2}} a^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t_{a2} - t_{a1}}{a(t_{a1})} - \frac{t_{e2} - t_{e1}}{a(t_{e1})}\,.$$

Unter Verwendung der emittierten und absorbierten Wellenlängen wie sie oben angegeben sind, kann man deren Verhältnis ableiten,

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_e} = \frac{t_{a2} - t_{a1}}{t_{e2} - t_{e1}} = \frac{a(t_{a1})}{a(t_{e1})}\,.$$

Schließlich definiert man dann die kosmologische Rotverschiebung zu

$$z := \frac{\lambda_a - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_a)}{a(t_e)} - 1\,.$$

Da für die meisten Zwecke der Absorptionszeitpunkt ta mit der heutigen Zeit t = t0 zusammenfällt und a(t0) = 1, ergibt sich vereinfacht

$$z = \frac{1}{a(t)} - 1\,.$$

Umgekehrt ergibt sich hieraus unmittelbar der Skalenfaktor des Universums zum Emissionszeitpunkt im Vergleich zum heutigen Wert,

$$a = \frac{1}{1+z}\,.$$

Beobachtet man beispielsweise eine Galaxie mit Rotverschiebung z = 3, so hatte das Universum zum Zeitpunkt der Aussendung des von uns empfangenen Lichts nur ein Viertel seiner Größe. Sämtliche physikalischen Prozesse in dieser Galaxie laufen aus der Sicht des Beobachters um einen Faktor (1 + z) = 4 verlangsamt ab, da sich der Abstand zweier nacheinander emittierter Photonen entsprechend vergrößert, und damit auch deren Eintreffen beim Beobachter (kosmologische Zeitdilatation). Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die zunehmende Streckung der Lichtkurven von Supernovae vom Typ Ia, deren Zustandekommen gut verstanden ist, mit wachsender Rotverschiebung. Kulkarni: The Dynamic Universe: The Palomar Transient Factory observed extragalactic transient every 20 minutes and a Galactic (strong) variable every 10 minutes. Discovery and spectral classification of 2300 supernovae.

Standard-Modell - **ΛCDM-Model** - kosmologische Konstante (= Gravitationswirkung des bloßen Raumes, des Vakuums, Goenner: Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie 1996. **Schwartz: Quantum Field Theory and the Standard Model** 2013; Turtur, Braunschweig: Statische Felder von Ladungen beim Urknall strömen, wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit, noch immer in den Raum hinein. Da Masse und Energie des Elektron erhalten bleibt, so kann diese Energie nur vom Vakuum herkommen, dem sie bei der Feldausbreitung wieder zuströmt. Diese Vakuumenergie kann entnommen werden! ? Ladungstrennung erfordert Arbeit. Aus rascher Ladungtrennung kann man so Energie ziehen?) mit kalter dunkler Materie - beschreibt mit 6 Parametern die Entwicklung des Universums seit dem Urknall. Barrow: Der Ursprung des Universums. Wie Raum, Zeit und Materie entstanden 1994; Bondi, Bonnor, Lyttleton, Whitrow: Rival Theories of Cosmology 1960; Barrow: Das Buch der Universen 2011; Satz: Kosmische Dämmerung. Die Welt vor dem Urknall 2016; **Kosmologische Anfangsbedingungen:** Schöpfungsmythos. Ginnungagap is a code for generating cosmological initial conditions. Liefert aber nur die großskaligen Strukturen. Hinzunahme der Baryonen macht gas pressure, re-ionisation, supernova feedback, and truncated accretion und reduziert die Gesamtmasse und Häufigkeit der Strukturen. http://adsabs.harvard.edu/abs/2013MNRAS.431.1366S; Schechter: luminosity function for galaxies: http://adsabs.harvard.edu/abs/1976ApJ...203..297S; Reionisations-Phase, Epoch of Reionization (EoR), bei $z > 10$ wird in 21 cm-Linie gesehen. Bildung erster Sterne. Etwa 13,8

Millionen Jahren nach dem Urknall kühlte sich das Universum ab und wurde komplett dunkel. Das Wiedererhellen bis hin zum Erscheinen von Sternen und Galaxien ist eine der am wenigsten verstandenen Epochen der kosmischen Geschichte. Green-Peas-Galaxien machen es möglich. Green Peas = Grüne-Erbsen-Galaxien, sind benannt nach ihrem Erscheinungsbild in astronomischen Aufnahmen und können eine große Menge an neuen Sternen bilden. Die starke UV-Strahlung dieser vielen Sterne wäre ausreichend, um die Reionisierung des Kosmos zu erklären. In dieser Phase wurde ein Großteil des Wasserstoffs des frühen Universums in seine Bestandteile, Protonen und Elektronen aufgespalten. Bislang hatte man geglaubt, dass die meiste Strahlung bereits innerhalb der Galaxien reabsorbiert wird und die Energie für eine Spaltung des intergalaktischen Wasserstoffs nicht ausreichend gewesen wäre. The formation of the first stars and galaxies marks the beginning of the Epoch of Reionisation, when the inter-galactic gas was transformed from cold and neutral to a hot, ionised plasma. Gegenwärtige Sternbildung passiert in dichten Molekülkondensationen des ISM. Bildung massiver Sterne aus ultra- und hypercompakten HII-Regionen, die Hot Molecular Cores bilden. **Stars** are conspicuous components of galaxies, and the sites of the creation of most chemical elements. Due to their high luminosity and their production of heavy elements, stars on the Asymptotic Giant Branch (AGB) play an important role in understanding stellar and galactic evolution. Entwicklung massiver Galaxien: $z = 6$ growth spurting phase driven by high gas accretion rates and possibly triggered star formation. $z = 2$ grow in 'equilibrium' with their cold accretion rates. $z < 2$ phase of growth mostly via mergers. Alejandro Benítez Llambay, Gottlöber: **Cosmic web stripping.** 10^3 kaum sichtbare Zwerggalaxien mit je einem Tausendstel der Masse der Galaxie umkreisen diese, wobei ihnen das kosmische Netz alles Gas entriss und ihre Sternentstehung stoppte. Daher ihr Fehlen in der Beobachtung. **Unsichtbare Zwerggalaxien** machen den Anteil dunkler Materie noch größer. Wie beeinflusst die **kosmische Reionization** die Sternbildungsgeschichte = star formation history = SFH isolierter Zwerggalaxien, die sich in Halos mit viralen Massen von $3\,10^9$ bis $2\,10^{10}\,m_\odot$ bei $z = 0$ befinden und dieselben verschiedenen SFHs wie die uns nahen Zwerggalaxien haben? Kosmische Reionization könnte Eindruch der Sternbildungsrate im Zeitraum $(4 < t/\mathrm{Gyr} < 8)$ erklären. Das kosmische Netz beschreibt die großräumige Struktur des Universums als ein riesiges Gespinst aus Filamenten und flachen, scheibenartigen Strukturen Dunkler Materie. Helene Courtois, Lyon: Cosmic Flows give CLUES as to where is the dark matter in the Universe. Dazu braucht man 3D-Karten der Galaxien-Ströme. Die hat man bislang nur von 1% des beobachteten Universums. **Cosmic Web = skeleton**, non-gaussianity, connectivity, nutze Statistiken/Ordnungsparameter über Voronoi-Zerlegungen! Geometrical measures of the Cosmic Web of the large scale distribution of matter in the Universe and its filamentary skeleton, how far can we advance the theory to account for non-Gaussianity of the evolving Web and discuss the ongoing recent work on connectivity of the filamentary bridges between the cluster nodes of the Web. **Local Supercluster** $D < 45$ Mpc: 226 diffuse, non-virialized agglomerates with $n > 3$ members. Eight the most populated among them ($n > 25$) have linear size of 6 Mpc, radial velocity dispersion of 170 km/s, virial mass-to-stellar mass ratio 700 and a density contrast 5. In the same volume, we also found 89 spherical cosmic voids having diameters from 12 to 24 Mpc. Die meisten Galaxien beherbergen massive Schwarze Löcher, die 10^9 Jahre nach dem Urknall entstanden sein müssen. Beachte Wirkung der Metallanreicherung auf die Sternentwicklung während der Evolution des Alls. Yehuda Hoffman, Hebrew University of Jerusalem: The Constrained Local UniversE **Simulations CLUES** project has come of age. Recent advances on the following fronts are to be reported: data = Cosmicflows-2, methodology = likelihood analysis of data, Malmquist bias correction, constrained initial conditions = ICeCoRe, RZA, Ginnungagap, cosmography = large scale structure, cosmic web and simulations. A major achievement of the CLUES is its ability to produce simulated Local Group = LG - like objects abundantly and almost 'on demand'. Manolis Papastergis: The too-big-to-fail = **TBTF problem** is too-persistent-to-die: new constraints from nearby field dwarfs. Auf kleinen Skalen des kosmologischen Standard-Modells stimmt was nicht. Interne Kinematik und Anzahldichte der Zwerggalaxien sind unstimmig. The large scale anisotropic environment of the cosmic web informs the geometry and dynamics of various accretion modes onto galaxies hence impacts their evolution, in particular the evolution of their gas content and angular momentum. Increasing evidence for such a connection have been found over the years with the discovery of correlations between the orientation of galactic spins and that of local cosmic filaments. Can we go beyond the simple analysis of spin orientations? Can we constrain the impact of cosmic flows on galactic structure and kinematics? Can we find smoking-gun signatures of this interplay at low-redshift?

With the advent of next-generation facilities such as the SKA and the development of large scale integral field spectroscopy surveys such as SAMI, MaNGA and soon Hector, specifically designed to track these interactions, there is an increasing need to bring together theorists of the large scale structures of the Universe and experts on galaxy dynamics and the identification of cosmic structures to better constrain the design of such surveys, develop methods to unravel this complex interplay between galaxies and their environment and make predictions for next generation All-sky surveys.

BOSS Baryon Oscillation Spectroscopy Survey: großräumigen Strukturen Schaumkronen kosmischer Wellenberge aus abertausend Galaxien. Durch das dichte und extrem heiße Plasma liefen akustische Wellen (akustische Baryonenoszillationen); sie drückten die Materie in Regionen hoher und niedriger Dichte mit vergleichsweise regelmäßigem Abstand dazwischen. Als sich das Plasma langsam abkühlte, konnten dort die ersten Sterne und mit ihnen die ersten Galaxien entstehen. So entwickelte sich aus den Spuren der Wellen schließlich das heutige Bild einer weitverzweigten Struktur von fadenförmigen Filamenten und flächigen Anordnungen mit Abstand der Wellenkämme, Gitterkonstanten oder kosmischem Metermaß, die im heutigen Universum auf rund 150 Megaparsec (500 Millionen Lichtjahre) angewachsen ist. Indem nun BOSS Abweichungen von diesem Raster ausmacht, könnte es den Einfluss der Dunklen Energie genauer dingfest machen als alle bisherigen Experimente. The mass profile of galaxy clusters from the core to the outskirts: the need for a multi-wavelength approach. The distribution of the gravitating and baryonic mass in galaxy clusters is the key ingredient to use galaxy clusters as astrophysical laboratories and cosmological probes. Vaas: **Echo des Urknalls**, BdW9 2013 p42ff, **COBE** = cosmic backgrund explorer 1989, **WMAP** = Wilkinson Microwave anisotropy probe 2001 = 9 Jahre Messzeit, max 95 GHz, lieferte 2012 **CMB-Karte = fossiles Licht** vom Kindergeburtstag des Alls im Alter von 380000 Jahren. **Planck** satellite 2009 bis 857 GHz gibt Winkelleistungsspektrum des CMB **Cosmic Microwave Background**: (i) the most precise measurements so far of the parameters describing the content and structure of our Universe, (ii) constraints on the physics driving its very early evolution, (iii) some anomalies which may indicate physics beyond our current standard model, and (iv) maps of the distributions of total mass, of baryonic mass and of star-formation in galaxies throughout the entire visible unverse in front of the CMB.
Searching for the missing baryons in the Warm-Hot Intergalagtic Medium: Warm-Hot Intergalactic Medium = WHIM is considered as one of the biggest reservoirs of baryons in the universe. These structures consist of shock-heated gas with temperatures in the range $10^5 - 10^7$ K and overdensities $\delta < 100$. This combination of high temperatures and small densities make the WHIM very difficult to detect. However, being highly ionized the hot electron gas within the WHIM, which interact with the CMB photons, could leave an imprint in the CMB power spectrum of anisotropies by means of the **Sunyaev-Zeldovich effect** (SZ). SdW H9 2013 p64. SZ beschreibt die Reduzierung der Zahl niedrigenergetischer Photonen und die Erhöhung der Zahl höherenergetischer Photonen relativ zum Planck-Spektrum der kosmischen Hintergrundstrahlung in heißem Gas in Galaxienhaufen durch **inversen Compton-Effekt**. Modelling the WHIM, one can give an estimate of the amplitude of this anisotropies. Martin Haehnelt: Lyman-α-Absorptionsspektrum entfernter Quasare gibt dunkle Materie, also Masse (warme Materie) als auch intergalaktische Materie durch ihren Ionisationszustand, und Evolutionsgeschichte des Universums. Nature 492 79–82 6 Dec 2012: Ungewöhnlich starke Lyman-α bei 121.5 nm (Lyα)-Resonanz-Absorption der HI-Umgebung von ULAS J1120+0641. Extremely metal-poor neutral-H-Gas aus IR-Spektren von Quasaren bei Redshift of 7.04 = 5.6% der heutigen Größe des Alls. Dautcourt: Relativistische Astrophysik 1972; Petrowitsch: Signale aus dem All 1975; Overbye: Das Echo des Urknalls 1991; **Veron & Engel: Die Quasare** 1975; Osmer: Quasare, In: **Appenzeller ed: Kosmologie** 1984 Quasar = diskrete Radioquelle, Radiosphärulen, Radio'sterne' = hyperaktive Galaxienkerne, Synchrotron-Strahlung, Lyman-α-Linie $\lambda_0 = 121.6$ nm; Dautcourt: Was sind Quasare? 1982[3]; AGN Astrophysics – Structure and Kinematics of AGN Jets – Extragalactic Relativistic Flows – Multi-band Blazar Astrophysics – Multi-frequency AGN Polarimetry – VLBI Studies of AGNs – Infrared Interferometry of Disks and Jets of Young Stars – Protoplanetary Disks – Radiative Transfer Modeling – Galactic Masers – Infra-Red Interferometry of AGN – Gravitational Lensing – Galactic and Extragalactic Magnetic Fields – High Precision Astrometry – Stellar Astrophysics and Stellar Evolution – Supermassive Binary Black Holes in AGN – Stellar Population Studies – Astro-chemistry – Galactic Dynamics – Binary

Pulsars – Neutron Stars – Experimental tests of gravity – Transient Radio Sky – Faraday Galaxy Tomography – Radio Pulsars – Gravitational Wave Detection with Pulsar Timing – Stellar Custer Dynamics – Dark Matter – Galactic Center Studies. Johannes Hartmann 1865-1936 Doppelstern Ca-Absorptionslinien machen die Dopplerverschiebung nicht mit, bedeutet **interstellares Medium** = ISM. Herrmann: Geschichte der Astronomie 1978[2] p189f; H_α-Linie bei 656.28 nm; Friedemann: Das Weltall 1973 p73; **H-I-Gebiete** ISM = **kalt** – H-I-Gebiete und Molekülwolken mit Temperaturen von weniger als 100 Kelvin: Molekülwolken 20–50K 1000–10000 Atome pro ccm neutrale Wasserstoffmoleküle, H-I-Wolken 50–100K 1–1000 Atome pro ccm neutrale Wasserstoffatome. HI-Linie 21cm = 1450 MHz ist Hyperfein-WW von Proptonspin I und Gesamtdrehimpuls J des Elektrons $\Delta_{\mathrm{H}FS} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_J$. **warm** – Bereiche mit Temperaturen von einigen Tausend Kelvin: warmes ionisiertes Medium = WIM 50 % 1000–10000K 0.01 Atome pro ccm teilweise ionisiertes Plasma, H-II-Wolken 10000K 100–10000 Atome pro ccm fast vollständig ionisiertes Plasma; **heiß** – koronales Gas mit Temperaturen über eine Million Kelvin koronales Gas 100000–10^6 $10^{-4} - 10^{-3}$ Atome pro ccm vollständig ionisiertes Plasma = interstellar Wolken aus atomarem, nicht ionisiertem Wasserstoff und molekularem Wasserstoff (H2). Der neutrale atomare Wasserstoff strahlt mit der charakteristischen 21-cm-Linie. Durch Beobachtung dieser Mikrowellen kann die Radioastronomie die großräumige Struktur der Milchstraße erforschen. **Galaktischer Halo** mit $2{\cdot}10^6$ K heißem Gas und 10mal größer Galaxis mit 150,000 Lj rotiert mit 181 km/s = 650,000 km/h, während die Scheibe mit 240 km/s = 870,000 km/s rotiert. Dopplerverschiebung von OVII = O^{6-}-Linien im Licht galaktischer Röntgenquellen. **Intergalaktisches Medium = IGM** = intergalaktisches Gas = Wasserstoff-Gas, welches nicht an einzelne Galaxien gebunden ist, sondern den Raum zwischen ihnen füllt. Besteht hauptsächlich aus ionisiertem Wasserstoff-Gas/-Plasma = HII; neutraler Wasserstoff = H = HI macht nur etwa ein Millionstel des gesamten Mediums aus. Das IGM sollte nicht mit dem interstellaren Medium verwechselt werden, welches sich zwischen den Sternen innerhalb einer Galaxie befindet. Grenzen zwischen IGM und ISM fließend. **Warm-Hot Intergalactic Medium** = WHIM = Medium zwischen einzelnen Galaxien. Indiz ist Lyman-Alpha-Wald in den optischen Spektren weit entfernter Quasare oder anderer Aktiver Galaxienkerne. Die Absorptionslinien werden dabei durch den neutralen Wasserstoff erzeugt, der sich in den kosmischen Filamenten sammelt. **Intracluster-Medium** = ICM = Medium innerhalb von Galaxienhaufen = Clustern. Wegen seiner relativ hohen Temperatur von 10i[7] bis 10^8 K ist das ICM durch seine Röntgenstrahlung beobachtbar, die als Bremsstrahlung entsteht. Das Gas ist vollständig ionisiert und macht etwa 15 % der Gesamtmasse eines Haufens aus. Es ist damit die dominante baryonische Komponente in Galaxienhaufen.

Physikalische Kosmologie: Für Kosmologie braucht man nur die Friedmann-Gl und Thermodynamik. Liebscher: Kosmologie 1994. Einsteins ART hat zunächst nichts mit Kosmologie zu tun, bot aber einen einfachen Ausweg aus den Gravitationsparadoxa mittels nichteuklidischer Geometrie siehe Seite 277. Einstein und Eddington hatten vor Hubble keine Ahnung von Kosmologie und sie auch gar nicht im Sinn. Beide wehrten sich auch gegen die Ideen von Friedmann und Lemaitre, wiesen deren Arbeiten zurück und sorgten später nicht für deren Rehabilitation, so dass es auch heute noch so aussieht, als hätten Einstein und Eddington die heute akzeptierten Vorstellungen vorangetrieben, die ihnen heute wie selbstverständlich zu geschrieben werden, wenn es um die Entwicklung des Kosmos geht. Friedmann und Lemaitre nahmen die die Messungen von Slipher und Hubble zur kosmischen Expansion ernst. John Peacock: Vesto Slipher and the discovery of the expanding universe. Die Rolle von Hubble ist ein Mythos, es war Slipher 1913, der isoliert am Lowell Observatory in Arizona arbeitete. Er war der erste, der die wahre Natur von galaxien zeigte und dass sie in Bewegung sind und auch wir innerhalb der Milchstraße. **Liebscher: Zur Grundaufgabe der Kosmologie**, Die Sterne 52(2) 1976 65-76; **Oleak: Beobachtungsparameter und Weltmodelle**, Die Sterne 52(2) 1976 77-82; Erst in den Anhängen der letzten Ausgaben seiner Frühschriften Einstein: Grundzüge der RT 1954[7] p110 p125 und Über die spezielle und die allge RT 1956[21] p83ff, p110f wird Friedmann rehabilitiert. Zum Einstieg **Macheleidt PfL12** 1979 p139-156; Liebscher: Theoret Physik 1973 p305-25; **Bergmann & Schäfer: Sterne und Welraum**, LB der Experimentalphysik Bd8 1997, 2002 Kap 6 Kosmologie; **Smolin: Warum gibt es die Welt? Die Evolution des Kosmos** 1999; Suchan: Die Stabilität der Welt. Eine Wissenschaftsphilosophie der Kosmologischen Konstante 1999 = Diss Uni Gießen 1996; Liddle, Berry, Landau/Lifschitz: BdII. Klassische Feldtheorie ab Kap24; **Rebhan: Relativitäts-**

theorie und Kosmologie 2011 gibt ab Kap15 die klarste Darstellung zur physikalischen Kosmologie oder **Fischer & Kaul: Mathematik für Physiker 3** KapIII **Mathematische Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie** p322-401 2006[2]; **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990; **Kolb & Turner: The early Universe** 1990; **Singh: Big Bang. Der Ursprung des Kosmos und die Erfindung der modernen Naturwissenschaft** 2004, 2007 p161ff; Big crunch = Umkehr der Ausdehnung und Zusammenfall auf einen Punkt/ Vernichtung von allem; big rip = Raumzeit zerreißt; big chill = ewige Ausdehnung/Ausdünnung, Verödung, Wärmetod. Daher glaubt auch jeder, dass man erst über Einsteins Gleichungen und den Details der Diffenrenzialgeometrie zur Kosmologie kommt. In der Literatur wir der Eindruck auch konsequent, bis auf wenige **Ausnahmen, wie** Singh; Liddle; Friedmann: Die Welt als Raum und Zeit 1923, 2002[2], 2014[4]; **Eddington: Dehnt sich das Weltall aus?** 1933; **Robb: Geometry of Time and Space** 1914, 1936[2]; Robb: The absolute relations of time and space 1921 https://archive.org/details/absoluterelation00robbiala; Milne: Relativity Gravitaion and World-Structure 1935; So beginnt Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd1 1978[2] KapII p6-45 mit **Raum und Zeit als physikalische Strukturen**, wo es zentral um Abstände und Gerüste geht. Milne: Kinematic relativity 1948; Jordan: Schwerkraft und Weltall 1955[2] beginnt wie Friedmann mit **empirischer Geometrie** ohne sich auf ihn direkt zu beziehen und zitiert **Heckmann: Theorien der Kosmologie** 1942; Heckmann & Schücking: HdP53 1959 529-37; Gamow: Die Geburt des Alls 1952, 1959; Urknall-Idee von Lamaître. Blome & Zaun: Der Urknall: Anfang und Zukunft des Universums 2004; B̃lome: Die Entdeckung des Urknalls. George Lamaître und die moderne Kosmologie 2016; Teichmann: Die überaus fantastische Reise zum Urknall. Astronomie von Galilei bis zur Entdeckung der Schwarzen Löcher 2018; Teichmann & Krapp: Mit Einstein im Fahrstuhl: Physik genial erklärt 2018; S̃terngass: Before the Big Bang 1997; McVittie: General relativity and cosmology 1965[2]; **Heckmann: Sterne, Kosmos, Weltmodelle** 1976; Lindner: Physik im Kosmos. Physikalische Probleme der Raumfahrt und des Weltalls 1971; Singh: Great Ideas and Theories of Modern Cosmology 1970; Landau/Lifschitz: BdII; so falsch dargestellt. **Friedmann: Die Welt als Raum und Zeit** 1923, 2014[4] Eigentliche/invariante vs uneigentlich/koordinatenabhängige, von Arithmetisierung abhängige Eigenschaften. Je nach Arithmetisierung des Raum einmal Gerade $x_1 = 1, x_2 = u$, ein anderes mal ein Kreis $\hat{x}_1 = 1, \hat{x}_2 = u$. Entfernungen sind **kartesisch** $(P, P') = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}$ und **polar** $(P, P') = \sqrt{(\hat{x}_1' - \hat{x}_1)^2 + (\hat{x}_2' - \hat{x}_2)^2 - 2\hat{x}_1'\hat{x}_1 \cos(\hat{x}_2' - \hat{x}_2)}$. **Infinitesimales Abstandsquadrat** oder Quadrat des Bogenelements als **Taylorentwicklung** mit **Abstandseigenschaften** ist $\Delta(x_1, x_2, x_1', x_2') = \cancel{g_0} + \cancel{g_1(x_1' - x_1)} + \cancel{g_1(x_2' - x_2)} + g_{11}(x_1' - x_1)^2 + g_{12}(x_1' - x_1)(x_2' - x_2) + g_{21}(x_2' - x_2)(x_1' - x_1) + g_{22}(x_2' - x_2)^2 + \cdots = \Delta = g_{11}\Delta x_1^2 + g_{12}\Delta x_1 \Delta x_2 + g_{21}\Delta x_2 \Delta x_1 + g_{22}\Delta x_2^2 + \ldots$ falls $x_i' = x_i + \Delta x_i$. Der metrische Fundamentaltensor $g_{ij} = J^T \eta J$ definiert die **Metrik zur Berechnung von Punkt-Entfernungen des Raumes** unter Verwendung der Jacobimatrix. Betrachte Transformation von Inerzialsystem zur Rotation = Karussel $t = t', x = x' \cos \omega t' - y' \sin \omega t', y = x' \sin \omega t' + y' \cos \omega t'$ gibt $J = \dfrac{\partial(t, x, y, z)}{\partial(t', x', y', z')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & c & s & 0 \\ w & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder gleichmäßige lineare Beschleunigung. xxxx Man erkennt **in der Zeitkomponente der Metrik** das Potenzial $g_{\mu\nu} = J^T \eta_{\mu\nu} J$. Hertel: Theoretische Physik p222 $g_{00} = 1 + \dfrac{2\phi}{c^2}$; Schwere wird so zu Geometrie = Metrik. **Metrik wird zum Gegenstand der Physik, wird zur physikalischen Größe!** a] Trägheitstensor als eine Art Metrik gedeutet, bewertet das Skalarprodukt der Winkelgeschwindigkeit eines ausgedehnten Körpers um eine ausgewählte Achse $E_{\text{rot}} = \vec{\omega} \dfrac{\Theta}{2} \vec{\omega}$. b] anisotroper Abstand per Finslermetrik oder anisotrope Zeit = bergauf dauert der Langlauf länger. Hoffmann: Einsteins Ideen. Das Relativitätsprinzip und seine historischen Wurzeln 1992 p186; Lies **Abraham: Relativität und Gravitation. Erwiderung auf eine Bemerkung des Herrn Einstein**, AnndPhys 35 1912 1056ff und **Gustav Mie: Grundlagen einer Theorie der Materie**, Teil I Weltfunktion, AnndPhys 37 1912 511-

534, AnndPhys 39 1912 1-40 Teil II **Problem des Elektrons** = Feldknoten, und AnndPhys 40 1913 1-66 Weltmatrix; Mie-Biografie in PhysBl13 1957 129-131; Mie: Die Einsteinsche Gravitationstheorie 1921; Zehe: Die Gravitationstheorie des Nicolas Fatio de Duillier 1980 kleinste Teilchen treiben Körper aufeinander zu = Drucktheorie/ kinetische Die Gravitationstheorie. Basiert auf inelastischer Absorption ; Weidemann: Neue Testergebnisse für die Gravitationstheorien PhysBl31 1975 p502f; **Abraham Pais: Developments in the theory of the electron** 1948 als Kopie aus Groningen; von Laue: Geschichte des Elektrons PhysBl15 1959 p105ff; **Entwurftheorie 1913/14:** Unter dem Einfluss der an Konkurrenztheorien arbeitenden Physiker Gunnar Nordström 1881-1923 in Helsinki, Max Abraham 1875-1922 in Milano (1909-11) und Gustav Mie 1868-1957 in Greifswald musste Einstein, geführt von seinen Mathematiker-Kollegen in Zürich Marcel Grossmann 1878-1936, in Prag Georg Pick 1859-1942 und Ludwig Hopf 1884-1939, in Zürich Hermann Weyl 1885-1955, Otto Stern 1888-1969 einsehen, dass ein allgemeines Relativitätsprinzip, das auch zwischen Schwerkraft und Scheinkraft keinen Unterschied macht, Riemann'sche Geometrie zur physikalisch prüfbaren Theorie werden lässt. Was Gauß bereits bereits experimentell zu entscheiden versuchte, als er die Innenwinkelsumme großer Dreiecke ausmaß, das wird durch Einstein zur experimentell prüfbaren Theorie: Lichtablenkung und Periheldrehung. Die gültige Geometrie wird Bestandteil der Physik, sofern sie vom Erfahrungsbereich abhängt. Bei der einheitlichen Feldtheorie = Tuning des metrischen Tensors halfen Jacob Grommer 1879-1933 1916-1929, Cornelius Lanczos 1893-1974 1928/29, Walther Mayer 1887-1948 1929-1935, Banesh Hoffmann 1906-1986 1935-37, Peter Gabriel Bergmann 1915-2002 1936-1941, Leopold Infeld 1898-1968 1936/37, Ernst Gabor Strauss 1922-1983, Alfred Schild 1921-1977, Behhram Kursunoglu 1922-2003, Abraham Pais 1918-2000, Vaclav Hlavaty 1894-1969, David Bohm 1917-1992, Nathan Rosen 1909-1995, Boris Podolsky 1896-1966, Valentin Bargmann 1908-1989, John G. Kemeny 1926-1992, Robert Kraichnan 1928-2008, Brunia Kaufmann 1918-2010. **Schmutzer: Relativistische Physik** 1968 p458ff **Rotierendes Karussel ändert Metrik**; Anderson: Principles of relativity physics 1967; Schmutzer: Relativitätstheorie - aktuell 1979 p103 1996[5] p123; Borzeszkowski, Kasper, Kreisel, Liebscher, Treder: Gravitation und Äquivalenzprinzip 1971 Tetraden; Landau & Lifschitz: LB der theoret Physik Bd2 Klassische Feldtheorie 1966, 1973 Kap X p263ff **Äquivalenzprinzip = Die Eigenschaften der Bewegung sind in einem Nichtinerzialsystem dieselben wie in einem Innerzialsystem mit Gravitationsfeld.** p291 und p298ff Stationäres Schwerefeld durch Rotation. Im Sinne der ART/Einstein'schen Gravitationstheorie wird die **Schwerkraft/Gravitationskraft zur Scheinkraft**. Friedmann: p116; Alle Scheinkräfte werden geometrisiert, bedeutet, dass sie den metrischen Tensor/die Metrik modifizieren. **a] Aufzug-Metrik** Die Metrik eines gleichmäßig beschleunigten Aufzugs folgt aus den Transformationsformeln $t = t'$, $x = -\frac{g}{2}t'^2 + x'$, $y = y'$ und $z = z'$. Jacobi-Matrix: $J = \frac{\partial(t,x,y,z)}{\partial(t',x',y',z')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -gt' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ bedeutet Übergang zu nicht-flacher Metrik gemäß $g_{\mu\nu} = J^T \eta_{\mu\nu} J = \begin{pmatrix} 1 & -gt' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -gt' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & gt' & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -gt' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-g^2t'^2 & gt' & 0 & 0 \\ gt' & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Das Quadrat des Linienelements/-des infinitesimalen Abstands wird zu

$$\mathrm{d}s^2 = (c\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z') \begin{pmatrix} 1-g^2t'^2 & gt' & 0 & 0 \\ gt' & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x' \\ \mathrm{d}y' \\ \mathrm{d}z' \end{pmatrix} = (c\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z') \begin{pmatrix} c(1-g^2t'2)\mathrm{d}t' + gt'\mathrm{d}x \\ cgt'\mathrm{d}t' - dx' \\ -\mathrm{d}y' \\ -\mathrm{d}z' \end{pmatrix} =$$

$$\mathrm{d}s^2 = c^2(1-g^2t'2)\mathrm{d}t'^2 + 2cg\mathrm{d}t'\mathrm{d}x' - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2$$

b] Karussel-Metrik bei konstantem ω bedeutet Transformation $t = t', x = x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t', y =$

$x' \sin\omega t' + y' \cos\omega t'$ gibt die Jacobi-Matrix

$$J = \frac{\partial(t,x,y,z)}{\partial(t',x',y',z')} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega(x'\sin\omega t' + y'\cos\omega t') & \cos\omega t' & -\sin\omega t' & 0 \\ \omega(x'\cos\omega t' - y'\sin\omega t') & \sin\omega t' & \cos\omega t' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & c & -s & 0 \\ w & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ bedeutet Übergang zu nicht-flacher Metrik des Karussels gemäß $g_{\mu\nu} = J^T \eta_{\mu\nu} J = \begin{pmatrix} 1 & u & w & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & c \\ w & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ -

$$= \begin{pmatrix} 1 & -u & -w & 0 \\ 0 & -c & -s & 0 \\ 0 & s & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & c & -s & 0 \\ w & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & M & A & 0 \\ M & -1 & 0 & 0 \\ A & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\omega^2(x'^2+y'^2) & \omega y' & -\omega x' & 0 \\ \omega y' & -1 & 0 & 0 \\ -\omega x' & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$g_{\mu\nu}$, wobei

$Q = 1 - u^2 - w^2 = 1 - \omega^2(x'^2 + y'^2)$, $M = -cu - sw = \omega y'$ und $A = su - sw = -\omega x'$. aber Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010 p220ff falsch. Rebhan: Relativitätstheorie und Kosmologie 2012 p246f; Das Quadrat des Linienelements/des infinitesimalen Abstands für Rotation oder Karussel wird zu

$$\mathrm{d}s^2 = (c\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z') \begin{pmatrix} Q & M & A & 0 \\ M & -1 & 0 & 0 \\ A & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\mathrm{d}t' \\ \mathrm{d}x' \\ \mathrm{d}y' \\ \mathrm{d}z' \end{pmatrix} = (c\mathrm{d}t', \mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z') \begin{pmatrix} cQ\mathrm{d}t' + M\mathrm{d}x' + A\mathrm{d}y' \\ cM\mathrm{d}t' - dx' \\ cA\mathrm{d}t' - \mathrm{d}y' \\ -\mathrm{d}z' \end{pmatrix} =$$

$\mathrm{d}s^2 = c^2 Q \mathrm{d}t'^2 + 2cM\mathrm{d}t'\mathrm{d}x' + 2cA\mathrm{d}t'\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 = c^2(1-\omega^2(x'^2+y'^2))\mathrm{d}t'^2 + 2c\omega y'\mathrm{d}t'\mathrm{d}x' - 2c\omega x'\mathrm{d}t'\mathrm{d}y' - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 = c^2\mathrm{d}t'^2 - c^2\omega^2(x'^2+y'^2)\mathrm{d}t'^2 + 2c\omega\mathrm{d}t'(y'\mathrm{d}x' - x'\mathrm{d}y') - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 =$

$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t'^2 - \mathrm{d}x'^2 - \mathrm{d}y'^2 - \mathrm{d}z'^2 - c^2\omega^2(x'^2+y'^2)\mathrm{d}t'^2 + 2c\omega\mathrm{d}t'(y'\mathrm{d}x' - x'\mathrm{d}y')$

c] Schwerkraft-Metrik Krbek: Grundzüge der Mechanik. Lehren von Newton, Einstein und Schrödinger 1954 p80 finde die zuständige Metrik durch Experiment! p82 Schwarzschildmetrik, p13 Scheinkraft; Jellinek (Danzig, Goetheanum): Weltsystem, Weltäther und die Relativitätstheorie 1949 p318 gleichförmig beschleunigt, p320f Karussel, p325 Sonnenumgebung, p177, p206 homogenes Schwerefeld; **Katti: The Mathematical Theory of Special and General Relativity** 2013 p138 rotierende Bezugssyteme; **Foster & Nightingale: A short course in general relativity** 2006[3] p90ff; **Einstein: Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes** Annalen der Physik 38 1912 355 Beschleunigungsfelder sind spezielle Schwerefelder; Tolman: Relativity, thermodynamics and cosmology 1934 p199 Schwere und Potenzial; Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010 p220ff; Denschlag: Relativitätstheorie kompakt 2012 p50f; **Moller: The theory of relativity 1952 §84 Gleichförmig rotierende Systeme, §90 Räumliche Geometrie im rotierenden Bezugssystem, §92 Dynamische Gravitationspotenziale, §95 Einfache Beispiele beschleunigter Bezugssysteme**; Hertel: Theoretische Physik p222 $g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2}$; Macheleit: Die allgemeine Relativitätstheorie, PfL12 Kap6 1979 p145; Goenner: Einf in spez und allg Relativitätstheorie 1996 Kap5 p164 Trägheitsfelder bei Nichtinerzialsystemen; McVittie: General relativity and cosmology 1965[2] 4.6 Beschleunigte Koordinatensysteme; Sciama: The Physical Foundations of General Relativity 1969; Sexl & Urbantke: Kosmologie Kap 1.4; Neumann: Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie 1922 p143 **Rotationsgravitation**; Feynman: Lectures Bd2/2 Kap42 Der gekrümmte Raum. Mit den 3 **Geometrie treibenden Käfern** wird die gekrümmte Raumzeit in Massen-, Energie- oder Trägheitsfeldnähe gedeutet als Metrikmodifikation $g_{\mu\nu}$ speziell der Potenzialabhängigkeit der Zeitkomponente.

Gamow p12 Schlüssel für das Verständnis der großräumigen kosmischen Entwicklung sind Slipher und Hubble $v = H\,r$ mit der **Expansionsrate** $H_0 \approx (74{,}3 \pm 2{,}1)\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s{\cdot}Mpc}}$ mit $1\,\mathrm{pc} = 3{,}0856\,776 \cdot 10^{16}$ m und **Sternjahr = 31,558,149.54 s** $\approx 3.1\,10^7$ **s** gibt **Weltalter** $1/H = 14\,10^9$ Jahre oder der **Ausdehnungsfunktion / Skalenfaktor** $R(t)$ oder $a(t)$ gemäß $\dot{R} = H\,R$. Tipler: Physik 1994 p1472f; Liddle Kap3; Sei

M Gesamtmasse aller Galaxien innerhalb Kugel mit R. **Kraft** ist $F = -\frac{GMm}{r^2} = -\frac{4\pi G\rho rm}{3}$. Potenzielle Energie einer Galaxie der Masse m am Rand des Universums ist $E_p = -\frac{GMm}{R} = -\frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}$. Gesamtenergie der Galaxis ist $E = mv^2/2 - GMm/R$. Bei $E = 0$ Gleichgewicht. $\frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(HR)^2 = \frac{GMm}{R}$ oder $\frac{1}{2}H^2 = \frac{GM}{R^3}$. Dazu **kritische Massendichte** $\rho_k = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3H^2}{8\pi G} \approx 10^{-26}$ kg/m^3, also 5 H pro m^3. Universum homogen, daher gilt const$=U = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - \frac{4\pi G\rho r^2 m}{3}$ für jedem Abstand zweier beliebiger Teilchen. Gehe daher zu **mitbewegten Koordinaten** über, die der Expansion des Universums folgen. **Wirkliche(r) Abstand/Koordinaten** = dort, wo die Galaxien sitzen = $\vec{r} = a(t)\,\vec{x}$ = **Skalenfaktor des Universums** mal **mitbewegtem/n Abstand/Koordinaten** = lokales irdisches, sich wegen **Raumausdehnung** bewegendes KS expandiert nicht. Die Galaxien bleiben an festen Punkten der $\vec{x}$-Koordinatensysteme. Obgleich die **physikalischen Koordinaten** $\vec{x}$ **lokal gleich bleiben**, nehmen die **physikalischen Abstände** global zu den Galaxien $\vec{r}$ mit der Zeit **zu**. Stannard: Relativitätstheorien 2008, 2015[3]; **Peebles: Principles of physical cosmology** 1994 p71; **Berry: Kosmologie und Gravitation: Eine Einführung** 1974; 1990 p121; Raumausdehnung bedeutet also **nicht**, dass unsere Körper mit der Zeit expandieren. Die lokalen Koordinaten $\vec{x}$ bleiben unberührt. Auch der Erdbahnradius bleibt, ebenso bleiben die Sterndistanzen innerhalb der Galaxien gleich. Diese Systeme besitzen eine Dichte, die viel höher ist als die gleichmäßige Dichte, auf welcher die Herleitung der Friedmann-Gl beruht. Der von den Körpern unabhängige Raum dehnt sich aber auf hinreichend großen Gebieten auf einer Skala von Mpc, auf der das Universum als homogen angesehen werden kann. const$=U = \frac{m}{2}\dot{a}^2\,x - \frac{4\pi G\rho a^2\,x^2\,m}{3}$ nach Multiplikation mit $\frac{2}{ma^2x^2}$ und $kc^2 := -\frac{2U}{mx^2}$ folgt die **Friedmann-Gl** $\left(\frac{v}{r}\right)^2 = H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$. Homogenität des Universum bedeutet, dass k, G, ρ und c unabhängig von x sein müssen. U=const für ein Teilchen, aber $U(x) \propto x^2$! Da $k = -2U/mc^2x^2$ zeit**un**abhängig, denn Energie U bleibt erhalten und mitbewegter Abstand x wird festgehalten, folgt k=const, weder von räuml Koordinaten noch Zeit abhängig. **Krümmung** $[k]$=1/(Länge)^2, hängt mit der Geometrie des Universums zusammen.

In sich ausdehnender Raumzeit gibt es kein eindeutiges **Entfernungsmaß** siehe **Liddle: Einführung in die moderne Kosmologie** 2003 Kap3; Clark: Redshift 1997; Zwicky: Licht altert; Žwicky: Entdecken, Erfinden, Forschen im morphologischen Weltbild 1966; Zwicky: Morphologische Forschung. Wesen und Wandel materieller und geistiger struktureller Zusammenhänge 1989; Field et al.: **The redshift controversy** 1973; Georges Lemaître & Alexander Friedmann; im Friedmann-Universum: Laufzeitentfernung, mitbewegte Entfernung, Winkeldurchmesserentfernung, Leuchtkraftentfernung. Straumann: Das Universum nach Einstein. Von der kosmologischen Konstanten zur Dunklen Energie, PhysJ 14 2015 H3, 45-9 Raum und Zeit selbst sind an der kosmologischen Dynamik beteiligt. Lies aber erst Born: Die RT Einsteins 2003 p313ff, 409ff; Liddle 2003 und Singh 2004 p161; Russell & Pirani: ABC der RT 1925, 1962 p128; Kippenhahn: Kosmologie 2003 p44f; Huang: A Superfluid Universe 2016 Superfluidity and the Order Parameter. Quantum Turbulence. Higgs. Renormalization. Halpern-Huang Scalar Field. Dynamics of Spacetime. Black Holes. The Big Bang. Creation of Matter. Dark Energy and Dark Matter. Quantum Vorticity in the Universe; **Peacock: Cosmological Physics** 2001; Roos: Introduction to Cosmology 2003, 2014; Ryden: Introduction to Cosmology 2002; *1935 Igor Dmitriyevich Novikov: Schwarze Löcher im All 1983[2] Black holes and the universe 1990; Luminet: Schwarze Löcher 1997; Novikov: The River of Time 1998; Želdovich & Novikov: Stars and relativity 2000; Zeldovich & Novikov: Relativistic astrophysics. Bd1 Stars and relativity 1971, Bd2 The structure and evolution of the universe 1983; **Narlikar: Introduction to cosmology** 1993[2], 2008[3]; Narlikar: Die sieben Wunder des Universums 2001; Ñarlikar & Padmanabhan: Gravity, gauge theories and quantum cosmology 1986; Hoyle & Narlikar: Action at a distance in physics and cosmology 1974; Hoyle & Narlikar: Lectures on Cosmology and Action at a Distance Electrodynamics 1997; Hoyle, Burbidge, Narlikar: A different approach to cosmology. From a static Universe through the big

bang towards reality 2000; Hoyle: Mensch und Materialismus 1961; Hoyle: Galaxies, nuclei, quasars 1965; Wiehl: Zeitwelten. Philosophisches Denken an den Rändern von Natur und Geschichte 2000; Wiehl: Metaphysik und Erfahrung 2000; Wiehl: Natur, Subjektivität, Gott 1990; Wiehl: Subjektivität und System 2000; Hoyle: Das grenzenlose Universum 1959; Hoyle: Leben aus dem All 2000; Hoyle: Kosmische Katastrophen und der Ursprung der Religion 1993 nächster Besuch 2100, Geist und Gene, 1980 Alvarez, Asaro, Michel, Kometen δ_8^{18}O Eiszeiten; Hoyle: Das Intelligente Universum. Eine neue Sicht von Entstehung und Evolution 1984; Bondi: Universe at Large 1963; Bondi: Das Weltall und wir und Theorien der Kosmologie 1960; Bondi: Einsteins Einmaleins 1971; Bondi: Cosmology 1960; Vom Standpunkt der QT ist die Kleinheit der kosmologischen Konstanten ein Rätsel.. ART als klassische Feldtheorie hat 2 freie Konstanten, die experimentell bestimmt werden müssen: G definiert eine riesig hohe Massenskala, die Planck-Skala von $10^{19}\,m_p$ und Λ definiert eine Energie-Massendichte, die aus Sicht der Elementarteilchenphysik sehr klein ist. In RT kann es keine **Trägheit gegenüber dem Raum** geben, sondern nur Trägheit der Massen gegeneinander. Dann ist Trägheit durch die im Endlichen vorhandene Materie zwar beeinflusst aber nicht bedingt. Danach besitzt bereits ein einzelner Massepunkt Trägheit. **Mach'sches Prinzip** = das metrische Feld ist restlos durch die Massen der Körper bestimmt. = Verallgemeinerung der Mach'schen Forderung, dass Trägheit auf WW der Körper beruht. Newtons absoluter Raum sollte getilgt werden. Ley & Löther: Mikrokosmos-Makrokosmos. Philosophisch-theoretische Probleme der Naturwissenschaft und Technik, Medizien 1967 Bd2 Ruben: Mechanik und Dialektik p54, Treder: Physikalische Theorie von Raum und Zeit p93-124; Treder: Relativität und Kosmos. Raum und Zeit in Physik, Astronomie und Kosmologie 1968; Treder: Relativität der Trägheit 1972; Nach Mach ist ein lokales Bezugssystem, in welchem die Newton'schen Gesetze gelten, durch die Massenverteilung im Universum bedingt und bestimmt. Später erkannte Einstein, dass das metrische Feld der ART, trotz seiner Abhängigkeit von der Materie, eine eigene Existenz bewahrt, änhlich wie dies für das em Feld des Fall ist. **Unzicker:** erste Idee zur ART Einsteins 1907 = **Theorie mit variabler Lichtgeschwindigkeit** = Erklärung der Gravitation im Sinne von Ernst Mach, der die Ursache der Trägheit in der Präsenz aller Massen im Universum vermutete. Einstein kannte zu dieser Zeit die Größe des Kosmos noch nicht, da Hubbles Beobachtungen gut zwanzig Jahre später kamen. Querverbindung zu Paul Diracs Hypothese der großen Zahlen. Dicke verbesserte 1957 Einsteins Theorie entscheidend. **Unzicker: Mach's Principle and a Variable Speed of Light** 2007 arXiv:gr-qc/0511038; Daher 1917: Universum zwar unbegrenzt, aber räumlich endlich. Oder räumlich geschlossen, also Kugeloberfläche im $\mathbb{R}^4$, also keine Randbedingungen nötig. Problem: Entsprechende Feldgleichungen lassen kein statisches Universum zu. Implo- oder Explosion. Bei Newton gab's nur Zusammensturz, Gott nötig. Einstein: Kosmologisches Glied nötig für statisches Universum. **Abstoßende Gravitation**. Aber Friedmann und Lemaitre forderten schon in 20er Jahren nichtstatische Modelle $a(t)$. Doch selbst deutete 1929 Geschwindigkeits-Distanz-Beziehung gemäß Eddington: The math theory of relativity 1924[2] im Sinne des statisch verstandenen de-Sitter-Modells. Im vierdimensionalen Minkowski-Raum (3 Raumdimensionen plus die Zeit) bzw. in der Raumzeit ist der De-Sitter-Raum das Analogon zu einer Kugel im gewöhnlichen euklidischen Raum. Minkowski-Raum $\mathbb{R}^{1,n}$ mit dem üblichen metrischen Tensor $ds^2 = -dx_0^2 + \sum_{i=1}^n dx_i^2$. Dann ist der De-Sitter-Raum die Untermannigfaltigkeit, die durch das einschalige Hyperboloid $\alpha^2 = -x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$. Wenn in obiger Definition α^2 durch $-\alpha^2$ ersetzt wird, erhält man ein zweischaliges Hyperboloid. In diesem Fall ist die erzeugte Metrik positiv definit, und jede der beiden Schalen ist eine Kopie einer hyperbolischen n-Geometrie. Der Riemannsche Krümmungstensor des De-Sitter-Raumes ist $R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{1}{\alpha^2}(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu})$. De-Sitter-Raum ist Einstein-Mannigfaltigkeit, da Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ proportional zur Metrik $g_{\mu\nu}$: $R_{\mu\nu} = \frac{n-1}{\alpha^2} \cdot g_{\mu\nu}$. Das heißt, der De-Sitter-Raum ist eine Vakuumlösung der einsteinschen Feldgleichungen mit kosmologischer Konstante $\Lambda = \frac{n-1}{\alpha^2} \cdot \frac{n-2}{2}$. Das **Krümmungsskalar** dieses Raumes ist $R = \frac{n(n-1)}{\alpha^2} = \frac{2n}{n-2}\Lambda$. **Statische Koordinaten** mit Zeit t und Radius r: $x_0 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \cdot \sinh(t/\alpha)$, $x_1 = \sqrt{\alpha^2 - r^2} \cdot \cosh(t/\alpha)$, $x_i = rz_i$ mit $2 \leq i \leq n$, wobei z_i die Standard-Einbettung der Sphäre $S^{n-2} \subset R^{n-1}$ darstellt. De-Sitter-Metrik = $\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\alpha^2}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega_{n-2}^2$. **Slicing-Koordinaten = Flach** mit Ansatz: $x_0 = \alpha\sinh(t/\alpha) + r^2e^{t/\alpha}/2\alpha$, $x_1 = \alpha\cosh(t/\alpha) - r^2e^{t/\alpha}/2\alpha$ und $x_i = e^{t/\alpha}y_i$ mit $2 \leq i \leq n$, wobei $r^2 = \sum_i y_i^2$. Dann lautet die Metrik des De-Sitter-Raumes in (t, y_i)-Koordinaten = $\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + e^{2t/\alpha} \cdot \mathrm{d}y^2$ mit $\mathrm{d}y^2 = \sum_i \mathrm{d}y_i^2$ der flachen Metrik auf y_i. **Geschlossen** mit Ansatz: $x_0 = \alpha\sinh(t/\alpha)$ und $x_i = \alpha\cosh(t/\alpha) \cdot z_i$ mit $1 \leq i \leq n$, wobei die z_i eine S^{n-1}-Sphäre beschreiben.

Metrik des De-Sitter-Raumes $= \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) \cdot \mathrm{d}\Omega_{n-1}^2$. Wird die Zeit-Variable t geändert in die **konforme Zeit** η: $\tanh(t/\alpha) = \tan(\eta) \Leftrightarrow \cosh(t/\alpha) = 1/\cos(\eta)$, so erhält man eine Metrik, die konform äquivalent zum statischen Einstein-Universum ist mit $\mathrm{d}s^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2\eta}(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\Omega_{n-1}^2)$. Die η-Koordinate kompaktifiziert die Zeit t auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Der De-Sitter-Raum und das Einstein-Universum haben deshalb das gleiche **Penrose-Diagramm**. **Offen** mit Ansatz $x_0 = \alpha \sinh(t/\alpha) \cosh\xi$, $x_1 = \alpha\cosh(t/\alpha)$ und $x_i = \alpha \sinh(t/\alpha) \sinh\xi \cdot z_i$ mit $2 \leq i \leq n$, wobei $\sum_i z_i^2 = 1$ eine Sphäre S^{n-2} formt mit der Standard-Metrik $\sum_i dz_i^2 = d\Omega_{n-2}^2$. **Metrik des De-Sitter-Raumes** $= \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \alpha^2 \sinh^2(t/\alpha) \cdot \mathrm{d}H_{n-1}^2$, mit $\mathrm{d}H_{n-1}^2 = \mathrm{d}\xi^2 + \sinh^2\xi \cdot \mathrm{d}\Omega_{n-2}^2$ der Metrik eines hyperbolischen euklidischen Raumes.

Schon 1926 deutete Lemaitre mit Sliphers Daten der Rotverschiebung als **räumliche Expansion des Kosmos** $a(t)$ und nicht fälschlicher Weise als galaktische Flucht: **Rotverschiebung** $+1 = z + 1 = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a}{a_0} = \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{\nu_{emittiert}}{\nu_{beobachtet}} = \frac{a(t_{beobachtet})}{a(t_{emittiert})}$ mit dem **Skalenfaktor** a. Lemaitre: $z \ll 1$ gibt lineare Beziehung von z und Helligkeitsdistanz. 1929 Nebel bleiben an ihren Platz, aber Eigenschaften des Raumes ändern sich. Mikrobe auf Seifenblase, die sich dehnt. Jede hat Eindruck, im Zentrum zu sein. **Kein Doppler-Effekt im Spiel!** Alles von Einstein bis 1932 abgelehnt. Pauli: Lemaitre und Friedmann zeigten schon in den 1920gern die Instabilität von Einsteins Feldgleichungen, man braucht $a(t)$! G̃ünther & Müller: Doppler-Effekt und Rotverschiebung. Klassische Theorie und Einstein'sche Effekte 2020;

Cheng: Relativity, Gravitation, and Cosmology. A Basic Introduction

2005; Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit 1950, 1963; Mook & Vargish: Inside Modernism. Relativity Theory, Cubism, Narrative. Pappbilderbuch 1999; Mook & Vargish: Inside Relativity 1991; **Treder: Elementare Kosmologie 1975** - ideengeschichtliche Einführung ausgehend von Paradoxien und Grundlegungen. Seit Hubble und 3K-Stahlung ist klar, dass nicht nur die Sterne der Galaxis, sondern auch das Universum selbst eine Geschichte hat. Penzias und Wilson optimierten 1964 Telstarempfang und finden isotrope 7.35 cm Strahlung. Maximum liegt bei 1 mm. **Wiensches Verschiebungsgesetz:** a] Maximum der **Strahlungsintensität** bei $\lambda_{max} = \frac{2898}{T}\mu$mK. b] Maximum der **Photonenrate** bei $\lambda_{max} = \frac{3670}{T}\mu$mK. **Rotverschiebung**, siehe Seite 485, der Hintergrundstrahlung beträgt z = 1089, also ca 3000K. Kippenhahn: Licht vom Rande der Welt 1984; Starkman & Schwarz: Missklänge im Universum SdW H12 2005 p30; Weinberg: Die ersten drei Minuten 1977; Teleskope erlauben kosmologische Archäologie und so eine Rekonstruktion der Geschichte des Himmels. Davies: Am Ende ein neuer Anfang = The runaway Universe 1978; **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990; Pagels: The cosmic code. Quantum physics as the language of the universe 1984; Pagels: Die Zeit vor der Zeit. Das Universum bis zum Urknall 1990; Bojowald: Zurück vor den Urknall 2009; Pagels: Perfect Symmetry. The Search for the Beginning of Time 1992; Weyl: Was ist Materie? 1924; **Kant: Alle Erscheinungen enthalten das Beharrliche (Substanz) als den Gegenstand selbst und das Wandelbare als dessen Bestimmung, das ist eine Art, wie der Gegenstand existiert. Geschichte der RT:** Ferreira: Die perfekte Theorie. Das Jahrhundert der Genies und der Kampf um die Relativitätstheorie 2014; Renn, Blum, Lalli: 1913 Entwurftheorie. Max Abraham: Bei Gravitation nur EINE Ladung, also kein Dipolmoment, erst Quadruplomoment. ART nach Vorbild der Elektrodynamik 1916. Schwarzschild: Es sind keine licht-analogen Wellen zu erwarten. de Sitter: 3 Wellenarten, nur eine davon trägt Energie. Wellen als Koordinateneffekte. **Foster & Nightingale: A short course in general relativity** 1995; Nordström. Rosen, Robertson 1950: Keine Wellen. ART nicht etabliert, hat nur kleine physikalische Effekte, man sucht nach einheitlicher Feldteorie, die auch Quantentheorie einschließt. Pirani, Schild, Singh, Synge 1897-1995: Jede gerade-dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung muss einfach zusammenhängend sein! Feynman, Misner Schwarze Löcher etablieren sich. Bis dahin: jenseits Schwarzschildradius Unsinn. Penrose: Singularitäten sind typisch bei ART. **Dirac: Gravitationswellen** PhysBl16 1960 p364-66; **Pirani: Einführung in die Theorie der Gravitationswellen** PhysBl17 1961 p114-119; Erst durch den von Pirani in 50iger ausgelösten sozialen

Effekt/Netzwerk passiert ART-Renaissance und Kuhn'sche Paradigmenwechsel durch Wheeler, Hawking, Thorne: Wurmlöcher, Wellen. **Felix Arnold Edward Pirani 1928-2015 Vortrag am 3.12.1959 AdW Berlin: Einführung in die Theorie der Gravitationsstrahlung**, PhysBl17 1961 p114-9 Šacharow: Gravitation waves in Einstein's theory of gravitatyion 1973 PhysBl30 1974 p237; **Gravitationsstrahlungs-Polarisation** siehe PhysBl30 1974 p126ff; Potenzial: Newton Φ, Maxwell A_m und Einstein g_{mn}. Feld: $E_m = \partial_m \Phi$, $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$ und $\Gamma^p_{mn} = \frac{1}{2} g^{pq}(\partial_m g_{nq} + \partial_n g_{mq} - \partial_q g_{mn})$. Bewegungsgleichungen: $m\ddot{x} = E_m$, $m\frac{\mathrm{d}v^p}{\mathrm{d}s} = eF^{pn}v_n$ und $\frac{\mathrm{d}v^p}{\mathrm{d}s} = \Gamma^p_{mn}v^m v^n$. Feldgleichungen: linear $\Delta\Phi = 0$, linear $\Box A_m = 0$ Quabla siehe Seite 563 und für Einstein-Tensor Seite 480 gilt $G_{mn} = 0$. Geometrie: Euklid $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$, Minkowski $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - c^2\mathrm{d}t^2$ und Riemann $\mathrm{d}s^2 = g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n$. **Pirani & Roche: Introducing the Universe** 1990; **Crampin & Pirani: Applicable differential geometry** 1987; Landau/Lifschitz Bd2, Treder Habilarbeit: Gravitative Stoßwellen. Nichtanalytische Wellenlösungen der Einsteinschen Gravitationsgleichungen, 1962. Jeffrey Groah, Smoller & Temple: Shock wave interactions in general relativity. A locally intertial glimm scheme for spherically symmetric spacetimes 2007; Dann 50 Jahre Theorie zur ART. Thorne viel in UdSSR. Ehlers, Schutz Koordinaten machen viel, aber was ist davon per Interferometer messbar? Für das Verstehen und Lehren ist exzellent: **Taylor & Wheeler: Spacetime Physics** 1963, 1966; Physik der Raumzeit. Eine Einführung in die spezielle Relativitätstheorie 1994; Die Einstein'sche Gravitationstheorie verbindet als metrische Gravitationstheorie physikalische Begriffe/Energie-Impuls-Tensor mit geometrischen Begriffen/Metrik. Ãdler, Bazin, Schiffer: Adler, Introduction to General Relativity 1965; **Menzel: Mathematical physics** 1961 Mechanik, Hydrodynamik, SRT und ART; **Weber: General relativity and gravitational waves** 1961; Mercier, Treder, Yourgrau: On general relativity. An analysis of the fundamentals of the theory of general relativity and gravitation 1979; Teaching general relativity to undergraduates Physics Today65 p6, p41 2012, https://physicstoday.scitation.org/doi/10.1063/PT.3.1605 690. WE-Heraeus-Seminar General Relativity as a Challenge for Physics Education, https://www.tempolimit-lichtgeschwindigkeit.de/heraeus19/heraeus19.html, https://teaching-relativity.org/ Thirring: Die Idee der Relativitätstheorie 1948; Hopf: Die Relativitätstheorie 1931; Kannegießer: Raum- Zeit- Unendlichkeit 1966; **Lies zum Verständnis der ART insbesondere die vortensoriellen, Prager Arbeiten Einsteins** wie *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*, Annalen der Physik 38 1912 355-369. **Pohl: Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen.** Eine Einführung für Lehramtsstudierende 2017 ebook; **Hamel: Grundbegriffe der Mechanik** 1921 Das Wesen der Einstein'schen Reform p126ff; Lämmerzahl: ART und angewandte Physik. Mit Hilfe der ART bisher alle gravitativen Phänomene wie Lichtablenkung, Rotverschiebung, gravitative Laufzeitverzögerung, Periheldrehung, Lense-Thirring-Effekt sowie das Verhalten von Binärsystemen korrekt beschrieben. Nachdem schon bei der Definition der internationalen Atomzeit und beim GPS speziell- und allgemeinrelativistische Effekte berücksichtigt werden müssen, wird dies aufgrund neuer und verbesserter Messmethoden mit Uhren und Lasern in der Geodäsie in Zukunft auch der Fall sein. Bartelmann: Einsteins Schöpfung, die zunächst nicht auf eine Gravitationstheorie abzielte. Periheldrehung des Merkur wollte man per Störungstheorie auf hypothetischen Planeten Vulkan abwälzen. Einstein ersetzte Inerzialsysteme durch frei fallende Bezugssyteme durch Annahme des Äquivalenzprinzips $m_T = m_g$. **Äquivalenzprinzip** erklärt Gravitationskraft als Trägheitskraft und schreibt ihr die Krümmung der Raumzeit selbst als Ursache zu. Alle anderen Kräfte werden durch QFTs beschrieben = lokale Eichsymmetrien bestimmen die WW. Durch freien Fall wird Gravitation vertransformiert und das Trägheitsgesetz/SRT, also Lichtkegelstruktur/Minkowski-Metrik, gelten wieder. **Metrik wird zum dynamischen Feld!** Beschleunigter Aufzug emuliert Gravitation. SRT = Elektrodynamik zwingt zu pseudo-euklidischer Geometrie im Kleinen. ART ist eine Feldtheorie für die eine nicht-euklidische Metrik im Großen, um dem Newton'schen Gravitations-Kollaps zu entgehen. **Pais: Inward bound of matter and forces in the physical world** 1986 Geschichte der Teilchenphysik von 1896 bis 1983; **Kosmologisches Standard-Modell** hat nur 6 Parameter, basiert auf einfachsten Symmetrieannahmen und gibt vielen kosmologischen Beobachtungen eine konsistente Deutung. Gilt aber nur, wenn der **größte Teil der Materie des Universums nicht mit Licht wechselwirken** kann und die **Gravitation auf großen Skalen abstoßend** wirkt. Das aber liefert völlig rätselhafte Energie- oder Längenskala = Kosmologische Konstante,

die bis nur 10^{-120} Vakuumenergie der QFTs liegt! Bei ART wird die affine Minkowski-Raumzeit der SRT zur diff Mannigfaltigkeit mit entsprechender Metrik. Kovariante Ableitung erlaubt Vektorverschiebung längs Kurven auf der Mannigfaltigkeit. Maß für die **Krümmung der Raumzeit** ist Richtungsdifferenz von auf geschlossenen infinitesimalen Kurven transportierten Vektoren, gemessen durch **Riemann-Tensor**, dessen Kontraktion der **Ricci-Tensor** $R_{\mu\nu}$ = Maß für Abweichung von euklid/pseudo-euklid Geometrie, und dessen Kontraktion R der **Ricci-Skalar** = **Krümmungsskalar** ist. Landau & Lifschitz: Klassische Feldtheorie p308. Einstein'sche Feldgleichungen aus Lagrangedichte, die zum Krümmungsskalar die Lagrangedichten aller Materiefelder und die Kosmologische Konstante addiert. Die Lagrangedichte der Raumzeit = Krümmungsskalar wird insorfern minimal an die Lagrangedichten der Materiefelder gekoppelt. **ART = einfachste metrische Gravitationstheorie!** setzt **Einstein-Tensor** $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ der Raumzeit $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}$ mit Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ der Materiefelder in Beziehung. **Riemann'scher Krümmungstensor** in lokalen Koordinaten mittels Christoffelsymbolen: $R^m_{ikp} = \partial_k\Gamma^m_{ip} - \partial_p\Gamma^m_{ik} + \Gamma^a_{ip}\Gamma^m_{ak} - \Gamma^a_{ik}\Gamma^m_{ap}$. **Ricci-Tensor** per Tensorverjüngung: $R_{\mu\nu} = \pm R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$. Mit $R^\lambda_\kappa = g^{\mu\lambda}R_{\mu\kappa}$ bekommt man per Tensorverjüngung/Kontraktion des Ricci-Tensors den **Krümmungsskalar = Ricci-Skalar = die Skalarkrümmung** $R = R^\lambda_\lambda$ oder direkt aus dem Ricci-Tensor $R_{\mu\rho}$ sofort $R = g^{\mu\rho}R_{\mu\rho}$. **Geometrie der Raumzeit** wird durch ihren Materie- und Energieinhalt bestimmt, die Raumzeit aber umgekehrt wird bestimmt durch ihre Geometrie bestimmt, wie sich Materie und Energie bewegen. Wegen dieser Nichtlinearität gibt es keine retardierten Green'schen Funktionen des d'Alembert-Operators. Lösung durch Annahme von Symmetrien, die die Metrik und Feldgleichungen vereinfacht. PJ14 (6) 2015 p27 http://www.gravity-and-light.org/ Renn & Sauer: PB52 1996 p865; Börner PJ feb 2005 p21; Schwarz PJ Dez 2013 p18; Straumann PJ März 2015 p45; Wetterlich PJ Dez 2004 p43; Bojowald PJ März 2011 p37; Dvali PJ Nov 2011 p31; Lavi Karp: Cauchy problem for Einstein's gravitational fields equations in asymptotically flat spacetime. Ringström: On the Topology and Future Stability of the Universe 2013; Ringström: The Cauchy Problem in General Relativity 2009; **Choquet-Bruhat: Introduction to general relativity, black holes, and cosmology** 2015; Y Choquet-Bruhat 1952: Die Einstein'schen Feldgleichungen können als Anfangswertproblem aufgefasst werden! Baumgarte: Simuliertes Verschmelzen, PJ14 (6) 2015 p39-44 Wheeler: Materie krümmt die Raumzeit und die gekrümmte Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen soll: $G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab}$. Poisson-Gleichung $\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$ ist Newton'scher Cousin! Krümmung des Potenzials und Dichte der Materie stehen im Einklang. Das fundamentale Objekt der Newtonsche Gravitationstheorie φ wird durch das der Einstein'schen Raumzeit-Metrik g_{ab} ersetzt. **Metrik übersetzt Koordinatendifferenzen in physikalische Abstände.** QFT mit zunächst **indefiniter Metrik**, falls die Bilinearform $||\vec{v}||^2 =< \vec{v}|\vec{v} >\in \mathbb{R}$ bedeutet i.a. eine **komplexe "Länge" eines Vektors** $\sqrt{\vec{v}|\vec{v} >} \in \mathbb{C}$, Ordnung weg, also Längenbegriff weg. Analog auch negative Wahrscheinlichkeiten. Heisenberg: Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen 1967 pVI, 23f, 37, 107, p136, Lee-Modell p41, p142; **Numerische Relativitätstheorie = NRT** Einstein'sche Feldgleichung in der **ADM-Form** analog zu numerischen Maxwell-Gl, wo Fehler der Lösung der Maxwell-Gl durch Abweichung von **Zwangsbedingung** gemäß $C = \nabla\cdot\vec{E} - \rho/\epsilon_0$ gemessen wird. Dirac: General Theory of Relativity 1975 auf 80 Seiten; **Macheleit: Die allgemeine Relativitätstheorie**, PfL12 Kap6 1979 p139-159 kürzer geht's nicht; Greene: 100 Jahre Einsteins Raumzeit SdW Okt 2015 p42-46 Gravitation ist in Form von Raumzeit ein Teil der Geometrie des Universums; Ehlers & Börner: Gravitation - Raum-Zeit-Struktur und Wechselwirkung. Spektrum der Wissenschaft - Verständliche Forschung 1988; Janssen & Renn: Einsteins Weg zur ART SdW Okt 2015 p48-55 ART vereint per Äquivalenzprinzip Schwere und Trägheit, durch ein dynamisches Feld. Es unterliegt und verursacht physikalische Wirkungen und ist gleichzeitig Ursache für Schwere und für Beschleunigungen/Trägheit; **Schutz: Gravity from the Ground Up. An Introductory Guide to Gravity and General Relativity** 2003; Gilmore: Alice im Quantenland 1994; Gamov: Mr. Tompkins seltsame Reisen durch Kosmos und Mikrokosmos. Enthält Mr. Tompkins in Wonderland und Mr. Tompkins Explores the Atom. Mit Anmerkungen "Was der Professor noch nicht wußte" von Roman U. Sexl (Facetten der Physik) 1940, 1980; Wheeler: Gravitation, Spektrum; **Gribbin: Die erste Genesis. Gott,**

die Zeit und der Urknall 1986 mit Inflation = in den erst 10^{-35} sec verdoppelte das Umiversum seine Größe etwa 60 mal, mit COBE-Resultaten 1995; Gribbin: Jenseits der Zeit. Experimente mit der 4. Dimension 1992, 1995; Gonzalo: Cosmic paradoxes 2010; **McMahon: Relativity Demystified** 2005; Weinberg: Cosmology 2008; Oloff: Geometrie der Raumzeit. Eine mathematische Einführung in die Relativitätstheorie 2004[3]; Logunov: Lectures in relativity and gravitation. A modern look 1990; Misner, Thorne, Wheeler: Gravitation 1973; **Feynman: Lectures on gravitation** 1962; **Ryder: Introduction to General Relativity** 2009 ebook; Gorbunov & Rubakov: Introduction to the theory of the early universe. Cosmological Perturbations and Inflationary Theory 2011; Liebscher: **The geometry of time** 2005; Sexl & Urbantke: Kosmologie; Liebscher: Kosmologie; Goerner: Kosmologie; Kiefer: Der Quantenkosmos. Von der zeitlosen Welt zum expandierenden Universum 2008; Endliche Wahrscheinlichkeit, dass das Universum durch den Tunneleffekt aus einem 'kosmologischen Nichts' in seine Existenz kommt siehe Atkatz: Quantum cosmology for pedestrians AmJPhys62 p619-27 1994; R̃ovelli: Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint. Eine Reise in die Welt der Quantengravitation 2016; Green: Das elegante Universum; Hans O Carmesin: Grundideen zur Relativitätstheorie 1996; Kippenhahn: Kosmologie. Basics 2011 DER Schnelleinstieg in die ART. Mit didaktischer Begründung! **Lies zum Verständnis der ART insbesondere die vortensoriellen, Prager Arbeiten Einsteins** wie *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*, Annalen der Physik 38 1912 355-369. Thirring: Die Idee der Relativitätstheorie 1948; Kannegießer: Raum- Zeit- Unendlichkeit 1966; **Pohl: Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen.** Eine Einführung für Lehramtsstudierende 2017 ebook; **ART: Räumliche Geometrie wird selbst zur dynamischen Größe!** Horst-Heino von Borzeszkowski & Renate Wahsner: Physikalischer Dualismus und dialektischer Widerspruch. Studien zum physikalischen Bewegungsbegriff 1989; W̃ahsner & Borzeszkowski: Die Wirklichkeit der Physik - Studien zu Idealität und Realität in einer messenden Wissenschaft 2000; W̃ahsner & Borzeszkowski: Das physikalische Prinzip. Der epistemologische Status physikalischer Weltbetrachtung 2000; B̃orzeszkowski & Wahsner: Action and Reaction. Studies on Motion and Contradiction in Physics 2001; Borzeszkowski: Relativität und Quanten. Hans-Jürgen Treders Ideen zur Einheit der Physik. Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät der Wissenschaften zu Berlin 101(2009), 135–148 a] Einstein & Pauli: On the non-existence of regular stationary solutions of relativistic field equations, Annals of Mathematics 44(1943) 131-137 Die Gravitationgleichungen von 1915 zur Bestimmung der Metrik kann keine Teilchenlösung haben. Daher suchte Einstein nach nicht-symmetrischen Gravitationspotentialen g_{ik}. b] Die Gravitationgleichungen können nicht quantisiert werden = orthodoxer Weg geht nicht, weil i] nichtlineare Feldgleichung statt linear wie bei Elektrodynamik. ii] Nach Leon Rosenfeld 1952 verhindert Längenunschärfe $\Delta g(\Delta x)^2 \geq k\hbar c = l_p^2$ strenge Gültigkeit des Äquivalenzprinzips. c] Statt Metrik muss Zusammenhang quantisiert werden. Siehe Sen Seite 625; **Borzeszkowski: Die Einheit des physikalischen Weltbildes**.pdf, Revista de Philosophica 30 2005 7-24, Grundlegende Asymmetrie der beiden Feldtheorien: Elektromag lebt auf einer 4D-Raumzeit, während Gravitation die 4D-Raumzeit, die Metrik selbst ist, die lokal euklidisch/minkowskisch. Weitere Raumzeit-Aspekte bleiben unbestimmt. **Problem ist der ambivalente Charakter der Geometrie als Bezugsmolluske:** Einerseits muß sie zur Beschreibung physikalischer Prozesse möglichst dynamisch sein, andererseits muß sie hinreichend starr sein, um die für die Messung nötigen Etalons realisieren zu können. Einstein vereinigte, was bei Newton noch getrennt war, auf **euklidischer Raumzeit basierende Feldgleichungen und Bewegungsgleichungen** durch Geometrisierung der Gravitation. Weyl und Kaluza 10 Parameter für Metrik/Gravitation, 4 Parameter für die elektromagnet Potenziale und ein freier 15., der kompaktifiziert wird, geometrisierten den Elektromagnetismus mit der **5-dimensionalen Feldtheorie** dazu. Kaluza-Klein-Theorie nimmt weitere Raumdimension hinzu. Duff: Kaluza-Klein Theory in Perspective xArxiv. Goenner: On the History of Unified Field Theories 2004 Living rev relativity; Aber **Einsteins Teilchenproblem:** Er suchte nach **Teilchen als Lösungen seiner kontinuierlichen Feldtheorien**, während Schrödinger ein weiteres einzupflegendes Zusatzprinzip suchte. **Stachel, Penrose, Ehlers: Einsteins Annus mirabilis. Fünf Schriften, die die Welt der Physik revolutionierten** 1998, 2005 p197 Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt: Körperzustand bei ponderabler Materie = endliche Anzahl von Teilchen mit Ort und Impuls. Ganz anders Maxwelltheorie mit elektromagnet Zustand mit kon-

tinuierlichen Funktionen = unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Schwarzer Körper sagt: Licht muss auch endliche Anzahl von Teilchen sein; Die **Quantenfeldtheorien** sind auf der **ebenen Raumzeit** angesiedelt, enthalten keine Krümmung der Raumzeit, keine Gravitation. Die Griechen hatten nicht ohne Grund **neben dem Kontinuum expizit die Atome = Antikontinuum** gesetzt. Schmutzer: Projektive Einheitliche Feldtheorie mit Anwendungen in Kosmologie und Astrophysik. Neues Weltbild ohne Urknall? 2004 p265 **Unterschied von Kaluza-Klein- und projektiver Feldtheorie**; Kreyzig: Differentialgeometrie 1957, 1968, Differential Geometry 1959, 1991; Kreyszig: Introductory functional analysis with applications 1989; Goffman & Pedrick: First Course In Functional Analysis 1968; Kevin Cahill: Physical Mathematics 2013; **Jost: Bernhard Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen** 1854, 2013; Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik; Simonyi: Theoretische Elektrotechnik 1977; **Döbbecke: Riemann-Geometrie und allgemeine Relativitätstheorie. Anwendungen der Tensoranalysis in der Relativitätstheorie** 2013; Schmutzer: FÜNFDIMENSIONALE PHYSIK - Projektive Einheitliche Feldtheorie 2004; Schmutzer: Theoret Physik. Mathematik, Mechanik, Elektromagnetik, Thermodynamik, Quantentheorie 2009; Mercier 1913-1999: Die Idee der Quantentheorie der Wellenfelder PhysBl 1952 H10 440-446; Mercier: Logik und Erfahrung in der exakten Naturwissenschaft unter besonderer Berücksichtigung der Physik 1941 69Seiten Mercier: Analytical and canonical formalism in physics 1963; Mercier: Erkenntnis und Wirklichkeit 1968; Renoirte & Mercier: Philosophie der exakten Wissenschaften 1951; Mercier & Schaer: Die Idee einer einheitlichen Theorie 1964; Wentzel: Theorie der Wellenfelder 1943; Ebert: Eichfeldtheorien 1989; F̃ierz: Einführung in die relativistische Quantenfeldtheorie und die Physik der Elementarteilchen 1965; Low: Classical field theory 1997; Ñg: Introduction to classical and quantum field theory 2009; **Elementare Einführungen:** Thirring: Die Idee der Relativitätstheorie 1948; Kannegießer: Raum- Zeit- Unendlichkeit 1966; **Ryder: Introduction to General Relativity** 2009 ebook; M̃oore: A general relativity workbook 2013; **Lies zum Verständnis der ART insbesondere die vortensoriellen, Prager Arbeiten Einsteins** wie *Lichtgeschwindigkeit und Statik des Gravitationsfeldes*, Annalen der Physik 38 1912 355-369. **Pohl: Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen.** Eine Einführung für Lehramtsstudierende 2017 ebook; **Choquet-Bruhat: Introduction to general relativity, black holes, and cosmology** 2015; S̃chutz: Gravity from the ground up. An introductory guide to gravity and general relativity 2004; Carroll: Spacetime and geometry - an introduction to general relativity 2009, 2013; C̃arroll: The biggest ideas in the Universe. Space, time, and motion 2022; Zee: Einstein's Universe. Gravity at Work and Play 2001; Zee: Einstein Gravity in a Nutshell 2013; Scott: A Student's Manual for A First Course in General Relativity 2016; Ludvigsen: General relativity - a geometric approach 1999; **Gron & Nass: Einstein's theory. Rigorous introduction for the mathematically untrained** 2011 auf den ersten 100 Seiten wird die nötige Rechenkunst elementar entwickelt; **G̃ron & Hervik: Einstein's General Theory of Relativity**. With Modern Applications in Cosmology 2009; Ruhrländer: Aufstieg zu den Einsteingleichungen 2014; Rindler: Relativitätstheorie. Speziell, Allgemein und Kosmologisch 2016; **Hartle: Gravity - an introduction to Einstein's general relativity, 2007**; **Bergmann: The riddle of gravitation**. Revised and Updated Edition 1987, 1993; **Bergmann: Introduction to the Theory of Relativity** 1942, 1976; Heckmann: Theorien der Kosmologie 1941, 1968; Jordan: Die Expansion der Erde. Folgerungen aus der Diracschen Gravitationshypothese 1966; **Jordan: Schwerkraft und Weltall. Grundlagen der theoretischen Kosmologie** 1952, 1955[2]; p129ff Es sieht aus, als sei die Gravitationskonstante eine Veränderliche, eine skalare Feldgröße, Dirac 1937. **Large number hypothese** = LNH: Gravitationskonstante und Alter des Universums $G \propto 1/t$. Masse des Universums $M \propto t^2$. Weyl 1919: Der beobachtete Radius der Welt R_U ist der hypothetische Radius r_H eines Teilchens dessen Ruhenergie gleich der gravitativen Selbstenergie des Elektrons entspricht: $\frac{r_H}{r_e} \approx 10^{42} \approx \frac{R_U}{r_e}, r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2}, r_H = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_H c^2}, m_H c^2 = \frac{G m_e^2}{r_e}$. von Laue: Geschichte des Elektrons PhysBl15 1959 p105ff; Classen: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus

1904; August Föppl, Max Abraham, Richard Becker, Fritz Sauter: Theorie der Elektrizität Bd2 1959 Klassisches Atommodell p18ff; **Iwanenko & Sokolow: Klassische Feldtheorie** 1948, 1960 p134 **elektromagnetische Masse nach Lorentz**; **Abraham Pais: Developments in the theory of the electron** 1948; Eddington: Relativity theory of protons and electrons 1938; F̃auvet et al eds: Resurgence, Physics and Numbers 2017; Melcher: **Eddington'sche Zahlen**, Experimentelle Technik der Physik 32 1984 473-478; **Strukturbildung im Kosmos und auf der Erde** Sitzungsberichte der AdW der DDR 10N 1983 Schmutzer: Variabilität der Gravitationskonstanten, **Eddington:** Teilchenzahl des Universums $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_e^2} \approx \sqrt{N} \approx 10^{42}$. **Milne:** $G = \left(\frac{c^3}{M_U}\right) t$, Masse des Universums M_U. Weyl und Dirac liefern für das Weltalter t mit $c = r_e = 1$ die Zahl $\frac{ct}{r_e} \approx 10^{40}$, mit $c = r_e = 1$ folgt $t \approx 10^{40}$, also die gleiche Größenordnung wie das Verhältnis von elektrischer und gravitativer Kraft zwischen Elektron und Proton $\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 G m_p m_e} \approx 10^{40}$ was maßeinheitslos entsprechend $1/G \approx 10^{40} \approx t$ ist: $G \approx 1/t$. Siehe **Nicht-Standard-Kosmologien: A. Alternative metric cosmologies. 1. Newton-Universum. 2. Lorentz-invariantes,** aber leeres Universum hat keine Krümmung. **3. Vor ART-Universum:** De Sitter universe and Static universe. **4. Brans–Dicke theory and Mach's principle. 5. Gödel-Universum**. Rotierendes Universum. Hat zeitartig geschlossenen Bahnen. **6. Modified Newtonian Dynamics = MOND** $F = ma$ außer Kraft. Statt zusätzlicher, nicht sichtbarer Masse schlug Mordehai Milgrom 1983 vor, dass eine Änderung der newtonschen Bewegungsgesetze die Ursache für die beobachteten Rotationskurven sein könnte. Gemäß der MOND-Hypothese nimmt die Änderung nur bei sehr kleinen Beschleunigungen, wie sie im astronomischen Maßstab auftreten, einen relevanten Einfluss auf die Bewegungen. Befürworter der MOND-Hypothese führen an, dass die newtonsche Gravitationstheorie von 1686 bereits drei Modifikationen erfahren hat. Bei sehr kleinen Abständen verwenden Physiker ausschließlich die Quantenmechanik, bei sehr großen Geschwindigkeiten Einsteins spezielle Relativitätstheorie und nahe sehr großer Massen seine allgemeine Relativitätstheorie. Eine vierte Modifikation im oben genannten Extrembereich sei daher nicht ausgeschlossen. Nach Newton macht Kraft F gemäß $F = m\,a$ Beschleunigung a. Bei extrem kleinen Beschleunigungen, wie bei Gravitationswechselwirkung zwischen entfernten Sternen, nur schwer oder gar nicht experimentell prüfbar. **Milgrom-Bewegungsgesetz** $F = m\ \mu(|a|/a_0)\,a$, mit $\mu(x)$ (für positive Argumente) positive, glatte, monotone Funktion, die annähernd 1, also **Newton**, für hohe Werte ($x \gg 1$) und annähernd x für kleine Werte ($x \ll 1$) annimmt. Genaue Gestalt der Funktion $\mu(x)$ ist nicht spezifiziert, oft $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ und $\mu(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ verwendet.

$$\mu(x) = \frac{x}{1+x} = \begin{cases} x, & x \ll 1 \\ 1, & x \gg 1 \end{cases} \text{ mit } x = \frac{|a|}{a_0}, \text{ also } F = m\ \mu\left(\frac{|a|}{a_0}\right) a = \begin{cases} \dfrac{ma^2}{a_0}, & a \ll a_0 = 1.2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{ms}^{-2} \\ ma, & a \gg a_0 = 1.2\text{Å}\,\mathrm{s}^{-2} \end{cases} \textbf{NewtonII}$$

Speziell für das Gravitationsgesetz $\gamma M \dfrac{m}{r^2} = \begin{cases} \dfrac{ma^2}{a_0} \\ ma \end{cases}$ mit Kreisbahnbeschleunigung $a = \dfrac{v^2}{r}$ folgt

$$\gamma M \frac{m}{r^2} = \begin{cases} \dfrac{mrv^4}{r^2 a_0}, & \text{also } v = \text{const} \\ m\dfrac{v^2}{r}, & \text{also Kepler } v^2 = \dfrac{1}{r} \end{cases}$$

Wolchover: Gegenwind für die Dunkle Materie SdW H5 2017 p56-62; **Bekenstein: The modified Newtonian dynamics - MOND - and its implications for new physics**. Contemporary Physics 47 2006 p387ff. a_0 (positive) Konstante, die bestimmt, unterhalb welcher Beschleunigung die Modifikation relevant wird. Unter der Annahme, dass es **keine Dunkle Materie** gibt und stattdessen die MOND-Hypothese zutrifft, lässt sich a_0 aus astronomisch gemessenen Rotationskurven von Galaxien bestimmen. Milgrom erhielt aus Messungen vieler Galaxien $a_0 = 1.2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{ms}^{-2}$. Da alle Vorgänge des Alltagslebens bei Beschleunigungen $a \gg a_0$ stattfinden, bleibt das Bewegungsgesetz unverändert erhalten. Weit entfernt vom Zentrum einer Galaxie sieht die Situation allerdings anders aus. Nach dem Gravitationsgesetz gilt dort: $F = m\,\frac{G\,M}{r^2}$, wobei M die Masse der Galaxie und m die Masse des betrachteten Sterns ist. r ist der Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Galaxie und dem des Sterns. Mit dem modifizierten Bewegungsgesetz entsteht: $\frac{G\,M}{r^2} = \mu(|a|/a_0)\,a$.

Da in dieser Situation gerade $a \ll a_0$, also $a/a_0 \ll 1$ gelten soll, erhält man für positive a(die Gravitationsbeschleunigung ist immer positiv): $\mu(|a|/a_0) = \frac{a}{a_0}$ und somit $\frac{G\,m_{\rm G}}{r^2} = \frac{a^2}{a_0}$. Also ist $a = \frac{\sqrt{G\,m_{\rm G}\,a_0}}{r}$. Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Beschleunigung und Abstand zum Kraftzentrum für eine kreisförmige Umlaufbahn lautet aus kinematischem Gründen: $a = \frac{v^2}{r}$. Damit ergibt sich durch Gleichsetzung mit der vorangegangenen Gleichung $v^2 = \sqrt{G\,M\,a_0}$ bzw. $v = \sqrt[4]{G\,M\,a_0}$, statt der Kepler-Rotation $\frac{mMG}{r^2} = mr\omega^2 = mrv^2/r^2$ mit $v^2 = \frac{GM}{r}$ bzw. $v = \sqrt{\frac{G\,M}{r}}$. Daraus folgt, dass die Rotationsgeschwindigkeit im weiten Abstand vom Gravitationszentrum, wenn also sehr geringe Gravitationsbeschleunigung wirkt, fällt also nicht stetig auf Null ab, sondern bleibt entfernungsunabhängig eine endliche Systemkonstante, die nur noch von der Masse beim Gravitationszentrum abhängt. Die Rotation ist aber deutlich langsamer als eine starre Rotation. **Aber:** Es gibt scheinbar Galaxien, die zu 99 % aus dunkle Materie bestehen. Dragonfly 44 besitzt fast keine Sterne, weist aber fast die gleiche Masse auf wie die Milchstraße. **7. Tensor–vector–scalar gravity** erklärt Galaxienrotationsproblem ohne dunkle Materie. **B. Steady State theories.** Materie-Erzeugungsfeld **C**(reation-Feld sorgt für Homogenität in Raum und Zeit. **C. Beobachter-Skepsis-Ansätze. 1. Zwicky: Rotverschiebung als des Licht-Erlahmung** wegen WW des Lichts mit Hintergrundstrahlung. **2. Diracs Hypothese großer Zahlen:** Größe des Universums im Verhältnis zu Teilchenradien sagt uns was zum Alter des Universums! Wird als Numerologie belächelt. Witz und Wissenschaft. A parody paper in solid state physics, published in 1931. G. Beck, H. Bethe, and W. Riezler: Remarks on the quantum theory of the absolute zero of temperature, Eddingtons Numerologie. $T_0 = -\left(\frac{2}{\alpha} - 1\right) = -273^o$C. **3. Arp: Rotverschiebung hat nichts mit Expansion des Universums zu tun.** Bei Quasaren wird Periodizität gesehen! Arp: Der kontinuierliche Kosmos, In: Mannheimer Forum 92/93 p113-173; **4. Alfven-Klein-Plasma-Kosmologie geht von Materie-Antimaterie-Gleichgewicht aus.** Beobachtung bezieht sich nur auf Materie, da das beobachtbare Universum nur eine große Materie-Zelle unfasst. **D. Kernsysnthese-Einwand** gegen Nicht-Standard-Kosmologien. Ohne Urknall ist die große Häufigkeit leichter Kerne Deuterium ^{2}D und ^{4}H bei endlichem Weltalter nicht zu machen. Es lebe die kosmologische Konstante.

Pauli nach Versuch an einer einheitlichen Feldtheorie: Was Gott getrennt hat, soll der Mensche nicht zusammenfügen. Schmutzer: Relativistische Physik 1968 p904ff; Lambourne: Relativity, Gravitation and cosmology 2010; **Schrödinger: Space-Time Structure 1950 Struktur der Raum-Zeit** 1963; Schrödinger: Expanding Universes 1956 96 Seiten; Dray: Differential Forms and the Geometry of General Relativity 2014; Elementar, viele Beispiele bei **Weintraub: Differential Forms: Theory and Practice** 2014; **Faber: Differential Geometry and Relativity Theory: An Introduction** 1983; Lawden: Introduction to Tensor Calculus, Relativity and Cosmology 1963, 2003; P̃ohl: Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen. Eine Einführung für Lehramtsstudierende 2017; Fließbach: ART; Inverno: Relativitätstheorie; **Hertzsprung-Russel-Diagramm:** Leuchtkraft vs Temperatur (Farbe). Hauptreihe: H-Brennen/Fusion zu He. Fusions- und Gravitationsenergie im Gleichgewicht. Wenn H verbraucht, so beginnt He-Brennen zu O, C in dadurch sich ausdehnender Hülle, falls > 0.25 m$_\odot$: Roter Riese = Alchemisten, deren Kunst wegen zu kleiner Temperatur sehr begrenzt ist. Wenn He alle, so gewinnt Gravitation bis auf Fermionen-Druck durch Pauli-Prinzip: e$^-$ rangeln um Platz. Wenn Masse groß genug, so gewinnt Gravitation: Super Nova, Fred Hoyle, Spektrum zeigt alle 92 Elemente. Im Zentrum Fe, Erdgröße, stoppt bei Stadtgröße und explodiert. Zwicky: Rest ist Neutronenstern/Pulsar aus Eisenionen-Elektronen, Elektronen-Neutronen-Kernen, n-p-Fermifluid, Quark-Gluonen-Plasma, falls $m_* < 3\,m_\odot$. Sonst **Schwarzes Loch** = Raumzeit wird abgeschnitten. Schwarzschild: Einstein glaubt nicht, dass sich die Natur so verhält. Organische Verbindungen werden aus stellaren Nebeln per Meteor auf Erde geliefert. **Weißer Zwerg** = häufigstes Endstadium der Sternentwicklung = nicht unbeträchtlicher Anteil Dunkler Materie. Anfangsmasse 1.5 bis 8 $m_\odot$. ist Fusionsasche aus O, C, falls $1.44\,m_\odot < m_* < 8\,m_\odot$. **Ideales Fermi-Gas** aus Elektronen mit **Fermi-Impuls** $p_F \approx \frac{\hbar}{(V/N)^{1/3}}$ und mit **Fermi-Energie** $\epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m_{\rm e}} \approx 0.5$ MeV im Kernfeld der O- und C-Atome. Der mittlere Teilchenabstand

ist $(V/N)^{1/3} \approx 10^{-13}$ m. **Jordan: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage** 1933, 1944 müsste **Pauli-Statistik** heißen; Die Energie des höchsten besetzten Zustands bei $T = 0$ bezeichnet man als **Fermi-Energie**. Zu **Kontaktspannung** und Fermi-Energie siehe Tipler: Physik 2000 p1352. Fließbach: QM 2012[5] p353f. Für System aus N identischen Fermi-Teilchen

$$H(1,2,\ldots,N) = \sum_{nu=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_n u + U(\vec{r}_\nu) \right) + \sum_{\nu=2}^{N}\sum_{\mu=1}^{\nu-1} V(\vec{r}_\nu, \vec{r}_\mu)$$

Falls WW $V(\vec{r}_\nu, \vec{r}_\mu)$ schwach, so Gas, falls vernachlässigbar **ideales Gas**

$$H_{IG} = H_{IG}(1,2,\ldots,N) = \sum_{nu=1}^{N} H_0(\nu) = \sum_{nu=1}^{N} \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_n u + U(\vec{r}_\nu) \right)$$

Phasenraum eines 1d-Kastenteilchens bei Kastenbreite L mit Teilchen-Energie E hat das **Phasenraum-Volumen** mit der Maßeinheit einer **Wirkung** = Produkt aus Energie und Umlauf-Periode $[\Gamma] = [h] = \mathrm{Ws}^2 = \mathrm{Nms} = \mathrm{Js}$, gemäß Phasenintegral

$$\Gamma(E,L) = \int_o^L \mathrm{d}x \int_{p^2/2m \le E} \mathrm{d}p = L \int_{-\sqrt{2mE}}^{\sqrt{2mE}} \mathrm{d}p = 2L\sqrt{2mE}$$

Zahl der Zustände N_E mit Energie $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$, also $n_{\max} = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\pi\hbar}L = \dfrac{\Gamma}{2\pi\hbar} = N_E >> 1$ oder kurz wegen Unschärferelation $\Delta x \Delta p >= \hbar/2$ ist h die **minimale Größe einer Phasenraumzelle** weshalb im Gesamt-Phasenraum eines System mit der Gesamt-Energie E und dem Volumen Γ nur $N_E \approx \Gamma/(\Delta x \Delta p)$ Zustände Platz haben. Was die Welt zusammenhält ist, was sie auseinander hält. Pauli-Prinzip, eine Kraft ohne Kraftgesetz. Schmüser: BdI; Fließbach p77ff; Die Gleichgewichtsdichte des Systems ergibt sich aus der Balance von repulsiver kin Energie und den attraktiven Kräften (Gravitation beim Weißen Zwerg) gibt $\epsilon_F \approx \bar{\epsilon} \approx \dfrac{\bar{p}^2}{2m} \propto V^{-2/3}$ und damit die **Inkompressibilität** und **Umdurchdringbarkeit** der Materie. **Bethe & Jackiw: Intermediate Quantum Mechanics** 1964;
Laufzeitentfernung:

$$\mathrm{d}D_{\mathrm{prop}}(z_1,z_2) = -c\,\mathrm{d}t = -c\,a/(a\,\dot{a})\,\mathrm{d}a = -c/(aH)\,\mathrm{d}a$$

mit $a = 1/(1+z)$ folgt für ein flaches Universum $1 - \Omega_0 - \Omega_\Lambda = 0$

$$D_{\mathrm{prop}}(z_1,z_2) = \frac{c}{H_0}\int_{a(z_2)}^{a(z_1)} \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{\frac{\Omega_0}{a} + (1-\Omega_0-\Omega_\Lambda) + a^2\Omega_\Lambda}} = \frac{2c}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \left[\ln\left(a^{3/2}\Omega_\Lambda + \sqrt{\Omega_0\Omega_\Lambda + a^3\Omega_\Lambda^2} \right) \right]_{a(z_2)}^{a(z_1)}$$

$\Omega_0 = 0.27$ und $\Omega_\Lambda = 0.73$ Materiedichte- und Vakuumenergiedichteparameter = kosmologische Konstante. $H_0 = 71$ km/s Mpc.

Frequenzverschiebung für bewegte Quelle und bewegten Beobachter:

$$f_B = \frac{f_{Q\ bewegt}}{1 \mp \frac{v}{c}}, \quad f_B = f_{Q\ in\ Ruhe}\left(1 \pm \frac{v}{c}\right)$$

oberes Vorzeichen meint Zubewegung.

Longitudinaler oder relativistischer Doppler-Effekt Im Vakuum = Optischer Doppler-Effekt hängt die beobachtete Frequenzänderung nur von der relativen Geschwindigkeit von Quelle und Beobachter ab. Aufgrund des Relativitätsprinzips darf sich jeder Beobachter als ruhend betrachten. Allerdings muss er dann bei der Berechnung des Doppler-Effekts zusätzlich zu obigen Betrachtungen i auch noch die Zeitdilatation der relativ zum Beobachter bewegten Quelle berücksichtigen. $f_\mathrm{B} = \dfrac{f_\mathrm{S}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}} = f_\mathrm{S}\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}} = f_\mathrm{S}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$ mit $v > 0$, also Verringerung des Abstandes zwischen Quelle und Beobachter.

Radiale Doppler-Verschiebung

$$z(v) = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

Siehe Seite 413. Die mittels **Lorentz-invariantem Linienelement** in QFT $ds^2 = c^2dt^2 - d\vec{r}^2$, $d\tau^2 := ds^2/c^2 = dt^2 - 1/c^2 d\vec{r}^2 = dt^2(1-\beta^2) = \gamma^{-2}dt^2$ also $d\tau = \mathrm{d}t/\gamma$ mit pseudo-euklidischer Metrik definierte **Lorentz-invarianter Eigenzeit**. Marion: Classical dynamics of particles and systems 1970 p554f Linienelement $\mathrm{d}s^2 = \kappa(v)\mathrm{d}s'^2$ ist wegen $\kappa(v) = 1$ längentreu. Aber in SRT und ART umgekeht definiert: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}t^2$. Daher für $\mathrm{d}s^2 > 0$ **raumartig** und für $\mathrm{d}s^2 < 0$ **zeitartig**, also ist das Quadrat der Bogenlänge/Eigenzeit $\mathrm{d}\tau^2 = \sqrt{-\mathrm{d}s^2}$. Elementare Behandlung siehe **Dray: Differential Forms and the Geometry of General Relativity** 2014; $\mathrm{d}\tau$ ist **kein vollständiges Differenzial**, sondern hängt von der durchlaufenen Bogenlänge im **Minkowski-Raum** ab, was die **Zwillingsparadoxa** klärt, Schröder: SRT. Hier ist, anders als ursprünglich bei Einstein, die positive Eigenzeit zeitartig, also kausaler Bereich innerhalb des Lichtkegels. Skobelzyn: Das Zwillingsparadoxon in der Relativitätstheorie 1972; Die Konstanz der Eigenzeit, also Unabhängigkeit vom Bezugssystem, ist das **fundamentale Postulat** der SRT für alle Körper. Für Licht im Vakuum gilt unabhängig von Bezugssystem $0 = d\tau^2 := ds^2/c^2$, weil auf dem Lichtkegel $(1-\beta^2) = 0$ wegen $|\dot{\vec{x}}| = c$. **Minkowski-Diagramm-Steigungen** der Achsen des **bewegten Bezugs-System I'** sind t'-Koordinate $t' = c/v$ und bei x'-Koordinate $x' = v/c$. **Eigenzeit** ist ein Maß für den Zeitablauf im Bezugssystem des bewegten Körpers. Linienelement $\mathrm{d}s/c$ ist invariante (tautologisch) Eigenzeit längs der der Weltlinie bewegten Uhr. Die Uhr ruhe im bewegten System I'. Die Eigenzeit als Linienelement hängt nicht vom zugrundegelegten Inerzialsystem ab, sie ist ein **Lorentz-Skalar**. Räumliche und zeitliche Abstände allein genommen hängen dagegen von der Wahl des Inerzialsystems ab. Es folgt **Zeitdilatation** $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} = \mathrm{d}t/\gamma$. Lies der Wert $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}\tau$ im bewegten System erscheint im Ruhsystem I gedehnt $\mathrm{d}t = \gamma\mathrm{d}\tau$, bei 80 % der Lichtgeschwindigkeit $\beta^2 = 3c/4$ ist $\mathrm{d}t$ doppelt so groß wie $\mathrm{d}\tau$. In bewegten Systemen laufen Uhren langsamer als ruhende. **Macheleit: PfL12** p113; **Greiner: Bd3A 1992**[3]; Kuypers: Klassische Mechanik, 2010[9] p373-453; Goldstein, Poole, Safko: Klassische Mechanik Kap7 2006[3]; Nolting Bd4; Gilt auch für den symmetrischen Standpunkt. **Längenkontraktion**: Längs Bewegungsrichtung bewegte Körper erscheinen verkürzt: $l' = l\sqrt{1-\beta^2}$. Kurze Einführungen in SRT siehe Fließbach: ART; Inverno: Relativitätstheorie; Rebhan: Relativitätstheorie und Kosmologie 2012 ebook; Rebhan: Theoretische Physik Bd1 Mechanik, Elektrodynamik, spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Kosmologie 2001; Rebhan: Theoretische Physik Bd2 Quantenmechanik, relativistische Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie, Elementarteilchentheorie, Thermodynamik und Statistik 2005; Rebhan: Theoretische Physik. Relativistische Quantenmechanik, Quantenfeldtheorie und Elementarteilchentheorie 2010 ebook; Ralph Baierlein: **Does nature convert mass into energy?** AmJPhys75 p320 2007; **Katti: The Mathematical Theory of Special and General Relativity** 2013;

Tolman: Relativity, thermodynamics and cosmology 1934; von Laue: Relativitätstheorie 1911: **Vierer-Vektor** $x^\mu = (ct, \vec{r})$ muss nach Lorentz-Skalar abgeleitet werden, damit die Geschwindigkeit auch lorentz-invarianter Vierer-Vektor wird: $dx^\mu/d\tau = u^\mu = \gamma(c, \vec{v})$, **Vierer-Impuls:**

$p^\mu = mu^\mu = \gamma m(c, \vec{v}) = \gamma mc(1, \frac{\vec{v}}{c}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) = (\gamma mc, \gamma\vec{p}) = (\gamma mc, \vec{\vec{p}}) = (E/c, \vec{\vec{p}}) = (E/c, \gamma\vec{p})$. Gibt für das **Quadrat der Länge des Vierer-Vektors** mit dem **Skalarprodukt** gemäß **Längenquadrat**$(p^\mu) = p^\mu \circ p^\mu = p^\mu \eta_{\mu\nu} p^\mu = p^\mu p_\mu$, wobei **Ruhmasse** m und **Impulsmasse** $m\gamma$, das **Vierer-Impulsquadrat eines freien Teilchens** mit der Ruhemasse m die Invariante m^2c^2. Bleibt beim Übergang von einem gleichförmig bewegten Bezugssystem zu einem anderen erhalten. Oder: $E(v) = m\gamma(v)c^2$ gibt $E^2 = m^2\gamma^2c^4(1+0) = m^2\gamma^2c^4(1-\beta^2+\beta^2) = m^2\gamma^2c^4(1-\beta^2) + m^2\gamma^2c^4\frac{v^2}{c^2} = m^2c^4 + (\gamma mcv)^2 = m^2c^4 + c^2p^2$. Oder: Die **Differenz der Quadrate** von Teilchen-Energie $E(v)/c$ und Impuls $p = m\gamma(v)v$ bleibt erhalten. Im Ruhesystem ist $E(v=0) = mc^2$ und $p(v=0) = 0$ und im bewegten System steigen beide auf $E(v) = m\gamma(v)c^2$ und $p(v) = m\gamma(v)v$. Nach Einstein, **Elementare Ableitung der Äquivalenz von Masse und Energie**

1946, In: Einstein: Aus meinen späteren Jahren 1950, 1955 p121, oder besser noch **von Laue: Trägheit und Energie**, In: Schilpp, Einstein als Philosoph und Naturforscher, p200, oder von Laue: Abhandlungen und Vorträge p120-144, oder Philosophen de 20. Jh. 1955 p364-388. Die **Energie** $E = cp_0 = m\gamma c^2$ ist kein Skalar, sondern die 0.te Komponente des Vierer-Impulses und damit vom Bezugssystem abhängig.

Vierer-Kraft nach Planck: $K^\mu = \mathrm{d}p^\mu/\mathrm{d}\tau = m\mathrm{d}u^\mu/\mathrm{d}\tau = \gamma(\vec{F}\cdot\vec{v}/c, F_x, F_y, F_z)$, weil die räumliche Komponente $\gamma\frac{\mathrm{d}(m\gamma\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \vec{K}$ und $\frac{\mathrm{d}m\gamma\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_r}{\mathrm{d}t} = \sqrt{1-\beta^2}\vec{K} \stackrel{!}{=} \vec{F}_{\text{Newton}}$ mit den vertrauten Newton-Ktaft-Ansätzen harmonieren soll, Kuypers p430. Weiter folgt wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}^2 = 2\vec{a}\cdot\vec{v}$ aus $m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\gamma[\gamma^2\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{c^2}+\vec{a}] = \vec{F}_{\text{Newton}}$. Aus der Invarianz der Vierer-Geschwindigkeit $c^2 = \underline{u}\cdot\underline{u}$, mit $\underline{u} \in R^4$ folgt $0 = 2\underline{u}\cdot\underline{a}$. Daher gibt $\underline{K}\cdot\underline{u} = m\underline{a}\cdot\underline{u}$ die Zeitkomponente der Vierer-Kraft $0 = K_0u_0 - \vec{K}\cdot\vec{u} = K_0\gamma c - \gamma\vec{F}_{\text{Newton}}\cdot\gamma\vec{v}$, also $K_0 = \gamma\frac{\vec{F}_{\text{Newton}}\cdot\vec{v}}{c}$, Kuypers p431.

Betrag des Vierer-Impules eines freien relativistischen Teilchens ist in allen Inertialsystemen gleich. Aus dieser Invarianz des **Vierer-Impuls-Betrags gegenüber Lorentz-Transformation folgt:** $p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \gamma^2\vec{p}^2 = m^2\gamma^2c^2 - \gamma^2m^2\vec{v}^2 = m^2c^2$ folgt **relativistische Gesamt-Energie eines freien Teilchens mit Ruhemasse** m oder **Dispersionsrelation für relativistisches freies, massives Teilchen:** $E^2 = c^2\gamma^2\vec{p}^2 + m^2c^4 = c^2\vec{p}^2 + m^2c^4$. Oder: $m^2c^2 - \frac{E^2}{c^2} - p^2 = 0$ gibt mit $\hat{E} = i\hbar\partial_t$ und $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ die **Klein-Gordon-Gleichung** $(m^2c^2+\frac{\hbar^2}{c^2}\partial_t-\hbar^2\Delta)\psi(\vec{r},t) = 0$ oder $(\frac{m^2c^2}{\hbar^2}+\frac{1}{c^2}\partial_t-\Delta)\psi(\vec{r},t) = 0$ oder $(\frac{m^2c^2}{\hbar^2}+\Box)\psi(\vec{r},t) = 0$. Siehe **Klein-Gordon-Gleichung** auf Seite 542. **Broglie-Beziehung** $\lambda = h/p$ oder $p = h/\lambda = 2\pi h/2\pi\lambda = kh$. Der invariante Impulsbetrag $c\,m$ führt über die de **Broglie-Beziehung** $h\nu_0 = m_0c^2$ gibt $R = \lambda = \frac{h}{p}$ auf die Reichweite der Wechselwirkung bei gegebener Masse des Austauschteilchens beim Yukawa-Potenzial. Anziehende Austauschteilchen durch Bumerangs, die sich zwei Rücken an Rücken stehende zuwerfen. Zu de Broglie siehe PhysBl43 1987 p170f. Speziell Photon: $E = cp = h\nu$ und $p = kh = \frac{h}{\lambda}$: unter 1 eV nur Wärmeentwicklung/Wärmestrahlung, Spin-Umklappprozess/Fein- und Hyperfeinstruktur von Spektren, elektronische Absorption, keine Ionisation, 1 eV bis 100 keV Photoeffekt (a] äußerer photoelektrischer Effekt = Photoemission = Hallwachs-Effekt = Herauslösen von Elektronen aus einer Halbleiter- oder Metalloberfläche b] innerer photoelektrischer Effekt in Halbleitern, b1] Photoleitung = Zunahme der Leitfähigkeit b2] photovoltaischer Effekt = Umwandlung von Licht- in elektrische Energie c] Photoionisation = atomarer Photoeffekt = Ionisation einzelner Atome oder Moleküle), Würfel: Physics of solar cells. From basic principles to advanced concepts 2010[2]; 50 keV bis 1 MeV Compton-Effekt, 1.022 bis 6 MeV Paarbildung, 2.18 bis 16 MeV Kernphotoeffekt. höhere Energien: Photodesintegration. Dadurch Photonen- und Stoffnachweis. Boyer: Illustrations of the relativistic conservation law for the center of energy, AmJPhys73 953 (2005); Boyer: Unfamiliar trajectories for a relativistic particle in a Kepler or Coulomb potential, AmJPhys72, 992 (2004): Bei Newton steht links die träge Masse γm und die koppelt als **dynamische, bewegte oder relativistische Masse** γm auch ans Potenzial:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma m\vec{v} = -GM\frac{m}{r} \quad \text{wegen} \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\vec{p} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\vec{v}\gamma = m\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\gamma = -GM\frac{\gamma m}{r}$$

. Greiner 3A Aufagbe 2.4 p94 **Fall im homogenen Gravitationsfeld:**

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\vec{p} = \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}m\vec{v}\gamma = m\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\gamma = m\gamma^2\left[\dot{\vec{v}} + \frac{\vec{v}}{c}(\frac{\vec{v}}{c}\cdot\dot{\vec{v}})\right] = \gamma mg\hat{z}, \quad \vec{v} = v\hat{z}, \quad m\dot{v}\gamma^4 = \gamma mg, \quad g = \dot{v}\gamma^3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}\gamma$$

Relativistische Kraft auf geladenes Teilchen ist, Greiner 3A p101

$$\vec{F} = \gamma\left[-q\nabla V + \frac{q}{c}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{q}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A}\right]$$

Axiomatische Schwierigkeiten für SRT in Medien! such as: impossibility of introducing inertial reference frames due to resistance with consequential impossibility of formulating basic relativity laws, violation of the relativistic sum of speeds, impossibility if reducing to photons all electromagnetic waves (e.g., when

with one meter wavelength) and the impossibility for photons to provide (when applicable) a numerical representation of experimental data for the angle of refraction, the reduction of speed of light, etc; review of Santilli's isotopies of 20th century methods for quantitative treatment of interior problems, including the isotopies of Lie's theory, and special relativity as well as the universal Lorentz-Poincare'-Santilli (LPS) isosymmetries for all infinitely possible spacetimes with a symmetric (3+1)-dimensional metric; unique and unambiguous derivation of the isoshift laws from the LPS isosymmetry; and related aspects. 9see Lecture of Levels II and III, Ref. R. M. Santilli, Experimental verification of isoredshift with possible absence of universe expansion, big bang, dark matter and dark energy, Santilli, Experimental verification of isoredhisft and its cosmological implications, Proc of the Int Conf on Numerical Analysis and Applied Mathematics, Rhodes, Greece, Sept19-25, 2010, Simos, ed, ConfProcVol1281 p882-885 2010 The Open Astronomy Journal Vol3 p1-20 2010. Santilli, Isominkowskian Geometry for Interior Dynamical Problems, in: Cosmology, Quantum Vacuum, and Zeta Functions 2011 `http://www.workshops-hadronic-mechanics.org/workshop_aim.html`

SRT: Photon ist sein eigenes Anti-Teilchen und wird auch von Antimaterie genauso gebrochen. Wenn aber nicht, so können wir Antimaterie (ganze Galaxien und auch nicht near Earth objects) nicht sehen.

Topper & Vincent: **Einstein's 1934 two-blackboard derivation of energy-mass equivalence**, $m = \frac{E}{c^2}$ AmJPhys75 p978 2007; Energie eines mit dem relativistischen Impuls $\vec{p}$ bewegten massiven freien Teilchens mit **Ruhemasse** m ist $E = \sqrt{c^2\vec{p}^2 + m^2c^4} = E = mc^2\gamma$, $T = E - mc^2 = mc^2(\gamma - 1)$. **Energie eines ruhmasselosen Teilchens** ist $E = c|\vec{p}| = cp = \hbar\omega$ wegen $p = \frac{h}{\lambda}$ mit der **relativistischen Impuls** = **Impulsmasse** $m\gamma$ mal v ist $\vec{p} = \gamma m\vec{v} = \gamma\vec{p}$. **Bewegte Masse** des ruhmasselosen Photons ist $m = h\nu/c^2$, Photon hat also Schwere und Trägheit. Rebhan: Relativitätstheorie und Kosmologie 2012 Kap4.10 p96 ebook; vs Dragon PhysBl 56 2000 H9 p77; Okun: Mass versus relativistic and rest masses, AmJPhys77, 430 (2009); Hecht: Einstein on mass and energy, AmJPhys77, 799 (2009) & Errata 78, 125 (2010) ; Hacyan: What does it mean to modify or test Newton's second law? AmJPhys77, 607 (2009); **Ist relativistische Masse gravitativ?** Wortel, Malin, Semon: Two examples of circular motion for introductory courses in relativity, AmJPhys75, 1123 (2007); **Lorentz-Transformation** oder Koordinatentransformation von in x-Richtung sich gleichförmig mit Geschwindigkeitsunterschied v bewegender Bezugssysteme entspricht Drehung - also Abstands-Invarianz - im pseudoeuklidischen oder Minkowski-Raum um **Schnelligkeits- oder Rapiditäts-Winkel/Parameter** $\Theta = \text{atanh}\beta = \text{atanh}\frac{v}{c} \in (-\infty, \infty)$ gedrehten oder verzerrten Koordinatenachse. $-1 < \tanh\Theta < 1$. Es gilt $-\infty < \cosh\Theta = \gamma < \infty =$ **Lorentz-Faktor** aus dem Jahre 1888 $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit $\beta = v/c$ stammt von Woldemar Voigt1850-1919 **Theorie des Lichtes in bewegten Medien** aus dem Jahre 1888 . Woldemar Voigt: Kompendium der theoretischen Physik. Bd1 Mechanik, Bd2 Elektricitäts und magnetismus. **Tensor-Begriff**; Lorentz: The theory of electrons 1909, 1916 digital; Lorentz: Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern 1895 1906; de Haas-Lorentz: H.A. Lorentz - Impressions of his life and work 1957 Einstein, de Haas, van der Pol, Ehrenfest, Casimir, PhysBl13 1957 517; L̃orentz: The Einstein Theory of Relativity 1915 deutsch Das Relativitätsprinzip. Drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Haarlem. Bearbeitet von W.H. Keesom (1876-1956) 1920; Es werden beide Achsen um zum Rapiditäts-Winkel/Parameter $\Theta = \text{atanh}\frac{v}{c}$ proportionalen Winkel $-\frac{\pi}{4} \leq \phi = \arctan\frac{v}{c} \leq \frac{\pi}{4}$ aufeinander zugedreht. Die maximale Achsendrehung zur Winkelhalbierenden von $\phi_{max} = 45^o$ deckt sich mit dem für massive Teilchen unerreichbaren Lichtkegel. Relativität der Gleichzeitigkeit ist unmittelbar sichtbar, da sich die Ortsachsen unter dem Winkel $\phi = \arctan\frac{v}{c}$ schneiden. **Gleichzeitigkeit:** Craig & Smith: Einstein, Relativity and Absolute Simultaneity 2011; Kurven mit gleichem pseudoeukid. 'Abstand' vom Ursprung sind Hyperbeln. Abstand Ursprung mit Schnittpunkt der geneigte Achsen mit der Hyperbel gibt die Einheitslänge wieder. Die Tangente an diesen Punkt ist parallel zur anderen geneigten Achse. Wegen $Y = x - ct$ und $X = x + ct$ und $XY = x^2 - c^2t^2 = F$ix, sind die Flächen F unter den Hyperbeln $Y(X) = F/X$ stehts gleich. Born: Die RT Einsteins p200ff; Herlt & Salie: SRT p61; **Herleitung:** Sommerfeld: Elektrodynamik p210; oder Schröder: SRT p24 und 73; **Galilei** mit **Korrekturfaktor** als gerader Funktion $\gamma(-v) = \gamma(v)$, die für $v^2 \ll c^2$ eins wird: $x' = \gamma(v)[x - vt]$ und $x = \gamma(v)[x' + vt']$. Lichtstrahl, der bei $t = t' = 0$ vom gemeinsamen Ursprung startet, erreicht nach Laufzeit

t bzw t' die Orte $x = ct$ bzw $x' = c't'$. Annahme $c \stackrel{!}{=} c'$ führt auf $x' = \gamma(v)[x - v\frac{x}{c}] = \gamma(v)x[1 - \frac{v}{c}]$ und $x = \gamma(v)[x' + v\frac{x'}{c}] = \gamma(v)x'[1 + \frac{v}{c}]$, also $xx' = \gamma^2(v)xx'[1 - \beta^2]$. McMahon: Relativity demystified, p10. Oder per Bogenlängen-Erhaltung gegenüber linearer Transformation: Ein und dasselbe Ereignis werde durch zwei verschiedene KS $(ct, \vec{x})^T \in$ S und $(ct', \vec{x}')^T \in$ S' beschrieben, die zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ zusammenfallen. S' bewege sich längs der positiven x-Achse des Systems S mit v. Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ gehe vom Ursprung ein Lichtblitz aus. Für die jeweilige Kugel der Lichtfront gilt $c^2t^2 = \vec{x}^T \cdot \vec{x}$ und $c^2t'^2 = \vec{x}'^T \cdot \vec{x}'$. Finden Sie die **lineare Transformation** $x' = Ax + Bct$ und $ct' = Cx + Dct$ oder $(ct', \vec{x}')^T = L\,(ct, \vec{x})^T$ mit $y' = y$ und $z' = z$ oder in Matrixnotation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & C & 0 & 0 \\ B & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

. Es folgt $D^2 - B^2 = 1$ wegen $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$ gilt $A = D = \cosh\phi$. Analog $A^2 - C^2 = 1$, also $B = C = -\sinh\phi$. Daher ist $\cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \cosh\phi$ und somit auch $\sinh\phi = \beta\gamma$ mit $\beta = \frac{v}{c}$. Daher $t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$ und $x' = \gamma\,(x - v\,t)$. **Nolting 4** p16ff. Heffter: Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie 1950 Kap Orthogonalgeometrie p131ff. Boseck: Lin Vektorräume p212ff **Isotrope Vektoren** = Vektoren der Länge Null. Sexl & Urbantke: Rel, Gruppen, Teilchen p18ff; Liebmann: Nichteuklidische Geometrie 1931 §34 Galilei und Lorentztransformation; Taylor/Wheeler: Spacetime physics p56ff; Marder: Reisen durch Raum-Zeit. Das Zwillingsparadoxon - Geschichte einer Kontroverse 1982; Hartle: gravity p90ff; Liebscher RT mit Zirkel p70ff; Schilling: Projektive und nichteuklidische Geometrie. II. Bd 1931; **Zee:** Einstein gravity in a nutshell 2013 168ff $c = 1$ gibt $t' = \frac{t + ux}{\sqrt{1 - u^2}}$, $x' = \frac{x + ut}{\sqrt{1 - u^2}}$, $y' = y$ und $z' = z$, also $t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2$ Lichtkoordinaten sind damit $x^\pm = t \pm x$, also $t^2 - x^2 = (t + x)(t - x) = x^+x^-$. Wegen $e^\phi e^{-\phi} = 1$ gilt $x'^+ = e^\phi x^+$ und $x'^- = e^{-\phi}x^-$. Aus $(t' + x')(t' - x') = x'^+x'^-$ folgt $t' + x' = x'^+$ und $t' - x' = x'^-$. Deren Summe gibt $2t' = x^+ + x^- = e^\phi x^+ + e^{-\phi}x^- = e^\phi(t + x) + e^{-\phi}(t - x) = t(e^\phi + e^{-\phi})t + x(e^\phi - e^{-\phi}) = t\cosh\phi + x\sinh\phi$. Der Boost-Parameter ϕ kann mit der Relativgeschwindigkeit u in Verbindung gesetzt werden durch $x' = 0 \to x = -ut \to u = \frac{\sinh\phi}{\cosh\phi} = \tanh\phi$ mit $\phi \in (-\infty, \infty) \to u \in (-1, 1)$. Wegen $\cosh^2\phi - \sinh^2\phi = 1$ gibt $\cosh\phi = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}}$ und $\sinh\phi = \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}$. Ausgangs-Idee: $z = x + iy = re^{i\theta} \Leftrightarrow z^* = x - iy = re^{-i\theta}$ oder infinitesimale Drehung gemäß $e^{\pm\phi} = 1 \pm \phi \pm \ldots$.

Alan Macdonald: Still the 'World's Fastest Derivation of the Lorentz Transformation' arXiv:physics/0606046v1 AmJPhys49 H5 1981 p493f; Beim **Boost** in x-Richtung

$$\begin{aligned} t' &= \gamma(t - \frac{v}{c^2}x) = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \frac{\gamma}{c}(ct - \beta x) \quad \text{mit} \quad \beta = \frac{v}{c},\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} \\ x' &= \gamma(x - v\,t) = \frac{x - v\,t}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}} = \gamma(-\beta ct + x), \quad y' = y, \quad z' = z \end{aligned}$$

vermischen sich die Komponenten des Vierer-Impulses $p^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu\, p^\nu$ und damit Gesamtenergie und die Komponenten des gewöhnlichen Impulses. **Skalarprodukt:** $x^T \cdot x = x^T\eta x = x^\mu\eta_{\mu\nu}x^\nu = x^\mu x_\mu$. Mit $g_{\mu\nu}(\vec{x})$ wird die **Rieman'sche oder allgemeine Metrik** oder **Maßbestimmung** bezeichnet, $\eta_{\mu\nu}$ bezeichnet die pseudo-euklidische oder flache Metrik des Minkowski-Raumes, hier mit **Signatur** -2:

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix},\ \mu = 0, 1, 2, 3, \quad x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu = (ct, -\vec{r}) \text{ with the metric tensor } \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \nabla\right), \quad \partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial(ct)} \\ -\nabla \end{pmatrix}, \quad \partial_\mu\partial^\mu = \Box, p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right), \; p^\mu = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

mit $E = \gamma mc^2$ und dem relativistischen Impuls $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$.
Also $p^2 = p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \gamma^2 m^2 v^2 = \gamma^2 m^2 c^2 - \gamma^2 m^2 v^2 = \gamma^2 m^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m^2c^2 =$ **const**. **Vierer-Gradient** muss das negative Vorzeichen haben, weil nach der **kovarianten** Variablen abgeleitet werden muss, da Gradient ein **kovarianter Vektor** ist, siehe Seite 238! Signatur in E-Dynamik, SRT und QFT -2, zeitartiges Linienelement positiv. Signatur **in ART** ist 2, also **zeitartiges Linienelement negativ** $-\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}^2t} = \gamma^{-2}$ und man definiert die Eigenzeit $\mathrm{d}\tau$ als Imaginärteil durch $i\mathrm{d}\tau = \sqrt{-\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2}$. **Quabla oder Kiste** $\Box = \Delta - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}$ der **d'Alembert-Operator** ist. In SRT ist Signatur aber -2 $\Box := \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta$ wegen **kovariantem** Vierer-Gradient $\partial_\mu = (\partial_{ct}, \nabla) = (\partial_{ct}, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ und den heraufgezogenen kontravarianten Komponenten $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\partial^{ct}, -\partial^x, -\partial^y, -\partial^z\right)$, siehe Seite 563. Die **Metrik oder auch Maßbestimmung ist ein symmetrischer Tensor 2. Ranges**, also Summe über Tensorprodukte von Basis-1-Formen $\mathbf{g} = g_{ab}\mathrm{d}x^a \otimes \mathrm{d}x^b$. Inverse ist g^{ab} ist per $g_{ab}\, g^{bc} = \delta^c_a$ definiert. McMahon: Relativity demysified 2006; Indexrechnung in allen Intros zur ART Fließbach, Rebhan, Goenner, Schröder und Landau/Lifschitz Bd2; **Schultz-Piszachich: Tensoralgebra und -analysis** 1985[3]; Ryder: Introduction to General Relativity 2009 ebook; Gemäß Summenkonvention $\sum_{a=0}^3 S^a T_{ab} = S^a T_{ab} = S^\gamma T_{\gamma b}$ sind a, γ **dummy Indices**/Atrappen-Indices. Vektor ist $V = V^a e_a$ mit den kovarianten Basis-Vektoren als **Koordinatenbasis** $e_a = \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$ längs der **Koordinatenlinien**. Damit kann Vektor V als ein Operator aufgefasst werden der eine Funktion auf eine neue Funktion abbildet, die zur Ableitung in Beziehung steht: $V\,f = (V^a e_a) = V^a \partial_a\, f$. Tangenzialraum. Siehe **Gradient als 1-Form/kovarianter Vektor** siehe Seite 238. Ein Vektor kann durch kovariante Komponenten dargestellt werden. Dieser Vektortyp wird als 1-Form bezeichnet. **Form = homogenes Polynom.** Gröbner: Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen 1967 p159; Basis-1-Formen biden einen **dualen Vektorraum**, bilden die gewöhnlichen Vektoren gemäß $\omega^a(e_b) = \delta^a_b$ auf eine Zahl ab und haben hochgestellte Indices ω^a: $\tilde{V} = V_a\omega^a$ In Koordinatendarstellung sind Basis-1-Formen gegeben durch $\omega^a = \mathrm{d}x^a$. Eine beliebige 1-Form σ_a bildet einen Vektor per Skalarprodukt $\sigma \cdot V = \sigma_a V^a$ auf eine Zahl ab, oder umgekehrt. Allgemeiner kann ein (p,q)-Tensor als eine Funktion betrachtet werden, die p 1-Formen und q Vektoren als Input hat und sie auf eine Zahl abbildet: $T = T^{lmn\ldots}_{abc\ldots}\omega^a \otimes \omega^b \otimes \omega^c \otimes \ldots e_l \otimes e_m \otimes e_n \otimes \ldots$ Carroll: Lecture Notes on General Relativity http://xxx.lanl.gov/abs/gr-qc/9712019; **Carroll: An introduction to general relativity, spacetime and geometry** 2003, 2009; Schachinger: Allgemeine Relativitätstheorie, Skript http://itp.tu-graz.ac.at/LV/ewald/ART/; Schutz: A first couse in relativity 1985; **Schutz: Geometrical Methods of Mathematical Physics** 1980; Bei Koordinatentransformation gemäß $x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha)$ ist ein kontravarianter 4-Tensor $T^{\mu\nu}$ wie folgt zu transformieren:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\, T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha x'^\mu\, \partial_\beta x'^\nu\, T^{\alpha\beta}$$

Erweiterte Form der Summenkonvention: Ein oberer Index einer Koordinate, die im Nenner auftritt, ist wie ein unterer Index, der im Zähler auftritt anzusehen. Die Lorentz-Transformations für Relativgeschwindigkeit in x-Richtung (kein Tensor!, weil nicht bei Koordinatenwechsel mittransformiert werden muss) ist

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu(\beta_x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}(\beta_x) = \frac{\partial(ct', x', y', z')}{\partial(ct, x, y, z)}(\beta_x) = \begin{pmatrix} \gamma(\beta_x) & -\beta\gamma(\beta_x) & 0 & 0 \\ -\beta\gamma(\beta_x) & \gamma(\beta_x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für räumlich Drehung gilt $\Lambda^{\mu'}{}_\nu(\beta = 0) = \delta^{\mu'}{}_\nu$. Lorentz-Transformation in reeller Schreibweise ist im pseudo-Euklidischen Sinne orthogonal. Spaltenprodukt verschwindet unter Nutzung der Metrik $g_{\rho\nu} = \eta_{\rho\nu}$ für das Skalarprodukt. Der obere/kontravariante Index ist der Zeilenindex der Matrix, der untere/kovariante der

Spaltenindex. **Holonome Basis** = Paar aus kontravarianter und kovarianter Basis = Paar aus Basis/Raum und reziproker Basis/Dualraum. Der inverse Lorentz-Transformations-Tensor

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}_{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \Lambda^{\mu}_{\nu'}(-\beta)$$

Bei Verwendung komplexer Koordinaten $\tilde{x}_{\mu} = (ict, x, y, z)$ und damit Euklidischer Metrik (Minkowski, Weyl-Trick, siehe Zeidler) $\underline{\underline{g}} = \underline{\underline{1}}$ ändern sich die Symmetrie-Eigenschaften des Lorentz-Transformations-Tensors: $\tilde{\Lambda}^{\mathrm{T}} = \tilde{\Lambda}^{-1} \neq \tilde{\Lambda}$ wegen

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\beta\gamma & 0 & 0 \\ i\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lorentz-Transformation in komplexwertiger Schreibweise ist unitär. Beim Feldstärketensor mischen sich die elektrischen und magnetischen Felder gemäß $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}F^{\alpha\beta}$. Die **Feldstärke der Elektrodynamik** = **Feldstärketensor** = Welttensor ist dual zum Sechservektor $(\vec{E}, \vec{B})$ ist von Natur aus ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, was das merkwürdige **Vektorprodukt** der Maxwellgleichungen verschleiert. Siehe Seite 289. **Die Summenkonvention darf aber hier nicht mit der Skalarproduktmultiplikation oder Matrizenmultiplikation $\Lambda \cdot F \neq \Lambda^{\nu}_{\beta}\, F^{\alpha\beta}$ verwechselt werden!** β ist hier in beiden Fällen ein Spaltenindex! Der Tensor $C = A \cdot B$ brechnet sich nämlich gemäß $C_{ik} = A_{ij}B_{jk}$, also als Skalarprodukt von Spaten und Zeilen. **Aber** wegen der hohen Symmetrie $\Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda$ kann die Kontraktion $H^{\alpha\nu} := \Lambda^{\nu}_{\beta}\, F^{\alpha\beta}$ als eine skalare Multiplikation geschrieben werden: $\Lambda^{\nu}_{\beta}\, F^{\alpha\beta} = F \cdot \Lambda^{\mathrm{T}} = F \cdot \Lambda$. Die zweite Kontraktion $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\, H^{\alpha\nu}$ summiert über den Spaltenindex vonΛ und den Zeilenindex von H, was einer skalaren Multiplikation entspricht. Nur wegen der Symmetrie der Lorentz-Transformation Λ darf die doppelte Kontraktion wie ein doppeltes Skalarprodukt geschrieben werden $\Lambda^{\nu}_{\beta}\, F^{\alpha\beta} = \Lambda \cdot F \cdot \Lambda^{\mathrm{T}} = \Lambda \cdot F \cdot \Lambda$, was wie eine Ähnlichkeitstransformation $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}F^{\alpha\beta}\Lambda^{\nu}_{\beta}$ aussieht, aber dennoch eine Koordinatentransformation ist. Lediglich gemischte Tensoren 2. Stufe sind Matrizen, die sich gemäß Ähnlichkeitstransformation (Nolting 4, p43) $F' = S^{-1}F\,S$. **Index-Gymnastik in allen Intros zur ART Fließbach, Rebhan, Goenner, Schröder und Landau/Lifschitz Bd2:** $x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} = 0$, weil $x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} = -x^{\nu}x^{\mu}A_{\nu\mu} = -x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu}$ bedeutet $2x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} = 0$ also 2 mal 0. $x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} \overset{\text{Dummyindexumbennung}}{=} (x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} + x^{\nu}x^{\mu}A_{\mu\nu})/2 \overset{\text{Aantisymmetrisch}}{=} (x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} - x^{\nu}x^{\mu}A_{\nu\mu})/2 \overset{x\text{kommutativ}}{=} (x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} - x^{\mu}x^{\nu}A_{\nu\mu})/2 = 0$ Oder viel eleganter: $x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu} \overset{\text{Dummyindexumbennung}}{=} x^{\nu}x^{\mu}A_{\nu\mu} \overset{\text{Aantisymmetrisch}}{=} -x^{\nu}x^{\mu}A_{\mu\nu} \overset{x\text{kommutativ}}{=} -x^{\mu}x^{\nu}A_{\mu\nu}$, kurz $v = -v$ bedeutet $v = 0$, weil **allein das Nullelement vorzeichenneutral**. **Schultz-Piszachich: Tensoralgebra und -analysis** 1985[3]; Ryder: Introduction to General Relativity 2009;

Veblen: Invariants of quadratic differential forms 1933

p2 **Dummy oder umbral-Index** = **abgeschirmte Indices**; McMahon: Relativity demystified p41 oder Nolting 4 p40ff; **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p5; Griffiths: Intro to elementary particles 2009[2] p90ff; Landau & Lifschitz: Bd2; Pauli: Relativitätstheorie 1921; Mit der **Schnelligkeit** oder Rapidität Θ =arctanh β , die auch manchmal **negativ** definiert wird $\beta = -\tanh\phi$ gilt

$$L(\Theta) = \begin{pmatrix} \cosh\Theta & -\sinh\Theta & 0 & 0 \\ -\sinh\Theta & \cosh\Theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L(\beta)$$

Wegen det(L)=1 ist die Transformation volumenenerhaltend. Für die Rücktransformation hat man das inverse Element $L^{-1} = L(-\Theta)$ mit $L(\Theta)L(-\Theta) = \mathbb{I}$. **Lorentz-Transformations-Matrix** ist **Pseudo-Orthogonal** weil es das **Pseudo-Skalarprodukt**, den **pseudo-euklidischen Abstand** invariant, weil aber im hypelbol Raum die 90° und Skalarprodukt Null nicht senkrecht bedeuten. Lichtartige Ereignisse sind die

Menge aller isotropen Vektoren = Vektoren der Länge Null auf dem Lichtkegel. Es ist $\Lambda_\mu{}^\nu \Lambda^\mu{}_\alpha = \delta^\nu{}_\alpha$ mit

$$(\Lambda_\mu{}^\nu) = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x & 0 & 0 \\ \sinh x & \cosh x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cosh x & -\sinh x & 0 & 0 \\ -\sinh x & \cosh x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mit $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$ und $\sin\phi = \dfrac{\tan\phi}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$ wird aus einer Koordinatentransformation/passive Drehung um $\phi = i\alpha$ mit **antisymmetrischer** Matrix im Minkowskiraum/Ereignisraum/Gaußebene x, ict

$$KT(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} \begin{pmatrix} 1 & \tan\phi \\ -\tan\phi & 1 \end{pmatrix}$$

bedeutet wegen $\cos\phi = \cos i\alpha = \cosh\alpha$ und $\sin\phi = \sin i\alpha = i\sinh\alpha$ oder $\tan\phi = \dfrac{\sin\phi}{\cos\phi} = i\tanh\alpha$

$$LT(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}} \begin{pmatrix} 1 & \tanh\alpha \\ -\tanh\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Bedeutet wegen Abbildung aller Punkte/Ereignisse des ruhenden Systems $(x, ict) \in \mathbb{C}$ in alle Punkte/Ereignisse des bewegten Systems $(x', ict') \in \mathbb{C}$ gemäß

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix}$$

wegen Bewegung des Ursprungs des bewegten Systems K' relativ zum ruhenden Systems K:
$0 = x' = x\cos\phi + ict\sin\phi$ also $\beta = \dfrac{v}{c} = \dfrac{x}{ct} = -i\tan\phi = \tanh\alpha$. Das bedeutet eine Drehung von Abszisse x und Ordinate ct hin zur Winkelhalbierenden/Lichtkegel um den Winkel ϕ. Das geht wegen $\beta = \dfrac{v}{c} \in [-1, 1]$ insgesamt wegen nichtlinearer Geschwindigkeitsaddition maximal bis $\phi \in [-45^o, +45^o]$. Bedeutet eine **antisymmetrische Matrix für Lorentztransformation**

$$LT(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = LT(\beta).$$

Diese **antisymmetrische** Matrix wirkt auf alle Punkte $(x, ict) \in \mathbb{C}$ der pseudoeuklidischen Gaußebene/Minkowskiebene mit Metrik $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also Länge per Skalarprodukt $(x, ict) \odot (x, ict) = (x, ict) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} = x^2 - c^2t^2$. Nun Wechsel in Minkowskiraum/Ereignisraum mit Punkten/Ereignissen $(x, ct) \in \mathbb{R}^2$ mit pseudoeuklidischer Metrik $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, also Länge per Skalarprodukt $(x, ct) \odot (x, ct) = (x, ct) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} = x^2 - c^2t^2$. Dieser Wechsel bedeutet eine symmetrische Lorentztransformation

$$LT(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} = LT(\beta).$$

Oder auch per Drehung $D(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ von Punkten $(x^{(0)}, x^{(1)}) = (ct, ix)$ im Minkowskiraum/Ereignisraum gibt

$$\begin{pmatrix} x^{(0)\prime} \\ x^{(1)\prime} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(0)} \\ x^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ct' \\ ix' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix' \end{pmatrix}$$

Bedeutet $ct' = ct\cos\phi - ix\sin\phi$ mit $\phi = i\alpha$ und $\cos\phi = \cosh\alpha$ und $\sin\phi = i\sinh\alpha$ $ct' = ct\cosh\phi - x\sinh\alpha$. Analog folgt aus $ix' = ct\sin\phi + ix\cos\phi$ nach Multiplikation mit -i die Gl. $x' = -ct\sinh\alpha + x\cosh\alpha$, also

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

$0 = x' = -ct\sinh\alpha + x\cosh\alpha$ folgt für die Geschwindigkeit des bewegten Systems $c\tanh\alpha = \frac{x}{t} = v$, also $\beta = \tanh\alpha$ oder $\alpha = \operatorname{arctanh}\beta$. Und wegen $\cosh\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$ und $\sinh\alpha = \dfrac{\tanh\alpha}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}} = \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \beta\gamma$ folgt die symmetrische Matrix der Lorentztransformation

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Idee der Rapidität θ bildet das β-Intervall $\beta = \dfrac{v}{c} \in [-1,1]$ per arctanh-Funktion auf $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ ab. Also $\theta = \operatorname{arctanh}\beta$. Greiner Bd1 p371; Rebhan: RT & Kosmologie p48;

Ernst Richard Neumann: VL zur Einführung in die RT 1922 Abstandsquadrat $(ict)^2 + x^2 > 0$ für zeitartige/kausale Ereignisse, wie bei Einstein p121ff; Kozik: **Geometric diagram for relativistic addition of velocities** A J Phys 80 2012 737; Betrachte Ursprungs-Kreis mit Radius c. a] Auf Abszisse Geschwindigkeiten u und v markieren. b] Je eine Sekante von den Polen $(0,c)$ und $(0,-c)$ ziehen. c] Sekante durch die Kreisschnittpunkte gibt Schnittpunkt mit Abszisse $u \oplus v = \dfrac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$. Für $c = 1$ gilt: Galilei $a+b$, Poincare: $a \oplus b = \dfrac{a+b}{1+ab}$, speziell: $\dfrac{1}{2} \oplus \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{5} < 1$, $v \oplus 1 = 1$, $v \oplus -1 = -1$, $1 \oplus 1 = 1$.

Geschwindigkeitsaddition: Rebhan: RT & Kosmologie p25; Schmüser II p142f; **Composition of velocities:** McMahon: RT p14f; Goldstein: Mechanik 2009[3] p307; The LTs $S \overset{u}{\mapsto} S'$, $S' \overset{v}{\mapsto} S''$ and $S \overset{w}{\mapsto} S''$ are given by

$$x' = \frac{x - u\,t}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{u\,x}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}, \tag{95}$$

$$x'' = \frac{x' - v\,t'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \quad , \quad t'' = \frac{t' - \frac{v\,x'}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}, \tag{96}$$

and

$$x'' = \frac{x - w\,t}{\sqrt{1-(\frac{w}{c})^2}} \quad , \quad t'' = \frac{t - \frac{w\,x}{c^2}}{\sqrt{1-(\frac{w}{c})^2}}, \tag{97}$$

respectively. If we put eq. (95) into eq. (96) and compare it with eq. (97) we get the addition theorem

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}}$$

In detail we have

$$x'' \overset{(96.1)}{=} \frac{x' - v\,t'}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \overset{(95.1)}{=} \frac{x - u\,t - v(t - u\,x/c^2)}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2-(\frac{v}{c})^2+(\frac{u\,v}{c^2})^2}} = \frac{x-(u+v)\,t + u\,v\,x/c^2)}{\sqrt{1+(\frac{u\,v}{c^2})^2-(\frac{u^2+v^2}{c^2})}}$$

Using

$$(1+u\,v/c^2)^2 = 1 + \frac{(u\,v)^2}{c^4} + \frac{2uv}{c^2}$$

we get

$$x'' = \frac{x(1+uv/c^2)-(u+v)\,t}{\sqrt{(1+\frac{u\,v}{c^2})^2-\frac{2uv}{c^2}-(\frac{u^2+v^2}{c^2})}} = (1+uv/c^2)\frac{x-\frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}}t}{\sqrt{(1+\frac{u\,v}{c^2})^2-(\frac{(u+v)^2}{c^2})}}$$
$$= \frac{x-\frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}}t}{\sqrt{(1-\frac{(u+v)^2}{c^2(1+\frac{u\,v}{c^2})}}} = \frac{x-w\,t}{\sqrt{1-(\frac{w}{c})^2}}$$

The LT take on a simpler appearance when expressed in terms of the quantities

$$\beta_u = \frac{u}{c} \qquad \text{and} \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}, \tag{98}$$

with $u \in [0, c]$. Then the LT for the x-direction read in matrix form

$$\Lambda(u) = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u\gamma_u & 0 & 0 \\ -\beta_u\gamma_u & \gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det $\Lambda(u) \neq 0$. Therefore there exists an inverse element.

$\{\Lambda(u), \Lambda(v), \Lambda(w), \dots\} = \Gamma$ denotes a set of LTs.

$\{\Gamma, \cdot\}$ is a group if the following four properties are satisfied. The $\cdot$ is omitted. For the prove we consider the upper left block matrix only.

(I) The matrix multiplication is said to be closed, if $\Lambda(u), \Lambda(v) \in \Gamma$, then $(\Lambda(u)\,\Lambda(v)) \in \Gamma$ as well.

Proof:

$$\Lambda(v)\,\Lambda(u) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u\gamma_u \\ -\beta_u\gamma_u & \gamma_u \end{pmatrix} = \gamma_v\gamma_u\begin{pmatrix} 1+\beta_v\beta_u & -\beta_v-\beta_u \\ -\beta_v-\beta_u & 1+\beta_v\beta_u \end{pmatrix} \tag{99}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta_v^2)(1-\beta_u^2)}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(1+\beta_v\beta_u)^{-2}}} & \frac{-1}{\sqrt{(\beta_v+\beta_u)^{-2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{(\beta_v+\beta_u)^{-2}}} & \frac{1}{\sqrt{(1+\beta_v\beta_u)^{-2}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2-\beta_u^2-\beta_v^2}{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u}}} & \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2-\beta_u^2-\beta_v^2}{(\beta_v+\beta_u)^2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2-\beta_u^2-\beta_v^2}{(\beta_v+\beta_u)^2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2-\beta_u^2-\beta_v^2}{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u}}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u-(\beta_u+\beta_v)^2}{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u}}} & \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u-(\beta_u+\beta_v)^2}{(\beta_v+\beta_u)^2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u-(\beta_u+\beta_v)^2}{(\beta_v+\beta_u)^2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u-(\beta_u+\beta_v)^2}{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u}}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\beta_u+\beta_v}{1+\beta_v\beta_u})^2}} & \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u-(\beta_u+\beta_v)^2}{(\beta_v+\beta_u)^2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u-(\beta_u+\beta_v)^2}{(\beta_v+\beta_u)^2}}} & \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u-(\beta_u+\beta_v)^2}{1+\beta_v^2\beta_u^2+2\beta_v\beta_u}}} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta_w^2}} & \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{\beta_w^2}-1}} \\ \frac{-1}{\sqrt{\frac{1}{\beta_w^2}-1}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta_w^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_w & -\beta_w\gamma_w \\ -\beta_w\gamma_w & \gamma_w \end{pmatrix} = \Lambda(w)$$

This relation holds only if the addition theorem satifies the following equation

$$\beta_w = \frac{\beta_v+\beta_u}{1+\beta_v\,\beta_u} \quad \text{or} \quad w = \frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}} \tag{100}$$

(II) If $\Lambda(u), \Lambda(v), \Lambda(w) \in \Gamma$, then $\Lambda(w)\,[\Lambda(u)\,\Lambda(v)] = [\Lambda(w)\,\Lambda(u)]\,\Lambda(v)$ (associativity).

Proof:

$$\Lambda(w)\,[\Lambda(u)\,\Lambda(v)] \overset{(99)}{=} \begin{pmatrix} \gamma_w & -\beta_w\gamma_w \\ -\beta_w\gamma_w & \gamma_w \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \gamma_v & -\beta_v\gamma_v \\ -\beta_v\gamma_v & \gamma_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta_u\gamma_u \\ -\beta_u\gamma_u & \gamma_u \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\beta_w \\ -\beta_w & 1 \end{pmatrix} \gamma_w\gamma_v\gamma_u \begin{pmatrix} 1+\beta_v\beta_u & -\beta_v-\beta_u \\ -\beta_v-\beta_u & 1+\beta_v\beta_u \end{pmatrix}$$

$$= \gamma_w\gamma_v\gamma_u \begin{pmatrix} 1+\beta_w\beta_v+\beta_u\beta_w+\beta_v\beta_u & -\beta_w-\beta_v-\beta_u-\beta_w\beta_v\beta_u \\ -\beta_w-\beta_v-\beta_u-\beta_w\beta_v\beta_u & 1+\beta_w\beta_v+\beta_u\beta_w+\beta_v\beta_u \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\beta_w\beta_v & -\beta_w-\beta_v \\ -\beta_w-\beta_v & 1+\beta_w\beta_v \end{pmatrix} \gamma_w\gamma_v\gamma_u \begin{pmatrix} 1 & -\beta_u \\ -\beta_u & 1 \end{pmatrix} \overset{(99)}{=} [\Lambda(w)\,\Lambda(u)]\,\Lambda(v)$$

(III) There exists an identity element $I \in \Gamma$ such that for all $\Lambda(u) \in \Gamma$, $\Lambda(u)\,\Lambda(0) = \Lambda(0)\,\Lambda(u) = \Lambda(u)$.

Proof:

Using eq. (98) we get $\beta_0 = 0$ and $\gamma_0 = 1$ which gives the identity element

$$\Lambda(0) = \begin{pmatrix} \gamma_0 & -\beta_0\gamma_0 & 0 & 0 \\ -\beta_0\gamma_0 & \gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \tag{101}$$

(IV) For every $\Lambda(u) \in \Gamma$, there exists an inverse element in Γ, denoted $\Lambda^{-1}(u)$, such that $\Lambda(u)\,\Lambda^{-1}(u) = \Lambda^{-1}(u)\,\Lambda(u) = \Lambda(0)$.

Proof:

$$\Lambda(u)\,\Lambda^{-1}(u) = \gamma_u \begin{pmatrix} 1 & -\beta_u \\ -\beta_u & 1 \end{pmatrix} \gamma_u \begin{pmatrix} 1 & \beta_u \\ \beta_u & 1 \end{pmatrix} = \gamma_u^2 \begin{pmatrix} 1-\beta_u^2 & 0 \\ 0 & 1-\beta_u^2 \end{pmatrix} \overset{(98)}{=} I$$

If we define

$$\tanh\phi_u = -\frac{u}{c} \tag{102}$$

we have

$$\cosh\phi_u = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2\phi_u}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \quad \text{and} \quad \sinh\phi_u = \frac{\tanh\phi_u}{\sqrt{1-\tanh^2\phi_u}} \tag{103}$$

Using eqn. (102) and (103) eq. (95) can be written

$$\vec{S}' = L_u\vec{S} \quad \text{with} \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad L_u = \begin{pmatrix} \cosh\phi_u & \sinh\phi_u \\ \sinh\phi_u & \cosh\phi_u \end{pmatrix}$$

$L_w = L_v \circ L_u$ gives

$$L_w = \begin{pmatrix} \cosh\phi_w & \sinh\phi_w \\ \sinh\phi_w & \cosh\phi_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi_v & \sinh\phi_v \\ \sinh\phi_v & \cosh\phi_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\phi_u & \sinh\phi_u \\ \sinh\phi_u & \cosh\phi_u \end{pmatrix} = L_v \circ L_u$$

Using the relations

$$\sinh x + y = \sinh x\cosh y + \cosh x\sinh y$$
$$\cosh x + y = \cosh x\cosh y + \sinh x\sinh y$$
$$\operatorname{arctanh} x + \operatorname{arctanh} y = \operatorname{arctanh}\frac{x+y}{1+x\,y}$$

we have

$$L_w = \begin{pmatrix} \cosh\phi_v + \phi_u & \sinh\phi_v + \phi_u \\ \sinh\phi_v + \phi_u & \cosh\phi_v + \phi_u \end{pmatrix}$$

which gives

$$\begin{aligned} \phi_w = \operatorname{arctanh} - w/c = \operatorname{arctanh} - v/c + \operatorname{arctanh} - u/c = \phi_v + \phi_u \\ = \operatorname{arctanh} - \frac{u+v}{c(1+\frac{uv}{c^2})} \end{aligned}$$

or simply

$$w = \frac{u+v}{1+\frac{u\,v}{c^2}}$$

Es sind durch **Index-Ziehen**, wobei bei **Einstein-Summen-Konvention** stets ein Index der gleichen Indices oben und der andere unten stehen muss:

$$(\Lambda^{\mu\nu}) = (\Lambda^{\mu}{}_{\rho})(g^{\rho\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x & 0 & 0 \\ -\sinh x & -\cosh x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\Lambda_{\mu\nu}) = (\Lambda_{\mu}{}^{\rho})(g_{\rho\nu}) = \begin{pmatrix} \cosh x & -\sinh x & 0 & 0 \\ \sinh x & -\cosh x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Bei **Lorentz-Transformations-Matrix** gilt offenbar $(\Lambda^{\mu\nu}) = (\Lambda_{\mu\nu})^T$, nicht aber beim Feldstärketensor, weil sich die Komponente von $\vec{B}$ als axialer Vektor = antisymmetrischer Tensor oder **Plangröße**= Fläche mit Umlaufsinn, Budo p577, p546 anders als die Komponenten von $\vec{E}$ bei Punktspiegelung transformieren. Die **Feldstärke der Elektrodynamik** = **Feldstärketensor** = Welttensor = Sechservektor $(\vec{E}, \vec{B})$ ist von Natur aus ein antisymmetrischer Tensor 2. Stufe, was das merkwürdige **Vektorprodukt** der Maxwellgleichungen verschleiert. Siehe Seite 289. **Weyl: Raum, Zeit, Materie** 1923[5], mit Ehlers Anmerkungen 1993[8] p41 **Korkenzieherregel** = Ein im Innern des Leiters in Stromrichtung schwimmender und das Gesicht der Magnetnadel zuwendender Beobachter konstatiert eine Ablenkung des Nordpols nach links. = Bergmann & Schaefer: Bd2 i**Rechtsschraube** p116; **Daumenregel:** Legt man die rechte Hand flach auf den Leiter, sodass der Strom vom Handgelenk zu den Fingerspitzen fließt, und kehrt die Handfläche der Magnetnadel zu, so wird der Nordpol in Richtung des ausgestreckten Daumens abgelenkt. **Ampere'sche Schwimmregel** = **ein Kreuzprodukt bedeutet ein Rechtssytem:** Der Schraubensinn axialer Vektoren ist zwar anschaulich, verdeckt aber die Tatsache, dass das magnetische Feld ein Tensor ist! **Kontravarianter & kovarianter Feldstärketensor:** $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = -F^{\nu\mu}$ ist antisymmetrisch mit dem **Vierer-Vektorpotenzial** $A^\mu = (\varphi/c, \vec{A})^T$

$$-(F^{\nu\mu}) = (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, (F_{\alpha\beta}) = (\eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Also beide antiymmetrisch, aber der Übergang von $F^{\mu\nu}$ zu $F_{\mu\nu}$ ist merkwürdig, weil sich die B-Komponenten anders transformieren!

Transformationsverhalten von $\vec{E}$ und $\vec{B}$: Fano, Chu & Adler: Electromagnetic Fields, Energy, and Forces 1968;

a] Totales Differenzial der Feldgrößen gemäß Einstein, den die Maxwell-Gleichungen machen nur Aussagen über Differenziale! Siehe **Lorentz, Einstein, Minkowski: Das Relativitätsprinzip. Eine Sammlung von Abhandlungen mit Beitrag von Weyl und Anmerkungen Sommerfeld. Vorwort Blumenthal 1876-1944 Theresienstadt** 1913, 1923 1958 = Wiederabdruck der Einstein'schen Arbeiten in

Hawking: Die Klassiker der Physik 2002; ER Neumann 1875-1955: Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie 1922 p81f; Weizel: LB der theoret Physik 1949 Bd1 p648f; Einstein: Grundzüge der RT 1956 p44ff; Macke: Elektromagnetische Felder 1969 p335; Jellinek (Danzig, Goetheanum): Weltsystem, Weltäther und die Relativitätstheorie 1949 elementare Einführung vor **Melcher: Relativitätstheorie** 1974[4] p112ff; Simonyi: Theoretische Elektrotechnik 1977 p921f;

b] Idee Vektorpotenzial ist 4-dim-Größe! Sommerfeld: Bd3 p221;

c] Idee der Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik heißt: elekt und magnet Feldstärken müssen in Tensor zusammengefasst werden! Es geht nur 4-dimensional! Schmutzer: Grundlagen B2 p1066f; Feynman: Bd2.2 p26-13ff; Herlt & Salie: SRT 1978 p126; Scheck: Bd3 p127ff, Rebhan: RT p123 Sexl & Schmidt: Raum-Zeit-Relativität 1978; Sexl & Urbandtke: Relativität, Gruppen, Teilchen 1992; Sexl & Urbandtke: Relativity, groups, particles. Special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics 2001;

d] Newton muss unter Beachtung der Lorentz-Kraft Lorentz-invariant notiert werden! An Energie- und Impulssatz kommt man nicht vorbei! Liebscher: Theoret Physik 1973 p225ff Das em Feld wird als Kraftwirkung auf Teilchen beobachtet und gemessen, wobei Teilchen elektrische Ladung zugeschrieben werden muss: $\dot{\vec{p}} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ und $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = q\vec{v} \cdot \vec{E}$ also $\frac{\mathrm{d}p^i}{\mathrm{d}\tau} = qF^i_k u^k$ mit $p^i(\frac{E}{c}, \vec{p})$, wobei F^i_k Tensor! Schilcher: Theoret Physik kompakt f Lehramt 2010 p135f;

e] Gehe von Definition der physikalischen Größen aus und transformiere einzeln! Mitter: Elektrodynamik p33ff Ladungsdichte $\rho' = \gamma\rho$, Stromdichte $j'_\parallel = -\rho' v = -\gamma\beta c\rho$ und $j'_\perp = j_\perp = 0$, Gaußgesetz gibt $\sigma'_\parallel = \gamma\sigma_\parallel$, also $E \sim \sigma$, daher $E_\perp = \gamma E_\perp$ und $E'_\parallel = E_\parallel$.

f] Transformationsverhalten des elektrischen Feldes eines Platten-Kondensators ($E = \epsilon_0\sigma$ mit homogener Flächenladungsdichte σ und gegebenenfalls $B = -\mu_0\sigma v$) yyy und das des magnetischen Feldes einer langgestreckten Spule ($B = \mu_0 nI$). Vernachlässigen Sie in beiden Fällen die inhomogenen Randfelder. Griffiths: Elektrodynamics p529; Greiner: Elektrodynamik Bd3 p474 Kondensator und Spule fliegen in z-Richtung: $E_x = \gamma(E'_x + \beta B'_y), E_y = \gamma(E'_y - \beta B'_x), E_z = E'_z, B_x = \gamma(B'_x + \beta E'_y), B_y = \gamma(B'_y + \beta E'_x), B_z = B'_z$. Details siehe Falk: Physik. Zahl und Realität 1990 p100f; **Feynman & Sands: Lectures Bd2 Kap26.3** und **Bell: Sechs mögliche Welten der Quantenmechanik** 2012 p75-89 Wie lehrt man spezielle Relativität? Ř̃afelski: Relativity matters 2017; **Längenkontraktion** ist nicht symmetrisch, denn Parallelität von Stab und Hindernisreihe hängt vom Bezugssystem ab. **Maßstabparadox** Brockhaus Physik 1971 p948; Rebhan: RT und Kosmologie 2012 p51 **kinematische Paradoxa**, **Garagenparadox**, **Skifahrerparadox**. Lösung: In der RT gibt es keine starren Körper. Alle Lageänderungen, die einen Punkt eines Festkörper betreffen, werden auf andere Punkte mit Schallgeschwindigkeit übertragen, die unter c liegen. Siehe die **neueste Ausgabe Greiner Bd3A 1992[3] Kapitel zur SRT von Rafelski! Purcell: Berkeley Physik Kurs Bd2. Elektrizität und Magnetismus** 1976 p118ff Messung des elektischen Feldes in verschiedenen Bezugssystemen; Herlt & Salie: SRT 1978 p127; Lim: Problems p566 Nr5007; Griffiths p525ff Fliegender Platten-Kondensator und fliegende Spule;

Dualer kontravarianter Feldstärketensor:

$$\bar{F}^{\mu\nu} = *F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
F'^{\mu\nu} &= F^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\,\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}\,F^{\alpha\beta} = \Lambda^{\mu'}_{\alpha}\,\Lambda^{\nu'}_{\beta}\,F^{\alpha\beta} \\
&= \Lambda^{\mu'}_{\alpha}\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{\text{no '}\cdot\text{' here!}\} \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\gamma E_x/c & -\gamma E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ \gamma E_x/c & -\beta\gamma E_x/c & -B_z & B_y \\ \gamma E_y/c - \beta\gamma B_z & -\beta\gamma E_y/c + \gamma B_z & 0 & -B_x \\ \gamma E_z/c + \beta\gamma B_y & -\beta\gamma E_z/c - \gamma B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \beta\gamma^2 E_x/c - \beta\gamma^2 E_x/c & -\gamma^2 E_x/c + \beta^2\gamma^2 E_x/c & -\gamma E_y/c + \beta\gamma B_z & -\gamma E_z/c - \beta\gamma B_y \\ -\beta^2\gamma^2 E_x/c + \gamma^2 E_x/c & \beta\gamma^2 E_x/c - \beta\gamma^2 E_x/c & \beta\gamma E_y/c - \gamma B_z & \beta\gamma E_z/c + \gamma B_y \\ \gamma E_y/c & -\beta\gamma E_y/c + \gamma B_z & 0 & -B_x \\ \gamma E_z/c + \beta\gamma B_y & -\beta\gamma E_z/c - \gamma B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -\gamma(E_y/c - \beta B_z) & -\gamma(E_z/c + \beta B_y) \\ E_x/c & 0 & \gamma(\beta E_y/c - B_z) & \gamma(\beta E_z/c + B_y) \\ \gamma(E_y/c - \beta B_z) & -\gamma(\beta E_y/c - B_z) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z/c + \beta B_y) & -\gamma(\beta E_z/c + B_y) & B_x & 0 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & -E'_{x'}/c & -E'_{y'}/c & -E'_{z'}/c \\ E'_{x'}/c & 0 & -B'_{z'} & B'_{y'} \\ E'_{y'}/c & B'_{z'} & 0 & -B'_{x'} \\ E'_{z'}/c & -B'_{y'} & B'_{x'} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die Lorentz-Transformationen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind

$$
\begin{aligned}
E'_{x'} &= E_x & B'_{x'} &= B_x \\
E'_{y'} &= \gamma(E_y - \beta c B_z) & B'_{y'} &= \gamma(B_y + \tfrac{\beta}{c}E_z) \\
E'_{z'} &= \gamma(E_z + \beta c B_y) & B'_{z'} &= \gamma(B_z - \tfrac{\beta}{c}E_y)
\end{aligned}
$$

die inverse Lorentz-Transformationen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gibt $\vec{v} \;\to\; -\vec{v}$

$$
\begin{aligned}
E_x &= E'_{x'} & B_x &= B'_{x'} \\
E_y &= \gamma(E'_{y'} + \beta c B'_{z'}) & B_y &= \gamma(B'_{y'} - \tfrac{\beta}{c}E'_{z'}) \\
E_z &= \gamma(E'_{z'} - \beta c B'_{y'}) & B_z &= \gamma(B'_{z'} + \tfrac{\beta}{c}E'_{y'})
\end{aligned}
$$

$\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind **ein** Feld, mischen bei Transformation, stellen nur gemeinsam das em Feld dar, können i.a. nicht separat betrachtet werden. Daher ist die Einführung des Vierer-Feld-Tensors $F_{\mu\nu}$ nicht nur eine formale Übung zu einer kompakten Schreibweise. Sie ist **der** formale Ausdruck einer tiefliegen Physik. Rebhan: Relativitätstheorie und Kosmologie 2012 Kap5.2 p123 ebook;

Kovarianz oder Form-Invarianz der Gleichungen gegenüber Drehungen – Abstände beliebiger Punkte der geometrisch gedeuteten Objekte bleiben erhalten. Zahlen/Kontostände bleiben unbeeinflusst. Nach **Schrödinger: Struktur der Raum-Zeit** 1963 p5, 15 die einzig sinnvolle Perspektive auf physikalische Größen und Idee der Kovarianz; Galilei-Transformation erhält das Newton'sche Gesetz! Goldstein: Klassische Mechanik 1950 §6.3; Analog zur Forminvarianz der Gleichung $Ax = y$ bei Orthogonaltransformation $S^{-1}A'SS^{-1}x' = S^{-1}y'$ folgt aus $R^{ab} = 0$ und $R^{ab} = \Lambda^a_{c'}\Lambda^b_{d'}\,R^{c'\,d'}$ folgt $R^{c'\,d'} = 0$. Fließbach: ART p21ff; Weinberg: Gravitation and cosmology; Indexrechnung in Nolting Bd4 und allen Intros zur ART Fließbach, Rebhan, Goenner, Schröder und Landau/Lifschitz Bd2 und Ryder: Introduction to General Relativity 2009; Für die **kovariante** oder **lorentz-invariante** **inhomogene Maxwell-Gleichung** (=Tensorgleichung) hat man in einem Inertzialsystem die Tensorgleichung $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ bzw, die **homogene Maxwellgleichung** $\partial^\kappa F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\kappa\mu} + \partial^\mu F^{\nu\kappa} = 0$ und, da die Tensoren nur deshalb Tensoren genannt werden, weil ihre Komponenten **Lorentz-transformierte** gemäß der **linearen Abbildung** $F^{a'\,b'} = \Lambda^{a'}_{\sigma}\Lambda^{b'}_{\tau}F^{\sigma\tau}$,

$j^{\gamma'} = \Lambda^{\gamma'}_{\rho} j^{\rho}$ und

$$\Lambda^{d'}_{\sigma} = \frac{\partial x^{d'}}{\partial x^{\sigma}}, \quad \text{also} \quad \Lambda^{d'}_{\sigma} \frac{\partial \cdot}{\partial x^{d'}} = \frac{\partial \cdot}{\partial x^{\sigma}}, \quad \text{also kurz} \quad \Lambda^{d'}_{\sigma} \partial_{d'} = \partial_{\sigma}, \quad \text{analog} \quad \Lambda^{d}_{\sigma'} \partial_{d} = \partial_{\sigma'}, \quad \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\gamma'}} = \delta^{\nu}_{\beta}$$

gilt $\partial_{\mu'} F^{\mu'\nu'} = \mu_0 j^{\nu'}$. Einstein notiert stattdessen für den leeren Raum z.B. in Einstein: Grundzüge der RT = Meaning of relativity 1954 p134 $\varphi^{is}, s = 0$ und $\varphi_{ik}, l + \varphi_{kl}, i + \varphi_{li}, k = 0$. Kovarianz der Gleichungen ist unmittelbar an die Lorentz-Invarianz der durch sie verknüpften Größen geknüpft, weil Tensorgleichungen stets nur bzgl der zuvor fixierten Transformation gelten. Oben speziell bzgl der den pseudoeuklidischen Abstand unverändert lassenden Lorentz-Transformation. Die **inhomogenen Maxwell-Gleichungen** repräsentiren $\operatorname{div} \vec{D} = \operatorname{div} \epsilon_0 \vec{E} = \operatorname{div} \frac{\vec{E}}{\mu_0 c^2} = \rho$. Also $\operatorname{div} \frac{\vec{E}}{c} = \mu_0 c \rho = \mu_0 j^0$. $\operatorname{rot} \vec{H} - \dot{\vec{D}} = \vec{j}$ und $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$: $\operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\vec{E}}{c} = \mu_0$. Nolting Bd4 p69 $1 = x, 2 = y, 3 = z$: 1. Zeile Feldstärketensor mit $\mu = 0$ als 'Zeit'komponente: $\mu_0 j^0 = \operatorname{div} \vec{E}/c = \frac{1}{c}(\partial E_x/\partial x + \partial E_y/\partial y + \partial E_z/\partial z) = \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30}$, wegen $F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$ und dem **Vierer-Vektorpotenzial** $A^{\mu} = (\varphi/c, \vec{A})^T$. Hertel: Mathematikbuch zur Physik 2009 e-book **Kap6 kurze Tensor-Intro zu SRT p148 ff** n-dimensionale Mannigfaltigkeit werde durch reelle Koordinaten $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ bezüglich der Koordinatenlinien parametrisiert. Wie rechnen sich die neuen Koordinaten bei Wechsel des Koordinatensystems, der Parametrisierung um, wenn die neuen Koordinaten $x^{i'} = x^{i'}(x^j) = f^{i'}(x^1, x^2, \ldots, x^j, \ldots, x^n)$ sind? Änderung von x gibt die Änderung $\partial_j x^{i'} = F^{i'}_j$ bei x'. Die alten Koordinaten sind $x^k = x^k(x^{l'}) = g^k(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{l'}, \ldots, x^{n'})$ bei gegebenen neuen Koordinaten. Änderung von x' gibt die Änderung $\partial_{l'} x^k = G^k_{l'}$ bei x. Hin- und Rücktransformation

$$\partial_{l'} x^k \, \partial_j x^{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{l'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta^k_j \, \delta^{i'}_{l'} = \delta^k_j = G^k_{i'} \, F^{i'}_j$$

Kopylov: Elementary kinematics of elementary particles 1981; **Kuypers: Mechanik Kap24 & 25, 2008**, Sexl & Schmidt: Raum-Zeit-Relativität 1978; Sexl & Urbandtke: Relativität, Gruppen, Teilchen 1992; Sexl & Urbandtke: Relativity, groups, particles. Special relativity and relativistic symmetry in field and particle physics 2001; Schäflein: Einf in die SRT 1981; Sonne & Weiß: Einsteins Theorien 2012; Einstein: Elementare Ableitung der Äquivalenz von Masse und Energie 1946, In: Einstein: Aus meinen späteren Jahren 1950, 1955, p121-130; Noack: **Was ist eigentlich eine 'Ruhemasse'?** Uni Bremen 1996; Robinson: An introduction to special relativity and its applications; **Nolting: Bd4**; Schröder: SRT 2007; Günther: Starthilfe RT 2004; D̃icke: Theoretical Significance of Experimental Relativity 1964; Bohm: The Special Theory of Relativity 1965; Salli & Herlt: SRT; Das: The special theory of relativity 1993; **Bell: Sechs mögliche Welten der Quantenmechanik** 2012 p75-89 Wie lehrt man spezielle Relativität? Rafelski: Relativity matters 2017; d'Inverno: Einführung in die Relativitätstheorie 2009; Liebscher: **The geometry of time** 2005; Landau & Rumer: Was ist die Relativitätstheorie 1962; Fließbach: ART; Super elegante Darstellung für Formalisten ohne Lust am Verstehen und ohne Bezug zu den historischen Quellen mit denen ein Verständnis herstellbar wäre ist Meinel: Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie für Bachelorstudenten 2016; Born: Relativitätstheorie; Neumann: Vorlesungen zur Einführung in die Relativitätstheorie 1922; C Schaefer: Einf in die theoret Physik Bd3.1 1932, 1950 p809-896; Weizel: TB der theor Physik Bd1 1949 p666-674; Liebscher: Kosmologie; Gönner: Einführung in die Kosmologie; Schneider: Einführung in die Extragalaktische Astronomie und Kosmologie 2006 http://www.spektrum.de/universumfueralle

Olbers Paradoxon: Entfernung der Sichbarkeitsgrenze per Wald-Analogie gemäß Überdeckung: Gleißender Sternenhimmel erst bei einem Weltradius von 10^{23} Lj. Diese Kugel enthält 10^{60} Sterne! Aber Sterne leben nur 10^{10} Jahre. Was aber, wenn immer ein neuer Stern entsteht? Geht nicht, wegen der nicht so ablaufenden kosmologischen Evolution und zudem ist das Universum mit 10^{10} Jahren noch zu jung, um die riesige Kugel auszufüllen. Lang: Astronomical Formula; Kippenhahn, Licht vom Rande der Welt, bringt noch die Rotverschiebung ins Spiel. Smith: Chaos. A very short introduction 2007 Fournier-Universum p78, p120ff; Jaki: The paradox of Olbers paradox 1969;

Masse des Unversums = 5% nichtbaryonische Materie + 68% Dunkle Energie + 27% nichtbaryonische Dunkle Materie. Zwicky: Dunkle Materie = warme + kalte = **WIMPs**=Schwächlinge gehen unbeeinflusst durch die

Erde bei einer Masse von bis zu zwei Goldatomen $m_{WIMP} \in [10, 10^4]$ m_p, wobei $m_p = 938$ MeV oder **Axionen** $m_{Axion} \in [10^{-6}, 10^{-3}]$ eV/c$^2 \ll m_e = 511$keV/c^2 bei einer Axion-Dichte $n_A \in [10, 10^{12}]$cm^{-3} oder **schwere sterile Neutrinos** oder **MACHOs** = Massive Astrophysical Compact Halo Objects = Braune Zwerge, alte, abgekühlte Sterne, Weiße Zwerge, Schwarze Löcher. Kuster: Axions. Theory, cosmology, and experimental searches 2008, 2010 = LNP741; PhysJ21 2022 H7 p40-43; SdW2019H3 p13ff Axionenfalle. **Cosmology** considers questions such as: how was the Universe born? What were conditions like in the first seconds? What is the nature of dark matter? And why is the expansion of the Universe accelerating? Das kosmologische Gewebe besteht morphologisch aus 4 verschiedenen geometrischen Typen: relatively compact clusters, filaments, walls/pancakes, and nearly empty voids. Unklar ist der jeweilige Anteil der in ihnen enthaltenen Massen. Shandarin, Univ Kansas: Tessellation Approaches to Analysis of Cosmic Web. Behroozi: Mit selbstkonsistenten, halbemp Modellen, in die die beobachteten galaktischen Sternmassen und Sternbildungsraten eingehen kann man einen Zusammenhag zwischen den Galaxien- und Halo-Eigenschaften zwischen z=0 bis z=15 gewinnen. Key results include constraints on star formation rates as a function of halo mass, average star formation histories for galaxies from z=0 to z=8, and the buildup of the intracluster light as a function of halo mass and time. We also examine the connections between halo growth and galaxy growth, and we find that the universe's star formation history since z 4 can be explained by a star formation efficiency which is strongly dependent on mass but only weakly dependent on time. We discuss how it is possible to physically extend the connection between galaxies and halos to very high redshifts, allowing predictions for what the James Webb Space Telescope will be able to see out to z=15.

Mit den Beobachtungen von Planck, SPT, PanStars, DES, Euclid, LOFAR, eRosita etc. hat man spektral und räumlich gut aufgelöste Messungen, die eine Bewertung der Strukturbildungs-Simulationen gravitativer, hydrodynamischer kosmologischen Modelle baryonischer und dunkler Materie unter Berücksichtigung Sternbildung, chemischer Anreicherung (chemical pollution by **SN Ia = der Distanz-Indikator neben Rotverschiebung**, SN II and asymptotic giant branch (AGB) winds), Transportprozesse wie Wärmeleitung, der AGN-Rückkopplung unter Berücksichtigung der in ihnen sich entwickelnden Schwarzen Löcher und Magnetfeldern von 10^{12} Galaxien für Volumina auf der Gpc^3-Skala erlauben. **Magneticum Pathfinder Simulations**. Auflösung 30kps.

1 pc = 3.262 Lj = $2.087 \cdot 10^{13}$ km, 1 Lj = $9.46 \cdot 10^{12}$ km = 63 240 AE

Wiktor/Viktor Hambarzumjan/Ambarzumjan 1908 Tiflis-1996 Burjakan. 1947 Sternassoziationen legen eher Fragmentations- als Nebularhypothese nahe! siehe Festvorträge der Wissenschaftlichen Konferenz der Akademie anlässlich des 275. Akademiejubiläums 1976 und lieferte wesentliche Arbeiten zum Sternenaufbau, zu Novaausbrüchen und instabilen galaktischen Kernen. Thomas White 1711-1786: An original theory or a new hypothesis of the Universe 1750 Sterne inhomogen verteilt! Milchstraße. Kant 1724-1804: Naturgeschichte des Himmels mit Widmung FII 1755; Lambert 1728-1777: Hierarchie von Weltinseln, Jackisch & Treder: Kosmologische Briefe 1979; Herschel 1738-1822 Stellarstatistik mit Helligkeit als Entfernungsmaß mit Annahme = alle Sterne gleich hell. Chandrasekhar: On a new theory of Weizsäcker on the origin of the solar system, RMP18 1946 94-102; Scheiner: Der Bau des Weltalls 1901; Ambarzumjan: Die Sternassoziationen und die Entstehung der Sterne 1951; Ambarzumjan: Das Weltall 1953; Ambarzumjan, Mustel, Severnin, Sobolew: Theoretische Astrophysik 1952, 1957 Sternatmosphären, LTE. Sternspektren, Sonnenatmosphäre, Planetare Nebel, Novae, Bau der Sterne, interstellare Materie; Ambarzumjan: Philosophische Probleme der modernen Kosmologie 1965; Ambarzumjan: Struktur und Formen der Materie 1976; Ambarzumjan: Probleme der modernen Kosmogonie 1980; Kosmologie = Weltaufbau aus naturwiss Sicht. Kosmogonie = Weltaufbau auch aus mythologischer Sicht. Sandage: Hubble-Atlas of galaxies 1961; Hubble: Das Reich der Nebel 1938; M̃urdin: Flammendes Finale. Spektakuläre Ergebnisse der Supernovaforschung 1991; S̃tapledon: Der Sternenschöpfer 1982; Will: Und Einstein hatte doch recht 1989; Elsässer: Weltall im Wandel. Die neue Astronomie 1985; Unsöld & Baschek: Der neue Kosmos 1991[5], 2015[7]; König & Binnewies: Bildatlas der Galaxien 2016; **Weltraumteleskope:** Kopal: Telescopes in space 1968; Fischer & Duerbeck: Hubble 1995; Fischer & Duerbeck: Das Hubble-Universum. Neue Bilder und Erkenntnisse 1998; Leverington: New cosmic horizons 2000; Stakem: Space Telescopes 2018; English: Space telescopes 2017; Schielicke: Astronomy with large telescopes from ground and space 2002; Lorenzen: Hubble. Atemberaubende Bilder aus dem All 2019; Jefremow =

Efremov: In die Tiefen des Weltalls 1975, 1990[2]; **Veron & Engel: Die Quasare** 1968, 1975; Extragalaktik seit 1924: Galaxien sind die größten Sternansammlungen. Galaxie = Atom, Haufen/Cluster/lokale Gruppe = Molekül. James Webb Space Telescope 2012;

Zwischen Sternen ist deutlich mehr Platz als zwischen Galaxien:

$$10^{-6} = \frac{10^6}{10^{13}} = \frac{\varnothing_*}{|*,*|} << \frac{\varnothing_\S}{|\S,\S|} = \frac{25}{2500} = 10^{-2}$$

Etwa 260 Early-type-Galaxien (K-Band) mit 10^{10} bis 10^{12} Sonnenmassen im Würfel mit Kantenlänge 40 Mpc. 1 pc = 3.262 Lj = $2.087 \cdot 10^{13}$ km, 1 Lj = $9.46 \cdot 10^{12}$ km = 63 240 AE

1 pc= $3 \cdot 10^{13}$km proxima centauri
750 pc 100 hellste Sterne am Himmel
1 kpc Abstände in Milchstraße
10 kpc Abstand vom Zentrum
25 kpc Scheibendurchmesser
30 kpc Halodurchmesser
670 kpc Andromeda-Abstand
1 Mpc ... 5 Gpc Distanzen zwischen Galaxien. Derzeit laufen archäologischen Studien an Galaxien der lokalen Gruppe bei 10% des Weltalters. Abschätzung der **Metallizität** über den Fit von Sternspektren. The metal content of a galaxy is one of the most important properties used to distinguish between viable evolutionary scenarios and strongly influences many of the physical processes in the ISM. Hyaden-Alter: 625 Myr und NGC 6811-Cluster-Alter 1 Gyr. **Gyrochronologie** = empirische Methode der Astrophysik zur Altersbestimmung von Sternen mittlerer und niedriger Masse mittels ihrer Rotationsperiode. Sterne mit konvektiven Photosphäre erzeugen globales Magnetfeld. Sternwind beschleunigt ionisierte Materie von dem Stern fort, und elektrische Ladungsträger des Sternwinds sind im Magnetfeld eingefroren. Folgen den Magnetfeldlinien, die aufgrund der Rotation des Sterns ebenfalls um den Stern rotieren. In der Folge muss der Stern die Materie aus dem Sternwind mitschleppen und dies bremst im Gegenzug die Rotation des Sterns. Entsprechend kann in Sternhaufen eine mit dem Alter abnehmende mittlere Rotationsperiode der Sterne beobachtet werden. Es ist erforderlich, die Rotationsperiode von mindestens 25 Sternen zu messen. Aus der Verteilung der Perioden kann das Alter mit einer Genauigkeit von um die 30 Prozent bestimmt werden. Die messbare Altersspanne beträgt circa 20 Millionen bis 10 Milliarden Jahre, wobei die Genauigkeit bei einem Alter von 100 Millionen Jahren besser wird. Bei jüngeren Sternen kann eine Akkretion aus einer zirkumstellaren Scheibe noch zu einer Beschleunigung der Rotation der Sterne führen. Ein bedeutender Fehler in der Gyrochronologie sind nicht entdeckte Doppelsterne, die aufgrund gebundener Rotation erheblich schneller rotieren als Einzelsterne mit dem gleichen Alter. Delorme, Cameron, Hebb, Rostron, Lister, Norton, Pollacco, West: Stellar rotation in the Hyades and Praesepe: gyrochronology and braking timescale. In: Astrophysics. Solar and Stellar Astrophysics. 2011, arXiv:1101.1222v1; Karkoschka: **Atlas für Himmelsbeobachter:** Mit 250 Objekten auf 50 Sternkarten des ganzen Himmels; Ronald: Fernrohr-Führerschein in 4 Schritten. Eine ... Anleitung für Fernrohr-Besitzer; Zenkert, Feiler: Drehbare Himmelskarte. Zu jeder Stunde wissen, wo die Sterne stehen; Herrmann: Das Sternguckerbuch 1981; Herrmann: Geschichte der Astronomie von Herschel bis Hertzsprung 1973; Herrmann: Astronomie. Sekundarstufe I 1994; Herrmann: Astronomiegeschichte 2004; Herrmann: Die große Kosmos Himmelskunde 2007; Smith & Jacobs: Introductory astronomy and astrophysics 1973; Herrmann: Welcher Stern ist das? Sterne und Planeten entdecken und beobachten 2014; Herrmann & Konstantinov: Planeten, Sterne, Galaxien. Ein Streifzug durch das Weltall 2014; **Herrmann: Entdecker des Himmels** 1978, 1990; Schittenhelm: Sterne beobachten in der Stadt Höfele, Laux & Kalff: Sonne, Mond und Sternenkinder. Mit der Mondmaus in Spielen, Liedern und Geschichten die Phänomene des Himmels erforschen 2000; Jung: Kita aktiv. Sonne, Mond und Sterne - das Weltall begreifen 2000; Physik und Himmel: Wien'sches Verschiebungsgesetz: Sternfarben rot = 3000^oC, gelb = Sonne= 6000^oC, blau = 25000^oC, Fraunhofen-Linien. Kaler: Sterne und ihre Spektren. Astronomische Signale aus Licht 1994; Herrmann: Vom Schattenstab zum Riesenspiegel 1978; Herrmann: Kosmische Weiten. Geschichte der Entfernungsmessung im Weltall 1981; Drexel: Prominente in Potsdam 2017 Potsdamer Wohnort und Friedhofsplatz. Burkhard Heim: 1925-2001 Roonstr 14; Dick & Fritze: 300 Jahre Astronomie in Berlin und Potsdam 2000; **Julius**

Scheiner: Populäre Astrophysik 1908, Graff 1922[3]; Lemke ed: Die Astronomische Gesellschaft 1836-2013, 2013 p134ff Evaluierung ZIAP, p135, p137 Kurths AGNLD, p146 AOP; Schielicke: Wer zählt die Völker, nennt die Namen ..., Astronomische Gesellschaft und ihre Mitglieder 1836-2013; Roth: Astronomiegeschichte. Astronomen, Instrumente, Entdeckungen 1998; R̃iekher: Fernrohre und ihre Meister. Eine Entwicklungsgeschichte der Fernrohrtechnik 1957, 1990; Vollmer: Die Grenzen des Auges, PJ22 2023 H3 p28-33; H̃amel & Keil: Die Meister und die Fernrohre. Das Wechselspiel zwischen Astronomie und Optik in der Geschichte 2007; Binnewies, Steinicke, Moser: Sternwarten. 95 astronomische Observatorien in aller Welt 2008; Herrmann: Geschichte der Astronomie 1978[2] p232f Lilienthal/Bremen Bessel 1782-1813, Königsberg 1819-1945, Dorpat/Tartu/Estland FGWilhelm Strue 1824, Pulkowo 1839-1945: Bjurakan 34km NW von Jerewan. Kazan. M̃üller: Sternwarten: Architektur und Geschichte der Astronomischen Observatorien 1978; Marx & Pfau: Sternwarten der Welt 1979; M̃üller: Sternwarten der Welt. Architektur und Geschichte der Sternwarten von den Anfängen bis ca 1950, 1992; S̃teinicke, Binnewies: Reiseführer Astronomie Deutschland. Erleben Sie über 300 Sternwarten, Institute, Museen und Planetarien zwischen Glücksburg und der Zugspitze 2017; Beekman: Geschichte der Berliner Sternwarte, SuW27 1988 p642-647; Entwicklung der Geo- und Kosmoswissenschaften im Berliner Raum. Kurt-R. Biermann: Zum Zusammenhang von Geo- und Kosmoswissenschaften bei Alexander von Humboldt, K.-H. Schmidt: Astronomie seit der Gründung der Berliner Sternwarte bis zur Gegenwart, H.-J. Treder Die Kosmologie von Lambert bis Einstein, Kautzleben: 125 Jahre Geodäsie und Geophysik im Berliner Raum 1989; Focus Earth = Fokus Erde. **Von der Erdvermessung zum System Erde**. Helmholtz-Zentrum Potsdam, Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ 2017; **R̃einhard Buthmann: Versagtes Vertrauen. Wissenschaftler der DDR im Visier der Staatssicherheit 2020** 1179 Seiten; **Herrmann & Hoffmann eds: Die Geschichte der Astronomie in Berlin** 1998; Arlt: Grabstätten auf Potsdamer Friedhöfen 1988; Etzold et al.: Jüdische Friedhöfe in Berlin 1988, 1991[4]; Melcher: Weißensee, ein Friedhof als Spiegelbild jüdischer Geschichte in Berlin 1987 Leo Baeck, Eugen Goldstein, Joseph Weizenbaum, Georg Honigmann, Stefan Heym, Günter Kunert, Orenstein & Koppel, Berger-(Bilfinger); Borgmann & Strauch: Der Jüdische Friedhof in Berlin-Weißensee. Ein Wegweiser zu Grab- und Erinnerungsstätten 2003; Strauch: Adagio - Feld O: Biographische Recherchen auf dem Jüdischen Friedhof Berlin-Weißensee 2008; M̃ende & Vösgen: Der Jüdische Friedhof in Berlin-Weißensee: Ein Wegweiser zu Grab- und Erinnerungsstätten 2016; Zott & Vogt: Berlingeschichte im Spiegel wissenschaftshistorischer Forschung. 300 Jahre Wissenschaft in Berlin. Erinnern heißt leben, DEFA-Dok 1988; Im Himmel, unter der Erde Dok-Film 2011; Materialien der wissenschaftlichen Konferenz vom 9.-11. April 1987 anläßlich der 750-Jahr-Feier der Stadt Berlin 1987; **Laitko, Fabian, Girnus, Grau, Hoffmann, Kant, Schlicker, Vogt, Altner: Wissenschaft in Berlin. Von den Anfängen bis zum Neubeginn nach 1945**, 1987; Kurfürst Friedrich III(FI) 1700 Sophie Charlotte 1668-1705 Leibniz Akademie, die sich durch das Kalendermonopol finanziert. Gottfried Kirch 1639 Guben -1710 in Privatsternwarten, 1711 Sternwarte Dorotheenstr, Bernoulli 1744/1764-1787/1807, Bode 1747/1787-1826, Encke 1791/1825-1865, 1835 Schinkel-Neubau nach AvHumboldt, Lindenstr/Hallesches Tor, 1846 Galle Neptun, **Telegraphenberg 1832-48** FWIV opt Telegraf Berlin-Koblenz. Wilhelm Foerster 1832/1865-1903/1921, **Goldstein-Labor in Sternwarte**: 1886 Eugen Goldstein 1850-1930 Kanalstrahlen, 1888 Küstner Polhöhenschwankung, **Wilhelm Foerster**, Gustav Kirchhoff, Arthus Auwers Denkschrift 1871 an FIII **a] Bau AOP** auf zwecks Spektralanalyse auf Telegraphenberg. Liebscher: Das Haupt des Teufels überm Telegraphenberg, In: Grabner & Kiesant: 1000 Jahre Potsdam. Das Buch zum Stadtjubiläum mit dem Festprogramm 1992 p163-165 Bedeckungsveränderlicher 2.1-3.4 mag mit Periode 2.87 d Algol = Dämon = Teufelsstern im Perseus 90 Lj entfernt; **Hermann Carl Vogel** 1841/1874/1882-1907, Sternphysik, fotograf Messung Radialgeschwindigkeit, 1881 Michelson, Assistent Wilhelm Oswald Lohse 1845-1915, 1896 Johannes Wilsing und Julius Scheiner scheitern beim Nachweis solarer Radiostrahlung. Gustav Spörer im Turm Militärweisenhaus in Lindenstr. 1899 Gr Refraktor WII, Johannes Franz Hartmann 1865/1896-1908/1936 1904 ruhende Ca-Linie → ISM und stellare Ca-Linie → Oberflächenaktivität, **Karl Schwarzschild** 1873/1909-1916, **Karl Hermann Gustav Müller** 1851/1917-1921/1925, Walter Hassenstein 1883/1919-1949/1961 am Gr Refr, Sohn Bernhard Hassenstein 1922-2016 Biologische Kybernetik 1965, 1977; **Hans Ludendorff** 1873/1921-1939/1941, Erwin Finley-Freundlich 1885/1913-1933/1964 Nachweis der gravitativer Rotverschiebung wegen

durch Konvektion verbreitenen Linien bestenfalls am Sonnenrand. Nachweis per Kaliumlinie, die außerhalb der Konvektion entsteht gelang 1971, PhysBl28 1972 226; **Hentschel: Der Einstein-Turm** 1992; 3sec Bronzehirn beim Einsteinturm. Kienle: Walter Grotrian 1890/1922-1954, ab 1946 Leiter Einsteinturm, PhysBl10 1954 271-272; G. Rüdiger: GROTRIAN; Nörtershäuser: Emissionslinien des Eisens, PJ22 2023 H3 p22f; Grotrian: Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen 1928; Gamow: Sonne, Stern unter Sternen 1964 p98 Young und Harkness sehen 1869 bei Sonnenfinsternis Coronium-Emissions-Linie = verbotene grüne Emissionslinie FeXIV = Fe^{13+} bei 530.3 nm in der Korona. Grotrian: Naturwissenschaften 27 1939 p214 es handelt sich u.a. um ${}_{26}Fe^{13+}$-Linien! Termschema in Grotrian: Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen 1928; Bengt Edlen findet sie auch im Labor Z f Astrophysik 22 1942 30-84; Grunwald sieht die Linie 1887; Vogel: freier Blick auf unsere Sonne, PJ22 2023 H3 p70f; Minnaert: Über die Ziele der Sonnenphysik PhysBl10 1954 433-435; Lochte-Holtgreven: Wie kommt das Sonnenlicht zustande? PhysBl10 1954 445-451; Gamow p76, 91 Granulen-Fotos per Stratoscope 1957 unter Martin Schwarzschild. **Hans Kienle** 1895/1939-1944/1975, Bekenntnis für Hitler 1933, Kienle: Vom Wesen astronomischer Forschung 1948, 1954-2014 Tremsdorf, Albrecht Krüger, Auras, Gottfried Mann → LOFAR Bornim. LOFAR = Low Frequency Array: 30 and 240 MHz. **Johann Wempe** 1906/1944-1980, Helm & Joachimi: Das große Buch über den Fläming - Das schöne Land zwischen Elbe und Dahme 2010;

b] Umzug nach Park Bbg 1906 Paul Gutnick Probebeobachtung, Friedrich Wilhelm Struve 1793/1813-1838/1839-1862/1864 Altona, Dorpat, Pulkowo. Otto Struve 1819/1839-1890/1905 Dorpat, Pulkowo, Karlsruhe. Ludwig Struve 1858-1920 Dorpat, Sewastopol. Otto Struve 1897-1963 Charkow, Chicago, Berkeley. **Hermann Struve** 1854/1877-1895-1903/1904-1911/1912-1919/1920 Pulkowo, Königsberg, Berlin, Neubabelsberg, **Georg Struve** 1886/1919-1921/1933 Pulkowo, Neubabelsberg, DNVP, beide liegen auf Friedhof Klein-Glienicke[24] südlich B1, Bau 1911-1913, Instrumente 1913/14, Goldstein-Labor 1850-1930 im Keller der Sternwarte-Neubabelsberg 1913-1930; **Petzholtz: Klein-Glienicke** 2018; Krüger: Steinstücken. Neubabelsberg 2009 p74ff An der Sternwarte 16; **Paul Guthnick** 1879/1921-1946/1947 Fotometrie von Sternen und veränderlichen Sternen. 1947 AdW, 1949 Sternwarte Bbg, Felber Kalenderrechnung, **Karl-Heinz Schmidt: Zur Astronomie zwischen 1945 und 1990 in und um Potsdam**, In: Herrmann & Hoffmann eds: Die Geschichte der Astronomie in Berlin 1998 p84-103; **Peter Notni: Nachkriegsgeschichte Sternwarte Bbg**, In: Dick & Fritze eds: 300 Jahre, 2000 p169-176; Kienle-Schüler Hinderer 1912/1934-1956/1991 Beobachter in Bbg, Kahrstedt 1897/1956-1961/1971; Opt. Bahnüberwachung der Taumelbewegung der Trägerrakte von Sputnik 3-Beobachtung 1966 Institut f relativistische und extraterrestische Forschung, statt klassischer, beobachtender Astronometrie! Hoffmann & Schlattmann: Prinzipien statt Orthodoxie. Treder zur Prinzipienfragen und Einstein, PhysJ21 2022 H11 p25-39; Horst Kant: Treder-Biographie, Sitzungsberichte Leibniz-Sozietät der Wiss zu Berlin 139/140 2019 173-183, https://leibnizsozietaet.de/wp-content/uploads/2019/08/14-Kant-2.pdf **Hans-Jürgen Treder** 1928/1966/1969-1982ZIAP/-1992/2006, IM Forscher, 1982-1991 Einstein-Lab f theoretische Physik, Bbg/Caputh, Rechenzentrum mit 1963 ZRA1, dann R300, 1990 DEC5830. 1972 Kosmische Magnetfelder Krause, 1975 Zentralinstitut für Astrophysik =ZIAP. 1987 Bereich IV Datenaustausch C-U Wagner kam von Magnetosphärenphysik 1935-1989, dann Hilmar Lorenz. **Karl-Heinz Schmidt** 1932/1982-1990/2005. **Dierck-Ekkehard Liebscher** 1940/1990-1992. Rädler 1935/1992-1998/2020;

Zwischen Sternen ist deutlich mehr Platz als zwischen Galaxien:

$$10^{-6} = \frac{10^6}{10^{13}} = \frac{\varnothing_*}{|*,*|} << \frac{\varnothing_\S}{|\S,\S|} = \frac{25}{2500} = 10^{-2}$$

Etwa 260 Early-type-Galaxien (K-Band) mit 10^{10} bis 10^{12} Sonnenmassen im Würfel mit Kantenlänge 40 Mpc.

Gaia = „Globales Astrometrisches Interferometer für die Astrophysik. Kartographische Erfas-

[24] Hier liegt auch der Kunsthistoriker Friedrich Sarre, der Pascha Enver vor und nach des von ihm geleiteten Völkermords an den Armeniern 1915/16 beherrbergte. Brücke nach Babelberg = Schlossbrücke, zu Ehren des Genozids an Armeniern ab 1915 Pascha Enver Brücke. Westliche Brücke über Teltowkanal ist Parkbrücke. B̃ahder: ENVER PASCHA Kampf und Tod in Turkistan 1943. Õkay: Pascha Enver, der große Freund Deutschlands 1935. Freund Mehmed Talât Pascha. Kieser: Talât Pascha: Gründer der modernen Türkei und Architekt des Völkermords an den Armeniern. Eine politische Biografie 2020; Gottschlich: Beihilfe zum Völkermord Deutschlands Rolle bei der Vernichtung der Armenier 2015.

sung von 1 % = Milliarde Sterne unserer Milchstraße astrometrisch, photometrisch und spektroskopisch. Gaia ist Nachfolger der Hipparcos-Mission 1989–1993: Sternkatalog mit über 1000 Sternen erstellt und Veränderlichkeit der Sternörter entdeckt. Gaia-Hypothese, Atmosphären von exo-Planeten, Wie sind die ersten Galaxien, also die Vorfahren unserer Milchstraße, entstanden? Räumliche Verteilung, Rotationskurven, Struktur, Elementhäufigkeiten, Kinematik und Dynamik verschiedener Sternpopulationen geben Aufschluss zur Milchstraßenentwicklung. Ryan Leaman: accretion history of the Milky Way (MW). a] disk heating = traced by an increase in stellar velocity dispersion of the disk stars of different ages. b] infalling satellite galaxies, c] populations of Globular Clusters that the accreted satellite galaxies might bring with them to the MW's stellar halo. Key to this exercise are new semi-analytic estimates for the energy injection of satellites an orbits of arbitrary circularity, and an empirical estimate for the velocity dispersion of the dynamically hot gas that stars in the MW disk might be born out of at high redshift. The observed Globular Cluster populations and MW disk structure, are consistent with the MW experiencing a merger history similar to those in cosmological simulations, including one or two 1:10 mass ratio accretion events - provided that the MW's gas disk was already dynamically hot at early times from internal processes (e.g., supernovae feedback and gravitational instabilities). **Rotationskurve einer Galaxie** $v_\varphi(\rho)$ steigt erst linear an. Weist auf homogene Massenverteilung hin. Arianna DiCinto, Dark Cosmology Center, Copenhagen: DC14. Dunkle Materie-Halos scheinen Galaxien zu beherrbergen. Starre Rotation, weil sich gravitative Anziehung und Fliehkraft sich gemäß $F_{\text{grav}} \propto \rho = m\rho\omega^2$) ausgleichen, um dann konstant zu bleiben, als ob lineare Scherung die Außenschalen mitschleppt. Dunkle Materie = WIMPs = Weakly Interacting Massive Particles oder gemäß Mordehai Milgrom, 1983, das Newtonsche Gravitationsgesetz modifizieren! MOND-Hypothese = MOdifizierte Newtonsche Dynamik. Kippenhahn: Kosmologie. Basics 2011; Conselice: Die unsichtbare Hand des Universums, SdW April 2007 p32-39 **Dunkle Energie** = wahrscheinlichste Ursache der homogen beschleunigten Expansion des Alls, auf die Beoabachtungen ferner Supernovae und Messungen kosmischen Hintergrundstrahlung hindeuten. **Filamentartige Strukturen** in großräumiger Materieverteilung. Senkte die Häufigkeit galaktischer Zusammenstöße und fror so die relative Typhäufigkeit ein. Pauldrach: Das Rätsel der beschleunigten Expansion des Universums. Dunkle kosmische Energie 2010; Silk: Das fast unendliche Universum 2006; Kirshner: The Extravagant Universe. Exploding Stars, Dark Energy, and the Accelerating Cosmos 2004;

Berry: Kosmologie und Gravitation. Eine Einführung 1974; 1990; Kippenhahn: Kosmologie. Basics 2011; Krauss: Ein Universum aus Nichts 2013; Vaas: Hawkings Kosmos einfach erklärt 2013; J. Seldowitsch: Das Weltall war heiß, PhysBl 24 1968 p66–68; Hintergrundstrahlung als Relikt des heißen Urknalls und Ausdehnung des Alls. Nach 1 sec 500 kg cm^3. Auf 5 Protonen kam 1 Neutron. Nach 100 sec 50 g cm^3. Nach 100.000 Jahren sank T unter 4000 ^{o}K und es gab neutralen H. Das All ist isotrop und homogen. Wir habe keine Sonderstellung. All entwickelt sich. PhysJ 13 2014 H10 p20f. Urknallstützen: A. Hintergrundstrahlung, B. Inhomogenitäten in 3-K gemäß COBE und WMAP, C. Produktion der ersten leichten, **primordalen** Elemente von ^{1}H, ^{2}H, ^{3}He, ^{4}He bis ^{6}Li (es wird 1000 mal mehr als erwartet, beobachtet!), ^{7}Li (es wird 4 mal weniger als erwartet, beobachtet!) die im rasch expandierenden Universum zwischen der 3. und 10. Minute in einer Folge schneller Fusionsprozesse zwischen p und n entstanden sind. Danach war die Dichte so gesunken, dass die Teilchen entkoppelten und keine weiteren Kernreaktionen mehr stattfinden konnten, weil Massen 5 und 8 nicht stabil. Erst 400 10^6 Jahre später in der ersten Sternenegeneration (Population II = geringeren Metallizität) war Dichte zur Bildung von C und O hoch genug. Komplexes Reaktionsnetzwerk (n,p,d,t, He, Li, Be) mit richtigen Wirkungsquerschnitten löst Diskrepanz. Weinberg: Die ersten drei Minuten. Der Ursprung des Universums 1977; Börner, Ehlers, Meier eds: Vom Urknall zum komplexen Universum. Die Kosmologie der Gegenwart 1993 Schücking, Rees, Schopper, Hoyle, Appenzeller, Börner, Sciama, Ehlers; **Kosmologisches Standard-Modell** basiert auf ART. Konsistenz auf großen Skalen erfordert Inflation, cold or warm dark matter particles and dark energy! Dual-Dwarf-Galaxy Theorem-Problem. Pavel Kroupa. The arrangement of satellite galaxies in rotating disk-like vast near-polar structures around both, the Milky Way and Andromeda, support this conclusion. Ausweg ist Milgrom mit scale-invariant dynamics? Weinberg, Mortonson, Eisenstein, Hirata, Riess, Rozo: **Observational Probes of Cosmic Acceleration**, http://arxiv.org/abs/1201.2434. Hobby-Eberly-Telescope Dark Energy Experiment (HETDEX); http://www. physik. uni-bielefeld. de/~dschwarz/

http://www. itp. uni-hannover. de/saalburg/lecture_notes. php; Sellentin & Bartelmann: Was das Universum auseinandertreibt SdW Aug 2014 p38-47; Matin: Everything You Always Wanted To Know About The Cosmological Constant Problem (But Were Afraid To Ask) (or arXiv:1205.3365v1 [astro-ph.CO] ; Amendola & Tsujikawa: Dark energy 2010; **Deutung der dunklen Energie**: 1. Raum ist von **dunkler Materie** durchsetzt, die wie Hefe als Treibmittel wirkt. $\rho_0 = 0.20\text{-}0.56$ GeV/cm^3 gemäß Iocco: Dark Matter distribution in the Milky Way: microlensing and dynamical constraints 2011 2. Gleichungen der ART müssen modifiziert oder auf höhere Dimension erweitert werden. Higher Dimensional Gauss-Bonnet Cosmology: Dabei kann sich der Skalenfaktor in der unsichbaren Dimension von dem in der sichtbaren unterscheiden. Es muss dann kein Inflationsfeld angenommen werden. **Bimetrische Gravitationstheorien** unterscheiden die beiden Anteile Geometrie der Raum-Zeit/ Schwere und einen weitere metrischer Tensor, der die flache Raumzeit/Trägheitskräfte beschreibt. Rosen 1940. Schuller, Frederic P. Geometrie des expandierenden Universums. http://www.mpg.de/439232/forschungsSchwerpunkt1 Klassische Raumzeitgeometrien sind zu eng gefasst, um **Dunkle Energie** zu verstehen. Area Metrik! Theorie hyperbolischer Polynome. Im vertrauten Falle der Maxwellschen Feldgleichungen und einer metrischen Geometrie ist die Hyperbolizität des besagten Polynoms genau dann gegeben, wenn die Metrik Lorentzsche Signatur besitzt. Hyperbolizität ist also die Verallgemeinerung der Lorentzschen Signaturbedingung auf beliebige Geometrien. Tatsächlich lassen sich alle Konzepte betreffend die Kausalitätseigenschaften der Raumzeit und der Kopplung von Punktteilchen konzeptionell zwingend auf verallgemeinerte Geometrien erweitern. Allein die Hyperbolizität impliziert dann beispielsweise immer noch, dass die massiven Impulse einen konvexen Kegel bilden. Auf dieser wichtigen Eigenschaft fußt auch die Erkenntnis, dass es keine klassische Raumzeitgeometrie geben kann, in der Photonen instabil sind. Während sich also alle Konstruktionen der Lorentzschen Differentialgeometrie aufgrund der Hyperbolizität verallgemeinern, so erfordert dies doch den Einsatz wesentlich ausgefeilterer Mathematik als im metrischen Fall. Die dadurch gewonnenen Erkenntnisse werfen auch ein detaillierteres Licht auf die konzeptionelle Struktur der Raumzeitgeometrie im vertrauten Falle einer metrischen Geometrie. Insbesondere wird klar, dass vom höheren Standpunkt aus gesehen allzu direkte Verallgemeinerungsversuche der Raumzeitgeometrie zu komplexeren Strukturen scheitern müssen. Eine Schlüsseleinsicht ist, dass die Geometrie nur im Impulsraum zwingend eine polynomiale Struktur annehmen muss. Raumzeit im Kotagenzialraum wird also von einem hyperbolischen Polynom bestimmt. Dieses induziert über Gauss-Abbildung masseloses Teilchen und YYYYYYY Aufbauend erhält man dann die dynamische Theorie der verallgemeinerten Raumzeit durch das Auffinden einer Darstellung der Deformationsalgebra von Hyperflächen, in enger Analogie dazu, wie es im metrischen Falle von der Schule um Wheeler gezeigt wurde. Die daraus folgende kanonische Gravitationstheorie besitzt per Konstruktion ein gut gestelltes Anfangswertproblem, ist also selbst wieder prädiktiv. Fordert man dann weiter, dass klassische Elektrodynamik in einer solchen Raumzeit möglich sein soll, so erhält man eine ausgezeichnete Dynamik einer so genannten flächenmetrischen Geometrie [1]. Dieses Ergebnis gibt damit den einzig konsistenten Ansatzpunkt für die Erklärung beobachtbarer Phänomene [2,3] im Rahmen einer klassischen Gravitationstheorie. Zur Vollendung dieses Programms werden derzeit die Konsequenzen dieser Einsichten für die möglichen Theorien der Materie auf solchen Raumzeiten untersucht. Sollte die resultierende Gesamttheorie von Raumzeit und Materie dann doch im Widerspruch zu Beobachtungen stehen, so wäre damit allerdings gezeigt, dass es keine klassische Erweiterung der Allgemeinen Relativitätstheorie geben kann, die prädiktiv ist. Alexander Wiegand: Minkowski functionals of the SDSS Luminous red galaxies;

Es ist Zeugnis für die Mächtigkeit des uns zur Verfügung stehenden modernen mathematischen Apparats, dass trotz nur sehr geringer gesicherter Information bezüglich einer aus der Quantengravitation oder der Beobachtung eines beschleunigt expandierenden Universums zu ziehender Schlüsse doch definitive und weitreichende Aussagen über die Struktur der denkbaren klassischen Raumzeiten zu treffen sind. Raffaele Punzi, Frederic P. Schuller, Mattias N.R. Wohlfarth: **Area metric gravity and accelerating cosmology** arXiv:hep-th/0612141v1 2006

1 R. Punzi, F. P. Schuller, M. N. R. Wohlfarth: Geometry for the accelerating universe. Physical Review D 76, 101501 (2007). 2 R. Punzi, F. P. Schuller, M. N. R. Wohlfarth: Propagation of light in area metric backgrounds. Classical and Quantum Gravity 26, 035024 (2009). 3 R. Punzi, F. P. Schuller, M. N. R. Wohlfarth:

Massive motion in area metric spacetimes. Physical Review D 79, 124025 (2009). Klassisch Teilchen und Felder. QM: Es gibt nur Quantenfelder. Hermann Weyl Space-Time-Matter 1952: §25 p203: Felder brauchen keine Materie, sondern Materie ist ein Abkömmling des Feldes. Weyl ist durchaus bereit, den Materiebegriff zu erweitern, aber nicht auf Gravitationsfelder: Since there is no sharp line of demarcation between diffuse field-energy and that of electrons and atoms, we must broaden our conception of matter, if it is still to retain an exact meaning. In future we shall assign the term matter to that real thing, which is represented by the energy-momentum-tensor. Die Gravitationsfelder auszuschließen - das ist ein interessanter Gedanke. Entsprechende Quanten kennen wir noch nicht, im Energie-Impuls-Tensor kommen sie nicht vor. Passt auch zur Idee, dass die Gravitation ganz anders zu beschreiben ist und die ART nur eine phänomenologische Theorie ist (deshalb man von ihr als QFT auch nicht Renormierbarkeit erwarten darf). Bunge & Mahner: Die Natur der Dinge 2004; Ein materiefreier Raum, d.h. ein verschwindender Energie-Impulstensor führt nach der ART sehr wohl zur flachen Raumzeit. Die Schwarzschild-Lösung erhält man nur, wenn man eine bestimmte Randbedingung annimmt und so davon ausgeht, dass der Energie-Impulstensor in bestimmten Bereichen nicht verschwindet (wegen der Zentralmasse). Das Verschwinden des Energie-Impuls Tensors gibt nur Ricci-flach, aber eben nicht notwendig flach. Denken Sie als Beispiel an eine ebene **Gravitationswelle = Metrik-Welle: Pohl: Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen.** Eine Einführung für Lehramtsstudierende 2017 ebook; Das ist eine nicht-statische und nicht-flache Vakuum-Lösung, einer i.a. **nichtlinearen Wellengleichung für die metrischen Koeffizienten**, also keine Superposition (!), ohne Rand und auch ohne asymptotische Bedingungen im Unendlichen. Die hat Energie und Dynamik, also all das, was Bunge mit Materie in Verbindung bringt. In der relativistischen Terminologie gilt es als materiefrei. Bei Bunge möglicherweise nicht. Janich: Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit und Materie; Rolf Ascheberg: Kritik der 'Protophysik der Zeit' und der 'Logischen Propädeutik'. Zur Kritik des neueren Konstruktivismus; ABER: Für Vorhersagen der Naturprozesse sind obige Beschreibungen der Materie gut geeignet – das als Fortschritt zu bezeichnen, möchte ich Ihnen zugestehen -, für das Verstehen der Natur selbst sind sie aber ungeeignet, sie verwirren mehr als sie erklären. Frege: Nicht alles was existiert, existiert irgendwo. Die Welt der Dinge begründet die Welt an und für sich. Hier Kant Ding an sich. Wegen epistimischer Verschränkung ist das Ding an sich nicht erkennbar. Menschliches Erkennen kann nicht zum Sein vordringen. Ohne materielles Substrat gibt es nichts - gar nichts. Teilchenbegriff - Fermion, Boson - als praktische Abkürzung für Modelle mit bestimmten statistischen Eigenschaften im Sinne des strukturellen Realismus. Ludwig: Einf in die Grundlagen der theoretischen Physik. Übereinstimmung von Daten und Modellen ist das Ziel.

Was uns immateriell erscheint, muss irgendwo doch in der materiellen Welt wurzeln, sonst würde es nicht existieren.

ISS 30x100x110m, 450 t, 4500 m^2 Solarzellen, 120 kW. Position aller Weltraumkörper siehe S.T. Kelso OrbTrack.org. Solarzelle = Solarmodul = PV = Photovoltaik 20% des Solarflusses wird elektr Energie. Sonnenwandler = Mikriwechselrichter ct 2022 H17 p104; Innerer Photoeffekt. Görlich: Photoeffekte. Bd1. Historische Entwicklung, Photoemission der Metalle. Bd2. Experimentelle Photoleitung. Bd3. Erzeugung photoelektromotorischer Kräfte 1962-1966; Herrmann: Der Photoeffekt 1994; Wawilow: Wirkung von Strahlen auf Halbleiter 1900; Tauc: Foto- und thermoelektrische Erscheinungen 1999; Rywkin: Fotoelektrische Erscheinungen 1999; Bube: Fotoleitung in Halbleitern 1999; Lernpaket Strom mit Solarenergie Franzis: `192299-an-01-de-CONRAD_LERNPAKET_SOLARENERGIE_BASIC.pdf`; Hanus & Stempel: Das große Solar- und Windenergie-Werkbuch. Haus, Garten, Camping, Caravan 2004; Hanus: Hausversorgung mit alternativen Energien 2007; Brösicke: Sonnenenergie. Wissen, planen, gewinnen 2000; **Schilling: Stromrichtertechnik** 1950; Solarmodul 18-19 V, 11-12 W **i] direkt auf Gleichstrom-Verbraucher**, **ii] geht auf 12V-Akku Laderegler** = serielle Schottky-Diode, die Akkuentladung über Solarmodul verhindert und parallele Zehner-Diode als Spannungswehr, die Ladespannung auf 110% der Akkuspannung begrenzt. Schottky-Dioden mit möglichst geringer Flussspannung (UF = U_F) wählen, sie vertragen bis 200 A. Nach Akku folgt **Tiefentladeschutz** und dann Gleichstrom-Verbraucherbraucht oder **Wechselrichter** = = Spannungswandler, der Wechselspannung 230V mit a] **modifizierter Sinuswelle** für ohmsche Verbraucher oder b] **echter Sinus-**

welle für Betrieb eines kabellosen Geräts/Zahnbürste, also Schaltnetzteil = SNT. Induktive Widerstände/-Glühlampen haben riesige Anlaufstromstärken! Dauerleistung in Watt/12 = Batteriekapazität in Ah. Also 1200W Dauerleistung braucht eine Ladung Q = 100Ah Auto-Batterie; **1l Teewasser** zum Sieden bringen erfordet die Wärme $W_Q = mc\Delta T$ =1 kg 4.2 kJ/kg grad 80grad =350 kJ = 350 kWs ≈ **100Wh** $= P\,t = U\,I\,t = U\,Q$, wobei Q Gesamtladung. Erwärmung mit Kocher P = 2.2kW erfordert $t = \frac{W_Q}{P}$ = 180 sec = 3 Minuten bei Strom I = 10A, bedeutet Gesamtladung = Akku-Kapazität $Q = I\,t$ = 1800 As=0.5 Ah, bedeutet 10^{22} Elektronen bei 230 V, wegen $W_Q = U\,Q$ = 350kWs. Mit Camping-Kocher U =12 V, I = 20A, bedeutet $t = \frac{W_Q}{P}$ = 1500 sec = 25 min. unisolar.qipc.org/daten/roof.php Timo; Solarmodul nach Süden und etwa 40° ankippen. Bei Reihen-Parallelschaltung von Solarmodulen müssen diese mit By-pass(in Sperrrichtung zum Einzelmodul)- und Blocking-Dioden geschütz werden, um bei Teilabschattungen oder anderen Spanungsabfällen heizende Rückwärtsströme zu blockieren. Details https://www.electronics-tutorials.ws/de/dioden/bypass-dioden.html. Stromentnahme oder Solarmodulkurzschluss kühlt das Modul. Wirksame Peltier-Elemente brauchen einige Ampere, um zu kühlen. Auch Absorptionskühlschrank zu gefräßig. Daher nur kleine Kompressionskühlschränke betreiben. **revolt www.pearl.de NX2457-917 Solar-Generator & Powerbank** mit 50-W-Solarmodul = 2in1-Hochleistungsakku und Solar-Generator: Für mobilen Betrieb von 12- und 230-Volt- sowie USB-Geräten 5V bei 1 bis 2 A, wobei Laderegler stets im Smartphone. USB-Ladegerät analog-praxis.de cihome.de; Ideal beim Camping und Zelten, bei Outdoor-Aktivitäten, im Garten u.v.m. Zuschaltbare 0,5-Watt-LED-Lampe mit 2 Leuchtmodi: Dauerleuchten mit 150 Lumen und Notblink-Funktion. Einfache Bedienung über 3 Tasten für Licht, Batterieladezustand (LED-Anzeige) und 230-Volt-Steckdose. 3 DC-Output-Buchsen mit Zigarettenanzünder-Adapter: je 12 Volt / 10 A (gesamt max. 15 A, 180 Watt), z.B. für Ladegeräte, Kühlbox, Camping-Wasserkocher und Reise-Haartrockner. 230-Volt-Steckdose: belastbar bis 100 Watt, für Elektro-Kleingeräte wie z.B. Laptop, LED-Lampen und Rasierer. 3 USB-Ports: je 5 Volt / 2,1 A (gesamt max. 3,1 A, 15,5 Watt), z.B. für Smartphone, Tablet-PC und E-Book-Reader. Mehr als 500 Ladezyklen. Schutz vor Kurzschluss, Überhitzung und Überladen Integrierter Li-Ion-Akku mit 42Ah, lädt per 12 und 230 Volt sowie per Solar-Panel. Maße: 19,5 x 17 x 9 cm, Gewicht: 1,59 kg Monokristallines Photovoltaik-Panel: Leistung: 50 Watt aus 420W-Photonenfluss. Leerlaufspannung: 21,5 V. Kurzschluss-Strom: 3,2 A. Nennstrom: max. 2,91 A. Spannung im bestmöglichen Betriebspunkt (UMPP): 17,2 V. Temperaturbeständig: -40 bis 85 °C. Maße Solarpanel: 49,5 x 70 cm x 2,5 cm, Gewicht: 4,2 kg. Effektive Fläche 0.47m x 0.64m = 0.3 m^2. Freifunk-Open-MPPT Maximum Power Point Tracker elektra_42 https://github.com/elektra42/freifunk-open-mppt; **Ñührmann: Professionelle Schaltungstechnik 12 Bde** Besser sind Sonnenkollektoren, die 40% des Solarflusses in Wärme, also 200-1000 Wm^{-2}. Solarkonstante 1367 Wm^{-2} oder $Jm^{-2}s^{-1}$ oder kgs^{-3}. Würfel: Physics of solar cells. From basic principles to advanced concepts 2010^2; Kasten: Energiehaushalt der Erdatmosphäre PhysBl 30 1974 p53-63; **2018** 42m-ESO-European Extremely Large Telescope (E-ELT) fast 1000 1.5m Sechsecke. 3000 m Cerro Armazones, 25 Kilometer vom Cerro Paranal entfernt, auf dem das Very Large Telescope bereits steht. **2017 TMT:** 30-Meter-Teleskop. USA, Kanada, Japan und China auf dem 4200 Meter hohen Gipfel des Mauna Kea, Hawaii, Hauptspiegel aus knapp 500 Segmenten. **2019** US-amerikanische, australische und koreanische Astronomen. auf dem Cerro Las Campanas. sieben Spiegel mit einem Durchmesser von jeweils 8,4 Metern, entspricht einem Einzelteleskop mit 24,5 Metern Durchmesser. Die Sprache der Sterne: Brummmm! Der Spiegel Nr7 2016 p105-109 Rainer Weiss, Heinz Billing, GEO600 Karsten Danzmann, Virgo in Cascina bei Pisa ab 2017. Quellen: Rasch rotierende Neutronensterne mit cm-großen Dellen. Neutronenstern-Paare. Kollision zweier Schwarzer, **schwarz = unsichtbar** Löcher mit 29 und 36 $m_\odot$ mit 200,000 km/s bei 17Hz-Glissando, 500ms, 1.3 10^9 Ly. In 0.008 sec gab's nur noch ein Schwarzes Loch mit 62 $m_\odot$. Also Abstrahlung von 3 $m_\odot$ = 50 mal Licht alles leuchtenden Sterne des Unversums. Bedeutet aber nur um einen Atomkerndurchmesser 10^{-15} m auf Distanz Paris-Berlin 10^6 m. Also Relative Änderung von 10^{-21} Neues Sinnesorgan macht Dunkelwelt künftig sichtbar, also wegen der sie begleitenden Gravitationswellen. Selbst Handbwegung rüttelt das Universum. Aber wegen Steifheit der Raumzeit ist das nicht messbar. Ab jetzt sieht man also auch die restlichen 99%, den dunklen Anteil des Universums. LISA **Gravitationswellen** bei 2 mHz von galaktischen Schwarzloch-Binären und extragalaktischen massiven Schwarzen Löchern. Alessandra Buonanno, AIE Golm: In der Wellenform ist das Quellobjekt und dessen Dynamik kodiert. Ehlers: Gravitationslinsen. Lichtablen-

kung in Schwerefeldern und ihre Anwendungen 1999; Sauer: Lichtablenkung - vom Äquivalenzprinzip zur geodätischen Bahn PdNPiS Bd53 2004 H4 p35-41; Ruder: Gravitationswellen-Astronomie DVD Uni Auditorium 2007; Lesch im BR in alpha-Centauri Was sind Gravitationswellen? 2014; Giulini & Kiefer: Gravitationswellen : Einblicke in Theorie, Vorhersage und Entdeckung 2017; **Pohl: Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen. Eine Einführung für Lehramtsstudierende** 2017 ebook; Zauner: **Gravitationswellen - Grundlagen, Entstehung und Detektion** BA-Arbeit 2013; Lösungen einer i.a. **nichtlinearen Wellengleichung für die metrischen Koeffizienten**, also keine Superposition (!). **Vladimirov, Mitskievich & Horsky: Space, time, gravitation** 1984, 1987 Kap3.1 p114-127; **Meschede: Gerthsen. Physik** 1995[18], 2003[22] Kap18.4.3 p1002f nicht mit Schwerewellen verwechseln! Massen stets positiv, daher kein Analogon zur Dipolstrahlung, sondern **Quadrupolstrahlung**. Quadrupolpotenzial bei Quadrupolmoment Q ist $\varphi(r,\theta) = -G\left[\frac{M}{r} + \frac{Q}{r^3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right) + \dots\right]$. Für zwei gleiche Massen, die im Abstand $2d$ umkreisen ist $Q = 2Md^2$ Tensor, dessen Richtung sich mit Umlauffrequenz $\omega^2 = \frac{GM}{4d^3}$ ändert. Strahlungsleistung ist $P \approx GQ^2\omega^6/c^5$, speziell Doppelstern $P \approx G^4M^5/(cd)^5 \in (10^{12}, 10^{17})$W, Neutronendoppelsterne stürzen wegen Gravitationsstrahlung ineinander. Doppelpulsar-Frequenz steigt, Hulse & Taylor 1974. Quelle intensiver Gravitationsstrahlung Einsturz eines Sterns in nicht kugelsymmetrisches Schwarzes Loch mit Zeitkonstante $\omega^{-1} \propto \tau \approx 10^{-5} \dots 10^{-4}$s. Detektor = resonanter elastischer Körper mit mit Eigenfrequenz $\nu_0 \approx \frac{c_s}{l}$. Wegen $c_s \ll c = \nu\lambda$ sind die optimalen Bedingungen $\nu \approx \nu_0$ und Länge $l \approx \lambda$ nicht erfüllbar. Obwohl Gravitationswellen enorme Energien mit sich führen, sind die von ihnen verursachten, auf der Erde messbaren Längenänderungen winzig klein. Beim Verschmelzen eines Neutronensternpaares im Zentrum der Milchstraße zB würde die Leistung der die Erde erreichenden Gravitationswellen mehr als tausendmal höher sein als die von der Sonne eingestrahlte Leistung und doch würde die dadurch verursachte relative Längenänderung nur 10^{-18} betragen. Das bedeutet, dass sich eine 1 km lange Messstrecke um 10^{-15} m = um ein Hunderttausendstel eines Wasserstoffatomdurchmessers – verlängern oder verkürzen würde. **Gequetschtes Licht:** Amplitudenrauschen bis unterhalb des Schrotrauschens reduzieren (quetschen). Zwar geschieht dies auf Kosten eines verstärkten Phasenrauschens, doch ist das für die physikalische Messung nicht unbedingt weiter von Bedeutung. GEO600 bei Hannover oder größer Virgo bei Pisa oder noch viel großer Advanced Laser-Interferometer Observatory oder kurz LIGO in Livingstone in Louisiana und in Hanford, Washington, guckt nach modernen Wellen zweier stellarer Schwarzen Löchern wie GW 150914 mit je 30 $m_\odot$ bei $\nu_0 \in (60, 250)$ Hz. Alessandra Buonanno AEI: New Era of Precision Gravitational-Wave Astrophysics. Thibault Damour: Introductory lectures on the Effective One Body formalism = **EOB** Formalismus für die analytische Lösung umeinander kreisender Schwarzer Löcher auf dem Weg zur Verschmelzung Rate 10-1000 pro Jahr und Gpc^3. IntJModPhysA23 1130-1148 2008 arXiv:0802.4047 Binary black hole = **BBH SXS** = Simulating eXtreme Spacetimes) project. BP Abbott: Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration, PRL 11.2.2016. Tests of general relativity in the strong-field, highly dynamical regime. Binary neutron stars, theoretical challenges in solving the two-body problem in gravity. Distinguishing Boson Stars from Black Holes and Neutron Stars from Tidal Interactions in Inspiraling Binary Systems. Raumzeit-Schwingung mit Amplitude 1/100 Protondurchmesser. Marc Kamionkowski: BICEP2 am Südpol sucht nach alten, primordialen Gravitationswellen = Nachweis der Inflationsphase, deren Wellenlänge viel kleiner sind, 150 GHz. 1. Zwei Alu-Zylinder-Schwingunger im Abstand von 1000km von Joseph Weber 1969 mit piezo-elekt Taillienmessung von 10−20 m = 10^5 Protonendurchmesser. 2. Kosmische Zeitgeber abhorchen. Millisekundenpulsare-Arrays = Pulsar Timing Arrays = PTAs. Gravitationswellen, die beim Verschmelzen zweier supermassereicher Schwarzer Löcher in den Zentren von Galaxien entstehen, würden die Raumzeit verbiegen und den gemessenen Ankunftszeiten der Pulsarsignale ein spezifisches Muster im Nano- bis Millihertzbereich aufprägen. 3. Acht Tonnen schwere gekreuzte 10m lange Metallstäbe dutch Gezeitenkräfte verdreht. 4. Atomcluster = Minikugeln oder -scheiben als Messkörper mit Pinzetten in Gravitationswellen halten. Einlaufende Gravitationswelle verändert Stellung der Spiegel des optischen Resonators, so dass sich die Position des festgehaltenen Mikropartikels im Resonator minimal verschiebt, was sich wiederum an der Reflexion des Laserlichts aus dem Resonator erkennen ließe. 5. Bose-Einstein-Kondensat = Atom-Kollektiv.

GW sollte Phononen-Schwingung anregen. Verwendung neuester quantenmetrologischer Erkenntnisse sollten Messung ermöglichen. 6. eLISA 2034 = Laserstrahlen im Weltall auf Dreieck mit 5 10^6 km Kantenlänge vermessen. 7. Komplette Erde als Resonator für kosmische Raumzeitschwingungsmuster zu nutzen. Mit einem Netz gravimetrischer Sensoren, die die Schwerkraft vermessen, ließe sich erkennen, wie sich die Erde unter dem Einfluss von Gravitationswellen verformt. Thorne: Gekrümmter Raum und verbogene Zeit. Einsteins Vermächtnis 1996; Pössel: Das Einstein-Fenster 2005; **Schmutzer: Relativitätstheorie aktuell** 1979 p134f Elektromag Welle ist maximal 6dimensional, im Vakuum reicht 4d. Eine Gravitationswelle hat Eigenschaften in maximal 16?, wohl nur 10 unabhängige Dimensionen in der 4d Raumzeit der ART. Ihre maximal (16?) 10 Komponenten stammen aus dem so genannten Metrik-Tensor, einem mathematischen Konstrukt, das die Struktur der Raumzeit beschreibt.; **Landau & Lifschitz: Feldtheorie Bd2**, §101 p340 Störungen des das Gravitationsfeld beschreibenden metrischen Koeffizienten gehorchen einer Wellengleichung. Diese Störungen laufen durch die Raumzeit. Ebene Welle ist transversal. Hat also nur 2d. **Einsteins-Gl** $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}$ kann bei flacher Raumzeit $\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$ mit dem die Strahlung darstellnden Feld der metrischen Koeffizient $\bar{h}^{\alpha\beta} \equiv \eta^{\alpha\beta} - \sqrt{|\det g|} g^{\alpha\beta}$ mit **de Donder-Eichung** $\nabla_\beta \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$ = lineare Einstein-Gl $\Box \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi\tau^{\alpha\beta}$ mit $\Box = -\partial_t^2 + \Delta$ als Wellengleichung gelesen werden. Wegen $\tau^{\alpha\beta} = T_{\mu\nu} + (\bar{h}^{\alpha\beta})^2$ ist die Lösung der Wellengl auch in ihrem Antrieb enthalten. Daher Linearisierung $\Box \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi T^{\alpha\beta}$ und Annahme einer Punktquelle, also $T^{\alpha\beta}$, gibt homogene Wellengl $\Box \bar{h}^{\alpha\beta} = 0$. Auslaufende Kugelwelle $A(t-r,\theta,\phi)/r$ gibt $\bar{h}^{\alpha\beta} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_+(t-r,\theta,\phi) & A_\times(t-r,\theta,\phi) \\ 0 & 0 & A_\times(t-r,\theta,\phi) & -A_+(t-r,\theta,\phi) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_+(t-r,r,\theta,\phi) & h_\times(t-r,r,\theta,\phi) \\ 0 & 0 & h_\times(t-r,r,\theta,\phi) & -h_+(t-r,r,\theta,\phi) \end{bmatrix}$. Kennt man die Details der Quelle so bekommt man die Lösung der inhomogenen Gl $\Box \bar{h}^{\alpha\beta} = -16\pi\tau^{\alpha\beta}$ mit der tensorielle Greenfunktion der d'Alembert-Operators $\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\vec{x}) = -16\pi \int G^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(t,\vec{x};t',\vec{x}')\, \tau^{\gamma\delta}(t',\vec{x}')\, \mathrm{d}t'\, \mathrm{d}^3x'$. Die Entwicklung in sphärischen Harmonischen gibt $G^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}(t,\vec{x};t',\vec{x}') = \frac{1}{4\pi} \delta^\alpha_\gamma\, \delta^\beta_\delta\, \frac{\delta(t \pm |\vec{x}-\vec{x}'| - t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$, Die auslaufende Welle ist $\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\vec{x}) = -4 \int \frac{\tau^{\alpha\beta}(t-|\vec{x}-\vec{x}'|,\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, \mathrm{d}^3x'$. Für kleine Quellregion folgt $\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\vec{x}) \approx -\frac{4}{r} \int \tau^{\alpha\beta}(t-r,\vec{x}')\, \mathrm{d}^3x'$ mit $r = |\vec{x}|$. Thorne: Multipole expansions of gravitational radiation. RevModPhys52 1980 299–339; Misner, Thorne & Wheeler: Gravitation 1973; Denschlag: Relativitätstheorie kompakt 2012 p126; Bergmann & Schäfer: Mechanik, Relativität, Wärme 1998 p200f; Thorne: Gekrümmter Raum und verbogene Zeit 1999;

23 Thermostatik vs Thermodynamik irreversibler Prozesse

Hund: Einführung in die theoretische Physik Bd4. Theorie der Wärme 1950; Hund: Theoretische Physik. Eine Einführung Bd3. Wärmelehre und Quantentheorie 1966[3]; Zustandsgrößen sind zunächst als phänomenologische Gleichgewichtsgrößen definiert. Wähle dazu hinreichend große **raum-zeitliche Grobkörnung** eines Gebietes. Idee des **raum-zeitlichen lokalen Gleichgewichts**. Temperatur $T(t,\vec{x})$ bei gleichgewichtsfernen Objekten wie menschlicher Körper, Sonne, Erdatmosphäre oder Ozean sind zunächst von unklarer Bedeutung! Mittelwerte sind von geringer Aussagekraft. Man braucht zur Bewertung höhere Momente oder Verteilungsfunktionen $p_T(t,\vec{x})$. Der Begriff der globalen Temperatur ist schwer zu definieren. **Hund: Wärmelehre** 1954; Wiki beginnt unvermittelt mit einer Religion von menschengemachter globaler Erwärmung. Brush: Kinetische Theorie. Einführung und Originaltexte. 1965, 1970 Bd1 Die Natur der Gase und der Wärme. Boyle1627-91 = a] Elastizität beruht auf Atomen als Sprungfedern. b] Pendel kommt unabhängig vom Druck zur Ruhe, also Viskosität druckunabhängig. c] Erfinder des Druckes mit von Hooke1635-1703 gebauter Pumpe. Funikularhypothese Tau = unsichtbare Saite macht nach Hobbes und Hall/Linus Vakuum. d] 1662 Boyle-~~Mariotte~~-Gesetz pV = const wurde von Towneley1628-1707 und Power1623-1668 zur Deutung von Boyles Messungen vorgeschlagen. 1787 Jacques Charlesi1746-1823 und 1802 Gay-Lussac1778-1850 $\frac{pV}{T} = R = 8.317$ J/K oder $\frac{pv_m}{T} = R_m = \frac{8.317}{6.022 \cdot 10^{23}}$ J/(mol K) $= k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K. Brush: Ki-

netische Theorie Bd2 Irreversible Prozesse 1966, 1970 p119ff Sehr viele sich stoßende Gasmoleküle führen zur Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung; Lande: Welenmechanik und Irreversibilität, PhysBl13 1957 p312-314;

I. Phänomenologische Thermodynamik würde ich an den Anfang jeder Physikbekanntschaft/-einführung stellen, da sie mathematisch einfach ist, jeder auf Erfahrungen mit den Grundbegriffen hat (Kleidung, Obdach, Ofen geben Wärme, Küchenphysik gibt Nahrung, Physiologie der Lebewesen, Wetter etc.) und die vielen praktischen Anwendungen, besoders der industriellen Verfahren: Dampfmaschine, Dampfturbine, Verbrennungsmotoren, chemische Industrie - alles Kreisprozesse. Phänomenologische Thermodynamik ist die weitreichendste Theorie ohne Gültigkeitsgrenzen. Kommt gleich nach Logik oder Geometrie. **Hund: Einführung in die theoretische Physik Bd4. Theorie der Wärme** 1950; Kunsemüller: Technik leicht verständlich 1976; W̃angenbreth: Die Geschichte der Dampfmaschine 2002; Klemm: Kurze Geschichte der Technik 1954; Klemm: Geschichte der Technik. Der Mensch und seine Erfindungen im Bereich des Abendlandes 1985; Buchheim & Sonnemann: Geschichte der Technikwissenschaften 1990; Mach: Die Principien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt 1896; ter Haar & Wergeland: Elements of Thermodynamics 1966; Hund: Wärmelehre 1954; **Falk: Theoretische Physik auf Grundlage der allgemeinen Dynamik** Bd2 Allgemeine Dynamik und Thermodynamik, Bd2a Aufgaben und Ergänzungen zur Allgemeinen Dynamik und Thermodynamik 1968; Falk & Ruppel: Energie und Entropie. Die Physik des Naturwissenschaftlers. Eine Einführung in die Thermodynamik 1976; Falk: Was in der Physik geht uns alle an? PhysBl33 1977H12 p616-626; **Wärme und Entropie** PdNPiS Bd59 2010 H6; Haake: Einführung in die Theoretische Physik; Fleischmann: Einführung in die Physik 1980; Müller: Thermodynamik. Vom Tautropfen zum Solarkraftwerk 2013 anschaulich; **Müller: Grundzüge der Thermodynamik mit historischen Anmerkungen** 1994, 1998, 2001; M̃üller: A History of Thermodynamics. The Doctrine of Energy and Entropy 2010; Thruesdell: Rational Thermodynamics. A Course of Lectures on Selected Topics 1969, 1984; Müller & Ruggeri: Rational extended thermodynamics 1998; Thruesdell: The Tragicomical History of Thermodynamics 1822-1854 1997; Moore: Six ideas that shaped physics. Unit T = Some processes are irreversible 2003; Planck: Thermodynamik 1921[6]; **Reineker & Schulz: Theoretische Physik V. Statistische Physik und Thermodynamik** 2010; Ehrenfest-Afanassjewa: Die Grundlagen der Thermodynamik 1956; Langkau & Scobel: Fluiddynamik und Wärmelehre 1996; Straumann: Thermodynamik 1986; Junghähnel: **PfL3** = Hund: Einführung in die theoretische Physik 4: Theorie der Wärme 1950; Hund: Theoretische Physik Bd3. Wärmelehre und Quantentheorie 1956; Becker: http://farside. ph. utexas. edu/teaching/sm1/ lectures/lectures. html Theorie der Wärme; Leuschner: WTB; Fließbach: Statistische Physik Bd4 1990; Päsler: Phänomenologische Thermodynamik. Mit einer Einf. in die Thermodynamik irreversibler Prozesse von Jürgen U. Keller 1975; Kondepudi & Prigogine: Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures 1998, 2014[2]; Kondepudi: Introduction to Modern Thermodynamics 2008; Singh & Chaturvedi: IIT JEE Physics (38 Years) **Topic-wise Complete Solutions** Vol2: Thermodynamics, Electromagnetism and Modern Physics 1978-2015; Kluge & Neugebauer; Nolting Bd4; Greiner Bd9; Sommerfeld Bd5; Fließach; Planck; Landsberg; Neugebauer: Relativistische Thermodynamik; Dufour & Defay: Thermo Dynamics of Clouds 1963; **Reif: Statistische Physik** 1990[3]; Gomol, Technische Stoffe. **Bergmann Werkstofftechnik** 2Bde 2008; Friedrich Tabellenbuch. Holztechnik 2006;

II: Nichtgleichgewichtsthermodynamik = Thermodynamik irreversibler Prozesse. Prigogine: Introduction to thermodynamics of irreversible processes 1961; Fitts: Nonequilibrium thermodynamics. A phenomenological theory of irreversible processes in fluid systems 1962; Meixner: Thermodynamik der irreversiblen Prozesse 1954; H̃ollinger & Zenzen: The nature of irreversibility 1985; L̃awenda: Nonequilibrium statistical thermodynamics 1985; Kammer & Schwabe: Thermo irreversibler Prozesse 1984; de Groot: Thermodynamik irreversibler Prozesse 1960; de Groot & Mazur: Grundlagen der Thermodynamik irreversibler Prozesse 1962, 1969 = Non-equilibrium thermodynamics; Kreuzer & Tamblyn: Thermodynamics; Kreuzer: Nonequlibrium Thermodynamics 1981; Becker: Theorie der Wärme 1955, 1985 KapVII Thermodynamik der irreversiblen Prozesse; Lang: Astrophysical formulae 1980 p97ff **LTE = local thermodynamic equilibri-**

um: Woher bezieht die Sonnen ihre Energie? Kelvin und Helmholtz: Wirf Steinkohle auf die Sonne, statt die Kohle zu verbrennen. Sonnenschrumpfung. Schröder & Treder: Helmholtz' Beiträge zur Kosmogonie und Solarphysik, Die Sterne 71 1995 34-38; Gravitationsenergie/potentialle Energie/Akkretion gibt mehr als chemische Energie oder Anihilation. Problem ist der Drehimpulsabtransport. Gamow: Geburt und Tod der Sonne 1939; Gamow: Sonne, Stern unter Sternen 1964 p30ff Energieproduktion der Sonne. Solarkonstante $S = 1367$ W/m^2, Gesamtleistung des Sonne $P = SA = 4\pi a^2 S = 3.310^{26}$ J/s mit Erdbahnradius a, bei der Sonnenmasse von $M = 2 \cdot 10^{30}$ kg setzt jedes Kilogramm der Sonnen (also Mittelwert!) $P/M = 1.6 \cdot 10^{-4}$ W/s frei. Der menschliche Körper setzt etwa 80 W, also 1 W/kg frei. Mensch als Glühbirne;). p33 Kelvin und Helmholtz; Emden: Gaskugeln. Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische Probleme 1907; W̃eizsäcker C.v.: Die Sterne sind glühende Gaskugeln, und Gott ist gegenwärtig 1992; **Eddington: The internal constitution of stars** 1926 p292ff Energiequelle der Sterne ist Kernenergie. Die Kernphysik erklärt auch die Nukleosynthese = 1928 Der innere Aufbau der Sterne; Audouze & Vauclair: Die Entstehung der Elemente 1974; Alles noch vor der Entdeckung der Kernspaltung! **Gamow-Condon-Gurney-Theorie.** Frenkel: Prinzipien der Theorie der Atomkerne 1957 Kernphysik in Sternen Kap VII p170ff; Condon & Gurney: Quantum mechanics and radioactive disintegration, PhysRev33 1929 p127f; Atkinson & Houtermans: Zur Frage der Aufbaumöglichkeit der Elemente in den Sternen, Z für Physik 54 1929 p656-665; Frenkel: Houtermans. Arbeit, Leben, Schicksal, hrsg. und ergänzt von D. Hoffmann, unter Mitwirkung von M. Beer, Preprint 414 (MPI für Wissenschaftsgeschichte) PDF 2011; Gamow: Die Geburt des Alls 1952 p133f; Lockyer 1877: Warum ist die Erd-Chemie so wie sie ist? Eddington-Vorläufer. Herrmann: Geschichte der Astronomie 1978^2 p12f4f Secchi 1866, Vogel 1868, Lockyer 1888: Sternspektren sind der Schlüssel zum Bau und zur Entwicklung der Sterne; Der Sternaufbau liefert die äußeren Randbedingungen für die Nukleosynthese. Bethe-Weizsäcker-Zyklus = CNO-Zyklus 1937 und 1939 von Weizsäcker: Über **Elementumwandlungen** im Innern der Sterne. Physikalische Zeitschrift 38 1937 p176–191, 39 1938 p633–646 **Bethe: Energy production in stars**, Physical Review55 1939 p434–456; Alles noch vor der Entdeckung der Kernspaltung! Kippenhahn: Atom 1994 316ff Eddington und Kochrezepte für Sterne; Chandrasekhar: An introduction to the study of stellar structure 1939; **Unsöld: Physik der Sternatmosphären** mit besonderer Berücksichtigung der Sonne 1938; Richard N. Thomas: Superthermic phenomena in stellar atmospheres. II. Departure from thermodynamic equilibrium in an idealized chromosphere, ApJ108 1948 p142-152; Schwarzschild: Structure and evolution of the stars 1958; Druckgradient aus zentralsymmetrischem hydrostatischen Gleichgewicht per Gassäulenabschätzung Kaplan p32ff, oder Abschätzung per Halbkugelanziehung Gondolatsch, Steinacker & Zimmermann: Astronomie Grundkurs 1990 p94ff oder Haubold & Ruben: Das Sonnenmodell und der Nachweis der Sonnenneutrinos, Die Sterne 53 1977 p65-74; $mg = -G\frac{M_r m}{r^2}$ mit Sternmasse $M_r = \rho\frac{4}{3}\pi r^3$ bei Sternradius r also radial linear steigender Kraftfeldstärke $g(r) = -G\rho\frac{4}{3}\pi r$ oder aus Gauß'schem Gesetz $\int_{\partial K_r} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{g} = -4\pi G M_{K_r}$ ist $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = -G\frac{M_r \rho}{r^2}$. Druck im Sonnenzentrum ca. 10^{14} Pa = 10^9 bar. Mit Zustandsgleichung $pV = RT = NkT$ bedeutet Energie Joule= $[pV] = [RT]$ = Ws = Nm oder $p\frac{V}{n} = \frac{R}{n}T = \bar{R}T$ gibt mit $\rho = \frac{M}{V} = \frac{N\mu}{V}$ die Zustandsgleichung $p = \frac{\bar{R}_m \rho}{\mu}T$, also die Zentraltemperatur $T = G\frac{M_r \mu}{r R_m} \approx 10^6$ K. **molare Gaskonstante:** $R_m = \bar{R} = k_B N_A = 1.38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} 6 \cdot 10^{23}/mol = 8.314$J/K mol. Chiu & Muriel: Stellar physics 1968, 1972; Clayton: Principles of stellar evolution and nucleosynthesis 1968; Beachte, dass zum Sternaufbau und Strahlungstransport vieles vor 1939 unabhängig von den Ideen zur Nukleosynthese durch Bethe, Teller, Weizsäcker, Gamow klar war. **Stöckmann: Sternmaterie**, PhysBl28 1972 I p153ff, II p212ff, III p269ff; **Kaplan: Physik der Sterne** 1977, 1983; Siehe Seite 640. **Schklowski: Geburt und Tod der Sterne** 1984, 1988; K̃aplan & Tsytovitsch: Plasma radiation mechanisms in astrophysics 1969; **Chandrasekhar: Radiative transfer** 1950; Menzel ed: Selected papers on physical processes in ionized plasmas 1962; **Ambarzumjan, Mustel, Severnin, Sobolew: Theoretische Astrophysik. Sternatmosphären** 1952,

1957, LTE = lokales thermodynamisches Gleichgewicht p13ff, **NLTE** p90ff, Sternspektren, Sonnenatmosphäre, Planetare Nebel, Novae, Bau der Sterne, interstellare Materie; M̃ihalas: Stellar atmospheres 1970; Ñovotny: Introduction to Stellar Atmospheres and Interiors 1973; B̲öhm-Vitense: Introduction to stellar astrophysics - Vol2 Stellar atmospheres 1989; R̃ybicki & Lightman: Radiative processes in astrophysics 1985; **R̃utten: Radiative transfer in stellar atmospheres** 2003[8] pdf; S̲cheffler & Elsässer: Physik der Sterne und der Sonne 1990; R̃utten: Introduction to Astrophysical Radiative Transfer 1999 pdf; Eschrig, Müller, Pompe, Schöpf, Vojta, Ziesche: Problemdiskussion zum Thema Irreversibilität und irreversible Prozesse, Dresdner Seminar für Theoretische Physik. Sitzungsberichte 1977; Baur: Einführung in die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse 1984; Mit $\mathrm{d}S = \dfrac{\delta Q}{T}$ und $\delta W = -p\mathrm{d}V$ folgt $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$, also $T\mathrm{d}S = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V - \sum_i \mu_i \mathrm{d}X_i$. Ersetze nun **globale Reversibilität** durch **lokale Reversibilität**, was durch kinetische Theorie gedeckt wird. Betrachte dann zeitliche Veränderung der Entropie $T\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + p\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} - \sum_i \mu_i \dfrac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}t}$, wobei jede Volumenelement in Energie- und Substanzaustausch erlebt. Zerlege Entropieänderung $\mathrm{d}s = \mathrm{d}S_a + \mathrm{d}s_i$, wobei innerhalb des Volumenelments auch irreversible Vorgänge passieren $\mathrm{d}s_i \geq 0$. Die Flüsse hängen linear $J = LX$ von den Triebkräften X ab: Fourier $\dot{\vec{q}} = -\lambda \nabla T$, Fick $\vec{j} = -D\nabla c$, Ohm $\vec{i} = -\sigma$ grad ϕ, Newtons dyn Reibung $\vec{F} = -\eta\, A$ grad v_y. Allgemein ist $\mathbf{J}_k = L_k\, \mathbf{X}_k$ mit: **Fluss** $\mathbf{J}_k$ einer beliebigen physikalischen Größe k, **Transportkoeffizienten** L_k der Größe k und der zu k korrespondierenden, antreibenden Kraft $\mathbf{X}_k$, die als Gradient einer skalaren Größe angegeben wird. Die thermodynamischen Kräfte und ihre korrespondierende Flüsse werden aus einer Bilanzgleichung über die Erhaltungsgrößen abgeleitet. Das Produkt aus beiden Größen beschreibt die Zunahme der Entropie während eines freiwillig ablaufenden Vorgangs (Entropieproduktion). Für zwei Flüsse mit zwei korrespondierenden Kräften ergibt sich: $\mathbf{J}_k = L_{kk}\, \mathbf{X}_k + L_{ki}\, \mathbf{X}_i$ und $\mathbf{J}_i = L_{ik}\, \mathbf{X}_k + L_{ii}\, \mathbf{X}_i$. Kreuzkoeffizienten sind gleich groß, d.h.es gilt die mikroskopische **Reziprozitätsbeziehung** $L_{ik} = L_{ki}$, falls nicht zu weit vom Gleichgewicht entfernt. **Beispiel: Wärme- und Volumenströme** führt zu Superposition von Flüssen und Kräften. $\mathbf{J}_u = L_{uu}\, \nabla \frac{1}{T} - L_{uk}\, \nabla \frac{\mu_k}{T}$ und $\mathbf{J}_k = L_{ku}\, \nabla \frac{1}{T} - L_{kk}\, \nabla \frac{\mu_k}{T}$. **Diffusion der Komponente** k durch einen Temperaturgradienten beschrieben (Thermophorese oder Soret-Effekt) $\mathbf{J}_k \propto L_{ku}\, \nabla \frac{1}{T}$ und **Wärmeleitung durch den Stofffluss** (Diffusionsthermoeffekt oder Dufour-Effekt) $\mathbf{J}_u \propto L_{uk}\, \nabla \frac{\mu_k}{T}$. **Onsagerschen Reziprozitätsbeziehungen** $L_{uk} = L_{ku}$. **Thermodynamisches Gleichgewicht und Entropieproduktion.** Ein geschlossenes System befindet sich nicht im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn seine Entropie nicht maximal ist. Es muss also **freie Energie** F durch **Entropieproduktion** in Entropie S umgewandelt werden, um in einen Gleichgewichtszustand mit minimaler freier Energie und maximaler Entropie zu gelangen. In einem geschlossenen System kann diese Umwandlung nur durch innere (dissipative) Vorgänge erfolgen. Die **Größe der Entropieproduktion** σ ergibt sich dann aus der **Kontinuitätsgleichung** $\sigma \overset{\text{def}}{=} \frac{d_\mathrm{i} s}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_s = \frac{\partial s}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{J}_u}{T}$, wobei $d_\mathrm{i} s$ die **Änderung der lokalen Entropiedichte durch innere Vorgänge** ist, $\partial/\partial t$ die partielle Ableitung nach der Zeit, $\nabla\cdot$ die Divergenz nach dem Ort, $\mathbf{J}_s$ die **lokale Entropieflussdichte**, $\mathbf{J}_u$ die **lokale Flussdichte der inneren Energie**. Die partielle Ableitung der lokalen Entropiedichte nach der Zeit kann durch die **Gibbsche Fundamentalgleichung** ausgedrückt werden. Es ergibt sich damit für ein **isochores Mehrkomponentensystem** $\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_k \frac{\mu_k}{T}\frac{\partial \rho_k}{\partial t}$. Die extensive Größen innere Energie U und Stoffmenge n_k sind Erhaltungsgrößen; ihre Kontinuitätsgleichungen lauten $\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_u = 0$ und, da die Änderung der Stoffmenge n_k durch chemische Reaktionen j mit der Reaktionsgeschwindigkeit $\sum_j \nu_{jk} v_j$ berücksichtigt werden muss, $\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_k + \sum_j \nu_{jk} v_j = 0$. Die **Gibbs-Gleichung** wird damit zu $\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{1}{T}\nabla\cdot\mathbf{J}_u + \sum_k \frac{\mu_k}{T}\left(\nabla \cdot \mathbf{J}_k + \sum_j \nu_{jk} v_j\right)$. Umformung $\nabla\cdot(g\mathbf{J}) = \mathbf{J}\cdot\nabla g + g\nabla\cdot\mathbf{J}$ und der **chemischen Affinität** $A_j = -\sum_k \nu_{jk}\mu_k$ (es bleibt jedoch zu erklären, warum $\nabla \cdot \frac{\sum_k \mu_k \mathbf{J}_k}{T} = 0$) ergibt sich für die **Entropieproduktion** $\sigma = \mathbf{J}_u \cdot \nabla \frac{1}{T} - \sum_k \mathbf{J}_k \cdot \nabla \frac{\mu_k}{T} - \sum_j \frac{A_j v_j}{T}$. Aus dieser Gleichung können die zu den Variablen u und ρ_k **konjugierten thermodynamischen Kräfte** $\mathbf{X}_u = \nabla \frac{1}{T}$ und $\mathbf{X}_k = -\nabla \frac{\mu_k}{T}$ bestimmt werden. Befindet sich ein System nicht weit entfernt von seinem Gleichgewichtszustand, ist es sinnvoll, einen linearen Zusammenhang zwischen einem Fluss und der thermodynamischen Kraft anzunehmen. Der Proportionalitätsfaktor wird als Transportkoeffizient L bezeichnet. **Beim Fehlen eines Stofflusses und einer Reaktion** folgt damit das **Fouriergesetz** in der Form $\mathbf{J}_u = L_u\, \nabla \frac{1}{T}$ und in **Abwesenheit eines Wärmestroms das Ficksche Gesetz** als $\mathbf{J}_k = -L_k\, \nabla \frac{\mu_k}{T}$ Eisenschitz: Statistical

theory of irreversible processes 1958; Glansdorff & Prigogine: Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations 1971; Wisniewski, Staniszewski & Szymanik: Thermodynamics of Nonequilibrium Processes 1976; Haase: Thermodynamics of Irreversible Processes 1990; Haken: Prigogines **Kriterium der minimalen Entropieproduktion** zur Strukturbildung in gleichgewichtfernen Systemen, wie Benard-System, ist nur ein hinreichendes, aber kein notwendiges! Eu: The Boltzmann equation and nonequilibrium ensemble method JChemPhys103 p10652-62 1995. Hall: Nonequilibrium thermodynamics JApplPhys24 p819-25 1953. Kröger: Haken und Synergetik 2013; Prigogine & Nicolis: Self-organization in nonequilibrium systems 1977; Vergleichende Betrachtung der Konzepte siehe **Mori & Kuramoto: Dissipative structures and chaos** 1994 p279f;

III. Statistische Mechanik geht nur mit QM **Kittel & Krömer: Physik der Wärme** 1993[4], Thermodynamik 2013[6]; Korrekte statistische Darstellung muss von abzählbar vielen Quantenzuständen ausgehen, weil sonst Entropie unklar. Umweg über Boltzmanns Kunstgriff einer Grobkörnung auf Zellen der Größe h des klassischen, kontinuierlichen Phasenraum unnötig. Fowler: Statistical Mechanics. The Theory of the Properties of Matter in Equilibrium 1929, 1936; **Born: Physik im Wandel meiner Zeit** 1957 p217ff Statistische Physik; Hala & Boublik: Einführung in die statische Thermodynamik 1984; Frenkel: Statistische Physik 1957; Victor Frenkel: Yakov Ilich Frenkel 2001; Frenkel: Lehrbuch der Elektrodynamik. Bd1 Allgemeine Mechanik der Elektrizität 1926; **Jordan: Statistische Mechanik auf quantentheoretischer Grundlage** 1933[1], 1944[2]; Jordan1902-80; F̃owler: Statistische Mechanik 1931; Tolman: The Principles of Statistical Mechanics 1927 = ohne QM, 1938; **Falkenhagen: Grundlagen der theoretischen Physik Bd2, Statistik und Quantentheorie** 1952; Haake: Einf in theoret Physik, Ensemble ab 297ff; Gibbs: Elementary Principles in Statistical Mechanics; Adam & Hittmair: Wärmetheorie für Studenten der Physik, Chemie und Mathematik ab 4. Semester 1978, 1988 p200 Statistische Mechanik; Reif: Statistische Physik. Berkeley Physik Kurs 5 1990; Reif: Grundlagen der Physikalischen Statistik und der Physik der Wärme 1976 p263ff; Lenk: PfL12 p54; Sommerfeld V; Kittel & Krömer: Physik der Wärme 1984[2]; Kompanejez: Statistische Physik 1972; Feynman: Die Prinzipien der statistischen Mechanik, In: Lectures Bd1 Mechanik Pt2 Kap40 ; G̃allavotti: Statistical Mechanics. Theoretical and Mathematical Physics 2016; J̃elitto: Theoretische Physik Bd6. Thermodynamik und Statistik 1989[2] Kap10 p188ff; Kuhn, Lochhaas: Physik Band III Teilband: Thermodynamik und Statistik 1971; **Reichl: A modern course in statistical physics** 1980 710S, 2004[2] 822S, 2009[3] 411S, 2016[4] 482S; **Galperin: Solution manual for this book** pdf im Netz folk.uio.no; Vasilyev: An introduction to statistical physics 1980 p209 Bosonen, p231 Fermionen, Trevena: Statistische Mechanik p6 **Grundideen = nahrhafte Annahmen/Hypothesen von Boltzmann:** 1] **Alle Mikrozustände eines isolierten Systems sind gleichwahrscheinlich**. 2] Betrachte **Anzahl der Mikrozustände** $t(n) = \frac{N!}{n_1!,\ldots,n_k!}$ nach Grobkörnung des kontinuierlichen Phasenraum = richte eine Partitionierung ein, was man bei Annahme des Quantentheorie geschenkt bekommt. Es gibt dann k-Energie-Schachteln $\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k\}$, von $\{n_1,\ldots,n_k\}$ unterscheidbaren/lokalisierbaren Teilchen belegt werden. Teilchengesamtzahl $N = \sum_{i=1}^k n_i$ mit **innerer Gesamtenegie** $U = \sum_{i=1}^k n_i\epsilon_i +$ schwacher, vernachlässiger WW-Energie. Gesamtzahl möglicher Mikrozustände $\Omega = \sum t(n) = \sum \frac{N!}{n_1!,\ldots,n_k!}$ 3] Statistische **Entropie** sei $S = \ln\Omega$. 4] Mit Stirling-Formel und Setzung $Z = \sum e^{\beta\epsilon_i}$ als **Zustandssumme** hat man $n_i = \frac{Ne^{\beta\epsilon_i}}{Z}$ und somit den Anschluss an die makroskopischen Größen der phänomenologischen Thermodynamik. Sommerfeld: Die elementare kinetische Gastheorie, In: VL über theoretische Physik BdV 1965[3]; Boltzmann: Vorlesungen über Gastheorie 1896; **Kennard: Kinetic theory of gases** with an introduction to statistical mechanics 1938; Horwitz: Relativistic Many-Body Theory and Statistical Mechanics 2014; Haake: Einf in die theoret Physik 1983 Kap17 p282ff; Lenk: PfL12; **Gibbs: Elementare Grundlagen der Statistischen Mechanik: entwickelt besonders im Hinblick auf eine rationelle Begründung der Thermodynamik** 1905; Paul & Tatiana Ehrenfest: Begriffliche Grundlagen der statistischen Auffassung in der Mechanik. 90S In: Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Band IV, 2/II. Heft 6 1912 The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics; Fließbach: Statistische Physik; Becker: Theorie der Wärme

1985[3] p62; Kittel: Theorie der Wärme; Brenig: Statistische Theorie der Wärme; Reif: Statistische Physik. Berkeley Physik Kurs Bd5 1990[3]; Reif: Grundlagen der Physikalischen Statistik und der Physik der Wärme 1976 p295, 661ff; Sachs, Sen, Sexton: Elements of statistical mechanics with an introduction to quantum field theory and numerical simulation 2006 Lies Landau & Lifschitz: Statistische Physik Bd5 Chap2 p35ff Finde Beziehung zwischen 10^{23} zappelnden **mikroskopischen** $\Gamma(t) = q^N p^N(t) =$ **Mikrozustand** und **Makrozustand** = **makroskopischen** zeitlosen/fixen Variablen T, p, V, U, F, S für das Gleichgewicht! a] Nimm N freie identische/gleiche Moleküle $U = E_N = \sum^N |\vec{p}_i|^2/2m =$ Erhaltungsgröße. b] Wähle Wahrscheinlichkeit $P(E)$ dafür, dass ein System mit N Teilchen die Energie E hat. $< E >= \sum^N E_N P(E_N)$. Mit $P(E_N) = \frac{1}{C(E)}\delta_{E_N,E_N^0}$, wobei $C(E) =$ Phasenfaktor, der Anzahl der Zustände mit Energie E zählt. **Kanon Ensemble:** i] Phasenraumvolumenelement/Box beherberge $\rho(E)\mathrm{d}^D q\mathrm{d}^D p$ Teilchen der Energie E. $\rho(E)$ hängt nicht von $\vec{q}, \vec{p}$ ab, weil allein Konfigurationen mit der Energie E gezählt werden, wegen Energieerhaltung (bei Oszillator wäre es die Ellipse). ii] Anzahldichte bleibt bei Änderung der Gesamtenergie erhalten: $\frac{\rho(E_1)}{\rho(E_2)} = \frac{\rho(E_1+E)}{\rho(E_2+E)}$, also Verhältnis unabhängig von E. Kann man an Phasenraum-Ellipse bei Oszillator einsehen: $\rho_l(E_l) = e^{-\beta E_l} \to \rho_l'(E_l) = e^{-\beta(E_l+E)}$; Man kommt auf $P(E) = \frac{1}{Z_N}C(E)e^{-\beta E}$ mit der Partitionsfunktion des kanonischen Ensembles von Gibbs $Z_N(\beta) = \sum_{q,p} e^{-\beta E} = \sum_E C(E)e^{-\beta E}$, die **makroskopische** Variable Temperatur β mit der **mikroskopischen** Variable der Gesamtenergie aller Teilchen E verknüpft. $U =< E > (\beta) := \sum_E EP_\beta(E) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_N(\beta)$. Mit freier Energie $F = -\frac{1}{\beta}\ln Z_N(\beta)$, also $U = \left[\frac{\partial}{\partial(1/\beta)}\left(\frac{F}{T}\right)\right]_V$. MacDonald: Introductory statistical mechanics for physicists 1963; **Schulz: Statistische Physik. Beruhend auf Quantentheorie** 2005. Eine korrekte statistische Darstellung der Thermodynamik muss den Begriff der Quantenzustände zugrunde legen! Auch wenn's Boltzmann anders machte, so ist es doch Quark, eine klassische statistische Physik funktioniert nicht. **Erwärmung** klappt nur mit Quantensystemen, siehe Planck. Boltzmann-Konstante k ist nur Umrechnungsfaktor daher besser 1, weil **Temperatur** = **Energie**!; Võjta: Teubner-Taschenbuch der statistischen Physik 2010; Feynman: Statistical mechanics. A set of lectures 1972 **Schlüssel-Idee der statischen Mechanik:** Wenn ein System im Gleichgewicht in einem von N Zuständen angetroffen werden kann, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es die Energie E_n hat $w(E_n) = \frac{e^{-E_n/kT}}{Q}$ mit der Zustandssumme $Q = \sum_{n=1}^N e^{-E_n/kT}$. Seien qm Operator $\hat{A}$ und $|i>$ Zustand mit Energie E_i, dann ist Erwartungswert der Observablen $A < A >= \frac{1}{Q}\sum_{|i>} < i|A|i > e^{-E_i/kT}$; **Lenk, Macheleidt & Möbius: Statistische Physik, Relativitätstheorie, Elementarteilchen**. Physik für Lehrer Bd12 1979; Langkau, Linström & Scobel: Physik kompakt. Statistische Physik 1996; Ma: Statistical mechanics 1985; Pathria: Statistical mechanics 1998[2]; **Fließbach: Statistische Physik** Bd4 2010[5]; Kittel & Krömer: Physik der Wärme 1984[2], 1993[4]; Fisher: Excursions in the Land of Statistical Physics 2016; Moore: Six ideas that shaped physics. Unit T = Some processes are irreversible 2003 **Makro- und Mikrozustände** ab Kap4 Einstein-Modell des Festkörpers aus N identischen Atomen als harmonische Schwinger mit äquidist Energie-Niveaus $\epsilon = \hbar\omega = \hbar\sqrt{\frac{k_s}{m}}$ oberhalb 100K = therm Energie $U = \sum_{i=1}^{3N}\epsilon n_i$ mit $n_i \in \mathbb{N}$; Joos: LB der Theoret Physik 1932, 1998[15] Thermdynamik und klassische Statistik, p409-506; **H.D. Zeh: Entropie** 2005, p51; Analogie: Neuronale Netzwerke und Boberth/Affolter-Konzept oder Strom ohne Vorstellung von Körnigkeit. Phänomenologische Theorien werden gern atomistisch garniert oder aufgeblasen - Feynman. Lenk: PfL 12 1979 ist Kurzfassung von Lenk: Einf in die Statistische Mechanik 1978 fußt auf Weizel: LB der theoret Physik BdII 1950 p1171-1261; **Peliti: Statistical Mechanics in a Nutshell** 2011; **Gallavotti: Statistical mechanics** 1999; **Wiedemann: Numerische Physik** 2004; Schnakenberg: Algorithmen in der Quantentheorie und statistischen Physik, simulated annealing; Schulz; Vasileyv; Guénault: Statistical physics 2001; Kammer & Schwabe: Thermo irreversibler Prozesse 1984; Schrödinger; Pauli; Fermi; Ehrenfest; Tolman; Honerkamp: Statistical Physics;

Koppe; Hill; Schwabl: Statistische Mechanik 2006 ebook; Prigogine: Non-Equilibrium Statistical Mechanics 1962; Krauth: Statistical mechanics - algorithms and computations 2008; Sethna: Statistical mechanics - entropy, order parameters, and complexity 2007; Römer & Filk: Statistische Mechanik 1994; Schrödinger: Statistische Thermodynamik 1952; Jacobs: Stochastic processes for physicists 2010; Mahnke, Kaupuzs, Lubashevsky: Physics of Stochastic Processes: How Randomness Acts in Time 2008 Thorvald Nicolai Thiele 1838-1910 Begründer der modernen Versicherungsmathematik und Astronom; Brillouin: Science and information theory 1956; Reif: Physikalische Statistik und Theorie der Wärme, Ãmit & Verbin: Statistical physics. An introductory course 1999; **Reineker, Schulz: Theoretische Physik.** Statistische Physik und Thermodynamik 2010; Zubarev: Statistische Thermodynamik 1976 Stauffer & Aharony: Perkolationstheorie 1995; D Stauffer 1943-2019 PhysJ18 2019 H11 p68; Röpke: Statistische Mechanik 1986; Livi & Politi: Nonequilibrium Statistical Physics. A Modern Perspective 2017; **Guttmann: The Concept of Probability in Statistical Physics** 1999;

IV. Problems: Lim (China-Kladde); Trostel; Meyer & Schiffner: Technische Thermodynamik; Landsberg: Problems in thermodynamics and statistical physics; Diu, Bernard: Grundlagen der statistischen Physik. Lehrbuch mit Üungen 1994; Singer & Syrbe: Repetitorium und Aufgabensammlung 1971; Muschnik & Zimmer: Aufgaben zu Statistischen Physik und Theorie der Wärme mit Rechenweg und Lösungen: ausgewählte Aufgaben aus **F. Reif: Grundlagen der Physikalischen Statistik und die Physik der Wärme** Singh & Chaturvedi: IIT JEE Physics (38 Years) **Topic-wise Complete Solutions** Vol2: Thermodynamics, Electromagnetism and Modern Physics 1978-2015;

Ideale Gas (kleine Dichte/hohe Temperatur): $p\,\bar{v} = \bar{R}\,T$ gibt

$$\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \mathrm{d}T = V(\gamma \mathrm{d}T - \kappa \mathrm{d}p), \kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \gamma = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

mit **Kompressibilität** κ = relative Volumenabnahme bei Druckerhöhung und **Volumenausdehnungskoeffizient** γ = relative Volumenzunahme bei Temperaturzunahme. **Spannungskoeffizient** = relative Druckzunahme bei Temperaturzunahme

$$\beta := \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{p}\frac{\gamma}{\kappa}$$

Ideales Gas: $\beta_{\mathrm{id}} = \gamma_{\mathrm{id}}$ also $\kappa = 1/p$ und $\gamma = 1/T$. Smorodinskij & Ziesche: Was ist Temperatur? 2000; Nörtershäuser: Emissionslinien des Eisens, PJ22 2023 H3 p22f;

Negative Temperatur: $S(E)$ mit $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{T}$ gibt $T < 0$, für Laserbetrieb ja, aber nicht am Ofen. Kittel & Krömer: Physik der Wärme p488; Schulz: Statistische Physik p37, p53; Kälter als kalt und heißer als ∞ heiß. Bezieht sich auf die Geschwindigkeitsverteilung. Es sind mehr Teilchen bei höherer Energie da, als mit niederer Energie, also e^{-kT} mit $T < 0$. Druck ist dann auch negativ. Zieht sich spontan zusammen. PhysJ2014. Dunkle Energie? SdW März 2013 p17-20;

Weizel: LB theoret Physik Bd2 p1226f **Virial und van der Waals'sche Zustandsgleichung**; Boltzmann: Vorlesungen über Gastheorie Bd2 1898 p1-33 Grundzüge der Theorie van der Waals, p33-62 Diskussion der Theorie van der Waals, p138-176 Ableitung der Theorie van der Waals'schen Gleichung mittels des Virialbegriffes; van der Waals (Binnendruck durch Teilchenpotenziale jenseits harten Kerns, Kovolumen wegen Teilchenausdehnung, $\bar{a} = \frac{A}{n}$, n=Objektmenge, Objektzahl in einem mol $6\,10^{23}$)

$\left(p + \frac{\bar{a}}{\bar{v}^2}\right)(\bar{v} - b) = \bar{R}\,T$ Boltzmann: Kinetische Gastheorie Bd2 1898 diskutiert das Zustandsdiagramm ausführlich. Siehe auch Gerthsen. Schwabl: Statische Mechanik 2006[3] p244ff reale Gase; Fowler: Statistical mechanics. The theory of properties of matter in equilibrium 1929 p275ff The theory of imperfect gases; Hill: An introduction to statistical thermodynamics 1960 p261 Imperfect gases; Huang: Statistische Mechanik Bd1 1963 p52ff van der Waals'sche Zustandsgleichung, Bd2 p54f; Green: The Molecular Theory of Fluids 1952; Egelstaff: An introduction to the liqid state 1967; Egelstaff: Recent developments in liquid state physics PhysBl31 1975 p635-644; Barker & Henderson: What is "liquid"? Understanding the states of matter, RMP48 1976 p587-671; Greiner: Thermodynamik und statistische Physik Bd9 1993 p477ff Reale Gase; Schulz: Sta-

tistische Physik 2005 p215ff per Virialentwicklung zur van der Waalsgleichung. Becker: Theorie der Wärme 1955 p28ff, p176, p186, p191 van der Waalsgleichung

Virialgleichung $pV = mTR + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \ldots$ **Energie eines idealen Gases im Teilchenmodell:** Gay-Lussac $pV = RT = NkT = nRT = \frac{M}{m}RT$ Billard-Kugelmodell von Danial Bernoulli1700-1782, Herapath1790-1868, Waterston1811-83, Brush: Kinetische Theorie. Einführung und Originaltexte. 1965, 1970 Bd1 Die Natur der Gase und der Wärme p23f, p32-39. Druck $P = \frac{F}{A}$ von N Billardkugeln der Masse m und einer mittleren Geschwindigkeitsvarianz $\bar{v} = \sigma_v$ wegen Maxwell-Verteilung $p_v \propto v^2 e^{-v^2}$ senkrecht auf eine der 6 Seitenflächen eines Würfels mit $A = l^2$ ist Ausdruck der Kraft $F = \frac{N}{6}\frac{2m\bar{v}}{\tau}$, die der Impulsänderung innerhalb er Stoßdauer τ notwendig ist. $P = \frac{F}{A} = \frac{N2m\bar{v}}{6A\tau}$. Damit alle Teilchen zum Stoß beitragen können, muss man bei der mittleren Geschwindigkeitsvarianz $\bar{v} = \frac{l}{2}\frac{1}{\tau}$ die Stoßdauer $\tau = \frac{l}{2\bar{v}}$ abwarten. Gibt $P = \frac{N2m\bar{v}^2}{3Al} \overset{m\bar{v}^2=kT}{=} \frac{N2kT}{3V}$. Oder: $F = ma$ mit Stoßbeschleunigung $a = \frac{2\bar{v}}{\tau}$. Am Stoß sind innerhalb der Zeit $\Delta t \gg \tau$ wegen $\Delta x = \bar{v}\Delta t$, $\Delta V = A\Delta x = \bar{v}A\Delta t$, also wegen $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta N}{N/6}$ folglich $\Delta N = \frac{N}{6V}\Delta V = \frac{N}{6V}\bar{v}A\Delta t$ Teilchen beteiligt. Daher ist die Teilchenzahl für die viel kürzere Stoßzeit entsprechend $\frac{\Delta N_\tau}{\Delta N} = \frac{\tau}{\Delta t}$. Daher gilt $PA = F = \dot{p} = \frac{2m\bar{v}}{\tau}\Delta N_\tau = 2m\bar{v}\frac{\Delta N}{\Delta t} = 2m\bar{v}\frac{N}{6V}\bar{v}A \overset{m\bar{v}^2=kT}{=} \frac{kTNA}{3V}$, also $\frac{PV}{T} = \frac{kN}{3}$. Physik LB Klasse 11 1969, 1971 p91ff; Annalen der Physik 1856 von August Karl Krönig1822-1879 Südwestfriedhof. Brush: Kinetische Theorie. Einführung und Originaltexte. 1965, 1970 Bd1 Die Natur der Gase und der Wärme p44f; Energie pro Freiheitsgrad $\epsilon = \frac{kT}{2}$. Kinetische Energie eines Teilchens mit f Freiheitsgraden $\epsilon_f = f\frac{kT}{2}$. Punktmasse, einatomiges Gas: $f = 3$. Hantel, CO, starres zweiatomiges Molekül-Gas: $f = 3 + 2$ wegen Translation und Rotation. Schwingungsfähiges zweiatomiges Molekül-Gas $f = 3+2+2$, da jede Schwingung im Phasenraum 2 FG hat p^2 und x^2. **Innere Energie** ist $U(T) = N\epsilon = Nf\frac{kT}{2} = \frac{f}{2}T\bar{R} = \bar{c}_V T$ allein Bewegung, also nur eine Funktion der Temperatur! $\mathrm{d}N = \frac{N}{6}v\mathrm{d}t\frac{A}{V}$, $\mathrm{d}p = \mathrm{d}N2mv$, $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, $F = pA$ gibt $pV = \frac{1}{3}Nmv^2 = \frac{2}{3}N\epsilon = NkT$, also $\epsilon = \frac{3}{2}kT$, folglich pro FG $\epsilon_{\mathrm{FG}} = \frac{kT}{2}$. Gaskinetische Temperatur gemäß Ergodensatz per Zeitmittel- oder Ensemble-Varianz der Teilchengeschwindigkeit. Becker: Theorie der Wärme p72;

0.HS: **Existenz der Temperatur** und eines **Gleichgewicht**s. Es gibt einen gemeinsamen thermischen Zustand. Bei Kontakt nach endlicher Zeit gleiche Temperatur, die nach Trennung beibehalten wird. **Thermodynamisches Gleichgewicht** liegt vor, wenn bei festen Nebenbedingungen im thermodynamischen System keine Zustandsänderungen auftreten. Muss klar von **stationären Zustand** unterschieden werden, bei dem es noch stationäre Ströme gibt. Denn bei der Thermodynamik irreversibles Prozesse sind die Ströme eine Folge der Gradienten $(\mathrm{grad}\,T, \mathrm{grad}\,c)$. Bei Abwesenheit äußerer Kräfte ist des thermodynamische System bzgl aller thermodyn Parameter und Funktionen homogen.Ein abgeschlossenes thermodynamisches System befindet sich im td Gleichgewicht, wenn die Entropie ihren maximalen Wert erreicht hat bei den Nebenbedingungen U=const, V=const, N=const. Bei System im Thermostaten gilt T=const, statt U=const und die **freie Energie** wird statt der Entropie zum Minimum. Brockhaus Physik 1972; $\delta M \neq 0$ **offenes**, $\delta Q \neq 0$ **geschlossenes**, $\delta W \neq 0$ **adiabatisches**, kein Austausch, dann **abgeschlossenes System. Wärme und Arbeit** sind Energieaustausch oder -übergangsformen, Zustandsänderungsgrößen, aber keine totalen Differenziale, wegabhängig. **Wärme** muss her, um einen Energiesatz für thermodynamische System zu haben. Möchte man die Wärme dennoch durch eine Zustandsvariable ausdrücken, so muss spezielle Zustandsänderung betrachtet werden: $\mathrm{d}p = 0$ oder $\mathrm{d}V = 0$. **Innere Energie** $\Delta U := Q + W$ ist die mit einem System ausgetauschte Energie in Form von Wärme oder Arbeit. Planck: ΔU ist die in einem System innewohnende Fähigkeit, außerhalb des Systems Wirkungen hervorbringen zu können. U ist Zustandsgröße.

