Transformações 2D

Uéliton Freitas

Universidade Católica Don Bosco - UCDB

freitas.ueliton@gmail.com

24 de agosto de 2014

Sumário

Introdução

Transformações Geométricas

- São transformações aplicadas aos modelos de objetos:
  - Posicionamento (translação).
  - Orientação (rotação).
  - Tamanho (escala).
  - Reflexão.
  - Crisalhamento.

Transformações de Corpos Rígidos

Transformações de Corpo Rígido

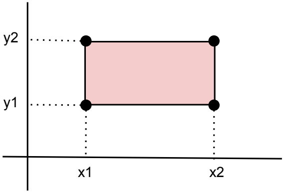
- São transformações que não alteram as dimensões dos objetos:
  - Posicionamento (translação).
  - Orientação (rotação).
- Mantém as distâncias e ângulos do objeto.

Translação

Translação de um Objeto

- A translação consiste em adicionar uma "variação" as coordenadas de um objeto.
  - $x' = x + \Delta x$
  - $y' = y + \Delta y$

Translação



Objeto Original

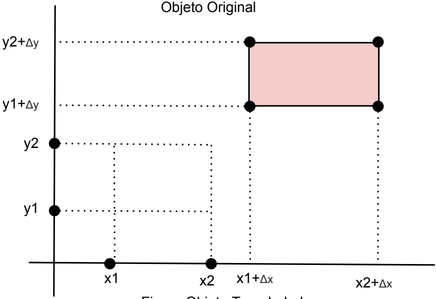


Figura Objeto Transladado

Translação

Translação de um Objeto

- A translação consiste em adicionar uma "variação" as coordenadas de um objeto.
  - $x' = x + \Delta x$
  - $y' = y + \Delta y$

Notação Matricial

- Utilizando uma notação matricial é possível representar a operação de translação da seguinte forma:

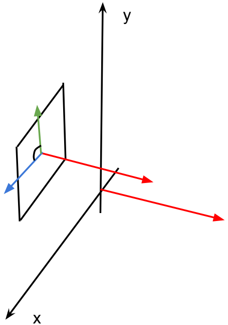
$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Rotação

Rotação de um Objeto

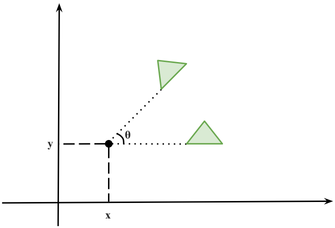
- Dá-se a operação de rotação de um objeto através de um **eixo de rotação** e um **ângulo de rotação**.
- No plano 2D, o eixo de rotação dá-se pelo eixo perpendicular ao plano *xy*.



Rotação

Rotação de um Objeto

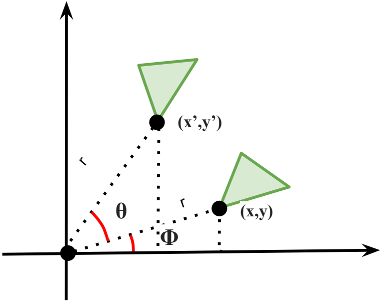
- Para realizar a rotação de um objeto em 2D, é necessário um ângulo θ e o ponto de ponto de rotação (x, y), que é o ponto de intersecção com o eixo perpendicular ao plano xy.
  - Se $\theta > 0$, a rotação é no sentido anti-horária.
  - Se $\theta < 0$, a rotação é no sentido horário.



Rotação

Rotação de um Objeto

- Simplificando:
  - Considera-se que o ponto de rotação está na origem.
  - O raio r é constante.
  - ϕ é o ângulo do ponto $P = (x, y)$ em relação a origem.
  - θ é o ângulo de rotação.



Rotação

Sabemos que:

- $cos(\theta) = \frac{\text{Cateto adjacente}}{\text{Hipotenuza}}$
- $sen(\theta) = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{Hipotenuza}}$

Então temos que:

- $cos(\phi + \theta) = \frac{x'}{r} \implies x' = cos(\phi + \theta) \cdot r$
- $sen(\phi + \theta) = \frac{y'}{r} \implies y' = sen(\phi + \theta) \cdot r$

Rotação

Como:

- $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sen(\alpha) \cdot sen(\beta)$
- $sen(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot sen(\beta) + sen(\alpha) \cdot cos(\beta)$

Então temos que:

- $x' = r \cdot cos(\phi) \cdot cos(\theta) - r \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta)$
- $y' = r \cdot cos(\phi) \cdot sen(\theta) + r \cdot sen(\phi) \cdot cos(\theta)$

Rotação

Coordenadas Polares

- Temos que $P = (x, y)$ pode ser escrito na forma de coordenadas polares:
  - $x = r \cdot cos(\theta)$
  - $y = r \cdot sen(\theta)$

