МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”

ЛЕКЦІЙНИЙ МАТЕРІАЛ

з дисципліни

“Дискретні структури”

Укладач: Гавриш Василь Іванович

Львів – 2009

Лекція 1

Розділ I. Елементи теорії нечітких множин.

§1.1. Поняття нечіткої множини

Теорія класичних множин не є достатньою для математичного опису складних систем. У зв'язку з цим американський математик Л. Заде вводить поняття нечіткої множини в роботі "Fussy Sets" яка була опублікована в 1965 році. Термін "Fussy Sets" перекладається як «розмиті», «нечіткі», «розпливчасті», «туманні» множини. Теорія нечітких множин використовується в різних галузях математики, а також застосовується від праць зі створення штучного інтелекту в ЕОМ п'ятого покоління до керування складними технологічними процесами.

Розглянемо довільний універсум υ. Надалі розглядатимемо множини з цього універсуму.

Означення 1.1.1. Нехай $A \subseteq \upsilon$. Множина A називається нечіткою, якщо вона містить пари $(x, P_A(x))$, де $x \in \upsilon$, а P_A – функція $\upsilon \rightarrow [0;1]$ належності нечіткої множини A.

Значення $P_A(x)$ цієї функції для конкретного x називають мірою належності цього елемента нечіткій множині A.

Отже, $A = \{(x, P_A(x)\}$.

Приклад 1.1.1. (Дискретна нечітка множина). Нехай $\upsilon = N$ – множина натуральних чисел. Тоді нечітку множину A будуємо так:

$A = \{(2, 0.1); (4, 0.3); (6, 0.7); (8, 0.9); (10, 0.7)\}$.

Приклад 1.1.2. (Неперервна нечітка множина). Нехай $\upsilon = \{x | -1 <= x <= 1\}$, а функція належності нечіткої множини A зображена рисунком 1.1.1.

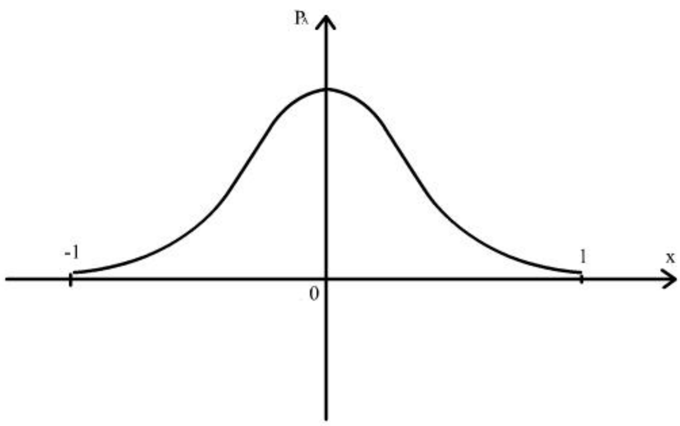


Рис. 1.1.1.

Приклад 1.1.3. υ = Z_+ - множина цілих невід'ємних чисел.

A = {(0, 1); (1, 0.8) (2, 0.6) (3, 0.4) (4, 0.2) (5, 0) (6, 0); … } – нечітка множина «невеликих» цілих невід'ємних чисел .

Звичайні (класичні) множини складають підклас класу нечітких множин. Розглянемо звичайну множину B⊆υ. Тоді функцією належності множини B буде її характеристична функція:

$$P_A(x) = \left\{ \frac{1,\ якщо\ x\epsilon B}{0,\ якщо\ x\notin B} \right\}$$

І відповідно до означення 1.1 звичайну множину B можна також визначити як сукупність пар $(x,P_B(x))$.

Нехай A – нечітка множина. Тоді A = Ø ↔ $P_A(x)=0$ ∀xϵ υ , а A = υ↔ $P_A=1$ ∀xϵ υ.

Означення 1.1.2. Носієм нечіткої множини A (sup A) з функцією належності $P_A(x)$ називається така чітка множина:

Sup A = { x| xϵυ, $P_A(x)>0$}.

Приклад 1.1.4. Розглянемо нечітку множину A, задану таблицею

x	1	2	3	4	5	6
$P_A(x)$	0	0,1	0	0,2	0	0,5

Тоді sup A = { 2, 4, 6 }

Означення 1.1.3. Розглянемо нечіткі множини A,B⊆υ та їхні функції належності P_A, P_B. Множина A є підмножиною множини B (A⊆B), якщо ∀xϵ υ виконується рівність

$$P_A(x) \le P_B(x)$$

Означення 1.1.4. Нечіткі множини A та B є еквівалентними (співпадають), якщо ∀xϵ υ $P_A(x) = P_B(x)$.

Наслідок. Якщо A⊆B, то і sup A ⊆ sup B.

Приклад 1.1.5.

A = { x| величина x дуже близька до нуля}, B = { x| величина x близька до нуля }.

Очевидно, що A⊆B, а значить ∀xϵ υ $P_A(x) \le P_B(x)$

§1.2. Операції над нечіткими множинами

Означення 1.2.1. Об'єднанням нечітких множин A, B ⊂ υ називається нечітка множина A⋃B з функцією належності $P_{A\cup B}(x) = \max\{P_A(x), P_B(x)\}\forall x\epsilon\upsilon$

Означення 1.2.2. Перетином нечітких множин A, B ⊂ υ називається нечітка множина A⋂B з функцією належності $P_{A\cap B}(x) = min\{P_A(x), P_B(x)\}\forall x\epsilon\upsilon$

Приклад 1.2.1. Розглянемо нечіткі дискретні множини A та B, задані таблично:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P_A(x)$	0,1	0,7	0,3	0,8	0,2

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P_B(x)$	0,3	0,5	0,4	0,6	0,1

Тоді множини $A \cup B$ та $A \cap B$ визначаються з вихідних множин A і B так:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P_{A\cup B}(x)$	0,3	0,7	0,4	0,8	0,1

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$P_{A\cap B}(x)$	0,1	0,5	0,3	0,6	0,1

Приклад 1.2.2. Нехай функції належності нечітких множин A та B зображені рисунком 1.2.1. Тоді неперервною лінією буде зображена функція належності об'єднання цих множин, а штриховою – їх перетин.

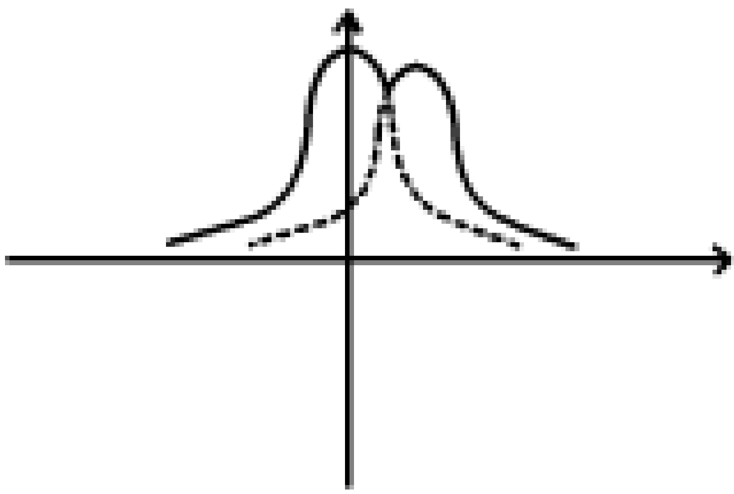


Рис. 1.2.1.

Означення 1.2.3. Доповнення нечіткої множини $A \subset \upsilon$ називається нечітка множина $\overline{A}$, функція належності якої має вигляд:

$$P_{\bar{A}}(x) = 1 - P_A(x) \ \forall x \epsilon \upsilon.$$

Означення 1.2.4. Різниця множин A і B визначається як нечітка множина A\B з такою функцією належності:

$$A_{A\setminus B}(x) = \begin{cases} P_A(x) - P_B(x) \text{ коли } P_A(x) \geq P_B(x), \\ 0 \text{ в протилежному випадку.} \end{cases}$$

Означення 1.2.5. Множиною рівня α, α>0, нечіткої множини $A \subset \upsilon$ називається чітка множина A_α елементів $x \epsilon \upsilon$, міри належності яких нечіткої множини A є не менші за число α, тобто:

$A_\alpha = \{x | x \in \upsilon, P_A(x) \geq \alpha\}$.

Приклад 1.2.3. Розглянемо нечітку дискретну множину A, задану таблично

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
$P_A(x)$	0.6	0.2	0.1	0.8	0.5	0.3	0.4

Тоді $A_{0,5}$ = {x_1, x_2, x_3}.

