EVENTI INDIPENDENTI

Eventi indipendenti

Due eventi A e B si dicono indipendenti se
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

oss: Se due eventi A e B sono indipendenti, allora $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$

Proposizione

Se A e B sono indipendenti, allora sono indipendenti anche le coppie
A^c e B, A e B^c, A^c e B^c

Osservazioni

1) Se $P(A) = 0$ oppure $P(A) = 1 \implies A$ è indipendente da qualsiasi altro evento

dimostrazione:
Supponiamo che $P(A) = 0$ e che B sia un altro evento qualsiasi.
Allora $P(A \cap B) = 0 = 0 \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$ $\forall B$ per definizione è indipendente
Se $P(A) = 1 \implies P(A^c) = 0 \implies A^c$ è indipendente da qualsiasi altro evento
Lo stesso per $(A^c)^c$ ovvero per A

2) Due eventi disgiunti non possono essere indipendenti, a meno che uno dei due non sia trascurabile

dimostrazione
Se A e B sono disgiunti $A \cap B = \emptyset \implies P(A \cap B) = 0$

es. Mazzo da 40 carte con numeri $1, \dots, 10$ e semi $= \{C, D, P, F\}$
A = "estraggo un asso (1)" B = "estraggo una carta D (denari)"
A e B sono indipendenti?

$P(A) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $P(B) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
$P(A \cap B) =$ "esce l'asso di denari" $= \frac{1}{40} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \implies$ Sì, sono indipendenti

Indipendenza di 3 eventi

Supponiamo di avere 3 eventi A, B e C. Si dicono indipendenti se:
- sono indipendenti 2 a 2 (i.e. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ e $P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$)
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

oss: è necessario che siano vere <u>entrambe</u> le condizioni

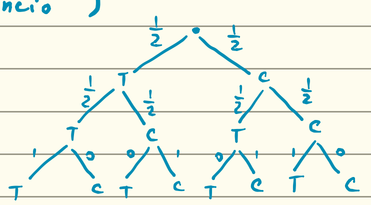
Indipendenza di n eventi

Dati $A_1, \dots, A_n$ eventi, si dicono indipendenti se $\forall$ intero k con $2 \le k \le n$
e $\forall$ scelta di interi $1 \le i_1 \le i_2 \le \dots i_k \le n$ si dice che:
$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$

Traduzione: sono tutti indipendenti 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4, ...
es. 3 lanci di monete, il terzo è truccato in modo che sia T se i primi 2 sono concordi, C altrimenti

A: "T al 1° lancio"
B: "T al 2° lancio"
C: "T al 3° lancio"

Verificare che A, B, C sono 2 a 2 indipendenti ma non sono globalmente indipendenti



$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$ ok!
$P(A \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$ ok!
$P(B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(B) \cdot P(C)$ ok!
} IND 2 a 2
$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ No! non globale

Caso importante su eventi indipen.

Prove ripetute di un esperimento svolte nelle stesse condizioni
es. n estrazioni di biglie, che vengono re-inserite una volta estratte (eventi indipendenti)

Schema di Bernoulli

Consideriamo n prove ripetute di un esperimento, in cui gli esiti sono successo(1) e insuccesso (0). Sia p la probabilità di successo nella singola prova.

$\Rightarrow \Omega = \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \{0,1\}\} = \{0,1\}^n$

Allora, visto che gli eventi sono <u>indipendenti</u>, la probabilità è:

$P\{(a_1,\dots,a_n)\} = P(a_1) \cdot \ldots \cdot P(a_n) = p^{\#\text{successi}} \cdot (1-p)^{\#\text{insuccessi}} = p^{\sum a_i} \cdot (1-p)^{n-\sum a_i}$

es. Lancio 10 volte una moneta. È più probabile che ottenga 10 volte croce oppure 4 volte testa e 6 volte croce?

$P(T) = P(C) = 1/2$ successo(1) = croce insuccesso(0) = testa

$P(\underbrace{C, \dots, C}_{10 \text{ volte}}) = P(1, \dots, 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$P(1111110000) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ No! L'evento che ci interessa non è 1111110000 ma è l'unione di tutti gli eventi con quel risultato

$\Downarrow$

$P(6 \text{ croci e } 4 \text{ testa}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{210}}_{} \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 210 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

tutte le combinazioni di 6C+4T cioè $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{4! \cdot \cancel{6!}} = 210 = \binom{10}{6}$

Quindi la probabilità di 6C+4T è molto più alta rispetto a 10T

ESERCIZI NELLA LEZIONE 7