

定理 4.9.1 若 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, 则 A 与 B 一定有公共的特征向量.

证 任取 A 的一个特征值 λ , 考虑 λ 的特征子空间

$$V_\lambda = \{\xi | A\xi = \lambda\xi\}.$$

设 $\dim V_\lambda = k$, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k$ 是 V_λ 的一组基, 则 $A\epsilon_i = \lambda\epsilon_i$ ($i = 1, \dots, k$).
记

$$\eta = c_1\epsilon_1 + c_2\epsilon_2 + \dots + c_k\epsilon_k, \quad (4.9.1)$$

当 c_1, c_2, \dots, c_k 不全为零时, η 也是 A 的特征向量.

由于

$$A(B\epsilon_i) = B(A\epsilon_i) = \lambda(B\epsilon_i),$$

故 $B\epsilon_i \in V_\lambda$ ($i = 1, \dots, k$), 从而存在数 l_{ij} ($i, j = 1, \dots, k$) 使得

$$B\epsilon_i = l_{i1}\epsilon_1 + l_{i2}\epsilon_2 + \dots + l_{ik}\epsilon_k \quad (i = 1, \dots, k).$$

则

$$\begin{aligned} B\eta &= c_1B\epsilon_1 + c_2B\epsilon_2 + \dots + c_kB\epsilon_k \\ &= c_1(l_{11}\epsilon_1 + l_{21}\epsilon_2 + \dots + l_{k1}\epsilon_k) + \dots + c_k(l_{1k}\epsilon_1 + l_{2k}\epsilon_2 + \dots + l_{kk}\epsilon_k) \\ &= (c_1l_{11} + c_2l_{12} + \dots + c_kl_{1k})\epsilon_1 + \dots + (c_1l_{k1} + c_2l_{k2} + \dots + c_kl_{kk})\epsilon_k. \end{aligned}$$

若 η 也是 B 的特征向量, 即有 $B\eta = \mu\eta$. 由 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k$ 线性无关, 得

$$\begin{cases} c_1l_{11} + c_2l_{12} + \dots + c_kl_{1k} = \mu c_1, \\ c_1l_{21} + c_2l_{22} + \dots + c_kl_{2k} = \mu c_2, \\ \dots\dots\dots \\ c_1l_{k1} + c_2l_{k2} + \dots + c_kl_{kk} = \mu c_k. \end{cases} \quad (4.9.2)$$

记 $L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1k} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{k1} & l_{k2} & \dots & l_{kk} \end{pmatrix}$, (4.9.2) 写为

$$(\mu I - L) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = 0. \quad (4.9.3)$$

这说明 μ 是矩阵 L 的特征值, $(c_1, \dots, c_k)^T$ 是对应于 μ 的特征向量. 由于矩阵的特征向量一定存在, 即方程组 (4.9.3) 一定有非零解 $(c_1, \dots, c_k)^T \neq 0$, 代入 (4.9.1) 所确定的向量 η 就是矩阵 A 和 B 公共的特征向量.

根据上面的证明, 我们可立即得到

推论 1 若 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = BA$, 且 A 有 r ($r \leq n$) 个互不相同的特征值, 则 A 与 B 至少有 r 个线性无关的公共特征向量.

推论 2 若 n 阶方阵 A 有 n 个互不相同的特征值, 则 $AB = BA$ 的充分必要条件是 A 与 B 有完全相同的特征向量.

证 只需证明推论 2 中的充分性.

A 有 n 个互不相同的特征值, 则 A 可相似对角化, 即存在可逆矩阵 P , 使

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \triangleq A_1.$$

由于 A 与 B 有完全相同的特征向量, 同样有

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} \triangleq A_2.$$

则

$$\begin{aligned} AB &= (PA_1P^{-1})(PA_2P^{-1}) = PA_1A_2P^{-1} = PA_2A_1P^{-1} \\ &= (PA_2P^{-1})(PA_1P^{-1}) = BA. \end{aligned}$$

注 推论 2 中的必要性也可以不依赖定理 4.9.1 中的证明. 现另证如下:

由于 A 有 n 个互不相同的特征值, 从而对应 n 个线性无关的特征向量, 以这 n 个线性无关的特征向量为列向量构成矩阵 P , 则

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由 $AB = BA \Rightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$, 即

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

由此可得到 $c_{ij} = 0 (i \neq j)$, 所以

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} c_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

这表明 P 的 n 个列向量也是 B 的特征向量.

