МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

ЛЕКЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ

з дисципліни

“Дискретні структури”

Укладач: Гавриш Василь Іванович

Львів – 2009

Зміст

Лекція 1 Елементи математичної логіки.

Логіка – це наука про міркування. Яка дає змогу визначити істинність або хибність математичних тверджень, виходячи з первинних припущень, які називають аксіомами. Створена Арістотелем (384 – 322 до н. е.), вона упродовж століть використовувалась для розвитку багатьох галузей знань, зокрема філософії та математики. Елементи математичної логіки покладено в основу сучасних інформаційних технологій. ЇЇ також застосовують в інформатиці для побудови комп'ютерних програм і доведення їх коректності.

Висловлювання – це істинне або хибне розповідне речення. Значення «істина» чи «хиба», яких набуває висловлювання, називають його значеннями істинності. «Істину» позначають літерою T (від англ. "truth"), а «хибу» - літерою F (від "false"). Висловлювання позначають малими латинськими літерами і їх називають атомарними формулами чи атомами.

Із декількох висловлювань можна утворити одне висловлювання, яке називається складним. Побудовою таких висловлювань займався англійський математик Дж. Буль (G. Boole "The Laws of Truth"). Складні висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою таких п'яти логічних операцій: заперечення (читають «ні» та позначають знаком «¬»), кон'юнкції (читають «і» або « та» й позначають знаком «∩») , диз'юнкції (читають «або (чи)» та позначають знаком «∪»), імплікації (читають «якщо … , то» та позначають знаком «→») та еквівалентності (читають «тоді та тільки (лише) тоді» й позначають знаком «~»). Атоми та конструкції з атомів і логічних операцій називають формулами. Будуючи формули, використовують синтаксис та семантику.

Синтаксис – це сукупність правил, за допомогою яких будують формули та розпізнають правильні формули серед послідовності символів.

Семантика – це сукупність правил, за якими формулам надають значень істинності. Семантику логічних операції зручно задавати за допомогою таблиць.

Таблиця 1

p	q	¬p	p∩q	p∪q	p→q	p~q
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

ƒΘКрім п'яти основних логічних операцій введено додаткову так звану «альтернативну диз'юнкцію» яку позначають. Значення істинності цієї операції наведено в таблиці

p	q	Pq
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Для знаходження значення істинності складного висловлювання потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула набір значення істинності всіх атомів формули називають її інтерпретацією. Якщо формула має N атомів то є 2^n способів надати значення істинності її атомам, тобто така формула має 2^n інтерпретації а всі її значення можна звести в таблицю істинності з 2^n рядками. Формулу яка містить N атомів називають n місною.

Формулу називають **виконана** якщо існує принаймі одна інтерпретація у якій набуває значення T. У такому разі говорять що формула виконується в цій інтерпретації.

Формулу логіки висловлювань називають **загальнозначущою** чи тавтології, якщо вона виконується у всіх інтерпретаціях (позначають /=), а якщо вона є хибною у всіх інтерпретаціях то її називають заперечуваною, невиконаною чи суперечністю.

Найменшою одиницею інформації в комп'ютері є біт, який має два можливі значення – 0(нуль) і 1 (одиниця). Змінну називають булевою якщо вона набуває значень T чи F як правило, 1 використовують для зображення T, а 0 – для зображення F. Отже булеві змінні можна подати за допомогою бітів.

Комп'ютерні операції над бітами відповідають логічним операціям. Розглянемо логічні змінні X та Y. Результати дії комп'ютерних операцій зобразимо в таблиці.

x	y	or	and	xor
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Скінченну послідовність бітів називають бітовим рядком. Порожній рядок – це рядок який не містить жодного біта. Довжина бітового рядка – кількість бітів у ньому. Для бітових рядків однакової довжини комп'ютерні операції над бітами узагальнюються, тобто вони проводяться порозрядно.

Формули f та g називають еквівалентними, рівносильними чи тотожними (позначають $f = g$), якщо значення їх істинності збігаються в усіх інтерпретаціях цих формул.

$$(p \to q) \sim (\overline{p} \cup q),\ p \to q \neq q \to p,$$
$$(p \to q) \sim (\overline{q} \to \overline{p}),\ (p \sim q) \sim ((p \to q) \cap (q \to p))$$

Наведемо основні закони логіки висловлювань, якими є еквівалентні формули, що задають правила перетворень (табл.4).

Таблиця

Назва закону	Формулювання закону
1.Комутативний закон	а) $p \cup q = q \cup p$; б) $p \cap q = q \cap p$

2.Асоціативний закон	а) $(p\cup q)\cup r = p\cup(q\cup r)$; б) $(p\cap q)\cap r = p\cap(q\cap r)$
3.Дистрибутивний закон	а) $p\cup(q\cap r) = (p\cup q)\cap(p\cup r)$; б) $(q\cup r)\cap p = (p\cap q)\cup(p\cap r)$
4.Закон суперечності	$p\cap \overline{p} = F$
5.Закон виключеного третього	$p\cup \overline{p} = T$
6.Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{p}} = p$
7.Закони ідемпотентності	а) $p\cup p = p$; б) $p\cap p = p$
8.Закони де Моргана	а) $\overline{p\cup q} = \overline{p}\cap\overline{q}$; б) $\overline{p\cap q} = \overline{p}\cup\overline{q}$
9.Закони поглинання	а) $(p\cup q)\cap p = p$; б) $(p\cap q)\cup p = p$
10.Співвідношення для сталих	а) $p\cup T = T$; б) $p\cap T = p$; в) $p\cup F = p$; г) $p\cap F = F$

<u>Завдання 1</u>. Довести еквівалентність формул

$$p\to(q\cap r) \text{ і } (p\to q)\cap(p\to r)$$

$$(p\to q) \text{ і } (\overline{q}\to\overline{p}) \quad \text{(правило контрапозиції)}$$

$$(p\to q) \text{ і } (\overline{p}\cup q)$$

Літералом називають атом або його заперечення. Літерал називається позитивним, якщо він не містить знака заперечення, і негативним якщо містить. Пара літералів $\{p, \overline{p}\}$ називається контрарною.

Формулу f записано в кон'юктивній нормальній формі (КНФ), якщо вона зображена у вигляді $f = f_1\cap f_2\cap ...\cap f_n$ $(n\geq 1)$, причому f_i $(i=\overline{1,n})$ – всі різні літерали або диз'юнкції їх.

Формулу f записано в диз'юнктивній нормальній формі (ДНФ), якщо вона зображена у вигляді $f = f_1\cup f_2\cup ...\cup f_n$ $(n\geq 1)$, причому f_i $(i=\overline{1,n})$ – всі різні літерали або їх кон'юнкції.

<u>Завдання2.</u> Побудувати КНФ для формули (p^(q→r)) →s.

Побудувати ДНФ для формули $((pv\overline{q})->)\wedge(\overline{r}->s)$

Існують речення, які містять змінні, і вони не є висловлюваннями. Якщо надати змінним певних значень то дані речення перетворюються на висловлювання. Розглянемо приклад «x>3», який складається з двох частин: першу змінну x називають предметом, а другу –«більше ніж 3», -яка показує властивість предмета, - предикатом. Часто предикатом називається усе речення.

