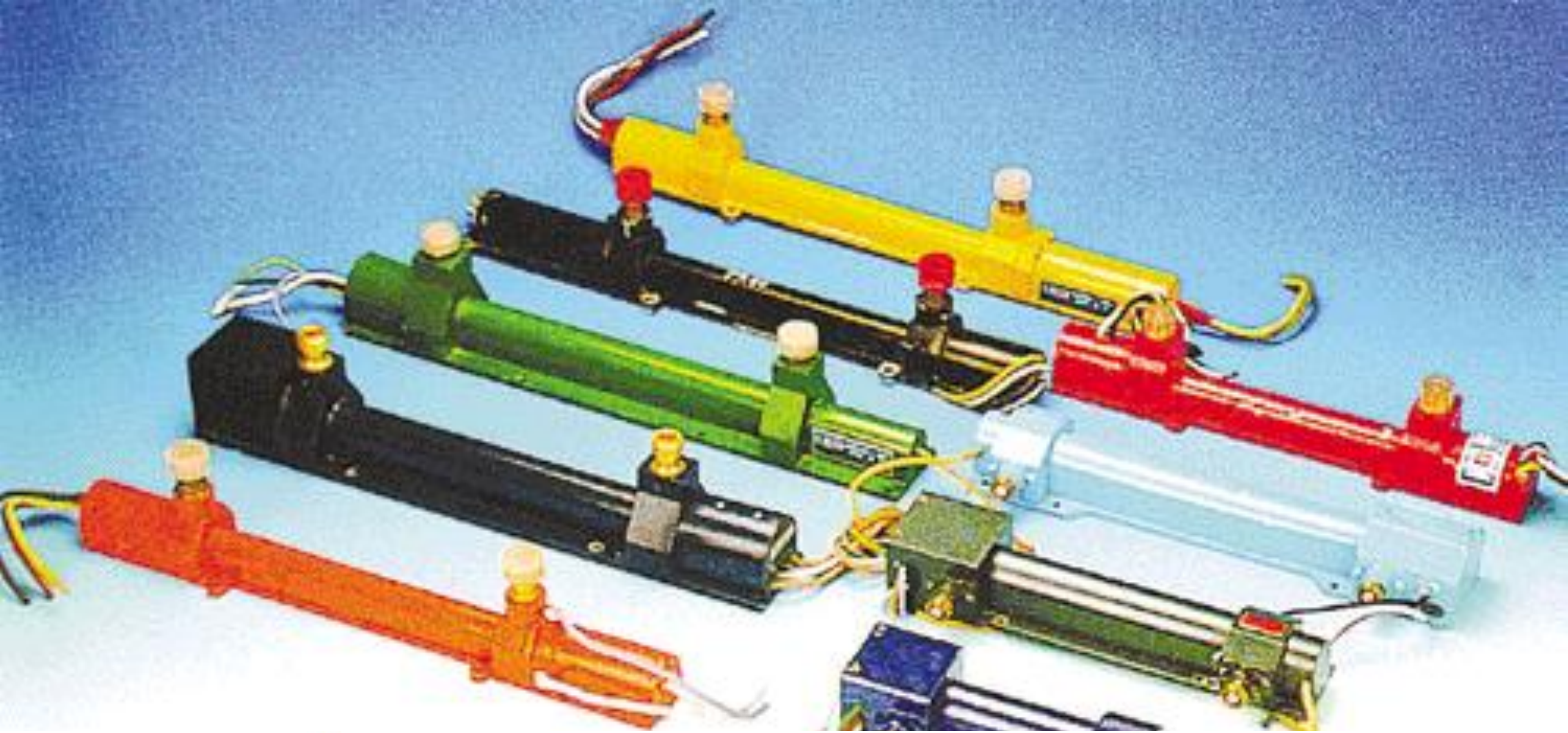
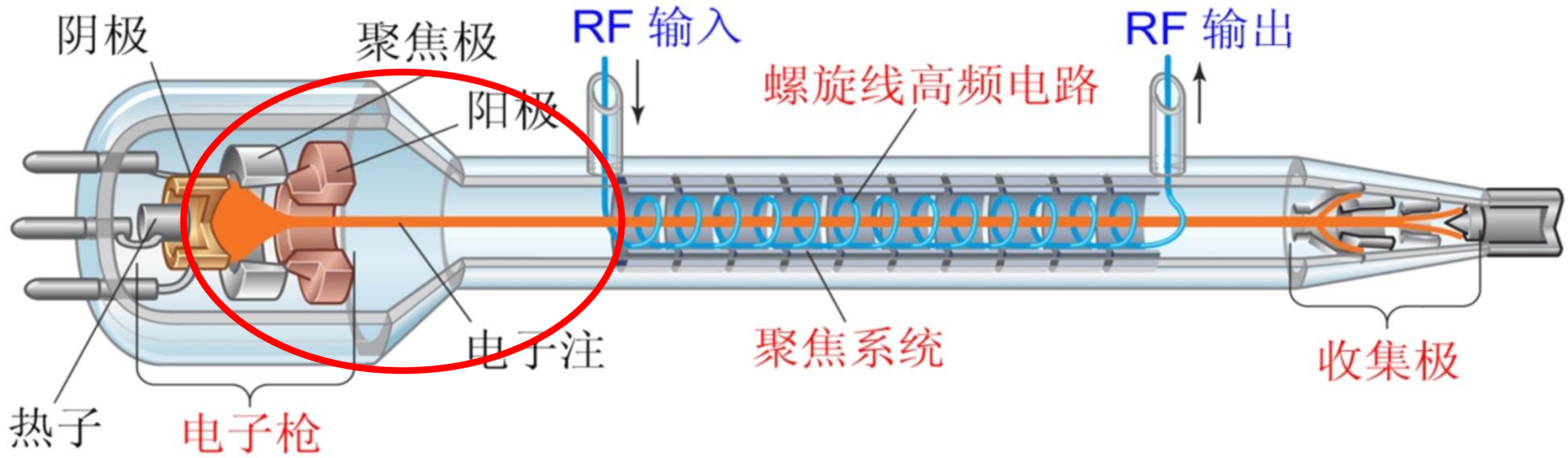
静电场数值计算方法

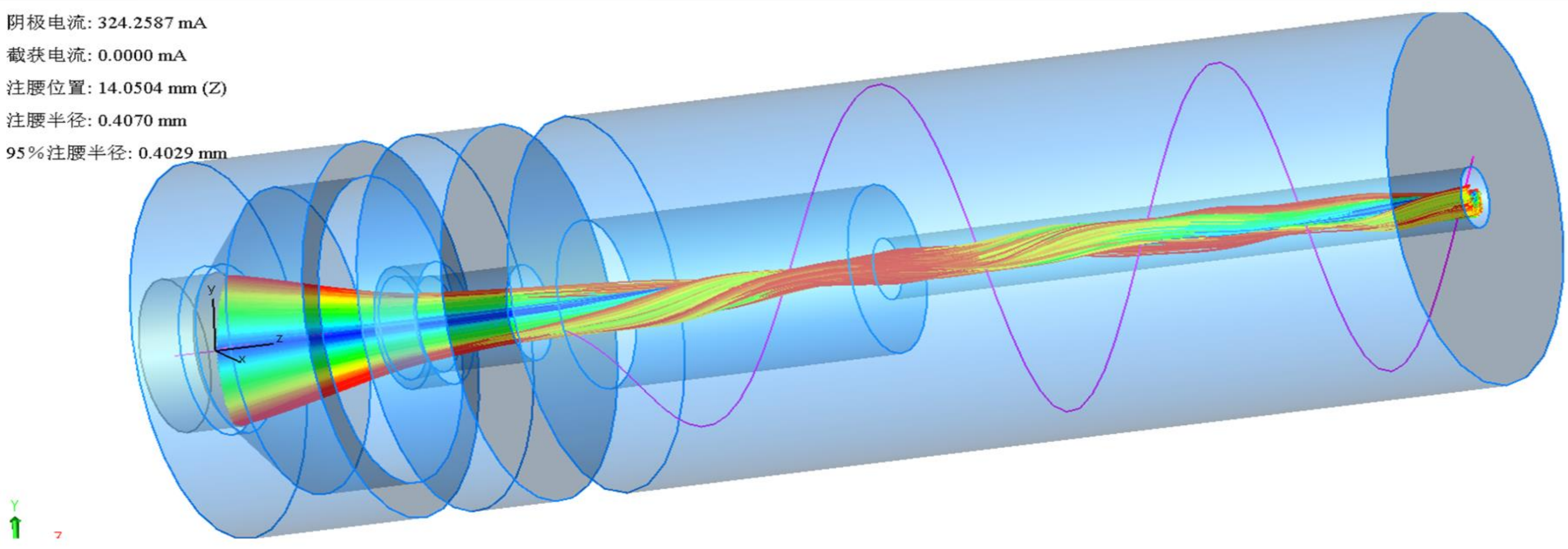
——行波管电子光学基本理论与数值模拟技术

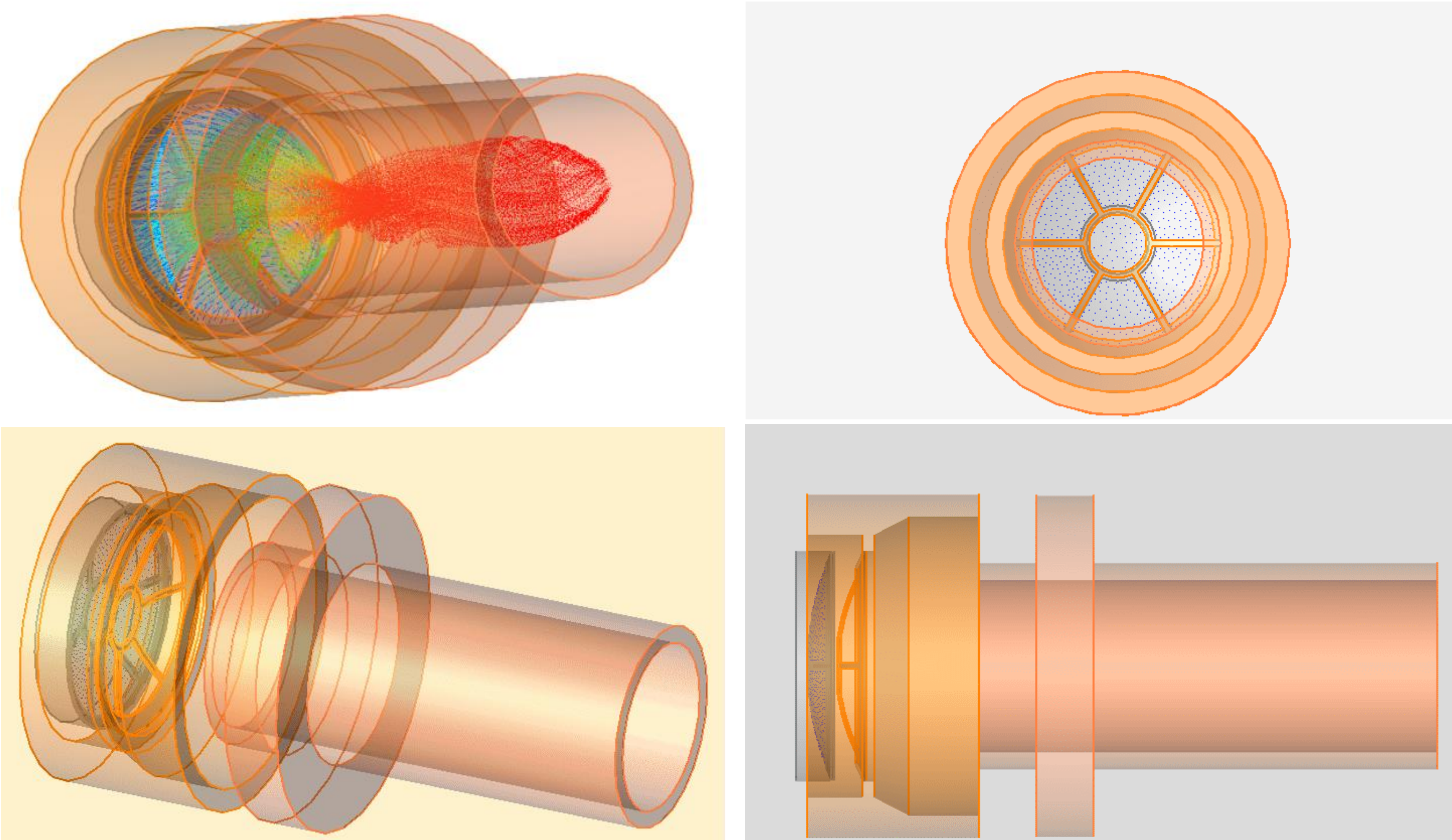
行波管电子光学是什么？



2
6
1
5
3
4
8


阴极
聚焦极
阳极
RF 输入
RF 输出
螺旋线高频电路
电子注
聚焦系统
收集极
热子
电子枪


阴极电流: 324.2587 mA
截获电流: 0.0000 mA
注腰位置: 14.0504 mm (Z)
注腰半径: 0.4070 mm
95%注腰半径: 0.4029 mm