Означення 1.2.6. Точкою переходу нечіткої множини A називається такий елемент $x \in \upsilon$, для якого міра належності $P_A(x) = 0{,}5$. У попередньому прикладі точкою переходу нечіткої множини A буде x_5.

Лекція 2

§1.3. Нечіткі числа

Означення 1.3.1. Опуклу, нормалізовану ($sup P_A(x) = 1, x \in U$) нечітку множину A⊂R називають нечітким числом, якщо для неї існує тільки одне число x_0, таке що $P_A(x_0) = 1$і функція $P_A(x)$ є кусково-неперервною.

Число x_0 визначається як вершина нечіткого числа A. Означене таким чином нечітке число A називається додатнім і записується A>0, якщо $P_A(x) \geq 0 \ \forall x \leq 0$.

Приклад 1.3.1. Нечітка множина A⊂R із функцією належності

$$P_A(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{m1}, \text{якщо} - 2 \leq x \leq -1, \\ \frac{3-x}{4}, \text{якщо} - 1 < x \leq 3, \\ 0, \text{якщо } x < -2 \text{ та } x > 3 . \end{cases}$$

Є нечітким числом «приблизно -1». Очевидно, що A<0. Графік такого числа зображено на рис. 1.3.1.

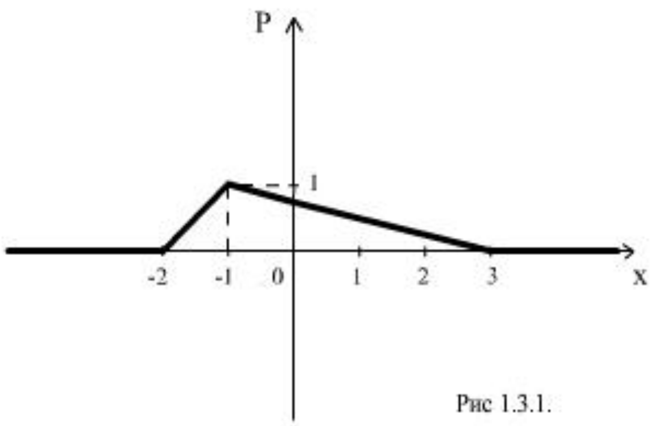


Рис 1.3.1.

Означення 1.3.2. Для нечітких чисел функцію L: [0, ∞] → [0, 1] називають референт-функцією, якщо L(0) = 1 і L(u) – спадна.

Приклад референт-функцій:

1) $L(u) = \max(0, 1 - u^{б}), б > 0$;

2) $L(u) = \frac{1}{1+u^{б}}, б > 0$;

3) $L(u) = e^{-u^{б}}, б > 0$.

На рис. 1.3.2 зображено референт-функції $L(u) = \max(0{,}1 - u)$ та $R(u) = \frac{1}{1+u^{\alpha}}$.

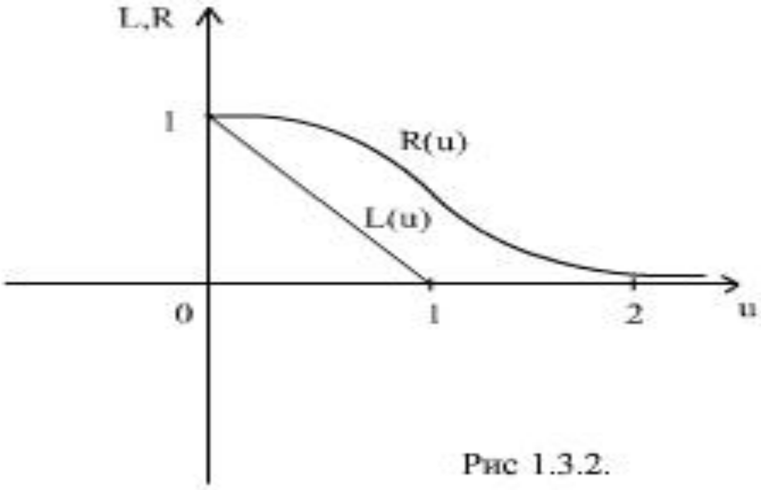


Рис 1.3.2.

<u>Означення 1.3.3.</u> нечітке число M називається L-R нечітким числом, якщо його функція належності є такою:

$$P_M(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), \text{якщо } x \le m, \alpha > 0, \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), \text{якщо } x > 0, \beta > 0. \end{cases} \quad (1.3.1.)$$

Тут L(u), R(u) – референт-функції.

Число m однозначно визначається із умови $P_M(m) = L(0) = 1$ і є вершиною нечіткого L-R числа. Величини α і β є відповідно лівим та правим кінцями проміжку, який містить нечітке число M. Якщо $\alpha = \beta = 0$, то нечітке число перетворюється на звичайне число і, навпаки, із зростанням значень α і β число M стає все нечіткішим.

Для L-R нечіткого числа використовують скорочений запис

$$M = (m; \alpha;\ \beta)_{LR}$$

На рис. 1.3.3. подано L-R нечітке число $M(3; 2;\ 4)_{LR}$ із референт-функціями $L(u) = \max(0; 1 - u)$ та $R(u) = \frac{1}{1+u^2}$.

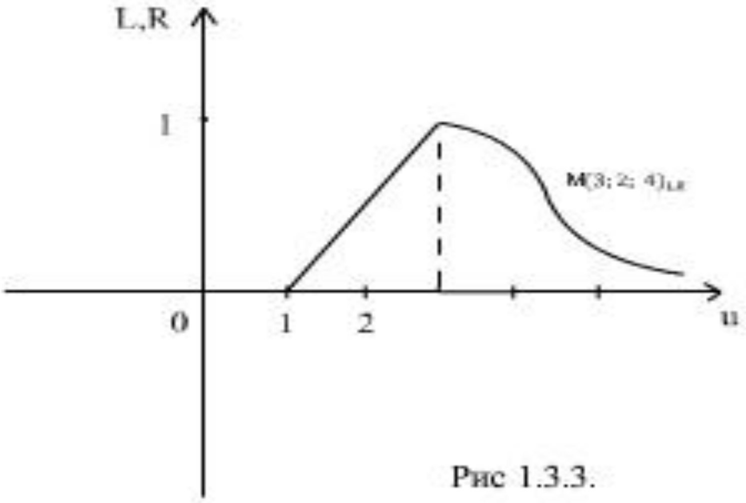


Рис 1.3.3.

Наведемо найпростіші арифметичні операції над нечіткими L-R числами.

§1.4. Операції над нечіткими числами

Розглянемо два нечіткі числа $M = (m; \alpha;\ \beta)_{LR}$ і $N = (n; \gamma;\ \delta)_{LR}$. Завжди існує стале значення $\omega \in [1; 0]$, яке задовольняє рівність

$$L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) = \omega = L\left(\frac{n-y}{\gamma}\right).$$

Оскільки референт-функція L(u) є монотонно спадною, то однозначно має місце співвідношення

$$\frac{m-x}{\alpha} = \frac{n-y}{\gamma} = L^{-1}(\omega), \qquad \textbf{\textit{(1.4.1)}}$$

де $L^{-1}(\omega)$ є оберненою функцією до L(u).

Із співвідношення (1.4.1) визначимо x та y

$$x = \alpha L^{-1}(\omega), y = n - \gamma L^{-1}(\omega). \ \textbf{\textit{(1.4.2)}}$$

Тому $z = x + y = m + n - (\alpha + \gamma) L^{-1}(\omega)$. або $\frac{m+n-z}{\alpha+\gamma} = L^{-1}(\omega) \Rightarrow L^{-1}\left(\frac{m+n-z}{\alpha+\gamma}\right) = \omega.$

Аналогічно можна отримати значення для правого кінця проміжку, що містить суму нечітких чисел M та N і воно буде таким:

$$R\left(\frac{z-m-n}{\beta+\delta}\right) = \omega.$$

Отже,

$$(m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \oplus (n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} = (m + n;\ \alpha + \gamma;\ \beta + \delta)_{LR}. \ \textbf{(1.4.3)}$$

Для різних типів L-R нечітких чисел є доведеним таке співвідношення:

$$(m;\alpha;\beta)_{LR} \oplus (n;\ \gamma;\ \delta)_{L1R2} = (m+n;1;1)_{L2R2},\ \textbf{(1.4.4)}$$

де $L_2 = (\alpha L^{-1} + \gamma L_1^{-1})^{-1},\ R_2 = (\beta R^{-1} + \delta R_1^{-1})^{-1}$.

2. Розширена різниця нечітких чисел.