У логіці першого ступеня для запису атомів використовують такі типи символів:

- Індивідні символи або сталі –це імена об'єктів, які починаються з великої літери та сталі, наприклад: Андрій, 5, 7, Оксана;
- Предметні символи, предметні змінні, або просто змінні –імена, якими позначають змінні та які записують малими буквами (можливо з індексами), наприклад:x,y,z;

- Предикатні символи –імена, якими позначають предикати та які записують великими літерами(наприклад: P,Q,R), або змістовними символами, які записують великими літерами(БІЛЬШЕ, МЕНШЕ).

Приклад: Позначимо речення «x більше ніж 3» як R(x), де предикатний символ R позначає предикат «більше ніж 3», а x –предметна змінна. Вираз P(x) в цілому також називають предикатом. Але, можна розглянути предикат БІЛЬШЕ (x, y), який означає «x більше y», і тоді речення «x більше ніж 3» запишеться предикатом БІЛЬШЕ(x, 3).

Предикат, який містить n предметних змінних x_i $(i=\overline{1,n})$ записують у вигляді $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ і називають n-місними. Предметною областю змінної x називають множину D_i її значень, а символ P –n-місним предикатним символом. Синонімом предикату є «пропозиційна функція».

Атом логіки першого ступеня має вигляд $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$, де P –предикатний символ, а x_i $(i=\overline{1,n})$ предметні чи індивідні символи. Якщо якась зі змінних x_i $(i=\overline{1,n})$ або всі змінні x_i багатомісного предиката набувають якихось значень із предметної області, то предикат $P(x_1,x_2,\dots,x_n)$ набуває значення істинності та перетворюється на висловлювання .

Існують інші способи перетворення предиката у висловлювання. Одним із них є спосіб квантифікації. Для цього використовують два спеціальні символи ∀ - квантор загальності(якщо x –предметна змінна, то ∀ x читають «для всіх x», «для кожного x», «для будь-якого x») та ∃ -квантор існування(∃ x читають «існує x», «для деяких x», «принаймні для одного x»). Запис ∀ xP(x) означає «предикат P(x) істинний для всіх значень x з предметної області», а ∃ x P(x) –«предикат P(x) істинний для якогось x з області D».

Перехід від P(x) до ∀ x P(x) або ∃ x P(x) називають зв'язуванням предметної змінної x, а саму x –зв'язаною. Незв'язану змінну називають вільною. Кажуть, що у виразах ∀ x P(x) та ∃ x P(x) предикат P(x) належить області дії відповідного квантора.

Дві формули логіки предикатів називають **еквівалентними**, якщо вони набувають однакових значень істинності для довільних значень вільних змінних. Зокрема, якщо формули P та є еквівалентними, то формула P~Q - тавтологія і навпаки. Проблема побудови законів логіки першого ступеня полягає в доведенні еквівалентності формул P та Q, яку записують P= Q. У логіці висловлювань еквівалентність еквівалентність перевіряють за допомогою таблиці істинності. У логіці 1 ступеня за рахунок того, що предметні змінні можуть мати нескінченні предметні області, аналогічна процедура є неможливою.

Наведемо основні закони логіки 1 ступеня:

1. $\overline{\forall x\, P(x)} = \exists x\, \overline{P(x)}$
2. $\overline{\exists x\, P(x)} = \forall x\, \overline{P(x)}$
3. ∀x (P(x) Q(x)) = ∀x P(x)^ ∀x Q(x)
4. ∃x (P(x) V Q(x)) = ∃x P(x) V ∃x Q(x)\
5. ∀x (P(x) ^ Q) = ∀x P(x)^ Q
6. ∀x (P(x) v Q) = ∀x P(x) v Q
7. ∃x (P(x) ^ Q) = ∃x P(x) ^ Q
8. ∃x (P(x) V Q) = ∃x P(x) V Q
9. ∀x∀y P(x,y) = ∀y∀x P(x,y)

10. $\exists x \exists y\ P(x,y) = \exists y \exists x\ P(x,y)$

Розглянемо скінчену предметну область D= $\{d_1, d_2, \ldots, d_n\}$ змінної x у предикаті P(x). Скористаємося логічними еквівалентностями.

$\forall x\ P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$ та $\exists x\ P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_n)$

Це випливає із законів 1 та 2 логіки першого ступеня або, якщо застосовувати до кожної із формул закони де Моргана.

Випереджена нормальна форма формули логіки 1 ступеня має вигляд

$Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_nM$, де кожне $Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n$ називають трафіком, а M – матрицею формули, записаної у випередженій нормальній формі.

Формула g логічно впливає (є логічним наслідком) формули f_i (i=1,n) (позначають f_1, f_2, … , f_n |-- g), якщо в кожній ітераційній, у якій виконується формула $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$, g також виконується.

У цьому випадку f_i(i=1,n) називаютьгіпотезами (аксіомами, постулатами чи засновками) формули g. (Сам знак |-- має зміст, отже).

<u>Теорема</u>. Формула g є логічним наслідком формул f_i(i=1,n) тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n) \rightarrow g)$ є загальнозначущою.

<u>Теорема</u>. (принцип прямої дедукції). Формула g є логічним наслідком формул f_i(i=1,n) тоді і тільки тоді, коли формула $((f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n) \wedge g)$ є суперечністю.

Наведемо деякі важливі правила доведення логічних теорем. Вони полягають у перевірці того, що висновок є логічним наслідком множини гіпотез.

Правило виведення	**Тавтологія**	**Назва правила виведення**
$p \mapsto p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$	*Уведення диз'юнкції*
$p \vee q \mapsto p$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	*Усунення кон'юнкції*
$p, q \mapsto p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$	*Уведення кон'юнкції*
$p, p \rightarrow q \mapsto q$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	*Modus ponens*
$\overline{q}, p \rightarrow q \mapsto \overline{p}$	$(\overline{q} \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \overline{p}$	*Modus tollens*
$p \rightarrow q, q \rightarrow r \mapsto p \rightarrow r$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	*Гіпотетичний силогізм*
$p \vee q, \overline{p} \mapsto q$	$((p \vee q) \wedge \overline{p}) \rightarrow q$	*Диз'юнктивний силогізм*
$p \vee q, \overline{p} \vee r \mapsto q \vee r$	$((p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	*Резолюція*

На основі правила резолюції Дж. Робінсон (G. Robinson) в 1965 р. запропонував метод резолюції автоматичного доведення логічних теорем.

Запишемо формулу f в КНФ: $f = d_1 \wedge d_2 \wedge \ldots \wedge d_m$,

де d_i $(i = \overline{1,m})$ - літерал або диз'юнкція літералів (називають елементарною диз'юнкцією, диз'юнктом або клаузою). Кількість літералів у формулі d_i називають рангом елементарної диз'юнкції (якщо ранг дорівнює нулеві, то така диз'юнкція не містить жодного літералу і за означенням її вважають такою, що дорівнює F).

Згідно принципу прямої дедукції формулу g можна вивести з формули d_i $(i = \overline{1,n})$ тоді і тільки тоді, коли $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n \wedge \overline{g}$ - суперечність. Так буде, якщо одна із формул

d_i $(i=\overline{1,n})$ є хибною чи формула g є істиною. Запишемо формулу $f = f_1 \wedge f_2 \wedge ... \wedge f_n \wedge \overline{g}$ в КНФ $f = d_1 \wedge d_2 \wedge ... \wedge d_m$, де d_i $(i=\overline{1,m})$ - елементарні диз'юнкції. Дану КНФ запишемо у вигляді множини її елементарних диз'юнкцій $S = \{d_1, d_2, ..., d_m\}$. Множину S називають невиконанною, якщо формула f є невиконанна.