电子光学基本理论

行波管电子光学系统由**电子枪**，**磁聚焦系统**和**多级降压收集极**三部分组成，内容涉及电子注的产生、成形、维持和收集。没有电子枪产生电子注，没有聚焦系统维持一定截面形状的电子注，就无法产生能量交换和信号放大。而且，电子注的质量和相关参量从根本上决定了诸如效率、增益、工作稳定性和噪声特性这样一些行波管的重要参量。因此，电子光学系统的设计是行波管设计中的重要一环。

电子光学基本方程组的建立

电子光学基本方程的建立

- 微分形式的麦克斯韦方程组为：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

电子光学基本方程的建立

- 采用稳态方式求解，引入如下假设：

  1.涉及的场为静态场；

  2.仅限于真空中。

- 则真空中静电场和静磁场的麦克斯韦方程变为：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = -\rho$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

电子光学基本方程的建立

- 强流电子光学基本方程由麦克斯韦方程、电磁场中电子运动方程和电流连续性方程三部分组成。

$$
\left.
\begin{aligned}
&\nabla^2 U = \rho / \varepsilon_0 \\
&\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A} \right) = \boldsymbol{J} \\
&\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v} \right) = -e\left(\boldsymbol{E} + \mathbf{v} \times \boldsymbol{B} \right) \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\boldsymbol{J} = -\rho \mathbf{v}$$

数值求解方法

数值求解方法

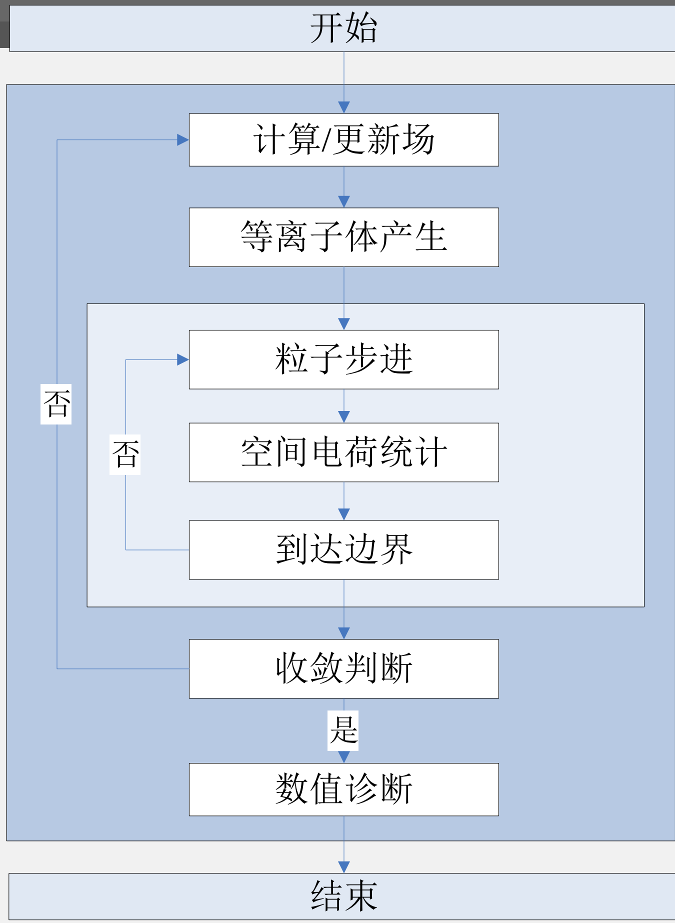
● 在给定**边界条件**和**初始条件**下，对**Maxwell方程组**和**Lorentz方程**进行求解。

有限差分法（Finite Difference Method， 简称FDM）

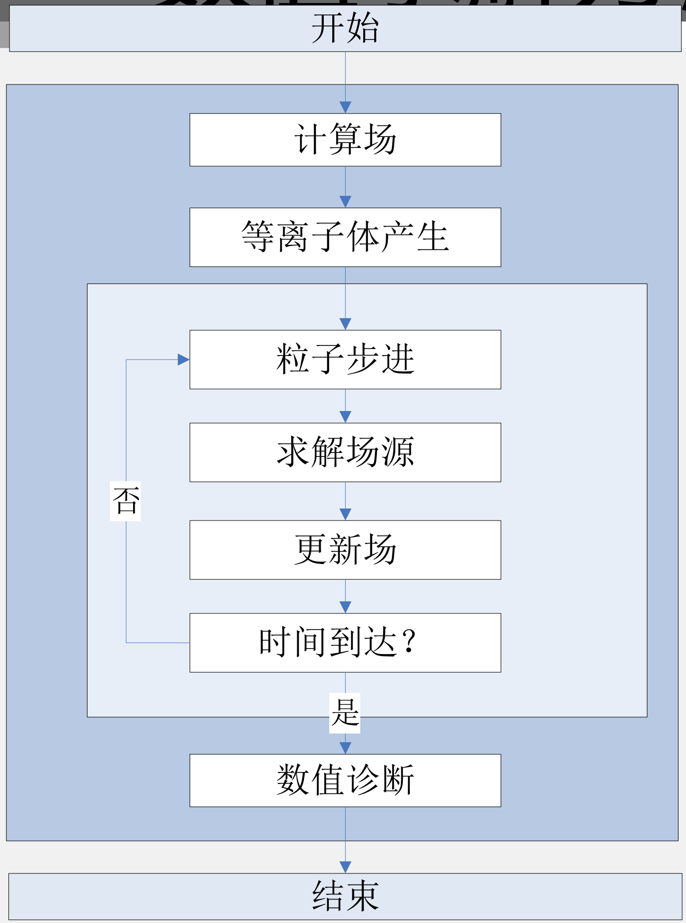
有限元法（Finite Element Method，简称FEM）

有限积分法（Finite Integration Method，简称FIM）

数值求解方法



静态求解程序流程图



时域求解程序流程图

概要

- 有限差分法
- 有限元法
- 两种方法比较

概要

- **有限差分法**
- 有限元法
- 两种方法比较

有限差分法

有限差分法是以**差分原理**为基础的一种数值方法，它实质上是将电磁场连续域的问题变换为离散系统的问题来求解，也就是通过网格状离散化模型上各离散点的数值解来**逼近**连续域的真实解。有限差分法的应用范围很广，不但能求解均匀或不均匀线性媒质中的位场，而且还能求解非线性媒质中的场；它不仅能求解恒定场或准稳态场，还能求解时变场。在边值问题的数值方法中。使用有限差分算法的代表性软件有**MAGIC**。

有限差分法

- 19世纪末提出；
- 20世纪50年代用于数值分析；
- 简单直观、容易掌握。

有限差分法

- 一阶导数：

$$f'(x)=\frac{df}{dx}$$

- 应用差分，他可以近似的表示为：

$$\frac{df}{dx}\approx\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\text{(前向差分）}$$

$$\frac{df}{dx}\approx\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x-h)}{h}\text{(后向差分）}$$

$$\frac{df}{dx}\approx\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\text{(中心差分）}$$

有限差分法

- 二阶导数：

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{df}{dx}\bigg|_{x^+} - \frac{df}{dx}\bigg|_{x^-}\right)$$

$$\approx \frac{1}{h}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x)-f(x-h)}{h}\right]$$