Розглянемо нечітке число $-N = (n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} = (-n;\ \delta;\ \gamma)_{RL}$. Врахувавши цю властивість, отримаємо

$$(m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \ominus (n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} = (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \oplus (-n;\ \delta;\ \gamma)_{RL} =$$

$$= (m-n;\ \alpha+\delta;\ \beta+\gamma)_{LR}\ \textit{\textbf{(1.4.5)}}$$

<u>Приклад 1.4.1.</u> Припустимо, що L(u)=R(u) і обчислимо

$$\begin{aligned}(M \oplus N) \ominus N &= ((m;\ \alpha;\ \beta)_{LL} \oplus (n;\ \gamma;\ \delta)_{LL}) \ominus (n;\ \gamma;\ \delta)_{LL} \\ &= (m+n;\ \alpha+\gamma;\ \beta+\delta)_{LL} \ominus (n;\ \gamma;\ \delta)_{LL} = (m;\ \alpha+\gamma+\delta;\ \beta+\delta+\gamma)_{LL} \\ &\neq (m;\ \alpha;\ \beta)_{LL} \neq M\end{aligned}$$

3. Розширене множення нечітких чисел.

Розглянемо додатні нечіткі числа $M = (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR}$ і $(n;\ \gamma;\ \delta)_{LR}$. Із використанням співвідношення (1.3.3) одержимо

$$z = xy = mn - (m\gamma + n\alpha)L^{-1}(\omega) + \alpha\gamma(L^{-1}(\omega))^2.\ \textbf{(1.4.6)}$$

Із даної рівності, взагалі кажучи, не вдається отримати вираз для добутку нечітких чисел L-R типу.

Припустимо, що α і γ є достатньо малими в порівнянні з m і n, а значення ω є близьке до одиниці, тоді з рівності (1.3.7) одержимо наближений вираз для розширеного добутку

$$(m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \otimes (n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} \approx (mn; m\gamma + n\alpha; m\delta + n\beta)_{LR}.\ \textbf{(1.4.7)}$$

Іноді використовують і таку наближену формулу:

$$(m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \otimes (n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} \approx (mn; m\gamma + \alpha(n-\gamma); m\delta + \beta(n+\delta))_{LR}.\ \textbf{(1.4.8)}$$

Для $M = (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} > 0\ i\ N = (n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} < 0$ формула для розширеного добутку буде

$$(m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \otimes (n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} \approx (mn;\ m\gamma - n\beta + \beta\gamma; m\delta - n\alpha - \alpha\beta)_{LR}.\ \textbf{(1.4.9)}$$

4. Множення нечіткого числа на скаляр.

Нехай λ - довільне дійсне число. Тоді

$$\lambda(m;\alpha;\beta)_{LR} = (\lambda m;\ \lambda\alpha;\ \lambda\beta)_{LR},\ \text{якщо}\ \lambda > 0\ \textbf{(1.4.10)}$$

$$\lambda(m;\alpha;\beta)_{LR} = (\lambda m;\ -\lambda\beta;\ -\lambda\alpha)_{RL},\ \text{якщо}\ \lambda < 0\ \textbf{(1.4.11)}$$

5. Знаходження обернених нечітких чисел та їх ділення.

Розглянемо нечітке число M . Функцію належності для нечіткого оберненого числа M^{-1}, визначимо так:

$$P_{M^{-1}}(x) = P_M\left(\frac{1}{x}\right) \quad \forall x \in R\backslash\{0\}.$$

Припустимо, що $M = (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} > 0$. Тоді для правого кінця нечіткого оберненого числа M^{-1}, тобто коли $x \geq \frac{1}{m}$, будемо мати

$$P_{M^{-1}}(x) = L\left(\frac{m-\frac{1}{x}}{\alpha}\right) = L(\frac{mx-1}{\alpha x}).$$

Вираз $\frac{mx-1}{\alpha x}$ перепишемо наближено так:

$$\frac{mx-1}{\alpha x} = \frac{x-\frac{1}{m}}{\frac{\alpha}{m}x} \approx \frac{x-\frac{1}{m}}{\frac{\alpha}{m^2}}. \qquad \textbf{(1.4.12)}$$

Тоді обернене нечітке число M^{-1} запишеться у вигляді

$$M^{-1} = (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR}^{-1} \approx (m^{-1};\ \frac{\beta}{m^2};\ \frac{\alpha}{m^2})_{RL}.$$

Часто використовують і таке наближення нечіткого числа M^{-1}:

$$M^{-1} \approx (m^{-1};\ \frac{\beta}{m(m-\beta)};\ \frac{\alpha}{m(m-\alpha)})_{RL} \ \textbf{(1.4.13)}$$

Для від’ємних нечітких чисел отримаємо аналогічні наближення, оскільки

$$-(M^{-1}) = (-M)^{-1}.$$

Таким чином, завдяки співвідношенню

$$N \oslash M = N \otimes M^{-1}$$

Одержимо наближені формули

$$(n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} \oslash (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \approx (\frac{n}{m};\ \frac{\beta n}{m^2} + \frac{\gamma}{m};\ \frac{\alpha n}{m^2} + \frac{\delta}{m})_{LR} \ \textbf{(1.4.14)}$$

або

$$(n;\ \gamma;\ \delta)_{LR}(n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} \oslash (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \approx (\frac{n}{m};\ \frac{n\beta+m\gamma}{m^2}\left(1-\frac{\beta}{m+\beta}\right);\ \frac{\alpha n+\delta m}{m^2}(1+\frac{\alpha}{m-\alpha}))_{LR}$$

(1.4.15)

На практиці застосовують ще такий вираз:

$$(n;\ \gamma;\ \delta)_{LR}(n;\ \gamma;\ \delta)_{LR} \oslash (m;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \approx (\frac{n}{m};\ \frac{n\beta+m\gamma}{m(m+\beta)};\ \frac{n\alpha+m\delta}{m(m-\alpha)})_{LR} \ \textbf{(1.4.16)}$$

Крім нечітких чисел широко застосовуються і нечіткі інтервали.

Лекція 3

§1.5. Нечіткі інтервали

Означення 1.5.1. Опукла нормалізована нечітка множина $A \subset R$ називається нечітким інтервалом, якщо для неї існують числа $x_i (i = 2,3, \dots)$, такі що $P_A(x_i) = 1$ і функція $P_A(x)$ є кусково-неперервною.

Означення 1.5.2. Нечіткий інтервал M називають L-R нечітким інтервалом, якщо його функція належності виражається через референт-функції L і R:

$$P_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - x}{\alpha}\right), \text{якщо } x \le m_1 \\ 1, \text{якщо } m_1 < x < x_2, \\ R\left(\frac{x - m_2}{\beta}\right), \text{якщо } x \ge m_2. \end{cases} \quad \textbf{(1.5.1)}$$

Нечіткий L-R інтервал скорочено записують у вигляді

$$M = (m_1; m_2;\ \alpha;\ \beta)_{LR},$$

або ще використовують іншу форму запису

$M = [u; v;\ \alpha;\ \beta],$

де $u = \frac{m_1 + m_2}{2}$, $v = \frac{m_2 - m_1}{2}$.

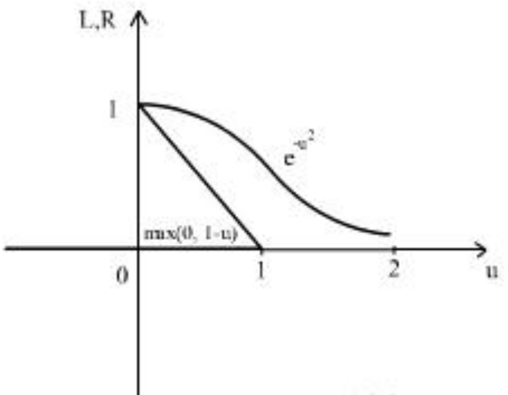


Рис 1.3.4.

поданими рисунком 1.3.4.

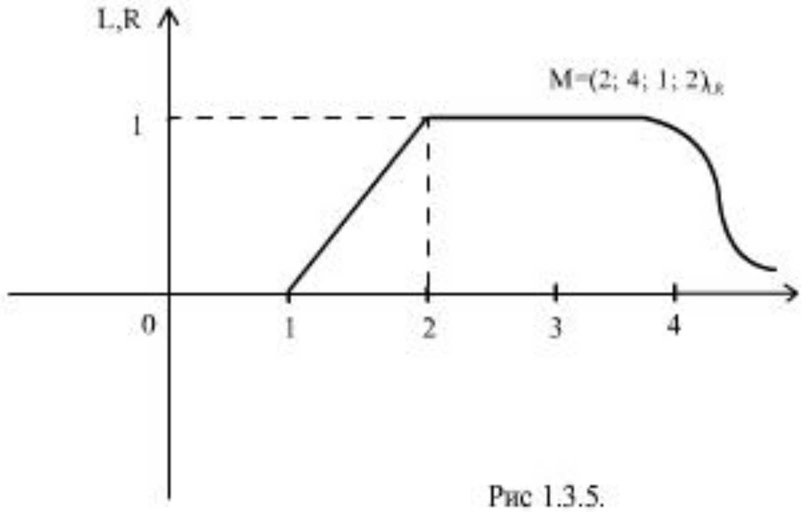


Рис 1.3.5.

