第6章 矩阵的广义逆

Matrix Theory

源起

设 A 是 $n \times n$ 可逆方阵, b 是任意一个 n 维向量, 则方程组

$$Ax = b$$

总有解, 且解 x 可表为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{b}.$$

源起

设 A 是 $n \times n$ 可逆方阵, b 是任意一个 n 维向量, 则方程组

$$Ax = b$$

总有解, 且解 x 可表为

$$x = A^{-1}b.$$

现设 A 是任意 $m \times n$ 阵, b 是一个 m 维向量, 是否存在 $n \times m$ 矩阵 G, 使得只要方程 Ax = b 有解, 则

$$x = Gb$$

就是解?

源起

设 A 是 $n \times n$ 可逆方阵, b 是任意一个 n 维向量, 则方程组

$$Ax = b$$

总有解, 且解 x 可表为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1} \boldsymbol{b}.$$

现设 A 是任意 $m \times n$ 阵, b 是一个 m 维向量, 是否存在 $n \times m$ 矩阵 G, 使得只要方程 Ax = b 有解, 则

$$x = Gb$$

就是解?

这样的矩阵 G 就涉及到广义逆的概念.

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆 (pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose 广义逆矩阵 (Moore–Penrose pseudoinverse). 广义逆 (generalized inverse), 也称<u>伪逆</u> (pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose **广义逆矩阵** (Moore–Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore¹ 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

 $^{^1}$ Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆 (generalized inverse), 也称<u>伪逆</u> (pseudoinverse), 一般是指 Moore–Penrose **广义逆矩阵** (Moore–Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore¹ 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

Definition 1.1 (Moore 广义逆矩阵)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$\mathbf{A}\mathbf{G} = P_{R(\mathbf{A}), N(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \mathbf{G}\mathbf{A} = P_{R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}), N(\mathbf{A})}, \tag{1}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子,则称 \boldsymbol{G} 为 \boldsymbol{A} 的 Moore 广义逆矩阵.

 $^{^{-1}}$ Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆 (pseudoinverse), 一般是指 Moore-Penrose 广义逆矩阵 (Moore-Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore¹ 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

Definition 1.1 (Moore 广义逆矩阵)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$\mathbf{A}\mathbf{G} = P_{R(\mathbf{A}), N(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \mathbf{G}\mathbf{A} = P_{R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}), N(\mathbf{A})}, \tag{1}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子,则称 \boldsymbol{G} 为 \boldsymbol{A} 的 Moore 广义逆矩阵.

公式 (1) 含义不容易理解和应用, 因此 Moore 给出的广义逆矩阵一直未被重视.

 $^{^{-1}}$ Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆 (generalized inverse), 也称伪逆 (pseudoinverse), 一般是指 Moore-Penrose 广义逆矩阵 (Moore-Penrose pseudoinverse).

F. H. Moore¹ 于 1920 年给出了矩阵的广义逆的概念.

Definition 1.1 (Moore 广义逆矩阵)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{G} = P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}, \qquad \boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}, \tag{1}$$

其中 $P_{R(\boldsymbol{A}),N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A})$ 上的正交投影算子, $P_{R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}),N(\boldsymbol{A})}$ 表示沿子空间 $N(\boldsymbol{A})$ 向子空间 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$ 上的正交投影算子,则称 \boldsymbol{G} 为 \boldsymbol{A} 的 Moore 广义逆矩阵.

公式 (1) 含义不容易理解和应用, 因此 Moore 给出的广义逆矩阵一直未被重视. 直到 1955 年剑桥大学的博士研究生 Roger Penrose 给出了广义逆矩阵的另一个等价定义, 才使得广义逆矩阵的研究获得迅速发展.

 $^{^1}$ Eliakim Hastings Moore (1862-1932), 美国数学家, 是二十世纪初美国数学的奠基人, 曾任美国数学会主席.

广义逆矩阵的基本概念

Definition 1.2 (Penrose 广义逆矩阵)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

- (1) AGA = A.
- (2) GAG = G.
- $(3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G},$
- $(4) \quad (GA)^{H} = GA,$

则称 G 为 A 的 Penrose 广义逆矩阵, 简称为 Penrose 广义逆, 记为 A^+ , 或 A^{\dagger} .

广义逆矩阵的基本概念

Definition 1.2 (Penrose 广义逆矩阵)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

- (1) AGA = A.
- (2) GAG = G.
- $(3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G}.$
- $(4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$

则称 G 为 A 的 Penrose 广义逆矩阵, 简称为 Penrose 广义逆, 记为 A^+ , 或 A^{\dagger} . 矩阵的 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆县等价的 并且是唯一的 故也称为

矩阵的 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆是等价的, 并且是唯一的, 故也称为 M-P 广义逆.

广义逆矩阵的基本概念

Definition 1.2 (Penrose 广义逆矩阵)

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

M-P 广义逆.

- (1) AGA = A.
- (2) GAG = G.
- $(3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G},$
- $(4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$

则称 G 为 A 的 Penrose 广义逆矩阵,简称为 Penrose 广义逆,记为 A^+ ,或 A^\dagger . 矩阵的 Moore 广义逆与 Penrose 广义逆是等价的,并且是唯一的,故也称为

若矩阵 G 满足条件 (1), (2), (3), (4) 中的部分或全部, 则称 G 为 A 的广义逆矩阵, 简称为广义逆.

若 G 只满足条件 (1), 则 G 为 A 的 $\{1\}$ -逆,

若 G 只满足条件 (1), 则 G 为 A 的 {1}-逆, 记为 $G \in A$ {1}.	

若 G 只满足条件 (1), 则 G 为 A 的 {1}-逆, 记为 $G \in A$ {1}.

若 G 只满足条件 (1), (2), 则 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆,

若 G 只满足条件 (1), 则 G 为 A 的 {1}-逆, 记为 $G \in A$ {1}. 若 G 只满足条件 (1), (2), 则 G 为 A 的 {1,2}-逆, 记为 $G \in A$ {1,2}.

若 G 只满足条件 (1), 则 G 为 A 的 {1}-逆, 记为 $G \in A$ {1}. 若 G 只满足条件 (1), (2), 则 G 为 A 的 {1,2}-逆, 记为 $G \in A$ {1,2}.

若 G 只满足条件 (1), (2), 则 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆, 记为 $G \in A\{1,2\}$. 满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类,

若 G 只满足条件 (1), (2), 则 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆, 记为 $G \in A\{1,2\}$. 满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类, 即

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15.$$

若 G 只满足条件 (1), 则 G 为 A 的 {1}-逆, 记为 $G \in A$ {1}.

若 G 只满足条件 (1), (2), 则 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆, 记为 $G \in A\{1,2\}$. 满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类, 即

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15.$$

常用的广义逆是以下 5 类:

$$A\{1\}, A\{1,2\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}, A^{+}.$$

 $\mathbf{A}[1], \quad \mathbf{A}[1,2], \quad \mathbf{A}[1,0], \quad \mathbf{A}[1,4], \quad \mathbf{A}$

 $oldsymbol{ol}oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{oldsymbol{ol}ol{ol}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}}$

若 G 只满足条件 (1), 则 G 为 A 的 {1}-逆, 记为 $G \in A$ {1}. 若 G 只满足条件 (1), (2), 则 G 为 A 的 {1,2}-逆, 记为 $G \in A$ {1,2}. 满足条件 (1), (2), (3), (4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类, 即

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15.$$

常用的广义逆是以下 5 类:

$$A\{1\}, A\{1,2\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}, A^{+}.$$

 \Box 只有 A^+ 是唯一的, 而其他各种广义逆矩阵都不是唯一的.

当 A 是可逆矩阵时, 它的所有广义逆矩阵都等于 A^{-1} .

若 G 只满足条件 (1),则 G 为 A 的 $\{1\}$ -逆,记为 $G \in A\{1\}$. 若 G 只满足条件 (1),(2),则 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆,记为 $G \in A\{1,2\}$. 满足条件 (1),(2),(3),(4) 的部分或全部的广义逆矩阵共有 15 类,即

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15.$$

常用的广义逆是以下5类:

$$A\{1\}, A\{1,2\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}, A^{+}.$$

以工物系 L^{-1} 是唯一的,而其他各种广义逆矩阵都不是唯一的. 当 A 是可逆矩阵时,它的所有广义逆矩阵都等于 A^{-1} .

以下将重点讨论这 5 类广义逆.

Example 1.3

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
,则

是 A 的 {1}-逆.

$$\mathbf{X} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

 $G = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \forall a \in \mathbb{C},$

Example 1.3

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
,则

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$oldsymbol{G} = egin{bmatrix} 1 & a \ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad orall a \in \mathbb{C},$$

是 A 的 {1}-逆. 可见 {1}-逆不是唯一确定的.

Example 1.3

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
, 则

$$oldsymbol{G} = egin{bmatrix} 1 & a \ 0 & a \end{bmatrix}, \qquad orall a \in$$

$$G =$$

$$G$$
 $\begin{bmatrix} 1 & a \end{bmatrix}$

 $A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

$$oldsymbol{G} = egin{bmatrix} 1 & a \ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad orall a \in \mathbb{C},$$

但 A^+ 是唯一的, 这里

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$
, \aleph^{d}

是 A 的 $\{1\}$ -逆. 可见 $\{1\}$ -逆不是唯一确定的.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{M}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ for } \mathbf{A}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \mathbb{M}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \mathbb{N}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$$
, 则

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{R}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sir Roger Penrose (born 8 August 1931), is an English mathematical physicist, recreational mathematician and philosopher. He is the Emeritus Rouse Ball Professor of Mathematics at the Mathematical Institute of the University of Oxford, as well as an Emeritus Fellow of Wadham College.



Penrose is internationally renowned for his scientific work in mathematical physics, in particular for his contributions to general relativity and cosmology. He has received a number of prizes and awards, including the 1988 Wolf Prize for physics, which he shared with **Stephen Hawking** for their contribution to our understanding of the universe.

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- 2 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
 - 广义逆 A⁽¹⁾ 的定义和构造
 - 广义逆 A⁽¹⁾ 的性质
 - 广义逆 A⁽¹⁾ 应用于解线性方程组
- ③ 广义逆矩阵 A^(1,2)
- 4 广义逆矩阵 A^(1,3)
- **6** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
- ⑥ M-P 广义逆矩阵

对于 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

AGA = A

则 G 称为 A 的 {1}-逆, 或称为 A 的 g 逆, 或称为 A 的减号逆.

对于 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

AGA = A.

则 G 称为 A 的 $\{1\}$ -逆, 或称为 A 的 g 逆, 或称为 A 的减号逆. 记为 $A^{(1)}$, 或

 A^{-} .

对于 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

AGA = A.

则 G 称为 A 的 $\{1\}$ -逆, 或称为 A 的 g 逆, 或称为 A 的减号逆. 记为 $A^{(1)}$, 或

 A^- .

矩阵 A 所有 $\{1\}$ -逆的全体记为 $A\{1\}$,

对于 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$AGA = A$$
.

则 G 称为 A 的 $\{1\}$ -逆, 或称为 A 的 g 逆, 或称为 A 的减号逆. 记为 $A^{(1)}$, 或 A^{-} .

 $A\{1\} = \{G \mid AGA = A\}.$

矩阵 A 所有 $\{1\}$ -逆的全体记为 $A\{1\}$, 即

对于 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 如果 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$AGA = A$$
.

则 \boldsymbol{G} 称为 \boldsymbol{A} 的 $\{1\}$ -逆, 或称为 \boldsymbol{A} 的 g 逆, 或称为 \boldsymbol{A} 的减号逆. 记为 $\boldsymbol{A}^{(1)}$, 或 \boldsymbol{A}^{-} .

矩阵 A 所有 $\{1\}$ -逆的全体记为 $A\{1\}$, 即

$$A\{1\} = \{G \mid AGA = A\}.$$

☞ 注意表达式:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}=\mathbf{A}.$$

设 $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 PAQ = B,

设 $m{A}, \, m{B} \in \mathbb{C}^{m imes n}$, 且 $m{P}, \, m{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $m{P}m{A}m{Q} = m{B},$

则
$$oldsymbol{A}\{1\} = ig\{ oldsymbol{Q} oldsymbol{B}^{(1)} oldsymbol{P} \mid oldsymbol{B}^{(1)} \in oldsymbol{B}\{1\} ig\}.$$

设 A, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 PAQ = B,

$$A\{1\} = \{QB^{(1)}P \mid B^{(1)} \in B\{1\}\}.$$

证: 任取
$$B^{(1)} \in B\{1\}$$
,

则

设 $m{A}, m{B} \in \mathbb{C}^{m imes n}$, 且 $m{P}, m{Q}$ 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 $m{P}m{A}m{Q} = m{B},$

$$A\{1\} = \{QB^{(1)}P \mid B^{(1)} \in B\{1\}\}.$$

证: 任取
$$B^{(1)} \in B\{1\}$$
,
$$A(QB^{(1)}P)A = (P^{-1}BQ^{-1})(QB^{(1)}P)(P^{-1}BQ^{-1}) \qquad (A = P^{-1}BQ^{-1})$$

$$= P^{-1}BB^{(1)}BQ^{-1}$$

$$= P^{-1}BQ^{-1} \qquad (BB^{(1)}B = B)$$

$$= A.$$

设 A, $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足 PAQ = B, 则

$$A\{1\} = \{QB^{(1)}P \mid B^{(1)} \in B\{1\}\}.$$

证: 任取
$$B^{(1)} \in B\{1\}$$
,

$$A(QB^{(1)}P)A = (P^{-1}BQ^{-1})(QB^{(1)}P)(P^{-1}BQ^{-1})$$
 $(A = P^{-1}BQ^{-1})$
= $P^{-1}BB^{(1)}BQ^{-1}$
= $P^{-1}BQ^{-1}$ $(BB^{(1)}B = B)$
= A .

所以 $QB^{(1)}P \in A\{1\}$.

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

$$(P^{-1}BQ^{-1})A^{(1)}(P^{-1}BQ^{-1}) = P^{-1}BQ^{-1}.$$

$$(P^{-1}BQ^{-1})A^{(1)}(P^{-1}BQ^{-1}) = P^{-1}BQ^{-1}.$$

两端左乘 P, 右乘 Q, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

$$(P^{-1}BQ^{-1})A^{(1)}(P^{-1}BQ^{-1}) = P^{-1}BQ^{-1}.$$

两端左乘 P, 右乘 Q, 得

$$BQ^{-1}A^{(1)}P^{-1}B=B,$$

则

$$Q^{-1}A^{(1)}P^{-1} \in B\{1\}.$$

$$(P^{-1}BQ^{-1})A^{(1)}(P^{-1}BQ^{-1}) = P^{-1}BQ^{-1}.$$

两端左乘 P, 右乘 Q, 得

$$BQ^{-1}A^{(1)}P^{-1}B=B,$$

则

$$Q^{-1}A^{(1)}P^{-1} \in B\{1\}.$$

因而存在 $B^{(1)} \in B\{1\}$, 使得

$$Q^{-1}A^{(1)}P^{-1}=B^{(1)}.$$

$$(P^{-1}BQ^{-1})A^{(1)}(P^{-1}BQ^{-1}) = P^{-1}BQ^{-1}.$$

两端左乘 P, 右乘 Q, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

则

$$Q^{-1}A^{(1)}P^{-1} \in B\{1\}.$$

因而存在 $B^{(1)} \in B\{1\}$, 使得

$$Q^{-1}A^{(1)}P^{-1}=B^{(1)}.$$

故 $A^{(1)}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P}.$$

反之, 任取 $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$. 代入 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}$, 即

$$(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{Q}^{-1}.$$

两端左乘 P, 右乘 Q, 得

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B},$$

则

$$\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{P}^{-1} \in \mathbf{B}\{1\}.$$

因而存在 $B^{(1)} \in B\{1\}$, 使得

$$Q^{-1}A^{(1)}P^{-1}=B^{(1)}.$$

故 $A^{(1)}$ 可表示为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}^{(1)}\boldsymbol{P}.$$

证毕.

设 $A \in \mathbb{C}_{n}^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

$$o$$
, \mathbb{Q}

 $oldsymbol{A}^{(1)} = oldsymbol{Q} egin{array}{cc} oldsymbol{I_r} & oldsymbol{G}_{12} \ oldsymbol{G}_{21} & oldsymbol{G}_{22} \ \end{array} oldsymbol{P},$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的

任意矩阵.

设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

 $oldsymbol{A}^{(1)} = oldsymbol{Q} egin{array}{cc} oldsymbol{I_r} & oldsymbol{G}_{12} \ oldsymbol{G}_{21} & oldsymbol{G}_{22} \ \end{array} oldsymbol{P},$

(2)

其中
$$G_{12}$$
, G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的任意矩阵.