$$= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$$

有限差分法

- 求解

1）采用 …形、平

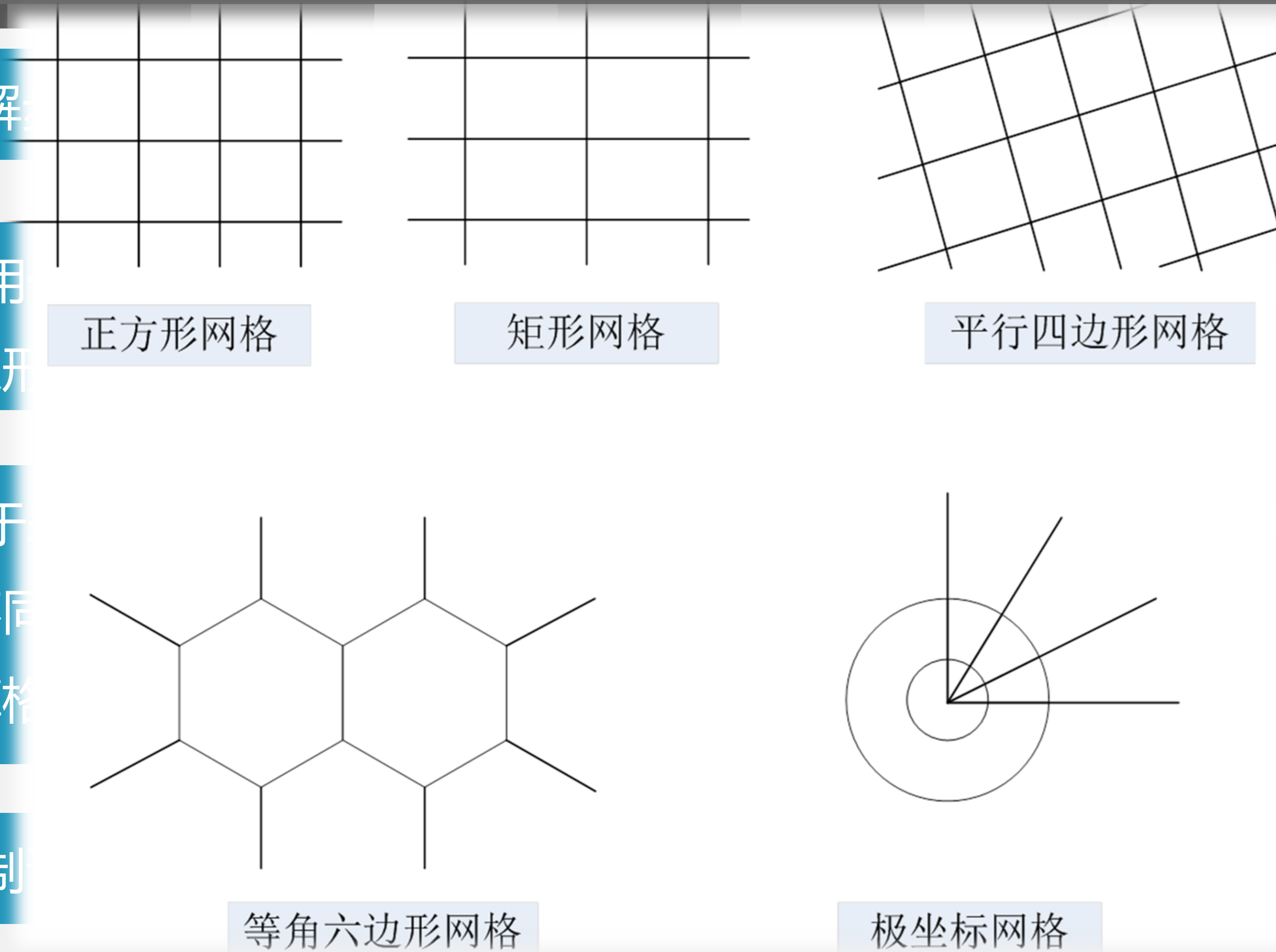
行四边

2）基于 …包括场

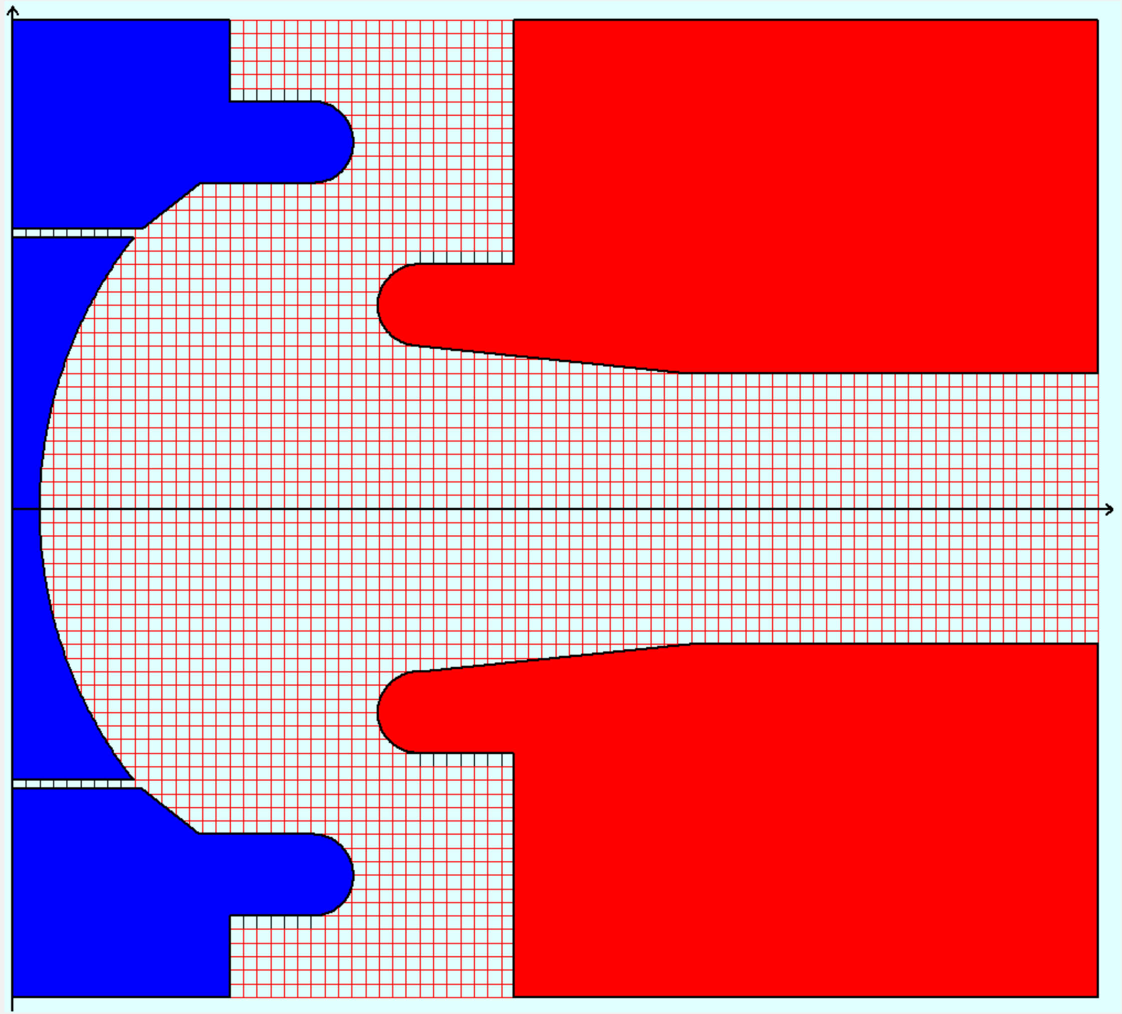
域内不同 …应的差

分计算格

3）编制



有限差分法



有限差分法

- 二维差分网格空间电位分布求解

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

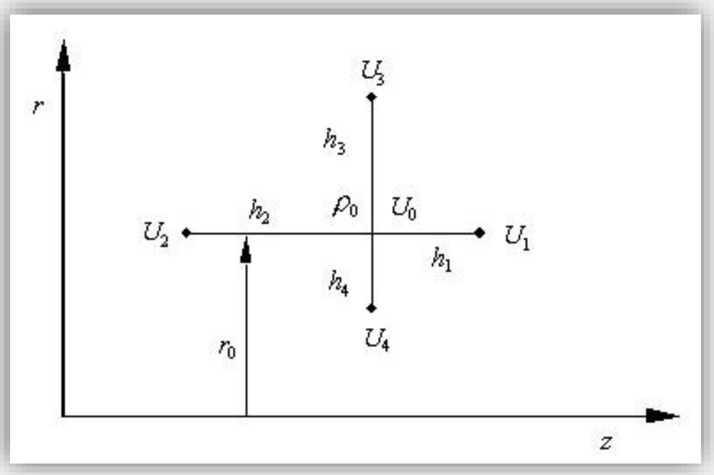
$\frac{\partial U}{\partial \theta}=0 \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}=0$

$$\xrightarrow{\qquad}\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

有限差分法

不等距网格

$$C_1U_1 + C_2U_2 + C_3U_3 + C_4U_4 - C_0U_0 = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0}$$



$$C_1 = \frac{2}{h_1\left(h_1 + h_2\right)} \qquad C_2 = \frac{2}{h_2\left(h_1 + h_2\right)}$$

$$C_3 = \frac{2r_0 + h_4}{r_0h_3\left(h_3 + h_4\right)} \qquad C_4 = \frac{2r_0 - h_3}{r_0h_4\left(h_3 + h_4\right)} \qquad C_0 = \left(\frac{2}{h_1h_2} + \frac{2}{h_3h_4} - \frac{h_3 - h_4}{r_0h_3h_4}\right)$$

有限差分法

● 不等距网格

如果寻求较精确的差分网格，可引入待定常数α，β，由U_1和U_2的泰勒展开，构造关系式：

$$\alpha(U_3-U_0)+\beta(U_4-U_0)=\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)_0(\alpha h_3-\beta h_4)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right)(\alpha h_3^{\ 2}-\beta h_4^{\ 2})+\cdots$$

$$(\alpha h_3^{\ 2}-\beta h_4^{\ 2})=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial r}\approx\frac{h_4^{\ 2}(U_3-U_0)-h_3^{\ 2}(U_4-U_0)}{h_3h_4(h_3+h_4)}$$

$$(\alpha h_3-\beta h_4)=0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\approx 2\frac{h_4(U_3-U_0)+h_3(U_4-U_0)}{h_3h_4(h_3+h_4)}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\approx 2\frac{h_2(U_1-U_0)+h_1(U_2-U_0)}{h_1h_2(h_1+h_2)}$$

有限差分法

不等距网格——轴上

$$\lim_{r\to 0}\frac{\partial U}{\partial r}\cdot\frac{1}{r}=\left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{r=0} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$h_3=h_4 \qquad U_3=U_4$$

$$C_1=\frac{2}{h_1\left(h_1+h_2\right)} \qquad C_2=\frac{2}{h_2\left(h_1+h_2\right)}$$

$$C_3=\frac{4}{h_3^{\ 2}} \qquad C_4=0 \qquad C_0=\frac{2}{h_1h_2}+\frac{4}{h_3^2}$$

有限差分法

- 等距网格——非轴上

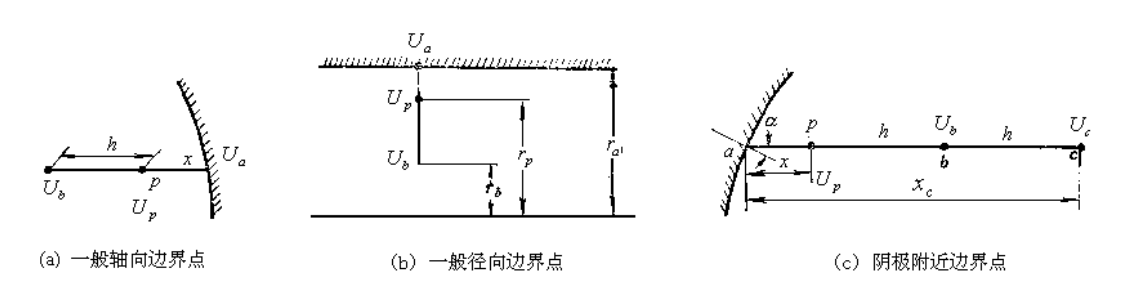
$$U_1 + U_2 + \left(1 + \frac{h}{2r_0}\right)U_3 + \left(1 - \frac{h}{2r_0}\right)U_4 - 4U_0 - \frac{h^2\rho_0}{\varepsilon_0} = 0$$

- 等距网格——轴上

$$U_1 + U_2 + 2U_3 - 4U_0 - \frac{h^2\rho_0}{\varepsilon_0} = 0$$

有限差分法

边界条件



直接转移法

$$U_p = U_a$$

函数插值法

$$U_p = U_a + \frac{U_b - U_a}{h + x} x$$

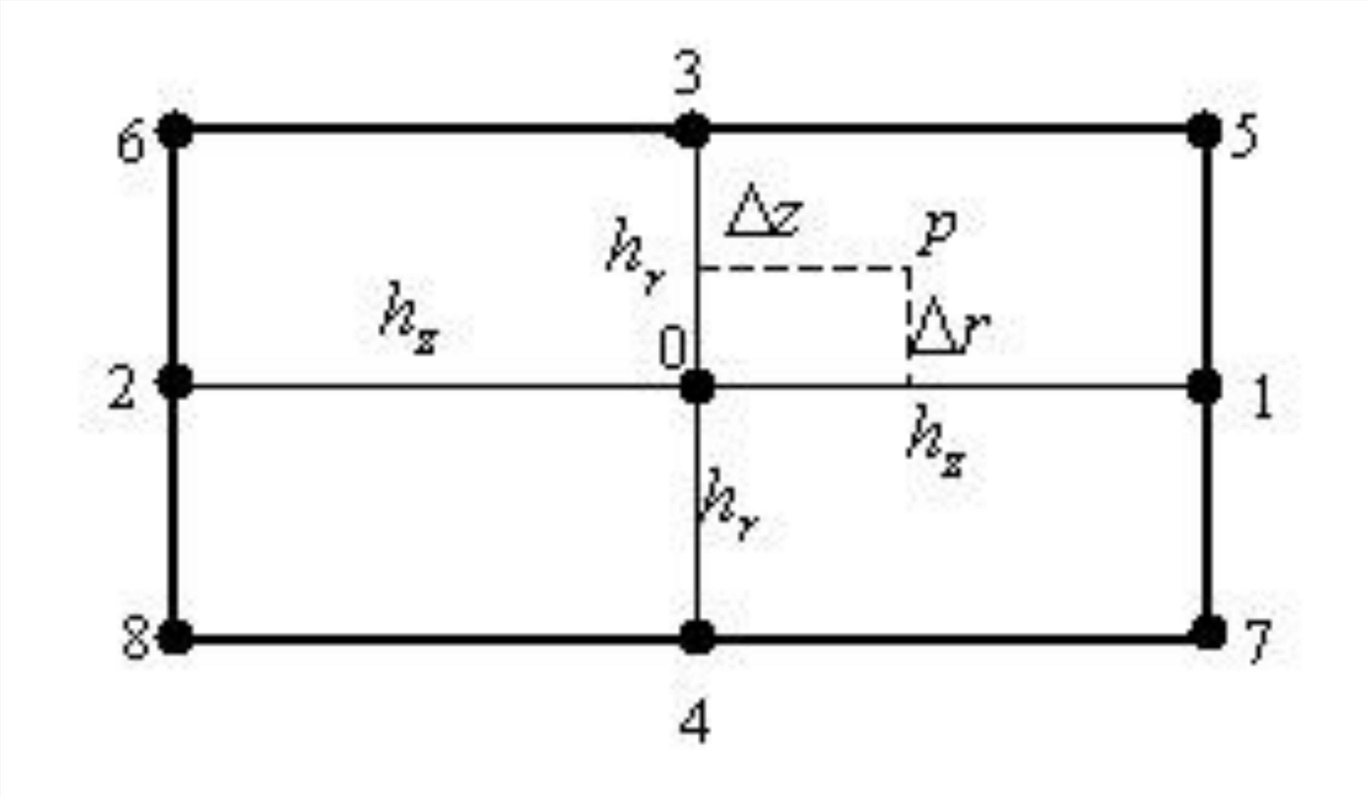
$$U_p = U_b + \left(U_a - U_b\right) \frac{ln\left(r_p / r_b\right)}{ln\left(r_a / r_b\right)}$$

差分公式法

直接采用不等距五点差分公式计算边界点电位。

有限差分法

- 二维差分网格电场求解：九点插值公式计算电场分布



有限差分法

- 泰勒（Taylor）九点展开公式：

$$U_p = U_0 + a_1\Delta z + b_1\Delta r + a_2\Delta z^2 + b_2\Delta r^2 + c_1\Delta z\Delta r$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_p = a_1 + 2a_2\Delta z + c_1\Delta r \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_p = b_1 + 2b_2\Delta r + c_1\Delta z$$

$$a_1 = \frac{U_1 - U_2}{2h_z} \qquad a_2 = \frac{U_1 - 2U_0 + U_2}{2h_z^2}$$

$$b_1 = \frac{U_3 - U_4}{2h_r} \qquad b_2 = \frac{U_3 - 2U_0 + U_4}{2h_r^2}$$

$$c_1 = \frac{U_5 - U_6 - U_7 + U_8}{4h_z h_r}$$

有限差分法

- 泰勒（Taylor）九点展开公式：

$$U_p = U_0 + a_1\Delta z + b_1\Delta r + a_2\Delta z^2 + b_2\Delta r^2 + c_1\Delta z\Delta r$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_p = a_1 + 2a_2\Delta z + c_1\Delta r \qquad \left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_p = b_1 + 2b_2\Delta r + c_1\Delta z$$

$$a_1 = \frac{U_1 - U_2}{2h_z} \qquad a_2 = \frac{U_1 - 2U_0 + U_2}{2h_z^2}$$

$$b_1 = \frac{U_3 - U_4}{2h_r} \qquad b_2 = \frac{U_3 - 2U_0 + U_4}{2h_r^2}$$

$$c_1 = \frac{U_5 - U_6 - U_7 + U_8}{4h_z h_r}$$

有限差分法

- 拉格朗日（Lagrange）九点插值公式：

$$U_p = U_0 + a_1\Delta z + b_1\Delta r + a_2\Delta z^2 + b_2\Delta r^2 + c_1\Delta z\Delta r + c_2\Delta z^2\Delta r + c_3\Delta z\Delta r^2 + c_4\Delta z^2\Delta r^2$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_p = a_1 + 2a_2\Delta z + c_1\Delta r + 2c_2\Delta z\Delta r + c_3\Delta r^2 + 2c_4\Delta z\Delta r^2$$

