5 Spojitá rozdělení - vybrané typy

Teorie: Rovnoměrné rozdělení $Ro\,(a,b)$

Náhodná veličina X může nabýt libovolné reálné hodnoty x z intervalu $\langle a;b\rangle$ a její výskyt na celém intervalu $\langle a;b\rangle$ je stejně možný. Plocha pod křivkou hustoty tvoří obdélník.

Funkce hustoty: $f\,(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{pro } x \in \langle a;b\rangle \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Distribuční funkce: $F\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in (a;b) \\ 1 & \text{pro } x \ge b \end{cases}$

Střední hodnota: $\mathrm{E}X = \dfrac{a+b}{2}$ a rozptyl: $\mathrm{var}X = \dfrac{(a-b)^2}{12}$

(6.1) Určete rozdělení náhodné veličiny popisující chybu při zaokrouhlování reálných čísel na celá čísla. Určete střední hodnotu a rozptyl této veličiny.

[$Ro(-1/2, 1/2), \mathrm{E}X = 0, \mathrm{var}X = 1/12$]

(5.2) Mějme náhodnou veličinu $X \sim Ro\,(8;13)$. Spočtěte $P\,(X = 9.75)$; $P\,(X > 11)$; $P\,(9 < X < 10)$ a 50% kvantil $x_{0.5}$.

[$P\,(X = 9.75) = 0, P\,(X > 11) = 1 - F(11) = 2/5,\ P\,(9 < X < 10) = 1/5,\ x_{0,5} = 10.5$]

Nakreslete graf hustoty náhodné veličiny X a znázorněte v něm $P\,(9 < X < 10)$.

Nakreslete graf distribuční funkce náhodné veličiny X a znázorněte v něm $x_{0.5}$.

(5.3) Náhodná veličina má rovnoměrné rozdělení na intervalu $(0;5)$. Určete pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty nižší než 4, za předpokladu, že víme, že náhodná veličina je větší než 2.

[$P(X < 4|X > 2) = \dfrac{P(2 < X < 4)}{P(X > 2)} = \dfrac{F(4) - F(2)}{1 - F(2)} = 2/3$]

(5.4) Předpokládejme, že veličina $X \sim Ro(a,b)$. Určete parametry a, b, pokud víte

(a) $P(X \ge 5) = 0,2$ a $P(X \le 2) = 0,3$,

[$a = 0,2; b = 6,2$]

(b) $x_{0,2} = -11$ a $x_{0,9} = 10$.

[$a = -17; b = 13$]

Teorie: Exponenciální rozdělení $Exp\,(\delta)$

Náhodná veličina X může nabýt libovolné reálné hodnoty x z intervalu $\langle 0;+\infty)$ a její výskyt se zvětšujícím se x exponenciálně klesá. Popisuje například dobu čekání na určitou náhodnou událost nebo dobu životnosti součástek, které nepodléhají opotřebení. Parametr δ charakterizuje průměrnou dobu mezi výskytem dvou událostí.
Jestliže se počet výskytů událostí během nějakého časového intervalu řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ, pak doba mezi výskytem dvou událostí se řídí exponenciálním rozdělením s parametrem $\delta = \dfrac{1}{\lambda}$.
Funkce hustoty: $f\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} e^{-x/\delta} & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{pro } x < 0 \end{cases}$
Distribuční funkce: $F\,(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ 1 - e^{-x/\delta} & \text{pro } x \geq 0 \end{cases}$
Střední hodnota: $\mathrm{E}X = \delta$ a rozptyl $\mathrm{var}X = \delta^2$.
Funkce v Excelu: EXPON.DIST(x;lambda;kumulativní).

(5.5) Předpokládejme, že průměrná doba zpracování zakázky je 30 sekund a řídí se exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti.

