10 Testování statistických hypotéz

Teorie: Statistické hypotézy

Hypotéza je tvrzení o populaci, nulová hypotéza H_0 a alternativní hypotéza H_1
Statistický test je postup, kdy na základě pozorovaných dat zamítáme nebo nezamítáme hypotézu H_0 (zamítáme H_0 ve prospěch H_1, pokud pozorované hodnoty jsou málo pravděpodobné). Každý test má své předpoklady!
Chyby testování jsou dvojího typu
hypotéza H_0 platí, ale my ji zamítneme (chyba 1. druhu, značíme obvykle α)
hypotéza H_0 neplatí, ale my ji nezamítneme (chyba 2. druhu, značíme obvykle β)
Hladina významnosti testu α je volena tak, aby $P(\text{chyba 1. druhu}) \leq \alpha$
P-hodnota testu je číslo takové, že hypotézu H_0 zamítáme na hladině α právě tehdy, když $p - hodnota < \alpha$, nejmenší hladiny, při které bychom H_0 zamítli
Testové kritérium je číslo vypočtené z pozorovaných dat
Kritický obor jsou hodnoty, že pokud testové kritérium leží v kritickém oboru, pak zamítneme H_0

Teorie: Jednovýběrové testy

(a) test o parametru π_0 alternativního rozdělení ; nulová hypotéza $H_0 : p = \pi_0$, kde $p = \overline{x}$ (předpoklad $np(1-p) > 9$)

Alternativa H_1	kritérium	zamítnu H_0 pokud
$p \neq \pi_0$		$\lvert U \rvert > u_{1-\alpha/2}$
$p < \pi_0$	$U = \dfrac{p - \pi_0}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$	$U < u_\alpha$
$p > \pi_0$		$U > u_{1-\alpha}$

(b) test o střední hodnotě při výběru z $N(\mu, \sigma^2)$ (Z-TEST); nulová hypotéza $H_0 : \mu = \mu_0$ při známé hodnotě σ

Alternativa H_1	kritérium	zamítnu H_0 pokud	EXCEL
$\mu \neq \mu_0$		$\lvert U \rvert > u_{1-\alpha/2}$	
$\mu < \mu_0$	$U = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$	$U < u_\alpha$	Z.TEST(data;μ_0;σ)
$\mu > \mu_0$		$U > u_{1-\alpha}$	

(c) test o střední hodnotě při výběru z $N(\mu, \sigma^2)$ (Z-TEST); nulová hypotéza $H_0 : \mu = \mu_0$ při neznámé hodnotě σ

Alternativa H_1	kritérium	zamítnu H_0 pokud	EXCEL
$\mu \neq \mu_0$		$\lvert T\rvert > t_{1-\alpha/2}(\nu = n-1)$	
$\mu < \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s}\sqrt{n}$	$T < t_\alpha(\nu = n-1)$	Z.TEST(data;μ_0)
$\mu > \mu_0$		$T > t_{1-\alpha}(\nu = n-1)$	

(10.1) Průměrný podíl zmetkovitosti při současné technologii je 0.1. Po zavedení nové technologie bylo zjištěno, že z 200 vyrobených výrobků bylo 31 vadných. Zhoršuje nová technologie jakost výroby ?

[$H_0 : p = 0.1$ a $H_1 : p > 0.1$, kritérium $U = \dfrac{31/200 - 0.1}{\sqrt{31/200 \cdot 169/200}}\sqrt{200} = 2.15$, $U > u_{0{,}95} = 1.65$]

[zamítáme H_0, nová technologie zhoršuje jakost výroby]

(10.2) Automat plní krabice pracím práškem. V každé krabici má být 2 kg prášku. Z produkce bylo náhodně vybráno 6 krabic a jejich obsah přesně zvážen. Byly zjištěny následující odchylky od požadované hmotnosti $-5, 1, -1, -8, 7, -6$ v dkg. Ověřte, zda nedošlo k systematické odchylce nastavení automatu.