Розглянемо дві елементарні диз'юнкції d_1 і d_2 з літералами l_1 та l_2 відповідно, причому літерал l_1 є котрарний до літералу l_2. Побудуємо нову диз'юнкцію, яка міститиме всі літерали диз'юнкцій d_1 та d_λ крім l_1 та l_2. Отримана елементарна диз'юнкція називається резольвентою.

Приклад: $d_1 = p \vee r$, $d_2 = \overline{p} \vee r$. Тоді $r \vee q$ - резольвента.

<u>Теорема.</u> Резольвента d елементарних диз'юнкцій d_1 і d_2 є логічним наслідком диз'юнкцій d_1 і d_2.

Доведення формули f з елементарних диз'юнкцій множини S за методом резолюцій полягає в побудові скінченної послідовності елементарних диз'юнкцій $f_i\,(\overline{1,n})$, причому кожна f_i є або елементом множини S, або резольвентою елементарних диз'юнкцій, які передують f_i $(f=f_n)$.

Голова ідея методу резолюції є такою: а) перевіряють, чи містить множина елементарних диз'юнкцій S диз'юнкцію □ (елементарна диз'юнкція, ранг якої дорівнює нулеві); якщо S містить □, то множина S є невиконаною, а якщо S не містить □, то б) перевіряють, чи можна вивести □ із множини S. Виведення □ з S називають доведенням невиконаності множини S або спростуванням S.

Подамо алгоритми методу резолюцій.

Розглянемо множину гіпотез $f_i\,(\overline{1,n})$ та висновок g. Алгоритм дозволяє визначити, чи на формула g є логічним наслідком множини гіпотез. Для цього потрібно:

1. побудувати кон'юнкцію множини $f_i\,(\overline{1,n})$ і заперечення висновку $\overline{g}$ у вигляді $f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n \wedge \overline{g}$, звести отриману формулу до КНФ і записати множину її елементарних диз'юнкцій S;
2. записати кожну елементарну диз'юнкцію множини S в окремому рядку;
3. вибрати дві елементарні диз'юнкції, які містять конрарну пару літералів, і побудувати їх резольвенту, записавши її в новому рядку, якщо в попередніх рядках ще не було такої елементарної диз'юнкції;
4. пункт 3. слід виконувати до отримання диз'юнкції з нульовим рангом,а це означає, що формулу g можна вивести з $f_i\,(\overline{1,n})$. Якщо неможливо отримати резольвенту, що є відмінною від елементів множини S і вже побудованих резольвент, то множина S є неспростовною.

Наведемо правила доповнення в алгебрі предикатів.

Таблиця 6

Правило доведення	Назва
1. $\forall x P(x) \mapsto P(c)$	Універсальна конкретизація
2. $P(c) \mapsto \forall x P(x)$	Універсальне узагальнення
3. $\exists x P(x) \mapsto P(c)$	Екзистенційна конкретизація
4. $P(c) \mapsto \exists x P(x)$	Екзистенційне узагальнення

Доведення теорем може бути доволі складним. Існують їх різні методи дуоведеня. Оскільки багато теорем мають вигляд імплікації, то потрібно вміти доводити тавтологічність її. Відомо, що імплікація $p \to q$ є еквівалентною кожній із таких формул: $\overline{q} \to \overline{p},\ (p \wedge \overline{q}) \to \overline{p},\ (p \wedge \overline{q}) \to q,\ (p \wedge \overline{q}) \to F$. Тому замість доведення тавтологічності $p \to q$ можна довести тавтологічність однієї з чотирьох наведених формул. Іноді доведення проводять аналізом випадків.

Лекція 2. Елементи теорії множин.

2.1 Основні поняття

Множина – це довільна сукупність об’єктів певної природи.

Основи теорії множин були закладені в 70-х роках XIX століття німецьким математиком Георгом Кантором, який під множиною розумів «об’єднання в одне спільне об’єктів, які добре розрізняються нашою інтуїцією або нашою думкою».

Визначають довільну множину словесним описом, або переліком її елементів.

Позначають множини переважно великими латинськими буквами A, B, C… Для множин, які часто використовуються, застосовують спеціальні позначення

Ø – порожня множина(не містить жодного елемента);

Z – множина цілих чисел;

N – множина натуральних чисел;

Q - множина раціональних чисел;

I - множина ірраціональних чисел;

R - множина дійсних чисел;

C - множина комплексних чисел.

Дві множини A = B називаються рівними, якщо вони складаються з одних і тих ж елементів (записують A =B).

Множину A називають **підмножиною** множини B, якщо кожний елемент множини A належить множині B (записують A $\subset$B), причому може бути, що A = B. Якщо A = B, то чи A = Ø, то A називають невласною підмножиною множини B, в протилежному випадку – власною. Для будь-якої множини A є справедливе включення Ø$\subset$A. Множини бувають Скінченними та нескінченними. Скінченні множини характеризуються кількість їх елементів, яка називається потужністю (|A| - потужність множини A). Як правило, скінченні множини задають переліком їх елементів. Але у загальному випадку довільні множини задають, вказавши характеристичну властивість її елементів. Запис A = {x|P(x)} означає множину, яка складається лише з тих елементів x, які характеризуються властивість P (висловлення P є істинним).

Зауважимо, що порядок запису елементів множини не має значення, тому {1;8;4;12}={1;4;8;12} .

Часто буває, що всі досліджувані множини є підмножинами якоїсь множини, яку називають універсальною множиною або універсамом і позначають U .

Англійський математик Дж.Венн (J. Venn) у 1881р. запропонував множини зображати графічно (за допомогою так званих діаграм Венна). У цьому випадку універсальну множину позначають прямокутником, а всі інші множини – кругами в ньому.

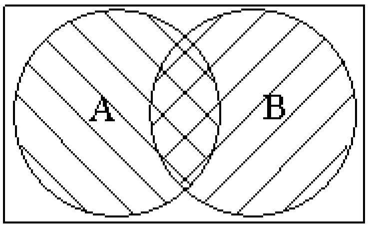
Кортеж – це впорядкований набір елементів. Елементи кортежу називають його компонентами, які нумерують, а їх кількість називають довжиною (розмірністю) кортежу. Два кортежі називаються рівними, якщо вони мають однакову довжину та відповідні їх компоненти є рівними.

2.2 Операції над множинами

Розглядатимемо множини із якогось універсаму U. За допомогою теоретико - множинних операцій можна побудувати нові множини.

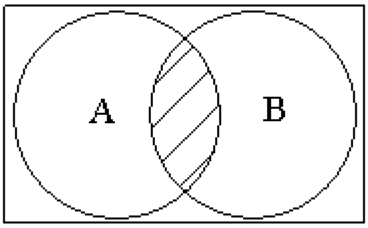
Об’єднанням AvB двох множин A та B називається множина, яка складається з усіх елементів, які належать хоча б до однієї з них (рис.1)

AvB={x є U | (x є A) v x є B}.



