4 Diskrétní rozdělení - vybrané typy

Teorie: Binomické rozdělení $Bi(n, p)$

- náhodná veličina X nabývá hodnot: $\{0, 1, 2, \dots, n\}$
- pravděpodobnostní funkce $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pro $k = 0, 1, \dots, n$
- střední hodnota $\mathrm{E}(X) = n \cdot p$ a rozptyl $\mathrm{var}(X) = n \cdot p\,(1-p)$
- alternativní rozdělení je $Bi(p, n = 1)$
- ppst. úspěchu v jednom pokusu je p, náhodná veličina $X \sim Bi(p, n)$ charakterizuje počet úspěšných pokusů při n nezávislých opakováních
- podíl výrobků z danou vlastností v základním souboru je p, náhodná veličina $X \sim Bi(p, n)$ charakterizuje počet výrobků s danou vlastností ve výběru rozsahu n, pokud prvky po výběru vracíme zpět
- funkce v Excelu:

  BINOM.DIST(počet_úspěchů(k);pokusy(n);pravděpodobnost_úspěchu(p);kumulativní).

(4.1) Uvažujeme náhodnou veličinu vyjadřující počet šestek, které padnou při hodu 5 kostkami.

(a) Najděte pravděpodobnostní a distribuční funkci této náhodné veličiny.

[$X \sim Bi(n = 5, p = 1/6)$]

(b) Určete střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.

[$\mathrm{E}X = 5/6, \mathrm{var}X = 5 \cdot 1/6 \cdot 5/6$]

(c) Určete ppst., že padnou alespoň dvě šestky.

[$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.8038 = 19.62\%$]

(4.2) Hráč A má v krabičce 6 kostek a chce hodit alespoň jednu šestku. Hráč B má v krabičce 12 kostek a chce hodit alespoň dvě šestky. Mají oba stejně těžkou úlohu ? Určete ppst „úspěchu“ obou hráčů.

[ne, $P(A) = 66,51\%$ a $P(B) = 61,87\%$]

(4.3) Z 50 výrobků mezi nimiž je 5 vadných náhodně vybíráme 10 výrobků (výrobky po kontrole vracíme zpět).

(a) Najděte pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné veličiny popisující počet vadných výrobků ve výběru a určete střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.

[$X \sim Bi(n = 10, p = 5/50), \mathrm{E}X = 1, \mathrm{var}X = 9/10$]

(b) Určete ppst., že ve výběru budou nejvýše 2 vadné výrobky.

[$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = F(2) = 92.98\%$]

Teorie: Hypergeometrické rozdělení $HG(N, K, n)$

- náhodná veličina X nabývá hodnot: $\{0, 1, 2, \dots, \min(n, K)\}$
- pravděpodobnostní funkce $P(X = k) = \dfrac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ pro $k = 0, 1, \dots, \min(n, K)$
- střední hodnota $\mathrm{E}(X) = n\,\dfrac{K}{N}$ a rozptyl $\mathrm{var}(X) = n\,\dfrac{K}{N}\left(1 - \dfrac{K}{N}\right)\dfrac{N-n}{N-1}$
- binomické rozdělení je limitním případem hypergeometrického rozdělení pro $n \to \infty$ a $\dfrac{K}{N} \to 0$ je $HG(N, K, n) \approx Bi\left(p = \dfrac{K}{N}; n\right)$
- v souboru N prvků má K prvků sledovanou vlastnost, provedeme výběr n prvků, přičemž vybraný prvek do souboru nevracíme, náhodná veličina $X \sim HG(N, K, n)$ charakterizuje počet prvků se sledovanou vlastností ve výběru n
- funkce v Excelu:

  HYPGEOM.DIST(úspěch(k); celkem(n); základ_úspěch(K); základ_celkem(N); kumulativní).

(4.4) Náhodná veličina popisuje počet vadných výrobků ve výběru 10 výrobků z dodávky, která obsahovala 50 výrobků dobrých a 5 vadných.

(a) Určete typ rozdělení a střední hodnotu této veličiny.