Em Notação de Matriz

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

Coordenadas Polares

- Temos que $P = (x, y)$ pode ser escrito na forma de coordenadas polares:
  - $x = r \cdot cos(\theta)$
  - $y = r \cdot sen(\theta)$
- Substituindo os valores temos:
  - $x' = x \cdot cos(\theta) - y \cdot sen(\theta)$
  - $y' = x \cdot sen(\theta) + y \cdot cos(\theta)$

Em Notação de Matriz

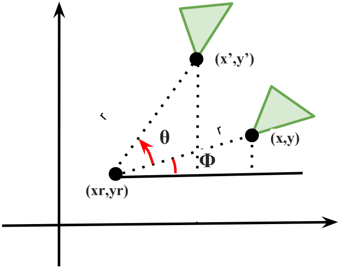
$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Rotação

Rotação de em Torno de um Ponto Arbitrário

- Rotação em torno de um ponto (x_r, y_r).



Rotação

Para encontrar x':

- $cos(\phi + \theta) = \frac{x' - x_r}{r}$
- $x' = r \cdot cos(\phi + \theta) + x_r$
- $x' = x_r + r \cdot cos(\phi) \cdot cos(\theta) - r \cdot sen(\phi) \cdot sen(\theta)$

Mas temos que:

- $cos(\phi) = \frac{x - x_r}{r}$ e $sen(\phi) = \frac{y - y_r}{r}$

Então:

- $x' = x_r + (x - x_r) \cdot cos(\theta) - (y - y_r) \cdot sen(\theta)$
- $y' = y_r + (x - x_r) \cdot sen(\theta) + (y - y_r) \cdot cos(\theta)$

Rotação

- Escrevendo a operação em notação de matriz temos:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{T}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_r - x_r \cdot cos(\theta) + y_r \cdot sen(\theta) \\ y_r - x_r \cdot sen(\theta) - y_r \cdot cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Escala

Escala de um Objeto

- Utiliza-se a **escala** para aumentar o tamanho de um objeto.
- Multiplica-se os valores das coordenadas x, y por um fator s:
  - $x' = x \cdot s_x$
  - $y' = x \cdot y_x$
- Em notação matricial:

$$\mathbf{P'} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.
- Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ há uma diminuição do objeto.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.
- Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ há uma diminuição do objeto.
- Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.

Escala

Propriedades da Escala

- s_x e s_y devem ser maiores que zero.
- Se $s_x > 1$ e $s_y > 1$ há um aumento do objeto.
- Se $s_x < 1$ e $s_y < 1$ há uma diminuição do objeto.
- Se $s_x = s_y$ a escala é uniforme.
- Se $s_x \neq s_y$ a escala é diferencial.

Escala

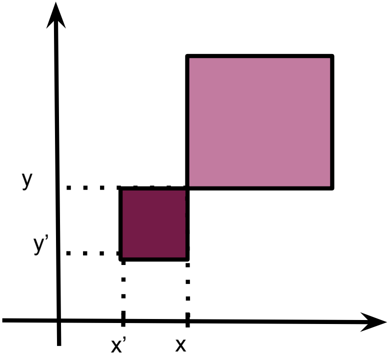


Figura : Operação de escala com $s_x = 0.5$ e $s_y = 0.5$

Escala

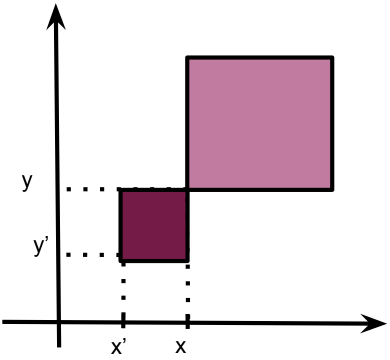


Figura : Operação de escala com $s_x = 0.5$ e $s_y = 0.5$

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.
- Para resolver o problema do deslocamento:
  - Escolha uma posição fixa (x_f, y_f).
  - Escala-se a distância entre o ponto fixo e as coordenadas do objeto.