Planck: Der **1.HS** ist der Energiesatz der Mechanik für Systeme, bei denen auch Wärme ausgetauscht wird. $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q = \delta Q - p\mathrm{d}V$ Arbeit und Wärme sind zwei äquivalente Energieaustauschformen. Es

gibt zwei Energieübergangsformen. Ostwald: Es gibt kein perpetuum mobile 1. Art. **Isobar ausgetauschte Wärme** oder **Reaktionsenthalpie: Enthalpie** $H := U + pV$ **macht Wärme für** $p =$ **const zur Zustandsgröße.** Denn $\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = \delta Q + V\mathrm{d}p = (\delta Q)_p$.

Wärmekapazität als Maß für quantenmechanisch begründbare Energieaufnahmemöglichkeit $c = \frac{\delta Q}{\mathrm{d}T} \neq \frac{\delta Q}{T} = \mathrm{d}S$ ist wegen Wegabhängigkeit keine Zustandsgröße.

Wagner: Chem Thermodynamik; G̃rabow: Leben und Wirken von Gustav Anton Zeuner 1984; Gustav Zeuner: Technische Thermodynamik 1887; Zeuner: Die Schiebersteuerungen. Mit besonderer Berücksichtigung der Steuerungen bei Locomotiven 1858; Sajadatz: Wärmelehre für Gas- und Kohlekraftwerksberufe 1967[2] isentrop = keine Entropieänderung = $\mathrm{d}S = 0$, bedeutet wegen $\mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{textrev}}{T}$ auch $\delta Q = 0$ = adiabatisch = wärmedicht, Arbeitsdiagramme = Kreisprozesse realer Maschinen = Clausius-Rankine-Prozess = Dampfkraftwerksprozess p136, Otto/Diesel-Motor p138, Kompressor p137; Pohlenz, Eikel, Rösler, Heidenreich, Schilg, Bernstein, Hahn, Riehmer, Schieche, Sörgel, Weber, Bernhardt: Fachwissen des Ingenieurs Bd4 Kraft- und Arbeitsmaschinen, Kältemaschinen 1970 p289 100MW-Kondensationsturbine; Sajadatz, Schmidt (Grinsi): Technische Thermodynamik für Kraftwerker; Cerbe, Wilhelms: Technische Thermodynamik 2008[15]; Der Theoretiker nutzt bequem die Gibbs'sche Sicht der Zustandsgößen als thermodynamischen Potenziale zur Beschreibung der Thermodynamik. Mehr als 100 Jahre zuvor stand der Kohleverbrauch der Dampfmaschine im Fokus. Carnot: Maschinen arbeiten zyklisch, daher nutzt praxisorientierte Thermodynamik **Kreisprozesse**, die auf Wirkungsgrad abziehlen. Idealisiert ist das der Carnot-Prozess. $p - V-$Diagramm $p(V)$ und $s - T-$Diagramm $T(s)$. **Carnot** 1.HS $\oint \mathrm{d}U = 0, \mathrm{d}U = \delta Q + \delta W$ gibt $\oint \delta Q = -W$. Der **1.HS** fordert für ein abgeschlossenes Gesamtsystem, dessen **Teilsysteme untereinander nicht im thermischen Gleichgewicht** sind, solche Zustandsänderungen, die die innere Energie des Gesamtsystems konstant lassen. ABER es gibt darunter denkbare Zustandsänderungen, die nie beoabachtet werden. Beispiel1: Gesamtsystem rollender Wagen auf Schiene kommt zur Ruhe. $\delta E_{\mathrm{kin}} + \delta E_{\mathrm{Reibung}} = 0$, also $\delta E_{\mathrm{Reibung}} = -\delta E_{\mathrm{kin}}$ oder $\delta E_{\mathrm{kin}} + \delta Q = \mathrm{d}U = 0$. Also $\delta Q = -\delta E_{\mathrm{kin}}$. Umgekeht geht's nicht. Thermische Energie nie völlständig in andere Energiearten umwandelbar, aber bei jedem Prozess taucht thermische Energie auf. Alles nach dem 1.HS ablaufenden Prozesse laufen so, dass S zunimmt. Für abgeschlossene Systeme ist stets $\mathrm{d}S \geq 0$. Welt aus Teilchen und 1.HS heißt: Es gibt gbt im Universum zyklische Prozesse. Oder: Strenge Gültigkeit des 2.HS verbietet Atomistik! Bennett: Maxwells Dämon, SdW, Januar 1988 p48; Die Mindestenergie E, um n Bit Information zu verarbeiten, beträgt $E = nkT \ln 2$. Szilárd 1929 Habilitation: Über die Entropieverminderung in einem thermodynamischen System bei Eingriffen intelligenter Wesen. Zeitschrift für Physik 53: 840–856; Brillouin: Science and information theory 1956; **Erinnerung** bedeutet **Entropiereduktion**! Aber: Die einzige Interaktion des Wesens mit dem Ein-Molekül-Gas ist die Messung. Die thermodynamische Entropieverringerung kann, damit der zweite Hauptsatz nicht verletzt wird, also nur durch eine Entropieerzeugung von gleichem Betrag durch die Messung ausgeglichen werden. Den Betrag dieser Entropie S berechnete Szilárd aus den thermodynamischen Vorgängen zu $S = k \ln 2$. **Landauer-Prinzip:** Löschen – im Sinne des Zurücksetzens in einen wiederbeschreibbaren Zustand – eines Bits physikalisch gespeicherter Information muss immer die bereits bekannte Entropie $k \ln 2$ freisetzen. Logisch reversible Operationen wie Schreiben und Lesen bewirken dagegen keine Entropie- oder Energiefreisetzung. Leff & Rex eds: **Maxwell's Demon 2. Entropy, Classical and Quantum Information, Computing** 2003; **2.HS:** $\oint \mathrm{d}S = 0, \mathrm{d}S = \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T}$ gibt $\oint \frac{\delta Q_{\mathrm{rev}}}{T} = 0$, reversibel meint $\Delta T \to 0$. **2.HS** Aussage über abgeschlossene Systeme $\mathrm{d}U = 0$. 1.Hs ist zu allgemein, denn es gibt Reibung, plastische Verformung. Es ist auf keine Weise möglich, einen Vorgang, bei dem innerhalb der Teilsysteme innere Energie durch Wärme durch Wärme entsteht, vollständig rückgängig zu machen. Aber: J von Neumann sah Shannon-Information und identifizierte sie irrtümlicherweise mit thermodynamischer Entropie. B. Kish, Texas: Information entropy and thermal entropy = apples and oranges. Non-validity of the Landauer's principle arXiv.org physics arXiv:1706.01459 The change of information entropy during measurement is determined by the resolution of the measurement instrument and these changes do not have a general and clear-cut interrelation with the change of thermal entropy. Moreover, these changes

can be separated in space and time. We show classical physical considerations and examples to support this conclusion. Finally, we show that information entropy can violate the Third Law of Thermodynamics which is another indication of major differences from thermal entropy.

$$\eta = \frac{|W_m|}{{}_1Q_2} = \frac{W_{\text{ab}}}{W_{\text{auf}}} = \frac{{}_1Q_2 - |{}_3Q_4|}{{}_1Q_2} = 1 - \frac{|{}_3Q_4|}{{}_1Q_2}, \Delta_1 S_2 = \frac{{}_1Q_2}{T_1}, \Delta_3 S_4 = \frac{{}_3Q_4}{T_2}, \Delta_1 S_2 = \Delta_3 S_4, \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

stoffunabhängig, Carnot hat höchsten Wirkungsgrad: $\eta_{\text{irr}} < \eta$. **Lenoir:** pulse jet engine, $1 \to 2$: Constant volume (isochoric) heat addition ${}_1Q_2 = mc_v\,(T_2 - T_1)$, ${}_1W_2 = \int\limits_1^2 pdV = 0$, $c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$, $p_2V_2 = RT_2$; $2 \to 3$: Isentropic expansion, reversible adiabatic expansion of the fluid back to its original pressure, $\frac{T_2}{T_3} = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{V_3}{V_2}\right)^{\gamma-1}$, $p_3 = p_1$, ${}_2W_3 = mc_v\,(T_2 - T_3)$ because for an adiabatic process: ${}_2Q_3 = 0$; $3 \to 1$: Constant pressure (isobaric) heat rejection—compression to the volume at the start of the cycle: ${}_3Q_1 -_3 W_1 = U_1 - U_3$, ${}_3W_1 = \int\limits_3^1 pdV = p_1\,(V_1 - V_3)$, ${}_3Q_1 = (U_1 + p_1V_1) - (U_3 + p_3V_3) = H_1 - H_3.$, ${}_3Q_1 = mc_p\,(T_1 - T_3)$, $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$, $\eta_{th} = \frac{{}_2W_3 + {}_3W_1}{{}_1Q_2}$.

Intensive Größen/ Größe nicht von Zerteilung des System abhängig / systemgrößenunabhängig: T, p, ρ Die innere Energie $U(S, V, N)$ und alle aus ihr mittels Legendre-Transformation hervorgehenden Funktionen sind thermodynamische Potentiale. Die Legendre-Transformation transformiert die Potentiale von Entropie S nach Temperatur T, Volumen V nach Druck p und Teilchenzahl N nach **chemisches Potential** μ, gibt die Abhängigkeit der thermodynamischen Energiegrößen U, H, F und G von der **Zusammensetzung des Systems** an. Intensive thermodynamische Zustandsgröße **chemisches Potenzial** μ = **Möglichkeiten/intrinsisches Potenzial eines Stoffes** a] mit anderen Stoffen zu reagieren (chemische Reaktion); b] in eine andere Zustandsform überzugehen (Phasenübergang); c] sich im Raum umzuverteilen (Diffusion). **Beschreibung aller Arten von stofflichen Umsetzungen**, auch von Reaktionen, an denen Photonen, Phononen, Elektronen oder Defektelektronen beteiligt sind. Eine Reaktion, Umwandlung oder Umverteilung kann nur dann freiwillig stattfinden, wenn das chemische Potential im Endzustand kleiner ist als im Ausgangszustand: $\mu_{\text{End}} < \mu_{\text{Ausgang}} \Leftrightarrow \Delta\mu = \mu_{\text{End}} - \mu_{\text{Ausgang}} < 0$. Jede Potentialdifferenz beschreibt die Fähigkeit des Systems, Arbeit zu verrichten. Daher besitzen **chemische Reaktionen solange eine Triebkraft** = **Freiwilligkeit des Ablaufens**, bis sich ein Gleichgewicht einstellt, indem sich die chemischen Potentiale aller Stoffe angleichen = Summe der chemischen Potentiale multipliziert mit den stöchiometrischen Koeffizienten ergibt Null = **Affinität wird Null**. **Reine Stoffe** = **einkomponentige Systeme** = chemisches Potential konstant = gleich der molaren Gibbs-Energie. Die molaren Gibbs-Energien für die Bildung vieler Stoffe unter Standardbedingungen sind tabelliert und erlauben die Berechnung von chemischen Potentialdifferenzen in Reaktionsmischungen. Bei gegebenen p, T, V, S und $n_{j=1\ldots k}$ ist damit die Berechnung von **Reaktionswärme und Reaktionsrichtung** möglich. **Gleichgewichtskriterium** = Verschwinden der chemischen Potentialdifferenz, denn es gilt unabhängig davon, welche anderen Größen konstant gehalten werden; es gilt auch dann noch, wenn keine der anderen Variablen während des Einstellprozesses des Gleichgewichts konstant bleibt. **Kristalline Festkörper** = chemisches Potential der Elektronen bei $T = 0$ K der **Fermi-Energie**. **Quasiteilchen:** Phononen oder Magnonen $\mu = 0$, da es hier keine Teilchenzahlerhaltung gibt. Nickel: Lehrbuch der Thermodynamik. Eine verständliche Einführung 1995, 2010; Es gibt somit 3 Variablenpaare $(S, T), (V, p), (N, \mu)$ und daher $2^3 = 8$ thermodynamische Potentiale. **Totales Differential** = **Riemanns Idee der mehrfach ausgedehnten Größe.** Gibbs-Energie (auch Freie Enthalpie) $G = G(T, p, N)$ Großkanonisches Potential $\Omega = \Omega(T, V, \mu) = F - \mu N$, $R = R(S, V, \mu) = U - \mu N$, $J = J(S, p, \mu) = R + pV$, $K = K(T, p, \mu) = G - \mu N$.
$\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W = TdS - pdV$
$\mathrm{d}U = T \cdot \mathrm{d}S - p \cdot \mathrm{d}V + \sum_{i=1}^{K} \mu_i \cdot \mathrm{d}N_i$
$\mathrm{d}U(S; V; N; P; M) = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N + E\,\mathrm{d}P + H\,\mathrm{d}M$
Dabei ist $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke, $\vec{H}$ die magnetische Feldstärke, $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ die **Polarisation** mal Volumen, $\chi_e = \epsilon_r - 1$ elektrische **Suszeptibilität** für lineare Dielektrika, ϵ_r relative Dielektrizitätskonstante

Potenzial		Differenzial	parzielle	Ableitungen
Innere Energie	$U(S,V,N)$	$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\mathrm{d}V$	$T = U_{,S}\vert_V$	$-p = \partial_V U\vert_S$
Freie Energie	$F(T,V,N) = U - TS$	$\mathrm{d}F = -S\mathrm{d}T - p\mathrm{d}V$	$-S = F_{,T}\vert_V$	$-p = \partial_V F\vert_T$
Enthalpie	$H(S,p,N) = U + pV$	$\mathrm{d}H = T\mathrm{d}S + V\mathrm{d}p$	$T = H_{,S}\vert_p$	$V = \partial_p H\vert_S$
freie Enthalpie	$G(T,p,N) = H - ST$	$\mathrm{d}G = -S\mathrm{d}T + V\mathrm{d}p$	$-S = G_{,T}\vert_p$	$V = \partial_p G\vert_T$

Tabelle 3: Thermodynamischen Potentiale

S	U	V	$\xrightarrow{+}$
Hilft		Fysikern	
pei	Großen	Taten	$\xleftarrow{-}$

Tabelle 4: Guggenheim-Quadrat

oder Dielektrizitätszahl (ϵ_r(Vakuum)=1, ϵ_r(Methanol)=33,ϵ_r(Wasser)=80, $\epsilon_r = 1 + \chi = (n + i\,\kappa)^2$, wobei der Realteil des **Brechungsindex**

$$n = \sqrt{\epsilon_r\,\mu_r} = \frac{c}{v_{\text{Phase}}}$$

ist. **Brechungsgesetz** $n(\vec{x})\sin\alpha(\vec{x})$ =const.

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \epsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$$

die **dielektrische Verschiebung** , M = Magnetisierung mal Volumen. Freie Energie eines Systems bei definierter Temperatur T im thermischen
Gleichgewicht mit seiner Umgebung $\tilde{F} := U(S;V;N;P;M) - T\,S - E\,P - H\,M$, totales Diff/Zuwachs $\mathrm{d}\tilde{F}(S;V;N;E;H) = -S\,\mathrm{d}T - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N - P\,\mathrm{d}E - M\,\mathrm{d}H$ **Thermo Gleichgewicht mit Wärmebad**, also T = const, aber **fluktuierende Gesamtenergie**: Die **freie Energie, Gibbs'sche Funktion, Helmholtz-Potential** ist das zum **kanonischen Ensemble** gehörende thermodynamische Potential und ist über folgende Beziehung mit der kanonischen Zustandssumme Z_k verknüpft: $F(T;V;N) = -k_B\,T\,\ln(Z(T;V;N)_k)$
Bei kanonischer Präparierung eines Systems (**abgeschlossenes System** V=const, N=const im Wärmebad $T = T0$) wird im thermodynamischen Gleichgewicht die freie Energie minimal. **Thermodynamische System-Klassen** hinsichtlich Austausch/WW mit Umgebung und **makroskopischer Nebenbedingungen**: A] **Offenes** System $\delta N \neq 0, \delta Q \neq 0, \delta W \neq 0$. B] **Geschlossenes** System $\delta N = 0, \delta Q \neq 0, \delta W \neq 0$. Gegeben sind T, V, N, **freie Energie** F minimal, $U = TS + F$, gibt **kanonisches Ensemble oder Boltzmann-Statistik**. C] **Adiabatisches** System, also thermisch isolierte Wand $\delta N = 0, \delta Q = 0, \delta W \neq 0$. D] **Abgeschlossenes** System $\delta N = 0, \delta Q = 0, \delta W = 0$. Gegeben sind U, V, N mit U= const, Entropie S maximal, gibt mikrokanonisches Ensemble. Verteilungsfunktion des **mikrokanonischen Ensembles** $\rho(p,q) = \frac{1}{Z}\delta(E_0 - H(p,q))$, folgt aus konstanter Energie E_0 als Nebenbedingung, mit Hilfe des Prinzip der maximalen Entropie. Die mikrokanonische Zustandssumme Z_m lässt sich als Oberfläche der Energie-Hyperfläche $H - E = 0$ auffassen: $\rho(p,q) = \begin{cases} \text{const} & \text{für } H(p,q) \begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{außerhalb}\end{matrix} \\ 0 & \end{cases}$ δE oder mit $\delta-$Funktions-Notation $\rho_{E_0}(\vec{x}_1, \vec{p}_1, \ldots, \vec{x}_N, \vec{p}_N) = \frac{1}{Z_m(E_0)}\delta(E_0 - H(\vec{q}_1, \vec{p}_1, \ldots, \vec{q}_N, \vec{p}_N))$. **Mikrokan Ensemble:** Ohne Umgebung - geschlossenenes System. Zustandssumme $\Omega(U,V,N)$. Thermodyn Potenzial $S(U,V,N) = k\ln\Omega$. **Kanonisches Ensemble**= $\mathcal{N}$ Kopien des betrachteten Systems mit fixen T, V, N, die durch wärmeleitende Wände verbunden = Wärmebad. Zustandssumme $Z(T,V,N)$. Thermodyn Potenzial $F(T,V,N) = -kT\ln Z$. **Dimensionsloses Phasenraum-Volumenelement im Γ-Raum am Ort** $(\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_N, \vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_N) = \vec{\Gamma} \in \mathbb{R}^{6N}$ ist $\mathrm{d}\Gamma(\vec{\Gamma}) = \Pi_{i=1}^{3N}\frac{\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i}{h} = \frac{1}{h^{3N}}\Pi_{i=1}^{3N}\mathrm{d}q_i\mathrm{d}p_i$ mit h-Normierung als Konvention. Verweist zunächst nicht auf Quantentheorie. Jelitto: TP Bd6. Thermodynamik und Statistik 1989[2] p195ff; Becker: Theorie der Wärme p126ff;

Ensemble	mikrokanon	kanonisches	großkanonisches
Systemumgebung	abgeschlossen $E = \text{const}$	Kontakt mit Wärmebad $T = \text{const}$	Kontakt mit Wärmebad und Teilchenreservoir
Zustandsdichte	$\rho(\vec{\Gamma}, E, V, N) \propto$ $\propto \delta(H(\vec{\Gamma}) - E)$	$\rho(\vec{\Gamma}, T, V, N) \propto e^{-\beta H}$	$\rho(\vec{\Gamma}, T, V, \mu) \propto e^{-\beta H + \mu N}$
Zustandssumme	$\Omega(E, V, N) = Z_m$	$Z_k(T, V, N)$ $= \sum_r e^{-\beta E_r(V,N)}$	$Y(T, V, \mu) = Z_g$
ZS idealer Gase	$= c^N (\frac{V}{N})^N (\frac{E}{N})^{\frac{3}{2}N}$ $\ln \Omega = N \ln c +$ $N \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} N \ln \frac{E}{N}$	$= \dfrac{V^N}{N! \lambda^{3N}}$ $\ln Z_k = N \ln \dfrac{V}{N \lambda^3} + N$ $= N \ln \frac{V}{N} B \beta^{-3/2} + N$	$= \sum_{N=0}^{\infty} Z_k(T, V, N) e^{\beta \mu N}$ $= \sum \dfrac{1}{N!} \left(\dfrac{V e^{\beta \mu}}{\lambda^3} \right)^N = e^{\dfrac{V e^{\beta \mu}}{\lambda^3}}$ $\ln Z_g = \dfrac{V e^{\beta \mu}}{\lambda^3} = N$
Zugeordnete Größe	Entropie $S(E, V, N) = k \ln \Omega$	freie Energie $F(T, V, N) =$ $-k \ln Z = E - TS$	großes Potenzial $\Omega = J(T, V, \mu)$ $= -kT \ln Y = -\dfrac{V e^{\beta \mu}}{\lambda^3} = -kTN$
$E(T, V, N)$ Kalorische Zustandsgl iG	$\dfrac{1}{T(E, V, N)} = \dfrac{\partial S}{\partial E}$ $= \dfrac{3}{2} kN$	$E(T, V, N) = -\dfrac{\partial \ln Z_k}{\partial \beta}$ $= \dfrac{3}{2} N \beta^{-1}$	$E(T, V, \mu) = -\dfrac{\partial \ln Y}{\partial \beta} + \mu N$ $= -\dfrac{\partial}{\partial \beta} \left(\dfrac{V}{\lambda^3} e^{\mu \beta} \right) + \mu N$ $= -V e^{\mu \beta} \dfrac{\partial \lambda^{-3}}{\partial \beta} = \dfrac{3}{2} kN$
$P(T, V, N)$Thermische Zustandsgl iG	$P(E, V, N) = T \dfrac{\partial S}{\partial V}$ $= kT \dfrac{N}{V}$	$P(T, V, N) = -\dfrac{\partial F}{\partial V}$ $= kT \dfrac{N}{V}$	$P(T, V, \mu) = -\dfrac{J}{V}$ $= kT \dfrac{N}{V}$

Tabelle 5: Ensembles, speziell ideales Gas. Fließbach: Statistische Physik Kap25 p216

Wobei **thermische Wellenlänge** der Teilchen $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{2\pi\hbar}{\sqrt{2\pi mkT}}$ oder $\dfrac{1}{\lambda^3} = \dfrac{(2\pi mkT)^{3/2}}{2\pi\hbar} = \underbrace{\dfrac{(2\pi m)^{3/2}}{2\pi\hbar}}_{=B} \beta^{-3/2}$, daher $\dfrac{1}{\lambda^3 \beta} = B\beta^{-5/2}$. **Großkan Ensemble**= betrachte Dichtefluktuationen in einem Ensemble kanonischer Gesamtheiten = Wärmebad & Teilchenreservoir. Zustandssumme $Y(T, V, \mu)$. Thermodyn Potenzial $J(T, V, \mu) = -kT \ln Y$. **Kanonisches/Gibbs Ensemble** heißt Wärmebad $T = \text{const}$, also $\rho(p, q) = \dfrac{1}{Z} e^{-\beta H(p,q)}$. **Großkanonischen Ensembles** heißt Teilchenaustausch erlaubt, offenes System im Wärmebad: Gegeben T, V, μ, großkanonisches Potential Ω minimal, $U = TS + \mu N + \Omega$ $p_i = \frac{1}{Z_g(\mu,V,T)} \mathrm{e}^{-\frac{E_i - \mu N_i}{k_\mathrm{B} T}}$ mit $Z_g(\mu, V, T) = \sum_i \mathrm{e}^{-\frac{E_i - \mu N_i}{k_\mathrm{B} T}}$. Wahrscheinlich eines Mikrozustands $P = e^{\dfrac{\Omega + \mu N - E}{kT}}$ mit dem großen Potenzial Ω, dem chemischen Potenzial $\mu =$ **einer Komponente gibt die Änderung der inneren Energie eines Systems an, wenn sich die Teilchenzahl dieser Komponente ändert. Es beschreibt zum Beispiel die Änderung der inneren Energie pro zugesetzter Stoffmenge einer bestimmten Komponente oder die Änderung der inneren Energie, wenn eine Komponente während einer Reaktion verbraucht wird. Das chemische Potential kann in Analogie zu anderen intensiven Zustandsgrößen wie dem Druck gesehen werden. Der Druck beschreibt die Änderung der inneren Energie wenn sich das Volumen ändert. Gleich wie der Druck ist das chemische Potential einer Komponente ein Maß für die verrichtete Arbeit; statt mechanischer handelt es sich aber um chemische Arbeit**, N Zahl der Teilchen des Mikrozustands. Oder $P = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{(\mu N - E)/(kT)}$ mit der großen Partitionsfunktion $\mathcal{Z} = e^{-\Omega/(kT)}$. **Fugazität = Flüchtigkeit** $= z = \mathrm{e}^{\frac{\mu}{k_\mathrm{B} \cdot T}}$ stellt Zusammenhang von kano und großkan Summe her: $Z_g(T, V, \mu) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N \cdot Z(T, V, N)$, $Z_k(N, V, T) = \sum_i \mathrm{e}^{-\frac{E_i}{k_\mathrm{B} T}}$, **Kanon Besetzungs-**

wahrscheinlichkeit eines Mikrozustandes i ist $p_i = \frac{1}{Z_k(N,V,T)} \mathrm{e}^{-\frac{E_i}{k_\mathrm{B}T}}$. Das kanonische Zustandsintegral ist $Z_k(N,V,T) = \int \mathrm{e}^{-\frac{H(\mathbf{p},\mathbf{q})}{k_\mathrm{B}T}} \frac{d\mathbf{p}d\mathbf{q}}{h^{3N}N!}$. **Gibbs-Faktor** = 1/N! stammt von der Ununterscheidbarkeit der Teilchen. Wenn man diesen Faktor wegließe, hätte man stattdessen N unterscheidbare Zustände und im Vergleich $N!$ zu viele Mikrozustände = **Gibbssche Paradoxon** = Zwei durch eine Trennwand getrennte Mengen des gleichen idealen Gases weisen die gleiche Temperatur und den gleichen Druck auf. Beim Herausziehen der Trennwand beobachtet man ohne den 1/N! Faktor fälschlicherweise eine Entropiezunahme. **Großkan Besetzungswahrscheinlichkeit eines Mikrozustandes** i ist $p_i = \frac{1}{Z_g(\mu,V,T)} \mathrm{e}^{-\frac{E_i-\mu N_i}{k_\mathrm{B}T}}$. $Z_g(\mu,V,T) = \sum_i \mathrm{e}^{-\frac{E_i-\mu N_i}{k_\mathrm{B}T}}$. In integraler Schreibweise lautet die Zustandssumme bzw. das Zustandsintegral $Z_g(\mu,V,T) = \sum\limits_{N=0}^{\infty} \int \mathrm{e}^{-\frac{E(\mathbf{p},\mathbf{q})-\mu N}{k_\mathrm{B}T}} \frac{d\mathbf{p}d\mathbf{q}}{h^{3N}N!}$. Man kann die großkanonische Zustandssumme aus der kanonischen Zustandssumme und der **Fugazität** $z = \exp(\mu/k_\mathrm{B}T)$ erhalten: $Z_g(\mu,V,T) = \sum\limits_{N=0}^{\infty} Z_k(N,V,T)z^N = \sum_{N=0}^{\infty} Z_k(N,V,T)\,\mathrm{e}^{\frac{\mu N}{k_\mathrm{B}T}}$. Berechnung der thermodynamischen Potentiale $S(N,V,E) = k_\mathrm{B}\,\ln Z_m(N,V,E), F(N,V,T) = -k_\mathrm{B}T\,\ln Z_k(N,V,T)$ und **großkanon Potenzial** $\Omega(\mu,V,T) = -k_\mathrm{B}T\,\ln Z_g(\mu,V,T)$.
Liebscher: Theoret Physik p70ff; Feldmeier: Statistische Physik. Skript 2009; S̃check: Theoretische Physik 5. Statistische Theorie der Wärme 2008; Goeke: Statistik und Thermodynamik. Eine Einführung für Bachelor und Master 2010; **Schrödinger: Statistische Thermodynamik** 1952 Kernproblem = Verteilung eines gegebenen Energiebetrags E auf N identische Systeme = Bestimme Verteilung einer Gesamtheit von N identischen Systemen auf die möglichen Zustände, deren Gesamtheit bei gegebener Energie E fähig ist, wobei zwischen den Systemen nur geringe WW besteht;

Intensive Größen: chemical potential, color, concentration, density (or specific gravity), magnetic permeability, melting point and boiling point, molality, pressure, specific heat capacity, specific volume. **Extensive Größen:** amount of substance mol, energy, enthalpy, entropy, Gibbs energy, heat capacity, Helmholtz energy, internal energy U. **Reichl: A modern course in statistical physics** 1980 p11, p20f $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta W + \sum \mu_j \mathrm{d}N_j = Y\mathrm{d}X$ = **verallgemeinerte Kraft** Y**/intensive Zustandsvariable** mal **verallgemeinerte Verschiebung** $\mathrm{d}X$**/extensive Zustandsvariable**. Wert der extensiven Zustandsvariable hängt von Systemgröße/Raumvolumen oder Anzahl der Freiheitsgrade ab. **Thermodynamische Arbeit** $\delta W = Y\mathrm{d}X = -p\mathrm{d}V + J\mathrm{d}L + \sigma\mathrm{d}A + \vec{E}\cdot\vec{P} + \vec{H}\cdot\vec{M}$. **Verallgemeinerte Kräfte** Y**/intensive Zustandsvariable** sind p Druck, mechanische Spannung J, σ Oberflächenspannung, elektrische/magnetische Feldstärke $\vec{E},\vec{H}$. **Verallgemeinerte Verschiebungen** $\mathrm{d}X$**/extensive Zustandsvariable** sind $\mathrm{d}V$ Volumenänderung, $\mathrm{d}L$ Längenänderung, $\mathrm{d}A$ Oberflächenänderung, $\mathrm{d}\vec{P}$ Änderung der Polarisation, $\mathrm{d}\vec{M}$ Änderung der Magnetisierung. Mandl: Statistical physics 1971; McQuarrie: Statistical mechanics 1976; Reineker & Schulz: Theoretische Physik V. Statistische Physik und Thermodynamik 2010; **Trevena: Statistische Mechanik. Eine Einführung** 1995; Nolting: Theor Physik6. Statistische Physik; Widom: Statistical mechanics. A concise introduction for chemists 2002; S̃kogseid & Fasano: Statistical Mechanics & Random Walks. Principles, Processes & Applications 2012; Cahn: A guide to physics problems Pt2 Thermodynamics, statistical physics, and quantum mechanics 1997; Wagner: Elemente der theoret Physik 2 1977 ab Kap 4.12 Gibbs'sches Ensemble p160-198 Bei Maxwell und Boltzmann sind die Molekeln selbst Systeme und Gas wäre Hypersystem aus Systemen im thermischen Kontakt. Aber: Besser Gibbs: Ein System im Sinne der stat Mechanik kann mikro- oder makroskopisch sein. Es soll energetische Individualität besitzen = es soll mit anderen Systemen bzw. Umwelt nur im schwachen (thermischen) Kontakt stehen. Es soll (im qm Sinne) von anderen Systemen **ununterscheidbar** sein. , p243-247; Weidlich: Thermodynamik und statistische Mechanik 1976, 1982; Findenegg & Hellweg: Statistische Thermodynamik 2015 p24 Abbildung zum Gibbs'schen Ensemble; Grimus: Statistische Physik und Thermodynamik. Grundlagen und Anwendungen 2015; Koppe: Die Grundlagen der statistischen Mechanik 1949; Döring: Einführung in die theoret Physik. Statistische Mechanik 1957; Ruelle: Thermodynamic formalism. The mathematical structures of equilibrium statistical mechanics 2004; Picinini et al.: Non-Ergodic Complexity Management arXiv:1511.08140 2015 Informationstransfer in gleichgewichtsfernen Netzwerken geht nicht mit Linearer Response Theorie. 1/f soll kognitive Prozesse reflektieren; Callen: Thermodynamics

and an Introduction to Thermostatistics; Chipot & Pohorille: Free energy calculations - theory and applications in chemistry and biology 2007; Huang: Statistical Mechanics;

24 Phasenübergänge und Renormierung

Stierstadt: Phasenumwandlungen PhysBl 30 1974 p9-18 und p106-118; **Nolting: Statistische Physik Bd6 1994 Kap4 Phasenübergänge p152ff;** Sole: Phase Transitions (Primers in Complex Systems) 2011; Reichl: Modern ... Kap4 Koexistenz von Phasen/Aggregatzuständen, Kap17 Phasenübergänge fern ab vom Gleichgewicht. Junghähnel: Thermodynamik Kap8; P̃eliti: Statistical Mechanics in a Nutshell 2011 Kap5 ME Fischer: CO_2 flüssig=gasförmig Koexistenz $p(V)$ und $p(T)$ van der Waals. Singularitäten: Isotherme Kompressibilität beim kritischen Punkt $\chi = -\left.\frac{\partial V}{\partial p}\right|_T \sim \frac{1}{|T-T_c|^\gamma}$. Lattice-Gas-Modell. Symmetriebrechung. Ordnungsparameter. **Peierls-Argument**. Kramers-Wannier: Dualität transformiert Hochtemperatur-Ising-Modell zu Niedrigtemperatur-Ising-Modell; **Ỹeomans: Statistical mechanics of phase transitions** 1992; **Goldenfeld: Lectures on phase transitions and the renormalization group** 1992; Trevena: p263-7 BEC = qm Phasenübergang im Impulsraum. Phasenübergang erster Ordnung/Art, Wasser, $T(S)$ hat Plateau oder $S(T)$ hat Entropie-Sprung, Umwandlungswärme, $c_p(T) = \delta(T - T_c)$, am Umwandlungspunkt $g(p, T)$ stetig, aber Sprünge in ersten Ableitungen: Symmetrie-Wandel des Systems und damit dessen Eigenschaften: spontanen Entstehung zusätzlicher Größen wie zum Beispiel einer Magnetisierung, dielektrischen Polarisation oder Deformation. Phasenübergang zweiter Ordnung/Art, am Umwandlungspunkt $g(p, T)$ und erste Ableitungen stetig: Zustand des Systems ändert sich kontinuierlich. Im Punkt des Phasenübergangs stimmen die Zustände der Hoch- bzw. Tieftemperaturphase überein. Daraus folgt, dass die eine Raumgruppe eine Untergruppe der anderen sein muss. In den meisten Fällen entspricht die Phase höherer Symmetrie der Hochtemperaturphase und die niedrigerer Symmetrie der Tieftemperaturphase. Eder: Einführung in die Physik der tiefen Temperaturen 1955; **Stanley: Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena** 1971; Plenz: Criticality in Neural Systems 2014; Fremond: Phase change in mechanics 2012; **Gebhardt & Krey: Phasenübergänge und kritische Phänomene** 1980; Levy, le Guillou, Zinn-Justin eds: Phase Transitions Cargèse 1980, Nato Science Series B72, 1982; M̃a: Modern Theory of Critical Phenomena 1976; **Brézin & Zinn-Justin: Fields, strings and critical phenomena** Les Houches session49 1990; Yeomans: Statistical Mechanics of Phase Transitions 1992; H̃epp: Theorie de la renormalisation. Cours donne a l'Ecole Polytechnique, Paris 1969; Salmhofer: Renormatization. An introduction 1999; **Renormierung/Renormalisierung:** 1] Ohne Unendlichkeiten, es werden lediglich Konstanten parametrisch modifiziert. Pendelkugelreibung modifiziert praktisch die Ankopplung ans Gravitationsfeld. Dynamik einer umströmten Kugel $F = m\ddot{x}$, $m = m_0 + 1/2V\rho_{\mathrm{Fluid}}$. Diese Massenmodifikation kann als Higg-Mechanismus gedeutet werden! Ladungsrenormierung bei Stromsystemen, die durch Anwesenheit äußerer Ströme gestört sind. 2] Renormierung ieS handelt von Beseitigung von Unendlichkeiten. Brockhaus Physik: formales, relativistisch kovariantes Verfahren zur Beseitigung von Ultraviolettdivergenzen, wenn man von freien zu wechselwirkenden Felden übergeht. Fourierkoeff haben Polynome im Nenner, die zu **überlappenden Divergenzen** führen. Dyson 1949: Integral über Simplex ist einfacher als über Würfel. BRH(Z)-Renormierung. **Höhere Analysis** für die Mikrowelt. Man zieht von den berechneten unendlichen Ausdrücken der messbaren Größen wie Masse $m_{exp} = m + \delta m$, Ladung $e_{exp} = e + \delta e$, Kopplungskonstanten und Feldoperatoren die eindeutigen, durch konvariante Integrale gegebenen, aber unendlichen Größen δm (Selbstmasse), **Massenrenormierung**, und Selbstladung der Teilchen durch WW mit eigenem Strahlungsfeld δe, **Ladungsrenormierung**, ab. Klappt für den Fall endlich vieler primitiv divergenter Feynman-Diagramme. Hängt von WW ab. 3] S-Matrix existiert nur im Distributionen-Sinn = Formulierung perturbativer QFT auf Basis beobachtbarer Größen. Die Störungsentwicklung gibt unendliche Wahrscheinlichkeit für die Streuamplituden. Berücksichtigung der Kausalität durch E Stückelberg and A Petermann Zeitordnung. **Binney, Dowrick, Fischer, Newman: The Theory of Critical Phenomena. An Introduction to the Renormalization Group** 1992 p228ff; Holland 2008. Rejzner 2013. Shirkov: Fifty years of the renormalization group 2001 http://cerncourier. com/cws/artic-

le/cern/28487; Wilson, Die Renormierungsgruppe, SdW1979 H10 p67-82 Ferromagnete, Ising-Modell, Blockspintransformation. **Heisenberg-Modell:** $\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\vec{s}_i \cdot \vec{s}_j - \vec{H} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{s}_i \ \vec{s}_i$ einen (mehrkomponentigen) Spin des Atoms am Platz i des Kristallgitters. J_{ij} Austauschkopplungs-Konstante. **Ising-Modell** = Zahl der Spinkomponenten wird auf Eins reduziert (d.h. parallel oder antiparallel zu einer ausgezeichneten Achse – hier z-Achse). $s_i^z = \pm 1 : \hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij} s_i^z s_j^z - H_z \sum_{i=1}^{N} s_i^z$ Ising-Modell für 2D zeigt für $H = 0$ als qualitatives Modell Phasenübergang 2. Ordnung bei Curie- oder Neel-Temperatur. 1D ohne Phasenübergang. Idee = Spingitter mit lokaler Spin-Spin-WW ohne Magnetfeld. Minimale Energie vs maximaler Entropie, die mit steigender Temperatur gegen die lokale Ordnung arbeitet. **Freie Energie** $f(\beta, h) = -\lim_{L\to\infty} \frac{1}{\beta L} \ln(Z(\beta)) = -\frac{1}{\beta} \ln\left(e^{\beta J} \cosh \beta h + \sqrt{e^{2\beta J}(\sinh \beta h)^2 + e^{-2\beta J}}\right)$ **Spin-Spin-Korrelationslänge** $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle = C(\beta) e^{-c(\beta)|i-j|}$ mit für $T > 0$ posiven Funktionen c und C. Die **inverse Korrelationslänge** $c(\beta)$ geht mit $T \to 0$ auch gegen Null. Das bedeutet ∞ Korrelationslänge bei $T = 0$. Lenk: Einf in die Statistische Mechanik 1978 p210 oder Schulz: Statistische Physik p177; Peliti: Statistical Mechanics in a Nutshell 2011; **Gallavotti: Statistical mechanics** 1999; Ordnungsparameter Magnetisierung, Einfacher lösbar ist Ising in Molekularfeldnäherung für Legierungen von Bragg und Williams oder Magnetismus von Weiss. Nordling: Kritische Phaenome, PhysBl39 1982 p352ff; Die Renormierungs - Gruppentransformation der statistischen Mechanik, PiuZ14 1983 p31ff ??? Z 6068, VA 3275; Lipowsky: Die Renormierung in der Statistischen Physik, PhysBl39 1983 p387-393; de Gennes: Scaling concepts in polymer physics 1979; Kadanoff: Statistical physics. Statics, dynamics and renormalization 2000 mit Originalarbeiten von Forest, Witten, Sander, Tang, Per Bak, Carlson, Jaeger, Niemeijer, Migdal, Berezinskii, Kosterlitz, Jose, Kirkpatrick, Nelson; Kadanoff & Baym: Quantum statistical mechanics. Green's function methods in equilibrium and nonequilibrium problems 2000; Ma: Modern Theory of Critical Phenomena 1976; Goldenfeld: Lectures on phase transitions and renormalization group 1992; Benfatto & Gallavotti: Renormalization Group 1995; Kühnel: Theorie der kritischen Erscheinungen an Phasenübergängen, WiFo33 1983 p132-137; H.-O. Peitgen & P.H. Richter: Fraktale und die Theorie der Phasenübergänge, PhysBl42 1986 p9-21; Fisher: Renormalization group theory. Its basis and formulation in statistical physics, RevModPhys70 p653-681 1998; Pelissetto, Vicari: Critical phenomena and renormalization-group theory, Physics Reports 368 (2002) p549-727; Pfeuty & Toulouse, Introduction to the Renormalization Group and to Critical Phenomena 1977; Amit & Matin-Mayor: Field theory, the renormalization group, and critical phenomena. Graphs to computers 2005[3]; Collins: Renormalization. An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-product Expansion 1984, 2008; Baaquie, Huang, Peskin & Khoo Phua eds: **Ken Wilson Memorial Volume. Renormalization, Lattice Gauge Theory, The Operator Product Expansion And Quantum Fields** 2015; Brezin: The Onset of Phase Transitions in Finite Systems, PhysBl42 1986 p182-184; Wegner: Phasenübergänge und Renormierung, PhysBl42 1986 p185-190; **Nolting: Statistische Physik Bd6 1994 Kap4 Phasenübergänge p152ff;** Schuster: Deterministic Chaos 1995 p239ff. Renormalization of the One-Dimensional Ising-Model; Creswick, Farach, Poole: Introduction to the Renormalization Group Methods in Physics 1992; Barenblatt: Scaling 2003; Cardy: Scaling and renormalization in statistical physics 1997 UG3100GAR; Brown ed: **Renormalization. From Lorentz to Landau and beyond, Mills** 1993 UB2420REN; Baumann: Mathematica in der Theoretischen Physik 1993; Kinzel & Reents: Physik per Computer. Programmierung physikalischer Probleme mit Mathematica und C 1996; Yoshiyuki, Yoshiki: PhysRevLett75 (1995) 1683-1686, New Method of Solving the Traveling Salesman Problem Based on Real Space Renormalization Theory Physics Reports 352 Oct-2001 4-6 pp 215-218 Renormalization group theory in the new millennium. III O'Connor, Stephens p219-249 The Bogoliubov renormalization group and solution symmetry in mathematical physics D.V. Shirkov, V.F. Kovalev http://www.elsevier.nl/PII/S0370157301000394 pp 439-458 Renormalization group and probability theory G. Jona-Lasinio http://www.elsevier.nl/PII/S0370157301000424

Doi: Soft Matter Physics 2013; **Jones: Soft Condensed Matter** 2002; Doi & Edwards: Theory of polymer dynamics 1986; Hamley: Introduction to Soft Matter Revised Edition. Synthetic and Biological Self Assembling Materials 2007; Fuxiang Han: Problems in solid state physics with solutions; Kondensierte Phasen, die sich nur bedingt einem der Aggregatzustände 'fest' oder 'flüssig' zuordnen lassen. Dazu zählen unter anderem * Flüssigkristalle (LCD) * Polymerschmelzen und -lösungen (wie Honig) * Gele (Götterspeise) * Polyelektrolyte (Absorbermaterial in Windeln) * Kolloidale Suspensionen (Tinte, Blut etc.) * Elastomere (Gummi). Everett: Grundzüge der Kolloidwissenschaft 1992; Behm: Kolloidchemie; Haberditzl: Kolloidchemie. QC Bd4 1982; **Bergmann & Schäfer: Vielteilchensysteme.** Gase, Nanosysteme, Flüssigkeiten, LB der Experimentalphysik Bd5 1998 p466ff Polymerknäuel = Brown'sche Bewegung Erik Werner. DNA-Molekül im Kanal bedeutet **begrenzte Brownsche Bewegung. Barner & Ninham: Random and restricted walks** 1970; **Strobl: The physics of polymers** 1997[2]; Gompper, Dhont, Richter: PiuZ34(1) p12-25 2003 Mesoskopische Systeme mit komplexen makromolekularen Einheiten; Schnabel: (thermal, mechanical, photochemical, radiation chemical, biolgical, chemical) Polymer degradation 1981; Wissenschaft und Fortschritt, 11/1985 Akademie Verlag Berlin D. Kreysig Laser- Photochemie, Aleksandrov, Stenchikov, Thompson, Schneider, Chervin, Covey Weltweite klimatische Folgen eines Kernwaffenkriegs mit dreidimensionalen Modellen simuliert, Herrmann Licht für Informationstechniken. Optoelektronik, Ranft Neue experimentelle Ergebnisse - neue theoretische Arbeitsrichtungen, Neumann: Hermann Weyl 1885-1955, Böhm Pflanzliche Zellkulturen als Produzenten von Naturstoffen, D. Rasch Biometrie in der Landwirtschaft; Turro: Modern Molecular Photochemistry 1991; **Photosynthese** von CO_2 im Calvin-Benson-Zyklus oder Ribulosebisphosphatzyklus per $CO_2+2H_2O \xrightarrow{\gamma} (CH_2O) + H_2O + O_2$ oder per $CO_2+2H_2S \xrightarrow{\gamma} (CH_2O) + H_2O + 2S$ zum **Kohlenhydrat** oder per $6CO_2+12H_2O \xrightarrow{\gamma} C_6H_{12}O_6 + 6H_2O + 6O_2$ zur **Glukose** Schlee: Ökologische Biochemie 1999 p16; Hanle: Energieübertragungsvorgänge bei der Lumineszenz, PhysBl 10 1954 p565-577; **Plotnikov: Allgemeine Photochemie** 1920, 1936[2]; Becker: Einführung in die Photochemie 1976, 1991; Sperling: Physical polymer science 2001[3]; Kryszewski: Semiconducting polymers 1980; Hadziioannou ed: Semiconducting polymers. Chemistry, physics and engineering 2007; **Photophysik:** Science 30 May 2014 Lienau: Quantum-coherent ultrafast charge transfer in an organic photovoltaic blend. The underlying microscopic conversion processes happen on an exceedingly short femtosecond time scale. To elucidate these dynamics, we have recently combined coherent femtosecond spectroscopy and first-principles quantum dynamics simulations and have explored the primary photoinduced electronic charge transfer in different model systems. At room temperature, the driving mechanism of the primary step within the current generation cycle is a quantum-correlated wavelike motion of electrons and nuclei on a timescale of few tens of femtoseconds. Vol344 Issue6187 pp1001-1005 Petty: Langmuir-Blodgett films. An introduction 1996 Langmuir-Blodgett-Schicht = LB-Schicht = LB-Film = eine oder mehreren Monolagen organischer Moleküle, die beim Eintauchen und/oder Herausziehen aus einer Flüssigkeit von der Grenzfläche der Flüssigkeit auf ein festes Substrat übertragen wurden. Ashwell: Molecular electronics 1992; Petty, Bryce, Bloor: An introduction to molecular electronics 1995;

Osteoblasten sind als hoch spezialisierte Maurerzellen typische Bindegewebszellen, also mit Muskel- oder Knorpelzellen verwandt. Knochenaufbau (Mineralisation) und Abbau (Resorption) durch Osteoklasten, die sich aus Blutstammzellen entwickeln - wie auch Immunzellen - bauen vorhandenes Knochenmauerwerk wieder ab.

Brown'sche Bewegung nicht einheitlicher Konstituenten, die zudem noch mit inneren Freiheitsgraden behaftet sind führt auf Nicht-Newton'sche Fluide (Honerkamp p135ff), weil für ihre Impulsstromdichte der Newton'sche Ansatz nicht gilt, da die Dynamiken von Substrat und umgebendes Lösungsmittel auf anderen Zeitskalen abläuft. In dieser Materialklasse finden sich zahlreiche Modellsysteme zur Untersuchung grundlegender physikalischer Phänomene, insbesondere aus dem Bereich der Thermodynamik (z.B. Selbstorganisation, nichtlineare Materialeigenschaften, Phasenübergänge, der Glasübergang, kritische Phänomene). Zudem bestehen Berührungspunkte zur Biophysik. Bouchaud & Georges: **Anomalous diffusion in disordered media: Statistical mechanisms, models and physical application,** Physics Reports 195 Issues

4-5 Nov 1990 p127-293, 4.1.2.2 **Spin-Gläser** = Relaxation bei Systemen mit komplexen Energielandschaften p217; Binder: Rev in mod physics 58 1986 p801; Binder & Heermann: Monte Carlo simulation in statistical physics. An introduction 1997[3], Ripley: Stochastic simulation 1987; 2010[5]; Binder: Monte Carlo Methods in Statistical Physics 1986; TYT

Caponetto, Dongola, Fortuna: FRACTIONAL ORDER SYSTEMS. Modeling and Control Applications 2010;

26 Zellen, Proteom, Systembiologie, CYP450, DNA

Dekadische Logarithmen von Durchmessern in m: **26** = Durchmesser des sichtbaren Universums nach Standardmodell. **22** = Abstand von Galaxien 1 Mpc = 3 Mill Lj, siehe Seite 501. **21** = Durchmesser Milchstraße 150000 Lj. **16** = Abstand zu Proxima Centauri 4.2 Lj = über 1 pc. **11** = Erde-Sonne, 1 AE. **8** = Erde-Mond, 1 Lichtsekunde. **7** = ∅ Erde, Weißer Zwerg. **4** = Höhe Troposphäre, Reiseflughöhe Langstrecke, ∅ Neutronenstern. **3** = Gebirge. **2** = Fußballfeld. **1** = Wohnung, Wal. **0** = Mensch. **-1** = Maus, Vogel. **-2** = Insekt. **-3** = Menschenfloh, Laus. **-4** = Hausstaubmilben, Haar ∅. **-5** = Zelle 10μm enthalten 10 Bakterien, 10^4 Proteine. **-6** = Bakterie 1μm. **-7** = Virus 0.1μm = 100 nm oder Antikörper. **-9** = Nanopartikel oder minimale Gatelänge 5nm des kleinsten Feldeffekttransistors. **-10** = Atom. **-15** = Atomkern. **-19** = Elektron. **-35** = Planck-Länge. **Geissler: Desoxyribonucleinsäure.** Schlüssel des Lebens 1970 Vorwort Delbrück; Delbrück: Wahrheit und Wirklichkeit. Über die Evolution des Erkennens 1974/75 1977 1985; Sippel & Nordheim: Erbsubstanz DNA. Sammlung SdW 1954-1984 Crick u.a.; **Aurich: Laboratorium des Lebens** 1970; Segal: Das Leben - ein Rätsel? 1972, 1975; Die genregulierten, molekularbiologischen Vorgänge in einer Zelle, insbesondere die, bei denen die RNA beteiligt ist, ähneln sehr dem Zusammenbau eines komplizierten Geräts/Autos. New Cell Picture Show on RNA http://www.cell.com/! Die Zelle - unser geheimes Universum DVD 2014; **de Duve: Die Zelle**. Expedition in die Grundstruktur des Lebens, 2 Bde 1986; de Duve: Ursprung des Lebens, präbiotische Evolution und die Entstehung der Zelle 1994; **Ude & Koch: Die Zelle. Atlas der Ultrastruktur** 1994[2]; Phillips, Kondev & Theriot: Physical biology of the cell 2009 hierin auch Ralf Metzler zu Diffusion in der Zelle Kap13, p498 Integraltrick, und Kap14 **Crowded dynamics** Leben in überfüllten und ungeordneten Umgebungen; Bray: Cell movements. From molecules to motility 2001; Kolomeisky: Motor Proteins and Molecular Motors 2015; **Böhlmann: Botanisches Grundpraktikum zur Phylogenie und Anatomie** 1994; Sitte, Ziegler, Ehrendorfer, Bresinsky: Strasburger - Lehrbuch der Botanik für Hochschulen 1991[33]; Jacob, Jäger & Ohmann: Botanik 1987[3]; Schubert & Wagner: Botanisches Wörterbuch 1993[11]; Mancuso: Die Intelligenz der Pflanzen 2015; Eisenreich, Handel, Zimmer: BLV Handbuch Tiere und Pflanzen. Das umfassende Nachschlagwerk 2004; **Petersen: Die Gräser** als Kulturpflanzen und Unkräuter auf Wiese, Weide und Acker 1936, 1943, 1953; Lobeck, Meinecke: Wald-Hecke-Strand 1965; Rothmaler: Exkursionsflora von Deutschland. Gefäßpflanzen: Grundband 1996; Stefano Mancuso: Aus Liebe zu den Pflanzen. Geschichten von Entdeckern, die die Welt veränderten 2017; Pott: Die Pflanzengesellschaften Deutschlands 1992; Walter Kammer: Die Pflanzenwelt der deutschen Landschaft. Das Leben der Pflanzen in unserer Umwelt 1935; Peter M. Kammer: Pflanzen einfach bestimmen. Schritt für Schritt einheimische Arten kennenlernen 2016; Strasburger, Noll, Schenk, Schimper, Harder, Firbas: LB der Botanik 1958[27]; Kutschera: Kurzes Lehrbuch der Pflanzenphysiologie; Heldt: Pflanzenbiochemie 1999[2], 2015[5]; Taiz & Zeiger: Physiologie der Pflanzen 2000; Engelhardt & Breves: Physiologie der Haustiere 2004; Dierschke: Pflanzensoziologie 1994; Metzner: Pflanzenphysiologische Versuche 1982; **Storch, Remane & Welsch: Kurzes Lehrbuch der Zoologie** 2003; Mehlhorn: Grundriß der Zoologie 1990; Zellen sind komplizierte Maschinen, die sich selber zusammenbauen, mit Treibstoff versorgen, sich steuern und regeln, sie führen an sich selbst Wartungs- und Reparaturarbeiten durch, und viele Zellen können sich zu guter Letzt sogar selbst entsorgen. Nekrose und Apoptose - der humane Tumorsuppressor p53 Selbstmordprogramm, programmierter Zelltod. Klußmeier: Transformation. Eine Zelle wird zu Krebs. Der Weg ins Verhängnis 2016; Schirrmacher: Krebs - Tumoren, Zellen, Gene 1990; Siddhartha **Mukherjee: The Emperor of All Maladies. Der König aller Krankheiten: Krebs - eine Biografie** 2011; SdW August 2013 p22-33 **Krebs:** relevante Signal- und Stoffwechselwege, Zellzyklussstadien, Genom & Signalübertragungswe-

ge gestört. Genomik, Proteomik & Metabolomik. **Lewin: Genes** 2004[9]; = Lewin: Molekularbiologie der Gene 1998; Rehm: Der Experimentator. Proteinbiochemie. Proteomic 2002[4] hier **Kap7 Proteomic vs Biochemie**; Mühlhardt: Der Experimentator. Molekularbiologie. Genomics 2006[5]; Träger: Einführung in die Molekularbiologie 1975; Chapeville: Biochemie der Vererbung 1970; Knippers: Molekulare Genetik 2005; Knippers: Eine kurze Geschichte der Genetik 2013; **Seyffert: LB der Genetik** 1998; Günther: LB der Genetik 1991[6]; Hagemann: Allgemeine Genetik 1991[3]; Genetik vs Epigenetik. Lebensführung tauscht funktionelle Gruppen am gen aus. **Bauer: Das Gedächtnis des Körpers. Wie Beziehungen und Lebensstile unsere Gene steuern** 2004; de Groot-Böhlhoff: Ernährungswissenschaft. Ernährungslehre für die Sekundarstufe II 1990; **F̃eder: Feders kleine Kräuterkunde. Das Essen liegt auf der Straße** 2017; Kegel: Epigenetik. Wie Erfahrungen vererbt werden 2009; Spork: Der zweite Code. EPIGENETIK oder Wie wir unser Erbgut steuern können 2010; Conrad Hal Waddington (1905-1975) epigenetischen Landschaft. Altern als Krankheit der Gene. http://www.pharmazeutische-zeitung.de/index.php?id=40529 Architekten der Synthetischen Evolutionstheorie (1930–1950): G. Ledyard Stebbins, Ernst Mayr, Sewall Wright, Julian Huxley, Bernhard Rensch, George Gaylord Simpson. Dobzhansky: Nothing in Biology makes sense, except in the light of evolution 1973; In den 1960er-Jahren gab Dobzhansky die Rasse als anthropologische Kategorie auf. Wann immer diese Kategorie in der Geschichte verwendet wurde, sei entsetzlicher Missbrauch damit getrieben worden: Jede Person hat einen Genotyp und eine Lebensgeschichte, die sich von jedem anderen Wesen unterscheiden, sei es von einem Mitglied der Familie, des Clans, der Rasse oder der Menschheit. Über die universellen Rechte aller menschlichen Wesen hinaus (was eine typologische Zuschreibung sein kann!), sollte eine Person aufgrund seiner eigenen Verdienste bewertet werten. **Theodosius Dobzhansky & Ernst Mayr:** Krebskrankheit im Lichte der Evolution erklärbar. **Darwin** kam über phänotypische - nicht genetische - Merkmale an die Selektionsfaktoren für Evolution! Viele Daten liefern nur phänomenologische Modelle (a la autoregressiver Modelle), aber keine ab-initio a la Newton oder Maxwell. **Hybrid-Modelle**: intrazelluläre Vorgänge per Dgl, Zell-Zell-WW mittels regelbasierter Programmierung, also Zellen und Verbände als diskrete Objekte auf Netzwerken. Zell-Verband = **Gewebe**: Epithel-, Binde-, Stütz-, Muskel- und Nervengewebe. **Junqueira, Carneiro & Schiebler: Histologie** 1996[4]; **Sommer & Börnig: Der Mensch. Anatomie, Physiologie, Ontogenie** 1990[11]; Faller & Schünke: Der Körper des Menschen 2008[15]; Glazier: CompuCell3D. Krebswachstum durch Angiogenese = Aussprossung von Blutäderchen in Geschwulstrichtung in 1-3 Tagen. VEGF = Wachstumsfaktor für die innerste Zellschicht der Gefäßwände. Dann Bindung der Ausläufer an Stromazellen des benachbarten Gewebes. **Moleküldynamik oder Molekulardynamik (MD) = elektronisches Mikroskop** = Computersimulationen in der molekularen Modellierung, bei denen Wechselwirkungen zwischen Atomen und Molekülen und deren sich daraus ergebende räumliche Bewegungen iterativ berechnet und dargestellt werden. Ehrenberg et al: Krankengymnastik bei peripheren Gefäßerkrankungen 1987; **Schauer, Schleusing, Voigt: Bewegungstherapie bei Herz-, Kreislauf- und Lungenkrankheiten. Üben und Sporttherapie** 1990; **Rapaport: The Art of Molecular Dynamics Simulation** 2013[2]; Aranson & Tsimring: Granular Patterns 2014; **Puglisi: Transport and Fluctuations in Granular Fluids - From Boltzmann Equation to Hydrodynamics, Diffusion and Motor Effects** 2014; Marx & Hutter: Ab Initio Molecular Dynamics 2013; Meakin: Fractals, Scaling and Growth Far from Equilibrium Paperback (ISBN-13: 9780521189811) Bei der Modellierung von komplexen Systemen mit einer Vielzahl an beteiligten Atomen werden hauptsächlich **Kraftfelder oder semiempirische Methoden** verwendet, da der Rechenaufwand zur Anwendung von quantenmechanischen Verfahren (ab-initio-Methoden) zu groß. c't 15/2014 p20 Klaus Schulten: 3 Mio Atome = Ribosom. **Parallel simulation engine = NAMD = Scalable molecular dynamics** + VMD Visualisierung mittels 32000X12 CPU-Cores + 48000GPU = 34 TFlops. **Bleif: KREBS. Die unsterbliche Krankheit** 2013; Antigene (Antibody generating) sind Stoffe, an die sich Antikörper und bestimmte Lymphozyten-Rezeptoren spezifisch binden können, wobei letzteres in der Regel bewirkt, dass die Produktion von Antikörpern gegen das Antigen angeregt wird. Angeborene und adaptive Immunabwehr mittels eng verwandter Molekülsorten, die körperfremde Signale aufnehmen und als Reaktion eine Reihe von Angriffs- und Entzündungsreaktionen aktivieren. Dendritischen Zellen stellen dauerhafte Erinnerung in Form von auf Antigenen spezialisierte Immunzellen her. Diese dendritische Zellen aktivieren andere Immunzellen, die T-Zellen. Wenn die T-Zellen quasi die Schutztruppe des Körpers sind,

dann sind die dendritischen Zellen ihre Kundschafter. Sie wandern durch den Körper und nehmen permanent Antigene auf – wandern mit ihnen in die lymphatischen Organe und präsentieren die Antigene dort an ihrer Oberfläche. Gleichzeitig schütten sie Signalstoffe aus, die T-Zellen mit den richtigen Rezeptorkombinationen für dieses spezifische Antigen aktivieren. So werden diese T-Zellen für ihren Jagd auf die Eindringlinge scharf gemacht. Das Immunsystem muss fremde Antigene zuverlässig von eigenem Material unterscheiden, sonst attackiert der Körper sich selbst. Auch diese Funktion übernehmen dendritische Zellen, indem sie körpereigenes Material aufnehmen und gleichzeitig von der angeborenen Immunabwehr ein Signal bekommen, dass keine Entzündung vorliegt. In dem Fall sorgen sie dafür, dass T-Zellen, die auf diese Antigene reagieren, schon im Lymphsystem unschädlich gemacht werden. Multiple Sklerose: IL-6 gegen LIF Bei der multiplen Sklerose dockt IL-6 an den IL-6-Rezeptor auf der Oberfläche reifender T-Zellen an – es entstehen TH17-Zellen, die dann die Myelinscheide der Nervenfasern angreifen; die Nerven werden geschädigt, fallen aus und sorgen für die verschiedenen Symptome der Erkrankung. Forscher zeigen nun aber, dass die neuronalen Vorläuferzellen den Faktor LIF produzieren, eine Art 'Anti-IL-6': Bindet er an den LIF-Rezeptor unreifer T-Zellen, so verhindert dies die Ausdifferenzierung zu TH17-Zellen. Fehlt der Gegenspieler von LIF (also das IL-6), so entstehen aus den T-Vorläuferzellen Treg-Zellen, die einer Autoimmunreaktion entgegen arbeiten und den Angriff fehlgeleiteter T-Zellen auf körpereigene Neurone bremsen. Zudem fördert LIF die Reparatur bereits geschädigter Myelinscheiden. Vielleicht, so die Hoffnung der Forscher, eignet sich LIF also ideal als Wirkstoff gegen multiple Sklerose; verschiedene weitere Studien müssen dies nun klären. Aristotelisch-alchemistisch: Alles ist belebt. Gassendi: Das Unbelebte, die Atome werden zum Modell des Seins. Unbelebt emergiert durch steigenden Komplexitätsgrad Leben. **Erwin Frey: Physik lebender Systeme**. Thermodynamik des Lebens nach Ostwald, Onsager und Prigogine: Triebkraft, nutzbarer Nettobetrag der Energie ist die **freie Energie** $F = U - TS$. **Oswald: Die Mühle des Lebens**. Physikalisch-chemische Grundlagen der Lebensvorgänge 1911; Einhaltung des **energetischen Imperativs** Vergeude keine Energie - verwerte sie! Ostwald: Gedanken zur Biosphäre 1931, 1978; Bertalanffy: Biophysik des Nichtgleichgewichts 1952, 1977; Erwin Bauer: Theoretische Biologie, Leningrad, Moskau 1935 Freie Energie wird dazu benutzt, um fern vom Gleichgewicht zu bleiben. Berry: Was treibt das Leben an? 2007; Die Zelle macht biologische Thermodynamik und ist nur die Umgebung, das Interface, dass sich die Gene oder der Code zugelegt haben, um zu überleben. Sind Gene vielleicht nur die ID-Codes? Ähnlich der Seele, die sich die Körper mit Hirn zulegt. Mem ist Gedankeneinheit, die sich durch Kommunikation ihrer Träger vervielfältigt. Mit dem kulturellen Mem-Konzept als Pendant zum biologischen Gen veranschaulichte 1976 der Evolutionsbiologe Richard Dawkins das Prinzip der natürlichen Selektion, deren Grundeinheit Replikatoren von Informationen sind. **Richard Semon: Mneme als erhaltendes Prinzip im Wechsel des organischen Geschehens** 1904; Schrödinger: Mein Leben p14; Karl Lashley (Engramm) und Richard Dawkins (Mem). **Susan Blackmore - the Meme Machine.** Mneme - Mnemosyne, „die Muse der Erinnerung". Gedränge zwischen Molekülen in einer Zelle = **Crowding**, also molekulardynamische Beschreibung statt **Diffusion**. Gould: Illusion Fortschritt: Die vielfältigen Wege der Evolution 2004 Homo sapiens nach etlichen Vorversuchen und Beta-Releases wie Bakterien, Käfern, Dinosauriern und Affen. Zielgerichtete Evolution hat es nicht gegeben. Weil die Triebkraft der Evolution die zufällige Variation der Arten ist, entstehen neben einfachen Wesen eben auch komplexere wie die Menschen. Aber eben nicht, weil die Natur dem Trend gehorcht, immer komplexere Wesen hervorzubringen, sondern einfach, weil das eben auch geht. **Warum sollte die fruchtbare Natur eine ökologische Nische nicht auch mit Mehrzellern besetzen, wenn sie keinen stören?** So sind Pflanzen, Insekten, Säugetiere und Menschen nur eine zufällige Variation des Prinzips Leben – und der Homo sapiens durchaus nicht die Krone der Schöpfung, sondern nur eine Spielart derselben. Imhoof: More Than Honey. Vom Leben und Überleben der Bienen 2010; Honomichl: Insekten. Die heimlichen Herrscher der Welt 2003; Goulson: Wenn der Nagekäfer zweimal klopft 2016; Wir können zwar zum Mond fliegen, aber zum Beispiel nicht in hundert Grad heißen Quellen überleben oder uns von Steinen und Hitze ernähren wie manche Bakterienarten, denen Gould flugs die Schöpfungskrone aufsetzt: Seit Jahrmilliarden überleben Bakterien – das zeigt, daß das Konzept 'Bakterium' das eigentliche Erfolgsrezept des Lebens ist. **Größenverteilung der Dinge:** Volker **Kempe: Information** 2Bde 1975; Größenverteilung der Bauelemente technischer Geräte, Scherbengrößenverteilung, Ziffernverteilung siehe AmJPhys **Benford-Gesetz** = Wort-Anfangsziffern-Verteilung von Simon Newcomb 1835-1909 und Frank Benford 1883-1948 $p('1') = 0.38$, $p('2') = 0.18$, SZ 27.7.2013, p15;

Kauffman: **Random Boolean networks**, modeling a gene as an idealized 'on-off' variable, and sought the typical, or generic, behaviors in classes or 'ensembles' of Boolean networks, a new kind of statistical mechanics averaging over a class of systems, sampling such ensembles at random to test those typical properties. This work led to the ideas that cell types are dynamical attractors of such high dimensional systems, that differentiation is a passage among attractors by noise or signals. Random Boolean networks gave the first indications of three dynamical regimes, ordered, critical and chaotic. Evidence suggests cells may be dynamically critical.

Schiessel: Biophysics for Beginners. A Journey Through the Cell Nucleus 2013 Molecular Biology of the Cell. Statistical Physics Partition Function. Entropy. Particles with Interactions and Phase Transitions. Polymer Physics. Random Walks. Freely Jointed and Freely Rotating Chains. DNA Melting. Markov Processes. Master Equation. Fokker–Planck Equation. Application: Escape over a Barrier. Application: Dynamic Force Spectroscopy. Langevin Equation. Application: Polymer Dynamics. RNA and Protein Folding. Electrostatics Inside the Cell. Poisson–Boltzmann Theory. Electrostatics of Charged Surfaces. Electrostatics of Cylinders and Sphere. Debye–Huckel Theory. Breakdown of Mean Field Theory. DNA-Protein Complexes. Chromatin Fibers. Solenoid-Type Models. Appendix: Probability Theory. Distribution of Magnetization and the Central Limit Theorem. Hamilton's Principle and the Pendulum. Fourier Series. Pre-Averaging Approximation. Interaction between two Equally Charged Plates at Zero Temperature. Geometries of Chromatin Fiber Models; Bialek: Biophysics. Searching for Principles 2012; **Nelson: Biological physics. Energy, Information, Life** 2007; Milo & Phillips: Cell Biology by the Numbers 2016; Kaim & Schwederski: Bioanorganische Chemie 1991, 1995^{2}; Buddrus: Grundlagen der Organischen Chemie 2003^{3}; Keppler & Ding: Chemie für Biologen 1997; Atkins & Trapp: Physikalische Chemie. Arbeitsbuch. Lösungen zu den Aufgaben 2000^{3}; Moore & Hummel: Physikalische Chemie 1986; Szargan: Physikalische Chemie. Grundkurs. ChfL6 1986; **Lodish, Berk, Kaiser: Molecular cell biology** 2008^{6}; Alberts et al.: LB der molekularen Zellbiologie 1999; **Rehm & Hammer: Biochemie light** 2001; Kleinig & Sitte: Zellbiologie. 1991^{3}; **Karlson, Doenecke, Koolman: Kurzes LB der Biochemie** für Mediziner und Naturwissenschaftler 1994^{14}; **Rassow, Hauser, Netzker & Deutzmann: Biochemie** 2008^{2} Hydrolyse von ATP zu ADP; Wilson, Goulding, Fasold: Methoden der Biochemie 1990^{3}; Berg, Tymoczko, Lubert Stryer & Gatto: Biochemie 2013^{7}; **Nelson, Cox, Lehninger: (Prinzipien der) Biochemie** 2010^{4}; Wesentliche Etappen der Energiegewinnung in lebenden Organismen, wie Eukaryoten vollzieht sich in den Mitochondrien durch **Citrat-Zyklus, die Fettsäuren-Oxidation sowie die oxidative Phosphorylierung**. Schlee: Ökologische Biochemie 1999; Tischler: Ökologie der Lebensräume 1990; Biochemie light 2001; Wolpert: Wie wir leben und warum wir sterben. Das geheime Leben der Zellen. 2009; Pingoud & Urbanke: Arbeitsmethoden der Biochemie 1997; Ratledge & Kristiansen: Basic biotechnology 2001^{2}; Jacobsen: Pflanzenbiotechnologie 2005; J̃acobsen: Wohin die Reise geht ... Lebenswissenschaften im Dialog 2002; Löffler, Petrides, & Heinrich: Biochemie und Pathobiochemie 2010; Schlegel: Allgemeine Mikrobiologie 1991^{7}; Schröder: Mikrobiologisches Praktikum 1991^{5}; Schröder & Baumann: **Mikrobiologie**. Ein Studienbuch für Lehrer 1991; Dose: Biochemie 1996^{5}; Voet & Voet: Biochemie 1994; Holme & Peck: Analytical biochemistry 1992^{2}; Robson & Garnier: Introduction to Proteins and Protein Engineering 1988; Sippel & Nordheim eds: Erbsubstanz DNA. Vom genetischen Code zur Gentechnologie, Spektrum 1988^{3} DNA aus Nukleotiden mit heterozyklischen Basen A, T, C, G, die Phosphat-und Pentose-Zuckermoleküle verbunden. Je drei Basen bilden ein Wort von 4^3 möglichen, von denen aber per RNA nur 20 Worte genau 20 Bauanleitungen verschiedenen Proteine entsprechen. DNA-Persistenz-Länge = Biegeradius 60nm. Staghun: Der Bauplan des Lebens; Mölling: Supermacht des Lebens. Reisen in die erstaunliche Welt der Viren 2014; Gutberlet: Heimsuchung. Seuchen und Pandemien. Vom Schrecken zum Fortschritt 2021; Beller: Viren und Miasmen, ein Streifzug zwischen belebter und unbelebter Welt 1950; Villareal: Leben Viren? SdW 2005 H2, 32-37; Doerfler: Viren 2002; Roossinck: Viren 2018; Gottschalk: Welt der Bakterien, Archaeen und Viren 2015; Nye & Parkin: HIV und AIDS 1994;

Lesk: Bioinformatik 2003 Alignment, Dotplot in perl, scoring, Editierabstand, Delition, Insertion, Maße für Sequenzähnlichkeit; Rashidi & Bühler: Grundriss der Bioinformatik 2000; Waterman: Intro to compu-

tatinal biology 2000;

U. Alon: An introduction to system biology. Beispiel Mammalian: Human fibroblast. DNA des Genoms auf 23 Cromosomen-Paaren verteilt. Coding regions, kodiert die Nutzinformation oder die Funktionalität des Gens, auf Exons verteilt, die von Introns unterbrochen. Funktion der Junk-DNA oder Dark-Matter-DNA für Gen-Regulation und Krankheiten. Zelle enthält $3{\cdot}10^9$ bp Basenpaare oder 30,000 Gene, **Zellen-Durchmesser:** 10μm, **Zellendurchmesser** = 10^{-5} m, **Atomdurchmesser** = 10^{-10} m = 1 A = 100pm, **Kerndurchmesser** = 10^{-15} m = 1 Fermi = 1fm, $4{\cdot}10^{10}$ Proteine der Größe 5nm, die 100 sec brauchen, um einmal quer durch die Zelle so diffundieren. Kleine Moleküle brauchen nur 0.1 sec. Turgor = Druck des Zellsafts auf die Zellwand, welken. **Mensch besteht aus 10^{13} Zellen!** Denn 70 kg-Mensch bedeutet wegen Wassendichte 70 l Volumen. 70 l = 70 dm^3 =$70{\cdot}10^6$ mm^3. Menschliche Zelle hat ca 20μm =0.02 mm = $2{\cdot}10^{-2}$ mm. Bedeutet Zellvolumen $8{\cdot}10^{-6}$ mm^3. Bedeutet **Zellenanzahl**=$\frac{7\cdot 10^7\text{mm}^3}{8\cdot 10^{-6}\text{mm}^3} \approx 10^{13}$. Pro Zelle kommen ca. 10 Bakterien. Jansohn: Gentechnische Methoden 2007[4]; **CRISPR** = Clustered Regularly Interspaced Short Palindromic Repeats = Abschnitte sich wiederholender DNA (repeats), die im Erbgut von vielen Bakterien und Archaeen auftreten. Dienen einem Mechanismus, dem CRISPR/Cas-System, der Resistenz gegen das Eindringen von fremdem Erbgut durch Viren oder Plasmide verschafft, und sind hierdurch ein Teil des Immunsystem-Äquivalents von vielen Prokaryoten. Dieses System bildet die Grundlage der gentechnischen CRISPR/Cas-Methode zur Erzeugung von gentechnisch veränderten Organismen. Methode um DNA gezielt zu schneiden und zu verändern = **Genome Editing**. Gene können mit dem CRISPR/Cas-System eingefügt, entfernt oder ausgeschaltet werden, auch Nukleotide in einem Gen können geändert werden. Anwendung **The Precision Medicine Revolution** mittels CRISPR (Clustered Regularly Interspaced Short Palindromic Repeats) gene-editing technology zwecks personalisierter Therapie. **Schutzkappen der Gene = Telomere** = die aus repetitiver DNA und assoziierten Proteinen bestehenden Enden der Chromosomen. Bei Wirbeltieren wird die Sequenz **TTAGGG** mehrere tausend Mal wiederholt = mehrere Kilo-Basenpaare (kbp) lang. Länge hängt mit Alterung von Zellen (Zellseneszenz) sowie mit deren Immortalisierung und damit auch der Entstehung von Krebs zusammen. øDNA-Strang = 2nm, auf 50 nm steif, dann Biegung merklich, 150 bp pro 50 nm, Stranlänge 1.5μm. Die Boten RNA, **mRNA**, kodiert den Bau von Proteinen. **ncRNA** = nicht Protein-kodierende RNA = zentrale Steuersoftware, die viel spezifischer gebildet und reguliert wird. Bubble-Öffnung für mRNA-Angriff dauert 1-150μsec. Bubble bleibt aber für Angriff nur 1-100ns offen. **Chemotaxis** gemäß Keller-Segel-Modell $\partial_t u = a\partial_{xx}u - bu\partial_x v$ in 2D, $\partial_t v = g\partial_{xx}v - kv + lu$ in 3D, wobei u Zellkonzentration und v zellproduzierte Botenstoffkonzentration cAMP. Zur Steuerung der zellbiolog Funktion werden Gene in Proteine durch Expression übersetzt. Transkription führt auf von Introns bereinigte mRNA atggcgctgt...- je ein Dreierwortstring = Basen-Tripel = Codon = 3er-Wort entspricht einer von 20 Aminosäuren aus 4 buchstabigem Alphabet der **2 Purinbasen** Adenin, Guamin, **3 Pyrimidinbasen** Cytosin, Thymin(DNA), Uracil(RNA) (von 3^4 = 64 Aminosäuren sind halt 42 Synonyme, 2 sind Trennzeichen)-, das bei Translation ein bestimmtes Protein MALSAEDRALVRAKWKKLG...- Worte aus 20 buchstabigem Alphabet - erzeugt. Siehe Crick In: Sippel & Nordheim: Erbsubstanz DNA. Sammlung SdW 1954-1984 p77; **Geissler: Desoxyribonucleinsäure.** Schlüssel des Lebens 1970 p32 Venner; Proteine, Eiweiße sind komplex gefaltete Polymere, die 20 verschiedene Aminosäurereste enthalten und 5000 bis Million Dalton (1/12 ^{12}C-Masse) wiegen. Alleskönner durch komplexe räumliche Struktur. Proteine werden von lebenden Zellen oder Organismen wie Bakterien E. Coli erzeugt. Häufigster Wert 1μm sonst Durchmesser 0.3 bis 750 μm. **Schön: Bakterien, die Welt der kleinsten Lebewesen** 1999; **Kegel: Die Herrscher der Welt. Wie Mikroben unser Leben bestimmen** 2015; **Cramer: Integrated structural biology of gene transcription.** Mass spectrometry and single-particle cryo-electron microscopy → three-dimensional structures of **RNA polymerase**s in complex with **nucleic acid substrate**s and **protein factors**. X-ray crystallography allows atomic structure determination of very large and asymmetric macromolecular complexes. 120 Intron-gesteuerte Nukleinsäurensubstate und Proteinfaktoren regulieren die Initiation, Elongation und schießlich Termination der RNA polymerase. Für die Genom-Regulation ist die Initiation entscheidend. TT-Seq-Monitoring. **Molecular Systems Biology and Genomic Regulation:** principles of genome transcription and its regulation. Mapping of transcription factors over the yeast genome (Mayer, Lidschreiber, Siebert et al., NSMB 2010), the development of 'dynamic transcriptome analysis' to measure both mRNA synthesis and degradation rates

genome-wide (Miller, Schwalb, Maier et al., Mol. Syst. Biol. 2011), an analysis of global mRNA degradation to investigate how cells buffer the levels of their mRNA transcripts (Sun, Schwalb et al. Mol. Cell 2013), and the global analysis of transcriptome surveillance/Überwachung by selective termination of non-coding RNA synthesis (Schulz, Schwalb et al. Cell 2013). Bier, Golm: **Zellfreie Proteinproduktion** könnte im Netz von Bioreaktoren gelingen. Primäre Genabfolge gibt ternäre räumliche Struktur, die Funktion erfüllt. Signaltransduktion: Enzyme geben Botenmoleküle Ca^{++}, NO. Kuschel-Hormon für Abbau von Aggression und Befriedung von Konflikten (**Oxytocin** spielt bei der starken **Bindung oder Nähe** zwischen Mutter und Kind oder zwischen Frischverliebten eine Schlüsselrolle) und Rezeptor aktivieren Enzym. Proteinproduktion durch Genexpression. Bauer: Das Gedächtnis des Körpers. Wie Beziehungen und Lebensstile unsere Gene steuern 2004; Menschliche Zellen enthalten 10000 verschiedene Proteine, von denen 1400 Arten aus 200 Aminosäuren bestehen. Peptide bestehen aus 100 und weniger Aminosäuren. Enzyme sind katalytische Eiweiße. **Michaelis-Menten-Kinetik:**

$$E + S \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftarrows}} ES \xrightarrow{k_2} E + P$$

Kinetische Gleichung unter der Annahme, dass sich die Substrat-Enzym-Komplex-Konzentration im Gleichgewicht befindet:

$$\frac{d[ES]}{dt} = k_1[E][S] - [ES](k_{-1} + k_2) \overset{!}{=} 0 \qquad \frac{d[P]}{dt} = k_2[ES]$$

und der Annahme, dass die Enzymkonzentration sich nicht ändert:

$$[E]_0 = [E] + [ES] \overset{!}{=} \text{const.}$$

führt auf

$$[ES] = \frac{[S][E]_0}{K_M + [S]}$$

und endlich auf

$$\frac{d[P]}{dt} = v_0 = k_2[ES] = \underbrace{k_2[E]_0}_{v_{max}} \frac{[S]}{K_M + [S]} \qquad v_0 = \frac{v_{max}[S]}{K_M + [S]} \qquad \frac{1}{v_0} = \frac{K_M}{v_{max}} \cdot \frac{1}{[S]} + \frac{1}{v_{max}}$$

where v0 is the initial reaction rate, vmax is the maximum reaction rate, and KM is the Michaelis constant. The Michaelis constant is an approximation of the affinity of the enzyme for the substrate based on the rate constants within the reaction, and it is numerically equivalent to the substrate concentration at which the rate of conversion is half of vmax. A small KM indicates high affinity, and a substrate with a smaller KM will approach vmax more quickly. Very high [S] values are required to approach vmax, which is reached only when [S] is high enough to saturate the enzyme. `http://en.wikipedia.org/wiki/Michaelis%E2%80%93Menten_kinetics`

Murphy & O'Neill: Was ist Leben? 50 Jahre nach Schrödinger. 1997; Max Delbrück, Francis Crick. Proteintranskription einschließlich mRNA-Kerntransport braucht 30 Minuten. Robustheit und regulatives Netzwerk (Network motifs = wiederholtes Auftrete simpler Muster) Zellgenerationszeit 20 h ... ohne Teilung. Typische mRNA-Lebensdauer 10 min bis 10 h. Mutationsrate 10^{-8}/bp/Jahr. Robson & Garnier: Introduction to Proteins and Protein Engineering 1988;

Leber: Stoffwechselorgan, Hepatocyton ist häufigste Zelle, 1.5 kg, SdW Jan 2002 p44, Nahrungsstoffverwertung, erzeugt Choleterin, Gallensaft, Blutplasmaproteine wie Blutgerinnungsfaktoren & Albumine (66.000 m_C Proteine) → Glykogen (Blutzuckerspiegel, Energie → Muskel). Speichert Eiweiße, Fette, Vitamine, entgifted: NH_3 aus Eiweißstoffwechsel, Darmbakterien → Harnstoff, Fremdsubstanzen (Verdauungstrakt) werden entgiftet, also Metabolismus von xenobiotischen Stoffen, Blutreservoir minimale Leber: 150 g Leber = $25 \cdot 10^9$ Hepatocyte, Leberversagen: Tod nach 5 Tagen wegen Amoniakvergiftung, insbesondere Hirnfunktion beeinträchtigt, Hämodialyse: Leberfilter nehmen kleine NH_3 weg und lassen große Eiweiße im Blut. Human cytochrome P450 enzymes - Absorption bei 450 nm - ist Superfamilie von extrem vielseitigen 600 Enzymen CYP[Familie $n \in \mathbb{N}$][Subfamilie $a \in \aleph$][m], die oxydieren - molekularer Sauerstoff O_2 wird als O^+ auf's Substrat gebracht, peroxydieren und reduzieren, Drug metabolism reviews 29 (1997) 413-580; Systembiologie der Leber siehe Adriano Henney;

Kinesin - Motorprotein, das chem Energie aus ATP-Hydrolyse verwendet, um sich längs Mikrotubuli zu bewegen. Schweitzer: Active Brownian particles 2007; Ratchets arbeiten lokal gegen den 2. Hauptsatz! **Hoffmann: Life's Ratchet: How Molecular Machines Extract Order from Chaos** 2012, **2.HS** gilt nur im Mittel: Brown'sches Teilchen sinkt im Gravitationsfeld, wandelt also ungeordnete in gerichtete Energie. Geht jedoch nicht zyklisch immer so weiter. Aber für kurze Zeiten kann's auch wieder steigen und dann wieder sinken. Feynman: Sperrklinke, Ratsche, Tür, aber Energie nötig. Abers bei der allosterischen Hemmung (griech.: allos: anders; steros: Ort) lagern sich die Hemmstoffe, auch allosterische Effektoren genannt, nicht (wie bei der kompetitiven Hemmung) an das aktive Zentrum, sondern an einer anderen Stelle des Enzyms (das allosterische Zentrum) an. Dabei wird die Konformation des Enzyms so verändert, dass die Bindung des Substrats am aktiven Zentrum erschwert bzw. ganz unmöglich gemacht wird. Hier kommt die Energie aus der Chemie. Bei diesem markromolekularen Phänonen wird die Binding von Ligand und molekularer Maschine durch den Zustand des Moleküls bestimmt. Aber die molekulare Maschine muss **unterscheiden** können zwischen Reaktant und Produkt, um gerichtete Bewegung aus Chemie zu machen. Erkennen ist also wichtiger als bloß konformale Änderung. Spiritualität ist Unfug vs rationale Spiritualität vs Religiosität; Chemie sorgt für das vertraute Mundgefühl: 'Kann Aktivität und Aufmerksamkeit bei Kindern beeinträchtigen' muss als Warnung auf Verpackungen mit folgenden Farbstoffen stehen: E 102 Tartrazin, E 104 Chinolingelb, E 110 Gelborange S, E 122 Azorubin (Carmoisin), E 124 Conchenillerot A, E 129 Allurarot AC.

27 Neuronale Anregung - Künstliche Neuronale Netze KNN

Nicholls, Martin, Wallace: From neuron to brain. A cellular and molecular approach to the function of the nervous system 1992[3]; Alternative durch Erraten von Gleichungen siehe Markus Quade, Markus Abel, K. Shafi, R.K. Niven, B.R. Noack: Prediction of Dynamical Systems by Symbolic Regression arXiv:1602.04648; Dynamical system prediction with machine learning Verhalten dynamischer Systeme vorherzusagen = Kernaufgabe der Physik? Mathematischer Modelle, Differentialgleichungen. Genetische Programmierung = Methode der symbolischen Regression, maschinelles Lernen. Rekonstruktion unbekannter, dynamischer Systeme aus Zeitreihen. FitzHugh-Nagumo Oszillatoren. Luke: Essentials of Metaheuristics 2013; Winston, Lecture 13. Learning: Genetic Algorithms, Machine Learning Course, Fall 2010. OpenCouseWare http://ocw.mit.edu/6-034F10. **Phasenkontrast-MR-Angiographie** = phase-contrast MRA basiert auf schnellen Gradientenecho-Techniken, siehe FLASH = Fast Low-Angle Shot, mit zusätzlichen flusskodierenden Gradientenpulsen bei Geweberelaxationszeiten T_1, T_2^*: $S_{\mathrm{FLASH}} = M_0 \sin(\alpha) \frac{1 - e^{-T_{\mathrm{R}}/T_1}}{1 - e^{-T_{\mathrm{R}}/T_1} \cos(\alpha)} e^{-T_{\mathrm{E}}/T_2^*}$. Echozeit $T_{\mathrm{E}} T_{\mathrm{E}}$, Repetitionszeit T_{R} und Anregungswinkel α mit maximalem Signal beim Ernst-Winkel $\alpha_{\mathrm{Ernst}} = \arccos e^{-T_{\mathrm{R}}/T_1}$. fMRI-Hirnscanner gibt nicht über das Feuern von Neuronen Auskunft, sondern nur über den Blutfluss im betreffenden Gebiet. Da dieser mit dem Sauerstoffverbrauch einhergeht, liefert er zwar indirekt ein Maß für die Aktivität der Zellen, allerdings nur mit Verzögerung. Sauerstoffabhängiges Scannersignals: Bold für blood oxygen level dependent. http://www.spektrumdirekt. de/ artikel/ 1123967 Hat man es mit sich schnell verändernden Reizen zu tun, wie bei Filmen, kann dies zum Problem werden. MRT = Gewebe modifiziert das Magnetfeld des Tomografen für die Protonen des Wassers. fMRT = Blutfluss modifiziert das Magnetfeld des Tomografen. Neuroimaging Hirndurchblutung in Voxels der Größe $2 \cdot 2 \cdot 2{,}5$ mm = 10 mm^3. Benesi: A primer of NMR theory with Calculations in Mathematica 2015; Braunbek: Kerninduktion, PhysBl6 1950 p5-10; Artur Lösche: Kerninduktion 1957; Slichter: Principles of magnetic resonance 1963; Frahm: PdN 41 H6 p14; Muster aus 500 bis 1000 solcher Voxel. Großhirnrinde 40,000 Neuronen pro mm^3 mit 800,000,000 synaptischen Kontakten. 1000 solcher Volumeneinheiten von je einem Kubikmillimeter. An einem Gedanken sind dann rund 40,000,000 Neurone und $8 \cdot 10^{11}$ Synapsen beteiligt. Jede synaptische Verschaltung habe zehn verschiedene Zustände. Wir haben unter $8 \cdot 10^{12}$ potenziellen Mustern zu suchen. Wie Gedanken eineindeutig auf ein neuronales Korrelat abzubilden? Es gibt kein Modell. Gehirn+Geist, Juni 2011; **Hirntumor-OP = Joghurt in Quark-OP = Tumor in Hirn**. Aber Faserbahnen, längs derer Wasser diffundiert, wird nicht gesehen. Daher diffusionsgerichtete Bildgebung nötig, um Pyramidenbahnen sehen zu können. Koch & Segev: Biophysics of computation. **Information processing in single neurons** 2001[3]; Gerstner, Kistler, Naud &

Paninsky: Neuronal Dynamics. From Single Neurons to Networks and Models of Cognition 2014; Online Folien http://neuronaldynamics.epfl.ch/ http://www. humanconnectomeproject.org/ **Human Connectome Project**: neuronale Verknüpfungsmuster; Heaton: Introduction to the Math of Neural Networks 2012; Hoppensteadt & Izhikevich: Weakly connected neural networks 1997; Izhikevich: Neural excitability, spiking and bursting, IntJBifChaos10 H6 2000 p1171-1266; Formby: An Introduction to the Mathematical Formulation of Self-organizing Systems 1965; **Heinz Georg Schuster: Complex adaptive systems** 2001; CA, feedback loop, neuronale Netzwerke, unsupervised learning, supervised learning; Gershenfeld: The Nature of Mathematical Modeling p151; Schnakenberg; Müller & Reinhardt: Neural networks 1991; **Wiedemann: Numerische Physik** 2004; **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical Methods** 2008; **Steeb: The nonlinear workbook. Chaos, Fractals, Cellular Automata, Neural Networks, Genetic Algorithms, Gene Expression Programming, Support Vector Machine, Wavelets, Hidden Markov Models, Fuzzy Logic with C++, Java and SymbolicC++ Programs** 2008[4] http://issc.uj.ac.za/; **Breymann: C++** Programmierer. C++ lernen - Professionell anwenden - Lösungen nutzen 2009; Scheinerman: C++ for Mathematicians 2006;

```
TeX/introductions/Praktikum+Exercise/2006WS-NLD C/c++/cpp
g++ logmap.cpp gnuplot set xlabel "r" plot "<./a.out" w d
set term postscript landscape 'Helvetica' 14
//set output 'name.ps' plot "<./a.out" w d set term x11
#include <stdio.h> #include <stdlib.h> #include <math.h> #include <iostream>
#include <fstream> #include <iomanip> using namespace::std;
int main ()
{ double x,r; int i; x=0.6; r=2.5;
//ofstream Datei ("Feigenbaum.dat");
for (r=2.5;r<=4;r=r+0.0025)
        {for (i=0;i<200;i++)
                {x=r*x*(1-x);
                //Datei<< r <<"\t"<< x<<endl;
                cout<<r<<"\t"<<x<<endl;
                }
        }
//Datei.close(); cout<<"# Ready!\n"<<endl; return 0; }

int main () { //float diff,i,x; double diff,i,x; //ofstream Datei ("baum.dat");
for (i=0;i<20;i++)
        {x=pow(10,i);
         diff=1/x-1/(x+1)-1/x/(x+1);
                //Datei<< r <<"\t"<< x<<endl;
                cout<<log10(x)<<"\t"<<diff/abs(diff)*log10(abs(diff))<<endl;
//              cout<<log(x)<<"\t"<<sign(diff)*log(abs(diff))<<endl;
        }
//Datei.close(); cout<<"# Ready!\n"<<endl; return 0; }
#include <iostream> #include <ostream> #include <cstdlib> using ::std::cout;
using ::std::rand;
int main(){srand ( time(NULL) );
cout << " 2. Zufallszahl -> " << rand()/(1.*RAND_MAX) << ";" << " 1.
Zufallszahl -> " << rand() << '\n'; }
#include <iostream> #include <string> using namespace std;
// Addition in einer Unterfunktion
float Addiere(float a, float b) { float c=a+b; return c; }
```

```
int main() // Stringmanipulationen
{ string text ="Hallo C++!"; cout<<"Der ganze Satz: "<<text<<endl;
cout<<"Ein paar Buchstaben: "<<text[6]<<text[4]<<text[3]<<text[1]<<endl;
return 0; }
```

Kandel, Schwartz, Jessell: Principles of neural science; Neurowissenschaften. Eine Einführung 1995; Newman, Barabasi, Watts: The structure and dynamics of networks; van Ooyen: Modeling neural development, MIT;

Aus Eingangsmuster zugehöriges Ausgabemuster erzeugen. Beim **Überwachten Lernen** wird dem KNN ein Eingangsmuster gegeben und die Ausgabe, die das Neuronale Netz in seinem aktuellen Zustand produziert, mit dem Wert verglichen, den es eigentlich ausgeben soll. Durch Vergleich von Soll- und Istausgabe kann auf die vorzunehmenden Änderungen der Netzkonfiguration geschlossen werden: * Delta-Regel (auch Perzeptron-Lernregel) * Backpropagation o Backpropagation mit Trägheitsterm o SuperSAB o Quickprop o Resilient Propagation.

Input $\vec{x}$ läuft über lineare Filter mit den Gewichten w_{ij} der versteckte/unbekannten Einheiten und führt dann über die nichtlinearen/**sigmoidalen** Aktivierungs- oder Anwortfunktionen des Perzeptors $g(h_j)$ gemäß **Sigmoid-Funktion**, nützlich für Logistische Verteilung, Künstliches neuronales Netz, Fermi-Dirac-Statistik, Gompertz-Funktion

$$g(h) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{-2\beta\, h}} = \dfrac{1}{2}\,(1+\tanh\beta h) \\ \tanh(\beta\, h) = \dfrac{e^{\beta\, h} - e^{-\beta\, h}}{e^{\beta\, h} + e^{-\beta\, h}} \end{cases} \tag{104}$$

sichert **Sättigung** oder **kontinuierliche Zwei-Zustandsfunktion**, zum Output X_j

$$X_j = g(h_j) \quad \text{mit} \quad h_j = \sum_k w_{jk}\, x_k$$

Bestärkendes Lernen: Es ist nicht immer möglich, zu jedem Eingabedatensatz den passenden Ausgabedatensatz zum Trainieren zur Verfügung zu haben. Zum Beispiel kann man einem Agenten, der sich in einer fremden Umgebung zurechtfinden muss - etwa einem Roboter auf dem Mars - nicht zu jedem Zeitpunkt sagen, welche Aktion jeweils die beste ist. Aber man kann dem Agenten eine Aufgabe stellen, die dieser selbstständig lösen soll. Nach einem Testlauf, der aus mehreren Zeitschritten besteht, kann der Agent bewertet werden. Aufgrund dieser Bewertung kann eine Agentenfunktion gelernt werden. Der Lernschritt kann durch eine Vielzahl von Techniken vollzogen werden. Unter anderem können hier auch künstliche neuronale Netze zum Einsatz kommen. Das **Unüberwachte Lernen** erfolgt ausschließlich durch Eingabe der zu lernenden Muster. Das Neuronale Netz verändert sich entsprechend den Eingabemustern von selbst. * Adaptive Resonanztheorie * Hebbsche Lernregel * Kohonennetze. **Stochastisches Lernen** * Simulated Annealing: Glühen, Sintern, Bessere Packungsdichte durch Rütteln. Verfitztes Schlüsselbund entwirren. Man bringt das System durch Anregung auf ein höheres Energieniveau des irregulären Potenzialfläche und hofft auf Relaxation in ein tieferliegendes Minimum. Nicholas Metropolis: Instead of choosing configurations randomly, then weighting them with $e^{-E/kT}$, we choose configurations with a probability $e^{-E/kT}$ and weight them evenly.

Boosting (engl. „Verstärken) ist ein Algorithmus der automatischen Klassifizierung, der mehrere schlechte Klassifikatoren zu einem einzigen guten Klassifikator verschmilzt.

Eine **Support Vector Machine** (SVM, Stützvektormaschine oder Stützvektormethode) ist ein Klassifikator. Eine Support Vector Machine **unterteilt eine Menge von Objekten so in Klassen, dass um die Klassengrenzen herum ein möglichst breiter Bereich frei von Objekten bleibt**; sie ist ein sogenannter Large Margin Classifier - **Breiter-Rand-Klassifikator**. Support Vector Machines können sowohl zur Klassifizierung als auch zur Regression verwendet werden. **Hastie, Tibshirani, Friedman: Elements of statistical learning**, 2003; **Duda, Hart, Stork: Pattern classification** 2001; Zu Support Vector Machines und Kernel-Funktionen siehe **Schölkopf: Learning with Kernels. Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond** 2002; Cristianini, Shawe-Taylor: Kernel Methods for Pattern Analysis 2004

28 Graphen-Theorie & komplexe Netzwerke

Bollobás: Modern graph theory 1998; Creating Network Graphs with Python https://www. udacity. com/wiki /creating-network-graphs-with-python

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt
def draw_graph(graph):
    nodes = set([n1 for n1, n2 in graph] + [n2 for n1, n2 in graph])
    # extract nodes from graph
    G=nx.Graph() # create networkx graph
    for node in nodes:
        G.add_node(node) # add nodes
    for edge in graph:
        G.add_edge(edge[0], edge[1]) # add edges
    pos = nx.shell_layout(G)
    nx.draw(G, pos) # draw graph
    plt.show() # show graph
graph = [(20, 21),(21, 22),(22, 23), (23, 24),(24, 25), (25, 20)] # draw example
draw_graph(graph)
```

Gantt-Diagramm oder Balkenplan zeigt Ablauf und Meilensteine. Projektmanagement = zeitliche Abfolge von Aktivitäten grafisch in Form von Balken auf einer Zeitachse. http://xael.org/pages/python-gantt-en.html; Scheinerman, Ullman, Berge: Fractional Graph Theory. A Rational Approach to the Theory of Graphs 2011; Barrat et al.: Dynamical processes on complex networks 2008; Dmitriev: Moleküle ohne chemische Bindungen? Topologie, Graphentheorie und Struktur der Moleküle 1980; Gritzmann & Brandenberg: **Das Geheimnis des kürzesten Weges** 2003[2]; Networks and graphs between geometry and statistics. Ulrike von Luxburg, Hamburg: Complex network science: the quest for understanding the internet, facebook and the brain. The geometry of unweighted k-nearest neighbour graph. Estrada: The Structure of Complex Networks. Theory and Applications 2011; Estrada & Knight: A First Course in Network Theory 2015; **Dijkstra-Algorithmus** ct8.2020p65

Graph $G(V, E)$, V= endliche Menge von Knoten/Vertices, E = Menge von Edges/Kanten/Links = Menge 2-elementiger Teilmengen von V. Schlichter Graph hat weder Schlingen noch parallele Bögen. Gemischter Graph hat gerichtete und ungerichtete Kanten. **Nachbar** meint immer NN=nächster Nachbar. **Abstand** zwischen Nachbarn meint stets **kürzeste Verbindung**. Vertex-Anzahl N=$\#V$. Bogen/Arc = geordnetes Paar/Pfeil=Einbahnstraße. Ungerichteter Graph = alle Bögenwerden zu Kanten = symmetrische Adjazenz-Matrix. Knotengrad/node degree/vertex degree = Anzahl von nächsten Nachbarn $k_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} \leq N - 1$ = maximale Linkanzahl. Adjazenz für Grafen.

Datengetriebenes Erraten der reaktionskinetischen Netzwerk-Struktur: Lauritzen: Graphical models 2004; Whittaker: Graphical models in applied multivariate statistics 1993; Glymour: The mind's arrows: Bayes nets and graphical causal models in psychology 2001; **Downey: Think Bayes** 2013; Borgelt: Graphical models. Methods for data analysis and mining 2002; Cox & Wermuth: Multivariate dependencies. Models, analysis and interpretation 1996; Barndorff-Nielsen & Cox: Asympotic techniques for use in statistics 1989; Kedem: Time series analysis by higher order crossings 1994; Lütkepohl: New introduction to multiple time series analysis 2007[2];

29 Cellular Automata, Lattice-Gas methods, CA machines

Fredkin, Convay, dann Wolfram. **Pagels: The Dreams of Reason. The Computer and the Rise of the Sciences of Complexity** 1988; Hasslacher: Discrete fluids, In: Los Alamos Science 15 1987 p175-

200+211-217 = exzellente Einführung. Idee von Ulam + von Neumann: Biologische Systeme meiden a] arithmetische Operationen, b] diskrete Näherung von kontinuierlich formulierten Modellen. **Nutze lieber:** a] nur logische Operationen wie Bit-Shifts, b] starte gleich beim Zellen- oder Gitter-Modell, wo allein nächste Nachbarn **NN** und **lokale Regeln** gelten. **Lokale Dynamik zwischen unmittelbar benachbarten Zellen generieren die globale Dynamik!** Sammlung vo originalarbeiten: Doolen, Frisch, Hasslacher, Orzag, Wolfram: Latice gas methods for PDEs 1990 p213-49 Margolus & Toffoli: CA Machines, weil konventionelle Computer-Architekturen zur Simulation ungeeignet. Bei CAMs sind Größe des Problems (Speicherplatz) und Rechengeschwindigkeit entkoppelt. von Neumann: Theory of Self-Reproducing Automata 1966; Ilachinski: Cellular Automata. A Discrete Universe 2001; Wolf-Gladrow: Lattice-Gas Cellular Automata LGCA and Lattice Boltzmann Models An Introduction e-book. 2000; new.math.uiuc.edu/im2008/ dakkak/ papers/ files/Wol2000c.pdf http:// replay. waybackmachine. org/20060411161116/ http://www. awi-bremerhaven. de/ Modelling/ LGCA +LBM /LBM/ **Wayback Machine** = digital archive of the World Wide Web seit 2001 https://web.archive.org/ https://web.archive.org/web/20170820074056/
`http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/shw_cv.html`
Verbatim: `\verb`+Zeichenkette+ oder `\begin{verbatim}`Zeichenkette`\end{verbatim}`. **Rothman & Zaleski: Lattice-Gas Cellular Automata: Simple Models of Complex Hydrodynamics** 1997, Tensor-Symmetrien ; Gittergas in 2D lebt z.B. auf einem hexagonalen Gitter aus reibungslosen Teilchen gleicher Masse und Geschwindigkeit/Speed v mit 6 verschiedenen Geschwindigkeitsrichtungen $\vec{v}$. Jeder Pfeil oder jede Gitterkante/Edge repräsentiert ein Teilchen. Bei jedem Zeitschritt bewegen sich die Teilchen einen Gitterschritt = eine Kante weiter = hop und können dabei **streuen**/ stoßen, falls 2 oder mehr Teilchen am selben Ort ankommen. Weder Teilchenzahl noch die Geschwindigkeitssumme $\vec{v}$ kann geändert werden. Nicht alle Stöße ändern die Teilchen Konfiguration, also auf welcher Kante sie nach dem Stoß sitzen. Sukop & Thorne: Lattice Boltzmann Modeling: An Introduction for Geoscientists and Engineers 2010;

Lattice gas automata LGA; Diskret in Raum i, Zeit t und Zustand $a \in \{0,1\}$! Verrechnung ohne zählen zu können. **Zellen-Update-regel, Mitchel: Complexity**

$$a_i(t+1) = f[a_{i-r}(t), a_{i-r+1}(t), \ldots, a_{i+r}(t)], \quad \text{speziell}: \; a_i(t+1) = (a_{j-1}(t) + a_{j+1}(t)) \mod 2$$

mit der **lokalen Regel** f, die die Entropie des Systemzustands im Laufe der Zeit absenkt und mit dem Lichtkegel für die Musterausbreitung sofort auch die Begriff der Kausalität illustriert. Die Modulo-Regel bedeutet eine nichtlineare Abbildung. Für zwei Nachbarn gibt es 2^3 Konfigurationen: 111,110,101,011,100,010,001,000. Mit obiger **mod- oder XOR-Regel** 0+0=0, 0+1=1, 1+0=1, 1+1=0 folgt: 111→0, 110→1, 101→0, 011→1, 100→1, 010→0, 001→1, 000→0. Das **bitweise exkluse ODER, XOR** `2^3=1, 2^18=16, 4^3=7`. Die mod-Abbildung gibt den String $01011010_2 = 90_{10}$ der als **Regel 90** bezeichnet wird:

Feld 1	Feld 2	Feld 3		Feld 2 im nächsten Jahr		Weitere Zuordnung
0	0	0	→	0	→	$0 * 2^0 = 0$
0	0	1	→	1	→	$1 * 2^1 = 2$
0	1	0	→	0	→	$0 * 2^2 = 0$
0	1	1	→	1	→	$1 * 2^3 = 8$
1	0	0	→	1	→	$1 * 2^4 = 16$
1	0	1	→	0	→	$0 * 2^5 = 0$
1	1	0	→	1	→	$1 * 2^6 = 64$
1	1	1	→	0	→	$0 * 2^7 = 0$
						$= 90$

Umgekehrt kann man mit der Regel 56_{10}=00111000_2 andere der 2^8 Abbildungsvorschriften kodieren. Per

Restklassen-Division erhält man für **Regel 147**:

$$\begin{array}{rcl} 147:2=73+1 & \rightarrow & 1*2^0=1 \\ 73:2=36+1 & \rightarrow & 1*2^1=2 \\ 36:2=18+0 & \rightarrow & 0*2^2=0 \\ 18:2=9+0 & \rightarrow & 0*2^3=0 \\ 9:2=4+1 & \rightarrow & 1*2^4=16 \\ 4:2=2+0 & \rightarrow & 0*2^5=0 \\ 2:2=1+0 & \rightarrow & 0*2^6=0 \\ 1:2=0+1 & \rightarrow & 1*2^7=128 \end{array}$$

Und $1+2+16+128=147$. a = 60; and b = 13; a = 0011 1100; b = 0000 1101; **und-Operator:** `a&b = 0000 1100`; **oder-Operator:** `a|b = 0011 1101`; **XOR-Operator:** `a^ b = 0011 0001` 0 zeigt die Übereinstimmungs-Position; Bit-Flipp oder **Komplement-Operator:** `~ a = 1100 0011`; **Bit-Shift links** = Multiplikation mit 2 http://wiki. python. org/moin/BitManipulation int('0b1100110',2) oder int('1100110',2) gibt 102; int('1100110',3) ist 984 und int('1100110',10) ist 1100110;
hexadezimal 16 = $\#\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$: 0xff ist 255=f*$16^1$+f*$16^0$ = $f*17$, wobei f=15 oder kurz int('0xff',16) oder print `"0x%x" % int('11111111', 2)`