注意 $\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$ 是 A 的标准形,

注意
$$\begin{bmatrix} a & b \\ o & o \end{bmatrix}$$
 是 A 的标准形,

设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的 任意矩阵.

注意
$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
 是 A 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 A 化为标准形的 可逆矩阵 B O 体公式 (2) 即可想到它义逆 $A^{(1)}$

可逆矩阵 P, Q, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $A^{(1)}$.

设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的 任意矩阵.

注意
$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
 是 A 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 A 化为标准形的

可逆矩阵 P, Q, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $A^{(1)}$.

特别地, 当 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{\mathbf{n}}^{n \times n}$ 时,

设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

$$A^{(1)} = Q \begin{vmatrix} I_r & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{vmatrix} P,$$
 (2)

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的任意矩阵.

注意
$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
 是 $m{A}$ 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 $m{A}$ 化为标准形的

可逆矩阵 P, Q, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $A^{(1)}$.

特别地, 当 $A \in \mathbb{C}_n^{n \times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 P, Q, 使 $PAQ = I_n$,

设 $A \in \mathbb{C}_{r}^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的任意矩阵.

注意
$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
 是 A 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 A 化为标准形的

可逆矩阵 P, Q, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $A^{(1)}$.

特别地, 当 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_n^{n \times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 \mathbf{P} , \mathbf{Q} , 使 $\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$, 从而有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \boldsymbol{I}_n \boldsymbol{P}$$

设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的任意矩阵.

注意
$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
 是 A 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 A 化为标准形的

可逆矩阵 P, Q, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $A^{(1)}$.

特别地, 当 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{\mathbf{n}}^{n \times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 \mathbf{P} , \mathbf{Q} , 使 $\mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{I}_{\mathbf{n}}$, 从而有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

设 $A \in \mathbb{C}_{\underline{r}}^{m \times n}$, 且 P, Q 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵, 满足

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
,则有

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{2}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的 任意矩阵.

注意
$$\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}$$
 是 A 的标准形, 此定理表明, 只要找到将 A 化为标准形的

可逆矩阵 P, Q, 依公式 (2) 即可得到广义逆 $A^{(1)}$. 特别地, 当 $A \in \mathbb{C}_n^{n \times n}$ 时, 存在 n 阶可逆矩阵 P, Q, 使 $PAQ = I_n$, 从而有

$$oldsymbol{A}^{(1)} = oldsymbol{Q} oldsymbol{I}_n oldsymbol{P} = oldsymbol{Q} oldsymbol{P} = oldsymbol{A}^{-1}.$$

可见满秩矩阵的 $\{1\}$ -逆是唯一的, 且等于 A^{-1} .

ਪੁੱਛ: ਪੌਰ
$$m{B} = egin{bmatrix} m{I_r} & m{O} \\ m{O} & m{O} \end{bmatrix}$$
,

证: 记 $m{B} = egin{bmatrix} m{I_r} & m{O} \\ m{O} & m{O} \end{bmatrix}$,对照引理 2.2,只需证明 $m{B}$ 的 $\{1\}$ -逆有且仅有形式 $egin{bmatrix} m{I_r} & m{G}_{12} \\ m{G}_{21} & m{G}_{22} \end{bmatrix}$ 即可.

 $oldsymbol{G} = egin{bmatrix} oldsymbol{G}_{11} & oldsymbol{G}_{12} \ oldsymbol{G}_{21} & oldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix},$

 $egin{aligned} egin{aligned} oldsymbol{i} & oldsymbol{i} & oldsymbol{B} & oldsymbol{a} & oldsymbol{O} \\ oldsymbol{O} & oldsymbol{O} \end{bmatrix},$ 对照引理 2.2, 只需证明 $oldsymbol{B}$ 的 $\{1\}$ -逆有且仅有形式 $\begin{bmatrix} I_r & G_{12} \ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ 即可. 设

 $egin{aligned} egin{aligned} oxdot{u} & oldsymbol{i} & oldsymbol{O} & oldsymbol{O} \end{bmatrix},$ 对照引理 2.2, 只需证明 $oldsymbol{B}$ 的 $\{1\}$ -逆有且仅有形式

$$egin{bmatrix} oldsymbol{O} & oldsymbol{O} \ oldsymbol{I}_n & oldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix}$$

 $\begin{bmatrix} I_r & G_{12} \ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$ 即可. 设

 $oldsymbol{G} = egin{bmatrix} oldsymbol{G}_{11} & oldsymbol{G}_{12} \ oldsymbol{G}_{21} & oldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix},$

 $egin{bmatrix} I_r & O \ O & O \end{bmatrix} egin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} egin{bmatrix} I_r & O \ O & O \end{bmatrix} = egin{bmatrix} I_r & O \ O & O \end{bmatrix}.$

代入 BGB = B, 得

证: 记 $m{B} = egin{array}{c|c} m{I}_r & m{O} \\ m{O} & m{O} \end{bmatrix}$,对照引理 2.2,只需证明 $m{B}$ 的 $\{1\}$ -逆有且仅有形式

$$\begin{bmatrix} I_r & G_{12} \ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}$$
即可. 设

$$oldsymbol{G} = egin{bmatrix} oldsymbol{G}_{11} & oldsymbol{G}_{12} \ oldsymbol{G}_{21} & oldsymbol{G}_{22} \ \end{pmatrix},$$

代入 BGB = B, 得

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}.$$

从而, 当且仅当 $G_{11} = I_r$, 而 G_{12} , G_{21} , G_{22} 为任意矩阵时, $G \in B\{1\}$.

Example 2.4

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
, 求 $\mathbf{A}\{1\}$.

Example 2.4

设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$,求 $\mathbf{A}\{1\}$.

 \mathbf{p} : 将 \mathbf{A} 化为标准形, 在 \mathbf{A} 的右边放上单位矩阵 \mathbf{I}_2 , 在 \mathbf{A} 的下方放上单位矩

阵 I_3 , 当 A 变成标准形时, 则 I_2 就变成 P, 而 I_3 就变成 Q.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I_2} \\ \mathbf{I_3} & \mathbf{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{c} c_2 + c_1 \\ c_3 - 2c_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{c_1 + 2c_3}{c_2 + 4c_3} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
-3 & -7 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 1 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\xrightarrow[c_2 \leftrightarrow c_3]{r_2 \times (-1)} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
-3 & -2 & -7 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 4 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$m{P} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 0 \ 0 & -1 \end{array}
ight]. \qquad m{Q} = \left[egin{array}{cccc} -3 & -2 & -7 \ 0 & 0 & 1 \ 2 & 1 & 4 \end{array}
ight].$$

则有

$$extbf{ extit{PA}} extbf{ extit{Q}} = [extbf{ extit{I}}_2, extbf{ extit{O}}],$$

$$m{A}\{1\} = \left\{m{Q} egin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix} m{P} \middle| orall x_1, x_2 \in \mathbb{C}
ight\}. \quad \Box$$

$$m{P} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array}
ight]. \qquad m{Q} = \left[egin{array}{ccc} -3 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}
ight].$$
则有

火儿个

 $oldsymbol{PAQ} = [oldsymbol{I_2}, oldsymbol{O}],$ 于是

$$oldsymbol{A}\{1\} = \left\{oldsymbol{Q}egin{bmatrix}1 & 0 \ 0 & 1 \ x & x \end{bmatrix}oldsymbol{P}igg|\,orall x_1, x_2 \in \mathbb{C}
ight\}. \quad \Box$$

...

若
$$x_1 = x_2 = 0$$
,则
$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

这只不过是其中的一个 {1}-逆.

Theorem 2.5

设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\boldsymbol{A}^{(1)} \in \boldsymbol{A}\{1\}$, 则

○ $A\{1\} = \{A^{(1)} + U - A^{(1)}AUAA^{(1)} \mid U \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵 $\};$

Theorem 2.5

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{A}^{(1)} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

- **③** $A\{1\} = \{A^{(1)} + U A^{(1)}AUAA^{(1)} \mid U \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵 $\};$
- ② $A\{1\} = \{A^{(1)} + V(I_m AA^{(1)}) + (I_n A^{(1)}A)U | U, V \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵 $\}.$

Theorem 2.5

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{A}^{(1)} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

- **○** $A\{1\} = \{A^{(1)} + U A^{(1)}AUAA^{(1)} \mid U \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵 $\};$
- ② $A\{1\} = \{A^{(1)} + V(I_m AA^{(1)}) + (I_n A^{(1)}A)U | U, V \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵}.

证: 记 $Y = A^{(1)} + U - A^{(1)}AUAA^{(1)}$,

Theorem 2.5

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{A}^{(1)} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

- **③** $A\{1\} = \{A^{(1)} + U A^{(1)}AUAA^{(1)} \mid U \in \mathbb{C}^{n \times m} \text{ 为任意矩阵}\};$
- ② $A\{1\} = \{A^{(1)} + V(I_m AA^{(1)}) + (I_n A^{(1)}A)U | U, V \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵 $\}.$

证: 记
$$Y = A^{(1)} + U - A^{(1)}AUAA^{(1)}$$
, 因

$$A YA = A (A^{(1)} + U - A^{(1)} A U A A^{(1)}) A$$

= $A A^{(1)} A + A U A - A A^{(1)} A U A A^{(1)} A$
= $A + A U A - A U A$
= A .

Theorem 2.5

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\mathbf{A}^{(1)} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

- **③** $A\{1\} = \{A^{(1)} + U A^{(1)}AUAA^{(1)} \mid U \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵 $\};$
- ② $A\{1\} = \{A^{(1)} + V(I_m AA^{(1)}) + (I_n A^{(1)}A)U | U, V \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 为任意矩阵 $\}.$

证: 记
$$Y = A^{(1)} + U - A^{(1)}AUAA^{(1)}$$
, 因

$$A YA = A (A^{(1)} + U - A^{(1)} A U A A^{(1)}) A$$

= $A A^{(1)} A + A U A - A A^{(1)} A U A A^{(1)} A$
= $A + A U A - A U A$
= A ,

故 $Y \in A\{1\}$.

记 $\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{V}(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) + (\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})\mathbf{U},$

记
$$Z = A^{(1)} + V(\underline{I}_m - AA^{(1)}) + (\underline{I}_n - A^{(1)}A)U$$
, 因

$$(I_m - AA^{(1)})A = A - AA^{(1)}A = O,$$

(3)

(4)

$$(I - A A^{(1)}) A - A - A A^{(1)} A -$$

 $A(I_n - A^{(1)}A) = A - AA^{(1)}A = O,$

记
$$Z = A^{(1)} + V(I_m - AA^{(1)}) + (I_n - A^{(1)}A)U$$
, 因

$$A(I_n - A^{(1)}A) = A - AA^{(1)}A = O,$$

故 AZA = A, 即 $Z \in A\{1\}$.

反之, 任取 $X \in A\{1\}$, 取

 $U = X - A^{(1)}$.

 $(I_m - AA^{(1)})A = A - AA^{(1)}A = O,$

(5)

(3)

(4)

记 $Z = A^{(1)} + V(I_m - AA^{(1)}) + (I_n - A^{(1)}A)U$. 因 $(I_m - AA^{(1)})A = A - AA^{(1)}A = O,$

$$A(I_n - A^{(1)}A) = A - AA^{(1)}A = O,$$

故 AZA = A, 即 $Z \in A\{1\}$.

反之, 任取 $X \in A\{1\}$, 取

 $\mathbb{U} X = A^{(1)} + U - A^{(1)} A U A A^{(1)}$.

 $U = X - A^{(1)}$.

(5)



(3)

(4)



$$(\boldsymbol{I_m} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O},$$

记 $Z = A^{(1)} + V(I_m - AA^{(1)}) + (I_n - A^{(1)}A)U$. 因

故
$$\boldsymbol{AZA} = \boldsymbol{A}$$
, 即 $\boldsymbol{Z} \in \boldsymbol{A}\{1\}$.

反之, 任取 $X \in A\{1\}$, 取

$$U = X - A^{(1)},$$

 $A(I_n - A^{(1)}A) = A - AA^{(1)}A = 0.$

$$V = X - A^{(1)}, \qquad U = XAA^{(1)},$$

则 $X = A^{(1)} + V(I_m - AA^{(1)}) + (I_n - A^{(1)}A)U$.

则
$$X = A^{(1)} + V(I_m - AA^{(1)}) + (I_n - A^{(1)}A)U$$
.
故 $A\{1\}$ 的任何元素都可以用表达式 $A^{(1)} + A^{(1)}$

故 $A\{1\}$ 的任何元素都可以用表达式 $A^{(1)} + U - A^{(1)}AUAA^{(1)}$. $A^{(1)} + V(I_m - AA^{(1)}) + (I_n - A^{(1)}A)U$ 给出. 得证.

(3)

(4)

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- 2 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
 - 广义逆 A(1) 的定义和构造
 - 广义逆 A⁽¹⁾ 的性质
 - 广义逆 A(1) 应用于解线性方程组
- ③ 广义逆矩阵 A^(1,2)
- 4 广义逆矩阵 A^(1,3)
- 5 广义逆矩阵 A(1,4)
- ⑥ M-P 广义逆矩阵

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则有

•
$$\lambda^+ \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A})\{1\}, \ \ \sharp \ \forall \ \lambda^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

■ AA⁽¹⁾ 与 A⁽¹⁾A 都是幂等阵, 且满足

 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}.$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, 则有

②
$$\lambda^+ A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}, \ \sharp \ \forall \ \lambda^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$$

- $3 \operatorname{rank} A^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} A.$
- **③** $AA^{(1)}$ 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等阵,且满足 rank $(AA^{(1)})$ = rank $(A^{(1)}A)$ = rank A.

证:
$$(1)$$
 由 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{A}$, 有

$$oldsymbol{A}^{\mathrm{H}}oldsymbol{\left(A^{(1)}
ight)}^{\mathrm{H}}oldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=oldsymbol{A}^{\mathrm{H}},$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$. 则有

②
$$\lambda^{+} \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A})\{1\}$$
, 其中 $\lambda^{+} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$
③ $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{(1)} \ge \operatorname{rank} \mathbf{A}$.

 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{(1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}.$

4 $AA^{(1)}$ 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等阵. 且满足 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}.$

证: (1) 由
$$AA^{(1)}A = A$$
, 有

故 $(\mathbf{A}^{(1)})^{\mathrm{H}} \in \mathbf{A}^{\mathrm{H}}\{1\}.$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$. 则有

②
$$\lambda^+ \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A})\{1\}$$
, 其中 $\lambda^+ = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \lambda \neq 0, \\ 0, & \lambda = 0. \end{cases}$
③ $\operatorname{rank} \mathbf{A}^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} \mathbf{A}.$

③
$$AA^{(1)}$$
 与 $A^{(1)}A$ 都是幂等阵,且满足 rank $(AA^{(1)})$ = rank $(A^{(1)}A)$ = rank A .

证: (1) 由 $AA^{(1)}A = A$, 有

故
$$(\boldsymbol{A}^{(1)})^{\mathrm{H}} \in \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\{1\}.$$

对照: $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{H}}$.

$$(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{H}}.$$

 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{(1)})^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}.$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1} \mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以 $\lambda^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A}) \{1\}.$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以 $\lambda^{-1} \boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}.$

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\mathbf{A})(0\mathbf{A}^{(1)})(0\mathbf{A}) = 0\mathbf{A}$, 故 $0\mathbf{A}^{(1)} \in (0\mathbf{A})\{1\}$.

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以
$$\lambda^{-1}\boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A})\{1\}.$$

当
$$\lambda = 0$$
 时,因 $(0\mathbf{A})(0\mathbf{A}^{(1)})(0\mathbf{A}) = 0\mathbf{A}$,故 $0\mathbf{A}^{(1)} \in (0\mathbf{A})\{1\}$. 综合得 $\lambda^+\mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda\mathbf{A})\{1\}$.

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以
$$\lambda^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A}) \{1\}.$$

当
$$\lambda = 0$$
 时, 因 $(0\mathbf{A})(0\mathbf{A}^{(1)})(0\mathbf{A}) = 0\mathbf{A}$, 故 $0\mathbf{A}^{(1)} \in (0\mathbf{A})\{1\}$.