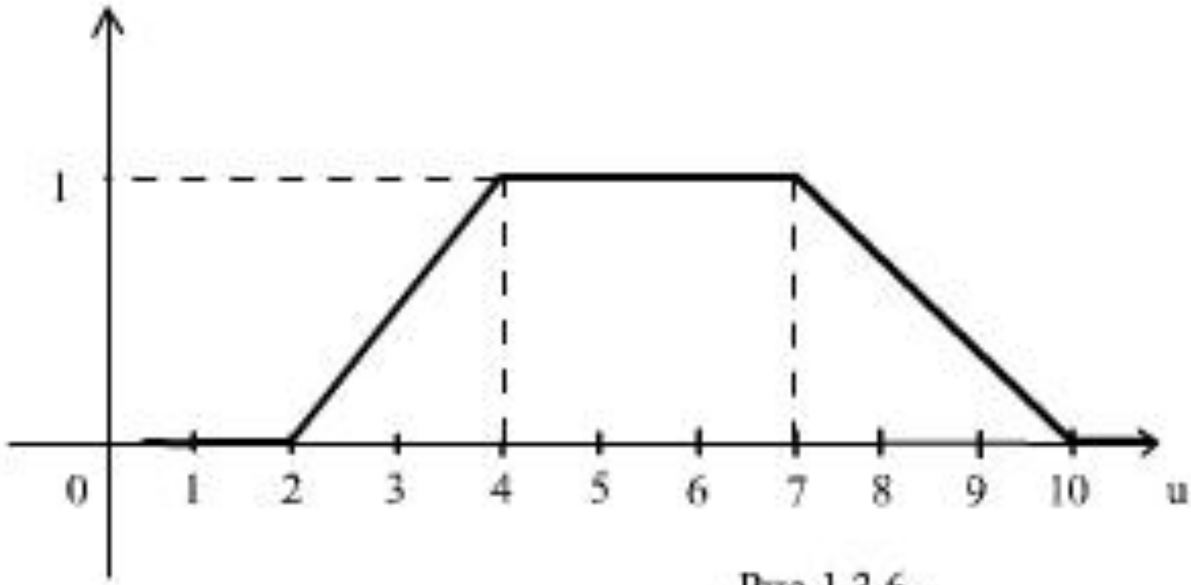


Рис 1.3.6.

Рисунком 1.3.6 подано L-R нечіткий інтервал $N = (4; 7; 2; 3)_{LR}$ із трапецієвидною референт-функцією L(u)=R(u)=max(0, 1-u).

Основні операції додавання та множення над нечіткими інтервалами здійснюють згідно таких правил:

$$(e; c;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \oplus (c; d;\ \gamma;\ \delta)_{LR} = (e + c; b + d;\ \alpha + \gamma;\ \beta + \delta)_{LR}, \quad (1.3.19)$$

$$(e; c;\ \alpha;\ \beta)_{LR} \otimes (c; d;\ \gamma;\ \delta)_{LR} = (ec; bd; e\gamma + c\alpha; b\delta + d\beta)_{LR}. \quad (1.3.20)$$

<u>Приклад 1.5.1</u>.

Розглянемо нечіткі L-R інтервали $M = (2; 4; 1; 2)_{LR}$ і $N = (5; 7; 2; 3)_{LR}$. Проведемо їх додавання та множення, у результаті чого отримаємо

$M \oplus N = (7; 11; 3; 5)_{LR}$; $M \otimes N = (10;\ 28;\ 9; 26)_{LR}$.

Лекція 4

§1.6. Відношення

Для опису складних явищ, які не піддаються формальному аналізу, використовують нечіткі відношення. Обмежимось розглядом бінарних відношень і нагадаємо, що бінарним відношенням R між двома множинами X і Y називається підмножина декартового добутку $X \times Y$.

<u>Означення 1.6.1.</u> Нечітким відношенням R між двома множинами X та Y називається нечітка підмножина декартового добутку $X \times Y$, яка характеризується функцією належності $P_R: X \times Y \to [0; 1]$.

Під значенням $P_R(x, y)$ цієї функції розуміють суб'єктивну міру або сутність виконання відношення xRy.

Розглянемо звичайне відношення $R \subset [0;1] \times [0;1]: x \geq y$ (рис. 1.3.7).

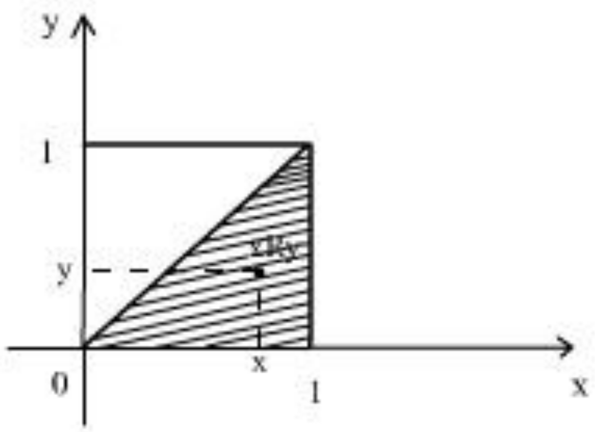


Рис 1.3.7.

За нечітке відношення можна вибрати відношення $\tilde{R}: x \gg y$ (набагато більше). Для наведеного нечіткого відношення існує деяка проміжна область переходу пар, для яких відношення $\tilde{R}$ впевнено виконується, до пар, для яких це відношення не виконується, причому пари (x,y) з цієї області характеризується мірою виконання цього відношення, або суб'єктивними оцінками, які залежать від сенсу, який вкладається в поняття «набагато більше» в контексті тієї чи іншої ситуації . наприклад 0,9 >>0,001 і 0,8>>0,1.

Відомо, що одним із способів задання бінарних відношень є матричний, тобто будується булева матриця $M = (m_{ij})$, елементи якої визначаються так:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } (x_i, y_j) \in R, \\ 0, \text{якщо } (x_i, y_j) \notin R, \end{cases}$$

де $X = (x_1, x_2, \dots, x_n), Y = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ - скінчені множини.

Аналогічно можна побудувати матрицю для нечіткого відношення, елементами якої будуть не тільки значення нуль та одиниця, але і довільні числа з відрізка [0; 1]. У цьому випадку, якщо $m_{ij} = \alpha$, то це означає, що міра виконання відношення $x_i R y_i$ дорівнює α.

Приклад 1.6.1. Припустимо, що X=Y=R – множини дійсних чисел. Тоді умова x>>y задає нечітке відношення R, функція належності якого може мати, наприклад, вигляд :

$$P_R(x,y) = \begin{cases} 0, \text{якщо } x \leq y, \\ (1 + (x-y)^{-2})^{-1}, \text{якщо } x > y. \end{cases}$$

Означення 1.6.2. Носієм нечіткого відношення R позначається sup R між множинами X та Y називається підмножина із декартового добутку $X \times Y$ такого вигляду:

$$\sup R = \{ (x,y) \mid (x,y) \in X \times Y, P_R(x,y) > 0\}.$$

<u>Приклад 1.6.2.</u> Розглянемо нечітке відношення R між множинами R^+ та R^-, функція належності якого є такою:

$$P_R(x,y) = \begin{cases} e^{-(y-x)^8}, \text{якщо } |y-x| \leq 0.46, \\ 0, \text{якщо } |y-x| > 0.46. \end{cases}$$

Тоді носієм наведеного відношення R зображеного на рис. 1.3.8. буде

$\sup R = \{(x;y): |y-x| \leq 0.46\}$.

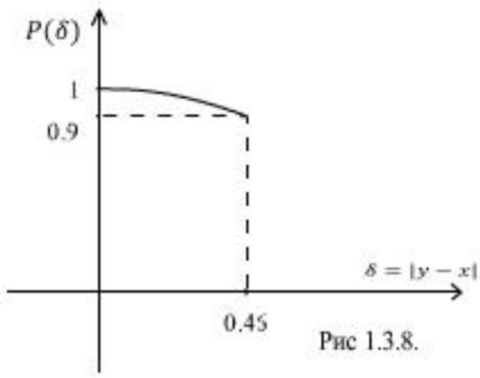


Рис 1.3.8.

