Projet IM

Ivan Kharkov - Quentin Riggi - Gustave Vial

Mars 2024

1 Partie Théorique

1.1 Introduction

Le projet math info "Planète" présente une façon de modéliser un système planétaire. Le but est de pouvoir prédire et comprendre les événements astronomiques de notre système solaire. Par exemple dans le projet nous manipulons des formules mathématiques dans le but de déterminer les trajectoires des planètes et de satellites, pour ainsi connaître leurs positions dans l'espace. Cela nous est utile, par exemple, lorsque l'on veut prédire les dates d'une éclipse, ce que nous verrons dans cette partie.

1.2 Questions

1.2.1

Da,s un modèle simplifié circulaire, les rayons n'évoluent donc pas et les angles croissent de manière linéaire.

En utilisant ce modèle, on peut calculer la vitesse de révolution de la Terre.

1.2.2

La Terre se situe a 1.5×10^{11} m du Soleil. La longueur de son orbite est donc de $1.5 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \times 2\pi = 9.43 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$. La Terre parcourt cette distance en 1 an, soit $3.154 \times 10^{7}\,\mathrm{s}$. La vitesse de la Terre autour du Soleil est donc de $\frac{9.43\times 10^{8}\,\mathrm{km}}{3.154\times 10^{7}\,\mathrm{s}} = 29.899\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Nous avons déterminé la vitesse de la Terre autour du Soleil. Nous nous intéressons maintenant à l'observation de ce phénomène à un point fixé. Plus précisément nous allons observer à quel moment de ce point d'observation nous pouvons apercevoir l'alignement des planètes P_1 et P_2.

1.2.3

Lors d'un allignement des planètes on a $\theta_1 = \theta_2$.

On calcule donc la période de rotation des planètes avec la période :

$$\tau_i = \frac{R_i(\mathrm{km}) \times 2\pi}{v_i(\mathrm{km\,s^{-1}})}(\mathrm{s})$$

On calcule ensuite la différence entre les fréquences :

$$\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} = \frac{1}{\delta_{rencontre}}$$

On a donc :

$$\delta_{rencontre}(\mathrm{s}) = \frac{R_1(\mathrm{km}) \times R_2(\mathrm{km})}{|R_1(\mathrm{km}) \times V_2(\mathrm{km\,s^{-1}}) - R_2(\mathrm{km}) \times V_1(\mathrm{km\,s^{-1}})|}$$

On a un allignement tous les $\delta_{rencontre}$.

$$t(\mathrm{jour}) \equiv 0 \ (\mathrm{mod} \frac{\delta_{rencontre}}{86400})$$

Passons à la quatrième question. Ici, l'observateur reste en un point spécifique mais non fixe dans l'espace. Nous adaptons notre équation d'alignement des planètes pour prendre en compte la variation des coordonnées de l'observateur au fil du temps, permettant de déterminer les moments d'alignement lors de ses déplacements.

1.2.4

$$\text{Pos}_i = (R_i \cos(\theta_i) - x_0, R_i \sin(\theta_i) - y_0)$$

Allignement si :

$$\begin{aligned} & R_1 R_2(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) - \cos(\theta_2)\sin(\theta_1)) \\ & - x_0(R_2 \sin(\theta_2) - R_1 \sin(\theta_1)) \\ & - y_0(R_1 \cos(\theta_1) - R_2 \cos(\theta_2)) = 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc trouver l'équation de mouvement de l'étoile E pour un observateur sur la planète P_1 en utilisant les coordonnées polaires de l'observateur et de l'étoile E, ainsi que l'équation d'alignement précédemment déterminée.

On peut par exemple trouver la position du satellite par rapport au Soleil.

