电磁工业软件理论与仿真

黄 桃

huangtao@uestc.edu.cn

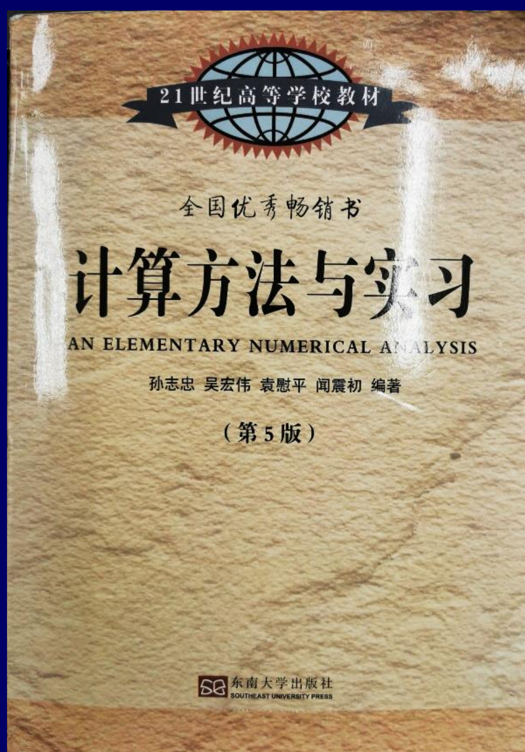
3号楼804

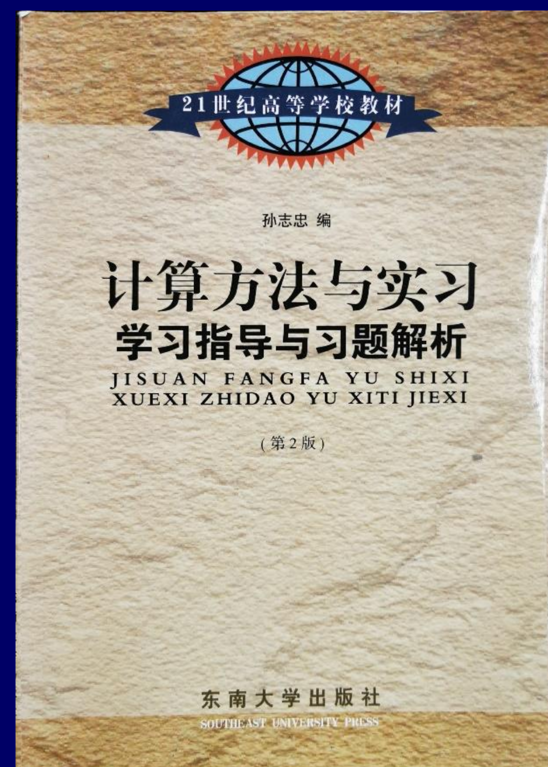
电子科技大学（深圳）高等研究院

建议教材及参考资料：

（一）参考教材：

《计算方法与实习》（第5版），孙志忠、吴宏伟等，东南大学出版社，2011年。





建议教材及参考资料：

（二）参考资料：

1. 《MATLAB教程（R2018a）》，张志涌，杨祖樱编著，北京航空航天大学出版社，2019年出版

2. 《数值方法（MATLAB版）》（第四版），John H. Mathews, Kurtis K. Fink著，陈渝，钱方等译，电子工业出版社，2017年出版

3. 《计算电磁学》（第二版），王秉中，邵维编著，科学出版社，2018年出版

4. 《电磁场有限元方法》，金建铭（著）、王建国（译），西安电子科技大学出版社，1998年出版

课堂纪律要求：

课堂纪律要求：

第一章 绪论

计算 性

§1 计算方法的对象与特点

1.1 计算方法的研究对象

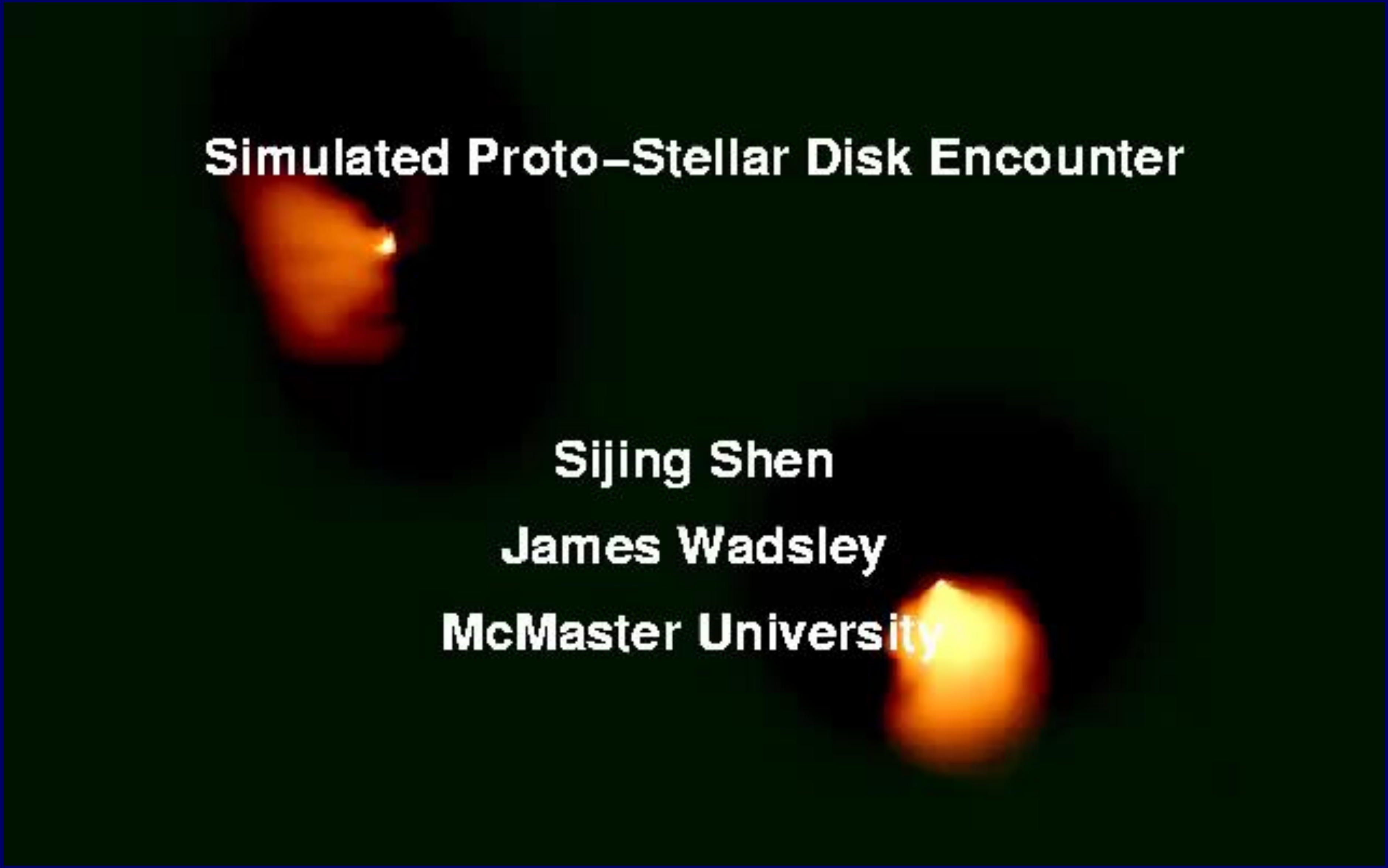
主要研究适合于在计算机上使用的数值计算方法及于此相关的理论，包括方法的收敛性、稳定性以及误差分析。