Якщо множини, між якими задано нечітке відношення, є скінченними, то це відношення можна подати булевою матрицею і, замінивши в цій матриці всі ненульові елементи одиницями , отримуємо матрицю носія цього відношення.

<u>Приклад 1.14.</u> Нехай нечітке відношення R між множинами $X = \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$ та $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ задано матрицею

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 1 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0 & 0{,}1 \\ 0 & 1 & 0{,}3 & 0{,}6 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 1 & 0 \\ 0{,}9 & 0{,}7 & 0 & 0{,}5 \\ 0{,}9 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Тоді матриця носія цього відношення матиме вигляд

$$M_{\sup R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

У процесі розв’язування задач лінійного програмування із використанням нечітких моделей, за допомогою операції дефаззифікації моделі перетворюються у звичайні із використанням множин рівня.

Означення 1.18.   Розглянемо нечітке відношення R між множинами X та Y. Тоді множина рівня α визначається виразом

$$R_\alpha = \{(x,y) | (x,y) \in X \times Y, P_R(x,y) \geq \alpha\}.$$

Приклад 1.15.   Розглянемо нечітке відношення R такою функцією належності:

$$P_R(x,y) = 1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

Підмножина $R_{0,3}$ рівня $\alpha = 0{,}3$ визначається умовою

$$1 - \frac{1}{1 + x^2 + y^2} \geq 0{,}3,$$

або

$$x^2 + y^2 \geq \frac{3}{7}.$$

Дану підмножину зображено рисунком 1.3.9.

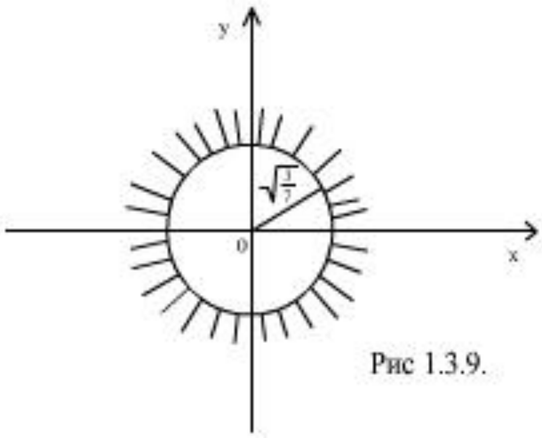


Рис 1.3.9.

Щоб отримати матрицю множини рівня α, потрібно в матриці нечіткого відношення R замінити одиницями всі елементи, що є не меншими від числа α, а $\sqrt{-\text{всі}}$ інші елементи. Так, для нечіткого відношення із прикладу 1.14 матриця множини рівня $\alpha = 0{,}5$ запишеться у вигляді

$$M_{R_{0,5}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо основні операції над нечіткими відношеннями

Лекція 5

§1.7. Операції над нечіткими відношеннями

Означення 1.7.1. Розглянемо два нечіткі відношення R і L, задані на декартовому добутку $X \times Y$. Нечіткі множини $R \cup L$ і $R \cap L$ називаються відповідно обєднанням і перерізом нечітких відношень R і L на $X \times Y$, функції належності яких визначаються так:

$$P_{R\cup L}(x,y) = \max\{\, P_R(x,y), P_L(x,y)\, \},$$

$$P_{R\cap L}(x,y) = \min\{\, P_R(x,y), P_L(x,y)\} \,.$$

Приклад 1.7.1. Розглянемо нечіткі відношення

R	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0.2	0.7	0.4
x_2	0.3	1	0.6	0.9
x_3	0.5	0.8	1	0

L	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	0.1	0.3	1	0.5
x_2	0.2	1	0.4	0.6
x_3	1	0.7	0.8	0.9

Згідно означення 1.7.1 побудуємо нечіткі об'єднання та перетин наведених відношень

$R \cup L$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0.3	1	0.5
x_2	0.3	1	0.6	0.9
x_3	1	0.8	1	0.9

$R \cap L$	y_1	y_2	y_3	y_4
x_1	1	0.3	1	0.5
x_2	0.3	1	0.6	0.9
x_3	1	0.8	1	0.9

Означення 1.7.2. Вважатимемо, що нечітке відношення В містить в собі нечітке відношення А, якщо для функцій належності цих множин нерівність $P_A(x,y) \le P_B(x,y)$ виконується для всіх пар (x,y) із декартового добутку $X \times Y$.

Зауваження : Нечітке відношення $A \cup B$ завжди містить нечіткі відношення А, В та $A \cap B$.

Означення 1.7.3. Розглянемо нечітке відношення R на $X \times Y$, функція належності якого є $P_R(x,y)$. Тоді нечітке відношення $\overline{R}$ із функцією належності $P_{\overline{R}}(x,y) = 1 - P_R(x,y)$ для довільних пар (x,y) із декатрового добутку $X \times Y$ називається доповненням відношення R в $X \times Y$.

Доповнення має зміст заперечення вхідного відношення. Наприклад, для нечіткого відношення R = високий його доповненням буде $\overline{R} = (\text{низький})$.

Означення 1.7.4. Обернено до R нечітке відношення R^{-1} на декартовому добутку $x \times x$ визначається так: $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx \;\; \forall (x,y) \epsilon x^2$, або за допомогою функції належності:

$$P_{R^{-1}}(x,y) = P_R(x,y)\ \forall (x,y) \in x^2.$$

Означення 1.7.5. Розглянемо нечіткі відношення $R_1 \subset X \times Y$ та $R_2 \subset Y \times Z$. Максимальна композиція відношень $R_1 і\ R_2$ (позначається $R_1 \circ R_2$) визначається функцією належності:

$$P_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \max\min\{\ P_{R_1}(x,y), P_{R_2}(y,z)\ \}, \text{де } x \in X, y \in Y, z \in Z.$$

Аналогічно можна визначити мінімальну композицію, функція належності якої буде:

$$P_{R_1 \circ R_2}(x,z) = min\max\{\ P_{R_1}(x,y), P_{R_2}(y,z)\ \}, \text{де } x \in X, y \in Y, z \in Z.$$

Функція належності для максмультиплікативної композиції матиме вигляд:

$$P_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \max\{P_{R_1}(x,y) \times\ P_{R_2}(y,z)\}, \text{де } x \in X, y \in Y, z \in Z.$$

Приклад 1.7.2. Задано два нечіткі відношення $R_1 і\ R_2$

R_1	y_1	y_2
x_1	0.3	0.6
x_2	0.2	0.7

R_2	z_1	z_2
x_1	0.4	0.8
x_2	0.5	0.9

Тоді

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2
x_1	0.5	0.6
x_2	0.5	0.7

- максимінна композиція

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2
x_1	0.4	0.8
x_2	0.4	0.8

- мінімаксна композиція

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2
x_1	0.3	0.54
x_2	0.35	0.63

- максмультиплікативна композиція

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2
x_1	0.12	0.24
x_2	0.08	0.16

- мінмультиплікативна композиція

Важливу роль у знаходженні розв'язків задач упорядкування у випадку чіткої вхідної інформації відіграють проекції нечіткого відношення.

Розглянемо нечітке відношення $R \subset X \times Y$ із функцією належності $P_R(x,y)$.

Означення 1.7.6. Перша проекція $R^{(1)}$ нечіткого відношення R визначається такою функцією належності:

$$P_{R^{(1)}}(y) = \max_{x \in X} P_R(x,y).$$

Означення 1.7.7. Друга проекція першої проекції (або навпаки) називається глобальною проекцією нечіткого відношення і позначається h(R).

Отже $h(R) = \max_x \max_y P_R(x,y) = \max_y \max_x P_R(x,y)$.

Якщо h(R) = 1, то нечітке відношення R називається нормальним, а якщо h(R)<1 – то субнормаль ним.

Приклад 1.7.8. Обчислимо першу, другу та глобальну проекції нечіткого відношення R, задане таблицею.

R	y1	y1	y3	y4	y5	y6	Перша проекція
x1	0.7	0.4	0.1	0.5	0.8	0.9	0.9
x2	0.1	0.2	0.7	0.1	0.4	0.3	0.7
x3	0.3	0.5	0.7	0.2	0.2	0.4	0.7
x4	0.2	1	0.8	0.7	0.9	0.1	0.9
x5	1	0.4	0.8	0.2	0.7	0.3	1
Друга проекція	1	1	0.8	0.7	0.9	0.9	1 (Глобальна проекція)

§1.8. Відображення нечітких множин.

У багатьох практичних задачах. Що полягають у прийнятті рішень виникає потреба розширити область визначення X конкретного відображення або відношення, добавивши до неї довільні нечіткі числа цієї множини.

