Transformações 2D

Uéliton Freitas

Universidade Católica Don Bosco - UCDB

freitas.ueliton@gmail.com

1 de setembro de 2014

Sumário

Introdução

Transformações Geométricas

- São transformações aplicadas aos modelos de objetos:
  - Posicionamento (translação).
  - Orientação (rotação).
  - Tamanho (escala).
  - Reflexão.
  - Crisalhamento.

Transformações de Corpos Rígidos

Transformações de Corpo Rígido

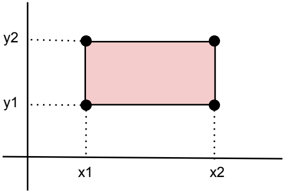
- São transformações que não alteram as dimensões dos objetos:
  - Posicionamento (translação).
  - Orientação (rotação).
- Mantém as distâncias e ângulos do objeto.

Translação

Translação de um Objeto

- A translação consiste em adicionar uma “variação” as coordenadas de um objeto.
  - $x' = x + \Delta x$
  - $y' = y + \Delta y$

Translação



Objeto Original

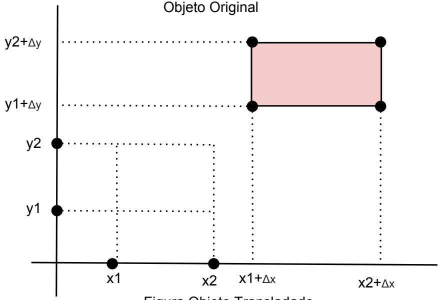


Figura Objeto Transladado

Translação

Translação de um Objeto

- A translação consiste em adicionar uma “variação” as coordenadas de um objeto.
  - $x' = x + \Delta x$
  - $y' = y + \Delta y$

Notação Matricial

- Utilizando uma notação matricial é possível representar a operação de translação da seguinte forma:

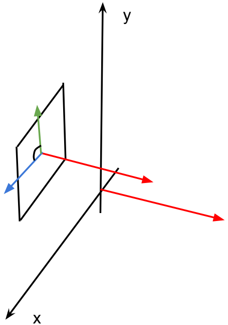
$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Rotação

Rotação de um Objeto

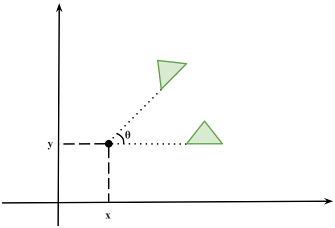
- Dá-se a operação de rotação de um objeto através de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**.
- No plano 2D, o eixo de rotação dá-se pelo eixo perpendicular ao plano *xy*.



Rotação

Rotação de um Objeto

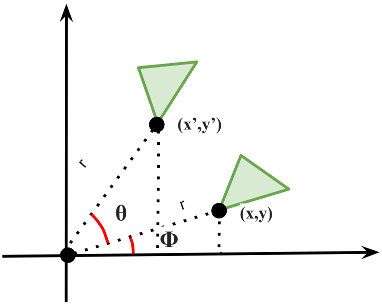
- Para realizar a rotação de um objeto em 2D, é necessário um ângulo θ e o ponto de ponto de rotação (x, y), que é o ponto de intersecção com o eixo perpendicular ao plano xy.
  - Se $\theta > 0$, a rotação é no sentido anti-horária.
  - Se $\theta < 0$, a rotação é no sentido horário.



Rotação

Rotação de um Objeto

- Simplificando:
  - Considera-se que o ponto de rotação está na origem.
  - O raio r é constante.
  - ϕ é o ângulo do ponto $P = (x, y)$ em relação a origem.
  - θ é o ângulo de rotação.



Rotação

Sabemos que:

- $cos(\theta) = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenuza}}$
- $sen(\theta) = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenuza}}$

Então temos que:

- $cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \implies x' = cos(\phi + \theta) \cdot r$
- $sen(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \implies y' = sen(\phi + \theta) \cdot r$

Rotação

Como:

- $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- $sen(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot sen(\beta) + sen(\alpha) \cdot cos(\beta)$

Então temos que:

- $x' = r \cdot cos(\phi) \cdot cos(\theta) - r \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta)$
- $y' = r \cdot cos(\phi) \cdot sen(\theta) + r \cdot sen(\phi) \cdot cos(\theta)$

Rotação

Coordenadas Polares

- Temos que $P = (x, y)$ pode ser escrito na forma de coordenadas polares:
  - $x = r \cdot cos(\theta)$
  - $y = r \cdot sen(\theta)$