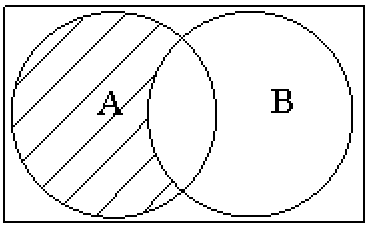
Перетином A ^ B двох множин A та B називаэться множина, яка складається з усіх елементів, які належать до них одночасно (рис.2)

A ^ B = {x є U | (x є A) ^ (x є B)}



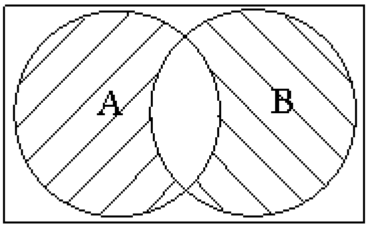
Різницею A\B двох множин A та B називається множина, яка складається з тих елементів множин A, які не належать до множин B (рис.3)

A\B = {x є U| (x є A) ^ (x є B)}



Симетричною різницею A Δ B двох множин A та B називається множина, яка складається з усіх елементів, які належать хоча б до однієї з них та не належить до них одночасно (рис.4)

A Δ B = (A v B) \ (A ^ B)



Доповненням множини A до множини U називається множина, яка складається з усіх елементів універсуму U крім тих, які належать множині A (рис. 5).

$$\overline{A} = U \setminus A = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

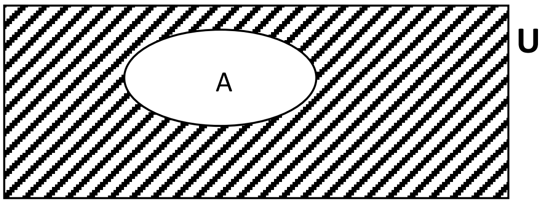


Рис. 5

Наведені операції вводять для довільної (скінченної чи нескінченної) кількості множин. Вирази, що містять операції $\vee$ чи $\wedge$ для певної сукупності множин, записують скорочено у вигляді:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \; ; \; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k \; ;$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \; ; \; A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \; .$$

Властивості теоретико-множинних операцій зобразимо в таблиці.

Таблиця 7

Назва властивості	**Формула властивості**
1. Комутативність	А) $A \cup B = B \cup A$ Б) $A \cap B = B \cap A$
2. Асоціативність	А) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. Дистрибутивність	А) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Ідемпотентність	А) $A \cap A = A$ Б) $A \cup A = A$
5. Закони де Моргана	А) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ Б) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
6. Властивості поглинання	А) $A \cap (A \cup B) = A$ Б) $A \cup (A \cap B) = A$

7. Властивості тотожності
   a. $A \cup \varnothing = A$
   b. $A \cap \bigcup = A$
8. Властивості домінування
   а) $A \cup \bigcup = \bigcup$
   б) $A \cap \varnothing = \varnothing$

На основі наведених властивостей теоретико-множинних операцій перерізу та доповнення легко доводяться такі властивості:

для різниці множин:

а) $A \setminus A = \varnothing, \quad A \setminus \varnothing = A, \quad A \setminus \bigcup = \varnothing;$

б) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A);$

в) $(B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A);$

доповнення множини:

а) $A \cap \overline{A} = \varnothing, \quad A \cup \overline{A} = \bigcup;$

б) $\overline{\varnothing} = \bigcup, \qquad \overline{\bigcup} = \varnothing;$

в) $\overline{\overline{A}} = A$

г) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

д) $(A = B) \Rightarrow (\overline{A} = \overline{B})$

та симетричні різниці множин:

а) $A \Delta B = B \Delta A;$

б) $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C;$

в) $A \Delta A = \varnothing;$

г) $A \Delta \varnothing = A$

д) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

Якщо проаналізувати наведені властивості операцій $\bigcup$ та $\bigcap$ для множин, то довільна рівність щодо них залишиться правильною, якщо замінити $\bigcup$ на $\bigcap$, а $\bigcap$ на $\bigcup$ і множини $\varnothing$ на $\bigcup$ та $\bigcup$ на $\varnothing$. У цьому полягає принцип двоїстості. Він стає зрозумілим і очевидним, якщо перевіряти наведені такі властивості:

$$
\begin{array}{rl}
A \cup B = B \cup A & A \cap B = B \cap A \\
A \cup (A \cap B) = A & A \cap (A \cup B) = A \\
\overline{A \cup B} = \overline{B} \bigcap \overline{A} & \overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A} \\
\overline{\varnothing} = \bigcup & \overline{\bigcup} = \varnothing
\end{array}
$$

Для будь-яких скінченних двох множин A та B є справедливою така рівність:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|,$$

яка є частковим випадком принципу включення-виключення.

Систему $S = \{A_i\} \quad (i \in N)$ підмножин множини A, називають розбиттям множини A, якщо 1) $A_i \neq \varnothing \quad \forall i \in N;$

2) $A_i \bigcap A_j = \varnothing, \ \forall i, j \in N;$

3) $\bigcup\limits_{i \in N} A_i = A$

або розбиття множини A – це система S непорожніх її підмножин $A_i (i \in N)$, коли довільний елемент $a \in A$ належить обов'язково одній із множин A_i.

Теорема: Дві множини A та B є рівними, тоді і тільки тоді, коли $A \subset B$ та $B \subset A$.

Підмножина та буліан

Означення. Множина A називається підмножиною множини B $(A \subset B)$, якщо кожний елемент, що міститься в множині A також належить і до множини B, тобто

$A \subset B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$ (рис.6)

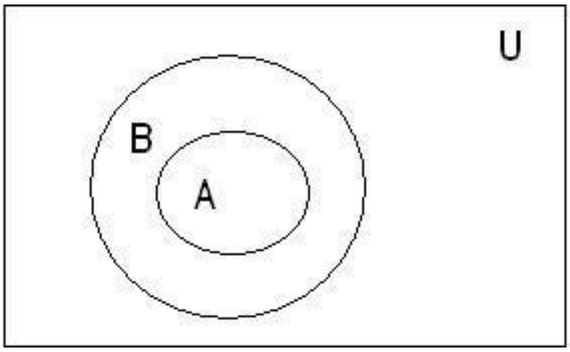


Рис.6

Для підмножин використовують ще і таке позначення: $A \subseteq B$. Це означає, що підмножина A може співпадати зі самою множиною B. Якщо $A \subset B$, то говорять, що A є власною підмножиною множини B.

Для власних підмножин виконуються такі властивості:

