

Programación lineal

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

<https://frogames.es>

1 de julio de 2017

Índice

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

1 Introducción

2 Programación lineal

- Forma estándar de un PPL
- Soluciones básicas de un PPL

3 El método del símplex

- Un ejemplo para comenzar
- El método del símplex en problemas de minimización
- Observaciones finales

Introducción

Se comenzará el tema mostrando diversos ejemplos que se pueden modelizar mediante técnicas de programación lineal.

El objetivo de la programación lineal es optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal de n variables sujetas a restricciones de igualdad o desigualdad, también lineales.

Introducción

La programación lineal se aplica en diversos campos, como por ejemplo:

- Logística: problema del transporte.
- Mezclas: problema de la dieta.
- Finanzas.
- Mercadotecnia.
- Asignación de tareas.
- Producción.
- Otras decisiones.

Introducción

Cualquier problema de programación lineal requiere cuatro componentes básicos:

- 1 El conjunto de datos del problema.
- 2 El conjunto de variables que intervienen en el problema, junto con sus dominios de definición.
- 3 El conjunto de restricciones del problema que definen el conjunto de soluciones admisibles.
- 4 La función que se ha de optimizar.

El problema del transporte

El problema del transporte se refiere al proceso de determinar el número de mercancías que se han de llevar desde cada uno de los orígenes a cada uno de los destino posibles.

El objetivo suele ser minimizar el coste del transporte y las restricciones vienen dadas por las capacidades de producción de cada origen y las necesidades de cada destinación.

El problema del transporte



El problema del transporte

Supóngase que un determinado producto se ha de llevar en cantidades u_1, u_2, \dots, u_m desde m puntos de origen y se ha de recibir en n destinos en cantidades v_1, v_2, \dots, v_n .

El problema consiste en determinar las cantidades x_{ij} que se han de llevar desde el origen i al destino j para minimizar el coste del transporte.

Los cuatros elementos principales del problema son:

El problema del transporte

1 Datos:

- m : número de orígenes.
- n : número de destinos.
- u_i : cantidad de producto que se ha de llevar desde el origen i
- v_j : cantidad de producto que se ha de recibir en el destino j
- c_{ij} : coste de llevar una unidad de producto desde i hasta j

El problema del transporte

2 Variables:

- x_{ij} : cantidad de producto que se lleva desde i hasta j , con $x_{ij} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ y para todo $j = 1 \dots, n$ (dominio de definición de las variables)

El problema del transporte

3 Restricciones:

- La cantidad total del producto que surge de i (u_i) ha de coincidir con la suma de las cantidades que surgen de i a cada destino $j = 1, \dots, n$:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = u_i$$

- La cantidad total de producto que recibe j (v_j) ha de coincidir con la suma de cantidades que lleguen a j desde todos los orígenes $i = 1, \dots, m$:

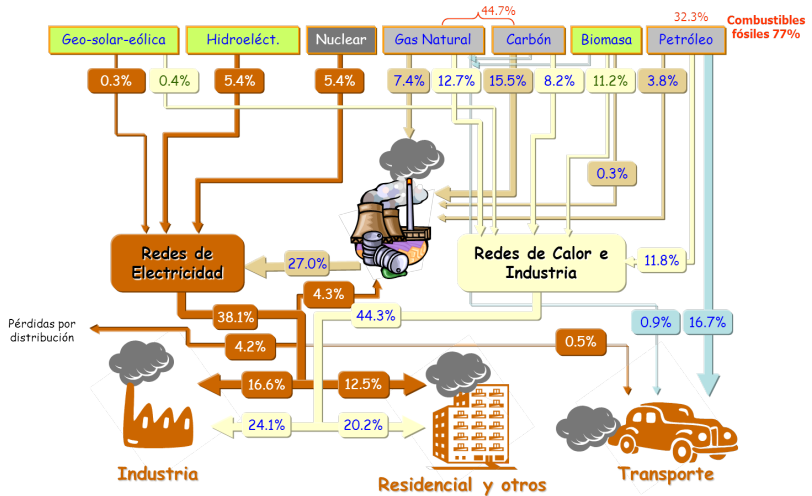
$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = v_j$$

El problema del transporte

4 Objetivo:

En este caso, se va a minimizar el coste del envío.

