

# ES Eléments finis - Optimisation du chauffage d'un four

Félix KAHANE - felix.kahane@mines-paristech.fr  
Ugo PELISSIER - ugo.pelissier@mines-paristech.fr

December 7, 2021

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Présentation et géométrie</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Problème direct</b>	<b>3</b>
3.1	Etude théorique . . . . .	3
3.1.1	Formulation variationnelle du problème . . . . .	3
3.1.2	Décomposition du problème . . . . .	4
3.1.3	Calcul de la température dans la pièce . . . . .	4
3.2	Réalisation sur FreeFem++ . . . . .	4
3.2.1	Adaptation du maillage . . . . .	4
3.2.2	Maillage de départ . . . . .	5
3.2.3	Etude de l'influence du choix du solveur sur le champ solution . . . . .	6
3.3	Résolution des problèmes $T_0, T_1, \dots, T_4$ avec FreeFem++ . . . . .	6
3.3.1	Problème $T_0$ . . . . .	6
3.3.2	Problème $T_i$ . . . . .	7
3.3.3	Problème avec toutes les sources . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Problème inverse</b>	<b>9</b>
4.1	Inversion de la matrice A . . . . .	10
4.2	Application numérique . . . . .	10
4.3	Validation de ce résultat . . . . .	11
4.4	Vérification avec $\alpha$ plus grand . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Etude de l'ajout de deux résistances supplémentaires</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Etude du problème en 3D</b>	<b>14</b>
6.1	Nouvelle géométrie et maillage . . . . .	14
6.2	Problème direct . . . . .	14
6.3	Problème inverse . . . . .	15

# 1 Introduction

On considère un four de forme rectangulaire, comportant des résistances. On se propose de chercher les valeurs à donner aux résistances de sorte que la température dans une partie du four soit proche d'une valeur fixée à l'avance. Pour cela, nous commencerons par calculer la température dans le four en fonction des valeurs données aux résistances.

## 2 Présentation et géométrie

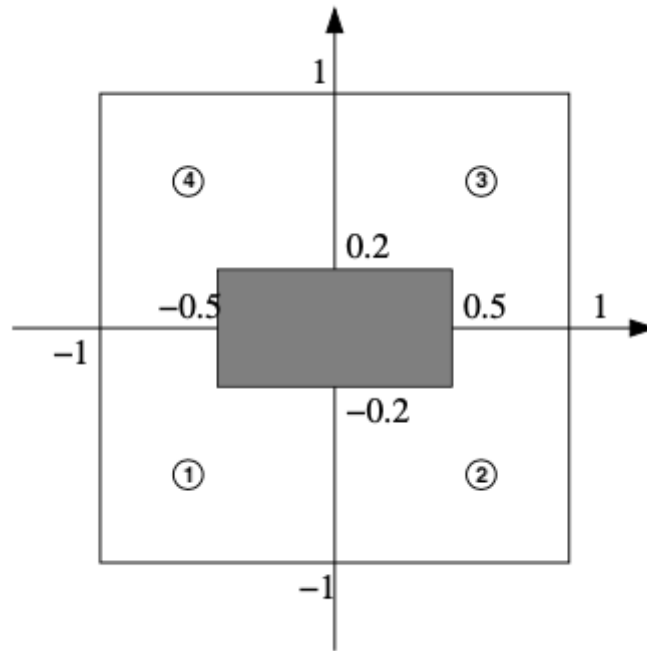


Figure 1: Géométrie du problème et numérotation des résistances

Nous noterons  $\Omega$  l'ouvert représentant le four,  $S$  l'ouvert représentant la pièce à chauffer. Le four est un carré de 1 m de côté, et la pièce est un rectangle de 1 m sur 0.4 m, au centre du four (pour simplifier, on prendra l'origine au centre du carré) (Figure 1). Nous noterons  $C_i$  ( $i = 1, \dots, N_r$ ) les résistances (modélisées ici comme des cercles de rayon 0.05), et placées aux points  $(\pm 0.75, \pm 0.75)$  (dans un premier temps,  $N_r = 4$ ). Le bord supérieur du four  $\Gamma_u$  est supposé maintenu à  $T_u = 50^\circ C$ , le bord inférieur  $\Gamma_d$  à  $T_d = 10^\circ C$ , et les deux bords latéraux  $\Gamma_l$  sont isolés (flux de chaleur nul). La température est ainsi solution de l'équation

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) &= f && \text{dans } \Omega \\ T &= T_u && \text{sur } \Gamma_u \\ T &= T_d && \text{sur } \Gamma_d \\ k \frac{\partial T}{\partial n} &= 0 && \text{sur } \Gamma_l \end{aligned}$$

Dans cette équation,  $k$  est le coefficient de diffusion thermique, qui est variable dans le four: il

vaut 1 dans la pièce, et 10 dans le reste du four.  $f$  est la source de chaleur, et sera de la forme  $f = \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i \mathbb{1}_{c_i}$ , où les coefficients  $\alpha_i$  sont soit choisis (problème direct), soit à déterminer (dans le problème inverse).

### 3 Problème direct

#### 3.1 Etude théorique

##### 3.1.1 Formulation variationnelle du problème

On suppose connus les coefficients  $\alpha$ , et l'on cherche à calculer la température qui en résulte. On notera  $T(\alpha)$  la solution du problème correspondant.