1) $A \subset A$

2) $(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$

3) $(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$

4) $A \subset (B \cup A)$

5) $A \cap B \subset A$

6) $A \setminus B \subset A$

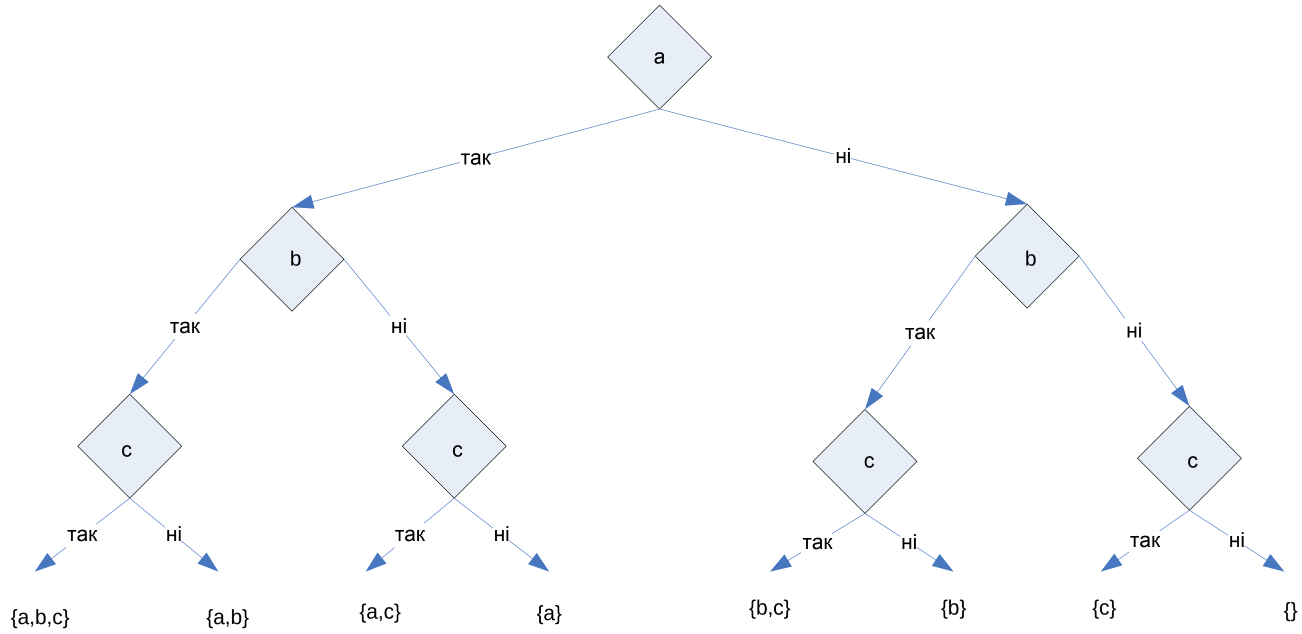
Множину всіх підмножин множини A називають буліаном (на честь англійського математика, творця математичної логіки Дж. Буля) і позначають:

$B(A) = \{B \mid B \subset A\}$

Твердження 1. Потужність буліана $B(A)$ дорівнює $2^{|A|}$, тобто $|B(A)| = 2^{|A|}$, де $|A|$ – потужність множини A.

Твердження 2. Множина А потужність якої дорівнює **n,** містить $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ підмножин, потужність яких дорівнює **m**.

Наведемо алгоритм побудови буліана **B(A)** на прикладі множини **A={a,b,c}** (рис. 7)



Декартів добуток

Множини, які містять однакові елементи, є еквівалентними (рівними), причому порядок запису їх лементів є несуттєвим. Проте бувають випадки, коли порядок запису має принципове значення (запис координат точок на площині) і у зв'язку з цим вводиться поняття кортежу, впорядкованої сукупності (набору). Елементи кортежу, або їх ще називають компонентами, нумерують, а кількість їх називають довжиною або розмірністю кортежу.

<u>Означення</u> Декартовим простим добутком множин **A** та **B** називають множину впорядкованих пар (двокомпонентних кортежів) (a,b), тобто
A×B={(a,b)| aєA ^ bєB}.

У загальному випадку:
$A \times B \neq B \times A$, а також
$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$
$A \times B = B \times A \Leftrightarrow (A = B) \cup (A = \{\}) \cup (B = \{\})$

Розглянемо декілька множин A_i $(i = \overline{1, n})$. Тоді
$A_1 \times A_2 \times .... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in A_i, i = \overline{1, n}\}$

Множину $A^2 = A \times A$ називають декартовим квадратом множини **A**, множину $A^3 = A \times A \times A$ -- декартовим кубом і т.д.

Наведемо основні властивості декартового добутку множин

1) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
2) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$;
3) A × (B U C) = (A × B) U (A × C);
4) A × (B ∩ C) = (A × B) ∩ (A × C);
5) (A × B) U (C × D) (A U C) × (B U D);
6) (A × B) ∩ (C × D) = (A ∩ C) × (B ∩ D);
7) A × B C × D ↔ (A C) ^ (B D).

2.3 Нечіткі множини

Означення. **Нечіткі множини** – це такі множини, коли неможливо наперед встановити, чи належать елементи з універсальної множини *U* до цих множин. Кожний елемент універсуму *U* входить до нечіткої множини *S* зі своїм ступенем належності (дійсне число з відрізка [0; 1]).

Нечітку множину *S* задають її елементами разом зі ступенями належності (елементи зі ступенем належності нуль не записуються), тобто $S = \{(a; P_S(a)); (b; P_S(b)); ...; (u; P_S(u))\}$, де *a, b, ..., u є U*, а $P_S(a), P_S(b), ..., P_S(u)$ – ступені належності елементів *a, b, ..., u* до *S* відповідно.

Універсальну множину *U*, як нечітку, можна подати у вигляді *{(u; 1)| u є U}*.

Наведемо **основні операції над нечіткими множинами**.

1) *S* – доповнення до нечіткої множини *S*. Якщо $P_S(a)$ – ступінь належності елемента а до множини *S*, то $1 - P_S(a)$ – ступінь належності цього елемента до множини *S*;
2) Якщо *S* і *T* – дві нечіткі множини, то *S U T* – їх об'єднання зі ступенем належності $P_{S\,U\,T}(a) = max\,\{P_S(a); P_T(a)\}$;
3) Переріз двох нечітких множин *S* і *T* – це множина *S ∩ T*, причому $P_{S\,\cap\,T}(a) = max\,\{P_S(a); P_T(a)\}$;

Означення. **Множиною рівня *α (α < 0) Sα*** нечіткої множини *S* називається множина елементів множини *S*, ступінь належності яких до *S* є меншим від *α*.

Означення. Елемент *u є U* зі ступенем належності $P_S(u)=0.5$ до множини *S* називається **точкою переходу** нечіткої множини *S*.

2.4 Комп'ютерне зображення множин

Подання множин у комп'ютері здійснюється різними способами. Один із них полягає в **зберіганні невпорядкованих елементів множини**. Але даний спосіб є незручним та неефективним, оскільки, виконуючи операції над множинами, які займають багато часу, необхідно весь час здійснювати перегляд елементів.

Розглянемо універсальну множину $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$в якій довільним способом є впорядкованими її елементи. Тоді множину $A \subset U$ в комп\`ютері можна зобразити за допомогою n- компонентного кортежу елементи якого дорівнюють 0 або 1. Якщо $U_i \left(i = \overline{1, n}\right) \in A$то інший елемент дорівнює 1, а якщо $U_i \notin A$ то – 0.

Для виконання операцій над множинами в системі програмування використовують комбіновані типи – масиви, рядки, записи, множини.

2.5 Відношення та їх властивості

Бінарні відношення

Означення. Бінарним відношенням R між множинами A та B називається підмножина декартового добутку AxB, тобто це деяка множина впорядкованих пар $(a;b)$, де $a \in A, b \in B$

Як видно з означення бінарні відношення описують зв'язки між елементами двох множин. Існують відношення, які описують зв'язки між елементами трьох чотирьох і т.д. множин.

Якщо пара $(a;b) \in R$ то записуватимемо aRb (елементи a та b перебувають у відношенні R) у протилежному випадку – $a\overline{R}b$.

Означення. Областю визначення відношення R називається множина $R_- = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a;b) \in R\}$, а областю значень відношення R називається така множина: $R_+ = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a;b) \in R\}$.

Означення. Полем відношення R називається множина $F(R) = R_- \cup R_+$.

Розглянемо довільну не порожню множину A. Оскільки Ø$\subset$A^2=AxA, то порожню множину Ø назвемо порожнім відношенням на множині A. Тоді

$I_A = \{(a;a) \mid a \in A\}$– одиничне (тотожнє) відношення,

а $U_A = \{(a;b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ - універсальне відношення

Способи задання відношень

Перший спосіб полягає в безпосередньому записі впорядкованих пар згідно означення.

