Transformações 3D

Uéliton Freitas

Universidade Católica Don Bosco - UCDB

freitas.ueliton@gmail.com

4 de setembro de 2014

Sumário

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.
- A rotação é mais complexa.
    - Pode-se efetuar a rotação em qualquer eixo espacial. Diferente da rotação 2D que é feita em torno do eixo x, y.

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.
- A rotação é mais complexa.
  - Pode-se efetuar a rotação em qualquer eixo espacial. Diferente da rotação 2D que é feita em torno do eixo x, y.
- As posições 3D são expressadas por coordenadas homogêneas por meio de matrizes com 4 linhas e colunas, ou seja, as matrizes 3D são $4x4$.

Translação

Translação 3D

- Um objeto é deslocado adicionando-se um deslocamento a cada uma das direções cartesianas.

$$x' = x + \Delta x$$
$$y' = y + \Delta y$$
$$z' = z + \Delta z$$

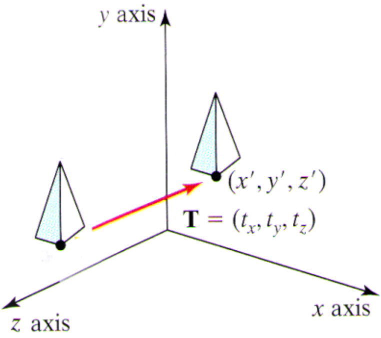
Translação

Representação Matricial da Translação 3D

$$P' = T(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação



Translação Inversa

Representação Matricial da Translação 3D Inversa

$$T^{-1}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = T(-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z)$$

$$T^{-1}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

Escala 3D

- A escala 3D é uma simples extensão da escala 2D.

$$
\begin{aligned}
s_x > 0, s_y > 0, s_z > 0 \\
x' = x \cdot s_x \\
y' = y \cdot s_y \\
z' = z \cdot s_z
\end{aligned}
$$

Escala

Representação Matricial da Escala 3D

- A escala 3D é uma simples extensão da escala 2D.

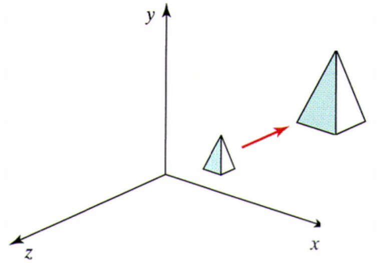
$$P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

Escala 3D

- Com $s_x > 1$ e $s_y > 1$
  - O objeto se afasta da origem.
- Com $0 < s_x < 1$ e $0 < s_y < 1$
  - O objeto se aproxima da origem.



Translação

Escala 3D - Ponto Fixo

- Para resolver o problema do deslocamento:
  - Translada-se o ponto fixo do objeto para a origem.
  - Efeuta-se a escala.
  - Translada-se o ponto fixo para a posição original.
    $P' = T(\Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-\Delta x_f, -\Delta y_f, -\Delta z_f)$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala Inversa

Escala Inversa 3D

- A matriz da escala inversa é obtida trocando os valores das escalas por seus valores inversos.

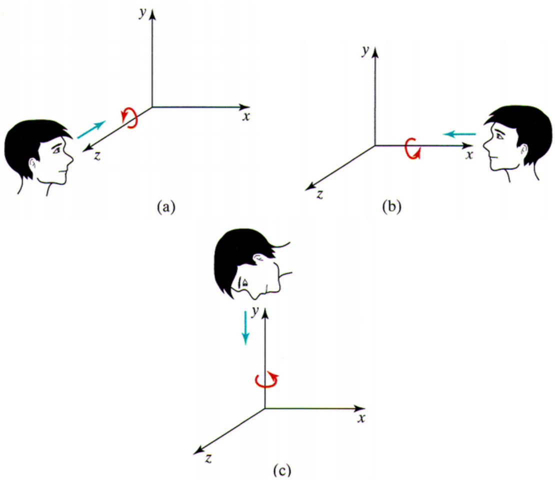
$$T^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & (1 - \frac{1}{s_x})x_f \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & (1 - \frac{1}{s_y})y_f \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & (1 - \frac{1}{s_z})z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

Rotação 3D

- Pode-se rotacionar um objeto em qualquer eixo no espaço 3D.
- Contudo, é mais fácil fazer a rotação sobre os eixos cartesianos.
  - É possível combinar qualquer rotação em torno dos eixos cartesianos para obter rotações em qualquer eixo no espaço.
- Ângulos positivos rotacionam o objeto no sentido anti-horário.