实际问题 → 数学模型 → 计算方法 → 程序设计 → 上机计算

由实际问题应用有关科学知识和数学理论建立数学模型，这一过程通常作为应用数学的任务。

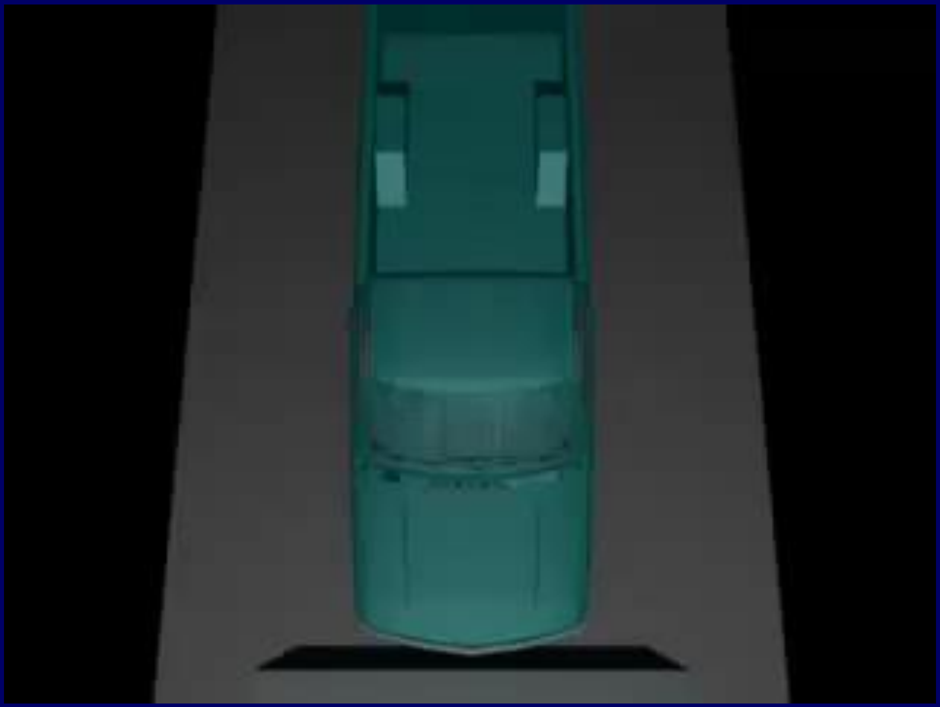
而根据数学模型提出求解的计算方法直到编程上机算出结果，进而对计算结果进行分析，这一过程则是计算数学的任务。

天文


Simulated Proto-Stellar Disk Encounter
Sijing Shen
James Wadsley
McMaster University