Em Notação de Matriz

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

Coordenadas Polares

- Temos que $P = (x, y)$ pode ser escrito na forma de coordenadas polares:
  - $x = r \cdot cos(\theta)$
  - $y = r \cdot sen(\theta)$
- Substituindo os valores temos:
  - $x' = x \cdot cos(\theta) - y \cdot sen(\theta)$
  - $y' = x \cdot sen(\theta) + y \cdot cos(\theta)$

Em Notação de Matriz

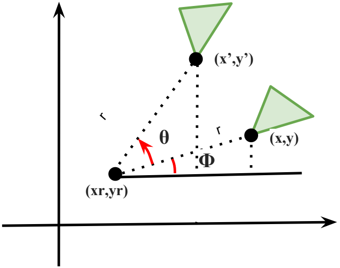
$$\mathbf{P'} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

Rotação de em Torno de um Ponto Arbitrário

- Rotação em torno de um ponto (x_r, y_r).



Rotação

Para encontrar x':

- $cos(\phi + \theta) = \frac{x' - x_r}{r}$
- $x' = r \cdot cos(\phi + \theta) + x_r$
- $x' = x_r + r \cdot cos(\phi) \cdot cos(\theta) - r \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta)$

Mas temos que:

- $cos(\phi) = \frac{x - x_r}{r}$ e $sen(\phi) = \frac{y - y_r}{r}$

Então:

- $x' = x_r + (x - x_r) \cdot cos(\theta) - (y - y_r) \cdot sen(\theta)$
- $y' = y_r + (x - x_r) \cdot sen(\theta) + (y - y_r) \cdot cos(\theta)$

Rotação

- Escrevendo a operação em notação de matriz temos:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_r - x_r \cdot cos(\theta) + y_r \cdot sen(\theta) \\ y_r - x_r \cdot sen(\theta) - y_r \cdot cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Escala

Escala de um Objeto

- Utiliza-se a **escala** para aumentar o tamanho de um objeto.
- Multiplica-se os valores das coordenadas x, y por um fator s:
  - $x' = x \cdot s_x$
  - $y' = x \cdot y_x$
- Em notação matricial:

$$\mathbf{P'} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.
- Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ há uma diminuição do objeto.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.
- Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ há uma diminuição do objeto.
- Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.
- Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ há uma diminuição do objeto.
- Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.
- Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.

Escala

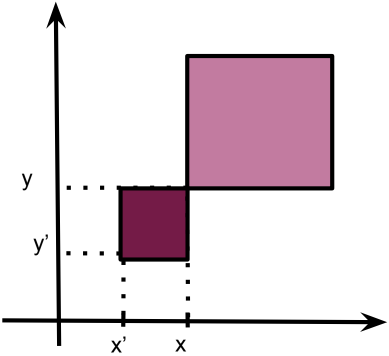


Figura : Operação de escala com $s_x = 0.5$ e $s_y = 0.5$

Escala

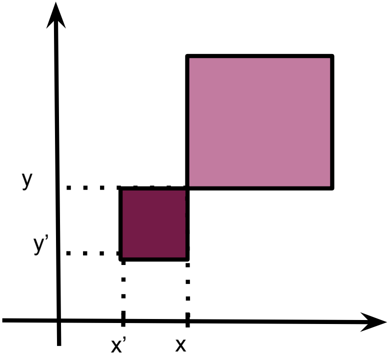


Figura : Operação de escala com $s_x = 0.5$ e $s_y = 0.5$

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.
- Para resolver o problema do deslocamento:
  - Escolha uma posição fixa (x_f, y_f).
  - Escala-se a distância entre o ponto fixo e as coordenadas do objeto.

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.
- Para resolver o problema do deslocamento:
  - Escolha uma posição fixa (x_f, y_f).
  - Escala-se a distância entre o ponto fixo e as coordenadas do objeto.
- Obtemos x' e y' da seguinte forma:

$$x' - x_f = s_x \cdot (x - x_f)$$
$$y' - y_f = s_y \cdot (y - y_f)$$

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.
- Para resolver o problema do deslocamento:
  - Escolha uma posição fixa (x_f, y_f).
  - Escala-se a distância entre o ponto fixo e as coordenadas do objeto.
- Obtemos x' e y' da seguinte forma:

$$x' - x_f = s_x \cdot (x - x_f)$$
$$y' - y_f = s_y \cdot (y - y_f)$$

- Assim:

$$x' = x \cdot s_x + x_f(1 - s_x)$$
$$y' = y \cdot s_y + y_f(1 - s_y)$$

Escala

Em Notação Matricial

- $x_f(1 - s_x)$ e $y_f(1 - s_y)$ são constantes para todas as coordenadas do objeto.