[$HG(N = 55, K = 5, n = 10)$, $\mathrm{E}X = 5/55 \cdot 10$]

(b) Určete ppst., že ve výběru bude nejvýše jeden vadný výrobek.

[$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = F(1) = 77.95\%$]

(4.5) Jaká je ppst., že odběratel přijme zásilku 1000 výrobků obsahující 5% vadných výrobků, pokud kontrolu provádí následujícím postupem.
Vybere 20 výrobků a pokud není ve výběru vadný - zásilku přijme, pokud jsou ve výběru 2 a více vadné výrobky - zásilku odmítne, jinak provede další výběr rozsahu 20 a zásilku přijme pouze v případě, že jsou všechny výrobky v druhém výběru bezvadné.

[$49,38\%$]

(4.6) V krabici je pět bílých a tři modré koule. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci náhodné proměnné X, popisujících počet pokusů nutných k vytažení modré koule. Určete průměrný počet pokusů nutných k vytažení modré koule.

[$X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $E(X) = 2,25$]

Teorie: Poissonovo rozdělení $Po(\lambda)$

- náhodná veličina X nabývá hodnot: $\{0, 1, 2, \ldots, \}$
- pravděpodobnostní funkce $P(X = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots$
- střední hodnota $\mathrm{E}(X) = \lambda$ a rozptyl $\mathrm{var}(X) = \lambda$
- Poissonovo rozdělení je limitním případem binomického rozdělení pro $n \to \infty$ a $p \to 0$ je $Bi(n, p) \approx Po(\lambda = n\,p)$ (stačí $n \geq 30$ a $p \leq 0.1$)
- uvažujme náhodně se vyskytující událost, přesněji ppst výskytu události během časového intervalu je přímo úměrná délce časového intervalu, průměrný počet výskytu události za konstantní časovou jednotku je λ, pak náhodná veličina $X \sim Po(\lambda)$ charakterizuje počet výskytu události za konstantní časovou jednotku
- funkce v Excelu POISSON.DIST(x(k); střední(λ); kumulativní).

(4.8) Náhodná veličina X má Poissonovo rozdělení se střední hodnotou $EX = \lambda = 5$. Spočtěte pravděpodobnost, že $P(X = 3)$, $P(X < 4)$ a $P(X \geq 2)$.
[$P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0.265 - 0.125 = 14\%$,
$P(X < 4) = P(X \leq 3) = F(3) = 26.5\%$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - 0.040 = 96\%$]

(4.9) V období silného provozu spojí telefonní ústředna za určitý časový interval Δt průměrně 8 hovorů. (Předpokládáme, že počet hovorů se řídí Poissonovým rozdělením) Určete ppst., že během intervalu Δt spojí ústředna

(a) nejvýše 5 hovorů;
[$P(X \leq 5) = F(5) = 19,12\%$]

(b) alespoň 10 hovorů;
[$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - F(9) = 28,34\%$]

(c) nejvýše 12 hovorů, pokud víme, že hovorů bylo nejméně 5.
[$P(X \leq 12 | X \geq 5) = \dfrac{P(5 \leq X \leq 12)}{P(X \geq 5)} = \dfrac{F(12) - F(4)}{1 - F(4)} = 92.91\%$]

(4.10) Předpokládejme, že počet obsloužených zákazníků během 1 hodiny v jisté prodejně je náhodná veličina X s Poissonovým rozdělením ppsti se střední hodnotou 10.

(a) Určete s ppstí alespoň 95% maximální počet zákazníků obsloužených během 1 hodiny ?
[Hledám x tak, aby $P(X \leq x) \geq 0.95$]
[z tabulek $P(X \leq 14) = F(14) = 0.917$ a $P(X \leq 15) = F(15) = 0.951$,tedy $x = 15$.]

(b) Během první půlhodiny bylo obslouženo 10 zákazníků. Jaká je ppst, že během první hodiny bude obslouženo více než 15 zákazníků ?
[$P(X > 15 | X \geq 10) = \dfrac{P(X > 15)}{P(X \geq 10)} = \dfrac{1 - F(15)}{1 - F(9)} = 0.089$]