Orientação da Rotação 3D



Orientação da Rotação 3D

Rotação 3D

- A rotação 3D pode ser facilmente estendida da rotação 2D.

$$
\begin{aligned}
x' &= x \cdot cos\theta - y \cdot sen\theta \\
y' &= x \cdot sen\theta - y \cdot cos\theta \\
z' &= z
\end{aligned}
$$

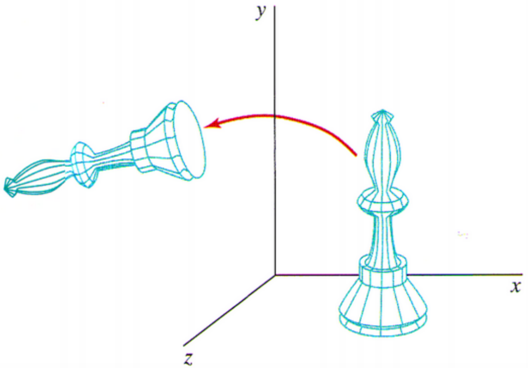
Rotação 3D na Representação Matricial

- A rotação 3D pode ser facilmente estendida da rotação 2D.

$$
\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P}
$$

$$
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}
$$

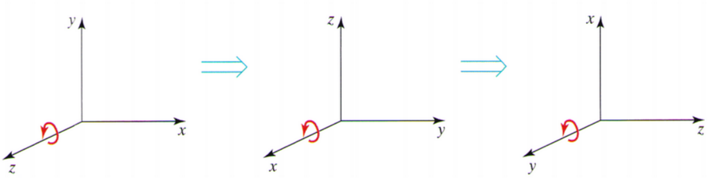
Rotação no eixo z



Rotação 3D

Rotação 3D

- A rotação entre os eixos podem ser feitas por meio de uma permutação cíclica das coordenadas x, y e z.
  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$



Rotação 3D

Rotação 3D no eixo x

- Levando em consideração a permutação citada, a rotação no eixo x é composta da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ cos\theta & -sen\theta & 0 & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

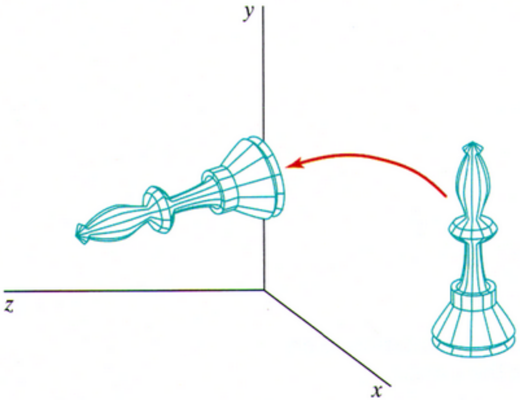


Figura : Rotação em torno do eixo x.

Rotação 3D

Rotação 3D no eixo y

- Levando em consideração a permutação citada, a rotação no eixo y é composta da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sen\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

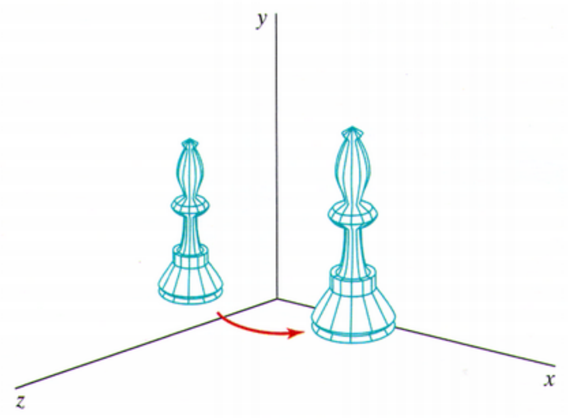


Figura : Rotação em torno do eixo y.