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

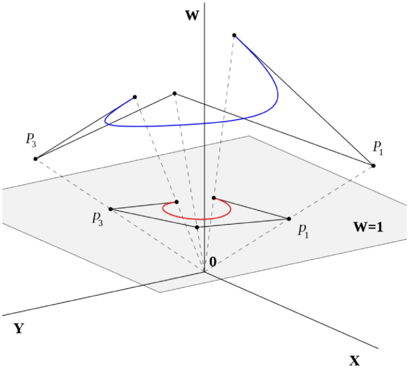
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_f(1 - s_x) \\ y_f(1 - s_y) \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Coordenadas Homogêneas

- Podem descrever objetos 2D usando matrizes 3*x*3.
- Um ponto 2D é representado da seguinte forma utilizando coordenadas homogêneas:
  $P(x_h, y_h, h) = P(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1), h \neq 0$
- h é denominado fator homogêneo, e por conveniência $h = 1$.
- Pode ser visto como a projeção do espaço 2D no plano h.

Coordenadas Homogêneas



Coordenadas Homogêneas

Coordenadas Homogêneas

- Mas por que transformar as coordenadas 2D dos objetos em coordenadas 3D?

Coordenadas Homogêneas

Coordenadas Homogêneas

- Mas por que transformar as coordenadas 2D dos objetos em coordenadas 3D?
  - Escrever as transformações como multiplicação de matrizes.

Coordenadas Homogêneas

A Translação no Sistema Homogêneo é dada por:

$$\begin{aligned} x_h' &= 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + \Delta x \cdot h \\ y_h' &= 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + \Delta y \cdot h \\ h &= 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h \end{aligned}$$

A Translação no Sistema Homogêneo em Notação de Matriz

$$\begin{bmatrix} x_h' \\ y_h' \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Transformando de Volta ao Plano 2D

$$\frac{x'_h}{h} = \frac{1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + \Delta x \cdot h}{h} \Rightarrow x' = x + \Delta x$$

$$\frac{y'_h}{h} = \frac{0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + \Delta y \cdot h}{h} \Rightarrow y' = y + \Delta y$$

$$\frac{h}{h} = \frac{0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h}{h} \Rightarrow h = 1$$

Coordenadas Homogêneas

Matriz de Translação no Espaço 2D

$$\textbf{P'} = \textbf{T}(\Delta x, \Delta y) \cdot \textbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Matriz de Rotação no Espaço 2D

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Matriz de Escala no Espaço 2D

$$\mathbf{P'} = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Inversas

Inversa da Translação

$$\mathbf{P'} = \mathbf{T}^{-1}(\Delta x, \Delta y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Basta inverter os sinais de Δx e Δy.

Transformações Inversas

Inversa da Rotação

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Utilizado para rotacionado no sentido horário.
- Nete caso, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{t}$.

Transformações Inversas

Inversa da Escala

$$\mathbf{P'} = \mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Basta fazer a escala com o inverso dos valores.

Transformações Compostas

Transformações Compostas

- Utilizando coordenadas homogêneos é possível fazer várias transformações em um objeto utilizando apenas uma matriz de transformação.

Transformações Compostas

Transformações Compostas

- Utilizando coordenadas homogêneos é possível fazer várias transformações em um objeto utilizando apenas uma matriz de transformação.
- A matriz obtida das várias transformações é obtida pela multiplicação das mesmas:zz

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}' &= \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{P} \\
\mathbf{P}' &= (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{P} \\
\mathbf{P}' &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}
\end{aligned}
$$

- A transformação é dada por $\mathbf{M}$ ao invés de $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$.