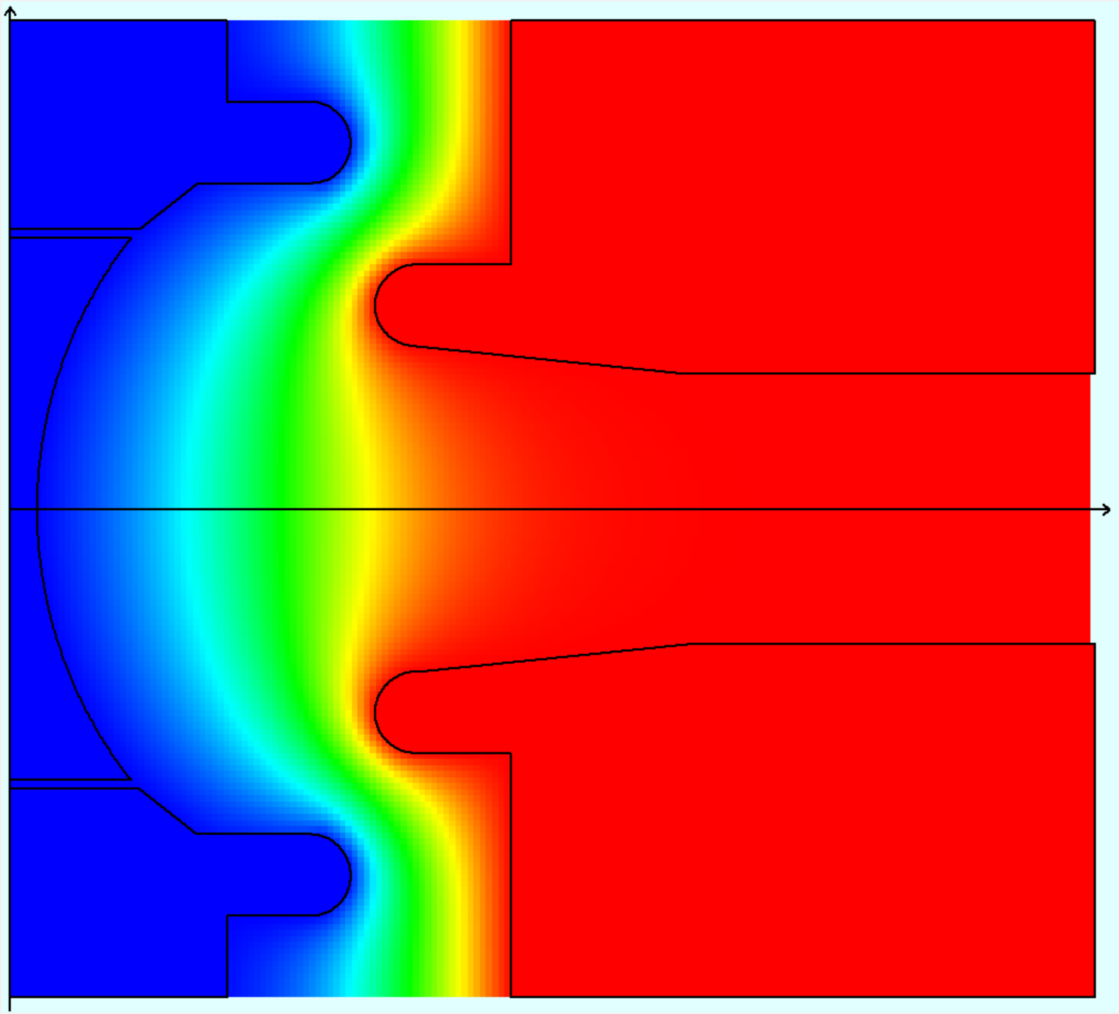
$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_p = b_1 + 2b_2\Delta r + c_1\Delta z + c_2\Delta z^2 + 2c_3\Delta z\Delta r + 2c_4\Delta z^2\Delta r$$

式中的a_1、b_1、a_2、b_2和c_1与泰勒九点展开式相同。其余参数为：

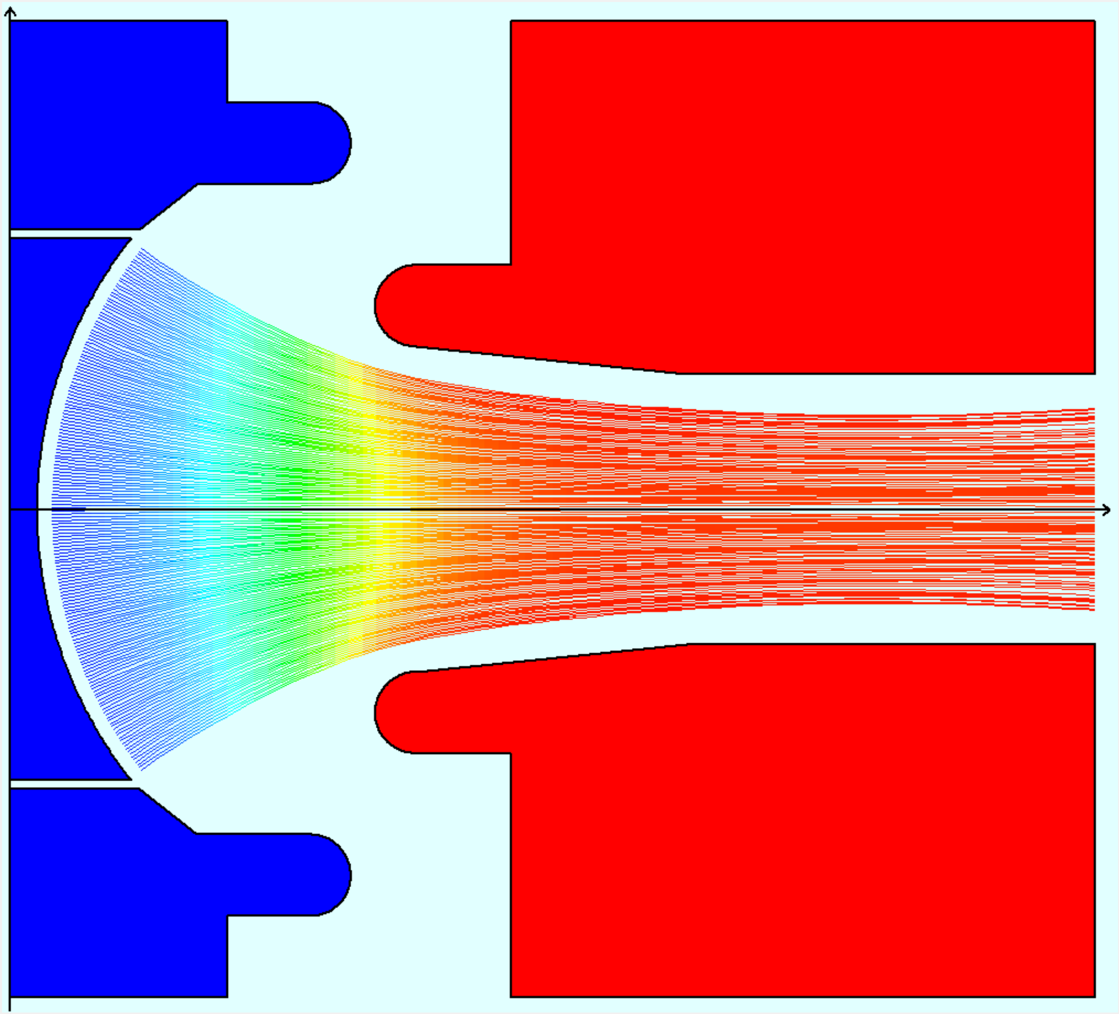
$$c_2 = \frac{U_5 - U_7 + U_6 - U_8 - 2(U_3 - U_4)}{4h_z^2 h_r} \qquad c_3 = \frac{U_5 + U_7 - U_6 - U_8 - 2(U_1 - U_2)}{4h_r^2 h_z}$$

$$c_4 = \frac{4U_0 - 2(U_1 + U_2 + U_3 + U_4) + U_5 + U_7 + U_6 + U_8}{4h_z^2 h_r^2}$$

有限差分法



有限差分法



有限差分法

- 网格结构简单
- 算法容易实现
- 易于跟踪粒子运动

- 计算资源耗费大
- 计算速度慢
- 复杂边界匹配不精确

概要

- 有限差分法
- **有限元法**
- 两种方法比较

有限元法

有限元方法就是以**变分原理**和**剖分逼近**为基础，发展了传统的里茨 - 伽辽金（Ritz-Galerkin）方法，并融会了差分法的优点的数值计算方法。它将求解域看成是由许多称为有限元的小的互连子域组成，对每一单元假定一个合适的(较简单的）近似解，然后推导求解这个域总的满足条件，从而得到问题的解。使用有限元算法的代表性软件有**HFSS**。