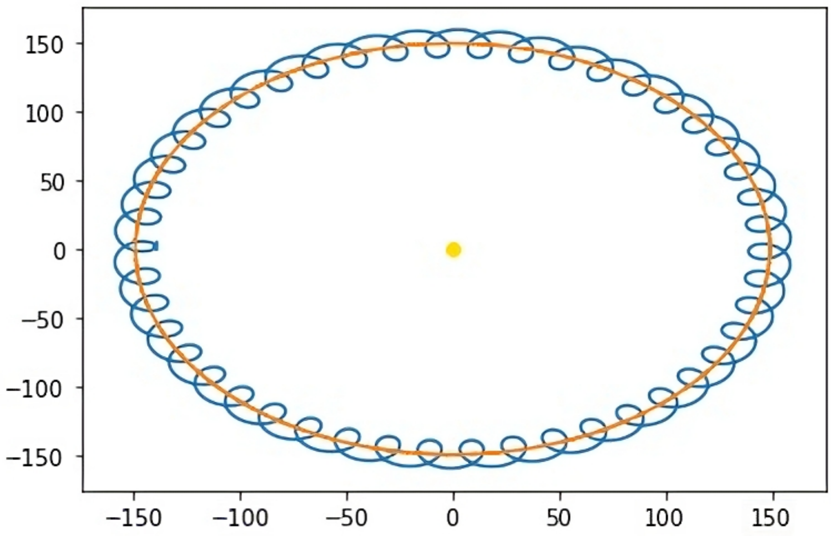


Figure 1: Orbite de P_1 et d'un satellite par rapport au Soleil

1.2.5

Dans la suite, on pose Pos_Y^X la position de X par rapport à Y.
L'équation de mouvement de l'étoile E pour un observateur situé sur la planète P_1, en utilisant les coordonnées polaires :

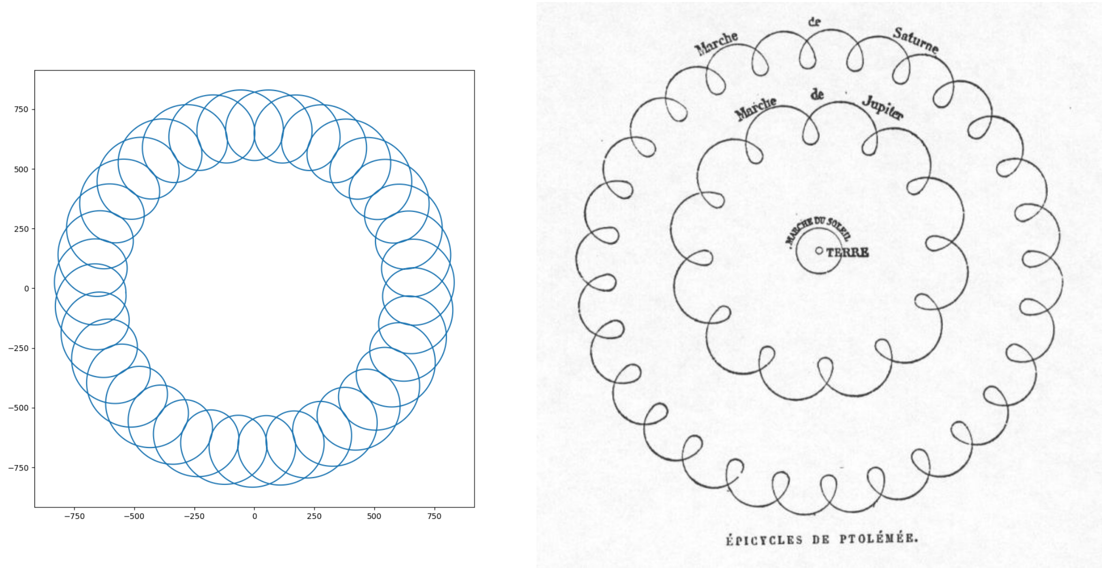
$$\text{Pos}_{P_1}^E = -R_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1))$$

1.2.6

Voici l'équation du mouvement apparent de P_2 vu à partir de P_1, en utilisant les coordonnées polaires :

$$\mathrm{Pos}_{P_1}^{P_2} = R_2(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2)) - R_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_2))$$

La courbe **n'est pas un cercle**.



(a) Orbite de P_2 par rapport à P_1

(b) Modèle d'epicycles de Ptolémée

Figure 2

On peut donc voir que la courbe ressemble aux épicycles de ptolémée et en conclure que le modèle géocentrique était une représentation du système solaire du point de vue de d'une Terre immobile.