Спосіб розширення області визначення відображень на клас нечітких множин називається принципом узагальнення.

Розглянемо принцип узагальнення, який полягає у визначенні образу нечіткої множини за допомогою звичайного (чітко описаного) відображення.

Нехай f: X→Y – відображення з множини X у множину У, y=f(x) – образ елемента xϵX, yϵУ і А – нечітка множина множини X з функцією належності $P_A(x)$. Тоді відображення f породжує нечітку множину B⊂У із функцією належності: $P_B(y) = \sup_{x \epsilon f^{-1}(y)} P_A(x)$, (1.8.1)

де $f^{-1}(y)$ = {x| xϵX, f(x) = y}, тобто подає множину всіх елементів xϵX, образом кожної з яких є element згідно відображення f.

Означення 1.8.1. Нечітка множина B називається образом нечіткої множини A⊂X при нечіткому відображенні $P_f: X \times Y \to [0,1]$, функція належності якої має вигляд:

$$P_B(y) = \sup_{x \epsilon X} \min\{P_A(x), P_f(x,y)\}. \quad (1.8.2)$$

Якщо P_f є звичайним відображення f: X→У (тобто $P_f(x,y)=1$, коли y=f(x) і $P_f(x,y)=0$ інших пар (x,y)), то вираз (1.8.2) переходить у (1.8.1).

У загальному випадку нечітке відображення P_f може мати вигляд:

$P_f : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times У \to [0,1]$.

Лекція 6
Розділ II. Потужність множин.

§2.1. Основні поняття та означення.

Означення 2.1.1. Множини A та B називаються рівно чисельними, якщо між ними можна встановити взаємно однозначну відповідність (бієктивне відображення) f: A$\to$ B.

Означення 2.1.2. Відображення f називається бієктивним (взаємно однозначним відображенням множини A на множину B), якщо воно є інєктивним та сюрєктивним.

Означення 2.1.3. Відображення f називається інєктивним (взаємно однозначним), якщо різним прообразам із множини A відповідають різні образи із множини B.

Означення 2.1.4. Відображення f називається сюрєктивним якщо для довільного образу із множини B існує хоча б один прообраз із множини A.

Приклад 2.2.1.
1) f : R $\to [-1; 1]$ – сюрєктивне, не інєктивне;
2) f : R $\xrightarrow{cos} [-2; 2]$ - не є ні сюрєктивним ні інєктивним;
3) f : $R \xrightarrow{\wedge 2} R_+^2$ – сюрєктивне, не інєктивне;
4) f : (0; +∞)$\xrightarrow{log} R$ – бієктивне;
5) f : [0; π]$\xrightarrow{cos} [-1; 1]$ – бієктивне;
6) f : $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \xrightarrow{cos} [-1; 1]$ - не є інєктивним.

Оскільки відношення рівно чисельності є відношенням еквівалентності, то логічно рівно чисельні множини A і B називають еквівалентними і позначають A~B.

Еквівалентні множини називають ще рівно потужними та записують |A|=|B|.

Теорема 2.1.1. Якщо f є бієктивним відображенням множини A на множину B, то f^{-1} – бієктивне відображення множини B на множину A.

Теорема 2.1.2. Якщо f і g є відображеннями, то композиція відображення f$\circ$g також є відображенням.

Теорема 2.1.3. Композиція бієктивним відображень є бієктивне відображенням.

Приклад 2.1.2. Покажемо що [0;1]~[a;b], (0;1)~(a;b), (0;1)~(-∞;+∞), де a та b довільними дійсними числами, для яких a<b.

Взаємно однозначне відображення з [0;1] на [a;b] показано на рис. 2.1.1.

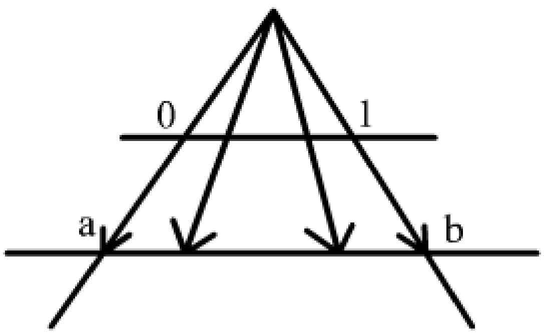
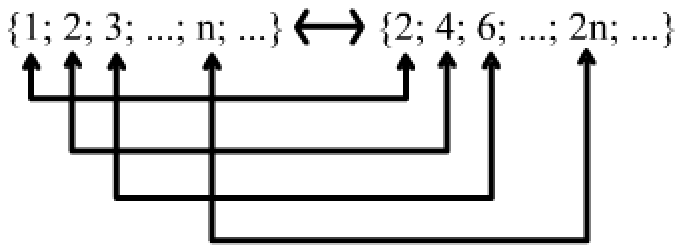


Рис. 2.1.1.

$0 \rightarrow a$, $1 \rightarrow b$, а для всіє інших $x \in (0;1)$ взаємно однозначну відповідність можна здійснити за допомогою лінійної функції $y=kx$ («розтягування», або «стискування» відрізка). Аналогічно можна показати, що $(0;1) \sim (a,b)$. А якщо так, то, очевидно, далі що $(0;1) \sim \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, а взаємно однозначну відповідність $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty;+\infty)$ можна здійснити за допомогою функції $y=\mathrm{tg}x$. Тому із транзитивності відношення рівносильності випливає, що $(0;1) \sim R$.

<u>Приклад 2.1.3.</u> Покажемо, що $N \sim \{2;4;6;\ldots;2n;\ldots\}$.

Бієктивне відображення задано так: $n \leftrightarrow 2n$. Графічно це буде виглядати так:



<u>Приклад 2.1.3.</u> Покажемо, що $[1;0] \sim (0;1)$.

Безпосередньо вкажемо бієктивне відображення між цими множинами

$$1 \leftrightarrow \frac{1}{2};\ 0 \leftrightarrow \frac{1}{3};\ \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{4};\ \frac{1}{3} \leftrightarrow \frac{1}{5};\ldots;\ \frac{1}{n} \leftrightarrow \frac{1}{n+1}.$$

Отже, довільне раціональне число $\frac{1}{n} \in [0;1]$ «відображається» в раціональне число $\frac{1}{n+2} \in (0;1)$ для $n \geq 2$ і навпаки (рис. 2.1.2.).

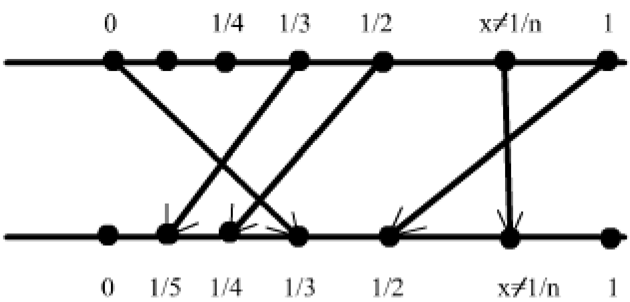


Рис. 2.1.2.

Означення 2.1.5. Не порожня множина A називається скінченою, якщо вона містить скінчену кількість елементів, тобто вона є еквівалентна деякій множині {1;2;…;n}. Якщо множина A~{1;2;…;n}, то кажуть, що потужність множини A дорівнює n і позначають |A|=n. Очевидно, що потужність скінченої множини – це кількість її елементів і тому |∅|=0.

Означення 2.1.6. Якщо множина A не є еквівалентною жодній підмножині {1;2;…;n}⊂N, то вона називається нескінченою.

Приклад 2.1.3. N,R,Q,I – нескінчені множини.

Лекція 7
§2.2. Зчисленні множини та їх властивості

Означення 2.2.1. Множина A називається зчисленною, якщо A~N, тобто |A|=|N|.

Приклад 2.2.1. N, {2;4;6;…;2n;…}, {3,6,9,12,…,3n,..} – зчисленні множини.
Теорема 2.2.1. Множина A називається зчисленною тоді і тільки тоді, коли її елементи можна пронумерувати, тобто A~N.

Доведення.

Необхідність(⇒). A - зчисленна⇒ A~N⇒ $\forall a\epsilon A\ \exists n\epsilon N: a \leftrightarrow n$, тобто кожен елемент нумерується a_n.

Достатність(⇐). A={a_1;a_2;…;a_n;…} ⇒тоді приймемо $a_n \leftrightarrow n \Rightarrow A\sim N \Rightarrow A$-зчисленна.
Теорему доведено.
Теорема 2.2.2. Із кожної нескінченої множини A можна вибрати зчисленну підмножину.
Доведення.
Шукану зчисленну множину B виберемо так: B={a_1;a_2;…;a_n;…}, де a_1єA, a_2єA\{a_1}, a_3єA\{a_1;a_2},…, a_nєA\{a_1,a_2,…,a_{n-1}}. Теорему доведено.
Теорема 2.2.3. Довільна нескінченна підмножина B зчисленної множини A є зчисленною.
Доведення.