[$H_0 : \mu = 0$ a $H_1 : \mu \neq 0$, kritérium $T = -0{,}889$, $|T| < t_{0{,}975}(5) = 2.571$]

[data neodporují předpokladu, že automat je správně seřízen]

Teorie: Dvouvýběrové testy

(a) test o rozdílu středních hodnot při výběrech z $N(\mu_1, \sigma^2)$ a z $N(\mu_2, \sigma^2)$ (T-TEST); nulová hypotéza $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$ a alternativní hypotéza $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$

$$T = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \delta}{\sqrt{s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2}}$$

a hypotézu H_0 zamítnu pro $|T| > t_{1-\alpha/2}(\nu = \min(n_1, n_2) - 1)$

Excel: T.TEST(data1;data2;chvosty;typ)

(b) test o shodě rozptylů při výběrech z $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a z $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ (F-TEST); nulová hypotéza $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$F = s_1^2/s_2^2$ a kritérium porovnávám s kvantily Fisherova rozdělení $F_\alpha(\nu_1 = n_1 - 1; \nu_2 = n_2 - 1)$

Excel: F.TEST(data1;data2)

(10.3) Porovnáme tělesnou zdatnosti desetiletých chlapců a dívek. Za tímto účelem bylo náhodně vybráno 33 chlapců a 28 dívek. Běželi 50m na čas s následujícími výsledky:
chlapci : $\overline{X}_n = 9.4636$, $s_n^2 = 0.3302$
divky : $\overline{Y}_m = 10.1179$, $s_m^2 = 0.4522$
Potvrzují data domněnku, že chlapci i dívky běhají v průměru stejně rychle?

Teorie: Základní principy statistické přejímky

Cílem statistické přejímky je zjistit, zda dodavatel předkládá dávku, jejíž jakost je na vzájemně dohodnuté úrovni.
Parametr P označuje **relativní podíl vadných výrobků v dávce.**
Operativní charakteristika přejímacího plánu je funkce $L(P)$, která vyjadřuje pravděpodobnost přijetí dávky.
Riziko přejímky α = riziko, že příjemce zamítne dodávku i když bude splňovat dohodnutou kvalitu.
Riziko přejímky β = riziko, že příjemce přijme dodávku i když nebude splňovat dohodnutou kvalitu.
AQL (acceptable quality level) - dohodnutá hladina α pro dodavatele $L(AQL) \geq 1 - \alpha$.
LQ (limiting quality) - dohodnutá hladina α pro dodavatele $L(LQ) \leq \beta$.

(10.4) Předpokládejme, že v zásilce 1000 výrobků je 1% vadných výrobků. Odběratel vybere a zkontroluje 50 výrobků.

(a) Určete ppst., že ve výběru nebude žádný vadný výrobek. [60,5%]

(b) Určete ppst., že ve výběru bude právě jeden vadný výrobek. [30,56%]

(c) Určete ppst., že ve výběru budou nejvýše dva vadné výrobky. [98,62%]

(d) Kolik výrobků musí odběratel vybrat, aby ppst. nalezení alespoň jednoho vadného výrobku byla 60%. [92]

(10.5) Jaká je ppst., že odběratel přijme zásilku 1000 výrobků obsahující 5% vadných výrobků, pokud kontrolu provádí následujícím postupem.
Vybere 20 výrobků a pokud není ve výběru vadný - zásilku přijme, pokud jsou ve výběru 2 a více vadné výrobky - zásilku odmítne, jinak provede další výběr rozsahu 20 a zásilku přijme pouze v případě, že jsou všechny výrobky v druhém výběru bezvadné. [49,38%]

(10.6) Podle dohody mezi dodavatelem a odběratelem má být v zásilce 10 000 kusů výrobků maximálně 2% zmetků. Byla dohodnuta zjednodušení přejímková kontrola formou kontroly 500 vybraných výrobků. Dodavatel požaduje, aby pravděpodobnost nepřijetí dobré zásilky byla maximálně 5%. Náhodná veličina X popisuje počet vadných výrobků ve výběru.

(a) určete počet výrobků X ve výběru, při kterých může odběratel odmítnout přijetí zásilky;

(b) určete ppst zamítnutí zásilky, která má 2% zmetků;

(c) určete ppst přijetí zásilky, která má 3% zmetků.

(10.7) Součástky s délkou $X \sim N(\mu = 150\,\text{mm}; \sigma^2 = 2,53)$ se balí do krabic, které mají délkou $Y \sim N(\mu = 155\ \text{mm}; \sigma^2 = 0,36)$. Balíme 3000 součástek za směnu. Linka se zastaví pokud je součástka delší než krabice.

(a) Určete ppst, součástka se nevejde do krabice (bude delší). [0,16%]

(b) Určete ppst., že se linka zastaví během směny alespoň jednou. [99,2%]

(c) Určete průměrný počet zastavení linky během směny. [5]