```
# python CellAuto.py 110 > Bild1.pgm pgm mit okular oder Gwenview anzeigen.
# http://de.wikipedia.org/wiki/Zellul%C3%A4rer_Automat
# bin(4) ist 0b100; 4<<1 ist 0b1000 oder 8
import sys
if len(sys.argv) != 2 or int(sys.argv[1]) not in range(0,256):
    sys.exit()
w = 200
r = s = [0] * w
r[w/2] = 1 ; r[w/4] = 1
z = ""
d = 0
for j in range(0,w/2):
    n = (r[0] << 1) + r[1]
    o = ""
    for i in range(1,w):
        o += " 0 " if r[i]==1 else "15 "
    z = z + o + "\n"
    for i in range(2,w):
        n = (n << 1) + r[i]
        if n >= 8: n-=8
        s[i-1] = (int(sys.argv[1]) >> n)%2
    r = s
    d += 1
print "P2"; print str(w-1) + " " + str(d); print "15"; print z
```

PyFFmpeg from pyffmpeg import FFMpegReader; # create the reader object; mp=FFMpegReader() # open an audio-video file; mp.open('your file.mpg'); tracks=mp.get_tracks() # define a function to be called back each time a frame is read... def obs(f): display(f[2]) # you have to write your display function tracks[0].set_observer(obs); mp.run(). Extraktion eines Bildes aus Video braucht Python Imaging Library (PIL) import pyffmpeg; stream = pyffmpeg.VideoStream(); stream.open('myvideo.avi'); image = stream.GetFrameNo(0); image.save('firstframe.png'). http://pymedia.org/tut/ http://sourceforge. net/project/showfiles. php?group_id=86491&package_id=89813 **Wahrheitswerte:** a=True, b=False, bool(1), bool(a). Mit Spinzuständen $S_i \in \{-1,1\}$ lautet die Regel $S_i(t+1) = -S_{i-1}(t)S_{i+1}(t)$. Kap10 **Steeb: The nonlinear workbook. Chaos, Fractals, Cellular Automata, Neural Networks, Genetic Algorithms, Gene Expression Programming, Support Vector Machine, Wavelets, Hidden Markov Models, Fuzzy Logic with C++, Java and SymbolicC++ Programs** 2008^4 http://issc.uj.ac.za/; Gershenfeld: The

Nature of Mathematical Modeling 1998; **Schwartz: Biological Modeling and Simulation. A Survey of Practical Models, Algorithms, and Numerical Methods** 2008; Nolte: Introduction to Modern Dynamics. Chaos, Networks, Space and Time 2015; Barrat, Barthélemy & Vespignani: Dynamical Processes on Complex Networks 2013; Meinhardt: Diffusion SdW3 2010, http://www. eb. tuebingen. mpg. de/ departments/ former - departments /h-meinhardt /biuprog. html; Vollmar: Algorithmen für zelluläre Automaten 1979; Stauffer: Programming Cellular Automata, Comp in Phys Jan/Feb1991 p62-67; Hütt: Datenanalyse in der Biologie 2001 Kap3; Wolpert: Wie wir leben und warum wir sterben 2009; **Wolfram: A New Kind of Science** 2002; Wolfram: Das Ende der Gleichungen? Ein Dialog mit Dietmar Dath 2009?; **Jensen: Self-organized criticality - emergent complex behavior in physical and biological systems 1998**; SdW März 1991; Pruessner: Self-Organised Criticality: Theory, Models and Characterisation 2012; **SOC & Skalierungsverhalten - algebraisch vs exponenziell:** Bei der doppeltlogarithmischen Darstellung der Wertepaare (x,y) von Potenzgesetzen $y = ax^\alpha$ findet man eine Gerade, die Ausdruck des Fehlens einer typischen 'Skala' ist. **Campa, Dauxois, Fanelli & Ruffo: Physics of Long-Range Interacting Systems** 2014; Barenblatt: Scaling 2003 mit Selbstähnlichkeit, Renormierung-Gruppe, Traveling wave; So gehen näherungsbedingete Fehler mit der Schrittweite $h \to 0$ gegen Null, wogegen zahldarstellungsbedingete Rundungsfehler anwachsen. Es sollte Bereiche einer Geraden geben, also Bereiche mit konstanten Exponenten (Skalierungs-Exponent bei Power-Spektren, Gutenberg-Richter-Gesetz zwischen Energie und Magnitude) -

$$M = 2 + \frac{2}{3}\log_{10} W \quad \text{bzw.} \quad W = 10^{\frac{3}{2}(M-2)}$$

im Physik-Jargon spricht man von Skalierungsverhalten. $M_\mathrm{L} = \log_{10}\left(\frac{A_\mathrm{max}}{A_0}\right)$, wobei A_max den maximalen Ausschlag in μm, in 100 km-Abstand vom Epizentrum. Richter: Elementary seismology 1958; Bullen: Seismology 1953; Hardtwig: Theorien zur mikroseismischen Bodenunruhe 1962; Egyed: Die Erdbeben und die Erde 1971; **Schneider: Erdbeben. Entstehung, Ausbreitung, Wirkung** 1975; Schneider: Grundbegriffe der Geologie 1941[3]; Lauterbach, Treder, KH Schmidt, Christian-Ulrich Wagner, † 24. Juni 1989 Hirntumor, Frau Koss: Physik des Planeten Erde. Ergebnisse geophysikalischer Forschung 1975; Sawarenski & Kirnos: Elemente der Seismologie und Seismometrie 1960; Walker: Der Planet Erde. Erdbeben 1982; Neumann, Jacobs, Tittel: Erdbeben 1986; Broecker: Labor Erde. Bausteine für einen lebensfreundlichen Planeten 1994; Siever: Sand. Ein Archiv der Erdgeschichte 1985; Beiser: Sand. Wie uns eine wertvolle Ressource durch die Finger rinnt 2021; R̃othe: Die Erde. Alles über Erdgeschichte, Plattentektonik, Vulkane, Erdbeben, Gesteine und Fossilien 2015[3]; Kertz: Geophysik Bd1 1969 p30-66; Niddrie: Wenn die Erde bebt 1966; Jung: Kleine Erdbebenkunde 1953; Hüttl: Ein Planet voller Überraschungen. Neue Einblicke in das System Erde 2011; Richter: Heinrich von Kleist, Die Marquise von O..., Das Erdbeben von Chili 2009; Berkhout: Seismic migration. Theoretical aspects 1985[3]: Clauser: Einführung in die Geophysik. Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde 2014 p69ff; p-kompressions Wellen, s-Scherwellen. Oberflächenwellen haben 1 bis 100 mHz, also 10 sec bis 15 Minuten. Wellenlänge über 1km. Körperwellengeschwindigkeit 1.5 bis 13 km/s. Rieber 1936 Wellenbrechung an Kante. Russell: Introduction to seismic inversion methods 1988 4-7 stack-Darstellung von Tanner & Koehler 1981 Wellen-Geschwindigkeits-Spektren Geophysics 34 1969 859-81 Tanner-Koehler-1969.pdf; Trorey: The information content of a Rieber Sonogramm Geophysics 26 1961 761-4 Rieber erreichte 1937 controlled directional sensitivity bei seismischen Messungen; Shearer: Introduction to Seismology 2009; Li, Yong-Gang ed: Imaging, Modeling and Assimilation in Seismology 2012; Stein & Wysession: An Introduction to Seismology, Earthquakes and Earth Structure 2002; Santosa & Symes: An Analysis of least-squares velocity inversion 1989; **Yilmaz: Seismic data analysis** 2Bde 1987, 2001 p2 Astronom Rebeur-Paschwitz1861-1895 statt Einfluss von Himmelskörpern auf Horizontalpendel in Potsdam sieht man Bodenbewegung eines in Japan aufgetretenen Erdbebens 1889. Schubert ed: **Treatise on geophysics** 10Bde 2009 Bd1 Seismology Chap5 Cormier: Theory and observation. Forward modeling. Synthetic body wave seismology; Omori-Gesetz: Vor- und Nachbeben in ihrer Häufigkeit zeitlich gemäß einer Potenzverteilung um ein Hauptbeben verteilt. $N_f(t) \propto (t_M - t)^{-q}$ und $N_a(t) \propto (t - t_M)^{-p}$, t_M Zeitpunkt des Hauptbebens. Bei physikalischen Vorgängen zerfallen lokale Fluktuation nicht exponenziell, sondern alge-

braisch, d.h., dass trotz bloßer next neighbour WW wird das gesamte System erfasst. **Potenzschreibweise:** In Metern. Mensch 10^0, Maus 10^{-1}, Insekt 10^{-2}, Atom 10^{-10}, Proton 10^{-15}, Planck-Skala 10^{-34}. Regenmenge: Liter pro m^2 bedeutet mm pro m^2. Aus wieviel Atomen besteht ein Mensch. Wieviel mol Viren bringen sicher eine Ansteckung. $10^9 = m \cdot n$ mit m, n ohne Nullen löst $10^9 = (2 \cdot 5)^9 = 2^9 5^9 = 512 \cdot 1,953,125$. Potenzgesetze: Es gibt keine typischen Längen- und Zeitskalen, Eventgrößen: $\frac{f(A\,x)}{f(x)} = A^\alpha$ =const, also $f(x) = x^\alpha$. **Skaleninvarianz bzw. Skalenunabhängigkeit:** Eigenschaft eines Zustands, Vorgangs, Verhältnisses oder einer Situation, bei dem/der trotz Veränderung der Betrachtungsgrößen (Skalierung) die Eigenart oder Charakteristik inklusive seiner Eckwerte weitestgehend exakt gleich bleiben, so dass ein „selbstähnlicher" Zustand gegeben ist, der meistens gewisse Universalitätseigenschaften zeigt. Eine von der Variablen x abhängige Funktion $f(x)$ heißt **skaleninvariant**, wenn die wesentlichen Eigenschaften der Funktion sich unter einer **Reskalierung** $x \to ax$ nicht ändern. In der Regel versteht man darunter, dass sich f nur um einen Faktor (der von a abhängen kann) ändert: $f(ax) = C(a)f(x)$. Das bedeutet beispielsweise, dass wichtige Eigenschaften der Funktion – wie Nullstellen, Extrema, Wendepunkte oder Pole – nicht davon abhängen, welche Skala man verwendet. Beispiele skaleninvarianter Funktionen sind die Monome x^p. Die Verallgemeinerung für Funktionen mehrerer Variablen ist offensichtlich: Die Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt skaleninvariant, wenn $f(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) = C(a)f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Beispiele sind homogene Polynome, die p-Normen, die Mahalanobis-Distanz und der Korrelationskoeffizient. Auch Netze, deren **Verlinkungsgrad** keiner Skala folgt, bezeichnet man als **skaleninvariante oder skalenfreie Netze**. Siehe auch: Fraktal und Skalengesetz. Analog zum Verhalten von Gleichgewichtssystemen am kritischen Punkt. System hat eine Schwelle und viele metastabile Zustände. Ein mit vielen Freiheitsgraden behaftetes schnelles, mikroskopisches, unspezifisches System wird von einer langsamen, äußeren Kraft getrieben: Sandhaufen, Erdbeben, solare Flares. Solare energetische Teilchen: Protonen werden durch coronale Shock-Wellen längs magnetischer Flussröhren von Sonne zur Erde betrieben. Vlahos; Lu & Hamilton ApJ 380 L89 1991; Mitchell Berger, Exeter, Nanoflares, Braided Magnetic Fields, and Self-Organized criticality; http://soleil.i4ds.ch/solarradio/ Radio-Daten. **37GHz-Radio-Heliograph:** Radiofenster 0.8 cm = 40GHz bis 20 m = 15 MHz http://hinode.stelab.nagoya-u.ac.jp/ICCON/

Zustandsraum: Konfigurationsraum f-dimensional, **Ereignisraum** = Konfigurationsraum und Zeit $f+1$-dimensional (SRT, Feynman-Graphen); **Phasenraum** Hamilton $2f <->$ beliebige Dimension NLD (zB Lorenz); **Zustandsraum** oder erweiterter Phasenraum 2f+1-dimensional (Zeit) oder beliebige Dimension Shot-Noise oder Schrot-Rauschen: `http://www.phy.duke.edu/~hx3/physics/ShotNoise.pdf`; Cox &

Model	Zustand	Raum	Zeit	Beispiel
PDE	$f(x,t) \in \mathbb{C}^N$	$x \in \mathbb{R}^n$	$t \in \mathbb{R}$	Diffusion
ODE, kont. Bm	$f(t) \in \mathbb{C}$		$t \in \mathbb{R}$	Planeten
gekopp. ODE	$f(x_i,t) \in \mathbb{C}^N$	$x_i \in \mathbb{Z}^N$	$t \in \mathbb{R}$	gekoppelte Pendel
AR[p]	$f(t_j) \in \mathbb{R}^N$		$t_j \in \mathbb{Z}$	Preisentwicklung
Vektor AR[p]	$f(x_i,t_j) \in \mathbb{R}^N$	$x_i \in \mathbb{Z}^N$	$t_j \in \mathbb{Z}$	gekoppelte Preisentwicklung
CML, diskrete Bm	$f(x_i,t_j) \in \mathbb{R}^N$	$x_i \in \mathbb{Z}^N$	$t_j \in \mathbb{Z}$	
CA, RTP, Irrfahrt	$f(x_i,t_j) \in \mathbb{Z}^N$	$x_i \in \mathbb{Z}^N$	$t_j \in \mathbb{Z}$	Ising
Punktprozess	$\chi_{[t_j]}(x_i)$, $t_j \in \mathbb{Z}$	$x_i \in \mathbb{Z}^N$	$t \in \mathbb{R}$	Warteschlange, Photonenankunft
Cox-Prozess				
Semi-Markov-P.				
Shot noise	$s(t) = \sum_{i:T_i<t} F_i f(t-T_i)$	$x_i \in \mathbb{Z}^N$	$t_j \in \mathbb{Z}$	Elektronenzahl pro Lawine
Spiele	$f(x_i,t_j) \in \mathbb{Z}^N$	$x_i \in \mathbb{Z}^N$	$t_j \in \mathbb{Z}$	Poker Schach mit x_i Agenten

Tabelle 6: Zustandsräume

Isham: Point Processes 1980: $x(t) = \sum_j M\,\Theta(t-T_j)\,e^{-(t-T_j)/\tau}$ Belzig: Fluktuierender Strom, PhysikJ H8 2005 p75: In mesoskopischen Systemen, die zwischen der mikroskopischen Welt der Quantenmechanik und der makroskopischen Domäne der klassischen Physik angesiedelt sind, macht sich die Quantisierung der Ele-

mentarladung in direkt messbaren Größen in vielfältiger Weise bemerkbar. Insbesondere im Zusammenhang mit elektrischem Stromtransport tritt diese Quantisierung als so genanntes Schrotrauschen auf. Ursache und Größe des Rauschens im elektrischen Strom lassen sich klassisch durch die Körnigkeit des Stroms erklären. Röntgen-Lichtkurven: Terrell, AstrophysJ174 L35 1972. Power-Spektrum siehe Paloulis:

$$S(\omega) = \frac{M^2\,\rho}{1/\tau^2 + \omega^2}, \quad \omega \neq 0$$

Andrieu & Duvaut: Bayesian estimation and detection of shot noise processes using reversible jumps, Relies on Markov chain Monte Carlo methods and provides the a posteriori probability density of the unknown parameters conditionally to the observations. Acoustics, Speech, and Signal Processing 1997. ICASSP-97 1997 IEEE International Conference on Issue Date: 21-24 Apr 1997 Vol5 p3681-3684; Ugur Ural: Markov Chain Monte Carlo method in order to determine the the distribution of the good dynamical models of Carina dSph, in the parameter space.

30 Voronoi-Tessalation/Mosaik, Delaunay-Triangulation

Ebene wird in Zellen aufgeteilt, die jeweils genau einen Punkt x eines stationären Poissonprozesses im Innern enthalten. Dem Punkt x wird die Menge derjenigen Punkte der Ebene zugeordnet, die zu x eine geringere Entfernung haben als zu allen anderen Punkten. Stefan Schmidt/Botter. Pöppe: Stochastische Prozesse, SdW März 2013 p70-73; Große & Weißmantel: Der gestörte Kristall 1979; **Treitz: Kristallografie**. Wie Atome den Raum unter sich aufteilen, SdW Nov 2007 p36; Bei der **Voronoi-Zerlegung einer Ebene**, in der sich Punkte an den Positionen x_i befinden, wird jedem Punkt x_i die Menge derjenigen Punkte der Ebene als Nachbarschaft/Besitz zugeordnet, die zu x_i eine geringere Entfernung haben als zu allen anderen Punkten x_j mit $j \neq i$. Analog in höheren Dimension. n-D Meshes. **Kleber, Bautsch & Bohm: Einf in die Kristallographie** 1990[17]; Wikinger nutzen Rayleigh-Streuung und Doppelbrechung zum Sonnenstand bei bedecktem Himmel: Sonnenstein. Stoyan & Mecke: Stochastische Geometrie 1983; Stoyan: Fraktale, Formen, Punktfelder 1992 **Gestaltstatistik**. `http://www.ifor.math.ethz.ch/~fukuda/polyfaq/polyfaq.html` und `http://www.agnld.uni-potsdam.de/~shw/TSA/Tools/ClusterAnaStefan/index.html`

31 Klassische Feldtheorie/Hamilton-Prinzip für Felder, Pseudo-Formen

Elektron = Fremdkörper der Elektrodynamik: Wir bauen uns ein Elektron bei $\mathcal{O}$ aus Ladungshäppchen δq, die wir aus dem Unendlichen ∞^3. Bei $\mathcal{O}$ befinde sich ein Ladungsbehälter mit der Ladung q und dem Duchmesser $a > 10^{-15}$m. Die Verschiebungsarbeit ist $\mathrm{d}(\delta W) = -\delta F \mathrm{d}r$. Die Kraft auf das Ladungshäppchen $\delta F = \frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ bringt Verschiebungsarbeit $\delta W = -\frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0}\int_\infty^a r^{-2} = \frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0}[\frac{1}{r}]_\infty^a = \frac{q\delta q}{4\pi\epsilon_0 a}$. Der kleinste stabile Ladungsbehälter enthält die Gesamtladung $e = \int_{K(\mathcal{O},a)} \delta q$. Die elektrostatische Energie des Elektrons/Selbstenergie ist dann $W_e = \int_{K(\mathcal{O},a)} \delta W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a}\int_0^e q\delta q = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$. Volz: Die Begriffbildungen der Elektrodynamik, PhysBl17 1961 79ff; S̃usskind & Friedman: Elektrodynamik und Relativität: Das theoretische Minimum 2020; **Schopper: Zur Gültigkeit der Elektrodynamik und QED**, PhysBl 29 1973 p106-125; Drude: Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage 1894; Franz Ernst Neumann 1798-1895: Vorlesungen über theoretische Optik 1885 p5; Hoyer: Zur Geschichte der Maxwell'schen Elektrodynamik PhysBl 1978 p79ff Maxwell 1861, I have also a paper afloat, with a theory of light, which till I am covinced, I hold to be great guns. Tricker: Frühe Elektrodynamik. Das erste Stromgesetz 1974; Tricker: Die Beiträge von Faraday und Maxwell zur Elektrodynamik 1974; **Dirschmid: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik** 1988[3], 1990[4]; Dirschmid: Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik. **Lösungen und Hinweise** 1988; Kuhlmann: Sein oder Nichtsein? Felder, Teilchen **Tropen = Bündel von Eigenschaften, die Dinge konstituieren** - die QFT im Dialog zwischen Philosophie

und Physik, PJ15 2016 H6 p2935, Replik: Sinn oder Nicht-Sinn? PJ15 2016 H8/8 p19; Brückner: Zur Ontologie der Elementarteilchen 2015; **Teilchen = Tropenbündel**. Ontologischer Strukurenrealismus p32, platonische Strukturen = mathematisch $\neq$ physikalische Strukturen. Symmetriestruktur ist primär. Elektron wird daraus abgeleitet, daher bloß sekundär. Die Grundideen der Feldtheorie basieren auf den Beschreibungsprinzipen für deformierbare Körper. Päsler: Mechanik deformierbarer Körper 1960; **Schmutzer: Grundprinzipien der klassischen Mechanik und der klassischen Feldtheorie** 1973; Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik 1989, 2005; **Scheck: Theoret. Physik 3 - Elektrodynamik** 2004 **Klassische Feldtheorie. Von Elektrodynamik, nicht-Abelschen Eichtheorien und Gravitation** 2010[3] e-book; Jackson: Classical electrodynamics 2001[3]; Podolsky & Kunz: Fundamentals of electrodynamics 1969; Rojansky: Electromagnetic fields and waves 1971; Starling: Electricity and magnetism 1912, 1945[7]; H̃ehl & Obukhov: Foundation of electrodynamics 2003; Moon & Spencer: Foundations of Electrodynamics 1960; M̃ead: Collective Electrodynamics. Quantum Foundations of Electromagnetism 2000; Schwinger: Classical electrodynamics 1998, 2017 Elektrodynamik per Green'scher Funktionen oder Propagatoren; B̃artelmann, Feuerbacher, Krüger, Lüst, Rebhan, Wipf: Theoretische Physik 2018; F̃euerbacher: Tutorium Mathematische Methoden der Elektrodynamik. Ausführlich erklärt für Studierende der Physik im Haupt- und Nebenfach 2019; F̃euerbacher: Tutorium Elektrodynamik. Elektro- und Magnetostatik - endlich ausführlich erklärt 2016; Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd3 Klassische PhysikII Das Maxwellsche Feld 1961 Klassische Optik. Relativitätstheorie; **Bergmann & Schäfer: Bd2 Elektrodynamik** 1999[8]; Wentzel: Theorie der Wellenfelder 1943; Goldstein: Mechanik 1950 Kap11.3; **Euler-Lagrange für Felder** oder **Lagrange Formulierung der Feldtheorie** siehe Saletan & Cromer: Mechanik Kap8 p282ff; Herlt p145; **Goldstein: Klassische Mechanik** 1950[1] Kap11.2 p388-411 Lagrange'scher Formalismus für kontinuierliche Systeme. p408 elektromag Felder problematisch, weil Potential nicht unabhängig, weil durch **Lorentz-Eichbedingung** verbunden, siehe Wentzel: Quantum theory of fields 1949 und Schiff: Quantum mechanics 1968[3] p342; **Bailin & Love: Introduction to gauge field theory** 1994 p15ff; **Raumzeitliches Variationsproblem für ein Feld $f(t,x)$ mit der Lagrange-Funktion F und den fixen Randbedingungen, wo keine Variation erlaubt ist, ohne die Fragestellung zu ändern:** $0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ F\left(x,t,\ f(x,t),\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x},\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right) = \delta \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ F\left(x,t,\ f(x,t),\ f_x(x,t),\ f_t(x,t)\right) = \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ \delta F(x,t,f,f_x,f_t) = \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ \left(\frac{\partial F}{\partial f}\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f_x + \frac{\partial F}{\partial f_t}\delta f_t\right) = *$ Mit parzieller Integration $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial f_t}\delta f\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial f_t}\right)\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_t}\dot{f}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right)\delta f + \frac{\partial F}{\partial f_x}f'$ folgt

$* = \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ \left[\frac{\partial F}{\partial f}\delta f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial f_t}\right)\delta f - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right)\delta f\right] + \cancel{\iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial f_t}\delta f\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f\right)\right]} = \iint \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ \left[\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial f_t}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right)\right]\delta f$ muss für kleine, aber beliebige Feldvariationen $\delta f(x,t)$ über der **Raumzeit, den unabhängigen Variablen** t,x, gelten, wobei aber wegen fehlender Randvariation des Feldes $\delta f = 0$ (Randwertproblem hat festen vorgebenen Bedingungen zu gehorchen!) $\int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\ \frac{\partial F}{\partial f_t}\delta f\Big|_{\delta f(t_1)=0}^{\delta f(t_2)=0} = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\ 0 = 0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ 0 = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\ \frac{\partial F}{\partial f_x}\delta f\Big|_{\delta f(x_1)=0}^{\delta f(x_2)=0}$ Damit lautet die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial F}{\partial f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial F}{\partial f_t}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial f_x}\right) = 0$. Schmutzer: Grundlagen der Theoretischen Physik p1518; Nolting 4 p85ff; **Päsler: Prinzipe der Mechanik** 1968 p16 & 143 $F(u,v,y(u,v),y_u,y_v,y_{uu},y_{vv},y_{uv})$ gibt die Euler-Lagrange-Gl $F_y - \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial y_{,u}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial F}{\partial y_{,v}} + \frac{\partial^2}{\partial u^2}\frac{\partial F}{\partial y_{,uu}} + 2\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\frac{\partial^2 F}{\partial y_{,uv}} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\frac{\partial F}{\partial y_{,vv}} = 0$; Weizel Bd1 Membran p206f Membranwölbung $z = w(x,y,t)$. Die **Richtungskosinus** der Flächennormale sind proportional zu $-\frac{\partial w}{\partial x}, -\frac{\partial w}{\partial y}, 1$ und haben die Werte $\cos\alpha = -\frac{\partial w/\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}$, $\cos\beta = -\frac{\partial w/\partial y}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}$,

$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2}}$, Flächenelementgröße im gewölbten Zustand $\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\cos\gamma} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right.}$

daher ist potenzielle Energie der gesamten Membran mit der Spannung τ

$V = \tau\iint\left(\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \approx \dfrac{\tau}{2}\iint\left\{\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\ T = \dfrac{\rho}{2}\iint\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

Das **Hamilton'sche Prinzip** fordert $\delta\int_{t_1}^{t_2}\iint\left\{\dfrac{\rho}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial t}\right)^2-\dfrac{\tau}{2}\left[\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = 0$. Mit der Variation $\delta w = W\delta\epsilon$, $\delta\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial W}{\partial t}\delta\epsilon$, $\delta\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial W}{\partial x}\delta\epsilon$, $\delta\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial W}{\partial y}\delta\epsilon$ folgt

$\delta\int_{t_1}^{t_2}\iint\left\{\rho\dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial W}{\partial t}-\tau\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial W}{\partial x}-\tau\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial W}{\partial y}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = 0$ und durch parzielle Integration

$\delta\int_{t_1}^{t_2}\iint W\left\{\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\tau\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\tau\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t = 0$ und damit die **Euler-Lagrange'sche Feldgleichung** $\rho\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \tau\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$. Heber & Weber: Grundlagen der modernen Quantenphysik. Teil2. Quantenfeldtheorie 1957, 1963; Liebscher 259ff; **Scheck: Mechanik** Kap7 Kontinuierliche Systeme; **Mitter: Elektrodynamik** 1990; **Jost: Elektrodynamik** 1976. Chaichian & Tureanu: Electrodynamics. An Intensive Course 2013; Bei einer **Funktional-Ableitung** oder **Gateaux-Ableitung** von

$$f(\epsilon) := \int \mathrm{d}t\,\mathcal{L}\left(t, q(t)+\epsilon\cdot\delta q(t), \dot{q}(t)+\epsilon\cdot\frac{\mathrm{d}(\delta q(t))}{\mathrm{d}t}\right)$$

erhält man nach einer partiellen Integration mit verschwindendem ausintegrierten Teil ein Resultat der Form

$$\tfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\epsilon}(\epsilon\to 0) = \int \mathrm{d}t\,\tfrac{\delta\mathcal{L}}{\delta q(t)}\cdot\delta q(t)$$

mit der **Variationsableitung**, Scheck: Mechanik p72; Schmutzer oder Mittelstaedt; siehe auch Seite 369

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta q(t)} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q(t)} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}(t)} \text{ oder } \frac{\delta}{\delta q} \equiv \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}} \text{ oder } \frac{\delta}{\delta\Phi} \equiv \frac{\partial}{\partial\Phi} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\Phi_t} \text{ oder } \frac{\delta}{\delta\Phi} \equiv \frac{\partial}{\partial\Phi} - \sum_\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_\nu}\frac{\partial}{\partial\Phi_{x_\nu}},$$

wobei die gesuchte Funktion $\Phi(t,x,y,z)$, die Lagrangefunktion $\mathcal{L}(t,x,y,z,\Phi,\partial\Phi/\partial t,\partial\Phi/\partial x,\Phi_{,y},\Phi_z)$ und $\Phi_{x_\nu} = \Phi_{,x_\nu} = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_\nu}$. Die **Variationsableitung** 'an der Stelle $q(t)$' bei kontinuierlichen Variablen ist also die Verallgemeinerung der partiellen Ableitung $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_i}$ einer Funktion von n Variablen, also zum Beispiel für den fiktiven Fall $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x_1,...,x_n)$. So ähnlich wie im fiktiven Fall das totale Differential einer Funktion von n Variablen, so hat auch hier δf, das totale Differential des Funktionals, invariante Bedeutung. Details siehe Seite, 181 Bei der **klassischen Feldtheorie** muss daher die **Wirkung** der Amplitude einer Größe $u(t,x,y,z)$

$$S[u] = \int_\Omega \mathrm{d}t\,L(u,\dot{u},\nabla u,t)\mathrm{d}^3x$$

die Wirkung und deren Variation auf Basis der **Gateaux-Ableitung**

$$\frac{d}{d\epsilon}S[u+\epsilon\eta]_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\int_\Omega\left(L(u+\epsilon\eta,\dot{u}+\epsilon\dot{\eta},\nabla u+\epsilon\nabla\eta)-L(u,\dot{u},\nabla u)\right)dtd^3x}{\epsilon}$$

in einem beliebigen Raum-Zeit-Volumen betrachtet werden. Simonyi: Theoretische Elektrotechnik 1993[10] p945 ff; Die Variation η verschwinde auf der Berandung des Gebietes Ω. Die **Lagrange-Dichte** L hängt von 5 unabhängigen Variablen t,x,y,z,η ab. **Dichte**, weil u vom gesamten Kontinuum der Koordinaten $\vec{r}$ abhängt. **Lagrange-Funktion** hängt vom ganzen Raum ab: $\int\mathrm{d}^3xL(u,\dot{u},\nabla u,t)$.

Die Taylor-Entwicklung, also lineare Änderung, ist

$$\begin{aligned} dS(u;\eta) &= \int_\Omega\left(\frac{dL}{du}\eta+\frac{dL}{d\dot{u}}\dot{\eta}+\sum_i\frac{dL}{d\left(\partial_i u\right)}\partial_i\eta\right)dtd^3x \\ &= \int_\Omega\left(\frac{dL}{du}\eta-\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{u}}\eta-\sum_i\partial_i\frac{dL}{d\left(\partial_i u\right)}\eta\right)dtd^3x = \int_\Omega\frac{\delta L}{\delta u}\,\eta\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x \end{aligned}$$

wobei die Randterme verschwinden. Die **Euler-Lagrange-Gleichungen** resultieren aus der Tatsache, dass das Integral für beliebige lineare Variationen über dem Gebiet verschwinden muss, also die **Variationsableitung** verschwindet

$$\frac{\delta L}{\delta u} = \frac{dL}{du} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{u}} - \sum_i \partial_i \frac{dL}{d\left(\partial_i u\right)} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i(x)} - \frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^i(x))} = 0.$$

falls das gesuchte Extremum vorliegt. Jede Feldgröße $u(\vec{r},t)$ entspricht einer Koordinate $q_i(t)$ im Teilchensystem. Da im allgemeinen jedem Punkt $\vec{r}$ ein anderer Wert der Feldgröße zukommt, ist das Wellenfeld als ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden im Sinne der Punktmechanik aufzufassen. Die lorentz-invariante Lagrangedichte ist bilinear in den Feldern und hat für neutrale Spin-0-Teilchen der Ruhemasse m die Form

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - \frac{1}{2}m^2\varphi^2, \quad (\Box + m^2)\varphi = 0$$

Für geladene Spin-0-Teilchen π^- und K^-, die gemäß **Klein-Gordon-Gleichung** durch komplexe Felder beschrieben werden

$$\mathcal{L}_{\mathrm{KG}} = \partial_m u\varphi^*\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^*\varphi, \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi^1 + i\varphi^2), \varphi_p(x) = Ne^{-i(p^o x^o - \vec{p}\cdot\vec{x})} = Ne^{-ip\cdot x}, N = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{2|p^0|}}$$

Skript von **Bär: Gauge fields** 2009; Ebert: Eichtheorien 1989; Atiyah: The geometry of Yang-Mills fields 1979; **Kugo: Eichtheorie** 1997; Gerardus 't Hooft: 50 Years Of Yang-Mills Theory 2005 p65 Englert: Broken symmetry and Yang-Mills theory; **t'Hooft: Gauge theories** SciAmer June 1980 p90, SdW 1980 H8 p92-100;

Die Lagrange-Funktion kann man sich als Grenzfunktion zur Beschreibungg einer unendlichen Kette gekoppelter harmonischer Oszillatoren plausibel machen:

$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{u}\right)^2 - \frac{c^2}{2}\left(\nabla u\right)\cdot\left(\nabla u\right).$$

Es resultiert die skalare Feldgleichung

$$\ddot{u} - c^2\nabla\cdot\nabla u = 0.$$

Lagrangedichte der Elektrodynamik: Für den Fall von Vektorfelder $\mathbf{A}$ folgen die Feldgleichungen unter komponentenweiser (A_x, A_y, A_z) Nutzung der Euler-Lagrange-Gleichungen oder leichter, indem man $\mathbf{A}$, $\dot{\mathbf{A}}$, $\nabla\cdot\mathbf{A}$ und $\nabla\times\mathbf{A}$ als unabhängige Komponenten betrachtet. Die Unabhängigkeit von $\nabla\cdot\mathbf{A}$ und $\nabla\times\mathbf{A}$ ist Konsequenz aus dem Helmholtz'schen Zerlegungs-Satz. Die Euler-Lagrange-Gleichungen resultieren aus dem Verschwinden der Variation der Wirkung

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}S[\mathbf{A}+\epsilon\boldsymbol{\eta}]_{\epsilon=0} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left\{-\int_\Omega L(\mathbf{A},\dot{\mathbf{A}},\nabla\cdot\mathbf{A},\nabla\times\mathbf{A})dtd^3x\right.\\ &+ \left.\int_\Omega L(\mathbf{A}+\epsilon\boldsymbol{\eta},\dot{\mathbf{A}}+\epsilon\dot{\boldsymbol{\eta}},\nabla\cdot\mathbf{A}+\epsilon\nabla\cdot\boldsymbol{\eta},\nabla\times\mathbf{A}+\epsilon\nabla\times\boldsymbol{\eta})dtd^3x\right\}\end{aligned}$$

für die Variation des Feldes $\boldsymbol{\eta}$ und seiner Ableitungen, die aber auf dem Rand des beliebigen Gebietes Ω null sind. Es gelte die Bezeichnung

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{A}} = \left(\frac{\partial L}{\partial A_x}, \frac{\partial L}{\partial A_y}, \frac{\partial L}{\partial A_z}\right).$$

Simonyi: Theoretische Elektrotechnik 1993[10] p945 ff;

Bemerkenswert ist die Irrelavanz der Spurfreiheit der symmetrischen Teils des Gradienten. Die TaylorEntwicklung von L gibt

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\epsilon}S[\mathbf{A}+\epsilon\boldsymbol{\eta}]_{\epsilon=0} &= \int_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{A}}\cdot\boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{A}}}\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \frac{\partial L}{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial\nabla\times\mathbf{A}}\cdot\nabla\boldsymbol{\eta}\right)dtd^3x\\ &= \int_\Omega\left(\frac{\partial L}{\partial\mathbf{A}}\cdot\boldsymbol{\eta} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{A}}}\cdot\boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} + \frac{\partial L}{\partial\nabla\times\mathbf{A}}\cdot\nabla\boldsymbol{\eta}\right)dtd^3x\end{aligned}$$

with the second equality following from the usual integration by parts in the time coordinate. The second term requires only slightly more care

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\partial L}{\partial \nabla\cdot\mathbf{A}}\nabla\cdot\boldsymbol{\eta} dtd^3x &= -\int_\Omega\left(\eta_x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}+\eta_y\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}+\eta_z\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}\right)dtd^3x\\ &= -\int_\Omega\boldsymbol{\eta}\cdot\nabla\frac{\partial L}{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}dtd^3x\end{aligned}$$

while the third term needs to be done component wise to be careful. First the x component

$$\begin{aligned}\int_\Omega\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})_x}(\nabla\times\boldsymbol{\eta})_x dtd^3x &= \int_\Omega\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})_x}\left(\frac{\partial\eta_z}{\partial y}-\frac{\partial\eta_y}{\partial z}\right)dtd^3x\\ &= \int_\Omega\left(\eta_y\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})_x}-\eta_z\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})_x}\right)dtd^3x.\end{aligned}$$

The y component follows a similar calculation (or cyclic permutation)

$$\int_\Omega\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})_y}(\nabla\times\boldsymbol{\eta})_y dtd^3x=\int_\Omega\left(\eta_z\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})_y}-\eta_x\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})_y}\right)dtd^3x.$$

At this point, one can see the pattern, so

$$\int_\Omega\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\eta}dtd^3x=\int_\Omega\eta\cdot\nabla\times\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})}dtd^3x$$

and the vector variation Euler-Lagrange equations emerge

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{A}}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{A}}}-\nabla\frac{\partial L}{\partial\nabla\cdot\mathbf{A}}+\nabla\times\frac{\partial L}{\partial(\nabla\times\mathbf{A})}=0.$$

Here one point each can be given for the first two terms and two each for the last two (they require more effort). Derive two of Maxwell's equations from the Euler-Lagrange equations for the following action

$$L=-\rho\phi+\mathbf{j}\cdot\mathbf{A}+\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2-\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2$$

with $\mathbf{E}=-\nabla\phi-\dot{\mathbf{A}}$ and $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$. Vary L with respect to ϕ using the Euler-Lagrange equations from part 1.a and with respect to $\mathbf{A}$ using the equations from part 1.c. (Note that the other two Maxwell equations follow merely by taking appropriate derivatives of the definitions of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$.) Gauss's law follows from variation with respect to ϕ

$$-\rho+\epsilon_0\nabla E=0$$

Ampere's law follows from variation with respect to $\mathbf{A}$

$$\mathbf{j}+\epsilon_0\dot{\mathbf{E}}-\frac{\nabla\times\mathbf{B}}{\mu_0}=0$$

Landau/Lifschitz: Bd2 Feldtheorie; Variation für Felder

Aufgaben-Bücher: Fließbach/Walliser: Arbeitsbuch; Flügge: Rechenmethoden der Elektrodynamik. Aufgaben mit Lösungen 1986; Singer & Syrbe: Repetitorium und Aufgabensammlung Bd2. Elektrodynamik 1972; **Fano, Chu & Adler: Electromagnetic Fields, Energy, and Forces** 1960 = Aufgaben-Quelle später erschienener Bücher;
Hajko & Schilling: Elektrik. Optik. Quantentheorie 1985; Kargermann & Köhler: Aufgabensammlung theoretische Physik 2 - Elektrodynamik 1987[2]; **Batygin & Toptygin: Aufgabensammlung zur Elektrodynamik 1965**; Toptygin: Foundations of classical and quantum electrodynamics 2014; Lim: Problems and solutions on electrodynamics (China-Kladde); Wolff: Grundlagen und Anwendungen der Maxwellschen Theorie I & II; Griffiths: Einf in die Elektrodyn; Singh & Chaturvedi: IIT JEE Physics (38 Years) **Topic-wise Complete Solutions** Vol2: Thermodynamics, Electromagnetism and Modern Physics 1978-2015; Rojanky:

Electromagnetic Fields and Waves 1971; S̃chwichtenberg: No-Nonsense Electrodynamics. A Student Friendly Introduction 2017; Corson & Lorrain: Introduction to electromagnetic fields and waves 1962; Lorian, Corson & Lorrain: Elektromagnetische Felder und Wellen. Unter Berücksichtigung elektrischer Stromkreise 1991; J̃efimenko: Electrostatic motors, their history, types, and principles of operation 1973; J̃efimenko: Electricity and Magnetism. An Introduction to the Theory of Electric and Magnetic Fields 1966; J̃efimenko: Electromagnetic Retardation and Theory of Relativity. New Chapters in the Classical Theory of Fields 1997; J̃efimenko: Gravitation and Cogravitation: Developing Newton's Theory of Gravitation to its Physical and Mathematical Conclusion 2006; H̃eaviside: A Gravitational and Electromagnetic Analogy (1893);

Betrachte, wie bei **Fluiddynamik** im Unterschied zur Kinetik, **mikroskopisch groß und zugleich makroskopisch klein!** Landau & Lifschitz machen daher gleich zwei verschiedene Bände draus: **Klassische = mikroskop** E = Bd2 und **makroskopische Elektrodynamik der Kontinua** Bd8; **Toptygin: Electromagnetic Phenomena in Matter.** Statistical and Quantum Approaches 2015; Bei **Rebhan** p132, 197f ist der Unterschied bestens erklärt! Insbes ist die Kraft $\vec{F} = \nabla(\vec{p}\cdot\vec{E}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}$ auf dielektrische Materie aus dem totalen Differenzial der potenziellen Energie $W = -\vec{p}\cdot\vec{E}$, **Skalarprodukt**, weil **Dipol längs E-Feld** die kleinste Energie, also $\mathrm{d}W = -\mathrm{d}\vec{r}\cdot\nabla(\vec{p}\cdot\vec{E})$. **Purcell: Berkeley Physik Kurs Bd2 Elektrizität und Magnetismus** 1976, 2001[4]; Burmeister: Elektrodynamik 1979 p58 **mikro- versus makroskopische.** Jelitto: Elektrodyn Bd3 1994[3] p19 Die (mikroskop) Elektrodynamik bleibt auch dann noch vollständig, wenn man über die atomistische Struktur der Quellen mittelt = makroskopische Elektrodynamik, bei der die Felder durch phänomenologische Materialgleichungen verknüpft sind. Idee: Man bleibt bei $\operatorname{div}\epsilon_0\vec{E} = \rho$ und meint mit ρ jede Ladung, weil man im **Mikrokopischen** halt auch jedes Proton im Kern sieht, gibt aber die Vakuumgleichung $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ zugunsten $\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{sichtbar/frei}}$ auf, indem man, analog zur Fluiddynamik, wo man die Masse oberhalb der molekularen Ebene durch Mittelung verschmiert, hier in der Elektrostatik durch absichtliche **raum-zeitliche Ladungsverschmierung** eine **makroskopische Sicht** oder **Kontinuum - gehe nicht unter** 10^{-8} m, wo man noch 10^6 Kerne/-Elektronen hat - herstellt, und dann das Unwissen über die **verborgenen Quellen** ρ_v durch die **Polarisation** $\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \dfrac{\vec{p}}{V}$ kompensiert, also durch das **führende** ($E_r \propto 1/r^3$) Moment der Multipolentwicklung, das **Dipolmoment** $\vec{p}$ pro Volumen, wobei $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke ist. $\chi_e = \epsilon_r - 1$ elektrische **Suszeptibilität** für lineare Dielektrika, ϵ_r relative Dielektrizitätskonstante oder Dielektrizitätszahl ϵ_r(Vakuum)=1, ϵ_r(Methanol)=33,ϵ_r(Wasser)=80, $\epsilon_r = 1+\chi = (n+i\,\kappa)^2$, wobei der Realteil des **Brechungsindex** $n = \sqrt{\epsilon_r\,\mu_r} = \dfrac{c}{v_{\text{Phase}}}$ ist. **Brechungsgesetz** $n(\vec{x})\sin\alpha(\vec{x})$ =const. **Coltan** Tantalerz $_{73}$Ta aus Kongo für superkleine Tantal-Elektrolytkondensatoren mit hoher Durchschlagfestigkeit 625 V/μm bei Ta_2O_5 ϵ_r 27 und d=1.6 nm/V oder 400V/μm bei Nb_2O_5 ϵ_r 41 und d=2.5 nm/V für SNTs oder Entkopplung/Reihenschwingkreis. **Elektrosmog** und Mobilfunk, PhysBl51 1995 H10 p947; **Jelitto: Elektrodyn Kap9 p252**, Man hat nicht wenige ruhende Ladungen im Vakuum, sondern sehr viele in rascher Bewegung. **Mikroskopsche Elektrostatik macht kaum Sinn!** $\rho = \rho_{\text{sichtbar/frei/wahre}} + \rho_{\text{verborgen/vergessen/bound/gebunden}}$ gibt mit der Differenz von $\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\text{sichtbar}}$ und $\operatorname{div}\epsilon_0\vec{E} = \rho$ die Gleichung $\operatorname{div}\underbrace{\vec{D} - \epsilon_0\vec{E}}_{=:\vec{P}} = -\rho_{\text{verborgen/vergessen}}$. Vakuumgleichung geht also nicht ohne **Korrektur durch das Zusatzfeld der verborgenen Ladungen = Polarisation** genannt. Gib $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$ auf und kompensiere den Quellenverlust $\rho_{\text{verborgen/vergessen}}$ durch $\vec{P}$: $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0\vec{E} + \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \epsilon_0(1+\chi_e)\vec{E}$ die **dielektrische Verschiebung** $\vec{D} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E}$. $\vec{E}$ und $\vec{D}$ entsprechen zwei verschiedenen Verfahren, das elektrische Feld auszumessen: $\vec{D} = \hat{n}\dfrac{\mathrm{d}q_{\text{Platte}}}{\mathrm{d}A}$ als **flächenhafte und Umlaufsinn besitzende 2-Form** $\omega_{\vec{D}} = \sum_i D^i\hat{e}^j\wedge\hat{e}^k$, siehe Formenkalkül in Elektrodynamik auf Seite 293 und Agricola & Friedrich: Vektoranalysis: **Differentialformen in Analysis, Geometrie und Physik** 2010[2] Kap2.3, 3.4, 3.11 & **9**, kennzeichnet das **elektrische Feld durch die Größe der felderzeugenden Ladung** q_0. $\vec{E} = \dfrac{\vec{F}}{q_{\text{Probe}}}$ als 1-Form $\omega_{\vec{E}} = E^i\hat{e}^i$ kennzeichnet das elektrische Feld durch die an **Probeladung angreifende Kraft**. Die Ursache für den Unterschied zwischen ϵ und ϵ_0 bzw. $\vec{D}$ und $\vec{E}$ kann in der **Polarisation** $\vec{P} := \vec{D} - \epsilon_0\vec{E}$ des Mediums gesehen werden, wodurch die **felderzeugenden Ladungen** teils abgeschirmt werden. Daher ist wegen $\vec{D} = \epsilon(\vec{x})\vec{E}$ i.a. $\nabla\times\vec{D} = \operatorname{grad}\epsilon(\vec{x})\times\vec{E} + \epsilon(\vec{x})\nabla\times\vec{E} = \operatorname{grad}\epsilon(\vec{x})\times\vec{E} \neq \vec{0}$

oder $\nabla \times \vec{D} = \epsilon_0(\nabla \times \vec{E}) + \nabla \times \vec{P} = \nabla \times \vec{P} \neq \vec{0}$. $\vec{D}$ hat also i.a. **kein Potenzial**, wird also i.a. **nicht allein** durch die **freien Ladungen** festgelegt! Für die dielektrische Verschiebung gibt es daher i.a. kein Potenzial, kein Coulomb-Gesetz! Hingegen übersteht $\nabla \times \vec{E}_{\text{mikroskop}} = \nabla \times \vec{E}_{\text{makroskop}} = \vec{0}$ die Mittlung: $\vec{E} = E_{\text{makroskop}} = -\nabla\varphi(\vec{x})$. Mittelungsansatz: $\vec{P}(\vec{x}) = \sum_i N_i < \vec{p}_i >$, wobei i die Molekülsorte beschreibt. Sei $\rho_{\text{sichtbar/frei}}(\vec{x}) = \sum_i N_i < e_i > + \rho_{\text{bereitsvorhandenenfrei}}$ die **makroskopische Ladungsdichte**. Selbst ohne einen Überschuss an freier Ladung verursacht bei Vernachlässigung höherer Momente das kleine Volumenelement $\Delta V'$ bei$\vec{x}'$ am Ort $\vec{x}$ das Potenzial

$$4\pi\epsilon_0\varphi_{\Delta V'}(\vec{x}, \vec{x}' = \frac{\rho_f(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\Delta V' + \frac{\vec{P}(\vec{x}') \cdot (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\Delta V'.$$

Die Quellen des gesammten Raumes machen das Potenzial

$$4\pi\epsilon_0\varphi(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V' \left[\frac{\rho_f(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} + \vec{P}(\vec{x}') \cdot \nabla' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\left[\rho_f(\vec{x}') - \nabla' \cdot \vec{P}(\vec{x}')\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Inhomogenität von $\vec{P}$ bedeutet $\nabla' \cdot \vec{P}(\vec{x}') \neq 0$, also ein Nebeneinander von Quellen und Senken, Dipol-Regionen im Medium. **Jackson: Klassische Elektrodynamik** Kap4.3 p176ff und Kap6.6 **Makroskop Elektrodyn**. Griffiths Kap4.3.2, p242. Ausnahme ist sphär., zyl. oder ebene Symmetrie, dann geht Feldbestimmung auch über Gauß'schen Satz. **Rebhan: Elektrodynamik** 2007 p178 Vakuum ok, aber Felder bei Materie, die aus Ladungen besteht. Wie überstehen die Vakuumgleichungen die vielen WW? Atom und unpolare Moleküle gehen vielleicht noch, aber polare Moleküle? Feldzerlegung in Isolatoren gibt Polarisationsfeld $\vec{E}_P = \vec{E} - \vec{E}_{\text{ext}}$, wobei $\vec{E}$ Feld mit Isolator, $\vec{E}_{\text{ext}}$ Feld ohne Isolator (festhaltgehaltene externe Ladungen). **Ergodenhypothese** wird vorausgesetzt p185. **Grenzbedingungen:** Bei Anwesenheit von Flächenladungen σ macht $\vec{D}$ einen Sprung $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_{21} = \sigma$, da $\int_{\partial V} \mathrm{d}\vec{f} \cdot \vec{D} = q_f$, also $D^{\perp}_{\text{oberhalb}} - D^{\perp}_{\text{unterhalb}} = \sigma_f$, $E^{\perp}_{\text{oberhalb}} - E^{\perp}_{\text{unterhalb}} = \sigma_f/\epsilon_0$ und $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \hat{n}_{21} = \vec{0}$. $\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0}$ gibt $E^{\parallel}_{\text{oberhalb}} - E^{\parallel}_{\text{unterhalb}} = 0$. **Grenzbedingungen** bei elektromagnetischen Wellen für **lineare Medien**: Gauß'scher Satz über Pillendose, Kante der Dose gibt keinen Beitrag, also spielt **Volumenladungsdichte** keine Rolle. $\operatorname{div}\vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = Q_f$ liefert $\epsilon_1 E_1^{\perp} - \epsilon_2 E_2^{\perp} = D_1^{\perp} - D_2^{\perp} = \sigma_f$ und $\operatorname{div}\vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = 0$: $B_1^{\perp} - B_2^{\perp} = 0$. Aus $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dot{\vec{B}}$ und Stokes einer die Grenzfläche senkrecht durchstoßenden Ampere'schen Schleife, deren senkrecht Ausdehnung gegen null geht, hat auch **keinen Fluss** $\int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{a} = 0$: $\vec{E}_1^{\parallel} - \vec{E}_2^{\parallel} = \vec{0}$. Wegen $\oint \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = I_f + \frac{\partial}{\partial t}\int \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{a}$ folgt $\vec{H}_1^{\parallel} - \vec{H}_2^{\parallel} = \frac{1}{\mu_1}\vec{B}_1^{\parallel} - \frac{1}{\mu_2}\vec{B}_2^{\parallel} = \vec{K}_f \times \hat{n}$, also unstetig proportional zur **freien Flächenstromdichte**: Der die Ampere'sche Schleife durchquerende Strom ist $I_f = \vec{K}_f \cdot (\hat{n} \times \vec{l}) = (\vec{K}_f \times \hat{n}) \cdot \vec{l}$, wobei $\hat{n}$ der zur **Grenzfläche senkrechte Vektor** ist. Der Verschiebungsstrom bräuchte als Volumenstromdichte eine von null verschiedene Fläche senkrecht zur Grenzfläche: $\sigma\vec{v} = \vec{K} = \frac{\mathrm{d}I_f}{\mathrm{d}l_{\perp}} \neq \vec{j} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A\perp}\mathrm{d}\vec{A} = \sigma\vec{v}$. **Griffiths Kap7.3.6** oder kurz in Fließbach Bd2 p278; Bergmann & Schäfer: Optik; **Stromschicht/Stromblatt:** Betrachte **Ampere'sche Schleife** senkrecht zur Stromschicht mit $\vec{j} = j\hat{x}$ also $\oint \mathrm{d}\vec{l} \cdot \vec{B} = 2B_z l = \mu_0 I_{eingeschlossen} = jl$ mit $\vec{B}_{\pm} = \pm B_z\hat{z} = \pm\frac{\mu_0}{2}j\hat{z}$ also homogen analog elektrischem Feld bei homogener Flächenladungsdichte. Symmetrie-Argumente: Es kann auch keine B_y-Komponente geben, da Drehung um $\hat{y}$ sonst Konflikt gibt. Sonst $\partial_z H_z = \partial_x H_z = 0$. Orientiert man die rechteckige Ampere'sche Schleife längs des Stromes, so wird ein beliebiges konstantes Magnetfeld in Stromrichtung toleriert. Aus dem Vektorpotenzial $\vec{A} \propto \vec{j} = j\hat{x}$ folgt mit $\vec{B} = \operatorname{rot} A$, dass das Feld senkrecht zum Strom liegen muss. Das mögliche Feld wird daher nicht von dem Strom erzeugt. Griffith p226 Beispiel 5.8, Flügge: Bd3 p104 oder Purcell: Berkeley Bd2 p152f; Ein **Dipol** siehe Hertel: Theoret Physik 2007 p58 $\vec{d}$ bei $\vec{y}$ hat bei $\vec{x}$ das Potenzial $4\pi\epsilon_0\Phi^d(\vec{x}) = \frac{d_i(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}$. Die **Dipoldichte** $\vec{P} = \vec{P}(\vec{y})$ erzeugt dann bei $\vec{x}$ das Potenzial $4\pi\epsilon_0\Phi^d(\vec{x}) = \int \mathrm{d}y^3 \frac{P_i(\vec{y})(x_i - y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}$ Zur magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ gehört analog $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\vec{H} + \vec{J}$ mit **Magnetisierung** $\vec{M}$ und **magnet Polarisation** $\vec{J} = \frac{N_0}{V}\vec{p}_m = \mu_0\vec{M}$, wobei $\vec{p}_m = \vec{m}$ das **magnetische Dipolmoment** bezeichnet. van Vleck: The Theory of Electric and Magnetic Susceptibilities 1932;

Punktladung q Bei $\vec{r}^*$ lokalisierte Punktladung q gibt spezielle Ladungsverteilung für die **Aufpunkte** oder auch **Messpunkt** $\vec{r}$ $\rho(\vec{r}) = q\,\delta(\vec{r}-\vec{r}^*)$. Nur **Coulomb-Felder** mit der speziellen inversen r^2-Abhängigkeit

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2}\vec{r}^0 = kqr^{-2}\hat{e}_r = kq\vec{r}\,(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} = -\nabla\Phi \quad \text{mit} \qquad \Phi(\vec{\mathfrak{r}}) = \frac{k}{|\mathfrak{r}|}$$

sind **quellenfrei in Umgebungen, die den Nullpunkt meiden !** Hier ist $\mathfrak{r} = \vec{r}-\vec{r}'$ der **Abstandsvektor** zwischen dem Ort $\vec{r}'$ der Quellladung Q und dem **Aufpunkt** $\vec{r}$ der **Test- oder Probeladung** q. Dort funktioniert der Gauß'sche Satz auch:

$$\int_{\partial S\setminus\{\vec{0}\}} d\vec{A}\cdot\vec{E} = \int_{S\setminus\{\vec{0}\}} \mathrm{d}V\,\mathrm{div}\,\vec{E}$$

$$\mathrm{div}\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2\,E_r}{\partial r} = 0 \quad \text{für} \quad r>0$$

$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{kq}{r}\vec{e}_r$, $\vec{E}(\vec{r}) = kq\,\vec{e}_r$ oder $\vec{E}(\vec{r}) = kq\,r\,\vec{e}_r$ haben Ladungs-Quellen unterschiedlicher Stärke auf konzentrischen Kugeln!

Generic mapping tools Hawaii Uni Windfeld am Pol

Orientierte Flächen geben **Fluss = Strömung 'senkrecht' durch eine Fläche** oder die Strömung repräsentierendes Vektorfeld quer durch einen Rand oder $\Phi = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \vec{v}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A$ Fluss ist auch Photonenzahl**durchgang** pro Fläche und Zeit a la d'Alembert oder Feldlinienzahl pro Fläche. Wüst: Mathematik für Physiker und Mathematiker Kap20.3 p855; Die Feldlinien können als Teilchenbahnen angesehen werden: $\hat{n}\cdot\vec{F}$ als **Normalkomponente** Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics 1993, ist senkrechter Durchsatz des Vektorfeldes $\vec{F}$ durch das Flächenelement $\mathrm{d}A$ Lang & Pucker p310. Gesamtfluss durch den Rand ∂V ist $\iint_{\partial V}\vec{F}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}A$ mit $\hat{n}\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}u\mathrm{d}v\vec{r}_u\times\vec{r}_v$ wegen $\hat{n} = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{|\vec{r}_u\times\vec{r}_v|} = \frac{\vec{N}}{h_uh_v}$ mit den Skalenfaktoren h_u, h_v. $\vec{N} = \vec{r}_u\times\vec{r}_v = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ ist der nichtnormierte Normalenvektor des Flächenelements. Das Oberflächenelement der Kugel ist gemäß Seite 248 $\mathrm{d}\vec{A}_K(R,\theta,\varphi) = \frac{\partial\vec{x}_K}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{x}_K}{\partial\varphi}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = R^2\sin\theta\hat{r}$. Für das Feld $\vec{B}(x,y,z) = (yz,-xz,xy) = \vec{B}(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta \\ -r^2\cos\varphi\sin\theta\cos\theta \\ r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta\end{pmatrix}$ gibt den Fluss $\vec{B}(r,\theta,\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{A}_K(r,\theta,\varphi) = r^4\sin^3\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$ am Punkt (r,θ,φ) des Raumes. Der Gesamtfluss an der Oberfläche einer beliebigen Kugel um den Koordinatenursprung ist $\int_{\partial K(R)}\vec{B}(r,\theta,\varphi)\cdot\mathrm{d}\vec{A}_K(r,\theta,\varphi) = 0$, sogar an Oberflächen beliebig gelagerter Kugeln, was wegen der Divergenzfreiheit mit dem Satz von Gauß gemäß Seite 277 sofort zu sehen ist. Kartesisch gilt $\hat{n} = \frac{\hat{x}\times\hat{y}}{|\hat{x}\times\hat{y}|} = \hat{z}$, daher $\mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\hat{z} = \hat{n}\mathrm{d}A = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{h_uh_v}h_uh_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \vec{r}_u\times\vec{r}_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \vec{N}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ wegen $\mathrm{d}A = h_uh_v\mathrm{d}u\mathrm{d}v$. Die Querströmung = Strömung in der Fläche = streifende Strömung zählt nicht, was das Skalarprodukt gerade bedeutet. Formal geht es um **Oberflächenintegrale**. Körber & Pforr: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen 1989; **Merziger & Wirth: Repetitorium der höheren Mathematik** §18.6 p544 **Oberflächenintegrale** mit **skalarem** $\int_F\mathrm{d}F = \int_B f(\vec{x}(u,v))|\vec{x}_u\times\vec{x}_v|\mathrm{d}B$, $f=1$ gibt **Inhalt** $I(F)$ von F und mit **vektoriellem** Oberflächenelement $\int_F\mathrm{d}F = \int_B\vec{f}(\vec{x}(u,v))(\vec{x}_u\times\vec{x}_v)\mathrm{d}B$ gibt **Flussintegral** Salas p1070; Kreyszig p543 Fluss durch das parabolisch gebogene Flächenstück S mit $y=x^2$ in den Grenzen $0\le x\le 2$ und $0\le z\le 3$, Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x,y,z) = y\,\hat{x}+2\,\hat{y}+x\,z\,\hat{z}$. Mit $x=u$, $y=u^2$ und $z=v$ ist die Fläche $S:\vec{r}(u,v) = u\hat{x}+u^2\hat{y}+v\hat{z} = x(u,v)\hat{x}+y(u,v)\hat{y}+z(u,v)\hat{z} = \vec{r}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ mit $0\le u\le 2$ und $0\le v\le 3$. $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \hat{x}+2u\hat{y}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \hat{z}$, $\vec{N} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = 2u\hat{x}-\hat{y}$ Auf der Fläche S ist die Geschwindigkeit $\vec{v}(u,v) = u^2\hat{x}+2\hat{y}+uv\hat{z}$. Lokaler Fluss $\vec{v}\cdot\vec{N} = 2u^3-2$ und **Gesamtfluss** $\int_S\vec{v}\cdot\hat{n}\mathrm{d}A = \iint_S\vec{v}(u,v)\cdot\vec{N}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{u=0}^{u=2}\mathrm{d}u\int_{v=0}^{v=3}\mathrm{d}v(2u^3-2) = 3[2\frac{u^4}{4}-2u]_0^2 = 3(8-4) = 12$. **Beispiel2:** Flächenstück $\vec{a}\in S$ in kartesischen Koordinaten lässt sich parametrisch als Ebenenstück beschreiben $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \vec{a}(u,v) = \begin{pmatrix}1+u+v\\1-u-v\\1+\sqrt{2}u\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + u\begin{pmatrix}1\\-1\\\sqrt{2}\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \vec{E}_1 + u\vec{K}_I + v\vec{K}_{II}$

mit $u,v \in [0,1]$, bedeutet Parallelogramm mit Diagonale in z-Richtung bei x=2. **Flächennormale** ist $\vec{K}_I \times \vec{K}_{II} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix}$ liegt ohne z-Komponente in der xy-Ebene. Die Strömung sei $\vec{A} = y\hat{x} = (1-u-v)\hat{x}$. **Gesamtfluss** ist $\int_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}^2\vec{a} = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^v \mathrm{d}v \vec{A}(u,v)\cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial u}\times\frac{\partial \vec{a}}{\partial v} = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^v \mathrm{d}v \begin{pmatrix}1-u-v\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -1\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^v \mathrm{d}v \begin{pmatrix}1-u-v\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ 0\end{pmatrix} = -\sqrt{2}\int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^v \mathrm{d}v(1-u-v) = 0$. Lang & Pucker p282; Arens Arbeitbuch Kap27 p426 Aufgaben 27.11-20; Königsberger 2 p373; Walter 2 p289 §8.5 Oberflächenintegrale; Fischer & Kaul: Mathematik für Physiker 1 §25 Oberflächenintegrale Aufgabe 502; Riley & Hobson: Math methods for physics and engineering. Students solution manual 2007[3] p187; Hattendorff Vorlesungsmitschrift des WS1854/55, WS1860/61 und SS1862 = **Riemann: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik** 1869[1] Emde 1938[4] 325Seiten; 1747 d'Alembert Schwingende Saite. 1807 Fourier Wärmeleitungsgleichung. K. Strick: Riemann spektrum.de 1.11.2012; Naess: Die Riemannsche Vermutung 2007; Riemann = Dirichlet-Nachfolger. Dirichlet-Prinzip. Klein macht Riemanns Funktionentheorie bekannt. Mathematische Begründung der Psychologie a la Hume durch J.F. Herbart: Feldtheorie geistiger Phänomene in Analogie zum Gauß'schen Gesetz = In jedem Augenblick wird jedes Subjekt von einem Ideen-Feld $\vec{I}$ durchströmt und es sammelt Bleibendes b_{enclosed}: $\int_{\partial\text{Subjekt}} \mathrm{d}\vec{a}\cdot\vec{I} = b_{\text{enclosed}}$. **Gauß'sches Gesetz oder Theorem**: Gesamtfluss aus einer geschlossenen Fläche ist gleich der Netto-Ladung innerhalb dieser Fläche

$$\int_V \operatorname{div}\vec{D}\cdot\mathrm{d}V = \left[\int_{\partial V}\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{a} = Q_{eingeschlossen/innen}\right] = \int_V \varrho\,\mathrm{d}V$$

Das Gauß'sche Gesetz gestattet die Berechnung des elektrischen Feldes bei gegebener Ladungsverteilung der **freien oder wahren** Ladungen und umgekehrt. **Elektrisches Feld geladener Metallplatte** bei homogener Flächenladung $\rho(\vec{r}') = \sigma\delta(z')$ bei $z'=0$. Elektrisches Feld eines Ringes $\mathrm{d}\vec{E}_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q_{\text{Ring}}}{r^3}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\mathrm{d}q_{\text{Ring}}}{r^3}z\hat{z}$ mit Aufpunkt bei $\vec{r} = (0,0,z)$ also infinitesimaler Ringladung $\mathrm{d}q_{\text{Ring}} = \sigma\mathrm{d}a'_{\text{Ring}} = \sigma\mathrm{d}\rho' 2\pi\rho'$ gibt $\mathrm{d}\vec{E}_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\sigma\mathrm{d}\rho' 2\pi\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}z\hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\rho'\mathrm{d}\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}z\hat{z}$. Aus Symmetriegründen bei freier Ladungsbeweglichkeit keine Komponente jenseit der Normalen möglich. Metallplattenfeld ist $\vec{E}_{\text{Ebene}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^\infty \frac{\rho'\mathrm{d}\rho'}{(\rho'^2+z^2)^{3/2}}z\hat{z} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(\rho'^2+z^2)^{-1/2}\big|_0^\infty z\hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{z}$. Griffiths p64. **Oder per Gauß'schem Gesetz** mit flachem Quader an beliebiger Stelle der Ladungsschicht: Oben bei jedem Flächenstück $\mathrm{d}\vec{a}_+ = \mathrm{d}a\hat{z}$ wirkt $\vec{E}_+ = E_z\hat{z}$ und unten bei $\mathrm{d}\vec{a}_- = -\mathrm{d}a\hat{z}$ wirkt $\vec{E}_= - E_z\hat{z}$, also per Gauß-Gesetz $\int_\square \mathrm{d}\vec{a}\cdot\vec{E} = 2A_{\text{Deckel/Boden}}E_z = \frac{\sigma A_{\text{Deckel/Boden}}}{\epsilon_0} = \frac{q_{\text{Ladung im Quader}}}{\epsilon_0}$, also $E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Purcell: Berkeley-Kurs Bd2 p34. **Oder per elektrischem Feld** der Flächenladung unabhängig von den lateralen Aufpunkt-Koordinaten x und y gilt $4\pi\epsilon_0\phi(\vec{r}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\frac{\rho(x',y',z')}{\sqrt{x'^2+y'^2+(z-z')^2}} = \int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'\frac{\sigma\delta(z')}{\sqrt{x'^2+y'^2+(z-z')^2}} = \int_{\mathbb{R}^2}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\frac{\sigma}{\sqrt{x'^2+y'^2+z^2}} = \int_{\mathbb{R}_+}\mathrm{d}\rho'\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi'\frac{\sigma\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}} = \int_{\mathbb{R}}\mathrm{d}\rho'\frac{2\pi\sigma\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}$, also $\phi(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\int_0^\infty\mathrm{d}\rho'\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\sqrt{\rho'^2+z^2}\Big|_{\rho'=0}^\infty$. Bedeutet für das elektr Feld $\vec{E}(z) = -\operatorname{grad}\phi(z) = -\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\phi(z) = -\hat{z}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{\rho'^2+z^2}\Big|_{\rho'=0}^\infty = -\hat{z}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{z}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}\Big|_{\rho'=0}^\infty = \hat{z}\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Nolting Bd3 p371f **Edminster: Electromagnetics**, Schaum 1979, 1995[2] p34; Der Fluss, der durch eine freie oder wahre Punktladung q erzeugten Feldstärke ist $\operatorname{div}\vec{D} = \varrho_{\text{frei/wahr}}$ oder $\vec{E} = kqr^{-2}\frac{\vec{r}}{r}$ durch ein im Abstand r befindliches orientiertes Flächenelement $\mathrm{d}\vec{A}$ geht ist

$$\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \vec{E}\cdot\vec{n}\mathrm{d}A = kqr^{-2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = kqr^{-2}\cos\theta\mathrm{d}A = kqr^{-2}\,r^2\mathrm{d}\Omega = kq\mathrm{d}\Omega$$

Wegen Definitionslücke gilt der Gauß'sche Satz aber nicht, Arens p918! Mit dem Raumwinkel, Greiner 1, p109; Wunsch: Feldtheorie Bd2 p126; Günter: Die Potentialtheorie 1957 p36ff; Brosowski & Martensen: Methoden und Verfahren der mathematischen Physik Bd 1-16 1969-1971; Bd1 p73ff Martensen: Das Dualitätsprinzip der Potentialtheorie; Kargermann & Köhler: Aufgabensammlung theoretische Physik 2 - Elektrodynamik 1987^2 magnetisches Blatt p24; Simonyi: Theoret Elektrotechnik 1977 p141; Aus $\Omega : A = 4\pi : A_0$ mit der Gesamtoberfläche $A_o = 4\pi r^2$ einer Kugel mit r folgt

$$\Omega = 4\pi\frac{A}{A_o} = \frac{4\pi\, A}{4\pi\, r^2} = \frac{A}{r^2} = \Omega(\vec{r}) = \int_A \mathrm{d}\vec{A}' \cdot \frac{(\vec{r}' - \vec{r})^0}{|\vec{r}' - \vec{r}|^2} = \int_A \mathrm{d}\vec{A}' \cdot \frac{\vec{r}' - \vec{r}}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = \frac{A}{A_0} 4\,\pi$$

folgt

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}A\vec{E} \cdot \vec{n} = kq \oint_{\partial V} \mathrm{d}\Omega = kq\Omega|_0^{4\pi} = \frac{q_{innen}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int \mathrm{d}V\rho = \int \mathrm{d}V \mathrm{div} \cdot \vec{E} \quad \text{für} \quad \vec{r}_q \in V$$

Da die Aussage auch für ein kugelförmiges Gebiet gilt, betrachten wir das Integral bei einem beliebigen aber festen Radius, wo $E_r(r)$ wegen der Kugelsymmetrie bei beliebigem, aber festem r als Konstante vor das Integral gezogen werden kann. Vermeidet man den Nullpunkt nicht, so wird man auf die δ-Funktion geführt:

$$\int \mathrm{d}V\delta(\vec{r}) = 1, \quad \text{gibt} \quad \mathrm{div} \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0}\delta^3(\vec{r}) = -\Delta\Phi, \quad \text{beachte} \quad [\delta(\vec{r})] = \frac{1}{m^3}$$

Die **Dirac-Delta-Maß-Einheit** ist indirekt zur Maßeinheit zu deren Argument. YYYY

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{|\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)|}\delta(u)\delta(v)\,\delta(w) = \begin{cases} \delta(x)\delta(y)\,\delta(z) \\ \frac{1}{\rho}\delta(\rho)\delta(\varphi)\,\delta(z) \\ \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\delta(r)\delta(\theta)\,\delta(\varphi) \end{cases}$$

Damit kürzt sich die Jacobi-Matrix weg: $1 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}V' e^{-\alpha\, r'}\delta(\vec{r}') = \int \mathrm{d}x' \int \mathrm{d}y' \int \mathrm{d}z' e^{-\alpha\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\delta(x')\delta(y')\,\delta(z') = \int \mathrm{d}r' \int \mathrm{d}\theta' \int \mathrm{d}\varphi' e^{-\alpha r'}\delta(r')\delta(\theta')\,\delta(\varphi')$ Nolting 3 p15; Kallenrode: Rechenmethoden p194; **Wie sieht die Ableitung von $\Delta 1/r$ bei $r = 0$ aus ?** Lösung gibt die **Green'sche Funktion für Elektrostatik:** 1] $\Delta\Phi = \rho$, $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$, $\Phi(\vec{r}) = \int \mathrm{d}V' G(\vec{r}, \vec{r}')\rho(\vec{r}')$. 2] Elektrostatik: $\vec{E} = -\nabla\Phi$ und $\mathrm{div}\,\vec{E}\epsilon_0 = \rho$ gibt $\Delta\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$. 3] Punktladungslösung für Ladung bei $\vec{r}_0$ bekannt: $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}$. 4] **Punktladungsdichte** $\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$. Daher

$$\Delta\Phi = \Delta\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -\frac{q}{\epsilon_0}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \Delta\frac{-1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \quad G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Die **Ableitung** bei $\vec{r} = \vec{r}_0$ ist durch $\Delta\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ definiert. Die sonst bei $r = 0$ nicht existierende Funktion 1/r hat im Sinne der verallgemeinerten Funktionen sogar eine 2. Ableitung: $-4\pi \cdot \infty$. Dies findet man mit der Methode der Green'schen Funktionen. Panofsky & Philipps p4 zeigen, wie es klassisch geht. Und die **Green'sche Funktion der Poisson-Gleichung** $G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|}$ ist die **Inverse zum Laplace-Operator** . **Jost: Elektrodynamik** 1976 **Elk & Gasser: Die Methode der Green'schen Funktionen in der Festkörperphysik** 1979 **Fetter & Walecka: Quantum Theory of Many-Particle Systems** 2003; **Poisson-Boltzmann-Gleichung**

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\varepsilon(\vec{r})\vec{\nabla}\Psi(\vec{r})\right] = \rho^f(\vec{r}) - \sum_i c_i^\infty z_i \lambda(\vec{r}) q \exp\left(\frac{-z_i q \Psi(\vec{r})}{kT}\right)$$

$\varepsilon(\vec{r})$ = ortsabhängige dielektrische Leitfähigkeit, $\Psi(\vec{r})$ = elektrostatisches Potential, $\rho^f(\vec{r})$ Ladungsdichte der in der Flüssigkeit gelösten Ionen, c_i^∞ = Konzentration des Ions i in unendlicher Entfernung zu den Ionen der Lösung, z_i = Ladung des Ions, q Ladung eines Protons. $\lambda(\vec{r})$ = Maß für die Zugänglichkeit des Ortes r zu den Ionen der Lösung. **Poisson-Boltzmann-Gleichung** beschreibt elektrostatische Wechselwirkungen zwischen Molekülen in Flüssigkeiten mit darin gelösten Ionen, also **Solvatisierung**. Kann mithilfe einer Mean-Field-Näherung hergeleitet werden. Für kleine Potentiale kann die Gleichung linearisiert und somit

einfacher gelöst werden. **Moore & Hummel: Physikalische Chemie** 1986[4] p546ff; Fogolari, Brigo, Molinari: The Poisson-Boltzmann equation for biomolecular electrostatics. A tool for structural biology. In: Journal of Molecular Recognition, Bd. 15 (2002), Heft 6, S. 377–392, **APBS PB solver, Zap - A Poisson-Boltzmann electrostatics solver:** http://www.eyesopen.com/zap-tk Hanna Antila: DNA decomposition. **Debye-Hückel-Theorie** = Kombination der Poisson-Gleichung mit der Boltzmann-Statistik zur Beschreibung der **Ionenverteilung** = Coulombschen Anziehungs- und Abstoßungskräfte führen zu einer Abweichung der **Aktivität** a_i = wirksame Konzentration, früher „aktive Masse", der Ionensorte i von ihrer molaren Konzentration c_i gemäß $a_i = f_i \cdot c_i$. Die Debye-Hückel-Theorie liefert Gleichungen, mit denen der individuelle dimensionslose Aktivitätskoeffizient f_i, auch als γ_i geschrieben, in Abhängigkeit von Konzentration, Temperatur und Dielektrizitätskonstante des Lösungsmittels berechnet werden kann. Aktivitätskoeffizient f der Ionensorte i ist $\ln f_i = -\frac{z_i^2 \cdot e^2}{8\pi \cdot \varepsilon \cdot k_\mathrm{B} \cdot T} \cdot \frac{\kappa}{1+\kappa \cdot r_i}$ mit $\kappa = \sqrt{\frac{2 \cdot N_A \cdot e^2 \cdot I}{\varepsilon \cdot k_\mathrm{B} \cdot T}} = F \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot I}{\varepsilon \cdot R \cdot T}}$ in 1/Meter Debye und E. Hückel: PhysikZ24 p185 1923. **Ewald-Summation**, Paul Peter Ewald, = Methode zur Berechnung langreichweitiger WW periodischer Systeme per Splittung in short und long range-Terme, wobei letzterer im Fourier-Raum = im reziproken Raum rasch konvergiert: $\varphi(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{sr}(\mathbf{r}) + \varphi_{\ell r}(\mathbf{r})$, One repeating unit of this hypothetical periodic system is called a unit cell. One such cell is chosen as the central cellfor reference and the remaining cells are called images. The long-range interaction energy is the sum of interaction energies between the charges of a central unit cell and all the charges of the lattice. Hence, it can be represented as a double integral over two charge density fields representing the fields of the unit cell and the crystal lattice $E_{\ell r} = \iint d\mathbf{r}\, d\mathbf{r}'\, \rho_\mathrm{TOT}(\mathbf{r}) \rho_{uc}(\mathbf{r}')\ \varphi_{\ell r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ where the unit-cell charge density field $\rho_{uc}(\mathbf{r})$ is a sum over the positions $\mathbf{r}_k$ of the charges q_k in the central unit cell $\rho_{uc}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\text{charges } k} q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)$ and the total charge density field $\rho_\mathrm{TOT}(\mathbf{r})$ is the same sum over the unit-cell charges q_k and their periodic images $\rho_\mathrm{TOT}(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1,n_2,n_3} \sum_{\text{charges } k} q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k - n_1\mathbf{a}_1 - n_2\mathbf{a}_2 - n_3\mathbf{a}_3)$ Here, $\delta(\mathbf{x})$ is the Dirac delta function, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ and $\mathbf{a}_3$ are the lattice vectors and n_1, n_2 and n_3 range over all integers. The total field $\rho_\mathrm{TOT}(\mathbf{r})$ can be represented as a convolution of $\rho_{uc}(\mathbf{r})$ with a lattice function $L(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n_1,n_2,n_3} \delta(\mathbf{r} - n_1\mathbf{a}_1 - n_2\mathbf{a}_2 - n_3\mathbf{a}_3)$ Since this is a convolution, the Fourier transformation of $\rho_\mathrm{TOT}(\mathbf{r})$ is a product $\tilde{\rho}_\mathrm{TOT}(\mathbf{k}) = \tilde{L}(\mathbf{k})\tilde{\rho}_{uc}(\mathbf{k})$ where the Fourier transform of the lattice function is another sum over delta functions $\tilde{L}(\mathbf{k}) = \frac{(2\pi)^3}{\Omega} \sum_{m_1,m_2,m_3} \delta(\mathbf{k} - m_1\mathbf{b}_1 - m_2\mathbf{b}_2 - m_3\mathbf{b}_3)$ where the reciprocal space vectors are defined $\mathbf{b}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\Omega}$ (and cyclic permutations) where $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$ is the volume of the central unit cell (if it is geometrically a parallelepiped, which is often but not necessarily the case). Note that both $L(\mathbf{r})$ and $\tilde{L}(\mathbf{k})$ are real, even functions. For brevity, define an effective single-particle potential $v(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} \int d\mathbf{r}'\, \rho_{uc}(\mathbf{r}')\ \varphi_{\ell r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ Since this is also a convolution, the Fourier transformation of the same equation is a product $\tilde{V}(\mathbf{k}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\rho}_{uc}(\mathbf{k})\tilde{\Phi}(\mathbf{k})$ where the Fourier transform is defined $\tilde{V}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r}\ v(\mathbf{r})\ e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ The energy can now be written as a single field integral $E_{\ell r} = \int d\mathbf{r}\ \rho_\mathrm{TOT}(\mathbf{r})\ v(\mathbf{r})$ Using Parseval's theorem, the energy can also be summed in Fourier space $E_{\ell r} = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\ \tilde{\rho}^*_\mathrm{TOT}(\mathbf{k})\tilde{V}(\mathbf{k}) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{L}^*(\mathbf{k})\, |\tilde{\rho}_{uc}(\mathbf{k})|^2\, \tilde{\Phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\Omega} \sum_{m_1,m_2,m_3} |\tilde{\rho}_{uc}(\mathbf{k})|^2\, \tilde{\Phi}(\mathbf{k})$ where $\mathbf{k} = m_1\mathbf{b}_1 + m_2\mathbf{b}_2 + m_3\mathbf{b}_3$ in the final summation. Once $\tilde{\rho}_{uc}(\mathbf{k})$ is calculated, the summation/integration over $\mathbf{k}$ is straightforward and should converge quickly. The most common reason for lack of convergence is a poorly defined unit cell, which must be charge neutral to avoid infinite sums. Ewald: Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale. AnnPhys369 1921 p253–287; **Particle mesh Ewald method = PME:** Darden, Perera, Li, Pedersen: New tricks for modelers from the crystallography toolkit. The particle mesh Ewald algorithm and its use in nucleic acid simulations Structure7 (3) R55–R60 1999; Schlick: Molecular Modeling and Simulation. An Interdisciplinary Guide 2002;

Peter Schmüser: Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 2. Elektrodynamik 2012; Lüst: Hydrodynamik 1978 p33. **Dipol = Doppelquelle** mit **Koordinaten-Ursprung** $\mathcal{O}$ im gemeinsamen Schwerpunkt und Ladungsabstand a, d oder l gibt wegen $\vec{r} = \vec{l}/2 + \vec{r}_+$ und $\vec{r}_- = \vec{l}/2 + \vec{r}$, damit $2rl\cos\vartheta = (\vec{l}/2 + \vec{r}) \cdot (-\vec{l}/2 + \vec{r}) = \vec{r}_-^2 - \vec{r}_+^2 = r_-^2 - r_+^2 = (r_- - r_+)(r_- + r_+) \approx (r_- - r_+)2r$ bedeutet $(r_- - r_+) = l\cos\vartheta$ und für **Fernsicht** $r, r_+, r_- \gg l$, bedeutet $r_- \approx r \approx r_+$ und Dipolmoment $\vec{p} = Q\vec{l}$:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \frac{Q_+}{r_+} + \frac{Q_-}{r_-} = Q\frac{r_- - r_+}{r_- r_+} = Q\frac{l\cos\vartheta}{r^2} Q\frac{l\hat{l}\cdot\hat{r}}{r^2} = p\frac{\hat{l}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{p\cos\vartheta}{r^2}$$

oder **ganz kurz:** Betrachte das Produkt von $\vec{r}_- - \vec{r}_+ = \vec{d}$ und $\vec{r}_- + \vec{r}_+ = 2\vec{r}$, also $(\vec{r}_- - \vec{r}_+)\cdot(\vec{r}_- + \vec{r}_+) = (r_- - r_+)(r_- + r_+) \approx (r_- - r_+)2r = 2\vec{d}\cdot\vec{r}$. Dann wie oben. Oder **Dipol-Definition mittels Richtungsableitung**:

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r}) = \lim_{\substack{\vec{a}\to\vec{0}\\ q\vec{a}=\vec{p}=\text{const}}} \frac{a}{a}\frac{q}{|\vec{r}-\frac{\vec{a}}{2}|} - \frac{q}{|\vec{r}+\frac{\vec{a}}{2}|} = -q\,a \lim_{\substack{\vec{a}\to\vec{0}\\ q\vec{a}=\vec{p}=\text{const}}} \frac{1}{a}\left[\frac{1}{|\vec{r}+\frac{\vec{a}}{2}|} - \frac{1}{|\vec{r}-\frac{\vec{a}}{2}|}\right] = -q\,\vec{a}\cdot\nabla\frac{1}{r} = -\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r}$$

2 entgegengesetzt gleichgroße und eng benachbarte Ladungen bei $\pm\vec{a}/2$, wobei $\vec{a}$ der **orientierte Abstandsvektor** ist $-q \to +q$, $\vec{p} = q\vec{a}$. Purcell: Elektrizität und Magnetismus. Berkeley Physik Kurs 2 1976 p225, 1989[4]; Liebscher p237, Nolting 3 p73, Greiner 3 p88:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{a}\cdot\hat{r}}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\nabla\cdot\frac{\vec{p}}{r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\vec{p}\cdot\nabla\frac{1}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} = \phi(r,\theta,\phi)$$

Oder aus Sicht der Feldstärke

$$E(r,a) = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+a)^2} = E(r,a=0) + \left.\frac{\partial E}{\partial a}\right|_{a=0} a + O(2) \approx \frac{2a}{r^3} = -a\,\text{grad}\,\phi(r) \quad \text{mit} \quad \phi(r) = \frac{a}{r^2}$$

für $a \ll r$ bis zur 1. Ordnung, wobei a der Abstand der **Doppelquelle** ist. **Feldstärkenüberhöhung** Brailsford & Robertson: Calculation of electric field strengths at a sharp edge. IntJofMassSpectrometryAndIonPhysics1 1968 pp75-85 mit konformer Abbildung.

Aus der Dipolladungsdichte $\rho(\vec{x},t) = -[\vec{p}(t)\cdot\nabla]\,\delta(\vec{x})$ und der Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho = -[\dot{\vec{p}}\cdot\nabla]\,\delta(\vec{x}) = -[\nabla\cdot\dot{\vec{p}}]\,\delta(\vec{x}) = -\nabla\cdot\vec{j}$ folgt sofort die **Stromdichte des Dipols** $\vec{j}(\vec{x},t) = \dot{\vec{p}}\delta(\vec{x})$. **Helmholtz-Doppelschicht** 1853 Schichtabstand 0.4nm $\approx$ 0.1nm Ionenradius.

Ladungsverteilung des Dipols bezüglich des Ursprungs $\rho(\vec{x}) = -(\vec{p}\cdot\nabla)\delta(\vec{x})$ oder $\rho(\vec{x}) = -[\vec{p}\cdot\nabla_{\vec{x}}]\delta(\vec{x}-\vec{x}')$, wobei für die Ableitung der **Delta-Distribution** gilt $\int_I \mathrm{d}x f(x)\delta'(x-a) = -f'(a)$, wobei $a \in I$ und im 3D mit Jacobi-Determinante zur Volumen-Normierung (Maßeinheit beachten, siehe Seite 548!)

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}') = \frac{1}{|J(x_i,\xi_j)|}\delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2')\delta(\xi_3-\xi_3')$$

Rechenregeln: Madelung p16; Joos, Kaluza, Richter: Höhere Mathematik 1994[13], p309 ff hier auch Aufgaben.

$$\delta(x-x_0) = \delta(x_0-x), \quad \delta'(x-x_0) = -\frac{\delta(x-x_0)}{(x-x_0)} = -\delta'(x_0-x), \quad \delta(\phi(x)) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|\phi'(x_i)|}$$

Abstand von Einzelladung von Quelle 1 bei $\vec{b} = a/2\hat{z}$ und Aufpunkt bei $\vec{r} = a/2\hat{z} + \vec{r}_1$ ist $r_1 = |\vec{r} - a/2\hat{z}| = \sqrt{(\vec{r}-a/2\hat{z})^2} = \sqrt{x^2+y^2+(z-a/2)^2}$. $\theta = \measuredangle(\hat{z},\vec{r})$. Genähert bei $\vec{r}$ für kleines a also $\vec{b} = -a/2\hat{z}$ ist Taylor-Entwicklung $T_{|x+b|,x_0=x(\text{also } b=0)}(b) = |x| + |x|'\cdot(x+b-x)$ bedeutet $r_1 = r_1|_{a=0} + \frac{\partial r_1}{\partial\vec{r}}|_{a=0}\cdot\vec{b} = r - \frac{a\hat{z}\cdot\hat{r}}{2} = r - \frac{a\cos\theta}{2}$ wegen **koordinatenfreiem Gradienten** $\frac{\partial r_1}{\partial\vec{r}}|_{a=0} = \frac{\partial\sqrt{(\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{z})^2}}{\partial\vec{r}}|_{a=0} = \frac{\vec{r}-\frac{a}{2}\hat{z}}{r_1}|_{a=0} = \hat{r}$ oder $\frac{\partial r_1}{\partial\vec{r}}|_{a=0} = \text{grad}\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2}|_{a=0} = \frac{(x,y,z-\frac{a}{2})}{r_1}|_{a=0} = \hat{r}$. Unterscheide $\frac{\partial\vec{r}^2}{\partial\vec{r}} = 2\vec{r} = \frac{\partial r^2}{\partial\vec{r}} = \frac{\partial r^2}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial\vec{r}} = 2r\hat{r}$ oder $\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = i\vec{k}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = i\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\nabla\vec{k}\cdot\vec{r} = i\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}[\vec{k}\times(\cancel{\nabla\times\vec{r}}) + \vec{r}\times(\cancel{\nabla\times\vec{k}}) + (\vec{k}\cdot\nabla)\vec{r} + (\vec{r}\cdot\cancel{\nabla})\vec{k}]$. Für eine **Punktladungswolke** gilt $\rho(\vec{x}) = \sum_i q_i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}_i)$, $\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V dV'\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$. Bei innerhalb eines Raumgebiets vom Durchmesser a begrenzter Quellladungen ist es übersichtlich, anschaulich, zweckmäßig, weil rechnerisch einfacher, da die Integrale nur in den Projektionen auf die Entwicklungsterme auszuwerten sind, den Nenner obigen Potenzialausdruck

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\vec{x}'\cdot\nabla_{\vec{x}'}\right)^n f(\vec{x}')|_{\vec{x}'=\vec{0}} \approx f(\vec{0}) + \vec{x}'\cdot\nabla_{\vec{x}'}f(\vec{x}')|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \frac{1}{2}\left(\vec{x}'\cdot\nabla_{\vec{x}'}\right)^2 f(\vec{x}')|_{\vec{x}'=\vec{0}} + \ldots$$

für ferne **Feldpunkte** $\vec{r}$ mit $r' < a \ll r$ bei $\vec{r}' = \vec{0}$ zu entwickeln, im folgenden $\vec{r}' = \bar{r}$ sehr nahe am Ursprung $\vec{0}$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\bar{\mathbf{r}} \cdot \nabla_{\bar{\mathbf{r}}}\right)^n \frac{1}{|\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}}|}\bigg|_{\bar{\mathbf{r}}=0}$$

Fließbach: Elektrodyn Kap12, Rebhan: Elektrodynamik. Dabei bedeutet $\nabla_{\bar{\mathbf{r}}}$, dass der Nablaoperator nur auf die Quellladungspunkte $\bar{\mathbf{r}}$ und nicht auf den Aufpunkt $\mathbf{r}$ wirkt. Nach Bilden der Ableitung

$$\nabla_{\bar{\mathbf{r}}}^n (1/\,|\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}}|)$$

werden diese an der Stelle $\bar{\mathbf{r}} = 0$, also nahe am Koordinatenursprung, wo die Quellen liegen, ausgewertet. Die Taylorentwicklung lässt sich umformen mittels Substitution $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \bar{\mathbf{r}}$ und damit $\nabla_{\mathbf{u}} = -\nabla_{\bar{\mathbf{r}}}$:

$$\nabla_{\bar{\mathbf{r}}}^n \frac{1}{|\mathbf{r}-\bar{\mathbf{r}}|}\bigg|_{\bar{\mathbf{r}}=0} = (-\nabla_{\mathbf{u}})^n \frac{1}{|\mathbf{u}|}\bigg|_{\mathbf{u}=\mathbf{r}} = (-\nabla_{\mathbf{r}})^n \frac{1}{|\mathbf{r}|} = (-\nabla)^n \frac{1}{r}$$

Somit vereinfacht sich die Entwicklung zu:

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\mathbf{r}' \cdot \nabla\right)^n \frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \mathbf{r}' \cdot \nabla \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \mathbf{r}' \cdot \nabla\nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}' + O(r'^3)$$

Die **Quellpunkte** oder **Integrationspunkte** $\vec{r}'$ liegen alle innerhalb eines Raumes mit Radius a. Aus der Ferne ist jeder Kern eine Punktladung, ein Dipol oder ein Quadrupol:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_{ij}\, x_i\, x_j}{r^5} \approx \frac{1}{r^3} \text{ mit Quadrupol} - \text{Moment} - \text{Tensor}\, Q_{ij} = \int \mathrm{d}V' (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}')$$

Multipole: Lorrain et al.: Elektromagnetische Felder und Wellen 1995 p83ff; **Simonyi: Theoretische Elektrotechnik** 1993[10] p121ff; Wagner: Gruppentheoretische Methoden in der Physik 2001 Kap6 Symmetrie und Multipolentwicklung;

$$\frac{1}{\left|1 - 2\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right|^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'}{r} + \frac{1}{2r^2} \left(3(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^2 - r'^2\right) + O\left(\frac{r'}{r}\right)^3$$

Kartesisch siehe Seite 185:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \underbrace{\int \rho(\mathbf{r}') d^3 r'}_{\substack{\text{Monopol-}\\ \text{0.tes Moment=Normierung}}} + \sum_i \frac{x_i}{r^3} \underbrace{\int x_i' \rho(\mathbf{r}') d^3 r'}_{\substack{\text{Dipol-}\\ \text{1. Moment=Mittelwert}}} + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{x_i x_j}{r^5} \underbrace{\int \left(3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}\right) \rho(\mathbf{r}') d^3 r'}_{\text{Quadrupolmoment}} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r} \overbrace{\int \rho(\mathbf{r}') d^3 r'} + \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \overbrace{\int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d^3 r'} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5} : \overbrace{\int \left(3\mathbf{r}'\mathbf{r}' - r'^2 E\right) \rho(\mathbf{r}') d^3 r'} + \ldots\right]$$

Greengard: The rapid evaluation of potential fields in particle systems 1987 mit $\mathcal{O}(N)$ statt $\mathcal{O}(N^2)$; Anstatt das Potential durch n einzelne Ladungen q_i und Koordinaten $\vec{r}'$ zu beschreiben, kann man die Multipolentwicklung durchführen:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} Q_{kl} \frac{r_k \cdot r_l}{r^5} + \ldots\right).$$

Aus mathematischer Sicht ist dies eine Taylorentwicklung des Faktors $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ an der Stelle der Quellladungen um $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ nach kartesischen Koordinaten (x, y, z). Ihre Entwicklungskoeffizienten, die Multipolmomente Q, p_i und Q_{kl}, sind die statistischen zentralen Momente wie **Normierung** der Verteilung, **Mittelwert**, Varianz etc., sich auch physikalisch deuten lassen. Aufbau **axialer Multipole:** Verschiebe das Dublikat und wechsle dessen Vorzeichen. Einen 2^l-Pol erhält man durch l Verschiebungen. $l = 0$ **Monopol** $\varphi(r) = \frac{1}{r}$, $l = 1$ **Dipol** $\varphi(r, \theta) = \frac{p^{(1)}}{r^2} \cos\theta$, $\varphi(\vec{r}) = -\frac{p^{(1)}}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}$, **Axialer/linearer** 2^n**-Pole** mit n-Polemoment

$p^{(n)} = n!qa^n$ ist wegen $\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}$ und $\varphi^{(2n)} = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!}\frac{\partial^n}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta \ldots}\frac{1}{r} = \frac{(-1)^n p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!}\frac{\partial^n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \ldots}\frac{1}{r}$ wegen Übergang von Quellpunkt- zu Aufpunktkoordinaten des Gradienten $\varphi^{(2n)}(\vec{r}) = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!}\frac{\partial^n}{\partial z'^n}\frac{1}{r} = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} = \frac{(-1)^n p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0 n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r} = \frac{p^{(n)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{r}$, $l = 2$ **Linearer Quadrupol** Panofsky & Phillips p15f $\varphi(\vec{r}) = \frac{p^{(4)}}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{3z^2 - r^2}{r^5} = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} = \frac{qa^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} = \varphi(r,\theta) = \frac{p^{(2)}}{4\pi\epsilon_0 n!}\frac{1}{r^3}(3\cos^2\theta - 1) = \frac{p^{(2)}}{4\pi\epsilon_0 n!}\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3}$. Potenzial ist $\varphi(r) = \frac{1}{r^{l+1}}$, $\vec{E} = \frac{1}{r^{l+2}}\hat{r}$. Simonyi p130, Tab2.1; Die axialen Multipolmomente der bei z_i lokalisierten Ladungen Q_i sind $p^{(0)} = Q = \sum Q_i$; $p^{(1)} = \sum Q_i\, z_i$, $p^{(2)} = \sum Q_i\, z_i^2$. **Axialer Oktopol:** Batygin p191; Panofsky & Phillips p16; Ebener Quadrupol: $\phi(r,\vartheta) = \frac{3qa^2\cos\vartheta\sin\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3qa^2\sin 2\vartheta}{8\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{maq}{4\pi\epsilon_0}\frac{3\cos^2\theta - 1}{r^3} = \phi(\vec{r}) = \frac{maq}{4\pi\epsilon_0}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{r} = \frac{maq}{4\pi\epsilon_0}\frac{3z^2 - r^2}{r^5}$. Simonyi: Theoret Elektrotechnik p129; Zülicke: QC 1 1972 p442; Zülicke: QC4 1979 p157; **Würfel-Oktopol:** $\phi(r,\vartheta\varphi) = \frac{15qa^3}{4\pi\epsilon_0 r^4}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi = \frac{15qa^3}{16\pi\epsilon_0 r^4}\sin\vartheta\sin 2\vartheta\sin 2\varphi$

Sphärisch:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}Y_{lm}(\theta,\varphi)\frac{q_{lm}}{r^{l+1}}$$

mit dem **sphärischen Multipolmoment**

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'^l\,Y^*_{lm}(\theta',\varphi') = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int_0^\infty dr'\int_0^\pi d\theta'\int_0^{2\pi} d\varphi'\,\rho(r',\theta',\varphi')\,\sin(\theta')\,r'^{l+2}\,Y^*_{lm}(\theta',\varphi').$$

Die **ersten sphärischen Momente** lauten $q_{0,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{1}}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\sqrt{\frac{1}{4\pi}} = \int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')$,
$q_{1,1} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right)\sin\theta'\,e^{-i\varphi'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\,\sin\theta'\,e^{-i\varphi'}$,
$q_{1,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta' = \int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\,\cos\theta'$ und $q_{1,-1} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta'\,e^{i\varphi'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int d^3r'\,\rho(\mathbf{r}')\,r'\,\sin\theta'\,e^{i\varphi'}$.

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\alpha)\frac{r'^l}{r^{l+1}}, \qquad P_l(\cos\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\theta',\varphi')Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

wobei der **Winkel zwischen Ladungs- und Aufpunktsort** γ durch $\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi - \varphi')$ gegeben ist. Günter: Die **Potenzialtheorie** und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik 1957; **Korn: Potential Theorie** 1899; Sneddon: Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory 1966; Sternberg: Potentialtheorie 1. Die Elemente der Potentialtheorie & 2. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie 1925; **Potenzialtheorie** = Theorie eindimensionale Funktionen mit mehrfach ausgedehnten Argumenten. Bei zweidimensionaler Ausdehnung des Arguments hat man die Funktionentheorie. Martensen: Potentialtheorie, mit 89 Aufgaben und zahlreichen Beispielen 1968; **Sigl: Einführung in die Potentialtheorie** 1989[2]; **Gutdeutsch: Anwendungen der Potentialtheorie auf geophysikalische Felder** 1986; Kertz: Potentialtheorie in der Geophysik 1993; MacMillan: The Theory of the Potential; Sternberg & Smith: The Theory of the Potential and Spherical Harmonics; **Meinhold & Mitzlaff: Feld- und Potentialtheorie** 1977; Helms: Einführung in die Potentialtheorie 1973; Walter: Einführung in die Potentialtheorie 1971; **Backus, Parker & Constable: Foundations of geomagnetism** 1996; Green'sche Identitäten sind Spezialfälle des Gauß'schen Satzes für Gradientenfelder für auf dem Abschluss zweimal stetig differenzierbere Funktionen $\phi, \psi \in C^2(\bar{\Omega})$ mit $\vec{A} = \varphi\nabla\psi$ und $\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi) = \nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \varphi\Delta\psi$ und $\varphi\nabla\psi\cdot\vec{n} = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} = \vec{A}\cdot\vec{n}$. Die Green'schen Theoreme erlauben gemäß Gauß'schem Satz Aussagen über die Eigenschaften von Funktion für einen Bereich allein auf Basis der Eigenschaften der Funktion auf dem Rande, insbesondere im Falle harmonischer Funktionen:

1. Green'sche Identität, **Strich= Quelle**, Ableitungen nach der Koordinate über die auch integriert wird:

$$\int_V \mathrm{d}V'(\varphi\Delta'\psi + \nabla'\varphi\cdot\nabla'\psi) = \oint_{\partial V} \mathrm{d}a'\,\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n'} \text{ oder } \int_\Omega \psi\Delta\varphi\mathrm{d}x = -\int_\Omega \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}F$$

Oder $\int_V \mathrm{d}V(\nabla\cdot(\varphi\nabla\psi)) = \int_V \mathrm{d}V(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \varphi\Delta\psi) = \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\varphi\nabla\psi = \int_{\partial V}\mathrm{d}f\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}$. Speziell $\varphi = \psi$ bedeutet $\int_V \mathrm{d}V(\nabla\cdot(\varphi\nabla\varphi)) = \int_V \mathrm{d}V((\nabla\varphi)^2 + \varphi\nabla\varphi) = \frac{1}{2}\int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\nabla\varphi^2$. Arens: Mathe Kap29 Aufgabe 29.3; **Neumann-Problem:** Welche Lösungen besitzt das Neumann-Problem $\Delta u = 0$ in D, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂D? Hierbei ist D eine beschränkte, offene Menge, in der der Gauß'sche Satz angewandt werden darf. Aus $\vec{E} = u\nabla u$ folgt per Gauß'schem Satz: $\int_D \mathrm{d}V\nabla\cdot\vec{E} = \int_D \mathrm{d}Vu\nabla u = \int_D \mathrm{d}V\{(\nabla u)^2 + u\Delta u\} = \int_{\partial D}\mathrm{d}\vec{a}\cdot\vec{E} = \int_{\partial D}\mathrm{d}a\frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\partial D}\mathrm{d}a0 = 0$ gibt $(\nabla u)^2 = 0$ also $u(\vec{x}) = \text{const}$. Kap29 Aufgabe 29.3

Piskunow: Differential- und Integralrechnung Teil3

1970 p34ff mit Aufgaben und Beweis siehe **Mittelpunktssatz harmonischer Funktionen**. Pelrine SdW 2005 H2 p38-42 Potentialflächen haben kein Tal und Krümmung überall Null; **Mittelwerteigenschaft** einer Funktion = in jedem Punkt Funktionswert und der gemittelte Funktionswert in einer Kugel um diesen Punkt entsprechen. Ist Ausgangspunkt für Relaxationsmethode bei numerischer Lösung der Laplace-Gleichung. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ erfüllt die Mittelwerteigenschaft genau dann, wenn für alle $x \in \Omega$ und alle $r > 0$, die $B_r(x) \subset \Omega$ genügen, $f(x) = \frac{1}{\|B_r\|}\int_{B_r(x)} f(y)dy = \frac{1}{\|\partial B_r\|}\int_{\partial B_r(x)} f(y)dS(y)$ gilt. Dabei stehen $\|B_r\|$ und $\|\partial B_r\|$ für das Volumen bzw. die Oberfläche der Kugel mit Radius r. Die Integrale mit Vorfaktor sind dabei gemittelte Integrale, die oft auch als durchgestrichenes Integral notiert werden. Eine Funktion, die die Mittelwerteigenschaft erfüllt, ist automatisch harmonisch und glatt, also in $C^\infty(\Omega)$

Grosche: TB Mathematik II 1995 p235;

2. Green'sche Identität = Green'scher Satz, Greiner: Klassische Elektrodymamik Kap2:

$$\int_V \mathrm{d}V'\left[\varphi(\vec{r}')\Delta'\psi(\vec{r}') - \psi(\vec{r}')\Delta'\varphi(\vec{r}')\right] = \oint_{\partial V}\mathrm{d}a'\left[\varphi(\vec{r}')\frac{\partial\psi(\vec{r}')}{\partial n'} - \psi(\vec{r}')\frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}\right] \tag{105}$$

Zeige $\int_V \mathrm{d}V\nabla u = \int_{\partial V}\mathrm{d}\sigma\frac{\partial u}{\partial n}$ Piskunow p34ff; Zur Deutung siehe auch Seite 188. **Wunsch: Feldtheorie** 1 1973[2], 2 1975; Jackson: Klassische Elektrodynamik ab Kap1.8; Fließbach: Elektrodynamik Kap3 Beweis dafür, dass $G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ Green'sche Fkt des Laplace-Operators $\Delta\mathbb{G}(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ ist p27ff; **Becker & Sauter 1** p24, p52f, p58; **Scheck 3** p62ff; Nolting 3 p97ff; Greiner 3 p51ff; Jelitto 3 p61ff;

geg: Sei Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ im Gebiet mit $\vec{r}' \in V$ und **Cauchy-Randbedingungen** auf dessen Rand ∂V mit $\varphi(\vec{r})$ **Dirichlet-RB** und **Neumann-Randbedingung** $\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial n} = -\vec{E}(\vec{r})\cdot\hat{n}$ mit $\vec{r} \in \partial V$. ges.: $\varphi(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in V$. **Cauchy-Randbedingung** widerspricht sich meist, daher **entweder** Dirichlet- **oder** Neumann-Randbedingung! Beispiel zur **Dirichlet-Rand** Behandlung siehe Meinhold & Mitzlaff: Feld- und Potentialtheorie p178; Die um die **harmonische Funktion** $F(\vec{r},\vec{r}')$, die sich für ladungsfreie Gebiete auf den Laplace-Operator gemäß $\Delta F(\vec{r},\vec{r}') = 0$ neutral verhält, ergänzte Green-Funktion lautet $\psi(\vec{r}') = G(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} + F(\vec{r},\vec{r}')$. $\varphi(\vec{r}')$ genüge der Poisson-Gl $\Delta'\varphi(\vec{r},\vec{r}') = -\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0}$, deren Lösung das **Poisson-Integral** der **freien Lösung** Gl(106) entspricht. Aus der **linken Seite** der 2. Green'sche Identität Gl(105) wird mit $\Delta' G(\vec{r},\vec{r}') = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$ zu

$$\int_V \mathrm{d}V'\left[\varphi(\vec{r}')\delta'(\vec{r}-\vec{r}') + \psi(\vec{r}')\frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0}\right] = \varphi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}V'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}V'F(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')$$

die **rechte Seite** der 2. Green'sche Identität wird zu

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}a' \left[\varphi(\vec{r}')\frac{\partial\psi(\vec{r}')}{\partial n'} - \psi(\vec{r}')\frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}\right] =$$

$$\oint_{\partial V} \mathrm{d}a' \left[-\frac{1}{4\pi}\varphi(\vec{r}')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \varphi(\vec{r}')\frac{\partial F(\vec{r}-\vec{r}')}{\partial n'} - \left\{-\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} + F(\vec{r},\vec{r}')\right\}\frac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}\right]$$

Für $F(\vec{r},\vec{r}') = \dfrac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$ auf dem Rand wird die Normalableitung von φ auf dem Rand unwirksam und man kann φ unabhängig von $\dfrac{\partial\varphi(\vec{r}')}{\partial n'}$ auf dem Rand vorgeben. Für den Fall der Erdung des Randes gilt φ=0, also

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}V'\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \mathrm{d}V' F(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')$$

Methode der Green'schen Funktion

bei der Lösung von RWP siehe Rebhan: Elektrodynamik p165; **Lorenz: Funktionentheorie** 1997; Piskunow: Differential- und Integralrechnung Teil3 1970 p30ff mit Aufgaben. **Kellogg: Foundations of potential theory** 1929 p211 Harmonische Funktionen = Lösungen der Laplace-gl, also für ladungsfreien Raum. Green-Identitäten I p212, II p215, III p219. Eine beliebige harmonische Funktionen ist **Newton-Potenzial** $V(\vec{r}) = \dfrac{1}{r}$, p52ff, p121ff, 218; Konservative oder lamellare Felder p49. Lamina = Schichtungen, Plattenstapel, blättrig. Körber & Pforr: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. MINÖL5 1989 p75f, 97f; Meinhold & Wagner: Partielle Differentialgleichungen. MINÖL8 1975 p75f, 97f, p82 Geben Sie eine in der Kugelschale $1 < r < 2$ harmonische Funktion $u(\vec{r})$ mit $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ an, die für $r = 1$ bzw. $r = 2$ die konstanten Werte 5 bzw. 4 annimmt. Laplace für Kugelsymmetrie bedeutet $\Delta_r u(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2\frac{\partial u(r)}{\partial r})}{\partial r} = 0$ bedeutet $u(r) = \dfrac{C_1}{r} + C_2$ mit Randbedingungen $5 = u(1) = C_1 + C_2$ und $4 = u(2) = \dfrac{C_1}{2} + C_2$ bedeutet $u(r) = \dfrac{2}{r} + 3$;

Harmonische Funktionen nehmen ihre Extrema nur auf dem Rand an. Sei also f harmonisch und V ein Gebiet, auf dem f ein Extremum hat. Sei V echte Teilmenge eines größeren Gebietes U in dem f harmonisch ist. Hat man jetzt einen Widerspruch? Oder kann f in einem größeren Gebiet gar nicht harmonisch sein, wenn es auf dem Rand eines kleineren Gebietes ein Extremum hat? Nein! Die **Extremwerte sind keine lokalen** Extremwerte, da man die noch größeren jenseits des Randes nicht 'sieht'. Hat eine harmonische Funktion in Innern eines Gebiets ein Extremum, so ist sie konstant. Am einfachsten ist, man betrachtet die Sattelfläche $f(x,y) = x^2 - y^2$. Auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe hat sie Maximum 1 bei (1, 0) und (-1, 0) und Minimum -1 bei (0, 1) und (0, -1). Auf der Kreisscheibe mit Radius 2 ist das Max. jetzt 4 und Min. -4, angenommen auch wieder auf dem Rand. Für harmonische Funktionen $\Delta f = 0$ bedeutet der Gauß'sche Satz $0 = \int_B \mathrm{d}V\Delta f = \int_{\partial B}\mathrm{d}\vec{a}\cdot\mathrm{grad}\, f = \int_{\partial B}\mathrm{d}a\dfrac{\partial f}{\partial n}$, dass also das Flächenmittel des Gradienten für die Berandung verschwindet. **Lorenz: Funktionentheorie** 1997: Lang, Pucker Mat Meth p498; **Intro harmonische Funktionen:** Siehe Arens p1017, p1124; Kreyszig 552ff, p912; Wüst, Griffiths: Introduction to electrodynamics p111f; Jänich: Analysis f Physiker und Ingenieure p88ff Gebietstreue und Maximumprinzip

Intro Green'sche Identitäten: $\vec{F} = \varphi\,\mathrm{grad}\,\psi$ bedeutet $\mathrm{div}\,\vec{F} = \mathrm{div}\,(\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi) = \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi + \varphi\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\dfrac{\partial\psi}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\dfrac{\partial\psi}{\partial z} + \varphi\,\Delta\psi$, bedeutet die **1. Green'sche Integralformel** $\int\int\int_B \mathrm{d}b\,(\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y + \varphi_z\psi_z + \varphi\,\Delta\psi) = \int\int_{\partial B}\mathrm{d}f\varphi\,\hat{n}\cdot\mathrm{grad}\,\psi$ mit dem räumlichen Bereich $B \subset \mathbb{R}^3$, dessen Oberfläche ∂B mit der nach außen gerichteten Oberflächennormale $\hat{n}(\vec{r})$ oder Oberflächenelement $\mathrm{d}\vec{f}(\vec{r}) = \mathrm{d}f(\vec{r})\,\hat{n}(\vec{r})$. **2. Green'sche Integralformel** folgt aus $\vec{F} = \varphi\,\mathrm{grad}\,\psi - \psi\,\mathrm{grad}\,\varphi$ bedeutet $\mathrm{div}\,\vec{F} = \varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi$. Gauß'scher Satz gibt $\int\int\int_B \mathrm{d}b\,(\varphi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\varphi) = \int\int_{\partial B}\mathrm{d}f\,\hat{n}\cdot(\varphi\,\mathrm{grad}\,\psi - \psi\,\mathrm{grad}\,\psi)$. Die **2. Green'sche Integralformel** folgt direkt aus der 1. Green'sche Integralformel für den Spezialfall $\varphi(\vec{r}) = 1$ also $\int\int\int_B \mathrm{d}b\,\Delta\psi = \int\int_{\partial B}\mathrm{d}f\,\hat{n}\cdot\mathrm{grad}\,\psi$. Körber & Pforr: Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen. MINÖL5 1989 p132ff; Meinhold & Wagner: Partielle Differentialgleichungen. MINÖL8 1975 p97f und p70f Falls $\Delta v(\vec{x}) = 0$, also in jedem Punkt keine mittlere Krümmumg, so erlaubt **Green'sche Darstellungsformel** die Berechnung von v für alle Punkte $\vec{x}_0 \in B$ $v(x_0, y_0, z_0)$ auf alleiniger Basis der Randwerte der Funktion $v(\vec{x})$

mit $\vec{x} \in \partial B$ und/oder des Gradienten der Funktion $\operatorname{grad} v(\vec{x})$ mit $\vec{x} \in \partial B$: $v(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\partial B} \mathrm{d}f\, \hat{n} \cdot \left(\frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3} v + \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \operatorname{grad} v \right)$ bedeutet mit $r = |\vec{x} - \vec{x}_0|$ und $-\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{\vec{x} - \vec{x}_0}{|\vec{x} - \vec{x}_0|^3}$ **für die harmonische Funktion** v gilt die **Green'sche Darstellungsformel** $v(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\partial B} \mathrm{d}f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} - v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \hat{n}} \right]$.

Green'sche Darstellungsformel für beliebige Funktion $v(\vec{r})$ gilt

$$v(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\partial B} \mathrm{d}f \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \hat{n}} - v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \hat{n}} \right] - \frac{1}{4\pi} \int\int\int_B \mathrm{d}b\, \frac{1}{r}\, \Delta v.$$

Mit beliebig gewählten Skalarfeldern $\varphi(\vec{r}')$, also $\Delta' \varphi(\vec{r}') = -4\pi\rho(\vec{r}')$, und $\psi(\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, also $\Delta' \psi(\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ Greiner Bd3 Kap2; Nolting 3, p101, folgt eine **zur Poisson-Gleichung äquivalente Integral-Gleichung**, die auch das Randwert-Problem löst

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \mathrm{d}a' \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial n'}}_{\text{Neumann}} - \underbrace{\varphi(\vec{r}')}_{\text{Dirichlet}} \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]$$

a] Außerhalb von V befindliche Ladungen gehen nur über ihre Wirkung auf den Rand ein! b] Felder in ladungsfreien Gebieten werden komplett durch die Randbedingungen bestimmt! c] Für Felder, die für $r \to \infty$ verschwinden, bestimmt allein das **Poisson-Integral** die Feldgestalt:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ mit } \rho(\vec{r}') = q\delta(\vec{r}' - \vec{r}_0) \text{ gilt } \varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} \text{ oder } \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{r} \tag{106}$$

Bei räumlich symmetrischen Randbedingungen ist die Lösung der Poisson-Gleichung leicht zu erreichen mit **Methode der Bildladung** durch zusätzliche **fiktive** Ladungen = **Bildladungen** = **Spiegelladungen** = **Scheinladung**, die außerhalb der betrachteten Raumgebiete liegen, **haben keine reale Bedeutung**, und dazu dienen, die gestellten Randbedingungen zu erfüllen. Jelitto: Elektrodyn B3 p86; Ersetze also die Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ **MIT Randbedingungen** durch Ladungsverteilung $\rho(\vec{r}')$ plus Bildladungen, aber **OHNE Randbedingungen**. Für ladungsfreie Gebiete unregelmäßiger Randbedingen ist die Relaxationsmethode von Vorteil, siehe Seite 597 und 597. Jelitto 3 p93 **Physikalische Bedeutsamkeit der freien Lösung** = Verwendung der RB ∞, obwohl der Rest der Welt stets eine komplizierte RB darstellt = die durch die RB hervorgerufenen Effekte seien klein gegenüber denen, die von der Ladungsverteilung ausgehen = die Quellladungen liegen näher als die störenden Ränder. Das meinen wir mit **Idealisierung**: Wir wollen es gar nicht genau wissen = wir lehnen bewusst eine exaktes Bild der Wirklichkeit ab. Nicht nur deshalb, weil wir sie gar nicht genau kennen, da Experimente prinzipiell ungenau sind. Es reicht eine gute Näherungslösung mit überschaubarer und kontrollierbarer Ungenauigkeit. **Separabilitätsprinzip der Physik** erlaubt Aufteilung der Welt in Subsysteme wie System und Umgebung: Wirkungen verschwinden mit großer Entfernung. Nicht aber bei Quantenkorrelation/Verschränkung/ERP-Paradoxon. **Poisson-Gleichung mit Dirichlet-Randbedingung:** $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Lösung mithilfe der Fundamentallösung $\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \ln|x| & n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{|x|^{n-2}} & n \geq 3 \end{cases}$ mit ω_n = Volumen der Einheitskugel im n-dimensionalen Euklidschen Raum siehe Seite 188. Um auch die Randwertbedingung zu erfüllen, kann man die Greensche Funktion verwenden $G(x, y) := \Phi(y - x) - \phi^x(y)$, mit Korrekturfunktion ϕ^x, die $\begin{cases} \Delta\phi^x = 0 & \text{in } \Omega \\ \phi^x = \Phi(y - x) & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$ erfüllt. Kennt man $G(x, y)$, so ist eine Lösung des Randwertproblems von oben durch $u(x) = -\int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, y) \mathrm{d}\sigma(y) + \int_\Omega f(y) G(x, y) \mathrm{d}y$ gegeben, wobei σ Oberflächenmaß auf $\partial\Omega$

bezeichne. Courant & Hilbert: Methoden der mathematischen Physik Bd1 1924.
Großmann: Mathematischer Einführungskurs für die Physik, Lösung von Randwertproblemen mittels Green'scher Funktionen und Sätze p258, 315; **Punktladung zwischen zwei Metallplatten** siehe Geiner 3, p66f, Simonyi p288f oder per Poissongleichung mit Randbedingungen ersetzt durch Laplacegleichung mit Oberflächenladung gemäß Nolting 3 p116ff. **Erdung = Grounding:** = Leiter geerdet = leitende Verbindung mit ∞-ferner Erdoberfläche mit Potenzial $\Phi(\infty) = 0$ Jackson p75 oder p20. Greiner: Klassische Elektrodynamik Beispiel 2.1 p52 geerdete Kugel und p60 nicht geerdete Kugel; Rebhan: Elektrodynamik p157; Im Aufpunkt P wirkt das Feld $4\pi\epsilon\Phi(P,Q,Q') = \frac{q}{r_{PQ}} - \frac{q'}{r_{PQ'}}$. Nolting: Bd3 p102, p105; Mit Kugel vom Radius a bei O. Abstand der influenzierenden Quelle Q vor der Kugel ist ρ. **Spiegelladung**sabstand vom Kugelzentrum O ist $\rho' = r_{OQ'}$, $\rho\rho' = a^2$. Für **nicht geerdete Kugel** mit Radius R und Ladung Q und **Punktladung** q im Abstand r' hat man beim Aufpunkt $\vec{r}$ das Potenzial $4\pi\epsilon_0\varphi(\vec{r},\vec{r}',q',Q,R) =$ $\frac{q'}{|\vec{r}-x'\hat{x}|} - \frac{q'R}{x'|\vec{r}-\frac{R^2}{x'}\hat{x}|} + \frac{Q+\frac{R}{x'}q'}{|\vec{r}|} = \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{q'_B}{|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'|} + \frac{Q-q'_B}{r} = \frac{q'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{Rq'/r'}{|\vec{r}-\frac{R^2}{r'^2}\vec{r}'|} + \frac{Q+Rq'/r'}{r} =$ $\frac{q'}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta}} - \frac{q'}{\sqrt{(\frac{rr'}{R})^2+R^2-2rr'\cos\vartheta}} + \frac{Q+Rq'/r'}{r}$ wegen der notwendigen Bildladung $q'_B = -Rq'/r'$, mit der externen Ladung q' beim Ort $\vec{r}'$ und dem **Aufpunkt** $\vec{r}$ mit $|\vec{r}| > R$. $rr' = R^2$. Gegeninfluenzierte Ladung wird über Erde abgeleitet. Sommerfeld: Elektrodynamik Bd3, p49; **Jackson 1981 p70f** oder Kap2.5 p76ff;**Erdung** bedeutet $\Phi = 0$. Jelitto Bd3 p82; Tipler: Physik 1994 p622; **Isolation** gegen Erdung = ursprünglich ungeladener Leiter bleibt ungeladen. Influenz macht nur Ladungsumverteilung, $q' - q' = 0$. $4\pi\epsilon\Phi(P,Q,Q',O) = \frac{q}{r_{PQ}} - \frac{q'}{r_{PQ'}} + \frac{q'}{r_{PO}}$ **Ladungen und Felder bei Dielektrika: A] Punktladung vor einem dielektrischen Halbraum:** Links, also $z < 0$, ladungsfreies Dielektrikum mit Potenzial $\phi_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon R_1}$ das von einer **fiktiven Ladung** q'' im rechten Halbraum bei $z = c$ herrührt. Aufpunktabstand zu q'' bei $z = c$ ist $R_1 = \sqrt{\rho^2+(z-c)^2}$ zu q'' bei $z = c$. Im rechten Halbraum, also $z > 0$, gilt $\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{q}{R_1} + \frac{q'}{R_2}\right)$ mit Aufpunktabstand $R_2 = \sqrt{\rho^2+(z+c)^2}$ zur Bildladung q' im linken Halbraum bei $z = -c$. Mit Stetigkeit $E_{2\rho}(z=0) = E_{1\rho}(z=0)$ also $\frac{\partial\phi_2}{\partial\rho}|_{z=0} = \frac{\partial\phi_1}{\partial\rho}|_{z=0}$ folgt $q + q' = q''/\epsilon_r$ mit $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$. Mit Stetigkeit $D_{2z}(z=0) = D_{1z}(z=0)$ also $\epsilon\frac{\partial\phi_2}{\partial z}|_{z=0} = \epsilon_0\frac{\partial\phi_1}{\partial z}|_{z=0}$ folgt $q'' = q - q'$ und $q'' = q\frac{2\epsilon_r}{1+\epsilon_r}$. **Rechter Halbraum mit realer Ladung q hat Potenzial $\phi_1(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r}\frac{1}{R_2}\right)$ bedeutet für $\epsilon_r > 1$ scheinbar negative Ladung im linken Halbraum. Metall im linken Halbraum $\epsilon_r \to \infty$ gibt symmetrischen Fall! Linker ladungsfreier Raum hat Potenzial $\phi_2(\vec{r}) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)R_1}$** Metall im linken Halbraum $\epsilon_r \to \infty$ gibt $\phi_2(\vec{r}) = 0$. Reineker Bd2 p212ff;

B] Dielektrische Kugel mit Radius R und ϵ im homogenen E-Feld $\vec{E}_0 = E_0\hat{e}_z$ mit ϵ': a] elektrisches Potential inner- und außerhalb der Kugel. Purcell: Berkeley-Kurs Bd2 p244; Becker p75, Sommerfeld p53 Kargermann & Köhler: Aufgabensammlung theoretische Physik. Teil2. Elektrodynamik 1987 p91ff **i]** φ überall endlich im Innenraum, also $\varphi_i(r,\theta) = \sum_{l=0} A_l r^l P_l$ für $r < R$. **ii]** φ weit weg von Kugel entspricht homogenem E-Feld, wegen $E_z = -\frac{\partial\varphi_a(\vec{r})}{\partial z}$ also $\varphi_a(r,\theta) = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1$, daher $\varphi_a(r,\theta) = C_1 r + \sum_{l=0} D_l r^{-(l+1)} P_l$ für $r \to \infty$. **iii]** Stetigkeit des Potenzials an Kugeloberflächei $r = R$: $\varphi_i(R,\theta) = \sum_{l=0} A_l R^l P_l = A_0 + A_1 R P_1 + A_2 R^2 P_2 + \cdots = -E_0 R P_1 + \frac{D_0}{R} + \frac{D_1}{R^2}P_1 + \frac{D_2}{R^3}P_2 + \cdots = C_1 R + \sum_{l=0} D_l R^{-(l+1)} P_l = \varphi_a(r,\theta)$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Legendre-Polynome $P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1), \ldots$ folgt $A_0 = \frac{D_0}{R}$ und $A_1 R = -E_0 R + \frac{D_1}{R^2}$ und letztlich für das Innenpotential $\varphi_i(r,\theta) = -\frac{3\epsilon_0}{2\epsilon_0+\epsilon}E_0 r P_1 = -\frac{3}{2+\epsilon_r}E_0 z$ und für das Außenpotential $\varphi_a(r,\theta) = -\vec{E}_0\cdot\vec{r}\left(1 - \frac{\epsilon_r-1}{2+\epsilon_r}\frac{R^3}{r^3}\right)$. **b]** das elektrische Feld innerhalb der Kugel ist durch die Polarisation etwas geringer als das äußere elektrische

Feld $\vec{E}_i = \frac{3}{2+\epsilon_r} E_0 \hat{z}$. Das äußere elektrische Feld ist ein Dipolfeld $\vec{E}_a = \vec{E}_0 + \frac{\epsilon_r - 1}{2+\epsilon_r} R^3 \frac{3\vec{E}_0 \cdot \vec{r} - r^2 \vec{E}_0}{r^5}$.

Geschlossene Jordan-Kurven (Feldlinien): Glaeske: QC5 p114; Bronstein: $\operatorname{rot} \vec{v} \neq \vec{0}$

Geg.: Quellen $\rho(\vec{r})$ und Wirbel $\vec{j}(\vec{r})$. Ges.: Vektorfeld $\vec{B}$? 1] Suche **wirbelfreies** Vektorfeld $\vec{E}$ bei geg. Quelle $\rho(\vec{r}) = \operatorname{div} \vec{E}$ mit $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ gibt $\vec{E} = \operatorname{grad} \varphi$, also $\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi = \rho$ Lösung der **Poisson-Gl.** gibt $\vec{E}$. **Beachte**, dass $\vec{E}$ nur bis auf ein **quellenfreies Zusatzfeld** bestimmt ist $\vec{E} + \vec{\tilde{E}}$ mit $\operatorname{div} \vec{\tilde{E}} = 0$, also z.B. **Wirbelfeld** $\vec{\tilde{E}} = \vec{C} \times \operatorname{grad} f(r)$. **Faraday'scher Käfig**: Ladungsfreies Gebiet V, also $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, das von Metallfläche, also freie Ladungsträgerbeweglichkeit, folglich konstantes Potenzial auf Oberfläche (Wasser) $\varphi|_{\text{Rand}} = \varphi_0$ eingeschlossen wird. Laplace-Gl $\Delta\varphi = 0$. $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi|_{\text{Rand}} = \vec{0}$. Walliser p162; 2] Suche **quellenfreies** Vektorfeld $\vec{B}$ mit Wirbel $\vec{j}$: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j}(\vec{r})$. Für jedes quellenfreie Vektorfeld ist $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$, also $\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \vec{j}(\vec{r})$. Man kann nun $\operatorname{div} \vec{A}$ beliebig wählen, ohne $\operatorname{rot} \vec{A}$ zu ändern, $\operatorname{div} \vec{A}$ über Gradienten beiträgt, also keine Wirbel macht. Also $\vec{A} = -\Delta \vec{j}$. Man muss also nur 4 Poisson-Gleichungen lösen. **Flächenladung auf Leiter** der sich im Feld $\vec{E}$ befindet ist $\vec{E}_{\text{oberhalb}} = E_{\text{sonst}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$, Griffiths Kap2.5.3.; Tipler p672.

Fundamentalsatz für Vektorfelder ohne Sprungstellen: von Stokes 1849, Rebhan: Elektrodynamik p32f; Griffiths: Elektrodynamik 2011[3] Kap1.6 **Helmholtz-Theorem**; Lagally & Franz: Vektorrechnung 1956[5] p186ff; Boas: p282f Fano & Adler: Electromagnetic fields, energy, and forces 1960 p31ff;

Intro in Vektoranalysis: Definition von grad, rot und div als Verallgemeinerung der Ableitungs-Idee. Jelitto: Bd1 Kap2.2 und 2.3. **Snieder: Math tools for the physical sciences 2009[2] Chap5 Gradient, Chap6 Div, Chap7 Rotor, Chap8 Gauß, Chap9 Stokes Chap10 Laplace** p46-132; Nabla-Kalkül bei zentral und zylindersymmetrischen Feldern. Furlan: Bd2 Vektoranalysis; Wirbelfelder. Gauß-**Gesetz**. Sätze von Stokes und Gauß. Zerlegungssatz. **Jelitto Bd2** Kap2.3 p21-46. **Arens p918**. Fließbach: Elektrodynamik p3-12; Joos & Kaluza: Höhere Math 1994 Kap7.4 Felder und Integralsätze p250-278; Greiner Mech1 Kap11 Vektorielle Differenzialoperationen 13 Integralsätze p119; Joos: Theoret Physik; Nearing p360ff; Kuhn et al: Math Hilfsmittel Kap8 p265ff; Schulz; Spiegel; Edminster; Großmann: Math Einführungskurs Kap9.5 p331 Beweisidee Otto Blumenthal: Über die Zerlegung unendlicher Vektorfelder, Mathematische Annalen 61 1905 p235-250, zum **Hauptsatz der Vektoranalysis:** Ein über einem einfach zusammenhängenden Gebiet mit (stückweise) glatter Randfläche definiertes Vektorfeld lässt sich stets in einen wirbelfreien und einen quellfreien Anteil zerlegen: $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_\rho(\vec{r}) + \vec{F}_\omega(\vec{r})$. **Nolting: Elektrodynamik** p34f: In Verallgemeinerung zum **longitudinalen Quellfeld** $\vec{a}_l(\vec{r}) = \vec{r}$ mit $\operatorname{rot} \vec{a}_l = \vec{0}$ und dazu **transversalem Wirbelfeld** $\vec{a}_t(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$ mit der **Eichbedingung für das Vektorpotenzial** $\operatorname{div} \vec{a}_t = 0$ gilt $\vec{a}_l(\vec{r}) = \operatorname{grad} \alpha(\vec{r})$ und $\vec{a}_t(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{\beta}(\vec{r})$. Für das **skalare** und das **Vektorpotenzial** erhält man

$$\alpha(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}V' \frac{\operatorname{div} \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \vec{\beta}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}V' \frac{\operatorname{rot} \vec{a}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Fließbach: Elektrodynamik p27: 1] Jedes Vektorfeld ist durch seine Quellen $\operatorname{div} \vec{V}$ und Wirbel $\operatorname{rot} \vec{V}$ festgelegt. **Elektrostatik**: $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0}$ und $\operatorname{div} \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ gibt $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. 2] Jedes Vektorfeld als Summen von Wirbel- und Gradientenfeld beschreibbar:

$$\vec{V}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{W}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \operatorname{rot}_{\vec{r}} \int \mathrm{d}V' \frac{\operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon} \operatorname{grad}_{\vec{r}} \int \mathrm{d}V' \frac{\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

3] **Wirbelfreies Feld** durch Gradientenfeld darstellbar: $\operatorname{rot} \vec{V}(\vec{r}) = \vec{0} \leftrightarrow \vec{V}(\vec{r}) = \operatorname{grad} \varphi(\vec{r})$. 4] **Quellenfreies Feld** als Wirbelfeld darstellbar: $\operatorname{div} \vec{V}(\vec{r}) \leftrightarrow \vec{V}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{W}(\vec{r})$. Speziell $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \leftrightarrow \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. Kästner p155 Jedes stetige, im ganzen unendlichen Raum definierte im Unendlichen nebst seinen ersten Ableitungen verschwindende Vektorfeld $\vec{A}$ lässt sich in einen rotorfreien Teil $\vec{B}$ - **Punktquelle** und einen divergenzfreien Teil $\vec{C}$ **Elementar-Wirbel** zerlegen: $\vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$, $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{0}$, $\operatorname{div} \vec{C} = 0$, $\operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{C}$, $\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{B}$. Daher gibt es in Gradientenfeldern auch meist Quellen. **Helmholtz'scher Zerlegungssatz Arens p918** $\vec{v} = \vec{v}_Q + \vec{v}_W$ mit $\operatorname{rot} \vec{v}_Q = \vec{0}$ und $\operatorname{div} \vec{v}_W = 0$. Bei gegebenen Quellen q und Wirbeln $\vec{w}$ müssen nur vier

Poisson-Gleichungen $\Delta\Phi = q, \Delta A_i = w_i$ gelöst werden, was auf $\vec{v} = \text{grad}\ \Phi + \text{rot}\ \vec{A}$ führt. oder, wegen

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\text{div}\, \vec{v}(\vec{r})| \mathrm{d}V < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^3} |\text{rot}\, \vec{v}(\vec{r})| \mathrm{d}V < \infty$$

gilt

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_1(\vec{r}) + \vec{v}_2(\vec{r}) = -\text{grad}\, u(\vec{r}) + \text{rot}\, \vec{a}(\vec{r})$$

mit

$$u(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{div}\,' \vec{v}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V', \quad \vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\text{rot}\,' \vec{v}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V'$$

Helmholtz-Theorem: Zeigen Sie, dass rot grad und div rot identisch verschwinden. Das Vektorpotenzial erfüllt die **Eichbedingung** $\text{div}\, \vec{a}(\vec{r}) = 0$. Scheck: Klassische Feldtheorie p38, 123; Stratton: Electromagnetic Theory 1941; Baldassare Di Bartolo: Classical Theory of Electromagnetism 2004;

Statisches Magnetfeld verrichtet per **Lorentz-Kraft** keine Arbeit an bewegter Ladung: $\int \mathrm{d}s \cdot \vec{F}_{\text{Lorentz}} = \int (\mathrm{d}s \times \mathrm{d}\vec{s}/\mathrm{d}t) \cdot \vec{B} = 0$. Redinz: Forces and work on a wire in a magnetic field Am J Phys 79, 774 (2011); **Budzikiewicz: Massenspektrometrie** 1992, 2012[6];

Man übersieht die Sachverhalte besser, wenn man bei gegebenen Quellen, also Ladungen $\rho(\vec{r}')$ und Strömen $\vec{j}(\vec{r}')$, in Analogie zum **Coulomb-Gesetz** vom **Biot-Sarvart'schen Gesetz** für Volumen-, Flächen oder Linienstrom startet

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}a' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{\mathrm{d}\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Griffiths § 5.3.2.; Simonyi: Theoret Elektrotechnik §2.46

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^2}, \quad \mathrm{d}\vec{B}\,(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \mathrm{d}\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')^o}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \mathrm{d}V'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \mathrm{d}V' \overset{s.u.}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \mathrm{d}V' \quad \text{wegen} \quad \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Rebhan (s.u.= siehe unten) p12, 67;
Für spezielle Vektorfelder der Elektrodynamik gilt somit: $\text{div}\, \vec{B} = 0 \leftrightarrow \vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$ Magnetfeld, $\vec{B}$ hat ein **Vektorpotenzial** Kuhn, p289

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathrm{d}V' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad [\vec{A}] = \left[\frac{\varphi}{c}\right] = \frac{\text{Vs}}{\text{m}}$$

$\text{rot}\, \vec{E} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{E} = \text{grad}\, \varphi$ $\vec{E}$ hat ein (skalares) Potenzial

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad [\varphi] = \text{V}$$

Zentralkraftfeld
Quellen $\text{div}\, \vec{B} = 0$ und wirbelfreies Feld $\text{rot}\, \vec{B} = \vec{0}$ ist kann durch **Laplace-Gleichung** beschrieben werden $\Delta\phi = 0$ mit $\Delta_r u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \frac{\partial u}{\partial r})}{\partial r}$ für die **radiale** Komponente, siehe Seite 591. Zeigen Sie $\Delta(1/r) = 0$ für r ungleich 0 koordinatenfrei, nur mit der Definition von Divergenz und Gradient! **Laplace-Gleichung** und Gauß'scher Satz: Betrachte $\Delta(1/r) = \nabla \cdot \nabla r^{-1} = \nabla \cdot (-r^{-2}\hat{r}) = \nabla \cdot \vec{E}$ für $r > 0$ mit $\vec{E} = -r^{-2}\hat{r}$. Mit dem Gauß'schen Satz und dem Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega(r) = \frac{\mathrm{d}\vec{a} \cdot \hat{r}}{r^2}$ erhält man $0 = -4\pi + 4\pi = -\int_{\partial V_r} \mathrm{d}\Omega(r) + \int_{\partial V_\epsilon} \mathrm{d}\Omega(r) = -\int_{\partial V_r} \frac{\mathrm{d}\vec{a} \cdot \hat{r}}{r^2} - \int_{\partial V_\epsilon} \frac{\mathrm{d}\vec{a} \cdot (-1)\hat{r}}{r^2} = \oint_{\partial V_r \setminus \{\vec{0}\}} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{E} = \int_{V_r \setminus \{\vec{0}\}} \mathrm{d}V \nabla \cdot \vec{E} =$ muss $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = -\Delta(1/r) =$

0 für alle $r > 0$ sein. **Spiegel: Vectoranalysis and introduction to tensor analysis**, Schaum 1959 p124 Günter: Die Potentialtheorie 1957 p36ff;

Die **Laplace-Gleichung** ist eine **Mittelungsanweisung**:
$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \approx \frac{V(x+a) - V(x) - [V(x) - V(x-a)]}{2a} = 0$ bedeutet $V(x) = \frac{V(x+a) + V(x-a)}{2}$! Griffith Kap3.1.2. Darauf basiert die Relaxationsmethode zur Lösung der PDE, siehe Seite 597 und 597. Die Krümmung oder Änderung der Änderung der Funktion muss verschwinden. Harmonische Funktionen hassen lokale Extrema und nehmen ihre Extrema nur auf Randflächen an. Sei also f harmonisch und V ein Gebiet, auf dem f ein Extremum hat. Sei V echte Teilmenge eines größeren Gebietes U. Hat man jetzt einen Widerspruch? f wird in dem größeren Volumen U jenseits von V noch größer (wenn f auf dem V-Rand ein Extremum hatte), so dass dieses Extremum auf dem V-Rand eben kein Extremum der Funktion mehr im größeren Volumen U ist. Die **Extremwerte sind keine lokalen** Extremwerte, da man die noch größeren jenseits des Randes nicht 'sieht'. Hat eine harmonische Funktion in Innern eines Gebiets ein Extremum, so ist sie konstant. Am einfachsten ist, man betrachtet die Sattelfläche $f(x, y) = x^2 - y^2$. Auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe hat sie Maximum 1 bei (1, 0) und (-1, 0) und Minimum -1 bei (0, 1) und (0, -1). Auf der Kreisscheibe mit Radius 2 ist das Max. jetzt 4 und Min. -4, angenommen auch wieder auf dem Rand. **Lorenz: Funktionentheorie** 1997; Lang & Pucker: Math Meth p498; Wüst, Kreyszig 552ff, p912; Arens p1017, p1124; Jänich: Analysis f Physiker und Ingenieure p88ff **Gebietstreue und Maximumprinzip**. Meschkowski & Laugwitz: Meyers Handbuch über die Mathematik 1972^2 p5; Ist $z \to f(z)$ in G (= Gebiet =offene Menge) nicht konstant, aber homomorph und auf dem Rand ∂G stetig, so nimmt $f(z)$ das Maximum des absoluten Betrages für $G \cup \partial G$ (= Bereich, kompakt, also abgeschlossen) auf dem Rand ∂G an, Meschkowski: Mathematisches Begriffswörterbuch 1965^3 p168; **Behnke: Grundzüge der Mathematik**. Praktische Methoden und Anwendungen der Mathematik 1968 Bd1 Grundlagen der Mathematik, Arithmetik und Algebra, Bd2 Grundlagen der Geometrie. Teil A Elementargeometrie, Teil B Geometrie in analytischer Behandlung mit einer Einführung in die darstellende Geometrie und Topologie, Bd3 Analysis, Bd4 Geometrie und Statistik, Bd5 Rechenanlagen, Algebra und Analysis; Meinhold & Mitzlaff: Feld- und Potentialtheorie 1978 p176ff; Als Funktion der Dimension heißt **harmonisch**: **1d-Potenzial** $V(x) = ax + b$, **2d-Potenzial** $V(\rho) = a \log \rho$ wegen $\Delta_\rho = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right)$, **3d-Potenzial** $V(r) = a/r$, wegen $\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}$. Die **Laplace-Gleichung toleriert keine lokalen Extrema innerhalb eines Gebiets**, außer auf dem Rand, wo die Mittelung stoppt. Pelrine: Stabil in der Schwebe bleiben a la Werner Braunbek 1939 nur diamagnetische Körper, Levitation, SdW 2005 H2 p38-42 diamagnetische Lager, Mikromaschinen; Bedeutet **Earnshaw-Theorem** 1842: In quellenfreien statischen Feldern ist kein stabiles Gleichgewicht eines Probekörpers möglich! Beispiel: $\varphi(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ bedeutet wegen $\Delta\varphi(x, y, z) = 0$, also Krümmungsfreiheit in jedem Raumpunkt, $a + b + c = 0$, dass wenigsten eine Koeffizient negativ ist, also Sattelpunkt. Daher ist chemische Bindung durch eine statische Ladungsanordung nicht möglich. Dynamische Ladung wegen Dipolstrahlung instabil. Bleibt nur eine nichtstrahlende stochastische Bewegung a la Fokker-Planck-Gl, meint Schrödinger-Gleichung. Preuss & Boschke: Die chemische Bindung. Eine verständliche Einführung 1975; Coulson: Die chemische Bindung 1969; **Harmonische Funktionen** sind Lösungen der Laplace-Gleichung $\Delta f = 0$. Speziell für 2D siehe Seite 205. Ihre Gradientenfelder $\vec{F} = \operatorname{grad} f$ sind wegen $\operatorname{div} \operatorname{grad} f = \nabla \cdot \nabla f = 0$ quellenfrei und wegen $\operatorname{rot} \vec{F} = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times \nabla f = \vec{0}$ wirbelfrei. **Lösung der Poisson-Gleichung** $\Delta f = \rho$ ist $f = f_{\text{speziell}} + f_{\text{homogen}}$ mit **Helmholtz-Integral** $f_{\text{speziell}}(\vec{x}) = \int_V \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}' - \vec{x}|}$ und Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta f_{\text{homogen}} = 0$ und Erfüllung der **Dirichlet'schen** $f_{\text{homogen}}|_{\partial V} = f_0 - f_{\text{speziell}}|_{\partial V}$ oder $\frac{f_{\text{homogen}}}{\partial n'}|_{\partial V} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{f_{\text{speziell}}}{\partial n'}|_{\partial V}$ **Neumann'schen Randbedingung**. **Nabla-Kalkül:** $\operatorname{div} \vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$, also Kreuzprodukt quellenfreier Felder kann Quellen haben. $\operatorname{rot} \vec{u} \times \vec{v} = (\vec{v}\operatorname{grad})\vec{u} - (\vec{u}\operatorname{grad})\vec{v} + \vec{u}\operatorname{div} \vec{v} - \vec{v}\operatorname{div} \vec{u}$, also Kreuzprodukt wirbel- und quellenfreier Felder kann Wirbel haben. $\operatorname{grad} \vec{u} \cdot \vec{v} = \nabla(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u}\operatorname{grad})\vec{v} + (\vec{v}\operatorname{grad})\vec{u} + \vec{u} \times \operatorname{rot} \vec{v} + \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{u}$, **speziell** $\nabla e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \nabla \vec{k} \cdot \vec{r} = ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}[(\nabla \vec{k}) \cdot \vec{r} + (\nabla \vec{r}) \cdot \vec{k}] = ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}[\overleftrightarrow{0} \cdot \vec{r} + \mathbb{I} \cdot \vec{k}] = ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\vec{k}$, das Argument $\vec{k} \cdot \vec{r}$ kann als **Phasenebene** betrachtet werden, daher ist eine Änderung nur senkrecht dazu, also in $\vec{k}$-Richtung, möglich. Oder

man guckt doch auf die Koordinaten $\nabla\vec{k}\cdot\vec{r} = \nabla(k_x x + k_y y + k_z z) = \vec{k}$ oder mittels Indexkalkül $\vec{k}\cdot\vec{r} = k_n x^n$ und $\nabla\vec{k}\cdot\vec{r} = e^m\partial_m(k_n x^n) = e^m\delta^n_m k_n = e^m k_m = \vec{k}$, div $f\vec{v} = f\,\mathrm{div}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,f)\cdot\vec{v}$, rot $f\vec{v} = f\,\mathrm{rot}\,\vec{v} + (\mathrm{grad}\,f)\times\vec{v}$. Mit $\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ folgt $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot(\vec{C}\times\vec{D}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})(\vec{B}\cdot\vec{D}) - (\vec{A}\cdot\vec{D})(\vec{B}\cdot\vec{C})$, rot $(\Phi\vec{A}) = (\mathrm{grad}\,\Phi)\times\vec{A} + \Phi\,\mathrm{rot}\,\vec{A}$, grad $(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\mathrm{rot}\,\vec{B}) + \vec{B}\times(\mathrm{rot}\,\vec{A})$, div $(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{B}$, rot $(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A} + (\vec{B}\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\nabla)\vec{B}$, rot $(\mathrm{rot}\,\vec{A}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{A} - \Delta\vec{A}$. **rot und div bei zentralsymmetrischen Feldern:** Berechne rot $(r^n\vec{r})$ und div $(r^n\vec{r})$.

Die **magnetische Flussdichte** oder **Induktion** oder der magnetische Feldvektor oder das $\vec{B}$-Feld: $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu_0(1+\chi_M)\vec{H} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M})$, damit ist die **Magnetisierung** $\vec{M} = \chi_M\,\vec{H}$, wobei $\chi_M = \mu_r - 1$ die magnetische Suszeptibilität ist. **Diamagnetismus:** $\mu_r < 1$ oder $\mu_r - 1 = \chi_M < 0$. **Paramagnetismus:** $\mu_r > 1$ oder $\mu_r - 1 = \chi_M > 0$. Meist ist die **stoffbedingte Zusatzmagnetisierung** $|\chi_M| \approx 10^{-4}$ klein und **feldunabhängig**. Bei den **ferromagnetischen Stoffen** Eisen, Kobalt, Nickel bis $|\chi_M| \approx 10^4$. Feynman Bd2; Sommerfeld weistauf die Entsprechung der Feldstärke $\vec{E}$ und $\vec{B}$ hin, wobei er letztere lieber als Feldstärke des Magnetfeld hätte, weil beider auch bei Kraft auf Teilchen entsprechen. **Kraft eines Magnetpols** und **Lorentz-Kraft**. **Magnetisches Moment** m = Strom mal Fläche= IA = **Polstärke** mal **Polabstand** = Pl. Daher $P = IA/l$, $\vec{B} = \dfrac{\vec{F}}{P}$, [B]=N/Am=Nm/Am^2 =Vs/m^2. Purcell: Elektrizität und Magnetismus. Berkeley Physik Kurs 2 1976 p268, 1989[4]; Das magnetische Dipolmoment einer geschlossenen Stromschleife, die die Fläche A berandet, ist $\vec{m} = \frac{I}{2}\oint_{\partial A}\vec{r}\times d\vec{l} = \dfrac{IA}{2}$ **Grenzflächen** Nolting Bd3 p267ff Rebhan: Elektrodynamik p223; Greiner: Elektrodynamik Bd3 p230f **Vektorpotenzial bei $\vec{r}$ eines Stromkreises** beim Ursprung ist $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ mit dem magnetischen Dipolmoment der Stromschleife $\vec{m} = I\cdot$ Flächeninhalt der Stromschleife siehe Feynman II.1 Kap14-6; **Molekulares mikroskopisches Vektorpotenzial** $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}')|^3}$ mit magnetisches Dipolmoment = Kreisstrompol bei $\vec{r}' = \vec{0}$ im Fernfeld. Wegen $\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla\cdot\vec{B}) - \vec{B}(\nabla\cdot\vec{A})$. $\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r}) - r^2\vec{m}}{|\vec{r}|^5} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{3\hat{r}(\vec{m}\cdot\hat{r}) - \vec{m}}{|\vec{r}|^3}$. **Magnetfeld des Ringstroms** per Oersted $\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\mathrm{d}\vec{l'}\times\dfrac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$ mit $\mathrm{d}l' = R\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi}$ und $\vec{r}' = -R\hat{\rho}$ gibt im Drehzentrum $\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\varphi\hat{z}$ also $\vec{B}(\vec{r}=\vec{0}) = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}\hat{z}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\hat{z}$ siehe Greiner: Bd3 p216 $A_\varphi = \mu_0 I\dfrac{\pi R^2}{4\pi r^2}\sin\vartheta$, Flügge Bd3 p113, Hänsel Bd3 p70; **Ringstrom** = **Kreisstrom** des Elektron $I = \dfrac{q}{T} = \dfrac{-ev}{2\pi R}$ mit der Umlaufzeit des Elektrons T, seiner Bahnlänge $2\pi R$ und der Bahngeschwindigkeit $v = \dfrac{2\pi R}{T}$ gibt für das magnetische Bahn-Moment des Elektrons $m = IA = \dfrac{-ev\pi R^2}{2\pi R} = \dfrac{-evR}{2} = \dfrac{-eL_z}{2m}$. **Gyromagnetische Verhältnis** $\dfrac{e}{2m_e}$. Siehe auch Schmüser: Elektrodynamik Bd2 p19; $\vec{H}$ = **magnetische Erregung**. Landau & Liebscher vermeiden $\vec{B}$, weil sich $\vec{H}$ und $\vec{B}$ in der **mikroskopischen Elektrodynamik** = **Vakuum-Elektrodynamik** praktisch nicht unterscheiden und die Kovarianz der Gleichungen, also Spezielle Relativitätstheorie im Vordergrund steht, Landau/Lifschitz Bd2, Becker Bd1. Die Anwesenheit von Materie macht die Kovarianz schwerer, daher wird die **makroskopische Elektrodynamik** bei Landau/Lifschitz erst in Bd8 und bei Becker erst in Bd3 behandelt. Der Formenkalkül behandelt die Größen entsprechend ihrer Maßeinheiten V pro m und A pro m und der Energiedichteausdrücke symmetrisch. Purcell: Berkeley Kurs. Elektrizität & Magnetismus 1976 p287: **Magnetfeld** $\vec{H}$. **Induktionsfluss** $\Phi := \int\mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{B} = LI$ mit $[\Phi]$ = T m^2= Weber= 1 Wb = 1 Vs, [B]=Vs/m^2 und **Induktivität** $L = \dfrac{\Phi}{I}$ mit $[L] = 1 =$ Wb/A = 1 Henry = 1H = 1 Vs/A = 1 Ω s. Gegeben seien zwei ruhende Drahtschleifen (Griffiths §7.2.3). Gemäß **Biot-Sarvart'schem Gesetz** ist die magnetische **Induktion, die durch Schleife 1 am Ort der Schleife 2 verursacht** wird:

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi}I_1\oint_1\frac{\mathrm{d}\vec{l_1}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}$$

Die **magnetische Flussdichte** $\vec{B}$-Feld **bei Schleife 2** ist der **Induktionsfluss**

$$\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{a}_2 = M_{21}\, I_1 = \int (\nabla_2 \times \vec{A}_1) \cdot \mathrm{d}\vec{a}_2 = \oint \vec{A}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 = \oint_2 \left(\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2 = L\, I_1$$

Die **Gegeninduktivität** M_{21}, **Selbstinduktivität** oder kurz **Induktivität** L ist so durch die **Neumann'sche Formel** gegeben:

$$L = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_2 \oint_1 \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad \vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint_1 \frac{\mathrm{d}\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

Induktivität lange Spule mit Länge L: $\mathrm{rot}\,\vec{H} = I\hat{\varphi}$, daher aus Symmetrie $B_\varphi = B_\rho = 0$, parallel zur Spulenachse $\int_{\partial A} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = H_z L = I_{\text{eingeschlossen}} = IN_1$. $B_z = \mu_0 I N_2/L = \mu_0 I n_1$. Betrachte nun obigen Fluss durch eine Windung der zweiten Spule $\Phi_2 = \int \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = B_z \pi a^2 = \mu_0 I n_1 \pi a^2$ mit Radius a, also $\Phi_{N_2} = \mu_0 I n_1 \pi a^2 n_2 l = MI$, Induktivität ist dann $M = \mu_0 n_1 \pi a^2 n_2 l$. Tipler: Physik p893f; Griffiths p228, p312 Beispiel 5.9; Innerhalb der Spule: $\vec{B} = \mu_0 n I \hat{z}$, außerhalb $\vec{B} = \vec{0}$. Wilke, Schwarze, Geßner, Pfitzner, Heuer: Zur elektromagnetischen Induktion PdNPiS Bd53 2004 H5 p2-35;

Lorentz-Kraft als relativistischer Effekt macht $\vec{E}$ und $\vec{B}$ zu adäquaten Partnern. Schmüser: Elektrodynamik p163ff; Sexl & Schmidt: Raum, Zeit, Relativität 1990[3] p168-181; Bien: Magnetfeld als relativistische Begleiterscheinung des Coulombgesetzes PhysBl 30 1974 251ff; Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität 1964;

Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$, als Ersatz für Ladungs- und Stromverteilung, werden zunächst über ihre Kraftwirkung auf eine Punktladung mit q definiert: $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Feld ist nur Hilfsmittel in klassischer Mechanik. Erst durch endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung wird Feld zur Wirklichkeit. Landau & Lifschitz: Klassische Feldtheorie p50; Basil Mahon: How Maxwell's equations came to tight, Nature physics 9 2015 2-4; Mahon & Forbes: Faraday, Maxwell, and the the electromagnetic field: How two men revolutionized physics 2014; **Feld-Idee** von Faraday. Math Durchdringung durch Maxwell. Everitt: James Clerk Maxwell. Physicist and Natural Philosopher 1975; **Maxwell-Gleichungen:** Aus 8 Gl für 6 Variablen werden 4 Gleichungen für 4 Variablen $\vec{A}, \varphi$, wenn man die durch die **Gauß'schen Gesetze** $\nabla \cdot \vec{E}(t,\vec{x}) = \dfrac{\rho(t,\vec{x})}{\epsilon_0}$, $\nabla \cdot \vec{B}(t,\vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{B}(t,\vec{x}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}(t,\vec{x})$ gegebenen **Weltanfangsbedingungen** Schulz p212 weglässt. Die für $\vec{E}$ und $\vec{B}$ notwendigen Gleichungen sind das durch Maxwell mit $\dfrac{\partial \vec{D}(t,\vec{x})}{\partial t}$ erweiterte Ampere-Gesetz $\mathrm{rot}\,\vec{H}(t,\vec{x}) = \vec{j}(t,\vec{x}) + \dfrac{\partial \vec{D}(t,\vec{x})}{\partial t}$ und das **Faraday'sche Induktionsgesetz**: Jede Änderung in der Zahl der magnetischen Kraftlinien, Sommerfeld: Bd3 p12, die ein beliebiges, aber **festes** Flächenstück σ durchsetzt, ruft in dessen Berandung $\partial\sigma$ eine ihr gleiche, aber dem Schraubensinn nach entgegengesetzte elektrische Ringspannung hervor. Induktionsgesetz steckt bereits in der zeitlichen Änderung des Wirbels des Vektorpotentials, denn für das elektrische Feld gilt $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi - \vec{A}_t$. Der Wirbel des elektrischen Feldes $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mathrm{rot}\,\vec{A}_t = -\vec{B}_t$. Weiland: **Die Diskretisierung der Maxwell-Gleichungen** PhysBl42 1986 H7 p191; Zischka: Pioniere der Elektrizität. Vom Bernstein bis zum Zyklotron 1958; **Maxwell-Arbeiten im Original** a] Tricker: Die Beiträge von Faraday und Maxwell zur Elektrodynamik 1966, 1974; b] Maxwell: Physikalische Kraftlinien 1861/62 = Ostwalds klassiker Nr102 von Boltzmann 1898; Maxwell: Ueber Faraday's Kraftlinien (1855, 1856) Ostwalds klassiker Nr69 Boltzmann 1895; **Emde: Quirlende elektrische Felder**. Sammlung Vieweg, Heft 121 1949; Quirlende Felder verschleiern den Tensorcharakter der Feldstärke! Föppl: Lebenserinnerungen: Rückblick auf meine Lehr- und Aufstiegjahre 1925; Max Abraham, Heermann: Von der Zahl zum Gesetz 1974; Sauter: Von der physikalischen Hypothese zum Naturgesetz. Vortrag 1955; Vektorpotential des Stromes I in Richtung $\hat{z}$ geraden Drahtes $\vec{A}(r_\perp) = \hat{z}\dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{\mathbb{R}^3} \dfrac{\mathrm{d}z'}{(z'/r_\perp)^2}$ durch Schließung des Strom im Unendlichen damit ein einfach-zusammenhängendes Gebiet resultiert, siehe Schaefer III.1 p200 Sperrgebiet Fließbach & Walliser Kap12, p207; hier leichter lokale Rechnung per $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$. **Becker & Sauter:** Theorie der Elektrizität Bd1 p121: Dieses Gesetz für den Fall des **ruhenden Draht** im zeitlich veränderlichen Magnetfeld ist **nicht per bewegtem Rand** = bewegte Ladung = **Lorentz-Kraft** herleitbar. Das Faraday'sche Induktionsgesetz ist viel weitgehender. Hier kann nicht von der **stromtreibenden Kraft**,

EMK des Magnetfeldes gesprochen werden, da ja eine ruhende Ladung wegen fehlender Lorentz-Kraft im Magnetfeld keine Kraft erfährt. Das geht nur über die Idee, dass der zeitlichen Änderung des Flusses über einer **festen Kontur** einen **Wirbel des elektrischen Feldes** darstellt. Man braucht für diese Vorstellung **keinen Draht!** Gemäß Becker & Sauter, **Kaschlun & Ebert:** Prinzipien der klassischen Elektrodynamik 1970 Kap6, p96; Liebscher: Theoret Physik 1973 p229: Im mit $\vec{v}$ bewegten Inertialsystem ist auf Grund des totalen Differenzials die Lorentz-Kraft zu berücksichtigen

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A \mathrm{d}\vec{a}\cdot\vec{B} = -\int_A \mathrm{d}\vec{a}\cdot\left[\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \vec{v}\,\mathrm{div}\,\vec{B} - \mathrm{rot}\,(\vec{v}\times\vec{B})\right] = \oint_A \mathrm{d}\vec{r}\cdot(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

Hänsel & Neumann: Bd3 p103 & 317, und **Fließbach:** Elektrodynamik Kap16 ist zwischen **raumfester** $\oint \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = -\int\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{a}$ und **körperfester** Beschreibung $\oint \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{a}$ zu unterscheiden! Körperbewegung durch den Raum führt auf **substanzielle Ableitung**, siehe Seite 183. $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ und $\mathrm{rot}\,\vec{E}(t,\vec{x}) = -\frac{\partial\vec{B}(t,\vec{x})}{\partial t} \to \mathrm{rot}\,\vec{E} + \dot{\vec{A}} = \vec{0} \to \vec{E} + \dot{\vec{A}} = -\mathrm{grad}\,(\varphi+\varphi_0) + \vec{C}$. Wegen Statik $\partial_t = 0$ und für den Fall dass auf Probeladungen keine Kraft wirkt $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = \vec{0}$ gilt $\varphi_0 = \mathrm{const}$. Also $\vec{E}(t,\vec{x}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(t,\vec{x}) - \frac{\partial\vec{A}(t,\vec{x})}{\partial t}$ führen auf die zu den Maxwell-Gleichungen äquivalenten - wenn auch hässlichen - **Potenzialgleichungen**, also vier Gleichungen für vier - wenn auch **nicht eindeutigen** - Potenzialvariablen zu bestimmen sind. Kurz: **Schmüser: Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker**, p140 $\partial_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = j^\nu$

$$\Delta\varphi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{A}) = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}, \quad \left(\Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla\underbrace{\left(\underbrace{\nabla\cdot\vec{A}}_{=I_C\ \text{Coulomb-}} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)}_{=I_L\ \text{Loren(t)z-Eichung}} = -\mu_0\vec{j}$$

die aber nur **eingeschränkt eichinvariant** bzgl. der Transformationen $\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}\,\chi$ und $\varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$ sind. Wahl $I_C = 0$ und $I_L = 0$, wobei $\Box\chi = 0$ für die Eichfunktion $\chi(t,x,y,z) \in C^2$ erfüllt sein muss. Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953 Bd1 p210f; Jackson: Elektrodynamik p279f Kap6.3; Scheck: Klassische Feldtheorie p41, p123; Die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ ändern sich bei dieser Transformation nicht, wenn man bei Addition von $\mathrm{grad}\,\chi$ zum Vektorpotenzial und gleichzeitig $\frac{\partial\chi}{\partial t}$ vom elektrischen Potenzial abzieht. Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953 Bd1 p210f; $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{C}{r_\perp}\hat{\varphi} = A_\varphi\hat{\varphi}$ ist wegen $\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}\right] = \vec{0}$ klassisch unsichtbar, aber quantenmechanisch messbar! Aharonov-Bohm-Effekt. Audretsch: Verschränkte Welt. Faszination der Quanten 2002; Audretsch: Verschränkte Systeme. Quantenphysik auf neuen Wegen 2005, 2008; Bergmann & Schäfer: Bd4 Teilchen p606; **Brandt: Geschichte der modernen Physik** 2011 p96 Schwichtenberg: Physics from Finance. A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and **fiber bundles** 2017; **Coulomb-Eichung:** Ist aber **nicht lorentz-invariant!** Man braucht eichinvariante/kovariante Ableitung! **Moriyasu: An elementary primer for gauge theory** 1983 p41f; Wählt wie in **Elektrostatik** $\nabla\cdot\vec{A} = 0$, so ist man **scheinbar** wieder bei der **Poisson-Gleichung**

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}V'\frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

mit scheinbarer **akausaler** oder **instantaner Feldgrößenübertragung**. Aber $\varphi(\vec{r},t)$ ist **keine klassisch messbare Größe!** Aber quantenmechanisch messbar/wirksam durch Aharonov-Bohm-Effekt. Wegen Lorentzkraft $\vec{F} = q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) = q(-\nabla\phi - \partial\vec{A}/\partial t + \vec{v}\times\mathrm{rot}\,\vec{A}) = q[-\nabla(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}) - \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}]$. Gibt Lagrangefunktion für freies geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld $\mathcal{L} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 - q(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A})$. Bedeutet Impuls des freien Teilchens $\vec{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}} = m\vec{v} + q\vec{A}$ oder Geschwindigkeit des freien Teilchens $\vec{v} = vecp - q\vec{A}$.

Für $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ braucht es aber noch $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, und φ-Änderung passiert danach erst nach der Übertragungszeit/**Verspätung** $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ zur **retardierten Zeit**, also bei der um r/c **zurückverlegten Zeit** - Sommerfeld: Bd2 p135 & 232 - oder zum früheren Zeitpunkt $t_r = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ mit $\vec{r}$ = **Aufpunkt** oder **Feldpunkt** und $\vec{r}'$ **Quellpunkt** oder **Integrationspunkt**. **Lienard-Wiechert-Potenziale:** Wagner: Bd2 p44 Nach Heitler: The quantum theory of radiation 1954 p19 $\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{r+\vec{v}(t')\cdot\vec{r}/c}\right|_{t-r/c}$. Greiner: Bd3 p433 $\phi(\vec{r},t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{\left(1-\frac{\dot{\vec{r}}(t')\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{c|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\right)|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\right|_{t'=t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}{c}}$. Wenn das Elektron zum Aufpunkt fliegt, so bedeutet der Nenner $|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|$ wegen der verspäteten Wirkung ein kleineres Potential und der Term $\left(1-\frac{\dot{\vec{r}}(t')}{c}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}_0(t'))}{|\vec{r}-\vec{r}_0(t')|}\right)$ prozentual bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit $\frac{\dot{\vec{r}}(t')}{c}$ ein größeres Potenzial. **Gravitationspotential mit einer endlichen Geschwindigkeit** $V = \frac{\mu}{r\left(1-\frac{1}{c}\frac{dr}{dt}\right)^2}$ analog zum Lienart-Wiechert-Potential macht Perihelverschiebung. Lies **Paul Gerber: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation** 1902, Wiederabdruck In: AnnPhys52 1917 445ff;

Das bei **Coulomb-Eichung** nötige Vektorpotenzial ist besonders schwer zu berechnen:

$$\Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\epsilon_0\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) - \mu_0\vec{j}.$$

Eine weitere freie Verfügbarkeit nutzt man, um per **Ludvig Lorenz-Lorentz-Eichung**

$$\nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = 0, \quad \partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{c\partial t} + \nabla\cdot\vec{A} = 0, \quad A_\mu = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A}\right), \quad A^\mu = \begin{pmatrix}\phi/c\\ \vec{A}\end{pmatrix}$$

die Maxwell-Gleichungen für die Potenziale zu entkoppeln, was zu einer demokratischen Behandlung von φ und $\vec{A}$ oder **vier-dimensionalen Potenzialtheorie** - Sommerfeld: Bd2 p229; Eine potenzialtheoret Reduktion nach Weyl und **Müller: Grundprobleme der mathematischen Theorie der elektromagnet Schwingungen** 1957 p1, 16: Für die **komplexen Feldgrößen** gilt $\nabla\times\vec{H} + i\omega\epsilon\vec{E} = \vec{j}$, $\nabla\times\vec{E} - i\omega\mu\vec{H} = -\vec{j}'$, $\nabla\cdot\vec{j} - i\omega P = 0$ und $\nabla\cdot\vec{j}' - i\omega P' = 0$, wobei P, P' elektrische und magnetische Ladungsdichten sind. Max Wagner: Elemente der theoretischen Physik 2, 1977 p43 **Maxwell-Gl für die Potenziale**:

$$\Delta\vec{A} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}, \quad \Delta\varphi - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}, \quad \Box\varphi = -\frac{\varrho}{\epsilon_0}, \quad \Box\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$$

wobei **Quabla oder Kiste** $\Box = \Delta - \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2}$ der **d'Alembert-Operator** ist. In SRT ist Signatur aber -2 $\Box := \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} - \Delta$ wegen **kovariantem** Vierer-Gradient $\partial_\mu = (\partial_{ct}, \nabla) = (\partial_{ct}, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$ und den heraufgezogenen kontravarianten Komponenten $\partial^\mu = \eta^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\partial^{ct}, -\partial^x, -\partial^y, -\partial^z\right)$ Bei Ludvig **Lorenz-Eichung** reduziert sich die E-Dynamik auf die Lösung der obigen **inhomogenen Wellengleichung**.

Grundlegend für das Verständnis der **Ausstrahlung** em Wellen ist die Lösung der inhomogenen Wellengleichung für **zeitabhängige Potenziale**, in Fourier-transformierter Form zu einer in der Zeit algebraischen Gleichung wird = Helmholtz-Gleichung, Liebscher p241, Hertel: Theoret Physik p231 oder Scheck: Elektrodynamik, p174ff oder Reineker et al: Theor Physik 2 p335ff. Die **retardierter Zeit** taucht automatisch im Argument der **retardierten Green-Funktion** $4\pi\,G^{\text{ret}}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(t - \left[t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right])$ auf. Das Signal, das von der Quelle bei $\vec{r}'$ zur Zeit t' ausgeht, erreicht den Aufpunkt zur Zeit $t = t'$+ **Laufzeit des Signals von** $\vec{r}' \to \vec{r}$, Abstand sei R. Es muss also $t' \to t' + R/c$ gesetzt werden. In Viererschreibweise

$\delta(x^\mu x_\mu)$, also $c^2(t-t')^2 = R^2$, $c(t-t') = R$, **Retardierung um das Zeitintervall** $t - t' = R/c$ oder $t - t' - R/c = 0$, wegen **Verspätung** der **verursachenden** mit gestrichenen Raum-Zeit-Variablen bezeichneten Größen. Wegen **Kausalität** $t - t' = \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} \geq 0$ oder speziell auf dem Lichtkegel $t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c} = 0$ muss die **Heaviside-Funktion** benutzt werden. Je nach Sicht tritt wegen der **Nahwirkungstheorie** $c < \infty$ die **Wirkung im Aufpunkt erst zum verzögerten Zeitpunkt** $t_{\text{ret}} = t - R/c$ ein oder $t'_{\text{ret}} = t' + R/c$, Nolting 3 p313 Kap4.5.1. oder Reineker et al: Elektrodynamik 2006 p340ff. **Retardierten Green-Funktion:**

$$4\pi\, G^{\text{ret}}_{\vec{r}}(\vec{r},\vec{r}',t,t') = \frac{\Theta(t-t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(t'-t_{\text{ret}}) = \frac{\Theta(t-t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(t'-\left(t-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|\right)) = \frac{\Theta(t-t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(t'-t+\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)$$

$$\{\varphi(\vec{r},t),\vec{A}(\vec{r},t)\} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\int \mathrm{d}^3r' \int \mathrm{d}t' \{\rho_g(\vec{r}',t'),\frac{1}{c^2}\vec{j}_g(\vec{r}',t')\} G(\vec{r}-\vec{r}',t-t')$$

mit ρ_g für gesamte Ladungsdichte, $\vec{j}_f = \dot{\vec{D}}$ **Feld- oder Verschiebungs-Stromdichte**, im Unterschied zur eigentlichen Stromdichte $\vec{j}_g$: rot $\vec{H} = \vec{j}_g + \vec{j}_f$. Wagner Bd2 p34, 38. Die Green'schen Funktionen der Wellengleichung $\Box D_G(x) = \delta(x)$ findet man per Fourier-Darstellung

$$D_G(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathrm{d}^4k \tilde{D}_G(k) e^{-ikx}$$

Mitter: Elektrodynamik p243ff; Liebscher: Theoretische Physik 1973 p240ff; Die Green'schen Funktion der Wellengleichung ist nur auf dem Lichtkegel von Null verschieden:

$$G^{\text{av/ret}}(\vec{r},c\,t) = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(ct \pm |\vec{r}-\vec{r}'|)$$

Das Verschwinden der Green'schen Funktion außerhalb des Lichtkegels entspricht der Tatsache, dass sich Signale mit c ausbreiten. **Die Wirkung eines Quellpunktes macht sich nur auf dessen Lichtkegel unmittelbar bemerkbar.**
Speziell für eine bewegte Punktladung ist die Ladungsdichte $\rho(\vec{r}',t') = e\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t'))$ also

$$\varphi(\vec{r},t) = \int \mathrm{d}V' \int \mathrm{d}t' \frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta(t-t'-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|)\,\delta(\vec{r}'-\vec{r}_e(t')) = e\int \mathrm{d}t' \frac{\delta(t-t'-\frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|)}{|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|} \quad \text{mit} \quad t' = t - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|$$

also rekursiv. Speziell für $\vec{r}_e(t') = vt'\hat{x}$ und $\vec{r} = x\hat{x}$ gibt $t' = t - \frac{1}{c}|x - vt'|$ bedeutet für $x > vt'$ die Gl $t' = \frac{t-\frac{x}{c}}{1-\frac{v}{c}}$. **Oder mit der Substitution** $-u(t') = t - t' - \frac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}_e(t')|$ folgt $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t'\left[1 - \frac{\vec{v}_e(t')\cdot\vec{R}(t')}{c\,R(t')}\right]$
mit dem Abstandsvektor $\vec{R}(t') = \vec{r} - \vec{r}_e(t')$, der von der bewegten Ladung e zum retardierten Zeitpunkt $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ auf den Mess-/Feld- oder Aufpunkt $\vec{r}$ zeigt - **also am Aufpunkt in die retardierte und damit tatsächliche Wirkungsrichtung, statt in die momentane Wirkungsrichtung zeigt** - und dem Geschwindigkeitsvektor $v_e(t') = \dot{\vec{r}}_e(t')$ des Teilchens. Schließlich folgt für das Potenzial der implizite Ausdruck

$$\varphi(\vec{r},t) = \frac{e}{R(t')}\frac{1}{1-\frac{\vec{v}_e(t')\cdot\vec{R}(t')}{c\,R(t')}} \quad \text{mit} \quad t' = t - \frac{R(t')}{c}$$

Greiner: Bd3 p432f, Sommerfeld: Elektrodyn **Herglotz** 1904 4-D retardierte Potenzial mit imaginärer Zeit. Damit wird das elektrische Potenzial auch imaginär, was auf das relativistsche Viererpotenzial hinweist.

Stratton: Electromagnetic Theory 1941;

Oberflächenintegral eines Skalarfeldes: $\vec{F}(\vec{r}) = p(\vec{r})\mathrm{d}\vec{A}(\vec{r})$ ist für $p = \text{const}$, also Luftballon in Raumstation, $\oint \mathrm{d}\vec{F} = \oint p\mathrm{d}\vec{A} = p\oint \mathrm{d}\vec{A} = \vec{0}$ wegen $\oint \mathrm{d}\vec{A} = \hat{\imath}\oint \mathrm{d}x + \hat{\jmath}\oint \mathrm{d}y + \hat{k}\oint \mathrm{d}z = \vec{0}$.

Für das **Volumenintegral der Stromdichte** einer **lokalisierten Stromverteilung** oder Weltstrommittel gilt stets $\int_\Omega \mathrm{d}V'\vec{j}(\vec{r}') = \vec{0}$ Panofsky & Phillips: Classical Electricity and Magnetism 1955 p132, Jänich: Mathe2 p214 oder **Mitter: Elektrodynamik** 1990 p242; Jackson Kap5.6 Magnet Feld lokalisierter Stromverteilung: Betrachte $\nabla_{\vec{x}}\cdot(f(\vec{x})g(\vec{x})\vec{j}(\vec{x})) = g\vec{j}\cdot\nabla f + f\vec{j}\cdot\nabla g + fg\nabla\cdot\vec{j} = j_i$ für $f(\vec{x}) = 1$ und $g(\vec{x}) = x_i$ und Magnetostatik folgt $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ wegen Gauß'schem Satz $\int_V \mathrm{d}V j_i = \int_V \mathrm{d}V\nabla\cdot(fg\vec{j}) = \int_{\partial V} fg\vec{j}\cdot\mathrm{d}A \overset{!}{=} 0$, weil der Weltrand gerade dadurch definiert ist, dass da nichts rein oder raus geht. Hinter dem Rand der Welt ist wirklich Schluss. Oder kürzer: Wegen $\nabla\cdot(x\vec{j}) = j_x + x\nabla\cdot\vec{j} = j_x$ ist $\int_V \mathrm{d}V j_x = \int_V \mathrm{d}V\nabla\cdot(x\vec{j}) = \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{A}\cdot\vec{j}x \overset{!}{=} 0$, weil durch den Rand bei $x = \infty$ keine Ström fließen - die Welt ist dahinter ja zuende: $\vec{j}(\infty) = \vec{0}$. **Aber:** $\int_{\mathbb{R}^3}$ oder $\int_{-\infty}^{\infty}$ oder Raum als Ganzes oder Randbedingung im Unendlichen **meinen nicht** das **Ende der Welt** oder den **Rand des Universums**, sondern gemäß Fock: Theorie von Raum, Zeit und Gravitation 1955, 1960 pXIV die Idee der Feldtheorie, dass das Feld an den betreffenden Orten als **verschwindend klein angesehen werden darf im Verhältnis** zu den sonst betrachteten Felder. Beim Atom ist $\infty \approx 10^{-8}$ m, bei einer Galaxis $\infty \approx 1000$ Lj und bei einem Galaxienhaufen $\infty \approx 10^8$ Lj. Bei **Rebhan: Elektrodyn** p234 am klarsten; Fließbach & Walliser: Arbeitsbuch,§12.9 p209; Allgemein gilt die Identität $(\vec{j}\cdot\nabla)\vec{x} = \vec{j}$ a] Formal ist div $\vec{j} = -\dfrac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Wegen $\nabla(\vec{x}\cdot\vec{j}) = \nabla\cdot\vec{x}\vec{j} + \vec{x}\nabla\cdot\vec{j} = 0$ gilt speziell für die erste Komponente $\nabla\cdot(x\vec{j}) = \nabla x\cdot\vec{j} + x\nabla\cdot\vec{j} = j_x$. Mit dem Gauß'schen Satz ist $\int_\Omega \mathrm{d}V\nabla\cdot(x\vec{j}) = \int_{\partial\Omega}\mathrm{d}\vec{A}(x\vec{j}) = 0$ weil Stromschleife im Endlichen, also $\vec{j} = \vec{0}$ auf dem Rand. Daher $\int_\Omega \mathrm{d}V j_x = 0$. b] physikalisch verständlich: Wegen $\vec{j} = \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}\vec{A}^0$ und $j_x = \dfrac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$ gilt $\int_\Omega \mathrm{d}V j_x(\vec{r}) = \int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\dfrac{\mathrm{d}I_x}{\mathrm{d}y\mathrm{d}z} = \int_{\partial\Omega}\mathrm{d}I_x\mathrm{d}x = 0$, wobei $\partial\Omega$ eine Schleife längs eines beliebigen Schnittes des Volumens und der y-z-Ebene sei. Damit ist $\int_\Omega \mathrm{d}V\vec{j}(\vec{r}) = \sum_{i\in\text{Loops}} I_i \oint \mathrm{d}\vec{x} = \sum_i \vec{I}_i = \vec{0}$, weil in jeder Schleife ein konstanter Strom I_i fließt.

Die **Kontinuitätsgleichung** folgt wegen der **Ladungserhaltung** gemäß **Edminster: Electromagnetics**, Schaum 1979, 1995[2] p82; **Lang & Pucker**: Mathematische Methoden in der Physik; unmittelbar aus der Division der Gleichung

$$\int_{\partial V}\vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{a} = I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \varrho\,\mathrm{d}V$$

mit $\mathrm{d}V$, da die linke Seite der Definition der Divergenz entspricht: $\dfrac{\partial\varrho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$ oder aus Divergenz des erweiterten Ampere'schen Gesetzes/Ampere-Maxwell-Gleichung. Siehe auch Seite 310 und 567.

Ladungsdichte

$$\rho(\vec{x}) = \frac{Q}{V} = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{n_+ e - n_- e}{V} = \rho_{\text{gebunden/Polarisation}} + \rho_{\text{frei/wahr}}$$

mit $N = n_+ + n_-$ und $L_{\text{typisch}} \gg \sqrt[3]{V} \gg 10^{-13}$ m. Beachte, dass nur die **freien Ladungen**, also Ladungen, die sich um makroskopische Entfernungen verschieben lassen, wie die Metallelektronen, $\rho_{\text{frei/wahr}}$ bei div $\vec{D} = \rho_{\text{frei/wahr}}$ gemeint sind. **Gebundene Ladungen** lassen sich nur um mikroskopische Distanzen verschieben sind z.B. Atomkerne. Burmeister: Elektrodynamik, PfL10 p61; Mit dem **dualen elektromagnetischen Feldstärketensor** $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}F_{\varrho\sigma}$ lauten die **kovarianten homogenen Maxwell-Gl** kurz $\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0$ **Lagrangedichte der Elektrodynamik** = $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = -\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$. Scheck: Theoretische Physik 3. Klassische Feldtheorie 2003 p155ff Maxwell-Lagrange-Dichte $\mathcal{L}(x^\mu, A_\alpha, \partial_\mu A_\alpha) = -\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}(A_\alpha)F^{\mu\nu}(A^\alpha) - \mu_0 A_\mu j^\mu$ mit den unabhängigen Raum-Zeit-Koordinaten $\dfrac{x^\mu}{x^\nu} = \delta_{\mu\nu}$, und den (von einander unabhängigen) verallgemeinerten Koordinaten = dynamische Zustands-Variablen, die den Zwangsbedingungen gehorchen. Bedeutet per Euler-Lagrange $\partial_\mu\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu A_\alpha} = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\alpha}$ die inhomogenen Maxwell-Gleichungen als Bewegungsgleichungen. Problem ist die Lorenz-Eichinvarianz $\partial_\alpha A^\alpha(x) = 0$, die für Abhängigkeiten sorgt und $\dfrac{A^\alpha}{A^\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ stört. p171; Fließbach: Elektrodynamik 2005 p166 Kovariante Maxwell-Gleichungen und p176ff Lagrange-Formalismus; Goldstein: Mechanik 1950[1], 1978[1] p393ff, p404ff und 2002[3] p323ff, p617f Spannungstensor $\mathrm{d}\vec{F} = T\cdot\mathrm{d}\vec{a}$, p636ff; Wentzel: Einführung in die Theorie der Felder 1943 (Krbek Eigentum) p107,

p120; Hertel: Theoretische Physik 2007 p223f; **Maggiore: A Modern Introduction to Quantum Field Theory** 2005 p69; **Ryder: Quantum Field Theory** 1996[2] p64ff; Nolting: Grundkurs theoretische Physik Bd4. Spezielle Relativitätstheorie 2002 p63ff kovariante Formulierung der Elektrodynamik;

Die **homogenen Maxwell-Gleichungen** stellen Zusammenhang von Potenzialen und $\vec{E}$ und $\vec{B}$ her. Sie definieren also neben ihrer Anschaulichkeit auch die Potenziale: Quellenfreiheit $\operatorname{div}\vec{B}=0$ bedeutet $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$ und das Faraday-Gesetz = zeitliche Flussänderung über einem Gebiet bedeutet auf dessen Berandung ein elektrisches Feld selbst bei Abwesenheit von Materie $\vec{B}_t+\operatorname{rot}\vec{E}=\vec{0}$ bedeutet $\operatorname{rot}(\vec{A}_t+\vec{E})=-\operatorname{grad}\phi$. Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen wie das Gauß-Gesetz $\operatorname{div}\vec{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ und das Ampere'sche Gesetz $\operatorname{rot}\vec{H}=\vec{j}+\vec{D}_t$. Sie bedeuten dynamische Gleichungen oder Bewegungsgleichungen und verknüpfen Quellen ρ, $\vec{j}$ mit den Feldern. So hat man $A^\mu=(\phi/c,\vec{A})^T$.

Fields Minkowski space: $\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}=0$ und $\partial_\alpha F^{\alpha\beta}=\mu_0 J^\beta$. Potentials (any gauge) Minkowski space: $F_{\alpha\beta}=2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$ und $2\partial_\alpha\partial^{[\alpha}A^{\beta]}=\mu_0 J^\beta$. Potentials (Lorenz gauge) Minkowski space

$F_{\alpha\beta}=2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$ $\partial_\alpha A^\alpha=0$ und $\partial_\alpha\partial^\alpha A^\beta=\mu_0 J^\beta$ Fields Any spacetime $\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}=$ $\nabla_{[\alpha}F_{\beta\gamma]}=0$ und $\dfrac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})=$ $\nabla_\alpha F^{\alpha\beta}=\mu_0 J^\beta$

Potentials (any gauge) Any spacetime (with topological restrictions)

$F_{\alpha\beta}=2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$ $=2\nabla_{[\alpha}A_{\beta]}$ $F_{\alpha\beta}=2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$ $=2\nabla_{[\alpha}A_{\beta]}$ und $\dfrac{2}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\partial_{[\mu}A_{\nu]})=$ $2\nabla_\alpha(\nabla^{[\alpha}A^{\beta]})=\mu_0 J^\beta$ Potentials (Lorenz gauge) Any spacetime (with topological restrictions) $F_{\alpha\beta}=2\partial_{[\alpha}A_{\beta]}$ $=2\nabla_{[\alpha}A_{\beta]}$ $\nabla_\alpha A^\alpha=0$ und $\nabla_\alpha\nabla^\alpha A^\beta-R^\beta{}_\alpha A^\alpha=\mu_0 J^\beta$. Flügge: Handbuch der Physik Bd3-1. Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie 1960; Žangwill: Modern Electrodynamics 2013 p916 Kap24 Lagrange'sche Beschreibung, p959 Wie man die Minuszeichen in der SRT in den Griff bekommt.; Waser: On the Notation of Maxwell's Field Equations 2000 pdf; Jack: Physical Space as a Quaternion Structure I. Maxwell Equations. A Brief Note, arXiv:math-ph/0307038; Arminjon: On the equations of electrodynamics in a flat or curved spacetime and a possible interaction energy, Open Physics16 2018 p488, arXiv:1810.05520;

Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik = Lagrangedichte des freien Spinorfeldes + freies Photonfeld Kopplungsterm wegen lokaler Eichinvarianz:
$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}}=\sum_n\bar{\psi}_n(i\gamma^\mu\partial_\mu-m_n)\psi_n-\dfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\sum_n q_n\bar{\psi}_n\gamma^\mu A_\mu\psi_n$.. Das freie Spinorfeld ψ gehorcht dabei der Dirac-Gleichung und beschreibt Fermionen. In der **Lagrangedichte** tritt der Lorentz-invariante Term $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}=2\left(B^2-\frac{E^2}{c^2}\right)$ auf. **Pseudoskalare Invariante:** $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}F^{\alpha\beta}F^{\gamma\delta}=\frac{8}{c}\left(\vec{B}\cdot\vec{E}\right)$, mit der Konvention $\epsilon_{0123}=+1$. $\det(F)=\frac{1}{c^2}\left(\vec{B}\cdot\vec{E}\right)^2$. Der **Energie-Impuls-Tensor** $T^{\mu\nu}$ der ART für das elektromagnetische Feld wird aus $F^{\alpha\beta}$ gebildet: $T^{\alpha\beta}=F^{\alpha\gamma}F_\gamma{}^\beta-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\nu\mu}$ **Frankel: The Geometry of Physics**. An Introduction 2011[3] p118 ff;

Aus dem **Gauß'schen Gesetz** $\operatorname{div}\vec{D}=\rho_{\mathrm{wahr/frei}}$ und $\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi$ folgt $\Delta\varphi=-\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$. **Wellengleichung** folgt aus $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H}$
Aus $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}$ oder $\int_{\partial\Omega}\mathcal{J}^2=\int_\Omega \mathrm{d}\mathcal{J}^2$ folgt die **Kontinuitätsgleichung**

$$0=\nabla\vec{j}+\dot{\rho},\quad \frac{\partial\sigma^3}{\partial t}+\mathrm{d}\mathcal{J}^2=0$$

mit der **3-Form** oder dem **Ladungselement - gemäß Sommerfelds Idee des Rechnens mit kleinen Größen** - $\sigma^3=\rho(x)\,\mathrm{vol}^3$, deren Integral über ein beliebiges Gebiet die eingeschlossene Ladung $Q(\Omega)=\int_\Omega\sigma^3$ gibt, wobei der Skalar oder die 0-Form ρ die **Ladungsdichte** ist.
Stromdichte im Draht ist bei Gleichstrom ist gleichverteilt $j(r_\perp)=j_0\chi_{[0,R](r_\perp)}$, bei Wechselstrom mit

steigender Frequenz hat man als Dichte eine U-Funktion $j(x) = j_0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ für $x \in [-1,1]$. Sommerfeld: Elektrodynamik p152; **Stromdichte** ist **Pseudo-2-Form** in kartesischen Koordinaten

$$\vec{j} = \rho\,\vec{v}, \quad j^\mu = \begin{pmatrix} c\,\rho \\ \vec{j} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}^2 = \rho[v_1 \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + v^2 \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + v^3 \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y], \quad \mathcal{J}^2 = i_{\vec{j}} \mathrm{vol}^3$$

mit der **Volumen-pseudo-Form**

$$\mathrm{vol}^3 := o(\partial_x, \partial_y, \partial_z)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z,\ \mathrm{vol}^n = o(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n = o(x)\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n = o(y)\left|\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\right| \mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$$

wobei o die **Orientierung** für ein Rechtssystem durch $o(\vec{e}) = o(x) = o(\partial_x) = +1$ definiert ist. **Inneres Produkt, Skalar-Produkt, Kontraktion, Anti-Ableitung** sind Ausdruck ein und desselben Sachverhalts: $i_{\vec{j}}$. Kovarianter Vektor α und kontravarianter Vektor $\vec{v}$ geben Skalar $\alpha(\vec{v}) = a_i v^i$. Wenn $\vec{v}$ Vektor und α eine p-Form, so hat deren Tensor-Produkt die Komponenten $v^j a_{i_1 \ldots i_p}$ und dessen **Kontraktion** ist (p-1)-Form mit kovarianten Tensor-Komponenten $v^j a_{j\, i_2 \ldots i_p}$. Als **Anti-Ableitung** wird auch die **Stammfunktion** bezeichnet. Wenn Vektor $\vec{v}$ und α eine p-Form, so ist ihr **inneres Produkt** die (p-1)-Form $i_{\vec{v}}\alpha$. Speziell gilt $i_{\vec{v}}\alpha^0 = 0$, falls α 0-Form, $i_{\vec{v}}\alpha^1 = \alpha(\vec{v}) = a_i v^i$, falls α 1-Form und $i_{\vec{v}}\alpha^p(\vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p) = \alpha^p(\vec{v}, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p)$, falls α p-Form. Die Linearität des inneren Produkts schreibt sich dann $i_{\vec{A}+\vec{B}} = i_{\vec{A}} + i_{\vec{B}}$ und $i_{a\,\vec{A}} = a\, i_{\vec{A}}$. Manchmal wird einfach $i(\vec{v})$ geschrieben. Das **innere Produkt** ist, wie auch die **äußere Ableitung**, eine **Anti-Ableitung**

$$i_{\vec{v}} : \bigwedge^p \to \bigwedge^{p-1} \quad \text{vermöge } i_{\vec{v}}(\alpha^p \wedge \beta^q) = [i_{\vec{v}}\alpha^p] \wedge \beta^q + (-1)^p \alpha^p \wedge [i_{\vec{v}}\beta^q]$$

Wegen $\mathrm{d}s^2 = \delta_{rs}\mathrm{d}x^r \mathrm{d}x^s = g_{ij}\mathrm{d}y^i \mathrm{d}y^j$, wobei

$$g_{ij} = \left(\frac{\partial x^r}{\partial y^i}\right)\delta_{rs}\left(\frac{\partial x^s}{\partial y^j}\right) = \sum_r \left(\frac{\partial x^r}{\partial y^i}\right)\left(\frac{\partial x^r}{\partial y^j}\right) = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^T \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)$$

der Riemann'sche metrische Tensor ist, folgt

$$g(y) := \det[g_{ij}(y)] = \det\left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^T \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right] = \left[\det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)\right]^2 = \left|\frac{\partial(x)}{\partial(y)}\right|^2$$

Damit ist die **Volumenform** in Koordinaten $\mathrm{vol}^n = o(y)\sqrt{g(y)}\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$. Mit $\mathrm{vol}^2 = \mathrm{vol}^2_{1\ldots n}\mathrm{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y^n$ folgt $\mathrm{vol}^2_{1\ldots n} = o(y)\sqrt{g(y)}\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$, wobei die Orientierungsfunktion meist weggelassen wird. Beachte: Weil vol^n eine Pseudo-n-Form ist, so sind die $\sqrt{g(y)}\epsilon_{i_1 \ldots i_n}$ Komponenten eines kovarianten Pseudo-Tensors vom Range n. Das **Permutations-Symbol ist kein Tensor!** Siehe Seite 230. Die Anzahl der Indizes gibt den Rang oder die Stufe des Tensors an.

Mit dem **inneren Produkt** kann Vektor $\vec{v}$ der **Pseudo-2-Form** gemäß $\vec{v} \leftrightarrow \nu^2 := i_{\vec{V}}\ \mathrm{vol}^3$ mit $i_{\vec{V}}\ \mathrm{vol}^3 = \sqrt{g}(v^1 \mathrm{d}u^2 \wedge \mathrm{d}u^3 + v^2 \mathrm{d}u^3 \wedge \mathrm{d}u^1 + v^3 \mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2)$ zugeordnet werden. Der **magnetischen Induktion** $\vec{B}$ mit den kontravarianten Komponenten $B^1 = b_{23}/\sqrt{g}, B^2 = b_{31}/\sqrt{g}$ und $B^3 = b_{12}/\sqrt{g}$ entspricht die **Pseudo-2-Form** $\beta^2 = b_{23}\mathrm{d}u^2 \wedge \mathrm{d}u^3 + b_{31}\mathrm{d}u^3 \wedge \mathrm{d}u^1 + b_{12}\mathrm{d}u^1 \wedge \mathrm{d}u^2$.

Ausgangspunkt ist **Ladungserhaltung** $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \sigma^3 = -\int_\Omega \frac{\partial \sigma^3}{\partial t} = \int_{\partial\Omega} \mathcal{J}^2$ Siehe auch Seite 310.

Elektrostatik: rot $\vec{E} = \vec{0}$, also $\vec{E} = -\nabla\varphi$. Mit div $\vec{D} = \rho$ folgt $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$ oder $\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}V' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$.

Magnetostatik & Stabmagnet = magnet Dipol: Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd2 1974 p135f Skizze und azimutaler Mantelstrom analog gestreckter Spule $\vec{j} = -\hat{n} \times \vec{M}$; Schäfer: Einführung in die theoretische Physik BdIII.1 1932 1950[2] p117ff, 130ff; Macke: Elektrodynamik 1965[3] p79ff, **139f**. Für $\vec{H}$ geht man von zwei Monopolen, analog zu zwei elektrischen Ladungen, aus. Schmüser: Elektrodynamik p15 $\vec{M} = M\hat{e}_z = \text{const}$ im Stabmagnet: $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \cancel{\vec{H}})$, weil kein Strom,

daher im Stab **paralleles** $\vec{B} = \mu_0 M \hat{e}_z =$ const im Stab für **Magnetisierung** $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$, wobei χ_m **magnetische Suszeptibilität**, $\mu = \mu_0(1+\chi_m)$. **Beachte verschiedene Def für die Magnetisierung** $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0(1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0(\vec{H}+\vec{M}) \stackrel{?}{=} \mu_0\vec{H} + \vec{M} =$ siehe Seite 545 oder Simonyi p331! div $\vec{B} = 0$ und rot $\vec{B} \neq \vec{0}$ sprechen für geschlossene Feldlinien $\vec{B}$-Feldlinien. **Stetigkeit der Normalkomponente** an der Stirnfläche bedeutet für die $\vec{B}$-Feldlinien, dass sie von außen kommend über das Stabmagnetgebiet geschlossen werden müssen. **Neodym-Eisen-Bor-Magnet**, Dauermagnet, Permanentmagnet $Nd_2Fe_{14}B$ =hohe spontane Polarisation (Eisen), große uniaxiale magnetische Anisotropie = magnetische Vorzugsrichtung = leichte Richtung, die bei Dauermagneten auf Seltenerden-Basis durch die Kristallstruktur und Elektronenstruktur bestimmt ist. NdFeB besitzt eine hohe Magnetische Anisotropie, da die magnetische 4f-Schale durch die äußeren 5s25p6-Schalen vom Ligandenfeld des Kristalls abgeschirmt wird und so das Bahnmoment der Schale voll wirksam bleibt. Durch die Spin-Bahn-Kopplung sind die Spins an das anisotrope Kristallfeld gekoppelt, und ein Verdrehen der Spins und damit der magnetischen Momente aus der leichten Richtung ist mit Energieaufwand verbunden. 1982 General Motors & Sumitomo Special Metals.. **Magnetische Feldenergie:** Reineker p241, Rebhan p238; **Koerzitivfeldstärken von 870 bis 2750 kA/m**. Die **Remanenzflussdichte** liegt typisch bei 1.3 T oder ideal 1.6 T. Energiedichte (BH)max bei 512 kJ/m^3. $T(\text{Neodym})_{\text{Curie}} < 310\text{C}^o$, ohne Zusätze 80°. **Stabmagnet: Jelitto: Elektrodynamik** p287-9; Hänsel 3 p51; Macke: Elektrodynamik p139f; Rebhan p261; **Becker & Sauter** I, p130; Sommerfeld Bd3 p71; Greiner 3 Kap11; Burmeister PfL10, p62 & 150; Tipler: Physik p917; Purcell: Berkeley-Kurs 2. Elekt & Mag p284; Simonyi Kap2.45 p332; Im Sinne makroskopischer Magnetostatik stromfreies Außen- und Innenfeld rot $\vec{H} = \vec{0}$, also **keine geschlossenen** $\vec{H}$-Feldlinien - das $\vec{H}$-Feld ist ein **Gradientenfeld** mit div $\vec{B} =$ div $\vec{H} +$ div $\vec{M} = 0$ heißt div $\vec{H} = -$div $\vec{M}$, d.h. allein die Quellen und Senken oder **Monopole** auf den Stirnflächen des Stabes machen ein $\vec{H}$-Feld mit dem **magnetischen Potenzial** nach Rebhan p261 und Simonyi Kap2.45, p332 analog zum elektrostatischen **Randwert-Problem**-Behandlung analog Seite 555

$$\varphi_m(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{d}V' \frac{\operatorname{div}\vec{M}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}A' \frac{\vec{n}'\cdot(\vec{M}'_a - \vec{M}'_i)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial V} \mathrm{d}A' \frac{\vec{n}'\cdot\vec{M}'_i}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad \vec{H} = -\operatorname{grad}\varphi_m$$

Sommerfeld 3 p78; Jelitto: Elektrodyn p288; Stetige Tangenzialkomponente von $\vec{M}$ auf dem Mantel. Im Stabmagnet ist $\vec{M} =$ const, also div $\vec{M} = 0$ keine Quellen . rot $\vec{B} \neq \vec{0}$, also geschlossene Feldlinien. rot $\vec{H} = \vec{j}$ liefert wegen $\oint \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$ für die Oberflächenstromdichte die Sprungbedingung $\vec{n}\times\vec{H} = \vec{j}$. Im **stromlosen Fall stimmen also die Tangenzialkomponenten von $\vec{H}$ überein. Wegen div $\vec{B} = 0$ folgt $\nabla\cdot\vec{j} = 0$ und Grenzbedingung gemäß Pillendose $\vec{n}\cdot\vec{B} = 0$. Die Normalkomponenten von $\vec{B}$ sind identisch, also analog zu $\vec{D}$.** Analog zur Elektrostatik, wo externe Felder durch Oberflächenladungen abgeschirmt werden, hat man in der Magnetostatik **Oberflächenströme** ohne Antrieb, $\vec{E}_t = \vec{0}$. $\partial_y\vec{B} = -\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0}$, also $\vec{B} =$ const! Da $\vec{B} = \vec{0}$ im Supraleiter, so an Außenseite $\vec{n}\cdot\vec{B} = 0$, also $\vec{B}$ tangenzial zur Oberfläche. Mit $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ hat $\vec{B}$ ein **Vektorpotenzial** Kuhn p289

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \mathrm{d}V' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Quellen div $\vec{B} = 0$ und wirbelfreies Feld rot $\vec{B} = \vec{0}$ ist kann durch Laplace-Gleichung beschrieben $\Delta A = -\mu_0\vec{j}$. **Vektorpotenzial eines homogenen Feldes** $\vec{N} = N\,\hat{e}_z$ in z-Richtung:

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{N}\times\vec{r}, \quad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \frac{N}{2}\nabla\times(\hat{e}_z\times\vec{r}) = \frac{N}{2}\nabla\times\begin{pmatrix}-x_2\\ x_1\\ 0\end{pmatrix} = N\,\hat{e}_z = \vec{N}$$

Rotor von $\vec{A}$ ist eine Konstante, weil das Feld eine **starre Rotation** repräsentiert. Für ein mit e **geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld** gilt $\mathcal{L}(\vec{x},\dot{\vec{x}},t) = \frac{m}{2}\dot{\vec{x}}^2 + e\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t) - e\,V(\vec{x},t)$ woraus mittels Euler-Lagrange'schen Gleichungen $m\ddot{\vec{x}} = e(\vec{E}+\dot{\vec{x}}\times\vec{B})$ folgt. Beachte den Unterschied zu üblichen Lagrange-Funktionen: Die Zeitabhängigkeit der Potenziale bereits in nichtbewegten Koordinaten. $e\,\dot{\vec{x}}\cdot\vec{A}(\vec{x},t)$ nennt man kinetisches Potenzial. **Lagrange für geschwindigkeitsabhängige Kräfte, die kein Potenzial haben**, wie die Lorentz-Kraft, geht mit LG2 siehe Goldstein: Mechanik 1978 p20ff mit einem generalisierten

oder geschwindigkeitsabhängigen Potenzial gemäß E. Schering1824-1897 1873, Helmholtz 1886, Mayer 1896, Hirsch 1898 oder Whittaker: Analytic mechanics 1904 p44ff $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i}$. **Rayleigh'sche Dissipationsfunktion** $\mathcal{F} = \frac{1}{2}kv^2$ wegen Reibungskraft $F = -kv = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v}$. Helmholtz: Dynamik der Massenpunkte 1898 p356ff; Budo: Mechanik p166 $\mathcal{H}(\vec{q},\vec{p},t) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\,\vec{A}(\vec{q},t)\right)^2 + e\,V(\vec{q},t)$. Der kanonische Impuls ist dann $\vec{p} = m\left(\dot{\vec{x}} + \frac{e}{m}\vec{A}\right)$ und im homogenen Feld $\vec{p} = m\left(\dot{\vec{r}} + \frac{e}{2\,m}\vec{B}\times\vec{r}\right)$. Liebscher p226f; Budo: Mechanik p167;

Betrachte die Divergenz von $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$, also $\operatorname{div}\vec{S} = \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H}) = -\vec{H}\cdot\partial_t\vec{B} - \vec{E}\cdot(\vec{j} + \partial_t\vec{D}) = -\vec{E}\cdot\vec{j} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{H}\cdot\vec{B} + \vec{E}\cdot\vec{D})$. Bedeutet $0 = \operatorname{div}\vec{S} + \vec{E}\cdot\vec{j} + \frac{\partial w_{\text{em Feld}}}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{S} + \frac{\partial(w_{\text{em Feld}} + w_{\text{mech}})}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0$, wobei die Energie aller Ladungen = P = U mal I= $\vec{E}\cdot\vec{j} = \frac{\partial w_{\text{mech}}}{\partial t}$ bedeutet mechanische Energie und Joule'sche Wärme. Wegen Arbeit an Ladungen gemäß Griffiths: Electrodynamics p346ff, $\mathrm{d}w = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = \vec{E}\cdot\vec{j}\mathrm{d}t$, Magnetfeld bedingte Lorentz-Kraft verrichtet keine Arbeit. Aus $-\operatorname{rot}\vec{E} = \dot{\vec{B}}$ mal $\cdot\vec{H}$ plus $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \dot{\vec{D}}$ mal $\cdot\vec{E}$ und $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{E} - \vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}$ folgt $\vec{0} = \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) + \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon\frac{\vec{E}^2}{2} + \mu\frac{\vec{B}^2}{2}\right)$ **Energiesatz der Elektrodynamik** oder Poynting'scher Satz:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{S} + \vec{j}\cdot\vec{E} = 0 \quad \text{mit}\,\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \quad \text{und Energiedichte des Feldes} \quad w = \frac{1}{2}(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H})$$

wobei $\vec{S}$ die **Energiestromdichte** oder Poynting-Vektor des Feldes und $\vec{j}\cdot\vec{E}$ die lokale Energieaufnahme der Ladungsträger (z.B. Joule'sche Wärme) bedeuten. Feynman: Bd2 Kap27-6 Impuls des em Feldes. aber Stöckel: Ergänzungen und Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Bd2 §15-31 1969; Rebhan: Elektrodynamik p371 Poynting-Vektor beim stationären Stromfluss einer Schaltung und Sommerfeld: Elektrodynamik p116; Stöckel: Full Poincare-invariant equation of motion for an extended charged particle in an electromagnetic field https://arxiv.org/pdf/math-ph/0702015.pdf;

Dynamo-Gleichung vernachlässigbarer Verschiebungsstrom, ortsunabhängige **absolute Permittivität**, elektrische Feldkonstante, elektrische Konstante, Dielektrizitätskonstante des Vakuums und Influenzkonstante $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ in As/Vm, relative Permittivität $\epsilon_r = 1 + \chi_e$, und Leitfähigkeit, Ohm'sches Gesetz $\vec{j} = \sigma\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ für einen mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegten Leiter gilt wegen $\dot{\vec{D}} = \vec{0}$ und dem Ohm'schen Gesetz für leitende Fluide $\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ gilt

$$\frac{1}{\mu}\nabla\times\vec{B} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

Der Rotor dieser Gleichung führt auf

$$-\frac{1}{\mu}\Delta\vec{B} = -\sigma\dot{\vec{B}} + \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

die Dynamo-Gleichung

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu\,\sigma}\Delta\vec{B} + \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

her. $\eta = 1/\mu\sigma$ ist die magnetische Diffusivität. Rädler: Dynamo theory, St Andreasberg, Sept 16-17, 1991; Kippenhahn & Weigert: Stellar structure and evolution 1991; Krause: Der 22-Jahreszyklus des allgemeinen Magnetfeldes der Sonne, Die Sterne 44 1968 48-58; Clauser: Einführung in die Geophysik. Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde 2014 p353f α-Effekt; Rüdiger: Neue Herausforderungen an die Dynamotheorie, Die Sterne 59 1983 211-227; Gerlich: Tensorpotentiale in der Magnetohydrodynamik und das Dynamoproblem 1970; Ãlfven & Fälthammer: Cosmical electrodynamics 1963; Lüst & Schlüter: Kraftfreie Magnetfelder, ZfAstrophys 34 263-282 1954; $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}$ und $\vec{F} = \vec{j}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{H}$ geben $\vec{0} = \vec{H}\times\operatorname{rot}\vec{H}$.

Barut: Die Physik der magnetischen Monopole PhysBl31 1975 352-361; Fraas: **Magnetische Monopole**, PiuZ 15 1984 161-197 durch Neutronenstreuung an Dirac-Strings 1953 in Pyrochlor-Gitter nachgewiesen: Castelnovo, C. et al.: Magnetic monopoles in spin ice. In: Nature 451, 42-45, 2008. Streuexperiment zeigt, dass die Röhren, die sich ganz nach Diracs Überlegungen verhalten, in diesem Material tatsächlich existieren. Dies ist ein Schlüsselfaktor für das Vorhandensein von magnetischen Monopolen. Die Fähigkeit, Wärme aufzunehmen, folgt genau einer Theorie, die die Wechselwirkung der Monopole an den Enden dieser **Dirac Strings** als ein Gas aus magnetischen Ladungen - also Monopolen - beschreibt. Nolting, W, Ramakanth, A.: Quantum Theory of Magnetism, 2010; http://pdg. lbl. gov/2011/ reviews/ rpp2011-rev-mag-monopole-searches. pdf

Konforme Feldtheorien, CFT: Beschreibung von punktförmigen Teilchen und ihrer Wechselwirkungen oder kritischer 2D-Phänomene. Während bei klassischen Feldtheorien die konforme Invarianz einfach sicherzustellen ist, sind zugehörige Quantenfeldtheorien normalerweise nicht invariant unter Vergrößerung oder Verkleinerung des Maßstabes. weil sich wegen Quantenkorrekturen die Stärke der Kopplung mit der übertragenen Energie ändert. Bei diesem Quanteneffekt spricht man von der anomalen Brechung der Skaleninvarianz durch laufende Kopplungen. Henkel: Conformal invariance and critical Phenomena; Cardy: Scaling and Renormalization in Statistical Physics; Gaberdiel: Konforme Feldtheorie; Ginsparg: Applied Conformal Field Theory. Lectures given at Les Houches summer session 1988; DiFrancesco: Conformal field theory; Blumenhagen: Introduction to conformal field theory with applications to string theory; Schottenloher: A mathematical introduction to conformal field theory; Driscoll & Trefethen: **Schwarz–Christoffel mapping** 2002;

Ist Funktion in jeden Punkt eines Gebietes G winkeltreu und orientierungstreu, so nennt man sie lokal konform. Ist sie zudem noch bijektiv, so ist sie auf G global konform. $f(z) = e^z$ ist auf $\{z|x \in \mathbb{R}, -\pi < y \leq \pi\}$ global konform. Arens p1099; $f(z) = \bar{z}$ ist nur winkeltreu! Konforme Abbildungen sind holomorphe Funktionen.

Betrachte statt der Koordinaten (t, x) die Lichtkegelkoordinaten $x^{\pm} = x \pm t$, Gaberdiel: Konforme Feldtheorie p16.

$$\begin{pmatrix} x^- \\ x^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^- \\ x^+ \end{pmatrix}$$

Mit der Minkowski-Metrik

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt für die Länge

$$(t \quad x) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}(x^-, x^+) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^- \\ x^+ \end{pmatrix} = (x^-, x^+) \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^- \\ x^+ \end{pmatrix}$$

oder kurz für die pseudo-euklidische Länge (Boseck: Vektorräume) und die Transformation der Metrik

$$-t^2 + x^2 = x^- x^+, \quad {T^{-1}}^T \eta T^{-1} = \tilde{\eta}$$

32 Optik

Lupenprinzip Okular = Lupe. Mikroskop geht bis 200nm: Objektiv macht reelles Zwischenbild 17. Jh Holland. 270fach. Hooke Zelle 50fach. Vollmer: Die Grenzen des Auges, PJ22 2023 H3 p28-33; Problem Bildfehler. Man pröbelt = probieren. Abbe Zeiss Werkstatt. 1860 nach Berechnung schlechter, weil Beugung nicht beachtet. Zwischenbild muss zwei Beugungsringe enthalten. Numerische Appertur 1872 Serienproduktion.Bergmann & Schäfer: Bd3 Optik; Schott baut farbneutrale Gläser. Abbe: 8h Arbeiten 8h schlafen 8h Mensch sein! **Auflösungsgrenze oder Abbe-Limit** $d = \frac{\lambda}{n \sin\alpha}$ oder mit numerischer Apertur (NA) $n \cdot \sin\alpha$ gilt $d = \frac{\lambda}{\mathrm{NA}_{\mathrm{Objektiv}}} \approx 1100\mu\mathrm{m}$ bei $\lambda = 550$ nm, wobei α halber Öffnungwinkel. Kondensor mit kleinerer NA als

Objektiv: $d = \frac{\lambda}{\mathrm{NA}_{\mathrm{Objektiv}}+\mathrm{NA}_{\mathrm{Kondensor}}} \approx 196$ nm mit ölimmersion. SIM. SPDM. Hell: STED Stimulated Emission Depletion = Bestimme räumliche Abstände innerhalb von Molekülen durch die transiente Besetzung verschiedener Zustände PJ14 (6) 2015 p23ff; . Zernicke Phasenkontrast. Kurt Michel 1943 Livecellimaging. Spinning Diskmikroskop Nipkow Scheibe. Schonende Fluoreszenz-Mikroskopie. Konfokales Laser Spannung mikroskopisch von Martin Minsky. Ruska 1931 Elektronenmikroskop geht bis 0.2nm. 1938 in Serie. de Brogli-Wellenlänge kleiner! Knorr: Zellmembran. Riesenvesikel. **Fahrrad als Modell für Auto!** In welchem Sinne? Hängt von Aspekt und Fragestellungen ab. Übertragbarkeit. Vesikel als Zellmodell! Allgem falsch, aber in speziellen Fragestellungen richtig. Unterscheide Modellorganismen **E. coli**, an denen bestimmte Phänomen und Prozesse stellvertretend für eine ganze Klasse von Organismen untersucht werden, und physikalischen Modellen, die ein vereinfachendes experimentelles oder theoretische Konstrukt, das ein reales komplexes System auf wenige, für sein Verhalten relevante, mathematisierbare Eigenschaften reduziert. Lichtmikro 0.2 Mikro. Eletroktronenmikro 0.2 nm. Membran . Vehikel polar wasserlösliche. Fett unpolar 20 C-Atome lang. Vesikel 100 nm. 4 nm Strukturen. Riesen bis 100 μm. Lipide auf Elektrode. Eiweiße werden eingebaut. Phasenkontrast wird angeschaut. Optische Schnitte werden später zum 3d-Bild zusammengerechnet. Fluktuationen. **Elektroporation** = elektrische Öffnung einer Vesikel durch 1kV pro cm. Elektrofusion Membranverschmelzung. Kristalline Membran zu flüssig durch Cholesterol. Phasendiagramme. Gibt es solche Strukturen auch in Zellen? Phasenseparation ach in lebenden Zellen auf nm Skala. Idee ist synthetische Zelle. Hille: Laser-basierte Fluoreszenzspektroskopie. DNA, Wasser, Proteine, Kohlenwasserstoffe. Nichtinvasiv. Jablonski-Diagramm. Farbstoffe bleichen aus, werden aus Zellmembran abtransportiert. Passiert im fs Bereich. Aber Lebensdauer im ns-Bereich. Fluoreszenzslebenszeitspektroskopie. Gepulster Laser und zeitkorrelierte Einzelphotonenzählung per SEV. TCSPC-Technik. FLIM-Image. Spektrale und zeitliche Trennung. Finde also Farbstoffe, dessen Fluoreszenzlebensdauer von Konzentration von einem Zellsubstrat abhängt. Die Farbe des FLIM-Bildes zeigt die Lebensdauer als Proxi der Konzentration. Zellfunktion wird so aufgeklärt. Wie Beugungsgrenze überschreiten? **Photoactivated Localization Microscopy** PALM. Aber Strukturen kleiner als 200nm. **Stochastic Optical Reconstruction Microscopy** STORM dStorm-Mikroskop detektieren Einzelmolekule sich Farbstoffmolekule. Dann hat man zufälligen Schaltens zwischen Fluoreszenz und Dunkel. 10nm Grenze. Aktinfilament hat 10nm Dicke. Nimm 50000 Bilder mit stochastisches Punktmuster aus dem Filament berechnet wird. Andrea **Du Toit: Advancing imaging**, Nature Reviews Molecular Cell Biology 15, 769 (2014); Also Beobachtung einzelner Farbstoffmolekule. Geht nicht im jeder Umgebung. Schmüser, Dohlus, Rossbach, Behrens: Free-Electron Lasers in the Ultraviolet and X-Ray Regime. Physical Principles, Experimental Results, Technical Realization 2014; **Freie-Elektronen-Laser** geben die Synchrotronstrahlung mit sehr hoher Brillanz, In: NACHRICHTEN AUS DER CHEMIE56 2008 H3; Aufgrund der Kohärenz dieser Strahlung und der Abhängigkeit der Verstärkung von der vorhandenen Photonenanzahl wird der FEL als Laser bezeichnet. Im Gegensatz zu konventionellen Lasern besitzt er jedoch kein laseraktives Medium, in dem Besetzungsinversion herrscht. Daher findet auch keine stimulierte Emission statt, also dem Namen nach kein Laser. Wellenlänge des emittierten Lichts $\lambda_r = \frac{\lambda_u}{2\gamma^2}\left(1+\frac{K^2}{2}\right)$, mit λ_u der Periode des Undulators, dem Lorentzfaktor γ und Undulator-Parameter $K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi m_e c} \approx 0.93 B_0[\mathrm{T}]\lambda_u[\mathrm{cm}]$. Kurzwelligste Strahlung emittiert die Linac Coherent Light Source in Stanford mit 0.15 nm. **Röntgenlaser:** European X-ray FEL, DESY im Röntgenbereich bis 0.05 nm. Anwendung: Strukturanalyse per Bragg, also Imaging, und zeitlicher Dynamik von Molekülen bis Fliegerabwehr der Marine 100kW bis mehrer MW ab 2018; Meystre & Sargent III: Elements of quantum optics 1997[3] p20ff; Römer: Theoretische **Optik** 1994; Haferkorn: Optik 1980; Haferkorn & Richter: Synthese optischer Systeme 1984; Hajko & Schilling: Elektrik. Optik. Quantentheorie 1985; Drude: Physik des Äthers auf elektromagnetischer Grundlage 1894; Drude: Lehrbuch der Optik 1906[2]; Roditschew & Frankfurt: Die Schöpfer der physikalischen Optik 1973, 1977; Drude: Lehrbuch der Optik 1906; Naundorf: Abbildungstreue 1963; Shewandrow: Polarisation des Lichtes 1973; Vinson: Optische Kohärenz 1971; Francon: Moderne Anwendungen der physikalischen Optik 1963, 1971; Hofmann: Die optische Abbildung 1980; Hodgson & Weber: Optical resonators. Fundamentals, advanced concepts and applications 1996 p76ff **Gauß-Strahlen** = gaußsches Bündel Konzept der paraxialen Optik: $E(r,z) = E_0\,\frac{w_0}{w(z)}\cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{r}{w(z)}\right)^2}\cdot \mathrm{e}^{-ik\frac{r^2}{2R(z)}}\cdot \mathrm{e}^{i(\zeta(z)-kz)}$ Strahltaille im Koordinatenursprung bei $z=0$. Meschede: Optik, Licht und Laser 2005[2]; Saxler: Einige problematische Begriffe der 'geometrischen' Optik PdNPiS Bd51 2002 H8 p29-32; Fließbach & Walliser: Arbeitsbuch p294;

Licht als transversale em Welle: $(\Delta + k^2)\Psi(\vec{r}) = 0$. **Ebene Welle:** Phasenfläche = Geometrisches Objekt, deren Punkte gleiche Phase/Winkel haben. Phasenebene = Menge aller Otvektoren mit $\vec{k}\cdot\vec{r} = \text{const}$, also stets senrecht zu $\vec{k}$. $\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left(\mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right) = \mathrm{Re}(\mathbf{A}_0)\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t) - \mathrm{Im}(\mathbf{A}_0)\sin(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)$. Herrmann: Altlasten der Physik (64). Das Huygens'sche Prinzip PdNPiS Bd52 2003 H2 p47; **Huygens'sches Prinzip:** In jeden Aufpunkt P hinter einer Blende hat man eine **Kugelwelle** mit $\vec{k}\cdot\vec{r} = k\hat{r}\hat{r}\hat{r} = k\,r$ mit $\mathbf{A}(r,t) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathbf{A}_0}{r}e^{i(kr-\omega t)}\right) = \frac{\mathrm{Re}(\mathbf{A}_0)}{r}\cos(kr-\omega t) - \frac{\mathrm{Im}(\mathbf{A}_0)}{r}\sin(kr-\omega t)$. Amplitude muss mit $1/r$ fallen, da Intensität = Energiestromdichte sich auf die Kugelfläche verteilend mit Phasenfläche stets senkrecht zu $\hat{r}(\theta,\varphi)$! $1/r^2$ fällt.

$$\Psi(\vec{r}) \approx B\int_{\text{Punkte der Öffnung}} \mathrm{d}A\frac{e^{ikr_P}}{r_P} \approx B\frac{e^{ikr_{OP}}}{r_{OP}}\int_{\text{Öffnung}} \mathrm{d}^2x e^{-i\vec{k}_{OP}\cdot\vec{x}},\ \vec{r}_P = \vec{r}_{OP} - \vec{x},\ \vec{k}_{OP} = k\frac{\vec{r}_{OP}}{r_{OP}},\ r_P \gg \frac{a^2}{\lambda}$$

gemäß Fraunhofer-Näherung. Beide Wellen haben gleiche Dispersionsrelation: $\omega = c\,k$. Grund ist der **Laplace-Operator in Kugelkoordinaten siehe Seite** 559, der auch bei der Kugelwelle $E(r,t) = \dfrac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$ die Wellengleichung $\Delta_r E = E'' = \dfrac{\ddot{E}}{c^2}$ mit derselben **Dispersionsrelation** $\omega = c\,k$ erfüllt. **Beugung am Spalt** mit Öffnung $b = p\beta$ mit p parallelen Strahlen der Breite β, dass in Richtung φ abgebeugt werde. Der Gangdifferenz d entspricht die Phasendifferenz $\Delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}d$. Je zwei benachbarte Teilbündel haben damit die p-mal kleinere Teilbündelphasendifferenz $\delta = \dfrac{\Delta}{p} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\dfrac{d}{p}$. Wellensumme der p Einzelstrahlen im Abstand l

$$E_\varphi \sim \mathrm{Re}\,\beta e^{i2\pi(\nu t-\frac{l}{\lambda})}[1 + e^{-i\delta} + e^{-i2\delta} + \cdots + e^{-i(p-1)\delta}] = \mathrm{Re}\,\beta\frac{\sin p\delta/2}{\sin\delta/2}e^{-i\frac{(p-1)}{2}\delta}e^{i2\pi(\nu t-\frac{l}{\lambda})}$$

$$\overset{p\delta=\Delta}{=} \mathrm{Re}\,\beta\frac{\sin\Delta/2}{\sin\Delta/2p}e^{-\frac{i\Delta}{2}}e^{\frac{i\Delta}{2p}}e^{i2\pi(\nu t-\frac{l}{\lambda})} \overset{p\to\infty}{=} \mathrm{Re}\,\beta p\frac{\sin\Delta/2}{\Delta/2}e^{i[2\pi(\nu t-\frac{l}{\lambda})-\frac{\Delta}{2}]} \overset{p\beta=b}{=} b\frac{\sin\Delta/2}{\Delta/2}\cos[2\pi(\nu t-\tfrac{l}{\lambda})-\tfrac{\Delta}{2}].$$

Quadriertes Zeitmittel $J_\varphi = \int_0^T \mathrm{d}t E_\varphi E_\varphi^* \sim b^2\dfrac{\sin^2\Delta/2}{(\Delta/2)^2} \overset{d=b\sin\varphi}{=} b^2\dfrac{\sin^2(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi)}{(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi)^2}$ wegen $\Delta = \dfrac{2\pi}{\lambda}b\sin\varphi$. Minima bei Beugungswinkel $\sin\varphi_k = \dfrac{k\lambda}{b}$, weil für Nullstellen des Zählers $k\pi = \dfrac{\pi b}{\lambda}\sin\varphi_k$. Bergmann & Schäfer: Bd3 Optik p360ff; Born (& Wolf): Optik 1932, Priciples of optics 1999[7], Joos: LB der theoret Physik 1999 p301; div $\vec{E} = 0$ macht Transversalität. Dämpfung in leitendem Medium wegen rot $\vec{H} = \epsilon\dot{\vec{E}} + \sigma\vec{E}$, also $\Delta\vec{E} = \epsilon\mu\partial_{tt}\vec{E} + \mu\sigma\partial_t\vec{E}$. Schmüser: Elektrodynamik II p121ff; Hänsel & Neumann: Physik IV; **Maxwell-Gl** a] im freien Raum Wellengl $E'' = \ddot{E}$ als PDE wird mit Produktansatz $E(x,t) = X(x)T(t)$ zu ODEs mit $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \text{const(x)} = \text{const}(t) = \dfrac{\ddot{T}(t)}{T(t)} =$ mit $\text{const}(t) = \text{const}(x) = \alpha^2$, also unabhängig fester Wert gleich welche Werte $x,t \in \mathbb{R}$ annehmen. Das leistet nur die konstante Funktion. Allgemeinen Lösungen für $\alpha^2 > 0$ sind Explosionslösungen $S(s) = a_-e^{\alpha s} + a_+e^{-\alpha s}$ und für $\alpha^2 < 0$ die oszilierenden Lösungen $S(s) = a_-e^{i\alpha s} + a_+e^{-i\alpha s}$. b] Amplitudenbeziehung an Grenzflächen bei Annahme von ebenen Wellen: Maxwellgl werden zu algebraischen Gleichungen zwischen Amplituden. Roditschew & Frankfurt: Die Schöpfer der physikalischen Optik, WTB 195 1975; Relexion und Brechung: Schmüser: Elektrodynamik 2013 p120; Feynman: QED - die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985; B̃iałynicki-Birula: Quantum Electrodynamics 1975; B̃ialynicki-Birula, Cieplak, Kaminski: Theory of Quanta 1992; S̃chilcher: Quantenelektrodynamik kompakt 2019; G̃laser: Quantenelektrodynamik 1960 V Glaser 1924-1984; Feynman: Quantenelektrodynamik. Eine Vorlesungsmitschrift 1989; Aus Maxwellgl rot $\vec{E} = -\vec{B}_t$ mit ebener Welle $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$ wegen rot $\vec{E} = \nabla\times(\vec{E}_0 e^{\cdots}) = (\nabla\times\vec{E}_0)e^{\cdots} + \nabla e^{\cdots}\times\vec{E}_0 = -i\vec{k}\times\vec{E}_0 = -i\omega\vec{B} = -\vec{B}_t$ und $\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_0 e^{i(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r})}$ mit $\vec{E}_0, \vec{B}_0 \in \mathbb{C}^3$ und analog rot $\vec{B} = -\mu_0\epsilon_0\vec{E}_t$ erhält man die **Maxwell-Gleichungen für ebene Wellen:**

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}_0, \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\vec{E}, \quad \vec{E}_0 = \frac{c^2}{\omega}\vec{B}_0\times\vec{k}, \quad \vec{E} = \frac{c^2}{\omega}\vec{B}\times\vec{k}, \tag{107}$$

Das bedeutet für das strom- und ladungsfreie Vakuum per Spatprodukt, dass $\vec{E}\perp\vec{B}\perp\vec{k}\perp\vec{E}$. **Wellenzahl und Brechungsindex:** $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} \overset{2\pi=T\omega}{=} \dfrac{\omega T}{\lambda} = \dfrac{\omega c}{vc} = \dfrac{\omega n}{c}$. Einlaufende Welle sei $\vec{E}_e(\vec{r},t) = \vec{E}_{e0}e^{i(\vec{k}_e\cdot\vec{r}-\omega_e t)}$, reflektierte $\vec{E}_r(\vec{r},t)$ und gebrochenen Strahl $\vec{E}_g(\vec{r},t)$. Schmüser: Elektrodynamik p121f; Der $\vec{k}_e$ Vektor und die Flächennormale $\hat{n}$ der Grenzfläche bilden zusammen die Einfalls-Ebene, die xz-Ebene. Die beiden anderen

Vektoren $\vec{k}_r$ und $\vec{k}_g$ bilden mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ die zwei Winkel ϕ_r und ϕ_g. Daraus ergibt sich:

$$\vec{k}_e = k_e \sin\theta_e \vec{e}_x + k_e \cos\theta \vec{e}_z, \tag{108}$$
$$\vec{k}_r = k_r \sin\theta_r \cos\phi_r \vec{e}_x + k_r \cos\theta_r \sin\phi_r \vec{e}_y - k_r \cos\theta_r \vec{e}_z, \tag{109}$$
$$\vec{k}_g = k_g \sin\theta_g \cos\phi_g \vec{e}_x + k_g \cos\theta_g \sin\phi_g \vec{e}_y + k_g \cos\theta_g \vec{e}_z \tag{110}$$

Nun betrachten wir den Ort $z = 0$, wo sich die Welle aufspaltet in reflektierte und gebrochene Welle. Dort sind die Phasen der Wellen identisch bis auf ein vielfaches von π: $(\vec{k}_e\vec{r} - \omega_e t)_{z=0} = (\vec{k}_r\vec{r} - \omega_r t)_{z=0} + n\pi = (\vec{k}_g\vec{r} - \omega_g t)_{z=0} + m\pi$ Zum Zeitpunkt $t = 0$ und am Ort $\vec{r} = \vec{0}$ ergibt sich $n = m = 0$ und $\omega_e = \omega_r = \omega_g = \omega$. Also tritt beim Eintritt in die Grenzfläche keine Phasenverschiebung und Frequenzänderung auf. Es gilt für $\vec{r} \neq \vec{0}$: $(\vec{k}_e\vec{r})_{z=0} = (\vec{k}_r\vec{r})_{z=0} = (\vec{k}_g\vec{r})_{z=0}$ Dies in Komponentenschreibweise: $k_e \sin\theta_e = k_r \sin\theta_r \cos\phi_r = k_g \sin\theta_g \cos\phi_g$ und $0 = k_r \sin\theta_r \sin\phi_r = k_g \sin\theta_g \sin\phi_g$ Daraus folgt $\phi_r = \phi_g = 0$. Die $\vec{k}$ Vektoren liegen in der selben Ebene, welche als Einfallsebene bezeichnet wird und durch $\vec{k}_e$ und $\vec{n}$ bestimmt wird. Dann bleibt für die vorletzte Gleichung nur noch: $k_e \sin\theta = k_r \sin\theta_r = k_g \sin\theta_g$ Für die $\vec{k}$ Vektoren gilt:

$$k_e = \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega}{c} n_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_{r,1}\epsilon_{r,1}} = k_r \tag{111}$$
$$k_g = \frac{\omega}{u_2} = \frac{\omega}{c} n_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_{r,2}\epsilon_{r,2}} \tag{112}$$

Dies ergibt das Reflexionsgesetz: $k_e sin\theta_e = k_e sin\theta_r$, $\theta_e = \theta_r$ und das **Snellius'sche Brechungsgesetz** $k_e sin\theta_e = k_g sin\theta_g$, $\frac{k_e}{k_g} = \frac{sin\theta_g}{sin\theta_e}$ **Stetigkeitsbedingungen an Grenzflächen:** $\vec{n} \times (\vec{E}_2 + \vec{E}_1) = \vec{0}, \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 + \vec{D}_1) = \vec{0}, \vec{n} \times (\vec{H}_2 + \vec{H}_1) = \vec{0}, \vec{n} \cdot (\vec{B}_2 + \vec{B}_1) = \vec{0}$. **Maxwell-Relation** $n^2 = \epsilon_r$. Aus (107) und den bekannten zusammenhängen zwischen $\vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ und $\vec{D}$ folgt

$$\vec{n} \times (\vec{E}_g + (\vec{E}_e + \vec{E}_r)) = \vec{0} \tag{113}$$
$$\vec{n} \cdot (\epsilon_{r,2}\vec{E}_g + \epsilon_{r,1}(\vec{E}_e + \vec{E}_r)) = \vec{0} \tag{114}$$
$$\vec{n} \times (\frac{1}{\mu_{r,2}}\vec{k}_g \times \vec{E}_g - \frac{1}{\mu_{r,1}}(\vec{k}_e \times \vec{E}_e + \vec{k}_r \times \vec{E}_r)) = \vec{0} \tag{115}$$
$$\vec{n} \cdot (\vec{k}_g \times \vec{E}_g - (\vec{k}_e \times \vec{E}_e + \vec{k}_r \times \vec{E}_r)) = \vec{0} \tag{116}$$

Fallunterscheidung: $\vec{E}_e$ senkrecht zur Einfallsebene $\vec{E}_e$ parallel zur Einfallsebene Formeln unterscheiden sich nur im Vorzeichen. Aus (113) folgt $E_g - (E_e + E_r) = 0$. $\vec{E}$ senkrecht auf $\vec{n}$ gibt (114). Aus (116) folgt das Brechungsgesetz. Aus (115) folgt

$$\frac{1}{\mu_{r,2}}(\vec{k}_g(\vec{E}_g \cdot \vec{n}) - \vec{E}_g(\vec{k}_g \cdot \vec{n}))$$
$$-\frac{1}{\mu_{r,1}}(\vec{k}(\vec{E}_e \cdot \vec{n}) - \vec{E}_e(\vec{k} \cdot \vec{n}) + \vec{k}_r(\vec{E}_r \cdot \vec{n}) - \vec{E}_r(\vec{k}_r \cdot \vec{n})) = 0 \tag{117}$$

die Vektoren $\vec{k}$ und der Grenzflächen-Normalenvektor $\vec{n}$ bilden die Winkel θ_e, $\theta_r$und θ_g. Da E senkrecht zu n folgt mit $E_g - (E_e + E_r) = 0$: $-\frac{k_g}{\mu_{r,2}}\vec{E}_g \cos\theta_g + \frac{k_e}{\mu_{r,1}}\vec{E}_e \cos\theta_e - \frac{k_r}{\mu_{r,1}}\vec{E}_r \cos\theta_r = \vec{0}$ und mit (112) und $E_g - (E_e + E_r) = 0$ folgt

$$2E_e\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\mu_{r,1}}}\cos\theta_e = E_g(\sqrt{\frac{\epsilon_{r,1}}{\mu_{r,1}}}\cos\theta_e + \sqrt{\frac{\epsilon_{r,2}}{\mu_{r,2}}}\cos\theta_g) \quad \Rightarrow \quad \frac{E_g}{E_e} = \frac{2n_1\cos\theta_e}{n_1\cos\theta_e + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}}n_2\cos\theta_g} \tag{118}$$

mit (112) folgt

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1\cos\theta_e - \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}}n_2\cos\theta_g}{n_1\cos\theta_e + \frac{\mu_{r,1}}{\mu_{r,2}}n_2\cos\theta_g} \tag{119}$$

speziell mit $\mu_{r,1} = \mu_{r,2}$ folgen die **Fresnel'schen Formeln:**

$$\frac{E_g}{E_e} = \frac{2n_1\cos\theta_e}{n_1\cos\theta_e + n_2\cos\theta_g}, \quad \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1\cos\theta_e - n_2\cos\theta_g}{n_1\cos\theta_e + n_2\cos\theta_g}; \quad \frac{E_g}{E_e} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \tag{120}$$

falls $\theta_e = 0 = \theta_g$. Wenn das Licht eine Welle angesehen wird, so gelten Reflexions- und Brechungsgesetz. **Rätsel der parziellen Reflexion:** Feynman: QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p28; **Klassische Theorie der Licht-Materie-WW**. Unter **Brewster-Winkel** Luft-Glas 57° haben reflektierter und gebrochener Strahl einen Winkelabstand von 90° und reflektiertes Licht hat elektrischen Vektor senkrecht zur Reflexionsebene, ist also linear polarisiert. Born: Optik 1933 Fresnel p26ff, Totalreflexion p41; Römer: Theoretische Optik 1994 Brechung p68, Fresnel p71; Langkau et al: Physik kompakt. Elektromagnetische Wellen p78-107; Gertsen: Physik 2003[17] Totalreflexion p485, Polarisation durch Brechung, Brewster-Winkel p545; Schaefer: Einf in die theoret Physik Bd3.1 1950 Brechung p386ff Fresnel p395, Brewster p404, Totalreflexion p406; Bermann & Schäfer: Bd3 Optik Kap4.2 p493, Totalreflexion p503; Schilcher: Theoret Physik kompakt f Lehramt 2010 Polarisation; Zeitler & Simon: Physik f Techniker p294 Brewster-Winkel folgt aus $\alpha + \frac{\pi}{2} + \beta = \pi$ oder $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, also $\sin\beta = \sin\frac{\pi}{2} - \alpha = \cos\alpha$ mit $n_\alpha \sin\alpha = n_\beta \sin\beta = n_\beta \cos\alpha$ oder kurz für den Brewster-Winkel $\tan\alpha = \frac{n_\beta}{n_\alpha}$.

33 Planetare Magnetfelder, Sonnenaktivität, Legendre'sche Polynome

Geomagnetisches Institut Potsdam 1888-1893 errichtet durch Max Eschenhagen 1858-1901, Variationshaus 1888, Absoluthaus 1997, Adolf Schmidt 1860/1902-1928/1944 ab 1890 kontinuierliche Messreihe absoluter und relativer Messungen der magnetischen Elemente. Zeigt Existenz des äquatorialen Ringstroms in der Ionosphäre. Ab 1927 in Niemegk Gerhard Fanselau 1904/1933-1982, Hans-Joachim Linthe. Heinz Stiller 1932-2012, ab 1960 Direktor des Geomagnetisches Institut Potsdam, ab 1969 Zentralinstitut für Physik der Erde (ZIPE), Stiier ab 1988 Geophysikalische Hochdruckforschung = Erdinneres. Joachim Höpfner: Geschichte des Geodätischen Instituts Potsdam 2007 digisat pdf; 1 Gauß = 1 $\Gamma = 10^{-4}$ Wb/m = 10^{-4} T = 10^{-4} Vs/m^2. Polstärke p. $F = \frac{1}{4\pi}\frac{p_1 p_2}{\mu r^2} = p_1\, H$ Bender: Maßeinheiten p77, 83, 201; Göbel: Wissensspeicher Einheiten; D ist Deklinations-Winkel = Differenz geographische und magnetischer Pol, Azimut oder Variation der Kompass (Seeleute) der Ost-Abweichung (positive y-Richtung), $Y = H \sin D$ der Magnetnadel vom geographischen Nordpol, der die positive x-Richtung definiert. H ist Horizontalkomponen der magnetischen Kraft. Kompass-Nadel weist gegenüber einer unmagnetischen Nadel in Nordhemisphäre im Inklinations-Winkel I, gemessen gegenüber dem magnetischen Meridian, nach unten (magnetische Eintauchen, dip), also positive z-Richtung. F ist magnet. Gesamt-Kraft. **Chapman & Bartels: Geomagnetism**. Bd1 Geomagnetische Phänomene. Bd2 Analyse und physikalische Deutung 1940; Schubert ed: Treatise on geophysics 10Bde 2009 Bd5 Geomagnetism; **Jacobs: Reversals of the Earth's magnetic field** 1994[2] Exkursionen, Modelle, Elektromagnetische Diffusionszeit τ_η(leitender Erdkern)= R_L^2/η =200.000 Jahre. σ(Erdkern)=$4{\cdot}10^5$ S/m, η(Erdkern)=2 m^2/s. Die Turbulenz in Sonnenkonvektion gibt magnetische Diffusivität, die die Magnetfelder nach Dekaden zerfallen lässt. ($\eta = 1/\mu\sigma$ ist die magnetische Diffusivität). Kippenhahn & Weigert: Stellar structure and evolution 1991;

Planeten um Sterne sind gemäß Micro lensing, sieht kleine Planeten, Exomonde oder frei fliegende Planeten, **die Regel, nicht die Ausnahme**. Im Mittel hat jede Galaxis mindestens einen Erd- oder Mars-Massen-Planeten planets, of exomoons and of free-floating planets Marow: Die Planeten des Sonnensystems 1987, Keppler: Sonne, Monde und Planeten; Kippenhahn: Unheimliche Welten. Planeten, Monde und Kometen; Abenteuer Weltall; Schklovski: Geburt und Tod der Sterne 1988[3]; Woolfson: The Origin and Evolution of the Solar System 2000; Bergmann & Schäfer: Bd7 Erde und Planeten 1997; Smith & Jacobs: Introductory astronomy and astrophysics 1973 Mars p160ff; Mitton & Ryle: Cambridge-Enzyklopädie Astronomie 1977 p198ff Mars; Newcomb: Populäre Astronomie 1881; Sagan: Unser Kosmos 1980 Kap5 Mars; Sagan: Die exakten Geheimnisse unserer Welt 1984 p116ff Mars; Gast: BESIEDLUNG DES MARS. Der Traum vom Terraforming. Seit Jahrzehnten träumen Raumfahrtfans davon, den Mars in eine zweite Erde zu verwandeln. Eine neue Studie macht diese Vision nun leider gründlich zunichte. **Integrated astrophotonics:** extremely large telescopes, photonic devices = devices manipulating light on scales comparable to its wavelength. compact, light-weight, and highly-multiplexed instruments with low maintenance

needs. Compact photonic calibration sources for low- to high-resolution spectrographs, to applications of photonic lanterns, to multi-aperture spectro-interferometric devices. Compact photonic calibration sources which could keep an accuracy in the order of a few cm/s over long periods (months or years) and high-precision, sparse aperture, intra-pupil spectro-interferometric instruments for the enhancement of the effective angular resolution of the telescope and the synthesis of high-contrast, spectrally-resolved images of astronomical targets. Laux: Astrooptik 2017[3];

Planet	R_L/R (km)	ρ_L/ρ	T (d)	H_{Dipol} Gauß	Tide (m)	Störkörper
Merkur	1840	7.60	58.6	$8{\cdot}10^{-3}$	.59	Sonne (.59)
Venus	3150	10.60	243.09	$1.6{\cdot}10^{-4}$	.11	Sonne (.11)
Erde	3485/6371	10.615/5.515	1	1.9	.15	Mond (.10)
Mars	1500	7.5	1.03	$7.4{\cdot}10^{-3}$	.01	Sonne (.01)
Jupiter	66400	1.33	0.41	5.3	19.45	Io (15.48)
Saturn	46800	0.7	0.43	.47	2.83	Titan (1.44)
Uranus	18000	1.31	0.45	.65	1.15	Ariel (.66)
Neptune	15100	1.66	0.65	.53	6.97	Triton (6.97)

Tabelle 7: Tiden planetarer leitender Kerne. Proctor & Gilbert p171, Novotny 1983

Dorschner: Planet des Todes - Venus In: Urania Universum Bd29 1983 p365-72; Wittmann & Xu, Catalog of Naked-Eye Sunspot Observations 165 B.C. - A.D. 1684, A&A **70**, 83 (1987); Schröder & Legrand p9 Kosmische Strahlung hat obere Grenze bei $5 \cdot 10^{19}$ eV - Maximalenergie kosmischer Teilchenbeschleuniger

Daten	Seit
Tägliche Sonnenfleckenrelativzahlen (Wolf-Zahlen)	1750
Polarlichter ($\Phi > 62^o$)	1780
Magnetische Aktivität	1868
Aktivitätszentren der Chromosphäre	1911
Kritische Frequenz der Ionophäre	1931
Kosmische Strahlung: Harte Komponente	1937
Kosmische Strahlung: Nukleare Komponente (^{14}C)	1957
10 cm Strahlung	1947
Chromosphärische Eruptionen und Radioausbrüche	1957
Magnetische Aktivität (Dst, AE)	1957
Absorption der galaktischen Radiostrahlung (Riometrie)	1958

Tabelle 8: Beobachtungsreihen zur Sonnenaktivität

oder Wechselwirkung hochenergetischer Protonen mit der 3 K Hintergrundstrahlung (GZK-Effekt)? Karl-Heinz Kampert. Galactic Cosmic Rays (CR) are accelerated in Supernova Remnants (SNRs) through the process of diffusive shock acceleration. In this scenario, particles should be accelerated up to energies around 1 PeV (the so-called 'Knee') and emit gamma rays. Wolfendale & Murthy: Gamma-ray Astronomy 1993 γ-Strahlen aus a] Materie-Antimaterie-Anhililation: e+e$^+$ oder p+p$^-$, b] Radioaktivität angeregter Kern A*, c] Bremsstrahlung von e an ISM, d] inverser Compton-Effekt, e] Sychrotronstrahlung an starken Magnetfeldern, f] energetische kosmische Strahlen p + ISM(^{16}O) gibt 8...30 MeV Photonenfluss, speziell 6.129MeV, g] heiße Plasmen.;

Hess & Eugster: Cosmic radiation and its biological effects 1949; Hopper: Cosmic radiation and high energy interactions 1964; Miroschnitschenko: Kosmische Strahlung im interplanetaren Raum 1973, 1979; Börner: SdW April 2013 p40-50; Fadil Inceoglu: From cosmogenic isotopes to past variations in solar activity, per ^{14}C und ^{10}Be der letzten 11,000 Jahre = Holozän.

Prölss: **Physik des erdnahen Weltraums. Eine Einführung**, 2003[2] Neutrale Hochatmosphäre, Absorp-

tion von Sonnenstrahlung, Ionosphäre, Magnetospäre, interplanetarer Raum, Sonnenwind, Geostürme, Formeln. Kertz; Lang: Astro Formulae; Glaßmeier & Scholer eds: Plasmaphysik im Sonnensystem 1991; Mackin & Neugebauer: The solar wind 1966; Leonow & Scott: Zwei Mann im Mond. Wie aus Rivalen im Weltall Freunde fürs Leben wurden 2004; **Ratcliffe: Sonne, Erde, Radio. Die Erforschung der Ionosphäre** 1970; Braunbek: Licht und Radiowellen, PhysBl22 1966 p251-255; Mitra: The upper atmosphere 1947, 1952; Armstrong & Dalgarno eds: The airglow and the aurorae 1955; Ratcliffe ed: Physics of the upper atmosphere 1960; Sadami Matsushita: Aeronomy. Selected papers 1985; Ikauniekes ed: The physics of mesospheric (noctilucent) clouds 1973; Splitter: Zur Geschichte physikalischer, technischer und mathematischer Forschungsstätten der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin in Berlin-Adlershof bis zum Ende der 1960er Jahre; **Solare Beobachtungsergebnisse d. Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung** d. Dt. Akad. d. Wiss. zu Berlin. Jg. 1958 2. Hj.; 1959; 1961 2. Hj.; 1962 1. Hj.; 1963 1. Hj.; 1968-1969; 1972 H. 3-8; Suppl. Series Bd. 1 H. 2-6; **1928-1936/1945/1950 Adlershof/1968 Einsteinufer 37/1957-1966 Heinrich-Hertz-Institut** für Schwingungsforschung, Gustav Leithäuser 1881-1969 Hochfrequenztechniker, 1926 Audioschaltung, 1933 Dt Amateur-Sende-Empfangsdient, Auswahl Volksempfänger, 1934 Ionosphären in Tromso. Hachenberg: Sonnentätigkeit und Ausbreitung elektrischer Wellen in der Erdatmosphäre 1955; Hachenberg & Mebold: Die Struktur und der physikalische Zustand des interstellaren Gases aus Beobachtungen der 21-cm-HI-Linie 1976; Hachenberg & Vowinkel: Technische Grundlagen der Radioastronomie 1982; Högbom & Christiansen: Radiotelescopes 1985; **Otto Hachenberg 1911/1951-1961/1967-1978/2001** Aufbau des **Adlershofer Radioteleskops 1958-1973**, dann am Bonner Radioteleskop, das von Friedrich Becker 1900-1985, Schüler von Paul Guthnick, erbaut. Astropeiler Stockert in Eschweiler 43km südwestl Bonn, erbaut 1955/56 von Telefunken Berlin 21cm, 11cm, ∅ 25m 1979-1993 für Ausbildung. Ab 1972 100-Meter-Radioteleskop Effelsberg in Bad Münstereifel-Effelsberg 43km südwestl Bonn. G. Rüdiger: Ikarus von Kühlungsborn; Lauter 1966-1969 Direktor des Heinrich-Hertz-Institut für solar-terrestrische Physik Berlin-Adlershof, 1969-1973/81 Zentralinstitut für solar-terrestrische Physik = ZISTP: Taubenheim 1929/1976-1981/2021 Leiter der Ionosphärenforschung. **Ernst-August Lauter 1920-1984**, ab 1951 Direktor des Observatorium für Ionosphärenforschung in Kühlungsborn. Lauter erbaut 1975 Ionosphärenstation Juliusruh, Idee: Tremsdorf und Einsteinturm zum Monitoring der Solarkonstante. Ab 1963 COPAR zur Tag-Nacht-Variation von Ionosphäre und Atmosphäre, nicht nur Instrumente für INTERKOSMOS. Gegner Heinz Stiller 1932-2012, Rompe und Treder, Günter Pätzold = IM 'Kosmos'. 1972 Wohnungsdurchsuchung. Stiller ed: Sojus 22 erforscht die Erde 1980; Fotografische Fernerkundung der Erde Salut-6 1983; Lemke: Die Astronomische Gesellschaft 1863 - 2013. Geschichten und Bilder aus 150 Jahren, Heidelberg 2013 p83ff; Becker: Astronomie in unserer Zeit 1955, 1970; Becker: Blick ins Weltall 1968; Becker: Geschichte der Astronomie 1946, 1982; Günther Falckenberg 1879-1963 K̃owal & Dessinow: In den Weltraum zum Nutzen der Menschheit 1987; **R̃einhard Buthmann: Versagtes Vertrauen. Wissenschaftler der DDR im Visier der Staatssicherheit 2020** 1179 Seiten; Mielke, Wittbrodt, Narimanow & Saizew eds: Weltraum und Erde Bd1 = Raumfahrt für die Erde 1975; Christian-Ulrich Wagner: Die negativen Ionen des Sauerstoffs und ihre Bedeutung für ionosphärische Prozesse. Eine Untersuchung über die Betrachtung quantenmechanischer Berechnungen für die Aeronomie, ZIPE 196?; Wagner: Untersuchungen zur Theorie des symmetrischen atmosphärischen Dynamos und zur Bestimmung der Leitfähigkeit des Ionosphärenplasmas aus geomagnetischen Messungen, ZIPE 1966; 1972 Christian-Ulrich Wagner 1935-1989 Bereichsleiter Sonnen- und Magnetosphärenphysik, Buthmann p839; Adolf Best, Bettae, Flemming, Hanns-Rainer Lehmann, R. Treumann, C.-U. Wagner: Ergebnisse des Langmuir-Sonden-Experiments auf Interkosmos-10 1979; Jahrbuch der Akademie der Wissenschaften; Rudolf Treumann *1942, Heber, Zeidler, ... http://www.spiegel.de/spiegel/spiegelspecial/d-52429335.html Treumann: Pandemie-Pandämonie, Lettre International 131 2020; Transparent entrollt am 20.6.1968 gemalt von Treumann: Die Elemente 1994; Lüst: Nachruf auf Harald Fritzsch, PJ22 2023 H3 p65; **Fritzsch: Flucht aus Leipzig 1968** 1990 besser erweiterte Auflage 2004 mit Reflexionen im Jahre 2004 über Weg der deutschen Einheit; Stefan Welzk: Leipzig 1968. Unser Protest gegen die Kirchensprengung und seine Folgen 2012; Adolf Best: Das Verhalten von Elektronendichte und Elektronentemperatur im Ionosphärentrog mittlerer Breiten 1987; Fanselau: Adolf Schmidt, PhysBl17 1961 p326f; Rudolf Treumann, Detlef und Gudrun Johanning, Wolfgang Seifert, Matthias Förster, Frau Weid-

lich, Jürgen Rustenbach 1937- Langmuir-Sonden 1986; Birgit Süßenbach, Udo Schwarz; Wilfried Schröder: Briefwechsel von Hans Ertel und Ernst-August Lauter 2008; Wolfgang Mundt 1935-2017, 1985 Heinrich-Hertz-Institut für Atmosphärenforschung und Geomagnetismus, 1973 -1980 Institut für Elektronik, 1981 - 1991 Institut für Kosmosforschung. **Dethloff, Heinz Kautzleben: Zur Kopplung von Erd- und Weltraumwetter** Kautzleben & Fanselau: Zur Auswertung der Potentialberechnungen in begrenzten Gebieten 1960; Bugoslavskaya: Solar activity and the ionosphere 1962; Rawer: Die Ionosphäre, ihre Bedeutung für Geophysik und Radioverkehr 1953; **Riometrie** = relative ionosphärische Opazität/Durchsichtigkeit bei 20 to 50 MHz entspricht der Elektronendichte der E- und D-Schicht. Gemessen wird das kosmische Radiorauschen, das von den stellaren Quellen der Galaxis herrührt. McKay et al: All-sky interferometric riometry, Radio Science50 Issue10 2015 p1050–1061; Rawer: Meine Kinder umkreisen die Erde. Der Bericht eines Satellitenforschers 1988; Geomagnetische Aktivität: AE-Index beschreibt die geomagnetischen Störungen, die durch den auroralen Elektrojet hervorgebracht werden. Menvielle & Bertelier: The K-derived panetary indices, Rev of geophysics 29 1991 p415-432, correct ebneda 30 1992 p91; Siebert: Magnetosphäre PhysBl28 H9 1972 Maßzahlen der erdmagnetischen Aktivität HdP XLIX/3, Geophysik III/3 1971 p206-275; Der aurorale Elektrojet reflektiert die Wechselwirkung des Sonnenwindes mit der Erdmagnetosphäre. **Erdmagnetische Störungen** Kristian Birkeland Laborexperimente an Terrella mit Lichterscheinungen. Störungen: global navigation satellite system = GNSS, Flugverkehr, Elektroenergieversorgung. Radio-Beobachtung der Sonne liefert bereits nach 8 Minute Voraussagen über zu erwartende geomagnetischen Stürme, die von Schockwellenfronten des Sonnenwinds, nach Sonneneruptionen oder koronale Massenauswürfe (KMA) nach etwa 24 bis 36 Stunden die Erde erreichen und 1-2 Tage andauern.

Rendtel: Sternschnuppen 1991; **Oort'sche Wolke** bei 67000 AE mit 10^{11} Kometen, Metoeriden 100 m_{Erde} = m(Jupiter)/3 = 1/3000 Sonnenmasse. **Kuiper-Gürtel** hinter Pluto bei 40 AE. **Meteoroide** kleine Metall- oder Gesteinskörner aus dem interplanetaren Raum. Pro Tag etwa 10 Milliarden mit einer Gesamtmasse von 1.000 bis 10.000 Tonnen in die Atmosphäre der Erde. 11,2 bis 72 km/s Leuchtspuren: **Sternschnuppen und Feuerkugeln**. Boliden: >10 mm, > 2 g, 1 t/Tag, Sternschnuppen: (4^{mag}bis+6^{mag}), 1 mm bis 10 mm, 2 mg bis 2 g, 5 t/Tag, Teleskopische Meteore: 0,1 mm bis 1 mm, 0,002 mg bis 2 mg, 20 t/Tag, Mikrometeore: <0,1 mm, < 0,002 mg, 1000 bis 10.000 t/Tag. Ab 1 kg Masse kein vollständiges Verglühen: Die Erde trifft ein **Meteorit**. Eisenmeteoriten, Stein-Eisen-Meteoriten und 90 % Steinmeteoriten, zu 80 % aus millimetergroßen Chondren. Schmelztröpfchen, geboren in großer Hitze, vor 4,56 Milliarden Jahren in einem Nebel aus Staub und Gas, der die junge Sonne umgab immer in eine Matrix aus feinem Urnebel-Staub eingebettet, der nie geschmolzen war. Zerfall ^{26}Al heizte die ersten 30 km-Planetesimale rasch auf. Bei Zusammenstößen Regen von Gesteinstropfen an die Urstaub anlagert und die Planeten wachsen lassen.

Wilfried Schröder: Das Phänomen des Polarlichts 1984; Polarlichtoval, aurora borealis 1619 zwischen 67° und 70° nördlicher bzw. südlicher Breite. Bestandteile der mittleren und unteren Ionosphäre der Erde werden dabei von intensiven energetischen Teilchenschauern (Elektronenprezipitation: $E_{kin} \approx 100eV \ldots 10keV$) bevorzugt angeregt.
Atomer O in ca. 110 km Höhe: $\lambda(2^1S_0(metastabil) \rightarrow 2^1D_2) = 557.7$ nm (gelblich grün, verbotene Linie, nur bei sehr geringem Druck beobachtbar), $\tau_w = 0.7$ s und $\lambda(2^1D_2 \rightarrow 2^3P_2) = 630$ nm (rot), $\tau_w = 100$ s. Molekularer **Stickstoff**: N_2, N_2^+ (blau, violett). Ertl & Soentgen: N. Stickstoff - ein Element schreibt Weltgeschichte 2015 Bis 1900 Mangel an N, der fast 80 Prozent unserer Luft ausmacht. N_2, nutzt Pflanzen nichts. Erst Bakterien und Blitze (sic!) müssen ihn umwandeln, um ihn bioverfügbar zu machen. Das reichte im Industriezeitalter jedoch immer weniger aus, um all die Nahrungspflanzen zu düngen, die man für die wachsende Weltbevölkerung brauchte. Ohne das Haber-Bosch-Verfahren, das die Produktion von Kunstdünger ermöglicht, wäre die damals befürchtete Ernährungskrise wahrgeworden. Setzt man ihn übermäßig intensiv ein, wie es heute vielfach geschieht, werden Felder überdüngt, versauern Böden, sammeln sich Stickoxide in der Luft. Und so überlebenswichtig das Haber-Bosch-Verfahren ist: Es ermöglicht auch, Munition in riesigen Mengen herzustellen, und nährte damit etwa die mörderischen Trommelfeuer der Artillerie im Ersten Weltkrieg; Atomarer Wasserstoff in ca. 250 km Höhe: **Balmer-Serie** $\lambda = A\left(\frac{n^2}{n^2-2^2}\right)$ mit $A =$ 364.568 nm. $\lambda(H\alpha) = 656.3$ nm (rot) und $\lambda(H\beta) = 486.1$ nm (blau). Oder mit **Rydberg-Konstante** =

$R_\infty = \frac{4}{A} = R_\infty = 1{,}0973731568539(55) \cdot 10^7\,\mathrm{m}^{-1}$ auch per **Rydberg-Formel:** $\tilde{\nu} = R_\infty \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$. Folgende Vorgänge spielen dabei eine wesentliche Rolle:
Ionisation $O_2 + e^- \to O_2^+ + 2e^-$, $N_2 + e^- \to N^+ + N + 2e^-$. **Umladungen:** $O^+ + O_2 \to O_2^+ + O$ und $N_2 + O \to NO^+ + N$. **Dissoziative Rekombinationen:** $O_2^+ + e^- \to O + O$ und $NO^+ + e^- \to N + O$. **Sonnenfleckenbeobachtungen** mit bloßem Auge 354 v.Chr., 807, 1607 Johannes Kepler, 28. Mai; Fernrohrbeobachtung ab 1608. Vollmer: Die Grenzen des Auges, PJ22 2023 H3 p28-33; ab 1749 Monatsmittel, ab 1849 Tagesmittel, Jagd nach "Vulkan" Man vermutete innnerhalb der Merkur-Bahn einen weiteren Planeten. ab 1826 durch Heinrich Samuel Schwabe (1789-1875); Astronomische Nachrichten **21** (1844) Nr. 495, 233-236, Mitteilung vom 31. Dezember 1843: Periode beträgt 10 Jahre; AvHumboldt im Kosmos Bd3: Täglich mindestens ein Fleck, also 1828, 1829, 1836-1839, 1847-1849. 1850 Kosmos Bd3. 100 fleckenfreie Tage im Jahr: um 1833 und 1843. Bereits 1843 entdeckte der Apotheker Heinrich Samuel Schwabe (1789-1875) aus Dessau, daß die Sonnenfleckenanzahl eine Zyklusdauer von etwa 10 Jahren aufweist. AN 1843 Um die Sonnenaktivität auf eine einfache Weise zu beschreiben, führte Rudolf Wolf (1816-1893) aus Zürich im Jahre 1830 Relativzahlen ein, die durch Zählen von Einzelflecken und Fleckengruppen bestimmt wird. Diese Zahl wird als ein geeigneter Indikator für die Entwicklung des Magnetfeldes der Sonne angesehen. Das Maximum der Sonnenfleckenrelativzahlen von 1760 beschreibt den ersten Zyklus; 1986 endete der 21. Zyklus. Die Sonnenaktivität dokumentiert sich außerdem in der: ^{10}Be- und δ^{18}O-Häufigkeit in Eiskernen und der Thermolumineszenz von Sedimenten, 10 cm Strahlung, Flare-Häufigkeit. 1770 ff. A.v. Humboldt, Ritter, Gauß. Ritter 1803: Periode 9 ... 10 Jahre. Polarlichter und magnetische Gewitter sind korreliert. **Δ^{14}C Häufigkeit** Ein weiterer Indikator für die Sonnenaktivität ist der durch Assimilation von CO_2 in den fossilen Bäumen befindliche radioaktive Kohlenstoff, der auch zur Altersbestimmung herangezogen wird. Die heliomagnetische Modulation des Flusses der galaktischen kosmischen Strahlung in der Erdumgebung bedingt eine Variation des Δ^{14}C – Gehaltes der Erdatmosphäre:

$$ {}^{14}_{7}N \quad (n,p) \quad {}^{14}_{6}C, \quad \text{und} \quad \beta\text{–Zerfall}: \quad {}^{14}_{6}C \quad \xrightarrow{T_{1/2}=5730 Jahre} \quad {}^{14}_{7}N \quad + \quad {}^{0}_{-1}e \quad + \quad {}^{0}_{0}\bar{\nu}_e \tag{121} $$

Jahresringe fossiler Bäume (C.P. Sonett, University of Arizona) Typische Zeitskalen des Δ^{14}C-Datensatzes sind: 10000 Jahre, geomagnetische Modulation. Vorbach: **Geodynamo** PdNPiS Bd52 2003 H6 p33-37; **Roberts & Glatzmaier: Geodynamo theory and simulations** RevModPhys72, 1081 (2000); **Steenbeck: Warum hat die Erde ein Magnetfeld?** PhysBl26 1970 158ff = Wifo 10 1969 p435ff; 2000 Jahre, ozeanische CO_2 - Zirkulation, klimatisch! 100 - 400 Jahre (Eddy), (p230) 150 Jahre (lt. Sonett rätselhaft) 210 Jahre solaren Ursprungs 76 - 80 Jahre (p212 f) 80 - 90 Jahre Gleissberg - Zyklus (solar) 53 Jahre (p214) 11 Jahre Response Zeit = 30 Jahre

Große Minima Schröder & Legrand p9 Oort 1010 bis 1050; Wolf 1282 bis 1342; Spörer 1416 bis 1534; Spörer-Minimum 1460-1540; Maunder 1654 bis 1714; Maunder-Minimum 1645-1715; Dalton 1795 bis 1830; Kleine Eiszeit 1550 bis 1850. Breitendaten von Scheiner, Hevelius, Staudacher, Zucconi, Schwabe und Spoerer erlauben Beginn eines Minimums vorherzusagen. Nach Minimum nur nahe Äquator. Sonst höher. Kommt bald ein Minimum?

Dynamo - Modell für die Sonnenaktivität

$$ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \tag{122} $$

($\eta = 1/\mu\sigma$ ist die magnetische Diffusivität). Die Änderung der Fluidgeschwindigkeit $\mathbf{u}$ ist in erster Linie durch die Gravitationfeldstärke $\rho\mathbf{g}$, den Druckgradienten ∇p, die Lorentz-Kraft $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ und die viskose Kraft $\nabla \cdot \tau$ bedingt. Die Grundgleichung, die diese Kräfte verknüpft, ist die Navier-Stokes-Gleichung

$$ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla \cdot \tau \tag{123} $$

($\mathbf{j}$ – elektrische Stromdichte, ρ – Fluiddichte, τ – Viskositätstensor, $\mathbf{g}$ – Gravitationsfeldstärke, p – Druck). Der mittlere Magnetfeldtransport wird durch Turbulenz-Transport-Koeffizienten, wie durch das α (α-Effekt)

und Turbulenzdiffusivität bestimmt. Wegen differentieller Rotation, d.h., daß die äquatornahen Bereiche der Sonnenoberfläche den polnahen vorauseilen. Clauser: Einführung in die Geophysik. Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde 2014 p353f; Die Coriolis-Kraft bringt im Mittel auf der Nord(Süd)-Halbkugel der Sonne eine links(rechts)drehende helikale Bewegung hervor. Dies wird durch den Zusatzterm in der Induktionsgleichung für die gemittelten Felder (122) berücksichtigt, der den α-Effekt beschreibt. Die Folge des α-Effekts ist ein modifiziertes Ohmsches Gesetz für die gemittelten Größen, bei dem zusätzlich zur **elektromotorischen Kraft = EMK = stromtreibende Kraft = Ladung bewegende Kraft** (= Quellen- oder Leerlaufspannung = Potenzialdifferenz in der Spannungsquelle, die durch Arbeit an der Ladung jene auf eine höheres elektrisches Potenzial hebt. Tipler: Physik, p758; Purcell: Elektrizität, Berkeley-Kurs 2 p175, EMK=Arbeit pro Ladung = $\mathcal{E} = \frac{1}{Q}\int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$ = jeder Einfluss, der zur Bewegung einer elektrischen Ladung auf einem geschlossenen Weg führt. Feynman: Bd2 p296 Faraday: Drahtbewegung, Magnetbewegung, Stromänderung in benachbartem Draht. Batterie-Galvanik. **Batterie-Polung:** Test durch Kochsalzelektrolyt **Kathode/Knallgas steigt auf** = (-) $\dashv$; **Anode/Chlorgas steigt auf** = (+) = dicker Strich. Thermoelektrik durch die großskalige Geschwindigkeit $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ eine durch kleinskalige Turbulenz bedingte elektromotorische Kraft $\alpha\mathbf{B}$ auftritt. Nach dem **Parker-Modell** finden sich allenorts strömungsbedingt helikal verdrillte Magnetfelder mit einer Komponente in Drehrichtung.

Die Quelle des Magnetfeldes im äußeren Erdkern, schalenförmiger Bereich zwischen 2900-5200 km Tiefe. Die darin befindliche Mischung aus Eisen und Nickel ist mehr als 4000 Grad Celsius heiß, aber wegen des enormen Drucks fest. Im darüber befindlichen äußeren Erdkern hingegen ist das Material wegen des geringeren Drucks flüssig, obwohl dort nicht einmal 3000 Grad herrschen. Letzte Umpolung vor 780000 Jahren. Nordpol (magn. Südpol) wandert pro Tag um rund 150 Meter. Kertz: Geophysik 2Bde 1969; Walter: Einf Potentialtheorie 1971; Sigl: Einf Potentialtheorie 1989; Kautzleben &Fanselau: Zur Auswertung der Potentialberechnungen in begrenzten Gebieten 1960; Helms: Einf Potentialtheorie 1973; Günter: Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik 1957; Gerhard Fanselau & Kautzleben: Zur Auswertung der Potentialberechnungen in begrenzten Gebieten 1960; Genschorek: In der weißen Wüste. Leben und Leistung Fridtjof Nansens 1980; Nansen: In Nacht und Eis: die norwegische Polarexpedition 1893 - 1896. Vom Pol zum Äquator 2000;

Wilson: Igeneous petrogenesis. A Global Tectonic Approach 1997, 2010; Messungen magnetischer Eigenschaften von Gesteinen enthalten Informationen einerseits über das Magnetfeld der Erde in vergangenen Zeiten und andererseits über das damalige Klima. Dabei werden die Signale vom Magnetfeld und des Klimas vermischt und sind nicht zu trennen. Oeschger Umweltisotopenanalysen Isotope in Hydrologie und Glazialogie. Klimaaufzeichnungen in der Natur PhysBl31 1975 p616-626; Winter: An introduction to igneous and metamorphic petrology 2001; Hamblin & Howard: Physical geology 2000[7]; Twiss & Moores: Structural geology 1992; Rothe: Die Geologie Deutschlands. 48 Landschaften im Portrait 2009; Oberholzer & Dietrich: Tabellen zum Mineral- und Gesteinsbestimmen; Bryant: Natural hazards 2007;

Jupiters Plasma kommt von Io. Pulsation der Saturn-Magnetosspäre im Dungey-Zyklus. Saturnmonde Thetys, Dione, Rhea und Japetus. Saturns Plasma von Encelatus im Vasyliunas-Zyklus. Huygens auf Titan: größter Mond bei -150°C mit flüssigem Methan.

34 Semiklassische Physik: Asymptotische Methoden, WKB-Näherung

Grenzbereiche zwischen klassischer und Quantenmechanik, sowie zwischen Strahlen- und Wellenoptik: Wellenmechanik (**WKB**, gleichmäßig asymptotische Lösungen). Asymptotische Reihen. Entwicklung von Integralen und speziellen Funktionen. Mehr-Skalen-Entwicklung für Differentialgleichungen mit kleinen Parametern. Geometrische Optik, Regenbogen, Kaustiken. Quantenchaos und Gutzwiller-Spurformel. 1-D: **WKB-Näherung** = Idee: **Potential** $V(x)$ **ändert sich 'langsam' mit der Position**. Bei Schrödingergleichung $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$ wegen $V(x) = V_0$ die **ebene Welle** $\psi(x) = A\exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}p_0 x\right)$ mit $p_0 = \sqrt{2m(E-V_0)}$ eine Lösung. Bei langsamer Änderung des Potentials, wo in der Größenordnung der **de**

Broglie-Wellenlänge als konstant angesehen werden kann, kann man $p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}$. Also $\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(x)\right)$. Das gibt ohne Näherung $-\frac{i\hbar}{2m}\frac{d^2S(x)}{dx^2} + \frac{1}{2m}\left[\frac{dS(x)}{dx}\right]^2 + V(x) - E = 0$. **Potenzreihe** $S(x) = S_0(x) + \hbar S_1(x) + \frac{\hbar^2}{2} S_2(x) + ...$ gibt $\Leftrightarrow \hbar^0 \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_0(x)}{dx}\right)^2 + V(x) - E\right] + \hbar^1 \left[-\frac{i}{2m}\frac{d^2S_0(x)}{dx^2} + \frac{1}{m}\frac{dS_0(x)}{dx}\frac{dS_1(x)}{dx}\right] + \hbar^2 \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1(x)}{dx}\right)^2 - \frac{i}{2m}\frac{d^2S_1(x)}{dx^2}\right] = 0$, also in nullter Ordnung $\frac{1}{2m}\left[\frac{dS_0(x)}{dx}\right]^2 + V(x) - E = 0$ oder $S_0(x) = \pm \int \sqrt{2m(E - V(x'))}dx'$. $\psi(x) = \left(\frac{\text{const}}{2m[E-V(x)]}\right)^{1/4} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} \int \mathrm{d}x' \sqrt{2m(E - V(x'))}\right)$. Hydrodynamische Formulierung der Schrödingergleichung, Langers Lösung an Umkehrpunkten, Tunneln und Quantisierung, uniforme Näherungen a la Berry & Mount, innere Freiheitsgrade: Landau-Zener-Modell, asymptotische Analysis. In mehreren Dimensionen: der Regenbogen als Beispiel, geometrische Optik: Strahlen und Intensität, "dünne Phasengitter": Beugung und Streuung, Beugungskatastrophen höherer Ordnung. Feynman: QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p68 **Wenn die Photonen nicht immer mit gewissen Wahrscheinlichkeiten jeden Weg gehen, so wäre Beugung nicht denkbar!** Anwendungen: klassisch chaotische Systeme, Streuung von Atomen, Drehimpulsalgebra für große Quantenzahlen, Materiewellen in fluktuierender Umgebung. **Erdelyi: Asymptotic expansions** 1956; Bogoljubow & Mitropolski: Asymptotische Methoden 1958/1965; **Goering: Asymptotische Methoden** zur Lösung von Differentialgleichungen 1977; **de Bruijn: Asymptotic Methods in Analysis** 1981; Bender & Orszak: Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers; Awrejcewicz: Introduction to asymptotic methods 2006; Berry & Mount: Semiclassical approximations in wave mechanics RepProgPhys35 1972 p315; Born & Wolf: Principles of Optics; Gutzwiller: Chaos in Classical and Quantum Mechanics; Newton: Scattering of Waves and Particles; Nye: Natural Focusing and Fine Structure of Light; Storey & Cohen-Tannoudji: The Feynman integral approach to atomic interferometry. A tutorial JPhysII (France) 4 (1994) 1999; **Melrose: Geometric Scattering Theory** Geometric Scattering Theory: Streutheorie ist Spektraltheorie des stetigen Spektrums. Die Multiplizität des stetigen Spektrums steht im Zusammenhang mit der Geometrie des zugrundeliegenden Raumes bei Unendlich bzw. der Geometrie einer geeigneten Kompaktifizierung. Dieser geometrische Standpunkt ist eine nützliche Orientierungshilfe für einfache wie auch kompliziertere analytische Fragen (asymptotische Entwicklungen, Limites von Resolventen, verallgemeinerten Eigenfunktionen, Streumatrix) für eine Reihe von konkreten Differentialoperatoren. Großmann: Funktionalanalysis 1988[4] Kap14 und Seite 368. Der **Resolventen-Begriff** fußt auf der **Eigenwert-Problem-Idee**, die als **Verschiebung der Matrix in eine Eigenrichtung** begriffen werden kann. Siehe Seite 221. Lösung $f = (A-z)^{-1}g$ von $Af - zf = g$ mit $z \in \mathbb{C}$ und fixem $g \in \mathcal{H}$ ist nützlich. Der zum Inversen $(A-z)^{-1}$ gehörige Integralkern ist die **Green'sche Funktion** von $A - z$. Läuft per Fredholmscher Alternative siehe Seite 138, Großmann: Funktionalanalysis Kap12.5;

Laplacesche Differentialgleichung in Kugelkoordinaten $\Delta f(r, \vartheta, \varphi) = 0$ mit $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi}$ gibt mit Produktansatz $f(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ die **Separation** $\Delta R_l(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)\Delta_r R_l(r) + \frac{R_l(r)}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 0$ oder $\frac{r^2\Delta_r R_l(r)}{R_l(r)} + \frac{\Delta_{\vartheta,\varphi}Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)} = 0$. Kann nur durch $\frac{r^2\Delta_r R_l(r)}{R_l(r)} = l(l+1) = -\frac{\Delta_{\vartheta,\varphi}Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}$ erfüllt werden. Gibt Radialgleichung = ode $\Delta_r R_l(r) = \frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r)$ und PDE $\Delta_{\vartheta,\varphi}Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$. Produktansatz $Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \Theta_{lm}(\vartheta)\Phi_m(\varphi)$ separiert zu

$$\underbrace{\frac{\sin^2\vartheta}{\Theta_{lm}(\vartheta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\Theta_{lm}(\vartheta) + \sin^2(\vartheta)(l(l+1))}_{m^2} = \underbrace{-\frac{1}{\Phi_m(\varphi)}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi_m(\varphi)}_{m^2}$$

und liefert **Polargleichung** $\frac{1}{\Theta_{lm}(\vartheta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right)\Theta_{lm}(\vartheta)=\frac{m^2}{\sin^2\vartheta}-l(l+1)$ und die **Azimutalgleichung** $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi_m(\varphi)=-m^2\Phi_m(\varphi)$. Also $f(r,\vartheta,\varphi)\ =\sum_{lm}R_l(r)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$. YYYYYY **Eigenwertgleichung** für den **Winkelanteil des Laplace-Operators** $\left(\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}+\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\ =\ -l(l+1)Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ führt auf **Kugelflächenfunktionen** $Y_{lm}:\ [0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ vermöge $(\vartheta,\varphi)\mapsto\frac{1}{\sqrt{2\pi}}N_{lm}\,P_{lm}(\cos\vartheta)\,e^{im\varphi}$ mit **Normierungsfaktoren** $N_{lm}:=\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}$ und den **zugeordneten Legendrepolynomen** $P_{lm}(x):=\frac{(-1)^m}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l$. $Y_{lm}:S^2\to\mathbb{C}$ mit

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}N_{lm}P_{lm}(\cos\vartheta)e^{im\varphi}=\Theta_{lm}(\vartheta)\Phi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_{lm}(\cos\vartheta)\exp(im\varphi)$$ mit

Orthogonalitätsrelation $\int Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\,Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)d\Omega\ =\ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\vartheta Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\,Y_{l'm'}(\vartheta,\varphi)\,\sin\vartheta\ =\ \delta_{l\,l'}\,\delta_{mm'}$. **Vollständigkeit:** $\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)=\delta(\varphi-\varphi')\delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta')$. **Parität** = Symmetrieverhalten eines physikalischen Systems gegenüber räumlicher Spiegelung, also **Spiegelung am Zentrum** = **Inversion**: Übergang $\vec{r}\to-\vec{r}$ bedeutet mit Paritätsoperator $\hat{P}(G^{\mu\nu})=-1G^{\mu\nu}$ bedeutet, dass Umkehr aller Vorzeichen zum entgegengesetzten Vektor führt = negative = ungerade Parität, Plattenkondensator $\vec{E}$ = polarer Vektor = Ortsvektor. Potential gerade Parität, weil Betrag immun gegen Raumspiegelung $V(-\vec{r})=V(\vec{r})$. Feldstärke ungerade Parität $\vec{E}(-\vec{r})=-\vec{E}(\vec{r})$. Asimov: Drehmomente, verblüffende Aspekte der modernen Forschung 1975 = The left hand of the electron 1972; Anders **gerade oder positive Parität** $\hat{P}(G^{\mu\nu})=+1G^{\mu\nu}$ bedeutet dass Umkehr aller Vorzeichen zum gleichen Vektor führt Spule $\vec{B}$ = **axialer Vektor** = **Pseudovektor** = $\vec{L}$ oder Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}=-\vec{a}\times(-\vec{b})$ oder $(t,x,y,z)\mapsto(+t,-x,-y,-z)$ oder in **Kugelkoordinaten:** $(r,\vartheta,\varphi)\to(r,\pi-\vartheta,\pi+\varphi)$ gibt $Y_{lm}(\pi-\vartheta,\pi+\varphi)=(-1)^l\cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$. **Komplexe Konjugation:** $Y_{l,-m}$ aus Y_{lm} durch: $Y_{l,-m}(\vartheta,\varphi)=(-1)^m\cdot Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)$. **Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen** $f(\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}c_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ mit $c_{lm}=\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi}Y^*_{lm}(\vartheta,\varphi)\cdot f(\vartheta,\varphi)\cdot\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$. **Nomenklatur in der Geophysik:** $m=0$ **zonal** = unabhängig von Längengrad φ. **Sektoriell** $m=l$ heißt $Y_{ll}(\vartheta,\varphi):=\frac{(-1)}{l!}^l\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4^{l+1}\pi}}\sin^l\vartheta e^{il\varphi}$. **Tesseral** (sonst) = längen- und breitengradabhängig. Als Eigenfunktionen des Winkelanteils des Laplaceoperators sind die Kugelflächenfunktionen zugleich **Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators** oder **Bahndrehimpulsoperator** hat **Vertauschungsregeln** $[\hat{J}_a,\hat{J}_b]=i\hbar\varepsilon_{abc}\hat{J}_c$ $\hat{\mathbf{L}}=\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\mathbf{p}}=\mathbf{e}_i\varepsilon_{ijk}\hat{r}_j\hat{p}_k$ in **Ortsdarstellung** $\hat{\mathbf{p}}=\frac{\hbar}{i}\nabla$ bzw. $\hat{\mathbf{r}}=\mathbf{r}$ gibt $\hat{L}_x=\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)$ oder $\hat{L}_x=i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\hat{L}_y=i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),\hat{L}_z=\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ zur **Nebenquantenzahl** l als Eigenwert: $\hat{\mathbf{L}}^2Y_{l,m}(\theta,\varphi)=\hbar^2l(l+1)Y_{l,m}(\theta,\varphi)\hat{L}_zY_{l,m}(\theta,\varphi)=\hbar mY_{l,m}(\theta,\varphi)$. **Die ersten Kugelflächenfunktionen:** $l=0,m=0$ gibt $\sqrt{\frac{1}{4\pi}}$. $l=1,m=-1,0,1$ geben $\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,e^{-i\varphi}$, $\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta$ und $-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta\,e^{i\varphi}$. Für jedes l ist die Funktion $r^lY^l_m(\theta,\varphi)$ Lösung der **Laplace-Gleichung in drei Dimensionen**, denn die Funktion $R(l)=r^l$ erfüllt gerade obige Gleichung $\Delta_rR_l(r)=\frac{l(l+1)}{r^2}R_l(r)$. Jede Lösung der Laplace-Gleichung lässt sich nun eindeutig als $\sum_{l,m}c_{lm}r^lY_{lm}$ darstellen. Somit lässt sich mit den Kugelflächenfunktionen die Laplace-Gleichung mit **sphärischen Dirichlet-Randbedingungen** lösen: Legen die Randbedingungen den Wert der Lösung f, die auf der abgeschlossenen Einheitskugel definiert sein soll, auf eine bestimmte quadratintegrable Funktion $f|_{S_2}$ auf der Einheitssphäre fest, so lässt sich $f|_{S_2}$ nach Kugelflächenfunktionen entwickeln, wodurch sich die Koeffizienten c_{lm} und damit auf eindeutige Weise ganz f ergeben. **Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen:** $P_l(\cos\gamma)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)Y^*_{lm}(\vartheta',\varphi')$. $\sum_{m=-l}^{l}|Y_{lm}(\vartheta,\varphi)|^2\ =\ \frac{2l+1}{4\pi}$ ist **Verallgemeinerung des Pythagoras** $\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\ =\ 1$ auf drei Dimensionen, wobei der **Winkel zwischen Ladungs- und Aufpunktsort** γ durch $\cos\gamma\ =\ \cos\vartheta\cos\vartheta'+\sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\varphi-\varphi')$ gegeben ist. **Jacobs: Reversals of the Earth's magnetic field** 1994[2]; Kertz Bd1, Joos, Glaeske et al. QC5; **Sommerfeld: Bd6 Partielle Dgls** §22; Riemann & Weber, Bd1 p310;

Heuser: Gew. Dgls; Bronstein: Die Legendre'schen Polynome 1. Art können auch als Reihenentwicklungen der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xr+r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\, r^n$$

erzeugt werden. Für Innen- und Außenfeld gilt dann

$$\Phi = a\sum_{l=1}^{\infty}\frac{a}{r}^{l+1}\sum_{m=0}^{l} P_l^m(\cos\theta)*[g_l^m(\cos m\phi)+h_l^m(\sin m\phi)]+a\sum_{l=1}^{\infty}\frac{r}{a}^{l}\sum_{m=0}^{l} P_l^m(\cos\theta)*[q_l^m(\cos m\phi)+s_l^m(\sin m\phi)]$$

a= Erd-Kugel-radius ϕ,θ,r = geozentr. Kugelkoordinaten. $P_l^m(\cos\theta)$ = Zugeordnete Legendre-Polynome. Gesucht sind Lösungen der **Legendre'schen Differenzialgleichung**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0,$$

die auch die bei -1 und 1 liegenden **schwach singulären** Stellen einschließen. Schmutzer: Mathematik. Ein Kompendium für Physiker 2003 p160ff oder Grundlagen der theoretischen Physik 2005[3] e-book, p166; Für homogene lineare Dgl 2. Ordnung $Q_2(x)y'' + \frac{1}{x}Q_1(x)\frac{1}{x^2}Q_0(x)y = 0$ mit $Q_0(x) = A_0 + B_0x^\sigma, Q_1(x) = A_1 + B_1x^\sigma, Q_2(x) = A_2 + B_2x^\sigma$ und $\sigma \in \mathbb{N}$ nutzt man die **Sommerfeld'sche Polynom-Methode**. Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien Bd2 1929 p13ff; Kallenrode: Rechenmethoden der Physik 2003 p128ff **Lösung von Dgls mittels Potenzreihen** $s(x) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i$ am Beispiel $s''(x) + s(x) = 0$ gibt $s'' = \sum_{i=2}^{\infty} i(i-1)s_i x^{i-2} = \sum_{i=0}^{\infty} s_{i+2}(i+2)(i+1)x^i$ also $\sum_{i=0}^{\infty}(s_{i+2}(i+2)(i+1)+s_i)x^i = 0$. Koeffizientenvergleich gibt $s_{i+2} = -\frac{s_i}{(i+2)(i+1)}$. Start mit s_0 bedeutet, dass alle Koeffizienten mit geradem Index bleiben unter sich. Ebenso bleiben alle Koeffizienten mit ungeradem Index unter sich. Beide Reihen alternieren im Vorzeichen $s(x) = \sum_{gerade}^{\infty} s_i x^i + \sum_{gerade}^{\infty} s_i x^i = s_0\cos(x) + s_1\sin(x)$. Arens: Mathematik p1181ff; Whittaker & Watson: A course of modern analysis 1902, 1927[4] p302ff; Laplace-Gleichung mit Axialsymmetrie führt auf Legendrefunktionen. Potenzreihen müssen abbrechen, damit keine Singularität auf der Achse = an den Polen auftritt. Die erst als irgendeine reelle angenommene Konstante muss sogar ganzzahlig sein. = Quantisierung/Diskretisierung durch Ränder. Potenzreihen werden zu orthogonalen Polynomen: Legendre-, Tschebyschew-, Hermite- und Laguerre Polynome Arens p1186. **Sturm-Liouville-Typ**. Der geniale Schluss ist, dass eine geometrische Reihe noch für x=1 (Nord-Süd-Achse) konvergieren soll, was sie aber nicht tut, außer sie bricht ab, ist also ein Polynom. Das ist eine große Lehre für die Quantenmechanik: Quantisierungsbedingungen kommen von Randbedingungen für die Schrödingergleichung mit erstmal auch kontinuierlich veränderlichen Parametern m,l,j. Flügge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd1 1967 p142 dreidimensionale Schwingungen; Lang & Pucker: Mathematische Methoden in der Physik 1998 p441ff; Riley, Hobson & Bence: Mathematical methods for physics and engineering 1998 p431ff; Killingbeck & Cole: Mathematical techniques and physical applications 1971; Berendt & Weimar: Mathe für Physiker, Bd2 Kap7 p135ff, 200ff; Furlan: Das gelbe Buch 3, p75ff;

Notwendige Kriterien für die Reihenkonvergenz: Quotienten und Wurzelkriterum Erhard-Ferron Bd1, p205; **Harmonische Reihe** $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + \cdots > 1+1+\cdots = \infty$, aber $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ per Fourier-Reihe. Macrae: J.v. Neumann p19 Fliege startet vom Lenker zweier aufeinander zuradelnder;

Mit dem Potenz-Reihen-Ansatz $y(x) = P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ kommt man auf die rekursive Koeffizienten-Bedingung

$$a_{k+2} = a_k\frac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1, \quad P(x) = \cdots + \text{const}\ \ (x^n + x^{n+2} + \dots) \to \infty$$

Pötter: Elementare mathematische Methoden in der Physik 1997 p229-234; Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics 1993[7] p209ff; Die Reihe divergiert nur dann nicht, wenn sie abbricht, also für a_0 oder $a_1 \neq 0$ der Zähler für ein bestimmtes k verschwindet:

$$\lambda = l(l+1)\,\text{mit}\ \ l = \begin{cases} 0,2,4,\dots \text{ und } a_1 = 0 \\ 1,3,5,\dots \text{ und } a_0 = 0 \end{cases}$$

Damit bricht die Parzialsumme ab, sobald k bei l abgekommen ist

$$P_l(x) = \sum_{k=l,l-2,l-4,\ldots} a_k\, x^k \quad \text{mit} \;\; a_{k+2} = a_k \frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}$$

Für $l = 3$ gibt es nur zwei Summanden $P_3(x) = a_1\, x + a_3\, x^3$ mit $a_1 \neq 0$ und $a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = 0$, also $a_3 = -\frac{5}{3}a_1$ und $a_5 = a_7 = a_9 = \cdots = 0$. Also $P_3(x) = a_1\,(x - \frac{5}{3}\,x^3)$ und der Konvention $P_l(1) = 1$ folgt $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$. Fließbach: Elektrodynamik; Bedingung für **abbrechende Potenzreihe**, Rade & Westergren: Math; Simonyi: Theo Elektrotechnik 1977[6] p260ff;

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\, f'(x)\right] + n(n+1)\, f(x) = 0$$

mit Lösung $f(x) = A\, P_n(x) + B\, Q_n(x)$ auf [-1,1] mit $x = \cos\theta$, wobei Legendre-Polynome $P_n(x)$ oder auch Legendre-(Kugel)-Funktionen 1. Art $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$, $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$, $P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$, $P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$ und $Q_n(x)$ Legendre-Funktionen 2. Art. $Q_0(x) = \frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{artanh}(x)$, $Q_1(x) = \frac{x}{2}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1 = x\operatorname{artanh}(x) - 1$, $Q_2(x) = \frac{3\,x^2-1}{4}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3\,x}{2}$, $Q_3(x) = \frac{5\,x^3-3\,x}{4}\,\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5\,x^2}{2} + \frac{2}{3}$

Rodrigues-Formel und Orthogonalität der Legendre-Funktionen 1. Art:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(x^2-1)^n\right], \quad \frac{2}{2l+1}\delta_{l'l} = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x P_l(x) P_{l'}(x) = \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta P_l(\cos\theta) P_l'(\cos\theta)\sin\theta$$

Pötter: Elementare mathematische Methoden in der Physik 1997 p264f; Orthogonalreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x) \quad \text{mit} \quad c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\mathrm{d}x$$

Zugeordnete Legendre-Funktion:

$$y(x) = P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\, D^m P_n(x) \quad \text{mit} \quad 0 \leq m \leq n$$

erfüllen die **zugeordnete Legendre'sche Differenzialgleichung:**

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + [\beta - \frac{\mu}{1-x^2}]y = 0$$

Für $\beta = n(n+1)$ und $\mu = m \in \mathbb{Z}$ erfüllen die Kugelflächenfunktionen

$$y(\varphi,\theta) = \left\{\begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}\right\} P_n^m(\cos(\theta))$$

für jedes $m \in \mathbb{Z}$ Hänsel & Neumann: Physik BdV Anhang A99 p228ff;

Rodrigues-Formel löst **Legendre'sche Differenzialgleichung** $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(1-y^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}Y_n\right] + n(n+1)Y_n =$ mit $Y_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}(y^2-1)^n$ wobei der Vorfaktor $1/2^n n!$ unterdrückt wird, da $(y^2-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(y^2-1)^n = 2ny(y^2-1)^n$ gilt. Simonyi: Theo Elektrotechnik 1977[6] p267f; Boas: Mathematical Methods in the Physical Sciences 1963 p489;

Laplace-Gleichung

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial y}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + n(n+1)y = 0$$

Das **Dirichlet-Problem** für das Innenfeld $u(r,\theta,\varphi) = u(r,\theta)$ einer Kugel mit Azimutal-Symmetrie $\partial u/\partial\varphi = 0$, also nur meridionaler Abhängigkeit (axialsymmetrisch) gibt zonale Kugelflächenfunktionen. Die **Laplace-Gleichung** mit $\xi = \cos\theta$ und Randbedingung $u(R,\xi) = f(\xi)$ für $-1 \leq \xi \leq 1$ ist

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\partial u}{\partial\xi}\right] = 0 \quad \text{mit} \quad 0 < r < R$$

Azimutalsymmetrie gibt

$$0 = \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\frac{\partial u}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

Mit Separationsansatz: $u(r,\theta,\phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ hat man 2 gew. Dgls

$$\frac{\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial R}{\partial r})}{R(r)} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta})}{\theta(\theta)\sin\theta} = l(l+1) = \text{const}$$

wegen $f(\theta) = g(r) \to f = g = \text{const}$. Griffiths: Elektrodyn, p192; Die beiden gew. Dgls werden wie folgt gelöst:

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}} \quad \text{löst} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}) = l(l+1)R$$

denn mit dem polynomialen Ansatz $R(r) = Ar^n$ wird aus der Dgl $R'' = l(l+1)\frac{R}{r^2}$ die Gleichung $(n-\frac{1}{2})^2 = (l+\frac{1}{2})^2$ also $n - \frac{1}{2} = \pm(l+\frac{1}{2})$ also $n_+ = l+1$ und $n_- = -l$ und daher $R_l(r) = a_l r^{l+1} + \frac{b_l}{r^l}$, und die Legendre-Polynome mit den cos-Argument

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos\theta) \quad \text{mit} \quad \text{lösen} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -l(l+1)\Theta\sin\theta$$

Mit $y = \cos\theta$, also $\mathrm{d}y = -\sin\theta\mathrm{d}\theta$, und $P_l(\cos\theta) = \Theta(\theta)$ wird aus Gleichung

$$\frac{d}{dy}\left[(1-y^2)\frac{dP_l(y)}{dy}\right] + l(l+1)P_l(y) = 0. \tag{124}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) = l(l+1)\Theta(\theta) = 0.$$

Allgemeine Lösung für Potenzialfeld einer Kugel ist

$$u(r,\xi) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\underbrace{A_n\, r^n}_{\text{innen}} + \underbrace{\frac{B_n}{r^{n+1}}}_{\text{außen}}\right]P_n(\xi), \quad \xi = \cos\Theta$$

35 PDEs, Hydrodynamik, Pattern Formation, Turbulenz, Plasmaphysik

Hattendorff Vorlesungsmitschrift des WS1854/55 WS1860/61 SS1862 = **Riemann: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik** 1869[1],1882[3], Fritz Emde 1873-1951 1938[4] 325Seiten **Gespannte Saite** p190-207, **Geschichte des Problems der schwingenden Saite** p204-207; **Emde: Quirlende elektrische Felder**. Sammlung Vieweg, Heft 121 1949 Quirlende Felder verschleiern den Tensorcharakter der Feldstärke! Spreizung und Drilling; Erste PDEs: 1747 d'Alembert Schwingende Saite. 1807 Fourier Wärmeleitungsgleichung. Philipp Frank & Richard von Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Riemann-Webers Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik 2 Bde 1927[7] siehe Bd2 p657ff oder Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953 Bd1 p120f, p303f; **Budo: Mechanik** p396 Saite, p408 Membran; **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** BdI.1 1914, 1950[5] p607ff **Saitenschwingung** Saite längs x-Richtung hat logitudinale Bewegung parallel dazu in ξ-richtung gemäß $\epsilon\partial_{tt}\xi = aE\partial_{xx}\xi$ und transversale Bewegung $\epsilon\partial_{tt}\eta = S\partial_{xx}\eta$ und $\epsilon\partial_{tt}\zeta = aE\partial_{xx}\zeta$ mit $\epsilon =$ Masse pro Länge, $E=$ Elastizitätsmodul, Saitenspannung S, $a=$ Saitenquerschnitt. Macke: Wellen 1962; Estel: Wellen, PfL5 p27f; Borchardt & Borchardt: Grundriss der Mechanik deformierbarer Medien 1971 Tensoralgebra und -analysis; Beckert: Nichtlineare Elastizitätstheorie 1984; Ivan Stephen Sokolnikoff 1901-1976: Mathematical Theory of Elasticity 1956; Sommerfeld: Partielle Dgls Bd6 1947 p41 Hyperbol Dgls Normalform $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0$ mit $\xi = x+y$ und $\eta = x-y$ und $y = ct$. **Charakeristiken** nach Baule Bd6 sind die

Geraden $\xi = \text{const}$ und $\eta = \text{const}$. Allgemeine Lösung $u = F_1(\xi) + F_2(\eta)$. **Gelfand & Fomin: Calculus of Variations** 1963 p155ff; Weinstock: Calculus of Variations With Applications to Physics and Engineering 1952 p95ff $L(\partial_t u, \partial_x u) = L(\dot{u}, u') = T(\dot{u}) - V(u') = \frac{\sigma}{2}\dot{x}^2 - \frac{\tau}{2}x'^2$ führt auf die Lösung $u(x,t)$ aus Bewegungsgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial u'} = \frac{\partial L}{\partial u} = 0$; Henley & Thirring: Elementare Quantenfeldtheorie 1975 p15; Haken: Quantenfeldtheorie des Festkörpers 1973, 1993; Visconti: Quantum field theory Bd1 1969 B̃d2; K̃uhn & Janez Strnad: Quantenfeldtheorie. Photonen und ihre Deutung 1995; Berendt & Weimar: Mathe für Physiker, Bd2 Kap8.3 Wellengleichung p310ff; Wilhelm Karl Werner Wien: Lehrbuch der Hydrodynamik 1900; **Piskunow: Differential- und Integralrechnung Teil3** 1964, 1970 p140 KapIV Gleichungen der mathematischen Physik; Bewegungzustand eines Fluids wird durch 5 Größen wie Geschwindigkeitsveteilung $\vec{v}(\vec{x},t)$ und zwei beliebige thermodynamische Größen, zB $p(\vec{x},t)$ uund $\rho(\vec{x},t)$ für **Flüssigkeitsteilchen** oder **Flüssigkeitspunkte** beschrieben. $\vec{x}, t$ zeigt also auf Raumbereiche, die klein gegenüber dem betrachteten Körper/Phänomen und groß im Vergleich zu zwischenmolekularen Abständen sind. Landau/Lifschitz: Bd6; Sauter: Differentialgleichungen der Physik 1942, 1958; Auerbach: Die Theoretische Hydrodynamik. Nach dem Gange ihrer Entwickelung in der neuesten Zeit 1881; Kotschin: Theoretische Hydrodynamik 2Bde 1954; Hamel: Mechanik der Kontinua 1956; Müller: Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten 1932; Johnson ed: Handbook of Fluid Dynamics 1998, 2016; Friedlander & Serre eds: Handbook of Mathematical Fluid Dynamics 4Bde 2004; Flügge: HdP Bartels Bde 47-49! Bergmann, Schäfer! Pedlosky: Geophysical Fluid Dynamics 1987; **Dolzhansky: Fundamentals of Geophysical Hydrodynamics** 2013; Geiger und Scheel: 24 Bde Handbuch der Physik = HdP 7 1927 Mechanik der Flüssigen und Gasförmigen Körper, Max Otto Lagally: Ideale Flüssigkeiten. Ludwig Hopf: Zähe Flüssigkeiten, Andreas Gyemant: Kapillarität, Philipp Forchheimer: Wasserströmungen, Albert Betz: Tragflügel und hydraulische Maschinen, Jakob Ackeret: Gasdynamik; Flügge 1912-1997: 55 Bde ab 1955 Handbuch der Physik = Encyclopedia of Physics = HdP 8/I und 8/II Fluid Dynamics/Strömungsmechanik; Intro Nernst & Schönfließ: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. Kurzgefaßtes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit besonderer Berücksichtigung der Chemie 1912 p360ff ; Kreyszig: Advanced p627ff; Baule: Bd6; Sobolev: Partial Differential Equations of Mathematical Physics 1989; **Farlow: Partial Differential Equations for Scientists and Engineers** 1993; Arnold: Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen 2004; Folland: Introduction to partial differential equations 1995[2]; Lichtenstein: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten 1933; Langkau & Scobel: Fluiddynamik und Wärmelehre 1996; **Mellor: Introduction to Physical Oceanography** 1996; Lichtenstein: Grundlagen der Hydromechanik 1933; Richard von Mises & Karl Otto Friedrichs: Fluid Dynamics 1941, 1971, 1981 Vallis: Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics. Fundamentals and Large-scale Circulation 2006; Riehl: Introduction to the atmosphere 1965; Cushman-Roisin: Introduction to geophysical fluid dynamics. Physical and numerical aspects 2011; **Meyer: Introduction to Mathematical Fluid Dynamics** 1971; Chandrasekhar: Ellipsoidal Figures of Equilibrium 1969;

Mollification: Mollifiers (also known as approximations to the identity) are smooth functions with special properties, used in distribution theory to create sequences of smooth functions approximating nonsmooth (generalized) functions, via convolution. **Mollify = beschwichtigen, besänftigen.** Intuitively, given a function which is rather irregular, by convolving it with a mollifier the function gets 'mollified', that is, its sharp features are smoothed, while still remaining close to the original nonsmooth (generalized) function. They are also known as Friedrichs mollifiers after Kurt Otto Friedrichs, who introduced them. Modern (distribution based) definition: If φ is a smooth function on $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, satisfying the following three requirements (1) it is compactly supported. (2) $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\mathrm{d}x = 1$ (3) $\lim_{\epsilon\to 0}\varphi_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-n}\varphi(x/\epsilon) = \delta(x)$, where $\delta(x)$ is the Dirac delta function and the limit must be understood in the space of Schwartz distributions, then φ is a **mollifier**. The function φ could also satisfy further conditions. Example, if it satisfies (4) $\varphi(x) \geq 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n$, then it is called a positive mollifier. (5) $\varphi(x) = \mu(|x|)$ for some infinitely differentiable function $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, then it is called a **symmetric mollifier**. Beispiel: $\varphi(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)} & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}$ It is easily seen that this function is infinitely differentiable, non analytic with vanishing derivative for $|x| = 1$. Originally, the term 'mollifier' identified the following convolution operator: $\Phi_\epsilon(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\epsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y$, where

$\varphi_\epsilon(x)=\epsilon^{-n}\varphi(x/\epsilon)$. = integral operator whose kernel is one of the functions nowadays called mollifiers. However, since the properties of an integral operator are completely determined by its kernel, the name mollfier was inherited by the kernel itself as a result of common usage. **Mollification bedeutet Rücknahme der Nadel-Funktion** $\delta(x)$. Der lokale Verlauf einer noch so spitzen Funktion hat Gauß-Form. Gallavotti: Foundations of fluid dynamics 2013[2] mit 400 Aufgaben; Potter & Wiggert: SCHAUM'S OUTLINE OF FLUID MECHANICS 2008; Giles, Evett & Liu: Schaum's Outline of Fluid Mechanics and Hydraulics 2009[3]; Vekstein: Physics of Continuous Media - **Problems and Solutions in Electromagnetism, Fluid Mechanics and MHD** 2013[2]; **Kundu & Cohen: Fluid mechanics** 2004[3] 2011[5]; Siehe auch Sommerfeld, Landau, Joos und Weizel; Guyon, Hulin, Petit & Mitescu: Physical hydrodynamics 1991 oder Hydrodynamik 1997; Heinrich & Ulbrich: Mechanik der Kontinua 1981; Henner, Khenner & Belozerova: Ordinary and Partial Differential Equations 2013; Feynman: VL über Physik Bd2 Fluiddynamik Kap40 & 41; Lüst: Hydrodynamik 1978; Experimental-Lehrbücher: Recknagel, Gerthsen, Prandtl, Ahlbring; Schultz-Piszachich: Nonlinear models of flow, diffusion and turbulence 1985; Čorson: Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations 1955; Prombacher: Anwendung von Matrizen und Tensoren in der Theoretischen Elektrotechnik 1960; Hans Gebelein: Turbulenz - Physikalische Statistik und Hydrodynamik 1935; **Coriolis-Kraft** Kerzenflamme am Boden randnah auf rotierendem Teller unter Käseglocke weist nach innen (weil Fliehkraft die kalte, schwere Luft nach außen treibt) und in Drehrichtung (weil Coriolis-Kraft stärker auf die kalte, schwere Luft wirkt). Linke Handregel einfacher bei Gewehrkugelablenkung. Hoch- (↻ Windrichtung rechts rausdrehend) und Tief-Spiralen ↺ (links reindrehend, mathemat positiv, wegen **Coriolis** $-\vec{\omega}\times\vec{v}$) weiten sich auf der Nordhalbkugel nach rechts drehend. Kuypers p150; **Häckel: Meteorologie** 1990[2], 2016[8] Corioliskraft macht Rechtsablenkung auf Nordhalbkugel p201ff; Rotierender Eimer mit Korkboje: Polflucht der Kontinente. **Bahnlinie** = Weg eines Fluid-Teilchens. Wie bewegen sich Fluid-Teilchen zu einem Zeitpunkt (Ensemble, Foto)? **Stromlinien / Feldlinien:** Fetter: Applied hydrology 2000[4]; **Dingman: Physical hydrology** 1994, 2008; Recknagel: Mechanik 1969[9] Kap11. Trage an jedes Teilchen Geschwindigkeit. Lege tangeziale Kurven durch alle Punkte. Die Tangenten-verbindenden Kurven sind **Stromlinien**, die nur im stationären Fall mit den **Bahnlinien** zusammenfallen. **Stromröhre** = Durch-Fluss-Gebiet einer Menge von Stromlinien. Die Wand der Stromröhre wird von der in ihr fließenden Flussteilchen nicht durchbrochen p349. **Lighthill: An Informal Introduction to Theoretical Fluid Mechanics** 1988; Stephen Childress: An introduction to theoretical fluid mechanics 2009; **Lugt: Wirbelströmung in Natur und Technik** 1975 Nachfolgebuch ist Siekmann & Thamsen: Strömungslehre. Grundlagen 2000; **Roulstone & Norbury: Invisible in the Storm. The role of mathematics in understanding weather** 2013; **Wettervorhersage siehe** Hans Ertel: Methoden und Probleme der Dynamischen Meteorologie 1938; Häckel: Meteorologie 1990[2], 2016[8] p203; Dave Cox: Alles über Segeln 2000; Ruden: **Fliegen** PdNPiS Bd51 2002 H4 p43-46; **Kavitation**, Blasenbildung, Schwingungsanregung, Implosion, PhyJ 12 2013 H7 p48; **Pedlosky: Geophysical Fluid Dynamics** 1987, corrected 1992[2]; Greiner: Hydrodynamik 2a[4]; Bestehorn: Hydrodynamik und Strukturbildung 2006; **Tritton: Physical fluid dynamics** 1999[2]; Elementare Einführung: Los Alamos Science 15 1987 Stanislaw Ulam; **Ottino: The kinematics of mixing: streching, chaos, an transport** 1989, Fluss, Trajektorien, Deformation, Teilchenweg, Orbit, Carr: Application of **centre manifold theory** 1981 in Beispielen; Trajektorie, Stromlinien, Streichlinien, Anhang zur Vektoranalysis p319-340!; Bei Zentrumsmannigfaltigkeit um Gleichgewichtspunkt hat man weder stabile, noch instabile Mannigfaltigkeit: $\dot{x}=x^2,\quad \dot{y}=y$ hat instabile Mannigfaltigkeit beim Ursprung ist y-Achse, stabile Mannigfaltigkeit ist $(0,0)$. gibt Zentrumsmannigfaltigkeit mit $y=Ae^{-1/x}$ für $x>0$ zusamen mit negativer x-Achse. Das **Versklavungsprinzip** ist ein Prinzip in der Theorie der Synergetik. Es besagt, dass die Dynamik von Untersystemen durch Systemparameter bestimmt wird. Man betrachte das zweidimensionale dynamische System $\dot{x}=-x-axy$, $\dot{y}=-\gamma y+bx^2$. Mit der Forderung großer $\gamma\gg 1$ ergibt sich die Lösung für y durch $y(t)\approx\frac{1}{\gamma}bx^2(t)$. Diese Lösung besagt nun, dass das System x das System y **'versklavt'**, d.h. y folgt dem System x. Eine verallgemeinerte Lösungsmethode bietet die Theorie der Zentrumsmannigfaltigkeit. Guckenheimer & Holmes Kap3.2ff; Murdock: **Normal forms and unfoldings for local dynamical systems** 2003; Haragus & Iooss: Local Bifurcations, Center Manifolds, and Normal Forms in Infinite-Dimensional Dynamical Systems 2011; Hutter: Fluid- und Thermodynamik 1995, Bordamündung,

Aufprallen eines Freistrahles auf eine Wand, Wassersprung, Tragflügel, Thermodynamik, Dimensionsanalyse Lamb: Hydrodynamics; **Batchelor: An introduction to fluid dynamics** 1967; **Batchelor: The theory of homogeneus turbulence** 1953; Rezzolla and Zanotti: Relativistic Hydrodynamics 2013; **McComb: The physics of fluid turbulence**; Chorin & Marsden: A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics, 3e; Frisch: Turbulence. The Legacy of A. N. Kolmogorov 1995; **Kolmogorov-Längenskala** $\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$, mit der **Energiedissipations** ε und der Viskosität ν. Für den **Inertialbereich** $\eta \ll r \ll L$ spielt Dissipation keine Rolle. Es gilt **K41:** $E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$. Ed Spiegel: The Theory of Turbulence: Subrahmanyan Chandrasekhar's 1954 Lectures 2010; Davidson: Turbulence in Rotating, Stratified and Electrically Conducting Fluids 2013; **Viskose Energie-Dissipation** und **Wechselwirkung verschiedener Zustandsmoden** Davidson, Kaneda, Moffatt, Sreenivasan: Voyage Through Turbulence 2011; Rotta: Turbulente Strömungen 1972; von Neumann: Recent theories of turbulence 1949, in: Collected works Bd6 p437-472, A.H. Taub Collected works: Bd1 = Logic, Theory of Sets, and Quantum Mechanics, Bd2 = Operators, Ergodic Theory, and Almost Periodic Functions in a Group, Bd3 = Rings of Operators 1963, 1969; **Krainov: Qualitative methods in physical kinematics & hydrodynamics** Zakharov, Lvov, Falkovich: Kolmogorov spectra of turbulence 1+2 1992; Bevensee: Maximum entropy solutions to scientific problems 1993; Döring & Gibbon: Applied analysis of the Navier-Stokes equation; **Mori & Kuramoto: Dissipative structures and chaos** 1994 p5-14; Koschmieder: **Bénard cells and Taylor vortices** 1993 sehr anschaulich; Lesieur: **Turbulence in Fluids** 1990[2], turbulenter Fluss: 1. unvorhersagbar im Sinne, dass kleine Ungenauigkeit im Anfangszustand zu einer Zeit sich so verstärkt, dass keine präzise deterministische Voraussage für die Entwicklung möglich ist. 2. Durchmischung geht rascher als per Diffusion. 3. Ein weiter Bereich räumlicher Wellenlänge wird erfasst; **Navier-Stokes-Gleichung** taugt nicht zur Turbulenz-Beschreibung, weil sie eine singulär gestörte Gleichung ist. Typ der Dgl ändert sich bei Reibung null (ideale Flüssigkeit). Randbedingung ändert sich auch. Euler-Gleichung besser. Nichteindeutigkeit und physikalische Ergänzung durch elementare ideale Wirbelgesetze gibt Theorie der neutral geschichteten Turbulenz mit Karman-Konstante $1/\sqrt{2\pi} \approx 0.399$ siehe http://arxiv.org/abs/1203.5042; Saffmann, Vortex dynamics; **Currie: Fundamental mechanics of fluids** 1974, 1993. Fluss kinematic: Zirkulation und Vortizität, Kelvin-Theorem, Bernoulli-Gleich, Crocco-Gleich; Ideale Fluide: Stromfunktion, konforme Abbildungen, Joukowski-Transformation, 3-d Potenzialflüsse, Quellen und Senken, d'Alembert-Paradox, Oberflächenwellen; **Viskose Flüsse inkompresibeler Fluide:** Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\mathbf{v} + \rho(\nabla\cdot\mathbf{v}) = 0$ Zeitableitung des totalen Differenzials der Dichte gibt $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\mathbf{v}$ oder $\dot{\rho} = \partial\rho/\partial t + \vec{v}\cdot\operatorname{div}\rho$. Es folgt $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla\cdot\mathbf{v})$. **Verschwindende totale Dichteänderung** oder materielle Ableitung der Dichte bei von Null verschiedener Dichte bedeutet $\operatorname{div}\cdot\vec{v} = 0$ oder $\rho = \text{const}$ für ein sich bewegendes Fluidelement! Ottino: Mischen zäher Fluide SdW März 1989 p66; Couette-, Poiseuille-Fluss, Stokes'sche Probleme, pulsierende Flüsse zwischen Platten, Stagnationspunkt-Fluss, Fluss über poröse Wand, Lösungen niedriger Reynolds-Zahlen: Stkes-Näherung, Doublett, Rotlett Stokeslet, rotierende Kugel im Fluid, Fluss hinter Platte und Kugel, Grenzschichten, Auftriebs-getriebene Fluide; Chlond: **Turbulenz und Grenzschicht** PdNPiS Bd53 2004 H7 p20-25 Kompressible Flüsse reibungsfreier Fluide: Shock-Wellen, Schallgeschwindigkeit im ruhigen Gas $c = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\gamma p/\rho}$ Drazin & Reid: Hydrodynamic stability 1981, 2010[2], Drazin: Introduction to hydrodynamic stability 2002; Kelvin-Helmholtz-Instability; **Chandrasekhar: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability** 1961; Güttinger & Eikemeier (eds): Structural stability in physics 1979; **Joseph: Stability of fluid motions** Bd1 Bd2 1976; Sagdeev: Nonlinear phenomena in plasma physics and hydrodynamics 1986; Shirer: Nonlinear hydrodynamics modeling. A mathematical introduction 1987; Birkhoff, Bellman & Lin: Hydrodynamic Instability 1962; Lichnerowicz: Relativistic hydrodynamics and magnetohydrodynamics 1967; Lichnerowicz: Magnetohydrodynamics. Waves and Shock Waves in Curved Space-Time 1994, 2010; Milne-Thomson: Theoretical hydrodynamics 1938, 1996; Drazin & Riley: The Navier-Stokes Equations. A Classification of Flows and Exact Solutions 2009;

Zeldovich, Ruzmaikin, Sokoloff: The fluid mechanics of astrophysics and geophysics 1983, Ursprung der Magnetfelder, Dynamos, Flusstopologie, kinematische turbulente Dynamos, Scheiben-

dynamos, Müller: **Kosmische Magnetfelder - ein astrophysikalisches Thema in der Oberstufe** PdNPiS Bd63 2014 H2; **Stefani: Laborexperimente zur Entstehung und Wirkung kosmischer Magnetfelder** PdNPiS Bd63 2014 H2 p31-37; Lathrop & Forest: Magnetic dynamos in the lab, Physics Today July 2011 p40; Sternzyklen, galaktische Dynamos, Akkretion; Paul & Rüdiger: Akkretion und kompakte Quellen, Die Sterne 63 1987 213-224; Hoffmeister, Richter, Wenzel: Veränderliche Sterne 1984; Gerlich: Tensorpotentiale in der Magnetohydrodynamik und das Dynamoproblem 1970; Lortz: Magnetohydrodynamik; **Moreau: Magnetohydrodynamics** 1990; Priest: Magnetohydrodynamics of the Sun 2014; Priest ed.: Dynamics and structure of quiescent solar prominences 1989; Tajima: Computational Plasma Physics. With Applications to Fusion and Astrophysics 1989; Bekefi: Radiation processes in plasmas 1966; Ginzburg: Propagation of electromagnetic waves in plasmas 1961; Stix: The theory of plasma waves 1962; Hartmann-Profil für leitendes Fluid unter Magnetfeld senkrecht zur Strömung wegen Druckdifferenz parabolisches Geschwindigkeits-Profil mit Abstumpfung und Hartmann-Randschicht der Dicke: 1/Ha. Profil ähnlich zur turbulenten Strömung. **Hartmann-Zahl** = Verhältnis zwischen viskosen und magnetisch induzierten Reibungskräften. $Ha = B \cdot L \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ B Magnetische Flussdichte, L Charakteristische Länge des Systems σ Elektrische Leitfähigkeit, μ dynamische Viskosität. $Ha^2 = Q$ **Chandrasekhar-Zahl**. **Kippenhahn & Mölenhoff: Einführung in die Plasmaphysik** 1973; Chandrasekhar: Plasma physics 1960; Biermann: Aus der Plasmaphysik, PhysBl17 1961 p442-451; **Artsimowitsch: Elementare Plasmaphysik** 1972; Cap: Einführung in die Plasmaphysik Bd1-3 1972; Mierdel: Was ist Plasma? 1973; Montgomery: Theory of the unmagnetized plasma 1971; Arzimowitsch: Elementare Plasmaphysik 1972; Artsimovich: A physicist's abc on plasma 1976; Artsimovich & Sagdejew: Plasmaphysik 1983; Spatschek: Theoretische Plasmaphysik 1990; Linhart: Plasma physics 1960; Klimontovich: Statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma 1967; Spitzer: Physics of fully ionized gases 1956, 1959; Cowling: Magnetohydrodynamics 1957; Goldston & Rutherford: Plasmaphysik 1998; Green & Leipnik: Sources of plasma physics 1970; Chen: Introduction to Plasma Physics 1973; Dendy: Plasma dynamics 1990; Ideale MHD $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}, \mathrm{div}\, \vec{B} = 0, \mathrm{rot}\, B = -\dot{\vec{B}}, \mathrm{rot}\, \vec{H} = \vec{j}$ ist galilei-invariant, Rebhan: Elektrodynamik p96. Lifschitz: Magnetohydrodynamics and spectral theory 1989; Davidson: An Introduction to Magnetohydrodynamics 2001; Kepler bedeutet nichtstarre Rotation: $v(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$ oder $\omega(r) \sim \frac{1}{\sqrt{r^3}}$ Steenbeck: Probleme u. Ergebnisse der Elektro- und Magnetohydrodynamik 1961; Steenbeck: Wirken für die Zukunft. Reden und Aufsätze 1959-1967; Steenbeck: Wirken für die Zukunft. Reden und Aufsätze 1968 - 1972; Steenbeck: Impulse und Wirkungen 1980; Steenbeck & Krause: Elektrodynamische Eigenschaften turbulenter Plasmen 1963; Krause & Rädler: Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory 1980; Rüdiger: Differential rotation and stellar convection. Sun and solar-type stars 1989; Rüdiger & Hollerbach: The magnetic Universe. Geophysical and Astrophysical Dynamo Theory 2004; Rädler: Mean–field dynamo theory: early ideas and today's 2004 www.aip.de/People/khraedler/HIST_MHD_06_Rae.pdf Rüdiger, Hollerbach & Khitchtinov: Magnetic Processes in Astrophysics - Geophysical and Astrophysical Dynamo Theory: Theory, Simulations, Experiments 2013; Ghil & Childress: Topics in Geophysical Fluid Dynamics. Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics 1987; Riehl: Introduction to the atmosphere 1965; Lange, Graßl, Muckenfuß: Grundlagen in der Meteorologie PdNPiS Bd53 2004 H7 p2-36; Häckel: Meteorologie 1990^2, 2016^8p203; **Krug: Radioastronomie** 1962; Wellmann: Radioastronomie 1957; Haber ed: Mit der Erde durchs All - Bild der Wissenschaft 1970; Steinberg & Lequeux: Radio astronomy 1960; Pawsey & Bracewell: Radio astronomy 1955; Frater, Goss, Wendt: Four Pillars of Radio Astronomy: Mills, Christiansen, Wild, Bracewell 2017; Smith: Radio astronomy 1960; Graham-Smith & Burke: An introduction to radio astronomy 1998; Reber: Funkwellen-Astronomie, PhysBl6 1950 p122-127; Kraus: Radioastronomy 1966; Pacholczyk: Radio astrophysics. Nonthermal processes in galactic and extragalactic sources 1970; **Hey: Das Radiouniversum. Einführung in die Radioastronomie** 1974; Jansky sieht 1931 beim Kampf gegen Atmospherics das Radiozentrum der Milchstraße. Reber 1939 Positionen von sichtbaren Sternen und Radioquellen sind verschieden. Hey 1942 Radarstörungen bei Luftabwehr stammen nicht von neuartiger Feindeinwirkung sondern von Sonneneruptionen. **Krüger & Richter: Radiostrahlung aus dem All** 1968; Böhme, Jäger, Krüger: Komplexmodell einer solaren aktiven Region, ZISTP, HHI 1974;

Ãlbrecht Krüger: Introduction to Solar Radio Astronomy and Radio Physics 1979; H̃ögbom & Christiansen: Radiotelescopes 1985; Priest: Solar Flare Magnetohydrodynamics 1981; Kliem & Mann: MHD solarer Eruptionen in Korona. Verdrehte Flussröhre. Rekonnektion durch Halterungsabriss mit nichtlinearen kräftefreien Feldern. Zusammenspiel von helikaler Kink- und Torus-Instabilität. Aschwanden: Physics of the solar corona 2006; Gopalswamy: Solar eruptions and energetic particles 2006 Protuberanzen = Prominences, Filamente, Spikulen, Flare = chromosphärische Eruption. Greiner: Flares and flashes 1995; Somov: Physical processes in solar flares 1992; Koronaler Massenauswurf (CME) oder auch eruptive Protuberanz. Aschwanden: New Millennium Solar Physics 2019; Proctor & Gilbert: Lectures on solar and planetary dynamos 1994, Dynamo theory. Solar and stellar dynamos. Convection in a rapidly rotating sphere. Computational background. Energy sourses of planetary dynamos. Convection, tidal or precessional origin. Lazarian: Turbulenz ändert die Eigenschaften eines magnetisierten Fluids dramatisch: Fermi-Beschleunigung 2. Ordnung. Schnelle Rekonnektion = Wiederverbindung magnetischer Feldlinien = Beschleunigungs-Effekten in Shock-Regionen, also zu kinetischer Plasmaenergie und thermischer Energie führt. a] Petschek-Rekonnexion erfordert lokal hohe Widerstände. b] Plasmoid-Instabilität passiert in ausgedehnten Stromschichten, wenn die Lundquist-Zahl einen kritischen Wert übersteigt, Loureiro2007, Bhattacharjee2009. Fusions-Apperaturen: Plasma-Instabilitäten getriebene Turbulenz reduziert die Temperatur-Isolation drastisch und erhöht den Teilchen-Transport. The supra-thermal alpha-particles with velocities well above the Alfven velocity of background plasma are able to drive plasma instabilities, which in turn can expel the fast particles. There are many commonalities between fusion and astrophysical plasmas. One finds turbulence and transport on widely different space and time-scales, violent reconnection events convert magnetic into particle energy, and supra-thermal particles exchange energy resonantly with magnetohydrodynamic waves. Space/astrophysical plasmas show a much broader spectrum of such manifestations, but laboratory plasmas allow our understanding to be tested critically by active intervention and often also a much more detailed diagnostic coverage. Theory and modelling offers the common basis for understanding space/astrophysical and fusion plasmas.

Mathematische Klassifikation:
Cahn–Hilliard-Gl.: $\frac{\partial c}{\partial t} = D\nabla^2\left(c^3 - c - \gamma\nabla^2 c\right)$ beschreibt spontane Phasentrennung in Fluiden. **Boussinesq-Gl.**: $u_{tt} - u_{xx} - u_{xxxx} - 3(u^2)_{xx} = 0$. **Burgers-Gleichung**, Advektion: $u_t + uu_x = \nu u_{xx}$ Die Geschwindigkeit von Fahrzeugen am Ort x und zum Zeitpunkt t sei

$$v(x,t) = c \cdot \left(1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_0}\right), \text{also} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} \qquad (1)$$

wobei c die Maximalgeschwindigkeit ist und ρ_0 die maximale Fahrzeugdichte bezeichnet, bei der der Verkehr zum Erliegen kommt. Arens p1019; Haberman: Math Models p354; Verkehrsfluss = Autos pro Zeit = $q(x,t) = \rho((x,t))\,u(x,t)$ = Verkehrdichte mal Geschwindigkeitsfeld Haberman p274 , Fowkes & Mahony: Einführung in die mathematische Modellierung 1996 Kap14 p367-401; Elefteriadou: An Introduction to Traffic Flow Theory ebook 2014; Verkehrsfluss: **Mikroskopisch** = ODE für jedes Fahrzeug $\dot{x} = g(x,p)$ oder Nagel and Schreckenberg: A cellular automaton model for freeway traffic, Journal de Physique I 2(12), p2221-2229 1992 Zellulärer Automat. Ding: Modeling and simulation of highway traffic using a cellular automaton approach 2011; **Mesoskopisch/kinetisch** = Boltzmann-Gl. für Auftrittswahrscheinlichkeit $f(t,x,v)$ für Fahrzeug zur Zeit t am Ort x mit Geschwindigkeit v. Makroskopisch = Fluiddynamik PDE für Fahrzeugdichte. Zellulärer Automat. **Charakteristiken-Methode**, Cauchy-Charakteristik: Reduktion des Problems auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. http://www. math. ethz. ch/u/felder/Teaching/PDG/ Finde Kurvenfamilie (Charakteristiken) in (x,t) - Ebene, entlang welcher sich die Lösung der PDE einfach verhält. Anfangswertproblem mit der **Advektionsgleichung** $u_t + u_x = 0$ und $u(x,0) = f(x)$ ist erfüllt für Lösungen, **traveling waves** genannt, siehe Barenblatt: Scaling 2003 mit Selbstähnlichkeit, Renormierung-Gruppe, traveling wave; **Sagdeev, Usikov, Zaslavsky: Nonlinear physics. From the pendulum to turbulence and chaos** 1988, $u(x,t) = F(x-t)$, also $F(x) - f(x)$. Bei const = $x - t$ hat $u(x,t)$ den gleichen Wert! http://www.math. ethz. ch/u/ felder/ Teaching/PDG/ Die Funktion

$$u(x,t) = v(x,t) - c \cdot \frac{\rho(x,t)}{\rho_0} = c \cdot \left(1 - \frac{2\rho(x,t)}{\rho_0}\right) \qquad (2)$$

ist eine Lösung der reibungsfreien Burgersgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{also} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + c \cdot \left(1 - \frac{2\rho}{\rho_0}\right)\frac{\partial \rho}{\partial x} \overset{(2)}{=} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} \overset{(3)}{=} 0$$

weil sie die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \text{also} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\rho \overset{(1)}{=} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (v - \frac{c\rho}{\rho_0})\frac{\partial \rho}{\partial x} \overset{(2)}{=} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

mit dem Fluss $q(x,t) = v(x,t)\,\rho(x,t)$ erfüllt. Stromdichte/Fluss $\vec{j} = \varrho\vec{v}$, ϱ Massendichte, c Konzentration oder p Wahrscheinlichkeit, die manchmal auch mit u abgekürzt werden. **Verdünnung von Volumenprozenten, Mischungskreuz:** **geg:** Ausgangskonzentration $p_0 = \dfrac{I_0}{W_0 + I_0}$ und Ausgangsvolumen $V_0 = W_0 + I_0$ mit Wasser-/Lösungsmittelvolumen W_0 und Substanz-/Inhaltsvolumen I_0. **ges:** Verdünnung mit zugesetztem Wasser-/Lösungsmittelmenge ΔW gibt Endvolumen $V_1 = W_0 + I_0 + \Delta W$ mit Endkonzentration $p_0 = \dfrac{I_0}{W_0 + I_0 + \Delta W}$ bedeutet $\Delta W = \left(\dfrac{p_0}{p_1} - 1\right) V_0$. Keine Verdünnung bedeutet $p_1 = p_0$ und $\Delta W = 0$. Oder einfach **Mischungskreuz!** Fry & Page: Startwissen Chemie 2007; Wiskamp: Anorganische Chemie 1996; **Diffusionsbedingte Fließgeschwindigkeit**

$$\vec{v}(\vec{x},t) = -\frac{a}{\varrho(\vec{x},t)}\nabla\varrho(\vec{x},t)$$

Parker-Modell des Sonnenwindes:

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^2 u\rho, \quad u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} - \frac{GM}{r^2}, \quad p = c_s^2\rho$$

Transportgleichung:

$$u_{,t} + \vec{a}\cdot\nabla_{\vec{x}}u = u_{,t} + \sum a_i\, u_{,x_i} = 0$$

Navier-Stokes-Gleichung: $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ gibt $\dfrac{D\vec{v}}{Dt} = \dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \dfrac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} + \dfrac{\vec{F}}{\rho}$. Beachte die **Nichtlinearität durch konvektive Beschleunigung** $\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}$! Honerkamp, Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993; Hawlaw & Amsden: Fluid dynamics: an introductory text Los Alamos LA-410 1970 $\vec{u}_{,t} + (\vec{u}\cdot\nabla_{\vec{x}})\vec{u} - \Delta_{\vec{x}}\vec{u} = -\nabla_{\vec{x}}p, \quad \operatorname{div}_{\vec{x}}\vec{u} = 0$ Girault & Raviart: Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. Anspruchsvoll! The FEM provides a standard process for converting governing energy principles or governing differential equations in to a system of matrix equations to be solved for an approximate solution. Fowkes & Mahony: Einführung in die mathematische Modellierung; Finite element analysis (FEA): Tool for stress and structural analysis (stress analysis, thermal analysis, or vibration analysis). Zohdi: A Finite Element Primer for Beginners. The Basics 2015; Atkin: Finite element analysis concepts; Fenner: Finite Element Methods for Engineers 2nd; Baumert: NSG taugt zur Turbulenz-Beschreibung nicht, weil Übergang zur idealen Flüssigkeit den Typ der PDE ändert, also die Randbedingungen ändert. **NSG gehört zur Klasse der singulär gestörten Gleichungen**. SdW H3 2013 p6f. Daher ist Euler-Gleichung plus ideale Wirbelgesetze der bessere Ansatz! Problem der NSG siehe SdW 4/2009 p78;

CCCCC Newton'sche Reibungskraft $F_R = \eta A\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ zweier planparalleler Platten der Fläche A im Abstand x, wobei an den Platten das Fluid ruht = **no-slip-Bedingung**. Scherzähigkeit/dynamische Viskosität $[\eta]$=1Ns/m^2=10 Poise= 1kg/sm. Kinematische Viskosität $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ in m^2/s. Tipler: Physik p363; Unterhalb der kritischen Reynolds-Zahl stationäres, parabolisches, laminares Strömungsprofil durch ein Rohr mit Radius R ist parabolisch

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta\, l}\,(R^2 - r^2)$$

Gesetz von Hagen-Poiseuille: Volumen V pro Zeiteinheit ist $\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi\cdot r^4}{8\cdot\eta}\frac{\Delta p}{l} = -\frac{\pi\cdot r^4}{8\cdot\eta}\frac{\partial p}{\partial z}$.

Korteweg-de-Vries-Gleichung:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Kinzel & Reents: Physik per Computer 1996 p150ff; **Numerische Lösung partieller Differenzialgleichungen:** 50iger **Differenzen**-Verfahren, langsam und ungenau. 60iger finite Elemente = komplizierte Ränder und variable Grids. 70iger Spektral-Verfahren, schnell und genau, aber einfache Ränder. **Trefethen: Spectral Methods in MATLAB**. Software PDEs, Environments, Tools 2000 pdf im Netz; Potenzialgleichung oder **Laplace-Gleichung**, elliptisch:

$$\Delta u = 0, \quad \Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\frac{\partial u}{\partial r})}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}, \quad \Delta u_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\frac{\partial u}{\partial r})}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$$

Axialsymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung siehe Seite 584. Hackbusch: Theorie und Num ellipt Dgls 1986; Shen: A course on nonlinear waves 1993; Ansorge: Differenzenapproximationen partieller Anfangswertaufgaben 1978; Janenko: Die Zwischenschrittmethode zur Lösung mehrdimensionaler Probleme der mathematischen Physik 1969; Smith: Numerische Lösungen von partiellen Differentialgleichungen. Mit Aufgaben und Lösungen 1971; Törnig: Numerische Lösung von partiellen Differentialgleichungen der Technik: Differenzenverfahren, Finite Elemente und die Behandlung grosser Gleichungssysteme 1985; Marsal: Die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen in Wissenschaft und Technik 1976; Gromann & Roos: **Numerik** partieller Differentialgleichungen 1992; Dankert: Numerische Methoden der Mechanik p106ff; Panow: Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren 1955; Poloshi: Mathematisches Praktikum 1963; Poloshi: Numerische Lösung von Randwertproblemen der mathematischen Physik und Funktionen diskreten Arguments 1966; Collatz: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen 1955; Trangenstein: Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations 2009; Numerical Solution of Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations 2013; Chapra & Canale: Numerical Methods for Engineers 2014[7]; **Chapra: Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and scientists** 2012[3]; Muntz & Westermann: Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen. Ein interaktives Lehrbuch für Ingenieure 2012[3];

Wellengleichung Feynman: Bd1.2 Kap47, hyperbolisch: Musikinstrumente, Helmholtz-Gleichung, stationäre Schrödinger-Gleichung = eingesperrte Teilchen/Randbedingungen machen diskrete Energiewerte,**Feynman: Bd1.2** Kap51, Erdbeben- und Wasserwellen. Orgel Ostwalds Klassiker Nr80 = Helmholtz: Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden 1859 Wangerin 1896; PDE $u''(x,t) = \frac{1}{c^2}\ddot{u}(x,t)$ wird per Separationsansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ zu einem Paar von gewöhnlichen Differenzialgleichunegn, weil $\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\Omega^2 = \text{const}$, oder $= +\Omega^2 = \text{const.}$,was bedeutet, dass der linke Quotient unabhängig von t den gleich Wert hat, weil er ja selbst nicht von t abhängt. Also ist der rechte Quotient eine Konstante. Und umgekehrt. Man hat daher für die positive Konstante Ω^2 die Fundamentallösungen $e^{\pm\Omega x/c}$ und $e^{\pm\Omega t}$ und anderensfalls $e^{\pm i\Omega x/c}$ und $e^{\pm i\Omega t}$. Bedeutet $u(x,t) = e^{\Omega(\pm t\pm x/c)}$ oder für die positive Konstante $-\Omega^2$ $u(x,t) = e^{i\Omega(\pm t\pm x/c)}$ Oder allgemeiner Lösungen vom Typ $u(x,t) = f(\pm x \pm ct)$. **Kreyszig: Advanced Engineering Mathematics** 1993[7] 629ff, p664ff und 675ff; **1. Separationsmethode = Produktmethode** $u(x,t) = X(x)T(t)$ wandelt PDE in ODEs $X'' + p^2X = 0$ und $\ddot{T} + c^2p^2T = 0$. **2. Allgemeine Lösungen der ODEs** $X(x) = A\cos px + B\sin px$. Einschränkung der allgemeinen Lösungen unter **3. Beachtung der Randbedingungen** $u(x=0,t) = u_0$ und $u(x=L,t) = u_L$ oder $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = u_0$ oder $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}|_{x=L} = u_L$. Speziell $X(0) = 0 = X(L)$, also $A = 0$ und $pL = n\pi$ also **Wellenzahl** $p_n = \frac{n\pi}{L}$, bedeutet Eigenfunktionen $X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und aus $\ddot{T}+c^2p^2T = 0$ folgt wegen der Ausbreitungsgeschwindigkeit c das **Eigenwertspektrum** oder **Frequenzspektrum** $\lambda_n = cp_n = \frac{cn\pi}{L}$ mit den **Eigenfunktionen** $T_n(t) = B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Die **Eigenfunktionen = charakteristischen Funktionen = Normalmoden der Saite** ist $u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = [B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t]\sin\frac{n\pi}{L}x$, **Feynman: Bd1.2** Kap50, $n = 1$ **Grundschwingung = Fundamentalmode**. $n > 1$ **Obertöne**. Die n-te Normalmode hat $(n-1)$ **Knoten**. Aufstellung **4. Fourierreihe** $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = [B_n\cos\lambda_n t + B_n^*\sin\lambda_n t]\sin\frac{n\pi}{L}x$ unter Beachtung der **Anfangsbedingungen** für Auslenkung der Saite $u(x,t=0) = f(x)$ und Anfangsgeschwindigkeit der

Saite $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = g(x)$ gemäß $B_n = \frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{d}x\, f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$ und $B_n^* = \frac{2}{cn\pi}\int_0^L \mathrm{d}x\, g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x$. Flügge: Theo Physik Bd1 1961 p230 angezupfte Saite, Kuypers: Klass Mechanik 2003[6] p238; Greiner: Mechanik Bd2 1989[5] p136; Byerly: An elementaty treatise on Fourier series 1893 p6, Arens et al.: Mathematik 2012[2] p1000ff, p1035f, p1064; Recknagel: Schwingungen und Wellen 1957[6] p44ff, p74; Grimsehl: LB der Physik Bd1 1970[21] p403ff; Hattendorff Vorlesungsmitschrift des WS1854/55 WS1860/61 SS1862 = **Riemann & Hattendorff: Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik** 1869[1],1882[3], 1938[4] p113f, p190ff, Geschichte p204f; **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik BdI.1** 1914, 1950[5] p611ff Longitudinale Wellen in x-Saiten-Richtung durch Material-Elastizität bestimmt $\epsilon\xi_{tt} = qE\xi_{xx}$ **Raumwellen**, Transversale Wellen in y-z-Querrichtung durch Saitenvorspannung $\epsilon\eta_{tt} = S\eta_{yy}$ und $\epsilon\zeta_{tt} = S\zeta_{zz}$ mit q Saitenquerschnitt, E Elastitätsmodul, S Spannung, $\epsilon = \frac{m}{l}$ Saitenmasse pro Länge **Oberflächenwellen Feynman: Bd1.2** Kap51 Wasserwellen. Seismische Wellen, Erdbebenwellen: **P**rimäre/schnelle/longitudinale Wellen 5 bis 14 km/s = Kompressionswelle wie bei Schallausbreitung. **S**ekundäre/Scherwellen/transversale 3 bis 4.5 km/s. Schütte: Physik der **Felder** Kapitel 1 und 2 1965 UB Golm p47 §2.5 Separationsmethode; Joos: LB der theoretische Physik 1945[6] Buch4 §7 p159ff; Kuypers: Mechanik Henley & Thirring: **Elementare Quantenfeldtheorie** 1975 p15 Feld = Matraze; **Churchill: Fourier series and boundary value problems** 1963; Sommerfeld: Bd2 p92, p120; Sommerfeld: Bd6 p41; Berendt & Weimar: Bd2 p318ff;

Rechteck-Membran mit Kantenlängen a und b: Wellengleichung $\ddot{u}(x,y,t) = c^2[\partial_{xx}u + \partial_{yy}u]$ mit $u = 0$ auf dem Rand für alle Zeiten. Anfangsbedingungen $u(x,y,t=0) = f(x,y)$ und $\frac{u(x,y,t)}{\partial t}|_{t=0} = g(x,y)$. **1. Separationsansatz** $u(x,y,t) = F(x,y)T(t)$ gibt $\frac{\ddot{T}}{c^2T} = \frac{F_{xx}+F_{yy}}{F} = -\nu^2$ bedeutet $\ddot{T} + \nu^2 T = 0$ und $F_{xx} + F_{yy} + \nu^2 F = 0$. **Produktansatz** $F(x,y) = X(x)Y(y)$ bedeutet $\frac{X_{xx}}{X} = -\frac{Y_{yy}+\nu^2 Y}{Y} = -k_x^2$ bedeutet $X_{xx} + k_x^2 X = 0$ und $Y_{yy} + k_y^2 Y = 0$ mit $k_y^2 = \nu^2 - k_x^2$. Allgemeine Lösungen $X(x) = A\cos k_x x + B\sin k_x x$ und $Y(y) = C\cos k_y y + D\sin k_y y$. **2. Randbedingungen** geben $X_m(x) = \sin\frac{m\pi}{a}x$ und $Y_n(y) = \sin\frac{n\pi}{b}y$ oder $F_{mn}(x,y) = X_m(x)\,Y_n(y) = \sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y$ also $k_x = \frac{m\pi}{a}$ und $k_y = \frac{n\pi}{b}$ also $\nu^2 = k_x^2 + k_y^2$. Die Frequenz bei der Schallgeschwindigkeit c und der Wellenzahl ν ist $\omega_{mn} = c\nu = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$. Bedeutet Eigenfunktionen $T_{mn}(t) = B_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}^*\sin\omega_{mn}t$ und die Eigenmoden/Eigenfunktionen $u_{mn}(x,y,t) = [B_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}^*\sin\omega_{mn}t]\,\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y$. Allgemeine Lösung der Membran-Wellengleichung als **3. Fourier-Reihe** $u(x,y,t) = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty u_{mn}(x,y,t) = \sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty[B_{mn}\cos\omega_{mn}t + B_{mn}^*\sin\omega_{mn}t]\,\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y$, wobei die Koeffizienten durch Anfangsbedingungen bestimmt werden. **Feynman: Bd1.2** Kap49

Kreis-Membran/Parade-/Marsch-/Schnarrtrommel/Snare-Drum mit Radius R hat Wellengleichung $\frac{1}{c^2}u_{tt} = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r$ mit Randbedingung $u(R,t) = 0$ und Anfangsauslenkung $u(r,0) = f(r)$ und Anfangsgeschwindigkeit der Membran $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(r)$. **1. Separationsansatz** $u(r,t) = R(r)T(t)$ bedeutet $\frac{\ddot{T}}{c^2T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} = -k^2$ Räumliche Lösung wegen Randbedingung wieder nur mit diskreten Eigenwerten k_m möglich, wodurch auch nur diskrete Frequenzen $\omega_m = k_m c$ bei der Lösung von $\ddot{T} + (kc)^2 T = 0$ folgen: $T_m(t) = A_m\cos\omega_m t + B_m\sin\omega_m t$. Aus $R'' + \frac{1}{r}R' + k^2 R = 0$ mit $s = kr$ hat man die Bessel'sche Differentialgleichung $R'' + \frac{1}{s}R' + R = 0$ mit der Lösung $R(r) = J_0(s) = J_0(kr)$, der Nullstellen $s_m = k_m R = \alpha_m$ aus der Randbedingung folgen. Also $k_m = \frac{\alpha_m}{R}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Daher die räumlichen Eigenfunktionen $R_m(r)J_0(k_m r) = J_0(\frac{\alpha_m}{R}r)$. **Eigenmoden/Eigenfunktionen** $u_m(r,t) = R_m(r)T_m(t) = [A_m\cos\omega_m t + B_m\sin\omega_m t]J_0(k_m r)$.

Numerik siehe de Vries: Computerphysik 1995 p351ff;

$$u(t,\mathbf{x}) = u(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t) + u(\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega t) \quad \text{mit Dispersions} - \text{Relation} \quad k = \pm\frac{\omega}{c} \quad \text{löst} \quad \Delta u(t,\mathbf{x}) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u(t,\mathbf{x})}{\partial t^2} = 0$$

Klein-Gordon-Gleichung:

$\phi(t,\mathbf{x}) = e^{i(\vec{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)}$ mit Dispersions – Relation $\omega^2 = k^2c^2 + \frac{m^2c^4}{\hbar}$ löst $\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right]\phi(t,\mathbf{x}) = 0$

Nichtlineare Klein-Gordon-Gleichung: $\nabla^2 u + \lambda u^p = 0$. **Solitonen:** Sine–Gordon $\phi_{tt} - \phi_{xx} + \sin\phi = 0$ und Sinh–Gordon $u_{xt} = \sinh u$. **Numerik** siehe Kinzel & Reents: Physik per Computer 1996 p150ff; Meinel, Neugebauer & Steudel: Solitonen. Nichtlineare Strukturen 1991; Eilenberger: Solitons. Mathematical methods for physicists 1983; Rebbi & Soliani: Solitons and particles 1984; **Filippov: The versatile soliton** 1999; Faddeev & Takhtajan: Hamiltonian methods in the theory of solitons 1987; Karpman: Nichtlineare Wellen 1977; **Schrödinger-Gleichung:** $\Psi(t,\mathbf{x}) = e^{i(\vec{k}\cdot\mathbf{x}+\omega t)}$ **mit Dispersions-Relation** $\omega = \frac{\hbar}{2m}k^2$ löst $\left\{\frac{\hbar}{2m}\Delta - i\frac{\partial}{\partial t}\right\}\Psi(t,\mathbf{x}) = 0$. Wellenfunktion für freies Teilchen: $\psi(\mathbf{r},t) = A\ \exp\left(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}\right)\right)$. In Ortsdarstellung gemäß $\begin{array}{ccccc} E & \to & \hat{E} & = & \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t} \\ \mathbf{p} & \to & \hat{\mathbf{p}} & = & -\mathrm{i}\hbar\nabla \\ \mathbf{r} & \to & \hat{\mathbf{r}} & = & \mathbf{r} \end{array}$ mit Schrödinger-Gleichung $\hat{E} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\hat{\mathbf{r}},t)$ oder $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$

Lösung für eindimensionales freies Teilchen: $\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x,t)$ ist $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + 2\mathrm{i}t\frac{\hbar}{m}}}\cdot\exp\Big($

Freies Teilchen aus ebenen Wellen: Die Wellenfunktion $\psi(\vec{x},t)$ eines freien Teilchens kann als Fourierreihe über ebene Wellen dargestellt werden: $\psi(\vec{x},t) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3}A(\vec{k})e^{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}$.

Gruppengeschwindigkeit Feynman: Bd1.2 Kap49 = Geschwindigkeit, mit der sich ein Wellenpaket als Ganzes fortbewegt = Energietransportgeschwindigkeit = Informationausbreitungsgeschwindigkeit: Mit der Phasengeschwindigkeit $\omega = v_\mathrm{p}\,k$ folgt $v_\mathrm{g} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = v_\mathrm{p} + k\frac{\partial v_\mathrm{p}}{\partial k} = v_\mathrm{p} - \lambda\frac{\partial v_\mathrm{p}}{\partial\lambda}$. Schmüser: Elektrodynamik p125; Blochinzew: Grundlagen der QM 1944, 1953 p44; Dawydow: QM 1963, 1974 p7f; Schubert & Weber: QT 1993 p51f; **Gruppengeschwindigkeit einer Welle: Feynman: Bd1.2** Kap49

$$\begin{aligned} f(t) &= F(t)\exp(i\omega_0 t) \\ A(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t f(t)\exp(ikt) = \underbrace{C\exp\left(-a(k-k_0)^2\right)}_{z.B.} \\ \Psi(z,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k A(k)\exp\left[i\left(kz - \omega(k)t\right)\right] \end{aligned}$$

Taylorreihe für $\omega(k)$ in k_0

$$\begin{aligned} \omega(k) &= \omega_0 + \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}(k-k_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k_0}(k-k_0)^2 + ... \\ &= \omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2 + ... \end{aligned}$$

mit der Gruppengeschwindigkeit des Maximums $v_g := \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{c^2k_0^2}}}$

und dem Dispersionsparameter $\beta := \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{k_0}$

1. Näherung:

$$\begin{aligned} \Psi(z,t) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k A(k)\exp\left[i\left(kz - (\omega_0 + v_g(k-k_0))t\right)\right] \\ &\approx \exp\left[i\left(k_0v_g - \omega_0\right)t\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k A(k)\exp\left[ik(z - v_gt)\right] \\ &\approx \exp\left[i\left(k_0v_g - \omega_0\right)t\right]\Psi(z - v_gt, 0) \end{aligned}$$

Intensität der Welle

$$|\Psi(z,t)|^2 \approx |\Psi(z - v_g t, 0)|^2$$

Das Wellenpaket bewegt sich mit v_g ohne Dispersion.

<u>2. Näherung:</u>

$$\begin{aligned}
\Psi(z,t) &\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp\left(-a(k-k_0)^2\right) \exp\left[i\left(kz - \left(\omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2\right)t\right)\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp\left[-a(k-k_0)^2 + i\left(kz - \left(\omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2\right)t\right)\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp \\
&\left[-ak^2 + 2akk_0 - ak_0^2 + i\left(kz - \omega_0 t - v_g k t + v_g k_0 t - \beta k^2 t + 2\beta k k_0 t - \beta k_0^2 t\right)\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp\left[-k^2(a+i\beta t) + k\left(2ak_0 + i(z - v_g t + 2\beta k_0 t)\right)\right] \\
&\exp\left[-ak_0^2 + i\left(-\omega_0 t + v_g k_0 t - \beta k_0^2 t\right)\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp \\
&\left[-(a+i\beta t)\left(k^2 + 2k\frac{2ak_0 + i(z - v_g t + 2\beta k_0 t)}{2(a+i\beta t)} + \left(\frac{2ak_0 + i(z - v_g t + 2\beta k_0 t)}{2(a+i\beta t)}\right)^2\right)\right] \\
&\exp\left[-ak_0^2 + i\left(-\omega_0 t + v_g k_0 t - \beta k_0^2 t\right) + \frac{\left(2ak_0 + i(z - v_g t + 2\beta k_0 t)\right)^2}{4(a+i\beta t)}\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-a^2k_0^2 + \omega_0\beta t^2 - v_g k_0 \beta t^2 + \beta^2 k_0^2 t^2 + i\left(-a\omega_0 t + a v_g k_0 t - a\beta k_0^2 t - a k_0^2 \beta t\right)}{(a+i\beta t)} + \right. \\
&\left. \frac{\left(2ak_0 + i(z - v_g t + 2\beta k_0 t)\right)^2}{4(a+i\beta t)}\right] \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp\left[-(a+i\beta t)\left(k + \frac{2ak_0 + i(z - v_g t + 2\beta k_0 t)}{2(a+i\beta t)}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(z,t) &\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp\left(-a(k-k_0)^2\right) \exp\left[i\left(kz - \left(\omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2\right)t\right)\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \\
&\exp\left[-ak^2 + 2akk_0 - ak_0^2 + i\left(-\beta k^2 t + k\left(z - (v_g + 2\beta k_0)t\right) - \left(\omega_0 + v_g k_0 + \beta k_0^2\right)t\right)\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp\left[-k^2(a+i\beta t) + k\left(2ak_0 + i\left(z - (v_g + 2\beta k_0)t\right)\right) - i\left(\omega_0 + v_g k_0 + \beta k_0^2\right)t\right]
\end{aligned}$$

Substitution $k' = \sqrt{a+i\beta t}k$, $\mathrm{d}k' = \sqrt{a+i\beta t}\mathrm{d}k$

$$\begin{aligned}
\Psi(z,t) &\approx \frac{C}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a+i\beta t}} \exp\left[\left(\frac{2ak_0 + i\left(z-(v_g+2\beta k_0)t\right)}{2\sqrt{a+i\beta t}}\right)^2 - i\left(\omega_0 + v_g k_0 + \beta k_0^2\right)t\right] \\
&\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \exp\left[-\left(k - \frac{2ak_0 + i\left(z-(v_g+2\beta k_0)t\right)}{2\sqrt{a+i\beta t}}\right)^2\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2}\sqrt{a+i\beta t}} \exp\left[\left(\frac{2ak_0 + i\left(z-(v_g+2\beta k_0)t\right)}{2\sqrt{a+i\beta t}}\right)^2 - i\left(\omega_0 + v_g k_0 + \beta k_0^2\right)t\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2}\sqrt{a+i\beta t}} \exp\left[\frac{4a^2k_0^2 - \left(z-(v_g+2\beta k_0)t\right)^2 + 2iak_0\left(z-(v_g+2\beta k_0)t\right)}{4(a+i\beta t)}\right. \\
&\left. - \frac{4i\left(\omega_0 + v_g k_0 + \beta k_0^2\right)t(a+i\beta t)}{4(a+i\beta t)}\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2}\sqrt{a+i\beta t}} \exp\left[\frac{4a^2k_0^2 - z^2t^2 - v_g^2t^2 - 4\beta^2k_0^2t^2 - 2zv_g - 4z\beta k_0t^2}{4(a+i\beta t)}\right. \\
&+ \frac{-2iak_0v_gt + 4iak_0^2\beta t - 4i\omega_0 at - 4iv_gk_0at - 4i\beta k_0^2at}{4(a+i\beta t)} \\
&\left. + \frac{4\omega_0\beta t^2 + 4v_gk_0\beta t^2 + 4\beta^2k_0^2t^2}{4(a+i\beta t)}\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2}\sqrt{a+i\beta t}} \exp\left[\frac{a^2k_0^2 - \beta^2k_0^2t^2 - z\beta k_0t^2 + iak_0^2\beta t - i\omega_0 at - i\beta k_0^2at + \omega_0\beta t^2}{(a+i\beta t)}\right. \\
&\left. \frac{-z^2t^2 - v_g^2t^2 - 2zv_g - 2iak_0v_gt - 4iv_gk_0at + 4v_gk_0\beta t^2 + 4\beta^2k_0^2t^2}{4(a+i\beta t)}\right] \\
&\approx \frac{C}{\sqrt{2}\sqrt{a+i\beta t}} \exp\left[\frac{a^2k_0^2 - z\beta k_0t^2 - i\omega_0 at + \omega_0\beta t^2}{(a+i\beta t)}\right. \\
&\left. \frac{-z^2t^2 - v_g^2t^2 - 2zv_g - 2iak_0v_gt - 4iv_gk_0at + 4v_gk_0\beta t^2}{4(a+i\beta t)}\right] \\
&\approx \frac{C\exp\left[i\left(k_0z - \omega_0t\right)\right]}{\sqrt{2}\sqrt{a+i\beta t}} \exp\left[-\frac{(z-v_gt)^2}{4(a+i\beta t)}\right] \\
|\Psi(z,t)|^2 &\approx \frac{|C|^2}{2\sqrt{a^2+\beta^2t^2}} \exp\left[-\frac{a(z-v_gt)^2}{2(a^2+\beta^2t^2)}\right]
\end{aligned}$$

Funktionen der Form $u(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)$ sind **Welle** oder **raumzeitliche Störung** $\delta(x-vt)$, die sich mit der **Phasengeschwindigkeit** $v_{ph} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \dot{x}$ für konstante Phase der Welle const $= \varphi = k\,x \dot{-} \omega t$ ausbreiten, und lösen $u_{tt} - \Delta_{\vec{x}}u = 0$ als fluss-erhaltendes Anfangswertproblem (zeitentwickelnde PDE) ist gemäß

$$\partial_t\vec{u} = -\partial_x\vec{F}(\vec{u}) \quad \text{mit konservativem Fluss} \quad \vec{F}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 0 & -v \\ -v & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{u}$$

1d-Analog der Maxwell-Gleichung, wegen $\partial_{tt}u = v^2\partial_{xx}u$, $\partial_t r = v\partial_x s$, $\partial_t s = v\partial_x r$, $r \equiv v\partial_x u$, $s \equiv \partial_t u$, $\vec{u} \equiv (r,s)^T$. Das entsprechende FTCS = **forward time, centred space scheme** ist für hyperbolische PDEs instabil und geht nur für Zeiten deutlich unter einer Schwingungperiode. Alternative durch von Neumanns-Stabilitätsanalyse, lokal. Bei Differenz-Schemata, anders als bei Spektral-Verfahren, spielt die Kunst der Stabilisierung eine wichtige Rolle. Rettung ist **Lax-Schema - mittele die Zeitableitung!** - dessen **Stabilitätskriterium** die **Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung** ist oder **numerisches Abhängigkeitsgebiet** $|v| \leq \frac{\Delta x}{\Delta t}$ oder $|v|\frac{\Delta t}{\Delta x} = c =\leq 1$, mit $c =$ **Courant-Zahl** = CFL-Zahl. **Kinzel & Reents: Physik per Computer** 1996 p155; Die Randbedingungen müssen vor dem nächsten Zeitschritt Gelegenheit gehabt haben zu kommunizieren! **Die Phasenschwindigkeit** v **begrenzt**

die Schrittweite! Das Überschreiten des Lichtkegels führt zu Informationsmangel und Instabilität des Schemas.

Amplituden-Gleichungen. Cross & Hohenberg: Pattern formation outside of equilibrium, RevModPhys65 0851 1993; **Diffusionsgleichung**, Fick'sches Gesetz, Newton'sche Wärmeleitungs-Gleichung, **nicht zeitspiegelungsinvariant** = Wissen über Vergangenheit geht mit wachsender Zeit verloren: Entropiezunahme/Informationsverlust. Odo Marquard: Zukunft brauch Herkunft. Parabolischer Operator $u_t - ku_{xx} = 0$ wirkt glättend und lässt die Größe $|x|^2/t$ bei Transformation $(x,t) \to (\alpha x, \alpha^2 t)$ invariant. Smoller: Shock Waves and Reaction—Diffusion Equations 1983, 1997[2] Kap9 Second-Order Linear Parabolic Equations, Kap14 Reaction—Diffusion Equations, zB Belousov-Zhabotinsky-Reaktion = BZ-Reaktion. $\frac{\partial}{\partial t}u = f(u) + D \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u$ mit dem **Reaktionsanteil** $f(u)$. Der Diffusionkoeffizient D wird für mehr als einen Stoff zur **Reaktions-Diffusions-Matrix:** Populationsdynamik mit **Fisher-Gleichung** $f(u) = u \cdot (1-u)$ ohne den Diffusionsterm wäre es die Differentialgleichung für die Logistische Funktion. Allgemeinere Variante ist **Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov-Gleichung-KPP-Gleichung** $f(1) = f(0) = 0,\ f(u') > 0$ und $\frac{df}{du}(u') < \frac{df}{du}(0)$ für $0 < u' < 1$. Die Fisher Gleichung und die Newell-Whitehead-Gleichung sind Spezialfälle der KPP-Gleichung. Seldowitschgleichung = **Zeldovich-Gleichung** zum Beispiel bei Verbrennungsvorgängen: $f(u) = u^2 \cdot (1-u)$ **Murray: Mathematical Biology** 1993[2] p309f, **Newell-Whitehead-Gleichung oder Amplituden-Gleichung:** $f(u) = u(1-u^2)$, angewandt bei der Rayleigh-Bénard-Konvektion. **Nagumo-Gleichung** für Ausbreitung von Nervenpulsen in einem Axon: $f(u) = u \cdot (1-u) \cdot (1-\alpha)$ mit einem Parameter $0 < \alpha < 1$). Ein weiteres Beispiel ist die Poröse-Medien-Gleichung und die Burgersgleichung. Kondepudi & Prigogine: Modern Thermodynamics. From Heat Engines to Dissipative Structures 1998; Murray: Mathematical Biology 2008[3]; Liehr: Dissipative Solitons in Reaction Diffusion Systems. Mechanism, Dynamics, Interaction 2013; Siehe auch Jetschke: Mathematik der Selbstorganisation 1989 Kap8 Reaktions—Diffusions-Systeme p183-198 Brüsselator mit Diffusion, Gierer-Meinhardt-Modell; Ebeling & Feistel: Physik der Evolution 1982 Kap2.3 Chemische dissipative Systeme; Feistel & Ebeling: Evolution of complex systems 1988 Kap9.3 Kontinuierliche Lotka-Volterra-Systeme p197; **parabolisch**, Nernst 1917, ist in **lokaler Zeit** formuliert, verletzt also Kausalität! Josephs & Preziosi: Heat waves, RevModPhys61 p41 1989; **Thermischer Flussvektor**, wie Massenfluss, ist $\vec{q} = K\nabla T$ mit interner Energiebilanz $\rho c_p \frac{\mathrm{D}T}{\mathrm{D}t} + \nabla \cdot \vec{q} = 0$ mit materieller Ableitung $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} := \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla$. Für die Massendichte gilt Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$. Mit der **thermischen Diffusivität** $\kappa = K/\rho c_p$ folgt $T_t + \vec{u} \cdot \nabla T - \kappa \nabla^2 T = 0$. Für $\vec{u} = \vec{0}$ hat man die bekannte Diffusionsgleichung, sonst das **Paradox der Wärmeleitung** = PHC paradox of heat condution. Ein Ausweg ist das Maxwell-Cattano-Gesetz mit **thermischer Relaxationskonstante/Zeit** $\lambda_0 \in$ [ns bis 100s] $(1 + \lambda_0 \partial_t)\vec{q} = -K\nabla T$, das aber andere Paradoxa bringt. Ausweg siehe Christov & Jordan: Heat conduction paradox involving second-sound propagation in moved media PhysRevLett.94.154301, : $u_t - \Delta_{\vec{x}} u = 0, \qquad u_t = u_{xx}, \quad u(x,t) = e^{\sigma t} e^{ikx}$ wobei $u \in \{\varrho, c, p\}$ mit ϱ Massendichte, c Konzentration oder p Wahrscheinlichkeit. **Diffusionsbedingte Fließgeschwindigkeit** $\vec{v}(\vec{x},t) = -\frac{a}{\varrho(\vec{x},t)} \nabla \varrho(\vec{x},t)$ Lösung $u \equiv 0$ ist instabil, wenn Störung wächst oder nicht abklingt. u sei periodisch in x: $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\sigma_n t} e^{ik_n x}$. Die Diffusionsgleichung führt auf die Dispersionsrelation $\sigma = -k^2$, folglich zerfallen alle Lösungen und $u \equiv 0$ ist stabile Lösung. Betrachte gebiet (0,1) mit Randbedingung $u(0,t) = u(1,t)$=0: $E(t) = 1/2||u(t)||^2$ mit der $L^2(0,1)$-Norm $||f||^2 = \int_0^1 f^2 \mathrm{d}x$. Dann ist

$$\dot{E} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 u u_t \mathrm{d}x = \int_0^1 u u_{xx} \mathrm{d}x = -\int_0^1 u_x^2 \mathrm{d}x + u u_x|_0^1 = -||u_x||^2$$

Mit Poincare-Ungleichung $||u_x||^2 \geq \pi^2 ||u||^2$ für $u = 0$ bei x=0,1 gibt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}||u||^2 + \pi^2||u||^2 \leq 0$ oder $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{2\pi^2 t}||u||^2) \leq 0$, also $||u(t)||^2 \leq e^{-2\pi^2 t}||u_0||^2$. Weitere Lösungen sind

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right), \text{aber im} \quad \mathbb{R}^3 \quad \varrho(\vec{x},t) = \frac{1}{(4\pi a t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{||\vec{x}||^2}{4at}\right)$$

$$u_2(x,t) = f\left(\frac{x}{\sqrt{at}}\right)$$

denn Einsetzen, Ableiten und Argumentersetzung gemäß $y = \frac{x}{\sqrt{at}}$ führt auf die gewöhnliche Dgl $f'' + \frac{y}{2}f' = 0$. Integration mittels Trennung der Variablen nach Sustitution $f' = g$ liefert $g(y) = -y^2$. Nochmalige Integration mittels Trennung der Variablen führt auf Err-Funktion, und

$$u_3(x,t) = \sin\left(2c^2at - xc\right) \cdot \exp(-cx)$$

Straughan: The energy method, stability, and nonlinear convection 1992; Karem Alim: **Peristaltische Wellen** in Kapilarsystemen bei Pflanzen, Pilzen, Bäumen. Kommunikation per Kontinuitätsgleichung über Netzwerken = Kirchhoff'sches Gesetz ohne zentrales Nervensystem.

Dirichlet'sche Randbedingung: $u(\vec{x}, t_0) = f(\vec{x})$ für $\vec{x} \in \partial D$.
Neumann'sche Randbedingung: $\frac{\partial u(\vec{x}, t_0)}{\partial \vec{n}} = g(\vec{x})$ für $\vec{x} \in \partial D$.

Numerische Klassifikation:

Cauchy- oder Anfangswertproblem, num besser Zeitentwicklungsproblem, wo Anfangswerte und Randbedingungen vorgegeben sind und eine Zeitscheibe für den nächsten Schritt gebraucht wird. Meist numerisch instabil!

Randwertproblem: Alle Werte auch innerhalb des Randes müssen gespeichert werden und sind simultatan, z.B. per **Relaxationsmethode** Purcell: Berkeley Course Bd2 p81ff, Panow: Formelsammlung zur numerischen Behandlung partieller Differentialgleichungen nach dem Differenzenverfahren 1955 p3 Iterationsgleichung $u(x,y) = \frac{1}{4}\left(u(x-h,y) + u(x+h,y) + u(x,y-h) + u(x,y-h)\right)$ gibt die Lösung, die bis zur $\mathcal{O}(3)$ erfüllt ist, wenn die **Laplace-Gleichung** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ in dem Punkt (x,y) erfüllt ist.; schnelle Methoden per Fourier oder direkte Matrix-Methoden, zu berechnen. 15X15 Grid braucht nur 500 Iterationen 100X100 Grid ueber 17300 Iterationen import numpy as np from matplotlib import cm import matplotlib.pyplot as plt from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D AnzahlStuetzstellenX = 15; AnzahlStuetzstellenY=15 x = np.arange(AnzahlStuetzstellenX) y = np.arange(AnzahlStuetzstellenY) X, Y = np.meshgrid(x, y) Definitionsbereich Potenzial = np.zeros((AnzahlStuetzstellenY,AnzahlStuetzstellenX)) Wertebereich RandXlinks = int(0.4*AnzahlStuetzstellenX); RandXrechts = int(0.8*AnzahlStuetzstellenX) RandYunten = int(0.2*AnzahlStuetzstellenY); RandYoben = int(0.6*AnzahlStuetzstellenY)
Potenzial[RandYunten:RandYoben,RandXlinks:RandXrechts]=10. Randbedingung fuer Innengebiet bei 10 Volt plt.figure(0) plt.subplots_adjust(wspace=0.4, hspace=0.4) plt.subplot(211) StartPotenzial=Potenzial*1. IMAGE = plt.imshow(StartPotenzial,interpolation=None,origin='lower') plt.title('Loesung mittels Relaxations-Methode') plt.colorbar(IMAGE) Relaxation loop Steps = 0; VerbesserungsGewinn=100. NextPotenzial = Potenzial*1. NewPotenzial=Potenzial*0.; MittelVerbesserungAlt = 1000.

```
while (VerbesserungsGewinn >0.001):
 Steps +=1
 for i in range(1,AnzahlStuetzstellenX-1):
  for j in range(1,AnzahlStuetzstellenY-1):
   if ((i<RandXlinks)|(i>RandXrechts-1)| ((i>(RandXlinks-1))&((j<RandYunten)|(j>RandYoben-1))) )
#    print("i,j",i,j)
    NextPotenzial[j,i] = (Potenzial[j,i-1] + Potenzial[j,i+1] + Potenzial[j-1,i]
+ Potenzial[j+1,i])/4.
 Potenzial = NextPotenzial*1.
 MittelVerbesserung = (np.abs(NewPotenzial-Potenzial)).mean()
 VerbesserungsGewinn = 100*np.abs(MittelVerbesserungAlt-MittelVerbesserung)/MittelVerbesserung
 if (np.mod(Steps,100) == 0): print ("Verbesserungsgewinn ="+str(VerbesserungsGewinn)[:4]+" %
durch Iteration",Steps)
```

MittelVerbesserungAlt = MittelVerbesserung NewPotenzial=Potenzial*1.
IMAGE = plt.imshow(Potenzial,interpolation=None,origin='lower') plt.colorbar(IMAGE) ax =

fig.add_subplot(111, projection='3d') surf = ax.**plot_surface**(X, Y, Potenzial,rstride=1, cstride=1, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0, antialiased=False) plt.title('Loesung Laplace-Gl Axes3D.plot_surface') fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5) ax = fig.add_subplot(111, projection='3d') cont = ax.contour(X, Y, Potenzial,rstride=1, cstride=1, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0, antialiased=False) fig.colorbar(cont, shrink=0.5, aspect=5) ax = fig.add_subplot(111, projection='3d') **contourf** veranschaulicht den Gradienten eindrucksvoll!
cont = ax.**contourf**(X, Y, Potenzial,rstride=1, cstride=1, cmap=cm.coolwarm, linewidth=0, antialiased=False) ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); plt.title('Loesung Laplace-Gl Axes3D.contourf') fig.colorbar(cont, shrink=0.5, aspect=5)

FDS, BDS, CDS forward, backward, central difference scheme. Neben Differenz-Schema: Finite-Elemente, Monte Carlo, Spektral-Methode, Variationsmethode. **Ames: Numerical methods for partial differential equations** 1969, 1992[3]; Diffusions-Gleichung, computational fluid dynamics CFD in **FTCS forward time, centred space scheme.** j = **Zeit**, i = Raum. **Entdimensionalisierung** oder **Reskalierung** gemäß Seite 310 gibt $1 = D\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = D\,r$. Große Diffusionskonstante erfordert kleines r! Kurz, die physikalische Diffusionsgeschwindigkeit muss durch die numerische Relaxationszeit überboten werden. Die Numerik muss viel rascher als das physikalische System diffundieren, anderenfalls sieht man Numerik statt Physik. Für $D = 1$: **von Neumann-Kriterium** für Konvergenz $0 < r = \cancel{\frac{1}{D}}\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2}\cancel{\frac{1}{D}} =$ **Maßeinheit der Diffusionskonstanten** bei numerischer Lösung der Diffusionsgleichung $u_t = D\,u_{xx}$ durch das Differenzschema $u_{i,j+1} = r\cancel{D}(u_{i-1,j} - u_{i,j} + u_{i+1,j} - u_{i,j}) + u_{i,j} = r\,(u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + (1-2r)u_{i,j}$. Der Zustand am Ort i ändert sich nur, wenn es bei i eine Zustands-Krümmung oder einen Gradienten des Zustands gibt.

```
Zeit = 100; Raum = 200; r    = 1./20.           # r=D*dt/dx^2 Ames 2

Zustand = zeros((Zeit,Raum))
AnfangsZustand = randn(Raum)                    # rauhe Stoerung
AnfangsZustand = sin(linspace(-5*pi,5*pi,Raum)) # periodische Stoerung
AnfangsZustand = zeros(Raum); AnfangsZustand[Raum/2] = -10. # Delta-Stoerung

def Schritt(AnfangsZustand):
 #1 EndZustand=AnfangsZustand+0.1*randn(Raum)
 EndZustand=(1.-2.*r)*AnfangsZustand
 for i in range(Raum-1):
  EndZustand[i]+=r*(AnfangsZustand[i-1]+AnfangsZustand[i+1])
 EndZustand[Raum-1]+=r*(AnfangsZustand[Raum-2]+AnfangsZustand[-1]) # Period Randbedingung
 return EndZustand

Zustand[0]=AnfangsZustand
for j in range(1,Zeit):
 #2 Zustand[j] = Zustand[j-1]
 Zustand[j]  = Schritt(Zustand[j-1])