Écrire soigneusement la formulation variationnelle du problème direct.  
 Programmer la résolution de ce problème, pour calculer d'abord  $T_0$ , puis les  $T_i$ , pour  $i = 1, \dots, N_r$ .  
 Chercher un maillage convenable.

Nous nous plaçons dans l'espace  $H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d \right\}$ . Soient  $T$  une fonction de  $H^1(\Omega)$  solution du problème et  $v$  une fonction quelconque de  $H^1(\Omega)$ . A partir de l'égalité

$$-\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = f$$

nous multiplions par  $v$  et en intégrons sur le domaine :

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(k \nabla(T)) \cdot v = \int_{\Omega} f v$$

D'après un corollaire de la Formule de Green :

$$\int_{\Omega} k \cdot \nabla(T) \cdot \nabla(v) = \int_{\Omega} f v + \int_{\Gamma} k \cdot \partial_n T \cdot v$$

Sachant

$$\int_{\Gamma} k \cdot \partial_n T \cdot v = \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_d} k \cdot \partial_n T \cdot v + \int_{\Gamma_l} k \cdot \partial_n T \cdot v$$

l'application des conditions aux limites et le choix d'une fonction  $v$  nulle sur  $\Gamma_u \cup \Gamma_d$  donne

$$\int_{\Omega} k \cdot \nabla(T) \cdot \nabla(v) = \int_{\Omega} f v$$

La formulation variationnelle du problème est donc la suivante :

Nous cherchons  $T \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{aligned} T &= T_u && \text{sur } \Gamma_u \\ T &= T_d && \text{sur } \Gamma_d \\ \int_{\Omega} k \nabla(T) \cdot \nabla(v) &= \int_{\Omega} f v && \text{pour tout } v \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } v = 0 \text{ sur } (\Gamma_u \cup \Gamma_d) \end{aligned}$$

On peut poser :

- $a: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $(T, v) \rightarrow \int_{\Omega} k \nabla(T) \cdot \nabla(v)$
- $L: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$   
 $v \rightarrow \int_{\Omega} f \cdot v$

On peut montrer que  $a$  est une forme bilinéaire continue et coercive sur  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ , et que  $L$  est une forme linéaire continue sur  $H^1(\Omega)$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité de Poincaré. Dans ces conditions, le théorème de Lax-Milgram assure qu'il existe une unique solution au problème ci-dessus.

### 3.1.2 Décomposition du problème

Notons  $T_0$  la solution du problème direct correspondant à  $\alpha = 0$ , et  $T_i$  ( $i = 1, \dots, N_r$ ) les solutions correspondant à  $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (1 en  $i^{\text{ème}}$  position). Par linéarité du problème, la solution pour une valeur  $\alpha$  quelconque est égale à:  $T(\alpha) = T_0 + \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i T_i$ .

Le problème  $T_0$  correspond à  $f = 0$ ,  $T_u = 50^\circ C$  et  $T_d = 10^\circ C$ .

Le problème  $T_i$  correspond à  $f = \alpha_i \mathbf{1}_{c_i}$ ,  $T_u = 0^\circ C$  et  $T_d = 0^\circ C$ .

### 3.1.3 Calcul de la temperature dans la pièce

Le calcul de la température dans la pièce est une simple moyenne de la température dans le rectangle central. Les dimensions de la pièce sont  $L = 1$  m et  $l = 0.4$  m. La température moyenne dans la pièce  $S$  est donc :

$$\frac{1}{l.L} \left( \int_S T \right)$$

## 3.2 Réalisation sur FreeFem++

### 3.2.1 Adaptation du maillage

On se place dans le cas d'une seule resistance source, correspondant à un cas  $\alpha = (100000, 0, 0, 0)$ , pour mettre en évidence l'adaptation de maillage autour des zones de forts gradients de température.

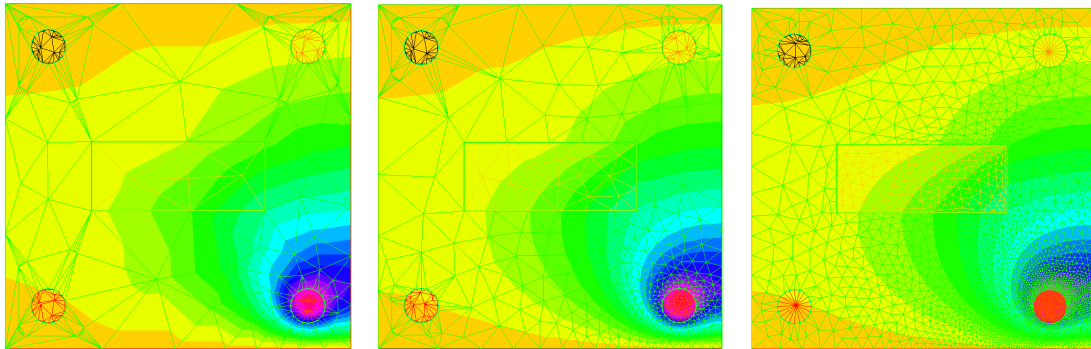


Figure 2: Maillages successifs obtenus avec le maillage adaptatif

Un maillage adapté à la solution permet de mieux capturer les variations du champ de température dans le four, en particulier proche de la source (Figure 2).

