8 Transformace náhodné veličiny

Teorie: Transformace náhodných veličin

Pokud X je náhodná veličina a $Y = h(X)$ pak platí

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(\{x : h(x) \leq y\}).$$

Pokud $h(x)$ je rostoucí (klesající) pak

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P\left(x \leq h^{-1}(y)\right) = F_Y\left(h^{-1}(y)\right)$$

a pro funkci hustoty platí

$$f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{\mathrm{d}\,h^{-1}(y)}{\mathrm{d}\,y}\right|.$$

Pro vícerozměrné náhodné veličiny platí

$$f_Y(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_X\left(h_1^{-1}(y_1, \ldots, y_n), \ldots, h_n^{-1}(y_1, \ldots, y_n)\right)|J(y_1, \ldots, y_n)|,$$

kde

$$J(y_1, \ldots, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}\,h_1^{-1}}{\mathrm{d}\,y_1} & \frac{\mathrm{d}\,h_2^{-1}}{\mathrm{d}\,y_2} & \ldots & \frac{\mathrm{d}\,h_1^{-1}}{\mathrm{d}\,y_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\mathrm{d}\,h_n^{-1}}{\mathrm{d}\,y_1} & \frac{\mathrm{d}\,h_n^{-1}}{\mathrm{d}\,y_2} & \ldots & \frac{\mathrm{d}\,h_n^{-1}}{\mathrm{d}\,y_n} \end{pmatrix}$$

(8.1) Nechť pro náhodnou veličinu X platí $X \sim Exp(\delta = 5)$. Určete rozdělení veličiny $Y = X^2$.

(8.2) Nechť pro náhodnou veličinu X platí $X \sim N(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$. Určete rozdělení veličiny $Y = e^X$.

(8.3) Nechť pro náhodnou veličinu X platí $X \sim R(-5, 5)$. Určete rozdělení veličiny $Y = 2|X| - 1$.

(8.4) Nechť hustota náhodné veličiny X je dána funkcí $f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)}$, $\alpha > 0, 0 < x < \infty$. Určete rozdělení veličiny $Y = \ln(X)$.

(8.5) Nechť X má libovolné rozdělení s hustotou pravděpodobnosti f pro $x \in \mathbf{R}$. Určete rozdělení veličiny $Y = |X|$.

(8.6) Nechť náhodný vektor má rovnoměrné rozdělení na jednotkovém kruhu v reálné rovině. Najděte rozdělení vektoru (R, φ), kde (R, φ) jsou polární souřadnice $\boldsymbol{X}$.

Teorie: Rozdělení součtu a součinu náhodných veličin

Pokud známe sdruženou funkci hustoty náhodných veličin $f(x_1, x_2)$ a studujeme rozdělení veličiny $Y = y(X_1, X_2)$ pak pro distribuční funkci veličiny Y platí

$$G(y) = P\left(y(x_1, x_2) \le y\right) = \int\int_S f(x_1, x_2)\mathrm{d}\,x_1 \mathrm{d}\,x_2,$$

kde S je oblast vymezená nerovnostmi $y(x_1, x_2) \le y$.
Speciálně:
jsou-li X_1 a X_2 nezávislé náhodné veličiny s funkcemi hustoty $f_1(x), f_2(x), x \in \mathbf{R}$, pak

pro součet $Y = X_1 + X_2$: $\quad g(y) = \int_{\mathbf{R}} f_1(y - x_2) f_2(x_2)\mathrm{d}\,x_2 = \int_{\mathbf{R}} f_1(x_1) f_2(y - x_1)\mathrm{d}\,x_1$

pro rozdíl $Y = X_1 - X_2$: $\quad g(y) = \int_{\mathbf{R}} f(x_1, x_1 - y)\mathrm{d}\,x_1 = \int_{\mathbf{R}} f(x_2 + y, x_2)\mathrm{d}\,x_2$

pro součin $Y = X_1 \cdot X_2$: $\quad g(y) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right)\mathrm{d}\,x_1 + \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x_1} f\left(x_1, \frac{y}{x_1}\right)\mathrm{d}\,x_2$

Poznámka: Pro normální rozdělení platí $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2, i = 1, 2$

$$X_1 \pm X_2 \sim N\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right).$$

(8.7) Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotou $f(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$. Spočtěte hustotu náhodné veličiny $X + Y$.

(8.8) Dvojice součástek má dobu života popsánu hustotou $f(x, y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x-y/2}$ pro $x > 0$ a $y > 0$

(a) Jaká je pravděpodobnost, že druhá součástka přežije první ?

(b) Určete distribuční funkci a funkci hustoty veličiny $X - Y$.

(8.9) Veličiny X_1 a X_2 jsou nezávislé a každá má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x_i/2}, x_i \in \mathbf{R}^+, i = 1, 2.$$

Určete hustotu pravděpodobnosti veličiny $Y = 2 \cdot X_1 - X_2$.

(8.10) Náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé a mají stejné rozdělení s funkcí hustoty $f(x)$.
Najděte distribuční funkci a funkci hustoty veličin

(a) $Z_1 = \min(X, Y)$,

(b) $Z_2 = \max(X, Y)$

(c) a variačního rozpětí $R = Z_2 - Z_1$.