Другий спосіб є графічним. Дві множини зображають схематично, а відповідність між елементами цих множин задають стрілками (рис. 8).

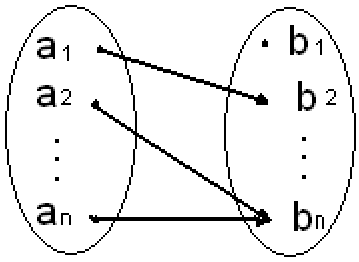


Рис.8

Із рисунка видно, що a_1 R $в_2$, a_2 R $в_m$, a_n R $в_m$, a_2 R $в_2$, a_1 R $в_m$.

Третій спосіб описує відношення за допомогою орієнтованого графа. У цьому випадку розглядають елементи множини F(R)=R_-U R_+ одразу, і якщо елементи перебувають у відношенні, то проводять стрілки, а якщо має місце одиничне відношення – то петлю. У результаті отримується фігура, яка називається орієнтованим графом відношення R(рис.9).

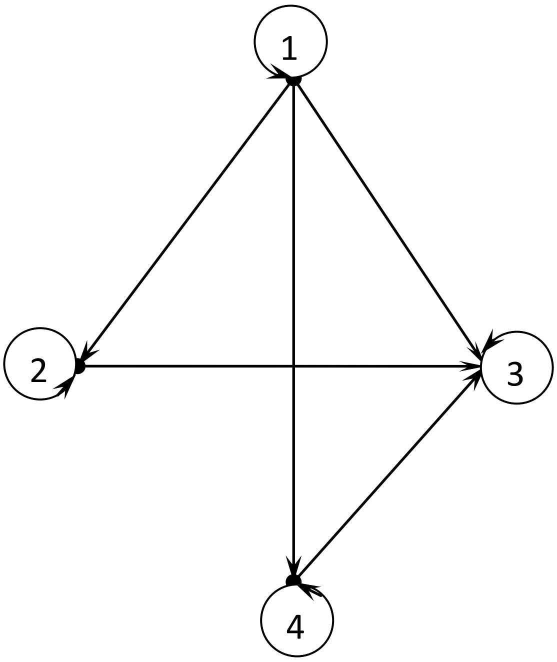


Рис.9

Із рисунка зрозуміло, що 1 R 1, 1 R 2, 2 R 2, 2 R 3, 3 R 3, 1 R 4, 4 R 4, 2 $\overline{R}$ 4.

Для задання бінарних відношень використовують також табличний спосіб, де у першому рядку таблиці записуються всі елементи множини А, а в другому – підмножини множини В, що містять елементи, які перебувають у відношенні R з відповідними елементами першого рядка(табл.8).

$$\begin{bmatrix} a & b & c & \dots & u \\ R_a & R_b & R_c & \dots & R_u \end{bmatrix}$$

Табл.8

П’ятий спосіб є графічним і застосовується тоді, коли $R_{-} \subset |R, R_{+} \subset |R$

Побудувавши прямокутну декартову систему координат на площині хОу та відклавши на осі абсцис елементи множини R-, а на осі ординат – елементи множини R+, отримаємо сітку, на перетині вертикальних та горизонтальних ліній якої отримуються елементи відношення R(рис.10).

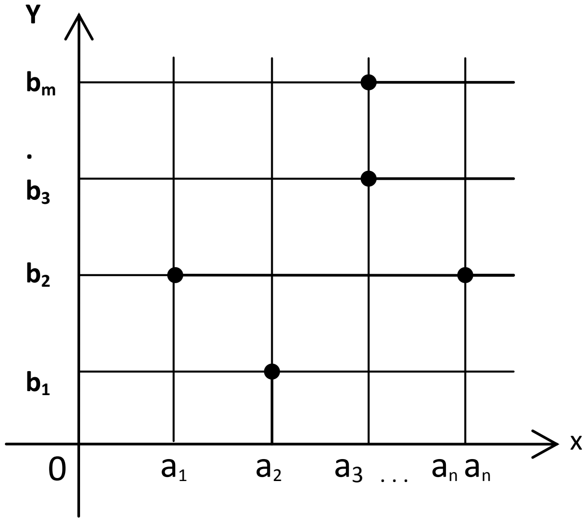


Рис.10

Існує аналітичний спосіб задання відношень (за допомогою формули).

Досить поширеним поширеним способом задання відношень є спосіб за допомогою булевої матриці, $M = (m_{ij})$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, (a_i; b_j) \in \Re \\ 0, (a_i; b_j) \in \Re \end{cases}$$

де $\mathrm{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \mathrm{B} = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$.

Переріз відношення. Фактор-множина.

Розглянемо відношення $\Re \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ та елемент $a \in \mathrm{A}$.

<u>Означення.</u> Множина $R_a = \{b \in B | (a; b) \in R\}$ називається перерізом відношення **R** за елементом a.

<u>Означення.</u> Сукупність усіх перерізів відношення **R** за елементами множини **A** називається фактор-множиною множини **B** за відношенням **R**, тобто

$$B / R = \{R_a | a \in A\}$$

<u>Означення.</u> Множина $R_{A_1} = \bigcup\limits_{a \in A_1} R_a$ називається перерізом відношення R за множиною A_1.

Операції над відношеннями. Композиція відношень. Обернені відношення.

Оскільки довільне бінарне відношення є множиною, то для відношень мають місце ті самі операції що і для множин.

Розглянемо довільні два відношення $R \subset A \times C$ та $S \subset C \times B$.

<u>Означення.</u> Композицією відношень **R** і **S** називається множина впорядкованих пар (a;b), для кожної з яких існує такий елемент **C** , що $(a; c) \in R$ і $(c; b) \in S$:

$$R \circ S = \{(a; b) | \exists c : aRc \wedge cSb\}.$$

Взагалі кажучи, $R \circ S \neq S \circ R$.

<u>Означення.</u> Відношення $R^{-1} = \{(b; a) | (a; b) \in R\}$ називається оберненим до відношення **R**.

Очевидно, що $U^{-1}=U, I^{-1}=I$.

Наведемо властивості операцій над відношеннями.

1. $\left(R\circ S\right)\circ T=R\circ(S\circ T)$;
2. $(R\cup S)\circ T=(R\circ T)\cup(S\circ T)$;
3. $(R\cap S)\circ T=(R\circ T)\cap(S\circ T)$;
4. $\left(R\circ S\right)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$;
5. $\left(R\cup S\right)^{-1}=S^{-1}\cup R^{-1}$;

6. 6) $(R\cup S)^{-1}=S^{-1}\cap R^{-1}$

7. 7) $(R^{-1})^{-1}=R$

8. 8) $R\subset S\Rightarrow R^{-1}\subset S^{-1}$

9. 9) $(\overline{R})^{-1}=\overline{R}^{-1}$

Властивості відношень

<u>Означення</u>. Рефлективним називається таке бінарне відношення R на множині A, Для якого виконується умова

$\forall a\in A:(a;a)\in R \qquad =,\le,\ge,\vdots,\Leftrightarrow,\|,\sim$

$I_A\subset R$

<u>Означення</u>. Відношення R на множині A називається антирефлексивним (іррефлексивним), якщо виконується умова

$\forall a\in A:(a;a)\notin R \qquad \ne,>,<,\perp,\varnothing$

$I_A\cap R=\varnothing$

<u>Означення</u>. Відношення R на множині A називається симетричним, якщо виконується умова

