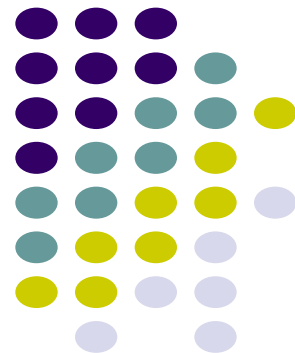


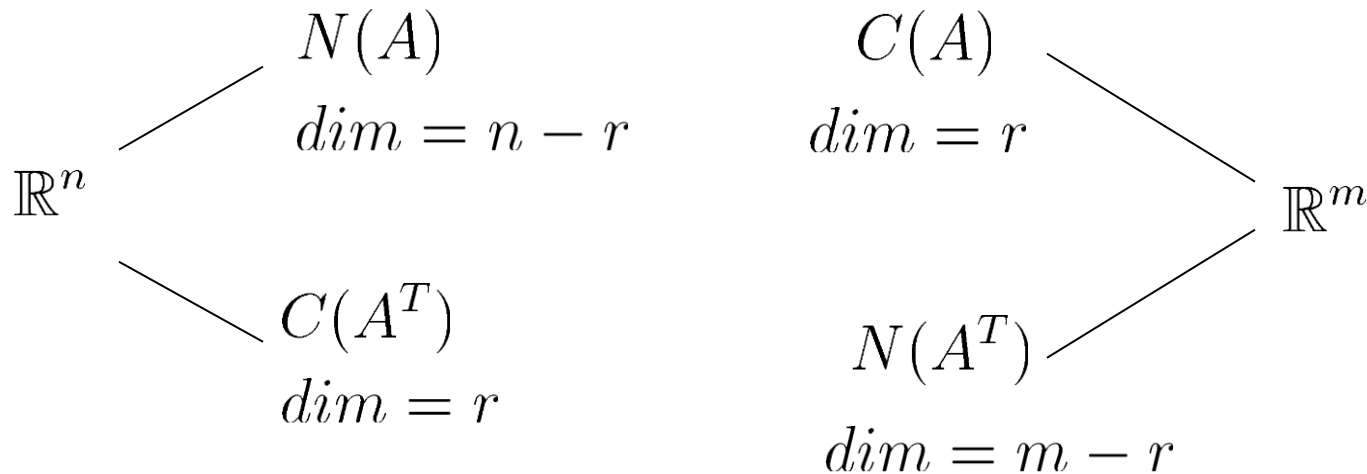
§ 12 四个基本子空间的正交性



12.1 引言



设 A 是一个 $m \times n$ 阶阵, 则我们有四个基本子空间 $r(A) = r$





12.1 引言

例：设 $A = B_1 B_2$, 其中 B_1 是 $n \times r$ 阶阵, B_2 是 $r \times n$ 阶阵, 后两矩阵秩均为 r , 则 A 是一个 $n \times n$ 阶阵, 且 $r(A) = r$.

1. A 的每一列是 B_1 的列向量的线性组合, 因而 $C(A) \subset C(B_1)$.
2. A 的每一行是 B_2 的行向量的线性组合, 因而 $C(A^T) \subset C(B_2^T)$.
3. B_1 是列满秩阵, 则存在可逆 $n \times n$ 阶阵 E_1 , $E_1 B_1 = (I_r \ 0)^T$.
 B_2 是行满秩阵, 则存在可逆 $n \times n$ 阶阵 E_2 , $B_2 E_2 = (I_r \ 0)$.
4. $C(A) = C(AE_2) = C(B_1(I_r \ 0)) = C(B_1)$.

因此 $\dim C(A) = \dim C(B_1)$, 即 $r(A) = r(B_1) = r$.



