Aplicaciones lineales

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

https://frogames.es

1 de julio de 2017

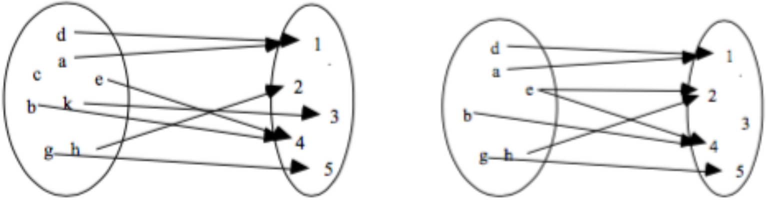
Índice

Definiciones básicas

Aplicación entre dos conjuntos

Sean A y B dos conjuntos dados. Una **aplicación de A en B** es una correspondencia que a cada elemento $x \in A$ le asocia un, y solo un, elemento $y \in B$

Figura: Ejemplos de correspondencias que no son aplicaciones



Definiciones básicas

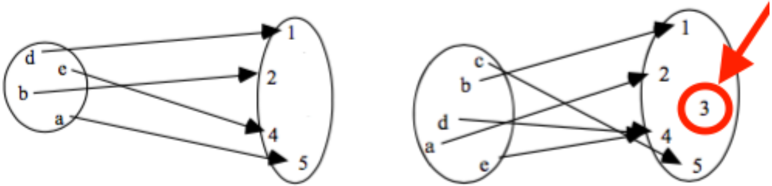
Aplicación exhaustiva

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Dícese que f es **exhaustiva** si y solo si $f(A) = B$. Es decir, si todos los elementos de B tienen una anti-imagen o antecedente.

$$\forall\ b \in B \exists\ a \in A\ :\ f(a) = b$$

Definiciones básicas

Figura: La aplicación de la izquierda es exhaustiva. La de la derecha no lo es (el número 3 no tiene ninguna anti-imagen)



Definiciones básicas

Aplicación exhaustiva

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Se dice que f es **inyectiva** si distintos elementos de A tienen distinta imagen.

$$x, y \in A,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Esto es equivalente a decir que si dos elementos tienen la misma imagen para f entonces son el mismo elemento:

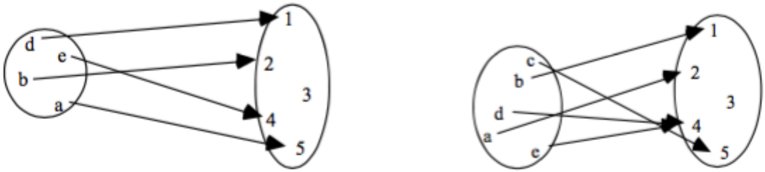
$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

Definiciones básicas

De la definición anterior se deduce que cada elemento de B tendrá como máximo una anti-imagen. En otras palabras, la anti-imagen de un elemento de B es o bien un elemento de A o bien el conjunto vacío.

Definiciones básicas

Figura: La aplicación de la izquierda es inyectiva. La de la derecha no lo es (el número 4 tiene dos anti-imágenes para f).



Definiciones básicas

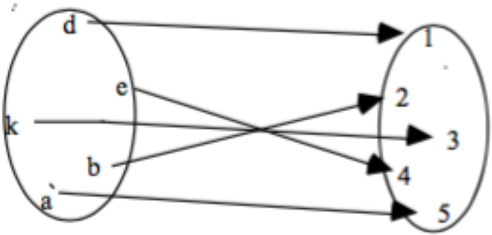
Aplicación biyectiva

Sea $f : A \longrightarrow B$ una aplicación. Dícese que f es **biyectiva** si es inyectiva y exhaustiva a la vez. El concepto equivale a decir que:

$$\forall\ b \in B\ \exists! a \in A\ :\ f(a) = b$$

Definiciones básicas

Figura: Todo elemento de B tiene una, y solo una, única anti-imagen para f



La aplicación identidad

Considérese un espacio vectorial E y la aplicación identidad que transforma cada vector de E en él mismo:

$$\begin{aligned} I : E &\rightarrow E, \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

En primer lugar se estudiará si existe alguna relación entre la imagen de una suma de vectores $I(x+y)$ y las imágenes de cada uno de los sumandos $I(x), I(y)$.

La aplicación identidad - Lineal para la suma

Por definición de la aplicación identidad:

$$I(x+y) = x+y$$

Por otro lado:

$$\left.\begin{array}{rcl} I(x) & = & x \\ I(y) & = & y \end{array}\right\} \Rightarrow I(x)+I(y) = x+y$$

Y por tanto se puede escribir que:

$$I(x+y) = x+y = I(x)+I(y)$$

Aplicación lineal para la suma

La imagen de la suma es la suma de imágenes.

La aplicación identidad - Lineal para el producto por escalar

En segundo lugar se estudiará si existe alguna relación entre la imagen de un escalar por un vector $I(\lambda x)$ y la imagen del vector $I(x)$.

Por definición de aplicación identidad:

$$I(\lambda x) = \lambda x$$

Por tanto podemos escribir que:

$$I(\lambda x) = \lambda x = \lambda I(x)$$

Aplicación lineal para el producto por escalar

La imagen del producto de un escalar por un vector es el escalar por la imagen del vector.

La aplicación constante

Se verá ahora la aplicación definida en $\mathbb{R}$ que transforma cada número real en el número 2

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto 2. \end{aligned}$$

Como antes, se va a estudiar la relación entre la imagen de una suma de vectores $f(x+y)$ y las imágenes de cada uno de los sumandos $f(x), f(y)$.

La aplicación constante - Lineal para la suma

Por definición de la aplicación constante:

$$f(x+y) = 2$$

Por otro lado:

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2 \\ f(y) & = & 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)+f(y) = 2+2 = 4$$

Y por tanto se puede escribir que:

$$f(x+y) = 2 \neq 4 = f(x)+f(y)$$

Aplicación no lineal para la suma

La imagen de la suma **NO** es la suma de imágenes.

La aplicación constante - Lineal para el producto por escalar

En segundo lugar se estudiará si existe alguna relación entre la imagen de un escalar por un vector $f(\lambda x)$ y la imagen del vector $f(x)$.
Por definición de la aplicación constante:

$$f(\lambda x) = 2$$

Por tanto podemos escribir que:

$$f(\lambda x) = 2 \neq 2\lambda = \lambda f(x)$$

Aplicación no lineal para el producto por escalar

La imagen del producto de un escalar por un vector **NO** es el escalar por la imagen del vector.