$(a;b)\in R\Rightarrow(b;a)\in R$

Для таких відношень виконується рівність $R^{-1}=R.\qquad \equiv,=,\|,\perp,\cong,\sim,U,I$

<u>Означення</u>. Відношення R на множині A називається антисиметричним, якщо виконується умова

$\forall a,b\in A:(a;b)\in R\wedge(b;a)\in R\Rightarrow a=b$

Для антисиметричних відношень має місце співвідношення $(R\cap R^{-1})\subset I_A$

$$=,<,>,\le,\ge,\subset,I_A,\varnothing$$

<u>Означення</u>. Відношення R на множині A називається асиметричним, якщо виконується умова

$\forall a,b\in A:(a;b)\in R\Rightarrow(b,a)\notin R$

<u>Означення</u>. Відношення R на множині A називається транзитивним, якщо виконується умова

$\forall a,b,c\in A:\underline{(a;b)}\in R\wedge(b,c)\in R\Rightarrow(a,c)\in R$

Для транзитивного відношення R на множині A , задане булевою матрицею M=

$=(m_{ij}),\quad i,j=\overline{1,n}$

Відзначимо, що:

1) якщо R є рефлексивним відношенням, то всі елементи головної діагоналі матриці M дорівнюють одиниці;
2) якщо R є антирефлексивним відношенням, то всі елементи головної діагоналі матриці M дорівнюють нулеві;

3) якщо R є симетричним відношенням, то матриця M є симетричною;
4) якщо R є антисиметричним відношенням, то матриця M має такі властивості:

$$(m_{ij} = m_{ji} = 0) \vee ([(i \neq j) \wedge m_{ij} = 1)] \Rightarrow (m_{ji} = 0))$$

Якщо, крім того, відношення не є асиметричним, то існує таке і, таке що $m_{ii} = 1$

Припустимо що відношення R задано орієнтованим графом. Тоді будуть справедливими такі твердження:

1) відношення R є рефлексивним, якщо в кожній вершині графа є петля;
2) відношення R є симетричним, якщо для кожної дуги графа між двома різними вершинами є протилежно напрямлена дуга;
3) відношення R є антисиметричним, якщо граф не містить протилежно напрямлених дуг між жодною парою різних вершин;
4) відношення R є транзитивним, якщо поряд з дугами (a;b) та (b;c) граф обов'язково містить дугу (a;c);

<u>Теорема 1:</u> Для того щоб відношення R було рефлексивним, необхідно та достатньо щоб відношення R = U \ R, де U = A × A, було антирефлексивним.

<u>Теорема 2:</u> Для того щоб відношення R було симетричним, необхідно та достатньо щоб відношення R було симетричним.

Відношення еквівалентності

<u>Означення:</u> Відношення R на множині A називається відношенням еквівалентності, якщо воно є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

=, ≡, ~, I, U

<u>Означення:</u> Переріз R_a відношення еквівалентності R c A × A за елементом a є A називається класом еквівалентності і позначається [a].

Якщо b є [a], то b називається представником класу еквівалентності [a], зокрема a є [a].

<u>Теорема:</u> Довільні класи еквівалентності за відношенням R або не мають спільних елементів, або збігаються.

<u>Теорема:</u> Довільні відношення еквівалентності, задане на множині A, породжує розбиття цієї множини на класи еквівалентності.

<u>Означення:</u> Множина відмінних між собою класів еквівалентності називається фактор-множиною множини A за відношенням R і позначається так:

A \ R = {[a] | a є M}.

Відношення порядку. Впорядковані множини

<u>Означення:</u> Відношення R на множині A називається відношенням нестрогого порядку, якщо воно є рефлексивним, антисиметричним і транзитивним (≤).

<u>Означення:</u> Множину A, на якій введено відношення нестрогого порядку R, називають нестрого впорядкованою множиною та позначають (A, R)

<u>Означення.</u> Два елементи a та b нестрого впорядкованої множини називаються порівняльними, якщо a ≤ b U b ≤ a, при цьому, якщо a ≤ b, то кажуть, що елемент a не є більшим за елемент b, або елемент b не є меншим за елемент a.

Якщо Якщо ж елементи a і b є такими, що (a;b) ¢ (≤) ^ (b;a) є (≤), то вони називаються не порівняльними.

Означення. Якщо множина (A,R) є нестрого впорядкованою де два різні елементи є порівняльними, то така множина називається лінійно (цілком) нестрого впорядкованою, а порядок R називається лінійним (повним) порядком. Якщо ж існують непорівняльні елементи, то (A,R) називають частково впорядкованою множиною, а відношення R – частковим порядком.

Означення. Булевим вектором (кортежем) довжини n
називається вектор $(a_1;a_2;\dots;a_n)$ є B^n, B= (0;1)

Означення. Відношення R на множині A називається відношенням строгого порядку, якщо воно є анти рефлексивним і транзитивним.

Теорема. Якщо відношення R є нестрогого (строгого) порядку на множині A, то R^{-1} є також відношенням нестрогого (строгого) порядку на A.

Теорема Цермело. Впорядкувати можна довільну, не лише числову множину.
(Аксіома вибору)

Теорема. Якщо відношення R є нестрогого порядку на скінченній множині A, то існує таке відношення повного порядку R_1 на A, що R c R_1, тобто довільний нестрогий порядок на скінченній множині можна розширити до повного.

Міноранти та мажоранти. Найменший і найбільший елементи.

Розглянемо підмножину M' впорядкованої за відношенням R множини M.

Означення. Елемент m_λ Є M називається мажорантою множини M', якщо
будь-яке m Є M' : $m \le m_\lambda$,
А елемент m_β Є M називається мінорантою множини M', якщо
будь-яке m Є M' : $m_\beta \le m$.

Означення. Якщо m_λ Є M' , то m_λ називається максимальним елементом множини M', а якщо m_β Є M', то m_β називається мінімальним елементом множини M'.
Позначаються m_λ = max (M',R) , m_β = min (M',R)

$(M')^-$ = {a Є M | a ≤ x   будь-яке x Є M'} – сукупність усіх мінорант,
$(M')^+$ = {a Є M | x ≤ a   будь-яке x Є M'} – сукупність усіх мажорант.

Означення. sup M' = min $(M')^+$ - точна верхня грань множини M', inf M' = max $(M')^-$ - точна нижня грань множини M'.

Теорема. Впорядкована множина M має не більше ніж один максимальний (мінімальний) елемент.

Степінь відношення. Поняття про замикання відношень.

Означення: Степенем R^n, n = 1,2,…, відношення R називається його n-кратна композиція, тобто $R^2 = R \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R$.

За означенням примається, що $R^0 = I.$

Теорема: Розглянемо на множині A транзитивне відношення R. Тоді

$$\forall n \in N : R^n \subset R$$

Означення: Замиканням відношення R на проміжку A за властивістю P називається найменша за включенням відношення R_p, що володіє властивістю P, і містить відношення R.

Очевидно, що $R \subset A^2 \Rightarrow R \subset R_p \subset A^2$.

Зауваження. Якщо відношення R володіє властивістю P, то замикання його за властивістю P дорівнює самому R.

Введемо позначення $R^+ = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} R^k$ - об`єднання всіх додатніх, $R^* = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} R^k$ - об`єднання всіх невідємних степенів деякого відношення R на множині A.

Мають місце такі теореми:

Теорема: Відношення R^+ є замиканням відношення R за властивістю транзитивності.

Теорема: Відношення R^+ є рефлексивним і транзитивним замиканням відношення R.