12.1 引言

例：设 A 为 $m \times n$ 阶阵， $\mathbf{v} \in C(A^T) \cap N(A)$ ，则 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 且 \mathbf{v} 是 A 的行向量转置的线性组合.

$$\text{设 } A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_m^T \end{pmatrix}, \mathbf{v} = a_1\alpha_1 + \cdots + a_m\alpha_m, a_i \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } A\mathbf{v} = \mathbf{0} &\implies \alpha_1^T \mathbf{v} = 0, \cdots, \alpha_m^T \mathbf{v} = 0 \\ &\implies \mathbf{v}^T \mathbf{v} = 0 \implies \mathbf{v} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$$\text{即 } C(A^T) \cap N(A) = \{\mathbf{0}\}.$$

$$\text{同理, } C(A) \cap N(A^T) = \{\mathbf{0}\}.$$



12.1 引言

我们将学习关于四个基本子空间的更精确关系.

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ 是 } \mathbb{R}^3 \text{ 的一平面: } x0z \text{ 平面.}$$

$$C(A^T) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} = C(A)$$

$$N(A) = \left\{ c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} = y \text{ 轴} \quad N(A^T) = N(A) = y \text{ 轴}$$

y 轴 \perp $x0z$ 平面 $\implies C(A)$ 和 $N(A^T)$ 垂直.

12.1 引言



目标: $C(A^T)$ 和 $N(A)$ 是垂直的.

$C(A)$ 和 $N(A^T)$ 是垂直的.



12.2 四个子空间的正交性

我们需要确切定义子空间的垂直（或正交）。

定义：设 S 和 T 是 \mathbb{R}^n 的两个子空间(subspaces), 我们说 S 垂直于 T (S is perpendicular to T), 如果对于 $\forall \mathbf{v} \in S, \mathbf{w} \in T, \mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0$.

这个定义是对称的, 即 S 垂直于 $T \iff T$ 垂直于 S ,

记作 $S \perp T$ 或 $T \perp S$.

所以我们也可以说: S 和 T 是正交的(S and T are orthogonal).



12.2 四个子空间的正交性

例： \mathbb{R}^n 和 $\{\mathbf{0}\}$ 是正交的.

$$\text{例: } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}, N(A^T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \\ d \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

$C(A)$ 和 $N(A^T)$ 均是 \mathbb{R}^4 的子空间(平面). $C(A) \perp N(A^T)$.



12.2 四个子空间的正交性

例: \mathbb{R}^3 中 xOy 平面和 xOz 平面不正交. 因为 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 属于两平面之交, 但 $(1, 0, 0)(1, 0, 0)^T \neq 0$.

Fact: 若 $S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$, 则 $\exists \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \in S \cap T, \mathbf{v}^T \mathbf{v} \neq 0$. 因而 S 和 T 不正交.

命题: 设 S 和 T 是 \mathbb{R}^n 中两个子空间, 且 $\dim S + \dim T > n$, 则 S 和 T 不正交.

注: 若 $\dim S + \dim T = n$, S 和 T 也可能不正交. 例如 \mathbb{R}^2 中 S 是直线 $y = x$, T 是 x 轴.



12.2 四个子空间的正交性

定理：设 A 是 $m \times n$ 阶阵，则 $C(A)$ 和 $N(A^T)$ 正交， $C(A^T)$ 和 $N(A)$ 正交.

证明：设 $\alpha \in N(A^T)$ ，则 $\alpha^T A = \mathbf{0}$.

$\implies \alpha$ 和 A 的全部列向量垂直.

$\implies \alpha \perp C(A)$.

因此， $N(A^T) \perp C(A)$.

将 A 换成 A^T ，我们得到 $C(A^T) \perp N(A)$.



