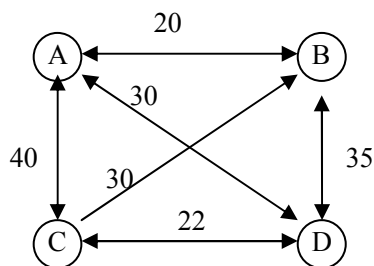


一、判断下列陈述的对错（共 20 分，共 10 题，每题 2 分）

1. 一个计算问题的输入是 n 个数字 a_1, a_2, \dots, a_n 。如果这个问题存在一个运行时间为 $O(a_n n^{10})$ 的算法，则这个问题可以在多项时间内被计算机求解。
()
2. 如果存在一个从问题 A 到问题 B 的多项式时间归约(Polynomial reduction)，且问题 A 是 NP 难的，则可知问题 B 也是 NP 难的。
()
3. 一个 2 倍的近似算法一定会有在一个问题上得到正好是最优解的两倍的解。
()
4. 如果存在一个 NP 问题有多项式时间算法，则 $P=NP$ 。
()
5. 一个图上的最大网络流是唯一的。
()
6. 当图中的顶点个数是常数时，最大独立集问题(Maximum Independent Set Problem)是多项式时间可解的。
()
7. 这里有两个解决排序问题的分而治之算法：算法 A 递归将需要排列的数字均分成 2 份，分别排序后再合并。算法 B 递归将需要排列的数字均分成 3 份，分别排序后再合并。从渐进分析的角度来看，算法 B 比算法 A 要快。
()
8. 在并行计算中，一个计算问题能在 CREW PRAM 模型下 $O(n)$ 处理器 $O(n^3)$ 时间被解决，则也可以在 EREW PRAM 模型下 $O(n)$ 处理器 $O(n^3)$ 时间被解决。
()
9. 对于任意一个动态规划算法，其使用的空间一定不比它使用的时间要大。
()
10. 求一个图中两个点间最长路径的问题是属于 NP 的，但是求一个图中两个点间最短路径的问题则不是属于 NP 的。
()

二、计算题（共 9 分，共 3 题，每题 3 分）

1. 求如下有向图中的一个最长路径，要求给出路径和路径长度的值。



2. 如下可满足问题（SAT）是否有解，若有解该如何给变量赋值：

$$(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \wedge (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}).$$

3. 有一些区间段 (0,3), (2,4), (3,6), (5,7), (1,4), (3,5), (6,8), (7,9)，找出其中个数最多的一组相容的区间段（两个区间相容当且仅当两个区间的交集为空）。

三、将下列函数按照渐进增长率由小到大进行排列，并给出你的判断依据： $f_1(n)$

$$= 2014n^6 + 5n^4, f_2(n) = n^{2014} + 3^n, f_3(n) = 2014\sqrt{n^{2014}}, f_4(n) = \log n + (2014\log n)^3, f_5(n) = 2^n + n! + 5^n, f_6(n) = 3\log(2^n) + \log\log n, f_7(n) = 2^{n\log n} + \log^n n.$$

(7 分)

四、有一堆货物需要被运走，现在有四种运货车：推车的容量最小，小货车的容量是推车容量的 2 倍，中货车的容量是两辆小货车的容量加上一辆推车的容量，大货车的容量是一辆中货车的容量加上一辆小货车的容量再加上两辆推车的容量。假设以上四种车的数量都非常多。现在要求你设计一种方案派出最少辆车将货物全搬走，其中除了推车以外其它三种车都必须装满才能发车。为这个问题设计一个算法，并证明该算法的正确性。（8 分）

五、对某个输入大小为 n 的问题有如下四个分而治之算法：

算法 1 将该问题分成 2 个子问题，子问题大小为 $n/3$ ，将子问题的解合并得到上一级问题的解需要 $O(n)$ 时间；

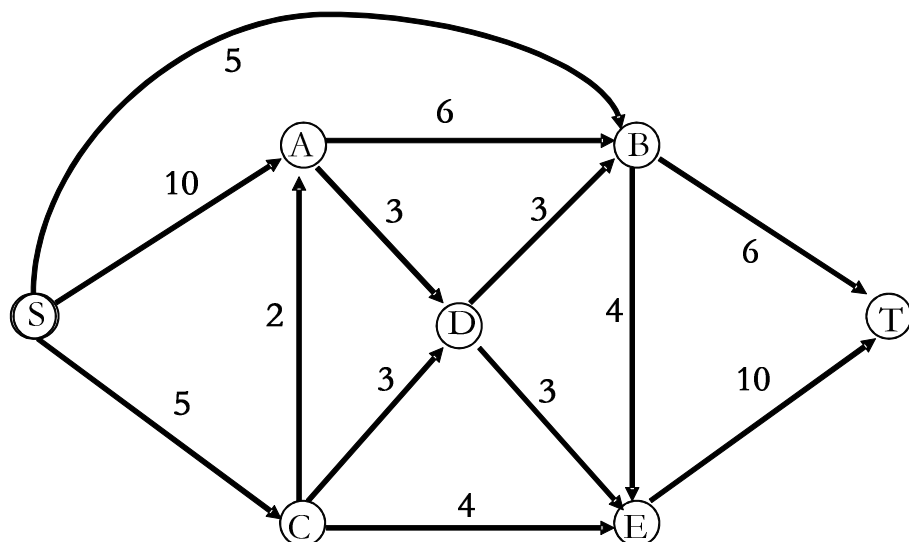
算法 2 将该问题分成 3 个子问题，子问题大小为 $n/2$ ，将子问题的解合并得到上一级问题的解需要 $O(n)$ 时间；

算法 3 将该问题分成 4 个子问题，子问题大小为 $n/2$ ，将子问题的解合并得到上一级问题的解需要 $O(n^2)$ 时间；

算法 4 将该问题分成 3 个子问题，子问题大小为 $n-1$ ，将子问题的解合并得到上一级问题的解需要 $O(1)$ 时间。

请分析以上 4 个算法的运行时间。（8 分）

六、求如下图中 S 和 T 间的最小割，要求给出计算步骤。（8 分）



七、证明：如果存在一个多项式时间算法判断一个图是否存在一个长度为 k 的路径，则存在一个多项式时间算法要么找到图中一个长度为 k 的路径要么证明此图不存在长度为 k 的路径。（6 分）

八、叙述带权重的点覆盖问题 (Weighted Vertex Cover Problem) 的竞价法 (Pricing Method)，并证明这个算法是个 2 倍近似算法。（8 分）

九、为最小点覆盖问题建立一个整数规划模型。（5 分）

十、一个图中的一组边集 A 满足如下性质则称 A 为一个独立匹配： A 中任何两条边都没有公共顶点，任意两个来自 A 中两条不同边的顶点之间都不存在一条边。证明求一个图中最大独立匹配（含有最多条边的独立匹配）是 NP 难的。（提示：可以考虑利用最大独立集问题来构造归约）（5 分）

十一、子集和问题定义如下：输入为一个有 n 个正整数的集合 A 和一个正整数 k ，问是否存在 A 的一个子集合其中所有元素之和正好等于 k 。为子集和问题设计一个动态规划算法，并用你的算法对如下实例进行求解（要求画出表格）： $A=\{1,2,5,6,7\}$ ， $k=11$ 。（10 分）