Функціональні відношення. Відображення та функції.

Означення: розглянемо бінарне відношення R між множинами A та B. R – функціональне, якщо $\forall a,b,c\ (a:b) \in R \wedge (a \wedge c) \in R \Rightarrow b = c.$

Для функціональних відношень $R_a = \varnothing$ або $R_a = \{b\}$. Для другого випадку можна записати $b = R(a)$ і в цьому випадку говорять, що елементи a та b є функціонально залежні.

Означення: Функціональне відношення $R \subset A \times B$ називають відображенням множини A в множину B, якщо $R\_$ =A (позначається $R: A \rightarrow B$, або $A \xrightarrow{R} B$).

У цьому випадку множина $R\_$ є областю визначення відображення R, а, $R_+ \subset B$ - множиною (областю) значень цього відображення.

Означення: Якщо R є відображенням і $R_a = \{b\}$, то елемент b називається образом елемента a при відображенні R, а елемент a – прообразом елемента b.

Означення: Розглянемо відношення $R: A \rightarrow B$ і $A_1 \subset A$. **Образом** множини A_1 при відображенні R називається множина $R(A_1) = \{y \mid xRy \wedge x \in A_1\}$, а сама множина A_1 називається **прообразом** множини $R(A_1)$.

Безпосередньо з означення випливають такі рівності:

1. $\forall R, A_1 \subset A: R(A_1) \subset R(A)$;
2. $\forall A, B \subset R_-: R(A \cup B) = R(A) \cup R(B)$;
3. $\forall A, B \subset R_-: R(A \cap B) = R(A) \cap R(B)$;

Означення: **Функцією** називається таке відображення, область визначення та множина значень якого є числовими множинами.

Класифікація відображень

<u>Означення:</u> Відображення $R: A \to B$ називається:

a) Сюр'єктивним, якщо $R_+ = B$ (на множину B);
b) Ін'єктивним (взаємно однозначним), якщо $\forall a, b \in A: a \neq b \Rightarrow R_a \neq R_b$;
c) Бієктивним, якщо воно є одночасно сюр'єктивним та ін'єктивним;

<u>Теорема:</u> Якщо $R: A \to B$ є бієктивним відображенням, то $R^{-1}: B \to A$ також є бієктивним відображенням.

<u>Теорема:</u> Композиція двох довільних відображень є відображенням.

<u>Теорема:</u> Композиція бієктивних відображень є бієктивним відображенням.

Комп'ютерне зображення відношень та функцій

Розглянемо довільне відношення $R \subset A^2, |A| = n$. Пронумеруємо елементи множини A: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Тоді відношення R можна зобразити за допомогою мулевої матриці (двовимірного масиву) $R = \left(r_{ij}\right),\ i, j = \overline{1, n}$, де

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & a_i R a_j \\ 0, & a_i \overline{R} a_j \end{cases}$$

Загальним зображенням функції є також масив, що є ефективним за швидкістю, оскільки реалізація масивів забезпечує отримання значення функції за постійний час, що мало залежить від розмірності масиву та значення індекса.

Для великих скінченних або нескінченних множин зображення функції масивом є неефективним способом або взагалі неможливим. У цьому випадку використовуються підпрограми-функції, які визначають для заданого значення аргументу єдине значення функції.

2.6 Потужність множин

Означення. Дві множини A та B наживаються рівнопотужними (рівночисельними), якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність (бієктивне відображення) $f: A \to B$ (позначають $A \sim B$).

Відношення рівнопотужності є відношенням еквівалентності. Тому рівнопотужні множини називають еквівалентними (записують $|A| = |B|$).

Приклади.

1) $[0;1] \sim [a;b], \quad (0;1) \sim (a;b), \quad (0;1) \sim (-\infty; \infty)$;

2) $\mathrm{N} = \{1;2;3;...;n;...\} \sim \{2;4;6;...;2n;...\}$;

3) $[0;1] \sim (0;1)$.

Означення. Непорожня множина X є скінченною, якщо вона еквівалентна деякій множині $\{1;2;3;...;n\}, n \in \mathrm{N}$. У протилежному випадку вона є нескінченною.

У цьому випадку $|X|=n$. Зрозуміло, що $|\varnothing| = 0$.

Означення. Множина *A* називається зчисленною, якщо $A \sim \mathrm{N}$, тобто $|A|=|\mathrm{N}|$.

Властивості зчисленних множин

1. Множина *A* є зчисленною тоді і тільки тоді, коли її елементи можна пронумерувати, тобто $A \sim \mathrm{N}$.
2. Із кожної нескінченної множини *A* можна вибрати зчисленну підмножину.
3. Довільна нескінченна підмножина *B* зчисленної множини *A* є зчисленною.
4. Якщо *A* є зчисленною множиною, а *B* – скінченною множиною, причому $A \cap B = \varnothing$, то $A \cup B$ є зчисленною множиною
5. Об'єднання скінченної кількості зчисленних множин $A_i, i = 1,2,...$, що не перетинаються (тобто $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$), є зчисленною множиною.
6. Об'єднання зчисленної кількості скінченних множин, що не перетинаються, є зчисленною множиною.
7. Об'єднання зчисленної кількості зчисленних множин, що не перетинаються, є зчисленною множиною.

Зауваження. Умови неперетинності множин у властивостях 4-7 не зменшують загальності.

Приклади.

1) Множини раціональних чисел Q є зчисленною.
2) Множина алгебраїчних чисел є зчисленною (алгебраїчне число – це число, яке є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами).

Теорема. Якщо *A* є нескінченною множиною, а *B* – зчисленною множиною, то $A \cup B \sim A$

Теорема. Якщо *A* є нескінченною множиною, а *B* – її зчисленною підмножиною і *A\B* – нескінченна множина, то *A\B~A.*

Теорема(характеристична властивість нескінченних множин)

Множина А тоді і тільки тоді є нескінченною, коли вона є еквівалентною деякій своїй підмножині, яка не збігається з множиною А

Означення

Розглянемо дві нескінченні множини А та В, причому $|A| = \alpha, |B| = \beta$.Тоді $\alpha < \beta$, якщо

Зауваження. Якщо А⊂В, $|A| \neq |B|$, то означенням $|A| \langle |B|$. Тому завжди А⊂В $\Rightarrow$ $|A| \leq |B|$

Теорема Кантора-Бернштейна .

Якщо $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ і $A_1 \subset Ai \approx A_3$,то $A_1 \approx A_2 \approx A_3$

Теорема (про порівняння потужностей). Відношення "менше" для потужностей є відношенням строго порядку.

Порівняння конкретних потужностей

Теорема Потужністю α довільної зчисленної множини є найменшою з потужностей нескінченних множин

<u>Зауваження</u> Потужність α є меншою за потужність континуум

<u>Теорема</u>

Розглянемо n є N. Тоді $n<\alpha$

<u>Зауваження.</u> Потужність довільної скінченої множини є меншою від потужності довільної нескінченної множини.

<u>Теорема</u>. $\forall$ n є N $\left|R^n\right| = c$ (континуум)

<u>Теорема</u> Для довільної множини А потужність її булана B(A) є більшою від потужності самої множини А, тобто $|A|\langle|B(A)|$

<u>Зауваження</u> $|B(A)| = 2^{|A|}$

<u>Парадокс Кантора</u>. Припустимо, що М- “множина всім множин”. Тоді $|B(M)|\rangle|M|$. Але ж М- “найширша”з усіх можливих множин. Отже, найбільшої множини немає