有限元法

- 20世纪40年代提出（力学领域）；
- 50年代用于飞机设计；
- 60年代末70年代初，应用于电磁场工程领域。

有限元法

- 求解步骤：

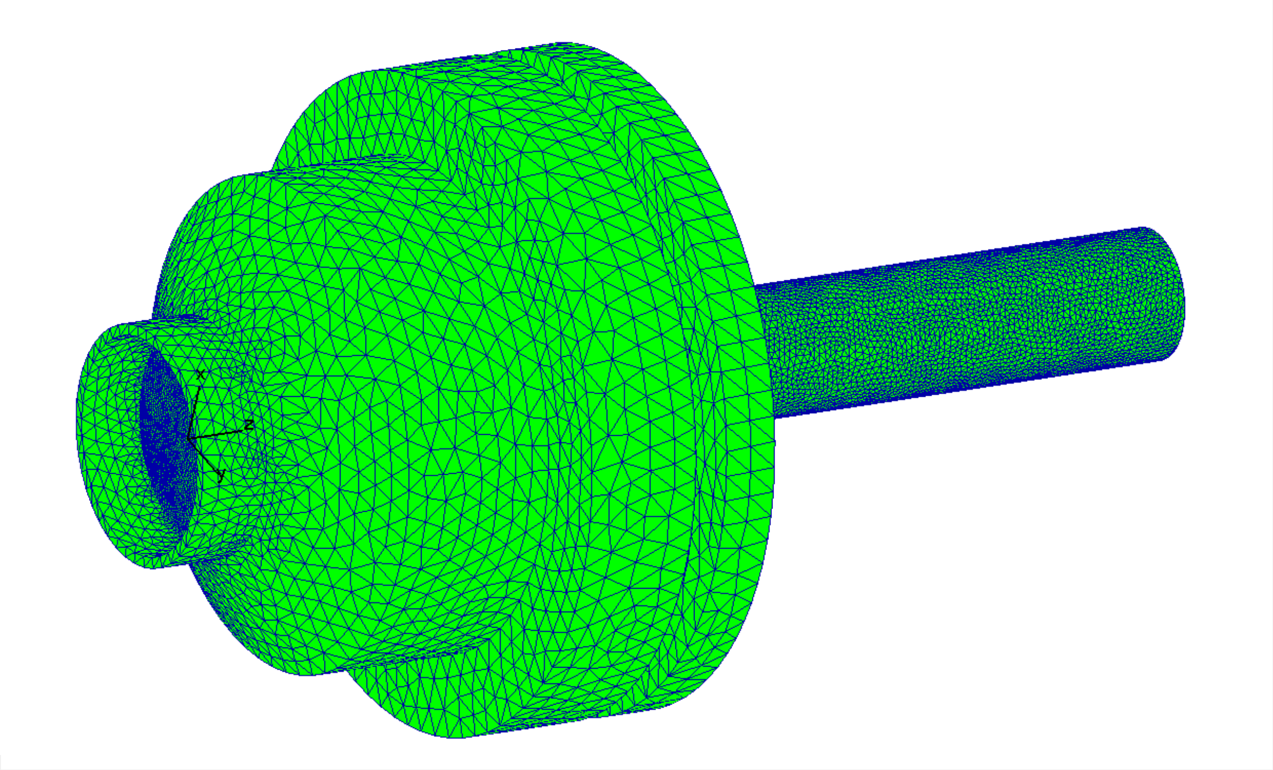
1）区域的离散或子域划分；

2）有限元分析，选择插值函数；

3）方程组的建立，边界条件强加；

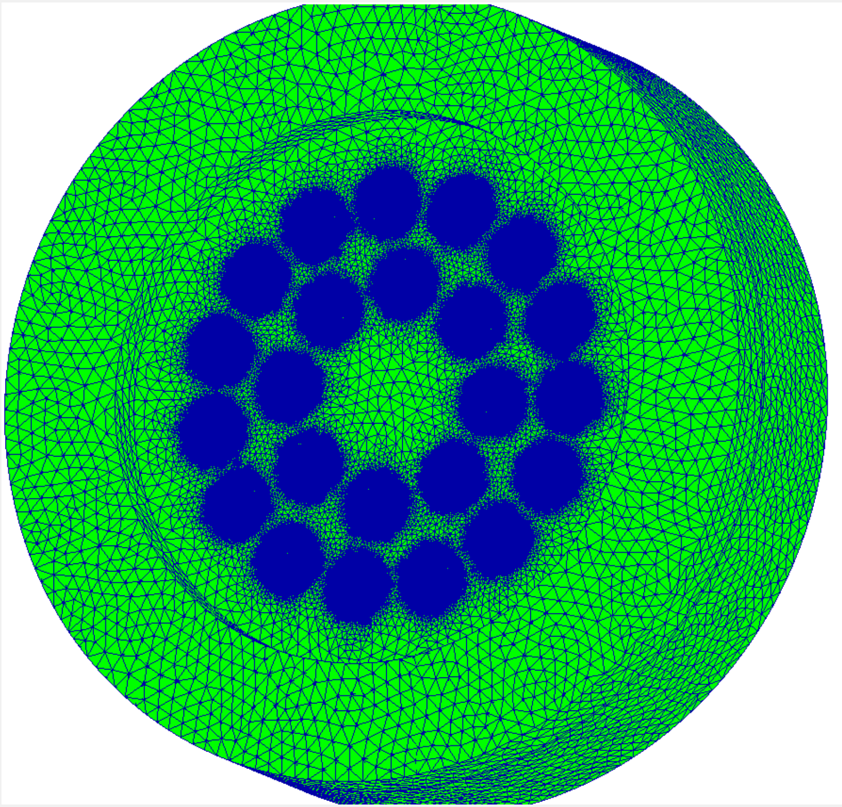
4）方程组的求解。

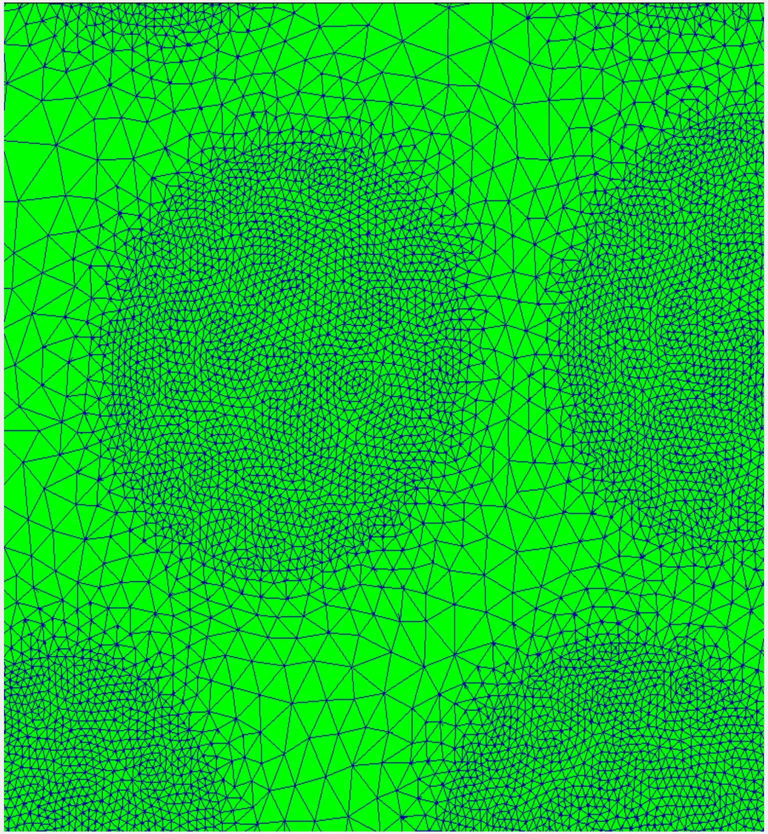
- 区域的离散或子域划分：



有限元法

- 区域的离散或子域划分：





- 有限元分析，选择插值函数：

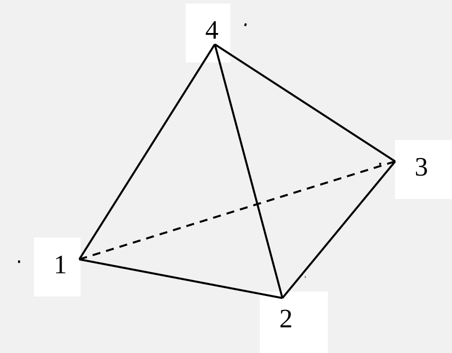
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha_x \frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha_y \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)--\frac{\partial}{\partial z}\left(\alpha_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)+\beta\Phi = f \qquad (x,y,z)\in V$$

$$\begin{cases} \delta F(\Phi)=0 \\ \Phi = p \qquad 在S_1上 \end{cases}$$

$$F(\Phi)=\frac{1}{2}\iiint_V\left[\alpha_x\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2+\alpha_y\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2+\alpha_z\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2+\beta\Phi^2\right]dV$$
$$+\iint_{S_2}\left(\frac{\gamma}{2}\Phi^2-q\Phi\right)dS-\iiint_V f\Phi dV$$

- 有限元分析，选择插值函数：

$$\Phi^e(x,y,z)=a^e+b^e x+c^e y+d^e z$$



$$\Phi_j^e(x,y,z)=a^e+b^e x_j^e+c^e y_j^e+d^e z_j^e$$

$$a^e=\frac{1}{6V^e}\begin{vmatrix}\Phi_1^e & \Phi_2^e & \Phi_3^e & \Phi_4^e\\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e\\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & y_4^e\\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e\end{vmatrix}=\frac{1}{6V^e}\left(a_1^e\Phi_1^e+a_2^e\Phi_2^e+a_3^e\Phi_3^e+a_4^e\Phi_4^e\right)$$

$$a_1^e=\begin{vmatrix}x_2^e & x_3^e & x_4^e\\ y_2^e & y_3^e & y_4^e\\ z_2^e & z_3^e & z_4^e\end{vmatrix}\qquad V^e=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ x_1^e & x_2^e & x_3^e & x_4^e\\ y_1^e & y_2^e & y_3^e & z_4^e\\ z_1^e & z_2^e & z_3^e & z_4^e\end{vmatrix}$$

- 方程组的建立，边界条件强加：

$$\Phi^e(x,y,z)=\sum_{j=1}^{4}N_j^e(x,y,z)\Phi_j^e \qquad N_j^e(x,y,z)=\frac{1}{6V_e}\left(a_j^e+b_j^e x+c_j^e y+d_j^e z\right)$$

$$\frac{\partial F^e}{\partial \Phi_i^e}=\sum_{j=1}^{4}\Phi_i^e\iiint_{V^e}\left(\alpha_x\frac{\partial N_i^e}{\partial x}\frac{\partial N_j^e}{\partial x}+\alpha_y\frac{\partial N_i^e}{\partial y}\frac{\partial N_j^e}{\partial y}+\alpha_z\frac{\partial N_i^e}{\partial z}\frac{\partial N_j^e}{\partial z}+\beta N_i^e N_j^e\right)$$

$$\iiint_{V^e} f N_i^e dV \qquad i=1,2,3,4$$

$$\left\{\frac{\partial F^e}{\partial \Phi^e}\right\}=\left[K^e\right]\left\{\Phi^e\right\}-\left\{b^e\right\} \Longrightarrow \sum_{e=1}^{M}\left\{\overline{\frac{\partial F^e}{\partial \Phi^e}}\right\}=\sum_{e=1}^{M}\left(\left[\overline{K^e}\right]\left\{\overline{\Phi^e}\right\}-\left\{\overline{b^e}\right\}\right)=\{0\}$$

$$K_{ij}^e=\frac{1}{36V^e}\left(\alpha_x^e b_i^e b_j^e+\alpha_y^e c_i^e c_j^e+\alpha_z^e d_i^e d_j^e\right)+\frac{V^e}{20}\beta^e\left(1+\delta_{ij}\right) \qquad b_i^e=\frac{V^e}{4}f^e$$

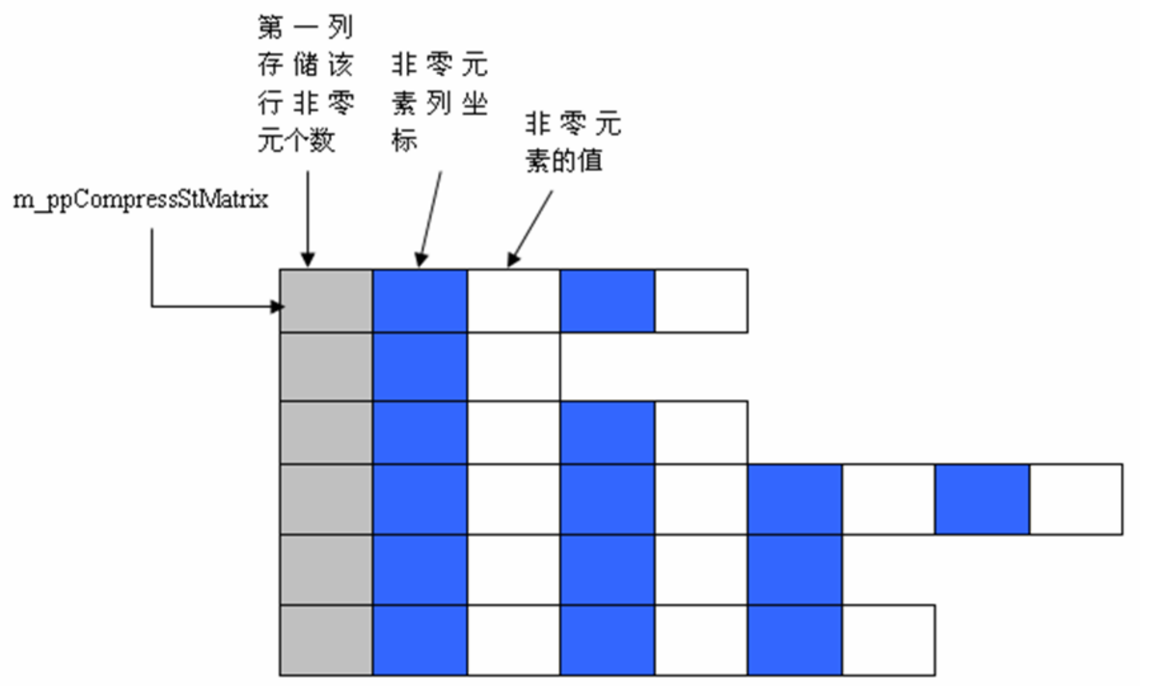
- 三维有限元网格电场求解：

　　对于一些实际的电子光学系统，需要比较密集的网格来实现复杂边界的拟合。而随着网格数的增加，矩阵的阶数快速增加，可以达到几千、几万、甚至是**上百万阶**。而对一个N阶矩阵，为所有N×N个元素分配空间，在物理上是不可能的。即使可以分配这么大的空间，它也是极为低效的。

　　可以证明刚度矩阵是**大型稀疏对称矩阵**，因此我们只需要保存**上三角**的非零元素即可。如下图所示，灰色框内保存该行上三角的非零元个数，蓝色框保存该非零元的列坐标，紧接其后保存该非零元的值。由此保存可以方便、快速的进行该矩阵与向量的乘法操作。

有限元法

如下图所示，灰色框内保存该行上三角的非零元个数，蓝色框保存该非零元的列坐标，紧接其后保存该非零元的值。由此保存可以方便、快速的进行该矩阵与向量的乘法操作。

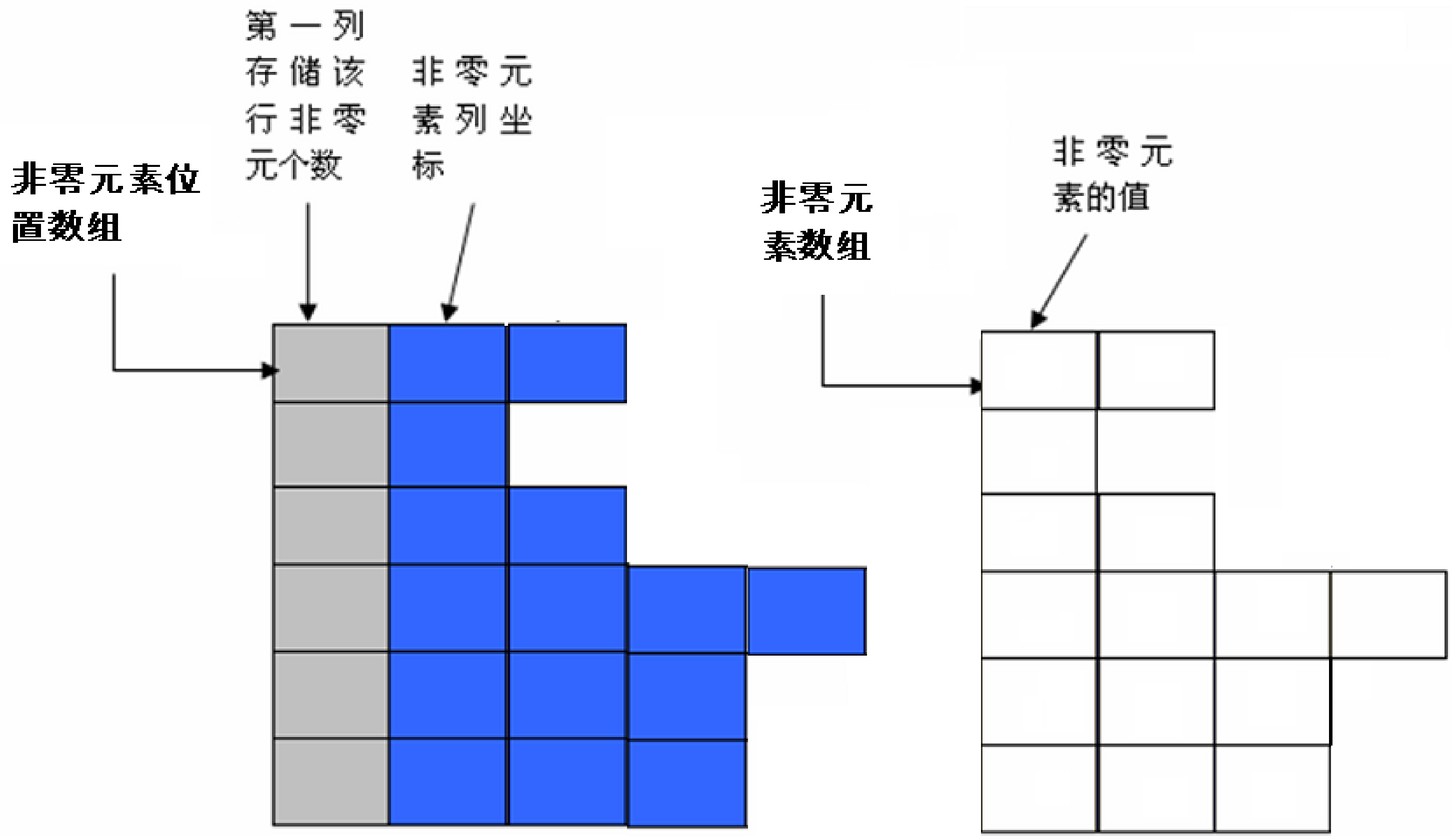


如下稀疏矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 45 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 56 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

