VARIABILI ALEATORIE

Aleatorio $\Longrightarrow$ casuale

Variabile aleatoria
Funzione X che associa ad ogni elemento dello spazio campionario un numero reale $X: \Omega \to \mathbb{R}$

es. esperimento = n lanci di monete $\Omega = \{\overset{1}{T}, \overset{0}{C}\}^n = \{(w_1, \dots, w_n) \mid w_i \in \{0,1\}\}$

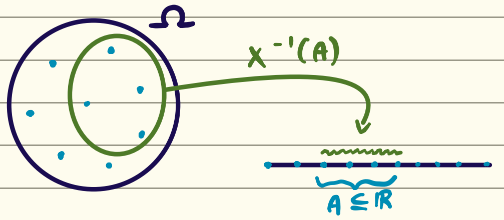
X: "# teste in n lanci" $X: \Omega \to \mathbb{R} \Longrightarrow X(w_1, \dots, w_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i$

aggiungo un'altra variabile aleatoria per il numero delle croci $Y =$ "# croci in n lanci"
$Y: \Omega \to \mathbb{R} \Longrightarrow (w_1, \dots, w_n) = n - \sum w_i \Longrightarrow Y = n - X$

$Z =$ "# coppie teste consecutive" idea $= z((1, 1, 0, 0, 1)) = 1$
1·0=0 no coppia
1·1=1 coppia

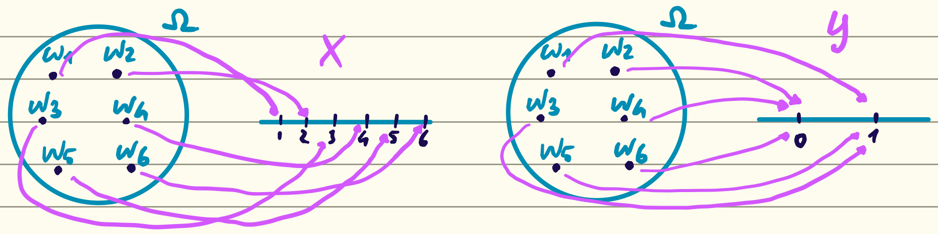
$Z: \Omega \to \mathbb{R}$ $(w_1, \dots, w_n) = w_1 \cdot w_2 + w_2 \cdot w_3 + \dots + w_{n-1} \cdot w_n = \sum_{i=1}^{n-1} w_i \cdot w_{i+1}$

Legge di probab. di una variabile aleatoria
Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una variabile aleatoria, definiamo legge (o distribuzione) di X la funzione $P_X: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ data da:
$P_X(A) = P(X \in A)$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ dove $\{X \in A\} \doteq X^{-1}(A) = \{w \in \Omega \mid X(w) \in A\}$



es. esperimento = lancio di un dado $\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_6\}$ dove $w_i :=$ "è uscito il numero i"

$X: \Omega \to \mathbb{R}$ dove $X =$ variabile che esprime # puntini associati al lancio del dado
$Y: \Omega \to \mathbb{R}$ dove $w_i = 1$ se i è dispari, $w_i = 0$ se i è pari



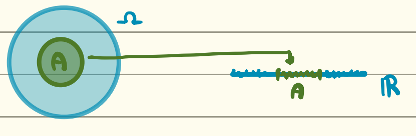
$Y^{-1}(0) = \{w_2, w_4, w_6\}$
$Y^{-1}(1) = \{w_1, w_3, w_5\}$

Dall'esempio voglio trovare la legge di X e Y
Per esempio, $P_X(3) = (X^{-1}(3)) = P(w_3) = 1/6$

es. $A = \{3, 4\} \subseteq \mathbb{R}$ $P(X^{-1}(\{3,4\})) = P(w_3 \cup w_4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
es$_2$. $P_Y(\{0\}) \doteq P(Y^{-1}(0)) = P(w_2 \cup w_4 \cup w_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

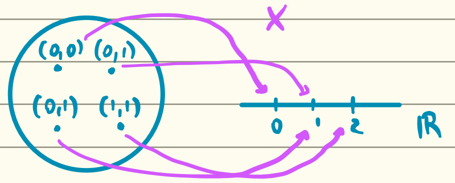
Proposizione
- X^{-1} commuta con le operazioni insiemistiche
es. $X^{-1}(A \cup B) = X^{-1}(A) \cup X^{-1}(B)$ $X^{-1}(A^C) = (X^{-1}(A))^C$

- $P_X: P(X) \to \mathbb{R}$ è una probabilità su $\mathbb{R}$



es. 2 lanci di moneta equilibrata

$\Omega = \{C,T\}^2 = \{(\omega_1,\omega_2) \mid \omega_1,\omega_2 \in \{C,T\}\} = \{0,1\}^2 \longrightarrow$ 0: esce croce, 1 = esce testa



X = "# di teste in 2 lanci"

$P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$

$P_X(0) = P(X^{-1}(0)) = P(\{(0,0)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_X(1) = P(\{(0,1)\} \cup \{(1,0)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$P_X(2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

V.A. equidistribuite

X e Y si dicono equidistribuite se hanno la stessa legge (distribuzione) di probabilità ($P_X = P_Y$)

es. 2 lanci di moneta equilibrata $\Omega = \{C,T\}^2 = \{0,1\}^2$

$X = \text{"\# teste"} = \sum_{i=1}^{2} \omega_i = \omega_1 + \omega_2$ $\qquad P_X = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad A \longmapsto P(X^{-1}(A))$