imshow(Zustand)
title("1-d Diffusion mit r="+str(r)[0:5]);ylabel("Zeit");xlabel("Raum")
show()
```

show() unter suse bash reagiert nicht oder matplotlib does not show my drawings although I call pyplot.show(). **Lösung:** Erzeuge .config/matplotlib/matplotlibrc mit backend : GtkAgg Zuvor habe ich in .bashrc Kommando export PYTHONSTARTUP=$HOME/.pythonrc.py eingefügt.

OpenFoam Open Source Field Operation and Manipulation http://www.openfoam.com oder **ANSYS** Lösen von **Strömungsproblemen**: Elektromagnetismus, Mehrphasenströmung, Strömungssimulation, Strukturmechanik, Verbrennung, Wärmeleitung. **Turbulenz** kann mittels RANS, Grobstruktur-Simulation oder

direkter numerischer Simulation. Siehe /usr/cnld/shw/CFD/openFOAMTipps.txt Auf schiller in der **bash-Shell** http://www. openfoam. org/docs/user/cavity.php Lies **Users Guide**. shw@schiller:/opt/ OpenFOAM-2.2. 1/tutorials/ incompressible/ icoFoam/ cavity In diesem case-Ordner sind das Gitter mit **blockMesh** = **Mesh generation**, die Simulation mit **icoFoam** > **logFile** = **Running an application** und die Visualisierung mit **paraFoam** zu starten. **Adjust camera 0.0** rechtes Icon = 2D setzen. Zeile rechts Feld U wählen, Zeile mitte **Wireframe** setzen. **FFmpeg** erzeugt ein youtube-Film. source /opt/OpenFOAM-2.2.2/etc/bashrc ssh shw@node-14. agnld. uni-potsdam. de -X hat folgende **Diskretisierungsschemen:** Finite-Volumen-Methode (FVM), Finite-Elemente-Methode und Finite-Flächen-Methode. blockMeshDict legt Randbedingungen fest. blockMesh, paraFoam. Schwarze: **CFD-Modellierung**: Grundlagen und Anwendungen bei Strömungsprozessen 2013; Böhm: Numerische Strömungsoptimierung: Mathematische Herleitung und exemplarische Umsetzung mit OpenFOAM 2012; Maric: Getting Started with OpenFOAM Technology 2013; **Lecheler: Numerische Strömungsberechnung: Schneller Einstieg durch anschauliche Beispiele** 2011[2]; Ferziger & Peric: Computational methods for fluid dynamics 1996 = Numerische Strömungsmechanik 2008; Yanenko & Shokin: Numerical merthods in fluid dynamics 1984; Laurien: **Numerische Strömungsmechanik**. Grundgleichungen und Modelle - Lösungsmethoden - Qualität und Genauigkeit 2013[5], Übungsbuch Strömungsmechanik 2012[8]; Griebel, Dornseifer & Neunhoeffer: Numerical simulation in fluid dynamics. A practical introduction 1998; Wesseling: Principles of computational fluid dynamics 2001;

Press, Teukolsky, Vetterling: Num recipes; Dahmen & Reusken: Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2008; Fletcher: Computational techniques for fluid dynamics 1991[2] Vol1: PDE-Klassifikation, Konvergenz, Konsistenz, Stabilität, Genauigkeit, Berechnungseffizienz, finite element, spectral,Crank-Nicolson, leapfrog, Lax-Wendroff, Vol 2 Fluid dynamics, boundary layers, krummlinige Koordinaten, Gitter-Erzeugung, shock-Ausbreitung; Causon & Migham: Introductory Finite Difference Methods for PDEs Meinhardt: Diffusion: SdW 3 2010, http://www. eb. tuebingen. mpg. de/ departments/ former - departments /h-meinhardt /biuprog. html; Nicolis/Nicolis: ?; Hoyle: Pattern Formation An Introduction to Methods 2006; **Cross & Greenside: Pattern formation** 2009; Mori & Kuramoto: Dissipative structures and chaos 1994; Zoltán Neufeld & Emilio Hernández-García: Chemical and biological processes in fluid flows. A Dynamical Systems Approach, 2009; Busse & Müller: Evolution of spontaneous structures in dissipative systems 1998

Trefethen & Bau: Numerical linear algebra 1997; Trefethen & Embree: Spectra and Pseudospectra. The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators 2005; **Fornberg: A practical guide to pseudospectral methods** 1996; Trefethen: Spectral Methods in MATLAB. Software PDEs, Environments, Tools 2000 pdf im Netz; Kopriva: Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations - Algorithms for Physicists, Mathematicians and Engineers 2009; **Pseudo-Spektral-Methode** siehe deVries: Computerphysik 1995 p383ff Wegen $e^A = 1+A+\frac{1}{2!}AA+\frac{1}{r32!}AAA+\ldots$ und $\Psi(x,t) = e^{-i(T+V)(t-t_0)/\hbar}\Psi(x,t_0) = e^{-i(T+V)\delta_t}\Psi(x,t_0)$ mit $\delta_t = t-t_0$ und $e^{-i(T+V)\delta_t/\hbar} \neq e^{-iT\delta_t}e^{-iV\delta_t}\delta_t/\hbar$ und daher richtig mit dem **Baker-Campbell-Hausdorff-Theorem** $\boxed{e^Ae^B = e^C \Leftrightarrow C = A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\ldots}$, also $e^{-i(T+V)\delta_t/\hbar} = e^{-iT\delta_t/\hbar}e^{-iV\delta_t/hbar} + \mathcal{O}(\delta_t) = e^{-iV\delta_t/2\hbar}e^{-iT\delta_t/\hbar}e^{-iV\delta_t/2\hbar} + \mathcal{O}(\delta_t^2)$ folgt für das qm Streuproblem $i\hbar\partial_t\Psi = -\hbar^2/2m\partial_{xx}\Psi + V(x)\Psi = (T+V)\Psi$ eine effiziente Methode mit dem Ansatz $\Psi(x,t) = e^{-iV\delta_t/2\hbar}e^{-iT\delta_t/\hbar}\underbrace{e^{-iV\delta_t/2\hbar}\Psi(x,t_0)}_{\Phi(x)}$. Dann nutzt man für $e^{-iT\delta_t/\hbar}\Phi(x)$ die FT:

$\Phi(k) = \mathcal{F}[\Phi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\Phi(x)e^{-ikx}$ und hat sofort $\Psi(x,t) = e^{-iV\delta_t/2\hbar}\mathcal{F}[e^{-iT\delta_t/\hbar}\mathcal{F}^{-1}[e^{-iV\delta_t/2\hbar}\Psi(x,t_0)]]$

Spectral Methods and Inverse Problems siehe http://www. math.fsu. edu/~okhanmoh /research.html

Gopalakrishnan, Chakraborty, Mahapatra: Spectral finite element method: wave propagation, diagnostics and control in anisotropic and inhomogeneous structures 2008; Karniadakis & Sherwin: Spectral/hp element methods for computational fluid dynamics 2005; David A. Kopriva: Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations: Algorithms for Scientists and Engineers 2009; **Canuto et al.: Spectral methods in fluid dynamics 1988** http://www2. docm. mmu. ac. uk/STAFF/C. Mingham/ Scilab%20codes%20list.

html

Retardierte Differentialgleichung, Delay-Differentialgleichung oder Differentialgleichung mit nacheilendem Argument. Problem bei Steuerung des Marsautos oder remote-cotrol = Fernsteuerung von Drohnen beim Kriegseinsatz. Bei Nervenleitung analog. **Anfangswerte** müssen auf Intervall der Länge der Verzögerungszeit τ gegeben sei! Daher unendlich-dimensionales System. Lösung durch schrittweises Integrieren: $\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-\tau))$ mit Anfangsbedingung $\phi(t) : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$. Lösung $x_1(t)$ auf dem Intervall $[0, \tau]$ ist durch die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems $\dot{x}_1(t) = f(x_1(t), \phi(t-\tau))$ mit $x_1(0) = \phi(0)$ gegeben. Nun kann die Lösung $x_1(t)$ als Anfangsbedingung $\psi(t) := x_1(t)$ für die Lösung $x_2(t)$ auf dem Intervall $[\tau, 2\tau]$ verwendet werden. Durch N-fache Wiederholung dieser Schritte kann eine geschlossene Lösung auf dem Intervall $[0, N\tau]$ gefunden werden. **Beispiel:** $\dot{x}(t) = x(t-1)$ Anfangsbedingung $x(t) = \phi(t) = 1$ für $t \leq 0$ führt zur inhomogenen Differentialgleichung $\dot{x}_1(t) = 1$ für $t \in [0, 1]$. Daher ist $x_1(t) = t+1$ Lösung für das Intervall $0 \leq t \leq 1$. Für das Intervall $1 \leq t \leq 2$ findet man $x_2(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}$. Manchmal kann man kontinuierliche DDE als ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen schreiben. $\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{0} x(t+\tau)e^{\lambda\tau}\mathrm{d}\tau\right)$ wird mit $y(t) = \int_{-\infty}^{0} x(t+\tau)e^{\lambda\tau}\mathrm{d}\tau$ durch partielle Integration zu $\dot{x}(t) = f(t, x(t), y(t)), \quad \dot{y}(t) = x(t) - \lambda y(t)$. Roussel: Delay-differential equations 2005; DDEs bei Modellen, bei denen die Wirkung erst verspätet (retardiert) auf die Ursache folgt: Epidemiologie (Infektion, Inkubationszeit), Populationsentwicklung (Fortpflanzung, Geschlechtsreife) $\dot{x} = -\mu x(t) + \alpha p x(t-\tau)$, wobei x Populationsdichte geschlechtsreifer Individuen, τ Dauer bis zur Geschlechtsreife, α pro-Kopf Fortpflanzungsrate, μ die Sterberate und p die Wahrscheinlichkeit, dass die Geschlechtsreife erreicht wird, und Regelungstechnik (Verzögerungszeit). DDE mit **punktweiser Verzögerung** $\dot{x} = f(t, x(t), x_{\tau_1}, \ldots x_{\tau_n})$ mit $x_{\tau_n} = x(t-\tau_n)$. oder $\dot{x} = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_n))$. DDE mit **kontinuierlicher Verzögerung** $\dot{x} = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^{0} x(t+\tau)\mathrm{d}\mu(\tau)\right)$. **Kuang: Delay differential equations with applications in population dynamics 1993;** Bellen & Zennaro: Numerical Methods for Delay Differential Equations 2003; **Delay partial differential equations** = partial functional (Lösung ist zugleich auch Argument) differential equations, weil ihre unbekannte Lösung nicht nur vom momentanen Zeitpunkt oder Ort, sondern auch von der Lösung zu früheren Zeiten, also retardierten Lösungen, und Zuständen an anderen Orten abhängt, also nichtlokale Beschreibung. Siehe Barbara Zubik-Kowal (2008), Scholarpedia. Axel Hutt & Atay: Analysis of nonlocal **neural fields** for both general and gamma-distributed connectivities, Physica D 203(1-2), 30-54 (2005); Stephen Coombes **Neural fields** (2006), Scholarpedia; http://www.scholarpedia. org/article/Neural_fields; Für evozierte Dedritenströme gilt die **Volterra-Gleichung** $I(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t' h(t-t')P(t')$, wobei $P(t)$ die instantan ankommende Pulsesequenz und der Kern $h(t)$ die synaptische Response-Function eines chemischen Rezeptors auf einen einlaufenden Einzelpulse ist. Unter der Annahme eines rasch abfallenden Kern $h(t) = exp(-t/\tau)/\tau$ mit $\tau =$ const gilt $\dot{I} = -\dfrac{I}{\tau} + \dfrac{P}{\tau}$ Peter beim Graben & Hutt: Attractor and saddle node dynamics in heterogeneous neural fields EPJ Nonlinear Biomedical Physics 2, 4 (2014); **Amari-Gleichung**. Hopf-Bif bringt zeitliche Periodizität, siehe Seite 202. Turing-Instabilität bringt räumliche Periodizität (Zebra). Amari: Dynamics of pattern formation in lateral-inhibition type neural fields, Biological Cybernetics 3. VIII 1977 Vol27 Issue2, p77-87; Cappaneo; **Scott: Neuroscience. A Mathematical Primer** 2008; Dayan & Abbott: Theoretical Neuroscience. Computational and mathematical modeling 2001; **Ermentrout: Mathematical foundations of neuroscience** 2010 e-book; Izhikevich: Dynamical Systems in Neuroscience. The Geometry of Excitability and Bursting 2007; Wallischet al: MATLAB for Neuroscientists: An Introduction to Scientific Computing in MATLAB 2014 lieber googeln! Borisyuk: Tutorials in Mathematical Biosciences I. Mathematical Neuroscience 2005 elmentare Intro in NLD, Synchronisation und Neuroscience; **Tuckwell: Introduction to Theoretical Neurobiology**. Vol1 Linear Cable Theory and Dendritic Structure, Vol2 Nonlinear and Stochastic Theories 1988; Gabbiani & Cox: Mathematics for Neuroscience 2010; Laing: Stochastic methods in Neuroscience, Oxford; **Ermentrout: Mathematical foundations of neuroscience** 2010 e-book http://dx.doi.org/10.1007/978-0-387-87708-2;

Stochastic partial differential equation: $\partial_t u = \Delta u + \xi.$, wobei der Antrieb ξ raum-zeitliches Rauschen und auch die Koeffizienten raum-zeitliche Zufallsgrößen. Anwendung in QFT und statistischer Mechanik. **Kardar–Parisi–Zhang equation** $\frac{\partial h(\vec{x},t)}{\partial t} = \nu\nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \eta(\vec{x}, t)$

beschreibt die raum-zeitliche Höhe $h(\vec{x},t)$, bei weißem Gauß'schem Rauschen $\eta(\vec{x},t)$ mit $\langle\eta(\vec{x},t)\rangle = 0$ und $\langle\eta(\vec{x},t)\eta(\vec{x}',t')\rangle = 2D\delta^d(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t-t')$. ν,λ, und D Parameter, d Dimension. Entspricht der stochastischen Burgers-Gleichung für das Feld $u(x,t)$, mit Substitution $u = -\lambda\,\partial h/\partial x$. Sei versteckte Dynamik $\mathrm{d}x = f(x,t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}w$ mit Beobachtungsfunktion gegeben $\mathrm{d}z = h(x,t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}v$, wobei $\mathrm{d}w, \mathrm{d}v$ unabhängige Wiener-Prozesse. Dann gehorcht die unnormierte bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x,t)$ des Zustandes zur Zeit t **Zakai-Gleichung**, Filtertheorie: $\mathrm{d}p = L(p)\mathrm{d}t + ph^T\mathrm{d}z$ mit $L = -\sum\frac{\partial(f_ip)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_j}$. Entspricht für $h=0$ der nichtstochastischen Kolmogorow- oder Fokker-Planck-Gleichung für den Fall ohne Beobachtungsfunktion. **Kushner-Stratonovich-Bucy-Gleichung**, Filtertheorie: Versteckte Dynamik $\mathrm{d}x = f(x,t)\,\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}w$ mit Beobachtungsfunktion gegeben $\mathrm{d}z = h(x,t)\,\mathrm{d}t + \eta\mathrm{d}v$, wobei w, v unabhängige Wiener-Prozesse. Dann gehorcht die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x,t)$ des Zustandes zur Zeit t der **Kushner-Stratonovich-Bucy-Gleichung** $\mathrm{d}p(x,t) = L[p(x,t)]\mathrm{d}t + p(x,t)[h(x,t) - E_th(x,t)]^T\eta^{-\top}\eta^{-1}[\mathrm{d}z - E_th(x,t)\mathrm{d}t]$. mit dem Kolmogorov Forward Operator $Lp = -\sum\frac{\partial(f_ip)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum(\sigma\sigma^\top)_{i,j}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i\partial x_j}$ und der Änderung der bedingten Wahrscheinlichkeit $\mathrm{d}p(x,t) = p(x,t+\mathrm{d}t) - p(x,t)$. Der Term $\mathrm{d}z - E_th(x,t)\mathrm{d}t$ = Innovation = Differenz zwischen Messung/Beobachtung und Erwartungswert. **Kalman-Bucy-Filter** = Kushner-Gleichung mit $f(x,t) = ax$ und $h(x,t) = cx$ für linearen Diffusionprozess: $\mathrm{d}p(x,t) = L[p(x,t)]\mathrm{d}t + p(x,t)[cx - c\mu(t)]^T\eta^{-\top}\eta^{-1}[\mathrm{d}z - c\mu(t)\mathrm{d}t]$, mit dem Mittel der bedingte Wahrscheinlichkeit $\mu(t)$ zur Zeit t. Multiplying by x and integrating over it, we obtain the variation of the mean $\mathrm{d}\mu(t) = a\mu(t)\mathrm{d}t + \Sigma(t)c^\top\eta^{-\top}\eta^{-1}\left(\mathrm{d}z - c\mu(t)\mathrm{d}t\right)$. Analog ist die Änderung der Varianz $\Sigma(t)$ gegeben $\frac{d\Sigma(t)}{dt} = a\Sigma(t) + \Sigma(t)a^\top + \sigma^\top\sigma - \Sigma(t)c^\top\eta^{-\top}\eta^{-1}c\Sigma(t)$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist zu jedem Zeitpunkt durch eine Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu(t),\Sigma(t))$ gegeben. **Wiener-Filter**. Finite impulse response Wiener filter for discrete series: Für Signal w hat man den Output $x[n] = \sum_{i=0}^N a_iw[n-i]$ Die Schätzung optimaler Filter-Koeffizienten mittels Yule-Walker-Gleichung oder diskreter Wiener-Hopf-Gleichung = Löser einer Integralgleichung: $\sum_{j=0}^N R_w[j-i]a_j = R_{sw}[i] \quad i = 0,\ldots,N$ oder $\mathbf{Ta} = \mathbf{v}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} R_w[0] & R_w[1] & \cdots & R_w[N] \\ R_w[1] & R_w[0] & \cdots & R_w[N-1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_w[N] & R_w[N-1] & \cdots & R_w[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{sw}[0] \\ R_{sw}[1] \\ \vdots \\ R_{sw}[N] \end{bmatrix}$$

. Prato & Tubaro: Stochastic Partial Differential Equations and Applications. Proceedings of a Conference held in Trento, Italy, Sept. 30Oct. 5, 1985 Winkler: Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods. A Mathematical Introduction 2006 UP; Winkler: Stochastische Systeme. Analyse und Synthese 1983; Winkler: Stochastische Prozesse in der statistischen Modellierung 2000 pdf im Netz; von Weizsäcker & Winkler: Stochastic Integrals 1990 UP;

36 Gasdynamik, Bernoulli-Gleichung

Herr, Bach & Maier: Technische Physik. Lehr- und Aufgabenbuch 2008 p136ff; PdNPiS 52 2003 H4 p37 und H5 p38;

$$p_0 = p + \frac{\rho}{2}v^2 + \rho\,g\,h = \text{const}$$

Gesamtdruck = **Wanddruck** (statischer Druck) + **Staudruck** (dynamischer Druck) + Schweredruck = const. Ganzer: Gasdynamik; Käpeli: Strömungmechanik; Für stationäre Bewegung einer idealen (reibungsfreien) Flüssigkeit, die nur der Schwerkraft unterworfen ist, gilt für alle Punkte einer Stromlinie, dass die Energiehöhe in Metern gleich der Summe aus Geschwindigkeitshöhe (Staudruck der Strömung) $\frac{c^2}{2g}$ und Druckhöhe (Druck) $\frac{p}{\rho g}$ und geodätischer Höhe z konstant ist. Bei Reibung kommt die Verlusthöhe H_v bei turbulenter Strömung mit dem Widerstandsbeiwert ζ dazu $H_v = \zeta\frac{c^2}{2g}$

$$\frac{c^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z + \zeta\frac{c^2}{2g} = \text{const.}$$

c Strömungsgeschwindigkeit, g Schwerebeschleunigung, p Druck, ρ Dichte, z Höhe über/unter einer Bezugsebene mit gleicher geodätischer Höhe. Bei plötzlicher Querschnitterweiterung: $\zeta = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2$ Impulsadvek-

tion in der Navier-Stokes-Gleichung sich nach der Weber-Transformation:

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{v})$$

und reibungs- und wirbelfreie Strömung ($\vec{\nabla}\times\vec{v}=\vec{0}$) gibt Bernoulli. **Wasserstrahlpumpe, Lenz-Pumpe** Wittenberger: Chemische Laboratoriumstechnik 1973 p258; Prandtl & Tietjens: Fundamentals of Hydro- and Aerodynamics 1934 p243 e-book **Oertel: Prandtl-Essentials of Fluid Mechanics** Kap4. Dynamics of fluid flow, Jet pump p160; Resobois & de Leneer: Classical Kinetic Theory of Fluids; **Krapivsky, Redner, Ben-Naim: A Kinetic View of Statistical Physics** 2001; Chapman & Cowling: The mathematical theory of non-uniform gases; C̃ole: An introduction to statistical theory of classical simple dense fluids 1964; Rice & Gray: The statistical mechanics of simple liquids. An introduction to the theory of equilibrium and non-equilibrium phenomena 1965; Montroll & Lebowitz eds: Liquid state of matter. Fluids, simple and complex 1982;

37 Ähnlichkeits-Kennzahlen: Reynolds, Rossby, Ekman

Ekman-Schicht beginnt an der Obergrenze der nach Ludwig Prandtl benannten Prandtl-Schicht in etwa 100 m Höhe und reicht bis etwa 1000 m Höhe, die Obergrenze der atmosphärischen Grenzschicht. Somit kann sie als untere Hälfte der Peplosphäre betrachtet werden.

Die Ekman-Schicht ist auf der Nordhalbkugel durch Winddrehung nach rechts und nur noch geringe Windzunahme gekennzeichnet. Trägt man die in den einzelnen Höhenstufen der Ekman-Schicht gemessenen Winde nach Richtung und Geschwindigkeit auf, so beschreibt die Spitze der Windpfeile eine Ekman-Spirale. Ekman-Transport ist eine Strömung, die vertikal integriert ist über eine turbulente Grenzschicht der Atmosphäre und des Ozeans infolge der Erdrotation. Er ist bestimmt durch das Gleichgewicht zwischen der Corioliskraft, die durch die bewegte Wassersäule induziert wird, und der Differenz der turbulenten Schubspannungen zwischen der oberen und unteren Berandung dieser Wassersäule in der turbulenten Grenzschicht. Die charakteristische Zeit für die Einstellung dieses Gleichgewichts ist die **Trägheitsperiode** $= T_i = \frac{2\pi}{2\Omega\sin\varphi} = \frac{2\pi}{f_C} = 16$ h in mittleren Breiten, wobei **Coriolisparameter** $f_C = \frac{2\pi}{T_i} = 2\Omega\sin\varphi = 10^{-4}$ s−1 in mittleren Breiten. Die Wasserteilchen in der oberflächennahen Schicht bewegen sich auf Kreisen mit dem Radius $R = \frac{u_0}{f_C}$. Die charakteristischen Geschwindigkeiten haben in weiten Teilen des Ozeans die Größenordnung $u_0 = \mathcal{O}(10^{-1}\,\mathrm{m/s})$. In den mittleren Breiten hat der **Coriolisparameter** die Größenordnung $f_C = \mathcal{O}(10^{-4}\,1/s) \Rightarrow R = \mathcal{O}(1\,\mathrm{km})$. In tropischen Breiten dagegen ist der Coriolisparameter eine Größenordnung kleiner, der **Trägheitsradius** beträgt daher dort 10 km. Der tiefe Ozean verbleibt in Ruhe, da die Oberflächenströmung frei von Divergenzen ist und somit keine horizontalen Druckgradienten aufgebaut werden, die die tiefen Schichten in Bewegung setzen können. **Korkenzieherströmung, auch Ekman-Spirale** = vertikales Geschwindigkeitsprofil, das überall da auftritt, wo Wind (abseits des Erdäquators) stetig über eine ausgedehnte Wasserfläche weht. In der Summe - über den Tiefenbereich der Ekman-Spirale - wird Wasser quer zur Windrichtung transportiert. Der Wind zieht das Wasser durch Reibung mit sich. Dessen Bewegung wird durch die Corioliskraft abgelenkt, auf der Nordhalbkugel nach rechts. Jede tiefere Wasserschicht wird durch die jeweils darüber liegende mitgezogen und durch die darunter liegende gebremst. Die unterschiedlichen Richtungen und Beträge der Reibungskräfte gleichen gerade die Corioliskraft auf die betrachtete Schicht aus. Aus dieser Bedingung ergibt sich, dass tiefere Wasserschichten sich immer langsamer bewegen und die Bewegungsrichtung immer stärker von der Windrichtung abweicht. Genauer: die Geschwindigkeitsvektoren bilden eine logarithmische Spirale mit $|v| = e^{-\alpha}$ mit α als Umlaufwinkel im Bogenmaß. Nach einem halben Umlauf hat der Betrag Geschwindigkeit auf einen Bruchteil $e^{-\pi} \approx 1/23$ abgenommen. **Häckel: Meteorologie** 1990[2], 2016[8] Corioliskraft macht Rechtsablenkung auf Nordhalbkugel p201ff;

Lappa: Thermal convection: patterns, evolution and stability 2010; Cross & Greenside: Pattern Formation and Dynamics in Nonequilibrium Systems 2009;

Rayleigh (1875-1947)-Zahl $Ra = \frac{l^3 g\gamma\Delta T\rho}{\eta k} = GrPr$ Wärmetransfer = Auftriebskraft/viskose Kraft

Reynolds(1842-1212)-Zahl $Re = \frac{UL}{\nu}$ = Trägheitskräfte (Konvektion) / innere Reibung (Diffusion) Impulstransfer = Rossby-Zahl / Ekman-Zahl. **Mikro-Schwimmer** erleben sehr kleine Re! Nur Reibung und kaum Trägheit. Kommen mit Filamenten und Proteinmotoren auf ganz andere Weise vorwärts. Spermien werden getrieben durch aktive schlangenförmige Bewegung des Schwanzes = **Flagellum**. **Zilien** sind haarähnliche Zellfortsätze, die mit einer peitschenförmigen Bewegung Flüssigkeit, Schleimbewegung in Zunge, oder die Zelle, Pantoffeltier, bewegen. **Metachronal Wave**: Wenn viele Zilien gemeinsam schlagen, bildet sich spontan ein Wellenmuster aus, ganz ähnlich dem eines Weizenfeldes im Wind. Zilien und Flagellen haben eine gemeinsame Struktur, das **Axonem**. Modellaxonem besteht aus drei semiflexiblen Polymerstäben, die zu einer kranähnlichen Struktur zusammengefasst sind. Mithilfe mesoskopischen Simulationsmethode = Multi-Particle Collision Dynamics (MPCD), werden hydrodynamische Wechselwirkungen berücksichtigt. Jens Elgeti: Sperm and Cilia Dynamics PhD 2006; http://kups.ub.uni-koeln.de/2007/ Elgeti, Winkler, Gompper: Physics of Microswimmers - Single Particle Motion and Collective Behavior. Rep. Prog. Phys. 78, 056601 (2015) Cite as arXiv 1412.2692 physics.bio-ph Multi-particle collision dynamics = stochastic rotation dynamics = SRD = fully incorporates thermal fluctuations and hydrodynamic interactions. Malevanets & Kapral: Mesoscopic model for solvent dynamics, JChemPhus110 pp8605-8613 1999 oder Gompper, Ihle, Kroll, Winkler: **Multi-Particle Collision Dynamics**. A Particle-Based Mesoscale Simulation Approach to the Hydrodynamics of Complex Fluids, Advanced Computer Simulation Approaches for Soft Matter Sciences III, Advances in Polymer Science 221 p. 1 (2009) arXiv: http://arxiv.org/abs/0808.2157. **John M. Ball: Fundamental contributions to the continuum theory of evolving phase interfaces in solids** Verallgemeinerungen der Variationsrechnung des Konvexitätsbegriff. Führe quasikonvexe und polykonvexe Funktionen ein, die es ermöglichen, physikalisch sinnvolle Energiefunktionale in der statischen Elastizitätstheorie mathematisch zu behandeln. Physics Today 66 (9) 2013 p25ff. Smith & Marusic: **Wandnahe Turbulenz**, If Re is less than 10 or so, inertia forces are negligible and the flow is laminar and more or less perfectly damped. The velocity field adjusts almost instantly to any changes in the pressure gradients that drive the flow. Such is the flow regime experienced by swimming bacteria and dust particles in air. Parabelprofil der Geschwindigkeiti in Röhre. In the intermediate range $10 < Re < 103$, inertia forces become increasingly important, though not strong enough to give rise to persistent velocity fluctuations. Included in that category of laminar flow are capillary and pulmonary flows in the human body and gliders in air or in water. Impuls-Mischung erzeugt nahezu homogenes mittleres Geschwindigkeitsprofil bis dicht an die Wand einer Röhre. skin-friction drag ist in Wandnähe riesig. At $Re > 103$, however, viscous effects may not be strong enough to damp out velocity disturbances introduced into the flow field. As a result, a tiny fluctuation—due to, say, a small roughness element or surface vibration—may grow to the point that it causes the entire flow to destabilize.

Die geostrophische Anpassung ist ein Prozess in der geophysikalischen Hydrodynamik, bei dem sich die Felder einer anfänglichen Druck- und Geschwindigkeits-Störung in einer rotierenden Flüssigkeit wechselseitig soweit deformieren, bis sich ein stationäres Gleichgewicht zwischen der Druckgradient- und der zum stationären Geschwindigkeitsfeld gehörenden Corioliskraft eingestellt hat. Dieser Endzustand wird geostrophisches Gleichgewicht genannt. Dieses Problem wurde erstmals theoretisch von Carl-Gustaf **Rossby** für zwei spezielle Fälle gelöst und 1937 und 1938 publiziert. Die geostrophische Anpassung erfolgt durch Poincaré-Wellen, die von der anfänglichen Störung abgestrahlt werden. Die charakteristische Längenskala, auf der sich das geostrophische Gleichgewicht einstellt, wird **Rossby-Radius** genannt. Riehl: Introduction to the atmosphere 1965; Auf rotierenden Planeten mit einer Atmosphäre sowie mit Ozeanen, in denen die entsprechenden Rossby-Radien kleiner sind als der Radius des jeweiligen Planeten, ist die geostrophische Anpassung ein fundamentaler Prozess, der die Dynamik ihrer Atmosphären und Ozeane im starken Maß bestimmt. Geostrophische Flüsse sind zweidimensional! = **Taylor–Proudman-Theorem** states that when a solid body is moved slowly within a fluid that is steadily rotated with a high angular velocity Ω, the fluid velocity will be uniform along any line parallel to the axis of rotation. Ω must be large compared to the movement of the solid body in order to make the coriolis force large compared to the acceleration terms. That this is so may be seen by considering the Navier–Stokes equations for steady flow, with zero viscosity and a body force corresponding to the Coriolis

force, which are: $\rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{F} - \nabla p$, $\mathbf{u}$ = fluid velocity. If we now make the assumption that $F = \nabla\Phi$ is scalar potential and the advective term may be neglected (reasonable if the Rossby number $\ll 1$) and that the flow is incompressible (density is constant) then the equations become: $2\rho\mathbf{\Omega}\times\mathbf{u} = \nabla\Phi - \nabla p$, If the curl of this equation is taken, the result is the Taylor–Proudman theorem: $(\mathbf{\Omega}\cdot\nabla)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Note that $\nabla\cdot\mathbf{\Omega} = 0$ is also needed (angular velocity is divergence-free). The vector form of the Taylor–Proudman theorem is perhaps better understood by expanding the dot product: $\Omega_x\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x} + \Omega_y\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y} + \Omega_z\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z} = 0$. Now choose coordinates in which $\Omega_x = \Omega_y = 0$ and then the equations reduce to $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z} = 0$, if $\Omega_z \neq 0$. Note that the implication is that all three components of the velocity vector are uniform along any line parallel to the z-axis.

Scheinkraft-bedingte Wellen. **Inertial waves** or oscillations, are a type of mechanical wave possible in rotating fluids. Unlike surface gravity waves commonly seen at the beach or in the bathtub, inertial waves travel through the interior of the fluid, not at the surface. Like any other kind of wave, an inertial wave is caused by a restoring force and characterized by its wavelength and frequency. Because the restoring force for inertial waves is the **Coriolis force**, their wavelengths and frequencies are related in a peculiar way. Inertial waves are transverse. Most commonly they are observed in atmospheres, oceans, lakes, and laboratory experiments. **Rossby waves, geostrophic currents, and geostrophic winds are examples of inertial waves.** Inertial waves are also likely to exist in the core of the Earth.

Barokline Instabilität ist u.a. verantwortlich für das Amplitudenwachstum von **Rossby-Wellen**. Baroklin = Druck und Temperaturflächen parallel. Hans Ertel: Methoden und Probleme der Dynamischen Meteorologie 1938; Häckel: Meteorologie 1990[2], 2016[8] p203; **Ertels potenzielle Vortizität**: PV = $\frac{1}{\rho}\zeta^{a}\cdot\nabla\theta$, wobei ρ = Fluiddichte, ζ^a = absolute Vorticity, $\nabla\theta$ = Gradient der potentiellen Temperatur. Aus dem 1. HS der Thermodynamik, Impulserhaltung folgt: Die **potenzielle Vortizität** kann allein durch **diabatische Heizung**, wie zB latente Wärme aus Kondensation, oder **Reibungsvorgänge** geändert werden. Diese Aussage entspricht dem Trägheitsgesetz der Atmosphäre, wegen der Drehung also Drehimpulserhaltung: Breiter Luftwirbel dreht langsam. Zieht er sich zusammen, so steigt die Winkelgeschwindigkeit der Luft wegen der Erhaltung **potenziellen Vortizität**, was sich in einem gestreckten **Ring-Vortex/Wirbel** zeigt. Ausdehnung/Divergenz verbereitert den Vortex/Wirbel und verringert seine Drehzahl. **Roulstone & Norbury: Invisible in the Storm. The role of mathematics in understanding weather** 2013 p28 **Barisches Windgesetz** oder **Buys-Ballot-Regel:** Rückenwind auf Nordhemnisphäere, so hat man rechts neben sich ein Uhrzeiger-Hoch, weil **Coriolis** $-\vec{\omega}\times\vec{v}$ rechts ablenkt und es aus Hoch herausströmt, und links neben sich ein Gegenuhrzeigertief, weil die Strömung ins Tiefzentrum spiralt. Winde parallel zu den Isobaren. Häckel: Meteorologie 1990[2], 2016[8] p203; Mit Barischen Windgesetzes und synoptischen Meteorologie = Zyklonenmodell: Beobachtung der Wolkenformationen, der Lufttemperatur am Boden, des Luftdrucks sowie der Windgeschwindigkeit lässt sich die Großwetterlage abschätzen: Steht Beobachter mit dem Wind im Rücken und beobachtet fallenden Luftdruck und vergleichsweise milde Temperaturen bei zunehmender Windgeschwindigkeit, so kann er davon ausgehen, dass er sich im Warmsektor einer Zyklone befindet. Beobachtet er darüber hinaus hinter sich aufziehende Cumulusbewölkung, darf er in Kürze das Eintreffen einer Kaltfront erwarten. Nimmt er dagegen aufklarenden Himmel, niedrige Temperaturen und steigenden Luftdruck wahr, ist die Kaltfront bereits durchgezogen. **Blüthgen: Lehrbuch der Allgemeinen Geographie. Allgemeine Klimageographie** Bd 2+3 1980; Barotrope **Rossby-Wellen** = Erhaltung der absoluten Vorticity. Hochs-Tiefs. **Bartels: Geophysik II = HdP48** 1957; **Eady** Long waves and cyclon waves Tellus 1 1949 p33-52; **Dolzhansky: Fundamentals of Geophysical Hydrodynamics** 2013 ebook Kap18.3; Charney, Advances in Geophysics 25 p19; **Lugt: Wirbelströmung in Natur und Technik** 1975 p247f, 252, 318f, 326, 346; **Lappa: Rotating thermal flows** 2012; Riehl: introduction to atmosphere 1965; Roedel: Physik unserer Umwelt. Die Atmosphäre 2011[4]; Riehl: Introduction to the atmosphere 1965; Häckel: Meteorologie 1990[2], 2016[8] p203; Brasseur & Solomon: Aeronomy of the Middle Atmosphere. Chemistry and Physics of the Stratosphere and Mesosphere 1984, 2005[3]; Erich Rudolph Alexander Regener 1881-1955 V2 mit Regener-Tonne als Atrappe 1945, Lemke: Die Astronomische Gesellschaft 1863 - 2013. Geschichten und Bilder aus 150 Jahren, Heidelberg 2013 p70f; Regener: Aufbau und Zusammensetzung der Stratosphäre 1941; Labitzke: Die Stratosphäre 2010; Kraus: Die Atmosphäre der

Erde. Eine Einführung in die Meteorologie 2004[3]; **Etling: Theoretische Meteorologie. Eine Einführung** 2008[3] ebook; **Rossby-Wellen** sind horizontal-transversale atmosphärische Wellen, welche sich in einem reibungsfreien und inkompressiblen Medium bei rein horizontalen scherungsfreien Strömungen den stabilen Grundzustand bilden. a] rein horizontalen Bewegung aus, um Schwerewellen herauszufiltern, die bekanntlich vertikal-transversale Wellen sind. b] diese Bewegung in y-Richtung sollte keine Scherung aufweisen, so dass für ein Luftteilchen sich die Bewegung auf eine eindimensionale Bewegung entlang einer Trajektorie vereinfacht. c] Approxmation einer komplett reibungsfreien Atmosphäre. d] es handelt sich um inkompressibles Medium, um auch Schallwellen herauszufiltern. Daher stellt die Dichte eine Konstante dar, was im Umkehrschluss über die Kontinuitätsgleichung bedeutet, dass die Strömung divergenzfrei verläuft. Analog ist durch die konstante Dichte auch die Barotropiebedingung erfüllt. In einer rein baroklinen Atmosohäre gäbe es nur Wellenverschiebung, kein Anwachsen. Daher stimmt es schon irgendwie, aber die Rossby-Zirkulation mit ihren Keilen und Trögen ist kein instabiler Zustand. Das ist ja gerade das ungewöhnliche, sie bildet den stabilen Grundzustand. Ein rein zonales Windfeld mit möglichst hohem Temperaturgradienten (also hoher Baroklinität) stellt dagegen den instabilen Zustand dar.

Man kann sogar zeigen, dass auch im barotropen Fall ein zonales Windfeld dynamisch instabil werden kann. Dies ist genau dann der Fall, wenn auf der antizyklonalen Jetseite die (antizyklonale) relative Vorticity vom Betrag her größer ist als die Erdvorticity. Dann spricht man von barotroper Instabilität. Wird von der Atmosphäre aber nur sehr selten realisiert und wenn dann auch nur in niedrigen Breiten (wegen der dort geringeren Erdvorticity).

Rossby-Zahl = Trägheitskraft / Corioliskraft = $Ro = \frac{U}{Lf}$ mit Coriolis-Parameter $f = 2\ \Omega\ \sin\ \phi$. **Rossby-Welle**: Teilchenverschiebung parallel zur Rotationsachse macht **Coriolis-Kraft**, die zu **meridionaler** Schwingung, also **Schwingung um Breitenkreis**/Parallelkreis, des Teilchens führt, El Nino. Gill: Atmosphere-Ocean Dynamics 1982;

Ekman-Zahl = Viskosität / Corioliskraft $Ek = \frac{\nu}{2L^2\Omega\sin\varphi} = \frac{Ro}{Re}$. **Taylor-Zahl** = Zentrifugalkraft/viskose Kraft. **Couette-Strömung** = laminare Strömung zwischen Platten. **Taylor-Couette-Strömung** = zwischen zwei koaxialen, relativ zueinander rotierenden Zylindern. Taylor-Wirbel senkrecht zur Rotationsachse. **Peclet-Zahl** = $\frac{vl}{K}$ = Trägheitskräfte (Konvektion) / Transfer thermischer Energie = Konvektion / Diffusion. **Dean-Zahl** = Re durch gebogenes Rohr. **Taylor-Zahl** = Re für Fluid zwischen zwei rotierenden Zylindern. **Richardson-Zahl** = **Froude-Zahl** (frei bewegliche Fläche im Fluid) = $\frac{v}{\sqrt{g\,l}}$ Widerstand bei Booten kommt von erzeugter Welle mit $\lambda = \frac{2\pi v^2}{g}$. Große oder Unterwsser-Schwimmer sind im Vorteil. Reynoldszahl irrelevant. **Fourier-Zahl** = $\frac{kt}{c\rho l^2}$ oder $\frac{Kt}{l^2}$ = Wärmeübertragung (K Thermodiffusivität) $\frac{Dt}{l^2}$ = Massentransfer (D Diffusionskoeffizient). **Euler-Zahl** = $\frac{p}{\rho v^2}$ = Druckkräfte / Trägheitskräfte. **Grashof-Zahl** = freie Konvektion bei Schornsteinen = $\frac{l^3 g\gamma\Delta T}{\nu^2}$. **Biot-Zahl** = **Nusselt-Zahl** = Wärmeaustausch zwischen einem strömenden und einem angrenzenden Festkörperoberfläche = $\frac{hl}{k}$ = Wärmeaustauschkoeffizient / Wärmeleitkoeffizient. **Prandtl-Zahl** = kinematische Viskosität / thermische Diffusivität = $\frac{\nu}{K}$ = thermodyn Diffusionszeit/ Diffusionszeit des Impulses Pr(flüssige Metalle, Silikonöle, Erdkern-Dynamo)=0.001 - 0.1, Pr(Gase)=1, Pr(organische Fluide)=1-10, Pr(Wasser,geschmolzene Salze)=7, Pr(Honig,geschmolzenes Glas) = 1000 (eigentlich Nusselt). Herr, Bach & Maier: Technische Physik. Lehr- und Aufgabenbuch 2008 Diffusionspumpe p185ff; Marangoni = Oberflächenspannung/viskose Kraft. Scholze: Glas 1977; **Šelbmann: Eine Kulturgeschichte des Fensters von der Antike bis zur Moderne** 2009; Fensterladen, Tierhäute, Leinen, undurchsichtiges Glas bei Römern 100 vChr, 200 nChr durchsichtiges Glas. 5.Jh Kirchen. Ab 12 Jh Luxus. Kitaigorodski: Technologie des Glases 1951, 1959[2] Glas = kompliziertes flüssiges System in unterkühlten Zustand. Röntgenstrahlanalyse zeigt Glas als sehr zähe Flüssigkeit. Abkühlung: flüssig (Schmelzpunkt) plastisch (Glaspunkt) fest wegen Erstarrung ohne Kristallisation, also mit regelloser Nahordnung/amorph.

Durchsichtig, weil ohne Kristallgrenzen, keine freien Bandelektronen. Bernstein = organisches Glas; Rech: Glastechnik Bd1 1978; Schaeffer: Glastechnik. Bd3 Flachglas 2017; Nölle: Technik der Glasherstellung 1997; Dispan: Glasindustrie in Deutschland 2013; Lange: Rohstoffe der Glasindustrie 1993; Štacherl: Das Glaserhandwerk 2015[6]; Süssmuth: Glas und Gläser 1950; Ľerner: Geschichte des Deutschen Glaserhandwerks 1981; Ħerkommer: Verglasungsarbeiten 1986; Herkommer: 1X1 der Verglasungsarbeiten 1988;

Couette-Strömung wegen gezogener Platte über festem Grund lineares Geschwindigkeits-Profil. **Poiseuille**-Strömung wegen Druckdifferenz im Rohr gibt parabolisches Geschwindigkeits-Profil.

Käppeli: Strömungslehre und Strömungsmaschinen 1987[5]; Zierep: Theoretische Gasdynamik 1991[4]

Kreis-Wellenzahl und **Kreisfrequenz:** $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$. de Brogli: $\lambda = h/p$ oder $p = h/\lambda = 2\pi h/2\pi\lambda = kh$.

Idee des Logarithmus: a] Fechner-Gesetz: Helligkeit und Lautstärke folgen $\Delta\text{Empfindung} = c \cdot \frac{\Delta\text{Reiz}}{\text{Reiz}}$ Die wahrgenommene Tonhöhe eines musikalischen Tons hängt logarithmisch von der Grundfrequenz ab: eine Verdoppelung der Grundfrequenz bewirkt die Änderung der Tonhöhe um eine Oktave. Beim Temperatursinn hingegen nimmt die Reaktion der Thermorezeptoren annähernd linear zur Reizgröße zu. Denn hier ist weniger die „Messung“ der Temperatur wichtig als vielmehr eine Warnung vor Verbrennung oder Erfrieren. Ähnliches gilt für die Schmerzwahrnehmung. **b] Erdbebenstärke**. **c] Rechenschieber**. **d]** Definition der statistischen **Entropie** und Logarithmus der Zustandssumme liefern nach Boltzmann die Basis für die **statistische Thermodynamik**. e] 2d-Potenzial. f] **Dezibel** = Maß für Leistung P oder Schalldruckpegel p auf Basis des Logarithmus von Verhältnisses von Leistungen $P \propto$ Amplitdenquadrat = Energie pro Zeit oder Intensitäten $I \propto (\text{Amplitude})^2$:

$$N = 10\log_{10}\frac{I}{I_0} = 20\lg\frac{p}{p_0} \quad \text{oder} \quad 10^{\frac{\mathrm{N}}{10}} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P}_0}$$

wobei p Druckamplitude und $P \propto p^2$ Leistung. Der Schallwellenintensitätspegel wird auf die Intensität der Hörbarkeitsschwelle bezogen: $I_0(1\,\text{kHz})$=10^{-12} Wm^{-2}. $p_0 = 2{\cdot}10^{-5}$ Nm^{-2} = $2{\cdot}10^{-4}\mu$b. dB(A)≈ Phon ≈ Sone = S =$2^{\frac{P-40}{10}}$ = Lautstärke von 1 kHz bei 40 dB oberhalb Hörschwelle. Gerade noch wahrnehmbar = 10 dB, stiller Garten = 30 dB, Unterhaltung in 1 m Distanz =70 dB, laute Musik = 80 dB, Presslufthammer = 120 dB. Leistungspegel bei Verstärker: $L_P(\text{dB}) = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$. also Verstärker mit 30 dB bedeutet $3 = \log_{10} p$ eine p= 1000fache Verstärkung. **g]** Photometrie, **scheinbare Helligkeit** m gemäß $m_1 - m_2 = -2.5\lg\frac{I_1}{I_2}$: Magnitudo, kurz mag, auch ^{m}, Größenklasse oder Größe. Stern 1^m ist also 2.512 mal heller als Stern 2^m. Einer Differenz von 5^m entspricht gerade Intensitätsverhältnis $1 : 10^{0.4-5} = 1 : 100$ Sonne -27 mag, Vollmond -13mag, Venus oder ISS -5 mag, Sirius -1.45m, Polarstern 2 ^{m}. 12, Herrmann: Das Sternguckerbuch 1981 p29f; Astronomie 10. Klasse 1970 p81f; Herrmann: dtv-Atlas zur Astronomie 1973 p31f; **h]** Logarithmen der Energiemengen siehe Seite 3 dienen der leichteren Orientierung/Vorstellung im Reich der Größenordnungen, um Wichtiges von weniger Wichtigem klar zu unterscheiden. **i]** Logarithmen der letalen Dosen von Giftstoffen. **j]** pH-Wert = negativer dekadischer Logarithmus der Wasserstoffionenkonzentration $c[H^+]$. pH = Potential des Wasserstoffs, Wasserstoffionen-Aktivität a: $\text{pH} = -\log_{10} a\,(\text{H}^+)$.

38 QM, Supraleitung, Planck-Gesetz und geometrische Reihe. Kosmische Strahlungupraflui dität

Zustandsraum ist Hilbertraum. Dynamik per Operatorenalgebra. Verschränkung: Mehrteilchenzustand ist Tensorprodukt von Einteilchenzuständen. **B. d'Espagnat: Auf der Suche nach dem Wirklichen.** 1983; Selleri: Die Debatte um die Quantentheorie 1983, 1990; Baumann & Sexl: Die Deutungen der QT. Originaltexte von Born, Heisenberg, Einstein, Rosen & Podolsky, Bohr, Schrödinger, Fock, Bohm, Bell, de Witt, 1972, 1984, 1987; Audretsch: Verschränkte Welt. Faszination der Quanten 2002; Audretsch: Verschränkte Systeme. Quantenphysik auf neuen Wegen 2005, 2008; Gamow: Sonne, Stern unter Sternen 1964

p38-46 Atome und ihre Spektren. Rydberg erklärt Spekrallinien per Eigenschwingungen der Atomgeometrie = Randbedingungen. JJ Thomson erklärt Spekrallinien per Eigenschwingungen der Elektronen im Feld homogener positiver Ladungsverteilung Fraunhoferlinien: 1802 Wollaston 1766-1828 und 1817 Fraunhofer 1787-1826 und sehen dunkle Absorptionslinien in Photosphäre der Sonne. In Kochsalz in Flammen, Sonne G2, Venus, Sirius A1 Fraunhofer 1817 siehe Fraunhofer: Bestimmung des Brechungs- und Farbenstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten, Ostwalds Klassiker 150 1905;. Kirchhoff und Bunsen untersuchen Mineralwasser und finden Caesium und Rubidium. 1860: Zur qualitativen Analyse taugen Spektren besser als Fällungen. Ideal zur Entdeckung von Spurenelementen bei Geologie und Zusammensetzung von Sonnenatmosphäre und Fixsternen. Weissmantel al al.: **Kleine Enzyklopädie Atom**. Struktur der Materie 1970 **Spektralanalyse** p11, p245; Newcomb: Populäre Astronomie 1881; Scheiner: Die Spectralanalyse der Gestirne 1890; Scheiner: Spektralanalytische und photometrische Theorien 1909; Scheiner: Der Bau des Weltalls 1901; Scheiner: Populäre Astrophysik 1922; Komarow: Neue unterhaltsame Astronomie 1975; Woronzow-Weljaminow: Das Weltall 1976; Rees: Vor dem Anfang 1998; Rees & Filk: Das Rätsel unseres Universums. Hatte Gott eine Wahl? 2003; R̃ees: Das Universum. Die grosse Bild-Enzyklopädie mit über 2500 Fotografien und Illustrationen 2006, 2014; Gribbin & Rees: Ein Universum Nach Maß. Bedingungen Unserer Existenz 2014; Herrmann: dtv-Atlas zur Astronomie 1973; Kaler: Sterne und ihre Spektren. Astronomische Signale aus Licht 1994 **Hauptreihe und Riesenast:** O ionisiertes Helium (He II) blau 30000–50000 60 Mintaka (δ Ori), Naos (ζ Pup) B neutrales Helium (He I), Balmer-Serie Wasserstoff blau-weiß 10000–28000 18 Rigel, Spica, Achernar A Wasserstoff, Calcium (Ca II) weiß (leicht bläulich) 7500–9750 3,2 Wega, Sirius, Altair F Calcium (Ca II), Auftreten von Metallen weiß-gelb 6000–7350 1,7 Prokyon, Canopus, Polarstern G Calcium (Ca II), Eisen und andere Metalle gelb 5000–5900 1,1 Tau Ceti, Sonne, Alpha Centauri A K starke Metalllinien, später Titan(IV)-oxid orange 3500–4850 0,8 Arcturus, Aldebaran, Epsilon Eridani, Albireo A M Titanoxid rot-orange 2000–3350 0,3 Beteigeuze, Antares, Kapteyns Stern, Proxima Centauri **Braune Zwerge** L rot 1300–2000 VW Hyi T rot (Maximum in IR) 600–1300 ϵ Indi Ba Y infrarot (IR) 200–600 WISEP J041022.71+150248.5 **Kohlenstoffklassen der roten Riesen (Kohlenstoffsterne):** R Cyan (CN), Kohlenmonoxid (CO), Kohlenstoff rot-orange 3500–5400 S Cam, RU Vir N Ähnlich Klasse R, mit mehr Kohlenstoff. Das Spektrum weist ab dieser Spektralklasse praktisch keine Blauanteile mehr auf. rot-orange 2000–3500 T Cam, U Cas S Zirkoniumdioxid rot 1900–3500 R Lep, Y CVn, U Hya ; Kirchhoff: Abhandlungen über Emission und Absorption 1859; Kirchhoff & Bunsen: Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen 1860, Sambursky: Der Weg der Physik 1974 p579; **Chemiker: Fraunhoferlinien sind Fingerprints für Atome und Moleküle. Die Physiker ignorieren den Befund 100 Jahre lang.** Planck musste 1900 resigniert feststellen, dass selbst die Schwarzkörperstrahlung mit der klassischen Physik unvereinbar ist. Erst Bohr bricht das Schweigen zu den Spektrallinien. Kippenhahn: Atom 1994 Lücken im Spektrum der Sonne p81ff; Müller et al. Quantentechnologien im Lehrplan, Phys J 20 2021 H8/9 p86-89 **Hong-Ou-Mandel-Interferrometer** = HOMI, QuantumLab Erlangen-Nürnberg; Wichmann: Quantenmechanik. Berkeley-Kurs Bd4 1971, 1985, 1989; Brachner & Fichtner: Quantenmechanik für Lehrer und Studenten 1977; Brachner & Fichtner: Quantenmechanik. Materialien für Sekundarstufe 1980; M̃üller: Quantenphysik in der Schule 2003; S̃chorn: Quantenphysik in der Schule. Unterrichtskonzetion 10. Klasse. Diss 2014; Küblbeck & Müller: Die Wesenszüge der Quantenphysik. Modelle, Bilder, Experimente 2002; Ẽidemüller: Quanten – Evolution – Geist. Eine Abhandlung über Natur, Wissenschaft und Wirklichkeit 2016 SdW 7.17 p86f; Quantentheorie ist eine statistische Theorie, da man im Alltag nur $< \Psi|\Psi > \in \mathbb{R}$ sieht und nicht $|\Psi > \in \mathbb{C}$, also nicht die alltagsferne, aber für QT typische Phase der Wellenfunktion $|\Psi >$, die Dekohärenz beschreibt. **W̃einberg: Quantenmechanik** 2015 p111ff Störungen durch die allgegenwärtigen Schwarz-Körperstrahlungs-Photonen ändern die Phasen der klassischen Zustände: $\Psi_{\text{lebendig}} + \Psi_{\text{tot}}$ ist stets $e^{i\alpha}\Psi_{\text{lebendig}} + e^{i\beta}\Psi_{\text{tot}}$ mit Zufallszahlen $\alpha, \beta \propto [0, 2\pi]$. Die Bell'schen Ungleichungen basieren auf klassischen Überlegungen. Feynman 1981: Kein Quantensystem kann durch einen klassischen Computer mit lokalen Verbindungen probabilistisch nachgestellt werden! Weil man nämlich beim 2-Photonen-Korrelationsexperiment negative Wahrscheinlichkeiten braucht. Feynman: Simulating physics with computers, IntJTheorPhys21 p467–488 1982; Whitaker: RICHARD FEYNMAN AND BELL'S THEOREM AmJPhys84 p493 2016 http://dx.doi.org/10.1119/1.4948268; Siehe Bell: On the Einstein-Podolsky-Rosen

paradox, Physics1 p195–200 1964 https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf, QT umfasst die QM, QED und QFT und macht die Vorstellung von der Welt kohärent in dem Sinne, dass es nur Dinge gibt, die ihr nicht widersprechen. Chemie, Biologie, Spektroskopie erlaubt erst Astrophysik. **Populäre Intros:** **Ponomajaw: Welle oder Teilchen** DDR = Jenseits des Quants BRD. Eine populäre Quantenphysik 1974; **Weißmantel & Lenk: Kleine Enzyklopädie Atom. Struktur der Materie** 1970; Erdey-Gruz: Grundlagen der Strukur der Materie 1967; Rice & Teller: The structure of matter 1949; Landau, Achieser, Lifschitz: Mechanik und Molekularphysik 1970; Tschernogorowa: Geheimnisse der Mikrowelt 1976 Quarks; L. Hopf: Strahlung und Materie 1938; Bedenke: 1900 gab es das Elektron erst seit 4 Jahren. Daher nahm Planck für die Wandoszillatoren einfach harmonische Schwinger. Atome akzeptierten nur die Chemiker und Boltzmann. **Radunskaja: Verrückte Ideen** 1965, 1977 p9 Planck-Gesetz und geometrische Reihe. Kosmische Strahlung und Elementarteilchen. p153 Dirac. p156 Fischfangaufteilung: Wirf einen weg und nimm ein Drittel. p202 Radiostrahlung vom Mond ; Holden: Die Welt der Kristalle 1960; Cohen: Geburt der neuen Physik 1960; Romer: Aufbruch der Atomphysik 1960; Ducrocq: Roman der Materie 1965; Gail & Hofmeister: Der Griff nach dem Atom 1947[1], 1956[2], 1962[3]; Boys: Seifenblasen und die Kräfte 1960; Dubos: Pasteur und die moderne Wissenschaft 1960; Krbek: Erlebte Physik 1956; Ambarzumjan: Philosophische Probleme der Physik der Elementarteilchen 1966; **Eisberg & Resnick: Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles 1974, 1985[2]** **Hey: Das Quantenuniversum. Die Welt der Wellen und Teilchen** 1990; Hey & Walters: The New Quantum Universe 2003; **Kompanejez: Was ist die Quantenmechanik?** 1964; Zimmer: Quantenphysik und Atombau 1954; K̃rbek: Die Grundlagen der Quantenmechanik und ihre Mathematik 1936 36 Seiten; Geroch: Geometrical Quantum Mechanics: 1974 Lecture Notes 2013; Müller-Krumbhaar & Wagner: Was die Welt zusammenhält 2001; **Was die Welt im innersten zusammenhält ist genau das, was sie auseinanderhält!** Die Unschärfe von 1927 löst $\lim_{r\to 0} 1/r = \infty$-Problem. Müller: Stabilitätsprobleme in der Atomphysik PdNPiS Bd53 2004 H2 p29-31; Engelhard: Ein anschauliches Modell zur schrödingerschen Quantentheorie PdNPiS Bd53 2004 H4 p29-34; **Genz: Die quantenmechanischen Grundzustände physikalischer Systeme** PdNPiS Bd50 2001 H3; Bohr: Über den Bau der Atome 1925 60 Seiten; Kramers & Holst: Das Atom und die Bohrsche Theorie seines Baues 1925; **Born: Probleme der Atomdynamik** 1926; Brillouin: Quantenstatistik und ihre Anwendung auf die Elektronentheorie der Metalle 1931; Born & Jordan: Elementare Quantenmechanik. Zweiter Band der Vorlesungen über Atommechanik 1930; Gerlich: Eine neue Einführung in die statistischen und mathematischen Methoden der Quantentheorie 1977; Müller: Quantenphysik in der Schule 2003; Feynman BdII/1 15-5 Aharonov-Bohm-Effekt. Mechanik $\to$ QM, Kraft $\to$ Energie/Impuls, $p = h/\lambda$ hat was mit Wellenlänge zu tun. $E = h\nu$ hat was mit Frequenz zu tun. Alonso & Finn: Quantenphysik 1995; Brandt & Dahmen: Quantenmechanik auf dem Personalcomputer 1993; Brandt & Dahmen: Quantenmechanik in Bildern. Eine Einführung mit vielen Computergrafiken 2015; Scherer: Computational Physics. Simulation of Classical and Quantum Systems 2013[2]; Engelhardt: Einführung in die Quantenphysik. Neue Experimente mit einzelnen Photonen PdNPiS Bd53 2004 H1 p20-25; Scherz: Quantenmechanik. Eine Einführung mit Anwendungen auf Atome, Moleküle Und Festkörper 1999; Scherz: QM 2005 p18 Teilchen mit reeller Funktion Impulserwartungswert 0. Freies Teilchen hat keine quadratintegrable Funktion. Fließbach: QM, Impulsmessung p36; Greiner: QM Kap11, Darstellungstheorie; Kurt Bräuer: Die fundamentalen Phänomene der Quantenmechanik und ihre Bedeutung für unser Weltbild 2000; 7 Quantenwunder, New Scientist May 6, 2010: **1. Corpuscles and buckyballs**, Welle-Teilchen. **2. The Hamlet effect: A WATCHED pot never boils.** Quantum watched pots do refuse to boil - sometimes. At other times, they boil faster. At yet other times, observation pitches them into an existential dilemma whether to boil or not. This madness is a logical consequence of the Schrödinger equation: atom exists in a mixture, or 'superposition', of decayed and undecayed states. **3. The casimir effect: Something for nothing.** PhysJ18 2019 H3 p21-22. 'NOTHING will come of nothing,' King Lear admonishes Cordelia in the eponymous Shakespeare play. In the quantum world, it's different: there, something comes of nothing and moves the furniture around. Specifically, if you place two uncharged metal plates side by side in a vacuum, they will move towards each other, seemingly without reason. They won't move a lot, mind. Two plates with an area of a square metre placed one-thousandth of a millimetre apart will feel a force equivalent to just over a tenth of a gram. The Dutch physicist Hendrik Casimir first noted

this minuscule movement in 1948. 'The Casimir effect is a manifestation of the quantum weirdness of the microscopic world,' says physicist Steve Lamoreaux of Yale University. It has to do with the quantum quirk known as Heisenberg's uncertainty principle, which essentially says the more we know about some things in ... **M̃ilton: The Casimir effect. Physical Manifestations of Zero-Point Energy** 2001; **4. LOVE THE QUANTUM BOMB.** The Elitzur-Vaidman bomb-tester A BOMB triggered by a single photon of light is a scary thought. If such a thing existed in the classical world, you would never even be aware of it. Any photon entering your eye to tell you about it would already have set off the bomb, blowing you to kingdom come. With quantum physics, you stand a better chance. According to a scheme proposed by the Israeli physicists Avshalom Elitzur and Lev Vaidman in 1993, you can use quantum trickery to detect a light-triggered bomb with light - and stay safe a guaranteed 25 per cent of the time (Foundations of Physics, vol 23, p 987). The secret is a device called an interferometer. It exploits the quantumly weird fact that, given two paths to go down, a photon will take both at once. We know this because, at the far end of ... **5. ENTANGLEMENT, Spooky action at a distance:** ERWIN SCHRÖDINGER called it the 'defining traitn of quantum theory. Einstein could not bring himself to believe in it at all, thinking it proof that quantum theory was seriously buggy. It is entanglement: the idea that particles can be linked in such a way that changing the quantum state of one instantaneously affects the other, even if they are light years apart. This 'spooky action at a distance', in Einstein's words, is a serious blow to our conception of how the world works. In 1964, physicist John Bell of the European Organization for Nuclear Research (CERN) in Geneva, Switzerland, showed just how serious. He calculated a mathematical inequality that encapsulated the maximum correlation between the states of remote particles in experiments in which three 'reasonable' conditions hold: that experimenters have free will in setting things up as they want; that the particle properties being measured are real and ... **6. Aharonov-Bohm-Effekt, Das Feld, das nicht da ist:** Schwabl: QM1 Kap7.5.; Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005[2] p914; Franz: Elektroneninterferenzen im Magnetfeld 1939 In: Franz: Über zwei unorthodoxe Interferenzversuche ZPhys184 (1965) 85-91; Purcell Elektrizität und Manetismus 1976 p153, p228; Griffiths: Intro to electrodynamics 1999[3] p238; Schmüser: Elektrodynamik II 2012 p81ff **kanonischer Impuls** ist $p + qA$, daher ist de Broglie-Wellenlänge $\lambda = \dfrac{h}{p+qA}$. Ehrenberg und Siday. Feynman BdII/1 15-5 Aharonov-Bohm-Effekt. Lange Spule hat außen zwar kein $\vec{B}$-Feld, aber dennoch ein quantenmechanisch messbares Vektorpotenzial! $\vec{A}(\vec{r}) = \dfrac{C}{r_\perp}\hat{\varphi} = A_\varphi\hat{\varphi}$ ist wegen $\operatorname{rot}\vec{A} = \dfrac{1}{\rho}\left[\dfrac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}\right] = \vec{0}$ klassisch unsichtbar, aber quantenmechanisch messbar! Aharonov-Bohm-Effekt. HERE'S a nice piece of quantum nonsense. Take a doughnut-shaped magnet and wrap a metal shield round its inside edge so that no magnetic field can leak into the hole $\vec{B} = B_\varphi\hat{e}_\varphi$. Then fire an electron through the hole. There is no $\vec{B}$-field in the hole, so the electron will act as if there is no field, right? Wrong. $\vec{A} = A_\rho(\text{hole})\hat{e}_\rho + A_\theta(\text{torus})\hat{e}_\theta$.

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right)^2 + q\Phi(\vec{r},t), m\vec{a} = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B}/c + \vec{E}), \Phi_B(F) = \oint_{\partial F}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \iint_F \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\ \mathrm{d}^2a$$

Durch den Magnetfluss wird die Geometrie zu einer nichtkommutativen Geometrie verändert. Die geschlossene Kurve ∂F entspricht dabei der Burgers-Schleife in der Theorie der Versetzungen und das Magnetfeld $\vec{B}$ der Versetzungsdichte. The wave associated with the electron's movement suffers a jolt as if there were something there. Werner Ehrenberg and Raymond Siday were the first to note that this behaviour lurks in the Schrödinger equation (see 'Quantum wonders: The Hamlet effect'). That was in 1949, but their result remained unnoticed. Ten years later Yakir Aharonov and David Bohm, working at the University of Bristol in the UK, rediscovered the effect and for some reason their names stuck. Franz, Walter: Quantentheorie 1971 Elektronen fliegen auf verschiedenen Seiten an einem Zylinder G_z vorbei, **in dem** ein Magnetfeld B herrscht: $\vec{B} = \vec{0}$ für $\forall x \in G_z$. Trotzdem hängt der Ausgang des Experiments (1960) davon ab, ob das Magnetfeld ein- oder ausgeschaltet ist, denn das Vektorpotential $\vec{A}$ ist im ersten Fall auch außerhalb des Zylinders vorhanden. Man stelle sich hierbei ein radial verlaufendes Vektorpotential vor. Dessen Rotation $\operatorname{rot}\vec{A}$ und damit das Magnetfeld $\vec{B}$ ist außerhalb des Zylinders Null, dennoch ist $\vec{A}$ nirgends Null. Die Superposition der Wellenfunktionen hinter dem Zylinder ergibt ein Interferenzmuster, das vom Vektorpotential

beeinflusst wird, da die Wellenfunktionen auf Wegen rechts und links des Zylinders eine unterschiedliche Phasenverschiebung erhalten. Mathematisch rührt dies daher, dass die Rotation des Vektorpotentials – also das Magnetfeld – zwar gleich Null ist, aber wegen des nicht einfach zusammenhängenden Raumes (der Zylinderinnenraum ist das Loch im Raum) in der Berechnung auftretende Pfadintegrale über geschlossene Kurven nicht verschwinden, und somit ein Nettoeffekt übrig bleibt. Interpretation: Manchmal wird aus dem Effekt der Schluss gezogen, dass das Vektorpotential in der Quantenmechanik eine fundamentalere Bedeutung habe als das zugehörige Kraftfeld. Das trifft nicht das Wesentliche: Letztlich ist der magnetische Fluss Φ_B entscheidend. Dieser kann durch ein Kurvenintegral ausgedrückt werden, wobei sich der Integrationsweg Γ außerhalb des Bereiches mit $\vec{B} \neq 0$ befinden darf. Es gilt jedenfalls $\Phi_B(F) = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$, wobei Γ geschlossen sein muss. Damit handelt es sich um eine eichinvariante Größe, dh diese ist nicht von der oben erwähnten Funktion f abhängig. Die geschlossene Kurve Γ ist der Rand der Fläche $F : \Gamma = \partial F$. Nach dem Satz von Stokes $\oint_\Gamma \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_F \operatorname{rot} \vec{A} \cdot \vec{n}\ \mathrm{d}^2a$ ist dieses Kurven/Linienintegral über die geschlossene Kurve Γ wegen Gleichung (*) identisch mit dem Fluss der magnetischen Feldstärke durch die eingeschlossene Fläche F($\vec{n}$ ist der Normalenvektor auf der Fläche und d^2a das zweidimensionale Flächenelement). Die Eichfreiheit hängt damit zusammen, dass in eine geschlossene Kurve Γ verschiedene Flächen F eingespannt werden können, die alle von Γ berandet werden. Wichtig ist, dass die Integrationsfläche nicht einfach zusammenhängend ist, da der Zylinderinnenraum nicht zum Ortsraum der Teilchen gehört. Denn sonst wären obige Integrale Null, weil die Rotation des Vektorfeldes nach Voraussetzung verschwindet (kein Magnetfeld!). Man kann den Effekt auch als Folge der **nichttrivialen Topologie des Eichfeldes** interpretieren. **7. MIRACLE MATTER, Superfluids and supersolids:** FORGET radioactive spider bites, exposure to gamma rays, or any other accident favoured in Marvel comics: in the real world, it's quantum theory that gives you superpowers. Take helium, for example. At room temperature, it is normal fun: you can fill floaty balloons with it, or inhale it and talk in a squeaky voice. At temperatures below around 2 kelvin, though, it is a liquid and its atoms become ruled by their quantum properties. There, it becomes super-fun: a superfluid. Superfluid helium climbs up walls and flows uphill in defiance of gravity. It squeezes itself through impossibly small holes. It flips the bird at friction: put superfluid helium in a bowl, set the bowl spinning, and the helium sits unmoved as the bowl revolves beneath it. Set the liquid itself moving, though, and it will continue gyrating forever.

Lorentz'sches Atommodell = Atom als Dipol gut für Licht-Materie-Wechselwirkung. Siehe Seiten 644 und 383. Boyd: Nonlinear optics 1998[2] p20f; Brunner, Radloff, Junge: Quantenelektronik 1977[2] p15ff; Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005[2] p3 elektrostatisches Atom-Modell von Thomson Pudding-Modell positive Ladung sitzt fix auf einem Gitter un Elektronen an den Potenzialminima. Rutherford-Modell. Schürmann: Zur Didaktik der Quantenmechanik, PhysBl 26 1970 265; Andrade: Rutherford und das Atom. Der Beginn der neuen Physik 1965; Dynamisches Atom-Planeten-Modell von Bohr. **Atom ist nicht vorstellbar**, Atommodelle der Quantenmechanik bestehen vorrangig aus mathematischen Aussagen - alle Vorstellungen dienen lediglich als deren **Projektionsflächen** in die Erfahrungswelt des Menschen. Kuhn siehe PdN41 1992 H2 p37, H4 p39f; **Atom-Modelle:** Bohr'sches Schalen-Modell = kleines Planeten-Modell = Sprünge zwischen stabilen Bahnen = magische Zahlen, The Quantum Atom: One hundred years after Niels Bohr published his model of the atom, a special issue of Nature explores its legacy — and how much there is still to learn about atomic structure. Nature 498 6. Juni 2013; **Elektromium** = es gibt im Kleinen keine spezielle Kraft = alles ist Elektromagnetismus von Ladungsverteilungen = Orbitale der Chemie, **Black-Box-Modell** = mach dir kein Bild, weil alle Bilder falsch. Eine gute Gelegenheit, eine generelle Schwäche naturwissenschaftlichen Denkens zu debattieren. Unsere Vorstellungen reflektieren nur ausgewählte Aspekte der Wirklichkeit, **unsere Mensch-Erfahrungs-Perspektive**. Unsere Absichten machen ein gutes Modell gut, nicht aber die Modelle, die über spezielle Perspektiven hinausreichen sollen. Konzeptwechsel und Opportinusmus sind nicht nur für's Überleben notwendig. Man thematisiere die Grenzen der Modelle, wie $1/r$ und Punktförmigkeit, neben ihrer Nützlichkeit, all die Körnigkeit unsere Erfahrungswelt wie Spektrallinien oder das PSE zu erklären. Eschrig: The fundamentals of density functional theory 2003[2]; **Thomas-Fermi-Modell:** Basis für **Dichtefunktionaltheorie** und SCF/Hartree-Fock-Verfahren Sphärisches Impulsvolumen $V_f = \frac{4}{3}\pi p_f^3(\vec{r})$, Phasenraumvolumen $\Delta V_{ph} = V_f\ \Delta V = \frac{4}{3}\pi p_f^3(\vec{r})\ \Delta V$, Anzahl Elektronenpaare im Phasenraum $\Delta N_{ph} = \frac{2}{h^3}\ \Delta V_{ph} = \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3(\vec{r})\ \Delta V$, Elektronenzahl in ΔV ist

$\Delta N = n(\vec{r})\ \Delta V$, Anzahldichte ist $n(\vec{r}) = \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3(\vec{r})$. Bruchteil der Elektronen unterhalb Fermi-Energie zwischen p und $p + \mathrm{d}p$ ist $F_{\vec{r}}(p)\mathrm{d}p = \dfrac{4\pi p^2 dp}{\frac{4}{3}\pi p_f^3(\vec{r})}$. Kinetische Energie ist daher $t(\vec{r}) = \int \dfrac{p^2}{2m_e}\ n(\vec{r})\ F_{\vec{r}}(p)\ \mathrm{d}p = n(\vec{r}) \int_0^{p_f(\vec{r})} \dfrac{p^2}{2m_e}\ \dfrac{4\pi p^2}{\frac{4}{3}\pi p_f^3(\vec{r})}\mathrm{d}p = C_F\ [n(\vec{r})]^{5/3}$ mit $C_F = \dfrac{3h^2}{10m_e}\left(\dfrac{3}{8\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$, also $T = C_F \int [n(\vec{r})]^{5/3}\mathrm{d}^3r$. $E = T + U_{eN} + U_{ee} = C_F \int [n(\vec{r})]^{5/3}\mathrm{d}^3r + \int n(\vec{r})\ V_N(\vec{r})\mathrm{d}^3r + \dfrac{1}{2}\ e^2 \int \dfrac{n(\vec{r})\ n(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r\mathrm{d}^3r'$. Brockhaus Physik; Thomas: Mathematical Proc of the Cambridge Philosophical Society 23 1927, pp 542-548; Fermi: Zeitschrift für Physik 1928, Vol 48, pp 73-79 Bei einem schweren Atom können die Elektronen als eine Art Atmosphäre um den Kern betrachtet werden, welche sich in einem Zustand vollständiger Entartung befindet. Man kann die Verteilung der Elektronen um den Kern angenähert durch eine statistische Methode berechnen. Macke: Quanten 1965; Gombas: Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen 1949; Reinhold: Quantentheorie der Moleküle, ab 2004[2], 2015[5] ebook mit **Dichtefunktionaltheorie** p267ff, die nur die Elektronendichte statt der Wellenfunktion nutzt und für Anwendung auf große Moleküle ausreicht; Koch & Holthausen: A chemist's guide to density functional theory 2000; Kohn-Sham orbitals, Fermi hole, local and non-local spin-density functionals, generalized gradient approximation, pseudopotentials; Parr & Yang: Density-Functional Theory of Atoms and Molecules 1989;

Yanosfky & Mannucci: Quantum computing for computer scientists 2008; Nicht erst 1d-Kasten und 3d-Zentralpotenzial mit Kugelflächenfunktionen. 4. Begriffliche Klarheit, denn ein großer Teil der QM in unendlichdimensionalen Räumen, wo viele Sätze der linearen Algebra nicht mehr gelten. Tensorprodukt und Verschränkung. WWWW; Haake: Einf in theoret Physik ab Seite 193; **Rechenmethoden der QM** finden sich elementar in Büchern der **Quantenchemie**!

Heitler: Vom Wesen der Quantenchemie, PhysBl 29 1973 252-6; Hartmann: Theoretische Chemie heute, PhysBl 29 1973 p257-9; Hund: Wie haben die Physiker die Chemie verstanden? PhysBl 29 1973 p310-4; Hückel: Gedanken zur VB- und MO-Methode, PhysBl 29 1973 455-62; Luck: Das H_2-Molekül im Teilchenbild PhysBl 29 1973 p535-42; Coulson: Die chemische Bindung 1969; Born: Chemische Bindung und Quantenmechanik 1931 in Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften Bd10; Palmer: Valency. Classical and modern 1944, 2006; Weyl: Die chemische Valenz und die Hierarchie der Strukturen 1947 als Anhang D in Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft 1976[4] p340-353; Kutzelnigg: Einführung in die Theoretische Chemie. B1 Quantenmechanische Grundlagen 1975, B2 Die chemische Bindung 1978; Kuhn & Försterling: Moleküle und Molekülanhäufungen. Eine Einführung in die physikalische Chemie 1982; Primas: Elementare Quantenchemie 1984, 1990[2]; Peierls: Quantum theory od solids 1955; Platt: The chemical bond, HdP37/2 1961 p173ff; Schelinski: Chemische Bindung und Struktur der Stoffe 1969; Pitzer: Quantum chemistry 1953; Kauzmann: Quantum chemistry 1957; Klaus Ruedenberg: The physical nature of the chemical bond, Rev in modern physics 34 1962 p326-376; Wheland: Resonance in organic chemistry 1955; Jensen: Introduction to computational chemistry 2006; Golowanow, Piskunow & Sergejew: Elementare Einführung in die Quantenchemie unter besonderer Berücksichtigung der Quantenbiochemie 1974; Tatewski: Quantenmechanik und die Theorie des Molekülbaus 1968; Zülicke: Molekulare Theoretische Chemie. Eine Einführung 2015; Zülicke: QC 5Bde; Preuß: Quantenchemie für Chemiker. Elementare Einführung in die mathematischen und wellenmechanischen Grundlagen 1966; **Elementare Einführung in die Quantenchemie** siehe WiFo 16 1966 H6 p257ff und H10 p449ff; WiFo 18 1968 H9 p386ff; WiFi 20 1970 H7 p311ff; **Wissenschaft und Fortschritt = WiFo** siehe Magazin Golm Z 6415; Medvedev & Osherov: Radiationless transitions in polyatomic molecules 1994; Relaxationsdynamik bei Zewail: Femtochemistry. Ultrafast dynamics of the chemical bond Bd1+2 1994; Levine: Quantum Mechanics of Molecular Rate Processes 1969; Bernstein & Levine: Molecular Reaction Dynamics and Chemical Reactivity 1987; Bernstein & Levine: Molekulare Reaktionsdynamik 1991; Heitler: Elementare Wellenmechanik. Mit Anwendungen auf die Quantenchemie 1961[2] p91ff Heitler-London-Theorie = Valenzbindungstheorie = Idee der chem Bindung ist Sättigung wegen Symme-

trie und identischer Elektronen. Hybridisierung; **Preuss: Quantentheoretische Chemie** I 1963 Literaturtipps zur Quantenchemie, II 1965, III 1967; Preuss & Boschke: Die chemische Bindung. Eine verständliche Einführung 1975; P̃reuss: Materie ist nicht materiell. Die Bedeutung der Quantenchemie für unser Denken und Handeln 1997; Kutzelnigg: Einführung in die theoretische Chemie B1 1975, Bd2 Die chemische Bindung 1978; Zülicke: Quantenchemie Bd2 Atombau, chemische Bindung und molekulare Wechselwirkungen 1985 p191f MO-Beschreibung = Hund-Mulliken-Modell, p195f Valenzbindungsbeschreibung = Heitler-London-Modell; **Hans Hellmann: Einführung in die Quantenchemie** 1937 mit Biografie 2015; Mott: Atomare Struktur und Festigkeit der Metalle 1956 50 Seiten; Nevill Mott: A life in science 1986; Heisenberg, Kockel, Peyerimhoff, Zülicke; Mott & Sneddon: Wave mechanics and its application 1963; Moss: Advanced quantum mechanics 1973; Zahradnik & Polak: Elements of quantum chemistry 1981; Daudel, Lefebre, Moser: Quantum chemistry. Methods and Applications 1959; P̃olanyi: Atomreaktionen 1932; Nikitin & Zülicke: Theorie chemischer Prozesse 1985; Daudel: Quantum Theory of Chemical Reactivity 2013; Preuss: Grundriss der Quantenchemie 1962; Temple: The general principles of quantum theory 1934; Čornelius Weiss: Risse in der Zeit. Ein Leben zwischen Ost und West 2012 Sohn von Carl Friedrich Weiss; Kondratjew: The structure of atoms and molecules 1967; Kaempffer: Concepts in Quantum Mechanics 1964; Schwinger: Quantum kinematics and dynamics 1976; Jug: Zweihundert Jahre Entwicklung der Theoretischen Chemie im deutschsprachigen Raum 2015; Pauling & Wilson: Introduction to quantum mechanics with applications to chemistry 1935; Ovchinnikov, Semenov, Bogdanov: Vom Atom zum Molekül 1973, 1980; Feynman Lectures Bd3 Kap 10; Pauling: Chemie - Eine Einführung 1956; Haberditzl: Gibt es π-Elektronen? WiFo 21 1971 H5 220-224; Pauling: Die Natur der chemischen Bindung 1964; Eyring, Walter & Kimball: Quantum Chemistry 1944; Mulliken & Ermler: Diatomic molecules. Results of ab initio calculations 1977; Bingel: Theorie der Molekülspektren 1967; Herzberg: Molekülspektren und Molekülstruktur BdI Zweiatomige Moleküle 1939; Bak: Elementary introduction to molecular spectra 1954; Hellwege: Einführung in die Physik der Molekeln 1974; Hartmann: Theorie der chemischen Bindung 1954; Hund: Theoretische Physik Bd3. Wärmelehre und Quantentheorie 1956; Hund: Theorie des Aufbaues der Materie 1961 p130 Valenzlehre der anorganischen und organischen Chemie. Valenzzahl und Koordinationszahl; Szabo & Ostlund: Modern Quantum Chemistry. Introduction to Advanced Electronic Structure Theory 1982; **Schatz & Ratner: Quantum Mechanics in Chemistry** 1993; Atkins: Quanten. Begriffe und Konzepte für Chemiker 1993; Atkins: Molecular Quantum Mechanics 1985; Atkins: Solutions Manual for Molecular Quantum Mechanics 1983; Atkins: Kurzlehrbuch. Physikalische Chemie 1993; Gritter, Bobbitt, Schwarting: Einführung in die Chromatographie 1987; Cramer: Essentials of Computational Chemistry: Theories and Models 2004; Anderson: Mathematics for Quantum Chemistry 1966; Linderberg & Öhrn: Propagators in quantum chemistry 1976, 2004; Haken: Molekülphysik und Quantenchemie. Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen 2006; Reinhold: Quantentheorie der Moleküle. Eine Einführung 2006; Dyall & Faegri: Introduction to relativistic quantum chemistry 2007; Heine, Joswig & Gelessus: Computational chemistry workbook. Learning through examples 2009; Reiher & Wolf: Relativistic quantum chemistry. The fundamental theory of molecular science 2015; Jensen: Introduction to Computational Chemistry 2011;

Gribbin: Auf der Suche nach Schrödingers Katze. Quantenphysik und Wirklichkeit 1991; **H.D. Zeh: Physik ohne Realität. Tiefsinn oder Wahnsinn?** 2012 und Adam Becker: What is real? 2018 Zurek, Physics Today 44 (1991) 36-44 Dekohärenz ist der Mechanismus der Realität hervorbringt; Es gibt auch keine Teilchen oder Quanten – Konzepte, die ganzen Disziplinen der Physik ihren Namen gegeben haben, werden zur Illusion degradiert. Ja selbst die Zeit ist nach Zeh nicht fundamental. Zeh, lies Camejo: Skurrile Quantenwelt 2006! Zeh gegen einen allzu naiven Wissenschaftlichen Realismus, der das mathematische Modell mit der beschriebenen Wirklichkeit verwechselt. In Anlehnung an den neo-Kantschen Philosophen Hans Vaihinger, der annahm, das die Realität letztlich unwissbar sei, wissenschaftliche Modelle aber betrachtet werden können, "als ob" sie die Realität seien, verstand Zeh die Wellenfunktion als "heuristische Fiktion", aber nicht weniger real als andere physikalische Konzepte wie z.B. Quarks. Zeh war nicht einmal besonders spekulationsfreudig: "Zeh sah sich von der Natur gezwungen, die Viele-Welten-Interpretation zu akzeptieren" Yasunori Nomura und Sean Carroll: Informationsparadox Schwarzer Löcher: Wo bleibt die Information, die in ein Schwarzes Loch fällt, wenn diese letztendlich verdampfen? Hawking 1974: Verdampfen

passiert am Rande, weil durch spontane Paarbildung ein Partner im Loch verschwinden kann. Zeh: Es ist schon merkwürdig und bezeichnend für die gegenwärtige Situation der Physik, dass man ein Verschwinden von „Information“ bei der Zerstrahlung Schwarzer Löcher als Paradoxon diskutiert, während man im Labor einen Kollaps der Wellenfunktion ständig und bereitwillig akzeptiert. www.zeh-hd.de; Serge Haroche: Manipulating photons non-destructively and taming Schroedinger cats of light. We have built a **photon box** in which we can count light quanta without destroying them, as we can do with marbles in a bag. We have also tailoredthe light trapped in the box and generated laboratory versions of the famous Schrödingers Katze which the Austrian physicist imagined to be suspended between life and death. In our case, the cat is made of photons instead of atoms and it is maintained 'half-way' between two states which classical physicists would consider to be incompatible. By studying this strange behaviour, we get a deeper knowledge about the quantum laws and learn tricks that we hope to use one day for developing new technologies which could improve the precision of measurements, the secrecy of communications or the power of computer simulations. **Karl von Meyenn: Eine Entdeckung von ganz außerordentlicher Tragweite Schrödingers Briefwechsel zur Wellenmechanik und zum Katzenparadoxon** e-book; Aspelmeyer & Arndt: Schrödingers Katze auf dem Prüfstand, SdW Okt 2012 p44-54. Kann auch ein makroskopisches Objekt in unbeobachtetem Zustand mehrere sich ausschließende Eigenschaften annehmen? SdW 1 2013 p8 die Katze macht gut auf das Problem aufmerksam, trägt aber darüber hinaus nur zur Verwirrung bei. Eigentliches Problem der Dekohärenz ist das kontinuierliche Anwachsen des räumlichen Bereichs der Wellenfunktion. Mit der Katze wollte Schrödinger nur die Widersinnigkeit des qm Modell oder den Unterschied zwischen Quantenwelt und der Alltagserfahrungswelt verdeutlichen, illustrieren. Nach klassischem Verständnis unterscheidet man zwischen **Möglichem/Ensemble-Eigenschaften** und **Faktischem/Realisierung**. Bei der qm Beschreibung hat der Atomzerfall weder stattgefunden, noch nicht statgefunden. Die Katze befindet sich in einem unbestimmten Zustand, solange keiner nachschaut. Es gibt nicht die Realisierung einer Trajektorie, keine verborgenen Variablen. Kühlbeck: Führungswellen - eine Interpretation mit verborgenen Parametern PdNPiS Bd53 2004 H1 p13-14; **Nichts ist real, falls es nicht beobachtet wird.** Für Schrödinger und Einstein eine grauenhafte Vorstellung. Die Katze erst dann tot oder lebendig, wenn man nachschaut. **Zeh: bei einer Quantenmessung wird das System durch Wechselwirkung mit dem Bobachter oder der Messapparatur sowie der Umgebung, also dem Rest des Universums, verschränkt.** Wenn man dann berücksichtigt, dass kein Beobachter das gesamte Universum kennt und über diese unbekannte Information mittelt, verschwinden die Interferenzen. Das heißt, dass Teilchen zwar auch nach der Messung weiterhin an zwei Orten existieren können, diese zwei Realitäten aber nicht mehr wechselwirken und quasi vollständig entkoppelt sind. Der Grund dafür, warum man Teilchen quantenmechanisch beschreiben muss, aber makroskopische Objekte wie z.B. Katzen nicht, i**liegt dann nicht an der Größe des betrachteten Objekts**, sondern daran, **wie vollständig isoliert von seiner Umgebung das Objekt werden kann**. Damit hat Zeh gleichzeitig erklärt, warum Schrödingers berühmte Zombie-Katzen, die halb tot und halb lebendig sind, bis sie denn beobachtet werden, nicht wirklich auftreten: **Eine Katze ist immer so stark mit ihrer Umgebung gekoppelt, dass sie sofort dekohärent wird.** Alain Aspect 1982: Zwei-Photonen-Zerfall. Nach klassischer Idee der verborgenen Variablen haben beide Photonen eine wirkliche Polarisation, nach der Vorstellung der QM aber nicht, wohl besteht aber eine Beziehung (Verschränkung) zwischen den Photonen. Erst bei der Messung an einem der Photonen zeigt sich deren Korreliertheit. **Es gibt keine der Welt zugrunde liegende Realität an sich.** Realität im Üblichen Sinne ist keine angemessene Vorstellung über das Verhalten von Teilchen. **Zurek: Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical** RevModPhys75 p715; Susskind: Es würde keinen Sinn machen, wenn ein KFZ-Mechaniker sagen würde, er wüsste alles über ein Auto, aber unglücklicherweise könne er nichts über irgendeinen seiner Teile sagen. Aber das ist genau das, was Einstein (mit seinem berühmten EPR-Paradox) Bohr erklärt hat, in der Quantenmechanik kann man alles über ein System wissen und nicht über seine Einzelteile, und Bohr gelang es nicht, diese Tatsache zu würdigen. = **Verschränkung beschreibt also die Eigenschaft zusammengesetzter Systeme,** vollständig bekannt zu sein, ohne dass die Eigenschaften ihrer Teilsysteme bestimmt sind. Man kann davon sprechen, dass die Teilsysteme vollständig im Gesamtsystem aufgehen, dass das Ganze ganz konkret mehr ist als seine Teile. **Quantendarwinismus** = auf Darwinscher Selektion basierende Entstehung der klassischen Welt aus der Quantenwelt = **Theorie der envariance** = **entanglement-assisted invarian-**

ce = durch Quantenverschränkung gestützte Invarianz. Zurek: Quantum Darwinism, NaturePhysics 5 2009 p181-188; **Darwinistische Algorithmen: Reproduktion** = die Fähigkeit, Kopien von sich herzustellen und so Nachfahren zu produzieren. **Vererbung** = die Fähigkeit, Eigenschaften an Kopien weiterzugeben. **Variabilität** = Unterschiede zwischen vererbbaren Eigenschaften, die Fitness oder auch Fähigkeit zu überleben und sich zu fortzupflanzen, was zu unterschiedlichen Überlebenschancen führt. **Quantendarwinismus scheint diesem Algorithmus zu folgen:** 1. Vielfältige Kopien von Pointerzuständen. 2. Pointerzustände entwickeln sich auf eine kontinuierliche, vorhersagbare Art und Weise, das heißt, dass Nachfahren viele ihrer Eigenschaften von vorhergehenden Zuständen erben. 3. Sukzessive Wechselwirkungen zwischen Pointerzuständen und ihrer Umwelt zeigen, dass diese sich weiterentwickeln und die Zustände überleben, was mit den Vorhersagen der klassischen Physik innerhalb der makroskopischen Welt übereinstimmt. Aus dieser Perspektive bietet der Darwinismus eine darwinistische Erklärung der Grundlage unserer Realität und erklärt den Verlauf oder die Evolution unserer klassischen makroskopischen Welt. **Einselection** = **e**nvironment - **in**duced super**selection Aber: Kastner, 2014, Einselection of Pointer Observables: the New H-Theorem?** Studies in History and Philosophy of Modern Physics; Blume-Kohout & Zurek: Quantum Darwinism. Entanglement, branches, and the emergent classicality of redundantly stored quantum information, PRA73 062310 2006 arXiv:quant-ph/0505031; Haroche: Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons 2006; Schlosshauer: Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition 2007; **Pointerzustände = pointer states** = in ihrer Umgebung robust und verschmieren nicht. Einselected pointer-Zustände unterscheiden sich durch ihre Fähigkeit trotz Beobachtung zu überdauern und sind genau jene durch die offene Quantensysteme beobachtbar werden. Exner: Open Quantum Systems and Feynman Integrals 1985; B̃reuer: The Theory of Open Quantum Systems 2007; Davies: Quantum theory of open systems 1976 Xerokopie von Julja Tunkel und Jens Hausschild 1988; Dynamische Auswahl durch Messvorgang: Wenn die intrinsische Dynamik des Messapparats vernachlässigbar, dann sind die pointer states Eigenzustände des WW-Hamiltonian zwischen Messapparat und seiner Umbebung. Anderenfalls resultieren die Pointer states aus dem Wechselspiel zwischen Selbst-Evolution und Beobachtung. Operationale Definition der Einselection von Pointerzuständen: **Kriterium des Veraussagbarkeitssiebes** = Pointer states sind jene, die während ihrer Evolution minimal mit der Umgebung verschränkt sind: Für jeden anfänglich reinen Zustand $|\psi\rangle$ misst man den Grad der Verschränkung, der dynamisch zwischen Umgebung und System zustandekommt durch die **Entropie** $\mathcal{H}_\Psi(t) = -\operatorname{Tr}(\rho_\Psi(t)\log\rho_\Psi(t))$ oder ein anderes Mass der Voraussagbarkeit über die reduzierte Dichte-Matrix des Systems $\rho_\Psi(t)$, die anfänglich $\rho_\Psi(0) = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ ist. Die Entropie ist eine Funktion der Zeit und des Anfangszustands $|\Psi\rangle$. Pointer states are obtained by minimizing $\mathcal{H}_\Psi$ over $|\Psi\rangle$ and demanding that the answer be robust when varying the time t . Beispiele: Apart from the already mentioned case of the measurement situation (where pointer states are simply eigenstates of the interaction Hamiltonian) the most notable example is that of a quantum Brownian particle coupled through its position with a bath of independent harmonic oscillators. In such case pointer states are localized in phase space, even though the interaction Hamiltonian involves the position of the particle.[6] Pointer states are the result of the interplay between self-evolution and interaction with the environment and turn out to be coherent states.

There is also a quantum limit of decoherence: When the spacing between energy levels of the system is large compared to the frequencies present in the environment, energy eigenstates are einselected nearly independently of the nature of the system-environment coupling. Theorie der Dekohärenz und der Einselection = **environment-induced superselection** = durch die Umwelt verursachten Selektion von Zuständen. Brasil: Understanding the Pointer States arxiv.org › quant-ph

Stoffe sind körnig, aber nicht beliebig teilbar! Wenig Licht fällt auf halbdurchlässigen Spiegel, Glas mit 50% Reflexionsvermögen. Einzelphotonenzählung gibt: TRTTTRRTRT. **Rätsel der parziellen Reflexion bei Körnigkeit des Lichtstroms.** Feynman: QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p28; Wie wahrscheinlich ist diese Sequenz? Hannabuss: An introduction to quantum theory 1999; **Englert: Lectures on quantum mechanics I Basic matters** 2006 p7, p65ff Bell'sche Ungleichung. p199ff **Streuung am quadratischen Potenzialwall** mittels Transfermatrizen. **Tunneleffekt** Schmüser: Bd1 Quantemechanik p43f und Scherz: QM p75; Milikan-Versuch: es gibt kleinste Ladung -e, Stöchiometrie, es gibt Atome, deren Systematik das PSE wiedergibt, **Spektrum einer thermischen Lichtquelle** oder

Schwarz-Körper-Strahlung Matteo Smerlak 2011 EurJPhys32 1143 A blackbody is not a blackbox. Karamanolis: Elektromagnetische Wellen. Entstehung - Ausbreitung 1996; **Schwingender Dipol** Döring: Einf in die theoret Physik, Bd2 1962 p111; **Strahlender Dipol** = Suche **Poynting-Vektor** $\vec{S} = 1/\mu_0(\vec{E} \times \vec{B})$. Finde also dazu $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi - \dot{\vec{A}}$ und $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$. **Finde also die Potenziale** φ und $\vec{A}$! siehe **Schmüser** Elektrodyn p100 & 217f oder **Griffiths** Kap11; Ursprung $\mathcal{O}$ liegt im Dipolzentrum. Ohne Retardierung/Delay/Verspätung/Nahwirkung keine Ausstrahlung! **Günther: Bewegung in Raum und Zeit 2012 p133ff**; Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010 Kap14.3 p176ff; Ladungen ortsfest mit pulsierender Ladungsmenge:

$$\Phi(\vec{r},t) = \frac{q_+(t)}{r_+} + \frac{q_-(t)}{r_-} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\cos\omega(t-r_+/c)}{r_+} - \frac{\cos\omega(t-r_-/c)}{r_-}\right]$$

Oder allgemeiner

$$4\pi\epsilon_0\Phi(\vec{r},t) = \frac{q_+(t)}{r_+} + \frac{q_-(t)}{r_-} = \left[\frac{q(t-r_+/c)}{r_+} - \frac{q(t-r_-/c)}{r_-}\right] \approx q'(t-\frac{r}{c})\frac{a}{rc}\hat{r}\cdot\hat{z}$$

denn im Aufpunkt $\vec{r}$ hat die positive Ladung bei $\frac{a}{2}\hat{z}$ die Aufpunktposition $\vec{r}_+ = \vec{r} - \frac{a}{2}\hat{z}$, wärend die negative Ladung bei $-\frac{a}{2}\hat{z}$ die Aufpunktposition $\vec{r}_- = \vec{r} + \frac{a}{2}\hat{z}$ hat. Damit sind die Abstände der Ladungen vom Aufpunkt $r_\pm = r \mp \frac{a}{2}\hat{r}\cdot\hat{z} = r(1 \mp \frac{a}{2r}\hat{r}\cdot\hat{z})$. Bedeutet $q(t-r_+/c) = q(t - \frac{r}{c}(1 - \frac{a}{2r}\hat{r}\cdot\hat{z})) = q(t - \frac{r}{c} + \frac{a}{2c}\hat{r}\cdot\hat{z}) \overset{\text{Taylor}}{=} q(t-\frac{r}{c}) + q'(t-\frac{r}{c})\frac{a}{2c}\hat{r}\cdot\hat{z}$. Stanner: Unsichtbare Straßen 1950; Stanner: Wellen weisen den Weg 1947;

Näherungen: 1. Fernfeld $d \ll r$ heißt $r_\pm^2 = r^2 + d^2/4 \mp rd\cos\theta$ gibt $1/r_\pm \approx (1 \pm d\cos\theta/2r)/r$. **2. Große Wellenlänge** $\lambda = c/\omega$: Additionstheorem $\cos\omega(t-r_\pm/c) = \cos[\omega(t-r/c) \pm \frac{d\omega}{2c}\cos\theta] = \cos\omega(t-r/c)\cos(\omega d/2c\cos\theta) \mp \sin\omega(t-r/c)\sin\cos(\omega d/2c\cos\theta)$. **3.** $d \ll \lambda$, also $\omega d/2c \ll 1$ gibt

$$\Phi(\vec{r},t) = \Phi(r,\theta,t) = -\frac{\omega q_0 d\cos\theta}{c4\pi\epsilon_0 r}\sin\omega(t-r/c)$$

4. Vektorpotenzial aus Strom $I(t) = \mathrm{d}q(t)/\mathrm{d}t = -q_0\omega\sin\omega t$ gibt

$$A_z(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-d/2}^{-d/2}\mathrm{d}z\frac{I(t-r/c)}{r} = -\frac{\omega q_0 d}{c^2 4\pi\epsilon}\frac{\sin\omega(t-r/c)}{r}$$

Oder mit Liebscher p247 $\vec{p} = e\vec{r}_0$, Ladungsbewegung führt auf $\dot{\vec{p}} = e\vec{v}$ und damit auf die Quelldichte $\vec{j}(\vec{r},t) = \dot{\vec{p}}(t)\delta(\vec{r})$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}(t-r/c)}{r}$$

Elektrisches Potenzial aus **Lorentz-Konvention** = Lorentz-Eichung

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = c^2\text{div}\,\vec{A} = \hat{r}\left(\frac{\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{r^2} + \frac{\ddot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{cr}\right) \quad \Rightarrow \Phi(\vec{r},t) = \hat{r}\left(\frac{\vec{p}_{\text{ret}}}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}}_{\text{ret}}}{cr}\right)$$

Gehe zu Kugelkoordinaten $A_r = A_z\cos\theta, A_\theta = -A_z\sin\theta, A_\phi = 0$. **5.** $\vec{E} = -\nabla\Phi - \partial_t\vec{A}$. **6.**

$$\vec{E} = -\frac{\omega^2 q_0 d}{c^2 4\pi\epsilon}\sin\theta\frac{\cos\omega(t-r/c)}{r}\hat{\theta} = E_0\sin\theta\frac{\cos\omega(t-r/c)}{r}\hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = -\frac{\omega q_0 d}{c^2 4\pi\epsilon}\sin\theta\left[\frac{\omega}{c}\frac{\cos\omega(t-r/c)}{r} + \frac{\sin\omega(t-r/c)}{r^2}\right]\hat{\phi} = \frac{E_0}{c}\frac{\cos\omega(t-r/c)}{r}\hat{\phi}$$

7. Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \frac{\omega^4 q_0^2 d^2}{c^3 16\pi^2\epsilon}\sin^2\theta\frac{\cos^2\omega(t-r/c)}{r^2}\hat{r}, \quad I(r,\theta) = |<\vec{S}(r,\theta)>| = \frac{\sin^2\theta}{r^2}, \quad P_{\text{rad}} = \int_A \mathrm{d}aI$$

mit $\mathrm{d}a = 2\pi R^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta$. Honerkamp, Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993 p260; Fließbach & Walliser p, 260 f., $\rho(\vec{r},t) = q\delta(x - R\cos(\omega t+\alpha))\delta(y - R\sin(\omega t+\alpha))\delta(z)$, $\vec{p}(t) = \int \mathrm{d}V \vec{r}\rho(\vec{r},t) = qR[\cos(\omega t+\alpha)\hat{x} + \sin(\omega t+\alpha)\hat{y}] = \mathrm{Re} = \{\vec{p}e^{-i\omega t}\}$ mit $\vec{p} = qR(\hat{x} + i\hat{y})e^{-i\alpha}$, $\hat{=} \sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\hat{z}$, $\hat{r}\times\vec{p} = (\sin\theta\hat{\rho} + \cos\theta\hat{z}) \times (\hat{x} + i\hat{y}) = 2 - \sin^2\theta$, $\mathrm{d}E = \vec{S}\cdot \mathrm{d}\vec{a}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t_{\mathrm{ret}}}\mathrm{d}t_{\mathrm{ret}}$

$$\vec{S} = -\frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^4}\frac{\ddot{\vec{p}}_{\mathrm{ret}}\times\hat{r}}{r^2}\hat{r}, \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}|\hat{r}\times\vec{p}|^2 = \frac{\omega^4}{32\pi^2\epsilon_0 c^3}q^2R^2(2-\sin^2\theta)$$

Herleitung per Ladungsdichtedipol = mathematischer Dipol: Aus der Dipolladungsdichte $\rho(\vec{x},t) = -[\vec{p}(t)\cdot\nabla]\,\delta(\vec{x})$ im Ursprung $\vec{0}$ und der **Kontinuitätsgleichung** $\partial_t\rho = -[\dot{\vec{p}}\cdot\nabla]\,\delta(\vec{x}) = -[\nabla\cdot\dot{\vec{p}}]\,\delta(\vec{x}) = -\nabla\cdot\vec{j}$ folgt sofort die **Stromdichte des Dipols** $\vec{j}(\vec{x},t) = \dfrac{\partial\vec{p}}{\partial t}\delta(\vec{r}) = \dot{\vec{p}}\delta(\vec{x})$. Für das Vektorpotential im Aufpunkt bei $\vec{x}$ und Dipol bei $\vec{x}' = \vec{0}$ gilt $\vec{A}(\vec{x},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\dfrac{\vec{j}(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta(t'-t+\dfrac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})$ und mit $\vec{j}(\vec{x}',t') = \dfrac{\partial p(\vec{t'})}{\partial t'}\delta(\vec{x'})$ und $R = |\vec{x}-\vec{x}'|$ folgt $\vec{A}(\vec{x},t) = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\dfrac{\partial_{t'}\vec{p}(t')\,\delta(\vec{x}')}{R}\delta(t'-t+\dfrac{R}{c})$ $\overset{\mathrm{d}t'=\mathrm{d}t}{=} \dfrac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\dfrac{\partial_t\vec{p}(t-\frac{R}{c})\,\delta(\vec{x}')}{R} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\partial_t\vec{p}(t-\frac{|\vec{x}|}{c})}{|\vec{x}|}$ wegen $t' = t - \dfrac{R}{c} =: t_{ret}$. Daher Vektorpotential $\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}_{\mathrm{ret}}}{|\vec{x}|}$. **Analog gilt für das elektrische Potenzial** $\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\dfrac{\rho(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\delta(t'-t+\dfrac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}t'\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\dfrac{\vec{p}(t')\cdot\nabla'}{R}\delta(\vec{x}')\delta(t'-t+\dfrac{R}{c}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\dfrac{\partial_t\vec{p}(t-\frac{R}{c})\cdot\nabla'}{R}\delta(\vec{x}')$ $= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\delta(\vec{x}')\nabla'\cdot\left(\dfrac{\vec{p}(t-\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)$ wegen parzieller Ableitung. Produktregel liefert $\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}x'^3\delta(\vec{x}')\left[\vec{p}(t-\dfrac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})\cdot\nabla'\dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\nabla'\cdot\vec{p}(t-\dfrac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})\right]$ bedeutet wegen verketteter Ableitung $\nabla\cdot\vec{p}(t-\dfrac{|\vec{x}|}{c}) = \dfrac{\partial\vec{p}}{\partial t}\cdot\nabla\left[-\dfrac{|\vec{x}|}{c}\right] = -\dot{\vec{p}}\cdot\dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|c}$, Punkt bei $\vec{p}$ meint parzielle Ableitung, das skalare Potential $\phi(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\vec{x}\cdot\dot{\vec{p}}_{\mathrm{ret}}}{c|\vec{x}|^2} + \frac{\vec{x}\cdot\vec{p}_{\mathrm{ret}}}{|\vec{x}|^3}\right\}$, wobei $\dot{\vec{p}}_{\mathrm{ret}} = \dfrac{\partial\vec{p}(t-|\vec{x}|/c)}{\partial t}$. In $\vec{E}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\vec{e}_r\times(\ddot{\vec{p}}_{\mathrm{ret}}\times\vec{e}_r)}{|\vec{x}|}$ und $\vec{B}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\vec{p}}_{\mathrm{ret}}\times\vec{e}_r}{c|\vec{x}|}$ mit $\vec{e}_r$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ orthogonales Rechtssystem. Poyntingvektor $\vec{S}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\frac{|\ddot{\vec{p}}_{\mathrm{ret}}\times\vec{e}_r|^2}{|\vec{x}|^2}$. Abgestrahlte Leistung durch eine Kugel vom Radius r ist $P_{\mathrm{rad}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{2}{3}\ddot{\vec{p}}^{\,2}(t-r/c)$.

Döring: Einführung in die theoretische Physik Bd2. Das elektromagnetische Feld 1955; Alternative Herleitung geht vom **Hertz'schem Vektor** = Superpotenzial = **Polarisationspotenzial** aus, das der Idee der Reduktion unbekannter Funktionen von 6 für $\vec{E},\vec{B}$ auf 4 für $\vec{A},\varphi$ folgt, indem die Ludvig **Lorenz-Bedingung** $\nabla\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$ gefordert wird: $\vec{A} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{Z}}{\partial t}$ und $\varphi = -\nabla\cdot\vec{Z}$. Die gibt für das Vakuum $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\dot{\vec{Z}}$ und $\vec{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z}$, die die Maxwellgleichungen $\mathrm{div}\,\vec{B} = \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$ und $\mathrm{rot}\,\vec{B} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ lösen und $\mathrm{rot}\,\vec{E} + \dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ die Wellengleichung $\Delta\vec{Z} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{Z}}{\partial t^2}$ für $\vec{Z}$ fordert. Panofsky & Phillips: Classical Electricity and Magnetism p254, Batygin & Toptygin p147; Wagner: Elemente der theoret Physik Bd2 p89; Sommerfeld 3 p136, 206; Liebscher p247; Philipp Frank & Richard von Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Riemann-Webers Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik 2 Bde 1927[7] 1500 Seiten p421ff; Idee: reduziere unbekannter Funktionen von 6 für $\vec{E},\vec{B}$ mittels **Hertz'schem Vektor** $\vec{Z}(|\vec{r}-\vec{r}'|,t') = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{p}(t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} =$ mit $\vec{p} = q\vec{a}(t)$ siehe Seite 550 und verzögerter Zeit $t' = t - \dfrac{1}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|$ gemäß Wagner 2, p91 oder $\vec{Z}(\vec{r},t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{p}(t-|\vec{r}|/c)}{|\vec{r}|}$ nach Jelitto 3 p160. Aus Lorentz-Eichung folgt $\varphi = \mathrm{div}\,\Pi = \nabla\cdot\dfrac{\vec{p}(t-r/c)}{r}$ oder z-**Komponente der Divergenz des Hertz'schen Vektors**

ist $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\vec{p}(t-r/c)}{r} = -\frac{z}{r^2}\left(\frac{1}{r}\vec{p}+\frac{1}{c}\vec{p}'\right) = -\left(\frac{z}{r^3}\vec{p}+\frac{z}{cr^2}\vec{p}'\right)$, wobei $\vec{p}'$ äußere Ableitung des Dipolvektors. Reineker Bd2 p356. Damit lauten die Dipolpotenziale $\varphi(\vec{r},t) = \frac{1}{\epsilon_0}\mathrm{div}_r\vec{Z}(\vec{r},t)$ und $\vec{A}(\vec{r},t) = \mu_0\frac{\partial\vec{Z}(\vec{r},t)}{\partial t}$. Also $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} = \mathrm{rot}\,\dot{\vec{Z}}$ und $\vec{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \mu_0\frac{\partial^2\vec{Z}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$ Ferraro: Electromagnetic theory 1962 p536, 565; Schwartz: Principles of Electrodynamics 1987; Petrascheck & Schwabl: Elektrodynamik 2019; **Moon & Spencer: Foundations of electrodynamics** 1960; Čullwick: Electromagnetism and relativity with particular reference to moving media and electromagnetic induction 1957; **Slater & Frank: Electromagnetism** 1951; **Bleaney & Bleaney: Electricity and magnetism** 1957, 1965, 1976, 2013; Feynman: Bd2 Kap21-4; Döring: Einf in die theoret Physik 2. Das em Feld 1962 p111f; **Hertz'scher Dipol** und atomares Planeten-Modell: Atom als in Resonanz schwingender Dipol gibt gemäß Becker: Theorie der Wärme $\bar{v}^2 = \frac{A^2}{\beta(\omega_0)}$ mit Dämpfung $\beta = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega^2}{mc^2}$ per Energieabstrahlung durch Feldankopplung gemäß $ma(t) = eE(t)$, also $E_\omega^2 = \epsilon\frac{3}{4\pi}\frac{\omega^2}{c^3}$, $w = \frac{1}{2}(E^2+B^2) = 6\bar{E}^2$ gibt Rayleigh-Jeans oder Planck $w_\omega = \epsilon(T)\frac{\omega^2}{c^3}$

$$\underbrace{kT}_{\text{klassisch}} = \epsilon(T) = \underbrace{\frac{\hbar}{2}\omega + \frac{\hbar\omega}{e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}-1}}_{\text{Quantenhypothese}}$$

Gribbin: Auf der Suche nach Schrödingers Katze p54; Statistische Deutung der Entropie-Idee. Man muss die Energie mathematisch endlich größe Portionen $h\nu$ zerstückeln und diese endliche Anzahl von Portionen als reale Größen betrachten und der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterwerfen. Die **Ultraviolett-Katastrophe** wird dadurch vermieden, weil riesige Frequenzen riesige Energien bedeuten. Atome sind nach Rutherford-Streuung luftig. Radioaktivität: β-Zerfall. Wollaston sah 1802 **Fraunhofer-Linien** = Absorptionslinien im Spektrum der Sonne: y = O_2 = 898.765nm, Z = O_2 = 822.696nm, A = O_2 = 759.370nm, B = O_2 = 686.719nm, C = Hα = 656.281nm, a = O2 = 627.661nm, D_1 = Na = 589.594nm, D_2 = Na = 588.997nm, D_3 = d = He = 587.562nm, e = Hg = 546.073nm, E_2 = Fe = 527.039nm, b_1 = Mg = 518.362nm, b_2 = Mg = 517.270nm, b_3 = Fe = 516.891nm, b_4 = Fe = 516.751nm, b_4 = Mg = 516.733nm, c = Fe = 495.761nm, F = Hβ = 486.134nm, d = Fe = 466.814nm, e = Fe = 438.355nm, G' = Hγ = 434.047nm, G = Fe = 430.790nm, G = Ca = 430.774nm, h = Hδ = 410.175nm, H = Ca^+ = 396.847nm, K = Ca^+ = 393.368nm, L = Fe = 382.044nm, N = Fe = 358.121nm, P = Ti^+ = 336.112nm, T = Fe = 302.108nm, t = Ni = 299.444. 1814 Fraunhofer. Balmer-Serie siehe Seiten 630 und 577. Chemische Bindung basiert auf dem großen Massen- und somit Geschwindigkeitsunterschied von Kernen und Elektronen - **Born-Oppenheimer-Näherung**, adiabatische Näherung. **Das Franck-Condon-Prinzip** Wechsel von Elektronen zwischen verschiedenen Zuständen so schnell ca. 10^{-15} Sekunden, dass sich der Kernabstand während der Anregung nicht ändert. Kernschwingungsperiode ca. 10^{-13} sec. geringe Masse der Elektronen ist Ursache, analog zur Born-Oppenheimer-Näherung = adiabatische Näherung. Positionen aller n Elektronen werden im Vektor $\vec{r}$, die Positionen aller N Atome $\vec{R}$. Zustandsfunktion aus Schrödingergleichung: $\hat{H}_{\mathrm{mol}}\Psi_{\mathrm{mol}}(\vec{r},\vec{R}) = E\,\Psi_{\mathrm{mol}}(\vec{r},\vec{R})$. Der molekulare Hamiltonian $\hat{H}_{\mathrm{mol}} = \hat{T}_{\mathrm{e}} + \hat{T}_{\mathrm{N}} + \hat{V}_{\mathrm{ee}} + \hat{V}_{\mathrm{NN}} + \hat{V}_{\mathrm{eN}}$ enthält neben den kinetischen Operatoren $\hat{T}_{\mathrm{e}} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\hbar^2}{2m_e}\nabla_i^2$ = kinetische Energie der Elektronen und $\hat{T}_{\mathrm{N}} = -\sum_{I=1}^{N}\frac{\hbar^2}{2M_I}\nabla_I^2$ = kinetische Energie der Kerne, auch die Abstoßung zwischen den Elektronen $\hat{V}_{\mathrm{ee}} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i<j}\frac{1}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}$, die Abstoßung zwischen den Kernen $\hat{V}_{\mathrm{NN}} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_{I<J}\frac{Z_IZ_J}{|\vec{R}_I-\vec{R}_J|}$, und die Anziehung zwischen Kernen und Elektronen $\hat{V}_{\mathrm{eN}} = -\frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_{i,I}\frac{Z_I}{|\vec{r}_i-\vec{R}_I|}$. Ansatz: Produkt der Elektronen-Wellenfunktion ϕ und der Kern-Wellenfunktion η gibt $\Psi_{\mathrm{mol}}(\vec{r},\vec{R}) = \phi(\vec{r},\vec{R})\eta(\vec{R})$. Elektronen-Schrödingergleichung für die Bewegung der Elektronen: $\hat{H}_{\mathrm{e}}\phi_h(\vec{r},\vec{R}) = E_h(\vec{R})\phi_h(\vec{r},\vec{R})$ mit $\hat{H}_{\mathrm{e}} = \hat{T}_{\mathrm{e}} + \hat{V}_{\mathrm{ee}} + \hat{V}_{\mathrm{eN}} + \hat{V}_{\mathrm{NN}}$ und einen für die Kernbewegung $(\hat{T}_{\mathrm{n}} + E_h(\vec{R}))\eta_{hk}(\vec{R}) = E_{hk}\eta_{hk}(\vec{R})$. Hartree-Fock-Methode. Multi-Configuration-SCF Wellenfunktionen = relevanten Determinanten identifizieren und deren Koeffizienten zusammen mit den Orbitalen optimieren! Korrelierte Rechnungen: Störungstheorie (Moller-

Plesset Ansatz), Configuration Interaction oder Coupled Cluster = CC-Ansätze. Semiempirische Methoden, Dichtefunktionale = DFT und Kraftfeld-Methode = Federn. Ausweg: Kopplungs-Operator-Methode. Landau/Lifschitz oder **Ter Haar: QT** 1970; Will man sich von all den widersprüchlichen Eigenschaften ein einheitliches Bild machen, so scheitert man, insbesondere, wenn man sich der klassischen Physik bedient. Was ist stabil und instabil? Was ist Welle und Teilchen, also unendlich ausgedehnt und dabei punktuell? **Kompanejez: Was ist die Quantenmechanik?** 1964; **Ludwig: Wellenmechanik** 1970; **Pietschmann: Quantenmechanik verstehen**. Eine Einführung in den Welle-Teilchen-Dualismus für Lehrer und Studierende 2002;

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) \;=\; \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t)$$

Pauli: Ich möchte besonders betonen, dass die QT keineswegs nur die Modifikation der Lichttheorie verlangt, sondern überhaupt eine neue Definition des Begriffs des em Feldes für nicht/statische Vorgänge [...]. Die berühmten Widersprüche [**Welle-Teilchen-Dualismus**] kommen nur daher, dass wir zwar die Gesetze der klassischen Theorie aufgeben, aber doch noch immer mit den Begriffen dieser Theorie arbeiten. Wiss Briefwechsel Bd1, p116; **Scheibe: Die Philosophie der Physiker** 2006; E. Scheibe: Die Reduktion physikalischer Theorien: Ein Beitrag zur Einheit der Physik 1996; E. Scheibe: Der Fortschritt der Physik im Selbstverständnis der Physiker, Einstein-Forum Jahrbuch 2000 p127-147; Obgleich es makrokopische Quanteneffekte gibt, so zeigen Objekte sowohl Teilchen als auch Wellen-Charakter. **Quantonen** meinen damit a] ein beliebiges Quantenteilchen ${}^1_1\mathrm{p}$, ${}^1_0\mathrm{n}$, ${}^0_{-1}\mathrm{e}$, Kerne, Atome, Moleküle, ${}^0_0\gamma$, ...ohne von Teilchen zusprechen b] es soll uns daran erinnern, dass dieses Ding stets Wellen- als auch Teilcheneigenschaften zeigt c] es betont das seltsame Quantenverhalten dieser Dinger. Es sind Quantonen sind also **weder Teilchen, noch Welle!** **Moore: Six ideas that shaped physics.** Unit Q = Particles behave like waves 2003 p80, p82 Elektronen-Interferenz-Muster Merli, Missiroli & Pozzi: On the statistical aspect of electron interference phenomena, AmericanAmJPhys44 1976 306–307. Nach Levy-Leblond und Balibar ist Licht ein **Fabelwesen** das sich als Welle so verhält, als wenn es korpuskelhaft wäre: Planck'sche Strahlungsformel $\mathrm{d}A\mathrm{d}\lambda M(\lambda,T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda kT}-1}\mathrm{d}A\mathrm{d}\lambda$ oder $\mathrm{d}A\mathrm{d}\nu M(\nu,T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}\mathrm{d}A\mathrm{d}\nu$ mit $\lambda_{\max} = \frac{2897.8\mu\mathrm{mK}}{T}$, diskrete Energie-Niveaus der Atome, photoelektrischer, äußerer lichtelektrischer Effekt Hertz 1887, Hallwachs 1888, Einstein 1905: $h\nu = \frac{1}{2}m_e v_e^2 + W_A$, Franck-Hertz-Versuch PhysBl 30 1974 p74f, Compton-Effekt mit der Wellenlängenverschiebung von kurzwelligem Röntgenlicht bei der eleastischen, nicht-zentralen Streuung an Elektronen. Untersuchungen mit Roentgenbeugung per FEL an nicht-kristallinen Nanopartikeln = Virus. Problem Januar 2022 bei Qualitätskontrolle von Covid-Serum mit Nanopartikeln per Rayleigh-Streuung: 40-100nm-Nanopartikeln geben Farbenspiel bei schwerdefinierbaren Bedingungen. Verklumpung von Nanopartikeln > 100nm macht farblose Mie-Streuung. Diffraction Before Destruction Prinzip. **Thomson-Streuung** = **rückstoßfreier Grenzfall** der Streuung an freien Elektronen. **Rayleigh-Streuung** = an gebundenen Elektonen. Tageshimmel ohne **Rayleigh-Streuung** auch schwarz. Atmosphäre als Milchglasscheibe. Warren: X-ray diffraction 1968; Streuung geht hin zu langen Wellenlängen um den Betrag $\Delta\lambda = \lambda_{\mathrm{C}}(1-\cos\theta)$ mit $\Lambda = \lambda_{\mathrm{C}} = \frac{h}{m_{\mathrm{P}}c}$, Schubert & Weber: QT 1, p81; Nolting QM5.1 p51; Streuprozess per Störungstheorie, Green'scher Funktion a la Lippmann-Schwinger-Gleichung, Streu-Matrix-Theorie, Wegintegral siehe Schubert & Weber: QT 2 Kap23; Scattering cross-section, differenzieller Streuquerschnitt, Wirkungsquerschnitt:

$$dn = \sigma(\theta,\varphi)|\vec{j}_a|\mathrm{d}\Omega = |\vec{j}_r|r^2\mathrm{d}\Omega = \left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)\mathrm{d}\Omega, \quad \vec{j}_a = \frac{\hbar\vec{k}_a}{(2\pi)^3 m},$$

wobei für den Eigenzustand der Stromdichte **eines** freien Teilchens $\bar{H}^F$ in Ortsdarstellung

$$<\vec{r}|E_a^F>=(2\pi)^{-3/2}e^{i\vec{k}_a\cdot\vec{r}}, \quad <\vec{r}|E_e^F>=(2\pi)^{-3/2}e^{i\vec{k}_e\cdot\vec{r}}, \quad E_e^F = \frac{(\hbar\vec{k}_e)^2}{2m} = E_a^F = \frac{(\hbar\vec{k}_a)^2}{2m}, \quad \text{also } |\vec{k}_a| = |\vec{k}_e|$$

Partialwelle stationäre Lösung eines Streuproblems, welche gleichzeitig Eigenfunktionen des Drehimpulses sind, was als Näherung bei Wechselwirkungen mit kurzer Reichweite, also niedrige Energie = kleine Drehimpulse, z.B. starken Wechselwirkung, brauchbar. Teilchen hat Drehimpul mit Beiträgen der Einzelprozesse mit

l = 1, 2, ... = Partialwellen im Wellenbild. Bahndrehimpuls $l \propto a$ (Streuparameter) hat auf die Streurichtungs-Verteilung der insgesamt gestreuten Teilchen = die Winkelverteilung Einfluss. Klassifikation der gestreuten Welle analog zum gebundenen Elektron im Atom, s-Welle, p-Welle, d-Welle usw. Ziel ist, Lösung der Schrödingergleichung für sphärisch-symmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$. Wellenfunktion für asymptotische Abstände $r \to \infty$ ist $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) \xrightarrow{r\to\infty} [e^{i\vec{k}\vec{r}} + f(\theta,\phi)\frac{e^{ikr}}{r}]$, = Überlagerung einer **einlaufenden ebenen Welle** und einer durch die Streuamplitude $f(\theta,\phi)$ **modifizierten Kugelwelle.** Aufgrund der Kugelsymmetrie ist in diesem Fall die Streuamplitude $f(\theta,\phi) = f(\theta)$ vom Winkel ϕ unabhängig. **Musiol, Ranft, Reif, Seeliger: Kern- und Elementarteilchenphysik** 1989, 1995[2] siehe Anhang; Ramm: Scattering by obstacles 1986; Die Lösungswellenfunktion des Streuproblems für asymptotische Distanzen zu: $\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)R_{lk}(r)P_l(\cos\theta)$ Lösung der **radialen Schrödingergleichung** $R_{lk} \overset{r\to\infty}{=} A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr)$, mit **sphärischen Bessel-** $j_l(\rho)$ und Neumann-Funktionen $n_l(\rho)$. Mit der **Streuphase** δ_l, mitindexBessel!Funktion dem **S-Matrix Element** $S_\ell = e^{2i\delta_\ell}$ (1937 Wheeler in Kernphysik und unabhängig davon 1943 Heisenberg in Quantentheorie), hat man $A_l = a_l\cos\delta_l, B_l = -a_l\sin\delta_l$ oder für die **Streuamplitude** $f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_l(\delta_l)P_l(\cos\theta)$ und die **Streuphase** $f_l(\delta_l) = \frac{1}{k}e^{i\delta_l}\sin\delta_l$ = **Beitrag der l-ten Partialwelle**. **Summenregel für Vorwärtsstreuphasen** $f(0) = \dfrac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}\sin^2\delta_l$ Phase der auslaufenden Kugelwelle wird also durch das Potential $V(r)$ gemäß $e^{i\delta_l}$ verschoben. **Die gestreute Welle unterscheidet sich von der ungestörten Welle des freien Teilchens bei elastischer Streuung nur durch einen Phasenfaktor. Differentieller Streuquerschnitt** $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2$, und **totaler Streuquerschnitt** $\sigma_{total} = \int_{4\pi}\frac{d\sigma}{d\Omega}$ sind Funktionen der der Streuwellenamplituden. Der totale Wirkungsquerschnitt ist danach $\sigma_{total} = 2\pi\int_{-1}^{+1}\mathrm{d}\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l = \dfrac{4\pi}{k}\Im f(0)$ = **optisches Theorem**: Durch den Streuprozess bleibt Teichzahl erhalten. Daher muss das, was der totale Wirkungsquerschnitt an **gestreuter** Intensität registriert, aus der einfallenden Welle **weginterferiert** worden sein. Diese Interferenz sorgt in Primärstrahlrichtung für einen **Teilchenschatten**, der gerade dem neu hinzugekommenen Streustrom entspricht. Zusammenhang von **Streulänge** a und totaler Querschnitt, wenn die Energie des gestreuten Teilchens gegen 0 geht: $\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$ und $\lim_{k\to 0}\sigma = 4\pi a^2$ oder $4\pi a^2 = \frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0$. Die Streulänge entspricht also einer effektiven Querschnittsfläche, welche sowohl die Stärke als auch die Art eines Potentials anzeigt. Mit obiger Definition für den totalen Streuquerschnitt wird die Streulänge für s-Wellen ($l = 0$) zu: $a = \pm\lim_{k\to 0}\frac{\sin\delta_0}{k}$. Die Streulänge a_ℓ kann mit Hilfe der partiellen Streuamplitude definiert beim Impuls $p = \dfrac{h}{\lambda} = \dfrac{h}{\lambda}\dfrac{2\pi}{2\pi} = \hbar k$ werden: $f_\ell(p) \xrightarrow[p\to 0]{} -a_\ell p^{2\ell}$. Nolting: QM2, Bd5 p304f; Cohen-Tannoudji: Quantum Mechanics - Vol 2 2006; B̃urkhardt: Dispersion relation dynamics. A phenomenological introduction to S-matrix theory 1969; Ẽden et al.: The analytic S-Matrix 1966; Chew: The analytic S-Matrix. A basic for nuclear democracy 1966; Taylor: Scattering Theory - The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions 1983; **Zeitabh. Störungstheorie für Streuung** eines Teilchen mit m und kräftefreiem Anteil $\hat{H}^F = \dfrac{1}{m}\hat{p}^2$. Anfangszustand $\vec{p}_a = \hbar\vec{k}_a$ geht über in Endzustand $\vec{p}_e = \hbar\vec{k}_e$. Mit der **Goldenen Regel**, siehe Seite 627

$$\frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{W(t) - W(0)}{t - 0} = \frac{2\pi}{\hbar}\sigma(E_a^F)|< E_e^F|\bar{H}^W|E_a^F >|^2 \quad \text{mit} \quad < E_e^F|\bar{H}^W|E_a^F >= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\vec{r}e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}H^W(\vec{r})$$

mit $\vec{q} = \vec{r}_e - \vec{r}_a$ und wegen $|\vec{k}_a| = |\vec{k}_e|$ ist $q^2 = 4\vec{k}_a^2\sin^2\theta/2$. Für die elast Streuung eines Teilchens der Masse m an einem durch $\hat{H}^W$ beschriebenen Streuzentrums ist der differenzielle Streuquerschnitt in **erster Born'scher Näherung**

$$\sigma^{(B)}(\theta,\varphi) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2\left|\int e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}H^W(\vec{r})\mathrm{d}^3\vec{r}\right|^2 = \left[\frac{2m}{\hbar^2}\frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\kappa^2 + (8mE_a^F/\hbar^2)\sin^2\theta/2}\right]^2$$

für die Streuung der z-fach geladenen Teilchens der Masse m am Yukawa-Potenzial mit der Ladung Ze mit der kinetische Energie im freien Anfangszustand E_a^F

$$V(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad \text{also } H^W(r) = \frac{Zze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\kappa r}}{r}, \quad \int \mathrm{d}^3\vec{r}e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}}\frac{e^{-\kappa r}}{r} = \frac{4\pi}{\kappa^2 + \vec{q}^2}$$

ist wegen Kugelsymmetrie φ-unabh. Für $\kappa \to 0$ **Rutherford-Streuung**. **Streuung per Green'scher Funktion a la Lippmann-Schwinger-Gleichung** geht von stationärem Streuzustand $|\psi>$ gemäß $\hat{H}|\psi>= E|\psi>$ aus: $(E\hat{1} - \hat{H}^F)|\psi>= \hat{C}(E)|\psi>= \hat{H}^W|\psi>$. Für jeden Eigenzustand $|E^F>$ von $\hat{H}^F$, für den $E = E^F$ gilt ist $|0_V>= \hat{C}(E)|E^F>$, also $|\psi>= \hat{C}^{-1}(E)\hat{H}^W|\psi> +|E^F>$. Da $|\psi>$ für $\hat{H}^W = 0$ in den Zustand $E = E^F$ übergeht, ist dieser als einfallende Welle zu deuten. Mit den **Green'schen Operatoren** $\hat{C}^{-1}(E^F) = (E^F\hat{1} - \hat{H}^F)^{-1} = \lim_{\epsilon\to+0}(E^F\hat{1} - \hat{H}^F \pm i\epsilon\hat{1})^{-1} =: \hat{G}^{F\pm}(E_a^F)$, die Singularität meidend. Gibt die **Lippmann-Schwinger-Gleichung** $|\psi_a^\pm>= |E_a^F> +\hat{G}^{F\pm}(E_a^F)H^W|\psi_a^\pm>$. In Ortsdarstellung rechtfertigt sich die Bezeichnung Green'scher Operator mit $\hat{1} = \sum_n |E_n^F><E_n^F|$ für das Eigenvektorsystem $\{|E_n^F>\}$ von $\hat{H}^F$

$$\hat{G}^{F\pm} = \lim_{\epsilon\to+0}(E^F\hat{1} - \hat{H}^F \pm i\epsilon\hat{1})^{-1} = \sum_n |E_n^F><E_n^F| \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{E_a^F - E_n^F \pm i\epsilon}$$

Speziell für

$$H^F(\vec{r},\xi) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_{\vec{r}} + H_{\text{Atom}}(\xi) \quad \text{mit} \quad <\vec{r},\xi|E_n^F> \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}$$

folgt $\hat{G}^{F\pm}(\vec{r},\xi;\vec{r}',\xi') =<\vec{r},\xi|\hat{G}^{F\pm}|\vec{r}',\xi'>=$

$$\hat{G}^{F\pm}(\vec{r}-\vec{r}';\xi-\xi') = \sum_n \varphi_n(\xi)\varphi_n^*(\xi')\lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3\vec{k}\frac{e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{E_a^F - E_{n,\vec{k}}^F \pm i\epsilon} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\sum_n \varphi_n(\xi)\varphi_n^*(\xi')\frac{e^{\pm i\vec{k}_n|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Helmholtz-Gleichung $\Delta\varphi = \lambda\cdot\varphi$

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\Phi_\omega(\vec{r}) = -4\pi\varrho_\omega(\vec{r}), \quad \left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\right)G(\vec{r},\vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}'), \quad G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{\exp(\pm i\omega|\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Elektromagnetische Wellen in Hohlleitern Kargermann & Köhler II p9,32 Stetigkeitsbedingungen auf dem Rand R bedeutet B_n stetig gibt $\vec{B}\cdot\hat{n} = 0$ und E_t stetig gibt $\vec{E}\cdot\hat{t}|_R = 0$ oder $\vec{E}\times\hat{n}|_R = \vec{0}$! p213 TM-Moden im ideal leitenden Hohlzylinder. Fließbach Hohlraumwellen p196ff https://en.wikipedia.org/wiki/Vibrations_of_a_cir
Schubert & Weber: QT 2 1980 Kap23; Zülicke: QC 1 1972 p120, 208-213; Streu-Matrix-Theorie, Wegintegral siehe **Schubert & Weber: QT2 1994** Kap23; **Goldberger & Watson: Collision Theory** 1964; Barut: Die Theorie des Streumatrix, 2. Für die Wechselwirkung fundamentaler Teilchen 2 Bde 1982; **S-Matrix:** geg. $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}$ und Anfangszustand $\psi(t = -\infty)$, ges. Energieniveaus und **Streuamplitude** $\psi(t)$ und $\psi(t = -\infty)$ bei veränderlicher Teilchenzahl. Ebert: Eichfeldtheorien 1989 p188ff. Quantisierung der Eichfelder führt auf Faddeev-Popov-**Geister-Felder**, die bei nichtabelschen Eichfeldern sogar an WW beteiligt sind. p146 oder Saller: Vereinheitlichte Feldtheorien der Elementarteilchen. Eine Einführung, LNP223 1985 p36; **Bewegungsgleichung** für $\psi(t)$ ist

$$i\frac{\partial\psi(t)}{\partial t} = \{e^{i\hat{H}_0 t}\hat{H}_{int}e^{-i\hat{H}_0 t}\}\psi(t) \equiv \hat{H}_{int}(t)\psi(t)$$

Sei $\psi(t) = \hat{S}(t,t_0)\psi(t_0)$ mit $\hat{S}(t_0,t_0) = 1$ und $i\frac{\partial\hat{S}(t,t_0)}{\partial t} = \hat{H}_{int}(t)\hat{S}(t,t_0)$. Potenzreihenentwicklung $\hat{S}(t,t_0) = \sum_{n=0}^\infty \hat{S}_n(t,t_0)$ gibt $\hat{S}_n(t,t_0) = -i\int_{t_0}^t \mathrm{d}t'\,\hat{H}_{int}(t')S_{n-1}(t',t_0)$ mit $S_0(t_0,t_0) = 1$. Mit dem Zeitordnungs-Operator T folgt

Elbaz: Quantum. The Quantum Theory of Particles, Fields and Cosmology 1999; **Schwindt: Tutorium QM** 2013, Bell'sche Ungleichung. In klass Mechanik sind Mehrteilchen-Zustände Linearkombinationen über der direkten Summe von Einteilchenzuständen, wogegen in der QM Mehrteilchen-Zustände Linearkombinationen über dem direkten Produkt von Einteilchenzuständen sind. Daher ist der Zustand eines Teilchen in der QM i.a. auch vom Zustand andere Teilchen abhängig, was als **Verschränkung** bezeichnet wird p68; Die nichtkommutative Observablen-Algebra führt auf die Unschärferelation 1927: Jenseits der Messfehler bleiben z.B. Ort und Impuls bei simultaner Messung unbestimmt - haben keine scharfen Werte. **Heisenberg'sche Streurelation**. Teilchenort ist vor der Messung JAEIN und erst nach der Messung bestimmt JA oder NEIN. Axiome: Zustand des Systems vollständig durch **Wellenfunktion** oder **Zustandsfunktion** $\Psi(q,t)$ bestimmt. **a]** $\Psi(q,t) \in \mathbb{C}$. **b] Idee der Wahrscheinlichkeit** ist

nach Feynman: QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p28; wegen des **Rätsels der parziellen Reflexion bei Körnigkeit des Lichtstroms** zwingend. **Ortswahrscheinlichkeit** ist $|\Psi(q,t)|^2 \mathrm{d}q = \overline{\Psi(q,t)} * \Psi(q,t)\mathrm{d}q$ Für alle Zeiten t gilt $\int_V \overline{\Psi(q,t)}\Psi(q,t)\mathrm{d}q = 1$ **Born'sche Deutung der Wellenfunktion**. **Born: Physik im Wandel meiner Zeit** 1957 p132ff, p 173ff; Auch wenn man alles weiß, so gibt es doch keine Gewissheit über den Ausgang eines Experiments. **Resultat der Einzelbeobachtung folgt keinem Gesetz.** **Die letzte Tatsache ist ohne Ursache!** Der Zustand bestimmt nicht das Phänomen! Chardin: Der Mensch im Kosmos 1959; Monod: Zufall und Notwendigkeit 1968; Eigen: Das Spiel - Naturgesetze steuern den Zufall 1975; Piechocki: Die Zähmung des Zufalls - Stabilität und Variabilität des Erbgutes 1987; Carroll: Brave genius - Camus and Monod 2013; **Born: Physik im Wandel meiner Zeit** 1957 p172ff Die statistische Deutung der Quantenmechanik. Nobel-Vortrag 1954, PhysBl11 H5 p193-202 1955; Indeterminismus der QM - es gibt **absoluten Zufall**. Man bekommt nur **statistische Information** über mögliche Resultate. Hörz: Zufall - Eine philosophische Untersuchung 1980; **Realist** Einstein (1926): Gott würfelt nicht! **Teilchen war kurz vor der Messung auch schon am gemessenen Ort**, daher ist die QM unvollständig. Was Einstein nicht akzeptieren konnte, war, dass die Theorie in ihrer Kopenhagener Deutung nur unvollständiges menschliches Wissen, nicht aber eine vom Wissen unabhängige Realität der Natur beschrieb. Das Kriterium der Unvollständigkeit der Quantentheorie war für Einstein ihr bloß statistischer Charakter. Stone: Einstein and the quantum mechanics 2013; $m = \frac{E}{c^2}$ Einstein insistierte, dass Realität unabhängig von unserer Wahrnehmung bestehen muss. Für Bohr hingegen war es selbstverständlich, in der Wissenschaft nur von dem zu reden, was wir wissen können. **Bohr: Drücke dich niemals deutlicher aus, als du denkst!** Siehe Pais: Albert Einstein. Eine wissenschaftliche Biographie 1982 p423; Mlodinow: Wenn Gott würfelt 2009; Es gibt hidden variables! **Ist die Natur zufällig oder ist Zufall subjektiv?** **Aleatorische Wahrscheinlichkeit** = Quantenmechanische Unbestimmtheit sorgt für 'objektiven' Zufall im Mikrokosmos, der sich dann in die Makroebene fortpflanzt. Wahrscheinlichkeit = relative Häufigkeiten in gleichartigen Systemen = **Frequentistischer Ansatz in der Statistik**. **Epistemische Wahrscheinlichkeit** = Modell beschreibt nicht die Welt 'an sich', sondern was wir über die Welt wissen (können). Fehlt Information (z.B. über unbekannte Systemvariablen) bleiben Möglichkeiten offen. Wahrscheinlichkeit = Maß für subjektive Unsicherheit = **Bayesianischer Ansatz in der Statistik**. Calude: Randomness And Complexity. From Leibniz To Chaitin 2007; Calude: Information and Randomness. An Algorithmic Perspective 2010;

Downey: Think Bayes 2013; **Orthodoxer**, Bohr'sche Kopenhagen-Deutung, Jordan: **Das Teilchen war vor der Beobachtung überall**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 1 \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,t)|^2 \mathrm{d}x = 0$$

und die Beobachtung stört nicht nur, sondern zwingt das Teilchen erst, eine eindeutige Position einzunehmen, erzeugt den gemessenen Ort erst. **Teilchen repräsentierende Wellenfunktionen sind nur quadratintegrable Lösungen der Schrödinger-Gleichung.** $\Psi(x,t)$ geht mit $|x| \to \infty$ schneller als $1/\sqrt{|x|}$ gegen Null. **Wheeler:** Lösung der Schrödinger-Gleichung entspricht einer Wettervorhersage. Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010 pIX; Die **Normierung** fixiert den Betrag zum Zeitpunkt $t = 0$, nicht aber die Phase der Lösung. Die Schrödinger-Gleichung wahrt die Normierung automatisch für beliebige Zeiten! Mermin, Physics Today April 1985, p38, Ist der Mond da, wenn niemand hinschaut? Um Debatte zu obiger Sichtweise zu stoppen wird die Antwort verweigert. **Agnostiker** Pauli: Wieviele Engel finden auf Nadelspitze Platz? Vor der Messung ist Metaphysik, weil nicht prüfbar! Nach Bell ist die letzte Position nicht haltbar. Welt ist nichtlokal oder Vielewelten. **Messung** bedeutet einen plötzlichen und unstetigen **Wellenfunktionskollaps**. Weidenmann: Über den Informationsgehalt physikalischer Messungen PhysBl12 1956 p151-155; P̃auli & Meyenn: Physik und Erkenntnistheorie 1984; M̃eyeen, Forman, Einstein, Planck, Franck, Heisenberg, Pauli: Quantenmechanik und Weimarer Republik 1994; Geyer, Herwig, Rechenberg: Werner Heisenberg als Physiker und Philosoph 1993; Enz & Meyenn: Pauli - Das Gewissen der Physik 1988; Pauli - Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein Bd1 - 3 sind in 1305 vorhanden. Bd4,T.1, Bd4,T.2 und Bd4,T.3 wurden für 2000 bestellt. Bd4,T.4 A und B sind online verfügbar. **P̃auli: Physik und Erkenntnistheorie von Wolfgang Pauli** 1984: Erst die Versuchsanordnung definiert den physikalischen

Zustand des Systems, in dessen Charakterisierung eine Kenntnis über das System wesentlich eingeht. Beobachtung ist Eingriff von unbestimmtem Umfang in das Beobachtungsmittel wie in das beobachtete System und unterbricht den kausalen Zusammenhang der ihr vorausgehenden und den ihr nachfolgenden Erscheinungen. Straumann: QM 2002 p1; Pauli: Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik; Bohr: Messung ist WW von Mikro- und Makrosystem. Heisenberg: Eine andauernde Aufzeichnung wird abgebrochen. Wigner: Messung ist Eingriff eines bewussten Beobachters mit Lineal, Uhr, Geigerzähler. Fock: SRT relativiert den Beobachter hinsichtlich seiner Bewegung/Bezugssystem und QT relativiert die Beobachtung selbst. Die Maßeinheit der Wellenfunktion/Zustandsfunktion im 1d-Ortsraum ist somit $1/\sqrt{\mathrm{m}}$ **c]** Messungen und Zustände: Erwartungswert einer physikalischen Größe a beim Übergang zwischen den Zuständen Ψ und Φ ist $\hat{a} = \int_V \overline{\Phi(q)} a(q,q')\Psi(q')\mathrm{d}q'\mathrm{d}q$ **d] Superposition, Mischung:** $\Psi(q,t) = c_1\Psi_1(q,t) + c_2\Psi_2(q,t)$ mit $c_i \in \mathbb{C}$ **e] Kombination, Ensemblebildung:** Sei einen $\Psi_k(q)$ Wellenfunktionen voneinander unabhängiger Teilsysteme, gilt $\Psi_{1\ldots s}(q_1,\ldots,q_s) = \Pi_{k=1}^s \Psi_k(q_k)$ Mathe der QM ist Funktionalanalysis a la Simon & Reed oder Analysis der linearen Algebra **unitärer Räume** = lin Vektorraum mit innerem Produkt Skalarprodukt. Bergmann: Jüdische Mathematiker in der deutschsprachigen akademischen Kultur 2010; **C*-Algebra** über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ ist **Banachalgebra** $\mathcal{A}$ mit einer Involution $^*: \mathcal{A} \ni a \to \mathcal{A} \ni a^*$ mit folgenden Eigenschaften i] $\forall a \in \mathcal{A} : (a^*)^* = a$ (involutiv=selbstinvers) ii] $\forall a, b \in \mathcal{A} : (ab)^* = b^*a^*$ (antimultiplikativ) iii] $\forall a, b \in \mathcal{A} : \forall z, w \in \mathbb{K} : (za + wb)^* = \bar{z}a^* + \bar{w}b^*$ (semilinear, anti-linear oder konjugiert linear) iv] $\forall a \in \mathcal{A} : \|a^*a\| = \|a\|^2$ (C*-Eigenschaft) Aus der C*-Eigenschaft folgt, dass die Involution isometrisch ist, was sie zusammen mit den ersten drei Eigenschaften der C*-Algebra zu einer Banach-*-Algebra (= involutiven Banachalgebra) macht. Beispiel sind die komplexen quadratischen Matrizen. Name C*-Algebra (1947) deutet das C(ontinuous) nichtkommutatives Analogon des Raums der stetigen Funktionen $C(T)$ sind und das Zeichen * betont die Bedeutung der Involution = selbstinvers. Gelfand, Raikow, Schilow: Kommutative normierte Algebren 1964; **Szokefalvi-Nagy: Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes** 1942; Arveson: Invitation to C*-algebras 1977, 1998; S̃under: An Invitation to von Neumann Algebras 1986; S̃akai: Operator Algebras in Dynamical Systems 1991; D̃ixmier: C*-Algebra 1977; S̃egal: Mathematical problems of relativistic physics 1963; Segal & Kunze: Integrals and Operators 1978; D̃avidson: C*-Algebras by Example 1996; Douglas: Banach Algebra Techniques in Operator Theory 1972; B̃ratteli & Robinson: Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1. C*- and W*-Algebras. Symmetry Groups. Decomposition of States 1987, 2002; Bei **Spurklasseoperatoren** bleiben, im Gegensatz zu allgemeinen Operatoren einige Eigenschaften aus dem endlichdimensionalen Fall, insbesondere ihre Darstellung als Summe eindimensionaler Operatoren, erhalten. In wichtigen Fällen überträgt sich der aus der linearen Algebra bekannte Begriff der Spur auf diese Operatoren. **Dichtematrix**. Peter beim Graben, Thomas Filk, Harald Atmanspacher: Epistemic Entanglement due to Non-Generating Partitions of Classical Dynamical Systems http://arxiv. org/abs/1204.5454; Foulis, Svozil, Khrennikov: A Half Century of Quantum Logic. http://www. quantonics. com/Foulis_On_Quantum_Logic .html **Moore: Six ideas that shaped physics.** Unit Q = Particles behave like waves 2003 p99ff **Wellenfunktion:**

Adjungierter Operator: $< \psi, A\varphi >=< A^+\psi, \varphi >=< \varphi, A^+\psi >^*$ oder
$< \psi|A|\varphi >^*=< A\varphi|\psi >= (A\varphi)^T\psi = \varphi^T A^T\psi =< \varphi A^+\psi >$ Falls $A = A^+$, so heißt A **selbstadjungiert** und es gilt $< \psi A\psi >=< \psi A\psi >^* \in \mathbb{R}$, und A hat nur reelle Eigenwerte. **Darstellung mit selbstadjungierten Operatoren (Stonescher Satz):** Es sei $\hat{A}$ ein selbstadjungierter Operator, welcher im Intervall $s \in [s_0, s]$ nicht vom Parameter s abhänge. Dann ist die Operatorschar $\hat{U}(s) := \exp\{-\mathrm{i} \cdot (s - s_0) \cdot \hat{A}\}$ unitär. **Zeitentwicklungsoperatoren:** $\hat{U}(s)$ können dabei auf dem ganzen Hilbertraum definiert werden, obwohl $\hat{A}$ nur dicht-definiert sein muss. Bei Parameterabhängigkeit von $\hat{A}$ (in der Quantenmechanik z.B. bei expliziter Zeitabhängigkeit des Hamiltonoperators) gilt eine formal ähnliche Aussage (**Dyson-Entwicklung**): Zunächst stellt man die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}\hat{U}}{\mathrm{d}s} = -\mathrm{i}\hat{U}(s)$ auf und löst sie iterativ durch folgende formale Reihe:

$$\hat{U}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^n \int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s_1 \hat{A}(s_1) \int_{s_0}^{s_1} \mathrm{d}s_2 \hat{A}(s_2) \ldots \int_{s_0}^{s_{n-1}} \mathrm{d}s_n \hat{A}(s_n) \ .$$

Jetzt kann man durch Permutation der Argumente die oberen Integrationsgrenzen einheitlich auf den Wert s erhöhen (z.B. $s_1 \to s$), wenn man die dadurch erfolgte Ausdehnung des Integrationsgebietes durch einen Faktor $1/n!$ kompensiert und für die Einhaltung der Integrationsordnung sorgt (erstes Integrationsargument größer als das zweite, zweites größer als das dritte, u.s.w.). Auf diese Weise erhält man mit dem Dysonschen Integrationsordnungoperator $\mathcal{T}_s$ die suggestive Formel, dass die folgende Operatorschar unitär ist:

$$\hat{U}(s) := \mathcal{T}_s \exp\left\{-\mathrm{i} \cdot \int_{s_0}^{s} \mathrm{d}s_1 \hat{A}(s_1)\right\}$$

Quantenpunkt ist nanoskopische pyramidale Materialstruktur InGaAs, CdSe oder auch GaInP/InP, die Ladungsträger in ihrer Beweglichkeit in allen drei Raumrichtungen so weit eingeschränkt, dass ihre Energie nicht mehr kontinuierliche, sondern nur noch diskrete Werte annehmen. Quantenpunkte haben wie Atome Schalenstruktur, Coulomb- und Austausch-Wechselwirkung, optisch induzierte Uebergaenge und der Zeeman-Effekt. Quantenpunkte sind in Größe und Ordnungszahl einstellbar. Größe des Quantenpunkts liegt im Bereich der De-Broglie-Wellenlänge des Elektrons: $\lambda = h/p$ oder $p = h/\lambda = 2\pi h/2\pi\lambda = kh$.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e^* E}} \approx 7{,}6\,\mathrm{nm} \quad \text{wegen} \quad E = k_\mathrm{B} \cdot T = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot 300\,\mathrm{K}$$

Axel Lorke: Manipulation und Detektion von Quantenzuständen in künstlichen Atomen http://aglorke.uni-due.de/ag_lorke/forschung.shtml für Forschung und Technologie - Aus der Werkstatt der Quanten-Mechaniker: Selbstorganisierte Nanostrukturen, Nanopartikel aus der Gasphase, Quanten-Hall-Effekt, Nanomanipulation, **Ballistischer Transport** = gemäß Newton2, also spezial freien Teilchen, Woijscik & Dorfman: Ballistic vs diffusive transport, Physica D 187 (2004) 223–243; Buchal: Faszination Nanowelten 2005; Problem Januar 2022 bei Qualitätskontrolle von Covid-Serum mit Nanopartikeln per Rayleigh-Streuung: 40-100nm-Nanopartikeln geben Farbenspiel bei schwerdefinierbaren Bedingungen. Verklumpung von Nanopartikeln > 100nm macht farblose Mie-Streuung. K̃aramanolis: Faszination Nanotechnologie 2006; Lipperheide & Wille: The Thermoballistic Transport Model. A Novel Approach to Charge Carrier Transport in Semiconductors 2014 p5ff; Gleichrichter und Ratschen, Oberflächenphysik siehe Forum Forschung 2004: https://www.uni-due.de/~bys007/ssc/forum-forschung/2003/index.html, siehe auch **Fallen** auf Seite 642. **Pauli: Gott erschuf die Festkörper, aber der Teufel die Oberflächen.** Kitaigorodski: Ordnung und Unordnung in der Welt der Atome 1979; Henzler & Göpel: Oberflächenphysik des Festkörpers 1991; **Online-PSE:** http://www. periodenisystem. info/ periodensystem/ Cornelia Denz: Von kuenstlichen Kristallen zur optischen Sonnenblume - massgeschneidertes Licht fuer nichtlineare Informationsoptik und Biophotonik. Komplexe Lichtverteilungen koennen typischerweise auf zwei Wegen genutzt werden, um kuenstliche Materialien durch Licht zu erzeugen: a] nichtlineare Licht-Materie Wechselwirkung durch massgeschneidertes Licht kuenstliche erzeugt diskrete photonische Kristalle. Diskrete Strukturen wie Quasikristalle oder aperiodische Fibonacci-Folgen sind in der Natur und der Physik von besonderer Bedeutung. Die Lichtausbreitung in Brechungsindexstrukturen mit solchen Formen erzeugt ganz neue, in der kontinuierlichen Physik unbekannte Phaenomene, darunter diskrete Solitonen, optische Wirbel oder Quanteneffekte wie Bloch-Oszillationen oder Landau-Zener-Tunneln. b] mit komplexen Lichtverteilungen kann man Nanopartikel vom Einzelelement aus zu komplexeren Strukturen aufzubauen. Licht als optische Pinzette erlaubt die Anordnung von Nanoobjekten in zwei oder drei Dimensionen genauso wie die optische Manipulation von lebenden Systemen wie selbstangetriebene molekulare Motoren.

Einstieg: **Münster: QT**; R.F. Werner, Uni Braunschweig; Nolting; Hannabuss: An introduction to quantum theory 1999; D'Ariano, Chiribella, Perinotti: Quantum Theory from First Principles. An Informational Approach 2017; Greiner QT enthält auch Diskussion zur **Bell-Ungleichung** siehe **Herbert: Quantenrealität. Jenseits der neuen Physik** 1987; Pagels: Cosmic Code. Quantenphysik als Sprache der Natur 1983; Wolf: Der Quantensprung ist keine Hexerei. Die neue Physik für Einsteiger 1985; Tong: Machen Quanten Sprünge? Wellenfunktion oder Teilchen SdW 2014 H4 p58, H5 p8; Heisenberg: Der unanschauliche Quantensprung PhysBl 1946 4-6; Pagels: The cosmic code. Quantum physics as the language of the universe 1984; Pagels: Die Zeit vor der Zeit. Das Universum

bis zum Urknall 1990; Pagels: Perfect Symmetry. The Search for the Beginning of Time 1992; Maccone: A simple proof of Bell's inequality, Am J Phys 81(2013) 854-9; und EPR; Griffiths: EPR, Bell, and quantum locality, AmJPhys79, 954 (2011); Baker: 50 Schlüsselideen Quantenphysik 2015; Clegg: Quantentheorie in 30 Sekunden 2015; Holzner: Quantenphysik Für Dummies 2012; **Schwindt: Tutorium QM** 2013 QM basiert nicht, wie SRT, auf Grundidee, sondern auf widerwilliger Akzeptanz von Rechenvorschriften, die im Grunde jeder Intuition widersprechen. 1. Man hebe die mysteriösen Eigenschaften der Theorie hervor. Starte also mit den Bell'schen Ungleichungen und nicht mit einem Werkzeugkasten/ Maschinerie/Ingenieurshandwerkzeug der funktionierenden Anwendungen. Siehe Blaylock: The EPR paradox, Bell's inequality, and the question of locality, AmJPhys78 p111 2010. 2. Gehe vom Allgemeinen zum Speziellen. Erst abstrakte Theorie, dann Schrödinger-Gl. und Wellenfunktion. 3. Erläutere die allgem. Postulate und Grundbegriffe der QM am einfachsten nichttrivialen Quantensystem: 2d-Zustandsraum des Elektronenspin = Qubit. Intro siehe **Dür: Von Qubits lernen** PJ16 2017 H6 p43-47; **Dür & Heusler: Was man von zwei Qubits über Quantenphysik lernen kann. Verschränkung und Quantenkorrelationen** PdNPiS 1/65 2016 p23; Dür, Lamprecht, Heusler: Towards a quantum internet EuropeanJPhys38 2017 043001; **Bloch-Kugel** für $0 \leq \theta < \pi$ und $0 \leq \phi < 2\pi$ gilt $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\phi}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + (\cos\phi + i\sin\phi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$, wobei $|0\rangle = |\downarrow\rangle$ orthogonal zu $|1\rangle = |\uparrow\rangle$. Betrachte erst den **Bloch-Kreis** mit $\phi = 0$, also $|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$, dann speziell $\theta = \pi/2$ also $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. http://www.quantiki.org/wiki/Bloch_sphere **Milonni & Eberly: Laser physics** 1988, 2010 p242ff; **Nielsen & Chuang: Quantum Computation and Quantum Information** 2004; D'Ariano, Chiribella, Perinotti: Quantum Theory from First Principles. An Informational Approach 2017 OPT = operational probabilistic theory; L̃o, Popescu, Spiller eds: Introduction to Quantum Computation and Information 1998 super Intro; Berman, Doolen, Mainieri, & Tsifrinovich: Introduction to quantum computers 1998; Williams & Clearwater: Explorations in Quantum Computing 1988; M̃orsch: Quantum bits and quantum secrets. How quantum physics is revolutionizing codes and computers 2008; **Ỹanosfky & Mannucci: Quantum computing for computer scientists** 2008; Nicht erst 1d-Kasten und 3d-Zentralpotenzial mit Kugelflächenfunktionen. 4. Begriffliche Klarheit, denn ein großer Teil der QM in unendlichdimensionalen Räumen, wo viele Sätze der linearen Algebra nicht mehr gelten. Tensorprodukt und Verschränkung. WWWW; Haake: Einf in theoret Physik ab Seite 193; **Ryder: Quantum Field Theory** 1996[2]; **Maggiore: A Modern Introduction to Quantum Field Theory** 2005; Schwichtenberg: No-Nonsense Quantum Field Theory. A Student-Friendly Introduction 2020; **McMahon: QFT Demystified** 2008; S̃traumann: Relativistische Quantentheorie. Eine Einführung in die Quantenfeldtheorie 2006; W̃einberg: QFT 2000; Dyson: Quantenfeldtheorie 2014; M̃andl: Introduction to quantum field theory 1959; P̃ilkhuhn: Relativistic particle physics 1979; Mandl & Shaw: Quantenfeldtheorie 1984, 1993; Bogoljubov & Sirkov: Quantenfelder 1984; Ramond: Field Theory. A Modern Primer 1981; Scheck: Theoretische Physik 4. Quantisierte Felder. Von den Symmetrien zur Quantenelektrodynamik 2001; **Pais: Inward bound of matter and forces in the physical world** 1986 Geschichte der Teilchenphysik von 1896 bis 1983; **Kaku: Quantum field theory. A modern introduction** 1993 pdf im Netz; Umezawa: Quantum field theory 1957; Itzykson & Zuber: QFT; Barton: Introduction to advanced field theory 1966; **Wightman & Streater: Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie**. PCT 1969 = Sketch-History-Analog = Sellar & Yeatman: 1066 and all that 1931 = Geschichte Englands; Mandl & Shaw: QFT 1993; Zee: QFT in a nutshell p4ff, p16ff. Dürr: Quanten und Felder. Physikalische und philosophische Betrachtungen zum 70. Geburtstag von Werner Heisenberg 1971; Harris: A pedestrian approach to QFT 1972 = **Harris: Quantenfeldtheorie. Eine elementare**

Einführung 1975; **Stachel, Penrose, Ehlers: Einsteins Annus mirabilis. Fünf Schriften, die die Welt der Physik revolutionierten** 1998, 2005 p197 Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt: Körperzustand bei ponderabler Materie = endliche Anzahl von Teilchen mit Ort und Impuls. Ganz anders Maxwelltheorie mit elektromagnet Zustand mit kontinuierlichen Funktionen = unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Schwarzer Körper sagt: Licht muss auch endliche Anzahl von Teilchen sein; Bertotti: Teilchen und Felder, PhysBl15 1959 289-295; Siehe Borzeszkowski & Treder auf Seite 481. **Dipak K. Sen: Fields and/or particles** 1968 klassische nichtdualistische Theorien von **a] Feld primär = Teilchenformalismus** a la Mie 1912 und Born+Infeld 1934 Teilchen als nichtlokale Eigenschaft des Feldes führt auf eine **nichtlineare Elektrodynamik = Born-Infeld-Elektrodynamik** per $\mathcal{L} = -b^2\sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} - \frac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})^2}{b^4}} + b^2$ bedeutet maximale Feldstärke $E_{\mathrm{BI}} = \frac{e}{r_{\mathrm{e}ff}} = 1.187 \times 10^{20}\,\mathrm{V/m}$ unterhalb des effektiven Elektronenradius $m_e c^2 = \int \mathrm{d}\vec{r} T_{44} = \frac{2}{3} e\phi_0 = 1.2361... \frac{e^2}{r_{\mathrm{e}ff}}$ siehe Sen p44. Born-Infeld-Elektrodynamik macht das Elektron zum Feld ohne Singularität bei $r \to 0$, bringt aber keine zusätzlichen Einsichten. Mie: Foundation of the new field theory, AnnPhys37 1912 p511, 39 p1; Born & Infeld: Foundations of the new field theory ProcRSoc A144 1934 p425-451; **b] Teilchen primär = Teilchenformalismus** liefert **Wheeler-Feynman-Elektrodynamik** = action-at-a-distance Elektrodynamik Teilchenbegegnung macht Feld. Wheeler-Feynman-Elektrodynamik umgeht Selbstenergie und Divergenzen. Gleick: Richard Feynman. Das Leben und Werk des genialen Physikers 1993; **Wheeler–Feynman absorber theory** = Wheeler–Feynman time-symmetric theory entspricht Tetrodes Anwendung des Mach'schen Prinzips = Teilchen erfahren keine Selbstwechselwirkung! Siehe auch Seite 331 zum Mach'schen Prinzip. Jayme De Luca: Variational principle for the Wheeler–Feynman electrodynamics, Journal of Mathematical Physics 50, 062701 (2009); https://doi.org/10.1063/1.3154509; Deckert: **Electrodynamic absorber theory** a mathematical study PhD 2009; W̃hitehead: The principles of relativity 1922; Whitehead: Kulturelle Symbolisierung 1927; W̃hitehead: Denkweisen 2001; Whitehead: Wissenschaft und moderne Welt 1925; W̃hitehead: Prozeß und Realität. Entwurf einer Kosmologie 1987; Wiehl: Natur, Subjektivität, Gott. Denken von Whitehead 1990; Sen: Space, time and matter 2014; Boal & Kamal eds: Fields and particles 1975; **Stranathan: The particles of modern physics** 1942; **Boorse & Motz: The world of the atom** 2Bde 1966 Originalarbeiten auf 1873 Seiten. Lukrez, Descartes, Boyle, Hooke, Huygens, Newton, Bernoulli, Boscovich, Higgins, Dalton, Gay-Lussac, Avogardo Prout, Herapath, Brown, Waterston, Joule, Maxwell, Cannizzaro, Mendeleev, Faraday, Crookes, Balmer, Michelson, Morley, Röntgen, Becquerel, Thomson, Curie, Marie Sklodovska, Rutherford, Soddy, Planck, Lorentz, Einstein, Thomson, Perrin, Millikan, Hess, Wilson, Geiger, Marsden, Bohr, Franck, Hertz, Aston, Laue, Friedrich, Knipping, Bragg, der Broek, Moseley, Compton, Stern, Gerlach, Goudsmit, Uhlenbeck, Pauli, Raman, Bose, Hamilton, de Broglie, Schrödinger, Born, Heisenberg, Gamow, Davisson, Thomson, Dirac, Oppenheimer, Anderson, Urey, Chadwick, Fermi, Cockcroft, Walton, de Graaff, Lawrence, Livingston, Joliot, Yukawa, Powell, Segre, Chamberlaim, Rabi, Lamb, Kusch, Bethe, Schwinger, Feynman, Jensen, Meitner, Frisch, Titterton, Yang, Lee, Hofstadter, Weisskopf. Leider fehlen Fraunhofer, Kirchhoff, Bunsen, Goldstein, Helmholtz, Frenkel, Iwanenko.; **Boorse, Motz & Weaver: The atomic scientists. A biographical history** 1989; **Ãnderson: The discovery of the electron.** The development of the atomic concept of electricity 1964; Trigg: Experimente der modernen Physik. Schritte zur Quantenphysik 1971, 1984; Bernstein: Elementary Particles and Their Currents 1968; Falkenburg: Metamorphosen des Teilchenkonzepts PdNPiS Bd51 2002 H4 p2-29; Falkenburg: Teilchenmetaphysik 1995[2]; Mercier: Die Idee der Quantentheorie der Wellenfelder, PhysBl8 1952 H10 440-446; Brückner: Zur Ontologie der Elementarteilchen 2015; Kuhlmann: **Ontologie der QFT** PJ15H6 2016 p29-35; Bertotti: Teilchen und Felder PhysBl15 1959 p289; Drell: When is a particle? Physics today 1978 H6 p23-32; Wolchover: Was ist ein Teilchen? SdW4.2021 p12-18, Replik in SdW7.2021 p94; Ñicolas Gisin: Der unbegreifliche Zufall. Nichtlokalität, Teleportation und weitere Seltsamkeiten der Quantenphysik 2014; Kuhlmann: SdW2014 H7 p46; Kuhlmann: PdN 65/4 2016 p38; Teilchen und Felder nicht ontologisch primär. Eher weist Symmetrie auf fun-

damentale Elemente der Ontologie. P̃ower: Introductory quantum electrodynamics 1964; Henley & Thirring: **Elementare Quantenfeldtheorie** 1975 p15 Feld = Matraze = Punktmassen-Federn-Geflecht. Übergang zur QFT: Oszillatoren der geschlossenen Kette sind nicht nur an ihre nächsten Nachbarn, sondern auch an ihre eigene Gleichsgewichtlage gekoppelt:

$$H = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2}[p_n^2 + \Omega^2(q_n - q_{n+1})^2 + \Omega_0^2 q_n^2], \quad \ddot{q}_n = \Omega^2(q_{n+1} + q_{n-1} - 2q_n) - \Omega_0^2 q_n$$

Feld hat dann **"Masse"** Ω_0. **Folland: Quantum field theory. A tourist guide for mathematicians** 2008; **Itzykson & Drouffe: Statistical Field Theory Vol1 From Brownian Motion to Renormalization and Lattice Gauge Theory** 1991; Brezin: Introduction to statistical field theory 2010; Abrikosov, Gorkov & Davis: Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics 1975; **Statistische Feldtheorie** ist ein beliebiges Modell der stat Mechanik, bei dem Feldkomponenten zu den Freiheitsgraden gehören, wo Mikrozustände des Systems auch durch Feldkonfigurationen beschrieben werden. **Polymerfeldtheorie**. Teilchendarstellung $Z(n,V,\beta) = \frac{1}{n!(\lambda_T^3)^{nN}} \prod_{j=1}^n \int D\mathbf{r}_j \exp\left(-\beta\Phi_0[\mathbf{r}] - \beta\bar{\Phi}[\mathbf{r}]\right)$ mit mittlerem Potenzial $\bar{\Phi}[\mathbf{r}] = \frac{N^2}{2}\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \int_0^1 ds \int_0^1 ds' \bar{\Phi}(|\mathbf{r}_j(s) - \mathbf{r}_k(s')|) - \frac{1}{2}nN\bar{\Phi}(0)$ mit harmonischer Bindungsenergie $\Phi_0[\mathbf{r}] = \frac{3k_BT}{2Nb^2}\sum_{l=1}^n \int_0^1 ds \left|\frac{d\mathbf{r}_l(s)}{ds}\right|^2$, beim Gitterabstand b. **Feldtheoretische Darstellung** mit Segment-Dichte-Operator $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = N\sum_{j=1}^n \int_0^1 ds \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(s))$. gibt $\bar{\Phi}[\mathbf{r}] = \frac{1}{2}\int d\mathbf{r}\int d\mathbf{r}' \hat{\rho}(\mathbf{r})\bar{\Phi}(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\hat{\rho}(\mathbf{r}') - \frac{1}{2}nN\bar{\Phi}(0)$. Feldtheorie hat man nach **Hubbard-Stratonovich- oder δ-Funktional-Transformation** $\int D\rho\, \delta[\rho - \hat{\rho}]\, F[\rho] = F[\hat{\rho}]$ mit dem Funktional $F[\hat{\rho}]$ und dem δ-Funktional $\delta[\rho - \hat{\rho}] = \int Dw e^{i\int d\mathbf{r} w(\mathbf{r})[\rho(\mathbf{r}) - \hat{\rho}(\mathbf{r})]}$, mit der Hilfsfunktion $w(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{G}} w(\mathbf{G}) \exp[i\mathbf{G}\mathbf{r}]$. **Feldtheoretische Darstellung der kanonischen Zustandssumme** $Z(n,V,\beta) = Z_0 \int Dw \exp\left[-\frac{1}{2\beta V^2}\int d\mathbf{r}d\mathbf{r}' w(\mathbf{r})\bar{\Phi}^{-1}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')w(\mathbf{r}')\right] Q^n[iw]$, mit $Z_0 = \frac{1}{n!}\left(\frac{\exp\left(\beta/2N\bar{\Phi}(0)\right)Z'}{\lambda^{3N}(T)}\right)^n$ gibt für ein ideales Gas nichtwechselwirkender Polymere und dem Pfadintegral eines freien Polymers $Z' = \int D\mathbf{R} \exp[-\beta U_0(\mathbf{R})]$ im Nullfeld mit elastischer Energie $U_0[\mathbf{R}] = \frac{k_BT}{4R_{g0}^2}\int_0^1 ds \left|\frac{d\mathbf{R}(s)}{ds}\right|^2$, mit dem ungestörten Radius der Gyration einer Kette $R_{g0} = \sqrt{Nb^2/(6)}$. Zustandssumme eines Einzelpolymers im Feld $w(\mathbf{R})$ ist $Q[iw] = \frac{\int D\mathbf{R} \exp\left[-\beta U_0[\mathbf{R}] - iN\int_0^1 ds\, w(\mathbf{R}(s))\right]}{\int D\mathbf{R} \exp[-\beta U_0[\mathbf{R}]]}$. Es gibt Renormierung, Korrelationen heißen **Schwinger-Funktionen** $\sum_{m,n}\int d^dx_1 \cdots d^dx_m\, d^dy_1 \cdots d^dy_n S_{m+n}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n) f_m(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_m)^* f_n(y_1,\ldots,y_n) \geq 0$, deren Eigenschaften durch die Osterwald-Schrader-Theoreme $\int \mathcal{D}\phi F[\phi(x)]F[\phi(\bar{x})]^* e^{-S[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi_0 \int_{\phi_+(\tau=0)=\phi_0} \mathcal{D}\phi_+ F[\phi_+] e^{-S_+[\phi_+]} \int_{\phi_-(\tau=0)=\phi_0} \mathcal{D}\phi_- F[\bar{\phi}_-]^* e^{-S_-[\phi_-]}$ beschrieben werden. G̃reenleaf: Invariant means on topological groups 1969; **Lancaster: Quantum Field Theory for the Gifted Amateur** 2014; Schweber, Bethe & Hoffmann: Mesons and Fields. VolI Fields 1955; Schweber: An introduction to relativistic quantum field theory 1961; Nash: Relativistic Quantum Fields; **Dyson: QFT** 2013; Sadovskii: Quantum Field Theory 2013; **Wightman & Streater: Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie**. PCT 1969; **Ẽdelhäuser & Knochel: Tutorium Quantenfeldtheorie.** Was Sie schon immer über QFT wissen wollten, aber bisher nicht zu fragen wagten 2016 Motiv: a] klass Mechanik und klassische SRT scheitern, wenn $S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}tL \approx h$, nutze Modell QM! b] **Teilchenenergie** $\gg mc^2$ = **Ruheenergie** oder Teilchenzahländerung oder **Umwandlung von Ruheenergie in andere Energieformen**, dann relativistische QT. QFT beachtet SRT und QT! Noether: Invarianz der Wirkung oder Hamiltonfunktion unter Raum-Zeit-Tranlationen bedeutet Erhaltung von Impuls und Energie. Die Translationen werden durch $\vec{p} \sim -i\hbar\nabla$ und $E \sim i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ erzeugt. Gibt für Energie $E = \frac{\vec{p}^2}{2m}$ eines **klassischen freien** Teilchens Schrödingergl

$E\phi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi = H\phi$ und für Energie $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4$ eines **relativistischen freien** Teilchens Klein-Gordon-Gl $\Box\phi + \frac{c^2}{\hbar^2}m^2\phi = 0$ mit Quabla siehe Seite 563 $\Box = \partial^\mu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$, die sich aber nicht als rel Version der Schrödingergl eignet: a] gibt negative Energie wegen 2. Ableitung. b] daher auch negative Wahrscheinlichkeitsdichte, also andere ϕ-Deutung nötig! Wurzel $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\phi = \sqrt{m^2 - \nabla^2}\phi = 0$ liefert nichtlokale Lösung, da kein Polynom des Ableitungsoperators. Begrenzter Ausweg ist Diracgl. **Ausweg** ist **I] Umdeutung der Wellenfunktion** ψ als **quantenmechanisches Feld** mit zugehörigem Impuls $\Pi(\vec{x}, t) =$ **kanonische/'zweite' Quantisierung**, wobei Ortsoperator wieder zum zahlenwertigen Parameter (wie die Zeit in der klassischen QM) degradiert wird, oder **II] alternativ Pfadintegralquantisierung** = komplett Lorenzt-invariant notierbar, statt Feldoperatoren nimmt man hier **klassisch zahlenwertige Felder**. Grundlegende Konzepte bereits bei Skalarfeldern $s = 0$ erkennbar, wo mit Feynman-Diagrammen Streuamplituden und -querschnitte berechenbar. Spinorfelder $s = \frac{1}{2}$ und Vektorfelder $s = 1$ vernebeln nur den Einstieg. Berezin: The metod of second quantization 1966; Nimm natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$, womit alles in Einheiten der Energie gemessen wird, $\hbar \sim E{\cdot}t$: [Zeit] =$[t]$ = $[1/E]$ =1/[Energie]. Wegen $[c] \sim$ [Abstand]/[Zeit] ist [Abstand]=[Zeit]=1/[Energie]. Daher $E^2 = \vec{p}^2c^2 + m^2c^4 \to \vec{p}^2 + m^2$ und $E = m$ und $\Box = \partial^\mu\partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ und $\Box\phi + m^2\phi = (\Box + m^2)\phi = 0$. Kreiswellenzahl des Photons $\omega = p = E$ wegen $m = 0$. Neue Bezeichnung der **eckigen Klammer als Energieexponent = Logarithmus einer Größe:** $[X] = n$ bedeutet, dass X Einheiten Energie^n. Also $[m] = [\vec{p}] = 1$ und $[\hbar] = [c] = 0$ und $[\vec{x}] = [t] = -1$. **Kaku: Quantum field theory. A modern introduction** 1993 pdf im Netz; Sterman: An introduction to quantum field theory 1994; **Schwabl: Fortgeschrittene Quantenmechanik II**, 2008[5]; A. Zee: Quantum Field Theory in a Nutshell 2010[2]; **Rebhan: Quantentheorie; Rebhan: QFT; Schwabl: Quantentheorie;** Wilkens Skript TeX/ introductions/ Vorlesungsskript/ Quanten/ qsmain.pdf Scherz; Rollnick; Katze und Leiter: $E - \hbar\omega(a^-\Psi) \to E(\Psi) \to E + \hbar\omega(a^+\Psi)$ Flügge, Siegfried: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd4 Quantentheorie I 1964; Flügge: Mathematische Methoden der Physik II 1980 enthält Gruppentheorie und Quaternionen, Spinoren;

Schwindt: Tutorium QM 2013; Rennert: Einführung in die Quantenphysik - Experimentelle und theoretische Grundlagen mit Aufgaben, Lösungen und Mathematica-Notebooks 2013; **Elbaz: Quantum.** The Quantum Theory of Particles, Fields and Cosmology 1999; Schiff: Quantum mechanics 1955; Kiefer: Quantentheorie. Keine Einführung 2011; Beller: Quantum Dialogue. The Making of a revolution. Science & its conceptual foundations 1999; Joos et al: Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory 2003; Greenberger & Zeilinger eds: Fundamental problems in quantum theory. Ann NY Acad Sci 755 1995; Bouwemeester, Ekert, Zeilinger: The Physics of Quantum Information. Quantum Cryptography, Quantum Teleportation, Quantum 2001; Peres: Quantum Theory: Concepts and Methods 2008; **Schpolski: Atomphysik** 1+2 1944, 1951; Peter Schmüser: Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 1. Quantentheorie 2012; **Griffiths: QM** 2005[2]; Feynman III; Wilkens-Skript; **Mitter: QT** 1979; Schwabl;

Skripte: http://physik-skripte.de oder **http://users. ph. tum. de/rwagner/physik/skripten.html** http://www. physicsforums. com/ http:// constanze. materials. uni-wuppertal. de/ Vorlesungen. html; **Krey & Owen: Basic Theoretical Physics.** A Concise Overview 2009; **Weinberg: Lectures on Quantum Mechanics** 2012, erweitert 2015[2] Shut up and calculate! PhysJ15 2016 H1 p64f; **Weinberg: Quantenmechanik** 2015;

Goldene Regel von Fermi: Übergangsrate ist

$$\Gamma_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\rho(E_f)\,|V_{fi}|^2$$

mit Übergangsmoment $|V_{fi}|$ und Energie-Niveau-Dichte der finalen Zustände $\rho(E_f)$. Davydow: QM 1974

p295, Greiner 4; Merzbacher: Quantum mechanics 1998; Schubert & Weber: QT2 Kap22.3; Englman: Non-radiative Decay of Ions and Molecules in Solids 1979; Sheng Hsien Lin ed: Radiationless transitions 1980; Kupka: Transitions in Molecular Systems 2008; McGlynn, Azumi & Kinoshita: Molecular Spectroscopy of the Triplet State 1969; Zahlan ed: The Triplet State 1967; Arndt, Wien: Quanteninterferometer - luftleer gepumptes Metallrohr, durch das die Quantenteilchen (Fulleren mit 60 m_C, Quantenmann mit 4000 $m_H = 5.5 m_{Fulleren}$) ungestört fliegen, bis sie auf ein Hindernis treffen -ein Gitter mit winzigen, nanometerkleinen Lücken. Für die Quanten wirkt dieses Gitter wie eine Wand mit mehreren Türen. Als Teilchen können die Quanten nur durch eine der vielen Türen fliegen - ebenso wie ein Mensch stets nur durch eine Tür gleichzeitig spazieren kann. Anders ist es, wenn sie in die Gestalt einer Welle schlüpfen. Dann können sich die Quanten so benehmen, als ob sie durch zwei Türen gleichzeitig gehen. Unklar ist bis heute, inwieweit auch große, makroskopische Gebilde dieses Zwittertum zeigen, ob auch Viren, Bakterien oder gar Menschen dem Welle-Teilchen-Dualismus unterliegen.

Quantisierungen:

1] Gemäß Bohr-Sommerfeld-Quantisierungs-Vorschrift gibt es wegen der Heisenberg'schen Unschärferelation 1927 eine **kleinste Phasenraum-Exkursion**! Siehe Seite 362. **EBK-Regel** = Einstein-Brillion-Kramers-Quantisierungsregel. Gignoux & Silvestre-Brac: Solved problems in Lagrangian and Hamiltonian mechanics 2009 p285; Daher kann eine Gesamt-Wirkung nur ein ganzzahliges Vielfaches davon sein. **c-Zahlen** = commutating numbers = complex numbers $\in \mathbb{C}$ = classical theory. **q-Zahlen** = quantum numbers/Operatoren = quaternionic numbers = nicht kommutierende Größen = Quantentheorie. Die besten Einführungen zur Quantisierung: **Heisenberg: Physikalische Prinzipien der Quantenmechanik** 1929, 1950 **Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien Bd2** 1931[5]; Ẽbechert & Gerthsen: Atomphysik. Theorie des Atombaus 1963[4]; Adams: Algebraic approach to simple quantum systems with applications to perturbation 1994; Rebhan: Quantenmechanik 2008; 1] Ritz'sches **Kombinationsprinzip** 1908 analog Kepler-Gesetz. 2] **Korrespondenzprinzip** Bohr 1913 qualitative/vorläufige Atom-Dynamik. 3] Verschärfung in **quantitative Atomdynamik durch die Heisenberg'sche Quantenmechanik** 1925; Pieper: Quantenmechanik Einführung in die mathematische Formulierung 2020; Wick: Quantenmechanik mit Concept-Maps Mit Struktur und Übersicht besser verstehen und lernen 2020; Franz: Quantentheorie 1970; Erdey-Gruz: Grundlagen der Strukur der Materie 1967; Rice & Teller: The structure of matter 1949; Landau, Achieser, Lifschitz: Mechanik und Molekularphysik 1970; **Dürr & Lazarovici: Verständliche Quantenmechanik. Drei mögliche Weltbilder der Quantenphysik** 2018; Hertel: Quantum Theory and Statistical Thermodynamics : Principles and Worked Examples 2017; Kok: A First Introduction to Quantum Physics 2020; Shifman: Quantum Field Theory II 2019; Filk: Quantenmechanik (nicht nur) für Lehramtsstudierende 2019; **Susskind & Friedman: Quantenmechanik. Das Theoretische Minimum.** Alles, was Sie brauchen, um Physik zu treiben 2020; Kramers: Theorien des Aufbaues der Materie. I. Die Grundlagen der Quantentheorie. Hand- und Jahrbuch der chemischen Physik, Band 1, Abschnitt 1 1933; Norbert Wiener besuchte Born jährlich zwischen 1922 bis 1927 statt Matrizen braucht man Operatoren! Born und Wiener: Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und nicht periodische Vorgänge ZfPhysik36 1926 174-186 Die Matrizenanalysis versagt in Fällen aperiodischer Bewegungen. Daher wird hier eine neue Darstellung der Quantengesetze gegeben, die auf der Anwendung des allgemeinen Begriffs eines linearen Operators beruht.; **Dirac: Zur Quantentheorie des Elektrons** In Falkenhagen: Quantentheorie und Chemie 1926 p85-94; **Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien Bd2** 1931[5] p209ff; Fermi: Anwendung der statistischen Methode auf die Probleme des Atombaus Ebenda p95-111; Hund: Hätte die geschichte der Quantentheorie auch anders ablaufen können? PhysBl31 1975 Jordan: Fünfzig Jahre Quantenmechanik PhysBl31 1975 p597-602; Lanczos: Die Poisson'sche Klammer in der Quantenmechanik PhysBl31 1975 p301-308; Jordan: Die Anfangsjahre der Quantenmechanik - Erinnerungen PhysBl31 1975 p97-103 auch In **Mehra, Jagdish: Symposium on the development of the physicist's conception of nature** 1973 = PhysBl31

1975 p137; **Hund: Atom- und Quantenphysik** 1950; **Enz & Mehra: Physical Reality and Mathematical Description.** Dedicated to Josef Maria Jauch on the Occasion of his 60th Birthday 1974 pX Fallzeit eines Körpers aus gestoppter Kreisbahn $\frac{T}{\sqrt{32}}$. Weizsäcker: Geometrie und Physik bei Hugo Dingler. Rohrlich: Nichtlokale Natur der elektromagnetischen Wechselwirkung. Stueckelberg: Anti-Gravitation a la Nordström a] träge Masse. b] passive Gravitationsladung. c] aktive Gravitationsladung.; J̃auch: Foundations of quantum mechanics 1968; Ludwig: Deutung des Begriffs 'physikalische Theorie' und axiomatische Grundlegung der Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik durch Hauptsätze des Messens. LNP4 1970 Frenkel: Einführung in die Wellenmechanik 1929; L̃udwig: Die Grundlagen der Quantenmechanik 1954; Darrow: Elementare Einführung in die Quantenmechanik 1933; Persico: Fundamentals of quantum mechanics 1936, 1950; **Rojansky: Introductory Quantum Mechanics** 1938; G̃erlach: Die experimentellen Grundlagen der Quantentheorie 1921; R̃uark & Urey: Atom, molecules and quanta 1930; B̃ack & Lande: Zeemaneffekt und Multiplettstruktur der Spektrallinien 1925; H̃und: Linienspektren und periodisches System der Elemente 1927; Condon & Morse: Quantum mechanics 1929; S̃wanson: A concise introduction to quantum mechanics 2018; **Schpolski: Atomphysik** 1+2 1944, 1951; Sakurai & Napolitano: Modern Quantum Mechanics 1994, 2017[2]; Sakurai & Napolitano: Advanced Quantum Mechanics 1994, 2017[2]; Ludyk: Quantenmechanik nur mit Matrizen 2020; Ẽvans & King: Theories of Matter, Space, and Time. Classical theories 2017; Ẽvans & King: Theories of Matter, Space, and Time. Quantum theories 2012; Baker: Atoms and Photons and Quanta, Oh My! Ask the Physicist about Atomic, Nuclear, and Quantum Physics. IoP Concise Physics 2000; Likharev: Quantum Mechanics: Lecture notes 2018; Likharev: Quantum Mechanics. Problems with solutions. Problems with solutions 2018; Jelitto: QuantenmechanikI, Theoretische Physik Bd4 1993;[3]; Jelitto: QuantenmechanikII, Theoretische Physik Bd5 1984, 1988; Kahan: Quantentheorie. Eine Einführung in die Theorie der Materie und der Strahlung 1963; Geiger & Scheel: HdP23 1926 p-278 Pauli: Quantentheorie, p641-775 Franck & Jordan: Anregung von Quantensprüngen durch Stöße 1926; Lawden: The mathematical principles of quantum mechanics 1967; **Houston: Principles of quantum mechanics. Nonrelativistic wave mechanics with illustrative applications** 1951; Slater: Quantum theory of matter 1951; Flügge: HdP Bd5.1 Pauli Quantenmechanik und QFT 1956; Heisenberg: Der unanschauliche Quantensprung PhysBl 1946 4-6; **Blochinzew: Grundlagen der Quantenmechanik** 1944, 1953; **Dawydow: Quantenmechanik** 1963, 1974; Fick: Einführung in die Grundlagen der Quantenmechanik 1968; T̃omonaga: Quantum mechanics. Bd1 Old quantum theory. Bd2 ??? 1962; B̃ates ed: Quantum theory. Bd1 Elements, Bd2 Aggregates of particles, Bd3 Radiation and high energy 1962; Sokolow, Loskutow, Ternow: Quantenmechanik 1964; Yourgrau & van der Merwe eds: Perspectives in Quantum Theory. Essays in Honour of Alfred Lande 1980; Park: Introduction to the Quantum Theory 1964, 1974; Rollnik: Quantentheorie 1. Grundlagen, Wellenmechanik, Axiomatik 1993; Rollnik: Quantentheorie 2. Quantisierung und Symmetrien physikalischer Systeme, relativistische Quantentheorie 2003; K̃ramers: Die Grundlagen der Quantenmechanik 1937; K̃ramers: Quantentheorie des Elektrons und der Strahlung 1937; Kramers: Quantum mechanics 1957; Park: Classical Dynamics and Its Quantum Analogues 1990; Park: The Fire Within the Eye. A Historical Essay on the Nature and Meaning of Light 2000; Park: The Grand Contraption. The World as Myth, Number, and Chance 2000; Park: The How and the Why. Essay on the Origins and Development of Physical Theory 1990; Park: The Image of Eternity. Roots of Time in the Physical World 1980; Roman: Advanced Quantum Theory. An Outline of the Fundamental Ideas 1965; Fermi: Notes on Quantum Mechanics 1961; Kursunoglu: Modern quantum mechanics 1963; Uhlmann: Die Grammatik der Quantenwelt. Quantenphysik – Zufall – Zustandsraum 2017 42 Seiten; Ford: Wie klein ist Klein? Eine kurze Geschichte der Quanten 2004; L̃ande: Foundations of Quantum Theory 1955; Faye: Niels Bohr: His Heritage and Legacy 1991; Strathern: Bohr und die Quantentheorie. Bohrs Atommodell und seine Quantentheorie schufen eine neues Vertsändnis der modernen Physik 1999; S̃tolzenburg, Sexl, Meyenn: Niels Bohr 1885-1962. Der Kopenhagener Geist in der Physik 1985; Rozental: Schicksalsjahre mit Niels Bohr. Erinnerungen an den Begründer der modernen Atomtheorie 1999; M̃arch: Die Grundlagen der Quantenmechanik 1931; March: Einführung in die Atomphysik. ne allgemeinverständliche Einführung. 1933; M̃arch: Quantum theory of particles and waves 1951; Hund: Geschichte der Quantentheorie 1984[3];

Eisenbud: The Conceptual Foundations of Quantum 1971; Scadron: Advanced quantum theory and its application through Feynman diagrams 1979; Green: Quantenmechanik in algebraischer Darstellung 1965 Born Matrizenmechanik; **Polkinghorne: Quantentheorie. Eine Einführung** 2011 Mathematischer Anhang;

$$\frac{e^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r},\ e^2 = mv^2r,\ me^2r = (mvr)^2 = L^2,\ E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r} = \frac{U}{2}$$

Siehe auch **Virial-Theorem** Seite 341. Bohr'sche Quantisierung des Drehimpulses liefert die Balmer-Serie:

$$L = mvr = n\hbar,\ n = 1, 2, \ldots,\ me^2r = L^2 = (n\hbar)^2,\ \frac{1}{r} = \frac{me^2}{(n\hbar)^2},\ E = -\frac{e^4m}{2\hbar^2}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$ mit $n_2 \geq n_1 + 1$ Bell'sche Ungleichung ebenfalls im Anhang. **Schwindt: Tutorium QM** 2013;

2] WKB. Halbklassisch.

3] Nichtkommutativität der Observablen-Algebra. Nolting: Bd5/1&2:

$$\vec{p} \to \frac{\hbar}{i}\nabla; \quad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad p^\mu p_\mu \to -\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu = \hbar^2\Box$$

$$i\hbar\Psi_{,t} = H\Psi, \quad \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r})\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}, \quad \rho = \Psi^*\Psi$$

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\partial_{,x} = \frac{\hbar}{i}\nabla, \quad E = \hbar\omega \to \hat{H} = i\hbar\partial_{,t}$$

$(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi = 0$ Quabla siehe Seite 563

4] Pfadintegral-Quantisierung Wiener: Differential-space J Math Phys 2 1923 p131f, Gregor Wentzel und Norbert Wiener/Max Born 1924, Dirac 1937, Feynman 1942, Kleinert 1980 Pfadintegralformulierung: Zee: Quantum Field Theory in a Nutshell 2003 p7ff; Der Konfigurationsraum wird nur im klassischen Sinn, also aus der Ferne oder im statistischen Mittel, grobgekörnt kontinuierlich durchlaufen. Mikroskopisch existiert aber wegen der Unschärfe kein Ort des Teilchens/keine glatte Trajektorie/kein Ableitungsbegriff. Man beobachtet die Teilchenbahn makrokopisch über eine Zeitdauer T. Daher muss der Konfigurationsraum grobgekörnt werden, d.h. darf in nur endlich groß Stücke zerhackt werden, wobei jedoch der Zustandsvektor innerhalb dieses kleinsten Zeitschritts $\delta t = \frac{T}{N}$ unitär ändert, per Propagator = Greenfunktion. Aus $\langle q_F|e^{-iHT}|q_I\rangle = \langle q_F|e^{-iH\delta t}\, e^{-iH\delta t} \ldots e^{-iH\delta t}|q_I\rangle$ mit den nahrhaften $1 = \int \mathrm{d}q|q\rangle\langle q|$ folgt $\langle q_F|e^{-iHT}|q_I\rangle = (\Pi_{j=1}^N \int \mathrm{d}q_j)\langle q_F|e^{-iH\delta t}|q_{N-1}\rangle\, \langle q_{N-1}|e^{-iH\delta t}|q_{N-2}\rangle\, \ldots \langle q_1|e^{-iH\delta t}|q_I\rangle$. Wegen $\langle q|p\rangle = e^{iqp}$ gilt für die Bewegung eines freien Teilchen in einem Kasten $\langle q_{j+1}|e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t}|q_j\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}\langle q_{j+1}|e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t}|p\rangle\langle p|q_j\rangle$ $= \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t}\langle q_{j+1}|p\rangle\langle p|q_j\rangle = \int \frac{\mathrm{d}p}{2\pi}e^{-i\frac{\hat{p}^2}{2m}\delta t}e^{ip(q_{j+1}-q_j)}$. Kleinster Zeitschritt bleibt stets endlich groß! **Die Unschärfe zwingt zur Diskretisierung des Konfigurationsraums oder des Zeitschritts und verbietet eine Grenzwertbildung** $\lim_{\delta t\to 0}$. Dies bedeutet im wahrsten Sinne **Quantisierung** des Raumes. Nach jedem dieser Zeit/Raumkästen folgt eine von dieser Bewegung bis auf Unitarität maximal unabhängige Bewegung. Daher das Produkt der Zeitentwicklung. Dann läuft das Teilchen wieder zurück. Dies wird beliebig oft wiederholt, bedeutet eine **Funktionalintegration über alle Wege im Konfigurationsraum**. Feynman: QED - die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 hier werden die beliebigen Wege jedes Photons betont; Honerkamp: Stochastische dynamische Systeme 1990 Kap9 Funktionalintegrale in der Stochastik; Mattuck: A guide to Feynman diagrams in the many-body problem 1967; P̃opov: Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics 1983; The path integral formulation of quantum mechanics is a description of quantum theory that generalizes the action principle of classical mechanics. It replaces the classical notion of a single, unique classical trajectory for a system with a sum, or functional integral, over an infinity of quantum-mechanically possible trajectories to compute a quantum amplitude. **in contrast to classical mechanics, not only does the stationary path contribute, but actually all virtual paths between the initial and the final point also contribute:** $\mathcal{D}\mathbf{x}$ denotes integration over all paths

$\mathbf{x}$ mit $\mathbf{x}(0) = x$ where Z is a normalization factor. Here S is the action, given by $S[\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}] = \int dt\, L(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$. Dirac's quantum action was, for most cases of interest, simply equal to the classical action, appropriately discretized. This means that the classical action is the phase acquired by quantum evolution between two fixed endpoints. He proposed to recover all of quantum mechanics from the following postulates: a] The probability for an event is given by the squared modulus of a complex number called the 'probability amplitude'. b] The probability amplitude is given by adding together the contributions of all paths in configuration space. c] The contribution of a path is proportional to $e^{iS/\hbar}$, where S is the action given by the time integral of the Lagrangian along the path. Antoci and D.-E.Liebscher: The Third Way to Quantum Mechanics is the Forgotten First. Annales Fond. Broglie 21 (1996) 349;

In order to find the overall probability amplitude for a given process, then, one adds up, or integrates, the amplitude of the 3rd postulate over the space of all possible paths of the system in between the initial and final states, including those that are absurd by classical standards. In calculating the probability amplitude for a single particle to go from one space-time coordinate to another, it is correct to include paths in which the particle describes elaborate curlicues, curves in which the particle shoots off into outer space and flies back again, and so forth. The path integral assigns to all these amplitudes equal weight but varying phase, or argument of the complex number. Contributions from paths wildly different from the classical trajectory may be suppressed by interference (see below).

Maggiore: A Modern Introduction to Quantum Field Theory 2005 Kap9;

Pfanner: Pfadintegrale https://itp.uni-frankfurt.de/ hees/faq-pdf/Pfadintegrale.pdf Ramond: Field Theory. A Modern Primer 1981; Everts, Graz 2004 pdf; Hund: Geschichte der Quantentheorie 1975, $\tilde{1}984^3$; Schilcher: Theoretische Physik kompakt für das Lehramt 2010 pIX; Quantisierungen Schulman: Techniques and application to path integration 1981; Laurie M Brown: Feynman's thesis - q new approach to quantum theory 2005 mit Space–time approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics, Reviews of Modern Physics 20 (1948), 367–387, Kleinert: Pfadintegrale in der Quantenmechanik, Statistik und Polymerphysik oder Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets 2010^5; Christian Beck: SPATIO-TEMPORAL CHAOS AND VACUUM FLUCTUATIONS OF QUANTIZED FIELDS

5] Geometrische Quantisierung: Simms & Woodhouse: Lectures on Geometric Quantization LNP53 1976; Hurt: Geometric Quantization in Action. Applications of Harmonic Analysis in Quantum Statistical Mechanics and Quantum Field Theory 1982; Woodhouse: Geometric quantization 1992; Sniatycki: Geometric Quantization and Quantum 1980, 2013; **Kleinert: Pfadintegrale** in Quantenmechanik, Statistik und Polymerphysik 1993 Referenzen zur geometrischen Quantisierung p39;

6] Stochastic quantum mechanics: involves the assumption of spacetime stochasticity, the idea that the small-scale structure of spacetime is undergoing both metric and topological fluctuations, John Archibald Wheeler Quauntum foam.

Physics Reimagined: New Ways to Present Modern Physics, http://www.physicsreimagined.com. Physics Circus, http://www. physicscircus. com. Quantum Made Simple, http://www. quantummadesimple.com. Supra2011 superconductivity webpage, http://www.superconductivity.eu. SupraDesign.fr, http:// www. supradesign. fr. "The Eiffel Tower is levitating!", http://www. supracon ductivite.fr/en/index.php# samuser-tour. MagSurf, the University of Paris 7 superconducting hoverboard, http://www.youtube. com/ watch?v =_F-VVmMD4_k&feature=player_embedded. Quantum foundations concerns the still unanswered mysteries at the heart of quantum mechanics, the theory that describes the peculiar and probabilistic interactions of particles at very small scales. **Bethe & Salpeter: Quantum Mechanics of One- And Two-Electron Atoms** 1957 = HdP35 1957 pp88-436; Die Quantenphysik regiert nicht nur die Welt der Atome und Moleküle, auch makroskopische supraleitende Stromkreise gehorchen ihren bizarren Gesetzen. Sie zeigen das seltsamste aller Quantenphänomene: die Verschränkung, deren Modellierung durch Tensorprodukte der Zustandsfunktionen passiert. In der Quantenwelt können sich Objekte derart miteinander verbinden, das sie eine Einheit bilden: Egal wie weit sie voneinander entfernt sind, wissen sie was ihrem Partner widerfährt.

Ein Phänomen nur auf atomaren Skalen wirkt? Nein, zeigen nun die ersten verschränkten Mikroschwingsysteme. John Jost: Nature Bd459, p683 Paul-Falle; Martinis Verschränkte Josephson-Phasenqubits liefern ein Bell-Signal; **A. Zajonc: Lichtfänger, 2008;** Licht und Subjekt sind wesensgleich, beide unsichtbar aber erzeugen die Sicht. Beide unterliegen einem grundsätzlichen Kommunikationsprozess. Das physikalische Licht als Photonen ist nicht nur der Überträger der Information in der QED beispielsweise, sondern Konstituent der Materie. Licht ist Geist.

Michael Esfeld: Einführung in die Naturphilosophie Einführung in die Naturphilosophie 2011[2]; Bavink & Fierz: Ergebnisse und Probleme der Naturwissenschaften. Eine Einf. in d. heutige Naturphilosophie 1947; **Griffiths: QM** 2005[2]; Naturphilosophie versucht, die natürliche Welt als Ganzes zu ergründen. Ihre Wurzeln hat sie bereits in der griechischen Antike bei den Vorsokratikern. Seit dem Beginn der Neuzeit stützen sich Naturphilosophen auf die empirischen Naturwissenschaften - vor allem auf die Physik. Heute gelten folgende Fragen als zentral für die Naturphilosophie: Was sind Objekte? Was sind Raum und Zeit? Was bestimmt die Richtung des Zeitpfeils? Was sind die Grundlagen von Kausalität und Naturgesetzen? Die Quantenphysik wirft eine Reihe von traditionellen philosophischen Antworten auf diese Fragen über den Haufen. Im Alltag wie auch in der klassischen Physik geht man von einzelnen Objekten aus. Diese 'Teilchen' sollen stets einen klar definierten Ort einnehmen und eine eindeutig bestimmte Bahn in Raum und Zeit haben - sie sind 'wohlbestimmt'. Die Quantenphysik, die sich in erster Linie mit dem Mikrokosmos beschäftigt, erlaubt hingegen Zustände von Objekten, in denen diese keinen »definiten« Ort und damit auch keine solche Bahn in Raum und Zeit haben. Allgemein gesagt sind wohlbestimmte numerische Werte von Eigenschaften in der Quantenphysik die Ausnahme. Stattdessen besteht der Zustand eines Quantenobjekts in der Regel in einer Überlagerung oder Superposition aller möglichen Werte der betreffenden Eigenschaften. Ferner sind die Werte beziehungsweise Werteverteilungen gewisser Eigenschaften miteinander korreliert, das heißt, sie sind nicht unabhängig voneinander bestimmbar. Das berühmteste Beispiel bilden **Ort = Teilchen-Idee** und Geschwindigkeit (genauer: der **Impuls = Wellen-Idee**) eines Quantenobjekts: Objekt ist unendlich groß und nicht mehr lokalisiert. Teilchen hat keinen Ort mehr. Je mehr sich die Werteverteilung des Orts einem definiten numerischen Wert annähert, desto breiter streuen die Werte seiner Geschwindigkeit. Das ist eine Konsequenz von Heisenbergs berühmter Unbestimmtheitsrelation. Doch damit nicht genug: Nicht nur sind manche Eigenschaften eines Quantenobjekts voneinander abhängig. Vielmehr ist es, wenn man ein Quantensystem betrachtet, das aus mehreren Teilobjekten besteht, in der Regel so, dass den Teilobjekten gar nicht je für sich Zustände zukommen. Dieser Sachverhalt wurde erstmals von Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen 1935 in einem Gedankenexperiment aufgezeigt und wird heute als Verschränkung bezeichnet, von Einstein auch 'spukhafte Fernwirkung' $c = \infty$ genannt. **Kiefer: Albert Einstein, Boris Podolsky, Nathan Rosen. Kann die quantenmechanische Beschreibung der physikalischen Realität als vollständig betrachtet werden?** 2015; Mückenheim: Das EPR-Paradoxon und die Unbestimmtheit der Realität, PhysBl39 1983H10 p331-336; **Šhankar: Principles of Quantum Mechanics** 2008[2] wie Schwindt. Gute Kapitel zum **Pfadintegral**.; **Pade: Quantenmechanik zu Fuß. Bd1 Grundlagen, Bd2 Anwendungen und Erweiterungen 2012** Experimente zur Verschränkung, QI, Dekohärenz, Bell'sche Ungleichungen; Audretsch: Verschränkte Welt. Faszination der Quanten 2002 p88ff Erich Joos p169-195; Schwindt: Tutorium QM p140ff; Zeh: Physik ohne Realität 2012 p75ff; Steeb: Hilbert Spaces, generalized functions and quantum mechanics 1991; Res Jost: QT; Süßmann: Einführung in Quantenmechanik. Grundlagen. BI Bd9/9a 1963; Eder: Quantenmechanik I. BI 264/264a 1968; Mitter: Quantentheorie BI-Hochschultaschenbücher Bd 701/701a 1969; **Hittmair: Quantentheorie** 1972 WAB Potsdam 73/2746 ; **Grau: Aufgaben zur QM**; **Constantinescu & Magyari: Problems in Quantum Mechanics** 1971; Galitzki: Exploring Quantum Mechanics: A Collection of 700+ Solved Problems for Students, Lecturers, and Researchers 2013; Hajko & Schilling: Elektrik. Optik. Quantentheorie 1985; Steeb: Problems and solutions in quantum computing and quantum information 2007[2]; Basdevant: The quantum mechanics solver: how to apply quantum theory to modern physics, 2006[2]; Tamvakis: Problems and solutions in quantum mechanics, Cambridge 2005; Goldman & Kriwtschenkow: Aufgabensammlung zur Quantenmechanik 1963; Mavromatis:

Exercises in quantum mechanics. A collection of illustrative problems and their solutions, 1992[2]; Goldman: Problems in quantum mechanics 1961; Squires: Problems in quantum mechanics with solutions 1993; Flügge: Rechenmethoden der Quantentheorie I. Elementare Quantenmechanik dargestellt in Aufgaben und Lösungen 1999[6]; Flügge: Mathematische Methoden der Physik II 1980 enthält Gruppentheorie und Quaternionen, Spinoren; ter Haar: QT. Einführung und Originaltexte von Planck, Einstein, Rutherford, Bohr, Frank & Hertz, Pauli, 1967; Ludwig: Wellenmechanik. Einführung und Originaltexte von de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Born & Jordan, 1968; F̃riebe et al.: Philosophie der Quantenphysik. Einführung und Diskussion der zentralen Begriffe und Problemstellungen der Quantentheorie für Physiker und Philosophen 2014; Mohsen Razavy: HEISENBERG'S QUANTUM MECHANICS 2011; Ẽidemüller: Quanten – Evolution – Geist. Eine Abhandlung über Natur, Wissenschaft und Wirklichkeit 2016 SdW 7.17 p86f; Albert: QM and experience 1992; Fine: The shaky game. Einstein, realism, and the QT 1996; **Bohm: Quantum theory** 1951; https://www.pro-physik.de/nachrichten/der-andere-quantenmechaniker Bricmont, Making Sense of Quantum Mechanics 2016; Passon: Bohmsche Mechanik 2004; Dürr: Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik 2001; Walther: 100 Jahre Quantenphysik. Quantenphysik zwischen Theorie und Anwendung PhysBl Dez2000 p57; Th. Walther und E. S. Fry, Ein neues Einstein-Podolsky-Rosen-Experiment PhysBl 53 p229 1997; J. S. Bell: Wider die 'Messung' PhysBl48 p267 1992; Mückenheim: Das EPR-Paradoxon und die Unbestimmtheit der Realität, PhysBl39 p331 1983; Heisenberg: Die Entwicklung der Deutung der Quantentheorie, PhysBl12 289 1956; **D.Z. Albert: David Bohms QT.** SdW H7/1994 p70-77 Die Standardformulierung der Quantenmechanik sowie die meisten neueren Vorschläge zum Messproblem sind nichtlokal. Nach einer gut begründeten Überlegung von Bell muss sogar jede Theorie, die mit den statistischen Vorhersagen der Quantenmechanik und einigen naheliegenden Annahmen über die physikalische Realität übereinstimmt, zwangsläufig nichtlokal sein SdW März 1988 p78; **Maudlin: Quantum non-locality and relativity: Metaphysical intimations of modern physics** 2011; Manjit Kumar: Quantum: Einstein, Bohr and the Great Debate About the Nature of Reality;

Avishai, Ekstein & Moyal: Is the Maxwell Field Local? JMathPhys13 1139 (1972) **Lokal unabhängig = Einstein'sche Kausalität und maximale Signalgeschwindigkeit**. div $\vec{B} = 0$ auf einer Sphäre ist nur instantan, also raumartig zu erfüllen.; **Lokale Theorie, z.B. QM mit verborgenen Parametern, führt auf Bellsche Ungleichung, die aber von (nichtlokaler) QM und Experimenten widerlegt wird.** Physics Today März & April **51** 1998; Siehe Blaylock: The EPR paradox, Bell's inequality, and the question of locality, AmJPhys78 p111 2010. **Healey: Gauging What's Real. The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories** 2007; Georgi: Vereinheitlichung der Kräfte, SdW 1981 H6, p70-93; **Unparticle physics**. Nichtelementarteilchenphysik 2007. R̃es Jost: The general theory of quantum fields 1965; B̃ogoliubov: Theory of dispersions 1961; Emch: Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory 1972; S̃teinmann: Perturbative quantum electrodynamics and axiomatic field theory 2000; **Buchholz: QFT ohne Felder** PhysJ7 2008 H8/9 p45-50; Buchholz: Current trends in axiomatic quantum field theory arxiv:hep-th/9811233v2; Buchholz & Summers: Scattering theory in rel QFT. Fundamental concepts and tools arxiv:mat-ph/0509047; **Haag: Rolle der Quantenfeldtheorie in der Physik**, PhysBl26 1970 529-535 extrem großer mathematischer Aufwand, kaum experimenteller Ertrag; **Haag 1922-2016 Einstein'sches Lokalitätsprinzip**, indem Raumzeitgebieten Operatoren zugeordnet werden. **Algebraische Quantenfeldtheorie liefert lokale Quantenphysik = Teilchenidee**. **Haag: Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras** 1996; Zeidler: Quantum Field Theory Vol I. **A Bridge Between Mathematicians and Physicists** 2006 Axiomatische QFT p868ff; **Wightman & Streater: Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie**. PCT 1969; Ãraki: Mathematical Theory of Quantum Fields 1999; Iagolnitzer: Scattering in quantum field theories. The axiomatic and constructive approaches 1993; Brunner: Connection between Bell nonlocality and Bayesian game theory, Nature Communications 4, Article number: 2057, Harsanyi, J. C. Games with incomplete information played by Bayesian players. Manage. Sci. 14, 159–183 (Part

I): 14 (5) 320-334 (Part II), 14 (7): 486-502 (Part III), (1967).

Bell: Speakable and unspeakable in quantum mechanics 2008[2]; **Bell: Sechs mögliche Welten der Quantenmechanik. Mit einer Einführung von Alain Aspect** 2012 ebook; **Deutungen:** 1] **Kopenhagener Deutung** Bohr, Heisenberg. Die messbaren Eigenschaften eines Atoms bilden demnach dessen Quantenzustand durch Matrix oder Wellenfunktion beschrieben, die alle möglichen Messresultate umfasst. Kontakt zur Realität stellt die Born'sche Regel her, liefert zu einem gegebenen Quantenzustand messbare Wahrscheinlichkeiten. Durch die Messung verursacht der Beobachter den Kollaps der Wellenfunktion zu einem neuen Zustand, der das tatsächliche Messergebnis beschreibt. Der augenblickliche Kollaps erlaubt Wirkungen, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten. 2] **Die Führungsfeld-Deutung:** Bohm, Albert Einstein. Born über Schrödinger, PhysBl17 1961 85f; **Born: Physik im Wandel meiner Zeit** 1957 p133ff Schrödinger: Die einzige Realität in der physikalischen Welt sind Wellen. Es gibt keine Partikel und keine Energiequanten $h\nu$ usw. Reales Quantenfeld steuert die Bewegung eines Teilchens. N Teilchen bewegen sich in einem abstrakten Raum mit $3N$ Dimensionen. Führungsfeld übt augenblickliche Fernwirkung $c = \infty$ über beliebige Distanzen aus. 3] **Vielwelten-Deutung**, ohne Kollaps der Wellenfunktion. postuliert einen einzigen Quantenzustand der Welt, der sich kontinuierlich und deterministisch entwickelt. Stellt ein Experiment fest, welchen Teil eines Doppelspalts ein Elektron passiert hat, so kollabiert nicht der Quantenzustand auf einen Spalt, sondern die Welt spaltet sich in zwei Zweige auf. Wir, die Beobachter der realen Welt, existieren in dem einen Zweig und nehmen vom anderen nichts wahr. Universum spaltet sich wie ein Baumgeäst in ein riesiges Multiversum auf, in dem jedes mögliche Ergebnis in einer unendlichen Vielfalt separater Universen real existiert. Dies ist aber nicht mit der Lösungsvielfalt der Stringtheorien zu verwechseln! Die Vielwelten-Multiversen existieren in jedem Universum des String-Multiversums. **Wolf: Parallele Universen. Die Suche nach anderen Welten** 1988; 4] **Theorien mit spontanem Kollaps:** Kollaps nicht durch Beobachtung ausgelöst, sondern ist natürlicher Vorgang, der in jedem Quantensystem auftritt – insbesondere, wenn es mit einem makroskopischen Objekt wechselwirkt. Allerdings muss dafür ein völlig neuer Kollapsmechanismus erfunden werden. Solange sich dieser nicht experimentell beweisen lässt, bleibt er eine neue Annahme, die ebenso rätselhaft ist wie der vom Beobachter ausgelöste Kollaps in der Kopenhagener Deutung. **Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel** 2014; Kaku: Die Physik der unsichtbaren Dimensionen. Eine Reise durch Zeittunnel und Paralleluniversen 2013;

Aspect: To be or not to be local. Nature 446 2007 866 Bells Ungleichung widerlegt Einsteins Realismus von der Lokalität der Welt. Lange: An introduction to the philosophy of physics. locality, fields, energy, and mass 2002; Leggett: Es gibt eine Theorie, die Lokalität aufgibt ohne den physikalischen Realismus aufzugeben, aber mit der QM nicht verträglich ist, was die Leggett-Ungleichung im Experiment beweist. Realismus und bestimmter Typ von Nichtlokalität sind nicht verträglich. Whitaker: The New Quantum Age: From Bell's Theorem to Quantum Computation and Teleportation 2012; von Baeyer: Quanten-Bayesianismus = QBismus - Eine neue Quantentheorie, SdW Nov 2013 p 46-51, eher eine moderne Lesart, die sich explizit auf Bayes beruft. Fuchs: Coming of Age with Quantum Information 2011, Wigner: 'mit jeder vom freien Willen eines Experimentators bestimmten Messung wird die Welt ein klein wenig geformt.' Aus der Erkenntnis, etwas bisher falsch interpretiert zu haben, sollte man keine neue Theorie machen wollen. Siehe www. berauer. org Berauer: Vom Irrtum des Determinismus, Gereimtes und Ungereimtes aus unserem wissenschaftlichen Weltbild 2012;

Michael Esfeld: Einführung in die Naturphilosophie Einführung in die Naturphilosophie 2011; Klassische Physik = naturphilosophischer Atomismus. Aber Holismus-Perspektive: Quantenobjekte haben keine intrisische Identität. SdW 6 2011; Karl Poppers Begriff der Propensität (Neigung) liefert eine Interpretation quantenmechanischer Wahrscheinlichkeiten als ein Maß für die Tendenz eines Objekts, bestimmte Wirkungen zu produzieren. Wie lassen sich Verschränkungen durch Messprozesse auflösen? Wie kann man aber von der Quantenmechanik ausgehend verstehen, dass solche makroskopischen Systeme wohldefinierte numerische Werte ihrer Eigenschaften haben? Und wie können mikrophysikalische Objekte in Interaktion mit solchen makroskopischen Objekten definite numerische Werte ihrer Eigenschaften annehmen, so dass die quanten-

physikalischen Superpositionen und Zustandsverschränkungen durch Messprozesse aufgelöst werden? Was Johann von Neumann schon 1932 postulierte und was seitdem in den meisten Lehrbüchern der Quantenmechanik steht, bietet leider keine Antwort auf diese Frage: Wenn eine Messung stattfände, so seine damals geäußerte und seitdem weithin übernommene Lehrmeinung, ändere sich die Zeitentwicklung der Quantenobjekte abrupt. Statt weiterer Verschränkung fände in diesem Augenblick eine Reduktion des Gesamtzustands auf genau einen Teilzustand statt, der bis dahin noch mit anderen Zuständen überlagert war. Der Akt der Messung beende den Zustand der Superposition. Danach sei das System entweder im Zustand 'Kein Atom zerfallen, Phiole intakt und Katze lebendig' oder im Zustand 'Ein Atom zerfallen, Phiole zerbrochen und Katze tot'. Eine präzise Definition von 'Messung' wird dabei jedoch nicht gegeben. Das ist auch nicht möglich. Denn physikalisch gibt es keinen Unterschied zwischen einem Messprozess und einer beliebigen Interaktion. Ferner sind Messgeräte keine natürliche Art von Gegenständen, die in der Natur unabhängig von unseren Interessen vorkommen - wie Elektronen, Sauerstoffatome, DNA-Sequenzen oder Katzen. Vielmehr können beliebige Dinge von Experimentatoren entsprechend ihren Absichten als Messgeräte verwendet werden. Wenn man definite numerische Werte von Eigenschaften für makroskopische Objekte anerkennt - wie entweder lebendig oder tot zu sein für Katzen - und wenn man die Quantenmechanik als vollständige Beschreibung der mikrophysikalischen Wirklichkeit anerkennt, dann muss man die Möglichkeit des Übergangs zu wohlbestimmten numerischen Werten in die Dynamik einbauen, die man für die Zeitentwicklung von Quantensystemen ansetzt. Ein entsprechender Vorschlag wurde 1986 von den italienischen Physikern Gian Carlo Ghirardi, Alberto Rimini und Tullio Weber vorgelegt, ist aber mit einer Reihe von offenen physikalischen Fragen behaftet. Deshalb steht das so genannte Messproblem bis heute im Zentrum der Diskussion um die Interpretation der Quantenphysik. Der Übergang zu definiten numerischen Werten ist, und das ist für den Zeitpfeil bedeutsam, irreversibel: Sobald bei Schrödingers Katze ein Atom zerfallen ist, kann zwar wieder eine erneute Zustandsverschränkung eintreten. Aber um kehren lässt sich der Prozess nicht mehr. Wie der Physiker und Philosoph David Albert von der Columbia University in New York gezeigt hat, kann die quantenphysikalische Reduktion einer Verschränkung als Basis aller zeitlich irreversiblen Prozesse im Universum verstanden werden. Im Unterschied zur klassischen Physik verankern hier Zustandsreduktionen die Zeitrichtung in der Dynamik der grundlegenden physikalischen Theorie und nicht lediglich in Anfangsbedingungen des Universums. Welcher definite numerische Wert das Ergebnis einer Zustandsreduktion ist, dafür gibt es lediglich Wahrscheinlichkeiten. Bisweilen wird deshalb gesagt, dass die Quantenphysik im Widerspruch zu einer - deterministisch verstandenen - kausalen Sicht der Welt steht. Unter Wissenschaftsphilosophen herrscht jedoch Einverständnis darüber, dass Kausalität ebenso probabilistisch wie deterministisch sein kann. Folglich lassen sich in der Quantenphysik genauso wie in allen anderen Wissenschaften Kausalerklärungen suchen.

Die Frage nach den Grundlagen von Kausalität und Naturgesetzen kann man in diesem Zusammenhang so beantworten: Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften, sofern sie von der Quantentheorie behandelt werden, sind kausale Eigenschaften, die sich spontan manifestieren. Genauer gesagt sind es Dispositionen im Sinn von Propensitäten. Statt um intrinsische Eigenschaften handelt es sich um Strukturen der Zustandsverschränkung. Das sind kausale Strukturen, die sich in Form miteinander korrelierter klassischer Eigenschaften manifestieren, wie zum Beispiel in den oben erwähnten EPR-Experimenten. Damit lässt sich auch erklären, wieso solche Prozesse eine Zeitrichtung auszeichnet: Dispositionen und ihre Manifestation sind ein Fall von Ursache und Wirkung. Das Verursachungsverhältnis lässt sich aber nicht umkehren. Die Naturgesetze drücken aus, was die fundamentalen physikalischen Eigenschaften bewirken können. Generell beschreiben sie, was die Eigenschaften bewirken können, die es in der Natur gibt. Albert & Galchen: Bedroht die **Verschränkung** Einsteins Theorie? SdW H9/2009 p30-37. Das EPR-Argument geht davon aus, dass die Welt lokal ist, dass also die entfernten Partnerteilchen von vorherein definierte Spinwerte für jede beliebige Messachse besitzen. Folglich muss die QM unvollständig sein, denn sie legt diese Werte nicht fest, sondern garantiert nur, dass die Messungen zueinander passen. Angenommen verschränkte Teilchen haben definierte Werte. Können solche Teilchen die qm vorhergesagten Werte für alle gewählten Messachsen liefern? Bell zeigte, dass Messungen längs unterschiedlicher Achsen eine statistische Verteilung der Resultate liefern, die von QM abweichen. Keine Vorwahl definierter Werte vermag die QM zu befriedigen. Borzeszkowski: Gravitation und Quanten, Wifo 29 1979 49ff; **Borzeszkowski: Sind Gravitonen physikalisch real?** Spectrum 18 1987 H2 p15-17; Spectrum = Berliner Journal für den Wissenschaftler. Dt Akad der Wiss zu Berlin. academie spectrum 10.1979 - 22.1991

Magazin Golm Z5293; Borzeszkowski: Raum-Zeit und Elementarlänge Wifo 24 1974 p519ff **B̃orzeszkowski & Treder: The Meaning of Quantum Gravity** 2013; **Van Raamsdonk 2010: Quantengravitation bedeutet Raum-Zeit-Verschränkung.** Cowen: SdW H4 2016 p49-53. Einstein: Gravitation = Raumzeitkrümmung bedingt durch schwere Massen ≠ Kraft. Also ist Geometrie der Raumzeit quantenmechanisch, per **Verschränkung** zu formulieren. Gravitation beherrscht Universum im Großen = reine Geometrie. QM = Verschränkung beherrscht Welt im Kleinen. Raumzeit = geometrisches Bild der Verschränkung. Beziehung zwischen Geometrie und Verschränkung wird durch Quanteninformatik hergestellt. Maldacena 1997: In einem geometrisch begrenzten Modelluniversum = **Anti-de-Sitter-Raum** = negativer kosmologischer Konstante = **hyperbolischen Raum** zuzüglich zeitlicher Dimension. Im Gegensatz zu unserem Universum kann ein Anti-de-Sitter-Raum weder expandieren noch kontrahieren = sieht zu allen Zeiten gleich aus **stationärer Zustand** Aldrovandi & Pereira: de Sitter Relativity. A New Road to Quantum Gravity? arxiv.org, 2007 Nimm beide Theorien der Quantengravitation anstelle des Minkowski-Raumes den De-Sitter-Raum als grundlegenden Raum für die spezielle Relativitätstheorie = De-Sitter-Relativität! = AdS-Raum ist Schwerkraft an einem Punkt x im Innern = QFT auf der Hülle. Veranschaulichung durch dicht gepackte identische Dreiecke, die zur Hülle hin immer verzerrter aussehen. Muster ähnelt Tensornetzwerken, die die WW von Quantenteilchen beschreiben. Auf der Hülle erscheinen die Teilchen qm verschränkt. Wegen des math Zusammenhangs zwischen Innenraum un Hülle hängt die Raumstruktur im Innern von der Verschränkung auf der Hülle ab. Selbst wenn der Innenraum völlig leer ist, sind die Quantenfelder zweier Regionen der Hülle miteinander verschränkt. Wenn die Verschränkung zwischen den Hüllenregionen abnimmt, beginnt sich dr Innenraum auseinanderzuziehen. Bei verschwindender Verschränkung spaltet sich das Universum entzwei = Verschränkung ist nötig, damit der Raum existiert. ER=Einstein-Rosen1935: Zwei separate Schwarze Löcher können durch Raumzeittunnel=Wurmloch miteinander verbunden sein. Nach **ER=EPR-Hypothese** ist die durch Wurmloch hergestellte Verbindung dasselbe wie eine Quanten-Verschränkung, nur in viel größerem Maßstab. Becker: Quanten-Gravitation. Woraus besteht die Raumzeit? SdW H5 2022 p12-21; Wolchover: Gegenwind für die Dunkle Materie SdW H5 2017 p56-62;

Passon: Bohmsche Mechanik, 2004; D.Z. Albert: David Bohms QT. SdW H 7 1994, p70-77; a] det. Schrödinger-Gl. b] det. Gl für Teilchenkoordinaten aus qm Wahrscheinlichkeitsfluss c] direkte Konditionalisierung: Mittels gemessenen Teilchenortes und bekannter Wellenfunktion wird künftiger Ort berechnet.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)\nabla^2\Psi + V(\vec{x})\Psi, \quad \frac{d\,q}{d\,t} = \frac{\hbar}{m}\Im\left(\frac{\nabla\Psi}{\Psi}\right) = \left.\frac{\nabla S(\vec{x},t)}{m}\right|_{\vec{x}=q}, \text{falls} \quad \Psi(\vec{x},t) = R\,e^{\frac{iS}{\hbar}}$$

Holland, Peter R.: The quantum theory of motion. An account of the de Broglie-Bohm causal interpretation of quantum mechanics 1993; Cushing: Quantum mechanics 1994

Faking entanglement: Bell's inequalities are the quintessential test of a system's nonlocality. But experiments show that the test can be fooled—if one ignores the fine print. October 24, 2011. Bell's theorem states that quantum mechanics can be experimentally distinguished from any local hidden-variable theory: Two widely separated measurements whose correlations violate Bell's inequalities can't be explained without invoking the "spooky action at a distance" that comes with quantum entanglement. Tests of the inequalities typically involve photons' polarizations or atoms' spins, but the theorem itself doesn't specify what is being measured or how; only the correlations matter. However, the tests are subject to several conditions, or loopholes. For example, the experiment must be set up so that no light-speed propagation of classical information can influence the outcome, and the measurements must be efficient enough to rule out the possibility that the observed events violate Bell's inequalities but the entire ensemble does not. Bell tests in the lab give results consistent with quantum mechanics, but none has yet closed all the loopholes simultaneously. Now, Vadim Makarov (Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway), Christian Kurtsiefer (National University of Singapore), and colleagues have experimentally shown that if they set aside one loophole or another, they can violate Bell's inequalities in a system that manifestly lacks entanglement. They used what they call faked states: classical pulses of light that trick the detectors into behaving as if they're detecting single photons. The work is related to their previous research on hacking the quantum key distribution (QKD) of quantum cryptosystems. By intercepting photons and resending the corresponding

faked states, they can eavesdrop on the QKD connection undetected. (I. Gerhardt et al., Phys. Rev. Lett., in press, available at http://arxiv.org/abs/1106.3224.)

39 Festkörper-Physik

Schulze: Metallphysik 1967; Kittel: Einführung in die Festkörperphysik; Hunklinger: Festkörperphysik 2014[4]; Sommerfeld & Bethe: Elektronentheorie der Metalle 1933 = Geiger/Scheel: HdP 24.2; Kitaigorodski: Ordnung und Unordnung in der Welt der Atome 1979; Landau & Kitaigorodski: Physik für alle Bd2 Moleküle 1978, 1981; Fröhlich: Elektronentheorie der Metalle 1936; Kränzig: Kondensierte Materie. Festkörperphysik I + II 1982, 1994; Hänsel & Neumann: Physik VII 1978; Ibach & Lüth: Festkörperphysik. Einführung in die Grundlagen 2000[5]; **Bergmann & Schäfer: Bd6 Festkörperphysik** 1992; Brauer: Einführung in die Elektronentheorie der Metalle 1972[2]; Elliot: The physics and chemistry of solids 1997; Strobl: Condensed matter physics. Crystals, liquids, liquid crystals, and polymers 2004; Ashcroft & Mermin: Festkörperphysik 2013[4]; **Gross & Marx: Festkörperphysik** 2012; Phillips: Advanced Solid State Physics 2012[2]; Philip W. Anderson: Absence of diffusion in certain random lattices (1958), physical principles underlying the phenomenon of the localization of quantum objects due to disorder. Elihu Abrahams: 50 years of anderson localization; Madelung: Grundlagen der Halbleiterphysik 1970; Kirejew: Physik der Halbleiter 1972; Joffe: Physik der Halbleiter 1960; Bonch-Bruevich, Enderlein, Esser, Keiper: Elektronentheorie ungeordneter Halbleiter 1984; Täubert: Elektrizitätslehre PfL4 1976 Bändermodell p91ff; Sommerfeld & Bethe: Elektronentheorie der Metalle 1967; **Pauli: Gott erschuf die Festkörper, aber der Teufel die Oberflächen.**

Hubbard-Modell: Starres Gitter. Abstoßenden Coulomb-Kräfte nur für Elektronen, die sich am gleichen Gitterplatz aufhalten. Der kinetische Elektronenenergieanteil wird durch ein Überlapp-Integral t modelliert, das aus dem Tight-Binding-Modell kommt: $H = U\sum_i c^\dagger_{i\uparrow}c_{i\uparrow}c^\dagger_{i\downarrow}c_{i\downarrow} - t\sum_{\langle ij\rangle,\sigma}\left(c^\dagger_{i\sigma}c_{j\sigma} + c^\dagger_{j\sigma}c_{i\sigma}\right)$ wobei $\langle ij\rangle$ für die Summe über alle Paare benachbarter Gitterplätze und Summe über σ für die Summation über beide Spinrichtungen $\uparrow$ und $\downarrow$ bedeutet. $U(\mathbf{x_i}) = \int d^3\mathbf{r_1}\int d^3\mathbf{r_2}\ |\Psi(\mathbf{r_1}-\mathbf{x_i})|^2\,\frac{e^2}{|\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|}\,|\Psi(\mathbf{r_2}-\mathbf{x_i})|^2$ legt die Stärke der Coulomb-Abstoßung fest, $c^\dagger_{i,\sigma}$ und $c_{i,\sigma}$ für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren eines Elektrons am Gitterplatz i mit Spinrichtung σ. Einfachstes Modell, an dem man das Zusammenspiel von kinetischer Energie, Coulomb-Abstoßung, Pauli-Prinzip und Bandstruktur ansehen kann. Siehe Gutzwiller-Näherung.

Drude-Sommerfeld-Modell: Leitungselektronen werden als ideales klassisches Gas betrachtet, obwohl die Dichte tausendmal größer ist als die eines typischen Gases. Zwischen den Stößen bewegen sich die Elektronen frei; es gibt keine Wechselwirkung mit den Atomrümpfen (Ionen): Näherung freier Elektronen. Die Elektronen haben keine Wechselwirkung untereinander: Näherung unabhängiger Elektronen. Durch elastische Streuung an Gitterfehlern und **Phononen** (harte Kugeln) bewegen sich die Elektronen diffusiv mit konstanter Geschwindigkeit. Shindé & Srivastava (eds): Length-Scale Dependent Phonon Interactions (Topics in Applied Physics) 2013; Die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß ist $1/\tau$ (Streurate). Die Stöße ereignen sich unabhängig voneinander. τ ist die Relaxationszeit für die Rückkehr ins Gleichgewicht. Für stationären Zustand $\dot{v} = 0$

$$m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v_D = -eE,\ v_D = -\frac{e\tau}{m}E,\ j = -env_D = \frac{e^2\tau n}{m}E,\ \sigma = \frac{j}{E} = \frac{e^2\tau n}{m}$$

Masse m und die Streurate $1/\tau$ sind unabhängig von der Geschwindigkeit, d.h. der Energie, bzw. der Frequenz. Durch die Stöße befinden sich die Elektronen im thermischen Gleichgewicht mit der Umgebung: bei hoher Temperatur ist die Geschwindigkeit der Elektronen größer. **Grenzen:** Annahme, alle Elektronen würden zum Strom beitragen, im Widerspruch zu den Aussagen des Pauli-Prinzips. Statistischen Thermodynamik: alle Freiheitsgrade eines System (hier: Festkörper) im Mittel $\frac{k_BT}{2}$ zu seiner inneren Energie beitragen. Jedes Elektron müsste also $3\cdot\frac{k_BT}{2}$ liefern. Messung: elektronischer Beitrag zur Gesamtenergie etwa tausendmal kleiner. Es können also nicht alle Elektronen Teil des Elektronengases sein, und mehr noch ist die Bewegung des Elektronengases weniger frei als es die kinetische Gastheorie beschreibt. Ashcroft & Mermin: Solid State

Physics 1976; 2. Dressel & Grüner: Electrodynamics of Solids 2002; 3. Sommerfeld & Bethe: Elektronentheorie der Metalle 1933; Wolkenstein: Electrons and crystals 1983 Metalle, Halbleiter, Dielektrika; Tipler: Physik 2000 p1346; **Energieverteilung** bei $T = 0$ für Potentialtopf siehe Seite 484 ist $E_n = n^2 E_1$ mit $E_1 = \frac{h^2}{8m_e L^2}$, L Breite des Potenzialtopfs. YYYYY Holstein-Modell Kapiza-Pendel Floquet-Zustände Green-Keldysh-Methode. **Fermi-Energie** für Kupfer $\epsilon_F = E_{N/2} = (N/2)^2 E_1 = \frac{h^2}{32m_e}(N/L)^2 = \frac{(ch)^2}{32m_e c^2}(N/L)^2 = 1.82$ eV < 7.04 eV. **Mittlere Elektronenenergie** $< E_e >= 1/N \sum_{n=1}^{N/2} 2n^2 E_1 \approx 2E_1/N \int_0^{N/2} \mathrm{d}n n^2 = E_1/3(N/2)^2 = \epsilon_F/3$. **Anzahldichte** der Elektronen $n(E) = \mathrm{d}N/\mathrm{d}E$ und **Zustandsdichte** $g(E)$. Bonch-Bruevich, Mironov, Zvyagin, Keiper, Esser, Enderlein: Elektronentheorie ungeordneter Halbleiter 1984 Zustandsdichte, Anderson-Lokalisation, Green-Funktionen p37ff, Perkolation; B̃onch-Bruevich & Tyablikov: The Green function method in statistical mechanics 1962;

Hubertus Stolz: Supraleitung 1979; Buckel: Supraleitung 1989; Tinkham: Introduction to Superconductivity 1975; Kuper: An introduction to the theory of superconductivity 1968 2. Quantisierung; von Laue: Theorie der Supraleitung 1947; Eder: Einführung in die Physik der tiefen Temperaturen 1955; MacDonald: Am absoluten Nullpunkt. Methoden und Phänomene der Kältephysik 1961; Braunbek: Wenn selbst Atome einfrieren. Physik der tiefsten Temperaturen 1970; Brockhaus Physik; PhysikJ Juni 2011; Hänsel & Neumann: Bd7 Kap41; Greiner: Bd3 Kap11, Grenzflächen; Lorrain: Elektromagn Felder p511; Feynman: VL über Physik Bd3 Kap21-6 Meißner-Effekt; Supraleitung: Äußeres Magnetfeld macht $-\partial\vec{B}/\partial t = \nabla \times \vec{E}$. $\vec{E}$ treibt Strom, der Gegen-Magnetfeld gemäß $\vec{j} = \nabla \times \vec{H}$ aufbaut. Feld wird also draußen gehalten. **Meißner-Effekt:** Magnet. Metall werde unter T_k abgekühlt. Magnetfeld wird herausgedrängt. Es kommt also Strom richtiger Größe in Gang, der das Feld rausdrängt. Kittel: Einführung in die Festkörperphysik; **Gross & Marx: Festkörperphysik** 2012; Maradudin, Montroll, Weiss: Theory of lattice dynamics in harmonic approximation 1963; Philip Phillips: Advanced Solid State Physics 2012[2]; Idealer Diamagnetismus (Meißner Ochsenfeld, 1933), die Entwicklung der phänomenologischen **Ginzburg-Landau-Theorie**, 1950 $\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A}\right)^2\psi = 0$, die Vorhersage von Alexei Abrikossow (1952) und Entdeckung der Flussquantisierung von Doll und Näbauer sowie Deaver und Fairbank (1961). Mikroskopische Theorie der Supraleitung: John Bardeen, Leon Cooper und Robert Schrieffer (1957), der Josephson-Effekt (1962) und die Entdeckung der Hochtemperatursupraleiter durch Müller und Bednorz (1986). Elektronen werden zu korrelierten Paaren. Cooper-Paare bauen eine makroskopische quantenmechanische Wellenfunktion mit wohldefinierter Phase auf. Elektrisch geladenes Pendant zu Atomen in Bose-Einstein-Kondensaten oder zu Photonen im Laserlicht. bei konventionellen Supraleitern wie Niob oder Blei führt die Wechselwirkung zwischen den Elektronen und den Gitterschwingungen zur Paarbildung. Die makroskopische Phase erzwingt, dass Supraleiter in ihrem Inneren entweder feldfrei sind (idealer Diamagnetismus) oder dass das Feld den Supraleiter in Form quantisierter Flussbündel durchsetzt. Sie lässt sich in Josephson-Kontakten oder supraleitenden Quanteninterferometern nutzen, um Magnetfelder mit höchster Empfindlichkeit zu messen. $YBa_2Cu_3O_7$ oder $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10}$,die bei Temperaturen um 100 Kelvin supraleitend. Pniktide ab 55 K. PiuZ 42 2011 Huebner p14-20; Braunbek: **Josephson-Effekt**, PhysBl 26 1970 179; Tsvelik: Quantum field theory in condensed matter physics 1995; Nagaosa: Quantum field theory in condensed matter physics 1999; **Fetter & Walecka: Quantum Theory of Many-Particle Systems** 2003 **Altland & Simons: Condensed Matter Field Theory** 2012; Elementare Einführung bei Xiao-Gang **Wen: Quantum Field Theory of Many-Body Systems: From the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons** 2007; Morf: Fraktionierter Quanten-Hall-Effekt PiuZ 33 2002 p21; Frank Wilczek: **Anyonen** SdW H7 1991 p54ff Betrachte Streuung elektrisch neutraler **identischer** Teilchen. Eschrig: The particle world of condensed matter. An introduction to the notion of quasi-particle 2005; Kaganow: Was sind Quasiteilchen? 1971 Festkörper ist Fermigas; Quasiteilchen, weder Bosonen He_2^4 anziehend, noch Fermionen He_2^3 abstoßend; Sumathi Rao: An Anyon Primer arXiv:hep-th/9209066; Sumathi Rao, ed: Field theories in condensed matter physics 2001; Wilczek: Fractional Statistics and Anyon Superconductivity 1990;

Suprafluidität bei den ^{4}He, ^{3}He, ^{6}Li, wenn Lambdapunkt T_{Sf} unterschritten. Bei $T_{Sf}(^4\mathrm{He}) = 2{,}17$ K wird aus dem normalfluiden (flüssigen) Helium-I das superfluide Helium-II. Vollhardt: Suprafluidität PhysBl

39 1983 H2 p41-46, H5 p120-124; **Helium 1868** Jules Janssen und Norman Lockyer 1836-1920 im Sonnenspektrum, William Ramsay 1895 als α-Strahlung aus Uranmineralien. ^{3}He 1939 entdeckt. Ab 1947 per Neutronenfluss von Kernreaktoren auf $^6_3$Li gibt $^3_1$H und $^4_2\alpha$. $^3_1\text{H} \to {}^3_2\text{He} + {}^0_{-1}\text{e}$. Feenberg: Theory of Quantum Fluids 1972; Ginsburg: Über Astrophysik 1977 p34ff HeI und II; Beim extrem seltenen Waffen-Isotop ^{3}He liegt T_{Sf} bei 2.6 mK. Brenig: Statistische Theorie der Wärme 1996[6] p228 Tabelle elementarer fermionischer und bosonischer Anregungen. p255 Bosonen ^{4}He-Phasendiagramm. p257 Fermionen. p264 ^{3}He-Phasendiagramm. **Radunskaja: Verrückte Ideen** 1965, 1977 p0 ^{4}He- vs ^{3}He-Phasendiagramm. Landau & Kitaigorodski: Physik für alle Bd2 Moleküle 1978, 1981 p189ff; Kitaigorodski: Physik für alle Bd4 Photonen und Kerne 1979, 1983 p187ff Sexl: Was die Welt zusammenhält 1982 p185f. **Nichtklassische/UnBoltzmann'sche Abzählung: a] Heisenberg'sche Unschärfe** = Teilchen hat nicht gleichzeitig Ort und Impuls, bedeutet Ununterscheidbarkeit der Mikro-Teilchen. Jedes Einzelteilchen ist nur eine eine identische Anregung ein und desselben Feldes. Wegen Ununterscheidbarkeit müssen klassische/nummerierbare Teilchen bei statistischer Bewertung anders abgezählt werden als Quantenteilchen siehe Joos: LB der theoretische Physik 1944 Buch6 Kap5 p550ff; Vasilyev: An introduction to statistical physics 1980 p209 Bosonen, p231 Fermionen, **entartetes Elektronengas** $\xi_0 \ll 1$ oder $\mu \ll kT$. **Ideales Bosegas:** Haake: Einführung in die theoret Physik 1983 p331ff; **Peliti: Statistical Mechanics in a Nutshell** 2011 p102ff; Trevena: Statistische Mechanik 1995 p41f, p85f; **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** BdII.1 1921 und BdIII.2 1950; Weizel: LB der theoretische Physik 1950 p1186ff; Hänsel & Neumann: Physik7. Festkörper 1978 p296 A114; **b] SRT, Symmetrie, Spin, Pauli-Prinzip:** Es gibt Klassen von Quantenteilchen siehe Abb5.4 in Kitaigorodski Bd4. **b1] Bosonen sind Herdentiere, lieben Gleichschritt und das Kollektiv**, sind ideal abgestimmt. Es können 2 oder Myriaden von Bosonen/Photonen am gleichen Ort sein, die jeweils für sich nur ein/und demselben Feld entsprechen. Können daher starke Felder aufbauen: **Bose-Einstein-Kondensation**=∞ Dichte, Suprafluidität ^{4}He oder ^{3}He-Paare, Supraleitung wegen Spin1-Cooperpaaren, Rundfunkwellen oder Laser. Haben **symmetrische Wellenfunktion** $\psi^S(1,2) = \phi(1)\varphi(2) + \phi(2)\varphi(1)$. **Photonen/Bosonengas** dominiert zeitweise den Kosmos siehe Kippenhahn: Licht vom Rande der Welt. Das Universum und sein Anfang 1984 Schlaganfall. Das Materie-Strahlungs-Gemisch des Weltalls p297ff; Lang: Astrophysical formulea 1980[2] p581ff Kap5.7.1 Homogeneous and isotrop Univers; Dautcourt: Relativistische Astrophysik 1972 p136; Ebeling & Feistel: Physik der Evolution 1982 p65f; **b2] Fermionen sind Individualisten, hassen es, wenn Übereinstimmung in allen Ansichten besteht**. Sind Ursache für Ausdehnung und Härte. Baumaterial der Atomhülle. Erst dadurch, dass jedes Elektron in einem anderen Zustand, kommt Raumnahme/Ausdehnung. Fermionen können auch durch Wellen, wie Photonen, beschrieben werden, aber haben stehts anderen Zustand. **Anti-symmetrische Wellenfunktion** $\psi^A(1,2) = \phi(1)\varphi(2) - \phi(2)\varphi(1)$ = Slaterdeterminante. **Chemisches Potenzial = Fermikonstante** μ = Widerstand des Systems gegen Addition eines Teilchens. Intensive Feldgröße. Beschreibt die spezifische Hinzufügearbeit $\delta A = \mu \mathrm{d}N$ = **Arbeit bei Teilchenzahländerung**. Greiner: Bd9 1993 p19; $\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{U,V} = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial G}{\partial N}\right)_{T,P}$ Lang: Astrophysical formulea 1980[2] p240; **Tiefe Temperatur = entartetes Fermigas** $1 \ll z = e^{\beta\mu}$ = Fugazität = $z \ll 1$ **hohe Temperatur = ideales Gas**. Bei Entartungstemperatur passiert der Übergang von Boltzmann- zu Fermigas = Quantengas für Elektronen $T_Q = \frac{E_F}{k} \sim \frac{n_e^{2/3}}{m_e k} = 4.35{\cdot}10^{-11} n_e^{2/3}$ K. **Entartetes Fermigas** Lang: Astrophysical formulea 1980[2] p251, falls Wärmeenergie sehr viel kleiner als Fermienergie $\beta(\epsilon_m - \mu) = \frac{\epsilon_m - \mu}{kT} \ll 1$ dann ^{3}He bleibt bei tiefster Temperatur $T_Q = 0.3$ K fluid, es wird einfach nicht fest! **Metallische Leitung per elektronischem Fermigas** $T_Q = 50.000$ K. **Weißer Zwerg stabil**, weil elektronischer Fermigasdruck/Entartungsdruck bei $T_Q = 3{\cdot}10^9$ K Gravitation stand hält. **Kernmaterie** n, p stabil unterhalb T $3{\cdot}10^{11}$ K. **Neutronenstern** stabil durch neutronischen Fermigasdruck/Entartungsdruck unterhalb $T_Q = 3{\cdot}10^{12}$ K. **Großkanonische Zustandssumme für Quantengase** Greiner Bd9 Kap6 p218ff **Klass ideales Gas** = kleine Dichte $n = \frac{N}{V}$ mit N = Teilchenzahl oder hohe Temperatur $T \to \infty$ oder **thermische Wellenlänge** $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi}{k} \ll l$ = **mittlerer Teilchenabstand**. Aus $E = kT = \frac{p^2}{2m} \overset{p=\hbar k}{=} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ wird $\frac{1}{k^2} = \frac{\hbar^2}{2mE}$ mit $\frac{1}{k^2} = \frac{\lambda^2}{(2\pi)^2}$ folgt die **thermische oder de Broglie-Wellenlänge** eines Teilchens

eines Ensembles mit Temperatur T als $\lambda^2 = \frac{h^2}{2mE} = \frac{h^2}{2mkT}$. Umrechnung in eine Teilchen-Dichte mit $n_Q = \frac{N}{V} = \frac{1}{l_Q^3}$ also 1 Teilchen im Abstnd $l_Q = \lambda$ also $l_Q^3 = \frac{1}{n}$ gibt $\lambda^2 = \frac{h^2}{2mkT} = (l_Q^3)^{1/3}2 = 1/n_Q^{2/3}$ oder mit der kritische Dichte $n_Q = \left(\frac{mkT}{2\pi\hbar^2}\right) = \left(\frac{mkT}{h\hbar}\right)$. **Quantengas** falls $n > n_Q$. **Klassisches ideales Gas** bei $n \ll n_Q$. Reinecker & Schulz: Bd5 2010 p210; Becker p176ff; Reinecker & Schulz: Bd5 2010 p218 **Mittlere Besetzungszahlen** $\bar{n}_m$ **des Energieniveaus** als Funktion von $\beta(\epsilon_m - \mu) = \frac{\epsilon_m - \mu}{kT}$ für **Fermi-** $a = 1$, **Boltzmann** $a = 0$ und **Bose-Verteilung** $a = -1$ lautet $\bar{n}_m = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_m - \mu)} + a}$. p242ff **Ideales nichtrelativistisches Fermigas:** p257 Abb5.9 $p - V-$Diagramm für Fermionen: ultrarelativistischer Neutronen-Druck $p_n \sim \bar{n}^{4/3}$/ nichtrelativistischer Neutronengas-Druck $p_n \sim \bar{n}^{5/3}$/ Neutronenbildung/ ultrarelativistischer Elektronengasdruck $p_e \sim \bar{n}^{4/3}$/ nichtrelativistischer Elektronengas-Druck $p_e \sim \frac{\bar{n}^{5/3}}{m_e}$ /Protonengas-Druck $p_p \sim \frac{\bar{n}^{5/3}}{m_p}$ / reales Plasma/ Plasmazerfall/ fest. **Landau/Lifschitz: Bd5 KapV**; **Ma: Statistical mechanics 2000**[2] **Chap7 und Anhang D p506 ideale Bosegase, Chap8 und Anhang D p508f ideale Fermigase**; **Greiner: Bd9 1993 Kap13 Bosonen- und Fermionengas**, Kap14.1 ideales Bosegas, Kap14.2 ideales Fermigas, Kap10 Sternatmosphären; Siehe auch Seite 511. **Nolting: Statistische Physik Bd6 Kap3 Quantengase p152ff;** Besser geht's nicht: **Kaplan: Physik der Sterne 1977, 1983**[2] **p86-115 Weiße Zwerge**; Kippenhahn: 100 Milliarden Sonnen. Geburt, Leben und Tod der Sterne 1980 p26, p29, p125f, p135, p177, **Kap11 Das Ende der Sterne:** Weißer Zwerg; Kippenhahn & Weigert: Stellar structure and evolution 1991; Sexl: Weiße Zwerge, Schwarze Löcher 1975; Shapiro & Teukolsky: Black holes, white dwarfs, and neutron stars 1983 Kap3 Weiße Zwerge, Kap4 Kalte Weiße Zwerge, Kap9 Neutronensterne; Straumann: General relativity and astrophysics 1991 p277 Neutronensterne; Mattig: Die Sonne 1995; Langer: Leben und Sterben der Sterne 1995; Kippenhahn: Der Stern, von dem wir leben 1990 p193 Weißer Zwerg; Ginsburg: Über Astrophysik 1977 p105ff Neutronenstern; A. J. Leggett: Quantum liquids: Bose condensation and Cooper pairing in condensed-matter systems 2008; Ueda: Fundamentals and new frontiers of Bose-Einstein condensation 2010; Huang: A Superfluid Universe 2016 Superfluidity and the Order Parameter. Quantum Turbulence. Higgs. Renormalization. Halpern-Huang Scalar Field. Dynamics of Spacetime. Black Holes. The Big Bang. Creation of Matter. Dark Energy and Dark Matter. Quantum Vorticity in the Universe; Guénault: Basic superfluids 2003; Pines & Nozieres: The Theory of Quantum Liquids 1966; Nozieres: Theory of interacting Fermi systems 1964; **Bose-Einstein-Kondensation** in Atomfallen bei 0.1 μK und weniger. Martin Weitz: Bose-Einstein-Kondensation, die makroskopische Grundzustandsbesetzung von Teilchen mit ganzzahligem Drehimpuls (Bosonen) bei kleiner Temperatur und hoher Dichte, wurde in etlichen physikalischen Systemen beobachtet, wie atomaren Gasen und Festkörper-Quasiteilchen. Das wohl bekannteste Beispiel eines Bose-Gases, die Schwarzkörperstrahlung, welche im thermischen Gleichgewicht mit perfekt absorbierenden (schwarzen) Wänden steht, zeigt diesen Phasenübergang jedoch nicht. Grund ist, dass die Teilchenzahl bei Abkühlung nicht erhalten ist, was sich durch ein verschwindendes chemisches Potenzial ausdrückt. Cornell, Ketterle PhysJ18 2019 H3, Wieman: **Riesenatome = Rydbergatome** mit **ganzem Gesamtdrehimpuls**. Angeregte (bis n = 43) Rubidium- oder Natrium-Atome kommen sich als **Bosonen** bei 0.1 μK so nahe, dass sich ihre Wellenfunktionen überlappen und so einen **gemeinsamen Zustand** bilden, 5. Juni 1995: Vielteilchenphysik mit ultrakalten Rydberggasen PhysJ18 2019 H3 p40-47. Ultrakalte Quantengase als Medium zur experimentellen Simulation quantenkosmologischer Phänomene. Landau & Kitaigorodski: Physik für alle Bd2 Moleküle 1978, 1981 p189ff; Kitaigorodski: Physik für alle Bd4 Photonen und Kerne 1979, 1983 p187ff Abb5.4; **Bose-Einstein-Kondensat** = perfekter Quantenzustand, die Bosonen sind dabei vollständig delokalisiert = jedes Boson an einem bestimmten Punkt anzutreffen ist überall im Kondensat gleich = **perfekte superfluide Flüssigkeit.** Phasenübergang von einem klassischen atomaren Gas zu einem Bose-Einstein-Kondensat findet statt, wenn eine kritische Phasenraumdichte erreicht wird, wenn die Dichte der Teilchen

mit fast gleichem Impuls groß genug ist: $T_{\mathrm{C}} = \frac{h^2}{2\pi \cdot m \cdot k_{\mathrm{B}}} \left(\frac{n}{(2S+1) \cdot \zeta(3/2)} \right)^{2/3} << 100$ nK, wobei n Dichte der Teilchen, S = Spin der Teilchen, $\zeta(3/2) \approx 2{,}6124$. Klaers: Bose-Einstein-Kondensat aus Licht. PhysUnsererZeit Bd42 Nr2 2011 p58f; Großmann in PhysBl; Haake: Einführung in die theoret Physik 1983 p331ff; Lesanovsky, Garrahan: arXiv:1402.2126; PhysRevLett111, 215305 (2013): Rydbergatomgitter als pseudo-Spinsystem, weil 2-Levelsystem bei Anregung bis 40 -80. s-Niveau, also bis 100μm große Atome in erster Hauptgruppe. Lebensdauer bis 100μs. Rabi-0szillation. Quantenmastergl. von Neumann-Gl. als Analogon zur Liouville-Gl. $\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}\sum_k p_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k| - \sum_k p_k|\psi_k\rangle\langle\psi_k|\hat{H}\right) = -\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{H}\right) = -\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H},\hat{\rho}\right]$ Timothy Jones: Detailed Derivation of the General Master Equation in Quantum Optics 2006 wiki; Glasdynamische = räumlich heterogene Relaxationszeiten und -längen als Modell für Quanten-Soft-Matter Keimbildung und Aggregation. Sibani & Jensen: Stochastic Dynamics of Complex Systems. From Glasses to Evolution 2013;

http://www.colorado. edu/ physics/ 2000/ bec/ Spektrum Ticker vom 13.7.1998 Die Super-Atomuhr; 18.3.1998 Eine neue Falle für Atome SdW 9/98 p44 Die Bose-Einstein-Kondensation und SdW 11/96 p16 Vom Bose-Einstein-Kondensat zum Atomlaser.

Ungewöhnliche Superfluid-Phänomene: Khalatnikov: An introduction to the theory of superfluidity 1965; Die Flüssigkeit dringt reibungsfrei durch engste Kapillare. Onnes-Effekt: He kriecht Wände hoch. Nahezu ideale Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit durch den Effekt des Zweiten Schalls. Bei Rotation des Behälters dreht sich die Flüssigkeit nicht als Ganzes mit. Bei sehr langsamer Rotation bleibt sie einfach stehen; bei schnellerer Rotation bilden sich quantisierte mechanische Wirbel (ähnlich den magnetischen Flusswirbeln im Supraleiter oder Wirbeln in der Badewanne). Diese ordnen sich bei ausreichend hoher Wirbeldichte in einem regelmäßigen hexagonalen Gitter an. Der sogenannte Springbrunnen-Effekt (auch Fontäneneffekt, engl. fountain effect): In ein größeres Gefäß mit Supraflüssigkeit taucht man teilweise ein kleines Gefäß ein, das einen Boden aus Kapillaren hat und oben eine kleine Öffnung. Das kleine Gefäß besitzt im Innern eine kleine Heizung. Schaltet man diese Heizung ein, entsteht in dem kleinen Gefäß mit Kapillaren am Boden und oben einer kleinen Öffnung ein Überdruck, der durch die kleine Öffnung Flüssigkeit spitzen lässt. Die Heizung wandelt Helium II in Helium I um, da für höhere Temperaturen sich das Verhältnis von Helium II zu Helium I verschlechtert. Erklären lässt sich dieser Überdruck durch reibungsfrei nachströmendes Helium II, das versucht, die sich reduzierende Konzentration von Helium II im kleinen Gefäß zu kompensieren. Helium I kann nicht durch die Kapillaren zurück strömen, sondern nur durch die kleine Öffnung an der Oberseite entweichen. Bereits 60 Helium-Atome zeigen Superfluidität. Both isotopes experience very weak attractive forces, but they differ in mass and, more importantly, quantum statistics. The naturally occurring isotope, helium-4, is a boson. As a consequence, below a temperature of about 2 K it Bose condenses into an unusual state in which many of the atoms are in the same quantum state. In this state the helium is superfluid and loses all viscosity. Helium-3 is a fermion, so the atoms in the liquid must occupy different quantum states. This means that helium-3 becomes superfluid at a much lower temperature, about 3 mK (NP Lee, Osheroff, Richardson, 1996). **Topologische Phasenübergänge** entlang von Oberflächen oder in sehr dünnen, quasi zweidimensionalen Lagen. Anders als bei den klassischen Zustandsänderungen verändern sich bei den topologischen Phasenübergängen eines zweidimensionalen Systems die Symmetrieeigenschaften nicht. Bei niedrigen Temperaturen treten zwei gegenläufige Quantenwirbel als Paar auf. Beim Kosterlitz-Thouless-Phasenübergang trennen sich beide Wirbel ähnlich wie zwei Ladungen. Das Verhalten des Materials ändert sich plötzlich auf großen Skalen. Erklärt einige exotische Materiezustände und seltsame Quantenphänomene auf Oberflächen. Spezielle Auswirkungen der Supraleitung, bei der ein Substrat Strom widerstandsfrei leitet. NP 2016 Thouless, Haldane und Kosterlitz. **Topologischen Isolatoren = Oberflächenleiter** vereinbaren widerstreitende Eigenschaften. Isolatoren, die in ihrem Inneren keinen elektrischen Strom leiten, aber an ihrer Oberfläche sind sie Leiter. Bismut-Tellurid: Topologische Isolatoren sind Kristalle, in denen eine ungewöhnliche Kopplung zwischen den für die Stromleitung verantwortlichen Elektronen und ihrem Spin auftritt. Spin-Bahn-Kopplung = magnetische Wechselwirkung der Elektronen mit den Atomen. Ist also Effekt schwerer Atome! In topologischen Isolatoren ist die Spin-Bahn-Kopplung stark genug, um die Struktur der Energiebänder durcheinanderzubringen. **Bandinversion** führt im Inneren nicht zu besonderen Effekten, aber an ihrer Oberfläche. Speicherelemente auf spintronischer Basis. STT MRAM = spin

transfer torque magnetoresistive random access memory. Atomar dünner Eisendraht auf supraleitendem Blei erzeugt so genannte Majorana-Quasiteilchen sind zugleich ihre eigenen Antiteilchen und elektrisch neutral. Lüth: Surfaces and interfaces of solids 1992 Vakuumpumpen p6ff bis 10^{-4} Torr oder mbar = 0.01 Pascal Rotations- und Sorptionspumpen. Diffusions- und Turbomolekularpumpen bis 10^{-10} Torr, darunter Ionen- und Kryopumpen.

40 QI - zweite Quantenrevolution

Gross: Quanteninformation mit und ohne QM. Wer Hilbert-Raum sagt, kommt in den Keller! PJ22 2023 H3 p74; Audretsch: Verschränkte Welt. Faszination der Quanten 2002; Audretsch: Verschränkte Systeme. Quantenphysik auf neuen Wegen 2005, 2008; Deffner & Campbell: Quantum Thermodynamics. An Introduction to the Thermodynamics of Quantum Information 2019; Audretsch: Die sonderbare Welt der Quanten. Eine Einführung 2008, 2012^2; Audretsch & Nagorni et al. eds: Das Ganze und das Fragment. Theologie und Naturwissenschaft im Gespräch 2004; Audretsch & Mainzer: Wieviele Leben besitzt Schrödingers Katze? Zur Physik und Philosophie der Quantenmechanik 1990^2; **Lo, Popescu, Spiller eds: Introduction to Quantum Computation and Information** 1998 super Intro; Homeister: Quantum Computing verstehen. Grundlagen - Anwendungen - Perspektiven 2008, 2013; **P̃etz: Quantum Information Theory and Quantum Statistics** 2009 super Einführung in QM; The Quantum Mechanics Visualisation Project St Andrews st-andrews.ac.uk/physics/quvis PJ14 H11 2015 p60; Ferrie: Quantum Information for Babies 2014; QM in Schule http://www.heisenberg-gesellschaft.de/unterlagen-workshop-2015.html PJ14 H11 2015 p60; van Meter: Quantum Networking 2014; Baeyer: **Das Atom in der Falle**. Forscher erschließen die Welt der kleinsten Teilchen 1993; Nielson: Quantum computation and quantum information 2005; S̃chleich: Elements of quantum information 2007; Bruß: Quanteninformation 2003; Neugebauer ed: Quantentechnologien 2022; Quantengatter PhysJ 22 2023 H1 p25-28 Müller & Greinert: Quantentechnologien für Ingenieure 2023; Camejo: Skurrile Quantenwelt 2006; Zeilinger: Einsteins Schleier 2003; Zeilinger: Einsteins Spuk. Teleportation und weitere Mysterien der Quantenphysik 2005; Smolin: Quantenwelt - Wie wir zu Ende denken, was mit Einstein begonnen hat = Einstein's Unfinished Revolution: The Search for What Lies Beyond the Quantum 2019; Bruß & Leuchs eds: Lectures on quantum information 2007; Marinescu: Classical and quantum information 2012; Coecke: Quantum picturalism = diagramm-artige Hochsprache über dem Hilbert-Raum, Contempor physics 51, 59-83, 2010 arXiv:0908.1787v1; Hohlraum-Quantenelektrodynamik SdW Juni 1993 p48; SdW Juli 2008, p90; Quantencomputer mit Ionen SdW Juni 2009 p34; Hardware: Atome, supraleitende Schaltkreise, Photonen. Spins in Festkörpern. Entropie aus Bart Qubit-Netz. Lange Kohärenzzeiten und ausgezeichnete Kontrolle ihrer Quantenzustände. Tommaso Calarco: Quantum Optimal Control Theorie nutzt Quantenkohärenz, um auch unter realen Bedingungen dynamisch einen gewünschten Quantenzustand zu erhalten. Nutze **CRAB = Chopped Random Basis Algorithmus**. Meschede: Quantentechnologie. Kontrollierte Strahlungseigenschaften von ein oder zwei Atomen, die an einen optischen Resonator angekoppelt sind und zB einen starken **Purcell-Effekt** 1946 = Wahrscheinlichkeit spontaner Emission dadurch erhöht, dass Quelle in einen Resonator gesetzt wird. Die Emissionsrate wächst dabei um den Purcell-Faktor $F_P = \frac{3}{4\pi^2}\frac{Q}{V}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^3$, mit V Modenvolumen, zeigen. Andererseits **Quantenwalks**, bei denen atomare Trajektorien auf einem Gitter gespalten und mehrfach zur Interferenz gebracht werden. Damit lässt sich eine ideale negative Messung realisieren, deren Ergebnis (die Verletzung der sogenannten Leggett-Garg-Ungleichung) quantitativ die Quantenwelt von einer alternativen makrorealistischen Welt unterscheidet. Die Ununterscheidbarkeit von zwei (und mehr) Atomen erlaubt neue Einblicke in die Quantenstatistik. Langfristig eröffnet das System den Weg zur Realisierung eines **Quanten-Zellular-Automaten**. **M̃eier: Eine kurze Geschichte des Quantencomputers** 2015; Spektrum der Wissenschaft Highlights 1/2012 **Quanteninformation**; Loudon: The quantum theory of light 1983^2; Brands, Gilbert: **Einführung in die Quanteninformatik. Quantenkryptografie, Teleportation und Quantencomputing.** 2011 eXamen.press; **Los Alamos Science 27 2002** Cooper: **Information,**

science and technology in a quantum world. Wheeler, Feynman, Knill, Zurek; Bennett, Brassard, Ekert: Quantenkryptografie SdW 12 1992; Bennett: Notes on Landauer's principle, Reversible Computation and Maxwell's Demon arXiv.org physics arXiv:physics/0210005 Ladd et al.: Quantum computers, Nature464 2010 p45-53; Nutze Komplexität der Viel-Teilchenwellenfunktion zur Lösung computationaler Probleme. Sie werden - wie Laser im Vergleich zu inkohärenten Lichtquellen - die bekannten Computer nicht ersetzen, sondern völlig neue Felder erschließen. Feynman 1980: Simulation von Vielteilchensystemen der kondensierten Materie, wo viele Elektronen verschränkt sind (Mott insulator to supraconductor transition in a lattice, or the BEC-BCS transition), geht nur per Simulation äquivalenter Quantensysteme = Quantensimutator = Gitter ultrakalter Atome = atomare BECs in optisch mittels Laser-Speckle ungeordneten Potenzialen. Anderson-Lokalisierung = Unterdrückung der Leitfähigkeit jenseits eines gewissen Grades an Unordnung. Venin, Brockhaus, Lewinski, Donges: Zwei Freihand-Versuche mit Lasern; Laser selbst bauen; c messen PdNPiS Bd50 2001 H1; **Erneux, Glorieux: Laser Dynamics**; Quantum information theory QIT considers the processing of information held in quantum states that, unlike a classical bit, can exist simultaneously as both a 0 and a 1, and can be used to make unbreakable cryptographic codes. There may be a matching of the classification of stringy black holes and the classification of four-qubit entanglement. Meintrup & Schäffler: Stochastik 2005 Kap3.4 Quantum computing p77; Steeb: Problems and solutions in quantum computing and quantum information 2006; **Nielsen & Chuang: Quantum Computation and Quantum Information** www.squint.org/qci/. Serge Haroche und David Wineland NP 2012 http://journals. aip. org/Nobel2012. html: Haroche & Kleppner: Cavity quantum electrodynamics = Atomphysik ∩ Quantenoptik Physics Today Jan 1989 p24f

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_n \bar{\psi}_n(i\gamma^\mu D_\mu - m_n)\psi_n$$

mit der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Walls & Milburn: Quantum optics 1994; Rice: An Introduction to Quantum Optics. An open systems approach 2020; Vetter: Photonik macht Schule. Ein Schülerlabor zur modernen Optik und Quantenoptik PdNPiS Bd59 2010 H8 p17-19; **Wechselwirkungsbild = Wechselwirkungsdarstellung = Dirac-Bild = Dirac-Darstellung** = Modell für den Umgang mit zeitabhängigen Problemen unter Berücksichtigung von Wechselwirkungen. PfL11 p116; $\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{H}_1(t)$. Zustände sind zeitabhängig $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$, Operatoren zeitabhängig $\hat{A} = \hat{A}(t)$. **Pfadordnungsoperator** $\mathcal{P}$. Pfadordnung erlaubt die Verallgemeinerung bestimmter Reihenentwicklungen auf nichtkommutative algebraische Strukturen. durch die fehlende Vertauschbarkeit der Operatoren in Produkten entsteht eine natürliche 'Ordnung', die kompakt durch Pfadordnung ausgedrückt werden kann. In nichtrelativistischen Theorien ist insbesondere Zeitordnung, dh Pfadordnung nach dem Parameter Zeit, von Bedeutung. Zeitordnungsoperator $\mathcal{T}$. Pfadordnungsoperator und Zeitordnungsoperator ist kein linearer Operator, 'Meta-Operator' oder 'Symbol'. Zeitordnungs-Operator T folgt yyyyyy **Drehwellennäherung = rotating wave approximation = RWA** Frequenz des Lichtfeldes ω_L nahe der atomaren Resonanzfrequenz ω_a = Verstimmung klein gegen die atomare Resonanzfrequenz: $\Delta\omega := |\omega_a - \omega_L| \ll |\omega_a + \omega_L| \approx 2\omega_\mathrm{a}$ Übergang in ein mit der Lichtfrequenz ω_L rotierendes Bezugssystem, in dem der Blochvektor des mit dem Licht wechselwirkenden Atoms im Falle exakter Resonanz nicht mehr präzessiert. Dann können die Einflüsse der schnell rotierenden Terme vernachlässigt werden. $H_0 = \hbar\omega_a\sigma^+\sigma^- + \hbar\omega_L a^\dagger a$ wobei $\hbar\omega_a$ = Energiedifferenz zwischen dem Grundzustand $|g\rangle$ und angeregtem Zustand $|e\rangle$ des Atoms. $\hbar\omega_L$ Energie des Photons. $\sigma^+ = |e\rangle\langle g|$ und $\sigma^- = |g\rangle\langle e|$ = Auf- und Absteigeoperatoren des Atoms und $a^\dagger$ und a = bosonische Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für Photonen. **Wechselwirkungen zwischen Photon und Atom** $= H_{int} = -\vec{d}\cdot\vec{E} = -dE_0\left(\sigma^+ + \sigma^-\right)\cdot\left(a^\dagger + a\right) = -dE_0\left(\sigma^+a^\dagger + \sigma^+a + \sigma^-a^\dagger + \sigma^-a\right) \overset{\vec{E}\|\vec{d}}{=} -\vec{d}\cdot\vec{E} = -dE_0\left(\sigma^+ + \sigma^-\right)\cdot\left(a^\dagger + a\right) = -dE_0\left(\sigma^+a^\dagger + \sigma^+a + \sigma^-a^\dagger + \sigma^-a\right)$ mit $\vec{E} = \vec{\epsilon}\underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{\epsilon_0 V}}}_{E_0}\left(a^\dagger + a\right)$ wobei **Polarisation** $\vec{\epsilon}$. **Paritätsüberlegungen** gibt $\langle e|\vec{d}|e\rangle = 0 = \langle g|\vec{d}|g\rangle$ und $d = \langle e|\vec{d}|g\rangle$ reellwertig. **Zeitentwicklung** von A im Wechselwirkungsbild per unitärem **Zeitentwicklungsoperator** U gemäß $A(t) = U^\dagger A(t=0)U$ mit **Baker-Campbell-Hausdorff-Formel** ist Zeitentwicklung der Auf-, Absteiger und Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $a(t) = a(0)e^{-i\omega_L t}$, $a^\dagger(t) = a^\dagger(0)e^{+i\omega_L t}$, $\sigma^-(t) = \sigma^-(0)e^{-i\omega_a t}$ und $\sigma^+(t) = \sigma^+(0)e^{+i\omega_a t}$ wobei die Nul-

len in Klammern unten zur Übersichtlichkeit nicht mehr explizit geschrieben werden. Also kurz $H_{int} \approx -dE\left(\cancel{\sigma^+ a^\dagger e^{i(\omega_a+\omega_L)t}} + \sigma^+ a e^{i(\omega_a-\omega_L)t} + \sigma^- a^\dagger e^{i(-\omega_a+\omega_L)t} + \cancel{\sigma^- a e^{-i(\omega_a+\omega_L)t}}\right) \approx$, weil die Exponenten aus der Zeitentwicklung der einzelnen Operatoren ohne Wechselwirkung im Allgemeinen nicht einfach addiert werden können. Diese erste Näherung ist nur für eine schwache Kopplung (Störung) zwischen Atom und elektromagnetischem Feld gültig. Die Stärke der Kopplung lässt sich mit einer Kopplungskonstanten $g = -\frac{|\vec{d}\vec{E}|}{\hbar} \ll \omega_L$ ausdrücken, die deutlich kleiner als die Frequenz des elektromagnetischen Feldes ω_L sein muss, damit die Näherung sinnvoll bleibt. Rotating Wave Approximation = schnell oszillierende Terme mit $(\omega_a + \omega_L)$ im Exponenten der e-Funktion vernachlässigen.

Harry Paul: Über Physiker und ihr Metier 2006 68 Seiten; Paul: Ein paar Gedanken. Essays und Aphorismen 2011 68 Seiten; Photon Bunching: Anhäufung/Verklumpung = zeitlichen Korrelationen einzelner Photonen aus derselben thermischen Lichtquelle = thermisch erzeugte Photonen „verklumpen“, zwei Detektoren messen mit erhöhter Wahrscheinlichkeit gleichzeitig Photonen aus der Quelle. Hanbury Brown-Twiss-Effekt = HBT-Effekt. **Paul: Photonen**. Experimente und Deutung 1985; Szameit & Scheel: Photonen im Spiegel der Zeit, PJ20 2021 H1p26-30; **P̃aul: Photonen. Eine Einführung in die Quantenoptik** 1999[2]; Ye & Cundiff: Femtosecond optical frequency comb. Principle, operation and applications 2010; Jun Ye: Loeb lectures 2018 Harvard im Web; Paul: Lasertheorie 2Bde 1969; Paul: Nichtlineare Optik 2Bde 1973; Klauder & Sundarshan: Fundamentals of quantum optics 1968; Fox: Quantum Optics. An Introduction 2006 p189; Cohen-Tannoudji, Dupont-Roc, Grynberg: Atom Photon Interaction. Basic Processes and Applications 2004 p361; Gerry: Introductory Quantum Optics 2008; Allen, Eberly: Optical Resonance and Two-Level-Atoms 1975; Schleich: Quantum optics in phase space 2000; Schleich: Von Schrödinger profitieren. Über die Linearität der Quantenmechanik und Atom-Interferrometer, Phys J 20 2021 H8/9 p42-45; Schleich: Ode to a quantum physicist. A Festschrift in honor of Marlan O. Scully 2000; Walther: Was ist Licht? In: Müller-Krumbhaar & Wagner: ... und Er würfelt doch!: Von der Erforschung des ganz Grossen, des ganz Kleinen und der ganz vielen Dinge 2001; Walther: Was ist Licht? Von der klassischen Optik zur Quantenoptik 2010[4]; Boyd: Nonlinear optics 1998[2]; Spinor des einlaufenden elektrisch geladenen Antiteilchen-Fermions und des auslaufenden Teilchens ψ_n und der **Dirac-adjungierte** Spinor $\bar{\psi}_n = \psi_n^\dagger \gamma^0$ - also Matrix-Adjunktion und Multiplikation mit der Dirac-Matrix γ^0 - der die Felder des auslaufenden Antiteilchens und einlaufende Teilchens darstellt.

Robert **Johansson: Scientific computing projects** http://jrjohansson.github.io/research.html **ScientificCompQuantumToolBox.** Symbolic quantum mechanics using SymPsi - Two-level systems, quantum optics, trapped ions, superconducting circuits, and quantum nanomechanical resonators.

Klassische Theorie der Licht-Materie-WW geht über Dipol-Feld-WW = Fermi-Regel. Phänomenologisch gemäß Becker: Theorie der Wärme wird dem im Feld des Atoms schwingenden Elektrons durch Reibung mit der Atomumgebung Energie entzogen. Spontane Emission eines Photons durch Atom↔Vakuum-System kann durch Modifikation des Vakuum-Zustands stark beeinflusst werden. Haken: Licht und Materie 2 Bde 1995; Haken & Wolf: Atom- und Quantenphysik 1987, 1993; Haken & Wolf: Molekülphysik und Quantenchemie 1998[3]; Reinhold: Quantentheorie der Moleküle 1994, 2015[5] ebook; Demtröder: Molekülphysik 2003, 2013; Brunner, Radloff, Junge: Quantenelektronik 1977[2] p15ff. Dipol als ungedämpfter harmonischer Oszillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 = \frac{e}{m} E \cos(\omega t + \varphi)$ Vakuum macht das äußere elektrische Feld E. Für die Dipolauslenkung = Abstand der Schwerpunkte von positiver und negativer Ladung $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0) - \frac{eE}{m}\frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega t + \varphi)$ Für die bei äußerer Feldstärke $E\cos(\omega t + \varphi)$ im Zeitintervall $\mathrm{d}t$ ausgetauschte Energie ist $U\mathrm{d}t = eE\cos(\omega t + \varphi)\mathrm{d}x$. Pro Zeitintervall zwischen Dipol und Feld ausgetauschte Energie $U = eEcos(\omega t + \varphi)\dot{x}$. Gemittelt über eine Periode bezüglich $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ergibt sich in Resonanznähe $|\omega_0 - \omega| \ll \omega$ ein von der Phasenlage abhängiger Energieübertrag $U = eEA\frac{\omega_0}{2}\cos(\omega_0 - \omega)$. Für $(\omega_0 - \omega) > 0$ wird Energie aus dem Feld entnommen, um das Elektron zu beschleunigen, der Dipol absorbiert. Für $(\omega_0 - \omega) < 0$ wird das Elektron abgebremst und der Dipol emittiert Energie, siehe Seite 383. Meystre & Sargent III: Elements of quantum optics 1997[3] p9ff **Nichtlinearer Dipoloszillator** Kittel, Helmholz, Moyer: **Berkeley Physik Kurs Bd1 Mechanik** 1991[5] Kap7.11 **Harmonischer Oszillator** p138-148; p32ff; $\ddot{x}(z,t) + 2\gamma\dot{x}(z,t) + \omega^2 x(z,t) + ax^2(z,t) + bx^3(z,t) + \cdots = \frac{e}{m}E(z,t)$. Hier setzt Einstein 1917 an, um die WW eines Strahlungsfeldes mit einem Atomsystem auch quantentheo-

retisch zu erfassen. Strahlungsfeld ist unendliche Menge von harmonischen Oszillatoren

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right), \quad \hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i\hat{p}}{m\omega}\right)$$

Leiteroperatormethode oder algebraische Methode mittels **Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren:**

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^n|0\rangle, \quad \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

RMS-Amplitude des elektromagnet Vakuum-Feldes ist

$$E_{\text{vac}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}$$

Rabi-Frequenz beschreibt die Kopplung des Atoms zur jeweiligen Vakuum-Mode $\Omega_{\text{ef}} = D_{\text{ef}}\,E_{\text{vac}}/\hbar$ Atom kann in jede Mode Energie geben, solange Energie- und Impulserhaltung erfüllt sind. Zeitpunkt und Mode sind Zufallsvariablen. Avery: Creation and Annihilation Operators 1976; Die Photonen-Emissionsrate Γ_0 oder der Einstein-Koeffizient A_0 sind durch die **goldene Fermi-Regel**

$$\Gamma_0 = 2\pi\Omega_{\text{ef}}^2\frac{\rho_0(\omega)}{3}, \quad \rho_0(\omega) = \frac{\omega^2 V}{\pi^2 c^3} = \frac{\omega^3}{3\pi\hbar c^3}\frac{|D_{\text{ef}}|^2}{\epsilon_0}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Atom noch im angeregten Zustand zu finden ist $P_e(t) \propto \exp(-\Gamma_0 t)$, da das Vakuum ein riesiges Reservoir ist - das Quantisierungsvolumen $V \gg \lambda^3 = \left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^3$ und dadurch Irreversibität vorgaukelt. Die Situation ändert sich völlig, wenn das Atom zwischen zwei Spiegeln im Abstand $d \approx \lambda$ eingesperrt wird. **Bixon-Jortner-Modell** = Theorie strahlungsloser Übergänge großer **isolierter** Moleküle. Große Moleküle bieten Reservoir = Kontinuum von Schwingungszuständen an. Es zeigt sich exponentieller strahlungsloser Zerfall des elektronischen Zustands innerhalb der Beobachtungszeit, also bevor Stoß mit Wand passiert = Fluoreszenzausbeute von Benzen ist bei kleinen Drucken druckunabhängig. Jortner ed: Advances in Chemical Physics. Photoselective Chemistry Pt1 1981; Barnett & Radmore: Methods in Theoretical Quantum Optics 2005 p199; AdvChemPhys156 2015 p367f; Weisskopf & Wigner: Berechnung der natürlichen **Linienbreite** auf Grund der Dirac'schen Lichttheorie ZPhys63 1930 p54-73 Klassisch beobachtet man für einen Wellenzug Const $e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cos 2\pi\nu_0(t-\delta)$. Spektrale Zerlegung gibt die Fourier-Koeffizienten a_ν mit $J(\nu)\mathrm{d}\nu = |a_\nu|^2 = \frac{\text{const}\mathrm{d}\nu}{\frac{1}{4}\gamma^2 + 4\pi^2(\nu-\nu_0)^2}$ mit der doppelten Halbwertsbreite $\gamma/2\pi$ oder Zerfallszeit $\tau = \frac{2\ln 2}{\gamma}$. $A \to B$ gibt Halbwertszeit $\tau_A = \frac{1}{\sum_K \gamma_K^A}$. Siehe Spektraldarstellung des gedämpften harmonischen Oszillators mit **Lorentz-Profil** auf Seite 383. $J(\nu)\mathrm{d}\nu = \frac{\gamma^A\mathrm{d}\nu}{(\frac{1}{2}\gamma^A)^2 + 4\pi^2(\nu-\nu_B^A)^2}$. Es gelte $E = h\nu$. Wenn Atom im Zustand Q, so ist seine Wahrscheinlichkeit zwischen E und $E + \Delta E$ durch $W(E)\Delta E = \frac{\gamma^Q}{h}\frac{\Delta E}{(\frac{1}{4}\gamma^Q)^2 + \frac{4\pi^2}{h^2}(E-E^Q)^2}$. Gemäß Landau ZPhys45 1927 p340 und Bloch PhysZ29 1928 p58 folgt daraus das Gesetz für den radioaktiven Zerfall, wonach für die **Anzahl der Atome im Zustand Q** der **Pauli-Gleichung** oder **Master-Gleichung** $\dot{n}_Q = \sum_P \gamma_Q^P n_P - \sum_U \gamma_U^Q n_Q$ folgt. Pauli: **Linienbreite** HdP23 p68ff; Dirac geht von einem Atom im Zustand Q im Strahlungshohlraum mit stehenden Schwingungen gemäß $\Delta\vec{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t^2}$ mit $\vec{A}_\rho \sim e^{i2\pi\nu_q}$ und $\psi(Q, N_1, \ldots, N_\rho, \ldots$ mit den Besetzungszahlen N_ρ. **Wigner-Weisskopf-Theorie** Hindmarsh ed: Atomspektren 1972 p116ff Kap16+17 Weisskopf und Wigner p380-450; Menzel: Photonics 2000 p99 pIV **Lorentz-Profil** $f(\nu-\nu_0) = \frac{(\Delta_{\text{FWHM}}/2)^2}{(\nu-\nu_0)^2 + (\Delta_{\text{FWHM}}/2)^2}$. **Bandbreite** $\Delta\nu_{m\leftarrow p} = \frac{1}{2\pi\tau_p} + \frac{1}{2\pi\tau_m}$, wobei τ_p, τ_m die Lebensdauern des oberen/unteren Energiezustand sind; Schmidt: Opt Spektroskopie 1994; Hesse, Meier, Zeeh: Spektroskopische Methoden in der organischen Chemie 1995[5]; Lambert, Gronert, Shurvell, Lightner: Spektroskopie - Strukturaufklärung in der Organischen Chemie 2012; Nachtmann: Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik 1986;

41 Zeit, Quantengravitation

Quantum gravity attempts to reconcile the forces of gravity called for by general relativity at cosmological scales, with quantum forces at very small scales. Juergen Renn and Alexander Blum, MPI for the History of Science, The Emergence of the Tension between Quantum Theory and Gravity. review the historical processes 2015; Renn & Gutfreund: The Road to Relativity. THE HISTORY AND MEANING OF EINSTEIN'S THE FOUNDATION OF GENERAL RELATIVITY 2017; Vaas: Jenseits von Einsteins Universum. Von der Relativitätstheorie zur Quantengravitation 2015; Greene: Der Stoff, aus dem der Kosmos ist. Raum, Zeit und die Beschaffenheit der Wirklichkeit 2008 Deutsch: Die Physik der Welterkenntnis = Fabric of reality 1996; oder 4teilige ARTE-Sendung 2012; Kiefer in Kilian & Weber: Lexikon der Physik Bd4 1998 p277f und p355ff; Mukhanov: Introduction to Quantum Effects in Gravity 2007; Vedral: Makroskopische Quanteneffekte SdW 9 2011 p32-38; Schrödingers Katze in Superposition zugleich lebend und tot. **Mögliches** existiert nur in der Überlegung (tot-lebendig oder Jackpot-Niete). **Faktisches** lässt das nicht zu. SdW Juni 2012 p7. Dann schaut man nach. Dieser Informationsverlust wird als Dekohärenz bezeichnet. Tegmark & Wheeler: 100 Jahre QT SdW 4 2001 p68; **Dekohärenz** = Interferenz beeinträchtigende Prozesse. Messung stört Kohärenz, weil sie eine Verschränkung der Zustände der Quantenobjekte mit den Eigenzuständen der Umgebung bedeutet. Große Objekte neigen eher zu Dekohärenz als kleine, weshalb QM als Theorie der Mikrowelt gilt. Doch in vielen Fällen lässt sich der Informationsverlust verlagsamen oder anhalten. **Verschränkung** verknüpft einzelne Teilchen zu einem untrennbaren Ganzen. Es seien zwei Systeme A und B mit den Hilbert-Räumen $\mathcal{H}_\mathrm{A}$ und $\mathcal{H}_\mathrm{B}$ gegeben. Der Hilbert-Raum des zusammengesetzten Systems ist $\mathcal{H}_\mathrm{A} \otimes \mathcal{H}_\mathrm{B}$. Das System A sei im reinen Zustand $|\psi\rangle_\mathrm{A}$ und System B im reinen Zustand $|\phi\rangle_\mathrm{B}$. Dann ist der Zustand des zusammengesetzten Systems ebenfalls rein und gegeben durch $|\psi\rangle_\mathrm{A}\ |\phi\rangle_\mathrm{B}$. Han, Kornelson, Larson, Weber: **F̃rames for undergraduates**. Student mathematical library 2007; **Reine Zustände, die sich in dieser Form schreiben lassen, nennt man separabel oder Produktzustände.** Wählt man Orthonormalbasen $\{|i\rangle_\mathrm{A}\}$ und $\{|j\rangle_\mathrm{B}\}$ der Hilbert-Räume $\mathcal{H}_\mathrm{A}$ und $\mathcal{H}_\mathrm{B}$, dann kann man die Zustände nach diesen Basen entwickeln und erhält mit komplexen Koeffizienten a_i und b_j

$$|\psi\rangle_\mathrm{A}\ |\phi\rangle_\mathrm{B} = \left(\sum_i a_i|i\rangle_\mathrm{A}\right)\left(\sum_j b_j|j\rangle_\mathrm{B}\right).$$

Ein allgemeiner Zustand auf $\mathcal{H}_\mathrm{A} \otimes \mathcal{H}_\mathrm{B}$ hat die Form

$$\sum_{i,j} c_{ij}|i\rangle_\mathrm{A}\ |j\rangle_\mathrm{B}.$$

Die separablen Zustände von $\mathcal{H}_\mathrm{A} \otimes \mathcal{H}_\mathrm{B}$ sind die, deren Koeffizienten die Darstellung $c_{i,j} = a_i b_j$ erlauben, also die wie oben faktorisiert werden können. Ist ein Zustand nicht separabel, so nennt man ihn verschränkt. Zum **Beispiel** seien zwei Basisvektoren $\{|0\rangle_\mathrm{A}, |1\rangle_\mathrm{A}\}$ von $\mathcal{H}_\mathrm{A}$ und zwei Basisvektoren $\{|0\rangle_\mathrm{B}, |1\rangle_\mathrm{B}\}$ von $\mathcal{H}_\mathrm{B}$ gegeben. Dann ist der folgende Zustand, der sog. „Singulett-Zustand", verschränkt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle_\mathrm{A}|1\rangle_\mathrm{B} - |1\rangle_\mathrm{A}|0\rangle_\mathrm{B}\Big).$$

Wenn das zusammengesetzte System in diesem Zustand ist, haben weder A noch B einen bestimmten Zustand, sondern ihre Zustände sind überlagert und die Systeme sind in diesem Sinne verschränkt. Man nehme an, Alice beobachte System A, Bob System B. Wenn Alice die Messung Ω_A durchführt, können mit gleicher Wahrscheinlichkeit zwei Ergebnisse auftreten: 1. Alice misst 0, und der Zustand des Systems kollabiert zu $|0\rangle_\mathrm{A}|1\rangle_\mathrm{B}$. 2. Alice misst 1, und der Zustand kollabiert zu $|1\rangle_\mathrm{A}|0\rangle_\mathrm{B}$. Im ersten Fall wird jede weitere Messung Ω_B durch Bob immer 1 ergeben, im zweiten Fall immer 0. Also wurde das System durch die von Alice durchgeführte Messung verändert, auch wenn A und B räumlich getrennt sind. Hier liegt das EPR-Paradoxon begründet, und auch die sog. Quantenteleportation. Das Ergebnis von Alices Messung ist zufällig, sie kann nicht den Zustand bestimmen, in den das System kollabiert, und kann daher durch Handlungen an ihrem System keine Informationen zu Bob übertragen. Eine mögliche **Hintertür:** Sollte Bob mehrere exakte

Duplikate der Zustände machen können, die er empfängt, könnte er auf statistischem Weg Informationen sammeln – das **No-Cloning-Theorem** verbietet aber das Klonen von Zuständen. Daher wird – wie oben erwähnt – die **Kausalität** nicht verletzt. Walther & Brukner: Kausalität und Quantenwelt SdW 4.2019 p3, p13-19;

Ein klassisches System ist im Prinzip immer teilbar: Seine kollektiven Eigenschaften entstehen aus den Eigenschaften der Bestandteile. Vogelflug-Orientierung. Quantenbiologie. Penrose: Gravitation verursacht bei $m > 20$ mg den Übergang von QM zu klassischer Physik. Aber es gibt Hinweise, dass es dieses spontan klassische Verhalten nicht gibt, dass Alltagsphysik und Quantenphysik sich nicht unterscheiden. In QM sind Raum und Zeit sekundäre Begriffe, sie gehen erst aus raum- und zeitloser Physik hervor. Die klassische Raum-Zeit geht durch Dekohärenz aus qm Verschränkung hervor, ebenso wie Gravitation danach gar keine grundlegende Naturkraft ist.

Planck'sche Einheiten siehe Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wiss 1899 oder Kilian & Weber: Lexikon der Physik Bd4 1998 p277f und p355ff; John Mitschel 1783 und Laplace 1796 dunkle Himmelkörper kommen bei Korpuskulartheorie Newtons von endlicher Lichtgeschwindigkeit $c < \infty$: Grenze des Entkommens bei $T = U$ bedeutet $\frac{mc^2}{2} = G\frac{mM}{r_S}$, also $r_S = \frac{2G}{c^2}M$. Gemäß **Heisenberg** $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ bedeutet für kleine Kästen $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta p = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\hbar}{2\Delta x} = \infty$ also riesige Impulse $p = cm$ oder wegen $mc^2 = E = cp$ riesige Massen $m > \frac{\hbar}{2c\Delta x}$. Aus $M = m$ folgt $\frac{c^2 r_S(M)}{2G} = M = \frac{\hbar}{2c\Delta x}$ und wegen $r_S(M) = \Delta x$ folgt für die **Planck-Länge** $l_P^2 = r_S \Delta x = \frac{G\hbar}{c^3}$. Borzeszkowski: Raum-Zeit und Elementarlänge Wifo 24 1974 p519ff Ausgangspunkt für Quantengravitations-Theorie ist **Quantentheorie:** Teilchen im Raumgebiet mit Durchmesser Δx hat mindestens den Impuls $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$. Es treten für hinreichend kleine Raumgebiete wegen $mc^2 = E = \Delta pc \geq \frac{\hbar c}{2\Delta x}$ riesige Massen m auf. Maximale kinetische Energie, also Teilchen mit Fluchtgeschwindigkeit c darf nicht tiefer ins Gravitationspotenzial als zum **Schwarzschildradius** abrutschen: $\frac{mc^2}{2} = \gamma\frac{mM}{R}$! Befindet sich die Masse m in einem Raumgebiet mit einem Radius kleiner als ihr **Schwarzschildradius** $= r = \frac{2GM}{c^2}$. r(Proton) $= 10^{-54}$ m, r(Mensch) $= 10^{-24}$ m, r(Mount Everest) $= 1$ nm, r(Erde) $= r = 9$mm, $r_\odot = 3$ km, $r(7m_\odot) = 21$ km, $r(12m_\odot) = 36$ km, r(Galaxis) $= r(10^{12}m_\odot) = 2 \cdot 10^{15}$ m$=$ 0.2 Lj. Für $\Delta x = r$=Schwarzschildradius das Quadrat der Planck-Masse $m_P^2 = \frac{\hbar c}{4G}$. $m_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 1,220910^{19}$ GeV/c^2 $=$ 2,176$\cdot 10^{-8}$ kg ein Floh wiegt 4000 bis 5000 Planckmassen. Oder: Bei Teilchen mit Energien auf der Skala der **Planck-Masse** wird die **Compton-Wellenlänge**
$\lambda_\mathrm{C} = \frac{h}{m_\mathrm{P} c}$ vergleichbar mit dem **Schwarzschild-Radius** $\mu c^2 = \frac{\mu m_\mathrm{P} G}{r}$ und die Planck-Masse ergibt sich zu: Die **Planck-Länge** ist dann wegen **De-Broglie-Wellenlänge** $l_P = \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{cm} = \sqrt{\frac{hG}{c^3}}$ ist um einen Faktor von etwa 10^{20} kleiner als der Durchmesser des Protons. Borzeszkowski: Raum-Zeit und Elementarlänge Wifo 24 1974 p519ff **Planck-Zeit**: $t_P = l_P/c \approx 10^{-43}$ s. Görnitz: **Planck-Maße und große Zahlen**: Fundamentale Naturkonstanten und die großen dimensionslosen Zahlen der Physik PdNPiS Bd50 2001 H6 p27-30; Unzicker: Die mathematische Realität. Warum Raum und Zeit eine Illusion sind 2019; Treder & Rompe: Elementarkonstanten und was sie bedeuten 1988; Borzeszkowski & Wahsner: Elementare Naturkonstanten – letzte Wesenheiten der Welt? spectrum 21 (1990), 36-37; Amelino-Camelia: Planck scale effects in astrophysics and cosmology 2005; Amoroso: Gravitation and cosmology - from the Hubble radius to the Planck scale 2002; Huggett & Callender: Physics meets philosophy at the Planck scale - contemporary theories in quantum gravity 2001;
Wie kommt man nun von der so zerbröselten/quantisierten Raum-Zeit zu der uns bekannten Raum-Zeit auf großen Skalen? Also in Analogie vom Atom zum Wasser? Gamma-ray-Bursts als Ausdruck der granularen Raum-Zeit, falls Licht verschiedener Frequenz verschieden lange zu uns braucht. **Gamma-Strahlung**: Nichtthermische galaktische kommt von kosmischer Strahlung. Ho, Epstein & Fenimore: Gamma-ray bursts. Observation, analysis and theories 1992; Nach Planck 1899 in Sitzungsberichten der Preuß AdW und **Planck:**

Theorie der Wärmestrahlung 1906 (ab 1920 nicht mehr im Buch) **natürliche Einheiten auch für Außerirdische** und die Quantengravitation: Schaumige Raumzeit. Planck-Länge:

$$l_{\mathrm{P}} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1,616199 \cdot 10^{-35} m = 3,054 \cdot 10^{-25} a_0$$

Rauschen bei entsprechender Frequenz sollte einst messbar sein. Planck-Zeit:

$$t_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,391 \cdot 10^{-44}\,\mathrm{s} = 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,053\,91\,\mathrm{s}$$

Kiefer in Kilian & Weber: Lexikon der Physik Bd4 1998 p277f und p355ff;

Karl **Kraus: Über die Richtung der Zeit**, PhysBl 29 1973 p9-19; L̃udwig: Die Grundlagen der Quantenmechanik 1954; Ludwig: Deutung des Begriffs 'physikalische Theorie' und axiomatische Grundlegung der Hilbertraumstruktur der Quantenmechanik durch Hauptsätze des Messens. LNP4 1970 Schütte: Das Begriffssystem der Physik - Einleitung zum Lehrgang der Theoretischen Physik 1971; Mittelstaedt & Pfarr: Grundlagen der Quantentheorie 1978; Kraus: States, effects, and operations. Fundamental notions of quantum theory LNP190 1983; Busch: The Quantum Theory of Measurement 1996; Genz: Die Entdeckung des Nichts. Leere und Fülle im Universum = Bd1 1994; Genz: Wie die Zeit in die Welt kam. Die Entstehung einer Illusion aus Ordnung und Chaos = Bd2 1996; Davies: The physics of the time asymmetry 1974, 1977; populär Davies: Die Unsterblichkeit der Zeit. Die moderne Physik zwischen Realität und Gott 1995; Galison: Einsteins Uhren, Pioncares Karten. Die Arbeit an der Ordnung der Zeit 2003; Prigogine & Stengers: Das Paradox der Zeit 1993; **Zeh: Physik der Zeitrichtung 1984**; **Jeff Hawkins: Zukunft der Intelligenz 2004 Gerichtete Ereignisgraphen entsprechen der Zeiterfahrung des Menschen = Nacheinanderreihung**; Hawkins: A thousand brains. A new theory of intelligence 2021; **Intelligenz = Voraussagefähigkeit!** Wir schauen nur auf Änderung, nicht auf Zustand selbst. Zeitreihen = Mustersequenzen = mögliche Abfolge von Augenblicken, Atome der Wahrnehmung = sehr kurze Zeitsegmente von multivariaten Spike-Sequenzen. Voraussage davon bedeutet die Erfindung von Zukunft und Zeit. Atome der Wahrnehmung als Reihung von Augenblicken kreieren die Illusion der Zeit - machen die Zeit zur Anschauungsform vor jeder Erfahrung. Real sind die kurzen Spike-Sequenzen, die wir zum Kontinuum interpolieren und ins Unendliche extrapolieren. a] Illusion der Zeit: Alles operiert nur auf Grafen, auf denen eine Sequenzen gerichter Kanten als Zeitachsen gedeutet werden können. b] Unendliche Sequenzen, Träger sind zwar bequeme Annahmen für Modell, behindern aber tiefe Padova: Leibniz, Newton und die Erfindung der Zeit 2015 absolute vs relationaler Zeit, tiefer geht's in diesem Buch nicht; Bieri: Zeit und Zeiterfahrung. Exposition eines Problembereichs 1972; Heike Obermanns: Das Problem der 'Realität' der Zeit in Peter Bieris 'Zeit und Zeiterfahrung' 1999; McTaggart: The Nature of Existence 1921-27 ebook; Park: The Image of Eternity. Roots of Time in the Physical World 1980; Meyer: Zeitproblem im 20. Jahrhundert 1964; Schlegel: Time and the physical world 1961; Davies: Die Unsterblichkeit der Zeit. Die moderne Physik zwischen Rationalität und Gott 1997 = About Time. Einstein's Unfinished Revolution; Barry Dainton: Time and space 2010 CC 6320 DAI; Zeiterfahrung des englischen Philosophen John McTaggart Ellis **McTaggart(1866–1925): The Unreality of Time.** In: Mind. A Quarterly Review of Psychology and Philosophy 17/1908 p457–474 findet sich in Zimmerli & Sandbothe eds: Klassiker der modernen Zeitphilosophie 1993 McTaggart unterscheidet zwischen verschiedenen Betrachtungsweisen der Zeit, die er A-, B- und C-Reihen nennt. Seiner Auffassung nach sind sowohl die A- wie auch die B-Reihe widersprüchlich oder mit den Phänomenen inkompatibel, woraus er schließt, dass die Zeit überhaupt eine Illusion sei. Diesem Fazit schließen sich zwar die wenigsten Theoretiker an, dh, sein **Beweis der Unwirklichkeit der Zeit gilt unkontrovers als gescheitert**, höre Sven Bernecker: Raum & Zeit. McTaggerts Konzeption von Raum und Zeit, Vorlesung gehalten am 19.03.2012 an Uni Wien. Seine begriffliche Unterscheidung ist aber nach wie vor die Standardterminologie. Die A-Reihe operiert mit transitorischen Begriffen wie 'vergangen', 'gegenwärtig' und 'zukünftig', die jeweils relativ auf die Perspektive der ersten Person eines Sprechers als deiktisches Zentrum sind. Die Sätze der A-Reihe sind also indexikalisch und zeitlich, d. h., sie ändern ihren Wahrheitswert mit der beweglichen Gegenwart. Es liegt somit eine tensed series oder dynamic-series vor. Zeit ist gerichtet, der Fluss der Zeit bewegt sich mit der Gegenwart und entspricht der erlebten Zeit. Die B-Reihe operiert dagegen mit Begriffen wie 'früher als',

'gleichzeitig' oder 'später als', die relativ auf andere Zeitstellen und dadurch unabhängig von einer rein subjektiven Perspektive sind. Die Sätze der B-Reihe sind zeitlos, denn ihre relationale Bestimmung ändert sich nicht, es ist unerheblich, zu welchem Zeitpunkt man auf die Ereignisse schaut, ihr Wahrheitswert bleibt immer gleich. Diese Reihe wird daher als tensless series oder static-time-series bezeichnet. Zeit fließt nicht, zeitliche Bestimmungen sind statisch und permanent; Zeit ist analog zum Raum, so dass alle Zeitpunkte gleichzeitig vorhanden sind. Zeit ist objektiv und wissenschaftlich. Zieht man die Zeitbestimmungen von der A-Reihe ab, so erhält man eine C-Reihe, eine Reihe permanenter Relationen, vergleichbar mit der Reihe der natürlichen Zahlen. Sie ist nicht zeitlich, weil sie keine Veränderung einschließt, und sie hat keine eigene Richtung, sondern nur eine Reihenfolge. McTaggart sieht die A-Reihe fundamentaler für die Zeit an als die B-Reihe und will zeigen, dass die Zeit nicht real sein kann, wenn die Unterscheidungen „vergangen", „gegenwärtig" und „zukünftig" nie auf die Wirklichkeit zutreffen. Er stellt im Wesentlichen drei Thesen (Prämissen) auf, woraus sich als Konklusion die Unwirklichkeit der Zeit ergibt. Werden die Prämissen akzeptiert, dann ist der Beweis gelungen, weil das Argument deduktiv stichhaltig ist. **These 1:** Keine Zeit ohne Veränderung. Diese These ist allgemein anerkannt. Aber was bedeutet Veränderung? Es ist nicht der Zeitfluss, dies würde die A-Reihe bereits voraussetzen, sondern die Tatsache, dass Gegenstände zeitlich nacheinander unverträgliche Eigenschaften haben. **These 2:** Veränderung gibt es nur in der A-Reihe. Die B-Serie ist nicht in der Lage, den Zeitfluss darzustellen. Ereignisse sind statisch relativ zueinander geordnet, es gibt keine echte Veränderung, die ist nur in der A-Serie möglich. **These 3:** Die A-Serie ist widersprüchlich. Nach der A-Serie kommt jedem Ereignis oder Zeitpunkt das Attribut zu, dass es sowohl gegenwärtig, zukünftig und auch vergangen ist. Dies seien aber widersprüchliche Bestimmungen und können daher nicht real sein. Auch eine Umgehung der Gleichzeitigkeit der Attribute führt zu Widersprüchen. Ist aber die A-Reihe unreal, jedoch eine notwendige Voraussetzung für die Zeit, könne die Zeit selbst nur unreal sein. **Diese Thesen sind nicht unangreifbar.** Einer der wesentlichsten Punkte ist die heutige Auffassung des Begriffes von Veränderung[2], nach der die These 2 nicht bestehen kann: Nach Russell gibt es auch in der B-Reihe durch das Eintreten neuer Ereignisse und Tatsachen zeitliche Veränderung. Ein Gedankenexperiment von Sydney Shoemaker entwirft eine Möglichkeit, nach welcher Zeit auch ohne Veränderung möglich sein könnte. – Dass McTaggarts Beweisversuch für die Unwirklichkeit der Zeit (also der Nachweis einer Antinomie) gescheitert ist, bedeutet nicht, dass die Realität der Zeit damit schon bewiesen wäre.; Mercier: Perlmanns Schweigen 1997; Wyller: Was ist Zeit? 2016 Lösung: Qualia-Problem der Zeit = Zeit erleben. Dennett: Scheinproblem!; Einsicht und belasten die Axiomatik unnötig. c] R. **Levine: Eine Landkarte der Zeit. Wie Kulturen mit Zeit umgehen** 1999[16]; S. Klein: Zeit. Der Stoff, aus dem das Leben ist. Eine Gebrauchsanleitung, 2011[4]; Zimbardo TED Lecture: **RSA Animate - The Secret Powers of Time** http://www.youtube.com/watch?v=A3oIiH7BLmg Senowski & Delbrück: Sprache des Gehirns, SdW März 2013 p23; Quiroga, Fried, Koch: Wie das Gehirn die Großmutter erkennt, 10[4] Begriffszellen SdW März 2013 p28-33; Quiroga, R. Q.: Borges and Memory. Encounters with the Human Brain 2012; Siehe auch Seite 434.

Geroch: General Relativity from A to B 1981; Carroll: From Eternity to Here. The Quest for the Ultimate Theory of Time 2010; Smolin: Time Reborn. From the Crisis in Physics to the Future of the Universe 2013; **Barbour: The end of time** 1994; Die praktische Zeit wird nicht in Frage gestellt! **Relationale Zeit** ist nützlich! Gendolla: Zeit. Zur Geschichte der Zeiterfahrung. Vom Mythos zur Punktzeit 1992; **G̃endolla & Schulte: Was ist die Zeit?** 2012; **Liebscher: Eigenzeit und Weltalter**, In: Sitzungsberichte Leibniz-Sozietät der Wiss zu Berlin 139/140 2019 p185ff; B̃arbour: The discovery of dynamics. A Study from a Machian point of view of the discovery and the structure of dynamical theories 2001; B̃arbour: The Janus point. A new theory of time 2020; Barbour: Summary Guide. The Janus Point by Julian Barbour 2021; Lee Smolin: Im Universum der Zeit 2014 Zeitlosigkeit gibt es nicht! Zeit ist was Absolutes: Nicht einmal Naturgesetze stünden über ihr. Naturgesetze seien nicht zeitlos, sondern veränderten sich allmählich. Wahrscheinlich werde sich der Raum einmal als Illusion erweisen, als eine Art makroskopische Eigenschaft, die aus mikroskopischen Phänomenen resultiere, ähnlich wie Temperatur und Druck. Raum nicht fundamental: www.timereborn.com. Zeeya Merali: Der Ursprung von Raum und Zeit, http://www.spektrum. de/ Theoretical physics: The origins of space and time, Nature500 p516-519, 2013. Jeismann: **Zeit - Wo die Welt beginnt. Die Greenwich Story** RIAS 1983; Kritisiert wird nur Newtons **gleichförmig fließende abso-**

lute Zeit, die unabhängig von aller Materie definiert wird. Die wird erst problematisch, wenn es - wie in der QM - keine Bahnen gibt, zu denen vergleichbare Uhrenstände existieren. Zeit ist - analog zum Begriff der Information, der eine menschgerechter Vergröberung des Zustandsraums darstellt - kein allgemeingültiger naturwissenschaftlicher Begriff. So wie in der QM die Teilchenbahnen verschwinden, so gibt es bei der QG keine Raumzeit mehr, keine absolute Zeit. Grundgleichung der Quantengravitaion ist eine **Schrödinger-Gleichung ohne Zeit**, die **Wheeler-DeWitt-Gleichung**, liefert die Weltwellenfunktion, die über dem Raum aller 3-Metriken definiert ist, auf Basis gravitativer Wirkung

$$\Psi[g_{\mu\nu}, \phi] = \int\limits_C d[g_{\mu\nu}]d[\phi]e^{-I[g_{\mu\nu},\phi]}$$

über Metriken und Materiefelder ϕ bei gegebenen raumartigen Randbedingungen:

$$\left[G_{ijkl}\frac{\delta^2}{h_{ij}h_{kl}} +^3 R(h)\sqrt{h} - 2\Lambda\sqrt{h}\right]\Psi(h_{ij}) = 0 \quad \text{mit} \quad G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl})$$

mit der Superraummetrik G_{ijkl} und der skalaren Krümmung der inneren Geometrie der 3-Fläche. Sternberg: Curvature in Mathematics and Physics 2012; Konfigurationsraum ist hier ein Superraum. Lösung ist die **Weltwellenfunktion** bei der Metrik h_{ij}. Sie beschreibt keine Zeitabhängigkeit! Ψ ist Amplitude einer 3D-Geometrie der Welt. Wetterich: Quantengravitation und Higgsteilchen, PJ18 2019 H8/9 p67-71; David Atkatz: **Quantum cosmology for pedestrians** AmJPhys62, 619 (1994); DeWitt, B. S. (1967). Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory. PhysRev160 (5): 1113–1148. George Leibbrandt: Introduction to the technique of dimensional regularization RevModPhys47, 849 – Published 1 October 1975; **Rebhan: Theoretische Physik. Relativitätstheorie und Kosmologie** 2012; Ta-Pei Cheng: Relativity, gravitation, and cosmology - a basic introduction 2005; Liebscher: Kosmologie p206; Goenner: Einführung in die Kosmologie p266; Quanten-Schleifen-Gravitation = Urprall, statt Urknall: **Gambini & Pullin: A First Course in Loop Quantum Gravity** 2011; Bianca Dittrich, Renate Loll; R̃ovelli: Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint. Eine Reise in die Welt der Quantengravitation 2016; Thiemann, Webmuster des Raums: Spin-Netzwerke, in: **Einstein Online** Bd01 2005 p1130; Hawking: Lectures on quauntum cosmology, In: LNP246 1986 p1-45; Kiefer: Quantum gravity 2007; Rovelli: Quantum gravity 2004; Gambini & Pullin: Loops, knots, gauge theories and quantum gravity 1996; Hartle & Hawking: Wave function of the Universe, PhysRev D28, 2960 15 December 1983; **Wolf: Parallele Universen. Die Suche nach anderen Welten** 1988; Rovelli: Notes for a brief history of QG 2008; Siehe Kap17 In: H.D. **Zeh: Physik ohne Realität: Tiefsinn oder Wahnsinn?** 2012; Zeit hat gemäß Aristoteles und Leibniz oder Mach, anders als Newton es sagte, nur einen **rein relativen Charakter**: **relationale Zeittheorie**. Newtons **gleichförmig fließende absolute Zeit** macht die Bewegungsgleichungen einfach. Nichtlineare Transformationen von Newtons Zeit führt auf komplizierte Pseudokräfte. **Dekohärenz-Ansatz**: Quantentheorie hat zwei disparate Modelle. 1. Schrödinger-Gleichung mit sich nicht empirisch zeigender Wellenfunktion. 2. Ebene: **Kollaps der Wellenfunktion** = Wellenfunktion bietet Katalog von Möglichkeiten, von denen bei Messung nur eine erscheint - welche, das bestimmt **kein Naturgesetz**. **Zeh-Everett:** Komplementaritäts-Begriff von Bohr versucht nur die absonderliche Tatsache verbal einzuhegen, dass die Teilchen- und die Wellennatur eines Elektrons nie gleichzeitig messbar sind, da Erstere als Verwirklichung des indeterminierten Einzelfalls in Erscheinung tritt, Letztere jedoch erst in vielfacher Wiederholung, im stochastischen Abtasten des Möglichkeitskatalogs. Bohrs Komplementarität ist für Zeh nichts als ein „verbales Ausweichmanöver“ zur Verschleierung ungelöster Probleme oder Vermeidung ungewöhnlicher und unerwünschter Konsequenzen“. Den Stilbruch zwischen Schrödingergleichung und Kollaps, versuchen andere Physiker dadurch zu kurieren, dass sie nach Zusatztermen suchen, die den Kollaps erzwingen. Dergleichen hält Zeh weder für aussichtsreich noch für notwendig. Vielmehr könne und müsse Schrödinger ganz und gar ernst genommen werden. Wenn man dann nämlich berücksichtigt, dass „Kollaps“-Situationen (also etwa die Messung einer Teilchenposition) immer Wechselwirkungen mit einer komplexen Umgebung implizieren und wenn man diese Wechselwirkungen als sogenannte Verschränkungen der beteiligten Wellenfunktionen beschreibt, für deren Dynamik nichts als die Schrödingergleichung verantwortlich ist,

dann lässt sich der Kollaps durchaus beschreiben. Was aber geschieht mit den für den Beobachter unverwirklichten Möglichkeiten? Kommen sie nicht in die Welt, weil sie nie in der Welt waren, da die Wellenfunktion, in der sie enthalten sind, nach Bohr gar nichts Reales ist, sondern nur ein Rechenwerkzeug? Zeh: Der Wellenfunktion die Realität abzusprechen, ist eine „Verharmlosung naturwissenschaftlicher Erkenntnisse“, die an die Forderung der Kardinäle an Galilei erinnert, das kopernikanische Weltbild nicht als Tatsache, sondern nur als Rechenmethode zu lehren. Die Wellenfunktion muss was ganz und gar Reales sein - so real wie Tische und Stühle, ja sogar in einem umfassenderen Sinne real als solche Gegenstände. Denn dann seien die in der Wellenfunktion verborgenen Möglichkeiten in Wahrheit alle Wirklichkeiten - nur in verschiedenen Everett-Welten. **Wolf: Parallele Universen. Die Suche nach anderen Welten** 1988; Aus der Vogelperspektive der Quantenrealität spalte sich die Welt bei jeder Beobachtung in viele, in der Regel sehr viele parallele Welten auf, von denen der Beobachter aus seiner Froschperspektive stets nur eine wahrnehme und daher glauben müsse, mehr als diese eine gebe es nicht. Den Indeterminismus der Quantentheorie, das von Albert Einstein abgelehnte „Würfeln Gottes“, gebe es nur in der Froschperspektive. Aus der Vogelperspektive auf all die Myriaden Welten würfele niemand. Was aber bestimmt den Weg eines sich als kontinuierlich existierend wahrnehmenden Frosches durch das Geäst der verzweigten Realitäten? Nach Bohr hat Naturwissenschaft nicht die Natur zum Gegenstand, sondern nur das, was wir über sie wissen können. Zeh: Das ist eine irrationalistische Weltanschauung. Doch Zweifel am Rationalismus sind nicht irrational. Warum sollte die Wirklichkeit fundamental so strukturiert sein, dass sie in ein Menschenhirn passt - und sei es das eines Physikers, der imstande ist, sie sich als ein unablässig sich verzweigendes Geäst vieler Everett-Welten vorzustellen? Gewiss, man könnte sie dann im traditionellen Sinn naturwissenschaftlich verstehen. Doch das ist kein zureichender Grund dafür, sich an diese Vorstellung zu gewöhnen. FAZ 24.04.2012 Ulf von Rauchhaupt Rezension zu Dieter Zeh „Physik ohne Realität“ Lieber viele Welten als ein würfelnder Gott. Hawking und Penrose: Raum und Zeit 1998; **Müller: Raum und Zeit** - Vom Weltall zu den Extradimensionen - von der Sanduhr zum Spinschaum 2012 berichtet sehr anschaulich von Entropie und Zeitpfeil mittel Mikro- und Makrozuständen bei Lego (Mikro- & Makrozust gleich bei Buchstaben → Wort; bei Wörterbuch und Satzaussage nicht) in Kap3.5, von Extradimensionen, Spinschaum oder ein zyklisches Universum, ignoriert aber, wie schon Smolin, **Barbours relationalen Ansatz**, der das Mach'sche Prinzip erstmals wirklich ernst nimmt. **Bleyer & Liebscher: Stört der Kosmos die Physik auf der Erde?** Die Sterne70 1994 p197-206; Relativitätstheorie hat die globale Absolutheit von Raum und Zeit nicht vollständig überwunden und QFT ist massiv hintergrundabhängig; daran krankt auch die derzeit populärste Vereinigung, die Stringtheorie. Die universelle Zeit wird bei Barbour zur Illusion (**Zeit ist allenfalls in Subsystemen als 'Ephemeridenzeit' vorhanden**) und der Raum ist nur durch Relationen der materiellen Körper definiert (dabei eliminieren Symmetrien alle redundanten Freiheitsgrade). Diese Natur zeigt sich auch in der Wheeler-DeWitt-Gleichung. Hier liegt der zweite moderne Ansatz, das Problem von Raum und Zeit fundamental anzugehen. Kiefer und Wheeler: Quantenkosmologie. Beide Ideenkomplexe **brechen die schon traditionelle vierdimensionale Raumzeit wieder auf.** Dynamisch relevant sind nur die dreidimensionalen Hyperflächen, wie John Wheeler bemerkte: '**Zeit ist das Instrument der Natur, welches verhindert, dass alles auf einmal geschieht.'** Giddings: Black holes, quantum information, and the foundations of physics, Physics Today Volume 66 Issue 4 April 2013, page 30;

Greene: Die verborgene Wirklichkeit 2012; SdW Sept 2012 p100; Wirklichkeit ist alles, was **wirken** kann, z.B. das wirkliche Universum. **Zahlen** $\bigcap$ **Wirklichkeit** $\subset$ **Realität**. Kuhlmann: **Was ist real?** Weder Welle noch Teilchen. Struktureller Realismus. SdW Juli 2014 p46-53; Thomas Palzer: Innenseite der Wirklichkeit, DLF 14.4.2019 Mentum. unverfälschte**Fakten**↔ **Fiktion**↔ vorgetäuschte**Fakten**=**Fake**. Platon: Wirklichkeit liefert authentische Schatten. Bayes liefert Glaubwürdigkeit von Fiktion bei gemessenen Fakten. Fakten beruhen auf Konzepten/Fiktionen. Thomas von Aquin: Wahrheit besteht Tatsachen und Urteile übereinstimmen. Beweis bezieht sich auf das Konzept der Logik. Nadine Gordimer Adams Rippe. **Carnap: Der logische Aufbau der Welt. Scheinprobleme in der Philosophie 1928** = SdW Sept 2012 p48 http://www.astroparticle.net/elefantenimall/ Populärwissenschaftliche Geschichte und die Zukunft des Lebens und des Universums von Ben Moore: Elefanten im All 2012; Gribbin: Jenseits der Zeit 1996 p295; Tipler: **Zeitmaschine** Physica D9 1974 p2203; Siehe auch Gödel auf Seite 435

Kunkels Vision von Alchimie bedeutet Kernphysik! Soddy 1877-1956. Rutherford und Soddy Oktober 1901 Die Metalle Thorium und Radium verwandeln/transmutieren sich in Edelgase/Emanation. 1903 $\alpha - Zerfall$ bringt $^2_1$He. Isotope 1913. Soddy: Matter and Energy 1932; Sterne/Sonne = mit bloßem Auge sichtbare radioaktive Hochöfen. R̃utherford: Radioaktive Umwandlungen 1907; R̃utherford: Radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen 1913; Andrade: Rutherford und das Atom. Der Beginn der neuen Physik 1965; Reeves: A force of nature. The frontier genius of Ernest Rutherford 2007; Rutherford: Über die Kernstruktur der Atome. Baker-Vorlesung 1921 35 Seiten; Alchimie ab 1919 mit RaC α-Strahlen $^4_2\alpha + ^{14}_7\mathrm{N} \rightarrow ^{18}_9\mathrm{F}^* \rightarrow ^{17}_8\mathrm{O} + ^1_1\mathrm{p}$ oder kurz $^{14}_7\mathrm{N}(\alpha,p)^{17}_8\mathrm{O}$ mit Protonentdeckung; In der Hochatmosphäre $^{14}_7$N(n,p)$^{14}_6$C. Merricks: World made new. Frederick Soddy, science, politics, and environment 1996; Naturwiss Einsichten befördern Krieg und Krieg befördert naturwiss Einsichten. Banken brauchen Krieg, um ihre Machenschaften zu vertuschen. Sammons: Die Protokolle der Weisen von Zion, St. Petersburg 1903, Berlin 1920 Die Legende von der jüdischen Weltverschwörung. Ford: Der internationale Jude. Ein Weltproblem 1920-1921; Ford: Mein Leben und Werk 1922; Ford: Der wahre Grund für Reichtum. Erkenntnisse über Erfolg, Gesundheit, Wiedergeburt und innere Kraft 1928; Rüggeberg: Geheimpolitik Bd1, Der Fahrplan zur Weltherrschaft 1990; Rüggeberg: Geheimpolitik Bd2, Logen-Politik 1997; **Soddy: Die Natur des Radiums 1908** erkannte als erster die Möglichkeit einer Atombombe. 1903 Erdalkalimetall Radium verwandelt sich in zwei verschiedene Edelgase: $^{226}_{88}\mathrm{Ra} \rightarrow ^4_2\alpha + ^{222}_{86}\mathrm{Rn} + 4.871$ MeV. **Wells** stellt die in seinem Roman **Befreite Welt** 1914 dar. Strub: Soddy, Wells und die Atombombe PJournal4 2005 Nr7 p47-51. Flügge: Kann der Energieinhalt der Atomkerne technisch nutzbar gemacht werden? Die Naturwissenschaften 27 (1939) 402-410 oder Deutsche Allgemeine Zeitung vom 15.8.1939 oder in Wohlfarth: 40 Jahre Kernspaltung 1979 p119-140; Thermische Neutronen schalten die Kernkraft aus und lassen die elektrostatische Energie von der Leine. Urankernkomplettauflösung bringt bei spontaner Freisetzung aller Protonen von Uran also $Q = 92$e und $R = 10^{-15}$m = 1fm etwa $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \approx 10^{-9}$ Ws = 2 GeV. 1926 Eddington-Idee $\mathrm{H}^+ + \mathrm{H}^+ \rightarrow \mathrm{He}^{2+}$. 1937 bis 1939, also noch vor Spaltung zeigten Bethe und Weizsäcker, wie die Sonne/Sterne Energie aus Wasserstoffkernfusion entsteht. **Gamow: Der Bau des Atomkerns und die Radioaktivität** 1932; **Weizsäcker: Die Atomkerne – Grundlagen und Anwendungen ihrer Theorie** 1937; Stolz: Hahn und Meitner 2007[3]; **Laura Fermi & Segre: Mein Mann und das Atom** 1954, 1956 Flucht einer Jüdin 1938 über Deutschland.; Jungk: Die Zukunft hat schon begonnen. Amerikas Allmacht und Ohnmacht 1952; **Zischka: Befreite Energie. Der Menschheitskampf um die Nutzung der Naturkräfte** 1953; **Jungk: Heller als 1000 Sonnen. Das Schicksal der Atomforscher** 1956; Oppenheimer **Manhattenprojekt = keine Ein-Mann-Show** 1942, Kosten 25.8Mrd$. 250 km südlich von Los Alamos, White Sands Proving Grounds, 16. Juli 1945 Trinity-Test mit Pu-Bombe. Zuvor **Unfälle bei Kritikallitätstest** = Drachen am Schwanz kitzeln = Demon core. 21.4.1945 Los Alamos, Harry Daghlin 1921-15.9.1945 5.1 Sv Pu unter Otto Frisch Zusammenbau des Kerns für Trinity-Test. 21.5.1945 Los Alamos, 21 Sv bei Montage des Kerns der Hiroshima-Bombe Little Boy am 31.7.1945 einsatzbereit, Opfer Luis Slotin 1910-30.5.1946. Serber: The Los Alamos primer. The first lectures on how to build an atomic bomb 1943; Bagge, Diebner, Jay: Von der Uranspaltung bis Calder Hall 1957; Münzinger: Atomkraft. Der Bau von Atomkraftwerken und seine Probleme 1957[2]; 1954 Obninsk bei Moskau, 1956 Calder Hall = Windscale = Sellafield = Westküste Großbrit. Kernreaktoren braucht man zur billigen Massenproduktion von Kernwaffen = Schnelle Brüter für Plutonium. W̃einberg & Wigner: The physical theory of neutron chain reactors 1958; **Compton: Die Atombombe und ich** 1958; **Groueff: Projekt ohne Gnade. Das Abenteuer der amerikanische Atomindustrie** ist irreführender Buchtitel 1967 = Originaltitel trifft den Buchinhalt **Manhattan project**. The untold story of the making the atomic bomb. Problem: $^{238}_{92}$UI(99.276%),$\boxed{^{235}_{92}\mathrm{U}(0.718\%)}$,$^{234}_{92}$UII(0.0056%). **Also Anreicherung des natürlichen Urans** mit 0.7%$^{235}_{92}$U auf wenigstens 1 bis 4%, bedeutet Aufbau einer Industrie, die Isotope des Urans elektromagnetisch, mechanisch per Zentrifuge oder thermisch per Diffusion sortiert und aus ^{238}U waffenfähiges Plutonium gemäß $^{238}_{92}\mathrm{U}(\mathrm{n},\gamma)^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}_{93}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta^-} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}$ brütet. Segre: Die großen Physiker und ihre Entdeckungen Bd2 1980 p115 **Rutherford-Streuung** durch simultane Geiger- und Marsden-Blitzzählung. Unabhängige Einzelzählung

$N_G = p_G N$ und $N_M = p_M N$ gibt Anzahl tatsächlicher gezählter Ereignisse $N_{GM} = p_{GM} N$ bei **Koinzidenz** wegen statistischer Unabhängigkeit $p_{GM} = p_G p_M$ gibt tatsächliche Anzahl der Ereignisse $N = \frac{N_G N_M}{N_{GM}}$; Stulz: Schlaglicht Atom - aus der Geschichte der Kernforschung 1973; Trigg: Experimente der modernen Physik. Schritte zur Quantenphysik 1971, 1984 p28 Rutherford und Soddy ertappen sich 1902 als Alchimisten als Thorium wird zu Argon wird; Sclove: From alchemy to atomic war. Frederick Soddy's 'technology assessment' of atomic energy 1900-1915, Science, technology, and humanvalues 14 1989 p163-194 ab 1903 prophezeite Soddy in öffentlichen Vorträgen, dass die in Atomkernen latente Energie nutzbar ist und warnte vor Atomkrieg; Franz Barwich: Das ist Syndikalismus. Die Arbeiterbörsen des Syndikalismus 1923; Newhouse: Krieg und Frieden im Atomzeitalter. Von Los Alamos bis SALT 1990; Anders: Die atomare Drohung. Radikale Überlegungen 1970; **Stitzer: Der Weltuntergang findet nicht statt** 1956 p5 Paul Lincke: Berliner Luft, Unsere braunen Jungs, p24 Marshall-Inseln 106 Test 1946-62, p106 6t Pu an Aerosolen, p126f 28.2.1954 Castle Bravo 15MT per Teller/Ulam Design, p128ff Operation Nuclear blast an Bodentruppen in 14 oberirdischen Test in Nevada als Operation Tee pot 1955; **Bradley: No place to hide 1948 = Atombomben-Versuche im Pazifik** 1951 Crossroads = Bikini-Tests zur militärischen Effektivität von oberirdisch 158 m und Unterwasser-Zündung -27 m am 1. und 25. Juli 1946. Ergebnis: Militärtechnik ist nur in der Vernichtungszone gefährdet. Hiroshima und Nagasaki haben hingegen klar gezeigt, dass Atombomben klassische **Flächenbombardement**s sehr effektiv als ideale Massenvernichtungswaffen ersetzen. Ziel von Atomwaffen ist die Zivilbevölkerung.; Douhet 1921: Flächen-Bombardierung von Zivilbevölkerung und Industrieanlagen als Mittel der modernen Kriegsführung. → **Trenchard-Doktrin 1930**: Baue als Kriegsvorbereitung viele schwere Bomber. Heute: Raketen aller Reichweiten und Marschflugkörper/Drohnen. Hillenbrand: Unbroken. Überleben. Mut. Vergebung. Die unfassbare Lebengeschichte des Louis Zamperini 2010; B̃auernfeind: Radioaktiv bis in alle Ewigkeit. Das Schicksal der Prinz Eugen 2011; B̃auernfeind: Geleitflugzugträger: USA, England, Japan 1939-1945, 2013; B̃auernfeind: Atom-U-Boote 2015; B̃auernfeind: Prinz Eugen: Die Geschichte des legendären deutschen Kreuzers 2016; Beeching: Das Dakota-Projekt 1976; d'Antonio: Bombenernte. Amerikas atomare Erbschaft 1994; Heinemann-Grüder: Die sowjetische Atombombe 2002; **Hersey: Hiroshima. 6. August 1945 8:15** 1946; Fördermann bei der SADG Wismut in Johanngeorgenstadt war Werner **Bräunig: Rummelplatz** = Der eiserne Vorhang 1965, 2007; Goldstone: The effects of nuclear weapons 1957, 1962[2] → **Bhabha, Khanolkar & Khotari: Nuclear explosions and their effects** 1956 = Atom. Aufstieg oder Untergang? 1957 Vorwort von Nehru und herausgeben vom Altnazi-Redner Krausskopf; **Schutz gegen Massen-Vernichtungswaffen**. Der Einsatz der Truppen bei der Anwendung von atomaren, chemischen und bakteriologischen Waffen. Merkblatt für Soldaten und Matrosen 1956; **Wigner: Survival and the bomb - methods of civil defense** 1969; Eugene Wigner Biography - Facts, Childhood, Family Life, Achievements & Timeline. A Biography; von Frankenberg: Massenvernichtungswaffen 1958; Frankenberg: Meine Entscheidung. Erinnerungen aus dem zweiten Weltkrieg und dem antifaschistischen Wiederstandskampf 1963; von Frankenberg und Poschwitz: Tradition im Kreuzverhör. Meine Familie in der Geschichte 1980; Bodo Scheurig: Freies Deutschland. Das Nationalkomitee und der Bund Deutscher Offiziere in der Sowjetunion 1943-1945, 1984; Scheurig: Verdrängte Wahrheiten. Zeitgeschichtliche Bilder 1998; Scheurig: Peußischer Ungehorsam. Tradition und Verfall 1999; **Leutz, Goldstone: Die Wirkungen der Kernwaffen** 1964 p645ff Liste aller Kernwaffentests von 1945-1958; Hoffmann: Kernwaffen und Kernwaffenschutz 1975[2]; **Schutz gegen Wirkung von Massenvernichtungswaffen.** Schulungshefte, ausgearbeitet im Auftrage des Präsidiums des Deutschen Roten Kreuzes 1960: 1 Kurze Charakteristik der Kernwaffen. Thema 2 Die vernichtende und zerstörende Wirkung von Kernwaffendetonationen und die Maßnahmen des Schutzes. Thema 3 Die Geländedeaktivierung und die radioaktive Reststrahlung bei Kernwaffendetonationen. Thema 4 Die Mittel des persönlichen Schutzes gegen Wirkungen der Massenvernichtungswaffen. Thema 5 Kernstrahlungsmeßmethoden und Kernstrahlungsmeßgeräte. Thema 6 Die Organisation und Durchführung der Strahlungsaufklärung nach Kenrwaffendetonationen. Thema 7 Die Einwirkung der Kernwaffe auf den menschlichen Organismus und die sanitäre und medizinische Versorgung der Geschädigten. Thema 8 Die chemischen Kampfstoffe. Wirkung und Schutz. Thema 9 Entgiftung, Entaktivierung und Entseuchung.

Thema 10 Die medizinische Hilfe bei der Einwirkung chemischer Kampfstoffe; Mlejnek & Ledvinka: Das Gelände und die Massenvernichtungswaffen. Die Ausnutzung des Geländes zum Schutz gegen die Wirkungen der Massenvernichtungswaffen 1961; Lehrbuch für den DRK-Gesundheitshelfer Band II Sanitätseinheiten 1965 Anleitung zur Hilfe beim Einsatz von Massenvernichtungswaffen; **Schneider, Schindler, Krüger, Kasper, Maciaszek, Stiehler, Beitz Matthes, Fritze, Richter, Letz: Schutz vor Massenvernichtungswaffen. Lehrbuch der Zivilverteidigung** 1976; Statt schwerer Waffen und Propaganda/Putin-Hass in Medien/Schule wären Übungen zum Leben ohne elektrischen Strom, zur Gewinnung von Trinkwasser aus Oberflächenwasser, zum Schutz vor Massenvernichtungswaffen und zur Palliativpflege zielführender. C̃ourtois & Ackerman eds: Schwarzbuch Putin 2023; F̃asbender: Wladimir W. Putin. Eine politische Biographie 2021 Großvater = Lenins Leibkoch in den Jahren nach der Revolution. Die Eltern = einfache Leute im zerschossenen Leningrad der Nachkriegszeit. Sohn = ein KGB-Offizier, den der Weltgeist aus obskurer DDR-Provinz ins höchste Staatsamt spült; R̃eitschuster: Putins Demokratur. Was sie für den Westen so gefährlich macht. Aktuell zum Krieg in der Ukraine. Das prophetische Buch aus 2006 erklärt Putins Psyche und Machthunger 2018; Apps zur Warnung vor einfliegenden Atomraketen. Auch außerhalb der Vernichtungszone richten Atomwaffen durch die einige Sekunden anhaltende intensive photonische Strahlung = 3 sek Hitzeblitz = Soforttötung/-Verbrennung/Netzhautablösung im Abstand von 2km, Sofortkernstrahlung γ/prompte Neutronen innerhalb der ersten 20 sec und Druckwelle/Trommelfell leicht verminderbaren Schaden an. Sicherer wäre es wegen der globalen Zirkulation, auf die Südhalbkugel zu ziehen und den Anbau ${}^{90}_{38}$Sr- und ${}^{137}_{55}$Cs-strahlungsarmer Pflanzen zu erlernen. ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{144}_{57}\mathrm{La} + {}^{90}_{35}\mathrm{Br} + 2\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$, ${}^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{236}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{143}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{90}_{36}\mathrm{Kr} + 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$, ${}^{90}_{35}\mathrm{Br} \xrightarrow[1{,}91\ \ \mathrm{s}]{\beta^-} {}^{90}_{36}\mathrm{Kr} \xrightarrow[32{,}32\ \ \mathrm{s}]{\beta^-} {}^{90}_{37}\mathrm{Rb} \xrightarrow[158\ \ \mathrm{s}]{\beta^-} {}^{90}_{38}\mathrm{Sr} \xrightarrow[28{,}78\ \ \mathrm{a}]{\beta^-} {}^{90}_{39}\mathrm{Y} \xrightarrow[64{,}0\ \ \mathrm{h}]{\beta^-} {}^{90}_{40}\mathrm{Zr}$. F̃romm: Unterrichtshilfen Zivilverteidigung Klasse 9 1985; S̃tolz: EAGLE-GUIDE Radioaktivität von A bis Z 2011; Stolz: Messung ionisierender Strahlung. Grundlagen und Methoden 1983; Sitzlack: Einführung in den Strahlenschutz 1980; Weish & Gruber: Atomenergie und Umweltsituation 1973; Weish & Gruber: Radioaktivität und Umwelt 1975, 1986[3]; Sauter: Grundlagen des Strahlenschutzes 1983; Kimel & Maschkowitsch: Schutz vor ionisierender Strahlung 1972; Deckart: Nuklearmedizin. Einführung in Theorie und Praxis 1979; **Simon, Bendel, Langhans, Schlimper: Strahlenschutz. Lehrbuch für die Angehörigen der Nationalen Volksarmee, der Grenztruppen der DDR und der Zivilverteidigung** 1988; **CBRN** = chemische, biologische, radiologische und nukleare Gefahren. K̃ühar & Ehrmann: CBRN-Schutz in der Gefahrenabwehr 2020; Pauling: Leben oder Tod im Atomzeitalter 1964; M̃arfield: Atomenergie in Krieg und Frieden. Kernreaktoren und nukleare Waffen 1966; Weede: Weltpolitik und Kriegsursachen im 20. Jahrhundert 1975; Link: Der Ost-West-Konflikt 1980; Seidler: Abrüstung. Eine Dokumentation zur Geschichte der Abrüstungsbemühungen seit 1945, 1974; Müller Manfred & Rita Rabe: Handbuch Abrüstung 1982; Rotblat: Global Problems and Common Security. Annals of Pugwash 1988; **Politik betrifft uns 5/1993. ABRÜSTUNG SETZT KRÄFTE FREI?** Ost-West-Konflikt - Atomwaffen - Massenvernichtungswaffen mit zwei OH-Folien 1993; R̃aschke: SIPRI-Report - Die Kriege der Welt, das sowjetische Erbe, die Verbreitung von Massenvernichtungswaffen 1993; L̃angford: Introduction to Weapons of Mass Destruction 2007; Brown: Joseph Rotblat. Visionary for Peace 2007; Ikeda & Rotblat: Auf der Suche nach der Menschlichkeit. Der Buddhist und der Nuklearforscher im Dialog 2005; Rotblat: Strahlenwirkungen beim Einsatz von Kernwaffen 1996; Brown: Keeper of the Nuclear Conscience. The Life and Work of Joseph Rotblat 2012; Hannes: Die Bombe. Die Geschichte der Atombombentests von den Anfängen bis zur Gegenwart 2017; Jetter: Die sogenannte Superbombe, PhysBl6 1950 p199-205; Jetter: Die Zeitgenossen der Wasserstoffbombe, PhysBl10 1954 p596-600; M̃artin: Hat die Stunde H geschlagen? Die wissenschaftlichen Tatsachen über die Wirkung der Wasserstoffbombe 1955; Atomic Bomb Testing: The 1946 Bikini Atoll Nuclear Test Video DVD; Burnns: Nuclear test Environment. Marshall Islands. Bikini Atoll, Enewetak Atoll, Rongelap Atoll, Utrok Atoll 2017; Hanson: The Archaeology of the Cold War 2019; **Maiski: Wer half Hitler?** 1960, 1992; Churchill: Reden; Ford, Churchill und andere hatten auf Hitlers Sieg gesetzt, um Deutschland danach mit Kernwaffen zu neutralisieren. Atombomben in ausreichender Anzahl nicht einsatzbereit und Kommunisten erobern Berlin. Ohne den D-Day wären die Russen bis zum Atlantik marschiert. **Rote Armee hat 1945, Stalin im Rücken, Europa von massenmordenden Deutschen befreit**. Drei Monate später demonstrieren die USA der Welt die neueste Technik des Massenmords mit ihren Atombombenabwürfen über Hiroshima und Nagasaki: **Atombomben sind beim Massenmord an**

Zivilisten effizienter als Gaskammern und konventionelles Flächenbombardement. **Bodenreform** in sowjetische Besatzungszone 11.9. 1945 bis 1.6.1948. Bei **Nürnberger Prozess** 20.11.1945 bis 1.10.1946 werden die Deutschen freigesprochen. Schuld wird auf wenige Hauptkriegsverbrecher abgewälzt. **22.2.1946 X-Artikel** von George Frost Kennan = Langes Telegramm = **Gründungsurkunde des Antisowjetismus/Antikommunismus zwecks Eindämmung.** 6.5.1946 **Westmächte verweigern Reparationsleistungen an UdSSR aus Westzone**. USA zeigen im Sommer 1946 mit zwei Atombomben im Bikini-Atoll: Militärtechnik ist nur in der Vernichtungszone, also im Umkreis von 10 km, gefährdet. **1947: Truman-Dokrien = Carte blanche zum Einmarsch** egal wo, um freien Völkern beizustehen: Korea, Vietnam, ... Irak, ... Siegermächte+Benelux treffen sich in London 28.2.-2.6.1948 ohne UdSSR um Weststaat zwecks Eindämmung des Kommunismus zu schaffen. Frankfurter Dokumente zum Weststaat 1.7.1948. Stalin muss aufgehalten werden. Rotes Gesamtdeutschland muss um jeden Preis verhindert werden. US-Kongress beschließt **Marshall-Plan für Europa am 3. April 1948:** 17 Mrd $ bis 1952. Westzone: 21.6.1949 Reichs- und die Rentenmark werden durch **D-Mark** ersetzt. **Berlin-Blockade 24.6.1948-12.5.1949**. September 1948: Truman verlegt B-29-Atombomber nach Großbritannien, also in Reichweite von Moskau, um Berlin-Blockade zu brechen. Furchtbare Verdrehung der Geschichte in ARTE 2021 von Mickaël Gamrasni: Geschehen, neu gesehen. 'Wahre Geschichte' 'War is over!' Präsident Trumans Kalter Krieg. Der Russe kommt! US-Angst-Filme: **Face to Face with Communism** 1951 YouTube. Alfred E. Green: **Invasion, U.S.A.** Sinister Cinema 1952 Film mit Gerald Mohr. **Rote Angst 1917-1920** = Einwanderung europäischer Anarchisten und Erstarken linker Parteien. Zweite Rote Angst 1947-1957 FBI-Direktor Edgar Hoover 1895/1935-1972. US-Senator Joseph McCarthy 1908-1957. Red Scare Double Feature: Invasion U.S.A. & Rocket DVD; **Kommunismus** = internationale kriminelle Verschwörung: Verlogen, niederträchtig, verschlagen, gottlos, mörderisch und entschlossen/berechnend. Eurpopäische Aufklärung sieht Russland positiv. Richter: Leibniz und sein Russlandbild 1946; **Russen-Angst:** a] Napoleon Banaparte: Russen sind rückständige Barbaren! Respektlosigkeit französischer Soldaten bei Russlandfeldzug. S̃igrist: Das Russlandbild des Marquis de Custine. Von der Zivilisationskritik zur Russlandfeindlichkeit 1839 digisat 1990. b] Krimkrieg UK-Russland 1853-56. Propagandaausstellung zur Stärkung des deutschen Durchhaltewillens 8.5.1942 **Das Sowjet-Paradies**. Volkmann: Das Russlandbild im Dritten Reich 1994; **NATO-Gründung am 4. April 1949 im Zuge der Eindämmungspolitik** der USA gegen die Sowjetunion. **29.8.1949** UdSSR hat Atombombe. **31.10.1952** USA hat H-Bombe. **12.8.1953** UdSSR hat H-Bombe. Hughes-Wilson: Eve of Destruction. The inside story of our dangerous nuclear world 2021; ZDF: Der neue kalte Krieg - Mehr Atomwaffen für Europa? 2017; Nach Sputnik-Schock Propaganda-Film von Barry Mahon: Rocket Attack U.S.A. = Five Minutes to Zero 1958; **Kernwaffenträger:** ab 1945 **per Flugzeug**, ab 1955 **per U-Boot**, ab 1958 **Langstreckenrakete**, ab 1970 **Mehrfachsprengköpfe**. **Gleichgewicht des Schreckens = MAD** = mutually assured destruction = gegenseitig zugesicherte Zerstörung. **ICBM-Unfall:** Damascus, USA. Der GAU 19.9.1980. Command and control, ARTE 21.7.2020; Erstschlag überstehen, um Gegener mit in den Abgrund zu nehmen. **Wer zuerst schießt, stirbt als Zweiter.** Nash-Gleichgewicht. U-Boot als Zweitschlagwaffe. Bis 1989 DDR und BRD Erstschlagsziele wegen hoher Bewaffnung. Morre & Büttner: Sowjetische Hinterlassenschaften in Berlin und Brandenburg 2014; Schulze-Wegener, Huber, Bröckermann: Henning-von-Tresckow-Kaserne. Geltow, Schwielowsee 2021; Kowalczuk & Wolle: Roter Stern über Deutschland - Sowjetische Truppen in der DDR 2010; **Adam, Erdmann, Henkel, Scholz: Sperrgebiete in der DDR. Ein Atlas von Standorten des MfS, des MdI, des MfNV und der GSSD** 2015 10% der Fläche der DDR waren militärisch gesperrt. 777 Kasernen der CA mit 337800 Soldaten + 208400 Angehörigen, 47 Flugplätze, 1000 Flugzeuge, 116 Truppenübungsplätze, 5000-7000 Kampfpanzer + 2350 SPWs. NVA 215000 Personen. Stasi: 91.000 hauptamtliche Mitarbeiter und zwischen 110.000 bis 189.000 inoffizielle Mitarbeiter. Liegenschaftsverzeichnis mit 6000 Liegenschaften unter URL www.bstu.de/ mit URN `BFi_34_Sperrgebiete_Auflage_03_barrierearm.pdf` mit 1135 Seiten; R̃ockstuhl: Sowjetische Radarstation bei Eigenrieden im Hainich in Thüringen 1983-1995. Eine sowjetische Radarstationen zur Früherkennung von ... und NATO-Flugzeugen auf dem Gebiet der DDR 2006, 2010[3]; Lohmann: GSSD – Die Gruppe der Sowjetischen Streitkräfte in Deutschland 2010; Kersten: Garnisonen der NVA und GSTD. Zur Nutzung der militärischen Standorte von 1871 bis 2010, 2013; F̃reundt: Sowjetische Fliegerkräfte Deutschland 1945-1994, Bd2, GSSD, WGT 2002; **Gruppe der Sowjetischen Streitkräfte in Deutschland = GSSD:** 777 Kasernenanlagen an 276 Orten mit **47 Flugplätzen** u.a.

in Altenburg, Stendal, Welzow, Großenhain, Fürstenwalde, Jüterbog, Fürstenwalde, Oranienburg, Spremberg, Wittstock/Dosse, Groß Dölln, Pütnitz, Wittstock, Neuruppin, Rechlin-Lärz, Parchim, Lutherstadt Wittenberg, Jüterbog, Zerbst und Merseburg. **Taktische Front-Luftarmee mit Stabssitz Wünsdorf bei Zossen**. 116 Truppenübungsplätzen. Gesamtstärke von 370.000 Mann und 1.020 Flugzeugen. 180 Raketensysteme. 120 Aufklärungsflugzeuge, 680 Jäger und Jagdbomber, 100 leichte Bomber und 120 Transporter und Hubschrauber. In Sonderwaffenlagern Himmelpfort und Stolzenhain 1968 bis 1990 nukleare Sprengköpfe für NVA im Kriegsfall. Auf Militärflugplätzen Großenhain und Altenburg waren Atomwaffen eingelagert. Kopenhagen: Die Luftstreitkräfte der NVA 2002 Karte der Stützpunkte auf Seite 37; Depcik: ABM (Anti-Ballistic Missile) 2004; Barnaby & Boserup: Implications of Anti-Ballistic Missile Systems. Pugwash Monograph II 1969; **Bulkeley & Brauch: The Anti-Ballistic Missile treaty and world security** 1988; Cuthbertson: Anti-tactical ballistic missile issue and European security 1988; **ABM-Vertrag** 1972-2002 Anti-Ballistic Missiles = Vertrag über die Begrenzung von antiballistischen Raketenabwehrsystemen. Teil von SALT I. **Verboten:** Aufbau eines landesweiten ABM-Netzes, Aufstellung von Frühwarn-Radars, **Zugelassen:** 1 ABM-Stellung mit 100 Abschussvorrichtungen und dazugehörigen Radaranlagen. die Stellung darf entweder zum Schutz einer ICBM-Anlage oder der Hauptstadt eingesetzt werden (in einem Radius von 150 Kilometern). **ICBM = Intercontinental Ballistic Missile** = Interkontinentalrakete = Langstreckenrakete = ballistische Rakete hoher Reichweite 5000-15000 km, suborbitaler hoher Anflug 1200 km. Einschlag nach 30'. Brennschluss nach 5' mit 6km/s = near infrared satellit detection. Nach 2' Gipfelpunkt. Nach 25' 100km über Zielgebiet mit 4km/s. 2' Zeit für Abfang. Wiedereintritt MARV = Maneuverable reentry vehicle siehe Regan: Re-entry vehicle dynamics 1984; Hankey: Re-entry aerodynamics 1988; **MIRV** = Multiple independently targetable reentry vehicles für ICBM seit 1972 R-36M, RS-20A2 = SS-18 16,000km mit 8 MIRV. Es ist also sinnvoller 10^{11} € zur Begrenzung der Gruppenstärke auf maximal 10 Personen in Kindergärten, Schulen und Uni auszugeben. Personal und Gebäude verdreifachen! Personalschlüssel und Gehalt von Pflegekräften und Polizei vervielfachen! Regan & Anandakrishnan: Dynamics of atmospheric re-entry 1993; **FOBS = Fractional Orbital Bombardment System** tiefer Orbitalflug mit 7.9km/s, UdSSR 25.8.1965 bis SALT II 1982. **INF-Vertrag = Intermediate Range Nuclear Forces Treaty** 1987-2019 Verbot von Raketen mittlerer Reichweite 500 bis 5500 km = **Mittelstreckenraketen**. Nach 1 bis 2 Minuten 5km/s Höhe einige 100 km. Flugdauer 5 bis 15 Minuten suborbital. Wiedereintritt für 2 Minuten. Einschlag mit 1 bis 3km/s. Weltweit ca. 80,000 **Marschflugkörper** einsatzbereit. Reichweite unter 1000 km. Flughöhe von 50 bis 100 m Flughöhe kaum zu orten. Jones: The Reagan-Gorbachev arms control breakthrough. The treaty eliminating intermediate-range nuclear force (INF) Missiles 2012; Gassert: The INF treaty of 1987. A Reappraisal 2020; **Anti-Raketenschirm ermöglicht Enthauptungsschlag.** Wer zuerst schießt, überlebt. Krell & Lutz: Nuklearrüstung im Ost-West-Konflikt 1980; Senghaas: Abschreckung und Frieden. Studien zur Kritik organisierter Friedlosigkeit 1969, 1981; Lebow: Between peace and war. The nature of international crisis 1981 Kriegssoziologie; Warburg: Das Militär und seine Subjekte. Zur Soziologie des Krieges 2008; Bouthoul: Kindermord aus Staatsraison. Der Krieg als bevölkerungspolitischer Ausgleich 1972; Joas & Knöbl: Kriegsverdrängung. Ein Problem in der Geschichte der Sozialtheorie 2008; Schumpeter: Kapitalismus, Sozialismus und Demokratie 1946, 1993, 2020; Chesterton: Sind wir uns einig? Ein Streitgespräch mit Bernard Shaw nebst einigen Essays 2009; Michael **Schilliger: Wieso wir Kriege führen**, NZZ 19.3.2022 Irrationale Gründe dominieren. Rache im Ergebnis nationaler Kränkungen. Kampf um Anerkennung. a] Streben nach Reichtum/Rohstoffe. b] Sicherheit des eigenen Staates/Kubakrise/Ukraine/Enthauptungsschlag. c] Max Weber: Sehnsucht nach Thymos/Selbstwertgefühl. Ball: Can nuclear war be controlled? 1981; Krell & Schmidt: Der Rüstungswettlauf in Europa. Mittelstreckensysteme, konventionelle Waffen, Rüstungskontrolle 1982; W̃einberg & Barkenbus: Strategic defenses and arms control 1988; Carnesale, Doty, Hoffmann, Huntington, Nye & Sagan: Living with nuclear weapons. Harvard Nuclear Study Group 1983; Petuchow & Schestow: History of design and development of missile systems and military systems of AAW land forces 1998 AAW = anti-aircraft warfare; Gray: Modern strategy 1999; This is Redstone Missile Weapon System 2012; Z̃anfirov: Russia Surfacer-to-Air Missile Systems 2020-2021; Ganin & Karpenko: Das Boden-Luft-Lenkwaffensystem S-300 2001; **L̃uttwak: Strategie. Die Logik von Krieg und Frieden** 1987, 2002 Wer im Konfliktfall nicht untergehen will, muss den Bereich geradlinigen Denkens, eingleisiger Optimierung, linearer Logik verlassen und strategisch zu denken beginnen. Strategisch denken aber heißt in Paradoxa denken: 'Wenn Du

Frieden willst, bereite den Krieg'. Zahllose Beispiele aus der Geschichte: i] das Reich der Strategie ist von solchen scheinbar widersprüchlichen Aussagen durchzogen, ii] ein Sieg verwandelt sich durch Maßlosigkeit in eine Niederlage, iii] Krieg geht durch Erschöpfung in Frieden über, iv] UNO-Friedensmissionen erreichen oft das Gegenteil des Gewollten, weil sie den Krieg verlängern, statt die zugrundeliegenden Konflikte zu lösen. Siehe Golfkrieg 1991, Kosovo-Krieg und die Ereignisse nach dem 11. September 2001. F̃rieder Wagner: Todesstaub. Made in USA. Uranmunition verseucht die Welt 2007 DU depleted Uranium-Munition; $1.3 \cdot 10^6$ t ^{238}U-Entsorgung als panzerbrechende Munition. W̃agner: Todesstaub. Deadly Dust. DVD 2012; Grundlagenwerk, das die Logik kriegerischer Konflikte ebenso erhellt wie die der großen politischen und geostrategischen Auseinandersetzungen; Podvig: Russian strategic nuclear forces 2004; Karpenko, Popow, Solomonow: Sowjetisch-russische strategische Raketenkomplexe 2006; Weiner: CIA. Die ganze Geschichte 2007; McMurran: Achieving Accuracy. A Legacy of Computers and Missiles 2008; **J̃ordan, Kiras, Lonsdale, Speller, Tuck, Walton: Understanding modern warfare** 2009, 2016; Heuser: Den Krieg denken. Die Entwicklung der Strategie seit der Antike 2010; **Z̃aloga: The Kremlin's nuclear sword. Rise and fall of Russia's strategic nuclear forces 1945-2000**, 2014; Dartnell: Das Handbuch für den Neustart der Welt. Alles, was man wissen muss, wenn nichts mehr geht 2014; Gray: The future of strategy 2015; Cooper: Arms control for the third nuclear age. Between disarmament and armageddon 2021; BBC: Hiroshima 2000; NVA Funker - Scharfschützen im Äther 1998; Kusano: Atombombenschäden 1950; Shindo Kaneto: Die Kinder von Hiroshima = Gembaku no ko 1952 Pavel Koshukov You Tube in Canes ignoriert; Die Atombombe im Vorgarten - Geschichten aus dem Kalten Krieg 2014; D̃eutsch: The Nerves of Government 1966; Rapoport: Philosophie heute und morgen. Einführung ins operationale Denken 1970; D̃eutsch: Aufrüstung durch Rüstungskontrolle 1972; D̃eutsch: Der Stand der Kriegsursachenforschung 1973; Kennedy, Somerville, Rapoport: Dreizehn Tage. Wie die Welt beinahe unterging 1973; D̃eutsch: Das Wachstum des Wissens und die Lernfähigkeit des Menschen 1978; D̃eutsch: Von der Industriegesellschaft zur Informationsgesellschaft 1980; D̃eutsch: Wie wirken Medien? 1989; D̃eutsch: Der Nationalismus und seine Alternativen 1972; D̃eutsch: Politische Kybernetik. Modelle und Perspektiven 1973; Rapoport: Kämpfe, Spiele, Debatten, Konfliktmodelle 1976; D̃eutsch: Staat, Regierung, Politik. Einführung in die Wissenschaft der vergleichenden Politik 1976; D̃eutsch: Zur Theorie der Vereinfachung. Reduktion von Komplexität in der Datenverarbeitung für Weltmodelle 1980; Graham: We must defend America and put an end to MADness 1983; Brauch ed: Kernwaffen und Rüstungskontrolle 1984; Brauch: Angriff aus dem All. Der Rüstungswettlauf im Weltraum 1984; R̃apoport: Wem nützt der permanente Kriegszustand 1985; Breuer & Lechleitner: Der lautlose Schlag 1982; Schwab: Elektromagnetische Verträglichkeit 2011[6]; W̃ilhelm: Nuklear-elektro-magnetischer Puls. NEMP. Entstehung, Schutzmaßnahmen, Messtechnik 1985; Ochs: Elektromagnetischer Impuls einer Nuklearexplosion in großen Höhen: Teil I: Entstehung, PhysBl41 1985 p212-217; Sturm: Elektromagnetischer Impuls einer Nuklearexplosion in großen Höhen: Teil II: Wirkung, PhysBl41 1985 p286-291; Wahl: Neue Experimente mit EMPs, Tesla- und Mikrowellen 2005; Ỹago: The ABCs of EMP. A practical guide to both understanding and surviving an EMP 2020; Salzger: NUKE. Survivalguide Atomangriff 2022; Wahl: Hightech-Elektronik-Experimente. Außergewöhnliche Elektronik-Projekte für das 21. Jahrhundert Hochleistungs-Teslagenerator Hochspannungstechnik Hochfrequenztechnik EMP-Kanonen Elektronik Lakhovski-Multiwellengenerator Bauanleitungen 2007; **Gregory, Horeis, Liebig, Tennenbaum & Schauerhammer: Strahlenwaffen - Militärstrategie im Umbruch** 1985 p31 Erstschlag-Szenarium beginnt mit U-Boot-Atomraketen zwecks Kommunikations-Shutdown per EMP/Sofortstrahlung und diekter Ausschaltung von Militärbasen/ICBM-Silios per ICBMs. **Enthauptungsschlag** wird möglich! Wer zuerst schießt, kann die Starts des Gegeners auf eigenem Territorium zur Detonation bringen. Iron domes sind nur bei konventionellen Raketen effektiv. Bekämpfung von Atomwaffen über dem Zielgebiet verursacht dessen radioaktive Verseuchung.; **Knipping: Projekt Sternenkrieg. Washingtons Wahn und Wiederstand** 1985 SDI, SALT, ABM, C^3I = Command/Befehlgebung, Control/Überwachung, Communication/Verbindungen, Intelligence/Aufklärung. p31, p73 Colin Gray, Sieg ist möglich, **Enthauptungsschlag**; **SAC** Strategic Air Command 1940-1992: Peace is our profession war is just a hobby!; Airborne Early Warning and Control System **AWACS**. C4ISR C4ISR command, control, communications, computers, intelligence, surveillance, and reconnaissance **ISTAR** Intelligence, Surveillance, Targeting/Target Acquisition, and Reconnaissance = Nachrichtenwesen, Überwachung, Zielfindung und -bestimmung und Aufklärung. = Führung, Information, Kommunikation, Computersysteme, Nachrichtenwe-

sen, Überwachung und Aufklärung. **Bulkeley, Pike, Thompson, Thompson: Star Wars. Self Destruct Incorporated** 1985; Brauch: Die Raketen kommen. Vom Nato- Doppelbeschluß bis zur Stationierung 1986; **Bulkeley & Brauch: The Anti-Ballistic Missile treaty and world security** 1988; Carlton & Schaerf: Arms race in the era of Star Wars. Studies in disarmament and conflicts 1988; Gray: The geopolitics of super power 1988; Colin S. Gray: War, Peace and Victory 1991; Brauch, van de Graaf, Grin, Smit: Controlling the development and spread of military technology. Lessons from the past and challenges for the 1990s 1992; Brauch, van de Graaf, Grin, Smit: Militärtechnikfolgenabschätzung und präventive Rüstungskontrolle. Institutionen, Verfahren und Instrumente 1997; Gray: The sheriff. America's defense of the new world order 2004; Gray: Schools for strategy. Teaching strategy for 21st century conflict 2009; R̃apoport: Wem nützt der permanente Kriegszustand? Die parasitäre Rolle des Militärestablishments 1985; Vinke: Als die erste Atombombe fiel. Kinder aus Hiroshima berichten 1986; Deutsch: Geht unsere Zukunft zu Ende? 1986; R̃apoport: Ursprünge der Gewalt 1989; Rapoport: Konflikt in der vom Menschen gemachten Umwelt 1990; R̃apoport: Allgemeine Systemtheorie 1988; R̃apoport: 2-PERSON GAME THEORY REV/E: The Essential Ideas 1990; R̃apoport: Frieden. Eine Idee, deren Zeit gekommen ist 1990; R̃apoport: N-PERSON GAME THEORY: Concepts and Applications 1990; Rapoport: Gewissheiten und Zweifel 1994; Gorbatschow: Erinnerungen 1995; B̃rzezinski: Out of Control. Global Turmoil on the Eve of the 21st Century 1994; F̃riedrich & Brzezinski: Totalitarian dictatorship and autocracy 1965; Huntington: Kampf der Kulturen 1996; K̃issinger: Kernwaffen und auswärtige Politik 1959; Kissinger: Die Entscheidung drängt. Grundfragen westl. Außenpolitik 1960; Kissinger: Großmacht-Diplomatie. Von der Staatskunst Castlereaghs und Metternichs 1962; Kissinger: Die sechs Säulen der Weltordnung 1992; Schäuble: Scheitert der Westen?. Deutschland und die neue Weltordnung 2003; Kissinger: China. Zwischen Tradition und Herausforderung 2002; Kissinger: Weltordnung 2014;; B̃rzezinski: Die einzige Weltmacht. Amerikas Strategie der Vorherrschaft 1997 = Brzezinski: The Grand Chessboard. American Primacy and Its Geostrategic Imperatives 1997; Chomsky: People without rights. Kosovo, Ost-Timor und der Westen 2002; Chomsky: Hybris. Die endgültige Sicherung der globalen Vormachtstellung der USA 2003; Chomsky: Wer beherrscht die Welt? Die globalen Verwerfungen der amerikanischen Politik. Eine zornige Abrechnung mit den USA und ihrer rücksichtslosen Machtpolitik 2016; Veblen: Theorie der feinen Leute 1900; Zinn: Eine Geschichte des Amerikanischen Volkes. B̃d7 Der Zweite Weltkrieg und die schwarze Revolte 2006; Bd8 Von Vietnam bis Watergate 1980, Bd9 Carter - Reagan - Bush 2003; **Polk: Aufstand. Widerstand gegen Fremdherrschaft. Asymmetrische Kriegsführung.** Vom Amerikanischen Unabhängigkeitskrieg bis zum Irak 2007; Code Name Geronimo DVD/Amazon-Prime 2013; C̃homsky: Der Terrorismus der westlichen Welt. Von Hiroshima bis zum Drohnenkrieg 2017; Chomsky: Rebellion oder Untergang 2021; Dahrendorf: Auf der Suche nach einer neuen Ordnung. Vorlesungen zur Politik der Freiheit im 21. Jahrhundert 2001 Medien, Parteien und Parlamente sind zu Spielbällen wählerferner Eliten geworden; Harrison & Huntington: Streit um Werte 2002; Mearsheimer: The Tragedy of Great Power Politics 2003; Huntington: Who are we? Die Krise der amerikanischen Identität 2004; Ikle: Every war must end 2005; Ikle: Annihilation from within. The ultimate threat to nations 2006; Scholl-Latour: Russland im Zangengriff. Putins Imperium zwischen Nato, China und Islam 2007; C̃ourtois & Ackerman eds: Schwarzbuch Putin 2023; Tannenwald: The Nuclear Taboo. The United States and the Non-Use of Nuclear Weapons Since 1945 2007; Chang & Halliday: Mao. Das Leben eines Mannes. Das Schicksal eines Volkes 2005; B̃rzezinski: Second Chance. Three Presidents and the Crisis of American Superpower 2008; Crouch: Postdemokratie I 2003 spiegelt die Ära prä-sozialer-Netzwerke. 1. Globalisierung entwertet Demokratie. 2. Vernichtung politischer Identität. Parteien werden zu Produktmarken, Wähler werden zu Kunden. Lebensweltferne Debatten und Marktstrategien beherrschen die politische Debatte. Soziale Medien und Massenmedien verwüsten die Debatten-Kultur durch Schlagworte und Fotos. Polarisierungen radikalisieren und stiften Gewaltpotential; **Hitler: Je größer die Lüge, desto mehr Menschen folgen ihr.** Singer & Brooking: Like War. The Weaponization of Social Media 2019; Howard: Lie Machines. How to Save Democracy from Troll Armies, Deceitful Robots, Junk News Operations, and Political Operatives 2020; Fuchs: Soziale Medien und Kritische Theorie 2021; Georg: Der Einfluss der sozialen Medien auf das Konsumentenverhalten 2019; Alter & Pauli: Unwiderstehlich. Der Aufstieg suchterzeugender Technologien und das Geschäft mit unserer Abhängigkeit 2019; Brzezinski: Strategic Vision. America and the Crisis of Global Power 2013; Mearsheimer: WHY LEADERS LIE. The Truth About Lying in International Politics 2013; Ikle: The social impact of bomb de-

struction 2014 Ikle empfahl 1981 in Afghanistan den Einsatz von Stinger FIM-92; Ploppa: Die Macher hinter den Kulissen. Wie transatlantische Netzwerke heimlich die Demokratie unterwandern 2015; Hamel: Russland 2004; Marcopolo Russland 1993; **Krone-Schmalz: Russland verstehen. Der Kampf um die Ukraine und die Arroganz des Westens** 2015; Effenberger: Geo-Imperialismus. Die Zerstörung der Welt 2016; C̃ourtois & Ackerman eds: Schwarzbuch Putin 2023; Putin & Röper: Seht Ihr, was Ihr angerichtet habt? 2017 Westen hat die Naivität Gorbatschows ausgenutzt = Rückzug der Sowjetarmee aus Deutschland. Radar-Raketenschirm an russischer Grenze militärisch inakzeptabel, wegen **Enthauptungsschlag**; Putin: 75. Jahrestag des Großen Sieges. Gemeinsame Verantwortung vor Geschichte und Zukunft, 19. Juni 2020; R̃öper: Die Ukraine Krise 2014 bis zur Eskalation. Wie der neue Kalte Krieg begann 2022; Vollmer, Dahn, Klein, Brie, Brandt: Neubeginn. Aufbegehren gegen Krise und Krieg 2022; Ñida-Rümelin et al: Perspektiven nach dem Ukrainekrieg. Europa auf dem Weg zu einer neuen Friedensordnung? 2022; Gorbatschow: Kommt endlich zur Vernunft - nie wieder Krieg! 2017; Crouch: Das befremdliche Überleben des Neoliberalismus. Postdemokratie II 2011; Crouch: Die bezifferte Welt. Wie die Logik der Finanzmärkte das Wissen bedroht. Postdemokratie III 2015; Crouch: Der Kampf um Globalisierung 2018; Linsinger: Alles nur Fake! Journalismus in den Zeiten von Postdemokratie, Message Control und Rechtspopulismus 2019; M̃earsheimer: Great delusion. Liberal dreams and international realities 2019; **Gorbatschow: Was jetzt auf dem Spiel steht. Mein Aufruf für Frieden unf Freiheit** 2019; Siegert: Die neorealistische Analyse des Ukraine-Konflikts nach John J. Mearsheimer 2020; Frederic Tonolli: Putin, die Rückkehr des russischen Bären, ARTE 2021; Manow: (Ent-)Demokratisierung der Demokratie 2020; Crouch: Postdemokratie revisited 2021; Wagenknecht: Freiheit statt Kapitalismus. Über vergessene Ideale, die Eurokrise und unsere Zukunft 2012; Wagenknecht: Die Selbstgerechten. Mein Gegenprogramm - für Gemeinsinn und Zusammenhalt 2022; Ralf Becker von der Landeskirche Baden und Koordinator der Initiative Sicherheit neu denken. Putin die Neutralität der Ukraine zuzusagen, wäre die halbe Miete! DLF 7.3.2022 Europa hat es in der Hand, weiteres Leid rasch zu vermeiden. Keine Nato in der Ukraine. 100 Milliarden Deutschland-Soforthilfe für die Ukraine zum Aufbau der Infrastruktur, aber keinen Cent für Waffen. Weder in Deutschland, noch in der Ukraine. Nato raus aus dem Baltikum. Rückkehr zur 2001 gestoppten Abrüstung. Zwei Probleme: A] USA werden nicht zustimmen. B] In 10 Jahren wird sich die Ukraine vor Wirtschaftsflüchtlingen aus den Nachbarländern nicht retten können. Der unbefangene Umgang von Herrn Becker mit der befangenen Interviewerin Christiane Florin hat mich amüsiert ;). Thomas Fischer: Unser Krieg. Nur die Wahrheit! Deutscher Bellizismus. Spiegel am 1.4.2022 ist ein Lichtblick im Brei der gleichgeschalteten Politiker und Medien: Ahnungslos? Überfordert? Opfer einer postdemokratischen Mafia? Wahrscheinlich von allem ein bisschen. Ich lese gerade die von Kriegsbegeisterung triefenden Briefe von Franz Marc. Erst kurz vor seinem Tod im Stellungskrieg bei Verdun kam die Einsicht: „Krieg als gemeinster Menschenfang“. Der „Aufruf an die Kulturwelt“, den 93 kriegsbegeisterte Intellektuelle von Rang im Oktober 1914 unterschrieben, entsetzte Albert Einstein, der am 19. August 1914 schrieb: Unglaubliches hat nun Europa in seinem Wahn begonnen. In solcher Zeit sieht man, welch trauriger Viehgattung man angehört. . . . empfinde nur eine Mischung von Mitleid und Abscheu. Nathan, Norden, Russell: **Einstein. Über den Frieden** 1975; Der Wahn besteht darin, dass man eine militärische Lösung als alternativlos betrachtet. Das Feindbild ist etabliert. Hass auf Russen wird auch vom deutschen Bundespräsidenten toleriert. Er hätte sich mit der Feindesliebe der Bergpredigt rausreden können und Melnik neben der Bibel einen Knigge schenken müssen. Maletzke: Ziele und Wirkungen der Massenkommunikation - Grundlagen und Probleme einer zielorientierten Mediennutzung 1976; Maletzke: Psychologie der Massen-Kommunikation 1978; Maletzke: Kommunikationswissenschaft im Überblick 1995; Jerrentrup: MedienMacht - Medienwirkungen bezogen auf Wahrnehmung, Gesellschaft, Kommunikation und Individuum 2005; **Massenmedien sind als Angstgeneratoren auch als effektive Kriegstreiber geeignet.** Angst wird medial geschürt. Butscha erinnert an die Inszenierung/Instrumentalisierung Nemmersdorf. Tote Zivilisten im Krieg? Tote Zivilisten lassen sich gut recyceln/instrumentalisieren. Gut drapiert, halten sie Angst und Hass autokatalytisch auf hohem Niveau. Tote Kätzchen oder Welpen warten auf mediale Verwertung. Die Schützengräben moderner Kriege kommen zu jedem. Moderne Kriege haben die Zivilbevölkerung als Ziel: a] Angriff der Infrastruktur von Industriestaaten. b] Atomwaffen über **6.8.1945 Hiroshima** und **9.8.1945 Nagasaki**. Krieg, und man

geht nicht hin? Die Kriegs-Fronten machen vor Wohnungstüren nicht halt. Dank Globalisierung ist noch vor einer direkten Zerstörung der Infrastruktur, noch vor der Ankunft von Drohnen oder gar der radioaktiven Verseuchung der Pflanzen, das Kriegsgeschehen schwer zu ignorieren. In Zeiten der Postdemokratie hat die Mehrheit eh die Nase voll von denen da oben. Und mit der Vernichtung des Feindes wird alles besser? Dann hat man in Europa in den 80ern, als die nuklearen Mittelstreckenraketen noch in Stellung waren, eine gute Gelegenheit verpasst. Tannenwald: The nuclear taboo. The United States and the non-use of nuclear weapons since 1945, 2007; Nina Tannenwald: Niemand schläft ruhig unter einem nuklearen Schirm. Spektrum.de. Je 5000 Sprengköpfe mit der größten Sprengkraft – die »strategischen« Waffen – sind auf U-Booten, Bombern und Interkontinentalraketen stationiert. Außerdem je 2000 taktische Atomwaffen. Simulator der Wirkung eines Sprengkopfes siehe Alexander Wellerstein: Interaktive Website NUKEMAP. Simulator zu möglichen Szenarien eines globalen Atomkrieges unter Beteilungung Russland, USA, China, Frankreich, Großbritannien, Pakistan, Israel, ... mit aktive Iron-Dome und anderen Anti-Raketenschirmen sollten als Computerspiele vertrieben werden. Iron domes, die ihrerseits militärische Ziele darstellen? OK, oberhalb 500 m abgefangene Atomsprengköpfe sichern die radioaktive Selbstreinigung (= weltweite Verteilung der lokalen Radionuklide) und man muss nur die ersten 20 sec in den Schatten, um der Strahlungshitze und der Sofortkernstrahlung zu entgehen. Den EMP-Folgen entgeht man kaum. Dazu ergänzend sind Zivilschutzübungen zielführender als strom-unabhängige Bunker, die sich nur für militärische Gefechtsstände rechnen. **Grundkenntnisse zur atomaren Kriegsführung sollten Allgemeinwissen sein**, um im Ernstfall Panik in den ersten Tagen der Atomschläge zu vermeiden. Salzger: NUKE. Survivalguide Atomangriff 2022; Ỹago: The ABCs of EMP. A practical guide to both understanding and surviving an EMP 2020; A] Innerhalb der Vernichtungszone haben Menschen nur geringe Chancen. Siehe Hiroshima und Nagasaki im August 1945. B] Militärtechnik ist relativ resistent gegen Atomschläge. Siehe Bikini-Experimente Juli 1946. C] Angriffsziele sind nicht die Städte selbst. Militärstrategen empfehlen die nachhaltige Zerstörung der zivilen Infrastruktur. Kraftwerke, Staudämme, Chemieindustrie, Kraftstofflager, Wasserverorgung, Verkehrknoten. Die ernsten Probleme treten erst nach dem Schlagabtausch auf. Das Verhalten innerhalb der ersten 20 Sekunden der Detonation entscheidet auch außerhalb der Vernichtungszone massgeblich über Leben und Tod, da mit ärztlicher Versorgung nicht zu rechnen sein wird. Die eingeschränkte Versorgung macht Städte zu Todeszonen. Trinkwasser, Nahrung, Strom und Kraftstoff fehlen, aber Kot, Müll und Ratten im Überfluss. Das ist für die Mehrheit der Menschheit kein Weltuntergang, sondern Alltag. Die Bewohner der westlichen Welt werden sich unstellen müssen. Die gestellten Klimaziele bekommen durch eine radikale Abschaffung der westlichen Welt eine reale Chance. Zudem hat sich der Islamische Staat = IS von den Ungläubigen durch kollektiven Massen-Selbstmord der Europäer befreit. Pauling: Leben oder Tod im Atomzeitalter 1964; Leutz, Goldstone: Die Wirkungen der Kernwaffen 1964 = Goldstone & Dolan: The effects of nuclear weapons 1957[1], 1977[2], 2020[3]; Samuel Glasstone and Philip Dolan: The Effects of Nuclear Weapons. Reference on Atomic Explosions, Damage, Radiation, Fallout, EMP, Biological, Radio and Radar Effects 2010[3] =CD ROM; M̃arfield: Atomenergie in Krieg und Frieden. Kernreaktoren und nukleare Waffen 1966; Rotblat: Global Problems and Common Security. Annals of Pugwash 1988; Hoffmann: Kernwaffen und Kernwaffenschutz 1975[2]; Rotblat: Strahlenwirkungen beim Einsatz von Kernwaffen 1996; Ikeda & Rotblat: Auf der Suche nach der Menschlichkeit. Der Buddhist und der Nuklearforscher im Dialog 2005; Brown: Joseph Rotblat. Visionary for Peace 2007; Gamow: Die Geburt des Alls 1959 Elementhäufigkeiten p54ff; Zwei Neutronen bilden keinen stabilen Kern. Auch Neutronen-Neutronen-Streuung ist schwierig. Für stabile Kerne muss wenigstens ein Proton beteiligt sein. Die Bindungsenergie pro Teilchen ist erstaunlich konstant, also wie bei kondensierter Materie, nicht wie bei Hüllenelektronen. Also 2-Körperkräfte! Speziell beim α-Teilchen die 4 p-n-Wechselwirkungen plus die Majorana-Austausch-WW für die identischen Protonen und Neutronen. Bei der Fusion hat man stets Energiegewinn = Energiequelle der Sterne. Lediglich bei schweren Kernen lässt sich durch Neutronen die **Kernkraft**, z.B. im Heliumkern mit $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 300\ \mathrm{N} = 30\ \mathrm{kg}\ 10\mathrm{m/s}^2$ abschalten/neutralisieren und die elektrostatische Energie sofort rückgewinnen. Eisenbud & Wigner: Einführung in die Kernphysik 1964; Müller, Leitner, Dilg: Physik - Kollegstufe / Kernphysik. Leistungskurs 4. Semester 1999; Ducrocq: Atomwissenschaft und Urgeschichte 1957; Brink: Kernkräfte. Einführung und Originaltexte 1965, 1971; Krause: Dem Atom auf der Spur. Atomroman 1959; Krause: Radioaktiv. Atomroman 1959; oder beide Bücher umgearbeitet mit Vorwort von Schintlmeister in

Krause: Atom am Horizont 1960; In der historischen Darstellung der Kernphysik haben Geheimhaltung und politische Orientierungen ein verheerendes Durcheinander angerichtet. In der Ostliteratur kommt Walther Bothe, in der Westliteratur Frederic Joliot schlecht weg. **Schpolski: Atomphysik** 1+2 1944, 1951; Povh, Rith, Scholz, Zetsche: Teilchen und Kerne 2006; Beim Heliumkern verbietet Elektrostatik wegen Earnshaw ein Gleichgewicht und liefert zudem nur starke Abstoßung $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = 300$ kgm/s^2 = 30 kp wegen $q = 1.6 \cdot 10^{-19}$As, $R = 10^{-15}m = 1$ Fermi, $\epsilon_0 = 8.8 \cdot 10^{-12}$As/Vm. Weisskopf: Kernkraft ist Nebenprodukt der Nukleonenkräfte, sie entspricht chemischer Kraft = Nebenprodukt der Coulomb-Kräfte. Nuleonen entsprechen Atomen, so entsprechen Kerne den Nuleonenmolekülen. Kernchemie. PhysBl26 1970 101ff; Schopper: Die elektromagnetische Struktur des Protons und Neutrons, PhysBl17 1961 p88 Innere Struktur bei Elektronenstreung 1 GeV. Auch Neutron hat positive Zentralregion mit negetiver Schale, 316-325; Galdorisi: U.S. Armed Forces Nuclear, Biological And Chemical Survival Manual. Everything You Need to Know to Protect Yourself and Your Family from the Growing Terrorist Threat 2003; Meyer & Schweidler: Radioaktivität 1927; Elektroneneinfang. Braunbek: **Augereffekt**, PhysBl 26 1970 264; **Bethe & Morrison: Elementary nuclear theory** 1947, 1956; Migdal: Nuclear theory. The Quasiparticle Method 1968; Sachs: Nuclear theory 1952; Ẽisenberg & Greiner: Nuclear theory. Bd1 Nuclear models, Bd2 Excitation mechanisms of the nucleus, Bd3 Microscopic theory of the nucleus 1970-1972; Mayer-Kuckuk: Kernphysik. Ein Einführung 1994; Hertz: Lehrbuch der Kernphysik Bd1 Experimentelle Verfahren 1958; Hertz: Lehrbuch der Kernphysik Bd2 Physik der Atomkerne 1960; Schmidt-Böcking: Otto Stern. Physiker, Querdenker, Nobelpreisträger 2011; Schmidt-Böcking & Reich: Otto Sterns Veröffentlichungen; Segre: Nuclei and particles 1964; Ford: Die Welt der Elementarteilchen 1966; Pfotzer: Die instabilen Elementarteilchen, PhysBl10 1954 p349-358, p396-403; Rossi: High-energy particles 1952; L̃urie: Particles and fields 1968; B̃urkhardt: Dispersion relation dynamics. A phenomenological introduction to s-matrix theory 1969; F̃elsager: Geometry, Particles, and Fields 1998; Võlkel: Fields, Particles, and Currents 1977; Roman: Theory of elementary particles 1961; H̃agedorn: Relativistic kinematics 1964; Kabir: The CP-Puzzle 1968; Rosenfeld: Nuclear Forces 1948; Sexl: Vorlesungen über Kernphysik 1948; Dawydow: Theorie des Atomkerns 1963; Macke: Theorie des Atomkerns 1951; Murray: Einführung in die Kerntechnik 1959; Wirtz: Stand und Aussichten der Gewinnung mechanischer Energie aus Kernreaktionen, PhysBl10 1954 p359-369; Handbuch der Physik. Bd 38/1 Äussere Eigenschaften der Atomkerne 1958; Adams: Einführung in die Kerntechnik 1967; Rosenfeld: The theory of electrons 1965; Baldin, Goldanskij & Rosental: Kinematik der Kernreaktionen 1963; Fermi: Nuclear Physics. A course given by Enrico Fermi at the Unversity Of Chicago. Notes compiled Orear, Rosenfeld 1950; Fermi: Collected papers Bd1 1924-1938 1962 und Bd2 1939-1954 1965; Birjukow, Lebedenkow, Ryshow: das Vereinigte Institut für Kernforschung in Dubna 1960; Kment & Kuhn: Technik des Messnes radioaktiver Strahlung 1963; Petrosjanc: Das Atom - Forschung und Nutzen 1973; Heisenberg: Theorie der Neutronen 1952; Braunbek: **Neutronenstrahlen**, PhysBl 26 1970 302-304; Gläser: Einführung in die Neutronenphysik 1972; **Wlassow: Neutronen** 1955, 1958; Mit $^{210}_{84}$Po **seit 1928 α-induzierte Beryllium-Strahlung = Bothe-Becker-Strahlung = Neutronenstrahlung:** $^{9}_{4}$Be(α,n)$^{12}_{6}$C, **Bothe & Becker: Künstliche Erzeugung von Kern-γ-Strahlung**, Z.f.Physik 66 1930 289-306; Curie uns Joliot Juni 1931: Beryllium-Strahlung spühlt Protonen aus wasserstoff-haltigen Stoffen. **Chadwick: Nature 129 1932 312** oder in Kedrow: Neuronen p223f Die Strahlung ist neutral, aber macht keinen Compton-Effekt und lässt sich durch Blei nicht abschirmen. Also keine γ-Strahlung. Daher sind Beobachtungen nur mit neutralen 'Protonen' verträglich. **Neutron-Nachweis:** $^{10}_{5}$B(n,α)$^{7}_{3}$Li, $^{6}_{3}$Li(n,α)$^{3}_{2}$He, $^{3}_{2}$He(n,p)$^{3}_{1}$H, Amaldi: Erzeugung und Abbremsung von Neutronen auf 640 Seiten In: Handbuch der Physik. Bd 38/2 Neutronen und Verwandte Gammastrahlenprobleme 1959; Kedrow: Das Neutron. Original-Texte 1979 Chadwick, Iwanenko, Amaldi, Gerlach, Rutherford, Bothe, Becker, Curie, Joliot, Heisenberg, Tamm, Fermi, Yukawa, Hahn, Strassmann; Hughes: Das Neutron 1959; Walther Bothe & Flügge: Kernphysik und kosmische Strahlen 1948, 1953; Bothe & Maier-Leibnitz: Compton-Effekt und Photonenenergie 1936; Bothe: Vom Atom zum Weltsystem 1954; Rubinowicz: Quantentheorie des Atoms 1959; Rubinowicz: Quantum mechanics 1968; Bothe: Atlas typischer Nebelkammerbilder 1940; Rasetti: Elements of Nuclear Physics 1936, 1947 p233f; Musiol & Löffler: Mikrophysik II 1978 p82, 85, 149; W̃irtz & Beckurts: Elementare Neutronenphysik 1958; Teller &