Rotação 3D

Inversa da Rotação 3D

- A inversa de uma rotação em θ, é dada fazendo a rotação em $-\theta$.
- Como o que muda é apenas o sinal do seno, a inversa também pode ser obtida por $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}(-\theta)$.

Rotação Geral 3D

Rotação Geral 3D

- Pode-se rotacionar um objeto em torno de qualquer eixo utilizando algumas rotações e translações.

Rotação Geral 3D - Caso Particular

- Há um caso especial que ocorre quando o eixo de rotação é paralelo a algum eixo de coordenada.
- Para obter a rotação desejada é necessário:
  - Translade o objeto de forma que o eixo de rotação coincida com o eixo de coordenada.
  - Executa a rotação.
  - Translada-se o objeto para posição original.

Rotação 3D

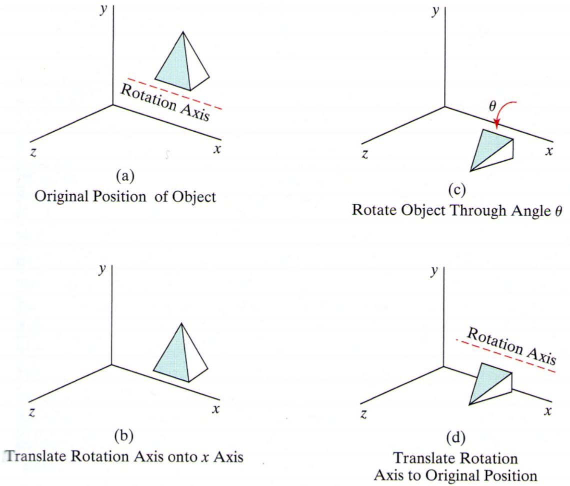


Figura : Rotação em torno de um eixo coincidente com eixo x das coordenadas.

Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- A sequencia de transformações pode ser dada por: $\mathbf{P}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$
- Ou seja, é a mesma matriz de rotação 2D quando o ponto não coincide com a origem.

Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- Quando o eixo de rotação não é paralelo a algum eixo de coordenada, algumas transformações adicionais são necessárias.
    - São necessárias algumas rotações para alinhar o eixo de rotação com o eixo de coordenada escolhido e para trazer o eixo de rotação a posição original.

Rotação 3D

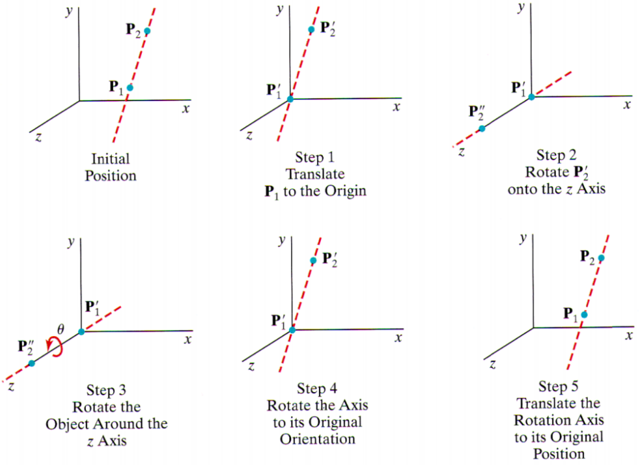
Rotação Geral 3D

- Dado o eixo de rotação e o ângulo de rotação:
  1. Translada-se o objeto de modo que o eixo de rotação passe pela origem do sistema.
  2. Rotaciona-se o objeto de modo que o eixo de rotação coincida com um dos eixos de coordenadas.
  3. Realiza-se a rotação em cima do eixo de coordenada escolhido.
  4. Aplica-se a rotação inversa para trazer o eixo de rotação a sua orientação original.
  5. Aplica-se a translação inversa para trazer o eixo de rotação para sua posição inicial.

Eixo de Coordenada Escolhido para Orientação

- Por conveniência o eixo de coordenada escolhido para o alinhamento é o eixo z.