Transformações Compostas

Propriedades de Matrizes

- A Multiplicação de matrizes é associativa:
  $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = (M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$

Transformações Compostas

Propriedades de Matrizes

- A Multiplicação de matrizes é associativa: $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = (M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$
- É possível multiplicar as matrizes da **esquerda para a direita** e da **direita para a esquerda**:
  - **Pré-Multiplicação**:da **esquerda para a direita** - As transformações são **especificadas** na ordem que são aplicadas: $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$

Transformações Compostas

Propriedades de Matrizes

- A Multiplicação de matrizes é associativa: $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3 = (M_1 \cdot M_2) \cdot M_3 = M_1 \cdot (M_2 \cdot M_3)$
- É possível multiplicar as matrizes da **esquerda para a direita** e da **direita para a esquerda**:
    - **Pré-Multiplicação**:da **esquerda para a direita** - As transformações são **especificadas** na ordem que são aplicadas: $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$
    - **Pós-Multiplicação**:da **direita para a esquerda** - As transformações são **especificadas** na ordem inversa que são aplicadas: $M_3 \rightarrow M_2 \rightarrow M_1$
        - Utilizada pelo **OpenGl**

Transformações Compostas

Propriedades de Matrizes

- A Multiplicação de matrizes não é **comutativa**: $\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \neq \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$

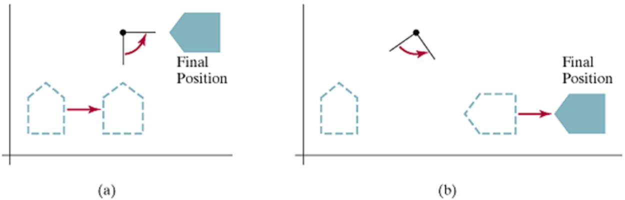


Figura : (a) Há uma translação depois uma rotação - (b) Há uma rotação depois uma translação.

Transformações Compostas

Composição de Duas Translações

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P}$$
$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \{\mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P}\}$$
$$\mathbf{P}' = \{\mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y})\} \cdot \mathbf{P}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} + t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} + t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

Composição de Duas Rotações

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta_1) \cdot \mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{P}$$
$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta_1) \cdot \{\mathbf{R}(\theta_2) \cdot \mathbf{P}\}$$
$$\mathbf{P}' = \{\mathbf{R}(\theta_1) \cdot \mathbf{R}(\theta_2)\} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} cos(\theta_1) & -sen(\theta_1) & 0 \\ sen(\theta_1) & cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\theta_2) & -sen(\theta_2) & 0 \\ sen(\theta_2) & cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} cos(\theta_1 + \theta_2) & -sen(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ sen(\theta_1 + \theta_2) & cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

Composição de Duas Escalas

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S}(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot \mathbf{S}(s_{x_1}, s_{y_1}) \cdot \mathbf{P}$$
$$\mathbf{P}' = \mathbf{S}(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot \{\mathbf{S}(s_{x_1}, s_{y_1}) \cdot \mathbf{P}\}$$
$$\mathbf{P}' = \{\mathbf{S}(s_{x_2}, s_{y_2}) \cdot \mathbf{S}(s_{x_1}, s_{y_1})\} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x_1} \cdot s_{x_2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y_1} \cdot s_{y_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

Rotação 2D Com Ponto de Rotação

- Este tipo de transformação é feita utilizando várias transformações:
  - Translada-se o ponto de referência do objeto à origem.
  - Aplica-se a transformação de rotação.
  - Translada-se o ponto de referência do objeto para a origem.

Transformações Compostas

Em Notação Matricial

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(x_r, x_r, \theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{R}(x_r, x_r, \theta) = \mathbf{T}(\Delta x, \Delta y) \cdot \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{T}^{-1}(\Delta x, \Delta y)$$

$\mathbf{R}(x_r, x_r, \theta)$ Em Notação Matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & x_r - x_r \cdot cos(\theta) + y_r \cdot sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) & y_r - y_r \cdot cos(\theta) - x_r \cdot sen(\theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

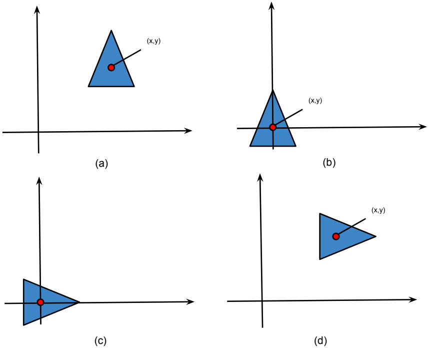


Figura : Passos para efetuar rotação em torno de um ponto referencial.

Transformações Compostas

Escala 2D com Ponto de Referência

- Utiliza-se várias transformações para efetuar a escala:
    - Translada-se o ponto de referência do objeto à origem.
    - Aplica-se a transformação de escala.
    - Translada-se o ponto de referência do objeto para a origem.