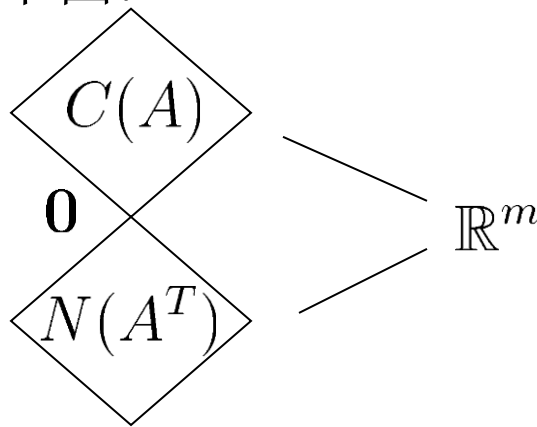
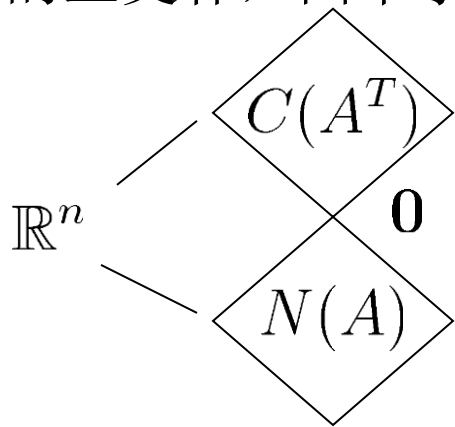
12.3 正交补

四个子空间还有如下的关系：

定理： $C(A^T) + N(A) = \mathbb{R}^n, C(A^T) \perp N(A).$

$C(A) + N(A^T) = \mathbb{R}^m, C(A) \perp N(A^T).$

我们说 $C(A^T)$ 是 $N(A)$ 在 \mathbb{R}^n 中的正交补， $C(A)$ 是 $N(A^T)$ 在 \mathbb{R}^m 中的正交补，四个子空间的关系如下图：





12.3 正交补

一般地，我们有如下的：

定义：设 $V \subset \mathbb{R}^n$ 是一个子空间， V 在 \mathbb{R}^n 中的正交补定义为集合

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v}^T \mathbf{w} = 0, \forall \mathbf{v} \in V\},$$

记作 V^\perp ，显然 $V \perp V^\perp$.



12.3 正交补

验证: $C(A^T) = N(A)^\perp$.

证明: 已知, $C(A^T) \perp N(A) \implies C(A^T) \subset N(A)^\perp$.

反之, $\forall \mathbf{v} \in N(A)^\perp$, 假设 $\mathbf{v} \notin C(A^T)$, 考虑矩阵 $A_0 = \begin{pmatrix} A \\ \mathbf{v}^T \end{pmatrix}$.
则 $C(A^T) \subsetneq C(A_0^T)$.

但 $N(A_0) = N(A)$, 即 A_0 的列数 $-r(A_0) = A$ 的列数 $-r(A)$.
则 $r(A) = r(A_0)$, 这与 $C(A^T) \subsetneq C(A_0^T)$ 矛盾.



12.3 正交补

在過去的內容中，我們已經知道：

若 $A_{m \times n}$ 的秩為 r , 則 $\dim C(A) = \dim C(A^T) = r$,
 $\dim N(A) = n - r$, $\dim N(A^T) = m - r$.

這個定理更細緻地刻劃了 A 的四個子空間的正交補關係.

注記：若 A 對稱，即 $A = A^T$, 則 $\mathbb{R}^n = N(A) + C(A^T)$
 $C(A) \perp N(A).$ $= N(A^T) + C(A).$

