Espacios vectoriales

Estudios de Ingeniería

Juan Gabriel Gomila

Frogames

https://frogames.es

1 de julio de 2017

Índice

Combinaciones lineales

Combinación lineal

Recuérdese que dados p vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ y los escalares $\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{K}$ una combinación lineal de esos p vectores es un vector dado por una expresión de la forma:

$$\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \cdots + \alpha_p \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$$

Ejercicios

Exprésese el vector $(2, -4)$ como una combinación lineal de los vectores $(1, 1)$ y $(-2, 0)$.

Sol:$(2, -4) = -4(1, 1) - 3(-2, 0)$.

Combinaciones lineales

Ejercicios

Exprésese el vector $(4, -11)$ como una combinación de los vectores $(2, -3)$ y $(4, -6)$.

Sol: no tiene solución.

Ejercicios

Exprésese el vector $(4, -11)$ como una combinación de los vectores $(2, -1)$ y $(1, 4)$.

Sol:$(4, -11) = 3(2, -1) - 2(1, 4)$.

Ejercicios

Pruébese que el vector $(1, 0)$ no se puede expresar como una combinación lineal de $(2, -3)$ y $(4, -6)$

Combinaciones lineales

Ejercicios

Exprésese el vector $(4,-5,6)$ como una combinacií lineal de los vectores $(2,-3,5)$ y $(-1,3,2)$.

Sol: no tiene solución

Ejercicios

Exprésese el vector $(4,-5,7)$ como una combinación lineal de los vectores $(0,-3,5),(1,0,-3)$ y $(-1,3,4)$.

Sol:$(4,-5,7)=\frac{31}{9}(0,-3,5)\frac{52}{9}(1,0,-3)+\frac{16}{9}(-1,3,4)$.

Ejercicios

Exprésese, si es posible, el vector $(0,0,0)$ como una combinación lineal de $(-1,3,1),(1,0,-3)$ y $(-1,3,4)$, distinta de $(0,0,0)$.

Dependencia e independencia lineal

Dependencia lineal

Dados el conjunto ed vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente dependientes si alguno de ellos se puede expresar como una combinación lineal del resto. Son LD si:

$$\exists 1 \leq i \leq p \ : \ \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Dependencia e independencia lineal

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores $(2, -4, 0), (1, 1, 1)$ y $(-1, 2, 0)$ es linealmente dependiente.

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores $(-1, 6, 5), (1, 0, -3)$ y $(-1, 3, 4)$ es linealmente dependiente.

Dependencia e independencia lineal

Independencia lineal (II)

Dado el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente dependientes si la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

tiene infinitas soluciones, y por tanto los escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$ pueden tener valores no nulos.

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores $(2, -4, 0), (1, 1, 1)$ y $(-1, 2, 0)$ es linealmente dependiente.

Dependencia e independencia lineal

Independencia lineal

Dado el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente independientes si no es posible expresarlos como una combinación lineal del resto. Son LI si:

$$\nexists 1 \leq i \leq p \ : \ \sum_{k \neq i} \alpha_k \vec{u}_k = \vec{u}_i$$

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores $(2, -4, 0), (1, 1, 1)$ y $(-1, 2, 1)$ es linealmente independiente.

Dependencia e independencia lineal

Dependencia lineal (II)

Dado el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$ dícese que son linealmente independientes si la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{0}$$

tiene como única solución la solución trivial, es decir $\alpha_i = 0 \forall 1 \leq i \leq p$.

Ejercicios

Dígase si el conjunto de vectores $(2, -4, 0), (1, 1, 1)$ y $(-1, 2, 1)$ es linealmente independiente.

Dependencia e independencia lineal

Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto $(1, 1)$ y $(1, 0)$ es LI.

Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto $(1, 1)$ y $(0, 1)$ es LI.

Ejercicios

Demuéstrese que el conjunto $(1, 1), (1, 0)$ y $(0, 1)$ es LD.

Rango de un conjunto de vectores

Definición

Dado el conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_p \in \mathbb{K}^n$, dícese que tienen rango $r \leq p$ si existe como mínimo un subconjunto de r vectores linealmente independientes entre ellos y no existe ninguno de $r+1$ vectores que sea linealmente independiente. Es decir, es el número máximo de vectores linealmente independientes que pueden extraerse del conjunto.

Rango de un conjunto de vectores

Un método para calcular el rango de un conjunto de vectores consiste en construir una matriz utilizando los vectores como columnas (o filas) y definir el rango de la matriz como el rango de sus vectores columna (o fila). Ya se ha aprendido cómo calcular el rango de una matriz en el Tema 1. Ahora se pondrá en práctica para calcular el rango de vectores.

Definición

El rango de una matriz A coincide con el número de vectores fila o columna linealmente independientes.