

Transformações 3D

Uéliton Freitas

Universidade Católica Don Bosco - UCDB

freitas.ueliton@gmail.com

3 de setembro de 2014

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Transformações Básicas
 - Translação
 - Escala 3D
 - Rotação 3D
- 3 Composição de Transformações 3D
- 4 Outras Transformações 3D
 - Reflexão 3D
 - Cisalhamento 3D

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.
- A rotação é mais complexa.
 - Pode-se efetuar a rotação em qualquer eixo espacial. Diferente da rotação 2D que é feita em torno do eixo x, y .

Introdução

Transformações 3D

- Transformações 3D são extensões das transformações 2D.
- A translação e escala são simples adaptações.
- A rotação é mais complexa.
 - Pode-se efetuar a rotação em qualquer eixo espacial. Diferente da rotação 2D que é feita em torno do eixo x, y .
- As posições 3D são expressadas por coordenadas homogêneas por meio de matrizes com 4 linhas e colunas, ou seja, as matrizes 3D são 4×4 .

Translação

Translação 3D

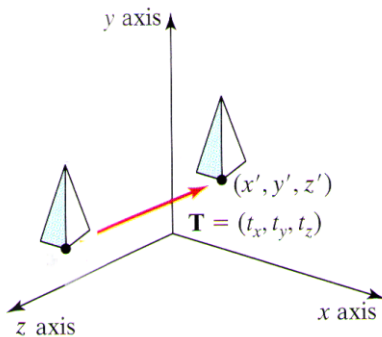
- Um objeto é deslocado adicionando-se um deslocamento a cada uma das direções cartesianas.

$$x' = x + \Delta x$$

$$y' = y + \Delta y$$

$$z' = z + \Delta z$$

Translação



Translação Inversa

Representação Matricial da Translação 3D Inversa

$$T^{-1}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = T(-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z)$$

$$T^{-1}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\Delta x \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta y \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

Escala 3D

- A escala 3D é uma simples extensão da escala 2D.

$$s_x > 0, s_y > 0, s_z > 0$$

$$x' = x \cdot s_x$$

$$y' = y \cdot s_y$$

$$z' = z \cdot s_z$$

Escala

Representação Matricial da Escala 3D

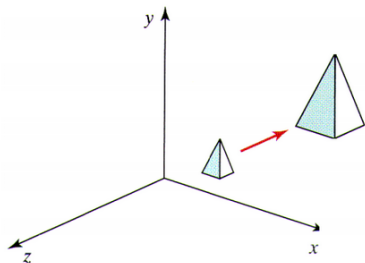
- A escala 3D é uma simples extensão da escala 2D.

$$P' = S(s_x, s_y, s_z) \cdot P$$
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

Escala 3D

- Com $s_x > 1$ e $s_y > 1$
 - O objeto se afasta da origem.
- Com $0 < s_x < 1$ e $0 < s_y < 1$
 - O objeto se aproxima da origem.



Translação

Escala 3D - Ponto Fixo

- Para resolver o problema do deslocamento:
 - Translada-se o ponto fixo do objeto para a origem.
 - Efeuta-se a escala.
 - Translada-se o ponto fixo para a posição original.

$$P' = T(\Delta x_f, \Delta y_f, \Delta z_f) \cdot S(s_x, s_y, s_z) \cdot T(-\Delta x_f, -\Delta y_f, -\Delta z_f)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x)x_f \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y)y_f \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z)z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escala Inversa

Escala Inversa 3D

- A matriz da escala inversa é obtida trocando os valores das escalas por seus valores inversos.

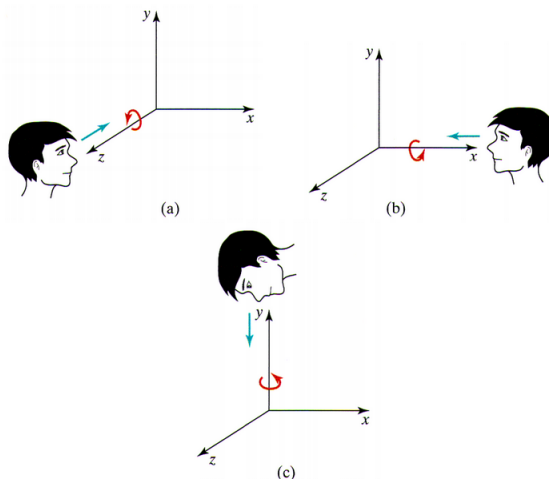
$$T^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_x} & 0 & 0 & (1 - \frac{1}{s_x})x_f \\ 0 & \frac{1}{s_y} & 0 & (1 - \frac{1}{s_y})y_f \\ 0 & 0 & \frac{1}{s_z} & (1 - \frac{1}{s_z})z_f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

Rotação 3D

- Pode-se rotacionar um objeto em qualquer eixo no espaço 3D.
- Contudo, é mais fácil fazer a rotação sobre os eixos cartesianos.
 - É possível combinar qualquer rotação em torno dos eixos cartesianos para obter rotações em qualquer eixo no espaço.
- Ângulos positivos rotacionam o objeto no sentido anti-horário.

