Conjuntos libres y ligados Espacios vectoriales de dimensión finita Cambio de base Subespacios vectoriales Bases ortogonales y ortonormales

Espacios vectoriales Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

https://frogames.es

1 de julio de 2017

Índice

- Conjuntos libres y ligados
 - Combinaciones lineales
 - Dependencia e independencia lineal
 - Rango de un conjunto de vectores
- 2 Espacios vectoriales de dimensión finita
 - Espacios vectoriales
 - Sistema generador
 - Base de un espacio vectorial
 - Dimensión y coordenadas de una base
- 3 Cambio de base
 - El cambio de base
 - Matriz de cambio de base
- 4 Subespacios vectoriales
 - Concepto de subespacio vectorial
- Bases ortogonales y ortonormales

- Conjuntos libres y ligados
 - Combinaciones lineales
 - Dependencia e independencia lineal
 - Rango de un conjunto de vectores
- Espacios vectoriales de dimensión finita
 - Espacios vectoriales
 - Sistema generador
 - Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base
- 3 Cambio de base
 - El cambio de base
 - Matriz de cambio de base
- 4 Subespacios vectoriales
 - Concepto de subespacio vectorial
- **5** Bases ortogonales y ortonormales
 - Método de diagonalización de Gram-Schmidt
 - Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

- Conjuntos libres y ligados
 - Combinaciones lineales
 - Dependencia e independencia lineal
 - Rango de un conjunto de vectores
- Espacios vectoriales de dimensión finita
 - Espacios vectoriales
 - Sistema generador
 - Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base
- 3 Cambio de base
 - El cambio de base
 - Matriz de cambio de base
- 4 Subespacios vectoriales
 - Concepto de subespacio vectorial
- 5 Bases ortogonales y ortonormales
 - Método de diagonalización de Gram-Schmidt
 - Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Combinaciones lineales

Combinación lineal

Recuérdese que dados p vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ y los escalares $\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ una combinación lineal de esos p vectores es un vector dado por una expresión de la forma:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$$

Ejercicios

Exprésese el vector (2, -4) como una combinación lineal de los vectores (1,1) y (-2,0).

$$Sol:(2,-4) = -4(1,1) - 3(-2,0).$$

Subespacios vectoriales Bases ortogonales y ortonormales

Ejercicios

Exprésese el vector (4, -11) como una combinación de los vectores $(2, -3) \vee (4, -6)$.

Sol: no tiene solución.

Ejercicios

Exprésese el vector (4, -11) como una combinación de los vectores $(2,-1) \vee (1,4)$

$$Sol:(4,-11) = 3(2,-1) - 2(1,4).$$

Ejercicios

Pruébese que el vector (1,0) no se puede expresar como una combinación lineal de (2, -3) y (4, -6)

Subespacios vectoriales Bases ortogonales y ortonormales

Combinaciones lineales

Ejercicios

Exprésese el vector (4, -5, 6) como una combinación lineal de los vectores (2, -3, 5) y (-1, 3, 2).

Sol: no tiene solución

Ejercicios

Exprésese el vector (4, -5, 7) como una combinación lineal de los vectores (0, -3, 5), (1, 0, -3) y (-1, 3, 4).

Sol:
$$(4, -5, 7) = \frac{31}{9}(0, -3, 5)\frac{52}{9}(1, 0, -3) + \frac{16}{9}(-1, 3, 4)$$
.

Ejercicios

Exprésese, si es posible, el vector (0,0,0) como una combinación lineal de (-1,3,1),(1,0,-3) y (-1,3,4), distinta de (0,0,0).

Bases ortogonales y ortonormales

Dependencia e independencia lineal

Dependencia lineal

Dados el conjunto ed vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente dependientes si alguno de ellos se puede expresar como una combinación lineal del resto. Son LD si:

$$\exists 1 \leq i \leq p : \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

- Conjuntos libres y ligados
 - Combinaciones lineales
 - Dependencia e independencia lineal
 - Rango de un conjunto de vectores
- Espacios vectoriales de dimensión finita
 - Espacios vectoriales
 - Sistema generador
 - Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base
- 3 Cambio de base
 - El cambio de base
 - Matriz de cambio de base
- 4 Subespacios vectoriales
 - Concepto de subespacio vectorial
- 5 Bases ortogonales y ortonormales
 - Método de diagonalización de Gram-Schmidt
 - Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores (2, -4, 0), (1, 1, 1) y (-1, 2, 0) es linealmente dependiente.

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores (-1,6,5), (1,0,-3) y (-1,3,4) es linealmente dependiente.

Independencia lineal (II)

Dado el conjunto de vectores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_p} \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente dependientes si la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

tiene infinitas soluciones, y por tanto los escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ pueden tener valores no nulos.

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores (2, -4, 0), (1, 1, 1) y (-1, 2, 0) es linealmente dependiente.

Independencia lineal

Dado el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente independientes si no es posible expresarlos como una combinación lineal del resto. Son LI si:

$$\exists 1 \leq i \leq p : \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores (2, -4, 0), (1, 1, 1) y (-1, 2, 1) es linealmente independiente.

Dependencia lineal (II)

Dado el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente independientes si la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

tiene como única solución la solución trivial, es decir $\alpha_i = 0 \forall 1 \leq i \leq p$.

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores (2, -4, 0), (1, 1, 1) y (-1, 2, 1) es linealmente independiente.

Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto (1,1) y (1,0) es LI.

Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto (1,1) y (0,1) es LI.

Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto (1,1),(1,0) y (0,1) es LD.

- Conjuntos libres y ligados
 - Combinaciones lineales
 - Dependencia e independencia lineal
 - Rango de un conjunto de vectores
- Espacios vectoriales de dimensión finita
 - Espacios vectoriales
 - Sistema generador
 - Base de un espacio vectorial

- Dimensión y coordenadas de una base
- 3 Cambio de base
 - El cambio de base
 - Matriz de cambio de base
- 4 Subespacios vectoriales
 - Concepto de subespacio vectorial
- 5 Bases ortogonales y ortonormales
 - Método de diagonalización de Gram-Schmidt
 - Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio

Rango de un conjunto de vectores

Definición

Dado el conjunto de vectores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_p} \in \mathbb{K}^n$, dícese que tienen rango $r \leq p$ si existe como mínimo un subconjunto de r vectores linealmente independientes entre ellos y no existe ninguno de r+1 vectores que sea linealmente independiente. Es decir, es el número máximo de vectores linealmente independientes que pueden extraerse del conjunto.

Rango de un conjunto de vectores

Un método para calcular el rango de un conjunto de vectores consiste en construir una matriz utilizando los vectores como columnas (o filas) y definir el rango de la matriz como el rango de sus vectores columna (o fila). Ya se ha aprendido cómo calcular el rango de una matriz en el Tema 1. Ahora se pondrá en práctica para calcular el rango de vectores.

Definición

El rango de una matriz A coincide con el número de vectores fila o columna linealmente independientes.