§11 四个基本子空间的基与维数

11.1 四个基本子空间的基

这次课我们讨论以下四个基本子空间：

设 A 是一个 $m \times n$ 阶阵，考虑

列空间(column space) $C(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{y} = A\mathbf{x}, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$

行空间(row space) $C(A^T) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{y} = A^T\mathbf{x}, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}$

零空间(nullspace) $N(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

左零空间(left nullspace) $N(A^T) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$

$$= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | \mathbf{x}^T A = \mathbf{0}\}$$

11.1 四个基本子空间的基

注：

(1) $C(A^T)$ 是 A 的行向量的全部线性组合.

(2) $C(A)$ 和 $N(A^T)$ 是 $\mathbb{R}^m$ 的子空间.

$C(A^T)$ 和 $N(A)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.

目标：求四个基本子空间的基和维数.

11.1 四个基本子空间的基

设 A 如上，使用消元法

$$A \xrightarrow{\text{行变换}} U_0 \xrightarrow{\text{列对换}} \begin{pmatrix} I_r & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R \qquad r = r(A)$$

$C(A)$ 的一组基：A 的主列 $\qquad dim\, C(A) = r$

例$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

通过 U_0, A 的主列，即 $1, 2, 4$ 列为 $C(A)$ 的基.

11.1 四个基本子空间的基

求$C(A^T)$ 的基？根据定义$C(A^T) = C(U_0^T)$, 而 $C(U_0^T)$ 的基容易求出.

以上例为例：

$C(A^T)$的一组基为 $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

如何用 A 的行向量给出 $C(A^T)$ 的基？

11.1 四个基本子空间的基

例： $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T - 2\alpha_1^T = \mathbf{0} \\ \alpha_3^T \end{array}$$

可以看出 α_2^T 可用 α_1^T, α_3^T 线性表出， α_1^T, α_3^T 是 $C(A^T)$ 的基.

11.1 四个基本子空间的基

例：$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \vdots \\ \alpha_5^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T + \alpha_1^T \\ \alpha_3^T \\ \alpha_4^T + \alpha_1^T \\ \alpha_5^T + 2\alpha_1^T \end{array}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T + \alpha_1^T \\ \alpha_3^T - \alpha_2^T - \alpha_1^T = \mathbf{0} \\ \alpha_4^T - \alpha_1^T - 2\alpha_2^T \\ \alpha_5^T - 2\alpha_1^T - 4\alpha_2^T - (\alpha_4^T - \alpha_1^T - 2\alpha_2^T) = \mathbf{0} \end{array}$$

可以看出 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 是 $C(A^T)$ 的基.

注: $C(A^T)$ 的基也可以使用列空间基的求法，即考虑 A^T 的列空间.

11.1 四个基本子空间的基

求 $N(A^T)$ 的基，两种方法：

(1)求 A^T 的零空间的基础解系.

(2) $A \longrightarrow U_0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

前 r 行有主元

后 $m-r$ 行是零向量

即存在可逆阵 $E, EA = U_0$.

$$E = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_m^T \end{pmatrix}$$

则 $\mathbf{u}_{r+1}^T A = \mathbf{0}, \cdots, \mathbf{u}_m^T A = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{u}_{r+1}, \cdots, \mathbf{u}_m$ 是 $N(A^T)$ 的一组基.

($dim\, N(A^T) = m - r$, $\mathbf{u}_{r+1}, \cdots, \mathbf{u}_m \in N(A^T)$ 且线性无关.)

11.1 四个基本子空间的基

例：$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 5} \xrightarrow{-r_1+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{-r_2+r_3} U_0 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E = E_{32}(-1)E_{31}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

因此 $N(A^T)$ 有一组基 $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

为了记录 E, 可以考虑 $(A|I_3) \longrightarrow (U_0|E)$.

11.1 四个基本子空间的基

总结：

$$\begin{array}{ccccc} & C(A^T) & & C(A) & \\ & dim = r & & dim = r & \\ \mathbb{R}^n & & & & \mathbb{R}^m \\ & N(A) & & N(A^T) & \\ & dim = n - r & & dim = m - r & \end{array}$$

11.2 维数公式

设 V 是一个向量空间，W_1, W_2 是两个子空间，则 $W_1 \cap W_2$ 和 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间，但 $W_1 \cup W_2$ 一般不是子空间.

例如：$y = x$ 和 $x = 0$ 均是 $\mathbb{R}^2$ 的一维子空间.