Orientação da Rotação 3D



Orientação da Rotação 3D

Rotação 3D

- A rotação 3D pode ser facilmente estendida da rotação 2D.

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta$$

$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta$$

$$z' = z$$

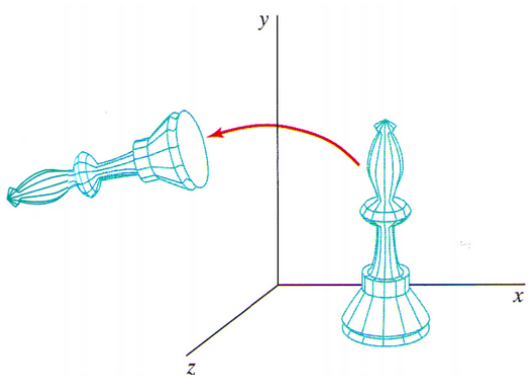
Rotação 3D na Representação Matricial

- A rotação 3D pode ser facilmente estendida da rotação 2D.

$$\mathbf{P}' = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{P}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação no eixo z

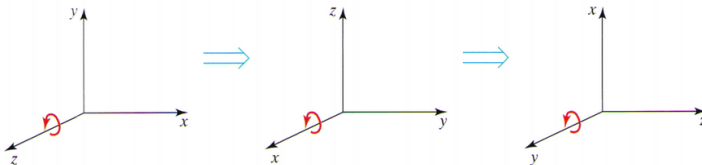


Rotação 3D

Rotação 3D

- A rotação entre os eixos podem ser feitas por meio de uma permutação cíclica das coordenadas x, y e z .

$$x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$$



Rotação 3D

Rotação 3D no eixo x

- Levando em consideração a permutação citada, a rotação no eixo x é composta da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

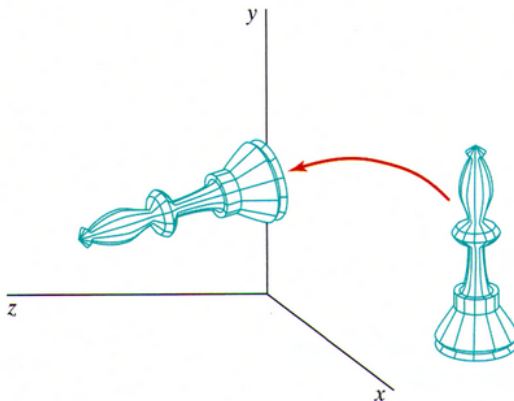


Figura : Rotação em torno do eixo x.

Rotação 3D

Rotação 3D no eixo y

- Levando em consideração a permutação citada, a rotação no eixo y é composta da seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

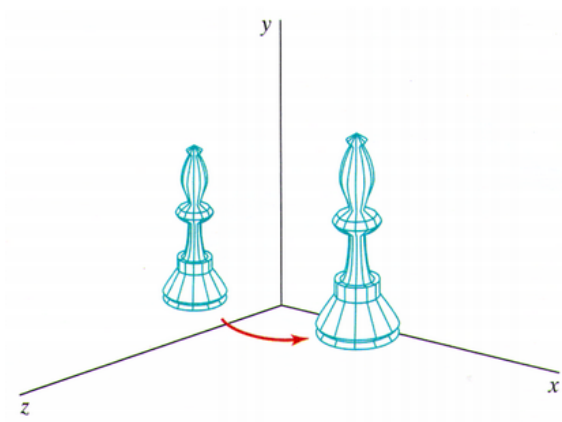


Figura : Rotação em torno do eixo y .

Rotação 3D

Inversa da Rotação 3D

- A inversa de uma rotação em θ , é dada fazendo a rotação em $-\theta$.
- Como o que muda é apenas o sinal do seno, a inversa também pode ser obtida por $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}(-\theta)$.

Rotação Geral 3D

Rotação Geral 3D

- Pode-se rotacionar um objeto em torno de qualquer eixo utilizando algumas rotações e translações.

Rotação Geral 3D - Caso Particular

- Há um caso especial que ocorre quando o eixo de rotação é paralelo a algum eixo de coordenada.
- Para obter a rotação desejada é necessário:
 - Translade o objeto de forma que o eixo de rotação coincida com o eixo de coordenada.
 - Executa a rotação.
 - Translada-se o objeto para posição original.

