Diagonalización de endomorfismos

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

https://frogames.es

1 de julio de 2017

Índice

1. Introducción
2. Diagonalización
3. Vectores y valores propios de una matriz
   - Definiciones
   - Cálculo de los valores y de los vectores propios
   - Subespacio propio asociado a un valor propio
   - Propiedades de los valores y vectores propios
4. Matrices diagonalizables
   - Cálculo de la matriz diagonal
5. Diagonalización ortogonal

1 Introducción
2 Diagonalización
3 Vectores y valores propios de una matriz
- Definiciones
- Cálculo de los valores y de los vectores propios
- Subespacio propio asociado a un valor propio
- Propiedades de los valores y vectores propios
4 Matrices diagonalizables
- Cálculo de la matriz diagonal
5 Diagonalización ortogonal

Introducción

Antes de entrar matemáticamente en el tema de la diagonalización de matrices cuadradas, se expondrán algunas de las aplicaciones que tienen las matrices diagonales.
Recuérdese que una matriz diagonal es una matriz cuadrada que tiene ceros en todos los elementos fuera de su diagonal principal.

Introducción

La factoritzación de una matriz dada A en función de otra matriz diagonal D permite resolver problemas de análisis y estudio de los sistemas eléctricos, vibraciones, economía, etcétera, que suelen venir modelizados por ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.
En esta factorización juegan un papel muy importante unos escalares denominados **valores propios** y unos tipos especiales de vectores denominados **vectores propios**

Introducción

Un tipo de aplicación de la diagonalización de matrices se encuentra en el análisis de la solución de un sistema dinámico a lo largo del tiempo.
Un sistema se caracteriza por el estado de un conjunto de n variables que lo determinan. Este conjunto se puede expresar como un vector de $\mathbb{R}^n$ las componentes del cual expresan los valores de estas variables

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Si el estado evoluciona a lo largo del tiempo modificando su valor a cada periodo (cada hora, día, mes,...) es muy común que la relación entre los estados del sistema se presenten de forma recursiva:

Introducción

- $X_{p+1} = A \cdot X_p$, donde A es una matriz cuadrada de orden n
- X_p representa el estado del sistema en el periodo p
- X_{p+1} representa el estado del sistema en el periodo siguiente $p+1$

Entonces, basta con conocer el estado en el periodo inicial X_0 (estado inicial del sistema) para poder calcular el estado del sistema en cualquier periodo.

Introducción

En efecto, si se conoce el estado inicial X_0, se puede conocer:

$$X_1 = A \cdot X_0$$

$$X_2 = A \cdot X_1 = A \cdot (A \cdot X_0) = A^2 \cdot X_0$$

$$\cdots$$

$$X_m = A^m \cdot X_0$$

Por tanto, para conocer el estado del sistema en el periodo m es necesario el cálculo de la matriz A^m. Este cálculo, como ya se habrá imaginado, es bastante complicado y es difícil no equivocarse. En cambio se simplifica bastante en el caso de que A sea diagonalizable (como se recordará del Tema 1 de matrices).

1. Introducción
2. **Diagonalización**
3. Vectores y valores propios de una matriz
   - Definiciones
   - Cálculo de los valores y de los vectores propios
   - Subespacio propio asociado a un valor propio
   - Propiedades de los valores y vectores propios
4. Matrices diagonalizables
   - Cálculo de la matriz diagonal
5. Diagonalización ortogonal

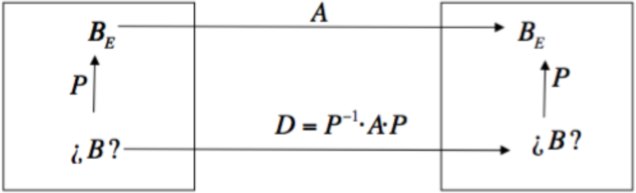
Matrices semejantes

Matrices semejantes

Dos matrices A y A' son **semejantes** si existe una matriz P cuadrada invertible (con $|P| \neq 0$) tal que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$

Matrices semejantes

Piénsese que todas las matrices semejantes constituyen las diversas representaciones analíticas de un mismo endomorfismo f de un espacio vectorial E de dimensión n en diferentes bases de E.



Matrices semejantes

Así se plantea el problema de buscar la base de E en la cual f se presenta de la forma más sencilla posible. Debido a las características tan buenas que presentan las matrices diagonales, se intenta encontrar una base de E en la cual f esté representada por una matriz diagonal, es decir, dada una matriz A en una base cualquiera, se va a buscar una matriz diagonal semejante a ella. Este proceso recibirá el nombre de **diagonalizar la matriz o el endomorfismo**.

Matrices diagonalizables

Matriz diagonalizable

Una matriz A es diagonalizable si es semejante a una matriz D; es decir, si existe una matriz P regular tal que $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.
No siempre es posible. Habrá que estudiar en qué condiciones existe una matriz así y respecto de qué base representará el endomorfismo.

1 Introducción

2 Diagonalización

3 Vectores y valores propios de una matriz
- Definiciones
- Cálculo de los valores y de los vectores propios
- Subespacio propio asociado a un valor propio
- Propiedades de los valores y vectores propios

4 Matrices diagonalizables
- Cálculo de la matriz diagonal

5 Diagonalización ortogonal

1 Introducción

2 Diagonalización

3 Vectores y valores propios de una matriz
- Definiciones
- Cálculo de los valores y de los vectores propios
- Subespacio propio asociado a un valor propio
- Propiedades de los valores y vectores propios

4 Matrices diagonalizables
- Cálculo de la matriz diagonal

5 Diagonalización ortogonal

Matrices diagonalizables

La teoría que se verá a continuación está pensada para conseguir llegar a diagonalizar una matriz, pero no se ha de olvidar que esta matriz realmente representa un cierto endomorfismo en una determinada base.

Vectores propios

Vector propio (o autovector)

Dada una matriz cuadrada $A \in M_{n\times n}$ de tamaño n los vectores columnas de la cual pertenecen a un espacio vectorial E de dimensión n, un elemento $\vec{x} \in E$ es un **vector propio** de A si:

1. $\vec{x} \neq \vec{0}$ no es el vector nulo
2. Existe un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que verifica $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$

Geométricamente, un vector propio $\vec{x}$ es aquel que tiene la mismas dirección que el vector $A \cdot \vec{x}$ transformado por la matriz A.

Vectorer propios

Ejercicio 1

Demuéstrese que $\vec{x} = (2, -1)$ es un vector propio de la matriz $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Resulta que $\vec{x}$ será un vector propio de la matriz si se cumple que $B \cdot \vec{x} = \lambda \vec{x}$ para algún escalar λ.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Y como el vector $(4, -2)$ resulta ser $2(2, -1)$, se dirá $B \cdot \vec{x} = 2\vec{x}$, entonces $\vec{x}$ es un vector propio de B.

Valores propios

Valor propio (o autovalor)

El escalar λ de la definición anterior se denomina valor propio asociado al vector propio $\vec{x}$. El conjunto de todos los vectores que satisfacen la relación $A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}$ reciben el nombre de conjunto de vectores propios asociados al valor propio λ.