El problema del transporte



El problema del transporte - Ejemplo

Una compañía de ámbito nacional produce y distribuye una línea de neveras de alta eficiencia energética. La empresa tiene líneas de producción y montaje en dos ciudades, Pamplona y Bilbao, y tres cadenas de distribución localizadas en Madrid, Barcelona y Sevilla. La oficina de Madrid presenta una demanda anual de 10000 neveras, la de Sevilla 8000 y la de Barcelona 15000.

La planta de Bilbao puede producir hasta 20.000 neveras anuales y la de Pamplona 15000.

Los costes de transporte por unidad (en euros) son los siguientes:

Costes de transporte por unidad (en euros)			
Origen/Destino	Madrid	Barcelona	Sevilla
Pamplona	3	1	5
Bilbao	2	2	4

Se plantea un problema de programación lineal que minimiza los costes anuales de la compañía.

Mezclas. El problema de la dieta

El problema de la dieta representa una de las primeras aplicaciones de la programación lineal que se utiliza en hospitales. Se usa para determinar la dieta de los pacientes que satisfaciendo unas especificaciones nutritivas mínimas de la forma más barata posible. Actualmente también se aplica en el sector de la ganadería con la misma idea; encontrar la combinación óptima de alimentos que consiguen una aportación nutritiva mínima suponiendo el menor coste posible. Una aplicación de este problema se muestra en el siguiente ejemplo:

Mezclas. El problema de la dieta - Ejemplo

Un ganadero se quiere asegurar de que sus animales ingieren diariamente al menos 14 unidades de hierro, doce de vitamina A y 18 de vitamina C.

Un kilogramo de harina tiene un coste de dos euros y cuenta con una unidad de hierro, una de vitamina A y tres de vitamina C. Un kilogramo de maíz tiene un coste de dos euros y contiene dos unidades de hierro, una de vitamina A y una de vitamina C.

Determinéense las posibles maneras de alimentar al ganado que satisfagan las necesidades mínimas alimenticias diarias con el mínimo coste posible.

Producción - Ejemplo

Una empresa fabrica cuatro tipos de corbata. Una de seda, otra de poliéster y dos de poliéster y algodón. La tabla siguiente muestra el coste en euros de los materiales y de su disponibilidad:

Costes y disponibilidad de los materiales		
Material	Coste por metro	Metros disponibles/mes
Seda	21	800
Poliéster	6	3000
Algodón	9	1600

Producción - Ejemplos

La tabla siguiente muestra todos los datos relativos a la producción, la demanda mensual y la composición de cada tipo de corbata:

Propiedades				
Tipos	Prendas vendidas	Demanda min/max	Metros necesarios	Composición
Seda	6.70	6000 - 7000	0.125	100 % seda
Poliester	3.55	10000 - 14000	0.08	100 % pol
Pol/Alg	4.31	13000 - 16000	0.10	50 %pol - 50 %coti $\frac{1}{2}$
Pol/Alg	4.81	6000 - 8500	0.1.	30 %pol - 70 %coti $\frac{1}{2}$

Plantéese un problema de programación lineal para determinar el plan de producción que maximiza los beneficios de la empresa.

Planificación de horarios

La planificación de horarios intenta dar respuesta efectiva a las necesidades de personal durante un periodo de tiempo concreto. Sectores típicos donde se hace esta programación lineal para tomar decisiones sobre la planificación de horarios son las entidades bancarias y los grandes almacenes.

Planificación de horarios- Ejemplos

Supóngase que una entidad bancaria necesita diariamente entre 10 y 18 cajeros en función de la hora del día. Las necesidades diarias se especifican en la tabla siguiente:

Disponibilidad	
Franja horaria	Num. Cajeros
9a.m. - 10a.m.	10
10a.m. - 11a.m.	12
11a.m. - 12a.m.	14
12a.m. - 1p.m.	16
1p.m. - 2p.m.	18
2p.m. - 3p.m.	17
3p.m. - 4p.m.	15
4p.m. - 5p.m.	10

Planificación de horarios- Ejemplos

La oficina tiene 12 trabajadores a jornada completa y dispone de personal suficiente para trabajar a media jornada. Un cajero que trabaja a media jornada debe estar operativo 4 horas al día y estar disponible para comenzar a trabajar a cualquier hora entre las nueve de la mañana y la una de la tarde. Los trabajadores a jornada completa deben estar operativos desde las nueve de la mañana hasta las cinco de la tarde y tienen una hora libre para comer (la mitad come de once a doce y la otra mitad lo hace de doce a una). Las normas de la entidad limitan el número de horas realizadas por los trabajadores a tiempo parcial a, como mucho, el 50 % de las horas diarias que se realicen. (Nótese que se realizan 112 horas diarias). Estos trabajadores ganan 16 euros al día y los trabajadores a jornada completa 50 euros al día. Se plantea un problema de programación lineal que establece un horario que minimiza los costes salariales del banco.