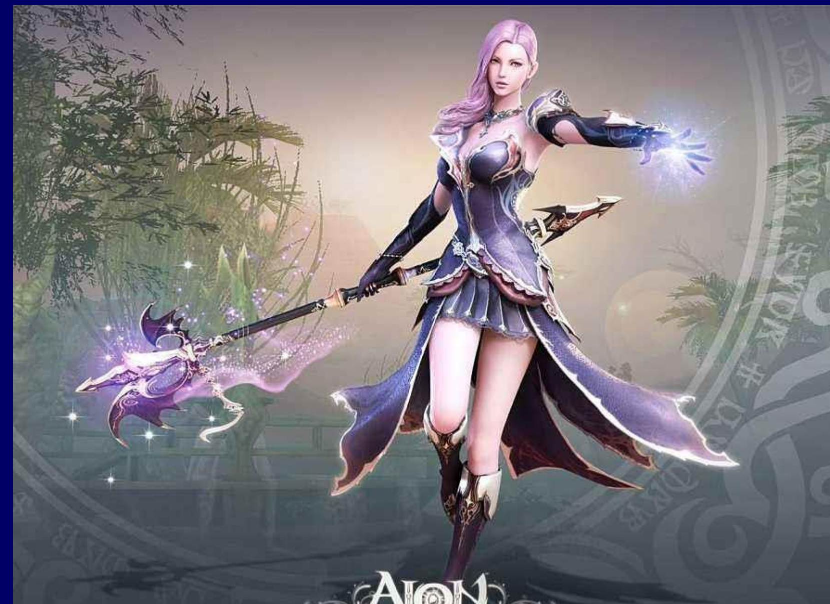
气象模拟

机械设计

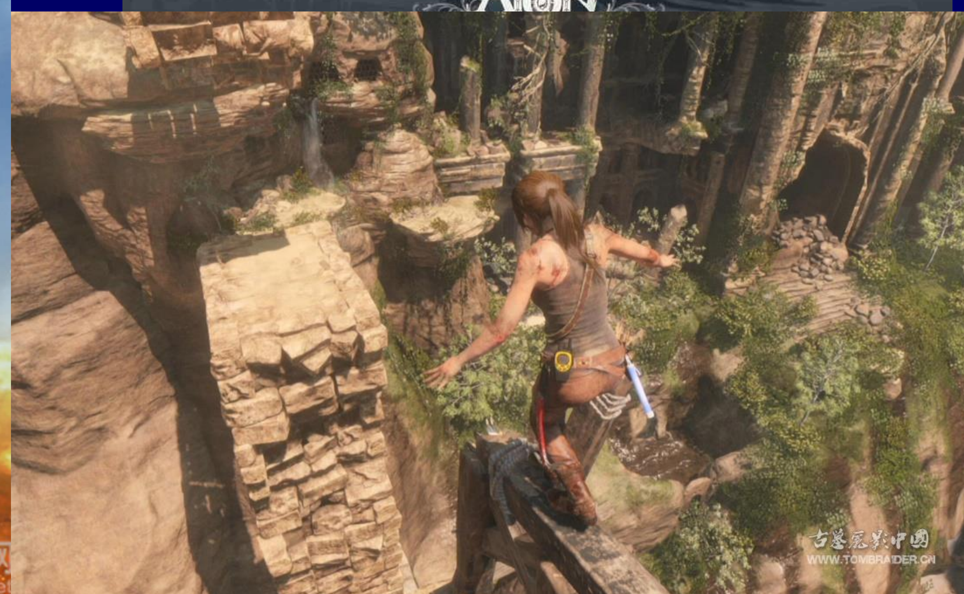


影像技术

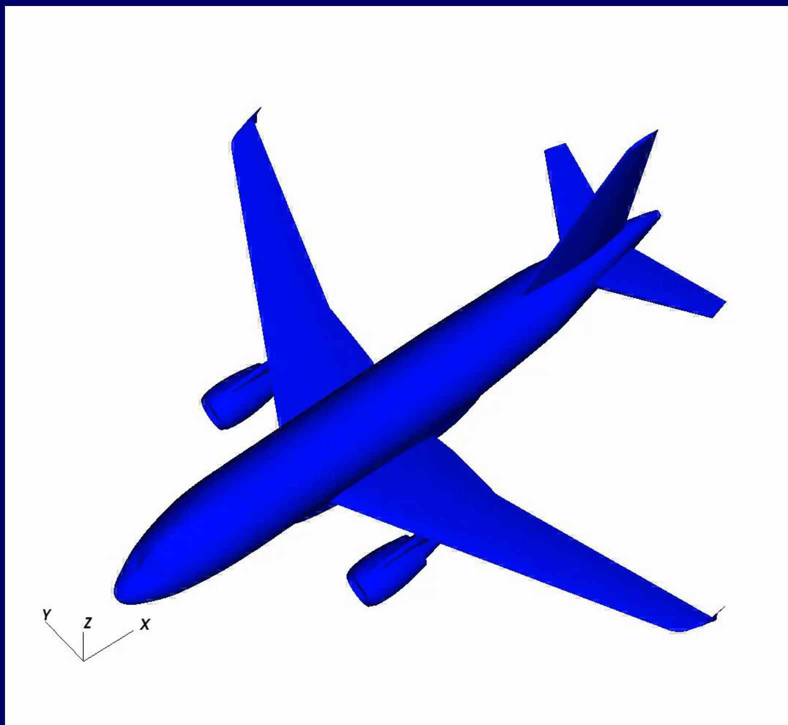

LEAGUE LEGENDS
牛游戏网

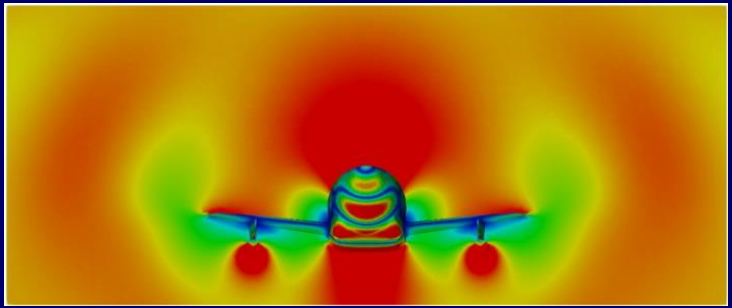

AION

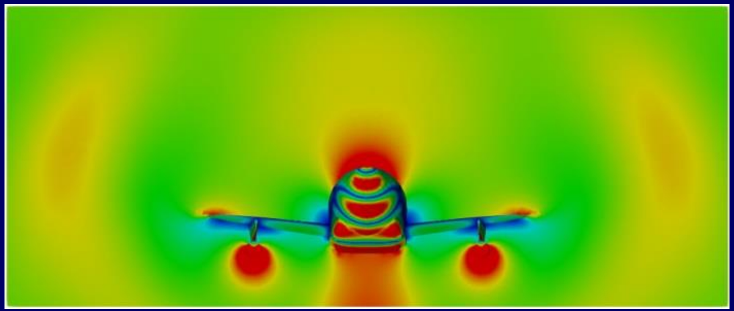

PLAYERUNKNOWN'S
绝地求生
BATTLEGROUNDS
牛游戏网
www.newyx.net

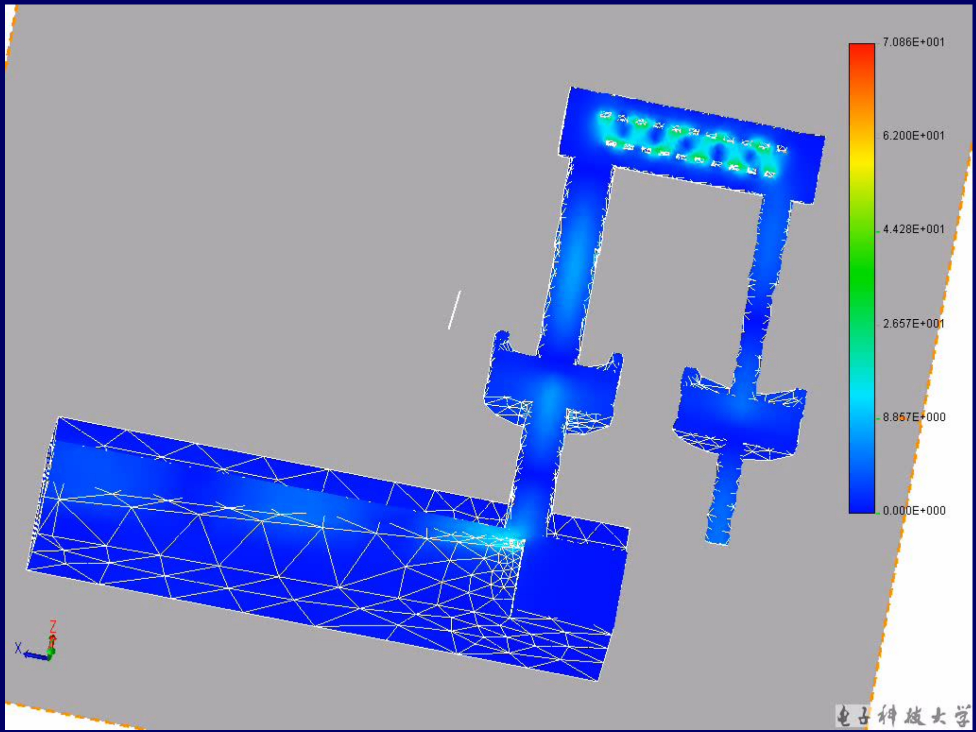

古墓丽影中国