Pour s'assurer de la convergence vers la solution du problème et déterminer si le maillage final est assez fin, nous calculons l'écart entre la solution à l'itération  $i$  de l'adaptation du maillage et la solution à l'itération  $i + 1$  en prenant comme distance entre deux solutions la distance suivante:

$$d(T_1, T_2) = \int_{\Omega} |T_1(x) - T_2(x)|^2 dx$$

L'écart entre deux solutions successives est donc:

$$\epsilon_i = \int_{\Omega} |T_{i+1}(x) - T_i(x)|^2 dx$$

On observe que lorsque le nombre d'itérations augmente, et donc que la taille de maille minimale diminue, l'écart entre deux solutions successives tend vers 0 (Figure 3). Cette convergence permet de nous donner confiance dans le maillage final obtenu, qui semble très proche de la limite.

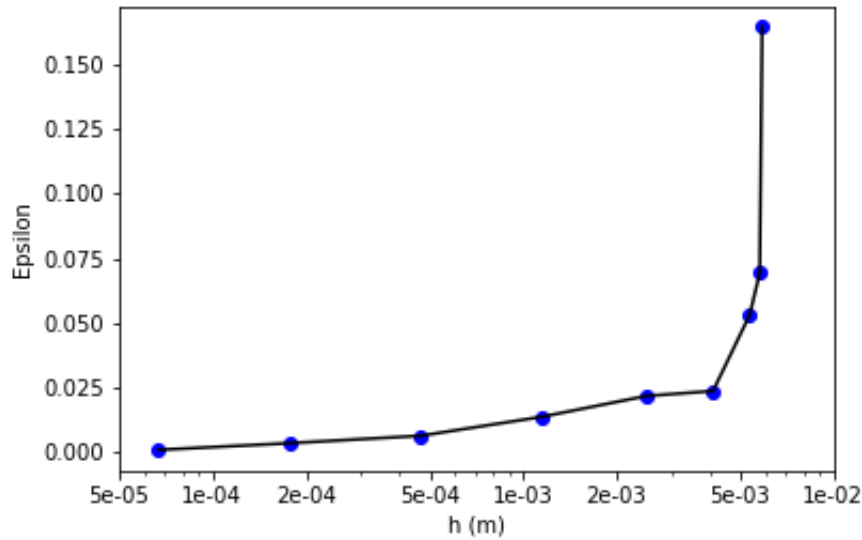


Figure 3: Ecart de champ entre deux maillages par adaptations successives

### 3.2.2 Maillage de départ

Bien que nous adaptions le maillage par itérations, le maillage initial est important car les cercles des sources vont être transformés en polygones par ce maillage initial et cette forme géométrique va être conservée au cours des itérations d'adaptation du maillage. Le choix du nombre de points sur les arrêtes des cercles des résistances n'est donc pas un choix anodin car il influence beaucoup les résultats. Pour l'étude du problème inverse (dans la partie suivante), nous avons calculé la valeur du coefficient  $\alpha$  d'une des sources (pour une température cible donnée) en fonction du

nombre de points  $n$  pour la discrétisation du cercle de la résistance. Les valeurs obtenues sont les suivantes:

$\alpha$	n
5	$1.07.10^{-6}$
10	$8.70.10^{-5}$
20	$8.27.10^{-5}$
60	$8.21.10^{-5}$
200	$8.19.10^{-5}$
300	$8.20.10^{-5}$

Ainsi une valeur trop faible de  $n$  peut faire fortement varier les résultats. A partir de  $n = 50$ , les résultats semblent stables. Dans la suite de cette partie, nous avons donc pris pour  $n$  une valeur égale à  $n = 50$ .

### 3.2.3 Etude de l'influence du choix du solveur sur le champ solution

Dans le cadre de l'approximation de Galerkin, nous savons que si la forme bilinéaire  $a$  définie précédemment est symétrique, alors, en décomposant un élément  $u \in H^1(\Omega)$  sur une base  $(\Phi_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $H^1(\Omega)$ , on peut montrer que la représentation matricielle  $A$  de l'application  $a$  sur cette base est définie positive.

Pour la résolution d'un système linéaire  $Ax = b$  avec  $A$  SDP, on peut utiliser deux types de méthodes :

- Une méthode directe utilisant un solveur basé sur une factorisation **LU**, telle que **Cholesky**
- Une méthode itérative utilisant un solveur basé sur la méthode du **Gradient Conjugué**

Nous nous sommes intéressés à la différence entre la solution obtenue avec un solveur utilisant la méthode du Gradient Conjugué et un solveur utilisant la méthode de Cholesky (Figure 4). Pour quantifier cette différence, nous avons calculé un écart relatif en chaque point du maillage, défini de la façon suivante :

$$\epsilon_{\text{solveur}} = 2. \left| \frac{T_{CG} - T_{Cholesky}}{T_{CG} + T_{Cholesky}} \right|$$

Nous avons choisi le cas le plus complet avec les 4 sources actives.

Nous observons que les écarts relatifs importants sont localisés dans les zones de fortes températures et de forts gradients, c'est-à-dire proches des sources et dans la partie inférieure du domaine, où l'écart de flux entre les sources et la condition au bord ( $T_d = 10^\circ C$ ) est plus importante que dans la partie supérieure.