$Y = \text{"\# croci"} = n - \sum_{i=1}^{2} \omega_i = 2 - X$ $\qquad P_Y = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \quad A \longmapsto P(Y^{-1}(A))$

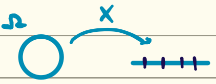
$P_X = P_Y$ quindi le v.a. sono equidistribuite (ma <u>non</u> uguali)

Notazione

Lettere maiuscole $(X, Y, T, \dots)$ per le variabili aleatorie, lettere minuscole $(a, b, x, z, \dots)$ per i valori assunti dalle variabili aleatorie

V.A. discrete

Una variabile aleatoria X si dice discreta se assume un numero finito oppure numerabile di valori (modalità) $a_1, \dots, a_n, \dots$

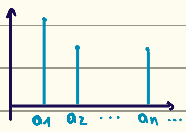
es.  assume 4 valori es. numero di errori in un testo

Funzione di massa

Supponiamo di avere una variabile aleatoria discreta $X: \Omega \to \mathbb{R}$, la funzione di massa (o densità discreta) di X è $p_X: \{a_1, \dots, a_n, \dots\} \mapsto \mathbb{R}$ definita come $p_X(a_i) = P(X = a_i) = P_X\{a_i\} = P(X^{-1}(a_i))$

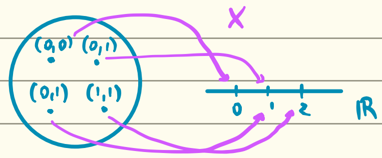
È poi possibile estendere p_X per il numero definito solo sull'insieme discreto dei valori di X a tutto $\mathbb{R}$, ponendo $p_X(a) = 0 \ \forall a \notin \{a_1, \dots\}$

La funzione di massa di una v.a. discreta si rappresenta bene con un diagramma a barre:



es. esperimento = 2 lanci di moneta equilibrata

$\Omega = \{C,T\}^2 = \{0,1\}^2$ $\qquad X = \#$ teste in 2 lanci



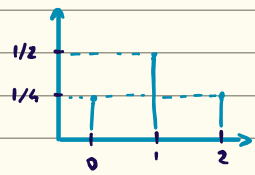
$X: \Omega \to \mathbb{R}$ prende solo i valori: 0, 1, 2

La sua funzione di massa è: $p_X: \{0,1,2\} \to \mathbb{R}$

$0 \longmapsto P(X^{-1}(0)) = 1/4$

$1 \longmapsto P(X^{-1}(1)) = P(\{(0,1)\} \cup \{(1,0)\}) = 1/2$

$2 \longmapsto P(X^{-1}(2)) = 1/4$



Calcolo delle probabilità di X usando P_X

Presa X v.a. discreta con funzione di massa P_X, allora

$P(X \in A)[= P(X^{-1}(A)) = P(X = a_1 \cup X = a_2 \cup \dots)] = \sum_{a_i \in A} P(X = a_i) = \sum_{a_i \in A} P_X(a_i)$

es. Qual è la probabilità di avere almeno una testa in 2 lanci?

$A = \{1, 2\} \Rightarrow P(X \in \{1,2\}) = P(X=1) + P(X=2) = 1/4 + 1/2 = 3/4$

Qual è la probabilità di avere almeno 2 teste in 4 lanci?

$\Omega = \{0,1\}^4$ $\quad$ X = # teste $\quad$ $\Omega \to$ 

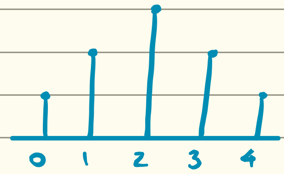
$P_X(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

$P_X(1) =$ TCCC CTCC CCTC CCCT $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P_X(2) =$ TTCC TCTC TCCT CTCT CTTC CCTT $= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

$P_X(3) =$ TTTC TTCT TCTT CTTT $= \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$P_X(4) = \frac{1}{16}$



$P(\geq 2 \text{ testa in 4 lanci}) = P_X(2) + P_X(3) + P_X(4) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

Proprietà

Sia X una v.a. discreta con funzione di massa P_X, allora:

1) $P_X(a_i) \geq 0 \quad \forall i$
2) $\sum_i P_X(a_i) = 1$

dimostrazione:

1) $P_X(a_i) \doteq P(X = a_i) = P(X^{-1}(a_i)) \geq 0$ $\quad$ P è una probabilità
2) $\sum_i P_X(a_i) = \sum_i P(X = a_i) = P(\bigcup X^{-1}(a_i)) = P(\Omega) = 1$

Proposizione

Se $q: \{a_1, a_2, \dots\} \to \mathbb{R}$ è una funzione che soddisfa le proprietà 1 e 2 (sopra) allora $\exists$ una v.a. X di cui q è la funzione di massa.