WWW.TOMBRAIDER.CN

电磁仿真

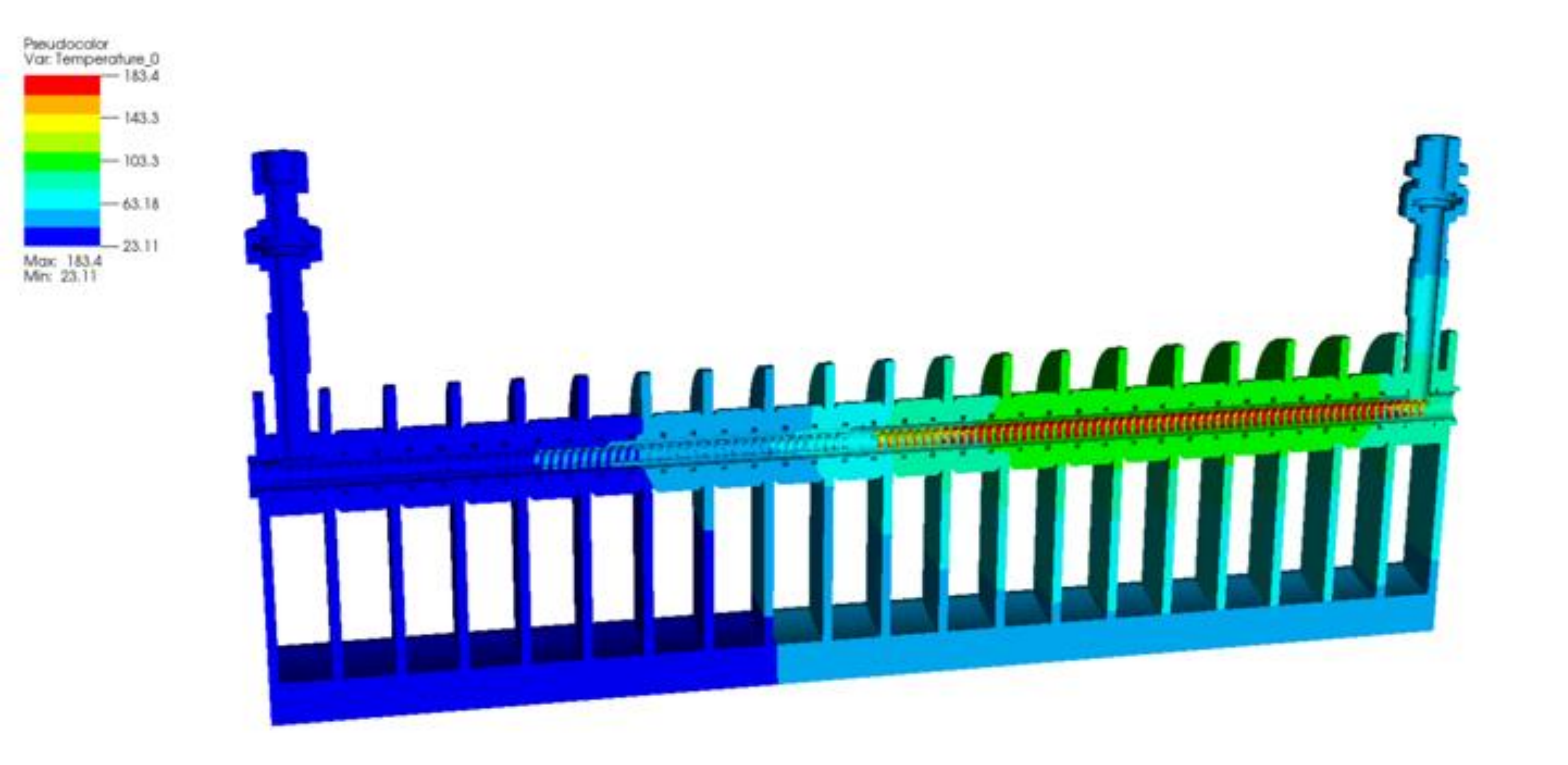

Y
Z
X



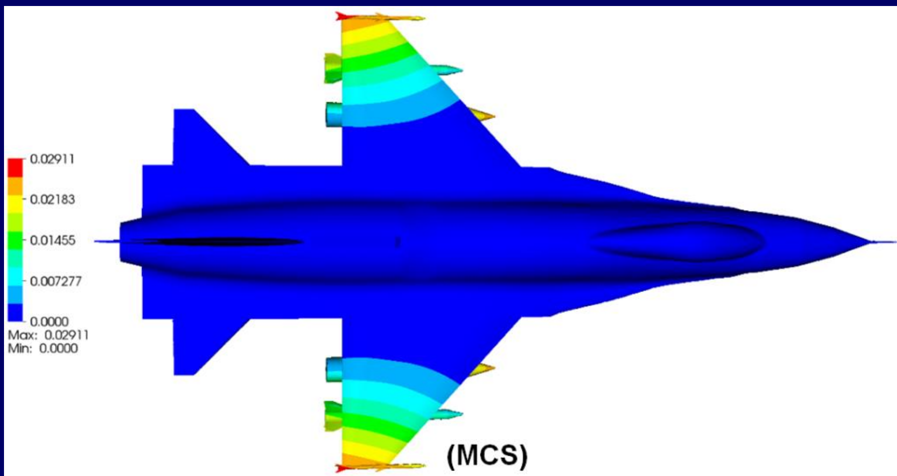


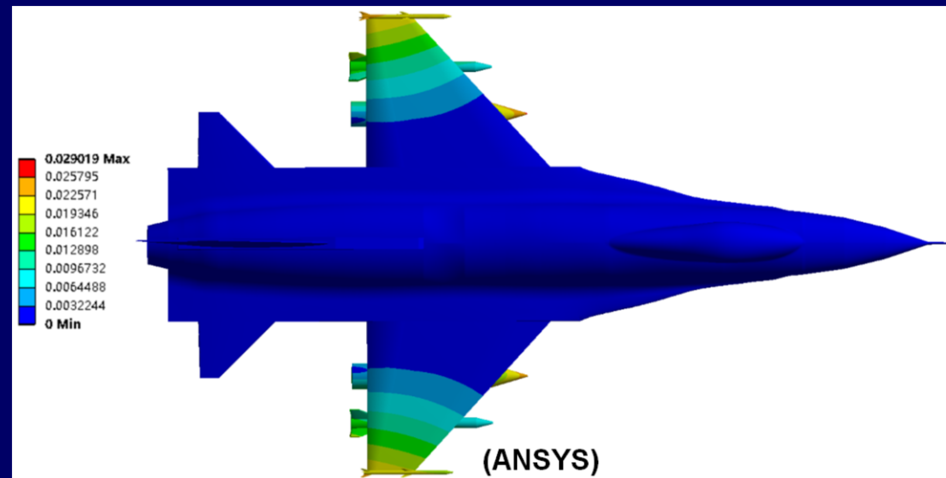

7.086E+001
6.200E+001
4.428E+001
2.657E+001
8.857E+000
0.000E+000
电子科技大学

热学仿真

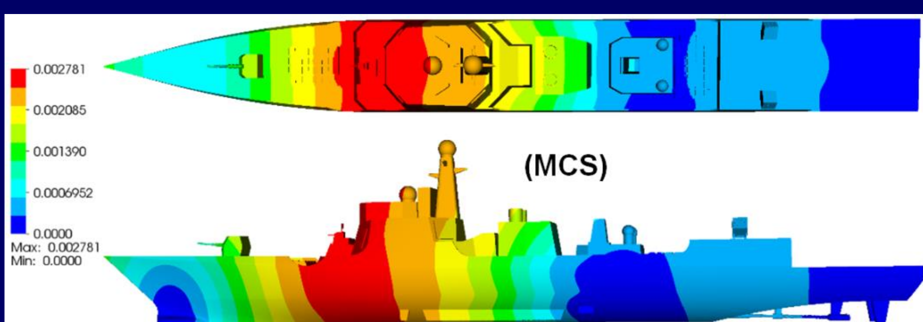

Pseudocolor
Var: Temperature_0
183.4
143.3
103.3
63.18
23.11
Max: 183.4
Min: 23.11