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.
- Para resolver o problema do deslocamento:
  - Escolha uma posição fixa (x_f, y_f).
  - Escala-se a distância entre o ponto fixo e as coordenadas do objeto.
- Obtemos x' e y' da seguinte forma:

$$x' - x_f = s_x \cdot (x - x_f)$$
$$y' - y_f = s_y \cdot (y - y_f)$$

Escala

Correção da Escala de um Objeto

- Pela formula atual o objeto é escalado e movido.
- Para resolver o problema do deslocamento:
  - Escolha uma posição fixa (x_f, y_f).
  - Escala-se a distância entre o ponto fixo e as coordenadas do objeto.
- Obtemos x' e y' da seguinte forma:

$$x' - x_f = s_x \cdot (x - x_f)$$
$$y' - y_f = s_y \cdot (y - y_f)$$

- Assim:

$$x' = x \cdot s_x + x_f(1 - s_x)$$
$$y' = y \cdot s_y + y_f(1 - s_y)$$

Escala

Em Notação Matricial

- $x_f(1 - s_x)$ e $y_f(1 - s_y)$ são constantes para todas as coordenadas do objeto.

$$\mathbf{P}' = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}$$

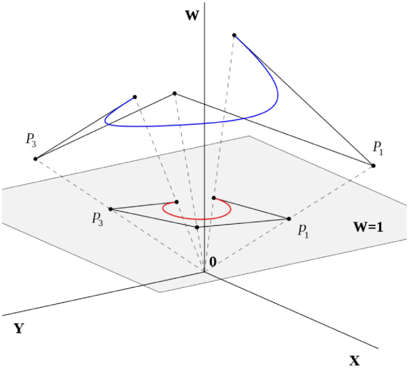
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_f(1 - s_x) \\ y_f(1 - s_y) \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Coordenadas Homogêneas

- Podem descrever objetos 2D usando matrizes 3x3.
- Um ponto 2D é representado da seguinte forma utilizando coordenadas homogêneas:
  $P(x_h, y_h, h) = P(\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, 1), h \neq 0$
- h é denominado fator homogêneo, e por conveniência $h = 1$.
- Pode ser visto como a projeção do espaço 2D no plano h.

Coordenadas Homogêneas



Coordenadas Homogêneas

Coordenadas Homogêneas

- Mas por que transformar as coordenadas 2D dos objetos em coordenadas 3D?

Coordenadas Homogêneas

Coordenadas Homogêneas

- Mas por que transformar as coordenadas 2D dos objetos em coordenadas 3D?
    - Escrever as transformações como multiplicação de matrizes.

Coordenadas Homogêneas

A Translação no Sistema Homogêneo é dada por:

$$
\begin{aligned}
x'_h &= 1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + \Delta x \cdot h \\
y'_h &= 0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + \Delta y \cdot h \\
h &= 0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h
\end{aligned}
$$

A Translação no Sistema Homogêneo em Notação de Matriz

$$
\begin{bmatrix} x'_h \\ y'_h \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ h \end{bmatrix}
$$

Coordenadas Homogêneas

Transformando de Volta ao Plano 2D

$$\frac{x'_h}{h} = \frac{1 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + \Delta x \cdot h}{h} \Rightarrow x' = x + \Delta x$$

$$\frac{y'_h}{h} = \frac{0 \cdot x_h + 1 \cdot y_h + \Delta y \cdot h}{h} \Rightarrow y' = y + \Delta y$$

$$\frac{h}{h} = \frac{0 \cdot x_h + 0 \cdot y_h + 1 \cdot h}{h} \Rightarrow h = 1$$

Coordenadas Homogêneas

Matriz de Translação no Espaço 2D

$$\mathbf{P'} = \mathbf{T}(\Delta x, \Delta y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Matriz de Rotação no Espaço 2D

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

Matriz de Escala no Espaço 2D

$$\mathbf{P'} = \mathbf{S}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Inversas

Inversa da Translação

$$\mathbf{P'} = \mathbf{T}^{-1}(\Delta x, \Delta y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Basta inverter os sinais de Δx e Δy.

Transformações Inversas

Inversa da Rotação

$$\mathbf{P'} = \mathbf{R}^{-1}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Utilizado para rotacionado no sentido horário.
- Nete caso, $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t$.

Transformações Inversas

Inversa da Escala

$$\mathbf{P'} = \mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Basta fazer a escala com o inverso dos valores.

Transformações Compostas

Transformações Compostas

- Utilizando coordenadas homogêneos é possível fazer várias transformações em um objeto utilizando apenas uma matriz de transformação.
- A matriz obtida das várias transformações é obtida pela multiplicação das mesmas:zz

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' &= \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{P}' &= (\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{P} \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{M} \cdot \mathbf{P} \end{aligned}$$

- A transformação é dada por $\mathbf{M}$ ao invés de $\mathbf{M}_1$ e $\mathbf{M}_2$.

Transformações Compostas

Composição de Duas Translações

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \{\mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y}) \cdot \mathbf{P}\}$$

$$\mathbf{P}' = \{\mathbf{T}(t_{2_x}, t_{2_y}) \cdot \mathbf{T}(t_{1_x}, t_{1_y})\} \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_{1_x} + t_{2_x} \\ 0 & 1 & t_{1_y} + t_{2_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$