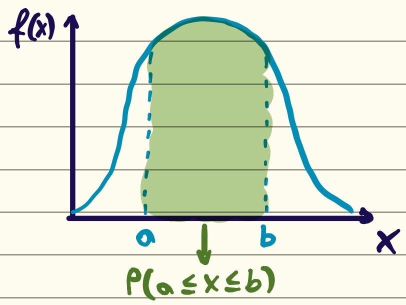
es. ($q = P_X$ per qualche X v.a. discreta)

V.A. assolutamente continua

Sia X una variabile casuale che assume tutti i valori di un intervallo (limitato o illimitato), allora diciamo che X è una v.a. assolutamente continua con densità f se ad X è associata una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $P\{X \in A\} = P_X(A) = \int_A f(x)\,dx \quad \forall A \in \mathbb{R}$

Ovvero: $A \subseteq \mathbb{R}$ sia un intervallo $A = [a,b]$, allora

$P(X \in A) = P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ (area sottesa del grafico di f sull'intervallo $[a,b]$)



Proprietà della funzione densità

Sia X una v.a. con funzione di densità f, allora:

1) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$
2) la misura dell'area sotto al grafico di tutta f è $= 1$

Calcoli al variare di $A \subseteq \mathbb{R}$

- $A=[a,b]$ o $(a,b) \Rightarrow P(a \le X \le b) = P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- $A=(-\infty,b]$ o $(-\infty,b) \Rightarrow P(X\le b) = P(X<b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
- $A=[a,+\infty)$ o $(a,+\infty) \Rightarrow P(X\ge a) = P(X>a) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$
- $A=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)$ unione di intervalli disgiunti $\Rightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} f(x)\,dx$

es. asta di un certo materiale che si può rompere in ogni punto con la stessa probabilità. L'asta ha lunghezza 1, cerco la probabilità che l'asta si rompa in suo punto.

Definisco la v.a. X con densità f

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x\in(0,1) \\ 0 & \text{se } x\notin(0,1) \end{cases} = 1_{(0,1)}$$

Se invece prendessi $a=0$ e $b=\frac{1}{4}$ $\quad P(0\le X\le \frac{1}{4}) = \int_0^{1/4} 1\,dx = \frac{1}{4}$

Se invece prendessi $a=3/4$ e $b=5$ (fuori intervallo) $\quad P(\frac{3}{4}\le X\le 5) = \int_{3/4}^{5} f(x)\,dx = \int_{\frac{3}{4}}^{1} 1\,dx + \int_1^5 0\,dx = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Interpretazioni delle variabili aleatorie

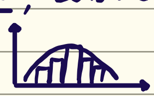
Nel caso di estrazioni di popolazioni: $\Omega = \{\text{popolazione}\} = \{\text{cittadini italiani}\}$

- X = carattere quantitativo discreto, considero $X(\omega)$ = "# figli di ω"

$P_X(1) = P(X^{-1}(1)) = \dfrac{\#\{\omega\in\Omega \mid X(\omega)=1\}}{\#\Omega} = \dfrac{\#\text{ cittadini italiani con figlio unico}}{\#\text{ popolazione italiana}}$

probabilità che un cittadino italiano abbia un figlio unico

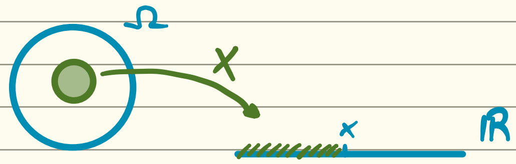
- X = carattere quantitativo con densità, considero $X(\omega)$ = altezza di ω

$P(1{,}65\le X\le 1{,}75) = \int_{1{,}65}^{1{,}75} f(x)\,dx =$ 

Funzione di ripartizione

Prese X v.a. e $P_X : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ legge di probabilità, la funzione di ripartizione di X è la funzione $F_X : \mathbb{R}\to[0,1]$ definita come $F_X(x) = P(X\le x) = P_X((-\infty,x])$ $\forall x\in\mathbb{R}$
assegna ad ogni $x\in\mathbb{R}$ la probabilità che X assuma un valore al massimo pari a x

oss: attenzione tra X grande e x piccolo.



Proprietà di F_X

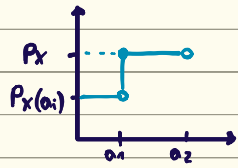
Preso F_X funzione di ripartizione di X:

1) F_X è non decrescente $(x_1\le x_2 \Rightarrow F(x_1)\le F(x_2))$
2) $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
3) F_X è continua a destra $(x_n\to x \Rightarrow F(x_n)\to F(x))$

F_X per X v.a. discreta

Se X è una v.a. discreta, allora $F_X(x) \doteq P_X\{X \leq x\} = \sum_{a_i \leq x} P_X(a_i)$

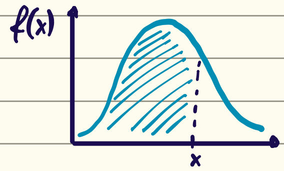
Ne deriva una funzione a gradini:
- ha un salto di ampiezza $P_X(a_i)$ in corrispondenza di ogni valore
- è costante tra due valori consecutivi
- Se X assume un valore finito di valori $a_1, \dots, a_n \Rightarrow F(x) = 1 \;\forall x \geq x_n$



F_X per X v.a. continue

Se X è una v.a. con densità f, allora $F_X(x) \doteq P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy$

Ovvero è uguale all'area sottesa alla funzione densità nell'intervallo $(-\infty, x]$



$F_X(x)$ = l'area

Calcolo della probabilità di intervalli:

$P(a < x < b) = F_X(b) - F_X(a)$

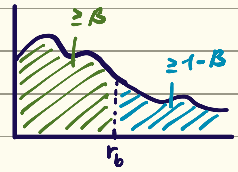
dimostrazione

$F_X(b) - F_X(a) = P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} = P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) = P(a \leq x \leq b)$

B-quantile

Data X v.a. e dato $\beta \in (0,1)$, definisco β-quantile (o 100 β percentile) un numero r_β tale che $P\{X \leq r_\beta\} \geq \beta$, $P\{X \geq r_\beta\} \geq 1-\beta$