Transformações Compostas

Em Notação Matricial

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) \cdot \mathbf{P}$$
$$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y) = \mathbf{T}(x_f, y_f) \cdot \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{T}^{-1}(x_f, y_f)$$

$\mathbf{S}(x_f, y_f, s_x, s_y)$ Em Notação Matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_f \\ 0 & 1 & y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_f \\ 0 & 1 & -y_f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & x_f(1 - s_x) \\ 0 & s_y & y_f(1 - s_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Compostas

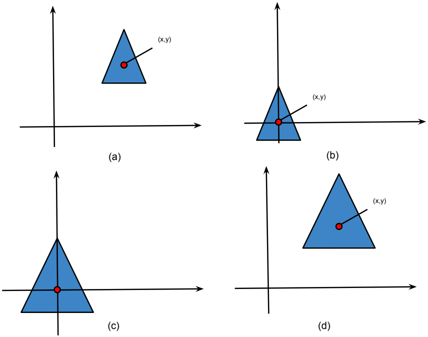


Figura : Passos para efetuar escala em torno de um ponto referencial.

Transformações Compostas

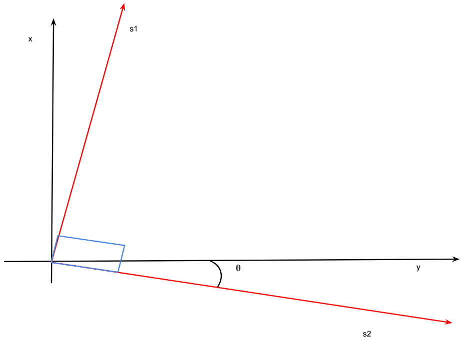
Escala em Direções Gerais

- Os tipos de escalas apresentadas até agora apenas escalam em x e y.
- Para efetuar escalas em direções gerais é necessário:
- Rotacionar o objeto.
- Escalar o objeto.
- Rotacionar novamente.

Em Notação Matricial

$$\mathbf{S}(s_1, s_2, \theta) = \mathbf{R}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{S}(s_1, s_2) \cdot \mathbf{R}(\theta)$$

Transformações Compostas



Transformações Compostas

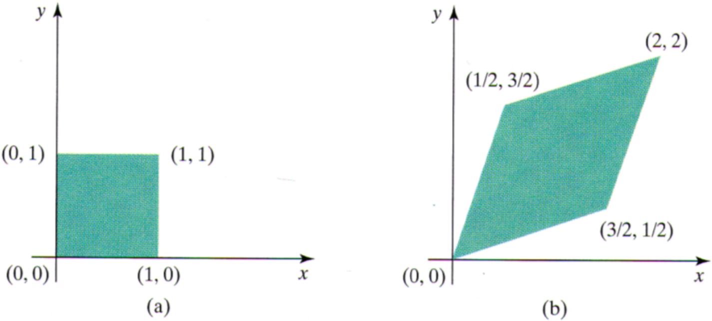


Figura : Transformação com $s_1 = 1, s_2 = 2$ e $\theta = 45°$

Outros Tipos de Transformações

Reflexão - Espelhamento

- Espelha-se as coordenadas do objeto de acordo com o eixo a ser espelhado, rotacionando 180°.

Reflexão em $y = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outros Tipos de Transformações

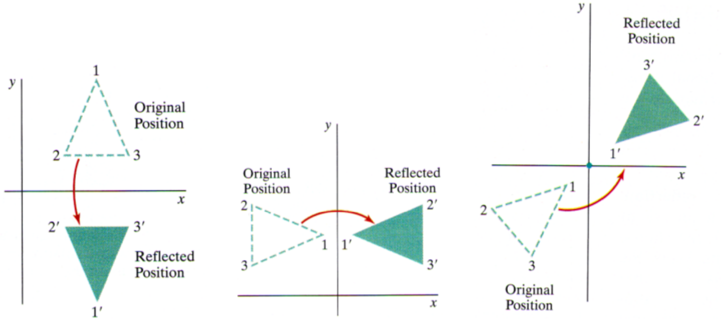
Reflexão em $x = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão em $x = 0$ e $y = 0$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outros Tipos de Transformações



Outros Tipos de Transformações

Sisalhamento

- Distorce o objeto no eixo x ou y.

