教学案例 1

斐波那契数列通项公式的若干证明

(Several Proofs on Fibonacci Series)

姓名： 李厚彪

学校： 电子科技大学

一、斐波那契数列的定义

定义 1.1 Fibonacci 数列：1，1，2，3，5，8，13，21……

$\{F_n\}$是组合数学中应用很广泛的一种离散模型，在数学上，斐波那契数列是以递归的方法来定义：

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, (n \geq 1).$$

历史小贴士：

在西方， Fibonacci 数列最早取自1202年意大利数学家斐波那契的《算盘》(Liber Abaci)书中的兔子繁殖问题.

二、自然界中的斐波那契数列

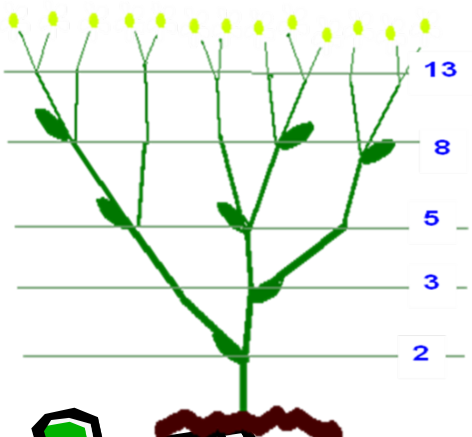
2.1 花瓣数

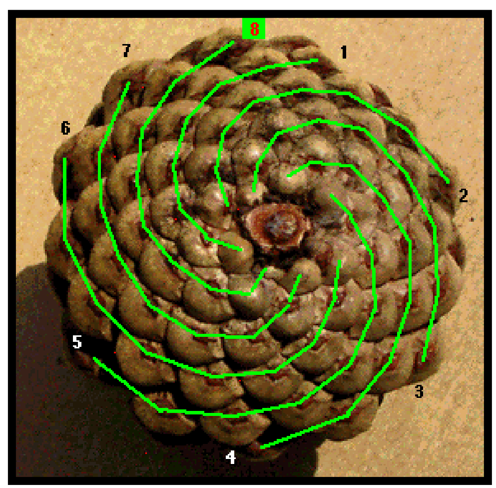
2.2 花表面排列的螺线数（5-8）

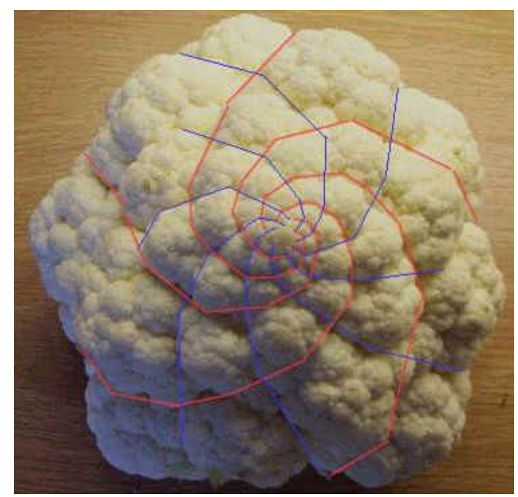
2.3 树叉数

蝴蝶兰（5）

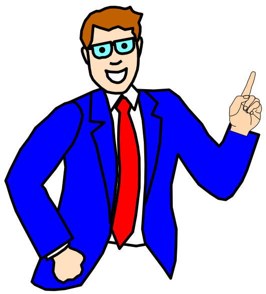
雏菊（13）







三、斐波那契数列的发展

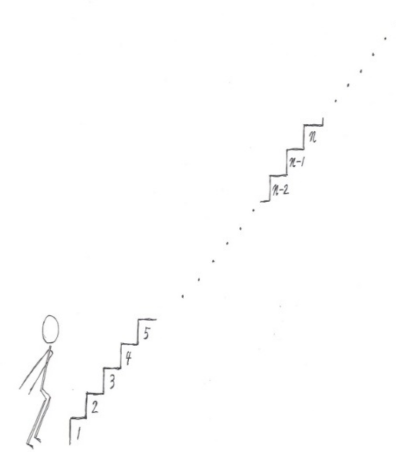


有人比喻说，“有关斐波那契数列的论文，甚至比斐波那契的兔子增长得还快”，以致1963年成立了**斐波那契协会**，还出版了《**斐波那契季刊**》。

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}$$

连分数

股票指数增减的“波浪理论”



跳格游戏

四、斐波那契数列通项公式的若干证明

方法一：初等解法---将三阶递推化为二阶递推

解. 首先将$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1}(n\geq 1)$，分解为

$$F_n-rF_{n-1}=s(F_{n-1}-rF_{n-2})$$

其中$r+s=1, -rs=1$，则$n\geq 3$时，有

$$\left.\begin{aligned}
&F_n-rF_{n-1}=s(F_{n-1}-rF_{n-2}),\\
&F_{n-1}-rF_{n-2}=s(F_{n-2}-rF_{n-3}),\\
&\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&F_3-rF_2=s(F_2-rF_1).
\end{aligned}\right\}\Rightarrow F_n-rF_{n-1}=s^{n-2}\underbrace{(F_2-rF_1)}_{s}.$$