3	1	1	4	3	4	4
2	2	5	5	6		
1	3	8				
2	4	45	7	2		
1	5	4				
1	6	56				
1	7	4				
1	8	2				

有限元法



- 方程组的求解：

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \Phi$$

$$\boldsymbol{E}^e = -\frac{1}{6V^e}\sum_{j=1}^{4}\left(b_j^e \hat{\boldsymbol{x}} + c_j^e \hat{\boldsymbol{y}} + d_j^e \hat{\boldsymbol{z}}\right)\Phi_j^e$$

它是一个常矢量。也就是说采用线性四面体单元时，网格单元内的电场处处相等。

- 方程组的求解：

共轭梯度法：

$$
\begin{aligned}
& k = 0 \\
& r_0 = b - Ax \\
& while(r_k \neq 0) \\
& \qquad k = k + 1 \\
& \qquad if(k = 1) \\
& \qquad\qquad p_1 = r_0 \\
& \qquad else \\
& \qquad\qquad \beta_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / r_{k-2}^T r_{k-2} \\
& \qquad\qquad p_k = r_{k-1} + \beta_k p_{k-1} \\
& \qquad end \\
& \qquad \alpha_k = r_{k-1}^T r_{k-1} / p_k^T A p_k \\
& \qquad x_k = x_{k-1} + \alpha_k p_k \\
& \qquad r_k = r_{k-1} - \alpha_k A p_k \\
& end \\
& x = x_k
\end{aligned}
$$

迭代次数

余量

搜索向量

收敛系数

- 方程组的求解：

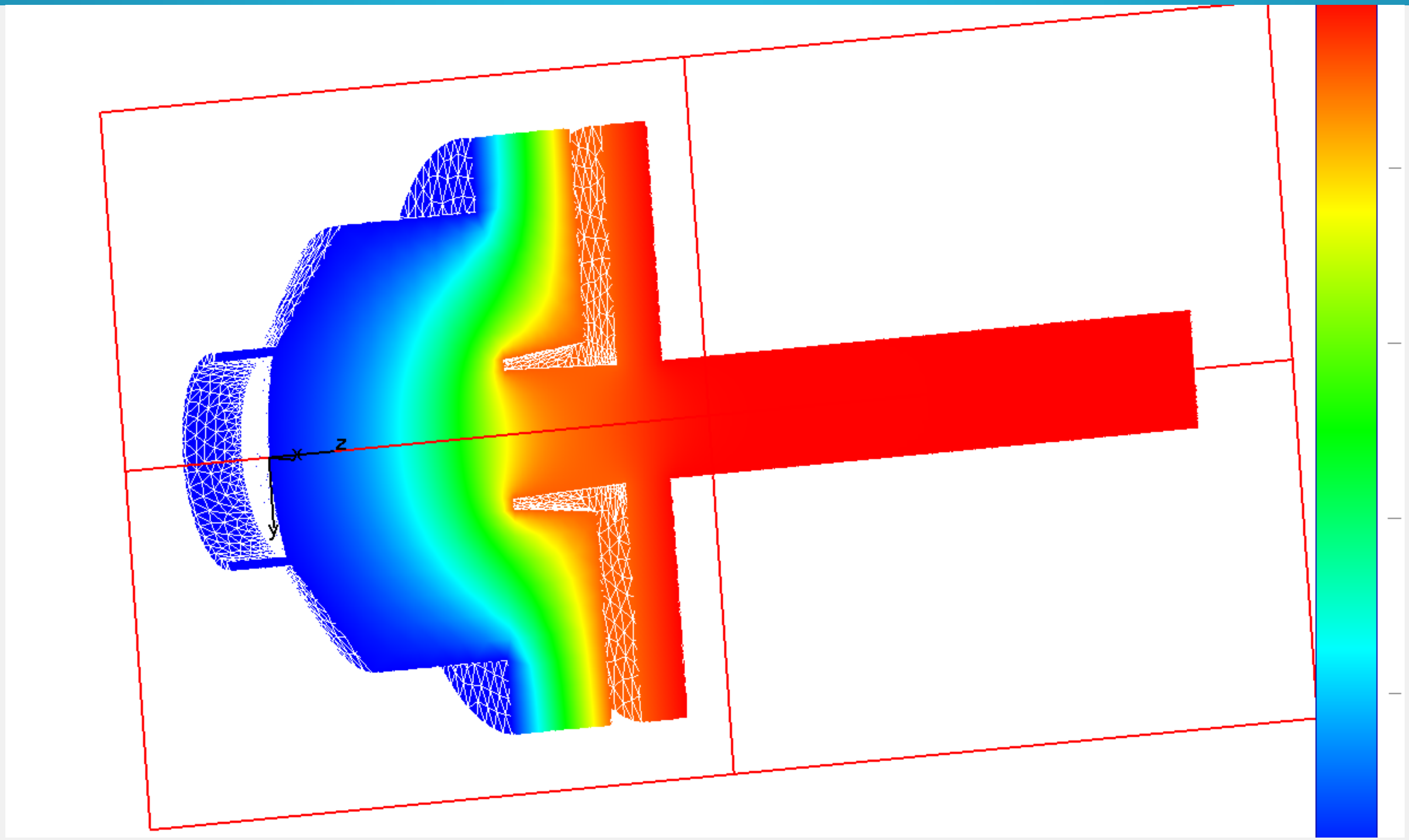
$$\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi$$

$$\boldsymbol{E}^{e}=-\frac{1}{6V^{e}}\sum_{j=1}^{4}\left(b_{j}^{e}\hat{\boldsymbol{x}}+c_{j}^{e}\hat{\boldsymbol{y}}+d_{j}^{e}\hat{\boldsymbol{z}}\right)\Phi_{j}^{e}$$