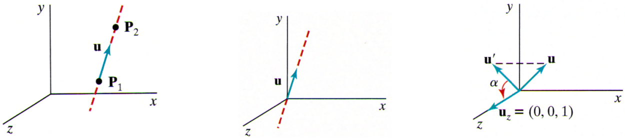
Rotação 3D


y
x
z
P_2
P_1
Initial
Position
P_2'
P_1'
Step 1
Translate
P_1 to the Origin
P_1'
P_2''
Step 2
Rotate P_2'
onto the z Axis
θ
Step 3
Rotate the
Object Around the
z Axis
Step 4
Rotate the Axis
to its Original
Orientation
Step 5
Translate the
Rotation Axis
to its Original
Position

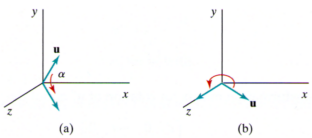
Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- Mas o eixo de rotação pode não estar alinhado com algum eixo.



(a) (b) (c)



(d)

Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- Uma forma menos intuitiva de fazer as rotações em α e β é lembrando que a matriz de rotação (3x3) é ortogonal entre si.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{12} & 0 \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & 0 \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

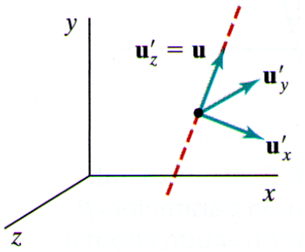
Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- Sendo assim, vamos utilizar um sistema de coordenadas locais com um dos eixos alinhados com o eixo de rotação, e os três vetores unitários para formarem os três eixos de coordenadas na matriz rotação.
- Assumindo que nenhum dos eixos sejam paralelos aos eixos originais, podemos calcular os vetores da seguinte forma:

$$\mathbf{u}'_z = \mathbf{u} = (u'_{z_x}, u'_{z_y}, u'_{z_z})$$
$$\mathbf{u}'_y = \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{u}'_x}{|\mathbf{u} \times \mathbf{u}'_x|} = (u'_{y_x}, u'_{y_y}, u'_{y_z})$$
$$\mathbf{u}'_x = \mathbf{u}'_y \times \mathbf{u}'_z = (u'_{x_x}, u'_{x_y}, u'_{x_z})$$

Rotação 3D



Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- Então as rotações de alinhamento feitas em α podem ser representadas na forma:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u'_{x_x} & u'_{x_y} & u'_{x_z} & 0 \\ u'_{y_x} & u'_{y_y} & u'_{y_z} & 0 \\ u'_{z_x} & u'_{z_y} & u'_{z_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Onde cada vetor $\mathbf{u}'_x, \mathbf{u}'_y$ e $\mathbf{u}'_z$ correspondem aos eixos x, y e z com o alinhamento de rotação no eixo z pois $\mathbf{u}'_z = u$.

Composição de Transformações 3D

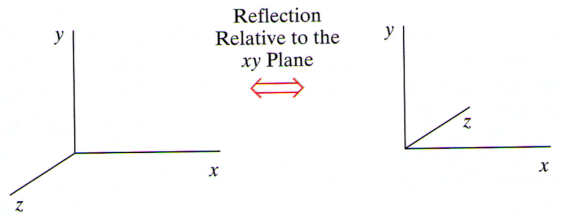
Composição de Transformações 3D

- A Composição de transformações 3D é semelhante a 2D, isto é, são compostas por multiplicações de matrizes.
- A transformação mais a direita será a primeira a ser aplicada.

Reflexão 3D

Reflexão 3D

- A reflexão é semelhante a reflexão 2D, ou seja, é feito a rotação de 180° graus sobre um eixo (em 3D é um plano) de rotação.
- Quando um plano de rotação é um plano coordenado (xy, xz, yz), a transformação pode ser vista invertendo a orientação do vetor ortogonal ao plano.



Reflexão 3D

Reflexão 3D

- Se o plano da reflexão for o plano xy, então esta transformação é obtida pela inversão do sinal de z e mantendo as coordenadas x e y.

$$\mathbf{M}_{z-Reflect} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- As reflexões nos planos yz e xz são obtidas de forma semelhante.

Cisalhamento 3D

Cisalhamento 3D

- O cisalhamento relativo a x e y em 3D são os mesmos utilizados em 2D, mas agora também é possível faze-lo no eixo z.
- Cisalhamento no eixo x

$$\mathbf{S}(sh_{zx}, sh_{zy}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_{zx} & 0 \\ 0 & 1 & sh_{zy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$