Pour autant, l'écart relatif maximal est de 1%, ce qui montre que la solution ne dépend que faiblement du solveur choisi.

## 3.3 Résolution des problèmes $T_0, T_1, \dots, T_4$ avec FreeFem++

### 3.3.1 Problème $T_0$

Dans un premier temps, nous résolvons le problème  $T_0$ . Dans ces conditions, la température sur les bords inférieur et supérieur est fixées (condition de Dirichlet) et le flux sur les bords latéraux est imposé nul (conditions de Neuman).

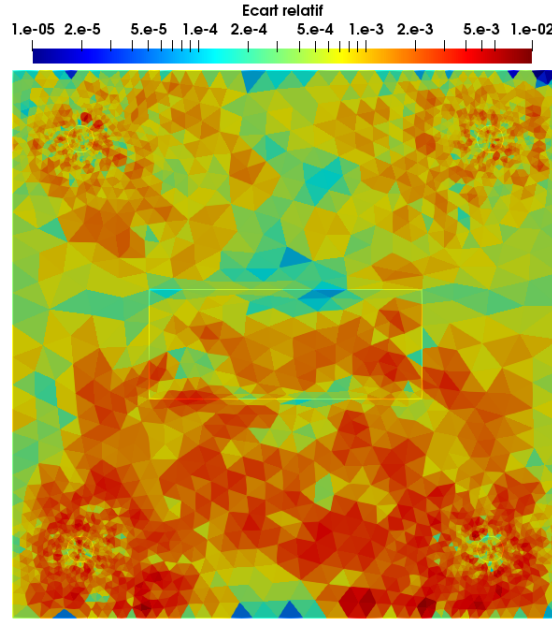


Figure 4: Ecart relatif de champ entre les solveurs : CG (Gradient Conjugué) et Cholesky

On observe que les lignes d'iso-température se rapprochent les unes des autres proches de la pièce, où le gradient de température est donc plus important. Cela s'explique par la valeur du coefficient de diffusion thermique  $k$  qui est plus grand dans le four que dans la pièce.

On peut aussi avoir une explication plus mathématique du phénomène en observant que, dans le cas d'un terme source nul ( $f = 0$ ), la quantité  $k\nabla(T)$  est constante dans  $\Omega$ . Notons  $\Omega_0$  l'ouvert représentant la pièce et prenons  $(x, x_0) \in (\Omega \setminus \Omega_0) \times \Omega_0$ . Nous avons donc

$$k_{\text{four}} \nabla(T(x)) = k_{\text{pièce}} \nabla(T(x_0)) \quad \text{et donc} \quad k_{\text{pièce}} < k_{\text{four}} \implies \nabla(T(x)) < \nabla(T(x_0))$$

Le gradient de température est plus important dans la pièce que dans le four, ce qui se traduit par un rapprochement des lignes d'iso-température.

### 3.3.2 Problème $T_i$

Dans un deuxième temps, nous résolvons le problème  $T_i$ . Une seule source est active et la température sur les bords inférieur et supérieur est nulle. Le champ de température obtenu correspond à ce que nous attendions (Figure 12b). On peut noter que pour induire un changement de température significatif dans le domaine (de l'ordre de  $10^\circ\text{C}$ ), la valeur de  $\alpha_i$  doit être de l'ordre de  $10^5$ .

### 3.3.3 Problème avec toutes les sources

Pour le problème général, c'est à dire une valeur quelconque pour  $\alpha$ , il suffit maintenant de faire la combinaison linéaire des solutions obtenues pour les problèmes  $T_0$ , et  $(T_i)_i$ . Cela permet de ne pas avoir à recalculer de champs et d'avoir la solution pour n'importe quel  $\alpha$  à coût quasiment nul.

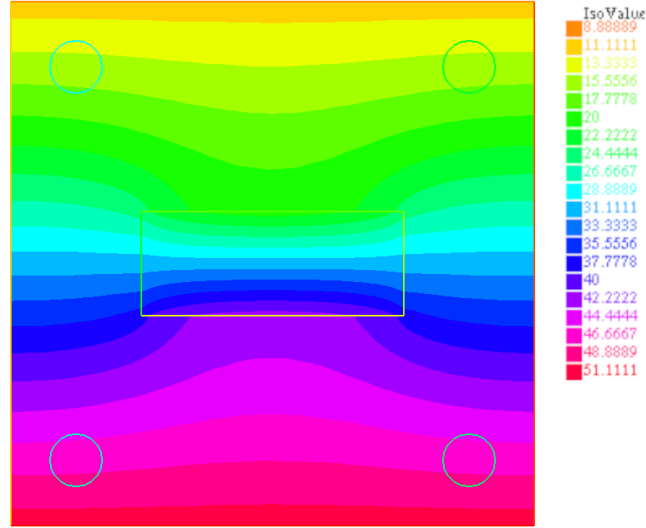


Figure 5: Champ de température sans résistances, ie  $\alpha = (0,0,0,0)$

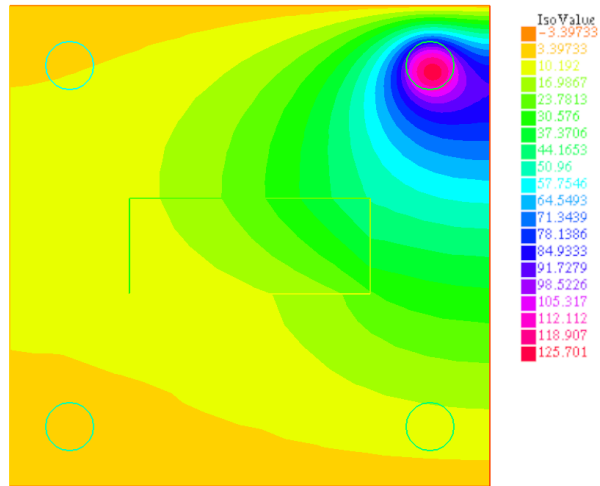


Figure 6: Champ de température avec une seule résistance,  $\alpha = (10^5, 0, 0, 0)$