Latter: Ausblick in das Kernzeitalter. Our nuclear future. Facts, dangers, opportunities 1958; Heinz Haber: Unser Freund das Atom. Vom Segen der Kernphysik 1958 mit einem Vorwort von Pasqcual Jordan 1902-1980; Fritz und Heinz Haber aus Mannheim, tödliche Unterdruckexperimente unter Hubertus Strughold in Dachau, Weltraumanzüge, Parabelflug, 350 pop Fernsehsendungen; Haber: Bausteine unserer Welt. Der Stoff der Schöpfung, Unser blauer Planet, Unser Mond 1971; Felke: Start ins Atomzeitalter 1958; Sarry: Eigenschaften und Bau der Atome 1956; Hosang: Kräfte im Kern 1957; Böhm & Dörge: Gigant Atom 1956; Broda: Atomkraft - Furcht und Hoffnung 1956; Bredel ed: Anwendung der Atomenergie für friedliche Zwecke 1956; Reihe **Was ist was Bd3:** Übelacker: Atomenergie 1988 mit Coverbild Atompilz wird zu Übelacker: Energie 2003 mit Coverbild Windpark. Im Vorwort wird der Tschernobyl-Unfall als schrecklich bezeichnet und zum Kernenergieausstiegsgrund erklärt, während auf Seite 27 ein Atomwaffenkrieg als noch schlimmer Erwähnung findet, aber die naheliegende Aussage zur Abschaffung aller Kernwaffen fehlt. Ein **Was ist was Band zum Nuklearraketenkrieg** wäre gut. **Zischka: Tschernobyl - kein Zufall. Sowjetwirtschaft und die Fehler des Westens** 1987 Kernkraftwerke statt Kernwaffen! Deutsche Führung desorientiert und Wähler ahnungslos; Braunbek: Atomenergie in Gegenwart und Zukunft 1953; Nesmejanow: Atomenergie für den Frieden 1956; Hartmann: 1945-1955. Das UdSSR-Jahrzehnt; Franz Barwich: Die Irrlehre und die Wissenschaftslosigkeit des Marxismus 1920; H̃einz und Elfi Barwich: Das rote Atom. Als deutscher Forscher in der UdSSR 1970; Hessel: Kernreaktoren in Atomkraftwerken 1961; Höll & Bechert: Die Wahrheit über die Atomkraftwerke. Gefahren für Mensch und Wasser 1977; Fratscher & Felke: Einführung in die Kernenergetik 1971, 1973; Kusnezow: Kernenergie - Schatzkammer des 21. Jahrhunderts 1975; Teller & Latter: Ausblick in das Kernzeitalter. Our nuclear future. Facts, dangers, opportunities 1958 RAND = Research ANd Development *1948 Santa Monica = Corporation = Global policy think tank der Douglas Aircraft Company; **Teller: Energie** für ein neues Jahrtausend 1975, 1979, 1981 = US-Antwort auf Club of Rome/MIT, 1 Quad = 293 GWh = Energiemenge von Iowa 1973; Was sagt die DPG zum Thema Klima und Energie? siehe Web; Karl Friedrich Alexander: Energiequellen der Zukunft 1978; Zischka: Sieg der Arbeit 1941; Kürten: Energie als Herausforderung 1974; Zischka: Kampf ums Überleben. Das Menschenrecht auf Energie 1979 Nicht duch Mangel an Raum, an Rohstoffen oder an Energie droht uns der Untergang; nicht weil die Großstadtluft weniger rein ist als die des Hochgebirges, sondern weil mehr und mehr Menschen keine Ahnung davon haben, was sie am Leben erhält und worauf ihr Wohlstand beruht. Eine Verwirrung der Geister, die dazu führen kann, dass wir Angst vor den eingebildeten Gefahren Selbstmord begehen.; **Zischka: Tschernobyl - kein Zufall. Sowjetwirtschaft und die Fehler des Westens** 1987 **Kernkraftwerke statt Kernwaffen!** Deutsche Führung desorientiert und Wähler ahnungslos; **Zischka: Die alles treibende Kraft. Weltgeschichte der Energie** 1988; Cap: Energieversorgung. Probleme und Ressourcen 1981; Pfalz: Kernenergie, PhysJ20 2021 H12 p10; PhysJ21 2022 H1 p19; Teller: Memoirs. A twentieth century journey in science and politics 2006; Mangoni: Relativity, decays and electromagnetic fields 2020; Frenkel: Prinzipien der Theorie der Atomkerne 1957; ? Jay: Atomenergie Forschung Harwell 1955; Landau & Smorodinsky: Lectures on nuclear theory 1959; Peierls: Kernmaterie PhysBl22 1966 p57; W̃einberg & Wigner: The physical theory of neutron chain reactors 1958; Braunbek: Physik für alle 1950; **Lindner: Das Bild der modernen Physik** 1971, 1973[3], 1978; Braunbek: Forscher erschüttern die Welt. Das Drama des Atomkerns 1958; Haberer: Radionuklide im Wasser. Ihre Verbreitung und Anwendung, Messung und Entfernung 1969; Ludwieg: Radioaktive Isotope im Futter und Nahrung 1962; **Strohm: Friedlich in die Katastrophe** = Bibel der bundesdeutschen Anti-AKW-Bewegung = Anti-Atomraftwerks-Bewegung 1971[0], 1973[1], 1981[2]; Braunbek: Grundbegriffe der Kernphysik 1958; Braunbek: Kernphysikalische Meßmethoden 1960; K̃och & Schintlmeister: Radioaktive Strahlenquellen in der Technik 1960; Erwall, Forsberg, Ljunggren: Radioaktive Isotope in der Technik 1963; **Weiss: Radioaktive Standardpräparate. Eigenschaften. Herstellung und Aktivitätsbestimmung** 1956; 21g Radium 1945 etwas 5 Mio $ Obersalzberg. Neuert: Kernphysikalische Meßverfahren zum Nachweis für Teilchen und Quanten 1966; **Lindner: Grundriss der Atom- und Kernphysik** 1959, 1993; **Bethge, Walter & Wiedemann: Kernphysik** 2001[2] mit Geschichtstabelle; 1934, jenseits $_{92}$U, dem letzten je in der Natur gefundenen Grundstoff, sollte es keine

Elemente, keine **Transurane** wie $_{93}$Np geben! Aber I & F Joliot-Curie entdeckten **künstliche Radioaktivität**, Synthese eines Radionuklids: Mit α-Teilchen bestrahlte Alu-Folie wird radioaktiv! $^{27}_{19}\mathrm{Al}+^{4}_{2}\alpha \rightarrow^{30}_{15}\mathrm{P}^{*}+^{1}_{0}\mathrm{n}\rightarrow^{30}_{14}\mathrm{Si}+^{0}_{1}\mathrm{e}+\bar{\nu}_e$. So ließen sich auch B, Be und Mg erzeugen! Pierre Radvanyi: Biographie. Die Curies. Eine Dynastie von Nobelpreisträgern SdW H3 2003; **Joliot-Curie: Wissenschaft und Verantwortung. Ausgewählte Schriften** 1966 auch brillante populäre Darstellung der Atomphysik und Kernwaffen; Kippenhahn: Atom 1994; Moore: Niels Bohr. Ein Mann und sein Werk verändern die Welt 1970; Segre: Die großen Physiker und ihre Entdeckungen Bd2 1980; S̃egre: Enrico Fermi - Physicist 1995; Schwartz: The last man who knew everything. The life and times of Enrico Fermi, father of the nuclear age 2017; Segre & Hoerlin: The Pope of Physics. Enrico Fermi and the Birth of the Atomic Age 2017; Fermi machte Alchimie mit Neutronen. Fluor wurde radioaktiv. Hat man so auch $_{93}$Np. Ida Noddack: Fermi sah **induzierte Kernspaltung**! Das glaubte niemand und Fermi bekam den Nobelpreis 1938 für die Erzeugung von Transuranen, was erst 1942 gelang. NP 1935 Joliot-Curie warnt vor möglichen Waffen zur Selbstvernichtung der irdischen Welt. Hahn = Radiochemiker, wiss. Begleitung der Gasangriffe im 1. WK, Eisernes Kreuz und Ritterkreuz, Meitner, Straßmann = Radiochemiker weisen die Transurane 93 bis 97 nach. 1937 Irene Joliot-Curie und Savich finden eine 3.5-h-Substanz = Curiosum von Curie. Hahn, Meitner, Straßmann finden Juli 1938 eine 60-Tage-Halbwertszeit-Substanz. Königsdorf: Respektloser Umgang 1986 Helga Bunke und Liese Meitner; Fermi übersah die induzierte Kernspaltung, Hahn, Meitner, Straßmann 1938: Neuronen auf Kerne zur Herstellung von Transuranen. Barium-Nachweis. Übernahme Österreichs, Meitner muss fliehen. 3.5-h-Substanz macht Bariumsalze. 21. Dez 1938 Chemiker hatten durch den Nachweis von nur einigen 1000 Bariumatomen die Neutronen-induzierte Kernspaltung entdeckt! Blackett: Ist die Atombombe eine absolute Waffe? PhysBl5 1949 p245-256; Die Energie bei der Atombombenexplosion per thermischen Neutronen, die die Kernkraft schwächen, ist die Freisetzung der elektrostatischen Energie. Bei spontaner Freisetzung aller Protonen von Uran also $Q = 92\mathrm{e}$ und $R = 10^{-15}\mathrm{m} = 1\mathrm{fm}$ bedeutet $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \approx 10^{-9}$ Ws = 2 GeV. Feynman: Vorlesungen über Physik Bd2.1 p1 elektrische Kräfte; **Roman Kim: Sumiko. Das Mädchen aus Hiroschima** 1960; Jaspers: Die Atombombe und die Zukunft der Menschheit 1957; Wider die blinde Verehrung der Naturwissenschaften und Born: Eine Entgegnung PhysBl15 1959 p285f; **Hoffmann: Otto Hahn** 1978 KapX-XI Spätestens ab März 1939 war weltweit 200 Wissenschaftlern klar, dass Atombomben möglich sind und informierten ihre Regierungen zum Handeln. Popp: Hitlers Atombombe SdW H12 2016 p12-21 Heisenberg hatte keine Ahnung vom Prinzip der Bombe! Zur Pop-Kultur/Folklore der westlichen Sicht gehört, dass Sachs, Szilard, Teller und Einstein 1939 einen Brief an Franklin D. Roosevelt schrieben. 'Foto und Film-Dokumente' siehe Walker: Die Uranmaschine. Mythos und Wirklichkeit der deutschen Atombombe 1992; Lanouette: Genius in the Shadows. A Biography of Leo Szilard 2008; Aston: Isotope 1923; K̃irchheimer: Das Uran und seine Geschichte 1963; Schenzinger: Atom. Roman des neuen Weltbildes 1950; Lindner: Grundriss der Atom- und Kernphysik 1972[10] p152 Flügge im Juni 1939: Energieinhalt und Kernenergiegewinnung; B̃ader: Anatomie eines Kernkraftwerks; Keßler & Schintlmeister: Einführung in die physikalischen Grundlagen der Kernenergiegewinnung 1969 p78ff; **Lindner: Grundriss der Atom- und Kernphysik** 1972[10] p157-173 **Moderator** muss Neutronen bremsen, bevor vom dominierenden $^{238}_{92}$U eingefangen. Dabei sind Wasserstoffkerne am effektivsten. Spaltbarer $^{235}_{92}$U-Anteil maximal 2%, sonst zu teuer! Mit Moderator kann also die kritische Masse sehr klein gehalten werden. Moderator bringt die Neutronengeschwindigkeit von 10-30000km/s vor Neutroneneinfang rasch auf thermische Geschwindigkeit 1m/s des Reservoirs ohne zuvor absorbiert zu werden. Siedewasserreaktor hat nur einen Kreislauf bei dem das im Reaktor erhitzte Wasser direkt zur Turbine kommt = Tschernobyl 26.4.1986 RBMK-Reaktor = Grafitmoderator. **Chernobyl** DVD 2019 Regie Renck; **Zischka: Tschernobyl - kein Zufall. Sowjetwirtschaft und die Fehler des Westens** 1987 Kernkraftwerke statt Kernwaffen! Deutsche Führung desorientiert und Wähler ahnungslos; Rassow: Risiken der Kernenergie. Fakten und Zusammenhänge im Lichte des Tschernobyl-Unfalls 1988; Fukushima März 2011. Druckwasserreaktor hat per Wärmetauscher zwei Kreisläufe. **Regelstab** = starker Neutronenabsorber wie Borstahl, Borkarbid, B_4C, Kadmium oder Hafnium. **Musiol, Ranft, Reif, Seeliger: Kern- und Elementarteilchenphysik** 1989, 1995[2] p700 ; **Münzinger: Atomkraft. Der Bau von Atomkraft-**

werken und seine Probleme 1957[2]; Höll: Die Wahrheit über die Atomkraftwerke. Gefahren für Mensch und Wasser 1977; **Dyson:** Maker of Patterns. An Autobiography Through Letters 1979 = Disturbing the Universe = **Innenansichten - Erinnerungen in die Zukunft** 1981 p104-116 TRIGA = Training, Research, Isotopes, General atomic = **Wie baut man vermarktungsfähige Kernreaktoren?** Genf 1955, Metallurge **Massoud Simnad 1920-2001** wasserstoffhaltige Brennstäbe aus Uranhydrid und Zirkonhydrid 1955; T̃ode: Chronik des Hahn-Meitner-Instituts HMI in Berlin 2005; W̃eis: Grossforschung in Berlin - Geschichte des Hahn-Meitner-Instituts 1955-1980 1995 Curie & Regenstein: Die Entdeckung des Radiums 1898 Poloniums NP1903. Untersuchungen über die radioaktiven Substanzen NP1911 = Reindarstellung des Radiums Ostwalds Klass284 1999 $^{226}_{88}$Ra mit $T_{1/2}$= 1600 Jahre per α-Zerfall 4.87 MeV zu ^{222}Rn; 1g Radium bedeutet $3 \cdot 10^{21}$ Kerne bedeutet 3.7 10^{10} Zerfälle pro Sekunde Uranerz enthält 0.1% Uranoxide. 2t + Säure geben 1kg Yellowcake =80% Uranverbindungen. UF_6 über 56°C gasförmig. Gereinigtes Uran als Metallsalz ist kaum radioaktiv. dagegen strahlt die Bariumsulfatfällung. = Aktivität von 1 Ci= 1 Curie = 3.7 10^{10} Becquerel. Strube: Pierre und Marie. Roman über die Entdeckung des Radiums 1978; Strube: Das strahlende Metall. Leben und Werk von Pierre Curie und Marie Curie-Skłodowska 1988; Kleffe: Als das Atom in Stücke sprang 1976[2]; Lindner: Das Bild der modernen Physik 1973[3] p202.zxc Joffe: Begegnungen mit Physikern 1962, 1967 p65ff; Kant: Ioffe 1989; Herneck: Bahnbrecher des Atomzeitalters 1965, 1970[5] p94-126; Thirring: Der Weg der theoretischen der Physik von Newton bis Schrödinger 1962 35 Seiten; Weisskopf: Das Wunder des Wissens 1964; Weisskopf: Die Jahrhundertentdeckung. Quantentheorie 1993; Weisskopf: Mein Leben 1993; D̃e-Shalit, Feshbach, Van Hove: Preludes in theoretical physics. In Honor of V.F. Weisskopf 1966; Weisskopf: Natur im Schaffen - Erkenntnisse der modernen Naturwissenschaft 1980; **Asimov, Baker, Choppin, Fowler, Holden, Kolenkow, Sands, Weisskopf: Concepts in physics** 1973; Segre: Die großen Physiker und ihre Entdeckungen Bd2 1980 p43ff; Marie Curie-Sklodowska: Selbstbiographie 1922, 1959, 1962; Eve Curie: Madame Curie 1958; Q̃uinn: Marie Curie 1999; **Marie Curie. Elemente des Lebens** 2019 Regie Marjane Satrapi auf Romanbasis ist Lauren Redniss: Radioactive. Marie and Pierre Curie. A tale of love and fallout 2015; Vögtle: Marie Curie 1988; Strube: Das strahlende Metall 1984; Seaborg: Transurane 1966; Cube, Fürst, Müller: Elemente aus der Retorte 1973; Wohlfahrth: 40 Jahre Kernspaltung. Eine Einführung in die Originalliteratur 1979; Waas: Kernenergie. Ein Votum für Vernunft 1978; Cube: Auf einem Tiger reiten. Für und wider die Atomenergie 1977; Cube, Neiberger, Sieker: Das Ende des Nuklearzeitalters 1987; Weissmantel al al.: **Kleine Enzyklopädie Atom**. Struktur der Materie 1970; **Fljorow & Iljinow: Gibt es superschwere Elemente** 1977, 1981 **Magische Zahlen:** 2 (Helium), 8 (Sauerstoff), 20 (Kalzium), 28 (Nickel), 50 (Zinn) und 82 (Blei). Viertel der sichtbaren Materie im Weltall aus Helium. Magischen Zahlen gibt es analog auch bei Neutronen: Kerne bestehend aus 2, 8, 20, 28, 50 oder 82 Neutronen! Weitere Zahl 34 bei $^{54}_{20}$Ca, Riken Nishina Center for Accelerator-Based Science in Wako, Japan. Gesellschaft f. Schwerionenforschung in Darmstadt; Wilson & Littauer: Beschleuniger. Die kernphysikalischen Maschinen 1965; Heinz Schmellenmeier, Donald William Kerst, Houtermans Hans Jensen Elektronenbeschleunigers Rheotron. Wehrmacht als Waffe zum Abschuss von Flugzeugen durch Vorionisation der Motoren/ Verhinderung der Motorenzündung. Ãrmaldi: The adventurous life of Friedrich Georg Houtermans 2012; **Hoffmann: Ein Physiker zwischen Stalin und Hitler. Houtermans** SdW 2014 H2 p62-70 und H5 p8f; Weißberg-Cybulsky: Hexensabbat. Russland im Schmelztiegel der Säuberungen. = Im Verhör. Ein Überlebender der stalinistischen Säuberungen (=Tschistka) 1936-1938, 1948 berichtet 1951, 1993 p19f Gaidar: Timur und sein Trupp 1940 Temür= Tamerlan = Eisen = zentralasiat/islam Militär Samarkand, Usbekistan, türk/mongol. Saporoger Kasaken = freie Menschen, Pufferland zw Poel/Russland/Türkei. 1775 Auslöschung der Sitsch durch Potomkin. Rote Armee gegen Japan 29.7.-11.8.1938 Chassansee. Blücher 1889-1938. Schukow 16.9.1939 Waffenstillstand in Osten. 17.9.1939 Einmarsch in Polen. Gemeinsame Militärparade am 22.9.1939 in Brest-Litowsk: Guderian und Kriwoschein, Flaggentausch; D̃ie Warschauer Zitadelle 1937 zeigt polnischen Freiheitskampf gegen russische Fremdherrschaft; Maierbrugger: Nordkorea-Handbuch. Unterwegs in einem geheimnisvollen Land 2004; Scholl-Latour: Koloß auf tönernen Füßen. Amerikas Spagat zwischen Nordkorea und Irak 2006; Kern & Köllner: Südkorea und Nordkorea. Einführung in Geschichte, Politik, Wirtschaft und Gesellschaft 2005; Hansell: Geschichte Koreas nach 1945. Korea, das geteilte Land nach dem 2. Weltkrieg 2019; Dietsch: Südkorea 2017;

Wisotzki Waldenfels Käppeli: Mongolei 2018; Einstein, Houtermans, Irene und Frederic Joliot-Curie, Jean Perrin; H̃offmann & Dronsz: Wünsdorf - Hauptstadt der sowjetischen Truppen in Deutschland. Geschichte, Fakten, Hintergründe 2020; H̃offmann & Stoof: Sowjetische Truppen in Deutschland und ihr Hauptquartier in Wünsdorf 1945-1994. Geschichte, Fakten, Hintergründe 2021[3]; Hoffmann & Punzel: Potsdam. Sowjetische Garnisionsstadt 1945-1994. Geschichte, Fakten, Hintergründe 2022; C̃reuzberger: Die sowjetische Besatzungsmacht und das politische System der SBZ 1996; Reich & Schultz eds: Sowjetisches Untersuchungsgefängnis Leistikowstr/Mirbachstr Potsdam 2012 p48; Friedrich Beck = Houtermans & Godin = Shteppa. Beck & Shteppa: Russian purge and extraction of confession 1951; Paul Nizan: Das Trojanische Pferd. Die Verschwörung. Aufsätze 1932 bis 1938 1979; Paul Nizan: Aden. Wachhunde. Zwei Pamphlete. Dossier zum Fall Nizan 1986; Schalamow: Kolyma. Insel im Archipel 1975; Schalamow: Geschichten aus Kolyma 1983; Schalamow: Schocktherapie. Kolyma-Geschichten 1990; Schalamow: Durch den Schnee. Erzählungen aus Kolyma 1 2008; Schalamow: Linkes Ufer. Erzählungen aus Kolyma 2 2009; Schalamow: Künstler der Schaufel. Erzählungen aus Kolyma 3 2013; Schalamow: Die Auferweckung der Lärche. Erzählungen aus Kolyma 4 2013; Schalamow: Wischera. Antiroman 2016; Schalamow: Über die Kolyma Erinnerungen 2018; Wedding: Ede und Unku 1931; Hackl: Abschied von Sidonie 1989; Das Tagebuch der Anne Frank. 14. Juni 1942 bis 1. August 1944; Anne Frank Fonds Hrsg: Gesamtausgabe 2013; Ruud van der Rol & Rian Verhoeven: Anne Frank 1992; Rachel Salamander: Die jüdische Welt von gestern 1860-1938 1990; Thamer & Erpel eds: Hitler und die Deutschen. Volksgemeinschaft und Verbrechen 2011; Hillesheim & Schoen: Vier Kriegsherren gegen Hitler 2001; Hogan: Die Holocaust Chronik 2004, 2010; Arendt: Rahel Varnhagen. Lebensgeschichte einer deutschen Jüdin aus der Romantik 1938, 1958; **Arendt: Über den Totalitarismus** 1953 = Vorwort und Nachwort zu Ãrendt: Elemente und Ursprünge totaler Herrschaft 1955, 1986; **Heimatlosigkeit und Wurzellosigkeit**. Basis für totale Herrschaft sind **a]** Niedergang und Zerfall des Nationalstaates. **b]** Anarchischer Aufstieg der modernen Massengesellschaft; Arendt: Eichmann in Jerusalem. Ein Bericht von der Banalität des Bösen 1964 Arendt: Macht und Gewalt 1970; Massenvernichtung - Holocaust und Nulearbomben - erfordert stets die vielen kleinen Helfer, die von ihrem Beitrag für die Hölle nichts wissen wollen. August 1928 Weltwirtschaftskrise und aufkommender Faschismus: Dreigroschenoper. Mackie Messer – Brechts Dreigroschenfilm 2018 mit Lars Eidinger als Bertolt Brecht. Nur das Künstliche, die Kunst, gibt die Sicht auf die Wirklichkeit frei. **Kreis: Die Schweiz im Zweiten Weltkrieg** 2011; Brecht: Hitler wird seinen eigenen Schweizer Geldwäscher und Banktressor niemals angreifen. Schweizer Banken wuschen 400t Raubgold = 15 Mrd €und hielten so den 2. Weltkrieg am Laufen. Bei Kriegsbeginn hatte die Wehrmacht nur Munition für 14 Tage. Zugriff auf die Schweizer Judenkonten erforderten Sterbeurkunde, die aber in den Konzentrationslagern nicht ausgestellt wurden. Rhodes: Die deutschen Mörder. Die SS-Einsatzgruppen und der Holocaust 2006; Ẽco: Der ewige Faschismus 2020; **Frankl: Ein Psychologe erlebt das Konzentrationslager** 1945 p19 **... die Besten sind nicht zurückgekommen ...** Christoph Meily: 1997 UBS vernichtete Akten der 30iger/40iger Jahre! 2t Zahngold in Schweiz gewaschen. Boie: Dunkelnacht 2021; **Pausewang** 1928 Ost-Böhmen-2020: **Ich war dabei. Geschichten gegen das Vergessen** 2007 p12ff Plünderung wie bei Einsteins Sommerhaus in Caputh; Pausewang: Auf einem langen Weg 2007; Kaurin: Beinahe Herbst 2019; David: Ein Stück Himmel. Erinnerungen an eine Kindheit 1981; Verolme: Wir Kinder von Bergen-Belsen 2000; Koch: Winterkinder 2018; **Leonhard: Die Revolution entlässt ihre Kinder** 1955; Strittmatter: Tinko 1954 Nachkriegszeit in Niederlausitz. Heimkehrer. Umsiedler. Vertreibungs- und Kriegserlebnisse werden beschwiegen. Bodenreform 1945 bis 1948. 1952 erste LPG, Sechsundsechzig 66 https://www.pagat.com/ Mala: Das grosse Buch der Kartenspiele 19??; Renn: Trini. Die Geschichte eines Indianerjungen 1956; Strittmatter: Ole Bienkopp 1963; Leonhard: Meine Geschichte der DDR 2007; Solschenizyn: Ein Tag des Iwan Denissowitsch 1962; Solschenizyn: Schwenkitten '45. 2004; Solschenizyn: Zweihundert Jahre zusammen. Die Juden in der Sowjetunion 2002; Solschenizyn: Ostpreußische Nächte 1976; Solschenizyn: Der erste Kreis der Hölle 1971; Solschenizyn: Lenin in Zürich 1975; Solschenizyn: Krebsstation 1967; Solschenizyn: Der Archipel GULAG 1973; FRIEDRICH GRIESE (1890-1975) in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts der bedeutendste Schriftsteller Mecklenburgs, 1940 verlieh Adolf Hitler Griese die Goethe-Medaille für Kunst und Wissenschaft. Griese: Der Wind weht nicht, wohin er will 1960, 2012 ergänzt; Johnson: Jahrestage Bd3 1973; Glucksmann: Köchin und Menschenfresser. Über die Beziehung zwischen Staat, Marxismus und Konzentrationslager 1974; Glucksmann: Die Meisterdenker 1977; Glucksmann: Hass. Die Rückkehr einer elementaren Gewalt 2004; Asi-

mov: Gewalt ist die letzte Zuflucht des Unfähigen. Koestler: Der Mensch - Irrläufer der Evolution. Die Kluft zwischen Denken und Handeln. Eine Anatomie menschlicher Vernunft und Unvernunft 1995; Koestler: Zeuge der Zeit. Abenteuer des Lebens 1983 Empörung und Glaube. Vom Kibbuznik zum Bohemien. König Feisal. Die rote Eminenz. Fegefeuer und ASarah Sarah pokalypse. Ein spanisches Testament. Sonnenfinsternis. Abschaum der Erde. Flucht ins Leben 1971; L̃ingens: Gefangene der Angst. Ein Leben im Zeichen des Widerstandes 1948, 2005; **Bock & Günter: Schwerionenforschung**. Beschleuniger, Atomphysik, Kernphysik, Kernchemie, Anwendungen 1993; **Herneck: Bahnbrecher des Atomzeitalters** 1970[5] p3381ff induzierte Kernspaltung und Kettenreaktion; Heereswaffenamt richtet noch im Sommer 1939 Referat für Kernphysik in Gottow bei Kummersdorf ein. Fleischer & Eiermann: Heeresversuchsstelle Kummersdorf. Maus, Tiger, Panther, Luchs, Raketen und andere Waffen der Wehrmacht bei der Erprobung 1995; Fleischer: Die Heeresversuchsstelle Kummersdorf Band 2. Augenzeugenberichte, Fotografien, Akten 1874-1945 1999; Pöhlmann, Bauermeister & Sommerer: Die Heeresversuchsstelle Kummersdorf. Schießplatz - Geheimer Ort - Denkmal 2014; Diebner, Heisenberg, Bagge geben Bericht an Heereswaffenamt. Westen stoppt Veröffentlichung zur Kernphysik, aber Hahn, Meitner, Straßmann veröffentlichen weiter. Klares Signal für Sowjets. Amerikaner, Briten und Deutsche führen Geheimprojekte zur Atombombe. März 1940 **Frisch-Peierls-Memorandum** = Machbarkeit einer aus der Luft abgeworfenen Atombombe. Beginn britischer Forschung und Konstruktion einer Atombombe. MAUD-Kommission. Tube alloy Projekt. Flerow, Petrschak - und Kurtschatow bekommen Stalinpreis für **spontane Kernspaltung 1940**, aber keine Reakion auf Veröffentlichung, klarer Hinweis auf geheime Arbeit des Westens. Weltweit warnen Physiker ihre Regierungen. Fermi gelingt mit seinem Uranbrenner am 2. Dez 1942 in einer Sporthalle der Chicagoer Uni die erste kontrollierte Kettenreaktion. Szilard: Der schwärzeste Tag der Menschheit. Hahn: Künstliche neue Elemente Vom Unwägbaren zum Wägbaren. Mit einer Einführung in die Kernspaltung 1948; Hahn: Erlebnisse und Erkenntnisse 1975; K̃rafft ed: Im Schatten der Sensation. Fritz Straßmann 1979; Hahn: Vom Radiothor zur Kernspaltung 1962; Hahn: Mein Leben 1968, 1986; R̃abi: My Life and Times as a Physicist 1960; Sciascia: Das Verschwinden des Ettore Majorana Gebundenes Buch 2002; G̃olowin: Kurtschatow Wegbereiter der sowjetischen Atomforschung 1976; Heinemann-Grüder: Die sowjetische Atombombe 1992; Lewis: H-Bombe vermisst. Dokumentarbericht über der Atomunfall von Palomares 1967; Niese: Meine Rossendorfer Geschichten 2019; Körper: Thermonukleare Fusion, PhysBl14 1958 402-412; Bohdansky: Thermonukleare Fusion, PhysBl15 1959 296-305; Biermann: Aus der Plasmaphysik, PhysBl 17 1961 p442-451; Tolamaks 1934 in Harwell und Aldermaston Arzimowitsch: Gesteuerte thermonukleare Reaktionen 1961, 1965; K̃aramanolis: Heißer als die Sonne. Kernfusion 1992; Teller: Energie für ein neues Jahrtausend 1975, 1979, 1981 Stand der Fusionsforschung p221-240; **Voronov: Storming the fortress of fusion** 1985, 1988; M̃cCracken & Stott: Fusion. The energy of the Universe 2012[2]; a] Trägheitseinschluss. Lawrence Livermore Nat Lab = LLNL, National Ignition Facility = NIF, 192 Hochleistungslaser 10^8 K für 20 ns, 1.9 MJoule. b] Tokamak = toroidales Magnetfeld zweck Pinch-Effekt = Quetschung des Ladungsstroms per Lorentz-Kraft. ITER = International Thermonuclear Experimental Reactor im südfranz Cadarache, 18 Claessens: ITER. The grant fusion reactor 2020; supraleitende Magnete $1.5 \cdot 10^8$ K, ab 2035 wirtschaftlicher Betrieb. c] Stellarator. Wendelstein 7-X Greifswald am IPP mit 50 supraleitenden Magneten. Artsimovich: A physicist's ABC on plasma 1976, 1985; Grävemeyer: Jede Menge Energie ct21 2021 p130-133; Crammer & Peierls: Atomic energy 1947, 1950 Bethe Cockcroft, Morrison; Peierls, Frisch, Fuchs **Tube Alloys** November 1943 und Kurtschatow 1943 beim geheimen Atombombenbau. Kurtschatow, Fljorow, Arzimowitsch, Chariton, **Sacharow: Mein Leben** 1990, Seldowitsch, Koval, Sudoplatow, Klaus Fuchs, Nikolaus Riehl, Robert Döpel, Heinz Pose, Gustav Hertz, Heinz Barwich, Werner Hartmann, Fritz Bernhard, Karl Günther Zimmer, Justus Mühlenpfordt, Werner Schütze, Reinhold Reichmann, Gustav Richter, Werner Czulius, Hans Jürgen von Oertzen, Josef Schintlmeister, Ernst Rexer, Carl Friedrich Weiss, E. Ortmann, A. Baroni, Herbert Schmitz, Manfred von Ardenne, Peter Adolf, Gernot Zippe, Max Steenbeck, Victor Bayerl: **RDS-1** am 29.8.1949 in Semipalatinsk/Kasachstan 800km nördlich Talas/Kirgistan: 1949 bis 1963 113 oberirdische Atombombenexplosionen. Bis 1991 383 unterirdische Tests. Aitmatow: Dshamilja 1958; Max Volmer in Norilsk mit Gustav Richter: Anlage zur Herstellung von Schwerem Wasser für Pu. Churchill wusste ab 1942, dass die Deutschen nicht ernsthaft an der Atombombe bauen. Mayer-Norton-Theorem = Ersatzschaltbild Batterie $R = \frac{U_{\text{Leerlauf}}}{I_{\text{Kurzschluss}}}$. Durch Mayer

war das MI5 ab 1939 über die Militärforschung informiert. PhysJ22 2023 H1 p58. Siehe Rennert: Der Oslo-Report. Wie ein deutscher Physiker die geheimen Pläne der Nazis verriet 2021; von Ardenne: Wege zur Steigerung der Weltmarktfähigkeit unserer industriellen Erzeugnisse 1963; Manfred von Ardenne: Geistige Elite, PhysBl38 1982 H3 p75f; von Ardenne: Ein glückliches Leben für Technik und Forschung 1972; von Ardenne: Erinnerungen fortgeschrieben. Ein Forscherleben im Jahrhundert des Wandels der Wissenschaften und politischen Systeme 1997; von Ardenne: & Lotsch: Ich bin ihnen begegnet 1997; Herneck: Ardenne 1972; K̃arlsch: Hitlers Bombe 2005; S̃charnberg: Hans Jensen, Physik und Nobelpreisträger. Opportunist oder Widerständler im Dritten Reich? 2020; Barkleit: Manfred von Ardenne. Selbstverwirklichung im Jahrhundert der Diktaturen 2008[2]; Steenbeck: Impulse und Wirkungen. Schritte auf meinem Lebensweg 1977; 60 Jahre Dubna: Flerov und Pontecorvo 1913/50/93 PJ15H6 2016 p37-41; Die Affäre Pontecorvo. Die ungewöhnliche Karriere des italienischen Kernphysikers PJ 2013 H10 p43; Fostner & Hoffmann: Physik im Kalten Krieg. Beiträge zur Physikgeschichte während des Ost-West-Konflikts 2013 p149-161; Fostner: Quantenmechanik im Kalten Krieg: David Bohm und Richard Feynman 2007; Mez ed: Der Atomkonflikt. Atomindustrie, Atompolitik, Anti-Atom-Bewegung 1979; Edingshaus: Heinz Maier-Leibnitz 1986 Forschungsreaktor München = Atomei; Jungk: Gesellschaftliche Veränderung fängt immer mit Außenseitern an, die spüren, was notwendig ist. Reif: Antworten der Strukturalisten 1973; Reif: 'Denken heißt überschreiten'. In memoriam Ernst Bloch 1982; Reif: Grenz-Gespräche. Dreizehn Dialoge über Wissenschaft 1993; Herbig: Kettenreaktion. Das Drama der Atomphysiker 1976; Finkelnburg: Einf in die Atomphysik 1976[12] KapV; Baldin, Goldanskij & Rosental: Kinematik der Kernreaktionen 1963; Schintlmeister, Josef & Mercedes Alvarez-Otto: Der Isospin von Atomkernen. Eine Sammlung von Aufsätzen der sowjetischen Autoren Dzelepov, Selzer, Bas und Smorodinskij 1960; Walter Kutschera, Wolfgang Reiter: Josef Schintlmeister und der Wiener Uranverein. 2011 = https://www.zbp.univie.ac.at/ausstellung/schintlmeister/ Schintlmeister: Die Elektronenröhre als physikalisches Meßgerät. Röhrenvoltmeter, Röhrengalvanometer, Röhrenelektrometer 1945; Gray & Mann: Chemische Elemente 2010; **Hoffmann: Otto Hahn - Farmhall-Internierung** 1978; Bernstein & Cassidi: Hitler's Uranium Club. The secret recordings at Farm Hall 1995; **CFv Weizsäcker: Der bedrohte Friede. Politische Aufsätze 1945 - 1981**. 1981 p17ff **Bemerkungen zur Atombombe**; Kramish: Der Greif. Paul Rosbaud - der Mann, der Hitlers Atompläne scheitern ließ 1986; Papenfuss, Lüst & Schleich: 100 Years Werner Heisenberg. Works and Impact 2002; Beyerchen: Wissenschaftler unter Hitler. Physiker im Dritten Reich 1977, 1980; **ErnstKlee 1942-2013: Das Personenlexikon zum Dritten Reich. Wer war was vor und nach 1945** 2003 4300 Kurzbiografien. **T4 = Tiergartenstraße 4** mit Kanzlei des Führers = Zentrale zur Organisation des Massenmordes an Kranken und Behinderten. Universitäre Sammellager der intellektuellen Nazis: Freiburg, Heidelberg, Marburg, Tübingen. Richard **von Schirach: Die Nacht der Physiker**: Heisenberg, Hahn, Weizsäcker und die deutsche Bombe 2012; Frayn: Kopenhagen 2003; R̃ovelli: Helgoland. Wie die Quantentheorie unsere Welt verändert 2021; Frayn: Celias Geheimnis. Die Kopenhagen-Papiere 2005; S̃eiler: Kommandosache 'Sonnengott'. Geschichte der deutschen Sonnenforschung im Dritten Reich und unter alliierter Besatzung 2007; ṽan Calmhout: Sam Goudsmit and the hunt for Hitler's atom bomb 2018 siehe PhysJ18 2019 H11 p72; Goudsmit: Alsos. The failure of german science 1947; Papers, 1921-1979, http://www. aip. org/history/ nbl/collections/ goudsmit/colls/box49/box49f28.html; Ferrari: Das Prinzip 2015 Der Teil und das Ganze, reloaded. Was Wissenschaftler durchmachen, wenn ihnen das Fundament ihres Gedankengebäudes wegbricht, und sie sich damit abfinden müssen, dass das, was sie finden, nie mehr anschaulich sich wird beschreiben lassen. Eben das hatte Heisenberg als einer der ersten erkannt und damit als Mittzwanziger solche Koryphäen wie Einstein oder Schrödinger vor den Kopf gestoßen. Heisenberg bleibt und wird Leiter des Uranprojektes, das in höchster Eile die **Kernspaltung** voranbringen soll: ${}^{1}_{0}n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{236}_{92}U^{*} \rightarrow {}^{141}_{56}Ba + {}^{92}_{36}Kr + 3\,{}^{1}_{0}n + 200$ MeV oder $n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{139}_{56}Ba + {}^{95}_{36}Kr + 2\,n + 200$ MeV $n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{139}_{56}Ba + {}^{94}_{36}Kr + 3\,n + 200$ MeV $n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{140}_{56}Ba + {}^{94}_{36}Kr + 2\,n + 200$ MeV $n + {}^{235}_{92}U \rightarrow {}^{140}_{56}Ba + {}^{93}_{36}Kr + 3\,n + 200$ MeV oder ${}^{239}_{94}Pu + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{144}_{56}Ba + {}^{94}_{38}Sr + 2\,{}^{1}_{0}n\,{}^{239}_{94}Pu + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{130}_{51}Sb + {}^{107}_{43}Tc + 3\,{}^{1}_{0}n$, wobei kinetische Energie der Spaltfragmente = 167 MeV, prompte Gammastrahlung = 6 MeV, kinetische Energie der Neutronen, die wiederum für Spaltung nötig = 5 MeV, Elektronen aus Spaltfragment-Betazerfall = 8 MeV, Gammastrahlung aus Spaltfragmenten = 6 MeV, Elektron-Antineutrinos aus Spaltfragment-Betazerfall = 12 MeV, Gesamtenergie pro Spaltung = 204 MeV, **Anreicherung des natürlichen Urans** mit 0.7%${}^{235}_{92}U$

auf 1 bis 4%, ${}^{238}_{92}$UI(99.276%), $\boxed{{}^{235}_{92}\text{U(0.718\%)}}$, ${}^{234}_{92}$UII(0.0056%), ${}^{238}_{92}$U(n,γ)${}^{239}_{92}$U$\xrightarrow{\beta^-}$${}^{239}_{93}$Np $\xrightarrow{\beta^-}$ ${}^{239}_{94}$Pu. Chemische **Verbrennung** bringt nur 4 eV pro O_2! In Der Teil und das Ganze versucht Heisenberg zu begründen, warum Heisenberg das Uranprojekt verfolgt - in Das Prinzip wird er zerlegt, und zwar vernichtend. Hätte Ferrari Heisenbergs Buch verstanden, hätte er uns von dem seinigen verschonen können. Siehe auch PhysJ 14 2015 H12 p54. Heisenberg: Der Teil und das Ganze. Mathematik p42, Lindemann 30p, Weyl: Raum Zeit Materie p30f, Pauli zu SRT & ART p30, Sommerfeld zu Physik lernen, Schiller: Wenn Könige bauen, haben die Kärner zu tun! Kant-Nähe p30, Gleichzeitigkeit p36, Raum und Zeit sind bei Beobachtung keine unabhängigen Größen p37, Ferrari: Predigt auf den Untergang Roms 2013; Lande, Ehrenfest, Pauli, Kronig, **Uhlenbeck = Theoretiker and Goudsmit = Spektrendeuter** 1925: **Elektronen-Spin**. Goudsmit: Die Entdeckung des Elektronenspins PhysBl21 1965 H10 p445-453 Für Dubletts im Spektrum braucht das Atom den Elektronenspin. Februar 1922 sahen Stern und Gerlach die Richtungsquantelung. Als magnetisches Moment $m = S = \hbar/2$ durch kreisende Elektronenladung auf klassischem Elektronenradius $R = 10^{-15}$ m bedeutet Kreistrom $I = \frac{q}{T} = -\frac{ev_e}{2\pi R}$ auf Rand der Kreisfläche $A = \pi R^2$, also Kreistrommoment $m = IA = -\frac{ev_eR}{2} = -\frac{e}{2m_e}Rm_ev_e = -\frac{e}{2m_e}L_z = -\frac{e}{2m_e}S = -\frac{e}{2m_e}\frac{\hbar}{2}$, bedeutet Elektronengeschwindigkeit $v_e = \frac{\hbar}{2R_em_e} \approx 1000c$. Also relativistische Rechnung! Aber Spin bleibt klassisches Rätsel. **Hönl'scher Zitterradius des Elektrons** = Elektronenspin $S = \hbar/2$ durch punktförmiges Elektron auf Zitterradius R_z mit Lichtgeschwindigkeit c: $S = \frac{\hbar}{2} = m_eR_z^2\omega = m_ecR_z$ bedeutet $R_z = \frac{h}{4\pi m_ec} \approx 10^{-13}$ m. **Bernstein: Erlebte Wissenschaft. Berühmten Forschern über die Schulter geschaut** 1978 p95ff; Fermionen: Spin 1/2 als Äquivalent aller 2-Zustands-Systeme! Statt $\hat{s}_+$, $\hat{s}_-$, $\hat{s}_z$ geht auch der Vektoroperator $\hat{\vec{s}} = (\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z)$ = Drehimpulsoperator, dessen Vertauschungsrelationen die infinitesimalen Drehungen in einem (abstrakten) dreidimensionalen Raum beschreiben. Äquivalenz, da Basistransformationen im zweidimensionalen komplexen Hilbertraum eine Darstellung der Gruppe SU(2) bilden, die „doppelt so groß ist" wie die Gruppe SO(3) der Drehungen im reellen dreidimensionalen Raum. Einheitsmatrix erfordert 4π-Drehung eines komplexen Zustands! **Isospin**-Idee nimmt zB p und n als verschieden Zustände. **Faserbündel ist nötig!** The tangent bundle effect is additive and relativistic; that is, it vanishes if c goes to infinity. It is one half of the value obtained without regard for the tangent space orientation, but with opposite sign. Thus the combined effect differs from the latter by a factor two (Thomas precession). Nikles: Die Verona-Dokumente; Laucht: Elemental Germans. Klaus Fuchs, Rudolf Peierls and the Making of British Nuclear Culture 1939-59 2012; Panitz: Geheimtreff Banbury: Wie die Atombombe zu den Russen kam 2009; Ruth Werner = Ursula Kuczynski = Beurton = Hamburger: Sonjas Rapport 1977, 2006;

Exotische ${}^{30}_{12}$Mg-Kerne sind länglich. β-Zerfall als Krankheit des Neutrons nach Fermi-Modell oder Standard-Modell ^{131}J, Cs. Gamow: Die Existenz des Neutrino PhysBl5 1949 p108f; Schwetz-Mangold: Sterile Neutrinos, PJ22 2023 H3 p24f ohne schwache WW; Brown: The idea of the neutrino, Physics today 1978 H9 p23-28; Braunbek: Vom Lichtstrahl zum Neutrino - eine moderne Strahlenphysik für Alle 1968; **Paetz: Solare Neutrinos**, PhysBl 29 1973 p299-309; Wu & Moszkowski: Beta decay 1966; Lipkin: Beta decay for pedestrians 1962; Bernstein: Elementary Particles and Their Currents 1968; Renner: Current algebras and their applications 1968; T̃reiman & Jackiv: Current Algebra and Anomalies 1986; Transmutation = Plutonium verarbeitende Industrie zwecks Reduktion der Toxizität, ATS-System Elbe Dresden. IPPE schnelle Reaktoren. ${}^{1}_{1}$H, ${}^{2}_{1}$D, ${}^{3}_{1}$T. Moghissi[2]: **Tritium - Entdeckungsgeschichte, Anwendung und Umweltgefährdung**, PhysBl 29 1973 p543-7; DVD Schweres Wasser 2006; Ab 2050 Netzbetrieb per **Kernfusion** mit ${}^{2}_{1}$D + ${}^{3}_{1}$T $\rightarrow$ ${}^{4}_{2}$He + n + 17.6 MeV. Bernstein: Nuclear weapons 2008; L̃ight: 100 Sonnen 1945-1962 2003; Letzte atmosphärische Tests: GB 23. Sep 1958, USA: 9. Juni 1963, UdSSR: 25. Dezember 1962, Frankreich: 2. Juli 1966–14. Sept 1974: 41 Tests, China: 16. Oktober 1964–16. Oktober 1980: 22 Tests.

Exposition, **Ionendosis** in 1 Röntgen = $2.58 \cdot 10^{-4}$ C/kg. Dosis von 1 Röntgen pro Kubikzentimeter Luft erzeugt etwa 2 Milliarden Ionenpaare. Hintergrund = 11μR. Energiedosis 1 rad = radiation absorbed dose = 10^{-2} J/kg = 0.01 Gray. Aktivität 1 Ci = $37{\cdot}10^9$ s^{-1} = 1g ^{226}Ra 1600a, α, 1.871MeV. 1 Bq = 1 Zerfall pro sec. 1 Ci = $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq. Aktivität im menschlichen Körper 10^4 Bq entspricht ohne Folgeprodukte 1g ^{238}U, 4.4 10^9a, α mit 4.27MeV. Freigrenze von ^{60}Co = 10^5 Bq, 5.3a β 0,31MeV+γ 1.17MeV + γ 1.33MeV.

Trizium ^{3}H 10^9 Bq, 12a, β 19keV. Thermoelektrische ^{238}Pu-Batterie bei Satelliten bis 10^{15} Bq, 88a α 5.6MeV. Maximal zulässige Äquivalentdosis $D_q = q\,D$ in mSv (10 mSv = 1 rem Röntgen equivalent in mammals) 5 mSv pro Jahr. Normal sind 0.2μSv pro h. Im Bergwerk 6 μSv pro h. Erhöhtes Krebsrisiko ab 50 bis 100 mSv. Deutschland $0.1\mu\text{h}^{-1} = 60,000$ MeV pro Stunde, also ca. $6{\cdot}10^9$ 10eV-Ionisationen pro kg. 6 Sv sind letal. KKW Störfall Obrigheim, PhysBl28 1972 231. Ř̃ajewsky: Strahlendosis und Strahlenwirkung 1956[2]; Š̃ternglass: Radioaktive Niedrigstrahlung 1972, 1977; Höll: Die Wahrheit über die Atomkraftwerke. Gefahren für Mensch und Wasser 1977; H̃öll: Wasseruntersuchungen. Trink-, Brauch-, Schwimmbad- und Kesselspeisewasser 1943; Š̃ternglass: Secret fallout. Low-level radiation from Hiroshima to Three Miles 1981; Š̃trohm ed: Warum auch geringe Radioaktivität lebensgefährlih ist 1986; Wolf: Störfall 1987; P̃ausewang: Die Wolke 1987 fiktiver GAU in BRD, Film 2006; **Christa Wolf: Mangel an Angst ist lebensgefählich**, spectrum 20 1989 H10 p21; Walther, Brozynski, Dubchak: Tschernobyl (108km nördl. Kiew) - 30 Jahre danach PhysJ15 H3 2016 p31-37; **Zischka: Tschernobyl - kein Zufall. Sowjetwirtschaft und die Fehler des Westens** 1987 Kernkraftwerke statt Kernwaffen! Deutsche Führung desorientiert und Wähler ahnungslos; Steinhauser & Koizumi: **Fukushima** - 5 Jahre danach. PhysJ15 H3 2016 p39-43 Flutwelle bis 10km ins Landesinnere 15854 Tote + 3155 Vermisste. Weiss: Vorbereitung auf Katastrophenfall erforderlich! 1. Alte Menschen sterben eher an den Folgen der Evakuierung als am strahlenbedingten Krebsrisiko. 2. Es gibt bislang keine Lösung für den Dekontaminationsmüll. 3. Strahlungsgrenzwerte für Heimatrückkehrerlaubsnis sind unbekannt. 4. Ärzte haben nur mangelhaftes Fachwissen zu **Risiken ionisierender Strahlung**. 5. Die durch Unwissenheit bedingte Angst ist eine wesentliche Gefahr. 6. Westliche Gemeinschaften sind psychisch kaum belastbar. 1 Gray = $1\frac{Joule}{kg}$ = **Energiedosis**. Tschernobyl Liquidatoren 16 Gy! Fukushima 0.6 Sv. Schilddrüsenäquivalentdosis bei Evakuierten: Fukushima 5mSv, Tschernobyl 490mSv. **Äquivalentdosis:** 1 Sievert = $1\frac{Joule}{kg}$ = **gewichtete Strahlendosis**, Absorbtion radioaktiver Strahlung Energieabsorption. **Äquivalentdosis** Rem = rem = roentgen equivalent in man 1 rem = 0.01 Sv. 1 Joule = $6.242{\cdot}10^{18}$ eV. q-Qualitäts-Faktor nichtphysikalische Unterscheidung der Strahlenarten aus medizinischer Sicht: q(Röntgen, γ, β) =1, q(n, p) = 10, $q(^4_2\alpha, {}^2_1\text{D})$ = 20. α-Zerfall in Nebelkammer siehe YouTube cloudylabs.fr Pechblende = Pech, weil für totes Gestein gehalten, hat aber 730 μSv pro h! **Mittlere Quellen-Dosen** in μSv pro Jahr: **1. Kosmische Strahlung** 300. **2. Natürliche Radioaktivität:** Granit, Splitt 1450, Meerwasser 550, Leuchtziffer 400, 1 μCi bei Ra-Uhr bei 30 cm. **3. Interne Strahlung:** ^{40}K 190, ^{14}C 15, ^{226}Ra und Zerfallsprodukte des Trinkwassers 67. Ein Drittel der Strahlenbelastung aus Neubauten und Kohlekraftwerken. Grundgleichung für Strahlenschutz für Punktquelle im Abstand r nach einer Exposionszeit t, der Abschirmung der Dicke x, der Quellintensität A, der γ-Strahlenkonstante k_γ und der Geometrie der Messanordnung B

$$D(r,t,x) = B\,k_\gamma \frac{A\,t}{r^2}\,e^{-\mu\,x}$$

Herforth & Koch: Praktikum der Radioaktivität und der Radiochemie 1995; Rietzler & Kopitzki: Kernphysikalisches Praktikum 1963; Lindner: Kern- und Radiochemie 1961; Graewe: Atomphysik 1963; Kuhn: Atomphysik in der Schule 1966; Espe & Kuhn: Elementare Grundlagen der Kernphysik 1955; Braunbek: Grundbegriffe der Kernphysik 1958; Tibaud: Leben und Umwandlungen der Atome 1942; Schröder: Atomphysik in Versuchen 1959; Thomson: Das Atom 1955; Kunze: Kernphysik, In: Grimsehl: Lehrbuch der Physik Bd4 1968 p1-221; Fleischmann: Einführung in die Physik 1980; Münzinger: Atomkraft. Der Bau von Atomkraftwerken und seine Probleme 1957[2]; Ludwig & Gorbatschow: Der lange Schatten von **Tschernobyl April 1986** 2014; Naoto Kan: Als Premierminister während der **Fukushima**-Krise **März 2011** 2015; Pfalz: Fukushima PhysJ15 H3 2016 p44f; 15 EBq=$15{\cdot}10^{18}\text{s}^{-1} = 4{\cdot}10^8$ Ci, $^{133}_{54}$Xe 5d, β mit 0.427MeV = 2 mal Tschernobyl, 36 PBq = $36{\cdot}10^{15}\text{s}^{-1}$, $^{137}_{55}$Cs, 30a, β mit 0.512MeV 95% $^{137m}_{56}$Ba, dann γ mit 0.6617MeV oder zu 5% per β mit 1.174MeV = 0.4 Tschernobyl); Radioaktivität: Grundlagen - Messung - Anwendungen 1986, 2005[5]. Schuricht & Steuer: Praktikum der Strahlenschutzphysik 1983;

Flamm: Neuere Modelle der Elementarteilchenphysik, PhysBl28 1972 p161ff; Elementarteilchenphysik In: Praxis der Naturwissenschaften, Physik in der Schule 51 2002 H4; Grehn et al.: Vieweg Physik für den kursorientierten Unterricht in der gymnasialen Oberstufe Teil 6. Kernphysik Elementarteilchenphysik 1979; Lohrmann: Einführung in die Elementarteilchenphysik 1990; Hossenfelder: Das hässliche Universum. Warum unsere Suche nach Schönheit die Physik in die Sackgasse führt 2018; B̃rachner & Fichtner: Elementarteilchenphysik für Lehrer und Studenten 197?; Sibold: Theorie der Elementarteilchen; **K̃obzarev & Manin: Elementary particles. Mathematics, physics and philosophy** 1989; Ausgangspunkt sollten nicht die durch den strukturellen Realismus gedeckten denkökonomischen und prosaischen Begriffe der modernen Teilchenphysik sein, sondern die klassischen Experimente mit Gasententladungsröhren von Hittorf, Goldstein 1850-1930, i Lenard 1862-1947, Crookes 1832-1919, mit Schwärzungen von Fotoemulsionen von Becquerel und Elektrometer-Entladungen der Curies. Lies dazu die kernphysikalischen Schriften von Hertz, Braunbek, Kuhn, Schröder und Melcher. Statistik und kernphysikalische Laborpraktika bereits im Schulunterricht. Genz: Elementarteilchen 2003; Close: Particle Physics. A Very Short Introduction 2004; Gouiran: Elementarteilchen und Beschleuniger 1967; Feld: Models of elementary particles 1969; Muchin: Unterhaltsame Kernphysik 1972 Konstantin N Mukhin 1918-? Energie aus Masse klingt zu magisch. Thermische Neutronen schalten die Kernkraft aus und lassen die elektrostatische Energie von der Leine. Urankernkomplettauflösung bringt bei spontaner Freisetzung aller Protonen von Uran also $Q = 92$e und $R = 10^{-15}$m = 1fm etwa $W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \approx 10^{-9}$ Ws = 2 GeV. Kurtschatow-Institut 1943-1998 bis 1955 geheime Forschung = Kernwaffen und Kernreaktoren = Labor Nr. 2, dann Russische Akademie der Wissenschaften; Matthes: Elemente, Atom, Isotope 1957; Ujemow, Drujanow & Rosental: Was die Welt zusammenhält, Passat Bd 21 1960; Wick: Elementarteilchen 1974; Asimov: Vom Kosmos zum Chaos - Eine Reise durch die Welt der Elementarteilchen = Atom 1993; Asimov: Drehmomente, verblüffende Aspekte der modernen Forschung 1975 = The left hand of the electron 1972; Waloschek: Besuch im Teilchenzoo 1996; Futscher: Elementarteilchen PhysBl5 1949 p258-267; In Abhängigkeit von der Anregungsenergie metastabile Teilchen/Identitäten, deren Metomorphose oder Identitätsverlust durch Symmetrien in Schach gehalten wird. Atom/Teilchenidee wird durch **Symmetrie-regierte Verwandlungskunst** ersetzt, die auf Anzahlen von Dingen/Einheiten/Identitäten keine Rücksicht nimmt. **Lindner: Bild der modernen Physik** 1973; xcv Nowoshilow: Elementarteilchen - kleinste Bausteine der Natur 1959, 1962; Görne, Jäckel, Schramm: Kleines ABC der Kernphysik und Kerntechnik 1960; Frackowiak: Isotope in Forschung und Produktion 1960; Birjukow, Lebedenko, Ryshow: Das Vereinigte Institut für Kernforschung in Dubna 1960; Lawruchina & Solotow: Die Transurane 1961; Mjakischew: Was sind Elementarteilchen? 1968, 1971; Genz: Wie die Naturgesetze Wirklichkeit schaffen. Über Physik und Realität 2002; Genz: War es ein Gott? Zufall, Notwendigkeit und Kreativität in der Entwicklung des Universums 2008; Hilscher: Elementarteilchen 1980 im Schulunterricht? Besser kernphysikalische Schulversuche, Elektrometer und gebasteltem Geigerzähler und Statistik! Strahlenschutz, Radiologie und medizinische Anwendungen Lies lieber **Melcher: Kernphysik. Nachweis- und Messmethoden**. Eigenschaften, Wirkungen und Anwendungen der Strahlenarten. Radiochemie. Dosimetrie und Strahlenschutz p93-393. In: Friedrich: Handbuch der experimentellen Schulphysik mit **Nuklid-Karte** 1969; Schopper: Die photographische Platte als Messinstrument der Kernphysik, PhysBl6 1959 p112-122; Gläser: Was ist Radiographie? 1971 G. Sauer, W. Müller, E. Gerth; Schuricht & Steuer: Praktikum der Strahlenschutzphysik 1983; **Braunbek: Korpuskularstrahlen in Forschung und Praxis** 1952 p13 Julius Plücker 1801-1868 Liniengeometrie, Vakuumtechnik. Heinrich Geißler-Röhre 1856 0.01mmHg 1814-1879 Glasbläser, Hittorf 1824-1914 elektrostatische Elektronenstrahlablenkung. Lorentz-Kraft $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Strahlablenkung 1876 durch Eugen Goldstein 1850-1930 Frau 1943 Theresienstadt, Kathodenstrahlen = Elektronenstrahlen zeigen magnet Ablenkbarkeit. Kanalstrahlen = positive Ionen = Atomstrahlen Dunoyer 1880-1963 Molekülstrahlen 1911; Ramsauer: Eugen Goldstein, ein extremer Experimentator PhysBl 10 1954 543-548; **Braunbek & Röttel: Forscher an den Wurzeln des Seins.** Die abenteuerliche Welt der Elementarteilchen 1981; Sokolow: Elementarteilchen 1965, 1968; **Lanius: Physik der Elementarteilchen** 1981; Okun: Particle Physics 1982; Okun: Physik der Elementarteilchen 1989; Close, Marten, Sutton: Spurensuche im Teilchenzoo, die

elementaren Bausteine der Materie 1989; C̃lose, Marten, Sutton: The particle odyssey. A journey to the heart of matter 1987, 2002; Waloschek: Neuere Teilchenphysik, einfach dargestellt 1991; Fritzsch: Elementarteilchen 2004; Süßmann & Fiebiger: Atome, Kerne, Elementarteilchen 1966; Drell: When is a particle? Physics today 1978 H6 p23-32; Witten: Quarks, atoms, and the 1/N expansion, Physics today 1980 H7 p38-43; Frampton & Kim: History of particle theory. Between Darwin and Shakespeare 2020; **Pais: Inward bound of matter and forces in the physical world** 1986 Geschichte der Teilchenphysik von 1896 bis 1983; Groom et al.: **Review of particle physics.** The European Physical Journal C15 **2000** p1-878 Teilchen und deren Merkmale. PSE. Konstanten. Elektrodynamik. **Schopper: Zur Gültigkeit der Elektrodynamik und QED**, PhysBl 29 1973 p106-125; Hadronenschema. **Standard-Modell**: QCD, Elektroschwache WW. Quark-Modell. **Kosmologie**. Statistik und Gruppen-Tabellen: Clebsch-Gordan, SU(3), SU(n). Kinematik. Teilchentabellen. SUSY; Experimenteller Befund von Teilchenverwandlungen = Anzahl und Art sind nicht invariant, relativistische Energie und Symmetrien helfen bei der Analyse siehe **Bethe & Hoffmann: Mesons and fields. VolII Mesons** 1955 Synchozyklotron liefert schnelle Protonen ${}^1_1$p auf Be-Target was π^- gibt, das auf H_2-Target geht und dort Pionen-Umladung oder -Einfang generiert: $\pi^-+{}^1_1\text{p}\rightarrow {}^1_0\text{n}+\pi^0$ oder $\pi^-+{}^1_1\text{p}\rightarrow {}^1_0\text{n}+{}^0_0\gamma$ oder $\pi^-+{}^2_1\text{d}\rightarrow 2\ {}^1_0\text{n}+{}^0_0\gamma$. Weitere Zerfälle $\pi^++{}^2_1\text{d}\leftrightarrow 2{}^1_1\text{p}$ und $\pi^0\rightarrow 2{}^0_0\gamma$ oder $\pi^0\rightarrow {}^0_0\text{e}^++{}^0_0\text{e}^-+{}^0_0\gamma$ per Paarbildungsspektrometer sieht man Positron und Elektron siehe H̃anson: The Concept of the Positron. A Philosophical Analysis 1963; Hanson: Patterns of Discovery. An Inquiry into the Conceptual Foundations of Science 1958 Einstein: Physikalische Konzepte sind nicht induktiv zu gewinnen.; Frazer: Elementary particles 1966; Jackson: Physics of Elementary Particles 1958; **Musiol, Ranft, Reif, Seeliger: Kern- und Elementarteilchenphysik** 1989, 1995[2] p209; Masse Myon = m_μ = 207 m_e=106 MeV und Masse Pion = m_π = 270 m_e=135 MeV. $\pi^+\rightarrow\mu^++\nu_\mu$ und $\pi^-\rightarrow\mu^-+\bar{\nu}_\mu$. Yukawa postuliert 1935 Meson als Kernkraftteilchen, 1937 Myon in Höhenstrahlung, 1947 Pion in Höhenstrahlung. P̃auli: Meson theory of nuclear forces 1946; Höcker: Mesonen und Kernkräfte, PhysBl6 1950 p51-55; Marshak: Meson physics 1954; Fermi: Elementary particles 1951; **Geschichte der Teilchenphysik:** Mukhin: Experimental nuclear physics Bd2 = Elementary particles 1974, 1987 p137ff Phase1 bis 1932 γ, e^-, p, n, e^+, ν. Phase2 ab 1935 Suche des Kernkraftteilchens. Phase3 1949-1964 Seltsame Teilchen, Paritätsverletzung bei schwacher WW Antinukleonen $\bar{p},\bar{\nu}_e,\bar{\nu}_m u$, Resonanzen. p210 π-Mesonen. Kursunoglu & Permutter: Gauge Theories, Massive Neutrinos and Proton Decay 1981; P̃erlmutter, Hurst, Kursunoglu: Symmetry Principles at High Energy. Fifth Coral Gables Conference, January 24-26, 1968, Center for Theoretical Studies, University of Miami 1968; Adair & Fowler: Strange particles 1966; **Macke: Kernmodelle und ihre physikalische Bedeutung**, PhysBl13 1957 p538-550; Süßmann & Fiebiger: Atome, Kerne, Elementarteilchen . Umschausammlung 1968 p45-73 **Kernmodelle**: Tröpfchenmodell = Kerntropfen aus zwei Landau-Fermi-Fluiden Neutronen/Protonen Heisenberg, v. Weizsäcker und Bethe 1939 p66, Schalenmodell statt Zentralkraft Spin-Bahn-Kraft analog Elektronenhülle Fermi & Goeppert-Mayer 1949, Paarkraftmodell vorige Modelle + Cooper-Paar-Bindung, Substrukturenmodell Kern aus α-Teilchen-Clustern/Kristallen, optischen Modell mit komplexem Brechungsindex der Kernmaterie (Realteil = Brechung, Imaginärteil = Absorption von Teilchen durch Kernmaterie), statistisches Modell; **Lindner: Grundriss der Atom- und Kernphysik** 1957, 1972[10] Pose: Einführung in die Physik des Atomkerns 1971; Kleffe: Als das Atom in Stücke sprang 1976[2]; Riezler: Einführung in die Kernphysik 1939[1], 1944[3], 1959[6]; Riezler & Walcher: Kerntechnik 1958; Preston: Physics of the nucleus 1965; Wohlfarth: 40 Jahre Kernspaltung. Einführung in die Originalliteratur 1979 Fermi, Noddack, Hahn, Straßmann, Meitner, Frisch, Feenberg, McMillan, Frenkel, Kowarski, Flügge: Kann der Energieinhalt der Atomkerne technisch nutzbar gemacht werden? Die Naturwissenschaften 27 (1939) 402-410 oder Deutsche Allgemeine Zeitung vom 15.8.1939, Bohr, Wheeler, Abelson, Flerow, Petraschk, Frankel, Metropolis, Goeppert-Mayer; Frenkel: Prinzipien der Theorie der Atomkerne 1955[2]; Nachtmann: Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik 1992; de Broglie: Die Elementarteilchen. Individualität und Wechselwirkung 1944; de Broglie: Einführung in die Theorie der Elementarteilchen von Jeah-Pierre Vigier und Mitarbeitern 1961 1965; Lemmer: Bis(s) ins Innere des Protons. Ein Science Slam durch die Welt der Elementarteilchen, der Beschleuniger und Supernerds 2013; **Katz: Enumerative geometry and string theory** 2006; Bleck-Neuhaus: Elementare Teilchen: Von den Atomen über das Standard-Modell bis zum Higgs-Boson 2013[2]; Wetterich: Quantengravitation und Higgsteilchen, PJ18 2019 H8/9 p67-71; **Rowlatt:**

Group theory and elementary particles 1966; **Costa & Fogli: Symmetries and Group Theory in Particle Physics. An Introduction to Space-Time and Internal Symmetries** = LNP823 2012 pdf; Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel 2014 p39; Borodulin: CORE Compemdum of relations arxiv ihep 95-90 1995 Standard-Lagrangian; Donoghue: Dynamics of the Standard Model 1994; **Kurt Sundermeyer: Symmetries in Fundamental Physics** 2014; **Heisenbergs 'Weltformel'** PhysBl14 1958 p238f und p241-245; **Weltformel bei Standard-Modell:** $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi + h.c. + \bar{\psi}_i Y_{ij}\psi_j\phi + h.c. + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi)$ mit CKM-Cabbibo-Koboyashi-Maskawa-Matrix Y_{ij}, Fermionenfeld ψ und Higgsfeld ϕ. Review of particle physics PhysRevD54 1996; Wechselwirkung zwischen Fermionenfeld ψ und Higgsfeld ϕ geht $\mathcal{L}_{\text{Fermion}}(\phi, A, \psi) = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - G_\psi\overline{\psi}\phi\psi$ Idee: Die Lagrange-Dichte des Higgs-Feldes ϕ, mit der (direkt sichtbaren) Selbstwechselwirkung und der (nur indirekt sichtbaren, weil nur in den D-Operatoren enthaltenen) Kopplung an Eichfelder A, die teilweise durch die Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld zu massiven Austauschteilchen werden, lautet: $\mathcal{L}_{\text{Higgs}}(\phi, A) = (\hat{D}_\sigma\phi)^\dagger(\hat{D}^\sigma\phi) + \mu\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$. Dabei sind μ und λ positive reelle Zahlen und $\hat{D}_\sigma = \partial_\sigma - ig\hat{T}_a A^a_\sigma$ die eichkovariante Ableitung, wobei die $\hat{T}_a$ die Generatoren der Eichgruppe sind und die komplexen Funktionen A^a_σ die Eichfelder. Higgs-Potential $\mathcal{V}$. Für feste Werte von μ und λ ist diese Größe über dem Real- und Imaginärteil von ϕ nach oben aufgetragen. Sektflaschen-Profil am Boden des Potentials. An dieser Lagrange-Dichte ist noch nicht erkennbar, wie die Massen der Eichfelder zustande kommen. Dazu ist eine gesonderte Betrachtung des Potentials des Higgs-Feldes $\mathcal{V}$ hilfreich: $\mathcal{V} = -\mu\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$. Für ein reelles Feld ϕ mit nur einer Komponente würde das Potential eine w-förmige Parabel vierter Ordnung beschreiben. Da ϕ jedoch in allen Anwendungen komplex ist, kann man sich $\mathcal{V}$ dreidimensional als Rotationsfigur dieser Parabel vorstellen. S(Higgs)=0, S(Photon,Gluon,W/Z-Boson)=1, S(Graviton)=2?. **Standard-Modell des Kosmos und der Teilchen**, SdW Sep 2013 p60-70; Wetterich: Quantengravitation und Higgsteilchen, PJ18 2019 H8/9 p67-71; Dominguez-Tenreiro & Quiros: An introduction to cosmology and particle physics 1988; **Linde: The Universe, inflation out of chaos**, New Scientist 7.3.1985 Nr1446 p14-18; Börner & Straumann: Das Modell des inflationären Universums, PhysBl41 1985 H6 p146-151; Linde: Elementarteilchen und inflationäre Kosmologie. Zur gegenwärtigen Theorienbildung 1993; Guth: Die Geburt des Kosmos aus dem Nichts 1999; Guth & Steinhardt: The inflationary Universe SciAm Mai 1984 p90-102 = SdW H7 1984 p13, 80-94, p134; Barrow & Silk: Die Struktur des Universums, SdW H6 1980 p78-89; Silk: Der Urknall 1990; Cornell, Lightman, Geller, Guth, Gunn: Die neue Kosmologie. Von Dunkelmaterie, GUT und Superhaufen 1989; Greenstein: Die zweite Sonne. Quantenmechanik, Rote Riesen und die Gesetze des Kosmos 1988; Silk: Die Geschichte des Kosmos 1994; Pagels: The cosmic code. Quantum physics as the language of the universe 1984; Pagels: Die Zeit vor der Zeit. Das Universum bis zum Urknall 1990; Pagels: Perfect Symmetry. The Search for the Beginning of Time 1992; Saller: Vereinheitlichte Feldtheorien der Elementarteilchen: Eine Einführung, LNP223 1985; C̃ottingham & Greenwood: An introduction to the standard model of particle physics 1998; **Berger: Elementarteilchenphysik: Von den Grundlagen zu den Modernen Experimenten** 2006[2]; http://mozart. physik. rwth-aachen. de/Buchneu/Uebung. html; Schweber: Nuclear Forces. The Making of Physicist Hans Bethe 2012; **J̃eremy Bernstein: Prophet der Energie. Hans Bethe** 1988; Jeremy Bernstein: Cranks, Quarks, and the Cosmos. Writings on Science 1991; Gell-Mann & Neeman: The eightfold way 1964; Neeman & Kirsh: Die Teilchenjäger 1995; **Bernstein: Erlebte Wissenschaft. Berühmten Forschern über die Schulter geschaut** 1978 Kepler, **Rabi**, Lyssenko, Rosalind Franklin, von Neumann, Gödel, p8 zur Brillanz und Verständlichkeit eines Vortrags **Bohr'scher Rabbi**, Mittelbau p88ff; Bethe: **The Road from Los Alamos: Collected Essays of Hans A. Bethe** 1991; The Charm of Physics: Collected Essays of Sheldon Glashow 1991; Tachyonen, Photonen, Gluonen, Gravitonen sind überall und gehen durch Branen, $m(\nu_e) < 3$eV, $m(\nu_\mu) < 0.17$ MeV, m_e=0.511 MeV macht chemische Bindungen, m_d= 5 MeV (338 MeV = in Bindung), $Q_d = -1/3$, m_u= 10 MeV (322 MeV), $Q_u = 2/3$, $m(\nu_\tau) < 18$ MeV, m_s= 100 MeV, m_μ=105.6 MeV, m_p= 938.3 MeV, ${}^1_1$H, ${}^2_1$D, ${}^3_1$T, Neutron: 3 Valenz-Quarks, n=ddu→p=(duu). SdW2016 Juli; Kedrow: Das Neutron 1975, 1979; Tempelhoff: Neutronenstreuung WiFo22 1972 H10 p450; Hughes: Über die Kernenergie. Die Möglichkeiten ihrer friedlichen Anwendung 1959; Hughes: Neutron optics 1954; Masahiko Utsuro: Handbook of Neutron Optics 2013; Kokkedee: The quark model 1969; Tschernogorowa: Geheimnisse der Mikrowelt 1976 Quarks; Quarksee & Gluonen gemäß Constituent-Quark-Modell m_n= 939.6

MeV. Chaichian & Tureanu: **From the Cosmos to Quarks. Basic Concepts in Physics** (Undergraduate Lecture Notes in Physics) 2013; **Zwei Masse-Begriffe**: Higgs macht Elementarteilchenmasse und Quark-Bindungsenergie macht gemäß $E = mc^2$ den dominanten Massenanteil aus. **Massendefekt** Herrmann: Altlasten der Physik (126): Der Massendefekt PdNPiS Bd60 2011 H1 p49; Higgsteilchen ist also nicht für die phänomenologische Masse verantwortlich. SdW Okt 2012 p62-66 Bethke. Smith: SdW März 2011 p40, m_{charme}= 1.6 GeV, m_τ= 1.777 GeV, m_{bottom}= 4.7 GeV, m_W= 80.4 GeV (80 Protonenmassen, Lebensdauer 10^{-25}s, Reichweite 10^{-18}m), m_Z= 91.19 GeV, **Higgs** m_X= 126? GeV mit Spin 0 oder 2, was 2012 noch nicht klar ist, m_{top}= 177 GeV. http://www.particlezoo.net/ **Lebensdauer des Elektrons** PhysBl22 1966 p321; **Abraham Pais: Developments in the theory of the electron** 1948; Lorentz: The theory of electrons 1909, 1916 p213ff; Becker & Sauter: Theorie der Elektrizität Bd2 1959 Klassisches Atommodell p18ff; Iwanenko & Sokolow: Klassische Feldtheorie 1952; von Laue: Geschichte des Elektrons, PhysBl15 1959 105-111; Rohrlich: Self-energy and stability of the classical electron, AmJPhys28 1960 639-643; Rohrlich: Das klassische Elektron, In Brittin, Downs & Dunham eds: **Lectures in Theoretical Physics** Colorado Bd2 1959 p240-268; Rohrlich: Classical charged particles 1965; C̃lemmow & Dougherty: Electrodynamics of particles and plasmas 1969; Clemmow: An Introduction to Electromagnetic Theory 2010; **Jauch & Rohrlich: The Theory of Photons and Electrons**. The Relativistic Quantum Field Theory of Charged Particles with Spin One-Half 1955[2]; Rohrlich: Nichtlokale Natur der elektromagnetischen Wechselwirkung, In: **Enz & Mehra: Physical Reality and Mathematical Description** 1974 p387-402; Barut: Electrodynamics and classical theory of fields and particles 1964; Stöckel: Ergänzungen und Aufgaben zur speziellen Relativitätstheorie Bd2 §15-31 1969; Stöckel: Full Poincare-invariant equation of motion for an extended charged particle in an electromagnetic field https://arxiv.org/pdf/math-ph/0702015.pdf; Das **Elektron** umgebende elektr Feld trägt ∞ viel Energie oder **Selbstenergie**

$$\mathcal{E}(a) = \int_a^\infty \mathrm{d}V u(r) = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \quad \text{wegen } u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \quad \text{und } \mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r.$$

Iwanenko & Sokolow: Klassische Feldtheorie 1948, 1960 p134; Schmüser: Theoret Physik Lehramt 2. Elektrodynamik 2013 p65ff; Feynman: Bd2 Kap28; Landau & Lifschitz: Klassische Feldtheorie, §37 ff; **Punktförmigkeit und klassische Elektrodynamik** stehen im Widerspruch. Feynman: QED 1999[4]; **Nichtpunktförmigkeit und klassische Elektrodynamik, die der SRT genügt** ebenfalls. Wie ändert sich Energie des Elektrons bei Bewegung? Es wird selbst bei Masselosigkeit den Feldimpuls tragen. Träge **Masse** könnte elektromagnet Natur sein. JJ Thomson 1881: **Das Elektromagnetische Feld selbst ist schon der Ursprung der Masse.** Berechne das magnetische Feld, das durch eine sich bewegende, geladene Kugel erzeugt wird. Dieses Feld verursacht wiederum eine Masse innerhalb der Kugel. Dieser Effekt ist analog zu dem, was passiert, wenn man einen Strandball zu Boden fallen lässt. Die Anziehungskraft zieht den Ball nach unten, während die Auftriebskraft und der Luftwiderstand den Fall des Balles behindern. Aber das ist noch nicht alles. Unabhängig vom Widerstand muss der Ball die Luft beiseiteschieben, damit er fallen kann - und diese Luft besitzt Masse. Diese effektive Masse des fallenden Strandballs ist dadurch größer als dessen Masse in Ruhe. Thomson erkannte, dass sich das Feld der Kugel wie die Luft vor dem Ball verhalten müsste. In seinem Fall entsprach die effektive Masse der Kugel vollständig der Masse, die durch das magnetische Feld erzeugt wurde. Oliver Heaviside 1889: effektive Masse $m = \frac{4}{3}\frac{E}{c^2}$, wobei E die Energie des elektrischen Feldes der Kugel. Wilhelm Wien und Max Abraham: elektromagnetische Masse des klassischen Elektrons = kleine geladene Kugel. Da die elektromagnetische Masse ein geladenes, sich bewegendes Objekt voraussetzt, ist die Gleichung nicht auf jede beliebige Materie anwendbar. Poynting 1884 Theorem zur Energieerhaltung für elektromagnetische Felder. Erhaltungsgesetze auf Masse plus Energie auszuweiten! Poincaré 1900: Wird verlangt, dass der Impuls eines vorhandenen Partikels in einem elektromagnetischen Feld sowie der Impuls des Feldes selbst gemeinsam erhalten werden sollen, dann ergibt sich aus dem die Energiebilanz in der Elektrodynamik beschreibenden Poynting-Theorem, dass sich das Feld wie eine Quasi-Flüssigkeit verhält, wobei die Masse $E = mc^2$ entspricht. Poincaré war jedoch nicht in der Lage, Energie und Masse irgendeines realen Körpers miteinander in Verbindung zu setzen. Hasenöhrl 1904: Zur Theorie der Strahlung in bewegten Körpern. perfekt reflektierenden, zylindrischen

Hohlraum, an dessen Enden zwei Platten als Heizkörper dienten. Wurden diese angeschaltet, erzeugten sie in dem Hohlraum eine enorme Wärme – in der Physik Schwarzkörperstrahlung genannt. Auf diese Situation angewendet, besagt Newtons drittes Gesetz: Für jede Aktion gibt es eine gleich große, aber entgegen gerichtete Reaktion!, dass alle von den Heizflächen freigesetzten Photonen eine Reaktionskraft gegen die Heizflächen selbst ausüben müssen. Um Letztere am Ort zu halten, muss eine Kraft von außen auf sie einwirken; wir stellen uns vor, dass diese externen Kräfte die Platten am Zylinder halten. Weil aber identische Photonen von beiden Enden emittiert werden, sind die Kräfte gleich groß, zumindest für jemanden, der die Vorgänge von innerhalb des Hohlraums betrachtet. Hasenöhrl fragte als nächstes, was wohl passiert, wenn sich das ganze System mit gleichbleibender Geschwindigkeit relativ zu einem Beobachter im Labor bewegt. Aus der Grundlagenphysik ist bekannt, dass sich emittiertes Licht, dessen Quelle sich auf den Betrachter zubewegt, in Richtung des blauen Spektralbereichs verschiebt. Eine Verschiebung ins Rote entdeckt der Beobachter, wenn sich die Quelle von ihm wegbewegt: die sogenannte Doppler-Verschiebung. Photonen von einem Plattenende werden daher dem Beobachter eher blau, die vom anderen Ende eher rot erscheinen. Blaue Photonen besitzen einen höheren Impuls als rote, so dass die zwei externen Kräfte verschieden sein müssen, wenn der Hohlraum sich weiter mit konstanter Geschwindigkeit bewegen soll. Der Unterschied in der Arbeit, der durch die Kräfte der kinetischen Energie des Hohlraums erzeugt wird, kann durch eine einfache Anwendung des Arbeit-Energie-Theorems ausgeglichen werden. Sie erlaubte es Hasenöhrl zu folgern, dass die Schwarzkörperstrahlung eine Masse $m = (8/3)E/c^2$ besitzt. In seiner zweiten Abhandlung betrachtete Hasenöhrl eine langsame Beschleunigung eines Hohlraums, der bereits mit Strahlung gefüllt ist – und kam zum gleichen Ergebnis. Nach einer Bemerkung Abrahams entdeckte er jedoch einen Rechenfehler und korrigierte in seiner dritten Veröffentlichung beide Ergebnisse zu $m = (4/3)E/c^2$.

Indem er die Masse in Wärme als gegeben annahm, erweiterte Hasenöhrl seine vorangegangenen Überlegungen über das elektromagnetische Feld von geladenen Objekten hinaus zu einem allgemeineren Gedankenexperiment, das sehr ähnlich zu Einsteins Betrachtungen des folgenden Jahres war, aus denen $E = mc^2$ hervorging. Natürlich schrieb Hasenöhrl die Aufsätze, bevor die Relativitätstheorie formuliert wurde, so dass ein falsches Ergebnis verständlich scheint. Doch so einfach ist die Sache nicht. Zusammen mit dem Astronomen Stephen Boughn habe ich Hasenöhrls Trilogie sorgfältig analysiert und festgestellt, dass die übliche Behauptung, *er habe vergessen zu berücksichtigen, dass die Kräfte der Hülle selbst die Endplatten festhalten*, gar nicht das Problem ist. Der größte Fehler bei Hasenöhrls erstem Gedankenexperiment war ein anderer: Er erkannte nicht, dass die Endscheiben Masse verlieren, wenn sie Wärme emittieren. Er hat also ironischerweise genau das übersehen, was zum Äquivalent von Masse und Energie führt – welches er bekanntlich nachweisen wollte. Immerhin waren Hasenöhrls Betrachtungen so grundlegend, dass Max Planck im Jahr 1909 erklärte, dass **Schwarzkörperstrahlung Massenträgheit besitzt und dass Hasenöhrl als erster darauf hingewiesen hat**. Schwarzkörperstrahlung, also Wärme, besitzt Masse.

Mehr noch überrascht, dass Hasenöhrls Überlegungen in seinem zweiten Gedankenexperiment – in dem der Hohlraum bereits mit Strahlung gefüllt ist und die Endflächen nicht strahlen – offensichtlich gar nicht falsch sind, selbst bei Anwendung der Relativitätstheorie. Einsteins berühmte Veröffentlichung zu $E = mc^2$ aus dem Jahr 1905 trägt den Titel Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig? Die Abhandlung betrachtet lediglich einen einzelnen Partikel, der einen Ladungsimpuls an Strahlung emittiert und fragt ähnlich wie Hasenöhrl, wie das System von einem sich bewegenden Bezugssystem betrachtet aussehen würde. Hasenöhrls Überlegungen zu einem Hohlraum mit endlicher Länge waren gewagter oder vielleicht unbesonnener. Erweiterte Körper haben der speziellen Relativitätstheorie großes Kopfzerbrechen bereitet, wie auch die Tatsache, dass die Masse eines klassischen Elektrons ebenfalls $m = (4/3)E/c^2$ entspricht. Bei Anwendung korrekter Mathematik im Sinne der Relativitätstheorie ist das ein Ergebnis, das den üblicherweise erwarteten und bevorzugten Antworten primär einmal widerspricht. Noch heute werden Diskussionen darüber geführt, wie dieses Problem vernünftig gelöst werden könnte. Kannte Einstein Hasenöhrls Arbeiten?

Einstein als Erster $E = mc^2$ korrekt formuliert, nicht tatsächlich bewiesen, zumindest hinsichtlich seiner eigenen speziellen Relativitätstheorie. Einstein wendete anfangs die relativistischen Beziehungen (das heißt die relativistische Doppler-Verschiebung) an, die er einige Monate zuvor abgeleitet hatte. Letztendlich aber vereinfachte er den relativistischen Teil und kam damit zu einem Ergebnis, das man auch mit reiner klassi-

scher Physik erhält. Das Ergebnis kann, muss aber nicht bei höheren Geschwindigkeiten gültig sein, wo die Relativität ins Spiel käme. Auch wenn Einstein behauptete, seine Schlussfolgerungen hätten für alle Körper und alle Formen der Energie Gültigkeit, so machte er doch keinen Versuch in Richtung Beweis. Ihm war die Schwäche seiner Herleitung bewusst, und er schrieb in den nächsten 40 Jahren ein halbes Dutzend weiterer Aufsätze; doch das Problem zu lösen gelang ihm nicht. Nichtsdestotrotz haben uns inzwischen zahllose Experimente von der Richtigkeit seiner Ergebnisse überzeugt. 1. Solvay-Konferenz 1911 zeigt Hasenöhrl und Einstein. Einstein: Masse eines Objektes ist gleich seinem gesamten Energiegehalt, die Bewegung des Objektes und das Vorhandensein eines elektromagnetischen Feldes seien dahingestellt. **Hasenöhrl: Wärme selbst besitzt eine äquivalente Masse!**

Heber & Weber: Grundlagen der modernen Quantenphysik Teil2 Quantenfeldtheorie 1957, 1963; Bjorken & Drell: Relativistische Quantenfeldtheorie 1967; Moriyasu: An Elementary Primer for Gauge Theory 1982; Aitchison: An informal introduction to gauge field theories 1982; **C̃hang Hong-Mo & Tsou Sheung Tsun: Some elementary gauge theory concepts** 1993; Schwichtenberg: Physics from Finance. A gentle introduction to gauge theories, fundamental interactions and **fiber bundles** 2017; Pokorski: Gauge Field Theories 1987; M̃arathe: The mathematical foundations of gauge theories 1992; **Healey: Gauging What's Real. The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories** 2007; **Faddeev & Slavnov: Gauge Fields. An Introduction To Quantum Theory** 1980; **Taylor: Gauge theories of weak interactions** 1976; Georgi: Weak Interactions and Modern Particle Theory 1984; **O'Raifeartaigh: Group structure of gauge theories** 1987; **Chaichian & Nelipa: Introduction to Gauge Field Theories** 1984; Ebert: Eichtheorien 1989; **Kugo: Eichtheorie** 1997; **Bethge & Schröder: Elementarteilchen und ihre WW** 1986, 2006; Cheng & Li: Gauge Theory of Elementary Particle Physics 1984, 1995; Cheng & Li: Gauge Theory of Elementary Particle Physics. Problems and Solutions 2008; Fritzsch: Vom Urknall zum Zerfall. Die Welt zwischen Anfang und Ende 1987[3]; Gribbin: Die erste Genesis. Gott, die Zeit und der Urknall 1995 p403 ff; Tschernogorowa: Geheimnisse der Mikrowelt 1976 Quarks; F̃ritzsch & Gell-Mann: 50 years of quarks 2015; Fritzsch: Mikrokosmos: Die Welt der kleinsten Teilchen 2013; F̃ritzsch: You are wrong, Mr. Einstein. Newton, Einstein, Heisenberg and Feynman discussing quantum mechanics 2011; Fritzsch: Quarks. Urstoff unserer Welt 2001; McCormmach: Nachtgedanken eines klassischen Physikers 1982 Drude; F Brandt: Ergänzungen zur klassischen Physik. Symmetrien fbrandt/erggaenz.html **H̃enneaux & Teitelboim: Quantization of gauge systems** 1992; **Mosel: Fields, Symmetries and Quarks** 1989, 1999; Yndurain: Quantum Chromodynamics. An Introduction to the Theory of Quarks and Gluons 1983; spätere Auflage The Theory of Quark and Gluon Interactions 2006[4]; Treder, Heisenberg, Gell-Mann, Lanius; Fritzsch: Gell-Mann, In: Meyenn: Die großen Physiker, Bd2 p409ff; Fritzsch: Elementarteilchen. Bausteine der Materie 2004; Ranft: Elementarteilchen 1 & 2 1976, 1977; G̃upta: Quantum electrodynamics 1977; Källen: Quantum electrodynamics 1972; Ranft: Zur Entdeckung neuer schwerer Teilchen, ein indirekter Hinweis für den Aufbau der Elementarteilchen aus Konstituenten. Treder: Zur physikalischen Bedeutung einer Quantlung der Gravitation 1977 = UB Potsdam; Johannes Ranft: Bausteine des Universums. Quarks und Leptonen 1990; **Zee: Unity of Forces in the Universe** B̃d1, Bd2 1982, 1985 Einführung und Sammlung der Origonalarbeiten; Lohrmann: Hochenergiephysik 2005[5]; Becher, Böhm, Joos: **Eichtheorien** der starken und elektroschwachen Wechselwirkung 1983[2], Böhm, Denner, Joos: Gauge theories of the strong and electroweak interaction 2001[3]; **Peskin & Schroeder: An introduction to quantum field theory** 1995, 2005; **Klapdor-Kleingrothaus & Zuber: Teilchenastrophysik** 1997; Perkins: Particle astrophysics 2011; Perkins: Introduction to High Energy Physics 1972; Müller: **Astroteilchenphysik** - Physik und Chemie PdNPiS Bd59 2010 H8 p42-48; Phänomenologisches Quark-Potenzial,

fm=10^{-15} m,

$$V(r) = \left[-\frac{0.4}{r} + r\right] \frac{\text{GeV}}{\text{fm}}$$

r=linspace(0.03,1,100);plot(r,r-0.4/r,r,-0.4/r,r,0*r);show() Sudarshan & Marshak: Introduction to elementary particles 1961; Marshak & Sudarshan: Einführung in die Physik der Elementarteilchen 1964; Frisch: Die Elementarteilchen der Physik 1963; Weinberg: Traum von der Einheit des Universums 1995 Allez en avant et la foi vous viendra. Dosch: Teilchen, Felder, Symmetrien 1984; Greiner & Wolschin: Elementare Materie, Vakuum, Felder 1994[2]; Weinberg: Teile des Unteilbaren. Entdeckunen im Atom 1983; Hamilton: The Theory of Elementary Particles 1959; Lichtenberg: Unitary symmetry and elementary particles 1978; Dyson: Symmetry Groups in Nuclear and Particle Physics 1966; Gasiorowicz: Elementarteilchenphysik 1966, 1975; Gourdin: Unitary symmetries and their application to high energy physics 1967; Sakurai: Invariance Principles and Elementary Particles 1964; Sakurai: Currents and Mesons 1969; Thorndike: Meson 1952; J̃affe & Taubes: Vortices and monopoles 1980; Commins & Bucksbaum: Weak Interactions of Leptons and Quarks 1973; Mohapatra: Gauge theories of fundamental interactions: Selected papers 1983; Masiero, Nanopoulos, Olive, Kounnas: Grand unification with and without supersymmetry and cosmology implications 1985; **Kane: Modern elementary particle physics** 1987, 1993 Standard-Modell; Marshak, Raizuddin, Ryan: Theory of weak interactions in particle physics 1969; **Joos: Elementarteilchen**, PiuZ1 1979 9-15; Höfling & Waloschek: Die Welt der kleinsten Teilchen. Vorstoß zur Struktur der Materie 1984; Rafelski & Müller: Die Struktur des Vakuums 1985; Kollath: Teilchenbeschleuniger 1955; Boussard: Die Teilchenbeschleuniger 1974; Franz Stary: Smokatron - ein neuartiger Typ von Teilchenbeschleuniger, WiFo21 1971 H7 p302-305; Pedro Waloschek: Als die Teilchen laufen lernten. Leben und Werk des Großvaters der modernen Teilchenbeschleuniger - Rolf Wideröe 1993; Duquesne: Materie und Antimaterie 1974; Schopper: Materie und Antimaterie. Teilchenbeschleuniger und der Vorstoß zum unendlich Kleinen 1989; Löffler: Mikrophysik I PfL6 1976; **Löffler & Musiol: Mikrophysik II** PfL7 1976, 1980[2]; **Weber: Der Kosmos Tanzt. Vom Atom der Griechen zum Spiel der Quarks** 1983; **Musiol, Ranft, Reif, Seeliger: Kern- und Elementarteilchenphysik** 1989, 1995[2]; R̃oss: Grand unified theories 1984; Georgi and Glashow: Unified theory of elementary-particle forces, Physics today 1980 H9 p30-39; F̃ukuyama: Grand unified theories 2008; Mohapatra: Unification and supersymmetry 2003; Okun: The relations of particles 1991; Okun: Weak interactions of elementary particles 1965; Õkun: Leptons and Quarks 1982, 2014; Nambu: Quarks. Frontiers In Elementary Particle Physics 1985; Lee: Particle Physics and Introduction to Field Theory 1981; L̃ee: The evolution of the weak interactions 1986; Williams: An introduction to elementary particles 1961; d̃eWitt & Omnes: Dispersion relations and elementary particles 1960; Hilgevoord: Dispersion relations and causal description 1960; Barton: Dispersion techniques in field theory 1965; R̃oman: Lectures on an introduction to dispersion relation techniques 1964; K̃lein ed: Dispersion Relations and the Abstract Approach to Field Theory 1961; Omnes & Froissart: Mandelstam theory and Regge Poles. An Introduction For Experimentalists 1963; Omnes: Introduction to particle physics 1971; F̃razer: Dispersion relations 1961; D̃ispersion theory and elementary particles 1961; Nussenzveig: Causality And Dispersion Relation, Mathematics in Science and Engineering 75 Hagedorn: Introduction to field theory and dispersion relations 1964; Jackson: The physics of elementary particles 1958; M̃uirhead: The physics of elementary particles 1965; Muirhead: Notes on elementary particle physics 1971; Nishijima: Fundamental particles 1963; Nishijima: Field and particles. Field theory and dispersions 1974; Schwinger: Particles, sources, and fields Bd1 1970, Bd2 1973, Bd3 1989; **Das 1. BUCH zur Eichtheorie:** PhysBl41 1985 H6 p160, **Quigg: Gauge Theories of the Strong, Weak & Electromagnetic Interactions** 1983, 1985, 1997, 2013[2] 482p; Quigg: Elementarteilchen und die Grundkräfte der Natur SdW H6 1985 p5, 110-122, 146; **Das 2. BUCH zur Eichtheorie:** **Huang: Quarks, Leptons and Gauge Fields** 1982, 1992; **Geyer, Kripfganz, Ranft: Einführung in die Quantenfeldtheorie der Elementarteilchen** 1990; Henley & Thirring: Elementare Quantenfeldtheorie 1975; Zwei entfernte Pendel, deren Kugeln mit einer sehr langen Feder verbunden sind. Nun breiten sich die Änderungen der Kugelposition wellenartig in der Feder aus und wirken retardiert auf die

jeweils andere Kugel. In der Feder entstehen nun Schwingungsmoden, die den Randbedingungen genügen. Schwingungsmoden werden mit Bosonen identifiziert, die die Kräfte zwischen den Kugeln vermitteln. Feder repräsentiert ein Feld von Bosonen. Edward G. Harris: Quantenfeldtheorie. Eine elementare Einführung 1982; Päs: Die perfekte Welle. Mit Neutrinos an die Grenzen von Raum und Zeit oder warum Teilchenphysik wie Surfen ist 2010; Schopper: Weak interactions and nuclear beta decay 1966; Genz: Elementarteilchen 2003; **β-Zerfall** hat kontinuierliches Spektrum. Die angegebene Energie ist die **maximale Energie** der Elektronen. Die Energiedifferenz wird von den Neutrinos mitgenommen. Dubbers & Mampe: Der Zerfall des freien Neutrons, PhysBl47 1991 H7 p589; β-Zerfall als Krankheit des Neutrons nach Fermi-Modell oder Standard-Modell n=ddu→p=(duu) → W^- → e + $\bar{\nu_e}$. **Close: Neutrino** 2010 Geschichte der Neutrinophysik mit vielen biografischen Details der Forscher; Ohlsson & Zhou: Renormalization group running of neutrino parameters arXiv.org hep-ph arXiv:1311.3846 oder Nature communications 5 2014, Art-Nr 5153; **Im heutigen Standard-Modell der Teilchenphysik haben Neutrinos keine Masse!** Halzen & Martin: Quarks and Leptons. An Introductory Course in Modern Particle Physics 1984; W̃interberg: The Planck aether hypothesis. An Attempt for a Finitistic Theory of Elementary Particles 2000; Köpp & Krüger: Einführung in die Quanten-Elektrodynamik 1997; Zuber: Neutrino physics 2011; Barger & Marfatia: The Physics of Neutrinos 2012; **T̃homson: Modern Particle Physics** 2013; Perkin: Particle Astrophysics 2009; Scherer: Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik 2015; Methoden zur Bestimmung der Neutrinomasse: 1] direkte Bestimmung der Masse aus der fehlenden Energie beim Betazerfall, 2] die Beobachtung von Neutrinooszillationen, also Umwandlungen einer Neutrinoart in eine andere, 3] die Suche nach neutrinolosen doppelten Betazerfällen, und 4] indirekte Folgerungen aus anderen Beobachtungen, insbesondere aus der beobachtenden Kosmologie, basiert auf Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung durch WMAP und anderen Beobachtungen, die die Parameter des **Lambda-CDM-Modells = heutiges Standard-Modell der Kosmologie** bestimmen. Durch den Einfluss, den Neutrinos auf die Strukturbildung im Universum und auf die primordiale Nukleosynthese haben, kann seit 2007 als Obergrenze für die Summe der drei Neutrinomassen 0.2 eV/c^2 angenommen werden. **Neutrino-Oszillation** – der Wechsel der Elementarteilchen zwischen ihren drei möglichen Zuständen Myon- ν_μ, Tau- ν_τ und Elektronneutrino ν_e: Es werden zwei Annahmen benötigt: 1. Neutrinos müssen unterschiedliche Massen besitzen, 2. Massen-Eigenzustände der Neutrinos sollen gegenüber den Wechselwirkungs-Zuständen (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata-Mischung oder MNS-Mischung analog zur CKM-Mischung im Quark-Sektor) vermischt sein. Dies soll für den Fall einer 2-Flavour-Oszillation hochrelativistischer Neutrinos $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ erläutert werden, wobei ν_α, ν_β die Wechselwirkungszustände sind (ν_e, ν_μ, ν_τ bei 3-Flavour). Die Mischung ist dann durch einen Parameter, den Mischungswinkel Θ_m, charakterisiert: $\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\Theta_m & \sin\Theta_m \\ -\sin\Theta_m & \cos\Theta_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$, wobei ν_1 und ν_2 die Massen-Eigenzustände sind, die aber nicht beobachtet werden können, da Neutrinos ausschließlich an der schwachen Wechselwirkung teilnehmen und damit nur in den Wechselwirkungszuständen ν_e und ν_μ beobachtet werden. Betrachtet man die Neutrino-Massen-Eigenzustände ν_i als ebene Welle gilt: $|\nu_i(t)\rangle = |\nu_i(0)\rangle\, e^{-i/\hbar(Et-px)}$. Für hochrelativistische Neutrinos mit $m_\nu \ll E_\nu$ gilt die Näherung: $v \approx c$, wodurch der Impuls p durch $p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m^2c^4} \approx \frac{1}{c}\left(E - \frac{m^2c^4}{2E}\right)$ genähert werden kann. Die Zeit t kann durch die Flugstrecke $x = L$ ausgedrückt werden: $t = L/c$. Damit wird die ebene Welle wiefolgt beschrieben: $|\nu_i(L)\rangle = |\nu_i(0)\rangle\, e^{-i\frac{m_i^2c^4}{2E}\frac{L}{\hbar c}}$. Für die zeitliche Entwicklung der Wechselwirkungszustände ν_α und ν_β ergibt sich somit durch die Überlagerung zweier leicht unterschiedlicher ebener Wellen:

$$\begin{aligned} |\nu_\alpha(L)\rangle &= \cos\Theta_m\, |\nu_1(0)\rangle\, e^{-i\frac{m_1^2c^4}{2E}\frac{L}{\hbar c}} + \sin\Theta_m\, |\nu_2(0)\rangle\, e^{-i\frac{m_2^2c^4}{2E}\frac{L}{\hbar c}} \\ |\nu_\beta(L)\rangle &= -\sin\Theta_m\, |\nu_1(0)\rangle\, e^{-i\frac{m_1^2c^4}{2E}\frac{L}{\hbar c}} + \cos\Theta_m\, |\nu_2(0)\rangle\, e^{-i\frac{m_2^2c^4}{2E}\frac{L}{\hbar c}} \end{aligned} .$$

Sind die beiden Masseneigenzustände nach einer endlichen Flugstrecke nicht mehr phasengleich, so ist es möglich, in einem ursprünglich erzeugten Wechselwirkungszustand Beiträge des anderen Zustandes zu finden: $\langle\nu_\beta(0)|\nu_\alpha(L)\rangle \neq 0$. Für die Oszillationswahrscheinlichkeit gilt dann: $P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = |\langle\nu_\beta(0)|\nu_\alpha(L)\rangle|^2 \approxeq \sin^2\left(\frac{\Delta m^2c^4}{4E}\frac{L}{\hbar c}\right) \cdot \sin^2(2\Theta_m)$ Hierbei ist Δm^2 die Differenz der Massenquadrate der Flavours. Mischung hängt vom Durchgang durch Erde ab, Renshaw: RRL 112, 091805 2014, also Erdtomographie denkbar. **Neutrinofreier** doppelter β-Zerfall bei Xe^{136} Neutrino als Majorana-Teilchen $\hat{\nu} = \nu$ PhysikJ Okt 2012 p16; Mit

diskretem Spektrum für die Elektronen! Asimov: Drehmomente, verblüffende Aspekte der modernen Forschung 1975 = The left hand of the electron 1972; **Paritätserhaltung gilt nicht ausnahmslos:** Das Neutrino erwies sich als „Linkshänder“, wie Einstein, FII, Kafka, Goethe, Dürer. Stach: Kafka. Die Jahre der Erkenntnis 2008; Stach: Kafka. Die Jahre der Entscheidungen 2002; Mechanik Spiegel-invariant. Natur bevorzugt die Linksschraube: Eiweiße, schwache WW $^{60}\mathrm{Co}\rightarrow{}^{60}\mathrm{Ni}+\mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}$. W-Bosonen reagieren verletzend. Fritzsch: Quarks p263ff; Damit wird eine objektive Erklärung von links und rechts möglich. Leibniz und Eddington waren von **Links-Rechts Symmetrie** überzeugt, auch **Majorana-Hypothese:** Links und rechts nicht unterscheidbar! Raum-Punktspiegelung und Pseudo-Tensor. **Lee: Symmetries, asymmetries, and the world of particles** 1988; Ỹang: Elementarteilchen - von der Entdeckung des Elektrons bis zum Sturz der Parität 1972; Aber Lee, Yang, Wu: Doch! Per schwacher WW: β-Zerfall! Elektron, elektronisches Neutrino stets linkshändig = Daumen in Flugrichtung, von hinten gesehen dreht es links rum oder entgegen Uhrzeiger! Anders Positron und elektronisches Anti-Neutrino, die sind stets rechtshändig unterwegs. Bouchiat & Pottier: Das Atom kann links und rechts unterscheiden, SdW H8 1984 p48-58; Uwer & Albrecht: Symmetriebrechung. Teilchen und Antiteilchen, der kleine Unterschied SdW 2018 H3 p12-19; Im Bereich der schwachen Wechselwirkung muss demnach beim Übergang von einem Teilchen zu seinem Antiteilchen nicht nur die elektrische Ladung, sondern auch die Parität, also der Spin, vertauscht werden. Die schwache Wechselwirkung unterscheidet sich also von der elektromagnetischen Wechselwirkung durch die Verknüpfung der schwachen Ladung mit der Rechts- oder Links-Händigkeit eines Teilchens. Bei den Leptonen und Quarks haben nur die linkshändigen Teilchen und ihre rechtshändigen Antiteilchen eine schwache Ladung. Dagegen sind die rechtshändigen Teilchen und ihre linkshändigen Antiteilchen gegenüber der schwachen Ladung neutral. Teilchen mit schwacher Ladung können aus dem Vakuum auftauchen und wieder verschwinden - spontane (Spiegel-) Symmetriebrechung. Close: An Introduction to Quarks and Partons 1979, 1982; Close: The Infinity Puzzle: Quantum Field Theory and the Hunt for an Orderly Universe 2011; Close: Symmetrie und Higgs-Mechanismus, SdW Nov 2014 p48-52 Photon scheint im Ionosphärenplasma Eigenschaften eines massiver Teilchens zu haben, da man für massive Teilchen typische Longitudinalwellen sieht. **Wess: Symmetrien in der Elementarteilchenphysik**, PhysBl43 1987 p181ff. Bei störungstheoret Behandlung in Potenzen von $\hbar$ durch Strahlungskorrekturen treten Divergenzen auf, die unendlicher Selbstenergie und Elementarladung entsprechen. **Renormierbare Theorie:** Grund ist die Annahme der **Punktförmigkeit** der Teilchen und streng lokalisierte WW. Quantenfelder sind Distributionen. Die kann man aber nicht multiplizieren, weil sie für zusammenfallende Argumente singulär werden. Damit sind WW nicht beschreibbar. Ad-hoc-Vorschriften solcher Multiplikation zerletzt u.U. Kovarianz, Kausalität und Unitarität. Ausweg sind nichtlineare Symmetrietransformationen, nichtlineares σ-Modell, non-linear sigma model. Theorie mit endlich vielen Divergenzen können durch Umdeutung von endlich vielen Parametern wie Masse oder Ladung, die experimentell gesetzt werden, gerettet werden. Falls unendlich viele Divergenzen, dann **nicht-renormierbare Theorie**. QFTs mit Spin-1-Feldern nicht renormierbar, außer bei Einschränkungen wie sie von Eichinvarianz kommen. Systemdynamik zwingt uns Eichsymmetrie auf. Das Vektorpotenzial ist durch das beobachtbare magnet Feld nicht eindeutig bestimmt: $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi$ und $\varphi' = \varphi - \dfrac{\partial\chi}{\partial t}$, siehe Seite 562. Die Freiheit der Wahl einer unabhängigen Variablen bedeutet **Symmetrie**, die mit einer Erhaltungsgröße einhergeht. **Quigg: Gauge Theories of the Strong, Weak & Electromagnetic Interactions** 1983 p37ff Weyl: Raum, Zeit unf Materie 1923[5], mit Ehlers Anmerkungen 1993[8] §40 Das elektromagnetische Feld als Bestandteil des metrischen p298ff Man muss an jeder Stelle eine willkürliche Maßeinheit festlegen! Zur Willkür des Koordinatensystems kommt nun noch die Freiheit Maßeinheit hinzu. p299 Quigg p41ff **Maxwell-Gleichungen aus Eichinvarianz!** Quigg p42 **Lokale Eichinvarianz der Quantenmechnik zwingt zum Elektromagnetismus! Zum Prinzip der Relativität des Bezugssystems tritt die Relativität der Größe**. **Straumann: Zum Ursprung der Eichtheorien bei Hermann Weyl**, PhysBl43 1987H11 p414-421 Einstein, **Aich-Invarianz**; Bergmann & Schäfer: Bd4 Teilchen p606; **Eichinvarianz nach Weyl:** Physikalische Größen $f(x)$ sind Funktionen der Raum-Zeit und einer davon unabhängigen raumzeitabhängigen Skalenänderung S^μ: $f(x+\mathrm{d}x) = (f + \partial^\mu f(x)\mathrm{d}x_\mu)(1 + S^\mu \mathrm{d}x_\mu) = f + (\partial^\mu f(x) + fS^\mu)\mathrm{d}x_\mu + O(2) = f(x) + (\partial^\mu f(x) + f(x)S^\mu)\mathrm{d}x_\mu + O(\mathrm{d}x)^2$. Das **Inkrement** ist daher $\Delta f = (\partial^m u + S^\mu) f(x)\mathrm{d}x_\mu$. Weyl wollte eine die Gravitation und den Elektromagnetismus einigende Feldtheorie auf Basis des durch Freiheit bei der Wahl

der Skala modifizierten Differenzialoperators $\partial^\mu + S^\mu$ aufbauen und identifizierte das Viererpotenzial $A^\mu(x)$ mit dem raumzeitabhängigen Generator für die Skalenänderung $S^\mu(x)$, um eine geometrische Basis für den Elektromagnetismus zu haben. **Weyl: Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie**, Ann. Physik 59 1919 101-133 oder Weyl: Gesammelte Abhandlungen Bd2 1968 und Weyl: Gravitation und Elektrizität, Sitzungsberichte der Königl Preuss. Akad der Wiss 26 1918 465-480 oder Blumenthal: Das Relativitätsprinzip. Lorentz, Einstein, Minkowski, Weyl 1982 p147-159 oder mit Nachträgen aus 1955 von Einstein und Weyl in Weyl: Selecta 1956 p179-192. Leider ist diese lehrreiche Idee richtig aber als Identifikation falsch: $p^\mu = (E; p_x, p_y, p_z) \to p^\mu = i\partial^\mu = (i\partial^0; -i\nabla)$. Für Teilchen mit Ladung e ist dann: $(p_\mu - eA^\mu) \to i(\partial^\mu + ieA^\mu)$, also $\tilde{p}^\mu = i(\partial^\mu + ieA^\mu) = i(\partial^0 - e\varphi; -\nabla - e\vec{A})$. **Maxwell:** $\operatorname{div}\vec{B} = 0 \to \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$ bedeutet **Freiheit für die Wahl des Vektorpotenzials** $\vec{A} + \nabla\chi(\vec{x})$. Die Elektrodynamik ist nur bis auf $\nabla\chi$ eindeutig. Morse & Feshbach: Methods of Theoretical Physics 1953 Bd1 p210f; L̃eite-Lopes: Gauge field theories. An introduction 1981; P̃opov & Konopleva: Gauge fields 1972; L̃ee: Chiral dynamics 1972; **Moriyasu: An Elementary Primer for Gauge Theory** 1982 p12ff; **Abers & Lee: Gauge theories**, Physics reports 9 1973 p1-141 oder In: J̃acob ed: Gauge theory and neutrino physics 1978; Aitchison: An informal introduction to gauge field theories 1982; **Eichtheorie kurz und knapp** siehe Grosche, Ziegler, Zeidler: Teubner TB Mathematik. Teil II 1995 p560ff $\int_a^b \mathcal{L}(\varphi, \psi, \psi') =$ stationär, φ, ψ fix auf dem Rand $x = a, b$. Aus dem speziellen Teilchen-Modell $\mathcal{L} = i(\bar{\varphi}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x} - m\bar{\varphi}\psi)$ erhält man die ELGs $i\psi' - m\psi = 0$ und $i\varphi' - m\varphi = 0$ mit den Lösungen $\varphi(x) = \varphi_0 e^{-imx}, \psi(x) = \psi_0 e^{-imx}$ mit dem Erhaltungssatz $(\bar{\varphi}, \psi)' = (\bar{\varphi}_0, \psi_0)' = 0$ auf (a, b). **Eichtransformation** $\psi_+(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ und $\varphi_+(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi(x)$ lässt die Lagrangefkt invariant $\mathcal{L}(\varphi, \psi, \psi') = \mathcal{L}(\varphi_+, \psi_+, \psi'_+)$. **Myshkis: Advanced mathematics for engineers** 1975 p410ff; Satz von Noether liefert für die **globale** Eichtransformation $\alpha(x) =$ const gibt Ladungserhaltung, Erhaltung der Baryonenzahl. **Lokale Eichtransformation** erfordert eine adäquate Eichtransformation der Ableitung = **kovariante Ableitung** $\nabla = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - iA(x)$. Dann ist die Lagrangefkt invariant $\mathcal{L}(\varphi, \psi, \nabla\psi) = \mathcal{L}(\varphi_+, \psi_+, \nabla_+\psi_+)$, wobei das modifizierte Modell $L = i(\bar{\varphi}\nabla\psi - m\bar{\varphi}\psi)$. Die **lokale Eichtransformation** ist neben $\psi_+(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ und $\varphi_+(x) = e^{i\alpha(x)}\varphi(x)$, wegen $A_+(x) = A(x) + \alpha'(x)$, $\nabla_+ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - iA_+$ ist die **Eichtransformation der Ableitung** $\nabla_+\psi_+ = e^{i\alpha(x)}\nabla\psi$. Dann ist $\int_a^b L(\varphi, \psi, \nabla\psi) =$ stationär, φ, ψ, A fix auf dem Rand $x = a, b$. Die ELGs $i\nabla\psi - m\psi = 0$, $i\nabla_+\psi_+ - m\psi_+ = 0$, $i\nabla\varphi - m\varphi = 0$ und $i\nabla_+\varphi_+ - m\varphi_+ = 0$, wobei ψ_+ Feld des Basisteilchens e^-, ∇_+ Feld des Positrons e^+. A Eichfeld/Viererpotenzial gibt per Quantisierung das Photon. Mit dem Strom $j = -A\psi$ als WW-Term zwischen Eichfeld A und Basisteilchen ψ. **Böhm & Hollik: Eichtheorien**, PiuZ 10 1979, p18-26 in der Online-Ausgabe fehlen die relevanten Eichterme!; Ebert: Eichtheorien 1989 p44ff; 't Hooft: Symmetrie in der Physik der Elementarteilchen, SdW 1980 H8 p92-100; **Halzen & Martin: Quarks and Leptons. An Introductory Course in Modern Particle Physics 1984 p310ff Kap14**; **Faddeev & Slavnov: Gauge Fields. An Introduction To Quantum Theory** 1980; Hamilton: Mathematical gauge theory 2017; **Taylor: Gauge theories of weak interactions** 1976; **Healey: Gauging What's Real. The Conceptual Foundations of Contemporary Gauge Theories** 2007; Rebbi: Die Gitter-Eichfeldtheorie, SdW 1983 H4, p88-; = Eichtheorie auf regularisierender diskreter Raumzeit = Impulsbeschränkung = Cut-Off im Impulsraum = Energie-Divergenz-Vermeidung. Per Wick-rotation landet man im Euklidischen Raum und kann so Verwandschaft zur statistischen Physik nutzen Lösungen per Monto-Carlo-Simulation erreichen. Man bekommt Massen von Hadronen = gebundene Quarkzustände, thermodynamischen Größen oder topologische Anregungen, wie Monopole, Instantonen und Solitonen. Für Diskretisierung der Yang-Mills-Wirkung = Dynamik der Eichbosonen, definiert man Linkvariablen $U_\mu = \exp\left(iaA_\mu\left(n + \frac{\hat{\mu}}{2}\right)\right)$ zwecks endlichem Parallelentransport, welche benachbarte Gitterpunkte verbinden. **Arnold: Meth Methoden der klassischen Mechanik** 1988 p303 Parallelentransport auf gekrümmten Flächen; Eichfeldanteil der Wirkung = Spur über geschlossene Schleifen von Linkvariablen. Jede Spur über solche Wilson-Loops ist eichinvariant. Eine einfache Eichwirkung ist zB

$S_G[U] = \frac{2}{g^2}\sum_{n\in\Lambda}\sum_{\mu<\nu}\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\left(1 - U^{(4)}_{\mu\nu}(n)\right)$. $U^{(4)}_{\mu\nu}$ = die sogenannten Plaketten-Variablen = zu kleinsten geschlossenen Rechteck-Schleifen gehörigen Größen $U^{(4)}_{\mu\nu}(n) = U_{+\mu}(n)U_{+\nu}(n+\hat{\mu})U_{-\mu}(n+\hat{\mu}+\hat{\nu})U_{-\nu}(n+\hat{\nu})$, analog zur Geometrie eines Quadrats, das zB bei positivem Umlaufsinn durch die vier Zahlen 1, 2, 3 und 4 indiziert wird. Methode der Gitter-QCD ist analog zu speziellen Spinmodellen, die 1971 in festkörpertheoretischem Zusammenhang von Franz Wegner aufgestellt wurden. Ist vergessen worden. Kogut: Introduction to lattice gauge theory and spin systems, RevModPhys51 1979 p659–713; Gitter-Spinmodelle, wie in QCD, haben eine lokale Eichinvarianz und einen zur Eichfeldenergie analogen Term. Gittermethoden auch zum Higgs-Mechanismus. Montvay & Münster: Quantum Fields on a Lattice 1994; Rothe: Lattice Gauge Theories. An Introduction 2012[4] GoogleBook; DeGrand & DeTar: Lattice Methods for Quantum Chromodynamics 2006; Langelage: Intro Gittereichtheorie 2007; Gattringer & Lang: Quantum chromodynamics on the lattice LNP788 2010; Sommer: Gittereichtheorie; Loizides: Hadronische Korrelationen in der Quantenchromodynamik auf dem Gitter 2005; Smit: Introduction to Quantum Fields on a Lattice 2002; Morningstar: The Monte Carlo method in quantum field theory arXiv:hep-lat/0702020 2007; **O'Raifeartaigh: Group structure of gauge theories** 1987; Hält man nun die Forderung der Eichinvarianz für die WW des magnetischen Feldes mit dem Materiefeld der Schrödinger-Gl aufrecht, so wird deren WW durch $\Psi(x) \to e^{ie\chi(x)}\Psi(x)$ festgelegt, weil es sich bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit $\Psi^*(x)\Psi(x)$ rauskürzt. Aber man muss alle Ableitungen in der Schrödingen-Gl durch die **kovariante Ableitung** $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi(x) \to \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA_\mu(x)\right)\Psi(x)$ ersetzen. Genau nach diesem Muster werden **Eichfeldtheorien** konstruiert - wird **Renormierbarkeit** garantiert! **Rezept:** Wähle Symmetriegruppe und Transformationsparameter Raum-Zeit-abhängig gemäß $\varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}$. Nun entsprechende kovariante Ableitung definieren. Jedem unabhängigen Transformationsparameter entspricht unabhängiges Vektorfeld gemäß $\Psi(x) \to e^{ig\sum_{l=1}^N \lambda^l(x)T_l}$. Der Wellenfunktion entspricht daher ein mehrkomponentiges Multiplett $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)^T \in \mathbb{C}^p$, T_l Matrizen. Die N unabh Vektorfelder transformieren sich gemäß $A^l_\mu(x)T_l \to \exp(ig\lambda^l(x)T_l)A^k_\mu(x)T_k\exp(-ig\lambda^n(x)T_n) + i\exp(ig\lambda^l(x)T_l)\frac{\partial}{\partial x^\mu}\exp(-ig\lambda^k(x)T_k)$. Die kovariante Ableitung ist dann nach Yang und Mills, Phys Rev 96 1954 p191, für **masselose Vektorfelder**, also Photonen $\frac{\partial}{\partial x^\mu}\Psi(x) \to \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ieA^l_\mu(x)T_l\right)\Psi(x)$. Eichtheorie ist so die QED. **Kane: Modern elementary particle physics** 1987, 1993 Standard-Modell; **Spontane Symmetriebrechung** sichert Renormierbarkeit auch für massive Felder, also Elementarteilchen. Sei Φ das Skalarfeld, dessen WW durch das Doppelmulden-Potenzial $V = -m^2\Phi\,\Phi^* + \frac{1}{2}\lambda\Phi^2\,\Phi^{*2}$ festgelegt. Grundzustand im Minimum bei $|<\Phi>| = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}$ bricht die Symmetrie, obwohl das Potenzial die Symmetrie bzgl der Eichtransformation $\Psi \to \exp(ig\alpha(x))\Psi$ besitzt. Die eichinvariante WW des Skalarfeldes Ψ mit dem der Eichtransformation entsprechenden Vektorfeld A enthält den Term $\frac{1}{2}g^2\Phi\,\Phi^*A_\mu A^\mu$. Für den konstanten Wert $\bar{\Psi} =< \Psi >$ ergibt dies eine **Masse** für das Vektorfeld $m_A = |<\Psi>|g = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}g$. Das **Vektorfeld** A **erhält durch spontane Symmetriebrechung eine endliche Masse = Higgs-Mechanismus, Schrödinger**, Nature 169 (1952) 538. Die verursachenden Skalarfelder heißen **Higgs-Felder**. Kunst besteht in der richtigen, also Elementarteilchenphänome beschreibenden, Wahl der Multipletts und Symmetriegruppen. **Elektroschwache WW** beruht auf der 4-parametrigen Gruppe $SU(2)_W \otimes U(1)$, also auf 4 Vektorfeldern: ein SU(2)-Triplett $\vec{W}$ und ein Singlett B. Symmetriebrechung durch Higgs-Dublett Ψ macht 3 Vektorfelder, Linearkombinationen von W und B massiv (massive Vektorteilchen: Z^o, W^+, W^-, $Z^o = \cos\Theta_W\,W^3 - \sin\Theta_W\,B$, $A^\gamma = \sin\Theta_W\,W^3 + \cos\Theta_W\,B$ mit $\tan\Theta_W = g'/g$. g'=Kopplungskonstante der U(1), g= Kopplungskonstante der SU(2)), während eine Linearkombination, das Photon, masselos bleibt. Die letztere einparametrige Symmetrie bleibt ungebrochen. Die gleiche Anzahl von Leptonen- und Hadronenfamilien garantiert die Anomaliefreiheit der Theorie. **Hadronen** = farneutrale gebundene Quark-Zustände. Die Quantisierungsregel müssen die Symmetrien berücksichtigen! Die Klasse der renormierbaren Eichfeldtheorien ist auf die Klasse der anomaliefreien eingeschränkt. Anwendung der Eichtheorie auf Lorentz-Gruppe gibt die Gravitationstheorie, ART. Ist jedoch nicht renormierbar, also klassische Theorie. Oberhalb 10^{-18} m lassen sich alle bekannten WW auf die Eichtheorie der Gruppe Lorentz$\otimes$ $SU(3)_{\mathrm{color}}\otimes$ $SU(2)_W\otimes$ U(1) zurückführen. **Eichtheorie:** Theorie, bei der die Wirkung invariant bei einer zeitabhängigen Gruppe ist.

Wawilow: Die Mikrostruktur des Lichtes 1950/53; Kuhn & Strnad: Quantenfeldtheorie. Photonen und ihre Deutung 1995; Weisskopf: Das Wunder des Wissens 1964 p147ff Die Wellennatur des Elektrons gründet sich auf die **Unzerteilbarkeit des Quantenzustandes** $\Psi(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^3$ also ist es partiell überall zugleich. Mehrteilchendarstellung bedeutet Tensorprodukt, z.B. Slater-Determinante. Von der Unteilbarkeit des Atom wird die Unzerteilbarkeit des Quantenzustandes!; Für Einstein, Schrödinger, Bohm u.a. eine inakzeptable Sicht, auch wenn mit der Wirlichkeit kompatibel. Haken: Licht und Materie 2 Bde 1995; Wentzel: Einführung in die Theorie der Felder 1943; Physikalische Grundideen klar offengelegt = **Iwanenko & Sokolow: Klassische Feldtheorie** 1948, 1960 auch QED und **Zitterbewegung**; Heitler: The quantum theory of radiation 1949, 1954[3]; **QED = relativistische Quantentheorie = Quantentheorie der Strahlung = Theorie von Photonen und Elektronen:** **Pais: Inward bound of matter and forces in the physical world** 1986 p324 Quantenfelder = wie Teilchen geschaffen werden und wie sie verschwinden.; De Rafael: Lectures on quantum electrodynamics 1976; **S̃ußmann: Einführung in die Quantenelektrodynamik** 1950; **Hund: Materie als Feld** 1954; Dyson: Advanced Quantum Mechanics 2007 = Dyson: Quantenfeldtheorie. Die weltbekannte Einführung von einem der Väter der QED 2014 = Samizdad die QED-VL-Mitschrift; **Schweber, Bethe & Hoffmann: Mesons and Fields. VolI Fields** 1955; Schweber: An introduction to relativistic quantum field theory 1961; **T̃hirring: Einführung in die Quantenelektrodynamik** 1955; **G̃ingrich: Practical QED** 2006; Autoren begleiten die Schöpfung der QED am Inst for Advanced Studies und Fritz Rohrlich, Eltern 1942 in Sobibor vergast, gab erste Vorlesung = **Jauch & Rohrlich: The Theory of Photons and Electrons**. The Relativistic Quantum Field Theory of Charged Particles with Spin One-Half 1955[2]; Schelvis: Vernichtungslager Sobibor 2003; Sokolow: Quantenelektrodynamik 1952 Motiv QED: Sich abregendes Elektron schafft Photon aus dem Nichts! Wie geht das? Wie Paarerzeugung, zwei Teilchen tauschen plötzlich auf? Landau/Lifschitz: QM Bd3 §44 Zeitunabhängige Störungstheorie und Orts-Impulsunschärfe, die eine Aussage für einen Zeitpunkt ist, geben zusammen eine Energie-Zeit-Unschärfe, die bedeutet: Energieerhaltungssatz zweier Messungen im Zeitintervall Δt ist nur in der Größenordnung $\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}$ prüfbar! Virtuelle Teilchen kurzzeitig erlaubt! Unendlicher Energiekredit ist für infinitesimale Dauer drin! Dirac: Nimm QT und SRT ernst! Ohne Mathematik nicht zu machen! Mit Schrödingergleichung wegen der ungleichen Ableitungsordnung für Ort und Zeit, offensichtlich undenkbar. Erkenne, dass eine Operator-Quantisierung über die relativistische Mechanik mit Feldern nicht geht, weil man schon bei der Formulierung der relativistischen Mechanik mit Feldern wegen der Retardierung der Feldwirkung scheitert!; Kurze formale Darstellung, wobei alle Ideen syntaktisch eingewebt/verschleiert findet sich in **Sokolov, Ternov, Zhukovskii, Borisov: Quantum electrodynamics** 1983, 1988; Liebscher: Theoretische Physik 1973 p282 obige **Energie-Zeit-Unschärfe** bedeutet **Zitterbewegung**; Rollnik: Quantentheorie 2. Quantisierung und Symmetrien physikalischer Systeme, relativistische Quantentheorie 2003 p377ff; Hatfield: Quantum quantum field of point particles and strings 1992; Brittin, Downs & Dunham eds: **Lectures in Theoretical Physics** Colorado. Bd1 1958 Rohrlich: Paarerzeugung und Bremsstrahlung, Good: Teilchen mit 0-Masse, Stech: Seltsame Teilchen, Kubo: stat Mech irreversibler Prozesse, Peierls: Kerntheorie, Glauber: Stoßtheorie; Bd2 1959 Salam: Invarianz bei Elementarteilchen, Sakurai: Symmetriegesetze, Rohrlich: Das klassische Elektron, Hugengoltz: Vielteilchenproblem der QM, Jensen: Beta-Zerfall, Dresden: Abstrakte Feldtheorie, Lamb: Qm Verstärker; Bd3 1960 Aage Bohr: Kausalität und Dispersionrelationen, Weisskopf: Theoretische Physik, Zwanzig: Stat Mech der Irreversibität, Haag: Stoßprozesse, Symanzik: Green'sche Funktionen und QFT; Bd5 1962 Furry: de Broglie Wellen und Wellenpakete, Barut: Streumatrixtheorie, Bloembergen: Quantenelektronik, Biedenharn: Gruppentheorie der Kernspektren, Wheeler: ART und Mach'sche Prinzip als Randbedingung; Bd6 1963; B̃arut, Lorentz group Bd7a, B̃rittin: Statistical Physics and Solid State Physics Bd8a 1966;

G̃eltmann: Atomic Collision Processes Bd11c; M̃ahanthappa, Mathematical Methods in Theoretical Physics 11d 1969; M̃ahanthappa, Mathematical Methods in Field Theory and Complex Analytic Varieties 12c; B̃arut: De Sitter and Conformal Groups and Their Applications 13 1970;

Segre: Experimental Nuclear Physics Bd1. H. Staub. H. Bethe und J. Ashkin, N.F. Ramsey, K.T. Bainbridge 1953; Originalarbeiten = **Schwinger: Selected papers on quantum electrodynamics** 1958; Physikalische Grundideen klar offengelegt = Sokolow: Quantenelektrodynamik 1952; Berestetzky, Lifschitz, Pitajewski: Quantenelektrodynamik = Landau/Lifschitz Bd4 1989 oder Bd4a und Bd4b 1967; **Achieser & Berestezki 1913-1977: QED** 1962 Alexander Iljitsch Achijeser *1911 Weißrussland, +2000 Charkiw/Ukraine; Z̃eidler: Quantum Field Theory II. Quantum Electrodynamics. A Bridge between Mathematicians and Physicists 2008; Marcuse: Engineering Quantum Electrodynamics 1970; B̃erger: Experten der Vernichtung. Das T4-Reinhardt-Netzwerk in den Lagern Belzec, Sobibor und Treblinka 2013; Scheck: Theoretische Physik 4. Quantisierte Felder. Von den Symmetrien zur Quantenelektrodynamik 2001; Greiner: Relativistische Quantenmechanik. Wellengleichungen, Theo Phys Bd6 1987 p339 Renormierung wegen Dirac-See, p460 Lorentz-Boost; Greiner: Quantenelektrodynamik, Theo Phys Bd7 1994; Greiner: Feldquantisierung, Theo Phys Bd7a 1993; Urban: Topics in Applied Quantumelectrodynamics 1970; Schweber: QED and the men who made it. Dyson, Feynman, Schwinger, Tomonaga 1994; K̃aiser: Drawing Theories Apart. The Dispersion of Feynman Diagrams in Postwar Physics 2005; **Dyson:** Maker of Patterns. An Autobiography Through Letters 1979; Disturbing the Universe = **Innenansichten - Erinnerungen in die Zukunft** 1981 TRIGA = Training, Research, Isotopes, General atomic = Wie baut man vermarktungsfähige Kernreaktoren Genf, Metallurge **Massoud Simnad 1920-2001** wasserstoffhaltige Brennstäbe aus Uranhydrid und Zirkonhydrid 1955; G̃upta: Quantum electrodynamics 1977; Källen: Quantenelektrodynamik, HdP V/1 1958; Källen: Quantum electrodynamics 1972; **B̃ialynicki-Birula: Quantum Electrodynamics** 1975; Feynman: QED - die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985; P̃ower: Introductory quantum electrodynamics 1964; Faddeev, Khalfin & Komarow (eds): Wladimir Alexandrowitsch F̃ock. Selected works. Quantum mechanics and quantum field theory 2004; **Migdal 1991-1991: Auf der Suche nach der Wahrheit** – ein Physiker erzählt 1983, 1990; Migdal: Recursion equations in gauge field theories, Migdal: Phase transitions in gauge and spin-lattice systems, In: Kadanoff: Statistical physics. Statics, dynamics and renormalization 2000 p348ff; Feynman: Quantenelektrodynamik. Eine Vorlesungsmitschrift 1989; **Feynman: QED** 1999[4]; Köpp & Krüger: Einführung in die Quanten-Elektrodynamik 1997; Toptygin: Foundations of classical and quantum electrodynamics 2014;

Adrian Wüthrich: The Genesis of Feynman Diagrams 2010; Crease and Mann's The Second Creation 1986, 1996; 1947 Shelter Island Conference (on the coast of New York between the North Fork and the South Fork) Der leere Raum ist voller Teilchen, deren Buchhaltung per Feynman-Diagrammen nützlich ist. Honerkamp p214; Scadron: Advanced quantum theory and its application through Feynman diagrams 1979; Feynman: The theory of positrons, Phys Rev. 76 (1949) 749 & Space-time approach to quantum electrodynamics, Phys Rev. 76 (1949) 769. **R̃esag: Feynman und die Physik** 2018; Feynman-Diagramme illustrieren (siehe Mattuck) Teilchenwechselwirkungen und sind daher ein einfaches Modell, um sich die Kräfte zwischen Teilchen zu veranschaulichen. Feynman-Diagramme stellen gewissermaßen Weg-Zeit-Diagramme dar: die Zeitachse zeigt senkrecht nach oben, die Raumachse waagerecht nach rechts. Die Teilchen werden als Linien dargestellt, die sich an Wechselwirkungspunkten (Vertices, Einzahl: Vertex) schneiden. Die Wechselwirkung findet dann an einem ausgezeichneten Raum-Zeit- oder Weltpunkt statt. Man hat zur Darstellung der Teilchen folgende Vereinbarungen getroffen: * Durchgezogene, gerade Pfeile kennzeichnen alle Fermionen. Ungerade Linien repräsentieren die Bosonen. Ausnahme ist das 1964 postulierte **Brout-Englert-Guralnik-Hagen-Higgs-Kibble-Teilchen oder -Boson** PhysJ April2012 p29 Juni p17, s.u. und August/Sept p18-21. Die **Pfeil**richtung bei Antiteilchen ist umgekehrt zu den normalen Teilchen, weil sich Antiteilchen 'rückwärts in der Zeit bewegen'. **Antimaterie** SdW Dez 1998; Herrmann: Antimaterie. Auf der Suche nach der Gegenwelt 2009; Braunbek: **Antiteilchen**, PhysBl 26 1970 31f; Chamberlain: Antiproton, PhysBl17 1961 p61-71; Braunbek: **Hanle-Effekt**, PhysBl 27 1971 p19-27 und PhysBl 32 1976 p80-83; Alfven: Kosmologie und Antimaterie 1969; **Thirring: Die Universalität der Gravitation** PiuZ1

1970 p77-79; Schopper: Materie und Antimaterie. Teilchenbeschleuniger und der Vorstoß zum unendlich Kleinen 1989; Close: Antimaterie 2010; * **Wellenförmige** Linien verwendet man für das Graviton, Photon der Quantenelektrodynamik und die Weakonen der schwachen Wechselwirkung. * **Schraubenförmige** Linien verwendet man für die **Gluonen** der Quantenchromodynamik (QCD). * **Gestrichelte** Linien sind normalerweise dem **Higgs**-Teilchen vorbehalten. Die Feynman-Graphen bestehen aus Grundelementen, die zu verschiedenen Wechselwirkungsszenarien zusammengesetzt werden können. So existieren Fermion-Boson- und Boson-Boson-Vertex. **B̃rown: Renormalization. From Lorentz to Landau and beyond, Mills** 1993 UB2420REN; Mindestens zwei dieser Vertizes konstituieren zu einem Wechselwirkungsereignis. R̃ollnik: Einführung in die Theorie der Feynman-Graphen 1963; **Feynman-Graphen = Strichzeichnungen in Raumzeit statt unübersichtlicher Formeln!** Dass ein Photon bei der Annährung der beiden Elektronen entstehen kann, ist eine Folge von Heisenbergs Unschärferelation: Für einen Moment konnte sich ein Elektron die **Energie des virtuellen Teilchens vom Vakuum borgen**. Manchmal fiel der Kredit höher aus, und es konnten mehrere Partikel entstehen. Zum Beispiel solche, die die Elektronen bei Annäherung aneinander erzeugten, aber selbst wieder auffingen. Es war auch möglich, dass das erste ausgetauschte Photon eine Art Umweg machte, indem es zunächst in ein Paar weiterer Teilchen zerfiel und aus diesen wieder neu entstand, bevor es das andere Elektron erreichte. **Strahlungskorrekturen** nennen die Physiker das Verfahren, auch solche fantasievollen Szenarien zu berücksichtigen. **Renormierung = Unendlichkeitskniff = Schwierigkeiten der Theorie unter den Teppich zu kehren**: Aber nur die endlichen Beiträge zu den Strahlungskorrekturen sind physikalisch bedeutungsvoll. **G̃leick: Die Vorlesung war eine »tour de force«** 2018 **Feynman-Lectures = Einführungskurs für Doktoranden** war ein Flopp, taugt nur für Eingeweihte! Die unendlichen Anteile zur Summe gehörten sozusagen zur Elektronenmasse und -ladung, sie seien sogar der eigentliche Grund, dass die Teilchen überhaupt eine Ruhemasse haben. Der Austausch eines virtuellen Bosons, wie den Eichbosonen irgendeiner der vier Wechselwirkungen, wird durch den Propagator dargestellt. Die Teilchenphysiker sind immer an Wahrscheinlichkeitsamplituden interessiert, deren Quadrate den Wirkungsquerschnitt bilden. Letzterer steht für die Wahrscheinlichkeit des gesamten Wechselwirkungsprozesses. Die Amplituden sind proportional zur Kopplung und zum Propagator, der durch eine Green'sche Funktion dargestellt werden kann. Dieser Formalismus führt schnell auf die bekannten Streuformeln für Rutherford-Streuung und Mott-Streuung. Es stellt sich heraus, dass es auch Feynman-Diagramme höherer Ordnung gibt. Diese weisen so genannte Strahlungskorrekturen auf, die man wie folgt klassifiziert: * photonische Strahlungskorrekturen z.B. Bremsstrahlung, * nicht-photonische Strahlungskorrekturen mit Vertex- oder Propagator-Korrekturen (Schleifen oder loops), die von virtuellen Teilchen- und Teilchenpaaren herrühren, * und schließlich QCD-Strahlungskorrekturen, bei denen Vertexkorrekturen und Korrekturen durch die Abstrahlung von Gluonen eingehen. D'Auria, Riccardo, Trigiante, Mario: From special relativity to Feynman diagrams. A course of theoretical particle physics for beginners, 2012. **Schäfer: Einführung in die theoretische Physik** BdI.1 1914, 1950[5] p635ff **Elk & Gasser: Die Methode der Green'schen Funktionen in der Festkörperphysik** 1979 **Fetter & Walecka: Quantum Theory of Many-Particle Systems** 2003;

Feynman-Graph höherer Ordnung mit einer Schleife aus einem Elektron-Positron-Paar: Feynman-Diagramm erster Ordnung mit einer Schleife (nicht-photonische Strahlungskorrektur) Alle Strahlungskorrekturen bewirken, dass der Wirkungsquerschnitt, also die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen der Teilchenwechselwirkung, verändert wird. Die Teilchenphysiker sind gerade an diesen Wirkungsquerschnitten interessiert und berechnen sie für eine Vielzahl verschiedener Feynman-Graphen.

Die Feynman-Diagramme sind jedoch weit mehr als eine anschauliche Darstellung von Teilchenprozessen. Die Teilchenphysiker können sie Bausteinen gleich in Fragmente zerlegen, die jeweils eindeutig mit mathematischen Gleichungen verknüpft sind. Auf diese Weise kann man aus vielen Feynman-Diagrammen niedrigster bis höherer Ordnung Gleichungen ableiten, die die Wirkungsquerschnitte liefern. Das ist das eigentlich Geniale an Feynman-Diagrammen!

Bern, Dixon, Kosower: Theorie der Naturkräfte: SdW Sept 2012 p38-45; Scadron: Advanced quantum theory and its application through Feynman diagrams 1979; **Peter Schmüser Feynman-Graphen und**

Eichtheorien für Experimentalphysiker mit Übungsaufgaben 1995[2] Ebert: Eichtheorien 1989; Liebscher: Theoretische Physik 1973; Mattuck: A guide to Feynman diagrams in the many-body problem 1967; **Peskin & Schroeder: An introduction to quantum field theory** 2007; Sidi Hamidou Djah: Feynman-graph representation of the perturbation series for general functional measures Bonn SFB 611 2004; Kreimer: Knots and Feynman diagrams 2000; http://www.wissenschaft-online.de/astrowissen/ lexdt _f03. html

Källen & Steinberger: Elementarteilchenphysik 1974[2]; Valentin: Subatomare Physik 1982; Das & Ferbel: Introduction to nuclear physics = Kern- und Teilchenphysik 1994 p313 Spur Pauli-Matrizen; Frauenfelder, Henley, Pieper und Hackstein: Teilchen und Kerne. Subatomare Physik 1974, 1987; Williams: Nuclear and particle physics 1991; **Eisberg & Resnick: Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids, Nuclei, and Particles 1974, 1985**[2] Manfred von Ardenne, Musiol, Klemradt eds: Effekte der Physik und ihre Anwendungen 2005[3]; **G̃riffiths: Introduction to Elementary Particles** 2008; **Kane: Modern elementary particle physics** 1987, 1993 Standard-Modell; Kane: The Particle Garden. Our Universe us understood by particle physicists 1995; Kane: Supersymmetry. Unveiling the ultimate laws of Nature 2000; Kane: Supersymmetry and beyond. From the Higgs boson to the mew physics 2013; Fayyazuddin & Riazuddin: A modern introduction to particle physics 2011[3]; Aitchison: An informal introduction to gauge field theories 1982; Aitchison & Hey: Gauge Theories in Particle Physics. A Practical Introduction 1990[2]; **Okun: Physik der Elementarteilchen** 1988, 1991, p118ff; Scherer: Symmetrien und Gruppen in der Teilchenphysik 2015; Rollnik: Teilchenphysik Bd2 Innere Symmetrien der Teilchen 1971; Rollnik: Teilchenphysik Bd1 Grundlegende Eigenschaften der Teilchen 1971; Rollnik: Physikalische und mathematische Grundlagen der Elektrodynamik 1976; **Innere Symmetrien** wie isotope (Drehung: n↔p, lässt Spin unberührt), elektroschwache, Farbsymmetrie, GUT-Symmetrien des 25 Parameter enthaltenden **Standard-Modell**s wirken nicht auf die raumzeitlichen (äußere Symmetrie), geometrischen Eigenschaften der Zustände, lassen also Koordinaten, Spin und unberührt. Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005[2] p923; Bis 1957 dachte man, daß alle physikalischen Gesetze - von der Mechanik des Makrokosmos bis zur Quantenmechanik des Mikrokosmos - gleich bleiben, wenn man sie im Raum spiegelt. Asimov: Drehmomente, verblüffende Aspekte der modernen Forschung 1975 = The left hand of the electron 1972; **Parität** (= Symmetrieeigenschaft bei der simultanen Inversion aller Raumkoordinaten eines Objekts. β-Zerfall, schwache Wechselwirkung nicht invariant unter Paritäts-Inversion, also P-Verletzung) der Teilchen unberührt. Hadron als Spin-1/2-Teilchen kann nicht in Spin-1-Teilchen π-Meson übergehen. Nur linkshändige Teilchen und rechtshändige Antiteilchen nehmen an schwache Wechselwirkung teil. An der elektromagnetischen und der starken Wechselwirkung nehmen links- und rechtshändige Teilchen mit gleicher Stärke teil. Alte Annahme: alle Wechselwirkungen und Zerfälle von Antiteilchen genau so ablaufen wie mit normalen Teilchen, dass sie also invariant unter Ladungskonjugation, kurz **Zerfälle C-invariant**. elektromagnetische und die starke Wechselwirkung erhalten C! Nicht aber schwache Wechselwirkung. **Pietschmann: Schwache Wechselwirkungen**, PhysBl 29 1973 p48892; B̃uras: Gauge theory of weak decays 2021; **Taylor: Gauge theories of weak interactions** 1976; Fermi: Versuch einer Theorie der β-Strahlen Z für Physik 88 1934 p161-177; Bailin: Weak interaction 1977; B̃ilenky: Introduction to the physics of weak interaction 1982; Unter der Ladungskonjugation wird aus einem linkshändigen Neutrino ein linkshändiges Antineutrino, welches experimentell nicht beobachtet wird. Scheinbare **CP-Invarianz**: Vertauscht man zusätzlich zur Spiegelung auch noch Teilchen mit Antiteilchen (C+P), so entsteht kein Widerspruch mehr zu der oben genannten Situation, denn es wird aus einem linkshändigen Neutrino unter der CP-Transformation ein rechtshändiges Antineutrino. 1964 **CP-Verletzung** = winzige Unregelmäßigkeit beim Zerfall schwerer neutraler K-Mesonen K_L^0 (Kaonen)! Ursache der CP-Verletzung auf dem Quark-Sektor mit der Erzeugung der Quark-Massen verknüpft. Quarks erhalten ihre **Masse durch Kopplung an das Higgs-Feld**, wobei zwingend eine Massen-Mischungsmatrix auftritt, die nach den Physikern Nicola Cabibbo, Makoto Kobayashi und Toshihide Maskawa benannt ist (CKM-Matrix). Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005[2] p922; **Sacharov** 1960: **Kosmologische Notwendigkeit der CP-Verletzung**. **Bonner: In Einsamkeit vereint.** Die Frau d. sowjet. Physikers u. Nobelpreisträgers Andrej Sacharow erzählt zum erstenmal d. ganze

Wahrheit über d. Jahre ihrer gemeinsamen Verbannung in Gorki 1986; **Sacharov:** Collected scientific works 1982; Lipkin: Andrej Sakharov. Quarks and the structure of matter 2013; CP-Verletzung Voraussetzung für beobachtete Dominanz der Materie gegenüber der Antimaterie (Baryonenasymmetrie). Bai & Ströher such Hinweise auf Symmetrie-Brechung mit Cooler Synchrotron = COSY: Teilchen aus 6 Quarks, Proton mit elektrischem Dipolmoment? Pauli & Lüders: **Erhaltung der CPT-Invarianz** = Im Gegensatz zur („zweifach-kombinierten") CP-Verletzung ist bei allen Ereignissen der Quantenfeldtheorie die („dreifach-kombinierte") CPT-Symmetrie unter allen Umständen invariant (Zeitumkehr = Umkehr der Bewegungsrichtung, der Bahn- und Spin-Drehimpulse und Übergang zum Konjugiert-Komplexen). **Wightman & Streater: Die Prinzipien der Quantenfeldtheorie**. PCT 1969; Rosen: TCP invariance and the dimensionality of spacetime, JMathPhys9 1968 p1593; **SU(3)-Oktett**-Idee mit den **leichten Baryonen** ddu, p=duu, Σ^+ = dds, Σ^o = dsu, Σ^- = uus, Λ^o = dsu, Ξ^- = dss, Ξ^0 = ssu und den **Mesonen** $K^o = d\bar{s}$, $K^+ = \bar{s}u$, $\pi^+ = \bar{d}u$, $\pi^- = \bar{u}d$, $K^- = s\bar{u}$, $\bar{K}^o = \bar{d}s$, $\pi^o, \eta, \eta' = \bar{d}d$, $\bar{u}u$, $\bar{s}s$ ist Erweiterung der Isospin-Idee durch Gell-Mann und Neeman 1960. Tetraquark = Z(4430), SdW Okt 2014 p14. GUTs sind gemäß Georgi-Glashow-Modell 1974 PRL 32 p438 SU(5)=SU(3)⊗SU(2)⊗U(1). Siehe Klapdor: Teilchenastrophysik p55ff. Dimopoulos, Raby, Wilczek: Unification of Couplings, PhysToday44 1991 H10, p25; SO(10) macht nach Fritzsch & Minkowski (1975) $m_\nu > 0$. SU(5)-Transformationen wandeln nur Teilchen gleicher Helizität wie Fermionen wie Quarks d, s, b mit Ladung -1/3 und u, c t mit 2/3 und Leptonen e, μ, τ, ν_e, ν_μ, ν_τ ineinander um. Transformationen der **Supersymmetrie** ändern die Helizität der Teilchen und führen Fermionen und Bosonen ineinander über: skalare in spinorielle, spinorielle in vektorielle. **Helizität** = Komponente des Spins eines Teilchens, die in Richtung seines Impulses/Bewegungsrichtung: $h = \vec{S} \cdot \hat{p}$. Im Rahmen der Relativitätstheorie ist die Helizität nur für masselose Teilchen (die sich stets mit Lichtgeschwindigkeit bewegen) eindeutig bestimmt. Für alle massebehafteten Teilchen dagegen lässt sich immer ein Bezugssystem wählen, das das Teilchen „überholt", wodurch sich die Richtung seines Impulses und damit seine Helizität umkehrt. Einfachstes Supermultiplett: Photon (Feld-Dimension m) und Photino (Feld-Dimension $m^{3/2}$). Antikommutator zweier spinorieller Erzeugenden Q ist durch eine Größe der Dimension m gegeben durch $\{Q, \bar{Q}\} = Q\bar{Q} + \bar{Q}Q = -2p_\mu\gamma_\mu$. Unbeobachtbar, weil gebrochene Symmetrie zu riesigen Massen der Superpartner führt. Vereinigung von innerer und äußerer Symmetrie durch weiteren inneren Index, Aroma-Index $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ führt auf erweiterte globale Supersymmetrie. $N = 4$**-SUSY** hat Grundzustand mit 11 masselosen Teilchen (eins mit Spin $s = 1$, vier mit $s = 1/2$, sechs mit $s = 0$), also je 8 fermionische und auch bosonische Zustände. Erweiterte Supergravitation: Vereinigung von inneren und äußeren Freiheitsgraden, um alle Kräfte, so auch gravitation zu haben. Maximale **Supergravitation** $N = 8$ verschiedene spinorielle Generatoren Q_i. Enthält kein Teilchen mit $s > 2$. de Wit & Nicolai N=8 Supergravity, NuclPhysB208 1982 p323; Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005^2 p928; Das Supermuliplett hat masselose Teilchen: 1 Graviton mit $s = 2$, 8 Gravitinos mit $s = 3/2$, 28 Bosonen mit $s = 1$, 56 Fermionen mit $s = 1/2$ und 70 skalare Teilchen, je 128 fermionische und auch bosonische Zustände. Aber ohne **Gravitino** kann die Gravitationstheorie keine QFT sein. Die Theorie hat SO(8)-Symmetrie. **Baez & Huerta: Exotische Zahlen und die Stringtheorie**, SdW Okt 2011 p55-60, **Katz: Enumerative geometry and string theory** 2006; G̃ursey & Chia-Hsiung: On The Role Of Division, Jordan And Related Algebras In Particle Physics 1996; Wolchover & Furey: **Oktonionen und Standard-Modell** SdW 4.2019 p66-73 vier Divisionsalgebren $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ geben **Dixon-Algebra** $\mathbb{R} \otimes \mathbb{C} \times \mathbb{H} \times \mathbb{O}$. **Chaichian & Hagedorn: Symmetries in quantum mechanics - from angular momentum to supersymmetry** 1998 p275ff; **Srivastava: Supersymmetry, Superfields and Supergravity**. An Introduction 1993; Castanos & Urritia eds: Introduction to Supersymmetry in Particle and Nuclear Physics 1984; Blockley & Stedman: Simple supersymmetry: I. Basic examples EurJPhys6 1985 218-224; Wess & Bagger: Supersymmetry and Supergravity 1983; Ãitchison: Supersymmetry in particle physics. An elementary introduction 2007; Buchbinder & Kuzenko: Ideas and methods of supersymmetry 1995; Müller-Kirsten & Wiedemann: Supersymmetry 1987; Fayet: Introduction to supersymmetric theories 1993 und 1994; Krämer, Lorenz, Melzer-Pellmann: SUSY, PhysJ 19 2020 H11 p44-49; B̃ailin & Love: Supersymmetric gauge fields 1994; Freund: Introduction to supersymmetry 1986; Gates: Superspace or one thousand and one lessons in supersymmetry 1983; M̃isra: Introduction to supersymmetry

1992; Constantinescu & de Groote: Geometrische und algebraische Methoden der Physik. Supermannigfaltigkeiten und Virasoro-Algebren 1994; ÕeWitt: Supermanifolds 1992; Stedman: Simple supersummetry: II. Factorization method in quantum mechanics EurJPhys6 1985 225-231; Wess: Symmetrie, Supersymmetrie, Supergravitation. PhysBl43 1987H1 p2-6 a] Keplerproblem Drehimpuls und Energieerhaltung geben Integrale der Bewegung. b] Elektrostatik und Magnetostatik plus Rotationsinvarianz plus Lorenz-Gruppe geben Maxwellgleichungen. c] Symmetrie in einem **Inneren Raum** = Symmetrie im Raum der Wellenfunktionen. Phaseninvarianz der Schrödingergleichung liefert Ladungserhaltung. **Labelle: Supersymmetry demystified** 2010; **Kalka & Soff: Supersymmetry** 1997; Gleiser: Das tanzende Universum. Schöpfungsmythen und Urknall 1998 religöser Glaube ans Einssein = monotheistische Wissenschaft; Aber! Gleiser: Die unvollkommene Schöpfung. Kosmos, Leben und das versteckte Gesetz der Natur 2011; Freund: Introduction to Supersymmetrie 1999; Ãtchison: Supersymmetry in Particle Physics. An Elementary Introduction 2007; **Tachikawa: N=2 Supersymmetric Dynamics for Pedestrians** 2015; **Supersymmetriealgebra** Supersymmetrietransformationen, die Fermionen und Bosonen ineinander umwandeln, erweitern die Raumzeitsymmetrie, die Poincaré-Gruppe. Geben als diskrete keine neue Erhaltungsgröße. Coleman-Mandula-Theorem. Haag-Lopuszanski-Sohnius-Theorem. Die einfachste supersymmetrische Erweiterung der Poincarégruppe ist im Wess-Zumino-Modell realisiert und erweitert sie um zwei Weyl-Spinoren $Q, \bar{Q}$. Die relevanten Kommutator- und Antikommutatorrelationen sind $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^m)_{\alpha\dot{\beta}} P_m\,, \quad \{Q,Q\} = \{\bar{Q},\bar{Q}\} = [Q,P] = [\bar{Q},P] = 0\,.$ σ^m Pauli-Matrizen, P_m Viererimpuls. Bosino wie Higgsino und Gravitino mit Spin =1/2. Sfermion = Selektron mit Spin=1. Stringtheorie vereinigt alle 4 Grundkräfte und setzt SUSY voraus. SUSY postiliert fundametale Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen. Higgs könnte SUSY-Teilchen sein. Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005^2 p927f; Dann wäre dies Hinweis auf weitere Raumdimension. SUSY liefert zwar die 85% der Masse des Universums tragende **Dunkle Materie**, enthält aber auch 125 freie Parameter! Bethke in SdW Okt 2012 p60-66 Schöne Bildchen auf p62f! Supersymmetrie - Vertauschung von Kraft (Vektoren beschreiben deren Wellenbewegung) - und Materie (Spinoren beschreiben deren Wellenbewegung)-Teilchen lässt die Naturgesetze invariant. Wechselwirkungen sind Multiplikation von Vektoren und Spinoren einer **Divisionsalgebra**, wobei Vektoren und Spinoren je nach räumlicher Dimension ein und dasselbe sind: reelle, komplexe Zahlen, Quaternionen oder Oktonionen. Siehe Seite 197. Räumliche **Supersymmetrie** und Zeit & String (1D) = **Stringtheorie** : Natürlicher Lebensraum hat 3, 4, 6 und 10 Dimensionen. Nur 10D oder 11D sind eindeutig! **Katz: Enumerative geometry and string theory** 2006; Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel 2014; Haber & Kane: Ist die Natur supersymmetrisch? SdW H8 1986 p68ff; **Szabo: An Introduction to String Theory and D-brane Dynamics. With Problems and Solutions** 2004; **Stringtheorie** umfasst alle Theorien, die Fädchen mit Planck-Länge Borzeszkowski: Raum-Zeit und Elementarlänge Wifo 24 1974 p519ff $\ell_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \cong 1{,}61624(12) \cdot 10^{-35}$ m kleine Saiten, deren Ausdehnung ein 10^{20}tel des Atomkerndurchmessers beträgt, also 1D-Objekte, die aus der Ferne sicher als punktförmig betrachtet werden können, aber statt 0-D-Objekte wie Atome als elementar angesehen werden. Offene und geschlossene **Strings**. Können getrennt (=Teilchenzerfall) und zusammengefügt (=Teilchenverschmelzung) werden. Wechselwirkungen offener Strings = Typ 1 Theorie erzeugen immer geschlossene. Mit offenen wie geschlossenen Strings sind immer charakteristische Schwingungsarten (Moden) verbunden. Eine bestimmte Vibration eines geschlossenen Strings kann als **Graviton** identifiziert werden. In gewissen Stringtheorien stellt die Schwingung mit der niedrigsten Energie eines offenen Strings ein **Tachyon** dar. Andere Schwingungsmoden offener Strings zeigen die Eigenschaften von **Photonen** oder **Gluonen**. Haben Raumzeitdimension $D = d + 1$ = Raumdimension d + Zeitdimension. **String-Weltfläche** hat **Euler'sche Charakteristik** χ(Möbius-Band) = $E - K + F - V = 0 - 1 + 1 - 0 = 0$, χ(Zylinder) $= 0 - 2 + 3 - 1$, χ(Rechteck) $= 4 - 4 + (1 - 1) + 0 = 0$, χ(Klein'sche Flasche) $= E - K + F - V = 0 - 0 + 1 - 1 = 0$. Die vier Mannigfaltigkeiten sind zueinander homöomorph. **Stringkoordinaten** sind $X_\mu(\tau, \sigma)$ als Funktion der **String-Weltflächen-Koordinaten** τ, σ. Branen haben Weltvolumen. **Superstring Theorie** bezeichnet die Ramond-Neveu-Schwarz- (RNS)-Stringtheorien, die in der Raum-Zeit supersymmetrisch sind und als **Theorien von Allem** = **Theory Of Everything** = **TOE**s gehandelt werden, weil sie teils die Physik der realen Welt beschreiben, wie z.B. Typ

II A (hat nur $U(1)$-Eichsymmetrie) oder B (nicht $U(1)$-eichsymmetrisch, kann also nur Gravitation beschreiben), die heterorische SO(32) oder $E_8 \times E_8$-Stringtheorien, die auch bosonische Stringstheorie enthält. Die $E_8 \times E_8$-Eichsymmetrie umfasst alle drei Symmetriegruppen des Standard-Modells $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ und somit ihre entsprechenden Eichbosonen. Die realistische Stringtheorie TOE firmiert unter dem Namen **M-Theorie** in 10 Dimensionen, die auch höherdimensionale Objekte, sogenannte „Brane" enthält, und bei der alle Teilchen und Kräfte des Universum durch Anregungen und WW der Strings beschrieben werden. ? Barrow: Theorien für Alles. Die Such nach der Weltformel 1991; **Stringtheorie**: E8 ist 248 dimensional in einem $\mathbb{R}^{57}$. 248×248iger Matrizen Adams: Science. Matrix mit 205,263,363,600 Einträgen siehe http://aimath.org/E8/ Lisi: Rein geometrische Theorie der Teilchen in Analogie zur ART. **D. McMahon: String Theory Demystified** 2008 p127, 190; **K̃aku: Introduction to Superstrings (and M-Theory)** 1988, 1999; **P̃olchinski: String theory** 2Bde 1998; **Kaku: Strings, Conformal Fields, and Topology: An Introduction** 1991, 2000[2]; Becker, Becker & Schwarz: String Theory and M-Theory: A Modern Introduction 2008; Zwiebach: A First Course in String Theory 2009; **Gubser: Das kleine Buch der Stringtheorie** 2011 populär; **M-Theorien**: 2-Bran ist gekrümmte Fläche, die 3D Raum-Zeit füllt SdW 2 2008 p26: Susy hat dann 4, 5, 7 und 11 Dimensionen. Kiefer in Kilian & Weber: Lexikon der Physik Bd4 1998 p277f und p355ff; Kiefer: Der Quantenkosmos. Von der zeitlosen Welt zum expandierenden Universum 2008 quantisierte Allgemeine Relativitätstheorie und Stringtheorie. Stringtheorie - vereinheitliche Theorie aller Wechselwirkungen einschließlich der Quantengravitation. Untrennbar mit der Geometrie von Raum und Zeit verbunden. Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität 1964; Begriffe von Raum, Zeit und Geometrie müssen neu formuliert werden. Eine riesige Zahl von Geometrien als Lösungen werden zugelassen. **Multiversum** = es gibt eine große Zahl von Bereichen, in denen ganz unterschiedliche Naturgesetze gelten. Aus ihrem Lösungsreichtum speist sich aber auch der Zweifel der Vorhersagekraft der Stringtheorie. SUSY-Alternativen gemäß SdW Sept 2014 p36: Multi-Universum, Extradimensionen, dimensionale Transmutationen und Preonen. Lincoln SdW12 2013 p46 Mit **Preonen** als Subteilchen hat man Masse allein aus Bindungsenergie und Higgs-Feld für Masse unnötig! **Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel** 2014; Wilczek & Betsy: Longing for the Harmonies. Themes and Variations from Modern Physics 1989; **Wilczek & Betsy Devine: Fantastic realities. 49 mind journeys and a trip to Stockholm** 2007; Wilczek: The Lightness of Being. Big Questions, Real Answers 2009; Wilczek: The Lightness of Being. Mass, Ether, and the Unification of Forces 2010; **Wolf: Parallele Universen. Die Suche nach anderen Welten** 1988; Goldberg: The Universe in the Rearview Mirror. How Hidden Symmetries Shape Reality 2013; Wilczek: A Beautiful Question. Finding Nature's Deep Design 2015; Kaku: Im Paralleluniversum. Eine kosmologische Reise vom Big Bang in die 11. Dimension 2005; Kaku: Die Physik der unsichtbaren Dimensionen: Eine Reise durch Zeittunnel und Paralleluniversen 2013;

44 Feinstruktur-Konstante. Raum-zeitlich wankende Naturkonstanten

Sommerfeld 1916 wegen Feinstruktur der Spektrallinien aus relativistischem Bohr'schen Atommodel. α als Geschwindigkeitsverhältnis von kleinster Kreisbahngeschwindigkeit des Elektrons zu c oder äquivalent dem kleinsten relativistischen Kreisbahndrehimpuls durch kleinstem qm Drehimpuls für $n = 1$:

$$\text{Energie mal Zeit} = \frac{\mathrm{E}}{\omega} \propto \mathrm{I} = \text{Wirkung} = \frac{\oint \mathrm{pdq}}{2\pi} = \mathrm{n}\hbar \propto \mathrm{L}_\varphi = \text{Drehimpuls} = \text{Weg mal Impuls}$$

Wasserstoffatom: Elektrostatische Anziehung und Fliehkraft im Gleichgewicht $mR\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ mit Bahngeschwindigkeit $v = R\omega$ und Drehimpuls der tiefsten Elektronen-Bahn $mR^2\omega = \hbar$ gibt $v = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2200$km/sec =2.2m pro μsec. oder Kreisbahngeschwindigkeitsbruchteil der Lichtgeschwindigkeit = Feinstruktur-Konstante $= \alpha = \frac{v}{c} = \frac{e^2}{2\epsilon_0 hc} \approx= \frac{1}{137}$. Umlaufzeit des Elektrons $T = \frac{4\epsilon_0^2 h^3}{me^4} = 2 \cdot 10^{-15}$sec=2 fs. Elektronenbahnradius $R = \frac{\epsilon_0 h^2}{2\pi me^2} = 24 \cdot 10^{-12}$m=24 pm, Messwert des Wasserstoffatom-Radius von $32 \cdot 10^{-12}$m. Elegante

Reformulierung der Bohr-Sommerfeld-Quantisierung als Ausgangspunkt für Quantenchaos gaben Schwarzschild, Epstein, Sommerfeld und Einstein in der Sprache der Hamilton-Jacobi-Theorie und mittels Winkel-Wirkungsvariable siehe **Einstein: Zum Quantensatz von Sommerfeld und Epstein**. In: Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 19 1917 p82–92 https://einsteinpapers.press.princeton.edu Gesammelte Werke Vol6 The Berlin Years: Writings 1914-1917 p556-567; Curtis & Ellis: Use of the Einstein–Brillouin–Keller action quantization AmerJPhys72 2004 p1521-; Keppeler: Die 'alte' Quantentheorie, Spinpräzession und geometrische Phase. Eine geometrische Phase rettete Sommerfelds Theorie der Feinstruktur, PhysJ3 2004 H4 p45-49; W̃ilczek: Geometric Phases In Physics 1989; Soiguine: Geometric Phase in Geometric Algebra Qubit Formalism 2015; Feynman: QED - Die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p129; **Feynman: Quantenelektrodynamik. Eine Vorlesungsmitschrift** 1999[4]; Harlander, Metag: **Standard-Modell der Elementarteilchen** PdNPiS Bd52 2003 H6 p2-14; Brückner: Zur Ontologie der Elementarteilchen 2015; Bär & Stephan: **Mathematisches Problem des Standard-Modells der Teilchenphysik:** SdW Mai 2009 p??; Yang-Mills-Problem = Finde mathematischen Unterbau für eine Klasse von Theorien, die in der Elementarteilchenphysik viel und erfolgreich angewendet werden. Leider beruhen diese Quantenfeldtheorien in wesentlichen Teilen auf Konzepten, die mathematisch nicht definiert sind, wie zum Beispiel viele der so genannten Pfadintegrale, und liegen obendrein nur als Störungstheorien vor, das heisst nur als eine Annäherung an die 'echte', noch unbekannte Theorie. Kaku: Die Physik der unsichtbaren Dimensionen. Eine Reise durch Zeittunnel und Paralleluniversen 2013; Bergmann & Schäfer: Bd4 Bestandteile der Materie. Atome. Moleküle. Atomkerne, Elementarteilchen 2005[2] p914ff; Yang-Mills-Theorie ist Basis des Teilchen-Standard-Modells mit 36 = 6 Flavors/Aromen/Geschmacksrichtungen = **up, down, charm, strange, top, bottom mal 3 Farben (RGB) mal 2 Quarks**. Yang-Mills-Feld als Eichfeld beschreibt die WW. 12 Kraftteilchen = Austauschteilchen = Eichbosonen sind 8 Gluonen, Photon, $W^{\pm}$, Z mit je Spin 1. Yang-Mills-Feld hält die Materie im Kleinen zusammen, die Einstein'sche Geometrie im Großen. Austausch-Photon ist virtuell, da es die Gleichung $E = pc$ beim Austausch und Stoß ignoriert, obwohl es beim Stoß Impuls macht, aber keine Energie austauscht. α als eine von freien 20 Parametern des Standard-Modells ist **empirische Konstante**, die die WW-Stärke von Elektronen und Photonen in QED angibt. **137** lässt gemäß anthropischem Prinzip erst Menschen zu! 4% kleiner: **Keine Atomkerne durch Nukleosynthese**, also kein H, keine Sterne. Chiu & Muriel: Stellar physics 1968, 1972; Clayton: Principles of stellar evolution and nucleosynthesis 1968; Größeres α, also größere elektrische Kraft lässt **keine stabilen** Atome zu. **Veranlasste Pauli, den Psychiater Jung aufzusuchen. Miller & Mania: 137. C.G. Jung, Wolfgang Pauli und die Suche nach der kosmischen Zahl** 2011; Stanbury; A simple numerological interpretation of elementary particle mass rations, Speculations in science and technology 8 1984 p229; Borzeszkowski: Eddingtons Zahlen und die Einheit der physikalischen Welt. Zum 100. Geburtstag von A. S. Edddington Wifo 32 1982 H12; **Numerologie**, Eddington (1956): The Constants of Nature. In Newman, The World of Mathematics 2 p1074–1093. Kragh: Dirac 1990; Farmelo: Der seltsamste Mensch. Das verborgene Leben des Quantengenies 2009; Kragh: Higher speculations. Grand theories and failed revolutions in physics and cosmology 2011; Kragh: Cosmology and controversy. The historical development of two theories of the Universe 2021; Kragh: Quantum Generations. A History of Physics in the Twentieth Century 2020; Kragh: Niels Bohr and the quantum atom. The Bohr model of atomic structure 1913-1925 2012; Kragh: Masters of the Universe. Conversations with cosmologists of the past 2014; Kragh (2003): Magic Number. A Partial History of the Fine-Structure Constant. Archive for History of Exact Sciences 57 (5), 395; oder **Sommerfeld'sche Feinstruktur-Konstante:** beschreibt die Stärke der em WW durch das Verhältnis von potenzieller Energie $E_{ee} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}$ zwischen zwei Elektronen im Abstand d und der Energie eines Photons $E_\gamma = \nu\, h = \frac{hc}{\lambda}$ mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi d$, die dem Umfang entspricht: $\alpha = \frac{E_{ee}}{E_\gamma} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \times \frac{\lambda}{hc} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \times \frac{2\pi d}{hc} = (\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \times \frac{r}{\hbar c}) = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{2c\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{h} = \frac{1}{4\pi\,c\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{\hbar} = 7{,}297\,352\,5698\,(24)\cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137{,}036}$. Oder Verhältnis von potenzieller Energie der Anziehung $E_{e^+e^-}$ zwischen e^+ und e^- und der Photonenenergie, die beide auseinandertreibt. Lüst: Quantenfische - Die

Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel 2011 p76ff, 372. Man misst die Kraft, die zwei Elektronen im Abstand der **Compton-Wellenlänge** auseinander treibt; Stephen L. **Adler, Theories of the Fine Structure Constant FERMILAB-PUB-72/059-T**. **Verhältnis von Elementarladung zu Planckladung** $\alpha = \left(\frac{e}{q_{\mathrm{P}}}\right)^2$. **Verhältnis von Geschwindigkeiten** $\alpha^2 = \frac{v_e}{c} = \frac{E_{\mathrm{Rydberg}}}{E_{\mathrm{Ruhenergie\ Elektron}}} = \frac{2\,E_{\mathrm{Hartree}}}{m_e c^2} = \frac{27.2\mathrm{eV}}{511\mathrm{keV}}$ mit v_e Elektronengeschwindigkeit im Bohr-Atom. **Atomradius = Bohr'scher Radius:** Elektrostatisch gehaltene Fliehkraft-Kreisbahn bei Wasserstoff ist $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} = m_e R\omega^2$ oder $\frac{m_e e^2}{4\pi\epsilon_0 R} = (m_e R\omega)^2 = p_e^2$ mit de Brogli $p = \frac{h}{\lambda}$ längs der Kreisbahn mit Umfang $\lambda = 2\pi R$ bedeutet $\frac{m_e e^2}{2\epsilon_0 2\pi R} = \frac{h^2}{(2\pi R)^2}$ bedeutet $\frac{m_e e^2}{2\epsilon_0} = \frac{h^2}{2\pi R}$ bedeutet $R = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = a_0 = 0.5 \cdot 10^{-10}$ m. Bedeutet eine nichtrelativistische **Kreisbahngeschwindigkeit des Elektrons** wegen $p = m_e v_e = p_e = \frac{h}{\lambda_e} = \frac{h}{2\pi R}$ oder $v_e = \frac{h}{2\pi R m_e} = 2000$ km/s $= \frac{c}{100} = \frac{2\pi R}{T}$, also hundertstel der Lichtgeschwindigkeit. Bedeutet Umlaufzeit $T = 1.7 \cdot 10^{-16}$ sec oder Frequenz $f = 1/T = 10^4$ THz. Umständlicher siehe Hänsel & Neumann: Physik V p82; **Feinstruktur-Konstante** setzt **charakteristische atomare Längen** wie die **klassischen Elektronenradius** r_e, den **Bohr'schen Radius** a_0 und die **Compton-Wellenlänge** des Elektrons $\lambda_e = \frac{h}{p_e} = \frac{h}{m_e\,c}$ ins Verhältnis: $r_e = \alpha\lambda_e/2\pi = \alpha^2 a_0$. **Kraft-Verhältnis von elektrische Abstoßung und gravitativer Anziehung** zweier **Planck-Massen** mit Elementarladung $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\,G\,m_P^2}$. Weisskopf: Mein Leben 1991 p98ff Wendell Furry; Gottfried: Weisskopf 1908-2002 Nature 417 2002 p396;

Klassischer Eletronenradius: a] Im raum-zeitlichen Mittel verteilt sich die Ladung eines Elektrons auf einer Kugel mit Radius R. Dieser wie auch immer zusammen gehaltenen Ladungsanordnung entspricht die potenzielle Energie $U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$. Diese Energie wird bei der Explosion des Elektrons auch frei. Bei Annäherung eines Positrons wird dadurch Energie von ca. 2 mal 0.5 MeV = Ruhenergie von Positron und Elektron $E_0 = m_e c^2 = U$ auch freigesetzt. Also $R = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} \approx 2 \cdot 10^{-15}$ m siehe auch PfL6 p38f, **oder b]** Oszillation eines Elektron in seinem Feld. Energie der Ladungsverteilung mit Radius R ist $E = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R}$. Das Verhältnis dieser Energie mit der Ruhmasse des Elektrons (Lepton) $mc^2 = \hbar\omega = \frac{\hbar c}{\lambda} = \frac{\hbar c}{R}$ liefert $E/(mc^2) = \alpha$. Oder nach Poelz (2012) On the Wave Character of the Electron, arXiv:1206.0620; wird das masselose Elektron in dem von ihm verursachten Synchrotronstrahlungsfeld beim Abstand $r = \frac{\lambda}{2\pi}$ betrachtet. Die WW mit Photonen gibt bei der Umlaufperiode T den Drehimpuls $1\hbar = L = r\,p = \frac{E}{c} r = \frac{E\lambda}{2\pi c} = \frac{E\,T}{2\pi} = \frac{E}{\omega}$, wobei die **Compton-Wellenlänge** des Elektrons λ der ersten Fundamentalmode der Synchrotronstrahlung entspricht. Feinstrukturaufspaltung bei Atomen, $\sim (Z\cdot\alpha)^2$. Spektrale Absorption einer Graphenschicht, $\sim \pi \cdot \alpha$. **Quanten-Hall-Effekt** $R_{\mathrm{H}} = \rho_{xy} = \frac{U_{\mathrm{H}}}{I} = \frac{B}{ne} = \frac{h}{\nu e^2} = \frac{R_{\mathrm{K}}}{\nu}$ mit $\nu = 1, 2, \cdots \in \mathbb{N}$ und von Klitzing'sche Elementarwiderstand $R_{\mathrm{K}} = h/e^2 \cong 25\,\mathrm{k}\Omega$. $\alpha = \frac{1}{2c\,\varepsilon_0}\,\frac{e^2}{h} = \frac{1}{2c\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{R_{\mathrm{K}}}$. **Gravitation:** $\alpha_G = \frac{G\,m_p^2}{\hbar\,c} \approx 5{,}9 \cdot 10^{-39}$. **Elektromagnetische Kräfte** sind $\alpha/\alpha_G = 10^{36}$ mal stärker, gravitative. Die **Starke Wechselwirkung** hat eine energieabhängige (‚laufende') Kopplungskonstante. Der Vergleichswert für die Kraft zwischen zwei Nukleonen im Atomkern ist $\alpha_s \cong 1$. Vergleicht man die Zerfallsraten aus starken und schwachen Zerfällen, so erhält man für die **Schwache Kraft** eine Kopplungskonstante von $\alpha_w = 10^{-7}$ ..10^{-6}. **Park: Introduction to strong interaction** 1966 lies Einführung und Vorwort; Lucha & Schöberl: Die starke Wechselwirkung. Eine Einführung in nichtrelativistische Potentialmodelle 1989;

Dirac (1937) The Cosmological Constants. Nature 139 (3512): 323; Gamow (1967) Electricity, Gravity, and Cosmology, Physical Review Letters 19 (13) 2006; p759. **Gamow (1967) Variability of Elementary Charge and Quasistellar Objects**, PhysRevLett 19 Nr16 p913; Barrow: Das 1x1 des Universums. Neue Erkenntnisse über die Naturkonstanten Barrow: Der Ursprung des Universums. Wie Raum, Zeit und Materie

entstanden 1994; Barrow: Ein Himmel voller Zahlen. Auf den Spuren mathematischer Wahrheit. Pi in the sky 1992; **Fritzsch: Das absolut Unveränderliche. Die letzten Rätsel der Physik** 2005; Barrow & Webb: **Inconstant Constants. Do the inner workings of nature change with time?** Veränderliche Naturkonstanten. Ein Dogma der Physik scheint ins Wanken zu geraten: Ist das, was die Welt in ihrem Innersten zusammenhält, gar nicht konstant, sondern eine Funktion der Zeit? SdW Okt 2005 p78-85; Webb et al. Further Evidence for Cosmological Evolution of the Fine Structure Constant arXiv.org > astro-ph > arXiv:astro-ph/0012539 PhysRevLett87 091301 2001; Wendt: Hamburger Sternwarte. Variability of fundamental physical constants on cosmological scales - methods and shortcomings. The possible variation of the fundamental constants of nature is currently a very popular research topic and has a long history. Theories unifying gravity and other interactions suggest the possibility of spatial and temporal variation of physical 'constants' in the Universe. The variation of the dimensionless constants mu, the proton-to-electron mass ratio, and the finestructure constant alpha can be checked via quasar absorption line spectroscopy. However, current findings are partially contradictory and our intention is to asses the accuracy of the investigation concerning a possible variation of the fundamental physical constant mu and to provide more robust results. The goal in mind is to resolve the current controversy on variation and devise explanations for the different findings. The literally global effort to resolve these issues brought forth a large ESO observation program to obtain state-of-the-art UVES QSO spectra and to develop future-proof methods of analysis.

The existence of Dark Matter is the most prominent proposal to account for the discrepancy between measurements of the mass of galaxies, clusters of galaxies and the entire universe, and measurements based on the mass of the visible matter. So far the existence of Dark Matter is inferred from gravitational effects on visible matter and background radiation and not through direct detection. In his talk Professor S. White introduces the dark matter paradigm and explains its virtues. An alternative proposal to explain the observed discrepancies is introduced by Professor P. Kroupa. He argues that these effects could be due to a modification of the laws of gravity without the need of Dark Matter.

Local Group galaxies as critical tests of the contemporary cosmological model and its failure P. Kroupa (Bonn)

Contemporary cosmology assumes the validity of the General Theory of Relativity which means that Newtonian dynamics is valid on the scales of galaxies. But this comes at a price: in order to account for the observed motions of stars and gas in and around galaxies the existence of exotic dark matter must be postulated. The resulting very popular concordance cosmological model then allows precise calculations of the matter distribution within and in the surroundings of galaxies. A very large volume of work has accumulated to date in an attempt to account for the existence and properties of galaxies such as our Milky Way, which must have evolved through a complex history of hierarchical structure growth driven by dark matter.The existing galaxies in the Local Group are compared to these theoretical results finding very significant disagreement in their overall properties. Furthermore, the concordance cosmological model implies that new dwarf galaxies be born during galaxy encounters. While this important process is usually ignored by the cosmological community, it appears to lead to a serious disagreement with the observed number of dwarf galaxies. Nearby as well as distant galaxies indeed look as if they were purely the result of baryonic processes.The observed phase-space distribution and the internal properties of the Milky Way satellite galaxies as well as the impressive similarity of large star-forming galaxies appear to lead, in view of the theoretical results, to the inescapable implication that the concordance cosmological model needs to be abandoned in favour of a model which relies mostly on baryon-driven processes, and thus to dynamics on galaxy scales being non-Newtonian.

Dark Matter gone missing in many places: a crisis of modern physics? from Marcel S. Pawlowski, $\Omega_{m,glob} = 0.28 \pm 0.03$ (83 % of this in dark, 17 % in luminous matter). average mass density is only $\Omega_{m,loc} = 0.08 \pm 0.02$.

45 Arbeit, Liebe, Sinnstiftung, Willensfreiheit

Hingabe an den Augenblick. **Goethe: Ich weiß, dass mir nichts angehört Als der Gedanke, der ungestört Aus meiner Seele will fließen, Und jeder günstige Augenblick, Den mich ein lie-**

bendes Geschick Von Grund aus lässt genießen. DAS EVANGELIUM NACH MATTHÄUS: **Die Bergpredigt** (Kapitel 5,1–7,29). **Die Seligpreisungen** Als er aber das Volk sah, ging er auf einen Berg und setzte sich; und seine Jünger traten zu ihm. Und er tat seinen Mund auf, lehrte sie und sprach: Selig sind, die da geistlich arm sind; denn ihrer ist das Himmelreich. Selig sind, die da Leid tragen; denn sie sollen getröstet werden. Selig sind die Sanftmütigen; denn sie werden das Erdreich besitzen. Selig sind, die da hungert und dürstet nach der Gerechtigkeit; denn sie sollen satt werden. Selig sind die Barmherzigen; denn sie werden Barmherzigkeit erlangen. Selig sind, die reinen Herzens sind; denn sie werden Gott schauen. Selig sind die Friedfertigen; denn sie werden Gottes Kinder heißen. Selig sind, die um der Gerechtigkeit willen verfolgt werden; denn ihrer ist das Himmelreich. Selig seid ihr, wenn euch die Menschen um meinetwillen schmähen und verfolgen und reden allerlei Übles gegen euch, wenn sie damit lügen. Seid fröhlich und getrost; es wird euch im Himmel reichlich belohnt werden. Denn ebenso haben sie verfolgt die Propheten, die vor euch gewesen sind. **Salz und Licht** Ihr seid das Salz der Erde. Wenn nun das Salz nicht mehr salzt, womit soll man salzen? Es ist zu nichts mehr nütze, als dass man es wegschüttet und lässt es von den Leuten zertreten. Ihr seid das Licht der Welt. Es kann die Stadt, die auf einem Berge liegt, nicht verborgen sein. Man zündet auch nicht ein Licht an und setzt es unter einen Scheffel, sondern auf einen Leuchter; so leuchtet es allen, die im Hause sind. So lasst euer Licht leuchten vor den Leuten, damit sie eure guten Werke sehen und euren Vater im Himmel preisen. **Jesu Stellung zum Gesetz** Ihr sollt nicht meinen, dass ich gekommen bin, das Gesetz oder die Propheten aufzulösen; ich bin nicht gekommen aufzulösen, sondern zu erfüllen. Denn wahrlich, ich sage euch: Bis Himmel und Erde vergehen, wird nicht vergehen der kleinste Buchstabe noch ein Tüpfelchen vom Gesetz, bis es alles geschieht. Wer nun eines von diesen kleinsten Geboten auflöst und lehrt die Leute so, der wird der Kleinste heißen im Himmelreich; wer es aber tut und lehrt, der wird groß heißen im Himmelreich. Denn ich sage euch: Wenn eure Gerechtigkeit nicht besser ist als die der Schriftgelehrten und Pharisäer, so werdet ihr nicht in das Himmelreich kommen. **Vom Töten** Ihr habt gehört, dass zu den Alten gesagt ist (2.Mose 20,13; 21,12): »Du sollst nicht töten«; wer aber tötet, der soll des Gerichts schuldig sein. Ich aber sage euch: Wer mit seinem Bruder zürnt, der ist des Gerichts schuldig; wer aber zu seinem Bruder sagt: Du Nichtsnutz!, der ist des Hohen Rats schuldig; wer aber sagt: Du Narr!, der ist des höllischen Feuers schuldig. Darum: wenn du deine Gabe auf dem Altar opferst und dort kommt dir in den Sinn, dass dein Bruder etwas gegen dich hat, so lass dort vor dem Altar deine Gabe und geh zuerst hin und versöhne dich mit deinem Bruder, und dann komm und opfere deine Gabe. Vertrage dich mit deinem Gegner sogleich, solange du noch mit ihm auf dem Weg bist, damit dich der Gegner nicht dem Richter überantworte und der Richter dem Gerichtsdiener und du ins Gefängnis geworfen werdest. Wahrlich, ich sage dir: Du wirst nicht von dort herauskommen, bis du auch den letzten Pfennig bezahlt hast. **Vom Ehebrechen** Ihr habt gehört, dass gesagt ist (2.Mose 20,14): »Du sollst nicht ehebrechen.« Ich aber sage euch: Wer eine Frau ansieht, sie zu begehren, der hat schon mit ihr die Ehe gebrochen in seinem Herzen. Wenn dich aber dein rechtes Auge zum Abfall verführt, so reiß es aus und wirf's von dir. Es ist besser für dich, dass eins deiner Glieder verderbe und nicht der ganze Leib in die Hölle geworfen werde. Wenn dich deine rechte Hand zum Abfall verführt, so hau sie ab und wirf sie von dir. Es ist besser für dich, dass eins deiner Glieder verderbe und nicht der ganze Leib in die Hölle fahre. Es ist auch gesagt (5.Mose 24,1): »Wer sich von seiner Frau scheidet, der soll ihr einen Scheidebrief geben.« Ich aber sage euch: Wer sich von seiner Frau scheidet, es sei denn wegen Ehebruchs, der macht, dass sie die Ehe bricht; und wer eine Geschiedene heiratet, der bricht die Ehe. **Vom Schwören** Ihr habt weiter gehört, dass zu den Alten gesagt ist (3.Mose 19,12; 4.Mose 30,3): »Du sollst keinen falschen Eid schwören und sollst dem Herrn deinen Eid halten.« Ich aber sage euch, dass ihr überhaupt nicht schwören sollt, weder bei dem Himmel, denn er ist Gottes Thron; noch bei der Erde, denn sie ist der Schemel seiner Füße; noch bei Jerusalem, denn sie ist die Stadt des großen Königs. Auch sollst du nicht bei deinem Haupt schwören; denn du vermagst nicht ein einziges Haar weiß oder schwarz zu machen. Eure Rede aber sei: Ja, ja; nein, nein. Was darüber ist, das ist vom Übel. **Vom Vergelten** Ihr habt gehört, dass gesagt ist (2.Mose 21,24): »Auge um Auge, Zahn um Zahn.« Ich aber sage euch, dass ihr nicht widerstreben sollt dem Übel, sondern: wenn dich jemand auf deine rechte Backe schlägt, dem biete die andere auch dar. Und wenn jemand mit dir rechten will und dir deinen Rock nehmen, dem lass auch den Mantel. Und wenn dich jemand nötigt, eine Meile mitzugehen, so geh mit ihm zwei. Gib dem, der dich bittet, und wende dich nicht ab von dem,

der etwas von dir borgen will. **Von der Feindesliebe** Ihr habt gehört, dass gesagt ist: »Du sollst deinen Nächsten lieben« (3.Mose 19,18) und deinen Feind hassen. Ich aber sage euch: Liebt eure Feinde und bittet für die, die euch verfolgen, damit ihr Kinder seid eures Vaters im Himmel. Denn er lässt seine Sonne aufgehen über Böse und Gute und lässt regnen über Gerechte und Ungerechte. Denn wenn ihr liebt, die euch lieben, was werdet ihr für Lohn haben? Tun nicht dasselbe auch die Zöllner? Und wenn ihr nur zu euren Brüdern freundlich seid, was tut ihr Besonderes? Tun nicht dasselbe auch die Heiden? Darum sollt ihr vollkommen sein, wie euer Vater im Himmel vollkommen ist.
Peter Lauster: Lächeln, loben, lieben und loslassen erleichtern Kontakt. M̃arcel: Sein und Haben 1954; Staehelin: Haben und Sein. Vom Wesen der 2. Wirklichkeit der Natur jedes Menschen 1969; Staehelin: Haben und Sein. Ein medizinpsychologischer Vorschlag als Ergänzung zum Materialismus der heutigen Wissenschaft. Fünfter Beitrag zur Wirklichkeitsanalyse 1969; **Fromm: Haben und Sein** 1976 **Besitzen/Privateigentum/Geschäftigkeit/Betriebsamkeit** versus **Liebe/Teilen/Unabhängigkeit/Freiheit/innere Aktivität/Toleranz/Hilfsbereitschaft/Bedürfnislosigkeit/Friedfertigkeit** a la Mahatma Gandhi, Martin Luther King, Albert Schweitzer, Ivan Illich. **Gandhi: Eine Autobiographie** oder Die Geschichte meiner Experimente mit der Wahrheit 1977; Decroissance. Schrumpfung. Rainer Funk: Ich und Wir. Psychoanalyse des postmodernen Menschen 2005; R̃ainer Funk: Der entgrenzte Mensch. Warum ein Leben ohne Grenzen nicht frei, sondern abhängig macht 2011; Kersten Reich: Der entgrenzte Mensch und die Grenzen der Erde B̃d1. Wie Erziehung und Verhalten die Nachhaltigkeit erschweren 2021; Bd2. Wie Ökonomie und Politik die Nachhaltigkeit verhindern 2021; **Einstein: Über den Frieden** 1975, 2% Verweigerer genügen. Rolland: Naiv, 2% genügen, um die immer effektiveren Waffen zu handhaben p20ff Einstein ist empört über die Kriegsbegeisterung der Deutschen, insbesondere der nationalistischen Haltung der Intellektuellen, die den **Aufruf an die Kulturwelt** = Dokument der 93 zum Beginn des 1. Weltkriegs unterschrieben: Planck, Bode, Behring, Haeckel, Felix Klein, Max Liebermann, Paul Ehrlich. Wenige Tage später ließen GF Nicolai, O. Bueck, W. Foerster und A. Einstein an der Kaiser-Wilhelm-Uni den **Aufruf an die Europäer** kursieren, der ignoriert wurde. **Anti-Kriegsliteratur:** Zur deutschen Kriegsverherrlichung, Bellizismus, Kriegsbegeisterung gegen Frankreich lies **Franz Marc: Briefe aus dem Felde 1914-1916** 1920, Krieg als Abenteuer. Krankes Europa muss durch Krieg geheilt werden! Kurz vor seinem Tod im Felde: **Krieg als gemeinster Menschenfang**. Morelli: Die Prinzipien der Kriegspropaganda 2014; Zweig: Der Streit um den Sergeanten Grischa 1927; Zweig: Junge Frau von 1914, 1931; Zweig: De Vriendt kehrt heim 1932; Zweig: Erziehung vor Verdun 1935; Trakl: Klage. Grodek 1915; Fühmann: Vor Feuerschlünden. Erfahrung mit Georg Trakls Gedicht 1984; **Barbusse: Das Feuer. Tagebuch einer Korporalschaft** 1916; Barbusse: Briefe von der Front an seine Frau 1914-1917 1974; Ernst Friedrich: Krieg dem Kriege 1924; Renn: Krieg 1928; Heisig, Bernhard: Krieg. 24 Lithografien zu Ludwig Renn 1979; Nathan, Norden, Russell: **Einstein. Über den Frieden** 1960; Boris Polewoi: Der wahre Mensch 1946; Thürk: Die Stunde der toten Augen 1957 Fallschirmjäger Ende 1944 bei Nemmersdorf/Ostpreußen Rothmann: Im Frühling sterben 2015 Vernichtung der Waffen-SS März/April 1945 bei Stuhlweißenburg; **Lem: Frieden auf Erden** 1986 Alle Waffenarsenale und deren Weiterentwicklung auf den Mond ausgelagert; Vincent Cheynet. Serge Latoche. Wallerstein: Die Barbarei der anderen. Europäischer Universalismus 2010; Illich: Entmündigung durch Experten. Zur Kritik de Dienstleistungberufe 1979; **Ivan Illich:** Meine Arbeit ist ein Versuch, mit großer Traurigkeit die Tatsache der westlichen Kultur zu akzeptieren. [Christopher] Dawson sagt, dass die Kirche Europa ist und Europa die Kirche, und ich sage: Ja! Corruptio optimi quae est pessima [Die Verderbnis des Besten ist das Schlimmste]. Durch den Versuch, die Offenbarung zu sichern, zu garantieren, zu regeln, wird das Beste zum Schlimmsten. Ich lebe außerdem in einem Gefühl größter Zwiespältigkeit. Ich komme nicht ohne Tradition aus, aber ich muss erkennen, dass ihre Institutionalisierung die Wurzel von etwas Bösem ist, das tiefer geht als alles Böse, das ich mit unbewaffnetem Auge und Geist erkennen könnte. **Lorenz: Die Naturwissenschaft vom menschlichen Geiste**, PhysBl 29 1973 p243-251; **Nicholas Georgescu-Roegen:** Thermodynamik und Wirtschaftswissenschaften. Meinhard Miegel. Andre Gorz: Das Ziel einer Gesellschaft, in der ein(e) jede(r) weniger arbeitet, damit alle Arbeit finden und besser leben können, wird somit heute zu einem der wichtigsten Faktoren des Zusammenhalts der Gewerkschaft und der Erneuerung sozialer Freiheitsbewegungen. Austerität. Die Reklame-Zerstörer. Weniger konsumieren. Weniger haben um besser zu leben. Genügsamer le-

ben. Schrumpfung der Wirtschaft (weniger Produktion). De-Globalisierung. Weg vom Kapitalismus. Ausstieg aus der Automobil-Industrie. Verkürzung der Arbeitszeit. Abschaffung von Werbung (sie schaffe künstliche Bedürfnisse und verunstalte die Landschaft). **Vereinfache dein Leben!** Wachstumsrücknahme. Weiniger verbrauchen. **Das Rad, das Auto**, PhysBl28 1972 p240; Godfrey Reggio1940-:**Koyaanisqatsi. Life Out of Balance** 1982 Philip Glass1937, Michael Hoenig1952- Walter Bachauer. Hopi-Indianer zum 'Leben sehr fern vom Gleichgewicht': **Wenn wir wertvolle Dinge aus dem Boden graben, laden wir das Unglück ein. Wenn der Tag der Reinigung nah ist, werden Spinnweben hin und her über den Himmel gezogen. Ein Behälter voller Asche wird vom Himmel fallen, der das Land verbrennt und die Ozeane verkocht.** McManners: Trekking kompakt 1996 oder Survival-Handbuch. Überleben in der Wildnis 2013 Wie baue ich ein Iglu; Buzek: Das grosse Buch der Überlebenstechniken 2009; Vogel: Trinkwasserversorgung in Extremsituationen. Survivalwissen für Notfälle und auf Reisen 2014; Vogel: Outdoor- und Survivalmedizin: Selbstbehandlung in Extremsituationen 2013; Gerhard Bönicke: Tornister-Lexikon für Frontsoldaten 1943; Wiliam James: Der Wille zum Glauben 1907 = Glauben fassen und losmarschieren! Aristoteles: Nikomachische Ethik. **Glück** als Endziel des uns möglichen Handelns. Keßler: Die Verantwortung des Christen in der Welt. **Evangelische Religionslehre** 2 1999 p242 Ehe; Freud: Vorlesungen zur Einführung in die Psychoanalyse 1990; Jacques Lacan 1901-1981 DLF; Freud: Neue Folge der Vorlesungen zur Einführung in die Psychoanalyse 1940, 1991; **Freud: Glück = Erfüllung der Kinder- und Jugendträume.** Setzt aber, wie Moral Fähigkeit zur zeitlichen Perspektive voraus. Das höchste von allen Gütern, die man durch Handeln erreichen kann, ist das Glück. Glück ist ein Tätigsein der Seele im Sinne der ihr wesenhaften Tüchtigkeit. a] Genuss (Ochs), b] Leben im Dienste der Gemeinschaft c] Hingabe an Philosophie. Autarkie = für sich allein genügend., Die Seele, Physik; Bilstein & Winzen: Seele. Konstruktion eines Innerlichen in der Kunst 2004; Laster führen zum Tod der Seele. Martin Hubert: Ein Hirn und eine Seele – Neurowissenschaft trifft Psychoanalyse http://www. dradio. de/ dlf/sendungen/ wib/1490448/ **Seelentod:** Tod, der aus der Seele kommt. Gary Bruno Schmid. Menschen haben faszinierende Kräfte in sich. **Glauben:** Placebo vs Nocebo. Psychosomatik. Robert Spaemann: Im Glauben geht es um das Gute und das Böse, um ethische Positionen. In Wissenschaft geht es korrekt (mathematische Modelle, Messung im Experiment und deren bayesinische Bewertung) und falsch. **Lässliche Todsünden: Trägheit, Gefräßigkeit, Wollust, Zorn, Hochmut, Neid und Habgier. Tod:** Nonfunktionalität (belebte und unbelebte Natur, Verlust aller Lebensfunktionen durch Tod), Irreversibilität, Universalität (jedes Lebewesen muss sterben), Kausalität (Ursache des Sterbens ist in der Regel biologisch bedingt). Lorenz1903-1989 Königsberg, Rassenkundler: Das Jahr der Graugans 1978; Vollmer: Evolutionäre Erkenntnistheorie 1975; Lorenz: Die acht Todsünden der zivilisierten Menschheit 1973 p36ff Werbung verbieten! Acht gesellschaftliche Phänomene = Vorgänge der Dehumanisierung, die als Konflikt zwischen der biologischen Natur des Menschen und den von der sozialen Umwelt erzwungenen Verhaltensweisen deutbar: **1.** die Überbevölkerung der Erde: das Leben als Ganzes entspricht einem Regelkreis mit positiver Rückkoppelung und das System ist labil (Signal wird ständig verstärkt, dies führt durch Fehlen eines negativen Feedbacks zu einer Lawine); die maßlose Vermehrung des Menschen ist Ursache für die meisten Todsünden; die Gaben, die der Mensch durch Einsichten in Natur, Fortschritte der Technologie, die chemisch/medizinischen Wissenschaften erhält, führen so zum Verderben; die Fähigkeit zu sozialem Kontakt wird beim Großstadt-Menschen ständig überfordert; die Nächstenliebe ist in den Massen der Nächsten verdünnt; es erfolgt eine Konzentration der warmen Gefühle auf geringe Zahl an Freunden, denn wir sind nicht so beschaffen, dass wir alle Menschen lieben können = not to get emotionally involved; zusammengepfercht sein, führt nicht nur zur Erschöpfung und Versandung zwischenmenschlicher Beziehungen sondern wirkt unmittelbar aggressionsauslösend; **2.** die Verwüstung des natürlichen Lebensraums, die nicht nur die äußere Umwelt zerstört, in der wir leben, sondern auch im Menschen selbst alle Ehrfurcht vor der Schönheit und Größe einer über ihn stehenden Schöpfung; **Jäkel: Umweltschutz** 1992; Bliefert: Umweltchemie 1997; **3.** die übermäßige Beschleunigung aller gesellschaftlichen Prozesse, der die Entwicklung der Technologie zu unserem Verderben immer rascher vorantreibt, die Menschen blind für alle wahren Werte macht und ihnen die Zeit nimmt, der wahrhaft menschlichen Tätigkeit der **Reflexion** zu obliegen; **4.** den Drang zu sofortiger Befriedigung aller Bedürfnisse (Hedonismus). Der Schwund aller starken Gefühle und Affekte durch Verweichlichung. Fortschreiten von Technologie und

Pharmakologie fördern eine zunehmende **Intoleranz** gegen alles im geringsten Unlust Erregende. Damit verschwindet die Fähigkeit der Menschen, jene Freuden zu erleben, die nur durch herbe Anstrengung beim Überwinden von Hindernissen gewonnen werden kann. Der naturgewollte Wogengang der Kontraste von Freud und Leid verebbt in unmerklichen Oszillationen namenloser Langeweile; **5.** den genetischen Verfall wegen des Wegfalls der natürlichen Auslese; Innerhalb der modernen Zivilisation gibt es – außer den natürlichen Rechtsgefühlen und manchen überlieferten Rechtstraditionen – keine Faktoren, die einen Selektionsdruck auf die Entwicklung und Aufrechterhaltung sozialer Verhaltensnormen ausüben, wiewohl diese mit dem Anwachsen der Sozietät immer nötiger werden. Es ist nicht auszuschließen, dass viele Infantilismen, die große Anteile der heutigen „rebellierenden" Jugend zu sozialen Parasiten machen, möglicherweise genetisch bedingt sind. **6.** den Verlust bewährter Traditionen. Es wird dadurch bewirkt, dass ein kritischer Punkt erreicht ist, an dem es der jüngeren Generation nicht mehr gelingt, sich mit der älteren kulturell zu verständigen, geschweige denn zu identifizieren. Sie behandeln diese daher wie eine fremde ethnische Gruppe und begegnen ihr mit nationalem Hass. Die Gründe für diese Identifikationsstörung liegen vor allem im mangelnden Kontakt zwischen Eltern und Kindern, was schon im Säuglingsalter pathologische Folgen zeitigt. Petermann: LB der Klinischen Kinderpsychologie und -psychotherapie 1999[4]; **Textor: Verhaltensauffällige Kinder fördern. Praktische Hilfen für Kindergarten und Hort** 2004; Margraf: LB der Verhaltenstherapie Bd1 Diagnostik, Verfahren. Bd2 Störungen 1996; Faßnacht: Systematische Verhaltensbeobachtung 1993; **7.** die zunehmende Indoktrinierbarkeit. Die Vermehrung der Zahl der in einer einzigen Kulturgruppe vereinigten Menschen führt im Verein mit der Vervollkommnung technischer Mittel zur Beeinflussung der öffentlichen Meinung zu einer Uniformierung der Anschauungen, wie es zu keinem Zeitpunkt der Menschheitsgeschichte bestanden hat. Dazu kommt, dass die suggestive Wirkung einer fest geglaubten Doktrin mit der Anzahl ihrer Anhänger wächst, vielleicht sogar in geometrischer Proportion. Schon heute wird mancherorts ein Individuum, das sich der Wirkung der Massenmedien z.B. des Fernsehers, bewusst entzieht, als pathologisch betrachtet. Flusser: Dinge und Undinge. Phänomenologische Skizzen 1990; **Großklaus: Medien-Bilder. Inszenierung der Sichtbarkeit** 2004 Die entindividualisierenden Effekte sind allen jenen willkommen, die große Menschenmassen manipulieren wollen. Meinungsbildung, Werbetechnik und geschickt gesteuerte Mode helfen den Großproduzenten diesseits und den Funktionären jenseits des Eisernen Vorhanges zu gleichartiger Macht über die Massen. Internationales Jahrbuch für Medienphilosophie 2016; **Massenmedien** generieren eine Vielzahl individueller Adressen der Erinnerung in der sich rasant wandelnden Welt. Schaffen kollektives Gedächtnis, indem sie dem jeweiligen Zeitgefühl eine Sprache verleihen, Identifikation ermöglichen, Abgrenzung benennen, Politisierung und Protest vorbereiten. Vormals genügte die Bibel, dann Kunstwerke. Beat-Club. Glogauer: Die neuen Medien verändern die Kindheit 1998[4]; Eco: Apokalyptiker und Integrierte. Zur kritischen Kritik der Massenkultur 1964; Luhmann: Die Realität der Massenmedien 1996 beschreibt die Prä-Smartphone-Amazon-Google-Ähra; **Eskapismus** = Wirklichkeitsflucht = wichtiges Motiv der Mediennutzung: Befriedigung affektiver Bedürfnisse/Weltflucht + Befriedigung kognitiver Bedürfnisse/Wissenserweiterung. Hans-Bredow-Institut Medien von A-Z 2006; **8.** die Kernwaffen, heute die elektronische Vernetzung. Mensch verfügt über mehr echt instinktive Antriebe = Verhaltensprogramme als jedes Tier! Weil es Haß, Liebe, Freundschaft, Zorn, Treue, Anhänglichkeit, Mißtrauen, Vertrauen gibt. **Kulturphilosophische Axiome:** 1.„Die Geschichte der menschlichen Gesellschaften vollzieht sich nach den gleichen biologischen Gesetzmäßigkeiten wie im Tierreich. Schedel: Weltchronik 1493; 2. Soziale und ökonomische Gegebenheiten und Bedingungen sind nur von zweitrangiger Bedeutung, denn auch sie unterliegen allein Naturgesetzlichkeiten. 3. Der Einfluß von menschlichen Erkenntnisfähigkeiten, vorausschauender Planung und selbstverwirklichender Handlungsfähigkeit auf die Kulturentwicklung sind von sekundärer Bedeutung. **Lorenz: Die Naturwissenschaft vom menschlichen Geiste**, PhysBl 29 1973 p243-251; Wuketits: Konrad Lorenz. Leben und Werk eines großen Naturforschers 1990; **Ethologie** = klassische vergleichende Verhaltensforschung. Gewohnheit, Sitte, Brauch Tembrock: Verhaltensbiologie 1987; Dylla & Krätzner: Verhaltensforschung 1990; Knoll & Marek: Verhalten 1990; Geißler & Tembrock: Natürliche Evolution von Lernstrategien 1990; Lorenz: Das sogenannte Böse: Zur Naturgeschichte der Aggression 1974; Die Deutschen beschwiegen den Einmarsch der Allierten als Zusammenbruch. Der Umgang der Verlierer/Deutschen mit ihrer Wahrnehmung des Dritten Reiches, ihres Lebens von 1933 bis

1945, ihrer Begeisterung für Hitler aus psychoanalytischer Sicht findet sich gut beschrieben durch **Alexander 1908-82 & Margarete 1917-2012 Mitscherlich: Die Unfähigkeit zu trauern. Grundlagen kollektiven Verhaltens** 1967. Willy Zielke: Das Stahltier 1935; Willy Zielke: Olympia 1938; Rössler: Filmfieber. Deutsche Kinopublizistik 1917-1937, 2017; **Vor 1945:** Deutsche = Herrenrasse, andere Untermenschen. Lies Mein Kampf. Blitzkriegerfolg = Deutsche tatsächlich überlegen. Hitler scheint genial, überlegen, weiss, wo es lang geht = gottgleich. Hitler wird als Wunschfigur angehimmelt. Hitlerliebe = Selbstliebe, Idol. W̃yndham Lewis: Hitler und sein Werk in englischer Beleuchtung 1932; **Nach 1945:** Traum geplatzt. Viele Deutsche verloren ihr Leben. Viele Deutsche haben gemordet. Deutschland wird vom Ausland regiert. a] Deutsche empfinden sich als Opfer Hitlers, die eben einen Krieg verloren haben und Anspruch auf die verlorenen Ostgebiete. b] Deutsche blenden Kollektivschuld aus = Derealisierung. c] Deutsche müssen ertragen, dass sie nicht zur Herrenrasse gehören. d] Deutsche hätten über den verlorenen Führer trauern müssen. e] Deutsche haben mit Führerkult nie gebrochen. Neuer Führer ist USA/UdSSR. f] Deutsche stilisieren sich zu Betrogenen. Führer hat sie belogen. g] Bundesdeutsche übernehmen US-amerikanischen Antikommunismus. Erst der böse jüdische Bolschewismus, dann böse Nazis, jetzt böse Russen. Propagandaausstellung zur Stärkung des deutschen Durchhaltewillens 8.5.1942 **Das Sowjet-Paradies**: Wo früher blühende Dörfer standen, herrscht heute (1942) das graue Elend der Kolchose[25]. Hier lebt der russische Bauer als Arbeitssklave auf dem Boden, der ihm einst gehörte. Das Vieh verkommt in verfallenen Ställen. Das sind die verhängnisvollen Ergebnisse einer über zwanzigjährigen Blutherrschaft der jüdischbolschewistischen Terrorclique. Es braucht deutsche Verwaltung zur sachgemäßen Nutzung von Acker und Bodenschätzen. Bislang nutzten die Bolschewiken die Bodenschätze nur zum Aufbau ihrer Angriffsarmee gegen Europa. https://germanpropaganda.org/soviet-paradise-exhibition/ Die US-Amerikanischen Strategen hofften sehr auf den Sieg Deutschlands und mussten sich wegen der sowjetischen Gegenoffensive am Ende des 2.WKs sehr beeilen, um noch einen Fuß ins Haus Europa zu bekommen. Hätten es die Deutschen gesiegt, so hätten die US-Amerikaner mittels Kernwaffen ihre Interessen durchgesetzt. Durch den Nürnberger Prozess 20.11.1945-1.10.1946 sprachen sie einige Nazis schuldig und die Deutschen frei. Die West-Deutschen mussten für den neuen Russlandfeldzug/Kalter Krieg kein schlechtes Gewissen haben. h] Den Ostdeutschen machen es die Sieger einfach: die bösen Nazis sitzen sämtlich in der Bundesrepublik. Diese Absolution sichert, dass niemand über seine Wahrnehmung vor 1945 spricht. i] Deutsche gehen wahnhaft in den nationalen Wiederaufbau = Wirtschaftswunder = heimliche Beweisführung: Wir sind die Besten/Größten. **Zischka: War es ein Wunder? Zwei Jahrzehnte deutschen Wiederaufstiegs** 1966; Kershaw: Hitler 1889–1945 2009; **Thamer & Erpel: Hitler und die Deutschen. Volksgemeinschaft und Verbrechen**. Ausstellungskatalog 2010. Der Kalte Krieg sah keine Trauerphase vor. Eret: Manfred läuft Amok. Die Psychologie der Verzweiflungstat 1987; Strasser: Ontologie des Teufels. Das Böse in der Welt. Mit einem Anhang: Über das Radikalgute 2016; Drewermann: Die Spirale der Angst 1991; Drewermann: Strukturen des Bösen. Die jahwistische Urgeschichte in exegetischer/psychoanalytischer/philosophischer Sicht 3Bd 1978 Jawist = **J** = JHWH = Quellenschrift = fünf Bücher Mose = **Pentateuch**. Bernanos: Tagebuch eines Landpfarrers. Kierkegaard: Sünde des Menschen = Angst. **de Unamuno: Nebel** 1914 Und so wandeln wir ohne Ende dahin, das Knäul unseres Schicksals abwickelnd, indem wir die ganze Unzulänglichkeit auflösen, die uns während einer Ewigkeit erschuf, und indem wir dem Nichts entgegenschreiten, ohne je dahin zu gelangen, da es ja nie wirklich existiert. **Imhof: Die gewonnenen Jahre. Von der Zunahme unserer Lebensspanne seit 300 Jahren ODER von der Notwendigkeit einer neueen Einstellung zu Leben und Sterben** 1981; Harald Welzer: Ausweg aus dem zerstörerischen Lebensstil der Koexistenz von Besorgnisindustrie und totalitärem Konsumuniversum ist individuelle Einübung eines anderen Lebensstils. SZ 31. Dezember 2012, p2. Welzer: Perspektiven einer nachhaltigen Entwicklung. Wie sieht die Welt im Jahr 2050 aus? 2011; Pauen & Welzer: Autonomie. Eine Verteidigung 2015; W̃elzer: Nachruf auf mich selbst. Die Kultur des Aufhörens

[25] Durch den kurzen Frankreichfeldzug war die Wehrmacht verwöhnt worden. Kostenfreier Abenteuerurlaub. Weib, Wein und gutes Essen. Kost und Logis frei. Im Osten erst Staub und Ödnis, dann Morast und Kälte. Wie sollten die vielen Gefangenen und Untermenschen ernärt werden? Lösung brachte die Wannseekonferenz.

2021; Weitermachen banalisiert. Welzer: Wir müssen aufhören Dezember 2021 Sternstunde Philosophie bei 3sat-Interview; **Wrigham: Ich bin raus** 2016; Graf: Aussteigen - Light! Ein familientauglicher Ratgeber wie man mit wenig Geld komfortabel lebt 2015; Hermanus: Minimalismus. Mit weniger zu mehr

Psychisch beginnt der Sterbeprozess, wenn ich anfange, mich mit meiner baldigen Endlichkeit auseinanderzusetzen. Und biologisch abgeschlossen ist er, wenn die letzte Zelle tot ist. Ist es nicht auch im Sinne des Patienten, ihm seinen Tod nicht so brutal vor Augen zu führen? Nein, denn oft ist es eine unglaubliche Erlösung für den Patienten, gesagt zu bekommen, dass er jetzt nicht mehr kämpfen muss. Aber: Auch der Patient muss signalisieren, dass er jetzt bereit ist zu hören, dass er stirbt. Solange der Patient noch total fixiert auf alles technisch und medizinisch Machbare ist, gibt es gar keinen Raum für die Wahrheit. Solomon, Greenberg, Pyszczynski: Der Wurm in unserem Herzen 2016 Konsum als Todesbewältigung;

Nietzsche: Man muss das Unvermeidliche wollen! P̃olanyi: Jenseits des Nihilismus 1961;

Albert **Bandura** 1977 Theorie der **Selbstwirksamkeitserwartung** (SWE) - Überzeugung, aufgrund eigener Fähigkeiten Einfluss nehmen zu können. **Anpassungsleistung angesichts des völligen Zusammenbruchs der Welt oder Anpassungsstörung.** Das Seelische verfügt über Mechanismen und kulturelle Hilfsformen, mit denen es nach schweren Schicksalen das Gleichgewicht wieder finden kann. Bei Alten findet man das Wohlbefindens-Paradox und ein gutes Selbstwirksamkeitsgefühl. **Selbstkontrolle** GuG H11 2015 p19; **Selbstüberwachung** GuG H11 2015 p46-51 Hohe Selbstüberwachung = pragmatisch, nutzenorientiert, Empathiker, Missachtung der Ethik zugunsten der Ästhetik. Niedrige Selbstüberwachung = prinzipientreu, Kernüberzeugungen, konsequent, ehrlich. **Rößler: Hausrezepte für den Ruhestand 1978**; Tom Perls: 100-Jährige a] Schwere Kindheitserkrankung, die zu massiver Imunisierung führt. b] Delayers - späte Alterserkrankungen. c] Escaper, die nie was hatten und dann in kurzer Zeit versterben. All a question of age? How the brain and behaviours develop over time. Why do some people become depressed when subjected to stress while others do not? Why don't all people remain sharp in old age? With a wealth of new data from empirical studies in neuroscience and behavioural science, scientists are increasingly able to describe such differences. But viable explanations for the causes of such differences remain elusive. The ability to learn or to make decisions changes over a person's life as the brain changes. Why some people remain sharp in old age and others don't is a question. http://www. mpg. de/8040652/Max-Planck-Forum-Berlin-All-a-Question-of-Age Nitsch, Allmer, Fuchs, Hackfort, Launier, Lazarus, Levi, McGrath, Rutenfranz, Selye, Tschakert, Udris, Weidemann: **Stress. Theorien, Untersuchungen, Maßnahmen** 1981; Schaarschmidt & Fischer: Bewältigungsmuster. Persönlichkeitsunterschiede in de Auseinandersetzung mit der Arbeitsbelastung 2001; Schwarzer: Stress, Angst, Hilflosigkeit. Die Bedeutung von Kognitionen und Emotionen bei der Regulation von Belastungssituationen 1987, 2000[4]; Möller: Emotionen, Kognitionen und Schulleistung 1996; Rudow: Die Arbeit des Lehrers. Zur Psychologie der Lehrertätigkeit, Lehrerbelastung und Lehrergesundheit 1994; Vaitl & Petermann: Handbuch der Entspannungsverfahren Bd1 Grundlagen und Methoden 1993 Imaginamtion, Interozeption, Hypnose, autogenes Training, Meditation, progressive Muskelentspannung, Biofeedback, Psychopharmaka. Bd2 Anwendungen. Angst-, Schlaf-Störungen, Schmerz, Herz, Zahn, Ashma, Reha;

Schopenhauer: Man kann zwar tun, was man will, aber nicht wollen, was man will.

Nagel: Was bedeutet das alles?; Wie ist es, eine Fledermaus zu sein? Geist und Kosmos 2013, Geist ist schon immer da, kann nicht emergieren oder entstehen! Materie verfüge über geistige Eigenschaften = Panpsychistische Theorie. Biologie kann keine rein physikalische Wissenschaft sein. Kritik am vorherrschenden naturalistischen Modell ohne kreationistische Argumente. Thomas Nagel: Perversion = sexuelle Neigungen, bei deren Realisierung die Wechselseitigkeit des Verlangens keine Rolle spielt, vs Reife Sexualität = Erregungsmuster einer voll entwickelten Sexualität zeichnet sich durch das Moment eines reflexiv wechselseitigen Erkennens aus. Partner wird dadurch erregt, dass er das Verlangen seines Gegenüber nach seiner Erregung bemerkt - und umgekehrt. Aber nicht artwidrig ist das töten von Tieren. Philosopie Magazin 2/2013 p11; Nagel: Was bedeutet das alles? Eine ganz kurze Einführung in die Philosophie 1990, 2012; Geert Keil: Willensfreiheit, de Gruyter 2007; Max Planck: Vom Wesen der Willensfreiheit, Leipzig 1936; **Libet-Experiment:** =

Messung des zeitlichen Abstands von 400ms, der zwischen Nervenaktivität im Gehirn, die einer bestimmten Handbewegung einleitend vorausgeht, und dem erst danach erfolgenden Bewusstwerden der dazu gehörenden Handlungsentscheidung liegt. Kühn und Brass: auch Veto-Entscheidungen werden unbewusst getroffen und erst 100ms später als freie Entscheidungen empfunden. Holbach 1770: Determinismus spricht gegen Willensfreiheit. Aber Willensfreiheit bezieht sich auf rationale Begründung. Libet 1979: Hirnpotenziale sprechen gegen Willensfreiheit. 3sat Doku: Ist der freie Wille eine Illusion? in 3 Teilen auf YouTube; Roth-Habermas-Debatte: Kategorienfehler!

Ansgar Beckermann: Haben wir einen freien Willen? http://www. philosophieverstaend lich. de/freiheit **Handlungsfreiheit:** Eine Person ist in ihrem Handeln frei, wenn sie tun kann, was sie tun will. **Willensfreiheit:** Eine Person ist in ihrem Wollen frei, wenn sie die Fähigkeit hat, ihren Willen zu bestimmen, zu bestimmen, welche Motive, Wünsche und Überzeugungen handlungswirksam werden sollen. **Die konditionale Analyse von Können:** Eine Person kann X tun (hat die Fähigkeit, X zu tun), wenn sie X tut, falls sie sich entscheidet, X zu tun. **Willensfreiheit nach Moore:** Eine Person ist in ihrem Wollen frei, wenn sie wollen kann, was sie wollen will. **Willensfreiheit nach Frankfurt:** Eine Person ist in ihrem Wollen frei, wenn auf der erste Stufe die Wünsche handlungswirksam werden, von der sie auf der zweiten Stufe will, dass sie handlungswirksam werden. **Willensfreiheit nach Locke:** Eine Person ist in einer Entscheidung frei, wenn sie erstens die Fähigkeit besitzt, vor der Entscheidung innezuhalten und zu überlegen, was zu tun richtig wäre, und wenn sie zweitens die Fähigkeit besitzt, dem Ergebnis dieser Überlegung gemäß zu entscheiden und zu handeln. **Peter Bieri: Das Handwerk der Freiheit. Über die Entdeckung des eigenen Willens**, 2001: Auch wenn die Naturgesetze bestimmen, was wir tun und denken, können wir uns unter Berücksichtigung der jedem Menschen gegebenen Bedingtheiten als frei verstehen. Frei sind wir in diesem Sinne genau dann, wenn wir unseren eigenen Überzeugungen gemäß handeln können. Ein solcher Freiheitsbegriff, der ein bewusstes Reflektieren und eine bewusste Entscheidung voraussetzt, aber auch für möglich hält, steht nicht im Gegensatz zum Determinismus. Die Idee einer „absoluten Freiheit", die gegen den Determinismus gerichtet ist, ist begrifflich inkohärent. Zusammenhänge zwischen neuronalen Vorgängen und einer Willensentscheidung sind nachweisbar, bevor sich der Mensch der Entscheidung bewusst ist. Dadurch sei bewiesen, dass menschliche Entscheidungen alleine abhängig sind von den Genen und neuronalen Vorgängen, die determiniert sind durch frühkindliche Ereignisse und Erfahrungen aller Lebensjahre. **Bieri kritisiert diese Argumentation als Kategorienfehler:** „denken wir uns jemand, der ein Bild zerlegte, um herauszufinden, was es darstellt ... Es geht nie gut, wenn wir Fragen, die sich auf der einen Beschreibungsebene stellen, auf einer anderen beantworten." **Bieri: Wie wollen wir leben?** 2011 Wir wollen in Einklang mit unseren eigene Gedanken, Gefühlen und Wünschen leben. Wir möchten nicht, dass uns jemand vorschreibt, was wir zu denken, zu sagen und zu tun haben. Keine Bevormundung, Drohung, Unterdrückung. Keine äußere Tyrannei! **Im Rahmen von Regeln, deren Geltung wir mitbestimmen, frei von äußeren Zwängen.** Innere Selbständigkeit. **Idee der Selbstbestimmung,** obgleich ich in jedem Moment in einem kausalen Kräftefeld von eigener Vergangenheit und fremdem Einfluss bin. **Sich selbst zum Thema werden,** nachdem man einen inneren Abstand zum eigenen Erleben aufgebaut hat. Distanz des Erkennens und Verstehens - esgibt nicht nur die eigene Weise, ein menschliches Leben zu führen. Distanz der Bewertung des eigenen Erlebens: Bin ich zufrieden mit meiner gewohnten gedanklichen Sicht auf die Dinge, oder überzeugt sie mich nicht mehr? Selbstbestimmung gerät an ihre Grenzen oder scheitert ganz, wenn zwischen Selbstbild und Wirklichkeit eine Kluft bleibt. Über sich selbst zu bestimmen, heißt, unnachgiebig und leidenschaftlich zu sein in der Suche nach **Klarheit und gedanklicher Übersicht** - *das ist mein Programm.* **Realistisches Selbstbild**: Differenzierung von bewußtem Erleben auf der einen Seite, Erschließen von Unbewusstem auf der anderen.

Scham, die Hüterin und Beschützerin der Würde: **Würde als Grundbedürfnis nach Schutz, Anerkennung, Zugehörigkeit und Integrität.** Scham als extrem peinliches Gefühl, dass im Gespräch mit Vertrauensperson in **Reue** übergehen kann. Übermaß an Scham richtet sich nach außen gegen Mitmenschen in Form von Arroganz, Verachtung oder Gewalt oder Innen in Form abgrundtiefer Verzweiflung und Panik. Angehäufte Abwertungserfahrungen führen zum Ausrasten. Antigewalttraining durch Konfrontation mit sich selbst. Stellt eigene Persönlichkeit in Frage. Bedeutet Erschütterung der Selbsterfahrung des Täters. Gewalt ist Schrei nach Anerkennung. Asimov: Gewalt ist die letzte Zuflucht des Unfähigen.

Gollwitzer, Pfetsch, Schneider, Schulz, Steffke, Ulrich: Gewaltprävention bei Kindern und Jugendlichen 2006; Steinhausen: Psychische Störungen bei Kindern und Jugendlichen 1993[2]; Davison & Neale: Klinische Psychologie 1998[5]; Graumann et al. Enzyklopädie der Psychologie Themenbereich B Serie II Bd2 Diagnostik, Bd3 Persönlichkeitsdiagnostik 1982 und Bd4 Verhaltensdiagnostik p208ff = Spätfolgen zerebraler Läsionen; Bastine: Klinische Psychologie Bd1 1998[3]; Anderson: Kognitive Psychologie 1996[2], 2013[7]; Birbaumer & Schmidt: Biologische Psychologie 1992[2]; Adler et al.: Uexküll. Psychosomatische Medizin. Theoretische Modelle und klinische Praxis 1990[4]; Kriz: Grundkonzepte der Psychotherapie 2000[3] Paardynamik p257 subtile Beherrschung Partnermanipulation durch Krankheit, Hilflosigkeit, Unfähigkeit. Scheinbar Unterlegener stellt Gleichgewicht durch subtile und destruktive Weise her: Weinen, depressive Vorwurfshaltung, Davonlaufen, trotziges Schweigen, Märtyrer- und Heiligenhaltung, psychosomatische Symptombildung Suizidversuche, Alkoholräusche, Einbeziehung von Drittpersonen. **Kollusion** colludere = miteinander spielen = unbewusstes Einvernehmen = uneingestandenes, oft aufgrund unbewusster psychischer Motive bzw. Konflikte unbewusst abgestimmtes Zusammenspiel zweier oder mehrerer Personen. Esser: Lehrbuch der Klinischen Psychologie und Psychotherapie bei Kindern und Jugendlichen 2008[3]; Leon Wurmser: Flucht vor dem Gewissen. Analyse von Über-Ich und Abwehr bei schweren Neurosen 2000; Die Maske der Scham: Die Psychoanalyse von Schamaffekten und Schamkonflikten 2010. Freundlicher und respektvoller Umgang als Ausweg. **Bieri: Eine Art zu leben. Über die Vielfalt menschlicher Würde** 2013; Mercier: Nachtzug nach Lissabon 2006;

Maxwell Bennett, Daniel C.Dennett, Peter Hacker, John R. Searle Neurowissenschaft und Philosophie Suhrkamp 2010; Hofstadter & Dennett: Einsicht ins Ich. Fantasien und Reflexionne über Selbst und Seele. Originaltextsammlung 1981; Hofstadter: Metamagicum. Fragen nach der Essenz von Geist und Struktur 1985; Hofstadter: Das Ich – eine virtuelle Murmel 2008 Focus: Der Dualismus von der materiellen Substanz des Gehirns und des von ihm unabhängige Bewusstseins. Aber Sinneseindrücke, die unser Gehirn auf molekularer Ebene verarbeitet, die Welt in abstrakte Konzepte übersetzen, von denen eines das des Ich ist. Es ist eine Fata Morgana, eine Halluzination, die für unser Überleben im Universum unabdingbar ist. Es existiert genauso wenig wie ein Regenbogen. Greifen Sie in einen Kasten voller Briefumschläge, umfassen Sie etwa 100. Sie werden in der Mitte des Pakets etwas Rundes fühlen, das sich wie eine Murmel anfühlt. Es gibt aber keine Murmel in dem Kasten. Die „Murmel“ ist nur eine Tastillusion, die sich ergibt, weil in der Mitte der Umschläge zwei oder drei Papierlagen übereinanderliegen. Das Ich ist wie diese nicht existierende Murmel.

Mereologischer Fehlschluss (von griech. meros = Teil) ist ein Teilgebiet der Ontologie und der angewandten Logik und befasst sich mit dem **Verhältnis zwischen Teil und Ganzem**. Falkenburg: Metamorphosen des Teilchenkonzepts PdNPiS Bd51 2002 H4 p2-29; Falkenburg: Teilchenmetaphysik 1995[2]; Brückner: Zur Ontologie der Elementarteilchen 2015; Weissmahr: **Ontologie** 1991; Grossmann: Die Existenz der Welt. Eine Einführung in die Ontologie 2002 **Ontologie** = Was sind die Kategorien dert Welt? Welche Gesetze beherrschen diese Kategorien?; Tegtmeier: Grundzüge der kategorialen **Ontologie**. Dinge, Eigenschaften, Beziehungen, Sachverhalte 1992; Ridder: **Ontologie** 2002; Diemer: Einführung in die **Ontologie** 1959; Meixner: Einführung in die **Ontologie** 2004; Vielfach schreiben Neurowissenschaftler dem Gehirn psychologische Eigenschaften oder Fähigkeiten zu, die sich eigentlich nur der gesamten Person zuordnen lassen – etwa Denken, Planen und Entscheiden. Sofern das nicht metaphorisch gemeint ist, halten Bennett und Hacker diese Aussagen begrifflich für falsch. Solch sprachlicher Unsinn entstehe, wenn psychologische Begriffe entgegen ihren Gebrauchsregeln verwendet würden. Daniel Dennett plädiert hingegen seit Jahren dafür, dem Gehirn aus pragmatischen Gründen die Fähigkeit zu denken zuzusprechen: Es sei an Prozessen beteiligt, die Verhaltensweisen wie Entscheidungen hinreichend ähnelten. Im Grunde weise man dem Gehirn auch nur eine abgeschwächte Form von Überzeugungen oder Entscheidungen zu. Horgan: The undiscovered mind. How the brain defies explanation 1999;

In ihrer Replik bezweifeln Bennett und Hacker, dass Dennett ein Experiment nennen könne, das etwa den präfrontalen Kortex beim Hegen einer Überzeugung ertappt. Sie glauben, dass weder das Gehirn noch eines seiner Teile ein Verhalten an den Tag legen kann, das eine solche Zuschreibung rechtfertige.

Mit John Searle streiten die beiden auch über die Frage, ob man Denken und Wahrnehmen im Gehirn verorten könne. Laut Bennett und Hacker lassen sich nur Empfindungen wie Schmerzen im Körper lokalisieren. Diese

befänden sich aber nicht im Gehirn, sondern beispielsweise im Bein. Searle argumentiert hingegen, das Gehirn erzeuge ein subjektiv reales Körperbild inklusive des Beins und des dort empfundenen Schmerzes. Laut Hacker und Bennett gibt es im Gehirn aber weder Bein noch sonstige Schmerzen, denn dort befänden sich keine Schmerzrezeptoren.

Kant: Drei Dinge helfen, die Mühseligkeit des Lebens zu tragen: die Hoffnung, der Schlaf und das Lachen. Buck: Geliebtes unglückliches Kind ... 1950;

Epikur: Wenn du die Menschen glücklich machen willst, dann beschenke sie nicht, sondern nimm ihnen einige ihrer Wünsche.

Der Wille, eine Chance zu ergreifen und seiner Individualität zu folgen, kann ein wichtiger Eckpunkt eines sinnerfüllten Lebens sein.

Selbstbestätigung

Symbole der Sinnstiftung. **Karl Marx: Betrachtung eines Jünglings bei der Wahl eines Berufes 1835** siehe MEW Ergänzungsband I 1968 p591f Louis Althusser Walter Benjamin.

Liebe nach R. Sternberg, 1986: Verbindlichkeit (freiwilliges und realistisches Versprechen, das dem Interesse der beiden verliebten Parteien entspricht), Intimität/Freundschaft (Fähigkeit, einer anderen Person sehr private Aspekte des eigenen Selbst zu offenbaren und den Mut zu haben, die Reaktion darauf zu ertragen), Leidenschaft. Fein & Schneider: Die Kunst, den Mann fürs Leben zu finden 1997; Gray Jeden Tag mehr Liebe 1998; **Spiel:** Kontakt zur Innenwelt über Phantasie. **Arbeit:** Kontakt zur Außenwelt. Hall und Linzeg 1978: effektiv, effizient, kooperativ, zuverlässig. **Downshifting:** entrümpeln, entschleunigen, Prioritäten setzen. Blaise Pascal: Ein Tropfen Liebe ist mehr als ein Ozean Verstand.

Kaiser & Mathys: **Das Buch Hiob**. Dichtung als Theologie, Berlin 2010; Hiob ist der Heilige der Zweifler, Mystiker und Atheisten. In seinem Gerichtsverfahren über seinen Schöpfer und Erhalter setzt er - immer auf Messers Schneide der Lästerung - eine Auseinandersetzung mit Gott in Gang, die bis heute andauert. Gott nimmt dem reichen und glücklichen, gerechten Hiob alles, was er liebt: Töchter, Frau, Kamele, Ziegen ... Nach einer komplexen Beratung mit seinen tröstenden Freunden spricht er direkt mit JHWH, mit Gott. Schließlich besteht Hiob die Prüfung, und sein Glück wird wieder hergestellt. Das theologische Problem, das dahinter steckt, wird seit dem Philosophen Gottfried Wilhelm Leibniz **Theodizee** (Rechtfertigung Gottes) genannt. Die Frage ist: Wie kann Gott gerecht oder gnädig sein, wenn er tiefstes Leid und schlimmsten Schmerz zulässt? Wenn er die Gottlosen gut leben lässt, wenn er seine sadistische Fratze zeigt? John Polkinghorne: An Gott glauben im Zeitalter der Naturwissenschaften. Die Theologie eines Physikers 2000; Hirsch: Der berühmte Herr Leibniz 2016;

Wescott, Glenway und Wolfgang von Einsiedel: Der Wanderfalke (pilgrim hawk) Eine Liebesnovelle; Michael de Ridder: Wie wollen wir sterben? 2010

46 Qualia

Nothoff: Das disziplinlose Gehirn 2012; G&G 10/2012 p78; Gehirn als Spiegel/Sensor/Filter der Seele. Rudolf Steiner 1861-1925 Goetheanum aus Holz 1928, dann aus Beton & Eisen, zug- & druckfest, Dornach. Anthropophie = Bewusstsein des Menschen von sich selbst. Zander: Steiner Antibiographie 2011, SdW 8, 2011 p95. Der Wahrnehmung des Gedankens geht also eine Tätigkeit voraus. von Laue: Steiner und die Naturwissenschaften 1921, In: Aufsätze und Vorträge = **Gesammelte Schriften und Vorträge** BdIII 1961, p48-56; Wilhelm Reich 1897-1957, Psychoanalytiker und Marxist, Orgon = Lebensenergie.

Phänomenales Bewusstsein: Es fühlt sich für uns auf eine bestimmte Art & Weise an, ein erlebendes Subjekt zu sein. Wir können die Welt, die uns umgibt, nur aus der Perspektive eines solchen erlebenden Subjekts, d.h. aus einer Erste-Person-Perspektive, phänomenal erleben.

Der phänomenale Aspekt unserer Wahrnehmung der Welt muss mit neurophysiologischen Vorgängen in unserem Gehirn zusammenhängen. Subjektive Ebene=phänomenales Erleben ↔ objektive Ebene = natur-

wissenschaftliche Erkenntnis.

Eliminativismus = wir haben keine subjektiven Erlebnisse. Es gibt keine phänomenalen Bewusstseinszustände (Schmerz, Farbe, Lust, Ton, Geschmacks-, Geruchs-, Tast-Empfindungen, Propriozeption).
'**Nicht-Existenz-Behauptungen**' = { es gibt keine Hexen, Teufel, Dämonen, Phlogiston, elan vital, Äther} Miller: Hexenjagd 1960;

Florian Theilmann & Sascha Grusche: Farbe gelb ist nicht an eine Wellenlänge gebunden! Natriumlinie ist gelb, aber die Netzhautrezeptoren und Gehirn lassen uns gelb auch bei Mischungen von Licht verschiedener Farben empfinden. Mesomerie. Wellenlänge bedeutet eine ganz bestimmte Farbe. Einer Farbe kann aber nicht eindeutig eine Wellenlänge zugeordnet werden. Nimm Beamer und vertikales Gitter und spalte das durch Überlagerung wieder weiß erscheinende Licht mit einem horizontalen Gitter auf. Die Verwendung von Prismen geht auch, nur ist die Dispersion nicht so linear. Blick durch Gitter ist in Ferne wie Blick durch Fenster, camera obscura. **Newtons Experimentum Crucis** = entscheidendes Exp (weißes Licht durch Prisma, gibt Lichtteilchen verschiedener Geschwindigkeit, Sammellinse Prisma gibt wieder weißes Licht, das durch Prisma zerlegbar) vs Goethes Experimente zum Licht. Josua Belak. Grävell: Goethe im Recht gegen Newton 1922;

Heckmann & Walter (eds.): Qualia, Mentis, Paderborn 2001; Qualia: The Geometry of integrated information

47 Geist: Hirn, Gedächtnis, Aufmerksamkeit, Ich, Perspektiv-Übernahme

Costandi: 50 Schlüsselideen Hirnforschung 2013; Wiliam James: Principles of psychology 1890; extended self = eigentliches Selbst + Besitztümer siehe Schäfer: Wir sind, was wir haben 2012; Düweke: Kleine Geschichte der Hirnforschung 2001; Spengler: Lenins Gehirn 1991; Kirsche: Oskar Vogt 1870-1959. Leben u. Werk und dessen Beziehung zur Hirnforschung der Gegenwart 1986 51 Seiten. Wolff: Cecile und Oskar Vogt 2009; Kofler-Bettschart: Cécile Vogt. Pionierin der Hirnforschung 2022; Schmitz: Deutsche Bibliotheksgeschichte 1984; Die Trägheit eines Buches im Regal gibt Halt. **Eco: Lesen ist eine Unsterblichkeit nach hinten.** C̃hesterton: Der unsterbliche Mensch 1930 Um Chestertons Nachträge und einen Essay erweitert 2011; Eco: Woran glaubt, wer nicht glaubt 1996; Eco: Im Krebsgang voran. Heiße Kriege und medialer Populismus 2006; Eco: Der ewige Faschismus 2010; Eco: Die Bücher und das Paradies 2010; Sloterdijk: Was geschah im 20. Jahrhundert? 2017; Eco: Die Fabrikation des Feindes und andere Gelegenheitsschriften 2017; Eco: Die Kunst des Bücherliebens 2006; Ordine: Von der Nützlichkeit des Unnützen. Warum Philosophie und Literatur lebenswichtig sind 2013; Kunze, Dubbe, Fröscher: Deutsche Staatsbibliothek 1661-1961. Vorträge, Berichte und Dokumente zur 300-Jahrfeier Oktober 1961; Marburger Büchergrab 1961; **Unger & Kunze: Deutsche Staatsbibliothek. Benutzungsführer** 1961, 1963; Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz. Jetzt wächst zusammen ... Eine Bibliothek überwindet die Teilung. Ausstellung: Deutsche Staatsbibliothek. Staatsbibliothek Preußischer Kulturbesitz, 11.Nov.1991 bis 11.Jan.1992, 1992; Spitzer ed: Die Staatsbibliothek Unter den Linden. Ein Kolloquium in der Staatsbibliothek zu Berlin am 11. Juni 1997; Schubarth-Engelschall: Episoden aus fünf Jahrzehnten. Deutsche Staatsbibliothek 2006; Der neue Lesesaal der Staatsbibliothek zu Berlin. Kultur. Architektur. Forschung 2013; Kittel & Baron: Erinnerungen an die Öffentliche Wissenschaftliche Bibliothek. Deutsche Staatsbibliothek in Berlin Unter den Linden 2018; Dauerausstellung: https://stabi-kulturwerk.de. **Bibliothek:** Das Buch, das du brauchst steht neben dem, das du suchst. Schriften sind die offenstehenden Tore aus der Gegenwart in die Vergangenheit und in die Zukunft. Schubarth-Engelschall: Die Bibliothek und du. Eine Einführung in die Benutzung der Bibliotheken und ihrer Literatur 1969; Theory of mind = Theorie des Geistes = Fähigkeit, sich in andere hineinzuversetzen und somit ihr Verhalten zu interpretieren. Ich, das für mich Gewesene. Das Gewesene definiert meine Identität. Newman: Wer bin ich? SdW März 2011 p62, Urgründe des Daseins. Descartes: Denken als Beweis für eigene Existenz. **Klix: Erwachendes Denken.** Eine Entwicklungsgeschichte des menschlichen Denkens 1980; Schondorff: Französische Geisteswelt 1986; Wittgenstein: Ich als sprachliches Konstrukt ohne jede reelle Basis. Ich-Gefühl und Selbstbild erwachsen aus Abgrenzung der eigenen Person von Außenwelt und ihrer Spiegelung im anderen. Placebo ↔ Nocebo (= ich werde schaden) - Effekt G&G 10/2012 p72;; Soziale Inkompetenz und Illusionen. Hinsch &

Pfingsten: Gruppentraining sozialer Kompetenzen - GSK. Grundlagen, Durchführung, Anwendungsbeispiele 2007[5]; Schmidt-Denter: Soziale Entwicklung. LB über soziale Beziehungen im Laufe des menschlichen Lebens 1990;

Koma: G&G 9 (2011) p28 SdW 2009 ?; 1] Wachkoma = vegetativer Zustand = kein subjektives Bewusstsein, aber primitive Refexe auf Reize, Kretschmaer 1940 = keine äußeren Anzeichen für Bewusstsein. ABER: Gibt es subjektives Erleben? Passiert Wahrnehmung? Geistige Prozesse? Gibt es vorsätzliche Handlungen? Problem des Fremdpsychischen nach Wittgenstein und Heidegger. 2] Zustand minimalen Bewusstseins MCS minimal concious state. 3] Locked-in-Syndrom = volles Bewusstsein, ohne äußere Anzeichen für Bewusstsein. A] Owen-test: fMRT bei mentalen Vorstellungsaufgaben (Tennisspiel, Gang durch eigene Wohnung) = Sprache wird verstanden, gute Aufmerksamkeitsspanne, intaktes Kurzzeitgedächtnis, lebhafte Vorstellungskraft. Aber Bewusstsein auch ohne Arbeitsgedächtnis und ohne Sprache: z.B. Stelle Dir die Farbe ROT vor. Angst. Freude. Schmerz, Leid z.B. bei Durst, nach dem künstliche Ernährung fehlt. Ketz: Grundriss der Ernährungslehre 1988; B] Test auf nichtsprachliche Gedanken: 1. Owen-Test. 2. Sprachverstehen in EK-Ps. 3. Intaktes Arbeitsgedächtnis. 4. Schwerzempfinden Daumendruck. 5. Schmerzempfinden bei Schreien. Narkosegas Xenon, statt Isofluran und Sevofluran, um bei älteren oder bereits Verwirrten Delir zu vermeiden.

Modell des schriftsprachlichen Verstehens: Ein parallel-verteilter Prozess = PDP = McClelland & Rumelhardt: Explanations in parallel distributed processing 1989, als Handlungsvorstellung, -karte, Körperkarte auf Netzen. Lexikon mit Wortbedeutung & phonologischer Wortrepräsentation
Segmentale Phonologie, Graphem-Phonem-Korrespondenz (Neographeme) Heike: Phonologie 1982[2]
Graphemsystem - Alphabet
Lesen: Visuelle Analyse: Visualle Buchstabenform, Wortform
Schreiben: Motorische Ausführung: Motorisches Buchstaben- und Wortengramm. Hans weiss, welcher Gärtner der Förster besucht hat. **Wolf: Das lesende Gehirn. Wie der Mensch zum Lesen kam** 2007; **Eco: Lesen ist eine Unsterblichkeit nach hinten.** Lutzeier: Lexikologie 1995;

Perspektiv-Übernahme, indem man sich in Gottes Lage versetzt. Was würde Jesus tun? Was würde Gott tun? Seid nett zueinander. Nützt die Zeit. Wohlstand fängt beim Sparen an. Glück hilft manchmal, Arbeit immer. Lächle. Neue Gedanken, neues Leben. Der Ton macht die Musik. Freut euch des Lebens. Miteinander, füreinander. Sich bewegen heißt länger leben. Von kleinen Zeichen lebt die Liebe. Gesund leben, gesund bleiben. Alles zu seiner Zeit. Immer mit der Ruhe. In der Ruhe liegt die Kraft. Ja zu jedem neuen Tag. ärgern ist Energieverschwendung. Glück ist ein Weg, kein Ziel. Leben, lieben, lachen. Jetzt ist die beste Zeit. Glücklich ist, wer vergisst, was nicht zu ändern ist. Voltaire: Da es sehr förderlich für die Gesundheit ist, habe ich beschlossen glücklich zu sein. Berndt: Zufrieden ist das neue Glücklich 2016; Freud: Lieben und arbeiten können sind Glück und Selbstfindung. Novalis: ... aller Friede ist nur Illusion, nur Waffenstillstand. Hölderlin: O heilige Pfanzenwelt, wir streben und sinnen und haben doch dich! Wir ringen mit sterblichen Kräften, Schönes zu bauen, uns es wächst doch sorglos neben uns auf.

Connectom DTI

Negative Gefühle gehen mit einer erhöheren Aktivität im rechten Stirnhirn einher, wärend positive Gefühle das linke Stirnhirn aktivieren.

J.A. Chambers, Saeid Sanei: **EEG** Signal Processing; Gyorgy Buzsaki: Rhythms of the Brain; Wim van Drongelen: Signal Processing for Neuroscientists. An Introduction to the Analysis of Physiological Signals; James A. Rowan, Eugene Tolunsky: EEG Primer: With a Mini-Atlas; Gay & Rothenburger: dtv-Atlas der Physiologie 1991 p292; Schandry: LB der Psychophysiologie. Körperliche Indikatoren psychischen Geschehens 1995[2];

Alphawellen bei geschlossenen Augen und entspannter Grundstimmung im Spektrum des EEG - 5 bis 100 μV Elektroenzephalografie, -gramm - hoher Anteil von Frequenzen im Bereich von 8 bis 13 Hertz. Ein ruhiges Schwingen des gesamten Gehirns. Beim scharfen Nachdenken rasante Gammawellen über den Kortex 30 bis 80 Hertz: Kodierungs- oder Bindungsfunktion ? Visuelles Areal V1 = Eingangstor optischer Informationen in den Kortex.

Aufmerksamkeit Dissoziation von attention and awareness. Watanabe: Science 334 2011 p829; http://www. sciencemag. org/content/334/6057/829. full.pdf

Pinel: Biopsychologie 2012[7]; Breedlove, Rosenzweig, Watson: Biological psychology. An introduction to bahavioral, cognitive, and clinical neuroscience 2007[5]; Kirschbaum: Biopsychologie von A bis Z 2008; Gall: Handbuch Biopsychologie und Neurowissenschaften. Ein Wörterbuch mit Fragenkatalog zur Prüfungsvorbereitung 2002; Köhler: Biopsychologie. Ein Lehrbuch 2001; Güntürkün: Biopsychologie. Beiträge aus SdW 1998; Jeder Schlaf ist ein kleiner Tod - franz Sprichwort. Dal-Bianco & Walla: Verrückt, was unser Gehirn alles kann 2011. Warum wir im Schlaf unser Bewusstsein verlieren? Das Gehirn organisiert sich systematisch um. Das Default Mode (Ruhezustand) Netzwerk (DMN) unterstützt nach innen gerichtete Aufmerksamkeit wie Selbstreflexion und das anticorrelated network (ACN) hat die Verarbeitung von Außenreizen zur Aufgabe. Aktivitäts-Zunahme und -Abnahme beträgt etwa 20 bis 25 Sekunden. Das DMN verliert je nach Schlafstadium einen Teil seiner anatomischen Verknüpfungen. So wird etwa der Hippocampus, eine für Gedächtnisleistungen wichtige Region, bereits beim Einschlafen von diesem Netzwerk entkoppelt. Mit zunehmender Schlaftiefe wird der ebenfalls dazugehörige Frontallappen ganz abgehängt. In dieser Region ist die Planung zukünftiger Handlungen, die Bewegungskontrolle, sind Langzeitgedächtnis und Belohnungssystem des Gehirns angesiedelt. Verbindungen zum neuronalen Aufmerksamkeitsnetzwerk nehmen dagegen nur teilweise ab, so dass der Schlafende auf alarmierende Signale von außen noch reagieren kann. **Nicht aber auf Geruch, den man auch nicht erinnern kann!** Schlafforscher Jan Born: Codierung/encoding und Wiederherstellung von Inhalten in der Wachphase optimal. Memory-Funktion des Schlafs: Konsolidierung von episodischen Erinnerungen ins hippocampus-abhängige deklarative Erinnerungssystem im slow-wave-sleep (SWS $<$ 1 Hz EEG) Offline-Modus, nicht im REM-Schlaf. Verstärkt selektive Erinnerungen für das künftige Verhalten durch Reaktivierung der neu kodierten Erinnerungsrepräsentation in hippocampischen Schaltkreisen, die den Transfer und die Wiederherstellung von Repräsentationen in neukortischen Netzwerken leisten und so als Langzeitspeicher dienen. System consolidation during sleep is under a top-down control of the $<$1Hz EEG slow oscillations which dominate SWS and are generated in neocortical networks, partly depending on the use of these networks for encoding of information during prior learning. The slow oscillation up-states drive the repeated reactivation of memories conjointly occurring with sharp wave-ripples in the hippocampus. By synchronizing hippocampocal memory reactivations with specific activity from other brain regions, including thalamo-cortical spindle activity and locus coeruleus burst activity, slow oscillations enable the formation of spindle-ripple events, as a mechanism of hippocampo-to-neocortical (bottom-up) transfer of memory information. In the neocortex, spindles promote persisting plastic changes underlying the formation of long-term memories for the reactivated information they carry to neocortex. Das Gedächtnis bildet sich im Tiefschlaf und nicht - wie lange Zeit angenommen - im sogenannten REM-Schlaf (Rapide-Eye-Movement). Das Gehirn bearbeitet die aufgenommenen Informationen, die tagsüber in den Zwischenspeicher des Hippocampus aufgenommen werden, und leitet sie in den Langzeitspeicher im Neocortex weiter. Born geht davon aus, dass Informationen, die im Schlaf langfristig abgespeichert werden sollen, bereits bei ihrer Aufnahme eine Art „tagging“, das heißt eine **Markierung** erhalten, die über die weitere Verarbeitung und Konsolidierung dieser Inhalte im Schlaf entscheidet: Zum einen seien hier **emotionale Qualifizierungen** ausschlaggebend, zum anderen könne das Gehirn Dinge als wichtig markieren, die erst in der **Zukunft** für die Person bedeutsam werden. Gedächtnissysteme entwickeln sich pränatal und im frühkindlichen Leben in Abhängigkeit vom Schlaf. http://www. uni-tuebingen. de/aktuelles/ newsletter-uni-tuebingen-aktuell/ 2011/3/leute/3. html Diekelmann, Born (2010). The memory function of sleep. Nature Reviews Neuroscience. doi:10.1038/nrn2762 Rasch, Büchel, Gais, Born, (2007). Odor cues during slow-wave sleep prompt declarative memory consolidation. Science, 315, 1426-1429. Wagner, Gais, Haider, Verleger, Born (2004). Sleep inspires insight. Nature, 427, 352-355. Das Gegen-Netzwerk ACN wird ab Schlafstadium zwei von seiner streng gegenläufigen Aktivität entkoppelt, ist aber in allen Schlafphasen vorhanden. Polyphasische Schlafzyklen von 4 Stunden (Weltumsegler). Biopsychologie des Schlafes Kap14. Auch andere sensorische und kognitive Netzwerke spielten im Wachzustand und beim Einschlafen eine Rolle. Nachts mistet das Gehirn aus. In Träumen sehen Menschen geheime Wahrheiten / Freuds Erben betrachten sie als Zufallsprodukte. Griechen: Träume als Botschaften der Götter. Andere: Einflüsterungen von Geistern, Dämonen oder dem

Satan. Freuds Verdrängungstheorie des Träumens: Träume haben die Funktion, Wünsche und Bedürfnisse zu erfüllen, die dem Individuum am Tage verwehrt blieben. Kompromittierende Wünsche werden ins Unbewusste verdrängt - innerer Zensor verfälscht und verrätselt sie im Schlaf. Hobson Träume ohne Bedeutung, sondern nur kognitiver Trash. **Hartmann:** Träume nur selten Ausdruck tief vergrabener Konflikte, etwa aus der Kindheit. Auch keine fremde Geheimsprache. Selbst im Wachen gleiten unsere Gedanken manchmal ab - Tagträumen. Stand-by-Modus der Gehirns: Ventromedialen Areale an den Innenseiten der beiden Großhirnhälften aktiv. Beim konzentrierten Denken dorsolaterale Areal vorn und seitlich an der Stirn aktiv. Luzides Träumen: Man wird sich während des Traumes bewusst, dass man träumt und steuert das Traumgeschehen. Träume stehen am Ende eines Bewusstseinskontinuums, das vom fokussierten Wachdenken über zielloses Sinnieren und Tagträumen bis eben zum echten Träumen reicht. Was diese Zustände unterscheidet, ist die Schärfe der Gedankenassoziationen: Im hochkonzentrierten Wachzustand assoziiert das Gehirn eng und streng themenbezogen. Beim Träumen hingegen sind die Gedankensprünge breit und manchmal bizarr. Menschen unterscheiden sich in der Bandbreite der Assoziationen. Manche denken nüchtern und eng, bei anderen sind die Bewusstseinsgrenzen durchlässiger. Ihnen gehen bisweilen auch am Tage skurrile Szenen durch den Kopf, wie sie andere nicht einmal im Traum erleben. Im Traum werden Eindrücke und Gedanken, die wir am Tage weggeschoben haben oder die uns schlicht entglitten sind, wieder eingesammelt. Das sind vor allem Dinge, die uns unterschwellig emotional beschäftigen und bewegen. Im Traum begutachten wir dieses Material und verknüpfen es dann idealerweise mit dem Netz unseres biografischen Gedächtnisses. Auf diese Weise integrieren wir es in unser Selbst. Wechselspiel von circadianem (24.5 h) und Schlaf/Wach-Osci. **Carter: Die infernalischen Traummaschinen des Doktor Hoffman** 1972;

Welt als seine Wirklichkeit wissender Geist. Alle Erfahrung, insbesondere auch die drei Basisvektoren des Raumes, repräsentiert Äquivalenzklassen von Korrelationen zwischen elementaren Qualia, die in der Wirklichkeit so nicht messbare Abhängigkeiten haben, was die Verletzung der Bell'schen Ungleichungen und die Illusion der Zeit zeigen. Siehe durch Jost und Weyl exzellent kommentierte Habilschrift: **Bernhard Riemann. Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu grunde liegen** 1854, 2013 **p90**;

Wolfgang Metzger: Gesetze des Sehens 1936; Vollmer: Die Grenzen des Auges, PJ22 2023 H3 p28-33; Peter Janich: Euklids Erbe. Ist der Raum dreidimensional? 1989; **Jeff Hawkins: Zukunft der Intelligenz** 2004; Janich: Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit und Materie; Nevanlinna: Raum, Zeit und Relativität 1964; **Janich: Kein neues Menschenbild. Zur Sprache der Hirnforschung** 2009 Horgan: The undiscovered mind. How the brain defies explanation 1999; http://www.capurro.de/gotha.htm http://www.velbrueck-wissenschaft. de/ pdfs/ peterjanich.pdf

Iacoboni & Kuhlmann-Krieg: Woher wir wissen, was andere denken und fühlen 2011; Die neue Wissenschaft der **Spiegelneuronen** = Nervenzelle, die beim Betrachten eines Vorgangs das gleiche Aktivitätsmuster aufweist, wie es entstünde, wenn dieser Vorgang selbst durchgeführt würde. Keysers: Unser emphatisches Gehirn. Warum wir verstehen, was andere fühlen 2013; Aktivität von einzelnen Nerverzellen im prämotorischen Kortex bei Handlung & bloß beobachteter Handlung. Handeln, wahrnehmen und planen laufen z.T auf den selben Neuronen. Das ist die Basis für die Gehirn-Gehirn-Kopplung = soziale Interaktion. http://www.wissenschaft-online.de/artikel/999366

Verstand ($\neq$ Wahrnehmung, Empirie) - das Vermögen, Begriffe zu bilden und diese zu Urteilen zu verbinden. Vernunft - bestimmte Art des Verstandesgebrauchs, nämlich wenn beim Denken (Aussagen, Fragen, Behaupten, Befehlen, ...) **sinnvoll** ausgesagt, gefragt, behauptet, befohlen, geschlussfolgert, bezweifelt und kritisiert wird. C̃hesterton: Umriss der Vernunft 2020; C̃hesterton: Der gewöhnliche Sterbliche 1962; C̃hesterton: Der Mann mit dem goldenen Schlüssel : Die Geschichte meines Lebens 1952; Chesterton: Father Brown kann es nicht glauben. Seine besten Fälle 2010; Richter: Deutsche Vernunft - Angelsächsischer Verstand. Intime Beziehungen zwischen Geistes- und Politikgeschichte 2015; Richter: Erlangte Einheit - Verfehlte Identität 1991; Richter: Der Zerfall der Welteinheit. Vernunft und Globalisierung in der Moderne 1992; Richter: Wendezeiten. Das Ende der konservativen Ära 1994; Richter: Aus ostdeutscher Sicht. Wider den neoliberalen Zeitgeist 1998; Jesse ed: Eine Revolution und ihre Folgen. 14 Bürgerrechtler ziehen Bilanz 2001 Jens Reich, Konrad Weiß, Marianne Birthler, Günter Nooke, Wolfgang Templin, Markus Meckel, Freya Klier, Ehrhart Neubert,

Vera Lengsfeld, Rainer Eppelmann, Edelbert Richter, Ulrike Poppe, Friedrich Schorlemmer, Joachim Gauck;

Kognition (lat. cognoscere: „erkennen, erfahren, kennen lernen“) ist die von einem verhaltenssteuernden Subsystem (bei höher entwickelten Lebewesen das Gehirn, Regelung bei Maschinen/Computern: Wahrnehmungsstörung beim Aufzug) ausgeführte Informationsumgestaltung auf Basis von Aufmerksamkeit, Erinnerung, Lernen, Kreativität (Funke), Planen, Orientierung, Imagination, Argumentation, Introspektion, Wille, Glauben. Goldstein: **Wahrnehmungspsychologie** 1997;Propriozeption. Konstruktivimus beim Lernen: Situative Vorbereitung, gegenstandsbedingte Gestaltung der Lernumgebung. Intelligenz vs Kompetenz. Education (cognitive development) and training (performance in a specific skill) are different but highly related notions. Veith: Kompetenzen und Lernkulturen. Historische Rekonstruktion moderner Bildungsleitsemantiken 2003;

Ludwig: Einführung in die Grundlagen der theoretischen Physik Bd1 1978[2] pVI **Verstehen ist ein nicht endender Wachstumsprozess**; Verstehen heißt nach Heisenberg - **Der Teil und das Ganze** richtig vorauszusagen, also Handlungskompetenz, ist handlungsorientiert. Heisenbergs Lösungsvorschläge bei der Betrachtung komplizierter Probleme: Betrachte sehr einfach, also mit wenigen Annahmenbehaftete Ersatzfragestellungen: hochgradig symmetrische Fälle, linearisiere, wende statistische Methoden an, ... Alles in allem entferne man sich von der schwierigen Aufgabe und trachte ein mathematisch leicht lösbares Ersatzproblem. Feynman: QED - die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p19ff; Setzt Logik und Mathematik als Sprache, mit Verstand und Vernunft gesetzte Begriffe/Modelle, deren Zuordnung zur ‘Wirklichkeit’ und die kritische experimentelle Prüfung voraus. Intuition a la Gödel oder Gigerenzer. Yourgrau: p136, 147. Verstehen nach Wagenschein (1896-1988): Verstehen lehren 1968, Wagenschein: Kinder auf dem Weg zur Physik 1990, Wagenschein: Die pädagogische Dimension der Physik 1976, heißt, selber einsehen, wie es kommt. **Verstehen heißt, es in die Reichweite der Sinne zu bringen.** Quantenphänomene können nur im Heisenberg’schen Sinne verstanden werden. Die hier oft bemühten Bilder menschlicher Erfahrungstatsachen dienen als Label, Zeichen, Pointer zur kognitiven Verdauung. Schopper: Materie und Antimaterie. Teilchenbeschleuniger und der Vorstoß zum unendlich Kleinen 1989 p374ff Verstehen = auf bekannte Sachverhalte zurückführen; Hentig: Bildung 1996 Verstehen p69 Hund: Physik und allgemeine Bildung, Jena 1948;

Carmin non dant panem - willst du reich werden, beschäftige dich nicht mit Literatur. Hegel: Es gibt keinen Reichtum wie Verstand und keine Armut wie Unwissenheit, keine Erbschaft wie gutes Benehmen und keinen Helfer wie Beratung. Dreischritt: These-Antithese-Synthese = Bewegung hin zur Aufhebung der Widersprüche. Bewegung eines individuellen Selbstbewusstseins zur Selbstgewissheit. **Gödel: Gott sieht sich selbst durch uns. Das Universum öffnet die Augen, und es sind unsere. Die Zeit vor der Existenz der Menschheit tritt erst in die Wirklichkeit, da Menschen sie denken. Wir müssen da sein.** Gott ist das einzig notwendige Wesen, weil er das einzig vollkommene ist. Die **Wahrscheinlichkeit** der Existenz des Klügsten ist größer als die die irgendeines Mittelmäßigen. Siehe auch Tiplers **Zeitmaschine** auf Seite 651 und Gödel auf Seiten 435 und . Hegel: **Welt als seine Wirklichkeit wissender Geist.** Virilio: Ästhetik des Verschwindens 1986 Paulus von Tarsus: Denn die Gestalt der Welt vergeht. Wie sich das Bewusstsein fortentwickelt, bis es endlich die Gegenstände der Erfahrung zu seinem eigenen Inhalt macht und als identisch erkennen kann mit dem Ganzen der Wirklichkeit, die selbst reiner Gedanke oder Geist ist. **Ben Dupré: 50 Schlüsselideen Philosophie**, Können wir sicher sein, dass die Welt um uns so ist, wie wir sie wahrnehmen? Gewinnen wir unsere Erkenntnisse durch den Verstand, oder spielt die Sinneserfahrung eine größere Rolle? Was ist der Geist, und was ist Bewusstsein? Wie ist es, eine Fledermaus zu sein? Wieso gibt es nicht Nichts? Sollte man immer und in jedem Fall die Wahrheit sagen? Weshalb gibt es Leid? Was ist Freiheit und wie viel braucht der Mensch davon?

Heisenberg: Ordnung der Wirklichkeit 1942 Sprache, Ball; Sybille Krämer: Sprache-Sprechakt-Kommunikation: Sprachtheoretische Positionen der Gegenwart; John Langshaw Austin: Zur Theorie der Sprechakte: How to do things with words;

Grzesik: Texte verstehen lernen. Neurobiologie und Psychologie der Entwicklung von Lesekompetenzen durch den Erwerb von textverstehenden Operationen 2005 Balmer Sprechakt John R. Searle: Sprechakte: Ein sprachphilosophischer Essay; **Ansgar Beckermann: Analytische Einführung in die**

Philosophie des Geistes 2008[3]**;** Ansgar Beckermann: Das Leib-Seele-Problem: Eine Einführung in die Philosophie des Geistes; turing machine examples. Julia Kulewatz: Das 'Leib-Seele-Problem': 'Der Substanz-Dualismus' - Platons Argumente für die Unsterblichkeit der Seele': Erläutert anhand von Ansgar Beckermanns Einführung in die Philosophie des Geistes'; Memento Mori = erinnere dich, dass du sterben wirst. **Eco: Lesen ist eine Unsterblichkeit nach hinten. Searle: Geist** 2006.
1] **Körper-Geist-Problem**.
2] Problem der **mentalen Verursachung**.
3] Problem der **Intentionalität**.

Metaebene 1: **Kartesischer Schnitt** zwecks Operationalisierbarkeit
a Faktenebene (Materie = res extensa)
b Modellebene/Abstraktion (Geist = res cogitans) Ansgar Beckermann: Descartes' metaphysischer Beweis für den Dualismus: Analyse und Kritik
`http://bieson.ub.uni-bielefeld.de/volltexte/2008/1373/pdf/DESCARTES_Beweis.pdf`

Metaebene 2: **Heisenberg-Schnitt**
a Beobachtbares Objekt
b Umgebung inklusive Beobachter

Heisenberg: Schritte über Grenzen 1971; Physik und Philosophie 1959; Quantentheorie und Philosophie 1979,

Aristoteles: Du hörst und vergisst es, du siehst es und erinnerst dich, aber du tust und behältst es. Dinge, die wir lernen müssen, bevor wir sie tun können, lernen wir, indem wir sie tun. **Lieberman: Leaerning. Behavior and cognition** 1993; **Lehr-Lern-Strategien** Kahneman 2011: Thinking fast and slow. **System1** Abb 1 p 31 Schnelles Denken automatisch unwillentlich mühelos Impulse Assoziationen Beispiele p33ff kognitiv verzerrt systematische Fehler beantwortet leichtere als gestellte Fragen versteht Logik und Statistik nicht. Quelle der explizite Überzeugen bewusste Entscheidungen für **System2** 17x24 Langsames Denken willentliche Aufmerksamkeit auf anstrengende mentale Tätigkeit gerichtet bewusst logisch pay attention, unsichtbarer Gorilla Beispiele p35 blind gegenüber Offensichtlichem blind für Blindheit überraschungsaktiviert. OrganizingInstructionANDStudy.pdf **Self-expressing is vital:** Verbalisierung, das Verfassen kurzer Notizen/Essays und das Antworten auf Fragen forciert das Lernen! **Fallbasiertes Lernen** zwingt zu Verknüpfungen zwischen Bekanntem und Neuem. Kleist: Über die **allmähliche Verfertigung der Gedanken beim Reden**. R. Frick & W. Mosimann: Lernen ist lernbar. 1998, 2006 Herrmann, ed.: **Neurodidaktik**: Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen 2009[2] Kron: Grundwissen Didaktik 1994; Didaktik sollte vor neuen Lehrplänen, neuen Lehrbüchern und neuerlich vor der Einführung des Computers in der Schule schützen, um Lehrer und Schülern vor der Lehrmittelindustrie zu nützen. Für die eingesparten Ausgaben Klassenstärke auf 5 Schüler begrenzen. **Metakompetenzen**. p205 A. de Saint-Exepery: Wenn ihr wollt, dass eure Kinder ein Schiff bauen lernen, dann weckt in ihnen die Sehnsucht nach der Seefahrt; Schmitt et al eds: Bilder als Quellen der Erziehungsgeschichte 1997; Großklaus: Medien-Bilder 2004; John Locke 1632-1704: Die Größte Kunst ist, den Kleinen alles, was sie tun oder lernen sollten, zum Spiel und Zeitvertreib zu machen. Gordon: Die Neue Familienkonferenz. Kinder erziehen ohne zu strafen 1989; **Weber-Kellermann: Die Familie** 1984; **Locke: Gedanken über Erziehung** 1693; Descartes' Error: Emotion, Reason and the human brain 'Sage es mir, und ich vergesse es; zeige es mir, und ich erinnere mich; lass es mich tun, und ich behalte es' - multidimensionales Lernen scheint schon von Konfuzius gelehrt worden zu sein. Was die moderne Wissenschaft zum Thema Lernen zu sagen hat, erfahren Sie auf der Themenseite 'Lernen'. spektrum.com/lernen

Ikonische Welt. Emoticon = Emotion und Icon = Folgen aus ASCII-Zeichen bezeichnet, die in der schriftlichen Kommunikation Stimmungs- oder Gefühlszustände ausdrücken. Emoji = Bildschriftzeichen ist ein Ideogramm, das insbesondere in SMS und Chats längere Begriffe ersetzt. in einem freien Bereich von Shift-JIS kodiert (F89F bis F9FC). Basiert auf der Norm JIS-X 0208, verschiebt (shift) aber Bytewerte, um 64 zusätzliche Katakana-Zeichen im Bereich von 0xA0 bis 0xDF unterzubringen. Kanter: Ikonische Macht. Zur sozialen Gestaltung von Pressebildern 2016; Dauer der Speicherung: Sensorischen Gedächtnis (z. B. Ikonisches

Gedächtnis), **Kurzzeitgedächtnis / Arbeitsgedächtnis** Notizzettel zum Rechnen, Lesen (7 ± 2 chunks: räumlich-visueller Notizblock, artikulatorische oder phonologische Schleife, zentrale Exekutive verwaltet die beiden Subsysteme und verknüpft Informationen aus diesen Systemen mit dem Langzeitgedächtnis, episodischer Puffer) und Langzeitgedächtnis. **Faktengeddächtnis** = Schulwissen, generelle Zusammenhänge; episod = Ereignisse; Wahrnehmungsged = Einornen von Dingen, Mustererkennung und Bedeutungszuordnung; prozedural = Radeln, Klavier Art der Gedächtnisinhalte beim Langzeitgedächtnis: deklaratives und prozedurales Gedächtnis. Deklaratives/explizites Gedächtnis speichert Fakten bzw. Ereignisse, die entweder zur eigenen Biographie gehören (episodisches Gedächtnis) oder das so genannte Weltwissen eines Menschen ausmachen, wie zum Beispiel berufliche Kenntnisse, Fakten aus Geschichte, Politik, Kochrezepte etc. (semantisches Gedächtnis) Typische Aktivitämustern im Hippocampus, gewissermaßen dem Zentralregister für in verschiedenen Teilen der Großirnrinde gespeicherte Erinnerungskomponenten. **Neuronalen Grundlagen des Ortsgefühls**: May-Britt und Edvard Moser. In Nähe des Hippocampus gibt es entorhinalen Kortex! Raster- oder Gitterzellen = grid cells. John O'Keefe. **Ortszellen** place cell. Kompasszellen. Wandzellen. Propriozeption Hierarchie von Rasterzellenwaben schaffen ein zusammenhängendes Koordinatensystem und gibt Positionssinn. Iwanow: Der Abdruck des Siegelringes 1973 Gedächtnis des Menschen; Ǩandel: Auf der Suche nach dem Gedächtnis. Die Entstehung einer neuen Wissenschaft des Geistes 2007; Alcock: Das Verhalten der Tiere aus evolutionsbiologischer Sicht 1996 p104; Wiltschko: Kompasssysteme in de Orientienrung von Vögeln 1995; Liefert ein Navigationssystem auch für Gedächtnis bei episodischer Erinnerungen: zeitstatt ortkodierende 'Ortszellen'-Analoga. Mittels von Ortszellen Konsolidation von Gedächtnisinhalten während des Schlafs erforschbar. Im Schlaf wird bestimmte Reihenfolge von Ortszellenaktivitäten abgespult. Die zuvor erlernte Route durch ein Labyrinth wird wiederholt. Gedächtnisbildung, Zeitwahrnehmung oder Navigation beruhen auf ähnlich schematisierbaren neuronalen Prozessen. http://www.fil.ion.ucl.ac.uk/Maguire/ http://www.mind-and-brain.de/events/detail/
`?tx_mbevents_pi1[backPid]=37&tx_mbevents_pi1[id]=159`

Prozedurale/implizites Gedächtnis beinhaltet Fertigkeiten, die automatisch, ohne Nachdenken eingesetzt werden. Dazu gehören vor allem motorische Abläufe (Fahrradfahren, Schwimmen, Tanzen, Skifahren, etc.). Prozedurale Gedächtnisinhalte werden durch implizites Lernen, semantische durch explizites Lernen erworben. P̃olanyi: Implizites Wissen 1985; Emotionen überdauern das Vergessen: Feinstein, J.S. et al.: Sustained experience of emotion after loss of memory in patients with amnesia. In: Proceedings of the National Academy of Sciences 10.1073/pnas.0914054107, 2010; **Transiente globale Amnesie**. **Ulich: Das Gefühl. Eine Einführung in die Emotionspschologie**

Lernen & Motivation durch Anerkennung: Fleiß und Arbeit, nicht Intelligenz und Bestnoten loben! Glaube mit Wirkung. Man muss das Gehirn nur zwingen. Spielen macht schlau. Erfolg im Leben bringen Motivation und Selbstdisziplin noch vor Intelligenz. Intelligenztest sagen aber schulischen Erfolg gut voraus. Ziel: Macht, Zugehörigkeit, intrinsisches, ideelles Interesse am Gegenstand. Schneider & Schmalt: Motivation 1993[2];

Konfabulation: = ehrliches Lügen G&G 9/2012 p72-75. Das vordere limbische System hilft, zwischen Wirklichkeit und Fantasie sowie zwischen aktuellen und vergangenen Erinnerungen zu unterscheiden. Fehlende Gedächnisinhalte werden mit falschen Erinnerungen oder gar zufälligen einfällen aufgefüllt. Orbitofrontaler Kortex/vorderes limbisches System ist für Unterdrückung irrelevanter Gedächtnisinhalte entscheidend. Choice blindness: Broca-, Wernicke-, Gschwind-Areal. Linkes Sprachsystem produziert permanent verbale Erklärungen für unser Verhalten. Aber ohne Infos aus limbischen System passiert keine Plausibilitätskontrolle.

Klingberg: **Multitasking**: Wie man die Informationsflut bewältigt ohne den Verstand zu verlieren 2008; http://www. braintraining2012. de New Directions in Brain Training – Effectiveness, Methodology, and Application of Cognitive Interventions 2012; Wolfgang Schmitz: Schneller lesen - besser verstehen; Shimon Edelman: Computing the Mind. How the Mind Really Works. 2008 Jens Seiler: Der große Gehirntrainer. Besser lernen, schneller denken, mehr behalten mit dem Gedächtniskünstler und Weltrekordhalter; Gunther Karsten, Martin Kunz: Erfolgs-Gedächtnis: Wie Sie sich Zahlen, Namen, Fakten, Vokabeln einfach besser

merken; Jens Seiler, Sandra La Cognata: Schneller Sprachen lernen; Kratz: Rhetorik 1989;

EKG: Levick: An introduction to cardiovascular physiology, 2010[5]; Gay & Rothenburger: dtv-Atlas der Physiologie 1991 p168; Shelhamer, M.: Nonlinear Dynamics in Physiology; McSharry: **Synthetisches ECG** http://people.maths.ox.ac.uk/mcsharry/lectures.shtml $\dot{\phi}_H = \phi_H + c_1 \cos(\phi_H - \phi_R) + c_2 \cos(2\phi_H - 2\phi_R) + 0.0025\eta, \quad \dot{\phi} = \omega_R$

Karen M. Ellis: EKG Plain and Simple; Clifford, Azuaje, McSharry: Advanced Methods and Tools for ECG Data Analysis, von Artech House Inc.;

Chronobiologie, Chronomedizin, Biologische Uhren: Jennifer Ackerman 24 Stunden ROWOHLT

Affolter, F.: Wenn die Organisation des zentralen Nervensystems zerfällt und es an gespürter Information mangelt, Neckar-Verlag 1993. Das St. Galler Modell: a] Teilhabe am Leben, Selbständigkeit & Bobath-Konzept! b] Durchbreche die Magie der Umwelt! c] Eigenwahrnehmung nicht behindern! d] Arbeit an der Wurzel verlangt Ausdauer, Einsatz & Freude! e] Fortschritte nur dank alltäglicher Veränderungen in der Umwelt der Patienten möglich! f] Leben heißt, sich zu begegnen!

Jerome R. Busemeyer & Adele Diederich: Cognitive Modeling Dawson: Understanding cognitive science 1998; Dupuy & DeBevoise: On the Origins of Cognitive Science. The Mechanization of the Mind 2009; Parkin: Essential cognitive psychology 2000; Oatley: Perceptions and Representations: Theoretical Bases of Brain Research and Psychology 1978; Anderson: Kognitive Psychologie 1996[2], 2013[7]; Neisser: Cognitive Psychology 1967; Eysenck & Keane: Cognitive Psychology 1990; **Matlin: Cognition** 2002[5];

`http://www.earli.org/special_interest_groups` Handbook of Educational Psychology Anderman, Winne, Alexander, Corno: http: //www. routledge. com/books/details/9780805859713/ Contents: P.H. Winne, P.A. Alexander, Foreword. Part I: Foundations of the Discipline. D.C. Berliner, Educational Psychology: Searching for Essence Throughout a Century of Influence. R.C. Calfee, Educational Psychology in the 21st Century. E. Bredo, Conceptual Confusion and Educational Psychology. Part II: Development and Individual Differences. S.G. Paris, F.J. Morrison, K.F. Miller, Academic Pathways From Preschool Through Elementary School. A. Wigfield, J.P. Byrnes, J.S. Eccles, Development During Early and Middle Adolescence. M.C. Smith, T.G. Reio, Jr., Adult Development, Schooling, and the Transition to Work. P.L. Ackerman, D.F. Lohman, Individual Differences in Cognitive Function. G. Matthews, M. Zeidner, R.D. Roberts, Models of Personality and Affect for Education: A Review and Synthesis. D. Fuchs, Cognitive Profiling of Children With Genetic Disorders and the Search for a Scientific Basis of Differentiated Education. Part III: Cognition and Cognitive Process. J. Bransford, R. Stevens, D. Schwartz, A. Meltzoff, R. Pea, J. Roschelle, N. Vye, P. Kuhl, P. Bell, B. Barron, B. Reeves, N. Sabelli, Learning Theories and Education: Toward a Decade of Synergy. G. Schraw, Knowledge: Structures and Processes. M. Pressley, K.R. Harris, Cognitive Strategies Instruction: From Basic Research to Classroom Instruction. R.E. Mayer, M.C. Wittrock, Problem Solving. P.K. Murphy, L. Mason, Changing Knowledge and Beliefs. Part IV: Motivation. N.E. Perry, J.C. Turner, D.K. Meyer, Classrooms as Contexts for Motivating Learning. D.H. Schunk, B.J. Zimmerman, Competence and Control Beliefs: Distinguishing the Means and Ends. E.M. Anderman, C.A. Wolters, Goals, Values, and Affect: Influences on Student Motivation. R.W. Roeser, S.C. Peck, N.S. Nasir, Self and Identity Processes in School Motivation, Learning, and Achievement. Part V: Educational Content. D. Alvermann, M. Simpson, J. Fitzgerald, Teaching and Learning in Reading. S. Graham, Writing. A.H. Schoenfeld, Mathematics Teaching and Learning. M.C. Linn, B-S. Eylon, Science Education: Integrating Views of Learning and Instruction. B. VanSledright, M. Limón, Learning and Teaching Social Studies: A Review of Cognitive Research in History and Geography. A.M. Padilla, Second Language Learning: Issues in Research and Teaching. Part VI: Societal and Cultural Perspectives. J. Martin, Social Cultural Perspectives in Educational Psychology. L. Okagaki, Ethnicity, Learning. D.F. Halpern, Assessing Gender Gaps in Learning and Academic Achievement. J. Juvonen, Sense of Belonging, Social Bonds, and School Functioning. P.M. Greenfield, E. Trumbull, H. Keller, C. Rothstein-Fisch, L. Suzuki, B. Quiroz, Cultural Conceptions of Learning and Development. Part VII: The Educational Context. C. Bereiter, M. Scardamalia, Education for the Knowledge Age: Design-Centered Models of Teaching and Instruction. A.W. Hoy, H. Davis, S.J. Pape, Teacher Knowledge and Beliefs. T. de Jong, J. Pieters, The Design of Powerful Learning Environments. J. Brophy, Observational Research on Ge-

neric Aspects of Classroom Teaching. A.M. O'Donnell, The Roles of Peers and Group Learning. S.P. Lajoie, R. Azevedo, Teaching and Learning in Technology-Rich Environments. Part VIII: Assessment of Learning, Development, and Teaching. J.C. Nesbit, A.F. Hadwin, Methodological Issues in Educational Psychology. H. Cooper, Research Questions and Research Designs. D.B. Wright, The Art of Statistics: A Survey of Modern Techniques. D.L. Butler, Frames of Inquiry in Educational Psychology: Beyond the Quantitative-Qualitative Divide. K. Ercikan, Development in Assesment of Student Learning. C.K. Tittle, Assessment of Teacher Learning and Development. P.A. Alexander, P.H. Winne, Afterword.

Lütz & Hirschhausen: Irre! Wir behandeln die Falschen. Unser Problem sind die Normalen 2011; Goleman: Soziale Intelligenz. Wer auf andere zugehen kann, hat mehr vom Leben 2008; Gigerenzer: Bauchentscheidungen: Die Intelligenz des Unbewussten und die Macht der Intuition 2008, **Gut Feelings**; http://www.mpib-berlin.mpg.de/de/mitarbeiter/gerd-gigerenzer Bauchgefühl. **Risiko:** Wie man die richtigen Entscheidungen trifft 2013; William Bechtel & George Graham (Eds.) A Companion to Cognitive Science, Blackwell Verlag **Affolter, F.: Wahrnehmung, Wirklichkeit und Sprache. Neckar-Verlag 2001**; Ackermann: Das Konzept von Affolter und seine Bedeutung für die Geistigbehindertenpädagogik Edition SZH/SPC 2001. Wahrnehmung als sinngebende und bedeutungserfassende Verarbeitung von Reizen in Abhängigkeit von bereits erworbenen und abgespeicherten Erfahrungen. von **Campenhausen: Die Sinne des Menschen. Einführung in die Psychophysik der Wahrnehmung** 1993[2]; Taktil/Haut/ Berührung/ Wärme/ Kälte/ Druck/ Schmerz-kinästetische/Bewegungsempfindung/ -wahrnehmung/ Propriozeption Tiefenempfindung/Propriozeption/Gelenk - und Muskelsinn/ Bewegungssinn/ Beweigungsausmaß/ -geschwindigkeit/Muskeltonus. Wahrnehmungsentwicklung/ Herstellung der Bindung von Sinneseindrücken/-Kovarianzmatrix der Sinneseindrücke in Anlehnung an die **kognitive Entwicklungstheorie** von **Jean Piaget**: **1. Modalitätstufe** - Ausführungsart - der ersten 3 Monate, wo sich die Sinnessysteme unabhängig voneinander entwickeln. Erleben von Widerstandsveränderungen/Zwangsbedingung $g(x, y, z) = z - z_0$. Widerstand der Unterlage, Drehung ist möglich. Nische. **2. Intermodalitätsstufe** stellt Sinnesverbindungen her/In Beziehungsetzen einzelner Wahrnehmungen: visuell-taktil-kinästetisch, visuell-auditiv, auditiv-taktil-kinästhetisch. Sich-Umschauen nach Ursprung von Berührung. Anbahnung Auge-Hand-Koordination, Blick nach Licht oder Geräuschquelle. Sehen und Spühren. Blickkontakt. Handeinsatz. p38. Zusammenhang von Bewegung und Ursache-Wirkungszusammenhängen. Wegnehmbarkeit. Nachbarschaft. Konventionelle Funktionssignale: Der Milchflasche folgt das Trinken. **3. Serialstufe** als Integration von Wahrnehmung zu kausalen Wirkungsketten in Raum und Zeit - zeitlich-sukzessive oder serial Organisation (Affolter 1987 p187) am Ende des 1. Lebensjahres **PLAG = Problemlösende Altagsgeschehnisse**. Versucht mitzuhelfen beim Blumengießen: Gespürte Erfahrungen mit der Umwelt als Ursprung der Entwicklung. PLAGs als ideale Lernsituation, da Alltagssituation und diesbezüglich unternommene Lösungsversuche eine ordnende und verbindende Funktion für verschiedene Wahrnehmungsprozesse. Aufmerksamkeit stellt sich ein: Einstellen unnötiger Aktivitäten und des Sprechens, Anspannen der Gesichtsmuskeln und leites Weiten der Augen. 2. bis 3. Lebensjahr Planung setzt ein. Hilfsmitteleinsatz. Wurzelmodell p41. **Goldstein: Wahrnehmungspsychologie** 1997; **ABER:** Welt wird zunächst nicht nur als Chaos, sondern von Anfang an strukturiert wahrgenommen. Den Ojekten der Welt wird von Beginn an eine **Absicht unterstellt, was Voraussetzung für Kommunikation ist**. Daher sind Kindern bereits anfänglich nicht nur an physikalischen Erfahrungen interessiert. Ist Absicht verstanden, so verschwindet die Aufmerksamkeit. **Aufmerksamkeit:** stable heteroclinic sequences SHS oder Bick & Rabinovich: Dynamical Origin of the Effective Storage Capacity in the Brain's Working Memory, PRL 103, 218101 (2009) On the occurrence of stable heteroclinic channels SHC in Lotka-Volterra models für ERPs event related potentials. **Entwicklungspsychologie. Largo: Kinderjahre** 2000; Astington: Wie Kinder das Denken entdecken 1993, 2000; Haug-Schnabel & Bensel: Grundlagen der Entwicklungspsychologie. Die ersten 10 Jahre 2005; **Wilkening, Freund, Martin: Entwicklungspsychologie kompakt** 2009 Online-Materialien: beltz.de ISBN 978-3-621-27751-8; Miller: Theorien der Entwicklungspsychologie 1993; **Mietzel: Wege in die Entwicklungspsychologie. Kindheit und Jungend** 1995[2]; Schenk-Danzinger: Entwicklungspsychologie 1990[21] p119 Entwurzelung; Markefka & Nauck: Handbuch der Kindheitsforschung 1993; Kasten: 0-3. Entwicklungspsychologische Grundlagen 2011; Pinquart, Schwarzer, Zimmermann: Entwicklungspsychologie. Kindes- und Jugendalter 2011; Fend: Entwicklungspsy-

chologie des Jugendalters 2000; Baacke: Die 6- bis 12jähigen. Einführung in die Probleme des Kindesalters 1995[4]; Baacke: Die 13- bis 18-Jährigen. Einführung in die Probleme des Jugendalters 2003; Zimmermann: Grundwissen Sozialisation. Einführung zur Sozialisation im Kindes- und Jugendalter 2006[3]; Albisser: Sozialisation und Entwicklungsaufgaben Heranwachsender 2011; Tillmann: Sozialisationstheorien. Gesellschaft, Institution und Subjektwerdung 1990; Göppel: Das Jugendalter: Entwicklungsaufgaben - Entwicklungskrisen - Bewältigungsformen 2005; Entwicklungsaufgaben im Alter: Beziehungsentsorgung. Gestaltpsychologie. Ciganik. Unerledigtes merkt sich besser.

Einzelaufgabe - beide Hälften beteiligt. Zwei Aufgaben: Links hält Motivation für Aufgabe eins im Hintergrund parat, während ihr rechtes Pendant die Ausführung der zweiten Aufgabe vorantreibt, dies sieht man bei innenliegenden Arealen des Präfrontalkortex (mPFC), jenem beim Menschen so außergewöhnlich weit entwickelten Supervisor für derartige Denk- und Entscheidungsprozesse, insbesondere im dortigen anterioren cingulären Kortex (ACC): Vermittlerrolle im Belohnungs- und Motivationssystem! Rheinberg: Motivation 1994; **Heckhausen: Motivation und Handeln** 1989[2]; Schneider & Schmalt: Motivation 1993[2]; Das ranghöchstes Entscheidungsorgan Präfrontalkortex/frontopolaren Kortex: Aktivierung einer Kombination der ihnen entsprechenden Belohnungsaussichten. Teile und herrsche. Behält Fäden in der Hand und organisiert das Hin-und-Herschalten zwischen den Aufgaben.

Wahrnehmungsstörung/-verschiedenheit, weil jeder seine persönliche Erfahrungswirklichkeit hat. Goldstein: Wahrnehmungspsychologie 1997; Sinason: Geistige Behinderung und die Grundlagen menschlichen Seins, Luchterhand 2000 Kap2 Alzheimer-Symptome/Fallbeispiel, Sinn finden ohne Worte; Optische Kohärenztomografie (OCT) und die konfokale Scanning-Laser-Ophthalmoskopie (cSLO) machen kleinste Veränderungen in den Zellen des Auges sichtbar.

Meulders: Helmholtz. From Enlightenment to Neuroscience 2010; Schönpflug & Lüer: Psychologie in der Deutschen Demokrativen Republik 2011 eBook; Elsner & Lüer: ... sind eben alles Menschen. Verhalten zwischen Zwang, Freiheit und Verantwortung 2005; Klaus Holzkamp: Kritische Psychologie http://www. kritische-psychologie. de/holzkamp. html Bayesian brain: http://en. wikipedia. org/wiki/Bayesian_brain **Lotka-Volterra:** Bick & Rabinovich: Dynamical Origin of the Effective Storage Capacity in the Brain'sWorking Memory, PRL 103, 218101 (2009) On the occurrence of stable heteroclinic channels in Lotka-Volterra models, http://www. informaworld. com/soeh/ `content~content=a919233448~db =all~jumptype=rss`, http://inls. ucsd. `edu/~rabin/`

Bear et al: Neurowissenschaften - Ein grundlegendes Lehrbuch für Biologie, Medizin und Psychologie 2008[3]; Dudel, Menzel, Schmidt: Neurowissenschaft. Vom Molekül zur Kognition 1996; Kandel, Schwartz, Jessell: Neurowissenschaften. Eine Einführung 1995; Thompson: Das Gehirn 2001[3]; **Sturm, Herrmann, Münte: Lehrbuch der Klinischen Neuropsychologie 2009[2] p421-544!!!;** Poeck & Hartje: Klinische Neuropsychologie 1989[2]; Biefang, Potthoff, Schliehe: Assessmentverfahren für die Rehabilitation 1998; Liem: Kraniosakrale Osteopathie: Ein praktisches Lehrbuch 1997[3]; Stevens et al.: Gehirn und Nervensystem. Woraus sie bestehen. Wie sie funktionieren. Was sie leisten 1988; Gillert, Rulffs, Boegelein: Elektrotherapie 1990; Miram & Krumwiede: Informationsverarbeitung. Reizphysiologie. Sinnesphysiologie. Neurophysiologie. Kybernetik 1990; **Wetterling, Organische psychische Störungen. Hirnorganische Psychosyndrome** 2002; **Ramachandran & Blakeslee: Die blinde Frau, die sehen kann. Rätselhafte Phänomene unseres Bewußtseins** 1998; **Sacks: Der Tag, an dem mein Bein fortging 1985**; **Affolter: Wenn die Organisation des zentralen Nervensystems zerfällt und es an gespürter Information mangelt 1993**. Das St. Galler Modell; **Nelles: Neurologische Rehabilitation 2004; http://www.dgn.org/117.0.html Prigatano: Neuropsychologische Rehabilitation. Grundlagen und Praxis 2004; Thöne-Otto & Markowitsch: Gedächtnisstörungen nach Hirnschäden 2004;indexHirn!Schäden Markowitsch & Welzer: Das autobiographische Gedächtnis. Hirnorganische Grundlagen und biosoziale Entwicklung 2005; Welzer & Markowitsch eds: Warum Menschen sich erinnern können. Fortschritte in der interdisziplinären Gedächtnisforschung 2006; Kerkhoff: Neglekt & assoziierte Störungen, 2004**; Lurija: Das Gehirn in Aktion 1973, 1991, Neglekt p108ff, Die rechte Hemispäre p160-169ff, Aufmerksamkeit p276ff oder Luria: Die höheren kortikalen Funktionen des

Menschen und ihre Störungen bei örtlichen Hirnschädigungen, 1962 1970; Lurija: Der Mann, dessen Welt in Scherben ging. Zwei neurologische Geschichten 1992; Sacks: Der Mann, der seine Frau mit einem Hut verwechselte 1987; Linke: Hölderlin als Hirnforscher; E.A. Poe: Erzählungen; **Film von Christopher Nolan, Memento DVD 2002**; Verwandte Probleme: Mein Vater, D 2002, mit Götz George. Claire - Sich erinnern an die schönen Dinge, Frankreich 2001. „Der Tag, der in der Handtasche verschwand", Debüt-Film von Marion Kainz aus dem Jahre 2001. Der Schrecken des Vergessens (Originaltitel: Forget Me Never), USA/Kanada 1999. Iris von Richard Eyre 2001; Kathrin Schmidt: Du stirbst nicht, 2009; **LeDoux: Das Netz der Persönlichkeit. Wie unser Selbst entsteht 2006**; Kolb & Whishaw: Neuropsychologie 1996; Green & Triffet: Sources of consciousness 1997; Green: Information Theory and Quantum Physics. Physical Foundations for Understanding the Conscious Process 2000; Koch: Bewusstsein - ein neurobiologisches Rätsel 2005 NCC = Neural correlates of consciousness; Wichmann, Tübingen. Karnath: Neuropsychologie 2003; Karnath, H.-O. & Thier, P.: Neuropsychologie 2005; **Kaplan-Solms & Solms: Neuro-Psychoanalyse: eine Einführung mit Fallstudien** 2003; Solms & Turnbull: Das Gehirn und die innere Welt 2004; Popper & Eccles: Das Ich und sein Gehirn 1977; Eccles & Robinson: Das Wunder des Menschseins. Gehirn und Geist 1984; Damasio: Descartes' Irrtum. Fühlen, Denken und das menschliche Gehirn 1994; **Damasio: Ich fühle, also bin ich. Die Entschlüsselung des Bewußtseins; 1999**; Damasio: Der Spinoza-Effekt. Wie Gefühle unser Leben bestimmen 2003; Oliver Sacks: Zeit des Erwachens, Buch & Film; Leuzinger-Bohleber/Mertens/Koukkou, Erinnerung von Wirklichkeit. Psychoanalyse und Neurowissenschaften Bd1: Die Freudsche Gedächtnistheorie auf dem Prüfstand; Fiels: Wie Erinnerungen haften bleiben, SdW Sept2005 p62ff; Spitzer: Geist im Netz 2000; Ratey, Das menschliche Gehirn. Eine Gebrauchsanweisung 2001; Affolter, F.: Wahrnehmung, Wirklichkeit und Sprache 2001 Golm DT4000AFF; Propriozeption. Goldenberg, Pössl & Ziegler: Neuropsychologie im Alltag; Ramachandran: Eine kurze Reise durch Geist und Gehirn 2005; Blakemore & Frith: Wie wir lernen. Was die Hirnforschung darüber weiß 2006; Kerkhoff: Ratgeber Neglect - leben in einer halbierten Welt 2008; Habermann & Kolster: Ergotherapie im Arbeitsfeld Neurologie 2002; **Hopf, Deuschl & Diener eds: Neurologie in Praxis und Klinik** 2Bde 1999; Hüther: Die Macht der inneren Bilder. Wie Visionen das Gehirn, den Menschen und die Welt verändern 2004; Hüther: Bedienungsanleitung für ein menschliches Gehirn & Die Macht der inneren Bilder & Biologie der Angst 2013; Hüther: Was wir sind und was wir sein könnten 2011; Walter: Aufmerksamkeitsstörungen 2005 CZ1300STUR Golm; **Neglect** = Verzerrung räumlicher Aufmerksamkeit. Gestörte Raumwahrnehmung. Sturm & Münte: Lehrbuch der Klinischen Neuropsychologie 2009^2 p421-544!!! Kap4: Störungen spezifischer Funktionen. Aufmersamkeitsstörungen. Vernachlässigung-Neglect. Gedächtnisstörung. Störung der Exekutivfunktionen = metakognitive Funktionen, umfasst Antizipation, Planen, zielgerichtete Handlungsdurchführung, Überwachung, Hemmung (Dysexekutives Syndrom). Koordination der Zwischenschritte unserer Handlungen. Zentral für selbständige Lebensführung. Kognitive Konfigurationen/Task-Sets müssen über gewisse Zeit trotz Ablenkungen aufrechterhalten werden können (Persistenz). Störungen der visuellen Raumwahrnehmung und Raumkognition: Räumlich-perzeptive Störungen wie Hauptraumachse/visuelle Vertikale, Orientierungsschätzung, Positionswahrnehmung, Linienhalbierung, Geradeausrichtung, Längen- und Distanzschätzung. Räumlich-topographische Störungen. **Optische Täuschungen**. 2013, 32 Seiten mit Pop-Ups. Ab 8 Jahren.

Negative Gefühle gehen mit einer erhöhten Aktivität im rechten Stirnhirn einher, wärend positive Gefühl eher das linke aktivieren. Bei Wiederherstellung rechter Hirnhälfte ist mit depressiven Schüben zu rechnen. Aufgabe des rechten Frontalhirns ist, die Gier nach Geld zu unterdrücken, um die soziale Norm der Fairness durchzusetzen. Bei Störung nimmt man auch den Anteil ungerechter Teilung. Rechts wird die Realitätsnähe geprüft. Links werden logische Geschichten als Erinnerungsersatz konfabuliert. Rechtsdominanz der Hirnhälften führt zum Glauben an übersinnliche Phänomene. Am Assoziationsreichtum ist die rechte Hirnhälfte stärker beteiligt. Skeptiker sind davor geschützt, in eine Psychose abzudriften – sie tun sich aber auch schwer, originelle Beiträge zur Wissenschaft zu leisten. Gehirn und Geist 12/2012 p34;

Wais & Fenske-Deml: Neuropsychologie für Ergotherapeuten 2001;

Linker Stirnlappen, frontopolare Kortex: Spezialist fürs Allgemeine/Gesamtleistung. Linker Frontal- und rechten Scheitellappen: Arbeitsgedächtnis wo kurzzeitig Information parat gehalten werden.

Geschichts- und Gegenwartsdeutung: Slotterdik; Barzon Brock: Jeremia Casting - ein Hört, Hört von 5.12.2010, Musealisierung als Zivilisationsstrategie; **Assmann: Der lange Schatten der Vergangenheit. Erinnerungskultur und Geschichtspolitik.** 2006; Assmann: Das neue Unbehagen an der Erinnerungskultur 2013; **M̃artin Korte: Wir sind Gedächtnis. Wie unsere Erinnerungen bestimmen, wer wir sind** 2017; Wissen schafft Struktur der Wahrnehmung. Ortsinfo ist lebensentscheidend. Propriozeption. Odo Marquard: Zukunft brauch Herkunft. **Szczypiorski: Es gibt keine Vergangenheit, nur Erinnerung. Nur, was ich im Gedächtnis behalte, ist Vergangenheit - alles andere gibt es nicht mehr.** Dies: Geschichte im Gedächtnis. Von der individuellen Erfahrung zur öffentlichen Inszenierung 2007; **Metahistorischen** Ansatz - von der **individuellen zur kollektiven Konstruktion der Vergangenheit** am Beispiel öffentlicher Geschichtspolitik in Deutschland - **das individuelle Gedächtnis, das soziale Gedächtnis, das kollektive Gedächtnis, das politische Gedächtnis, das nationale Gedächtnis das kulturelle Gedächtnis, schließlich Speichergedächtnis und Funkionsgedächtnis. Wir sind was wir erinnern und vergessen.** Unsere Erinnerung hat dabei nicht nur an den Erinnerungen anderer teil, sondern auch an dem symbolischen Universum kultureller Objektivationen. Grundbegriffe und Topoi des individuellen und kollektiven Gedächtnisses Gegenstand der Analyse und Darstellung: Wer erinnert sich?, Sieger und Verlierer, Opfer und Täter. Die Figur des Zeugen. Wer wird erinnert? **Trauma, Externalisation, Beschweigen, Vergessen, Trauer.** Unterschiedliche Perspektiven der Erinnerung an Auschwitz bei LEVI und KOSELLECK, die Lebensgeschichten der diachronen Doppelgänger SCHNEIDER/SCHWERTE und DÖSSECKER/WILKOMIRSKI, die Unangemessenheit der Rede JENNINGERS vor dem Bundestag. Immer wieder greift sie auf M. HALBWACHS Theorie des Gedächtnisrahmens zurück, um deutlich zu machen, dass Erinnern nicht nur ein individueller Akt - mit allen notwendigen, neuronal und personal bedingten Fehlleistungen - ist, sondern in sozialen und politischen Kontexten sich vollzieht. Die Entdeckung der 45er Generation und deren Bedeutung für die 68er Generation ist gerade im Jahr 2008, in dem es zu einer intensiven Auseinandersetzung mit den Jahren 68 und danach zu kommen scheint, von Interesse. Ausgehend von SCHELSKYS Porträt der skeptischen Generation - das sind die Mitte bis Ende der 20er Jahre Geborenen - als entpolitisiert und entideologisiert, dafür aber ungewöhnlich lebenstüchtig und innovativ - wird deren Rolle als wegweisende Modernisierer der bundesrepublikanischen Gesellschaft beschrieben. Anregungen zum gesellschaftlichen Diskurs über die bundesdeutsche Erinnerungskultur und Geschichtspolitik und zur Analyse des eigenen **Selbst- und Weltverständnisses**. Baal-Shem-Tov: **In der Erinnerung liegt das Geheimnis der Erlösung.** In: Hallie: Daß nicht unschuldig Blut vergossen 1979 p16; Odo Marquard: Zukunft braucht Herkunft.

Hung: Models of oculomotor control 2001; Hünig: Die **Umkehr-Brille**. Psychologe George Stratton, der 1896 zum ersten Mal mit Umkehrprismen experimentierte. Er wollte wissen, ob sich der Sehprozess so an das auf dem Kopf stehende Bild anpassen kann, dass die Welt für den Betrachter wieder 'normal' aussieht. Mit der Umkehrbrille können Sie diese berühmten Versuche selbst nacherleben. Wie lange dauert es, bis ich wieder Wasser in ein Glas gießen oder jemandem sicher die Hand reichen kann? Oder einen Text lesen? Oder etwas schreiben?!

48 Philosophie

Die Philosophie ist ein Kampf gegen die Verhexung unsres Verstandes durch die Mittel unserer Sprache. Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951).

Ansgar Beckermann: Fortschritt besteht in der Philosophie nicht darin, einen Kanon allgemeinverbindlicher Antworten zu entwickeln; Fortschritt in der Philosophie bedeutet, dass wir die möglichen Antworten und ihre Konsequenzen besser verstehen. Es geht also darum, einen möglichst umfassenden Überblick über die Antworten zu geben, die man auf eine Frage geben kann, und herauszuarbeiten, welche Implikationen diese Antworten haben, worauf man sich festgelegt, wenn man die eine oder die andere Antwort akzeptiert. Damit wird zugleich klar, was für und was gegen diese Antworten spricht. Da es für alle Positionen in der Philosophie Pro- und Kontraargumente gibt, wird bei diesem Vorgehen keine Antwort als die einzig mögliche oder als die

einzig rationale ausgezeichnet. Vielmehr kommt es auf jeden selbst an, wie er diese Pro- und Kontraargumente bewertet. David Lewis hat des sehr schön ausgedrückt, als er in der Einleitung zum ersten Band seiner Philosophical Papers schrieb:

Wenn alles gesagt und getan ist, wenn all die trickreichen Argumente und Unterscheidungen und Gegenbeispiele entdeckt sind, stehen wir wahrscheinlich immer noch vor der Frage: Welche Preise sind es wert, gezahlt zu werden? Welche Theorien sind, wenn man alles gegeneinander abwägt, glaubwürdig? Welche kontraintuitiven Konsequenzen sind inakzeptabel und welche sind vielleicht doch tragbar?

Philosophie hat also nicht mehr zu bieten als die Analyse von Implikationszusammenhängen. Das mag wenig erscheinen, manchem vielleicht zu wenig. Aber es hat einen unschätzbaren Vorteil. Philosophie entlässt den Einzelnen nicht aus seiner Verantwortung. Sie sagt nicht: So und so ist es; das hast Du zu glauben. Sie sagt vielmehr: Wenn Du das glaubst, musst Du diese Konsequenzen in Kauf nehmen; wenn Du aber eher das glaubst, dann kommst Du um die Annahme jener Folgen nicht herum. Letzten Endes musst aber Du selbst entscheiden, was Du für richtig halten willst. Jedem bleibt die Freiheit, sich seine eigene Meinung zu bilden. Und niemand kann die Verantwortung für das, was er glaubt, auf andere abschieben. Jeder muss selbst für das gerade stehen, was er für richtig hält. In meinen Augen ist das ein äußerst attraktiver Aspekt philosophischer Arbeit. Außerdem glaube ich nicht, dass damit der Beliebigkeit und dem Relativismus Tür und Tor geöffnet sind; denn natürlich sind manche Abwägungen rationaler als andere. Aber – auch über Rationalität kann man natürlich streiten. http://www.philosophieverstaendlich.de/philosophie

Synthetisches Urteil a priori . Mach: Mechanik p480; Kant: 'synthetisches Urteil a priori' - Urteile, die nicht auf Erfahrung beruhen (die demnach a priori sind) und auch nicht auf der Zerlegung von Begriffsbedeutungen (also nicht analytisch sind).

Erkenntnisse lassen sich durch Urteile ausdrücken. Als Urteil bezeichnet Kant Sätze, die einem Subjekt ein Prädikat zusprechen, z. B. 'Der Schimmel ist drei Jahre alt'. Urteile, die der Erfahrung entstammen, nennt Kant 'Urteile a posteriori' (lateinisch: 'im Nachhinein'). Urteile, die sich in keiner Weise auf Erfahrung stützen, nennt Kant 'Urteile a priori' (lateinisch: 'von vornherein'). Sie entstammen der reinen Vernunft. Urteile a priori erkennt man an der Notwendigkeit (d.h. sie können nicht falsch sein) und der strengen Allgemeinheit (d.h. sie gelten ohne Ausnahme), mit der sie gelten. Urteile a posteriori sagen dagegen zwar, wie die Wirklichkeit beschaffen ist, jedoch nicht, dass es notwendig so sein muss. Gestützt auf Erfahrung kann man außerdem nur zu induktiven Verallgemeinerungen kommen, jedoch nicht zu ausnahmslos geltenden Gesetzmäßigkeiten.

Synthetisch vs analytisch: Ausgangsfrage Kants: 'Gibt es Urteile a priori?' Unabhängig von jeder Erfahrung gilt z.B. der Satz: 'Schimmel haben ein weißes Fell'. Der Grund hierfür liegt darin, dass bereits im Begriff Schimmel enthalten ist, dass diese ein weißes Fell haben. Andernfalls wären es eben keine Schimmel. Kant nennt derartige Sätze „analytische Urteile. Analytische Urteile formulieren etwas, was in der Bedeutung des Wortes bereits enthalten ist. Sie erläutern einen Begriff, sie enthalten jedoch keine eigentliche Erkenntnis.

Von den analytischen Urteilen unterscheidet Kant deshalb die synthetischen Urteile. Darunter versteht er Urteile, die einem Subjekt ein Prädikat zuschreiben, das im Begriff des betreffenden Subjektes nicht bereits enthalten ist. Insofern formulieren synthetische Urteile Erkenntnisse, die unser Wissen erweitern.

Kants Ausgangsfrage lautet demnach: Gibt es synthetische Urteile a priori? Kant bejaht diese Frage und verweist u. a. auf die Mathematik, die seiner Ansicht nach ein glänzendes Beispiel dafür ist, wie weit wir es, unabhängig von der Erfahrung, in der Erkenntnis a priori bringen können.

49 Basic phenomena

Bräuer: Gewahrsein, Bewusstsein und Physik: Eine populärwissenschaftliche Darstellung fachübergreifender Zusammenhänge 2005; http://www. uni-tuebingen. de/fileadmin/Uni_Tuebingen/Fakultaeten/ MathePhysik/Institute/ ITP/Braeuer/ Buecher/ Gewahrsein/Gewahrsein. htm; 1] Wo bin ich? Weiß ein Stein/Aufzug seine Position? Kognitionsraumzeit. 2] Wie gelingt Stehen und Gehen? Chaos-Stabilisierung. 3] (Biologische)

Uhren: Konstruktive Rolle von Nichtlinearitäten. Grenzzyklen. Planetenbewegung per Gravitationsgesetz und harmonischer Oszillator sind irreführende/lebensweltfremde, weil reibungslose/hamiltonsche Beispiele. Moshinsky: The harmonic oscillator in modern physics. From atoms to quarks 1969 93 Seiten. Die leichte math Behandelbarkeit und die Anwendung/Quantisierung in der reibungsfreien Physik des Kleinen/QM sind nicht nachvollziehbare Gründe. Ihnen liegt ein völlig anderer Lösungstyp zugrunde: stabiler Zyklus vs (neutrales) Zentrum. Ebeling, Engel & Herzel: Selbstorganisation in der Zeit 1990 p17; Reibung bei kleiner Geschwindigkeit nicht über Stokes'sche Reibung, sondern Coulomb-Reibung = Haft/Gleitreibung ! 4] Was heißt sehen? Das Auge/CCD-Messfühler als Interface zur Außenwelt und dessen Verschaltung ist wichtig, die multiplexe Infoflutreduktion im visuellen Cortex sind das Geheimnis. siehe Rattenhirnbildatlas Paxinos & Watson: The rat brain 1986; 5] Gedächtnis lernen. 6] Raum-Zeit-Konstrukt als Äquivalenzklasse für grundlegende Korrelation der Stufe 0 setzt Gedächtnis voraus. da Vinci: Ungleichheit ist die Ursache aller örtlichen Bewegung. Die Bewegung ist die Ursache alles Lebens. Es sind die Unterschiede der Dinge! Die akausalen ordnen wir räumlich, die kausalen ordnen wir zeitlich. 7] Bei Turbulenz wirkt die **Nichtlinearität auf kleiner Skala als Zerbröseler/Verstärker von Feinstruktur im Chaos-Sinne und auf großer Skala als Stabilisator von kohärenten Strukturen. Durbin & Pettersson: Statistical theory and modeling for turbulent flows** 2001; SdW Dez 1997; Holmes, Lumley, Berkooz: Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry 1996; Karl Steinbuch: Falsch programmiert. Über das Versagen unserer Gesellschaft in der Gegenwart und vor der Zukunft und was geschehen müsste. 1968: **Irrationaler Glaube** führt zumindest zum **Glück der Konstanz, zu festem Halt**. **Journal of Unsolved Questions** http://junq.info/ **Was mich sehr beeindruckt:** a] Darstellungstheorie, Kategorientheorie. b] Lie-Gruppen = Mannigfaltigkeiten können Gruppenstruktur haben. c] Faserbündel-Idee. d] Poincare-Dualität = Integralsätze, Wegunabhängigkeit, Zusammenhang von Mengen gelten im Sinne der Funktionentheorie allgemein.

50 Arbeitstipps

Form: Nur weil Eltern zu Zeiten der industriellen Rev keine Zeit hatten und massenhaft ungebildet waren, muss man diese Schulform nicht als Verwahranstalt fortsetzen damit sie sich nun unbegründet und auf Staatskosten ihrer Verantwortung dauerhaft entziehen wollen. Klassenverband ist Vorzeit und lebensweltfern. Werkstattarbeit. Projektarbeit. Programmier- und Bastellabore. Das Verhältnis von Distanz und Nähe, Verantwortung und Unverbindlichkeit wird neu justiert. **Ludwig & Fischer: Verstehendes Lernen in der Montessori-Pädagogik** 2003 Das Thema des Kindes erkennen. Beobachten und Verstehen. Mathematik entdecken vs Verfahren üben. Vor den Büchern war die Wirklichkeit. Mathematik verstehen: Erst in Sinnen, dann im Geiste. Ebenda p73 Maria Montesorri: Wissen als Mittel zur Entwicklung der Persönlichkeit 1941. Böhm: Maria Montessori 1870-1952 Doktormutter. Hintergrund und Prinzipien ihres pädagogischen Denken 1990; Hansen-Schaberg & Schonig eds: Montessori-Pädagogik 2000; Altenthan, Hobmair et al.: Pädagogik 1989; Lothar Klingberg: Lernende und Lehrende im Unterricht 1989; Mietzel: Psychologie in Unterricht und Erziehung. Pädagogische Psychologie 1986; Gage & Berliner: Pädagogische Psychologie 1996^5; dtv-Atlas zur Psychologie Bd1 1993; Pervin: Persönlichkeitstheorien 2000^5; **Wendt: Allgemeine Psychologie. Eine Einführung** 1989; **Müsseler & Prinz: Allgemeine Psychologie** 2002 p619 Sprachproduktion; Stroebe, Hewstone, Codol, Stephenson eds: Sozialpsychologie 1990^2; Flick, Kardorff, Steinke: Qualitative Forschung 2007^5; **Lersch, Gottschaldt, Sander, Thomae et al: Handbuch der Psychologie** 1970 Bd4 Persönlichkeitstheorie, Bd7T1+2 Sozialpsychologie. Bd9 Betriebspsychologie. Bd11 Forensische Psychologie; Reble: Geschichte der Pädagogik 1989; Kiper: Einführung in die Schulpädagogik 2010; Amelang & Bartussek: Differentielle Psychologie und Persönlichkeitsforschung 1997; Amelang & Zielinski: Psychologische Diagnostik und Intervention 1997^2; Fisseni: LB der psychologischen Diagnostik 1997^2; Wallrabenstein: Offene Schule. Offener Unterricht 1998; Bartnitzky & Christiani eds: Handbuch der Grundschulpraxis und Grundschuldidaktik 1981;

Inhalte: Top down mittels Mathematik muss durch bottom up mittels o.g. Labore, wo Messungen mittels Mikrocontrollern per Datenanalyse und simplen Computermodellen a la May (CA, log Abbildung, num Loes von Dgls) spielerisch erobert werden. Programmiersprachen sollten ein Säule der Naturbewältigung werden.

Bellman & Cooke: Modern elementary differential equations 1995;

Manfred Lehn: Wie bearbeitet man ein **Übungsblatt**? http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/uebungsblatt Kontrolle des Übungsblatts: LK lernt die Studenten und deren Lücken kennen. Befasst sich selbst mit dem aktuellen Stoff. Zwingt sich und Student zur stofflichen Auseinandersetzung. Wie halte ich einen **Seminarvortrag**? http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/seminarvortrag Theisen: Wissenschaftliches Arbeiten 1990[4]; **Vortrag**. Feuerbacher: Professionell Präsentieren in den Natur- und Ingenieurwissenschaften 2005; Ebel, Bliefert, Greulich: Schreiben und Publzieren in den Naturwissenschaften 2006; Ebel & Bliefert: Bachelor-, Master- und Doktorarbeit. Anleitungen für den naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchs 2009[4];

Aufgabe der Schule: Uni befasst sich nicht mit jenen ernsthaften Fertigkeiten, welche für das Leben unentbehrlich sind, sondern vorwiegend mit Kenntnissen, die einem lebenslänglich treu bleiben und Halt geben. von **Hentig: Die Schule neu denken** 1994[3] Eine Übung in praktischer Vernunft. Eine zornige, aber nicht eifernde, eine radikale, aber nicht utopische Antwort auf Hoyerswerda und Mölln, Rostock und Solingen; Bayerwaltes: Große Pause! Nachdenken über Schule 2002; Uni hat keine wichtigere Aufgabe, als strenges Denken, vorsichtiges Urteilen, konsequentes Schließen und die abstrakte Sprache der höheren Kultur - die erst viel später verstanden wird - zu lehren. Siehe auch Nietzsche: Menschliches Allzumenschliches §130 ff, Hesse: Lektüre für Minuten zu Bildung, Schule, Erziehung. von Hentig: Die Menschen stärken, die Sachen klären. Ein Plädoyer für die Wiederherstellung der Aufklärung 2003; von **Hentig: Bewährung. Von der nützlichen Erfahrung, nützlich zu sein** 2006 Pädagogisches Manifest. **Entschulung** der Mittelstufe, also 13 bis 15 jährige raus aus der Schule, und einjähriger Dienst für die Gemeinschaft kann den Teufelskreis von Frustration und Gleichgültigkeit, der heute das Lebensgefühl vieler Jugendlicher prägt, die sich überflüssig und unbeachtet fühlen, durchbrechen.

Klausur fragt das Rechnen/operationalen Umgang mit mathematischen Befriffsbildungen ab: Vektoren, **Richtungskosinus** wird zwischen Vektor und Basis gemessen $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i = \|\mathbf{x}\|\cos\alpha_i$. **Winkel des Richtungskosinus** liegt daher i.a. nicht senkrecht zu den euklidischen Koordinatenachsen. $\cos\alpha_i = \dfrac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{x}\|} = \dfrac{x_i}{\|\mathbf{x}\|}$, Nur speziell im $\mathbb{R}^2$ liegen die Winkel in der $\hat{e}_3$- oder z-Ebene und es gilt $\vec{r} = \cos\alpha_1\hat{e}_1 + \cos\alpha_2\hat{e}_2 = \cos\alpha_1\hat{e}_1 + \cos(90-\alpha_1)\hat{e}_2 = \cos\alpha_1\hat{e}_1 + \sin\alpha_1\hat{e}_2$, lineare Unabhängigkeit, Matrizen, Determinanten mittels Laplace' schem Entwicklungssatz, Lösung von Gleichungssystemen mittels Gauß und Cramer, Inverse einer Matrix, Koordinatentransformation, Ableitung einer inversen Funktion, Integration mittels Substitution, parzielle Integration, Taylor, L'Hospital, komplexe Zahlen, Moivre'scher Satz.

Dgls, **Trennung der Variablen/Veränderlichen** bei separabler Gleichung basiert auf Substitution, um von y auf x zu kommen, läuft formal über das Rechnen mit Differenzialen siehe Arens p440, **Variation der Konstanten** $y' - 2xy = e^{x^2}\sin x$, $y' - y = x$, $y' - xy + x = 0$ gibt $y(x) = 1 + ke^{-x^2/2}$, Fourierreihen, **Volumenintegrale und Funktionaldeterminanten** r und $r^2\cos\theta$: Vaiablentransformation mittels Transformationssatz = Verallgemeinerung der Integration durch Substitution Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offene Menge und $\Phi\colon \Omega \to \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^d$ Diffeomorphismus. Dann ist die Funktion f auf $\Phi(\Omega)$ genau dann integrierbar, wenn die Funktion $x \mapsto f(\Phi(x))\,|\det(D\Phi(x))|$ auf Ω integrierbar. Elementar ist es bei 1-dimensionaler Subtitution $x \to u$ so $\int f(u(x))\mathrm{d}x \overset{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u'}{=} \int \dfrac{f(u)}{u'}\mathrm{d}u$. Die Ableitung der Variablen-Transformation oder Funktional-Determinante g muss in den Nenner. Also $\delta(x,y,z) = \dfrac{\delta(u,v,w)}{\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}}$. In allgemeinen Fall gilt: $\int_{\Phi(\Omega)} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_\Omega f(\Phi(x))\,|\det(D\Phi(x))|\,\mathrm{d}x$. Dabei ist $D\Phi(x)$ die **Jacobi-Matrix** und $\det(D\Phi(x))$ die **Funktionaldeterminante** von Φ. Königsberger: Analysis 2 2004 p211; Forster 3; Beispiele: Kreyszig: Advanced engineering math p520 $\int_{\text{Raute}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2\int_0^2 \frac{1}{2}(u^2+v^2)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{8}{3}$ geht einfacher in neuen Koordinaten $u = x+y$ und $v = x-y$; **Idee:** Gehe zu Koordinaten, deren Koordinatenlinien das Gebiet begren-

zen. Also konstanten Integrationsgrenzen. Dann Integration trennbar, weil Integrationsvariablen unabhängig. Integrationsreihenfolge egal. Riech p164ff; Salas & Hille p1011; Piskunow: Diff und Integralrechnung Teil2 1970 p285; Leupold et al Analysis p418 $\int \mathrm{d}z$ = **Fadenintegral**, $\int \mathrm{d}y$ = **Scheibenintegral**, $\int \mathrm{d}x$ summiert vom Volumen. Rothe Teil3 p70 und Teil4; Jordan & Smith: Math für die Praxis p710ff **Mehrfachintegrale**, Wegintegral, Vektordifferenziation

Physik lehren? In Schule & Uni stehen der kleine Kathechismus im Vordergrund - die Crash-Kurs-Vermittlung der von vergangenen Generationen geschöpften Systematik und gepflegten Traditionen. Honerkamp: Die Entdeckung des Unvorstellbaren. Einblicke in die Physik und ihre Methode 2010; H̃onerkamp: Denken in Strukturen und seine Geschichte. Von der Kraft des mathematischen Beweises 2018; Danielsson: Die Welt an sich. Und wie wir sie begreifen können 2022; Rovelli: Seven brief lessons on physics. Sieben kurze Lektionen über Physik 2016; Ostermann: Unterwegs mit Einstein und dem Esel; Honerkamp & Schramm: Innenwelten - Außenwelt 2010 Neues Palais AZ 28190; Honerkamp: Was können wir wissen?: Mit Physik bis zur Grenze verlässlicher Erkenntnis 2012; Einleitung ist toll! Urknall und $R(t)$. Laue und SRT. Gleichzeitigkeit ist kein objektives Element der Wirklichkeit. Was Honerkamp zu Laue über Kant und a-priori Wissen von Raum-Zeit p17 und Zeit sagt, ist eher bescheiden. Beschränkt sich auf Irreversibilität und äußert sich nicht zur wahrnehmungsbedingten Erfindung der Zeit, siehe Seite 434, und deren Abschaffung durch die Physik (Einstein, Gödel, Wheeler, Barbour). **Cohen: Die zweite Erschaffung der Welt. Wie die moderne Naturwissenschaft entstand** 2010; Kanitscheider: Natur und Zahl. Die Mathematisierbarkeit der Welt 2013 e-book; **Universalienstreit:** 'Realismus' (philosoph. Position, Oberbegriffen kommt eine wirkliche Existenz zu; z.B. 'Stuhl' als Oberbegriff für Sessel, Hocker, Schaukelstuhl ... $\neq$ ontologischer Realismus) und 'Nominalismus' (Oberbegriffen kommt keine wirkliche Existenz zu; Oberbegriffe werden nur als Konstruktion denkender Gehirne angesehen). A) Sind mathematische Objekte (z.B. 'Ellipse', 'Primzahlen') real existierend (die realistische Position) oder nicht (die nominalistische Position)? Seite 147: Mathematische Ideen allein können aus naturalistischer Sicht jedenfalls nicht ohne materiellen Träger das primäre Baumaterial der Welt darstellen. B) Warum 'passen' mathematische Gleichungen so oft und so exakt zu physikalischen Objekten und Prozessen? Natur hat innere mathematische Struktur! Dirac: Die Natur besitzt eine innere mathematische Qualität. Unseparierbare Einheit von den mathematischen und physikalischen Elementen einer Theorie p374. = Position eines 'immanenten oder aristotelischen' Realismus. Denn der Vorteil der Konzeption, Zahlen als numerische Eigenschaften der Dinge zu fassen, liegt darin, dass man sich nicht mehr den Kopf zerbrechen muss, wie die zahlenmäßige Information in ein materielles Gehirn eindringen kann. d'Alembert: Allez en avant et la foi vous viendra. Go forward, and faith will come to you. Mach einfach weiter, und sie werden dir glauben. Push on, and faith will catch up with you. Lavine: Understanding the infinite; Hess: Opa, was macht ein Physiker? Physik für Jung und Alt 2014, in diesem Buch wird ein Missverständnis demonstriert. Der Autor erläutert, was ein **Physiklehrer** macht. Er erzählt seinen Studenten, wovon Physiker überzeugt sind. Aber ein Physiker ringt um Begriffe, die zur Modellierung grundlegender Erfahrungen geeignet sind. Lotet die Modellgrenzen im Vergleich mit der Wirklichkeit aus, MECHANIK Hebel Auftrieb Stabilität, Schwerpunkt Fallgesetze Pendel Kurven, Graphen und Funktionen Steigung, zeitliche Änderung, Ableitung* Formeln für Funktionen* Energie Arbeit, Leistung Masse, Trägheit, Impuls Kraft, Bewegungsgleichung Sonne und Planeten Newton, Mond und Erde Formeln für Newton und die Gravitation* Energie bei der Planetenbewegung Kraft und Potential* Drehimpuls Laplace-Runge-Lenz-Vektor und Perihel-Drehung* Rechnen mit Vektoren* Vorhersage und Chaos Ein Streit über Chaos* Zwangskräfte, d'Alembert, Lagrange I und Gauß* Verallgemeinerte Koordinaten, Lagrange II* Pendelbewegungen Hamilton-Prinzip und Hamilton-Gleichungen* Phasenraum, Liouville* Bewegung in beschleunigten Bezugssystemen* Kreisel, Euler* Berechnung von Bewegungen* Grenzen der Mechanik Einheiten und Dimensionen* Quadrat und Potenzen, große und kleine Zahlen QUANTEN-MECHANIK Warum Quanten-Mechanik? Planck, Einstein und die Quanten Bohr, Sommerfeld: Atombau und Spektrallinien Heisenbergs Unschärfe-Relation, Form und Stabilität des Wasserstoff-Atoms im Grundzustand de Broglie, Schrödinger und Wellenfunktionen Beugung am Spalt und am Doppel-Spalt Tunnel-Effekt Drehimpuls und Spin, Stern-Gerlach-Experiment Pauli, Atome und Periodensystem Heisenberg NP 1936 sieht Analogie von Elektronenspin bei Helium und Protonenspin bei H_2 bei Para- und Ortho-Helium-Atom und -Wasserstoff-Molekül wegen Hyperfeinaufspaltung. Bonhoef-

fer und Harteck 1929 in Dahlem. Wasserstoff-Isotope und Helium-Isotope Fermionen und Bosonen Strahlung und Auswahlregeln* Dirac und das relativistische Elektron* Erzeugung und Vernichtung von Teilchen* Was wäre, wenn an der Planck-Konstanten gedreht wird? ERHALTUNGSSÄTZE UND SYMMETRIEN Der vermisste Autoschlüssel Wann gelten Erhaltungssätze? Das Noether-Theorem Translations-Invarianz Rotations-Invarianz Verschiebung des Zeit-Nullpunktes Paritäts-Operation und Paritäts-Invarianz Verletzung der Paritäts-Invarianz und Pauli Verletzt der Antrieb eines Schiffes mit einer Schraube die Parität? Zeitumkehr-Invarianz. **Er erzählt nicht,** das Physiker jene sind, die auf Basis dieser Begriffe grundlegende Modelle machen und in Sternstunden die brauchbaren Begriffe erst tastend erfinden müssen. **Physik online:** http://www.livephysics.com/ Notes: http://fias.uni-frankfurt.de/~hees/ In der Schule die Zuordnung der qualitativen Relationen phys Begriffsbildungen in bezug auf alltagsnahe Erfahrungen. In der Uni die mathematischen Relationen. Physik als theoriengeleitete Erfahrungswissenschaft ist aber Problemsuche/-Stochern im Nebel, datengetriebene Modellierung und Daten-Modell-vergleichendes Akzeptieren/Verwerfen. Nicht aber bloße mathematikbasierte Rechtfertigungs-Begründungslehre zur Erklärung der Welt. Psychisch gesehen kann sie Halt, festen Grund geben, Zuversicht für ein Verstehen der Welt, also eine Stütze nicht-kontengenter Experiment - schließlich ist die Welt nichts als tiefpassgefiltertes Rauschen. Herrmann: Neurodidaktik. Grundlagen und Vorschläge für gehirngerechtes Lehren und Lernen; Versuche einen Ausgleich der verherenden Wirkung der Methodenauslagerung, die zwar einen raschen und sicheren Zugriff auf und Umgang mit Gewissheiten sichert (Computer-Algebra und Wikipedia), aber dem Verstehen entgegensteht und Basis-Ideen verdeckt und geheimisvoll erscheinen lässt. Wigner: Unbegreifliche Wirksamkeit von Mathematik 1960. Wissen als Geheim-Code. **M̃artin Korte: Wir sind Gedächtnis. Wie unsere Erinnerungen bestimmen, wer wir sind** 2017; Wissen schafft Struktur der Wahrnehmung. Ortsinfo ist lebensentscheidend. Propriozeption. **Zwei Wege des Verstehens: Geometrische, bildhafte Vorstellung und/oder beispielhaftes mechanisches/verdrahtendes Einüben / Pattern Drill von Methoden. Rechnen statt Zeichnen. Kalkül ersetzt Anschauung, aber nicht das Verstehen.** Feynman: QED - die seltsame Theorie des Lichts und der Materie 1985 p19ff; Honerkamp, Römer: Einführung in die Klassische Theoretische Physik 1993; Theoretische Physik ist Verschränkung von mathematischer Deduktion und anschaulicher Interpretation. van Vleck: Nicht-mathematische Theoretische Physik, PhysBl24 1968 p97–102, Die größten Fortschritte der theoret Physik basierten in der Vergangenheit nicht auf hoher Mathematik, sondern Intuition, die den Graben zwischen experimenteller Realität und math Gleichungen überbrückt. Es gab viele Haarscharf-Verfehlungen: Lorentz und Poincare waren mathematisch viel weiter als Einstein. Whittaker: Von Euklid zu Eddigton 1949 p67ff; Mathematisch war der Spin schon da, aber Pauli lehnte das ab.

51 Anthropische Konstanten und Substanzen

Stachel, Penrose, Ehlers: Einsteins Annus mirabilis. Fünf Schriften, die die Welt der Physik revolutionierten 1998, 2005 p197 Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt: Körperzustand bei ponderabler Materie = endliche Anzahl von Teilchen mit Ort und Impuls. Ganz anders Maxwelltheorie mit elektromagnet Zustand mit kontinuierlichen Funktionen = unendliche Anzahl von Freiheitsgraden. Schwarzer Körper sagt: Licht muss auch endliche Anzahl von Teilchen sein; **Ponderable Materie:** $E = \sum_{i=1}^{10^{23}} \epsilon_i$ Abzählbarkeit. Maxwell-Theorie aber bedeutet Überabzählbarkeit $E = \int \mathrm{d}V \vec{E} \cdot \vec{D}$, wobei E, D kontinuierliche Funktionen. **Licht/Strahlung muss auch aus endlicher Teilchenanzahl bestehen! Stoffmenge** 1 mol = 1M = $6{,}022 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Lange: Das Mol — ein Stoffmengenmaß, PhysBl10 1954 259-262; Westphal: Zum Begriff der Stoffmenge, PhysBl10 1954 p404-407; Atomistik bedeutet, dass es in der Natur um große Anzahlen von Bestandteilen makroskopischer Objekte geht. Es müssen Objektmengen von im Verhältnis zum Menschen angegeben werden. Mensch der Masse 70 kg bestehe nur aus Kohlenstoff-Atomen $m_C = 12 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg. Mensch besteht daher aus $\frac{70}{12 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} = 3.510^{27}$ Kohlenstoff-Atomen oder aus endlicher Anzahl von elementaren Objekten. Da die Potenzangabe unmenschlich groß ist so wählt man als Einheit für die **Stoffmenge = Objektmenge** die

Avogadro-Zahl $6{,}022 \cdot 10^{23}$ und kürzt sie mit mol ab. **Die Einheit mol bewahrt Atom-Gläubige vor dem Umgang mit goßen Zahlen. Siehe auch Seite 386**. Obiger Mensch besteht daher aus ca. 6 kmol. Antibiotika wirken ab 10 μM. Antibiot Peptide bereits bei 1 μM. Lüst: Quantenfische - Die Stringtheorie und die Suche nach der Weltformel 2011; $h = 6{,}626\,069\,57 \cdot 10^{-34}\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}$ $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{s}^2; \mathrm{N} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}) = 4{,}135\,667\,516 \cdot 10^{-15}\mathrm{eV} \cdot \mathrm{s}$, c=299 792 458 ms^{-1} exakt, da Meter durch Sekunde und diesem Wert definiert ist! $1 = \mu_0 c^2 \epsilon_0$. **Permeabilität** oder **magnetische Leitfähigkeit** $\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ Vs/Am, $[B]$ =Vs/m^2, **Permittivität**, dielektrische Leitfähigkeit, elektrische Feldkonstante, elektrische Konstante, Dielektrizitätskonstante des Vakuums und Influenzkonstante $\epsilon_0 = \dfrac{1}{\mu_0\, c^2} = 8.854\ldots\, 10^{-12}$ As/Vm, 1 F=As/V,

Leitstrahl-Rotation: $c \geq v = \dfrac{u}{T} = 2\pi \dfrac{R}{T}$ = Leitstrahlgeschwindigkeit bei R also maximaler Unter-Lichtgeschwindigkeits-Radius $R_{\max} \leq \dfrac{cT}{2\pi}$. **Ehrenfestsches Paradoxon:** Es können keine **starren Körper** existieren, für einen **mitrotierenden Beobachter** muss der Raum eine **nichteuklidische Geometrie** annehmen. Siehe Borns RT und Landau/Lifschitz Bd2 §89;

1 pc = 3.262 Lj = $2.087 \cdot 10^{13}$ km, 1 Lj = $9.46 \cdot 10^{12}$ km = 63 240 AE

Gravitationskonstante: G=6.672…10^{-11} m^3/kg s^2, $M_\odot$ = 1.9889 $\cdot 10^{30}$ kg, $G\,M_\odot = 1.327 \cdot 10^{20}$ m$^3\, s^{-2}$, Schwarzschild-Radius ohne Rotation $mc^2/2 = GMm/R_s$ für Sonne 2.6 km, Erde 9 mm. h=6.626 …10^{-34} Js, e=1.6 10^{-19} C

Kürzeste Länge/Verbindungsnetze G. Dvali; Aste: Symmetrie, Teilchen, Felder arXiv:1407.04478v1

Wasser: Absorb-Max 18 GHz. G.M. Haleand, M.R. Querry, Optical constants of water in the 200-nm to 200-µm wavelength region, Appl. Opt. 12, 555-563 (1973) Hütter: Wasser und Wasseruntersuchung; Davis & Day: Das Wasser 1961;

52 Elektronik

Conrad: Elektronik, gestern heute morgen 1979; Burmeister: Elektronik PfL8 1979; Zischka: Pioniere der Elektrizität. Vom Bernstein bis zum Zyklotron 1958; Conrad: Elektronik, Funktechnik Taschenlexikon Elektronische Bauelemente und Schaltungen, Prüf-, Kontroll- und Meßeinrichtungen, Steuerungs- und Regelungsgeräte, EDV - Hör- und Fernsehfunk, Richt- und Bildfunk, Nachrichtenweitverkehr, Funknavigation, Radar 1979; **Ravalico: Rätsel und Wunder der Funkwellen** 1936 Domenico Eugenio Ravalico 1900-1974; C̃onrad: Einführung in die Funktechnik 1952; M̃oltrecht: Amateurfunk-Lehrgang für das Amateurfunkzeugnis Klasse E 2020; Grandt & Karamanolis: So werde ich Funkamateur 1995; **Conrad: Auf unsichtbaren Straßen. Kurzwellen, Fernsehsender, Radarschirme** 1959 = Geschichte der Rundfunktechnik, Großfunkstelle Nauen; Kristke: Nauener Bilderbuch. Wanderungen durch den Kreis Nauen. 700 Jahre Nauen 1992; Nölte: Havelland. Ein Wegbegleiter 2018; al Diban: In Nauen durch die Jahrhunderte 1992; Kristke: 100 Jahre Nauen in Worten und Bildern. Eine Wanderung durch die Straßen und Gassen der Altstadt 1992; Arthur Fürst: Ätherwellen. Die Eroberung der Erde durch die drahtlose Telegraphie. Im Bannkreis von Nauen 1925 digisat calameo; Klawitter ed: 100 Jahre Funktechnik in Deutschland. Funksendestellen rund um Berlin 1996; Bolle: Die Grossfunkstation Nauen und ihre Bauten von Hermann Muthesius 1992; Conrad: Auf unsichbaren Wellen 1962; Conrad: Chips, Sensoren, Computer 1986; Conrad: Grundschaltungen der Funk- und Fernsehtechnik 1960; Conrad: Vom Jakobsstab zur Satellitennavigation 1979; C̃onrad: Leuchtkugeln bei Hassi Gebla 1958; Conrad: Notlandung in der Wüste 1961 Überleben in der Sahara. Libyen/Ägypten/Sudan Erfahrungen beim Afrikafeldzug Rommels 1941/42; C̃onrad: Salz aus Taudeni. Eine Erzählung aus der Sahara 1964; C̃onrad: Alarm auf der Hoggarpiste. Ein Erlebnis aus der afrikanischen Wüste 1964; C̃onrad: Wadi Sura. Ein Abenteuer in den Bergen der Sahara 1967; C̃onrad: Die Schwerter des Kambyses. Eine verhängnisvolle Fahrt in die Wüste 1967; C̃onrad: Streifzüge durch die HF Technik 1970; Hille: Nützliche Wellen 1962; Braunbek: **Elektrischer Widerstand von regulären Drahtpolyedern**, PhysBl 32 1976 p420-422; Braunbek: Der Radio-Empfänger. Eine gemeinverständliche Darstellung 1924; Günther: Radiotechnik 1924; von Ardenne: & Lotsch: Ich bin ihnen begegnet. Wegweiser der Wissenschaft. Pioniere der Technik 1997 p47ff

Geschichte der Radiotechnik und Funkmesstechnik = Radar, perkolative Leitfähigkeit von Eisenfeilspänen = Fritter = Kohärer als Gewitterdektor, Braun: Kristalldetektor, dann Vakuumdiode, dann Germaniumdiode, Knallfunkensender 50 Hz, Löschfunkensender 500 Hz per Teslatrafo 1869-1940 B-Wellen; Walter Herzog: Radio*Phono*Elektro, Burg-Dorf 17a, Ausführung von Rundfunk-Reparaturen auch in schwierigsten Fällen, Umbau von Rundfunk-Geräten, Röhren-Prüfen und -Regenerieren, Wickeln von **Transformatoren:** An einem Transformator mit den Primär- bzw. Sekundärwindungszahlen N_1 und N_2 liege die Eingangsspannung $V_{\rm in} = V_1 \cos(\omega t)$ und an der Sekundärseite (Ausgangsspannung $V_{\rm out}$) liege ein Widerstand R. **Energieerhaltung:** a) Im idealen Transformator durchsetzt identischer magnetischer Fluß alle Primär- und Sekundärwindungen. Zeigen Sie, dass dann $M^2 = L_1 L_2$, wobei M die gegenseitige Induktivität und L_1, L_2 die Selbstinduktivitäten der beiden Spulen sind. Griffiths, Problem 7.58 [2nd ed.]; 7.54. The mutual inductance M between coils 1 and 2 of the transformer is $M \equiv M_{12} = \frac{F_{12}}{I_1} = \frac{F_{21}}{I_2} = M_{21}$ where F_{ij} is the magnetic flux from circuit j linked within circuit i. The self inductance of coil i is $L_i = \frac{F_{ii}}{I_i}$ Since the magnetic flux linked within each coil is the same, $F_{12} = F_{21} = F_{11} = F_{22} = F$ we have $M^2 = \frac{F^2}{I_1 I_2} = L_1 L_2$. b) Zeigen Sie, dass die Ströme gegeben sind durch $L_1(dI_1/dt) + M(dI_2/dt) = V_1 \cos(\omega t)$; $\quad L_2(dI_2/dt) + M(dI_1/dt) = -I_2 R$. The EMF in coil 1 is: $\mathcal{E}_1 = -V_{\rm in} = -V_1 \cos(\omega t) = -\frac{dF}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_1 I_1 + M I_2) = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$ (it is opposing the driver of the current change, i.e., the input voltage [it must do work to change the current]), and the EMF in coil 2 is: $\mathcal{E}_2 = V_{\rm out} = R I_2 = -\frac{dF}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_2 I_2 + M I_1) = -L_2 \frac{dI_2}{dt} - M \frac{dI_1}{dt}$ (the EMF in coil 2 is the voltage induced in coil 2). c) Bestimmen Sie $I_1(t)$ und $I_2(t)$ (I_1 sei frei von Gleichstromanteilen)!

$$
\begin{aligned}
L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2 &= V_1 \cos(\omega t) \quad | \cdot M \\
M \dot{I}_1 + L_2 \dot{I}_2 &= -R I_2 \quad | \cdot L_1 \\
(M^2 - L_1 L_2)\dot{I}_2 - R L_1 I_2 &= -R L_1 I_2 = M V_1 \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= -\frac{M V_1}{R L_1} \cos(\omega t) \\
\dot{I}_1 &= -\frac{M^2 V_1}{R L_1^2} \omega \sin(\omega t) + \frac{V_1}{L_1} \cos(\omega t) \\
I_1 &= \frac{M^2 V_1}{R L_1^2} \cos(\omega t) + \frac{V_1}{L_1 \omega} \sin(\omega t) + c_1; \quad c_1 = const = 0 \ \text{ no DC current} \\
&= \frac{M^2 V_1}{R L_1^2} \cos(\omega t) + \frac{V_1}{L_1 \omega} \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

d) Zeigen Sie, dass $V_{\rm out}/V_{\rm in} = N_2/N_1$. $\frac{V_{\rm out}}{V_{\rm in}} = \frac{I_2 R}{V_{\rm in}} = -\frac{M V_1 \cos(\omega t)}{L_1 V_1 \cos(\omega t)} = -\frac{M}{L_1} = \frac{\propto N_1 N_2}{\propto N_1^2} = \frac{N_2}{N_1}$ Explicitly: the mutual inductance of 2 coils (R – radius of coils, N_1, N_2 – no. of turns) is: $M = \mu_0 \pi R^2 N_1 N_2$ (Griffiths, 2nd. ed., example 10 in Ch. 7.2.2).

Inductance (self-inductance) of a coil is N^2 times the inductance of a single current loop (flux through each single turn is N times the flux from a single loop, and we have N turns in the coil). Using the inductance of a single circular loop of cross sectional (i.e., minor) radius a (e.g., from Jackson, 3rd. ed., Problem 5.32) we have: $L = \mu_0 R[\ln(8R/a) - 7/4]N^2$. e) Zeigen Sie die Gleichheit der mittleren Ausgangs- und Eingangsleistungen.

$$
\begin{aligned}
P_{\rm in} &= V_{\rm in} I_1 = \frac{M^2 V_1^2}{R L_1^2} \cos^2(\omega t) + \frac{V_1^2}{L_1 \omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t) \\
P_{\rm out} &= R I_2^2 = \frac{M^2 V_1^2}{R L_1^2} \cos^2(\omega t)
\end{aligned}
$$

Consider $\int_0^{2\pi/\omega} \sin(\omega t) \cos(\omega t)\, dt = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2\omega} \left[\sin^2 x\right]_0^{2\pi} = 0$ also $\Rightarrow \ \langle P_{\rm in} \rangle = \langle P_{\rm out} \rangle$. Greiner: Bd3 p314ff; Täubert: Elektrizitätslehre PfL4 1976 p191f und Elektromotoren – Elektrogeräte-Reparatur: Kocher-Spiralen mit Garantie von 900 Brennstunden 450 - 1000 Watt. Alarmanlagen. Schallplattenspieler-Reparatur. Lautsprecher-Anlagen, Hermann Schwarz, Fernsehmechaniker Schulz, Herr Cibilla beim Vetschauer PA, Radioschrott von Herbert Schwarz, Elektronikbaukästen zur Weihnacht: Busch, Kosmos, Elvis2 http://zone.ni.com/devzone/cda/tut/p/id/6527, Herr Perl in der Lehre, Renner, Jakubaschk: Das kleine

Elektrobastelbuch 1975; Jakubaschk: Das Bauplan-Bastel-Buch; Schlenzig: Das Bauplan-Bastel-Buch 1988[3]; Schiffmann & Schmitz: Technische Informatik 1+2+Übungsbuch; Nührmann: Pfeifer: Elektronikpraktikum 1990[3]; Der Hobby-Elektroniker ätzt seine Platinen selbst. Wie schnell und einfach Platinen entstehen 1991[6]; Nührmann: Kleines Tabellenbuch für den Elektroniker. Zahlen, Tabellen, Daten, Nomogramme, Bauelemente 1991[2]; Nührmann: Das große Werkbuch Elektronik. Tabellen, Mathematik, Formeln, Mechanik und mechanische Baugruppen, Berechnungsgrundlagen für Elektronikschaltungen, Kühlkörper, Leiterplattentechnik, SMD-Technik, Starkstromversorgungstechnik 1998[7]; **Ñührmann: Professionelle Schaltungstechnik 12 Bde**; Kurz: Oszillatoren; Nührmann: Grundwissen für den Elektroniker. G VDR - voltage dependent resistor, Varicap, Varaktor, Abstimmdiode, Kapazitätsdiode; PTC - positive temperature coefficient Widerstand, Kaltleiter; NTC - negative temperature coefficient Widerstand, Heißleiter; LDR - light dependent resistor, Foto-Widerstand; Feldplatte - B-Feld abhängiger Widerstand; 13 Punkte für den Einsteiger: Theorie/Modell Ballast gegen operationale Modelle der Praxis p18; SMD surface mounted device Technik p59; **Bauelemente:** Conrad, Segor electronics Berlin, Polin, Farnell, Bürklin, Distrelec und RS components, reichelt.de, conrad.de, www.w-r-e.de/robotik/index.htm, http://www. tec-shop.de, http://www.elektronik-kompendium.de/sites/bau/0206115.htm IC555 Spannungsmessung per Modul Einbauinstrumenten Conrad-Bestellnummer: 1874703-62 für 7 €.

Sommerfeld Bd2: Strom fließt durch den Leiter, der äquivalente Energiestrom wird aber durch dessen Umgebung transportiert. **Kondensator:** Energiespeicher durch Ladungstrennung. Gut ist viel getrennte Ladung bei kleiner Potenzialdifferenz/Spannung $U = \varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 \mathrm{d}\varphi = \int_1^2 \mathrm{d}\vec{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} = -\int_1^2 \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{E} = -Ed$ mit der elektrischen Feldstärke $[E] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} = \frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{As}}$ gibt **Kapazität = Energiespeicherkraft:** $C = \frac{Q}{U}$, wobei die linke Metall-Platte die Ladung $-Q$ pro Fläche A und die rechte Q trägt. Das Metall sorgt für homogene Ladungsverteilung auf **Leiter-Innenfläche** $\epsilon_0 \vec{n} \cdot \vec{E} = \sigma$, E-Feldfreiheit $\vec{E} = \vec{0}$ in der Platte und **senkrechten Austritt der E-Feldvektoren** aus der Leiteroberfläche $\vec{n} \times \vec{E} = \vec{0}$. **Plattenkondensator:** Das Gauß'sche Gesetz liefert für die positive, rechte Platte $\oint_{+\text{Platte}} \mathrm{d}\vec{a} \cdot \vec{E} = -EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$, weil nur eine der 6 Seiten des quaderhaften Integrationsvolumens einen von 0 verschiedenen Beitrag liefert, also $-\epsilon_0 A = \frac{Q}{E}$. Für das Potenzial zwischen den Platten gilt const $= E = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$. Die Potenzialdifferenz oder Spannung zwischen den Platten im Abstand d ist $U = \varphi_+ - \varphi_- = \int_-^+ \mathrm{d}\varphi = -E \int_0^d \mathrm{d}x = -Ed$. Daher $C = \frac{Q}{Ed} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$.

$$C = \epsilon \frac{A}{d} = \frac{Q}{U} = \frac{Q^2}{W}, \quad W = \frac{1}{C} \int \mathrm{d}Q Q = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C}{2} U^2 = \frac{Cd^2}{2} E^2 = \epsilon \frac{Ad}{2} E^2 = V \frac{ED}{2}, \quad w = \frac{W}{V} = \frac{ED}{2}.$$

Kraft auf Dielektrikum kommt von Polarisierbarkeit und Inhomogenität des elektrischen Feldes: $\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) - q\vec{E}(\vec{r} - \vec{a}) = q\vec{a} \cdot \nabla \vec{E}$ Homogenes Kondensatorinnenfeld ist also machtlos gegen Dipol. Kondensatorenergie im Feld. Beim Entladen geht Spannung zurück! Anders bei Superkondensatoren = Supercups = SC = Ultrakondensatoren auf Basis der **Helmholtz-Doppelschicht** 1853 Schichtabstand 0.4nm $\approx$ 0.1nm Ionenradius. Burmeister: Elektrodynamik PfL10 1979 p87, p118ff; Rebhan p292ff. Einfache Behandlung durch Blick auf Erhaltung der Gesamtenergie, also $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$! Feynman Bd2 Kap 10-5 p195ff **Plattenkondensator:** $W_\epsilon = E_{p,\epsilon} = \frac{1}{2} \epsilon_r C_0 U^2$ mit $C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d}$. Plattenbreite b und Eindringtiefe des Dielektrikums x ist Kapazität $C(x) = \epsilon_0 \frac{(L-x)b}{d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r x b}{d} = \frac{\epsilon_0 b}{d}(L - x + \epsilon_r x)$ also Kraft in x-Richtung $F_x = \frac{U^2}{2} \frac{\epsilon_0 b}{d}(\epsilon_r - 1)$ **Oder:** Seien B und L die Breite und Länge der Kondensatorplatten, H ihr Abstand. Die dielektrische Platte mit ϵ_r tauche von links, also positive x-Richtung in den Kondensator um die Länge x ein. Die Feldenergie zwischen den Platten ist dann $W = \frac{1}{2} \int_V \mathrm{d}V \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \left[\epsilon_r \int_{\text{V mit Platte}} \mathrm{d}V + \int_{\text{V ohne Platte}} \mathrm{d}V\right] = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} HB[L + x(\epsilon_r - 1)]$ Das Differenzial der Feldenergie ist $\mathrm{d}W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} HB(\epsilon_r - 1)\mathrm{d}x$. Für die Platten-Ladung gilt $Q = \int_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = E\epsilon_0 \epsilon_r x B + E\epsilon_0 (L - x)B = EB\epsilon_0[L + x(\epsilon_r - 1)]$. Wegen $U = EH$ leistet die Spannungsquelle die Arbeit $\mathrm{d}A = U\mathrm{d}Q = UEB\epsilon_0(\epsilon_r - 1)\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}W$. Im Feld steckt danach nur die Hälfte der Energie. Die andere Hälfte ist die Arbeit, die das Feld beim Verschieben des Isolators um $\mathrm{d}x$ in den Kon-

densator hinein gegen die den Isolator im Gleichgewicht haltende äußere Kraft F gemäß $\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}x$ leistet: $F = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} HB(\epsilon_r - 1)$. Nolting 3 Aufgabe 2.4.4 p145 p411; Becker & Sauter Bd1 p89ff; Joos: LB theoret Physik p271f; Greiner Bd3 p170ff; Griffiths: Intro to electrodynamics Kap 4.4.4. p193; Feynman: Lectures II/1 Kap10.5; **Xerografie**, PhysBl28 1972 220ff; Anwendung: Staubfilter der Zement, Stahlerzeugung, Kraftwerke. Xerografie: Aufladung wird durch Photoeffekt rückgängig gemacht. Kittel: Wärmeuebertrag im Nahfeld auf der Nanometerskala 2018 Oldenburg, Zwei durch Vakuum getrennte Körper koennen ausschließlich über elektromagnetische Wechselwirkungen Energie austauschen. Befinden sich die beiden Körper weit voneinander entfernt, wird der maximale Energieaustausch durch das Plancksche Strahlungsgesetz beschrieben. Reale Materialien lassen sich mittels ihrer dielektrischen Eigenschaften mit Methoden der **fluktuierenden Elektrodynamik** (FED) beschreiben. Bei stark reduzierten Abständen, vergleichbar mit der charakteristischen Wellenlänge der Wärmestrahlung (300 K: etwa 10 μm), sind weitere Kopplungen durch **evaneszente Moden** möglich. Dabei handelt es sich bei Isolatoren um Oberflächen-Phonon-Polaritonen und bei Metallen um Oberflächen-Plasmon-Polaritonen. Auch dieser Bereich laesst sich herab bis zu wenigen Nanometern mit FED beschreiben. Das ist überraschend, da diese Situation nicht mehr in den Bereich der Näherungen der Theorie fällt. Unsere Messungen bis zu Abständen von Bruchteilen eines Nanometers herab zeigen eine sehr starke Kopplung, die einen Faktor 1.000 größer ist als nach der FED zu erwarten wäre und deren Ursache ist bisher ungeklärt ist. Da die Untersuchungen mit einem speziellen Rastersondenmikroskop durchgeführt werden, ist es weiterhin möglich, den Einfluss unterschiedlicher Materialien auf den Wärmetransport und seine laterale Variation zu studieren. **Analogie Kondensator/Spulen und Federn**. Reihen- und Parallel-Schaltungen von Widerständen: **Zeigerdarstellung von Widerständen**, Spannungen und Strömen für Wechselstromrechnung bei Schaltkreisen ist DIE technische Anwendung komplexer Zahlen: $Z = u/i$, $Z_R = R$, $Z_L = \omega L j$, $Z_C = -j/\omega C$. **HF-Tapete = Impedanzdiagramm = R-L-C-f Nomogramm** erlaubt Lösung per Blick. Geg. Impedanzwiderstand 1000 Ohm, Frequenz $\omega = 10$ 1/s. Ges. Spulen-Induktivität siehe http://www.beis.de/Elektronik/Nomograms/RF-WP/RF-Wallpaper.html Bei Resonanzfrequenz der Antenneneinspeisung fällt über dem Ohm'schen Widerstand die größte Spannung im Reihenschwingkreis ab, was mit Diode und Lautsprecher wahrnehmbar. **Scheinleistung** $S = UI$ mit $[S]$ = VA = Voltampere, wobei U, I **Effektivwerte** sind. **Wirkstromanteil** $I_W = \cos\varphi$ parallel zu U. **Leistungsfaktor** $= \cos\varphi$. Bei $\varphi = 90^o$ hat man **wattlosen Strom**. Nur die **Wirkstromstärke** I_W, die mit Spannug in Phase ist, verrichtet elektrische Arbeit $P = UI_W = UI\cos\varphi = S\cos\varphi =$ **Wirkstromleistung** mit $[P]$ = W = Watt. **Blindstromanteil** $I_B = I\sin\varphi$ ist gegenüber Spannung um 90° phasenverschoben, verrichte keine Arbeit, sondern erzeugt das für den Motorbetrieb nötige Magnetfeld. In einer Viertelperiode liefert Spannungsquelle Strom zum Magnetfeldaufbau, der in der nächsten Viertelperiode beim Magnetfeldabbau an die Spannungsquelle zurückgeliefert wird. Die dieser hin- und herflutenden Energie entsprechende Momentanleistung pendelt zwischen Spannungsquelle und Blindwiderstand. Mittelwert ist null. Macht aber induktive Netzbelastung, also Übertragungsverluste. Ausweg ist Blindleistungkompensation: Kondensator parallel schalten! **Blindleistung** $Q = UI_B = UI\sin\varphi$ mit $[Q]$ = var = voltampere reactif. Zeitler & Simon: Physik für Techniker 2008[5] p328f; Kuchling: Physik 1987[18] p403ff; Walcher: Praktikum der Physik p245; Häder: Moderne Labortechniken 1993; Ilberg, Krötzsch, Geschke & Ernst: Physikalisches Praktikum 1998[11]; **Komplexe Leitwerte:** $Y = i/u$, $Y_R = 1/R$, $Y_L = -j/\omega L$, $Y_C = j\omega C$. **Induktivität:** L für **Emil Lenz**, $[L]$=Vs/A=Henry, **Selbstinduktionsspannung** an der Spule $U_L = L\dot{I}$, $U_R = IR$, Spannung am **Kondensator** $U_C = Q/C$ mit der **Kapazität** C in As/V. **Kugel-Kondensator:** $U_{12} = -\int_2^1 E_r \mathrm{d}r = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_2^1 r^{-2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} r^{-1}|_2^1 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ also $C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/r_1 - 1/r_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_1 - r_1}$. Oder, aus Plattenkondensator folgt $\mathrm{d}\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{A(r)} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}$. **Flächen-Ladungsdichte:** $\varrho(r) = \frac{Q}{4\pi R_1^2}\,\delta(r - R_1) - \frac{Q}{4\pi R_2^2}\,\delta(r - R_2)$. Kondensator für Landeanflugshöhe über Rollbahn und Bombenzünder, siehe Rocard: Elektrizität 1956, 1958 p69 ff;

Mit der **elektrischen Arbeit** $\mathrm{d}W = P\,\mathrm{d}t = U\,I\,\mathrm{d}t = U\,\mathrm{d}Q$ und $C = Q/U, U_{ind} = -L\,\dot{I}$ folgt **Schwingkreisenergie** für die Spannung am **Reihenschwingkreis** $-U_{\mathrm{ind}} = U_R + U_C$ oder $L\dot{I} + RI + \frac{Q}{C} = 0$ und mit $I = \dot{q}$ wird aus $\dot{I} + \frac{R}{L}I + \frac{1}{LC}Q = \ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega^2 Q = 0$ finden man auf den Kondensatorplatten die Ladung

$Q(t) = Q_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \delta)$. $E = E_L + E_C$ oder Lagrangefunktion $\mathcal{L}(Q, \dot{Q}) = E_L - E_C$

$$E_C = \frac{q^2}{2\,C}, \quad E_L = \frac{L\,\dot{q}^2}{2}, \quad \Phi = L\,I = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}} = L\dot{Q}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q} = -\frac{Q}{C} = -U, \quad \dot{\Phi} = -U_{\text{ind}}$$

Metzler: Physik; Täubert: Elektrizitätslehre PfL4 1976; Burmeister: Elektronik PfL8 1979; Prestin: Wobbel-Messtechnik 1965; Pilz: abc von Thyristor und Triac 1986; Hoffmann: TB der Messtechnik 1997; **Schaltnetzteil SNT**, switched-mode power supply SMPS: unstabilisierte in konstante Spannung durch Gleichrichtung 325 V, Umwandlung in Wechselspannung höherer Frequenz im kHz-Bereich und wiederholte Gleichrichtung. Mit hoher Frequenz hohe Leistungsdichte bei kleiner Kernmasse. Siehe Quercioli: Pulse width modulated (PWM) power supplies 1993; Graetzschaltung = Dioden-Quartett mit Elkos = Elektrolytkondensatoren; Braunbek: **Gunn-Effekt**, PhysBl 26 1970 409; Heumann/Stumpe: Thyristoren 1970; Pfüller: Messung elektronischer Parameter an Halbleiterbauelementen 1976; Meyer: OPV und ihre Anwendung 1990; Meiling: Digitalrechner in der elektronischen Messtechnik 1+2 1978; Penfold: Praktische Grundschaltungen der Elektronik 1+2 1983; Möschwitzer: Grundkurs **Mikroelektronik** 1989; Online-Kurs unter c't 17/2014 p41; Fritzsche/Seidel: Aktive RC-Schaltungen in der Elektronik 1981; Eckhardt: Mikroelektronik1984; Kühn/Schmied: Integrierte Schaltkriese 1976; Funke/Liebscher: Grundschaltungen der Elektronik 1979; Funkstörungen ct7.2020p130; Meinhold: Schaltungen der Elektronik 1976; Kleemann: Experimente mit integriereten Schaltungen 1973; Hiller: OPV-Schaltungen und Anwendungen 1982; Benda: Basiswissen Elektronik, Bauelemente, Digitaltechnik, Nachrichtentechnik, Regelungstechnik, Steuerungstechnik 1986/88; Hübscher et al.: Elektrotechnik. Fachausbildung **Kommunikationselektronik 2, Radio-/Fernseh-/Funktechnik** 1994;

53 Speicherbausteine, FPGA, VHDL

Sprache - Mathe, Physik, python, Biographie, Befehl - konfiguriert Wirklichkeit.

PCA=Plastic Cell Architecture ist Weiterentwicklung von Field Programmable Gate Arrays, FPGAs/digitalem Schaltungsentwurf http://www.mikrocontroller. net/articles/FPGA_Lab http: //thoralt. ehecht. com/wiki/index. php?title=Hauptseite - allgemein http://www. heise. de/ct/ projekte/ machmit/ctlab/wiki/AlleModule - etwas spezieller http://www.heise.de/ct/projekte/ machmit/ctlab/wiki/FPGABasic - FPGA-Board: http://www. heise. de/ct/artikel/ Loetfreies-Basteln-291660.html c't 16/2008 http://www.heise. de/ct/artikel/ Loetfreies-Basteln-291660.html **Carsten Meyer: Lötfreies Basteln**, Silizium-Backstube c't-Lab: FPGA-Basisplatine **LabVIEW** - eine online-Einführung. vom Berg & Groppe: LabVIEW 1: Einstieg in die Praxis 2012; ^S=*.vi speichern, ^R=Run, ^Z=Bearbeitung rückgängig machen, ^E=**Frontpanel (Bauelemente, VI, Objekte)↔Blockdiagramm (Verschaltung, G-Programm-Code, Express-VI zum Verdrahten aufziehen, Rechts-Click gibt Methode/Funktion)**, ^B=clean Blockdiagramm. Vor jeder Manipulation im Blockdiagramm STOP und SPEICHERN! https://ni. adobeconnect. com/_a56821929 /p71165587/ https://lumen. ni. com/nicif/d/ seminarslides102/ nigwgb112011semslides102/ content. xhtml http://mv-sirius. fh-offenburg. de/MEVLabor/labview2. htm **Datenerfassung:** http://www. physik. uni-hamburg. de/ex/html/fprakt/dwn/labview/labview_2011. pdf

FPGA steht für Field Programmable Gate Array, ein Baustein also, dessen Logikelemente sich wie auf einem Experimentierbrett jederzeit umstecken und neu verdrahten lassen – nur in einem ganz anderen Maßstab: Auf unserem Entwurf sehen 400 000 Gatter einer sinnvollen Beschäftigung entgegen. FPGA-Bausteine sind wahre Universalgenies, die immer dort eingesetzt werden, wo ein Mikroprozessor zu langsam, eine diskret aufgebaute Gatterschaltung viel zu umfangreich und ein speziell für den jeweiligen Anwendungsfall gefertigter Custom-Chip unrentabel oder zu unflexibel wäre. Was der Baustein mit seinen (in der Regel vielen) Anschlüssen macht, bestimmt einzig seine Konfiguration, die sich jederzeit ändern lässt – einfach durch „Aufspielen“ einer Konfigurationsdatei. Zum verwendeten FPGA aus der Spartan-3-Familie von Xilinx (der XC3S400) existiert eine kostenlose Entwicklungsumgebung, mit der man die gewünschte Innenverschaltung des Bausteins als Schaltplan oder in einer Hardware-Beschreibungssprache (unterstützt werden VHDL und Verilog) erstellt. Nach dem sogenannten Synthetisieren, der „Hardware-Kompilierung“, erhält man eine Netzlisten-Datei, die

vorgibt, wie und welche Logikelemente im Innern des FPGA verschaltet werden – ein schnödes Binärfile, das beim XC3S400 etwas über 2 MByte lang ist.

Mit diesem muss man dann nur noch das bis dahin völlig untätige FPGA programmieren – beispielsweise mit einem simplen Adapterkabel am PC-Druckerport. Leider sind FPGAs im Unterschied zu den deutlich weniger umfangreichen, aber meist Flash-basierten CPLDs (Complex Programmable Logic Devices) sehr vergesslich: Nach dem Ausschalten ist ihnen wieder alles entfallen, was man ihnen aufgetragen hatte.

Mühlbauer: PAMo - FPGA-based Platform for Autonomous RC Models; Bobdan: Introduction to Reconfigurable Computing - Architectures, algorithms and applications 2007; Reichardt: VHDL-Synthese. Entwurf digitaler Schaltungen und Systeme 2007[4]; Kesel, Bartholomä, Anders: Entwurf von digitalen Schaltungen und Systemen mit HDLs und FPGAs 2009[2];

Spartan-3E FPGA Starter Kit (HW-SPAR3E-SK-UNI-G / HW-SPAR3E-SK-EC-G) Xilinx Devices: Spartan-3E (XC3S500E-4FG320C), CoolRunner-II (XC2C64A-5VQ44C) and Platform Flash (XCF04S-VO20C) Clocks: 50MHz crystal clock oscillator Memory: 128 Mbit Parallel Flash, 16Mbit SPI Flash, 64MByte DDR SDRAM Connectors and Interfaces: Ethernet 10/100 PHY, JTAG USB download, two 9-pin RS-232 Serial Port, PS/2- style mouse/keyboard port, rotary encoder with push button, four slide switches, eight individual LED outputs, four momentary-contact push buttons, 100-pin Hirose expansion connection ports and three 6-pin expansion connectors Display: 16 character - 2 Line LCD

beagle board; OMAP™ 4 Platform: OMAP4430/OMAP4440

c't Altenburg Mikrocontroller-Praxis 2003; Mobile Roboter; Valk: Lego-Roboter. Bauen und programmieren mit Lego Mindstorms NXT 2.0 2011; https://github. com/NimbRo/nimbro-op http://www. nimbro. net/OP/

Handy-Umzug ct2/2019 p78ff Huawei Phone Clone; Schumann: Computer für Kids. So funktionieren PCs, Laptops, Smartphones 2019; 2021 bereits über 250,000 Basisstationen in Deutschland, Vogel: Die Anker des Mobilfunks, PhysJ20 2021 H11 p38f; Lohmer: Leselauscher Wissen. Technik einfach erklärt 2021; Smartphone-Ertüchtigung ct9.2020p60; Einsteiger-Smartphones ct9.2020p62; **Anchor** = mobiles Studio = Podcast per Handy ct2/2019 p106ff https://anchor.fm podcast-helden.de; ROM read only memory, Festwert- oder Nur-Lese-Speicher, nicht-flüchtige Speicher für dauerhaft nötige Programme und Daten (Handy: kein Vetrag, kein SIM-Lock, kein branding: bei motorola Boot-Loader gesperrt; `*#06#` LG 015203441621 MEI 3599 2903 1208 35500, htc 015205889986 3554 3004 2104 992, Samsung 01779126994 3547 7904 1846 39/6 & 3547 8004 1846 39/4, rooten, sromOFF S-OFF (security off), Konkrete Anleitungen zum Knacken einzelner Smartphones: Wiki des **CyanogenMod**-Projekts, CM = herstellerfremde Android-Versionen: Eclair = 2.0, 2.1 = CM5; Froyo = 2.2 CM6; Gingergread = 2.3 CM7; Honeycomb = 3.x CM8; Ice Cream Sandwich = ICS = 4.0 = CM9; Jelly Bean 4.1 ff = CM 10; c't 18/2013 p148; ROMs c't 12/2014 p120-133; Nandroid partielle oder vollständige Backups eines Android-Systems; Android Market oder Google Maps - sind im Gegensatz zum Kernsystem nicht Open Source! http://derstandard.at Aufgebohrt-Die-wunderbare-Welt-der-Android-Hacks http://www.androidpit.de CWM oder auch Clockworkmod oder auch Recovery genannt ist ein Menü innerhalb des Systems, in dem man erhebliche Systemeingriffe machen kann. Wipe oder zurücksetzen bzw. löschen der Daten. Themes = verschiedene Designs/Looks für die Icons, Statusbar,etc am Handy, oder auch **Custom Roms** = Rom, dass an den Benutzer/Kunden angepasst ist, und z.T. auch Kernel flashen. In das CWM Menü kommt man beim Galaxy S, wenn man im ausgeschalteten Zustand die Vol+ Taste + Home Taste + Power einige Sekunden gleichzeitig drückt. http://forum.xda-developers.com; Messgerät, Unterhaltungselektronik, Maschinensteuerung Wüst Mikroprozessortechnik. MROM Masken-ROM Brücken aus Dioden und Transistoren an Kreuzungpunkten von Wort- und Bitleitungen mittels Belichtungsmaske. PROM programmable ROM Brückenfunktion durch einmaligen Stromstoß auf fusible link, zunächst sperrenden Halbleiter oder Drain/Source (dadurch Transistor nicht mehr ansteuerbar) dauerhaft.
EPROM erasable PROM mit 20 min hartem UV wird der FET wieder funktionsfähig (Quarzfenster nötig!). **EEPROM** electrical EPROM Floating Gate kann elektrisch entladen werden (Tunneloxid nur 20 nm dick): 10^4 bis 10^6 Schreibzyklen. NAND = seriell, groß, langsam wie Platte 10^6 mal oder NOR = parallel, direkt, schnell = Programmspeicher von MCs $< 10^5$ mal geladen. **Flash**-Speicher haben noch dünneres Tunneloxid.

Daher Löschung mit sehr kleiner Spannung, aber nicht einzelner Speicherzellen, sondern von ganzen Blöcken, also wie RAM, aber eben nicht flüchtig.
SSD = Solid State Disk: SSDs altern , weil NAND-Speicher der 25nm-Technik nur < 5000 Schreibzyklen verkraften. Die **Wear-Leveling-Algorithmen** verteilen die Schreibzugriffe auf mehr Flash-Zellen, indem sie Dateisystem-Sektoren physische Adressen per ATA-Passwort verschlüsselt zuordnen. Otimierung auf lange Lebensdauer, sehr hohe Schreibgeschwindigkeit, extrem kurze Zugriffszeit. c't H14 p146, H16 p148, H22 p150 von 2011 und H3 p66, H18 p112 und H20 p22 von 2012; **RAM random access memory.**
SRAM static RAM taktgesteuerte D-Flipflops für Cash. 1 Bitspeicher 6 Bauelemente. CMOS Zugriff 30-80 ns stromsparend oder bipolare Transistoren = Zugriff 5-10 ns.
DRAM für CPU refresh alle 1-20μs. 2 Bauelemente.
chip 10/2011: Acronis True Image Home 2011 Datensicherung und Wiederherstellung Voraussetzungen. Windows 7 (Alle Editionen) SP1, Windows Vista (Alle Editionen) SP2, Windows XP Professional x64 Edition SP2, Windows XP Professional/Home SP3; Pentium mit 1 GHz oder mehr; 512 MB RAM; CD-RW/DVD-RW-Laufwerk zur Erstellung von Boot-Medien; Maus oder ein anderes Zeigegerät. Unterstützte Dateisysteme: FAT16/32, NTFS. Unterstützte Speichermedien: Lokale Festplatten; Network Attached Storage; FTP-Server; CD-R/RW, DVD-R/RW, DVD+R (einschließlich Double-Layer DVD+R), DVD+RW, DVD-RAM, BD-R, BD-RE; ZIP, REV (nur vom Notfallmedium) und weitere Wechseldatenträger; Laufwerke des Typs PATA (IDE), SATA, SCSI, SAS, USB 1.1 / 2.0 / 3.0, FireWire (IEEE-1394) und PC-Card-Speichergeräte; Dynamische Windows- sowie GPT-Datenträger. Paragon Festplatten Manager. Programm fixit, verfügt über einen recovery commander, der bessere systemwiederherstellungspunkte erstellt. Fix-It Utilities 11 Professional. **Datenrettung:** mit TestDisk unter Ubuntu von www.cgsecurity.org. **GNU Parted**: Mit gparted Partitionierung von bootbarer USB 3-Platte mit NTFS und kubuntu.

54 CPU, Controller

Um eine Dezimalzahl x speichern zu können, braucht man $1+\log_2 x$ bits oder Anzahl von ja/nein-Entscheidungen, Renyi: Tagebuch. 128 kbps=$\frac{2^2 15 \cdot 2^7}{8}$ Byte pro Minute = 960 kByte pro Minute $\approx$ 1 MB pro Minute. 1 Byte = 8 bit. IEC-Präfixe zur Basis 2: **Beispiel:** 512 MiB (Mebibyte) = $512 \cdot 2^{20}$Byte = 536.870.912Byte = 537MB

Name	Symbol	Wert
kibi	Ki	2^{10} = 10241 = 1.024
mebi	Mi	2^{20} = 10242 = 1.048.576
gibi	Gi	2^{30} = 10243 = 1.073.741.824
tebi	Ti	2^{40} = 10244 = 1.099.511.627.776

Name	Symbol	Wert gemäß SI	nächstliegende Zweierpotenz
Kilo	k	10^3 = 1.000	2^{10} = 1.024
Mega	M	10^6 = 1.000.000	2^{20} = 1.048.576
Giga	G	10^9 = 1.000.000.000	2^{30} = 1.073.741.824
Tera	T	10^{12} = 1.000.000.000.000	2^{40} = 1.099.511.627.776

yoct = -24, zepto = -21, atto = -18, femto = -15, pico = -12, nano = -9, micro = -6, milli = -3, centi = -2, deci = -1, deca = 1, hecto = 2, kilo = 3, mega = 6, giga = 9, tera = 12, peta = 15, exa = 18, zetta = 21, yotta = 24;
Megabyte. http://homepages.fh-giessen.de/hg6458/MPMCP.html Informatik=Information/Mathematik + Technik, Computer = **Hochgeschwindigkeitstrottel** (G. Saake/Sattler: Algorithmen und Datenstrukturen - Java, 2010[4]) Berthold Vöcking et al.: **Taschenbuch der Algorithmen** binäre Suche, Sortieren, Tiefensuche, Labyrinth entkommen = Pladge-Algorithmus, PageRank, Primzahltabelle, Public-Key, Hashing, **dynamische Programmierung** Bellman rekursive Programme mit Erinnerung, die per Abfragen genutzt wird, Piehler: Einführung in die dynamische Optimierung. Dynamische Programmierung 1966; Papageorgiou: Optimierung. Statische, dynamische, stochastische Verfahren für die Anwendung 2012; Frank: Mathematische Grundlagen der Optimierung. Variationsrechnung, dynamische Programmierung, Maximumprinzip

1969; Künzi, Müller, Nievergelt: Einführungskursus in die dynamische Programmierung 1968; **Press: Numerical recipes** nützlich bei Sequenz-Alignment Problem, kürzeste Wege, Packproblem, simulated annealing 2008; Markus von Rimscha: (**Iterative, rekursive, dynamische, heuristische, zufallsgesteuerte, genetische, probalistische) Algorithmen** kompakt und verständlich: Lösungsstrategien am Computer, Datenstrukturen, , maschinelles Lernen, Schwarmintelligenz, neuronale Netze, Hebb, backpropagation 2008; Drösser: Total berechenbar? Wenn Algorithmen für uns entscheiden 2016; Rudder: Inside Big Data. Unsere Daten zeigen, wer wir wirklich sind 2016;

DDR-SDRAM Double Data Rate Synchronous Dynamic Random Access Memory. **Arbeitsspeicher:** 32 Arbeitsregister zum Rechnen + 128 bis 4096 byte SRAM, **Programmspeicher: Flash/ROM/Festplatte** 1-128Kbyte, EEPORM 64-4096Kbyte.

Atmel Tiny13 8-bit AVR RISC mit 120 Instruktionen, 32x8 Register, In-System 1-Kbyte programmierbares grelles Programm-Gedächtnis/Flash 10.000 mal, 64-Byte SRAM, 64-Byte EEPROM 100.000 mal, Akte des Register-32-Byte, 4-channel 10-bit ANALOG-DIGITAL, bis 16 MIPSS Durchsatz bei 16 MHZ, 5 Volt. 1.8 - 5.5 Volt-Betrieb, 20 Jahre bei 85 C und 100 Jahre bei 25 C,

Atmel ATTINY2313-20SU 8Bit Risc Microcontroller, 2K Bytes of In-System Self-Programmable Flash, 128 Bytes In-System Programmable EEPROM, 128 Bytes Internal SRAM. USI–Universal Serial Interface, Full Duplex UART. debugWIRE for on-chip-debug. Up to 20 MIPS throughput at 20 MHz 8BIT 2K FLASH MCU, 2313, TUBE37; Series:ATTINY; Memory Size, Flash:2KB; EEPROM Size:128Byte; Memory Size, RAM:128Byte; No of I/O Lines:18; No. of ADC Inputs:8; Timers, No. of:2; PWM Channels, No of:4; Clock Frequency:20MHz; Interface Type:SPI, USART; Voltage, Supply Min:2.7V; Voltage, Supply Max:5.5V; Termination Type:SMD; Case Style:SOIC; No. of Pins:20; Operating Temperature Range:-40°C to +85°C; Temp, Op. Max:85°C; Temp, Op. Min:-40°C; Base Number:2313; Bits, Number in ADC:10; IC Generic Number:2313; Logic Function Number:2313; Memory Size:28 KB; Memory Type:Flash PEROM;

Ping-Pong Atmel ATMega8L AU mit 120 LEDs und 2 Schieberegistern 74HCHCT4094 8stage shift-and-store register
http://www.datasheetcatalog.org/datasheet2/e/0zfy3x112ch42r82d060wl0jtocy.pdf

MR C-3024 Controller: **Atmel ATMega128L, 8-bit, AVR enhanced RISC Architektur mit 133 Instruktionen 128Kbyte Flash**, 1 MIPS per MHz, 4Kbyte EEPROM, 4Kbyte SRAM, 10-bit ADC • Abmessungen ca.: 61 x 50,5mm • Betriebsspannungsbereich: 6 – 8 Volt • I/O Ports: 40 Ports auf Pfostensteckern,davon 24 als Servoports und 8 als A/D Wandler • RS232 Schnittstelle • Signalgeber • Zusatz Speicher: 64K*8 EEPROM

Arduino Programmiersprache und ATMega328: AVR chip: 32KB self-programming Flash Program Memory, 2KB SRAM, 1024 Bytes EEPROM, 8 Channel 10-bit A/D-converter (TQFP / MLF). debugWIRE On-chip Debug System. Up to 20 MIPS throughput at 20 MHz. Operating Voltage: 1,8V - 5.5V, Max I/O Pins 23. 4 KB version: ATmega48PA, 8 KB version: ATmega88PA, 16 KB version: ATmega168PA RISC ATmega1280 mit 128k Flash, 8kRAM, 16MHz, 4kEEPROM verwendet avr-gcc und avr-libc und ein paar Bibliotheken. Die Hardware des Duemilanove Boards unterstützt sowohl den 168 also auch den 328 Chip. **Sommer: Arduino** 2010; Shields = Erweiterungsboards; Die bequeme Programmierung über die Arduino Software setzt voraus, dass ein Bootloader auf den Chips installiert ist. Wenn das zwecks Speichermangel nicht, dann AVR Progammer für ca. 20-30 € nutzlich. Power bank für RasberryPi; Mini-PC ZboxPI335 picoGemini Lake ct2/2019 p110f. Lenovo ThinkCentre M715q Tiny ct2019H7 p100f; Microkontroller-Board Pyboard-D mit STM3F7 PYBD ct2019H6 p32 Microphyton Espressif ESP32 WiPy3.0; ct10.2020p94

Pocketbook 360, Samsung S3C2440 AL-40 400MHz; 180 g, 5V, 5" 600X800, 200dpi, Linux 2.6; 1000 mAh Li-Polymer Akku G-Sensor; Micro =11X15mm, SDHC 32 GB, SD= Secure Digital, HC=High Capacity; RAM 64MB, ROM 512MB; Calibre: pdf to prc; epub, pdf, prc, fb2, txt, rtf, html, VR China, chm, djvu, doc tcr, jpegs, bmp, png, tiff; http://djvu. sourceforge. net/ http://www. djvu. org/resources/ whatisdjvu. php **okular** liest **djvu**! **Alle Texte http://lib.ololo.cc/gen/ oder ebookee.com** oder http://lib. org. by/_djvu/P_Physics/PGr_Gravitation/

www.alwaysinnovating.com/products/smartbook.htm

Targa Traveller 1016 Intel Atom N270 1.6 GHz, Windows XP, 1GB DDRII RAM, 10.2 Zoll, 1024X600 Pixel, Toshiba 160GB mit 5400 RPM, SATA.

Schnabel: Kommunikationstechnik-Fibel 2011[3]; **Flächendeckend, langsam für Sprachübertragung: 900 & 1800 MHz** ø(2G)≈ 5-10km. **UMTS, lokal, Datentransfer 1.9-2.1 GHz** ø(3G)≈ 2km. **LTE=Long Term Evolution 0.8, 1.8, 2.6 GHz** bis zu 300 Megabit/s. LTE = local thermodynamic equilibrium. **Doppler-Korrektur** bei 300km/h: 900MHz± 250Hz, 2.1GHz± 580Hz. LTE-Advanced (4G). Cox: An Introduction to LTE - LTE, LTE-Advanced, SAE, VoLTE and 4G Mobile Communications 2014[2];

HTC Wildfire S oder A510e, 2011, Dual SIM ,SAR-Wert: 1,21 W/kg, UMA-Technik, GSM Band: 850 900 1800 1900, UMTS Band: 900 2100, WAP: v2.0, HSDPA: 7,20 Mbit/s, GPRS: Klasse 10 = Simplexbetrieb, EDGE = Enhanced Data Rates for GSM Evolution: Klasse 10 = maximal vier Downlink-Slots sowie zwei Uplink-Slots verfügen. Hieraus resultiert eine real maximal mögliche Datenübertragungsrate von 220 kbit/s im Download und 110 kbit/s im Upload, Bluetooth: v3.0 also 2,402 GHz und 2,480 GHz. 706,25 kbit/s beim Empfang bei gleichzeitigen 57,6 kbit/s beim Senden, USB: v2.0, Audioformate: AAC, AAC+, eAAC+, AMR, OGG, WAV, WMA, Java: Dalvik, Sensorauflösung: 5 Mpx - Standbildauflösungen: 2592x1944 px, Videoformate: H.263, H.264, Prozessor Qualcomm MSM7227 600 MHz, RAM-Speicher: 512 MB, Android 2.3.3 Gingerbread, microSD, microSDHC (bis zu 32 GB), Interner Speicher: 150 MB, Standard-Akku: Li-Ion 1230 mAh, Farbdisplay / TFT 320 x 480 px (3,2 Zoll) DUAL http://www.dual.de/ Dual Portable **DAB+** = VHF-Band I (47–68 MHz, aber keine Nutzung für Radio und Fernsehen mehr vorgesehen), DAB-Band III (174–230 MHz) in Deutschland für digitales Radio freigehalten, vereinzelte Fernsehsender im VHF-Band sollen in den UHF-Bereich verlagert werden. Die Frequenzen im L-Band eignen sich auf Grund der geringen Reichweite nur zur lokalen DAB-Versorgung, in einigen Ländern der „Kanal 13“ (230–240 MHz) sowie Teile des L-Bandes (um 1,46 GHz). Audiodaten der Programme werden bei DAB zunächst mittels MUSICAM (MPEG-1 Audio Layer 2 alias MP2) mit **Datenraten von 32 bis 256 kbit/s** codiert. Die vor der Umstellung der meisten Sender auf DAB+ oft verwendete Bitrate von 160 kbit/s (häufig verwendeter Standard) liegt zwar um den Faktor 7,5 unter der einer Audio-CD. **Görne: Tontechnik** 2006; **Henle: Das Tonstudio Handbuch**. Praktische Einführung in die professionelle Aufnahmetechnik 2001[5]; **HE AAC v2** = MPEG-4 High Efficiency Advanced Audio Coding = kurz HE-AAC = AAC+ v1 = basiert auf **Modifizierte diskrete Kosinustransformation**. Nutzt MPEG-2 = generischer MPEG-Standard zur Videokodierung mit Videokompression und Audiokodierung mit Audiokompression. Geht mit **DRM = Digital Rights Management** = Nutzungssteuerung mit drei fundamentale Verfügungsformen: Wiedergaberecht (ausdrucken, ansehen und abspielen), Transportrecht (kopieren, weitergeben und ausleihen), Recht, abgeleitete Werke zu erstellen (extrahieren, editieren und einfügen). DAB+ Pocket Radio 2, 87.5 bis 108 und 174 bis 240 MHz; UHF/VHF/FM ZA8960 IEC-Stecker 47 - 862 MHz Verstärkung > 20 dB (VHF), > 10 dB (UHF), max 36 dB (UKW). Ab Mai 2017 ≤ 700 MHz: Berlin-Wannsee Fernmeldeturm Schäferberg Gleichwellennetz, auch SFN für englisch Single Frequency Network Kanal 42 = Video 639,25 MHz + Audio 643,75 MHz mit 50 kW. Frequenz für DVB-T ergibt sich aus der Kanalnummer multipliziert mit 8 MHz plus 306 MHz. DVBT2 = High Efficiency Video Coding HEVC = H.265 = MPEG-H Teil 2 mit libavcodec = lav; **Acer Travelmate8572TG agnld Intel i5 CPU M430 2.27GHz 4GB 64bit** Windows7 ID 00359-OEM-89926687-00006 Autovervollständigung Systemsteuerung * Internet Optionen; **Acer Aspire L5100 32bit**-Betriebssystem, AMD-CPU Athlon X2 E2400 mit zwei Kernen. Taktrate 2.3 GHz. L1-Cache: 64 + 64 KB (Daten + Instruktionen) L2-Cache: 512 KB mit Prozessortakt. Hauptspeicher 2 GB DDRII. Festplattenkapazität formatiert 467 GB. Grafikkarte Geforce X1250 von Nvidia 256 MB. PC Systeme, Acer Aspire L5100 AMD Athlon 64 X2 5000+/2048MB/500GB, AMD Athlon 64 X2 5000+ 2,60GHz / 2048MB RAM / 500GB HDD / ATi Radeon X1250 / DVD±R/RW DL-Brenner. L2-Cache 512KB x2. Arbeitsspeicher 2048 MB DDR2 SDRAM Formfaktor SODIMM 200-Polig. 500 GB 7200rpm S-ATA. LAN 10/100/1000 MBit.

Intel(R) Core(TM)2 Quad CPU Q9550 2.83GHz; Bus-Geschwindigkeit: 1333 MHz, Sockel LGA775, Level 1 cache size: 4 x 32 KB instruction caches, 4 x 32 KB data caches, L2 Advanced Smart Cache - 12 MB (6 MB pro Core-Paar), 64-Bit-Computing, cache size: 6144 KB, address size: 36 bits physical=2^{36}= ca. 11 GByte

möglich, hat aber nur über 8 GByte; Herstellungsprozess: 45 nm; 12-(95)-130 Watt; 500 GByte Harddisk.

28-iger Damenrad, Hartje Manufaktur-Linie, rot, Rahmennummer HH 101906, Nabenschaltung SRAM Super 7 Gang; 28iger Damenrad, Capriolo, hell-rosa, 5 Gang-Schaltung, Rahmennummer: 880045570, IndiPolizeiNr IPO1872; 26iger Herren-MTB Cycle Wolf, schwarz, Rahmenhöhe 48, Rahmennummer: BSG 03288, IndiPolizeiNr 1PO2179, 21-Gang-Schaltung, VorradDynamo, 11.11.1996, Pitlock Code # 63FRS8919, Edelstahl Nr 5, Busse Sicherheitstechnik Berlin.

High Speed CMOS 16-Channel Analog Multiplexer/Demultiplexer HP4067 Schieberegister; Sharp GP2Y0A02YKOF Long range; IG-30 Head- und Eye-Tracking http://www. alea-technologies. de/ WII NUNCHUK CONTROLLER, OPTOKOPPLER 6N139/Q68000-A6411;

http://www.active-robots.com/products/sensors/sharp/gp2y0a02yk.pdf

Programmierschnittstelle System-Anbindung auf Quelltextebene API application programming interface, Schnittstelle zur Anwendungsprogrammierung. Binärschnittstelle (ABI). Zugriff auf Datenbanken, Hardware wie Festplatte oder Grafikkarte, das Erstellen von Komponenten der grafischen Benutzeroberfläche ermöglichen oder vereinfachen. Internetdienste APIs für Weblinks. Klassen: **funktionsorientiert** wird bereits zur Compile-Zeit geklärt. Dynamic Link Library, Mittel der Kommunikation. Konzept der Handles. Man ruft eine Funktion auf und bekommt ein Handle zurück, mit dem sich weitere Funktionen aufrufen lassen. BIOS ist älteste Programmierschnittstelle für PC. **http://software-carpentry.org/** **Funktionale Programmierung** = Programmierstil, bei dem Programme ausschließich aus Funktionen bestehen. Dadurch werden die aus der imperativen Programmierung bekannten Nebenwirkungen vermieden. **Lambda-Kalkül**. **dateiorientiert** (z. B. Gerätedateien unter UNIX, Dateisystemaufrufe open, read, write und close zur Ansteuerung von Gerätetreibern). **protokollorientiert** (z. B. FTP unabhängig vom Betriebssystem und der Computerhardware) **objektorientiert** (z. B. ActiveX-DLLs, Schnittstellenzeiger gibt Typbibliothek mit) Spiele brauchen zur Laufzeit Bildschirmabfragen. **Lutz & Ascher: Einführung in Python**, 2007[2]; Python und Neuroscience http://www.ine-news.org/pdf/1682/1682.pdf; Löwis & Fischbeck: Python2, 2001[2] Kofler: Java. Grundkurs 2019[3]; Ernesti & Kaiser: **Python 3. Das umfassende Handbuch**, 2009[2] siehe http://openbook. galileocomputing. de/python/ python_kapitel_12_001. htm oder www.sap-press.de code 2212 3402 3281; Python ist seit 2.3. als **Datentypen und Klassen vereinigt** wurden, von Grund auf objektorientiert. Das bedeutet, dass im Prinzip alles, mit dem Sie bei der Arbeit mit Python in Berührung kommen, eine Instanz irgendeiner Klasse ist. **Erben** ist daher Dauerphänomen! Daher muss man sich mit dem Problem der **Kapselung von Daten und Definition von Schnittstellen die Konsistenz der Objekte sichern**, gut auskennen. a=1; b=a erzeugt nur eine Referenz, wogegen b=a*1. erst die meist gewünschte neue Instanz herstellt! A.ravel() ist eine 1d Array-**Ansicht** eines Feldes, während A.flatten() eine 1d-**Kopie** ist. **Vererbung** = Fähigkeiten einer Klasse auf eine andere zu übertragen, wobei alle Member, also sowohl Attribute als auch Methoden, von der Mutter- auf die Tochterklasse übertragen werden. In der objektorientierten Programmierung bedeutet Kovarianz und Kontravarianz, ob ein Aspekt (d. h. eine Typdeklaration) gleichartig der Vererbungsrichtung (kovariant) oder entgegengesetzt zu dieser (kontravariant) ist. Liegt in der Unterklasse keine Änderung gegenüber der Oberklasse vor, wird das als Invarianz bezeichnet. Ernesti, Kaiser Kap12.2 p255; Von der einfachen Zahl bis zu den Klassen selbst hat dabei jedes Objekt seine eigenen Attribute und Methoden. **Klasse** = Backrezept für Objekt/Instanz/Kuchen = **formale Objekt-Beschreibung** durch Attribute/Merkmale/Eigenschaften (trocken, groß, süß) und Methoden (kann geteilt und gegessen werden). **Objekt/Instanz**/Kuchen kann erzeugt, benutzt, beseitigt. Objektorientierung meint Schutz vor Direktzugriff von Außen, Daherher auch kein Anfangswert bei Erzeugung. Stattdessen Zuweisung mit spez. Methode **Instantiierung** mittels **Konstruktor** = Errichter `__init__` einer Klasse versetzt Instanz in einen benutzbaren Zustand.