Finanzas. Selección de una cartera de valores - Ejemplos

Un banco invierte en crédito al consumo, bonos corporativos, depósitos de oro y préstamos a la construcción. Actualmente dispone de cinco millones de euros para invertir y pretende, por un lado maximizar el interés esperado para los próximos seis meses y por el otro cumplir con la diversificación propugnada por la Junta Directiva según se especifica en la tabla siguiente:

Finanzas		
Tipos de inversión	Interés esperado	Límite de inversión (millones de euros)
Créditos al consumo	7 %	1
Bonos corporativos	11 %	2.5
Depósitos de oro	19 %	1.5
Préstamos constr.	15 %	1.8

Finanzas. Selección de una cartera de valores - Ejemplos

La Directiva también exige que como mínimo un 55 % de los fondos se dediquen a depósitos de oro y préstamos a la construcción, mientras que el porcentaje dedicado a los créditos al consumidor no han de superar el 15 % de los fondos. Se plantea un problema de programación lineal que optimice el objetivo del banco.

Mercadotecnia

La programación lineal se utiliza en el campo de la mercadotecnia y la publicidad como una herramienta que permite determinar cuál es la combinación más efectiva de medios para anunciar los productos de una empresa.

Muchas veces la empresa dispone de un presupuesto fijo para publicidad y el objetivo es distribuir este presupuesto entre diversas opciones (TV, radio, diarios, revistas, Google, Facebook...) de manera que los productos de una empresa tengan la máxima difusión. En otros casos, las restricciones vienen dadas por la disponibilidad de medios y de las políticas publicitarias de la empresa. Se verá una aplicación con el siguiente ejemplo:

Mercadotecnia - Ejemplo

Una cadena nacional de locales de ocio dispone de 8000 euros semanales para publicidad. Este dinero se ha de destinar a publicar anuncios en TV, diarios y dos emisoras de radio.

El objetivo final es conseguir la mayor audiencia posible.

La tabla siguiente recoge toda la información referente a la audiencia esperada por anuncio, el coste (en euros) de cada anuncio y el número máximo de anuncios semanales posibles en cada medio.

Mercadotecnia			
Medio	Audiencia	Coste	Número máximo
TV	5000	800	12
Diario	8500	925	5
Radio 1	2400	290	25
Radio 2	2800	380	20

Mercadotecnia - Ejemplo

La empresa también exige la contratación de un mínimo de 5 anuncios por radio semanales y no se puede destinar a este medio más de 1800 euros por semana. Plantéese un problema de programación lineal que optimice el objetivo de la empresa.

Investigación de mercados

La programación lineal también se aplica al estudio de mercados. Mediante el siguiente ejemplo se puede ver como las estadísticas pueden emplear la programación lineal para el diseño de encuestas.

Investigación de mercados - Ejemplo

Se va a realizar una encuesta para determinar la opinión de los ciudadanos de Baleares sobre la inmigración. La encuesta ha de satisfacer lo siguiente:

- 1 Entrevistar un mínimo de 2300 familias baleares.
- 2 En al menos 1000 familias entrevistadas, la persona de más edad no debe superar los 30 años.
- 3 En al menos 600 familias entrevistadas, la edad de la persona mayor ha de estar comprendida entre los 31 y los 50 años.
- 4 El porcentaje de familias entrevistadas que pertenecen a zonas con alta tasa de inmigración no ha de ser inferior al 15 % del total.

Todas las encuestas se han de hacer personalmente y ha de responder la persona más mayor de cada familia.

Investigación de mercados - Ejemplo

La tabla siguiente indica el coste (en euros) de cada encuesta según la edad del encuestado y si pertenece o no a una zona con tasa elevada de inmigración.

Inmigración			
Zona	<30 años	31-50 años	>50 años
Inmigración baja	6.90	7.25	6.10
Inmigración alta	7.50	6.80	5.50

Plantéese el problema de programación lineal que satisface todas las condiciones de la encuesta y minimice su coste.