

# Contrôle Continu : les aventures de $\pi$

Le nombre  $\pi$  est sans doute l'entité mathématique la plus connue de par le monde. Apparu dès l'Antiquité de manière intuitive en tant que rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre, il n'a cessé de susciter l'intérêt en mathématiques. Mais c'est Archimède (287-212 avant J.C.) qui le premier se pencha réellement sur la question.

Dans son écrit *De la mesure du cercle*, il commence par démontrer qu'il existe une unique constante  $\pi$  telle que l'on ait  $A=\pi R^2$  et  $P=2\pi R$ , où A et P sont respectivement l'aire et le périmètre du cercle de rayon R.

Ce sont ces fameuses décimales qui aujourd'hui font tout l'intérêt de ce nombre. Nous allons donc étudier diverses méthodes et formules pour approcher ce nombre  $\pi$ .

Vous allez tout d'abord écrire quelques (4) fonctions de calcul sous GNU Octave permettant de calculer une valeur approchée de  $\pi$  **suivant un nombre n d'itérations souhaitées.**

## 1. Produit infini de Viète (1540-1603)

$$U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad U_n = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} U_{n-1}}$$

$$\pi = \frac{2}{\prod_{k=0}^{\infty} U_k}$$

## 2. Produit infini de Wallis (1606-1703)

$$\pi = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1}$$

## 3. Formule d'Euler (1707-1783)

$$\pi = \sqrt{6 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

## 4. La méthode de Monte-Carlo

Soit un point M de coordonnées (x, y), où  $0 < x < 1$  et  $0 < y < 1$ .

On tire aléatoirement les valeurs de x et y. Le point M appartient au disque de centre (0, 0) de rayon 1 si et seulement si  $x^2 + y^2 = 1$ .

La probabilité que le point M appartienne au disque est alors de  $\pi/4$ . En faisant le rapport du nombre de points dans le disque au nombre de tirages, on obtient une approximation du nombre  $\pi$  si le nombre de tirages est grand.

**Nota :** la fonction *rand* sous octave permet d'obtenir des valeurs pseudo-aléatoires ; il sera peut-être nécessaire d'utiliser d'autres types de fonctions aléatoires comme *randn* (distribution normale), *randp* (distribution de Poisson), *randg* ou *rande*

## Travail à rendre pour le lundi 09/11/2020 avant 12h00 GMT

Envoi par mél à l'adresse : [Philippe.Truillet@univ-tlse3.fr](mailto:Philippe.Truillet@univ-tlse3.fr) avec le sujet du message [CC GCGEO] votre Nom/Prénom

Pour chacune des fonctions présentées ci-dessus que vous venez d'écrire (1 fichier par fonction), écrivez un **fichier script** permettant à un utilisateur :

1. de choisir la fonction à afficher (par l'utilisation d'un menu par exemple, cf. plus bas) et de visualiser graphiquement les résultats suivant le nombre d'itérations de calcul par rapport à la valeur de référence de  $\pi$ .
2. de comparer visuellement sur une même figure les évolutions de chacune des méthodes suivant le nombre d'itérations effectuées

**Notation proposée** : 2 pts/fonction (8 au total), 2 pts pour le menu, 1,5 pt par affichage de la fonction (6 pts au total), 3 pts pour la comparaison des fonctions, 1 pt pour les commentaires.

**Nota** : créer un menu sous GNU Octave

```
# Menu
choix = menu('Choisissez une fonction', 'Gauss', 'Viète');
switch choix
    case 1
        # lancement de la fonction Viète
        printf("Viète\n");
    case 2
        # lancement de la fonction Wallis
        printf("Wallis\n");
    otherwise
        # erreur
        printf("Erreur\n")
endswitch
```