3 Diskrétní rozdělení a spojitá rozdělení

Teorie: Obecné diskrétní rozdělení

Diskrétní veličina nabývá hodnoty $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
Diskrétní veličina je popsaná pomocí pravděpodobnostní funkce

$$P(x_i) = P(X = x_i), \text{ kde } i = 1, 2, \ldots.$$

Distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$.

Počítání pravděpodobností **respektuje diskrétnost** (uvažujeme $x_{(1)} < x_{(2)} < x_{(3)} < \ldots$)

$$\begin{aligned}
P\left(X \leq x_{(i)}\right) = F(x_{(i)}) &= P\left(X = x_{(1)}\right) + P\left(X = x_{(2)}\right) + \ldots + P\left(X = x_{(i)}\right)\\
P\left(X < x_{(i)}\right) = F(x_{(i-1)}) &= P\left(X = x_{(1)}\right) + P\left(X = x_{(2)}\right) + \ldots + P\left(X = x_{(i-1)}\right)\\
P\left(X \geq x_{(i)}\right) = 1 - P\left(X < x_{(i)}\right) &= 1 - F(x_{(i-1)})\\
P\left(X > x_{(i)}\right) = 1 - P\left(X \leq x_{(i)}\right) &= 1 - F(x_{(i)})
\end{aligned}$$

Střední hodnota: $\mathrm{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot P(X = x_i)$.

Rozptyl: $\mathrm{var}X \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}\left(\mathrm{E}X - X\right)^2 = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \cdot P(X = x_i) - (\mathrm{E}X)^2$

(3.1) Nechť náhodná veličina X nabývá pouze hodnot $-1, 0, 1$ a víme, že $P(X = -1) = 0.25$, $P(X = 0) = 0.45$ a $P(X = 1) = 1 - P(X = -1) - P(X = 0)$

(a) Načrtněte graf pravděpodobnostní funkce a graf distribuční funkce.

(b) Určete střední hodnotu a rozptyl.

[$P(X = 1) = 0.3$, $\mathrm{E}X = (-1) \cdot 0.25 + (0) \cdot 0.45 + (1) \cdot 0.3 = 0.05$]
[$\mathrm{var}X = (-1)^2 \cdot 0.25 + (0)^2 \cdot 0.45 + (1)^2 \cdot 0.3 - 0.05^2 = 0.5475$]

(3.2) Náhodná veličina X nabývá hodnot $x = \{1, 2, 3\}$ a pravděpodobnosti jsou dány vztahem $P(X = x) = \dfrac{c}{x!}$. Určete hodnotu c tak, aby se jednalo o pravděpodobnostní funkci. Spočtěte střední hodnotu $\mathrm{E}(X)$ a rozptyl $\mathrm{var}X$.

[$P(X = 1) = \dfrac{c}{1!}$, $P(X = 2) = \dfrac{c}{2!}$, $P(X = 3) = \dfrac{c}{3!}$]
[součet pravděpodobností musí být 1 tedy $\dfrac{c}{1!} + \dfrac{c}{2!} + \dfrac{c}{3!} = 1$ a $c = 6/10$]
[střední hodnota $\mathrm{E}(X) = 1 \cdot \dfrac{6}{10} + 2 \cdot \dfrac{6}{20} + 3 \cdot \dfrac{6}{60} = \dfrac{3}{2}$ a rozptyl $\mathrm{var}(X) = 0.45$]

(3.3) Uvažujte pro $n = 1, 2, \ldots$ pravděpodobnosti

$$P(X = n) = \begin{cases} \dfrac{1}{n(1+n)} & pro \;\; n = 1, 2, ... \\ 0 & jinak \end{cases}$$

Rozhodněte, zda se jedná o pravděpodobnostní funkci a spočtěte střední hodnotu.

[jedná se pravděpodobnostní funkci, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+n)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots = 1$]

[střední hodnota neexistuje, protože $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(1+n)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ je nekonečno]

(3.4) Najděte pravděpodobnostní a distribuční funkci pro následující náhodné proměnné, určete jejich střední hodnotu a rozptyl.

(a) počet šestek, které padnou při hodu 5 kostkami;

[$\mathrm{E}(X) = \frac{5}{6}$, $\mathrm{var}(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$]

(b) součet bodů na kostkách při hodu 2 kostkami;

[$\mathrm{E}(X) = 7$, $\mathrm{var}(X) = \frac{35}{6}$]

(c) počet pokusů nutných k tomu, aby padla šestka;

[$\mathrm{E}(X) = 6$, $\mathrm{var}(X) = 30$]

(d) počet vadných výrobků ve výběru 10 výrobků z dodávky, která obsahovala 50 výrobků dobrých a 5 vadných;

[$\mathrm{E}(X) = 10\frac{5}{55} = 0.91$, $\mathrm{var}(X) = 10\frac{5}{55}\frac{50}{55}\frac{45}{54} = 0,69$]

(e) počet kontrolovaných výrobků, pokud ppst., že výrobek projde kontrolou je 0,8 a kontrolu končíme v okamžiku, kdy najdeme dva vadné výrobky.