综合得
$$\lambda^+ \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A})\{1\}.$$

对照:
$$(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \lambda \neq 0.$$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以
$$\lambda^{-1} \boldsymbol{A}^{(1)} \in (\lambda \boldsymbol{A}) \{1\}.$$

当
$$\lambda = 0$$
 时,因 $(0\mathbf{A})(0\mathbf{A}^{(1)})(0\mathbf{A}) = 0\mathbf{A}$,故 $0\mathbf{A}^{(1)} \in (0\mathbf{A})\{1\}$. 综合得 $\lambda^+\mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda\mathbf{A})\{1\}$.

对照:
$$(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \lambda \neq 0.$$

$$1 \text{ RR. } (\lambda \mathbf{A}) = \lambda \quad \mathbf{A} \quad , \lambda \neq 0.$$

$$(3) \, \boxplus \, \boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \, \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以
$$\lambda^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A}) \{1\}.$$

当
$$\lambda = 0$$
 时, 因 $(0\mathbf{A})(0\mathbf{A}^{(1)})(0\mathbf{A}) = 0\mathbf{A}$, 故 $0\mathbf{A}^{(1)} \in (0\mathbf{A})\{1\}$. 综合得 $\lambda^+ \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A})\{1\}$.

对照: $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \lambda \neq 0.$

$$\text{NIM: } (\lambda \mathbf{A})^{-1} \equiv \lambda^{-1} \mathbf{A} \quad , \ \lambda \neq 0.$$

$$(3) 曲 \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{A}. \ \mathcal{A}$$

 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})$

$$\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(3)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{(3)}\mathbf{A})$$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以 $\lambda^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A}) \{1\}.$

当 $\lambda = 0$ 时, 因 $(0\mathbf{A})(0\mathbf{A}^{(1)})(0\mathbf{A}) = 0\mathbf{A}$, 故 $0\mathbf{A}^{(1)} \in (0\mathbf{A})\{1\}$.

综合得 $\lambda^{+} \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A}) \{1\}.$ 对照: $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \lambda \neq 0.$

$$A(\mathbf{A}\mathbf{A}) = \lambda \quad \mathbf{A} \quad , \lambda \neq 0.$$

(3) 由 $AA^{(1)}A = A$. 得

 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} (\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank} (\boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)}.$

$$(\lambda \mathbf{A})(\lambda^{-1}\mathbf{A}^{(1)})(\lambda \mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \lambda \mathbf{A},$$

所以 $\lambda^{-1} \mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda \mathbf{A}) \{1\}.$

当 $\lambda = 0$ 时,因 $(0\mathbf{A})(0\mathbf{A}^{(1)})(0\mathbf{A}) = 0\mathbf{A}$,故 $0\mathbf{A}^{(1)} \in (0\mathbf{A})\{1\}$. 综合得 $\lambda^+\mathbf{A}^{(1)} \in (\lambda\mathbf{A})\{1\}$.

对照: $(\lambda \mathbf{A})^{-1} = \lambda^{-1} \mathbf{A}^{-1}, \lambda \neq 0.$

 $\lambda j \text{ RR: } (\lambda \mathbf{A}) = \lambda \quad \mathbf{A} \quad , \lambda \neq 0.$

 $(3) 由 \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{A}, 得$

 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank}\mathbf{A}^{(1)}.$

即证 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{(1)} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$.

 $\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}$

 $(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)},$

$$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)},$$

从而 $AA^{(1)}$ 是幂等阵,

$$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)},$$

从而 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$ 是幂等阵.

$$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)},$$

 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$

从而 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$ 是幂等阵.

由

$$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)},$$

 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank} \mathbf{A},$

从而 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$ 是幂等阵.

由

得 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}).$

$$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)},$$

由 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank} \mathbf{A},$

从而 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$ 是幂等阵.

$$(AA^{(1)})^2 = AA^{(1)}AA^{(1)} = AA^{(1)},$$

从而 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}$ 是幂等阵. 同理得 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$ 是幂等阵.

由 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank}(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \leqslant \operatorname{rank} \mathbf{A},$

得 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$. 同理得 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$.

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)})^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)},$$

从而 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}$ 是幂等阵, 同理得 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$ 是幂等阵.

由

 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$

得 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})$. 同理得 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$. 即证 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}_{\mathbf{r}}$, 则





设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}_r$, 则

- **4** $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ 当且仅当 r = n;
- ② $AA^{(1)} = I_m$ 当且仅当 r = m.

设 $A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$, 则

- **①** $A^{(1)}A = I_n$ 当且仅当 r = n;
- ② $AA^{(1)} = I_m$ 当且仅当 r = m.

或者表达为

- **①** $A^{(1)}$ 是 A 的左逆 \Leftrightarrow A 列满秩;
- ② $A^{(1)}$ 是 A 的右逆 $\Leftrightarrow A$ 行满秩.

证: (1) 若 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$,

证: (1) 若 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, 则 rank $(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{I}_n = n$.

证: (1) 若
$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$$
, 则 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

 $r = \operatorname{rank} \mathbf{A}$

$$r = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} (\boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A})$$

证: (1) 若
$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n$$
, 则 rank $(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}) = n,$$

$$\mathbb{P} r = n$$
.

证: (1) 若
$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$
, 则 rank $(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = \operatorname{rank}\mathbf{I}_n = n$. 则

 $r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}) = n,$

$$r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}) = n$$

即 r=n.

反之, 若
$$r=n$$
,

证: (1) 若
$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$$
, 则 $\operatorname{rank}\left(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}\right) = \operatorname{rank}\mathbf{I}_n = n$. 则

$$r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}) = n,$$

即 r=n.

$$r = n$$

反之、若 r=n、则

 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A} \vee \mathbf{A}) = \operatorname{rank} \mathbf{A} = n$$

$$r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} \left(\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A} \right) = n,$$

即 r=n.

反之、若 r=n、则

 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$

而 $A^{(1)}A$ 为 n 阶方阵,

$$r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}) = n,$$

即 r=n.

反之. 若
$$r = n$$
. 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$$

而 $A^{(1)}A$ 为 n 阶方阵, 故 $(A^{(1)}A)^{-1}$ 存在.

$$r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}) = n,$$

即 r=n.

反之. 若
$$r=n$$
. 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$$

而
$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}$$
 为 n 阶方阵, 故 $(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{-1}$ 存在. 所以

 $= I_n$.

$$A^{(1)}A = (A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)(A^{(1)}A)$$
$$= (A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)$$

 $(A^{(1)}A)$ 为幂等阵)

$$= \left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right)$$

$$r = \operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} (\mathbf{A}^{(1)} \mathbf{A}) = n,$$

即 r=n.

反之, 若 r = n, 则

$$\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\right) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A} = n,$$

而 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, 故 $(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{-1}$ 存在. 所以

$$A^{(1)}A = (A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)(A^{(1)}A)$$

= $(A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)$ ($A^{(1)}A$ 为幂等阵)
= I_n .

同理可证 (2) 成立.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

- $R((\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{\mathrm{H}}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}).$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

$$\overline{\boldsymbol{u}}$$
: 设 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$u = AA^{(1)}x$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

$$\overline{\boldsymbol{u}}$$
: 设 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$u = AA^{(1)}x$$

记
$$z = A^{(1)}x$$
, 则 $u = Az$, 因此 $u \in R(A)$,

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$,则

证: 设
$$\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$$
, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$u = AA^{(1)}x$$

记
$$z = A^{(1)}x$$
, 则 $u = Az$, 因此 $u \in R(A)$, 从而

$$R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) \subseteq R(\mathbf{A}).$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$,则

$$N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A});$$

证: 设 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$u = AA^{(1)}x$$

记 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{x}$, 则 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{z}$, 因此 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A})$, 从而

$$) \subset D(A)$$

 $R\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)\subseteq R(\boldsymbol{A}).$
 $\mathbb X$ rank $\big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\big)=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A},$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

- $N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A});$

证: 设 $\boldsymbol{u} \in R(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 则存在 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

$$u = AA^{(1)}x$$

记 $z = A^{(1)}x$, 则 u = Az, 因此 $u \in R(A)$, 从而

$$R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) \subseteq R(\mathbf{A}).$$

又 $\operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\right)=\operatorname{rank}\boldsymbol{A},$ 故

$$\dim R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = \dim R(\mathbf{A}),$$

Theorem 2.8 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. 则

 $\mathbf{P}(\mathbf{A},\mathbf{A}(1))$

• $R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A});$ • $N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A});$

H) D

 $R((\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{\mathrm{H}}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}).$

 $\overline{\mathbf{u}}$: 设 $\mathbf{u} \in R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)})$, 则存在 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^m$, 使得

 $u = A A^{(1)} x$

记 $z = A^{(1)}x$,则 u = Az,因此 $u \in R(A)$,从而

$$R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) \subseteq R(\mathbf{A}).$$

又 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}$,故

 $\dim R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = \dim R(\mathbf{A}),$

因此 $R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A}).$

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$,

(2) 设 $y \in N(A)$, 则 Ay = 0, 故 $A^{(1)}Ay = 0$,

(2) 设 $y \in N(A)$, 则 Ay = 0, 故 $A^{(1)}Ay = 0$, 从而 $y \in N(AA^{(1)})$,

(2) 设 $y \in N(A)$, 则 Ay = 0, 故 $A^{(1)}Ay = 0$, 从而 $y \in N(AA^{(1)})$, 因此

$$\mathit{N}(oldsymbol{A})\subseteq \mathit{N}(oldsymbol{A}^{(1)}oldsymbol{A}).$$

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$, 则 $A^{(1)}Ax = 0$,

(2) 设 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 故 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$, 则 $A^{(1)}Ax = 0$, 从而 $A^{(1)}Ax = 0$, 即 Ax = 0,

(2) 设 $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 故 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 从而 $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$,则 $A^{(1)}Ax = 0$,从而 $AA^{(1)}Ax = 0$,即 Ax = 0,因

此
$$N(oldsymbol{A}^{(1)}oldsymbol{A})\subseteq N(oldsymbol{A}).$$

(2) 设 $y \in N(A)$, 则 Ay = 0, 故 $A^{(1)}Ay = 0$, 从而 $y \in N(AA^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$,则 $A^{(1)}Ax = 0$,从而 $AA^{(1)}Ax = 0$,即 Ax = 0,因此

$$N(oldsymbol{A}^{(1)}oldsymbol{A})\subset N(oldsymbol{A}).$$

综上得 $N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$

(2) 设 $y \in N(A)$, 则 Ay = 0, 故 $A^{(1)}Ay = 0$, 从而 $y \in N(AA^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$,则 $A^{(1)}Ax = 0$,从而 $AA^{(1)}Ax = 0$,即 Ax = 0,因此

$$N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\subseteq N(\boldsymbol{A}).$$

综上得 $N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$

(3)
$$\boxplus R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A}), \ \mathbb{M} R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{(1)}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}).$$

(2) 设 $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A})$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 故 $\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, 从而 $\mathbf{y} \in N(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$,则 $A^{(1)}Ax = 0$,从而 $AA^{(1)}Ax = 0$,即 Ax = 0,因 此

$$N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}).$$

综上得 $N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$

$$(3) \oplus R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A}), \ \mathbb{M} \ R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{(1)}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}). \ \mathbb{X}$$

 $(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{(1)})^{\mathrm{H}}, \exists (\mathbf{A}^{(1)})^{\mathrm{H}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{(1)}.$

(2) 设 $y \in N(A)$, 则 Ay = 0, 故 $A^{(1)}Ay = 0$, 从而 $y \in N(AA^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$,则 $A^{(1)}Ax = 0$,从而 $AA^{(1)}Ax = 0$,即 Ax = 0,因 此

$$N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\subseteq N(\boldsymbol{A}).$$

综上得 $N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$

$$(3) \oplus R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A}), \ \mathbb{M} \ R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{(1)}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}). \ \mathbb{X}$$

(3)
$$\coprod R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A}), \text{ M}, R(\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A}^{(1)}).$$

 $(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}^{(1)})^{\mathrm{H}}, \ \coprod (\mathbf{A}^{(1)})^{\mathrm{H}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}})^{(1)}, \ \text{tx}$

$$R((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{(1)})$$

(2) 设 $y \in N(A)$, 则 Ay = 0, 故 $A^{(1)}Ay = 0$, 从而 $y \in N(AA^{(1)})$, 因此

$$N(\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}).$$

任取 $x \in N(A^{(1)}A)$,则 $A^{(1)}Ax = 0$,从而 $AA^{(1)}Ax = 0$,即 Ax = 0,因此

$$N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) \subseteq N(\mathbf{A}).$$

综上得 $N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$

(3) 由 $R(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}) = R(\mathbf{A})$, 则 $R(\mathbf{A}^{H}(\mathbf{A}^{H})^{(1)}) = R(\mathbf{A}^{H})$. 又 $(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{H} = \mathbf{A}^{H}(\mathbf{A}^{(1)})^{H}$, 月 $(\mathbf{A}^{(1)})^{H} = (\mathbf{A}^{H})^{(1)}$, 故

$$p((A^{(1)}A)H) = p(AH(AH)(1)) = p(AH)$$

$$R((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{(1)}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}). \quad \Box$$

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- 2 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
 - 广义逆 A⁽¹⁾ 的定义和构造
 - 广义逆 A⁽¹⁾ 的性质
 - 广义逆 A⁽¹⁾ 应用于解线性方程组
- ③ 广义逆矩阵 A^(1,2)
- 4 广义逆矩阵 A^(1,3)
- **5** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
- ⑥ M-P 广义逆矩阵

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解的充 分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

设 $m{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $m{b} \in R(m{A})$, $m{x} = m{G}m{b}$ 都是相容性方程 $m{A}m{x} = m{b}$ 的解的充

证: 充分性. 设 $G \in A\{1\}$,

分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

设 $m{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $m{b} \in R(m{A})$, $m{x} = m{G}m{b}$ 都是相容性方程 $m{A}m{x} = m{b}$ 的解的充

证: 充分性. 设 $G \in A\{1\}$, 则 AGA = A.

分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

设 $m{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $m{b} \in R(m{A})$, $m{x} = m{G}m{b}$ 都是相容性方程 $m{A}m{x} = m{b}$ 的解的充

证: 充分性. 设 $G \in A\{1\}$, 则 AGA = A. 对任何 $b \in R(A)$, 必存在 $y \in \mathbb{C}^n$,

使得

Ay = b.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解的充分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

证: 充分性. 设 $G \in A\{1\}$, 则 AGA = A. 对任何 $b \in R(A)$, 必存在 $y \in \mathbb{C}^n$, 使得

 $\Delta u -$

$$Ay = b$$
.

则

$$AGb = AGAy$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解的充 分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

证: 充分性. 设 $G \in A\{1\}$, 则 AGA = A. 对任何 $b \in R(A)$, 必存在 $y \in \mathbb{C}^n$, 使得

Ay = b.

$$Ay = b$$

则

$$A Gb = A GAy = Ay$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解的充 分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

证: 充分性. 设 $G \in A\{1\}$, 则 AGA = A. 对任何 $b \in R(A)$, 必存在 $y \in \mathbb{C}^n$, 使得

Ay = b.

则

$$AGb = AGAy = Ay = b,$$

分必要条件是 $G \in A\{1\}$.

设 $m{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则对任何 $m{b} \in R(m{A})$, $m{x} = m{G}m{b}$ 都是相容性方程 $m{A}m{x} = m{b}$ 的解的充

证: 充分性. 设 $G \in A\{1\}$, 则 AGA = A. 对任何 $b \in R(A)$, 必存在 $y \in \mathbb{C}^n$, 使得

Ay = b.

则

$$AGb = AGAy = Ay = b,$$

故 x = Gb 是方程 Ax = b 的解.