Nous venons d'étudier le mouvement de P_2 du point de vue de P_1 avec le modèle géocentrique autrefois utilisé. On introduit maintenant un satellite S en orbite autour de P_1 et nous allons nous intéresser à l'équation de mouvement du satellite S autour de P_1 du point de vue de P_2.

1.2.7

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pos}_{P_2}^{S} &= \mathrm{Pos}_{P_1}^{S} - \mathrm{Pos}_{P_2}^{P_1} \\
\mathrm{Pos}_{P_2}^{S} &= R_S(\cos(\theta_S), \sin(\theta_S)) - R_1(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) + R_2(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2))
\end{aligned}$$

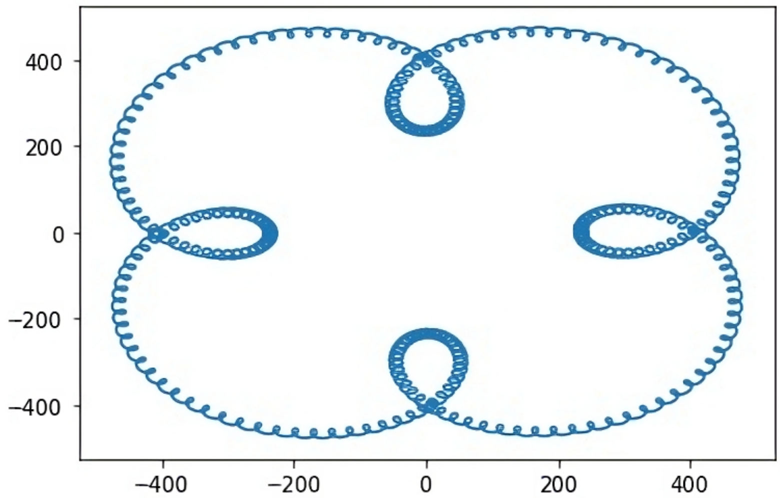


Figure 3: Orbite d'un satellite par rapport à P2

1.2.8

Eclipse :

$$\begin{aligned}
\theta_1 &\equiv \pi + \theta_2 && \pmod{2\pi} \\
\frac{V1}{R1} \cdot t &\equiv \pi - \frac{VS}{RS} \cdot t && \pmod{2\pi} \\
\frac{V1}{R1} \cdot t - \frac{VS}{RS} \cdot t &\equiv \pi && \pmod{2\pi} \\
\frac{V1 \cdot RS - VS \cdot R1}{RS \cdot R1} \cdot t &\equiv \pi && \pmod{2\pi} \\
t &\equiv \pi \cdot \frac{RS \cdot R1}{V1 \cdot RS - VS \cdot R1} && \pmod{2\pi}
\end{aligned}$$

On peut donc l'appliquer à la Terre.

1.2.9

Sur Terre théoriquement :

$$\begin{aligned}
t(\mathrm{s}) &\equiv \pi \times \frac{3.844 \times 10^8 \times 1.49 \times 10^{11}}{\frac{30}{3.6} \times 3.844 \times 10^8 - \frac{16.7}{3.6} \times 1.49 \times 10^{11}} && \pmod{2\pi} \\
t(\mathrm{s}) &\equiv -83250494.1924\pi && \pmod{2\pi} \\
t(\text{journée}) &\equiv -963\pi && \pmod{2\pi} \\
t(\text{journée}) &\equiv 1.42192729056\pi && \pmod{2\pi} \\
t(\text{journée}) &\equiv 4.46 && \pmod{2\pi}
\end{aligned}$$

On a supposé des orbites parfaitement circulaires et toutes sur le même plan, ce qui n'est pas le cas dans la réalité, notre résultat ne correspond donc pas à la réalité.

1.3 Conclusion

Nous avons pour l'instant étudié les mouvements d'astres sur des orbites parfaitement circulaires, ce qui ne permet donc pas d'avoir une simulation parfaite de la réalité. Dans la partie 2, nous pourrons étendre notre travail notamment grâce à des animations du système solaire, une modélisation d'un point de vue géocentrique voir même une simulation interactive et cela grâce aux différents résultats mis en équations dans la partie théorique