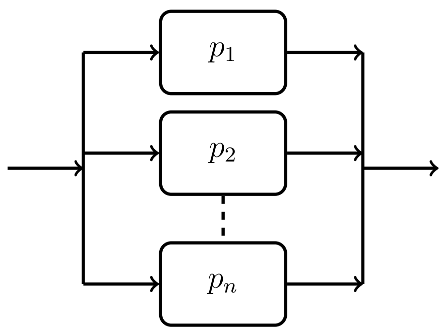
2 Věta o úplné pravděpodobnosti a inverzní Bayesova věta

Teorie: Nezávislé jevy

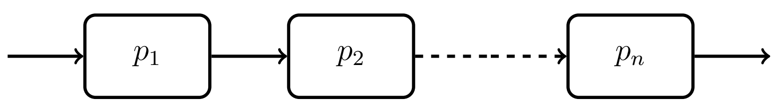
- Dva jevy A a B jsou nezávislé, jestliže $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Jevy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každou jejich podmnožinu platí $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k)$.
- **Spolehlivost paralelně a sériově řazených nezávislých prvků.** Nechť $p_1, p_2, \ldots p_n$ jsou pravděpodobnosti poruch prvků $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Předpokládáme, že poruchy jednotlivých prvků jsou na sobě nezávislé.
  Pravděpodobnost poruchy celého systému značíme P a spolehlivost celého systému $R = 1 - P$



značení: $P_1 \, p \, P_2 \, p \, \ldots \, p \, P_n$

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

$$R = 1 - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} p_i$$



značení: $P_1 \, s \, P_2 \, s \, \ldots \, s \, P_n$

$$P = 1 - (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot \ldots \cdot (1-p_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)$$

$$R = (1-p_1) \cdot (1-p_2) \cdot \ldots \cdot (1-p_n) = \prod_{i=1}^{n} (1-p_i)$$

(2.1) Nechť platí $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.5$ a $P(A \cup B) = 0.6$. Rozhodněte, zda jsou jevy A a B nezávislé.

[$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2$]

[$P(A) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.5 = 0.15$, protože $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, jevy jsou závislé]

(2.2) Nechť $p_1, p_2, ...p_n$ jsou pravděpodobnosti poruch prvků $P_1, P_2, ..., P_n$. Předpokládáme, že poruchy jednotlivých prvků jsou na sobě nezávislé. Spočtěte ppst. poruchy a spolehlivost zapojení pro hodnoty $p_{2k} = 0.1$ a $p_{2k-1} = 0.05$.

(a) (P_1 p P_2) s (P_3 p P_4 p P_5)

[$P = 0.525\%$]

(b) (P_1 p P_2) s ((P_3 s P_4) p (P_5 s P_6))

[$P = 2.592\%$]

(2.3) Student musí v semestru složit 5 zkoušek. Na každou zkoušku má tři pokusy. S jakou ppstí úspěšně zakončí semestr, pokud ppst. úspěchu u zkoušky (v jednom termínu) je 60% a jednotlivé pokusy považujeme za nezávislé?

[71.84%]

Kolik opravných termínů by potřeboval, aby semestr úspěšně zakončil s ppstí alespoň 0,9.

[5]

(2.4) Systém je tvořen třemi sériově řazenými prvky, spolehlivosti jednotlivých prvků jsou nezávislé a nabývají těchto hodnot: $r_1 = 0.96$, $r_2 = 0.92$ a $r_3 = 0.9$;

(a) Určete ppst selhání celého systému.
[$p_1 = 0.04, p_2 = 0.08, p_3 = 0.1, R = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) \cdot (1 - p_3) = 0.7949$ a $P = 20.51\%$]

(b) Navrhněte alespoň dvě možnosti zálohovaní pomocí paralelně přiřazených prvků stejného typu tak, aby ppst selhání celého zálohovaného systému byla menší než 5%.

Teorie: Podmíněná pravděpodobnost

Podmíněná pravděpodobnost jevu A za podmínky jevu B je $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- pro nezávislé jevy platí $P(A|B) = P(A)$
- pozor ... $P(A|B) \neq P(B|A)$, ale $P(A|B)\ P(B) = P(B|A)\ P(A)$

(2.5) Nechť platí $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$ a $P(A|B) = 0.3$.

(a) Vyplňte pravděpodobnostní tabulku

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	1

[$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0.3 \cdot 0.4 = 0.12$]

(b) Určete pravděpodobnost jevu $A \cup B$.

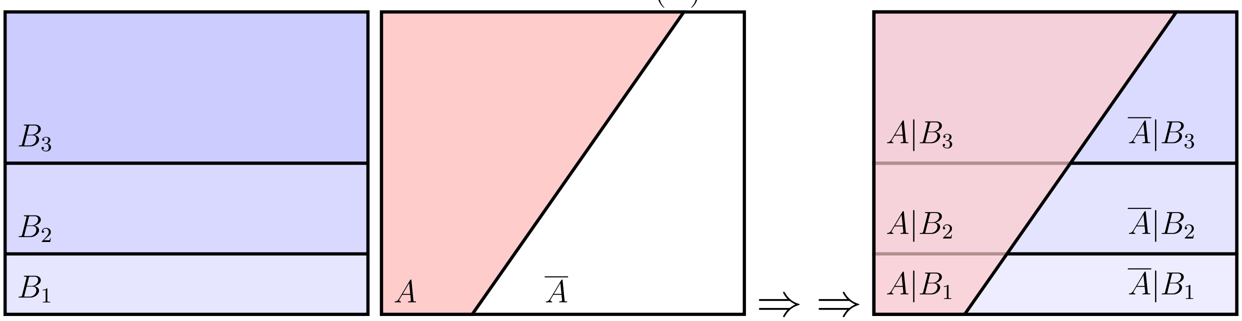
[$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B})$]

(2.6) Žena cestuje letadlem a postupně ji přepravují tři letecké společnosti s_1, s_2, s_3. Ppst, že ji ztratí kufr i-tá společnost, je p_i ($p_1 = 1\%, p_2 = 3\%, p_3 = 2\%$). Na konci své cesty žena zjistila, že kufr chybí. Určete ppsti, že ztrátu zavinila i-tá společnost.