但它们的并不是子空间.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$, 但 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2.$

这些空间的维数有如下关系：

$$dim\, W_1 + dim\, W_2 = dim(W_1 \cap W_2) + dim(W_1 + W_2).$$

例如(上例)：$W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}, W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$ 满足公式.

11.2 维数公式

例：$M_3(\mathbb{R})=\{3\text{阶实矩阵}\}=V$

$W_1=\{3\text{阶对称矩阵}\}$　　$W_2=\{3\text{阶上三角矩阵}\}$

检查 $dim\,V=9, dim\,W_1=6, dim\,W_2=6.$

$W_1\cap W_2=\{3\text{ 阶对角阵}\}$　　$dim\,W_1\cap W_2=3$

$W_1+W_2=M_3(\mathbb{R})$　　$dim(W_1+W_2)=9$

例：$\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$ 的解集 $=\{y=c_1\cos x+c_2\sin x|c_i\in\mathbb{R}\}.$

它是一个空间，$dim=2$，一组基为 $\{\cos x,\sin x\}.$

11.2 维数公式

例：设 $\alpha_1 = (1,2,1)^T, \alpha_2 = (1,1,-1)^T, \alpha_3 = (1,3,3)^T,$

$\beta_1 = (2,3,-1)^T, \beta_2 = (1,2,2)^T, \beta_3 = (1,1,-3)^T.$

考虑 $W_1 = \{c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 | c_i \in \mathbb{R}\},$

$W_2 = \{c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + c_3\beta_3 | c_i \in \mathbb{R}\}.$

求 $W_1 + W_2$ 和 $W_1 \cap W_2$ 的一组基.

11.2 维数公式

解：

$$W_1+W_2=\{a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3+b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3|a_i,b_i\in\mathbb{R}\}.$$

令 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ $\qquad C(A)=W_1+W_2$

$$A\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1&2&1&1\\0&-1&1&-1&0&-1\\0&0&0&-1&1&-2\end{pmatrix}$$

主列为 A 的$1,2,4$ 列，即

$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$是 W_1+W_2的基.

11.2 维数公式

任取 $\alpha \in W_1 \cap W_2$,

设 $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = \mu_1\beta_1 + \mu_2\beta_2 + \mu_3\beta_3, k_i, \mu_i \in \mathbb{R}.$

可设 $k_3 = \mu_3 = 0$，因为 α_1, α_2 表出 α_3; β_1, β_2 表出 β_3.

解方程组

$$(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ 求得 } \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}.$$

则 $\alpha = c(2\alpha_1 + \alpha_2) = c(\beta_1 + \beta_2).$

11.2 维数公式

因此 $2\alpha_1+\alpha_2=\beta_1+\beta_2=\begin{pmatrix}3\\5\\1\end{pmatrix}$ 是 $W_1\cap W_2$ 的一组基.

验证维数公式： $dim\,W_1=dim\,W_2=2,$

$$dim(W_1+W_2)=3, dim(W_1\cap W_2)=1.$$

11.3 例题

例：设 A 为 n 阶方阵，则存在可逆阵 P, Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad r = r(A)$$

令 $P = \begin{pmatrix} (P_1)_{r\times n} \\ (P_2)_{(n-r)\times n} \end{pmatrix}$， $Q = ((Q_1)_{n\times r}, (Q_2)_{n\times(n-r)})$.

$$\Longrightarrow \quad \begin{matrix} P_1AQ_1 = I_r, & P_1AQ_2 = 0 \\ P_2AQ_1 = 0, & P_2AQ_2 = 0 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} P_1AQ = (I_r \;\; 0) \\ PAQ_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

11.3 例题

$$P_1AQ = (I_r\ 0) \qquad PAQ_1 = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此 Q 的后 $n-r$ 列是 $N(A)$ 的一组基;

P 的后 $n-r$ 行是 $N(A^T)$ 的一组基.

$C(A) = C(AQ_1)$. (因为 $C(AQ_1) \subset C(A)$, 且 $dim C(AQ_1) = r(AQ_1) = r$.) 故 AQ_1列满秩，它的 r 列是 $C(A)$ 的一组基.

同理 $C(A^T) = C(A^T P_1^T)$, P_1A 行满秩，它的 r 行是 $C(A^T)$ 的一组基.

11.3 例题

例：设 A, B 均为 $m \times n$阶阵，且它们的 4个子空间均相等. 进一步设
$$A = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
则 $F = G.$

这是因为 A, B的行空间重合，则 A 的第 1行 $= B$的行向量的线性组合 $= B$ 的第 1行. 以此类推.