A={a_1;a_2;a_3;…;a_n;…} і оскільки B⊂A⇒і елементи B можна пронумерувати ⇒B – зчисленна множина.
Теорему доведено.
Теорема 2.2.4. Якщо A-зчисленна множина, а B – скінченна множина, причому A⋂B= ∅, то A⋃B є зчисленною множиною.
Доведення.
A={a_1;a_2;…;a_n;…}, B={b_1;b_2;…;b_m}. Пронумеруємо множину A⋃B: b_1↔1, b_2↔ 2,…,b_m↔m, a_1↔m+1, a_2↔m+2,…, a_n↔m+n,…
Теорему доведено.
Теорема 2.2.5. Об'єднання скінченної кількості зчисленних множин A_i $(i = 1\ldots m, m\epsilon N)$ таких, що не перетинаються (тобто $A_i \cap A_j = \emptyset\ \forall i, j\epsilon N, i \neq j$)є зчисленною множиною.

Доведення.

Розглянемо множини
$A_1 = \left\{a_1^{(1)}; a_2^{(1)}; \ldots; a_n^{(1)}; \ldots\right\}, A_2 = \left\{a_1^{(2)}; a_2^{(2)}; \ldots; a_n^{(2)}; \ldots\right\}, \ldots, A_m = \left\{a_1^{(m)}; a_2^{(m)}; \ldots; a_n^{(m)}; \ldots\right\}$. Пронумеруємо множину $\bigcup_i A_i$ так:

$$a_1^{(1)} \leftrightarrow 1, a^{(N)} \leftrightarrow 2, \dots, a_1^{(n)} \leftrightarrow n, a_2^{(1)} \leftrightarrow n+1, a_2^{(N)} \leftrightarrow n+2, \dots, a_m^{(1)} \leftrightarrow (m-1)n+1, a_m^{(2)} \leftrightarrow (m-1)n+2 \dots, a_m^{(n)} \leftrightarrow mn, \dots$$

Теорему доведено.

<u>Теорема 2.2.7.</u> Об'єднанням зчисленної кількості зчисленних множин і таких, що не перетинаються є зчисленною множиною.

Доведення.

Розглянемо множини:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_3^{(1)}, \dots, a_n^{(1)}, \dots\} \\
A_2 &= \{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, a_3^{(2)}, \dots, a_n^{(2)}, \dots\} \\
A_3 &= \{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, a_3^{(3)}, \dots, a_n^{(3)}, \dots\} \\
A_4 &= \{a_1^{(4)}, a_2^{(4)}, a_3^{(4)}, \dots, a_n^{(4)}, \dots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$a_1^{(1)} \leftrightarrow 1, a_2^{(1)} \leftrightarrow 2, a_1^{(2)} \leftrightarrow 3, a_1^{(3)} \leftrightarrow 4, a_2^{(2)} \leftrightarrow 5,$

$a_3^{(1)} \leftrightarrow 6, a_3^{(1)} \leftrightarrow 7, a_3^{(2)} \leftrightarrow 8, a_1^{(4)} \leftrightarrow 9, a_1^{(5)} \leftrightarrow 10, \dots$

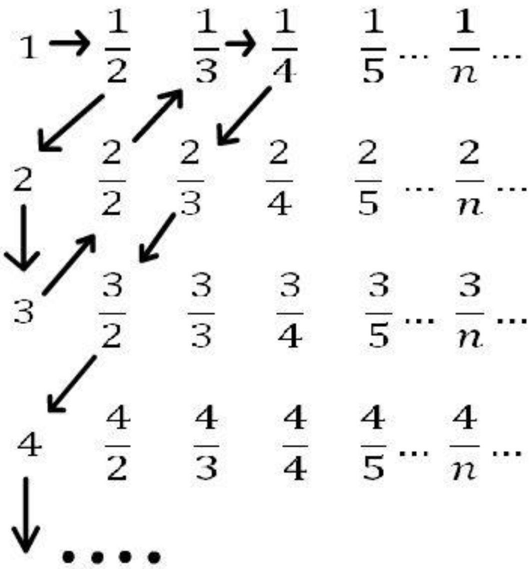
Нумерацію елементів множини $\bigcup_i A_i$ показано стрілками.

Теорему доведено.

Зауваження. Умови неперетинності множин у наведених теоремах не зменшують загальності.

<u>Приклад 2.2.2.</u>

1) Множина раціональних чисел Q є зчисленною. Покажемо це:



Зображений спосіб нумерації додатних раціональних чисел забезпечує повторення деяких елементів (1, ½, …), а це означає, що Q_+ є підмножиною занумерованої множини і за теоремою 2.2.3 Q_+ є зчисленною. Оскільки множина відємних раціональних чисел Q_- є еквівалентною множині Q_+ і $Q = Q_- \cup Q_+ \cup \{0\}$, то Q є зчисленною за теоремами.

2) Множина алгебраїчних чисел є зчисленною (алгебраїчне число – це число, яке є коренем многочлена з цілими коефіцієнтами).

<u>Теорема 2.2.8.</u> Якщо A є нескінченою множиною, а B – зчисленною множиною, то $A \cup B$ є нескінченою множиною, причому $A \cup B \sim A$.

Доведення.

A – нескінченна ⇒

$\exists C$ – зчисленна, і така, що $C \subset A$ (теорема 2.2.2). Тоді $A \cup B =$

$(A \backslash C) \cup (C \cup B)$. $C \cup B \sim C$ (теорема 2.2.5) ⇒ $A \cup B \sim (A \backslash C) \cup C = A$.

Теорему доведено.

<u>Теорема 2.2.9.</u> Якщо A – нескінченна множина, а B – зчисленна її підмножина і $A \backslash B$ – нескінченна підмножина, то $A \backslash B \sim A$.

Доведення.

Множину A зобразимо у вигляді $A = (A \backslash B) \cup B$. Оскільки $A \backslash B$ – нескінченна, а B – зчисленна, то $(A \backslash B) \cup B \sim A \backslash B$ (за попередньою теоремою). І тому $A \sim A \backslash B$.

Теорему доведено.

Лекція 8

§2.3. Множини потужності континуум.

Теорема 2.3.1. Множина чисел із відрізка [0;1] є незчисленною.
Доведення.

Припустимо, що множина [0;1] є зчисленною. Тоді всі значення і відрізка [0;1] можна перенумерувати. У результаті нехай це будуть {x_1; x_2; … ; x_n ; …}. Розіб’ємо відрізок [0;1] на три рівні частини. Очевидно, що хоча б одна з отриманих частин не містить значення x_1. Нехай це буде відрізок [a_1;b_1], який знову поділимо на три рівні частини, при чому одна з яких не містить значення x_2. Нехай це буде відрізок [a_2;b_2]. Продовжуючи цей процес далі, отримаємо $x_1 \notin [a_1;b_1], x_2 \notin [a_2;b_2], \ldots, x_n \notin [a_n;b_n], \ldots$ тобто $[a_1;b_1] \supset [a_2;b_2] \supset \cdots \supset [a_n;b_n] \supset \cdots$ - послідовність вкладених відрізків, довжини яких прямують до нуля $\lim_{n\to\infty}|b_n - a_n| = 0$. За принципом Кантора $\exists c \in [0;1]$, причому єдине і таке, що $c \in [a_n;b_n] \forall n \in N$.
З іншого боку, оскільки $c \in [0;1]$, то згідно з припущенням $\exists n_0 \in N: c = x_{n_0} \notin [a_{n_0};b_{n_0}]$. Отримане протиріччя доводить теорему.

Приклад 2.3.1. Покажемо, що множина чисел із напівінтервалу [0;1) є незчисленною. Припустимо, що дана множина є зчисленною. Тоді усі значення з цієї множини можна пронумерувати. Нехай це будуть x_1=0,$a_1a_2a_3a_4$…; x_3=0,$b_1b_2b_3b_4$…; x_3=0,$c_1c_2c_3c_4$…; …; x_n=0,$z_1z_2z_3z_4$…;… . Утворимо число α=0,a_1’b_2’c_3’…z_n’…, $a_1' \neq a_1, b_2' \neq b_2, \ldots, z_n' \neq z_n$, яке належить до $[0;1)$ та відрізняється від кожного із занумерованих чисел $x_i(i = 1,2,\ldots,n,\ldots)$ хоча б однією цифрою . У зв’язку з цим його немає серед $x_i(i = 1,2,\ldots,n,\ldots)$. Отримана суперечність доводить твердження, що напівінтервал [0;1) є незчисленною множиною.