[17%; 50,4%; 32,6%]

Teorie: Věta o úplné pravděpodobnosti a inverzní Bayesova věta

- Pro disjunktní úplné jevy B_i a jev A platí $P(A) = \sum_i P(A|B_i)\, P(B_i)$.
- Pro inverzní jevy platí $P(B_k|A) = \dfrac{P(A|B_k)\, P(B_k)}{P(A)}$



(2.7) Do skladu jsou dováženy výrobky ze tří závodů. Z prvního závodu pochází 30% výrobků, z druhého 20% výrobků a zbytek je ze třetího závodu. Zmetkovitost v prvním závodě je 1%, ve druhém závodě 2% a ve třetím 3%.

(a) Určete ppst., že výrobek ve skladě je vadný.

$[\ P(vadny) = 0.3 \cdot 0.01 + 0.2 \cdot 0.02 + 0.5 \cdot 0.03 = 0.022\ ]$

(b) Určete ppst., že vadný výrobek ve skladě pochází z prvního závodu.

$[\ P(1.zavod|vadny) = \dfrac{0.3 \cdot 0.01}{0.022} = 13.64\%\ ]$

(2.8) Předpokládáme, že určitá sledovaná nemoc se vyskytuje u tří lidí z tisíce. Pro včasné odhalení choroby byl vyvinut diagnostický test s následujícími vlastnostmi. Pro 5% zdravých pacientů je výsledek testu pozitivní (planý poplach) a pro 2% nemocných je výsledky negativní (skryté příznaky).

Výsledek testu pro konkrétní osobu je pozitivní, jaká je ppst, že se jedná o planý poplach?

$[P(pozitivni) = \dfrac{3}{1000} 0.98 + \dfrac{997}{1000} 0.05 = 0.05279\ ]$

$[\ P(zdravy|pozitivni) = \dfrac{997/1000 \cdot 0.05}{0.05279} = 94.43\%\ ]$

Výsledky testu pro konkrétní osobu jsou negativní, jaká je ppst, že se jedná o nerozpoznanou chorobu ?

$[P(negativni) = 1 - P(pozitivni) = 0.94721\ ]$

$[P(nemocny|negativni) = \dfrac{3/1000 \cdot 0.02}{0.94721} = 0.000063 = 6.33 \cdot 10^{-3}\%]$

(2.9) Vysíláme prvky $x_1, x_2, ..., x_n$ a přijímáme prvky $y_1, y_2, ..., y_n$. Při bezchybném přenosu je při vysílání x_i přijat prvek y_i. Na vysílání však působí rušivé jevy, které přenos zkreslují.
Nechť $n = 2$ a $x_1 = y_1 = 0$ a $x_2 = y_2 = 1$.
Je-li vyslán prvek 0 přijme se správně v 97% případů.
Je-li vyslán prvek 1 přijme se správně v 80% případů.
Zpráva obsahuje 45% prvků 1.

(a) Jaká je ppst., že vyslaný prvek bude dobře přijat.

$$[\ P(spravne) = \underbrace{0.45 \cdot 0.8}_{jednicky} + \underbrace{0.55 \cdot 0.97}_{nuly} = 0.8935\ ]$$

(b) Byl přijat prvek 1. Jaká je ppst., že byl vyslán prvek 1.

$$[P(prijata\, jednicka) = 0.45 \cdot 0.8 + 0.55 \cdot 0.03 = 0.3765\ ]$$

$$[\ P(poslana\, jednicka | prijata\, jednicka) = \frac{0.45 \cdot 0.8}{0.3765} = 0.9562\ ]$$

(2.10) Přístroj hledá vadu materiálu. Vadu najde s ppstí 0.90 a naopak s ppstí 0.05 označí bezvadný materiál jako vadný. Je známo, že ppst výskytu vady je 0.20.

(a) Určete ppst., že přístroj označil výrobek jako vadný.

$$[P(oznacen) = 0.2 \cdot 0.9 + (1 - 0.2) \cdot 0.05 = 0.22\ ]$$

(b) S jakou pravděpodobností je zkoušený výrobek, který byl označen jako vadný, opravdu vadný ?

$$[P(vadny|oznacen) = \frac{0.2 \cdot 0.9}{0.22} = 81.82\%\ ]$$

(2.11) (Jak zajistit utajení ankety). Provádíme průzkum, kolik studentů si pomáhá při zkouškách opisováním. Průzkum provádíme podle následujícího modelu. Každý student je požádán, aby si v soukromí hodil mincí a pak
(i) padne-li rub mince, odpověděl na otázku, zda opisuje;
(ii) padne-li líc mince, hodil ještě jednou a odpověděl na otázku: „Padl i napodruhé líc mince?".
Předpokládejme, že se respondent vrátil a odpověděl ANO. Tazatel nemá žádnou šanci zjistit, zda odpovídá na první nebo na druhou otázku a anonymita je tedy zaručena.

(a) Předpokládejme, že podíl opisujících je $A = 20\%$.Kolik procent respondentů by mělo celkem odpovědět ANO?

[35%]

(b) Ve skutečnosti ANO odpovědělo 60% respondentů. Odhadněte, kolik procent studentů opisuje.

[70%]

(c) Kolik může být maximálně odpovědí ANO ?

[75%]