它是一个常矢量。也就是说采用线性四面体单元时，网格单元内的电场处处相等。

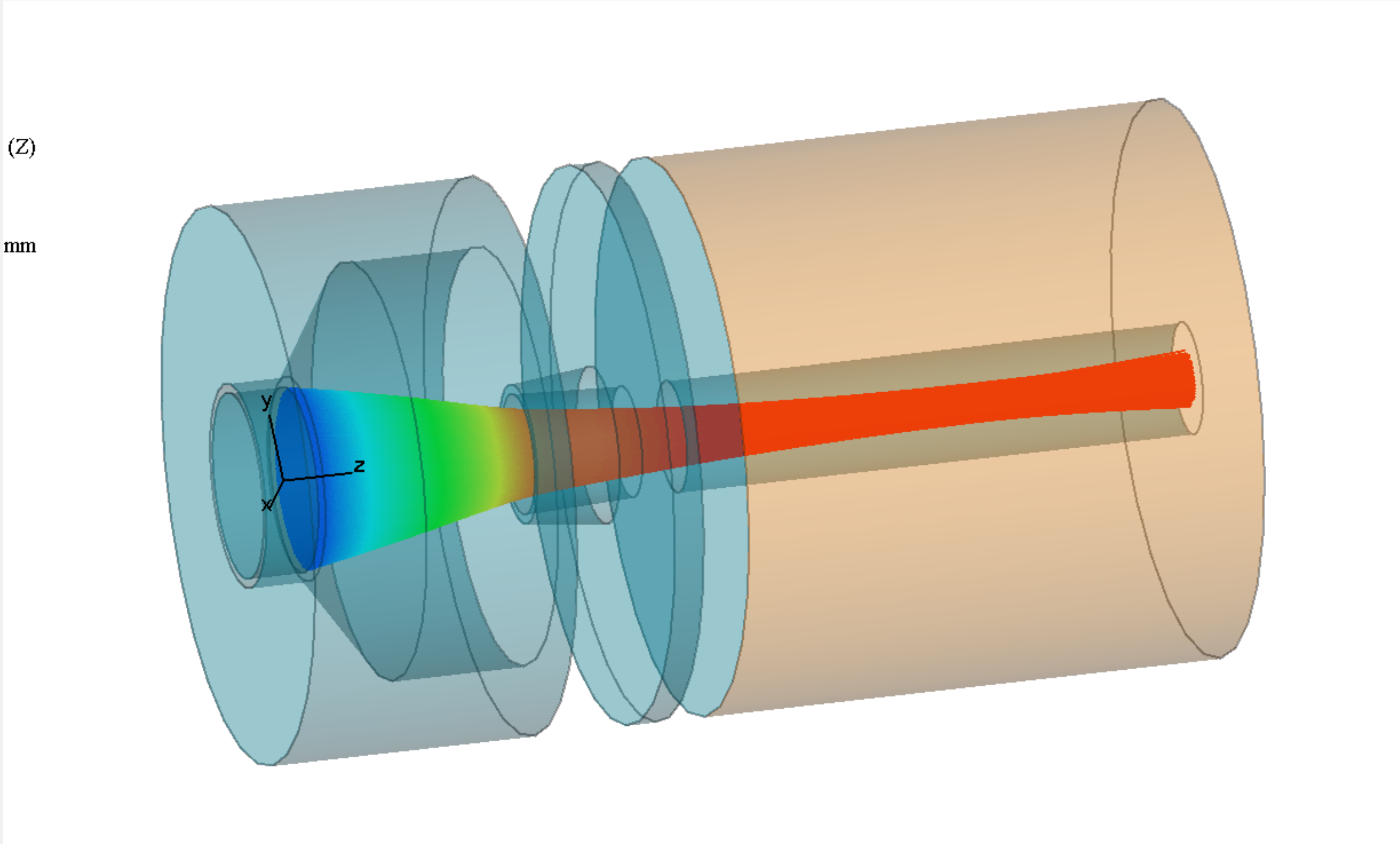
有限元法

- 电场求解：



有限元法

- 轨迹求解：



有限元法

- 边界匹配准确，易于实现局部加密
- 求解速度快
- 通用性强，具有较高的精度
- 资源相对较多

- 区域离散过程复杂
- 求解公式推导繁琐
- 不易跟踪粒子运动

概要

- 有限差分法
- 有限元法
- **两种方法比较**

两种方法比较

有限差分法

- 网格结构简单
- 算法容易实现
- 易于跟踪粒子运动

- 计算资源耗费大
- 计算速度慢
- 复杂边界匹配不精确

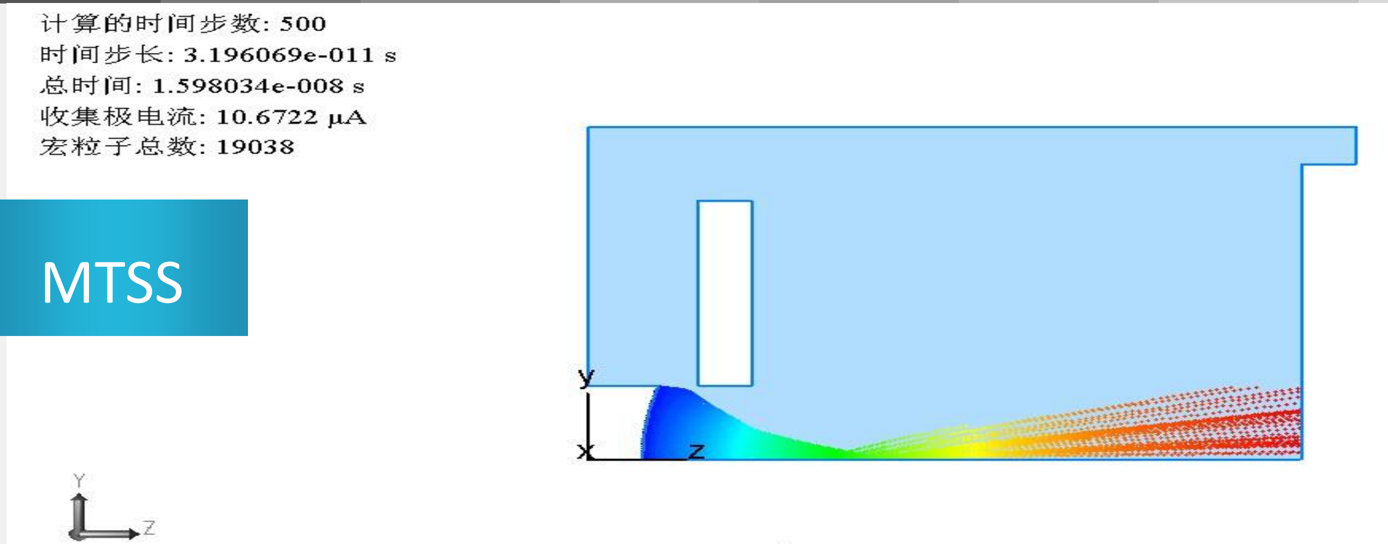
有限元法

- 边界匹配准确，易于实现局部加密
- 求解速度快
- 通用性强，具有较高的精度
- 资源相对较多

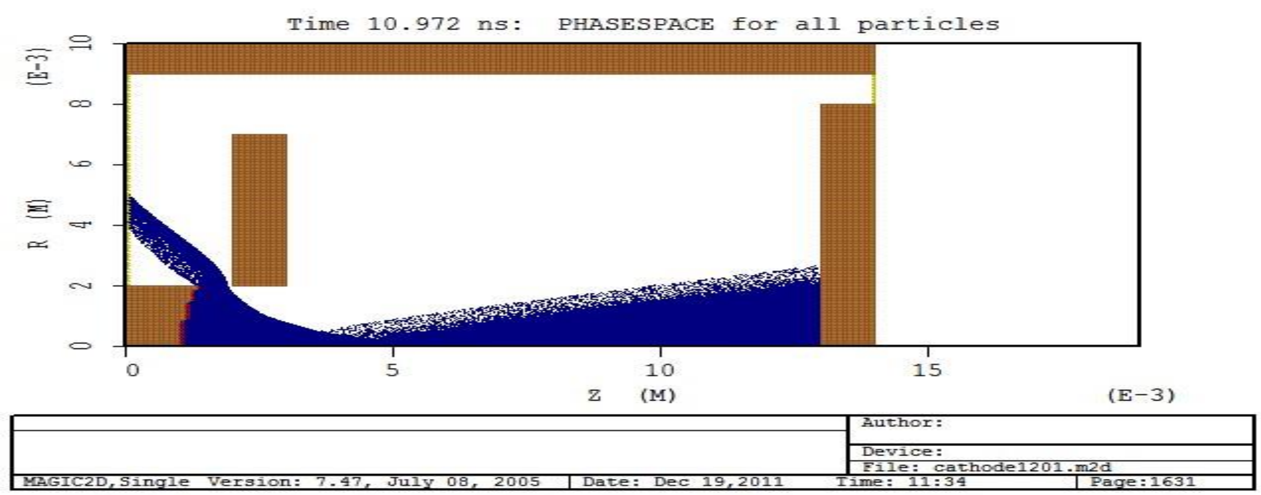
- 区域离散过程复杂
- 求解公式推导繁琐
- 不易跟踪粒子运动

两种方法比较

MTSS

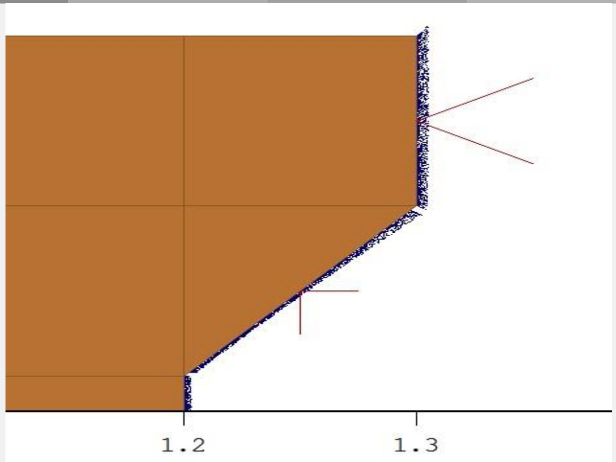


MAGIC

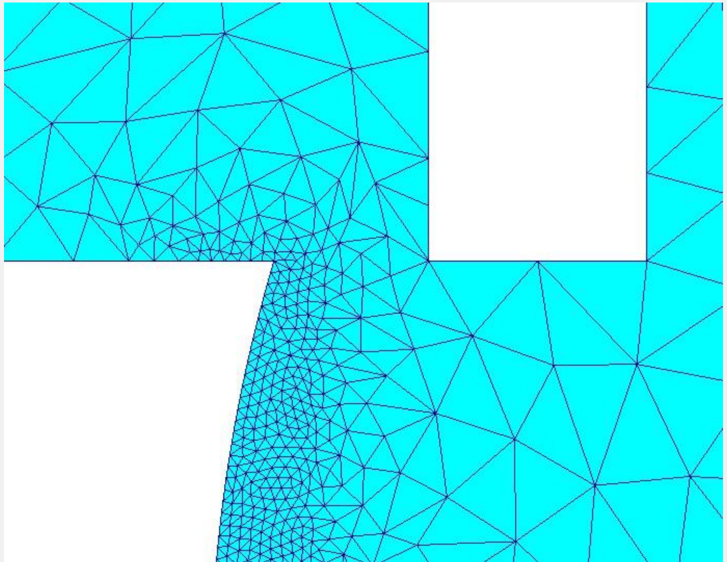


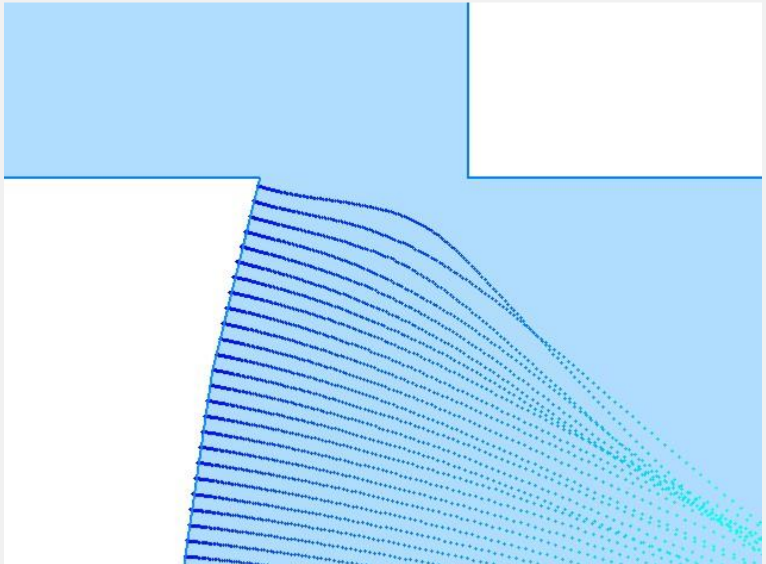
两种方法比较

MAGIC



MTSS





概要

- 电子运动方程
- 阴极热电子发射
- 二次电子发射

概要

- **电子运动方程**
- 阴极热电子发射
- 二次电子发射

电子运动方程

- 圆柱坐标系下，考虑相对论效应时的电子运动方程：

$$\ddot{z} = -\frac{\eta}{\gamma}\left[\left(1-\frac{\dot{z}^2}{c^2}\right)E_z - \frac{\dot{r}\dot{z}}{c^2}E_r - \frac{r\dot{\theta}\dot{z}}{c^2}E_\theta + \dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r\right]$$

$$\ddot{r} = -\frac{\eta}{\gamma}\left[\left(1-\frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)E_r - \frac{\dot{r}\dot{z}}{c^2}E_z - \frac{r\dot{r}\dot{\theta}}{c^2}E_\theta + r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta\right] + r\dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{\eta}{\gamma}\left[\left(\frac{1}{r} - \frac{r\ \dot{\theta}^2}{c^2}\right)E_\theta - \frac{\dot{\theta}\dot{z}}{c^2}E_z - \frac{\dot{r}\dot{\theta}}{c^2}E_r + \frac{\dot{z}}{r}B_r - \frac{\dot{r}}{r}B_z\right] - \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

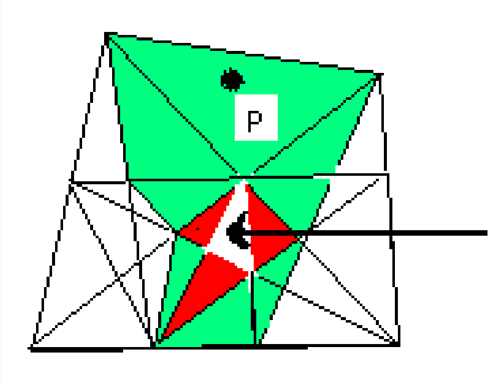
电子运动方程

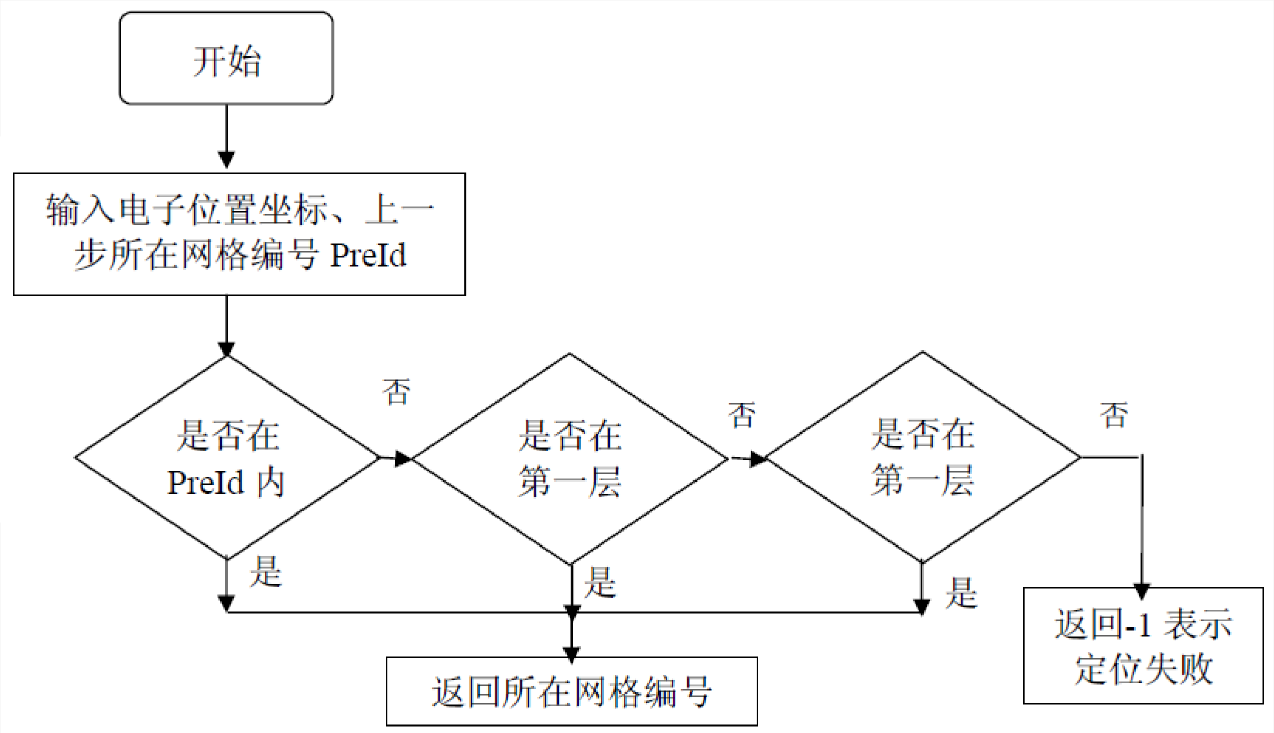
- 笛卡尔坐标系下，考虑相对论效应时的电子运动方程:

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = -\dfrac{\eta}{\gamma}\left(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y - \dfrac{\dot{x}}{c^2}(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z)\right) \\
\ddot{y} = -\dfrac{\eta}{\gamma}\left(E_y + \dot{z}B_x - \dot{x}B_z - \dfrac{\dot{y}}{c^2}(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z)\right) \\
\ddot{z} = -\dfrac{\eta}{\gamma}\left(E_z + \dot{x}B_y - \dot{y}B_x - \dfrac{\dot{z}}{c^2}(\dot{x}E_x + \dot{y}E_y + \dot{z}E_z)\right)
\end{cases}
$$