Означення 2.3.1 Множина А називається множиною потужності континуум, якщо вона є еквівалентною відрізку [0;1].

Приклад 2.3.2. Множини [a;b], (a;b), [a;b), (a;b], R мають потужність континуум, оскільки [0;1]~[a;b]~(a;b)~R.

§2.4. Властивості множин потужності континуум.

1. Об’єднанням скінченної кількості множин потужності континуум є множиною потужності континуум.

Доведення.

Припустимо, що множини A_i (i=1..n) мають потужність континуум. Тоді згідно прикладу 2.3.2. можна записати $A_1 \sim [0;1), A_2 \sim [1;2), \ldots, A_n \sim [n-1;n)$, звідки випливає, що $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \sim [0;n)$, а це означає, що об’єднання є множиною потужності континуум.

2. Об’єднанням зчисленної кількості множин потужності континуум є множиною потужності континуум.

Доведення.

Розглянемо A_i(i=1,2,…,n,…) – множини потужності континуум. Подібно доведенню попередньої властивості можна записати $A_1 \sim \left(\frac{1}{2};1\right], A_2 \sim \left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right], \ldots, A_n \sim \left(\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right], \ldots$, звідки випливає що $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \sim (0;1]$, а це означає, що об’єднання є множиною потужності континуум.

Приклад 2.4.1. Покажемо, що інтервал (0;1) є еквівалентним внутрішності квадрата, тобто (0;1)~(0;1)x(0;1).

Розглянемо довільну біжучу точку (x;y)є(0;1)x(0;1) (рис. 2.4.1)

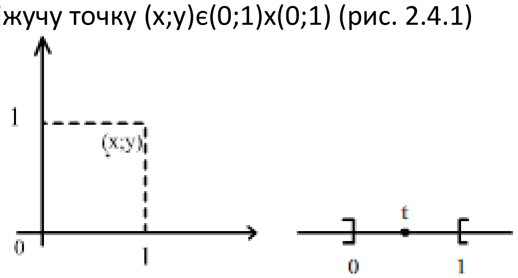


Рис. 2.4.1.

Нехай x=0,$a_1a_2a_3a_4$…, а y=0,$b_1b_2b_3b_4$… Розглянемо число t=0,$a_1b_1a_2b_2a_3b_3$…є(0;1). Поставимо парі (x;y) у відповідність число t. На підставі теореми Кантора-Берштейна, оскільки (0;1)x(0;1)⊂(0;1)⊂(0;1)x(0;1), отримуємо, що (0;1)~(0;1)x(0;1).
Зауваження. Оскільки дійсну числову площину R^2 можна покрити зчисленною кількістю квадратів, то вона має потужність континуум.

3. Об'єднання континуум множини потужності континуум $\forall\alpha\epsilon I$, де I – множина потужності континуум, причому $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset\ \forall\alpha,\beta\epsilon I, \alpha \neq \beta$.

Оскільки I – множина потужності континуум, то I~(0;1). Так як довільне число $\alpha\epsilon I$, то кожному α поставимо у відповідність довільне число xє(0;1): $\alpha \leftrightarrow x$.
Оскільки $A_\alpha \sim (0;1)\ \forall\alpha\epsilon I$, то обєднання $\bigcup_{\alpha\epsilon I} A_\alpha$ покриє весь квадрат (0;1)x(0;1) (рис. 2.4.2), тобто $\bigcup_{\alpha\epsilon I} A_\alpha \sim (0;1)\times(0;1)$, і згідно попереднього прикладу 2.3.3 є множиною потужності континуум.

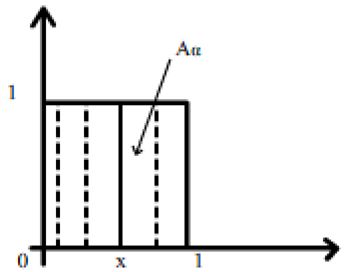


Рис. 2.4.2.

§2.5. Множини, потужність яких є вищою за потужність континуум.

Розглянемо множину A_f, яка містить все можливі функції $f: R \to R$. Оскільки R~[0;1], то розглядатимемо множину A_f функцій f:[0;1] $\to R$. Припустимо, що A_f – множина потужності континуум. Тоді A_f~[0;1] $\Rightarrow \forall f\epsilon A_f\ \exists t\epsilon[0;1]: f \leftrightarrow t$. Позначимо елемент f є A_f, що відповідає t, через f_t.

Розглянемо далі таку функцію: $\varphi(x) = f(x) + 1, \varphi: [0;1] \to R \Rightarrow \varphi\epsilon A_f \Rightarrow \exists t_0\epsilon[0;1]: \varphi = f_0$, тобто $\forall x\epsilon[0;1]: f(x) + 1 = f_{t_0}(x)$. Покладемо тепер x=$t_0$. У результаті отримаємо $f_{t_0}(t_0) + 1 = f_{t_0}(t_0)$, тобто 1=0. Одержане протиріччя доводить, що множина все можливих дійсно значних функцій дійсного аргументу має потужність більшу за континуум.
Означення 2.5.1. Величина називається дискретною, якщо вона приймає скінчену або зліченну кількість значень. У протилежному випадку величина називається неперервною.
Приклад 2.5.1. Множина ірраціональних чисел має потужність континуум.

§2.6. Порівняння потужностей.

Теорема 2.6.1. (характеристична властивість нескінчених множин).
Множин А є нескінченою тоді і тільки тоді, коли вона є еквівалентною деякій своїй підмножині, що не збігається з множиною А.
Означення 2.6.1. Нехай |A|=α і |B|=β. Будемо говорити, що α< β, якщо A~ B' і B'⊂B, але множина А не є еквівалентною множині В.
Зауваження. Якщо A⊂B, то завжди $|A| \leq |B|$.
Теорема 2.6.2. (Кантора-Берштейна).
Якщо $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ і $A_1 \sim A_3$, то $A_1 \sim A_2 \sim A_3$.
Теорема 2.6.3. Потужність довільної зчисленної множини є найменшою з потужностей нескінченних множин.
Доведення.

Розглянемо нескінченну множину A, потужність якої дорівнює μ. Завжди існує зчисленна підмножина B множини A, причому A не є еквівалентною множині B. Тому. Оскільки B⊂A і B не еквівалентно A ⇒ |B|<|A|.
Потужність довільної зчисленної множини позначимо через æ, а потужність континуум через C.
Зауваження. æ<c.

<u>Теорема 2.6.4.</u> Розглянемо довільне натуральне число nєN. Тоді n< æ.
Доведення.
Розглянемо множину
$N_0 = \{k | k\epsilon N, k < n\}\ \forall n \in N. |N_0| = n$ і $N_0 \subset N, N_0 -$ не еквівалентно до N. Отже, n< æ.

<u>Теорема 2.6.5.</u> R^n є множиною потужності континуум для довільного натурального числа n.
Доведення.
Потрібно довести, що $\forall \tau \epsilon N\ |R^n| = C$. Доведення проведемо методом математичної індукції. Для n=2 твердження було доведено раніше. Нехай $|R^n| = c$. Покажемо, що $|R^{n+1}| = c$.
Впорядкованій сукупності елементів $(a_1; a_2; \ldots; a_n; a_{n+1})\epsilon R^{n+1}$ поставимо у відповідність впорядковану пару вигляду $((a_1; a_2; \ldots; a_n); a_{n+1})$, звідки випливає, що $R^n \sim R^n \times R$. Оскільки $|R^n| = c$ то і потужність множини пар наведеного вигляду також є потужності континуум. Тому маємо $|R^n| = c$.

<u>Теорема 2.6.6.</u> Для довільної множини потужність множини всіх підмножин є більшою за власну потужність самої множини.
Позначимо через B(A) – буліан множини A (множина всіх підмножин множини A).
Потужність булана B(A) дорівнює $2^{|A|}$, тобто $|B(A)|= 2^{|A|}$. Із теореми 2.6.6. випливає цікавий факт теорії множин, пов'язаний з терміном «множина всіх множин».

<u>Парадокс Кантора</u> Нехай M – «множина всіх множин». Тоді за теоремою 2.6.6. |B(M)|<|M|. Але ж множина M є «найширшою» з усіх можливих множин. Отже, найбільшою множинни немає.
E = { множини, які не є елементами самих себе} = {x| (x – множина)^($x \notin x$)}. Дана рівність не визначає множину. Дана аномалія є відомою під назвою парадокс Рассела.