Sizalhamento no eixo x

$$x' = x + sh_x \cdot y$$
$$y' = y$$
$$\begin{bmatrix} 1 & sh_x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Outros Tipos de Transformações

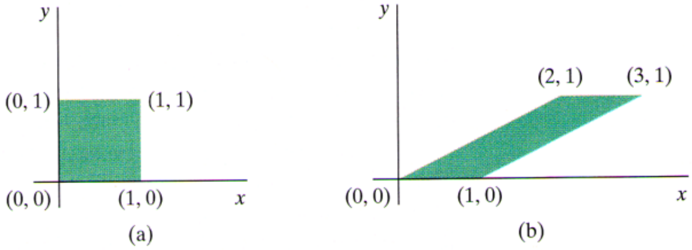
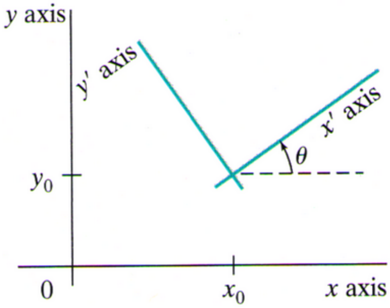


Figura : Sisalhamento no eixo x com $sh_x = 2$.

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- Em computação gráfica, em várias vezes é necessário a transformação de um sistema de coordenadas em outro.



Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Como efetuar a transformação?

- Para efetuar a transformação:
    - Translada-se o objeto para a origem.
    - Efetua-se a rotação em $-\theta$.
- $M_{xy,x'y'} = R(-\theta) \cdot T(-x, -y)$.

Nova orientação da cena.

- Esta transformação nos dá uma nova orientação da cena.
- A cena é a mesma, mas com uma nova referência x', y'.

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- A sub matriz de rotação (2x2) é ortogonal:

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & tr_x \\ r_{yx} & r_{yy} & tr_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Cada linha e coluna da submatriz formam um vetores ortogonais e unitários.

$$r_{xx}^2 + r_{xy}^2 = r_{yx}^2 + r_{yy}^2 = 1$$
$$r_{xx} \cdot r_{xy} + r_{yx} \cdot r_{yy} = 0$$

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- A sub matriz de rotação (2x2) é ortogonal:

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos(\theta) \\ -sen(\theta) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sen(\theta) \\ cos(\theta) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- r_{xx} e r_{xy} é um vetor unitário no eixo x.
- r_{yx} e r_{yy} é um vetor unitário no eixo y.

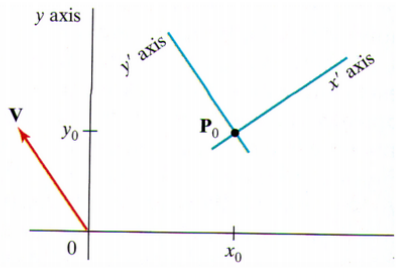
$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & 0 \\ r_{yx} & r_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{xx} \\ r_{xy} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} r_{xx} & r_{xy} & 0 \\ r_{yx} & r_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_{yx} \\ r_{yy} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

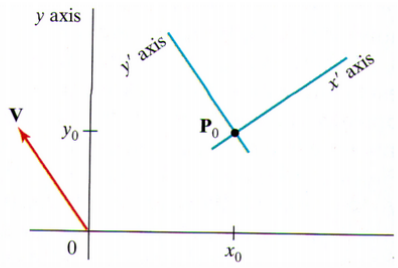
- Utilizando as propriedades citadas, é possível criar um novo método para transformar x e y em x' e y'.
  - Para tal fim é encontrado um vetor **V**, que indica a orientação positiva do eixo y' do novo sistema de coordenadas $x'y'$.



Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- Utilizando as propriedades citadas, é possível criar um novo método para transformar x e y em x' e y'.
  - Para tal fim é encontrado um vetor **V**, que indica a orientação positiva do eixo y' do novo sistema de coordenadas $x'y'$.



Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- Podemos especificar **V** como um vetor unitário e um ponto no espaço *xy*:
  $v = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = (v_x, v_y)$
- O vetor u ortogonal a v e que representa a direção do eixo x' pode ser obtido da seguinte forma:
  $u = (v_x, -v_y) = (u_x, u_y)$

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- Como qualquer matriz de rotação pode ser expressa como um conjunto de vetores ortogonais, temos que:

$$\begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \\ v_x & v_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

Transformações Entre Sistemas de Coordenadas

- É possível especificar **V** no sistema $x'y'$ por meio de um ponto P_0.
  $v = \frac{P_1 - P_0}{|P_1 - P_0|}$