Vectores

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

https://frogames.es

1 de julio de 2017

Índice

Vectores

Los vectores tienen un papel fundamental no solo en matemáticas sino también en la física, la ingeniería e incluso otros campos científicos.

Ya se conocen de años anteriores las nociones de vectores en el plano o en el espacio. Los vectores en general tienen dos vertientes íntimamente ligadas: la algebraica y la geométrica.

Se verá en primer lugar los vectores desde un punto de vista geométrico.

Vectores

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo

Punto en la recta $\mathbb{K}$

Dados un origen y una unidad de longitud, cada punto de la recta viene definido por un, y solo un, escalar del cuerpo $\mathbb{K}$ y viceversa.

Punto en el plano $\mathbb{K}^2$

Dados un origen, dos ejes (rectas) y una unidad de longitud, un punto del plano es un par (x, y) donde x y y son dos elementos del cos $\mathbb{K}$.

Vectores

Punto en el espacio $\mathbb{K}^3$

Dados un origen, tres ejes (rectas) y una unidad de longitud, un punto del plano es una terna (x, y, z) donde x, y y z son dos elementos del cuerpo $\mathbb{K}$.

Vectores

Puntos en $\mathbb{K}^n$

Un punto del espacio $\mathbb{R}^n$ se define como una n-tupla de números:

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Donde n es la dimensión del espacio $\mathbb{K}^n$.

Coordenadas del punto

Las coordenadas de X son los valores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ del punto X.

Vectores fijos

Las siguientes definiciones permiten ver los vectores desde una perspectiva geométrica:

Vector fijo

Un vector fijo es un par de puntos A y B, que se indicarán como $\vec{AB}$. El punto A se denomina **origen** y el punto B **extremo**.

Normalmente los vectores en el plano o en el espacio de tres dimensiones se suelen representar mediante segmentos acabados en una punta de flecha en uno de sus dos extremos.

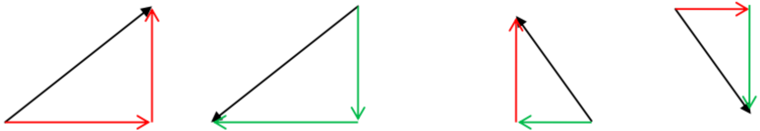
Las componentes cartesianas de un vector son los vectores que se obtienen al proyectarlo sobre los ejes de un sistema de coordenadas situado en el origen del vector.

Componentes de un vector fijo $\vec{AB}$

Vector fijo

Las componentes de un vector fijo $\vec{AB}$ son los vectores que se obtienen al proyectarlo sobre los ejes de un sistema de coordenadas situado sobre el origen del vector.

Figura: Criterio de colores. Rojo:+ Verde:-. Las componentes pueden ser positivas o negativas



Vectores fijos

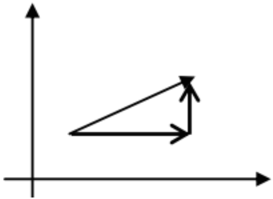
Componentes de un vector fijo $\vec{AB}$

Si $A = (a_x, a_y)$ y $B = (b_x, b_y)$ entonces las componentes del vector $\vec{AB}$ se obtienen restando las coordenadas del punto extremo B al punto de origen A:

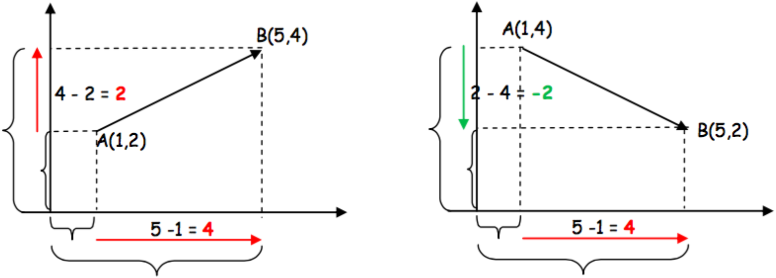
$$\vec{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$$

Vectores fijos

El valor absoluto de las componentes del vector coincide con la de los catetos del triángulo rectángulo formado y tal que el vector sea su hipotenusa.