Ovvero, il b-quantile è un numero r tale che con probabilità (almeno) β cado a sinistra di r e con probabilità (almeno) $1-\beta$ cado a destra di r



oss: se F_X è invertibile, allora $\forall \beta \in (0,1)$ $\exists!$ βquantile e $r_\beta = F_X^{-1}(\beta)$

ESERCIZI FUNZIONE DI RIPARTIZIONE (F_X)

1) Un negoziante di abbigliamento ha acquistato un capo per 200€ e può:
- rivenderlo prima dei saldi a 400€
- rivenderlo coi saldi a 250€
- non rivenderlo

La probabilità che lo rivenda prima dei saldi è 0.5 e coi saldi 0.3

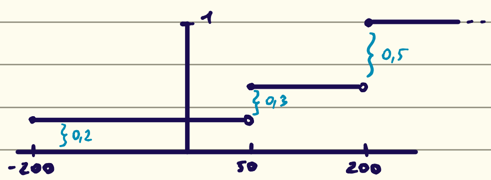
X v.a. "profitto del negoziante"
- 200 P=0.5
- 50 P=0.3
- -200 P=0.2

$P_X(-200, 50, 200) \longrightarrow \mathbb{R}$

$P_X(-200) = 0{,}2 \quad P_X(50) = 0{,}3 \quad P_X(200) = 0{,}5$

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$

$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P_X(X^{-1}(-\infty, x])$



2) X = "# figli maschi in famiglie con 4 figli"

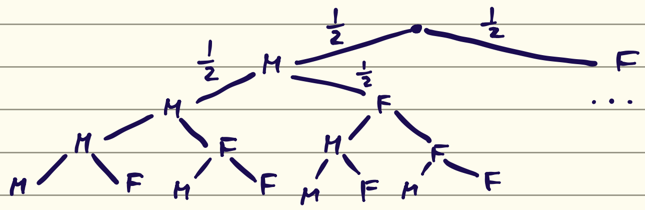
a. costruire una tabella della distribuzione di prob. di X

b. rappresentare graficamente la distribuzione

I possibili valori di X sono $\{0,1,2,3,4\} \Rightarrow$ v.a. discreta

$P_X : \{0,1,2,3,4\} \to \mathbb{R} \quad a_i \longrightarrow P(X=a_i) = P(X^{-1}(a_i))$

Consideriamo M e F equiparabili $\Longrightarrow P(M) = P(F) = \frac{1}{2}$

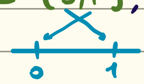


Tutti i casi hanno probab. $\frac{1}{2}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

V.A. notevoli Vari tipi di variabili aleatorie che sono modelli per vari casi

Variabile Casuale di Bernoulli Ogni volta che ho un esperimento con un risultato dicotomico (successo, insuccesso) definisco la v.a. X con lo spazio $\Omega = \{S,F\}$, $X : \Omega \to \mathbb{R}$



Probabilità di successo $p \in (0,1) = P_X(S)$

- $X(S) = 1$, $X(F) = 0$
- $P_X(0) = P(X=0) = P(X^{-1}(0)) = P(F) = 1-p$
- $P_X(1) = P(X=1) = P(X^{-1}(1)) = P(S) = p$

Quindi se identifico una v.a., come in questo caso X, con questo spazio Ω ho le due proprietà $P_X(0)$ e $P_X(1)$ e chiamo X come $B(0,p)$

es. $\Omega = \{T,C\}$ $X : \Omega \to \mathbb{R}$
$T \to 1 \quad C \to 0 \quad p = 0.5$
$P_X(1) = 0.5$
$P_X(0) = 1 - 0.5 = 0.5$
Quindi X è $B(1, 0.5)$

Moneta truccata con $p = 0.8$
$P_X(1) = 0.8$
$P_X(0) = 1-p = 0.2$
$B(1, 0.8)$

Variabile casuale binomiale Esperimento con risultato dicotomico $\{S,F\}$ ripetuto n volte nelle condizioni iniziali (indipendenti).
Preso quindi $\Omega = \{0,1\}^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n)\,|\, \omega_i \in \{0,1\}\}$ e p probabilità di successo nella singola prova. Definisco $X =$ "# successi in n prove ripetute". La probabilità di avere una sequenza di k successi è $P_X(k) = P\{X=k\} = P(X^{-1}(k))$

$P(X^{-1}(0)) = (1-p)^5$

$P(X^{-1}(5)) = p^5$

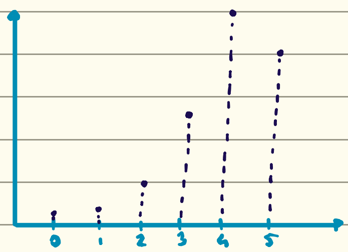
Il caso generale è

$$\underbrace{\sum_{\substack{\text{sequenze} \\ \text{con } k \text{ successi}}}}_{\binom{n}{k}} p^k \cdot (1-p)^{n-k} = P_X(k)$$

Quindi questa v.a. è $B(n,p)$ = v.a. discreta con distribuzione di probabilità data da $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

es. esperimento = lancio moneta truccata con $p = 0.8$
$X =$ "# teste in 5 lanci"
$\Longrightarrow B(5, 0.8)$ visto che X è v.a. discreta
$P_X(k) = P(X^{-1}(k)) = \binom{5}{k} (0.8)^k \cdot (1-0.8)^{5-k}$

num	P_X
0	$(0.2)^5 = 0{,}0003$
1	$\binom{5}{1} \cdot (0.8)^1 \cdot (0.2)^4 = 0.0006$
2	$\binom{5}{2}(0.8)^2(0.2)^3 = 0.05$
3	$\binom{5}{3}(0.8)^3(0.2)^2 = 0.2$
4	$\binom{5}{4}(0.8)^4(0.2)^1 = 0.4$
5	$\binom{5}{5}(0.8)^5 = 0.35$