必要性. 记 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n]$, 则 $\mathbf{a}_i \in R(\mathbf{A})$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

必要性. 记 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n], \ \mathbf{M} \ \mathbf{a}_i \in R(\mathbf{A}), \ i = 1, 2, \cdots, n.$

已知对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解,

必要性. 记 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n], \ \mathbb{M} \ \mathbf{a}_i \in R(\mathbf{A}), \ i = 1, 2, \cdots, n.$

 $a_i \in R(A)$, $x = Ga_i$ 也是方程 $Ax = a_i$ 的解,

已知对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解, 故对

必要性. 记 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n], \ \mathbb{M} \ \mathbf{a}_i \in R(\mathbf{A}), \ i = 1, 2, \cdots, n.$

已知对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解, 故对

 $a_i \in R(A)$, $x = Ga_i$ 也是方程 $Ax = a_i$ 的解, 即

 $AGa_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

必要性. 记 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n], \ \mathbb{M} \ \mathbf{a}_i \in R(\mathbf{A}), \ i = 1, 2, \cdots, n.$

已知对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解, 故对

$$a_i \in R(A)$$
, $x = Ga_i$ 也是方程 $Ax = a_i$ 的解, 即

 $AGa_i = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$

$$AGa_i = a_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

从而

$$oldsymbol{A}oldsymbol{G}[oldsymbol{a}_1,oldsymbol{a}_2,\cdots,oldsymbol{a}_n] = [oldsymbol{a}_1,oldsymbol{a}_2,\cdots,oldsymbol{a}_n].$$

$$m{A}m{G}[m{a}_1,m{a}_2,\cdots,m{a}_n]=[m{a}_1,m{a}_2,\cdots,m{a}_n]$$

必要性. 记 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n],$ 则 $\mathbf{a}_i \in R(\mathbf{A}), i = 1, 2, \cdots, n.$

已知对任何 $b \in R(A)$, x = Gb 都是相容性方程 Ax = b 的解, 故对 $a_i \in R(A)$, $x = Ga_i$ 也是方程 $Ax = a_i$ 的解, 即

$$AGa_i = a_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

从而

$$AG[a_1, a_2, \cdots, a_n] = [a_1, a_2, \cdots, a_n].$$

即 $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$, 所以 $\mathbf{G} \in \mathbf{A}\{1\}$.

lacktriangle 线性方程组 Ax = b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b = b$.

- lacktriangle 线性方程组 Ax = b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b = b$.
- ② 若 Ax = b 有解, 则其通解为

$$A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y,$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

- lacktriangle 线性方程组 Ax=b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b=b$.
- ② 若 Ax = b 有解, 则其通解为

$$A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y,$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: (1) 设 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

- lacktriangle 线性方程组 Ax=b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b=b$.
- ② 若 Ax = b 有解, 则其通解为

$$A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y,$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: (1) 设 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. 则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

- lacktriangle 线性方程组 Ax=b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b=b$.
- ② 若 Ax = b 有解,则其通解为

$$A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y,$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: (1) 设 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. 则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

- lacktriangle 线性方程组 Ax=b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b=b$.
- ② 若 Ax = b 有解,则其通解为

$$A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y,$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: (1) 设 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. 则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

- lacktriangle 线性方程组 Ax=b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b=b$.
- ② 若 Ax = b 有解,则其通解为

$$A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y,$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: (1) 设 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. 则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

反之,设 $AA^{(1)}b=b$,

- ① 线性方程组 Ax = b 有解的充分必要条件是 $AA^{(1)}b = b$.
- ② 若 Ax = b 有解, 则其通解为

$$A^{(1)}b + (I_n - A^{(1)}A)y,$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: (1) 设 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, 使得 $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$. 则

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

反之, 设 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b} = \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{b}$ 为方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解.

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},\tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{y}, \tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0,

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{y}, \tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0, 得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$$

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{y}, \tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0, 得

$$A(I_n - A^{(1)}A)y = (A - AA^{(1)}A)y = (A - A)y$$

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{y}, \tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0, 得

$$A(I_n - A^{(1)}A)y = (A - AA^{(1)}A)y = (A - A)y = 0,$$

故 (7) 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{y}, \tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0, 得

$$A(I_n - A^{(1)}A)y = (A - AA^{(1)}A)y = (A - A)y = 0,$$

故 (7) 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

反之对任何一个解 x_1 , $Ax_1 = 0$,

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},\tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0, 得

$$A(I_n - A^{(1)}A)y = (A - AA^{(1)}A)y = (A - A)y = 0,$$

故 (7) 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

反之对任何一个解 x_1 , $Ax_1 = 0$, 有

$$\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1,$$

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)} \boldsymbol{A}) \boldsymbol{y}, \tag{7}$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0, 得

$$A(I_n - A^{(1)}A)y = (A - AA^{(1)}A)y = (A - A)y = 0,$$

故 (7) 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解.

反之对任何一个解 x_1 , $Ax_1 = 0$, 有

$$\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1,$$

故 (7) 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解.

$$(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

(7)

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

将 (7) 式代入方程组 Ax = 0, 得

$$A(I_n - A^{(1)}A)y = (A - AA^{(1)}A)y = (A - A)y = 0,$$

故 (7) 是 Ax = 0 的解.

反之对任何一个解 x_1 , $Ax_1 = 0$, 有

$$\boldsymbol{x}_1 = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_1,$$

故 (7) 是 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解.

对非齐次方程组 Ax = b, 因 $A^{(1)}b$ 是其一个特解, 故其通解为

$$\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},$$

其中 y 为 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- ② 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 A^(1,2)
 - 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的定义及存在性
 - 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的性质
 - 广义逆 **A**^(1,2) 的构造
- 4 广义逆矩阵 A^(1,3)
- **5** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
- ⑥ M-P 广义逆矩阵

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

- $(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$
- $(2) \quad \textbf{\textit{GA}} \, \textbf{\textit{G}} = \, \textbf{\textit{G}},$

则称 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2)}$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(2) \quad \mathbf{GAG} = \mathbf{G},$$

则称 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2)}$.

记
$$A$$
 的 $\{1,2\}$ -逆的全体为 $A\{1,2\}$, 即

$$A{1,2} = {G \mid AGA = A, GAG = G}.$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

- $(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$
- $(2) \quad \mathbf{GAG} = \mathbf{G},$

则称 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2)}$.

记 A 的 $\{1,2\}$ -逆的全体为 $A\{1,2\}$, 即

$$A{1,2} = {G \mid AGA = A, GAG = G}.$$

类似地, 若 $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 只满足

$$GAG = G$$

则称 G 为 A 的 $\{2\}$ -逆, 记为 $A^{(2)}$,

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(2) \quad \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{G} = \mathbf{G},$$

则称 G 为 A 的 $\{1,2\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2)}$.

记
$$A$$
 的 $\{1,2\}$ -逆的全体为 $A\{1,2\}$, 即

$$A{1,2} = {G \mid AGA = A, GAG = G}.$$

类似地, 若 $G \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 只满足

$$GAG = G$$

则称 G 为 A 的 $\{2\}$ -逆, 记为 $A^{(2)}$, 且记

$$\boldsymbol{A}\{2\} = \{\,\boldsymbol{G} \mid \, \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{G} = \, \boldsymbol{G}\}.$$

 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{A}^{(1)}.$

$$oldsymbol{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 1 & 0 \ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad oldsymbol{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

 $\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq \boldsymbol{A}^{(1)}.$

$$m{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 1 & 0 \ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad m{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

即 $(\mathbf{A}^{(1)})^{(1)} \neq \mathbf{A}$.

$$m{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 1 & 0 \ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad m{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

但

$$oldsymbol{A}^{(1)}oldsymbol{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
eq oldsymbol{A}^{(1)}.$$

即 $(A^{(1)})^{(1)} \neq A$. 在 $\{1,2\}$ -逆的定义(1),(2)两式中,A与G的地位是对称的,故A与G

互为 {1,2}-逆.

$$m{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 1 & 0 \ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad m{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

但

$$m{A}^{(1)}m{A}m{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
eq m{A}^{(1)}.$$

即 $(A^{(1)})^{(1)} \neq A$.

在 $\{1,2\}$ -逆的定义(1),(2)两式中,A与G的地位是对称的,故A与G

互为 {1,2}-逆. 所以又把 {1,2}-逆叫做自反广义逆.

$$oldsymbol{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad oldsymbol{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

但

$$oldsymbol{A}^{(1)}oldsymbol{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
eq oldsymbol{A}^{(1)}.$$

即 $(\mathbf{A}^{(1)})^{(1)} \neq \mathbf{A}$.

在 $\{1,2\}$ -逆的定义 (1), (2) 两式中, A 与 G 的地位是对称的, 故 A 与 G互为 {1,2}-逆. 所以又把 {1,2}-逆叫做自反广义逆.

即若 G 是 A 的一个 $\{1,2\}$ -逆, 则 A 也是 G 的一个 $\{1,2\}$ -逆, 或者说

形式上有

$$"\left(oldsymbol{A}^{(1,2)}
ight)^{(1,2)}=oldsymbol{A}."$$

$$m{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad m{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

但

$$m{A}^{(1)}m{A}m{A}^{(1)} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
eq m{A}^{(1)}.$$

即 $\left(\boldsymbol{A}^{(1)}\right)^{(1)} \neq \boldsymbol{A}$.

在 $\{1,2\}$ -逆的定义 (1), (2) 两式中, \mathbf{A} 与 \mathbf{G} 的地位是对称的, 故 \mathbf{A} 与 \mathbf{G} 互为 $\{1,2\}$ -逆. 所以又把 $\{1,2\}$ -逆叫做自反广义逆.

即若 G 是 A 的一个 $\{1,2\}$ -逆, 则 A 也是 G 的一个 $\{1,2\}$ -逆, 或者说形式上有

$$"\left(oldsymbol{A}^{(1,2)}
ight)^{(1,2)}=oldsymbol{A}."$$

当然, 严格的写法应该是:

$$A \in A^{(1,2)}\{1,2\}.$$

设 Y, $Z \in A\{1\}$, 且令 X = YAZ, 则 $X \in A\{1,2\}$.

设 Y, $Z \in A\{1\}$, 且令 X = YAZ, 则 $X \in A\{1,2\}$.

 \coprod : $\boxplus AYA = A, AZA = A,$

设
$$Y$$
, $Z \in A\{1\}$, 且令 $X = YAZ$, 则 $X \in A\{1,2\}$.

AXA = AYAZA

证: 由
$$AYA = A$$
, $AZA = A$, 得

$$AXA = A YAZA$$
 $(X = YAZ)$
 $= AZA$ $(AYA = A)$
 $= A,$

(X = YAZ)(AZA = A)

(A YA = A)

$$XAX = YAZAYAZ$$

$$= Y(AZA) YAZ = YAYAZ$$
$$= Y(AYA)Z = YAZ$$

$$=X,$$

设
$$Y$$
, $Z \in A\{1\}$, 且令 $X = YAZ$, 则 $X \in A\{1,2\}$.

= X.

证: 由
$$AYA = A$$
, $AZA = A$, 得

$$AXA = A YAZA$$
 $(X = YAZ)$
 $= AZA$ $(AYA = A)$
 $= A$,
 $XAX = YAZAYAZ$ $(X = YAZ)$
 $= Y(AZA)YAZ = YAYAZ$ $(AZA = A)$
 $= Y(AYA)Z = YAZ$ $(AYA = A)$

所以 $X \in A\{1,2\}$.

设 Y, $Z \in A\{1\}$, 且令 X = YAZ, 则 $X \in A\{1,2\}$.

证: 由
$$AYA = A$$
, $AZA = A$, 得

$$AXA = A YAZA$$
 $(X = YAZ)$
 $= AZA$ $(AYA = A)$
 $= A$.

(X = YAZ)(AZA = A)

(A YA = A)

$$XAX = YAZAYAZ$$

$$= Y(AZA)YAZ = YAYAZ$$

$$= Y(AYA)IIZ = I$$

$$= Y(AYA)Z = YAZ$$

$$= X$$
,

所以
$$X \in A\{1,2\}$$
.

 \mathcal{F} 由 \mathbf{A} 的 {1}-逆的存在, 可以推得 \mathbf{A} 的 {1,2}-逆也存在.

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- 2 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 A^(1,2)
 - 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的定义及存在性
 - 广义逆 A^(1,2) 的性质
 - 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的构造
- 4 广义逆矩阵 A^(1,3)
- **6** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
- ⑥ M-P 广义逆矩阵

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 已知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

$$X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A.$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 已知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

$$X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

证: 必要性. 若 $X \in A\{1,2\}$, 则 AXA = A, XAX = X,

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 已知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

$$X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

证: 必要性. 若 $X \in A\{1,2\}$, 则 AXA = A, XAX = X, 因为

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AXA) \leqslant \operatorname{rank} X,$$

$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank}(XAX) \leqslant \operatorname{rank} A,$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 已知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

$$X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

证: 必要性. 若 $X \in A\{1,2\}$, 则 AXA = A, XAX = X, 因为

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X},$$

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{X} = \operatorname{rank}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

所以 $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 已知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

$$X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

证: 必要性. 若 $X \in A\{1,2\}$, 则 AXA = A, XAX = X, 因为

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AXA) \leqslant \operatorname{rank} X,$$

$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank}(XAX) \leqslant \operatorname{rank} A,$$

所以
$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

充分性. 已知 $X \in A\{1\}$, 要证明 $X \in A\{1,2\}$, 只需要证明 $X \in A\{2\}$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 已知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

$$X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

证: 必要性. 若 $X \in A\{1,2\}$, 则 AXA = A, XAX = X, 因为

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AXA) \leqslant \operatorname{rank} X,$$

$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank}(XAX) \leqslant \operatorname{rank} A,$$

所以
$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

充分性. 已知 $X \in A\{1\}$, 要证明 $X \in A\{1,2\}$, 只需要证明 $X \in A\{2\}$.

由 $X \in A\{1\}$, 则

$$rank(XA) = rank A.$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 已知 $\mathbf{X} \in \mathbf{A}\{1\}$, 则

$$X \in A\{1, 2\} \Leftrightarrow \operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$$
.

证: 必要性. 若 $X \in A\{1,2\}$, 则 AXA = A, XAX = X, 因为

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(AXA) \leqslant \operatorname{rank} X,$$

$$\operatorname{rank} X = \operatorname{rank}(XAX) \leqslant \operatorname{rank} A,$$

所以 $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$.

充分性. 已知 $X \in A\{1\}$, 要证明 $X \in A\{1,2\}$, 只需要证明 $X \in A\{2\}$.

由 $X \in A\{1\}$, 则

$$rank(XA) = rank A.$$

又已知 $\operatorname{rank} X = \operatorname{rank} A$, 故

$$rank(XA) = rank X.$$

 $\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(XA) \subseteq R(X)$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(\mathbf{X}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{X})$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

从而 X 的列向量可以由 XA 的列向量线性表示,

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(\mathbf{X}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{X})$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

从而 X 的列向量可以由 XA 的列向量线性表示,即存在矩阵 $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$,使

$$XAY = X.$$

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(\mathbf{X}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{X})$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

从而 X 的列向量可以由 XA 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使

$$XAY = X.$$

$$XAX = XA(XAY)$$

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(\mathbf{X}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{X})$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

从而 X 的列向量可以由 XA 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使

$$XAY = X.$$

$$XAX = XA(XAY) = X(AXA)Y$$

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(\mathbf{X}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{X})$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

从而 X 的列向量可以由 XA 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使

$$XAY = X.$$

$$XAX = XA(XAY) = X(AXA)Y = XAY = X.$$

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(\mathbf{X}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{X})$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

从而 X 的列向量可以由 XA 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使

$$XAY = X.$$

$$XAX = XA(XAY) = X(AXA)Y = XAY = X.$$

故
$$X \in A\{2\}$$
, 从而 $X \in A\{1,2\}$.

$$\dim R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{X}).$$

显然又有 $R(\mathbf{X}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{X})$, 从而有

$$R(\mathbf{X}\mathbf{A}) = R(\mathbf{X}).$$

从而 X 的列向量可以由 XA 的列向量线性表示, 即存在矩阵 $Y \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使

$$XAY = X.$$

所以

$$XAX = XA(XAY) = X(AXA)Y = XAY = X.$$

故 $X \in A\{2\}$, 从而 $X \in A\{1,2\}$.

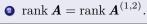
₩ 从上述定理可知,下列三个表述中的任何两个都蕴含着第三个成立: (1)

 $X \in A\{1\}; (2) \ X \in A\{2\}; (3) \ rank \ X = rank \ A.$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则

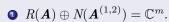
AA^(1,2) 和 A^(1,2)A 都是幂等阵,且

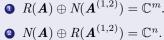
 $rank(\mathbf{A}\mathbf{A}^{(1,2)}) = rank(\mathbf{A}^{(1,2)}\mathbf{A}) = rank \mathbf{A}.$





设
$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$$
, 则





Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- 2 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 A^(1,2)
 - 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的定义及存在性
 - 广义逆 $A^{(1,2)}$ 的性质
 - 广义逆 A^(1,2) 的构造
- 4 广义逆矩阵 A^(1,3)
- **5** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
- ⑥ M-P 广义逆矩阵

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{r}^{m \times n}$ 的 $\{1\}$ -逆为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{8}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的

任意矩阵, P, Q 为可逆矩阵.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$ 的 $\{1\}$ -逆为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{vmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{8}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的 任意矩阵, P, Q 为可逆矩阵.

$$G=egin{array}{c|c} I_r & O \ O & O \end{array} P,$$

则 $G \in A\{1\}$, 且 rank $G = \operatorname{rank} A$,

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{\mathbf{r}}^{m \times n}$ 的 $\{1\}$ -逆为

$$\boldsymbol{A}^{(1)} = \boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{G}_{12} \\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{P}, \tag{8}$$

其中 G_{12} , G_{21} , G_{22} 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$, $(n-r) \times (m-r)$ 阶的 任意矩阵, P, Q 为可逆矩阵.