电子运动方程

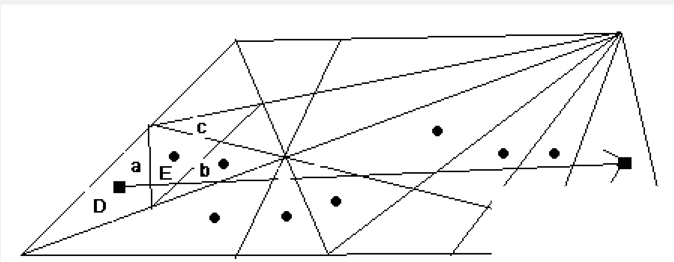
● 扫描法：

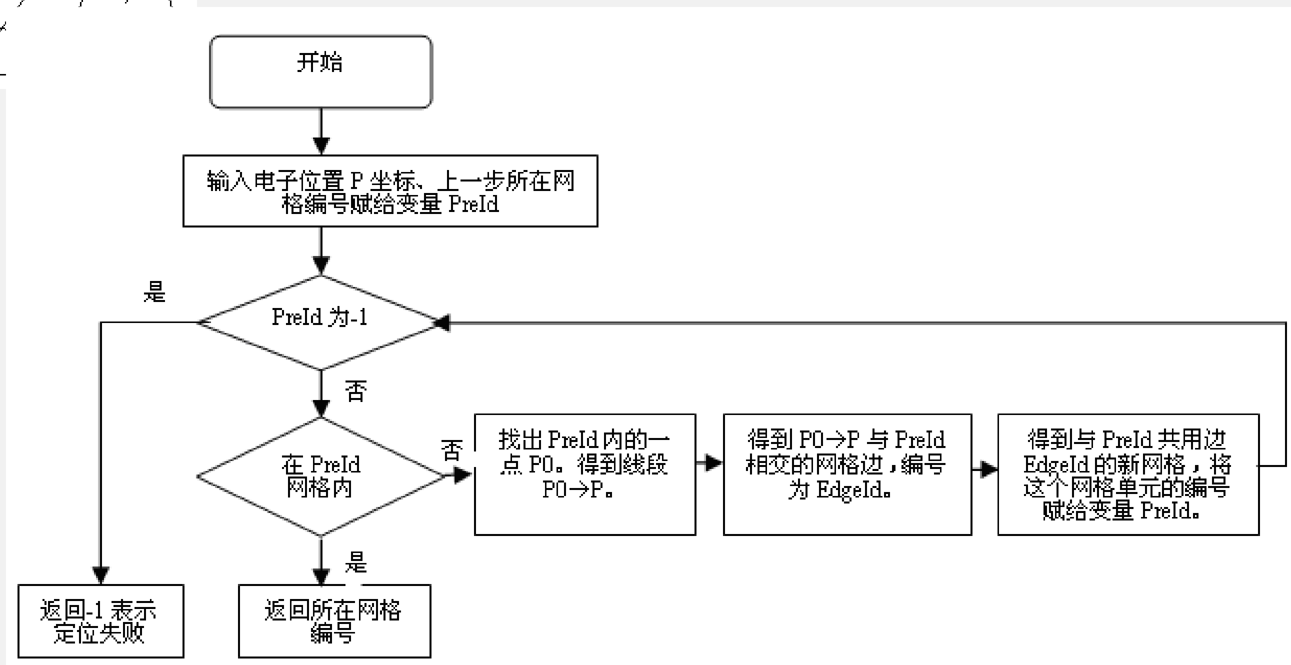

P


开始
输入电子位置坐标、上一步所在网格编号 PreId
是否在 PreId 内
否
是否在第一层
否
是否在第一层
否
是
是
是
返回所在网格编号
返回-1 表示定位失败

电子运动方程

- 追踪法:


c
a
E
b
D


开始
输入电子位置 P 坐标、上一步所在网格编号赋给变量 PreId
PreId 为-1
是
否
返回-1 表示定位失败
在 PreId 网格内
否
是
返回所在网格编号
找出 PreId 内的一点 P0。得到线段 P0→P。
得到 P0→P 与 PreId 相交的网格边，编号为 EdgeId。
得到与 PreId 共用边 EdgeId 的新网格，将这个网格单元的编号赋给变量 PreId。

电子运动方程

- 其他优化：

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\y_1&y_2&y_3&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_4\end{vmatrix}=\text{四面体体积}$$

$$= 1*\left(\ x2*\left(y3*z4-y4*z3\right)\ -\ x3*\left(y2*z4-y4*z2\right)\ +\ x4*\left(y2*z3-y3*z2\right)\ \right)$$

$$-= 1*\left(\ x1*\left(y3*z4-y4*z3\right)\ -\ x3*\left(y1*z4-y4*z1\right)\ +\ x4*\left(y1*z3-y3*z1\right)\ \right)$$

$$+= 1*\left(\ x1*\left(y2*z4-y4*z2\right)\ -\ x2*\left(y1*z4-y4*z1\right)\ +\ x4*\left(y1*z2-y2*z1\right)\ \right)$$

$$-= 1*\left(\ x1*\left(y2*z3-y3*z2\right)\ -\ x2*\left(y1*z3-y3*z1\right)\ +\ x3*\left(y1*z2-y2*z1\right)\ \right)$$

40次乘法，23次加减法

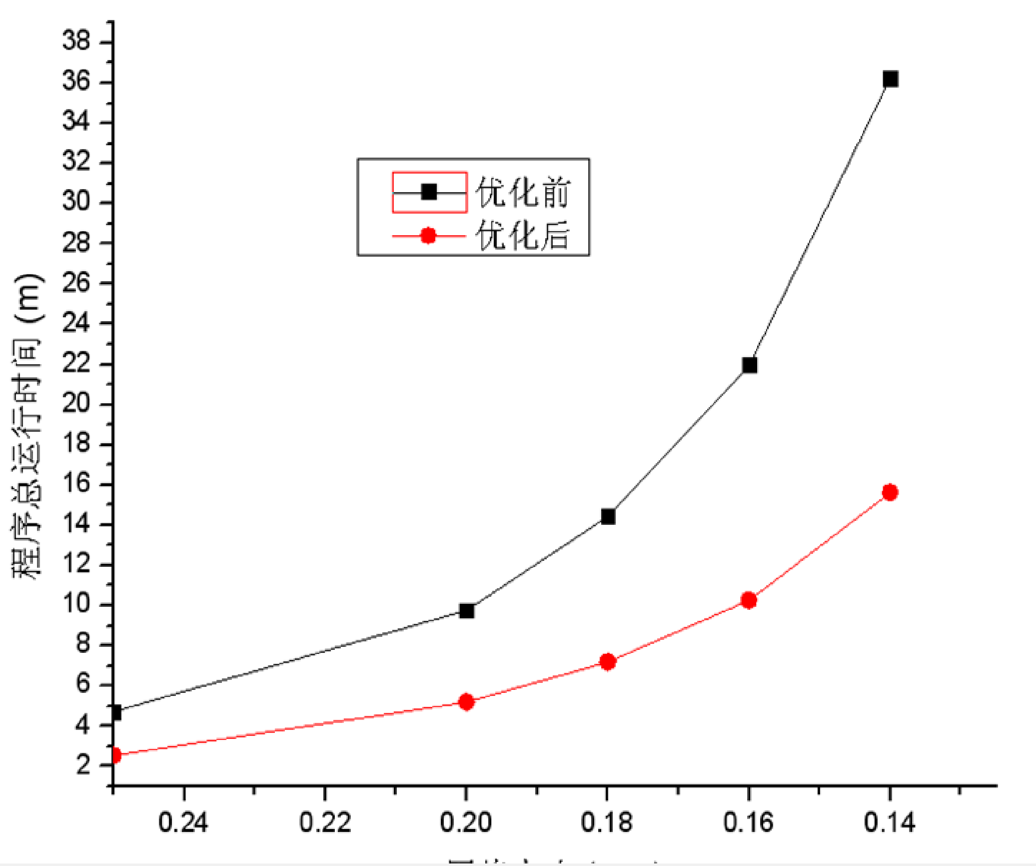
$$=\left(x2-x1\right)*\left(y3*z4-y4*z3\right)+\left(x1-x3\right)*\left(y2*z4-y4*z2\right)+\left(x4-x1\right)*\left(y2*z3-y3*z2\right)$$

$$+\left(x3-x2\right)*\left(y1*z4-y4*z1\right)+\left(x2-x4\right)*\left(y1*z3-y3*z1\right)+\left(x4-x3\right)*\left(y1*z2-y2*z1\right)$$

18次乘法，17次加减法

电子运动方程

- 优化前后对比：



概要

- 电子运动方程
- **阴极热电子发射**
- 二次电子发射

阴极热电子发射

- 发射电流密度：

$$J_a = \frac{4\varepsilon_0}{9}\sqrt{\frac{2e}{m}}\frac{(U_a - U_m)^{3/2}}{(d_a - x_m)^2}\left(1 + \frac{2.66}{\sqrt{\eta_a}}\right)$$

$$\eta_a = \frac{11600(U_a - U_m)}{T}$$

$$x_m = P\left(\frac{T}{1000}\right)^{3/4}\left(\frac{1}{1000J_a}\right)^{1/2}$$

$$U_m = \frac{kT}{e}\ln\left(\frac{J_a}{J_0}\right)$$

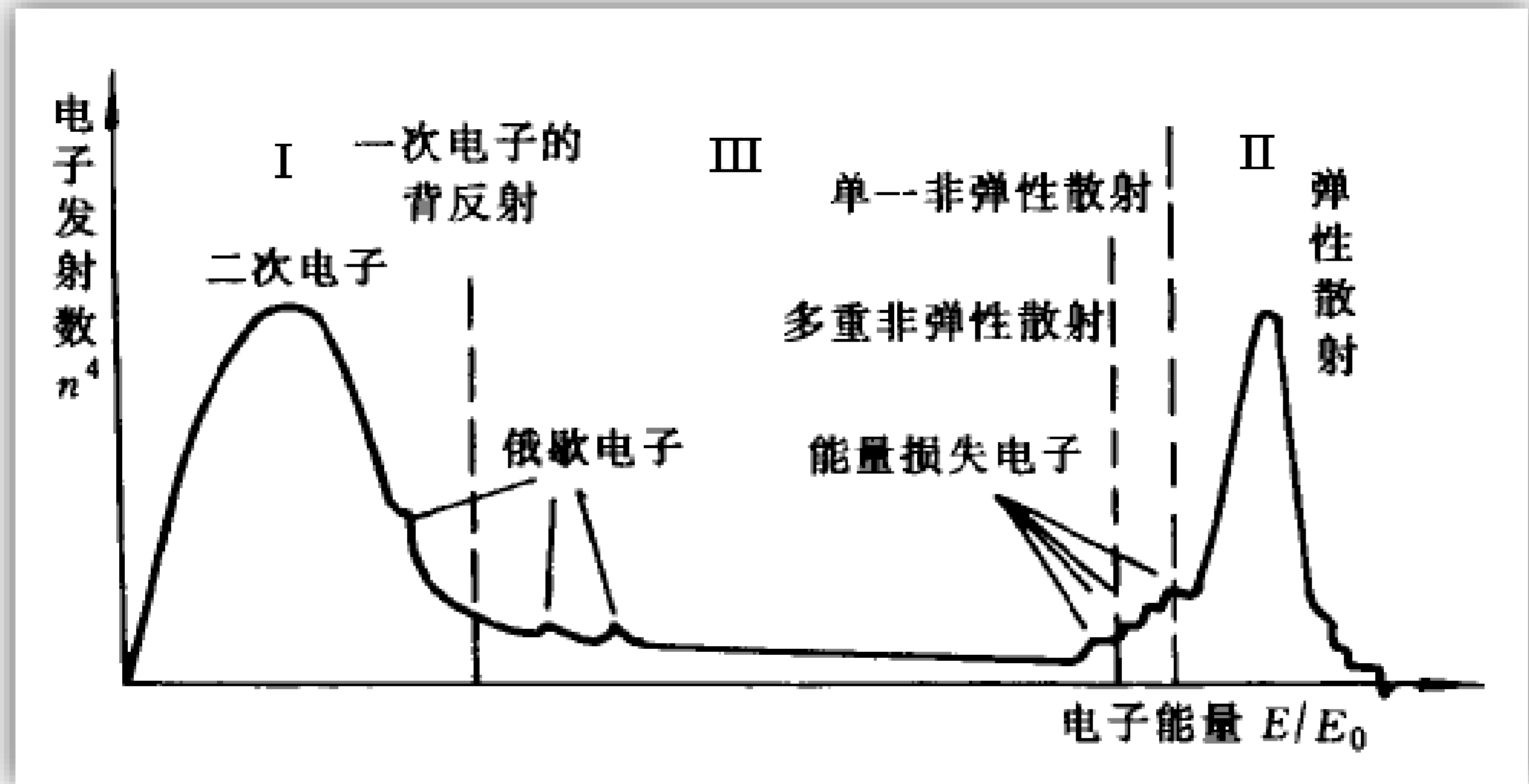
$$J_0 = AT^2\exp\left(-\frac{\phi}{kT}\right)$$

概要

- 电子运动方程
- 阴极热电子发射
- **二次电子发射**

二次电子发射

- 二次电子发射模型：典型的二次电子能谱图



二次电子发射

总二次电子

$$\frac{\delta(\theta)}{\delta_{\max}(\theta)} = (ve^{1-v})^k$$

$$v = \frac{V_i - V_0}{V_{\max}(\theta) - V_0}$$

$$k = k_1 = 0.56 \qquad v < 1$$

$$k = k_2 = 0.25 \qquad 1 < v < 3.6$$

$$\frac{\delta(\theta)}{\delta_{\max}(\theta)} = 1.125 / v^{0.35} \qquad v > 3.6$$

$$V_{\max(\theta)} = V_{\max(0)}(1 + k_s\theta^2 / \pi)$$

$$\delta_{\max(\theta)} = \delta_{\max(0)}(1 + k_s\theta^2 / 2\pi)$$

copper: ks=1

Graphite: ks=0

背散射电子

$$\eta(E, Z) = E^{m(Z)} C(Z)$$

$$m(Z) = 0.13182 - \frac{0.9211}{Z^{0.5}}$$

$$C(Z) = 0.1904 - 0.2236 \ln Z$$

$$+ 0.1292(\ln Z)^2 - 0.01491(\ln Z)^3$$

$$r = \eta_{\text{inel}} / \eta_{\text{el}}$$

For copper $\boldsymbol{r}$ = 3

For graphite $\boldsymbol{r}$ = 0.6.

1.真二次电子；2.弹性反射电子；3.非弹性反射电子。