第六章

广义逆矩阵

1 矩阵的单边逆

定义1 设 $A \in C^{m\times n}$,如果有$G \in C^{n\times m}$,使得

$$GA = E_n$$

则称G为A的左逆矩阵, 记为$G = A_L^{-1}$.

如果 $$AG = E_m$$

则称G为A的右逆矩阵, 记为$G = A_R^{-1}$.

定理1 设 $A \in C^{m\times n}$，则

(1) A左可逆的充要条件是A为列满秩矩阵;

(2) A右可逆的充要条件是A为行满秩矩阵.

证 充分性： A为列满秩 $\Rightarrow$

$A^H A$为满秩矩阵 $\Rightarrow$ $(A^H A)^{-1} A^H A = E_n$

$\xrightarrow{G=(A^H A)^{-1}A^H}$ $GA = E_n$ $\Rightarrow$ A左可逆

必要性： $A_L^{-1} A = E_n$ $\Rightarrow$

$$rank(A) \geq rank(A_L^{-1}A) = rank(E_n) = n$$

$\longrightarrow$ $rank(A) = n$ $\longrightarrow$ A为列满秩

推论1 设 $A \in C^{m \times n}$,则

(1) A左可逆的充要条件是$N(A) = \{0\}$;

(2) A右可逆的充要条件是$R(A) = C^m$.

证 充分性：$N(A) = \{0\}$ $\longrightarrow$ $Ax = 0$只有零解

$\longrightarrow$ $rank(A) = n$ $\longrightarrow$ A为列满秩

必要性：A左可逆 $\longrightarrow$ $A_L^{-1}A = E_n$ $\longrightarrow$

$\forall x \in N(A) \Rightarrow x = E_n x = A_L^{-1}(Ax) = A_L^{-1}0 = 0$

$\Rightarrow N(A) = \{0\}$

初等变换求左(右)逆矩阵:

$$(1)\ P(A \quad E_m) = \begin{pmatrix} E_n & G \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} A \\ E_n \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ G & * \end{pmatrix}$$

例 1　设矩阵A为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

求A的一个左逆矩阵A_L^{-1}.

解：

$$(A\quad E_3)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A_L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

例 2 设矩阵A为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求A的一个右逆矩阵A_R^{-1}.

解：

$$\begin{pmatrix} A \\ E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

定理2 设$A \in C^{m\times n}$是左可逆矩阵,则

$$G = (A_1^{-1} - BA_2A_1^{-1},\ B)P$$

是A的左逆矩阵,其中$B \in C^{n\times(m-n)}$为任意矩阵,行初等变换对应的矩阵P满足$PA = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$,$A_1$是$n$阶可逆方矩阵.

证: $GA = (A_1^{-1} - BA_2A_1^{-1},\ B)\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = E_n$

定理3 设 $A \in C^{m\times n}$ 是右可逆矩阵,则

$$G = Q\begin{pmatrix} A_1^{-1} - A_1^{-1}A_2D \\ D \end{pmatrix}$$

是A的右逆矩阵,其中$D \in C^{(n-m)\times m}$为任意矩阵.列初等变换对应的矩阵Q满足$AQ = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}$, A_1是m阶可逆方矩阵.

定理4 设 $A \in C^{m\times n}$ 是左可逆矩阵, A_L^{-1} 是 A 的左逆矩阵, 则方程组 $Ax=b$ 有解的充要条件是

$$(E_m - AA_L^{-1})b = 0 \quad (1)$$

若(1)式成立, 则方程组 $Ax=b$ 有唯一解

$$x = (A^H A)^{-1} A^H b.$$

证: 必要性: 设 x_0 是方程组 $Ax=b$ 的解 $\Rightarrow$

$$(AA_L^{-1})(Ax_0) = (AA_L^{-1})b = A(A_L^{-1}A)x_0 = AE_n x_0$$

$$= Ax_0 = b \Rightarrow (E_m - AA_L^{-1})b = 0$$

充分性： $(E_m - AA_L^{-1})b = 0 \xrightarrow{x_0 = A_L^{-1}b}$

$Ax_0 = AA_L^{-1}b = b$

唯一性：

设x_0, x_1是$Ax = b$的解 $\Rightarrow$

$A(x_1 - x_0) = Ax_1 - Ax_0 = 0 \Rightarrow x_1 - x_0 = 0$

定理5 设 $A\in C^{m\times n}$是右可逆矩阵,则$Ax=b$对任何$b\in C^m$都有解. 若$b\neq 0$, 则方程组的解可表示为

$$x = A_R^{-1}b$$

其中, A_R^{-1}是A的一个右逆矩阵

证: $A(A_R^{-1}b)=(AA_R^{-1})b=E_m b=b$