[$\delta = 30$]

(a) Určete pravděpodobnost, že zakázka se zpracuje do 1 minuty.
[$P(X < 60) = F(60) = 0.8647 = 86.47\%$]

(b) Určete dobu, do níž se zakázka zpracuje s pravděpodobností 0.95.
[$F(x_{0.95}) = 0.95 \Rightarrow x_{0.95} = 89.872$]

(5.6) Mějme náhodnou veličinu $X \sim \mathrm{Exp}\,(\delta = 10)$. Spočtěte $P\,(X = 27)$, $P\,(X < 10)$ a dále $P\,(17 \leq X \leq 50)$. Pravděpodobnosti vyznačte v grafu hustoty a v grafu distribuční funkce.
[$P\,(X = 27) = 0$, $P\,(X < 10) = 63.21\%$, $P\,(17 \leq X \leq 50) = 17.6\%$]

Určete medián a dolní a horní decil, tj. $x_{10\%}, x_{50\%}, x_{90\%}$. Hodnoty vyznačte v grafu hustoty a v grafu distribuční funkce.

[$x_{0.1} = 1.05$, $x_{0.5} = 6.93$, $x_{0.9} = 23.03$]

(5.7) Telefonní ústředna má v průměru 90 hovorů za hodinu. Počet hovorů se řídí Poissonovým rozdělením. S jakou pravděpodobností bude interval mezi dvěma po sobě jdoucími hovory alespoň 2 minuty?

[$\delta = 60/90$, $P(X > 2) = 1 - F(2) = 0.05 = 5\%$]

(5.8) Předpokládejme, že veličina $X \sim Exp(\delta)$.Určete parametr δ, pokud víte

(a) $P(X \geq 3) = 0,5$

[$\delta = 4.33$]

(b) $x_{0,1} = 5$

[$\delta = 47.46$]

Teorie: Normální rozdělení $N\left(\mu, \sigma^2\right)$

Náhodná veličina X může nabýt libovolné reálné hodnoty a její výskyt je popsán Gaussovou křivkou.
Funkce hustoty: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$, pro $x \in \mathbf{R}$ je symetrická kolem bodu μ.

Distribuční funkce: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

Distribuční funkci nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, hodnoty určujeme pomocí tabulek.
Střední hodnota a rozptyl: $\mathrm{E}X = \mu$, $\mathrm{var}X = \sigma^2$ (směrodatná odchylka $= \sqrt{\sigma^2} = \sigma$)

Normované normální rozdělení: $N(\mu = 0; \sigma^2 = 1)$, značíme obvykle U, funkci hustoty značíme $\varphi(u)$ a distribuční funkci $\Phi(u)$
Symetrie funkce hustoty a distribuční funkce: $\varphi(-u) = \varphi(u)$ a $\Phi(u) = 1 - \Phi(-u)$
Kvantily normovaného rozdělení značíme u_p. Pro $p\%$ kvantily platí, že $u_p = -u_{1-p}$. Hodnoty kvantilů jsou tabelovány.
Vztah mezi normálním a normálním normovaným rozdělením

$$X \sim N(\mu; \sigma^2) \Rightarrow U = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0; 1)$$

Má-li náhodná proměnná X rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$ s distribuční funkcí $F(x)$, pak příslušná normovaná proměnná má normované normální rozdělení. Platí tedy $F(x) = \Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$
Pro kvantily normálního a normálního normovaného rozdělení platí: $x_p = u_p \cdot \sigma + \mu$.

Funkce v Excelu:
NORM.DIST(x; střed_hodn; sm_odch; kumulativní)
NORM.INV(pravděpodobnost; střed_hodn; sm_odch)
NORM.S.DIST(z;kumulativní)
NORM.S.INV(pravděpodobnost)

(5.9) Čekáme na autobus v horské vesnici. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že *zpoždění* odjezdu autobusu ze zastávky se přibližně řídí normálním rozdělením se střední hodnotou 10 minut a rozptylem 25 min^2 (pozor - autobus tedy může odjet i dříve, zpoždění bude záporné). Spočtěte:

(a) ppst, že autobus bude mít zpoždění více než 20 min.;

$$[\ P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) = 1 - \overbrace{\phi\underbrace{\left(\frac{20-10}{5}\right)}_{2}}^{0.9772} = 0.0228\ ]$$