例 4.9.1 求可交换矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 的所有公

共特征向量. 问是否存在可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 同为对角矩阵?

解 容易验证 $AB = BA$. 下求 A 的特征值与特征向量:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 3 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)^2,$$

特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

对 $\lambda_1 = 1$, 方程组 $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

而

$$B\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

ϵ 也是 B 的特征向量, 对应特征值 $\mu = -1$.

此时 A 与 B 的公共特征向量为 $c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (c \neq 0)$.

对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, 方程组 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的基础解系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \text{而}$$

$$B\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2,$$

$$B\boldsymbol{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2.$$

定理 4.9.1 中的 $L = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

由 $|\mu I - L| = \begin{vmatrix} \mu - 2 & -2 \\ -1 & \mu - 1 \end{vmatrix} = \mu(\mu - 3) = 0$, 得 $\mu_1 = 0, \mu_2 = 3$.

对 $\mu_1 = 0$, $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得 $c_2 = -c_1$, 于是公共特征向量为

$$\boldsymbol{\eta} = c_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 \neq 0.$$

对 $\mu_2 = 3$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 得 $c_1 = 2c_2$, 于是公共特征向量为

$$\boldsymbol{\eta} = c_2(2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) = c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad c_2 \neq 0.$$

综上, 矩阵 A 与 B 的所有公共特征向量为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \text{ 是不为零的任意常数}).$$

由于 A 与 B 同有三个线性无关的特征向量, 所以它们能够同时相似对角

化. 取

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 3 \end{pmatrix}.$$

例 4.9.2 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = A + B$, 证明:

- (1) A, B 乘法可交换;
- (2) A 与 B 有完全相同的特征向量.

证 (1) 因为 $AB = A + B \Rightarrow (A - I)(B - I) = I$, 所以 $(B - I)(A - I) = I$, 从而

$$(A - I)(B - I) = (B - I)(A - I) \Rightarrow AB - A - B + I = BA - A - B + I$$

故

$$AB = BA.$$

(2) 由 $(A - I)(B - I) = I$ 知 $|I - A| \neq 0, |I - B| \neq 0$, 所以 1 不是 A 和 B 的特征值.

设 β 是 B 的任一特征向量, 且有 $B\beta = \mu\beta$, 则

$$AB\beta = A\beta + B\beta \Rightarrow \mu A\beta = A\beta + \mu\beta.$$

因为 $\mu \neq 1$, 上式整理得

$$A\beta = \frac{\mu}{\mu - 1}\beta,$$

这说明 β 也是 A 的特征向量.

由于 A, B 乘法可交换, 又有 $BA = A + B$, 故 A 的任一特征向量也是 B 的特征向量. 所以 A 与 B 有完全相同的特征向量.

问题 4.10 为什么实对称矩阵一定能正交对角化

实对称矩阵能正交对角化的最基本原因是其特征值均为实数. 一般工科线性代数教材均给出了这一性质, 以及实对称矩阵正交对角化的方法, 但多数却没给出后者的一般性证明, 这里介绍两种较常见的证明, 它们都是容易被学生所理解的.

方法 1 对实对称矩阵.

$n = 1$ 时, 一

设 $n - 1$ 阶实

对 n 阶实对称

以对应的特征向

α_1 扩充为空间 \mathbb{R}^n

正交矩阵 $Q_1 = ($

由于 A 是实对称

且 B_2 是 $n - 1$ 阶

似于对角矩阵

于是正交矩阵 Q

方法 2 证明实对称矩阵正交对角化.

设 λ_1 是 n 阶实对称矩阵 A 的特征值, 4.7.1 我们知道 k

设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 经正交化、单位化后为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, 以它们为列构成正交矩阵 Q .