```
Details siehe \U Ernesti: Python 3 p245 oder
http://openbook.galileocomputing.de/python/python_kapitel_12_001.htm
class Konto(object):  # Instantiierung mit Attributen
    def __init__(self, inhaber, kontonummer, kontostand,
                     max_tagesumsatz=1500):
        self._Inhaber = inhaber
```

```
        self.__Kontonummer = kontonummer
        self.Kontostand = kontostand
        self.__MaxTagesumsatz = max_tagesumsatz
        self.UmsatzHeute = 0
    def geldtransfer(self, ziel, betrag): # Instantiierung mit Methoden
        # Hier erfolgt der Test, ob der Transfer möglich ist
        if(self.Kontostand < betrag or
           self._UmsatzHeute + betrag > self.MaxTagesumsatz or
           ziel.__UmsatzHeute + betrag > ziel.MaxTagesumsatz):
            return False # Transfer unmöglich
        else:
            # Alles OK - Auf geht's
            self.Kontostand -= betrag
            self.UmsatzHeute += betrag
            ziel.Kontostand += betrag
            ziel.UmsatzHeute += betrag
            return True
```

Member (Attribute+Methoden) von Klassen, die von außen nicht sichtbar sein sollen, weil falsche Verwendung die Konsistenz von Objekten beeinträchtigt, können so gekennzeichnet werden, dass nur die Klasse selbst darauf zugreifen kann. Die für die Verwendung von außen bestimmten Methoden und Attribute werden auch als Schnittstelle der Klasse **Interface** bezeichnet. Per **Implementationsdetail:** Member explizit als **öffentlich** .NAME, also als Teil der Schnittstelle = **protected** ._NAME, oder als **privat** .__NAME deklarieren. **Getter**- und **Setter**-Methoden zum Auslesen und Manipulieren von **versteckten Attributen**. Zur sicheren Trennung von Netzwerkverbindungen **Destruktor** `__del__` wird erst aufgerufen, wenn die letzte Referenz auf ein Objekt entfernt wurde.

```
def gcd(a,b):
    """ Kurzbeschreibung """
    if  b == 0:
        return a
    else:
        return gcd(b, a%b)
class Rational:
    """An instance represents a rational number.
Objektschoepfung per Ruf mit Klassenkontruktor half = Rational ( 1, 2 ); third=Rational(1,3)
print half+third oder  print Rational(1,2)+Rational(1,3)
Objekt oder Instanz ist half oder die rationale Zahl 1/2 mit den unten definierten Methoden
       http://infohost.nmt.edu/tcc/help/lang/python/examples/rational/rational.py
    """
erster Parameter stets Referenz auf die Instanz, ueber die sie gerufen wird, weil sie sich
auf das Objekt selbst bezieht
    def __init__ ( self, a, b ):
        """Constructor for Rational.
        """
        if  b == 0:
            raise ZeroDivisionError, ( "Denominator of a rational "
                "may not be zero." )
        else:
            g  =  gcd ( a, b )
            self.n  =  a / g
            self.d  =  b / g
    def __add__ ( self, other ):
```

```
        """Add two rational numbers.
        """
        return Rational ( self.n * other.d + other.n * self.d,
                          self.d * other.d )
    def __str__ ( self ):
        '''Display self as a string.
        '''
        return "%d/%d" % ( self.n, self.d )
```

http://www.thomas-guettler.de: Klassen sind Datenstrukturen, die aus Methoden und Attributen bestehen. Methoden sind Funktionen einer Klasse, und Attribute sind Daten einer Klasse. Ein Beispiel: klasseauto.py **Weigend: Objektorientierte Programmierung mit Python 3**; Weigend: **Python GEPACKT: Schneller Zugriff** auf Module, Klassen und Funktionen. Tkinter, Datenbanken und Internet-Programmierung. Für die Versionen Python 3 und 2; Objekte sind Instanzen von Klassen. Eine Klasse definiert die Eigenschaften, die allen Ojekten dieser Klasse gemein sind. Das sind vor allem die Methoden. Methoden sind Funktionen, die mit/ueber Objekten arbeiten. Sedgewick: Algorithmen in C++ 1997 **Rekursion:** Programm, das sich selbst aufruft. Funktion, die durch sich selbst definiert ist. Abbruchbedingung muss gegeben sein. L.P. Deutsch: **Iterieren ist menschlich, rekursieren ist göttlich.** Rekurrente Beziehung: $N! = N(N-1)!$ für $N \geq 1$ und $0! = 1$. int factorial(int N) $\{if(N == 0)return1; returnN * factorial(N-1);\}$; Kap6 Traversierung von Bäumen; Zimmer & Bonz Ojektorientierte Bildverarbeitung; Breymann: C++; Objekt hat Identität und tritt, wie ein Konto, als Handelnder auf. Was und wie sind untrennbar (Konto, Ampel). Objekte haben Eigenschaften und Methoden/Operationen. Unterscheide zwischen Beschreibung = **Klasse** (**Attribute** = innere Datenstruktur: Inhaber = Buchstabenfolge, KN = Zahl, Betrag = Zahl & **Operationen oder Methoden**: überweisen (Ziel-KN, Betrag), Barabhebung(Betrag,PIN), Auszug(PIN)) und Objekten selbst = **Instanzen** einer Klasse. Wenn ein übergebenenes Objekt modifiziert werden soll, so kann das durch Übergabe per Referenz der Objekts passieren. Dabei wird statt mit Kopie direkt mit dem Original gearbeitet, wenn auch unter anderem Namen. Der Name ist aber lokal in der Funktion (Laufzeitvorteil bei großen Objekten). int i; int &r = i; ist Referenz auf i (r ist Alias für i). r=10 ändert i. Mit Zeigern werden dynamisch, also zur Laufzeit erzeugte Objekte verwaltet. Zeiger haben ähnlich Variablen Namen und Wert und können mit Operatoren verändert werden, aber Wert wird als Adresse behandelt. OOOO **Dynamische Programmiersprache**, bei der sich der Typ einer Variable zur Laufzeit ändern darf. Generische Programmierung, parametrische Polymorphie; **Haskell:** = funktionale Programmierung gemäß **Kategorien-Theorie**, siehe **boost proto**. Geht ab c++14. Mongo. **Scala** erlaubt Operatoren oder zusätzliche Kontrollstrukturen in Benutzerklassen zu implementieren und dadurch den Sprachumfang zu erweitern und eigene domänenspezifische Sprachen = domain-specific language = DSL zu erstellen. Templates = generischer Typen oder Schablonen: template<class TypBezeichner> Funktionsdefinition **STL:** Standard Template Library. **Programmiersprachen** Intro c't 2015 H18 p114-133 viele Aufgaben; mit ein paar Zeilen eigenem Code schneller gelöst als mit dem Versuch, mit einem fertigen Programm etwas zu tun, wofür es nicht entwickelt wurde. Zerlegung eines Problems in überschaubare Funktionseinheiten. Compiler- vs Skript-Sprache. Programmiersprachen-Ranking Red-Monk, TIOBE-Index: Java, C, PHP/Symfony, Python/Diango, Gtk+, Qt; **Python für alle** ct2022H5 p16-30; Holovaty: The Definitive Guide to Django. Web Development Done Right 2009; **Gleichheitszeichen:** $==$, $=$,$:=$, $\stackrel{!}{=}$,$\equiv$ $A = 1$ bedeutet in Computercodes, dass Sie einer Variablen mit dem Namen A den Wert 1 zuweisen. Speziell in Python wird zu dem Ganzzahlobjekt 1 eine Referenz zur Variablen A hergestellt. $==$ bedeutet das Gleichheitszeichen, wie Sie es im Mathematikunterricht kennengelernt haben. $A == 1$ bedeutet eine Aussage, die genau dann wahr ist, wenn A den Wert 1 hat. if leitet eine bedingte Anweisung ein, die nur dann den hinter dem Doppelpunkt stehenden Befehl ausführt, wenn die hinter dem if stehende Aussage wahr ist. `if A==1: print("Wahr")` führt nur dann zur Bildschirmausgabe, wenn A zuvor den Wert Eins zugewiesen bekommen hat. := als Definitionszeichen bedeutet bei $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ oder $\sin(x) := \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$ eine symbolische Abkürzung. Identity map $\mathbb{1}_V \colon V \to V$.

Computer: Zuse Z3 1941 = programmierbarer Digital-Computer mit 1408 Relais = 1408 bits = 64 Wörter

a 22 bits. 1945 Plankalkül. Eckert & Mauchly; ENIAC von Atanasoff & Berry 1940. Macrae: J von Neumann 1992 Kap12 Die Computer in Philadelphia p235-258; von Neumann schaute den o.g. Bastlern zu und entwarf seine **1. Hardware-Achitektur:** Der **von Neumann-Rechner** = Verallgemeinertes Schaltnetzwerk + Speicher + I/O = Leitwerk + Rechenwerk (ALU) + Speicher + I/O. von Neumann: Die Rechenmaschine und das Gehirn 1965[2] Digitalrechner p24ff, p37-43; B̃erkeley: Giant brains or machines that think 1949; Richtmyer & Metropolis: Moderne Rechenmaschinen, PhysBl6 1950 p11-20; W̃illers: Mathematische Maschinen und Instrumente 1951; Poloshi: Mathematisches Praktikum 1963; Kaiser: Numerische Mathematik Bd1 1977 p25ff; Sieber & Leithold: Einf. in die Datenverarbeitung 1978 Kap3 p44-60; Kerner: Numerische Mathematik mit Kleinrechnern 1985 p276; **Goldstine: The Computer from Pascal to von Neumann** 1972 BESM6; **Schiffmann: Technische Informatik Bd2** 2005[5] p41ff; **Shurkin: Engines of the mind** 1984; **Hardware:** Steuerwerk, Rechenwerk, Hauptspeicher vereint in CPU mit Zeitsteuerung Rechenregister, Adress- und Index-Register, Befehlszähler, -register, -schlüssel und ALU = arithmetic logic unit. Taktgenerator, Mikroprozessor/CPU, ROM als **Firmware-Speicher**, **firm** = **fest**, RAM/Hauptspeicher, I/O (Tastatur, Maus, Drucker, weitere Speicher, Sensoren, Mikros Lautsprecher), Festplatte/Massenspeicher mit Software und Daten. **2. Betriebssystem und Informationsflüsse:** Tanenbaum: Moderne Betriebssysteme 1992, 2001[2], 2009, 2016[4]; **3. Booten als Reanimation:** Unter Linux bootfähigen USB-Stick per **unetbootin**. **BIOS** = **basic input/output system** auf Flash-EEPROM mit elementare Hilfsprogrammen zur Ansteuerung der Hardware (Tastatur, Maus, Festplatte, Grafikcontroller) = **Interrupts** = unterbrechen gleichzeitig laufende Programme. Prüfung, welche Geräte sind angeschlossen. Funktionstest Hauptspeicher. Laden des Betriebssystems: **BIOS** = **Brücke zwischen Hardware und Betriebssystems**. Bootloader startet KERNEL. a] Kernel-Image laden. **Kernel** = Betriebssystemkern, der direkten Hardwarezugriff hat. **Layer** von unten nach oben: Schnittstelle zur Hardware (Geräte, Speicher, Prozessoren, Kühlung ct 18.2019 p176), Speicherverwaltung (virtuelle Hauptspeicher), Prozessverwaltung = Scheduler, Geräteverwaltung = Device Management, Dateisysteme. Zugriff nur von oben nach unten! b] Hardwareerkennung/Initialisierung. c] Netzwerk starten. d] dateisysteme einbinden. INIT-Prozess übernimmt. SysV-Init für Standard-Run-Level. Runlevel 1, **Terminal mit SHELL per Ctrl-Alt-T**: Terminal-Login. X-Server. Window-Manager. Grafische Shell. Shurkin: The evolution of the computer from mainframes to microprocessors 1996; Dupuy & DeBevoise: On the **Origins of cognitive science**. The **Mechanization of the Mind** 2009; Aspray & Campbell-Kelly: Computer. A history of the information machine 1997;

CPU Funktionsgruppen Register (Daten für die unmittelbare Verarbeitung rasch und temporär speichern), Recheneinheit (ALU - Arithmetic Logic Unit), Befehlsdecoder (Befehle verarbeiten und andere Einheiten steuern) und Adresseinheit (Daten und Befehle aus dem Speicher lesen/schreiben), mehrfach ausgeführte Einheiten, die das gleichzeitige Abarbeiten mehrerer Befehle erlauben, Vektorfunktionen. ALU & Steuereinheit=CPU mit Binärzahl: Befehle im unteren Speicherbereich, Daten im oberen. Steuereinheit hat Zeiger auf bestimmte Speicherzelle, in der der nächste Befehl steht. Buseinheit. Speicher. I/O zum Einlesen des initialen Programmes und Ergebnisausgabe. Grundarchitekturen=Unterste Ebene oberhalb elektrophysikalischer Vorgänge: Von-Neumann-Architektur keine Trennung zwischen dem Speicher für Daten und Programmcode. Von-Neumann mit Cache, um mit vielen parallelen Datenpfaden eine hohe Leistung zu erzielen. Harvard-Architektur Daten und Programm(e) in strikt voneinander getrennten Speicher- und Adressräumen abgelegt, Daten- und Programmzugriffe parallel.

CentralPU & GraphicsPU: Analoga: OpenG(raphics)L(ibrary), DirectX ⇔ Open C(ronos) L(ibrary), Cg ⇔ CUDA=Compute Unified Device Architecture, General Purpose Computation on Graphics Processing Unit, kurz GPGPU, ATi, NVidia Fermi. Kernel=CPU @ GPU = programming @ computing: Programm wird als String direkt zum Treiber gesendet und zur Laufzeit compiliert. Rechner compiled die shader mittels CDUA drive. https://ecrc.kaust.edu.sa/Documents/martinez_crest_blitz.pdf YORI FOURNIER: PGI compiler for easy GPU computing! http://www.nvidia.de/object/what _is_cuda _new_de.html Replika-Rechnungen, simultane Berechnung zu Parameterbereichen ein und desselben Problems, Molecular dynamics simulation, fluid dyn, granules Simulation gemäß http://gpgpu.org/ CUDA (Compute Unified Device Archi-

tecture) is a parallel computing architecture developed by NVIDIA. http://en.wikipedia.org/wiki/CUDA, OpenACC is an open standard, as simple as OpenMP, but with a performance opportunity similar to CUDA! Directive-based OpenACC programming model http://www.openacc-standard.org, whose multi-vendor support allows users to portably develop applications for parallel accelerated supercomputers.

Template: Variablentyp als Paramter, container, Standard Template Library, hosr_vec, device_vec, iterators entsprechen den pointern C: fancy iterators, zip iterators. **Rekursion:** Sedgewick: C++ Kap6; **Message-Passing Interface:** Idee - teile und herrsche. Grenzgebiete = halos. Interkommunikation zwischen den separierten Aufgabenbearbeitern mittels MPI. Pacheco: Parallel Programming with MPI, http://www.cs. usfca. edu/˜peter/ppmpi/ Partitioned Global Address Spaces (PGAS) as an alternative to the programming model of MPI: http://www. gaspi. de GASPI = Global Address Space Programming Interface = asynchronous dataflow with remote completion, rather than bulk-synchronous message exchanges. and http://www. gpi-site.com. **Supercomputer:** JUGENE = Jülich Blue Gene = 294,912 processor cores, 144TB memory, 6PB storage in 72 racks. peak performance 1PetaFLOPS. FLOPS = sockets $\times \frac{\text{cores}}{\text{socket}} \times$ clock $\times \frac{\text{FLOPs}}{\text{cycle}}$ clocked at 850 MHz. 0.35 GFLOPS/Watt. XDMCP (X display manager control protocol) ist ein Netzwerkprotokoll, das der Kommunikation zwischen einem X-Terminal und einem X-Server dient. Xen ist ein Hypervisor=Virtual Machine Monitor (VMM), also eine Software, die den Betrieb mehrerer virtueller Maschinen auf einem physischen Computer erlaubt (Citrix). Um völlig transparent für die unprivilegierten Domänen, häufig DomU genannt, zu sein, benötigt Xen spezielle Hardware, beispielsweise Prozessoren mit AMD-V (auch Pacifica genannt) oder Intel VT (auch Vanderpool genannt). Mit dieser Hardware müssen die Betriebssysteme, die in den Domänen laufen, nicht angepasst werden – sie „bemerken" nicht, dass sie die Hardware in Wirklichkeit mit anderen Systemen teilen. Diese Betriebsart wird als volle Virtualisierung oder Hardware Virtual Machine (HVM) bezeichnet. Mit VMware Workstation lassen sich auf einem Computer mit x86- oder x86-64-Prozessoren mittels Virtualisierung mehrere Betriebssysteme für eben diese Prozessoren gleichzeitig nutzen. **Radius-Server** eduroam-Cat Identitätsverteiler-System Tschebulew. Chromecast Amazon TV Stick Multicast = Adressierungsschema der Vermittlungsschicht OSI Open System Interconnection Modell = Referenzprotokoll für Netzwerkprotokolle als Schichtenarchitektur 1977 Datenpaketaufbau: Absender/Empfänger, Pakettyp (Verbindungsaufbau, -abbau, Nutzerdaten), paketgröße, lf Nr des Pakets/-Gesamtzahl, Prüfsumme. Felix von Leitner https://www.fefe.de/ct/multicast.txt Serverfreie Webauftritte serverless.com ct3 2019 p156 y5ta zeit.co *.now.sh **Webhosting** per 1&1 ionos.de/hosting ct2019H7 p26; **Darknet:** ct2019H6 p1 torproject.org Anonymität.

CISC = Complex Instruction Set Computing. RISC=Reduced Instruction Set Computing, Zahl der Befehle reduziert, die Befehlseinheit deutlich vereinfacht werden konnte und dadurch schneller arbeiten kann. ARM (Acorn Risc Machine), mit 32 Bit und 4 MHz. ARM entwickelt das Design von RISC-Prozessoren, deren Fertigung von den Lizenznehmern – zu denen Firmen wie IBM, 3Com, Infineon, Freescale, Intel, Atmel, Toshiba, Renesas, NXP oder Texas Instruments gehören – durchgeführt wird. B̃lack: IBM und der Holocaust 2001; **ARM Advanced RISC Machines** Ltd. 1989 Atmels 8-bit-RISC-Architektur AVR hat Harvard Architektur. AVR32-Architektur Von-Neumann-Architektur - ein gemeinsamer Daten- und Adressbuss verwendet wird, aber kein gemeinsamer Daten- und Adressbuss, der zum Flaschenhals werden kann, sondern ein Koppelfeld, über den mehrere Einheiten gleichzeitig Daten übertragen können. Die ARM-CPU ist eine RISC-Architektur und kennt als solche drei Kategorien von Befehlen: * Befehle zum Zugriff auf den Speicher (Load/Store) * arithmetische oder logische Befehle auf Werte in Registern * Befehle zum Ändern des Programmflusses (Sprünge, Subprogrammaufrufe) Die ARM verfügt über einen 3-Register-Befehlssatz, alle arithmetisch/logischen Befehle akzeptieren also ein Zielregister und zwei Operandenregister. Beispiel: ADD r0, r1, r2 ; r0 := r1 + r2 Die ARM ist sowohl Little-Endian- als auch Big-Endian-kompatibel, kann also mit beiden „Byte Orders" umgehen, was angesichts des Einsatzzwecks als Standard-CPU in Kommunikationsgeräten ein deutlicher Vorteil ist. Der Standardmodus der ARM ist little endian.

Zu **Penrose - Kann ein Computer denken?** Nein, weil er ein Teil unseres Geistes ist. Denn die Welt ist der seine Wirklickeit wissende Geist. **Penrose: Computerdenken - des Kaisers neue Kleider oder Die Debatte um künstliche Intelligenz, Bewußtsein und die Gesetze der Physik** 1991; **Penrose: Das Große, das Kleine und der menschliche Geist.** Mit Kommentaren von Abner Shimony, Nancy Cart-

wright und Stephen Hawking 1998; Ryle: The concept of mind 1949; Zurek: Between quantum and cosmos. Studies and essays in honor John Archibald Wheeler 1988; **Lockwood: Mind, Brain, and the Quantum: The Compound 'I'** 1989; Bohr: Atomphysik und menschliche Erkenntnis. Facetten der Physik 1985; **Herbert: Quantenrealität. Jenseits der neuen Physik** 1987; Rae: Quantenphysik, Illusion oder Realität? 1996; W̃heeler & Zurek: Quantum Theory and Measurement 1983; Stapp: Mind, Matter and Quantum Mechanics 1993; **Davies: Der Geist im Atom. Eine Diskussion der Geheimnisse der Quantenphysik** 1993; **Bohm: Die implizite Ordnung**. Grundlagen eines dynamischen Holismus 1987; Krishnamurta & Bohm: Vom Werden zum Sein 1993; Bohm: Der Dialog. Das offene Gespräch am Ende der Diskussionen 2014; Artefakte wie Maschinen; Computer und Roboter sind Bestandteile dieser Welt - sicher, die Hirne anderer auch. Aber Computer sind Externalisierungen, Teile unseres Geistes - Entäußerungen von uns selbst, materialisierte Sprechakte. Die Frage offenbart eine infantile Zwangsempathie, die auch Gegenstände personalisiert. Aberglauben. Die **Welt** ist nicht gut und hat auch keinen **Sinn** - sie ist schön. Hiob.

Auf der untersten Programm-Ebene findet sich der Maschinencode – jene Abfolge von Zahlen, mit der der Computer auch tatsächlich gesteuert wird. Während früher eine CPU nur mit diesem Maschinencode gesteuert werden konnte, sind inzwischen auch CPUs programmierbar und damit kleine eigenständige Computer. **Bootloader-Loading**= ISP=In-System Programming=Programmierung einer logischen Schaltung direkt im Einsatzsystem mittels ISP=In-System Programmer oder In-Circuit Programmer (Zusatz Hardware) über SPI=Serial peripherical interface Schnittstelle für synchronen seriellen Datenbus. Master-Slave-System. Programmieren heißt hier, dass ein zuvor erstelltes Programm oder Daten in den internen, nichtflüchtigen Speicher (EEPROM-elctrically ereasable programmable read only memory oder Flash-Speicher)

Backer: Professionelle Assemblerprogrammierung: hardwarenahe Grafikprogrammierung, programmieren im protected mode, Windows und Assembler, zahlreiche Beispielprogramme 1994

DB9, D-Sub 9, EIA 232, RS-232: 1=CD Carrier detect, 2=RD Receive data, 3=TD Transmit data, 4=DTR Data terminal ready, 5=GND Masse, 6=DSR Data set ready, 7=RTS Request to send, 8=CTS Clear to send, 9=RI Ring indicator. Handshakes: Soft∼ =Empfänger sendet zur Steuerung des Datenflusses spezielle Zeichen an Sender - 3 Leitungen RxD, TxD, GND. Hardware∼ =Beide Geräte senden sich über Steuerleitungen Status. Minimal-Interface 5 Leitungen: TxD. RxD, GND, RTS, CTS.

Simplex/Vollduplex = abwechselnd/gleichzeitig in beide Richtungen. Zeitduplex (Mobilfunk). Frequenzduplex = gleichzeitig ohne Kommunikation (DECT-Standard). Die Übertragung basiert auf einem Time Division Duplex- sowie Time Division Multiple Access- und Frequency Division Multiple Access-Verfahren und arbeitet in Europa im Frequenzbereich von 1880 MHz bis 1900 MHz, in dem 10 Kanäle mit je 1728 kHz Bandbreite definiert sind. ETSI spezifiziert aber auch Erweiterungsbänder in den Bereichen 1900–1980 MHz, 2010–2025 MHz und 2400–2480 MHz. DECT verwendet einen Rahmen von 10 ms Dauer, der in 24 Zeitschlitze aufgeteilt ist. Jeder Zeitschlitz kann sowohl im Uplink als auch im Downlink verwendet werden. Durch Koppelung von Zeitschlitzen sind auch asymmetrische Übertragungsraten bis zum Verhältnis 23:1 möglich. In diesem Zeitschlitz von 416,7 μs Dauer wird ein Burst gesendet, der üblicherweise 368 µs dauert und 424 Bits enthält. Daraus ergibt sich eine Bitdauer von 868 ns und eine Bitfrequenz von 1,152 MHz. Als Modulation wird Gaussian Frequency Shift Keying (GFSK) verwendet. Eine binäre Eins wird durch eine Frequenzerhöhung von 288 kHz, eine binäre Null durch eine Frequenzverringerung von 288 kHz übertragen. Bei stabilen Funkverbindungen kann auch eine 4-level- oder 8-level-Modulation verwendet werden, wodurch bei jedem Schritt 2 bzw. 3 Bit übertragen werden. Die 424 Bits eines Bursts werden in folgende Felder aufgeteilt: * 32 Bits Synchronisation (S-Feld) * 388 Bits Daten (D-Feld), davon o 64 Bits Headerfeld (A-Feld) o 320 Bits Nutzdaten (B-Feld) o 4 Bits zur Bestimmung der Kanalqualität (X-Feld) * 4 Bits zur Bestimmung der Kanalqualität (Z-Feld) Die sich daraus ergebende Standarddatenrate bei den Nutzdaten beträgt 32 kbit/s, die in beide Richtungen zur Verfügung steht. Außer dem normalen Basic Burst zu 424 Bit in 368,1 μs gibt es noch drei weitere: * Short Burst mit 96 Bit in 83,3 μs zu Beginn eines Zeitschlitzes. Dieser Burst kann zum Beispiel verwendet werden, wenn die Basisstation kein Gespräch überträgt, aber dennoch ihre Kennung ausstrahlen muss. * Low Capacity Burst mit 184 Bit in 159,7 μs. Dieser Burst belegt nur die Hälfte eines

Zeitschlitzes, so dass zwei Bursts innerhalb eines Zeitschlitzes gesendet werden können. Das B-Feld für die Nutzdaten verkleinert sich dabei aber überproportional von 320 auf 80 Bit, so dass sich die Datenrate auf ein Viertel verkleinert. * High Capacity Burst mit 904 Bit in 784,7 μs. Dieser Burst belegt zwei Zeitschlitze und beginnt immer in einem geradzahligen Zeitschlitz. Das B-Feld vergrößert sich auf 800 Bit, so dass sich die Netto-Datenrate um den Faktor 2,5 vergrößert. Die Wahl von Sendefrequenz und Zeitschlitz erfolgt bei DECT immer durch das Mobilgerät. DECT leistet dynamische Kanalauswahl und -zuweisung. Zu diesem Zweck führen alle DECT-Geräte eine RSSI-Liste (Received Signal Strength Indication). In regelmäßigen Intervallen (mindestens alle 30 Sekunden) werden alle Idle-Kanäle gescannt und in die Liste eingetragen. Wird ein neuer Kanal benötigt, wählt das Mobilgerät oder die Basisstation den Kanal mit den wenigsten Interferenzen anhand der RSSI-Liste.

RLS Restricted Television Service Lizenzen Wireless-LED-Schalter 433 MHz.

Asymmetric Digital Subscriber Line ADSL-over-ISDN läuft in 4,3125 kHz breiten Bändern mit einer Symbolrate von je 4 kbaud im Bereich von 138 bis 275 kHz für den Upstream und 275-1104 kHz für den Downstream. Wegen der schlechten Leitungsqualität – schließlich waren die Telefonleitungen nicht für die Übertragung von Signalen mit einer Bandbreite von etwa 1 MHz vorgesehen – wird die Leitung vom Endgerät zur Vermittlungsstelle „ausgemessen“ und einzelne Bänder gegebenenfalls ausgeblendet, falls die Dämpfung zu groß ist oder Reflexionen auftreten.

A**DSL = Digital Subscriber Line** und ADSL2+ Norm Ausdehnung des verwendeten Frequenzbereichs nach oben bis 2,2 MHz einher, was bei kurzen Anschlussleitungen deutlich höhere Datenraten ermöglicht: generell bis zu 25 MBit/s in Empfangsrichtung und bis zu 3,5 MBit/s in Senderichtung; in Deutschland wird mittels der datenratenschwachen ADSL-over-ISDN-Schaltung jedoch lediglich bis zu 16 MBit/s in Empfangs- und bis zu 1125 kBit/s in Senderichtung angeboten. Funktionsprinzipien der ADSL-Technik sind Frequenzmultiplexverfahren, Fourier-Transformation und Discrete Multitone Transmission (DMT); ein ADSL-Modementhält als wesentliche Bestandteile einen schnellen Analog-Digital-Wandler und einen digitalen Signalprozessor zur Berechnung der Fourier-Transformationen für die einzelnen Frequenzen.

Martin Fischer, UniPotsdam. Psychologische Sicht auf Zahlen und ihre Repräsentation im Gehirn. Experimente zum **Embodied!numerical cognition**: In Kognitionswissenschaften galt lange das Kopfrechnen als Paradebeispiel für die Vorstellung, dass menschliches Denken abstrakte mentale Manipulation von Symbolen ist. **Kopfrechnen. Rechentricks:** L̃ange: Besser Rechnen ohne Taschenrechner - Erstaunliche Rechentricks 2017; Dambeck: Numerator - Mathematik für jeden 2015; Hesse: Mathe to go - Magische Tricks für schnelles Kopfrechnen 2000; Sperling: Auf du und du mit Zahlen. Leicht fassliche Anleitungen zum Kurz- und Schnellrechnen. Zahlenspiele und Rechentricks 1955; Athen & Bruhn: Rechnen und Mathematik 1974; Seit einiger Zeit zeigt sich aber, dass unser Wissen allgemein, und damit auch das Zahlenwissen, systematisch mit den sensorischen und motorischen Erfahrungen während des Wissenserwerbs verbunden ist und bleibt. **Embodied Embedded Cognition - Milieu des Körpers, Hormonspiegel, Homoestasie, Mensch und Tier sind eher Analog-Computer -, extended und distributed cognition** Damasio (2010). Self comes to Mind: Constructing the conscious brain. Humphrey (2011). Soul Dust. The magic of consciousness. Ramachandran (2011). The Tell-Tale Brain. Unlocking the mystery of human nature. Bauer: Das Gedächtnis des Körpers. Wie Beziehungen und Lebensstile unsere Gene steuern 2004;

Embodiment/grounding - Wie der Körper unser Denken beeinflusst. Lems zur Theorie dynamischer Systeme. **Lem: Solaris** 1961, 1972, Ĩ983 dockt direkt an die Hirne der Raumfahrer an, um deren tiefste Wünsche und Schuldgefühle auslesen und damit im Zusammenhang stehende Personen als Zombis regenerieren konnte. **Solaris** entpuppte sich als eine seinen Besuchern unsichtbare tödliche Rückkopplungsschleife. Vernichtung durch einen Antisublimation/Antiverdrängungs-Feedback-Loop.
Schwartz et al.: Biofeedback. A practitioner's guide 2000; Der Mensch hat ein internes Modell von sich selbst: http://eccerobot.org/index.php Holland: Ein großer Teil dessen, was beim Menschen als abstrakte Intelligenz gilt, ist aber tatsächlich in seinem Körper verankert = Unsere Fähigkeit, zu lernen und Entscheidungen zu treffen, ist nicht losgelöst von den Bewegungen unseres Körpers, sondern wird durch diese mitgeformt. Dabei haben wir in jedem Augenblick auch ein internes Modell von uns selbst. Wir sind also keine Descartes'schen

Wesen, in denen Körper und Geist getrennt sind. Diese Erkenntnis ist der Ausgangspunkt für den Ansatz des Embodiment (Verkörperung) in der Robotik seit den frühen 1990er-Jahren. Damals begann der MIT-Forscher Rodney Brooks mit seiner Gruppe, Roboterköpfe wie Cog zu bauen, die über eine künstliche Mimik Emotionen simulieren konnten. Im Kontakt mit Menschen sollten sie aus deren Reaktionen Verhalten lernen, das irgendwann zu einer künstlichen Intelligenz führen könnte, so Brooks' Überlegung. Letztlich zeigte sich aber, dass auch diese verhaltensbasierten Roboter konzeptionell noch zu simpel ersonnen waren. Als Owen Holland vor einigen Jahren ein Forschungsprojekt zum Maschinenbewusstsein startete. Muskeln werden von einem eigenen Mikrocontroller-Board gesteuert, das ungefähr die Rechenleistung eines Handys hat. Weil die künstlichen Muskeln durch das Gummiband elastisch reagieren, benötigen sie zusätzlich jeweils einen Kraftmesser, der ihre Spannung misst. Die Steuerung dieses Systems wird von der Gruppe von Alois Knoll am Lehrstuhl für Robotik und Echtzeitsysteme der TU München entwickelt. Aus der Sicht eines Ingenieurs ist das Prinzip von menschlichen Muskeln Mist, sagt Rob Knight von The Robot Studio, der Firma, die den Roboter baut. Denn aufgrund ihrer Elastizität vergrößern sie eigentlich die Komplexität des Bewegungsapparates, zumindest dann, wenn man diesen ausschließlich als Rechenproblem sieht. Energetisch hingegen sei die Elastizität von Vorteil, weil man aus der Schwingung eines Arms wieder Energie zurückgewinnen könne, die den nächsten Bewegungsvorgang unterstützt, sagt Knight. Er verdeutlicht dies an einem Beispiel: Dank dieses Zusammenspiels müsse ein Mensch beim Gehen nur 50 Watt Leistung aufbringen - der durch und durch steife Honda Asimo hingegen 2000 Watt.

Langfristiges Ziel ist ein humanoider Roboter mit zwei Beinen: Auch für das maschinelle Lernen ist das Muskelkonzept interessant. Rolf Pfeifer Uni Zürich: Wenn Sie einen Arm hochheben, verändert auch Ihr restlicher Körper vollständig seine Haltung. AI Lab = Artificial Intelligence Laboratory. Helbig: Künstliche Intelligenz und automatische Wissensverarbeitung 1991; **Firebaugh: Artificial intelligence. A knowledge-based approach** 1988; Shoham: Artificial intelligence techniques in PROLOG 1994; 1972 deklaratives Programmieren, wichtigste logische Programmiersprache. Graubard: The Artificial Intelligence Debate. False Starts, Real Foundations 1988; Geißler & Tembrock: Natürliche Evolution von Lernstrategien 1990 p39 Fuchs-Kittowski: Geist aus Materie. p45 Philosophische Schulen; Internet = physische Basis des WWW. 1969-1983 Arpanet, 1981-1993 TCP/IP, DNS und Usenet. **Chatbots: Eliza** und **Doctor** 1964. L̃andgrebe & Smith: Why machines will never rule the world. Artificial intelligence without fear 2022; ChatGPT = Generative Pre-trained Transformer zwecks Textgenerierung, die fortlaufend durch menschliches Feedback trainiert wird. Matussek im Gespräch mit Jobst Landgrebe in Kontrafunk 13.1.2023. Hinweis auf Weizenbaum und Dreyfuss fehlt. **Bots** = Computerprogramm, das weitgehend automatisch sich wiederholende Aufgaben abarbeitet, ohne dabei auf eine Interaktion mit einem menschlichen Benutzer angewiesen zu sein. Ab 2016 **Social bots:** Bei Twitter lassen sich Social Bots installieren, die auf spezifische Hashtags reagieren und dann vorher programmierte Informationen absetzen. Dazu werden realistisch wirkende Accounts mit Profilbild, Posts und Followern geschaffen, die selbst auch anderen Nutzern folgen. Sie werden in der Regel eingesetzt, um Werbung zu verbreiten oder Mehrheiten vorzutäuschen. Graubard: Probleme der künstlichen Intelligenz. Eine Grundlagendiskussion 1996; Beim Robocup **2050** siegen die Roboter gegen den Fußballweltmeister. RobCup Kid 30-60 cm, Teen 90-120 cm, Adult > 130cm. Nao Roboter von Aldebaran. Darwin-Roboter der südkoreonischen Firma Robotis. ARTE 2010 **Real humans**. **Hi, A.I.** 2019 von Isa Willinger; Asimov: Alle Roboter-Geschichten 1982; Isaac Asimov: I, robot. Ich, der Robot 1950, 2004 mit Will Smith in Chicago 2035; KI-Renaissance in Form des kognitiven Computings, speziell der Spracherkennung. Analogcomputer wird zum neuromorphen Computer. DARPA SyNapse. Embodied cognitition $\subset$ Softrobotik: Fische haben verschiedene Hautsensoren, die unmittelbar auf die Skelettstellung wirken. Floericke: Einheimische Fische 1925 Seitenlinie, Aal: Glasaal wandert per im oberflächennahen Golfstrom in 3 Jahren auch in die Nordsee und dann, mittlerweile 7 cm lang, über die Elbe als Gelb-/Steigaal im Frühjahr auch in den Spreewald. Lebt 50-100 Jahre als erwachsener Aal im Süßwasser, im Herbst bei Sauwetter geht er als Blankaal per Golfstromtiefenwasser in 1.5 Jahren zurück an seinen Geburtsort, um zu laichen und zu sterben. Meeresströmung: Volumenstrom in der Ozeanografie 1 Sv = $10^6 m^3$. Beringstraße 1 Sv. Azorenstrom 10 - 12 Sv. Golfstrom 30 Sv am Floridastrom bis zu 150 Sv bei 55^0. Verteilte, adaptive Robots, die sich sebst verleimen. Gregor Schöner, Bochum. Rettung, Haushalt, Tanz, Fußball, Fußball-Simulation 2D und 3D. c't 2012 H15 p36

http://www.robotcub.org/ HL Dreyfus: What Computers Still Can't Do: A Critique of Artificial Reason; **Weizenbaum: Die Macht der Computer und die Ohnmacht der Vernunft** 1976 *1923 Berlin, +2008 Ludwigsfelde, 1941 Mathe-Studium, 1951 Großrechnerbau, bis 1963 Computerbanksystem, ab 1963 Aufbau der physischen Basis des Internets= ARPANET = dezentrales Netzwerk per Telefonleitungen mittels Paketvermittlung = packet-switchung ohne Standleitung, Hafner & Lyon: Arpa Kadabra oder die Geschichte des Internet 1996, 2000 beschreibt die prä-Flash-Speicher-, prä-Smartphone-, prä-Social-Media-, prä-Amazon-, prä-Google-, prä-Kommerz- und prä-Massenvorratsüberwachungs-Ähra, Prä-NSA-Ähra; In den Telefonvermittlungen wurde aus technischen Gründen immer mitgehört, weil die Telefonistinnen die Übertragungsqualität zu protokollieren. In digitalen Netzen fallen die Logfiles zur Fehleranalyse obligatorisch an. Harding & Leigh: WikiLeaks. Julian Assanges Krieg gegen Geheimhaltung 2013; Harding: Edward Snowden. Geschichte einer Weltaffäre 2014; Greenwald: Globale Überwachung. Der Fall Snowden, die amerikanischen Geheimdienste und die Folgen 2014; Melzer: Der Fall Julian Assange. Geschichte einer Verfolgung - Der spektakuläre Report des UNO-Sonderberichterstatters für Folter 2021; NLP = natural language project im Rahmen der KI mündet in Chatbots **Eliza** 1964 und **Doctor** 1966 und Weizenbaum ist über die Chatbot-Nutzer erschrocken, die Intelligenz in die Computer projizieren und seiner Software zuschreiben. L̃andgrebe & Smith: Why machines will never rule the world. Artificial intelligence without fear 2022; **Weizenbaum wird zum Dissident und Kritiker der Informatik:** 'Das **Fernsehen ist die größte kulturelle Katastrophe**, die die Erde in der Zeit, an die wir uns erinnern können, erlebt hat.' - u.a. zitiert in: itfrontal.de, focus.de 'Das **Internet ist ein großer Misthaufen**, in dem man allerdings auch kleine Schätze und Perlen finden kann.' - Vortrag in Hamburg am 2. Mai 2001, heise.de 'Der meiste Schaden, den der Computer potenziell zur Folge haben könnte, hängt weniger davon ab, was der Computer tatsächlich kann oder nicht kann, als vielmehr von den **Eigenschaften, die das Publikum dem Computer zuschreibt**.' - Die Zeit 03/1972, S. 43, zeit.de '**Die Erde ist ein Irrenhaus**. Dabei könnte das bis heute erreichte Wissen der Menschheit aus ihr ein Paradies machen.' - Sein letzter Artikel in der Sueddeutschen Zeitung, sueddeutsche.de, 8. Januar 2008 'Gerade ihre Regelmäßigkeit ist die fürchterlichste Eigenschaft der Maschine.' - Die Macht der Computer und die Ohnmacht der Vernunft. Suhrkamp, 1978. S. 65 'Jeder ist immer erreichbar. Die ganze Welt beschleunigt sich, alles ist dringend, und wo alles dringend ist, ist nichts mehr dringend, und damit schlittern wir in eine Bedeutungslosigkeit hinein.' - Interview in sap.info, 5. Januar 2004 'Unser Tod ist der letzte Service, den wir der Welt leisten können: würden wir nicht aus dem Weg gehen, würden die uns folgenden Generationen die menschliche Kultur nicht wieder frisch erstellen müssen. Sie würde starr, unveränderlich werden, also sterben. Und mit dem Tod der Kultur würde alles Menschliche auch untergehen.' - Eine seiner letzten Mails, heise.de http://www.pt-ai.org/ **ITler dringen nicht durch.** ct2022H5 p8 IT-Kompetenz-Vakuum in öffentlicher Verwaltung. Meckel: NEXT. Erinnerungen an eine Zukunft ohne uns 2011; personalisierte Suchstrategien geben Weltkurzsichtigkeit, statt Serendipität = serendipity = zufällige Beobachtung von etwas ursprünglich nicht Gesuchtem, das sich als neue und überraschende Entdeckung erweist. Columbus. Hubert Dreyfus, University of California at Berkeley, James H. Moor, Dartmouth College Rolf Pfeifer, Zurich University, Michael Wheeler, University of Stirling (TBC); ebenfalls am Eccerobot-Konzept beteiligt ist. Die Bewegungen der Körperteile stehen miteinander in Beziehung. Verbindet man die entsprechenden sensomotorischen Daten mit denen des Sehsystems, also der Kamera, gibt es zwischen ihnen Korrelationen, die erkannt werden können - ungefähr so, wie Neuronen verschiedener Hirnpartien bei einer Bewegung gleichzeitig feuern. Auf diese Weise könne der Roboter allmählich **seine Dynamik selbst lernen und ein Wissen über ihren Körper aufbauen.** Dieses Lernverfahren basiert auf sogenannten neuronalen Netzen und wird nach dem kanadischen Psychologen Donald O. Hebb (1904 bis 1985) Hebb'sches Lernen genannt. http://www.spiegel.de/wissenschaft/technik/0,1518,689406,00.html

Eccerobot soll zunächst ein Oberkörper bleiben, aufgesetzt auf eine Plattform mit Rädern. Derzeit befindet sich die Steuerelektronik des Roboters noch in einem externen Gehäuse, soll jedoch später über dessen Körper verteilt werden. Langfristig sei das Ziel, einen humanoiden Roboter mit zwei Beinen zu bauen, der wie ein Mensch gehen kann, sagt Owen Holland. Bis dahin dauere es noch mindestens zehn Jahre, wahrscheinlich länger.

Rolf Pfeifer und Josh Bongard: How the Body Shapes the Way We Think - a New View of Intelligence 2007;

Embodiment - morphologischen und materiellen Eigenschaften des Körpers. Das Prinzip des Embodiments oder der verkörperten künstlichen Intelligenz geht davon aus, dass der Körper in der Interaktion mit der Umwelt die für das Gehirn relevante Information erzeugt. Intelligenz sitzt also nicht nur im Gehirn, sondern ergibt sich aus dem Zusammenspiel von Gehirn, Morphologie, Materialien und Umgebung. Trifft das Bein beim Laufen auf den Boden auf, macht das Knie eine sehr schnelle Federbewegung. Diese Federbewegung ist so schnell, dass sie nicht neuronal - weder vom Gehirn noch vom Rückenmark - gesteuert sein kann. Die Bewegung ergibt sich aus der Elastizität der Muskeln, die je nach Phase beim Laufen unterschiedlich ist. Das Gehirn steuert die Bahn der Gelenke nur grob, dafür verändert es dynamisch die Elastizität der Muskeln, also die Materialeigenschaften. Folglich übernehmen die Materialeigenschaften des Muskel-Sehnensystems die Feinsteuerung. Rolf Pfeifer: Mit andern Worten lagert das Gehirn gewisse Funktionen an die Materialien aus und wird dadurch selbst entlastet. Beim Gehen hingegen ist der Vorwärtsschwung des Beines weitgehend passiv, d.h. die Muskeln sind schlaff, machen also gar nichts oder nur sehr wenig. Die Steuerung wird von der Schwerkraft übernommen, da das Bein wie ein Pendel funktioniert. 'In diesem Fall wird die Steuerung an die Interaktion mit der Umwelt delegiert' so Pfeifer. Das Bein bewegt sich also fast ohne Energie nach vorne, weil die Muskeln nichts machen - und das Gehirn braucht auch nur sehr wenig zu leisten. Methodik '**Verstehen durch Nachbauen**', um Einsichten zu beschreiben. 'Wenn wir verstehen, wie wir intelligente Systeme entwerfen und bauen können, verstehen wir auch Intelligenz im Allgemeinen besser.'

Gladwell: Blink. Die Macht des Denkens ohne Denken 2005

Der & Ay: Roboter mit Entdeckerlust, SdW H2 2010. Selbstmodell von der Physik des eigenen Körpers im Form eines neuronalen Netzes. Embodiment: Gesamtheit der mechanisch-physikalischen Eigenschaften eines Roboters. 2nd oder embodiment: innere, modellhafte Repräsentation des realen Embodiments. Mikroelektromechanische Sensoren. Sensoren in der Waschmaschine PhysJ18 2019 H11 p60ff; Der Maschine muss kein Subjekt zugeordnet werden, da ihr Verhalten einer Vorwegnahme durch deren Schöpfer entspricht. Die Realisierung eines Plans wird auch nicht personalisiert. Rolf Pfeifer, Josh Bongard, Shun Iwasawa: How the Body Shapes the Way We Think: A New View of Intelligence; http://ailab.ifi.uzh.ch/pfeifer/ Rolf Pfeifer und Christian Scheier: Understanding Intelligence; Carver & Scheier: Perspectives on Personality; Depersonalisation. Carver & Scheier: On the Self-Regulation of Behavior; **Skinner: Was ist Behaviorismus?** Die Version einer aggressionsfreien Gesellschaft 1978. - operante Konditionierung, programmiertes Lernen als Sprechakt, utopischer Roman: Walden Two oder Futurum Zwei 1983. Skinner: Jenseits von Freiheit und Würde 1980; **Bieri: Eine Art zu leben. Über die Vielfalt menschlicher Würde** 2013; Huber: Menschlich leben lernen. Das behavioristische Menschenbild 1988;

Demo-Szene: FARBRAUSCH: FR-41 DEBRIS http://de. wikipedia. org/wiki/Demoszene ; Demoscene: wishful twisting, **Still - Calcifer**, pony, www.ct.de/1320076 c't 20, 2013 p76; Botz: Kunst, Code und Maschine 2011; http://www. spiegel. de/netzwelt/spielzeug/0,1518,542766,00. html Die Szenenseite: http://www.scene.org http://www.mentalimages.com/index.php Augmented Reality AR = erweiterte Realität, virtuelle Realität = Überblenden von Informationen auf Live-Bildern. Position des Fußballs. Kann alle menschlichen Sinnesmodalitäten ansprechen.

Leabra ist ein clone von EMERGENT (rewrite von PDP++)
`http://grey.colorado.edu/emergent/index.php/Main_Page`

http://www.loebner.net/Prizef/loebner-prize.html

Beispiel chatbot: http://www.jabberwacky.com/

http://prezi.com/ **Mind map:** xmind, freemind, http://www.mindmeister.com/de Buzan: Mind map – die Erfolgsmethode 2005; Staub: Mega memory; **Kontaktformular**http://html-php.de/index.php?seite=p_formular **processing** Processing is a flexible software sketchbook and a language for learning how to code within the context of the visual arts. https://lernprocessing.wordpress.com/2010/01/18/processing-links/ **Processing for Android.**

Ahnenblatt: http://www.ahnenblatt.de Ausgabe *.ahn nicht kostenfrei druckbar. Nutze Gedcom-

Ausgabe und plotte mit yEd, siehe http://wiki. engist-webdesign.de/ wiki/Gedcom_und_yEd Tipps: **Die Quelle: E-Print Network** **http://www.osti.gov/eprints/ topicpages/ documents/** `shw/tExte/3_References`; http://www.astromedia.de/ http://www. experimentum-lucis. de/ S-Abf-Taste Magic SysRq Key Alt-PrintScr: R unraw gehe zur Konsole, K secure attention key beende alle Prozesse auf akt Terminal, B reboot sofortiger Neustart ohne save, O poweroff Rechner aus ohne save, S sync cache save auf Platte, U unmount, M memory, E term sigterm an alle Prozesse außer Init, I kill sigkill an alle Prozesse außer Init, D zeige alles locks an, Q zeige alle timer an, P show registers, T show tasks, W Zeige Prozesse in geblocktem Status an. N Priorität von Echtzeit-Prozessen herabsetzen, H help, Ziffer 0...9 set log level 0=krit Level. Reid, Deubert: PostScript. Programmiertechniken 1988; Für a2book nimm **pstops** -q -pa4 '2:0L@0.7(19cm,2)+1L@0.7(19cm,16.85cm)' und **pstops** -q -pa4 '2:0,1U(20cm,30.7cm)' https://www-user.tu-chemnitz.de/~heha/hs/pstops.htm Herbert Voß: PSTricks - Grafik mit PostScript für TEX und LATEX 2005[2];
http://www.w3.org/TR/owl-features/ **Google calculator:** `e^(-pi/2)` **Google-Such-Ausschluss** mit -site:WebAdresse ct12 2018 p154. ct12 2018 p152 Fotos vs **Bildsynthese=Rendering** = Lichtbild vs Lichtbildwerk = Handwerk vs Kunstwerk. **Hacken** = Tüfteln im Kontext einer verspielten selbstbezüglichen Hingabe im Umgang mit Technik. **Hack** = technischer Kniff Lifehack. **Jailbreak** = spielerische Beseitigung Hersteller eingebauter Nutzungsbeschränkungen. 5 Tipps von Google, wie Sie im Suchergebnis ganz nach vorne kommen http://www. shopbetreiber-blog. de/2008/07/01/seo-cutts-smo/ http://www. suchfibel. de/6gefunden/index. htm http://99-bottles-of-beer.net/ Image Viewer: **gimp** macht aus jpg ps-Files: gimp name.jpeg; **Select** mittels **Tools/Toolbox**; **Edit: Copy** `^C` in clipboard; **Paste as**; **Image:** Print size; **File: Save as copy**, **Screenshot**/Bildschirmfoto mittels Gimp: **File, New, Create Screenshot Snap** dann **File, Save as copy**; Wird unter Documents gespeichert. GIMP, Inkscape, Scribus ct10.2020p110; jpeg2ps, xv, feh, pinta , JavaMorph vereinigt zwei jpegs, nip2, imagemagick; **Xmgrace** oder **grace**. **pdf-Dateien mergen** mit **pdfsam**. bf pdf-Editoren: Inkscape LibreOfficeDraw ct2019H7 p116; ct7.2020p110 Xodo; **FreePDF-Editor** ct26.2022. Per **App Adobe Scan** liefert EINE bearbeitbare pdf-Datei, kann auch OCR. Texterkennung mit Tesseract und Phyton ct2019H7 p146; **TextGrabber** OCR-App ct18 2018 p26; vlc Film Movie mpeg mpg-Files xanim, kaffeine, totem, xin, mplayer oder konqueror *.avi; 90° drehen mit **awidemux** = plattformunabhängige Videoschnittsoftware, die zahlreiche Audio-, Video- sowie Containerformate unterstützt und untereinander konvertieren kann, zB Handyaufnahme als MPEG-4 AVC = x264 zu MP4 bei gleichzeitiger Drehung um 90°, dann abspielen per **mplayer** xin; ffmpeg; Open Broadcaster Software (OBS) is a free and open-source cross-platform streaming and recording program built with Qt. **Kompression und Codec-Änderung:** ffmpeg -i input.mp4 -vcodec libx265 -crf 28 output.mp4. **DVD doppeln** mit **brasero** oder per Kommandozeilen erst DVD mit dvdbackup -M -i QuellDevice -o tmpZiel auf Festplatte; Brennen mit k9copy tmpQuelle Zieldevice; CD-Spieler xmcd & Daten CD: /cdrom /usr/-bin/mme/audiocontrol. **mp3**. player MP3 mxaudio xmms 1212-12121212-121231e7876044a0 glame Audio-Mechanic, http://www. mp3encoding. de/ http://de. wikipedia. org/wiki/**LAME**-Decoder; http://gabriel. mp3-tech. org/mp3infotag. html; **Ubuntu-DVD-Player per Libdvdcss** oder vlc im packman; Regional-Code auf RC0 setzen! **Ubuntu-Version** mit lsb_release -a. Aufräumen der Festplatte mit **BleachBit** beseitigt temporäre Dateien oder **FSlint** = FileSystem + lint = Staub. Open access **Post-Publication Peer Review** arXiv or bioRxiv Neroburning oder Linux-Brenner k3b; Video-Schnitt mit vlcm; **Ubuntu-DVD-Brenner für ActionCam und Handy-Videos-Clips: devede** nimmt mov-Files. Falls Fehlermeldung, so unter Options des xterm oden links Preferences auf Löschen temporärer Files setzen. **find -name 'Grif*'**; oder `alias fid='find * -name \!* -print'` oder `find * -name Szilard.tex` Downloads landen unter `~/snap/chromium/9/Downloads/`; **Videoschnittsoftware:** Schnittwerkzeuge siehe c't 2017 H10 p118-121 Fastcut und VideoDeluxe = leicht, Shotcut = 2 Tage, Blackmagic, DaVinci und Resolve = schwer, CyberLinks Power Director; Sho Avidemux, Cinefx früher Jahshaka, Cinelerra, Cuttermaran, EditShare Lightworks, Kdenlive, **Kino**, Open Movie Editor, VideoLAN VLMC. **Ubuntu-Videoschnittsoftware:** OpenShot, Shotcut, DaVinci Resolve 14 siehe ct2018 H5 p142; **IceWM** http://www.icewm.org/FAQ/IceWM-FAQ-7.html; xmms kmix Ubuntu mp3-player: kaffeine XEV, privoxy = Werbefilter, Creative Labs Soundblaster 16 PCI; PCI128; Live! (Audigy muss nich) mpg123-thor4 *.mp3

ZZZ/halfor~1>~/bin/mpg123-thor4 * alsamixer. EMail mail, elm, **al**pine. **Identitätsschutz:** Have I been pwned? = HIBP ct2019H5 p32-42, H6 p6; Minimal mail-tool ct12 2018 p166. processing css html4 o. 5; apt-cache search igraph; **HTML** ist Auszeichnungssprache, in der mittels Tags markiert und deren Attributen spezifiziert wird, wie sich nachfolgender Text/Bild bei Browser-Nutzung darstellen/gelayoutet soll. Maurer: HTML und CGI-Programmierung. Dynamische WWW-Seiten. Tcl 1996; **.htaccess** in zu schützenden Verzeichnis anlegen mit Inhalt:

