Transformações 2D

Uéliton Freitas

Universidade Católica Don Bosco - UCDB

freitas.ueliton@gmail.com

23 de agosto de 2014

Sumário

1. Introdução
2. Translação
3. Rotação

Introdução

Transformações Geométricas

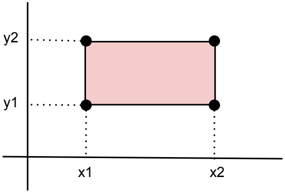
- São transformações aplicadas aos modelos de objetos:
  - Posicionamento (translação).
  - Orientação (rotação).
  - Tamanho (escala).
  - Reflexão.
  - Crisalhamento.

Translação

Translação de um Objeto

- A translação consiste em adicionar uma “variação” as coordenadas de um objeto.
  - $x' = x + \Delta x$
  - $y' = y + \Delta y$

Translação



Objeto Original

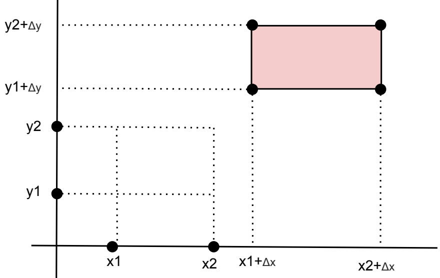


Figura Objeto Transladado

Translação

Translação de um Objeto

- A translação consiste em adicionar uma "variação" as coordenadas de um objeto.
  - $x' = x + \Delta x$
  - $y' = y + \Delta y$

Notação Matricial

- Utilizando uma notação matricial é possível representar a operação de translação da seguinte forma:

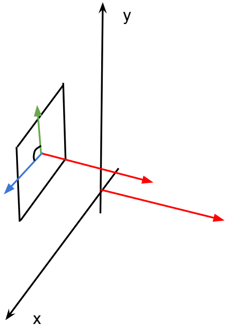
$$\mathbf{P'} = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Rotação

Rotação de um Objeto

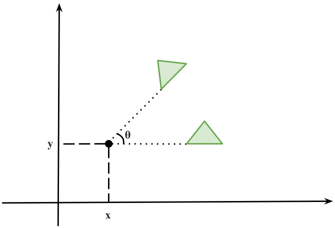
- Dá-se a operação de rotação de um objeto através de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**.
- No plano 2D, o eixo de rotação dá-se pelo eixo perpendicular ao plano *xy*.



Rotação

Rotação de um Objeto

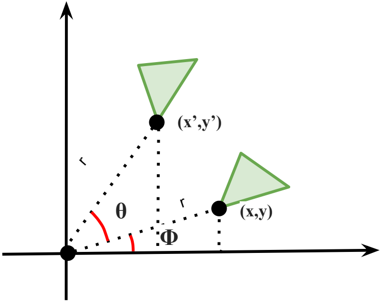
- Para realizar a rotação de um objeto em 2D, é necessário um ângulo θ e o ponto de ponto de rotação (x, y), que é o ponto de intersecção com o eixo perpendicular ao plano xy.
  - Se $\theta > 0$, a rotação é no sentido anti-horária.
  - Se $\theta < 0$, a rotação é no sentido horário.



Rotação

Rotação de um Objeto

- Simplificando:
  - Considera-se que o ponto de rotação está na origem.
  - O raio r é constante.
  - ϕ é o ângulo do ponto $P = (x, y)$ em relação a origem.
  - θ é o ângulo de rotação.



Rotação

Sabemos que:

- $cos(\theta) = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenuza}}$
- $sen(\theta) = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenuza}}$

Então temos que:

- $cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \implies x' = cos(\phi + \theta) \cdot r$
- $sen(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \implies y' = sen(\phi + \theta) \cdot r$

Rotação

Como:

- $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- $sen(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot sen(\beta) + sen(\alpha) \cdot cos(\beta)$

Então temos que:

- $x' = r \cdot cos(\phi) \cdot cos(\theta) - r \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta)$
- $y' = r \cdot cos(\phi) \cdot sen(\theta) + r \cdot sen(\phi) \cdot cos(\theta)$

Rotação

Coordenadas Polares

- Temos que $P = (x, y)$ pode ser escrito na forma de coordenadas polares:
  - $x = r \cdot cos(\theta)$
  - $y = r \cdot sen(\theta)$

Em Notação de Matriz

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

Coordenadas Polares

- Temos que $P = (x, y)$ pode ser escrito na forma de coordenadas polares:
  - $x = r \cdot cos(\theta)$
  - $y = r \cdot sen(\theta)$
- Substituindo os valores temos:
  - $x' = x \cdot cos(\theta) - y \cdot sen(\theta)$
  - $y' = x \cdot sen(\theta) + y \cdot cos(\theta)$

Em Notação de Matriz

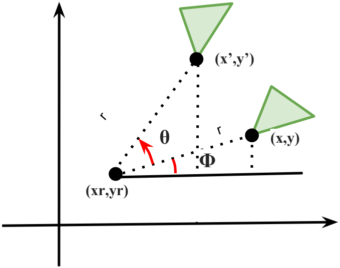
$$\mathbf{P'} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P'} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

Rotação de em Torno de um Ponto Arbitrário

- Rotação em torno de um ponto (x_r, y_r).



Rotação

Para encontrar x'

- $cos(\phi + \theta) = \frac{x' - x_r}{r}$
- $x' = r \cdot cos(\phi + \theta) + x_r$
- $x' = x_r + r \cdot cos(\phi) \cdot cos(\theta) - r \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta)$

Mas temos que:

- $cos(\phi) = \frac{x - x_r}{r}$ e $sen(\phi) = \frac{y - y_r}{r}$

Então:

- $x' = x_r + (x - x_r) \cdot cos(\theta) - (y - y_r) \cdot sen(\theta)$
- $y' = y_r + (x - x_r) \cdot sen(\theta) + (y - y_r) \cdot cos(\theta)$