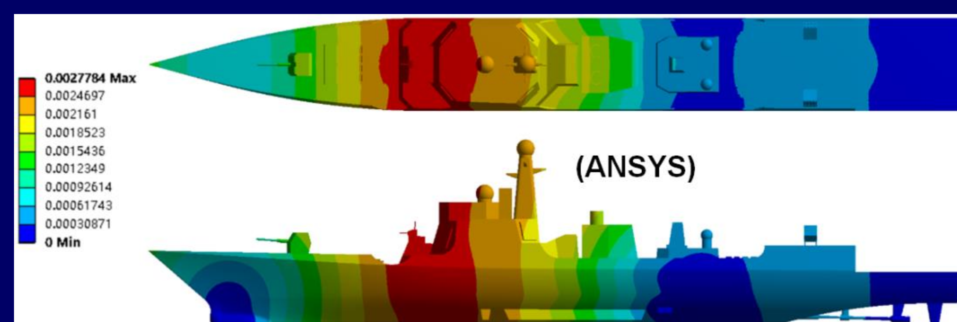
力学仿真





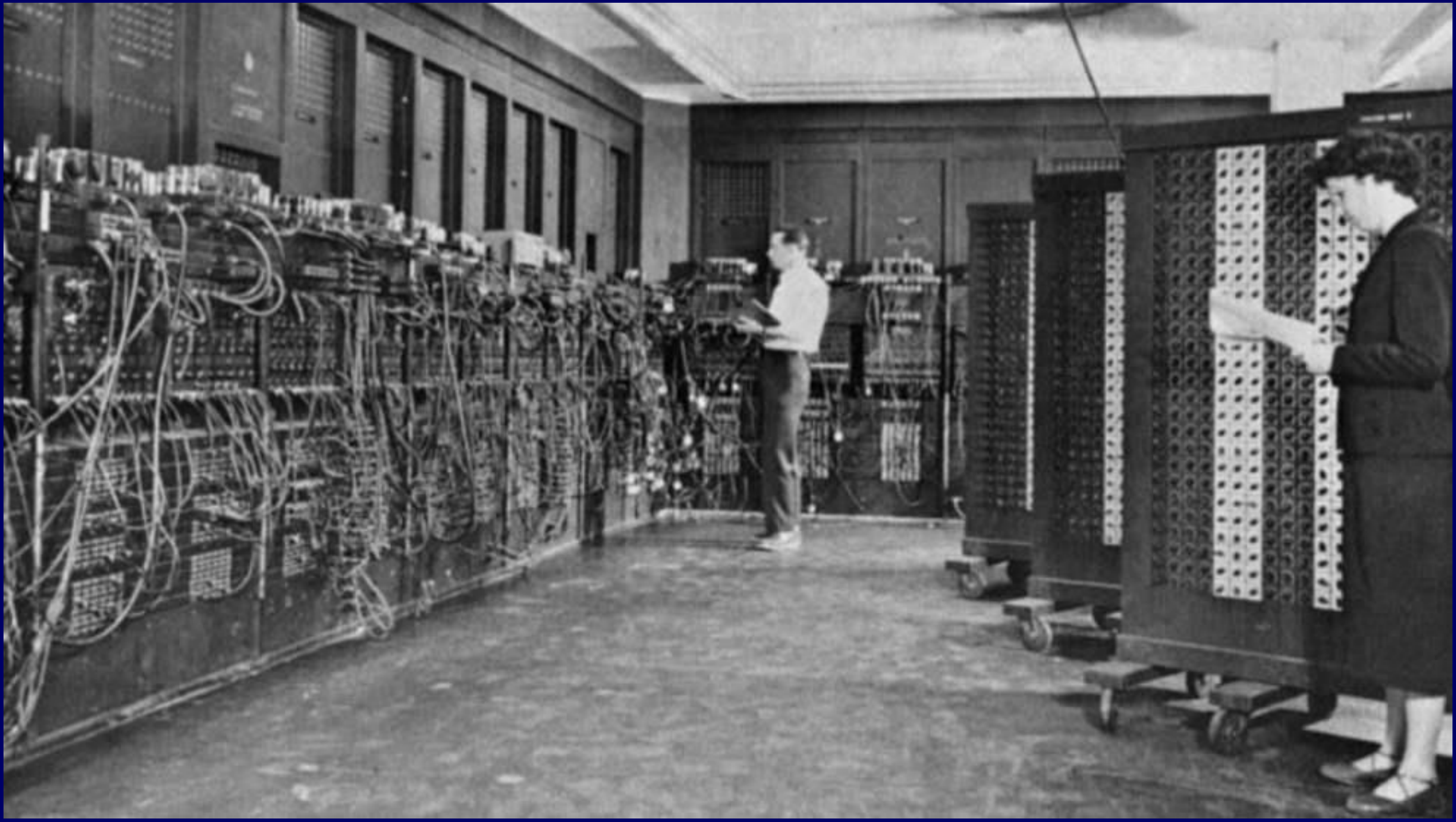
飞机、驱逐舰振型云图



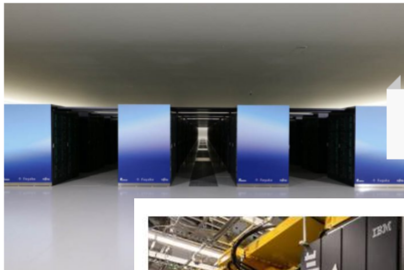


第一台电子计算机：

1946年，美国宾夕法尼亚大学



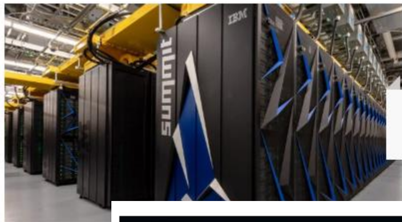
国际ＴＯＰ５００组织是对全世界超级计算机进行排名的权威机构，从１９９３年起每年发布两次排行榜，排行榜包括５００台超级计算机。