La combinaison linéaire des solutions précédentes, ou la résolution directe par éléments finis avec un  $\alpha$  quelconque donnent bien la même solution. Une solution pour  $\alpha = 2.10^5.(1, 1, 1, 1)$  est visible en (Figure 7).

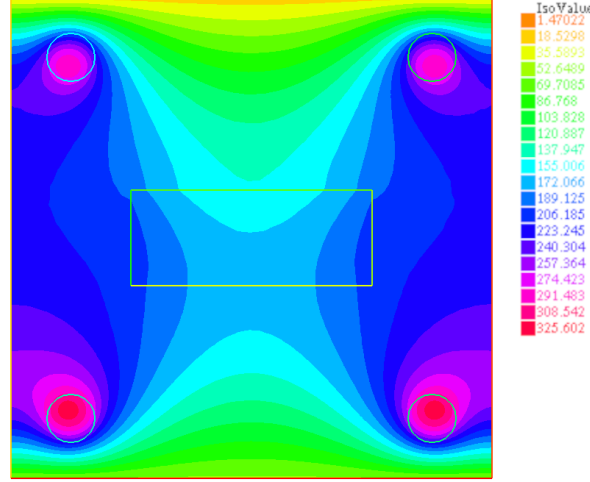


Figure 7: Champ de température avec 4 résistances,  $\alpha = 2.10^5.(1, 1, 1, 1)$

## 4 Problème inverse

On se donne une température souhaitée  $T_c$  dans  $S$ , et on cherche les coefficients  $\alpha$  de façon à ce que la température  $T(\alpha)$  dans la pièce soit la plus proche possible de  $T_c$ . Plus précisément, on cherche à minimiser la fonctionnelle

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \int_S |T(\alpha) - T_c|^2 dx$$

D'après la linéarité du problème vue précédemment,  $J$  se développe, et on obtient

$$J(\alpha) = \frac{1}{2} \alpha^T A \alpha - \alpha^T b + \frac{1}{2} \int_S |T_0 - T_c|^2 dx$$

où la matrice  $A$  a pour éléments

$$A_{ij} = \int_S T_i T_j dx$$

et le vecteur  $b$  a pour éléments

$$b_i = \int_S T_i (T_c - T_0) dx$$

Les coefficients optimaux cherchés sont donc la solution du système linéaire  $A\alpha = b$  (de dimension  $N_r$ ), et la température dans la pièce sera  $T(\alpha) = T_0 + \sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i T_i$

À partir des résultats précédents, calculer la matrice  $A$  et le vecteur  $b$ . Résoudre le système correspondant, et calculer la solution optimale.

#### 4.1 Inversion de la matrice A

La matrice  $A$  obtenue est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 9.76 \cdot 10^{-10} & 8.86 \cdot 10^{-10} & 5.67 \cdot 10^{-10} & 6.22 \cdot 10^{-10} \\ 8.86 \cdot 10^{-10} & 9.77 \cdot 10^{-10} & 6.21 \cdot 10^{-10} & 5.68 \cdot 10^{-10} \\ 5.67 \cdot 10^{-10} & 6.21 \cdot 10^{-10} & 9.69 \cdot 10^{-10} & 8.81 \cdot 10^{-10} \\ 6.22 \cdot 10^{-10} & 5.68 \cdot 10^{-10} & 8.81 \cdot 10^{-10} & 9.72 \cdot 10^{-10} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est:

- **inversible** : sa plus petite valeur propre est égale à  $3.6 \cdot 10^{-11}$ , ce qui est supérieur à l'épsilon machine des doubles ( $2.2 \cdot 10^{-16}$ ) et l'emplacement des différentes sources laisse penser que la matrice  $A$  devrait être inversible.
- **bien conditionnée** : le calcul de ses valeurs propres donne  $\text{cond}(A) = 84.5$ , ce qui est une très bonne valeur de conditionnement
- **symétrique** : par construction

L'inversion ne devrait donc pas poser de problème et nous utilisons le solveur de *lapack* pour réaliser l'inversion.

Pour une température  $T_c$ , nous pouvons maintenant calculer  $b$ , et les coefficients permettant de se rapprocher au mieux de la température cible dans la chambre sont:

$$\alpha_{opt} = A^{-1}b$$

#### 4.2 Application numérique

Réalisons l'application numérique pour une température cible  $T_c = 200^\circ C$ .