$\because s=1-r, F_1=1, F_2=1.$ 上式可进一步化为：

$$\begin{aligned}
F_n&=s^{n-1}+rF_{n-1}\\
&=s^{n-1}+rs^{n-2}+r^2F_{n-2}\\
&=s^{n-1}+rs^{n-2}+r^2s^{n-3}+\ldots+r^{n-2}s+r^{n-1}.
\end{aligned}$$

方法一：初等解法(续)

这是一个以$s^{(n-1)}$为首项、以$r^{(n-1)}$为末项、r/s为公比的等比数列的各项的和. 因此,

$$F_n = [s^{n-1} - (r^{n-1})\frac{r}{s}]/(1-\frac{r}{s}) = (s^n - r^n)/(s-r).$$

而$r+s=1, -rs=1$的唯一解:

$$s=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad r=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\therefore\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

注：此通项公式又叫“比内公式”，是用无理数表示有理数的一个经典范例.

方法二：线性子空间方法

解. (1) 由$F_0=0,\ F_1=1,\ F_{n+1}=F_n+F_{n-1}(n\geq 1)$,

易知**对于1、2项为任意值**，但满足

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1},(n\geq 1) \qquad (1)$$

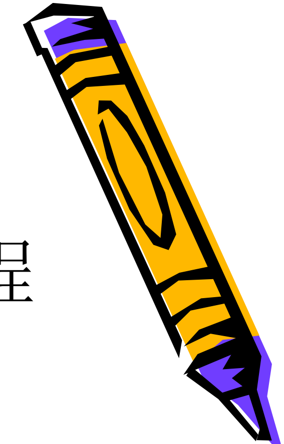
的**数列**的加法与数乘，满足线性空间八个条件, 因此, 构成一个**线性空间**。

(2)注意到，该空间是一个二维空间。鉴于(1)式的的递推形式，我们不妨**从中取两组等比数列** $\{a_n\},\{b_n\}$

其公比分别为 q_1,q_2，即

$$a_n=(q_1)^n,\ b_n=(q_2)^n.$$

方法二：线性子空间方法（续）



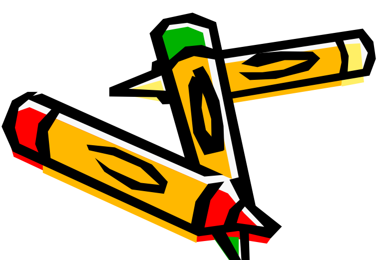
另外，根据递推关系 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$，可得方程 $q^n=q^{n-1}+q^{n-2}$，经计算可得 $q=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，因此可令

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,\quad b_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

令 $F_n=k_1a_n+k_2b_n,(n\geq 1)$. 由 $F_1=1,F_2=1$，可求得

$$k_1=\frac{\sqrt{5}}{5},\ k_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

即斐波那契数列的表示为



$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

方法三：矩阵相似对角化方法

解. 由 $F_0=0, F_1=1, F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, (n\geq 1)$

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ F_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

……

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \ldots = A^n\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

方法三：矩阵相似对角化方法

将 A^n 对角化得

$$A^n=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} & \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix}^{-1}\cdot$$

由 $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，可得：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

方法四：行列式表示法

解. 注意到

$$D_n=\begin{vmatrix} x+y & xy & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x+y & xy \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & x+y \end{vmatrix}$$

由于 $D_n=(x+y)D_{n-1}-xyD_{n-2}$，所以只需

$$x+y=1, xy=-1.$$

就**可用行列式表示Fobonacci数列**，从而通过行列式求得通项公式.（过程略）

应 用 与 推 广

- 推广的斐波那契数列 — 卢卡斯数列（Lucas，F.E.A. 1824-1891）

即从任何两个正整数开始，往后的每一个数是其前两个数之和，由此构成无穷数列。此即，二阶递推公式:

$$\begin{cases} L_1 = ?, L_2 = ? \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}. \end{cases}$$

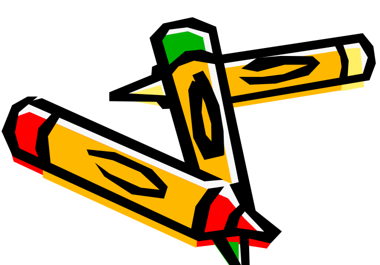
思考：如何求解上述卢卡斯数列的通项？
　　　上述方法是否皆可通用？

小　　结

数学中，“从不同的范畴，不同的途径，得到同一个结果”的情形是屡见不鲜的。

这反映了客观世界的多样性和统一性，也反映了数学的统一美。

通过一题多证，发散思维，由浅入深，从不同的侧面反映数学知识点之间的“内在”联系，有助于加深学生对相关知识的理解。



谢谢大家！

欢迎指导！！