· · ·

$$G=egin{array}{ccc} I_r & O \ O & O \end{bmatrix} P,$$

则 $G \in A\{1\}$, 且 rank $G = \operatorname{rank} A$, 故 $G \in A\{1, 2\}$.

其中 G_{12} , G_{21} , 分别是 $r \times (m-r)$, $(n-r) \times r$ 阶的任意矩阵.

设
$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$

设
$$m{A} \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$$
,及 $m{P}$,及 分别为 m 阶和 n 阶非奇异方阵,且 $m{P}m{A}m{Q} = egin{bmatrix} m{I}_r & m{O} \\ m{O} & m{O} \end{bmatrix}$,则有

则有
$$oldsymbol{A}^{(1,2)} = oldsymbol{O} egin{bmatrix} I_{r} & G_{12} \end{bmatrix}_{oldsymbol{P}}$$

则有
$$egin{aligned} oldsymbol{A}^{(1,2)} &= oldsymbol{Q} egin{bmatrix} oldsymbol{I_r} & oldsymbol{G}_{12} \ oldsymbol{G}_{21} & oldsymbol{G}_{21} oldsymbol{G}_{12} \end{bmatrix} oldsymbol{P}, \end{aligned}$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{r}^{m \times n}$ 的满秩分解式为

$$A = BC$$
, $B \in \mathbb{C}_r^{m \times r}$, $C \in \mathbb{C}_r^{r \times n}$.

则 $G = C_{\rm R}^{-1} B_{\rm L}^{-1}$ 是 A 的一个 $\{1, 2\}$ -逆, 即可取

$$A^{(1,2)} = C_{\rm R}^{-1} B_{\rm L}^{-1}.$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{n}^{m \times n}$ 的满秩分解式为

$$m{A} = m{B}m{C}, \qquad m{B} \in \mathbb{C}_{m{r}}^{m imes r}, \,\, m{C} \in \mathbb{C}_{m{r}}^{r imes n}.$$

则 $G = C_{\rm R}^{-1} B_{\rm L}^{-1}$ 是 A 的一个 $\{1, 2\}$ -逆, 即可取

$$\pmb{A}^{(1,2)} = \pmb{C}_{
m R}^{-1} \pmb{B}_{
m L}^{-1}.$$

证: 注意到
$$B_{\mathrm{L}}^{-1}B = I$$
, $CC_{\mathrm{R}}^{-1} = I$, 取 $G = C_{\mathrm{R}}^{-1}B_{\mathrm{L}}^{-1}$, 则

$$\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{C}_{\mathrm{R}}^{-1}\mathbf{B}_{\mathrm{L}}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{B}\mathbf{C} = \mathbf{A},$$

$$m{GAG} = m{C}_{
m R}^{-1} m{B}_{
m L}^{-1} m{B} m{C} m{C}_{
m R}^{-1} m{B}_{
m L}^{-1} = m{C}_{
m R}^{-1} m{B}_{
m L}^{-1} = m{G},$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{r}^{m \times n}$ 的满秩分解式为

$$A = BC$$
, $B \in \mathbb{C}_r^{m \times r}$, $C \in \mathbb{C}_r^{r \times n}$.

则 $G = C_{\rm R}^{-1} B_{\rm L}^{-1}$ 是 A 的一个 $\{1, 2\}$ -逆, 即可取

$$A^{(1,2)} = C_{\rm R}^{-1} B_{\rm L}^{-1}.$$

证: 注意到
$$B_{L}^{-1}B = I$$
, $CC_{R}^{-1} = I$, 取 $G = C_{R}^{-1}B_{L}^{-1}$, 则

$$egin{aligned} A\,GA &= egin{aligned} B\,C\,C_{
m R}^{-1}\,B_{
m L}^{-1}\,B\,C &= B\,C = A, \ GA\,G &= C_{
m D}^{-1}\,B_{
m L}^{-1}\,B\,C\,C_{
m D}^{-1}\,B_{
m L}^{-1} &= C_{
m D}^{-1}\,B_{
m L}^{-1} &= G, \end{aligned}$$

故
$$G \in A^{(1,2)}$$
.

(1) 若
$$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$$
 是行满秩的,则 $A = I_m A$,从而 $G = A_{\mathrm{R}}^{-1} I_{\mathrm{L}}^{-1} = A_{\mathrm{R}}^{-1}$ 是 A 的一个 $\{1, 2\}$ -逆.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_{r}^{m \times n}$ 的满秩分解式为

$$oldsymbol{A} = oldsymbol{B} oldsymbol{C}, \qquad oldsymbol{B} \in \mathbb{C}_{oldsymbol{r}}^{m imes r}, \ oldsymbol{C} \in \mathbb{C}_{oldsymbol{r}}^{r imes n}.$$

 $A^{(1,2)} = C_{\rm R}^{-1} B_{\rm I}^{-1}$.

则 $G = C_{\rm R}^{-1} B_{\rm L}^{-1}$ 是 A 的一个 $\{1, 2\}$ -逆, 即可取

证: 注意到
$$B_{L}^{-1}B = I$$
, $CC_{R}^{-1} = I$, 取 $G = C_{R}^{-1}B_{L}^{-1}$, 则

$$egin{aligned} A\,GA &= egin{aligned} B\,C\,C_{
m R}^{-1}\,B_{
m L}^{-1}\,B\,C &= B\,C = A, \ GA\,G &= C_{
m D}^{-1}\,B_{
m L}^{-1}\,B\,C\,C_{
m D}^{-1}\,B_{
m L}^{-1} &= C_{
m D}^{-1}\,B_{
m L}^{-1} &= G, \end{aligned}$$

故
$$G \in A^{(1,2)}$$
. \square (1) 若 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是行满秩的,则 $A = I_m A$,从而 $G = A_R^{-1} I_L^{-1} = A_R^{-1}$ 是 A 的一个 $\{1, 2\}$ -逆.

(2) 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 是列满秩的, 则 \mathbf{A}_{L}^{-1} 是 \mathbf{A} 的一个 $\{1,2\}$ -逆.

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
,试求 \mathbf{A} 的一个 $\{1, 2\}$ -逆.

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
, 试求 \mathbf{A} 的一个 $\{1, 2\}$ -逆.

解: 因
$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}_2^{3 \times 2}$$
,故

$$\mathbf{A}^{(1,2)} = \mathbf{A}_{L}^{-1} = (\mathbf{A}^{T} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{T}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$
, 试求 \mathbf{A} 的一个 $\{1,2\}$ -逆.

设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, 试求 \mathbf{A} 的一个 $\{1, 2\}$ -逆.

解: 因为 $\operatorname{rank} A = 2 < 3$, 所以 A 既非行满秩矩阵也非列满秩矩阵, 先求 A 的满秩分解. 为此, 对矩阵 [A,I] 进行初等行变换, 当 A 所在的位置成为阶梯形矩阵 C 时 I 所在的位置就是进行初等行变换对应的初等矩阵的乖和

阵
$$G$$
 时, I 所在的位置就是进行初等行变换对应的初等矩阵的乘积.
$$[A, I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \times \frac{1}{2}]{r_2 \times \frac{1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

此时

北町
$$oldsymbol{G} = egin{bmatrix} 1 & 2 \ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m{G} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}
ight], \qquad m{P} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & rac{1}{2} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{array}
ight].$$

$$m{A} = m{P}^{-1} m{G} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \ 0 & 2 & 0 \ 2 & 0 & 1 \end{array}
ight] \left[egin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \ 0 & 0 & 1 \ 0 & 0 & 0 \end{array}
ight].$$

因此 A 的满秩分解为 A = BC, 其中

$$m{B} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 0 \ 0 & 2 \ 2 & 0 \end{array}
ight], \qquad m{C} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \ 0 & 0 & 1 \end{array}
ight].$$

于是 $oldsymbol{C}_{\mathrm{R}}^{-1} = oldsymbol{C}^{\mathrm{T}} (oldsymbol{C} oldsymbol{C}^{\mathrm{T}})^{-1} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$egin{aligned} m{C}_{\mathrm{R}}^{-1} &= m{C}^{\mathrm{T}} (m{C}m{C}^{\mathrm{T}})^{-1} = egin{bmatrix} 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} & = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} & = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 5 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

因此

 $= \frac{1}{10} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix},$

 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{R}}^{-1} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

 $m{A}^{(1,2)} = m{C}_{
m R}^{-1} m{B}_{
m L}^{-1} = rac{1}{50} egin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$

$$\mathbf{B}_{\mathbf{R}}^{-1} = (\mathbf{B}^{\mathsf{T}} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^{\mathsf{T}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\
= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix},$$

因此

$$m{A}^{(1,2)} = m{C}_{
m R}^{-1} m{B}_{
m L}^{-1} = rac{1}{50} egin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \ 4 & 0 & 8 \ 0 & 25 & 0 \end{bmatrix}.$$

 $oldsymbol{arphi}$ 因为 $oldsymbol{A}$ 的满秩分解不是唯一的, 所以由上述方法得到的 $oldsymbol{A}^{(1,2)}$ 不唯一.

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- ② 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$
- ① 广义逆矩阵 A^(1,3)
 - 广义逆 $A^{(1,3)}$ 的定义和构造
 - 广义逆 $A^{(1,3)}$ 应用于解方程组
- 5 广义逆矩阵 A^(1,4)
- 6 M-P 广义逆矩阵

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(3) \quad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{G})^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{G},$$

则称 G 为 A 的 $\{1,3\}$ -逆, 记为 $A^{(1,3)}$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G},$$

则称 G 为 A 的 $\{1,3\}$ -逆, 记为 $A^{(1,3)}$.

记 A 的 $\{1,3\}$ -逆的全体为 $A\{1,3\}$, 即

$$\mathbf{A}\{1,3\} = \{\mathbf{G} \mid \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A}, (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G}\}.$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \textbf{\textit{A}}\,\textbf{\textit{G}}\textbf{\textit{A}} = \textbf{\textit{A}},$$

$$(2) \quad \textbf{\textit{GA}} \, \textbf{\textit{G}} = \textbf{\textit{G}},$$

$$AG = G$$

$$(3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G},$$

则称
$$G$$
 为 A 的 $\{1,2,3\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2,3)}$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

(1)
$$AGA = A$$
,

(2)
$$GAG = G$$
,

$$(3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G},$$

则称
$$G$$
 为 A 的 $\{1,2,3\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2,3)}$.

记 A 的 $\{1,2,3\}$ -逆的全体为 $A\{1,2,3\}$, 即

$$A{1,2,3} = {G \mid AGA = A, GAG = G, (AG)^{H} = AG}.$$

Definition 4.2

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

- $(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$
- (2) GAG = G.
- $(3) \quad (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G},$

则称 G 为 A 的 $\{1,2,3\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2,3)}$.

记 A 的 $\{1,2,3\}$ -逆的全体为 $A\{1,2,3\}$, 即

 $A{1,2,3} = {G \mid AGA = A, GAG = G, (AG)^{H} = AG}.$

下面先证明 \boldsymbol{A} 的 $\{1,2,3\}$ -逆存在, 从而也就证明了 \boldsymbol{A} 的 $\{1,3\}$ -逆存在.

对任一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

 $\textbf{\textit{Y}} = \left(\textbf{\textit{A}}^{\mathrm{H}} \textbf{\textit{A}} \right)^{(1)} \textbf{\textit{A}}^{\mathrm{H}} \in \textbf{\textit{A}} \{1,2,3\}.$

对任一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$Y = (A^{\mathrm{H}}A)^{(1)}A^{\mathrm{H}} \in A\{1, 2, 3\}.$$

证: 依次证明 Y满足定义的 3 个条件.

对任一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$Y = (A^{H}A)^{(1)}A^{H} \in A\{1, 2, 3\}.$$

 $\overline{\mathbf{u}}$: 依次证明 \mathbf{Y} 满足定义的 3 个条件.

(1) 由教材 P.116 定理 3.1.8 知, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$\dim R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}) = \dim R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}).$$

又
$$R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$$
,所以

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

对任一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$Y = (A^{H}A)^{(1)}A^{H} \in A\{1, 2, 3\}.$$

证: 依次证明 Y满足定义的 3 个条件.

(1) 由教材 P.116 定理 3.1.8 知, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

又
$$R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$$
, 所以

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

故存在矩阵
$$U \in \mathbb{C}^{n \times m}$$
, 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{U}.$$

对任一矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$Y = (A^{H}A)^{(1)}A^{H} \in A\{1, 2, 3\}.$$

证: 依次证明 Y 满足定义的 3 个条件.

(1) 由教材 P.116 定理 3.1.8 知, $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}$, 故

$$\dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = \dim R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

又 $R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}) \subseteq R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}})$, 所以

$$R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}).$$

故存在矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times m}$, 使得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{U}.$$

两边取共轭转置有

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{A}.$$

$$A YA = U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A (A^{\mathsf{H}} A)^{(1)} A^{\mathsf{H}} A \qquad (A = U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A, Y = (A^{\mathsf{H}} A)^{(1)} A^{\mathsf{H}})$$

$$= U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A \qquad (A^{\mathsf{H}} A)^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A = A^{\mathsf{H}} A)$$

$$= A. \qquad (A = U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A)$$

$$A YA = U^{H} A^{H} A (A^{H} A)^{(1)} A^{H} A \qquad (A = U^{H} A^{H} A, Y = (A^{H} A)^{(1)} A^{H})$$

$$= U^{H} A^{H} A \qquad (A^{H} A (A^{H} A)^{H} A^{H} A = A^{H} A)$$

$$= A. \qquad (A = U^{H} A^{H} A)$$

故 $Y \in A\{1\}$.

$$A YA = U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A (A^{\mathsf{H}} A)^{(1)} A^{\mathsf{H}} A \qquad (A = U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A, Y = (A^{\mathsf{H}} A)^{(1)} A^{\mathsf{H}})$$

$$= U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A \qquad (A^{\mathsf{H}} A (A^{\mathsf{H}} A)^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A = A^{\mathsf{H}} A)$$

$$= A. \qquad (A = U^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}} A)$$

故 $Y \in A\{1\}$.

(2) 由 $\mathbf{A}^{(1)}$ 的性质知, rank $\mathbf{Y} \geqslant \operatorname{rank} \mathbf{A}$.

$$A YA = U^{H} A^{H} A (A^{H} A)^{(1)} A^{H} A \qquad (A = U^{H} A^{H} A, Y = (A^{H} A)^{(1)} A^{H})$$

$$= U^{H} A^{H} A \qquad (A^{H} A (A^{H} A)^{H} A^{H} A = A^{H} A)$$

$$= A. \qquad (A = U^{H} A^{H} A)$$

故 $Y \in A\{1\}$.

(2) 由 $A^{(1)}$ 的性质知, rank $Y \geqslant \text{rank } A$. 又

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{Y} = \operatorname{rank} \left(\left(\boldsymbol{A}^{\operatorname{H}} \boldsymbol{A} \right)^{(1)} \boldsymbol{A}^{\operatorname{H}} \right) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\operatorname{H}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

$$A YA = U^{H} A^{H} A (A^{H} A)^{(1)} A^{H} A \qquad (A = U^{H} A^{H} A, Y = (A^{H} A)^{(1)} A^{H})$$

$$= U^{H} A^{H} A \qquad (A^{H} A (A^{H} A)^{H} A^{H} A = A^{H} A)$$

$$= A. \qquad (A = U^{H} A^{H} A)$$

故 $Y \in A\{1\}$.

(2) 由 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的性质知, rank $\boldsymbol{Y} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$. 又

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{Y} = \operatorname{rank} \left(\left(\boldsymbol{A}^{\operatorname{H}} \boldsymbol{A} \right)^{(1)} \boldsymbol{A}^{\operatorname{H}} \right) \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\operatorname{H}} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A},$$

所以

 $rank \mathbf{Y} = rank \mathbf{A}.$

$$A YA = U^{H} A^{H} A (A^{H} A)^{(1)} A^{H} A \qquad (A = U^{H} A^{H} A, Y = (A^{H} A)^{(1)} A^{H})$$

$$= U^{H} A^{H} A \qquad (A^{H} A (A^{H} A)^{H} A^{H} A = A^{H} A)$$

$$= A. \qquad (A = U^{H} A^{H} A)$$

故 $Y \in A\{1\}$.

