Teoría de grafos

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

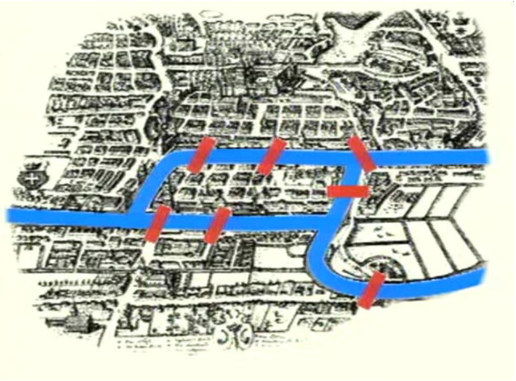
https://frogames.es

1 de julio de 2017

Índice

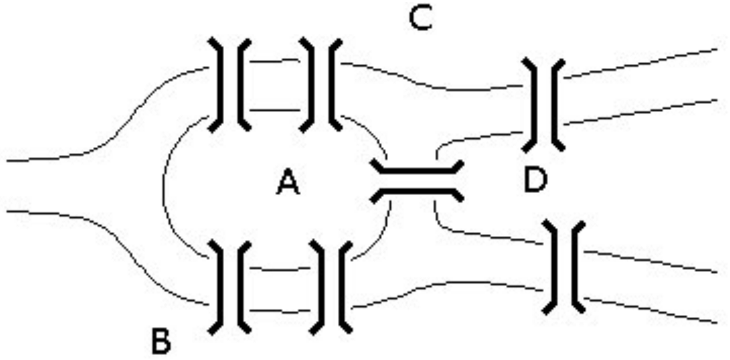
Origen de los grafos

La teoría de grafos es una rama de la matemática que surge y se desarrolla para dar soluciones a problemas muy concretos.
El problema que la mayoría de autores señalan como el origen de la teoría de grafos es el **problema de los puentes de Königsberg**



Origen de los grafos

Durante el siglo XVIII, la ciudad de Königsberg (Prusia Oriental) estaba dividida en cuatro zonas por el rio Prevel. Había siete puentes que comunicaban estas regiones como demuestra el dibujo:

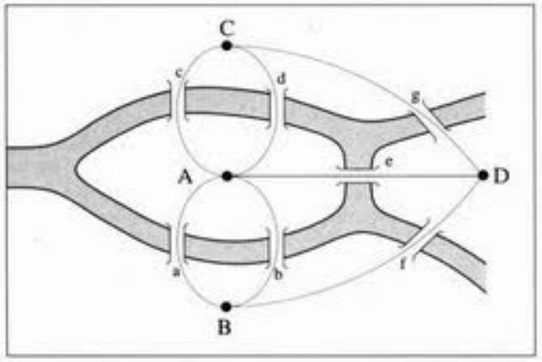


Origen de los grafos

Los habitantes de la ciudad no tenían ni BioFestes ni Univerlands, en lugar de tener vuestras mismas necesidades, necesitaban encontrar una manera de pasear por la ciudad que les permitiera ir a una determinada región, cruzar cada puente una única vez y volver al lugar de partida.

Origen de los grafos

Para resolver este problema, Euler representó las cuatro zonas de la ciudad por cuatro puntos y los puentes por aristas que uniesen los puntos, tal y como se ve en la figura:



Origen de los grafos

Actualmente, la teoría de grafos se aplica dentro y fuera de las matemáticas y sigue siendo un rama de investigación muy activa. Sus aplicaciones son muy importantes en la ingeniería y resultan de gran utilidad para la representación de datos, diseño de redes de telecomunicación...

¿Qué es un grafo?

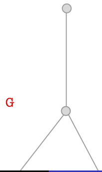
Los grafos se pueden considerar formalmente como diagramas (representaciones geométricas) o bien algebraicamente como un par de conjuntos (representación algebraica). Véanse ambos tipos de definiciones:

Definición geométrica del grafo

Definición

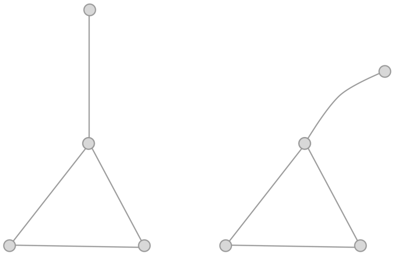
Geométricamente, un grafo G es un conjunto de puntos del espacio, algunos de los cuales están unidos entre ellos mediante líneas.

Este grafo puede simbolizar por ejemplo un mapa de carreteras donde los puntos representan ciudades y las líneas, las carreteras que las unen. En este caso, el grafo puede informar de las posibles comunicaciones que existen entre las ciudades, pero este grafo G también podría esquematizar un circuito eléctrico.



Definición geométrica del grafo

Se ha de hacer constar que un grafo solo contiene información sobre la conectividad entre puntos y no da información geométrica en sentido euclídeo (distancias, ángulos...). Así los siguientes diagramas representan el mismo grafo.



Definición algebraica del grafo

Definición

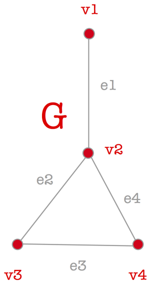
Un grafo G se define como un par ordenado de conjuntos $G = (V, E) = (V(G), E(G))$ donde:

- V es un conjunto no vacío de puntos $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ denominados **vértices**, y
- E es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V, denominados **aristas**

Si dos vértices u, v están unidos por la misma arista, entonces dícese que son **adyacentes** y se representan por su arista por $\{u, v\}$ En este caso también se dirá que u y v son **incidentes** a la arista $\{u, v\}$

Definición algebraica de grafo

Para representar algebraicamente un grafo es necesario poder distinguir los vértices y las aristas. Así:



$$G = (V(G), E(G))$$

$$V = V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}; \quad E = E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

Donde $e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_3, v_4\}, e_4 = \{v_2, v_4\}$

Definición algebraica de grafo

Definiciones

- El número de vértices del grafo G, $|V(G)|$ se denomina el **orden del grafo**.
- El número de aristas del grafo G, $|E(G)|$ se denomina el **tamaño del grafo**.

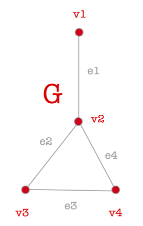
Grafo trivial

Un grafo G es finito si $|V(G)|$ y $|E(G)|$ son finitos. Si un grafo finito tiene un vértice y no tiene ninguna arista, nos referiremos a él como grafo trivial (corresponde a un solo punto)

Definición algebraica de grafo

Ejemplo

El siguiente diagrama no corresponde a un grafo ya que contiene:



- Aristas múltiples: las aristas e_4 y e_5 se unen a los vértices v_3 y v_4 (multigrafo).
- Bucles: la arista e_6 une el vértice v_2 con él mismo (pseudografo).

Definición algebraica de grafo

Ejemplo

Nótese en este caso:

$$E(G) = \{e_1 = \{v_1, v_2\}, e_2 = \{v_2, v_3\}, e_3 = \{v_1, v_4\},$$

$$e_4 = \{v_3, v_4\}, e_5 = \{v_3, v_4\}, e_6 = \{v_2, v_3\}\}$$

$E(G)$ no es un conjunto, ya que tiene elementos repetidos $\{v_3, v_4\}$; es decir, las aristas e_4 y e_5 y la arista e_6 comienzan y acaban en el mismo vértice.

Definición algebraica de grafo

La definición de grafo dada anteriormente se corresponde con la definición que diversos autores dan de **grafo simple**. Y cuando se permiten aristas múltiples y/o bucles como los del ejemplo anterior, se clasifica como **grafo general**.