特別地， $A^T A$ 是對稱陣，此時

$$N(A) = N(A^T A), \quad C(A^T) = C(A^T A).$$

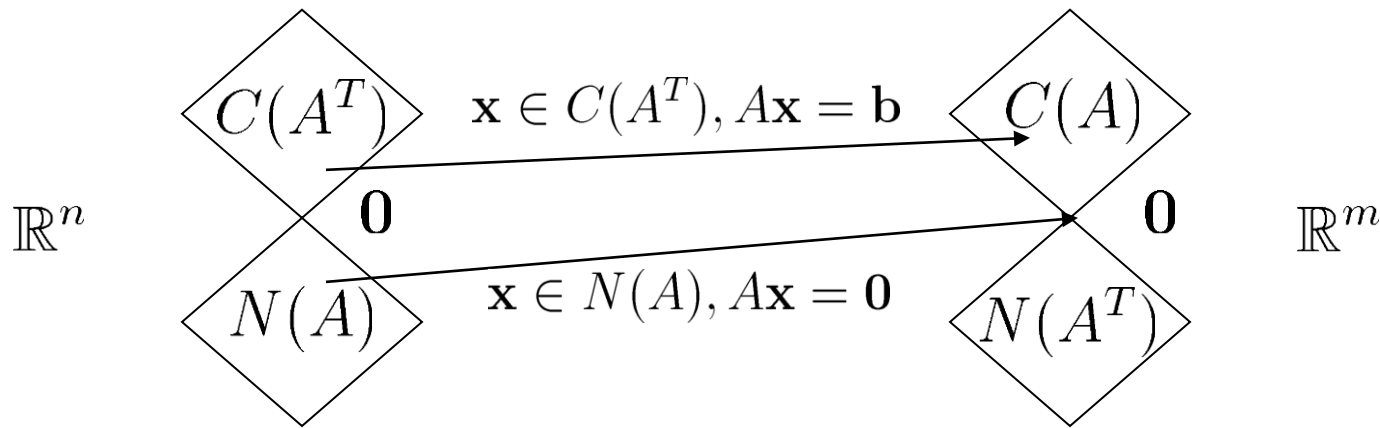


12.3 正交补

考虑一个简单观察：

设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 则 $A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, 即 $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$
 $\mathbf{x} \longmapsto A\mathbf{x}.$

我们可以提升以上描述定理的简图如下：





12.4 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 在行空间中的唯一性

定理：若 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解，则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 在 $C(A^T)$ 中有唯一解。

例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

则 $C(A^T) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\}$ 是 \mathbb{R}^3 中一直线

$\left. \begin{array}{l} N(A) = \text{平面 } x + 2y + 5z = 0 \\ C(A) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \text{ } \mathbb{R}^2 \text{ 中一直线} \\ N(A^T) = \text{直线 } x + 2y = 0 \end{array} \right\} \mathbb{R}^3 = C(A^T) + N(A)$



12.4 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 在行空间中的唯一性

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解 $\iff \mathbf{b} \in C(A)$.

取 $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 求 $\mathbf{x}_r \in C(A^T)$ 使得 $A\mathbf{x}_r = \mathbf{b}$.

因为 $\mathbf{x}_r \in C(A^T)$, $\exists \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}_r = A^T \mathbf{y}$. $\implies AA^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 $\implies y_1 + 2y_2 = \frac{1}{30}$. 有无穷个 \mathbf{y} 满足 $AA^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

但是 $\mathbf{x}_r = A^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{30} \\ \frac{2}{30} \\ \frac{5}{30} \end{pmatrix}$ 唯一!



12.4 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 在行空间中的唯一性

定理的证明: (来自于以上例子)

1. 存在性. 设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解, 则 $\mathbf{b} \in C(A)$.

但 $C(A) = C(AA^T)$, 因此 $\mathbf{b} \in C(AA^T)$, 即 $\exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$.

令 $\mathbf{x}_r = A^T\mathbf{y}$, 则 $A\mathbf{x}_r = \mathbf{b}, \mathbf{x}_r \in C(A^T)$.

2. 唯一性. 设 $\mathbf{x}_r, \mathbf{x}'_r \in C(A^T)$, 且 $A\mathbf{x}_r = \mathbf{b} = A\mathbf{x}'_r$, 则

$$A(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r \in N(A).$$

但是 $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r \in C(A^T)$, 即 $\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'_r \in C(A^T) \cap N(A) = \{\mathbf{0}\}$.

因此 $\mathbf{x}_r = \mathbf{x}'_r$.



12.4 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 在行空间中的唯一性

例: $A = (1, -3, -4)_{1 \times 3}$.

$$\mathbb{R}^1 = N(A^T) + C(A) \quad \mathbb{R}^3 = C(A^T) + N(A)$$

$$C(A^T) = \left\{ c \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R} \right\} \quad N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - 3y - 4z = 0 \right\}$$

$$C(A) = \mathbb{R}^1 \quad N(A^T) = \{\mathbf{0}\}$$

$$\forall b \in C(A), \text{ 则 } \mathbf{x}_r = \frac{b}{26} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \in C(A^T), A\mathbf{x}_r = b.$$