(2) 由 $A^{(1)}$ 的性质知, rank $Y \ge \operatorname{rank} A$. 又

$$\operatorname{rank}\,\boldsymbol{Y}\!=\operatorname{rank}\left(\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\right)^{(1)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\right)\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A},$$

所以

$$\operatorname{rank}\,\boldsymbol{Y}=\operatorname{rank}\,\boldsymbol{A}.$$

由定理 3.3 知 $Y \in A\{1,2\}$.

(3) 又因为

$$A Y = U^{H} A^{H} A (A^{H} A)^{(1)} A^{H}$$
 $(A = U^{H} A^{H} A, Y = (A^{H} A)^{(1)} A^{H})$
 $= U^{H} A^{H} A (A^{H} A)^{(1)} A^{H} A U$ $(A^{H} = A^{H} A U)$
 $= U^{H} A^{H} A U$ $(A^{H} A (A^{H} A)^{H} A^{H} A = A^{H} A)$
 $= (A U)^{H} (A U),$

(3) 又因为

$$AY = U^{H}A^{H}A(A^{H}A)^{(1)}A^{H} \qquad (A = U^{H}A^{H}A, Y = (A^{H}A)^{(1)}A^{H})$$

$$= U^{H}A^{H}A(A^{H}A)^{(1)}A^{H}AU \qquad (A^{H} = A^{H}AU)$$

$$= U^{H}A^{H}AU \qquad (A^{H}A(A^{H}A)^{H}A^{H}A = A^{H}A)$$

$$= (AU)^{H}(AU),$$

从而

$$A Y^{\mathrm{H}} = \left((A U)^{\mathrm{H}} (A U) \right)^{\mathrm{H}} = (A U)^{\mathrm{H}} (A U) = A Y.$$

(3) 又因为

$$AY = U^{H}A^{H}A(A^{H}A)^{(1)}A^{H}$$
 $(A = U^{H}A^{H}A, Y = (A^{H}A)^{(1)}A^{H})$
 $= U^{H}A^{H}A(A^{H}A)^{(1)}A^{H}AU$ $(A^{H} = A^{H}AU)$
 $= U^{H}A^{H}AU$ $(A^{H}A)^{H}A^{H}A = A^{H}AU$
 $= (AU)^{H}(AU),$

从而

$$A Y^{\mathrm{H}} = ((A U)^{\mathrm{H}} (A U))^{\mathrm{H}} = (A U)^{\mathrm{H}} (A U) = A Y.$$

所以
$$Y \in A\{1,2,3\}$$
.

显然有 $Y \in A\{1,3\}$, 即任一矩阵 A 的 $\{1,3\}$ -逆是存在的.

设 $G \in A\{1,3\}$, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵 $}$.

设 $G \in A\{1,3\}$, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵}.

证: 记 Z = G + (I - GA)Y.

设 $G \in A\{1,3\}$, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵}.

证: 记
$$Z = G + (I - GA)Y$$
. 任意 $G \in A\{1\}$, 有

$$A(I-GA) = A - AGA = O,$$

设 $G \in A\{1,3\}$, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵}.

证: 记 Z = G + (I - GA)Y. 任意 $G \in A\{1\}$, 有

$$A(I-GA) = A - AGA = O,$$

故 AZ = AG.

设 $G \in A\{1,3\}$, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵}.

证: 记 Z = G + (I - GA)Y. 任意 $G \in A\{1\}$, 有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O},$$

故 AZ = AG. 从而

$$AZA = AGA = A,$$

设 $G \in A\{1,3\}$, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵}.

证: 记 Z = G + (I - GA)Y. 任意 $G \in A\{1\}$, 有

$$A(I-GA) = A - AGA = O,$$

故 AZ = AG. 从而

$$AZA = AGA = A,$$

所以 $Z \in A\{1\}$.

设 $G \in A\{1,3\}$, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵}.

证: 记 Z = G + (I - GA)Y. 任意 $G \in A\{1\}$, 有

$$A(I-GA)=A-AGA=O,$$

故 AZ = AG. 从而

$$AZA = AGA = A,$$

所以 $Z \in A\{1\}$.

又因为

$$(AZ)^{\mathrm{H}} = (AG)^{\mathrm{H}}$$
 $(AZ = AG)$
 $= AG$ $((AG)^{\mathrm{H}} = AG)$
 $= AZ$, $(AZ = AG)$

设
$$G \in A\{1,3\}$$
, 则

$$A{1,3} = {G + (I - GA)Y, Y$$
是任意的 $n \times m$ 阶矩阵 $}$.

证: 记 Z = G + (I - GA)Y. 任意 $G \in A\{1\}$, 有

$$A(I-GA)=A-AGA=O,$$

故 AZ = AG. 从而

$$AZA = AGA = A,$$

$$(AZ)^{\mathrm{H}} = (AG)^{\mathrm{H}}$$
 $(AZ = AG)$
= AG $((AG)^{\mathrm{H}} = AG)$

$$= AZ, \qquad (AZ = AG)$$

所以 $Z \in A\{1,3\}$.

反过来, 任取 $X \in A\{1,3\}$,

反过来, 任取 $X \in A\{1,3\}$, 令 Y = X - G, 则

$$G + (I - GA) Y$$

 $= G + (I - GA)(X - G)$
 $= G + X - G - GAX - GAG$
 $= X - GAX - GAG$
 $= X - GAGAX - GAG$
 $= X - G(AG)^{H}(AX)^{H} - GAG$
 $= X - GG^{H}A^{H}X^{H}A^{H} - GAG$

 $= X - GG^{H}A^{H} - GAG$

 $= X - G(AG)^{\mathrm{H}} - GAG$

= X.

(A = AGA)

(AXA = A)

 $((AG)^{\mathrm{H}} = (AG))$

 $(\mathbf{A}\mathbf{G} = (\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}}, \mathbf{A}\mathbf{X} = (\mathbf{A}\mathbf{X})^{\mathrm{H}})$

反过来, 任取 $X \in A\{1,3\}$, 令 Y = X - G, 则

$$G + (I - GA) Y$$

 $= G + (I - GA)(X - G)$
 $= G + X - G - GAX - GAG$
 $= X - GAX - GAG$
 $= X - GAGAX - GAG$
 $= X - G(AG)^{H}(AX)^{H} - GAG$
 $= X - GG^{H}A^{H}X^{H}A^{H} - GAG$
 $= X - GG^{H}A^{H} - GAG$
 $= X - G(AG)^{H} - GAG$

故任意 $X \in A\{1,3\}$, 都可以用 G + (I - GA)Y表达. 得证.

Outline

- 1 Moore-Penrose 广义逆矩阵
- ② 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$
- ① 广义逆矩阵 A^(1,3)
 - 广义逆 $A^{(1,3)}$ 的定义和构造
 - 广义逆 $A^{(1,3)}$ 应用于解方程组
- **5** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
- 6 M-P 广义逆矩阵

最小二乘法

Example 4.5

已知某种材料在生产过程中的废品率 y 与某种化学成分 x 有关. 下列表中记载了某工厂生产中 y 与相应的 x 的几组数值:

我们想找出 y 对 x 的一个近似公式.

解: 把表中数值画出图来看, 发现它的变换趋势近于一条直线. 因此我们选取 x的一次式 ax + b 来表达. 当然最好能选到适当的 a, b 使得下面的等式

$$3.6a + b - 1.00 = 0,$$

$$3.7a + b - 0.9 = 0,$$

$$3.8a + b - 0.9 = 0,$$

$$3.9a + b - 0.81 = 0,$$

$$4.0a + b - 0.60 = 0,$$

$$00 = 0,$$

$$56 = 0,$$

$$90 = 0$$

$$00 = 0$$

$$4.2a + b - 0.35 = 0$$

$$4.1a + b - 0.56 =$$

$$1.1a + b - 0.56 =$$

都成立. 实际上是不可能的 (rank $\mathbf{A} = 2 \neq \text{rank}[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = 3$), 任何 a, b 代入上面

$$4.1a + b - 0.56 = 0,$$

各式都有误差.

$$3.6a + b - 1.00 = 0,$$

$$3.7a + b - 0.9 = 0,$$

$$3.8a + b - 0.9 = 0,$$

$$3.9a + b - 0.81 = 0,$$

$$4.0a + b - 0.60 = 0,$$

$$4.1a + b - 0.56 = 0,$$

$$4.2a + b - 0.35 = 0$$

都成立. 实际上是不可能的 (rank $\mathbf{A}=2\neq \mathrm{rank}[\mathbf{A},\mathbf{b}]=3$), 任何 a,b 代入上面各式都有误差. 于是想找到 a,b 使得上面各式的误差的平方和最小, 即找 a,b 使

$$(3.6a+b-1.00)^2 + (3.7a+b-0.9)^2 + (3.8a+b-0.9)^2 + (3.9a+b-0.81)^2 + (4.0a+b-0.60)^2 + (4.1a+b-0.56)^2 + (4.2a+b-0.35)^2$$
 最小.

$$3.6a + b - 1.00 = 0,$$

$$3.7a + b - 0.9 = 0,$$

$$3.8a + b - 0.9 = 0,$$

$$4.2a+b-0.35=0$$
 都成立. 实际上是不可能的 (rank $\mathbf{A}=2 \neq \mathrm{rank}[\mathbf{A},\mathbf{b}]=3$), 任何 a,b 代入上面 名式和表识的 无思想比到 a,b 使得上面名式的误差的恶方和是小,即比 a,b

3.9a + b - 0.81 = 0, 4.0a + b - 0.60 = 0,4.1a + b - 0.56 = 0.

各式都有误差. 于是想找到 a, b 使得上面各式的误差的平方和最小, 即找 a, b 使 $(3.6a+b-1.00)^2 + (3.7a+b-0.9)^2 + (3.8a+b-0.9)^2 + (3.9a+b-0.81)^2$

$$+ (4.0a + b - 0.60)^{2} + (4.1a + b - 0.56)^{2} + (4.2a + b - 0.35)^{2}$$

最小. 这里讨论的是误差的平方即二乘方, 故称为最小二乘法.

矛盾方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是没有解的, 但希望找到近似解 \mathbf{x}_0 使误差 $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ 为最小.

矛盾方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 是没有解的, 但希望找到近似解 \mathbf{x}_0 使误差 $\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ 为最小. 若 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ 满足

$$\|Ax_0 - b\| = \min_{x \in \mathbb{C}^n} \|Ax - b\|,$$

即

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{b}\|\leqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|,$$

则称近似解 x_0 为矛盾方程 Ax = b 的最小二乘 (least squares) 解, 简称为 L-S 解.

矛盾方程 Ax = b 是没有解的, 但希望找到近似解 x_0 使误差 ||Ax - b|| 为 最小. 若 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$ 满足

$$||Ax_0 - b|| = \min_{x \in \mathbb{C}^n} ||Ax - b||,$$

即

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|,$$

则称近似解 x_0 为矛盾方程 Ax = b 的最小二乘 (least squares) 解, 简称为 L-S 解.



最小二乘解并不是方程组 Ax = b 的解.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 任取 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最

小二乘解.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 任取 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解.

证: 因为

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b + Ax - AGb\|^2 = \|(AG - I)b + A(x - Gb)\|^2,$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 任取 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最 小二乘解.

证: 因为

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b + Ax - AGb\|^2 = \|(AG - I)b + A(x - Gb)\|^2,$$

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) \mid (\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = 0,$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 任取 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最 小二乘解.

证: 因为

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b + Ax - AGb\|^2 = \|(AG - I)b + A(x - Gb)\|^2,$$

又因为

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) \mid (\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = 0,$$

故 $A(x-Gb) \perp (AG-I)b$.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 任取 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解.

证: 因为

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b + Ax - AGb\|^2 = \|(AG - I)b + A(x - Gb)\|^2,$$

又因为

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) \mid (\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = 0,$$

故 $A(x-Gb) \perp (AG-I)b$. 所以

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b\|^2 + \|Ax - AGb\|^2,$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 任取 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解.

证: 因为

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b + Ax - AGb\|^2 = \|(AG - I)b + A(x - Gb)\|^2,$$

又因为

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) \mid (\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = 0,$$

故 $A(x-Gb) \perp (AG-I)b$. 所以

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b\|^2 + \|Ax - AGb\|^2,$$

故对任意 $x \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$||\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{b} - \mathbf{b}||^2 \leqslant ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2,$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 任取 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解.

证: 因为

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b + Ax - AGb\|^2 = \|(AG - I)b + A(x - Gb)\|^2,$$

又因为

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) \mid (\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{b}) = \mathbf{b}^{\mathrm{H}}(\mathbf{A}\mathbf{G} - \mathbf{I})\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = 0,$$

故 $A(x-Gb) \perp (AG-I)b$. 所以

$$\|Ax - b\|^2 = \|AGb - b\|^2 + \|Ax - AGb\|^2$$

故对任意 $x \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$||\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{b} - \mathbf{b}||^2 \leqslant ||\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}||^2,$$

因此 $x_0 = Gb$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解.

设 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解的充分必要条件为: x_0 是方程组

Ax = AGb

的解.

设 $G \in A\{1,3\}$,则 $x_0 \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解的充分必要条件 为: x₀ 是方程组

$$Ax = AGb$$

的解.

证: 若 $G \in A\{1,3\}$, 则对任意 $x \in \mathbb{C}^n$ 都有

$$\| Ax - b \|^2 = \| AGb - b \|^2 + \| Ax_0 - AGb \|^2.$$

如果 x_0 是方程组 Ax = b 的最小二乘解, 则应有

$$\|oldsymbol{A}oldsymbol{x}_0-oldsymbol{b}\|^2=\|oldsymbol{A}oldsymbol{G}oldsymbol{b}\|^2.$$

设 $G \in A\{1,3\}$, 则 $x_0 \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解的充分必要条件 为: x_0 是方程组

$$Ax = AGb$$

的解.

证: 若 $G \in A\{1,3\}$, 则对任意 $x \in \mathbb{C}^n$ 都有 $||Ax - b||^2 = ||AGb - b||^2 + ||Ax_0 - AGb||^2.$

如果
$$x_0$$
 是方程组 $Ax = b$ 的最小二乘解, 则应有

如果
$$oldsymbol{x}_0$$
 是万程组 $oldsymbol{A}oldsymbol{x}=oldsymbol{b}$ 的最小一来解,则应有 $\|oldsymbol{A}oldsymbol{x}_0-oldsymbol{b}\|^2=\|oldsymbol{A}oldsymbol{G}oldsymbol{b}-oldsymbol{b}\|^2.$

所以

则

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{b}\|^2 = 0$$

 $\mathbb{P} Ax_0 = AGb$.

 $Ax_0 - AGb = 0.$

反之, 若 x_0 满足 Ax = AGb,

反之, 若 x_0 满足 Ax = AGb, 则必有

$$||Ax_0 - b||^2 = ||AGb - b||^2.$$

即 x_0 也是方程组 Ax = b 的最小二乘解.



方程组 Ax = b 的最小二乘解的通式为

$$x = Gb + (I - GA)y,$$

其中 $G \in A\{1,3\}$, y 是 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

方程组 Ax = b 的最小二乘解的通式为

$$x = Gb + (I - GA)y,$$

其中 $G \in A\{1,3\}$, $y \in \mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

证: 由推理 4.7 知, $x \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解的充分必要条件为: x 是方程组

Ax = AGb

的解,

方程组 Ax = b 的最小二乘解的通式为

$$x = Gb + (I - GA)y,$$

其中 $G \in A\{1,3\}$, y 是 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: 由推理 4.7 知, $x \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 Ax = b 的最小二乘解的充分必要条件为: x 是方程组

$$Ax = AGb$$

的解,也就是方程组

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = \mathbf{0} \tag{10}$$

的解.