La matrice  $b$  vaut

$$b = \begin{pmatrix} 2.93 \\ 2.98 \\ 2.96 \\ 2.93 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Et les coefficients solutions sont:

$$\alpha_{opt} = 10^5 \cdot (8.19, 11.18, 11.23, 8.21) \quad \text{et} \quad J_\alpha = 46.5$$

(l'ordre des résistances étant ici: (4, 1, 2, 3) dans le vecteur  $\alpha$ )

Comme attendu :

- Les valeurs de  $\alpha$  sont de l'ordre de  $10^5 - 10^6$ .

- Les valeurs de  $\alpha$  sont plus importantes dans la partie inférieure du four car la température au bord y est plus faible que dans la partie supérieure, donc il faut chauffer plus fortement cette partie.
- Les valeurs des résistances sont quasiment égales de part et d'autre de l'axe ( $Oy$ ). Nous attendions cela car le problème est symétrique par rapport à l'axe ( $Oy$ ).

Cette symétrie nous permet également de conclure que le dernier chiffre des coefficients n'est pas significatif. (8.19 et 8.21 représentent la même valeur).

### 4.3 Validation de ce résultat

Pour valider le résultat obtenue. Nous pouvons calculer la moyenne de la température dans la pièce.

Nous avons isolé le champ de température dans la pièce afin de mettre en évidence la repartition de la chaleur de cet élément (Figure 8). Le calcul de la valeur moyenne de la température dans la pièce donne

$$\overline{T}_{piece} = 198.4^{\circ}C$$

Comme attendu :

- La température moyenne est très proche de la température cible  $T_c = 200^{\circ}C$ .
- La température moyenne n'est pas exactement égale à la température cible. Cela était attendu car la fonction coût que nous avons optimisé portait sur la différence avec la consigne en tout point. Et non pas sur la différence entre la moyenne dans la pièce et la température cible.

### 4.4 Vérification avec $\alpha$ plus grand

$T_i$  ( $i = 1, \dots, N_r$ ) désignent les solutions correspondant à  $\alpha = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (1 en  $i^{\text{ème}}$  position). Pour de telles valeurs de  $\alpha$ , la modification de température causée est très faible, ainsi les coefficients de  $A$  sont très petits. Nous avons donc également essayé de résoudre les problèmes  $T_i^*$  correspondant à  $\alpha^* = 10^5 \cdot (0, \dots, 1, \dots, 0)$  (1 en  $i^{\text{ème}}$  position) afin d'obtenir des modifications du champ de température plus importantes, et des coefficients  $A_{ij}$  plus grands. Cette approche a produit les mêmes résultats, les petits coefficients de la matrice  $A$  précédente n'étaient donc pas un problème.

## 5 Etude de l'ajout de deux résistances supplémentaires

Reprendre l'ensemble du problème si l'on rajoute deux résistances en  $(0, \pm 0.75)$ . Cela vaut-il la peine ?

Nous ajoutons deux résistances en  $(0, \pm 0.75)$  (Figure 9). Nous reprenons les mêmes étapes que précédemment afin de déterminer  $\alpha_{opt}$  dans cette nouvelle configuration, pour une température cible de  $T_c = 200^{\circ}C$ .

Nous obtenons

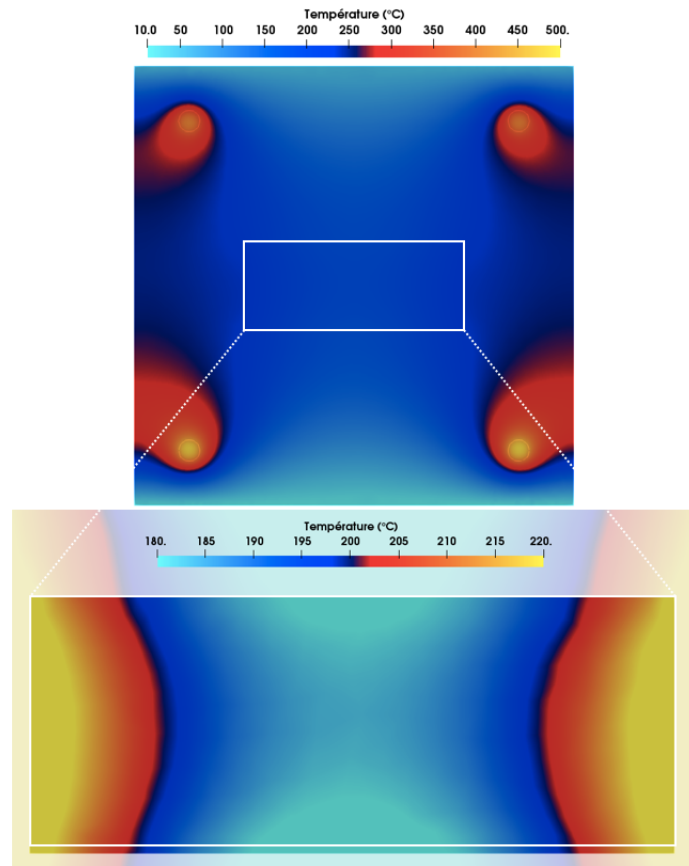


Figure 8: Champ de température dans le four et dans la pièce (echelle différente) pour  $\alpha_{opt}$  avec 6 résistances et une température cible de 200 °C