Esempi di v.a. binomiali

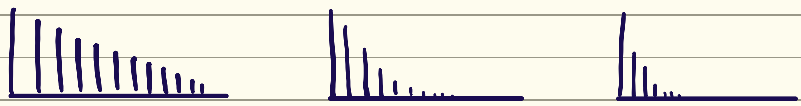
Sono esempi di v.a. binomiali:
- # teste in n lanci di monete $\longrightarrow B(n, \frac{1}{2})$
- # di "6" in n lanci di un dado $\longrightarrow B(n, \frac{1}{6})$
- # biglie rosse estratte, in n estrazioni con rimpiazzo, da un'urna con biglie rosse e blu

Variabile casuale geometrica

Esperimento con esito dicotomico $\{S, F\}$ ripetuto infinite volte, con probabilità p.
Allora $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}^+} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots) \mid \omega_i \in \{0,1\}\ \forall i \in \mathbb{N}^+\}$ e $T = \min\{n \in \mathbb{N}^+ \mid \omega_n = 1\}$
ovvero l'istante (n° della prova) in cui si verifica il primo successo. 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, ...
$\Longrightarrow$ T è una v.a. discreta a valori in $\mathbb{N}^+$

Quindi la distribuzione di T è: $P_T(k) = P(T^{-1}(k)) = P(\{\underbrace{0,\dots,0}_{k-1},1\}) = p \cdot \underbrace{(1-p)}_{(1-p)(1-p)\dots(1-p)}^{k-1} \quad k \in \mathbb{N}^+$

Ovvero la v.c. geometrica è $G(p)$ = v.a. discreta con valori in $\mathbb{N}^+$ con distribuzione di probabilità $P_T(k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$



p=0.1 p=0.3 p=0.5

All'aumentare di p la funzione probabilità decresce più rapidamente

es. probabilità che un docente che ha ricevuto la copia omaggio adotti il libro è 0.11
determinare la distribuzione del numero di prof a cui dare la copia omaggio, affinché l'ultimo adotti il libro.
X = "# di prof. a cui dare il libro affinché l'ultimo lo adotti" $\sim G(0.11)$

$P_X\{(\underbrace{0,0,0}_{k-1},\underset{k}{1})\} = p \cdot (1-p)^{k-1} \Longrightarrow P\{X=1\} = p(1-p)^0 = 0{,}11$
$\Longrightarrow P\{X=2\} = p(1-p)^1 = 0{,}11 \cdot 0{,}89 = 0{,}098$
$\Longrightarrow P\{X=3\} = p(1-p)^2 = 0{,}11 \cdot (0{,}89)^2 = 0{,}087$

dove $\{X=1\}$ = primo prof accetta, $\{X=2\}$ = primo rifiuta, secondo accetta, ...
La probabilità va gradualmente a diminuire

Proprietà assenza di memoria

Se $T \sim G(p)$, allora $P(T = n+k \mid T > n) = P(T = k) \quad \forall n, k \in \mathbb{N}^+$
Traduzione: la distribuzione del 1° successo dalla (n+1)esima prova non cambia sapendo che il successo non si è verificato nelle prime n prove

Var. di Poisson di parametro $\lambda > 0$

$Poiss(\lambda)$ con $\lambda > 0$ è una v.a. discreta che assume i valori in $\mathbb{N}$.
La funzione di massa è data da $P_X(k) = P\{X=k\} = \dfrac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} \quad k \in \mathbb{N}$

- λ rappresenta il # medio di eventi nell'intervallo $Poiss(\lambda) \sim B(n,p)$
- $Poiss(\lambda)$ conta # successi in prove ripetute
- Il fattore $e^{-\lambda}$ serve per far sì che la P_X sia una funzione di massa
  infatti: $\sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \div e} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1$

es. Alle casse di un supermercato si presentano in media 3 clienti/minuto
X = "# clienti che arrivano alla cassa in un minuto" $\sim Poiss(3)$
$P_X(k) = \frac{3^k}{k!} \cdot e^{-3}$
$P_X\{X > 4\} = 1 - P\{X \le 4\} = 1 - [P\{X=0\} + P\{X=1\} + P\{X=2\} + P\{X=3\} + P\{X=4\}]$
$P_X(0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} \approx 0.0498$
$P_X(1) = \frac{3^1}{1!} \cdot e^{-3} \approx 0.1494$
...