方程组 Ax = b 的最小二乘解的通式为

$$x = Gb + (I - GA)y,$$

其中 $G \in A\{1,3\}$, $y \in \mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

 $\overline{\mathbf{u}}$: 由推理 4.7 知, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: \mathbf{x} 是方程组

$$Ax = AGb$$

的解,也就是方程组

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = \mathbf{0} \tag{10}$$

的解. 注意到齐次方程组 Ax=0 的通解为 $(I_n-A^{(1)}A)y$ (由定理 2 知),

方程组 Ax = b 的最小二乘解的通式为

$$x = Gb + (I - GA)y,$$

其中 $G \in A\{1,3\}$, $y \in \mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

 $\overline{\mathbf{u}}$: 由推理 4.7 知, $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: \mathbf{x} 是方程组

$$Ax = AGb$$

的解,也就是方程组

$$A(x - Gb) = 0 (10)$$

的解. 注意到齐次方程组 Ax = 0 的通解为 $(I_n - A^{(1)}A)y$ (由定理 2 知), 故 (10) 式的通解为

$$x - Gb = (I - A^{(1)}A)y,$$

方程组 Ax = b 的最小二乘解的通式为

$$x = Gb + (I - GA)y,$$

其中 $G \in A\{1,3\}$, y 是 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

证: 由推理 $4.7 \, \text{知}, \, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的最小二乘解的充分必要条件为: \boldsymbol{x} 是方程组

$$Ax = AGb$$

的解, 也就是方程组

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{G}\mathbf{b}) = \mathbf{0} \tag{10}$$

的解. 注意到齐次方程组 $\mathbf{A}x = \mathbf{0}$ 的通解为 $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})y$ (由定理 2 知), 故 (10) 式的通解为

$$x - Gb = (I - A^{(1)}A)y,$$

即 $x = Gb + (I - A^{(1)}A)y$, 其中 $y \in \mathbb{C}^n$ 中的任意向量.

显然上述通解也可以写成

$$x = Gb + (I - GA)y, \qquad G \in A\{1, 3\},$$

其中 y 是 \mathbb{C}^n 中的任意向量.

从通式可以看出, 只有 A 是列满秩时, 最小二乘解才是唯一的, 且为 $\mathbf{x}_0 = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{H}} \mathbf{b}$. 否则, 便有无穷多个最小二乘解.

求矛盾方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \text{ 的最小二乘解.} \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

求矛盾方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \text{ 的最小二乘解.} \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{R}$$
: 系数矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵,

求矛盾方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \text{ 的最小二乘解.} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}$$
: 系数矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵, 故

$$m{A}^{(1,3)} = (m{A}^{ ext{H}}m{A})^{-1}m{A}^{ ext{H}} = rac{1}{11} \left[egin{array}{ccc} -4 & 7 & 1 \ 7 & -4 & 1 \end{array}
ight],$$

求矛盾方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \text{ 的最小二乘解.} \end{cases}$$

$$\mathbf{R}$$
: 系数矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 为列满秩矩阵, 故

$$\mathbf{A}^{(1,3)} = (\mathbf{A}^{\mathrm{H}} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

最小二乘解为

$$oldsymbol{x}_0 = oldsymbol{A}^{(1,3)}oldsymbol{b} = rac{1}{11} \left[egin{array}{c} -4 \ 7 \end{array}
ight]. \quad \Box$$

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- ② 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$
- 4 广义逆矩阵 A(1,3)
- **5** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
 - 广义逆 A^(1,4) 的定义和构造
 - 广义逆 A^(1,4) 应用于解方程组
- 6 M-P 广义逆矩阵

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \textbf{\textit{A}}\,\textbf{\textit{G}}\textbf{\textit{A}} = \textbf{\textit{A}},$$

$$(4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$$

则称
$$G$$
 为 A 的 $\{1,4\}$ -逆, 记为 $A^{(1,4)}$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A},$$

$$(4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$$

则称
$$G$$
 为 A 的 $\{1,4\}$ -逆, 记为 $A^{(1,4)}$.

记
$$A$$
 的 $\{1,4\}$ -逆的全体为 $A\{1,4\}$, 即

$$A{1,4} = {G \mid AGA = A, (GA)^{H} = GA}.$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

$$(1) \quad \textbf{\textit{A}} \, \textbf{\textit{G}} \textbf{\textit{A}} = \textbf{\textit{A}},$$

(2)
$$GAG = G$$
,

$$AG = G$$

$$(4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$$

$$(4) \quad (GA) = GA$$

则称 G 为 A 的 $\{1,2,4\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2,4)}$.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

(1)
$$AGA = A$$
,

(2)
$$GAG = G$$
,

$$(4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$$

则称
$$G$$
 为 A 的 $\{1,2,4\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2,4)}$.

记
$$\boldsymbol{A}$$
 的 $\{1,2,4\}$ -逆的全体为 $\boldsymbol{A}\{1,2,4\}$, 即

$$A{1,2,4} = {G \mid AGA = A, GAG = G, (GA)^{H} = GA}.$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 若 $\mathbf{G} \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 满足

- (1) $\mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
- (2) GAG = G.
- $(4) \quad (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$

则称 G 为 A 的 $\{1,2,4\}$ -逆, 记为 $A^{(1,2,4)}$.

记 A 的 $\{1,2,4\}$ -逆的全体为 $A\{1,2,4\}$, 即

 $A{1,2,4} = {G \mid AGA = A, GAG = G, (GA)^{H} = GA}.$

下面先证明 \boldsymbol{A} 的 $\{1,2,4\}$ -逆存在, 从而也就证明了 \boldsymbol{A} 的 $\{1,4\}$ -逆存在.

Theorem 5.3

对任一矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} (\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{(1)} \in \boldsymbol{A} \{1, 2, 4\}.$$

Theorem 5.3

对任一矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} (\boldsymbol{A} \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{(1)} \in \boldsymbol{A} \{1, 2, 4\}.$$

 $A{1,4} = {G + Z(I - AG), Z$ 是任意的 $n \times m$ 阶矩阵}.

Theorem 5.4

设 $G \in A\{1,4\}$, 则

设
$$G \in A\{1,4\},$$

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- ② 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$
- 4 广义逆矩阵 A(1,3)
- **5** 广义逆矩阵 $A^{(1,4)}$
 - 广义逆 $A^{(1,4)}$ 的定义和构造
 - 广义逆 **A**^(1,4) 应用于解方程组
- 6 M-P 广义逆矩阵

问题: 若方程组 Ax = b 相容, 其解可能有无穷多个, 怎样求具有最小范数

 $\min_{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}} \lVert \boldsymbol{x} \rVert_2$

的解 x, 其中 $\|\cdot\|_2$ 是欧氏范数.

的解,即求满足

问题: 若方程组 Ax = b 相容, 其解可能有无穷多个, 怎样求具有最小范数 的解,即求满足

 $\min_{Ax=b} ||x||_2$

的解 x, 其中 $\|\cdot\|_2$ 是欧氏范数. 可以证明, 满足该条件的解是唯一的, 称之为最

小范数 (least-norm) 解, 简称 L-N 解.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则有

$$(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}))^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $A^{(1,4)}A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 \mathbb{C}^n 上的正交 投影算子.

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则有

$$(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}))^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $A^{(1,4)}A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 \mathbb{C}^n 上的正交 投影算子. 从而有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则有

$$(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}))^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $A^{(1,4)}A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 \mathbb{C}^n 上的正交 投影算子. 从而有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

又由定理 2.8 的结论 $R((\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{\mathrm{H}}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}), N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}),$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$. 则有

$$(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}))^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $A^{(1,4)}A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 \mathbb{C}^n 上的正交 投影算子. 从而有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A})\right)^{\perp}=N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

又由定理 2.8 的结论 $R((\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A})^{\mathrm{H}}) = R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}), N(\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}),$ 可知

$$R(\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}) = R((\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A})^{\mathbf{H}}) = R(\mathbf{A}^{\mathbf{H}}),$$

 $N(\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$

$$(\mathbf{A}^{(1,1)}\mathbf{A})=N(\mathbf{A}).$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 则有

$$(R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}))^{\perp} = N(\boldsymbol{A}).$$

证: 因 $A^{(1,4)}A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 且为幂等的 Hermite 矩阵, 故其可看成 \mathbb{C}^n 上的正交 投影算子. 从而有

$$\left(R(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A})\right)^{\perp} = N(\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{A}).$$

又由定理 2.8 的结论 $R((\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})^{\mathrm{H}}) = R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}), N(\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A}),$ 可知

$$R(\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}) = R((\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A})^{\mathbf{H}}) = R(\mathbf{A}^{\mathbf{H}}),$$

 $N(\mathbf{A}^{(1,4)}\mathbf{A}) = N(\mathbf{A}).$

$$(R(\mathbf{A}^{\mathrm{H}}))^{\perp} = N(\mathbf{A}). \quad \square$$

设 $\pmb{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\pmb{b} \in R(\pmb{A})$, 则相容性方程 $\pmb{A}\pmb{x} = \pmb{b}$ 在且仅在 $R(\pmb{A}^{\mathrm{H}})$ 上有唯一的

解 20, 且它是方程组的所有解中具有最小范数者.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in R(A)$, 则相容性方程 Ax = b 在且仅在 $R(A^{H})$ 上有唯一的 解 20, 且它是方程组的所有解中具有最小范数者.

Theorem 5.7

设方程组 Ax=b 有解,则 x_0 是其最小范数解的充分必要条件是 $x_0=A^{(1,4)}b$.

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- 2 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 A^(1,2)
- 4 广义逆矩阵 $A^{(1,3)}$
- 5 广义逆矩阵 A^(1,4)
- 6 M-P 广义逆矩阵
 - M-P 广义逆的存在及性质
 - M-P 广义逆的几种显式表示
 - M-P 广义逆用干解线性方程组

对任意 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, \mathbf{A}^+ 存在且唯一.

对任意 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, \mathbf{A}^+ 存在且唯一.

证: 设 A = O, 则可取 G = O.

对任意 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, \mathbf{A}^+ 存在且唯一.

证: 设 A = O, 则可取 G = O. 现设 $A \neq O$, 则 A 有奇异值分解:

$$oldsymbol{A} = oldsymbol{U} egin{array}{c|c} oldsymbol{S} & & & \ & oldsymbol{O} & oldsymbol{V}^{\mathrm{H}}, \end{array}$$

其中 U, V 分别为 n 阶和 m 阶酉矩阵, $S = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$, $\delta_1 \ge \delta_2 \ge \dots \ge \delta_r > 0$ 为 A 的正奇异值, r 为 A 的秩.

今

$$m{G} = m{V}egin{bmatrix} m{S}^{-1} & & \ & m{O} \end{bmatrix}m{U}^{ ext{H}},$$

令

$$oldsymbol{G} = oldsymbol{V} egin{bmatrix} oldsymbol{S}^{-1} & & \ & oldsymbol{O} \end{bmatrix} oldsymbol{U}^{\mathrm{H}},$$

因为

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egi$$

又

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egi$$

易知 $(\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G}, (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A},$

又

$$egin{aligned} egin{aligned} egin{aligned\\ egin{aligned} egi$$

易知 $(\mathbf{A}\mathbf{G})^{\mathrm{H}} = \mathbf{A}\mathbf{G}, (\mathbf{G}\mathbf{A})^{\mathrm{H}} = \mathbf{G}\mathbf{A}, 则 \mathbf{G}$ 满足 Penrose 方程, 所以 \mathbf{A}^+ 总是存在的.

设 G 与 Y 均是 A 的 M-P 广义逆, 则

$$G = GAG$$

$$= GG^{H}A^{H}$$

$$= GG^{H}A^{H}Y^{H}A^{H}$$

$$= GAGAY$$

$$= GAY$$

$$= GAY$$

$$= A^{H}G^{H}YAY$$

$$= A^{H}G^{H}A^{H}Y^{H}Y$$

$$= A^{H}Y^{H}Y$$

$$= YAY$$

$$= Y,$$

$$(AG = (AG)^{H})$$

$$(AG = (AG)^{H})$$

$$(AG = AYA)$$

$$(GA = AYA)$$

$$(GAG = G)$$

$$(GA = A^{H}G^{H}, Y = YAY)$$

$$(A^{H}G^{H}A^{H} = A^{H})$$

$$(A^{H}G^{H}A^{H} = A^{H})$$

$$(A^{H}Y^{H} = YA)$$

设 G 与 Y 均是 A 的 M-P 广义逆, 则

$$G = GAG$$

$$= GG^{H}A^{H}$$

$$= GG^{H}A^{H}Y^{H}A^{H}$$

$$= GAGAY$$

$$= GAGAY$$

$$= GAGAY$$

$$= GAGAY$$

$$= GAGAY$$

$$= A^{H}G^{H}YAY$$

$$= A^{H}G^{H}YAY$$

$$= A^{H}G^{H}A^{H}Y^{H}Y$$

$$= A^{H}Y^{H}Y$$

$$= YAY$$

$$= Y,$$

$$(AG = (AG)^{H}A^{H} = AY)$$

$$(GA = A^{H}G^{H}A^{H} = AY)$$

$$(GA = A^{H}G^{H}, Y = YAY)$$

$$(A^{H}G^{H}A^{H} = A^{H})$$

$$(A^{H}Y^{H} = YA)$$

因此, A^+ 是唯一的.

任意非零向量 x 的 M-P 广义逆为 $\frac{x^{\mathrm{H}}}{x^{\mathrm{H}}x}$. 特别地, 单位向量 x 的 M-P 广义逆为

 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{H}}$.

任意非零向量 x 的 M-P 广义逆为 $\frac{x^{\mathrm{H}}}{x^{\mathrm{H}}x}$. 特别地, 单位向量 x 的 M-P 广义逆为 x^{H} .

Example 6.3

矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为自身.

任意非零向量 x 的 M-P 广义逆为 $\frac{x^{\mathrm{H}}}{x^{\mathrm{H}}x}$. 特别地, 单位向量 x 的 M-P 广义逆为 x^{H}

Example 6.3

Example 6.3
矩阵
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 的 M-P 广义逆为自身. 矩阵 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的 M-P 广义逆为 \mathbf{B}^{T} .

障 由于普通逆矩阵只是 M-P 广义逆矩阵的一种特例, 故 M-P 广义逆矩阵可

能不具备普通逆矩阵的一些性质.

□ 由于普通逆矩阵只是 M-P 广义逆矩阵的一种特例, 故 M-P 广义逆矩阵可能不具备普通逆矩阵的一些性质. 如下例.

Example 6.4

设 $A = [1,0], B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, 则 (AB)^+ = 1 而 B^+A^+ = \frac{1}{2},$ 因此

 $(AB)^+ \neq B^+A^+.$

Outline

- ① Moore-Penrose 广义逆矩阵
- ② 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$
- 4 广义逆矩阵 $A^{(1,3)}$
- 5 广义逆矩阵 A^(1,4)
- 6 M-P 广义逆矩阵
 - M-P 广义逆的存在及性质
 - M-P 广义逆的几种显式表示
 - M-P 广义逆用于解线性方程组

Theorem 6.5 (A^+ 的满秩算法)

- \bullet 设 \boldsymbol{A} 为列满秩矩阵,则 $\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}};$
- ② 设 \boldsymbol{A} 为行满秩矩阵,则 $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{-1}$;
- ③ 设 $A = LR \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 其中 L 为列满秩矩阵, R 为行满秩矩阵. 则
- $oldsymbol{A}^+ = oldsymbol{R}^+ oldsymbol{L}^+ = oldsymbol{R}^{
 m H} oldsymbol{L}^+ = oldsymbol{R}^{
 m H} (oldsymbol{R} oldsymbol{R}^{
 m H})^{-1} (oldsymbol{L}^{
 m H} oldsymbol{L})^{-1} oldsymbol{L}^{
 m H}.$

已知
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
,用满秩分解求 \boldsymbol{A}^+ .

已知
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
, 用满秩分解求 \mathbf{A}^+ .

解:将 A 化为行最简形,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

已知
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
 , 用满秩分解求 \mathbf{A}^+ .

