Matemática discreta

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

https://frogames.es

1 de julio de 2017

Índice

El concepto de conjunto

Definición

Un conjunto es una colección de objetos. Los objetos que forman parte de un conjunto determinado se denominan elementos del conjunto.

Ejemplos de conjuntos son la colección de todos los estudiantes del grado de telemática, la colección de todos los números enteros pares, etcétera.

Conjuntos por extensión

Para describir un conjunto con un número finito de elementos se puede hacer por **extensión**; es decir, mediante un listado de sus elementos entre claves como por ejemplo$\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
No es importante el orden en que se escriben los elementos. Así $\{1, 2, 3, 4\}$ y $\{4, 3, 2, 1\}$ representan el mismo conjunto.
No se ha de tener en cuenta si la lista tiene algún elemento repetido. El conjunto $\{1, 2, 3, 4, 2\}$ es el mismo que el anterior.

Como denotar un conjunto

Se emplearán letras mayúsculas para designar los conjuntos y letras minúsculas para designar sus elementos.
Para indicar que x es un elemento de A, se escribirá $x \in A$ (x perteneciente a A).
Para indicar que x no es un elemento de A, se escribirá $x \notin A$ (x no pertenece a A).

Conjuntos por compresión

También se pueden describir los conjuntos por **compresión**; es decir, específicamente una propiedad qu determina exactamente sus elementos. Se escribirá como:

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

Por ejemplo:

$$A = \{x \mid x \text{ es entero positivo menor que } 5\}$$

Representa al conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

Un conjunto sin elemento

El conjunto vacío

El conjunto que no tiene ningún elemento se denota por $\emptyset$ y se denomina conjunto vacío. Por ejemplo:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = -2\} = \emptyset$$

Igualdad de conjuntos

Definición

Dos conjuntos A y B son iguales cuando tienen exactamente los mismo elementos; es decir, cuando todo elemento de A es elemento de B y todo elemento de B es elemento de A. Cuando A y B son iguales se denota como $A = B$.

Subconjuntos

Definición

Dícese que un conjunto A es un subconjunto de B si todo elemento de A es elemento de B y se escribirá como $A \subseteq B$, notación que significa que A está contenido en B, o que B contiene a A.

El conjunto universal

Definición

Siempre que se hable de conjuntos, se supondrá que son subconjuntos de un conjunto universal U que los contiene a todos.

El conjunto universal contiene todos los conjuntos a los cuales se hace referencia en un ejercicio o resultado.

Ejemplos de subconjuntos

- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.
- $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} : x > 0\} \subseteq \mathbb{Z}$
- Si A es un conjunto cualquiera, entonces $\emptyset \subseteq A$ y $A \subseteq A$. Estos dos se denominan subconjuntos triviales de A.
- Si A es un conjunto cualquiera y $B = \{A, \{A\}\}$, entonces $A \in B$, $\{A\} \in B$, $\{A\} \subseteq B$ pero en cambio $A \not\subseteq B$.

Se puede comprobar fácilmente que $A = B \iff A \subseteq B$ y $B \subseteq A$ (Ejercicio).

Operaciones con conjuntos

Se verán algunas operaciones básicas de conjuntos. Las operaciones entre conjuntos y las propiedades que verifican estas operaciones se pueden ilustrar mediante **diagramas de Venn**. Un diagrama de Venn es una representación gráfica de conjuntos en el plano. El conjunto universal U se representa por el interior de un rectángulo y los otros subconjuntos son representados por círculos en el rectángulo.

Operaciones con conjuntos

Unión de conjuntos

Sean A y B conjuntos, se define su unión como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A o a B.

$$A \cup B = \{x : x \in \ A \ o \ x \in \ B\}$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, g, e, h\}$, entonces:

$$A \cup B = \{a, b, c, d, g, e, h\}$$

Operaciones con conjuntos

Intersección de conjuntos

Sean A y B conjuntos, se define su intersección como el conjunto de todos los elementos que pertenecen al mismo tiempo a A y a B.

$$A \cap B = \{x : x \in \ A \ y \ x \in \ B\}$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, g, e, h\}$, entonces:

$$A \cap B = \{a, b\}$$

Operaciones con conjuntos

La unión y la intersección de conjuntos también se puede definir para tres o más conjuntos de la manera siguiente:

$$A \cup B \cup C = \{x : x \in \ A \ o \ x \in \ B \ o \ x \in \ C\}$$

$$A \cap B \cap C = \{x : x \in \ A \ y \ x \in \ B \ y \ x \in \ C\}$$

Y por tanto, la unión y la intersección de un número finito de conjuntos se define como:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x : x \in \ A_i \ para \ algun \ i\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x : x \in \ A_i \ para \ todo \ i\}$$

Operaciones con conjuntos

Conjuntos disjuntos

Dícese que dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no tienen elementos en común; es decir, cuando:

$$A \cap B = \emptyset$$

Operaciones con conjuntos

Diferencia de conjuntos

Sean A y B conjuntos, se define la diferencia $A - B$ como el conjunto de elementos de A que no pertenecen a B.

$$A - B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, g, e, h\}$, entonces:

$$A - B = \{c, d\}$$

$$B - A = \{g, e, h\}$$

Operaciones con conjuntos

Complementario de un conjunto

Sea U un conjunto universal que contiene un conjunto A, entonces el conjunto $U - A$ se denomina complemento o complementario de A y se denota como A^c. Así:

$$A^c = \{x : x \notin A\}$$

Si $U = \mathbb{Z}$ y $A = \{x : x \textit{ pares}\}$, entonces:

$$A^c = \{x : x \textit{ impares}\}$$

Operaciones con conjuntos

Diferencia simétrica

Sean A y B conjuntos, se define la diferencia simétrica de A y B como el conjunto unión de los elementos de A que no pertenecen a B y los elementos de B que no pertenecen a A.

$$A \oplus B = \{x : (x \in A \ y \ x \notin B) \ o \ (x \in B \ y \ x \notin A)\}$$

Es fácil notar que:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

Si $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, g, e, h\}$, entonces:

$$A \oplus B = \{c, d, g, e, h\}$$

Operaciones con conjuntos

Partes de un conjunto

Sea A un conjunto. El conjunto de todos los subconjuntos de A se denomina conjunto de partes de A (o conjunto potencia de A) y se denota como $\mathcal{P}(A)$.

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}$$

Si $A = \{a, b, c\}$, entonces:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$