(b) ppst, že autobus odjede dříve;

$$[\ P(X < 0) = P(X \leq 0) = F(0) = \phi\left(\frac{0-10}{5}\right) = \phi(-2) = 1 - \phi(2) = 0.0228\ ]$$

(c) ppst, že autobus odjede o 0 až 2.5 min. dříve;

$$[\ P(-2.5 < X < 0) = F(0) - F(-2.5) = \phi(-2) - \phi(-2.5) = 0.0228 - 0.0062 = 0.0165\ ]$$

(d) ppst, že autobus bude mít zpoždění více než 20 min., jestliže již má zpoždění 15 min.;

$$[\ P(X > 20|X > 15) = \frac{P(X > 20)}{P(X > 15)} = \frac{1 - F(20)}{1 - F(15)} = \frac{1 - \phi\left(\frac{10}{5}\right)}{1 - \phi\left(\frac{5}{5}\right)} = \frac{0.0228}{0.1587} = 14.36\%\ ]$$

(e) čas, ve který bychom měli být na zastávce, aby nám autobus neujel alespoň na 90%.

$$[\ x_{0.1} = \mu + \sigma u_{0.1} = 10 - 5 \cdot 1.2816 = 3.592 \text{ minut}\ ]$$

(5.10) Náhodná proměnná X má normální rozdělení s parametry $\mu = 0, \sigma^2 = 1$. Zjistěte následující pravděpodobnosti

(a) $P(X \in (\mu - \sigma; \mu + \sigma)) = P(-1 < X < 1)$

$$[P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = F(\mu + \sigma) - F(\mu - \sigma) = \phi(1) - \phi(-1) = 0.68268\ ]$$

(b) $P(X \in (\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma)) = P(-2 < X < 2)$

$$[P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = \phi(2) - \phi(-2) = 0.9545\ ]$$

(c) $P(X \in (\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma)) = P(-3 < X < 3)$

$$[P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \phi(3) - \phi(-3) = 0.9973\ ]$$

(5.11) Hmotnost výrobku X je náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou $\mu = 15$ [kg] a rozptylem $\sigma^2 = 0,01$ [kg^2].

(a) Spočtěte ppst $P(X \leq 17)$ a $P(X > 10)$

$$[P(X \leq 17) = F(17) = \phi(20) \doteq 1, P(X > 10) = 1 - F(10) = 1 - \phi(-50) \doteq 1\ ]$$

(b) Spočtěte ppst $P(14.9 < X < 15.2)$ a podmíněnou ppst $P(X > 15,1|X > 15)$.

$$[P(14.9 < X < 15.2) = F(15.2) - F(14.9) = \phi(2) - \phi(-1) = 0.8186\ ]$$

$$[P(X > 15.1|X > 15) = \frac{P(X > 15.1)}{P(X > 15)} = \frac{1 - F(15.1)}{1 - F(15)} = \frac{1 - \phi(1)}{1 - \phi(0)} = 31.74\%\ ]$$

(c) Určete čísla c_1, c_2, pro která platí: $P(X < c_1) = 0.05$, $P(X < c_2) = 0.95$.

$$[\ P(X < c_1) = 0.05 \Rightarrow F(c_1) = 0.05 \Rightarrow c_1 = 14.84,\ c_2 = 15.16\ ]$$

(d) Načrtněte graf hustoty a distribuční funkce a na grafech znázorněte hodnoty vypočtené v bodě (a),(b) a (c).

(5.12) Pro náhodnou proměnnou s normálním rozdělením platí, že $P(X \leq 4) = 0.6$, $P(X \geq 0) = 0.8$. Zjistěte hodnoty parametrů μ, σ_0^2.

$$[u_{0.6} = 0.2533 = \frac{4 - \mu}{\sigma}, u_{0.2} = -0.8416 = \frac{0 - \mu}{\sigma} \Rightarrow \mu = 3.08,\ \sigma_0^2 = 13.35.\ ]$$