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

故 A 的满秩分解为

$$m{A} = m{L}m{R} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 1 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

则

 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$

 $\mathbf{R}^{+} = \mathbf{R}^{\mathrm{H}} (\mathbf{R} \mathbf{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$

 $(\mathbf{R}\mathbf{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},$

$$\mathbf{L}^{\mathrm{H}} \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},
(\mathbf{L}^{\mathrm{H}} \mathbf{L})^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},
\mathbf{L}^{+} = (\mathbf{L}^{\mathrm{H}} \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^{\mathrm{H}} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$oldsymbol{L}^{\mathrm{H}}oldsymbol{L} = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 1 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 5 & 2 \ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix},$$

$$m{L}^+ = (m{L}^{
m H}m{L})^{-1}m{L}^{
m H} = rac{1}{6} \left[egin{array}{ccc} 2 & -2 \ -2 & 5 \end{array}
ight] \left[egin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \ 0 & 1 & 1 \end{array}
ight] = rac{1}{6} \left[egin{array}{ccc} 2 & 2 & -2 \ -2 & 1 & 5 \end{array}
ight].$$

所以
$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = R^{+}L^{+} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \Box$$

设
$$\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$$
, $r > 0$, 且 \mathbf{A} 有如下的奇异值分解

$$m{A} = m{U}egin{bmatrix} m{S}_r & \ & m{O} \end{bmatrix}m{V}^{\! ext{H}},$$

其中 $m{U} \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $m{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为酉矩阵,且 $m{S}_r = \mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_r)$, $\delta_1 \geqslant \delta_2 \geqslant \cdots \geqslant \delta_r > 0$ 为 $m{A}$ 的正奇异值.则有

$$oldsymbol{A}^+ = oldsymbol{V} egin{bmatrix} oldsymbol{S}_r^{-1} & & \ & oldsymbol{O} \end{bmatrix} oldsymbol{U}^{
m H}$$

设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}_r^{m \times n}, r > 0$, 且 \mathbf{A} 有如下的奇异值分解

$$oldsymbol{A} = oldsymbol{U} egin{bmatrix} oldsymbol{S_r} & \ O \end{bmatrix} oldsymbol{V}^{\! ext{H}},$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为酉矩阵, 且 $S_r = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$, $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq \delta_r > 0$ 为 **A** 的正奇异值. 则有

$$oldsymbol{A}^+ = oldsymbol{V} egin{bmatrix} oldsymbol{S}_r^{-1} & \ O \end{bmatrix} oldsymbol{U}^{
m H}$$

注意一个细节: $\begin{vmatrix} S_r \\ O \end{vmatrix}$ 的阶数是 $m \times n$, 而 $\begin{vmatrix} S_r^{-1} \\ O \end{vmatrix}$ 的阶数是 $n \times m$.



及
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
,用奇异值分解求 \mathbf{A}^+ .

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
,用奇异值分解求 \mathbf{A}^+ .

$$oldsymbol{A}^{\mathrm{H}}oldsymbol{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
,用奇异值分解求 \mathbf{A}^+ .

解: 由

$$oldsymbol{A}^{\mathrm{H}}oldsymbol{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 2 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故 $\mathbf{A}^{\mathrm{H}}\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$.

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
,用奇异值分解求 \mathbf{A}^+ .

解:由

$$oldsymbol{A}^{\mathrm{H}}oldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故 $A^{H}A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. 对应的单位特征向量为

$$m{v}_1 = egin{bmatrix} 1 \ 0 \end{bmatrix}, \qquad m{v}_2 = egin{bmatrix} 0 \ 1 \end{bmatrix}.$$

设
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
,用奇异值分解求 \mathbf{A}^+ .

解: 由

$$m{A}^{\mathrm{H}}m{A} = egin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

故 $A^{H}A$ 的特征值为 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. 对应的单位特征向量为

$$oldsymbol{v}_1 = egin{bmatrix} 1 \ 0 \end{bmatrix}, \qquad oldsymbol{v}_2 = egin{bmatrix} 0 \ 1 \end{bmatrix}.$$

则 AA^{H} 的 3 个特征值为 $\lambda_{1} = 2$, $\lambda_{2} = 1$, $\lambda_{3} = 0$.

$$\label{eq:substitute} \mbox{\pm} \mbox{$\bf B$} = \mbox{$\rm diag}(\delta_1, \delta_2) = \mbox{$\rm diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \mbox{$\rm diag}(\sqrt{2}, 1),$$

由
$$S = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1)$$
,得

 $egin{aligned} m{U}_1 = m{A} \, m{V}_1 m{S}^{-1} egin{aligned} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{aligned} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{aligned} ,$

由
$$\mathbf{S} = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1)$$
,得
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

 $egin{aligned} oldsymbol{U}_1 &= oldsymbol{A} oldsymbol{V}_1 oldsymbol{S}^{-1} egin{aligned} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{aligned} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{aligned} \end{bmatrix}, \end{aligned}$

 $egin{aligned} oldsymbol{u}_1 = egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ rac{1}{-} \end{bmatrix}, & oldsymbol{u}_2 = egin{bmatrix} 0 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$

故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量分别为

由 $S = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1)$, 得

$$m{U}_1 = m{A} \, m{V}_1 m{S}^{-1} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量分别为

故
$$m{AA}^{\mathrm{H}}$$
 的 2 个非零特征值 $\lambda_1=2,\,\lambda_2=1$ 对应的特征向量分别为 $m{u}_1=egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ rac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad m{u}_2=egin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

因 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量与 \mathbf{u}_1 正交, 故可设其为 $(1, y, -1)^{\mathrm{T}}$.

由 $S = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1)$, 得

$$oldsymbol{U}_1 = oldsymbol{A} oldsymbol{V}_1 oldsymbol{S}^{-1} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量分别为

$$m{u}_1 = egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ rac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad m{u}_2 = egin{bmatrix} 0 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}.$$

因 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量与 \mathbf{u}_1 正交, 故可设其为 $(1, y, -1)^{\mathrm{T}}$. 又需要和 \mathbf{u}_2 正

交, 故 y = 0.

由 $\mathbf{S} = \operatorname{diag}(\delta_1, \delta_2) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}) = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, 1)$, 得

$$m{U}_1 = m{A} \, m{V}_1 m{S}^{-1} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \ 0 & 1 \ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix},$$

故 $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{H}}$ 的 2 个非零特征值 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$ 对应的特征向量分别为

$$m{u}_1 = egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ rac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \qquad m{u}_2 = egin{bmatrix} 0 \ 1 \ 0 \end{bmatrix}.$$

因 $\lambda_3 = 0$ 对应的特征向量与 \mathbf{u}_1 正交, 故可设其为 $(1, y, -1)^{\mathrm{T}}$. 又需要和 \mathbf{u}_2 正交, 故 y = 0. 从而 $\lambda_3 = 0$ 对应的单位特征向量为

$$oldsymbol{u}_3=\left[egin{array}{c} rac{1}{\sqrt{2}} \ 0 \ -rac{1}{\sqrt{2}} \end{array}
ight].$$

$$m{U} = \left[egin{array}{cccc} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & rac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -rac{1}{\sqrt{2}} \end{array}
ight], \qquad m{S} = \left[egin{array}{cccc} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{array}
ight] \qquad m{V} = \left[egin{array}{cccc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}
ight],$$

$$m{U} = \left[egin{array}{ccc} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & rac{1}{\sqrt{2}} \ 0 & 1 & 0 \ rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -rac{1}{\sqrt{2}} \ \end{array}
ight], \qquad m{S} = \left[egin{array}{ccc} \sqrt{2} & 0 \ 0 & 1 \ \end{array}
ight] \qquad m{V} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 0 \ 0 & 1 \ \end{array}
ight],$$

得矩阵 A 的奇异值分解为

$$m{A} = m{U} egin{array}{c} m{S} \ m{O} \end{array} m{V}^{\! ext{H}},$$

$$m{U} = \left[egin{array}{ccc} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & rac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -rac{1}{\sqrt{2}} \end{array}
ight], \qquad m{S} = \left[egin{array}{ccc} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{array}
ight] \qquad m{V} = \left[egin{array}{ccc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}
ight],$$

得矩阵 A 的奇异值分解为

所以

$$m{A}^+ = m{V}[m{S}^{-1}, m{O}] m{U}^{
m H} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & rac{1}{\sqrt{2}} \ 0 & 1 & 0 \ rac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -rac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = egin{bmatrix} rac{1}{2} & 0 & rac{1}{2} \ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad \Box$$

Outline

- 1 Moore-Penrose 广义逆矩阵
- 2 广义逆矩阵 A⁽¹⁾
- ③ 广义逆矩阵 $A^{(1,2)}$
- 4 广义逆矩阵 $A^{(1,3)}$
- 5 广义逆矩阵 A^(1,4)
- 6 M-P 广义逆矩阵
 - · M-P 广义逆的存在及性质
 - M-P 广义逆的几种显式表示
 - M-P 广义逆用干解线性方程组

一般来说,矛盾方程组

Ax = b

的最小二乘解是不唯一的, 但在最小二乘解的集合中, 具有最小范数的解, 即

$$\min_{\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|}\|\boldsymbol{x}\|_2$$

的解 x 是唯一的,称之为最小范数二乘解,并简记为 L-S-N 解.

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}.$$

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}.$$

 $\begin{tabular}{ll} $\widetilde{\bf L}$: $\ \diamondsuit $ {\bf Y} = {\bf A}^{(1,4)}, \ {\bf Z} = {\bf A}^{(1,3)}, \ {\bf X} = {\bf Y}{\bf A}{\bf Z}. \end{tabular}$

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}.$$

ightharpoonup: $\Leftrightarrow Y = A^{(1,4)}, Z = A^{(1,3)}, X = YAZ$.

从而 $Y, Z \in A\{1\}$, 故 $X \in A\{1, 2\}$.

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}.$$

 $\stackrel{\cdot}{\mathbf{L}}$: $\Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{(1,4)}, \mathbf{Z} = \mathbf{A}^{(1,3)}, \mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{Z}.$

从而
$$Y, Z \in A\{1\}$$
, 故 $X \in A\{1, 2\}$. 又

$$AX = AYAZ = AZ,$$

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}.$$

 $\stackrel{\cdot}{\mathbf{L}}$: $\Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{(1,4)}, \mathbf{Z} = \mathbf{A}^{(1,3)}, \mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{Z}.$

从而
$$Y, Z \in A\{1\}$$
, 故 $X \in A\{1, 2\}$. 又

$$AX = AYAZ = AZ,$$
 $(AX)^{H} = (AZ)^{H} = AZ = AX,$

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}.$$

 $\stackrel{\cdot}{\mathbf{L}}$: $\Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{(1,4)}, \mathbf{Z} = \mathbf{A}^{(1,3)}, \mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{Z}.$

从而
$$Y, Z \in A\{1\}$$
, 故 $X \in A\{1, 2\}$. 又

$$AX = AYAZ = AZ,$$
 $(AX)^{H} = (AZ)^{H} = AZ = AX,$

故

$$X \in A\{3\}.$$

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}.$$

 $\overset{\cdot}{\mathbf{L}}$: $\Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{(1,4)}, \ \mathbf{Z} = \mathbf{A}^{(1,3)}, \ \mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{Z}.$

从而
$$Y, Z \in A\{1\}$$
, 故 $X \in A\{1, 2\}$. 又

$$AX = AYAZ = AZ,$$
 $(AX)^{H} = (AZ)^{H} = AZ = AX,$

故

$$X \in A{3}.$$

又
$$XA = YAZA = YA$$
, 从而 $(XA)^{H} = XA$, 故

$$X \in A\{4\}.$$

对任一 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 都有

$$A^+ = A^{(1,4)} A A^{(1,3)}.$$

 $\stackrel{\cdot}{\mathbf{L}}$: $\Leftrightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{A}^{(1,4)}, \mathbf{Z} = \mathbf{A}^{(1,3)}, \mathbf{X} = \mathbf{Y}\mathbf{A}\mathbf{Z}.$

从而 $Y, Z \in A\{1\}$, 故 $X \in A\{1,2\}$. 又

$$AX = AYAZ = AZ,$$
 $(AX)^{H} = (AZ)^{H} = AZ = AX,$

故

$$X \in A{3}.$$

又
$$XA = YAZA = YA$$
, 从而 $(XA)^{H} = XA$, 故

$$X \in A\{4\}.$$

综上有
$$X = A^+$$
.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 是:

 $x_0 = A^+ b.$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 是:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组

 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{(1,3)}\mathbf{b} \text{ in } \mathbf{H},$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 是:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 B:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$x_0 = A^{(1,4)} A A^{(1,3)} b,$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 B:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得. 这个解为

$$x_0 = A^{(1,4)} A A^{(1,3)} b,$$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 B:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得. 这个解为

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{(1,4)} \mathbf{A} \mathbf{A}^{(1,3)} \mathbf{b},$$

又 $A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$, 故方程组的 Ax = b 的 L-S-N 解为 $x_0 = A^+b$.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 B:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{(1,4)} \mathbf{A} \mathbf{A}^{(1,3)} \mathbf{b},$$

又
$$A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$$
, 故方程组的 $Ax = b$ 的 L-S-N 解为 $x_0 = A^+b$. 充分性. 设 $x_0 = A^+b$, 则 $Ax_0 = AA^+b$,

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 是:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{(1,4)} \mathbf{A} \mathbf{A}^{(1,3)} \mathbf{b},$$

又 $A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$, 故方程组的 Ax = b 的 L-S-N 解为 $x_0 = A^+b$. 充分性. 设 $x_0 = A^+b$, 则 $Ax_0 = AA^+b$, 而 $A^+ \in A\{1,3\}$, 故由推论 4.7 可知 x_0 为方程组 Ax = b 的 L-S 解.

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 B:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得, 这个解为

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{(1,4)} \mathbf{A} \mathbf{A}^{(1,3)} \mathbf{b},$$

又 $A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$, 故方程组的 Ax = b 的 L-S-N 解为 $x_0 = A^+b$. 充分性. 设 $x_0 = A^+b$, 则 $Ax_0 = AA^+b$, 而 $A^+ \in A\{1,3\}$, 故由推论 4.7 可知 x_0 为方程组 Ax = b 的 L-S 解. 又因为 $x_0 = A^+b$, 故 $x_0 \in R(A^+)$

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, 则 x_0 是方程组 Ax = b 的 L-S-N 解的充分必要条件 B:

$$x_0 = A^+ b$$
.

证: 必要性. 由推论 4.7 可知, 方程组 Ax = b 的 L-S 解即为方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的解, 因此, 方程组 Ax = b 的 L-S-N 解即是方程组 $Ax = AA^{(1,3)}b$ 的 L-N 解. 由定理 5.7 得. 这个解为

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}^{(1,4)} \mathbf{A} \mathbf{A}^{(1,3)} \mathbf{b},$$

又 $A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$, 故方程组的 Ax = b 的 L-S-N 解为 $x_0 = A^+b$. 充分性. 设 $x_0 = A^+b$, 则 $Ax_0 = AA^+b$, 而 $A^+ \in A\{1,3\}$, 故由推论 4.7 可知 x_0 为方程组 Ax = b 的 L-S 解. 又因为 $x_0 = A^+b$, 故

$$x_0 \in R(\mathbf{A}^+) = R(\mathbf{A}^H)$$
, 从而 x_0 是方程组 $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ 的 L-S-N 解.

已知方程组 Ax = b, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

问方程组是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

己知方程组 Ax = b, 其中

$$m{A} = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \ 1 & 2 & 1 & 1 \ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad m{b} = egin{bmatrix} 1 \ 1 \ 1 \end{bmatrix}.$$

问方程组是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

$$[m{A}, m{b}] = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 - r_1]{r_3 - r_1 - r_2} egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

己知方程组 Ax = b, 其中

$$m{A} = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad m{b} = egin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

问方程组是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

解: 因为

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

即 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$, $\operatorname{rank}[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = 3$, 所以方程组无解.

已知方程组 Ax = b, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

问方程组是否有解? 若有解, 求最小范数解; 若无解, 求最小范数二乘解.

解: 因为

$$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 - r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

即 $\operatorname{rank} \mathbf{A} = 2$, $\operatorname{rank}[\mathbf{A}, \mathbf{b}] = 3$, 所以方程组无解. (或者由第 2 个方程和第 3 个方程相互矛盾, 知方程组无解.)

由

得满秩分解 A = LR, 其中

 $A \xrightarrow{r_3-r_1-r_2} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|,$

 $m{L} = egin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad m{R} = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$

$$m{R}m{R}^{
m H} = egin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 1 \ 1 & 0 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 6 & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{H}})^{-1} = \left[egin{array}{cc} rac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{array}
ight],$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$m{R}^+ = m{R}^{
m H} (m{R} m{R}^{
m H})^{-1} = egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 1 \ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rac{1}{6} & 0 \ 0 & 1 \end{bmatrix} = rac{1}{6} egin{bmatrix} 1 & 0 \ 2 & 0 \ 0 & 6 \ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}^{H}\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},
(\boldsymbol{L}^{H}\boldsymbol{L})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},
\boldsymbol{L}^{+} = (\boldsymbol{L}^{H}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{H} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$m{L}^{\mathrm{H}} m{L} = egin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} egin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = egin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$
 $(m{L}^{\mathrm{H}} m{L})^{-1} = rac{1}{3} egin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix},$

 $\boldsymbol{L}^{+} = (\boldsymbol{L}^{H}\boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{L}^{H} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$

从而

$$A^{+} = R^{+}L^{+} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -18 & 18 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{L}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{L})^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix},$$

$$L^+ = (L^H L)^{-1} L^H = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而

$$A^{+} = R^{+}L^{+} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -18 & 18 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

所以方程组的最小范数二乘解是 $x_0 = A^+ b = \frac{1}{9}[1,2,0,1]^{\mathrm{T}}$.