No.1 Fugaku(富岳)

日本 制造商：富士通

处理器核芯：7299072个；峰值(Rmax)：415530 TFlop/s



No.2 Summit（美国）

美国 制造商：IBM

处理器核芯：2414592个；峰值(Rmax)：148600 TFlop/s

No.3 Sierra（美国）

美国 制造商：IBM

处理器核芯：1572480个；峰值(Rmax)：94640 TFlop/s

No.4 神威 太湖之光（Sunway TaihuLight）中国

中国 制造商：国家并行计算机工程技术研究中心

处理器核芯：10649600个；峰值(Rmax)：93015 TFlop/s

No.5 TH—2 天河二号（中国）

中国 制造商：国防科大

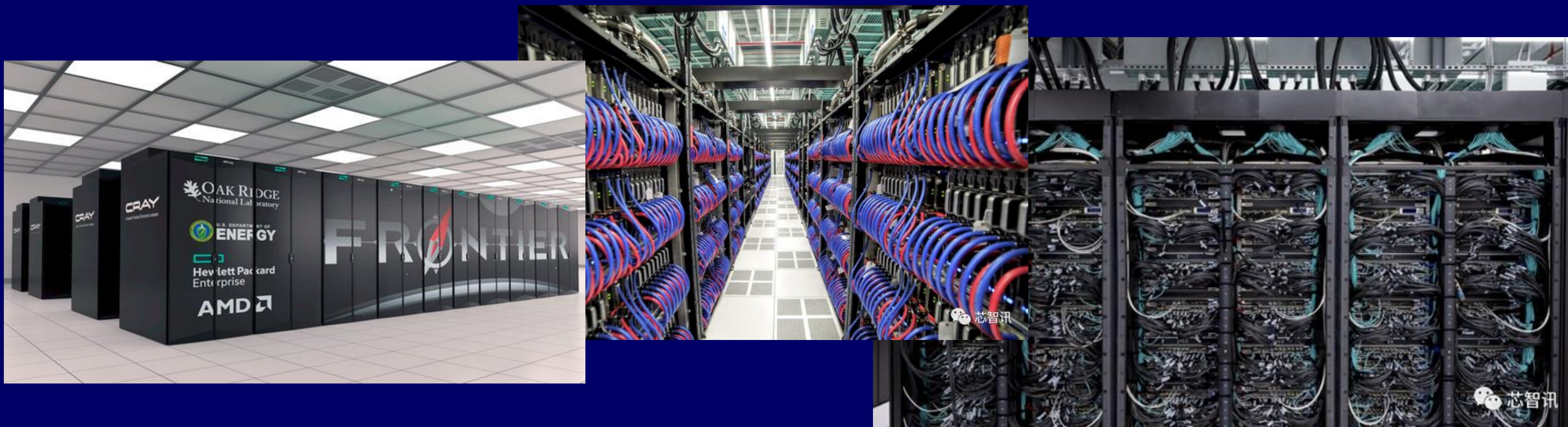
处理器核芯：4981760个；峰值(Rmax)：61445 TFlop/s

简介：

天河二号曾经6次蝉联冠军，采用麒麟操作系统，目前使用英特尔处理器，将来计划用国产处理器替换，不仅应用于助力探月工程、载人航天等政府科研项目，还在石油勘探、汽车飞机的设计制造、基因测序等民用方面大展身手。

2021 TOP500

2022 TOP500-No.1



美国Frontier

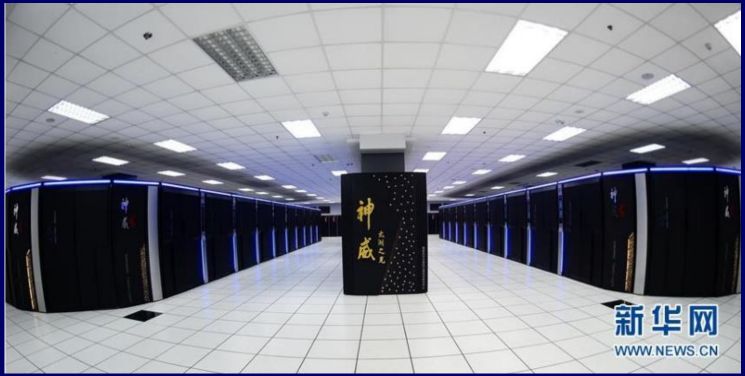
处理器：8730112 个

峰值速度：1.102 exaflops

Exaflop 是衡量超级计算机性能的单位，表示该计算机每秒可以至少进行 10^18 或百亿亿次浮点运算。

简介：2022年5月30日，在德国汉堡举行的 ISC 2022公布了第59届的全球超算TOP500榜单，位于美国橡树岭国家实验室 (ORNL) 的新型超级计算机Frontier以绝对优势，成功超越日本的Fugaku，成为了全球最强超级计算机，同时也是全球首个真正的百亿亿次超级计算机。

2022 TOP500-No.7



神威“太湖之光”

2022 TOP500-No.10

天河二号

中国的超级计算机神威·太湖之光和天河2号，则分别以 93 Pflop/s 和61.4 Pflop/s 的成绩分别排名第7和第10，相比之前排名均有所下滑。不可否认的是，美国对于中国的先进技术的禁运，以及对于中国超算相关企业的制裁（去年将神威·太湖之光的处理器供应商申威列入了实体清单），在一定程度上阻碍了中国在超算领域前进的步伐。

不过，据可靠消息显示，中国的超级计算机神威·太湖之光和天河2号的继任者，Sunway Oceanlite和天河3号在 Linpack 基准测试中都实现了1.3 exaflops 的性能。值得注意的是，中国已停止向TOP500委员会提交最先进的超算系统信息，这也导致在对全球的超级计算机数量进行统计时，外媒不得不将中国的数据排除在外。

是否计算资源已够用?

$$x_i = \frac{D_i}{D}, D = \det(A), D_i = \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

用行列式解法求解线性方程组:

n阶方程组，要计算$n+1$个n阶行列式的值，

总共需要做$n!\,(n-1)\,(n+1)$次乘法运算。

n=100?

9.3316882822399758266431068932381e+161次

美国Frontier 2.6851714545114619752527537719224e+136

太湖之光 3.1817838095393882760521878028586e+137

年！

在计算机上是否根据数学公式编程就能得到正确结果?