V.A. Ipergeometriche

Supponiamo di avere N unità di cui:

- F "favorevoli" $\longleftrightarrow$ SUCCESSO
- $N-F$ "non favorevoli" $\longleftrightarrow$ INSUCCESSO

Dell'insieme delle N unità ne estraggo n a caso (senza rimpiazzo)

X = "# unità favorevoli nelle n prove"

X = v.a. ipergeometrica di parametri $IP(N, F, n)$

$$P_X(k) = P(X=k) = \frac{\#\text{casi favorevoli}}{\#\text{casi possibili}} = \frac{\#n\text{-uple in cui ho } k \text{ elementi di } F}{\#n\text{-uple che posso estrarre}}$$

In particolare:

- # casi favorevoli = # n-uple in cui ci sono k elementi di F e $n-k$ di $N-F$ = $\binom{F}{k} = \binom{N-F}{n-k}$
- # casi possibili = # n-uple di N elementi = $\binom{N}{n} = \dfrac{N!}{n!(N-n)!}$
- Ne deriva $P\{X=k\} = \dfrac{\binom{F}{k}\binom{N-F}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

es. Un'azienda riceve da un fornitore un pacco con 20 pezzi.
L'azienda ne prova 5 estraendoli dal pacco, se nessuno è difettato la fornitura è accettata, altrimenti è respinta. Qual è la probabilità di accettare la fornitura con 6 pezzi difettosi?

X = "# pezzi difettosi nelle 5 estrazioni"

$$\left.\begin{array}{l} N=20 \\ F=6 \text{ difettosi} \\ n=5 \text{ estratti} \end{array}\right\} \Rightarrow X \sim IP(20, 6, 5)$$

L'idea è voler calcolare la probabilità che nessuno di quelli estratti sia difettato ovvero: $P\{X=0\}$ dove $X \sim IP(20,6,5)$

$$P\{X=0\} = \frac{\binom{6}{0}\binom{20-6}{5-0}}{\binom{20}{5}} = \frac{1 \cdot \binom{14}{5}}{\binom{20}{5}} = \frac{14!}{\cancel{5!}\,9!} \cdot \frac{\cancel{5!}\,15!}{20!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = 0.125$$

Osservazione

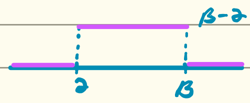
Le v.a. viste finora sono discrete, le prossime sono v.a. con densità, in generale:
Sia X una v.a. con densità f, se $f=0$ al di fuori di un certo intervallo [ovvero su $(c,d)^c$] $\Rightarrow$

$$P\{X \in (c,d)^c\} = P\{X \in (a,b) \cap (c,d)\} = P(X^{-1}(c,d)^c) = \int_c^d 0\, dx = 0$$

V.A. Uniformi

Assumono valori in un intervallo e sono costanti in esso.
Definiamo X v.a. uniforme sull'intervallo (a, β) (notazione $U(a,\beta)$)

la cui f di densità è $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - a} & \text{per } x \in (a,\beta) \\ 0 & \text{per } x \notin (a,\beta) \end{cases}$



Si indica con $\mathbb{1}_{(a,\beta)}$

$$P\{a \le X \le b\} = \int_a^b \frac{1}{\beta - a} \cdot \mathbb{1}_{(a,\beta)}(x)\,dx = \frac{1}{\beta-a}\int_{(a,b)\cap(a,\beta)} 1\,dx = \frac{\text{Lungh}((a,\beta)\cap(a,b))}{\beta - a}$$

$\beta - a \rightarrow$ (= lungh (a,β))

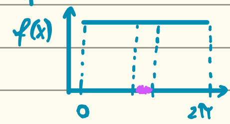
es. Nel gioco ruota della fortuna un ago viene fatto ruotare in modo tale da non privilegiare nessun punto della circonferenza quando si arresta, quindi scelta di un punto $(0, 2\pi)$ senza preferenze.

X = "angolo ottenuto quando l'ago si ferma" $\Rightarrow$ v.a. che prende valori in $(0,2\pi)$ senza preferenza
$\Rightarrow X \sim U(0, 2\pi)$ quindi $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{per } x \in (0,2\pi) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

La ruota è divisa in spicchi. Tra questi c'è uno spicchio di ampiezza $\pi/6$ tale che, quando l'ago ci si ferma, il giocatore VINCE il turno. Determinare la probabilità che il giocatore PERDA il turno (non cade in quello spicchio).

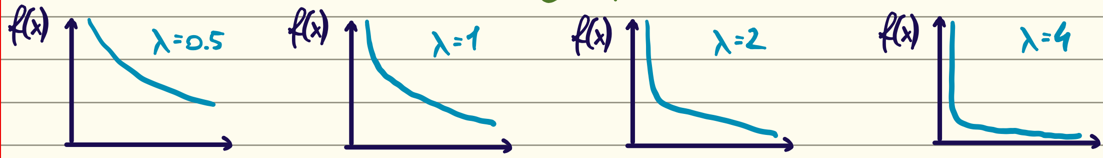
$P\{X \in (\text{quello spicchio})^c\}$ = area al di sotto del grafico del complementare dello spicchio

$$= 1 - \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2\pi} = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$



V.A. esponenziali di parametro $\lambda > 0$

$Exp(\lambda)$: v.a. con densità $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x \le 0 \end{cases} = \lambda e^{-\lambda x}\cdot \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(x)$



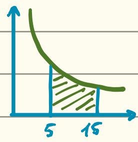
Si usa per descrivere i tempi di attesa affinché si verifichi un evento

es. Il tempo impiegato dal commesso di un negozio per assistere i clienti si distribuisce come una v.a. esponenziale negativa

X = "tempo impiegato per assistere i clienti" $\sim Exp(\lambda)$

Con $\lambda = \frac{1}{10}$ minuti, calcolare la probabilità che per assistere un cliente il commesso impieghi tra 5 e 15 minuti.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}x} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$



$$P(5 \le X \le 15) = \int_5^{15} \frac{1}{10}\cdot e^{-\frac{1}{10}x}\,dx = -e^{-\frac{1}{10}\cdot 15} + e^{-\frac{1}{10}\cdot 5} = e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{3}{2}} = 0.3834$$

↳ $\int_a^b \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x}\Big|_a^b = -e^{-\lambda b} + e^{-\lambda a}$

es.2 Il tempo di vita in giorni di un certo macchinario è descritto da una v.a. espon. di parametro $\frac{1}{8}$. Qual è la probabilità che il primo guasto si verifichi dopo 6 giorni?