Vectores fijos



Vectores fijos

Caracterización de un vector fijo (I)

En el contexto geométrico, las 3 características de un vector fijo son:

- Origen: el punto de aplicación donde comienza el vector
- Módulo: la longitud del segmento
- Dirección: la de la recta a la cual pertenece
- Sentido: el que determina la punta de la flecha del vector

Vectores fijos

Caracterización de un vector fijo (II)

También queda completamente determinado con:

- Sus componentes
- El punto origen

Vectores fijos

Caracterización de un vector fijo (III)

O incluso si se conocen:

- Las coordenadas del punto origen
- Las coordenadas del punto extremo

Vectores equivalentes

Vectores equivalentes

Dos vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son equivalentes si tienen las mismas componentes; es decir:

$$(b_x - a_x, b_y - a_y) = (d_x - c_x, d_y - c_y)$$

Vectores equivalentes

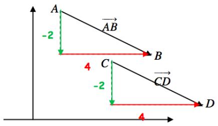


Figura: $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ son equivalentes incluso al tener diferentes orígenes y extremos

Geométricamente, las longitudes de los segmentos de la recta determinados por el par de puntos y los sentidos de ambos vectores son iguales.

Vectores equivalentes

Ejercicios

Encuéntrese un vector equivalente a $\vec{AB}$ donde $A = (1, 2)$ y $B = (5, 4)$

Sol: Puntos cualesquiera C y D tales que:

$$(d_x - c_x, d_y - c_y) = (4, 2)$$

Vectores equivalentes

Ejercicios

Encuéntrese un vector equivalente a $\vec{AB}$ donde $A = (3, 4)$ y $B = (7, 6)$ con origen en el punto $A = (-1, 0)$.

Sol:

$$B' = (3, 2)$$

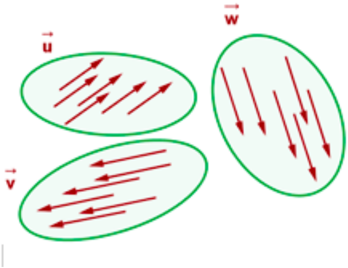
Vectores libres

Todos los vectores fijos equivalentes entre sí tienen las mismas componentes. En este sentido es posible establecer una relación de equivalencia correspondiente, el **vector libre**. Estre representante define un conjunto infinito de vectores y los representa a todos ellos.

Vectores libres

Vectores libres

El conjunto de todos los vectores fijos equivalentes entre sí se denomina vector libre. Un vector libre no tiene un origen fijo, sino que se puede ubicar en cualquier punto del espacio. Cada vector fijo es un representante del vector libre.

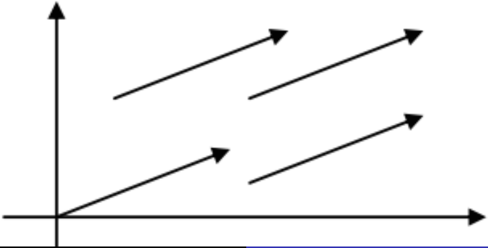


Vectores libres

Vector fijo en el origen

Es aquel de los representantes del vector fijo que tienen su punto origen en el origen de coordenadas.

En este caso, las coordenadas del punto extremo coinciden numéricamente con las componentes del vector, ya que el punto de origen es $0 = (0, 0)$.



Vectores libres

Por tanto, todo vector libre tiene un representante situado en el origen de coordenadas donde el punto extremo tiene las mismas coordenadas que las componentes del vector. En este sentido se puede decir:

Resultado

Existe una correspondencia uno a uno entre los vectores libres y los puntos según el cual cada punto $P = (a, b)$ se identifica con un vector $\vec{OP} = (a, b)$.

Vectores libres

Caracterització de un vector libre (I)

Para caracterizar un vector libre se necesitará el módulo, la dirección y el sentido.

Caracterització de un vector libre (II)

También se puede caracterizar si se conocen las componentes

El módulo, al igual que en los vectores fijos, viene dado por la longitud del segmento y la dirección y sentido vienen definidos por el ángulo que forma el vector con la dirección positiva del eje OX..

Vectores libres

Ejercicios

Encuéntrse el módulo, dirección y sentido del vector de componentes (7,-5).

Sol: módulo $= \sqrt{74}$ y $\tan \alpha = \frac{-5}{7}$

Ejercicios

Dado el vector de módulo 8 y el hecho de que forma un ángulo de 135 grados con el eje OX, calcúlense sus componentes.

Sol:$(8 \cos 135, 8 \sin 135)$