研究例子:求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{47}{60} \end{cases}$$

如把方程组的系数舍入成两位有效数字

$$\begin{cases} x_1 + 0.50x_2 + 0.33x_3 = 1.8 \\ 0.50x_1 + 0.33x_2 + 0.25x_3 = 1.1 \\ 0.33x_1 + 0.25x_2 + 0.20x_3 = 0.78 \end{cases}$$

它的解为x_1=-6.222…

x_2=38.25…

x_3=-33.65…

其准确解为$x_1=x_2=x_3=1$

1.2 计算方法的特点

计算方法的一个明显特点是**与计算机的使用密切结合**，具有实际试验的高度技术性，因此除注意学习基本理论知识外，必须注意程序编制和上机计算等环节的学习与实践。

计算方法的绝大部分方法都具有**近似性**，而其理论又具有严密的科学性，方法的近似值正是建立在理论的严密性基础上。因此不仅要求掌握和使用算法，还要重视必要的误差分析，以保证计算结果的可靠性。

§2 数值计算中的误差

一、 误差的背景介绍

1. 来源与分类

- 从实际问题中抽象出数学模型

  —— 模型误差

例1:质量为m的物体，在重力作用下，自由下落，

其下落距离s 与时间t 的关系是：

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=mg \qquad (1.1)$$

其中 g 为重力加速度。

- 通过测量得到模型中参数的值
  —— **观测误差**

- 求近似解 —— **方法误差（截断误差）**

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

- 机器字长有限 —— **舍入误差**

用计算机、计算器和笔算，都只能用有限位小数来代替无穷小数或用位数较少的小数来代替位数较多的有限小数，如：

$$\pi = 3.1415926\ldots \qquad \frac{1}{3} = 0.3333\cdots$$

$$x = 8.12345$$

四舍五入后……

$$\varepsilon_1 = \pi - 3.1416 = -0.0000074\cdots$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3} - 0.333 = 0.000\ \ 33\cdots$$

$$\varepsilon_3 = x - 8.1235 = 0.000044$$

在数值计算方法中，主要研究截断误差和舍入误差（包括初始数据的误差）对计算结果的影响！

二、绝对误差、相对误差和有效数字

1．绝对误差与绝对误差限

定义1：设x^*是准确值，x是一个近似值，称

$$e(x) = x^* - x \tag{1.1}$$

是近似值x的**绝对误差**，简称为**误差**。

例 2:若用以厘米为最小刻度的尺去量桌子的长，大约为1.45米，求1.45米的绝对误差。

1.45米的绝对误差=?

不知道！

但实际问题往往可以估计出 $|e(x)|$ 不超过某个正数ε，即，

$|x^{*}-x|\leq\varepsilon$ 则称 ε 为绝对误差限，有了绝对误差限就可以知道x^* 范围为

$$x-\varepsilon\leq x^{*}\leq x+\varepsilon$$

即x^* 落在 $[x-\varepsilon，\ x+\varepsilon]$ 内。在应用上，常常采用下列写法来刻划x^* 的精度。

$$x^{*}=x\pm\varepsilon$$

2．相对误差和相对误差限

定义2：设x^*是准确值，x是近似值，称

$$\frac{e}{x^*}=\frac{x^*-x}{x^*} \qquad (1.3)$$

为近似值x的**相对误差**，相应地，若正数ε_r，

满足 $$\left|\frac{x-x^*}{x^*}\right|\le\varepsilon_r$$

则称ε_r为x的**相对误差限**。

3．有效数字

定义3：

如果近似值 x 的误差限是其某一位上的半个单位，且该位直到x 的第一位非零数字一共有n 位，则称近似值x 有n 位有效数字。

由上述定义

$$|\pi - 3.1416| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4} \qquad |\pi - 3.14159| \le \frac{1}{2} \times 10^{-5}$$

$\pi - 3.14 = 0.0015926$ **有效数位为3位**

$\pi - 3.1416 = -0.0000074$ **有效数位为5位**

$\pi - 3.1415 = 0.0000926$ **有效数位为4位**

一般的，如果近似值x的规格化形式为

$$x=\pm 0.a_1a_2\ldots a_n\ldots\times 10^m$$

其中m为整数，$a_1\neq 0$，a_i为0-9之间的整数。如果

$$\left|x^* - x\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{m-n} \qquad (1.6)$$

则称近似值 x 有 n 位有效数字。

例 $x=1452.046$是具有7位有效数字的近似值，

则它的误差限为

$$\left|x - x^*\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

三、误差的传播与积累

设近似数据为x_1，x_2，…，x_n，计算得到的函数值为

$y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$；

设准确值分别为x_1^*， x_2^*，…， x_n^*，相应的函数值为

$y^*= f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$；

假定f 在点$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$可微，则当数据误差较小时，

函数值的误差为

$$e(y) = y^* - y \approx df(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}(x_i^* - x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} e(x_i) \qquad (1.9)$$

三、误差的传播与积累

其相对误差为

$$e_r(y) = \frac{e(y)}{y} \approx d(\ln f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} \frac{(x_i^* - x_i)}{f(x_1,\dots,x_n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} \frac{e(x_i)}{f(x_1,\dots,x_n)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(x_1,\dots,x_n)} e_r(x_i) \qquad \textbf{(1.10)}$$

三、误差的传播与积累

和、差、积、商的误差公式为

$$e(x_1^* \pm x_2^*) \approx e(x_1^*) \pm e(x_2^*)$$

$$e_r(x_1^* \pm x_2^*) \approx \frac{x_1^*}{x_1^* \pm x_2^*} e_r(x_1^*) \pm \frac{x_2^*}{x_1^* \pm x_2^*} e_r(x_2^*)$$

$$e(x_1^* x_2^*) \approx x_2^* e(x_1^*) + x_1^* e(x_2^*) \qquad e_r(x_1^* x_2^*) \approx e_r(x_1^*) + e_r(x_2^*)$$

$$e(\frac{x_1^*}{x_2^*}) \approx \frac{1}{x_2^*} e(x_1^*) - \frac{x_1^*}{(x_2^*)^2} e(x_2^*) \qquad e_r(\frac{x_1^*}{x_2^*}) \approx e_r(x_1^*) - e_r(x_2^*)$$

三、误差的传播与积累

和、差、积、商的误差限为

$$\left|e(x_1^* \pm x_2^*)\right| \approx \left|e(x_1^*) \pm e(x_2^*)\right| \le \left|e(x_1^*)\right| + \left|e(x_2^*)\right|$$

$$\left|e_r(x_1^* x_2^*)\right| \approx \left|e_r(x_1^*) + e_r(x_2^*)\right| \le \left|e_r(x_1^*)\right| + \left|e_r(x_2^*)\right|$$

$$\left|e_r\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right)\right| \approx \left|e_r(x_1^*) - e_r(x_2^*)\right| \le \left|e_r(x_1^*)\right| + \left|e_r(x_2^*)\right|$$

例　设$y=x^n$，求 y 的相对误差与 x 的相对误差之间的关系

例　假定运算中数据都精确到两位小数，试求

$$x^*=1.21\times 3.65-9.81$$

的绝对误差限和相对误差限，计算结果有几位有效数字

§3 数值计算中应该注意的一些原则

1．使用数值稳定的计算公式

例4：求 $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} \mathrm{dx}$ （$n = 0, 1, 2, \ldots, 8$）**的值。**

