

Transformações 3D

Uéliton Freitas

Universidade Católica Don Bosco - UCDB

freitas.ueliton@gmail.com

1 de setembro de 2014

Sumário

1 Introdução

2 Transformações Básicas

- Translação
- Escala 3D
- Rotação 3D

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.
- A rotação é mais complexa.
 - Pode-se efetuar a rotação em qualquer eixo espacial. Diferente da rotação 2D que é feita em torno do eixo x, y .

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.
- A rotação é mais complexa.
 - Pode-se efetuar a rotação em qualquer eixo espacial. Diferente da rotação 2D que é feita em torno do eixo x, y .
- As posições 3D são expressadas por coordenadas homogêneas por meio de matrizes com 4 linhas e colunas, ou seja, as matrizes 3D são 4×4 .

- Um objeto é deslocado adicionando-se um deslocamento a cada uma das direções cartesianas.

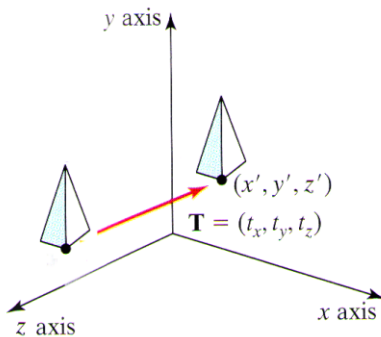
$$z' = z + \Delta z$$

Translação

Representação Matricial da Translação 3D

$$P' = T(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot P$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação



Translação Inversa

Representação Matricial da Translação 3D Inversa

$$T^{-1}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = T(-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z)$$

$$T^{-1}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

Escala 3D

- A escala 3D é uma simples extensão da escala 2D.

$$s_x > 0, s_y > 0, s_z > 0$$

$$x' = x \cdot s_x$$

$$y' = y \cdot s_y$$

$$z' = z \cdot s_z$$

Escala

Representação Matricial da Escala 3D

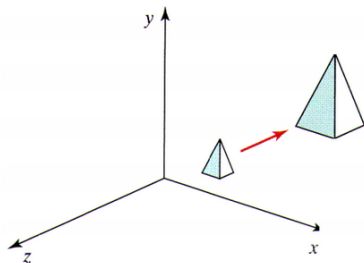
- A escala 3D é uma simples extensão da escala 2D.

$$P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

Escala 3D

- Com $s_x > 1$ e $s_y > 1$
 - O objeto se afasta da origem.
- Com $0 < s_x < 1$ e $0 < s_y < 1$
 - O objeto se aproxima da origem.



Translação

Escala 3D - Ponto Fixo

- Para resolver o problema do deslocamento:
 - Translada-se o ponto fixo do objeto para a origem.
 - Efeuta-se a escala.
 - Translada-se o ponto fixo para a posição original.

$$P' = T(\Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-\Delta x_f, -\Delta y_f, -\Delta z_f)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala Inversa

Escala Inversa 3D

- A matriz da escala inversa é obtida trocando os valores das escalas por seus valores inversos.

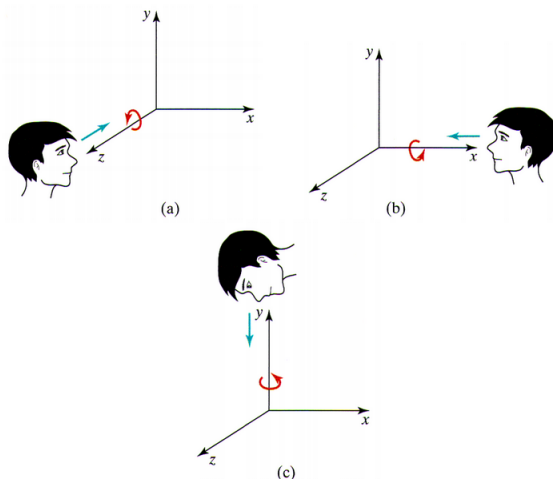
$$T^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & (1 - \frac{1}{s_x})x_f \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & (1 - \frac{1}{s_y})y_f \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & (1 - \frac{1}{s_z})z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

Rotação 3D

- Pode-se rotacionar um objeto em qualquer eixo no espaço 3D.
- Contudo, é mais fácil fazer a rotação sobre os eixos cartesianos.
 - É possível combinar qualquer rotação em torno dos eixos cartesianos para obter rotações em qualquer eixo no espaço.
- Ângulos positivos rotacionam o objeto no sentido anti-horário.