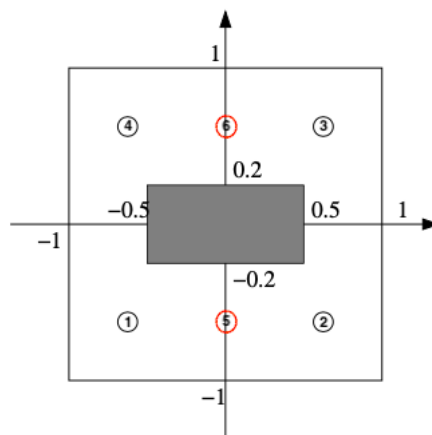


Figure 9: Géométrie du problème et numérotation des résistances

$$\alpha_{opt} = (6.2, 6.2, 4.8, 4.8, 7.4, 5.9) \cdot 10^5 \quad \text{et} \quad J_\alpha = 6.5 \cdot 10^{-2}$$

Nous avons isolé le champ de température dans la pièce afin de mettre en évidence la repartition de la chaleur de cet élément (Figure 10). Le calcul de la valeur moyenne de la température dans la pièce donne

$$\bar{T}_{piece} = 200.0^\circ C$$

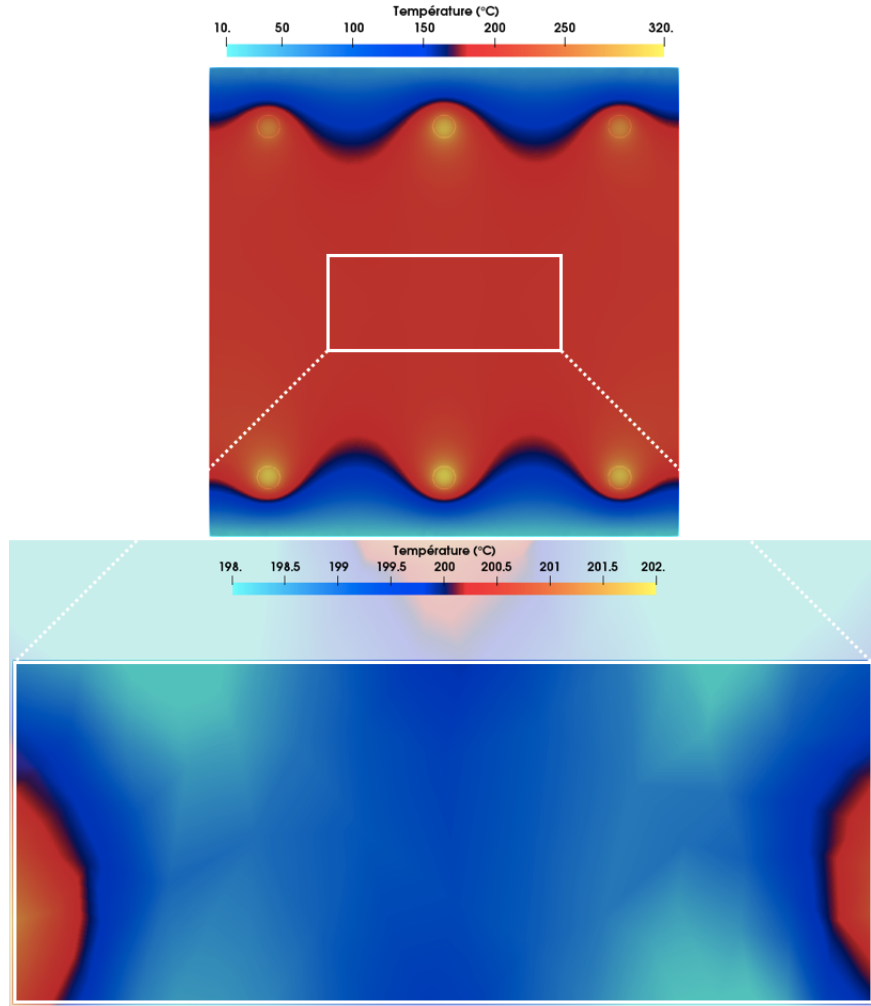


Figure 10: Température obtenu dans le four et dans la pièce (echelle différente) pour  $\alpha_{opt}$

On observe donc que l'ajout de deux résistances supplémentaires permet de diminuer drastiquement la mesure de l'erreur  $J(\alpha)$  entre la température de contrôle  $T_c = 200^\circ C$  et la température dans la pièce, passant de  $J = 46$  à  $J = 6.5 \cdot 10^{-2}$ . L'échelle de température dans cette pièce est également beaucoup plus resserré dans cette nouvelle configuration ( $[199^\circ C - 201^\circ C]$  con-

tre  $[180^{\circ}C - 220^{\circ}C]$  précédemment). Et la nouvelle température moyenne dans la pièce est maintenant égale à  $T_c = 200^{\circ}C$ .

Enfin, si on compare la somme des coefficient dans le cas à 6 résistances et le cas à 4 résistances, on trouve que  $\left(\sum_{i=1}^{N_r} \alpha'_i\right)_{N_r=6} = 35.3.10^5 < \left(\sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i\right)_{N_r=4} = 38.8.10^5$ , ce qui traduit le fait qu'il est nécessaire de dépenser moins d'énergie pour mieux chauffer la pièce avec 6 résistances car les deux résistances ajoutées sont situées plus près de la pièce et assurent donc une meilleure mise en température.