X = "giorni prima del primo guasto" $\sim Exp\left(\frac{1}{8}\right) = \begin{cases} \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{8}x} & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x \le 0 \end{cases}$

$$P\{X \le 6\} = \int_0^6 \frac{1}{8}\cdot e^{-\frac{1}{8}x}\,dx = \left[-e^{-\frac{1}{8}x}\right]_0^6 = e^{-\frac{1}{8}\cdot 0} - e^{-\frac{1}{8}\cdot 6} = e^0 - e^{-\frac{3}{4}} = 1 - e^{-3/4}$$

Se il macchinario non si è rotto per i primi 2gg, qual è probabilità che non si rompa prima di altri 6 giorni.

$$P\{X>8 \mid X>2\} = P\{X>6\} = 1 - P\{X \le 6\} = 1 - (1 - e^{-3/4}) = e^{-3/4}$$

↳ assenza di memoria

Trasformazione della v.a. con densità

Sia $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a. con densità $f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(P\{X \in A\} = \int_A f(x)\,dx)$

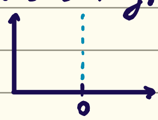
Sia poi $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione (es. $h(x) = x^2$)

Allora $Y = h \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ è anche lei una v.a.

Non è detto che Y ammetta densità, e anche quando la ammette, $\nexists$ una regola generale per calcolarla.

$\cdot \equiv 0$ allora $Y = h \circ X$ -

Se, per esempio, h è la funzione , e a sua volta $\equiv 0$ e non c'è modo di trovare una funzione tale che $P(Y \in A)$ sia uguale all'area al di sotto del grafico

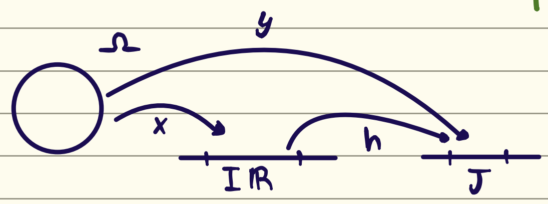


- Lo stesso è vero $\forall$ funzione $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a valori in un intervallo finito o numerabile, per lo stesso motivo
- La funzione $Y = h \circ X$ ammette invece densità se h è C^1 e biunivoca, più precisamente vale la <u>proposizione seguente</u>

Proposizione cambio di variabile

Sia X una v.a. con densità f_X supportata in un intervallo aperto I (cioè t.c. $f(x)=0$ in I^c)
Sia $h: I \to J$ un DIFFOMORFISMO (C^1 invertibile con inversa C^1) allora la v.a. $Y = h \circ X$ ammette densità data da

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y)) \left| \frac{dh^{-1}}{dy}(y) \right| & \text{con } y \in J \\ 0 & \text{con } y \notin J \end{cases}$$
$$= f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dh^{-1}}{dy}(y) \right| \cdot \mathbb{1}_J(y)$$



V.A. gaussiane (o normali)

Modello adatto a problemi in cui si può ipotizzare che la v.a. assuma con probabilità più alta valori attorno alla media. Deve avere una funzione di densità che ha il massimo in corrispondenza della media e decresce in modo simmetrico.

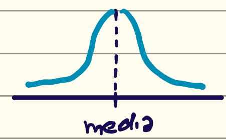
Z v.a. normale standard $\doteq$ la v.a. con densità $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \in \mathbb{R}$

N(0,1)

↳ Notazione $N(0,1)$

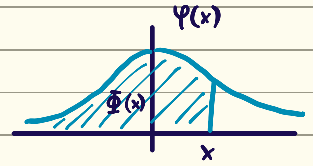
Si può dire che $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$

$\Rightarrow$ L'area sotto al grafico è $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = 1$



Funzione di ripartizione di N(0,1)

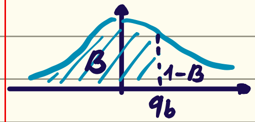
Si dimostra che è $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

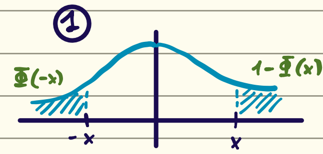


ovvero $P(Z \le x)$

β-quantile di N(0,1)

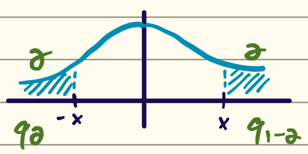
Si indica con q_β il β-quantile di $N(0,1)$, ovvero il numero tale che $\Phi(q_\beta) = \beta$ con $\beta \in (0,1)$





Proprietà di N(0,1)

1) $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
2) $P\{-x \le Z \le x\} = \Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - [1 - \Phi(x)] = 2\Phi(x) - 1$
3) $\Phi(0) = P\{Z \le 0\} = \frac{1}{2}$
4) $q_{1-a} = -q_a \Rightarrow$ l'area fino a q_a è a, fino a q_{1-a} l'area è $1-a$, quella dopo è a



Se $Z = N(0,1)$ non è possibile rappresentare l'integrale $P\{a < Z < b\} = \int_a^b \varphi(x) dx$ tramite funzioni più semplici