Orientação da Rotação 3D



Orientação da Rotação 3D

Rotação 3D

- A rotação 3D pode ser facilmente estendida da rotação 2D.

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$

$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

$$z' = z$$

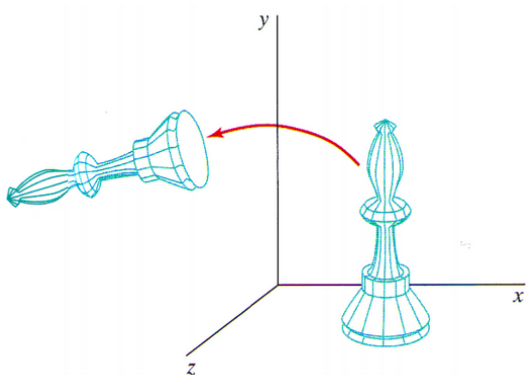
Rotação 3D na Representação Matricial

- A rotação 3D pode ser facilmente estendida da rotação 2D.

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação no eixo z

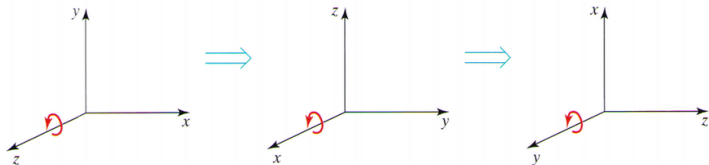


Rotação 3D

Rotação 3D

- A rotação entre os eixos podem ser feitas por meio de uma permutação cíclica das coordenadas x, y e z .

$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$



Rotação 3D

Rotação 3D no eixo x

- Levando em consideração a permutação citada, a rotação no eixo x é composta da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

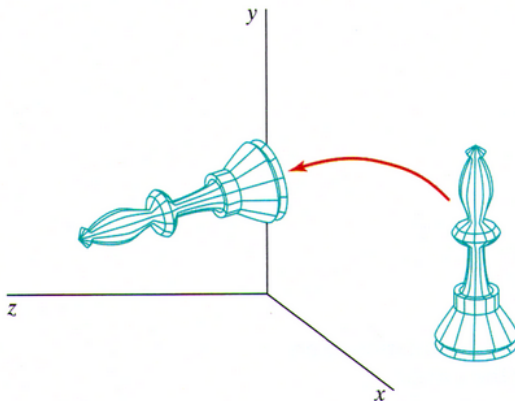


Figura : Rotação em torno do eixo x .

Rotação 3D

Rotação 3D no eixo y

- Levando em consideração a permutação citada, a rotação no eixo y é composta da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

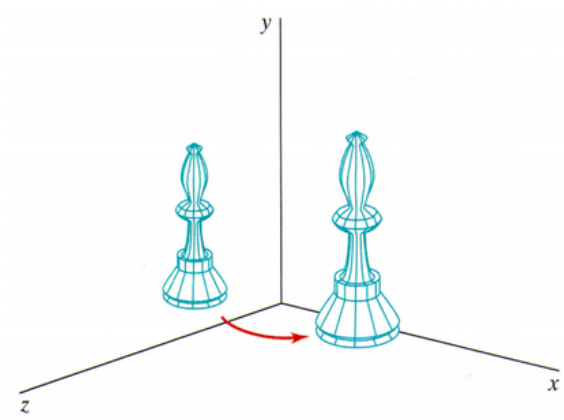


Figura : Rotação em torno do eixo y .

Rotação 3D

Inversa da Rotação 3D

- A inversa de uma rotação em θ , é dada fazendo a rotação em $-\theta$.
- Como o que muda é apenas o sinal do seno, a inversa também pode ser obtida por $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}(-\theta)$.

Rotação Geral 3D

Rotação Geral 3D