## 6 Etude du problème en 3D

### 6.1 Nouvelle géométrie et maillage

Nous avons finalement essayé d'étudier le problème en 3 dimensions pour compléter ce travail. Nous avons eu l'idée de modéliser les résistances du four par des tuyaux situés au dessus et en dessous de la pièce à chauffer (Figure 11a), à l'aide du logiciel de CAO *Fusion 360*.

Le maillage de cette géométrie a été réalisé à l'aide du logiciel de maillage *Gmsh* (Figure 11b). Nous avons pu spécifier la taille des mailles surfaciques sur chacun des composants (parois du four, pièce et résistances) afin d'obtenir un maillage de bonne qualité pour les simulations.

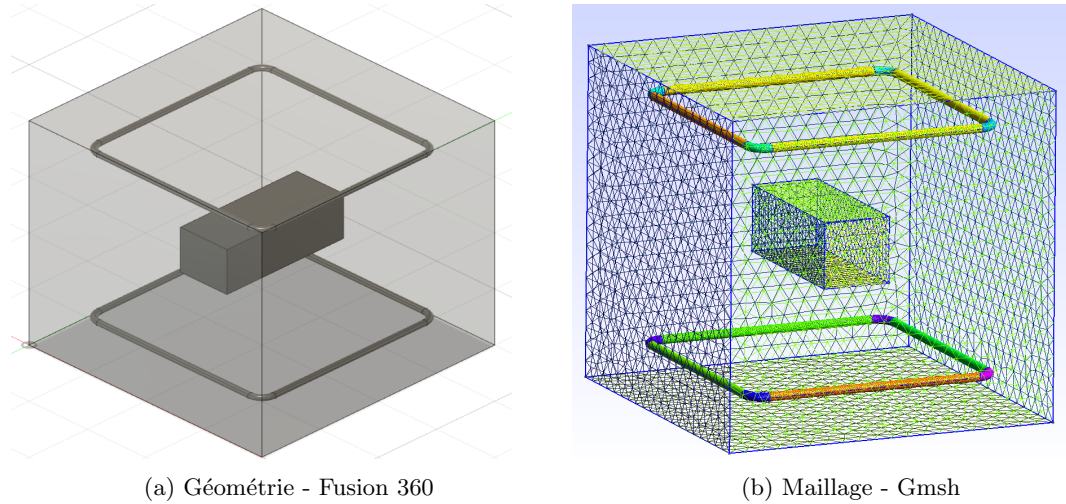


Figure 11: Modélisation du four en 3 dimensions

### 6.2 Problème direct

Nous avons d'abord résolu les problèmes  $T_0$  (12a) et  $T_i$  (12b), puis le problème global (12c) afin de valider le fonctionnement de la simulation en 3 dimensions. Dans cette modélisation, il n'y a plus que 2 résistances au lieu de 4 ( $N_r = 2$ ).

On peut noter que dans cette nouvelle configuration, il faut désormais imposer des valeurs de l'ordre de  $10^6$  pour les coefficients  $\alpha_i$  des sources afin d'obtenir une modification significative du champ de température.

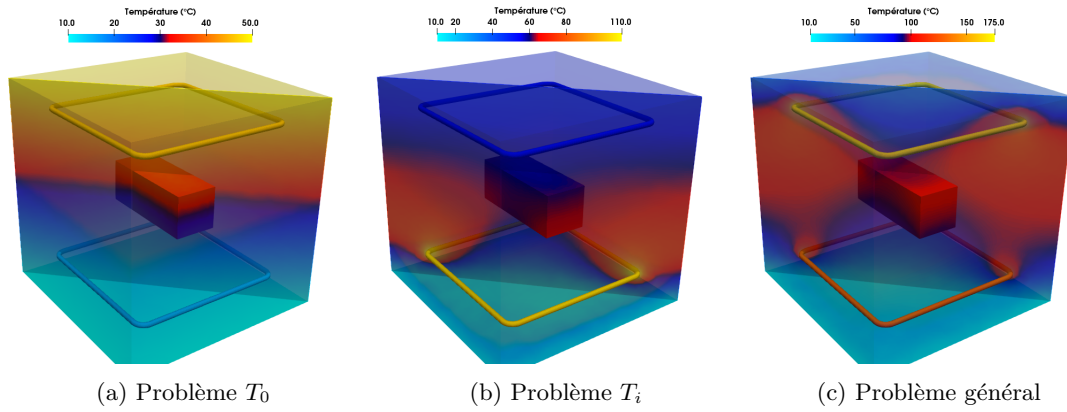


Figure 12: Champ de température solution

### 6.3 Problème inverse

Nous obtenons

$$\alpha_{opt} = (3.0 \cdot 10^6, 2.2 \cdot 10^6) \quad \text{et} \quad J_\alpha = 76.7$$

Le calcul de la valeur moyenne de la température dans la pièce donne

$$\bar{T}_{pièce} = 170^\circ C$$

La valeur de  $J_\alpha$  est élevé, tout comme l'écart entre la moyenne de température dans la pièce et la température cible. Tout comme précédemment, il serait intéressant de rajouter deux résistances centrales au dessus et en dessous de la pièce, ou bien de diminuer la longueur des tuyaux des résistances pour les placer plus au dessus/dessous de la pièce à chauffer, pour déterminer si cela produit un meilleur résultat.