Rotação 3D

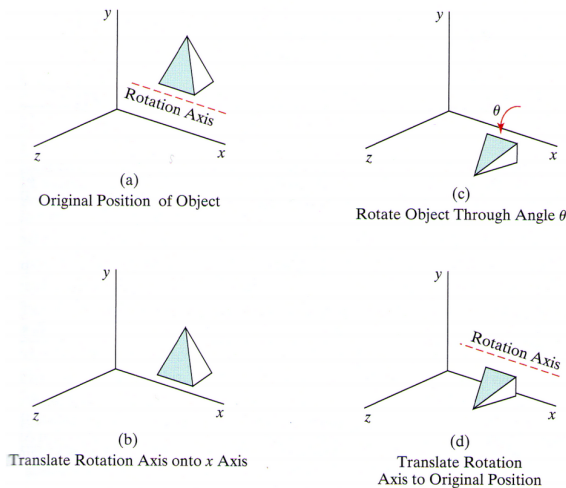


Figura : Rotação em torno de um eixo coincidente com eixo x das coordenadas.

Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- A sequência de transformações pode ser dada por:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{R}_x(\theta) \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}$$

- Ou seja, é a mesma matriz de rotação 2D quando o ponto não coincide com a origem.

Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- Quando o eixo de rotação não é paralelo a algum eixo de coordenada, algumas transformações adicionais são necessárias.
 - São necessárias algumas rotações para alinhar o eixo de rotação com o eixo de coordenada escolhido e para trazer o eixo de rotação a posição original.

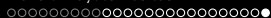
Rotação 3D

Rotação Geral 3D

- Dado o eixo de rotação e o ângulo de rotação:
 - 1 Translada-se o objeto de modo que o eixo de rotação passe pela origem do sistema.
 - 2 Rotaciona-se o objeto de modo que o eixo de rotação coincida com um dos eixos de coordenadas.
 - 3 Realiza-se a rotação em cima do eixo de coordenada escolhido.
 - 4 Aplica-se a rotação inversa para trazer o eixo de rotação a sua orientação original.
 - 5 Aplica-se a translação inversa para trazer o eixo de rotação para sua posição inicial.

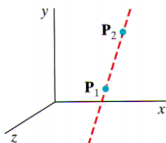
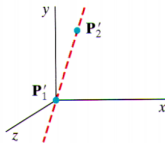
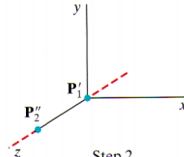
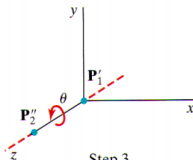
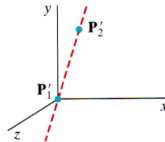
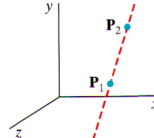
Eixo de Coordenada Escolhido para Orientação

- Por conveniência o eixo de coordenada escolhido para o alinhamento é o eixo z.



Rotação 3D

Rotação 3D

Initial
PositionStep 1
Translate
 P_1 to the OriginStep 2
Rotate P_2'
onto the z AxisStep 3
Rotate the
Object Around the
 z AxisStep 4
Rotate the Axis
to its Original
OrientationStep 5
Translate the
Rotation Axis
to its Original
Position

Composição de Transformações 3D

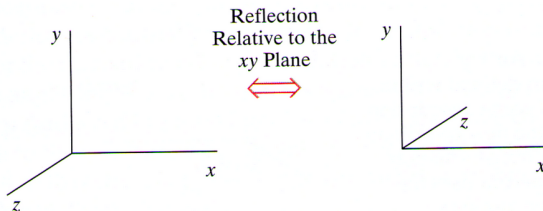
Rotação Geral 3D

- A Composição de transformações 3D é semelhante a 2D, isto é, são compostas por multiplicações de matrizes.
- A transformação mais a direita será a primeira a ser aplicada.

Reflexão 3D

Reflexão 3D

- A reflexão é semelhante a reflexão 2D, ou seja, é feito a rotação de 180° graus sobre um eixo (em 3D é um plano) de rotação.
- Quando um plano de rotação é um plano coordenado (xy, xz, yz), a transformação pode ser vista invertendo a orientação do vetor ortogonal ao plano.



Reflexão 3D

Reflexão 3D

- Se o plano da reflexão for o plano xy , então esta transformação é obtida pela inversão do sinal de z e mantendo as coordenadas x e y .

$$\mathbf{M}_{z-Reflect} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- As reflexões nos planos yz e xz são obtidas de forma semelhante.

Cisalhamento 3D

Cisalhamento 3D

- O cisalhamento relativo a x e y em 3D são os mesmos utilizados em 2D, mas agora também é possível fazê-lo no eixo z .
- Cisalhamento no eixo x

$$S(sh_{zx}, sh_{zy}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & sh_{zx} & 0 \\ 0 & 1 & sh_{zy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$