[$\mathrm{E}(X) = 9$, $\mathrm{var}(X) = 40$]

(3.5) Dva hráči hrají následující hru: každý z hráčů vsadí předem dohodnutý obnos $S = 5$ Kč a pak hráči hodí dvěma kostkami, v případě,
že součet bodů na kostkách je 6 a méně obnos $2S = 10$ Kč se dělí v poměru 2:8
že součet bodů na kostkách je 7 a více obnos $2S = 10$ Kč se dělí v poměru 7:3

(a) Pro kterého z hráčů je hra výhodnější ?

[X označuje součet bodů na kostkách, $P(X \leq 6) = \frac{15}{36}$, $P(X \geq 7) = \frac{21}{36}$]

[střední hodnota výhry hráče A je $\mathrm{E}X_A = 2 \cdot \frac{15}{36} + 7 \cdot \frac{21}{36} = 4.916$]

[střední hodnota výhry hráče B je $\mathrm{E}X_B = 8 \cdot \frac{15}{36} + 3 \cdot \frac{21}{36} = 5.083$]

[hra je výhodnější pro hráče B]

(b) Navrhněte jiné poměry dělení vkladu tak, aby hra byla spravedlivá.

[například vždy poměr 1:1]

Teorie: Obecné spojité rozdělení

Spojitá veličina nabývá nekonečně hodnot z intervalu $(a, b) \subseteq \mathbf{R}$.

Popsaná pomocí funkce hustoty $f(x)$, kde $\int_a^b f(x) \mathrm{d}\, x = 1$.

Distribuční funkce $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \mathrm{d}\, t$.

Počítání pravděpodobností

$$\begin{aligned} P(X = a) &= 0 \\ P(X \le a) = P(X < a) &= F(a) \\ P(X \ge a) = P(X > a) &= 1 - F(a) \\ P(a < X < b) &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

$\alpha\%$ kvantil je číslo x_α, pro které platí $F(x_\alpha) = \alpha$

Speciální kvantily jsou: medián $x_{0.5}$, dolní kvartil $x_{0.25}$, horní kvartil $x_{0.75}$, dolní decil $x_{0.1}$, horní decil $x_{0.9}$, ...

Střední hodnota: $\mathrm{E}X = \int_a^b x \cdot f(x) \mathrm{d}\, x$. a rozptyl: $\mathrm{var}X = \mathrm{E}X^2 - (\mathrm{E}X)^2 = \int_a^b x^2 \cdot f(x) \mathrm{d}\, x - (\mathrm{E}X)^2$

(3.6) Rozdělení náhodné veličiny X je dáno hustotou $f(x) = 2x + 2$, na intervalu $(-1, 0)$ a nulovou jinde. Najděte $P(-2 \le X \le -0,5)$, $P(-2 \le X \le -1)$ a $\mathrm{E}X$.

[$P(-2 \le X \le -0,5) = \int_{-1}^{-1/2} f(x) \mathrm{d}\, x = 1/4$,$P(-2 \le X \le -1) = 0$, $\mathrm{E}X = -1/3$]

(3.7) Náhodná veličina X má distribuční funkci $x^2/4$ na $(0, 2)$, nulovou pro $x < 0$ a jednotkovou pro $x > 2$. Najděte její hustotu, medián, střední hodnotu a $P(0,5 \le X < 1,5)$.

[$f(x) = x/2, x \in (0, 2)$,$x_{0.5} = \sqrt{2}$, $\mathrm{E}X = 4/3$, $P(0,5 \le X < 1,5) = 1/2$]

(3.8) Náhodná veličina X je dána následující funkcí hustoty $f(x) = \begin{cases} bx & \text{pro } x \in (0, 1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Určete hodnotu parametru b, nakreslete funkci hustoty, určete a nakreslete odpovídající distribuční funkci $F(x)$, určete střední hodnotu $\mathrm{E}X$ a rozptyl náhodné veličiny $\mathrm{var}X$.

[$b = 2$, $F(x) = x^2, x \in (0, 1)$, $\mathrm{E}X = 2/3$, $\mathrm{var}X = 1/18$]

(3.9) Náhodná veličina X je dána následující funkcí hustoty $f(x) = \begin{cases} a - x/2 & \text{pro } x \in (3, 5), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$

Určete hodnotu parametru a, nakreslete funkci hustoty, určete a nakreslete odpovídající distribuční funkci $F(x)$, určete medián a kvantily $x_{0.05}$ a $x_{0.95}$.

[$a = 5/2$, $F(x) = -x^2/4 + 5/2x - 21/4, x \in (3, 5)$, $x_{0.5} = 3.586$, $x_{0.05} = 3.051$,$x_{0.95} = 4.553$]