```
AuthType Basic
AuthName 'Bitte melden Sie sich an'
AuthUserFile /usr/cnld/shw/.www/prp/.htpasswd
require valid-user
```

Dann htpasswd **-cm** ./.htpasswd CRC1294. Dann, htpasswd **-m** ./.htpasswd weitererbenutzer. Tolksdorf: Die Sprache des Web: HTML3; Tags (Marken) in eckigen Klammern <> Eigene HTML-Templates ct 26 2013 p182. Kowalski: ^{bhv}Co@ch HTML 2001; Meyer: More Eric Meyer on CSS 2004; **css = Cascading Style Sheets** = gestufte Gestaltungsbögen = Stylesheet-Sprache. **html-plain** Original-Text-Ausgabe <pre> Text </pre> entspricht der LaTeX-Verbatim-Ausgabe \verb+Text+ oder
\begin{verbatim}Text\end{verbatim}
<html> <head> <meta http-equiv=content-typecontent=text/html; charset=UTF-8» </head> <body> Text </body> </html> UTF8 utf8
iconv --from-code=ISO-8859-1 --to-code=UTF-8 p.xml.ascii > p.xml

Markdown, ASCIIDoc und Pandoc

lösen LaTeX ab. ct2019H26 p128; **Doodle** ct26 2019 p84 oder poll.Digitalcourage.de; **LaTeX-bash-TEXINPUTS** mit
export TEXINPUTS='.:/home/shw/TeX/MyLib:'; Kim Rixecker **Slideshows** pitchme.md per Gitpitch, Gitlab, Gitlab, Bitbucket. Kofler: Markdown und Pandoc 2013; https://www.skylatex.com **Pandoc** = Dokumentformat Konverter = freier Parser für Multidokumentenformate = Umwandlung von dokumentbasierten Dateiformate ineinander. Multi-target publishing Pandoc basiert auf Auszeichnungssprache **Markdown**. #Überschrift, *italic*, **boldface**, ~~durchgetrichen~~. Basiert auf Haskell mit cabal update und cabal install pandoc; pandoc -t ReaderFormat -f WriterFormat --template=Datei Eingabe.xyz -o Ausgabe.xyz; Anleitung pandoc-markdown - Schiedts kleine Welt. pandoc -f html -t odt -o matt.odt http://j.mp/m_mcconaughey. pandoc test.txt -o test.pdf; pandoc -f html -t markdown -o resultat.md quelldatei.html;
pandoc unter Ubuntu per **apt-get install pandoc** installieren. **pandoc** –latex-engine=xelatex 2017MathMeth2.md -o 2017MathMeth2.pdf;
Titel
TAB ————————————————————————————-
TAB Name U1 U2 U3 U4 U5 U6 U7 U8 U9 U10 U11 U12 U13 U14 Total
TAB ——— – – – – – – – – – — — — — — ——
TAB Bcvbnc 12

Aus... <h2 id="seminar-teil-1">Seminar Teil 1</h2> wird dann ## Seminar Teil 1 {#seminar-teil-1}.

MathJax

cross-browser JavaScript library that displays mathematical notation in web browsers, using MathML, LaTeX and ASCIIMathML markup. Mac per keynote; **xml-comment** <!-- comment --> ct7.2020p100 VLAN = virtuell LAN, access point = AP, trunk = Bündelung, PoE, DMZ. WLAN, WiFi 2.4 oder 5.8 GHz, Wigig-Technik alias IEEE 802.11ad. **Gratis WLAN** ct22 2016 p68-83; **WLAN-FAQs** ct2/2019 p134ff; Wei: **WiFi, WiMAX, and LTE Multi-hop Mesh Networks: Basic Communication Protocols and Application Areas** 2014; eduraom; zip, zip7, unzip, Ubuntu: *.7z mit **7z a** oder 7za e *.7z, rar e oder unrar e File.rar; **eog oder gwenview *.jpg** Siehe /usr/cnld/shw/ TeX/ introductions/ Praktikum + Exercise /0001-TSA-Computer - Manual/Codes.tex!!! http: //seaquence. org/ http://www. turbulence. org/Works/song/ http:// **whatismyipaddress**. com **hostname -i** oder -f gibt alias; USBStick sync sicher entfernen. **LaTeX-Russisch**
\documentclass{article} \usepackage[OT2,T1]{fontenc}\usepackage[russian,ngerman]{babel}
\begin{document} in einem deutschen Text \foreignlanguage{russian}{napisatp1 po-russki}
und dann wieder deutsch weiterschreiben.\end{document}

LaTeX-Kommentare
`\usepackage{comment} \newcommand{\bc}{\begin{comment}} \newcommand{\ec}{\end{comment}}`
`\bc L\"osungen \ec`
`oder`
`\includecomment{btword} \excludecomment{btexcel}`
`\begin{btexcel} Excel \end{btexcel}`
`\begin{btword} Word \end{btword}`
LaTeX-Vorlagen http://kaldor. vwl.uni-hannover. de/karl/ltxmp/latex.php; BiBTeX, Referenz-Management mit **JabRef**. **https://www.skylatex.com**. **WriteLaTeX** per Chrome. oder GoogleDoc, wo LaTeX-Kommandos nutzbar: Blank schließt LaTex-Symbol um, während Enter das gesammte Zeichen abschließt. oder **LaTeX-Templates Overleaf:** https://www.overleaf.com/latex/templates/ http://de. wikipedia. org/wiki/Hilfe:TeX https:// github.com/ Udohschwarz prozDollar9x4m **Ubuntu**One 9x4mUO pdf-Viewer: gtsudo -H; **Fotoverwaltung und -bearbeitung** mit digiKam, Betrachter: Shotwell; c't H5 2014 p176 **Git** und **GitHub**. **evince**, Ubuntu-jpg-viewer: gwenview, okular, pdfmod, gv, epdfviewer, mupdfview, xpdf. Formulare sind begrenzt durch okular, qpdfview oder beschreibbar per Pimp=aufmotzen my pdf mit **Master PDF Editor** ct2018 H5 p150f ct.de/y9ke; Homepage Mendely http://www.mendeley.com/ features/ Information zu Mendeley http://www. ub. ruhr-uni-bochum. de/informationen/mendeley.html; WordToLaTeX http://www. tug. org/utilities/texconv/pctotex. html; ispell -t -d deutsch *.tex; **Joomla 3** c't H5 2014 p182; Joomla = Das Open Source CMS! Python Pelican = Static Site Generator. **TYPO3** = freies Content-Management-Framework für Websites von Kasper Skaahoj *1975 von 1997-2000 entwickelt, basiert auf der Skriptsprache PHP. Hanke: PHP & MySQL auf der Homepage 2004; Als Datenbank kann MySQL oder MariaDB, aber auch PostgreSQL oder Oracle eingesetzt werden. Problem: Komplexität des Systems, lange Einarbeitungszeit für Administratoren. Quellcode bis 2012 auf über 450.000 Zeilen angewachsen! Meyer & Bringewatt: Praxiswissen TYPO3 6.0 für Administratoren 2014[7]; Bielitza, Klümpel, Hinz, Holtz, Steiling: TYPO3 CMS Handbuch für Redakteure 2009[2] Redakteure = Backend-Maschinisten, Backend = Seitenkonfigurationsoberfläche Hontheim & Herzog-Kienast: Das TYPO3-Buch. Schritt für Schritt zur professionellen Web-Präsenz 2012[2]; Partl & Müller-Prothmann: TYPO3 4.3 für Web-Autoren. Das Einsteigerseminar 2010; **Trac Wiki System** = **Trac** open source, Web-based project management and bug tracking system mit Version Control Systems including 'out of the box' Subversion and Git. Trac is used, among others, by the Internet Research Task Force, Django, FFmpeg, jQuery UI, OpenStreetMap, WebKit and WordPress = WordPress is a free and open-source content management system CMS based on PHP and MySQL. **Pelican-Tipps:** Pelican-Video by Justin Mayer http://www.wspiegel.de/hp/category/pelican.html; Bearbeiten: gscan2pdf, pdfsam, pdftk. **Web pages per Python:** Online-Ressourcen: Python www.python.org, Spyce spyce.sourceforge.net, Spyce vs. JSP, ASP, PHP et cetera spyce.sourceforge.net/doc-intro_rationale.html, Webware for Python webware.sourceforge.net, Zope www.zope.org, www.zope.com, Cheetah www. cheetahtemplate.org/, Cherry Py www.cherrypy.org, HTMLgen starship.python.net/crew/friedrich/ HTMLgen/html/main.html, Jython www.jython.org, http: //www. heise. de/ix/artikel/Scharfe-Wuerzmischung-506306.html Drucken mit alt lpr, neu lp -d. http://forum. ubuntuusers. de/topic/ploetzliches-problem-mit-aktualisierungen/ Lösche die Listen: sudo rm -R /var/lib/apt/lists/ Erstelle die Verzeichnisse neu: sudo mkdir -p /var/lib/apt/lists/partial/ Unter /home/superuser apt-get update; apt-get upgrade; sudo apt-get install texlive-full; sudo apt-get install vim; **Wechsel von superuser zu root** per sudo su - root root@shw-OptiPlex-7050 apt-get update; apt-get upgrade; **Rechner-Monitoring** per s-tui 0.8.2 oder Netdata; **Network einrichten und mit ifconfig IP-Vergabe prüfen:** Linux-DNS-Konfiguration ct2019H7 nmcli p128ff; **a] Automatisch DHCP** Zusätzlicher DNS-Server = 141.89.55, Zusätzliche Suchdomäne = math.uni-potsdam.de, Geräteadr = 14:B3:1F:13:51:72, **oder b] Manuell:** Kabelverbindung Ethernet Gerät = 14:B3:1F:13:51:72, IPV4-Einstellungen Manuell: Adresse 141.89.176.58 = kelvin.agnld.uni-potsdam.de, Netzmaske = 24 oder 255.255.255.?, Gateway 141.89.176.254. Geräteadr = 14:B3:1F:13:51:72, IPV4-Adr = 141.89.176.58, Vorgabestrecke = 141.89.176.254, DNS = 141.89.176.23. Oder Geräteadr = 14:B3:1F:13:51:72, IPV4-Adr = 141.168.0.104, Vorgabestrecke = 192.168.0.1, DNS 192.168.0.1 141.89.55.7. Oder Geräteadr = 00:1C:25:8D:D6:9C, IPV4-Adr = 192.168.0.106, Vorgabestrecke = 192.168.0.1, DNS = 192.168.0.1. Dann ssh-Zugriff auf 141.89.176.58 von außen erlauben sudo apt-get install openssh-server; hostname **Laser-Toner** nachfüllen bei HP Neverstop

ct9.2020p64 ct10.2020p74; **Farblaserdrucker** ct9.2020p102; **Drucker-Adressen:** usb://HP/LaserJet%204050%20 JobID = Hewlett-Packard-HP-LaserJet-4050-Series, hp:/net/HP_Color_LaserJet _M553?ip=141.89.176.30 erlaubt Abruf des Druckerstatus, hp:/net/HP_Color_LaserJet _P4014?ip=141.89.176.73 a2book -p colorJet 2017F.pdf = Book auf Farbdrucker; Wechsele bei der Gelegenheit vom ewig instabilen deutschen Verteilserver auf den Mainserver: sudo sed -i 's/de.archive.ubuntu.com/archive.ubuntu. com/g' /etc/apt/sources.list Aktualisiere **Paketquellen und -inhalte:** sudo apt-get update Dauert ein Weilchen. Paketverwaltung per snap. Behebe mögliche Abhängigkeitsprobleme: sudo apt-get -f install oder sudo apt-get autoremove Aktualisiere installierte Pakete: sudo apt-get dist-upgrade **LaTeX in der Cloud** http://docs. latexlab. org und www. sharelatex.com; Intallation mit wubi. TeXLife DVD. http://wiki. ubuntuusers. de/ TexLive_ DVD_Installation. Besser mit **Paketmanager Muon** oder **synaptic**. ssh -l shw -X 141.89.68.56 = login.uni-potsdam.de; **Foto-Clouds** ct2/2019 p120ff; Hotline 267492-_h+265? %$ Erst leeres Verzeichnis UpToCloud anlegen! Dann das boxup-Verzeichnis mounten mit wdfs https://boxup.uni-potsdam.de/remote.php/webdav/ /path/to/mount/=zBUpToCloud im lambertHome und wieder aushängen (auch als normaler Nutzer): fusermount -u /path/to/mount/ **Virtual Private Network:** Download NetworkManager-openconnect-1.2.0 von https://launchpad.net/ubuntu/+source/network-manager-openconnect/1.2.0-0ubuntu0.16.04.1 Installation per **sudo apt-get install network-manager-openconnect openconnect** VPN-Session-Start per **sudo openconnect sslvpn.uni-potsdam.de** Username:shw@uni-potsdam.de 267 vpn: wlanvpn. uni-pots wlan11 Us2008, sslvpn. uni-pots; explorer, ppt-server2, Fremder Bildschirmbetrachter, export TEXINPUTS=`$TEXINPUTS: /usr/share/texmf: /usr/share/ texmf- texlive/tex/ latex/base: /usr/share/texmf- texlive/tex/ latex/bbm- macros: /usr/share/texmf- texlive/ tex/latex/ doublestroke: /usr/ share/texmf- texlive/tex/ latex/marvosym: /usr/share/ texmf- texlive/tex/ latex/amsmath: /usr/share/ texmf- texlive/tex/ latex/amsfonts: /usr/share /texmf- texlive/ tex/generic/german: /usr/ share/texmf- texlive/tex/ latex/base: /home/ HOMELAMBERT/ TeX/MyLib` docclass[german,12pt] mit usepackage babel oder ngerman; **Koma LaTex:** http://www. golatex. de/wiki/index. `php?title=\subject`, psfrac beamer LaTex, Bilder per **GLE:** http://glx. sourceforge. net/; http://www.berlmathges.de/index.html **Booklet drucken:** psbook myfile.ps myfilebook.ps; psnup -s1 -2 myfilebook.ps myfilebooklet.ps; Skalierungsparemeter -s1 weglassen oder -s0.9 oder -s1.1; psbook MathPhysicsBasics.ps |psnup -s0.9 -2 > myfilebooklet.ps; a2book -p Hewlett-Packard-HP-LaserJet-4050-Series File.pdf; psbook psnup zu je x Bögen Kassel LaTeX3.pdf; **Bücher digitalisieren** Tim Gerber: Lesefütterung, c't 2012 H8, p132-134, Opitz: Vor-Leser. Scanner, c't 2012 H8, p136-143; Books on demand www.umi.com; http:// projekte. dante. de/DanteFAQ#1
epsf: `http://www.iam.ubc.ca/old_pages/newbury/tex/figures.html` **Hertel: Arbeitsbuch Mathematik zur Physik mit LaTeX-Intro** p133ff 2011; http://www. visualcomplexity. com/vc/ http://www. oreilly. de/online-books/ **LaTeX-Schalter** mit

```
\usepackage{ifthen} \begin{document} \newcount\WertA \newcount\WertB \WertA=2
\WertB=\WertA \ifnum\WertA=\WertB Werte stimmen überein \else Werte stimmen nicht
 überein \fi \end{document}
```

http://processing. org/ chatbot eliza
http://telepathy.freedesktop.org/wiki/ gnome: empathy; **awk:**

```
awk '{print $3+$4+$5+$6+$7+$8+$9+$10+$11+$12+$13+$14+$15}' TP2018.dat > Summe;
```

Formatierte Ausgabe `printf " %7.2f \n", p1 * p2`; awk `'{print $4,"=",int(100*$4/259),"%",$3,$1,$2}'` Punkte2.txt ; awk `'{print ($3+$4+$5+$6+$7+$8+$9+$10+$11+$12+$13+$14)/2.38} 'TP2018.dat >` Prozentsatz;
paste Namen Total Prozent > Ergebnis; shw@shw-OptiPlex-7050:~/Python/Klausur/auswertung.py Holger

```
awk '{print $2*1.}' 1a.txt > 1a.dat, plot "<corr -D200 1a.dat" w lp;
 awk '{print $1,"&",$2}' NamensListe.txt> NNN;
```

gnuplot: plot [0:40]exp(-0.1*x)*sin(x),exp(-0.1*x)*cos(x) set parametric set samples 1000

```
plot "F7.txt" using 1:5
plot [0:40]exp(-0.1*t)*sin(t),exp(-0.1*t)*cos(t) with line 5
unset parametric
splot [0:40]exp(-0.1*x)*sin(y),exp(-0.1*x)*cos(y) with pm3d t 'weaves'
set isosamples 75,75
```

Einige gnuplot Kommandos zur Gestaltung des Plots:
set size square; set xlabel 'X'; set ylabel 'X'; set autoscale xy
set yrange [0.5:2.5]; set xrange [-20.:20]; set nologscale y
Einlesen, umformatieren und plotten:
awk '{print $2*1.}' Rohsignal_Kraft_10\ Hz_20\ mA.txt > Kraft10Hz.dat
plot [1:100] "Kraft10Hz.dat" using 1:2 w lp
oder bei Leerzeichen im Dateinamen:
plot "Rohsignal_Kraft_15\ Hz_20\ mA.txt" w lp
Rausschreiben einer PostScript-Datei unter gnuplot:
set term postscript landscape 'Helvetica' 14
Umschalten der Plotausgabe in ein PostScript-File
set output 'name.ps'
splot [0:40]exp(-0.1*x)*sin(y),exp(-0.1*x)*cos(y) with pm3d t 'weaves'
set term x11 % Umschalten auf X-Ausgabe
oder gnuplot < plot.in mit
plot.in
set term postscript landscape 'Helvetica' 14
set output 'name.ps'
splot [0:40]exp(-0.1*x)*sin(y),exp(-0.1*x)*cos(y) with pm3d t 'weaves'
Lorenz-System mit RK4 und Schrittweite 0.01
lorenz.ode
x'=10*(-x+y)
y'=27*x-y-x*z
z'=-2.6666*z+x*y
x = 1
y = 1
z = 2
print x,y, z
step 0, 40
gnuplot> splot"< lorenz.ode" w l
gnuplot-Tipps unter http://www.exp.univie.ac.at/sc/gnuplot/gnuplot.html **Chapra: Applied Numerical Methods with MATLAB for engineers and scientists** 2012[3] p570; Manual:
http://www-user.tu-chemnitz.de/~hot/unix_linux_werkzeugkasten/awk.html} das erste und vorletzte Feld der letzten Eingabezeile ausgeben awk -F: 'END { print $1, $(NF-1) }' /etc/passwd;
awk '{print $(NF)}' google.csv;
awk '{print $1*1.,$2*1.,$3*1.,$4*1.,$5*1.,$6*1.,$7*1.,$8*1.}' traj.dat > T ^M Radierer:
awk 'BEGIN { RS = "\r" } ; { print }' dateinam Manual
http://de.wikibooks.org/wiki/Awk:_Grundlagen:_Aktionen **Ersetze Komma durch Punkt mittels FS = Feldseparator:** -462,013 -6,31 wird mit awk '{FS=",";print $1 "." $2}' zu -462.013 -6.31. Aufruf mit: awk -f programme input > output

```
{  s = 0
   for(i=4; i<=14; i++)
   { s += $i
   }
   { print s }
}
{ i=1
   do
   { s += $i
     print (s)
     print ($i)
```

```
     i += 1
   } while (i < 14) }
END  { print "sum is",s,"Anzahl i",i, " average is", s/NF,"Zeilen",NR,"Spalten",NF }

awk /@/ Teilnehmerlist1.tex > EMails # Schreibt alle Zeile mit EMailAdressen raus
vi EMails 1,$ s/\\item//
awk  -f P1.awk EMailsMaster.txt > EMailsMasterAll.txt
{  s = 0
   for(i=0; i<=194; i++)
   { s += $i
   }
   { print ($(NF)) }
}
vi EMailsMasterAll.txt s/$/,/
```

Kalteis: awk. Die Programmiersprache für UNIX und DOS 1997; Robbins: Sed & awk - kurz & gut 2002; Thesing: SED & AWK GE-PACKT 2004; **Termux-app** andriod hat awk = BusyBox. ct18 2018 p148-51; Ctrl-Sequenzen per Volumen. Esc = Vol-E. Curser mit Ctrl w=hoch a=links s=runter d=rechts. **Connectbox** = open source Secure Shell client for the Android operating system. PDF and Postscript document viewer: evince; DjVu viewer: djview4; **pdf-Files mergen** sudo get-apt install pdftk;i dann pdftk 1.pdf 2.pdf 3.pdf cat output 123.pdf; Graphics card info xdpyinfo oder sudo lsscsi - list SCSI devices; **Unix-Kommandos:** pipe nur unter child-Prozessen, mit fifo kann man Daten zwischen völlig unabhängigen Programmen tauschen! **limit datasize unlimited**; lpq -P ury, lprm -Pury 1; lspci, **dmesg | less**, dmesg| tail gibt Problemprotokoll aus. mount auch. df -ah, du -s; **cat /proc/meminfo**; cat /proc/**cpuinfo** tail, **dmidecode** gibt CPU + TPM-Info Trusted Platform Module = Sicherheitschip; /var/log/messages dmesg sensors, **uname -a** oder **hostname -i -f**; nc nedit, xmms kmix kaffeine; **Sound-Ausgabe PC** per alsamixer: Front nach oben!!!; **xine** oder xanim *.avi, konqueror, beginverbatim, verb+, antiword; df -h;psnup;psutilities; Prozess-Stop `^Z`, bg, fg; cat /etc/SuSE-release acroread xpdf kpdf; echo $ LANG, /usr/cnld/ shw/bin/ fluxbox .xinitrc export WINDOWMANAGER = fluxbox; **Linux-Intro** siehe Hartmann & Selbig: Introductory bioinformatics 2009, 2013[5] Kap4; Amberg & Reeger: Linux für Poweruser 2004; Šchmidt: Linux im Netwerk 2000; **which command**, Bib calculator: bc -l, s(x) = sin(x), a(x)=arctan(x); 4*a(1) = π; arctan(1)= 180*a(1)/(4*a(1))=45° oder arctan(3/4)= 180*a(3/4)/(4*a(1))=36.87^o; **Hardware-Info:** lspci = liste Peripheral Component Interconnect = gibt alle Infos zu PCI-Busse und Devices des System. `dmesg | grep eth` = display message or driver message = prints the message buffer of the kernel. `dmesg | less` grep eth /var/log/boot.msg **dmesg** gibt **sdg: sdg1** mit Hinweis Attached SCSI removable disk als usb 2-1: USB disconnect, device number 3; **udisks –mount /dev/sdg1; udisks –unmount /dev/sdg1**; **Festplattenzugriff** per Fideco USB3.0 to SATA or IDE hard drive adapter. Modell PL319. Verfügbare Geräte/-Devices per fdisk -l oder lsblk gibt /dev/sbd1, sudo mount /dev/sbd1 /mnt; cd /mnt; Das kopieren mit `tar c udo1 | (cd /neu/ && tar xv)`; erhält pfadstruktur mit allen Rechten. sync[3] gibt Zeit für Pufferleerung. sudo umount /mnt. **Bootstick** per Mintstick mit Mint-Ubuntu opensuse-leap-15.2-net-x86_64.iso F10 Leertaste e[dit] in der vorletzten Zeile =/bin/bash ergänzen! Sonst keine Kommandos verfügbar. df, fdisk -l, id, su -, sudo -i, Ctrl-Alt-F1, chroot /mnt, cat /ect/shadow, mount /dev/sdc1/ /mnt/usr/, rsync -vaPH /usr/cnld/shw/ /mnt/shw **USB-Stick mounten:** A]sudo fdisk -l gibt zB /dev/sdb1 B] Leeres Verzeichnis schaffen mkdir /usb_DEV C] sudo mount /dev/sdb1 /usb_DEV D] umount /usb_DEV . **USB-Stick automatisch einhängen mit sudo apt-get install autofs 1.** In /etc/auto.master Datei die Zeile /automnt /etc/auto.automnt –timeout=5 –ghost einfügen. Wo Stick erkannt wird, sagt sudo blkid -o list -w /dev/null z.B. '/dev/sdc1 vfat desinfDATA (nicht eingebunden) 7021-0C77' **2.** Nun in **sudo vi /etc/-auto.automnt** usb-stick -fstype=vfat,sync,uid=0,gid=46,umask=007 :/dev/disk/by-uuid/7021-0C77 oder usb-stick -fstype=vfat,sync,uid=0,gid=46,umask=007 :/dev/disk/by-uuid/187C-DB93 einfügen. **3.** Schließlich **sudo systemctl reload autofs** ausführen. **4.** USB beschreibbar. **5.** Vorm abmounten sync; **6.** Abfrage des USB-Namens per **sudo blkid -o list -w /dev/null**; sudo umount /automnt/usb-stick; Univention

Corporate Server = UCS = Debian abgeleitetes Server-Betriebssystem mit integriertem Identity- und Infrastrukturmanagementsystem für die zentrale und plattformübergreifende Verwaltung von Servern, Diensten, Clients, Desktops und Benutzern sowie von unter UCS betriebenen virtualisierten Computern. Neben dem Betrieb lokaler virtueller Instanzen kann UCS auch in OpenStack-basierenden Clouds, Microsoft-Azure-Clouds sowie in Amazon-EC2-Cloud-Umgebungen betrieben werden. 1 Instanz 8GB RAM, 4CPU, 2GHz, 300GB bedient 150 Teilnehmer. Bei 5000 Teilnehmern 30 virtuelle Maschinen. Front macht Lastverteilung. **Authentifizierung** Transport Layer Security = TLS = Transportschichtsicherheit = Secure Sockets Layer = SSL = Verschlüsselungsprotokoll zur sicheren Datenübertragung im Internet. HTTPS. **vi** ct12 2018 p162 vim hat undo-Bäume. delete mit 3,7d ; Suchen mit groß/klein AUS mit vorangestelltem `\c`, also `/\cWORT`. Suche/ersetze in allen Zeilen per `%s/FOO/BAR/cg`, wobei c interaktive Abfrage fordert, Abbruch per q oder ESC. v aktiviert visuell Mode zwecks Markierung. :set paste, Mit y[ank] herausziehen, mit p[aste] einfügen. Zwischenablageregister mit Zollzeichen " und Registerzeichen + oder * einleiten: "+, "+p,"+y,"+x. Weitere Tipps: **VimTips Wiki** oder **Stack Exchange**. `cp /usr/share/vim/vimrc ~/.vimrc` **vi .vimrc Uncomment** the following to have Vim jump to the last position when reopening a file 1.Zeichen ersetzen `s/^./text/` letztes Zeichen ersetzen `s/.$/text/` Einfügen vor dem ersten Zeichen `s/^/text/` Einfügen nach dem letzten Zeichen `s/$/text/` http://www. livescribe. com/en-us/smartpen/echo/ (die Seite beim Hersteller) http://www. livescribe. com/cgi-bin/WebObjects/LDApp. woa/wa/CSForumPortalPage (Forum von LiveScribe, besonders interessant ist Rants & Raves)
`http://www.unimall.de/index.php?cat=c643_Smartpen.html` (hier bekommt man den Stift in Deutschland) effectgames canvascycle http://onecm.com/projects/mycelium/ http://www. processing.org/exhibition/
Selbstreproduktion: `python -c "x='python -c %sx=%s; print x%%(chr(34),repr(x),chr(34))%s'; print x%(chr(34),repr(x),chr(34))"`
Server mittels **Python**:

```
#!/usr/bin/python
""" run ./server in a shell and use the firefox command is lambert:8080
or http://lambert:8080/ or http://141.89.176.129:8080/ """
from BaseHTTPServer import HTTPServer
from CGIHTTPServer import CGIHTTPRequestHandler
server = HTTPServer( ('', 8080), CGIHTTPRequestHandler )
server.serve_forever()
```

Vielseitige Datenquellen/Datenbanken: http://www.cru.uea.ac.uk/cru/data/ und `http://www.cru.uea.ac.uk/cru/data/japan/t_tokyo.dat`, `http://saekular.pik-potsdam.de/2007_de/` http://www.e-knownet.eu/e-knownet/index.html http://www.einsteinforum.de/index.php?id=656 Physik www. physikkonkret. de http://pc.de/hardware/4-zoll-computer-genuegend-1373 Xi3; D-Link Boxee Box HD Media Player **Python zum Shell-Kommand-Check** maybe rsync -avH –del Quelle Ziel ct22 2016 p182; Teams: Kanäle ct9.2020p18 Datenschutz ct9.2020p20 **Videokonferenzprogramme** Cisco Webex Meetings, GotoMeeting, MS Teams, Slack, Zoom; Cloudspeicherdienste ct9.2020p24; **Videokonferenz-Server** ct9.2020p26; **Gratis-Videokonferenzprogramme:** Blizz, Webex, Discord, GoogleMeets, JitsiMeet, MS Teams, Skype, Zoom. **Online Folien per SlideShare** www.slideshare.net = Filehosting-Dienst zum Tauschen und Archivieren von Präsentationen, Dokumenten, PDFs, Videos und Webinaren. **Verteilte virtuelle Whiteboards:** Jamboard Google = interaktives Whiteboard 2017, FigJam=Online Whiteboard ct26.2022 p162. **ZOOM** San Jose = Videokonferenzen mit Screen-Sharing seit 2011 Schulunterricht und universitäre Lehrveranstaltungen in USA. ct 4.2020 p98. BigBlueButton = gemeinsame Nutzung mehrerer Audio- und Videoformate, Präsentationen mit erweiterten Whiteboard-Funktionen – wie Zeiger, Zoomen und Zeichnen –, öffentliche und private Chats, Desktop-Sharing, integriertes VoIP mit FreeSWITCH und Unterstützung für die Präsentation von PDF-Dokumenten und Microsoft Office-Dokumenten sowie untergeordnete Online-Konferenzräume (sog. Breakout-Räume). Darüber hinaus können Benutzer in einer von zwei Rollen an der Konferenz teilnehmen: als Betrachter oder als Moderator. **Camtasia** = kommerzielle Software zur Aufnahme von Screencasts als Video Mac/Microsoft. kommerzielle Software Microsoft und Mac seit 2002 zur Aufnahme von Screencasts als Video. PowerPoint, PDF, Keynote und OpenOffice hochladen. **Moodle** = 2001 PHP freies objektorientiertes Kursmanagementsystem und eine Lernplattform. **Mebis** PHP 2014. ooffice oder **libreoffice *.odt**, **Beamer-**

LaTeX https://en.wikibooks.org/wiki/LaTeX/Presentations https://de.wikipedia.org/wiki/Beamer; **Slide oder Folie per GoogleDoc.** GoogleDrive nimmt nur gif jpg und png. **convert Bild.bmp Bild.png**. Wenn pstopdf oder ps2pdf nicht arbeiten, so **PostScript to pdf** per ubuntu-okular durch Laden des ps-Files als pdf und so speichern, fertig. Prezi-Video ct7.2020p88; LaTeX-Formel als pdf per `\documentclass{standalone}` Dann mit pdf2swf fuer **Prezi** prezi.com, siehe c't 18/2013 p90ff ins SWF=Shock Wave Format ODER Prezi-Formel-Generator: Shock-wave-Format bequem per online-LaTeX unter http://www. codecogs. com/latex/eqneditor.php **LuaLaTeX** `\glqq` German left quote rechtes Anführungszeichen `\grqq` http://www. apple. com/ ibooks-author/ **ssh** Termux apt install openssh = ED25519 256 SHA256, tesla. bode. tesla. boyle. weber.grieg. brahms. vivaldi. stud.physik. uni-potsdam.de -l shw -X oder Y -vvv oder ssh shw@tesla. stud. physik. uni-potsdam.de -X messi3scp r -P34 Verzeichnis shw@grieg. stud. physik. uni-potsdam.de:Python **xterm** `\#fff070 -geometry 150X80` **-font 10X20**& Alt-F2 xterm kate ipython http://de.wikipedia. org/wiki/**Versionsverwaltung = VCS = Version Control Syste.** Verteilte Systeme: Bazaar Darcs Fossil Git GNU arch Mercurial Monotone Zentrale Systeme: RCS CVS Subversion = SVN. Verteilte Versionsverwaltung = DVCS = distributed VCS verwendet kein zentrales Repository. Basiert auf gerichteten azyklischen Graphen = Polyhierarchie. Concurrent Versions System = CVS = Software-System zur Versionsverwaltung von Dateien, hauptsächlich im Zusammenhang mit Software-Quelltext. abiword github Apache Subversion http://svnbook.red-bean.com/index.de.html Kapitel 9. Die vollständige Subversion Referenz! **Lipsmeier: Friedrich Tabellenbuch. Informations- und Kommunikationstechnik** 2005[5] bf Ethernet, RJ45, Cat.6, **Switch** p9-23ff. **Schmid: Steuern und Regeln für Maschinenbau und Mechatronik** 2010[12] p396ff Hub, Switch; **Infiniband** vs Ethernet. Vorteil InfiniBand gegenüber TCP/IP-Ethernet liegt in Minimierung der Latenzzeit durch Auslagern des Protokollstacks in die Netzwerk-Hardware. **Infinispan** distributed in-memory key/value data store with optional schema, available under the Apache License 2.0. **Apache Hadoop** = freies, in Java geschriebenes Framework für skalierbare, verteilt arbeitende Software. Hadoop Distributed File System HDFS = hochverfügbares Dateisystem zur Speicherung sehr großer Datenmengen auf den Dateisystemen mehrerer Rechner = Knoten. Dateien werden in Datenblöcke mit fester Länge zerlegt und redundant auf die teilnehmenden Knoten verteilt. Dabei gibt es Master- und Slave-Knoten. **Projektarchiv = repository**. Übertragen einer **Version aus dem Repository** in die Arbeitskopie des Clients = **checkout = co, Auschecken oder Aktualisieren**. Umgekehrte **Übertragung vom Client zum zentralen Server = Check-in, Einchecken oder Commit**. Mit **svn** co –username=schwarz svn://crcmath.agnld.uni-potsdam.de:80/Project_Documents einloggen! **svn checkout** svn://alina@math.uni-potsdam.de:369/Paper **svn checkout oder co** svn+ssh: //udo@focus. stat. physik. uni-potsdam. de/svn/markus/ lectures/ CompPhys **svn update** = Neuigkeiten vom server ziehen. **svn commit -m 'comment'** = Meine Änderungen überspielen. **svn add new_file.tex** = neues file hinzufühgen, commit nicht vergessen ! Änderungen einsehen mit svn log [name], Konfliktfiles löschen und dies mit 'svn resolved Konfliktfile' dem svn-Server mitteilen! svn status lokal ssh -pP 34 shw@sfb6.agnld.uni-potsdam.de -X /home/bergner/public_html **scp -r -Pp 34 *.jpg** shw@lambert.agnld.uni-potsdam.de:e-book/2012 du * -h df -h; **Python-Installation** Ubuntu **Conda** = Python package manager = Anaconda bit.ly/condaquickinstall conda create –help or conda create -h, conda info –envs, conda info -e, conda create -n snowflakes biopython, source activate snowflakes, conda create -n bunnies python=3.4 astroid, conda create -n flowers –clone snowflakes, conda search -f python, conda create -n snakes python=3.4, conda config –add channels pandas, conda search beautiful-soup, conda install -n bunnies beautiful-soup, http://docs.continuum.io/anaconda/pkg-docs.html, conda update beautiful-soup, source activate bunnies, conda remove beautiful-soup, **http://conda.pydata.org/docs/** sudo apt-get install python-wxgtk2.8 python-matplotlib python-scipy ipython python-visual python-imaging. Unter Windows http://www.comp-phys.tu-dresden.de/cp2014/windows.html Computational Physics Group: Roland Ketzmerick, Arnd Bäcker. Das Skript newton_iteration.py kann mit help(newton_iteration) hinterfragt werden:

```
"""Kurzbeschreibung des Programms ("Titel")
An dieser Stelle soll eine Beschreibung des Programms,
der Methoden, offener Fragen etc. kommen.
"""
```

