Matrix Analysis Assignment 6

November 17, 2020

1. Exercise.1

1. Householder reduction

$$A=\begin{pmatrix}1 & 19 & -34\\ -2 & -5 & 20\\ 2 & 8 & 37\end{pmatrix}$$

我们设置

$$u_1=A_{*1}-\|A_{*1}\|\,e_1=A_{*1}-3e_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1=\mathbf{I}-2\frac{\mathbf{u}_1\mathbf{u}^T}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}==I-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{A}=[\mathbf{R}_1\mathbf{A}_{*1}\,|\mathbf{R}_1\mathbf{A}_{*2}|\,\mathbf{R}_1\mathbf{A}_{*3}]=\begin{pmatrix}3 & 15 & 0\\ 0 & -9 & 54\\ 0 & 12 & 3\end{pmatrix}$$

$$A_2=\begin{pmatrix}-9 & 54\\ 12 & 3\end{pmatrix}$$

$$u_2=[A_2]_{*1}-\|[A_2]_{*1}\|\,e_1=\begin{pmatrix}-9\\12\end{pmatrix}-15\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=12\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_2=I-2\frac{u_2u_2^T}{u_2^Tu_2}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}\quad and\quad R2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \hat{R}_2\end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_2A_2=\begin{pmatrix}15 & -30\\ 0 & 45\end{pmatrix}\quad and\quad R_2R_1A=\begin{pmatrix}3 & 15 & 0\\ 0 & 15 & -30\\ 0 & 0 & 45\end{pmatrix}=T$$

即

$$P=R_2R_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{14}{15} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{15}\\ \frac{-2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15}\end{pmatrix}$$

最终我们得到 $PA=T$，我们可以得到 $A=P^TT$ 的类似于 QR 分解的形式，其中 $Q=P^T$ ，上三角矩阵 $R=T$。

2. Givens reduction
首先消去 (2,1),

$$P_{12}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad P_{12}A=\begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -74 \\ 0 & \frac{33}{\sqrt{5}} & \frac{-48}{\sqrt{5}} \\ 2 & 8 & 37 \end{pmatrix}$$

再消去 (3,1) 元素

$$P_{13}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad P_{13}P_{12}A=\begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & \frac{33}{\sqrt{5}} & \frac{-48}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{-6}{\sqrt{5}} & \frac{111}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

再消去 (3,2) 元素

$$P_{23}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{5\sqrt{5}} & \frac{-2}{5\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{5\sqrt{5}} & \frac{11}{5\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad P_{23}P_{13}P_{12}A=\begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

最终得到

$$P=P_{23}P_{13}P_{12}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{14}{15} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad T=P_{23}P_{13}P_{12}A=\begin{pmatrix} 3 & 15 & 0 \\ 0 & 15 & -30 \\ 0 & 0 & 45 \end{pmatrix}$$

最终我们得到 $PA=T$，我们可以得到 $A=P^TT$ 的类似于 QR 分解的形式，其中 $Q=P^T$ ，上三角矩阵 $R=T$。

2. Exercise.2

Householder reduction
我们可以设置

$$\mathbf{u}=\mathbf{A}_{*1}-\|\mathbf{A}_{*1}\|\,\mathbf{e}_1=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad and \quad \mathbf{R}_1=\mathbf{I}-2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^*}{\mathbf{u}^*\mathbf{u}}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & 14 \end{pmatrix} \quad and \quad A_2=\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -10 & 2 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = [A_2]_{*1} - \|[A_2]_{*1}\| \, e_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} \quad and \quad \hat{R}_2 = I - 2\frac{u_2 u_2^T}{u_2^T u_2} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} R2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R}_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_2 A_2 = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 12 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \quad and \quad R_2 R_1 A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad and \quad A_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = [A_3]_{*1} - \|[A_3]_{*1}\| \, e_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix} \quad and \quad \hat{R}_3 = I - 2\frac{u_3 u_3^T}{u_3^T u_3} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \hat{R}_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_3 A_3 = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \end{pmatrix} \quad and \quad R_3 R_2 R_1 A = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_3\mathbf{R}_2\mathbf{R}_1 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 12 & 6 & -6 & 3 \\ 9 & -8 & 8 & -4 \\ 0 & -5 & 2 & 14 \\ 0 & -10 & -11 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 5 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^T = \mathbf{R}_1\mathbf{R}_2\mathbf{R}_3 = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 12 & 9 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & -5 & -10 \\ -6 & 8 & 2 & -11 \\ 3 & -4 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

因此 $\mathbf{P}$ 的前三列作为 $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ 的正交基

3. Exercise.7

1. $\mathcal{B}_\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{B}_\mathcal{Y}$ 都是线性不相关的，各自为 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 的基，

$$\text{rank}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}] = \text{rank}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{array}\right) = 3$$

   $\mathcal{B}_\mathcal{X} \cup \mathcal{B}_\mathcal{Y}$ 是 $\mathcal{R}^3$ 空间的一组基，因此，可以说 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{X}$ 构成了 $\mathcal{R}^3$ 空间中的互补子空间

2. 沿 $\mathcal{Y}$ 方向到 $\mathcal{X}$ 的投影算子 P 为:

$$P = [X \mid 0][X \mid Y]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

可以求出沿 $\mathcal{X}$ 方向到 $\mathcal{Y}$ 的投影算子 Q 为

$$Q = I - P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

3. 由上可知,v 沿着 $\mathcal{X}$ 方向投影到 $\mathcal{Y}$ 为:

$$y = Qv = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$