解：由于

$$I_n + 5I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n + 5x^{n-1}}{x+5} \mathrm{dx} = \int_0^1 x^{n-1} \mathrm{dx} = \frac{1}{n}$$

初值

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x+5} \mathrm{dx} = \ln 6 - \ln 5 = \ln(1.2)$$

递推公式

$$
\begin{cases}
I_0 = \ln(1.2) \approx 0.182 \\
I_n = \dfrac{1}{n} - 5I_{n-1}, \qquad (n = 1, 2, \cdots, 8)
\end{cases}
\qquad \textbf{(E4-1)}
$$

注意此公式**精确**成立

按上式就可以逐步算出

$$I_1 = 1 - 5I_0 \approx 0.09$$

$$I_2 = \frac{1}{2} - 5I_1 \approx 0.05$$

$$I_3 = \frac{1}{3} - 5I_2 \approx 0.083$$

$$I_4 = \frac{1}{4} - 5I_3 \approx -0.165$$

$$I_5 = \frac{1}{5} - 5I_4 \approx 1.025$$

$$I_6 = \frac{1}{6} - 5I_5 \approx -4.952$$

What happened?!

不稳定的算法！

这就是误差传播所引起的危害！

由递推公式（E4-1）可看出，I_{n-1}的误差扩大了5倍后传给I_n，因而初值I_0的误差对以后各步计算结果的影响，随着n的增大愈来愈严重。这就造成I_4的计算结果严重失真。

改变公式：

将公式 $I_n + 5I_{n-1} = \frac{1}{n}$ 变为

$$I_{k-1} = \frac{1}{5K} - \frac{1}{5} I_K \qquad (K = n, n-1, \cdots, 1) \qquad \text{（E4-2）}$$

且 $\frac{1}{6(n+1)} < I_n < \frac{1}{5(n+1)}$ $\qquad I_9 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6*10} + \frac{1}{5*10}\right)$

可求得$I_9 \approx 0.018$，按公式（ E4-2 ）可逐次求得

$I_8 \approx 0.019$ $I_7 \approx 0.021$ $I_6 \approx 0.024$ $I_8 \approx 0.028$

$I_4 \approx 0.034$ $I_3 \approx 0.043$ $I_2 \approx 0.058$ $I_1 \approx 0.088$

$I_0 \approx 0.182$ **稳定的算法！**

如果第(n+1)步的误差e_{n+1}与第n步的误差e_n满足：

$$\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| \le 1$$

则称此计算公式是绝对稳定的。

在我们今后的讨论中，误差将不可回避，

算法的稳定性会是一个非常重要的话题。

2．尽量避免两相近数相减

在数值计算中，两个相近的数作减法时有效数字会损失。

例5: 求

$$y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \qquad \text{(E5-1)}$$

的值。当x = 1000，y的近似值为0.01580744

1、直接相减

$$y=\sqrt{1001}-\sqrt{1000}=31.64-31.62=0.02$$

2、将（E5-1）改写为

$$y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

则　y = 0.01581

类似地

$$\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$$

$$\sin(x+\varepsilon) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

3. 绝对值太小的数不宜作除数

绝对值太大的数不宜作乘数

例6：

$$\frac{2.7182}{0.001} \approx 2718.2$$

如分母变为0.0011，也即分母只有0.0001的变化时

$$\frac{2.7182}{0.0011} \approx 2471.1$$

4. 避免大数吃小数

例7：用单精度计算 $x^2-(10^9+1)x+10^9=0$ 的根。

精确解为 $x_1=10^9$，$x_2=1$

✍ 算法1：利用求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

在计算机内，10^9存为0.1×10^{10}，1存为0.1×10^1。做加法时，两加数的指数先向大指数对齐，再将浮点部分相加。即1的指数部分须变为10^{10}，则：$1=0.0000000001\times10^{10}$，取单精度时就成为：

$10^9+1=0.10000000\times10^{10}+0.00000000\times10^{10}=0.10000000\times10^{10}$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=10^9,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=0$$

✍算法2：先解出 $x_1 = \dfrac{-b - sign(b)\cdot\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 10^9$

再利用 $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{c}{a \cdot x_1} = \dfrac{10^9}{10^9} = 1$

注：求和时从小到大相加，可使和的误差减小。

5. 简化计算，减少步骤，避免误差积累。

计算x^{31}的值，若逐个相乘，那么要做30次乘法。注意到：

$x^{31}=xx^2x^4x^8x^{16}$

若令：$x^2=xx$，$x^4=x^2x^2$，$x^8=x^4x^4$，$x^{16}=x^8x^8$

则只要作8次乘法运算就可以了。

进一步，若按照$x^{31} = \dfrac{x^{16}x^{16}}{x}$，则只需要做6次乘除法。

递推性算法

计算机上使用的算法常采用递推化的形式，递推化的基本思想是把一个复杂的计算过程归结为简单过程的多次重复。这种重复在程序上表现为循环。递推化的优点是简化结构和节省计算量。

多项式求值： 给定的x求下列n次多项式的值。

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

解：1. 用一般算法，即直接求和法；

N次加法
N(N+1)/2
次乘法

2. 秦九韶方法；

N次加法
N次乘法

例9：用秦九韶方法求多项式

$$f(x) = 2 + x - x^2 + 3x^4$$

在x = 2的值。

解：

	3	0	-1	1	2
x=2		6	12	22	46
	3	6	11	23	48=f(2)

习题

1、若近似数X具有n位有效数字，且表示为

$$x = \pm(a_1 + a_2 \times 10^{-1} + a_3 \times 10^{-2} + \ldots + a_n \times 10^{-(n-1)}) \times 10^m$$

证明其相对误差限为

$$\boxed{\varepsilon_r \le 0.5 / a_1 \times 10^{-(n-1)}}$$

2、求下列各近似数的误差限，其中

(1) $x_1 + x_2 + x_3$ $\qquad x_1 = 4.8675$

(2) $x_1 x_2$ $\qquad x_2 = 4.08675$

(3) x_1 / x_2 $\qquad x_3 = 0.08675$

习题

3、设y_0=28，按递推公式

$$y_n = y_{n-1} - \frac{1}{100}\sqrt{783}$$

若取 $\sqrt{783} \approx 27.982$ （5位有效数字）

问计算到y_{100}有多大误差?

4、设序列{y_n}满足下面的递推关系，取 $y_0 \approx 1.73$，则y_{100}的绝对误差有多大?

$$\begin{cases} y_n = 5y_{n-1} - 2 \\ y_0 = \sqrt{3} \end{cases}$$

习题

5、推导出求积分

$$I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{10+x^2}dx \qquad n=0,1,2\ldots,10$$

的递推公式，并分析这个计算过程是否稳定；若不稳定，试构造一个稳定的递推公式。