```
from math import sqrt  # Module laden
def newton_iteration(zahl, anz_iter=5):
    """Berechne Quadratwurzel von ‘zahl‘ mit Newton-Iteration.
    Die Newton Iteration
        x_k =  1/2 ( x_{k-1} + zahl/x_{k-1})
    (mit x_0=1) konvergiert quadratisch zur gesuchten Wurzel.
    Der Parameter anz_iter (mit dem Default-Wert 5) bestimmt die
    Anzahl der durchgefuehrten Iterationen.
    """
    x = 1.0                         # Startwert der Newton-Iteration
    iter = 0
    while iter < anz_iter:          # Fuehre anz_iter Iterationen durch
        x = 0.5 * (x + zahl/x)      # Newton-Iterationsschritt
        iter = iter + 1
    return x
# Hauptprogramm:
print "Newton Iteration"
print "sqrt(2)      : %15.14f" % (sqrt(2.0))
print "5 Iterationen: %15.14f" % (newton_iteration(2.0))
print "3 Iterationen: %15.14f" % (newton_iteration(2.0, 3))
print "2 Iterationen: %15.14f" % (newton_iteration(2.0, 2))
```

55 Abkürzungen

AGB Asymptotic Giant Branch AWGN additive white Gaussian noise BMW Brera Multi-scale Wavelet bp base pair (DNA) BEC Bose-Einstein-Kondensat BSE Bovine Spongiforme Enzephalopathie = schwammförmige Hirnkrankheit beim Rind = Rinderwahnsinn BSS Blind Signal Separation; Proceedings of the IEEE 86 (1998) (10) **Yu: Blind Source Separation: Theory and Applications** 2014; CDMA Code Division Multiple Access CNN Cellular Neural Network cpe critical point exponent COMPTEL Compton Telescope (1 - 30 MeV) GRO ddS diskrete dynamisches System (X,f) **ADC = analog digital converter**, DAC = digital analog converter, DFA detrended fluctuation analysis. Peng et al.: PRE 49(1994)1685; Absil: Physica A 272(1999)235 Meyer & Kantz: Inferring characteristic timescales from the effect of autoregressive dynamics on detrended fluctuation analysis, New Journal of Physics 21 2019; Distributed Denial-of-Service-Attacken = DDoS; DNS direct numerical simulations, Domain Name System: Beantwortung von Anfragen zur Namensauflösung: Transportprotokoll, Netzzugang (Ethernet etc.), Die SFB-Domaine = die Webseite = www.sfb1294.de gekauft = Aufruf führt daher durch Leiterleitung = Routing auf Uni-Typo3Seite. Umzug: a] Neue Webseite erstellt und irgendwo gehostet. Die Webseite muss ja irgendwo physisch liegen. Der Host einer Webseite ist ein Computer der stets online damit die Webseite erreichbar ist z.B. bei Google, Amazon, 1&1, ZIM etc. Jeder Host hat eine IP-Adresse, um ihn zu erreichen. Diese IP-Adresse wird dann im DNS = Telefonbuch, dass Domain auf IP-Adresse mapt, und damit Domaine auf die IP Adresse weiterleitet. UP hat einen eigenen DNS-Server. Wenn Webseite fertig, wo immer sie auch physisch liegt, dann deren IP-Adresse per UP-DNS-Server mit der Domaine sfb1294.de verbinden. Als CMS WordPress nehmen. Hostname ↔ IP-Adresse: IPv4-Adresse 192.0.2.42 oder IPv6-Adresse wie 2001:db8:85a3:8d3:1319:8a2e:370:7347; DOI digital object identifier EGRET Energetic Gamma Ray Experiment Telescope (20 MeV-30 GeV) GRO GKSS Gesellschaft f. Kernenergieverwertung in Schiffbau und Schiffahrt mbH GM genetically modified, GRO Gamma Ray Observatory (100 keV - 30 GeV), HMD Head Mounted Display, HTML Hypertext Markup Language, http Hypertext Transfer Protocol, iid independent identically distributed, IoT Internet of things, **Blockchain** = Konzept dezentraler Buchführung = jeder Block enthält dabei einen kryptographisch sicheren Hash des vorhergehenden Blocks, einen Zeitstempel und Transaktionsdaten. ct23/2017 p102, 24/2017 p6; Informationssysteme-Auditing = Überprüfung der Verwaltung und des Managements von Informations- und Kommunikationssystemem. Ziel ist Feststellung der Datensicherheit, Datenintegrität,

Betriebseffektivität und -effizienz, sowie der Vereinbarkeit des IT-Betriebs mit den Organisationszielen. IT information technology, ITER the way, **I2C = I^{2}C = TWI = Two Wire Interface** serieller Datenbus zwecks geräteinterner Kommunikation, knock-out-Technik Ausschalten spezifischer Gene KZK konforme zyklische Kosmologie Penrose & Gurzadyan Lidar Light detection and ranging MACHO Massive Compact Halo Object (Brown Dwarf, Old White Dwarf, Neutron Star, ...) **NAS** Network Attached Storage Multitalent NAS, c't H20 11. Dez 2013 Rydel, ct22 2016 p168; OPAC Online Personal Access Cataloge OPAL The OPAL Experiment at LEP, **PCM = Pulscodemodulation**, PDRs Photon-Dominated Regions PDF Portable Document Format Pixel PIcture ELement PRN pseudo-random number PSE Periodensystem der Elemente **PWM = pulse width modulation + Delta-Sigma-Wandler = ΔΣ-DAC-Wandler**, http://www.beis.de/Elektronik/DeltaSigma/DeltaSigma_D.html **Radar** = Funkmesstechnik = Radio detection/direction and ranging = Radioortung/Richtung- und Entfernungsbestimmung. Welt ist mit Mobilfunksignalen ausgeleuchtet, sodass Ortung von reflektierden Gegenständen ohne zusätzliche aktive Strahlung geht. Klein Heidelberg wurde schon im 2. Weltkrieg probiert. Scheiterte an notwendiger Rechnerleistung zur Auswertung. Iron Dome = EL/M-2084-Multi-Mode-Radar = MMR, einem Kontrollzentrum BMC = Battle Management Control und bis zu vier Starteinheiten MFU = missile fire unit für je 20 Abfangraketen. Ablauf Zielbekämpfung per Leitmethode: A Zielaufklärung per geostationärem Infrarot-Satellit oder **LOPAR = low power acquisition radar** im S-Band 2-3 GHz 230km Rundblick Kugelkoordinaten (ϑ, φ) und IFF = identification friend and foe an Batterie. **B**atterie = **TTR target tracking radar** (ϑ, φ) + **TRR = target range radar** r im X-Band 8-12 GHz an **Feuerleitcomputer** gibt Abfangpunkt und liefert kontinuierlich Abfangkurs an Abfangrakete, wobei **MTR = missile tracking radar** (ϑ_m, φ_m) einfließen. **Gefechtskopfdetonation** per Funk. Zündung: a] automatisch per Feuerleitcomputer. b] manuell durch Batterieführer. c] Selbstzerstörung nach 2 sec Abriss Lenksignal. Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$. **MIM-23 HAWK** Homing all-the-way Killer = Alle Radargeräte: Lage- und Auswertezentrale = Information Coordination Centre = ICC, Feuerleitstand = Platoon Command Post = PCP und Feuerleitzentrale = Battery Control Central = BCC, Startgeräte = Launcher = LCHR. Zielsuche durch je ein Impuls- Pulse Acquisition Radar = PAR und ein Dauerstrich-Erfassungsradar = Continuous Wave Acquisition Radar = CWAR. Zur Bekämpfung wird Flugziel mit weiterem Dauerstrich-Radar = High-Power Illuminator Radar = HPIR beleuchtet, dabei reflektierte Radarenergie dient der Lenkeinheit des Flugkörpers zur Zielsuchlenkung, wobei zusätzlich direkte Steuersignale gesendet werden, die von einer Antenne am Heck des Flugkörpers empfangen werden = halbaktives Zielsuch-Lenkverfahren. Zündung des Gefechtskopfes durch Vergleich Signalstärke der von einer seitlichen und einer Heckantenne empfangenen Radarenergie des HPIR. Flugkörper auf gleicher Höhe mit Ziel, so Signal der seitlichen Antenne (die vom Ziel reflektierte Radarenergie) schwächer und Zündung erfolgt. **Lenkflugkörper Neue Generation** = LFK NG mit Infrarot-Sucher und lock-on after launch = Start ohne vorherige Zielerfassung durch den Suchkopf. Stanner: Unsichtbare Straßen 1950; Conrad: Auf unsichtbaren Straßen. Kurzwellen, Fernsehsender, Radarschirme 1959; Conrad: Radar - kein Geheimnis 1960; Stanner: Wellen weisen den Weg 1947; Brandt: Radar in der Seeschiffahrt 1955; **Bowen: A textbook of RADAR**. 1949, 1952[2] Grundlagen und Anwendungen 1960; **Fischer: Radartechnik (Funkmesstechnik)**. Grundlagen und Anwendungen 1956; W̃atson-Watt: The pulse of radar: the autobiography of Sir Robert Watson-Watt 1959; W̃atson-Watt: Three Steps To Victory. A Personal Account By Radar's Greatest Pioneer Sir Robert Watson-Watt 1957; Battan: Radar und Wetter 1962; Battan: Wetter und Stürme 1960; Griffin: Vom Echo zum Radar. Mit Schallwellen sehen 1960; Trenkle: Die deutschen Funkführungsverfahren bis 1945, 1987; von Kroge: GEMA-Berlin. Geburtsstätte der deutschen aktiven Wasserschall- und Funkortungstechnik 1998; Bukowski: Radarkrieg und Nachtluftverteidigung über Berlin 1939 bis 1945, 2007; Page: Die Entwicklung des Radar 1962; Radar zwecks Position = Ortsvektor in Polarkoordnaten $\vec{r}(\rho, \varphi) = \rho\hat{\rho}(\varphi)$, Kurs = Verschiebungsvektor = Tangentialvektor $\vec{v}(\rho, \varphi, \dot{\rho}, \dot{\varphi}) = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{\rho}(\varphi) + \rho\dot{\varphi}\hat{\varphi}(\varphi)$. Gartmann: Vom Kompass zur Funkmesstechnik 1954; DVD: NVA Funker. Scharfschützen im Äther 1961 bis 1987; Otto: Militärtechnische Hefte. Funkmeßtechnik präzis, zuverlässig 1986 Höhenfinder PRW-13, Jägerleitsystem P-25, 30, 35, 37 bei Kolkwitz bis 1975; K̃owaljow: Psychologische Vorbereitung des Funkorters 1978; S̃tuppert & Fiedler: Die Funktechnischen Truppen der Luftverteidigung der DDR. Geschichte und Geschichte 2012; Kopenhagen: Die Landstreitkräfte der NVA 2003; Kopenhagen: Die Luftstreitkräfte der NVA 2002 Cott-

bus JG-1 1952-1982, dann Holzdorf, JG-2 Ctb 1956-1958, dann Rottenburg, ab 1961 Trollenhagen. Drewitz JBG/FTB-31 1976 Garz, 1978 Klotzsche 1981 JBG/FTB-37 Drewitz; Diedrich: Handbuch der bewaffneten Organe der DDR 2004; F̃reundt, Banach, Bussmann, Girke: MiG, Mi, Su & Co. Sämtliche Militär-Flugzeuge und -Hubschrauber der DDR Gebundene 2002; F̃reundt: Sowjetische Fliegerkräfte Deutschland 1945-1994, Bd1, Typenkatalog der Luftfahrzeuge, Flugplatzanlagen und Schutzbauten, Flugplätze A-F 1994; **Gruppe der Sowjetischen Streitkräfte in Deutschland = GSSD:** 777 Kasernenanlagen an 276 Orten mit **47 Flugplätzen** u.a. in Altenburg, Stendal, Welzow, Großenhain, Fürstenwalde, Jüterbog, Fürstenwalde, Oranienburg, Spremberg, Wittstock/Dosse, Groß Dölln, Pütnitz, Wittstock, Neuruppin, Rechlin-Lärz, Parchim, Lutherstadt Wittenberg, Jüterbog, Zerbst und Merseburg. **Taktische Front-Luftarmee mit Stabssitz Wünsdorf bei Zossen**. 116 Truppenübungsplätzen. Gesamtstärke von 370.000 Mann und 1.020 Flugzeugen. 180 Raketensysteme. 120 Aufklärungsflugzeuge, 680 Jäger und Jagdbomber, 100 leichte Bomber und 120 Transporter und Hubschrauber. In Sonderwaffenlagern Himmelpfort und Stolzenhain 1968 bis 1990 nukleare Sprengköpfe für NVA im Kriegsfall. Auf Militärflugplätzen Großenhain und Altenburg waren Atomwaffen eingelagert. Ponomarjow: Militärflugzeuge 1984, 1987; Hoffmann: Kernwaffen und Kernwaffenschutz 1975[2]; Speziell: 10. Garde-Panzerdivision, Krampnitz bei Potsdam. Bauer, Knitter, Ruppert: Vernichtet, vergessen, verdrängt. Militärbauten und militärische Denkmäler in Potsdam 1993; Arlt, Thomae, Thoß: Militärgeschichtliches Handbuch Brandenburg-Berlin 2020 Lehr-Infantrie-Bataillon am Neuen Palais, dann Eiche/Golm, 1. Garde-Regiment zu Fuß und Infantrie-Regiment bei Gewehrfabrik, Kasernen des Garde du Corps an Behlertstr, Kasernen des Leib-Garde-Husaren-Regiments Auffahrt Humboldtbrücke, Kasernen des 3. Garde-Ulanen-Regiments Jägerallee/DKB, Kasernen des 2. und 4. Garde-Feldartillerie-Regiments Nedlitz, Kasernen der Leibgendamerie an Luisenplatz/Sparkasse, Kasernen des Garde-Jäger-Bataillons/Berliner Tor/Bergmannklinik; **Pionierkalender.** Leonhard: Die Revolution entlässt ihre Kinder 1955; Leonhard: Meine Geschichte der DDR 2007; von Ardenne: Erinnerungen fortgeschrieben. Ein Forscherleben im Jahrhundert des Wandels der Wissenschaften und politischen Systeme 1997 p192ff Funkmesstechnik = Radar, Skizze p194; RAT remote administration tool Fernwartungssoftware RCS Radar Cross Section; Proceedings of the IEEE 86 (1998) (10) **RFID** = radio-frequency identification = Antenne, einen analogen Schaltkreis zum Empfangen und Senden (Transceiver) sowie einen digitalen Schaltkreis und einen permanenten Speicher vor. Der digitale Schaltkreis ist bei komplexeren Modellen ein kleiner Mikrocontroller. 125 kHz, 134 kHz, 250 kHz, 375 kHz, 500 kHz, 625 kHz, 750 kHz, 875 kHz, der Kurzwelle bei 13,56 MHz, der UHF bei 865–869 MHz (Europäische Frequenzen) bzw. 950 MHz (US-amerikanische und Asiatische Frequenzbänder) oder der SHF bei 2,45 GHz und 5,8 GHz. **Process-eGrains** bilden ad hoc Netzwerke. RXTE Rossi X-ray Timing Explorer (30.12.1995 Delta-II, 2-250 keV, PCA=proprotional count array, HEXTE=high energy X-ray timing experiment) **SIP** = session initiation protocoll. SNT = Schaltnetzteil. SOHO Solar and Heliospheric Observatory Spam Spiced Hamm = Werbemuell **sps = Samples per second**, TNA (L)-alpha-Threo-Furanosyl-(3'-2')-Oligonukleotid **twentyfourseven 24/7 immer/ Rund um die Uhr ständige Verfügbarkeit Dauerbetrieb**, UPS uninterruptable power source URCA Kasino in Rio de Janeiro = perfekte Geldsenke (Neutrinokühlung bei log T > 9) URL Uniform Resource Locator, **URLMetriken** www.urlm.de wlog, wolog without loss of generality o.B.d.A. WIMP Weakly Interacting Massive Particle WMAP Wilkinson Microwave Anisotropy Probe - Satellitenobservatorium w.r.t. with respect to YORP Yarkovsky-O'Keefe-Radzievskii-Paddack effect - torque production when sunlight from an asteroid's surface is reflected and re-emitted at thermal, infrared wavelengths

56 Eine kurze Weltgeschichte

Erlebnisgemeinschaft braucht Selbstbiographie und Tradition siehe Koestler: Zeuge der Zeit. Abenteuer des Lebens 1983 Empörung und Glaube. Vom Kibbuznik zum Bohemien. König Feisal. Die rote Eminenz. Fegefeuer und Apokalypse. Ein spanisches Testament. Sonnenfinsternis. Abschaum der Erde. Flucht ins Leben 1971; Theodor Lessing: Geschichte ist die Sinngebung des Sinnlosen. **Mark Twain: Die Geschichte wiederholt sich nicht, aber sie reimt sich.** Narrativ = zusammenfassende Erklärung = sinnstiftende Erzählung, die Einfluss hat auf die Art, wie die Umwelt wahrgenommen wird. Narrativ transportiert Werte

und Emotionen, in der Regel auf einen bestimmten Kulturkreis bezogen und unterliegt dem zeitlichen Wandel. Narrative sind keine beliebigen Geschichten, sondern etablierte Erzählungen, die mit einer Legitimität versehen sind. a] Mythos vom Tellerwäscher zum Millionär. b] Aufruf zum Wettlauf zum Mond, der in den USA starke Kräfte gebündelt und die Nation hinter einer Idee versammelt hat. Bestimmendes Element hinter einem Narrativ ist weniger der Wahrheitsgehalt, sondern ein gemeinsam geteiltes Bild mit starker Strahlkraft. Narrative = Möglichkeit zur gesellschaftlichen Orientierung geben und Zuversicht. **Gombrich: Eine kurze Weltgeschichte für junge Leser** 1935, 1985, 2004; **Zischka: Wissenschaft bricht Monopole. Der Forscherkampf um neue Rohstoffe und neuen Lebensraum** 1936 = Realschul-Pflichtlektüre mit Todt-Unterstützung; Zischka: Englands Bündnisse - sechs Jahrhunderte britischer Kriege mit fremden Waffen 1940; **Zischka: Tschernobyl - kein Zufall. Sowjetwirtschaft und die Fehler des Westens** 1987 **Geschichte Russlands**, Kernkraftwerke statt Kernwaffen! Deutsche Führung desorientiert und Wähler ahnungslos. **Rapallo-Vertrag**; Ricarda Huch: Frühling in der Schweiz 1938; Marie Baum: Leuchtende Spur. Das Leben Ricarda Huchs 1950; D̃ie große illustrierte Weltgeschichte in 20 Bänden 1960; in 8 Bänden 1984; Freund: Deutsche Geschichte. Die große Bertelsmann Lexikon-Bibliothek 1965; Erlebnis Geschichte - Deutschland vom Zweiten Weltkrieg bis heute, Haus der Geschichte der Bundesrepublik Deutschland, Bonn 1995, 2000[2]; Heimatmuseum der Bonner Republik ohne geschichtliche Einbettung: Beide deutsche Regierungen waren nur Marionettenregimes der Siegermächte. Mitglieder der Ostregierung gehörten zum kommunistischen Widerstand gegen Hitler, die der Westregierung zu juristisch geschulten Mitläufer. Die Bundesrepublik ist bis heute kein souveränes Land! Die diplomatische Vorbereitung des 1. WK durch WII, deutsche Kriegsbegeisterung und Wilhelms Installation von Lenin und seiner Leute zwecks 2. Front. Mit dem vom Westen in Kauf genommenen 2. WK hatte sich der Westen verkalkuliert. Die Wehrmacht besiegt die Sowjetunion. Die Westalliierten strecken mit Lease-Lend-Unterstützung den Krieg bis genügend Atomwaffen zur Vernichtung des geschwächten Siegers. Churchill verhöhnte die unfähige sowjetische Bauernarmee und folgte Goebbels Sicht: Propagandaausstellung zur Stärkung des deutschen Durchhaltewillens 8.5.1942 **Das Sowjet-Paradies**: Wo früher blühende Dörfer standen, herrscht heute (1942) das graue Elend der Kolchose[26]. Hier lebt der russische Bauer als Arbeitssklave auf dem Boden, der ihm einst gehörte. Das Vieh verkommt in verfallenen Ställen. Das sind die verhängnisvollen Ergebnisse einer über zwanzigjährigen Blutherrschaft der jüdischbolschewistischen Terrorclique. Es braucht deutsche Verwaltung zur sachgemäßen Nutzung von Acker und Bodenschätzen. Bislang nutzten die Bolschewiken die Bodenschätze nur zum Aufbau ihrer Angriffsarmee gegen Europa. https://germanpropaganda.org/soviet-paradise-exhibition/ Der Westen verweigert Stalin bis 1944 die 2. Front. Stattdesssen arbeiteten bis 100000 Menschen am Manhattan-Projekt. Die Gesamtkosten zur Herstellung der Atombomben zur Vernichtung Deutschlands betrugen bis 1945 etwa zwei Milliarden US-Dollar. Umgerechnet auf 2012 entspricht dies etwa einer Kaufkraft von 25,8 Mrd. US-Dollar. Vom Westen unerwartet drehte die Rote Armee bereits Ende 1942 in Stalingrad das Blatt. Als die Underdogs in Berlin auftauchten, wurden nicht nur die Deutschen gedehmütigt, sondern auch der Westen der ansehen musste, dass die Rote Armee mit klassischen Waffen/ohne Kernwaffen Europa von Hitler befreite und die Einflusssphäre der Kommunisten fast zum Atlantik verschob. Der verängstigte Westen beschloss als Hauptziel die Zurückdrängung der Befreier Europas. Weitere Demütigungen des Westens durch den Osten: Sowjets haben Kernwaffen. 4.10.1957 Sputnik-Schock. Sowjetische Atomwaffen erreichen jeden Ort der Erde in weniger als einer Stunde. Sowjets machen die westliche Bomberflotte, das Strategic Air Command, obsolet. Die braucht je nach Ziel, mehrere Stunden. Baedeker Bonn 2002; Diner: Krieg der Erinnerungen und die Ordnung der Welt 1991; Geschichtsbücher werden in der Regel von Dementen für Demente verfasst. Görtemaker: Geschichte der Bundesrepublik Deutschland. Von der Gründung bis zur Gegenwart 1999; Görtemaker: Kleine Geschichte der Bundesrepublik Deutschland 2005; Die BRD war und ist Protektorat der USA. Die DDR war bis zum Herbst 1989 Protektorat der UdSSR. Die DDR-Bürger waren dann für kurze Zeit ohne Fremdherrschaft und unterwarfen sich ohne Not durch Beitritt. Die BRD ist seit 1949 ein US-Militärstützpunkt, der für die US-Kriegsführung auf dem Eurasischen Kontinent wesentlich ist. Für Frankreich galt das bis zum NATO-Ausstieg unter de Gaulle 1966 ebenfalls. Seit 2009 ist Frankreich wieder

[26] Durch den kurzen Frankreichfeldzug war die Wehrmacht verwöhnt worden. Kostenfreier Abenteuerurlaub. Weib, Wein und gutes Essen. Kost und Logis frei. Im Osten erst Staub und Ödnis, dann Morast und Kälte. Wie sollten die vielen Gefangenen und Untermenschen ernärt werden? Lösung brachte die Wannseekonferenz.

Vollmitglied. Ganz anders die Westdeutschen. Adenauer warf sich der US-Führung an den Hals. Wiederbewaffnung Deutschlands gegen den Feind im Osten war sein Hobby. Weil das deutsche Militär beim letzten Krieg versagt hatte, übertrug man das Oberkommando an das US-Militär. In militärischen Angelegenheiten ist die Bundesregierung bis heute dem US-Militär untergeordnet. Als Bundesregierung zunehmend mit Russland kooperierte, zog das Washingtoner Haupfquartier die Notbremse und verjüngte die Crew der Stadthalter. Missionare der westlichen Moral und Klimareligion wurden ins Rennen geschickt, die Deutschland zum Campingplatz mit US-Militärbasis umbauen. Basis des Campingplatzes ist der Energieverzicht. Abschaltung von Grundlastkraftwerken und Sprengung von Nordstream. Die einzige unabhängige Kraft im aktuellen (2023) deutschen Parlament ist die AfD. Diner: Verkehrte Welten - Antiamerikanismus in Deutschland 1993; Dan Diner: Das Jahrhundert verstehen. 1917-1989. Ein universalhistorische Deutung 2000; Huch: Deutsche Geschichte. I. Römisches Reich Deutscher Nation. II. Das Zeitalter der Glaubensspaltung. III. Untergang des Römischen Reiches Deutscher Nation 1938; Golo Mann: Deutsche Geschichte des 19. und 20. Jahrhunderts 1958; Erster Stand Geistlichen = Lehrstand. Zweiter Stand Adel = Wehrstand. Dritter Stand freien Bauern, später auch die freien Bürger = Nährstand. 1610: Der «Gelehrte» betet für alle, der «Kaiser» streitet für alle, der «Bauer» ernährt alle. Vierter Stand: Arbeiterklasse, Proletariat, im englischen Sprachraum Vierte Gewalt die Massenmedien = publikative Gewalt. Alan Taylor: Bismarck. Mensch und Staatsmann 1962; **Alan Taylor: The struggle for mastery in Europe 1848-1918**, 1980 Hitler war normaler Herrscher. MacMillan: Die Friedensmacher 2001; Versaille war demütigend für alle Deutschen und Ursache für 2. WK, aber nicht Hitlers Plan, sondern Herzenswunsch der Deutschen, was sich die USA mit dem Kalten Krieg im zweiten Anlauf gegen die Sowjetunion zu Nutze machten. Zu diesem Zweck sprachen die USA mittels der Nürnberger Prozesse die Deutschen von jeder Schuld frei. Hitler war Antisemit.; F̃ischer: Bündnis der Eliten. Zur Kontinuität der Machtstrukturen in Deutschland 1871 - 1945, 1979; Fischer: Griff nach der Weltmacht. Die Kriegszielpolitik des kaiserlichen Deutschland 1914/18 1967; Meinecke: Die deutsche Katastrophe 1946; Deutsche wurden durch Erfahrung der napoleonischen Besatzungszeit von Weltbürgern zu Nationalisten. Meinecke: Erlebtes 1862-1919, 1964; Stadelmann: Deutschland und Westeuropa 1948; Dehio: Gleichgewicht und Hegemonie. Betrachtungen über ein Grundproblem der neueren Staatengeschichte 1948; **Dehio: Deutschland und die Weltpolitik des 20. Jh** 1955; Bracher Die Auflösung der Weimarer Republik 1955; MacMillan: Die Friedensmacher 2001; Bracher: Zusammenbruch des Versailler Systems und zweiter Weltkrieg, In: Golo Mann ed: Propyläen Weltgeschichte Bd9, p389-458; Bracher: Wendezeiten der Geschichte. Historisch-politische Essays 1987 - 1992, 1992; Bracher: Geschichte als Erfahrung. Betrachtungen zum 20. Jahrhundert, 2001; Fischer: Juli 1914. Wir sind nicht hineingeschlittert. Das Staatsgeheimnis um die Riezler-Tagebücher 1983; **Fischer-Kontroverse** = Historiker streiten um Kriegsverantwortung 1959/1962-1971/1985: Deutsches Kaiserreich wollte unter allen Umständen den Krieg. Kurt Riezler 1882-1955. Theodor Bethmann Hollweg 1856-1921 = ab 1909 Reichkanzler/Hilter-Vorläufer kriegslustig, sehnt Krieg mit Russland herbei. 1910 Zar Nicolaus II in Potsdam! **Fischer: Hitler war kein Betriebsunfall**. Aufsätze 1992; Deutsche durch die Erfahrung der napoleonischen Besatzungszeit/Franzzeit 1792-1815. Linksrheinisch ab 1794. Rechtsrheinisch ab 1804. Frieden von Tilsit nach Luise-Demütigung 1807: **Weltbürger → Nationalisten**. Krampitz: 1976. Die DDR in der Krise 2016; **Karsten Krampitz: DDR neu erzählen**, DLF, Essay und Diskurs 3.10.2018; **Mann & Heuß: Propyläen Weltgeschichte. Eine Universalgeschichte** 1984; Shukow ed: Weltgeschichte in 10 Bde 1957, 1963 Bde1-4; 5. Jh: Britonen, Angeln, Sachsen, Friesen, Jüten, Dänen, Warnen, Heruler, Longobarden, Rugier,
Syagrius, Franken, Alemannen (Baden-Württemberg/Elsass, Bayerisch-Schwaben, Deutschschweiz, Liechtenstein/Vorarlberg. Gallorömische/rätischen Bevölkerungsgruppen. 6.-9. Jh Alemannia politisch und kulturell Ostfrankenreich. 10.-13. Jh staufisches Herzogtum Schwaben), Thüringer, Westgoten, Burgunder, Odoaken, Ostgoten, Wandalen. Burn: Griechische Mythen, eine Einführung 2016; Preller: Griechische Mythologie 1856 ebook; Preller: Römische Mythologie 1856 ebook; Behm-Blancke: Gesellschaft und Kunst der Germanen. Die Thüringer und ihre Welt 1973; **Kyffhäuser.** Behm-Blancke: Höhlen, Heiligtümer, Kannibalen 1962; **Weidner: Die Enzyklopädie der Mythologie. Die geheimnisvolle Welt der antiken Griechen, Germanen**

und Kelten 2015 **p252** Stammbaum nach Hesiods Theogonie: Chaos → Eros, Erebos, Nyx = Nacht allein oder mit Erebos oder Okeanos → **Nemesis** = =Zuteilung des Gebührenden = Göttin des gerechten Zorns = ausgleichende Gerechtigkeit = Rachegöttin = = bestraft menschliche Selbstüberschätzung Hybris und Missachtung von Themis = göttliches recht und Sittlichkeit = Du bekommst, was du verdienst. Asimov: Nemesis 1990; Kind mit Zeus/Schwan → Ei/Leda → **Helena**, Gaia = Erdmutter, Tartaros. Gaia⚥Uranos → Blut=Erinnyen, Giganten, Meliaden, Eschennyphen → Menschen: Hekatoncheiren, Kyklopen, **Titanen:** Mnemosyne/Gedächtnis/Erinnerung/Sprachen, Rhea/wilde Natur⚥Kronos/Weltherscher/ Zeitverzehrer/ Kinderfresser/Saturn/ Aussaat: → **olympische Götter:** Hestia/Vesta, Ares/Mars, Artemis/Diana = Jagd, Apollon = wusste alles und war schön, Bogenschießen, schöne Künste Weissagung, Athene/Minerva von Mentis/Metis = Weisheit, Sieg, Schönheit, Kunst, Hephaistos als Hebamme zwecks Zeus' Kopfgeburt, Aphrodite/Venus = Meerschaumgeborene wegen Kronos Furcht vor Konkurrenz durch weiteres Kind von Gaia und Uranos. Liebe, Schönheit, Fruchtbarkeit, Hermes/Merkur = Schneller Bote, Diebe, Kaufleute, Handel, Reisende, Hera/Juno mit zwei Pythons Göttin der Familie⚥Zeus/Jupiter⚥Demeter/Ceres/Isis = Erdgöttin, Fruchtbarkeit, Jahreszeiten wegen Tochter Persephone. Hades/Pluto = Gott der toten Seeelen Unterwelt, Hephaistos/Vulcanus = Feuer, Schmiedekunst mit unterirdischer Werkstatt, Hebe = Anmut, Jugend, Amphritite⚥Poseidon/Neptun Erderschütterer → Triton, Rhode, Bensikyme, Theseus, Aigeus; links am Freundschaftstempel und Südecke Mittelrisalit Gartenseite Neues Palais mit Ariadne und Theseus/Hippolytos⚥Phaidra, Theia/Sehkraft/blauer Himmel⚥Hyperion/Sonnenlicht/Osten: Eos, Selene, Helios → Kirke, Pasiphae ⚥Minos/ Poseidons Stier: Ariadne, Phaidra, Minotauros. **Daidalos/Ikaros:** Athen, hölzerne Kuh, Labyrith, Garnknäuel. Irmscher & Johne: Lexikon der Antike 1977, 1990[10]; Irmscher: Praktische Einführung in das Studium der Altertumswissenschaft 1954; Fink: Who's who in der antiken Mythologie 2012; Aurelius Augustinus 354-430: Bekenntnisse 1950; Schwab: Sagen des klassischen Altertums 2014; Philip: Mythologie. memo Wissen entdecken 2008; Pearson: Das alte Griechenland. memo Wissen entdecken 2002; Byzanz ab 660vChr, Konstantinopel ab 337nChr, Istanbul 1453/1930; Fraktur Schwabacher Antiqua Napoleon; Lotze: Griechische Geschichte bis zum Hellenismus 2002; Singer: Die alten Griechen. Götter, Helden, Dichter. WAS IST WAS Sachbuch, Band 64 2005; Scheffler & Gotzen-Beek: Helden und Götter. Die spannende Welt der griechischen Sagen 2015; Inkiow: Herkules und seine Heldentaten. Neu erzählt 2016; **Inkiow: Die schönsten Sagen der Griechen** 2005; Inkiow: **Die spannendsten Sagen der Griechen** 2007 Amphitrion⚥Alkmene/Zeus → Herakles/Herkules. Hera erkennt beim 3-monatigen Baby Zeus, 2 Schlangen. Zeugnis: Schrift = 3. 16-jährig am Strand, 2 Nymphen/Göttinnen: Geschenktes Gold oder Tugend = Glück durch Schweiß/Arbeit/Übung? 18-jährig auf Suche nach unerfüllbarer Aufgabe. Delphi: Geh zu Eurystheus. In 12 Jahren/Aufgaben **Unsterblichkeit durch Dienen!** 1. Nemeischer Löwe. 2. 9-köpfige Hydra von Argoles. 3. Hindin = Artemis Hirschkuh mit goldenem geweih. 4. Hoher Schnee macht wilden Eber müde. 4. durch verdreckten Stall Fluss leiten. 6. Raubvögel mit eisernen Klauen. 7. Stier von Kreta. 8. Wilde Stuten. 9. Gürtel der Amazonenkönigin Hippolyte am Schwarzen Meer. 10. Goldene Rinder. 11 Äpfel der Hesperiden. 12. Höllenhund Zerberus mit Hermes gegen Charon. Tod durch Nessus' Blut beim Flussgott Achelos, der auch Dejanira liebt. **Friedell 1878-1938: Kulturgeschichte der Neuzeit** 1931; **Zwecker: Was bisher geschah** 2010; **Zwecker: Ein Schritt zurück in die Zukunft. Was wir aus der Geschichte lernen können** 2013 Von Liebe, Arbeit, Bildung und Steuern (also Geld, Status und Sex - alles, worum sich das menschliche Leben gestern, heute und in Zukunft dreht) handeln vier seiner Kapitel (als Sahnehäubchen für Nicht-nur-Brot-sondern-auch-Spiele-Freaks gibt's noch Sport - :)). **Imhof: Die gewonnenen Jahre. Von der Zunahme unserer Lebensspanne seit 300 Jahren ODER von der Notwendigkeit einer neueen Einstellung zu Leben und Sterben** 1981; **Zimmermann: Weltgeschichte in Geschichten. Streifzüge von den Anfängen bis zur Gegenwart** 2008 Kemaris Traum, Der Mensch entdeckt den Ackerbau. Ich werde bei dir sein - Moses. Der Hahn des Tyrannen - Die Entstehung der Demokratie. Der Rubikon - Cäsar und das Ende der römischen Republik. Von Bagdad nach Aachen - Kaiser Karl den Gr. August 1348 - Die Pest entvölkert Europa. Johann Gutenberg. Die erste Wunde - Kolumbus entdeckt Amerika. Der Blick auf die neue Welt. Galileo Galilei. 1787: Frau wird Dr. der Philosophie. Der Kampf ums Dasein - Charles Darwin.

Freiheit für Amos - Sklaverei und ihr Ende in den USA. Der Laborunfall - Die Entdeckung des Penicillins. Sonderkommando Kulmhof - Völkermord an den europ. Juden. Der Globus steht unter Strom - Elektrizität. Donnerstag, 9.11.1989 - Der Tag, als die Mauer aufging. Agenten in Dollywood - Zukunft: Gentechnologie. **Zimmermann: Allgemeinbildung Weltgeschichte. Das muss man wissen** 2012; **Mai: Weltgeschichte** 2008, 2014; Gigantes: Eine kurze Geschichte der Welt. Alles, was man wissen muss 2002; Hermann H. Rampacher, Okt 1998 Gesellschaft für Informatik Bonn. Alle Großreiche zerfallen spontan! **Hauschild: Weihnachtsmann**. Die wahre Geschichte 2008 Findet sich zwar nicht in der Heiligen Schrift hat islamische Verwandte, die älter als das Christentum sind; Weihnachtshörspiel-CD Krippengeflüster 2011 von Lingen, Aue, Janssen; Stolzenberger: Das große Weihnachtsbuch. Erzählungen und Gedichte aus fünf Jahrhunderten; 4CDs von Rene; Brock: Wunderweiße Weihnacht. Erzählungen, Gedichte und Lieder für das Weihnachtsfest 1964, 1977[10]; Gaugler: Weihnacht 1990; 1535 Vom Himmel hoch, da komm ich her, Luther1483-1546 Eisleben, 1599/1609/1844 Es ist ein Ros' entsprungen, Jesaja 11,1, Böhmen, Layitz1809-1899, 1605 Kommet ihr Hirten, ihr Männer und Fraun, Riedel1827-88, 1615 O' Tannebaum, Schlesien, Anschütz1780-1861 Suhl, Schüler vom Büchermörder 1764 aus Staaken, WII hat in Sack gehaun und fängt bei Krupp in Essen an, 1623 Macht hoch die Tür, Ostpreußen, Weißel1590-1635, **Ausbruch Vulkans Tambora im April 1815:** Jahr ohne Sommer 1816, Hungersnot von 1817. 1815 Oh du fröhliche, o du selige Falk1768-1826 4von7 Waisenvater, Rettungshaus für Kinder. 1818 Stille Nacht, Salzburg Mohr1792-1848, 1895 Leise rieselt der Schnee, Ebel1839-1905. **Bryson: Eine kurze Geschichte von fast allem** 2010; Hallie: Daß nicht unschuldig Blut vergossen werde. Die Geschichte des Dorfes Le Chambon und wie dort Gutes geschah;

Koranyi-Esser: Who is who in the Bible 1994. **Erb: Schild des Glaubens** 1947, 1967; Die Menschen der Bibel 2011 p24; Von den Patriarchen zu 12 Stämmen: Adam ⚥Eva → Kain, Abel & Set, Lamech, Noah = 10. Generation mit 500 Jahren → **Sem(iten)→Hebräern→Israeliten/Juden** , Ham, Jafet. Sem → Terach → Nahor → Betuel → Rebekka , Haran → Lot (Sodom), Baumann: Die Welt der Pharaonen 1964; Abra(ha)m/Erzvater 2000vChr Ur Chaldäa/Irak→Kanaan/Baal↔Ägypten Wehner: Echnaton 1351–1334vChr und Nofretete +1338vChr → Hebron. Abra(ha)m ⚥Sara(is)=Prinzessin, Sklavin Hagar → Ismael/islam Volk Sunniten (Realpolitiker, Saudi-Arabien) + 15% Schiiten (Führer kann nur Nachfolger von Mohamed sein, aber 608 nach siegreicher Schlacht der Suniten wurde der Kopf von Hussian nach Damaskus gebracht, Iran). Sara → Isaak = er lacht, Abraham ⚥Ketura. Isaak ⚥Rebekka → Esau, Jacob ⚥Lea→(Ruben,Simeon,Levi,Juda) /Silpa→(Gad,Ascher) /Rahel→(Josef, Benjamin) /Bilha(Dan, Naftali) = 12 Stämme. Auszug aus Ägypten nach Palaestina 1300-1200 vChr, 1200-1100 vChr Palaestina = Kanaan mit Jerusalem = Hauptstadt von Davids Königreich Israel, Salomo. Nordreich Israel ging 722vChr gegen Assyrer unter. Südreich Juda 587vChr von Babylon erobert. Perserreich. Reich Alexander des Großen. Reich der Seleukiden. Aufstand der Makkabäer 162 vChr. 62 vChr Römer: Teilung Norden = Syria, Süden = Judäa. Nazareth/Galiläa 150km → Bet(h)lehem ca 8km südlich von Jerusalem. Jüdischer Krieg, Jerusalemer Tempel 70 nChr zerstört. Jüd Barkochba-Aufstand 135 nChr, dadurch jüd Diaspora. Land heißt nun Palästina, früher Philister, also Tilgung jüd Bewohner. 636 islam Expansion = arab Herrschaft. 1099-1291 Kreuzfahrer. 12. Jh **Ostjuden** ins tolerante Polen. Im 17. Jh durch Preußen, Österreich und Russland erste Vertreibung. Jüdischer Antisemitismus: Deutschjuden vs Ostjuden. Weizenbaum: Kurs auf den Eisberg - oder. Nur das Wunder wird uns retten 1984, 1992 p8ff; 1291-1517 Mamelucken. 1517-1918 osmanische Herrschaft. Brotfrieden 1918. **S̃pinney: 1918 - Die Welt im Fieber. Wie die Spanische Grippe** die Gesellschaft veränderte 2018; **Werfel: Die vierzig Tage des Musa Dagh** 1933 = Völkermord an den Armeniern und der armenische Widerstand auf dem Musa Dağı unter der Führung von Moses Der Kalousdian. Johannes Lepsius 1858-1926 Große Weinmeisterstr 45: Der Todesgang des Armenischen Volkes 1916; 1882 Alija = erste Masseneinwanderung von 5200 Juden nach Palästina in landwirtschaftl Mustersiedlungen, Erfindung des jüd Staats = Theodor Herzl gründet in Basel 1897 Judenstaat = politischer Zionismus, Eretz Israel = gelobtes Land. Antisemitismus in Europa 2. Masseneinwanderung/Alija 1904-1914, 1909 Gründung Tel Aviv = erste moderne jüd Stadt in Palästina. Sieg der Briten beendet osmanische Herrschaft, Konferenz von Sanremo 1920, Völkerbund 1922 GB bekommt Mandat für Palästina (Israeel und Jordanien), Balfor-Deklaration: Staat Israel und Rechte für Nichtjuden. 4. Alija 1924-32, 5. Alija 1933-39, 1941 Amin Al-Hussain & Hitler/Eichmann: Ermordung aller im arab Raum lebenden Juden geplant. 1946 Transjordanien wird Jordanien

= arab Staat. Weißberg: Die Geschichte von Joel Brand 1956 Himmler und Eichmann 1944: Wir tauschen 1,000,000 Juden gegen 10,000 LKWs, Film 1968; Hackl: Abschied von Sidonie. Roma in Deutschland 1989; 1947 UNO: westl des Jordan jüd Staat durch USA und Sowj anerkannt. 1948 Unabhängigkeit, David Ben Gurion, Kriegserklärung durch Ägypten, Saudi-Arabien, Transjordanien, Libanon, Irak und Syrien. 5. Jan 1967 7Tagekrieg = Krieg, der alles veräderte. 1968-70 Abnutzungskrieg. 1969-74 Golda Meir. 6. Okt 1973 Jam-Kippur-Krieg, Ölkrise. 1977-1984 Camp David. Rückgabe Sinai. 1987 blutige Revolte der Palästinenser. Bringmann: Geschichte der Juden im Altertum. Vom babylonischen Exil bis zur arabischen Eroberung; Giebel: Reisen in der Antike 1999; Schäfer: Geschichte der Juden in der Antike. Die Juden Palästinas von Alexander dem Großen bis zur arabischen Eroberung; Lawrence Durrell: Alexandria-Quartett 1960; Bonsack: Das Kamel auf Pilgerfahrt. 1111 arabische Sprichworte 1978; Hafner & Shapira: Israel ist an allem Schuld; Pappe: Ethnische Säuberung Palästinas 2007; Hammer: Erwählung erinnern. Literatur als Medium jüdischen Selbstverständnisses 2004; Tenebom: Allein unter Juden; Bruhns & Großongardt: Israel, Spiegel Geschichte 2/2015; CFv Weizsäcker: Der bedrohte Friede 1981 p324ff; Schuder & Hirsch: Der gelbe Fleck 1987; Avnery: Mein Freund, der Feind 1988; Kennedy: Aufstieg und Fall der großen Mächte 1987, 1991 = Geschenk von ?;

Zeitetikettierungen: Leibniz/Newton= Stadtschloss, Euler = Sanssouci, Gauß = Schloss Babelsberg. Noack: Deutsche Geisteswelt Bd1 Luther bis Hegel. Bd2 Schopenhauer bis Heisenberg 1986; Gutenberg 1397-1468, Michelangelo 1475-1564 Singer: Michelangelo 1918; Kaifenheim: Aspekte der Kunst 1990; Hess: Dokumente zum Verständnis der modernen Malerei 1988; Halbey: Druckkunde 1994, Kolumbus 1451-1506, Erasmus von Rotterdam 1467-1536, Aland: Kirchengeschichte 1991[2]; **Luther 1483-1546** Bergbauunternehmersohn, Erfurt, 1517 Thesen, 1521 gebannt, Worms, Wartburg NT, 1525 Katharina von Bora, Enthauptung Müntzer, 1530 Feste Coburg, 1534 Gesangbuch = Evangelisches Kirchengesangbuch. Ausgabe für die evangelisch-lutherischen Kirchen Niedersachsens Hannover; Luther = **Nur Glauben!** Nicht mehr und nicht weniger! = **Befreier Dt von Rom, Papst = des Teufels Sau** = Renaissance-Papsttum, das sich kulturell weit überlegen wähnte, seine Macht durch Prunk und Protz demonstrierte und den notorischen Glaubensabweichler Luther verächtlich als hinterwäldlerisches Mönchlein aus dem barbarischen Norden bezeichnete. Luther auf der anderen Seite der hartnäckige Augustinermönch und gelehrte Theologieprofessor aus Wittenberg, für den das Heilige Rom der unheiligste Sünden- und Pfründenpfuhl war. Kuypers: Rom. Zeiten, Schicksale, Menschen 1927; Entdeckte Gottes Gnadenzusage im Neuen Testament wieder und orientierte sich fortan ausschließlich an Jesus Christus als dem 'fleischgewordenen Wort Gottes'. Nach diesem Maßstab wollte er Fehlentwicklungen der Christentumsgeschichte in der Kirche seiner Zeit überwinden. **Vierfaches Sola/Solus**: **solus Christus:** 'Allein Jesus Christus', der wahre Mensch und wahre Gott, schaffe durch seine stellvertretende Hingabe am Kreuz ein für alle Mal des Glaubenden Rechtfertigung und Heiligung, die ihm im mündlichen Evangelium und im Sakrament des Abendmahls zugeeignet werde. Dies ist der tragende Grund der übrigen drei Prinzipien: **sola gratia:** 'Allein durch Gnade' ohne jedes eigene Zutun werde der Mensch von Gott gerechtfertigt. **Gnade = freier und unverdienbarer Hulderweis Gottes = wohlwollende, freiwillige Zuwendung = unverdiente Milde = frei von Last. sola fide:** 'Allein durch den Glauben', die geschenkte (nicht geleistete) Annahme Jesu Christi, komme unser Heil zustande. **sola scriptura:** 'Allein die Heilige Schrift' sei die Quelle diesen Glaubens an und Wissens von Gott und daher der kritische Maßstab allen christlichen Redens und Handelns. Sie sei aber von ihrer 'Mitte' Jesus Christus her kritisch zu beurteilen. **Betonung des gnädigen Gottes**, anders als die Calvinisten = **Prädestination**. Es hängt nicht von der Gnade Gottes ab, ob man errettet wird oder nicht, sondern ist vorherbestimmt durch Gott. Die fünf Punkte des Calvinismus: 1. Völlige Verderbtheit/Unfähigkeit. Der Mensch kann Gottes rettende Botschaft erst verstehen, nachdem er durch den Heiligen Geist dazu befähigt wurde. 2. Bedingungslose Erwählung. 3. Begrenzte Versöhnung/Sühne = Das ist der Glaube, dass Jesus Christus nicht gestorben ist, um alle Menschen zu retten. Sein Erlösungswerk ist nur an die auserwählten Sünder, die durch ihn gerettet sind, gerichtet. 4. Unwiderstehliche Gnade[Bearbeiten = Gnade der Erwählung kann nicht ausgeschlagen werden. Der Mensch hat in dieser Hinsicht also keinen freien Willen. 5. Die Beharrlichkeit der Heiligen[Bearbeiten = Die einmal Geretteten werden gerettet bleiben. Luthers Predigten und Schriften und seine Bibelübersetzung, die Lutherbibel, veränderten die von der römisch-katholischen Kirche dominierte Gesellschaft in der frühen Neuzeit nachhaltig. Kirchenspaltung: evangelisch-lutherischer Kirchen und weitere Konfessionen des Prote-

stantismus. Reinhardt: Luther, der Ketzer 2016 Kirchenspaltung ist jenseits des Glauben zu suchen! Kathol Kirche = Papst und Realpräsenz! **Luther 1. Reformation = Papst ist abzulehnen, keine Realpräsenz bei Abendmahl = Wein ist nicht Jesu Blut, aber Jesus ist da! = lutherische Kirche**, aber Papst passt nicht zum Glauben! **2. Reformation** = Abendmahl = Gedächtnismahl = reformierte Kirche. **Leppin: Die fremde Reformation** 2016 Transformation statt Umbruch! Forderungen nach einer grundlegenden Reform der spätmittelalterlichen Frömmigkeitstheologie der katholischen Kirche 'an Haupt und Gliedern' gab es schon lange vor dem Wittenberger Reformator. Was oft als genuin reformatorisch angesehen wird, etwa die Überzeugung, der Mensch erlange allein durch den Glauben ('sola fide') und die Gnade Gottes ('sola gratia') das Heil, oder dass die Theologie sich nur an der Bibel orientieren solle ('sola scriptura') – das alles findet sich schon zu früheren Zeiten: Buße ein Vorgang unmittelbar vor Gott ist und nicht notwendigerweise vor dem Priester, auf die Lehren Meister Eckarts (1240-1328) zurück. Luthers Schelte bezüglich des Geschäfts mit dem Glauben. Als Drückerkolonne durchs Land zogen und päpstliche Zertifikate über die Vergebung aller Sünden verkauften, dann griff er auf den englischen Theologen John Wyclif (1330-1384) zurück: es bedürfe der Vermittlung durch einen geweihten Priester nicht, um die Betenden mit Jesus Christus zu vereinigen. Vor Gott zählt nur der Glaube, nicht die gute Tat! Menchen: Junker Jörg oder 300 Tage Einsamkeit In: Urania Universum Bd29 1983 p354-64; Kaufmann: Martin Luther 2010^2; Albers: Martin Luther - Ein Mönch verändert die Welt 2016; **Lyndal Roper: Der Mensch Martin Luther. Die Biographie** 2016; **Hutten, Müntzer, Luther: Werke in zwei Bänden** 1970; **Bauernkrieg1524-26**. Wechselbälger. Hexenglauben. **Abendmahl:** katholisch/Papst: Priester bringt Gott ein Opfer = Messopfer mittels **Transsubstantiation** = Wesenwandlung = Wein+Brot wandeln sich bei Abendmahl tatsächlich und dauerhaft in Blut+Fleisch Jesu. Reformation: Abendmahl = Gott kommt uns nahe! Luther: Jesus hat sich nur einmal geopfert! Aber Realpräsenz Jesu = In, mit und unter Wein+Brot wird das wahre Blut und der wahre Leib Christi ausgeteilt und mit dem Mund empfangen. Zwingli: Abendmahl hat symbolische Bedeutung = Erinnerungsmahl! Luther: **Jesus ist da = Realpräsenz** vs Zwingli 1484-1531 **Gedächtnismal = Erinnerung an = Bekenntnis, Abendmahlsstreit Marburg 1529**, **Unierte Kirche** = Vereinigung (Union) verschiedener protestantischer Konfessionen = lutherischer und reformierter oder calvinistischer Zweig der Reformation entstanden unabhängig voneinander in der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts. Versuche, die beiden Zweige zu vereinen, scheiterten insbesondere wegen unterschiedlicher theologischer Auffassungen über das Abendmahl = **Marburger Religionsgespräch 1529** zwischen Martin Luther und Ulrich Zwingli und zur Christologie = will Fragen nach **Person Jesus Christus/dem Gesalbten** (Identität, „Natur") und seinem Werk (Bedeutung, „Relevanz") für die Gemeinschaft der Christen, die Kirche, den einzelnen Gläubigen und die Welt beantworten. Calvinistische vs. lutherische Orthodoxie: in Sachsen 1601 der ehemalige Kanzler Nikolaus Krell als des Kryptokalvinismus Beschuldigter auf Betreiben der sächsischen Kurfürstin-Witwe Sophie von Sachsen hingerichtet. Krell wollte europäische Union aller Protestanten und die Beendigung des Bruderkrieges zwischen den beiden Kirchenfamilien der Reformation, der lutherischen und der reformierten Kirchen. Erste Märthyrinnen: Perpetua/Beständige und Felicitas/Glückliche 181-203; **Ulrich von Hutten1488-1523** deutscher Renaissance-Humanist, erster Reichsritter lies Schuder: Ich hab's gewagt = biographische Erzählung 1954; Heinrich VIII Tudor1491-1547, Englisch-Spanischer Krieg (1585–1604). Der Versuch Philipp II., 1588 mit Hilfe der Spanischen Armada England zu erobern, scheiterte ebenso wie der Gegenangriff der Englischen Armada auf Spanien unter Drake und Norris 1589. Elisabeth I 1533-1603 = Elizabeth Tudor = The Virgin Queen, The Maiden Queen („Die jungfräuliche Königin"), Gloriana oder Good Queen Bess. Elisabethanisches Zeitalter 1558 bis 1603. Shakespeare 1564-1616: Tragödien 1843, 1995, Schopf: Wie es Euch gefällt 2014; Galilei 1564-1642, Kepler 1571-1630, Kurfürst MaximilianI 1573-1651, Böhme 1575-1624, Descartes 1596-1650, Pascal 1623-1662, Wedgwood: Der Dreißigjährige Krieg 1967; K̃ehlmann: Tyll 2017; Johann Sigismund 1613 lutherisch reformiert. **John Locke1632-1704: Brief über die Toleranz 1689, Versuch über den menschlichen Verstand 1690, Gedanken über Erziehung 1693**; Spinoza 1632-1677, Ludwig XIV Sonnenkönig 1638-1715, Newton 1643-1727 Glasprisma 1666, Leibniz 1646-1716, Determinante 1693, Du Marsais 1676-1756 Essay über die Vorurteile, d'Holbach 1723-89, 1769 1972, Gottfried Silbermann 1683-1753, Bach 1685-1750, Voltaire zuvor im Londoner Exil, sieht, wie Newton von Herzögen und Fürsten zu Grabe getragen wird. König ist allmächtig Gutes zu tun 1694-1750/53-1778, Die Umwälzungen sind die Schuld/Teufelswerk/Verdienst/Anstoß aufgeklärter Vernunft von Voltaire/Rousseau!

Hansmann: Rousseau 2002; **Rousseau: Emil oder über die Erziehung** 1762; 8 Monate Ausbruch der Laki-Krater auf Island: **Winter 1783/84**; Euler 1707-1783, Rousseau 1712-1778, FII1712-1786, Denis Diderot1713-84 Enzyklopädie der Wissenschaften, der Kunst und des Handwerks 35 Bände 1751-1780, Condillac: Essai über den Ursprung der menschlichen Erkenntnisse 1748, 1977, Winckelmann 1717-1768, d'Alembert 1717-83 Einleitende Abhandlung zur Enzyklodädie 1751 1958, Klopstock 1724-1803, Kant 1724-1804, Lessing 1729-81 Menzel: Wolfbütteler Jahre 1980, Wieland 1733-1813, Lagrange 1736-1813, **Goya 1746-1828: Der Traum der Vernunft bringt Ungeheuer hervor!** Die Phantasie, verlassen von der Vernunft, erzeugt unmögliche Ungeheuer; vereint mit ihr ist sie die Mutter der Künste und Ursprung der Wunder. Der Schlaf der Vernunft gebiert Ungeheuer! Goya: Caprichos; Goya: Desastres de la Guerra 1810-16; Herder 1744-1803, Laplace 1749-1827, **Goethe 1749-1832** traf am 2. Okt 1808 in Erfurt Napoleon, um sich nach der Wende im französischen Preußen rechtzeitig zu versorgen. Seibt: Goethe und Napoleon 2008, Seibt: Mit einer Art von Wut. Goethe in der Revolution 2017. Freiherr von Lyncker: Ich diente 1772/80-83 am Weimarer Hof 1838/41; Tarle: Napoleon 1933, 1959, 1972[9]; Lies Hildesheimer: Marbot 1981; Eissler: Goethe 1775-1786. Eine psychoanalytische Studie 1963, 1985; **Schiller 1759-1805**: Geschichte des Abfalls der vereinigten Niederlande von der spanischen Regierung 1979; Fichte 1762-1814, de Bruyn: Das Leben des Jean Paul=Johann Paul Friedrich Richter 1763-1825: Schulmeisterlein Wuz 1793, AvHumboldt 1769-1859, **FWIII**1770-1840, Beethoven 1770-1827 Amenda/Karrasch1893-1973: Appasionata 1958, **Biedermann: Hegel 1770-1831** 1981, Hegel: Naturphilosophische Erörterung über Planetenbahnen 1801 übersetzt von Neuser 1986; Hölderlin 1770-1843, Novalis 1772-1801, CDF 1774-1840, Schelling 1775-1854, Ritter 1776-1810 Elektrochemie, UV-Strahlung, Kleist 1777-1811, Gauß 1777-1855, Brentano 1778-1842, vArnim 1781-1831, Schinkel 1781-1841, Stendal 1783-1842, LeopoldIII Friedrich Franz von Anhalt-Dessau 1740-1817: Wörlitzer Park 1769-1773 bis 1813 erweitert, Architekt von Erdmannsdorff 1736–1800 beteiligt, Garten Johann Friedrich Eyserbeck 1734-1818, Pückler 1785-1871, **Parkomanie** Die Gartenlandschaften des Fürsten Pückler 2016; Ohff: Der grüne Fürst. Das abenteuerliche Leben des Hermann Pückler-Muskau 2007; Pückler: Andeutungen über Landschaftsgärtnerei. Verbunden mit einer Beschreibung ihrer praktischen Anwendung 2010; Luckner: Die Gartenreisen des Hermann Fürst von Pückler-Muskau. Auf den Spuren eines Exzentrikers durch England und Irland 2012; Haan, Krieger, Niedhart: Einführung in die englichen Geschichte 1982; Bad Muskau 1815–1845, Schloss Branitz 1770/72 Umbau 1850; Azaleen- und Rhododendronpark Gut Kromlau 1842/44, Teufels-, Rakotz-Brücke Rötschke 1860; Wendland: Gärten und Parke in Brandenburg: Die ländlichen Anlagen in der Mark Brandenburg und der Niederlausitz (Schriften der Landesgeschichtlichen Vereinigung für die Mark Brandenburg 5Bde 2015; Götzmann & Kaiser: Potsdamer Veduten des 18. und 19. Jahrhunderts 2017; Bettina von Arnim 1785-1851 Mander: Preuß Köpfe 1982, Fraunhofer 1787-1826, Schopenhauer 1788-1860, Cauchy 1789-1857, Ohm 1789-1854, Lenne 1789-1866, Ohff: Peter Joseph Lenné. Eine Biographie 2012; Faraday 1791-1867, Heine 1797-1856: Zur Geschichte der Religion und Philosophie in Deutschland 1834, 1966; Balzac 1799-1850; Hamilton 1805-65, Liouville 1809-1882, William Makepeace Thackeray 1811-63 Jahrmarkt der Eitelkeit 1847. Viktorianisches Zeitalter 1837 bis 1901. Princess Alexandrina Victoria of Kent 1819-1901 = Mutter von Victoria Adelaide Mary Louisa, Prinzessin von Großbritannien und Irland VA, ab 1888 Kaiserin Friedrich 1840-1901 = FIII. **Gelfert: Kleine Kulturgeschichte Großbritanniens** 1999; Christian Friedrich **Hebbel**1813-67 Lebenslauf Bd3 p495-521. Gesammelte Werke 3Bde 1928. **Maria Magdalena** MEISTER ANTON. Ich verstehe die Welt nicht mehr! ivan Nahl: Die Nibelungenhalle am Drachenfels 2007; Koeppen: Die Nibelungenhalle am Rhein beim Drachenfelsgelände über Königswinter, ein Gedächtnistempel errichtet zum 100. Geburtstage Richard Wagners 1938; Hermann Hendrich 1854 Heringen - 1931 Schreibenau: Das Werk eine spätromantischen Malers 2014; Foto des Verkäufers Ludwig Jacobowski: Loki. Roman eines Gottes 1903; **Nibelungen:** Spielt um 400, wurde sich im 12.Jh gern erzählt und 1757 von Bodmer aufgeschrieben. Stagnation und Langeweile herrschen am Hofe des Burgunder Königs Gunther/Gernot,Giselher/Kriemhild in Worms. Es ist Ostersonntag, die Jagd ist verboten. Ein Lied des Spielmannes Volker soll für Zerstreuung sorgen. Es handelt von der schönen, aber unbesiegbaren Brunhild aus Island. Siegfried aus Xanten, lebte beim Schmied Mime und wuchs mit Brünhild in Nibelungenland = Norwegen, Lappland auf. Für Gunther ist klar, dass er diese Frau will. In dieser Situation kommt der Held Siegfried an den Hof der Nibelungen. Er ist jung, voller Tatendrang, erschlug seine Brüder Schilbung

und Nibelung, ist bärenstark und will sich mit jedem messen, der sich ihm in den Weg stellt. Es kommt zu einem Wettkampf. Das Werfen von Steinen soll einen Schwertkampf vermeiden. Siegfried besiegt Gunther und dessen Brüder Gernot und Giselher. Er sieht Kriemhild, die Schwester Gunthers, und verliebt sich in sie. Nach dem Sieg erzählt Siegfried von seinen Heldentaten: Davon, wie er das Schwert Balmung und den Nibelungenhort samt einer Tarnkappei/Haut vom Zwerg Alberich = Hüter des Nibelungenhorts = Schatz im Berg zu Nebelheim hinter Eisland, erlangte und einen Drachen tötete. Er berichtet vom Bad im Blut des Drachen, das seine Haut unverletzlich machte und ihm die Möglichkeit gibt, die Sprache der Vögel zu verstehen. Die Vögel führten ihn nach Isenland, wo er ungesehen Brunhild erblickte, aber nicht mit ihr kämpfen wollte. Auch von seiner Einsamkeit erfahren die Burgunder. Gunther will die Situation für sich nutzen. Er schlägt Siegfried einen Pakt vor: Siegfried soll Gunther helfen, Brunhild zu seiner Frau zu machen, dafür wird dieser einer Heirat Siegfrieds mit Kriemhild nicht im Wege stehen. Verschwiegenheit wird vereinbart. Gemeinsam brechen Gunther, sein Bruder Gernot, Gunthers Onkel Hagen von Tronje und Siegfried nach Isenland, der Heimat Brunhilds, auf. Brunhild empfängt die Recken und stellt klar, dass keiner Isenland lebend verlassen wird, wenn sie nicht besiegt würde. Da Gunther dafür nicht die nötige Kraft besitzt, kämpft Siegfried unter der Tarnkappe für ihn. Brunhild, die die Täuschung nicht bemerkt, muss mit Gunther ziehen. Siegfried eilt voraus nach Worms, um die Ankunft Brunhilds anzukündigen. Bei dieser Gelegenheit sieht er Kriemhild das erste Mal länger und erlangt einen Gunstbeweis von ihr. Auch wird er ihrer Mutter vorgestellt. Mit der Ankunft der anderen Isenlandfahrer mischen sich Misstöne in die Szene. Die kriegerische Brunhild will sich nicht in den Hof einordnen. Hagen weist Siegfried auf ein zusätzliches Problem hin: Gunther kann seine Ansprüche gegenüber Brunhild im Bett nicht durchsetzen. Siegfried muss noch einmal helfen. Er soll mit Hilfe der Tarnkappe Brunhild in der Hochzeitsnacht gefügig machen. Wieder wird absolutes Stillschweigen vereinbart. Hagen konstatiert: „Der Vierte in unsrem Bunde sei der Tod“. Im Gerangel entreißt Siegfried Brunhild einen Gürtel, welcher dann in Kriemhilds Hände gelangt. Kriemhild stellt Siegfried zur Rede. Siegfried erzählt ihr daraufhin von Gunthers Schmach und seinem Part bei der Geschichte. Am Kirchentor des Wormser Doms kommt es zum Eklat. Im Streit um den Vortritt ins Kircheninnere beschimpft Kriemhild Brunhild als „Kebsweib“ (Hure/ Mätresse) ihres Gatten Siegfried. Brunhild ist tief gekränkt und fordert von König Gunther den Tod Siegfrieds. Hagen ist bereit, Brunhilds Schmach zu rächen. Mit der Erlaubnis des Königs und unter einem Vorwand bringt er Kriemhild dazu, ihm die Stelle zu verraten, an der Siegfried verwundbar ist. Beim Bad im Drachenblut fiel ein Lindenblatt zwischen Siegfrieds Schulterblätter, nur dort ist er verwundbar. Hagen, Gunther, Gernot und Volker beschließen Siegfrieds Tod, nur Giselher spricht dagegen. Sie laden Siegfried zur Jagd. Siegfried sagt zu und schlägt die Warnung Kriemhilds in den Wind: „Ich zieh hinaus mit lauter guten Freunden, und wenn die Berge nicht zusammenbrechen und uns bedecken, so kann mir nichts geschehen.“ Während der Jagd ersticht Hagen Siegfried, der sich zum Trinken über eine Quelle gebeugt hat, hinterrücks. Kriemhild schöpft Verdacht und fordert Klage über Hagen, die ihr von König Gunther verweigert wird. Sieben Jahre ziehen ins Land. Kriemhild sinnt immer noch auf Rache. Hagen hat inzwischen den Nibelungenhort für die Burgunder an sich gebracht und im Rhein bei Lochheim versenkt, um Kriemhild daran zu hindern, Söldner anzuwerben. Noch einmal wendet Kriemhild sich an Gunther. Er solle Hagen den Prozess machen. Gunther lehnt ab. Kriemhild erkennt, dass sie unter den Nibelungen keine Freunde mehr hat. Als Markgraf Rüdiger im Namen Etzels, der Heunen/Ungarn König = Attila *400/34/53 Hunnenkönig = Heide, diente dem weströmischen Feldherrn Flavius Äetus, um ihre Hand anhält, willigt sie ein. Markgraf Rüdiger muss jedoch vorher schwören, dass er jeden ihrer Befehle befolgen wird. Hagen ist gegen die Hochzeit Kriemhilds mit Etzel. Gunther geht aber nicht auf seine Warnungen ein. Weitere sieben Jahre später besuchen die Nibelungen Kriemhild auf König Etzels Burg mit großem Gefolge. Auf der Reise kommen sie auch auf Rüdigers Burg. Dort verlobt sich Giselher mit Rüdigers Tochter Gudrun. Dietrich von Bern, ein freiwilliger Vasall Etzels, warnt die Nibelungen vor Kriemhilds Rache. „Frau Kriemhild weint noch Tag und Nacht“. Kriemhild verlangt von Etzel, dem sie einen Sohn, Odnit, geboren hat, Rache für Siegfried. Mord um Mord. Etzel weist sie ab, da die Nibelungen das Gastrecht genießen. Kriemhild wendet sich an Werbel, dem sie den Nibelungenhort verspricht, wenn er die Nibelungen aus dem Weg räumt. Während des Festmahls der Fürsten schlachtet Werbel das Gefolge der Nibelungen ab. Als die Nachricht des Geschehenen zu Etzels Bankett vordringt, schlägt Hagen Odnit den Kopf ab. Der Kampf bricht nun auch unter den Fürsten aus. Am Ende sind von den Nibelungen nur noch Gunther, Gernot, Giselher, Volker und Hagen am Leben.

Kriemhild fordert von Rüdiger, seinen Treueschwur zu halten. Er erschlägt Gernot und Giselher, scheitert aber an Hagen. Nun greift Dietrich in den Kampf ein, überwindet Hagen und Gunther und bringt sie gefesselt zu Kriemhild und Etzel. Kriemhild lässt Gunther töten und erschlägt Hagen. Hildebrand, ein Gefolgsmann Dietrichs, ist so angewidert, dass er Kriemhild erschlägt. Angesichts des Blutbads legt Etzel seine Krone ab und übergibt die Herrschaft Dietrich von Bern. **Fühmann: Nibelungen** 1971; **Bismark** 1815/71-1890/98, Bismark: Gedanken und Erinnerungen. Autobiographie 1898; Lepsius: Bismarck als Pazifist. Auf Grund der neuen Bismarck-Akten. Deutsche Vorkriegsakten. Süddeutsche Monatshefte20 Nov 1922 H2; **Marx 1818-1883, Fontane 1819-1898 = literarischer Spiegel Preußens = Digitalisat** Gemkow et al: Karl Marx. Eine Biographie 1968; Wanderungen durch die Mark Brandenburg 1892, oder derselbe Titel Eine Auswahl in 2 Bd mit zeitgenössischen Illustrationen 1987; Mielke, Schulenburg, Lohre, Riekebusch: Landeskunde der Provinz Brandenburg. Bd3 Die Volkskunde 1912 digital im Netz; Helmholtz 1821-84, Cayley 1821-95, Matrix 1850, Riemann 1826-66, Johann Ludwig Maximilian Dortu 1826-1849, Maxwell 1831-79, Brahms 1833-97, Flaubert 1821-1880, Gibbs 1839-1903, Zola 1840-1902, Nietzsche 1844-1900 siehe **Golo Mann: Deutsche Geschichte des 19. und 20. Jahrhunderts** 1958; K̃raus: Der deutsche Untertan. Vom Verlust des eigenen Denkens 2021; K̃raus: Wie man eine Bildungsnation an die Wand fährt. Und was Eltern jetzt wissen müssen 2017; K̃raus: 50 Jahre Umerziehung. Die 68er und ihre Hinterlassenschaften 2018; **Engelmann: Wir Untertanen. Ein Deutsches Anti-Geschichtsbuch** 1974; Engelmann & Ziermann: Deutsche Geschichte in Geschichten 1990; Boltzmann 1844-1906, Cantor 1845-1918, Klein 1849-1925, Poincare 1854-1912, Mahler 1860-1911, Hilbert 1862-1943, Minkowski 1864-1909, **Zeittafel:** Telegraph 1837, Telephon 1877, Röntgenapparate 1896, Triode 1906, Passagierflugzeug 1914, Rundfunk-Röhrenempfänger 1924, Transatlantischer Funk 1927, Radar = Radio Aircraft Detection and Ranging 1935, Strahlflugzeug 1939, industrielle Penicillinproduktion 1942, Transistor 1948, Linien-Düsenverkehrsflugzeug 1952, Transistorradio 1953, FORTRAN 1955, Sputnik 1957, Laser 1960, ASCII 7-bit 1968, **CCD 1969**, 1970 UNIX/GNU, 1972 sed, C, kommerzielle Computertomographen, 1973 volldigitale Mobilfunknetze, 1976 Steve Wozniak PC, 1977 awk, 1985 breite Anwendung der MRT in der medizinischen Diagnostik, 1988 Reagan-Direktive zur globalen Steuerung der Massen: militärisches Intranet → komerzielles Internet! 1989 CERN/HTML, 1993 Webbrowser Mosaic, **1994 Flash-Speicher und Netscape**, 1995 Smartphone, **Suchmaschine Altavista**, 1996 Alexa = Webtraffic-Analyse = Spyware, 2000 Google und Amazon werden wirksam, 2004 Facebook mit 10^9 Nutzern, **2007 Multitouch**, 2009 WhatsApp 2016 10^7 Nutzer, 2010 Parrot AR.Drohnen = ferngesteuerte Quadrocopter mit Kamera. **Analog** $\xrightarrow{1960}$ digital. Ost $\xrightarrow{1989}$ west. Lokal $\xrightarrow{2000}$ global. **Human** $\xrightarrow{2050}$ **transhuman/maschinell**. **Zeittafeln** Zimmermann: Das muss man wissen; Bethge: Kernphysik; Schmidt: Opt Spektroskopie 1994 p6; Hennig: Luise. Königin aus Liebe 2008; de Bruyn: Preussens Luise. Vom Entstehen und Vergehen einer Legende 2001; de Bruyn: Preußische Trilogie. Die Finckensteins/Preußens Luise/Unter den Linden 2022; d̃e Bruyn: Die Zeit der schweren Not. Schicksale aus dem Kulturleben Berlins 1807 bis 1815, 2012; Hennig: Friederike. Prinzessin der Herzen 2015; Schwanitz: Bildung; Mason: Geschichte der Naturwissenschaft; Wissenswertes von A bis Z. 150 Jahre Bertelsmann *1835 1983 p5 Linklater: Bildung trübt den Blick, stört die Verdauung, vedirbt den Charakter, schwächt die Muskels, befleckt den Teint, macht das Haar schütter, untergräbt den Mut, durchlöchert die Ausdauer und verzahrt die unsterbliche Seele. Van Doren: Universalwissen der Menschheit 1991; von Alten, Naini, Eick, Folkerts, Schlosser, Schlote, Heiko Wesemüller-Kock, Wussing: 4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen. Vom Zählstein zum Computer 2013 p6ff; **Russo & Denninger: Die vergessene Revolution oder die Wiedergeburt des antiken Wissens** 1996, 2005;

Das Herzogtum Preußen wurde 1525 durch Umwandlung des Deutschordensstaates in ein weltliches Fürstentum geschaffen, das ein Lehen des Königreichs Polen war. Das Lehnsverhältnis endete erst 1667 mit dem Vertrag von Wehlau. Albrecht von Preußen war der letzte Hochmeister des Deutschen Ordens und der erste Herzog von Preußen. Er entstammte der ansbachschen Linie der fränkischen Hohenzollern. Die Herrschaft in der Mark Brandenburg wurde vor der Entstehung des Herzogtums Preußen von Verwandten bereits über 100 Jahre ausgeübt. Johann Sigismund von Brandenburg war seit 1608 der Kurfürst von Brandenburg und wurde 1618 ebenfalls Herzog von Preußen. Somit waren die Mark Brandenburg und das Herzogtum Preußen (Ostpreußen) nunmehr im Besitz eines einzigen Hohenzollers und wurden in Personalunion geführt.

Bereits im Jahr 1614 wurde zudem der Jülich-Klevische Erbfolgestreit beendet und im Vertrag von Xanten festgelegt, dass der Kurfürst von Brandenburg das Herzogtum Kleve, die Grafschaft Mark und die Grafschaft Ravensberg erhalten soll. Brandenburg-Preußen bezeichnet die gesamten Herrschaftsgebiete zwischen 1618 und 1701 und wurde später Preußen genannt. Die Territorien lagen teils innerhalb, teils außerhalb des Heiligen Römischen Reiches.

Rügen: Germananen, Slawen, Wickinger, Dänen, Schweden 1648 bis 1815, dann zu Preußen. Hofarzt von FWIII und IV Lange 1813-1899 Anagramm → Philipp von Galen: Der Stranvogt von Jasmund 1860i Tipp von Bert Kunath, Strandgut Juliusruh; Galen: Der Inselkönig 4Bde 1852; **Omnis insulares mali.** Siebrecht: Wendische Geschichte; Herrmann: Die Welt der Slawen 1986; Vana: Die Welt der alten Slawen 1983; Vana: Mythologie und Götterwelt der slawischen Völker 1992; Nahodyl Neményi: Der Slawen-Mythos. Wie aus Ostgermanen ein Volk der 'Slawen' mit fremder Sprache und Mythologie wurde 2015; Schertz: Nordische Sagen 1956, 1964 Aslaug, Ragner; Lewin: Nordische Göttersagen 2016; Herrmann: Nordische Mythologie 2011; Herrmann: Germanische Mythologie 2011; Jacob & Wilhelm Grimm, Ubbelohde: Deutsche Sagen 2014; **Herrmann & Jung: Deutsche Mythologie** 2013; Ackermann: Das große Buch der nordischen Götter- und Heldensagen 2016; Ulbrich & Gerwin: Die geweihten Nächte. Etwas bräunlich 1999; Hansen: Asgard. Eine Reise in die Götterwelt der Germanen 2009; Kirschgruber: Von Sonnwend bis Rauhnacht. Feste, Bräuche & Rituale im Kreislauf des Jahres 2003; Zwischenzeit, da lebenspraktischer Mondkalender zehn Tage kürzer als Sonnenkalender. Verkehrte Welt. Karnevall. Saturnnächte. Sklaven werden zu Herren. Rau(c)hnächte = böse Fellbesetzte, pelzige Dämonen behausen die Nächte, denen mit Räucherei in Wohnung und Stall begenet wird. Kirschgruber: Das Wunder der Rauhnächte. Märchen, Bräuche und Rituale für die innere Einkehr 2013; Ruchhöft: Die Burg am Kap Arkona 2016; Lehmann: Geschichte der Niederlausitz 1963; Kosegarten1758-1818: Ida von Plessen; Kosegarten: Die Inselfahrt; Kosegarten: Reisegesellschafter durch Rügen 1823; Meichner: Caspar David Friedrich 1774-1840 1971; Rellstab: Ausflucht nach der Insel Rügen 1793; Rudolph: Die Insel der Schiffer; Barthold: Geschichte von Rügen und Pommern 1842 ebook; Rudolph: Die Insel Rügen 2015[3]; Ewe: Rügen 1972, 1988[3]; Zöllner = Lehrer Humboldts: Reise durch Pommern nach der Insel Rügen 1797; Fallada: Nur ein Kind; Gerhard Hauptmann: Weber, Biberpelz, Ratten; Arndt: Rügener Sagen; Neu von Völkel: Zwei Riesen im Sund 1988; Grümbke: Streifzüge durch das Rügenland 1819; Konrad Schmidt: Entdeckungen auf Rügen und Hiddensee 1973 und Neue Entdeckungen ... 1985 mit vielen wortwörtlichen Kopien aus dem Vorgängerbuch; Müller: Das Seebad Breege-Juliusruh 1998; Zaren = Cäsar = Könige des Himmels = Himmelsherrscher, byzant Reich: PterIII religiöse Toleranz 1728-61/62, KatharinaII die Große: Memoiren 2 Bde 1913, 1986; **Aufklärung 1729-62/96** = **Kant: Was ist Aufklärung ? 1784** = **Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbstverschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Selbstverschuldet ist diese Unmündigkeit, wenn die Ursache derselben nicht am Mangel des Verstandes, sondern der Entschliessung und des Mutes liegt, sich seiner ohne Leitung eines anderen zu bedienen. Horaz: Sapere aude! = Wage es, weise zu sein! Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!** Über 200 Jahre ist es her, als JEMAND Faulheit und Feigheit ausmachte, die ursächlich - trotz erhöhter naturwissenschaftlicher Erkenntnis - für die privat-historische Entscheidung zur Unmündigkeit in Permanenz stehen. Die Welt umsorgt nun mehr den Nächsten persönlich, der Einzelne wird gebettet in die Leistungen einer 21.Jahrhundertgesellschaft, die bei hinreichendem Geldbesitz als Gegenmittel, Denkverzicht ermöglichen durch die virtuellen, technischen, sozialen Hilfskonvois im Land, wo Glas und Faser liegen. Ist nach Stiegler (Die Logik der Sorge) der Drang nach Aufmerksamkeit allen Marketingstrategen eigen, werden deren Angebote und Leistungen dieser Gesellschaft angeboten, deren Mitglieder zwischen dem von außen definierten hier oder nur da entscheiden könnten. Zumindest wird klar, dass in Anbetracht aller konvergenten Strategien losgelöst von zwischenmenschlichen Bedürfnissen, die Versorgung des Einzelnen in ein initiiertes und zugelassenes Outsourcing-Projekt der Allgemeingültigkeit landet. Behüter der Wünsche des Einzelnen lassen (sich) einfliegen, von Coach bis zum Arzt, vom Seelsorger bis zum Psychiater, von Pharma bis zur Esoterik, vom Sparbucher bis zum Immobilienhyper. Verbunden mit der Übereinstimmung all dieser gesellschaftlichen Vorgaben, gelingt dem Menschen zukünftig die Anpassung an Sparbirnen, die

das letzte Licht auch im Kopf ausgehen lassen. Sparen wird zur Maxime, Lean Brain Management (Dueck) zur Lösung aller Probleme, die höherer Verstand dann nicht mehr produziert. Sapere cave!? **Thea Dorn: Erzieht Deutschland seine Kinder zum Opportunismus? Willkommen im Kindergarten! Die eigene Lunge, Kindererziehung oder Sparglühbirne: Selbstverantwortung und Selberdenken waren gestern! Verbotsschilder haben Konjunktur, richtig ist, was Mutti Staat sagt. Deutschland bewegt sich doch – leider immer infantiler.** Deutschland bewegt sich. CICERO 7/2008. Orakel der Post-Modene: **Sapere cave! Hüte dich, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen**. Der Bürger wird europaweit per Verordnung fürsorglich belagert. War es Angst vor Atom, Angst vor Krieg ist es nun die Chiffre Gesundheit, eine Angst, die prägt, vor Alter zu sterben. face-lifting und anti-aging suggerieren das Überleben als Ent-Faltung im raucherfreien Diesseits. Da wird Physik und Meta-Physik in den Ring geworfen, da werden Kleine Tyrannen genannt, um die großen aus ihrer Ichbezogenheit, deren Mitte sie noch suchten, zu erlösen und allerorten Aufregung vom Pius bis zum Vatikan, von Merkel bis Marx. Zuviel des Nachdenkens gefordert, doch zu spät, der Makel sitzt. Der Kampfruf: **Kerle, wollt ihr denn ewig leben?** des alten Fritz 1757 ist heute kein Ansporn, die letzte Schlacht mit allen Mitteln zu schlagen. Im Gegenteil, es gelten Bio und Öko, gesund, aber lichtfrei. Was machen die, die sich widersetzen? Sie lesen ein Buch zur Anregung des Verstandes. Sie verstehen Rezensionen und / oder treten in einen Dialog. Sie denken an die Aufklärung (enlightenment = da steckt Licht drin) und daran, sich der selbstverschuldeten Unmündigkeit und aller a priori Urteile zu entledigen. Sie reanimieren lexikalisches Wissen zur Anwendung in der Praxis. Sie wissen, dass dieser JEMAND Immanuel Kant (1724-1804) ist, der die Antwort auf die Frage: Was ist Aufklärung? im Jahre 1784 klar formulierte, siehe oben. Echtheitszertifikat im Zeitalter der alternativen Ichs = Franz Hessel 1880-1941, Lektor im Rowohlt Verlag = Vater von Stéphane Frédéric Hessel1917-2013: Empört Euch 2007; Müller: Die Grundlagen der Moral und das Gorgonenantlitz der Globalisierung 2014; Müller: Im Schatten der Aufklärung 2014; M̃üller: Das magische Universum der Identität. Elementarformen sozialen Verhaltens. Ein ethnologischer Grundriss 1987; Müller: Magie 2021; Müller: Schamanismus. Heiler-Geister-Rituale 1997; M̃üller: Der Krüppel. Ethnologia passionis humanae 1996; Müller: Geschichte der antiken Ethnologie 1968, 1997; Koestler: Der Mensch - Irrläufer der Evolution. Die Kluft zwischen Denken und Handeln. Eine Anatomie menschlicher Vernunft und Unvernunft 1995; Ellul: Apokalypse. Die Offenbarung des Johannes - Enthüllung der Wirklichkeit 1981; Ellul: Leben als moderner Mensch 1958; Ellul: Wenn du Gottes Sohn bist: Leiden und Versuchungen Jesu 1991; L̃ingens: Gefangene der Angst 2005; Gehlen: Der Mensch / Urmensch und Spätkultur / Moral und Hypermoral 1992; Alexander Grau/Michael Lebed: Hypermoral. Die neue Lust an der Empörung 2017 Aggressiver Moralismus ist das Ergebnis wohlhabender Gesellschaften. ABER nur der Einzelne kann handeln. Muss nicht emotional reagieren. **Mehr Dissens zulassen!** Bin ich wirklich moralisch überlegen? Moral ist unsere letzte Religion. Humanitarismus vor dem Hintergrund der 68er Bewegung. Kirchen haben Religion auf Moral reduziert. Selbst der formorientierte/ritualisierte Katholizismus führt einen politisierenden/moralisierenden Diskurs. **Moralisieren kommt vor Argumentieren?** Wittgenstein: Der Mensch ist ein rituelles Tier. Rituale geben Halt/Stabilität. **Moral** = Handlungsregeln gegen Instinkt = Freiheit, anders zu handeln. Hierarchie/ sozialer Frieden/ regelt Machtverhältnisse/ verhindert Konflikte. Kästner: Fabian. Sie Geschichten eines Moralisten 1931; **Sophokles: Achtung verdient, wer vollbringt, was er vermag.** Ahrendt: Eichmann 1964; Horkheimer & Adorno: Dialektik der Aufklärung 1969, 1989; Ãdorno: Versuch über Wagner 1952; Adorno: Erziehung zur Mündigkeit 1969; Siehe **Kränkungen** auf Seite 61. Neil Postman: Keine Götter mehr. Das Ende der Erziehung 1995; Ödöm v Horváth: Eigentlich bin ich ganz anders, aber ich komme so selten dazu! PaulII, Caligula 1754-1796/1801 mit Maria Fedorovna = Dorothea von Würtemberg-Mömpelgard, AI 1777-1801/25, NI 1796-1825/55 mit Alexandra Fedorovna = Luise Wilhelmine Charlotte, AII 1818-55/81.

Hohenzollern in Berlin Stadtschloss 1442. **Prang & Kleinschmidt: Durch Berlin zu Fuß** 1984; Freitag & Pirch: Topographischer Atlas Berlin 1995; Gindler & Stephan: Die Weltstadt Berlin. Sehenswürdigkeiten und Denkmäler, Einrichtungen und Umgebung der Stadt 1893, 1920; Schaefer: Die Mark und Berlin im Spiegel der Dichtung 1920; Kaufhold: Berlin Zeitsprünge: Die Entwicklung der Stadt 2003; Pöppelmann: Berlin früher und heute 2015; **Berlin-Cölln/Berlin, Residenzstadt der brandenburgischen Markgrafen und Kurfürsten (seit 1448), der Könige in/von Preußen (seit 1701/1772), der Kaiser des Deutschen**

Reichs (1871–1918), Franziskaner 1271, Berlinisches Gymnasium „Zum Grauen Kloster“ ab 1574, Lange Brücke 1317, 1416, 1662/64, 1823/25, 1888. Glienicker Brücke 1660, 1777, 1831, 1907. H̃afner: Das Haus an der Brücke. Die Villa Schöningen in Potsdam und ihre Bewohner 2004; Döpfner, Maculan: Die Villa Schöningen an der Glienicker Brücke. Ein deutsch-deutsches Museum 2009 p100-109 Rudolf Abel, Francis Gary Powers U2; **Zischka: Krieg oder Frieden** 1961; Stein & Ritter: Schild und Flamme. Erzählungen und Berichte aus der Arbeit der Tscheka 1973; Humboldtbrücke 1975/81. **GrKurfürst FWI** 1620/40-1688 4Jahre Studium in Leiden, Schiffbau Amsterdam, 700 Einwohner, Glienicker Holzbrücke 1660, Stadtschloss 1662/74, Schlösser in Oranienburg ab 1651, Caputh 1662, Bornim/Zachelsberg/Heineberg Schiffsgraben, Tyroler Graben 1664, Köpenick 1677-85, Glienicker Jagdschloss 1678. Weg zum Pannenberg über Kronprinzenstr = Feuerbachstr. Lindenstr zum Eich-, Minen-, Juden-, Pfingstberg. Im Zusammenhang mit militärischer Hilfe für Frankreich: **Non/Nec soli cedit!** Er weicht der Sonne nicht. Selbst der Sonne weicht er nicht. Kania Bd3 p227. FWI: non = nicht. FII am Neuen Palais: nec = nicht einmal. Schlacht bei Fehrbellin 1675 = Kleist: Prinz Friedrich von Homburg = Friedrich II. 1633-1708 = befehlswidrig Kampf angezettelt, aber gewonnen, Kleist: Michael Kohlhaas 1808/1810, Krongut Bornstedt, Jagdschloss Glienicke 1682/93, Toleranz-Edikt, Orangerie = Pommeranzenhaus am Stadtschloss = ab 1714 Marstall = ab 1922 Garnisionmuseum = ab 1981 Filmmuseum 1685, Caspar: Fürsten, Helden, große Geister, Denkmalgeschichten aus der Mark Brandenburg 2004 p79f; Kaninchenzucht auf Pfauenwerda/Kaninchenwerda = Schenkung an **Alchemisten Johann Kunkel** 1630/38-1703 aus Holstein = Sohn des Glashüttenbesitzers Rendburg, ab 1678 am Hofe und Spiegelglashütte in Nuthewiesen zwecks Luxusglasproduktion. Kunkels Glashütte auf der Pfaueninsel = Kaninchenwerda 1685-88: Goldrubinglas schützt vor Unglück, verjüngt, verleiht Mut und ewiges Leben. Karfunkelstein = Rubin = Stein der Weisen. Hugenotten. Zu den stark lutherisch geprägten Theologen, die eine Unterzeichnung des Toleranzediktes verweigerten und damit ihre Anstellung verloren, zählte auch der Kirchenliederdichter Paul Gerhardt1607-76 Wie soll ich dich empfangen, Berlin, Mittenwalde, Lübben. **Im Wildpark** bei Geltow unterhielt der **Große Kurfürst** und dann FII einen **Entenfängersee**. In der Nähe befand sich das Gelände der ehemaligen Funksendezentrale 292 der Luftwaffe (Luftnachrichten) des Deutschen Reiches zwischen ca. 1938 und 1945 = bevorzugte FuSZ des Oberbefehlshabers der deutschen Luftwaffe und Reichsluftfahrtministers Hermann Göring. Führungszug Robinson stand im Kaiserbahnhof. Das gedeckte Hauptquartier des Oberkommandos der Luftwaffe befand sich in dem nur ca. 15 km Luftlinie entfernten Objekt zwischen Großem Entenfängersee und dem Großen Entenfängerberg sowie auf und unter diesem. Bunkeranlage 'Großer Kurfürst' mit 3000m^2. 4 Kegelbunker 1936-39 für je 300 Personen. 1943 bis 13.3.1945 Särge von FWI und FII und Hindenburgs mit 200 Standarten. Dann nach Nordhausen/Berdrode. 1945 Rote Armee. 1956 NVA Hauptquartier Landstreitkräfte 1972 Stechbarth. Das Objekt wurde als Luftkriegsschule 3 Wildpark-Werder/Havel legendiert. Campus und Flugplatz der LKS 3 wurden aber in den Großen Havelwiesen westlich des Großen Zernsee zwischen dem Bahnhof Werder/Havel und der Brücke der Reichsautobahn über die Havel = Großer Zernsee im Verlauf des westlichen (damals unvollendet gebliebenen) Berliner Ring bei Phöben ab 1935 gebaut. Ab 2001 Einsatzführungskommando der Bundeswehr im Ausland. Selbsterhebung des eitlen, unmoralischen **Kurfürst FIII** 1657/88/01-1713 zum **König FI** mit korruptem Hofstaat, der sich an der Staatskasse bediente. 2. Frau **Sophie Charlotte** 1668/84-1705, 3 Kinder, war ihm kulturell und moralisch überlegen, was Enkel FII prägte, **Christian Freiherr von Wolff** 1679-1754 Uni Halle 1694, Schloss Lietzenburg = Lützenburg 1699 = Schloss Charlottenburg 1712; Scharmann: Schloss Charlottenburg. Königliches Preußen in Berlin 2003; Narskij: Leibniz. Grundzüge seine Philosophie 1977; Leibniz Akademie, Kalender-Monopol 1700, Fortuna-Portal 1701, Pesthaus 1709 = Charite = Barmherzigkeit FI lässt im Berliner Stadtschloss **Bernsteinzimmer** errichten, das FWI 1716 PeterI dem Großen schenkt. **Tolstoi: PeterI** 1672-1682-Großfürst-1721-erster Kaiser = Zar-1725, Erst 1743 durch Zarin Elisabeth in Petersburg wiedererrichtet, nach Raub 1942 im Königsberger Schloss, wo es 1945 verbrannte. 2003 in Petersburg rekonstruiert. **Potsdam, Residenz der Könige von Preußen (1701–1918), Residenz des Deutschen Kaisers von 1871 bis 1918**, Postordnung, Potsdamer Straßen zB zur Fasanenerie. FWI 1727. Theatrum anatomicum. Collegium medico-chirurgicum auch zur Ausbildungsstätte von Militärärzten. DER Pathologe: Rudolf Virchow1821-1902 Jeden Tag ein Präparat! Zellpathogenese vs Bismark, Hermann von Helmholtz, Robert Koch1843-1910 Tuberkulin, Paul Langerhans, Paul Ehrlich und Emil Adolf von

Behring1854-1917 Diphterie = Retter der Kinder und Soldaten. Begründer medizinischer Spezialgebiete wie Ferdinand Sauerbruch1875-1951 Demenzfehler, Ernst von Bergmann aus Riga 1836-1907 Chirurgie, Wilhelm Griesinger, Albrecht von Graefe, Heinrich Schulte, Otto Heubner, Caspar Friedrich Wolff, Karl Bonhoeffer, Heinrich Adolf von Bardeleben, Hans Erhard Bock, August Bier, Friedrich Kraus, Walter Stoeckel. Schöpfer der **Kasernenstadt = Garnision-Stadt Potsdam: FWI Soldatenkönig: Vermeide den Krieg, denn er ist zu teuer!** 1688/1713-1740 macht Potsdam mit der 1. Stadterweiterung 1722 und der 2. Stadterweiterung/Holländerviertel 1733 zur Kaserne mit **Zopf**gierlanden. Bauer, Knitter, Ruppert: Vernichtet, vergessen, verdrängt. Militärbauten und militärische Denkmäler in Potsdam 1993; Fauler See = Wilhelmplatz = Platz der Einheit. Vom Heiligen See über Schwarze Rinne durch Stich'sche Wiese und längs Roonstr = Hans-Thoma-Str/Junker=Gutenbergstr zum Bassinplatz = Hitlerplatz. Schulze-Wegener: Albrecht von Roon. Kriegsminister, Generalfeldmarschall, Ministerpräsident 2011; **Sophie Dorothea** 14 Kinder auf Schloss Monbijou ab 1712, FWI Abneigung gegen Künstler und Gelehrte, Gundling1673-1731, baut Potsdam in eine Garnison um = **Soldatenstadt** = Straßen und Häuser in militärischer Anordnung. Stadtmauern mit engmaschigen Posten, um den Söldner-Soldaten die Flucht schwer zu machen. Strenge Sparsamkeit, Koch wird wegen Diebstahl enthauptet. Staatshaushalt auf 20% durch Abschaffung der Ämter, Bedienstete bekommen 30%. Ihr sollt mich nicht lieben, sondern fürchten, 1. Stadterweiterung 1718, Garnision-Plantage = Sumpfloch mit Maulbeerbäumen, Linden versanken, Exerzierplatz 1720, Gr Militär-Waisenhaus 1722 + Menopterus 1774, Heilig-Geist-Kirche 1726, Jägertor 1733, Langer Stall = überdachter Exerzierplatz = 21x166, Garnisonkirche 1734 Kitschke: Die Garnisonkirche - Krone der Stadt und Schauplatz der Geschichte 2015; Grünzig: Der Ungeist von Potsdam DIE ZEIT Nr. 15 v. 31.3.2016 p15f oder Die Garnisonkirche im 20. Jh 2017, 2. Stadterweiterung 1737. von Helmholtz: Philosophische Vorträge und Aufsätze 1971 Hörz1933- & Wollgast1933-2017; **Grande Ecole 1739** Kleistschule Gymnasialteil in Kurfürstenstr 1878 **Victoria-Gymnasium**: Helmholtz1821-1894 Vater Direktor 1843-48 Militärarzt in Potsdam, Über die Erhaltung der Kraft, 1850-58 Königsberg Augenspiegel, Farbempfinden, 1855-58 Bonn Physiologie, 1858-70 Heidelberg Physiologie Orgelpfeifen, ab 1870 Magnus-Nachfolge in Friedrich-Wilhelms-Uni 1828-1945 wegen Gründer FWIII, Dorothea Goetz: Hermann Helmholtz über sich selbst 1891 1966; Jacobi1804-51 Vater jüd Bankier in Beelitz, bis 1821 Grande Ecole, 1812-1822 Juden mit Bürgenrechten, Berliner Uni Mathe-Selbstudium Eulen, Lagrange, Laplace, und Hegel in Prüfung, konvertiert zwecks Anstellung, 1825/26 VL Diffgeometrie 1826-43 ellipt Fkt = doppeltperiodisch als Spezialfall komplexer Funktionen, Königsberg mit Bessel, Franz Ernst Neumann1798-1895, Diabetes 1849 Revolutionsvortrag/Ungnade FWIV, Schönherr, Tomalla, Schuke. Bernhard Kellermann 1879-1951 Der Tunnel 1913, Der neunte November 1829; Adolf Miethe 1862-1926 Fotochemiker, Teleobjektiv. 1725 Burg-Kauper, 1754 Burg-Kolonie. Rauprecht: Burg-Kauper und Burg-Kolonie. Die neuen Dörfer der Preußenkönige 2016; von Krockow: Rheinsberg. Ein preußischer Traum 1990; Lavater-Sloman: Der vergessene Prinz 1973 August Wilhelm, Prinz von Preußen, 1722-58 Vater von FWII, Bruder Friedrichs des Großen 1973; Pangels: Königskinder im Rokoko. Die Geschwister Friedrichs des Großen 1976, 1978[3]; Neubert: Und wenn der Zügel reißt ... 1986; Jessel: Schlösser und Amouren. Preussische Liebesgeschichten 2005; du Bois-Reymond: FII in englichen Urtheilen. Darwin und Kopernicus. Die Humboldt-Denmäler vor der Berliner Uni 1884; **Jungmann: Sachsens Glanz und Preußens Gloria** 2012; 6teilige DDR-Fersehserie, Regie Kasprzik 1985+1987 DVD 2013; Kraszewski 1812-1887 Friedrich August I. von Sachsen = **August der Starke** 1670-1733 = August II. König von Polen-Litauen. Sohn: Friedrich August II. 1696-1763 August III. auch König von Polen und Großherzog von Litauen. Gräfin Cosel (1680-1765), Graf Brühl 1700-1763, Aus dem Siebenjährigen Krieg; Dieter Hildebrandt: **Chrislob Mylius**. Ein Genie des Ärgernisses 1722-54, 1981; **FII Der Große** 1712/40-1786 Antonius a] der Große 251-356 = christlicher ägyptischer Mönch, Asket und Einsiedler = Vater der Mönche = Wenn du vollkommen sein willst, geh, verkauf deinen Besitz und gib das Geld den Armen; so wirst du einen bleibenden Schatz im Himmel haben; dann komm und folge mir nach! (Mt 19,21), b] Marcus Antonius 83-30vChr machte zunächst als Anhänger Gaius Iulius Caesars Karriere, wurde nach dessen Ermordung 44 v. Chr. einer der mächtigsten Männer Roms und schloss mit Octavian (dem späteren Kaiser Augustus) und Marcus Aemilius Lepidus das zweite Triumvirat. 42vChr schaltete er die Partei der Caesarmörder aus und verwaltete seither den Osten des Römischen Reichs. Als Geliebter Kleopatras geriet er trotz zeitweiliger Versöhnung in immer schärferen Gegensatz zu Octavian. Dies führte schließlich 32vChr zum offenen Krieg und 31vChr zur entscheidenden Schlacht bei Actium. Ein

knappes Jahr nach ihrer Niederlage töteten sich Antonius und Kleopatra selbst. Damit war Octavians Weg zur Alleinherrschaft über Rom frei. **Küstrin, Rheinsberg, 1. Schlesischer Krieg** = österreichischen Erbfolgekrieg 1740/42, Hume1711-76: Ein Traktat über die menschliche Natur 1740. Zwinger siehe PhysBl 26 1970 109ff; 2. Schlesischer Krieg = Böhmen, Friedensschluss in Dresden. Piano-forte, 15 Silbermann-Pianos im Stadtschloss, Carl Philipp Emanuel Bach1714-88, 1738-55 Hofkapellmeister an Friedrichs Hof, Der Critische Musicus an der Spree. Berliner Musikschrifttum 1748-1799 Reclam 1984. Residenz Schloss Charlottenburg = Großmutter Sophie Charlotte, Berlin/Potsdam als geistig/kulturelles Zentrum, Euler in Berlin, Behrenstraße 21/22, heutiges Haus der Bayerischen Vertretung 1741-66 Nachfolger bis 1786 war Lagrange, Judenberg mit Friedhof 1743, Grab 1744, Zwecks unbelauschbarer Gespräche unbewachter Park mit Sanssouci mit westl **Neuen Kammern** als Orangenhauses 1745/47. Umbau zum Gästeschloss **Blaue Galerie** = 1. Galerie mit Schein-Lapislazuli, Ovaler Saal = Buffetsaal = 1. Saal, **Ovidgalerie** = Grüne Galerie = 2. Galerie 1774 höfisch-festliche Leichtigkeit, 14 vergoldete Reliefdarstellungen der Metamorphosen nach **Ovid43-17** in Spiegelgalerie. **Jaspis-Saal** = Agathene = durchscheinender Marmor = 2. Saal 1768 mit Hippokratis, Epikur, Plato, Seneca, Sokrates, 7 Gäste/Schlafzimmer: Grünes Lack-Kabinett, Großes Intarsienkabinett. Museum ab 1924, 1963 wegen Baufälligkeit geschlossen. Polnische Handwerker restaurieren bis 1987. Details dazu siehe Schendel, Przyfanski, Powidzki, Otrzasek, Mückenberger, Polak: **Die Neuen Kammern im Park Sanssouci** 1987; Orangenhaus 1745-47, Umbau als Gästehaus 1771-74. 1. **Apollo unterliegt im Wettstreit um die Treffsicherheit ihrer Pfeile Amor, dem Liebesgott**. Von dessen Liebespfeil getroffen, entbrennt Apollo in Liebe zur Nymphe Daphne, die jedoch vor ihm flieht. Apollo lässt nicht nach und holt Daphne schließlich nach wilder Verfolgungsjagd ein. Auf ihr Flehen hin, wird sie von ihrem Vater, dem Flussgott Peneios, in einen Lorbeerbaum verwandelt. Apollos Liebe bleibt unerfüllt. Als Ausdruck seiner Bewunderung und Zuneigung lässt Apollo Daphne in Form des Lorbeerkranzes fortan Ehre und Triumph verkörpern. 2. **Apollo überrascht Venus mit ihrem Geliebten Mars** und erzählt anderen Göttern davon. Venus rächt sich an Apollo, indem sie ihn sich in Leucothoe verlieben lässt, die Tochter des Königs Orchamus und Schwester der Clytia. Die in Apollo verliebte, eifersüchtige Clytia berichtet ihrem Vater von der Liebschaft. Um die Schande der Schwangerschaft Leucothoes zu verbergen, lässt der strenge Vater Leucothoe lebendig begraben. Als Apollo, abgestoßen von deren Verrat, Clytia erneut zurückweist, setzt sich diese nackt auf einen Felsen, beklagt ihr Unglück, nimmt keine Nahrung mehr zu sich und starrt in die Sonne, bis sie sich nach neun Tagen in eine Blume verwandelt, deren Blüte sich täglich neu nach Apollos Sonnenwagen dreht. 3. **Apollo und Isse** ist eine selten dargestellte Episode aus den Metamorphosen. Ovid erwähnt sie auch nur im Zusammenhang mit dem Wettstreit zwischen der Göttin Athena und der Weberin Arachne. Von ihrer eigenen handwerklichen Perfektion überzeugt, fordert Arachne die Göttin zu einem Wettstreit in der Webkunst heraus. Der von ihr gewebte Teppich ist selbst in den Augen Athenas perfekt. Doch da sie sich über die in den Teppich gewebten Darstellungen erotischer Abenteuer von Jupiter, Neptun, Bacchus und Saturn ärgert, verwandelt Athena die übermütige Weberin in eine Spinne. 4. **Adonis Schönheit** ist so betörend, dass sich nicht nur Proserpina, die Göttin der Unterwelt und einige Nymphen, sondern sogar die Liebesgöttin Venus in Adonis verlieben. Venus warnt den jungen Jäger Adonis vor den gefährlichen Tieren, doch trotz dieser Warnung jagt Adonis einen wilden Eber, der ihn tödlich verletzt. In großer Trauer um ihren Geliebten lässt Venus aus Adonis' Blut das Adonisröschen wachsen. Fortan verbringt Adonis einen Teil des Jahres im Reich der Unterwelt, den anderen, kürzeren Teil im Reich der Lebenden. 5. **Bacchus und Ariadne** Gegen sein Eheversprechen hilft Ariadne dem Helden Theseus den Minotaurus zu töten. Auf der Rückreise nach Athen lässt **Theseus** Ariadne aber schlafend am Strand der Insel Naxos zurück. Bacchus findet die Schlafende, verliebt sich und heiratet sie. Ihr Diadem schleudert er in den Himmel, wo es zum Sternbild der Nördlichen Krone wurde. Nach Ariadnes Tod holt Bacchus sie in den Olymp. 6. **Metamorphose** = **Verstirnung** = Verwandlung in ein Sternbild, verdeutlicht durch den Sternkreis am Himmel. 7. **Jüngling Hyacinthus ist der Geliebte Apollos** und so schön, dass auch der Westwind Zephyrs sich in ihn verliebt. Eifersüchtig auf Apollo lenkt dieser bei einem sportlichen Wettkampf den Diskus des Apollo derart, dass Hyacinthus tödlich am Kopf getroffen wird. Aus dem Blut seines Geliebten lässt Apollo eine Hyazinthe sprießen. 8. **Pomona, Göttin des Obst- und Gartenbaus, möchte von Männern nichts wissen** und verbietet daher jedem Mann den Zutritt zu ihrem Garten. Vertumnus, Gott der wandelnden Jahreszeiten, in Liebe zu Pomona entbrannt, verwandelt sich in unterschiedliche Gestalten, um Pomona nah zu sein und „zu genießen die Lust der

betrachteten Schönheit.“ Er versucht als Schnitter, Kriegsmann, Fischer oder Winzer die Aufmerksamkeit der Göttin zu erlangen – alles vergebens. Erst als Vertumnus in Gestalt einer alten Frau die tragische Geschichte einer aus Hartherzigkeit gescheiterten Liebe erzählt und Pomona seine eigene Gestalt offenbart, gewinnt er Pomonas Zuneigung. 9. **Perseus, Sohn des Zeus und der Danae**, hat gerade seine ersten Abenteuer bestanden, das Haupt der Medusa abgeschlagen und den Titanen Atlas zum Atlasgebirge versteinert. Auf dem Rückweg entdeckt er eine an einen Felsen gekettete junge Frau, Andromeda, die dem Meeresungeheuer Ketos geopfert werden soll, weil ihre Mutter durch Prahlerei den Meeresgrotte Poseidon erzürnt hat. Perseus rettet Andromeda mit Hilfe des Medusenhauptes und erhält sie zur Frau. Das Relief zeigt Perseus und Andromeda unmittelbar nach deren Befreiung. Das Medusenhaupt trägt Perseus von Andromeda abgewandt. Durch den Blick des Medusenhauptes beginnt sich das Blut des getöteten Ungeheuers in Korallen zu verwandeln. 10. **Die wegen ihrer Schönheit von Freiern bedrängte Theophane** wurde von Neptun auf eine Insel entführt und in Gestalt eines Widders verführt, worauf sie Chrysomallos gebiert, den Widder, dessen Goldenes Vlies zu stehlen die Argonauten einst auf Fahrt gehen sollten. 11. **Jupiter/Zeus** nähert sich Antiope in Gestalt eines Satyrs. Aus dieser Liaison werden die Zwillinge Zethos und Amphion hervorgehen, die später über Theben herrschen werden und die seit Euripides als Verkörperung des praktischen und theoretischen Lebens gelten. 12. **Um Leda**, Gemahlin des spartanischen Königs Tyndareos, zu verführen, nimmt Jupiter die Gestalt eines Schwans an. Aus dieser Verbindung geht unter anderem Helena hervor, deren Entführung später Auslöser für den Trojanischen Krieg sein wird. 13. **Die keusche Nymphe Kallisto**, eine der Gefährtinnen der Jagdgöttin Artemis, erweckt durch ihre Schönheit die Begierde Jupiters. In Gestalt der Artemis gelingt es Jupiter, Kallisto zu verführen. Artemis reagiert zornig auf die Schwangerschaft Kallistos und verstößt sie. Auch Jupiters Gemahlin Juno ist eifersüchtig und verwandelt Kallisto in eine Bärin, die später beinahe durch die Hand ihres eigenen Sohnes Arkas getötet wird. Um dies zu verhindern, versetzt Jupiter Kallisto und Arkas unter die Sterne, wodurch die Sternbilder Großer Bär und Kleiner Bär entstehen. Die Darstellung in der Ovidgalerie zeigt den verwandelten Jupiter in zärtlicher Berührung mit Kallisto. Am Baum hängen Köcher und Bogen, Attribute Artemis'. 14. **Erigone** ist die Tochter des Weinbauern Ikarios, der im Auftrag des Weingottes den Weinbau in Attika verbreitet. Bacchus verführt sie mit süßen Trauben. 15. Akrisios, König in Argos, wurde von einem Orakel prophezeit, er werde durch die Hand seines Enkels sterben. Deshalb sperrt er seine Tochter **Danae** in ein Verlies, doch Jupiter, der Danae begehrt, kann das nicht aufhalten. Verwandelt in einen Goldregen verschafft er sich Zugang und vereinigt sich mit ihr. Aus dieser Verbindung geht **Perseus** hervor, der seinen Großvater später unbeabsichtigt mit einem Diskus töten wird. Kobe: Neue Kunst in den Neuen Kammern 2008; **Plöger/Marmorrondell/Rehgartenkolonnade:** Google storyofpotsdam der-plogersche-gasthof-und-seine-figuren. NO Mänade mit Thyrosstab und Blumenkranz, SO Silen mit Tierkeule, SSO Flötenspielende Jüngling, SSO Ceres mit Ährenbündel, SSW Bacchant mit Korbflasche und Pokal, SWW Ganymed mit Amphora, NWW Pomona mit Früchten, NW Tanzende. **4 Froschfontäne** nordl: NO Andromeda an einem Fels geschmiedet, SO Adonis mit Hund und Jagdfalken, SW Flora mit Füllhorn? Kranz, NW Flötenspielender Faun/Pan. **Dresdener Fontäne** südl: NO Diana/Artemis mit Hirschkuh, SO Römischer Feldherr mit schildhaften Löwen, SW Pluto, NW Silen/Silenus = Mischwesen aus Mensch + Pferd mit Bacchusknaben. **4 Entführungsrondell:** Römer und Raub der Sabinerin, Entfg der Helena/Helen durch Paris mit Helm, Die Entfg der Ariadne durch Bacchus/Dionysos unten Gepard, Die Entfg der sitzenden, nach oben gewandten Proserpina/Persephone duch Pluto, Schaf. **8 Musenrondell:** NNW Terpischore Tambarin = Muse des Tanzes, NNO Euterpe = Muse der Lyrik und des Flötenspiels, NOO Polyhymnia = Muse der Hymnendichtung mit Schriftblatt, SOO Kaliope/Calliope mit Buch, aus dem Flamme schlägt und Schreibgriffel = Muse des heroischen Gesanges und Heldendichtung, Rhetorik, Philosophie, epische Poesie, SSO Clio mit Buch und Schreibfeder = Muse der Geschichtsschreibung, SSW Erato mit Blasinstrument, fünfseitiger Lyra und Helm = Muse des Liebesliedes, SWW Tahlia mit Kastagnetten, Schriftrolle und Messinstrumenten = Muse der Lustspieldichtung, NWW Melpomene mit Buch, Krone und Dolch = Singende Muse der tragischen Dichtung und des Trauergesangs. Corradini-Vase. **8 Glockenfontäne** drastisch, westl Franz Fontäne: Blick Neue Kammern: NNW Herkules und Antaneus, NNO Pluto und Prosperina/Persephone, NOO Bacchus/Dionysos mit Füllhorn, SOO Flora mit Strauß, SSO Bacchus/Dionysos und Ariadne, SSW Paris (Helm) und Helena, SWW Apollo mit Himmelskugel, Asmus Frauen, NWW Antinous, Asmus Frauen. 1750 **franz Figurenrondell** mit 12 Figuren von Pigalle und Adam, **Statuen der**

4 Elemente und **8 Götter:** NNO **Merkur/Hermes** mit Flügelhut und Flügelschuhe, Kerykeious, Gott der Diebe, des Handels und der Reisenden. Götterbote, Sohn des Jupiter und der Nymphe Maia, Vater des Pan, des Daphnis, des Hermaphroditos, des Abderos und des Autolykos, NO **Wasser** = Zwei Nereiden ziehen ein Netz mit Fischen und dem Tritonknaben aus dem Wasser, NOO**Apollo** = Gott der Poesie mit getötetem Python, SOO **Diana/Artemis** = Göttin der Jagd und des Mondes, im Bade mit liegendem Hund rechts am Bein, SO **Feuer** = Venus betrachtet den von Vulkan für Aeneas geschmiedeten Schild, SSO **Juno/Hera mit Pfau** = Göttin der Geburt und der Ehe, Gattin Jupiters und damit Königen der Göttinnen, Attribut der Eitelkeit, SSW **Jupiter/Zeus** = Vater der Götter und Menschen und Io, die Zeus in eine Kuh verwandelte, um Juno-Zorn zu vermeiden, SW **Erde** = Ceres/Demeter lehrt Tripommus das Pflügen, SWW **Mars/Ares** = Gott des Krieges, wallende Kleidung und bellender Hund an der linken Seite, NWW **Minerva/Athena** = Göttin der Weisheit mit Helm, Eule und Schild und Grenzstein, NW **Luft** = 2 Nymphen mit erlegtem Reiher, NNW **Venus/Aphrodite** auf einem Fels sitzend, rechts zwei Tauben = Göttin der Liebe und Schönheit, Tochter des Jupiter, Adoptiv-Tochter von Dione, Gemahlin des Vulcanus/Hephaistos. Vor Tritonbrücke stand 1742-1865 Kunstförderer aus dem Hause der Medici **Herzog von Bracciano bei Rom** = Paolo Giordano II 1591-1646 hatte Umgang mit Monteverdi und Galilei. 1865-1927 hier Reiterstandbild von FII, jetzt unterhalb Jubiläumsterrasse. **Je zwei Brunnenwände** von 1848: NO Polyhymnia = Lyra, Tanz, Musik. SO Euterpe = Tragödie, Doppelflöte. SW Urania, NW Klio Geschichtsschreibung. **4 Marmorsäulen 1843/51:** NW Venus von Medici Uffizien. SW Mädchen mit Vogelnest. NO Apollonio 1J 4.JhvChr. SO Bacchant. **8 Kleine Fontäne mit Oranienrondell** östl Franz Fontäne: NNW **Kurfürst Friedrich Wilhelm** von Brandenburg, NNO Kurfürstin Louise Henriette, NOO Philipp Wilhelm Prinz von Oranien, SOO Prinz Wihelm II von Oranien, SSO Maria Stuart-Prinzessin von England, SSW Amalia-Prinzessin von Solms Braunfels, SWW Moritz Prinz von Oranien, NWW Friedrich Heinrich Prinz von Oranien. Im Süden Caritas. **6 Mohrenrondell:** Südseite Titus Vespasianus, Nordseite Marc Aurel/Marcus Aurelius. **Westl Obeliskportal 12 Marmorbüsten: Jüngling, Julia Domna** aus Syrien = zweite Frau des römischen Kaisers Septimius Severus 146/193–211 und die Mutter der Kaiser Caracalla 188/211–217 und Geta 189/211, **Commodus** 161/180-192 = Sohn von Mark Aurel, **Satyr** = Dämon im Gefolge des Dionysos. Satyrn gehören zu den Mischwesen der griechischen Mythologie. Sie treten relativ spät erst am Ende des 7. Jahrhunderts vChr auf; als Einzelfigur hebt sich vor allem Silenos ab. Man unterscheidet die Silene (Silenoi, ältere Satyrn mit dicken Bäuchen und Glatze) und Satyrisken (Satyriskoi, jugendliche und kindliche Satyrn), wobei in der bildlichen Darstellung häufig nicht eindeutig unterschieden werden kann. Von römischen Dichtern werden sie mit den Faunen identifiziert. nach Hesiod sollen sie von fünf Töchtern des Hekateros abstammen. Sie vertraten das männliche Prinzip gegenüber den Nymphen. Als ähnliche Naturgeister trugen sie Attribute des 'Allgottes' Pan ebenso wie manche des Priapos. Ihr Name bedeutete in einem Dialekt des alten Peloponnes 'die Vollen', was sich sowohl auf ihren Körperbau als auch auf den erotisch erregten Zustand bezog. Die Satyrn und Silene sollen als Truppe des Dionysos in der Gigantomachie gekämpft haben und mit dem Geschrei ihrer Esel die Giganten in Furcht und Schrecken versetzt haben. Ausgelassene, schalkhafte Begleiter des Bacchus. Menschl Gestalt, tierhafte Ohren, Schweif, Pferdefuß, **Römer, Diana, Jupiter, Jüngling, Galius Julius Cäsar** 100-44, **Marc Aurel** 121/161-180, **Römer, Römerin**. Danaiden = 50 Töchter des Danaos, die gegen ihren Willen 50 Söhne des Aigypton heiraten mussten und mit einer Ausnahme ihre Männer in der Brautnacht töteten. In Unterwelt mussten sie mit Sieb Wasser in Fass schöpfen = Symbol für die Vergeblichkeit menschlichen Bemühens. Najade = Quell/Flussnyphen. Google: Sanssouci allgemeine Übersicht. Krassnoff 1869-1947 **Katherina die Große** 1937, *1729 Sophie Friederike Auguste von Anhalt-Zerbst, 1744 Ekaterina Alekseevna, 1745 PeterIII, 1762 KII, †1796; **Hüneke, Gärtner, Sander: Bauten und Plastiken im Park Sanssouci** 2002[2]; **Hoffmann, Hüneke, Hendrik: Bauten und Plastiken im Park Sanssouci** 1991; Eckhardt: Verzeichnis der Bauten und Plastiken im Park von Sanssouci 1973; **Frahm & Streidt: Potsdam. Die Schlösser und Gärten der Hohenzollern** 1996; **Seiler, Wacker, Kiessling: Insel Potsdam. Ein kulturhistorischer Begleiter durch die Potsdamer Parklandschaft** 1991; Cyran: Der König. Die schlesische Reise des Henri de Catt 1985; **Cyran: Sanssouci. Traum aus dem Sand** 1991[4]; Cyran: Preußisches Rokoko. Ein König und seine Zeit 1993; Cyran: Des Friedrich Freiherrn von der Trenck

merkwürdige Lebensgeschichte. Memoiren und Historie 1787, 1986; Deuerlein: Potsdam 1945. Ende und Anfang 1970; Giersberg & Knitter: Tourist Stadtführer-Atlas 1978, 1985[5]; Schulte, Brandt, Köhler: 1000 Jahre Potsdam. Blätter aus der Stadtgeschichte Bd1 1987; Bd2 1989; Grabner & Kiesant: 1000 Jahre Potsdam. Das Buch zum Stadtjubiläum mit dem Festprogramm 1992; Strubel: Gebrauchsanweisung für Potsdam und Brandenburg 2012; **Vossen: Sanssouci. Ein Schloss, ein Park, ein König und seine Hunde. Museum für Kinder** 2010 p16 Betender Knabe; Fischbacher: Des Königs Knabe. F der Große und Antonius 2011; Hüneke: Bauten 2002[2] p7, 19, 113, 125; **Dorgerloh: Die Schönste der Welt, eine Wiederbegegnung mit der Bildergalerie Friedrichs des Großen** 2013 Haus11 LK 61370 DOR. **Bartoschek & Murza: Die Königlichen Galerien in Sanssouci** 1994; Triumph der Galateia = Milchweiße = Nymphe der griechischen Mythologie = eine der Nereiden = eine Tochter des Nereus und der Doris. Dem Kyklopen Polyphem verbunden, Mutter eines Knaben namens Galatos, wurde aber von dem Hirtenknaben Akis geliebt. Der eifersüchtige Kyklop erschlug den Liebhaber, worauf die Nymphe aus Mitleid das strömende Blut des Knaben in einen Fluss verwandelte. Die Liebe des Polyphem zu der schönen Nymphe wurde bereits in der Antike vielfach gestaltet. Odysseus versucht dem liebeskranken Kyklopen einzureden, er, Odysseus, sei ein Zauberer, und es sei ihm ein leichtes, die spröde Galateia in ein williges Lustgeschöpf zu verwandeln. Nur müsse Polyphem den Steinbrocken, der den Höhleneingang versperrt, beiseite räumen, damit Odysseus sich zu Galateia begeben könne. Unterdessen solle Polyphem ein wenig aufräumen, sich parfümieren und bekränzen. Polyphem fällt allerdings nicht auf den Trick herein. Nach Athenaios besaß diese komische Geschichte einen tragischen Hintergrund. Das Werk des Philoxenos, der Kyklops, entstand Athenaios zufolge als Satire auf Dionysios, Tyrann von Syrakus, in den Steinbrüchen Siziliens. Ursprünglich seien Tyrann und Dichter Saufkumpane gewesen. Doch als Philoxenos eine Liebschaft mit einer Tochter des Dionysios namens Galateia begann, wurde er zum Steineklopfen geschickt. Die Schöne und das Biest auf der einen Seite den liebeskranken Kyklopen, am ganzen Körper behaart und mit Hauern bewehrt, der sich mit sentimentalem Flötenspiel tröstet und darüber Herden und Welt vergisst und sich seiner Geliebten zuliebe sogar des Menschenfressens enthält, auf der anderen Seite die weiße, strahlenden Galateia, die eine Quadriga von Delphinen vor sich her über die Wogen des Meeres jagt. Raffaels Galatea fährt unbehelligt durch den Tumult aus Liebenden und Liebesgöttern, ihr Blick in höhere Sphären gerichtet. Die Liebe, die sie wollte, ist zerschmettert, die Liebe, die ihr von Polyphem angetragen wird, verschmäht sie. Doch Raffaels ‚Triumph der Galatea' macht aus der abweisenden Haltung der Nymphe kein trotziges Verweigern oder eine wilde Flucht, sondern zeigt sie vom Treiben um sie herum völlig unberührt, sie scheint das Getümmel nicht einmal wahrzunehmen, während ihre Gedanken ganz offensichtlich an einem anderen Ort sind. Am linken und rechten Bildrand verkünden derweil zwei Meereswesen mit ihren Instrumenten den Ruhm der Seegöttin. Gibt es etwas Höheres als Liebe? Jedenfalls etwas Höheres als die grob zupackende Liebe, die Galatea umgibt, das macht Raffaels Fresko klar. Das Festhalten an einer unmöglichen, rein geistigen Liebe muss keine fixe Idee, keine abwegige Schrulle sein, auch sie hat eine Berechtigung. Ist Raffaels ‚Triumph der Galatea' also eine Verherrlichung der platonischen Liebe? Das Werk lädt nicht zu einseitiger Interpretation ein, doch es hat eine klare Botschaft: Zu welcher Art Himmel man auch aufschauen möchte — die Erde ist nicht der einzige Ort, an dem geliebt wird. Und jedenfalls nicht der höchste. **Fühmann: Irrfahrt und Heimkehr des Odysseus. Prometheus. Der Geliebte der Morgenröte ua Erzählungen** 1980; Günther: Gehölze in den Gärten von Sanssouci. Dendrologischer Führer 1984; Fischer & Gyßling: Bäume in Potsdam. Ein Begleiter durch Parks und Geschichte 2015; **Voltaire** 1694-1750/53-1778, spricht nur mit Gesindel und Pferden deutsch, wohnte nach Jean-Baptiste de Boyer = Marquis d'Argens = Kammerherr des Königs, Direktor der Historisch-philologischen Klasse der Berliner Akademie der Wissenschaften, sagte FII, dass seine Gegenerin Maria Theresia die unzüchtigen Bilder ihres Mannes auf dem Kunstmarkt entsorgte, was FII veranlasste, diese Bilder im Neuen Palais auszustellen, Schriftsteller, Philosoph 1703-71 und vor Lessing im Marquisat = Alte Luisenstr 23/24= Zeppelinstr 167, Cecile und Louis XIV, Ignorierte Zeitgenossen: Moses Mendelsohn1729-86 FII lehnte seine Aufnahme in Akademie ab, Friedrich Nicolai1733-1811, Musäus1735-87. Französische Kirche 1752, Bach: Musikalisches Opfer, Achatius Daniel Lindstedt liefert Kaninchen und Karpfen, Neustedter Tor, Friedrichskirche, **Kabinetthaus 1753** = Residenz des Kronprinzen FWII dort WvHumboldt1767 und **FWIII**1770 geboren. Altes Rathaus von Bowmann /Hildebrandt mit Atikafiguren Wachsamkeit Standhaftigkeit Überfluss Gerechtigkeit Handel Vorsicht, Bäcker Windelbach-Haus, Knobelsdorff/Lehmannhaus mit

Flora, Vertumnum = Jahreszeiten, Pomona, Nauener Tor 1754/55, Erdbeeben von Lissabon, Theodizee 1755 Voltaire: Candide = oder der Optimismus= rasende Tollerei=Anti-Theodizee 1759, Teehaus 1754/57, Kant: Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels oder Versuch von der Verfassung und dem mechanischen Ursprunge des ganzen Weltgebäudes nach Newtonischen Grundsätzen abgehandelt, die dt Kultur geht an FII vorbei, da er kaum dt lesen kann, übersieht die dt Denker und Dichter, kennt nur Voltaire, der Leibniz und Newton popularisiert. östl **Bildergalerie**, Gewehrfabrik 1755, 3. Schlesischer Krieg. Einmarsch Sachsen 1756-1763 = Hubertusburg, 550,000 Tote Soldaten, davon 180,000 preuß Soldaten, 320,000 tote preuß Zivilisten, Triangelplatz in Colonie Nowawes der Königlichen Kriegs- und Domainenkammer zu Potsdam 1759; Neues Palais mit Ringgraben und 4 Brücken, Möbel aus Schildpatt = Bissa =Schildkrot = Schildpadde flache Hornschuppen = Scuta des Rückenschildes = Carapa = von drei Arten von Meeresschildkröten, Hüneke vor NP Skulpturen am Neuen Palais: Mytholog Programme vor FII-Zimmer Herkules ohne Keule mit Diadem, weil er ungerechtfertigt einen jungen Mann tötet dient er Omphale mit Wolle spinnen, vergisst, wer er ist = Infragestellung der eigenen Persönlichkeit 1763-69, **Kirschstein: Das Neue Palais in Potsdam. Familienidyll und kaiserlicher Glanz** 2017; Heidrun **Liepe: Neues Palais** 2003 Gang durch unteres Fürstenquartier: Vestibül, Grottensaal, Tamerlanzimmer, Rote Damastkammer kurzer Blick ins Kleine Schlafzimmer FIII(+) auf nördlicher Ehrehofseite, dann weiter auf nördlicher Gartenseite Tressenzimmer Konzertzimmer. Treppe/Aufzug hoch zum Ankleidezimmer mit Wanne, Großes Schlafzimmer WII, Jagdzimmer 1864-1888 Wohnung FIII/Victoria/Vicky = Schlossmodernisiererin, 1888-1918 Kaiserin Auguste Victoria/WII = Kirchenjuste, Blick nach Norden durch Konzertzimmer ins Frühstückszimmer = 31.7.1914 WII Kriegserklärung, weiter nach süden: Grüne Damastkammer, Große Kammer mit Medea und Jasons toten Kindern, Die Schauspielerin Claire Clairon als Medea in der Tragödie Médée von Longepierre, gemalt von Carle van Loo, 1759, Marmorsaal, oberes Vestibül. Röhl: Wilhelm II. Bd1 Die Jugend des Kaisers 1859-1888, Bd2 Der Aufbau der Persönlichen Monarchie 1888-1900, Bd3 Der Weg in den Abgrund 1900-1941 1993-2008; Attika-Figuren auf dem barocken Bürgerhaus von 1783 in Charlottenstr. 100 sind Motive aus dem Theaterleben: Elegie, Komödie, Tragödie, Ode. **Ökonomieweg** ab 1790 Hüneke p23 Reitbahn, Treillage = Laubengang, Zeus/Leto Zwillinge Artemis = Göttin der Jagd, des Waldes, des Mondes und die Hüterin der Frauen und Kinder, und Apollo = Gott des Lichts, der Heilung, des Frühlings, der sittlichen Reinheit und Mäßigung sowie der Weissagung und der Künste. Bronzefiguren standen von 1827 bis 1855 im Halbrondell vor dem Neuen Palais. Zwischen den Figuren stand eine kollossale Zinkvase 1855-1927. **Palaisgraben** wurde gemäß Drescher & Kroll: Potsdam 1878/81 zugeschüttet. Wolga-Deutsche 1763-67 geworben durch KatharinaII 1729-62/96 und PeterIII 1728-61/62, Lordmarschallhaus Georg Keith 1764, Stadtkanalbrücke 1765, 700m 2reihig Lindenallee, Generalchirurg, dann Materialist = Gemischtwarenhändler/Apotheker **Hiller**-Architekt der Garnisionkirche Gerhard, dann **Brandt**=Schneider'**sche Häuser** 1769 = Stadtpalais Vorbild **Whitehall-Palast** ab 1530 Hauptsitz der brit Monarchie in London/Westminster, Brand 1698 lies nur Banqueting-House 1619/22, Freundschafts- u. Antikentempel = Auguste Vicoria = Kirchenjuste, 1858-1921, Kronprinzenpalais, Drachenhaus, Belvedere Klausberg, Brandenburger Tor Potsdam 1770, Palais Barberini 1771/72. **Amerikan Unabhängigkeitskrieg 1775-83 U-Tag 4.7.1776: Steuben 1730-94.** Fabian: Steuben. Ein Preusse in Amerika 1996; Gruber: Was ist Bedeutung? Eine Naturphilosophie der Subjektivität 2007 p94; Holl Viertel 1773-78 **Mozart1756-91** Nr10, Hildesheimer: Mozart 1980, Elias: Mozart 1991, Glienicker Holzzugbrücke 1777. Tornius: Wolfgang Amade 1964; Elias: Über den Prozess der Zivilisation 1976; Bayerischer Erbfolgerkrieg. Preußen vereitelt österreichischen Versuch, ganz Bayern zu erobern 1778/1779. Kant: Kritik der reinen Vernunft, Portal Langer Stall 1781. Jung: Kant. Die Revolution der Vernunft 2008; Kant: Grundlegung der Metaphysik der Sitten 1785 Vernunft liefert guten Willen; Schönecker & Wood: Kants Grundlegung ... Einführender Kommentar 2004^2; Johann Friedel 1755-89: Briefe über die Galanterien von Berlin auf einer Reise gesammelt von einem österreichischen Offizier 1782; Feldbrennöfen in Netzen 1783. Frankreich musste aufgrund der Niederlage im Siebenjährigen Krieg zahlreiche Kolonien in Nordamerika und Indien an Großbritannien abgeben. **Europa-Winter 1784** wegen Island-Vulkan. Staatsverschuldung 1789 Ausbruch der Französischen Revolution. Erst in Rheinsberg dann im Prinz Heinrich Palais = Wilhelm Uni = HU Berlin: Heinrich von Preußen 1726–1802 ♀Wilhelmine von Hessen-Kassel 1726-1808. Schloss Bellevue = Symbol preuß Sparsamkeit, milder Klassizismus, Langhanssaal Party-Gelände zu 200000 Talern 1785/86 vom jüngsten Bruder von FII = Prinz Ferdinand = August Ferdinand von Preußen 1730-1813 baut Schlosse

Bellevue im Berliner Tiergarten **Die von Bellevue**, Sohn Louis Ferdinand von Preußen ⚥ Luise v Schwedt 1742-1820, Der preußische Apoll 1750-1806 Saalfeld lies Neubert: Und wenn der Zügel reißt ... 1986 p188ff; FWIV 1844 1. Museum für zeitgen Kunst bei freiem Eintritt. Nach Ende der Monarchie nahm WII alles mit nach Doorn. 1935 Museum f Nationalkunde. Gästehaus der Reichsregierung. Ab 1940 mit Bunker. Gilde: Das abenteuerliche Leben des Herrn von Platen 1766 Dornhof/Rügen-1828Norwegen/Schweden 1987; **FWII Der Dicke** 1744/86-1797 ab 1766 mit 13-jähriger Wilhelmine Encke auf Pfaueninsel, Kutschpferdstall am Neuen Markt 1787. Marmorpalais 1787-90, Gold- und Rosenkreuzer: Geisterscheinungen Schlosspark Marquart, Belvedere Schloss Charlottenburg, Neuer Garten, Neptungruppe im Karpfenteich des Lustgartens 1788-93. Hungersnot in Frankreich 1788, Marie-Antoinette 1755-1793: Wenn sie kein Brot haben, sollen sie doch Kuchen essen. Freiheit, Gleichheit, Brüderlichkeit, Sturz König Ludwig XVI und Sturm der Bastille 14. Juli 1789, **Franz Rev 1787-1799**, Brandenburger Tor Berlin 1788/91, Orangerie Neuer Garten 1791/93 preuß König + österreich Kaiser gegen Frankreich, Sonderfrieden 1792, Gotische Bibliothek 1792/93 **Brücke mit Sphinx:** Was ist es, das mit einer Stimme begabt, bald vierbeinig, zweibeinig und dreibeinig wird? Was hat morgens 4, mittags 2 und abends 3 Beine? Freund: EssaysI p185, Schauspielhaus 1793/94, Pfaueninsel 1793 mit Schloss 1794-97, Terror gegen Andersdenkende durch Robespiere und Jakobiner, metrisches System, Ludwig/Louis XVI & Marie-Antoinette Okt. 1793 guillotiniert. François Noël Babeuf1760-97 **Höppner: Von Babeuf bis Blanqui. Französischer Sozialismus und Kommunismus vor Marx** 1975; Louis-Auguste Blanqui 1805-81; 2. Frau FWII = Friederike Luise 7 Kinder, Wilhelmine Encke = 1769/77-1782 Mätresse, dann Heirat mit Kämmerer Johann Friedrich Rietz/Ritz (1755–1809) = Grafenstand ab 1786, Wilhelmine Gräfin von Lichtenau 6 Kinder ab 1769, 1753–1820. 30,000 Taler pro Jahr, Palais Lichtenau 1797. 1787-1789 Julie von Voß, ab 1793 Sophie Juliane von Dönhoff. G̃rothusen: WILHELMINE - Eine Liebe in Preußen 2016; G̃ersdorff: Königin Luise und Friedrich Wilhelm III. Eine Liebe in Preußen 2002; Hebel: 1760-1816 Schatzkästlein 1811; Schnitzler: Die Mätresse Wilhelmine. Spottschriften wider die schöne Gräfin Lichtenau 1798, 1989; Hebt Einquartierungspflicht auf. **Lenne 1789-1866**. **FWIII** 1770/97-1840, **Luise von Mecklenburg-Strelitz** mit 10 Kindern 1776-1810 Schatullgüter in Paretz, Uetz und Falkenrede. Treffen mit Zar AlexanderI 1777/1801-25 1802, Zar in Garnisonkirche zwecks Anti-Napoleon-Allianz, Napoleon 1769-1821 stürzt Revolutions-Direktorium 1799 löst Fürstentümer, Ritterschaft auf, Kirchenenteignung **Code civil 1804**: Freiheit für jeden, Gewerbefreiheit und freie Berufswahl, Abschaffung des Zunftzwangs, Gleichheit vor dem Gesetz, vollkommene Trennung von Staat und Kirche = Laizismus, Schutz des Privateigentums, Schaffung der juristischen Basis für die Marktwirtschaft, Aufzeichnung von Geburten und Todesfällen = Personenstandswesen, **Pomonatempel 1801**, Preußen erklärt Krieg und verliert in Jena und Auerstedt 1806 mit 30,000 Toten, Napoleon an 24. Okt 1806 für 2 Jahre in Potsdam: Hauptkavalleriedepot der französischen Armee. Bis zu 6000 Soldaten und 12 000 Pferde mussten untergebracht werden. Aufenthalt der Napoleonischen Truppen kostete Potsdam 850 000 Taler. **Helmert & Usczrck: Europäische Befreiungskriege** 1808 bis 1814/15. Militärischer Verlauf 1986; Krause: Der Kampf um Freiheit. Die Napoleonischen Befreiungskriege in Deutschland 2013; **Neue Wache** 1816-1818 Wachhaus für Wache des Königs und Gedenkstätte für die Gefallenen der Befreiungskriege und der Napoleonischen Kriege. Rauch: Gerhard von Scharnhorsts und links Friedrich Wilhelm Bülow. Schadows Quadriga in Paris, Tilsit = Halbierung Preußens 1807, Schwäche/Passivität FWIII gegenüber Napoleon siehe Kleist: Prinz Friedrich von Homburg oder die Schlacht bei Fehrbellin 1809, Frankreich wird Erbfeind, Luise = Rachegöttin mit W. von Humboldt und Rauch befreundet, daher Berliner Uni 1809 Friedrich-Wilhelms-Uni =FWIII 1828-1945, dann Linden-Uni und ab 1949 Humboldt-Uni, Toleranzedikt: Staatsbürgerschaft auch für Juden in Preußen 1812, Brand von Moskau Sep/Okt 1812, AlexanderI 1777/1801-25 = Retter von Europa, Sethe: Öffnung nach Osten 1966; Sethe: Geschichte der Deutschen 1962; Sethe: Das machte Geschichte 1969; Döblin: Berlin Alexanderplatz. Die Geschichte vom Franz Biberkopf 1929; Befreiungskriege/Völkerschlacht bei Leipzig/Wiener Kongress 1813/15, Schau **Hauptmann Florian von der Mühle**, DEFA 1968, Charlotte = Alexandra Fjodorowna und Nikolaus bei Siegesfeier der Alliierten über Napoleon, Paris 1814 und Berlin 1815. Feste Kaiser Alexander von franz Revolutionstruppen besetzt 17794/99 Sprengung 1801, **Festung Ehrenbreitstein** Wiedererrichtung 1817/28/34, bis 1886/90 aktiv. FWIII in Russland wegen Hochzeit 1817 und Enkel 1818 in Pawlowsker Sommerresidenz, wo Zaren Mutter Maria Fjodorowna durch Lieblingsarchitekt Carlo Rossi Pläne für die Umgestaltung des Dorfes Glasowo in ein „russisches Dorf“ entworfen, mit neuem Typ

„russischen“ Landhauses, welches Charlotte 1798-1860 gefiel. 7 Kinder: Alexander II 1818-1855/81 = Kaiser. Blockhaus Nikolskoe = Kaiser/Zar Nikolaus I 1796-1825/55 gehörend 1819. 2000 Rosen-Stöcke, 140 verschiedene Sorten 1821. Nikolai = furchtsamer Despot = Erfinder der Staatspolizei = Niederschlagung der Dekabristen 1825, Dostojewski 1821-1881 Scheinhinrichtung 1849, Vera Figner: Nacht über Russland 1928 Revolutionsbewegung 1875-1883, tödliches Attentat auf AlexanderII, Lebenserinnerungen. Manegerie auf Pfaueninsel 1828. Fregattenschuppen 1833; St. Peter und Paul auf Nikolskoe 1837. Lichtenstein1780-1857 Mediziner und Zoologe der FW Uni Berlin, Direktor des Zoologischen Museums betreute die Tierbestände der Manegerie auf der Pfaueninsel schlug 1830 FWIII des Zoologischen Gartens Berlin nach Londoner Vorbild vor. Ablehnung. Mit Humboldts und Lennes Unterstützung Kabinetsorder FWIV Sept 1841: Tiersammlung der Pfaueninsel wird Berliner Zoo 1842. Katzensäule 1837 o 1850, Hart 1855-1906: Mongolenhorden im Zoologischen Garten. Berliner Briefe 2005; **Alexander von Humboldt 1769-1859**, 1799-1805 Amerika, 1805-28 Paris/Berlin, 1829 Russland, 1830-59 Hofdienst/Wissenschaftsbetrieb. Leitner: Briefwechsel Alexander von Humboldt - Friedrich Wilhelm IV. 2013; Graichen: Humboldts Erben 2000; **Humboldt-Uni** Name seit 1949, aber 1809 durch FWIII 1770-1840 auf Initiative von **Wilhelm H** als Friedrich-Wilhelms-Universität gegründet. Sitz Palais 1748-1753 des Prinzen Heinrich 1726-1802. Karl Freiherr von+zum Stein 1757-1831 Bergbau, Hardenberg 1750-1822 schaffen Unfreiheit der Bauern + Zunftordnung ab. Wehrpflicht 1813/14 bis 1919, dann ab 1935, Heeresreform durch Blücher, mehr Recht für Stadtverwaltung. Seidler & Reindl eds: Die Wehrpflicht. Kriegsdienstverweigerung, Zivildienst, Wehrgerechtigkeit 1973 Textsammlung; Daniel Friedrich List 1789-1846 Wirtschaftstheoretiker, Unternehmer, Diplomat, Eisenbahn-Pionier. Deutschen Zollverein, Eisenbahnwesen. Schloss Glienicke Prinz Carl 1801-83 1824, **Lenne: Sanssouci verwildert**. http://www.dieter-kloessing. de/Sanssouci/Schloss-Charlottenhof.html Siam/Charlottenhof (Klio und Apollino, Paris und Merkur von Schadow, Wasserspeiender Satyrknabe von Rauch, Francesco Menghi 1837 vor Kaukasische Flügelnüssen Ildefonsogruppe Dioscuren = Zeussöhne Castor und Pollux, Lessing: Hypnos + Thanatos = Schlaf + Tod, Dichterhain mit je 4 italienischen Alighieri, Tasso, Petrarca, Ariost und deutschen Dichtern Wieland, Herder, Schiller, Goethe auf marmornen Porträthermen. Hermes Gott der Wege) für FWIV 1825, AvH1835-40, Röm Bäder 1829/44, Adler: Schloss Charlottenhof und Römische Bäder 2013; Nicolaikirche 1826, Zwangsbündnis mit Frankreich gegen Russland 1812 weit über 1000 Gefangene. Carl von Clausewitz in russ Dienst. **Clausewitz: Der Eroberer ist immer friedliebend, er zöge ganz gerne ruhig in unseren Staat ein.** Neutralitätsabkommen, der Konvention von Tauroggen vom 30. Dezember 1812. 62 davon blieben in Potsdam, Sänger = 1. preußischen Garderegiment, Alexandrowka 1827 nach Zar Alexander I 1777-1825, Alexander-Newski-Gedächtniskirche Zar Nikolaus I 1795-1855 1829, Kuhtor → Wohnhaus, Glienicker Stein-Brücke 1831/34, Miniaturfregatte Royal Louise 1832, Kleines Schloss, Schloss Babelsberg 1834-49 Dehio: HB der dt Kunstdenkmäler. Brandenburg 2000 p852-8, Poensgen: Schloss Babelsberg 1929; Park und Schloss Babelsberg. Amtl Führer 1999[3]; Hippodrom 1836 mit Nereide (50-100 Töchter von Nereus + Doris, Delphin reitend, auf Meeresgrund wohnen und Neptun begleiten, Schiffbrüchige rettend) und Hippokampen im Stibadium, dort 1960-80 Reiterstandbild 1851 FII von Rauch Simson & Miehlke: Das Berliner Denkmal für Friedrich den Großen 1975, preuß Bahn Berlin-Potsdam 1838. Simson: Rauch 1997; Caroline von Humboldt und Christian Daniel Rauch: Ein Briefwechsel 1811-1828 1999; Toman: Klassizismus und Romantik. Architektur - Skulptur - Malerei - Zeichnung 2000; Keune: Der Rhein. Strom der Romantik 2011; Keune: Sehnsucht Rhein. Rheinlandschaften in der Malerei 2007; Tabidze: Petersburg Petrograd Leningrad 1996; Rakhmanow: Petersburg - Petrograd - Leningrad 1990; Gontscharow: Nymphodora Ivanovna. Eine Erzählung aus St. Petersburg im Jahre 1836; Gontscharow: Die Schwere Not. Eine Erzählung aus St. Petersburg im Jahre 1838; Gontscharow: Eine alltägliche Geschichte 1847; Gontscharow: Oblomow 1859; Reid: Blockada. Die Belagerung von Leningrad 1941-1944, 2011; Tschakowski: Die Blockade 3Bde 1975 Rede von Daniil Granin, Überlebender der Belagerung Leningrads durch die Faschisten, anlässlich des Holocaust-Gedenktags vor dem Deutschen Bundestag am 26.01.2014, siebenseitiger Internet-Ausdruck. 'Worte, die man nie wieder vergisst', Leserbrief zu „Hier spricht LeningradND vom 19. Mai 2015; Adamowitsch & Granin: Das Blockadebuch. Chronik der Belagerung Leningrads 1984/1987 etwa 1 Mio Tote 8.9.1941-27.1.1944; Leonhard: Spiel mit dem Feuer. Russlands schmerzhafter Weg zur Demokratie 1996; B̃ukowski: Abrechnung mit Moskau. Das sowjetische Unrechtsregime und die Schuld des Westens 1996; Granin: Mein Leutnant 2011 Rasputiza = Schlammzeit = Wegelosigkeit = Knüppeldämme gegen aufgeweichter Boden; Sostschenko: Sentimentale

Satiren: Kurzgeschichten und Erzählungen 1996; Sostschenko: Schlüssel des Glücks 1977; Ostrowski: Wie der Stahl gehärtet wurde 1932; Tschernyschewskij: Was tun? Aus Erzählungen von neuen Menschen 1863; C̃reuzberger ed: St. Petersburg - Leningrad - St. Petersburg, eine Stadt im Spiegel der Zeit 2000; C̃reuzberger: Das deutsch-russische Jahrhundert 2022; Burkert: **900 Tage Blockade Leningrad**. Leiden und Widerstand der Zivilbevölkerung im Krieg. T1 Bildmappe, T2 Materialband, T3 Auswahlbibliographie 1991; **ṽon Rosenberg: Auf den Flügeln des Genius. Das Leben des Bildhauers Christian Daniel Rauch** 2015 Rauch als Kammediener preuß Könige, das Ende von FWII p38ff, Huldigung FWIII, Radbruch bei Luise p50 wohnt bei Hofzahnarzt Lautenschläger, 1. Kind = Agnes mit Wilhelmine Schulze. Mit Graf Sandrecki-Sandraschütz 20.1.1805 in Rom bis 1811 mit Luises Gipsbüste im Gepäck bei Wv Humboldt. Ende 1806 Napoleon in Berlin, Schadows Quadriga in Paris. 2. Tochter Doris. Canova, Thorvaldsen1770-1844: Segnender Christus 1821, Liebfrauenkirche Kopenhagen 1830, Gips 1835, Galvanoplastik Friedenskirche 1851. Luise Mausoleum Schloss Charlottenburg p94, 1813 +August von Scharnhorst, +Theodor von Körner, Wellingtons Sieg in Spanien. Friedrichswerdersche Kirche 1824-31 p103 Museum bis 2012 mit Schinkel-Werken. Rheinfahrt 1828 Johanna Schopenhauer p118, Petersburg Clodt: FII nach vorn gebeugt. Pferd linkes Bein über den Plafond angewinkelt. d'Alton Pferde-Kupferstiche. Friedrichdenkmal 31.5.1851 p156, **2.12.1851 Staatsstreich Napoleon III. Victor Hugo: Gavroche** 1862 wohnt im Denkmal für den Elefanten voller Ratten auf dem Platz der Bastille p31ff, Pariser Ironie: Voltaire ist schuld! p128f, Lamarque 5.6.1832 p68; **Marx: Der achtzehnte Brumaire des Louis Bonaparte** 1852 = Anspielung auf den 9. November 1799 = An diesem Tag wurde Louis Napoleons Onkel Napoléon Bonaparte durch einen Staatsstreich, bekannt als Staatsstreich des 18. Brumaire VIII, zum Alleinherrscher mit diktatorischen Vollmachten. Der Titel ist ein zynischer Vergleich der beiden Staatsstreiche. Louis Napoleon, auch bekannt als Napoléon III., der zuvor schon 1836 und 1840 gescheiterte Putschversuche beging, kehrte nach der Februarrevolution 1848 gegen den „Bürgerkönig" Louis-Philippe von Orléans ins Frankreich der Zweiten Französischen Republik zurück, und gewann im Dezember die Präsidentschaftswahlen gegen den bisherigen Präsidenten Louis-Eugène Cavaignac. Drei Jahre später erzwang er sich durch einen Staatsstreich am 2. Dezember 1851 diktatorische Vollmachten und ließ sich, nach einem Plebiszit (Volksbeschluss), im Dezember 1852 zum Kaiser des Zweiten Kaiserreichs ausrufen. Im Rahmen einer Schlacht des Deutsch-Französischen Krieges (1870–1871) wurde er im September 1870 gefangen genommen und zwei Tage später durch die Ausrufung der Dritten Republik gänzlich entmachtet. **1. Republik** = öffentliche Sache, Sturm der Bastille, Terrorherrschaft. Robespierre, Danton, Marat im Ergebnis der Franz Rev 1789-99, 1792-1804 Direktorium, Code Civil **1. Kaiserreich 1804-1815** = menschliche Vernichtung des Menschen. Siehe Goya1746-1828: Katastrophen des Krieges 1863; Konst/parlament Monarchie Luis Philipp 1830-48. **2. Republik = Feb-Rev 1848-1852** per Populismus von NIII **2. Kaiserreich 1852-1870** NIII **3. Republik** Courbet, Baudelaire, Proudhon 1870-1940 nach Sedan und Gefangennahme NIII und Niederschlagung der Pariser Kommune 18.-28. Mai 1871. Fall Gelb. 4. Republik 1946-58. 5. Republik ab 1958 de Gaulle 1890-1970 Algerien ab 1962 unabh.

Moses und Aron von Rauch und Wolff Monarch kann sich auf Kirche und Militär stützen = Gottesgnadentum der Königsherrschaft $\neq$ FII = König muss es bringen, nicht Gott!; **Schinkel** 1781-1841. Riemann: KF Schinkel. Reisen nach Italien. Tagebücher, Briefe, Zeichnungen, Aquarelle 1979; 2.5 Mio Menschen fliehen aus Dt 1830/40, Proudhon1809-65: Antisemit. Eigentum ist Diebstahl! Frauen haben nur geringen Verstand. Comtesse Auguste Harrach = Fürstin von Liegnitz, Gräfin von Hohenzollern. Wartenberg: Alexander von Humboldt und die Astronomie 1959; Wartenberg: Vom Kaufmannslehrling zum Astronomen. Bessel 1784-1846 1959 **FWIV** *Berlin 1795/1840-1858/61 in Sanssouci, Gutbesitzer und Landrat **Kaehne**: Waschhaus = Bootshaus, Fischerhaus 1818, Park **Petzow** Lenne 1820 Schloss 1825 Portal 1828 Kirche auf dem Grellberg 1841/42 Fontaneklause. Keune: Der Rhein. Strom der Romantik 2011; Pfarkirche St. Menas 1826-33 und Schloss **Stolzenfels** südl Koblenz Hochromantik, Küche, Museum seit Beginn, 7 Aufenthalte 1836-42, Schloss-Kapelle mit Wandbildern von Deger mit detaillierter Darstellung der Schöpfungs- und Erlösungsgeschichte Vorbild St. Apollinariskirche in Remagen 1845, Bornheim: Schloss Stolzenfels 2008; Fischer: Schloss Stolzenfels 2014; Kölner Dom 1848-1880, 3. Burg Hohenzollern Hechingen 1850-67, Potsdam wieder Residenzstadt, Heilands-Kirche, Moschee, Fasanerie (Imgard Kiepenheuer 1920, Mies van der Rohe, Wilhelm Furtwängler bis 1954, Klingenberg), FIII im Kleinen Schloss 1841/42, Matrosenhaus 1842, Blickstöckl mit Kruzifix unterhalb Kanonenbergserpentine, Maschinenhaus 1844, St. Nikolaikirche = Nikolaus von Myra270-

365 1712, Schaufassade 1753, Brand 1795, 14. Okt 1806 Potsdam Hauptkavalleriedepot, Heiligengeistkirche = Futtermagazin, grüne Wiese anstelle barocker Schaufassade, Baubeginn 1830 an Anlehnung an Petersdom gemäß Grundriss von Bramante und Kuppel nach Michelangelo durch Schinkel1781-1841 /Persius1803-45 /Stüler1800-65-Bau 1850 Zeugenwolke = in Ädikulen der 14 Tambourfenster Sitzstatuen alttestamentlicher Gestalten Abel, Henoch, Noah, Abraham, Isaak, Jakob, Mose, Josua, Gideon, Samuel, David, Salomo, Elias und NT Johannes der Täufer, 4 große Propheten des AT in Pendentifs: Daniel, Jesaja, Jeramia, Ezechiel, 4 Evangelisten/Propheten des NT Markus[2]/Löwe, Johannes[4]/Adler, Matthäus[1]/Engel, Lukas[3]/Stier, 10 Jünger Petrus, Andreas, Johannes, Philippus, Thomas, Bartholomäus, Judas Iskariat, Simon, Thaddeus, Matthäus (ohne Jakobus jun., Judas) dafür Apostel Mattias und Paulus. Koranyi-Esser: Who is who in the Bible 1994. Die Menschen der Bibel 2011; Friedenskirche 1845/54, Moses im Gebet = **Alegorie auf das Gottesgnadentum** 1857-63, 1.1 Mio Menschen fliehen aus Dt, **Kommunistisches Manifest** in London, Belvedere Pfingstberg 1847-52/61-63, Badischer Aufstand Erzengel Michael 1848, Triumphtor 1850/51, Orangerie 1851/64, Flatow-Turm 1853–1856, Friedrich Wilhelm Ludwig = **WI** 1797/1861-1888 Kartätschen Prinz auf Schloss Babelsberg, Rolf Lauckner = Drehbuch 1939: **Preußische Liebesgeschichte**, Deutschland 1938, 1950 DVD Prinzessin Elisa Radziwill, Willy Fritsch als Prinz Wilhelm von Preußen = Kartätschen Prinz, Dieter Borsche als Prinz Karl, Vera von Langen als Großfürstin Charlotte von Russland, Carl Günther als König Friedrich Wilhelm III. von Preußen, Hans Nielsen Kronprinz Friedrich Wilhelm = FWIV; **Augusta** von Sachsen-Weimar 1811/1861/1871-1888/1890, Jessel: Schlösser und Amouren. Preussische Liebesgeschichten 2005; Reich & Schultz eds: Sowjetisches Untersuchungsgefängnis Leistikowstr/Mirbachstr Potsdam 2012 p49, p55, Kaiserin-Augusta-Stift *1872 Mädchenschule mit 80 Internatslätzen zur Erziehung/Beschulung verwaister Adels-, Offiziers-, Pfarrers- und Beamtentöchtern erbaut 1900-02 **Sezessions/Absonderung/-krieg** oder Amerikanische Bürgerkrieg 1861-1865 Blake: Maria Meinhardt 1949; Krupp 1812-87 Stahlwerke 1861, Dt-Dän Krieg → Schleswig & Holstein 1864, Dt-Öst Hessen, Fontane: Der deutsche Krieg von 1866 BdI Der Feldzug in Böhmen und Mähren, Helmuth Karl Bernhard von Moltke1800-91. Urgroßneffe = Helmuth James Graf von Moltke1907-45 Moltke: Unter dem Halbmond. Erlebnisse in der alten Türkei 1835-39, 1841; Finker: Graf Moltke und der Kreisauer Kreis 1978. BdII; siehe **Fontane Digitalisat:** Der Schleswig-Holsteinsche Krieg im Jahre 1864, 1866; Kriegsgefangen. Erlebtes 1870, 1871; Bd1+Bd2 = Aus den Tagen der Occupation. Eine Osterreise durch Nordfrankreich und Elsaß-Lothringen 1871, 1872; **Der Krieg gegen Frankreich 1870–1871:** Bd1 = Der Krieg gegen das Kaiserreich. Bis Gravelotte, 18. August 1870, 1873; Bd2 = Der Krieg gegen die Republik. Orleans bis zum Einzuge in Berlin 1876. **Fontane: Wanderungen durch Frankreich. Erlebtes 1870-71** Kriegsgefangen. Aus den Tagen der Okkupation. Briefe 1970; **Helmert & Usczeck: Preussischdeutsche Kriege von 1864 bis 1871**. Militärischer Verlauf. Operationskarten, Chronologie der Kriegsjahre 1864, 1866 und 1870/71 und einem kleinen Lexikon der preussischdeutschen Kriege 1864 bis 1871, 1987; Friedrich-Wilhelm-Höhe Siegessäule, 2km 4reihig Lindenallee 1866, T̃homas Piketty: Das Kapital 2018 P̃iketty: Ökonomie der Ungleichheit. Eine Einführung 2020; P̃iketty: Kapital und Ideologie 2020; **Marx: Kapital** BdI Der Produktionsprozess des Kapitals 1867, Reiche: Der Kasematten-Wolff. Schriften von **Wilhelm Wolff** 1809-1864 und sein Lebensbild von Friedrich Engels 1950, Fritz Reuter 1810-1874, Dt-Frankreich Krieg → Lothringen, Elsass, katholische Kirche St. Peter und Paul 1870, **Bismark** 1815/71-1890/98 Gründung des Dt Kaiserreichs mit erstem Reichskanzler des Deutschen Reiches, metrisches System, Emster-Kanal Lehnin-Namitz-Netzen-Rietz 1871, Julius Wolff 1834-1910: Sülfenmeister 1883; Erste Berolina WI 1871 auf Mehringplatz. 17.12.1895-26.8.1942 Kupfer-Berolina auf Alex. Siegessäule 1873, **Sacrow-Paretzer Kanal** 1874-76 12.5 km. Astrophysikalische Observatorium 1876/77, Vorsteher: Siegessäule Berlin 20??; von Krosigk: Der Tiergarten 2001; Simon: Mitte mit Wedding und Tiergarten. Berliner Spaziergänge 2019; Braun: Die Siegessäule 2000; Fritz Stern: Gold und Eisen. Bismarck und sein Bankier Bleichröder 1977; Stern: Das feine Schweigen. Historische Essays 1999; Schmidt & Stern: Unser Jahrhundert. Ein Gespräch 2010; S̃tern: Bethmann Hollweg und der Krieg. Die Grenzen Der Verantwortung 1968; Stern: Der Westen im 20. Jahrhundert. Selbstzerstörung, Wiederaufbau, Gefährdungen der Gegenwart 2006; Alings: Die Berliner Siegessäule 2000; Kühn: Die Siegessäule 1961; L̃och & Zacharias: Wie die Siegessäule nach Berlin kam. Eine kleine Geschichte der Reichseinigungskriege (1864-1871) 2011; Marschies: Die Siegessäule. Berlin-Tiergarten - Großer Stern 2000; Gründerjahre, Zölle weg, Währung Mark 1878, Palasthotel, Brüder Karamasow 1880, Arbeitsschutz-Gesetze, Krankenkasse, Unfallrente 1883/89, Reichstag

1884/94, Schutzgebiete/Aufbau Kolonialreich in Afrika (Kamerun, Togo), Dt Süd-Afrika (Namibia), Dt Ost-Afrika, Kraftwerke 1885/89, Autos 1886, Made in Germany, Telefon 1887. **FIII** *+Potsdam im Neuen Palais 1831-1888 99Tage-Kaiser bewohnt 1841-52 Kleines Schloss 1834, dann Neues Palais = Friedrichskron, unterirdischer Küchengang vom **Südcommon I** 1886/87, WII zieht ins Neue Palais, Marstall=Pferdestall und Reithalle=Audimax 1891-94, Erweiterungsbau Marstall 1948/49, Nordgebäude/Mensa statt Gärtnerei 1956/57, Mausoleum an Friedenskirche 1890 mit Kaiserin Victoria = Princess Royal von Großbritannien und Irland 1840-1901 8 Kinder. **Friedrich von Bodelschwingh der Ältere 1831-1910** Bielefeld, Spielgefährte FIII, evangelischer Pastor und Theologe, Inneren Mission: 1867 Evangelischen Heil- und Pflegeanstalt für Epileptische = **Bethel** = Haus Gottes. Arbeit statt Almosen Arbeiterkolonien: Wilhelmsdorf Arbeiterkolonie 1882, Hoffnungstaler Stiftung Lobetal = Zufluchtsstätte und Herberge für die Obdachlosen der Metropole 1905. **WI der greise Kaiser, FIII der weise/leise Kaiser und WII der Reise/Scheiße-Kaiser** = Sohn von FIII *Potsdam 1859/88-1918/41 +Niederlande, keine Ahnung von Außenpolitik, daher Entlassung Bismarks = Der Lotse geht von Bord, Kyffhäuserdenkmal für Kaiser WI 1890, Aufbau Kriegsflotte, Matrosenstation Kongsnæs 1891/95 für Schraubendampfyacht Alexandria, TH Berlin Slaby, Phys Techn Reichanstalt durch Siemens und Helmholtz 1887, KWI Denkmal Porta Westfalika 1892/96; M̃irbach: Die Kaiser Wilhelm-Gedächtniss-Kirche 1906 digisat; Kuratorium der Kaiser Wilhelm Gedächtnis Kirche (Hrsg.): Die Kaiser Wilhelm - Gedächtniß-Kirche. Zum Tage der Silbernen Hochzeit des Kaiserpaares dem 27. Januar 1906; Oncken: Unser Heldenkaiser 1797 - 1897. Festschrift zum hundertjährigen Geburtstage Kaiser Wilhelms des Großen. Komitee für die Kaiser Wilhelm-Gedächtniskirche zum Besten des Baufonds. Bilderschmuck unter Ltg. W. Röse. Kunstschätze des Hohenzollern-Museums und der Königlichen Schlösser. Briefe aus dem Kgl. Haus-Archive und dem Kgl. Staats-Archive 1896; **Warum fehlen in der Prozession** der Herrscher in der Gedenkhalle die Hohenzollern des 18. Jahrhunderts?: **a]** der eitle, korrupte und verschwenderischie FI ? **b]** Soldatenkönig FWI = drastische Verkleinerung der Anzahl von Staatsbeamten und Abwertung der Wissenschaft. **c]** FII = **Friedrich der Große** als ausgemachter Franzosenfreund, Kirchenhasser, Homosexueller, wirklich erfolgreicher Krieger/Militär, der Preußen richtig groß machte, Philosoph und Komponist. **d]** FWII Lebemann mit Mätressenwirtschaft **???** Kaiser Wilhelm-Gedächtniss-Kirche ist Hommage Kaiser WIIs an seinen Opa als erfolgreichen Krieger bei der Niederschlagung der 48er Revolution und bei den Annexionskriegen 1864, 1866, 1970/71. Der von WII gehasste Reichsgründer Bismarck wurde durch Ignoranz bestraft. **WII verdrehte in der Gedenkhalle der Kaiser Wilhelm-Gedächtniss-Kirche die Geschichte und verkündete seine Pläne zur Abschaffung des von Bismarck geschaffenen Deutschen Reiches, weil er den genialen Schöpfer/Macher des Deutschen Reiches Bismarck hasste.** Bismark: Gedanken und Erinnerungen. Autobiographie 1898; Alan Taylor: Bismarck. Mensch und Staatsmann 1962; Fritz Stern: Gold und Eisen. Bismarck und sein Bankier Bleichröder 1977; Wegner-Korfes: Otto von Bismarck und Russland. Des Reichskanzlers Russlandpolitik und sein realpolitisches Erbe in der Interpretation bürgerlicher Politiker 1918-1945, 1990; Pohl: Die Kaiser-Wilhelm-Gedächtnis-Kirche Berlin 1966; Denkmal Sedantag 1895-1943 für erfolgreiche Landnahme mit neuer Militärtechnik Zündnadelgewehr. Annnexionskriege = Einigungskriege 1864 Dänemark, 1866 Österreich, 1870/71 Frankreich. Warum fehlen in der Gedenkhalle FI, FWI, FII, FWII? F̃rowein-Ziroff: Die Kaiser Wilhelm-Gedächtniskirche. Entstehung und Bedeutung 1982; K̃appel: Egon Eiermann - Kaiser-Wilhelm-Gedächtnis-Kirche Berlin 1961 bis 2011; Gerlach: Kaiser-Wilhelm-Gedächtniskirche 2003[3]; Nadolski: Wahre Geschichten um die Gedächtniskirche 2007; Hoffmann: Architektur für die Nation? Der Reichstag und die Staatsbauten des Deutschen Kaiserreichs 1871-1918, 2010; Waldera & Dorn: Kaiser-Wilhelm-Gedächtnis-Kirche Berlin 2012; Geheimnisvolle Orte – Die Berliner Gedächtniskirche. Gezeigt in: ARD-Alpha, 5. Juli 2020; King & Kremer: Zum Frühstück ins Freie. Manet, Monet1840-1926 und die Ursprünge der modernen Malerei 2003; Helmert-Turm = geodät Zentrum Dt 1893, Rathaus Babelsberg 1894, Berliner Dom 1894/1905, Kaiser wohnt ab 1895 zT im Neuen Palais, Slaby & Graf von Arco Telegraphie über Jungfernsee 1897, Zenneck: Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie 1912; Erlöserkirche 1898, Großer Refraktor 1899, Teltowkanal 1900-06, Duisburger Firma baut Glienicker Kaiser-Wilhelm-Brücke aus Stahl: Abel/Powers 1962, 23 Inhaftierte gegen vier Spione 1985, Anatoli Tscharanski 1986, Spielberg: Bridge of Spies - Der Unterhändler, DVD 2015; Kaiserbahnhof = Hofstation im Wildpark 1909, Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft 1911-45, Filmstudios 1912, Sternwarte, Völkerschlachtdenkmal 1913, **Hellfeld: Das lange 19. Jh. Zwischen Revolution und Krieg 1776 bis 1914** 2015; C̃lark: Die Schlafwandler. Wie Europa in den ersten

Weltkrieg zog 2015; WII erklärt 31.7.1914 im Neuen Palais den 1.Weltkrieg und kauft den wegen Terorismus ausgewiesenen, in der Schweiz sitzenden Lenin und seine Genossen. Versorgt sie mit genügend Geld und schmuggelt sie per Bahn durch Deutschland über Finnland nach Russland, damit sie den Zaren zu stürzen und so die Ostfront schwächen. **WII inszeniert den Roten Oktober und sein eigenes Ende.** Schloss Cecilienhof 1914/17. M̃achtan: Der Kronprinz und die Nazis. Hohenzollerns blinder Fleck 2021; Malinowski: Die Hohenzollern und die Nazis. Geschichte einer Kollaboration 2021; Knipp: Im Taumel. 1918 - Ein europäisches Schicksalsjahr 2018; Franz Marc: Brief aus dem Felde. Fällt am 4.3.1916 vor Verdun; Esoterische Lehrerin Mathilde Ludendorff: deutscher Gottesglaube darf nicht von anderen Rassen unterwandert werden. Deutscher Bund für Gotteserkenntnis/-glaube/-gemeinschaft. General Erich Ludendorff und Gefreiter Hitler. Clark: Von Zeit und Macht Herrschaft und Geschichtsbild vom Großen Kurfürsten bis zu den Nationalsozialisten 2018; MacMillan: Die Friedensmacher. Wie der Versailler Vertrag die Welt veränderte 2001; Vertrag von Saint-Germain; Conze: Die große Illusion. Versailles 1919 und die Neuordnung der Welt 2018; Dahms: Der zweite Weltkrieg in Text und Bild 1960, 1965, 1989, 1991[2]; Guderian 1888-1954: Erinnerungen eines Soldaten 1951 p42 Generalprobe für die Wirksamkeit schneller Panzerverbände. Navigation per Baedeker. Nutze Tankstellen am Zielort statt Nachschub des nicht vorhandenen Brennstoffs. August 1928 Weltwirtschaftskrise und aufkommender Faschismus: Dreigroschenoper. Mackie Messer – Brechts Dreigroschenfilm 2018 mit Lars Eidinger als Bertolt Brecht. Nur das Künstliche, die Kunst, gibt die Sicht auf die Wirklichkeit frei. Brecht: Hitler wird seinen eigenen Schweizer Geldwäscher und Banktressor niemals angreifen. Schweizer Banken wuschen 400t Raubgold = 15 Mrd €und hielten so den 2. Weltkrieg am Laufen. Bei Kriegsbeginn hatte die Wehrmacht nur Munition für 14 Tage. Zugriff auf die Schweizer Judenkonten erforderten Sterbeurkunde, die aber in den Konzentrationslagern nicht ausgestellt wurden. Knopp: Hitlers Helfer 1999; Michelson: Ich überlebte Rumbla 2016; Wildt: Generation des Unbedingten. Das Führungskorps des Reichssicherheitshauptamtes 2003; Wildt ed: Das Reichssicherheitshauptamt. NS-Terror-Zentrale im Zweiten Weltkrieg 2018; Eco: Der ewige Faschismus 2010; Le Bon: Psychologie der Massen 1911; Reich: Massenpsycholgie und Faschismus 1933; Browning: Ganz normale Männer. Das Reserve-Polizeibataillon 101 und die 'Endlösung' in Polen 2020[2]; Welzer: Täter. Wie aus ganz normalen Menschen Massenmörder werden 2007; G̃ünther: Von der Hitler-Jugend zur Waffen-SS. Die Generation der Verdammten 2001; Thuerk: Die Stunde der toten Augen 1965; Rothmann: Im Frühling sterben 2014; Haupt: Villencolonie Alsen am Großen Wannsee 2012; Wolff: Wannsee und Umgebung 1972, 1976; Pharus-Plan Düppeler Forst 1:17500 2021[6]; Heinisch & Schumacher: Colonie Alsen. Ein Platz zwischen Berlin und Potsdam 1988; C̃arus & Grützmann: 2000. Jahrbuch für Zehlendorf. Altes und Neues von Menschen, Landschaften und Bauwerken. Hrsg. : Heimatverein Zehlendorf (1886) e.V. 2000; **Bilang, Curth, Kaak, Reissig et al.: Zehlendorf. Geschichtslandschaft Berlin. Orte und Ereignisse Bd4** 1992; Bd1 Charlottenburg, Teil 1: Die historische Stadt 1986, Teil 2. Der Neue Westen 1985; Bd2 Tiergarten. Teil 1: Vom Brandenburger Tor zum Zoo 1989; Teil 2: Moabit 1987; Bd5 Kreuzberg 1994; Drexel: Prominente in Berlin-Zehlendorf und ihre Geschichten 2000; Wünsch: Berlin-Zehlendorf. Alte Bilder erzählen 2014; Kammrad: Spaziergänge in Zehlendorf 2000; Schwerk: Zehlendorf. Ein Bezirk von Berlin 1995; Simon: Zehlendorf. Zwischen Idylle und Metropole 1996; Bernstengel: Pharus-Stadtplan Berlin Steglitz-Zehlendorf 2008; D̃enkmale in Berlin. Bezirk Steglitz-Zehlendorf. Ortsteil Nikolassee 2013; Brasch: Das Wannseebuch 1926, 1984; Dammann, Bappert: Ein Wannsee-Bilderbuch 1992; Aschenbeck: Villen in Berlin. Kleiner Wannsee mit der Colonie Alsen und dem Kleist-Grab 2011 p50; Krüger: Landhäuser und Villen in Berlin und Potsdam Bd3. Großer Wannsee, Colonie Alsen, Villa Liebermann 2009; **Balkow-Gölitzer et al.: Prominente in Berlin-Wannsee und ihre Geschichten** 2006 Lida Baarova, Canaris, D-Day Eisenhower, Freisler, Magda Goebbels und BMW-Quandt, Hans Koch, Reichwein, Reuß, Julius Springer, Viebig; Jasch & Kreutzmüller eds: Die Teilnehmer. Die Männer der Wannsee-Konferenz 2017; **Gryglewski, Jasch, Zolldan: Die Besprechung am Wannsee und der Mord an den europäischen Jüdinnen und Juden.** Katalog zur Dauerausstellung 2020; Die rasche Einnahme von Frankreich basierte auf einer vorgefundenen unzerstörten Infrastruktur, die durch die einmarschierenden Truppen genutzt werden konnte. Gefangene mussten nur in vergleichsweise geringem Umfang versorgt werden. Die Blitzkriegs-Idee funktioniert nur, wenn die angreifene Armee die erwarte Infrastruktur genau kennt. Das Scheitern der Eroberung von Russland/Sowjetunion durch Napoleon/Hitler beruhte auf Unkenntnis des Lebens/der grundlegenden Unterschiede von West- und Osteuropa: a] Weite des Landes ohne befestigte Wege. b] Wetter wirkt erbarmungsloser.

Treibstoff/Öl wird fest und Akkus sind nicht für tiefe Temperaturen gemacht. c] Dichte von Behausung und Nahrungsspeichern sehr gering. Daher ist die Versorgung der Truppen nicht zu leisten. Man findet weder Nahrung noch Behausung, die Westeuropäer erwarten. d] Osteuropäer erwarten die Westeuropäer als kultivierte Befreier und/oder haben den Druck von Herrschern/Zar/Stalin im Rücken. e] Unerwartete Armut. Die Wehrmacht sah sich riesigen Mengen von Gefangenen und Ostjuden ausgesetzt. Bereits in der zweiten Julihälfte 1941 wird der deutsche Führung klar, dass schneller Sieg unwahrscheinlich ist. Die Wehrmacht hatte nur für 14 Tage geplant. Führung ist unter Druck. Görings Ermächtigungsschreiben vom 31.7.1941 an Heydrich trug der Notwendigkeit Rechnung, dass pro Tag 5000 Menschen nicht nur zu töten (weil unwerte Ostjuden nicht versorgbar sind) und unsichtbar zu machen = **Endlösung**. Heydrich lädt zur Besprechung am **20.1.1942** ein, um den geräuschlosen effizienten Mord an 6 Millionen Menschen zu organisieren. Der Film **Die Wannseekonferenz** 2022 von Matti Geschonneck, Magnus Vattrodt Paul Mommertz gibt einen Eindruck des menschenverachteneden Vorgehens. Wehrmacht und SS fühlten sich durch das Massenmorden psychisch überlastet. Das industrielle Morden wurde von Deutschen erdacht, organisiert und überwacht. Die Mordmaschinerie wurde von den Kapo-Häftlingen unter Zwang und Aufsicht bedient. Ein Kapo musste für die SS die Arbeit der Häftlinge anleiten und war für die Ergebnisse = Tötung verantwortlich. Kapos erhielten für diese Dienste Vergünstigungen, wie Verschonung, die Zuteilung von Alkohol oder den Besuch von Lagerbordellen. Longerich: Wannseekonferenz. Der Weg zur 'Endlösung' 2017; Rhodes: Die deutschen Mörder. Die SS-Einsatzgruppen und der Holocaust 2006; Ẽco: Der ewige Faschismus 2020; **Frankl: Ein Psychologe erlebt das Konzentrationslager** 1945 p19 **... die Besten sind nicht zurückgekommen ...** Christoph Meily: 1997 UBS vernichtete Akten der 30iger/40iger Jahre! 2t Zahngold in Schweiz gewaschen. Elsner & England: Vom Waisenhaus zum Jungfernhof. Deportiert von Hamburg nach Riga. Bericht einer Überlebenden 2009; T. Mann: Deutsche Hörer! 1942 p5 BBC auf Langwelle, da Volksempfänger mit MW und LW ohne KW 1934; Genz: Was Professor Kuckuck noch nicht wußte 2004 = Thomas Manns naturwissenschaftliches Wissen; Karl Foerster und Hermann Mattern Freundschaftsinsel 1937-40. Weiskopf: Das Slawenlied. Roman aus den letzten Tagen Österreichs und den ersten Jahren der Tschechoslowakei 1931; Weiskopf: Der Staat ohne Arbeitslose 1931; Erika von Hornstein: Adieu Potsdam 1969; Daiber: Schaufenster der Diktatur. Theater im Machtbereich Hitlers 1995; **FC Weiskopf1900-1955: Unter fremden Himmeln. Deutsche Exilliteratur 1933-1947**; Weiskopf: Elend und Größe unserer Tage 1950; Weiskopf: Gesamtausgabe in 8 Bänden 1966; G̃rossman und Annelore Nitschke: Leben und Schicksal 2007; **Alex Wedding = Grete Weiskopf geb Bernheim 1905-66: Ede und Unku** 1931; Grete Weiskopf = Alex Wedding: Das Eismeer 1936; Kershaw: Das Ende. Kampf bis in den Untergang. NS-Deutschland 1944 - 1945; **Rothmann: Im Frühling sterben** 2015; Vonnegut: Schlachthof 5. oder Der Kinderkreuzzug 1969; **Alte geografische Potsdam-Karten:** Dräger p20f, Borngässer, p42ff, Bohm, bei **Mielke und Drescher Innendeckel**! Bisky: Unser König. Friedrich der Große und seine Zeit - Ein Lesebuch 2011; **Schrader & Kugler: Friedrich der Grosse und seine Zeit in Bild und Wort.** Bilder nach Originalen von Camphausen, Chodowiecki, Kampf, Marschall, Menzel, Pesne, Rauch, v. Rössler, Schadow, Schöbel, Schuch, Seiler, Wislicenus, Skarbina, Röchling, u. a. Meistern. Mit Text hauptsächlich **nach Kugler** und mit einer Einleitung herausgegeben von Bruno Schrader 1900; **Kugler: Geschichte Friedrich des Großen**. Gezeichnet von Adolph Menzel 1840, 1856, 1881; Gustav Mendelsohn Bartholdy: Der König. Friedrich der Große in seinen Briefen und Erlassen 1913; Piltz: Friedrich II. Wonach er sich zu richten hat. Urteil und Verfügungen 1987; Albert Ritter ed: Friedrich der Große. Werke und Schriften 1915; Friedrich der Große: Ausgewählte Werke in vier Bänden. In dt Übersetzung mit Illustrationen von Adolf von Menzel. Bd1+2: Historische und militärische Schriften. Bd3: Politische und Philosophiosche Schriften. Bd4: Gedichte und Briefe 1918 hierin **Gedächtnisrede auf Prinz Heinrich den Jüngeren 1747-1767 zum 20. Geburtstag am 20.12.1767 in der Akademie**; Klepper1903-42: Der Vater 1937; Kathe: Der Soldatenkönig 1981; **Spielfilme:** Fridericus - Der alte Fritz, 1937 und Der große König, 1942. Kunisch: Friedrich der Große. Der König und seine Zeit; Unger: Friedrich. Ein deutscher König; Jung: Die Böhmische Weberkolonie Nowawes 1751-1767 in Potsdan-Babelsberg 1997; Rosenthal: Das Buch der Stadt Nowawes 1930 von Frau Weise vom Triangelplatz = Weberplatz, FII legt für Böhmische Glaubensflüchtlinge 1751-54 Siedlung an, damit seine Armee ausreichend Kleidung hat, Karl-Liebknecht-Str. 23; Hamann: Der

Park Babelsberg 1989; Hildebrandt: Alt Babelsberg 1998; Liepe: Park und Schloß Babelsberg = Amtlicher Führer 1999; Tauch & Eisbein: Park Babelsberg. Das Schwarze Meer ist oben auf dem Berg DLF 2016; K. Eisbein, Fontänen, Brunnen und Gewässer im Schlosspark Babelsberg Jahrbuch SPSG Bd3 1999-2000 p109-129 http://www.perspectivia.net/publikationen/spsg-jb/3-1999-2000/0109-0129/ Wasser vom 8er-Becken ins Schwarze Meer. Kindermann = Hofgärtner seit 1836. 1860 Großer See, Insel mit Wasserholendem Mädchen. Löschwasser. 1887 Kindermannsee. 3 Wasserfälle. Belani: Geschichte und Beschreibung der Fontainenanlagen in Sanssouci unter FII und FWIV 1843; Generaldirektion der Staatlichen Schlösser und Gärten Potsdam-Sanssouci: **Beschreibung von Sans-Souci, dem Neuen Palais und Charlottenhof mit Umgebungen auch aller übrigen Königlichen Prinzlichen Schlösser, Gärten und Anlagen in und bei Potsdam. Erinnerungsbuch für Besucher dieser Königlichen und Prinzlichen Anlagen nach den zuverlässigen Quellen bearbeitet. 1850**^{2}, 1987; Õesterreichs: Beschreibung aller Gemählde, Antiquitäten, und anderer kostbarer und merkwürdiger Sachen, so in denen beyden Schlößern von Sans-Souci, wie auch in dem Schloße zu Potsdam und Cahrlottenburg enthalten sind 1773; Dehio, Georg 1850-1932 & Gall, Ernst 1888-1958 & G. Vinken: Handbuch der deutschen Kunstdenkmäler. Brandenburg 1900, 2000, 2012^{2} mit 1200 Seiten; Dehio: Stadtkreis Potsdam 1988 mit 89 Seiten, Berlin 2006^{3}; **Preußen-Karten** siehe Heinrich: Kulturatlas Brandenburg 2015; Treue: Wirtschafts- und Technik-Geschichte Preußens 1984; John & Neumann: Hermann Kasack (1896 - 1966) in Potsdam. Frankfurter Buntbücher 9 1994; Goebeler, Dorothee: Potsdamer Plaudereien. Geschichten und Fotografien aus den 1920er Jahren 1925, 2000; Heidkamp: Friedrich Wilhelm I, 1935; Hootz & Fait: Deutsche Kunstdenkmäler. Ein Handbuch. Mark Brandenburg und Berlin. Bezirke Cottbus, Frankfurt/Oder, Potsdam und Berlin 1971, 1973^{2}; Frank Beyer: Die sieben Affären der Dona Juanita, DEFA 1973; Fait & Hootz: Berlin - Brandenburg. Dt. Kunstdenkmäler. Ein Bildhandbuch 1971, 1992^{4}; Trost, Drescher, Fait, Kompa, Spielmann: Die Bau- und Kunstdenkmale in der DDR. Bezirk Potsdam 1978; **Borngässer, Pfaffen, Toman, Bednorz: Potsdam. Kunst, Architektur & Landschaft** 2013; Tilman, Zajonz, Giessing: Königliches Potsdam. Royal Potsdam 2013; Thiede & Wacker: Chronologie - Potsdam und Umgebung 3Bd 2007 = Halbwissen gemäß Assing am 12.1.2008; Hennig: Luise. Königin aus Liebe 2008; Nehring: Wälder, Parks und Schlösser auf den Spuren von Königin Luises Familie. Ein literarischer Reisebegleiter 1997; Bentzien: Unterm roten und schwarzen Adler. Geschichte Brandenburg-Preußens für jedermann 1992; **Hettche: Pfaueninsel** 2014 Inselgeschichte FWIII und Gräfin Liegnitz. Lenne. Tier- und Palmensammlung; Gooch: Friedrich der Große 1951; Vocke: Friedrich der Große 1977; Vogler & Vetter: Preußen 1980; Oster: Preußen. Geschichte eines Königreiches 2010; **Haffner: Preußen ohne Legende** 1998; Menzel 1815-1905: Reiseskizzen aus Preußen 1992; Engelmann: Preußen - Land der unbegrenzten Möglichkeiten 1979; Ritter: Friedrich der Große. Werke und Schriften 1915, 1998; Beck: Wilhelm II. und seine Geschwister 2016; Feuerstein-Praßer: Friedrich der Große und seine Schwestern; Bendikowski: Friedrich der Große; Gundermann: Friedrich der Große 1988; Heller: Märkischer Bilderbogen 1976, 1981; **Gisela Heller: Potsdamer Geschichten 1984**, 1993 p103; **Sternaux1885-1938: Das unbekannte Potsdam** 1926; Sternaux: Potsdam - Als Flaneur durch die tausendjährige Stadt 1924-30 1990; **Brehmer: Bd1 = Die bittere Vorgeschichte der Geburt einer Hochschule in Potsdam-Sanssouci.** Nachkriegsgeschehen im Park Sanssouci vor Gründung der brandenburgischen Landeshochschule 2012; Brehmer: Gründungs-Professoren und Gründungsstrukturen der Hochschulstadt im Park Sanssouci. Eine Hochschulstadt in Sanssouci Bd6 2016; Brehmer: Gründung und Gründer der Hochschul-Physik in Potsdam Sanssouci = Bd9 2022; **Görtemaker: Die Universität Potsdam. Geschichte - Bauten - Umgebung** 2001; Lemke: Die Astronomische Gesellschaft 1863 - 2013. Geschichten und Bilder aus 150 Jahren, Heidelberg 2013 hierin auch Darstellung der Kurths'schen MPG-Arbeitsgruppe zur Nichtlinearen Dynamik an Uni Potsdam; Schielke: Wer zählt die Völker, nennt die Namen ...? Hamburg 2013; Marshall, Barbara: Die deutsche Vereinigung in Akademia. West- und Ostdeutsche im Gründungsprozess der Universität Potsdam 1990-1994 2016; Görtemaker: 25 Jahre Universität Potsdam. Rückblicke und Perspektiven 2016; Klußmann & Pieper: Das Russland der Zaren. SPIEGEL GESCHICHTE 1/2012; Torke: Die russischen Zaren. 1547-1917; Jean-Baptiste de Boyer = Marquis d'Argens & Funke: Die Verkettungen von Liebe und Glück oder Memoiren des Marquis de Vaudreville

1735; Mittenzwei: Friedrich II. von Preußen. Eine Biographie 1880; **Zieler: Potsdam. Ein Stadtbild des 18. Jahrhunderts** 1913, 1999; August Kopisch: Die Königlichen Schlösser und Gärten zu Potsdam 1854; Dohna: Die Gärten Friedrichs des Großen und seiner Geschwister 1999; Fritz **Stahl: Potsdam**. Eine Biographie 1928; Pestalozzi-Verein: **Die Provinz Brandenburg in Wort und Bild** 1900; **Baller & Reinholz: Das alte Potsdam des Prof. Dr. Hans Leopold Kania 1878-1947.** Historische Beiträge Kanias in der 'Potsdamer Tageszeitung', Bd 1-3; **Hürlimann & Rave: Die Residenzstadt Potsdam** 1933; Bergner: Voltaire 1976; Voltaire: Philosophische Briefe 1727-30, Der unwissende Philosoph und kleinere Schriften 1731, Über die Toleranz 1762, Philosophisches Wörterbuch 1764; Lückemeier: Eine Lange Nacht über das Leben Voltaires, Höfling und Revolutionär Deutschland Radio Kultur am 28. Mai 2016; Voltaire: Was, wenn sie dir Schlesien wieder nehmen wollen? FII: Ils seront recus, biribi, a la facon de barbari, mon ami. Jemanden nach **Biribi** schicken bedeutete in der französischen Armee, dass jemand zu einem Strafbataillon nach Algerien versetzt wurde. Sie werden die Quittung auf dem Wege der Barberei erhalten!; **Giersberg & Knitter: Tourist Stadtführer-Atlas Potsdam** 1978; **Giersberg & Hürlimann: Die königliche Residenzstadt. Potsdam und Sanssouci** 1990; **Euler: Briefe an eine deutsche Prinzessin über verschiedene Gegenstände aus der Physik und Philosophie.** 1760-62. Stelle im Herforder Stift = Friederike Charlotte von Brandenburg-Schwedt 1745-1808 & Luise von Anhalt-Dessau 1750-1811. Mutter von FII verbannt. Klauser: Lexikon der dt Herrscher und Fürstentümer 1980; Ursula Klein: Humboldts Preußen 2015; Bedürftig: Deutsche Geschichte. Wissen auf einen Blick. **Preußen 1701-1871. GeoEpoche Heft23 2006** enthält tolle Bilder. Der kleine König. Der Spiegel Nr45 2011 p72-83. Petri: Potsdam und Umgebung 2005[2]; Mickel & Wiegand: Geschichte, Politik und Gesellschaft 1. Von der franz Rev bis zum Ende des 2. Weltkriegs 1988; Borzeszkowski & Wahsner: Newton und Voltaire 1980; Ley & Löther: Mikrokosmos-Makrokosmos. Philosophisch-theoretische Probleme der Naturwissenschaft und Technik, Medizien 1967 Bd1 Felke: Vom Prinzip der kleinsten Wirkung zur Optimierungsforschung p431-512, Candide p454; Kurth & Borkowski: Sanssouci. Ein Spaziergang. 1991; **Mielke: Potsdamer Baukunst. Das klassische Potsdam** 1981, 1998; Mielke-Treppen-Denkmal am Geiger-Weg auf neuem Friedhof! Petzholtz: Hier möchte ich begraben sein! Ein Spaziergang über den Südwest-Kirchhof in Stahnsdorf bei Berlin 2002; D̃as Teltower Land. Heimat-Magazin 2017/18. Teltow, Kleinmachnow, Stahnsdorf, Güterfelde, Kleinglienicke, Lankwitz, Lichterfelde, Mahlow, Potsdam, Sigridshorst und Steglitz 2017; **Drescher & Kroll:** Potsdam. Ansichten aus drei Jahrhunderten 1981; Heckmann: Berlin, Potsdam. Kunstlandschaft, Landeskultur, Bewahrung der Umwelt. Symposion in Potsdam vom 22.-24. Oktober 1993; Ellrich: Potsdam zur Kaiserzeit. Historischer Bildband mit alten Fotografien, die das Alltagsleben in Potsdam Ende des 19. und zu Beginn des 20. Jahrhunderts dokumentieren 2015; **Pesch & Thomas-Ziegler: Alltagsleben in der DDR** 1991; **Beier: Alltag in der DDR. So haben wir gelebt. Fotografien 1949 - 1971** aus dem größten Privatarchiv der DDR 2010; Hantke: Im Konsum gibts Bananen. Alltagsgeschichten aus der DDR 1946-1989 2017; Schädlich: Wie war das in der DDR? Einblicke in die Zeit des geteilten Deutschland 2019; **Bohm & Kessler:** Potsdamer Schlösser in Geschichte und Kunst 1985; Brög, Richter, Wichelhaus: Renaissance, Manierismus und Barock Bd1 1995; Manierismus = Abkehr von den ausgewogenen, geometrisch kalkulierten Kompositionen der Renaissance in einer Zeit des Umbruchs. An die Stelle harmonischer Formen trat eine gesuchte, gezierte Manier, ein kapriziöser und spannungsgeladener Stil, oft angereichert mit rätselhaften Allegorien, die nur von eingeweihten Kennern aristokratischer Kreise verstanden werden sollten. Die Darstellung des menschlichen Körpers in starker Verdrehung = Figura serpentinata, gesteigerte Expressivität und Dreidimensionalität. Landschaftsarchitektur: Liebe für das Groteske und Überraschende durch Grotten und Wasserspiele. Deren Tricktechnik inspirierte René Descartes Theorie des menschlichen Automaten. Penck: Prestel Atlas Bildende Kunst. Von der Steinzeit bis ins 20. Jahrhundert 2002; Paxmann: Architektur. Von der Steinzeithöhle zum Wolkenkratzer 2002; Roeder: 13 Bauwerke, die du kennen solltest. Kunst für Kids 2007; **Vogtherr: Die Gotische Bibliothek Friedrich Wilhelms II. im Neuen Garten zu Potsdam**, Stiftung Preußische Schlösser und Gärten Berlin-Brandenburg 1998; von Massenbach: Die Hohenzollern. Einst und jetzt 2015[27]; Vehse: Preußens Könige privat. Berliner Hofgeschichten 2006;

Brandenburgs Kurfürsten. Preußenkönige. deutsche Kaiser. Das Taschenlexikon 2008[8]; Otte: Das Marmorpalais 2003; Otto: Friedrich Wilhelm II; Mast: Die Hohenzollern. FWIII bis WII 1993; Fischbacher: Die Hohenzollern in Brandenburg 2015; Eckert: Anekdoten aus Brandenburg 2016[6]; Georg Hermann1871-1943: Spaziergang in Potsdam. Nachricht aus einer versunkenen Stadt 1926, 1996; Bentzien: Meine Amsel singt in Tamsel. Märkische Miniaturen 1996;

P̃hysikalische Blätter 7 1951 bis 11 1955 und 36 1980 und 37 1981; W̃eyl: Gesammelte Abhandlungen 4Bde; M̃ahnke, Kaupuzs, Lubashevsky: Physics of stochastic processes 2006; Ẽrgebnisse der exakten Naturwissenschaften 12 Bde 1922-1933; Ñakahara: Differentialgeometrie, Topologie und Physik 2013; L̃andsberg: Tensors. Geometry and applications 2012; F̃eyerabend: Die Vernichtung der Vielfalt 2000; Õ'Donnell: Introduction to 2-spinors in general relativity 2003; R̃eich: Die Entwicklung des Tensorkalküls. Vom absoluten Differentialkalkül zur RT; Ñollert & Ruder: Die relativistische Welt in Bildern. Was Einstein gerne gesehen hätte, SdW Spezial H3 2005 P̃olizeiruf 110 - Box 17: 1989-1990 (DDR TV-Archiv - 4 DVDs) Der Wahrheit verpflichtet · Katharina · Der Tod des Pelikan · Zahltag · Tödliche Träume · Falscher Jasmin · Warum ich? · Abgründe Bonus:

Sachregister

1815
- Bad Muskau, 753
- Bismark, 755
- Fresnel, 425
- Gaußebene, 196
- Oh du fröhliche, 750
- Rügen, 756
- Siegesfeier, 765

a2book, 739
Aal, 733
AAW, 656
ab-initio-Methoden, 526
abarisches Feld, 450
Abbe-Limit, 570
Abbildung, 130
Abbildung per Matrix, 136, 209, 210, 312
Abendland-Denker, 390
Abendmahl, 752
Aberglauben, 731
Aberration, 413–415
abgerundetes Wissen ohne Wert, 47
abgeschlossen/closed, 450
abgeschlossenes System, 519
Abhängigkeiten, 83
Ableitbarkeit
- Analytizität, 205
- Riemann-Cauchy-Dgls, 180
- Satz von Schwarz, 350
- totales Differenzial Def, 350
- Wegabhängigkeit, 180, 205

Ableitung, 178
- äußere, 245, 293, 567
- absolute, 253
- Anti, 180, 567
- Anti = Stammfunktion, 315, 317, 567
- Deutung, Idee, 178, 180
- Distributionen, 139
- eichinvariante, 562
- eichkovariante, 672
- eines Vektors, 246
- Euler'sche, 183
- Euler-Lagrange, 344, 352, 542
- Folgendefinition, 178
- fraktionale, 191
- Frechet, 182
- Funktional, 181, 541
- Gateaux, 181, 541
- gebrochene, 191
- implizite, 350
- inverser Funktion, 183, 184
- komplexe, 180, 205
- kovariante, 252, 253, 437, 463, 680
- kovariante Eichtransformation, 679
- Lagrange'sche, 183
- Lie, 358, 359
- materielle, 596
- mehrfach-ausgedehnter Größen, 236
- ohne, 179
- orbitale, 398
- parzielle, 183
- parzielle und totale vertauschbar, 356
- Richtungs- vom Vektorfeld, 358
- schwache, 138, 181
- starke, 181
- subdifferenzielle, 137
- substanzielle, 183, 311, 410, 562
- totale, 183
- totale und parzielle vertauschbar, 356
- Umgebungsdefinition, 180
- Umkehrfunktion, 183
- Variations, 181, 344, 541, 542
- verallgemeinerte, 138
- Vertauschbarkeit von totaler und parzieller, 356
- zeitliche, 183, 311, 562
- Zufallsfunktion, 117
- zweite diskrete, 329, 559
- äußere, Beispiel, 275

Ableitungsbegriff jenseits 1d-Bereich, 238
ABM-Vertrag, 656, 658
Abraham-Lorentz-Gleichung, 383, 644
Abrundung einer Funktion, 181
Abrüstung, 654, 659
abschätzen, 221
Abschluss, 281
Abschnittsform, 229
absolute Geometrie, 436
absoluter Raum, 331
Abstand, 250
- Entfernung, 287
- Friedmann, 473
- Geodäte, 318
- Gerüst, 473
- imaginär, 225
- Konzept, 136
- Kugel, 318

Kugel auf, 319
mitbewegter, 476
Vektor, 546
wirklicher Abstand, 476
Abstände im All, 501
Abtast-Theorem, 105
Abwertungserfahrungen, 697
Abzählmethode, 80
8, 133
68er-Meinungssoldaten, 10
actio = reactio, 351
ActionCam, 155
AD-Wandlung, 105
Addition a la Poincare, 493
Addition von Geschwindigkeiten, 493, 494, 496
Additionstheoreme, 103, 381
Adhäsion, 320
adiabatisch, 516, 517
adiabatische Invarianten, 363
adiabatische Näherung, 617
adiabatisches System, 519
Adjazenz-Matrix, 534
adjungierter Operator, 622
Adjunkte, 218, 220
Adler-Gleichung, 155, 202
ADM-Formalismus, 412, 480
Adobe Scan, 736
Adolf Schmidt, 576
Adonis, 760
Adressen und Metaphysik, 418
AdS = Anti-de-Sitter-Raum, 477, 636
Advektionsgleichung, 589
Ähnlichkeitstransformation, 491
AeO, 18
Äther nicht-materiell rel invariant, 416
affin = inhomogen linear, 228, 266
affine
Abbildung, 111
Abbildung per Matrix, 136, 209
Geometrie, 232, 437
Koordinaten, 265
selbstaffine Abbildung, 114
Transformation, 86
affineGeometrie, 228
affiner
Raum, 136, 228, 289, 429
Zusammenhang, 254
Affinität, 254, 256
Affinor, 262, 291
Affolter, 708
Affordanz, 156
Afghanistan, 17
Afrikafeldzug, 717
Aggression, 694
Aggressivität, 44, 530
Aharonov-Bohm-Effekt, 562, 609, 610
Ahnenblatt, 735
Ähnliche Matrizen, 442
Ähnlichkeit, 230
Linearität, 266, 441
mechanische, 310
Ähnlichkeitstransformation, 261, 285, 442, 491
Fibonacci-Zahlen, 442
AI, 43, 733
Aich-Invarianz, 678
akausal = rämlich, 713
AKF-Signifikanz-Niveau, 96
Akinetor, 270
Akkretion, 588
Akku Laderegler, 506, 507
Akku Lithium, 507, 724, 725
Akku-Kapazität, 507
Aktivität, endlichen und unendliche, 118
Akustik, 104
Albedo, 8
Alchimie, 484, 652, 653, 663
aleatorische Wahrscheinlichkeit, 621
Alemannen, 748
Aleph, 134
Alexandria, 751
Alexandrowka, 766
Alfven, 44, 682
Algebra
auf Mannigfaltigkeit, 459, 460
Euler, 211
Geschichte, 755
Grundschule, 464
Lie, 445
lineare, 195
algebraisch, 537, 538
algebraische
Geometrie, 176, 284, 288
Topologie, 252, 282, 288
Zahl, 132, 134
Algorithmen, 153, 154, 396, 532, 536
C++, 728
Datenstrukturen, 723
Graphentheorie, 211
maschinelles Lernen, 143
PageRank, 175, 723
Quantentheorie, 514
statistische Physik, 172, 514

und Modelle, 172, 292, 393, 397, 532, 537
algorithmische Komplexität, 125, 126
Algorithmus, 150
alias bashrc, 147
Aliasing, 102, 105
alignment, 168
All-Quantor, 127
alle Modelle falsch, 2, 49, 64, 143
Allegorien, 285
allgemeine Lösung, 309
Allgemeine Relativitätstheorie, 479
Alliteration-Sieb, 172
Allmacht, 34
allosterische Hemmung, 531
Alltagsleben, 773
Alphabet, 133, 150
Alphabetlänge, 80
α-Effekt, 569, 579
α-Wellen, 701
α-Zerfall, 669
Altavista, 26, 755
Alte, 696
Alter, 25, 69, 192, 193, 281
Einflussfunktion, 379
Universum, 482
Altern, 115
Alterung
Ergodizität, 118
komplexer Materialien, 51
Nichtgleichgewicht, 193
SSDs, 723
Telomere, 529
Altschuller, 41
ALU, 729
Alzheimer, 709
Amari-Gleichung, 600
Amateurfunk, 717
Ambarzumjan, 500
Amerika, 658
Amnesie, 706
Amoklauf, 695
Ampere-Gesetz, 235, 561
Ampere-Schleife, 545
Amplituden-Gleichungen, 596, 599
Analogrechner, 146, 154, 732, 733
Analysis, 190
Intro, 127
analytische Fortsetzung, 207
analytische Geometrie, 245
analytisches Urteil, 712
anaomale Diffusion, 192
Anchor, 722
Anders, 23, 328, 653
Anderson-Lokalisation, 638
Android, 42
App ProSpec-Lite, 101
App REDUCE, 180, 183
Apps zu Rechenmethoden, 101, 196
Custom Rom, 722
PC remixos, 101
Shell, 741
Andromeda, 761
Anfangswertproblem, 597
Anführungszeichen, 743
Angiographie, 531
Angst, 11, 47, 54, 669, 695, 696, 701, 710, 757
Angst schafft Absatz, 8
Angstgenerator, 659
anharmonischer Oszillator, 320, 378
Anharmonizität, 103
Annus mirabilis, 23
Anode, 579
anomales magnetisches Moment, 464
Anreicherung, 652, 668
Anschaulichkeit vs Vertrautheit, 296, 412
Anschauungen
a priori, 435
empirische, 435
reine, 435
Anschauungsraum 3d, 433
Anti
Ableitung, 180, 567
Bibliothek, 49
de-Sitter-Raum, 636
Fragility, 49
Gene, 526
Gravitation, 629
linear, 622
Linearität, 441
Materie, 35, 40, 484, 488, 682, 685
Materie Baryonenasymmetrie, 685
Materie Feynman-Diagramm, 682
Materie Photon, 488
Nomie, 133
Persistenz, 115
Teilchen, 682
Teilchen aus SRT u QM, 40
Teilchen Dirac, 464
Teilchen Paarerzeugung, 413
Teilchen Spinor, 643
Anti-Kriegsliteratur, 18, 692
Anti-AKW, 662

Antichain, 99
Antike, 749
Antikommunismus, 15, 695
Antikommunismus im Film, 655
Antiproton, 682
Antirealismus und Physik, 35
Antonius, 759
Anyonen, 638
AOP, 295, 502
Apfelmännchen, 196
Aphasie, 166
Aphel, 337
Aphrodite, 749
Apollonius, 201
Apoptose, 526, 527
Apostel, 768
App
    Phyphox, 101
    Spektralanalyse, 101
Apps, 101, 196, 231
    loswerden, 101
Apraxie, 166
a-priori-Wahrscheinlichkeit, 90
Apsidenwinkel, 337
apt-get, 738
Äquipotenzial, 233
Äquipotenzialflächen des Dipols, 237
Äquivalentdosis, 669
Äquivalenzprinzip, 479
Äquivalenzprinzip, 474, 479–481, 508
Äquivalenzrelation, 131, 199, 200, 703
arabische Sprichworte, 751
Arbeit, 238, 315
    im elektr Feld, 316
    elektrische, 720
    mechanische, 238, 315
Arbeit als Zerstreuung, 47
Arbeiten wissenschaftliches, 714
Arbeitslosigkeit, 44, 45
Arbeitsweise der Naturwissenschaften, 35
Archäologie, 157
archimedische Axiom, 455
Architektur, 773
arcsinh ln, 247
Ardenne, 667
Arduino, 101, 150, 724
area metric, 505
Arendt, 665
Ariadne, 760
Aristoteles, 89, 157, 386, 387, 433, 527, 650, 693
    Lernen, 705
Armada, 752
Armenier, 503, 750
AR-Modell, 50, 108
AR[1], 108
Armut, 45, 47
Arnold & Avez, 119, 360
Arnold-Zunge, 203
Arnoldi-Verfahren, 223
Arp, 484
ARPANET, 734
Arroganz, 697
ART
    absoluter Raum, 331
    algebraische Rekonstruktions-Techniken, 215
    Anwendung, 479
    Dicke, 477
    Differenziale, 272
    Dirac, 480
    Einstein, 480
    Energie-Impuls-Tensor, 506
    Feldgleichungen, 467
    Geometrie als dyn Größe, 481
    Gravitationstheorie, 480
    Inerzialsystemproblem, 479
    Intro, 479, 481, 482, 484, 499
    Kosmologie, 466, 472
    kosmologische Konstante, 477
    Krümmung, 247
    Metrik, 477
    Skalenfaktor, 468
    SRT, 506
    variable Lichtgeschwindigkeit, 477
Artemis, 761
Asch Tensorbeispiele, 269
Asgard, 756
Ashtekar-Variablen, 412
Asimov, 41, 581, 670, 678, 684, 733, 749
Asimov I, robot, 41, 733
Assange, 734
assoziativ, 271, 272
    nicht, 271, 445, 451
Astronomie, 574
    Intro, 501
Astronomie in Potsdam, 501
Astronomie Intro, 472
Astrooptik, 575
astrophotonics, 574
Astrophysik, 24, 288, 471, 500, 501, 503, 639, 640
Astroteilchenphysik, 675
Asymmetrie Gleiser, 686
asymmetrische Kriegsführung, 10, 658

asymptotische Freiheit, 345
asymptotische Methoden, 377, 580
AT Zeugen, 768
Ataraxie, 1, 32
Atheismus, 34
Athene, 749
Äther, 410, 414–417, 700
    Drude, 539
Äthersubstanz, 260
Ätherwellen, 717
Atlas, 284, 761
atleD, 235
atmosphärische Tests, 668
Atom
    Antikontinuum, 482
    Bombe, 663, 667
    Bombe Soddy Wells, 652
    Bombenbau, 666
    Falle, 642
    Intro, 608, 662
    Kraftwerke, 652, 664, 669
    Modell Lorentz, 610
    Modelle, 483, 610, 629, 673, 687
    Physik populär, 663
    Punktförmigkeit, 686
    Radius, 630, 689
    Spaltung, 663
    vs 2. Hauptsatz, 517
    Wellenfunktion, 681
Atomangriff, 660
Atombombe UdSSR, 14
Atombomben-Versuche, 653, 654, 660
Atomistik, 32, 62, 385–387, 390, 482, 517, 716, 717
Atomkrieg, 653
Atommächte, 13
Atomphysik, 625
Atomwaffen, 30, 45, 46, 386, 655, 656, 658, 659, 746
ATP, 528, 531
Attika-Figuren, 764
atto, 723
Attraktor, 121, 123, 322, 399, 400, 402, 407
    Definition, 320
Attribut, 728
Audimax, 6, 37
Auditing, 744
Aufgabenbuch
    Dgls, 301, 339
    Elektrodynamik, 543
    Gruppentheorie, 454
    Mathematik, 194
    Mechanik, 226, 300, 313, 330, 349, 353, 360, 378, 379
    Optik, 571
    Physik, 330
    Quantenmechanik, 632
    Tensoren, 261
    Thermostatik, 515
    Variationsrechnung, 143, 166, 250, 292, 369, 371, 374–376
    Zufallsprozesse, 76
Aufhören, 696
Aufhören, 20
Aufklärung, 61, 756
Auflösungsgrenze, 570
Aufmerksamkeit, 101, 701, 702
Aufprallen eines Freistrahles, 587
Aufpunkt, 334, 546, 563
Aufzug-Metrik, 474
Augenblick, 254
Augereffekt, 661
augmented
    Instant-Messaging-Dienste, 63
    reality AR, 735
August der Starke, 759
Augusta, 768
Auguste, 764
Augustinus, 153, 434, 749
Aurora, 576
Ausdehnungsfunktion, 475
Ausdruck, 158
Ausfallwahrscheinlichkeit, 51
Ausgleichsrechnung, 86, 194
Ausklammerung, 212
Ausreisser, 93
Aussage, 35, 43, 93, 128, 158, 162, 698, 703, 728
Aussagenlogik, 129
Außenfeld, 334
Außenseiter, 416
Aussteigen, 696
Austausch
    Energie, 217, 218
    Kopplung, 523
    Mechanismen, 218
    Operator, 217
    Teilchen, 487, 683, 688
    Wechselwirkung, 623
Auswahlaxiom, 113
Auswahlregeln, 449
Auswege Kosmologie, 277
Autarkie, 693
Authentifizierung, 742

Auto, 693
Autoassoziativität, 71
Autobiographie, 746
Autokorrelations-Funktion, 96, 106, 107, 109
    Beispiele, 109
    Skalarprodukt, 197
autologisch, 51
Automaten, 153
Automatisierbarkeit von Berufsfeldern, 42
Automatisierungstechnik, 128, 167
Autonomie, 695
Autonomie-Prinzip, 410
autoregressive Modelle, 40, 50, 106, 108, 383, 397, 526
autoregressiver Prozess, 109
autoregressives Spektrum, 109
Autovervollständigung, 725
außerirdische Intelligenz, 33
Avogadro-Zahl, 717
AWACS, 657
awk, 740
awk Format, 739
awk Summe, 739
axialer
    Multipol, 551
    Vektor, 289, 290
Axiom, 129
axiomatische QFT, 633
Axion, 500
Axon-Modell, 596
Azimutwinkel, 233

B-spline, 140
BAC-CAB
    Fliehkraft, 332
    Levi-Civitta, 240
    Regel, 230, 240
Bachelorarbeit, 714
Backend, 738
Bäckertransformation, 118, 210
backpropagation, 533, 724
Baez, 56
Bahn-Moment, 560
Bahndrehimpulsoperator, 446, 581
Bahngeschwindigkeit mittels $\omega\times$, 212
Bahnlinie, 586
Baker-Campbell-Hausdorff
    Formel, 460, 643
    Theorem, 599
Bakterien, 55, 63, 527–529
    Erfolgsrezept, 527
    Größe, 529
    Holobionten, 63
    Quanten, 628
Bakteriendurchmesser, 525
Balkenproblem, 210, 219
ballistischer Transport, 623
Balmer-Serie, 577, 630
Banach, 113, 115, 138, 369, 580
    Algebra, 136, 622
    Raum, 136, 138
    Tarski-Theorem, 113
Bandbreite, 105, 107, 645
Bändermodell, 637
Bandinversion, 641
Banken brauchen Krieg, 652
Barbour, 62, 649–651
Barium, 4
Barmherzigkeit, 758
Barock, 773
barokline Instabilität, 604
barometrische Höhenformel, 178
Barrow, 49, 278, 415, 469, 690
Barwich, 662, 666
Baryonen, 685
Baryonenasymmetrie, 685
bash-Prompt, 147
bashrc alias, 147
Basis
    Anfangsstörung, 405
    Ausgleichprobleme, 86
    Darstellungsmatrix, 441
    Definition, 233
    Drehung, 440
    Dual, 269
    duale, 262
    1-Formen, 490
    Erfahrungsraum, 703
    Formen, 293
    inverse, 262
    ko- und konravariante, 182, 232
    ko- und kontravariante, 224
    kontravariante, 182, 233
    kovariante, 182, 232, 233
    Operatordarstellung, 212
    orthogonal nicht kartesisch, 225
    reziproke, 262, 269
    selbst-reziproke, 269
    Wechsel, 265, 268
    Zahldarstellung, 132, 133
    Zerlegung der Eins, 111
Basisstation, 8, 63, 154, 722
Bassin, 320

Bastelbücher, 101, 719, 721
Batterie, 8
Batterie-Polung, 579
Bauchgefühl, 43, 51, 708
Bauelemente, 719
Baum-Welch-Algorithmus, 168
Bauwerke, 773
Bayes
    a priori Wahrscheinlichkeit, 144
    auch Parameter als Zufallsvariable, 93
    Datenanalyse, 143
    Gehirn-Modell, 709
    Glaubwürdigkeit vs Vertrauen, 94
    Gradmesser unseres Wissens, 90
    Idee, 90, 145
    Intro, 71, 144
    Jaynes, 89
    Kern-Schätzer, 78
    Kognition, 144
    Laplace, 84, 91
    Likelihood, 77, 84, 189, 219, 220, 226
    Maximum Entropie, 144
    Messung, 391
    Minimum-Varianz-Schätzer, 167
    MLE, 94
    Modellbewertung, 418
    Modelle mit Wahrscheinlichkeiten behandeln, 94
    Netze, 100
    Plausibilität, 91
    Python, 534
    Quantentheorie, 634
    Regel, 144
    Saturn-Masse, 91
    Satz von, 144
    sche Regel, 89
    sches Netz, 172, 534
    Schätzer, 539
    Spieltheorie, 633
    subjektive Wahrscheinlichkeit, 94
    Test, 94
    Theorem, 89
    Tschirk und Ziegenproblem, 71
    Tücken der Statistik, 89
    vs Frequentisten, 78, 89, 142
    vs Popper, 39
Bayesian game theory, 634
Bayesianer, 89, 93, 94, 142
    quantifiziert Vorwissen, 144
BBH, 508
BBTALK, 10
bc -l, 147
BDO, 17
Beagle board, 101
Beamer-LaTeX, 743
BEC, 509, 522, 638–641
Bechert, 13, 44, 628, 662
Becquerel, 664
Becquerel Aktivität, 668
Bedeutung, 43, 128, 764
Bedeutungs-Ausdehnung, 191
Bedeutungslehre, 61, 64, 153, 157, 160
Befreiung Europas, 13, 14
begleitendes Dreibein, 247
Behaviorismus, 735
Beispiele Lehre, 64
Bell, 606, 621, 630, 632, 633, 635, 636
    EPR, 624
    Labs, 26, 148
    Quantenmechanik, 634
    Realismus und Nichtlokalität, 62
    Ungleichung, 614, 620, 624, 630, 632
    Ungleichungen und Zeit, 703
Bellizismus, 18, 659, 692
Beltrami Identität, 374
Beltrami-Formel, 251
Benard-Zellen, 397, 401, 587
Bendixson-Theorem, 115
Benford-Gesetz, 527
Bennett, 698
Benzen
    Bixon-Jortner-Modell, 645
    Hückelnäherung, 215
    Schwingungen, 329
Beobachtung
    Auswahl-Effekt, 84
    Bayes, 90, 144
    Ergodizität, 115
    Exophysik, 43
    Falsifizierbarkeit, 34
    Fehler, 71
    Funktion, 601
    Glaubwürdigkeit, 94
    Gleichzeitigkeit, 668
    Grobkörnung, 72
    Hegel, 34
    Heisenberg-Schnitt, 705
    Hidden-Markov-Modell, 168
    inverses Problem, 91
    Kalman, 601
    Kontingenz, 57
    Martinginal, 97
    Matrix, 168

Ordung, 57
Quantenmechanik, 621, 622, 634, 651
Rauschen, 322
Serendipität, 734
Signifikanz, 90
Skepsis-Ansätze, 484
Sprache, 37
SRT, 622
Statistik, 90
Sterne, 501
Theorie, 37, 38
Unabhängigkeit, 141
vs Experiment, 36
vs Wirklichkeit, 33
Zeitreihenanalyse, 391
Zustandsraummodell, 73
Berechenbarkeit, 128, 173
Berechnung statt Kontroverse, 68
Bereich, 288
Bereichsintegral, 187
Bergmann, 759
Bergpredigt, 659, 691, 692
Bergpredigt Niemöller, 24
Berkeley, 89, 90
Berlin, 757
Berlin-Blockade, 655
Bernal, 67
Bernoulli'sche Ungleichung, 178
Bernoulli-Gleichung, 601
Bernstein-Polynome, 86
Bernsteinzimmer, 758
Bertrand-Theorem, 333
Berührungstransformation, 381
Beryllium-Strahlung, 661
Beschattungs-Lemma, 392
Beschleuniger, 664
Beschleunigung, 231, 330
kosmische, 504
Beschleunigungssensor, 231
Beschweigen, 711
Besetzungszahl-Darstellung, 447
Besitzen vs teilen, 692
Besitzstandwahrung, 47
BESM6, 729
Besorgnisindustrie, 695
Bessel, 767
Beugung, 260
funktion bc -l, 147
Funktionen, 297
sche Dgl, 318
β-Zerfall
C-14, 578
Fermi-Modell, 677
Kernspaltung, 668
P-Verletzung, 684
Parität, 677
Rutherford, 617
β-Zerfall, 4, 677
Bethe, 386, 638, 672
Eddington, 484
Bethe-Strings, 218
Bethmann Hollweg, 748, 768
Betrag = Modul, 198
Betragssummennorm, 140
Betrug intellektueller, 49
Betti-Zahl, 282, 287
Beugung, 580
am Spalt, 572
Sterndurchmesser, 260
bewegte Dreibeine Cartan, 255
Bewegung, 369
geometrisch, 439
Bewegungspol, 268
Bewegungsproblem, 432
Bewegungstherapie bei Kreislaufkrankheiten, 526
Beweis, 62, 129, 130, 153
Beweis durch Induktion, 129
beweisbar, 62, 128, 129
Beweisbarkeit, 69
Beweistechniken, 130
Bewusstsein, 38, 158–160, 162, 698, 699, 702–704, 710
Koma, 701
Bewusstseinswandel, 47
Bewältigungsmuster Arbeitsbelastung, 696
Beziehungsentsorgung, 709
Beziehungslosigkeit und Wirklichkeit, 47
Bezugsmolluske, 481
Bezugssystem, 299, 330, 409, 410, 436, 486, 488, 622, 685
Bezugssysteme lineare, 428
Bhabha, 653
Bhakdi, 54
Bhakdi offener Brief, 55
Bias, 107
Bibliothek, 26, 49, 700
Bienen, 527
Bierdeckelwelt, 437
Bifurkation
Definition, 324
globale, 324
lokale, 324
Typen, 322

Big
Bang, 473
Chill, 473
Crunch, 473
Rip, 473
Big Bang, 473
Big Data, 89
Datenflut, 71
Desillusionierung, 78
Ende des Zufalls, 89
Inside, 63
Konzepte, 78
ohne Verstand, 50
Tools, 78
Weltformel, 79
BigBlueButton, 742
bijektiv, 131
Bikini-Atoll, 653–655
bikonjugiertes Gradienten-Verfahren, 224
Bilanzgleichung, 259
Bildende Kunst, 773
Bilder Erziehungsgeschichte, 705
Bilderverbot, 734
Bildladung
Kugel, 556
Methode, 555
Bildung, 126, 704, 755
Bildungssystem, 49
bilinear, 358
Bilineares Modell, 397
Bilinearform, 264
Billard, 299
bimetrische Gravitationstheorie, 505
binnen, 70, 71
Binomial-Verteilung, 82
Ausfall, 51
Licht, 614
Binomialkoeffizienten, 87, 88
binomischer Lehrsatz, 86
Binormalenvektor, 247
Bio
Analytik, 192
Chemie, 526, 528
Intro, 528
Protein, 526
Zelle, 528
Metrie, 396
Physik, 528
Psychologie, 702
Waffen, 46
Biofeedback, 732
Biologie, 53
Biologische Versuche, 54
biomorph, 52
Biophysik, 55, 397, 528
BIOS, 726, 729
Biot-Sarvart'sches Gesetz, 558, 560
Bipolarkoordinaten, 232
Bisektion, 225
Bismarck, 18, 748, 755, 758, 768, 769
Bispektrum, 112
bit, 723
bit.ly, 296
Bixon-Jortner-Modell, 645
Black
5 D, 435
Scholes-Merton Formel, 91
Blackout, 4, 41
Blade, 270
Blanchard, 367, 368
Bland-Altman-Plot, 84
Blätterungen, 369
Blau des Himmels, 618
Blindgänger, 15
Blindstrom, 720
Bloch-Kreis, 624
Bloch-Kugel, 624
Blochvektor, 643
Blockadebuch, 766
Blockchain, 744
Blumenberg, 65, 260, 434
Blumenthal, 496, 557
Bluthochdruck, 54
Bodenkunde, 300
Bodenreform, 655, 665
Bogendifferenzial, 247, 248
Bogenlänge, 245, 248, 288
Bogenmaß, 199
Bohr, 621, 629
Bohr-Sommerfeld-Quantisierung, 364, 628, 687
Bohr'sche Quantisierung, 630
Bohr'scher Radius, 689
Boltzmann, 278
Boltzmann-Gleichung, 387, 526
Boltzmann-Konstante, 514
Bolz, 10
Bombenkrieg, 15
Bonferoni-Korrektur, 78
Bonn, 15, 576, 747
Booklet drucken, 739
Boole'sche Funktion, 146
Boost, 489

boost proto, 728
booten per unetbootin, 729
bootstrap methods, 78
Bordamündung, 587
Born
    Aberration, 413
    absoluter Raum, 413
    Deutung der Wellenfunktion, 621
    Einstein Briefe, 23
    Ideologien von Diktaturen, 296
    Infeld-Elektrodynamik, 625
    Mechanik nicht deterministisch, 401
    Oppenheimer-Näherung, 617
    Quantenmechanik Deutung, 621
    Relativitätstheorie, 279
    sche Näherung, 619
    Sozialismus, 296
    SRT, 412
Bornstedt, 17, 758
Borzeszkowski, 39, 481, 636, 773
bösartige Matrix, 220
böse, 61, 694
Bose-Einstein-Kondensation, 638, 640, 641, 744
Bosegas, 639
Bosonen, 638, 640
    Fermionen Supersymmetrie, 685
    gewellte Linien, 682
    Intro, 639
    Schwingungsmoden, 677
    Supermultiplett, 685
Botanik, 525
Bothe, 69, 281
Bots, 733
Bottom-up-Denker, 40
Bourbaki, 2, 30, 70, 226, 446
Boussinesq
    Gleichung, 589
    Näherung, 398
Box-Dimension, 120
Box-Muller, 83
bp Basenpaar, 530
bps, 723, 732
Bra-Vektoren Kovektoren Zeilen Dual, 225, 264
Brachistochrone Tautochrone Zykloide, 374
Bradley, 413
Bragg, 571
brain training, 706
Brane, 672, 686, 687
Braunbek, 21, 22, 47, 559, 576, 638, 662, 668–670, 717
Brecht Raubgold, 665, 770
Brechungsgesetz, 372, 373, 519, 544, 573
Brechungsindex, 74, 519, 544
Brechungsindex Wellenzahl, 572
Breit-Wigner-Verteilung, 383
Breite, 233
Brennstoffzelle, 5
Brett/Leiter an Wand, 342
Brewster-Winkel, 574
Brillouin, 72, 122, 517
Brillouin-Zone, 330
Bronstein, 67
Brouwer, 434
Brown, 390
    'sche Bewegung, 79, 114, 191, 193, 385–387, 390, 397, 524
    'sche Bewegung, aktive, 531
    'sche Bewegung, begrenzte, 397, 524
    'sche Bewegung, fraktionierte, 397
    'sche Bewegung, geometrische, 193
    'sche Motoren, 531
    -These, 385
    Dwarf, 745
Brownout, 4
Brzezinski, 15, 658
Buch, 700
Bücher, 26, 44
Bücher, 26
Bücher digital, 739
Buck, Pearl, 699
bucketing, 70
Bund Deutscher Offiziere, 17
Bündeldeutung, 254
Bundesrepublik, 747
Bunker, 660
Burgers-Gleichung, 589, 601
Burkhard Heim, 55, 431, 501
Büschel Kreis, 437
Byte, 723
Byzanz, 749

C, 154
C_0-Funktion, 365
C++, 532, 728
    Feigenbaum-Diagramm, 532
    rand, 532
c-Zahlen, 269, 628
C4ISR, 657
CA machines, 535
Cahn–Hilliard-Gl, 589
Calcifer, 735
Calder, 10, 13, 47
Calibre, 724

Calley-Klein Algebra, 205
Calvinismus, 751
Campingplatz, 5, 16, 748
Camtasia, 742
Cancel Culture, 9
Cantor, 113, 131, 134
    Diagonalisierung, 133
    Funktion, 141
    Menge, 123, 124, 133, 134
    Unendlichkeit, 119
Cardani(o)'sche Lösungsformel, 197
Cargo-Kult-Wissenschaft, 2, 49
Carmeli, 224, 245, 255, 267, 268, 344, 439, 461, 462
Cartan, 431
Cartan-Kalkül, 184, 291
CAS, 396
Casimir-Effekt, 608
Casimir-Operatoren, 453
Cäsium, 4
Cat.6, 743
Cauchy
    Charakteristik, 589
    Flight, 92
    Folge, 136
    Green-Tensor, 405
    Integralsatz, 205, 206
    Mythos, 127
    Problem, 309, 480, 597
    Randbedingung, 555
    Riemann'sche Dgls, 180, 205
    Theorem, 206
    Verteilung, 81
causet, 412
CBRN, 654
CC, 618
CCD, 3
cdf, 216
C^3I, 657
ceil, 81, 83, 132
cellular automaton model, 72, 535, 537, 538, 589
center manifold, 586
Cepstrum, 107, 168
CFD, 598, 599
Chaitins Zufallszahl, 128
Challenger-Unglück, 49
Chancen, 84
Chandrasekhar, 82, 83, 388, 390, 398, 431, 511, 585, 587, 588
change point, 324
Change-Point-Analyse, 116
Chaos, 392
    deterministisches, 49, 79, 115, 118, 298, 322, 397, 403, 405, 587
    Intro, 396
Chapman-Kolmogorov-Gleichung, 99, 192
Charakeristiken, 584
Charakteristik, 290
Charakteristiken-Methode, 290, 589
charakteristische
    Determinante, 223
    Funktion, 100, 193
    Gleichung, 223
    s Polynom, 222, 223, 326
Charaktertafel, 455
Charalität, 290, 453
charge transfer, 524
Charite, 758
Chatbots, 733
ChatGPT, 733
Che Guevara, 14
checkshorturl, 296
Chemie
    anorganische, 455
    bioanorganische, 528
    organische, 528
    physikalische, 528
chemische Bindung, 320, 611, 612, 617, 672
chemische Bindung Earnshaw, 559
chemisches Potenzial, 518, 520, 521, 639, 640
Chemotaxis, 529
Chernobyl, 662, 663, 669
Chesterton, 700, 703
χ^2-verteilt, 222
Chip-Herstellung, 148
chmod, 156
choice blindness, 706
Cholesky-Zerlegung, 219
Chomsky, 13, 61, 150, 169, 658
    Grammatik, 150
    Hierarchie, 150
Christoffel-Symbol
    Definition, 244, 256
    Geodäte, 319
    Idee Ausgangspunkt, 182
    Trägheitsgesetz, 319
Christus, 752
Chromatin-Faser-Modell, 528
Chromatographie, 612
chronologisches Prinzip, 410
Chronometer, 376
Chua-Schaltkreis, 399
Churchill, 11, 12, 16, 411

CI, 618
Ci Aktivität, 668
CIA, 13, 19
Cimino-Methode, 215
Clausewitz, 766
Clausius-Rankine-Prozess, 517
Clebsch-Gordan-Koeffizienten, 445, 449
Clifford-Algebra, 463
CLIP, 100
cloud computing, 145
Cloud wdfs, 739
Cloudspeicher, 8
Club of Rome, 45, 47, 63
Cluster-Analyse, 77
Cluster-Koeffizient, 53
CMB fossiles Licht, 471
Cobweb, 323
codec, 725
Codierungstheorie, 147, 160–162
coding, 65, 150
Codon, 529
cognitive biases, 58
Cognitive Modeling, 707
Coleman, 430
Collaborative filtering, 175
Compiler, 128, 148, 150, 154, 728
compose key, 147
Composition of velocities, 493
compressive sensing, 409
Compton-Effekt, 471, 487, 618, 647, 744
Compton-Wellenlänge, 618, 647
computable analysis, 173
computational
    costs, 174
    error, 174
    physics, 174, 743
Computer, 40
    Abgrund, 41
    Algebra, 180
    Architektur, 730
    Befehlssatz, 730
    Denken, 730
    Eliza, 42
    ergreifen die Macht, 734
    erste, 728
    Geschichte, 729
    HAL, 42
    Intro, 41
    Linguistik, 160
    Reanimation, 729
    Spiele, 155
    Super, 730
    Vision, 438
Condemned, 31
connection, 254
Connectom, 532, 701
Constructor Theory, 119
convert, 743
Coopetition, 44
Copula, 83, 93
Copula Rang-Korrelation, 83
Coral Gables Conferences, 671
Coriolis
    β-Ebene, 332
    Ostablenkung, 332
Coriolis-Kraft, 332
    am Äquator, 332
    ebene Bewegung, 330
    Ekman-Zahl, 605
    Experiment, 260, 586
    geostrophisches Gleichgewicht, 603
    meridionale Schwingung, 605
    Nordhalbkugel, 579
    Parameter, 234, 332, 602
    Rossby-Welle, 604
    Rossby-Zahl, 605
    Scheinkraft, 332, 410
    Scheinkraft-bedingte Wellen, 604
    Ursache, 331
    Vektor mal Pseudo-Vektor, 289
    Volumen, 332
Corona, 10, 31, 55, 303
Coronium, 503
corrcoef, 76
cos (90-x) = +sin x, 440
Cosmic web, 470
Couette-Strömung, 587, 606
Coulomb
    Eichung, 562, 563
    Gesetz, 244, 545, 546, 558
    Reibung, 301, 327, 713
Coulson, 559, 611
Courant
    Bedingung, 595
    Friedrichs-Lewy-Kriterium, 595
    Zahl, 595
Cox-Prozess, 99
CP-Invarianz, 684
CPT-Invarianz, 685
cpu info, 741
CRAB, 642
Cramer-Regel, 220

Crank-Nicolson-Verfahren, 308
CRISPR/Cas-Methode, 529
Criticality, 75, 522, 523, 537, 538, 570, 589
Cross-Validierung, 108
croud computing, 145
Crowded dynamics, 525
Crowding, 527
css, 737
CSSR 1968, 294
C*-Algebren, 99, 622
CT, 215
    Gleichungssystem, 211
    Radon-Transformation, 211
c't-Lab, 721
CTRW, 93, 116, 192
CUDA, 730
Cue Card, 180
cultural lag, 41
Curie, 664
Current Algebra, 668
Custom Rom, 722
$^{14}_{6}$C, 575, 578, 652, 669
CVS, 743
Cyanidin, 295
CyanogenMod, 722
Cyborg, 146
CYP450, 525

DAB, 725
DADA, 142
Dahn, 18
Dahrendorf, 45, 658
Daidalos, 749
d'Alembert
    Gesetz, 546
    Kraft, 341, 342
    Operator, 490, 563
    Paradox, 587
    Prinzip, 341, 342, 369
    Prinzip Hebel, 342
    Prinzip Keil, 342
Dalitz-Plot, 294
DALL•E2, 100
Dampfkraftwerksprozess, 517
Dampfturbinen, 7
Dämpfung, 572
Dan Diner, 11
Danae, 761
Danaiden, 762
Darknet, 730
Darstellungsformel Greensche, 554
Darstellungsmatrix, 439
Darstellungstheorie, 268, 441, 452, 453, 458, 608
Darwin, 61
Das unsichtbare Visier, 20
Data-Assimilation, 142, 143, 232, 578
Dateiglobs, 172
dateiorientiert, 726
Daten
    Analyse, 70–72, 76, 77, 79, 88, 143, 390, 396, 537
    Archivierung, 26
    Assimilation Erdbeben, 537
    Banken, 742
    Darwin, 526
    Schutz, 26
    Semiotik, 165
    Signale, 166
    Strukturen, 724
datengetriebene Modellierung, 65, 716
Datumsgrenze, 435
Dauer, 434
Dauermagnet, 568
Daumenregel, 496
da Vinci, 62, 66, 713
Dawkins, 527
    Selfish Gene, 33
dB, 606
D-Bifurkation, 389
D-branes, 686
D-day, 17
DDE, 600
DDoS, 744
DDR Geschichte, 748
DDR-Geschichte, 18, 665, 746
de Broglie-Wellenlänge, 609
de-Sitter-Modell, 477
de-Sitter-Raum, 477
de-Sitter-Relativität, 636
Deadbeat, 326
Debris, 735
de Broglie, 633
    Beziehung, 487
    Bohm-Deutung, 636
    Wellenlänge, 487, 579, 606, 623, 647
Debugging, 150
Debye-Hückel-Theorie, 549
decuplet, 462
Dedekind, 2, 25, 67, 69, 197, 331
deep learning, 79
Definition, 129
Definitionslücke, 275, 548
de Gaulle, 14, 767

Deindustrialisierung, 5, 16
Deismus vs Theismus, 79
deklaratives/explizites, 706
Deklination, 233
Deklinations-Winkel, 574
Dekohärenz
    erzeugt Realität, 612, 613, 646
    Pade Joos Zeh, 632
    Phase, 607
    Pointerzustände, 614
    räumliche Ausweitung, 613
    schafft Raumzeit, 647
    Verschränkung, 646
    Zeh, 650
    Zurek, 614
Dekonstruktion, 60
DEL-Operator, 235
Delaunay-Triangulation, 539
delay PDEs, 600
Delay-Differentialgleichung, 600
deliberative, 9
Delition, 528
δ-Funktional-Transformation, 626
δ-Distribution
    Ableitung, 138
    als Funktional, 139
    als Grenzwert, 367
    Dipol, 550
    Faltung bei Verteilungen, 94, 100
    Grenzwert- und Integralbildung, 367
    Terminologie, 139
    Variablentransformation, 365
δ-Funktion
    Ableitung, 365, 550
    als Grenzwert, 367
    Begriff, 139
    IntroLiteratur, 367
    Maßeinheit, 548
    parzielle Integration, 138
    Rechnen mit Verteilungen, 100
    Singularität, 548
    Skalierung, 365
    Variablentransformation, 365
    Verteilung, 94
Demenz, 696
Demo-Szene, 735
Demographie, 434, 695
Demokratie, 45
Demokratie und Erziehung, 48
demokratische Askese, 60
Demütigungen, 14
Denken, 730
    Entwicklungsgeschichte, 700
    visuell, 21
Dennett, 698
Depersonalisation, 735
Descartes, 65, 272
Deschamps, 264, 291
detaillierte Balance, 192
Detektor, 94
Determinante
    Adjunkte, 218
    als homogene Funktion, 216
    als Tensor, 269
    Ausklammern, 216
    Berechnung per LR-Zelegung, 218
    der Jacobi-Matrix, 217
    Eigenschaften, 216
    Funktional-, 217
    Gauß per LR-Zelegung, 218
    hermitescher Matrix, 443
    Jacobi, 289, 293, 313, 354
    Leibniz-Definition, 217, 235
    Neben-, 212
    Rechenzeit, 174
    Rändern, 286
    Säkular, 329
    Slater, 217, 218, 269, 639
    Umformungen, 216
    Volumen, 216
    Wronsky, 217, 339
Determinismus, 298, 634
Deuterium, 668
Deutsch, 119, 410, 411, 413, 646, 657
Deutsche, 46, 748
Deutsche Geschichte, 747
deutsche Wehrmacht, 17–19, 664, 665, 770
Deutschland nach 1945, 655
Deutschlandfunk, 9, 659
Deviationsmomente, 257
dezentrale Kriegsführung, 11, 18, 19
Dezibel, 606
DFT, 105, 138, 618
diabatische Heizung, 604
Diagonal-Matrizen, 442
diagonalisierbar, 220, 222, 223, 261, 442, 459
Diagonalisierbarkeit
    Vielfachheit, 222
Diagonalisierung, 223, 261, 442, 459
Diagonalmatrix-Regel
    Exponenziation, 459
Diamagnetismus, 560

Dichte, 76
Dichte log Abb, 116
Dichtefunktional-Methode, 618
Dichtefunktionaltheorie, 610
Dichtematrix, 622
Dichten Transformationssatz, 312
Dichter, 29
Didaktik, 705
Dido-Problem, 375
Diedergruppen, 465
Dielektrika
  Felder, 556
dielektrische Kugel, 556, 557
dielektrische Verschiebung, 519, 544
Dielektrizitätszahl, 519, 544
Dienen, 749
Diesel, 7
difference scheme,FDS, BDS, CDS, 598
Differentialform
  Cauchy'scher Integralsatz, 205
Differentialform Ableitung, 292
Differenzengleichungen, 145
Differenzenoperator, 186
Differenzenrechnung
  Leibniz, 87
Differenzial
  Form, 244, 340
    ART, 250, 272
    Beispiele, 292
    Idee, 188
    Induktion, 293
    Länge, 249
    Physik, 264, 291
    SRT, 486
    Thermodynamik, 292
  Geometrie
    ART, 292
    Intro, 245, 246
    Mathematica, 247
    Physik, 245, 250
    Statistik, 408
    Toplologie, 279
  Gleichung
    homogen, 301
    inhomogen, 301
  Gleichungen
    als allgem Methode, 151
    Beispiele, 324, 327
    dynamischer Systeme, 301
    Entdimensionalisierung, 310
    Fluss, 313, 317
    Genauigkeit, 174
    Index-Konzept, 391
    Informatik, 154
    Intro, 300, 301, 339, 378, 538, 713
    Intro LB, 300, 391, 714
    Lösung, 309
    Lösg durch Potenzreihe, 582
    Lösg durch Transistoren, 154
    Mechanik, 301
    Modell, 40, 146, 154
    Newton, 300
    Newton II, 301, 317
    nichtlinear, 401, 591
    Numerik, 303
    parzielle, 597
    Pendel, 300, 301, 310
    Python, 303
    qualitative Meth, 302
    qualitative Methoden, 324
    Richtungs-Feld, 319
    Schwingkreis, 720
    steife, 308
    Symmetrie, 292
    Trick, 327
    Variation der Konstanten, 339, 379, 714
    Wronsky, 339
  Rechnung Bayes, 90
  Sub, 137
  Säge, 239
  Topologie, 255
  totales, 347, 351, 352, 375, 410
    äußere Ableitung, 293
    Abbildung lineare, 245
    Arbeit, 238
    Deutung, 178
    Eichfeldidee, 291
    Form, 244
    forminvariant, 272
    Gradient, 238
    Lorentzkraft, 562
    Nichtstandard Analysis, 184
    Potenziale, 518
    Säge, 239
  totales Intro, 350
  unvollständiges, 486
  vollständiges Schwarz Poincare, 283
  vs Variation, 350
Differenzialgeometrie
  Intro, 408
Differenziation Vektor nach Skalar, 247
Differenzschema, 303, 598

Diffie-Hellman-Schlüssel, 177
Diffusion, 114, 118, 537, 538, 587, 596, 599, 603
Diffusion vs Reversibilität, 403
Diffusion-limited aggregation, 395
Diffusions
  bedingte Fließgeschwindigkeit, 590
  gerichtete Bildgebung, 531
  Gleichung, 75, 596, 598
  Koeffizient, 605
  Zeit, 574, 605
Diffusionsbedingte Fließgeschwindigkeit, 398, 596
Diffusionskonstante, 598
diffusive Kopplung, 403
Diffusivität
  thermische, 596
Digitalisierung Geschichte, 72
Dijkstra-Algorithmus, 534
Dilbert-Prinzip, 30
Dimension
  Box, 120
  des Kontinuums, 134
  Fluch, 188, 407, 429, 435
  fraktale, 115
  Hausdorff, 121
  induktive, 121, 280
  Korrelations-, 121, 122
  Raum-Zeit, 188, 429
  Rényi, 122
  s-Analyse, 587
  Segen, 407, 430
  topologische, 121
  Visualisierung, 429
dimension reduction, 408
dimensional scaling, 364
dimensionslos, 310
Ding an sich, 506
Dingler, 39, 629
Diode, 104, 720–722
Diophantische Approximation, 136
Dipol
  Definition, 550
  δ-Funktion
    Dipol, 550
  magnetischer, 560
  Moment, 551
  Richtung, 550
  Schwingungsdämpfung, 384
  Strahlung, 384, 615, 617, 644
  Stromdichte, 550, 616
Dipolfernfeldkraft, 237
Dipolmoment Gravitation, 478
Dipolmoment magnetisches, 545
Dipolpotenzial, 237
Dirac, 689
  Adjungierte, 644
  adjungierter Spinor, 644
  Algebra Clifford, 463
  Algebra, Clifford, 444
  ART, 480
  δ-Maßeinheit, 548
  $\delta(x)$, 366, 367
    Geschichte, 365
    Intro Bücher, 365
  Delta-Maßeinheit, 548
  Elektron?, 35
  Fabelwesen, 366
  Folgen, 366
  Gleichung, 462, 463
  Gott, 68
  Impuls, 105
  Kamm, 105, 367
  kosmologische Konstanten, 689
  Large number hypothese, 482, 484
  Matrizen, 462
  Monopole, 570
  Motivation Dirac-Gl, 268
  Natur und Mathematik, 715
  negative Wahrscheinlichkeit, 97
  nichtkonstante Naturkonstanten, 689
  Operator, 463
  Pauli, 40
  Pfadintegral, 372
  Physiker, 70
  See, 464
  Spin, Antiteilchen, 410, 413
  Spinor, 463
  Statistik, 533
  Strings, 570
  Theorie des Elektrons, 628
  Top-down-Denker, 40
  Verteilung, 117
  Wissenschaft, 29
Dirac-Bild, 643
Dirac-See, 682
directional statistics, 78, 83
direkte Summe, 269
direktes Produkt, 269
Dirichlet
  Funktion, 112
  Kern, 384
  Problem, 583
  Randbedingung, 555, 559, 581, 597

Reihe, 190
Dirschmid, 261, 291
diskrete
Fourier-Transformation, 96, 439
Symmetriegruppen, 464
Diskretisierungsparameter, 174
Dispersion relations, 676
Dispersionsrelation
Diffusionsgleichung, 596
Federkette, 329
Klein-Gordon-Gleichung, 593
Kugelwelle, 572
relativistisches Teilchen, 487
Schrödinger-Gleichung, 593
Dissens wagen, 757
Dissipationsfunktion, 569
dissipativen Strukturen, 320
dissipatives dyn System
Beispiele, 403
Ljapunov, 405
qual Analyse, 322
Spur Jacobi, 320, 396
Dissoziation, 377
distance between probability densities, 408
Distanz, 473
Distanzen im All, 501
Distributionen, 365
temperierte, 366
Divergence theorem, 275
Divergenz, 235, 244, 293, 546
Definition, 244
Herleitung, 239
Kontinuitätsgleichung, 311
krummlinig, 239
Kugelkoordinaten, 239
Tensorfeld, 239
vs Rotation des Feldes, 234
Divisionsalgebra, 204, 685, 686
Django, 728
Djerassi, 30
DLA, 395
D-Mark, 655
dmesg, 741
dmidecode, 741
DNA, 2, 53, 55, 159, 525, 526, 528, 529, 549, 571, 744
DNA-Sequenzanalyse, 396
DNS, 2, 53, 55, 159, 169, 525, 526, 528, 529, 549, 571, 744
Docker, 26
Doktorarbeit, 714
Doodle, 737
Doppel
Fakultät, 190
Gruppen, 267
Pendel, 322
Quelle, 550
Doppelbrechung, 539
Doppellösung Fundamentalsystem, 326
Doppelschicht, 550, 719
Doppelverhältnis, 437
Doppler
Effekt Einstein E=mcc, 674
Effekt Informationsübertragung, 164
Effekt longitudinaler, 485
Effekt Masse Schwarzkörperstrahlung, 674
Effekt optischer, 485
Effekt OVII, 472
Effekt Raumdehnung, 478
Effekt relativistischer, 485
Effekt Rotverschiebung, 466, 468
LTE-Korrektur, 725
Verschiebung, 486
dorsal - ventral, 156
Dosis, 669
Dotplot, 408, 528
Downloads, 736
drahtlose Telegraphie, 717
Drahtpolyeder, 717
Drake-Gleichung, 33
Drall, 261, 298
Dreh
Matrix, 438, 439, 459
Moment, 188
Spiegelung, 440, 457
Drehgruppe orthogonale
Algebra, 446
Darstellung, 455, 458
Gruppe vs Algebra, 451
Inhaltsproblem, 113
kompakt, 450
Matrix-Lie-Gruppe, 446
Matrixdarsteller-Eigenschaften, 451
nicht einfach zusammenhängend, 451
Pauli H_2^+, 445
Richtungsvektor und ω, 439
SO(2), 446
SO(3), 353
SO(8) Supergravity, 685
SO(n), 441
SO(n) nicht simple connected, 450
SU(2)-SO(3) ispmorph, 444
SU(5) GUT, 685

weg-zusammenhängend, 450
Drehimpuls
Addition, 449
Algebra, 446
Def, 261, 446
Eigenwert-Problem, 261
Erhaltung, 332, 333, 353
Erhaltung Teilchenschwarm, 314
Hodge-Stern, 261, 290
Operator Eigenfunktionen, 581
Stromdichte, 310
Drehimpulsoperator
Ortsdarstellung, 581
Vertauschungsregeln, 581
Drehmatrix Roboter, 439
Drehung, 313
endliche, 440
Hodge-Stern, 212
infinitesimale, 212, 441
passive, 268, 440
Quaternionen, 268
Skalarfeldes, 440
Vektorfeldes, 440
Winkelgeschwindigkeit, 212
Drehwellennäherung, 643
Drehzeiger, 198
3-Form, 566
Dreidimensionalität des Raumes, 432
Dreieck
infinitesimales, 250
Inhalt, 286
Dreiecks
Ungleichung, 200, 287
Zahlen, 87
Zerlegung, 218
3G, 725
3K-Strahlung, 426, 478
Dreikörperproblem, 306, 378, 392
Dreischritt, 704
3 Sekunden, 433, 434
13, 133
Drewermann, 29, 695
Dreyfus, 41, 42, 734
Drift, 75
Drilling, 239, 584
DRM, 725
Drohnen, 10, 13, 600, 653, 658, 660, 755
Druck, 259
Binnen, 515
dynamischer, 601
Gas, 387
Schall, 606
statischer, 601
Stau, 601
Tensor, 310
Drucken, 738
Druckerzugriff, 739
Drude, 414, 415, 422, 539, 571, 637, 675
Drude-Sommerfeld-Modell, 637
DSF, 18
DSL, 728, 732
Dual Fluid Reaktor, 3
duale Basis, 262, 264, 290, 381
dualer Feldstärketensor, 565
Dualität, 282
Dualität Rand/Korand-Operator, 283
Dualität Ising, 522
Dualitätsprinzip der Potentialtheorie, 548
Dualraum, 225, 261, 264–266, 382
Dualraum vs Metrik, 264
Dubarle, 41
Dubna, 667
Ducrocq, 42, 328, 608, 660
Duffing-Oszillator, 392, 399
Dummy-Indices, 270, 490
DUM-unition, 4, 9, 12, 657
Dunkle
Energie, 260, 477, 505
Materie, 277, 470, 484, 488, 500, 504, 690
Dunkle Materie, 278, 483, 636
keine, 483
Dunoyer, 670
Durchschnitt offener Mengen, 283
Duschek, 68, 194, 195, 228, 245, 246, 270, 277
DVBT2, 725
DVD doppeln, 736
DVD-Brenner, 736
Dyade, 262
Beispiel, 243
dynamische Mathematiksoftware, 180
dynamische Programmierung, 723
dynamisches System, 317
Dynamo-Gleichung, 569
dysexekutives Syndrom, 710
Dyson, 2, 24, 25, 41, 385, 624, 626, 664, 676, 681, 682
Dyson-Entwicklung, 622

e-Ansatz, 326
Algebraisierung, FT, 323
Eigenwerte, 329
e-books, 724
e-learning, 194

E8, 454, 687
Eady-Instabilität, 604
Earnshaw-Theorem, 559
E-Auto-Batterie, 5
Ebbe, 410
ebene Welle, 572
ebene Wellen, 373
Ebenenbüschel, 438
Ebenendefinition
  Skalarprodukt, 200
Ebenengleichung, 229, 230
EBK-Quantisierungsregel, 362, 364, 628
Eccles, 710
eckigen Klammer, 627
Eco, 143
Econophysics, 91, 93
Eddington, 279, 482, 688
Eddington'sche Zahlen, 483
Eden-Wachstumsmodell, 395
Editierabstand, 528
Educational Psychology, 707
eduroam, 177
EEG, 701, 702
EEPROM, 722
effektives Potenzial, 333
efficient numerical computation, 216
$E(v) = m\gamma(v)c^2$, 486
egrep, 172
Ehe, 24, 691, 693
Ehrenfestsches Paradoxon, 234, 717
Eich
  Bedingung, 558
  Feld Idee Higgs, 672
  Feld nichttriviale Topologie, 610
  Feld, Standard-Modell, 688
  Feldtheorie, 482
    Differentialformen, 291
    elementar, 345, 679
    Elementarteilchen, 675
    Euler-Lagrange, 344
    Faserbündel, 256
    fraktionale, 191
    Gravitation, 680
    kovariante Ableitung, 680
    kurz und knapp, 679
    Scheck, 540
    Symmetriebrechung, 680
    Yang-Mills, 562, 675, 684
    Yang-Mills, Bär, 542
  Invarianz, 344, 562, 678
    em WW, 463
    Idee, 412
    Impuls, 345
    Lorentz, 562, 563
    Lorenz eingeschränkt, 562
    Weyl, 678
  Transformation der em Potenziale, 562
  Transformation der mech Potenziale, 345
  Transformation lokale, 679
  Transformation, lokale, 463
Eichfeldidee, 562
Eichfeldintro, 676, 680, 684
Eichfeldtheorie, 255
Eichinvarianz Weyl, 678
Eichung
  Coulomb, 562, 563
  Idee, 412, 678
  Invarianz
    Geschichte, 678
  Lorenz, 562, 563
Eigen
  Manfred, 621
  Raum, 223
  vektor, 442
  vektor Matrix, 221
  vektor per Gauß, 221
  vektor Störungswachtum, 406
Eigenrichtungen Einheitsmatrix, 444
Eigenvektor
  Projektionsoperator, 119, 220, 221, 263, 267
Eigenvektoren
  linear unabhängig, 222
  symmetrischer Matrizen, 222
Eigenwert
  Mises-Verfahren, 223
  Problem Sprechweise, 222
  Problem-Idee, 221
  Problem-Idee Diagonalisierung, 261
  Spektrum Differenzialgleichung, 326
  Spektrum Matrix, 221
  Vektor-Iteration, 222
Eigenwerte
  ähnlicher Matrizen, 442
  Anfangsfehler, 405
  Arnoldi-Verfahren, 223
  bikonjugiertes Gradienten-Verfahren, 224
  charak Polynom, 225
  charakteristisches Polynom, 222
  Cramer, 221
  definit, 406
  Differenzialgleichung, 326
  e-Ansatz, 329

Eigenfrequenzen, 329
Einheitsmatrix, 221
EOF, 95
Fibonacci-Zahlen, 442
Gerschgorin, 224
gestörter Matrizen, 222
hyperbolisches dyn System, 321
imaginäre, 321
Jacobi-Matrix, 321
Jacobimatrix, 403
Lanczos-Verfahren, 223
Matrix, 194, 212, 221, 222, 224
Matrix Python, 222
online, 194, 222
Pageranking, 211
Polynomnullstelle, 304
positiv definit, 224, 225
Projektionsoerator, 119
reell bei PT-Invarianz, 443
reell, Energie, 463
reell, Linearfaktoren, 443
reell, symm o hermitesch Matrix, 443
reell, unitär diagonalisierbar, 444
reelle, selbstadjungiert, 622
reelle, symmetrische Matrizen, 221
Singulärwerte, 407
Stabilität, 225
Störungswachtum, 406
symm Matrix, 225, 443
Trägheitstensor, 212
Verteilung, 81, 224
Wurzeln, 326
Eigenzeit, 486
ART, 490
Eightfold Way, 462
Eikonal, 364, 373
Eikonal = Bild, 373
Eimer-Versuch, 429
Ein-Körper-Problem, 317
Einbettung, 407
Eindeutigkeit des Nullvektors, 266
Eindämmungspolitik, 655
Einfachheit, 51
Einflussfunktion, 379
Einheiten
natürliche, 627
einheitlichen Feldtheorie, 474
Einheitsquadrat, 210, 212, 357
137, 688
Einmarsch in Polen, 664
1-
1/f-Rauschen, 93, 114
Form, 238
Form Beispiele, 292
Form Dualraum, 266
Form Maxwellgl, 293
Form Mechanik, 358
Form Vektor, 490
Jetraum, 382
Norm, 140, 221
Zerlegung, 102
Einselection, 614
Einstein, 25, 272, 296
Alter, 116
Bohr, 621
Brown'sche Bewegung, 385, 388
Caputh, 22
digital, 363, 688
Eklat, 418
EPR-Paradox, 163
EPR-Paradoxon, 62, 613, 632, 635
Euklid, 226
Existenz oder Zeit, 62
Feldgleichung, 259, 480
Feldgleichung ADM-Form, 480
Fenster, 509
Festkörper, 514
Geometrie und Erfahrung, 66
Gleichung Brown'scher Bew, 387
Gleichung Energie-Masse, 487, 488, 673
Gödel, 129
Gott würfelt nicht, 651
Hasenöhrl, 674
Hilbert-Gleichung, 259
Kausalität, 401
Kondensation, 638
Lenard Mach, 418
lichtelektrischer Effekt, 618
Mach, 37
Massensuggestion, 415
nicht deutsch, 416
Nobelpreisgeld, 24
ohne Ursache?, 621
online, 650
QT, 633
Realist, 621, 633, 634
Smoluchowski, 386
Summenkonvention, 496
Tensor, 466, 480
visuell, 21
von Laue, 278
Zeit und Kausalität, 435

Einstein Assistenten, 474
Einstein populär, 416
Einstein Seelig, 22
Einstein'sche Gravitationstheorie, 479
Einsteins Arbeiten, 23
Einsteinturm, 434, 503
1000 Jahre zuviel, 292
21-cm-Linie, 472
Einzelbilder aus Videostream, 536
Einzigkeit, 266
Eisen Fe^{13+}, 503, 515
Eiserner Vorhang, 20, 694
Eiszeiten, 47, 405, 477, 578
Eiweiße, 529, 530
EKG, 707
Eklid ist Fernwirkung, 249
Ekman-Spirale, 602
Ekman-Zahl, 605
El Nino, 396, 605
elapsed time, 174
Elastizitätstheorie, 584
electrostatic motors, 544
Eleganz-Prinzip, 38
elektrische Feldstärke, 719
elektrisches Feld Ring, 547
Elektrodynamik fluktuierende, 720
Elektrodynamik kovariant, 566
Elektrodynamik mikro- vs makroskopische, 544
Elektrodynamik nach Wheeler-Feynman, 625
Elektrodynamik nichtlinear, 625
Elektrodynamik QED Gültigkeitsgrenze, 539, 671
Elektrolyseur, 5
elektromotorischen Kraft, 561, 579
Elektron, 539, 673
    elektromagnetische Masse, 483
    Feldknoten, 474
    klassisch, 673
    Lebensdauer, 673
    Masse, 673
    Mie, 474
    Selbstenergie, 482, 673
Elektron linkshändig, 678
Elektroneneinfang, 661
Elektronenradius, 689
Elektronentheorie
    ungeordneter Halbleiter, 638
Elektroporation, 571
Elektrosmog, 544
Elektrostatik, 320, 562, 567
    Energie, 539
    Funktionentheorie, 201
    Green-Funktion, 548
    in Kugeln, 528
    Ladungsverschmierung, 544
    mikroskopisch, 544
    Poisson-Gleichung, 277, 548
    zw Platten, 528
elektrostatische Energie, 539, 660, 663, 673, 719
Elektrotherapie, 709
Elementarlänge, 411, 431, 636, 647, 686
Elementarteilchen Intro, 670
Elementarteilchenphysik Kosmologie, 278
Eliminativismus, 700
Eliza, 42, 734
Elkos, 544, 721
Ellipse, 232, 233, 337
    Gleichung, 337
    Kepler, 260
    Keplerproblem, 337
    Konfigurationsraum, 249
    Polarform, 336
    Polarformen, 337
    Umfang, 149
Ellipsoid, 149
elliptische Geometrie, 437
elliptische Funktion, 149, 197
elliptische Kurven, 307
elliptischer Fixpunkt, 321
elliptisches Integral, 149
Ellul, 757
EM-Algorithmus, 168
Emanation, 652
Embetty, 26
Embodied
    embedded cognition, 732
    numerical cognition, 732
Emergenz, 52, 53, 72, 153, 402, 403
Emission-Wahrscheinlichkeit, 168
EMK, 579
    α-Effekt, 579
    Induktion, 562
Emoji, 705
Emoticon, 705
Emotion Machine, 42
Emotionspschologie, 706
EMP, 657, 660
Empathie
    zwanghafte, 731
Empiriokritizismus, 37
Empört Euch, 757
Ende der Menschenrasse, 29
Ende der Welt, 476, 565

Endlager, 4
endlastig, 92, 116, 118
Endlichkeit, 20
Endlichkeitsverweigerung, 20
Endlösung, 770, 771
Endophysik, 43
Energie
    dunkle, 483, 504, 505, 515
    elektrostatische, 539, 660, 663, 673, 719
    1 Integral, 319
    Exponent, 627
    freie, 514
    Gewinnung bei Organismen, 528
    Hyperfläche, 356
    Höhe, 601
    Impuls-Tensor, 259, 467, 480, 506, 566
    Methode, 597
    potenzielle, 238, 316, 333
    Quellen, 330
    relativistische, 486, 487
    Stromdichte, 569
    Verbrauch, 5, 300
Energie-Idee, 332
Energie-Impuls-Tensor, 479
Energie-Zeit-Unschärfe, 681
Energieäquivalente, 7
Energiedirektumwandlung, 5
Energieerhaltungssatz QM, 681
Energieproduktion Mensch, 7, 511
Energieproduktion Sonne, 7, 511
Energiesatz
    Elektrodynamik, 569
    Energie-Hyperfäche, 356
    homogene Fkt, 381
    homogene Funktion, 349
    Mechanik, 191, 333, 349, 351, 353, 374
    symplektische Integration, 308
    Thermodynamik, 516
Energietransfer, 524
Energieverbrauch, 5, 300
Energieverbrauche, 7
Energieversorgung, 4–6, 11, 47, 662
Energiewende, 5
Engelmann, 48
Engels, 34
Engels Dialektik der Natur, 34
Engels Kasematten-Wolff, 768
Engels Universitäten, 65
englisches System, 289
Ensemble
    kanonisches, 519
    mikrokanonisches, 519
Entartung Fundamentalsystem, 326
Entartungsdruck = ideales Gas, 639
Entdimensionalisierung, 310, 598
Entfernung, 287
Entfernungsmaß, 476
entgrenzter Mensch, 20, 48, 692
Enthalpie, 382, 517
Enthauptungsschlag, 656, 657, 659
entier, 83
Entkoppelungstrick, 323
Entmenschlichung vs Fortschritt, 47
Entmundigung durch Experten, 49, 692
Entropie, 122
    Boltzmann, 119
    Boltzmann-Gibbs, 122
    Kolmogorov, 123
    Korrelations, 123
    metrische, 123
    Pfaffsche Form, 291
    Rényi, 122
    Shannon, 122, 133, 408
    thermodynamische, 517
    topologische, 123, 169
    Transfer, 122
    Tsallis, 122
Entropie nichtextensiv, 122
Entropieproduktion, 73, 512, 513
Entscheidungsproblem, 435
Entschulung, 49
Entschulung der Mittelstufe, 714
Entspannungsverfahren, 696
Entwicklungspsychologie, 708
Entwurftheorie, 474
Envarianz, 613
Enver Pascha, 503
Enzyklopädie der Elementarmathematik, 281
Enzyme, 530
EOB-Formalismus, 508
EOF, 95
Epaneschnikov-Kern, 121
Ephemeridenrechnung, 338
Epigenetik, 53, 526
epistemische Verschränkung, 622
epistemische Wahrscheinlichkeit, 621
Epistemologie, 435, 606
epistimische Verschränkung, 506
E-PKW-Batterie, 7
EPR, 163, 606, 635
EPR-Paradox, 613
EPR-Paradoxon, 632

ε-Funktion, 217
ϵ-Symbol
BAC-CAB, 240
Beziehungen, 240
Definition, 217
Determinante, 235, 240
Hodge-Stern-Operation, 260
Kein Tensor, 230, 260
Kommutator, Lie-Algebra, 446
Kreuzprodukt, 230
Permutationssymbol, 217, 230
Pseudo-Tensor, 289
Strukturkonstante, 446
Tensor 3. Stufe, 217
Volumen, 230
ER=EPR-Hypothese, 636
Eratosthenes-Sieb, 106
Erben, 726
Erdatmosphäre, 405, 576, 585, 588, 603, 604
Erdatmosphäre Energiehaushalt, 507
Erdbeben, 537, 538
Erdbebenwellen, 592
Erdbewegung, 228
Erddynamo, 578
Erde, 61, 73, 128, 153, 342, 575, 579
Ionosphäre, 577
Erde und Planeten, 574
Erderwärmung, 47
Erdexpansion, 279
Erdgas, 3, 6, 7, 12
Erdhöhle, 333
Erdkörper, 579
Erdmagnetfeld, 577–579
Erdöl, 3, 6, 12
Erdung, 556
Erdvermessung, 502
Erdäquator, 233
Ereignisraum, 97, 249, 538
Erfahrung, 118
Ergiebigkeit, 244
Ergiebigkeit des Flusses, 244
Ergodizität, 55, 115, 116, 123, 192, 302, 402
Individualentwicklung, 115, 116, 118, 192, 193
Ergodizität und Maß, 116
Erhaltung
vs Invarianz, 351
Erhaltungsgröße, 349, 352
Erhaltungsgröße mittelbare Funktion, 336
Erhard Scheibe, 618
Erinnerung, 42, 72, 527, 702, 704, 706, 710, 711, 734
Entropiereduktion, 517
Erinnerung im Netz, 26
Erkennen, 30
Erkenntnis befreit, 1, 32
Erleben der Gegenwart, 434
Erleben der Kontinuität, 434
Erleben des Jetzt, 434
Erlebnisgemeinschaft, 746
Erlösungsgeschichte, 767
ERM, 41
Ernährungslehre, 701
Erneuerungs-Prozesse, 96
Erntefaktor, 3
Ernährungslehre, 526
1. Hauptsatz, 516, 517
1. Integral der Bewegungsgleichung, 302, 319
erstmaliger Gebrauch mathematische Begriffe, 98
Ertel-Vortizität, 604
Erwählung, 751
erweiterte Transformationsmatrix, 439
erzeugende Funktion der Momente, 100
Erzeugende kanon Trafo, 354, 355
Erzeugungs-Operatoren, 447
Erzeugungsoperator, 448
Erziehung, 32, 61, 705, 713, 714, 752, 753, 757
Ende, 757
erzwungene Schwingung, 379, 380
Eskapismus, 694
Essen Straße, 526
Ethernet, 743
Ethik, 693
Ethno-Futurismus, 89
Ethologie, 694
Euklid oder Einstein, 226, 272
Euklidische Geometrie, 272
Euklidischer Algorithmus, 146
Euklidischer Raum, 250
euklische Geometrie, 66
Euler
Ableitung, 183
Ableitung rotierende Systeme, 331, 409
Beschreibung, 410
Charakteristik, 286
Formel zu rotierenden Bezugss, 331, 409
i, 198
Kraft, 330, 409
Kreisel, 298
Lagrange Beispiele, 343, 344
Lagrange für Felder, 540, 542, 543
Lagrange für Teilchen in Feldern, 568
Lagrange Maxwell-Gleichungen, 543
Lagrange'sche Gleichung, 249, 370, 371, 542, 568

Herleitung, 369–371, 541
Maruyama-Verfahren, 389
Mascheroni-Konstante, 187
numerisches Verfahren, 307
Polyeder-Satz, 285
Polyeder-Zahl, 286
Polyedersatz, 286
Relation, 203
stochastische Integration, 389
Streckenzug-Verfahren, 307
symplektisches Verfahren, 308
Theorem homogene Funktion, 310
Verfahren implizit, 308
Winkel, 204, 441, 446
Zahl, 605
Eulersche Relation, 198
Eulerwinkel, 439
Europa, 11, 13, 14, 16, 18–20, 61
Eurozentrismus, 692
eV, Joule, 669
Eva-Hypothese, 396
evaneszente Moden, 720
Evangelisten, 768
Everett-Welten, 651
Evolution, 527
Mensch, 34
statistisch unwahrscheinlich, 33
Evolution von Lernstrategien, 694
Evolutionsgleichungen, 55, 301
evolutionäre Genetik, 396
Ewald-Summation, 549
ex falso quodlibet, 127
exaktes Differezial, 234
Excel, 78
Exekutivfunktionen, 710
Exilliteratur, 771
Existenz, 34, 506
Existenzquantor, 127
Exofakten, 43
Exogenität, 100
Exomodelle, 43
Exon, 529
Exophysik, 43
Expansion des Kosmos, 478
Expansionsfaktor, 466
Expansionsrate, 475
Experimentalphysik, 25, 64, 65
Experimente, 38, 57, 71, 89, 144, 145
designed, 36
Experimentum Crucis, 700
Experten, 49
Experten = Entmündigung, 49, 692
Experten Feynman, 49
explizites Verfahren, 307
Exponentialabbildung, 459
Exponentiation, 454
Exponenzialfunktion, 191
Exponenziation, 459
Exposition, 668
Expression, 529
extended self, 700
extensiv, 5, 262, 300, 512
extensive Größen, 521
extensive Zustandsvariable, 521
Externalisierung, 711, 731
Extraktion von Einzelbildern, 536
Extrema
Nebenbedingung, 95, 342, 375, 376
Extremalstellen, 186
Extremereignisse, 93
Extremum, 347
Taylor, 186
Exzentrizität, 337

Fabelwesen, 366, 618
Face to Face with Communism, 655
Fadenintegral, 715
Fadenkonstruktion, 233
FAIR-Prinzip, 71
Fake, 651
Faktorenanalyse, 79
Faktorgruppe, 454
Faktorielle absteigende, 186
Fakultät, 106, 187, 191
Falk-Schema, 210
Fall im widerstehenden Medium, 302
Falle, 642
Falllinie, 236
Falllinien, 236
Fallout, 11, 669
Fallschirm, 327
Fallzeit aus Kreisbahn, 337, 629
falsche Modelle, 143, 571
Faltung, 96
Faltungsprodukt, 210
Faltungstheorem, 105
Familie, 705
Faraday, 561
Kerze, 54
Faraday'scher Käfig, 557
Faraday-Gesetz
Lorentz-Kraft, 561

Farbe, 386, 700
Farben, 236, 279, 280, 295, 700
Farblaserdrucker, 739
Farbrausch, 735
Farm Hall, 667
Farm-Hall, 667
Faser, 179
    Deutung, 254
Faser-Bündel
    Beispiel Kreislinie, 179
    Deutung, 254–256
    Eichfeld, 256, 437
    Hindernistheorie, 282
    Idee, 179, 254, 255
    Intro Lit, 67
    Isospin, 668
Faserkontaktbündel, 357
Faun, 762
Faust, 56
fBm, 114, 397
fconfig, 738
FIII, 753, 764
Feder-Kette, 329
Federkette, 329
Federn, 329
    gedämpft, 325
    gekoppelte, 328, 329
    Hooke, 315
    Kondensator, 720
Federpendel, 351
Federschwinger
    Handy, 231
    totales Differenzial, 351
feedback loop, 396, 532
Fehler 1. Art, 94
Fehler 2. Art, 94
Fehlerfortpflanzung, 194, 350, 351
fehlerfrei vs intelligent, 173
Fehlerverhalten, 51
Feigenbaum-Konstanten, 392
Feind, 19
FI, 758
Feinstruktur-Konstante α, 688
FEL, 571, 618
Felber
    Kalender, 433
Feld, 445
    Linien, 234, 244, 303, 586
    Linienverlauf per Dgl, 290
    Matraze, 626
Feld als Teilchen, 625
Feld-Idee, 561
Feld/Vektorfunktion, 228
Feldeffekttransistordurchmesser, 525
Feldenergie, 482, 539, 625, 660, 663, 673, 719
    elektrische, 316, 719
    magnetische, 568
    Ruhmasse, 413
Feldknoten, 474
Feldlinien aus Gradient, 235
Feldlinien-Idee, 235, 236, 290, 303, 546, 586
Feldlinien-Idee Charakteristik, 290
Feldlinienabsorption, 336
Feldmasse, 626, 673
Feldpost, 15
Feldpunkt, 563
Feldstärke
    Deutung, 290
    Potenzial, 316
    Tensor, 499
    Tensor Einstein, 499
    Überhöhung Kanten, 550
Feldstärke
    elektrische, 719
    Tensor, 491, 496, 497, 565
Feldtheorie
    statistische, 626
Feldtheorie einheitliche, 35, 278, 430, 432, 433, 482
Feldtheorie geistiger Phänomene, 547
FEM, 590
Feminismus, 16, 31
Femtochemistry, 611
Fenster, 605
Fermat
    Geometrie, 372
    Prinzip, 372
    Spirale, 246
    Vermutung, 385
Fermat-Prinzip, 372
Fermi, 404, 529, 627, 652, 668, 677
    Beschleunigung, 589
    Energie, 484, 485, 518, 638
    Fragen, 66
    Gas, 484
    Impuls, 484
    Modell, 668, 677
    Pasta-Ulam-System, 404
    Probleme, 66
    Regel, 619
Fermikonstante, 639
Fermionen, 218, 484, 485, 638, 640
    Intro, 639

Fernbedienung, 155
Ferngeometrien, 251
Fernseher, 694
Fernwirkungstheorie, 163, 249, 351, 387, 632, 634
ferromagnetisch, 560
Festkörperphysik, 381, 524, 637
Festplattenmanager, 723
Festplattenretter, 723
Festplattenzugriff, 741
Feynman, 2, 26, 49
    Atomismus, 514
    Brown'sche Bewegung, 390
    Determinismus vs Chaos, 72
    Diagramm, 386, 682, 683
    Elektrodynamik, 579, 617
    Experten, 49
    Graphen, 372, 447, 630, 684
    Impuls des Feldes, 569
    Kac-Formel, 75
    Kepler, 336
    Lectures, 683
    Naturwissenschaft, 49
    Pfadintegral, 455
    QED, 572, 630, 682, 688, 704, 716
    Rechenkult, 40
    Selbstenergie, 673
    Slash-Notation, 463
    Stückelberg-Interpretation, 464
    Variationsprinzip, 371
    verschollene Vorlesung, 201
    Verstehen durch Geometrie, 2
FFmpeg, 536, 599
ffmpeg
    Kompression, 736
FFT, 96
FGAN, 15
FI, 769
fiber bundles, 255
Fibonacci-Zahlen, 87, 442
    Goldener Schnitt, 120, 134, 135, 442
Fick'sches Gesetz, 388, 596
Ficksche Gesetz, 512
Field, 445
Fierz, 21, 226, 271, 482, 632
fifo, 741
FII, 773
fiktive potenzielle Energie, 333
Filmmuseum, 758
Filter als Folgenverallgemeinerung, 98, 184
Filter generiert Wirklichkeit, 383
Filtrierung, 98
find -name 'A.tex', 736
Finsler-Geometrie, 431
FIR-Filter, 96, 108, 145, 167, 378
Firewall Mint, 148
Firmware, 729
Fische, 733
Fischer, Fritz, 748
Fischer-Kontroverse, 748
Fisher
    Information, 408
    information matrix, 408
Fisher-Information, 84
fits, 216
FitzHugh-Nagumo, 400
Fixpunkt, 320, 322, 324, 327
    elliptischer, 321
    nicht-hyperbolischer, 321, 713
    Stabilität, 186
Fixpunktgeichungssystem, 215
Fixpunktgleichung
    Lösg GlSys, 214
flache Metrik, 489
Flächen
    Divergenz, 244
    Integraldarstellung, 242
    Ladungsdichte, 557
    Metrik, 505
    Normale, 248, 546
    orientierte, 546
    Satz, 315, 353
    Theorie, 248
Flächenbombardement, 10, 13, 653, 655
Flächenmittel des Gradienten, 554
Flachmacher, 460
Fläming, 503
Flare, 589
Flares, 3, 538, 578, 589
Flash, 722–724, 731
Flavour-Oszillation, 677
Fledermaus, 696
flexible Grundsätze, 9
Flicker-Rauschen, 93, 114
Fliegen, 586
Fliegerfaust, 328
Fliehkraft, 331, 332
Fließgleichgewicht, 54, 527
Flohn, 5, 8, 47, 142
floor, 81, 83, 132
Flops, 730
Floquet-Theorie, 398
Flüchtling, 19

Flügge, 652, 671
Fluktuationstheorem, 74, 75, 103, 402
Fluss
dynamisches System, 317
Integral, 546
lokal, 546
Phasenraum, 303, 313, 355, 407, 586, 595
Strömung, 546
Teilchen, 546, 590
flüssig?, 515
Fluxbox, 148
Fluxflux, 148
Fly-by-Anomalie, 278
fMRT, 531, 701
Foam, 52
Fock
Raum, 447
Zustände, 447
Fock Pirani, 279
Fokker-Planck Gl, 75, 76, 191, 403
Folge
Def, 136
Filter, 98, 184
Kompaktheit, 288
Rand, 288
Stetigkeit, 137
Folgen, 178
Folien, 743
Fomin, 292
Föpp, 483, 561
Form
Polynom, 315, 490
Spencer-Brown, 127, 198
Formale Sprachen, 128
Formel, 158
Formensprache, 315
Forminvarianz per orthog Trafo, 261, 269, 499
forschendes Lehren, 63
Fortleben, 20, 390
Fortran, 154
Fortschritt vs Entmenschlichung, 47
Foto-Clouds, 739
Fotochemiker Miethe, 759
Fotos gimp, 156
Fotoverwaltung, 738
Fourier
Gesetz Wärme, 512
Fourier-Analyse, 70, 76, 108
Fourier-Reihe
Approximation, 140
Biophysik, 528
Def auf $[-\pi, \pi]$, 384
Def auf $[0, 2\pi]$, 384
Def auf $[0, L]$, 384
Ergodentheorie, 119
Gibbs-Phänomen, 137
Klirrfaktor, 104
Konvergenz im quadrat Mittel, 137
mp3, 102
Fourier-Transformation
Beispiele, 383
Definition, 382
Dgl Lösung, Green, 322
diskrete, 105, 138
DSL, 732
FFT, 112
Funktional, 383
higher order, 112
Momente, Kummulaten, 100
Tabellen, 383
Zerlegung der 1, 382
Fourier-Zerlegung
Optik, 102
Fournier-Universum, 499
fractional calculus, 191
Fragmentations-Hypothese, 500
Fraktal, 350
Cantor, Koch, Menger, 123
einer Menge, 120
Graphen, 179
Fraktale, 121, 402
Bm, 385
Chaos, 309
glatte, 309
Hurst-Exponent, 114
Phasenübergang, 523
Spektren, 309
stochastische, 539
fraktale Dimension
Beispiele, 123
Definition, 120
Schätzung, 122
fraktionale Statistik, 638
fraktionaler Zeitprozess, 93
Fraktur, 749
Frames, 168, 646
Franck-Condon-Prinzip, 617
Franck-Hertz-Versuch, 618
Franck-Report, 23
Frankenberg, 18, 653
Frankl, 60
Frankreich, 767

Franziskus von Assisi, 34
Franzzeit, 748
französisches System, 289
Fraunhofer, 501, 572, 617, 753
Fraunhofer-Linien, 607, 617
Frechet-Ableitung, 182
Frechet-Differenzial, 184
Fredholm
    Alternative, 221, 580
    Integralgleichung, 138
    Operator, 138
Frege, 506
freie Energie
    Def, 516, 518, 519
    Ising, 523
    Ostwald, 54, 527
    Potenzial, 519
    Zustanssumme, 519
freie Gruppe, 453
freie Indices, 270
freie Lösung, 555
freier Fall, 302
    Phasenraum, 357
freier Fall nach oben, 357
freier Vektor, parallel, 289
freies Teilchen
    Energie-Impuls-Beziehung, 343, 462, 487
    Schrödinger-Gleichung, 593
Freiheit, 20, 48, 692, 697, 709, 735
    Bieri, 697
    Handlungs-, 697
    Willens-, 697
Frenet-Serret'sche Formel, 248
Frequentisten, 93, 94, 142
Frequentisten vs Bayesianer, 89
Frequenzkamm, 448
Fresnel-Formeln, 573
Freud, 62
    Glück, 693
Freunde, 33
Friede Illusion, 701
Frieden, 24, 658
    Einstein, 24
Friedmann, 127, 412
    Gleichung, 466–468, 476
    Metrik, 468
    Universum, 476
Friedrichs II., 33
FII, 678, 758, 759, 762–764, 766, 767, 771–773
Frisch-Peierls-Memorandum, 666
Fritter, 718
Fritzsch, 576, 675
Fromm, 692
Frontallappen, 702, 710
Froude-Zahl, 605
FTCS, 598
FTP, 93
Fuchs-Kittowski, 733
Fugazität, 520
Fühmann, 755, 763
Führerkult, 695
Führungsfeld, 331, 634
Fukushima, 669
Fundamental-Lemma, 346
Fundamentaldeterminante, 188
Fundamentalform
    erste, 249
Fundamentalmode, 591
Fundamentalsatz, 557
Fundamentalsystem
    Dgl, 326, 339
    e-Ansatz, 326
    Eigenvektoren, 326
    spezielle Lösungen, 326
    Wronsky, 339, 340
Fundamentalsystem bei Doppellösung, 326
Fundamentaltensor, 473
5d-Theorie, 432
5-dimensionale Feldtheorie, 278, 481, 482
5 Dimensionen, 250, 256, 278, 432, 481, 482
Funkmesstechnik, 745
Funkortung, 745
Funkortung Polarkoordinaten, 231
Funkstörungen, 721
Funktion, 130, 131
    charakteristische, 193
    elliptische, 148, 149, 197, 759
    harmonische, 553, 554, 559
    implizite, 184
    koerzitive, 130
    lineare, 117
    messbare, 97, 112, 119
    schnell fallende, 366
Funktional, 364
    = Linearform, 266
    Ableitung, 541
    Analysis, 136, 368
    Analysis Intro, 368
    Determinante, Volumen, 217, 258, 714
Funktionaldeterminante
    nahrhafte 1, 312
funktionale Programmierung, 726, 728

Funktionalgleichungen, 87, 130
Funktionalintegrale, 630
Funktionalintegration, 630
Funktionen
    harmonische Intro, 554
Funktionentheorie
    Wegunabhängigkeit, 235
funktionsorientiert, 726
Funktor, 201, 284
Funkwellen, 717
Fusionsforschung, 666
Futurismus, 89
Fuzzy-Theorie, 79
FWI, 758, 769
FWII, 769

Gabor, 47
Gaia
    Astrometrie, 503
    Erdmutter, 749
    Hypothese, 504
Galateia, 763
Galaxien
    Abstände, 501
    Dichte, 501, 503
    Entwicklung, 470
    Halo, 472
Galilei, 66
galilei-invariant, 588
Galilei-Transformation, 414, 436, 498
Galois, 458
Galton, 91
Galton-Brett, 82
galvanische Kapazität, 8
γ
    Strahlung, 647, 744
    Verteilung, 81
    Wellen, Gehirn, 701
$\vec{\Gamma}$ = Phasenraumpunkt, 519
Gamma-Strahlung, 575, 647
$\Gamma(x, y, p)$-Funktion
    verallgem unvollständige, Definition, 187
$\Gamma(z)$-Funktion
    Definition, 187
    Kugel-Volumen, 188
    Relationen, 189, 191
$\Gamma(z, p)$-Funktion
    incomplete Python gammainc, 81
    unvollständige num Integration, 173
    unvollständige, Definition, 187
γ ray astronomy, 575, 610, 667
Gamow, 26, 198, 334, 336, 416, 465, 660, 689
Gandhi, 692
Ganser, 13
Garagenparadox, 497
Garbe, 200
Garbentheorie, 200, 401
Garnisionsstadt Potsdam, 294, 296, 501, 502, 665
Gasblasen, 104
Gasdynamik, 601
Gasgleichung, 509, 511, 516
Gaskampf, 25
Gaskonstante molare, 511
Gaskugeln, 511
Gassendi, 387, 527
Gateaux-Ableitung, 181
Gatow, 15
Gauß
    Algorithmus, 214, 218
    Algorithmus Eigenwerte, 221
    Algorithmus Inverse, 219
    Algorithmus Probe Spaltensumme, 214
    Bonnet Satz, 286
    Bonnet-Kosmologie, 505
    Ebene, 198, 200, 222
    Gesetz, 276, 335, 547, 566
    Integral, 189, 371
    Klammer, 132
    Krümmung, 249, 325
    Map, 136
    Momente der Verteilung, 100
    Prozess, 96, 118, 397
    scher Satz, 275, 546, 561
    Seidel-Eliminations-Verfahren, 176, 214, 215, 218
    Strahlen, 571
    verteilt, 222
    Verteilung, 83
Gaußsche Zahlen, 197
Gavroche, 767
Gebiet, 288
Gebiet vs Bereich, 288
Gebietsintegral, 113, 187, 188, 258
Gebietstreue und Maximumprinzip, 559
Gebler, 415
gebundener Vektor, Torque, 289
Gedächtnis, 434, 530, 706, 711, 716, 732
Gedächtnisrede FII, 771
Gedächtnis
    autobiographisches, 709
    Erinnerungskultur, 711
    Hippocampus, 702
    Klassifikation, 706

kollektives, 694, 711
Tricks, 706
Zeit, 434
Gefahr aus dem Osten, 655, 695
Gefühl, 706
Gefäßerkrankungen, 526
Gegenbeispiel
Gauß'scher Satz, 276
Satz von Schwarz, 350
Wronsky, 339
Gegenbeispiele der Topologie, 288
Gegeninduktivität, 561
gegenläufig = kontragredient, 182
Gegenwart, 434
Gegenwartsdeutung, 711
Gegner, 43
Gehen, 712, 733, 735
Gehen heißt Fallen, 167
Gehirn
Aufbau, 709
Bewusstsein, 698
Funktionen, 702
Gebrauchsanweisung, 710
Minsky, 42
Modell, 709
Modell heterokline Orbits, 709
Rechenmaschine, 729
Schlaf, 702
Wellen, 701
Gehorsamsbereitschaft, 53
Geiger Potsdam, 25
Geißler, 670
Geist, 698
Gehirn, 710
Licht, 632
Perspektiv-Übernahme, 700
Quantenmechanik, 731
Geister-Felder, 620
Geisteswissenschaftler, 29
gekoppelte Federn, 328, 329
gekoppelte Schwinger, 211, 329
geladener Stab, 297
Gelehrte, 30
Gelfand'sches Raumtripel, 368
Gemeinwohl, 48
Gender
Ärger, 127
Marx, 31
Gene, 530, 532
Code, 159
DNA RNA, 526
knock-out-Technik, 745
Lebensstil, 732
Regulation, 55
Zelle, 529
Zelle als Umgebung, 527
Genealogie der Griechen, 749
Generatingfunctionology, 100, 139, 145
generische Programmierung, 728
Genese des Nazismus, 44
Genetik, 53, 54
Geschichte, 526
genetische Algorithmen, 396
Genome Editing, 529
Genomics, 526
Genz, 226, 345, 453, 608, 648, 670, 677, 771
Geodynamo, 578
Geodätische, 318, 319
Geodäten Gravitation, 278
geodätische Bahn, 508
Geofilter, 63
GeoGebra, 180
GeoGebra Prüfungen, 180
geografische Länge, 233
Geographie, 604
Geologie, 579
geomagnetische Aktivität, 577
Geomagnetisches Institut Potsdam, 574
Geomagnetismus, 574
geometric unity, 260, 431
Geometrie
absolute, 436
algebraische, 176, 205, 284, 288
als Physik, 474
fraktale, 93, 114, 135
hyperbolische, 252, 325, 436–438
Kalküle, 227
projektive, 437
pseudoeuklidische, 437
Raumzeit, 480
synthetische, 436
tropische, 140
und Physik, 64, 66, 70, 226, 227, 257, 268, 291, 293, 340, 382, 390, 539
Geometrie ist Invariantentheorie, 438
geometrische
Algebra, 270
brownsche Bewegung, 193
Objekte, 229
Optik, 372, 373
Phase, 363, 688
QM, 608

Quantisierung, 631
Reihe, 103, 124
geometrisches Mittel, 124
Geometrisierung der Schwere, 473
Geometrodynamik, 255, 260, 431
Geopotenzial, 234
geordnete Menge, 131
Georgien, 12
geostrophische Anpassung, 603
geostrophische Strömung, 332, 604
geostrophisches Gleichgewicht, 234
Geostürme, 576
Geradenausgleich, 86
Geradengleichung senkrechter Zeiger, 199
gerader Draht, 561
Gerlach, 35
Germ, 200, 401
Germanen, 748, 756
Geruch, 702
Gesamschrittverfahren, 214
Gesamtenergie, 319, 333, 349
Geschichte, 11, 746, 749, 751, 755, 757, 764, 774
Analysis, 368
Englands, 624
englische, 753
Internet, 734
Physik, 22, 277, 298, 390
Quantenchemie, 612
Stochastik, 82, 83, 90, 388, 390
Teilchenphysik, 479, 624, 671
Geschichte der Technik, 510
Geschichte Russlands, 18, 747
Geschichtsbücher, 747
Geschlecht, 287
geschlossene Form, 206, 292
geschlossenes System, 519
Geschmack Urteilskraft, 29
Geschwindigkeit
Differenzialgeometrie, 247
tangenzial zur Bahn, 228
Vektorraumbündel, 252
Geschwindigkeitsaddition
SRT, 401, 493
Geschwindigkeitssprung, 373
gesellige Zahl, 133
Gesetz der kleinen Zahlen, 93
Gesetze der Form, 127, 198
Gestalt der Welt, 704
Gestaltstatistik, 539
Gesteinsbildung, 579
getriebene Kompassnadel, 308
Gewalt, 18, 45, 658, 665, 666, 697
Gewebe, 526
Gewesenes, 700
Gewissen, 23, 621, 698
Gewissheit, 79
Gewöhnung, 130
Gezeiten, 410
ggT, 146
Gibbs
Statistische Mechanik, 298
Gibbs'sche Funktion, 519
Gibbs'sches Ensemble, 521
Gibbs-Phänomen, 137, 187
Gierer-Meinhardt-Modell, 537, 596, 599
Giganten, 762
Gigerenzer, 43, 704, 708
Gillespie
Brownsche Bewegung, 73
Markow-Prozess, 82, 172
Orenstein-Prozess, 194
Zeitschritt, 388
gimp, 736
Ginac, 304
Ginnungagap, 469
Ginzburg-Landau-Gl, 638
Gipfelpunkt, 252
GitHub, 307, 738
Gitter reziproke, 261
Gitter-Eichfeldtheorie, 679, 680
Gitterfehlstellen, 417
Givens-Rotation, 140, 442
Glas, 524, 605, 607, 670, 758
Glasdynamik, 641
Gläser, 51, 53, 524, 641
Glatteis, 320
Glaube, 32, 752
Pascal, 32
Glauben, 130, 693, 751
Glauben vs Wissenschaft, 693
Glauber-Zustände, 448
Glaubhaftigkeit, 90
Glaubwürdigkeit vs Vertrauen, 94
Glaubwürdigkeit von Fiktion, 651
GLE, 739
gleich-verteilt, 222
Gleichdicke, 188, 429
Gleichgewicht, 302
fern, 55, 402
thermodynamisches, 516
Gleichgewicht des Schreckens, 655
Gleichgewicht Kräfte, 341

Gleichgewicht vs Reversibilität, 119
Gleichgewichtskriterium, 518
Gleichgewichtspunkte, 320
Gleichheitszeichen, 153, 180
    ==, =,:=,≡, 728
    symbolisches, 367
gleichmäßige Konvergenz, 141
Gleichnis, 285
Gleichrichtung, 721
Gleichschritt, 9, 16
Gleichstellungsindustrie, 16, 31
Gleichungssystem
    Anwendungen, 211
    Ausweiten in höherdimensionale Räume, 68
    direkt vs iterativ, 214
    dünn besetzt, 216
    Euler Intro, 211
    Fixpunktgeichung, 215
    Gauß-Verfahren, 215
    geometr Deutung, 212
    Jacobi-Verfahren, 215
    Krylov, 216
    Lösung, 214, 223
    Lösungstypen, 212
    Numerik, 216
    Präkondition, 214
    Python, 216
    Richardson-Iteration, 214
    SOR-Verfahren, 214
    über/unterbestimmt, 211
Gleichzeitigkeit, 30, 417, 715
    absolut, 429
    absolute, 417, 420, 488
    Drude, Lorentz, 415
    erlebte, 102, 434
    Heisenberg, 668
    Poincare, 434
Globale Analysis, 116
Globale Erwärmung, 6
Globalisierung, 45, 659
Glocken, 104
Glucksmann, 665
Glücksspiel, 80
Glukose, 524
Gluonen, 672, 673, 675, 683, 686, 688
glyphe, 143, 153
Glück, 693, 701, 713
GMRES-Verfahren, 224
GMS, 8
Gnade, 751, 752
Gnomon, 351
GNU/Linux, 147, 148
gnuplot, 532, 739, 740
Gödel, 62, 64, 113, 129, 133, 154, 226, 435, 704
    Herr Warum, 62
Gödelisierung, 64, 226
Goethe, 1, 33, 56
Goethe Popularisierung, 416
Goethe und Napoleon, 753
Goetheanum, 410, 475, 497, 699
Goetz, 22, 262, 759
Goldbach'sche Vermutung, 176
Goldene Regel
    Fermi, 619, 627, 644, 645
    Spieltheorie, 44
Goldener Schnitt, 134
    ACF, 135
    Definition, 135
    Torusfrequenz, 120
goldener Schnitt, 402
Goldenes Vlies, 761
Goldstein, 502, 503, 670
Golfkrieg, 9, 657
Golfkriege, 9, 12
Gomol, 510
Gontscharow, 766
Google calculator, 736
Google-Such-Ausschluss, 736
Gorbatschow, 14, 658, 659
Göring, 758, 771
Gott
    Daten, 71
    Designer, 33
    Dirac, 40
    Glauben, 32, 72
    Gödel, 704
    Hiob, 699
    Kant, 34
    La Mettrie, 33
    Laplace, 300
    nützliche Idee, 34
    Pascal, 32
    Pauli Feldtheorie, 484
    Perspektive, 701
    Physiker, 699
    rechnet, 41
    Rekursion, 728
    Russell, 24
    sieht alles, 63
    Sinnfrage, 60
    Spinoza, 32
    Theodizee, 129, 699

würfelt nicht, 621
Gott Wissenschaft, 30
Gottesgnadentum, 767, 768
Goudsmit, 667, 668
Goya, 51, 753
gpg, 177
GPL, 148
GPS, 210
Handy, 154
Landsat, 154
GPU, 169, 526
grace, 736
Gracian, 31
Grade, 270
Gradient
Beispiele, 237
Definition per Kurvenintegraldarstellung, 238
Definition per Oberflächenvektor-Mittelwert, 242
Definition per Richtungsableitung, 238
Diffusion, 598
Dualer Vektor, 238
dualer Vektor, 238
en-Strömung, 332
Energiehyperfläche, 319, 356
Flächenintegral-Darstellung, 242
koordinatenfrei, 550, 559
kovariant, 238
krumlinig Herleitung, 269
Kugelkoord, 235
mehrfach-ausgedehnter Größen, 236
Richtungsableitung, 181
Satz von Schwarz, 206
Vierer, 490
Wirbelfeld, 245
Gradientensysteme, 327, 401
Graetzschaltung, 721
Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, 140
Grammatik
deutsche, 160
Granger-Kausalität, 122
Granger-Kausalität, 100, 122
Granin, 14, 766
Granular Patterns, 526
Granulen, 503
Graph
Bayes, 534
Definition, 534
Feynman, 538, 683
Intro, 534
PageRank, 175
planar, 286
Schaltkreis, 210
Syntax, 169
Übergangs-Matrix, 169
Zeichnen python, 534
Graphenschicht, 689
Graphentheorie, 79
Graphische Methoden, 534
graphische Modelle, 78, 100, 122, 534
Gräser, 525
Grassmann, 262, 271
Algebra, 272, 448
Identität, 230
Produkt, 262, 292
Graue Energie, 3
Gravitation, 480, 647
Linsen, 372
post Newton, 277
variierende Feldstärke, 277
Gravitation Antimaterie, 278, 683
Gravitation Thirring, 278
Gravitational and Electromagnetic Analogy, 544
Gravitations
Form, 315
Gesetz, 277, 334
Konstante, 482, 717
Nachweis, 507–509
Paradoxa und Auswege, 277
Polarisation, 479
Wellen, 506, 508
Wellen Intro, 478, 479, 508
Gravitationsgesetz mit MOND, 483
Gravitationsladung, 629
Gravitationspotenzial, 330
Gravitationswellen, 479
Gravitino, 685
Graviton, 685, 686
Gravitonen, 635
Gray Gy Energiedosis, 668, 669
Great Reset, 31
Greedoide, 80
GreedyAlgorithmmus, 140
Green
sche Fkt RWP, 554
Green'sche
Formel, 553, 555
Formel Deutung, 188
Funktion, 367
Funktion Beispiele, 379
Funktion der Poisson-Gl, 548
Funktion Festkörperphysik, 381, 683
Funktion Mechanik, 380

Funktion Schwinger, 380
Funktion spektrale Eigenschaften, 322
Funktion Streuformel, 683
Funktion Vielteilchen, 548
Funktion, Methode der, 211, 277, 379, 638
Funktion, retardierte, 563, 564
Identität, 553, 555
Operatoren QM, 620
Sätze, 553
Green'sche Identitäten Intro, 554
Green'schen Funktion Vielteilchensysteme, 447
Greensche Darstellungsformel, 554
Grenzbedingungen, 545, 568
Grenzen, 20, 48, 692
Grenzen des Wachstums, 45, 47, 693
Grenzflächen, 545, 560, 568, 572, 573, 638
Grenzwert
Bildung, 137
Idee, 136
Grenzzyklus, 53, 72, 115, 116, 121, 320, 322, 376, 378, 393, 396, 400–403, 713
Radius, 202
Grenzzyklus-Schwinger, 203
grep, 172
Griebel, 21
Griechische Geschichte, 749
Grobkörnung, 72, 125, 153
Größenordnungen, 229
Größenverteilung, 527
Größenklasse, 606
Grothendieck, 67
Grotrian, 503
Große Minima, 578
Großvater-Paradoxon, 410
Großbritannien, 753
Grundfunktion, 369
Grundfunktionen, 365
Grundgebilde, 438
Grundintegral, 369
Grundlagenstreit
Mathematik, 434
Grundschule Algebra, 464
Grundschwingung, 591
Grundvektoren keine Vektoren, 262
Gruppe
alternierende, 465
Beispiele, 454
Definition, 456
einfach = unzerlegbar, 465
freie, 453
Halb, 456
irreduzibel, 465
Klein, 457
Kreis, 459
Lie, 458–461
Lie-Typ, 465
Lorentz, 462
Monster, 465
orthogonale, 455
Permutations, 457
sporadische, 465
stabile, 210
symmetrische, 457
Tits, 465
unitäre, 455
Vierer, 457
zyklische, 457, 465
Gruppen
Geschwindigkeit, 593
Homomorphismus, 459
Klassifikation, 465
Theorie, 43, 177, 455, 464
Theorie fraktionale, 191
Gruppen Beispiele, 454
Gruppen Kurven elliptische, 307
Gruppentheorie
Intro, 441, 452, 453, 462
Gruppoid, 456
GSSD, 655, 746
Guderian, 664, 770
Guerilla-Kriegführung, 10
Guggenheim-Quadrat, 3, 519
Gumbel-Verteilung, 81
Gunneffekt, 661, 721
Günther, 415, 417, 466, 468, 478
GUT, 684
Intro, 676, 680, 684
gut und schön, 731
GUT-Symmetrien, 684
Gute, das, 695
Güte-Funktion, 94
Gutenberg-Richter-Gesetz, 537
Gy Energiedosis, 668, 669
Gynoid, 42
Gyrationsbewegung, 203
Gyrochronologie, 501
Gyromagnetische Verhältnis, 560
Götter, falsche, 32
Gütekriterium Modell, 69

H-I-Gebiete, 472
h-Welt, 437

H.265, 725
Haag QFT, 633
Haben und Sein, 692
Hack, 736
Hacker, 698
Hacks Android, 722
Hadamard-Produkt, 216
Hadoop, 743
Hadronen, 680
Hagen-Poiseuille, 590
Hahn
  induzierte Kern-Spaltung, 663
  Internierung, 667
Haken, 52
Halbgruppe, 456
Halbleiter, 215, 637, 638, 721
Halbparameter, 336
Halbwinkel, 149, 321
Hallstein, 20
Halm, 200
H_α-Linie, 472
H_α-Wald, 472
Halt geben, 714
Hamilton
  Bewegungsgleichungen, 321, 336
  Funktion, 254, 349, 352–354, 357, 361, 365
    optische, 374
  Funktion vs Gesamtenergie, 349
  Jacobi-Gleichung, 361
    Quantenmechanik, 359
  Operator Bahndrehimpuls, 447
  Operator Pauli-Gleichung, 444
  Operator PT-Invarianz, 443
  Operator Schrödingergleichung, 455
  Operator Symmetrie, 453
  Operator Zeitentwicklung, 454
  Prinzip, 369, 541
  Prinzip für Felder, 540
Hamilton-Formalismus Beispiele, 343
Hamilton-Jacobi-Theorie Quantisierung, 363, 688
Hamilton-Prinzip
  Pendel, 528
Hanbury Brown-Twiss-Effekt, 644
Handbuch der Physik, 585
Handlungsfreiheit, 697
Handy Acceleration-App, 231
Hanle-Effekt, 682
Hardware, 729
Hardware-Info
  lspci dmesg, 741
  meminfo, 741
harmonische Analyse, 101
harmonische Funktion, 553, 554, 559
harmonische Funktion Flächenmittel des Gradienten, 554
harmonische Funktionen
  Intro, 554
harmonische Funktionen und Green'sche Sätze, 552
harmonische Reihe, 190
harmonischer Oszillator
  neutral stabil, 321
  Winkelvariable, 362
  Wirbelfeld, 321
Harmonisches Dreieck, 87
Hartmann
  Profil, 588
  Zahl, 588
Hartree
  Fock-Ansatz, 217
  Fock-Gleichung, 214
  Fock-Verfahren, 610
  Produkt, 218
Hasenöhrl
  Massenträgheit, 674
Haskell, 728, 737
Hass
  Gruen, 32
  Traditionsverlust, 694
Hattendorff, 331
Hauptachsentransformation, 222, 257
Hauptsatz der Diff und Integralrech, 178, 185
Hauptunterdeterminanten, 225
Hauptweg, 207
Hauptwert, 203
  Cauchy, 187
Hausdorff
  Dimension, 121
  Raum, 280
Havelland, 717
Hawking-Strahlung, 411
Hawkins, 42, 434, 648, 703
Hearst, 9
Heaviside-Funktion, 380
Heavy-Tail-Verteilung, 92, 116, 118
Hebbel, 753
Hedonismus, 693
Heegner-Zahlen, 197
Hees, 716
Hegel, 34, 704, 730
  Religion, 60
Heidegger, 156
Heimat, 128

Heimatlosigkeit, 665
Heimkehrer, 665
Heisenberg
Bombe, 667
Briefe, 24
Gott, 34
Gruppe, 436
Kopenhagener Deutung, 634
Messung, 622
Nichtlinearität, 391
Ordnung der Wirklichkeit, 704
Philosophie, 705
S-Matrix, 619
Schnitt, 705
Unschärfe-Relation, 609, 620, 628, 632, 715
Verstehen, 704
Heisenbug, 150
Heitler, 217, 563, 681
Heitler-London-Theorie, 612
Helena, 761
Helissor, 270
Helium, 36, 61, 71, 638, 641
Helium Sonne, 639
Helix, 246, 247
Helizität, 678, 685
Helizität, 581, 670, 678, 684
hellenistischen Zeit, 277
Helmholtz, 279, 296, 709
Gleichung, 364, 591, 620
Integral, 559
Potential, 377, 519
scher Wirbelsatz, 234
scher Zerlegungssatz, 542, 558
Theorem, 558
Hemmung, 376
Hempel, 37
Henón-Map, 397
Herakles, 749
Herbart, 547
Herkules, 749
Herneck, 22, 296, 664, 666, 667
Heron, 66
Heron-Verfahren zum Wurzeln, 136
Hertz'sche Mechanik, 331
Hertz'scher Dipol, 615, 617
Hertz'scher Vektor, 616
Hertzsprung-Russel-Diagramm, 484
Herzland-These, 20
Hesse'sche Normalform, 229
Hesse-Matrix, 225
Heuser, 69, 183, 190, 309, 324, 346, 368, 582
hexadezimal, 536
Hexen, 8, 700, 752
Heydrich, 771
Heym, 14
HHI, 576
Hidden Markov Modelle, 396
Hidden-Markov-Modell, HMM, 167, 168, 396, 532
Higgs
Feld, 687
Mechanismus, 678, 680
Potential, 672
Quantengravitation, 672
Teilchen, 673, 682
higher order crossings, 534
HII, 470, 472
Hilbert
Raum, 136, 138
Hilbert-Raum
Kernfunktion, 137
Hilbert-Transformation, 74
Hilflosigkeit, 696
Hilfsweg harmloser, 207
Hill'schen Gleichungen, 338
Himmel, 618
Himmelsmechanik, 201, 300, 328, 338, 359, 410, 461
Himmelsäquator, 233
Himmeroder Denkschrift, 20
hinreichende Bedingung, 127, 347
Hintergrundstrahlung, 504
Hiob, 699, 731
Hippocampus, 702, 706
Hirn
links, 706, 710
Menschenbild, 703
rechts, 710
Tumor, 531
Hiroschima, 652, 653, 663
Hiroshima, 653
Histogramm
naives, 76
Python, 76
Histologie, 526
Hitler, 44, 695
Hitlerjugend, 9, 16
Hittorf, 670
HJG
Intro, 359
HJT, 373
HMI, 664
HMM, 42, 169
HMO-Näherung, 214

Hochs, 586
Hochs rechts, 332
Hochs/Tiefs, 332
Hodge, 205, 288, 461
Hodge *, 212, 290
Hodge star operator, 230, 260, 264
Hofstadter, 153
Hofstadter-Schmetterling, 114
Höhenlinie, 184, 233, 238
Höhenlinie, 236
Höhenstrahlung, 575, 669, 671
Hohenzollern, 770
höhere Harmonische, 103
Höhlengleichnis, 430
Hohlraumfeld, 333
Hohlzylinder-Wellen, 620
Hohmann-Manover, 338
Höll, 4, 11, 664, 669
Holobionten, 63
Holocaust, 665, 766, 771
holomorph, 206, 570
holonom, 348
holonome Basis, 491
Holors, 270
homogene Differenzialgleichung, 301
homogene Funktion, 301, 310, 341, 349, 381
    Determinante, 216
homogene Transformation a la Dirac, 354
Homogenität des Raumes, 226, 351
Homogenitätspostulat, 251
homokline Orbits, 392, 393
homokliner Orbit, 392
homolog, 282
homologe Zyklen, 283
Homologie, 255, 283, 287, 288
homologisches Moduls, 284
Homomorphismus, 458
Homotopie, 450
Homöomorphismus, 284
Honerkamp, 25, 72, 100, 386, 524, 715
Hong-Ou-Mandel-Interferrometer, 607
Hönl, 330
Hönl'scher Zitterradius, 668
Hooft
    Eichtheorien, 542, 679
Hooke'scher Körper, 315
Hopf, 202
    Bifurkation, 202, 321, 324, 600
    Dgls, 300
    Normal-Form, 202
    Oszillator, 321
Hopf Eberhard, 115
Hopkins, 17
Hormone, 54
hostname, 741
Houellebecq, 8, 30
Householder-Transformation, 140
Houtermans, 218, 295, 511, 664
Hoyle, 477, 504
htaccess, 737
html pre, 737
html, css, 737
Hubbard-Modell, 637
Hubble
    Funktion, 467
    Konstante, 467, 475, 485
    Raumdehnung, 477
Hubs, 53
Hufeisenabbildung, 392
Humboldt
    Denkmäler, 759
    Preußen, 773
    Sonnenflecken, 578
Hume, 130
Hund, 65
Hund-Mulliken-Modell, 612
Husserl, 435
Huygens, 410
Huygens'sches Prinzip, 572
Hyaden-Alter, 501
Hyazinthe, 760
Hybridisierung, 612
Hybris, 13, 658
Hydrologie, 586
Hyperbel, 232, 233, 337, 488
hyperbolische Geometrie, 437
hyperbolische Geometrie, 325
hyperbolisches dynamische System, 321
Hyperbolizität, 505
Hyperfakultät, 190
Hyperfein-WW, 472
Hypermoral, 757
Hyperwürfel, 432
Hypnose, 696
Hypothese großer Zahlen, 482
Höhenlinie, 238

i, 196, 720
IASS, 47
ICBM, 656
ICBM-Unfall, 655
Ich, 62, 698, 700, 710

alternativ, 757
gefühltes, 433
Wahrnehmung, 433
Iconic turn, 9, 23, 705
ideales Gas, 485, 509, 515, 516
Idealisierung, 555
Idee des Internets, 26
Ideengeschichte Physik, 390
idempotent, 119
Identität, 184, 700, 728
Identitätsfunktion, 131
Identitätsschutz, 737
IEEE-1284-Port, 308
Iglu, 693
IGM, 472
ignorabel, 354
ignorabel oder zyklisch, 352, 355
iid, 744
Ijob, 57
Ikeda-Map, 397
Ikonisierung der Welt, 705
Illich, 49, 692
Imaginär-Teil, 198, 222
Imitation, 43
Immunbiologie, 54
Immunologie, 54
Immunsystem, 54, 55, 527
Immunsystem-Äquivalent, 529
Impedanzdiagramm, 203, 720
Impfen, 54
Implikation, 127, 711, 712
Implizites explizieren, 464
implizites Verfahren, 308
Impuls
Dichte em Welle, 259
Masse, 486, 488
quantenmechanisch, 619
relativistischer, 488
Satz, 351
strahlenoptisch, 374
Stromdichte, 310
Stromstärke, 300, 310
verallgemeinerter, 357
Impuls mit Feld, 562
in vitro, 192
in vivo, 192
indefinit, 225
indefinite Metrik, 480
Index
Dummy, 491
Gymnastik, 238, 253, 270, 490, 491, 498
Kalkül, 238, 253, 270, 490, 491, 498
of clumping, 122
Rechnungsübung, 267
umbral, 491
Ziehen, 496
Index-Konzept, 391
Induktion
magnetische, 293, 561, 565
Induktions
Beweis, 129
Fluss, 561
Gesetz, 561
Gesetz aus A, 561
induktive Dimension, 280
Induktivität, 327, 399, 560, 561, 720
Spule, 561
Inertial
Bereich, 587
Mannigfaltigkeit, 202, 369
System, 410
lineares Bezugssystem, 428
Schweben, 429
Welle, 604
Inerzialsystem, 410, 412, 429, 436, 473, 479
Eigenzeit, 486
inf, Infimum, 288
INF-Vertrag, 656
Infektion, 54
Infektologie, 54
Infeld, 23, 56, 64, 430, 432, 474, 625
Das Buch, 56
einheitliche Feldtheorie, 432
Physik-Intro, 64
Inferenz statistische, 77
Infimum, 288
Infinispan, 743
infinitesimale
Drehung, 441
Erzeugende, 446
Inflation, 481
Influenz, 556
Informatik, 150
Information, 48
Bayes, 93, 145
Code-Ebene, 160
Daten, 71, 165
Def, 159–164
Embodiment, 735
Entropie, 123, 161
Interprozess, 156
Inverse Probleme, 91

Kalman-Filter, 167
Kernschätzer, 140
Kommunikation, 155, 158, 164, 166
Komplexiät, 52
Lichtkegel, 596
Likelihood, 144
Materie, 164
Maß, 123
messen, 126
Qualia, 700
Quantencomputing, 642
Störsignal, 155
Variationsrechnung, 376
Verstehen, 48
vs Wissen, 72
Was ist das?, 72
Wirtschaftsgut, 165
Zeichen, 155
Zeitreihe, 115
Informationsverarbeitung, 154
Ingress, 155
Inhalt
einer Fläche, 546
eines Körpers, 224
Gebiet, 113, 188, 257
Inhaltsproblem, 178
inhomogene Differenzialgleichung, 301
inhomogene Medien, 373
Inhumanes, 48, 433
Initialtopologie, 280
injektiv, 131, 222
Inklinations-Winkel, 574
inkompressibel, 234, 313
inkrementeller Algorithmus, 174
Innenfeld, 334
innere Energie, 516
innere Raum, 686
innerer Photoeffekt, 506
innerer Punkt, 283
Insekten, 527
Insektennavigation, 281
Insertion, 528
Instabilitäten
hydrodynamische, 587
Instabilitäten dyn Systeme, 63
Instagram, 63
Instanton, 179, 679
Instanz, 73, 79, 726
Instanzen, 726, 728
Insula, 433
integrabel Dgl, 306
Integral
Begriff Ito/Stratonowitsch, 193, 389
Deutung klassisch, 178
Deutung praktisch, 183
Exponentialfunktion, 187
Sinus, 385
Integrale
mehrdimensionale, 258
Integralinvariante, 312
Integralsatz Gauß, 275
Integration
bestimmte, 113
Fubini, 113
konvexe, 309
mehrdimensional, 113, 188
mehrfachausgedehnter Gebiete, 113
parzielle, 138
Residuum, 208
stochastische, 118, 389, 601
stochastische per Monte-Carlo, 389
symplektische, 308, 321
Tricks, 189
Integrationspunkt, 551, 563
Integritätsbereich, 456
Integritätsring, 456
Intelligent Design, 33
intelligent vs fehlerfrei, 173
Intelligenz, 42
Embodiment, 732
künstliche, 41, 42, 145, 165, 730, 733
Pflanzen, 525
Snow, 29
soziale, 708
Test, 706
intensive Größen, 521
intensive Zustandsgröße, 518, 520, 639
intensive Zustandsvariable, 521
Interkosmos-10, 576
Internet, 11, 26, 53, 60, 733, 734, 755
Internet Prinzipien, 63
Interpolation
Variationsrechnung, 79
Interpretation, 129
Interpreter, 150
Interrupts, 729
interstellares Medium, 470, 472, 501, 575
Intoleranz, 694
Intron, 529
Intuition, 43, 51, 708
Physik, 716
Intuitionismus, 434

Intuitionisten, 130
Invariante
des em Feldes, 566
pseudoskalare, 566
Invariantentheorie, 272
Invarianz
Vererbung, 726
vs Erhaltung, 351
Invasion, U.S.A., 655
inverse
Funktion, 183
Matrix, 220
inverse Basis, 262
Inversion, 218
Invertierung von Blockmatrizen, 220
Involution = selbstinvers, 622
Involution integrabler Systeme, 360
involutorisch, 115, 321, 443
Iod, 4
Ionophäre, 575–577, 678
IoT, 744
IP mit hostname, 147
IP-Adresse, 737
Irakkriege, 9, 12, 23, 655, 658, 664
irreduzible Darstellungen, 453
irreduzible Tensoroperatoren, 449
irreduzible Zustände, 449
Irreversibilität, 55, 510
Irreversibität
Reservoir, 645
irreversibler Prozesse, 55, 402
Irrfahrten, 169, 397, 538
Irrtumswahrscheinlichkeit, 89, 90
isentrop, 517
Ising-Modell, 396, 523
Islam, 46
ISM, 472, 502
Iso-Flächen, 245
Iso-Linie/Fläche, 233
Isobare, 234, 332, 517
Isochrone, 191
Isohypse, 236
Isoklinen, 309
Isolatoren
topologische, 641
Isomap, 77, 318, 403, 408
isometrischen Einbettung, 309
Isomorphismus, 457
Isoperimetrie, 371
Isophase, 318
Isospin, 667, 668, 685
isotrope Vektoren, 437, 489
Isotropie der Lichtausbreitung, 414
ispell, 738
ISS Tracking, 506
Isserlis-Theorem, 77
ISTAR, 657
IT-Kompetenz, 734
Iterative Lsg Gls, 211
iterierte Integrale, 187
Ito
Integral, 98, 193, 389
Kalkül, 403
Prozess, 75, 78
ITW, 21
IWTO, 21

J, 695
Jacobi, 115, 363, 384
Determinante, 188, 289, 293, 313, 354, 365, 550, 567
Determinante als Poissonklammer, 354
Identität, 358
Ableitungsregel, 445
Assoziativitätsersatz, 230
Differenzialoperator, 358
Iteration, 176
Matrix, 216, 309, 405, 406, 548
Eigenwerte, 321, 403
lin Abbildund, 181
Metrik, 224
Mikroskop, 178
Spalten normiert, 182
Volumenintegral, 714
Transformation, 361
Verfahren Lsg GlSysteme, 214, 215
Jacobi-Form
Mechanik, 369
Jacobi-Matrix als totales Differenzial, 188
Jacobstab, 233, 717
Jahr, 475
Jailbreak, 736
Jamboard, 742
James, 8, 693, 700
James Webb Teleskop, 337, 500, 501
Janich
Experiment, 36, 61
Hirnforschung, 703
Information, 72, 167
Konstruktivismus, 39
Raum, 703
Wahrheit, 34

Java Bibel, 174
JavaScript, 172
Jaynes, 76
Jeevanjee: Tensoren und Gruppen, 261, 461
Jerk-Mechanik, 302
Jerusalem, 750
Jet-Raum, 249
Jetzt, 434
Jetzt-Zustand, 433
Joomla, 738
Jordan, 633
    Dirac-Statistik, 279
    Kosmologie, 250, 278, 475, 482
    Kurven, 557
    Normalform, 226
    Pauli-Statistik, 485
    Quantenmechanik, 608
    versteckte Variablen, 621
    Verstehen, 279
Jordanisieren, 216
Josephsoneffekt, 638
jpeg, 736
    DCT, 102
Juden vs LKWs, 751
Jugend - überflüssig und unbeachtet, 714
Jugendalter, 709
Julia-Mengen, 196
Julian Assange, 9, 13, 23
Jung, 688
Junghähnel, 296
Jungk, 10
Jungk Veränderung, 652
Junktoren, 127

Kaczmarz-Methode, 215
Kadanoff, 523
Kahneman, 705
Kairos vs Chronos, 434
Kaiser, Hans, 219, 262, 263, 729
Kaiser Wilhelm-Gedächtnis-Kirche, 769
Kalender, 433
    Felber, 433
Kalkül, 2, 64, 183, 226, 264, 291, 481, 716
    Eleganz, 278
Kallenrode, 195
Kallisto, 761
Kalman
    ensemble filter, 142
    Filter, 78, 143, 167, 389
    Matrix, 167
    particle filter, 143
Kalman-Bucy-Filter, 601
kalte Verbrennung, 5
Kalter Krieg, 15, 20, 294, 655, 659, 695
Kaluza
    vierzehn Feldgleichungen, 432, 481
    Dimension statt Metrik, 278
    erhöhe die Dimension, 432
    Klein-Theorie, 278
    Schmutzer, 482
    Schottenloher, 256
Kaluza Unitätsproblem, 432
Kaluza-Klein-Theorien, 431
KAM, 402
Kanalstrahlen, 670
kanonisch, 355, 359
kanonische Bewegungsgleichungen, 336
kanonische Transformation, 353–355, 361
    Beispiele, 355
    Definition, 354
    Funktionaldeterminante, 348
kanonisches Ensemble, 519
Kanonizität
    Poisson-Klammern, 358
    Umlauf im Phasenraum, 354
    Vertauschbarkeit der Ableitungen, 356
Kant, 34, 226, 410, 434, 506, 699, 712
    Sitten, 764
Kant Laue, 278
Kanten, 169, 286, 432, 534
elektrische, 719
galvanische, 8
Kapiza-Pendel, 398
Kapo, 771
Kapselung, 726
Kardar–Parisi–Zhang-Gleichung, 600
Kardinal
    Skala, 70
    Zahl = Mächtigkeit, 134
Karikatur, 60, 70
Karlshorst, 14, 15
Karman, 195
Karte, 281, 283, 284
Karten
    Entwurf, 183
    Wechsel, 284, 309
Kartenspiele, 665
Kartesische in Polarbasis, 231
kartesischer Schnitt, 705
kartesisches Produkt, 130, 269, 456
Kartographie, 281
Kartosemiotik, 281

Karussel, 330, 409
Metrik, 474, 475
Karussel Metrik Schwere, 473
Karussel-Metrik, 474
Kasernen in Potsdam, 746
Kästner, 232, 238, 267, 269
Katastrophen
Schutz, 669
Theorie, 250, 401, 402
Katastrophentheorie, 401
kategoriell
=elementfrei, 285
Kategorien
= Klassen, 285
Definition, 285
Fehler, 697
Objekt, 285
Pfeildenken, 284
Theorie, 284, 285, 728
Beispiele, 285
Geschichte, 285
Intro, 285
Theorie = homologische Algebra, 284
Theorie Idee, 285
Unsinn, 285
Katenoide Kettenlinie, 342, 374, 375
Katharina II, 756
Katherina II, 762
Kathode, 579
Kathodenstrahlen, 670
Katze, 160, 612, 635
Kauffman, 528
kausal, 62, 288
kausal = zeitlich, 713
Kausalität, 40, 61, 72, 76, 100, 380, 401, 433, 435, 535, 632, 635, 647
Kausalität, 298
Kausalität Inferenz, 84, 100
Kausalität und Quantenwelt, 647
Kausalmengen-Modell, 412
Kavitation, 586
Kegelschnitt
Geometrie, 263
Typ, 222
Kegelschnitt als Datenassimilator, 142
Kehrmatrix, 220
Keilprodukt, 271
Keim, 200
Kellermann, 759
Kelvin
Helmholtz-Instabilität, 587
Körper, 315
Theorem, 587
Kendall's Tau, 70
Kennan, 14
Warnung vor NATO-Osterweiterung, 15
X-Artikel, 655
Kennzeichnen, Russell, 24
Kepler, 66
Brahe, 260
Ellipse, 336
Gesetze, 336
Problem, 337, 338, 686
Winkel-Wirkungs-Variable, 362
Kepler III, 337
Kern
Bild-Satz, 212
des Gleichungssystems, 212
Eigenwert-Problem-Idee, 221
einer Abb vs Nullstellen, 213
einer linearen Abbildung, 222
Energie, 664
Energiegewinnung, 663
Fusion, 589, 668
nichttriviale Lösung, 221
Nullstellen, 222
Nullvektor, 213
Schätzer, 78, 140, 144, 533
Spaltung, 667
Chemiker, 663
induzierte, 663
spontane, 666
Suche, 221
Zerfall, 668
Energie, 652, 663, 670
Kraft, 652, 660, 661, 663, 670, 671
Kerne
superschwere, 664
Kerne reproduzierende, 91
Kernel, 729
Estimater, 78, 140, 144, 533
flashen, 722
Kernenergie, 660, 661, 663
Kernenergie nutzbar?, 652, 671
Kernfusion, 511, 652, 666, 668
Kernideen, 25
Kerninduktion, 531
Kernkraftwerke, 652, 663, 667, 669
Kernmodelle, 671
Kernphysik Geschichte, 663, 664, 666
Kernreaktoren, 662, 664
Kernspaltung, 664, 671

Kernwaffen, 652, 653, 660, 663, 670, 694
Kernwaffenschutz, 653, 660, 746
Kernwaffenträger, 655
Ket-Vektor, 225
Ket-Vektoren, 264
Kette, 329
Kettenbruch, 132, 134, 135, 149, 403
Kettenbrüche, 134, 135
Kettenlinie, 342, 375
Kettenreaktion, 666
Kettenwurzel, 134
Ketterle, 30, 640
keycaps, 147
Keycode, 147
keynote, 737
KI, 42, 62, 84, 100, 733
    Penrose, 730
KI Weizenbaum, 734
Kicks, 102
Kienle, 503
Kierkegaard, 695
Kinder
    verhaltensauffällige, 694, 698
Kinderkreuzzug, 41
Kinderpsychologie, 694
Kindheit, 708
Kinematik, 299, 330
Kineor, 270
Kinetik, 300
kinetische Gleichungen, 530
kinetische Theorie der Fuide, 602
kinetisches Potenzial, 568
Kinks, 320, 321
kinästetische
    Empfindung, 42, 167, 708
Kirchengeschichte, 751
Kirchhoff'sche Gesetze, 211
Kissinger, 658
Kiste, 490, 563
Kitsch, 72
Klang, 104
Klarheit und Übersich, 697
Klasse
    charakteristische, 282
    Definition, 73, 79
    objektorientiert, 726, 728
Klassifikator, 88, 94, 111
klassische Physik, 411
Klausur, 714
Klebe, 295
Klebefläche, 281
Klein
    2 Diskontinuitäten, 65
    Gordon-Gleichung, 463, 487, 542, 593
    Paradox, 464
    sche Flasche, 686
    sche Vierer-Gruppe, 457
Klein'sches Modell, 437
Klein-Glienicke, 503
Kleist
    Beben, 537
    Gedankenverfertigung beim Reden, 705
    Kohlhaas, 758
    Spezialisierungszwang, 30
Kleist-Grab, 770
Kletteroperator, 448
Klima
    Fluktuations-Dissipations-Theorem, 75
    Magnetfeld, 579
    Modelle, 52
    Ökologie, 6, 300
    Paläo-Modelle, 52
    Risiken, 6
    2-Box-Modell, 52
    Überprüfbarkeit, 39
Klimaaufzeichnungen, 579
Klimarettungsirrglauben, 6
Klimaschwankungen, 6, 47
Klimatologie, 6
Klimawandel, 6, 7, 45, 47
Klirrfaktor, 104
Klonovsky, 8
Knobelbuch
    Mathematik, 124
Knochen, 524
Knoten, 591
    Abstand, 53
    Drehgruppe, 450
    Grad, 53
    Graph, 169
    PageRank-Algorithmus, 175
    Theorie, 451
    Topologie, 451
    Zöpfe, 201
Koch'sche Schneeflocke, 124, 134
Kocher, 507, 718
Koeffizienten-Matrix
    Abstände Navi, 211, 534
    Attribute wie Preise, Gewichte, 209, 210
    Deutungen, 209
    diagonaldominant, 215
    geometr Deutung, 210, 211

Richtungskosinus, 210
Koerzitivfeldstärken, 568
Koestler, 41, 63, 666, 746, 757
Kognition
Bayes, 144
Bewusstsein, 732
computing, 151
Definition, 704
Embodied Embedded, 732
Intuition, 51
Körper, 734
Lernen, 705
Modelle, 707
neuronale Netze, 532
physiologisch, 53
Sein, 712
Sprache, 160
Struktur und Bedeutung, 160
Störungen, 710
kognitive Psychologie, 160, 698, 707
Kognitive Robotik, 177
kognitive Verzerrungen, 58
Kohärer, 718
Kohlenhydrat, 524
kohomolog, 283
Kohomologie, 282
Sequenzen, 282
kohärente Zustände, 448
Kohärenz optische, 571
Koinzidenzzählung, 653
Kollaps der Wellenfunktion, 613
kollinear, 289
Kolloide, 524
Kolmogorow, 130
Kolumbus, 450
Kolyma, 665
Koma, 701
Kombinationsprinzip, 628
Kombinatorik, abzählende, 80
kombinatorische Topologie, 281
Komfortzone, 11
kommensurabel, 134
kommensurable Frequenzen, 119, 120, 360
Kommunikation
Adressen, 418
Akustik, 104
Alphabet, 150
Codierung, 162
Daten, 166
gestörte, 59
Informatik, 128
Information, 164
Komplexität, 57
Kontingenz, 57
lernen, 42
Licht, 632
Mem, 527
Mensch-Maschine, 72, 147, 154, 167
Modell, 164
Modelle, 163
Pflanzen, 597
pädagogische, 42
Schnittstelle, 726
Semiotik, 157
Signal, 155
Symbol, 158
Technik, 725
Tiere, 164
Zeichenvereinbarung, 158
Zwischenmenschliche, 155
Kommunikationstechnik, 72
Kommunismus, 11, 16, 46, 655
kommutativ-graduiert, 270
Kommutator, 445, 446, 455
kompakt, 276, 450
kompakt Definition, 288
Kompaktifizierungsradius Plancklänge, 431
Kompass
Sinn, 706
Zellen, 706
Kompetenz
ohne Verstehen, 64
soziale, 700
Wissen, 64, 704
komplex vs kompliziert, 51
komplexe
Leitwerte, 720
Systeme, 51
Vektoren Skalarprodukt, 199
Zahlen, 367
3j Python, 198
als Dreh-Streckung, 198
als Drehung, 198
Intro, 197
Kepler-Gesetz, 336
Konjugation bei Faktortausch, 199
Laplace-Transformation, 96, 194, 195
Lie-Gruppen, 267
Operatoren & Operanden, 267
Rechenvorteil, 203, 336, 380, 720
senkrecht, 199
Skalarprodukt, 198

verschiedene Darsteller, 204
Winkel, 199
komplexe Systeme, 402
Komplexität, 51
algorithmische, 125, 126
algorithmische Tiefe, 166
Algorithmus, 174
Attraktor, 202
Bauchgefuhl, 51
Chaos, 396
Definition, 48, 51
der Dinge, 434
Emergenz, 51, 57, 527
empirische Inferenz, 78
Evolution, 55
faktorielle, 174
Kontingenz, Offenheit, 57
Prigogine, 429
Reduktion, 71
Symbolkette, 125
Synergetik, 55
Vernetzung, 435
Zeichenkette, 166
Komponenten
beim Vektor, 232
kontravariante, 232, 238
kovariante, 232, 238
Kompressibilität, 515
Kondensator, 719, 720
fliegender, 497
Kondensator Kraft, 719
Konditionierung, 735
Konditionszahl einer Matrix, 221
Konfabulation, 706, 710
Konfigurationsraum, 249, 323
Attraktor-Mengen, 115
Def, 318
Dimension, 538
Ereignisraum, 538
Kotangenzialraum, 358
Krümmung, 247
Noether, 352
Superraum, 650
Variations-Rechnung, 369
Zwang, 346
konfokal, 232
konform, 206, 570
konforme Feldtheorien, 570
konforme Zeit, 478
Konformität, 206
Kongruenz-Methode, 83
Kongruenz-Transformation, 222
Konjugieren durch transponieren, 204
konjugiert komplex
hermite'sche Matrix, 198
Quaternionen, 267, 443
reelle Daten, 97, 105
Zahl, 198
konjugiert linear, 622
Konklusion, 128
Konnexion
Idee, 255
konquerer als xml-parser, 79
konservativ, 245, 353
konsistent, 107
konsistenter Schätzer, 107, 109, 143
Konsistenz-Prinzip, 411
Konstanten, 717
Konstantinopel, 749
Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, 422
Konstruktivismus, 58
Konstruktor, 726
Konsum, 45
Kontaktformular, 735
Kontaktspannung, 485
Kontaktstrukturen, 256
Kontinentaldrift, 278
Kontingent, 57
Kontingenztabelle, 79
Kontinuitätsgleichung
Burgersgleichung, 590
Fluide, 587
Formenkalkül, 293, 398
Gauß-Gesetz, 566
Herleitung, 310–312
Ladungserhaltung, 565
Liouville'scher Satz, 314
Kontinuum
Dimension, 134
Hypothese, 134
Teilchenproblem, 481
Kontrafunk, 10
kontragredient = gegenläufig, 182
Kontraktion, 567
kontravarianter Vektor, 232, 233, 238, 266, 268, 269
Kontravarianz
Vererbung, 726
Kontroverse und Berechnung, 68
Konturlinie, 252
Konvektion Sonne, 398
Konvergenz
gleichmäßige, 140, 141

im Mittel, 139
punktweise, 141
Radius, 141, 186
konvexe Energiefunktionale, 603
konvexe Integration, 309
Konzentration, 311, 398, 590, 596
Konzentrationslager, 60, 665, 771
Koopmanismus, 119
Koordinaten, 233
beim Vektor, 232
elliptische, 232
Gauß-Krüger, 281
hyperbolische, 233
krummlinige, 233
parabolische, 233
polare elliptische, 232
Transformation, 268, 351, 440
Transformation Beschleunigung, 331
Transformation Coriolis, 332
Transformation Newton-Eimer, 429
Koordinateneffekte bei ART, 478
Koordinatenflächen, 261
koordinatenfreier Zugang, 257
Koordinatenlinie, 232, 490
Koordinatenlinien, 261
Kopernikanische Prinzip, 468
kopernikanisches
Prinzip, 466
Weltbild, 66, 260, 431, 651
Kopernikus, 61
Kopfgeborene, 749
Kopfrechnen, 732
Kopplungskonstante
laufende, 689
Korand, 282, 283
Korandoperator, 283
Korkenzieherregel, 496
körnig vs teilbar, 614
Körnigkeit, 385
Körnigkeit des Lichtstroms, 614, 621
Koroljow, 51
Körper, 198, 456
Körper-Ich, 433
Korrelation Copula, 93
Korrelationskoeffizient
Normal-Gleichungen, 86
Python corrcoef, 76
Scheinkorrelation, 84
Spearman, 70
Korrelationslänge Ising, 523
Korrespondenzprinzip, 628
Korteweg-de-Vries-Gleichung, 590
Kosinus-Satz, 229, 266
Kosmische Geschwindigkeit, 327
kosmische Strahlung, 575, 608, 669
Kosmogonie, 500
Kosmologie, 260, 469, 473
Ambarzumjan, 500
ART, 484, 486
Elementarteilchenphysik, 278, 672
Green-Peas-Galaxien, 470
Inflation, 672
Intro, 277, 278, 473, 478, 672
Paradoxien, 277
kosmologische
Evolution, 499
Konstante, 260, 467, 469, 477, 485
Modelle, Simulation, 500
Kotangenzialraum, 254, 350, 358, 382
kovariant, 344
kovariante Ableitung, 251, 252, 463, 643
kovarianter Vektor, 232, 233, 238, 262, 266, 268, 269
Kovarianz
Euler-Lagrange-Ableitung, 344, 352, 542
Forminvarianz, 261, 269, 498
Forminvarianz der inh Maxwellgl, 499
Idee, 412
Matrix, 76, 95, 708
statistische, 76, 77, 94
Vererbung, 726
Kovektor, 225, 238, 266, 269
Kowalewski, 461
Koyaanisqatsi, 72, 693
Kozyklus, 283
Kraft
als Impulsstrom, 310
als Potenzial, 316
auf Dielektrikum, 719
dielektrische, 544
elastische, 301
geometrische, 341
Hooke, 301
Moment, 188
Rindler, 277
Stoß, 365
strahlenoptisch, 374
Zerlegung, 228, 229
Kraft → Energie/Impuls, 608
Kraft auf Dielektrikum, 719
Kraft in Mechanik, 331
Kraft scheinbar/wirklich, 330
Kraftfeld Pfaffsche Form, 291, 316

Kraftfeld-Methode, 618
kraftfreie Magnetfelder, 569
Kragh, 35, 364, 387, 688
Kramers, 297, 629
Kramers-Kronig-Beziehungen, 74
Kramers-Moyal-Entwicklung, 396
Kramers-Rate, 92
Kramers-Raten-Theorie, 193
Kramers-Wannier-Dualität, 522
Krankheit, 61, 72, 466, 525, 526, 529
Krankheit Neutron, 668, 677
Kränkungen, 61–63
Krebs, 525, 526
    Telomere, 529
Krefelder Erklärung, 13
Kreis
    als Spiegelung, 437
    auf Sattelfläche, 248
    Bahn, 330
    Dgl, 327
    Dido, 375
    Frequenz, 606
    Gleichdicke, 188
    Gruppe, 459
    Inhalt, 188
    Kegelschnitt, 337
    Mannigfaltigkeit, 460
    Methode, 104
    Poincare-Vermutung, 449
    projektive Geometrie, 437
    Prozesse, 517
    Restklassen, 177
    Scheiben-Modelle, 325
    Teilung als Radizieren, 200
    topologisch, 285
    Verteilung, 83
    Wellenzahl, 606
Kreis-Membran, 592
Kreisbahn, 337
    Hohmann-Manover, 338
    stabil, 333
Kreisel, 270, 409
    Eulersche Gleichungen, 409
Kreisgruppe, 198
Kreisstrom, 560
Kreisstrom Magnetfeld, 560
Kreuz-Produkt, 230
Kreuzkorrelation, 96
Kreuzprodukt
    Schwimmregel, 496
Kriechfall, 380
Kriechpunkt, 319
Krieg, 18, 692, 767
Krieg notwendig, 19
Krieg und Naturwiss, 652
Krieg vermeiden, 759
Krieg, warum?, 656
Kriegführung, 10
Kriegsführung, 10, 13, 653
kriegslustig, 748
Kriegspropaganda, 18, 692
Kriegssoziologie, 656
Kriegsverherrlichung, 18, 692
Kriging, 79, 122
Kristallografie, 539
Kritikallitätstest, 652
kritische Phänomene, 570
kritische Punkte, 320
kritischer Wert, 89
Kronprinz, 770
Krümmung
    Anstieg, 329
    Ereignisraum, 247
    Fundamentalform, 249
    global, 286
    innere Geometrie, 650
    Kurve, 247
    lokal, 329
    negative, 325
    Radius, 247
    Raumzeit, 480
    Skalar, 477, 480
    Spirale, 246
    Universum, 476
    Zeit, 247, 249
Krümmung in Mathe und Physik, 179, 246
Krummungsskalar, 480
Krummungstensor Riemann'scher, 480
Krylov
    Matrix, 223
    Raum, 224
Krylow-Raum, 215, 223, 224
Kryptographie, 177, 307
Kubo-Formalismus, 378
Kubrik, 42, 48
Kuchenrolle, 210
Kugel
    Flächenfunktionen, 581, 583
    Inhalt, 113, 188
    Koordinaten
        Def Umrechnung, 182
        Euler-Lagrange, 349

Integration, 366
Lagrange, 336
Laplace, 572
Laplace Dgl, 580
Legendrepolynom, 582
Parität, 581
Rotor, 236, 258
Vektorpotenzial, 615
Schale, 334
Volumen n-dimensional, 188
Welle, 364
Welle, Definition, 572
Welle, Dispersionsrelation, 572
Welle, Streuung, 619
Kugel-Linienelement, 319
Kugelkondensator, 316
Kugelschale Potenzial, 335
Kugelzonenfläche, 281
Kuhn, 40
Kulback-Distanz, 122, 168
Kumulanten, 100
Kunkel, 652, 758
Kunst, 60
Kunst Wirklichkeit, 665, 770
Kunstgriffe, 183
künstliche Radioaktivität, 663
Kunststile, 751
Kuramoto, 202
Kuramoto-Modell, 403
Kursunoglu, 431, 629, 671
Kurven
Diskussion, 186, 347
Integral, 314, 315
Länge, 247
Kurven elliptische Gruppen, 307
Kurvenintegral, 205
Arbeit, 315
Buch, 195, 314
Gradient, 237
komplexe Ebene, 206
Potenzialfeld, 316
Pullback, 314
Radon, 211
Stokes, 610
Topologie, 610
Kurvenlänge der Parabel, 247
Kurvenlänge einer Parabel, 247
Kürzen und ggT, 146
kürzeste Länge, 717
Kürzungsregel, 457
Kurzweil, 41, 48
Kushner-Stratonovich-BucyGleichung, 601
Kybernetik, 167
Kyffhäuser, 748, 822
Kyffhäuser, 769

L^1
Magie, 409
Norm, 140
L^2-Norm, 137, 140, 596
La Mettrie, 33
Labormäuse, 397
Labortechniken, 602, 720
LabVIEW, 721
Lacan, 693
Lackmus-Test, 295
Ladung
fiktive, 556
freie/sichtbar/wahre, 544, 565
gebundene/verborgen/vergessen/bound, 544, 565
Schein-, 555
Ladungsdichte, 565, 566
makroskopische, 545
Ladungserhaltung, 565, 567, 686
Ladungswolke, 335
Lagesensor, 231
Lagrange
Atwood-Fallmaschine, 343
Beschreibung bei Fluid, 410
Dichte ART, 480
Dichte der Raumzeit, 480
Dichte Maxwell, 542, 543, 565
Dichte QED, 565
Dichte Spin 0-Teilchen, 542
1. Art, 341, 346, 348
Funktion
Deutung, 369, 541
Dido, 375
effektive, 344
Ereignisraum, 249
Erhaltungssätz, 351
Faser, 254, 382
Findungs-Strategie, 344
homogene Funktion, 349
Idee, 297
Impulssatz, 351
Motiv, 353
Nichtstandard, 344
Noether, 352
Schwingkreis, 721
Taylor-Approx, 541
für Felder, 540

geschwindigkeitsabhängige Kräfte, 568
Klammern, 358
Lemma, 346
Lemma EOF, 95
Lemma Verteilungsfunktion, 376
Lorentz-Kraft, 568, 569
Multiplikator, 95, 346, 371, 376
2. Art, 343, 370
2. Art Atwood, 343
Lagrange kontinuierlicher Systeme, 540
Lagrange-Funktion
Strahlenoptik, 374
Lagrange-Punkte, 337
Lagrangian coherent structures, 405
Lakatos, 37
Lamaitre, 473
Lamb-Verschiebung, 464
lambda, 403
Lambert'schen Gesetz, 277
Lame-Faktor, 232
lamellare Felder, 554
Lamina, 554
Lamor-Frequenz, 203
Lanczos, 22
Lanczos-Verfahren, 223
Landau-Tod, 24
Landauer-Prinzip, 75, 517
Länge 0, 225
Länge einer Kurve, 246
lange Spule, 561, 609
Längengrad, 376, 581
Längeninvarianz, Tensor, 269
Längenkontraktion, 486
Längenkontraktion, 497
längentreu, 439
Langevin
fraktionale Gl, 193
Gleichung, 193
Langevin-Gleichung, 108, 193, 388
Langmuir-Blodgett-Schicht, 524
LAPACK, 154
Laplace, 298, 300, 302
'scher Dämon, 302
'scher Entwicklungssatz, 218, 714
Approximation, 189
axialsymmetrisch, 584
Gleichung, 558, 567, 581, 583, 591
Gleichung Gaus'scher Satz, 558
Gott, 300
Operator, 558, 591
Operator im $\mathbb{R}^N$, 364
Operator in Kugelkoord, 559, 581, 591
Operator in Zylinderko, 559
Operator mit Skalenfaktoren, 240
Operator, inverser, 548
Transformation, 96, 145, 193–195, 367
Wahrscheinlichkeit, 298
Laplace-Gl hasst lokal Extrema, 559
Large number hypothese, 482
Laser, 402, 448, 644
freie Elektronen, 571
Funktionsweise, 448
Mode, 448
negative Temperatur, 515
Laser selbst bauen, 643
Laser-Toner, 739
Laßwitz
Atomistik, 387
Kant Raumzeit, 433
Topologie Erde, 450
Laster, 693
LaTeX
bash-TEXINPUTS, 737
Cloud, 738
GoogleDoc, 738
Hilfe, 738
Intro Hertel, 739
Kommentare, 738
Lua-, 743
Overleaf, 738
russisch, 737
Schalter, 739
stand alone, 743
Templates, 738
verbatim, 737
Vorlagen, 738
WriteLaTeX per Chrome, 738
Lattice-Gas Cellular Automata, 535
Lattice-Gas-Modell, 522
Laurent-Reihe, 206
Lax-Schema, 595
LCDM-Model, 469, 471
leakage effect, 96, 104
Leapfrog-Verfahren, 308
learning, 168
learning algorithms, 78, 303, 396
least square fit, 86, 142, 211
Leben, 73
Bewegung, 713
da Vinci, 62
Evolution, 527
Gott, Designer, 33

nahe der Singularität, 41
Orgon, 699
Prigogine, 527
Proteintranskription, 530
Robustheit, 52
Schrödinger, 53
Spieltheorie, 45
vereinfachen, 692
vis vitalis, 385
Zelle, 192, 528
Zukunft, 651
Leben ohne Strom, 654
Leben und Sterben, 695, 749
Lebenserwartung, 41
Lebenswissenschaften, 528
Lebenszeit, 434
Leber, 530
Lebesgue-Integral/Maß, 112
Leck-Effekt, 96, 104
Leda, 761
Leer-/Sonderzeichen im Namen, 147
Legendre
Differenzialgleichung, 582
Polynome, 556, 582, 583
Polynome zugeordnete, 581
Transformation, 336, 381, 382, 518
Transformation Beispiele, 343
Transformation Idee, 381
Lehr-Lern-Strategien, 705
Lehre, 67
Lehren
durch Beispiele, 64
Locke, 705
Physik, 63
Szilard, 31
Lehrerbelastung, 696
Leibniz
Akademie, 758
Ars inveniendi, 65
Berechnung statt Kontroverse, 68
Berechnung vs Kontroverse, 64
Beweis, 70
Bezeichnungen, 20
Biographie, 20
Determinante, 217, 230, 235, 260
Differenzial-Kalkül, 184
Energie-Definition, 332
gebrochene Ableitung, 191
Gott, 58
Kalküle, 20
Produkt-Regel, 138
Produktregel, 256
Sektorformel, 245, 315, 353
Theodizee, 129, 699
veröffentlichen?, 129
Visualisieren, 78
vs Newton, 33
Zeit, 650
Leichtsinn, 11, 14, 17, 18, 20, 656, 657, 659
Leid, 59
Leiter-Operatoren, 447
Leiter/Brett an Wand, 342
Leiteroperatormethode, 645
Leiterseilstrom, 4
Leithäuser, 576
Leitlinienabstand, 337
Leitmedien, 8
Leitstrahl-Rotation, 717
Leitung, 637
Lem, 33, 41, 42, 44, 79, 190, 732
Lemaitre, 478
Lemma von Goursat, 206
Lempel, 125
Lenin WII, 770
Leningrad, 14, 55, 758, 766, 767
Lenne, 753
Lenz-Pumpe, 602
Lenz-Vektor, 338
Leonhard, 18, 665, 746
Lepsius, 18, 750, 755
Lernen, 78, 88, 90, 142, 144, 533, 704–706, 716, 733, 734
maschinelles, 78, 88, 143, 724, 733
programmiertes, 735
Lernstrategien, 694, 733
Lesbarkeit der Welt, 65
Lesen, 701, 706
Lessing, 32
letal, 669
Leuchtkraft, 3, 8
Leuchtkraft-Funktion, 469
Levenberg-Marquardt-Verfahren, 86
Levi-Civitta-Pseudotensor, 240
Levi-Civitta-Symbol, 217, 230, 235, 240
Levi-Civitta-Tensor, 230, 289
Levitation, 559
Levy
Flug, 91, 118, 397
Maß, 118
Prozess, 84, 93, 117
Suchstrategie, 92
walk, 116

Lexikologie, 701
L'Hospital'sche Regel, 186
Libet-Experiment, 696
Libration, 115, 321
Librationspunkte, 337
libreoffice ooffice, 742
Licht, 632, 644
    fossiles, 471
    quetschen, 508
Licht altert, 476
Licht-Erlahmung, 484
Licht-Materie-WW, 574, 644
Lichtablenkung, 508
Lichtbrechung, 372
Lichtdruck, 259
Lichtenau Rietz Encke, 765
Lichtenberg über Bücher, 26
Lichtenbergfiguren, 395
Lichtgeschwindigkeit, 717
    Konstanz, 422
Lichtgeschwindigkeit Newton, 351, 413
Lichtgeschwindigkeit variabel, 473, 477
Lichtjahr, 500, 501, 717
Lichtkegel, 436, 535, 570, 596
Lichtkegelkoordinaten, 570
Lichtlaufzeit, 372, 466
Lichtreisezeit, 372
Lichtsegel, 259
Lichtwegfunktional, 373
Lie
    Ableitung, 358, 359
    Algebra, 230, 271, 359, 444–446, 451, 454, 456, 459
    Algebren, 281
    Gruppen, 459, 461
    Gruppen: euklid Raum +, 460
    Integratoren, 461
    Kato-Trotter-Produkt, 455
    Klammer, 271
    Klammer triviale, 459
    Operatoren, 461
    Reihen, 461
Lie-Gruppen
    Geschichte, 267
    Idee, 267
    Intro, 267
Lie-Gruppen Anwendungen, 267
Liebe, 32, 690, 699
    Pascal, 699
Lieben und arbeiten, 701
Liebscher
    Abberation, 413, 415
    Antiteilchen, 413
    Äther, 423
    Geometrie der Zeit, 481, 499
    Geometrie und Physik, 56, 227, 413
    Kosmologie, 472
    Michelson, 418, 421
    Missverständnisse, 422
    projektive Geometrie, 438
    Registrierkurven, 427, 436
    Relativitatsprinzip, 428
    Spin, 413
    SRT, 419
    Zwillingsparadoxon, 427
Lienard
    System, 376
    Wiechert-Potenzial, 563, 564
Lienard-Wiechert-Potential, 415
Lienart-Wiechert-Potential, 563
Likelihood-Funktion, 77, 84, 142, 145
limit datasize unlimited, 741
Limnologie, 300
Lindenmayer-System, 125
linear unabhängig
    Funktionen, Wronsky, 339
    Null-Funktion, hom Dgl, 339
    Null-Vektor, 213, 339
    Vektoren, 213, 235
Lineare Algebra, 195
lineare Funktion, 117
lineare Funktionale, 264
Lineare Programmierung und Simplices, 286
lineare Regression, 79
lineare Stabilitätsanalyse, 321
lineare Stromkreise, 211
Linearform, 265, 315, 365
Linearform Zeilenvektor, 264
Linearisierung, 323
Linearität affin inhomogen, 228
Linearität
    Ähnlichkeit, 266, 441
    Antilinearität, 441
    Zusammensetzbarkeit, 33, 441
Linienbreite
    gedämpfter Oszillator, 383
    Pauli, 645
    Strahlungsdämpfung, 645
Linienelement, 251, 486
Linienelement lorentzinvariant, 486
linienflüchtiger Vektor, zentral, 289
Linienintegral, 314, 315

Linienintegral-Darstellung, 238
linke Handregel, 289, 586
Linking map, 362
Links-Rechts Symmetrie, 678
Links-Rechts-System, 182
Linkshänder, 678
Linux
    bc -l, 741
    DNS, 738
    Intro, 741
    Netzwerk, 741
    which, 741
Linux-Brenner k3b, 736
Linux/GNU, 148
Liouville'scher Satz, 311, 313, 314, 357
    Kontinuitätsgleichung, 312, 314
Liouville-Theorem, 312
    Beweis, 312
Lippmann-Schwinger-Gleichung, 618, 620
Lipps, 2
list comprehension, 106
Literale, 171
Literatur, 25
Literatur-Theorie, 25
Ljapunov
    Exponent, 405, 406
    Exponent ala Born, 298
    Exponent per SVD, 407
    Exponents, 389
    Funktion, 398
    Methode, 398
    Stabilitätstheorie, 398
    Vektoren, 215
LKW Sprittverbrauch, 7
LLE, 408
LNG, 7, 666
LNH, 482
Lockyer, 511, 639
LOFAR, 503
logarithmische Skalenteilung, 125, 537
Logarithmus, 200
    Dezibel, 606
    Idee, 606
Logik, 128
logistische Abb Dichte, 116
logistische Abbildung, 393
logspace, 151
lokal integrierbar, 367
lokale Eichinvarianz der Quantenmechnik, 678
lokaler Supercluster, 470
lokales thermodynamisches GG, 512
Lokalisation
    Diskretheit, 404, 637
lokalisierte Stromverteilung, 565
Lokalität
    Maxwell-Feld, 633
    Quantenphysik, 633
Lokalität, 62, 634
Loki, 753
Longitudinatätsbedingung, 290
Loop Quantum Gravity, 412
Lorentz, 488, 673
    Atom-Modell, 610
    Eichung Hertz-Dipol, 616
    Faktor, 488
    Form von Spektrallinien, 383
    Geometrie, 288
    Gruppe, 437, 462
    Invarianz, 436, 483, 486
    Kraft
        arbeitslos, 558
        Differenzialgleichung, 203
        Dynamo, 578
        Euler-Lagrange, 568
        Faraday-Gesetz, 562
        Graßmann-Algebra, 231
        magnetisches Moment, 560
        Maxwell'scher Spannungstensor, 259
        Messvorschrift, 290
        polarer Vektor, 289
        Pseudovektor, 289
        relativistischer Effekt, 561
        totales Differenzial, 562
    Lorenz-Eichung, 562, 563, 615
    Lorenz-Konvention, 615
    Profil, 645
    Transformation, 227, 451, 487, 488, 490, 491, 498, 499
    Transformation pseudo orthogonal, 490
    Transformation unitär, 491
    Transformation, Herleitung, 488, 489
Lorentz-Boost, 682
Lorentz-Eichbedingung, 540
Lorentz-Kraft, 670
Lorentzkraft, 562
Lorenz
    8 Todsünden, 693
    Eichung, 562, 563
    System, 399
Lorenzen, 39
Los Alamos, 653
Lösbarkeit, eindeutige, 217

Loschmidt'sche Zahl, 386, 387, 390
Lösung, nichttriviale, 213
Lotka-Volterra, 327
Lotto, 80
Louis Ferdinand, 765
Low-level radiation, 11, 669
LQG, 412
LR-Zerlegung, 218
lspci, 741
LTE, 511, 725
Ludwig, 61, 506, 633
Luftbildinterpretation, 281
Luftwaffenmuseum, 15
Luhmann, 57, 60, 694
Luise, 19, 746, 748, 755, 763, 765, 767, 772
Luther, 751, 752
Lyman-α, 471
Lyman-α-Linie, 471
Lyotard, 48, 433

Mach, 351
    Konventionalismus, 37
    Modelle vs Wirklichkeit, 2
    Positivismus, 37
    Raum-Zeit, 226
    sches Prinzip, 330, 412, 429, 477, 483, 651
    sches Prinzip, Unzicker, 477
    Zeit relational, 650, 651
machine learning, 78, 88, 111, 143, 144, 172, 733
MACHO, 745
MACHOs, 500
Mächtigkeiten, 132
Mackey-Glass, 400
MAD, 655
mag, 606
Magie, 757
magische Zahlen, 664
Magma, 456
Magnetfeld aus Lorentztrafo, 561
magnetische Diffusivität, 569, 574, 578
magnetische Induktion, 289, 292, 560, 567
magnetische Monopole, 255, 570, 679
magnetisches Dipolmoment, 545
Magnetisches Moment, 560
magnetisches Moment, 560
Magnetisierung, 545, 560, 567
Magnetostatik, 568
mail, 737
Maiski, 11, 17, 654
Majorana Ettore, 666
Majorana-Hypothese, 678
Majorana-Teilchen, 642
Makrozustand, 514
Mandelbrot, 395
    Flicker-Rauschen, 114
Mandelbrot-Menge, 196
Manfred Schroeder, 177, 455
Manhattan-Projekt, 652
Manhatten-Metrik, 140
Manierismus, 773
Manifest für Frieden, 18
Manin, 68, 670
Mann, Golo, 755
Mannigfaltigkeit
    als Algebra, 459, 460
    ART, 480
    Atiyah-Singer-Indexsatz, 137
    Beispiele, 408
    Bettizahlen, 287
    Def, 281
    Differentialtopologie, 252
    differenzierbare, 282, 284, 446
    Exponentialabbildung, 460
    Garben, 200
    Gauß-Bonnet, 286
    Geschichte, 407
    geschlossene, 450
    glatte, 284
    Gruppenstruktur, 459
    Homologie, 283
    Homotopie, 450
    innere Geometrie, 245
    instabile, 392
    Kartographie, 283
    kompakte, 407
    Koordinatenwechsel, 499
    kovarianten Ableitung, 252
    Lie-Gruppe, 460
    Lie-Idee, 460
    Lorentz'sche, 288
    Paralleltransport, 244, 250
    Parallelverschiebung, 291
    Poincare-Vermutung, 449
    Polyeder-Zahl, 286
    Pull back, 291
    Riemann'sche, 288, 309
    String-Weltfläche, 686
    Tangenzialraum, 252
    topologische, 283
    Vektorfeld, 302
    Vektorraumbündel, 252
    vergiss den Raum als Behälter, 299

Winkel, 362
Zentrums, 586
Zwangsbedingung, 299
MANPADS, 328
Many-body problem, 447
map, 403
MAP, Maximum-A-Posteriori-Schätzer, 77
MapReduce, 180
Marangoni-Zahl, 605
Markdown, 737
Markov
Ketten, 78, 99, 168, 169, 192
Modelle, MCM, 168
Python, 169, 170
Random telegraph, 172
Modelle, projected, 169
Prozess, 99, 116
Marschallplan, 14
Marschflugkörper, 18, 656
Marshall-Plan, 655
Marsianer, 32, 44
Martingal, 91
Martingalespiel, 98
Martinginal, 97
Marx, 44, 61, 755
achtzehnte Brumaire, 767
Beruf, 699
Kapital BdI, 768
Maschinen ϵ, 307
Maschinengenauigkeit, 307
Maser, 448
Maß
Dezibel, 606
Eigenzeit, 486
Einheiten, 574
einiger Mengen, 123
Hausdorff, 121
KS-Entropie, 123
Kugelinhalt, 188
Lebesgue, 124
Lebesgue Null, 131, 133, 134
Problem, 113
Theorie, 112, 133
Volumen, 216
Vorhersagbarkeit, 405
Masse, 114, 188, 626, 673
bewegte, 488
Definition, 114
des Austauschteilchens, 487
Energie, 673
Neutrino, 677
Potenzial, 334
reduzierte, 317, 336
Ruh, 488
Schwarzkörperstrahlung, 674
schwere, 334, 505
träge, 317, 505
Masse-Begriffe, 673
Maßeinheiten, 436
Massendichte, 311, 398, 590, 596
Massenerhaltung, 310
Massenmedien, 18, 60, 61, 658, 659, 694, 748
Massenmittelpunkt, 114, 188
Massenpsycholgie, 770
Massenspektrometrie, 558
Massensuggestion Einstein, 415
Massenvernichtungswaffen, 653
Maßstabparadox, 497
Masterarbeit, 714
matching pursuit, 140
Materie, 163, 164, 227, 277, 387, 703, 705
Dunkle, 484, 504, 686
Materie ponderable, 413
Materiedichteparameter, 467
Mathe-Vorkurs, 180
Mathematica
Ableitung D[f,{x,2}], 180
Beispiele bei Lang, Pucker, 72
Buch, 195
Buch zu Bayes, 142
Buch zu Dgls, 301
Buch zur Physik, 396, 523
Differenzialgleichungen DSolve, 304
DSolve[y"[x]==y[x],y[x],x], 304
Eigensystem[{{1,2}, {2,3}}], 222
Eigenwerte, 304
Gleichungen, 304
Integrate[Log[x^ 2],{x,1,E}], 183
Jacobi-Matrix, 404
Mechanik, 226
NSolve[Det[A] == 0, x], 304
NSolve[x^ 5-5x^ 2+1 == 0, x], 304
numerische Approx. N[Integrate[Sin[x], {x, 1, E}]], 183
Plot[1/(x - 1)/(x - 3), x, -2, 7], 180
Richtungs-Felder, 274
Scientific computing, 175, 303
Simplify, 180
Syntax, 180
Taylor = Series[Exp[x], {x, 0, 4}], 185
Mathematical biology, 203
mathematical physics, 178

Mathematik, 2, 68, 69, 281, 712
als Prozess, 2
Grundlagenstreit, 434
Heisenberg, 668
Junge vs Alte, 437
Kognition, 732
Lehren, 148
Physik, 70
Rechen-Aufgaben, 68, 134
Repetitorium, 67
Schulkinder, 124
Tun-Fach, 124
Unterricht, 124
üben, 713
Visualisierung, 25
vs Physik, 69, 127
wahr und falsch, 437
Was ist das?, 67, 68
Was man lesen sollte, 67
Zahlen Repräsentation im Gehirn, 732
Mathematik Russell, 68
Mathematik vs Physik Weyl, 68
Mathematiker, 70
Mathematiksoftware, 180
mathematische Begriffe, 98
mathematische Methoden, 68, 194, 195, 268, 277
Mathematisierbarkeit der Welt, 69
Mathieu'sche Dgl, 318
mathjax, 737
matlab, 168, 210
python cross-compiler, 174
Intro Hertel, 196
lineare Gleichungssysteme, 216
Regelungstechnik, 167
Scientific computing, 173, 174, 303
Spectral Methods, 599
Matrix, 210, 443
Adjazenz, 210, 534
antisymmetrische, 441
Basics, 220, 442
Bedeutungsspielraum, 209
bösartig, 220
diagonaldominant, 215
diagonale, 222
Diagonalisierung, 223, 442, 459
Drehung, 441
Exponentialfunktion, 454, 459
Exponentiation, 446, 454, 459
Exponentiation bei lin Dynamik, 460
hermitesch, 444
hermitesch ⇔ unitar, 443, 444, 455
hermitesch=selbstadjungiert, symmetrisch, 220, 443
inverse, 220
inverse Balkenproblem, 219
inverse per Adjunkten, 220
inverse per Cramer-Regel, 220
inverse per Gauß, 219, 220
Inversion durch Transponierung, 220
Inzidenz, 209
Kehr-, 220
Klassen, 443
Matroid, 213
Multiplikation Rechenzeit, 174
Norm, 221
normale, 443
orthogonale, 223, 436, 439
orthogonale Eigenvektoren, 443
orthogonale Eigenwertproblem, 223
orthogonale Galilei-Transf, 436
Pauli, 444
python, 216
quadratische, 210
Rang, 213
Rechnung, 442
schlecht-konditioniert, 220
singulär, 220, 230
Spektraltheorie, 460
Spektrum, 223
stochastische, 99
Symmetriesierung, 212
Transition, 169
Übergangs, 169
Übungsbuch, 195
unitäre, 443
unitäre, orthogonale, 220, 443
verzerrende Abbildung, 136, 209
Zerlegung sym/antisym, 212
Matrizenmechanik, 630
Matrizenmultiplikation per Strassen, 174
Matrizenring, 210
Matroid, 183, 213
Matuschek, 31
Matussek, 10, 733
Mauerbau, 15
Mauerfall, 468
Mauerquadrant, 351
Maupertuis-Prinzip, 372
Maximum
Information-Prinzip, 51
Norm, 140, 221
vs Supremum, 288

Maximumprinzip
Gebietstreue, 559
Pontrjagin, 298
Maxwell, 387, 561
1d-Gleichungen, 595
Cartan'sche Gleichungen, 293
Cattano-Gesetz, 596
Dämon, 119, 517
Gips-Modelle, 21
Gleichungen, 35, 561, 562
Gleichungen diskret, 561
Gleichungen im Formenkalkül, 293
Gleichungen im original, 561
Gleichungen in Potenzialdarstellung, 563
Gleichungen in Viererform, 499
inhomogene Gleichungen, 499
kovariante Gleichungen, 499, 565
kritische Punkte, 401
Körper, 315
numerischen Gleichungen, 480
Relation, 573
sets, 401
Spannungs-Tensor, 257, 259
stratum, 401
Verteilung, 82
Maxwell-Gleichungen aus Eichinvarianz, 678
Maxwell-Gleichungen homogene, 566
Maxwell-Gleichungen inhomogene, 566
Maxwell-Lagrange-Dichte, 565
Maxwell-Verteilung, 516
Maxwellgl ebener Wellen, 572
Maxwellgl Fresnel, 572
Mayer-Norton-Theorem, 666
Maßeinheiten
natürliche, 627
MCM, 77, 83, 140, 142, 143, 389, 525, 539, 601, 680
MCMC, 77, 78, 83, 172, 601
Meadows, 47, 63
Mean-Field-Näherung, 217
Mechanik
Geschichte, 298
Intro, 297
Laborbormaus, 297
nichteuklid Geometrie, 205
Prototyp, 297
Quaternionen, 271, 409, 437, 451
Mechanik → QM, 608
Mechanik-Ausbildung, 376
Median, 93
Medien, 657
Medien Kindheit, 694
Medien und Inszenierung, 694
Mediennutzung, 694
Medienphilosophie, 694
Mediokratie, 9
Meer, 410
mehrdeutig, 130
mehrfach-ausgedehnte Größe, 2, 236, 238, 279, 280, 518
Mehrfachintegrale, 715
Mehrfachwelten, 411, 454, 687, 688
Mehrgitterverfahren, 216
Mehrheit der Menschheit, 20, 660
mehrwertige Logik und QM, 127
Meinungslenkung, 9, 18, 60
Meitner, 24, 663, 666
Meißner-Effekt, 638
Melcher, 22, 295, 296, 390, 410, 413, 417, 483, 497, 670
Melnikov-Methode, 393
Mem, 527
Membran, 540, 592
Membran-Wellengleichung, 592
Memento Mori, 705
Memory Info, 741
Memristor, 399
MEMS, 735
Menge, 133
messbare, 97, 112
Mengenfilter, 184
Mengenlehre, 131
mengentheoretische Topologie, 252, 280
Menger-Schwamm, 124
Mensch
Biologie, 526
Maschine-Interaktion, 168
Maschine-Kommunikation, 72, 167
sein, 570
Menschenfang, 18
mentaleVerursachung, 705
Mercier, 482
Mereologie, 698
mereologischer Fehlschluss, 698
Meridian, 318, 351
meridional = Nord-Süd, 239
Merkel, 464
meromorphe Funktionen, 207
Meson, 671, 676, 681, 684, 685
Mesonen-Zerfall, 671
messbar, 97
messbare Funktion, 97, 112, 119
messbare Menge, 97, 112

messbarer Raum, 97
Messfehler, 350
Messprozess, 635
Messtechnik, 102, 105, 721
Messung, 621
quantenmechanisch, 635
Messungen per SmartphoneApp, 101
Metadaten, 71
Metallizität, 501
Metallplatte geladen, 547
Metamorphose, 760
Metaprogramming, 307
Meteoroide, 577
Meteorologie, 586, 588, 604
Methode
der Green'schen Funktion, 68, 194, 195, 277, 378, 379, 381, 548, 683
der Green'schen Funktion Quantenchemie, 612
Hochfrequenznäherung, 322
Methode der Green'schen Funktionen, 277, 365, 378, 379, 683
Methode der kleinsten Quadrate, 86, 142, 211
Methoden, 726, 728
Auslagerung, 64, 226, 716
methodus veniendi, 370
Metrik, 225, 250
Abstand, 480
antisymmetrisch, 431
Area, Dunkle Energie, 505
aus Jacobi-Matrix, 182, 224
Definition, 225
dynamische Größe, 480, 481
Gravitationswellen, 506
indefinite, 480
Kaluza, 431
Karussel, 474, 475
kosmologische Raumdehnung, 466
Kursunoglu, 431
Manhatten, 140
Maßbestimmung, 490
Minkowski, 570
Minkowski-Raum, 489
Potenzial, 473
pseudo-euklidische, 486, 570
Riemann'sche, 489
Rotation, 475
Schwere, 473
Skalarprodukt, 259
Skalenfaktor, 468
Taylor der Distanz, 473
Trägheitstensor, 473
vs Dualraum, 264
Weyl-Trick, 491
metrischer Faktor, 224, 232, 240
metrischer Raum, 136, 287
metrisches Feld der ART, 477
MHD, 588
Michaelis-Menten-Kinetik, 530
Michelangelo, 751
Michelson, 410
microwave hearing effect, 154
Mie, Gustav, 474
Mie-Streuung, 618, 623
Migdal, 682
Mikelskis, 296
Mikro-Schwimmer, 603
Mikroben, 63
Mikrobiologie, 528
Mikroelektronik, 721
mikrokanonisches Ensemble, 519
Mikroskop
Elektronen, 571
elektronisches, 526
Fluoreszenzslebenszeitspektroskopie, 571
Licht, 570
TCSPC-Technik, 571
Mikrowellenhintergrund, 426, 478
Mikrozustand, 514, 651
Milchstraßenentwicklung, 504
Milgram, 53
Modell, 53
Milgram-Modell, 53
Milgrom-Hypothese, 483, 504
Militärflugzeuge, 746
Militärstrategie, 10, 11, 656, 657, 660
Mind, 700
Mind map, 735
Mineralien, 579
Mini-PC, 101, 150, 724
Minimal Spanning Tree, 122
minimale Kopplung, 463
Minimalfläche, 374
Minimalismus, 696
Minkowski
Diagramme, 227
Funktionale, 505
Raum, 288, 486
Minotaurus, 760
Minsky
Intelligenz, 42
Minuszeichen SRT, 566
Mirbach, 665, 768, 769

MIRV, 656
Mischen, 94
mischend, 118, 169
Mischung, 622
Mischungskreuz, 590
Mises-Verfahren, 223
mitbewegte Koordinaten, 476
Mitscherlich, 695
Mittelbau, 672
Mittelpunkts-Regel, 189
Mittelpunktssatz harmon Fkt, 553
Mittelstreckenraketen, 656
Mittelung
    inkrementelle, 174
Mittelungs-Methode, 528
Mittelungsmethoden, 323
Mittelwert, 82, 91, 100, 116, 117, 408, 551
    Gleichung, 206
    Satz, 140, 185
    Vektorableitung, 242
Mittelwerteigenschaft, 553
Mittönen, 104
mixed models, 141
MLE, 94, 168
    Maximum-Likelihood-Schätzer, 77
MO-Beschreibung, 612
Mobilfunk, 63, 154, 722
Mobilfunknetze, 8
Möbius-Transformation, 201
Möbius-Band, 248, 686
Möbius-Band, 201
Modalitätstufen, 708
Modell, 2, 33, 600, 713
    Grenze, 325
    Gütekriterium, 69
    richtiges, 89
Modell als Natur, 58
Modellbildung und Problemlöser, 56
Modelle, 43
Modelle und Algorithmen, 172, 292, 393, 397, 532, 537
Modelle zur Kognition, 532
Modellierung, 40, 52, 65, 91, 108, 143, 144, 201, 309, 385, 535, 571, 716
    Box, 143, 571
Modellphysik, 2
Moderator, 663
Modul
    Betrag komplexer Zahl, 198
    Gruppenstruktur, 456
modulinvariant, 233
Modulo, 177, 457
modulus, 228
modus ponens, MP, 128
Moivre'sche Formel, 200
Moivre'scher Satz, 200
Mol, 716
mol, 716
Molekularbiologie, 526
Molekulardynamik, 526
Molekularelektronik, 524
Molekülstrahlen, 670
Mollification, 181, 585
Molluske, 481
Momentenabbildung, 353
Monade, 129
Monadologie, 129, 254, 435
Monastyrsky, 201, 451
Monate, 433
Mond
    Gezeiten, 410
MOND = modified Newtonian, 483, 504
Mondflug, 328
Mondlandung, 167
Monge-Patch, 245
Monod, 621
Monopole, 255, 567, 568, 570, 679
Monopolmoment, 551
Monte-Carlo-Methode, 77, 83, 140, 142, 143, 389, 525, 539, 601, 680
Monte-Carlo-Simulation, 525
Montesorri, Maria, 713
Montroll-Weiss-Gl, 192, 193
MOOCs, 194
Moodle, 742
Moral, 145, 693, 757
moralisieren, 19, 757
Moralismus, 757
morphen, 354
morphisches Wort, 125
Morphismus, 284
Morphismus = strukturverträgliche Abbildung, 285
Morse
    Index, 252
    Potenzial, 335
    Theorie, 252
    Zeichen, 153
Mosaic, 26, 755
Motivation Physik, 279
Motivation und Handeln, 706, 709
Motor proteins, 525
mount, 741

Mozart, 764
mp3, 102, 736
MPC=Multi-particle collision dynamics, 603
MRAM, 641
mRNA, 529, 530
MRT, 215, 350, 531, 755
M-Theorie, 687
Multi-Skalen-Systeme, 52
Multicast, 730
Multifakultät, 190
Multiindex-Notationen, 185
Multilinearform, 217, 261, 353
Multilinearität, 261
Multinomialsatz, 185
Multinomialtheorem, 185
multiple Hypothesen, 94
Multiple Sklerose, 527
Multiplikation komplexer Zahlen, 204
Multipole, 551
Multipolmoment sphärisch, 552
Multiscale Analysis, 52
Multitasking, 706
Multiversen, 410
Multiversum, 454, 634, 687
Mumford, 41, 63
Mund, 101
Mundhohlraum, 101
Mündigkeit, 757
Muon, 739
Musealisierung, 711
Musik, 101
    Instrumente, 104
Muße, 47
Mutual information, 122
Mylius, 759
Myon, 677
Myon-Masse, 671
MySQL, 738
Mythologie
    Charlottenhof, 766
    deutsche, 756
    germanische, 756
    Literartur, 748
    nordische, 756
    Sanssouci, 762
    Slawen, 756
Münzwurf, 81, 89

Nabla, 232, 233, 235, 238, 245, 289, 313, 315, 343, 360, 561
    Kalkül, 240, 559
    krummlinig, 239
NachDenkSeiten, 10, 16
Nachhaltigkeit, 20, 45, 48, 692, 693
Nachhaltigkeitsforschung, 47
Nachkriegszeit, 453, 653, 665
Nagumo-Gleichung, 596
Nähe von Kurven, 371
Nahgeometrien, 251
nahrhafte 1 Funktionaldeterminante, 312
Nahwirkung, 476
Nahwirkungstheorie, 249
Najade, 762
Nandroid, 722
Nanomanipulation, 623
Nanopartikel, 618
Nanowelten, 623
Nansen, 579
Napoleon, 300, 765
Narrativ, 11, 746
Narrow escape, 191, 389
NAS, 745
NATO, 13, 14, 16, 19
NATO-Osterweiterung, 15, 18
Natur als Modell, 58
Nature: Scientific Data, 71
Naturgesetze und Zufall, 73
Naturkatastrophen, 579
Naturkonstanten, 436, 647, 687–689, 716
Naturkonstanten nichtkonstante, 690
natürliche Zahlen, 131
Naturphilosophie, 435, 632
Naturwissenschaftler, 29
natürliche Sprachen, 150
Nauen, 717
Navier-Stokes, 377
Navier-Stokes-Gleichung, 398, 578, 590, 602
Navigation, 155, 211, 281, 534, 706
Nazismus, 44
NCC, 710
ncRNA, 529
Nearing, 124, 189, 199
Nebelkammer, 669
Nebenbedingung
    d'Alembert-Prinzip, 342
    Dido, 375
    Entropie, 376, 519
    EOF, 95
    Grundgesamtheiten, 519
    holonome, 348
    Kettenlinie, 342
    koppelt Variation, 350

Lagrange'sches Lemma, 346
rheonome, 348
skleronome, 349
Strafterm, 346, 347
Thermostatik, 516
totales Differenzial, 350
Variationsrechnung, 347
virtuellen Verrückungen, 342
Nebendeterminanten, 212
Nec soli cedit, 758
negative Wahrscheinlichkeit, 480
Neglect, 709, 710
Neigung, 634
Nekrose, 526, 527
Nemesis, 749
Nemmerdorf, 19, 692
Neodym-Magnet, 568
Neoliberalismus, 659
Neptun, 761
Network motifs, 530
network science, 50–53, 78, 167, 172, 396, 528, 530, 532, 534, 702, 744
Netz und Ewigkeit, 26
Netzwerk einrichten, 738
Netzwerke, 391, 537
komplexe, 534
neuronale, 309, 396, 532
Neubabelsberg, 503
Neue Chronologie, 292
Neue Kammern, 760
Neue Linke, 44
Neues Palais, 764
Neumann'sche Randbedingung, 555, 559, 597
Neumark Unitäre, 461, 462
neural fields, 600
Neuro
Biologie, 600, 726
Didaktik, 705, 716
Science, 600
Neurologie, 710
neuronale
Dynamik, 532
Netzwerke, 309, 396, 532
Neuroscience modeling, 202, 403, 600, 726
Neurowissenschaft, 693, 698, 702, 709
Neusprech, 44
neutrales Element, 198, 228, 456
Neutralino, 427
Neutrino, 33, 79, 581, 668, 670, 677, 678, 684
Kühlung, 746
Masse, 362, 677
Oszillation, 677
Neutron, 661, 672, 677
Neutronenstern, 639, 640
Neutronenzerfall, 677
Nevanlinna, 69, 227, 252, 279, 437, 438, 561, 687, 703
Newton, 22
abstoßende Fernwirkung, 387
ART, 690
Eimer-Versuch, 429
Feynmans VL, 201
Fluid, 377, 524
Gesetz, 300
Gravitations-Gesetz, 244, 277
Gravitations-Gesetz modifizieren, 483, 504
I 1638 Galilei, 436
I 1687, 428
I Inertialsystem, 428
II 1687, 317
II auf Karussel, 330
II Bew u Dgls, 301
II Bewegung, 386
II Energieerhaltung, 351
II Fall im Fluid, 388
II Galilei-Invarianz, 436
II gibt Energieerhaltung, 333
II im Inertialsystem, 409
II Impulsstrom, 300
II Inerzialsysteme, 436
II ohne Zwang, 315
II Scheinkraft, 332, 410
II und ART 1938, 432
III, 340
las die Alten, 66
Magier, 32
Mechanik 1798, 300
Nullstellensuche, 226
numerische Integration, 189
nützliche Dinge zuerst, 183
Potenzial, 554
Reibung, 302, 377
Wirklichkeit, 89, 151
Wurzel ziehen, 136
Wärmeleitung, 596
Zeit, 650
Newton'scher Kraftansatz, 301
Newton-Reibung, 301
Newtons Tod = Äther, 416
NFDI, 71
n-Form, 291
n-Gramm-Modelle, 168
Nibelungen, 753, 755

nicht assoziativ, 271, 445, 451
nicht-hyperbolischer Fixpunkt, 321
nicht-kontingente Experimente, 49, 57, 59
nicht-parametrischer Ansatz, 91
Nicht-Standard
    Analysis, 184, 455
    Analysis Atomistik, 386
    Kosmologien, 483
    Lagrange-Funktion, 344
    Zahlen, 205, 455
Nichtelementarteilchenphysik, 633
Nichtergodizitäts-Maß, 192
nichteuklidische Geometrie, 436
nichteuklidische Spiegelungssymmetrie, 429
nichtlinear
    durch konvektive Beschleunigung, 398, 590
nichtlineare
    Gleichungen, 177
    Systeme, 392, 600
nichtlineare Dgl, 391
nichtlineare Elektrodynamik, 625
nichtlineare Gleichungen, 151
Nichtlinearität, 402, 713
Nichtlokalität und QM, 62, 633, 634
nichtparametrische Verfahren, 91
Niedrigstrahlung, 11, 669
Niemegk, 574
Nietzsche, 118, 696, 714
Nihilismus, 696
Niveaukurven, 320
NKFD, 17
NLTE, non-LTE, 512
NMR, 531
No-Cloning-Theorem, 647
no-slip-Bedingung, 590
Nocebo, 693, 700
Noether, 352
Noether-Theorem, 351, 352
Nolan
    Interstellar, 411
    Memento, 710
Nomen, 169
Nominalismus, 34, 69, 715
noncontingent reward experiments, 58
nonsense, 190
Nordkorea, 664
Norm, 250
Normal
    Bereich, 188
    Formen, 586
    Gleichung, 86, 211
    Koordinaten, 329
    Schwingungen, 329
    Verteilung, 82, 83
Normalformen
    Chomsky'sche, 150
    Hesse'sche, 229
    Jordan'sche, 145, 226
    strukturelle Stabilitiät, 401
    Taylor mehrdimensional, 401
    Thom'sche, 401
Normalgleichungen, 86, 211
Normalität, 10
Normalkomponente eines Feldes, 546
Normalteiler, 454
Normandie, 14, 17
Normen, 136, 137, 140, 221, 267, 538, 596
normerhaltend, 439
normierter Raum, 136, 283, 287
Notation, 281
notwendige Bedingung, 127, 347
Nowawes, 764, 771
NRT, 480
n-Spat, 232
NUKEMAP, 660
Nukleosynthese, 511, 688
Nukleotid, 528
Nuklid-Karte, 296, 670
Nuleonstruktur, 661
Null, 456
    0-Form, 293
    Geschichte, 456
    hoch Null, $0^0 = 1$, 133
    Hypothese Glaubhaftigkeit, 90
    Hypothese Test, 90, 94, 434
    0-Norm, 140
    Stelle per Taylor, 226
    Stellen = Kern, 222
    Stellensuche, 225
    Teiler, 130, 205, 210, 456, 457
    Vektor, 266
    Vektor linear abh, 213
nullhomolog, 283
nullhomotop, 207, 450
Nullstellen
    Polynome, 134
    vs Kern einer Abb, 213
Nullteiler, 456
Numerik, 174, 303
numerische
    Dgl-Solver, 303, 307
    Exzentriztät, 149

Integration, 174, 189, 303
Relativitätstheorie, 480
Numerologie, 484, 688
Nürnberger Prozess, 695, 748
Nützlichkeit des Unnützen, 700
Nyquist-Frequenz, 105
Nyquist-Rauschen, 75
Nyquist-Shannon-Abtasttheorem, 102

Oberflächenelement Kugel, 248
Oberflächenintegral
Beispiele Gauß, 276
skalares, 546, 564
vektoriell, 546
Oberflächenvektor-Mittelwerte, 236, 242
Oberflächenphysik, 623
Oberflächenwellen, 592
Oberth, 327, 328
Objekt, 284
Objekt muss gebeten werden, 76
Objektmenge, 515, 717
objektorientiert, 41, 76, 726
objektorientierte Programmierung, 285
OBS, 736
Observable, 447
OC, 94
Ockhams Rasiermesser, 34
OCR, 167
oculomotor, 711
od, 154
odds, 84
ode Linux-Shell, 306
ode solver, 180
odeint, 303
odeint-v2, 307
Oder-Neiße-Grenze, 17
Odometrie, 231
offene Menge, 283, 450
offene Quantensysteme, 614
Offener Brief, 18
Offenheit, 57
Ohm'scher Widerstand, 351
Ohm'sches Gesetz, 569, 579
Ökodystopie, 47
Ökologie, 300, 528
Ökonomie Ungleichheit, 47
Ökonomieweg, 764
Oktave
Definition, 204
nicht assoziativ, 204
Oktonionen
Definition, 204
nicht assoziativ, 205
Strings, 685
Oktopol, 552
Olbers Paradoxon, 499
Oloid, 232
Olymp, 749
ombplus, 180
Omori-Gesetz, 537
online
learning, 194
Mathe/Rechnenmethoden, 183
Physik, 396, 716
Online-Folien, 742
Onsager, 512, 527
Onsager-Reziprozitätsrelation, 192
Ontologie, 38, 540, 606, 625, 688, 698
ontologischer Strukurenrealismus, 540
OO, 726, 728
ooffice libreoffice, 742
OOP, 51, 726
Oort'sche Wolke, 577
open access, 71, 736
Open Science, 31
Open Source, 148
OpenACC, 730
OpenFoam, 598
Operator
adjungierter, 622
Oppenheimer, 29
Manhattenprojekt, 652
Näherung, 617
Teller, 386
Opposition, 10
OPT, 624
Optik
Bahngleichungen, 372
Fermat-Prinzip, 372
geometrische, 66, 364, 372, 572, 579, 580
Geschichte, 571
nichtlineare, 448, 644
Optik mit GeoGebra, 180
Optimierung
Lagrange, 346
Parameter-Dimension, 407
Regularisierung, 143
Optimierungproblem, 211
optische Geometrie, 372
optische Täuschungen, 710
optische Weglänge, 373
optisches Theorem, 619

Orbit, 321, 323
Ordinalskala, 70
Ordinalzahlen, 113, 131
Ordinatenquadrat, 337
Ordnung, 72
Ordnungs
    Parameter, 403
    Relation, 131
    Statistik, 70
Orgel, 591
Orgelpfeife, 104
Orgon, 699
orientierte Flächen, 546
Orientierung, 354, 567
Orientierungsbedarf, 20
orientierungstreu, 439, 451
Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, 193, 194
Orson Welles, 8
Ort, 632
orthogonal nicht kartesisch, 225
orthogonale
    Gruppe, 439
    Matrix, 223, 439
Orthogonalisierung, 140
Orthogonalität sin cos, 384
Orthogonalprojektion, 232, 261, 438
Orthogonaltransformation, 439
Orthonormalbasen, 290, 455, 646
Orts-Impuls-Unschärfe, 681
Ortsdarstellung, 196, 455, 593
Ortsvektor, 15, 228, 231–233, 252, 269, 272, 289, 745
Ortsvektor ohne, 245
Ortszellen, 706
Orwell, 44
Oseledec, 406
oskulierende Ebene, 247
Ostfront, 17
Ostjuden, 115, 368, 750
Ostwald
    freie Energie, 527
    Mühle des Lebens, 54
Oszillator
    anharmonischer, 320, 378
    aperiodischer Grenzfall, 380
    fraktionaler, 191
    freier gedämpfter harmonischer allg Lösung, 326
    freier gedämpfter harmonischer Anfangsbedingung, 326
    freier gedämpfter harmonischer Basics, 320, 325
    freier gedämpfter harmonischer dissipativ, 320
    freier gedämpfter harmonischer Lagrangefkt, 344
    freier gedämpfter harmonischer per Kubo/Green, 380
    freier gedämpfter harmonischer, Dipol, 384
    freier gedämpfter harmonischer, spektral, 383
    freier gedämpfter harmonischer, spezielle Lösung, 326
    freier harmonischer Basics, 713
    freier harmonischer Dipol, 644
    freier harmonischer Kette, 542
    freier harmonischer nicht-hyperbolisch, 321
    freier harmonischer Phase, 115
    freier harmonischer, komplex, 202
    getriebener anharmonischer, 318
    getriebener mit komplexem Antrieb, 380
    getriebener per Kubo/Green, 380
    nichtlinearer getriebener, 644
    Phasenraumfluss, 356
Oudor, 270
Over-und Underfitting, 88
Overleaf, 738
Ovid, 760
Oxyfuel-Verfahren, 3
Oxytocin, 530
Ozma, 33, 79

p-Formen, 293, 340
p-Wert, 90
P450-Enzyme, 530
p53, 525
Paar-Korrelationsfunktion, 121
Paarbildung, 487
Paardynamik, 698
Paarerzeugung, 464
Pädagogik, 713
padding, 96
Page-Ranking
    Algorithmus, 175
    Eigenwerte, 211
Paketmanager, 739
Paketvermittlung, 734
PAL, 13
PALM, 571
Palomares, 666
Paläogenetik, 54
Pan, 762
Pandemie, 528, 576
Pandoc, 737
pandoc installieren, 737
Panzer, 5, 16, 45, 296, 770
Papapetrou, 26, 267, 268, 289
Para- und Ortho, 715

Parabellänge, 247
Paracelsus, 1
Paradoxa kinematische, 497
Paradoxon, 62, 133, 405, 478, 499, 587, 646
    Gott als Designer, 33
Parallaxe, 260
Parallelen-Treue, 136, 209
Parallelepiped, 232
Parallelität, 437
Parallelkreis, 233
Parallelprojektion, 232, 261, 438
Paralleltransport, 244, 250, 252, 437, 679
Paralleluniversen, 454, 634, 687, 688
Parallelverschiebung, 251, 291
Paramagnetismus, 560
Parameterintegral, 188
parametrische Modelle, 91
Parametrisierung, 309
    Bogenlänge, 247
    Kurven, 248
    natürliche, 245, 247
    Polarkoor, 248
Pareto-Effekt, 81
Pareto-Optimum, 44
Pariser Kommune, 767
Parität, 455
    β-Zerfall, 684
    Erhaltung, 678
    Inversion, 581
    Kugelkoordinaten, 581
    Zeitumkehr, 443, 455
Paritätsoperator, 455
Park David Allen, 56, 629, 648
Parkettierung, 325
Parkomanie, 753
Parsec, 475
Parser xml, 79
Parseval-Theorem, 104
Parteilehrjahr, 9, 295
Partialsummen, 87, 175, 183
Partialwelle, 618
partikuläre Lösung, 302, 309, 339
Partitionierung, 72, 153, 723
parzielle
    Dgls, Numerik, 591, 593, 595
    Integration, 138
Pascal
    Dreieck, 86
    Dreieck vs Sierpinski-Dreieck, 124
    Liebe, 699
    Rechenmachine, 729
Pascalsche
    Reise, 386
    Wette, 32
Pascha Enver, 503
passive Drehung, 268, 272, 351
passive Trafo (Physiker), 268, 440
Pathintegral Intro, 372, 396, 630, 631
Pathobiochemie, 528
Pathologie, 54
Pattern formation, 596, 599
Paul-Falle, 632
Pauli, 40, 158, 444, 484, 491, 514, 618, 621, 622, 633, 688
    Gleichung, 444, 645
    Matrizen, 444, 463
    Oberflächen, 623, 637
    Prinzip Kraft ohne Kraftgesetz, 485
    Prinzip Slaterdeterminante, 218
    Spin, 716
Pauling, 612, 654, 660
Pazifismus, 18, 19, 755
PCA, 94, 95
PCM, 94
PDE, 195, 595
    Cellular Automata, 535
    Charakeristiken, 585
    delay, 600
    elliptische, 591
    Finite Difference Methods, 591, 599
    Hamilton-Jacobi-Gleichung, 361
    hyperbolische, 595
    Intro, 584
    Klassifikation, 599
    Laplacesche, 580
    Reduktion, 589
    Solver, 591
    Turbulenz, 590
    u.a. Modelle, 538
PDEs
    Riemann, 547, 584
pdf App OCR, 736
pdf-Files mergen, 741
pdf-Viewer, 738
pdf2swf, 743
pdfsam, 736
PdN, 66
Peano-Axiomensystem, 132
Peano-Kurve, 124
Pearl Harbor, 19
Peccei, 47
Pechblende, 669

Peierls, 1, 21, 522, 611, 662, 666, 668, 681
Peierls-Argument, 522
Peltier-Element, 507
Pendel
    Chaos, 317, 396
    elliptische Fkt, 148
    Gleichung, 301
    horizontal getrieben auf Schiene, 381
    mathematisches exakt, 321
    parametrisch getriebenes, 318
    Phasenraum, 318
    PT-Invarianz, 443
    Rott'sches, 323
    Uhr, 392
Pendeluhr, 322, 376, 392, 400
Penrose, 43, 119, 151, 245, 271, 647, 730, 745
    Computer denken?, 730
Penrose-Diagramm, 478
Peptide, 530
Percolation, 48, 78, 172, 379, 515, 638
perfekte Zahl, 133
Perihel, 337
Perihelverschiebung, 415, 563
Periode, primitive, 104
Periodendauer, 302
periodische Dezimalbrüche, 132
Periodogramm, 105, 106, 109, 110, 392
Perkolation, 638, 718
Perl, 171
Perle auf Draht, 348, 349
Permanentmagnet, 568
Permeabilität, 569, 717
Permittivität, 569, 717
Permutation, 465
    Determinante, 218
    Gruppe, 457
Permutations
    Symbol, 260
    Tensor, 230
Permutationssymbol, 217
Perpetua, 752
Persephone, 749
Perseus, 761
Personenlexikon 3.Reich, 667
Persönlichkeitstheorie, 713
Perspektive, 696, 699
    Erinnerung, 711
    Erste-Person, 699
    Gott, 701
    Übernahme, 700, 701
    zeitliche, 145
Persönlichkeit, 713
Perturbation, 377
Perversion, 696
Peter-Prinzip, 30
Petersburg, 14, 758, 766, 767
Petrologie, 579
Pfad, 99, 169
Pfadintegral, 73, 75, 371, 372, 378, 631, 632, 688
Pfadintegral Intro, 372
Pfadintegralquantisierung, 627
Pfadordnungsoperator, 643
Pfaffsche Form
    Entropie, 291
Kraftfeld, 291
Pfanzenwelt, 701
Pfaueninsel, 758, 765, 766, 772
Pfeifer, 733–735
Pflanzen
    bestimmen, 525
    Gesellschaften, 525
    Intelligenz, 525
    Physiologie, 525
Pflanzenbiotechnologie, 528
PH Potsdam, 294–296, 772
pH-Wert, 125
Pharaonen, 158, 750
Phase, 115, 403
    geometrische, 363, 688
Phase-Diffusion, 318
Phasen
    Geschwindigkeit, 595
    Integral, 364, 485
    Kurven, 320
    Portrait, 302, 317
    Synchronisation, 362
    übergang, 522–524
Phasendynamik, 202
Phasenfläche, 572
Phasengeschwindigkeit, 372
Phasenraum, 381, 538
    Abtastung, 72
    eines Kastenteilchens, 485
    erweiterter, 317, 538
    Fehlerwachstum, 406
    Fluss, 357
    Fluss Fall nach oben, 357
    Fluss Fall nach unten, 313
    Fluss harmon Oszillator, 356
    Fluss kräftefrei, 357
    Fluss mathematisch negativ, 357
    freier Fall, 357

Hamilton-Prinzip, 369
Liouville, 311, 313, 314
Orbit, 115, 321, 323
Portraits, 319
Pseudo-, 407
Punkt-Geschwindigkeit, 311
reduzierter, 318
Techniken, 356, 363
Volumen Maßeinheit Wirkung h^s, 313
Volument, 519
Wavelets, 110
Wirkung, 318, 364
Zelle, 485
Phasenübergang
BEC-BCS, 643
Katastrophe, 401
Mott-Isolator zu Supraleiter, 643
Phasenübergange, 75, 522
Philosoph im Blaumann, 294
Philosophie
Intro, 128
Phonem, 153, 166, 168
Phonologie, 150, 153, 168, 701
Phonon-Polariton, 720
Phononen, 637
Photo
Chemie, 524
Physik, 524
Synthese, 524
Photoeffekt, 487, 506
Photometrie, 606
Photon, 538
Photon Bunching, 644
Photonen, 74, 448, 478, 487, 488, 505, 546, 566, 580, 585, 607, 608, 613, 629, 630, 632, 638–640, 643–645, 672–674, 679–681, 683, 686, 688, 745
Photonen Linienelement, 468
Photonik, 448
photonische Kristalle, 623
Photovoltaik, 5, 506, 507
pH-Wert, 606
Phyphox, 101
Phys Blätter, 774
Phys. Bl. online, 299
Physik, 294
Antirealismus, 35
Ausbildung, 64
DAS BUCH, 56, 64
Dingler, 39
Einstieg, 64
Ende, 415
Fortschritt, 61
Hume, 129
Intuition, 716
Konzepte, 24, 35, 39, 56, 664
lehren, 64, 715
lernen Sommerfeld, 668
Mathematik, 65, 70
Modellbildung, 56
ohne Mathe, 297
online, 716
populäre Intros, 608
Sport, 297
Theorie kompakt, 65
Vorlesung, 65
vs Mathematik, 66
Was ist das?, 35, 56, 61, 66, 413
Wert, 56
wie und wozu?, 56
Physik und Himmel, 501
Physik verstehen, 25
Physik-Apps, 101
physikalische Chemie, 528
Physikausbildung, 297
Physikeinstieg, 2
Physiker, 1, 24, 25
Angewohnheiten, 61
Dirac, 70
Fortschritt, 61
Modellierer, 65
Telegrammstil, 416
Physiologie, 54, 434, 701, 707
Haustiere, 525
Pflanzen, 525
π, 190
Piaget, 708
Picht, 295, 362
Picht-Exemplar, 297
PIK, 45, 47
Pinch-Effekt, 666
Pioneer-Anomalie, 277, 278
Pionen-Zerfall, 671
pipe, 741
Pirani, 479
PIV, 76
Pivotisierung, 219
Placebo, 693, 700
Plancherel-Theorem, 111
Planck, 22
Konstanten, 717
Ladung, 688

Länge, 647
Länge, 648
Masse, 647, 689
sches Strahlungsgesetz, 82, 186, 618, 720
verteilt, 82
Zeit, 647, 648
Planck-Gesetz, 82, 186, 478, 608, 618, 645, 720
Plancklänge, 411, 431, 647, 686
Plancklänge Kompaktifizierungsradius, 431
Planeten, 574
Planetenbahnen
instabil bei 2D, 4D, 432
Plangröße, 289
Plasmaphysik, 472, 511, 576, 588, 640, 666
Plasmen, 589
Plasmon-Polariton, 720
Plastik, 6
Platon, 89, 430
Nomoi, 48
Plausibilität, 84
Plentos, 270
Plücker, 670
Plutonium, 668
PNF, 167
Poincare-Modell hyp Geo, 437
Poincaré
Abbildung, 317, 318, 392
Bendixson-Theorem, 115
Cat map, 395
Determiniertheit, 401
Dualität, 283
Geschwindigkeitsaddition, 401, 493
Gruppe, 268, 686
Konventionalismus, 37
Lindstedt-Störungstheorie, 378
Map, 317
Physik ist angwandte Geometrie, 226
qualitative Methoden, 302
Rekurrenz, 82
Schnitt, 318
Section, 318
Ungleichung, 596
Vermutung, 279, 449
Wellen, 603
Wiederkehreinwand, 118
Zeit, 434
pointer states, 614
Pointerzustände, 614
Poiseuille-Strömung, 587, 590, 606
Poisson
Boltzmann-Gleichung, 548
Gleichung, 277, 548, 557, 558, 566
Integral, 555
Klammer, 352, 354, 356, 359, 446
Klammer als totales Differential, 352
Klammern algebraisieren, 358
Klammern als Diff-Operator, 358
Klammern als Jacobi-Det, 354
Operator, 358
Prozess, 116
Poisson-Verteilung, 82
Polanyi Karl, 6
Polardarstellung, 198
polare Vektoren, 289
Polarform, 198, 203
Polarform der Kegelschnitte, 336
Polarisation, 257, 518, 544, 643
Polarisation Licht, 574
Polariton, 720
Polarkoordinaten, 188, 231, 248
Polarkoordinaten Funkortung, 231
Polarlicht, 575, 577, 578
Polarstern, 606
Polbahn, 268
Poldistanz, 233
Pole, 206
Pole umfahren, 205
Pole und Nullstellen, 96, 108, 145, 167, 378
Polen, 15–17, 664, 750, 755, 759, 770
Polflucht, 586
Polhodi, 268
Politkommissare, 9
Polkinghorne, 345, 630
Polstelle 1. Ordnung, 209
Polstärke, 560, 574
Polung, 579
Polwinkel, 233
Polymer
DNA, 529
Feldtheorie, 626
Pfadintegral, 73, 524
Polymorphie, 728
Polynom-Division, 197
Polynom-Fit, 86
Polynome
Bernstein, 86
charakteristische, 222, 225
Fourier, 104, 137, 384
homogene, 315
hyperbolische, 505
Legendre'sche, 574, 582, 584
Legendre'sche Kugelfkt 1.Art, 583

rationale, 456
Taylor, 134, 140, 185, 186, 226, 369
trigonometrische, 137, 138, 384
zugeordnete Legendre'sche, 582
Polynominterpolation newtonsche Formel, 186
Pomona, 760
ponderable Materie, 23, 413, 425, 481, 625, 716
Pontecorvo, 667, 677
Popper, 38, 40, 88, 91
Falsifikation, 37
Propensität, 634
Popularisierungsdilemma, 418
Populismus, 11, 20, 767
populäre Darstellungen, 416
Poseidon, 761
Positionssinn, 706
positiv definit, 136, 224, 225
POSIX, 148
Postdemokratie, 9, 18, 658–660
PostScript, 736
PostScript to pdf, 743
Potential
Dissoziation, 377
Helmholtz, 377
Lienhard, 377
Potentialtheorie, 553
Potentialtheorie Dualitätsprinzip, 548
Potenzgesetze, 538
Potenzial, 316, 333, 353
chemisches, 518, 520, 521, 639, 640
effektives, 333
Feld, 245
Feld einer Kugel, 584
Feldberechnung, 551
geschwindigkeitsabhängig, 569
Innenfeld, 334
kinetisches, 568
Kugel, 335
Lienard-Wiechert, 563, 564
Masse, 334
Metrik, 473
Morse, 335
Quark, 676
retardiertes, 563, 564
Riemann, 331
Theorie, 297, 552, 553, 559, 579
Vektor, 496, 499, 558, 562, 563, 568
Weber, 331
wegunabhängig, 353
Yukawa, 335, 487, 620
Potenzial vs potenzielle Energie, 316
Potenziale thermodynamische, 517
potenzielle Energie, 238, 316
effektive, 333
Potenzmenge, 131
Potenzreihe
abbrechende, 582, 583
Potenzreihen und Lösung von Dgls, 582
Potenzschreibweise, 538
Potts-Modell, 77
Povray, 254
Power eines Tests, 77, 94
Power-Spektrum, 105, 537, 539
Powers vs Abel, 758, 769
Poynting-Vektor, 569, 615
Präemptions-Phänomen, 89
Prähilbertraum, 270
Praktikum der Chemie, 602, 720
Praktikum der Physik, 720
Praktikum Physik, 64
Prandtl-Zahl, 399, 605
Praxis der Naturwissenschaften, 66
prc-Format, 724
Preonen, 687
Presentation, 742
Preußen, 772
Preußische Liebesgeschichte, 768
Prezi, 743
Priapus, 762
Prigogine, 527
primordale Elemente, 504
Primzahl
Algorithmen, 724
Beispiel, 176
Dichte, 177
Energie-Eigenzustände, 385
Harmonische, 104
Satz, 177
Zerlegung in, 146
Zwilling, 176
Prinzip
Cavalieri als Vektorprodukt, 188, 230, 251
der virtuellen Arbeit, 341, 369
Kovarianz, 322
Prinzipien im Netz, 63
Prinzipienphysik, 2, 297
pröbeln, 570
Problem des Elektrons, 474
Problemanalyse, 150
processing, 735
Produkt
äußeres, 212, 271, 292, 293

als Klammer, 445
Anschauung als Fläche, 198
Clifford, 271
Dach, 292, 293
direktes, 269
dyadisches, 262, 263
geometrisches, 270, 271
Grassmann, 270
Hadamard nullteilerfrei, 210
Hartree, 218
Hodge-Stern, 212, 230, 264
inneres, 225, 229, 234, 250, 251, 264, 289, 438, 567, 622
kartesisches, 130, 269, 456
Keil, 292, 293
kombinatorisches, 270
Kreuz, 231
Lie-Kato-Trotter, 455
Matrix, dot, cross, 216
Minkowski, 269, 270
Schur, 210, 216
Skalar, 138, 200, 225, 229, 314, 439, 567
Skalar, Deutung, 229
Spat, 235
Tensor-, 269, 273
Vektor, 230
Wedge, 271, 292, 293
Produkt komplexer Zahlen, 204
Produktansatz, 591
Programmfehler, 150
Programmier-Stil, 153
Programmieren, 153
Programmiersprache, 128, 148, 150, 154, 172, 713, 724, 728, 733, 741
Programmiersprachen
Crash-Kurse, 728
Programmierung in Schule?, 65
Projektion, 55, 256
Projektionsoperator, 119, 263
Eigenvektor, 119, 220, 221, 263, 267
projektive
Geometrie, 437, 438
Transformationen, 285
Transformaton, 285
projektive Geometrie Intro, 438
Projektmanagement, 534
Prolog, 733
Propaganda, 9, 18, 60
Propagandafilme, 17, 655
Propagatoren-Elektrodynamik, 540
Propensität, 634
Propheten, 768
Propriozeption, 154, 167, 434, 700, 704, 706, 708, 710, 711, 716
propriozeptive
Empfindung, 708
Storung, 324
Wahrnehmung, 167
Proserpina, 760
Proteinbiochemie, 526
Proteine, 528–530
Proteintranskription, 530
Protektorat, 747
Proteomic, 526
Protokolle der Weisen von Zion, 652
protokollorientiert, 726
Proton, 677
Protonentdeckung, 652
Protophysik, 39
Prouhet-Thue-Morse-Folge, 125
prozedurale/implizites Gedächtnis, 706
PSE, 745
Klassifikation der Gruppen, 465
Mendelejew, 387
Modellgrenzen, 610
Online, 623
Systematik der Atome, 56, 614
Pseudo
n-Form, 230
-Periode, 108
-Phasenraum, 407
-Spektral-Methode, 598, 599
euklidische Metrik, 225
Form, 567
Skalar, 268, 271, 289, 313
Tensor, 270, 289
Vektor, 289
Zufall, 83
2-Form, 567
Pseudo-Orthogonal, 491
Pseudo-Tensor Punktspiegelung, 678
pseudoeuklidischer Raum, 436
pseudoskalare Invariante, 566
Pseudospäre, 325
pstops, 736
Psycholinguistik, 166
Psychologie
experimentelle, 434
Handbuch, 713
Pädagogische, 713
Psychologie klinische, 698
Psychologie kognitive, 160, 698, 707

Psychologie, allgemeine, 713
Psychophysik, 2, 708
Psychosomatische Medizin, 698
Psychotherapie, 698
PT-Invarianz
    Eigenwerte, 443
PT-symmetrische Hamilton-Operatoren, 443
Publizieren, 714
Pullback, 283, 291
    1-Form, 314
    Kurven/Linienintegral, 314
Puls-Sequenz, 102
Punkt
    Felder, 121
    förmigkeit, 678
    Gruppen, 457
    Ladung, 546
    Ladungsdichte, 548
    Prozess, 99
    Spiegelung, 289
    Transformation, 354
    Was ist das?, 287
Punkte
    nicht addierbar, 287
Punktesumme, 153
punktweise Konvergenz, 141
punktweise Multiplikation, 136, 210
Putin, 15, 19, 654, 658, 659
pwned, 737
PyDSTool, 322
Pythagoras, 136, 229, 230
    Skalarprodukt, 229
Pythagoreer, 61, 134, 199
Python, 726, 728
    acorr matplotlib.pyplot, 94, 96, 106
    adjust, 152
    AKF, 96
    Anaconda, 743
    Animate, 323
    anonyme Funktion lambda, 403
    aryule, 109
    aspect ratio plot, 151
    axis([x1,x2,y1,y2]), 151
    Balkenplan, 534
    Bayes, 391, 534, 621
    Beispiele, 175
    BeispielSkript, 743
    Bessel, 151
    bestimmte Integration, 173
    binary-Operation, 536
    binning, 71
    bool, 536
    Buch zu Numerik, 173, 303
    Buch zu Syntax, 726
    class, 726, 728
    class Getter, 727
    class Interface, 727
    class Member, 727
    class Setter, 727
    clf(), 151
    Conda, 743
    conjugate, 198
    contour, 598
    contour-Plot, 272
    contourf, 598
    copy Methode, 175
    corrcoef, 76, 84
    count, 169
    Crash-Kurs, 174
    cumsum, 76, 169
    diag, 216
    Dichte-Funktionen, 82
    Differenzialgleichungen odeint, 303
    Django Apps=Module, 175
    Doppelklammer weg per float, 442
    dot, 153
    dot aus numpy, 216
    3D-Projektionen, 175
    Eigenvektor, 403
    Eigenwerte, 222, 403
    Einbettung, 407
    Eingabe-Aufforderung, 323
    Einheitsmatrix, 216
    Einstieg, 174
    ϵ, 307
    Euler-Maruyama, 389
    except, 106
    fakultaet, 107, 153
    FFmpeg, 536
    figure, 151
    File size os.stat, 151
    findall, 171
    flatten 1d-Kopie, 726
    Flächen-Plot, 273
    fontsize, 273
    Fontsize Legende, 151
    formatierte Ausgabe, 96, 216
    Funktion, 107
    Funktionsbeschreibung help, 727, 728, 743
    $\Gamma(a, x)$-Verteilung, 81
    Genauigkeit, 307
    Gleichungen, 216

Gradient, 237
Graph zeichnen, 534
grid, 303
griechische Buchstaben, 151
gzip, 151
help-Kurzbeschreibung, 727, 728, 743
Hermitesch konjugierte Matrix, 198
hexbin, 272
hist matplotlib.pyplot, 76
hist numpy, 77
if else, 107
imag, 198
import as, 303
imshow, 272, 599
imshow origin, 272
in, 273
incomplete $\Gamma(a, x)$ gammainc, 81
Index-Shift, 106
Indexakrobatik, 96
inkrementelle Addition mit i=+1, 153
Inline-Funktion [x**2 for x in range(7)], 152
Installation Conda, 743
Installation und Packages Ubuntu, 173
Integration, bestimmte, 173
interactive graph, 151
Intro, 174
ion, 151
ipython notebook, 151
itemsize, 96
jupyter notebook, 151
Kapselung, 726
komplexe Zahl, 198
Kurs, 303, 307
Kurven-Schar, 153
lambda f=lambda x: x*a, 403
lambdify, 180
LaTeX τ, 153
legend, 151, 303
Legende Fontsize, 151
len, 216
linalg.solve, 216
lineare Gleichung, 216
Linestyle, 151
linspace, 151
List-Comprehension, 106
Liste letztes Element, 106
Listen, 106
Listen-Methoden, 106
Listenindex, 106
load, 153
loadtxt('Data',unpack=True, 153
logische Operatoren, 536
logistische Abbildung, 393–395
loglog, 151
logspace, 151
Machine Learning, 78, 303
machine learning, 143, 168
map, 106
markersize, 151
matplotlib, 173
Matrizen, 216, 442
Matrizen Doppelklammer weg per float, 442
Maximum-Argument, 77
maybe Shell-Kommand-Check, 742
mean, 76
meshgrid, 237
MLE, 77
modf, 83
Module laden, 173
modules, 83
modulo, 177
mplot3d, 273
nbytes, 96
Netzwerk plotten, 534
Notebook Viewer, 151
Notebook-Intro, 151
NumPy, 88, 216, 303
Objekte, 726, 728
odeint, 303, 323
optionaler Parameter, 107
Orbit-Plot, 273
Packages, 173
PCA, 95
pdb, 151
Pelican, 738
Periodogramm, 106
Pfeile, 273
PIL, 536
plot, 151, 303, 676
plot aspect, 151
plot Beispiel, 676
Plot-Fontsize, 151
plot-surface, 598
Plotten numerischer Fktn, 180
Plotten symbolischer Fktn, 181
polyfit, poly1d, 86
Primzahlen, 106
projection, 598
Projektmanagement, 534
Prozedur, 107
qt, 151
Quadratur mit quadrature, 173

Quicksort, 107
quiver, 273
randn, 96
range, 70
rankdata, 70
Rational, 180
ravel, 726
read Text per loadtxt('D',unpack=True), 153
rebin, 71
recursion limit, 153
replace, 169
repr, 83
reshape, 106
Richtungs-Felder quiver, 273
roll, 106
Rundung, 83
Sage, 274
Schluesselwort-Argument, 107
Scientific computing, 175, 303
SciPy, 303
Selbstreproduktion, 742
semilogx, 151
Server, 742
set_window_title, 153
shape, 70, 96
shell commands, 151
show() Problem, 598
size, 216
Spearman, 70
special functions, 81
spezielle Fktn, 151
spyder, 151
strides, 96
subplots_adjust, 152
subplots_canvas, 153
suptitle, 273
surface, 598
surface-Plot, 273
Symbole, 151
Symbolgröße, 151
Symbolic quantum mechanics, 644
SymPy, 180
Symsize, 151
Tensor-Produkt, 216
text im plot text(x,y,'TEXT'), 151, 273
Ticksize, 151
time für Zufall, 83
time() in sec, 222
Trajektorien-Plot, 273
Transponieren durch reshape, 273
transpose, 216, 273
try, 106
Tutorial, 175
Typumwandlung bei Listen, 106
urlretrieve, 151
utf-8 # -*- coding: utf-8, 153
Variablensubstitution mit subs, 181
Varianz, 76
Vektor-Feld-Plot, 273
Vektoriserung, 96
Vorzeichen, sign, 83
Wahrheitswerte, 536
wait, 83
Wavelets, 112
WebSeiten, 738
where, 106
while, 153, 307
Windowgröße anpassen, 152
Winkelfunktionen, 248
writelines, 153
Wurzeln, 198
Yule-Walker, 109
Yule-Walker-Spektrum, 109
Zahl an Symbole, 151
Zahldarstellung, 132, 216, 536
Zahldarstellungen, 536
zeros_like, 216
zip Reißverschluss, 106, 151
Zufall, 81
Zufallsmatrizen, 81

q-Zahlen, 269, 628
QCD, 446, 671, 680, 683
Intro, 344, 345
QED, 2, 680, 682, 688, 704, 716
Intro, 572, 630, 682
Motiv, 681
qed, 130
QFD
Intro, 344
QFT
algebraische Meth, 633
ebene Raumzeit, 482
Intro, 430, 624, 626, 627, 633, 676, 680, 681, 684
Ontologie, 625
Renormierbarkeit, 506
Standard-Modell, 469
topologische, 200, 201
QFT als lokale Theorie, 633
QFT ohne Felder, 633
QM
Intro, 628–630

QR-Code, 175
Qt, 736
Quabla, 490, 563, 627, 630
Quad, 47, 63, 662
Quadrat-Wurzel, 134, 139, 442
Quadrattransport, 188, 210, 230, 251, 312
Quadruplomoment Gravitation, 478
Quadrupol-Moment-Tensor, 551
Quadrupolmoment, 552
Quale, 429
Qualia, 699, 700, 703
qualitative Forschung, 713
Quanten
  Bayesianismus, 634
  Chaos, 402
  Chemie, 611, 612
    Dichtefunktionaltheorie, 611
    Fermiregel, 644
    Geschichte, 612
    Hartree-Fock-Gleichung, 214
    Matrixdarstellung, 214
    Ratenprozesse, 611
    Reaktionsdynamik, 611
    Symmetrie, 454, 464
  Chromodynamik, 344, 345, 446, 671, 680, 683
  Computer, 448, 624, 642, 643
  Computing, 611
  Darwinismus, 613
  Geist, 43, 178, 731
  Gravitation, 23, 646, 647, 650
    ER=EPR-Hypothese, 636
    Raum-Zeit-Verschränkung, 636
  Hall-Effekt, 623, 638, 689
  Informatik, 642
  Information, 632, 642, 643, 651
  Kryptografie, 44
  Made simple, 631
  Mechanik
    elementar, 608, 611, 629, 642, 643
    geometrisch, 606
    Intro modern, 614
    Matrix-Form, 452
    Tutorium, 624
  Optik, 643, 644
  picturalism, 642
  Punkt, 623
  Quantonen, 618
  Simutator, 643
Quanten-Loop-Gravitation, 411, 650, 680
Quanten-Schleifen-Gravitation, 411, 650, 680
Quantenchaos
  Einstein, 363, 688
Quantengatter, 642
Quantengeometrodynamik, 22, 255, 260, 431
Quantengravitation, 481
Quantenkosmologie, 481
Quantenkryptografie, 44, 642
Quantenlogik, 126
Quantenmechanik
  Intro, 628
Quantenoptik Mathematica, 301
Quantenschaum, 631
Quantensprünge, 62
Quantifikatoren, 127
Quantisierung, 364, 628
  Bohr-Sommerfeld, 687
  Hamilton-Jacobi, 363, 688
  Pfadintegral, 627
  stochastische, 631
  Winkel-Wirkungsvariable, 688
  zweite, 447, 627
Quantisierungsregel, 628, 630, 631
Quantonen, 618
Quantoren, 171
Quantum
  Internet, 624
Quark-Potenzial, 676
Quarks, 677, 685, 688
Quasare, 278, 471, 472
quasiperiodisch, 115, 119, 132, 134, 320, 396
Quasiteilchen, 518, 638, 640, 642
Quaternionen, 205, 267, 271, 445, 451
  Definition, 204, 205
  Konjugation, 443
  Physik, 204
Qubits
  Intro, 624
  Spieltheorie, 44
Quelldichte, 244
quellenfrei, 245, 546
Quellpunkt, 551, 563
Quellstärke, 244
Quersumme, 133
Quintessenz, 415
quirlende Felder, 239, 561, 584
quiver, 273

R, 78, 83, 84, 141, 219, 389
  Studio, 78
Rabi-Frequenz, 645
Racemat, 453
Rad, 693

rad Energiedosis, 668
RADAR, 31, 745, 746, 755
Radar, 15, 231, 233, 745
Radiationless transitions, 611
Radio-Daten, 538
Radioastronomie, 472, 576, 588
Radiochemie, 296, 670
Radiokarbon-Methode, 578
Radiotechnik, 717, 718, 721
Radiowellen, 576
Radium, 652, 664
Radius-Server, 730
Radnitzky, 19
Radom Wachtberg, 15
Radon-Transformation, 211
Raketen, 328
Raketenabfang, 15, 228, 656, 745
Raketenflugzeiten, 328
Raketengleichung, 327
RAM, 729
Ramanujan, 190
RAND, 662
Rand, 281
Rand des Universums, 476, 565
Rand vom Rand, 244
Randbedingung, 553
Rändern, 286
Random Boolean networks, 528
Random walks
    Biophysik, 55, 397
    restricted, 397
Randomisierung, 94
    s-Test, 94
Randoperator, 283
Randwert-Problem, 555, 568
Randwertproblem, 211, 597
Rang, 213
    Defekt, 284
Rang, Stufe, Tensor, 567
Rang-2-Tensor, 261
Rang-Korrelation
    Spearman & Kendall, 70
Rang-Korrelation Copula, 83
Rangskala, 70
Ranking data, 70
Rapallo-Vertrag, 11, 18, 747
Rapidität, 488, 491
Rapidität, 493
Rapoport, 45, 61, 64, 160, 657, 658
rar, 737
RasberryPi, 101, 150, 724
RaspberryPi, 101
Rasputiza, 766
rationale Zahlen, 132
Ratschen, 531, 623
Rätsel aller Rätsel, 429
Rattenhirnbildatlas, 713
Rauch, 767
Rauhnacht, 756
Raum, 66, 226, 299, 429, 608
    absoluter Raum, 298, 412, 413
    affiner, 136, 429
    Anschauungsraum 3d, 433
    artig, 486
    Banach, 138
    Dehnung, 475, 477, 478
    euklidischer, 136, 287
    Hilbert, 138
    innerer, 686
    Krylov, 215, 223, 224
    linearer, 136
    metrischer, 136, 287
    normierter, 136, 283
    separierter, 280
    Sobolev, 137, 138, 211
    topologischer, 280, 283
    unitärer, 270, 622
    4-dimensionaler, 429
Raum und Zeit, 278
    Heisenberg, 668
Raum-Punktspiegelung Pseudo-Tensor, 678
Raum-Zeit
    bei Kant, 432, 435
    Hawking u Penrose, 433
    Protophysik, 433
Raum-Zeit bei Kant, 226
Raum-Zeit-Schatten, 256
Raum-Zeit-Volumen, 541
raumartige Hyperfläche, 466
Raumdiagonalen
    Würfel, 199
Raumfahrt, 328
Raumstoff, 415
Raumwinkel, 387, 548
    Gausgesetz, 276, 559
    Skizze, 276
Rauschen, 116
    1/f, 114
    Flicker, 114
    weißes, 383
Rauschreduktion, 95
Rayleigh

Bénard - Konvektion, 397
Flight, 92, 397
Streuung, 618
Rayleigh'sche Dissipationsfunktion, 569
Rayleigh-Streuung, 539, 618, 623
RC-Filter, 96, 108, 145, 167, 378
Reaktionrate Kramers, 92
Reaktions—Diffusions-Gleichungen, 596
Real-Teil, 198
Real-Teil.real, 222
Realisierung, 99, 169
vs Instanz, 73, 79
Realismus, 69
lokaler, 62, 634
ontologisch, 715
Quantentheorie, 62
Realismus und QM, 62
Realität, 613, 651
Rebinning, 71
Rechen
Aufwand, 174
Bücher, 179
Kunst, 279
Methoden der Physik, 124, 194, 195
Methoden online, 183
Vorteil komplexe Zahlen, 203, 336, 380, 720
Rechentricks, 732
Rechnen = Abfallprodukt der Mathematik, 65
Rechnen statt Zeichnen, 64, 226, 716
Rechner-Monitoring, 738
Rechtsstaat, 45
Rechtssystem, 233, 289
Recycling-Lüge, 6
Rede, 160
Redefreiheit vs Gotteslästerung, 63
REDUCE, 180, 183, 196
Reduktionismus, 33, 51, 52, 151
Reflexion, 693
parzielle, 574, 614, 621
Reflexionsgesetz, 573
Reformation, 752
Regelgrammatik, 150
Regelstab, 663
Regelstrecke, 167
Regelung, 167
Regelungstechnik, 167, 401, 721
Regenstein, 296
Regentropfen, 327
Registrierstreifen = Weltlinie, 427
Regression
lineare, 79
Regression, lineare, 141
Regula falsi, 226
Regularisierung, 365, 366
Regularisierungsmethoden, 143
Regularisierungstechniken, 211
reguläre Ausdrücke, 171
Reha, 709
Reibung, 517
Coulomb, 320, 377, 713
fraktionale, 191
Gezeiten, 410
Haft-, 320, 713
innere, 603
Newton, 302, 377
Stokes, 327, 377, 379, 388, 713
turbulente, 377
Reichtum, 704
Reihe, 136, 137, 582
geometrische, 82, 103, 124, 133, 380, 583
harmonische, 582
Reihen, 178, 190
Reihen-Parallelschaltung, 146
Reihenschwingkreis, 196, 720
Reionization, 470
Reisegleichung, 244, 311
Reizphysiologie, 154, 709
Rekonnektion, 589
Rektaszension, 233
Rekurrenz, 391, 408
Rekursion, 146, 728
Rekursionsgrenze, 153
Relation, 130, 131
relativen Topologie, 280
relativistischer Impuls, 488
Relativitätsprinzip, 268, 428, 497, 499
Relativitätstheorie
Geschichte, 478
Relativkoordinaten, 340
Relaxationsmethode, 555, 559, 597
Relaxationsverfahren, 214
Religion, 32, 33, 57, 60
Moral, 757
Religiosität, 32
REM, 702
rem Äquivalentdosis, 669
Remanenzflussdichte, 568
Renaissance, 773
rendern, 736
renewal process, 96
renormierbare Theorie, 678
Renormierung, 522, 523, 537, 589, 626, 678, 680, 683

Rényi-Entropie, 122
Reparametrisierung, 246
Replica-Trick, 122
Replikation, 175
repository, 743
Reproduktion, 175
reproduzierende Kerne, 137
reshape, 106
Residuen-Kalkül, 206–208
Residuensatz, 207
Residuum, 208, 365
Reskalierung, 310, 538
Resolvente, 221, 580
Resonanz, 381
    stochastische, 405
Resonatoren, 644
Response-Funktion, 96, 108, 145, 167, 378
Rest
    -Klasse, 177, 457
    -Klassendivision, 133
Restklassen, 133, 177, 457, 536
retardierte
    Green'sche Funktion, 563, 564
    Zeit, 563
Retardierung
    Ausstrahlung, 563, 615
    Delay-Differentialgleichung, 600
    Green-Funktion, 564
    Kausalität, 564
    Mechanik mit Feldern, 681
    Römer, 351
    Unpünktlichkeit Io, 351
Retraktion, 252
return map, 317
Reue, 697
Reuleaux-Dreieck, 188, 429
Reversibilität, 119
Reynoldszahl, 398, 603
reziproke Basis, 262, 491
reziproke Gitter, 261
Reziprozität, 43, 44
Reziprozitätsbeziehung, 512
RFID, 746
Rhabdor, 270
Rham-Theorie, 282
rheonom, 349
Rheotron, 664
Rhetorik, 707
Riccati'sche Dgl, 302, 377
Ricci-Skalar, 480
Ricci-Tensor, 477, 480
Richardson-Iteration, 214
Richtungs
    ableitung, 181, 185, 236, 350
    ableitung Dipol, 550
    Feld, 303
    Feld aus Images, 76
    Felder, 228
    kosinus, 199, 540, 714
    kosinus Pythagoras Eulerbeziehung, 199
    Statistik, 78
Richtungsquantelung, 668
Riemann, 279
    'sche Geometrie, 252
    'sche Metrik, 309
    'sche Zahlen-Kugel, 200
    'sche Zeta-Funktion, 190
    'scher metrischer Tensor, 230, 567
    Fern/Nahwirkung, 254, 279, 437
    Flächen, 437
    Geometrie - Statistik, 408
    PDEs, 547, 584
    Potenzial, 331
    scher Abstand, 408
    Schwere, 331
    Tensor, 480
    Weber PDEs, 294, 300, 584, 592
    Webers PDEs, 547
Riemann'sche Geometrie, 245, 250, 260
Riemann-Hypothese, 176
Riemannsche Vermutung, 104, 177, 547
Riesentheorem, 465
Riesz, 92, 139, 271
Riez'scher Darstellungssatz, 270, 315
Riezler-Tagebücher, 748
Riker-Map, 77
Rindler-Koordinaten, 299
Rindler-Kraft, 277
Ring, 456
Ringaxiome, 210, 456
Ringintegral per Riemann, 188, 315
Ringstrom, 560
Ringstrom Magnetfeld, 560
Riometrie, 577
Risiken ionisierender Strahlung, 669
Rituale, 757
Ritz-Verfahren, 86, 214, 370
Rizom, 1
RJ45, 743
RNA, 528
Robertson-Walker-Metrik, 468
Robocup 2050, 41, 733

Roboter
Automatisierbarkeit von Berufsfeldern, 42, 43
basiert auf falschem Modell, 43, 173
Bauen und programmieren, 722
Embodiment, 735
Emotion Machine, 42
Externalisierungen, 731
Fußballweltmeister, 41
Handlungsplanung, 156
humanoider, 733
Maschinenbewusstsein, 733
neuromorph, 734
scientific computing, 150
Selbstmodell, 735
unüberwachtes Lernen, 533
Vorwärtskinematik, 210
Robustheit, 530
ROC, 94
Rodrigues-Formel, 583
Röntgenbeugung, 618
Rössler, 43
ROM, 722, 729
Rom, 751
Römer, 351, 424
Rommel, 12, 717
Röntgen Ionendosis, 668
Roon, 501, 759
Roosevelt, 17
root, 738
rooten, 722
Rossby-Welle, 603–605
Rossby-Zahl, 605
Rössler-System, 399
rotating wave approximation, 643
Rotation, 239, 320, 332, 333, 409, 441, 569
differenzielle, 588
Metrik, 475
Rotation und Schwerefeld, 474
Rotations
Energie, 265
Kurve, galaktische, 484, 504
Tensor, 260
Rotationsenergie, 263
Rotationsgruppe siehe Drehgruppe, 441, 453, 462
Rotator, 202
Rote Angst, 655
Roter Riese, 484
Rotor
allgemeine Koordinaten, 239
Definition, 239
Dynamo-Gl, 569
krummlinig, 239
Kugelkoordinaten, 236
Zylinderkoordinaten, 236
Rotverschiebung, 466, 468, 469
Arp, 484
Def, 478
3K, 478
Olbers, 499
Skalenfaktor, 469
Zwicky, 484
Roubine, 177, 178, 205, 264, 291, 300, 365, 368, 371, 452
round, 83
Rousseau, 19, 20, 753
rsync, 196
rsync -vaPH, 741
RTP, 169
Rückfangmethode, 77
Rückwärts-Methode, 307
Ruhemasse, 488, 499
Rumble.com, 31
Rumer
6d-Welt, 278
Runden, ceil, floor, round, int, entier, frac, 83, 132
Rundungsfehler, 155, 174, 175, 537
Rundungsklammer, 132
Runge
Kutta-Verfahren, 308
Lenz-Vektor, 338, 445
Russel'sche Menge, 133
Russell, 24, 38, 127
Russen-Angst, 655
Russland, 12–14, 17, 18, 658, 659, 664, 747, 766, 769, 770, 772
Russlandbild, 655
Russo, 66, 67, 277, 450
rust, 148
Rutherford-Streuung, 617, 620, 652, 683
Rydberg-Formel, 578
Rydbergatome, 640
Röntgenlaser, 571

S-Matrix, 74, 619
S-Matrix Element, 619
s-Welle, 619
Saalburg, 505
SAC, 13, 657
Sacharov, 21, 666, 684
Sagen nordische, 756
Sägezahnsequenz, 385
Sahara, 717

Saint-Germain, 770
Saite, 374, 584
    angezupfte, 592
Saitenschwingung, 584, 592
Saitenschwingung Geschichte, 584
Saltzman - Gleichungen, 399
Sammellinsen, 371
Sand, 537
SAR, 15
Sarre, 503
Sarrus-Regel, 218
Satelliten-Manöver, 338
Sattel-Fokus-Punkt, 203
Sattel-Knoten-Punkt, 203, 324
Sattelfläche, 248
Sattelpunkt, 252
Sättigung, 533
Saturn, 579
    Masse, 91
Satyr, 762
Satz
    Flächen, 315, 353
    Gauß-Bonnet, 286
    implizite Funktionen, 184
    Poynting, 259
    Stokes Dualität, 283
    Thales, 229
Satz von
    Bayes, 144
    Chintchin, 103
    Fubini, 187
    Gauß, 275
    Liouville, 311–314, 357
    Poincare, 2, 244, 293
    Pythagoras, 250, 581
    Schwarz, 180, 206, 225, 350
    Schwarz Gegenbeispiel, 225
    Sklar, 93
    Steiner, 257, 258
    Stokes, 235, 275
    Sydow, 455
    Tarski und Banach, 113
    Weyl, 120
Satz von Stokes
    Beweis, 234
    Cauchy'scher Integralsatz, 205
    Definitionslücke, 275
    Idee Lagally, 243
    Kohomologie, 283
    Kurvenintegral, 610
    lochfreies Gebiet, 235
    Phasenraumgebiet, 359
    randlose Fläche, 282
Säuberungen große, 665
Sauerbruch, 759
SBZ, 14, 665
Scala, 728
scale-free network, 53
Scalon, 278
Scattering cross-section, 618
Scatterogramm, 79
Scatterplot, 84, 94, 143, 391
SCF Wellenfunktionen, 617
Schalamow, 665
Schalenmodell, 453
Schaltnetzteil, 721
Schaltungstechnik, 507, 719
Scham, 697
Scharmittel, 192
Schattenstab, 351
Schatullgüter, 765
Schätzer Standardabweichung, 82
Schauder-Basis, 138
Schaufelradbagger, 4
Schaukel, 318
Schaumgeborene, 749
Scheibenintegral, 715
scheinbare Helligkeit, 606
Scheiner, 502, 578
Scheinkraft, 332, 410, 604
Scheinkräfte, 330
Scheinkräfte = Kraft?, 330
Scheinladung, 555
Scheinleistung, 104
Scheinprobleme, 30, 651
Scheitellappen, 710
Scheler, 415
Scherfeld, 315
Scherspannung, 377
Scherung, 310
Scherung per Matrix, 188, 230, 251
Schiefkörper, 451
Schiiten Sunniten, 750
Schilpp, 62
Schintlmeister, 666, 667
Schlaf, 699, 702
Schlafzyklen, 702
Schlammzeit, 766
schlecht gestellte Probleme, 211
Schlechter ist besser, 148
Schlegel, 21
Schlegel-Diagramm, 429

Schleich, 644
Schleife, 43
Schleifenquantengravitation, 411
Schleppkurve, 324, 325
Schlick, 37
Schmellenmeier, 218, 295, 664
Schmetterlingseffekt, 400, 402
Schmiegeebene, 247
Schmutzer, 26, 70, 278, 297, 353, 401, 417, 453, 482, 582
Schnabel-Topologie, 279
Schneiden, 438
Schnelligkeit, 488, 491
Schnitt, 249
Schopenhauer, 30, 31
Schöpfungsgeschichte, 767
Schottenloher, 26, 68, 245, 250, 256, 318, 353, 362, 451, 463, 570
Schottky-Diode, 506
Schraubenlinie, 246
Schraubung, 247
Schrittweite, 308
Schrittweiten-Kriterium, 595, 598
Schrittweitensteuerung, 307
Schrödinger, 25, 75, 80, 119, 182, 224, 232, 238, 253, 254, 256, 257, 266, 268, 269, 351, 364, 405, 456, 478, 481, 484, 491, 498, 515, 527, 593, 612, 613, 617, 621, 633, 636, 646, 650, 680
  Gleichung, 218, 361, 364, 593, 618
  Gleichung Definition, 196, 455
  Gleichung fraktionale, 191
  Gleichung Lösung, 593
  Gleichung Randwertproblem, 591
  Gleichung und HJG, 364
Schrödinger, 634
Schrot-Rauschen, 116, 538
Schukow, 16, 664
Schule
  Aufklärung, 714
  Denker, 733
  Nachdenken über Schule, 714
  Nein, 714
  Physik, 297, 715
  wozu?, 65, 714–716
Schulze, Bert-Wolfgang, 69, 296
Schur-Produkt, 216
Schütte, 295
Schutz Massenvernichtungswaffen, 653
Schwab great reset, 6
schwach singulär, 582
schwache Konvergenz, 139
Schwache Lösung, 369
schwache Wechselwirkung, 684
Schwartz-Raum, 368
Schwarze Löcher, 470, 476, 478, 636, 640
Schwarzer Körper, 615
Schwarzer Schwan, 49, 91, 93
Schwarzes Loch, 484
Schwarzschild-Radius, 647, 717
Schwarzwerdefall, 7
Schwarz–Christoffel mapping, 206, 570
Schweben, 429, 559
Schwebung, 102
Schweitzer, 238
Schwere
  Metrik, 473
  Potenzial, 475
Schwerefeld durch Rotation, 474
Schwerionenforschung, 666
Schwerkraft, 250, 278, 334, 432, 473, 482, 636
Schwerkraft als Scheinkraft, 474
Schwerkraft und Metrik, 475
Schwerkraft-Metrik, 475
Schwerpunkt, 114, 188, 298
Schwimmregel Kreuzprodukt, 496
Schwingende Saite, 374
Schwinger-Funktionen, 626
Schwinger-Kette, 329
Schwingkreis, 377, 720
Schwingung
  erzwungene mit komplexem Antrieb, 380
  erzwungene per Kubo/Green, 379, 380
Schwingungsdifferenzialgleichung, 326
Sciama, 260
scientific
  calculators, 304
  computing, 148, 150, 154
  problem?, 24
Scikit-learn, 143
Score-Funktion, 84
scp, 743
Screenshot, 736
sde, 75, 193, 388
SDI, 657, 658
S^3, 444, 449–451
Searle, 698, 704, 705
Sechservektor, 289, 491, 496
66, 665
sed, 147, 172, 739, 741
Sedimentation, 327
Seele, 129, 157, 430, 527, 690, 693, 696, 698, 699, 705
Segeln, 297, 424, 586

segmentierungsfreieMethode, 167
Sehen, 42, 502, 570, 578, 703
Seidenstraße, 19
Seife, 52
Seifenhaut, 374
Seilkraft, 343
Seilzugverfahren, 211
S^1, 179, 360, 449, 459, 460
SEIR-Modell, 303
Seismische Wellen, 592
Seismologie, 537
Seitenband-Effekt, 96, 104
Sektorformel, 188, 245, 315, 353, 376
Sektorkopplung, 5
Selbst, 698
    adjungiert, 622
    Ähnlichkeit, 52
    Analyse, 30
    Beobachtung, 30
    Bild, 697, 700
    Energie, 673
    Induktivität, 561
    Information, 122
    kontrolle, 696
    Modell, 735
    Organisation, 48, 51, 392, 393, 401, 524, 532
    reproduktions-Code, 742
    überwachung, 696
    wirksamkeitserwartung, 696
Selbstenergie, 482, 539, 625, 673, 719
Selbstinduktion, 561, 718, 720
Selbstorganisation, 402
self-reproducing automata, 535
Semantik, 61, 64, 128, 153, 157, 160
Semi
    definit, 225
    Invarianten, 100
    Markov-Prozess, 99, 169
semilinear, 622
Semipalatinsk, 666
Semiten, 750
Sensitivität, 94, 111
sensor fusion, 231
Sensoren, 735
sentropenexponent, 104
separabel, 646
Separabilitätsprinzip, 555
Separationsansatz, 580, 584, 591
    JHG, 361
Separationsmethode, 592
seq-Funktion, 127
sequency theory, 111
sequenz alignment, 396
Sequenzen gerichter Kanten, 648
Serendipität, 734
serverfrei, 730
Sesquilinearform, 131, 224
Sethe, 765
SETI, 33, 79
Sexl, 119
Sezessionskrieg, 768
Shape Dynamics, 119
sharp, 150
sheaf theory, 200
Shebang, 150
shell, 147, 729
    Kommandos in Python, 151
    ode solver, 306
    Programmierung, 147
    Sprachen, 147
    Tensor, 266
shell ?, 147
Sherman-Morrison-Formel, 220
Shock Wave Format, 743
shot noise, 116, 403, 538
shuffle, 94
Shut up and calculate, 627
Sichtweite, 229
Sieb des Eratosthenes, 106
7z e, 737
Siegessäule, 768
Sierpinski-Dreieck, 123
Sievert, 669
Sievert Sv Äquivalentdosis, 669
σ-Modell, 678
σ-Algebra, 97, 98
sigmoidal, 533
Signal
    Bedeutung, 166
    Computer, 156
    Information, 162, 164, 165
    Kommunikation, 155
    Morse, 169
    per Filter, 383
    UNIX, 156
Signal vs Bedeutung, 153, 155, 156
Signal vs Rauschen, 73, 89, 96
Signalklasse ist Zeichen, 153
Signalübertragung, 155, 162, 165
Signatur, 489, 490, 505, 563
Signifikanz, 94, 111
Signifikanzniveau, 90

Silene, 762
SIM-Lock, 722
SIMD, 154
Simplex
    statt Würfel, 522
    Volumen, 286
Simplices, 286
Simpson-Regel, 189
simulated annealing, 514, 533, 724
Simulation, 71, 535
sin (90+x) = +cos x, 440
sin x, 582
Singer, 295
Singularitäten, 42, 48, 206, 250
Singulärwerte, 406, 407
Sinn
    der Welt, 731
    des Lebens, 31, 32
Sinn und Wirklichkeit, 47
Sinne des Menschen, 708
Sinnesphysiologie, 154, 709
Sinnfrage, 60
Sinnsprüche, 701
sinus, 103
Sinus-Dichte, 116
Sinus-Gordon-Gl, 417
Sinus-Werte, 199, 381
Sinuskurvenraum, 284
Sirius, 606, 607
Skalar, 227
skalare Funktion, 238
Skalarkrümmung, 480
Skalarprodukt
    anti-kommutativ, 199
    Arbeit, 200
    Autokorrelationsfunktion, 197
    Bilinearform, 224, 225
    Definition, 225
    Deutung, 136
    duale Basis, 264
    Dualraum, 264, 265
    Ebenendefinition, 200
    Einheitskreise, 224
    Euklidisches, 224
    freier Fall, 475
    Hilbert-Raum, 138
    Jacobimatrix, 224
    Karussel, 473, 474
    komplexer Vektoren, 199
    komplexer Zahlen, 198
    Korrelationskoeffizient, 136
    Metrik, 473, 474
    metrischer Raum, 287
    Minkowski-Raum, 489
    nicht-euklidische Metrik, 259
    potenzielle Energie, 544
    pseudo-euklidisch, 225, 489
    Pythagoras, 229
    Schwerkraft, 475
    Vierer-Vektor, 486
    Winkel, 200
    Zufallsvariablen, 76
Skalarprodukt per Metrik, 225
Skalen, 172
    charakteristische, 52, 310, 340, 524, 538, 578
    Multi, 52
Skalen-Exponent, 115
Skalenfaktor
    Ableitungen, 240
    Abstand/Länge, 188, 240
    δ-Funktion, 548
    Expansionsfaktor, 467, 475
    Oberflächenintegral, 546
    Ortsvektor, 232
    Rotverschiebung, 478
skalenfrei, 52, 538
skalenfreie Netzwerke, 53
Skaleninvarianz, 538, 570
Skalentransformation, 310
Skalenunabhängigkeit, 538
Skalierungs-Exponent, 122, 174, 310, 408, 523, 537, 570, 589
Skifahrerparadox, 497
Skineffekt, 566
Skinner, 42, 735
skleronom, 349
Slater-Determinante, 217, 218, 269, 629, 639, 681
Slawen, 756
Slawenlied, 771
Slides, 743
    LaTeX-Templates, 738
Slides per markdown, 737
slideshare.net, 742
Slipher und Expansion 1913, 472
small world network, 46
small-world, 53
Smartphone, 12, 26, 48, 60, 63, 101, 154, 155, 755
    Ertüchtigung, 722
    Verbraucher, 154
SMD, 719
Smoluchowski, 20, 390
Smooth Sobolev Besov, 138

Snapchat, 63
Snare-Drum, 592
Snellius, 573
SNIa Distanz-Indikator, 500
Snowden, 734
SNT = Schaltnetzteil, 721
SO(n)
    Algebren, 451
    Anzahl Freiheitsgrade, 441
    Darsteller, 455, 458
    Matrixdarsteller-Eigenschaften, 451
    nicht simple connected, 450
    weg-zusammenhängend, 450
SO(2) Tangenzialvektor, 179, 446
SO(3)
    Darstellungsmatrix, 439
    Inhaltsproblem, 113, 178
    Lie-Gruppe, 446
    Matrix-Lie-Gruppe, 446
    SU(2), 444
    Zentralsymmetrie, Erhaltungssätze, 353
SO(3) und SU(2), 451
SO(4) Pauli H_2^+, 445
SO(8) Supergravity, 685
Sobibor, 681
Sobolev-Raum, 137, 138, 211
SOC, 145, 537
Soddy, 387, 652, 653
    Wells, 652
Sofortkernstrahlung, 654
Soft matter, 524
Softrobotik, 733
solar-terrestrische Physik, 576
Solarkonstante, 507
Solarmodul, 7, 506, 507
Solarmodul 50W, 5, 507
Solarmodul Grenze, 5, 300
Solarzelle, 487, 506, 507
solid angle, 276
Solitonen, 401, 403, 417
    Intro, 593
    Numerik, 593
Solschenizyn, 665
Somary, 31
Sommerfeld'sche Polynom-Methode, 582
Sonderzeichen per Unicode, 147
Sonne
    Durchmesser, 260
Sonnenenergie, 153
Sonnenenergiequelle, 511
Sonnenflecken, 578
Sonnenkorona, 503, 589
Sonnenlicht, 503
Sonnenlichtenergie, 5, 300
Sonnenphysik, 503
Sonnensegel, 259
Sonnenstein, 539
Sonnenwind, 259, 576, 577, 590
Sophie Charlotte, 758
Source theory, 676
Sowjet-Paradies, 655, 695, 747
Soylent green, 47
soziale
    Beziehungen, 701
    Kompetenz, 701
soziale Dilemmas, 43
Soziale Intelligenz, 708
soziale Kompetenz, 700
soziale Medien, 658
Sozialgesetze, 31
Sozialisation, 709
Sozialismus geht nicht, 44, 60, 296
Sozialismus praktisch nicht möglich, 296
Sozialpsychologie, 713
Spaltennummer, 261
Spaltensummennorm, 1-Norm, 221
spaltenweise zusammenfügen, 156
Spaltfunktion, 385
Spanische Grippe, 750
Spannung Definition, 316
Spannungsmessung, 719
Spannungswandler, 507
Sparsamkeit, 47
Spat, 235
Spatprodukt, 216, 217
Spaßbad, 247
SPDE
    Intro, 600
Spearman Rank Correlation, 70
Spectral methods, 599
Spectrum AdW, 635
Speed, 228, 247
Spektral
    Analyse, 102
    Analyse Geophysik, 102
    Darstellung
        deterministischer Signale, 102
        gedämpfter Oszillator, 383
    Index, 114
    Norm, 221
    Radius, 221, 223
    Schätzer, 107

Verteilung Hyperwürfel, 432
Spektralanalyse, 607
Spektraldarstellungs-App, 101
spektrale Auflösung, 105, 107
Spektralklassen, 607
Spektralradius, 221, 223
Spektroskopie, 645
Spektrum
Matrix, 223
Spencer-Brown, 127, 198
Sperrgebiet, 561
Sperrgebiete, 655
Sperrungsrechteck, 337
Spezialisierungszwang, 30
Spezialist, 365
Spezielle Funktionen, 151
spezielle Lösung beim Schwinger, 325
Spezifität, 94, 111
Sphäre Definition, 360
S^1, 179, 360, 449, 459, 460
S^2, 286, 581
S^3, 444, 449–451
spherical data, 78
Sphinx, 765
Spickzettel, 180
Spiegel
Ladung Kugel, 556
Ladung Methode, 555
Neuron, 703
Symmetrie, 289
Symmetrie, nichteuklidische, 429
Spiegelung an der Winkelhalbierenden, 182
Spiegelungsvorschrift, relativistisch falsch, 427
Spiel, 43–45, 57, 70, 73, 132, 134, 147, 538, 699, 706
Spiele, mathematische, 68
Spielereien, physikalische, 232
Spieltheorie, 43, 44
Spike-Sequenzen, 648
Spin, 413, 668
Spin aus Kreistrom, 668
Spin-Bahn-Kopplung, 641
Spinor, 267, 268, 271, 462, 463, 643, 686
Drehung, 267
imaginäre Einheit, 267
Kalkül, 268
Spinoza, 32
Spinthariskop, 63
Spiralen, 131, 246
Spiralwellen, 203
Spiritualität, 531
Spivak, 179, 180, 183, 254, 256, 292, 297, 333, 349, 357, 451
Spline
Funktion, 85, 139, 140
smoothing, 140
Splitting-Verfahren, 214
spontane Emission, 644
spontane Symmetriebrechung, 680
Sport, 297
Sprachabtastung, 168
Sprache
deutsche, 160
Sprachgeschichte, 150
Sprachlehre, 160
Sprachproduktion, 713
Sprachverarbeitung, 42, 160
Sprachwissenschaft, 160
Sprechakte, 41, 145, 704, 731, 735
Sprechapraxie, 166
Spreizung, 239, 584
Sprungstelle, 383
Sprungverteilung, 193
spukhafte Fernwirkung, 632
Spule, 561, 720
fliegende, 497
Magnetfeld, 290
Spule lange, 561
Spur der Jacobi-Matrix, 320, 396
Spur-Erhaltung, 103, 442
Spurklasseoperator, 622
Sputnik-Schock, 14, 655, 755
Sputnik-Schock und Mengenlehre, 126
SRAM, 723
SRT
Abstand, 225
Addition, 401, 413
Antiteilchen u Spin, 413
axial vs polare Vektoren, 289
Beobachten/Messen, 410
Beobachter-Problem, 622
Beobachtungstransformation, 466
Boost, 489
Einheitskreis Hyperbel, 140
Energie, 486
Feldmasse, 673
Feynman-Graphen, 538
Goldstein, 333
in Medien, 487
Intro, 499
Intro per Geometrie, 227
Intro per passiver Trafo, 268

Irrtum, 416
klass Mech, 298
Klein-Gordon-Gleichung, 487
Konsistenz der Messungen, 417
Konstanz der Eigenzeit, 486
Längenkontraktion, 417, 466
Lehren a la Bell, 416, 497
Liebscher, 418
Lorentz-Transformation, 436, 489
Masse und Energie, 499
Metrik, 486, 490
Minuszeichen, 566
Photon, 488
QM Dirac, 40
Signatur, 490, 563
Tensoren, 499
Umverteilung raumzeitlicher Komp, 413
unitären Transformation, 435
Unterricht, 417, 497
Vektor, 227, 228
Verräumlichung, 413
visuell, 466
Wirkung als Konstante, 363
SS, 665, 771
SSE, 154
ssh, 743
SSL, 742
Staat, 60
Staatsbibliothek, 700
Staatsstreich, 767
Stab-Potenzial, 297
stabile Prozesse, 91
Stabilisator, 455
Stabilitäts
Analyse, 321
Dreieck, 108
Stabilitätstheorie
Floquet-Theorie, 398
Fluide, 587
lineare, 398
Ljapunow, 398
Normalformen, 401
Stabmagnet, 567, 568
Stahlhelm, 19
Stalin, 17
Stalingrad, 17, 18
Stallman, 148
Stammesgeheimnisse, 30
Standard-Modell, 260, 672, 676, 680, 684
Kosmologie, 469, 478, 504, 677
Teilchenphysik, 677, 688
Standardabweichung, 82
Standardbasis, 256, 290
Stände, 748
Stanner, 615
starke Konvergenz, 139
starre Rotation, 230, 234, 240, 504, 568
starre Rotation Bahngeschwindigkeit, 212
Startparameter-Wahl, 168
stationär, 116
Stationarität
Brown'sche Bewegung, 108
Ergodizität, 116, 192
Konvergenz, 108
Virialsatz, 340
Wirkung, 370
stationäre Lösung, 302
stationärer Zustand, 516
Statistik ohne Zeitentwicklung, 387, 513, 515
Statistikkurs, 71
statistische Feldtheorie, 626
statistische Mechanik
Schlüssel-Idee, 514
STED, 571
steife ODEs, 308
Stellarator, 666
Stellglied, 167
Sterben, 696
stereografische Projektion, 251
Stern
Beobachtung, 501
Bildung, 470
Distanzen, 501
Stern, Fritz, 768, 769
Stern-Gerlach-Experimen, 668, 715
Sternabbildung, 84
Sternatmophären, 511
Sternatmosphären, 640
Sterne kindgerecht, 501
Sternenergie, 511
Sternentwicklung, 640
Sternexplosion, 337
Sternkoordinaten, 84
Sternmaterie, 511
Sternphysik, 511
Sternschnuppen, 577
Sternspektren, 511
Sternwarte Bbg, 295, 502, 503
Sternwarten, 502
Stetigkeit, 137
Steuben, 764
Stichprobe, 73, 77, 82, 88, 91, 95, 105, 144, 169, 194

Stick-Slip-Reibung, 301
Stickstoff, 577
Stimme, 101
Stinger, 328, 659
Stirling-Formel, 214
Stitzer, 653
STL, 728
Stochastic simulation, 389, 525
stochastic systems, 72, 73, 98, 103, 117, 142, 167, 377, 388, 389, 392, 601
stochastische
  Differenzialgleichungen, 389
  Integration, 118, 389
  Prozesse, 76
  Resonanz, 405
Stöckel, 295
Stoffmenge, 716
Stokes'scher Integralsatz
  allgemeiner, 242, 275
Stokes-Reibung, 301
Stonescher Satz, 622
Störfall, 669
STORM, 571
Störungen psychische, 698
Störungstheorie, 323, 377, 378
  Streuung, 618
  zeitabhängige, 619
Stoß, 299
Straf-Term, 143, 347, 365
Strahlenarten, 669
Strahlenbüschel = Radspeichen, 438
Strahlendosis, 11, 669
Strahlenoptik, 371, 373
  Lagrange-Funktion, 374
strahlenoptische Impulse, 374
strahlenoptische Kräfte, 374
Strahlenschutz, 4, 296, 654, 669, 670
Strahlungsdruck, 259
Strahlungsdämpfung, 383, 644
Strahlungsgesetz, 82, 186
Strahlungsgesetz geometrische Reihe, 82
Strahlungskorrekturen, 683
Strandbeest, 51
strange nonchaotic attractors, 396
Stratonovich, 78, 96, 114, 167, 389, 390
Straumann, 288, 291, 292
Streamfunction, 234
Streifeninhalt, 188
Streifensumme, 188
Stress, 696
Streu-Matrix, 63
Streu-Matrix-Theorie, 580, 618, 620
Streudiagramm, 84, 94, 143, 391
Streulänge, 619
Streuphase, 619
Streuung, 82, 619
  Tunneleffekt, 614
Strigtheorie
  Geomtrie, 685, 686
String
  Theorie, 205, 454, 685–687
  Theorie Geomtrie, 671
  Theorie und Bayes, 39
  Weltfläche, 686
Strings, 686
Strom, 4, 6
  Blatt, 545
  Dichte, 564, 567
    konduktive, 310
    konvektive, 310
  Dichte homogene, 566
  Dichte Skineffekt, 566
  Dichte/Fluss, 244, 311, 398, 590, 596
  Faden, 235, 241
  Funktion, 234
  Linie, 234, 586, 601
  Röhre, 586
  Schicht, 545
  Stärke, 244
Strom pro , 4
Strommarktdaten, 8
Stromrichter, 506
Strontium, 4
Strophor, 270
Struktur, 698
  Funktion, 121
  Konstanten, 445, 446
Struktureller Realismus, 35, 506
Struve, 503
Stuart-Landau-Oszillator, 202, 203
Student mathematical library, 25
Stufe, Rang, Tensor, 567
Stufenfunktion, 208
Sturm-Liouville-Typ, 582
SU(2) und SO(3), 451
SU(5) GUT, 685
Subdifferenzial, 137
Subdiffusion, 193
Subharmonische, 103
Substanz, 56, 129, 478, 506, 705
Substanzproblem, 386
Substitution

Transformationssatz, 714
Substitutionsregel, 312
Suchmaschinen, 26, 175, 755
Suchverfahren, stochastische, 177
Suchverhalten, 92
Summe natürlicher Zahlen, 190
Summen
Formeln, 103
Konvention, 490, 491
Norm, 221
Sundermannschen Lösung, 392
Sunniten Schiiten, 750
Sunyaev-Zeldovich-Effekt, 471
sup, Supremum, 288
Super
Geometrie, 271
Gravitation, 685
Positionsprinzip, 328, 622
String Theorie, 686
Symmetrie, 685, 686
Symmetrie-Algebra, 686
superconducting circuits, 644
superkommutativ, 271
Superkondensatoren, 719
Supernovae, 469, 504
Superposition Gravitation, 333
Superpotenzial, 616
Supersymmetrie
Intro, 685, 686
superuser zu root, 738
Supervised Classification and Regression, 78
supervised learning, 396, 532
Support Vector Machine, 78, 144, 532, 533
Supra
Fluidität, 476, 610, 638, 640, 641
Leitung, 568, 606, 631, 638
Supraleitung, 638
Supremum, 288
Surface of section method, 318
surjektiv, 131
Survival Manual, 47
Survivalguide, 660
Survivalwissen, 693
SUSY
Alternativen, 687
Intro, 686
M-Theorien, 687
N=4, 685
Stringtheorie, 686
Suszeptibilität
elektrische, 519, 544
magnetische, 560, 568
Sv Sievert Äquivalentdosis, 669
Sv Svedberg Sedimentationsrate, 327
Sv Sverdrup Volumenstrom, 733
SVD, 95, 406, 407
Svedberg Sv Sedimentationsrate, 327
Sverdrup Sv Volumenstrom, 733
svn, 743
book, 743
Switch, 743
SXS, 508
Symbol, 2, 43, 64, 150, 158, 159, 163, 164, 169, 226, 457, 699
Symbol und Wirklichkeit, 66
symbolische Mathematik, 180
Symbolsequenzen, 125
Symmetrie, 56, 69, 169, 338, 452, 551, 651
äußere, 684
Brechung, 678
CPT, 685
Differenzialgleichungen, 459
dynamische Systeme, 464
Erhaltungsgröe, 352
Gruppe, 352
GUT, 675
innere, 684
Intro, 452, 453
Ontologie, 626
Phasenübergang, 522
PT, 443, 455
Super, 685
Symmetriebrechung, 678
Symmetriebrechung spontane, 680
symmetrische Gruppe, 271, 452, 457
Sympathie, 175
symplektische
Form, 254
Geometrie, 321, 349
Integration, 308
Schreibweise, 356
Umdeutung, 358
synaptic, 739
Synchronisation, 9, 203
Adler-Gleichung, 202
Definition, 403
gekoppelte Oszillatoren, 202
Intro, 202, 203, 403
Netzwerk, 202
Neuroscience, 600
Synchronisation auf Netzwerken, 9
Synchrotronstrahlung, 320, 571, 689

Syndikalismus, 662
Synergetik, 402, 586
synoptischen Meteorologie, 604
Syntax-Theorie, 169
synthetische
    Geometrie, 436
synthetische Formel, 91
synthetisches Urteil a priori, 712
system categories, 53
Systemtheorie, 47, 57, 74, 389, 395
Szilard, 31, 517
S^2, 286, 581
Säuberung = Tschistka, 664

T-Zellen, 526
T4, 667, 682
Tabu, 288
Tachyon, 672, 686
Tafelwerk, 337
Tag, 41
Tageshimmel, 618
Taleb, 49, 91
Talpunkt, 252
Tamerlan, 664, 764
Tangenzialraum, 245, 350, 490
tar, 741
tar cvfz Zieldatei.tgz *, 156
TAR-Modell:, 397
Tarski, 129
Tastenbelegung, 147
Tastenkürzel, 147
Tatsachen und Konzepte, 59
Taubenheim, 70, 101, 576
Tautochrone, 191
Tautochrone Zykloide Brachistochrone, 374
Tautologie, 128
Taylor, Alan, 18, 748, 769
Taylor-Couette-Strömung, 605
Taylor-Polynom, 185
    Hamilton-Prinzip, 369
    Idee Polynom, 185
    Katastrophen, 401
    Linearisierung, 140
    Newton-Raphson-Verfahren, 226
    Wurzel ziehen, 134
Taylor-Proudman-Theorem, 603
Taylor-Wirbel, 587, 605
Taylorreihe
    mehrdimensional, 185
    Operatorform, 185
TBTF-Problem, 470
Tcl, 737
Teaching relativity, 479
Teams, 742
Technik, 510
Technikgeschichte, 29, 327
Technologie, 42
TEE, 167
Teewasser, 5, 507
Teilbarkeitregeln, 132
Teilchen, 540, 625, 670, 671, 698
Teilchen als Felder, 625
Teilchenbeschleuniger, 676
Teilchenkonzept, 23, 425, 481, 482, 625, 698, 716
Teilchenphysik Geschichten, 479, 624, 671
Teilchensysteme, 340
teilerfremd, 146
Teilraumtopologie, 280
Telefonvermittlung, 734
teleparallel, 417
Teller, 10, 47, 56, 63, 386, 608, 628, 662
Telomer, 529
Temperatur, 509, 515
    negative, 515
Temperatur gaskinetisch, 516
Temperaturmessung, 503, 515
temperierte Distributionen, 368
Template, 728
Tensor
    Affinor, 262
    Akinitoren, 270
    Algebra, 266, 447
    axialer Vektor, 264
    Basiswechsel, 265
    Beispiele, 257, 269
    Boseck, 272
    Cauchy-Green, 405
    Definition, 240, 263–265, 267, 272
    direktes Produkt, 269
    dritter Stufe, 217
    Dualraum, 265
    Dyade, 262
    Eigenwerte, 257
    elementar, 270
    Geschichte des Begriffs, 257
    Hodge-Stern-Operator, 264
    Holor, 270
    Idee, 266, 269
    Indexrechnung, 267
    Intro, 584
    isomerer, 264
    Kalkül, 268

Komponenten statt Koordinaten, 265
Koordinaten-Differenziale, 272
Kovarianz, 268
Linearform, 266
metrischer, 224, 288
Motivation, 257, 268
multilineare Abbildung, 262
Netzwerk, 636
Ortsvektor, 272
Produkt, 262, 264, 273
Räume, 269
Rechnung, 268
Symmetrien, 535
Verschränkung, 269
Woldemar Voigt, 488
Tera, 723
Term, 158
Term, niedrigster nicht-trivialer, 241
Terminal Ctrl-Alt-T, 729
Terminator, 42, 150
Termux, 741, 743
Termvergleich, 229
Tessellation, 500, 539
Tesserakt, 430
Test
Funktion, 139
Größe, 88
Permutations, 94
Statistik, 94
Testfunktion, 139, 368
Testfunktionen, 365
Tetraden, 474
Tetraeder
Drehungen, 457
Ecken, Fl, Kanten, 286
Simplex, 286
Volumen, 195, 211, 286
Tetraederzahlen, 87
Tetrode, 73
Teufel, 695
Teufelsberg, 15
texlive-full, 738
Texterkennung, 736
Textlinguistik, 160
Thales, 229
Theben, 761
Theodizee, 129, 699
Kontingenzbewältigung, 57
Theophane, 761
Theorem von
Liouville, 311
Theorema egregium, 249
Theorema elegantissimum, 286
Theoret Physiker, 294
Therapie personalisierte, 529
thermische
Diffusivität, 605
Wellenlänge, 520
Wellenlänge, 639
Thermodynamik, 3
Ensembles, 520
technische, 517
thermodynamischer Grenzwert, 118
thermodynamisches Gleichgewicht, 516
Theseus, 749, 760
Thirring, 279
p-Form, 293
Thomas
Fermi-Modell, 610
Präzession, 668
Rotation, 234
Thomson-Streuung, 618
Thue-Morse-Folge, 125
Tiefs, 586, 604
Tiefs/Hochs, 332
Tieftemperaturphysik, 522, 638
Tiergarten, 667, 765, 768, 770
Timofejew-Ressowski, 53
tipping point, 323
TIRA, 15
Tit for Tat, 44
TM-Moden, 620
Tod, 693, 702
Todefurcht, 430
Todesstaub, 4, 9, 12, 657
Todsünden, 693
Todt, 747
TOE, 686, 687
Toepfer, 295
Tomographie, 211, 531
Ton, 104
Tonleiter, 125
Tontechnik, 725
Topologie, 30, 283, 288
algebraische, 252, 282, 288
algebraische Idee, 282
Anwendungen, 184
Definition, 283
Eichfeld, 610
Gruppen, 450
induzierte, 139
Intro, 252, 279, 281–283, 285, 287, 288

kombinatorische, 281
Mengefilter, 184
mengentheoretische, 252, 280
Physik, 201, 227, 250, 257, 451, 687
Zöpfe, 201
topologisch unterscheidbar, 280
topologische Defekte, 417
topologische Eigenschaften, 285
topologische Entropie, 169
topologische Isolatoren, 641
topologischer Raumzusammenhängend, 284
Torsion, 247
Torsion als em Feld, 278
Torus
Bewegung, 119
Definition, 360
quasiperiodische Bewegung, 120
Trajektorien, 360
T^1, 119
T^2, 119, 120, 360
Toruskoordinaten, 232
totales Differential, 2
totales Differential Poissonklammer, 352
totales Differenzial, 375
äußere Ableitung, 245
Ableitungsbegriff, 350
Def, 350
Definition, 178
Dido-Problem, 375
Differenzialform, 188, 293
Federschwinger, 351
Gradient, 238
Intro, 245, 350
Jacobi-Matrix, 188
Legendre-Transformation, 382
lineare Abbildung, 350
Linearisierung, 140, 181
Mikroskop, 178
Nebenbedingungen, 350
Taylor-Entwicklung, 369
Variation, 350
Vektorprodukt, 188
Totalreflexion, 574
Touchscreen, 155
Trac, 738
Tracking Weltraumkörper, 506
Tradition, 692, 694, 746
Traffic Flow, 310, 589
tragedy of the commons, 43
Trägheit
bei Weber und Riemann, 331
Euler-Zahl, 605
Liebscher, 330, 651
Mach'sches Prinzip, 330, 412, 429, 477, 483, 651
Registrierkurven, 436
Reynoldszahl, 603
Rossby-Zahl, 605
Scheinkraft, 410
Todsünde, 693
Treder, 278, 429, 436
Trägheits
Gesetz, 278, 330, 412, 429, 436
Gesetz Christoffelsymbole, 319, 331
Induktion, 331
Moment, 150, 258
Moment Beispiele, 257
Periode, 602
Tensor
Definition, 212, 257
Drehimpuls, 261
Modellfehler, 150
Multilinearform, 258, 261
Steiner, 257
Tensor per Dyade, 263
Trajektorie, 99, 169, 321, 323
Trakl, 692
Traktrix, 324, 325
Transfer-Entropie, 122
Transformation
affine, 86
homöomorphe, 285
kanonische, 353
krümmungstreu, 354
projektive, 285
unitäre, 435
verbiegungsfrei, 354
winkeltreu, 354
zerreißungsfreie, 354
Transformationen kanon unitär proj, 354
Transformationsformel, 312
Transformationssatz
Dichten, 312
Transformationssatz = Substitution, 714
Transformationstypen, 354
Transformationsverhalten $\vec{E}$, $\vec{B}$, 496
Transformator, 718
Transhumanismus, 41, 42, 48, 63
Transinformation, 122
Transistor, 153, 154, 722, 723
Transition-Matrix, 169
Transkription, 529
Translation, 529

Translationsoperator, 185
Transmutation, 668
Transportgleichung, 590
Transportproblem, 211
Transposition, 465
Transsubstantiation, 34, 752
transversaler homokliner Punkt, 392
transzendente Zahl, 132, 134
Trapez-Regel, 189
trapped ions, 644
Trauer, 711
Traumdeutung, 703
traveling waves, 589
Traversierung, 106, 728
Treder, 277, 390, 477, 503, 675
    Weltvolumen, 188
Treder Porträt, 22
Treibstoffmangel, 12
Treibstoffverbrauch, 7
Trenchard-Doktrin, 10, 13, 653
Trennung der Veränderlichen, 714
Trennungs-Axiom, 281
Treumann, 576
Tribologie, 320
Trick, 68, 189
Triebkraft, 527
Trigonometrie, 63
Trinity-Test, 652
Trioden-Schwingkreis, 377, 755
Triplet State, 628
Tritium, 668
Trivektor, 271
trivial, 129
Trivialisieren, 51
Trivialisierung, 179, 254
Trojanischen Krieg, 761
Tropen, 539
tropische Geometrie, 140
TRR, 228
truncation error, 174
Trust-Region-Methode, 86
Tsallis-Entropie, 122
Tschebyschev-Approximation, 140
Tscheka, 758
Tschernischewski, 437
Tschernobyl, 11, 18, 662, 663, 669, 747
Tschistka = Säuberung, 664
TTR, 228
Tunneleffekt, 464, 580, 715
    Mehrfachstreuung, 614
Turbulenz, 76, 202, 400, 402, 574, 579, 586, 587, 589, 599, 713
Turbulenz und Navier-Stokes, 590
Turing, 33, 89, 154, 173
    fehlerfrei vs intelligent, 173
    Instabilität, 600
    Test, 42
Turm von Babel, 61
24/7, 746
Twistors, 268
Two-level systems, 644
Type-2 Theorie, 173
TYPO3, 738

überabzählbar
    Cantor-Menge, 124, 131, 133, 134
    irrationale Zahlen, 132, 134
    Richtungen, 180
überdämpfter Schwinger, 108, 203, 380
Überdeckungsdimension, 280
Übergangs
    Matrix, 99, 169
    Wahrscheinlichkeit, 169
Überlagerungsgruppe, 444
Überleben in der Wüste, 717
Überschreitungswahrscheinlichkeit, 90
Übungsblatt, 714
Übungsbücher, 194, 303
Ubuntu, 148, 738
    DVD doppeln brasero, 736
    DVD player Libdvdcss, 736
    find -name, 736
    Movie drehen awidemux, 736
    Movies auf DVD devede, 736
    temp Files löschen BleachBit, 736
    temp Files löschen fslint, 736
    updates, 173
    Version, 736
U-Funktion, 116, 567
Uhr, 376
    optische, 433
Uhren-Arithmetik, 133, 456
Ukraine, 11, 14, 17, 20, 656, 657, 659
Ukrainekrieg, 9, 14, 659
Ulam, 115
Ultrakondensatoren, 719
Ultraviolett-Katastrophe, 617
Umbennenungs-Tools, 196
umbilic set, 401
umbral Index = Dummyindex, 491
Umgebungsdefinition

Ableitung, 180
Stetigkeit, 137
Umkehr-Brille, 711
Umkehrfunktion, 76, 183
Umkehrpunkte, 319
UML, 40
Umsiedler, 665
Umstellprobe, 170
Umtauschparadoxon, 71
UMTS, 725
Umweg mit i zielführend, 140
Umweltchemie, 693
Umweltschutz, 693
Unabhängigkeit
lineare, 213, 217
lineare und Abbildung, 213
Matroid, 213
Nullvektor, 213
Unbestimmtheitsrelation, 632
Unbeweisbarkeits-Paradoxon, 62
unendlich, 132, 281
∞-Norm, 221
unendliche Beiträge, 683
unendliche Teilbarkeit, 117
Unentscheidbarkeit, 62
ungelöste Fragen, 713
Ungleichheit Ökonomie, 47
unicode
Block, 151
tool, 153
unierte Kirche, 752
unifying themes, 52
unimodular, 233, 451
unimodulare Zahlen, 198
unitär, 443
falls hermitesch, 444, 455
unitäre
Gruppe, 450, 455
Matrix, 443, 458
Matrizen, 454
Symmetrie, 443
Transformation, 220, 435, 447, 451, 455
unitärer
Raum, 264, 270, 622
Unitätsproblem, 432
Univention, 742
Universalienstreit, 69, 715
Universalwissen, 755
Universität, Ursprung, 65
Universum
für alle, 499
Langzeitverhalten, 468
Unix-Kommandos, 156, 741
Unmögliches, 69
Unmündigkeit, 757
Unparticle physics, 633
Unschärferelation
Lebensdauer, 383
nichtkommutative Algebra, 620
Phasenraumzelle, 485
Streurelation, 620
Unsterblichkeit, 24, 127, 430, 705, 749, 755
Unstetigkeit, 372
unsupervised learning, 396, 532
Unterraumtopologie, 280
Unterschleif, 180
Unumkehrbarkeit, 298
Ununterscheidbarkeit, 639
Unvollständigkeit, 62
Unwahrscheinlichkeitsprinzip, 79
Unwissenheit, 32, 49, 669, 704
UQ, 77
Uran
Brenner, 666
Experimentierkasten, 63
Projekt, 667
Zerfall, 668
Urknall, 469, 473, 480, 482, 484, 504, 650, 675, 715
vor, 469
URL-Metriken, 746
Ursache, ohne, 621
USB
5 V, 507
Ladegerät, 507
mounten, 741
Stick, 729
sync, 737
UTF-8, 151, 737

V2, 327
Vakuumdichteparameter, 467
Vakuumpumpen, 642
Valentiner, 176, 218, 235, 238, 275
Valenz Holor, 270
Valenzbindungstheorie, 611, 612
Valenzlehre, 612
van der Pol'sche Gleichung, 377
van der Pol-Oszillator, 104, 376, 392, 399
van der Waals
Kraft, 320
Phasenübergang, 522
Virialentwicklung, 515

van Vleck, 716
Variable, 70
Varianz, 82, 86
Schätzung, 174
Variation der Konstanten, 326, 339, 379, 714
Beispiel, 302, 379, 714
Variation vs totales Differenzial, 350
Variations
Ableitung, 344, 541, 542
Koeffizient, 192, 320
Prinzip, 321
Rechnung, 371
Aufgabenbuch, 376
Entropie, 376
Felder, 543
Feldtheorie, 541
Geschichte, 372, 375
HMO, 214
Idee, 372, 375
Interpolation, 79
Konvexität, 603
Kreis, 376
Normal-Gleichungen, 86
Spline, 140
Variationsgleichung, 405
Variationsrechnung
dynamische Programmierung, 724
Verteilungsfunktion, 376
Variogramm, 79
Veblen Invariants, 291
Vektor, 227
Algebra, 226
Analysis Intro, 557
axialer, 264, 289, 290
Bündel, 254
Felder, 194, 228, 314
Felder python, 272
Felder, typische, 234
freier, 289
Funktion, 228
gebundener, 289
Gradient, 181, 233
Komponenten, 232
Koordinaten, 232
linienflüchtiger, 289
naiv, 227
Plangröße, 289
polarer, 264, 289
Potenzial, 496, 499, 558, 562, 563, 568
Produkt, 230
als Drehung, 441
Definition, 231
Produkt als antisymm Tensor, 264
Produkt als Kommutator, 446
Produkt als Parallelogramm, 188, 230, 251
Produkt als Tensor, 261
Produkt als Tensorprodukt, 264
Produkt Deutung, 230
Produkt hat Nullteiler, 456
Produkt im $\mathbb{R}^3$, 230
Produkt im $\mathbb{R}^n$, 231
Pseudo, 264
Quantisierung, 168
Raum, 266
Verschiebungs-, 227
Zerlegung, 228
Vektoranalysis
Deutung, 236
Intro, 218, 236, 243, 270, 557
Vektorfeld per Geogebra, 274
Vektorfeld per Mathematica, 274
Vektorfeld per Python, 273
Vektorfelder, 228
Vektorkopplung, 453
Vektorpotential
Kreisstrom, 560
molekular, 560
qm messbar, 609
Sperrgebiet, 561
Vektorprodukt verschleiert, 289, 491, 496
Vektorraum, 250
Vektorraum Lie-Algebra, 230
Vektorraum-Bündel
Beispiel Kreislinie, 179
Intro, 254, 257
velocity, 228, 247
Venus Planet, 575
Verachtung, 697
verallgemeinerte Koordinate, 349
verallgemeinerte Kraft, 521
verallgemeinerte Verschiebung, 521
Verantwortung, 709
Veraussagbarkeitssieb, 614
Verbatim, 535
Verbrennung, 668
Verdampfen Schwarzer Löcher, 612
Verdenken, 30
Verdopplungsformel, 187
Verdünnung Volumenprozent, 590
Verehrung, 20, 390
Vereindeutigung, 8
Vereinheitlichung Feldtheorie, 430–432, 474, 620, 672

Vereinheitlichung Kräfte, 633
Vereinheitlichung von Mechanik und Elektrodyn, 415
Verfahrensfehler, 155
Verformelung, 416
Vergangenheit, 381
Verhalten kollektives, 695
Verhaltensbeobachtung, 694
Verhaltensbiologie, 694
Verhaltensdiagnostik, 698
Verhaltenstherapie, 694
Verheftung, 288
Verkehrsfluss, 589
Verkettung, 131
Verlinkungsgrad, 538
vernachlässigbar, 229
Vernetzungsgrad, 46
Vernetzungssymbol, 244
Vernichtungsoperator, 447, 448
Vernichtungszone, 654
Vernunft
    Aussage, 703
    Begriffe, 703
    Computer, 42, 734
    Goya, 51, 434, 753
    Grenzen, 51
    Kant, 34, 226, 432, 712
    Kategorien, 158
    Newton, 32
    Norm als Erkenntnis, 32
    Sprache, 704
    Verstand, 703
    Zeichen, 157
Verräumlichung, 429
Versagen numerischer Verfahren, 155
Verschiebung
    dielektrische, 544
Verschiebung Funktionsgraphen, 440
Verschiebungs
    Arbeit, 316
    Operator, 108
    Stromdichte, 564
    Vektor, 227, 228, 289
Verschleierung, 650
    durch Eleganz, 278
Verschlüsselung, 175, 177
Verschränkung
    epistimische, 506
    EPR, 635
    Experimente, 632
    Holismus, 634
    Irrevesibilität, 635
    makroskopisch, 632
    Photonenkorrelation, 613
    Raumzeit, 635
    Raumzeit durch Dekohärenz, 647
    Slater-Determinante, 269
    Susskind, 613
    Tensorprodukt, 218, 269, 611, 620, 624, 646
Verschwinden, 704
Verschwörung, 9, 665
Versetzungen, 417
Versionsverwaltung, 743
Versklavungsprinzip, 369, 586
Versor, 198
Verspätung, 563
Verstand
    Vernunft, 703
Verstärkung in dB, 606
Verstehen, 30
    anti-descartische Bewegung, 291
    automatisierte Verwertung, 48
    Bildung, 704
    Brillanz, 672
    Choquet-Bruhat, 64, 68
    geometrisch oder pattern drill, 716
    im Sinne der mathe Struktur, 67
    Kalkül, 2, 64, 226, 264, 481, 716
    Mathematik, 716
    mathematische Physik, 64, 68
    Methodenauslagerung, 64, 226, 716
    nachbilden, 735
    nützliche Dinge, 183
    Quantenmechanik, 618
    rechnen, 279
    vorhersagen, 704
    Wachstumsprozess, 704
    Wagenschein, 704
Verstehen nach Bohr, 672
Vertauschungsrest, 444, 446, 455
Verteilung
    Binomial, 82
    Normal, 82
    Poisson, 82
Verteilungen, 81
Verteilungsdichte, 76
verteilungsfreie Methoden, 91
Vertex, 49, 210, 534, 682, 683
Vertumnus, 760
Verzicht, 20
Verzweiflungstat, 695
Vesikel, 571
vi, 742

Vicky, 764
Video
DVBT, 725
Einzelbild, 536
Formate, 725
Kodierung, 725
Schnitt, 736, 738
Schnitt vlcm, 736
Snap, 63
Teilen, 63
Videokonferenzprogramme, 742
Viele-Welten-Interpretation, 612
Vielfachheit
geometrische, 222
Vielfalt, 8
Vielteilchensysteme, 340
Vielteilchentheorie, 447
Vielwelten-Deutung, 634
Vierer
Geschwindigkeit, 259, 486
Gradient, 490, 563
Impuls, 486, 490
Kraft, 486
Potenzial, 563, 679
Vektor Dirac, 462
Vektor Impuls, 486
Vektor SRT, 486, 496, 499
4te Dimension, 432
Villa Schöningen, 758
Violine, 101
Virchow, 758
Viren, 63, 528, 628
Virial
Astrophysik, 341
Gleichung, 516
Satz, 341
Virialentwicklung
van der Waalsgleichung, 515
virtuellen Verrückungen, 369
Virusdurchmesser, 525
vis viva, 332
Viskosität
dynamische, 377, 590
kinematische, 590
Visualisieren, 78, 465
Volksempfänger, 771
vollkommene Zahl, 133
Vollkommenheit, 31, 129
Voltaire, 129, 752, 753, 763, 764, 773
FII, 764
Glück, 701
ist schuld, 767
Leibniz, 129
Volterra-Gleichung, 600
Volumen
Determinante g, lu, 217
Element, 182, 224
Integral, 113, 188, 257, 565, 714
Kraft, 332
Kugel, 188
nulltes Moment, 188
pseudo-Form, 567
Weltall, 188
Volumenprodukt, 216, 217
Volumenprozent Verdünnung, 590
volumentreu, 354, 451
von Ardenne, 667
von Laue, 22, 25, 277, 278, 289, 333, 487, 699, 715
von Neumann
Architektur, 729, 730
Collected works, 587
Gleichung, 641
Messprozess, 635
Rechner, 154, 729
Selbstreproduktion, 175
self-reproducing automata, 535
Technik überleben, 42
Technologie überleben, 41
Turbulenz, 587
von-Mises-Verteilung, 83
Voraussage
symbolische Regression, 531
Voraussagekompetenz
blinde, 50
Vorbild, 20
Vorhersagbarkeit, 49, 89
Vorhersage, 392, 396, 401
Vorkommen, 171
Vorkurs, 194
Voronoi-Zerlegung
Cosmic Web, 470
Definition, 539
Vorticity, 234
Erd, 605
Hochs/Tiefs, 604
Nordhalbkugel, 332
relative, 605
Rotation=Wirbelstärke, 234
starre Rotation, 409
Stromfunktion, 234
Vortrag, 714
Vortragsgüte nach Bohr, 672

Vorurteil, 45
Vorwärts-Methode, 307
Vorwissen, 143
Voxel, 531
vpn, 739

W-Bosonen, 673, 678
w.r.t., 746
Wachtberg, 15
Wagenschein
    Physik lehren, 63
    Verstehen, 704
Wagner, Christian-Ulrich, 503, 537, 576
wahr, 33, 35–38, 128–130, 728
wahr und falsch, 437
Wahrheit, 58, 69, 72, 696
Wahrheitswerte-Tabelle, 128
Wahrheitswerte-Tabelle physik. Realisierung, 128
Wahrnehmung, 708
Wahrnehmungspsychologie, 704, 708, 709
Wahrscheinlichkeit, 90, 97, 298, 311, 366, 522, 634, 637, 704
    aleatorische, 621
    Axiome, 97
    epistemische, 621
    Intro, 80, 97, 145
    Maß, 366
    negative, 97, 480
    Raum, 97
Wahrscheinlichkeit Intro, 80
Wahsner, 39, 481, 636, 773
Wallis-Produkt, 190
Walsh-Funktionen, 111
Wandel vs Beharrung, 56, 478
Wandkraft, 342
Wannseekonferenz, 771
Wanzen-Welt, 437
Wärme, 516
    Bad, 519
    Kapazität, 517
    Leitungs-Gleichung, 399, 596, 605
    Pumpe, 153
    Tod, 473
Wartezeit, 93
Wasser, 717
Wasserfalldiagramm, 101
Wassersprung, 587
Wasserstoff-Molekül, 472, 716
Wasserstoffatom, 630
Wasserstoffbombe, 654
Wasserstrahlpumpe, 602
Wasseruntersuchungen, 669
Wasserwellengeschwindigkeit, 410
wattloser Strom, 104
Watzlawick, 58, 59
Wavelet
    Analysis, 111
    Transformation, 102
Wayback Machine, 535
Web-Seiten CMS, 738
Weber-Potenzial, 331
Webhosting, 730
Wechsel des Koordinatensystems, 269, 499
Wechselrichter, 506
Wechselstromrechnung, 203, 720
Wechselwegnahme, 134
Wechselwirkung
    starke, 689
Wechselwirkungsbild, 643
weg
    unabhängig, 197, 206, 315, 353
    zusammenhängend/path-connected, 450
    zusammenhängend, 315
Wegintegral als Linienintegral, 314, 315
Wegintegral-Methode, 371, 372, 378, 396, 630, 631
Wegintelligenz, 93
wegunabhängig, 316
Wehrmachtsausstellung, 19
Wehrpflicht, 766
weiche Materie, 524
Weihnachtsmann, 750
Weinbergs Golden Lessons, 20
Weinert, 18
Weintanz, 450
Weißer Zwerg, 484
Weiskopf, 771
Weiss, 612, 662
Weißensee, 502
weißes Rauschen, 383
Weisskopf, 24, 35, 39, 56, 345, 645, 664, 681
Weizenbaum, 41, 750
    KI, 734
Weizsäcker Frieden, 46, 667, 751
Weizsäcker Mathematik, 67
Weißer Zwerg, 484, 485, 640
Weißer Zwerg stabil, 639
Welle
    Definition, 595, 618
    ebene, 572
    Teilchen-Dualismus, 618, 628
Wellen
    Funktion, 620, 621

Funktion real, 651
Funktionskollaps, 621
Gleichung, 563, 566, 591
Gleichung fraktionale, 191
Gleichung Lösung, 572
Gravitations, 506, 508
Idee, 632
Länge thermische, 520
Länge thermische, 639
Paket, 593, 594
Paket nichtdispersiv, 384
Zahl, 606, 619
Zahl Brechungsindex, 572
Wellengleichung
Lösung, 591
Membran, 592
Wellenkonzept, 23, 425, 482, 625, 716
Wells, 44
Welt
Alter, 475, 483
analytisch, 197
Bild und NLD, 72
Erfahrbarkeit, 434
Erleben in der Zeit, 434
Formel, 672
gefilterter Zufallsprozess, 108
gefiltertes Rauschen, 383
Geschichte, 21, 747, 751, 755, 757, 764, 774
ist Uhr, 302
Kurzsichtigkeit, 734
Linie per Registrierstreifen, 427
Modelle vs Beobachtungsparameter, 472
Strommittel, 565
Volumen, 686
Wirklickeit wissender Geist, 730
Zusammenhalt, 485
Weltall, 607
Weltfunktion, 473
Weltmatrix, 474
Weltraumteleskope, 500
Welttensor, 289, 491, 496
Weltuntergang, 660
Weltuntergang per Atomkrieg, 11
Welzer, 10, 20, 48, 695, 696, 709, 770
Wende, 703
Wendepunkt, 347
Wendezeitzeugen, 296
Weniger konsumieren, 692
Werbeverbot, 6, 45, 693, 733
Werbung, 45, 693
Werkstofftechnik, 510
Wertschätzung, 30
Weststaat, 14
Wetter, 604
Wettervorhersage, 142, 586
Weyl
ähnlich und linear, 441
Atomistik, 390
Biografie, 460
Eich-Idee, 432
Eichfeld-Idee, 278
Eichinvarianz, 678
Es gibt nur Felder, 506
fast periodische Funktionen, 320
Gruppentheorie und QM, 452
Materie, 227
Nachruf, 227
Paralleltransport, 252
Parallelverschiebung, 251
Quantenzahlen, 452
Raum, Zeit, Materie, 226, 331
Raum-Zeit, 298
Raumproblem, 252, 432
Riemanns Hypothesen, 254, 279, 703
Trick, 491
Was ist Materie?, 478
Weyl Führungsfeld, 331
Wheeler, 260, 431, 434, 505, 651
Materie und Raumzeit, 480
Schrödinger, 621
Wheeler-DeWitt-Gleichung, 650, 651
Wheeler-Feynman-Elektrodynamik, 625
Wheeler–Feynman absorber theory, 625
Whiteboards, 742
Whitehead, 625
Who is who im 3.Reich, 667
Wick
Theorem, 77
Wick-Rotation, 197
Wie lehrt man SRT?, 416, 497
Wiederbewaffnung, 748
Wiederherstellung, 723
Wiederkehr
dyn Systeme, 322
Einwand, 118
Poincare, 118
Virialsatz, 340
Zeit, poincare'sche, 119
Wiener
Filter, 108, 118, 601
harmonische Analyse, 390
Khinchin theorem nonstationary, 114

Khinchine-Theorem, 82, 102, 103, 105, 107, 110
Kreis, 37, 38
Kybernetik, 42, 167, 390
Menschmaschine, 41
Operatoren bei QM, 628
Prozess, 75, 98, 193, 391
Wiener Kreis, 37, 38
Wiensches Verschiebungsgesetz, 478, 501
WiFo, 611
Wigner
Atomspektren, 452
civil defence, 653
Gruppentheorie, 442
Kernphysik, 652, 660, 662
Koeffizienten, 449
Linienbreite, 645
Mathematik, 716
Messung, 622, 634
Spektrum, 402
Weisskopf-Theorie, 645
WII, 12, 764, 769
WII inszeniert den Roten Oktober, 770
wika, 216
Wiki System, 738
WikiLeaks, 734
Wikileaks, 9, 13, 23
Wiktionary, 170
Wilczek, 453
Wildcards, 172
Wildpark, 758
Willensfreiheit, 697
Wilson-Cowan-Modell, 202
WIMPs, 427, 504, 746
win-stay/loseshift, 44
Wind und Isobaren, 604
Windrad, 4
Windung, 247
Windungsradius, 247
Windungszahl, 207
Winfree, 115, 321, 404
Winkel
Äquivalenzrelation, 199
euklid Raum, 287
Idee, 136, 179, 182, 199
Raumdiagonalen, Würfel, 199
Sinus-Werte, 199
Skalarprodukt, 251
Summe, 250
Variable, 362
Winkel-Wirkungsvariable, 120, 360–363, 619
Kepler, 364
Quantisierung, 363, 688
Solvay, 356, 363
Winkelgeschwindigkeit
bezugpunkt-unabhängig, 409
Darstellungsmatrix, 439
Drehimpuls, 261
Hodge-Sternprodukt, 212
Pseudovektor, 289
Trägheitstensor, 261
winkeltreu, 206, 313, 570
Winkeltreue, 354
Wipe, 722
Wirbelfaden, 234
Wirbelfeld, 234, 245
harmonischer Oszillator, 315, 321, 359
starre Rotation, 315
Wirbelfluss, 234
geschlossenes Gebiet, 234, 283
Wirbelform, 240, 315
wirbelfrei, 206, 245, 315
Wirbellinie, 234
Wirbelröhre, 234
Wirbelstärke, 234
Wirkleistung, 351
Wirklichkeit, 2, 33, 35, 38, 40, 57, 59, 61, 64, 90, 143, 151, 158, 383, 386, 435, 633, 635, 651, 697, 703, 704, 706, 708, 710, 712, 721
Wirklichkeit Kunst, 665, 770
Wirklichkeit und Sinn, 47
Wirklichkeit vs Konstruktivismus, 60, 70
Wirklichkeiten, 65
Wirksamkeitserwartung, 696
Wirkstrom, 720
Wirkung, 360, 361, 363, 369, 370, 372, 541, 628
Idee, 363, 485
Maßeinheit, 363, 485
Phasenraum, 318
Wirkungs-Winkel-Variablen Intro, 359
Wirkungsgrad, 518
Wirkungsgrade von Wärme-Kraft-Maschinen, 3
Wirkungsquerschnitt, 618
Wirkungszusammenhang der Welt, 73
Wirtinger-Kalkül, 205
Wirtschaftswunder, 695
Wissen
als Geheim-Code, 716
Aneignung, 72
erlangen, 65
implizites, 25
postodern, 48
Restrukturierung, 25

Wissen abgerundetes, 47
Wissenschaft, 30
Wissenschaft als Kathedrale, 47
Wissenschaft falscher Gott, 30
wissenschaftliche Methode, 34, 66, 260
Wissenschaftlichkeit, 34
Wissenschaftsbetrieb, 30
Wissenswertes, 755
Witz vs Wissenschaft, 484
WKB-Näherung, 191, 579, 630
WLAN, 737
    Wigig, 737
WMAP, 471
Wochentage, 433
Wohlgeformtheit, 170
Wohlordnung, 113
Wolkenstein Evolution, 55
WordPress, 738
WordToLaTeX, 738
Wortbedeutung, 160
Wortklassen, 169
Wortlänge, 80
Wortproblem, 150
Wronsky-Determinante, 217, 339
Wünsdorf, 665
Würde, 42, 697, 698, 735
Würde der Arbeit, 29
Würfel
    Raumdiagonalen, 199
Wurmloch, 636
Wurzel
    Eigenwert Dgl, 326
    geometrisch per Polygon, 197
    komplexe Zahl, 200
    komplexer Zahl, 197
    Matrix, 219
    per Polynom-Division, 197
    vom Polynom, 134
    Ziehen numerisch, 139
    Ziehen von Hand, 134
Wurzel i, 197
Wurzel-Zeitschrift, 196
Wurzellosigkeit, 665
Wurzelziehen
    komplexe Zahlen, 197
    reelle Zahlen, 134, 136
Wüste, 717

X-Artikel, 15
Xenon, 4
Xerografie, 720
Xmgrace, 736
xml, 41
    Bibel, 79
    comment, 737
    Parser, 79
xmodmap -pke, 147
Xodo, 736
XOR, 535, 536
xppauto, 322
xterm, 743
xterm per Ctrl-Alt-T, 729

Yang-Mills-Feld, 688
Yang-Mills-Theorie, 542, 562, 675, 679, 684
Yellowcake, 664
Yin-Alorithmus, 96
Yukawa-Potenzial, 277, 335, 487, 620
Yule-Walker-Gleichung, 108, 211

z-Transformation, 96, 108, 145, 167, 194, 195, 367, 378
Zaddach, 262, 264, 445
Zahl, 435
    Darstellung, 132
    Darstellung Konversion Python, 536
    Konversion, 132
    mit Richtung, 271
    rationale, 132
Zahle
    algebraische, 132
    irrationale, 132
Zahlen, 2, 133, 455
    berechenbare, 129
    Gehirn, 732
    hyperreelle, 455
    natürliche, 131
    Theorie, 68, 177, 197, 325, 452, 455, 464
    unimodulare, 198
    Zauber, 87
Zakai-Gleichung, 601
Zamperini, 653
Zaren, 756
Zeh, 34, 72, 119, 123, 127, 133, 514, 612, 648, 650
Zehlendorf, 770
Zehner-Diode, 506
10 Gebote, 31, 691
Zeichen, 72, 132, 153, 157
    als Signal, 155
    Information, 155
    ist Signalklasse, 153
    vs Bedeutung, 155

Zeidler, 67, 196, 379, 675
Zeiger, 199
Zeigerdarstellung, 203, 720
Zeigerdiagramm, 720
Zeilen-Summen-Norm, ∞-Norm, 221
Zeilennummer, 261
Zeilenvektor, 225, 238
Zeit, 648
    2D, 435
    Abbildung, 249
    Ableitung, 183, 310, 562
    artig, 225, 486, 490
    Begriffe, 434
    Dilatation, 486
    Dilatation symmetrisch, 428
    Dilatation umsymmetrisch, 428
    Eigen, 486
    Energie-Erhaltung, 226
    Entropie, 119
    Erfindung des Menschen, 704
    Erleben, 433, 434
    Etikettierungen, 751
    Existenz, 62, 650
    Faser-Basis-Deutung, 179, 254, 256
    Gedächtnis, 713
    Gleichung, 433
    Hawkins, 434
    Illusion, 434, 435, 648
    Illusion?, 412
    Kalender, 433
    keine, 435, 649
    klassische Texte, 429
    kognitiv, 434, 648
    konforme, 478
    konitive Entwicklung, 708
    Konstruktivismus, 40
    lich, 62, 713
    liche Perspektive, 145, 693
    losigkeit, 649
    Ludwig, 434
    Maschine, 430, 651
    McTaggert, 648
    mehrdimensional, 429
    Messung, 433, 436
    Mittel, 192
    Modell, 89
    ohne, 433
    Ordnungs-Operator, 620, 643
    Prigogine, 55
    Protophysik, 506
    Qualia, 648
    Reihen, 79, 100, 104, 105, 108, 110, 167, 169, 172, 389, 434, 648
    Reihenanalyse, 52, 76, 78, 94, 107, 108, 114, 116, 118, 143, 534
    Reihenanalyse Jobs, 71
    Reihenanalyse nichtlineare, 408
    Reisen, 410, 411, 454, 468, 687, 688
    relational, 649–651
    retardierte, 563, 600
    Schritt, stochastische Integration, 388
    Spiegelung, 443
    Spike-Sequenzen, 649
    Textsammlung, 434
    topologische, 429
    Tor, 411
    Ur-Intuition Brouwer, 434
    Verräumlichung, 413
    virtuelle, 414
    Wahrnehmung, 434
    Weltlinienlänge, 278
    Wheeler, 651
    Zonen, 435
    Zufallsprozess, Doppelrolle, 73
Zeitentwicklungsoperator, 643
Zeiterfahrung, 434, 648
Zeitpfeil, 34, 55, 632, 648
Zeittafeln, 655, 755
Zeldovich
    Dynamos, 587
    Gleichung Verbrennung, 596
    Rechenkunst, 367, 379, 391
    Urknall, 504
Zelle
    Aktivität, 531
    Aussprossung, 526
    Axonem, 603
    Bau, 529, 530
    Crowding, 527
    Durchmesser, 529
    Gene, 527
    in vivo, 192
    Kompass, 706
    Krebs, 529
    Leben, 527, 528
    Leber, 530
    Mikroskop, 570
    Nekrose, 527
    p53, 525
    Physik, 527
    Proteintranskription, 530
    Schrödinger, 390

Signaltransduktion, 530
synthetische, 571
T, 527
Thermodynamik, 527
Tod, Sterben, 696
Turgor, 529
Ultrastruktur, 525
Verband = Gewebe, 526
Zellenanzahl, 529
Zellendurchmesser, 525
zellulärer Automat, 72, 79, 535, 537, 538, 589
ZEN, 32
Zentralasien, 13, 19
Zentraler Grenzwertsatz, 528
Zentralfeld, 353
Zentripetalkraft, 331, 332
Zentrum, 322, 377
Algebra, 456
Fixpunkt, 321
nicht-hyperbolischer Fixpunkt, 713
Zentrumsmannigfaltigkeit, 586
Zerlegbarkeit ergodischer Maße, 116
Zerlegung
der Eins, 102, 382, 384
Fourier, 382
Plancherel, 111
der Eins Bernstein-Polynom, 86
Primfaktoren, 146
Welt, 70
Zerlegungssatz, 542, 557, 558
Zermelo-Poincare, 435
Zerstörung der Ethik, 23
Zeta-Funktion, 190, 385, 488
Zethos und Amphion, 761
ZIAP, 502, 503
Ziegenproblem, 71, 145
Zielfunktion, 143, 346
zielführender Umweg mit i, 140
Ziffern, 153
Ziffernverteilung, 527
Ziman, 30, 261, 262
Zins, 124, 402
Zinsrechnung, 124
zirkuläre Statistik, 83
Zirkulation, 234, 235
Zischka, 3, 11, 16–18, 47, 561, 662, 663, 669, 695, 717, 747, 758
ZISTP, 576
Zitterbewegung, 681
Zitterradius des Elektrons, 668
Ziv, 125
Zivilbevölkerung, 10, 11, 13, 653, 659, 767
Zivilisationsstrategie, 711
Zivilisten, 11
Zivilverteidigung, 654
zonal, 581
zonal = Ost-West, 239
Zoologie, 525
ZOOM, 742
Zöpfe, 201, 451
ZRM, 73, 77
Zufall
3 Quellen, 79
absoluter, 79, 621
Herrscher, 79
subjektiv, 621
was ist das, 79
Zufall und Naturgesetze, 73
Zufalls
Felder, 122
Größe Idee, 80
Matrizen, 81, 224, 385
Permutation, 94
Prozesse, 76, 77, 97
Variable, 97
Variable Idee, 79, 80
Variable pythen, 82
Variable vs Klasse, 73, 79
Zahl Chaitin, 128
Zahl nicht komprimierbar, 129
Zahlen-Generator, 83
Zufälligkeit
Was ist das?, 33
Zuhandensein, 156
Zukunft, 381
Zukunftsentwürfe, 89
Zukunftserwartung, 89
Zukunftsselbst, 434
Zuordnung, 130
Zusammenbruch, 43
Zusammenhang, 252, 256
affiner, 254
Zusammenhangskomponente, 287
zusammenhängend, 206, 450, 478
einfach/simply connected, 436, 444, 449, 450
lokal, 284
weg, 284, 315, 451
Zusammensetzbarkeit, 33, 52, 441
Zustand, stationärer, 516
Zustands
Dichte, 638
Funktion, 620

Raum, 381, 538
Raummodell, 73
Summe, 514, 519, 520
Summe Feldtheorie, 626
Zustandsgleichung, 467, 511, 515
Zustandsraum
dyn Systeme, 317, 392, 538
Modell Kalman, 73, 77, 167
Quantenmechanik, 435, 447, 453, 454, 624
vs Phasenraum, 382
Zustandssumme, 513
Zwangsbedingung, 328
differenzielle, 349
holonome, 348
Maxwell-Gleichung, 480
nichtholonome, 349
rheonome, 348
skleronome, 349
Zwangskraft
Idee, 346
Reibung, 346
2029, 42
2050, 41, 668, 733
Zwei-Spin-Problem, 449
Zweieck, 437
2-Form, 293, 358
2G, 725
2-Niveau-Systeme, 644
2-Norm, 140, 221
Zwei-Punkt-Korrelationsfunktion, 121
zweite Quantisierung, 447, 627
Zweiteilchenzustand, 447
2. Hauptsatz, 517, 518
Zwei-Zustandsfunktion, 533
Zwerggalaxien, 470
Zwillingsparadoxon, 427, 486
Zwinger, 760
zyklische Koordinate = kräftefreie Koordinate, 359
zyklische Variablen, 352, 354
Zykloide Brachistochrone Tautochrone, 374
Zyklonenmodell, 604
Zyklotronfrequenz, 203
Zylinderkoordinaten, 231