

Teorie: Dvourozměrná náhodná veličina

Pro diskrétní náhodnou veličinu s pravděpodobnostní funkcí $P(X = x_i, Y = y_j)$, kde $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$ platí

$$P_X(X = x_i) = \sum_{j=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) \text{ a } P_Y(Y = y_j) = \sum_{i=1}^m P(X = x_i, Y = y_j).$$

Pro spojitou náhodnou veličinu s funkcí hustoty $f(x, y)$ platí

$$f_X(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy \text{ a } f_Y(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x, y) dx.$$

Náhodné veličiny X a Y jsou nezávislé, právě tehdy když $F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$

resp. když $f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ resp $P(X = x, Y = y) = P_X(X = x) \cdot P_Y(Y = y)$ pro všechna x, y

Vektor středních hodnot je $E(\mathbf{X}) = (E(X), E(Y))$ a vektor rozptylů je $\text{var}(\mathbf{X}) = (\text{var}(X), \text{var}(Y))$. Kovariance $\text{cov}(X, Y) = E((X - EX) \cdot (Y - EY)) = E(X \cdot Y) - EX \cdot EY$.

Korelace $\text{cor}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}X} \cdot \sqrt{\text{var}Y}}$, a platí, že $\text{cor}(X, Y) \in \langle -1, 1 \rangle$.

Nezávislé veličiny \Rightarrow nekorelované (opačná implikace neplatí, korelace je lineární závislost).

(6.1) Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ je dán následující tabulkou sdružených pravděpodobností.

	$X = 0$	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$
$Y = 0$	0.1	0.2	0	0.1
$Y = 1$	0.1	0.1	0.1	0.3

- (a) Určete marginální rozdělení, načrtněte marginální pravděpodobnostní a distribuční funkce.
- (b) Určete střední hodnoty marginálních rozdělení EX a EY .
- (c) Určete rozptyly marginálních rozdělení $\text{var}X$ a $\text{var}Y$.
- (d) Určete kovarianci a korelaci složek X a Y .
- (e) Rozhodněte, zda složky X a Y jsou závislé nebo nezávislé.
- (f) Najděte podmíněné rozdělení $X|Y = 0$ a určete podmíněnou střední hodnotu $E(X|Y = 0)$ a podmíněný rozptyl $\text{var}(X|Y = 0)$.

(6.2) Pro náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$, kde $X \in \{0, 1, 2\}$ a $Y \in \{0, 1\}$, jsou známy následující sdružené pravděpodobnosti $P(0, 0) = 0.3, P(1, 0) = 0.1, P(2, 1) = 0.05$ a marginální pravděpodobnost $P_X(0) = 0.35, P_Y(0) = 0.7$.

- (a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru.
- (a) Určete marginální rozdělení, načrtněte marginální pravděpodobnostní a distribuční funkce.
- (b) Určete střední hodnoty marginálních rozdělení EX a EY .
- (c) Určete rozptyly marginálních rozdělení $\text{var}X$ a $\text{var}Y$.
- (d) Určete kovarianci a korelaci složek X a Y .
- (e) Rozhodněte, zda složky X a Y jsou závislé nebo nezávislé.

- (f) Najděte podmíněné rozdělení $X|Y = 0$ a určete podmíněnou střední hodnotu $E(X|Y = 0)$ a podmíněný rozptyl $\text{var}(X|Y = 0)$.

(6.3) Dvourozměrný spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ je dán následující funkcí hustoty.

$$f(x, y) = c \cdot x \cdot y^2, \text{ pro } x \in (1, 2), y \in (-1, 1)$$

- (a) Určete konstantu c tak, aby se jednalo o funkci hustoty.
- (b) Určete marginální rozdělení, načrtněte marginální pravděpodobnostní a distribuční funkce.
- (c) Určete střední hodnoty marginálních rozdělení EX a EY .
- (d) Určete rozptyly marginálních rozdělení $\text{var}X$ a $\text{var}Y$.
- (e) Určete kovarianci $\text{cov}(X, Y)$ a korelaci $\text{cor}(X, Y)$.
- (f) Rozhodněte, zda složky X a Y jsou závislé nebo nezávislé.
- (g) Najděte podmíněné rozdělení $X|Y = y$ a určete podmíněnou střední hodnotu $E(X|Y = y)$ a podmíněný rozptyl $\text{var}(X|Y = y)$.

(6.4) V osudí je 9 koulí: 2 žluté, 3 červené a 4 modré. Náhodně vybereme 2 koule (bez vracení zpět). Označme X počet žlutých koulí (ze dvou vybraných) a Y počet červených koulí (ze dvou vybraných).

- (a) Určete pravděpodobnostní funkci náhodného vektoru (X, Y) .
- (b) Určete marginální rozdělení, načrtněte marginální pravděpodobnostní a distribuční funkce.
- (c) Určete střední hodnoty marginálních rozdělení EX a EY .
- (d) Určete rozptyly marginálních rozdělení $\text{var}X$ a $\text{var}Y$.
- (e) Určete kovarianci a korelaci složek X a Y .
- (f) Rozhodněte, zda složky X a Y jsou závislé nebo nezávislé.

(6.5) Z intervalu $(0, 1)$ vybereme číslo (náhodná veličina X) tak, aby každé číslo z tohoto intervalu mělo stejnou možnost vybrání. Stejným způsobem vybereme z intervalu $(x, 1)$ druhé číslo (Y).

- (a) Určete marginální rozdělení, načrtněte marginální pravděpodobnostní a distribuční funkce.
- (b) Určete střední hodnoty marginálních rozdělení EX a EY .
- (c) Určete rozptyly marginálních rozdělení $\text{var}X$ a $\text{var}Y$.
- (d) Určete kovarianci $\text{cov}(X, Y)$ a korelaci $\text{cor}(X, Y)$.
- (e) Rozhodněte, zda složky X a Y jsou závislé nebo nezávislé.