In altri termini: $\nexists$ formule esplicite per quell'integrale. Si usa una funzione di ripartizione $\Phi: P\{a < Z < b\} = \int_a^b \varphi(x) dx = \Phi(b) - \Phi(a)$

In particolare:

- Per $x \geq 4$, $\Phi(x) \approx 1$ (cioè Φ è talmente vicina a 1 da potercela approssimare)
- Per $x<0$, ci si riporta al caso positivo, essendo $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

$\Longrightarrow$ servono sostanzialmente solo i valori di $\Phi(x)$ con $0<x<4$

Usando i valori numerici ottenuti per Φ si possono ottenere i quantili:

- per $a \in (\frac{1}{2}, 1)$ vale che q_a è tale che $\Phi(q_a) = a$
- per $a \in (0, \frac{1}{2})$ vale che $q_a = -q_{1-a}$

es. $P\{-1 \leq Z \leq 1\} = 2\Phi(1) - 1 \approx 0.68$

$P\{-2 \leq Z \leq 2\} \approx 0.94$

$P\{-3 \leq Z \leq 3\} \approx 0.997$

Variabile Gaussiana Generale

Se $Z \sim N(0,1)$, posso ottenere un'altra v.a. con densità componendo con $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \sigma x + m$

La variabile Y ottenuta è $Y = \sigma Z + m$ ed è possibile calcolare la sua densità tramite la formula di cambio variabile

$$f_Y(y) = f_Z(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dh}{dy}(y) \right| = f_Z\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y-m}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp{-\frac{\left(\frac{y-m}{\sigma}\right)^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right] \Longrightarrow \text{v.a. gaussiana di media "m" e varianza "}\sigma^2\text{"}$$

Calcoli e standardizzazione

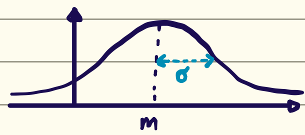
Dato $N(m, \sigma^2)$, per fare i calcoli ci si riconduce a $N(0,1)$ tramite il cambiamento di variabile inverso rispetto a quello visto nella simmetria (STANDARDIZZAZIONE)

$Z \sim (0,1) \Longleftrightarrow Y = \sigma Z + m \sim N(m, \sigma^2)$, quindi:

$$Z = \frac{Y-m}{\sigma} \Longrightarrow P\{a \leq Y \leq b\} = P\{a \leq \sigma Z + m \leq b\} = P\left\{\frac{a-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-m}{\sigma}\right\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

In particolare:

- $P\{m-\sigma \leq Y \leq m+\sigma\} = P\{\frac{m-\sigma-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+\sigma-m}{\sigma}\} = P\{-1 \leq Z \leq 1\} \approx 0.68$
- $P\{m-2\sigma \leq Y \leq m+2\sigma\} = P\{-2 \leq Z \leq 2\} \approx 0.94$
- $P\{m-3\sigma \leq Y \leq m+3\sigma\} = P\{-3 \leq Z \leq 3\} \approx 0.997$



Proprietà di riproducibilità

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sia } Y \text{ una v.a. gaussiana} \sim N(m, \sigma^2) \\ \text{Sia } V = aY + B \text{ con } a, B \in \mathbb{R}, a \neq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow V \sim N(am + B, a^2\sigma^2)$$

dimostrazione:

$Y \sim N(m, \sigma^2) \longrightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left[-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}\right]$; $Y \sim N(m, \sigma^2) \Longrightarrow Z = \frac{Y-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

$$V = aY + B \Longleftrightarrow Y = \frac{V-B}{a} \Longrightarrow Z = \frac{\frac{V-B}{a} - m}{\sigma} = \frac{V - B - am}{a\sigma} = \frac{V - (am+B)}{a\sigma}$$

$\Longrightarrow V \sim N(am + B, \sigma^2 a^2)$

es. Una fabbrica produce delle viti, la cui lunghezza in cm $\sim N(1.7, (0.6)^2)$

a) Calcola la probabilità che la lunghezza di una vite estratta a caso sia < 1.6

$Y \sim N(1.7, (0.6)^2) \longrightarrow Z \sim N(0,1)$ se $\frac{Y-1.7}{0.6}$ (Standardizzazione)

$\Longrightarrow P\{Y < 1.6\} = P\{0.6Z + 1.7 < 1.6\} = P\{Z < \frac{-0.1}{0.6}\} = \Phi(-0.17) =$

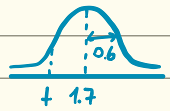
$1 - \Phi(0.17) \approx 1 - 0.567 \approx 0.433$

b) Determinare un valore $t \in \mathbb{R}$ t.c. il 95% delle viti abbia lunghezza almeno t

$\hookrightarrow P\{Y \geq t\} = 0.95$

$$P\{Y \geq t\} \underset{\text{stand.}}{=} P\{0.6Z + 1.7 \geq t\} = P\left\{Z \geq \frac{t-1.7}{0.6}\right\} = 1 - P\left\{Z \leq \frac{t-1.7}{0.6}\right\} = 0.95$$

$$\Longrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{t-1.7}{0.6}\right) = 0.95$$



Cerco quindi il quantile $q_{0.05}$

$$q_{1-a} = -q_a \Longrightarrow q_{0.05} = q_{1-0.95} = -q_{0.95} \approx 1.645 \Longrightarrow \frac{t-1.7}{0.6} \approx -1.645 \Longrightarrow t \approx 0.713$$